AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

S/MZ
88/
T2
2 ex

THESE

presentée à

L'UNIVERSITE DE METZ

pour obtenir le

TITRE DE DOCTEUR

DE

L'UNIVERSITE DE METZ

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ
N° inv. 19880545
Cote S/M3 88/26
Loc Magasin

par

Serge Perrine

Sujet : Approximation diophantienne (Théorie de Markoff) -Tome 2

Soutenue le 16 décembre 1988 , devant la commission d'Examen:

Pr MENDES-FRANCE Michel : Université de Bordeaux (Rapporteur)

Pr MIGNOTTE Maurice : Université de Strasbourg (Rapporteur)

Pr RHIN Georges : Université de Metz (Directeur de thèse)

Pr SMYTH Christopher : Université d'Edimbourg (Rapporteur)

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ
022 420306 3

E 7 JUIL. 1989

T R O I S I E M E P A R T I E

GENERALISATION DE LA THEORIE DE MARKOFF CLASSIQUE

UNIVERSITE DE METZ
BIBLIOTHEQUE

I. CLASSIFICATION DES NOMBRES REELS ALGEBRIQUES DE DEGRE 2
DEFINITIONS DE BASE ET PREMIERS RESULTATS

A / DEFINITIONS CONCERNANT LES SUITES DE NOMBRES ENTIERS POSITIFS

Dans la suite, on considère des suites finies de nombres entiers strictement positifs :

$$S = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \qquad (\forall\, i = 0,\ldots,n \quad a_i \in \mathbb{N}^*)$$

A toute suite S ainsi donnée, on associe dans le groupe multiplicatif $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$ des matrices 2 x 2 à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et de déterminant ± 1 (noté aussi $GL_2(\mathbb{Z})$), la matrice :

$$M_S = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & ; & V_1 - m \\ V_2 - m & ; & m - V_1 - V_2 + W \end{bmatrix}$$

où
$$\begin{cases} mW = V_1 V_2 + (-1)^{n+1} \\ 0 \leqslant m < V_1 \leqslant 2m \\ 0 \leqslant m < V_2 \leqslant 2m \end{cases}$$

On note $m(S) = m$; $V_1(S) = V_1$; $V_2(S) = V_2$ et $W(S) = W$.

On pose:
$$\begin{cases} \varepsilon(S) = \varepsilon = \det M_S = (-1)^{n+1} \\ K_1(S) = K_1 = V_1(S) - m(S) \qquad 0 < K_1 \leqslant m \\ K_2(S) = K_2 = 2m(S) - V_2(S) \qquad 0 \leqslant K_2 < m \\ \ell(S) = \ell = 2m + 2K_1 - K_2 - W \end{cases}$$

La condition $mW = V_1 V_2 + (-1)^{n+1}$ se transforme en :

$$m\ell = K_1 K_2 + (-1)^n = K_1 K_2 - \varepsilon$$

On a alors :

$$M_S = \begin{bmatrix} m & K_1 \\ m - K_2 & K_1 - \ell \end{bmatrix}$$

C'est cette expression que l'on utilisera plus usuellement dans la suite, avec la convention suivante pour $S = \emptyset$ suite vide :

$$m(\emptyset) = 1 \quad K_1(\emptyset) = 0 \quad K_2(\emptyset) = 1 \quad \ell(\emptyset) = -1 \quad n = -1$$
$$V_1(\emptyset) = 1 \quad V_2(\emptyset) = 1 \quad W(\emptyset) = 2$$

Il en découle les développements en fractions continues suivants :

$$\begin{cases} \dfrac{m}{m - K_2} = [a_0, a_1, \ldots a_n] = [S] \\ \dfrac{K_1}{K_1 - l} = [a_0, a_1, \ldots a_{n-1}] \qquad (\text{soit } -1 \leqslant l \leqslant K_1) \\ \dfrac{m}{K_1} = [a_n, \ldots, a_1, a_0] = [S^*] \\ \dfrac{m - K_2}{K_1 - l} = [a_n, \ldots a_1] \end{cases}$$

où l'on pose :

DEFINITION
$S^* = (a_n, \ldots, a_1, a_0)$ est la suite miroir de $S = (a_0, a_1, \ldots a_n)$.
Une suite S telle que $S = S^*$ est une suite palindrome.

Une suite palindrome est caractérisée par la condition :

$$K_1 + K_2 = m$$

Dans le cas le plus général, pour toute suite S, on pose :

DEFINITION
On note $\lambda(M_S) = \lambda(S) = \lambda = m - K_1 - K_2 \in \mathbb{Z}$
On dit que λ est la cotrace de la matrice M_S.
Plus généralement, pour toute matrice $M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$
on appelle cotrace de M le nombre :

$$\lambda(M) = \gamma - \beta$$

Par construction, le nombre $\lambda = \lambda(S)$ vérifie pour toute suite S la condition :

$$-m < \lambda < m$$

Si $\lambda = 0$, on a la condition $K_1 + K_2 = m$ et la suite S considérée est palindrome.

De façon plus générale, le nombre $\lambda(S)$ mesure pour la suite S une différence par rapport à la propriété d'être palindrome. On pose ainsi :

DEFINITION
On note $$P(M_S) = P(S) = P = \frac{\lambda(S)}{m(S)} = \frac{m - K_1 - K_2}{m} \in \mathbb{Q}$$

On dit que P(S) est l'écart de palindromie de la suite S.

On introduit d'autre part :

DEFINITION
On note $\mu(M_S) = \mu(S) = \mu = K_1 - K_2 \in \mathbb{Z}$

On dit que μ est l'antitrace de la matrice M .

Plus généralement, pour toute matrice $M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ on appelle antitrace de M le nombre :

$$\mu(M) = \beta + \gamma - \alpha$$

Par construction, le nombre $\mu = \mu(S)$ vérifie pour toute suite S la condition :

$$-m < \mu \leqslant m$$

En fait, le cas $\mu = m$ est assez particulier. Il impose en effet $K_1 = m \quad K_2 = 0$ soit $V_1 = V_2 = m$
Et la condition $mW = V_1 V_2 + (-1)^{n+1}$ donne alors $m = 1$.

Il reste alors : $M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ce cas est celui où la suite S ne contient aucun élément. On peut ne pas le considérer dans la suite et se limiter alors à l'inégalité :

$$-m < \mu < m$$

DEFINITION
On note $$r(M_S) = r(S) = r = \frac{\mu(S)}{m(S)} = \frac{K_1 - K_2}{m} \in \mathbb{Q}$$

On dit que ce nombre est l'écart d'antidromie de la suite S.
On appelle antidrome une suite S telle que $r(S) = 0$.

Les suites antidromes peuvent être caractérisées grâce aux développements en fraction continue donnés ci-dessus.
On introduit encore :

DEFINITION
On note $\mathcal{A}(M_S) = \mathcal{A}(S) = \mathcal{A} = \text{pgcd}(m, K_1 + K_2) = \text{pgcd}(m, V_2 - V_1)$
On dit que $\mathcal{A}(S)$ est l'amplitude de la suite S.

B / NOMBRES ALGEBRIQUES DE DEGRE 2

Dans la suite, on considère l'action du groupe multiplicatif $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$ dans l'ensemble des nombres réels irrationnels x définie par :

$$\forall u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^* \qquad ux = \frac{u_{11}\, x + u_{12}}{u_{21}\, x + u_{22}}$$

Le Théorème de SERRET (voir [1]) indique en effet que l'on a équivalence, pour γ_1 et γ_2 irrationnels réels des propriétés suivantes :
(1) Les développements en fraction continue de γ_1 et γ_2 coïncident à partir d'un certain rang.
(2) γ_1 et γ_2 sont dans la même orbite pour l'action du groupe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$.

Les nombres réels algébriques de degré 2 correspondent pour cette action aux nombres irrationnels dont le stabilisateur n'est pas réduit à $\{\pm 1\}$.
Leur développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang : $\gamma = [a_0, a_1, \ldots a_k, \underline{a_{k+1}, \ldots a_\ell}]$

Deux algébriques de degré 2 réels γ_1 et γ_2 sont dans la même orbite si et seulement si leurs périodes se déduisent par permutation circulaire.
On étudie plus directement dans la suite ces orbites.
Pour ce faire, on introduit différents nombres particuliers :

B.1 - Les nombres associés

Une suite S étant donnée, on pose pour tout $a \in \mathbb{N}^*$:

$$\zeta_a(S) = [a-1, \underline{S, a}]$$

DEFINITION
On dit que $\zeta_a(S)$ est le nombre associé à S et a (ou à la suite (S,a)).

En posant : $\Delta_a(S) = [(a-2)m + V_1 + V_2]^2 + 4(-1)^{n+1}$

$= [(a+1)m + K_1 - K_2]^2 + 4(-1)^{n+1}$

$= (a+r+1)^2 m^2 + 4(-1)^{n+1}$

On a par un calcul évident fait à partir de M_S :

$$\zeta_a(S) = \frac{m(a-2) + V_2 - V_1 + \sqrt{\Delta_a(S)}}{2m}$$

$$= \frac{m(a-1) - K_2 - K_1 + \sqrt{\Delta_a(S)}}{2m}$$

Ce nombre est racine du polynôme :

$P_\zeta(X) = mX^2 - [(a-2)m + V_2 - V_1]X - [(a-2)V_1 + W]$

$= mX^2 - [(a-1)m - K_2 - K_1]X - [a(m + K_1) - K_2 - 1] \in \mathbb{Z}[X]$

$= f_\zeta(X,1)$

où f_ζ est la forme quadratique indéfinie de $\mathbb{Z}[X,Y]$ s'écrivant :

$f_\zeta(X,Y) = mX^2 - [m(a-2) + V_2 - V_1]XY - [(a-2)V_1 + W]Y^2$

$= mX^2 - [m(a-1) - K_1 - K_2]XY - [a(m + K_1) - K_2 - 1]Y^2$

Le discriminant $\Delta(f_\zeta)$ de cette forme vaut $\Delta_a(S)$.
Le nombre $\zeta_a(S)$ possède une constante de MARKOFF (voir [1] ou [2]) que l'on écrit sous la forme :

$$C(\zeta_a(S)) = \frac{m_a(S)}{\sqrt{\Delta_a(S)}}$$

Le lemme de DICKSON [3] précise comment calculer $m_a(S)$ à partir du polynôme $P_\zeta(X)$ et d'une réduite adéquate de $\zeta_a(S)$.
L'expression de P_ζ donne : $m_a(S) \leqslant m$.
Cette constante est reliée à la forme f_ζ .
Le minimum arithmétique de cette forme est :

$M(f_\zeta) = \text{Inf}\left\{|f_\zeta(p,q)| \; ; \; (p,q) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}\right\} = m_a(S)$

Il est majoré par : $m(S) = |f_\zeta(1,0)|$

La constante de MARKOFF de f_ζ vaut : $C(f_\zeta) = \dfrac{m_a(S)}{\sqrt{\Delta_a(S)}} = C(\zeta_a(S))$

Les constantes sont calculables par le programme "FRACTION" donné en annexe.

B.2 - Nombres quasi-réduits et super réduits

Dans les conditions précédentes, on introduit le nombre suivant :

$$\rho_a(S) = [a-\alpha, S, a] = \zeta_\alpha(S) + 1 - \alpha = \frac{h + \sqrt{\Delta_a(S)}}{2m} = \frac{h + x\sqrt{d}}{2m}$$

où $\alpha \in \mathbb{Z}$ déterminé de façon unique par la condition :

$$0 \leqslant h = m(a+1 - 2\alpha) - K_2 - K_1 < 2m$$

et $d \in \mathbb{N}^*$ nombre sans facteur carré, $x \in \mathbb{N}^*$

DEFINITION

On dit que $\rho_a(S)$ est le nombre quasi-réduit défini par S et a (ou la suite (S,a)).

Plus généralement, on dit qu'un nombre ρ réel algébrique de degré 2 est quasi-réduit si et seulement s'il existe une suite (S,a) telle que l'on puisse écrire :

$$\rho = \rho_a(S) = \frac{h + \sqrt{\Delta_a(S)}}{2m} = \frac{h + x\sqrt{d}}{2m}$$

Pour un tel nombre, on a :

$$h^2 \equiv [m(a+1) - K_1 - K_2]^2 \equiv \Delta_a(S) \pmod{4m}$$

La valeur $\nu = \text{pgcd}\left(m, h, \dfrac{h^2 - \Delta_a(S)}{4m}\right)$ permet de calculer le polynôme minimal de $\rho_a(S)$ qui s'écrit :

$$P_\rho(X) = \left(\frac{m}{\nu}\right)X^2 - \left(\frac{h}{\nu}\right)X + \left[\frac{\left(\frac{h}{\nu}\right)^2 - \frac{\Delta_a(S)}{\nu^2}}{4\left(\frac{m}{\nu}\right)}\right] \in \mathbb{Z}[X]$$

Ceci conduit à poser usuellement dans $\mathbb{Z}$:

$$\Delta(\rho_a(S)) = \Delta = \frac{\Delta_a(S)}{\nu^2}$$

$$X(\rho_a(S)) = X = \frac{x}{y}$$

$$M(\rho_a(S)) = M = \frac{m}{y} \qquad (\Delta = X^2 d)$$

$$H(\rho_a(S) = H = \frac{h}{y}$$

Ces notations permettent d'énoncer :

THEOREME I.1 (Théorème de quasi réduction)

(1) Pour toute suite (S,a) de nombres de $\mathcal{K}^*$, il existe une unique valeur $\alpha \in \mathbb{Z}$ telle que $\rho = [a - \alpha, S, a]$ soit quasi réduit.

(2) Tout nombre réel algébrique de degré 2 est dans l'orbite pour l'action de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$ d'au moins un nombre quasi-réduit.

(3) Pour tout nombre réel ρ algébrique de degré 2 s'écrivant sous la forme :

$$\rho = \frac{H + \sqrt{\Delta}}{2M} \qquad ((\Delta, M, H) \in \mathbb{Z}^3)$$

on a équivalence des propriétés suivantes :

(a) ρ est un nombre quasi-réduit

(b) le triplet (Δ, M, H) vérifie les conditions de quasi-réduction suivantes :

(Q_1) : $0 \leqslant H < 2M$

(Q_2) : $H^2 \equiv \Delta \pmod{4M}$

(Q_3) : $\text{pgcd}(M, H, \frac{H^2 - \Delta}{4M}) = 1$

(Q_4) : Le nombre $\alpha = \left[\!\left[\frac{-H + \sqrt{\Delta}}{2M} \right]\!\right] = [-\overline{\rho}]$ partie entière de l'opposé du conjugué de ρ vérifie :

$$\alpha + \rho > 1$$

De plus, dans le cas où ρ est quasi-réduit :

(4) le polynôme minimal de ρ est :

$$P_\rho(X) = MX^2 - HX + \frac{H^2 - \Delta}{4M} \in \mathbb{Z}[X]$$

(5) Le nombre $\rho^* = \frac{2M - H + \sqrt{\Delta}}{2M} = [\alpha + 1, S^*, a] = \rho_a(S^*)$

est quasi-réduit et définit même orbite que le conjugué $\overline{\rho}$ de ρ avec $\alpha^* = a - \alpha - 1$

Démonstration

(1) est évident par définition des nombres quasi-réduits.

(2) a $\Longrightarrow$ b est évident par construction, hors la condition (Q_4) qui s'établit comme suit :

$$\rho = [a - \alpha, \underline{S,a}] \Longrightarrow (\alpha + \rho) = [\underline{a,S}]$$

En appliquant le Théorème de GALOIS [8], on obtient :

$$-\frac{1}{\alpha + \overline{\rho}} = [\underline{S^*,a}]$$

Soit $\quad -\overline{\rho} = [\alpha, \underline{S^*,a}]$

Le nombre $\alpha \in \mathbb{Z}$ est donc bien la partie entière de $-\overline{\rho}$.

De plus, $\quad \alpha + \rho = [\underline{a,S}] > a \geqslant 1$

(b) $\Longrightarrow$ a

D'après la condition (Q_4), on a : $\alpha < -\overline{\rho} = \dfrac{-H + \sqrt{\Delta}}{2M} < \alpha + 1$

Soit : $\quad -1 < \alpha + \overline{\rho} < 0$

Et : $\quad 1 < \alpha + \rho$

En appliquant le Théorème de GALOIS [8], on peut écrire :

$$\alpha + \rho = [\underline{a,S}]$$

Soit : $\quad \rho = [a - \alpha, \underline{S,a}] = \dfrac{h + \sqrt{\Delta_a(S)}}{2m} = \dfrac{H + \sqrt{\Delta}}{2M}$

En identifiant les deux expressions de ρ, on obtient :

$$\begin{cases} Mh = mH \\ m^2 \Delta = M^2 \Delta_a(S) \end{cases}$$

On en tire avec la condition (Q_2) le système :

$$\begin{cases} mH = Mh \\ m\left(\dfrac{\Delta - H^2}{4M}\right) = M\left(\dfrac{\Delta_a(S) - h^2}{4m}\right) \end{cases}$$

Avec la condition (Q_3) il en résulte que M divise m.

Si on pose alors : $m = \nu M$ avec $\nu \in \mathbb{N}^*$

on trouve $h = \nu H$ et $\Delta_a(S) = \nu^2 \Delta$

Avec (Q_1), on en déduit : $0 \leqslant h < 2m$

Ceci permet de conclure que ρ est quasi-réduit : $\rho = \rho_a(S)$.

Il est alors évident que le polynôme minimal de ρ est :

$$P_\rho(X) = MX^2 - HX + \frac{H^2 - \Delta}{4M} \in \mathbb{Z}[X]$$

Pour le conjugué $\overline{\rho} = \dfrac{H - \sqrt{\Delta}}{2M}$, on a : $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overline{\rho} = \dfrac{2M - H + \sqrt{\Delta}}{2M}$

Ce dernier nombre vérifie de façon évidente les conditions (Q_1), (Q_2) et (Q_3). Pour ce qui est de (Q_4) :

$$\begin{cases} \left[\!\left[\dfrac{-(2M - H) + \sqrt{\Delta}}{2M} \right]\!\right] = \left[\!\left[-1 + \dfrac{H + \sqrt{\Delta}}{2M} \right]\!\right] = a - \alpha - 1 \\ a - \alpha - 1 + \dfrac{2M - H + \sqrt{\Delta}}{2M} = a - \alpha + \dfrac{-H + \sqrt{\Delta}}{2M} = a + \left(\dfrac{-H + \sqrt{\Delta}}{2M} \right) - \left[\!\left[\dfrac{-H + \sqrt{\Delta}}{2M} \right]\!\right] > 1 \end{cases}$$

Le Théorème I.1 est donc complètement établi, tous les compléments nécessaires étant évidents.

La valeur $\nu = \text{pgcd}\left(m, h, \dfrac{h^2 - \Delta_a(S)}{m}\right)$ est calculable à partir des coefficients de M_S, grâce aux expressions :

$$\begin{cases} h = m(a + 1 - 2\alpha) - K_1 - K_2 \\ \Delta_a(S) = [(a+1)m + K_1 - K_2]^2 + 4(-1)^{n+1} \end{cases}$$

On a de façon évidente :

PROPRIETE I.1

On a $\nu = \text{pgcd}(m, K_1 + K_2, 1 - (a+1)K_1)$

$= \text{pgcd}(m, V_2 - V_1, (a-2)V_1 + W)$

Ce nombre est un diviseur de l'amplitude de S :

$$\mathcal{A}(S) = \text{pgcd}(m, K_1 + K_2) = \text{pgcd}(m, V_2 - V_1)$$

Pour ce qui est des constantes de MARKOFF, on peut écrire avec le polynôme minimal de $\rho_a(S)$ et le Théorème de SERRET :

$$C(\zeta_a(S)) = C(\rho_a(S)) = \frac{M_a(S)}{\sqrt{\Delta}} = \frac{m_a(S)}{\sqrt{\Delta_a(S)}}$$

En comparant à l'expression de $\Delta_a(S)$ en fonction de Δ, on en déduit que γ divise $m_a(S)$ avec l'égalité : $m_a(S) = \gamma M_a(S)$.
La considération des nombres quasi-réduits permet donc de simplifier l'expression des constantes de MARKOFF par recours au facteur γ.

Il se peut d'ailleurs que ce nombre ne soit pas le plus grand par lequel simplifier l'expression de la constante de MARKOFF.

Exemple

Pour $\rho = \dfrac{\sqrt{104}}{4} = [2,\underline{1,1,4}]$

On obtient : $S = (1,1)$ soit $m = 2$ $K_1 = K_2 = 1$ $l = 0$

$G(S) = 2$ d'où $\gamma = 1$

$\Delta = \Delta_a(S) = 104$ soit $X = x = 2$ et $d = 26$

$M = m = 2$ et $H = 0$

Le polynôme minimal du nombre quasi-réduit ρ est :

$$P_\rho(X) = 2X^2 - 13$$

Sa constante vaut : $C(\rho) = \dfrac{2}{\sqrt{104}}$

Elle est simplifiable sous la forme : $C(\rho) = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$

Cependant, en considérant l'action du groupe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$ sur l'ensemble des nombres réels irrationnels définie avant, le Théorème de SERRET montre que deux nombres quasi-réduits distincts $\rho_a(S)$ et $\rho_{a'}(S')$ peuvent définir la même orbite. Il suffit que les suites (S,a) et (S',a') se déduisent par permutation circulaire.

Pour diminuer le nombre de quasi-réduits considérés dans ces orbites, on pose :

DEFINITION

Pour toute suite de nombres entiers strictement positifs

$$S = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

on note t(S) le plus grand élément apparaissant dans S :

$$t(S) = \operatorname{Max}_{i = 0 \ldots n} a_i \quad \in \mathbb{N}^*$$

Une suite S telle que t(S) = a est une suite frontière pour a, ou encore une a-suite.

Grâce au Théorème de SERRET, tout nombre quasi-réduit d'une orbite est équivalent pour l'action de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$ à un nombre $\rho_a(S)$ de même orbite telle que $a \geqslant t(S) - 1$
De plus, grâce au lemme de DICKSON, on peut choisir (S,a) de façon que la constante de MARKOFF associée soit obtenue sur la réduite

$$[a - \alpha, S] = a - \alpha + \frac{m - K_2}{m} \quad .$$

En calculant alors explicitement cette constante grâce au polynôme minimal, on obtient :

$$C(\rho_a(S)) = \frac{m^2 P_\rho\left(a - \alpha + \frac{m - K_2}{m}\right)}{\sqrt{\frac{\Delta_a(S)}{y^2}}} = \frac{m}{\sqrt{\Delta_a(S)}}$$

Il reste : $m_a(S) = m$

On peut donc énoncer :

THEOREME I.2

Pour l'action du groupe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$ sur l'ensemble des nombres irrationnels, tout nombre algébrique réel de degré 2 est dans l'orbite d'un nombre quasi-réduit $\rho_a(s)$ vérifiant les conditions :

(S_1) : $a \geqslant t(S) - 1$

(S_2) : $m_a(S) = m(S)$

Ce résultat diminue le nombre de représentants à considérer dans chaque orbite. Il conduit à poser :

DEFINITION

On appelle nombre super-réduit tout nombre quasi-réduit $\rho_2(S)$ vérifiant les deux conditions de super-réduction :

(S_1) : $a \geqslant t(S) - 1$

(S_2) : $m_2(S) = m(S)$

Toutefois, et ceci limite un peu leur intérêt, il existe des nombres super réduits différents situés dans une même orbite.
En fait, la démonstration du lemme de DICKSON que j'ai donnée par ailleurs [a] établit que la condition (S_2) implique la condition (S_1). Le seul critère de super réduction est donc en fait la condition (S_2). (On se reportera au Théorème II.3 pour confirmer cette remarque).

Exemple

Considérons les deux nombres super réduits

$$\rho = [M, \underline{1, 2M, 2M-1, 2M}]$$

$$\rho' = [M, \underline{2M-1, 2M, 1, 2M}]$$

Il est évident qu'ils sont dans la même orbite.

Les nombres super réduits présentent cependant un intérêt par rapport aux nombres quasi-réduits puisqu'ils sont moins nombreux dans chaque orbite et que l'on a :

PROPRIETE I.2

Tout nombre super réduit $\rho = \dfrac{H + \sqrt{\Delta}}{2M}$ a pour constante de MARKOFF

(C) : $$C(\rho) = \frac{M}{\sqrt{\Delta}}$$

En particulier, on a la condition de HURWITZ (H) : $5M^2 \leqslant \Delta$

Ceci résulte de ce qui précède et du classique Théorème de HURWITZ (voir [1] ou [a]).

En fait, ce résultat peut être complété par un Théorème de super réduction que l'on donne ultérieurement. On a aussi :

PROPRIETE I.3

Soit $\rho_a(S) = \dfrac{H + \sqrt{\Delta}}{2M} = [a - \alpha, \underline{S,a}]$ un nombre super réduit

Alors on a : $\alpha \geqslant 0$ avec $a = 2\alpha$, $a = 2\alpha + 1$ ou $a = 2\alpha + 2$

De plus : $-\overline{\rho_a(S)} = [\alpha, \underline{S^*,a}]$

$$C(\rho_a(S)) = \frac{M}{\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{\rho_a(S) - \overline{\rho_a(S)}} = \frac{1}{[\underline{a,S}] + [0, \underline{S^*,a}]}$$

En posant : $\begin{cases} \gamma H = m(a - 2\alpha) + V_2 - V_1 = m(a - 2\alpha + 1) - K_1 - K_2 \\ \tau = m(a - 2) + V_1 + V_2 = m(a+1) + K_1 - K_2 \end{cases}$

On a la relation de PELL FERMAT :

$$(F) : \Delta \gamma^2 = \tau^2 + 4(-1)^{n+1}$$

avec les conditions : $\dfrac{\gamma H + \tau}{2} \in \mathbb{Z}$ $\dfrac{\tau - \gamma H}{2} \in \mathbb{Z}$

$$\text{pgcd}\left(\frac{\gamma H + \tau}{2}, m\right) = \text{pgcd}\left(\frac{\tau - \gamma H}{2}, m\right) = 1$$

$$[a - \alpha, S] = \frac{\frac{\gamma H + \tau}{2}}{m} \quad \text{(réduite de } \rho_a(S)\text{)}$$

$$[\alpha, S^*] = \frac{\frac{\tau - \gamma H}{2}}{m} \quad \text{(réduite de } -\overline{\rho_a(S)}\text{)}$$

Démonstration

Soit $\rho_a(S) = [a - \alpha, \underline{S,a}]$ un nombre super réduit .

L'expression de $\rho_a(S)$ donne, avec le Théorème de GALOIS [8]

l'égalité : $-\overline{\rho_a(S)} = [\alpha, \underline{S^*,a}]$

La condition de HURWITZ (H) impose avec (Q_1) : $H^2 < \Delta$

On en déduit $\overline{\rho_a(S)} < 0$ et $\alpha \geqslant 0$

La condition (Q_1) : $0 \leqslant \dfrac{H}{M} = \rho_a(S) + \overline{\rho_a(S)} < 2$

impose une contrainte entre les parties entières α de $-\overline{\rho_a(S)}$ et $a - \alpha$ de $\rho_a(S)$.

Les seuls cas possibles sont : $a = 2\alpha$, $a = 2\alpha + 1$, $a = 2\alpha + 2$

La condition $a = 2\alpha + 2$ n'est possible qu'avec $2M > H > M$

En effet, avec $$\alpha < \frac{-H + \sqrt{\Delta}}{2M} < \alpha + 1$$

On trouve $$\alpha + \frac{H}{M} < \rho_a(S) < \alpha + 1 + \frac{H}{M}$$

Et puisque $a - \alpha = \alpha + 2$ est la partie entière de $\rho_a(S)$, on trouve :

$$\alpha + 2 < \alpha + 1 + \frac{H}{M}$$

Soit $$M < H$$

De même, la condition $a = 2\alpha$ n'est possible qu'avec $0 \leqslant H < M$.

Les trois cas considérés se produisent d'ailleurs effectivement :

Exemple

Pour $\rho = \dfrac{1 + \sqrt{229}}{6}$ super réduit $a = 4$ et $\alpha = 2$ soit $a = 2\alpha$

Pour $\rho = \dfrac{5 + \sqrt{229}}{6}$ super réduit $a = 4$ et $\alpha = 1$ soit $a = 2\alpha + 2$

Le cas $a = 2\alpha + 1$ se trouve par exemple avec le nombre d'or.

Le reste de la propriété I3est évident, l'équation de PELL FERMAT (F) résultant de l'expression de $\Delta_a(S) = \nu^2 \Delta$

B.3 - Nombres et formes de MARKOFF - Langage associé:

On pose, avec S* suite miroir de S :

$$\eta_a^*(S) = [\underline{a,S}] = \zeta_a(S) + 1 = -\frac{1}{\overline{\eta_a(S)}} = -\overline{\theta_a(S)} = \xi_a(S)$$

$$\theta_a(S) = [0,\underline{S^*,a}] = \frac{1}{\eta_a(S)} = -\overline{\zeta_a(S)} - 1 = -\overline{\rho_a(S)} - \alpha = -\xi'_a(S)$$

DEFINITION

On dit que $\theta_a(S)$ est le nombre de MARKOFF défini par S et a (ou la suite (S,a)).

L'expression algébrique des derniers nombres introduits peut être donnée :

$$\rho_a(S) = \frac{m(a - 2\alpha) + V_2 - V_1 + \sqrt{\Delta_a(S)}}{2m} = \frac{m(a - 2\alpha + 1) - K_2 + K_1 + \sqrt{\Delta_a(S)}}{2m}$$

$$\eta_a^*(S) = \frac{ma + V_2 - V_1 + \sqrt{\Delta_a(S)}}{2m} = \frac{m(a+1) - K_2 - K_1 + \sqrt{\Delta_a(S)}}{2m}$$

$$\theta_a(S) = \frac{V_1 - V_2 - ma + \sqrt{\Delta_a(S)}}{2m} = \frac{K_1 + K_2 - m(a+1) + \sqrt{\Delta_a(S)}}{2m}$$

Elle est simplifiable par γ .
Le nombre de MARKOFF $\theta_a(S)$ est la racine positive du polynôme $f_\theta(X,1) \in \mathbb{Z}[X]$ où f_θ est la forme quadratique indéfinie de $\mathbb{Z}[X,Y]$ suivante :

$$f_\theta(X,Y) = mX^2 + [ma + V_2 - V_1]XY + [(a-1)(m-V_1) + V_2 - W]Y^2$$
$$= mX^2 + [m(a+1) - K_1 - K_2]XY + [1 - (a+1)K_1]Y^2$$

$\theta_a(S)$ est aussi racine positive du polynôme $F_\theta(X,1)$ où

$$F_\theta(X,Y) = \frac{1}{m} f_\theta(X,Y) \in \mathbb{Q}[X,Y]$$

$$= X^2 + \left[\frac{m(a+1) - K_1 - K_2}{m}\right] XY + \left[\frac{1 - (a+1)K_1}{m}\right] Y^2$$

$$= X^2 + \left[\frac{ma + V_2 - V_1}{m}\right] XY + \left[\frac{(a-1)(m - V_1) + V_2 - W}{m}\right] Y^2$$

La forme quadratique F_θ est la bonne généralisation des formes F_m que l'on rencontre dans l'exposé fait par CASSELS [5] de la Théorie de MARKOFF.

DEFINITION
Ondit dans la suite que $F_\theta(X,Y)$ est la forme de MARKOFF définie par S et a (ou la suite (S,a)).

Exemple

Dans le cas de la Théorie de MARKOFF [5], il convient de prendre :

$$\begin{cases} V_1 = m + k & \text{soit } K_1 = k \\ V_2 = 2m - k & \text{soit } K_2 = k \\ a = 2 \\ \Delta_a(S) = 9m^2 - 4 \end{cases}$$

Il reste : $\theta_a(S) = \dfrac{2k - 3m + \sqrt{9m^2 - 4}}{2m}$

racine positive du polynôme :

$$F_\theta(X,1) = X + \left[\frac{3m - 2k}{m}\right] X + \left[\frac{1 - 3k}{m}\right] = F_m(X,1)$$

On retrouve ainsi les formes F_m utilisées par CASSELS [5].

Par construction, on a pour les constantes de MARKOFF :

$$C(\zeta_a(S)) = C(\rho_a(S)) = C(\theta_a(S)) = C(\eta_a(S)) = \frac{m_a(S)}{\sqrt{\Delta_a(S)}} = C(\xi_a(S)) = C(\xi'_a(S))$$

On introduit alors :

DEFINITION

Soit $\theta_a(S)$ un nombre de MARKOFF défini par S et a, on dit que $\theta_a(S)$ est un nombre de MARKOFF super réduit si et seulement si on a la condition :

(S_2) : $m_a(S) = m(S)$

(et la condition s'en déduisant (S_1) : $a \geq t(S) - 1$)

Dans ce cas, on dit que la forme $F_\theta(X,Y)$ associée à $\theta_a(S)$ est une forme de MARKOFF super réduite.

Une conséquence du Théorème I.2 est alors la première partie du résultat suivant :

THEOREME I.3

Tout nombre réel algébrique de degré 2 est équivalent pour l'action du groupe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$ à un nombre de MARKOFF $\theta_a(S)$ super réduit. Son conjugué est alors dans l'orbite du nombre de MARKOFF super réduit $\theta_a(S^*)$.

Cependant, là aussi, il arrive que deux nombres de MARKOFF super réduits distincts soient équivalents pour l'action du groupe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$. Ces nombres de MARKOFF présentent donc aussi une insuffisance pour bien désigner les orbites pour l'action du groupe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$.

La seconde partie du Théorème I.3 s'établit en considérant :

$$\theta_a(S^*) = [0, \underline{S, a}] = \rho_a(S) - a + \alpha$$

On trouve : $\overline{\theta_a(S^*)} + \theta_a(S) = -a$

Il en résulte que le nombre $\overline{\theta_a(S)}$ est dans l'orbite de $\theta_a(S^*)$. Et comme il est facile de vérifier que ce nombre est lui-même super réduit, le Théorème en résulte.

Les nombres super réduits $\theta_a(S)$ ou $\rho_a(S)$ permettent d'introduire un langage en procédant comme suit.

Soit $a \in \mathbb{N}^*$ un nombre donné.

Soit $X \subseteq \{1, 2, \ldots 1+a\} = \{i \mid i \in \mathbb{N}^* \text{ et } 1 \leqslant i \leqslant a+1\}$

On dit que X est <u>l'alphabet</u> et a le nombre entier de référence. On note X* le monoïde libre engendré par X. Il est composé de <u>mots</u> écrits avec des lettres de X, sous forme de suites finies.

On appelle <u>langage</u> sur X toute partie L de X*.

Le lien avec les constantes de MARKOFF s'effectue de la façon suivante :

Un mot $S = (a_0, a_1, \ldots a_n) \in X^*$ étant donné, on lui associe le nombre algébrique de degré 2 :

$$\rho_a(S) = [a - \alpha, \underline{S, a}]$$

On définit aussi, comme cela a été fait ci-dessus, les divers nombres $m(S)$, $m_a(S)$, $K_1(S)$, $K_2(S)$ etc ...
On introduit alors l'application :

$$\psi_a : X^* \longrightarrow \{0,1\}$$

définie comme suit :

$\psi_a(S) = 1$ si et seulement si $m_a(S) = m(S)$

$\psi_a(S) = 0$ si et seulement si $m_a(S) \neq m(S)$

Dans le second cas, on a nécessairement $m_a(S) < m(S)$.
L'application ψ_a permet alors de définir le langage :

$$L_a(X) = \psi_a^{-1}(\{1\}) \subseteq X^*$$

On dit que $L_a(X)$ est le <u>langage de MARKOFF défini par l'ensemble X et l'entier a</u>.
Compte-tenu du Théorème I.3, le langage $L_a(X)$ peut être défini à partir des nombres $\zeta_a(S)$ au lieu des nombres $\rho_a(S)$. Ceci ne change rien car on a de façon évidente: $S \in L_a(X) \Longrightarrow S^* \in L_a(X)$.

Au lieu de considérer le langage $L_a(X)$, on peut s'intéresser aussi au <u>langage des périodes</u> : $P_a(X) = L_a(X)a$.

Par construction, pour toute suite S de $L_a(X)$, on a $t(S) \leq a+1$
On peut donc trouver dans $L_a(X)$ des a-suites telles que $t(S) \geq a$ ou des suites vérifiant $t(S) < a$. En complétant avec le lemme de DICKSON, on peut énoncer :

<u>THEOREME I.4</u>
(1) Pour tout $S \in L_a(X)$, on a aussi $S^* \in L_a(X)$.
(2) Pour $a \in \mathbb{N}^*$ donné et $i \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $i < a$, toute i-suite $S \in X^*$ fait partie du langage de MARKOFF $L_a(X)$.

La difficulté pour étudier le langage $L_a(X)$ concerne donc les cas frontières pour a et a+1
Pour ceux-ci, la Théorie de MARKOFF [4] montre que pour les a-suites $S \in X^*$, les deux cas $S \in L_a(X)$ et $S \notin L_a(X)$ sont en général possibles.
Le langage de MARKOFF $L_a(X)$ est donc non vide, et distinct de X^*.

Par ailleurs, en notant $\langle a \rangle = \{ i \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leqslant i \leqslant 1+a \}$
la construction précédente donne :

$$X^* \subseteq \langle a \rangle^*$$

et $$L_a(X) \subseteq L_a(\langle a \rangle)$$

Ceci conduit à comparer les deux ensembles $L_a(X)$ et $X^* \cap L_a(\langle a \rangle)$.
On a de façon évidente, avec $L_a(X) \subseteq X^*$, la condition :

$$L_a(X) \subseteq X^* \cap L_a(\langle a \rangle)$$

Inversement, pour $S \in X^* \cap L_a(\langle a \rangle)$ définissant $\zeta_a(S)$ on a, par la condition $S \in L_a(\langle a \rangle)$ l'égalité $m_a(S) = m(S)$.
Il en résulte : $S \in L_a(X)$.
L'inégalité que l'on vient de voir est donc une égalité.

DEFINITION
Dans la suite, on note L_a le langage $L_a(\langle a \rangle)$.
On dit que c'est le a-langage de MARKOFF.

Ce qui précède permet d'énoncer :

THEOREME I.5
Pour $a \in \mathbb{N}^*$ donné, et tout ensemble $X \subseteq \langle a \rangle$,
on a : $$L_a(X) = L_a \cap X^*$$
De plus, on a $$L_a \subsetneq \langle a \rangle^* \subsetneq L_{a+1} \subsetneq \langle a+1 \rangle^*$$
Enfin, pour tout mot $S \in X^*$, on a équivalence des propriétés suivantes :
(1) $S \in L_a(X)$
(2) $\theta_a(S)$ nombre de MARKOFF super réduit
(3) $\rho_a(S)$ nombre super réduit.

Ce résultat permet de limiter dans la suite l'étude aux langages L_a.

Une production automatique du langage L_a est possible par les principes suivants :
Pour toute suite $S \in \langle a \rangle^*$ s'écrivant $S = (a_0, \ldots a_n)$:

- la valeur $m(S)$ est calculable en déterminant la réduite

$$\frac{m}{V_1 - m} = [a_0, a_1, \ldots a_n]$$

Le programme informatique "RATIO" donné en annexe effectue cette opération :

- la valeur $m_a(S)$ est calculable, éventuellement par recours au lemme de DICKSON.

Le programme informatique "SEQUENCE" donné en annexe effectue cette opération :

- en comparant alors pour S donné les valeurs m(S) et $m_a(S)$, on détermine si l'on a $S \in L_a$.
  En se fixant donc a, et en énumérant systématiquement toutes les possibilités pour S, on engendre L_a. Le programme informatique "MOTS" donné en annexe est construit sur ce principe. Il fournit les mots de L_a , par longueurs croissantes.

C / TABLE DES ORBITES DE NOMBRES ALGEBRIQUES REELS DE DEGRE 2

C.1 - Construction de la table

On cherche à énumérer les orbites des nombres algébriques réels de degré 2 pour l'action du groupe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$. Par le Théorème I.2, il suffit pour cela d'énumérer des nombres super réduits adéquats

$\rho_a(S) = \dfrac{H + \sqrt{\Delta}}{2M}$, c'est-à-dire des triplets (Δ, M, H) à partir desquels ils s'écrivent.

Pour ce faire, on décrit par ordre croissant toutes les valeurs $\Delta \in \mathbb{N}^*$ possibles.

Pour chaque Δ , on considère les valeurs $M \in \mathbb{N}^*$ vérifiant la condition de HURWITZ : $5M^2 \leqslant \Delta$ (H)

Elles sont en nombre fini et peuvent être décrites par ordre croissant.

Pour chaque valeur $M \in \mathbb{N}^*$ vérifiant cette condition, on considère les valeurs $H \in \mathbb{N}$ vérifiant trois des conditions de quasi-réduction :

$$\begin{cases} 0 \leqslant H < 2M & (Q_1) \\ H^2 \equiv \Delta \pmod{4M} & (Q_2) \\ \operatorname{pgcd}\left(M, H, \dfrac{H^2 - \Delta}{4M}\right) = 1 & (Q_3) \end{cases}$$

Ces valeurs de H sont encore en nombre fini, et peuvent être envisagées par ordre croissant.
Le procédé fourni permet d'énumérer des triplets (Δ, M, H) tels que les nombres correspondants $\frac{H+\sqrt{\Delta}}{2M}$ fournissent toutes les orbites de nombres réels algébriques de degré 2, mais il se peut encore que deux triplets différents correspondent à une même orbite.

Pour éviter cela, on procède à un tri grâce au Théorème de SERRET. A chaque triplet (Δ, M, H) on associe le développement en fraction continue du nombre $\frac{H+\sqrt{\Delta}}{2M}$. On ne conserve le triplet que si pour les triplets rencontrés antérieurement dans l'énumération, on n'a pas obtenu une période se déduisant par permutation circulaire de celle de $\frac{H+\sqrt{\Delta}}{2M}$.

Ce tri construit autour de l'ordre lexicographique des triplets (Δ, M, H) permet de n'énumérer qu'une seule fois toute orbite, par un unique représentant.

DEFINITION
On appelle nombre représentatif tout nombre $\frac{H+\sqrt{\Delta}}{2M}$ algébrique réel de degré 2 retenu par le procédé d'énumération décrit ci-dessus.

Les nombres représentatifs constituent donc par leur définition un système de représentants des classes d'équivalence que sont les orbites des nombres algébriques réels de degré 2 pour l'action du groupe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$.

Par construction, tout nombre représentatif $\rho = \frac{H+\sqrt{\Delta}}{2M}$ vérifie la condition (Q_4) et est donc quasi réduit. Il peut être écrit sous une forme $\rho = \rho_2(S) = [a_{-\alpha}, \underline{S, a}]$.

En effet, si l'on considère le nombre $-\overline{\rho} = \frac{-H+\sqrt{\Delta}}{2M}$

En combinant (Q_1) et (H), on trouve :

$$H^2 < 4M^2 < 5M^2 \leqslant \Delta$$

D'où $0 \leqslant H < \sqrt{\Delta}$

Et encore avec (Q_1) qui donne $M > 0$: $-\overline{\rho} > 0$

La partie entière $\alpha = [\, -\overline{\rho}\,]$ appartient donc à $\mathbb{N}$

Soit, avec (Q_1) et (H) : $\alpha + \rho \geqslant \rho = \dfrac{H + \sqrt{\Delta}}{2M} \geqslant \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2M} \geqslant \dfrac{\sqrt{5}}{2} > 1$

En fait, on a aussi :

THEOREME I.6 (Théorème de super réduction)

(1) Pour l'action du groupe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$ sur l'ensemble des nombres réels irrationnels, tout nombre algébrique réel de degré 2 est dans l'orbite d'un et un seul nombre représentatif $\rho_2(S)$.

(2) Tout nombre représentatif $\rho = \dfrac{H + \sqrt{\Delta}}{2M}$ est super réduit et a pour constante de MARKOFF $C(\rho) = \dfrac{M}{\sqrt{\Delta}}$.

(3) Pour tout nombre réel ρ algébrique de degré 2 s'écrivant sous la forme :

$$\rho = \frac{H + \sqrt{\Delta}}{2M} = \frac{H + X\sqrt{d}}{2M} \qquad ((\Delta, M, H) \in \mathbb{Z}^3)$$

on a équivalence des propriétés suivantes :

(a) ρ est un nombre super réduit

(b) le triplet (Δ, M, H) vérifie les conditions de super réduction suivantes :

(Q_1) : $0 \leqslant H < 2M$

(Q_2) : $H^2 \equiv \Delta \pmod{4M}$

(Q_3) : $\operatorname{pgcd}(M, H, \dfrac{H^2 - \Delta}{4M}) = 1$

(C) : $C\left(\dfrac{H + \sqrt{\Delta}}{2M}\right) = \dfrac{M}{\sqrt{\Delta}}$

Pour mémoire, on a aussi lorsque (C) est assurée, la condition de HURWITZ :

(H) : $M < \sqrt{\dfrac{\Delta}{5}}$

(Soit $(Q_1 H)$: $0 \leqslant H < 2M < \sqrt{\dfrac{4\Delta}{5}}$ lorsque l'on a aussi (Q_1))

Démonstration

(1) Résulte de la définition des nombres représentatifs.

(2) Soit $P_\rho(X)$ le polynôme minimal de ρ :

$$P_\rho(X) = MX^2 - HX - \left(\frac{\Delta - H^2}{4M}\right)$$

Sa constante de MARKOFF s'écrit donc sous la forme :

$$C(\rho) = \frac{M_2(S)}{\sqrt{\Delta}} \leqslant \frac{M}{\sqrt{\Delta}}$$

Si l'on avait $M_2(S) < M$, le nombre ρ serait dans la classe d'un nombre $\frac{H_1+\sqrt{\Delta}}{2M_2(S)}$ pour l'action de $M_2(\mathbb{Z})^*$ tel que le triplet $(\Delta, M_2(S), H)$ ait été considéré avant (Δ, M, H) dans le procédé d'énumération décrit ci-dessus. Le nombre ρ ne pourrait pas être représentatif.

On a donc : $M_2(S) = M$

Par la démonstration que j'ai donnée par ailleurs du lemme de DICKSON [a], on a aussi nécessairement :

(S_1) : $a \geqslant t(S) - 1$

Et par un raisonnement comparable à celui fait pour montrer l'égalité $M_2(S) = M$, on obtient aussi :

(S_2) : $m_2(S) = m(S)$

(3) (b) $\Longrightarrow$ (a) s'établit par les mêmes arguments que ceux que l'on vient d'utiliser. On établit d'abord que les conditions $(Q_1 H)$ (Q_2) (Q_3) imposent que ρ soit quasi réduit.
Et comme en (2), on en déduit avec la condition (C) que ρ est super réduit.

(a) $\Longrightarrow$ (b) résulte directement de la propriété I.2.

Le Théorème I.6 est donc établi.
Il permet d'introduire :

DEFINITION

On appelle nombre de MARKOFF représentatif tout nombre de MARKOFF $\theta_a(S)$ tel que le nombre quasi réduit associé $\rho_a(S)$ soit représentatif.

On dit alors que la forme $F_\theta(X,Y)$ associée à $\theta_a(S)$ est une forme de MARKOFF représentative.

On appelle a-langage représentatif et on note LR_a l'ensemble des suites S telles que le nombre $\theta_a(S)$ soit un nombre de MARKOFF représentatif.

On obtient ainsi :

THEOREME I.7

Pour l'action du groupe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$ sur l'ensemble des nombres réels irrationnels, tout nombre algébrique réel de degré 2 est dans l'orbite d'un et un seul nombre de MARKOFF représentatif $\theta_a(S))$.

Une production automatique des triplets (Δ, M, H) correspondant aux nombres représentatifs est possible.
Le programme informatique "CLASSES" donné en annexe effectue cette opération. Il produit la table des orbites.
En réalité, il n'effectue pas le tri introduit grâce au Théorème de SERRET.
Par contre, le programme "CLASSES" utilise l'expression de la constante de MARKOFF $C(\rho) = \frac{M}{\sqrt{\Delta}}$ donnée par le Théorème I.6 pour limiter les tris à faire. Il en reste cependant à effectuer.
Ces tris sont facilités par le résultat suivant :

PROPRIETE I.4

(1) Soit $\rho_1 = \frac{H_1+\sqrt{\Delta_1}}{2M_1}$ un nombre quasi réduit appartenant à l'orbite d'un nombre représentatif $\rho = \frac{H+\sqrt{\Delta}}{2M}$, alors $\Delta = \Delta_1$ et $M_1 \geqslant M$ (avec de plus $H_1 \geqslant H$ si $M_1 = M$).

(2) Dans les conditions précédentes, on a équivalence des propriétés :
- (a) : ρ_1 nombre super réduit
- (b) : $M = M_1$

Démonstration

On a d'abord $\Delta_1 \geqslant \Delta$

Et par hypothèse :

$$\exists \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^* \qquad \rho_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \rho = \frac{A(H+\sqrt{\Delta}) + 2BM}{C(H+\sqrt{\Delta}) + 2DM}$$

D'où : $\exists\, \chi = \dfrac{N(\chi)}{D(\chi)} \in \mathbb{Q} \qquad \Delta_1 = \chi^2 \Delta$ avec $D(\chi) \in \mathbb{N}^* \qquad N(\chi) \in \mathbb{N}$

et $\quad \text{pgcd}(N(\chi), D(\chi)) = 1$

Soit: $\begin{cases} AD - BC = \varepsilon = \pm 1 \\ C(\chi\Delta + H_1 H) + D(2MH_1) = 2AM_1 H + 4M_1 BM \\ C(\chi H + H_1) + D(2\chi M) = 2AM_1 \end{cases}$

De là, on en déduit M_1 et H_1 :

$$\begin{cases} M_1 = \dfrac{\varepsilon\chi}{4M}\left[(CH + 2DM)^2 - \Delta C^2\right] \\ H_1 = \dfrac{\varepsilon\chi}{2M}\left[AC(H^2 - \Delta) + 2MH(AD + C) + 4BDM^2\right] \end{cases}$$

La condition $H^2 \equiv \Delta \pmod{4M}$ garantit que les nombres $M_1 D(\chi)$ et $H_1 D(\chi)$ sont multiples de $N(\chi)$ dans $\mathbb{Z}$.

Par ailleurs, on a :

$$\frac{H_1^2 - \Delta_1}{4M_1} = \varepsilon\chi\left[MB^2 + HAB + \frac{H^2 - \Delta}{4M} A^2\right]$$

Ceci impose que ce dernier nombre soit multiple de $N(\chi)$.

D'où par la condition de quasi réduction (Q_3) pour ρ_1 : $N(\chi) \mid D(\chi)$ et avec $\text{pgcd}(N(\chi), D(\chi)) = 1$ la condition $N(\chi) = 1$.

On obtient ainsi : $D(\chi)^2 \Delta_1 = \Delta \leqslant \Delta_1$, soit $D(\chi) = 1$ et $\chi = 1$

Le reste de la propriété découle du Théorème de super réduction.

Le programme "CLASSES" fournit donc la table des nombres super réduits.

C.2 - Quelques propriétés de la table des orbites

On examine la table des orbites du point de vue de ce qu'elle donne pour les constantes de MARKOFF :

C.2.1 - Analyse selon le dénominateur des constantes de MARKOFF

(1) Considération de $\Delta_a(S)$

Le nombre $\Delta_a(S)$ est congru à 0 ou 1 modulo 4.
Inversement, si l'on se donne un nombre $\Delta \in \mathbb{N}^*$ congru à 0 ou 1 modulo 4, et si l'on s'intéresse à la relation :

$$\Delta = \Delta_a(S) = [(a-2)m + V_1 + V_2]^2 + 4(-1)^{n+1}$$

on ne trouve qu'un nombre fini de possibilités pour a, m, V_1, V_2 et donc S.
Ceci établit :

PROPRIETE I.5
Pour tout nombre donné $\Delta \in \mathbb{N}^*$, congru à 0 ou 1 modulo 4, il n'existe qu'un nombre fini de nombres quasi réduits (respectivement de nombres super réduits) (respectivement de nombres représentatifs) s'écrivant : $\rho = [a - \alpha, \underline{S, a}]$
et vérifiant $\Delta_a(S) = \Delta$

(2) Considération de $\Delta(\rho)$

La condition (Q_2) vue ci-dessus :

$$H^2 \equiv \Delta(\rho) \pmod{4M(\rho)}$$

montre que $\Delta(\rho)$ est congru à 0 ou 1 modulo 4.

Inversement, si l'on se donne un nombre $\Delta \in \mathbb{N}^*$, congru à 0 ou 1 modulo 4, considérons la condition $\Delta(\rho) = \Delta$, avec ρ super réduit s'écrivant sous la forme :

$$\rho = \frac{H + \sqrt{\Delta}}{2M}$$

On a par la propriété I.2 : $5M^2 \leqslant \Delta$ (H)
Et par la propriété (Q_1), on a : $0 \leqslant H < 2M$

On ne trouve donc qu'un nombre fini de possibilités pour ρ.
Et puisque dans l'orbite de tout nombre super réduit on ne trouve qu'un nombre fini de nombres quasi réduits, on peut énoncer :

PROPRIETE I.6

Pour tout nombre donné $\Delta \in \mathbb{N}^*$, congru à 0 ou 1 modulo 4, il n'existe qu'un nombre fini de nombres quasi réduits ρ (respectivement super réduits) (respectivement représentatifs) tels que :

$$\Delta(\rho) = \Delta$$

C.2.2 - Analyse selon le numérateur des constantes de MARKOFF

(1) Considération de m(S)

On suppose donné un nombre $m \in \mathbb{N}^*$ et l'on considère les nombres quasi réduits $\rho = [a - \alpha, \underline{S, a}]$ tels que $m(S) = m$.
En utilisant leur égalité $m - 1 = uV$ et la relation s'en déduisant :

$$\begin{bmatrix} u & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & u \\ V & 1 \end{bmatrix}$$

on trouve pour $a > m - 1$ une infinité de nombres représentatifs comme par exemple $\rho = [a - \alpha, \underline{u, V}, a]$ ou $\rho = [a - \alpha, \underline{V, u}, a]$ tels que :

$$c(\rho) = \frac{m}{\sqrt{\Delta_d(S)}}$$

Ceci permet d'énoncer :

PROPRIETE I.7

Pour tout nombre $m \in \mathbb{N}^*$, il existe des suites S en nombre fini non nul permettant de construire des nombres quasi réduits (respectivement super réduits) (respectivement représentatifs) $\rho = [a - \alpha, \underline{S, a}]$ et telles que l'on ait :

$$m(S) = m$$

La vérification complète de la propriété I.7 résulte directement des contraintes sur V_1 et V_2 :

$$\begin{cases} m < V_1 \leqslant 2m \\ m < V_2 \leqslant 2m \\ mW = V_1 V_2 \pm 1 \end{cases}$$

(2) Considération de $M(\rho)$

On suppose donné un nombre $M \in \mathbb{N}^*$ et l'on considère dans la table des nombres représentatifs ceux qui sont tels que :

$$M(\rho) = M \qquad (\text{avec } \rho = \rho_\alpha(S))$$

En introduisant un nombre $\gamma \in \mathbb{N}^*$, on peut supposer que l'on a

$$m(S) = \gamma M$$

Par la propriété I.7, on peut effectivement déterminer S.
Par exemple : $S = (1, \gamma M - 1)$ ou $S = (\gamma M - 1, 1)$
On peut donc énoncer :

PROPRIETE I.8
Pour tout nombre $M \in \mathbb{N}^*$, il existe une infinité de suites S permettant chacune de définir une infinité de nombres représentatifs (respectivement quasi réduits) (respectivement super réduits) $\rho = [a - \alpha, \underline{S,a}]$ tels que l'on ait : $M(\rho) = M$.

La suite S étant fixée, on peut préciser ce qui se passe pour les valeurs $a \geqslant t(S) - 1$
Dans le cas d'un nombre représentatif quelconque :

$$\rho = [a - \alpha, \underline{S,a}] \qquad (\text{où } a \geqslant t(S) - 1)$$

On pose :

$$\gamma = [\underline{S,a}] \qquad \text{et} \qquad M_S = \begin{bmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & K_1 \\ m - K_2 & K_1 - 1 \end{bmatrix}$$

Le nombre γ est racine du polynôme :

$$P(X) = (aq_n + q_{n-1})X^2 - (ap_n + p_{n-1} - q_n)X - p_n$$

Par le lemme de DICKSON, le minimum arithmétique associé pour la forme $Y^2 P\left(\frac{X}{Y}\right)$ est obtenu pour la valeur $\frac{p_n}{q_n}$.

Il vaut : $q_n^2 P\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = p_n$

En considérant alors l'amplitude de S :

$$\mathcal{A} = \text{pgcd}(m, K_1 + K_2) = \text{pgcd}(p_n, p_{n-1} - q_n)$$

On a $\quad pgcd(\mathcal{a}, q_n) = pgcd(p_n, q_n) = 1$

Il en résulte pour tout diviseur $\mathcal{a}'$ de $\mathcal{a}$ la possibilité de déterminer des valeurs a, en progression arithmétique de raison $\mathcal{a}'$ telles que l'on ait :

(D) : $\quad \mathcal{a}' \mid aq_n + q_{n-1}$

Lorsque cette condition est vérifiée, on a $\frac{1}{\mathcal{a}'} P(X) \in \mathbb{Z}[X]$

Et si $\mathcal{a}'$ est le diviseur maximum de $\mathcal{a}$ vérifiant (D), le polynôme $\frac{1}{\mathcal{a}'} P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ est le polynôme minimal de γ.

On en déduit sans peine l'expression du polynôme minimal de ρ.

On trouve ainsi : $\quad M(\rho) = \frac{m}{\mathcal{a}'}$

En comparant avec la condition $\quad m = \gamma M(\rho)$
vue antérieurement, on obtient $\quad \mathcal{a}' = \gamma$

Il est facile de voir que la condition (D) est équivalente à :

$$a \equiv (-1)^{n+1} p_n \quad q_{n-1} \pmod{\gamma}$$

C'est-à-dire à $\quad a \equiv (-1)^{n+1} K_2\rceil - 1 \pmod{\gamma}$

On peut donc plus précisément énoncer :

PROPRIETE I.9

Soit S une suite de nombres entiers positifs donnée.
Soit $a \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand ($a+1 \geq t(S)$) définissant le nombre représentatif $\quad \rho = [a - \alpha, \underline{S, a}]$.

On a alors la condition : $\frac{m}{\hat{\mathcal{a}}(S)} \mid M(\rho) = \frac{m}{\gamma} \mid m$

où γ est un diviseur de l'amplitude $\mathcal{a}(S)$, maximum tel que l'on ait la condition :

($\mathcal{C}$) $\quad a \equiv (-1)^{n+1} K_2\rceil - 1 \pmod{\gamma}$

Inversement, tout diviseur d de $\mathcal{a}(S)$ définit avec cette condition ($\mathcal{C}$) une progression arithmétique de valeurs a, de raison d, définissant des nombres représentatifs :

$$\rho = [a - \alpha, \underline{S, a}] \qquad (a \geq t(S))$$

Pour ces nombres, on a $M(\rho) = \frac{m}{\nu} \mid \frac{m}{d}$, où ν est un multiple de d et

un diviseur de $\hat{a}(S)$ maximum tel que la condition ($\mathcal{C}$) soit vérifiée. Le nombre γ est aussi le pgcd des coefficients de la forme $f_\theta(X,Y) = \gamma [\, MX^2 + (2M\alpha + H)XY + (M\alpha^2 + \alpha H - \frac{\Delta - H^2}{4M})Y^2]$

où $\theta_a(S) = [0, \underline{S^*, a}] = -H - \frac{2\alpha M + \sqrt{\Delta}}{2M}$.

En d'autres termes, S étant fixée, pour les diverses valeurs de a>1 t(S), on trouve pour les valeurs de $M(\rho)$ tous les multiples de $\frac{m(S)}{\hat{a}(S)}$ divisant m(S).

Inversement, toute valeur M multiple de $\frac{m(S)}{\hat{a}(S)}$ et divisant m(S) peut s'écrire sous la forme $M = M(\rho)$ pour une infinité de valeurs a>1 t(S) bien choisies.
La considération des valeurs $M(\rho)$ donne quelques résultats complémentaires dont la démonstration est évidente :

PROPRIETE I.10

(1) Si ρ est un nombre représentatif tel que $M(\rho) = 1$, alors :

. ρ et $\overline{\rho}$ sont dans la même classe pour l'action de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$

. on a $\rho = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ ou $\rho = \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2}$ selon que Δ est pair ou impair.

Inversement, si ρ s'écrit selon l'une des expressions précédentes, on a : ρ représentatif tel que $M(\rho) = 1$ et $\Delta(\rho) = \Delta$

De plus, $\frac{\sqrt{\Delta}}{2} = [\alpha, \underline{S, 2\alpha}]$ et $\frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2} = [\alpha + 1, \underline{S, 2\alpha + 1}]$

où S = S* est une suite palindrome.

(2) Si $\Delta \equiv 25 \pmod{40}$ est un nombre entier positif non carré, alors le nombre $\rho = \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{4}$ est représentatif et tel que $M(\rho) = 2$ et $\Delta(\rho) = \Delta$.

(3) Si $\Delta \equiv 85 \pmod{120}$ est un nombre entier positif non carré, alors le nombre $\rho = \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{6}$ est représentatif et tel que $M(\rho) = 3$ et $\Delta(\rho) = \Delta$.

D / QUELQUES COMPLEMENTS

D.1 - Compléments pour les formes quadratiques

On a introduit dans ce qui précède différentes formes quadratiques qui sont toutes reliées entre elles par diverses formules :

$$f_\theta(X,Y) = mF_\theta(X,Y)$$

$$f_\zeta(X,Y) = f_\theta(-X-Y,Y) = mF_\theta(-X-Y,Y)$$

Il est donc équivalent dans la suite de travailler sur l'une ou l'autre de ces formes. En privilégiant les formes de MARKOFF F_θ il est possible d'établir :

THEOREME I.8 (Propriété des formes de MARKOFF)
Les formes quadratiques de MARKOFF F_θ vérifient les trois conditions suivantes qui, inversement, les caractérisent :

(1) $F_\theta(1,0) = 1$

(2) $F_\theta(K_1,m) = (-1)^n$

(3) $F_\theta(K_2-(a+1)m,m) = (-1)^n$

De plus, on a les propriétés suivantes :

(4) Le discriminant de F_θ vaut :

$$\Delta(F_\theta) = \frac{\Delta_2(S)}{m\,(S)^2}$$

$$= \frac{[(a-2)m + V_1 + V_2]^2 + 4(-1)^{n+1}}{m^2}$$

$$= \frac{[(a+1)m + K_1 - K_2]^2 + 4(-1)^{n+1}}{m^2}$$

(5) On a l'écriture :

$$F_\theta(X,Y) = [X + \frac{m(a+1) - K_1 - K_2}{2m} Y]^2 - \frac{\Delta_2(S)}{4m^2} Y^2$$

(6) Les formes de MARKOFF F_θ vérifient les conditions :

$$F_\theta[K_1 X + [(a+1)K_1 - 1]Y ; mX + [m(a+1) - K_2]Y] = (-1)^n F_\theta(X,Y)$$

(7) Le minimum arithmétique de la forme de MARKOFF F_θ vaut :

$$M(F_\theta) = \frac{m_a(S)}{m(S)} = \frac{M_a(S)}{M(\rho_a(S))} \leqslant 1$$

La démonstration de ce résultat est évidente.
De façon générale, ceci introduit l'action du groupe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$ sur les formes quadratiques binaires définie par :

$$u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^* \qquad f \circ u(x,y) = f(u_{11}x + u_{12}y \; ; \; u_{21}x + u_{22}y)$$

On dit que ces deux formes quadratiques indéfinies f et g sont <u>équivalentes</u> si et seulement s'il existe $u \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$ telle que $f \circ u = g$.
Si $f \circ u = f$, on dit que u est un <u>automorphisme</u> de f, ou encore que u appartient au stabilisateur de f pour l'action du groupe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$.
L'énoncé (6) du Théorème précédent détermine des automorphismes des formes de MARKOFF F_θ .

Par ailleurs, en considérant les nombres :

$$\begin{cases} - \theta_a(S) = [-1,1,a_n - 1, \underline{a_{n-1} , \dots , a_0, a , a_n}] = \overline{\zeta_a(S)} + 1 = \xi'_a(S) \\ - \overline{\theta_a(S)} = \eta_a{}^*(S) = [\underline{a,S}] = \zeta_a(S) + 1 = \xi_a(S) \end{cases}$$

Il est facile de s'assurer que l'on a :

$$\begin{cases} \xi_a(S) = \eta_a{}^*(S) = - \dfrac{1}{\overline{\eta_a(S)}} = - \overline{\theta_a(S)} > 1 \\ -1 < \xi'_a(S) = \overline{\eta_a{}^*(S)} = - \dfrac{1}{\eta_a(S)} = - \theta_a(S) < 0 \end{cases}$$

où $- \theta_a(S)$ et $- \overline{\theta_a(S)}$ sont les deux racines du polynôme $F_\theta(-X,1)$.
En posant alors :

<u>DEFINITION</u>
On dit qu'une forme quadratique indéfinie $f(X,Y) \in \mathbb{R}[X,Y]$ est <u>réduite au sens de MARKOFF</u> si et seulement si on peut l'écrire sous la forme : $f(X,Y) = A(X - \xi Y)(X - \xi' Y) = A(X^2 - bXY + cY^2) = AX^2 + BXY + CY^2$

avec $\begin{cases} 1 < \xi \\ -1 < \xi' < 0 \\ A \in \mathbb{R} \end{cases}$

Pour $f(X,Y) \in \mathbb{Q}(X,Y)$, on dit aussi que f(X,Y) est <u>réduite au sens de GAUSS</u>.

Il est possible de caractériser les formes de MARKOFF F_θ par le résultat suivant :

THEOREME I.9 (Caractérisation des formes de MARKOFF)
Pour toute forme quadratique $f \in \mathbb{Q}[X,Y]$, on a équivalence des propriétés suivantes :
(1) f est une forme quadratique réduite
(2) Il existe une forme de MARKOFF F_θ et un nombre $A \in \mathbb{Q}$ tels que l'on puisse écrire :

$$f(X,Y) = A\ F_\theta(-X,Y)$$

Pour $f(x,y) = A(X^2 - bXY + cY^2)$ on a : $F_\theta(X,Y) = X^2 + bXY + cY^2 = (X + \frac{b}{2}Y)^2 - \frac{\Delta(f)}{4}Y^2$

Ce résultat fait le lien entre la Théorie de la réduction classique introduite par GAUSS [9], le Théorème de GALOIS [8] utilisé ci-dessus et le Théorème de réduction utilisé par MARKOFF [4] au début de ses articles originaux.
Une forme indéfinie $f \in \mathbb{Q}[X,Y]$ étant donnée, on peut la réduire et en déduire une suite double $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de formes contigües.
En considérant les formes $f_n(-X,Y)$, on est assuré par le Théorème I.9 de trouver avec elles, à un facteur multiplicatif près, des formes de MARKOFF.
On fabrique ainsi des formes de MARKOFF situées dans la même orbite.

Certaines peuvent être privilégiées car toute forme $f \in \mathbb{Q}[X,Y]$ peut être associée par réduction à une suite purement périodique

$$J = (\underline{b_0, b_1, \ldots b_p})$$

En posant : $a = t(b_0, \ldots b_p) = \max_{i=0\ldots p} b_i = t(J)$ ou $a = t(J) - 1$

On peut, à un décalage d'indice près, poser :

$$J = (\underline{a,S})$$

Si M(f) est le minimum arithmétique de f, on peut construire une infinité de couples $(p,q) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$ tels que :

$$f(p,q) = \pm M(f)$$

On peut faire en sorte, d'après le lemme de DICKSON, que S soit un mot du a-langage de MARKOFF. A l'équivalence près, on peut donc supposer que la forme de MARKOFF F_θ du Théorème I.9 est super réduite.

Les formes super réduites correspondent aux formes de M.HALL [6] atteignant leur maximum.
Elles permettent d'énoncer :

THEOREME I.10 (Théorème de super réduction pour les formes)
(1) Toute forme quadratique binaire indéfinie de $\mathbb{Z}[X,Y]$ est équivalente pour l'action du groupe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$ à au moins une forme s'écrivant sous la forme $A\,F_\theta$, où $A \in \mathbb{Z}^*$ et F_θ forme de MARKOFF super réduite.
(2) On a équivalence pour F_θ forme de MARKOFF définie par $\theta_a(S)$ des propriétés suivantes :
(a) F_θ forme super réduite
(b) $M(F_\theta) = 1$
(c) S est un mot du langage de MARKOFF L_a : $S \in L_a$
(d) $m(S) = m_a(S)$
(e) $\theta_a(S)$ nombre de MARKOFF super réduit.

En poursuivant dans le même sens, mais avec cette fois le Théorème I.7, on obtient :

THEOREME I.11
Toute forme quadratique binaire indéfinie de $\mathbb{Z}[X,Y]$ est équivalente pour l'action du groupe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$ à une forme et au plus deux s'écrivant sous la forme $A\,F_\theta$, où $A \in \mathbb{Z}^*$ et F_θ forme de MARKOFF représentative.

Démonstration

L'existence découle de la méthode proposée ci-dessus.
L'unicité résulte de la considération d'une relation :

$$A\,F_{\theta'} = F_\theta \circ u \qquad (u \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*)$$

Avec $M(A\,F_{\theta'}) = |A| = M(F_\theta \circ u) = M(F_\theta) = 1$

on trouve $A = \pm 1$

En notant $\theta_a(S)$ et $\overline{\theta_a(S)}$ les racines associées à F_θ, $\theta_{a'}(S')$ et $\overline{\theta_{a'}(S')}$ celles associées à $F_{\theta'}$, plusieurs cas sont envisageables :

(1): $u^{-1}(\theta_a(S)) = \theta_{a'}(S')$

Par le Théorème I.7, on a alors $\theta_a(S) = \theta_{a'}(S')$
Soit : $F_\theta = F_{\theta'}$

(2): $u^{-1}(\overline{\theta_a(S)}) = \theta_{a'}(S')$
Ce nombre est par le Théorème I.3 et le Théorème de SERRET dans l'orbite du nombre $\theta_a(S^*)$. Par le Théorème I.7, on ne trouve qu'au plus une possibilité pour $\theta_{a'}(S')$ hors le nombre représentatif $\theta_a(S)$: celui de l'orbite de $\overline{\theta_a(S)}$.

Le cas où les formes F_θ et $F_{\theta'}$ sont distinctes se produit effectivement.

Exemple
Avec les deux nombres représentatifs :

$$\rho_1 = [2,\underline{1,2,4}]$$

$$\rho_2 = [3,\underline{2,1,4}]$$

On construit les deux formes de MARKOFF représentatives F_1 et F_2 :

$$3F_1(X,Y) = 3X^2 + 13\,XY - 5Y^2$$

$$3F_2(X,Y) = 3X^2 + 11\,XY - 9Y^2$$

Avec : $u = \begin{bmatrix} -14 & -61 \\ 3 & 13 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$, on obtient :

$$F_1 \circ u = -F_2$$

Si l'on veut n'en conserver qu'une parmi les deux, par exemple pour énumérer les orbites des formes quadratiques indéfinies entières pour l'action de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$, il suffit de conserver celle qui a le plus petit coefficient pour le terme XY.

D.2 - Compléments pour les suites

Le Théorème de super réduction donne directement :

THEOREME I.12
Pour toute suite finie T de nombres de $\mathbb{N}^*$ telle que l'on ait :

$$a = t(T)$$

il existe au moins un mot S du a-langage de MARKOFF L_a tel que T se déduise de la suite (a,S) par permutation circulaire.
De plus :
(1) Si S n'est pas une suite frontière pour a, il y a unicité de la suite S définie par T.
(2) Si au contraire S est une suite frontière par a, il peut exister une suite $S_1 \neq S$ définie de même par T.

L'unicité de S si elle n'est pas frontière pour a découle du lemme de DICKSON.
La possibilité de trouver S_1 dans le cas contraire peut être illustrée sur un exemple :

Exemple
Considérons T = (1,a,a-1,a) et les deux suites distinctes pour $a \geq 3$: S = (1,a,a-1)

S* = (a-1,a,1)

Ce sont deux mots du a-langage L_a.

On en déduit :

THEOREME I.13
Soit $S = (a_0, a_1, \ldots a_n)$ une suite de nombres de $\mathbb{N}^*$, telle que

$$a_0 = a_n = t(S) = a$$

On a équivalence des propriétés suivantes :
(1) $\forall\, i = 0,\ldots,n \qquad a_i = a$
(2) S est un mot du a-langage de MARKOFF L_a.

Démonstration

(1) $\Longrightarrow$ (2) On considère $T = (b_0, b_1, \ldots b_{n+1})$ telle que
$\forall\, i = 0 \ldots n+1 \qquad b_i = a$
La conclusion s'obtient par application du Théorème I.12.
Une démonstration directe est faisable en posant :

$$M_S = \begin{bmatrix} F_{n+1}(a) & F_n(a) \\ F_n(a) & F_{n-1}(a) \end{bmatrix}$$

Par récurrence, on établit que l'on a :

* si n = 2u pair $\qquad F_n(a) = \sum_{i=0}^{i=u} C_{u+i}^{2i} \; a^{2i}$

* si n = 2u + 1 impair $\qquad F_n(a) = \sum_{i=0}^{i=u} C_{u+i+1}^{2i+1} \; a^{2i+1}$

(Pour a = 1 , $F_n = F_n(a)$ est le n ième nombre de FIBONACCI).
De façon évidente, compte tenu de l'expression de $\xi_a(S)$:

$$C(\xi_a(S)) = \frac{m_a(S)}{\sqrt{\Delta_a(S)}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+4}}$$

Et par un calcul direct issu de la forme de M_S :

$$\Delta_a(S) = (a^2+4)F_{n+1}(a)^2$$

Il en résulte que l'on a : $\qquad m_a(S) = F_{n+1}(a) = m(S)$

La suite $S = (a)_{n+1}$ est donc bien dans L_a.

(2) $\Longrightarrow$ (1) On va d'abord illustrer le phénomène qui permet de conclure.
Supposons donnée une suite S différente de $(a)_{n+1}$ et soit $i \in \{0 \ldots n\}$ l'indice tel que :

$$\begin{cases} \forall\, j = i+1, i+2, \ldots n & a_j = a \\ a_i \neq a \end{cases}$$

Notons $\quad S_i = (a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots a_n, a_0, \ldots a_i)$

On a par construction : $a \geqslant 2$
D'autre part, en notant $a = a_{n+1}$ et en considérant la suite purement périodique $J_0 = (\underline{a_0, \ldots, a_n, a_{n+1}})$ à partir de laquelle on construit pour tout j :

$$J_j = (\underline{a_j, a_{j+1}, \ldots a_{j+n+1}})$$

On peut poser :

$$\delta'_{k+j}(J) = \delta_k(J_j) = a_{j+k+1} + \frac{1}{[a_{j+k+2}, a_{j+k+3}, \ldots]} + \frac{1}{[a_{j+k}, a_{j+k-1}, \ldots]}$$

On a alors avec le lemme de DICKSON [a] :

$$\frac{1}{C(\xi_a(S))} = \frac{1}{C(\xi_a(S_j))} = \sup_{\substack{k \infty \\ a_{k+1} = a}} \delta'_k(J_0) = \sup_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n+1 \\ a_{k+1} = a}} \delta'_k(J_0)$$

L'indice i vérifie par définition $i < n$ soit $a_{i+1} = a_{i+2} = a_{i+3} = a$
On en déduit :

$$\delta_i(J_o) = \delta_0(J_i) \geqslant a + \frac{1}{[a,a,\underline{a,1}]} + \frac{1}{[\underline{a,1}]}$$

$$= a + \frac{2a^4 - 2a^3 + 2a^2 - 3a - \sqrt{a^2+4a}}{2(a^3 - a^2 - 1)} + \frac{\sqrt{a^2+4a} - a}{2a}$$

Pour $i+1 \leqslant k \leqslant n+1$, on a $a_k = a_{k+1} = a$

D'où : $\delta_k(J) \leqslant a + \frac{2}{a}$

Or, il est facile de vérifier, pour $a \geqslant 2$, l'inégalité :

$$\frac{2}{a} < \frac{2a^4 - 2a^3 + 2a^2 - 3a - \sqrt{a^2+4a}}{2(a^3 - a^2 - 1)} + \frac{\sqrt{a^2+4a} - a}{2a}$$

D'où dans ces conditions :

$$\delta_k(J_o) = \delta_0(J_k) = \frac{\sqrt{\Delta_a(S)}}{m(S_k)} < \delta_i(J_o) = \delta_0(J_i) = \frac{\sqrt{\Delta_a(S)}}{m(S_i)}$$

$$\leqslant \frac{1}{C(\xi_a(S))} = \frac{\sqrt{\Delta_a(S)}}{m_a(S)}$$

Et $m_a(S_i) = m_a(S_k) = m_a(S) \leqslant m(S_i) < m(S_k)$

Aucune des suites S_k $(i+1 < k < n+1)$ ne peut correspondre à un mot de MARKOFF.

Par le même raisonnement, en notant $I \in \{0 \ldots n\}$ l'indice tel que :

$$\begin{cases} \forall\ j = 0 \ldots I-1 & a_j = a \\ a_I \neq a \end{cases}$$

Aucune des suites S_k $(0 \leqslant k \leqslant I-1)$ ne peut correspondre à un mot de MARKOFF.

Pour démontrer le Théorème I.13, il suffit d'appliquer ce qui précède à $S = S_o$.

<u>Corollaire du Théorème I.13</u>

Soit $S = (a_o, a_1, \ldots a_n)$ un mot du a-langage de MARKOFF L_a tel que l'on ait : $\exists\ i \in \{0,1, \ldots n\}$ $a_i \neq a$

Alors on a : $a_o < a$ ou $a_n < a$

D.3 - A propos de la réduction des formes quadratiques

On a vu au Théorème I.9 comment les formes de MARKOFF F_θ sont liées aux formes réduites. On va montrer ici comment effectuer pratiquement cette réduction.

Une forme binaire indéfinie réelle quelconque f étant donnée :

$$f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$
$$= A(x - \xi y)(x - \xi' y)$$

On peut lui associer les deux développements en fraction continue :

$$\begin{cases} \xi = [a_i]_{i \in \mathbb{N}} \\ -\frac{1}{\xi'} = [a_{-i}]_{i \in \mathbb{N}^*} = \eta \end{cases}$$

et la suite double $J = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

Pour réduire la forme f, il est possible d'appliquer à la suite J les règles d'équivalence suivantes :

(E.1) : $(\ldots,\alpha,1,-1,1,\beta,\ldots) \sim (\ldots,\alpha-1,1,\beta-1,\ldots)$

(E.2) : $(\ldots,\alpha,0,\beta,\ldots) \sim (\ldots,\alpha+\beta,\ldots)$

(E.3) : $(\ldots,\alpha,-1,\beta,\ldots) \sim (\ldots,\alpha-2,1,\beta-2,\ldots)$

(E.4) : $(\ldots,\alpha,-2,\beta,\ldots) \sim (\ldots,\alpha-1,2,\beta-1,\ldots)$

(E.5) : $(\ldots,\alpha,-n,\beta,\ldots) \sim (\ldots,\alpha-1,1,n-2,1,\beta-1,\ldots)$

(E.6) : $(\ldots,\alpha,-m,-n,\beta,\ldots) \sim (\ldots,\alpha-1,1,m-1,n-1,1,\beta-1,\ldots)$

Par application répétée de ces règles, on peut toujours construire à partir de J une suite J_o vérifiant les conditions :

$$J_o \sim J$$

$$J_o = [b_i]_{i \in \mathbb{Z}} \quad \text{avec} \begin{cases} (1) \ \forall i \in \mathbb{Z} & b_i \in \mathbb{N}^* \\ (2) \ \exists n \in \mathbb{N} \ \forall i \geq n & a_i = b_i \\ (3) \ \exists m \in \mathbb{N} \ \forall i \geq m & a_{-i} = b_{-i} \end{cases}$$

La suite J_o détermine de façon directe une forme réduite :

$$f_o(x,y) = A(x - \xi_o y)(x - \xi'_o y)$$

qui par construction et grâce au Théorème de SERRET est équivalente à f.

Il suffit de poser : $\xi_0 = [b_i]_{i\in\mathbb{N}}$ et $-\frac{1}{\xi_0'} = [b_{-i}]_{i\in\mathbb{N}^*}$

La validité des règles (E.1) à (E.6) s'établit par des relations matricielles évidentes :

$$(E.1) : \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$(E.2) : \forall \alpha,\beta\in\mathbb{Z}\quad \begin{bmatrix}\alpha & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha+\beta & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$(E.3) : -\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$(E.4) : -\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$(E.5) : \forall\, n\in\mathbb{Z}\quad -\begin{bmatrix}-n & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$(E.6) : \forall\, m,n\in\mathbb{Z}$$

$$\begin{bmatrix}-m & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-n & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Exemple d'application

Pour $f(x,y) = (x - \sqrt{2}\,y)\,(x - \sqrt{12}\,y)$

avec $\begin{cases} \xi = \sqrt{12} = [3,\underline{2,6}] \\ -\dfrac{1}{\xi'} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = [-1,3,\underline{2}] \end{cases}$

On trouve $J = (\underline{2},3,-1,3,\underline{2,6})$

Et avec (E.3) : $J \sim J_o = (\underline{2},1,1,1,\underline{2,6})$.

II. UTILISATION DES FRACTIONS CONTINUES ET CONSTRUCTION D'UNE PREMIERE GENERALISATION DE LA THEORIE DE MARKOFF

Dans ce qui précède, on a construit un certain nombre de notions à partir de développements en fractions continues particuliers.

L'objet du présent chapitre est de rechercher, en fonction de caractéristiques de la suite S dont on part, les conditions qui peuvent lier les numérateurs et dénominateurs de réduites construites à partir de S.

Le but est de pouvoir, inversement, rechercher des suites S correspondant à des constantes de MARKOFF données : c'est en effet par ce moyen que l'on peut construire une généralisation partielle de la Théorie classique : la $(a,0,\varepsilon)$ Théorie de MARKOFF.

Dans le présent chapitre, on donne la définition de cette $(a,0,\varepsilon)$ Théorie, ainsi qu'une illustration de ce qu'elle fournit sur l'exemple particulier de la (3,0,-1) Théorie.

On remarque aussi qu'une telle théorie fournit des constantes de MARKOFF dont le point d'accumulation vaut $\frac{1}{a+1}$. Compte tenu de ce qui est connu par ailleurs sur le spectre de MARKOFF, il en ressort que cette première généralisation est très partielle. Elle montre cependant que des possibilités de généralisation existent pour la Théorie de MARKOFF classique, que l'on détaillera dans les chapitres suivants.

A / LE RESULTAT DE BASE

La relation $\frac{m}{K_1} = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0] = [S^*]$

permet d'écrire, en introduisant une écriture sous forme de réduite :

$$\begin{cases} p_{i-2} = m & (1) \\ q_{i-2} = K_1 & (2) \end{cases}$$

D'où l'expression :

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+1)m - K_2 & ; & (a+1)K_1 - 1 \\ m & ; & K_1 \end{bmatrix}$$

On convient de noter cette matrice :

$$\begin{bmatrix} p_{i-1} & ; & q_{i-1} \\ p_{i-2} & ; & q_{i-2} \end{bmatrix}$$

avec les conditions :

$$\begin{cases} \dfrac{p_{i-1}}{p_{i-2}} = [a, S] \\ \dfrac{q_{i-1}}{q_{i-2}} = [a, a_0, a_1, \ldots a_{n-1}] \end{cases}$$

soit de façon équivalente :

$$\begin{cases} \dfrac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = [S^*, a] \\ \dfrac{p_{i-2}}{q_{i-2}} = [S^*] = \dfrac{m}{K_1} \end{cases}$$

Les nombres $\dfrac{p_{i-1}}{q_{i-1}}$ et $\dfrac{p_{i-2}}{q_{i-2}}$ sont des réduites particulières de $\eta_a(S) = [\underline{S^*, a}]$, avec possibilité de préciser pour les indices $i = n+2$:

$$p_{i-1}\ q_{i-2} - q_{i-1}\ p_{i-2} = (-1)^n \qquad (3)$$

La relation matricielle présentée ci-dessus donne avec $\mu = K_1 - K_2 \in \mathbb{Z}$

$$p_{i-1} = (a+1)p_{i-2} - q_{i-2} + \mu \qquad (4)$$

$$q_{i-1} = (a+1)q_{i-2} - \frac{q_{i-2}(q_{i-2} - \mu) + (-1)^n}{p_{i-2}} \qquad (5)$$

Par ailleurs, on peut aussi écrire :

$$\begin{bmatrix} p_{i-1} & p_{i-2} \\ q_{i-1} & q_{i-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{i-2} & p_{i-3} \\ q_{i-2} & q_{i-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ap_{i-2} + p_{i-3} & ; & p_{i-2} \\ aq_{i-2} + q_{i-3} & ; & q_{i-2} \end{bmatrix}$$

En comparant à (4) et (6), il reste :

$$\begin{cases} p_{i-3} = p_{i-2} - q_{i-2} + \mu & (7) \\ q_{i-3} = q_{i-2} - \dfrac{q_{i-2}^2 - \mu\, q_{i-2} + (-1)^n}{p_{i-2}} & (8) \end{cases}$$

En particulier, $p_{i-2} \mid q_{i-2}^2 - \mu\, q_{i-2} + (-1)^n$

Dans ce dernier système, la valeur a n'apparaît plus.

On peut écrire :

$$\begin{cases} \dfrac{p_{i-2}}{q_{i-2}} = [S^*] = [a_n, \ \dots\ , a_1, a_0] \\ \dfrac{p_{i-3}}{q_{i-3}} = [a_n, \ \dots\ , a_1] \end{cases}$$

Ou encore de manière équivalente :

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{p_{i-2}}{p_{i-3}} = [a_0, a_1, \ \dots\ , a_n] = [S] = \dfrac{m}{m - K_2} \\ \dfrac{q_{i-2}}{q_{i-3}} = [a_0, a_1, \ \dots\ a_{n-1}] \end{cases}$$

La première relation de (9) découle de (7) avec les expressions données antérieurement pour q_{i-2} et ε.

Elle donne :

$$[S] = \frac{1}{1 - \dfrac{K_2}{m}} = \frac{1}{1 - \dfrac{(K_1 - \mu)}{m}}$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{\mu}{m} - \dfrac{1}{[S^*]}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & ; & 0 \\ 1+r & ; & -1 \end{bmatrix} [S^*]$$

Ceci établit, toutes les vérifications complémentaires étant évidentes :

THEOREME II.1

Soit $S = (a_0, a_1, \ldots a_n)$ une suite de n+1 éléments de $\mathbb{N}^*$.

Posons : $\zeta_a(S) = [a-1, \underline{S, a}] = \dfrac{m(a-1) - K_1 - K_2 + \sqrt{\Delta_a(S)}}{2m}$

$i = n + 2$

$$M_S = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & ; & K_1 \\ m - K_2 & ; & K_1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{i-2} & q_{i-2} \\ p_{i-3} & q_{i-3} \end{bmatrix}$$

$\rho = K_1 - K_2$ (compris entre -m et +m)

$r = \dfrac{\rho}{m} \in]-1, +1[$ ou $r = 1$ si $m = 1$

On a alors les propriétés suivantes pour les réduites du nombre :

$$\eta_a(S) = [\underline{S^*, a}] = \frac{(a+1)m - K_1 - K_2 + \sqrt{\Delta_a(S)}}{2(a+1)K_1 - 2\left[\dfrac{K_1 K_2 + (-1)^n}{m}\right]}$$

(R.a) : $\dfrac{p_{i-1}}{p_{i-2}} = [a, S] = \dfrac{(a+1)m - K_2}{m}$

(R.b) : $\dfrac{q_{i-1}}{q_{i-2}} = [a, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}] = \dfrac{(a+1)K_1 - 1}{K_1}$

(R.c) : $\dfrac{p_{i-2}}{p_{i-3}} = [S] = \dfrac{m}{m - K_2}$

(R.d) : $\dfrac{q_{i-2}}{q_{i-3}} = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}] = \dfrac{K_1}{K_1 - 1}$

(R.e) : $\dfrac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = [S^*, a] = \dfrac{(a+1)m - K_2}{(a+1)K_1 - 1}$

(R.f) : $\dfrac{p_{i-2}}{q_{i-2}} = [S^*] = \dfrac{m}{K_1}$

(R.g) : $\dfrac{p_{i-3}}{q_{i-3}} = [a_n, \ldots a_1] = \dfrac{m - K_2}{K_1 - 1}$

On a aussi les conditions :

(R.1) : $p_{i-2} = m$

(R.2) : $0 < q_{i-2} = K_1 \leqslant p_{i-2} = m$

(R.3) : $p_{i-1}\, q_{i-2} - q_{i-1}\, p_{i-2} = (-1)^i = (-1)^n$

(R.4) : $p_{i-1} = (a+1)p_{i-2} - q_{i-2} + \rho$

(R.5) : $p_{i-2} \mid q_{i-2}^2 - \rho\, q_{i-2} + (-1)^n$

(R.6) : $q_{i-1} = (a+1)q_{i-2} - \dfrac{q_{i-2}^2 - \rho\, q_{i-2} + (-1)^n}{p_{i-2}}$

(R.7) : $p_{i-3} = p_{i-2} - q_{i-2} + \rho$

c'est-à-dire encore : $K_2 = p_{i-2} - p_{i-3}$

(R.8) : $q_{i-3} = q_{i-2} - \dfrac{q_{i-2}^2 - \rho\, q_{i-2} + (-1)^n}{p_{i-2}}$

c'est-à-dire encore : $\rceil = \dfrac{q_{i-2}^2 - \rho\, q_{i-2} + (-1)^n}{p_{i-2}}$

(R.9) : $[S] = \begin{bmatrix} 1 & ; & 0 \\ 1+r & ; & -1 \end{bmatrix} \quad [S^*] = \begin{bmatrix} m & ; & 0 \\ m+\rho & ; & -m \end{bmatrix} \quad [S^*]$

Enfin :

(R.10) : Le nombre $\theta_a(S) = [0, \underline{S^*, a}] = \dfrac{1}{\eta_a(S)}$ est racine du polynôme :

$$\left(\frac{-X^2}{m}\right)\left[q_{i-1}\, X^{-2} + (q_{i-1} - p_{i-1})X^{-1} - p_{i-2}\right]$$

$$= X^2 + \left[\frac{(a+1)m - K_1 - K_2}{m}\right] X + \left[\frac{\rceil - (a+1)K_1}{m}\right]$$

$$= F_\theta(X, 1)$$

(R.11) : Pour a assez grand ($a > t(S)$), on a pour les constantes de MARKOFF :

$$C(\zeta_a(S)) = C(\eta_a(S)) = C(\theta_a(S)) = \frac{1}{\sqrt{(a+r+1)^2 + \dfrac{4(-1)^{n+i}}{m^2}}}$$

Cette même égalité vaut pour $a \leqslant t(S)$ et $S \in L_a$.

Elle est donc valable pour tout nombre de MARKOFF $\theta_a(S)$ super réduit.

B / LES CAS QUI ECHAPPENT

Un problème particulier intéressant, complémentaire du Théorème précédent est d'examiner les valeurs $C(\zeta_a(S))$ pour $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $a \leqslant t(S)$.

Dans ce qui précède, on a vu que $\dfrac{1}{\eta_a(S)} = \theta_a(S) = [0, \underline{S^*, a}]$ est racine du polynôme $F_\theta(X,1)$.

On en déduit l'existence d'une réduite $\dfrac{p_t}{q_t}$ de $[0,S^*,a]$ telle que :

$$C(\zeta_a(S)) = C(\theta_a(S)) = \frac{|mp_t^2 + [(a+1)m - K_1 - K_2]p_t q_t + [1 - (a+1)K_1]q_t^2|}{\sqrt{[(a+1)m + K_1 - K_2]^2 + 4(-1)^{n+1}}}$$

Cette expression conduit, en observant ce que donne le remplacement de a par a+1, à introduire les deux nombres :

$$\begin{cases} \rho_t = mp_t q_t - K_1 q_t^2 = mq_t^2\left[\dfrac{p_t}{q_t} - \dfrac{K_1}{m}\right] \\ \gamma_t = mp_t^2 + [2m - K_1 - K_2]p_t q_t + [1 - 2K_1]q_t^2 \end{cases}$$

$$= mq_t^2\left[\left(\frac{p_t}{q_t} + \frac{2m - K_1 - K_2}{2m}\right)^2 - \frac{(2m + K_1 - K_2)^2 + 4(-1)^{n+1}}{4m^2}\right]$$

D'après la relation (R.f), on a :

$$\frac{K_1}{m} = [0,S^*]$$

Le nombre $\dfrac{\rho_t}{mq_t^2} = \dfrac{p_t}{q_t} - \dfrac{K_1}{m}$ s'interprète donc comme une différence de deux réduites d'un même nombre. L'indice t considéré ici est celui permettant de définir une constante $C(\theta_a(S))$ pour $a < t(S)$, on peut donc supposer, d'après le lemme de DICKSON que l'on a :

$$\frac{p_t}{q_t} \neq \frac{K_1}{m}$$

On a aussi :

$$\frac{\gamma_t}{mq_t^2} = \left[\left(\frac{\rho_t}{mq_t^2} + \frac{2m + K_1 - K_2}{2m}\right)^2 - \frac{(2m + K_1 - K_2)^2 + 4(-1)^{n+1}}{4m}\right]$$

$$= \left[\frac{p_t}{mq_t^2} \left(\frac{p_t}{mq_t^2} + \frac{2m + K_1 - K_2}{m} \right) + \frac{(-1)^n}{m^2} \right]$$

[PROPRIETE II.1
Les nombres $\frac{\gamma_t}{mq_t^2}$, $\frac{\gamma_t}{mq_t^2}$, γ_t et p_t sont de même signe.

En effet, par un résultat classique de la Théorie des fractions continues, on a pour la différence des deux réduites :

$$\left| \frac{p_t}{mq_t^2} \right| < \frac{1}{q_t^2} \leqslant 1$$

Le nombre $\left(\frac{p_t}{mq_t^2} + \frac{2m + K_1 - K_2}{m} \right) = \left(\frac{p_t}{mq_t^2} + 1 \right) + \left(\frac{m + K_1 - K_2}{m} \right)$

est donc positif et supérieur à :

$$\frac{m + K_1 - K_2}{m} > 0$$

Il suffit alors de s'assurer que l'on a:

$$\left| \frac{p_t}{mq_t^2} \right| \left(\frac{p_t}{mq_t^2} + \frac{2m + K_1 - K_2}{m} \right) > \frac{1}{m^2}$$

Pour cela, on utilise la relation classique de la Théorie des fractions continues, où γ_t désigne le quotient complet d'ordre t de γ :

$$\left| \gamma - \frac{p_t}{q_t} \right| = \frac{1}{q_t (q_t \gamma_{t+1} + q_{t-1})}$$

En l'occurence, on prend $\gamma = \frac{K_1}{m}$

Supposons que l'on ait :

$$\left| \frac{p_t}{mq_t^2} \right| \left(\frac{p_t}{mq_t^2} + \frac{2m + K_1 - K_2}{m} \right) \leqslant \frac{1}{m^2}$$

Alors : $m^2 \left(\frac{p_t}{mq_t^2} + \frac{2m + K_1 - K_2}{m} \right) \leqslant q_t (q_t \gamma_{t+1} + q_{t-1})$

$$\Rightarrow \quad m \left(\frac{p_t}{q} + 2m + K_1 - K_2 \right) < (q_t \gamma_{t+1} + q_{t-1})$$

En effet, les nombres q_t , q_{t-1} et γ_{t+1} sont positifs, avec de plus $q_t < m$.

Par ailleurs, on a $\left| \frac{\mu_t}{mq_t^2} \right| < 1$

Soit : $-m < \frac{\mu_t}{q_t^2} < m$

Et :

$$1 \leqslant m + K_1 - K_2 < \left(\frac{\mu_t}{q_t^2} + 2m + K_1 - K_2 \right) < 3m + K_1 - K_2$$

On en déduirait l'inégalité :

$$m < q_t \gamma_{t+1} + q_{t+1}$$

Mais il est facile de voir, compte tenu que m est dénominateur d'une réduite particulière de $\frac{K_1}{m} = \gamma$, que cette inégalité est impossible.

Il en résulte que les deux nombres $\frac{\gamma_t}{mq_t^2}$ et $\frac{\mu_t}{mq_t^2}$ sont de même signe.

Ce signe est aussi celui de μ_t et γ_t puisque $m \geqslant 0$, ce qui termine la démonstration de la propriété.

Celle-ci permet d'établir, de façon évidente :

THEOREME II.2

Soit $S = (a_0, a_1, \ldots a_n)$ une suite de n+1 éléments de $\mathbb{N}^*$, et $\frac{p_t}{q_t}$ une réduite du nombre $[0,S^*]$.

Les valeurs :

$$M_t(a) = |mp_t^2 + [(a+1)m - K_1 - K_2]p_t q_t + [1 - (a+1)K_1]q_t^2|$$

constituent pour $a \in \mathbb{N}^*$ une progression arithmétique de premier terme :

$$|\gamma_t| = |mp_t^2 + [2m - K_1 - K_2]p_t q_t + [1 - 2K_1]q_t^2| \geqslant 0$$

et de raison :

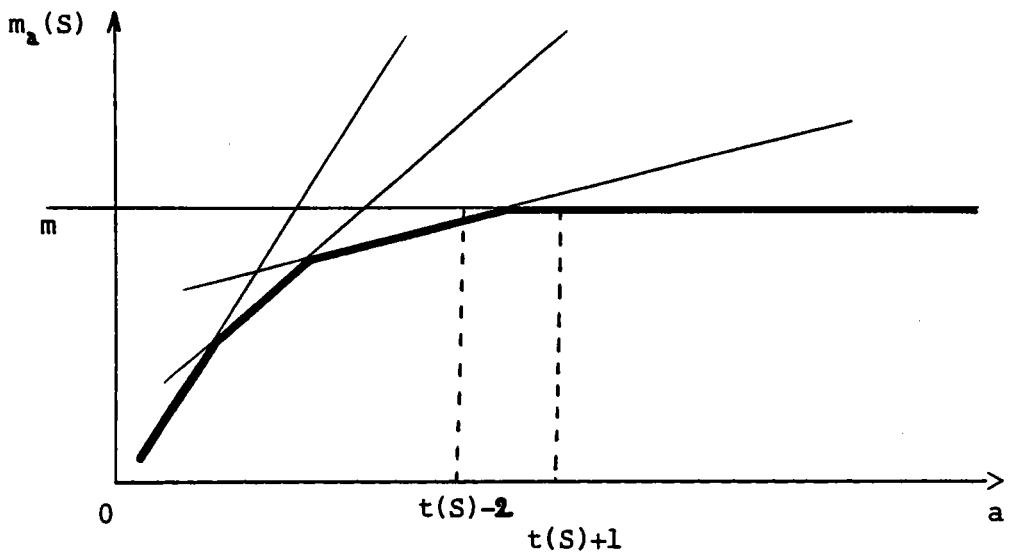
$$|\mu_t| = |mp_t q_t - K_1 q_t^2| > 0$$

A partir de ce résultat, si l'on considère pour une suite S les diverses valeurs où $a \in \mathbb{N}^*$ de la constante de MARKOFF

$$C(\theta_a(S)) = C(\zeta_a(S)) = \frac{m_a(S)}{\sqrt{\Delta_a(S)}}$$

En fonction de a, la fonction $m_a(S)$ est concave, composée par morceaux de progressions arithmétiques, constante pour $a > t(S)$.

Elle a un graphe ayant l'allure suivante :



Il n'est donc pas envisageable de donner une expression de cette constante de MARKOFF dans les cas où l'on a :

$$1 \leqslant a \leqslant t(S)$$

sans rentrer dans le détail de la structure de la suite S. En particulier, les cas frontières où a = t(S) relèvent de cette dernière remarque.
Par contre, on peut énoncer :

THEOREME II.3
Pour $a+1 < t(S)$, on a : $m_a(S) < m$ soit $S \notin L_a$ avec :

$$c(\theta_a(S)) = c(\zeta_a(S)) = \frac{m_a(S)}{\sqrt{\Delta_a(S)}} < \frac{m}{\sqrt{\Delta_a(S)}}$$

Soit pour les conditions de super réduction : $(S_2) \Longrightarrow (S_1)$.

C / UN EXEMPLE D'APPLICATION : PREMIERE GENERALISATION DE LA THEORIE DE MARKOFF

On s'intéresse aux nombres algébriques de degré 2 réels, dont la constante de MARKOFF s'écrit :

$$c(\gamma) = \frac{m}{\sqrt{(a+1)^2 m^2 + 4\varepsilon}} \qquad (\varepsilon \in \{+1, -1\})$$

D'après le Théorème I.3 et la propriété (R.11) du Théorème II.1, il suffit pour en construire de considérer des nombres situés dans l'orbite pour $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$ de nombres irrationnels de MARKOFF super réduits $\theta_a(S)$ avec $r(S) = 0$

La recherche de suites S convenables peut être faite grâce aux conditions du Théorème II.1 :

(R.0) : n de parité fixée ($(-1)^{n+1} = \varepsilon$)

(R.2) : $0 < q_{i-2} = K_A \leqslant p_{i-2} = m$

(R.5) : $p_{i-2} \mid q_{i-2}^2 + (-1)^n$

(R.7) : $\dfrac{p_{i-1}}{q_{i-2}} = [S^*]$

En décrivant toutes les valeurs $m \in \mathbb{N}^*$, et pour chacune d'elle les valeurs K_A vérifiant (R.2) et (R.5), on détermine par (R.7) diverses possibilités pour S.
Celles qui sont telles que $t(S)-1 > a$ vérifient par construction :

$$m_a(S) < m(S) = m$$

et par le Théorème II.3 :

$$C(\theta_a(S)) < \frac{m}{\sqrt{(a+1)^2 m^2 + 4\varepsilon}}$$

Elles n'ont pas à être considérées.
Conservant les suites S qui sont telles que $t(S)-1 \leqslant a$ et $m_a(S) = m$, on fabrique des mots S du langage de MARKOFF L_a qui vérifient par construction :

$$C(\theta_a(S)) = \frac{m}{\sqrt{(a+1)^2 m^2 + 4\varepsilon}}$$

Les nombres de MARKOFF correspondants $\theta_a(S)$ sont super réduits.

Exemples

. Avec $a = 2$, $\varepsilon = -1$, la condition $\dfrac{m}{\sqrt{9m^2 - 4}} > \dfrac{1}{3}$

garantit que l'on retrouve par ce procédé tous les nombres apparaissant dans la Théorie de MARKOFF classique.

. Avec $a = 1$, $\varepsilon = +1$, on trouve le nombre d'or.

. avec $a = 1$, $\varepsilon = -1$, la condition $\frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{m}{2\sqrt{m^2-1}}$ montre l'impossibilité de trouver une suite S.

. avec $a \in \mathbb{N}^* - \{1,2\}$ et $\varepsilon = +1$, on trouve une infinité des suites frontières S, correspondant à des constantes de MARKOFF dont le point d'accumulation est $\frac{1}{a+1}$.

DEFINITION
On appelle <u>première généralisation de la Théorie de MARKOFF</u> ou encore <u>(a,0,ε) Théorie de MARKOFF</u> l'étude des nombres $\theta_a(S)$ super réduits tels que $r(S) = 0$, $(-1)^{n+1} = \varepsilon$.

La Théorie de MARKOFF est ainsi la (2,0,-1) Théorie de MARKOFF.

En utilisant les suites $S = (1,a-1,(1)_{n-2},a)$ il est facile de s'assurer que toute suite (a,0,ε)Théorie recouvre une infinité de possibilités pour les suites S considérées.

Les constantes de MARKOFF associées ont $\frac{1}{a+1}$ pour point d'accumulation.

On donne en annexe une table concernant la (3,0,-1) Théorie pour les valeurs de m inférieures à 1 000.
Hors les suites $S = (1)_{2n+1}$ telles que $t(S) = 1$ et qui donnent donc des cas de la (3,0,-1) Théorie, avec $m_3(S) = m$, la table fournit des suites S de cette Théorie telles que $t(S) = 2$ ou $t(S) = 3$.
Elle n'en donne qu'une parmi les deux suites S et S* correspondant à une même valeur m , celle correspondant à la condition :

$0 < K_1 = K_2 < \frac{m}{2}$.

III. PROPRIETES DES FORMES DE MARKOFF F_θ

A / GENERALISATION DE LA RELATION DIOPHANTIENNE DE MARKOFF - FORMES ϕ_θ :

Désormais, on concentre l'attention sur les formes de MARKOFF :

$$F_\theta(X,Y) = X^2 + \left[\frac{m(a+1) - K_1 - K_2}{m}\right] XY + \left[\frac{\rceil - (a+1)K_1}{m}\right] Y^2$$

Convenons de noter : $\begin{cases} A_1 = \dfrac{(a+1)m - K_1 - K_2}{m} \\ A_0 A_2 = \dfrac{\rceil - (a+1)K_1}{m} \end{cases}$

On peut écrire pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, en introduisant un déterminant :

$$F_\theta(x,y) = \det \begin{bmatrix} x & ; & -A_0 y \\ A_2 y & ; & x + A_1 y \end{bmatrix}$$

En particulier, si l'on a la relation :

$$F_\theta(k_1, m_1) = A \neq 0$$

Il vient :

$$AF_\theta(x,y)$$

$$= \det \begin{bmatrix} k_1 & ; & -A_0 m_1 \\ A_2 m_1 & ; & k_1 + A_1 m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & ; & -A_0 y \\ A_2 y & ; & x + A_1 y \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} k_1 x - A_0 A_2 m_1 y & ; & -A_0(k_1 y + m_1 x + A_1 m_1 y) \\ A_2(m_1 x + k_1 y + A_1 m_1 y) & ; & (k_1 x - A_0 A_2 m_1 y) + A_1(m_1 x + k_1 y + A_1 m_1 y) \end{bmatrix}$$

$$= F_\theta\left(k_1 x + \left[\frac{(a+1)K_1 - \rceil}{m}\right] m_1 y \; ; \; m_1 x + k_1 y + \left[\frac{(a+1)m - K_1 - K_2}{m}\right] m_1 y\right)$$

En multipliant les deux membres par m^2 , il reste :

$$Am^2 F_\theta(x,y) = F_\theta(k_1 mx + [(a+1)K_1 - \rceil] m_1 y \; ; \; m_1 mx + (k_1 m + (a+1)mm_1 - K_1 m_1 - K_2 m_1)y)$$

En posant : $z = mx - K_1 y \qquad \tilde{m}_2 = K_2 m_1 - k_1 m$

et aussi : $\phi_\theta(z,y) = m^2 F_\theta(x,y)$

Il reste :

$$Am^2 F_\theta(x,y) = A\,\phi_\theta(z,y)$$

$$= F_\theta(k_1 z + [(a+1)K_1 m_1 - \rceil m_1 + k_1 K_1] y \; ; \; m_1 z + [(a+1)mm_1 - \tilde{m}_2] y)$$

et : $A\,\phi_\theta((a+1)mm_1 - \tilde{m}_2 \; ; \; -m_1)$

$= [m_1[(a+1)(k_1 m - K_1 m_1) + \lambda m_1 - k_1(K_1 + K_2)] + k_1^2 m]^2$

En introduisant le nombre λ_1 défini par la relation :

$$m\lambda_1 = k_1(K_1 + K_2) + (a+1)(K_1 m_1 - k_1 m) - \lambda m_1$$

on obtient :

$$A\,\phi_\theta((a+1)mm_1 - \tilde{m}_2 \; ; \; -m_1)$$
$$= (k_1^2 - m_1\lambda_1)^2 m^2$$

La relation : $F_\theta(k_1, m_1) = A$

$$= k_1^2 - m_1\lambda_1$$

donne alors par simplification, puisque $A \neq 0$:

$$\phi_\theta((a+1)mm_1 - \tilde{m}_2 \; ; \; -m_1) = Am^2$$

Or, la forme quadratique ϕ_θ peut elle même être calculée :

PROPRIETE III.1

On a : $\phi_\theta(X,Y) = X^2 + [m(a+1) + K_1 - K_2]XY + (-1)^n Y^2$

En effet : $\phi_\theta(z,y) = \phi_\theta(mx - K_1 y \; ; \; y)$

$$= m^2 F_\theta(x,y)$$
$$= z^2 + [m(a+1) + K_1 - K_2]zy + (-1)^n y^2$$

Il reste en développant :

$$Am^2 = (a+1)^2 m^2 m_1^2 - 2(a+1)mm_1\tilde{m}_2 + \tilde{m}_2$$
$$- [m(a+1) + K_1 - K_2][(a+1)mm_1 - \tilde{m}_2]m_1 + (-1)^n m_1^2$$

soit : $(-A)m^2 + (-1)^n m_1^2 + \tilde{m}_2^2 + (K_1 - K_2)\tilde{m}_2 m_1$

$$= (a+1)mm_1\tilde{m}_2 + (K_1 - K_2)(a+1)mm_1^2$$

On peut donc énoncer :

THEOREME III.1

Pour toute forme de MARKOFF :

$$F_\theta(X,Y) = X^2 + \left[\frac{m(a+1) - K_1 - K_2}{m}\right] XY + \left[\frac{\lambda - (a+1)K_1}{m}\right] Y^2$$

où $m\lambda = K_1 K_2 + (-1)^n$

En définissant avec $Z = mX - K_1 Y$ la forme :

$$\Phi_\theta(Z,Y) = m^2 F_\theta(X,Y) = Z^2 + [m(a+1) + K_1 - K_2]ZY + (-1)^n Y^2$$

Si A est un nombre représenté par F_θ , avec :

$$\begin{cases} F_\theta(k_1, m_1) = A \neq 0 \\ (k_1, m_1) \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

et si l'on pose :

$$\tilde{m}_2 = K_2 m_1 - k_1 m$$

on a l'égalité :

$$\Phi_\theta((a+1)mm_1 - \tilde{m}_2 \; ; \; -m_1) = Am^2$$

c'est-à-dire la relation diophantienne (M_0) :

$$(-A)m^2 + (-1)^n m_1^2 + \tilde{m}_2^2 + (K_1 - K_2)\tilde{m}_2 m_1$$
$$= (a+1)mm_1 \tilde{m}_2 + (K_1 - K_2)(a+1)mm_1^2$$

La relation diophantienne obtenue généralise celle de la Théorie de MARKOFF classique :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$$

Pour la retrouver, il suffit en effet de considérer le cas :

$$A = -1 \qquad n \text{ pair} \qquad K_1 = K_2 \qquad a = 2$$

On peut donner une autre forme à cette relation en posant plutôt :

$$\tilde{m}_2 = \varepsilon_1 m_2 + (K_2 - K_1)m_1 \qquad (\varepsilon_1 = \pm 1)$$

THEOREME III.2 (Relation de MARKOFF généralisée)
Pour toute forme de MARKOFF :

$$F_\theta(X,Y) = X^2 + \left[\frac{m(a+1) - K_1 - K_2}{m}\right] XY + \left[\frac{\gamma - (a+1)K_1}{m}\right] Y^2$$

Si A est un nombre représenté par F_θ , avec :

$$\begin{cases} F_\theta(k_1, m_1) = A \neq 0 \\ (k_1, m_1) \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

et si l'on pose : $\varepsilon_1 m_2 = K_1 m_1 - k_1 m$ (où $\varepsilon_1 = \pm 1$ et $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 \cdot (-1)^n$)
on a la relation diophantienne (M_1) :

$$-(\varepsilon_1 A)m^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 = (a+1)mm_1 m_2 + (K_1 - K_2)m_1 m_2 = (a+r+1)mm_1 m_2$$

B / ACTIONS SUR LA FORME F_θ ET APPLICATIONS:

Considérons l'expression :

$$\mathcal{F}(X,Y) = (-A)F_\theta(X,Y) + F_\theta(k_1 X - l_1 Y \; ; \; m_1 X - k_1 Y)$$

On obtient facilement :

$$\mathcal{F}(1,0) = \mathcal{F}(k_1, m_1) = \mathcal{F}(l_1, k_1) = 0$$

où $\quad m\, l_1 = k_1(K_1 + K_2) + (a+1)(K_1 m_1 - k_1 m) - l\, m_1$

On en déduit :

THEOREME III.3

Pour toute forme de MARKOFF F_θ représentant un nombre $A \neq 0$ avec $F_\theta(k_1, m_1) = A$ et $(k_1, m_1) \in \mathbb{Z}^2$, si $l_1 \in \mathbb{Q}$ défini par :

$m\, l_1 = k_1(K_1 + K_2) + (a+1)(K_1 m_1 - k_1 m) - l\, m_1$

On a : $A = k_1^2 - m_1 l_1$

Et : $AF_\theta(X,Y) = F_\theta(k_1 X - l_1 Y \; ; \; m_1 X - k_1 Y)$

$$= F_\theta\left(k_1 X + \left[\frac{[(a+1)K_1 - l]m_1}{m}\right]Y \; ; \; m_1 X + \left[\frac{k_1 m + (a+1)m m_1 - (K_1 + K_2)m_1}{m}\right]Y\right)$$

En particulier, pour $k_1 = K_1$ et $m_1 = m$, on obtient $l_1 = \dfrac{K_1^2 + (-1)^{n+1}}{m}$ et:

$$F_\theta(K_1 X + [(a+1)K_1 - l]Y ; mX + [(a+1)m - K_2]Y) = (-1)^n F_\theta(X,Y)$$

où $g = \begin{bmatrix} K_1 & (a+1)K_1 - l \\ m & (a+1)m - K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{S^*} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

permet de définir le groupe des rotations hyperboliques associé à la forme F_θ .

En considérant maintenant $\theta_a(S)$ qui est racine positive du polynôme $F_\theta(X,1)$, l'égalité obtenue dans le Théorème précédent impose que l'une des relations suivantes soit établie :

$$\theta_a(S) = \frac{k_1\, \theta_a(S) - l_1}{m_1\, \theta_a(S) - k_1}$$

$$\overline{\theta_a(S)} = \frac{k_1\, \theta_a(S) - l_1}{m_1\, \theta_a(S) - k_1}$$

Supposons que la première soit assurée, elle donne :

$$m_1\, \theta_a(S)^2 - 2k_1\, \theta_a(S) + l_1 = 0$$

Elle impose, puisque $\theta_a(S)$ irrationnel, les conditions suivantes :

$$\begin{cases} -2k_1 = \dfrac{m_1}{m}\,[m(a+1) - K_1 - K_2] \\ \ell_1 = \dfrac{m_1}{m}\,[\ell - (a+1)K_1] \end{cases}$$

Soit
$$A = k_1^2 - m_1\ell_1$$
$$= \frac{m_1^2}{4m^2}\,[m(a+1) - K_1 - K_2]^2 - \frac{m_1^2}{m}\,[\ell - (a+1)K_1]$$
$$= \frac{m_1^2}{4m^2}\,\Delta_a(S)$$

et encore, avec le Théorème I.8 :
$$A = F_\theta(k_1, m_1)$$
$$= \left[k_1 + \frac{m(a+1) - K_1 - K_2}{2m}\,m_1\right]^2 - \frac{\Delta_a(S)}{4m^2}\,m_1^2$$
$$= -\frac{m_1^2}{4m^2}\,\Delta_a(S)$$

Comme on suppose que $\theta_a(S)$ est algébrique de degré 2, on a $\Delta_a(S) \neq 0$. La comparaison des deux expressions de A obtenue ci-dessus implique :
$$m_1 = 0 = k_1 = A$$
Elle donne une contradiction avec l'hypothèse faite ci-dessus que A est non nul.
On a donc en réalité toujours l'égalité :
$$\overline{\theta_a(S)} = \frac{k_1\,\theta_a(S) - \ell_1}{m_1\,\theta_a(S) - k_1}$$

Ceci établit :

THEOREME III.4
Pour toute forme de MARKOFF F_θ représentant un nombre non nul A, avec :
$$F_\theta(k_1, m_1) = A \neq 0$$
$$(k_1, m_1) \in \mathbb{Z}^2$$

Pour $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ défini par :

$$m\lambda_1 = k_1(K_1 + K_2) + (a+1)(K_1 m_1 - k_1 m) - \lambda m_1$$

on a :

$$\overline{\theta_a(s)} = \frac{k_1\,\theta_a(s) - \lambda_1}{m_1\,\theta_a(s) - k_1} = \begin{bmatrix} k_1 & -\lambda_1 \\ m_1 & -k_1 \end{bmatrix} \theta_a(s)$$

où le déterminant de la matrice apparaissant vaut $m_1\lambda_1 - k_1^2 = -A$.

Réciproquement, la condition :

$$\overline{\theta_a(s)} = \begin{bmatrix} k_1 & -\lambda_1 \\ m_1 & -k_1 \end{bmatrix} \theta_a(s)$$

est équivalente à :

$$m_1[\theta_a(s)\,\overline{\theta_a(s)}] = k_1[\theta_a(s) + \overline{\theta_a(s)}] - \lambda_1$$

$$\Longleftrightarrow \quad m\lambda_1 = k_1(K_1 + K_2) + (a+1)[K_1 m_1 - k_1 m] - \lambda m_1$$

On retrouve la relation de définition de λ_1. Ceci confirme de façon directe le Théorème III.4 et en donne la signification profonde.

Avec $\tilde{m}_2 = K_2 m_1 - k_1 m$, cette relation permet l'évaluation directe du terme $[(-A)m^2 + (-1)^n m_1^2 + \tilde{m}_2^2 + \mu\,\tilde{m}_2 m_1 - \mu(a+1)mm_1^2]$.
Il vaut :

$$[(-A)m^2 + (-1)^n m_1^2 + K_2^2 m_1^2 + k_1^2 m^2 - 2K_2 k_1 m_1 m + \mu K_2 m_1^2 - \mu k_1 m m_1 - \mu(a+1)mm_1^2]$$

$$= m^2(k_1^2 - A) + m_1^2(K_2^2 + \mu K_2 + (-1)^n) - mm_1[2K_2 k_1 + \mu k_1 + \mu(a+1)m_1]$$

$$= m^2 m_1 \lambda_1 + m_1^2 m\left(\frac{K_2^2 + \mu K_2 + (-1)^n}{m}\right) - mm_1[2K_2 k_1 - \mu k_1 + \mu(a+1)m_1]$$

$$= mm_1[m\lambda_1 + \frac{m_1}{m}(K_2^2 + \mu K_2 + (-1)^n) - (2K_2 k_1 + \mu k_1 + \mu(a+1)m_1)$$

$$= mm_1[k_1(K_1 + K_2) + (a+1)[K_1 m_1 - k_1 m] - \lambda m_1 + \frac{m_1}{m}(K_2^2 + \mu K_2 + (-1)^n)$$

$$- 2K_2 k_1 - K_1 k_1 + K_2 k_1 - \mu(a+1)m\,]$$

$$= mm_1[\frac{m_1}{m}(K_1 K_2 + (-1)^n) + (a+1)[K_2 m_1 - k_1 m] - \lambda m_1] = (a+1)mm_1\tilde{m}_2$$

On obtient ainsi une vérification directe de la relation de MARKOFF généralisée (M_1), avec $\tilde{m}_2 = \varepsilon_1 m_2 + (K_2 - K_1)m_1$

Dans les Théorèmes III.3 et III.4, on a en général $l_1 \notin \mathbb{Z}$.
Un cas particulier exceptionnel, donnant $l_1 \in \mathbb{Z}$ est celui où l'on a :

$$K_2 = m - K_1$$

Avec $k_1 = K_1$; $m_1 = m$; $l_1 = K_1 - 1$; $A = (-1)^n$, on trouve alors :

$$F_\theta\ (K_1 x - (K_1 - 1)y, mx - K_1 y) = (-1)^n F_\theta(x,y)$$

$$\overline{\theta_a(S)} = \frac{K_1\,\theta_a(S) - (K_1 - 1)}{m\,\theta_a(S) - K_1} = -\theta_a(S) - a$$

De façon plus générale, même si on n'a pas l'égalité $K_2 = m - K_1$, on a la relation :

$$\frac{(m - K_2)\,\theta_a(S) - (K_1 - 1)}{m\,\theta_a(S) - K_1} = -\theta_a(S) - a = \overline{\theta_a(S)} + \frac{m - K_1 - K_2}{m}$$

La vérification s'effectue de façon directe ou au moyen des développements :

$$\begin{cases} \theta_a(S) = [0, \underline{S^*, a}] \\ -\theta_a(S) - a = [-a-1, 1, a_n - 1, \underline{a_{n-1}, \ldots, a_0, a, a_n}] \\ \overline{\theta_a(S)} = [-a-1, 1, a_0 - 1, \underline{a_1, \ldots, a_n, a, a_0}] \end{cases}$$

On trouve ainsi :

$$\frac{(m - K_2)[\theta_a(S) + a] - (a - aK_2 + K_1 - 1)}{m[\theta_a(S) + a] - (am + K_1)} = -[\theta_a(S) + a]$$

A partir du développement de $-\theta_a(S) - a$, cette égalité donne :

$$\begin{bmatrix} m-K_2 & ; & -(am+K_1)+(aK_2+1) \\ m & ; & -(am+K_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & K_1 \\ m-K_2 & K_1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Et avec le développement $\theta_a(S) + a = [\underline{a, S^*}]$
Cette dernière expression conduit à :

PROPRIETE III.2
Pour toute suite finie S, on a :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} M_S \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} M_{S^*} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

On note aussi que si l'on souhaitait relier $\vartheta_a(S)$ et $\overline{\vartheta_a(S)}$ par une relation en nombres entiers, on pourrait écrire :

$$\overline{\vartheta_a(S)} = \begin{bmatrix} mk_1 & ; & -k_1(K_1+K_2) - (a+1)[K_1 m_1 - k_1 m] +] m_1 \\ mm_1 & ; & -k_1 m \end{bmatrix} \vartheta_a(S)$$

C / CONSEQUENCE POUR LA PRESENTATION DES GROUPES HYPERBOLIQUES:

Dans ce qui précède, le nombre A est seulement supposé différent de 0. Plusieurs cas particuliers sont envisageables :

. Si $(k_1, m_1) = (1, 0)$

Il vient $\begin{cases} \tilde{m}_2 = -m \\ m]_1 = K_1 + K_2 - m(a+1) \end{cases}$

La relation notée (M_0) se réduit à : $-m^2 + m^2 = 0$

On a aussi :

$$\begin{cases} F_\theta\left(X + [(a+1) - \dfrac{(K_1+K_2)}{m}]Y \; ; \; -Y\right) = F_\theta(X,Y) \\ \overline{\vartheta_a(S)} = \begin{bmatrix} 1 & ; & (a+1) - \dfrac{K_1+K_2}{m} \\ 0 & ; & -1 \end{bmatrix} \vartheta_a(S) \end{cases}$$

. Si $(k_1, m_1) = (K_1, m)$

Il vient $\begin{cases} \tilde{m}_2 = K_2 m - K_1 m = m(K_2 - K_1) \\ m]_1 = K_1(K_1+K_2) + (a+1)(K_1 m - K_1 m) -] m_1 \\ \qquad = K_1(K_1+K_2) -] m_1 = K_1^2 - (-1)^n \end{cases}$

La relation notée (M_a) se réduit à :

$$0 = (-1)^{n+1} m^2 + (-1)^n m^2 + m^2(K_2 - K_1)^2 - (K_1 - K_2)^2 m^2$$
$$= (a+1)m^3(K_2 - K_1) - (K_1 - K_2)(a+1)m^3$$

On a aussi :

$$\left\{ F_\theta\left(K_1 X - [\frac{K_1^2 - (-1)^n}{m}]Y \; ; \; mX - K_1 Y\right) = (-1)^n F_\theta(X,Y) \right.$$

$$\left\{ \overline{\theta_a(S)} = \begin{bmatrix} K_1 & ; & -\dfrac{K_1^2 - (-1)^n}{m} \\ m & ; & -K_1 \end{bmatrix} \theta_a(S) \right.$$

. Si $(k_1, m_1) = (K_2 - (a+1)m \; ; \; m)$

Il vient : $\begin{cases} \tilde{m}_2 = K_2 m - [K_2 - (a+1)m]m = (a+1)m^2 \\ m\,]_1 = -m\,] + [K_2 - (a+1)m](K_1 + K_2) \\ \qquad\qquad + (a+1)[K_1 m - K_2 m + (a+1)m^2] \\ \qquad = [K_2 - (a+1)m]^2 - (-1)^n \end{cases}$

La relation notée (M_0) se réduit à :

$$-(-1)^n m^2 + (-1)^n m^2 + (a+1)^2 m^4 + (K_1 - K_2)(a+1)m^3$$
$$= (a+1)^2 m^4 + (K_1 - K_2)(a+1)m^3$$

On a aussi :

$$F_\theta\left[K_2 - (a+1)m\right]X - \left[\frac{[K_2 - (a+1)m]^2 - (-1)^n}{m}\right]Y \; ; \; mX - [K_2 - (a+1)m]Y)$$

$$= (-1)^n F_\theta(X,Y)$$

$$\overline{\theta_a(S)} = \begin{bmatrix} [K_2 - (a+1)m] & ; & \dfrac{[K_2 - (a+1)m]^2 - (-1)^n}{m} \\ m & ; & -[K_2 - (a+1)m] \end{bmatrix} \theta_a(S)$$

. Une conséquence : présentation des groupes hyperboliques

La première relation obtenue entre $\overline{\theta_a(S)}$ et $\theta_a(S)$ donne par conjugaison :

$$\theta_a(S) = \begin{bmatrix} 1 & ; & (a+1) - \dfrac{K_1 + K_2}{m} \\ 0 & ; & -1 \end{bmatrix} \overline{\theta_a(S)}$$

Soit en combinant avec les autres relations trouvées :

$$\theta_a(S) = \begin{bmatrix} -[K_2 - (a+1)m] & ; & -(a+1)K_1 \\ -m & ; & K_1 \end{bmatrix} \theta_a(S)$$

$$= \begin{bmatrix} -K_1 & ; &]-(a+1)K_1 \\ -m & ; & [K_2 - (a+1)m] \end{bmatrix} \theta_a(S)$$

Une vérification directe de ces relations est faisable à partir de l'expression de la forme de MARKOFF F_θ .
En revenant à $\eta_{a}(S) = [\underline{S^*, a}]$, on obtient :

$$\eta_{a}(S) = \begin{bmatrix} K_1 & ; & -m \\ -[(a+1)K_1 - \;\;] & ; & [(a+1)m - K_2] \end{bmatrix} \eta_a(S)$$

$$= \begin{bmatrix} [(a+1)m - K_2] & ; & m \\ [(a+1)K_1 - 1] & ; & K_1 \end{bmatrix} \eta_a(S)$$

Ces relations sont inverses l'une de l'autre. Elles sont en parfait accord avec les expressions :

$$\begin{cases} \dfrac{m}{K_1} = [a_n, \ldots, a_1, a_0] = [S^*] \\ \dfrac{m - K_2}{K_2 - 1} = [a_n, \ldots, a_1] \end{cases}$$

Celles-ci donnent en effet :

$$\begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+1)m - K_2 & ; & m \\ (a+1)K_1 - 1 & ; & K_1 \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{bmatrix} -[K_2 - (a+1)m] & ; & 1 - (a+1)K_1 \\ -m & ; & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_1 & ; & 1 - (a+1)K_1 \\ -m & ; & [K_2 - (a+1)m] \end{bmatrix} = (-1)^{n+1}$$

Convenons alors de noter :

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} 1 & ; & (a+1) - \dfrac{K_1 + K_2}{m} \\ 0 & ; & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} K_1 & ; & -\dfrac{K_1^2 - (-1)^n}{m} \\ m & ; & -K_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} [K_2 - (a+1)m] & ; & -\dfrac{[K_2 - (a+1)m]^2 - (-1)^n}{m} \\ m & ; & [K_2 - (a+1)m] \end{bmatrix}$$

On obtient facilement :

$$(PF) : \begin{cases} \mathfrak{x}^2 = (-1)^2 = 1 \\ \mathfrak{y}^2 = (-1)^n \\ (-1)\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(-1) \\ (-1)\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(-1) \\ \mathfrak{z} = -\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{x} \end{cases}$$

On fait ainsi apparaître les présentations de deux groupes engendrés par $-1, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}$, sous tendant toutes les constructions qui précèdent. Avec ces présentations formelles, on pose :

DEFINITION
On note $\mathcal{H}_p$ le groupe engendré par $(-1), \mathfrak{x}$ et $\mathfrak{y}$, pour n pair. On note $\mathcal{H}_I$ le groupe engendré par $(-1), \mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ pour n impair. On dit que $\mathcal{H}_p$ est le groupe hyperbolique pair et $\mathcal{H}_I$ le groupe hyperbolique impair.

Une façon particulière de considérer ces groupes est donnée pour les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} m = 1 \\ l = (-1)^n = -\varepsilon \\ K_2 = a = 0 \\ K_1 = \dfrac{1 + (-1)^n}{2} \end{cases} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1+(-1)^n}{2} \\ 1 & \dfrac{1-(-1)^n}{2} \end{bmatrix}$$

On trouve ainsi la représentation matricielle :

$$\begin{cases} (-1) = \begin{bmatrix} -1 & ; & 0 \\ 0 & ; & -1 \end{bmatrix} \\ \mathfrak{x} = \begin{bmatrix} 1 & ; & \dfrac{1-(-1)^n}{2} \\ 0 & ; & -1 \end{bmatrix} \\ \mathfrak{y} = \begin{bmatrix} \dfrac{1+(1)^n}{2} & ; & -\dfrac{1-(-1)^n}{2} \\ 1 & ; & -\dfrac{1+(-1)^n}{2} \end{bmatrix} \end{cases}$$

On en déduit facilement :

THEOREME III.5
Les groupes hyperboliques $\mathcal{H}_P$ et $\mathcal{H}_I$ sont isomorphes à des sous groupes infinis de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$.
Les conditions (PF) en constituent une présentation formelle, avec n pair pour $\mathcal{H}_P$ et n impair pour $\mathcal{H}_I$.

D / QUELQUES PROPRIETES CONCERNANT LE MINIMUM ARITHMETIQUE $M(F_\theta)$

D.1 - Relations pour les formes ϕ_θ

Dans ce qui précède, on a introduit la forme $\phi_\theta(Z,Y) = m^2 F_\theta(X,Y)$ $= Z^2 + [m(a+1) + K_1 - K_2]ZY - \varepsilon Y^2$ (où $Z = mX - K_1 Y$). L'expression de ϕ_θ donnée par la propriété III.1 conduit à l'identité :

$$\phi_\theta(Z,Y) = -\varepsilon\, \phi_\theta(Y, -\varepsilon Z) \quad (\text{où } \varepsilon = (-1)^{n+1})$$

D'autre part, l'identité fournie par le Théorème III.3 permet d'écrire :

$$\begin{aligned} -\varepsilon m^2 F_\theta(X,Y) &= -\varepsilon\, \phi_\theta(Z,Y) \\ &= m^2 F_\theta(K_1 X + [(a+1)K_1 - ?]Y \,;\, mX + [(a+1)m - K_2]Y) \\ &= \phi_\theta(\varepsilon Y \,;\, Z + [(a+1)m + K_1 - K_2]Y) \end{aligned}$$

Ceci permet d'énoncer, toutes vérifications étant évidentes :

PROPRIETE III.3
La forme ϕ_θ vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_\theta(Z,Y) &= -\varepsilon\, \phi_\theta(Y, -\varepsilon Z) \\ &= \phi_\theta(Z + [(a+1)m + K_1 - K_2]Y, -Y) \\ &= \phi_\theta(-Z \,;\, Y - [(a+1)m + K_1 - K_2]\varepsilon Z) \end{aligned}$$

D.2 - Applications à la forme F_θ

On peut alors reprendre un raisonnement de CASSELS [5].
Tout d'abord, la définition du minimum arithmétique $M(F_\theta)$ garantit l'existence d'une infinité de couples $(p_o, q_o) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

$$|F_\theta(p_o, q_o)| = M(F_\theta)$$

Ceci assure que l'une au moins des deux équations diophantiennes :

$$F_\theta(p_0, q_0) = \delta\, M(F_\theta)$$

$$F_\theta(p_0, q_0) = -\varepsilon\, M(F_\theta)$$

admet une infinité de solutions $(p_0, q_0) \in \mathbb{Z}^2$.
Plusieurs cas peuvent alors être distingués :

. <u>Si $F(p_0, q_0) = -\varepsilon M(F_\theta)$ n'admet pas de solution</u>

Dans ce cas, l'équation $F_\theta(p_0, q_0) = \varepsilon M(F_\theta)$ admet des solutions.
Avec la relation donnée par le Théorème III.3 :

$$F_\theta(K_1 X + [(a+1)K_1 - \ ]Y \ ; \ mX + [(a+1)m - K_2]Y) = -\varepsilon\, F_\theta(X, Y)$$

le cas $\varepsilon = 1$ est impossible.
Il donnerait en effet :

$$F_\theta(K_1 p_0 + [(a+1)K_1 - \ ]q_0 \ ; \ mp_0 + [(a+1)m - K_2]q_0) = -\varepsilon\, M(F_\theta)$$

On trouverait donc une contradiction avec l'hypothèse faite.
Dans ce cas, on a donc nécessairement $\varepsilon = -1$.
La relation $F_\theta(K_1, m) = -\varepsilon$ montre aussi que l'on a $M(F_\theta) \neq 1$.

. <u>Si $F_\theta(p_0, q_0) = -\varepsilon M(F_\theta)$ admet des solutions</u>

DAns ce cas pour un couple $(p_0, q_0) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$, on a :

$$-\varepsilon\, M(F_\theta) = F_\theta(p_0, q_0)$$

En utilisant le Théorème III.3 et la matrice :

$$g = \begin{bmatrix} K_1 & (a+1)K_1 - \ \\ m & (a+1)m - K_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$$

Cette condition s'écrit, avec $\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix}$ sous la forme

$$F_\theta(p_1, q_1) = M(F_\theta)$$

Parmi les couples $(p_0, q_0) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$ vérifiant la condition de départ, on considère ceux qui sont tels que soit minimum le nombre :

$$|q_0| + |mp_0 - K_1 q_0| \in \mathbb{N}$$

On convient de noter dans la suite $r_0 = mp_0 - K_1 q_0$

Plusieurs cas peuvent alors être distingués en laissant de côté ici le cas m = 1 pour lequel on trouve aisément $M(F_\theta) = 1$:

(1) Si $(-\varepsilon q_0 r_0) < 0$ et $|q_0| \leqslant |r_0|$

Avec $\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix}$

et $r_1 = mp_1 - K_1 q_1$

On a : $\begin{cases} q_1 = [(a+1)m + K_1 - K_2]q_0 + r_0 \\ r_1 = \varepsilon q_0 \end{cases}$

On a aussi :
$$\begin{aligned} m^2 M(F_\theta) &= m^2 F_\theta(p_1, q_1) \\ &= \phi_\theta(r_1, q_1) \\ &= \phi_\theta(\varepsilon q_0, [(a+1)m + K_1 - K_2]q_0 + r_0) \\ &= \phi_\theta(-\varepsilon q_0, r_0) \qquad \text{(propriété III.3)} \\ &= -\varepsilon \phi_\theta(r_0, q_0) \\ &= -\varepsilon m^2 F_\theta(p_0, q_0) \\ &= -\varepsilon[r_0 q_1 - \varepsilon q_0^2] \end{aligned}$$

Avec $m \neq 1$, la condition $mF_\theta(X,Y) \in \mathbb{Z}[X,Y]$ impose :

$$m^2 F_\theta(p_1, q_1) \geqslant 2$$

Soit, avec ce qui précède :

$$2 - q_0^2 \leqslant -\varepsilon r_0 q_1 = -\varepsilon r_0^2 - \varepsilon[(a+1)m + K_1 - K_2]q_0 r_0$$

Avec $-\varepsilon q_0 r_0 < 0$, il vient : $2 - q_0^2 < -\varepsilon r_0^2 \leqslant r_0^2$

Avec $|q_0| \leqslant |r_0|$, on a aussi : $-r_0^2 < 2 - r_0^2 < 2 - q_0^2 < -r_0 q_1$

On obtient donc l'inégalité :

$$-r_0^2 < -\varepsilon r_0 q_1 < r_0^2$$

Elle donne : $|q_1| < |r_0|$

Et avec : $|r_1| = |q_0|$

On trouve : $|q_1| + |r_1| < |q_0| + |r_0|$

On obtient donc une contradiction avec l'hypothèse faite au départ sur (p_0, q_0). Ceci montre que le présent cas est impossible.

(2) Si $(-\varepsilon q_0 r_0) < 0$ et $|q_0| \geqslant |r_0|$

On utilise cette fois la transformation g^{-1}, avec :

$$\begin{bmatrix} p_{-1} \\ q_{-1} \end{bmatrix} = g^{-1} \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix}$$

et $\quad r_{-1} = mp_{-1} - K_1 q_{-1}$

On a :
$$\begin{cases} q_{-1} = \varepsilon r_0 \\ r_{-1} = q_0 - \varepsilon[(a+1)m + K_1 - K_2]r_0 \end{cases}$$

Avec le Théorème III.3 : $F_\theta(p_{-1}, q_{-1}) = M(F_\theta)$

Et avec les relations vues avant :

$$\begin{aligned} m^2 M(F_\theta) &= m^2 F_\theta(p_{-1}, q_{-1}) \\ &= \Phi_\theta(r_{-1}, q_{-1}) \\ &= -\varepsilon m^2 F_\theta(p_0, q_0) \\ &= -\varepsilon \Phi_\theta(r_0, q_0) \\ &= q_0 r_{-1} - \varepsilon r_0^2 \end{aligned}$$

Avec $m \neq 1$, la condition $mF_\theta(X,Y) \in \mathbb{Z}[X,Y]$ impose :

$$mF_\theta(p_{-1}, q_{-1}) \geqslant 2$$

Soit : $2 + \varepsilon r_0^2 \leqslant q_0 r_{-1} = q_0^2 - \varepsilon[(a+1)m + K_1 - K_2]r_0 q_0$

La condition $(-\varepsilon q_0 r_0) < 0$ impose : $q_0 r_{-1} < q_0^2$

La condition $|q_0| \geqslant |r_0|$ donne : $r_0^2 \leqslant q_0^2$

Et deux cas se présentent :

a) <u>si $\varepsilon = -1$</u> On obtient : $-q_0^2 < 2 - q_0^2 \leqslant 2 - r_0^2$

Soit : $|r_{-1}| < |q_0|$

Avec : $|q_{-1}| = |r_0|$

On trouve : $|q_{-1}| + |r_{-1}| < |q_0| + |r_0|$

On obtient une contradiction avec l'hypothèse de départ avec (p_0, q_0).

b) <u>si $\varepsilon = 1$</u> On obtient $-q_0^2 < 2 + r_0^2 = 2 + \varepsilon r_0^2$

On trouve comme précédemment une contradiction.

(3) Si $(-\varepsilon q_o r_o) \geqslant 0$

On peut distinguer différents sous cas :

. si $q_o = 0$

On a alors $-\varepsilon M(F_\theta) = p_o^2 > 1$

Dans ce cas, on trouve $M(F_\theta) = 1$ et $\varepsilon = -1$

. si $r_o = 0$

On a alors $m^2 M(F_\theta) = q_o^2$

La condition $r_o = mp_o - K_1 q_o = 0$ impose avec $\text{pgcd}(m, K_1) = 1$ d'avoir m diviseur de q_o.

Il en résulte $M(F_\theta) = 1$

. si $q_o r_o \neq 0$

Dans ce cas, on a : $(-\varepsilon q_o r_o) > 0$

Ceci permet d'énoncer, toutes les vérifications complémentaires étant évidentes :

THEOREME III.6

Toute forme de MARKOFF F_θ vérifie au moins l'un des cas suivants :

Cas a : l'équation diophantienne

$$\begin{cases} F_\theta(p_o, q_o) = -\varepsilon M(F_\theta) \\ (p_o, q_o) \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

n'admet pas de solution.

Dans ce cas, l'équation :

$$\begin{cases} F_\theta(p_o, q_o) = \varepsilon M(F_\theta) \\ (p_o, q_o) \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

admet des solutions.

De plus, on a $\varepsilon = -1$ et $M(F_\theta) \neq 1$ de sorte que dans ce cas, la forme F_θ n'est pas super réduite et le nombre $\theta_2(S)$ n'est pas super réduit.

Cas b : l'équation diophantienne

$$\begin{cases} F_\theta(p_o, q_o) = -\varepsilon M(F_\theta) \\ (p_o, q_o) \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

admet des solutions.

Dans ce cas, - ou bien $M(F_\theta) = 1$

- ou bien $M(F_\theta) \neq 1$ et il existe alors une solution $(p_0, q_0) \in \mathbb{Z}^2$ telle qu'en notant $r_0 = mp_0 - K_1 q_0$, on ait :

$$\begin{cases} |q_0| + |r_0| \text{ minimum} \\ -\varepsilon q_0 r_0 > 0 \end{cases}$$

On peut examiner de façon plus précise le cas particulier où l'on a :

$$F_\theta(p_0, q_0) = -\varepsilon M(F_\theta)$$

avec $M(F_\theta) \neq 1$

et la condition $\begin{cases} |q_0| + |r_0| \text{ minimum} \\ -\varepsilon q_0 r_0 > 0 \end{cases}$

En appliquant à $\begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix}$ une puissance g^{2n} de la matrice g, on peut supposer que l'on a, pour $|n| \in \mathbb{N}$ suffisamment grand :

$$\frac{p_0}{q_0} \# \theta_2(S)$$

Dans ce cas, on ne considère plus la minimalité de :

$$|q_0| + |mp_0 - K_1 q_0|$$

Si la condition $-\varepsilon q_0 r_0 > 0$ avait encore lieu pour une infinité des valeurs de n, en la divisant par $q_0^2 > 0$, et en faisant tendre $|n|$ vers l'infini, on obtiendrait :

$$-\varepsilon (m\, \theta_2(S) - K_1) \geqslant 0$$

Soit $$-\varepsilon \sqrt{[K_1 - K_2 + m(a+1)]^2 + 4\varepsilon} \geqslant -\varepsilon [K_1 - K_2 + m(a+1)]$$

En testant les deux cas $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$, on observe qu'aucun des deux n'est possible.
En d'autres termes :

PROPRIETE III.4
On a la condition :
(γ_1) : $$-\varepsilon (m\, \theta_2(S) - K_1) < 0$$

Une démonstration directe de cette condition est faisable par les fractions continues :

Avec $\begin{cases} \theta_2(S) = [0, \underline{S^*, a}] \\ \dfrac{K_1}{m} = [0, S^*] \end{cases}$

On obtient : $\theta_2(S) - \dfrac{K_1}{m} = (-1)^{n+1} \dfrac{1}{(m[a,S^*] + m - K_2)}$

L'inégalité de la propriété III.4 en résulte avec $\varepsilon = (-1)^{n+1}$

Par le même procédé, on peut considérer :

$$\begin{cases} \dfrac{K_2 - (a+1)m}{m} = -a - \dfrac{1}{\dfrac{m}{m-K_2}} = -[a,S] \\ \overline{\theta_2(S)} = -[\underline{a,S}] \end{cases}$$

On obtient ainsi :

PROPRIETE III.5

On a la relation :

(γ_2) : $\quad -\varepsilon\,(m\,\overline{\theta_2(S)} - K_2 + (a+1)m) > 0$

Cette dernière relation est équivalente à la précédente puisque l'on a, avec l'expression de F_θ :

$$\theta_2(S) + \overline{\theta_2(S)} = \frac{K_1 + K_2 - (a+1)m}{m}$$

Elle peut aussi être écrite sous la forme :

$$-\varepsilon\,(m\,\overline{\theta_2(S)} - K_1) > \varepsilon\,(K_1 - K_2 + (a+1)m)$$

En revenant aux développements qui ont donné le Théorème III.6, ceci conduit à considérer la nouvelle condition :

$$\varepsilon\, q_0^2 (K_1 - K_2 + (a+1)m \geqslant -\varepsilon\, q_0 r_0$$

En cas d'égalité, on a : $r_0 + [(a+1)m + K_1 - K_2]q_0 = 0$

Soit : $\quad m^2 F_\theta(p_0, q_0) = \phi_\theta(r_0, q_0)$

$$= \phi_\theta(r_0 + [(a+1)m + K_1 - K_2]q_0,\ -q_0)$$

$$= -\varepsilon\, q_0^2$$

Et comme on a aussi : $[K_2 - (a+1)m]q_0 = mp_0$

On trouve que m divise q_0

Si l'on avait au départ : $F_\theta(p_0, q_0) = -\varepsilon\, M(F_\theta)$

Il en résulterait : $M(F_\theta) = 1$

Comme on s'intéresse à la situation $M(F_\theta) \neq 1$, on peut se limiter à ne considérer que l'inégalité stricte.

On va maintenant étudier l'interprétation géométrique des conditions :

$$\begin{cases} -\varepsilon\, q_0 r_0 > 0 \\ \varepsilon\, q_0^1[(a+1)m + K_1 - K_2] > -\varepsilon\, q_0 r_0 \end{cases}$$

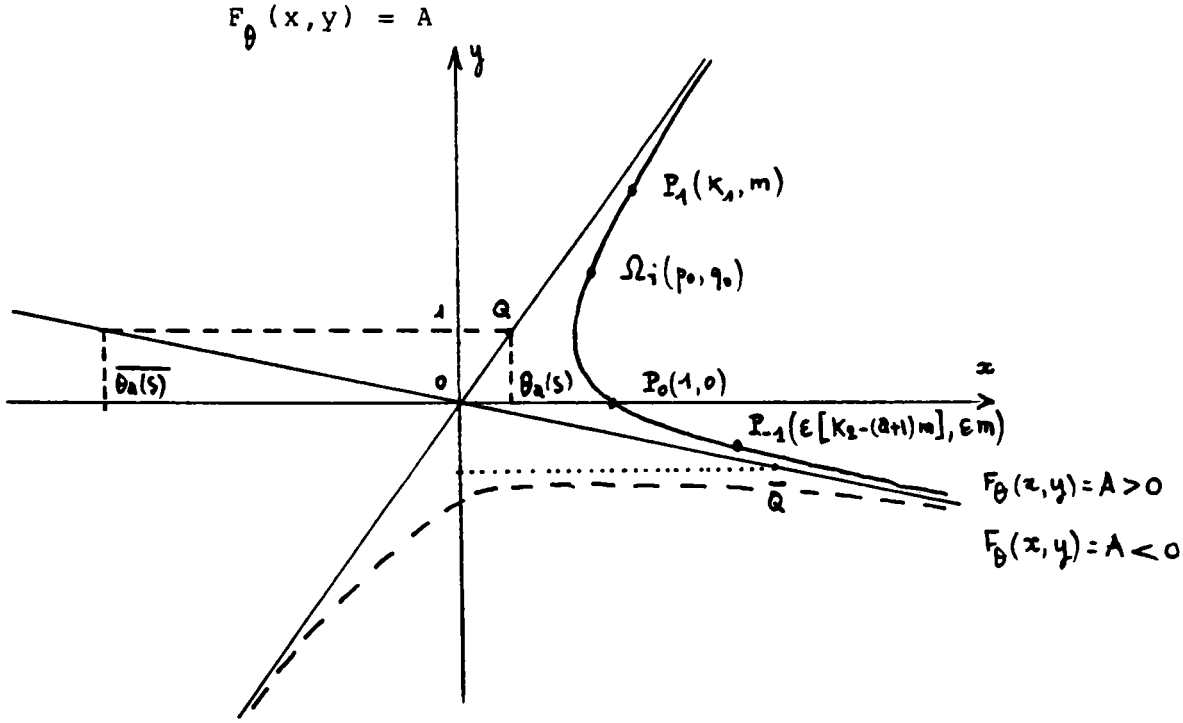
D.3 - Interprétations géométriques

Deux situations se présentent selon la valeur de ε .

. Cas 1 : $\varepsilon = -1$

On considère la famille des hyperboles d'équation :

$$F_\theta(x,y) = A$$



Par le Théorème I.8, on a : $F_\theta(K_1, m) = -\varepsilon = 1$

La valeur de ε permet de situer le point $P_1(K_1, m)$ dans la figure précédente, et donc la droite OP_1 d'équation :

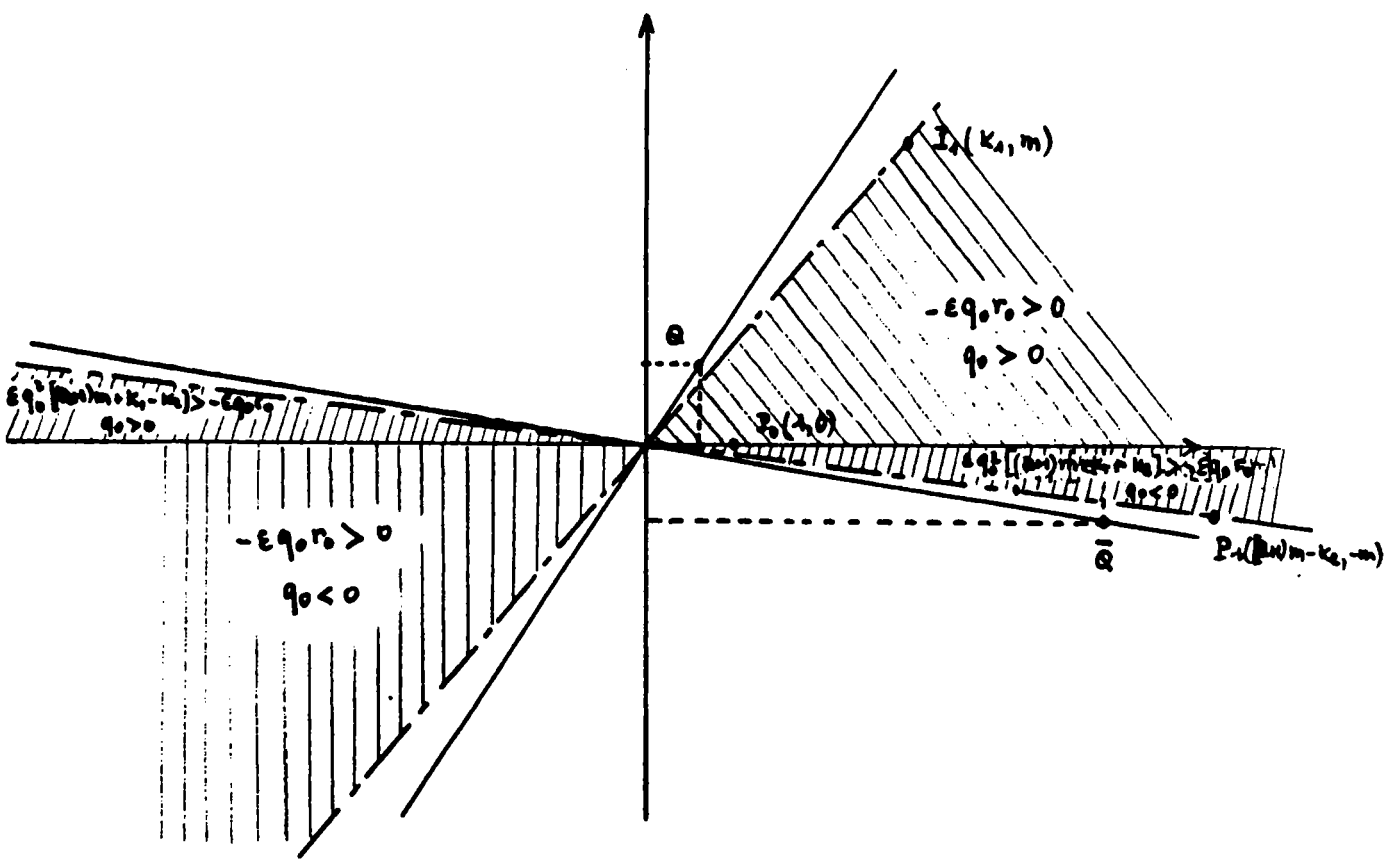
$$-\varepsilon\,(mx - K_1 y) = (mx - K_1 y) = 0$$

La condition $-\varepsilon\ (m\ \theta_2(S) - K_1) < 0$ situe le point $Q(\theta_2(S),1)$ par rapport à cette droite.
Si l'on considère alors un point $\Omega_i(p_0, q_0)$ tel que l'on ait $q_0 > 0$, on peut interpréter la condition :

$$-\varepsilon\ q_0 r_0 = -\varepsilon\ q_0(mp_0 - K_1 q_0) > 0$$

Elle donne : $$-\varepsilon\ (mp_0 - K_1 q_0) > 0$$

Le point $\Omega_i(p_0, q_0)$ n'est pas situé dans le même demi plan limité par la droite OP_1 que $Q(\theta_2(S),1)$.
Si l'on a au contraire $q_0 < 0$, on a : $-\varepsilon\ (mp_0 - K_1 q_0) < 0$.
Le point $\Omega_i(p_0, q_0)$ est situé dans le même demi plan que $Q(\theta_2(S),1)$.
On obtient ainsi la figure suivante :



De même, par le Théorème I.8 : $F_0(K_2 - (a+1)m, m) = -\varepsilon$
Ceci permet de situer le point $P_{-1}(\varepsilon[K_2 - (a+1)m], \varepsilon\ m)$ et donc la droite OP_{-1} d'équation :

$$mx - (K_2 - (a+1)m)y = 0 = (mx - K_1 y) + (K_1 - K_2 + (a+1)m)y$$

Situer le point $\bar{Q}(\varepsilon\ \overline{\theta_a(S)}, \varepsilon)$ par rapport à la droite OP_{-1} revient à considérer le signe du nombre :

$$\varepsilon m\ \overline{\theta_a(S)} - \varepsilon [K_2 - (a+1)m]$$
$$= \varepsilon (m\ \overline{\theta_a(S)} - K_1) + \varepsilon (K_1 - K_2 + (a+1)m) < 0$$

Ce signe est négatif puisque $\bar{Q}$ n'est pas dans le même demi plan limité par OP_{-1} que le point $P_0(1,0)$ pour lequel le signe est positif.

Si l'on considère alors un point $\Omega_i(p_0, q_0)$ tel que l'on ait $q_0 < 0$, on peut interpréter la condition :

$$\varepsilon q_0^2 [(a+1)m + K_1 - K_2] > -\varepsilon q_0 r_0 = -\varepsilon q_0 (mp_0 - K_1 q_0)$$

Elle s'écrit : $(mp_0 - K_1 q_0) + (K_1 - K_2 + (a+1)m) q_0 > 0$

Le point $\Omega_i(p_0, q_0)$ est situé dans le même demi plan limité par la droite OP_{-1} que P_0.

Si au contraire, $q_0 > 0$, on trouve :

$$(mp_0 - K_1 q_0) + (K_1 - K_2 + (a+1)m) q_0 < 0$$

Le point $\Omega_i(p_0, q_0)$ est dans le demi plan limité par OP_{-1} ne contenant pas P_0.

En remarquant encore que l'on a :

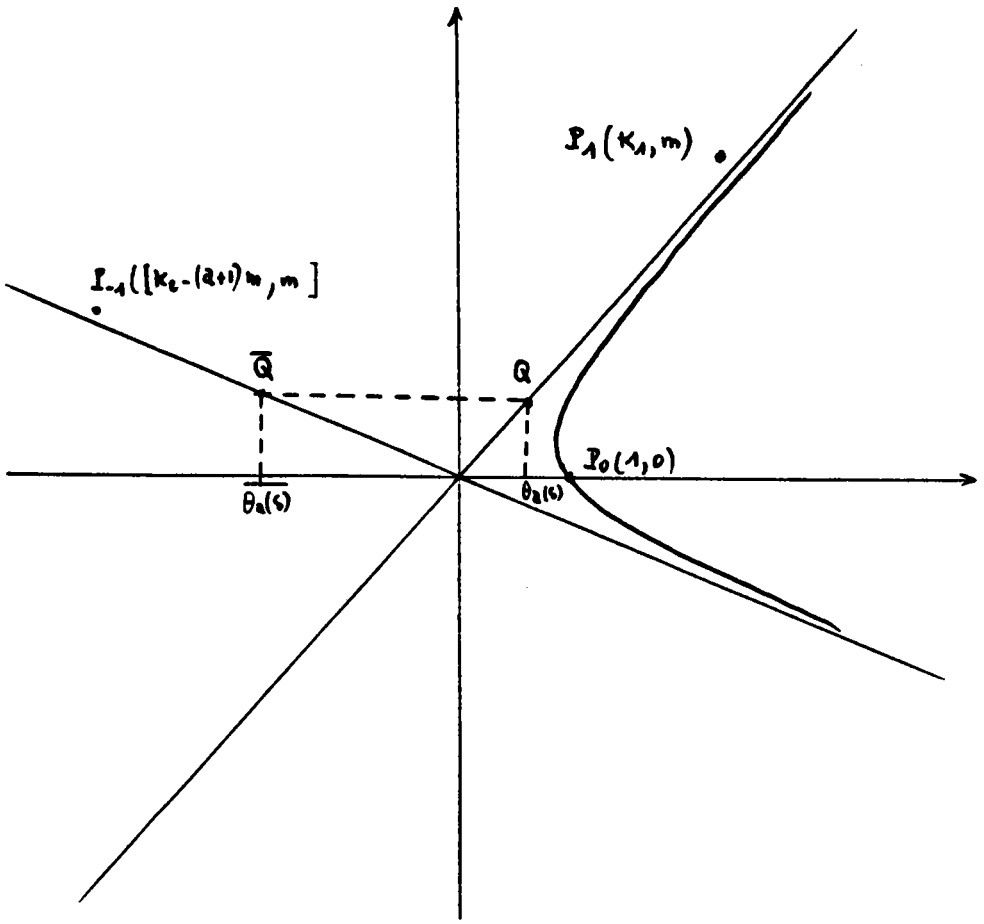
$$\begin{cases} g^{-1}(P_0) = P_{-1} \\ g(P_0) = P_1 \end{cases}$$

on déduit de $\varepsilon = -1$ que si l'équation $F_\theta(p_0, q_0) = -\varepsilon M(F_\theta) = M(F_\theta)$ admet des solutions, il en existe tel que le point correspondant $\Omega_i(p_0, q_0)$ soit dans l'angle (OP_0, OP_1) avec $-\varepsilon q_0 r_0 \geqslant 0$ (ou respectivement dans l'angle (OP_{-1}, OP_0) avec la condition $\varepsilon q_0^2 [(a+1)m + K_1 - K_2] \geqslant -\varepsilon q_0 r_0$).

Notons aussi, puisque P_1, P_0 et P_{-1} sont sur le polygone de KLEIN qui est convexe, que l'on a alors $0 \leqslant q_0 < m$ (respectivement $-m < q_0 \leqslant 0$) et $0 < p_0 < K_1$ (respectivement $(a+1)m - K_2 < p_0 < 0$).

. Cas 2 : $\varepsilon = 1$

On a alors la situation suivante :



Par le Théorème I.8, on a :

$$\begin{cases} F_\theta(K_1,m) = -\varepsilon = -1 \\ F_\theta(\varepsilon[K_2-(a+1)m]\,;\,\varepsilon m) = -\varepsilon = -1 \end{cases}$$

Ceci permet de situer les deux points $P_1(K_1,m)$ et $P_{-1}([K_2-(a+1)m],m)$ par rapport aux asymptotes des hyperboles.
La droite OP_1 a pour équation : $-\varepsilon(mx - K_1y) = 0$
La condition $-\varepsilon(m\,\theta_a(S) - K_1) = -(m\,\theta_a(S) - K_1) < 0$ situe le point $Q\,(\theta_a(S),1)$ par rapport à cette droite.
La condition $-\varepsilon(m\,\overline{\theta_a(S)} - K_1) > \varepsilon(K_1 - K_2 + (a+1)m)$ situe de même le point $\overline{Q}\,(\overline{\theta_a(S)},1)$ par rapport à OP_{-1}.

Ceci permet encore l'interprétation géométrique des deux conditions :

$$\begin{cases} -\varepsilon\, q_0 r_0 > 0 \\ \varepsilon\, q_0^2[(a+1)m + K_1 - K_2] > -\varepsilon\, q_0 r_0 \end{cases}$$

En se limitant à $q_0 > 0$, la première s'écrit : $-\varepsilon(mp_0 - K_1 q_0) > 0$
Le point $\Omega_i(p_0,q_0)$ se trouve dans le demi plan limité par OP_1 ne contenant pas Q.

La seconde correspond de même à des points $\Omega_i(p_o, q_o)$ se trouvant dans le demi plan limité par OP_{-1}, ne contenant pas $\overline{Q}$.
En remarquant encore que l'on a :

$$\begin{cases} g^{-1}(P_o) = P_{-1} \\ g(P_o) = P_1 \end{cases}$$

on déduit de $\varepsilon = 1$ que si l'équation $F_\theta(p_o, q_o) = -\varepsilon M(F_\theta) = -M(F_\theta)$ admet des solutions, il en existe tel que le point correspondant $\Omega_i(p_o, q_o)$ soit dans l'angle (OP_1, OP_{-1}) avec la condition :

$$\varepsilon q_o^2[(a+1)m + K_1 - K_2] > -\varepsilon q_o r_o \geqslant 0$$

Notons aussi, puisque P_1 et P_{-1} sont sur le polygone de KLEIN qui est convexe que l'on a alors : $0 < q_o \leqslant m$ et $K_2 - (a+1)m < p_o \leqslant K_1$
Dans le cas limite où $q_o = m$: $p_o = K_1$ et $r_o = 0$
Ceci permet d'énoncer, les vérifications complémentaires étant évidentes avec ce qui précède :

THEOREME III.7

Soit F_θ une forme de MARKOFF permettant de définir les points $P_1(K_1, m)$, $P_0(1,0)$ et $P_{-1}(\varepsilon[K_2 - (a+1)m], \varepsilon m)$.
Si l'équation diophantienne $F_\theta(p_o, q_o) = -\varepsilon M(F_\theta)$ admet des solutions, il en existe tel que le point correspondant $\Omega_i(p_o, q_o)$ soit situé sur le bord du polygone de KLEIN défini par F_θ entre P_{-1} et P_1.
De façon plus précise, on peut supposer que l'on a : $q_o \geqslant 0$
et les conditions suivantes pour Ω_i, où $r_o = mp_o - K_1 q_o$:

(1) Si $\varepsilon = -1$

$$\begin{cases} -\varepsilon q_o r_o \geqslant 0 \geqslant \varepsilon q_o^2[(a+L)m + K_1 - K_2] \\ 0 \leqslant q_o < m \quad \text{et} \quad 0 \leqslant p_o < K_1 \end{cases}$$

(2) Si $\varepsilon = 1$

$$\begin{cases} \varepsilon q_o^2[(a+1)m + K_1 - K_2] > -\varepsilon q_o r_o \geqslant 0 \\ 0 < q_o \leqslant m \quad \text{et} \quad K_2 - (a+1)m < p_o \leqslant K_1 \end{cases}$$

avec si $q_o = m$ les conditions $p_o = K_1$ et $r_o = 0$

D.4 - Valeurs négatives représentées par F_θ. Maximum négatif A_θ

On convient de poser :

DEFINITION
Pour toute forme de MARKOFF F_θ, on note $A_\theta < 0$ le plus grand nombre négatif représenté par F_θ. On pose aussi $A_\theta = \frac{N_\theta}{m}$.

Dans ces conditions, si l'on a : $-M(F_\theta) < A_\theta < 0$
on peut trouver $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $0 < |F_\theta(x,y)| = |A_\theta| < M(F_\theta)$
On obtient une contradiction avec la définition de $M(F_\theta)$ qui garantit en retour que l'on a :

THEOREME III.8
Pour toute forme de MARKOFF F_θ, on a :

$$A_\theta \leqslant -M(F_\theta) < 0$$

De plus, l'égalité $A_\theta = -M(F_\theta)$ est assurée si et seulement si l'équation diophantienne $F_\theta(x,y) = -M(F_\theta)$ $((x,y) \in \mathbb{Z}^2)$ admet des solutions.

Selon la valeur de ε, on va voir que la réponse à la question de savoir si $A_\theta = -M(F_\theta)$ est diverse.

. Cas 1 : $\varepsilon = -1$

Il est possible d'avoir $A_\theta = -M(F_\theta)$ comme par exemple dans le cas de la Théorie de MARKOFF classique.
Il est aussi possible d'avoir : $A_\theta \neq -M(F_\theta)$.

Exemple
Pour $a = 3$ $\quad m = 46$ $\quad l = 10$ $\quad K_1 = 17$ $\quad K_2 = 27$

On trouve : $\quad F_\theta(X,Y) = X^2 + \frac{140}{46} XY - \frac{58}{46} Y^2$

$S = (2,2,1,2) \in L_3$ et $M(F_\theta) = 1$

Dans ce cas, on a $A_\theta = -\frac{56}{46} < -1 = -M(F_\theta)$

Ceci permet d'énoncer :

THEOREME III.9 (Cas où $\varepsilon = -1$)
Soit F_θ une forme de MARKOFF telle que $\varepsilon = -1$, l'inégalité $A_\theta \leq - M(F_\theta)$ peut être une égalité ou une inégalité stricte selon que F_θ représente ou non $- M(F_\theta) = \varepsilon M(F_\theta)$.
Les deux cas peuvent effectivement se produire.
Dans tous les cas, la forme F_θ représente A_θ, avec une relation $F(k_1, m_1) = A_\theta$.
Et l'on peut faire en sorte que cette égalité corresponde à une relation de MARKOFF généralisée où $A_\theta < 0$, $m > 0$, $m_1 > 0$ et $m_2 > 0$:

$$(M_1) : (-A_\theta)m^2 + m_1^2 + m_2^2 = (a+r+1)mm_1m_2$$

Les vérifications complémentaires se font grâce à l'interprétation géométrique qui a donné le Théorème III.7, avec $p_0 = k_1$, $q_0 = m_1$ $\varepsilon_1 = 1$, $m_2 = - r_0$, $\varepsilon_2 = - \varepsilon = 1$.
En particulier, dans les cas où $A_\theta = -1$, par exemple si $S \in L_2$ et $A_\theta = - M(F_\theta)$, cette équation de MARKOFF se réduit à (M_1) :

$$m^2 + m_1^2 + m_2^2 = (a+r+1)mm_1m_2$$

Ce cas est celui que l'on rencontre dans le cas de la Théorie de MARKOFF classique. Mais il n'est pas général.

· Cas 2 : $\varepsilon = 1$

En appliquant le Théorème III.6 (cas a) avec $\varepsilon = 1$, on trouve une impossibilité car celui ci impose $\varepsilon = -1$.
L'équation diophantienne $F_\theta(p_0, q_0) = - \varepsilon M(F_\theta) = - M(F_\theta)$ admet donc toujours des solutions, de sorte que dans ce cas, on a :

$$A_\theta = - M(F_\theta)$$

Avec la relation donnée par le Théorème III.3, il en est de même de l'équation diophantienne $F_\theta(p, q) = M(F_\theta)$.
On peut ainsi énoncer :

THEOREME III.10 (Cas où $\varepsilon = 1$)

Si F_θ est une forme de MARKOFF pour laquelle on a $\varepsilon = 1$, alors :

$$0 > A_\theta = - M(F_\theta) \geqslant -1$$

Dans ce cas, les deux équations diophantiennes :

$$\begin{cases} F_\theta(x,y) = - M(F_\theta) = - \varepsilon M(F_\theta) & (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \\ F_\theta(x,y) = M(F_\theta) \end{cases}$$

admettent toutes deux des solutions.

Dans tous les cas, la forme F_θ représente $A_\theta = - \varepsilon M(F_\theta)$ avec une relation $F_\theta(k_1, m_1) = A_\theta = - \varepsilon M(F_\theta)$.

On peut faire en sorte que cette égalité corresponde à une relation de MARKOFF généralisée (M_1) : $M(F_\theta)m^2 - m_1^2 + m_2^2 = (a+r+1)mm_1m_2$

$$\text{avec :} \quad \begin{cases} m \geqslant m_1 > 0 \\ mm_1[a+r+1] > m_2 \geqslant 0 \\ K_1 \geqslant k_1 > K_2 - (a+1)m \end{cases}$$

(Dans le cas limite où $m = m_1$, on a $m_2 = 0$ et $k_1 = K_1$)

En particulier, si $S \in L_2$, on trouve $A_\theta = -1$ et cette relation diophantienne se réduit à :

$$(M_1) : \qquad m^2 - m_1^2 + m_2^2 = (a+r+1)mm_1m_2$$

Les vérifications complémentaires se font grâce au Théorème III.7 en posant $p_0 = k_1$ $q_0 = m_1$ $\varepsilon_1 = 1$ et $m_2 = -r_0$.

La condition $m > 0$ est donnée par construction.

La condition $m_1 > 0$ peut aisément être obtenue d'après l'interprétation géométrique vue ci-dessus.

Avec $\varepsilon_1 = 1$, on a $\varepsilon_2 = - \varepsilon = -1$.

Les conditions $m \geqslant m_1 > 0$ et $m_2 \geqslant 0$ sont alors assurées si l'on fait en sorte que le point $\Omega_j(k_1, m_1)$ soit situé dans l'angle (OP_1, OP_{-1}).

Dans ce cas : $m_2 = - (mk_1 - K_1 m_1) \geqslant 0$.

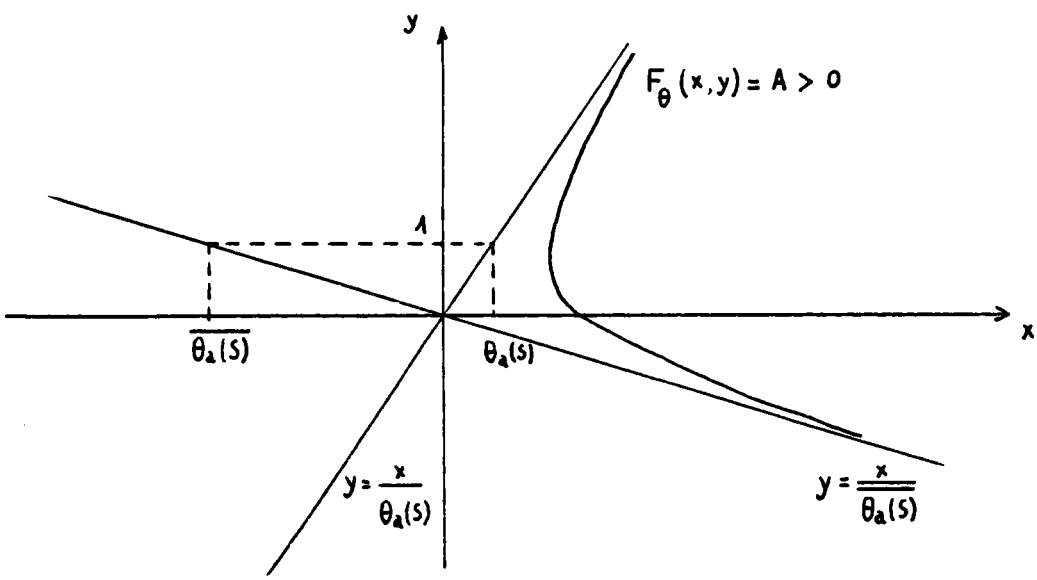
Dans la suite, on donne un algorithme qui, basé sur les considérations géométriques qui précèdent permet le calcul effectif des valeurs $M(F_\theta)$ et A_θ à partir de la donnée de $a, m, 1, K_1, K_2$.

E / ALGORITHME DE DETERMINATION DE $M(F_\theta)$ ET A_θ

On s'intéresse à l'ensemble des hyperboles d'équation :

$$F_\theta(x,y) = A = x^2 + \left[\frac{m(a+1) - K_1 - K_2}{m}\right] xy + \left[\frac{1 - (a+1)K}{m}\right] y^2$$

Avec la représentation déjà vue :



Supposons pour commodité $a \neq 1$.

- Dans le cas où n est pair, la période de la racine $\theta_a(S)$ de $F_\theta(X,1)$ a un nombre pair d'éléments ($\varepsilon = -1$).

Le groupe des relations hyperboliques est engendré par :

$$\begin{bmatrix} K_1 & ; & (a+1)K_1 - 1 \\ m & ; & (a+1)m - K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_S^* \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant alors les points du polygone de KLEIN construits avec $\theta_a(S)^{-1} = [\underline{S^*, a}] \geqslant 1$

$$\begin{cases} \Omega_0(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Omega_{-1}(1,0) \\ \Omega_1(1, a_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Omega_{-1}(1,0) \\ \Omega_2(a_{n-1},\ a_n a_{n-1} + 1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Omega_{-1}(1,0) \\ \cdots \\ \Omega_n(K_1 - 1\ ;\ m - K_2) \\ \Omega_{n+1}(K_1, m) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{S^*} \quad \Omega_{-1}(1,0) = \begin{bmatrix} K_1 & ; & K_1 - 1 \\ m & ; & m - K_2 \end{bmatrix} \Omega_{-1}(1,0) \end{cases}$$

et ceux construits avec $\overline{\theta_a(S)}^{-1} = [-1, 1, a-1, \underline{S, a}] \in\ ]-1, 0[$

$$\begin{cases} \Omega_{-1}(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Omega_0(0,1) \\ \Omega_{-2}(-a,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \Omega_0(0,1) \\ \Omega_{-3}(a_0 a + 1\ ,\ -a_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \Omega_0(0,1) \\ \cdots \\ \Omega_{-n-3}(\varepsilon_1\varepsilon_2[(a+1)m - K_2]; -\varepsilon_1\varepsilon_2 m) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(M_{S^*} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \Omega_0(0,1) \end{cases}$$

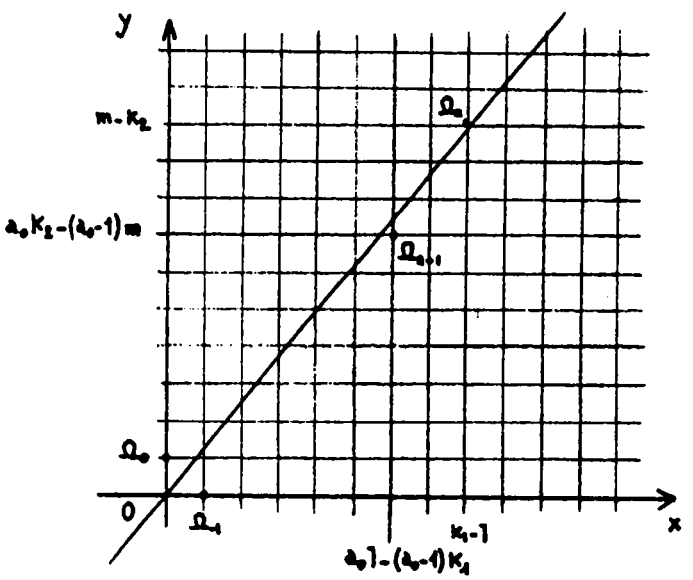
Et avec la remarque que l'on a :

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Omega_{-1}(1,0) = \Omega_{-1}(1,0)$$

On trouve : $\begin{cases} \Omega_{n+1} = \begin{bmatrix} K_1 & (a+1)K_1 - 1 \\ m & (a+1)m - K_2 \end{bmatrix} \Omega_{-1} \\ \Omega_{-1} = \begin{bmatrix} K_1 & (a+1)K_1 - 1 \\ m & (a+1)m - K_2 \end{bmatrix} \Omega_{-n-3} \end{cases}$

Des valeurs négatives A, et donc la valeur A_0 sont déterminées sur les points $\Omega_0, \Omega_2, \ldots, \Omega_{2j}$ où $j = \frac{n}{2}$.

Des valeurs positives A, et donc la valeur $M(F_0)$ sont déterminées sur les points $\Omega_{-1}, \Omega_1, \Omega_3, \ldots, \Omega_{2j-1}$.
On peut alors faire la figure suivante :



En posant $\frac{m}{m - K_2} = [S] = a_0 + x \qquad (x \geqslant 0)$

On trouve $\qquad a_0 K_2 - (a_0 - 1)m = (m - K_2)x \geqslant 0$

D'où l'expression des coordonnées du point Ω_{n-1}.
En situant l'un par rapport à l'autre les points Ω_n et Ω_{n-1}, on trouve :

$$\begin{cases} [a_0] - (a_0 - 1)K_1] \leqslant [K_1 - 1] \\ [a_0 K_2 - (a_0 - 1)m] \leqslant [m - K_2] \end{cases}$$

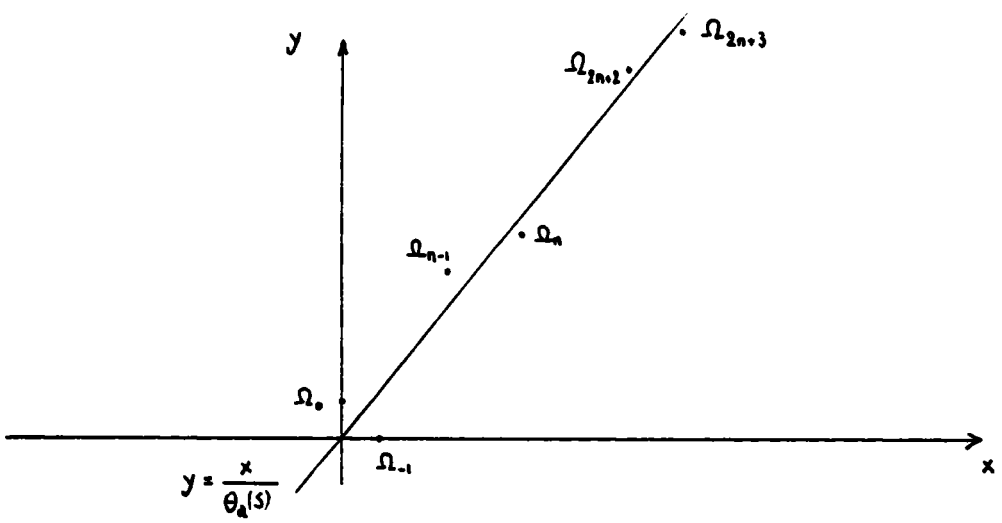
Et ainsi de suite avec les points Ω_i et Ω_{i-1} $(0 \leqslant i \leqslant n)$.
Il en résulte que des valeurs A positives ou négatives, et donc les valeurs A_0 et $M(F_0)$ sont obtenues sur les points entiers distincts de (0,0) du rectangle de diagonale $O\Omega_n$, caractérisé par les inégalités :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant K_1 - 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant m - K_2 \end{cases}$$

- Dans le cas où n est impair, la période de la racine $\theta_a(S)$ de $F_\theta(X,1)$ a au contraire un nombre impair d'éléments ($\varepsilon = 1$). La forme $mF_\theta(X,Y)$ représente alors -1.
Le groupe des rotations hyperboliques est engendré par :

$$\begin{bmatrix} K_1 & ; & (a+1)K_1 - 1 \\ m & ; & (a+1)m - K_2 \end{bmatrix}^2$$

On peut considérer comme avant les points Ω_i, avec cette fois la disposition :



On trouve :

$$\Omega_{2n+3} = \begin{bmatrix} K_1 & (a+1)K_1 - 1 \\ m & (a+1)m - K_2 \end{bmatrix}^2 \Omega_{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} K_1 & (a+1)K_1 - 1 \\ m & (a+1)m - K_2 \end{bmatrix} \Omega_{n+1}$$

Avec :

$$\Omega_{2n+2}([(a+1)K_1 - 1][m - K_2] + K_1[K_1 - 1] \; ; \; [(a+1)m - K_2](m-K_2) + m(K_1 - 1))$$

Il suffit alors de considérer tous les points entiers (x,y) distincts de (0,0) du rectangle de diagonale $0\Omega_{2n+2}$ caractérisé par les inégalités :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant [(a+1)K_1 - 1][m - K_2] + K_1[K_1 - 1] \\ 0 \leqslant y \leqslant [(a+1)m - K_2][m - K_2] + m[K_1 - 1] \end{cases}$$

On détermine sur l'un d'eux la valeur A_θ , qui en l'occurrence vaut : $A_\theta = - \dfrac{m_a(S)}{m} = -M(F_\theta)$

On trouve aussi ainsi $M(F_\theta) = - A_\theta$.
Mais le rectangle que l'on considère ainsi contient celui que l'on mettait en évidence pour le cas n pair.
Une vérification directe étant de plus faisable pour le cas a = 1, on peut énoncer :

THEOREME III.11(Calcul des valeurs extrêmes d'une forme de MARKOFF)
Pour toute forme de MARKOFF :

$$F_\theta(X,Y) = X^2 + \left[\frac{m(a+1) - K_1 - K_2}{m}\right]XY + \left[\frac{\rceil - (a+1)K_1}{m}\right]Y^2$$

les deux valeurs extrêmes $M(F_\theta)$ et A_θ sont obtenues sur un point entier $(x,y) \neq (0,0)$ du rectangle déterminé par les deux inégalités :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant [(a+1)K_1 - \rceil][m - K_2] + K_1[K_1 - \rceil] \\ 0 \leqslant y \leqslant [(a+1)m - K_2][m - K_2] + m[K_1 - \rceil] \end{cases}$$

De plus :
(1) Si n pair ($\varepsilon = -1$)
La valeur A_θ est obtenue sur un point entier $(x,y) \neq (0,0)$ du rectangle :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant K_1 - \rceil \\ 0 \leqslant y \leqslant m - K_2 \end{cases}$$

Ceci correspond à un des points Ω_0 , Ω_2 , ... , Ω_n .
Dans ce cas, il existe $(x,y) = (k_1, m_1)$ vérifiant les conditions précédentes tel que $F_\theta(k_1, m_1) = A_\theta$.
De même, la valeur $M(F_\theta)$ est obtenue sur l'un des points Ω_1, Ω_3, ... Ω_{n-1}, du rectangle considéré ci-dessus.
(2) Si n impair ($\varepsilon = 1$)
On a alors : $A_\theta = - M(F_\theta)$

La valeur A_θ est alors obtenue sur l'un des points entiers :

$$\Omega_0 , \Omega_2 , \ldots , \Omega_{n-1} , \ldots , \Omega_{2n+2}$$

Il se peut par contre qu'elle ne soit obtenue sur aucun des points $\Omega_0 , \Omega_2 , \ldots , \Omega_{n-1}$.

La partie (2) du résultat précédent peut être illustrée par un exemple :

Exemple : Dans la (2,0,1) Théorie, avec les valeurs :

$a = 2$

$m = 12$

$K_1 = K_2 = 5$ soit $r = 0$

$l = 2$

$S^* = (2,2,1,1)$ $n = 3$ soit $\varepsilon = (-1)^{n+1} = 1$

On trouve $12.F_\theta(X,Y) = 12X^2 - 26XY - 13Y^2$

et $A_\theta = -1$

Cette valeur est atteinte pour les deux couples :

$(x,y) = (5,12)$

$(x,y) = (31,74)$

Tous deux sont dans le plus grand rectangle donné par le Théorème III.11

$0 < x < 106$

$0 < y < 253$

Par contre aucun des deux n'est situé dans le rectangle :

$0 \leqslant x \leqslant K_1 - l = 3$

$0 \leqslant y \leqslant m = 12$

Aucun ne correspond donc à l'un des points $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{n-1}$.

Le Théorème III.11 permet de déterminer explicitement les deux valeurs A_θ et $M(F_\theta)$.
En réalité, il peut être affiné pour la mise au point d'un algorithme permettant le calcul rapide des coordonnées des points adéquats.

- Cas où n pair ($\varepsilon = -1$)

On utilise les deux points :

$$\begin{cases} \Omega_n(K_1 - l, m - K_2) = \Omega_n(P_n, Q_n) \\ \Omega_{n+1}(K_1, m) = \Omega_{n+1}(P_{n+1}, Q_{n+1}) \end{cases}$$

Avec ceux-ci, on écrit :

$$\Omega_{n+1} = \begin{bmatrix} P_{n+1} & ; & P_n \\ Q_{n+1} & ; & Q_n \end{bmatrix} \Omega_{-1} \qquad \text{soit } \Omega_{n+1}(P_{n+1}, Q_{n+1})$$

$$\Omega_n = \begin{bmatrix} P_n & ; & P_{n-1} \\ Q_n & ; & Q_{n-1} \end{bmatrix} \Omega_{-1} \qquad \text{soit } \Omega_n(P_n, Q_n)$$

où l'on a :

$$\begin{bmatrix} P_{n+1} & ; & P_n \\ Q_{n+1} & ; & Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} \\ Q_n & Q_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 P_n + P_{n-1} & ; & P_n \\ a_0 Q_n + Q_{n-1} & ; & Q_n \end{bmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} P_{n-1} = P_{n+1} - a_0 P_n \\ Q_{n-1} = Q_{n+1} - a_0 Q_n \end{cases}$$

avec par transposition l'expression :

$$a_0 = \left[\!\left[\frac{P_{n+1}}{P_n} \right]\!\right] = \left[\!\left[\frac{Q_{n+1}}{Q_n} \right]\!\right] \text{ partie entière de } \frac{P_{n+1}}{P_n} \text{ et } \frac{Q_{n+1}}{Q_n}$$

Et réitérant ce calcul à partir de Ω_n et Ω_{n-1} et ainsi de suite, on a finalement la règle algorithmique générale pour $0 \leqslant i \leqslant n+1$:

$$\begin{cases} P_{i-1} = P_{i+1} - \left[\!\left[\frac{P_{i+1}}{P_i} \right]\!\right] P_i \\ Q_{i-1} = Q_{i+1} - \left[\!\left[\frac{Q_{i+1}}{Q_i} \right]\!\right] Q_i \end{cases}$$

Celle-ci donne les coordonnées de tous les points $\Omega_i (P_i, Q_i)$ et permet le calcul des valeurs de la forme F_θ en ces points. On en déduit facilement les expressions A_θ et $M(F_\theta)$.

- <u>Cas où n est impair</u> ($\varepsilon = 1$)

La détermination de A_θ peut être faite par le même algorithme à partir des deux points :

$$\begin{cases} \Omega_{2n+3}\,(K_1[(a+1)m + K_1] - m\,] \; ; \; m[(a+1)m + K_1] - mK_2) \\ \Omega_{2n+2}\,([(a+1)K_1 - 1\,](m - K_2) + K_1(K_1 - 1\,) \; ; \; [(a+1)m - K_2\,] + m(K_1 - 1\,)) \end{cases}$$

On peut aussi procéder, d'après le Théorème III.3 à partir seulement de Ω_n et Ω_{n+1} en comparant l'inverse de la plus petite valeur positive trouvée à la plus grande valeur négative trouvée sur les points Ω_i $(0 \leqslant i < n+1)$.
La procédure précédente a été automatisée sur un programme informatique baptisé "EXTREMUM". Il calcule en fonction des paramètres $a, m, K_1, K_2, \varepsilon = (-1)^{n+1}$ qui lui sont fournis les valeurs $M(F_\theta)$, A_θ et les couples (k_1, m_1) associés.

Exemple

$a = 2$ $\quad m = 985$ $\quad \varepsilon = -1$

$K_1 = 408$ $\quad K_2 = 408$ $\quad \rho = 169$

$f(X,Y) = 985\ X^2 + 2139\ X.Y - 1055\ Y^2$

$k_1 = 408$	$m_1 = 985$	$a_0 = 1$	$f(x,y) = 985$
$k_1 = 239$	$m_1 = 577$	$a_1 = 1$	$f(x,y) = -1393$
$k_1 = 169$	$m_1 = 408$	$a_2 = 2$	$f(x,y) = 1393$
$k_1 = 70$	$m_1 = 169$	$a_3 = 2$	$f(x,y) = -985$
$k_1 = 29$	$m_1 = 70$	$a_4 = 2$	$f(x,y) = 1055$
$k_1 = 12$	$m_1 = 29$	$a_5 = 2$	$f(x,y) = -1043$
$k_1 = 5$	$m_1 = 12$	$a_6 = 2$	$f(x,y) = 1045$
$k_1 = 2$	$m_1 = 5$	$a_7 = 2$	$f(x,y) = -1045$
$k_1 = 1$	$m_1 = 2$	$a = 2$	$f(x,y) = 1043$
$k_1 = 0$	$m_1 = 1$		$f(x,y) = -1055$

soit $A_\theta = -1$

et $M(F_\theta) = 1$

Ce meme programme, à partir de l'expression $M(F_\theta) = \dfrac{m_a(S)}{m}$ permet le calcul explicite de la valeur $m_a(S)$, calcul que l'on faisait antérieurement par le programme "SEQUENCE".
Il permet aussi, à partir de l'expression A_θ, d'expliciter complètement les relations de MARKOFF (M_1) données dans les Théorèmes III.9 ou III.10.
On peut vouloir, à partir de celles-ci, constituer un développement comparable à celui présenté dans CASSELS [5]. Mais on verra, à l'occasion de l'examen de la (2,0,1) Théorie, que cette approche ne peut être adoptée sans précaution ; l'équation possédant trop de solutions par rapport à ce que l'on cherche à faire.

IV. CONSTRUCTIONS DE SUITES DEDUITES DE S - REPRESENTATIONS ET DEFINITIONS ASSOCIEES

A / PREMIERE CONSTRUCTION

Pour une forme de MARKOFF F_θ , les relations obtenues précédemment entre $\theta_a(S)$ et $\overline{\theta_a(S)}$ suggèrent de considérer les nombres :

$$\begin{cases} K_1' = K_2 - (a+1)m \\ K_2' - (a+1)m = K_1 \end{cases}$$

Cependant, avec les conditions du départ :

$$\begin{cases} 0 < K_1 \leqslant m \\ 0 \leqslant K_2 < m \end{cases}$$

On obtient : $\begin{cases} -(a+1)m \leqslant K_1' < -am \\ (a+1)m < K_2' \leqslant (a+2)m \end{cases}$

On doit donc plutôt considérer les nombres :

$$\begin{cases} \overline{K_1} = K_1' + (a+1)m = K_2 \\ \overline{K_2} = K_2' - (a+1)m = K_1 \end{cases}$$

Dans $\mathbb{Z}$, les conditions :

$$\begin{aligned} m\,l &= K_1 K_2 + (-1)^n \\ m\,\overline{l} &= \overline{K_1}\,\overline{K_2} \pm 1 \\ &= K_1 K_2 \pm 1 \in \{ m\,l - 2 \, , \, m\,l \, , \, m\,l + 2 \} \end{aligned}$$

imposent, hors le cas particulier où m = 2, la contrainte :

$$\overline{l} = l$$

En posant $\overline{S} = (b_0, \ldots b_i)$ on suppose que l'on a :

$$\begin{bmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} b_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{m} & ; & \overline{K_1} \\ \overline{m} - \overline{K_2} & ; & \overline{K_1} - \overline{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & ; & K_2 \\ m - K_1 & ; & K_2 - l \end{bmatrix} = M_{\overline{S}}$$

On compare à M_S

En transposant cette dernière matrice

et avec les produits :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & ; & m - K_2 \\ K_1 & ; & K_1 - l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & ; & m - K_2 \\ m - K_1 & ; & m - K_2 - K_1 + l \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m & ; & m - K_2 \\ m - K_1 & ; & m - K_2 - K_1 + l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & ; & K_2 \\ m - K_1 & ; & K_2 - l \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_n - 1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{n-1} & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix}a_0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}b_0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix}b_{i-1} & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_i - 1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Le calcul des déterminants donne :

$$(-1)^n = (-1)^i$$

Les deux nombres n et i sont donc de même parité.
L'application de ces deux matrices à ∞ donne :

$$[1, a_n - 1\ ,\ a_{n-1}\ ,\ \ldots\ a_0] = [b_0\ ,\ b_1 \ldots,\ b_{i-1}\ ,\ b_i - 1, 1]$$

D'où plusieurs possibilités résumées par le tableau suivant :

	$a_n = 1$ soit $b_0 > 1$	$a_n > 1$ soit $b_0 = 1$
$b_i = 1$ soit $a_0 > 1$	<u>Cas 1</u> : $i = n$ $b_0 = a_{n-1} + 1$; $b_1 = a_{n-2}$; ... $b_{n-1} = a_0 - 1$, $b_n = 1$ soit $b_0 > 1$ et $a_0 > 1$	<u>Cas 2</u> : $i = n + 2$ $b_0 = 1$, $b_1 = a_n - 1$; ... $b_{n+1} = a_0 - 1$, $b_{n+2} = 1$ soit $b_0 = 1$ et $a_0 > 1$
$b_i > 1$ soit $a_0 = 1$	<u>Cas 3</u> : $i = n - 2$ $b_0 = a_{n-1} + 1$; $b_1 = a_{n+2}$; ... $b_{n-2} = a_1 + 1$ soit $b_0 > 1$ et $a_0 = 1$	<u>Cas 4</u> : $i = n$ $b_0 = 1$; $b_1 = a_n - 1$; ... $b_n = a_1 + 1$ soit $b_0 = 1$ et $a_0 = 1$

Inversement, il est possible de vérifier que ces cas redonnent les égalités recherchées.
On constate aussi que le tableau précédent définit une transformation involutive $S \longrightarrow \overline{S}$, là où elle est définie.

<u>DEFINITION</u>
On dit que S est la <u>suite conjuguée</u> de S.

On a alors facilement :

PROPRIETE IV .1

Pour toute suite S associée à la matrice $M_S = \begin{bmatrix} m & ; K_1 \\ m - K_2 & ; K_1 - 1 \end{bmatrix}$

on a : $M_{\overline{S}} = \begin{bmatrix} m & ; K_2 \\ m - K_1 & ; K_2 - 1 \end{bmatrix}$

avec $[\overline{S}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} [S^*]$

$$\mu(\overline{S}) = -\mu(S) = K_2 - K_1$$

$$\lambda(\overline{S}) = \lambda(S) = m - K_1 - K_2$$

De plus, pour $S = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ on trouve :

. si $a_0 = a_{n-1} = 1$ $\quad \overline{S} = (a_{n-1} + 1, a_{n-2}, \ldots, a_1 + 1)$

. si $a_0 = 1$ et $a_n \neq 1$ $\quad \overline{S} = (1, a_n - 1, \ldots, a_1 + 1)$

. si $a_0 \neq 1$ et $a_n = 1$ $\quad \overline{S} = (a_{n-1} + 1, a_{n-2}, \ldots a_0 - 1, 1)$

. si $a_0 \neq 1$ et $a_n \neq 1$ $\quad \overline{S} = (1, a_n - 1, \ldots, a_0 - 1, 1)$

Par ailleurs, il est aisé de calculer :

$$\theta_2(\overline{S}) = [0, \overline{S}^*, a] = \frac{K_1 + K_2 - m(a+1) + \sqrt{\Delta_2(\overline{S})}}{2m}$$

où $\Delta_2(\overline{S}) = [(a+1)m + K_2 - K_1]^2 + 4(-1)^{n+1}$

Ceci introduit la forme de MARKOFF associée à $\theta_2(\overline{S})$:

$$\overline{F_\theta}(X,Y) = F_\theta(X,Y) + \frac{(a+1)(K_1 - K_2)}{m} Y^2$$

DEFINITION

On dit que $\overline{F_\theta}(X,Y)$ est la <u>forme conjuguée</u> de la forme de MARKOFF $F_\theta(X,Y)$.

On remarque que les discriminants $\Delta_2(S)$ et $\Delta_2(\overline{S})$ sont égaux si et seulement si $K_1 = K_2$, c'est-à-dire encore si et seulement si $\overline{F_\theta} = F_\theta$. La condition équivalente $\theta_2(\overline{S}) = \theta_2(S)$ impose alors d'avoir, par unicité du développement en fraction continue la condition équivalente $S = \overline{S}$.

On peut donc énoncer :

THEOREME IV .1 (Caractérisation des suites antidromes)

Pour toute suite S, on a équivalence des propriétés suivantes :

(1) $S = \overline{S}$

(2) $\vartheta_a(S) = \theta_a(\overline{S})$

(3) $\Delta_a(S) = \Delta_a(\overline{S})$

(4) $K_1 = K_2$ (c'est-à-dire $r(S) = 0$ ou $\mu(S) = 0$)

(5) $\overline{F_\theta} = F_\theta$

(6) S suite antidrome

Dans ce cas, on a les seules possibilités suivantes :

(a) ou bien $a_n = 1$ (cas 1 du tableau précédent)
La suite $(1, a_0 - 1, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ déduite de S est palindrome.

(b) ou bien $a_n \neq 1$ (cas 4 du tableau précédent)
La suite $(1, a_n - 1, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$ déduite de S est palindrome.

On peut fabriquer une infinité de suites antidromes en considérant les expressions :

$S = (1,u,T,T^*,u+1)$ $\qquad$ $S = (u+1,T,T^*,u,1)$

$S = (1,u,T,v,T^*,u+1)$ $\qquad$ $S = (u+1,T,v,T^*,u,1)$

Ces expressions donnent tous les cas qui peuvent être rencontrés.

B / SECONDE CONSTRUCTION

En comparant les deux relations :

$$\begin{cases} \dfrac{m}{m - K_2} = [S] \\ \dfrac{m}{K_1} = [S^*] \end{cases}$$

On est conduit à envisager la situation :

$$\begin{cases} K_1^* = m - K_2 \\ K_2^* = m - K_1 \end{cases}$$

On a alors :

$$K_1^* K_2^* + (-1)^n = (m - K_1 - K_2 + \rceil)m$$

On pose donc :

$$\rceil^* = m - K_1 - K_2 + \rceil$$

Et hors le cas particulier où m = 1 :

$$0 < K_1 < m \Longrightarrow 0 < K_2^* < m$$

$$0 < K_2 < m \Longrightarrow 0 < K_1^* < m$$

On peut parfaitement considérer la forme de MARKOFF définie par S* et a.

Son discriminant vaut :

$$\begin{aligned}\Delta_a(S^*) &= [(a+1)m + K_1^* - K_2^*]^2 + 4(-1)^{n+1} \\ &= [(a+1)m + K_1 - K_2]^2 + 4(-1)^{n+1} \\ &= \Delta_a(S)\end{aligned}$$

Elle s'écrit :

$$F_\theta^*(X,Y) = F_\theta(X,Y) + 2\left[\frac{K_1 + K_2 - m}{m}\right]XY + a\left[\frac{K_1 + K_2 - m}{m}\right]Y$$

Avec :

$$\theta_a(S^*) = \frac{-[K_1 + K_2 + m(a-1)] + \sqrt{\Delta_a(S)}}{2m} = \theta_a(S) + \frac{m - (K_1 + K_2)}{m}$$

DEFINITION

On dit que $F_\theta^*(X,Y)$ est la forme miroir de la forme de MARKOFF $F_\theta(X,Y)$.

Il est facile de vérifier que l'on a :

PROPRIETE IV .2

Pour toute suite S associée à la matrice $M_S = \begin{bmatrix} m & ; & K_1 \\ m - K_2 & ; & K_1 - 1 \end{bmatrix}$

on a : $M_{S^*} = \begin{bmatrix} m & ; & m - K_2 \\ K_1 & ; & K_1 - 1 \end{bmatrix}$

$$\mu(S^*) = \mu(S) = K_1 - K_2$$

$$\lambda(S^*) = -\lambda(S) = K_1 + K_2 - m$$

On dit donc aussi que S* est la suite transposée de S (et F_θ^* la forme transposée de F_θ).

L'égalité $F_\theta^* = F_\theta$ vaut si et seulement si on a : $K_1 + K_2 = m$

Soit : $[S] = \dfrac{m}{m - K_2} = \dfrac{m}{K_1} = [S^*]$

Et puisque S et S* sont de même longueur, on a la condition équivalente S = S*.
On a ainsi établi :

THEOREME IV .2 (Caractérisation des suites palindromes)
Pour toute suite S, on a équivalence des propriétés suivantes :
(1) S = S* (c'est-à-dire S suite palindrome)
(2) $K_1 + K_2 = m$ (c'est-à-dire $\delta(S) = 0$ ou $P(S) = 0$)
(3) $F_\theta^* = F_\theta$

On peut fabriquer une infinité de suites palindromes s'écrivant (T,T*) ou (T,u,T*).
Ces expressions donnent tous les cas qui peuvent être rencontrés.
De façon plus générale, la suite S* présente un autre intérêt compte tenu que l'on a établi avant le résultat suivant :

THEOREME IV .3
Pour toute suite S, les deux nombres $\overline{\theta_a(S)}$ et $\theta_a(S^*)$ sont dans la même classe pour l'action du groupe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$.
De plus, si $S \in L_a$, on a $S^* \in L_a$.
Dans ce cas, le conjugué $\overline{\theta_a(S)}$ du nombre de MARKOFF $\theta_a(S)$ est dans la classe du nombre de MARKOFF super réduit $\theta_a(S^*)$.

Ceci permet de ne pas rentrer dans les détails de ce qu'il advient des nombres $\overline{\theta_a(S)}$ et divisent par deux le nombre de suites S étudiées.

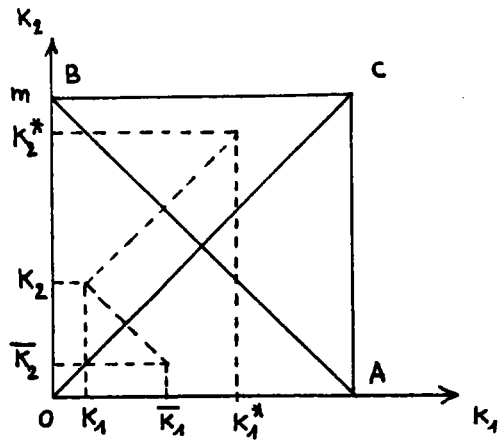
C / REPRESENTATIONS DE CE QUI PRECEDE ET APPLICATIONS

C.1 - Les représentations

Dans la suite, par le passage d'une forme à sa forme miroir, il sera possible de réduire le nombre de couples (K_1, K_2) examinés.
De façon plus précise, la transformation :

$$(K_1, K_2) \longrightarrow (K_1^*, K_2^*) = (m - K_2, m - K_1)$$

peut être visualisée sur la figure suivante :



$0 < K_1 \leqslant m$

$0 \leqslant K_2 < m$

Elle s'interprète comme symétrie par rapport à la diagonale AB du carré OACB de côté m.
Sur la droite AB, on a la condition $K_1 + K_2 = m$.
Les suites correspondantes sont palindromes. Les droites parallèles à AB ont pour équation : $y = - x + (m - \lambda)$.
Le nombre λ mesure leur écart par rapport à AB, c'est-à-dire un écart de palindromie pour m donné interprété aussi de façon géométrique.
On peut de même considérer le passage d'une forme à sa forme conjuguée qui correspond à une symétrie par rapport à OC.
Sur la droite OC, on a la condition $K_1 = K_2$.
Les suites correspondantes sont antidromes. Les droites parallèles à OC ont pour équation : $y = x - \mu$.
Le nombre μ mesure leur écart par rapport à OC, c'est-à-dire un écart d'antidromie pour m donné interprété aussi de façon géométrique.
Avec cette représentation, on voit bien apparaître différents cas limites où un certain nombre de notions dégénèrent ou ne peuvent plus être définies.

. <u>Si m = 1</u>

Le contenu du carré se réduit au seul point A, avec :

$K_1 = 1$

$K_2 = 0$

$$M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En général, ce cas est évacué dans la suite.

. Si $m \neq 1$

Le côté AC du carré correspond à $K_1 = m$.
Avec la condition $m\,l = K_1 K_2 + (-1)^n$, il impose $K_1 = m = 1$
On n'a donc aucune forme à considérer, représentée par un point (K_1, K_2) situé sur AC, hors le cas vu précédemment : $m = 1$.

Le côté OA du carré correspond à $K_2 = 0$, il impose de même $m = 1$.
Il n'a donc pas non plus à être considéré dans la suite.

Ainsi, hors la situation ($m = K_1 = 1$; $K_2 = 0$), on peut dans la suite, se limiter aux contraintes :

$$\begin{cases} 0 < K_1 < m \\ 0 < K_2 < m \end{cases}$$

On peut donc ne travailler que sur l'intérieur du carré OACB.
Il est possible, en divisant toutes les grandeurs par m de superposer les représentations précédentes sur une représentation dans un carré unité.
L'ensemble des suites possibles S définit ainsi un ensemble de points $\left(\frac{K_1}{m} ; \frac{K_2}{m} \right)$ du carré unité présentant d'après ce qui précède des symétries. Mais, inversement, un point du carré unité correspond à une famille de suites.
Cette dernière représentation n'est donc pas adaptée à l'étude des suites S mais plutôt à celle de familles de suites S présentant mêmes écarts de palindromie et d'antidromie.

C.2 - Un exemple d'application

Au moyen des symétries du carré OABC, il y a possibilité de déduire de cette représentation de toute suite (S,a) les représentations d'autres suites, les formes de MARKOFF F_θ correspondantes et les nombres algébriques associés.
Ainsi, on peut établir par exemple :

PROPRIETE IV .3

Pour toute suite d'éléments de $\mathbb{N}^*$

$$S = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

définissant : $M_S = \begin{bmatrix} m & ; & K_1 \\ m - K_2 & ; & K_1 - 1 \end{bmatrix}$

En définissant la suite $\tilde{S}$ de la façon suivante :

* si $a_0 = 1$ $\quad \tilde{S} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1 + 1)$

* si $a_n \neq 1$ $\quad \tilde{S} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0 - 1, 1)$

On a : $\quad M_{\tilde{S}} = \begin{bmatrix} m & ; & K_2 \\ K_1 & ; & 1 \end{bmatrix}$

$$\lambda(\tilde{S}) = \mu(S) = K_1 - K_2$$

$$\mu(\tilde{S}) = -\lambda(S) = K_1 + K_2 - m$$

$$[\tilde{S}] = [S^*]$$

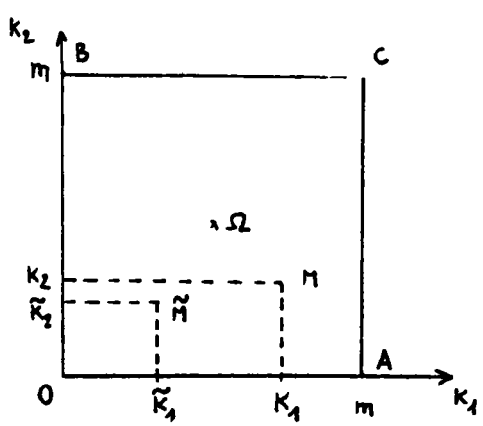
DEFINITION

On dit que $\tilde{S}$ est la suite transformée de S.

De façon précise, la transformation :

$$(K_1, K_2) \longrightarrow (\tilde{K}_1, \tilde{K}_2) = (K_2, m - K_1)$$

peut être visualisée sur la figure suivante :



$$\begin{cases} 0 < K_1 < m \\ 0 < K_2 < m \end{cases}$$

Son seul point fixe est le point $\Omega\left(\frac{m}{2} ; \frac{m}{2}\right)$ qui ne correspond à une suite S que dans le cas où m = 2.

La transformation considérée est une rotation de centre

et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Elle laisse invariant le carré OABC et n'est définie que si $m \neq 1$.

La vérification de la propriété IV .3 s'effectue comme suit :

* <u>Si $a_0 = 1$</u> $\quad \tilde{S} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1 + 1)$

On a dans ce cas :

$$M_{\tilde{S}} = M_{S^*} \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m & ; & m - K_2 \\ K_1 & ; & K_1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m & ; & K_2 \\ K_1 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

* <u>Si $a_0 \neq 1$</u> $\quad \tilde{S} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0 - 1, 1)$

On a dans ce cas :

$$M_{\tilde{S}} = M_{S^*} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & ; & K_2 \\ K_1 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

Dans tous les cas, on vérifie bien l'égalité :

$$\lambda(\tilde{S}) = \mu(S) = K_1 - K_2$$

et aussi : $\quad \mu(\tilde{S}) = -\lambda(S) = K_1 + K_2 - m$

On peut calculer le nombre $\theta_2(\tilde{S})$:

$$\theta_2(\tilde{S}) = \frac{K_1 - K_2 - am + \sqrt{(am + K_1 + K_2)^2 + 4(-1)^n}}{2m}$$

La forme associée est :

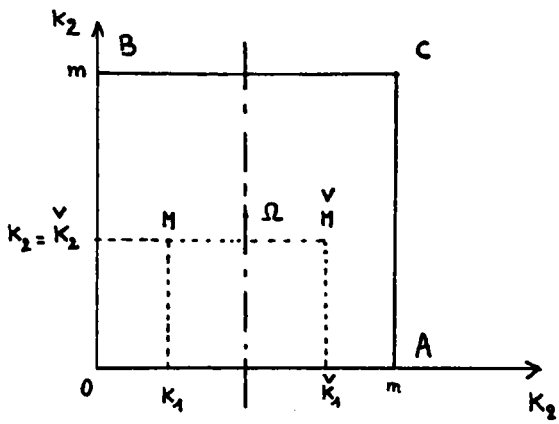
$$\tilde{F}_\theta(X,Y) = X^2 + \left[\frac{am + K_2 - K_1}{m}\right] XY - \left[\frac{aK_1 + 1}{m}\right] Y^2$$

<u>DEFINITION</u>

On dit que $\tilde{F}_\theta(X,Y)$ est la forme transformée de la forme quadratique $F_\theta(X,Y)$.

C.3 - D'autres exemples

On va maintenant utiliser la médiatrice du segment OA pour considérer la figure suivante :



Ceci revient à utiliser la transformation :

$$(K_1, K_2) \longrightarrow (m - K_1 ; K_2) = (\overset{v}{K}_1, \overset{v}{K}_2)$$

avec
$$\begin{aligned} m\overset{v}{\rceil} &= (m - K_1)K_2 + (-1)^{n+1} \\ &= mK_2 - K_1K_2 - (-1)^n \\ &= mK_2 - m\rceil \end{aligned}$$

Soit :
$$\overset{v}{\rceil} = K_2 - \rceil$$

La suite $\overset{v}{S}$ associée vérifie :

$$M_{\overset{v}{S}} = \begin{bmatrix} m & m - K_1 \\ m - K_2 & m - K_1 - K_2 + \rceil \end{bmatrix}$$

$$= M_S \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

En utilisant alors la relation :

$$\begin{bmatrix} u & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & u-1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On en déduit qu'avec $S = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ on a :

. si $a_n \neq 1$ $\quad \overset{v}{S} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 1)$

. si $a_n = 1$ $\quad \overset{v}{S} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} + 1)$

DEFINITION
On dit que $\overset{v}{S}$ est la suite V-symétrique de S.

La condition $\dfrac{m}{m - K_2} = [a_0 , a_1 , \ldots , a_n] = [S]$

$= [a_0 , a_1 , \ldots , a_{n-1} , a_n - 1, 1] = [\overset{v}{S}]$

montre que $\overset{v}{S}$ correspond au second développement en fraction continue du nombre rationnel $\dfrac{m}{m - K_2} = [S]$, dont un premier développement est S.

La condition $S = \overset{v}{S}$ n'est éventuellement possible qu'avec m = 2.
Hors ce cas, la médiatrice de OA ne contient aucune représentation d'une suite S. D'où de façon évidente :

PROPRIETE IV .4

On a $$M_{\overset{v}{S}} = \begin{bmatrix} m & ; m - K_1 \\ m - K_2 & ; m + 1 - K_1 - K_2 \end{bmatrix} = M_S \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(\overset{v}{S}) = \mu(S) = K_1 - K_2$$

$$\mu(\overset{v}{S}) = \lambda(S) = m - K_1 - K_2$$

$\overset{v}{S}$ est le second développement du nombre rationnel [S] : $[S] = [\overset{v}{S}]$

$\overset{v}{S} = (\widetilde{S^*})$

On peut encore calculer :

$$\theta_2(\overset{v}{S}) = \frac{-am - K_1 + K_2 + \sqrt{((a+2)m - K_1 - K_2)^2 + 4(-1)^n}}{2m}$$

Et la forme quadratique associée $\overset{v}{F}_\theta$.

DEFINITION
On dit que $\overset{v}{F}_\theta$ est la forme de MARKOFF V-symétrique de F_θ .

En utilisant la médiatrice du segment OB, on pose encore :

DEFINITION

On note $\hat{S}$ la suite construite à partir de S par la transformation
$(K_1, K_2) \longrightarrow (K_1, m - K_2) = (\hat{K}_1, \hat{K}_2)$.
On dit que $\hat{S}$ est la suite H symétrique de S.
Elle définit la forme quadratique $\hat{F}_\theta$ dite H symétrique de F_θ.

PROPRIETE IV .5

On a
$$M_{\hat{S}} = \begin{bmatrix} m & ; & K_1 \\ K_2 & ; & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} M_S$$

avec
$$\lambda(\hat{S}) = -\mu(S) = K_2 - K_1$$
$$\mu(\hat{S}) = -\lambda(S) = K_1 + K_2 - m$$
$$[\hat{S}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} [S]$$

Et pour $S = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, on a $\hat{S} = (\tilde{S})^*$, avec

. si $a_0 \neq 1$ $\quad \hat{S} = (1, a_0 - 1, a_1, \ldots, a_n)$

. si $a_0 = 1$ $\quad \hat{S} = (a_1 + 1, a_2, \ldots, a_n)$

De plus $\quad (\hat{S^*}) = (\check{\tilde{S}})$

Enfin, en utilisant la symétrie par rapport au point Ω, on a :

DEFINITION

On note S^Ω la suite construite à partir de S par la transformation

$$(K_1, K_2) \longrightarrow (m - K_1 ; m - K_2)$$

On dit que S^Ω est la suite Ω symétrique de S.
Elle définit la forme quadratique F_θ^Ω dite Ω symétrique de F_θ.

PROPRIETE IV .6

On a
$$M_{S^\Omega} = \begin{bmatrix} m & m - K_1 \\ K_2 & K_2 - 1 \end{bmatrix}$$

avec
$$\lambda(S^\Omega) = -\lambda(S) = K_1 + K_2 - m$$
$$\mu(S^\Omega) = -\mu(S) = K_2 - K_1$$

Et pour $S = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ on trouve :

. si $a_0 = a_n = 1$ $\quad S^\Omega = (a_1 + 1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1)$

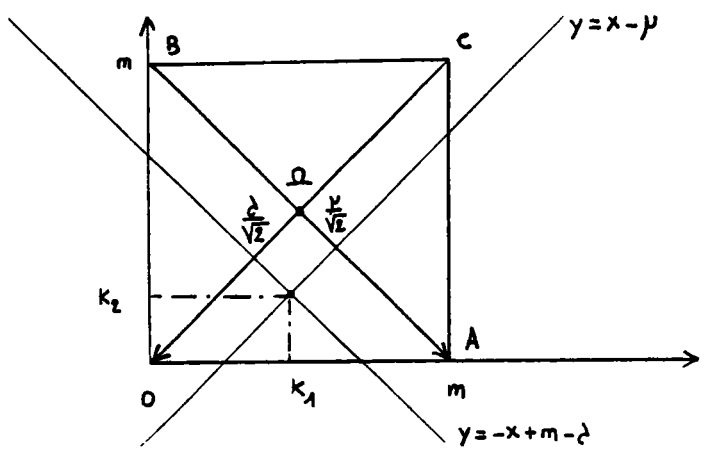
. si $a_0 = 1$ et $a_n \neq 1$ $\quad S^\Omega = (a_1 + 1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 1)$

. si $a_0 = 1$ et $a_n = 1$	$S^\Omega = (1, a_0 - 1, \ldots, a_{n-1} + 1)$
. si $a_0 \neq 1$ et $a_n \neq 1$	$S^\Omega = (1, a_0 - 1, \ldots, a_n - 1, 1)$
Soit les expressions	$(S^\Omega)^* = \overline{S} = (S^*)^\Omega$
	$[S^\Omega] = [\hat{S}]$

Avec les transformations présentées, toutes les symétries du carré OABC peuvent être considérées et explicitées pour les suites.

C.4 - Repère adapté

Les nombres λ et ρ conduisent à considérer le diagramme :



Un point M de coordonnées (K_1, K_2) dans le repère $\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{m} ; \frac{\overrightarrow{OB}}{m}\right)$

a pour coordonnées $(\lambda ; \rho)$ dans le repère $\left(\frac{\overrightarrow{\Omega O}}{m\sqrt{2}} ; \frac{\overrightarrow{\Omega A}}{m\sqrt{2}}\right)$.

On retrouve ainsi de façon directe toutes les relations qui ont été données avant pour cotraces et antitraces des suites déduites de S.

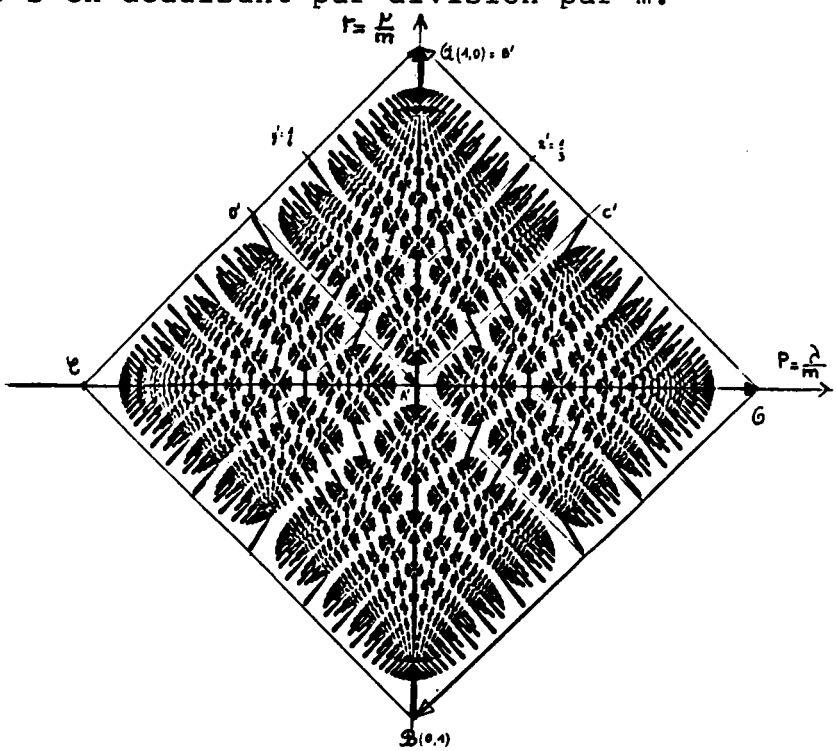
On a de plus les relations évidentes :

$$\begin{cases} \dfrac{2m}{m + \rho + \lambda} = [S] \\ \dfrac{2m}{m + \rho - \lambda} = [S^*] \\ \dfrac{2m}{m - \rho + \lambda} = [S] \end{cases}$$

Le point $M(K_1, K_2)$ peut aussi être représenté par le point de coordonnées $\left(\frac{\lambda}{m} ; \frac{\mu}{m}\right) = \left(\frac{m - K_1 - K_2}{m} ; \frac{K_1 - K_2}{m}\right)$ dans le repère $\left(\frac{\overrightarrow{\Omega O}}{\sqrt{2}} ; \frac{\overrightarrow{\Omega A}}{\sqrt{2}}\right) = (\vec{u}, \vec{v})$.

DEFINITION
On appelle repère adapté le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

Dans le repère adapté, toute suite S est représentable par un point s(P , r) du carré $\mathcal{O}\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$ correspondant au carré OACB introduit avant mais s'en déduisant par division par m.



DEFINITION : On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des points s(P,r).

Cet ensemble a une forme de "trèfle à quatre feuilles" complété de points situés sur l'axe $\lambda = 0$.
Pour ces derniers points, on a : $\begin{cases} m = K_1 + K_2 \\ m \mid K_1^2 \pm 1 \\ 0 < m < K_1 \end{cases}$

Les suites correspondantes S sont les suites palindromes.

(De la même façon, l'axe $\rho = 0$ correspond aux suites antidromes).

La structure en trèfle à quatre feuilles résulte de l'impossibilité d'avoir pour tout point $s(\sigma, \rho)$ différent de $\Omega(0,0)$ la condition $\sigma = \pm \rho$.

En effet, $\sigma = \rho$ donne $m = 2K_1$ et avec $m \mid (K_1 K_2 \pm 1)$ la condition $K_1 = 1$, $m = 2$, $K_2 = 1$, $\sigma = 0$, $\rho = 0$.

De même, $\sigma = -\rho$ donne $m = 2K_2$ et la même conclusion.

Le carré de diagonale ΩG correspond aux relations $r > P > 0$ et $r > -P > 0$ soit $2K_1 > m$ et $m > 2K_2$.
Pour les suites S correspondantes, on a : $a_0 = a_n = 1$.

Considérons alors la transformation :

$$S \longrightarrow (1, S, 1)$$

Elle transforme les valeurs $(m, K_1, K_2, 1)$ associées à S en les valeurs $(\mathcal{M}, \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{L})$ associées à $(1,S,1)$ avec :

$$\begin{cases} \mathcal{M} = 2m + 2K_1 - K_2 - 1 \quad \# \quad \dfrac{(m + K_1)(2m - K_2)}{m} \\ \mathcal{K}_1 = 2m - K_2 \\ \mathcal{K}_2 = m + K_1 - K_2 - 1 \quad \# \quad \dfrac{(m + K_1)(m - K_2)}{m} \\ \mathcal{L} = m - K_2 \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathcal{K}_1}{\mathcal{M}} \# \dfrac{m}{m + K_1} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{K_1}{m}} \\ \dfrac{\mathcal{K}_2}{\mathcal{M}} \# \dfrac{m - K_2}{2m - K_2} = \dfrac{1 - \dfrac{K_2}{m}}{2 - \dfrac{K_2}{m}} \end{cases}$$

B.U. METZ

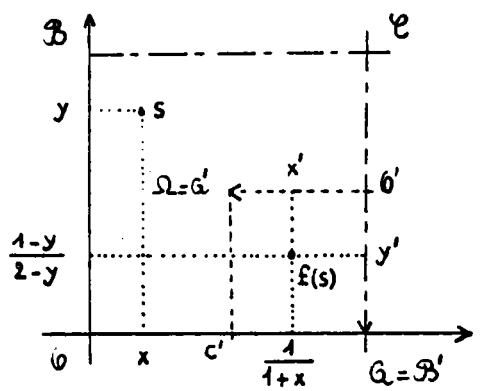
Ceci conduit à considérer la transformation :

$$f : (x,y) \longrightarrow \left(\frac{1}{1+x} ; \frac{1-y}{2-y} \right)$$

Elle transforme le carré $\mathcal{OA\mathcal{C}B}$ en le carré de diagonale $\Omega\mathcal{A}$.
Elle approche d'autant mieux la transformation :

$$\left(\frac{K_1}{m} ; \frac{K_2}{m} \right) \longrightarrow \left(\frac{K_1}{m} ; \frac{K_2}{m} \right)$$

que la valeur m est grande.
Ceci permet d'expliquer la structure fractale apparaissant dans la figure précédente, pour lesquelles on peut utiliser le repérage suivant :



Le point s(x,y) se transforme en le point suivant :

$$s' = f(s) \quad \left(x' = \frac{x}{1+x} ; \; y' = \frac{y}{4-2y} \right)$$

Et en ramenant le carré $\mathcal{OA'C'B'}$ à un carré unité, tout revient donc à étudier le comportement de la transformation du carré unité dans lui même :

$$g(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x} ; \frac{y}{2-y} \right)$$

Ainsi, la condition $\lambda = \mu$ correspond à $x = \frac{K_1}{m} = \frac{1}{2}$, elle se transforme en $x' = \frac{1}{3}$. Cette droite apparaît nettement dans la structure représentée dans le carré $\mathcal{OAC}$.

De même, la condition $\lambda = -\mu$ correspond à $y = \frac{K_2}{m} = \frac{1}{2}$, elle se transforme en $y' = \frac{1}{6}$.

Et par exemple, les points situés dans le carré limité par les droites $x' = 0$, $y' = 0$, $x' = \frac{1}{3}$, $y' = \frac{1}{6}$ correspondent à des suites s'écrivant sous la forme :

$$(1,1,\ b_0,\ b_1,\ \ldots\ ,\ b_n,\ 1,1) \qquad b_0 > 1 \quad b_n > 1$$

Pour les autres points du carré $\mathcal{OABC}$ non situés dans l'image de f, on peut utiliser pour les étudier à partir des points du carré $\mathcal{O'A'B'C'}$ les symétries déduites de celles mises en évidence avant (passage à la suite H-symétrique ou à la suite V-symétrique).

F R A C T A L I T A S !

THEOREME IV .4
L'ensemble $\mathcal{F}$ est dense dans le carré $\mathcal{OABC}$.

Démonstration

Dans $(\vec{OA}, \vec{OB})$ soit S(x,y) un point de coordonnées irrationnelles posons :

$$\frac{1}{x} = [a_0,\ a_1,\ \ldots\ ,\ a_n,\ \ldots\ ]$$

$$\frac{1}{1-y} = [b_0,\ b_1,\ \ldots\ ,\ b_n,\ \ldots\ ]$$

Pour chaque valeur $n \in \mathbb{N}^*$, considérons :

$$S_n = [\, a_0, \ldots, a_n, b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0 \,]$$

On a :

$$\lim_{n\infty} [S_n] = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{n\infty} [S_n^*] = \frac{1}{1-y}$$

Et si $M_{S_n} = \begin{bmatrix} m(n) & K_1(n) \\ m(n) - K_2(n) & K_1(n) - 1(n) \end{bmatrix}$

on obtient : $\begin{cases} \lim_{n\infty} \dfrac{K_1(n)}{m(n)} = x \\ \lim_{n\infty} \dfrac{K_2(n)}{m(n)} = y \end{cases}$

Le point $s\left(\dfrac{m(n) - K_1(n) - K_2(n)}{m(n)} ; \dfrac{K_1(n) - K_2(n)}{m(n)} \right)$ est dans $\mathcal{F}$

et tend vers le point S.

Le Théorème s'en déduit de façon évidente.

Corollaire (Approximation simultanée de deux nombres réels)

Soient x et y deux nombres réels quelconques.

Pour tout nombre réel $H > 1$, il existe $(p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $q < H$ et :

$$\begin{cases} \left| x - \dfrac{p_1}{q} \right| < \dfrac{1}{H^2} \\ \left| y - \dfrac{p_2}{q} \right| < \dfrac{1}{H^2} \end{cases}$$

V. IDENTITES DE MARKOFF GENERALISEES ET APPLICATIONS

A / PREMIERE IDENTITE

A.1 - L'identité et une application directe

On part de :
$$r + 1 = \frac{m + K_1 - K_2}{m}$$
$$= \frac{m - K_2}{m} + \frac{K_1}{m}$$
$$= \frac{1}{[S]} + \frac{1}{[S^*]}$$

En raccourcissant ou allongeant S*, c'est-à-dire en utilisant $\tilde{S}$, du fait que tout nombre rationnel admet deux développements en fraction continue, on obtient une écriture :

$$1 + r = \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 \cdots + \cfrac{1}{a_n}}} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} \cdots + \cfrac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{[S]} + \frac{1}{[\tilde{S}]}$$

Avec $(S) = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$

$(\tilde{S}) = (a_n, a_{n-1}, \ldots \alpha)$ et $[S^*] = [\tilde{S}]$

Supposons que l'on puisse en déduire une identité :

(I) :
$$1 + r = \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cdots + \cfrac{}{a_n + \cfrac{Ax + B}{Cx + D}}}} + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} \cdots + \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{x}}}}$$

Pour expliciter A,B,C,D il suffit de considérer les matrices :

$$M_S = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & ; K_1 \\ m - K_2 & ; K_1 - 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{\tilde{S}} = \begin{bmatrix} m & K_2 \\ K_1 & 1 \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$\frac{1}{\begin{bmatrix} m & ; K_1 \\ m - K_2 & ; K_1 - 1 \end{bmatrix} \dfrac{Cx + D}{Ax + B}} + \frac{1}{\begin{bmatrix} m & K_2 \\ K_1 & 1 \end{bmatrix} x} = r + 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{[(m - K_2)C + (K_1 - 1)A]x + [(m - K_2)D + (K_1 - 1)B]}{[mC + K_1 A]x + [mD + K_1 B]} + \frac{K_1 x + 1}{mx + K_2} = r + 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(m - K_2)C + (K_1 - 1)A}{mC + K_1 A} + \frac{K_1}{m} = \frac{(m - K_2)D + (K_1 - 1)B}{mD + K_1 B} + \frac{1}{K_2} = r + 1$$

En revenant à l'identité (I), pour $x = \infty$, on trouve que l'on a nécessairement : $A = 0$.
Ceci donne bien :

$$\frac{(m - K_2)C + (K_1 - 1)A}{mC + K_1 A} + \frac{K_1}{m} = \frac{m - K_2 + K_1}{m} = r + 1$$

La seconde relation :

$$\frac{(m - K_2)D + (K_1 - 1)B}{mD + K_1 B} + \frac{1}{K_2} = r + 1$$

détermine le rapport de D et B. Elle se simplifie en :

$$\frac{1}{K_2} - \frac{K_2 D + 1 B}{mD + K_1 B} = r = \frac{K_1 - K_2}{m}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{D}{B} = \frac{K_2 - K_1}{m}$$

Il reste alors à examiner la relation :

$$\frac{[(m - K_2)\frac{C}{B} m\ ]x + [(m - K_2)(K_2 - K_1) + (K_1 - 1)m]}{[m\ \frac{C}{B} m\ ]x + [m(K_2 - K_1) + K_1 m]} + \frac{K_1 x + 1}{mx + K_2} = r + 1$$

Pour $x = -\frac{K_2}{m}$, elle impose :

$$m \frac{C}{B} (-K_2) + mK_2 = 0$$

$$\text{soit } \frac{C}{B} = 1$$

Inversement, avec cette expression, on obtient dans la relation précédente :

$$\frac{(m - K_2)mx + [(m - K_2)(K_2 - K_1) + (K_1 - 1)m]}{m(mx + K_2)} + \frac{K_1 x + 1}{mx + K_2}$$

$$= \frac{(m - K_2 + K_1)mx + [(m - K_2)(K_2 - K_1) + (K_1 - 1)m + 1m]}{m(mx + K_2)}$$

$$= \frac{m - K_2 + K_1}{m}$$

$$= r + 1$$

On peut donc énoncer :

THEOREME V.1

Il est équivalent de se donner une relation

$$r + 1 = \frac{1}{[S]} + \frac{1}{[S^*]} = \frac{1}{[S]} + \frac{1}{[\tilde{S}]} \in \mathbb{Q}$$

ou une identité :

$$r + 1 = \frac{1}{[S, x-r]} + \frac{1}{[\tilde{S}, x]} \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R})$$

avec, si $S = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ les cas suivants :

- si $a_0 = 1$ $\quad \tilde{S} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1 + 1)$
- si $a_0 \neq 1$ $\quad \tilde{S} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 - 1, 1)$

Appliqué avec $x = \dfrac{1}{[\tilde{S},x]} = \dfrac{1}{M_{\tilde{S}}.x} = \dfrac{K_1 x + 1}{mx + K_2}$

Soit x racine positive du polynôme :

$$mX^2 + (K_2 - K_1)X - 1$$

On obtient : $x - r = 1 - \dfrac{1}{[S,x-r]} = \dfrac{1}{[\tilde{S}^*,x-r]}$

$$= 1 - \frac{1}{M_S(x-r)} = \frac{K_2(x-r) + 1}{m(x-r) + K_1}$$

Soit r-x racine du polynôme : $mX^2 + (K_2 - K_1)X - 1$

Le discriminant du polynôme cité vaut :

$$\delta = (K_1 + K_2)^2 + 4(-1)^n$$

La condition $K_1 + K_2 \geqslant 1$ montre que ce ne peut être un carré pour n pair. Ce ne peut être un carré pour n impair qu'avec la condition $K_1 + K_2 = 2$.

Soit le seul cas possible : $K_1 = K_2 = 1$ $\quad 1 = 0 \quad$ $S = [1,m-1]$ $\quad r = 0$

Hors ce cas, δ n'est pas un carré et les deux nombres x et r-x sont deux nombres algébriques de degré 2.

Leur développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang, et en additionnant, on trouve pour r+1 une nouvelle décomposition en somme de deux fractions continues.

PROPRIETE V.1

Hors le cas $K_1 = K_2 = 1$, $1 = 0$, n impair correspondant à $S = [1,m-1]$ et $r = 0$, les nombres :

$$x = \frac{(K_1 - K_2) + \sqrt{(K_1 + K_2)^2 + 4(-1)^n}}{2m}$$

$$r-x = \frac{K_1 - K_2 - \sqrt{(K_1 + K_2)^2 + 4(-1)^n}}{2m}$$

sont algébriques de degré 2, conjugués et de somme r.

Leur développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang et donne par addition une décomposition de r+1 en somme de deux fractions continues infinies.

La propriété précédente peut être développée pour établir :

PROPRIETE V.2

Soient K_1 , K_2 , m, n des nombres entiers tels que l'on puisse écrire :

$$\frac{m}{K_1} = [S^*] = [a_n , \ldots , a_1 , a_0]$$

$$\frac{m}{m - K_2} = [S] = [a_0 , \ldots , a_n]$$

Plusieurs cas se présentent :

(1) Si $m = 2K_2$

soit $m = 2$ et $K_2 = 1$, deux cas sont envisageables :

(1.1) $S = (2)$ et $n = 0$ $\quad K_1 = 1$

$$\frac{K_1 - K_2 + \sqrt{(K_1 + K_2)^2 + 4(-1)^n}}{2m} = \frac{\sqrt{2}}{2} = [0,1,\underline{2}]$$

(1.2) $S = (1,1)$ et $n = 1$ $\quad K_1 = 1$

$$\frac{K_1 - K_2 + \sqrt{(K_1 + K_2)^2 + 4(-1)^n}}{2m} = 0$$

(2) Si $2K_2 < m$

alors $a_0 = 1$ et l'on peut écrire :

$$\frac{(K_1 - K_2) + \sqrt{(K_1 + K_2)^2 + 4(-1)^n}}{2m} = [0, a_n, \underline{a_{n-1} , \ldots , a_2, a_1 + a_n + 1}]$$

(3) Si $2K_2 > m$

alors $a_0 \geqslant 2$ et l'on a :

$$\frac{(K_1 - K_2) + \sqrt{(K_1 + K_2)^2 + 4(-1)^n}}{2m} = [0, a_n, \underline{a_{n-1} , \ldots , a_1, a_0 - 1, a_n + 1}]$$

La démonstration s'effectue en considérant la forme commune :

$$\gamma = [\underline{a_n + 1 , \ldots , a_1 , a_0 - 1}]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & m - K_2 \\ K_1 & K_1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \gamma$$

$$= \begin{bmatrix} K_2 + 1 & m - K_2 + K_1 - 1 \\ 1 & K_1 - 1 \end{bmatrix} \gamma$$

Et $[0, a_n, \underline{a_{n-1}, \ldots, a_1 + 1}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \gamma$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \gamma$$

On en déduit, en explicitant γ la relation :

$$[0, a_n, \underline{a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 - 1, a_n + 1}] = \frac{(K_1 - K_2) + \sqrt{(K_1 + K_2)^2 + 4(-1)^n}}{2m}$$

Selon les diverses possibilités reliant m et K_2, c'est-à-dire selon la valeur de a_0, la propriété V.2 en résulte avec l'identité (E.2):[... , a,0,b, ...] = [... ,a+b, ...]

ou la relation matricielle associée : $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

En considérant alors $\gamma^* = -\frac{1}{\overline{\gamma}} = [\underline{a_0 - 1, a_1, \ldots, a_n + 1}]$
où $\overline{\gamma}$ conjugué du nombre quadratique γ, on a aussi :

PROPRIETE V.3
Dans les conditions de la propriété précédente et à l'identité (E .2) près on peut écrire :

$$\frac{(K_1 - K_2) - \sqrt{(K_1 + K_2)^2 + 4(-1)^n}}{2m} = [-1, a_0, \underline{a_1, \ldots, a_n + 1, a_0 - 1}]$$

Il en résulte de façon évidente la première partie du résultat suivant, qui explicite la propriété V.1, tout le reste s'en déduisant facilement.

THEOREME V.2 (Construction d'une forme d'une constante de MARKOFF $\frac{1}{a+r+1}$)
Dans les conditions précédentes, à l'identité (E.2) près on a :

$$1 + r = \frac{K_1 - K_2 + m}{m} = [0, a_n, \underline{a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 - 1, a_n + 1}] + [0, a_0, \underline{a_1, \ldots, a_n + 1, a_0 - 1}]$$

Pour $a \in \mathbb{N}^*$ assez grand, cette relation permet de construire une forme quadratique f_a dont la constante de MARKOFF vaut :

$$C(f_a) = \frac{1}{a + r + 1}$$

Cette forme est réduite et associée à la suite double :

$$J = (\underline{a_0 - 1 , a_n + 1 , a_{n-1} , \dots , a_1}, a_0 , a, a_n , \underline{a_{n-1} , \dots , a_1 , a_0 - 1, a_n + 1})$$

Avec $\delta = (K_1 + K_2)^2 + 4(-1)^n$ elle peut être écrite sous la forme :

$$f_a(x,y) = mx^2 - [(a-1)m + \sqrt{\delta}\,]xy + [\left(\frac{a-1}{2}\right)\sqrt{\delta} + 1 - am - \left(\frac{a+1}{2}\right)(K_1 - K_2)]y^2$$

$$= mF_a(x,y)$$

Elle a pour discriminant : $\Delta(f_a) = m^2(a + r + 1)^2$.

Son minimum arithmétique vaut : $M(f_a) = m = f_a(1,0)$.

Avec $\begin{cases} \xi = \dfrac{K_1 - K_2 + 2am + \sqrt{\delta}}{2m} = [a, a_n, \underline{a_{n-1} , \dots , a_1 , a_0 - 1, a_n + 1}] \\ \xi' = \dfrac{-(K_1 - K_2 + 2m) + \sqrt{\delta}}{2m} = \dfrac{-1}{[a_0, \underline{a_1 , a_2 , \dots , a_{n-1}, a_n - 1, a_0 + 1}]} \end{cases}$

On peut poser : $f_a(x,y) = m(x - \xi y)(x - \xi' y)$ ou $F_a(x,y) = (x - \xi y)(x - \xi' y)$

Les nombres ξ et ξ' ont une constante de MARKOFF égale à celle de la forme $mx^2 - (K_1 - K_2)xy - 1\,y^2$, s'écrivant sous la forme :

$$C(\xi) = C(\xi') = \frac{m'}{\sqrt{\delta}} < \frac{m}{\sqrt{\delta}}$$

En particulier, la relation donnée par ce résultat peut être comparée avec la relation vue avant :

$$r + 1 = \frac{1}{[S]} + \frac{1}{[S^*]}$$

En posant :

DEFINITION

Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on note K_a ou $F(0,a)$ l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x = [a_i]_{i \in \mathbb{N}} \text{ avec } a_0 = 0 \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}^* \quad a_i \leqslant a\}$$

Le nombre r doit vérifier :

PROPRIETE V.4

Pour que le nombre $r \in]-1, 1[$ soit l'écart d'antidromie d'une suite S telle que :

$$t(S) = a$$

il faut que l'on ait : $r + 1 \in K_a + K_a$

Cette propriété limite le choix des valeurs r à considérer.

En se référant alors à HALL [6], on peut donner les indications suivantes :

(1) K_a est un ensemble de CANTOR contenu dans :

$$\left[\frac{\sqrt{a^2 + 4a} - a}{2a} \; ; \; \frac{\sqrt{a^2 + 4a} - a}{2} \right]$$

(2) $\forall a \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $a \geqslant 4$, on a :

$$K_a + K_a = \left[\frac{\sqrt{a^2 + 4a} - a}{a} \; ; \; \sqrt{a^2 + 4a} - a \right]$$

Ainsi, plus a augmente, et plus on a un vaste choix sur r.

B / SECONDE IDENTITE

On va voir maintenant que la valeur r donne naissance à une autre identité comparable à celle utilisée dans l'article original de MARKOFF [4] :

$$1 = \frac{1}{2 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$$

Considérons en effet l'expression :

$$E(x) = \frac{1}{M_S\left(\frac{Cx + D}{Ax + B}\right)} + \frac{1}{M_S\, x}$$

$$= \frac{[(m - K_2)C + (K_1 - 1)A]x + [(m - K_2)D + (K_1 - 1)B]}{[mC + K_1 A]x + [mD + K_1 B]} + \frac{K_2 x + 1}{mx + K_1}$$

Imaginons qu'elle soit indépendante de x et vaille θ , on devrait avoir, pour $x = \infty$ et $x = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{(m - K_2)C + (K_1 - 1)A}{mC + K_1 A} = \theta - \dfrac{K_2}{m} = \dfrac{\theta m - K_2}{m} \\ \dfrac{(m - K_2)D + (K_1 - 1)B}{mD + K_1 B} = \theta - \dfrac{1}{K_1} = \dfrac{\theta K_1 - 1}{K} \end{cases}$$

En inversant alors la matrice $\begin{bmatrix} m - K_2 & K_1 - 1 \\ m & K_1 \end{bmatrix}$ on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{C}{A} = \dfrac{(1 - \theta)K_1 m + (-1)^{n+1}}{(\theta - 1)m^2} \\ \dfrac{D}{B} = \dfrac{(1 - \theta)K_1^2}{(\theta - 1)K_1 m + (-1)^{n+1}} \end{cases}$$

Ceci conduit à considérer la matrice :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\theta - 1)m^2 & ; & (\theta - 1)K_1 m + (-1)^{n+1} \\ (1 - \theta)K_1 m + (-1)^{n+1} & ; & (1 - \theta)K_1^2 \end{bmatrix}$$

Son déterminant vaut - 1.
Elle donne par un calcul direct : $E(x) = \theta$.
On obtient ainsi une nouvelle identité.
En vérifiant alors :

PROPRIETE V.5

Pour toute suite $S = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ la suite H-symétrique $\hat{S}$ de S vérifie l'égalité $\hat{S} = (\tilde{S})^*$.
La suite $\hat{S}$ s'écrit sous la forme suivante :

. si $a_0 = 1$ $\quad \hat{S} = (a_1 + 1, a_2, \ldots, a_n)$
. si $a_0 \neq 1$ $\quad \hat{S} = (1, a_0 - 1, a_1, \ldots, a_n)$

Avec la valeur $\theta = 1$, elle donne :

THEOREME V.3 (Identité de MARKOFF généralisée)
Pour toute suite S et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$1 = \frac{1}{[S,x]} + \frac{1}{[S,x]}$$

Exemple
Avec S = (a), on a : $\hat{S} = (1, a-1)$
On trouve l'identité :

$$1 = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{x}} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a - 1 + \cfrac{1}{x}}}$$

On obtient bien une généralisation de l'identité utilisée dans l'article original de MARKOFF [4].

C / REMARQUES FINALES

Dans le chapitre IV , on a établi un certain nombre de relations :

$$\begin{cases} [\bar{S}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad [S^*] = [(S^*)^{\Omega}] \\ [\tilde{S}] = [S^*] = [(\overset{\vee}{S}^*)] \\ [\overset{\vee}{S}] = [S] = [(\tilde{S}^*)] \\ [\hat{S}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad [S] = [S^{\Omega}] = [(\tilde{S})^*] \end{cases}$$

Ces relations découlent en réalité des expressions des matrices M_{S^*} , $M_{\bar{S}}$, $M_{\tilde{S}}$, $M_{\overset{\vee}{S}}$, $M_{\hat{S}}$, $M_{S^{\Omega}}$.
L'égalité $[\tilde{S}] = [S^*]$ a été utilisée pour établir le Théorème V.1.
Par le même procédé, on pourrait vouloir utiliser $[\overset{\vee}{S}] = [S]$ avec une relation du type :

$$r + 1 = \frac{1}{\left[\overset{\vee}{S} , \dfrac{Cx + D}{Ax + B} \right]} + \frac{1}{[S^*, x]}$$

Pour $x = \infty$, on trouve $A = 0$.

Il en résulte la détermination de $\dfrac{C}{B}$ et $\dfrac{D}{B}$, d'où une nouvelle identité se déduisant de la précédente en remplaçant S^* par $\tilde{S}$.

L'égalité $[\hat{S}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} [S]$ a été utilisée pour établir le Théorème V.2.

Par le même procédé, on pourrait vouloir utiliser la relation :

$$[\bar{S}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} [S^*]$$

Or, il est clair, en remplaçant S par S^* que grâce à l'égalité $[\hat{S}] = [S^{\Omega}]$, on obtiendra une nouvelle identité se déduisant directement de la précédente.

Les identités que l'on a donné permettent d'en déduire d'autres sur lesquelles je n'insiste pas, grâce aux symétries du carré OABC.

VI. ETUDE DES PROPRIETES DES SUITES S PAR L'ANTITRACE ET LA COTRACE

A / INTRODUCTION

On fait d'abord la remarque que la condition :

$$m\,\mathbb{1} = K_1 K_2 + (-1)^n$$

traduit en réalité l'égalité :

$$\det(M_S) = (-1)^{n+1}$$

Cette dernière condition s'écrit aussi, compte tenu de l'expression de M_S :

$$\begin{aligned} m(K_1 - \mathbb{1}) &= K_1 (m - K_2) + (-1)^{n+1} \\ &= K_1^2 + \partial K_1 + (-1)^{n+1} \\ &= (m - K_2)^2 - \partial (m - K_2) + (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

où l'on a convenu de noter :

$$\partial(M_S) = \partial = \partial(S) = m - K_1 - K_2$$

(la cotrace de la matrice M_S).

On a encore : $m(\partial + \mathbb{1}) = (m - K_2)^2 - \rho (m - K_2) + (-1)^n$

ou de façon équivalente : $m\,\mathbb{1} = K_2^2 + \rho K_2 + (-1)^n$

$$= K_1^2 - \rho K_1 + (-1)^n$$

avec cette fois : $\rho(M_S) = \rho = \rho(S) = K_1 - K_2$

(antitrace de la matrice M_S).

Ces écritures se déduisent en fait des suites construites dans ce qui précède à partir de S.
On a donc :

PROPRIETE VI.1
Soit $S = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ une suite de n+1 éléments de $\mathbb{N}^*$
de cotrace : $\partial = \partial(S) = m - K_1 - K_2$
et d'antitrace : $\rho = \rho(S) = K_1 - K_2$
On a les conditions suivantes qui sont équivalentes entre elles :

$$
\left|
\begin{array}{l}
m \mid K_1^2 - \rho K_1 + (-1)^n \\
m \mid K_1^2 + \delta K_1 + (-1)^{n+1} \\
m \mid (m - K_2)^2 - \rho (m - K_2) + (-1)^n \\
m \mid (m - K_2)^2 - \delta (m - K_2) + (-1)^{n+1}
\end{array}
\right.
$$

La cotrace δ présente cependant une propriété très remarquable qui a été découverte par BARRUCAND et DUBOUE [7] et que l'on utilise maintenant pour en déduire des propriétés de la suite S.

Soit S une suite associée à m, K_1, K_2 et λ :

$$M_S = \begin{bmatrix} m & ; K_1 \\ m - K_2 & ; K_1 - \lambda \end{bmatrix}$$

Soit, d'autre part, s une suite associée à $\underset{\sim}{m}$, $\underset{\sim}{K}_1$, $\underset{\sim}{K}_2$ et $\underset{\sim}{\lambda}$ avec :

$$M_s = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{m} & ; \underset{\sim}{K}_1 \\ \underset{\sim}{m} - \underset{\sim}{K}_2 & ; \underset{\sim}{K}_1 - \underset{\sim}{\lambda} \end{bmatrix}$$

La suite sSs* détermine :

$$M_{sSs^*} = \begin{bmatrix} \mathcal{M} & \mathcal{K}_1 \\ \mathcal{M} - \mathcal{K}_2 & \mathcal{K}_1 - \mathcal{L} \end{bmatrix}$$

Cette dernière matrice est calculable explicitement :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \underset{\sim}{m}m\underset{\sim}{m} + \underset{\sim}{K}_1 m\underset{\sim}{m} - \underset{\sim}{K}_1 K_2 \underset{\sim}{m} + \underset{\sim}{m}K_1 \underset{\sim}{K}_1 + \underset{\sim}{K}_1 K_1 \underset{\sim}{K}_1 - \underset{\sim}{K}_1 \lambda \underset{\sim}{K}_1 \\
&= \underset{\sim}{m}^2 (m) + \underset{\sim}{K}_1 \underset{\sim}{m}(m - K_2 + K_1) + \underset{\sim}{K}_1^2 (K_1 - \lambda)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{K}_1 = (\underset{\sim}{m}m + \underset{\sim}{K}_1 m - \underset{\sim}{K}_1 K_2)(\underset{\sim}{m} - \underset{\sim}{K}_2) + (\underset{\sim}{m}K_1 + \underset{\sim}{K}_1 K_1 - \underset{\sim}{K}_1 \lambda)(\underset{\sim}{K}_1 - \underset{\sim}{\lambda})$$

$$\mathcal{K}_2 = (\underset{\sim}{K}_2 m + \underset{\sim}{\lambda} m - \underset{\sim}{\lambda} K_2)\underset{\sim}{m} + (\underset{\sim}{K}_2 K_1 + \underset{\sim}{\lambda} K_1 - \underset{\sim}{\lambda}\lambda)\underset{\sim}{K}_1$$

Soit l'expression :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2 - \mathcal{M} &= \underset{\sim}{K}_1 \underset{\sim}{K}_2 (K_1 + K_2 - m) - \underset{\sim}{m} \underset{\sim}{\lambda} (K_1 + K_2 - m) \\
&= \det(M_s).(K_1 + K_2 - m) \\
&= \pm (K_1 + K_2 - m)
\end{aligned}$$

Ceci permet d'énoncer, avec tous les résultats déjà établis avant :

PROPRIETE VI.2 (Propriétés de la cotrace)
Si S et s sont des suites d'éléments de $\mathbb{N}^*$, on a :

(1) $\chi(sSs^*) = \det(M_s).\ \chi(S) = \pm\ \chi(S)$

(2) $\chi(S^*) = -\ \chi(S)$

(3) $\chi(\overline{S}) = \chi(S)$

B / PROPRIETE DE (ε , χ) ADMISSIBILITE

On pose en liaison avec la propriété VI.1 :

DEFINITION
Etant donné un entier quelconque χ , un nombre $\varepsilon \in \{+1\ ,\ -1\}$ on dit que le nombre entier u est (ε , χ)-admissible si et seulement s'il existe deux entiers a_1 et a_2 tels que :

$$u^2 - \chi u + \varepsilon = a_1 a_2 \quad \text{avec} \quad 0 < a_1 \leqslant u$$
$$\text{et} \quad 0 < a_2 \leqslant u$$

On note $A_+(\chi)$ l'ensemble des nombres u qui sont $(1, \chi)$ admissibles, $A_-(\chi)$ l'ensemble des nombres $((-1), \chi)$ admissibles.
Plus généralement, $A_\varepsilon(\chi)$ désigne l'ensemble des nombres (ε , χ) admissibles.

Les ensembles $A_\varepsilon(\chi)$ peuvent être étudiés, en généralisant la méthode que BARRUCAND DUBOUE [7] ont développés pour les seuls ensembles $A_+(\chi)$.

(1) Si $\varepsilon = +1$ et $\chi \leqslant 0$, on a $A_+(\chi) = \emptyset$
En effet, $\forall\ a_1$, a_2 vérifiant $0 < a_1 \leqslant u$ et $0 < a_2 \leqslant u$
$\chi \leqslant 0 \Longrightarrow u^2 - \chi u + 1 \geqslant u^2 + 1 > a_1 a_2$

(2) Si $\varepsilon = -1$ et $\chi \leqslant 0$, on a :

$$u^2 - \chi u + \varepsilon \geqslant u^2 - 1$$

L'égalité n'est possible que pour $\chi u = 0$ soit $\chi = 0$.
Dans les autres cas où $\chi < 0$, on a $A_-(\chi) = \emptyset$.

Pour le cas $\lambda = 0$, la condition

$$u^2 - 1 = a_1 a_2$$

se réduit, en posant $a_1 = u - \alpha_1$ et $a_2 = u - \alpha_2$:

- le cas $\alpha_1 = 0$ impose $u = 1$ d'où une contradiction.
- le cas $\alpha_2 = 0$ donne de même une contradiction.
- Hors ces cas, on a :

$$u^2 - 1 = a_1 a_2 \leqslant (u - 1)^2 = u^2 - 2u + 1$$

soit $u \leqslant 1$

On trouve de même une contradiction.

(3) Si $\varepsilon = +1$ et $\lambda > 0$:

La condition $u^2 - \lambda u + 1 = a_1 a_2$ donne :

$$a_1 = \frac{u^2 - \lambda u + 1}{a_2} \geqslant \frac{u^2 - \lambda u + 1}{u} > u - \lambda$$

Soit : $a_1 \geqslant u - \lambda + 1$

De même : $a_2 \geqslant u - \lambda + 1$

En posant : $a_1 = u - \alpha_1 \qquad (0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \lambda - 1)$

$a_2 = u - \alpha_2 \qquad (0 \leqslant \alpha_2 \leqslant \lambda - 1)$

On obtient :

$$(\alpha_1 + \alpha_2 - \lambda)u = \alpha_1\alpha_2 - 1$$

Cette égalité dégénère lorsque $\alpha_1 + \alpha_2 - \lambda = \alpha_1\alpha_2 - 1 = 0$

Soit $\lambda = 2 \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = 1$

Hors ce cas, en faisant varier α_1 et α_2 entre 0 et $\lambda - 1$, on fabrique λ^2 équations du premier degré déterminant chacune une unique valeur u.

L'ensemble $A_+(\lambda)$ est donc fini, contenant au plus λ^2 éléments.

Le cas $\lambda = 2$ se réduit à :

$$\begin{cases} (u - 1)^2 = a_1 a_2 \\ 0 < a_1 \leqslant u \\ 0 < a_2 \leqslant u \end{cases}$$

En posant $a_1 = a_2 = u - 1$, on trouve $A_+(2) = \mathbb{N}^* - \{1\}$

(4) Si $\varepsilon = -1$ et $\lambda > 0$:

La condition $u^2 - \lambda u - 1 = a_1 a_2$ donne :

$$a_1 = \frac{u^2 - \lambda u - 1}{a_2} \geqslant \frac{u^2 - \lambda u - 1}{u} \geqslant u - \lambda - 1$$

De même : $a_2 \geqslant u - \lambda - 1$

On pose : $a_1 = u - \alpha_1 \qquad (0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \lambda + 1)$

$a_2 = u - \alpha_2 \qquad (0 \leqslant \alpha_2 \leqslant \lambda + 1)$

On obtient :

$$(\alpha_1 + \alpha_2 - \lambda)u = \alpha_1 \alpha_2 + 1$$

Cette égalité ne peut dégénérer. Elle détermine au plus $(\lambda + 2)^2$ valeurs dans $A_-(\lambda)$ qui est donc fini.

On a ainsi établi :

PROPRIETE VI.3

Les ensembles de nombres $A_\varepsilon(\lambda)$ vérifient les propriétés suivantes :

(1) Si $\lambda \leqslant 0$ $\qquad A_+(\lambda) = A_-(\lambda) = \emptyset$

(2) Si $\lambda > 0$ $\qquad A_-(\lambda)$ ensemble fini

(3) Si $\lambda > 0$ et $\lambda \neq 2$ $\qquad A_+(\lambda)$ ensemble fini

(4) $A_+(2) = \mathbb{N} - \{0,1\}$

En fait, les valeurs extremales des ensembles $A_\varepsilon(\lambda)$ peuvent être explicitées lorsque $A_\varepsilon(\lambda)$ est fini.

PROPRIETE VI.4

On a les propriétés suivantes :

(1) Si $\lambda > 0$, le plus petit élément de $A_+(\lambda)$ est λ.

(2) $A_+(1) = 1$

(3) Si $\lambda > 2$, le plus grand élément de $A_+(\lambda)$ vaut

$$\frac{\lambda^2 + 2\lambda - 4}{4} \text{ si } \lambda \text{ pair et } \frac{\lambda^2 + 2\lambda - 3}{4} \text{ si } \lambda \text{ impair.}$$

(4) Si $\lambda > 0$, le plus petit élément de $A_-(\lambda)$ est $\lambda + 1$.

(5) $A_-(1) = \{2\}$

(6) Si $\lambda > 1$, le plus grand élément de $A_-(\lambda)$ vaut

$\frac{\lambda^2 + 2\lambda + 4}{4}$ si λ pair et $\frac{\lambda^2 + 2\lambda + 5}{4}$ si λ impair.

La démonstration s'effectue comme suit, pour $\lambda > 0$ et $\varepsilon = +1$.

. pour $a_1 = a_2 = 1$ $\quad u = \lambda$ est solution de $u^2 - \lambda u + 1 = a_1 a_2$

. si $u < \lambda$, on a : $u^2 - \lambda u + 1 \leqslant -u + 1 \leqslant 0$
D'où l'impossiblité de trouver a_1 et a_2.
Ainsi, $\lambda > 0$ est toujours le plus petit élément de $A_+(\lambda)$.

. Pour $\lambda = 1$, en posant $a_1 = u - \alpha_1$ et $a_2 = u - \alpha_2$,
on devrait avoir comme dans la démonstration de la propriété IV.3 (2) :

$$(A) \quad \begin{cases} (\alpha_1 + \alpha_2 - \lambda)u = \alpha_1\alpha_2 - 1 \\ 0 \leqslant \alpha_1 < \lambda - 1 \\ 0 \leqslant \alpha_2 \leqslant \lambda - 1 \end{cases}$$

D'où nécessairement, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et $u = 1$

C'est-à-dire : $A_+(1) = \{1\}$

. Pour $\lambda \neq 1$, le système (A) rappelé ci-dessus donne plusieurs cas :

* si $\alpha_1 = 0$, il reste : $(\alpha_2 - \lambda)u = -1$
soit $u = 1$ $\quad \alpha_2 = \lambda - 1$
D'après ce que l'on vient de voir, il faut alors $\lambda = 1$,
soit $a_1 = a_2 = 1$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

* si $\alpha_1 \neq 0$, et par symétrie $\alpha_2 \neq 0$
- l'équation de (A) peut dégénérer si $\lambda = 2$
- si au contraire $\lambda > 2$, il reste :

$$u = \frac{\alpha_1 \alpha_2 - 1}{\alpha_1 + \alpha_2 - 1}$$

Cette fonction en α_1 et α_2 est maximale pour α_1 et α_2 minimaux, avec de plus, nécessairement : $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$.

Elle est donc maximale pour $\alpha_1 + \alpha_2 = \lambda + 1$ et α_1, α_2 maximal, c'est-à-dire pour les valeurs suivantes :

(1) Si $\lambda = 2\gamma$ $\quad \alpha_1 = \gamma \quad \alpha_2 = \gamma + 1$

$$u^2 = \gamma^2 + \gamma - 1 = \frac{\lambda(\lambda + 2)}{4} - 1$$

On a bien alors : $u^2 - \lambda u + 1 = (\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - 2)$

(2) Si $\lambda = 2\gamma + 1$ $\quad \alpha_1 = \alpha_2 = \gamma + 1$

$$u = \gamma(\gamma + 2) = \frac{(\lambda + 3)(\lambda - 1)}{4}$$

On a bien alors : $u^2 - \lambda u + 1 = (\gamma^2 + \gamma - 1)^2$

Pour le cas où $\lambda > 0$ et $\varepsilon = -1$, on procède comme suit :

- si $u \leqslant \lambda$, on a : $u^2 - \lambda u - 1 \leqslant -1$. D'où l'impossibilité de trouver a_1 et a_2 .
- Si $u = \lambda + 1$ $\quad u^2 - \lambda u - 1 = \lambda$
  On peut cette fois choisir : $a_1 = \lambda \quad a_2 = 1$
  On a donc $\lambda + 1$ plus petit élément de $A_-(\lambda)$.
- Pour $\lambda = 1$, en posant $a_1 = u - \alpha_1$ et $a_2 = u - \alpha_2$, on se ramène à :

$$(B) \quad \begin{cases} (\alpha_1 + \alpha_2 - \lambda)u = \alpha_1 \alpha_2 + 1 \\ 0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \lambda + 1 \\ 0 \leqslant \alpha_2 \leqslant \lambda + 1 \end{cases}$$

Soit les trois possibilités suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 & \alpha_2 = 2 & u = 1 & \text{contradictoire avec } a_2 > 0 \\ \alpha_1 = 1 & \alpha_2 = 1 & u = 2 & \text{soit } a_1 = a_2 = 1 \\ \alpha_1 = 2 & \alpha_2 = 0 & u = 1 & \text{contradictoire avec } a_1 > 0 \end{cases}$$

Pour finir, il reste seulement $A_-(1) = \{2\}$.

. Pour $\lambda \neq 1$, l'égalité de (B) ne peut dégénérer car on a :

$$\alpha_1 \alpha_2 + 1 > 1$$

On peut donc toujours écrire :

$$u = \frac{\alpha_1 \alpha_2 + 1}{\alpha_1 + \alpha_2 - \lambda}$$

Le maximum de cette expression est obtenu pour α_1 et α_2 simultanément les plus petits possibles, donc leur somme minimale :

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \lambda + 1$$

u est alors maximal si $\alpha_1 \alpha_2$ maximal, soit $|\alpha_1 - \alpha_2|$ minimal, ce qui donne les cas suivants :

(1) Si $\lambda = 2l$ $\quad \alpha_1 = l \quad \alpha_2 = l + 1$

Il reste :
$$\begin{cases} u = l^2 + l + 1 = \dfrac{\lambda(\lambda+2)}{4} + 1 \\ a_1 = l^2 + 1 \\ a_2 = l^2 \end{cases}$$

$$u^2 - \lambda u - 1 = l^4 + l^2 + 1 + 2l^3 + 2l^2 + 2l - 2l^3 - 2l^2 - 2l - 1$$
$$= l^4 + l^2 = a_1 a_2$$

(2) Si $\lambda = 2l + 1$ $\quad \alpha_1 = \alpha_2 = l + 1$

Il reste :
$$\begin{cases} u = l^2 + 2l + 2 = \dfrac{\lambda(\lambda+2)+5}{4} \\ a_1 = a_2 = l^2 + l + 1 \end{cases}$$

$$u^2 - \lambda u - 1 = l^4 + 4l^2 + 4 + 4l^3 + 4l^2 + 8l - 2l^3 - 4l^2 - 4l - l^2 - 2l - 2 - 1$$
$$= l^4 + 2l^3 + 3l^2 + 2l + 1$$
$$= (l^2 + l + 1)^2 = a_1 a_2$$

Ceci termine complètement la démonstration de la propriété IV.4.

C / APPLICATION A L'ETUDE DES SUITES:

On pose maintenant en introduisant des suites contenant des 0 :

DEFINITION

Soit $S = (a_0, a_1, \ldots a_n)$ une suite d'éléments de $\mathbb{N}^*$ et soit j le plus petit indice tel que $a_j \neq a_{n-j}$.

Si j n'existe pas, on dit que la suite S est palindrome ($S = S^*$). Pour le développement associé, on peut écrire $[S] = [sS_1 s^*]$ où S_1 suite vide ou égale à (0) ou à (0,1,0).

Si j existe, la suite S permet d'écrire pour les développements en fraction continue : $[S] = [sS_1 s^*]$ avec :

$$s = (a_0, \ldots a_{j-1}, \text{Min}(a_j, a_{n-j}))$$

$$S_1 = (a_{j+1}, \ldots, a_{n-j} - a_j, 0)$$

$$\text{ou } S_1 = (0, a_j - a_{n-j}, a_{j+1} \ldots a_{n-j-1})$$

On dit, dans tous les cas, que S_1 est le centre de S.

La convention utilisée est bien sûr la propriété (E.2) :

$$[\ldots, a, 0, b, \ldots] = [\ldots, a + b, \ldots]$$

On peut alors établir :

THEOREME VI.1

Soit $n \in \mathbb{N}$ donné, $\lambda \in \mathbb{N}$ et soient m et u des nombres entiers positifs vérifiant :

$$\begin{cases} u > \lambda \\ m > u - \lambda \end{cases}$$

Si m divise $u^2 - \lambda u + (-1)^{n+1}$ et si l'on convient d'écrire sous forme de développement en fraction continue :

$$\frac{m}{u} = [S] = [b_0, b_1, \ldots b_r]$$

où la longueur t + 1 de S est de même parité que n + 1.

Alors, on a les conditions suivantes :

(1) Si $\lambda = 0$, la suite S est symétrique : $S = S^*$

Elle donne $[S] = [sS_1 s^*]$ où S_1 centre vide ou réduit à (0) ou (0,1,0).

(2) Si n impair et $|\lambda| = 2$, alors le centre S_1 de S a la forme $(1, \delta, 1, 0)$ ou $(0, 1, \delta, 1)$ où :

$$\delta = \text{pgcd}\left(m, \frac{u^2 - \lambda u + 1}{m}\right) - 1$$

(3) Dans les autres cas, il existe un ensemble fini $\mathcal{C}(\lambda)$ de centres S_1 de S, ne dépendant que de λ , tel que l'on puisse écrire :

$$M_S = M_A M_{S_1} M_{A^*}$$

$$\text{et} \quad [S] = [A S_1 A^*]$$

$$\text{où} \quad S_1 \in \mathcal{C}(\lambda)$$

Démonstration

Le nombre m divise $u^2 - \lambda u + (-1)^{n+1} = u(u - \lambda) + (-1)^{n+1}$

avec la condition : $m > u - \lambda > 0$

Il en résulte la possibilité d'écrire :

$$\begin{bmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} b_r & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & u - \lambda \\ u & u - \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

avec : $(-1)^{n+1} = (-1)^{r+1}$

$$= m(u - \lambda - 1) - u^2 + \lambda u$$

Soit : $u^2 - \lambda u + (-1)^{n+1} = m(u - \lambda - 1)$

En posant $S = (b_0, \ldots, b_r)$ et en notant S_1 le centre de S, on a par la propriété V.2 et la définition de $\lambda(S)$:

$$\lambda(S) = \pm \lambda(S_1) = u - (u - \lambda) = \lambda$$

On est maintenant en mesure d'utiliser les conditions sur λ .

(1) Si $\lambda = 0$, par transposition on trouve $S = S^*$, d'où l'expression de [S].

(2) Si $\lambda \neq 0$, avec la propriété VI.2(2), on peut choisir pour T la suite S_1 où S_1^* telle que l'on ait :

$$\lambda(T) = |\lambda| > 0$$

En notant $T = (c_0, c_1, \ldots c_k)$

On obtient :

$$M_T = \begin{bmatrix} c_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} c_k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & p' \\ q & q' \end{bmatrix}$$

Et puisque $c_0 = 0$ ou $c_k = 0$, on a d'abord :

$$\begin{cases} 0 < p \leqslant q \\ 0 < q' \leqslant q \end{cases}$$

Par calcul du déterminant de M_T , on a aussi :

$$(-1)^{k+1} = (-1)^{r+1}$$
$$= (-1)^{n+1}$$
$$= pq' - p'q$$

Soit encore, avec $p' = q - |\lambda|$:

$$pq' = q^2 - |\lambda| q + (-1)^{n+1}$$

Il en résulte que q est un nombre $((-1)^{n+1}, |\lambda|)$-admissible.
Avec la propriété VI.3, si $|\lambda| \neq 2$, on ne trouve qu'un nombre fini de possibilités pour q, donc pour p et aussi pour T. On fabrique ainsi l'ensemble fini $\mathcal{C}(\lambda)$ du ThéorèmeVI.1.

On note que ces centres sont explicitement calculables, avec les conditions :

$$\begin{cases} p|q^2 - |\lambda| q + (-1)^{n+1} = pq' \\ 0 < p \leq q \\ 0 < q' \leq q \\ \dfrac{p}{q} = [c_0, c_1, \ldots, c_k] \quad \text{où} \quad (-1)^{k+1} = (-1)^{n+1} \end{cases}$$

Enfin, pour le cas $|\lambda| = 2$ et $(-1)^{n+1} = 1$, la démonstration de la propriété VI.3 impose : $p = q' = q - 1$
Il reste :

$$M_T = \begin{bmatrix} q-1 & ; & q-2 \\ q & ; & q-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q-2 & ; & 1 \\ 1 & ; & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit : T = (0,1,q-2,1)

En posant alors :

$$M_\Delta = \begin{bmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} b_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{bmatrix}$$

Il est facile de voir que l'on a : $\text{pgcd}(\alpha + \beta', \alpha' + \beta) = 1$
Et en calculant explicitement $M_S = M_\Delta M_T M_{\Delta^*}$ ou $M_S = M_{\Delta^*} M_T^c M_\Delta$
on en déduit facilement : $q-1 = \text{pgcd}(m, u - \lambda - 1)$.

Ceci termine la démonstration du Théorème VI.1.

En revenant aux notations antérieures, avec :

$$u = m - K_2$$

$$\lambda = m - K_1 - K_2 = u - K_1$$

On a bien : $m > K_1 > 0$ (hors le cas $m = 1$).
Or la propriété VI.1 donne :

$$m \mid (m - K_2)^t - \lambda (m - K_1) + (-1)^{n+1}$$

Le Théorème VI.1 est donc applicable. Il donne pour la suite S,

qui vérifie $\dfrac{m}{m - K_2} = [S]$, la structure particulière suivante :

THEOREME VI.2 (Propriété de palindromie des suites)
Pour toute suite d'éléments de $\mathbb{N}^*$:

$$S = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

définissant $M_S = \begin{bmatrix} m & ; K_1 \\ m - K_2 & ; K_1 - 1 \end{bmatrix}$

de cotrace : $\lambda = \lambda(S) = m - K_1 - K_2$
On a les propriétés suivantes :

(1) On a équivalence de $\lambda = 0$ et de $S = S^*$.
(2) On a équivalence des propriétés suivantes :
  (a) n impair et $|\lambda| = 2$
  (b) la suite S a la forme suivante :
  $S = (a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, 1, \delta, a_j + 1, a_{j-1}, \ldots, a_1, a_0)$
  (pour $\lambda = 2$)
  ou
  $S = (a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + 1, \delta, 1, a_j, a_{j-1}, \ldots a_1, a_0)$
  (pour $\lambda = -2$)
  avec $\delta = \text{pgcd}(m, K_1 - 1) - 1$
  – si $\text{pgcd}(m, K_1 - 1) = 1$, il reste seulement :
  $S = (a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_j + 2, a_{j-1}, \ldots, a_1, a_0)$
  ou
  $S = (a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + 2, a_j, a_{j-1}, \ldots, a_1, a_0)$

(3) Hors les cas précédents, on peut écrire :

$$S = sS_1 s^*$$

où $S_1 \in \mathcal{C}(\lambda)$
et $\mathcal{C}(\lambda)$ ensemble fini de centres ne dépendant que de l'ensemble $A_{(-1)^{n+1}}(|\lambda|)$.

Par ailleurs, en utilisant la transformation $S \longrightarrow S'$ telle que $\lambda(S') = \mu(S)$ et $\mu(S') = \lambda(S)$, la propriété IV.2 donne directement :

PROPRIETE VI.5 (Propriété des antitraces)
Si S et s sont des suites d'éléments de $\mathbb{N}^*$, on a :

(1) $\mu(s\overset{\vee}{S}\tilde{s}) = \mu(S) = \lambda(s\overset{\vee}{S}s^*) = \lambda(\overset{\vee}{S})$

(2) $\mu(S^*) = \mu(S)$

(3) $\mu(\overline{S}) = -\mu(S)$

Et aussi, à partir du Théorème VI.2 :

THEOREME VI.3 (Propriété d'antidromie des suites)
Pour toute suite d'éléments de $\mathbb{N}^*$

$$S = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

d'antitrace $\mu = \mu(S) = K_1 - K_2$

on a les propriétés suivantes :
(1) on a équivalence de $\mu = 0$ et de $S = \overline{S}$ (ou $\tilde{S} = \hat{S}$ palindrome)
(2) on a équivalence des propriétés suivantes :
(a) n pair et $|\mu| = 2$
(b) S a la forme suivante où $\delta = \text{pgcd}(m,]) - 1$
$S = (a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, 1, \delta, a_j + 1, a_{j-1}, \ldots, a_1, a_0 - 1, 1$
pour $\mu = 2$.
$S = (a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + 1, \delta, 1, a_j, a_{j-1}, \ldots, a_1, a_0 - 1, 1)$
pour $\mu = -2$.
(3) Hors les cas précédents, on peut écrire $S = sS_1\tilde{s}$
où $S_1 \in \mathcal{C}(\mu)$.
avec $\mathcal{C}(\mu)$ ensemble fini de centres ne dépendant que de l'ensemble $A_{(-1)^n}(|\mu|)$.

VII. UNE SECONDE GENERALISATION DE LA THEORIE DE MARKOFF

A / DES TABLEAUX DE SUITES

On suppose donné $\mu = K_1 - K_2 \in \mathbb{Z}$

On utilise les conditions données par le Théorème II. 1 :

(R.0) : n de parité fixée

(R.2) : $0 < q_{i-1} = K_1 \leqslant p_{i-1} = m$

(R.5) : $p_{i-1} \mid q_{i-1}^2 - \mu q_{i-2} + (-1)^n$

(R.7) : $\dfrac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = [S^*]$

En décrivant toutes les valeurs $m \in \mathbb{N}^*$, et pour chacune d'elle les valeurs K_1 vérifiant (R.2), on détermine avec (R.5) les possibilités correspondantes pour p_{i-2} , q_{i-2} . La relation (R.7) permet de construire la suite S et le nombre t(S).

On fabrique ainsi des périodes (S,t(S)) qui correspondent à des valeurs diverses de t(S) . Elles peuvent être classées en divers tableaux selon la parité de n et les valeurs de t(S).

Le programme informatique "T2" donné en annexe effectue automatiquement cette opération en fonction des trois paramètres μ , $(-1)^n$ et t(S) qui lui sont fixés.

Au moyen de la transformation miroir, le programme "T2" ne fournit qu'une suite S parmi les deux (S,t(S)) et (S*,t(S)) qui existent pour une même valeur des paramètres.

Il s'agit de celle vérifiant l'encadrement :

$$\mathrm{Sup}(0,\mu) < K_1 \leqslant \frac{m+\mu}{2}$$

Avec $\mu = 0$, le programme "T2" fournit les suites permettant de constituer la première généralisation de la Théorie de MARKOFF : la $(a,0,\varepsilon)$ Théorie.

Avec le programme "EXTREMUM", on peut vérifier la condition de superréduction intervenant dans la définition de cette $(a,0,\varepsilon)$ Théorie.

Le cas extrême $K_1 = \dfrac{m+\mu}{2}$ n'est possible que si m et μ sont de même parité et tels que : $m \mid \left(\dfrac{m^2-\mu^2}{4} + (-1)^n \right)$

Cette condition implique : $m \mid \mu^2 - 4(-1)^n$
Elle montre que si μ est fixé, distinct de ± 2 si n pair, il n'existe qu'un nombre fini de possibilités pour m.
Si au contraire n pair et $\mu = \pm 2$, on trouve une infinité de possibilités pour m.

Exemple
Pour $\mu = 2$, on trouve : $S = (1,1,a,1,1)$ $(a \in \mathbb{N}^*)$

avec $\begin{cases} m = 4a + 4 \\ K_2 = 2a + 1 \\ K_1 = 2a + 3 \\ \ell = a + 1 \end{cases}$

Pour $\mu = -2$, on trouve : $S = (2,a,2)$ $(a \in \mathbb{N}^*)$

avec $\begin{cases} m = 4a + 4 \\ K = 2a + 1 \\ K = 2a + 3 \\ \ell = a + 1 \end{cases}$

Le cas $K_1 = \dfrac{m+\mu}{2}$ est précisément celui où l'on a $K_1 + K_2 = m$, c'est-à-dire S suite palindrome.

On remarque maintenant que la condition (R.5) permet l'application du Théorème VI.1, sous réserve d'avoir :

$$p_{i-2} > q_{i-2} - \mu \geqslant 0$$

Dans ce cas, avec :

$$\frac{p_{i-2}}{q_{i-2}} = [S^*]$$

On fabrique le développement :

$$\frac{p_{i-2}}{q_{i-2}} = [\tilde{S}]$$

où la suite $\tilde{S}$ est la suite transformée de la suite $S = (a_0, a_1, \ldots a_n)$ définie comme suit :

. si $a_0 = 1$ $\quad \tilde{S} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1 + 1)$

. si $a_0 \neq 1$ $\quad \tilde{S} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0 - 1, 1)$

La longueur $\tilde{n} + 1$ de la suite $\tilde{S}$ est de même parité que n.
Si l'on considère alors le Théorème VI.1, on peut distinguer les cas suivants :

Cas 1 : Si on n'a pas : $p_{i-2} > q_{i-1} - \mu \geqslant 0$
Il se présente donc deux possibilités :

(1) $\mu > q_{i-2} > 0$

On ne trouve ainsi qu'un nombre fini de possibilités pour q_{i-2} et avec la condition (R.5) un nombre fini de possibilités pour p_{i-2}, donc pour S.

(2) $q_{i-2} - \mu \geqslant p_{i-2} > q_{i-1} > 0$

Dans ce cas, le nombre μ est strictement négatif et vérifie :

$$-\mu \geqslant p_{i-2} - q_{i-2} > 0$$

$$p_{i-2} \mid (p_{i-2} - q_{i-2})^2 + \mu (p_{i-2} - q_{i-2}) + (-1)^n$$

On ne trouve ainsi qu'un nombre fini de possibilités pour $p_{i-2} - q_{i-2}$, puis pour p_{i-2}, donc pour q_{i-2}, et enfin S.

Dans les deux hypothèses examinées, c'est-à-dire dans le cas envisagé ici, il n'existe d'un nombre fini de possibilités pour S.

Cas 2 : Si on a : $p_{i-2} > q_{i-1} - \mu > 0$
On peut fabriquer la suite $\tilde{S}$ telle que $\mathcal{L}(\tilde{S}) = K_1 - K_2 = \mu(S)$ et lui appliquer le Théorème VI.2 et la propriété VI.2.

Ceci permet de distinguer les cas suivants parmi les suites S vérifiant $\mu(S) = \mu$:

(1) Il n'en existe qu'un nombre fini telles que l'on n'ait pas l'inégalité : $p_{i-2} > q_{i-1} - \mu \geqslant 0$.
(2) Il en existe au contraire une infinité telles que l'on ait l'inégalité : $p_{i-2} > q_{i-1} - \mu \geqslant 0$.
Elles vérifient les propriétés suivantes :

(2.1) Si $\mu = 0$, la suite transformée $\tilde{S}$ est palindrome : $\tilde{S} = \hat{S}$

(2.2) Si n pair et $|\mu| = 2$, on trouve pour S la forme suivante :

$S = (a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, 1, \text{pgcd}(m,1)-1, a_j+1, a_{j-1}, \ldots, a_1, a_0-1, 1)$ pour $\mu = 2$

$S = (a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j+1, \text{pgcd}(m,1)-1, a_j, a_{j-1}, \ldots, a_1, a_0-1, 1)$ pour $\mu = -2$

(2.3) Hors les cas précédents, on peut écrire :

$$\tilde{S} = sS_1^*s^*$$

où $S_1^* \in \mathcal{C}(\mu)$ ensemble fini de centres ne dépendant que de l'ensemble des nombres admissibles $A_{(-1)^n}(|\mu|)$.

On retrouve ainsi les résultats fournis par le Théorème VI.3.

Inversement, à partir de ce résultat, en utilisant la propriété VI.2 ainsi que des suites s composées uniquement des nombres 1,2, ... a , on obtient facilement :

THEOREME VII.1

Pour toutes valeurs $\mu \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon = \pm 1$, il existe un nombre $T(\mu) \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $a \geqslant T(\mu)$ on puisse trouve une infinité de suites $S = (a_0, a_1, \ldots a_n)$ vérifiant les conditions :

(1) $\mu(S) = \mu$

(2) $t(S) = a$

(R.0) : n de parité fixe ($\varepsilon = (-1)^n$)

(R.2) : $0 < q_{i-2} = K_1 < p_{i-2} = m$

(R.5) : $p_{i-2} \mid q_{i-2}^2 - \mu q_{i-2} + (-1)^n$

(R.7) : $\dfrac{p_{i-2}}{q_{i-2}} = [S^*]$

Ce résultat montre que pour t(S) = a assez grand, tous les tableaux donnés par le programme informatique "T2" contiennent une infinité de possibilités pour m, K_1, S.

En ce qui concerne maintenant les cas qui ne sont pas des cas frontières, on peut énoncer :

THEOREME VII.2 (Cas non frontières)
Pour $\mu = K_1 - K_2 \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{N}^*$ fixés, s'il existe une infinité de valeurs $p_{i-2} = m$, $q_{i-2} = K_1$ vérifiant :
(R.0) : n de parité fixée
(R.2) : $0 < q_{i-2} = K_1 \leqslant p_{i-2} = m$
(R.5) : $p_{i-2} \mid q_{i-2}^2 - \mu q_{i-2} + (-1)^n$

(R.7) : $\dfrac{p_{i-2}}{q_{i-2}} = [S^*]$

où $S = (a_0, a_1, \ldots a_n)$ définit $t(S) < a$
Alors :

(1) La valeur $\dfrac{1}{a+1}$ est point d'accumulation des constantes de MARKOFF correspondantes $C(\zeta_2(S))$. C'est le seul point d'accumulation de ces nombres.

(2) Si $\mu < 0$, on a pour toutes ces constantes sauf un nombre fini l'inégalité :

$$C(\zeta_2(S)) > \frac{1}{a+1}$$

(3) Si $\mu > 0$, on a pour toutes ces constantes sauf un nombre fini l'inégalité :

$$C(\zeta_2(S)) < \frac{1}{a+1}$$

(4) Si $\mu = 0$, la condition

$$C(\zeta_2(S)) > \frac{1}{a+1}$$

n'a lieu que si et seulement si n pair. De même, la condition

$$C(\zeta_2(S)) < \frac{1}{a+1}$$

n'a lieu que si et seulement si n impair.

Démonstration

Dans les hypothèses retenues, la constante de MARKOFF a une expression donnée par la formule de DICKSON :

$$C(\zeta_a(S)) = \frac{m}{\sqrt{[(a+1)m + \mu]^2 + 4(-1)^{n+1}}}$$

Le point d'accumulation est obtenu pour m augmentant indéfiniment, ce qui est possible car il existe une infinité de possibilités pour S. Et puisque a, μ fixés, ce point vaut :

$$\lim_{m \to \infty} \frac{m}{\sqrt{[(a+1)m + \mu]^2 + 4(-1)^{n+1}}} = \frac{1}{a+1}$$

. Si $\mu < 0$, on a :

$$0 \leqslant (a+1)m + \mu \leqslant (a+1)m - 1$$

Soit dans tous les cas sauf un nombre fini :

$$C(\zeta_a(S)) \geqslant \frac{m}{\sqrt{[(a+1)m - 1]^2 + 4(-1)^{n+1}}} > \frac{1}{a+1}$$

. Si $\mu > 0$, on a :

$$0 \leqslant (a+1)m + 1 \leqslant (a+1)m + \mu$$

Soit de même :

$$C(\zeta_a(S)) \leqslant \frac{m}{\sqrt{[(a+1)m + 1]^2 + 4(-1)^{n+1}}} < \frac{1}{a+1}$$

. Si $\mu = 0$, on a :

$$C(\zeta_a(S)) = \frac{m}{\sqrt{[(a+1)m]^2 + 4(-1)^{n+1}}} > \frac{1}{a+1}$$

$$\Longleftrightarrow 0 > (-1)^{n+1}$$

$$\Longleftrightarrow n \text{ pair}$$

Le Théorème VII.2 est donc totalement établi.

L'analyse des cas frontières est plus délicate, car on a alors seulement :

$$C(\zeta_a(S)) = \frac{m_a(S)}{\sqrt{[(a+1)m + \mu]^2 + 4(-1)^{n+1}}} \leqslant \frac{m}{\sqrt{[(a+1)m + \mu]^2 + 4(-1)^{n+1}}}$$

Mais on s'assure facilement dans ce cas que $\frac{1}{a+1}$ est plus grand ou égal au plus grand point d'accumulation des nombres $C(\theta_a(S))$.
Il peut être égal si l'on parvient à établir que la situation $m_a(S) = m$ se produit une infinité de fois.
Or, pour a assez grand, ceci résulte directement du Théorème VI.3 avec l'écriture :

$$\tilde{S} = sS_1^*s^*$$

$$M_{\tilde{S}} = M_s M_{S_1^*} M_{s^*}$$

où l'un des cas suivants à lieu :

$$S_1^* = \emptyset$$

$$S_1^* = (1, pgcd(m,1)-1, 1, 0)$$

$$S_1^* = (0, 1, pgcd(m,1)-1, 1)$$

$$S_1^* \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \text{ (ensemble fini)}$$

Il suffit de choisir $s = (a, (1)_t)$ où a-1 supérieur aux nombres entiers pouvant apparaître dans S_1^*, que l'on peut borner.
On se ramène ainsi à une écriture :

$$S = (1, a-1, (1)_{t-1}, \alpha_1, \ldots \alpha_p, (1)_{t-1}, a) = (a_0, a_1, \ldots a_n)$$

où les termes $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ sont en nombre borné, et tous strictement inférieurs à a si ce dernier nombre est choisi assez grand.
Pour l'application du lemme de DICKSON dans le calcul de $C(\theta_a(S))$, on a alors deux possibilités dont il est facile de voir, par des inégalités évidentes que seul l'indice i = n-2 convient.
On a donc dans ce cas $m_a(S) = m$
Et en faisant varier t, on voit que cette égalité est assurée une infinité de fois.
En utilisant maintenant une suite :

$$S = ((1)_{t-1}, a, 1, \alpha_1 \ldots \alpha_p, 1, a, (1)_{t-3}, 2) = (a_0 \ldots a_n)$$

où les nombres $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ sont en nombre borné et tous strictement inférieurs à a.

On trouve par le lemme de DICKSON, dans une infinité de cas :

$$m_a(S) < m$$

En faisant varier t convenablement, cette inégalité est aussi assurée une infinité de fois.
On peut donc énoncer, et ceci complète le Théorème I.5 :

THEOREME VII.3
Pour toutes les valeurs $\mu \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon = \pm 1$, il existe un nombre $T(\mu) \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $a > T(\mu)$ et pour l'infinité des nombres $\theta_a(S)$ où :

(1) $S = (a_0, \ldots, a_n)$ vérifiant (R.0), (R.2), (R.5) et (R.7)
(2) $\mu(S) = \mu$
(3) $t(S) = a$ (Cas frontières)

on ait les conditions suivantes :
(a) l'égalité $m_a(S) = m$ est assurée dans une infinité de cas. Elle correspond à des mots de MARKOFF $S \in L_a$ frontières pour a. Ils existent en nombre infini dans $L_a - \langle a-1 \rangle^*$.
(b) L'inégalité $m_a(S) < m$ est assurée dans une infinité de cas. Elle correspond à des mots qui ne sont pas dans le langage L_a, et qui sont frontières pour a. Ils existent en nombre infini dans $\langle a \rangle^* - L_a$.

B / FORMES PARTICULIERES DES SUITES APPARAISSANT DANS LES TABLEAUX

Si l'on observe les diverses tables données par le programme "T2", on voit apparaître des formes communes, exprimables à partir de suites de polynômes en t(S) = a, de degré au plus égal à 1.

Exemple
Pour S = (1,a,a-2) on trouve :

$$\begin{cases} m = a^2 - a - 1 \\ K_1 = a + 1 \\ K_2 = a - 2 \\ (-1)^n = 1 \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Soit : $\mu = K_1 - K_2 = 3$

Ces formes donnent pour m des expressions polynomiales de degré 2 et pour K_1 et K_2 des expressions polynomiales de degré 1, de même que pour $\rho = K_1 - K_2$.
Elles donnent pour $m_a(S)$ des expressions polynomiales de degré au plus 2, avec dans une infinité de cas :

$$m_a(S) = m$$

et dans une autre infinité de cas :

$$m_a(S) \neq m$$

Ceci résulte du Théorème VII.3.

En notant : $S(a) = (a_0(a), a_1(a), \ldots a_n(a))$
et :

$$M(S(a)) = \begin{bmatrix} a_0(a) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ldots \begin{bmatrix} a_n(a) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m(a) & K_1(a) \\ m(a) - K_2(a) & K_1(a) - 1(a) \end{bmatrix}$$

Et aussi : $\zeta_a(S(a)) = [a-1, \underline{S, a}]$
On obtient :

$$\zeta_a(S(a)) = \frac{[m(a)(a-1) - K_1(a) - K_2(a) + \sqrt{\Delta_a(S(a))}}{2m(a)}$$

où . $\Delta_a(S) = [(a+1)m(a) + K_1(a) - K_2(a)]^2 + 4(-1)^{n-1}$ est un polynôme en a de degré inférieur ou égal à 6

. $m(a)(a-1) - K_2(a) - K_1(a)$ polynôme en a de degré inférieur ou égal à 3.

Exemple

$$\frac{(a+1)(a^2+1) - 2(a^2+a+1) + \sqrt{(a+1)^2(a^2+1)^2 - 4}}{2(a+1)}$$

$$= [a-1, \underline{1, a-1, a, a}]$$

Les calculs que l'on vient de faire expliquent l'observation que l'on présentait avant : il suffit de remplacer a par toute valeur adéquate de $\mathbb{N}^*$ pour faire apparaître les formes de périodes évoquées ci-dessus.

Ils donnent des résultats comparables à ceux que l'on trouve par exemple dans PERRON [1].
Ces calculs généralisent en partie la Théorie de MARKOFF classique. Ils étendent pour le cas $\rho \neq 0$ la première généralisation que j'ai évoquée précédemment : la $(a,0,\varepsilon)$ Théorie de MARKOFF.

Cependant, cette nouvelle généralisation est assez limitée puisqu'elle ne permet pas de se libérer de la valeur d'accumulation $\frac{1}{a+1}$.

C'est la raison pour laquelle on doit envisager une nouvelle situation. Dans celle-ci, la valeur ρ ne sera plus fixée, une fois pour toutes. De sorte que le résultat de BARRUCAND et DUBOUE ne sera plus immédiatement applicable.

VIII. LE CADRE PLUS VASTE DE LA (a,r,ε) THEORIE DE MARKOFF

A / DEFINITION DE LA (a,r,ε) THEORIE DE MARKOFF

On généralise ici la méthode utilisée à la fin du chapître II.
On suppose donnés :

(1) le nombre $a \in \mathbb{N}^*$

(2) le nombre $r \in \mathbb{Q} \cap]-1, +1[$

(3) le nombre $\varepsilon \in \{+1, -1\}$

On pose $r = \frac{R_1}{R_2}$ avec $R_2 > 0$ et $\text{pgcd}(R_1, R_2) = 1$.

On s'intéresse aux nombres γ algébriques de degré 2 vérifiant :

$$C(\gamma) = \frac{m}{\sqrt{(a + r + 1)^2 m^2 + 4\varepsilon}} \qquad (m \in \mathbb{N}^*)$$

Avec les Théorèmes I.3 et II.1, si γ se trouve dans l'orbite d'un nombre de MARKOFF super réduit $\theta_a(S)$, tel que $r(S) = r$, l'égalité est assurée.
La recherche des suites convenables $S = (a_0, a_1, \ldots a_n)$ peut être faite grâce aux conditions du Théorème II.1 :

(R.0) : $n = i-2$ de parité fixée ($\varepsilon = (-1)^{n+1} = (-1)^{i-1}$)

(R.2) : $0 < q_{i-2} = K_1 \leqslant p_{i-2} = m$ (on suppose $m > K_1$ si $m \neq 1$)

La condition $\nu = K_1 - K_2 = r\,m = \frac{R_1 m}{R_2} \in \mathbb{Z}$ impose que m soit multiple de R_2.
On pose donc :

(R'1) : $p_{i-2} = m \in R_2 \mathbb{Z}$

(R'2) : $0 < q_{i-2} < p_{i-2}$

De même, la condition (R.5) s'écrit :

$$R_2 \left(\frac{m}{R_2}\right) \mid [q_{i-2}^2 + (-1)^n] - R_1 \left(\frac{m}{R_2}\right) q_{i-2}$$

Elle suppose ($\frac{m}{R_2} \mid [q_{i-2}^2 + (-1)^n]$ (R'.5)

et aussi $R_2 \mid [\frac{q_{i-2}^2 + (-1)^n}{(\frac{m}{R_2})}] - R_1 q_{i-2}$ (R".5)

Inversement, la conjonction de ces deux conditions est équivalente à (R.5).

Ces conditions permettent, en décrivant toutes les valeurs possibles $m_{i-2} = \frac{p_{i-2}}{R_2} \in \mathbb{N}$, puis les valeurs possibles q_{i-2} vérifiant (R.2), (R'.5) et (R".5) d'énumérer toutes les possibilités envisageables pour S avec (R.f).:

$$[S^*] = \frac{p_{i-2}}{q_{i-2}}$$

Avec la condition (R.0), on définit de façon unique la suite S* parmi les deux vérifiant (R.f).

Ceci détermine au plus une suite S pour tout couple contenant (p_{i-1}, q_{i-1}).

Cette suite détermine à son tour r(S) et l'on ne retient le couple (p_{i-2}, q_{i-2}) que dans le cas où l'on a :

(R.r) : r(S) = r

Parmi les couples sélectionnés, les valeurs t(S) permettent de ne retenir que ceux qui sont tels que l'on ait (S1) : $t(S) \leqslant a+1$.

Enfin, on ne retient parmi ceux-ci que ceux qui sont tels que (S2) : $m_a(S) = m$.

On dit que leur étude constitue la <u>(a,r,ε) Théorie de MARKOFF</u>.

La Théorie de MARKOFF classique [4] s'interprète ainsi dans le cadre de la (2,0,-1) Théorie.

De façon précise, on pose :

<u>DEFINITION</u>

Pour $a \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ et $r \in \mathbb{Q} \cap]-1, +1[$, on appelle <u>(a,r,ε) Théorie de MARKOFF</u> l'étude des nombres de MARKOFF super réduits $\theta_2(S)$ où les suites S vérifient les conditions suivantes :

(R.0) : $n = i-2$ nombre de parité donnée : $\varepsilon = (-1)^{n+1}$

(R) : $r = \dfrac{R_1}{R_2}$ avec $-R_2 < R_1 < R_2$ et $\text{pgcd}(R_1, R_2) = 1$

(R'.1) : $p_{i-1} = m = R_2 m_{i-1} \in R_2 \mathbb{Z}$

(R.2) : $0 < q_{i-1} < p_{i-1} = R_2 m_{i-1}$

(R'.5) : $m_{i-1} \mid q_{i-1}^2 + (-1)^n$

(R".5) : $R_2 \mid \dfrac{q_{i-1}^2 + (-1)^n}{m_{i-1}} - R_1 q_{i-1}$

(R.f) : $\dfrac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = [S^*]$

(R.r) : $r(S) = r$

(S_1) : $t(S) \leqslant a+1$ (déductible de (S_2) d'après le Théorème II.3).

(S_2) : $m_a(S) = m$ (soit $S \in L_a$)

La (a, r, ε) Théorie de MARKOFF concerne de manière équivalente l'étude des formes de MARKOFF super réduites $F_\theta(X,Y)$ où $\theta = \theta_a(S)$ ou des suites S .

Le programme informatique "GENERAL" donné en annexe effectue automatiquement la détermination des suites S en fonction des paramètres R_1, R_2, ε et a qui lui sont fixés.

Au moyen de la transformation miroir, qui donne :

$$r(S^*) = r(S)$$

le programme "GENERAL" ne fournit qu'une suite parmi les deux qui existent (S,a) et (S*,a) pour une même valeur des paramètres. Il s'agit de celle vérifiant :

$$(R.q) : \text{Sup}\left(0 ; \left(\frac{m}{R_2}\right) . R_1\right) < K_1 \leqslant \left(\frac{m}{R_2}\right)\left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)$$

Les mots déterminés par le programme "GENERAL" sont frontières pour $t(S) \leqslant a+1$. Ce sont des mots de MARKOFF de L_a non nécessairement frontières pour a.

Ils définissent la (a,r, ε) Théorie de MARKOFF en considérant les nombres super réduits $\theta_2(S)$ et $\theta_2(S^*)$. Ceci résulte du Théorème I.3. et se fait avec le programme "EXTREMUM".
Et puisque les deux programmes déterminent seulement des nombres super réduits, et pas uniquement des nombres représentatifs, il est possible qu'on obtienne des nombres distincts contenus dans une même classe pour le groupe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$.

Maintenant, soit C la constante de MARKOFF d'un nombre γ algébrique de degré 2 réel : $C = C(\gamma)$.
Par le Théorème I.3, on peut supposer que γ est dans l'orbite d'un nombre de MARKOFF super réduit $\theta_2(S)$, avec :

$$C = C(\gamma) = C(\theta_2(S))$$

En posant :

$$\begin{cases} S = (a_0, a_1, \ldots a_n) \\ \varepsilon = (-1)^{n+1} \qquad\qquad (R.0) \\ r = r(S) = \dfrac{R_1}{R_2} \qquad\qquad (R) \\ p_{i-2} \text{ et } q_{i-2} \text{ définis comme dans le Théorème II.1, c'est-à-dire vérifiant (R'.1), (R.2), (R'.5), (R".5), (R.f).} \end{cases}$$

Comme $\theta_2(S)$ est un nombre de MARKOFF super réduit, on a aussi :

(S_1) : $t(S) \leqslant a+1$.

(S_2) : $m_2(S) = m$

Le nombre $\theta_2(S)$ apparaît donc dans une (a,r, ε) Théorie.
Ceci permet d'énoncer :

THEOREME VIII.1 (Généralité de la (a,r, ε) Théorie)
Toute constante de MARKOFF d'un nombre réel algébrique de degré 2 est la constante d'un nombre de MARKOFF super réduit $\theta_2(S)$ d'une (a,r, ε) Théorie.
Elle s'écrit sous la forme :

$$\frac{m}{\sqrt{(a + r + 1)^2 m^2 + 4\varepsilon}} \qquad (m \in \mathbb{N}^*)$$

Il suffit ainsi d'étudier les constantes données pour les diverses (a,r,ε) Théories pour disposer d'informations sur tout le spectre des constantes de MARKOFF des nombres algébriques réels de degré 2.

B / PROPRIETES DE LA (a,r,ε) THEORIE

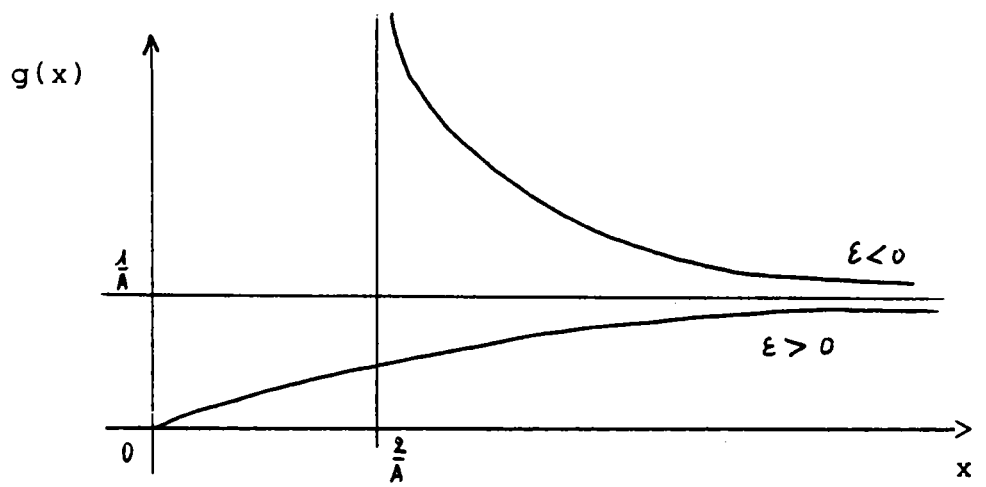
Pour toute suite $S = (a_0, a_1, \ldots a_n)$ d'une (a,r,ε) Théorie donnée, on a :

$$C(\theta_a(S)) = C(\zeta_a(S)) = \frac{m}{\sqrt{(a+r+1)^2 m^2 + 4\varepsilon}}$$

Avec $A > 1$, $\varepsilon = \pm 1$, considérons la fonction :

$$y = g(x) = \frac{x}{\sqrt{A^2 x^2 + 4\varepsilon}} \qquad (x \geqslant 0)$$

Elle a un graphe qui présente l'allure suivante :



D'où les cas suivants :

. si n impair, soit $\varepsilon = (-1)^{n+1} > 0$: $C(\zeta_a(S)) < \dfrac{1}{a+r+1}$

. si n pair, soit $\varepsilon = (-1)^{n+1} < 0$: $C(\zeta_a(S)) > \dfrac{1}{a+r+1}$

Ceci permet d'énoncer :

THEOREME VIII.2

Pour toute suite S d'une (a,r,ε) Théorie, on a l'inégalité :

$$\varepsilon\, C(\theta_a(S)) = \varepsilon\, C(\zeta_a(S)) < \frac{\varepsilon}{a + r + 1}$$

En faisant maintenant appel à la propriété V.4, on a :

THEOREME VIII.3

Pour qu'il existe une (a,r,ε) Théorie, il faut que l'on ait la condition :

$$r + 1 \in K_{a+1} + K_{a+1}$$

Ceci limite les valeurs possibles pour r lorsque a est donné.

Dans une (a,r,ε) Théorie de MARKOFF, supposons qu'il soit possible de trouver une infinité de suites S.
Celles-ci permettent de définir les nombres de MARKOFF super réduits :

$$\theta_a(S) = [0, \underline{S^*, a}]$$

et les formes de MARKOFF associées $F_\theta(X,Y)$.
Celles-ci vérifient les conditions :

$$M(F_\theta) = 1 \text{ et } \varepsilon\, C(F_\theta) < \frac{\varepsilon}{a + r + 1}$$

Les contraintes sur K_1 et K_2 imposent pour les coefficients de F_θ les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} a - 1 < \dfrac{m(a+1) - K_1 - K_2}{m} < a + 1 \\ \\ -(a - 1) < \dfrac{] - (a+1)K_1}{m} < 1 \end{cases}$$

Or, par hypothèse, il existe une infinité de suites S dont les termes sont bornés par a+1. Celles-ci sont de plus en plus longues et telles que m tende vers l'infini. Pour les formes de MARKOFF F_θ, on peut par compacité construire au moins une forme limite F. Ses coefficients sont obtenus comme limites des coefficients de formes F_θ.

On a : $\Delta(F) = \lim_{m \to \infty} \dfrac{(a + r + 1)^2 m^2 + 4\varepsilon}{m^2} = (a + r + 1)^2$

et aussi : $F(1,0) = 1$

Soit pour la constante de MARKOFF de F :

$$C(F) = \frac{M(F)}{\sqrt{\Delta(F)}}$$

où $M(F) = \text{Inf} \left\{ |F(p,q)| \ ; \ (p,q) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\} \right\} \leqslant 1$

facilement :

$$C(F) \leqslant \frac{1}{a + r + 1}$$

Si l'on avait alors l'inégalité stricte $C(F) < \dfrac{1}{a + r + 1}$,

on pourrait trouver $(p_0, q_0) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}$ tel que :

$$|F(p_0, q_0)| < 1$$

Par continuité, on trouverait aussi $\theta_2(S)$ tel que :

$$|F_\theta(p_0, q_0)| < 1$$

Or, $\theta_2(S)$ étant supposé super réduit, on a dans le cas présent :

$$M(F_\theta) = \text{Inf} \left\{ |F_\theta(p,q)| \ ; \ (p,q) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\} \right\} = 1$$

On trouve donc une contradiction qui, en retour, garantit que l'on a :

$$C(F) = \frac{1}{a + r + 1}$$

A partir des conditions :

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{K_1}{m} \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \dfrac{K_2}{m} < 1 \end{cases}$$

L'infinité des formes F_θ permet de supposer que toute forme limite considérée F correspond à des limites de suites extraites pour lesquelles on a :

$$\lim_{m\infty} \frac{K_1}{m} = u_1$$

$$\lim_{m\infty} \frac{K_2}{m} = u_2$$

La condition $m\rceil = K_1 K_2 - \varepsilon$ impose alors :

$$\lim_{m\infty} \frac{1}{m} = u_1 u_2$$

De sorte que l'on peut écrire :

$$F(X,Y) = X^2 - [u_1 + (u_2 - (a+1)]XY + u_1[u_2 - (a+1)]Y^2$$

$$= [X - u_1 Y][X - (u_2 - (a+1)Y]$$

Le discriminant de F vaut :

$$\Delta(F) = (a + u_1 + 1 - u_2)^2$$

$$= \lim_{m\infty} \left[\frac{(a+1)m + K_1 - K_2}{m} \right]^2$$

$$= \lim_{m\infty} \left[\frac{(a + r + 1)m}{m} \right]^2$$

$$= (a + r + 1)^2$$

Et en comparant avec l'expression de C(F), il en résulte :

$$M(F) = 1 = F(1,0)$$

Les conditions :

$$\begin{cases} \lim_{m\infty} \dfrac{K_1}{m} = u_1 & \text{et} \quad \dfrac{K_1}{m} = \dfrac{1}{[S^*]} \\ \lim_{m\infty} \dfrac{K_2}{m} = u_2 & \text{et} \quad \dfrac{m - K_2}{m} = \dfrac{1}{[S]} \\ r + 1 = \dfrac{m + K_1 - K_2}{m} = \dfrac{1}{[S]} + \dfrac{1}{[S^*]} = u_1 + (1 - u_2) \end{cases}$$

montrent qu'on peut supposer :

$$(1 - u_2) = [0, a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots]$$

$$u_1 = [0, a_{-2}, a_{-3}, \ldots, a_{-n}, \ldots]$$

où les nombres u_1 et u_2 sont des nombres irrationnels dont les développements en fraction continue sont obtenus à partir des débuts de l'infinité des suites S et des suites S* considérées.

On a : $\forall\, i \in \mathbb{Z} - \{-1\} \quad 0 \leqslant a_i \leqslant a+1$.

On peut poser : $a_{-1} = a$

Ainsi : $a + 1 - u_2 > 1$ et $-1 < -u_1 < 0$

Et : $(a + 1 - u_2) - (-u_1) = a + r + 1 = \dfrac{1}{C(F)}$

Il en résulte que la forme $F(-X,Y)$ équivalente à F pour l'action du groupe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$ est réduite au sens de MARKOFF. Ceci fait le lien avec le Théorème I.9.
De plus, la forme $F(-X,Y)$ atteint son maximum, au sens de M.HALL [6] :

$$\frac{1}{C(F)} = a + r + 1 = [a_{-1}, a_0, \ldots] + [0, a_{-2}, a_{-3}, \ldots]$$

où $J = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ suite double associée à $F(-X,Y)$ par la réduction de MARKOFF. En convenant de poser $\theta = u_1$ et $\bar{\theta} = u_2 - (a+1)$,
On a donc établi :

THEOREME VIII.4 (Formes limites définies par une (a,r,ε) Théorie)
Dans toute (a,r,ε) Théorie de MARKOFF, les formes de MARKOFF super réduites associées F_θ vérifient :

$$M(F_\theta) = \operatorname{Inf}\left\{ |F_\theta(p,q)| \;;\; (p,q) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\} \right\} = 1$$

$$\varepsilon\, C(F_\theta) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{(a + r + 1)^2 m^2 + 4\varepsilon}} < \frac{\varepsilon}{a + r + 1}$$

De plus, s'il existe une infinité de telles formes dans la (a,r,ε) Théorie, alors :
(1) Il existe au moins une forme limite F pour les formes de MARKOFF F_θ de cette (a,r,ε) Théorie.
(2) Toute forme limite F vérifie :

$$C(F) = \frac{1}{a + r + 1}$$

La valeur $\frac{1}{a + r + 1}$ est l'unique point d'accumulation des nombres $(C(F_\theta))$ donnés par la (a, r, ε) Théorie.

(3) Toute forme limite F atteint son maximum :

$$M(F) = 1 = F(1,0)$$

et vérifie : $\Delta(F) = a + r + 1$.

Elle s'écrit sous la forme $F(X,Y) = [X - \theta Y][X - \overline{\theta} Y]$

où $\begin{cases} \theta \text{ et } \overline{\theta} \text{ irrationnels} \\ \overline{\theta} = [-a-1, 1, a_0 - 1, a_1, \ldots a_n \ldots] = -\xi & (\xi > 1) \\ \theta = [0, a_{-2}, a_{-3}, \ldots, a_n, \ldots] = -\xi' & (-1 < \xi' < 0) \\ r = \theta - \overline{\theta} - a - 1 \end{cases}$

La forme F est équivalente à la forme réduite $F(-X,Y) = (X - \xi Y)(X - \xi' Y)$.

associée à la suite double $J = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}}$

où $\begin{cases} a_{-1} = a \\ \forall\, i \in \mathbb{Z} \qquad 1 \leqslant a_i \leqslant a + 1 \end{cases}$

La forme $F(-X,Y)$ atteint son maximum, tout comme les formes réduites $F_\theta(-X,Y)$.

(4) La condition $\varepsilon C(F_\theta) < \varepsilon C(F)$ donne :

(4.1) Si $\varepsilon = +1$, la constante $C(F) = \frac{1}{a+r+1}$ de toute forme limite F est plus grande que celle de toute forme de MARKOFF F_θ de la $(a,r,1)$ Théorie considérée.

(4.2) Si $\varepsilon = -1$, la constante $C(F) = \frac{1}{a+r+1}$ de toute forme limite F est plus petite que celle de toute forme de MARKOFF F_θ de la $(a,r,-1)$ Théorie considérée.

Dans ce qui suit, on va chercher à détailler ce résultat en examinant comment construire une infinité de formes F_θ dans une (a, r, ε) Théorie, et comment les organiser.

On va pour cela s'appuyer sur les méthodes de CASSELS [5] bien que la comparaison avec le Théorème V.2 laisse pressentir qu'une utilisation des identités de MARKOFF généralisées est possible.

IX. DEVELOPPEMENT DE LA (a,r,-1) THEORIE DE MARKOFF SELON CASSELS

INTERPRETATION GEOMETRIQUE DES CALCULS

A / INTRODUCTION

Dans la suite, on considère une (a,r,ε) Théorie où $\varepsilon = (-1)^{n+1} = -1$. Celle-ci généralise la Théorie de MARKOFF classique [4] obtenue pour a = 2, r = 0.

Pour une (a,r,-1) Théorie, on va établir successivement et dans le même ordre tous les résultats mentionnés dans CASSELS [5], à l'exception de ce qui concerne la construction de l'arbre. Ceci donne, inversement, une interprétation de ce que présente cet auteur.

Avec le Théorème I.8 vu ci-dessus et la condition n pair, on obtient pour toute forme de MARKOFF F_θ de la (a,r,-1) Théorie :

$$F_\theta(K_1, m) = 1 \qquad (1)$$

$$F_\theta(K_2 - (a+1)m, m) = 1 \qquad (2)$$

On pose :

DEFINITION

On note $A_\theta < 0$ le plus grand nombre négatif représenté par la forme $F_\theta(X,Y)$ avec :

$$\cdot\ F_\theta(k_1, m_1) = A_\theta = \frac{P_\theta}{Q_\theta} = \frac{N_\theta}{m} \qquad (3)$$

où
$$\begin{cases} \text{pgcd}(P_\theta, Q_\theta) = 1 \qquad Q_\theta > 0 \text{ et } P_\theta < 0 \qquad Q_\theta \mid m \\ (k_1, m_1) \in \mathbb{Z}^2 \quad \text{tel que } \text{pgcd}(k_1, m_1) = 1 \\ N_\theta \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ainsi, dans le cas présent, en posant encore :

$$m^2 F_\theta(x,y) = \phi_\theta(z,y) \qquad (4)$$

où
$$z = mx - K_1 y \qquad (5)$$

On obtient :
$$\phi_\theta(z,y) = z^2 + [m(a+1) + K_1 - K_2]zy + y^2 \qquad (6)$$

Et :
$$\phi_\theta(z,y) = \phi_\theta(y,z)$$
$$= \phi_\theta(-z\ ;\ y + [m(a+1) + K_1 - K_2]z)$$
$$= \phi_\theta(z + [m(a+1) + K_1 - K_2]y\ ;\ -y) \qquad (7)$$

En posant alors, en conformité avec le Théorème III.2 :

DEFINITION

On note : $\begin{cases} m_2 = K_1 m_1 - k_1 m \in \mathbb{Z} \\ k_2 = m_1 l - K_2 k_1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$

On obtient la relation :

$$F_\theta(k_2 - (a+1)m_2 ; m_2) = A_\theta \qquad (8)$$

Et donc :

PROPRIETE IX.1

$$F_\theta(K_1, m) = F_\theta(K_2 - (a+1)m ; m) = 1$$

$$F_\theta(k_1, m_1) = F_\theta(k_2 - (a+1)m_2 ; m_2) = A_\theta$$

On en déduit de façon immédiate :

Corollaire

Soit $F(x,y) = x^2 + b\,xy + c\,y^2$ une forme quadratique réelle telle que :

$$F(K_1, m) \geqslant 1 \qquad F(K_2 - (a+1)m , m) \geqslant 1$$

$$F(k_1, m_1) \leqslant A_\theta \qquad F(k_2 - (a+1)m_2 , m_2) \leqslant A_\theta$$

Alors : $F(x,y) = F_\theta(x,y)$

Par ailleurs, il découle du Théorème III.3 :

PROPRIETE IX.2

$$F_\theta(k_1 X - l_1 Y ; m_1 X - k_1 Y) = A_\theta F_\theta(X,Y)$$

avec $k_1^2 - m_1 l_1 = A_\theta$

Ainsi, dans le cas où l'on a $A_\theta = -1$, il en résulte que les deux formes F_θ et $-F_\theta$ sont équivalentes. Mais on peut établir sur la Théorie de MARKOFF (a,0,-1) qu'il est possible que l'on ait : $A_\theta \neq -1$.

Corollaire

Les racines $\theta_2(S)$ et $\overline{\theta_2(S)}$ de $F_\theta(X,1)$ vérifient :

$$\overline{\theta_2(S)} = \frac{k_1\,\theta_2(S) - l_1}{m_1\,\theta_2(S) - k_1}$$

Ce résultat n'est autre que le Théorème III.4.

PROPRIETE IX.3

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\} \qquad |F_\theta(x,y)| \geq 1$$

Ce résultat est par construction une évidence. Il provient ici du fait que l'on travaille sur la (a,r,-1) Théorie et que l'on a donc, par définition :

$$M(F_\theta) = 1$$

B / INTERPRETATION GEOMETRIQUE :

On s'intéresse aux équations diophantiennes $F_\theta(k_1, m_1) = A_\theta$.
En se ramenant dans $\mathbb{Z}$, tout revient à déterminer un groupe de rotations hyperboliques. Or, la période de la racine $\theta_a(S)$ de $F_\theta(X,1)$ s'écrit (S*,a) et contient un nombre pair d'éléments (il y en a n + 2). Il en résulte que l'équation :

$$-1 = x^2 + [m(a+1) - K_1 - K_2]xy + [K_1 K_2 + 1 - (a+1)K_1 m]y^2$$

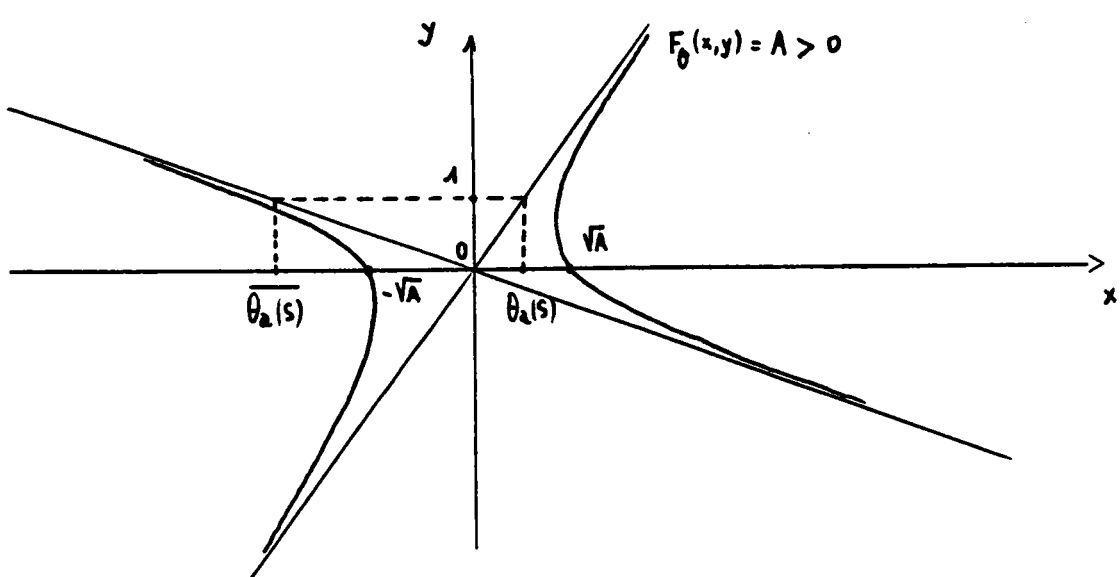
n'a pas de solution $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$.
Le groupe des rotations hyperboliques est donc engendré par :

$$\begin{bmatrix} K_1 ; (a+1)K_1 - 1 \\ m ; (a+1)m - K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce groupe opère dans l'ensemble des hyperboles d'équation :

$$F_\theta(x,y) = A$$

Avec la représentation déjà vue (où $\theta_a(S) = [0, \underline{S^*, a}]$ et $\overline{\theta_a(S)} = -[\underline{a, S}]$)



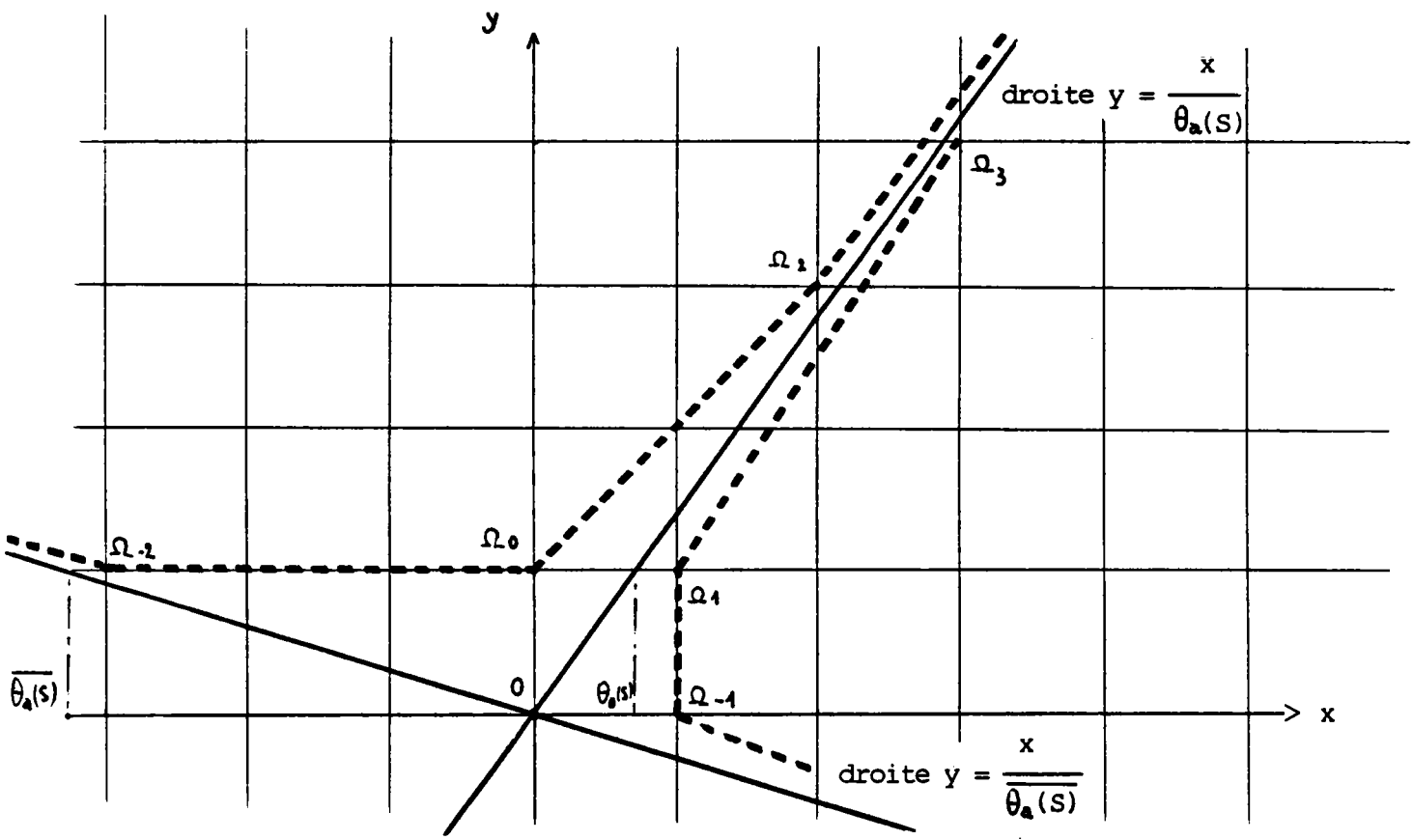
Le point $(x,y) = (1,0)$ se transforme par la matrice donnée ci-dessus en $(x',y') = (K_1, m)$.

On retrouve ainsi la relation $F_\theta(K_1, m) = F_\theta(1,0) = 1$ donnée par le Théorème I.8, parce qu'ici, n est un nombre pair.

En inversant par ailleurs cette matrice, on trouve de même:

$F_\theta(K_2 - (a+1)m, m) = F_\theta(1,0) = 1$.

La Théorie du polynôme de KLEIN permet d'envisager la figure suivante :



Avec les notations classiques, utilisant les réduites de $\theta_a(S) = [0, \underline{S^*, a}]$, on note $\Omega_i(p_i, q_i)$ les points construits avec la première asymptote d'équation $y = \frac{x}{\theta_a(S)}$.

Ainsi :

$$\begin{cases} \Omega_{-1}(1,0) \\ \Omega_0(0,1) \\ \Omega_1(1, a_n) \\ \Omega_2(a_{n-1},\ a_n a_{n-1} + 1) \\ \text{etc ...} \end{cases}$$

Par ailleurs, avec $\overline{\theta_a(S)} = -[a,S]$, on introduit le point $\Omega_{-2}(-a,1)$ et l'on poursuit la construction du polynôme de KLEIN avec la seconde asymptote

$$y = \frac{x}{\overline{\theta_a(S)}}$$

La détermination de la valeur A_θ est alors faisable à partir des coordonnées des points Ω_{2i} ($i \in \mathbb{Z}$).
Le transformé du point $\Omega_{-2}(-a,1)$ par la rotation hyperbolique considérée ci-dessus s'écrit :

$$\Omega_n(K_1 - 1 \; ; \; m - K_2)$$

En effet, on a : $m - K_2 > 0$

Par ailleurs, la relation $m1 = K_1 K_2 + 1$ impose aussi : $K_1 \geq 1$

On est donc assuré d'avoir bien affaire au point Ω_n, compte tenu que n pair, et du fait de la longueur des périodes utilisées.

En Ω_0, on a : $F_\theta(0,1) = \dfrac{1 - (a+1)K_1}{m} < 0$

En Ω_{-2} et Ω_n, on obtient : $F_\theta(-a,1) = \dfrac{aK_2 + 1 - K_1}{m} - a = F_\theta(K_1 - 1 \; ; \; m - K_2) < 0$

On peut donc énoncer :

PROPRIETE IX.4
La plus grande valeur négative non nulle représentée par F_θ peut être recherchée en un point Ω_{2i} ou $0 \leq 2i \leq n$.

C / APPLICATION : DEFINITION DES ENSEMBLES DE MARKOFF ORDONNES

Avec les développements précédents, on voit que A_θ pourra être déterminé avec les coordonnées d'un point

$$\left(0 \leq i \leq \frac{n}{2}\right)$$

On peut convenir de définir k_1 et m_1 à partir d'unpoint $\Omega_{2i}(k_1, m_1)$ tel que $F_\theta(k_1, m_1) = A_\theta$.
On a alors nécessairement $m > m_1 \geqslant 1$ et avec les pentes :
$0 \leqslant k_1 < m_1$.
Avec de plus : $\text{pgcd}(k_1, m_1) = 1$, par définition de A_θ .
On peut aussi considérer alors le point :

$$\Omega_{2j}(k_2 - (a+1)m_2 \; ; \; m_2)$$

On a :

$$\begin{bmatrix} k_2 - (a+1)m_2 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \rceil - K_2 k_1 - (a+1)(K_1 m_1 - k_1 m) \\ k_1 m_1 - k_1 m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+1)m - K_2 & ; & -(a+1)K_1 + 1 \\ -m & ; & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ m_1 \end{bmatrix}$$

La matrice 2 x 2 intervenant dans cette relation est l'inverse de celle associée à la rotation hyperbolique considérée précédemment. Il en résulte que le point Ω_{2j} se trouve sur le segment d'hyperbole $]\Omega_{-n-4} ; \Omega_{-2}[$

On a donc les inégalités : $m_2 \geqslant 1$ et $\dfrac{k_2 - (a+1)m_2}{m_2} \leqslant -a$

La dernière s'écrivant aussi : $k_2 \leqslant m_2$ soit $\dfrac{k_2}{m_2} \leqslant 1$

On a encore : $\text{pgcd}(k_2, m_2) = 1$ et avec le point Ω_{-n-2} : $m_2 \leqslant K_1 < m$.
De même, en étudiant les pentes des droites intervenant : $k_2 > 0$.

DEFINITION
En définissant k_1 et m_1 à partir du point $\Omega_{2i}(k_1, m_1)$ $(0 \leqslant i \leqslant \frac{n}{2})$ tel que $F_\theta(k_1, m_1) = A_\theta$
on dit que le septuplet :

$$(m, K_1, K_2 : m_1, k_1 ; m_2, k_2)$$

correspond à un ensemble de MARKOFF ordonné.
Dans le cas où $r = 0$, c'est-à-dire $K_1 = K_2 = k$, on dit seulement que le sextuplet $(m, k ; m_1, k_1 ; m_2, k_2)$ correspond à un ensemble de MARKOFF ordonné.

On a alors :

PROPRIETE IX.5

On a les inégalités $\begin{cases} m > m_1 \geqslant 1 & \text{et} \quad 0 \leqslant k_1 < m_1 \\ m \geqslant m_2 \geqslant 1 & \text{et} \quad 0 < k_2 \leqslant m_2 \end{cases}$

Et la relation $\text{pgcd}(k_1, m_1) = \text{pgcd}(k_2, m_2) = 1$

On a la relation de MARKOFF, où $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$

$$(-A_\theta)m^2 + m_1^2 + m_2^2 = (a+1)mm_1m_2 + (K_1 - K_2)m_1m_2 = (a+r+1)mm_1m_2$$

On a aussi les expressions :

$$\begin{cases} m_2 = m_1K_1 - mk_1 & k_2 = m_1l - K_2k_1 \\ m_1 = mk_2 - m_2K_2 & k_1 = K_1k_2 - m_2l \\ (a+1)m_1m_2 + A_\theta m = m_1k_2 - m_2k_1 = (a+1)m_1m_2 + N_\theta \end{cases}$$

Démonstration

Les résultats fournis résultent de ce qui a été vu ci-dessus, à l'exception de l'expression de m_1 qui s'établit comme suit :

$$mk_2 - m_2K_2 = mm_1l - mK_2k_1 - K_1m_1K_2 + k_1mK_2$$
$$= m_1(ml - K_1K_2) = m_1$$

Avec les expressions de m_1 et m_2, et la seconde relation de MARKOFF, on obtient :

$$m_1^2 + m_2^2 = m_1mk_2 - m_1m_2K_2 + m_2m_1K_1 - m_2mk_1$$
$$= (a+1)mm_1m_2 + (K_1 - K_2)m_1m_2 + A_\theta m^2$$

Soit : $m(m_1k_2 - m_2k_1) = (a+1)m\,m_1m_2 + A_\theta m^2$

En simplifiant par m, il reste :

$$m_1k_2 - m_2k_1 = (a+1)m_1m_2 + A_\theta m$$

Cette dernière relation confirme en écrivant $A_\theta = \dfrac{P_\theta}{Q_\theta}$ que l'on a dans $\mathbb{N}^*$: $Q_\theta \mid m$

Par ailleurs, avec les expressions que l'on vient d'obtenir, on peut écrire :

$$\text{pgcd}(m_1, m_2) = \text{pgcd}(m_1;\ m_1K_1 - mk_1)$$
$$= \text{pgcd}(m_1;\ mk_1)$$
$$= \text{pgcd}(m_1;\ m) \qquad (\text{car } \text{pgcd}(m_1, k_1) = 1)$$
$$= \text{pgcd}(mk_2 - m_2K_2;\ m_2)$$
$$= \text{pgcd}(mk_2;\ m_2)$$
$$= \text{pgcd}(m;\ m_2) \qquad (\text{car } \text{pgcd}(m_2, k_2) = 1)$$

PROPRIETE IX.6

On a : $\quad pgcd(m,m_1) = pgcd(m,m_2) = pgcd(m_1,m_2)$

Cependant, on n'a ici aucune indication sur la valeur de ce plus grand commun diviseur. Et sur des exemples, il peut être différent de 1.
On pose pour la suite :

DEFINITION

On note : $\quad d = pgcd(m,m_1) = pgcd(m_1,m_2) = pgcd(m_2,m)$

En reprenant alors la propriété IX.5, on peut écrire :

$$\begin{cases} m_1 K_1 \equiv m_2 \pmod m & m_2 K_2 \equiv -m_1 \pmod m \\ -m_2 k_1 \equiv A_\theta m = N_\theta \pmod{m_1} & -m k_1 \equiv m_2 \pmod{m_1} \\ m k_2 \equiv m_1 \pmod{m_2} & m_1 k_2 \equiv A_\theta m = N_\theta \pmod{m_2} \end{cases}$$

On en déduit :

$$m_1(K_1 K_2 + 1) \equiv 0 \pmod m$$

Cette première relation est évidente avec $K_1 K_2 + 1 = m l$.
On a aussi :

$$m_2 k_1^2 \equiv -N_\theta k_1 \equiv m k_1^3 \pmod{m_1}$$

Soit puisque $\quad pgcd(m_1,k_1) = 1$
Il en résulte que l'on peut écrire :

$$m k_1^2 - N_\theta = m_1 L_1$$

avec $L_1 \in \mathbb{Z}$

Or, il ressort de la propriété IX.2 que l'on a aussi :

$$A_\theta = \frac{N_\theta}{m} = k_1^2 - m_1 l_1 \qquad (l_1 \in \mathbb{Q})$$

Soit : $\quad m k_1^2 - N_\theta = m_1 m l_1$
On a donc, puisque $m_1 \neq 0$: $\quad L_1 = m l_1 \in \mathbb{Z}$
De la même façon, on obtient :

$$m k_2^3 \equiv N_\theta k_2 \pmod{m_2}$$

Soit : $\quad k_2(m k_2^2 - N_\theta) \equiv 0 \pmod{m_2}$
Ceci permet d'écrire, avec $L_2 \in \mathbb{Z}$

$$m_2 k_2^2 - N_\theta = m_2 L_2$$

On a donc établi, en complétant avec le Théorème III.4 :

PROPRIETE IX.7

On a dans $\mathbb{N}^*$ la relation $Q_\theta \mid m$.

Par ailleurs, il existe $L_1 \in \mathbb{Z}$ et $L_2 \in \mathbb{Z}$ tels que, dans $\mathbb{Z}$:

$$m\,k_1^2 - N_\theta = m_1 L_1 \qquad (\text{soit } k_1^2 - A_\theta = m_1 l_1)$$

$$m\,k_2^2 - N_\theta = m_2 L_2 \qquad (\text{soit } k_2^2 - A_\theta = m_2 l_2)$$

avec la relation :

$$L_1 = m\,l_1 = k_1(K_1 + K_2) + (a+1)(K_1 m_1 - k_1 m) - l\,m_1 \in \mathbb{Z}$$

On a ainsi: $d \mid N_\theta$

Ainsi, on a obtenu l'équivalent de toutes les relations données par CASSELS.

X. EXTENSION DU CALCUL DE CASSELS POUR L'ETUDE DE TOUTE (a,r,ε) THEORIE

A / INTRODUCTION

On part de la situation générale suivante :

$$S^* = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$$
$$= X$$
$$= (X_1, b, X_2)$$

On pose conformément aux notations antérieures :

$$(a) : \frac{K_1}{m} = [0,X] = [0,S^*]$$

Et aussi :

$$(m) : M_X = \begin{bmatrix} m & m - K_2 \\ K_1 & K_1 - 1 \end{bmatrix} \qquad (\text{on note } 1_X = 1)$$

On pose encore :

$$(b) : \frac{k_1}{m_1} = [0,X_1]$$

et aussi :

$$(m_1) : M_{X_1} = \begin{bmatrix} m_1 & m_1 - k_{12} \\ k_1 & k_1 - 1_{X_1} \end{bmatrix} \qquad (\text{avec } k_{11} = k_1)$$

Enfin, on note :

$$\begin{cases} \dfrac{k_2}{m_2} = [0,T] = [0,u_1,u_2, \dots u_t] \\ \dfrac{K}{M} = [0,u_1, \dots u_{t-1}] \end{cases}$$

On trouve : $M_T = \begin{bmatrix} u_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} u_t & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 & M \\ k_2 & K \end{bmatrix}$

Soit : $M_{\tilde{T}} = \begin{bmatrix} m_2 & m_2 - k_2 \\ M & M - K \end{bmatrix}$

Ceci permet de poser, en convenant $K = \lambda_{X_2}$ et $M = k_{21}$:

(m_2) : $M_{X_2} = \begin{bmatrix} m_2 & m_2 - k_2 \\ k_{21} & k_{21} - \lambda_{X_2} \end{bmatrix}$ (avec $k_{22} = k_2$)

On en déduit la condition :

(c) : $\dfrac{bm_2 + k_{21}}{m_2} = [b, X_2]$

On considère alors la relation matricielle suivante correspondant à la relation $X = (X_1, b, X_2)$:

(p) : $M_X = M_{X_1} \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{X_2}$

Dans cette situation très générale, on a :

(c_1) : $m = (b+1)m_1 m_2 + k_{21} m_1 - k_{12} m_2$

(c_2) : $K_1 = (b+1)m_2 k_1 + k_1 k_{21} - m_2 \lambda_{X_1}$

(c_3) : $K_2 = (b+1)m_1 k_2 - k_{12} k_2 + m_1 \lambda_{X_2}$

(c_4) : $\lambda = (b+1)k_1 k_2 + k_1 \lambda_{X_2} - k_2 \lambda_{X_1}$

Au moyen des déterminants, on suppose que l'on a :

(d_1) : $m\lambda - K_1 K_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2$ $\quad (\det M_X = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon = (-1)^{n+1})$

(d_2) : $k_1 k_{12} - m_1 \lambda_{X_1} = \varepsilon_1$ $\quad (\det M_{X_1} = \varepsilon_1)$

(d_3) : $k_2 k_{21} - m_2 \lambda_{X_2} = \varepsilon_2$ $\quad (\det M_{X_2} = \varepsilon_2)$

Grâce à (c_1) à (c_4) et (d_2) à (d_3), on obtient :

(a_1) : $m_1 K_1 - m k_1 = \varepsilon_1 m_2$

(a_2) : $m_1 \lambda - K_2 k_1 = \varepsilon_1 k_2$

(a_3) : $m k_2 - m_2 K_2 = \varepsilon_2 m_1$

(a_4) : $K_1 k_2 - m_2 \lambda = \varepsilon_2 k_1$

En réalité, ces relations sont extraites des expressions :

$$\begin{cases} M_{X_1} = M_X \left(\begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{X_2} \right)^{-1} \\ M_{X_2} = \left(M_{X_1} \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} M_X \end{cases}$$

On note que ces expressions fournissent quatre autres égalités sur lesquelles je n'insiste pas.
Dans la situation présentée ci-dessus on convient de poser :

$$(r) : \qquad r = \frac{K_1 - K_2}{m}$$

$$(r_1) : \qquad r_1 = \frac{k_1 - k_{12}}{m_1}$$

$$(r_2) : \qquad r_2 = \frac{k_{21} - k_2}{m_2}$$

On a par (a_1) et (a_3) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 &= m_1(mk_2 - m_2K_2) + m_2(m_1K_1 - mk_1) \\ &= m(m_1k_2 - m_2k_1) + (K_1 - K_2)m_1m_2 \end{aligned}$$

En convenant alors de poser, pour $a \in \mathbb{N}^*$:

DEFINITION

$$(\psi) : \qquad \psi_\theta(z,y) = \varepsilon_2 z^2 + [m(a+1) + K_1 - K_2]zy + \varepsilon_1 y^2$$

$$(\phi) : \qquad \begin{aligned} \phi_\theta(z,y) &= z^2 + [m(a+1) + K_1 - K_2]zy + \varepsilon_1\varepsilon_2 y^2 \\ &= z^2 + m(a + r + 1)zy - \varepsilon y^2 \end{aligned}$$

Il reste :

$$(\psi_1) : \psi_\theta(m_1, -m_2) = m[m_1k_2 - m_2k_1 - (a+1)m_1m_2] = \varepsilon_2 \phi_\theta(\varepsilon_2 m_1, -m_2)$$

Et si l'on pose, ce qui définit A :

$$(\psi_2) : \psi_\theta(m_1, -m_2) = \varepsilon_1 A m^2 = \varepsilon_2 \phi_\theta(\varepsilon_2 m_1, -m_2)$$

On retrouve directement la relation de MARKOFF généralisée :

$$(M_1) : \qquad (-\varepsilon_1 A)m^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 = (a+r+1)mm_1m_2$$

On obtient aussi, en comparant (ψ_1) et (ψ_2) :

$$(a_5) : \qquad (a+1)m_1m_2 + \varepsilon_1 Am = (m_1k_2 - m_2k_1)$$

On généralise ainsi des relations qui ont antérieurement été présentées dans le cadre restreint de la (a,r,-1) Théorie de MARKOFF.

B / UNE AUTRE RELATION DE MARKOFF ET APPLICATION

Les conditions (a)(b) et (c) vues ci-dessus permettent d'appliquer le résultat suivant :

THEOREME X.1

Soient $b \in \mathbb{N}^*$ et X, X_1 et X_2 trois suites de nombres de $\mathbb{N}^*$ tels que $X = (X_1, b, X_2)$

Alors en posant :

$$[a,X] = \frac{am + K_1}{m} \qquad [a,X_1] = \frac{am_1 + k_1}{m_1} \qquad [b,X_2] = \frac{bm_2 + k_{21}}{m_2}$$

$$1 + r = [0,X] + [0,X^*]$$

$$1 + r_1 = [0,X_1] + [0,X_1^*]$$

$$1 + r_2 = [0,X_2] + [0,X_2^*]$$

$$\varepsilon_1 = (-1)^{\text{Card } X_1}$$

$$\varepsilon_2 = (-1)^{\text{Card } X_2}$$

On a, avec $(b + 1 + r_1 + r_2 - r) \in \mathbb{Q}$, la condition (M_2) :

$$m^2 - \varepsilon_2 m_1^2 - \varepsilon_1 m_2^2 = (b + 1 + r_1 + r_2 - r) m m_1 m_2$$

Démonstration

On pose $b = a_i$ et :

$$\frac{P_{\alpha\lambda}}{Q_{\alpha\lambda}} = [a,X_1] = [a, a_n, \ldots a_{i+1}] \qquad \frac{P'_{\alpha\lambda}}{Q'_{\alpha\lambda}} = [a, a_n, \ldots, a_{i+2}]$$

$$\frac{P_{\mu\omega}}{Q_{\mu\omega}} = [b,X_2] = [b, a_{i-1}, \ldots a_0] \qquad \frac{P'_{\mu\omega}}{Q'_{\mu\omega}} = [b, a_{i-1}, \ldots, a_1]$$

$$\frac{P_{\alpha\omega}}{Q_{\alpha\omega}} = [a,X] = [a, a_n, \ldots a_1, a_0] \qquad \frac{P'_{\alpha\omega}}{Q'_{\alpha\omega}} = [a, a_n, \ldots a_1]$$

On obtient les formules :

(1)
$$\begin{cases} P_{\alpha\omega} = P_{\alpha\lambda} P_{\mu\omega} + P'_{\alpha\lambda} Q_{\mu\omega} \\ Q_{\alpha\omega} = Q_{\alpha\lambda} P_{\mu\omega} + Q'_{\alpha\lambda} Q_{\mu\omega} \\ P'_{\alpha\omega} = P_{\alpha\lambda} P'_{\mu\omega} + P'_{\alpha\lambda} Q'_{\mu\omega} \\ Q'_{\alpha\omega} = Q_{\alpha\lambda} P'_{\mu\omega} + Q'_{\alpha\lambda} Q'_{\mu\omega} \end{cases}$$

On convient alors d'écrire, ce qui définit r:

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+r & -1 \end{bmatrix} [X^*] \qquad = \frac{[X^*]}{(1+r)[X^*] - 1}$$

Et l'on introduit les matrices associées à X et à sa suite palindrome X* :

$$M_X = \begin{bmatrix} Q_{\alpha\omega} & Q'_{\alpha\omega} \\ P_{\alpha\omega} - aQ_{\alpha\omega} & P'_{\alpha\omega} - aQ'_{\alpha\omega} \end{bmatrix}$$

$$M_{X^*} = \begin{bmatrix} Q_{\alpha\omega} & P_{\alpha\omega} - aQ_{\alpha\omega} \\ Q'_{\alpha\omega} & P'_{\alpha\omega} - aQ'_{\alpha\omega} \end{bmatrix}$$

Elles permettent d'établir la relation :

$$(2) \qquad Q'_{\alpha\omega} = (a+r+1)Q_{\alpha\omega} - P_{\alpha\omega}$$

De plus, au moyen du déterminant de M_X , on peut écrire :

$$(3) \qquad P'_{\alpha\omega} = (a+r+1)\,P_{\alpha\omega} - \frac{P^2_{\alpha\omega} + \varepsilon_1\varepsilon_2}{Q_{\alpha\omega}}$$

De la même façon, avec X_1 et X_2 , on peut supposer dans la plus grande généralité que l'on a en conformité avec (r_1) et (r_2) :

$$(4) \qquad \begin{cases} Q'_{\alpha\beta} = (a+r_1+1)Q_{\alpha\beta} - P_{\alpha\beta} \\ Q'_{\gamma\omega} = (b+r_2+1)Q_{\gamma\omega} - P_{\gamma\omega} \end{cases}$$

$$(5) \qquad \begin{cases} P'_{\alpha\beta} = (a+r_1+1)P_{\alpha\beta} - \dfrac{P^2_{\alpha\beta} - \varepsilon_1}{Q_{\alpha\beta}} \\ P'_{\gamma\omega} = (b+r_2+1)P_{\gamma\omega} - \dfrac{P^2_{\gamma\omega} - \varepsilon_2}{Q_{\gamma\omega}} \end{cases}$$

Soit en substituant dans (1) :

$$(6) \qquad \begin{cases} P_{\alpha\omega} = P_{\alpha\beta}\ P_{\gamma\omega} + [(a+r_1+1)P_{\alpha\beta} - \dfrac{P^2_{\alpha\beta} - \varepsilon_1}{Q_{\alpha\beta}}]Q_{\gamma\omega} \\ Q_{\alpha\omega} = Q_{\alpha\beta}\ P_{\gamma\omega} + [(a+r_1+1)Q_{\alpha\beta} - P_{\alpha\beta}\ ]Q_{\gamma\omega} \\ Q'_{\alpha\omega} = (Q_{\alpha\beta}\ [(b+r_2+1)P_{\gamma\omega} - \dfrac{P^2_{\gamma\omega} - \varepsilon_2}{Q_{\gamma\omega}}\ ]) \\ \qquad + ([(a+r_1+1)Q_{\alpha\beta} - P_{\alpha\beta}\ ] \times [(b+r_2+1)Q_{\gamma\omega} - P_{\gamma\omega}\ ] \end{cases}$$

En remplaçant alors dans la relation (2) et multipliant par $Q_{\alpha\lambda} \cdot Q_{\mu\omega}$ on trouve :

$$(b+r_2+1)P_{\mu\omega}\,Q^2_{\alpha\lambda}\,Q_{\mu\omega} - Q^2_{\alpha\lambda}\,P^2_{\mu\omega} + \varepsilon_2\,Q^2_{\alpha\lambda}$$
$$+ (a+r_1+1)(b+r_2+1)Q^2_{\alpha\lambda}\,Q^2_{\mu\omega} - (b+r_2+1)P_{\alpha\lambda}\,Q_{\alpha\lambda}\,Q^2_{\mu\omega}$$
$$- (a+r_1+1)Q^2_{\alpha\lambda}\,P_{\mu\omega}\,Q_{\mu\omega} + Q_{\alpha\lambda}\,Q_{\mu\omega}\,P_{\alpha\lambda}\,P_{\mu\omega}$$
$$= \frac{(a+r+1)}{(a+r_1+1)}\,[Q^2_{\alpha\omega} - Q_{\alpha\omega}\,Q_{\alpha\lambda}\,P_{\mu\omega} + Q_{\alpha\omega}\,P_{\alpha\lambda}\,Q_{\mu\omega}] - P_{\alpha\lambda}\,P_{\mu\omega}\,Q_{\alpha\lambda}\,Q_{\mu\omega}$$
$$- (a+r_1+1)P_{\alpha\lambda}\,Q^2_{\mu\omega}\,Q_{\alpha\lambda} + P^2_{\alpha\lambda}\,Q^2_{\mu\omega} - \varepsilon_1\,Q^2_{\mu\omega}$$

Soit en regroupant et en utilisant encore (6) :

$$\frac{(a+r+1)}{(a+r_1+1)}\,Q^2_{\alpha\omega} - \varepsilon_2\,Q^2_{\alpha\lambda} - \varepsilon_1\,Q^2_{\mu\omega}$$

$$= (b+r_2-a-r_1)Q_{\alpha\lambda}\,Q_{\mu\omega}\,[P_{\mu\omega}\,Q_{\alpha\lambda} - Q_{\mu\omega}\,P_{\alpha\lambda}]$$
$$- [P_{\mu\omega}\,Q_{\alpha\lambda} - P_{\alpha\lambda}\,Q_{\mu\omega}]^2$$
$$+ (a+r_1+1)(b+r_2+1)Q^2_{\alpha\lambda}\,Q^2_{\mu\omega} + \left(\frac{a+r+1}{a+r_1+1}\right)[Q_{\alpha\lambda}\,Q_{\mu\omega} - P_{\alpha\lambda}\,Q_{\mu\omega}]Q_{\alpha\omega}$$

Avec la relation suivante, déduite de (6) :

$$Q_{\alpha\lambda}\,P_{\mu\omega} - P_{\alpha\lambda}\,Q_{\mu\omega} = Q_{\alpha\omega} - (a+r_1+1)Q_{\alpha\lambda}\,Q_{\mu\omega}$$

Cette dernière expression s'écrit :

$$(b+r_2-a-r_1)Q_{\alpha\lambda}\,Q_{\mu\omega}\,Q_{\alpha\omega}$$
$$- (b+r_2-a-r_1)(a+r_1+1)Q^2_{\alpha\lambda}\,Q^2_{\mu\omega}$$
$$- Q^2_{\alpha\omega} + 2(a+r_1+1)Q_{\alpha\lambda}\,Q_{\mu\omega}\,Q_{\alpha\omega} - (a+r_1+1)^2\,Q^2_{\alpha\lambda}\,Q^2_{\mu\omega}$$
$$+ (a+r_1+1)(b+r_2+1)Q^2_{\alpha\lambda}\,Q^2_{\mu\omega}$$
$$+ \left(\frac{a+r+1}{a+r_1+1}\right)Q^2_{\alpha\omega} - (a+r+1)Q_{\alpha\lambda}\,Q_{\mu\omega}\,Q_{\alpha\omega}$$

En regroupant tous les termes, il reste :

$$Q^2_{\alpha\omega} - \varepsilon_2\,Q^2_{\alpha\lambda} - \varepsilon_1\,Q^2_{\mu\omega} = (b+1+r_1+r_2-r)Q_{\alpha\omega}\,Q_{\alpha\lambda}\,Q_{\mu\omega}$$

Ceci termine la démonstration du Théorème X.1. En effet,

dans le cas qui nous intéresse, avec l'observation complémentaire faite ci-dessus que l'on a:

$$Q_{\alpha\omega} = m \qquad Q_{\alpha\lambda} = m_1 \qquad Q_{\mu\omega} = m_2$$

on trouve la nouvelle relation de MARKOFF indépendante de a :

$$(M_2) : \qquad m^2 - \varepsilon_2 m_1^2 - \varepsilon_1 m_2^2 = (b + 1 + r_1 + r_2 - r)mm_1m_2$$

Exemple

Pour $m = 182$ $\quad K_1 = 83$ $\quad K_2 = 57$ $\quad \rceil = 26$ $\quad a = 5$

on trouve :

$$A = -\frac{202}{182} = \varepsilon_1 A$$

$$X = (2,5,5,2,1)$$

et $X_1 = (2,5)$ $\quad X_2 = (2,1)$ $\quad b = 5$ $\quad \varepsilon_1 = 1$ $\quad \varepsilon_2 = 1$

et aussi : $\quad k_1 = 5$ $\quad m_1 = 11$ $\quad k_{12} = 9$ $\quad \rceil_{X_1} = 4$

$\quad k_2 = 1$ $\quad m_2 = 3$ $\quad k_{21} = 1$ $\quad \rceil_{X_2} = 0$

La relation (M_1) s'écrit avec $r = \frac{26}{182}$

$$\frac{202}{182} \cdot 182^2 + 11^2 + 3^2 = (5 + \frac{26}{182} + 1)182 \cdot 11.3 = 36\ 894$$

La relation (M_2) s'écrit, avec $r_1 = -\frac{4}{11}$ et $r_2 = 0$:

$$182^2 - 11^2 - 3^2 = (5 + 1 + \frac{-4}{11} + 0 - \frac{26}{182})182.11.3 = 32\ 994$$

Les deux relations (M_1) et (M_2) sont différentes.

C/ APPLICATION AU CALCUL DE VALEURS REPRESENTEES PAR LES FORMES

La comparaison des relations (M_1) et (M_2) donne :

$$(a_6) : \quad (1 - \varepsilon_1 A)m = [(a+1) + (b + 1 + r_1 + r_2)]m_1m_2$$

$$(a_7) : \quad (1 - \varepsilon_1 A)(\varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2) = [(a+r+1) + \varepsilon_1 A(b+1+r_1+r_2-r)]mm_1m_2$$

On note que dans le raisonnement conduisant ci-dessus à (M_1), on a aussi rencontré :

$$(a_8) : \quad (\varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2) = (\frac{k_2}{m_2} - \frac{k_1}{m_1} + r)mm_1m_2$$

En comparant à (a_3), on obtient seulement :

$$(a_8) : \quad 1 - \varepsilon_1 A = \frac{(a + r + 1) + \varepsilon_1 A (b + 1 + r_1 + r_2 - r)}{\frac{k_2}{m_2} - \frac{k_1}{m_1} + r}$$

Soit, avec (r_1) et (r_2) :

THEOREME X.2

Dans les conditions générales qui précèdent, on a la relation :

$$(A) : \quad A = -\varepsilon_1 \left[\frac{a + 1 + \left(\frac{k_1}{m_1} - \frac{k_2}{m_2} \right)}{b + 1 + \left(\frac{k_{21}}{m_2} - \frac{k_{12}}{m_1} \right)} \right]$$

Exemple

Dans l'exemple précédent, la formule (A) donne avec $\varepsilon_1 = 1$:

$$A = - \frac{6 + \frac{5}{11} - \frac{1}{3}}{6 + \frac{1}{3} - \frac{9}{11}} = - \frac{198 + 4}{198 - 16} = - \frac{202}{182}$$

D'où encore avec (r_1) et (r_2) :

$$(A_1) : \quad (1 - \varepsilon_1 A) = \frac{a + 1 + b + 1 + r_1 + r_2}{b + 1 + \left(\frac{k_{21}}{m_2} - \frac{k_{12}}{m_1} \right)}$$

En substituant dans (a_6) :

$$m = \left(b + 1 + \frac{k_{21}}{m_2} - \frac{k_{12}}{m_1}\right) m_1 m_2$$

$$= (b + 1) m_1 m_2 + k_{21} m_1 - k_{12} m_2$$

On retrouve ainsi la relation (c_1) qui est donc, avec (A), équivalente à (a_6).

D'autre part, la relation (a_8) dérive directement de (a_1) et (a_3), c'est-à-dire de (c_1) à (c_4) et (d_1) à (d_3), et donne avec (A) la relation (a_7).

Et comme de (a_6) et (a_7) se déduisent (M_1) et (M_2), on a établi que de (c_1) à (c_4), (d_1) à (d_3) et (A) se déduisent (M_1) et (M_2).

En ce qui concerne la relation (A), écrite sous la forme :

$$A = -\varepsilon_1 \frac{(a+1)m_1 m_2 + k_1 m_2 - k_2 m_1}{(b+1)m_1 m_2 + k_{21} m_1 - k_{12} m_2}$$

On voit apparaître au dénominateur, d'après la relation (c_1) le nombre $m = (b+1)m_1 m_2 + k_{21} m_1 - k_{12} m_2$

Elle se réduit donc à la relation (a_5) que l'on peut prendre pour relation de définition de A.

Prises en sens inverse, les remarques que l'on vient de faire constituent une nouvelle démonstration du Théorème X.1.

On remarque encore que la comparaison de (a_5) et (a_6) donne :

(a_{10}) : $m_1 k_2 - m_2 k_1 = m - (b + 1 + r_1 + r_2) m_1 m_2$

Si l'on considère la forme quadratique $\psi_\theta(x,y)$

Et la matrice :

$$M_X \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+1)m - K_2 & ; & m \\ (a+1)K_1 - 1 & ; & K_1 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de cette dernière s'écrit :

$$P(x) = x^2 - x\,[m(a+1) + K_1 - K_2] + [m - K_1 K_2]$$

En utilisant la relation (d_1), il reste, puisque $\varepsilon_2^2 = 1$:

$$\varepsilon_2 P(-\varepsilon_2 x) = \psi_\theta(x,1)$$

Ceci permet d'énoncer :

PROPRIETE X.1

Le polynôme caractéristique de la matrice :

$$M_X \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+1)m - K_2 & ; & m \\ (a+1)K_1 - 1 & ; & K_1 \end{bmatrix}$$

s'écrit : $\psi_\theta(-\varepsilon_2 x, 1)$.

On a écrit précédemment : $S^* = (X_1, b, X_2) = X$

En notant :
$$\begin{cases} \eta_a(S) = [\underline{S^*, a}] = [\underline{X, a}] = [\underline{X_1, b, X_2, a}] \\ \theta_2(S) = [0, \underline{S^*, a}] = \dfrac{1}{\eta_2(S)} \end{cases}$$

On obtient :

$$\theta_2(S) = \begin{bmatrix} K_1 & ; & (a+1)K_1 - 1 \\ m & ; & (a+1)m - K_2 \end{bmatrix} \theta_2(S)$$

$$= \begin{bmatrix} -K_1 & ; & 1 - (a+1)K_1 \\ -m & ; & K - (a+1)m \end{bmatrix} \theta_2(S)$$

Le polynôme caractéristique de la dernière matrice apparaissant vaut :

$$Q(x) = x^2 + x[m(a+1) + K_1 - K_2] + [m1 - K_1 K_2]$$

Au moyen de la relation (d_1), il conduit à énoncer :

PROPRIETE X.2 (Interprétation de la forme ϕ_θ)
Le polynôme caractéristique de la matrice :

$$-\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_X \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_1 & ; & 1 - (a+1)K_1 \\ -m & ; & K_2 - (a+1)m \end{bmatrix}$$

s'écrit : $\phi_\theta(x,1)$.

On note qu'avec : $S^* = [a_n, \ldots, a_1, a_0]$, on a :

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = (-1)^n$$

La relation (ϕ) $\phi_\theta(x,y) = x^2 + [m(a+1) + K_1 - K_2]xy + (-1)^n y^2$ est cohérente avec les formalismes généraux que l'on avait définis antérieurement.

Avec $z = mx - K_1 y$, on a :

$$\phi_\theta(z,y) = m^2 \left(x^2 + \left[\frac{(a+1)m + K_1 - K_2}{m}\right]xy + \left[\frac{1 - (a+1)K_1}{m}\right]y^2\right)$$

Ceci conduit à considérer comme avant :

$$(F) : \quad F_\theta(x,y) = x^2 + \left[\frac{m(a+1) - K_1 - K_2}{m}\right]xy + \left[\frac{1 - (a+1)K_1}{m}\right]y^2$$

PROPRIETE X.3
F_θ est la forme de MARKOFF définie par $S = (X_2^*, b, X_1^*)$ et a.

On retrouve l'égalité :

$$(F_1) : \quad \phi_\theta(mx - K_1 y ; y) = m^2 F_\theta(x,y)$$

Maintenant, la relation (M_1) s'écrit aussi :

$$(-A)m^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\, m_1^2 + m_2^2 = (a + r + 1)\,\varepsilon_1\, m m_1 m_2$$

Soit $Am^2 = m_2^2 - [(a+1)m + K_1 - K_2]\,\varepsilon_1\, m_1 m_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\, m_1^2$

ou (Φ_1) : $Am^2 = \Phi_\theta(-\varepsilon_1 m_2 ; m_1)$

Et avec (a_1) et (F_1) :

$$Am^2 = \Phi_\theta(mk_1 - K_1 m_1 ; m_1)$$
$$= m^2 F_\theta(k_1 ; m_1)$$

Soit par simplification : $F_\theta(k_1, m_1) = A$

PROPRIETE X.4

Dans les conditions générales vues ci-dessus, en définissant A par la condition (Ψ_2) : $\Psi_\theta(m_1 ; -m_2) = (\varepsilon_1 A)m^2$ ou la condition équivalente (a_5), on a :

(F_2) : $F_\theta(k_1, m_1) = A$

De plus, la condition (a_5') : $(\varepsilon_1 A) = \dfrac{(m_1 k_2 - m_2 k_1) - (a+1)m_1 m_2}{m}$

montre que A est un nombre rationnel que l'on peut écrire sous la forme (A_1) : $A = \dfrac{N}{m}$

où (N) : $N = \varepsilon_1 (m_1 k_2 - m_2 k_1) - (a+1)\,\varepsilon_1\, m_1 m_2$

D/ CALCUL SELON CASSELS - ENSEMBLES DE MARKOFF ORDONNES

Cette propriété garantit que l'on puisse utiliser les propriétés générales vues au chapitre III.

En définissant en particulier $l_1 \in \mathbb{Q}$ par :

(l_1) : $m l_1 = k_1(K_1 + K_2) + (a+1)(K_1 m_1 - k_1 m) - l\, m_1$

On a :

(A_2) : $A = k_1^2 - m l_1$

(F_3) : $F_\theta(k_1 x - l_1 y ; m_1 x - k_1 y) = AF_\theta(x,y)$

(F_4) : $\overline{\theta_2(S)} = \dfrac{k_1 \theta_2(S) - l_1}{m_1 \theta_2(S) - k_1}$

Maintenant, il ressort directement des relations (a_1) et (a_3) et de la définition des nombres m, m_1 et m_2 à partir de suites X, X_1, X_2 que l'on a :

PROPRIETE X.5

(a): $m > 0 \quad m_1 > 0 \quad m_2 > 0$

(b): $m = \mathrm{Max}(m, m_1, m_2) > \mathrm{Max}(m_1, m_2)$

(c): $\mathrm{pgcd}(m_1, m_2) = \mathrm{pgcd}(m, m_1) = \mathrm{pgcd}(m_2, m)$

Sur des exemples, on vérifie que rien n'impose d'avoir : $rm_1 \in \mathbb{Z}$ ou $rm_2 \in \mathbb{Z}$

On pose :

DEFINITION

On note $d = \mathrm{pgcd}(m_1, m_2)$.

La construction générale faite ci-dessus montre que le nombre d peut être quelconque, et que rien n'impose que l'on doive avoir d = 1 comme dans la Théorie de MARKOFF classique.

En reprenant alors les relations $(a_1)(a_3)$ et la propriété X.4, on obtient :

$$\begin{cases} m_1 K_1 \equiv \varepsilon_1 m_2 \pmod{m} & m_2 K_2 \equiv -\varepsilon_2 m_1 \pmod{m} \\ -\varepsilon_1 m_2 k_1 \equiv N \pmod{m_1} & -mk_1 \equiv \varepsilon_1 m_2 \pmod{m_1} \\ mk_2 \equiv \varepsilon_2 m_1 \pmod{m_2} & \varepsilon_1 m_1 k_2 \equiv N \pmod{m} \end{cases}$$

On en déduit modulo m :

$$m_1 K_1 K_2 \equiv -\varepsilon_1 \varepsilon_2 m_1 \pmod{m}$$

Cette relation est évidente d'après la condition (d_1).

On a aussi modulo m_1 :

$$-\varepsilon_1 m_2 k_1^2 \equiv N k_1 \equiv m k_1^3 \pmod{m_1}$$

Soit, puisque l'on a $\mathrm{pgcd}(m_1, k_1) = 1$ la relation :

$$mk_1^2 - N \equiv 0 \pmod{m_1}$$

En introduisant $L_1 \in \mathbb{Z}$ tel que :

(L_1) : $\quad mk_1^2 - N = m_1 L_1$

On obtient : $\quad k_1^2 - m_1 \left(\dfrac{L_1}{m} \right) = \dfrac{N}{m} = A$

Et en comparant à (A_2), il reste : $\rceil_1 = \dfrac{L_1}{m}$.

En comparant à $(\rceil_1)$, on obtient :

$$L_1 = m \rceil_1 = k_1 (K_1 + K_2) + (a+1)(K_1 m_1 - k_1 m) - \rceil m_1 \in \mathbb{Z}$$

On a enfin, modulo m_2 :

$$\varepsilon_1 m_1 k_2^2 \equiv N k_2 \equiv \varepsilon_1 \varepsilon_2 m k_2^3 \pmod{m_2}$$

Soit puisque l'on a $\text{pgcd}(m_2, k_2) = 1$ la relation :

$$mk_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 N \equiv 0 \pmod{m_2}$$

Ceci permet d'énoncer :

PROPRIETE X.6
Il existe $L_1 \in \mathbb{Z}$ et $L_2 \in \mathbb{Z}$ tels que :
(L_1) : $mk_1^2 - N = m_1 L_1$
(L_2) : $mk_2^2 - \varepsilon_1\varepsilon_2 N = m_2 L_2$
avec $L_1 = m \rho_1 = k_1 (K_1 + K_2) + (a+1)(K_1 m_1 - k_1 m) - \rho m_1$

On en déduit :

THEOREME X.3 (Equivalence des relations (M_1) et (M_2)
On a : $d | N$ et cette condition permet grâce à (a_5) et (c_1) d'établir l'équivalence des conditions (M_1) et (M_2).

La démonstration du Théorème X.3 s'établit comme suit.
Considérons les deux relations :

(c_1) : $(b+1)m_1 m_2 - m = k_{12} m_2 - k_{21} m_1$

(a_5) : $(a+1)m_1 m_2 + \varepsilon_1 N = k_2 m_1 - k_1 m_2$

Elles donnent :

$$[\varepsilon_1 N(b+1) + m(a+1)]m_1 m_2 = m_1 [mk_2 - \varepsilon_1 N k_{21}] + m_2 [\varepsilon_1 N k_{12} - mk_1]$$

Et avec la condition $\text{pgcd}(m_1, m_2) = d | \text{pgcd}(m, N)$, il existe $\delta \in \mathbb{Z}$ tel que l'on puisse écrire :

$$mk_1 - \varepsilon_1 N k_{12} = \delta m_1$$

et aussi : $$mk_2 - \varepsilon_1 N k_{21} = [\varepsilon_1 N(b+1) + m(a+1) + \delta] m_2$$

Ces expressions donnent :

$$r_1 = \frac{k_1 - k_{12}}{m_1} = \left(\frac{\varepsilon_1 N - m}{m}\right) \frac{k_{12}}{m_1} + \frac{\delta}{m}$$

$$r_2 = \frac{k_{21} - k_2}{m_2} = \left(\frac{m - \varepsilon_1 N}{m}\right) \frac{k_{21}}{m_2} - \frac{[\varepsilon_1 N(b+1) + m(a+1) + \delta]}{m}$$

Elles permettent d'écrire la relation (M_2) sous la forme :

$$m^2 - \varepsilon_2 m_1^2 - \varepsilon_1 m_2^2 = m m_1 m_2 \left[b+1-r + \left(\frac{\varepsilon_1 N - m}{\varepsilon_1 N}\right)\left(\frac{k_{12}}{m_1} - \frac{k_{21}}{m_2}\right) - (a+1) - \frac{\varepsilon_1 N}{m}(b+1)\right]$$

En simplifiant le second membre de cette expression et par recours

$$-(\varepsilon_1 N)m + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 = (a+1+r)mm_1 m_2$$

On retrouve donc seulement la relation (M_1).
Inversement, le calcul qui précède redonne une démonstration nouvelle de la relation (M_2) à partir de (M_1).
Il montre que, comme dans la Théorie de MARKOFF classique, il suffit de concentrer l'attention sur une seule équation diophantienne parmi les deux relations (M_1) et (M_2).
L'intérêt de la relation (M_2) est qu'elle ne fait appel qu'à des grandeurs issues de l'égalité : $X = (X_1, b, X_2)$.
Elle est indépendante du choix fait pour a.
L'intérêt de (M_1) est plutôt de faire le lien avec la présentation moderne de la Théorie de MARKOFF (CASSELS [5]).

D'autre part, on a de façon évidente par calcul (cf. Propriété III.3).

PROPRIETE X.7

(ϕ_2) : $\phi_\theta(x,y) = \phi_\theta(x + [m(a+1) + K_1 - K_2]y \; ; \; -y)$

(ϕ_3) : $\phi_\theta(x,y) = \varepsilon_1\varepsilon_2 \, \phi_\theta(y \; ; \; \varepsilon_1\varepsilon_2 \, x)$

(ϕ_4) : $\phi_\theta(x,y) = \varepsilon_1\varepsilon_2 \, \phi_\theta(-\varepsilon_1\varepsilon_2 \, y \; ; \; x + [m(a+1) + K_1 - K_2]y)$

Enfin, on a :

$$F_m(k_2 - (a+1)m_2 \; ; \; m_2)$$

$$= \frac{1}{m^2} \phi_\theta(mk_2 - (a+1)mm_2 - K_1 m_2 \; ; \; m_2) \qquad \text{(avec } (F_1)\text{)}$$

$$= \frac{1}{m^2} \phi_\theta(\varepsilon_2 m_1 - m_2[(a+1)m + K_1 - K_2] \; ; \; m_2) \qquad \text{(avec } (a_3)\text{)}$$

$$= \frac{1}{m^2} \phi_\theta(\varepsilon_2 m_1 \; ; \; -m_2) \qquad \text{(avec } (\phi_2)\text{)}$$

$$= \frac{1}{m^2}[m_1^2 - \varepsilon_2[(a+1)m + K_1 - K_2]m_1 m_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \, m_2^2]$$

$$= \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{m^2}[m_2^2 - \varepsilon_1[(a+1)m + K_1 - K_2]m_1 m_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \, m_1^2]$$

$$= \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{m^2} \phi_\theta(-\varepsilon_1 m_2 \; ; \; m_1)$$

$$= \varepsilon_1\varepsilon_2 \, A \qquad \text{(avec } (\phi_1)\text{)}$$

Et aussi avec (ϕ_3) :

$$\begin{cases} \phi_\theta(\varepsilon_2 m_1 ; -m_2) = \varepsilon_1\varepsilon_2\, \phi_\theta(-m_2 ; \varepsilon_1 m_1) \\ \phi_\theta(-\varepsilon_1 m_2 ; m_1) = \varepsilon_1\varepsilon_2\, \phi_\theta(m_1 ; -\varepsilon_2 m_2) \end{cases}$$

Ceci permet d'énoncer, toutes les vérifications complémentaires étant évidentes :

PROPRIETE X.8

On a les égalités suivantes :

(ϕ_1) : $Am^2 = \phi_\theta(-\varepsilon_1 m_2 ; m_1)$

$= \varepsilon_1\varepsilon_2\, \phi_\theta(m_1 ; -\varepsilon_2 m_2)$

$= \varepsilon_1\varepsilon_2\, \phi_\theta(\varepsilon_2 m_1 ; -m_2)$

$= \phi_\theta(-m_2 ; \varepsilon_1 m_1)$

(F_2) : $F_\theta(k_1 ; m_1) = A$

(F_5) : $F_\theta(k_2 - (a+1)m_2 ; m_2) = \varepsilon_1\varepsilon_2 A$

(F_6) : $F_\theta(K_1, m) = F_\theta(K_2 - (a+1)m, m) = \varepsilon_1\varepsilon_2$

Inversement, la propriété (F_2) est à rapprocher du Théorème X.2 qui montre comment calculer ces valeurs A représentées par F_θ à partir du développement en fraction de $\vartheta_2(S)$.

Les calculs que l'on a fait découlent de la seule relation :

$$S^* = X = (X_1, b, X_2)$$

Ils ont été faits indépendamment de la valeur b choisie.

La valeur A est quant à elle définie à partir du b choisi par les relations (ϕ_1) ou (ψ_2). Rien n'impose que cette valeur corresponde à la valeur négative maximale A_θ représentée par F_θ. Les calculs précédents sont donc en réalité valables pour d'autres valeurs A que A_θ. Ils posent le problème de déterminer les valeurs b telles que $A = A_\theta$.

On introduit de façon plus précise :

DEFINITION

Dans les conditions les plus générales présentées ci-dessus à partir de la suite S*, on dit que le nonuplet $(m,K_1,K_2\,;\ m_1,k_1,k_{12};\ m_2,k_{21},k_2)$ est, s'il existe, un ensemble de MARKOFF ordonné associé à la forme de MARKOFF F_θ lorsque l'on a $F_\theta(k_1,m_1) = A_\theta = \frac{N_\theta}{m}$ plus grande valeur négative non nulle représentée par la forme F_θ.

E / CONSIDERATIONS GEOMETRIQUES ET APPLICATIONS A LA CONSTRUCTION DES ENSEMBLES DE MARKOFF ORDONNES

Les considérations géométriques qui ont conduit avant à la mise au point du programme "EXTREMUM" sont encore applicables.
Elles donnent directement à partir du Théorème III.11 :

THEOREME X.4

$$F_\theta(X,Y) = X^2 + \left[\frac{m(a+1) - K_1 - K_2}{m}\right]XY + \left[\frac{1 - (a+1)K_1}{m}\right]Y^2$$

les deux valeurs extrêmes $M(F_\theta)$ et A_θ sont obtenues sur un point entier $(x,y) \neq (0,0)$ du rectangle déterminé par les deux inégalités :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant [(a+1)K_1 - 1][m - K_2] + K_1[K_1 - 1] \\ 0 \leqslant y \leqslant [(a+1)m - K_2][m - K_2] + m[K_1 - 1] \end{cases}$$

De plus :

(1) Si n pair ($\varepsilon = -1$)

La valeur A_θ est obtenue sur un point entier $(x,y) \neq (0,0)$ du rectangle :

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant K_1 - 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant m - K_2 \end{cases}$$

Ceci correspond à un des points $\Omega_0, \Omega_2, \ldots \Omega_n$.
Dans ce cas, il existe $(x,y) = (k_1,m_1)$ vérifiant les conditions précédentes tel que $F_\theta(k_1,m_1) = A_\theta$.

De plus, il existe alors un ensemble de MARKOFF ordonné associé à la forme F_θ définie à partir de S.

(2) Si n impair ($\varepsilon = +1$)

On a alors $N_\theta = -M(F_\theta)$ et $A_\theta = -1$

La valeur A_θ est alors obtenue sur l'un des points de coordonnées entières :

$$\Omega_0, \Omega_2, \ldots, \Omega_{n-1}, \ldots, \Omega_{2n+2}$$

Il se peut qu'elle ne soit obtenue sur aucun des points $\Omega_0, \Omega_2, \ldots \Omega_{n-1}$.

Dans ce cas, la suite S ne permet pas de définir un ensemble de MARKOFF associé à la forme F_θ .

Remarque

On a donné ci-dessus un exemple illustrant la seconde partie du résultat précédent.

Dans la (2,0,1) Théorie, avec :

$$F_\theta(X,Y) = X^2 - \frac{26}{12} XY - \frac{13}{12} Y^2$$

on trouve $A_\theta = -1$, avec $(x,y) = (5,12)$ ou $(x,y) = (31,74)$.

Ces deux points sont dans le plus grand rectangle donné par le résultat précédent, mais aucun ne correspond à l'un des points $\Omega_0, \Omega_2, \ldots, \Omega_{n-1}$.

E.1 - Application à l'étude des (a,r,-1) Théories

Pour une telle Théorie, dont la Théorie de MARKOFF constitue le prototype, le Théorème X.4 (1) est applicable.

On peut donc toujours définir au moins un ensemble de MARKOFF ordonné et le calculer avec le programme "EXTREMUM".

Ceci précise les définitions que l'on donnait antérieurement.

Dans ce cas, puisque le couple (k_1, m_1) tel que l'on ait :

$$F_\theta(k_1, m_1) = A_\theta$$

est obtenu sur un point Ω_{2i} $\quad 0 \leqslant 2i \leqslant n$

On a nécessairement $\varepsilon_1 = 1$

Et avec $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = (-1)^n = 1$ (n pair)

Il vient aussi : $\varepsilon_2 = 1$

Dans ce cas particulier, les deux relations (a_1) et (a_2) s'écrivent :

$$(a_1') : m_2 = m_1 K_1 - m k_1$$

$$(a_2') : k_2 = m_1 l - K_2 k_1$$

On retrouve les relations données dans la propriété X.5.

Avec la méthode développée dans le présent chapître :

THEOREME X.5 (Ensembles de MARKOFF ordonnés d'une (a,r,-1) Théorie)

Dans toute (a,r,-1) Théorie de MARKOFF, toute forme de MARKOFF F_θ admet un ensemble de MARKOFF ordonné défini à partir de la suite associée S.

On a $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$

Et les relations s'en déduisant :

$(a_1') : m_2 = m_1 K_1 - m k_1$ $\qquad$ $(a_3') : m_1 = m k_2 - m_2 K_2$

$(a_2') : k_2 = m_1 l - K_2 k_1$ $\qquad$ $(a_4') : k_1 = K_1 k_2 - m_2 l$

$(M_1) : (-A_\theta) m^2 + m_1^2 + m_2^2 = (a+r+1) m m_1 m_2$

où $\begin{cases} m > 0 \qquad m_1 > 0 \qquad m_2 > 0 \\ m = \mathrm{Max}(m, m_1, m_2) > \mathrm{Max}(m_1, m_2) \\ \mathrm{pgcd}(m, m_1) = \mathrm{pgcd}(m_1, m_2) = \mathrm{pgcd}(m_2, m) \end{cases}$

$(M_2) : m^2 - m_1^2 - m_2^2 = (b+1+r_1 + r_2 - r) m m_1 m_2$

$(a_5') : -N_\theta = (a+1) m_1 m_2 - k_2 m_1 + k_1 m_2$

$$(A) \quad : A_\theta = - \frac{\left(a + 1 + \dfrac{k_1}{m_1} - \dfrac{k_2}{m_2} \right)}{\left(b + 1 + \dfrac{k_{21}}{m_2} - \dfrac{k_{12}}{m_1} \right)}$$

Ce nombre est d'autant plus petit que a est grand devant b. Il peut vérifier $A_\theta < -1$.

$(c_1) : m = (b+1) m_1 m_2 + k_{21} m_1 - k_{12} m_2$

E.2 - Application à l'étude des (a,r,1) Théories

On a vu au Théorème X.4 que pour une telle Théorie, il peut y avoir des difficultés pour définir un ensemble de MARKOFF ordonné.

Au lieu de considérer $S = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, on considère d'abord la suite :

$$SaS = (a_0, a_1, \ldots, a_n, a, a_0, \ldots, a_n)$$

$$= (b_0, b_1, \ldots b_{2n+2})$$

Par construction, on a :

$$\theta_a(SaS) = [0, \underline{S^*, a, S^*, a}]$$
$$= [0, \underline{S^*, a}] = \theta_a(S)$$
$$\overline{\theta_a(SaS)} = -[\underline{a, S, a, S}]$$
$$= -[\underline{a, S}] = \overline{\theta_a(S)}$$

Il en résulte :

PROPRIETE X.9

Pour $a \in \mathbb{N}^*$ et $S = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ donnés, la forme de MARKOFF définie par (S,a) coïncide avec la forme de MARKOFF définie par (S,a,S,a).

La différence est que la suite (S,a,S) contient toujours un nombre impair de termes, et correspond donc à une valeur n paire.
Cette nouvelle suite correspond aux valeurs :

$$\begin{cases} \mathcal{M} = m[(a+1)m + K_1 - K_2] \\ \mathcal{K}_1 = K_1[(a+1)m + K_1 - K_2] + (-1)^{n+1} \\ \mathcal{K}_2 = K_2[(a+1)m + K_1 - K_2] - (-1)^{n+1} \\ \mathcal{L} = 1[(a+1)m + K_1 - K_2] + (-1)^{n+1}(a+1) \end{cases}$$

Ceci permet de vérifier la propriété X.9 par un calcul direct.
On vérifie aussi sans difficulté que l'on a :

$$\mathcal{M}\mathcal{L} = \mathcal{K}_1\mathcal{K}_2 + (-1)^{2n+2}$$

Si on a : $a \geq t(S)$, il est clair que l'on a aussi $a \geq t(SaS)$.
Par ailleurs, le calcul de $m_a(SaS)$ peut être fait avec :

$$C(\theta_a(S)) = \frac{m_a(S)}{\sqrt{\Delta_a(S)}} = \frac{m_a(SaS)}{\sqrt{\Delta_a(SaS)}}$$

et $$\Delta_a(SaS) = [(a+1)\mathcal{M} + \mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2]^2 + 4(-1)^{2n+3}$$
$$= [(a+1)m + K_1 - K_2]^2 \Delta_a(S)$$

On obtient ainsi : $m_a(SaS) = m_a(S)[(a+1)m + K_1 - K_2]$
Ceci permet d'énoncer :

PROPRIETE X.10

Pour tout mot de MARKOFF $S \in L_a$, on a aussi $SaS \in L_a$.
Dans ce cas, le nombre de MARKOFF super réduit défini par (S,a) est aussi le nombre de MARKOFF super réduit défini par (S,a,S,a) :

$$\theta_a(S) = \theta_a(SaS)$$

Il vérifie les conditions suivantes :

$$m(SaS) = [(a+1)m + K_1 - K_2]m(S)$$

$$m_a(SaS) = [(a+1)m + K_1 - K_2]m_a(S)$$

$$\Delta_a(SaS) = [(a+1)m + K_1 - K_2]^2 \Delta_a(S)$$

$$K_1(SaS) = [(a+1)m + K_1 - K_2]K_1 + (-1)^{n+1}$$

$$K_2(SaS) = [(a+1)m + K_1 - K_2]K_2 - (-1)^{n+1}$$

En particulier, on peut calculer ainsi :

$$\begin{cases} \varepsilon(SaS) = -1 \\ r(SaS) = r(S) + \dfrac{2(-1)^{n+1}}{m[(a+1)m + K_1 - K_2]} \end{cases}$$

Ceci permet d'énoncer différents résultats :

THEOREME X.6 (Coïncidence entre Théories de MARKOFF)

Tout nombre super réduit $\theta_a(S)$ d'une $(a,r,(-1)^{n+1})$ Théorie de MARKOFF fait aussi partie de la $\left(a\ ;\ r + \dfrac{2(-1)^{n+1}}{m[(a+1)m + K_1 - K_2]}\ ;\ -1\right)$ Théorie de MARKOFF.

Et aussi :

THEOREME X.7 (Ensembles de MARKOFF ordonnés d'une (a,r,1) Théorie)

En remplaçant éventuellement la suite S par la suite SaS, toute forme de MARKOFF F_θ d'une (a,r,1) Théorie admet un ensemble de MARKOFF ordonné correspondant à $A_\theta = -1$.
Pour S elle-même, on a $\varepsilon_1 = 1 \quad \varepsilon_2 = -1$
Pour SaS si nécessaire, on a $\varepsilon_1 = 1 \quad \varepsilon_2 = 1$
Et l'on dispose des relations données par le Théorème X.5 :
$(a'_1)(a'_2)(a'_3)(a'_4)(a'_5)(M_1)(M_2)(A)(c_1)$.

E.3 - Remarque générale pour le cas où $A_\theta = -1$

Avec $A_\theta = -1$, on trouve :

$$a-b + \frac{k_1}{m_1} + \frac{k_{12}}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} + \frac{k_{21}}{m_{21}}$$

Soit : $a-b = P(X_1) - P(X_2)$

Les seuls cas possibles, compte tenu des diverses contraintes sont :

$P(X_1) = P(X_2)$ $\qquad$ $(a=b)$

$P(X_1) = P(X_2) + 1$ $\qquad$ $(a=b+1)$

La réciproque étant évidente, on peut énoncer :

THEOREME X.8 (Représentation de -1 par une forme de MARKOFF)
Pour toute forme F_θ d'une (a,r,ε) Théorie associée à une suite S, on a équivalence des propriétés suivantes :

(1) le nombre négatif -1 est représenté par F_θ

(2) on peut écrire $S^* = (X_1, b, X_2)$ avec $\det M_{X_1} = 1$

et $\begin{cases} \text{ou bien } a = b \text{ et } P(X_1) = P(X_2) \\ \text{ou bien } a = b+1 \text{ et } P(X_1) = P(X_2) + 1 \end{cases}$

Exemple :
Avec $a = 2$, $X_1 = (1,1)$ et $X_2 = (1,2,1)$
on trouve

$$F_\theta(X,Y) = X^2 + \frac{56}{26} XY - \frac{41}{26} Y^2$$

et $\qquad F_\theta(1,2) = -1$

La suite S associée est : $S = (1,1,2,1,2,1)$ $\qquad (r = \frac{4}{13})$

Ce résultat montre la grande particularité du Théorème d'isolation de REMAK et ROGERS ([5] p 25) que l'on cherche dans la suite à ne pas utiliser.

Remarquons que pour la suite SaS, il est facile de trouver un ensemble de MARKOFF ordonné :

Avec : $\qquad X = S^*aS^* \quad X_1 = X_2 = S^* \quad b = a$

On obtient : $\begin{cases} m_1 = m_2 = m \\ k_1 = k_{21} = K_1 \\ k_2 = k_{12} = K_2 \end{cases}$

Soit en remplaçant dans la relation (A) :

$$A_\theta = -\frac{a + 1 + \frac{K_1 - K_2}{m}}{a + 1 + \frac{K_1 - K_2}{m}} = -1$$

L'ensemble de MARKOFF ordonné associé est :

$$(m(SaS), K_1(SaS), K_2(SaS), m, K_1, K_2, m, K_1, K_2)$$

La relation de MARKOFF (M_1) se réduit après simplification à :

$$m(SaS) = [(a+1)m + K_1 - K_2]m$$

F / CONSTRUCTION DE (a,r,ε) THEORIES CONTENANT UNE INFINITE DE SUITES S

F.1 - Les résultats généraux

A partir de la propriété X.10, on a pour toute suite S et tout nombre $b \in \mathbb{N}^*$:

$$\lambda(SbS) = m(SbS) - K_1(SbS) - K_2(SbS)$$
$$= [(b+1)m + K_1 - K_2](m - K_1 - K_2)$$
$$= [(b+1)m + K_1 - K_2]\ \lambda(S)$$

D'où avec la même propriété :

PROPRIETE X.11
Pour tout $b \in \mathbb{N}^*$ et toute suite $S = (a_0, a_1, \ldots a_n)$ on a pour les écarts de palindromie :

$$P(SbS) = P(S)$$

En comparant alors avec la propriété IV .3 :

$$r(S) = \frac{\mu(S)}{m(s)} = \frac{\lambda(\tilde{S})}{m(\tilde{S})} = P(\tilde{S}) = P(\tilde{S}b\tilde{S}) = r(S_b^1)$$

où par construction : $\tilde{S}_b^1 = \tilde{S}b\tilde{S}$
La suite S_b^1 peut être explicitée :

$$S = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$$
$$\tilde{S} = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 - 1, 1)$$
$$\tilde{S}_b^1 = \tilde{S}b\tilde{S} = (a_n, \ldots, a_0 - 1, 1, b, a_n, \ldots, a_0 - 1, 1)$$
$$S_b^1 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, b, 1, a_0 - 1, \ldots, a_n)$$
$$= Sb\hat{S}$$

Elle permet d'énoncer :

PROPRIETE X.12

Pour tout $b \in \mathbb{N}^* $ et toute suite $S = (a_0, a_1, \ldots a_n)$ on a pour les écarts d'antidromie :

$$r(S) = r(Sb\hat{S})$$

où la suite $S_b^1 = Sb\hat{S}$ est strictement plus longue que S.

En effet, en écrivant : $Sb\hat{S} = (b_0, b_1, \ldots b_m)$
On voit que m est minimal lorsque l'on a $a_0 = 1$
Dans ce cas : $m = n + 1 + n = 2n + 1 > n$
La suite $Sb\hat{S}$ est donc strictement plus longue que S, elle est différente de S.
Elle vérifie par construction un certain nombre de propriétés évidentes :

PROPRIETE X.13

(1) On a pour la suite $S_b^1 = Sb\hat{S}$ les expressions :

$$\begin{cases} m(S_b^1) = m[bm + K_1 + K_2] \\ K_1(S_b^1) = K_1[bm + K_1 + K_2] + (-1)^n \\ K_2(S_b^1) = K_2[bm + K_1 + K_2] + (-1)^n \\ \nabla(S_b^1) = \nabla[bm + K_1 + K_2] + (-1)^{n+1} b \\ \varepsilon(S_b^1) = (-1)^{2n} = 1 \end{cases}$$

(2) Il en découle l'égalité :

$$r(Sb\hat{S}b\hat{S}) = r(S)$$

Et de façon plus générale, $\forall\, t \in \mathbb{N}$ $r(S.(b\hat{S})_t) = r(S)$

avec . si t impair $\varepsilon(S.(b\hat{S})_t) = 1 = \varepsilon(S)^{t+1}$

. si t pair $\varepsilon(S.(b\hat{S})_t) = \varepsilon(S) = \varepsilon(S)^{t+1}$

(3) Soit S une suite vérifiant la condition (S_1) : $t(S) \leqslant a$
et $b \in \mathbb{N}^*$ un nombre vérifiant : $b \leqslant a$
On a équivalence des propriétés suivantes :

(α) : $t(Sb\hat{S}) \leqslant a$

(β) : $a_0 \neq 1$ ou ($a_0 = 1$ et $a_1 \leqslant a - 1$)

En particulier, si ces propriétés n'ont pas lieu, on a :

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = a$$

$$t(S) = a$$

$$t(Sb\hat{S}) = a + 1$$

Le point (2) s'établit en calculant les paramètres correspondant à la suite $Sb\hat{S}b\hat{S}$ à partir de $m(S) = m$, $K_1(S) = K_1$, $K_2(S) = K_2$.
On trouve facilement :

$$\begin{cases} m(Sb\hat{S}b\hat{S}) = m[T^2 + (-1)^n] \\ K_1(Sb\hat{S}b\hat{S}) = K_1 T^2 + (-1)^n (T + K_1) \\ K_2(Sb\hat{S}b\hat{S}) = K_2 T^2 + (-1)^n (T + K_2) \end{cases}$$

où $T = bm + K_1 + K_2$

Il en résulte de façon directe l'égalité $r(Sb\hat{S}b\hat{S}) = r(S)$.
En considérant la base où diagonalise la matrice $M_{b\hat{S}}$ et donc les matrices $M_{(b\hat{S})_t}$, on trouve plus généralement :

$$\forall\, t \in \mathbb{N} \qquad r(S(b\hat{S})_t) = r(S)$$

L'expression de $\mathcal{E}(S(b\hat{S})_t)$ est quant à elle évidente.

Un cas extrême, intéressant pour la suite, est celui où l'on convient de prendre b = 0.

DEFINITION
Pour toute suite $S = (a_0, a_1, \ldots a_n)$ on note $S_0^1 = S0\hat{S}$ la suite définie comme suit :

$$S_0^1 = (a_0, a_1, \ldots, a_n + 1, a_0 - 1, \ldots, a_n) \text{ si } a_0 \neq 1$$

$$S_0^1 = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + a_1 + 1, a_2, \ldots, a_n) \text{ si } a_0 = 1$$

Plus généralement, soit $S_b^t = S(b\hat{S})_t$ la suite définie comme suit avec $b \in \mathbb{N}$:

$$S_b^t = (a_0, a_1, \ldots a_{n-1}, a_n, (b, 1, a_0 - 1, a_1, \ldots a_{n-1}, a_n)_t)$$

Moyennant l'application de la règle (E.2) pour b = 0 ou $a_0 = 1$.
Notons enfin $S_b^0 = S$.

On reconnaît alors dans ces constructions la suite qui apparaît dans les propriétés V.2, V.3 et le Théorème V.2 pour b = 0.

On vérifie facilement l'égalité : $r(S_o^1) = r(S_o^t) = r(S)$.
Si $n > 1$, les suites S_o^1 et S_o^t sont strictement plus longues que S.

F.2 - Un exemple d'application

Supposons donné $a \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, et considérons les deux nombres de MARKOFF $\theta_1(S)$ et $\theta_2(S_o)$:

$$\theta_1(S) = [0, \underline{a_n, \ldots, a_o, a}]$$

$$\theta_1(S_o^1) = [0, \underline{a_n, \ldots, a_1, a_o - 1, a_n + 1, a_{n-1}, \ldots a_o, a}]$$

Si l'on suppose que l'on a $n > 1$ et $S \in \langle a-1 \rangle$, on trouve, d'après les Théorèmes I.4 et I.5 que $\theta_1(S)$ est un nombre super réduit, tel que :

$$\begin{cases} (S_1) : a > a-1 \geqslant t(S) \\ (S_2) : m_1(S) = m(S) \end{cases}$$

Plusieurs cas sont envisageables :

Cas 1 : Si $S = (a-1)_{n+1} \in \langle a-1 \rangle$
On obtient $S_o^1 = ((a-1)_n , a-2 , a , (a-1)_n)$
Plusieurs cas doivent être envisagés :

Cas 1.1 : Si $a = 2$, il reste $t(S_o) = 3$
soit $S_o^1 \notin \langle 1 \rangle = \langle a-1 \rangle$

Cas 1.2 : Si $a \neq 2$, il reste $t(S_o) = a$
soit encore $S_o^1 \notin \langle a-1 \rangle$

Cas 2 : Si $S \neq (a-1)_{n+1}$
A une permutation circulaire près sur S, on peut supposer que l'on a : $a_n < a-1$

Cas 2.1 : Si $a_o \neq 1$
La suite S_o^1 vérifie alors $S_o^1 \in \langle a-1 \rangle$
Et puisque l'on suppose $n > 1$, on peut écrire :

$$S_o^1 = (b_o , b_1 , \ldots b_\nu)$$

avec $\begin{cases} b_o = a_o \neq 1 \\ b_\nu = a_n < a-1 \\ \nu = 2n+1 > 1 \end{cases}$

La suite S_o^1 permet à son tour de construire S_o^3 , S_o^5 et ainsi de suite.

On trouve ainsi une (a,r,1) Théorie contenant les nombres $\theta_a(S_o^1)$, $\theta_a(S_o^3)$, ... dont les constantes de MARKOFF tendent vers $\frac{1}{a+r+1}$ par valeurs inférieures. Ceci résulte du Théorème VIII.4.

Cas 2.2 : Si $a_o = 1$

La suite S_o^1 vérifie $S_o^1 \in \langle a-1 \rangle$ pouvu que l'on ait : $a_1 + a_n \leqslant a - 2$.

On a alors : $S_o^1 = (b_o, b_1, \ldots b_\nu)$

avec :
$$\begin{cases} \nu = 2n-1 > 1 \\ b_0 = a_o = 1 \\ b_1 = a_1 \\ b_\nu = a_n < a-1 \\ b_1 + b_\nu = a_1 + a_n \leqslant a - 2 \end{cases}$$

La suite S_o^1 permet à son tour de construire S_o^3, S_o^5 et ainsi de suite pour lesquelles on conclut comme ci-dessus.

Ceci permet d'énoncer :

THEOREME X.9 (Construction de (a,r,1) Théories contenant une infinité de suites)
Soit $S = (a_o, \ldots, a_n)$ une suite vérifiant les conditions suivantes, pour $a \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$$\begin{cases} n > 1 \\ S \in \langle a-1 \rangle \\ a_n < a-1 \\ a_o \neq 1 \text{ ou } a_0 = 1 \text{ et } a_1 + a_n \leqslant a - 2 \end{cases}$$

S permet de construire une suite de suites S_3^1, S_o^3, ... S_o^{2i+1} ... strictement de plus en plus longues, et vérifiant les mêmes conditions que S. Les nombres de MARKOFF $\theta_a(S_o^1)$, $\theta_a(S_o^3)$, ... sont tous dans la (a,r(S),1) Théorie de MARKOFF qui contient ainsi une infinité de nombres distincts non deux à deux équivalents pour l'action du groupe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$.

Leurs constantes de MARKOFF tendent vers $\frac{1}{a + r(S) + 1}$ par valeurs inférieures.

Ce résultat complète, dans le cas où $\varepsilon = 1$, le maillon manquant entre le Théorème VIII.4 et le Théorème V.2, et qui consiste à construire explicitement une infinité de formes F_θ tendant vers une forme limite f telle que :

$$C(f) = \frac{1}{a + r + 1}$$

En l'occurrence, il suffit de considérer les formes F_0^1, F_0^3 , ... construites avec $\theta_a(S_0^1)$, $\theta_a(S_0^3)$ ...

F.3 - D'autres exemples:

Par le même raisonnement que ci-dessus, mais en utilisant cette fois S_0^2 au lieu de S_0^1, on a :

THEOREME X.10((a,r, ε) Théories contenant une infinité de suites) Soit une (a,r, ε) Théorie contenant une suite $S = (a_0, \ldots, a_n)$ vérifiant les conditions suivantes pour $a \in \mathbb{N}^* - \{1\}$:

$$\begin{cases} n > 1 \\ S \in \langle a-1 \rangle \\ a_n < a-1 \\ a_0 \neq 1 \text{ ou } a_0 = 1 \text{ et } a_1 + a_n \leq a - 2 \end{cases}$$

Cette (a,r, ε) Théorie de MARKOFF contient l'infinité des nombres de MARKOFF $\theta_a(S_0^0)$, $\theta_a(S_0^2)$, $\theta_a(S_0^4)$ etc ... deux à deux non équivalents pour l'action du groupe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$.

Maintenant, au lieu de limiter à b = 0 , on peut envisager d'utiliser la transformation $S \longrightarrow Sb\hat{S} = S_b^1$ ($b \in \mathbb{N}^*$). En appliquant la propriété X.13 (3), on a alors de façon évidente :

THEOREME X.11 ((a,r,-1) Théories contenant une infinité de suites)
Soit une (a,r,-1) Théorie contenant une suite $S = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$

$$S = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \langle a\text{-}1 \rangle$$

telle que l'on ait :

$$a_0 \neq 1$$

ou $a_0 = 1$ et $a_1 < a-1$

Alors, pour tout nombre $b \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $b \leqslant a-1$ et tout nombre pair $t \in \mathbb{N}$, la suite

$$S_b^t = (S, (b, \hat{S})_t)$$

vérifie
$$\begin{cases} r(S_b^t) = r(S) \\ \varepsilon(S_b^t) = -1 \\ t(S_b^t) \leqslant a \end{cases}$$

De plus, on a $m_a(S_b^t) = m(S_b^t)$.
Et la (a,r,-1) Théorie considérée contient l'infinité des nombres de MARKOFF $\theta_a(S_b^t)$ tels que t pair. Ils sont super réduits et non deux à deux équivalents pour l'action du groupe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$.

De même on peut énoncer :

THEOREME X.12 ((a,r,1) théories contenant une infinité de suites)
Soit une (a,r,1) Théorie contenant une suite $S = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$

$$S = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \langle a\text{-}1 \rangle$$

telle que l'on ait :

$$a_0 \neq 1$$

ou $a_0 = 1$ et $a_1 < a - 1$

Alors pour tout nombre $b \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $b \leqslant a - 1$ et tout nombre $t \in \mathbb{N}$, la suite S_b^t vérifie :

$$r(S_b^t) = r(S)$$
$$\varepsilon(S_b^t) = 1$$
$$t(S_b^t) < a$$
$$m_a(S_b^t) = m(S_b^t)$$

La (a,r,1) Théorie considérée contient l'infinité des nombres de MARKOFF $\theta_a(S_b^t)$ ($t \in \mathbb{N}$). Ils sont super réduits et non deux à deux équivalents pour l'action du groupe $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$.

XI. DES EXEMPLES DE (a,r,ε) THEORIES

QUELQUES APPLICATIONS S'EN DEDUISANT POUR LA THEORIE DE MARKOFF CLASSIQUE ET LA (2,0,1) THEORIE

A / RAPPELS PREALABLES

Une (a,r,ε) Théorie est déterminée par les conditions suivantes :

(R) : $r = \frac{R_1}{R_2}$ ($R_2 > 0$; $-R_2 < R_1 \leqslant R_2$; $pgcd(R_1,R_2) = 1$)

(R_0) : n nombre de parité donné : $\varepsilon = (-1)^{n+1}$

(R_1) : $p_{i-2} = m = R_2 m_{i-2} \in R_2\mathbb{Z}$

(R_2) : $0 < q_{i-1} < p_{i-2}$

(R_5') : $m_{i-2} \mid q_{i-2}^2 + (-1)^n$

(R_5'') : $R_2 \mid \frac{q_{i-2}^2 + (-1)^n}{m_{i-2}} - R_1 q_{i-2}$

(R_6) : $\frac{p_{i-2}}{q_{i-2}} = [S^*]$

(R_9) : $Sup(0 ; \frac{p_{i-2}}{R_2} R_1) < q_{i-2} \leqslant \frac{p_{i-2}}{R_2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{2}$

(S_1) : $a \geqslant t(S) - 1$

(S_2) : $m_a(S) = m$ (avec (S_2) $\Longrightarrow$ (S_1))

La condition (R_9) permet de limiter l'énumération à une seule des deux suites S ou S* convenant.

B / DES EXEMPLES DE (a,r,ε) THEORIES AVEC $r = \frac{1}{7}$ et $\varepsilon = -1$

B.1 - Construction d'exemples

On considère ici les valeurs particulières suivantes :

$$\begin{cases} (-1)^n = +1 \\ R_1 = 1 \\ R_2 = 7 \end{cases}$$

On travaille donc sur les $(a, \frac{1}{7}, -1)$ Théories, avec $a \in \mathbb{N}^*$.

On décrit les valeurs successives $m_{i-1} \in \mathbb{N}^*$.
Pour chacune d'elles, on calcule avec (R_1') la valeur :

$$p_{i-1} = R_1 m_{i-1} = m$$

Avec celle-ci et la condition (R_2), on décrit toutes les valeurs possibles $q_{i-1} \in \mathbb{N}^*$ telles que $q_{i-1} \leq p_{i-1}$.
Pour chacune d'elles, on teste les deux conditions (R_5') et (R_5'').
Et si elles sont vérifiées, on retient le triplet $(q_{i-1}, m_{i-1}, p_{i-1})$.

Ce dernier permet, avec la relation (R_6) et la parité fixée de n de déterminer S* de façon unique et donc de déterminer la valeur t(S).

Dans un premier temps, on n'utilise pas la condition (S_1) de manière à examiner ce que sont les valeurs possibles de t(S). Dans un second temps, pour toute valeur adéquate a, on peut ne retenir que les triplets correspondant au cas où la condition (S_1) a lieu.

Cette méthode définit le programme "GENERAL". Si l'on se limite à l'étude des cas frontières, on adapte "GENERAL" comme indiqué dans la suite. Si l'on veut assurer (S_2), on complète par le programme "EXTREMUM".

La condition (R_9) est utilisée limitativement pour diviser par deux les possibilités de valeurs de q_{i-1} pour m donné.
Et de façon plus précise, on note qu'en posant :

$$\begin{cases} m^*_{i-1} = m_{i-1} \\ q^*_{i-1} = (R_1 + R_2) m_{i-1} - q_{i-1} \pmod{m_{i-1}} \\ p^*_{i-1} = p_{i-1} \end{cases}$$

On a :

$$(R_5') : m^*_{i-1} = m_{i-1} \mid q^{*2}_{i-1} + (-1)^n \equiv q^2_{i-1} + (-1)^n \pmod{m_{i-1}}$$

$$(R_5'') : \frac{q^{*2}_{i-1} + (-1)^n}{m^*_{i-1}} - R_1 q^*_{i-1}$$

$$= (R_1 + R_2)^2 m_{i-1} - 2(R_1 + R_2) q_{i-1} + \frac{q^2_{i-1} + (-1)^n}{m_{i-1}} - R_1 (R_1 + R_2) m_{i-1} + R_1 q_{i-1}$$

$$= R_2\,[(R_1+R_2)m_{i-2} - 2q_{i-2}\,] + [\,\frac{q_{i-2}^2 + (-1)^n}{m_{i-2}} - R_1\,q_{i-2}\,]$$

$$\equiv 0 \pmod{R_2}$$

Avec : $\dfrac{p^*_{i-2}}{q^*_{i-2}} = [S'^*]$ et $\dfrac{p_{i-2}}{q_{i-2}} = [S^*]$

On trouve : $\dfrac{1}{[S^*]} + \dfrac{1}{[S'^*]} = \dfrac{R_1+R_2}{R_2} = 1 + r = \dfrac{1}{[S^*]} + \dfrac{1}{[S]}$

Soit : $\dfrac{p^*_{i-2}}{q^*_{i-2}} = [S]$

Et du fait de la parité de n, il apparaît que S est la suite définie par p^*_{i-2} et q^*_{i-2} .
Ceci garantit que l'on trouve la même valeur a = t(S) = t(S*).
L'annexe 1 fournit les diverses possibilités obtenues avec "GENERAL" pour $m_{i-2} \leqslant 170$.

B.2 - Diverses remarques

On peut faire le lien avec les notations de base que l'on a introduites antérieurement :

(0) : $m = p_{i-2} = R_2\,m_{i-2}$

(1) : $K_1 = q_{i-2}$

(2) : $r = \dfrac{K_1 - K_2}{m} = \dfrac{R_1}{R_2}$

On en déduit :

(2.1) : $m_{i-2} = \mathrm{pgcd}(m,\ K_1 - K_2)$

(2.2) : $K_1 - K_2 = R_1\,m_{i-2}$

Et encore :

(2.3) : $K_2 = q_{i-2} - R_1\,m_{i-2}$

(2.4) : $\rceil = \dfrac{1}{R_2}\,[\,\dfrac{q_{i-2}^2 + (-1)^n}{m_{i-2}} - R_1\,q_{i-1}\,]$

(3) : $\theta_2(S) = [0, \underline{S^*, a}]$ racine positive du polynôme

$$f_\theta(X,1) = mX^2 + [m(a+1) - K_1 - K_2\,]X + [\,\rceil - (a+1)K_1\,]$$

avec $S^* = (a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_1,\ a_0)$.

Dans le cas que l'on étudie, n est pair, de sorte que S* est une suite de longueur impaire.

(4) Pour les constantes de MARKOFF, on a :

$$C(\theta_a(S)) = C(f_\theta) = \frac{m_a(S)}{\sqrt{(a + \frac{R_1}{R_2} + 1)^2 m^2 + 4(-1)^{n+1}}}$$

Dans le cas présent, n est pair et r vaut $\frac{1}{7}$. On a donc au dénominateur de cette expression :

$$\Delta_a(S) = (a + \frac{8}{7})^2 m^2 - 4$$

Au numérateur, on a seulement, compte-tenu de l'expression de f_θ :

$$0 < m_a(S) \leqslant m$$

Il est possible de trouver parmi les résultats donnés par le programme "GENERAL" des cas où l'on a l'inégalité stricte :

$$m_a(S) < m$$

En effet, le programme "GENERAL" n'utilise pas la condition (S_2).

Exemple

Pour m = 203 $K_1 = 75$ $K_2 = 46$ $l = 17$ $R_1 = 1$ et $R_2 = 7$

on trouve $f_\theta(X,1) = 203X^2 + 691X - 283$

avec $f_\theta(17,46) = m_a(S) = 201 < m = 203$

Il est donc indispensable de calculer explicitement $m_a(S)$ (par exemple par le programme "EXTREMUM") si l'on souhaite à partir des possibilités données par "GENERAL" étudier plus spécifiquement le cas de la $(a,\frac{1}{7},-1)$ Théorie de MARKOFF.

(5) Le programme "GENERAL" détermine aussi diverses valeurs possibles pour a. Il fournit des résultats où ces valeurs $a \in \mathbb{N}^*$ se superposent. On se reporte à l'annexe 1 pour constater ce phénomène. Ceci conduit à la mise au point d'un programme plus spécifique (programme "GENTRI") extrayant de ce que fournit "GENERAL" les cas frontières correspondant à une valeur donnée au départ $a \in \mathbb{N}^*$. Ce nouveau programme permet de trier les diverses $(a,\frac{1}{7},-1)$ Théories se superposant dans l'annexe 1 en fonction des valeurs de a.

Exemple

La valeur a = 2 se rencontre pour le cas suivant :

$m = 7 \quad K_1 = 3 \quad K_2 = 2 \quad \rceil = 1 \quad m_1 = 1 \quad k_1 = 0$

Soit $[S^*] = [2,2,1] \quad t(S) = 2 \quad$ et $\quad m_2(S) = m = 7$

On a alors pour (M_1) : $\frac{8}{7} m^2 + m_1^2 + m_2^2 = \frac{22}{7} m m_1 m_2$

avec $m_1 = 1$, $k_1 = 0$, $m_2 = 3$, $k_2 = k_3 = k_{12} = 1$ et $rm_1 \notin \mathbb{Z}$, $rm_2 \notin \mathbb{Z}$

Ceci garantit que la $(2,\frac{1}{7},-1)$ Théorie de MARKOFF recouvre au moins un cas qui existe.

Ce cas, que l'on vient d'expliciter, fournit les identités :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \frac{8}{7} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x - \frac{1}{7}}}}}} + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{x}}}$$

(Elle est associée à : $r+1 = \frac{8}{7} = \frac{1}{[2,2,1]} + \frac{1}{[1,2,2]} = \frac{3}{7} + \frac{5}{7}$)

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad 1 = \frac{1}{[2,2,1,x]} = \frac{1}{[1,1,2,1,x]}$$

On trouve grâce à "GENTRI" d'autres cas où a = 2. Les premiers sont :

$m = 574 \quad K_1 = 237 \quad K_2 = 155 \quad \rceil = 64 \quad [S^*] = [2,2,2,1,2,2,1,2,1]$

$= [2,2,1,0,1,1,2,1,0,1,1,2,1]$

$m = 1799 \quad K_1 = 755 \quad K_2 = 498 \quad \rceil = 209 \quad [S^*] = [2,2,1,1,1,1,2,1,1,1,1,2,1]$

$m = 3710 \quad K_1 = 1567 \quad K_2 = 1037 \quad \rceil = 438 \quad [S^*] = [2,2,1,2,1,1,2,1,2,1,1,2,1]$

Il est facile de vérifier que ces cas sont en nombre infini.

Ils peuvent en effet être construits à partir de la suite (2,2,1) grâce aux transformations

$$S \longrightarrow S_0^2 = (S,0,\hat{S},0,\hat{S})$$

$$S \longrightarrow S_1^2 = (S,1,\hat{S},1,\hat{S})$$

$$S \longrightarrow S_2^2 = (S,2,\hat{S},2,\hat{S})$$

Ceci résulte directement des résultats vus au chapitre X.

La $(3,\frac{1}{7},-1)$ Théorie définit ainsi un point d'accumulation du spectre de PERRON atteint par valeurs supérieures : $\frac{1}{a+r+1} = \frac{7}{29} \# 0,24138 \ldots$

(6) La plus grande valeur négative non nulle $A_\theta = \frac{N_\theta}{m} = \frac{P_\theta}{Q_\theta}$ représentée par la forme quadratique :

$$F_\theta(X,Y) = \frac{1}{m} Y^2 f_\theta\left(\frac{X}{Y}, 1\right) = \frac{f_\theta(X,Y)}{m}$$

est calculable à partir des grandeurs m, K_1, K_2, a , par le programme "EXTREMUM". Dans le tableau donné en annexe 1, les indications correspondantes ont ainsi été mentionnées.

B.3 - Considération des ensembles de MARKOFF ordonnés : introduction de nouvelles notations

Grâce au programme "EXTREMUM", on peut déterminer des valeurs $(k_1, m_1) \in \mathbb{Z}^2$ telles que :

$$F_\theta(k_1, m_1) = A_\theta$$

et en déduire les valeurs $(k_2, m_2) \in \mathbb{Z}$ introduites dans les $(a, \frac{1}{7}, -1)$ Théories de MARKOFF :

$$\begin{cases} k_2 = m_1 l - K_2 k_1 \\ m_2 = m_1 K_1 - m k_1 \end{cases}$$

Sur le tableau fourni en annexe 1, compte-tenu que $\frac{k_1}{m_1}$ est nécessairement une réduite de $\theta_3(S)$, on a fait apparaître un signe $\longrightarrow$ pour indiquer le développement de :

$$\frac{k_1}{m_1} = [0, X_1]$$

Exemple

Pour m = 182 $K_1 = 83$ $K_2 = 57$ $l = 26$, on trouve

$S^* = (2,5,5,2,1)$

Soit $\theta_3(S) = [0, \underline{2,5,5,2,1,a}]$

avec dans le cas frontière $a = 5 = t(S^*)$.

La forme correspondante est :

$$F_\theta(x,y) = x^2 + \frac{952}{182} xy - \frac{472}{182} y^2$$

Elle détermine $A_\theta = -\frac{202}{182} \# -1,1098901$ pour le couple $(k_1, m_1) = (5,11) \in \mathbb{Z}^2$, ce qui donne $(k_2, m_2) = (1,3)$.

On a alors : $\frac{k_1}{m_1} = [0,2,5] = \frac{5}{11} = [0,X_1]$

La suite $S_1 = (2,5)$ apparaît au début du développement en fraction continue de $\theta_a(S)$. D'où l'apparition dans l'annexe du symbole ⌐¬ :

$$\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} \; [\overline{2,5},5,2,1]$$

On peut aussi déterminer les développements de $\frac{k_1}{m_1}$.

On a vu au chapitre X que l'un des deux s'écrit toujours sous la forme [0,T], où la suite $\tilde{T} = X_1$ correspond à la fin de la suite S*. De manière précise, cette suite X_1 est mentionnée par le symbole ⌐‾. Elle est séparée du symbole ⌐¬ par un seul nombre noté b de la suite S*. Ces symboles seront adoptés dans la suite pour indiquer les ensembles de MARKOFF ordonnés correspondants sur les développements en fraction continue mis en évidence.

Exemple

Sur l'exemple précédent, on avait $(k_1, m_1) = (1,3)$

Soit $\frac{k_1}{m_1} = [0,3]$

On obtient $X_1 = \tilde{T} = (2,1)$

Soit la notation qui apparaît en annexe 1 :

$$\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}} = [S^*] = [\overline{2,5},5,\overline{2,1}]$$

C / LE CAS DE LA THEORIE DE MARKOFF CLASSIQUE (LA (2,0,-1) THEORIE)

Supposons ici que l'on reprenne le programme "GENTRI" avec les valeurs : $R_1 = 0$ $R_2 = 1$ et $(-1)^n = 1$ $a = 2$

Comme indiqué précédemment, on obtient des cas frontières correspondant à la valeur $a = t(S) = 2$.

Le seul cas échappant par rapport à la (2,0,-1) Théorie est du fait de la condition (S_1) : $a \geqslant t(S)$ le cas du nombre d'or : S = (1).

Exemple

Pour $m = 2$ $K_1 = 1 = K_2$ ⌐¬ = 1 on trouve $a = 2$

$m = 10$ $K_1 = 3 = K_2$ ⌐¬ = 1 $a = 3$

Certains de ces résultats correspondent à un cas où l'on a :

$$m_a(S) < m$$

Exemple

Pour $m = 73$ $K_1 = 27 = K_2$ $\overline{1} = 10$ on trouve $a = 2$

On a $f_\theta(X,Y) = 73x^2 + 165xy - 71y^2$ soit $m_a(S) = 71 < m = 73$

Dans ces cas particuliers, puisque l'on sait que la valeur $m_a(S)$ peut être obtenue sur une réduite de $\frac{K_1}{m}$, il y a possibilité, moyennant une permutation circulaire de (S,a) de se ramener au cas où $m_a(S) = m$, c'est-à-dire à la condition (S_2).
Il peut cependant s'ensuivre un changement de la valeur de $r = \frac{R_1}{R_2}$.

La valeur a ne changera pas quant à elle car elle apparaît dans S ($a = t(S)$) : tous les cas étudiés sont des cas frontières.
Cette remarque conduit à ne considérer que les cas où l'on a, conformément aux définitions générales de la (a,r, ε) Théorie, la condition (S_2) :

$$m_a(S) = m$$

Dans le cas qui nous intéresse, on retrouve ainsi la Théorie de MARKOFF classique.
Les premières valeurs obtenues sont données par le tableau joint en annexe 2. Elles sont complétées au moyen du programme "EXTREMUM".

C.1 - Les résultats préalables:

(U_1) : On remarque que l'on a toujours $N_\theta = -m$.
Or, dans la présentation classique de CASSELS, on établit que l'on a :

$$F_m(k_1, m_1) = F_m(k_2 - 3m_2; m_2) = -1$$

Et puisque la forme F_m correspond à F_θ, on a bien de façon générale l'égalité :

$$A_\theta = \frac{N_\theta}{m} = -1$$

(U_2) : Les valeurs m_1, k_1 et m_2, k_2 sont calculées par le programme "EXTREMUM".
La relation liant les développements de $\frac{k_1}{m_1}$ et $\frac{k_2}{m_2}$ à celui de $\frac{m}{K_1}$ est encore observée.

Il convient toutefois de constater que ce n'est pas toujours le développement le plus court de $\frac{k_2}{m_2}$ qui doit être considéré.

Exemple

Avec $\frac{k_2}{m_2} = \frac{12}{29} = [0,2,2,2,1,1] = [0,T]$

On fabrique $\tilde{T} = (1,1,2,2,1,1,)$ qui apparaît bien dans

$$\frac{m}{K_1} = \frac{433}{179} = (2,2,2,\overline{1,1,2,2,1,1})$$

(U_3) : La valeur b séparant les deux développements associés à $\frac{k_1}{m_1}$ et $\frac{k_2}{m_2}$ vaut toujours 2 et l'on a $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$.

Ceci est équivalent au fait que l'on ait :

(M_1) : $m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2$

(M_2) : $m^2 - m_1^2 - m_2^2 = (3 + r_1 + r_2)mm_1m_2$

et aussi :

(c_1) : $m = 3m_1m_2 + k_{21}m_1 - k_{12}m_2$

(a_5) : $3m_1m_2 - m = m_1k_2 - m_2k_1$

En comparant :

$$m_1k_2 - m_2k_1 = k_{12}m_2 - k_{21}m_1$$

Soit puisque l'on a aussi dans ce cas $d = \text{pgcd}(m, m_1) = 1$:

$$\begin{cases} k_1 + k_{12} = \lambda m_1 \\ k_2 + k_{21} = \lambda m_2 \end{cases}$$

Or l'écriture : $M_{X_1} = \begin{bmatrix} m_1 & m_1 - k_{12} \\ k_1 & k_1 - 1_{X_1} \end{bmatrix} = M_{S_1^*}$

suppose que l'on ait : $\begin{cases} 0 < k_1 \leqslant m_1 \\ 0 \leqslant k_{12} < m_1 \end{cases}$

Soit $0 < k_1 + k_{12} < 2m_1$

La seule possibilité est donc d'avoir $\lambda = 1$.

Il en résulte directement :

PROPRIETE XI.1

La Théorie de MARKOFF classique s'identifie à la (2,0,-1) Théorie. Elle contient une infinité de formes F_θ. Pour celles-ci, on a :

(a_{11}) : $\quad k_{12} = m_1 - k_1$

(a_{12}) : $\quad k_{21} = m_2 - k_2$

Les matrices M_{X_1} et M_{X_2} sont égales à leurs transposées.
Les suites X_1 et X_2 sont palindromes et la suite (X_1, b, X_2, a) est semi-palindrome, c'est-à-dire concaténation de deux suites palindromes.
On a :

$$\begin{cases} (r_1') : \quad r(X_1) = r_1 = 2.\dfrac{k_1}{m_1} - 1 \\ (r_2') : \quad r(X_2) = r_2 = 1 - 2\dfrac{k_2}{m_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} (r_1'') : r(\overset{v}{X_1}) = P(X_1) = 0 = r(X) \\ (r_2'') : r(\hat{X_2}) = -P(X_2) = 0 = r(X) \end{cases}$$

$$(\rceil_1) : \quad \rceil_1 = k_1 - \rceil_{X_1} = \frac{L_1}{m}$$

$$(\rceil_2) : \quad \rceil_2 = k_2 - \rceil_{X_2} = \frac{L_2}{m}$$

On peut, à l'aide des expressions de r_1 et r_2 examiner ce que devient la relation (M_2). Avec (a_5), elle s'écrit :

$$m^2 - m_1^2 - m_2^2 = \left(2 \cdot \frac{m}{m_1 m_2} - 3\right) m\, m_1 m_2$$

Soit par simplification :

$$3m m_1 m_2 = m^2 + m_1^2 + m_2^2$$

On retrouve la relation (M_1) qui dans ce cas contient toute l'information (voir Théorème X.3).
La relation (A) s'écrit avec (a_{11}) et (a_{12}) et la relation a = b :

$$A = -\varepsilon_1$$

Compte-tenu qu'ici $\varepsilon_1 = 1$, on retrouve la remarque (U_1) que l'on faisait ci-dessus :

$$F_\theta(k_1, m_1) = A = -1$$

Ceci garantit bien inversement que l'on a :

$$b = a = 2 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$$

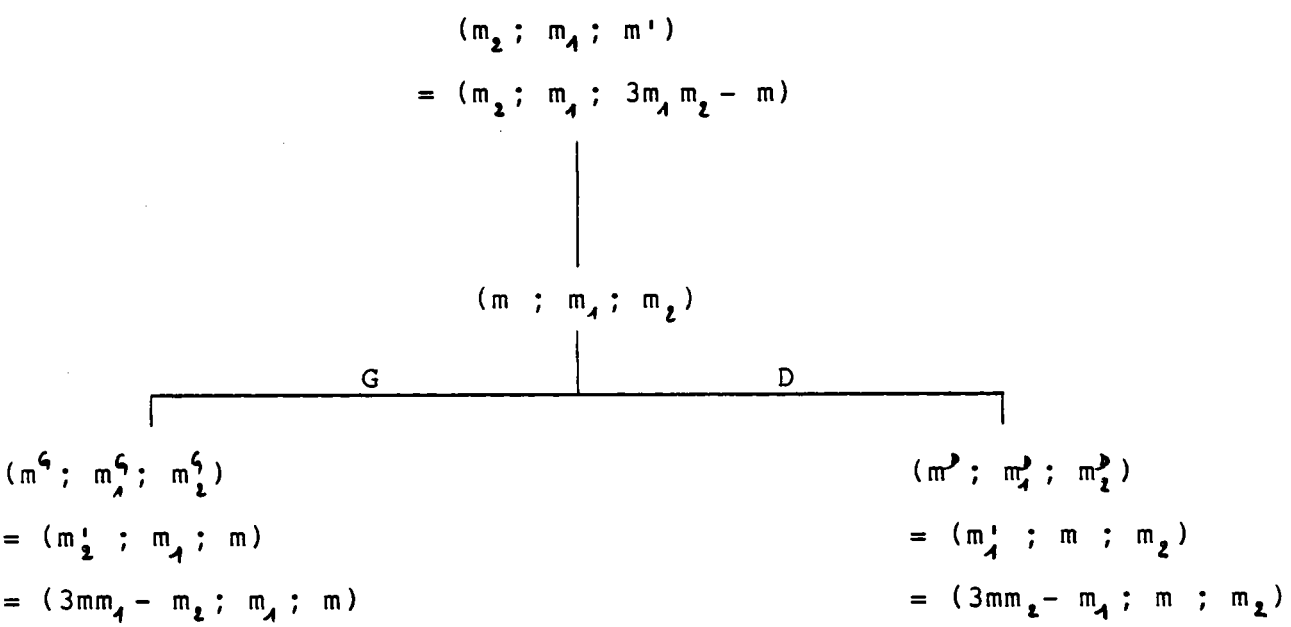
Le fait que l'on a b = 2 résulte aussi directement du Théorème X.8.

C.2 - Autour de l'arbre de MARKOFF

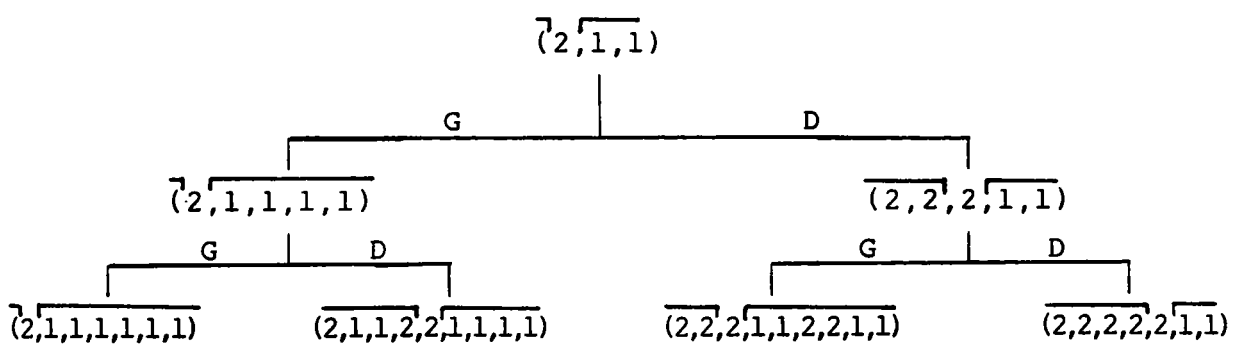
(U_4) : Si l'on considère les lignes de l'annexe 2, on voit apparaître les triplets (m, m_1, m_2) suivants :

(5,1,2)
(13,1,5)
(29,5,2)
etc ...

Ce sont exactement les triplets utilisés par CASSELS dans sa présentation de l'arbre de MARKOFF avec le diagramme suivant :



Avec les suites S*, l'arbre peut être présenté comme suit dans sa partie supérieure :



(U_5) : Il est possible de décrire comment construire cet arbre de façon directe sur les périodes, selon les chemins considérés. Ces derniers sont exprimables par des mots écrits avec les deux opérateurs G et D mentionnés sur l'arbre précédent.

En ce qui concerne l'action de ces deux opérateurs sur les différents paramètres, on peut établir les formules suivantes :

THÉORÈME XI.1

On a pour la Théorie de MARKOFF classique :

(D_1) : $m^D = m'_1 = 3mm_2 - m_1$	(G_1) : $m^G = m'_2 = 3mm_1 - m_2$
(D_2) : $m_1^D = m$	(G_2) : $m_1^G = m_1$
(D_3) : $m_2^D = m_2$	(G_3) : $m_2^G = m$
(D_4) : $k^D = 3km_2 - k_1$	(G_4) : $k^G = 3km_1 - k_2$
(D_5) : $k_1^D = k$	(G_5) : $k_1^G = k_1$
(D_6) : $k_2^D = k_2$	(G_6) : $k_2^G = k$
(D_7) : $l_{X^D} = 2kk_2 + k\, l_{X_2} + k_2 l_X$	(G_7) : $l_{X^G} = 4kk_1 - k_1 l_X - k\, l_{X_1}$
(D_8) : $l_{X_1^D} = k - l_X$	(G_8) : $l_{X_1^G} = l_{X_1}$
(D_9) : $l_{X_2^D} = l_{X_2}$	(G_9) : $l_{X_2^G} = k - l_X$

La vérification de ces expressions s'effectue à droite à partir des relations suivantes :

$$\begin{cases} 3mm_2 - (3mm_2 - m_1) = m_1 k_2^D - m_2 k_1^D & (u_1) \\ m_2 = mk^D - (3mm_2 - m_1)k_1^D & (u_2) \\ m = (3mm_2 - m_1)k_2^D - m_2 k^D & (u_3) \end{cases}$$

Ces dernières ne sont autres que les relations $(a_1)(a_3)$ et (a_5) combinées avec les égalités évidentes $(D_1)(D_2)$ et (D_3).
La comparaison de (a_3) et (u_1) impose, avec $\text{pgcd}(m, m_1) = 1$

$$k_2 = k_2^D + \gamma\, m$$

$$k = k_1^D + \gamma\, m$$

Avec les inégalités $0 < k_2 \leqslant m_2 \leqslant m$ et $0 < k_2^D < m_2^D = m_2 \leqslant m$ il résulte de la première égalité $\gamma = 0$, soit $k_2 = k_2^D$ $k = k_1^D$

En substituant dans (a_1) et en comparant à (u_2), il vient :

$$k_1 = 3m_2 k_1' - k'$$

On établit ainsi les relations $(D_4)(D_5)$ et (D_6), d'où se déduisent facilement les expressions (D_7) à (D_9) :
avec (d_2) et (d_1) :

$$1 = k_1^0 k_{12}' - m_1' \gamma_{X_1^0} = k(m-k) - m\gamma_{X_1'} = -k^2 + m\gamma$$

D'où en simplifiant : $\gamma_{X_1'} = k - \gamma_X$ $\qquad (D_8)$

De même avec (d_3) et (d_1), on déduit (D_9).
Avec (c_4) on déduit alors (D_7).
Les vérifications de (G_1) à (G_9) s'effectuent de même.

Exemple

Avec m = 29 et k = 12, on trouve $k_1 = 2$ $\quad m_1 = 5$ $\quad k_2 = 1$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad m_2 = 2$ $\quad \gamma_X = 5$

On obtient ainsi :

$$\begin{cases} \dfrac{m_1}{k_1} = [2,2] \text{ soit } X_1 = (2,2) & \gamma_{X_1} = 1 \\ \dfrac{m_2}{k_2} = [1,1] \text{ soit } X_2 = (1,1) & \gamma_{X_2} = 0 \end{cases}$$

A partir de là :

(D_1) : $m' = 3mm_2 - m_1 = 169$

(D_2) : $m_1' = m = 29$

(D_3) : $m_2' = m_2 = 2$

(D_4) : $k' = 3km_2 - k_1 = 70$

(D_5) : $k_1' = k = 12$

(D_6) : $k_2' = k_2 = 1$

(D_7) : $\gamma_{X'} = 2kk_2 + k\gamma_{X_2} + k_2\gamma_X = 29$

(D_8) : $\gamma_{X_1'} = k - \gamma_X = 7$

(D_9) : $\gamma_{X_2'} = \gamma_{X_2} = 0$

Ces expressions sont compatibles avec $\dfrac{m'}{k'} = [X']$ où $X' = (2,2,2,2,2,1,1)$

et $$M_{X'} = \begin{bmatrix} 169 & 99 \\ 70 & 41 \end{bmatrix}$$

De même :

(G_1) : $m^G = 3mm_1 - m_2 = 433$

(G_4) : $k^G = 3km_1 - K_2 = 179$

On trouve ainsi : $X^G = (2,2,2,1,1,2,2,1,1)$

Soit $M_{X^G} = \begin{bmatrix} 433 & 254 \\ 179 & 105 \end{bmatrix}$ et $\ell_{X^G} = 74$

Ceci est conforme à ce que donne la relation (G_3).

En ce qui concerne maintenant la décomposition de X^D, on a :

$$M_{X_1^D} = \begin{bmatrix} m_1^D & m_1^D - k_1^D \\ k_1^D & k_1^D - \ell_{X_1^D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & k \\ k & \ell_X \end{bmatrix}$$

Avec $M_X = \begin{bmatrix} m & m-k \\ k & k-\ell_X \end{bmatrix}$

qui donne $M_{X^*} = \begin{bmatrix} m & k \\ m-k & k-\ell_X \end{bmatrix}$

et $M_{\tilde{X}^*} = \begin{bmatrix} m & k \\ k & \ell_X \end{bmatrix}$

On obtient : $X_1^D = (X^*) = X$

En d'autres termes, X_1^D est l'un des deux développements de $\frac{k}{m}$, et X est l'autre.

Les conditions $\begin{cases} \det M_{X_1^D} = 1 \\ \det M_X = -1 \end{cases}$

permettent de préciser. Et l'on généralise aisément comme suit :

THEOREME XI.2 (Construction des périodes de la Théorie de MARKOFF)
A partir de l'expression $X = (X_1, 2, X_2)$, on peut écrire
$X^D = (X_1^D ; 2 ; X_2^D)$ et $X^G = (X_1^G ; 2 ; X_2^G)$ où :
(1) X_1^D est la suite de longueur paire, palindrome, apparaissant dans l'un des développements en fraction continue de $\frac{k}{m}$. Elle se déduit de X qui correspond au développement de longueur impaire de $\frac{k}{m}$:

$$X_1^D = \overset{v}{X} = (X_1, 2, \overset{v}{X_2})$$

(2) $X_2^D = X_2$

(3) $X_1^G = X_1$

(4) X_2^G est la suite de longueur paire, palindrome apparaissant dans l'un des développements en fraction continue de $\frac{m}{m-k}$. Elle se déduit de X par le fait que X* et X_2^{G*} sont les deux développements d'un même nombre rationnel : $X_2^G = \hat{X} = (\hat{X_1}, 2, X_2)$

(5) $\tilde{X}$ et $(\tilde{X})^*$ sont des suites palindromes.

Ce résultat permet de construire algorithmiquement les suites S = X* de façon directe.

Exemple

A partir de $X = (\overline{2,2}, 2, \overline{1,1})$ où $X_1 = (2,2)$ et $X_2 = (1,1)$

On trouve $X_2^D = (1,1)$ et $X_1^D = (2,2,2,2) = \overset{v}{X}$

Soit $X^D = (\overline{2,2,2,2}, 2, \overline{1,1}) = (\overline{X_1^D}, 2, \overline{X_2^D}) = (\overline{X_1, 2, \overset{v}{X_2}, 2, X_2})$

et aussi $X_1^G = (2,2)$ et $X_2^G = (1,1,2,2,1,1) = \hat{X}$

Soit $X^G = (\overline{2,2}, 2, \overline{1,1,2,2,1,1}) = (\overline{X_1^G}, 2, \overline{X_2^G}) = \overline{(X_1, 2, \overline{\hat{X_1}, 2, X_2})}$

Dans le tableau donné en annexe 2, les Théorèmes XI.2 et XI.1 donnent la distribution suivante :

m	$k = K_1 = K_2$	...	k_1	m_1	k_2	m_2
m	k		k_1	m_1	k_2	m_2
m^G	k^G		k_1	m_1	k	m
m^D	k^D		k	m	k_2	m_2

On constate que dans ce tableau succint, on a :

$$k > \mathrm{Sup}(k_1, k_2)$$

Un couple (m^G, k^G) se caractérise par le fait que l'on a $k_2 > k_1$: le terme apparaissant dans la colonne k_2 est plus grand que celui apparaissant dans la colonne k_1. Les colonnes m_2 et k_2 donnent le couple (m,k) dont le couple (m^G, k^G) est le successeur à gauche.

De même, un couple ($m^{\flat}$, $k^{\flat}$) est caractérisé par le fait que le terme apparaissant dans la colonne k_1 est plus grand que celui apparaissant dans la colonne k_2. Les colonnes m_1 et k_1 donnent le couple (m,k) dont le couple ($m^{\flat}$, $k^{\flat}$) est successeur à droite.

Par ce procédé, le tableau de l'annexe 2 permet la reconstruction complète de l'arbre de MARKOFF.

D / EXEMPLE DE LA (2,0,1) THEORIE DE MARKOFF

On utilise maintenant le programme "GENTRI" avec les valeurs :

$$R_1 = 0 \qquad R_2 = 1 \qquad (-1)^n = -1 \qquad a = 2$$

On obtient ainsi des cas frontières correspondant à a = t(S) = 2. Le seul cas éventuellement échappant par rapport à la condition (S_1) : $a \geqslant t(S)$ est celui du nombre d'or. Il est aisé de s'assurer qu'il n'entre pas dans la (2,0,1) Théorie.

Du tableau donné en annexe 3, on extrait les lignes correspondant à la (2,0,1) Théorie grâce à la condition (S_2) : $m_2(S) = m$. Les valeurs N_θ, k_1, m_1, k_2, m_2, $m_2(S)$ sont calculées grâce au programme "EXTREMUM".

D.1 - Quelques suites apparaissant dans la (2,0,1) Théorie:

(V_1) : De même que dans la Théorie de MARKOFF classique, on voyait apparaître les suites :

$$S^* = (2,(1)_{2t})$$

on voit ici apparaître les suites :

$$S^* = (2,(1)_{2t+1})$$

La vérification se fait en introduisant les nombres de FIBONACCI, définis par :

$$\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \end{cases} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

On a pour $S^* = (2,(1)_n)$ $\quad M_{S^*} = \begin{bmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & m - K_2 \\ K_1 & K_1 - 1 \end{bmatrix}$

On trouve ainsi : $m = F_{n+2}$ $\quad K_1 = K_2 = F_n$ $\quad 1 = F_{n-2}$

Soit : $F_\theta(x,y) = F_{n+2}\,x^2 + (F_{n+3} + F_{n+1})xy - F_{n+2}\,y^2$

Et puisque $K_1 = K_2$, on trouve toujours $r = 0$
Aussi : $\det M_S = F_{n+1}\,F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^{n+1}$
On obtient :

THEOREME XI.3
De même que la Théorie de MARKOFF classique contient l'infinité des nombres $\theta_2(S)$ où l'on a :

$$S^* = (2,(1)_{2t})$$

De même, la (2,0,1) Théorie de MARKOFF contient l'infinité des nombres $\theta_2(S)$ où l'on a :

$$S^* = (2,(1)_{2t+1})$$

La vérification que l'on a $m_2(S) = m(S)$ se fait grâce au lemme de DICKSON. On trouve les valeurs $(k_1, m_1) = (0,1)$ ou $(k_1, m_1) = (K_1, m)$ les deux convenant.

En effet :

$$\begin{cases} F_\theta(K_1, m) = -\varepsilon = -1 \\ F_\theta(0,1) = \dfrac{1 - 3K_1}{m} = \dfrac{F_{n-2} - 3F_n}{F_{n+2}} = -\dfrac{F_{n+2}}{F_{n+2}} = -1 \end{cases}$$

Ceci donne : $M(F_\theta) = 1$, soit $m_2(S) = m(S)$

Les constantes de MARKOFF correspondantes s'évrivent :

$$C(F_\theta) = \frac{F_{2t+3}}{\sqrt{9F_{2t+3}^2 + 4}} < \frac{1}{3}$$

Soit la suite croissante de constantes :

$$\frac{3}{\sqrt{85}}, \frac{8}{\sqrt{584}} = \frac{4}{\sqrt{146}} ; \frac{21}{\sqrt{3\,973}} ; \cdots \frac{F_{2t+3}}{\sqrt{9F_{2t+3}^2 + 4}} ; \cdots$$

Et la forme limite $F(x,y) = x^2 + \sqrt{5}xy - y^2$ déjà donnée par la Théorie de MARKOFF classique.

(V_2) : De même, dans la Théorie de MARKOFF classique, on voyait apparaître les suites :

$$S^* = ((2)_{2t+1}, 1, 1)$$

Dans la (2,0,1) Théorie, on voit cette fois apparaître les suites :

$$S^* = ((2)_{2t}, 1, 1)$$

Pour le vérifier, il suffit de constater que l'on a :

$$\begin{cases} \det M_S = 1 \\ t(S) = 2 \end{cases}$$

Et en notant $S^* = \tilde{T}$ où $T = (2)_{2t+1}$, on peut écrire :

$$M_T = \begin{bmatrix} F_{2t+1}(2) & F_{2t}(2) \\ F_{2t}(2) & F_{2t-1}(2) \end{bmatrix}$$

Or la suite $F_n(2)$ vérifie : $\begin{cases} F_0(2) = 1 \\ F_1(2) = 2 \\ F_{n+1}(2) = 2F_n(2) + F_{n-1}(2) \end{cases}$

On obtient pour la matrice M_T et pour M_S^* les valeurs :

$$\begin{cases} m(T) = F_{2t+1}(2) \\ K_1(T) = F_{2t}(2) \\ K_2(T) = F_{2t}(2) + F_{2t-1}(2) \\ \gamma(T) = F_{2t-1}(2) + F_{2t-2}(2) \end{cases} \qquad \begin{cases} m(S^*) = F_{2t+1}(2) \\ K_1(S^*) = F_{2t}(2) + F_{2t-1}(2) \\ K_2(S^*) = F_{2t}(2) + F_{2t-1}(2) \\ \gamma(S^*) = F_{2t}(2) - F_{2t-2}(2) \end{cases}$$

Soit pour la matrice M_S les valeurs :

$$\begin{cases} m = F_{2t+1}(2) \\ K_1 = F_{2t}(2) + F_{2t-1}(2) = K_2 \\ \gamma = F_{2t+1}(2) \end{cases}$$

On trouve donc bien $r = 0$.

La vérification que l'on a $m_2(S) = m(S)$ se fait grâce à la méthode utilisée pour établir le Théorème I.13 .

On trouve la seule possibilité $(k_1, m_1) = (K_1, m)$ avec :

$$f_0(x,y) = F_{2t+1}(2)x^2 + [2F_{2t+1}(2) + F_{2t-1}(2)]xy - [3F_{2t}(2) - F_{2t-1}(2)]y^2$$

Ainsi, on peut énoncer :

THEOREME XI.4

De même que la Théorie de MARKOFF classique contient l'infinité des nombres $\theta_2(S)$ où l'on a :

$$S^* = ((2)_{2t+1}\ ,1,1)$$

De même, la (2,0,1) Théorie de MARKOFF contient l'infinité des nombres $\theta_2(S)$ où l'on a :

$$S^* = ((2)_{2t}\ ,1,1)$$

Les constantes de MARKOFF correspondantes s'écrivent :

$$C(F_\theta) = \frac{F_{2t+1}(2)}{\sqrt{9F_{2t+1}(2)^2 + 4}}$$

Soit la suite croissante des constantes :

$$\frac{2}{\sqrt{40}} = \frac{1}{\sqrt{10}} ; \frac{12}{\sqrt{1300}} = \frac{6}{\sqrt{325}} ; \frac{70}{\sqrt{44104}} = \frac{35}{\sqrt{11026}} ; \ldots ; \frac{F_{2t+1}(2)}{\sqrt{9F_{2t+1}(2) + 4}}$$

Et la forme limite $F(x,y) = x^2 + (2\sqrt{2} - 1)xy - \sqrt{2}\ y^2$

déjà rencontrée dans la Théorie de MARKOFF classique.

Elle montre que $\frac{1}{3}$ est point d'accumulation à droite et à gauche des spectres de PERRON et de MARKOFF.

(V_3) : A partir des constructions faites dans le chapître X, et en considérant le Théorème XI.3, une suite $S = (2,(1)_t)$ détermine $\hat{S} = (1)_{t+2}$ d'où :

$$\begin{cases} S_0^1 = (2, (1)_{t-1}\ , 2\ , (1)_{t+1}) \\ S_1^1 = (2, (1)_{2t+3}) \\ S_2^1 = (2, (1)_t\ , 2\ , (1)_{t+2}) \end{cases}$$

Par le lemme de DICKSON, il est facile de s'assurer que les nombres de MARKOFF $\theta_2(S_0^1)$ et $\theta_2(S_2^1)$ ne sont pas super réduits.
On ne se situe pas dans les conditions des Théorèmes X.9 et X.11.

Pour le nombre $\theta_2(S_1^1)$, ces conditions ne sont pas non plus assurées, mais le lemme de DICKSON montre que ce nombre est super réduit et se situe dans la (2,0,1) Théorie. On retrouve ainsi les nombres donnés par le Théorème XI.3.

(V_4) : De même, avec les suites $S = ((2)_t, 1,1)$, on détermine

$$\hat{S} = (1,1,(2)_{t-1},1,1)$$

d'où :
$$\begin{cases} S_0^1 = ((2)_t, 1,2,1,(2)_{t-1},1,1) \\ S_1^1 = ((2)_t, 1,1,1,1,1,(2)_{t-1},1,1) \\ S_2^1 = ((2)_t, 1,1,2,1,1,(2)_{t-1},1,1) \end{cases}$$

Comme précédemment, il est possible de vérifier que les nombres $\theta_2(S_0^1)$ et $\theta_2(S_2^1)$ ne sont pas super réduits.
Pour le nombre $\theta_2(S_1^1)$ il en est de même.
Ceci est vérifiable au moyen du lemme de DICKSON

D.2 - L'équation diophantienne correspondante

(V_5) : On a établi antérieurement la relation de MARKOFF :

$$(-\varepsilon_1 A_\theta)m^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 = (a+r+1)mm_1m_2 \qquad (M_1)$$

Dans le cas qui nous concerne, on a $A_\theta = -1$, $r = 0$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$.
On obtient donc seulement l'équation diophantienne (M_1) :

$$m^2 - m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2$$

L'autre relation de MARKOFF s'écrit :

(M_2) : $$m^2 + m_1^2 - m_2^2 = (b + 1 + r_1 + r_2)mm_1m_2$$

Avec aussi :

(c_1) : $$m = (b+1)m_1m_2 + k_{21}m_1 - k_{11}m_2$$

(a_5) : $$3m_1m_2 - m = m_1k_2 - m_2k_1$$

Avec le Théorème X.2, pour que la valeur - A_θ soit égale à 1, on observe qu'il est nécessaire que l'on ait b = 2.
Ceci est conforme aux observations faisables sur l'annexe 3.
En comparant les deux dernières relations :

$$m_1 k_2 - m_2 k_1 = k_{12} m_2 - k_{21} m_1$$

Au moyen du nombre $d = \text{pgcd}(m, m_1)$

il reste :

$$\begin{cases} k_1 + k_{12} = \lambda \dfrac{m_1}{d} \\ k_2 + k_{21} = \lambda \dfrac{m_2}{d} \end{cases}$$

On trouve aussi :

$$\begin{cases} r_1 = 2\dfrac{k_1}{m_1} - \dfrac{\lambda}{d} \\ r_2 = \dfrac{\lambda}{d} - 2\dfrac{k_2}{m_2} \end{cases}$$

Ces expressions simplifient la relation (M_2) sous la forme :

$$(M_2) : \quad m^2 + m_1^2 - m_2^2 = \left(3 + 2\cdot\frac{k_1}{m_1} - 2\cdot\frac{k_2}{m_2}\right) m m_1 m_2$$

Et avec l'égalité (a_5), cette expression est équivalente à :

$$(M_1) : \quad m^2 - m_1^2 + m_2^2 = 3 m m_1 m_2$$

De sorte que, comme dans la Théorie de MARKOFF classique, il suffit de concentrer l'attention sur cette seule équation diophantienne.

Cependant, si l'on observe dans ce cas les valeurs $(k_1, m_1) = (K_1, m)$ qui ont été calculées pour établir le Théorème XI.4, on voit que dans ce cas, on a : $m = d = \text{pgcd}(m, m_1) \neq 1$ et $m_2 = 0$.
Il se présente donc une situation très différente de celle qui apparaissait dans la théorie de MARKOFF classique : les développements du chapitre X ne sont pas directement applicables.
On va prolonger cette remarque par une étude directe de l'équation (M_1) dans le cas particulier où d = 1.

(V_4) : Considérons l'équation :

$$m^2 - m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2$$

avec les contraintes données par la propriété X.5 :

(a) : $m > 0 \qquad m_1 > 0 \qquad m_2 > 0$

(b) : $m = \text{Max}(m, m_1, m_2) > \text{Max}(m_1, m_2)$

(c) : $d = \text{pgcd}(m, m_1) = \text{pgcd}(m_1, m_2) = \text{pgcd}(m_2, m)$

Si l'on se limite au cas d = 1, on trouve des solutions qui n'apparaissent pas dans le tableau annexe fourni par "GENTRI" pour la (2,0,1) Théorie.

Exemples :

$m = 33$	$m_1 = 10$	$m_2 = 1$
$m = 91$	$m_1 = 10$	$m_2 = 3$
$m = 360$	$m_1 = 109$	$m_2 = 1$

Le phénomène est explicable sur un exemple.

Avec $(m, m_1, m_2) = (33, 10, 1)$, on trouve :

. par (a_1) : $m_2 = m_1K_1 - mk_1 \qquad K_1 = 10 \qquad k_1 = 3$

. par (a_3) : $-m_1 = mk_2 - m_2K_2 \qquad K_2 = 10 \qquad k_2 = 0$

soit $\rceil = 3$ et $\varepsilon = 1 = K_1K_2 - m\rceil$

Avec $K_1 = K_2 = 10$, on a aussi : r = 0

La détermination de la suite S s'effectue de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{m}{K_1} = \dfrac{33}{10} = [3,3,3] = [3,3,2,1] = [S^*] \\ \dfrac{m}{m-K_2} = \dfrac{33}{23} = [1,2,3,3] = [1,2,3,2,1] = [S] \end{cases}$$

On obtient : S = (1,2,3,3)

Soit X = $(\overline{3,3},2,\overline{1})$

Avec a = 2, on considère la forme de MARKOFF

$$F_\theta(X,Y) = X^2 + \frac{79}{33}XY - \frac{27}{33}Y^2$$

Elle vérifie : $F_\theta(k_1, m_1) = F_\theta(3,10) = -1$

On trouve bien, associée à F_θ une relation de MARKOFF s'écrivant :

$$m^2 - m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2$$

Cependant, dans ce cas, on obtient : $\begin{cases} A_\theta = -\dfrac{27}{33} = F_\theta(0,1) \\ M(F_\theta) = \dfrac{27}{33} = F_\theta(1,3) \end{cases}$

On a donc : $S \notin L_2$

Si l'on avait voulu utiliser la relation de MARKOFF donnée par le Théorème III.10, on aurait donc plutôt dû utiliser :

(M_1) : $\dfrac{27}{33} m^2 - m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2$

Cette remarque montre qu'au contraire de ce qui se passe pour la Théorie de MARKOFF classique, il n'y a pas équivalence entre l'étude de la (2,0,1) Théorie de MARKOFF et l'étude des solutions de l'équation diophantienne :

$$m^2 - m_1^2 + m_2^2 = 3mm_1m_2$$

Ceci confirme l'ultime remarque que l'on faisait à la fin du chapître III.

D.3 - Remarques complémentaires

(V_7) : Si l'on considère les suites $S^* = ((2)_n, 1, 1)$ qui ont été prises en compte dans le Théorème XI.4, on note dans l'annexe que l'on trouve :

- pour la Théorie de MARKOFF classique :

$$\overline{((2)_{2t}, 2, \overline{1,1})}$$

soit $(k_1, m_1) = (F_{2t-1}(2) ; F_{2t}(2))$

- pour la (2,0,1) Théorie de MARKOFF :

$$\overline{((2)_{2t}, 1, 1)}$$

soit $(k_1, m_1) = (F_{2t}(2) ; F_{2t+1}(2)) = (K_1, m)$

La différence est explicable, d'après la définition des symboles $\neg$ et $\vdash$ avec A_θ, à cause du changement de signe distinguant les deux théories.

De façon plus globale, la suite $((2)_n, 1, 1)$ correspond à :

$$f_\theta(x,y) = F_{n+1}(2)x^2 + [2F_{n+1}(2) + F_{n-1}(2)]xy - [3F_n(2) - F_{n-1}(2)]y^2$$

Et l'on a par un calcul simple les identités :

$$\begin{cases} f_\theta(F_{n-2}(2), F_{n-1}(2)) = (-1)^n F_{n+1}(2) \\ f_\theta(F_n(2), F_{n+1}(2)) = (-1)^{n+1} F_{n+1}(2) \end{cases}$$

(V_θ) : Les expressions utilisées par exemple dans le cas de la Théorie de MARKOFF avec $S = (\overline{(2)_{2t}}, 2, \overline{1,1})$ donnent :

$$M_{\chi_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{2t} = \begin{bmatrix} F_{2t}(2) & ; & F_{2t-1}(2) \\ F_{2t-1}(2) & ; & F_{2t-2}(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & ; & m_1 - k_{12} \\ k_1 & ; & k_1 - 1_{\chi_1} \end{bmatrix}$$

$$\text{soit } r_1 = \frac{k_1 - k_{12}}{m_1} = -\frac{F_{2t-2}(2)}{F_{2t}(2)}$$

$$M_{\chi_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 & m_2 - k_2 \\ k_{21} & k_{21} - 1_{\chi_2} \end{bmatrix}$$

$$\text{soit } r_2 = \frac{k_{21} - k_2}{m_2} = 0$$

Dans ce cas, l'équation (M_2) prend la forme :

$$m^2 - m_1^2 - m_2^2 = \left(\frac{2F_{2t}(2) + 2F_{2t-1}(2)}{F_{2t}(2)} \right) mm_1m_2$$

Elle dépend de la suite S choisie.
Ceci confirme qu'il y a intérêt pour l'étude des (a, r, ε) Théories à concentrer l'attention sur l'équation (M_1), au demeurant équivalente à (M_2) comme on l'a vu avant. En effet, (M_2) varie en fonction de S.

E / UN EXEMPLE DE (a,r, ε) THEORIE NE CONTENANT QU'UN NOMBRE FINI DE SUITES

On part de la (2,0,-1) Théorie et d'une suite qu'elle définit, par exemple :

$$S^* = X = (\overline{2,2,2},\overline{1,1,2,2,1,1})$$

Dans ce cas : $\begin{cases} m = 433 & K_1 = K_2 = 179 \\ m_1 = 5 & k_1 = 2 \\ m_2 = 29 & k_2 = 12 \end{cases}$ $\quad \ell = 74 \quad a = 2 \quad r = 0$

On considère la suite (S,a,S).
Elle fait partie d'après le Théorème X.6 d'une $\left(2, -\frac{2}{3.433^2} ; -1\right)$ Théorie.
Or, avec le théorème VIII.2, dans cette théorie, on a pour toute suite S' :

$$C(\theta_2(S')) > \frac{1}{2 - \frac{2}{3.433^2} + 1} > \frac{1}{3}$$

Par les résultats connus sur la Théorie de MARKOFF classique, on ne trouve ainsi qu'un nombre fini de possibilités pour $\theta_2(S')$.
Ceci permet d'énoncer, l'exemple précédent étant généralisable à toute autre suite de la Théorie de MARKOFF classique :

THEOREME XI.5
Il existe une infinité de (a,r, ε) Théories ne contenant qu'un nombre fini de formes F_θ .

XII. DES RESULTATS GENERAUX POUR L'ECART D'ANTIDROMIE

APPLICATION A UNE GENERALISATION DE L'ARBRE DE MARKOFF

A / LES RESULTATS

Soient S et T deux suites de nombres de $\mathbb{N}^*$ et b un nombre de $\mathbb{N}^*$.
On cherche à comparer les nombres :

$$r(Sb\hat{S}bT)$$

$$r(SbT)$$

En posant :

$$M_S = \begin{bmatrix} m(S) & K_1(S) \\ m(S) - K_2(S) & K_1(S) - \rceil(S) \end{bmatrix}$$

$$M_T = \begin{bmatrix} m(T) & K_1(T) \\ m(T) - K_2(T) & K_1(T) - \rceil(T) \end{bmatrix}$$

on trouve l'équivalent des formules (C_1) à (C_4) :

(Γ_1) : $m(SbT) = (b+1)m(S)m(T) + K_1(S)m(T) - m(S)K_2(T)$

(Γ_2) : $K_1(SbT) = (b+1)m(S)K_1(T) + K_1(S)K_1(T) - m(S)\rceil(T)$

(Γ_3) : $K_2(SbT) = (b+1)K_2(S)m(T) - K_2(S)K_2(T) + \rceil(S)m(T)$

(Γ_4) : $\rceil(SbT) = (b+1)K_2(S)K_1(T) + \rceil(S)K_1(T) - K_2(S)\rceil(T)$

En utilisant alors les expressions :

$$\begin{cases} m(\hat{S}) = m(S) \\ K_1(\hat{S}) = K_1(S) \\ K_2(\hat{S}) = m(S) - K_2(S) \\ \rceil(\hat{S}) = K_1(S) - \rceil(S) \end{cases}$$

On trouve avec les formules précédentes les expressions données antérieurement (propriété X.13) :

$$\begin{cases} m(Sb\hat{S}) = m(S)F \\ K_1(Sb\hat{S}) = K_1(S)F + (-1)^n \\ K_2(Sb\hat{S}) = K_2(S)F + (-1)^n \\ \rceil(Sb\hat{S}) = \rceil(S)F - (-1)^n b \end{cases}$$

où $\begin{cases} F = bm(S) + K_1(S) + K_2(S) \\ \varepsilon(S) = (-1)^{n+1} = \varepsilon \end{cases}$

D'où les expressions suivantes :

(Γ_1') : $m(Sb\hat{S}bT) = [(b+1)m(S)m(T) + K_1(S)m(T) - m(S)K_2(T)]F - \varepsilon\, m(T)$

(Γ_2') : $K_1(Sb\hat{S}bT) = [(b+1)m(S)K_1(T) + K_1(S)K_1(T) - m(S)\,1(T)]F - \varepsilon\, K_1(T)$

(Γ_3') : $K_2(Sb\hat{S}bT) = [(b+1)K_2(S)m(T) - K_2(S)K_2(T) + 1(S)m(T)]F - \varepsilon\,(m(T) - K_2(T))$

$$r(Sb\hat{S}bT) = \frac{F[K_1(SbT) - K_2(SbT) + \varepsilon\,[m(T) - K_1(T) - K_2(T)]}{Fm(SbT) - \varepsilon\, m(T)}$$

L'égalité $r(SbT) = r(Sb\hat{S}bT)$ s'écrit :

$$\frac{K_1(SbT) - K_2(SbT)}{m(SbT)} = \frac{F[K_1(SbT) - K_2(SbT)] + \varepsilon\,\lambda(T)}{Fm(SbT) - \varepsilon\, m(T)}$$

Soit de façon équivalente :

$$r(SbT) = -P(T)$$

En remplaçant T par $\hat{T}$, et en utilisant la propriété IV .5, on en déduit la première partie du résultat suivant :

THEOREME XII.1

(1) Soient $b \in \mathbb{N}^*$ et S,T deux suites de nombres de $\mathbb{N}^*$, on a équivalence des propriétés suivantes :

(a) $r(T) = r(Sb\hat{T})$

(b) $r(SbT) = r(Sb\hat{S}b\hat{T})$

(2) Plus généralement, dans les conditions précédentes, on a aussi :

$\forall\, t \in \mathbb{N}$ $\qquad r(T) = r(Sb(\hat{S}b)_t\, \hat{T})$

La démonstration de l'égalité pour tout $t \in \mathbb{N}^*$ se fait par récurrence.

On suppose que l'on a pour $t \in \mathbb{N}^*$ la propriété suivante :

(P_t) : $\forall S,T,b \quad (r(T) = r(Sb\hat{T}))$

$\Longrightarrow (\forall u \in \mathbb{N}^* \quad u \leqslant t \Longrightarrow r(T) = r(Sb(\hat{S}b)_u\, \hat{T}))$

On a aussi pour u = t et u = t-1 :

$$r(Sb(\hat{S}b)_{t-1}\, \hat{T}) = r(Sb\overbrace{Sb(\hat{S}b)_{t-1}\, \hat{T}})$$

En remplaçant alors dans la première partie déjà démontrée du Théorème XII.1 la suite T par $Sb(\hat{S}b)_{t-1}\ \hat{T}$, on obtient :

$$r(Sb(\hat{S}b)_{t-1}\ \hat{T}) = r(Sb(\hat{S}b)_t\ \hat{T})$$
$$= r(Sb(\hat{S}b)_{t+1}\ \hat{T})$$

On en déduit la propriété (P_{t+1}).
Comme la propriété (P_1) n'est autre que la première partie du Théorème XII.1 déjà établie, ce résultat est complètement démontré.

Exemple d'application

Avec la propriété X.12, pour T = S, on a :

$$r(S) = r(Sb\hat{S})$$

Il en résulte par le Théorème XII.1 l'égalité :

$$\forall\ t \in \mathbb{N} \qquad r(S(b\hat{S})_t) = r(S)$$

On retrouve l'égalité de la propriété X.13.

On a aussi :

THEOREME XII.2

Soient $b \in \mathbb{N}^*$ et S et T deux suites de nombres de $\mathbb{N}^*$ telles que l'on ait :

$$r(\hat{T}) = r(SbT)$$

Alors, on a aussi :

$$\forall\ t \in \mathbb{N} \qquad r(\hat{T}) = r(Sb(\hat{S}b)_t\ T)$$

Il suffit en effet de remplacer T par $\hat{T}$ dans le Théorème XII.1.

THEOREME XII.3

Soient $b \in \mathbb{N}^*$ et S,T deux suites de nombres de $\mathbb{N}^*$ telles que l'on ait :

$$r(\overset{\vee}{S}) = r(SbT)$$

Alors, on a aussi :

$$\forall\ t \in \mathbb{N} \qquad r(\overset{\vee}{S}) = r(Sb(\overset{\vee}{T}b)_t\ T)$$

Il suffit dans le Théorème XII.2 d'appliquer la transformation miroir.

L'égalité $r(\hat{T}) = r(SbT)$

donne $r(T^*bS^*) = r((\hat{T})) = r((\check{T}^*))$

Et en substituant S à T* et T à S*, on trouve la condition de départ : $r(\check{S}) = r(SbT)$

L'égalité $r(\hat{T}) = r(Sb(\hat{S}b)_t\, T)$

donne $r(\hat{T}) = r((\check{T}^*)) = r(T^*b((\hat{S})^*b)_t\, S^*)$

$= r(T^*b((\check{S}^*)b)\, S^*)$

En substituant encore S à T* et T à S*, on trouve la conclusion :

$r(\check{S}) = r(Sb(\check{T}b)_t\, T)$

B / UNE APPLICATION POUR LA CONSTRUCTION D'ARBRES

Comme dans la Théorie de MARKOFF classique, on considère le diagramme permettant de construire deux suites X^G et X^D à partir d'une suite X :

$$X = (X_1, b, X_2)$$

$$X^G = (X_1, b, \hat{X}) = (X_1, b, (\hat{X}_1, b, X_2)) \qquad X^D = (\check{X}, b, X_2) = ((X_1, b, \check{X}_2)b, X_2)$$

Il donne les expressions suivantes :

(G_0) : $\varepsilon_1^G = \varepsilon_1$ et $\varepsilon_2^G = \varepsilon_1\varepsilon_2$

(G_1) : $m^G = (b+1)mm_1 - \varepsilon_1 m_2 + m(m_1 - k_1 - k_{12})$

(G_2) : $m_1^G = m_1$

(G_3) : $m_2^G = m$

(G_{41}) : $K_1^G = (b+2)mk_1 - K_1 k_1 - m\,\rceil_{X_1}$

(G_{42}) : $K_2^G = (b+2)K_2 m_1 - m_1\,\rceil_X - K_2 k_{12}$

(G_{51}) : $k_1^G = k_1$

(G_{52}) : $k_{12}^G = k_{12}$

(G_{61}) : $k_{21}^G = m - K_1$

(D_0) : $\varepsilon^D = \varepsilon_1\varepsilon_2$ et $\varepsilon_2^D = \varepsilon_2$

(D_1) : $m^D = (b+1)mm_2 - \varepsilon_2 m_1 - m(m_2 - k_2 - k_{21})$

(D_2) : $m_1^D = m$

(D_3) : $m_2^D = m_2$

(D_{41}) : $K_1^D = bK_1 m_2 + \rceil_X m_2 + K_1 k_{21}$

(D_{42}) : $K_2^D = bmk_2 + K_2 k_2 + m\,\rceil_{X_2}$

(D_{51}) : $k_1^D = K_1$

(D_{52}) : $k_{12}^D = m - K_2$

(D_{61}) : $k_{21}^D = k_{21}$

(G_{62}) : $k_2^G = K_2$ $\qquad$ (D_{62}) : $k_2^D = k_2$

(G_7) : $\rfloor_{X^G} = (b+2)K_2 k_1 - k_1 \rfloor_X - K_2 \rfloor_{X_1}$ $\qquad$ (D_7) : $\rfloor_{X^D} = bK_1 k_2 + K_1 \rfloor_{X_2} + k_2 \rfloor_X$

(G_8) : $\rfloor_{X_1^G} = \rfloor_{X_1}$ $\qquad$ (D_8) : $\rfloor_{X_1^D} = K_1 - \rfloor_X$

(G_9) : $\rfloor_{X_2^G} = K_2 - \rfloor_X$ $\qquad$ (D_9) : $\rfloor_{X_2^D} = \rfloor_{X_2}$

On suppose que l'on a :

(r^I) : $r(X) = r(\overset{\vee}{X}_1) = r(\hat{X}_2) = r$

Avec le Théorème XII.2, on a :

$$r(\hat{X}_2) = r(X_1 b X_2)$$

$$\Longrightarrow \qquad r(\hat{X}_2) = r(X_1 b \hat{X}_1 b X_2) = r(X^G)$$

$$\Longrightarrow \qquad r(X^G) = r(X)$$

avec, par les conditions $X_1^G = X_1$ et $X_2^G = \hat{X}_1 b\, X_2$

les expressions : $\begin{cases} r(X^G) = r(X) = r(\overset{\vee}{X}_1) = r(\overset{\vee}{X}_1^G) \\ r(\hat{X}_2^G) = r(X_1 b X_2) = r(X) = r(X^G) \end{cases}$

C'est-à-dire encore :

(r^G) : $\qquad r(X^G) = r(\overset{\vee}{X}_1^G) = r(\hat{X}_2^G) = r$

Avec le Théorème XII.3, on a :

$$r(\overset{\vee}{X}_1) = r(X_1 b X_2)$$

$$\Longrightarrow \qquad r(\overset{\vee}{X}_1) = r(X_1 b \overset{\vee}{X}_2 b\, X_2) = r(X^D)$$

$$\Longrightarrow \qquad r(X^D) = r(X)$$

avec, par les conditions $X_1^D = X_1 b \overset{\vee}{X}_2$ et $X_2^D = X_2$

les expressions : $\begin{cases} r(\overset{\vee}{X}_1^D) = r(X_1 b X_2) = r(X) = r(X^D) \\ r(X^D) = r(X) = r(\hat{X}_2) = r(X_2^D) \end{cases}$

C'est-à-dire aussi :

(r^D) : $\qquad r(X^D) = r(\overset{\vee}{X}_1^D) = r(\hat{X}_2^D) = r$

Les conditions (r^G) et (r^D) garantissent à leur tour la possibilité de renouveler le procédé à partir des suites X^D et X^G .
Ceci permet d'énoncer :

THEOREME XII.4 (Construction d'un arbre)

Soient X_1 et X_2 deux suites de nombres de $\mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que :

(r^I) : $\quad r(X_1 b X_2) = r(\overset{\vee}{X_1}) = r(\overset{\wedge}{X_2}) = r$

Alors il est possible de construire un arbre de MARKOFF de suites ayant toutes r pour écart d'antidromie, de sommet $X = (X_1, b, X_2)$ avec à chaque niveau du diagramme la figure :

(x_1, b, x_2)

$(x_1 b(\overset{\wedge}{x_1} b x_2)) = (x_1^G b x_2^G)$ où $x_1^G = x_1$ et $x_2^G = \overset{\wedge}{x_1} b x_2$

$((x_1 b \overset{\vee}{x_2}) b x_2) = (x_1^D b x_2^D)$ où $x_1^D = x_1 b \overset{\vee}{x_2}$ et $x_2^D = x_2$

DEFINITION

Dans la suite, on dit que l'arbre donné par ce Théorème est obtenu par la construction de MARKOFF à partir de $X = (X_1, b, X_2)$.

Si l'on suppose $\overset{\vee}{X_1} = \overset{\wedge}{X_2} = T$, un calcul facile montre l'impossibilité de trouver $b \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait :

$$r(X_1 b X_2) = r(T)$$

La condition (r^I) est donc assez forte.

On peut l'expliciter. Elle donne :

$$\frac{(b+1)m(X_1)K_1(X_2)+K_1(X_1)K_1(X_2)-m(X_1)\rceil(X_2)-(b+1)K_2(X_1)m(X_2)+K_2(X_1)K_2(X_2)-\rceil(X_1)m(X_2)}{(b+1)m(X_1)\,m(X_2)+K_1(X_1)m(X_2)-m(X_1)K_2(X_2)}$$

$$= \frac{K_1(X_2) - m(X_2) + K_2(X_2)}{m(X_2)} = \frac{m(X_1) - K_1(X_1) - K_2(X_1)}{m(X_1)}$$

$$= \frac{(b+1)m(X_1)K_1(X_2)+m(X_1)[K_2(X_2)-\rceil(X_2)]-(b+1)m(X_2)K_2(X_1)+m(X_2)[K_1(X_1)-\rceil(X_1)]-2K_1(X_1)K_2(X_2)}{(b+1)m(X_1)m(X_2)}$$

Soit :

$$(1) : (b+1) = \frac{m(X_1)[K_2(X_2) - \rceil(X_2)]+m(X_2)[K_1(X_1)-\rceil(X_1)] - 2K_1(X_1)K_2(X_2)}{m(X_2)K_2(X_1) + m(X_1)K_2(X_2) - m(X_1)m(X_2)}$$

Et aussi :

$$(2):\ (b+1) = \frac{m(X_1)[K_2(X_2)-\rceil(X_2)] + m(X_2)[K_1(X_1) - \rceil(X_1)]-2K_1(X_1)K_2(X_2)}{m(X_2)m(X_1) - m(X_2)K_1(X_1) - m(X_1)K_1(X_2)}$$

La comparaison des deux relations (1) et (2) donne, compte tenu que le numérateur du second membre est le même :

$$m(X_1)[K_1(X_2) + K_2(X_2)] + m(X_2)[K_1(X_1) + K_2(X_1)]$$
$$= 2m(X_1)m(X_2)$$

C'est-à-dire encore :

$$2 = \frac{K_1(X_2) + K_2(X_2)}{m(X_2)} + \frac{K_1(X_1) + K_2(X_1)}{m(X_1)}$$

ou $\quad P(X_2) + P(X_1) = 0$

En fait, cette dernière expression n'est autre que la condition :

$$r(\overset{v}{X_1}) = r(\overset{\wedge}{X_2})$$

Les conditions (1) et (2) se réduisent donc à une seule que l'on peut écrire sous la forme :

$$(3):\ (b+1) = \frac{\frac{K_2(X_2)}{m(X_2)} - \frac{\rceil(X_2)}{m(X_2)} + \frac{K_1(X_1)}{m(X_1)} - \frac{\rceil(X_1)}{m(X_1)} - 2\frac{K_1(X_1)}{m(X_1)}\frac{K_2(X_2)}{m(X_2)}}{\frac{K_2(X_1)}{m(X_1)} + \frac{K_2(X_2)}{m(X_2)} - 1}$$

Soit :

$$(4)\ (b+1) + \frac{K_1(X_1)}{m(X_1)} - \frac{K_2(X_2)}{m(X_2)} = \frac{\frac{\mathcal{E}(X_1)}{m(X_1)^2} + \frac{\mathcal{E}(X_2)}{m(X_2)^2}}{\frac{K_2(X_1)}{m(X_1)} + \frac{K_2(X_2)}{m(X_2)} - 1}$$

Mais revenons à la suite X, c'est-à-dire aux notations utilisées antérieurement :

$$M_{X_1} = \begin{bmatrix} m(X_1) & K_1(X_1) \\ m(X_1)-K_2(X_1) & K_1(X_1) - \rceil(X_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & ; & m_1 - k_{12} \\ k_1 & ; & k_1 - \rceil_{X_1} \end{bmatrix}$$

$$M_{X_2} = \begin{bmatrix} m(X_2) & K_1(X_2) \\ m(X_2)-K_2(X_2) & K_1(X_2) - \rceil(X_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 & ; & m_2 - k_2 \\ k_{21} & ; & k_{21} - \rceil_{X_2} \end{bmatrix}$$

La dernière relation donne, avec $\mathcal{E}(X_1) = \mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}(X_2) = \mathcal{E}_2$ et la relation $(\mathcal{C}_1)$:

$$\mathcal{E}_1 m_2^2 + \mathcal{E}_2 m_1^2 = [(b+1)m_1 m_2 + k_{21} m_1 - k_{12} m_2][(m_1 - k_1)m_2 + (m_2 - k_{21})m_1 - m_1 m_2]$$

$$= m[m_1 m_2 - k_1 m_2 - k_{21} m_1]$$

$$= m[m_1 k_2 - m_2 k_1] + (K_1 - K_2) m_1 m_2$$

Il reste ainsi :

$$m m_1 (m_2 - k_{21}) = m m_1 k_2 + (K_1 - K_2) m_1 m_2$$

Soit :

(5) : $$m_2 - k_2 = k_{21} + r m_2$$

Par ailleurs, la condition $P(X_2) + P(X_1) = 0$ se traduit par :

$$2 = \frac{k_2}{m_2} + \frac{k_{21}}{m_2} + \frac{k_{12}}{m_1} + \frac{k_1}{m_1}$$

Combinée avec la relation déduite de (5) :

$$\frac{k_2}{m_2} + \frac{k_{21}}{m_2} = 1 - r$$

Elle donne : $$1 + r = \frac{k_{12}}{m_1} + \frac{k_1}{m_1}$$

Soit (6) : $$(m_1 - k_{12}) + m_1 r = k_1$$

On peut ainsi énoncer :

THEOREME XII. 5

Soit $X = (X_1 \text{ b } X_2)$ une suite d'écart d'antidromie r telle que l'on puisse écrire :

$$M_{X_1} = \begin{bmatrix} m_1 & k_1 - m_1 r \\ k_1 & k_1 - \rceil_{X_1} \end{bmatrix} \qquad \text{(avec } \mathcal{E}_1 = \det M_{X_1})$$

(c'est-à-dire $P(X_1) = r$)

$$M_{X_2} = \begin{bmatrix} m_2 & k_{21} + m_2 r \\ k_{21} & k_{21} - \rceil_{X_2} \end{bmatrix} \qquad \text{(avec } \mathcal{E}_2 = \det M_{X_2})$$

(c'est-à-dire $P(X_2) = -r$)

Alors, la suite $X = (X_1 b\ X_2)$ permet de construire un arbre de suites ayant toutes r pour écart d'antidromie, grâce à la construction de MARKOFF.
De plus on a : $r(m,m_1,m_2) = (rm,rm_1,rm_2) \in \mathbb{Z}^3$

Le cas de la Théorie de MARKOFF rentre bien dans ce Théorème, avec r = 0 et b = 2. (Par contre, sur l'exemple de la $(2,\frac{1}{7},-1)$ Théorie, on a noté que l'on n'avait pas $r(m,m_1,m_2) \in \mathbb{Z}^3$)

C/ UNE NOUVELLE RELATION DE MARKOFF

Plus généralement, lorsque valent pour X_1 et X_2 les relations du Théorème précédent, on a :

$$(r_1'') : r_1 = \frac{k_1 - k_{12}}{m_1} = 2\ \frac{k_1}{m_1} - (1 + r) = (1 + r) - 2\ \frac{k_{12}}{m_1}$$

$$(r_2'') : r_2 = \frac{k_{21} - k_2}{m_2} = (1 - r) - 2\ \frac{k_2}{m_2} = 2\ \frac{k_{21}}{m_2} - (1 - r)$$

La relation (M_2) s'écrit alors, avec ces expressions :

$$m^2 - \varepsilon_2 m_1^2 - \varepsilon_1 m_2^2 = (b+1 + 1 + r - 2\ \frac{k_{12}}{m_1} + 2\ \frac{k_{21}}{m_2} - 1 + r - r)mm_1m_2$$

$$= [\ \frac{(b+1)m_1m_2 + 2k_{21}m_1 - 2k_{12}m_2}{m_1m_2} + r\ ]mm_1m_2$$

$$= [\ \frac{2m}{m_1m_2} - (b + 1) + r\ ]mm_1m_2$$

(avec la relation C_1).

Il reste, en simplifiant la relation diophantienne :

$(M_3) : m^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 = (b + 1 - r)mm_1m_2$

Et ceci permet d'énoncer, toutes les vérifications complémentaires étant évidentes :

THEOREME XII.6 (Equation de MARKOFF)
Dans les conditions du Théorème précédent, on a la relation diophantienne suivante, où $b + 1 - r \geqslant 0$:
$(M_3) : m^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 = (b + 1 - r)mm_1m_2$
avec la condition : $r(m,m_1,m_2) = (rm,rm_1,rm_2) \in \mathbb{Z}^3$

Et : (a) $m > 0 \qquad m_1 > 0 \qquad m_2 > 0$

(b) $m = \mathrm{Max}(m, m_1, m_2) > \mathrm{Max}(m_1, m_2)$

(c) $\mathrm{pgcd}(m, m_1) = \mathrm{pgcd}(m_1, m_2) = \mathrm{pgcd}(m_2, m)$

Remarquons en complément que le cas r = 1 donne :

$$M_{X_1} = \begin{bmatrix} m_1 & k_1 - m_1 \\ k_1 & k_1 - \rceil x_1 \end{bmatrix}$$

avec nécessairement, par les conditions habituelles :

$$\begin{cases} 0 \leqslant m_1 - k_1 < m_1 \\ 0 < k_1 - m_1 \leqslant m_1 \end{cases}$$

Soit :
$$\begin{cases} 0 < k_1 \leqslant m_1 \\ m_1 < k_1 \leqslant 2m_1 \end{cases}$$

Il est donc impossible de trouver une suite X_1 correspondante.
Ceci permet d'énoncer :

PROPRIETE XII.1

Dans l'équation de MARKOFF donnée par le Théorème XII.6, on a nécessairement $r \neq 1$ et donc aussi $b + 1 - r > 0$.

D / EXAMEN DE L'EQUATION DIOPHANTIENNE MISE EN EVIDENCE ET APPLICATION

On considère ici l'équation diophantienne :

(M_3) : $\qquad m^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 = (b + 1 - r) m m_1 m_2$

où l'on suppose
$$\begin{cases} \varepsilon_1 , \varepsilon_2 \in \{ \pm 1 \} \\ b \in \mathbb{N}^* \\ r \in \mathbb{Q} \quad \text{vérifiant } -1 < r < 1 \\ (m, m_1, m_2) \in \mathbb{N}^3 \text{ tel que } r(m, m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^3 \end{cases}$$

Pour m = 0, on trouve les solutions $(0, m_1, \pm m_1)$ avec éventuellement $m_1 = 0$ comme seul cas possible.
Si (m, m_1, m_2) est une solution, $(-m, -m_1, m_2)$ en est une autre, de même que $(m, -m_1, -m_2)$.
On peut donc se limiter à l'étude des cas $m > 0$ et $m_1 > 0$.

Il est facile d'établir, grâce à la condition $rm \in \mathbb{Z}$ que l'on a :

$$pgcd(m,m_1) = pgcd(m_1,m_2) = pgcd(m_2,m)$$

Il est possible que ce nombre, noté d, soit distinct de 1.

Remarquons maintenant que si l'on a sous forme irréductible :

$$r = \frac{R_1}{R_2} \text{ avec } R_2 > 0 \ , \ -R_2 < R_1 < R_2 \ , \ pgcd(R_1,R_2) = 1$$

La condition $r(m,m_1,m_2) \in \mathbb{Z}^3$ impose $R_2 \mid d$.

Soit $R = dr \in \mathbb{Z}$, avec $-d < R < d$
L'équation de départ s'écrit donc encore :

$$\left(\frac{m}{d}\right)^2 + \varepsilon_2\left(\frac{m_1}{d}\right)^2 + \varepsilon_1\left(\frac{m_2}{d}\right)^2 = [(b+1-r)d]\left(\frac{m}{d}\right)\left(\frac{m_1}{d}\right)\left(\frac{m_2}{d}\right)$$

avec cette fois: $\begin{cases} (b+1-r)d \in \mathbb{N}^* \ M = \dfrac{m}{-} \ ; \ M = \dfrac{m}{-} \ ; \ M = \dfrac{m}{-} \\ 1 = pgcd\left(\dfrac{m}{d}, \dfrac{m_1}{d}\right) = pgcd\left(\dfrac{m_1}{d}, \dfrac{m_2}{d}\right) = pgcd\left(\dfrac{m_2}{d}, \dfrac{m}{d}\right) \end{cases}$

Et si l'on pose $L = (b+1-r)d \in \mathbb{N}^*$, $M = \dfrac{m}{d}$; $M_1 = \dfrac{m_1}{d}$; $M_2 = \dfrac{m_2}{d}$; tout revient à étudier l'équation diophantienne :

$$(\mathcal{M}\text{reg}) \quad \begin{cases} M^2 + \varepsilon_2 M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2 = LMM_1M_2 \\ (M,M_1,M_2) \in \mathbb{N}^3 \text{ tel que } M=Max(M,M_1,M_2) > Max(M_1,M_2) \\ pgcd(M,M_1) = pgcd(M_1,M_2) = pgcd(M_2,M) = 1 \end{cases}$$

Deux cas peuvent être distingués :

* <u>Cas 1 : $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$</u>

Ce cas est celui où la relation diophantienne (M_3) construite à chaque niveau de l'arbre de MARKOFF fourni par le Théorème XII.4 est la même : ceci résulte des relations (D_0) et (G_0) données ci-dessus.
L'étude de l'équation $(\mathcal{M}\text{reg})$ par la méthode de CASSELS [5] permet facilement d'établir que pour $L \geqslant 4$, cette équation n'admet pas d'autre solution que $(M,M_1,M_2) = (0,0,0)$. (Voir Théorème XIII.9).

Pour avoir des solutions non triviales à (M_3), il faut donc :

$$0 < L = (b+1-r)d \leqslant 3$$

Cette inégalité ne donne, compte tenu des hypothèses sur b et r, qu'un nombre fini de possibilités :

$$\begin{cases} b = 2 & r = 0 & d = 1 \\ b = 0 & r = \frac{1}{2} & d = 2 \\ b = 1 & r = \frac{1}{2} & d = 2 \\ b = 0 & r = 0 & d = 3 \end{cases}$$

. Le cas $b = 2 \quad r = 0 \quad d = 1$ correspond à la Théorie de MARKOFF classique. Il est connu, et peut donc être aussi laissé de côté.

. Seuls restent trois cas non évidents :

$$\begin{cases} b = 0 & r = \frac{1}{2} & d = 2 \\ b = 1 & r = \frac{1}{2} & d = 2 \\ b = 0 & r = 0 & d = 3 \end{cases}$$

◊ Cas 1.1 : $b = 0 \quad r = 0 \quad d = 3$

Il faut pouvoir écrire :

$$M_{X_1} = \begin{bmatrix} 3M_1 & k_1 \\ k_1 & k_1 - \rfloor_{X_1} \end{bmatrix}$$

avec $\det M_{X_1} = 1 = 3M_1(k_1 - \rfloor_{X_1}) - k_1^2$

Modulo 3, il est clair que cette relation ne permet pas de trouver $k_1 \in \mathbb{Z}$, puisque seuls 0 et 1 sont résidus quadratiques modulo 3. Ce cas est donc impossible.

◊ Cas 1.2 : $r = \frac{1}{2} \quad d = 2 \quad b \in \{0,1\}$

Il faut pouvoir écrire :

$$M_{X_1} = \begin{bmatrix} 2M_1 & k_1 - M_1 \\ k_1 & k_1 - \rfloor_{X_1} \end{bmatrix}$$

avec, par le calcul du déterminant :

$$2M_1 \rfloor_{X_1} = k_1^2 - 3k_1 M_1 + 1$$

Cette condition impose que l'on ait k_1 impair et $k_1 + M_1$ impair, soit M_1 pair (avec M_1 non multiple de 4 sans quoi $k_1^2 \equiv -1 \pmod 4$).

De même, il faut pouvoir écrire :

$$M_{X_2} = \begin{bmatrix} 2M_2 & k_{21} + M_2 \\ k_{21} & k_{21} - 1_{X_2} \end{bmatrix}$$

Avec, par le calcul du déterminant :

$$-2M_2 1_{X_2} = k_{21}^2 - M_2 k_{21} + 1$$

Et donc aussi k_{21} impair et M_2 pair non multiple de 4.
Mais alors la condition $\text{pgcd}(M_1, M_2) = 1$ donne une contradiction.
Ce cas est encore impossible.

On peut donc énoncer, en regroupant en un même résultat tous les cas vus ci-dessus :

THEOREME XII.7
Le cas de la Théorie de MARKOFF classique est le seul où l'on puisse considérer par la construction de MARKOFF un arbre engendré par une suite :

$$X = (X_1 \, b \, X_2)$$

telle que $\begin{cases} r(X_1 \, b \, X_2) = r(\overset{\vee}{X}_1) = r(\hat{X}_2) = r \\ \varepsilon(X_1) = \varepsilon(X_2) = 1 \end{cases}$

On a alors nécessairement : $b = 2 \quad r = 0 \quad$ et $\quad d = 1$.

* Cas 2 : Si on n'a pas $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$

Dans ce cas, la relation diophantienne (M_3) trouvée à chaque niveau de l'arbre de MARKOFF fourni par le Théorème XII.4 change, mais on trouve toujours l'un des trois suivants :

$$\begin{cases} m^2 - m_1^2 - m_2^2 = (b+1-r) m m_1 m_2 \\ m^2 - m_1^2 + m_2^2 = (b+1-r) m m_1 m_2 \\ m^2 + m_1^2 - m_2^2 = (b+1-r) m m_1 m_2 \end{cases}$$

A une permutation près des variables M, M_1, M_2, on peut toujours se ramener à une équation :

$$M^2 - M_1^2 + M_2^2 = LM \, M_1 M_2$$

avec par la propriété XII.1 la condition : $L \in \mathbb{N}^*$.
Celle-ci admet toujours une solution non triviale :

$$M = L \qquad M_1 = M_2 = 1$$

Ce cas est donc susceptible de contenir des possibilités nouvelles, ce que confirment les constructions suivantes :

(1)/ Considérons la situation issue de l'étude de la (2,0,1) Théorie :

$$\begin{cases} X_1 = \emptyset & M_{X_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \varepsilon_1 = 1 \\ X_2 = (1,1,1) & \overset{v}{X}_2 = (1,2) & \varepsilon_2 = -1 \end{cases}$$

On a formellement : $M_{\hat{X}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

et la propriété $M_{\hat{X}_1} \begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 1 \\ b-1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

que l'on traduit par :

$$(\hat{\emptyset} b) = (1, b-1)$$

Ceci donne naissance au diagramme de MARKOFF suivant :

$$(\emptyset,2,1,1,1) = (2,1,1,1)$$

$$(2,(1)_5) \qquad\qquad (2122111)$$

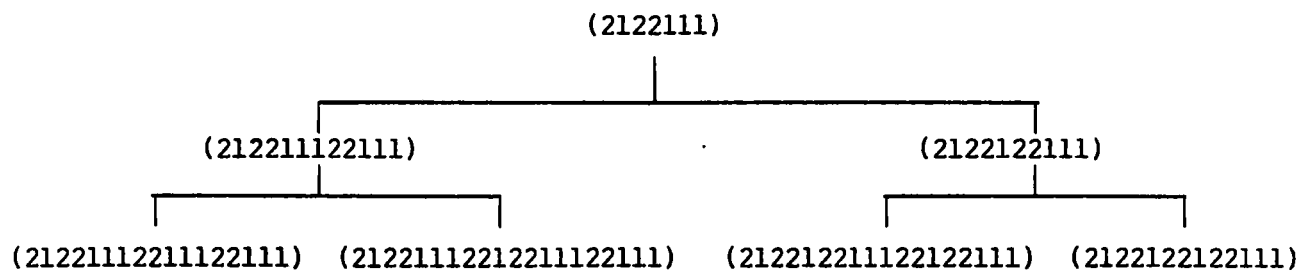
On peut alors considérer, avec r = 0 et b = 2 :

$$\begin{cases} X_1 = (2,1,2) & M_{X_1} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} & (\varepsilon_1 = -1) \\ X_2 = (1,1,1) & M_{X_2} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & (\varepsilon_2 = -1) \\ X = (2,1,2,2,1,1,1) & M_X = \begin{bmatrix} 73 & 46 \\ 27 & 17 \end{bmatrix} & \end{cases}$$

L'équation de MARKOFF donnée par le Théorème XII.6 s'écrit :

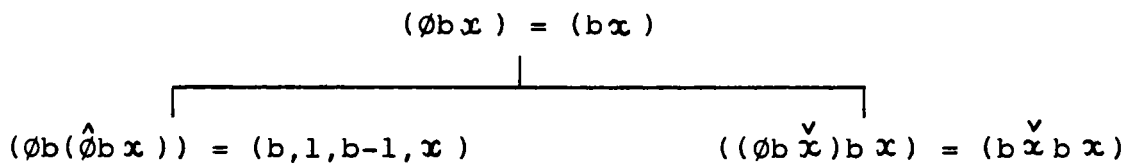
$$73^2 - 8^2 - 3^2 = 5\ 256 = 3.73.8.3$$

La construction de MARKOFF fournit alors, à partir de $X = (X_1 2\ X_2)$ un arbre de suites ayant toutes r = 0 pour écart d'antidromie et dont la partie haute est :



On voit cependant, grâce au lemme de DICKSON, qu'aucune des suites ainsi construites n'est un mot du Langage de MARKOFF défini par $\{1,2\}$.

(2) / Considérons plus généralement la situation :



avec : $r(b\,x) = r(\hat{x}) = 0$

On peut écrire : $M_x = \begin{bmatrix} m & K_1 \\ K_1 & K_1 - 1 \end{bmatrix}$ $\quad (r(\hat{x}) = 0)$

Et aussi : $M_{bx} = \begin{bmatrix} bm + K_1 & (b+1)K_1 - 1 \\ m & K_1 \end{bmatrix}$

La condition $r(b\,x) = 0$ donne : $bK_1 - (b-1)m = 1$

Soit : $M_x = \begin{bmatrix} m & K_1 \\ K_1 & (b-1)(m-K_1) \end{bmatrix}$

avec $\det M_x = \pm 1 = (b-1)m^2 - (b-1)mK_1 - K_1^2$

Cette équation en m et K_1 a pour discriminant :

$$(b-1)^2 + k(b-1) = (b+1)^2 - 4$$

Elle est associée au polynôme :

$$(b-1)X^2 - (b-1)X - 1$$

dont une racine est :

$$\gamma = \frac{(b-1) + \sqrt{(b+1)^2 - 4}}{2(b-1)} = [1, \underline{b-1}, 1]$$

On en déduit aisément toutes ses solutions.
On trouve par exemple ainsi : $m = b+1 \quad K_1 = b \quad \rceil = 1$
correspondant à $\mathfrak{x} = (1,b-1,1)$ soit $\overset{v}{\mathfrak{x}} = (1,b)$ et $\hat{\mathfrak{x}} = (b,1)$

En posant : $\begin{cases} X_1 = b\overset{v}{\mathfrak{x}} = (b,1,b) & \text{associé à } m_1 = b^2 + 2b \\ X_2 = \mathfrak{x} & \text{associé à } m_2 = b + 1 \end{cases}$

On obtient : $r(\overset{v}{X_1}) = r(b\mathfrak{x}) = r(\hat{X_2}) = r(\hat{\mathfrak{x}}) = 0$
On a aussi : $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$

Et par un calcul simple :

$$r(X_1\, b\, X_2) = r(b,1,b,b,1,b-1,1) = 0$$

La suite $X = (X_1\, b\, X_2)$ est associée à $m = b^4 + 4b^3 + 5b^2 + 2b + 1$

Dans ce cas, on obtient : $pgcd(m,m_1) = pgcd(m_1,m_2) = pgcd(m_2,m) = 1$

$(b^4 + 4b^3 + 5b^2 + 2b + 1)^2 - (b^2 + 2b)^2 - (b+1)^2$

$= (b+1)(b^4 + 4b^3 + 5b^2 + 2b + 1)(b^2 + 2b)(b+1)$

Plus généralement, on peut énoncer :

THEOREME XII.8

Pour toute valeur $b \in \mathbb{N}^*$, il existe au moins un arbre obtenu par construction de MARKOFF à partir d'une suite $X = (X_1\, b\, X_2)$ telle que : $r(X) = r(\overset{v}{X_1}) = r(\hat{X_2}) = r$

Il existe en particulier pour tout $b \in \mathbb{N}^*$ un tel arbre avec $r = 0$ associé à :

$$\begin{cases} X_1 = \emptyset \\ X_2 = (1) \end{cases}$$

Cet arbre montre que pour tout $b \in \mathbb{N}^*$, l'équation

$$m^2 - m_1^2 + m_2^2 = (b+1)mm_1m_2$$

admet une infinité de solutions telles que :

(a) $m > 0 \quad m_1 > 0 \quad m_2 > 0$

(b) $m = Max(m,m_1,m_2) > Max(m_1,m_2)$

(c) $pgcd(m,m_1) = pgcd(m_1,m_2) = pgcd(m_2,m) = 1$

De même, les deux équations qui se déduisent l'une de l'autre :

$$m^2 - m_1^2 + m_2^2 = (b+1)mm_1m_2$$

$$m^2 - m_1^2 - m_2^2 = (b+1)mm_1m_2$$

admettent une infinité de solutions telles que :

(a) $m > 0 \quad m_1 > 0 \quad m_2 > 0$

(b) $m = \mathrm{Max}(m, m_1, m_2) > \mathrm{Max}(m_1, m_2)$

(c) $\mathrm{pgcd}(m, m_1) = \mathrm{pgcd}(m_1, m_2) = \mathrm{pgcd}(m_2, m) = 1.$

On va dans la suite étudier de façon complète l'équation ($\mathcal{M}$reg) et montrer la généralité de la construction qui a conduit à ce dernier théorème.

XIII. ETUDE DETAILLEE DE L'EQUATION DIOPHANTIENNE $(\mathcal{M})$: $M^2 + \varepsilon_2 M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2 = L M M_1 M_2$

où $(M, M_1, M_2) \in \mathbb{Z}^3$ $L \in \mathbb{N}^*$

et

$$\text{pgcd}(M, M_1) = \text{pgcd}(M_1, M_2) = \text{pgcd}(M_2, M) = 1$$

A / POSITION DU PROBLEME ET DEBUT DE SOLUTION

A.1 - Position du problème

Dans l'étude des écarts d'antidromie, on a été conduit à introduire l'équation diophantienne, ou $(m, m_1, m_2) \in \mathbb{N}^3$

$$m^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 = (b+1-r) m m_1 m_2$$

où
$$\begin{cases} \varepsilon_1 \, , \varepsilon_2 \in \{ \pm 1 \} \\ b \in \mathbb{N} \\ r \in \mathbb{Q} \quad \text{tel que} \quad -1 < r < 1 \\ r(m, m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^3 \end{cases}$$

On suppose ici plus généralement que l'on a : $(m, m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^3$.

Un certain nombre de remarques préliminaires peuvent être faites pour l'étude de cette équation.

Si $(m, m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^3$ est une solution, $(-m, -m_1, m_2)$ et $(m, -m_1, -m_2)$ en sont deux autres.

On peut donc se limiter à étudier les cas :

$$\begin{cases} m \geqslant 0 \\ m_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

Avec $m = 0$, il reste : $\varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 = 0$

On trouve la seule possibilité $(m, m_1, m_2) = (0, m_1, \pm m_1)$ avec, éventuellement la condition supplémentaire $m_1 = 0$.

De même, se traitent les cas $m_1 = 0$ et $m_2 = 0$.

On peut donc se limiter à considérer pour la suite le cas non évident :

$$\begin{cases} m > 0 \\ m_1 > 0 \\ m_2 \neq 0 \end{cases}$$

En posant : $d = \text{pgcd}(m, m_1)$

Et sous forme irréductible :

$$r = \frac{R_1}{R_2} \text{ avec } R_2 > 0 \quad -R_2 < R_1 < R_2 \quad \text{pgcd}(R_1, R_2) = 1$$

La condition $r(m,m_1,m_2) \in \mathbb{Z}^3$

impose, par exemple avec le Théorème de BEZOUT :

$$R_2 \mid d$$

Soit $R = dr \in \mathbb{Z}$, avec $-d < R < d$

D'autre part, en posant :

$$\varepsilon_1 \left(\frac{m_2}{d}\right)^2 = -\left(\frac{m}{d}\right)^2 - \varepsilon_2\left(\frac{m_1}{d}\right)^2 + (b+1-r)d.\left(\frac{m}{d}\right)\left(\frac{m_1}{d}\right)\left(\frac{m_2}{d}\right)$$

La condition $(b+1-r)d\,\frac{m_2}{d} = (b+1-r)m_2 \in \mathbb{Z}$

impose d'avoir : $\frac{m_2}{d} \in \mathbb{Z}$

Soit encore : $d \mid m_2$

En posant alors $\delta = \text{pgcd}\left(\frac{m}{d} ; \frac{m_2}{d}\right)$

il faudrait $\delta \mid \left(\frac{m_1}{d}\right)$

Mais avec la condition : $1 = \text{pgcd}\left(\frac{m}{d} ; \frac{m_1}{d}\right)$

la seule possibilité est d'avoir $\delta = 1$.

De même, on établit que l'on a : $\text{pgcd}\left(\frac{m_1}{d} ; \frac{m_2}{d}\right) = 1$

C'est-à-dire finalement :

$$\text{pgcd}(m,m_1) = \text{pgcd}(m_1,m_2) = \text{pgcd}(m_2,m) = d$$

Tout revient donc, en posant $L = (b+1-r)d \in \mathbb{N}^*$ et

$M = \frac{m}{d}$; $M_1 = \frac{m_1}{d}$; $M_2 = \frac{m_2}{d}$ à étudier l'équation diophantienne :

$$(\mathcal{M}) : \begin{cases} M^2 + \varepsilon_2 M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2 = LMM_1M_2 \\ (M,M_1,M_2) \in \mathbb{Z}^3 \\ \text{pgcd}(M,M_1) = \text{pgcd}(M_1,M_2) = \text{pgcd}(M_2,M) = 1 \end{cases}$$

C'est ce problème que l'on va complètement résoudre dans la suite.

Compte tenu de ce que l'on vient de voir, on suppose de plus que l'on a : $M > 0$; $M_1 > 0$; $M_2 \neq 0$.

A.2 - Point de départ de l'étude de l'équation diophantienne ($\mathcal{M}$)

La relation pgcd$(M,M_1) = 1$ permet de trouver $K'_1 \in \mathbb{Z}$ défini à un multiple près de M tel que :

(e_1) : $M_1 . K'_1 \equiv \varepsilon_1 . M_2 \pmod{M}$

On a aussi, avec l'équation de départ :

$M_2 K'_1 \equiv - \varepsilon_2 M_1 \pmod{M}$

Et si $K_2 \in \mathbb{Z}$ est tel que $K_2 = K'_1 - RM = K'_1 - rm$
on a :

(e_2) : $\varepsilon_2 M_1 \equiv - M_2 K_2 \pmod{M}$

On suppose pour la suite que K'_1 est choisi tel que $0 \leqslant K_2 < M$.
Ceci détermine K'_1 de façon unique et donc aussi K_3 de façon unique à partir du triplet (M,M_1,M_2).
De même, on peut trouver $k'_1 \in \mathbb{N}$ et $k_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

(e_3) : $M_2 . k'_1 \equiv M \pmod{M_1}$

(e_4) : $- Mk'_1 \equiv \varepsilon_1 . M_2 \pmod{M_1}$

(e_5) : $M . k_2 \equiv \varepsilon_2 . M_1 \pmod{M_2}$

(e_6) : $- M'_1 k_2 \equiv M \pmod{M_2}$

On obtient avec (e_1) et (e_4) :

(e_7) : $\varepsilon_1 M_2 \equiv M_1 K'_1 - Mk'_1 \pmod{MM_1}$

De même, avec (e_2) et (e_5) :

(e_8) : $\varepsilon_2 M_1 \equiv Mk_2 - M_2 K_2 \pmod{MM_2}$

En choisissant bien k_2 modulo M_2 on peut faire en sorte d'avoir avec (e_8) :

(a_3) : $\varepsilon_2 M_1 = Mk_2 - M_2 K_2$

En choisissant bien k'_1 modulo M_1, on peut faire en sorte d'avoir avec (e_7) :

(a'_1) : $\varepsilon_1 M_2 = M_1 K'_1 - Mk'_1$

Ces conditions déterminent k'_1 et k_2 de façon unique à partir de (M,M_1,M_2).

En comparant (e_1) et (e_2), on obtient :

$$K_1' K_2 \equiv -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \pmod{M}$$

Ceci permet d'écrire :

(d_1') : $K_1' K_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 = M\ ]'$

Pa la définition de K_2 , on a :

$$(r) : R = dr = \frac{K_1' - K_2}{M} \quad (\text{ou } r = \frac{K_1' - K_2}{m})$$

Et puisque l'on a choisi K_1' à un multiple près de M près pour avoir :

$$0 \leqslant K_2 = K_1' - rM < M$$

on peut développer $\dfrac{M}{M - K_2}$ en fraction continue :

$$\frac{M}{M - K_2} = [S]$$

avec S suite de nombres de $\mathbb{N}^*$.
Hors le cas où l'on a $M = 1$ et $K_2 = 0$, on peut choisir pour S le développement de $\dfrac{M}{M - K_2}$ dont la longueur est telle que $(-1)^n = \varepsilon_1 \varepsilon_2$
(avec $S = (a_0, a_1, \ldots a_n)$).

A.3 - Elimination de différents cas particuliers

. Le cas $M = 1 \quad K_2 = 0$ se ramène à l'étude de l'équation quadratique : $\varepsilon_2 M_1^2 - LM_1 M_2 + \varepsilon_1 M_2^2 = -1$.

* Si $L > 2$, cela se fait à partir du développement en fraction continue :

$$\frac{L + \sqrt{L^2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2}}{2} = \begin{cases} [\underline{L}] & \text{si } \varepsilon_1\varepsilon_2 = -1 \\ [L\text{-}I, \underline{1}, L\text{-}2] & \text{si } \varepsilon_1\varepsilon_2 = 1 \end{cases}$$

. Si $\varepsilon_1 = -1$, on trouve $M_1 = L \quad M_2 = \varepsilon_2$

. Si $\varepsilon_1 = 1 = -\varepsilon_2$, on trouve $M_1 = L^2 + 1 \quad M_2 = \varepsilon_2 L$

On en déduit dans ces deux cas une infinité de solutions.

. Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, il faut distinguer deux cas :

◊ Si L = 3, on trouve la solution $M_1 = L - 1 = 2$; $M_2 = 1$ qui permet d'en construire une infinité d'autres. Ce cas est celui de la Théorie de MARKOFF classique.

◊ Si L > 3,on ne trouve aucune solution. (On reviendra sur ce point dans la suite au Théorème XIII.9).

* Si $L \in \{1,2\}$, une étude directe est faisable à partir de la forme $\varphi(x,y) = \varepsilon_2 x^2 - L\,xy + \varepsilon_1 y^2$

. Si L = 2 et $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$, on se ramène à $(M_1 - \varepsilon_2 M_2)^2 = -\varepsilon_2$
On trouve les solutions $(1, \pm 1 - M_2, M_2)$ si $\varepsilon_2 = -1 = \varepsilon_1$
Compte tenu des contraintes $M > 0$ $M_1 > 0$ et $M_2 \neq 0$,
on doit sélectionner les cas : $\pm 1 - M_2 > 0$
On remarque que toute solution $(1, 1-M_2, M_2)$ définit une autre solution $(1, M_2 - 1, -M_2) = (1, -1-\tilde{M}_2, \tilde{M}_2)$.
Les deux formules que l'on vient de donner se déduisent l'une de l'autre.
D'autre part, si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, on ne trouve aucune solution.

. Si L = 2 et $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$
On trouve des solutions à partir de :
$M_1 = L = 2$ $\qquad M_2 = \varepsilon_2$
On fabrique ainsi la solution (1,2,1) et celles s'en déduisant si $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1 = -1$.

. Si $\varepsilon_2 = -1$ et $\varepsilon_1 = 1$, On n'en trouve aucune.

. Si L = 1 et $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$, la forme φ est définie.
D'où un nombre fini de solutions (1,1,0) et (1,0,1)
si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$. Aucune des deux ne vérifie les contraintes $M > 0$ $M_1 > 0$ et $M_2 \neq 0$. De même, on ne trouve aucune solution si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$.

. Si L = 1 et $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$
On trouve une infinité de solutions exprimables en fonction des nombres de FIBONACCI : $(1, F_{2n+1}, F_{2n})$ ou $(1, F_{2n}, F_{2n-1})$.

* De façon plus générale, en écrivant l'équation étudiée sous la forme :

$$\varepsilon_2 M_1^2 - (LM) M_1 M_2 + \varepsilon_1 M_2^2 = - M^2$$

on est conduit à considérer la forme quadratique :

$$\varphi(x,y) = \varepsilon_2 x^2 - (LM)xy + \varepsilon_1 y^2$$

Son discriminant vaut :

$$\Delta(\varphi) = L^2 M^2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2$$

C'est un nombre strictement positif hors les trois cas :

$$\begin{cases} L = 1 & M = 1 & \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \\ L = 1 & M = 2 & \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \\ L = 2 & M = 1 & \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \end{cases}$$

Ces cas ont été étudiés ci-dessus, hors le cas particulier

$$L = 1 \qquad M = 2 \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

Ce dernier donne :

$$\varepsilon_2 (M_1 - \varepsilon_2 M_2)^2 = - 4$$

Il n'admet de solution que pour $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$
Et dans ce cas, on obtient les solutions $(2, \pm 2 - M_2, M_2)$ (où M_2 impair) à partir de la condition :

$$M_1 + M_2 = \pm 2$$

On remarque encore que toute solution $(2, 2-M_2, M_2)$ définit une autre solution s'écrivant $(2, M_2 - 2, -M_2) = (2, -2-\tilde{M}_2, \tilde{M}_1)$.
Les deux formules que l'on vient de donner se déduisent l'une de l'autre.
En dehors des trois cas particuliers cités, on a $\Delta(\varphi) > 0$.
Il est facile de voir avec $L \in \mathbb{N}^*$ et $M > 0$ que ce nombre ne peut être un carré. La forme φ est donc indéfinie.

Dans toute la suite, on suppose que l'on n'est pas dans l'un des cas particuliers cités ci-dessus.
On conviendra en particulier que l'on est dans la situation dite <u>situation standard</u> qui est celle où l'on n'a pas :

$$L = 1 \quad \text{et} \quad M = 2$$

ou

$$M = 1 \quad \text{et} \quad K_2 = 0$$

A.4 - Etude de la situation standard

L'hypothèse : $M \neq 1$ ou $K_2 \neq 0$ est telle que l'on puisse écrire avec les notations introduites avant :

$$M_S = \begin{bmatrix} M & K_1 \\ M - K_2 & K_1 - 1 \end{bmatrix}$$

avec : $M\,1 - K_1 K_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2$

Mais la condition (d_1') donne aussi : $M1' - K_1' K_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 = M\,1 - K_1 K_2$

Soit $\begin{cases} 1' = 1 + \alpha K_2 \\ K_1' = K_1 + \alpha M \end{cases}$ $\qquad \alpha \in \mathbb{Z}$

Dans (r), on a ainsi :

$$R = \frac{K_1 - K_2}{M} + \alpha$$

avec, par construction $\alpha \in \mathbb{Z}$, $R \in \mathbb{Z}$

et, par définition de M_S :

$$-1 < \frac{K_1 - K_2}{M} < 1$$

La seule possibilité est d'avoir : $\dfrac{K_1 - K_2}{M} = 0$

Soit $K_1 = K_2$, vérifiant par construction : $0 \leq K_1 = K_2 < M$.

La suite S définie précédemment est donc antidrome.

Par construction, on a aussi les relations :

(a_1) : $\varepsilon_1 M_2 = M_1 K_1 - M k_1$ $\qquad$ (où $k_1 = k_1' + \alpha M_1$)

(a_2) : $\varepsilon_2 M_1 = M k_2 - M_2 K_2$

(d_1) : $K_1 K_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 = M\,1$

D'où : $\varepsilon_2 M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2 = M_1 (M k_2 - M_2 K_2) + M_2 (M_1 K_1 - M k_1)$

$= M_1 M k_2 - M_2 M k_1$

$= LMM_1 M_2 - M^2$

C'est-à-dire (a_5) : $M = LM_1 M_2 + M_2 k_1 - M_1 k_2$

La suite S permet de considérer la forme de MARKOFF associée à la suite (S,L-1) :

$$(F) : F_\theta(X,Y) = X^2 + \left[\frac{LM - K_1 - K_2}{M}\right]XY + \left[\frac{1 - LK_1}{M}\right]Y^2$$

Pour celle-ci on vérifie :

$$(F_6) : F_\theta(K_1, M) = F(K_2 - LM, M) = \varepsilon_1\varepsilon_2$$

En posant :

$$(\Phi) : \Phi_\theta(X,Y) = X^2 + [LM + K_1 - K_2]XY + \varepsilon_1\varepsilon_2 Y^2$$
$$= X^2 + LMXY + \varepsilon_1\varepsilon_2 Y^2$$

On a l'égalité :

$$(F_1) : \Phi_\theta(MX - K_1 Y ; Y) = M^2 F_\theta(X,Y)$$

à partir de laquelle :

$$M^2 F_\theta(k_1, M_1) = \Phi_\theta(Mk_1 - K_1 M_1, M_1)$$
$$= \Phi_\theta(-\varepsilon_1 M_2, M_1)$$
$$= M_2^2 - \varepsilon_1 LMM_1 M_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 M_1^2$$
$$= -\varepsilon_1 M_2^2$$

Soit $(F_2) : F_\theta(k_1, M_1) = -\varepsilon_1 \in \{+1 ; -1\}$

De même :

$$M^2 F_\theta(k_2 - LM_2, M_2) = \Phi_\theta(Mk_2 - LMM_2 - K_1 M_2, M_2)$$
$$= \Phi_\theta(Mk_2 - K_2 M - M_2[LM + K_1 - K_2] ; M_2)$$
$$= \Phi_\theta(\varepsilon_2 M_1 - M_2[LM + K_1 - K_2] ; M_2)$$
$$= \Phi_\theta(\varepsilon_2 M_1, -M_2)$$
$$= M_1^2 - \varepsilon_2 LMM_1 M_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 M_2^2$$
$$= -\varepsilon_2 M^2$$

Soit $(F_5) : F_\theta(k_2 - LM_2, M_2) = -\varepsilon_2 \in \{+1 ; -1\}$

Le discriminant de la forme F_θ vaut :

$$\Delta(F_\theta) = L^2M^2 - 4\varepsilon_1\varepsilon_2$$

C'est un nombre strictement positif dans la situation standard. La forme F_θ est donc indéfinie. Elle définit un groupe de rotations hyperboliques permettant d'écrire, en comparant (F_2) et (F_5) et grâce à (a_3) :

$$(a) : \varepsilon_2 \begin{bmatrix} k_1 \\ M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & ; & L K_1 - 1 \\ M & ; & LM - K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_2 - LM_2 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

avec :

$$g = \begin{bmatrix} K_1 & ; & LK_1 - 1 \\ M & ; & LM - K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{S^*} \begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ceci donne encore :

$$\varepsilon_2 \begin{bmatrix} M_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = M_{S^*} \begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ k_2 - LM_2 \end{bmatrix}$$

On trouve ainsi l'expression :

$(a_4) : \varepsilon_2 k_1 = K_1 k_2 - M_2$

Soit en multipliant par K_2 et utilisant (d_1) et (a_3) :

$(a_2) : \varepsilon_1 k_2 = M_1 - K_2 k_1$

B / RECOURS AUX CONSTRUCTIONS GEOMETRIQUES POUR L'ETUDE DE LA SITUATION STANDARD

B.1 - Utilisation du polygone de KLEIN

En reprenant l'interprétation géométrique présentée avant et les trois points du polygone de KLEIN associé à F_θ :

$$\Omega_{n+1}(K_1, M)$$

$$\Omega_{-1}(1, 0)$$

$$\Omega_{-n-3}(\varepsilon_1\varepsilon_2 [LM - K_2]; -\varepsilon_1\varepsilon_2 M)$$

Les relations (F_2) et (F_5) garantissent l'existence d'un point de ce polygone de KLEIN :

$$\Omega_i (\tilde{k}_{1i}, \tilde{M}_1)$$

(avec $-1 < i \leqslant n+1$ c'est-à-dire $0 < \tilde{M}_1 \leqslant M$)
tel que les deux points définis à $\varepsilon' \in \{+1 ; -1\}$ près :

$$\Omega_j (\varepsilon' (k_2 - LM_2); \varepsilon' M_2)$$

$$\Omega_{j-n-2}(k_1 ; M_1)$$

se déduisent de Ω_i par une puissance de la matrice :

$$g = \begin{bmatrix} K_1 & ; & LK_1 - I \\ M & ; & LM - K_2 \end{bmatrix}$$

Comme par hypothèse, on suppose $M_1 > 0$, la considération du point Ω_{j+n+2} ne pose pas de difficulté.
Par contre, il faut, pour le point Ω_j que l'on ait : $\varepsilon' M_2 \geqslant 0$
La condition (a) impose alors d'avoir : $\varepsilon' = \varepsilon_2$ et $\varepsilon_2 M_2 \geqslant 0$
Si la suite S s'écrit $S = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, les mêmes considérations géométriques permettent d'écrire :

$$\begin{matrix} \tilde{M}_1 \\ \tilde{K}_1 \end{matrix} = [a_n, \ldots, a_{n-i+1}]$$

Elles permettent de décomposer :

$$S^* = (S_1^* \; a_{n-i} \; S_2^*)$$

avec $\begin{cases} S_1^* = (a_n, \ldots, a_{n-i+1}) \\ S_2^* = (a_{n-i-1}, \ldots, a_0) \end{cases}$

et donc de définir :

$$M_{S_1^*} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_1 & \tilde{M}_1 - \tilde{K}_{12} \\ \tilde{K}_1 & \tilde{K}_1 - \tilde{I}_{\chi_1} \end{bmatrix}$$

$$M_{S_2^*} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_2 & \tilde{M}_2 - \tilde{K}_2 \\ \tilde{K}_2 & \tilde{K}_2 - \tilde{I}_{\chi_2} \end{bmatrix}$$

Supposons que le point $\Omega_{i-1}(\tilde{K}_1 - \tilde{I}_{\chi_1} ; \tilde{M}_1 - \tilde{K}_{12})$ se transforme par g^{e+1} en un point :

$$\Omega_{j+n+1}(K_1 - I_{\chi_1} ; M_1 - K_{12}) \qquad (\text{avec } I_{\chi_1} \geqslant 0)$$

On a :

$$\begin{bmatrix} K_1 - I_{\chi_1} \\ M_1 - K_{12} \end{bmatrix} = g^{e+1} \begin{bmatrix} \tilde{K}_1 - \tilde{I}_{\chi_1} \\ \tilde{M}_1 - \tilde{K}_{12} \end{bmatrix}$$

Ceci donne :

$$\begin{bmatrix} M_1 - K_{12} \\ K_1 - I_{\chi_1} \end{bmatrix} = \left(M_{S^*} \begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^{e+1} \begin{bmatrix} \tilde{M}_1 - \tilde{K}_{12} \\ \tilde{K}_1 - \tilde{I}_{\chi_1} \end{bmatrix}$$

De même, avec Ω_i et Ω_{j+n+2}, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} M_1 \\ K_1 \end{bmatrix} = \left(M_{S^*} \begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^{e+1} \begin{bmatrix} \tilde{M}_1 \\ \tilde{K}_1 \end{bmatrix}$$

D'où finalement une écriture :

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_1 - k_{12} \\ k_1 & k_1 - l_{x_1} \end{bmatrix} = (M_{\mathcal{S}^*} \begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})^{e+1} \begin{bmatrix} \tilde{M}_1 & \tilde{M}_1 - \tilde{k}_{12} \\ \tilde{k}_1 & \tilde{k}_1 - \tilde{l}_{x_1} \end{bmatrix}$$

Pour les déterminants :

$$M_1(k_1 - l_{x_1}) - k_1(M_1 - k_{12}) = (-\varepsilon_1\varepsilon_2)^{e+1}(-1)^{i+1}$$

Ainsi, on peut toujours trouver une matrice :

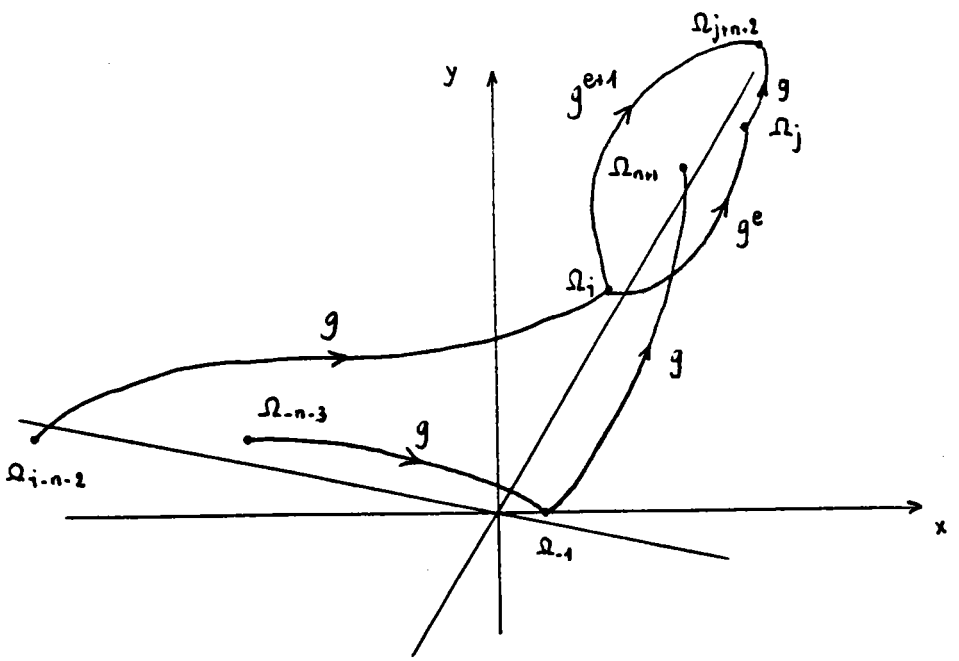
$$M_{u_1} = \begin{bmatrix} M_1 & M_1 - k_{12} \\ k_1 & k_1 - l_{x_1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^*$$

vérifiant : $\det M_{u_1} = \varepsilon_1 \eta_1$ $\qquad (\eta_1 = \pm 1)$

De la même façon, mais en utilisant cette fois g^e, le point Ω_{i-1} $(\tilde{k}_1 - \tilde{l}_{x_1} ; \tilde{M}_1 - \tilde{k}_{12})$ se transforme en un point que l'on peut convenir d'écrire :

$$\Omega_{j-1}(-\varepsilon_2([l_{x_2} - Lk_{21}] + a_{n-i}[k_2 - LM_2]) ; -\varepsilon_2[k_{21} + a_{n-i}M_2])$$

Son ordonnée détermine $k_{21} \in \mathbb{Z}$ à partir de L et M_2.
A partir de là, son abscisse détermine $l_{x_2} \in \mathbb{Z}$.
Les points Ω utilisés avant sont représentables sur la figure :



Par construction, on a :

$$\varepsilon_2 \begin{bmatrix} -[l_{x_2} - Lk_{21}] - a_{n-i}[k_2 - LM_2] \\ -k_{21} - a_{n-i}M_2 \end{bmatrix} = g^e \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 - \tilde{l}_{x_1} \\ \tilde{M}_1 - \tilde{k}_{12} \end{bmatrix}$$

En considérant les deux points Ω_i et Ω_j , on peut aussi écrire :

$$\varepsilon_2 \begin{bmatrix} M_2 & ; & -k_{21} - a_{n-1} M_2 \\ (k_2 - LM_2) & ; & -[\lambda_2 - Lk_{21}] - a_{n-1}[k_2 - LM_2] \end{bmatrix} = \left(M_S^* \begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^e \begin{bmatrix} \tilde{M}_1 & \tilde{M}_1 - \tilde{k}_{12} \\ \tilde{k}_1 & \tilde{k}_1 - \tilde{\lambda}_1 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\varepsilon_2 M_{u_1} = \varepsilon_2 \begin{bmatrix} M_1 & ; & M_1 - k_{12} \\ k_1 & ; & k_1 - \lambda_1 \end{bmatrix} = M_S^* \begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 & ; & -k_{21} - a_{n-1} M_2 \\ k_2 - LM_2 & ; & -[\lambda_2 - Lk_{21}] - a_{n-1}[k_2 - LM_2] \end{bmatrix}$$

$$= M_S^* \begin{bmatrix} k_2 - M_2 & ; & [k_{21} + a_{n-1} M_2] - [\lambda_2 + a_{n-1} k_2] \\ M_2 & ; & -k_{21} - a_{n-1} M_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} M & M - K_2 \\ K_1 & K_1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{21} - \lambda_2 & k_2 - M_2 \\ -k_{21} & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Ceci donne aussi :

$$\eta_2 M_S^* = M_{u_1} \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 & M_2 - k_2 \\ k_{21} & k_{21} - \lambda_2 \end{bmatrix}$$

si l'on suppose que la matrice :

$$M_{u_2} = \begin{bmatrix} M_2 & M_2 - k_2 \\ k_{21} & k_{21} - \lambda_2 \end{bmatrix}$$

vérifie $\det M_{u_2} = \varepsilon_2 \eta_2$

On a en particulier les déterminants :

$$\det \eta_2 M_S^* = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -\det M_{u_1} \det M_{u_2} = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \eta_1 \eta_2$$

Ceci impose : $\eta_1 = \eta_2$

On note η cette valeur commune.
Le calcul effectif du produit valant $\eta M_S x$ est faisable.
Il donne diverses relations telle :

(a_3'') : $\varepsilon_2 \eta M_1 = M k_2 - M_2 K_2$

En comparant à la relation (a_3) disponible ici, et puisque $M_1 > 0$,
on voit que l'on a : $\eta = 1$.
Toutes les vérifications nécessaires étant évidentes, on peut ainsi énoncer :

THEOREME XIII.1

Pour toute solution $(m, m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^3$ vérifiant $m > 0$, $m_1 > 0$, $m_2 \neq 0$, d'une équation diophantienne :

$$m^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 = (b+1-r) m m_1 m_2$$

où
$$\begin{cases} \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{+1, -1\} \\ b \in \mathbb{N} \\ r \in \mathbb{Q} \text{ vérifiant } -1 < r < 1 \\ r(m, m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^3 \end{cases}$$

On a :

(1) $\text{pgcd}(m, m_1) = \text{pgcd}(m_1, m_2) = \text{pgcd}(m_2, m) = d \in \mathbb{N}^*$

(2) En posant $M = \frac{m}{d}$, $M_1 = \frac{m_1}{d}$, $M_2 = \frac{m_2}{d}$, $L = (b+1-r)d \in \mathbb{N}^*$

on obtient la relation diophantienne :

$$M^2 + \varepsilon_2 M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2 = L M M_1 M_2$$

où $\text{pgcd}(M, M_1) = \text{pgcd}(M_1, M_2) = \text{pgcd}(M_2, M) = 1$.

(3) Hors les cas particuliers qui correspondent à la situation standard, on peut construire une suite $S = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ de nombres de $\mathbb{N}^*$ telle que l'on ait :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \varepsilon_2 = (-1)^n \\ M_S = \begin{bmatrix} M & K_1 \\ M - K_2 & K_1 - 1 \end{bmatrix} \\ S \text{ suite antidrome } (K_1 = K_2) \\ S^* = (S_1^* \; a_{n-i} \; S_2^*) \end{cases}$$

et deux matrices :

$$\begin{cases} M_{u_1} = \begin{bmatrix} M_1 & M_1 - k_{12} \\ k_{11} & k_{11} - 1_{x_1} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^* \\ M_{u_2} = \begin{bmatrix} M_2 & M_2 - k_2 \\ k_{21} & k_{21} - 1_{x_2} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})^* \end{cases}$$

vérifiant :
$$\begin{cases} \det M_{u_1} = \varepsilon_1 \\ \det M_{u_2} = \varepsilon_2 \\ M_{S^*} = M_{u_1} \begin{bmatrix} a_{n-i} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{u_2} \end{cases}$$

De plus,

. la forme de MARKOFF F_θ associée à S est indéfinie et vérifie :

(F_1) : $F_\theta(K_1, M) = F_\theta(K_2 - LM, M) = \varepsilon_1\varepsilon_2$

(F_2) : $F_\theta(k_1, M_1) = -\varepsilon_1$

(F_3) : $F_\theta(k_2 - LM_2, M_2) = -\varepsilon_2$

. la relation de MARKOFF généralisée (cf. Théorème II.2) associée à F_θ n'est autre que la relation :

(M_1) : $\varepsilon_1 M^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 M_1^2 + (\varepsilon_1 M_2)^2 = LMM_1(\varepsilon_1 M_2)$

Elle est équivalente à la relation diophantienne de départ :

$$M^2 + \varepsilon_2 M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2 = LMM_1 M_2$$

. On a de nombreuses relations entre les paramètres introduits telles les suivantes :

(a_1) : $\varepsilon_1 M_2 = M_1 K_1 - Mk_1$

(a_2) : $\varepsilon_1 k_2 = M_1 \rceil - K_2 k_1$

(a_3) : $\varepsilon_2 M_1 = Mk_2 - M_2 K_2$

(a_4) : $\varepsilon_2 k_1 = K_1 k_2 - M_2 \rceil$

(d_1) : $K_1 K_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 = M \rceil$

(d_2) : $k_1 k_{12} - M_1 \rceil_{x_1} = \varepsilon_1$

(d_3) : $k_2 k_{21} - M_2 \rceil_{x_2} = \varepsilon_2$

(c_1) : $M = (a_{n-i} + 1)M_1 M_2 + M_1 k_{21} - M_2 k_{12}$

(c_2) : $K_1 = (a_{n-i} + 1)M_2 k_1 + k_1 k_{21} - M_2 \rceil_{x_1}$

(c_3) : $K_2 = (a_{n-i} + 1)M_1 k_2 - k_{12} k_2 + M_1 \rceil_{x_2}$

(c_4) : $\rceil = (a_{n-i} + 1)k_1 k_2 + k_1 \rceil_{x_2} - k_2 \rceil_{x_1}$

(a_5) : $M = LM_1 M_2 + M_2 k_1 - M_1 k_2$

B.2 - Des relations supplémentaires

On peut compléter le dernier résultat par diverses relations : Ainsi, on remarque qu'en effectuant le produit de matrices qui a conduit à la définition de M_{u_2} :

$$\varepsilon_2 M_{u_1} = \begin{bmatrix} \varepsilon_2 M_1 ; & \varepsilon_2(M_1 - k_{12}) \\ \varepsilon_2 k_1 ; & \varepsilon_2(k_1 - \rceil_{x_1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_2 M & ; k_{21}K_2 - M\rceil_{x_2} - a_{n-i}\,\varepsilon_2 M \\ \varepsilon_2 k_1 & ; k_{21}\rceil - K_1\rceil_{x_2} - a_{n-i}\,\varepsilon_2 k_1 \end{bmatrix}$$

Mais pour que cela soit assuré, il faut que l'on ait :

$$(s_1) : \begin{cases} \varepsilon_2 M_1 - \varepsilon_2 k_{12} = k_{21} K_2 - M \rceil_{x_2} \\ \varepsilon_2 k_1 - \varepsilon_2 \rceil_{x_1} = k_{21} \rceil - K_1 \rceil_{x_2} \end{cases}$$

Et par élimination, puisque $\rceil_{x_2}$ existe, il faut :

$$k_{21}(M \rceil - K_1 K_2) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 k_{12}$$
$$= \varepsilon_2 [(a_{n-i} + 1)(M k_1 - M_1 K_1) + K_1 k_{12} - M \rceil_{x_1}]$$

C'est-à-dire encore :

$$(f_1) : \varepsilon_1 k_{21} = (a_{n-i} + 1)(M k_1 - M_1 K_1) + (K_1 k_{12} - M \rceil_{x_1})$$

De même, à partir de la relation définissant M_{u_2} :

$$-\varepsilon_1 M_{u_2} = \begin{bmatrix} k_1 & ; & -M_1 \\ \rceil_{x_1} - (a_{n-i} + 1) k_1 & ; & (a_{n-i} + 1) M_1 - k_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & M - K_2 \\ K_1 & K_1 - \rceil \end{bmatrix}$$

En effectuant ce produit de matrices, et en comparant avec (a_1) et (a_2), on obtient :

$$(s_2) : \begin{cases} \varepsilon_1 (a_{n-i} + 1) M_2 + \varepsilon_1 k_{21} = k_{12} K_1 - M \rceil_{x_1} \\ \varepsilon_1 (a_{n-i} + 1) k_2 + \varepsilon_1 \rceil_{x_2} = k_{12} \rceil - K_2 \rceil_{x_1} \end{cases}$$

Par élimination, puisque $\rceil_{x_1}$ existe :

$$k_{12}(K_1 K_2 - M \rceil) = -k_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2$$
$$= \varepsilon_1 [(a_{n-i} + 1)(M_2 K_2 - M k_2) + (k_{21} K_2 - M \rceil_{x_2})]$$

C'est-à-dire encore :

$$(f_2) : -\varepsilon_2 k_{12} = (a_{n-i} + 1)(M_2 K_2 - M k_2) + (K_2 k_{21} - M \rceil_{x_2})$$

La comparaison de (f_1) et (f_2) donne :

$$(k) : \begin{cases} k_{12} = \frac{1}{\rceil} [(a_{n-i} + 1) \varepsilon_1 k_2 + \rceil_{x_1} K_2 + \rceil_{x_2} \varepsilon_1] \\ k_{21} = \frac{1}{\rceil} [(a_{n-i} + 1) \varepsilon_2 k_1 - \rceil_{x_1} \varepsilon_2 + \rceil_{x_2} K_1] \end{cases}$$

Et aussi, en inversant :

$$(\rceil) : \begin{cases} \rceil_{x_1} = \frac{1}{M}(K_1 k_{12} - \varepsilon_1 k_{21} - \varepsilon_1 M_2 (a_{n-i} + 1)) \\ \rceil_{x_2} = \frac{1}{M}(\varepsilon_2 k_{12} + K_2 k_{21} - \varepsilon_2 M_1 (a_{n-i} + 1)) \end{cases}$$

Ceci permet d'énoncer, en complément du résultat précédent :

THEOREME XIII.2

Dans la situation standard, on a :

(s_{11}) : $(a_{n-i}+1)\varepsilon_2 M_1 - \varepsilon_2 k_{12} = k_{21}K_2 - M\rceil_{x_2}$

(s_{12}) : $(a_{n-i}+1)\varepsilon_2 k_1 - \varepsilon_2 \rceil_{x_1} = k_{21}\rceil - K_1\rceil_{x_2}$

(s_{21}) : $\varepsilon_1(a_{n-i}+1)M_2 + \varepsilon_1 k_{21} = k_{12}K_1 - M\rceil_{x_1}$

(s_{22}) : $\varepsilon_1(a_{n-i}+1)k_2 + \varepsilon_1\rceil_{x_2} = k_{12}\rceil - K_2\rceil_{x_1}$

(f_1) : $\varepsilon_1 k_{21} = (a_{n-i}+1)(Mk_1 - M_1K_1) + (K_1k_{12} - M\rceil_{x_1})$

(f_2) : $\varepsilon_2 k_{12} = (a_{n-i}+1)(Mk_2 - M_2K_2) - (K_2k_{21} + M\rceil_{x_2})$

$$(k_{12}) : k_{12} = \frac{1}{\rceil}[(a_{n-i}+1)\varepsilon_1 k_2 + \rceil_{x_1}K_2 + \rceil_{x_2}\varepsilon_1]$$

$$(k_{21}) : k_{21} = \frac{1}{\rceil}[(a_{n-i}+1)\varepsilon_2 k_1 - \rceil_{x_1}\varepsilon_2 + \rceil_{x_2}K_1]$$

$$(\rceil_{x_1}) : \rceil_{x_1} = \frac{1}{M}[K_1k_{12} - \varepsilon_1 k_{21} - (a_{n-i}+1)\varepsilon_1 M_2]$$

$$(\rceil_{x_2}) : \rceil_{x_2} = \frac{1}{M}[\varepsilon_2 k_{12} + K_2k_{21} - (a_{n-i}+1)\varepsilon_2 M_1]$$

Si l'on reconsidère maintenant les développements qui précèdent, on constate que la décomposition $S^* = (S_1^* \; a_{n-i} \; S_2^*)$ n'a en réalité été utilisée qu'en ayant recours à la matrice :

$$M_{S_1^*} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_1 & \tilde{M}_1 - \tilde{k}_{12} \\ \tilde{k}_1 & \tilde{k}_1 - \tilde{\rceil}_{x_1} \end{bmatrix}$$

et aux deux points associés :

$$\begin{cases} \Omega_i(\tilde{k}_1, \tilde{M}_1) \\ \Omega_{i-1}(\tilde{k}_1 - \tilde{\rceil}_{x_1} \; ; \; \tilde{M}_1 - \tilde{\lambda}_{12}) \end{cases}$$

On aurait pu envisager d'utiliser $M_{S_2^*} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_2 & \tilde{M}_2 - \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{21} - \tilde{\rceil}_{x_2} \end{bmatrix}$

et les deux points :

$$\begin{cases} \Omega_{i-n-2}(\varepsilon_2[\tilde{k}_2 - L\tilde{M}_2] \; ; \; \varepsilon_2 \tilde{M}_2) \\ \Omega_{i-n-3}(-\varepsilon_2([\tilde{\rceil}_{x_2} - L\tilde{k}_{21}] + a_{n-i}[\tilde{k}_2 - L\tilde{M}_2]) ; -\varepsilon_2[\tilde{k}_{21} + a_{n-i}\tilde{M}_2]) \end{cases}$$

Avec l'équivalence des relations (a_1) et (a_2), on trouve :

$$\varepsilon_1 \begin{bmatrix} \tilde{k}_2 - L\tilde{M}_2 \\ \tilde{M}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_1] - K_2 \tilde{k}_1 - L\tilde{M}_1 K_1 + LM\tilde{k}_1 \\ \tilde{M}_1 K_1 - M\tilde{k}_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} LM - K_2 & ; & -(LK_1 -]) \\ -M & ; & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 \\ \tilde{M}_1 \end{bmatrix}$$

C'est-à-dire en inversant la matrice 2 x 2 :

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_1 \\ \tilde{M}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & ; & LK_1 -] \\ M & ; & LM - K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_2 (\tilde{k}_2 - L\tilde{M}_2) \\ \varepsilon_2 \tilde{M}_2 \end{bmatrix}$$

On voit apparaître la matrice $g = \begin{bmatrix} K_1 & ; & LK_1 -] \\ M & ; & LM - K \end{bmatrix}$ qui confirme bien que le point $\Omega_{i-n-2}(\varepsilon_2 [\tilde{k}_2 - L\tilde{M}_1] ; \varepsilon_2 \tilde{M}_2)$ est bien celui qui doit être considéré.

Au moyen des formules vues avant, on a :

$$\Omega_{i-n-2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} LM_2 - \tilde{k}_2 & \tilde{M}_2 \\ L\tilde{k}_{21} - \tilde{l}_{\lambda_2} & \tilde{k}_{21} \end{bmatrix} \Omega_0 (0,1)$$

$$= -\varepsilon_2 \begin{bmatrix} -(L\tilde{k}_{21} - \tilde{l}_{\lambda_2}) & ; & L\tilde{M}_2 - \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_{21} & ; & -\tilde{M}_2 \end{bmatrix} \Omega_0 (0,1)$$

Et l'égalité qui permet de confirmer les coordonnées de Ω_{i-n-3} :

$$\Omega_{i-n-3} = -\varepsilon_2 \begin{bmatrix} L\tilde{M}_2 - \tilde{k}_2 & ; & (\tilde{l}_{\lambda_2} - L\tilde{k}_{21}) + a_{n-i}(\tilde{k}_2 - L\tilde{M}_2) \\ -\tilde{M}_2 & ; & \tilde{k}_{21} + a_{n-i}\tilde{M}_2 \end{bmatrix} \Omega_0 (0,1)$$

Ce point se transforme par g en le point $\Omega_{i-1}(\tilde{k}_1 - \tilde{l}_{\lambda_1} ; \tilde{M}_1 - \tilde{k}_{12})$.

Ceci se traduit par l'égalité :

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_1 - \tilde{l}_{\lambda_1} \\ \tilde{M}_1 - \tilde{k}_{12} \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} -\varepsilon_2 ([\tilde{l}_{\lambda_2} - L\tilde{k}_{21}] + a_{n-i}[\tilde{k}_2 - L\tilde{M}_2]) \\ -\varepsilon_2 [\tilde{k}_{21} + a_{n-i}\tilde{M}_2] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\varepsilon_2 [K_1 \tilde{l}_{\lambda_2} -] \tilde{k}_{21}) + a_{n-i} (K_1 \tilde{k}_2 -] \tilde{M}_2) \\ -\varepsilon_2 [M \tilde{l}_{\lambda_2} - K_2 \tilde{k}_{21}) + a_{n-i} (M\tilde{k}_2 - K_2 \tilde{M}_2)] \end{bmatrix}$$

En comparant cette dernière expression avec :

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_1 \\ \tilde{M}_1 \end{bmatrix} = g \begin{bmatrix} \varepsilon_2 (\tilde{k}_2 - L\tilde{M}_2) \\ \varepsilon_2 \tilde{M}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_2 (\tilde{k}_2 K_1 -] \tilde{M}_2) \\ \varepsilon_2 (M\tilde{k}_2 - K_2 \tilde{M}_2) \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$M_{S_1^*} = \varepsilon_2 \begin{bmatrix} M\tilde{k}_2 - K_2\tilde{M}_2 & K_2\tilde{k}_{21} - M\tilde{\lambda}_{x_2} \\ K_1\tilde{k}_2 - \lambda\tilde{M}_2 & \lambda\tilde{k}_{21} - K_1\tilde{\lambda}_{x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit :

$$M_{S_1^*} \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_2 \begin{bmatrix} K_2 & -M \\ \lambda & -K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_{21} & -\tilde{M}_2 \\ \lambda_{x_2} & -\tilde{k}_2 \end{bmatrix}$$

Ou encore :

$$M_{S_1^*} \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{S_2^*} = \begin{bmatrix} M & M - K_2 \\ K_1 & K_1 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$= M_{S^*}$$

On retrouve l'égalité du Théorème XIII.1.

En revenant alors aux calculs faits avant :

$$\begin{bmatrix} M_2 & ; -k_{21} - (a_{n-1})M_2 \\ k_2 - LM_2 & ; -[\lambda_{x_2} - Lk_{21}] - (a_{n-1})[k_2 - LM_2] \end{bmatrix}$$

$$= (M_{S^*} \begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})^{e+1} \begin{bmatrix} \tilde{M}_2 & ; -\tilde{k}_{21} - a_{n-1}\tilde{M}_2 \\ \tilde{k}_2 - L\tilde{M}_2 & ; -[\tilde{\lambda}_{x_2} - L\tilde{k}_{21}] - a_{n-1}[\tilde{k}_2 - L\tilde{M}_2] \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{bmatrix} M_2 & ; -k_{21} - (a_{n-1})M_2 \\ k_2 - LM_2 & ; -[\lambda_{x_2} - Lk_{21}] - (a_{n-1})[k_2 - LM_2] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} M_2 & ; -k_{21} \\ k_2 - LM_2 & ; Lk_{21} - \lambda_{x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -(a_{n-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Et :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 & ; -k_{21} \\ k_2 - LM_2 & ; Lk_{21} - \lambda_{x_2} \end{bmatrix}^{-1} = \varepsilon_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Lk_{21} - \lambda_{x_2} & ; k_{21} \\ LM_2 - k_2 & ; M_2 \end{bmatrix}$$

$$= \varepsilon_2 \begin{bmatrix} LM_2 - k_2 & ; M_2 \\ Lk_{21} - \lambda_{x_2} & ; k_2 \end{bmatrix}$$

$$= \varepsilon_2 M_{U_2} \begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi l'égalité :

$$\begin{bmatrix} M_2 & ; -k_{21} - (a_{n-j})M_2 \\ k_2 - LM_2 & ; -[\ell_{x_2} - Lk_{21}] - (a_{n-j})[k_2 - LM_2] \end{bmatrix}$$

$$= \left(\varepsilon \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{U_2} \begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -(a_{n-j}) \end{bmatrix}$$

On trouve une relation comparable avec $\tilde{M}_2$, $\tilde{k}_2$, $\tilde{k}_{21}$, $\tilde{\ell}_{x_2}$ et $M_{S_2^*}$.
En substituant dans la relation vue ci-dessus, il vient :

$$M_{U_2} = M_{S_2^*} \left(\begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{S^*} \right)^{-e-1}$$

Cette relation est comparable à l'égalité vue avant :

$$M_{U_1} = \left(M_{S^*} \begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{e+1} M_{S_1^*}$$

Elle redonne, à partir de l'expression $S^* = S_1^* \, a_{n-j} \, S_2^*$, l'égalité du Théorème XIII.1 :

$$M_{S^*} = M_{U_1} \begin{bmatrix} a_{n-j} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{U_2}$$

THEOREME XIII.3
Dans la situation standard, on a :

$$M_{U_1} = \left(M_{S^*} \begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{e+1} M_{S_1^*} \quad \text{où } M_{S_1^*} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_1 & \tilde{M}_1 - \tilde{k}_{12} \\ \tilde{k}_1 & \tilde{k}_1 - \tilde{\ell}_{x_1} \end{bmatrix}$$

$$M_{U_2} = M_{S_2^*} \left(\begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M \right)^{-e-1} \quad \text{où } M_{S_2^*} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_2 & \tilde{M}_2 - \tilde{k}_2 \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{21} - \tilde{\ell}_{x_2} \end{bmatrix}$$

B.3 - Une nouvelle relation de MARKOFF

On est maintenant en mesure d'établir une nouvelle relation de MARKOFF.
Considérons les nombres :

$$r = r(S) = \frac{K_1 - K_2}{M}$$

$$r_1 = r(M_{U_1}) = \frac{k_1 - k_{12}}{M_1}$$

$$r_2 = r(M_{U_2}) = \frac{k_{21} - k_2}{M_2}$$

On trouve :

$$r_1 + r_2 - r = \frac{Mk_1 - K_1 M_1}{MM_1} + \frac{K_2 M_2 - Mk_2}{MM_2} + \frac{M_1 k_{21} - M_2 k_{12}}{M_1 M_2}$$

$$= \frac{-\varepsilon_1 M_2}{MM_1} - \frac{\varepsilon_2 M_1}{MM_2} + \frac{M - (a_{n-1} + 1)M_1 M_2}{M_1 M_2}$$

(avec les relations $(a_1)(a_3)$ et (c_1) du Théorème XIII.1).

Soit :

$$(M_2) : M^2 - \varepsilon_2 M_1^2 - \varepsilon_1 M_2^2 = (a_{n-1} + 1 + r_1 + r_2 - r)MM_1 M_2$$

Ceci permet d'énoncer, puisque l'on a r = 0 :

THEOREME XIII.4

Dans les conditions des théorèmes précédents, on a la relation :

$$(M_2) : M^2 - \varepsilon_2 M_1^2 - \varepsilon_1 M_2^2 = (a_{n-1} + 1 + r_1 + r_2)MM_1 M_2$$

et aussi :

$$1 = \frac{(L-1) + 1 + \frac{k_1}{M_1} - \frac{k_2}{M_2}}{a_{n-1} + 1 + \frac{k_{12}}{M_2} - \frac{k_{12}}{M_1}}$$

La dernière égalité s'établit en notant que la comparaison de (M_1) et (M_1) donne : $2(\varepsilon_2 M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2) = (L - a_{n-1} - 1 - r_1 - r_2)MM_1 M_2$
Or, avec (a_1) et (a_3), on a aussi :

$$\varepsilon_2 M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2 = \left(\frac{k_2}{M_2} - \frac{k_1}{M_1}\right)MM_1 M_2$$

La comparaison des deux égalités permet de conclure.

B.4 - Fin de l'analyse

Maintenant, si l'on compare les deux relations (c_1) et (a_5), on obtient :

$$(a_{n-1} + 1 - L)M_1 M_2 + M_1(k_{21} + k_2) = M_2(k_1 + k_{12})$$

Avec la condition : $\text{pgcd}(M_1, M_2) = 1$, il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ et $\mu \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\begin{cases} k_1 + k_{12} = \lambda M_1 = (\mu + a_{n-1} + 1 - L)M_1 \\ k_2 + k_{21} = (\lambda - a_{n-1} - 1 + L)M_2 = \mu M_2 \end{cases}$$

- Si e > -1, la matrice M_{U_1} est d'après le Théorème XIII.3 la matrice définie par la suite d'éléments de $\tilde{\mathbb{N}}^*$ notée :

$$U_1 = ((S^*, L-1)_{e+1}, S_1^*) \qquad (e+1 > 0)$$

On a donc, avec les inégalités habituelles valables pour les matrices associées à des suites :

$$\begin{cases} 0 < M_1 - k_{12} \leq M_1 \\ 0 \leq M_1 - k_1 < M_1 \end{cases}$$

Soit par addition $0 < k_1 + k_{12} < 2M_1$

Ceci impose que l'on ait : $\lambda = 1$ et $\rho = L - a_{n-1}$

Soit : $k_1 + k_{12} = M_1$

On trouve aussi dans ce cas : $k_1 > 0$ et $k_{12} \geq 0$

Pour la matrice $M_{U_2} = M_{S_2^*} \left(\begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{S^*} \right)^{-e-1}$

On a :

$$M_{U_2}^{-1} = \left(\begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{S^*} \right)^{e} \begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{S_1^*} \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= M_{V_2}$$

où V_2 est la suite d'éléments de $\tilde{\mathbb{N}}^*$:

$$V_2 = ((L-1, S^*)_e ; L-1 ; S_1^* , a_{n-1}) \qquad (e \geq 0)$$

Ceci donne :

$$M_{U_2}^{-1} = M_{V_2} = \varepsilon_2 \begin{bmatrix} k_{21} - \lambda_2 & k_2 - M_2 \\ -k_{21} & M_2 \end{bmatrix}$$

Avec les inégalités habituelles valables pour les matrices associées à des suites, on trouve les inégalités :

$$\begin{cases} 0 < \varepsilon_2 k_2 - \varepsilon_2 M_2 \leq \varepsilon_2 k_{21} - \varepsilon_2 \lambda_2 & (0 < K_1 \leq m) \\ 0 \leq 2\varepsilon_2 k_{21} - \varepsilon_2 \lambda_2 < \varepsilon_2 k_{21} - \varepsilon_2 \lambda_2 & (0 \leq K_2 < m) \\ -1 \leq \varepsilon_2 k_2 - 2\varepsilon_2 M_2 \leq \varepsilon_2 k_2 - \varepsilon_2 M_2 & (-1 \leq \lambda \leq K_1) \end{cases}$$

Avec la dernière condition, on retrouve : $\varepsilon_2 M_2 \geq 0$

Avec l'avant dernière : $\varepsilon_2 k_{21} < 0$

Avec la première : $\begin{cases} \varepsilon_2 \lambda_2 < 0 \\ \varepsilon_2 k_2 < 0 \end{cases}$

La condition établie ci-dessus : $k_1 + k_{12} = M_1$
donne pour M_{U_1} la forme :

$$M_{U_1} = \begin{bmatrix} M_1 & k_1 \\ k_1 & k_1 - \gamma_{x_1} \end{bmatrix}$$

Il en résulte que la suite U_1 est palindrome : $M^*_{U_1} = M_{U_1}$.
Avec : $U_1 = (S_1^*, a_{n-i}, S_2^*, L-1, (S^*, L-1)_e, S_1^*)$ où $e \geqslant 0$
on obtient, par palindromie les conditions :

$$a_{n-i} = L-1 \quad ; \quad S_1 = S_1^* \quad ; \quad S_2 = S_2^*$$

Ceci donne aussi : $\rho = 1$

Soit : $k_2 + k_{21} = M_2$

et $$M_{U_2} = \begin{bmatrix} M_2 & k_{21} \\ k_{21} & k_{21} - \gamma_{x_2} \end{bmatrix}$$

- <u>Si e < -1</u>, la matrice M_{U_2} est d'après le Théorème XIII.3, la matrice définie par la suite d'éléments de $\mathbb{N}^*$ notée :

$$U_2 = (S_2^*, (L-1, S^*)_{-e-1})$$

On a donc, avec les inégalités habituelles valables pour les matrices associées à des suites :

$$\begin{cases} 0 < M_2 - k_2 \leqslant M_2 \\ 0 \leqslant M_2 - k_{21} < M_2 \end{cases}$$

Et par addition $0 < k_2 + k_{21} < 2M$

Ceci impose que l'on ait $\rho = 1$ et $d = a_{n-i} + 2 - L$
Soit $k_2 + k_{21} = M_2$
avec de plus, $k_2 \geqslant 0$ et $k_{21} > 0$

Avec la matrice M_{U_1}, on a :

$$M^{-1}_{U_1} = \begin{bmatrix} a_{n-i} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{S_2^*} \begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \left(M_{S^*} \begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-e-2}$$

En introduisant la suite d'éléments de $\mathbb{N}^*$:

$$V_1 = (a_{n-i}, S_2^*, L-1, (S^*, L-1)_{-e-2}) \qquad (-e-2 \geqslant 0)$$

On a :

$$M_{U_1^{-1}} = M_{V_1} = \varepsilon_1 \begin{bmatrix} k_1 - \gamma_{x_1} & ; & k_{12} - M_1 \\ -k_1 & ; & M_1 \end{bmatrix}$$

Avec les inégalités habituelles :

$$0 < \varepsilon_1 k_{12} - \varepsilon_1 M_1 \leq \varepsilon_1 k_1 - \varepsilon_1 l_{x_1} \qquad (0 < K_1 \leq m)$$

$$0 \leq 2\varepsilon_1 k_1 - \varepsilon_1 l_{x_1} < \varepsilon_1 k_1 + \varepsilon_1 l_{x_1} \qquad (0 \leq K_2 < m)$$

$$-1 \leq \varepsilon_1 k_{12} - 2\varepsilon_1 M_1 \leq \varepsilon_1 k_{12} - \varepsilon_1 M_1 \qquad (-1 \leq l \leq K_1)$$

On trouve avec la dernière condition : $\varepsilon_1 M_1 \geqslant 0$

Ceci impose, puisque M_1 est supposé positif : $\varepsilon_1 = 1$

Avec la seconde relation : $k_1 < 0$

Avec la première : $\begin{cases} l_{x_1} < 0 \\ k_{12} > 0 \end{cases}$

La condition établie ci-dessus : $k_2 + k_{21} = M_2$
donne pour M_{u_2} la forme :

$$M_{u_2} = \begin{bmatrix} M_2 & k_{21} \\ k_{21} & k_{21} - l_{x_2} \end{bmatrix}$$

Il en résulte que la suite u_2 est palindrome : $M_{u_2} = M^*_{u_2}$.

Avec $u_2 = (S_2^*, (L-1, S^*)_{-e-2}, L-1, S_1^*, a_{n-i}, S_2^*)$

où $-e-2 \geq 0$, on obtient par palindromie les conditions :

$$a_{n-i} = L-1 \qquad S_2 = S_2^* \qquad S_1 = S_1^*$$

Ceci donne aussi $\lambda = 1$

Soit $k_1 + k_{12} = M_1$

et $$M_{u_1} = \begin{bmatrix} M_1 & k_1 \\ k_1 & k_1 - l_{x_1} \end{bmatrix}$$

- <u>Si e = -1</u>, on trouve $M_{u_1} = M_{S_1^*}$ et $M_{u_2} = M_{S_2^*}$
En considérant alors les deux suites $u_1 = S_1^*$ et $u_2 = S_2^*$, on obtient par la même méthode que précédemment les deux conditions :

$$\begin{cases} k_1 + k_{12} = M_1 \\ k_2 + k_{21} = M_2 \end{cases}$$

et les expressions :

$$M_{u_1} = \begin{bmatrix} M_1 & k_1 \\ k_1 & k_1 - l_{x_1} \end{bmatrix} = M_{S_1^*}$$

$$M_{u_2} = \begin{bmatrix} M_2 & k_{21} \\ k_{21} & k_{21} - l_{x_2} \end{bmatrix} = M_{S_2^*}$$

qui montrent que l'on a : $S_1 = S_1^*$ et $S_2 = S_2^*$
Dans ce cas, le Théorème XIII.4 est directement applicable. Il donne :

$$1 = \frac{(L-1) + 1 + \frac{k_1}{M_1} - \frac{k_2}{M_2}}{(a_{n-1} + 1 + \frac{k_{21}}{M_2} - \frac{k_{12}}{M_1})} = \frac{L + \frac{k_1}{M_1} - \frac{k_2}{M_2}}{a_{n-1} + 1 + \frac{k_1}{M_1} - \frac{k_2}{M_2}}$$

C'est-à-dire : $a_{n-1} = L - 1$

Aussi, peut-on énoncer, dans tous les cas :

THEOREME XIII.5

Dans la situation standard, on a :

(1) $a_{n-1} = L - 1$

soit $S^* = (S_1^*, L-1, S_2^*)$ suite antidrome

et $$M_{S^*} = M_{u_1} \begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{u_2}$$

(2) $k_1 + k_{12} = M_1$

(3) $k_2 + k_{21} = M_2$

(4) $S_1 = S_1^*$ suite palindrome

(5) $S_2 = S_2^*$ suite palindrome

(6) On peut écrire : $$\begin{cases} M_{u_1} = \begin{bmatrix} M_1 & k_1 \\ k_1 & k_1 - \lambda_1 \end{bmatrix} \\ M_{u_2} = \begin{bmatrix} M_2 & k_{21} \\ k_{21} & k_{21} - \lambda_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

avec les divers cas suivants :

(6.1) Si $e+1 > 0$, on a $k_1 > 0$

M_{u_1} est la matrice définie par la suite $u_1 = ((S^*, L-1)_{e+1}, S_1^*)$

$M_{u_2} = M_{V_2}^{-1}$ où V_2 est la suite $V_2 = (((L-1), S^*)_e, (L-1)S_1^*, L-1)$.

(6.2) Si $e+1 < 0$, on a $k_1 < 0$

$M_{u_1} = M_{V_1}^{-1}$ où V_1 est la suite $V_1 = (L-1, S_2^*, L-1, (S^*, L-1)_{-e-2})$

M_{u_2} est la matrice définie par la suite $u_2 = (S_2^*, (L-1), S^*)_{-e-1})$

(6.3) Si $e = -1$, alors on a : $M_{u_1} = M_{S_1^*}$ et $M_{u_2} = M_{S_2^*}$.

Ce résultat permet à son tour d'interpréter l'équation (M_2) donnée par le Théorème XIII.5.

On a en effet : $r_1 = r(M_{u_1}) = \dfrac{k_1 - k_{12}}{M_1} = 2\dfrac{k_1}{M_1} - 1$

$$r_2 = r(M_{u_2}) = \frac{k_{21} - k_2}{M_2} = 1 - 2\frac{k_2}{M_2}$$

$$r = r(S^*) = 0$$

En appliquant la relation (M_2), on trouve :

$$M^2 - \varepsilon_2 M_1^2 - \varepsilon_1 M_2^2 = (L-1+1+r_1+r_2-r)MM_1M_2$$

$$= (L + \frac{2k_1}{M_1} - \frac{2k_2}{M_2})MM_1M_2$$

$$= LMM_1M_2 + 2M(k_1M_2 - k_2M_1)$$

$$= LMM_1M_2 + 2M(M - LM_1M_2)$$

(avec (a_5))

$$\Longleftrightarrow M^2 + \varepsilon_2 M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2 = LMM_1M_2$$

On retombe sur l'équation de départ qui, en sens inverse, établit la validité de la condition (M_2).
On peut donc énoncer :

THEOREME XIII.6

Dans la situation standard, l'équation diophantienne de départ :

$$M^2 + \varepsilon_2 M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2 = LMM_1M_2$$

est équivalente à la relation (M_2) :

$$M^2 - \varepsilon_2 M_1^2 - \varepsilon_1 M_2^2 = (L + r_1 + r_2 - r)MM_1M_2$$

tirée de la relation $M_{S^*} = M_{u_1}\begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{u_2}$

On a en effet : $r_1 = r(M_{u_1}) = 2\dfrac{k_1}{M_1} - 1$ et $r_2 = r(M_{u_2}) = 1 - 2\dfrac{k_2}{M_2}$

ainsi que $r(S^*) = r = 0$.
En particulier, si l'équation diophantienne $M^2 + \varepsilon_2 M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2 = LMM_1M_2$ admet une solution $(M, M_1, M_2) \in \mathbb{Z}^3$ telle que $M > 0$; $M_1 > 0$; $M_2 \neq 0$ et $\text{pgcd}(M, M_1) = \text{pgcd}(M_1, M_2) = \text{pgcd}(M_2, M) = 1$, elle admet aussi, avec $M_{u_1} = M_{S_1^*}$ et $M_{u_2} = M_{S_2^*}$ une solution $(M, M_1, M_2) \in \mathbb{Z}^3$ telle que :
a) $M > 0$; $M_1 > 0$; $M_2 > 0$
b) $M = \text{Max}(M, M_1, M_2) > \text{Max}(M_1, M_2)$
c) $\text{pgcd}(M, M_1) = \text{pgcd}(M_1, M_2) = \text{pgcd}(M_2, M) = 1$

C / CONSTRUCTION D'ARBRES ET APPLICATIONS

C.1 - Considérations générales et définition de solutions régulières

Dans les conditions précédentes, c'est-à-dire dans la situation standard, on peut donner des formules permettant la construction d'arbres.

De manière formelle, à $M_{U_1} = \begin{bmatrix} M_1 & ; & k_1 \\ k_1 & ; & k_1 - \gamma_{x_1} \end{bmatrix}$ on associe

$$M^{\vee}_{U_1} = M_{U_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & ; & M_1 - k_1 \\ k_1 & ; & \gamma_{x_1} \end{bmatrix}$$

On obtient : $r(M^{\vee}_{U_1}) = P(M_{U_1}) = 0$

A la matrice $M_{U_2} = \begin{bmatrix} M_2 & ; & k_{21} \\ k_{21} & ; & k_{21} - \gamma_{x_2} \end{bmatrix}$ on associe

$$M^{\wedge}_{U_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} M_{U_2} = \begin{bmatrix} M_2 & ; & k_{21} \\ M_2 - k_{21} & ; & \gamma_{x_2} \end{bmatrix}$$

On a : $r(M^{\wedge}_{U_2}) = - P(M_{U_2}) = 0$

On trouve donc les conditions :

$$\begin{cases} M_{S^*} = M_{U_1} \begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{U_2} \\ r(M_{S^*}) = r(M^{\vee}_{U_1}) = r(M^{\wedge}_{U_2}) = 0 \end{cases}$$

Ceci permet d'envisager, comme dans le Théorème XII.4 la construction d'un arbre de MARKOFF, avec des formules comparables à $(D_0) - (D_9)$ et $(G_0) - (G_9)$, mais se simplifiant à cause du Théorème XIII.5 sous la forme :

$(M, M_1, M_2) \in \mathbb{Z}^3$
avec ε_1 , ε_2

(M^G, M_1^G, M_2^G)
$= (LMM_1 - \varepsilon_1 M_2 , M_1 , M) \in \mathbb{Z}^3$
avec $\varepsilon_1^G = \varepsilon_1$ et $\varepsilon_2^G = \varepsilon_1\varepsilon_2$

(M^D, M_1^D, M_2^D)
$= (LMM_2 - \varepsilon_2 M_1 , M, M_2)$
avec $\varepsilon_1^D = \varepsilon_1\varepsilon_2$ et $\varepsilon_2^D = \varepsilon_2$

Et par exemple, à droite, la vérification est évidente :

$$(M^5)^2 + \varepsilon_2^5 (M_1^5)^2 + \varepsilon_1^5 (M_2^5)^2 - LM^5 M_1^5 M_2^5 = 0$$

$$\Longleftrightarrow L^2 M^2 M_2^2 - 2\,\varepsilon_2\, LMM_1 M_2 + M_1^2 + \varepsilon_2 M^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\, M_2^2 - L(LMM_2 - \varepsilon_2 M_1)MM_2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \varepsilon_2 M^2 + M_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\, M_2^2 - \varepsilon_2\, LMM_1 M_2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow M^2 + \varepsilon_2 M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2 - LMM_1 M_2 = 0$$

DEFINITION
On dit que (M^5, M_1^5, M_2^5) et (M^6, M_1^6, M_2^6) sont obtenus par la construction de MARKOFF à partir de (M, M_1, M_2).

Inversement, en remontant dans l'arbre, on trouve les formules suivantes :

$$(M^4, M_1^4, M_2^4)$$
$$= (M_1, -\varepsilon_2 M + \varepsilon_2 LM_1 M_2, M_2) \in \mathbb{Z}^3$$
avec $\varepsilon_1^4 = \varepsilon_1\varepsilon_2$ et $\varepsilon_2^4 = \varepsilon_2$

$$(M, M_1, M_2) \in \mathbb{Z}^3$$
avec ε_1 et ε_2

$$(M^3, M_1^3, M_2^3)$$
$$= (M_2, M_1, -\varepsilon_1 M + \varepsilon_1 LM_1 M_2) \in \mathbb{Z}^3$$
avec $\varepsilon_1^3 = \varepsilon_1$ $\varepsilon_2^3 = \varepsilon_1\varepsilon_2$

$$(M, M_1, M_2) \in \mathbb{Z}^3$$
avec ε_1 et ε_2

Et par exemple, sur cette dernière formule, la vérification est facile :

$$(M^3)^2 + \varepsilon_2^3 (M_1^3)^2 + \varepsilon_1^3 (M_2^3)^2 - LM^3 M_1^3 M_2^3 = 0$$

$$\Longleftrightarrow M_2^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\, M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2 - 2\varepsilon_1\, LMM_1 M_2 + \varepsilon_1 L^2 M_1^2 M_2^2 - LM_2 M_1 (-\varepsilon_1 M + \varepsilon_1 LM_1 M_2) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \varepsilon_1 M^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2\, M^2 + M_2^2 - \varepsilon_1\, LMM_1 M_2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow M^2 + \varepsilon_2 M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2 - LMM_1 M_2 = 0$$

Il est bien évident qu'à chaque étape d'une telle construction, le nombre $\text{pgcd}(M,M_1) = \text{pgcd}(M_1,M_2) = \text{pgcd}(M_2,M) = 1$ se conserve.

A partir d'une solution (M,M_1,M_2) associée aux relations $M_{u_1} = M_{S_1^*}$ et $M_{u_2} = M_{S_2^*}$, selon le Théorème XIII.6, les constructions qui précèdent donnent :

THEOREME XIII.7

Dans la situation standard, si l'équation diophantienne $M^2 + \varepsilon_2 M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2 = LMM_1M_2$ admet une solution $(M,M_1,M_2) \in \mathbb{Z}^3$ telle que :

$$\begin{cases} M > 0 \qquad M_1 > 0 \qquad M_2 \neq 0 \\ \text{pgcd}(M,M_1) = \text{pgcd}(M_1,M_2) = \text{pgcd}(M_2,M) = 1 \end{cases}$$

elle en admet une infinité telles que :

a) $M > 0 \qquad M_1 > 0 \qquad M_2 > 0$

b) $M = \text{Max}(M,M_1,M_2) > \text{Max}(M_1,M_2)$

c) $\text{pgcd}(M,M_1) = \text{pgcd}(M_1,M_2) = \text{pgcd}(M_2,M) = 1.$

On pose à partir de là :

DEFINITION

On appelle solution régulière de l'équation diophantienne $(\mathcal{M})$ tout triplet $(M,M_1,M_2) \in \mathbb{Z}^3$ la vérifiant et tel que de plus :

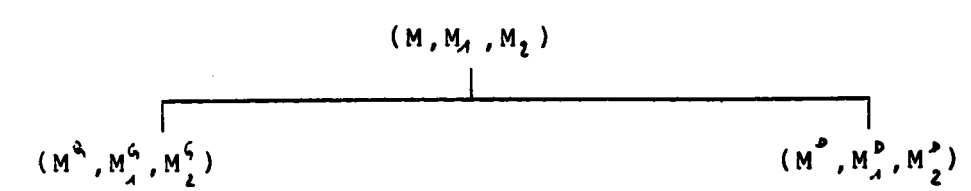
a) $M > 0 \quad M_1 > 0 \quad M_2 > 0$

b) $M = \text{Max}(M,M_1,M_2) > \text{Max}(M_1,M_2)$

c) $\text{pgcd}(M,M_1) = \text{pgcd}(M_1,M_2) = \text{pgcd}(M_2,M) = 1$

Ces trois conditions, adjointes à $(\mathcal{M})$ définissent l'équation diophantienne $(\mathcal{M}\text{reg})$ dont la résolution est équivalente par ce qui précède à celle de $(\mathcal{M})$.

Considérons alors le diagramme :



Si (M,M_1,M_2) est une solution régulière, on a les propriétés suivantes :

(1) $M^{\flat} = LMM_2 - \varepsilon_2 M_1$ vérifie $M^{\flat} M_1 = M^2 + \varepsilon_1 M_2^2 > 0$
et avec $M_1 > 0$, il reste $M^{\flat} > 0$

(2) $M_1^{\flat} = M > 0$

(3) $M_2^{\flat} = M_2 > 0$

(4) $\text{Max}(M_1^{\flat}, M_2^{\flat}) = \text{Max}(M, M_2) = M = M_1^{\flat} < M^{\flat}$
Cette condition résulte par exemple de $LM_2 \geqslant 2$

(5) $\text{pgcd}(M_1^{\flat}, M_2^{\flat}) = \text{pgcd}(M_1, M_2) = 1$

Avec un raisonnement comparable sur $(M^{\natural}, M_1^{\natural}, M_2^{\natural})$, on peut énoncer le résultat suivant qui précise le Théorème XIII.7 :

THEOREME XIII.8
Dans la situation standard, toute solution régulière de l'équation diophantienne $M^2 + \varepsilon_2 M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2 = LMM_1M_2$ vérifiant $LM_2 \geqslant 2$ donne naissance, par la construction de MARKOFF à deux autres solutions régulières des équations diophantiennes auxquelles elles sont associées. On détermine ainsi un arbre de solutions régulières d'équations diophantiennes en nombre fini.

C.2 - Détermination complète des solutions régulières pour $L \geqslant 3$

En remontant dans un tel arbre, et en considérant les valeurs décroissantes $M > 0$, on établit qu'un tel arbre possède nécessairement une racine lorsque l'on suppose $L \geqslant 3$.
Pour cela, on considère les deux transformations :

$$(M, M_1, M_2) \longrightarrow (M^{\prime}, M_1^{\prime}, M_2^{\prime})$$

$$(M, M_1, M_2) \longrightarrow (M^{\prime\prime}, M_1^{\prime\prime}, M_2^{\prime\prime})$$

Elles conservent la condition c).
L'une au moins des deux permet de remonter dans l'arbre en conservant la condition a), à moins que l'on ait la condition :

$$\varepsilon_2 (LM_1 M_2 - M) \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_1 (LM_1 M_2 - M) \leqslant 0$$

C'est-à-dire aussi, de façon équivalente grâce à la relation diphantienne liant M, M_1 et M_2 :

$$M_1^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 M_2^2 \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad M_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 M_1^2 \leqslant 0$$

. Cas α : si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \pm 1$

Il reste $M_1 = M_2 = 0$

Cette condition est exclue en partant d'une solution régulière (M, M_1, M_2). La condition a) se conserve en remontant dans l'arbre.

. Cas β : si $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \pm 1$

Il reste $\begin{cases} M_1^2 \leqslant M_2^2 \\ M_2^2 \leqslant M_1^2 \end{cases}$

Soit $M_1 = M_2$

Et avec l'équation de départ : $M = LM_1M_2$

Avec la condition c) : $M_1 = M_2 = 1 \quad M = L$

Hors les cas que l'on vient de voir, la condition a) se conserve en remontant dans l'arbre par l'une des deux transformations envisagées.

L'examen de la condition b) est alors faisable.

Supposons que l'on ait : $\varepsilon_2(LM_1M_2 - M) > 0$ et considérons $(M^d, M_1^d, M_2^d) = (M_1, \varepsilon_2(LM_1M_2 - M), M_2)$ en remontant dans l'arbre, les conditions c) et a) étant vérifiées.

La condition b) s'écrit :

$$M_1 = \mathrm{Max}(M_1, \varepsilon_2(LM_1M_2 - M), M_2) > \mathrm{Max}(\varepsilon_2(LM_1M_2 - M), M_2)$$

Elle impose $\begin{cases} M_1 > M_2 \\ M_1 > \varepsilon_2(LM_1M_2 - M) > 0 \end{cases}$

C'est-à-dire encore : $\begin{cases} M_1 > M_2 > 0 \\ MM_1 > M_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 M_2^2 > 0 \end{cases}$

De même, avec (M^g, M_1^g, M_2^g), la condition b) s'écrit :

$$\begin{cases} M_2 > M_1 > 0 \\ MM_2 > \varepsilon_1\varepsilon_2 M_1^2 + M_2^2 > 0 \end{cases}$$

La condition b) ne se conserve pas en remontant dans l'arbre lorsque l'on a :

$M_1 = M_2$

ou $M > M_1 > M_2 > 0$ et $M_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 M_2^2 \geqslant MM_1$

ou $M > M_2 > M_1 > 0$ et $\varepsilon_1\varepsilon_2 M_1^2 + M_2^2 \geqslant MM_2$

. Cas 1 : Si $M > M_1 > M_2 > 0$ et $M_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 M_2^2 \geq MM_1$

On doit distinguer plusieurs sous-cas :

* Cas 1.1 : $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$

Il reste $M_1^2 > MM_1$

Soit $M_1 > M$

On trouve une contradiction avec $M > M_1 > M_2 > 0$

* Cas 1.2 : $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$

On considère $\phi(x) = x^2 - LxM_1M_2 + M_1^2 + M_2^2$

et sa racine positive $x = M$

L'autre racine de ce polynôme M' vérifie :

$$\begin{cases} M' = LM_1M_2 - M \\ MM' = M_1^2 + M_2^2 \qquad (\text{soit } M' > 0) \end{cases}$$

Dans le cas que l'on considère, on a $M_1 > M_2$ et

$$\phi(M_1) = M_1^2 - LM_1^2M_2 + M_1^2 + M_2^2 < 0$$

En effet, on suppose ici que l'on a la condition : $L \geq 3$

Il en résulte la situation :

$$M > M_1 > LM_1M_2 - M = M'$$

Soit $MM_1 > MM' = M_1^2 + M_2^2$

On trouve une contradiction avec l'hypothèse faite.

* Cas 1.3 : $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$

On considère $\phi(x) = x^2 - LxM_1M_2 - M_1^2 - M_2^2$

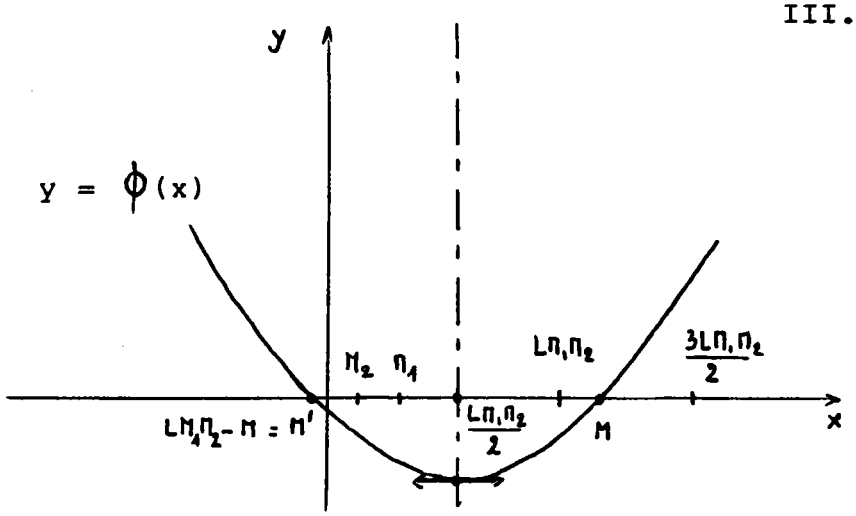
et sa racine positive $x = M$

L'autre racine M' vérifie :

$$\begin{cases} M' = LM_1M_2 - M \\ MM' = -M_1^2 - M_2^2 \end{cases}$$

Elle est négative.

On obtient le diagramme suivant :



En calculant $\phi\left(\frac{3LM_1M_2}{2}\right)$ qui est un nombre strictement positif, on établit que l'on a : $M - LM_1M_2 < \frac{LM_1M_2}{2}$.

Par décroissance de la fonction $y = \phi(x)$ sur le segment $[0 ; \frac{LM_1M_2}{2}]$ il est équivalent d'affirmer que l'on a $\phi(M_1) < \phi(M - LM_1M_2)$ ou la condition : $M_1 > M - LM_1M_2$.

O :
$$\phi(M_1) = -LM_1^2M_2 - M_2^2 < 0$$
$$\phi(M - LM_1M_2) = 2L^2M_1^2M_2^2 - 2LMM_1M_2$$
$$= 2LM_1M_2(LM_1M_2 - M) < 0$$

D'où : $\phi(M_1) < \phi(M - LM_1M_2)$

$\Longleftrightarrow$ $2LMM_1M_2 < LM_1^2M_2 + M_2^2 + 2L^2M_1^2M_2^2$

$\Longleftrightarrow$ $\phi\left(\frac{LM_1^2M_2 + M_2^2 + 2L^2M_1^2M_2^2}{2LM_1M_2}\right) > 0$

$\Longleftrightarrow$ $M_2^4 + 2LM_1^2M_2^3 + 2L^3M_1^4M_2^3 > 2L^2M_1^2M_2^4 + 3L^2M_1^4M_2^2$

$\Longleftrightarrow$ $M_2^2 + 2LM_1^2M_2 + 2L^3M_1^4M_2 > 2L^2M_1^2M_2^2 + 3L^2M_1^4$

Avec la condition $LM_1 > LM_2 \geq 3$, issue du fait que l'on suppose ici que l'on a $L \geq 3$, on trouve :

$$\begin{cases} LM_1^2M_2 > 3M_1^2 \\ LM_1^2M_2 > 2M_2^2 \end{cases}$$

Soit par addition :

$$2LM_1^2M_2 > 2M_2^2 + 3M_1^2$$

ou encore : $2L^3M_1^4M_2 > 2L^2M_1^2M_2^2 + 3L^2M_1^4$

et : $M_2^2 + 2LM_1^2M_2 + 2L^3M_1^4M_2 > 2L^2M_1^2M_2^2 + 3L^2M_1^4$

La condition $M_1 > M - LM_1M_2$ résulte donc de ce qui précède.
Or elle est contradictoire avec la seconde condition de l'hypothèse faite, qui s'écrit aussi : $M - LM_1M_2 \geqslant M_1$.
On trouve donc encore une contradiction qui garantit, pour finir, que le cas 1 est totalement impossible.

. Cas 2 : Si $M > M_2 > M_1 > 0$ et $M_2^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 M_1^2 \geqslant MM_2$

On trouve de même une impossibilité. Ce cas se déduit du cas 1 en échangeant les rôles de M_1 et M_2.

. Cas 3 : Si $M_1 = M_2$

La condition c) impose : $M_1 = M_2 = 1$
Il reste la relation :

$$M^2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = LM$$

* Cas 3.1 : si $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$

On trouve $M = L$

* Cas 3.2 : si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

On trouve $M \mid 2$
Soit deux cas possibles : $M = 1$ avec $1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = L$

$M = 2$ avec $4 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2L$

La condition $L \geqslant 3$ impose $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, et on ne retrouve ainsi que le cas de la Théorie de MARKOFF classique, obtenu pour $L = 3$.

En posant alors :

DEFINITION
On appelle solution singulière de l'équation diophantienne

$$M^2 + \varepsilon_2 M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2 = LM_1M_2$$

tout triplet $(x,1,1)$ racine de cette équation tel que $x \in \mathbb{N}^*$.

On peut énoncer :

THEOREME XIII.9 (Détermination des solutions singulières pour $L \geqslant 3$)
Dans la situation standard, et si l'on suppose de plus que l'on a $L \geqslant 3$, toute solution régulière de l'équation diophantienne

$$M^2 + \varepsilon_2 M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2 = LMM_1M_2 \qquad (L \in \mathbb{N}^* - \{1,2\})$$

se déduit d'une solution singulière par la construction de MARKOFF.
En particulier, on peut distinguer les cas suivants :

(1) Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$

L'équation n'admet pas de solution hors le cas où l'on a $L = 3$. Dans ce cas, on retrouve la Théorie de MARKOFF classique et les deux solutions singulières racines de l'arbre de MARKOFF :

$$(1,1,1)$$
$$(2,1,1)$$

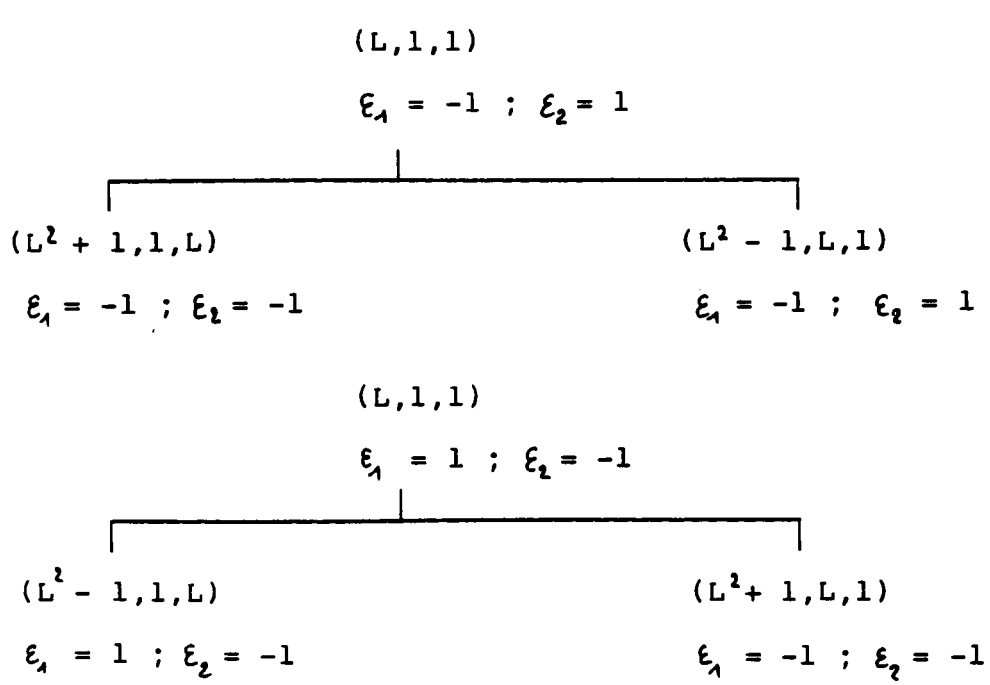
(2) Si l'on n'a pas $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$

Toutes les solutions se déduisent par la construction de MARKOFF de la solution singulière $(L,1,1)$ racine des deux équations :

$$\begin{cases} M^2 - M_1^2 + M_2^2 = LMM_1M_2 \\ M^2 + M_1^2 - M_2^2 = LMM_1M_2 \end{cases}$$

Pour tout $L \in \mathbb{N}^* - \{1,2\}$, on trouve ainsi une infinité de solutions à l'équation diophantienne considérée.

A partir des deux équations mentionnées dans la seconde partie du résultat précédent, on peut considérer les deux arbres en résultant construit à partir de la même racine $(L,1,1)$:



Il est facile de s'assurer qu'ils se déduisent l'un de l'autre par une transformation qui revient sur la racine à permuter M_1 et M_2 (et donc ξ_1 et ξ_2).

THEOREME XIII.10

Dans la situation standard, avec de plus $L \geq 3$, il existe une bijection de l'ensemble des solutions régulières associée à l'équation $M^2 - M_1^2 + M_2^2 = LMM_1M_2$ sur l'ensemble des solutions régulières associé à l'équation :

$$M^2 + M_1^2 - M_2^2 = LMM_1M_2$$

Dans la suite, il suffit donc de se limiter à la considération de l'arbre donné par la seule équation :

$$\begin{cases} M^2 \pm M_1^2 + M_2^2 = LMM_1M_2 & (L \geq 3) \\ M > 0 \quad M_1 > 0 \quad M_2 \neq 0 \\ \text{pgcd}(M, M_1) = \text{pgcd}(M_1, M_2) = \text{pgcd}(M_2, M) = 1 \end{cases}$$

Ses solutions régulières sont déterminées par le Théorème XIII.9. Ses solutions non nécessairement régulières sont déterminées par recours aux expressions matricielles du Théorème XIII.3. Parmi celles-ci, les solutions régulières correspondent au cas où l'on a: $e = -1$.

Dans ce cas, on a : $\begin{cases} U_1 = S_1^* \qquad U_2 = S_2^* \\ r(M_{S_1^*}^{\vee}) = r(M_{S_2^*}^{\wedge}) = r(M_{S^*}) = 0 \end{cases}$

Les solutions régulières sont donc associées à l'arbre obtenu par la construction de MARKOFF sur les suites que l'on envisageait au chapître précédent :

$$X = S^* = (X_1, L-1, X_2) = (S_1^*, L-1, S_2^*)$$

$$X^{\wedge} = (X_1, L-1, \hat{X}) = (X_1, L-1, (\hat{X}_1, L-1, X_2)) \qquad X^{\vee} = (\check{X}, L-1, X_2) = ((X_1, L-1, \check{X}_2)L-1, X_2)$$

Avec, au début de l'arbre :

$X = S^* = (L-1,1)$

$X_1 = \emptyset \quad X_2 = (1)$

$M = L \quad M_1 = M_2 = 1$

$\varepsilon_1 = 1 \quad \varepsilon_2 = -1$

$X^G = (L-1,1,L-2,1)$

$X_1 = \emptyset \quad X_2 = (1,L-2,1)$

$M = L^2 - 1 \quad M_1 = 1 \quad M_2 = L$

$\varepsilon_1 = 1 \quad \varepsilon_2 = -1$

$X^D = (L,L-1,1)$

$X_1 = (L) \quad X_2 = (1)$

$M = L^2 + 1 \quad M_1 = L \quad M_2 = 1$

$\varepsilon_1 = -1 \quad \varepsilon_2 = -1$

On réinterprète ainsi aisément le Théorème XII.8 (avec b = L-1).

On voit aussi sur les suites qui apparaissent l'intérêt qu'il y avait à considérer l'hypothèse $L \geqslant 3$.

Sous la suite (L-1,1,L-2,1) toutes les suites construites s'écrivent avec les nombres 1,L-2, L-1.
Sous la suite (L,L-1,1) toutes les suites construites s'écrivent avec les nombres 1,L-1,L.
Et de façon générale, on peut énoncer, sans entrer plus dans les détails :

THEOREME XIII.11
Il y a une correspondance bijective entre l'arbre des solutions régulières de l'équation $M^2 - M_1^2 + M_2^2 = LMM_1M_2 \quad (L \geqslant 3)$
et l'arbre des suites obtenu à partir de la construction de MARKOFF à partir de la suite $S^* = X = (L-1,1)$ $(X_1 = \emptyset \quad X_1 = (1))$.
Cet arbre de suites ne contient pourL > 3, que des suites dont les éléments sont tous bornés par L.

C.3 - Détermination complète des solutions régulières pour $L \in \{1,2\}$

Si l'on reprend le raisonnement qui précède, et que l'on considère les deux transformations :

$$(M, M_1, M_2) \longrightarrow (M^1, M_1^1, M_2^1)$$
$$(M, M_1, M_2) \longrightarrow (M^2, M_1^2, M_2^2)$$

Elles conservent la condition c).
L'une au moins des deux permet de remonter dans l'arbre en conservant la condition a) sauf le cas où l'on a :

$$M = L \qquad M_1 = M_2 = 1 \qquad \varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \pm 1$$

Ce cas correspond à une solution singulière qui, avec le Théorème XIII.8 donne naissance à un arbre généralisant celui obtenu dans le Théorème XIII.9 pour les cas $L \leqslant 2$. Cet arbre est un arbre de solutions régulières.

La question qui se pose est de savoir s'il peut exister d'autres solutions régulières en dehors de cet arbre.

Une telle solution permet en remontant par les deux transformations considérées ci-dessus de conserver à chaque niveau les conditions a) et c).
Le seul problème qui se pose alors est de savoir ce que devient la condition b). Pour cela, on procède comme on l'a fait avant en distinguant les cas conduisant à ce que la propriété b) ne se conserve pas :

. Cas 1 : $M_1 = M_2 = 1$
Il reste : $M^2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = LM$

* Cas 1.1 : Si $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \pm 1$, on trouve $L = M$
On retombe sur l'arbre évoqué ci-dessus : ce cas peut être laissé de côté.

* Cas 1.2 : Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$
On a $M^2 + 2\varepsilon_1 = LM$
D'où les possibilités suivantes :
- si $\varepsilon_1 = 1$ $L = 3$ exclus ici
- si $\varepsilon_1 = -1$ $L = 1$ $M = 2$

Ce dernier cas est obtenu par :

(1,1,1)
$\varepsilon_1 = 1$; $\varepsilon_2 = -1$

(2,1,1)
$\varepsilon_1 = -1$; $\varepsilon_2 = -1$

Il peut donc aussi être laissé de côté, puisque l'on retombe sur une partie de l'arbre évoqué ci-dessus.

. Cas 2 : Si $M > M_1 > M_2 > 0$ et $M_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 M_2^2 \geqslant MM_1$

On peut encore distinguer divers sous-cas :

* Cas 1.2 : $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$

On trouve comme ci-dessus une contradiction.

* Cas 2.2 : $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$

On considère $\phi(x) = x^2 - LxM_1M_2 - M_1^2 - M_2^2$

et ses deux racines $x = M$ et $x' = LM_1M_2 - M$

La condition $MM' = -M_1^2 - M_2^2$ impose $M' < 0$

En calculant $\phi\left(\frac{3LM_1M_2}{2}\right)$ qui est strictement positif

hors le cas où $LM_2 = 1$, on peut reproduire le même raisonnement que précédemment pourvu que l'on ait

$$LM_2 \geqslant 3$$

Les seuls cas posant éventuellement problèmes sont ceux où l'on a : $LM_2 \leqslant 2$

. Le cas $LM_2 = 2$ se traite de façon directe et se ramène à l'inégalité :

$$M_2^2 + LM_1^4 > M_1^2$$

Celle-ci est vérifiée pour $L = 2 \quad M_2 = 1 < M_1$

. Le cas $LM_2 = 1$ donne $L = M_2 = 1$

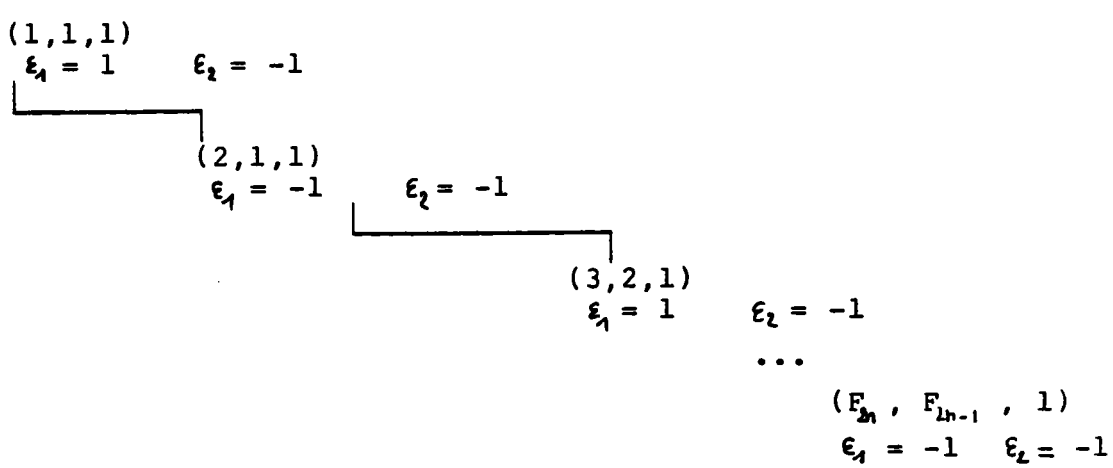
Il se ramène à :

$$M^2 - MM_1 - M_1^2 = 1$$

On trouve ainsi des triplets qui s'écrivent avec les nombres de FIBONACCI :

$$(M, M_1, M_2) = (F_{2n}, F_{2n-1}, 1)$$

Mais de façon évidente, ces triplets apparaissent dans l'arbre issu de (1,1,1) comme suit :



De plus, ils recouvrent les solutions que l'on donnait dans le cas non standard pour $L = 1$ et $\varepsilon_1\varepsilon_2 = -1$.
Le cas considéré peut donc être laissé de côté.

* Cas 2.3 : $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$

Le polynôme $\phi(x) = x^2 - LxM_1M_2 + M_1^2 + M_2^2$ possède deux racines : $x = M$ et $x' = M' = LM_1M_2 - M$

. Le cas $M > M_1 > M' = LM_1M_2 - M$ peut être traité comme avant. Il donne : $MM_1 > MM' = M_1^2 + M_2^2$
Il est en contradiction avec les hypothèses faites et peut donc être laissé de côté.

. Le cas $M > M_1$ et $M' \geqslant M$ est envisageable.
Il est facile de voir qu'il suppose en réalité $M' > M_1$
Il donne : $LM_1M_2 > M_1 + M > 2M_1$
Soit : $LM_2 > 2$
Dans ce cas, le nombre $(LM_2)^2 - 4$ est un nombre strictement positif non carré.
Il permet de définir le développement en fraction continue :

$$\frac{LM_2 + \sqrt{(LM_2)^2 - 4}}{2} = [LM - 1, \underline{1, LM_2 - 2}]$$

à partir duquel on peut résoudre l'équation :

$$x^2 - (LM_2)xy + y^2 = -M_2^2$$

Avec les réduites $\frac{LM_2 - 1}{1}$; $\frac{LM_2}{1}$; $\frac{(LM_2)^2 - (LM_2) - 1}{LM_2 - 1}$

on obtient les plus petites valeurs représentées par la forme :

$$x^2 - (LM_2)\,xy + y^2$$

On trouve :

(1) La valeur $2 - LM_2$ qui ne peut être égale à $-M_2^2$ que pour $M_2 = 1$ ou $M_2 = 2$. Or avec $L \in \{1, 2\}$, l'égalité $2 - LM_2 = -M_2^2$ est impossible.

(2) La valeur 1 ne peut être égale à $-M_2^2$.

(3) La valeur $2 - (LM_2)^2 - 2(LM_2)^3$ qui ne peut être égale à $-M_1^2$ que pour $M_2 = 1$ ou $M_2 = 2$
. Le cas $M_2 = 2$ conduit à $2 - 16L^3 - 4L^2 = -4$ il est manifestement impossible.
. Le cas $M_2 = 1$ donne $2 - 2L^3 - L^2 = -1$ il est envisageable avec $L = 1$
Mais on a alors $LM_2 = 1$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse faite : $LM_2 > 2$
Le cas considéré peut donc encore être laissé de côté.

. Cas 3 : Si $M > M_2 > M_1 > 0$ et $\varepsilon_1\varepsilon_2 M_1^2 + M_2^2 \geqslant MM_2$
Le cas se traite comme le cas 2. Il peut être éliminé de même.

On peut donc énoncer puisque l'on établit facilement l'équivalent du Théorème XIII.10 :

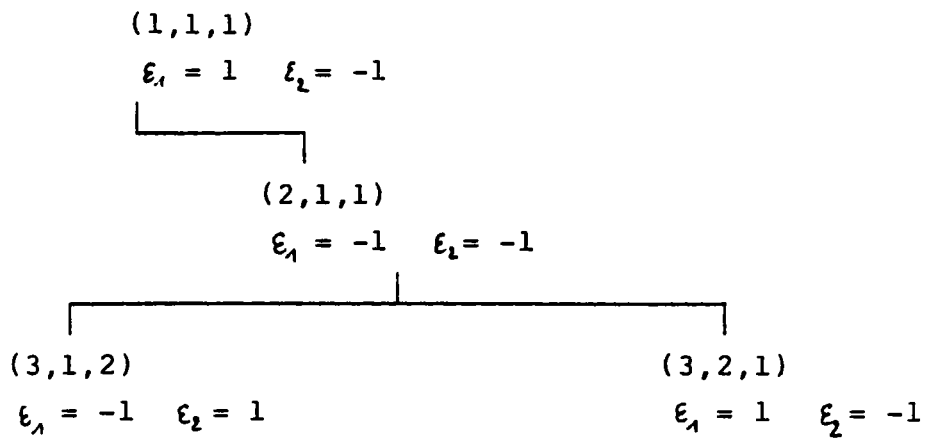
THEOREME XIII.12 (Détermination des solutions régulières pour $L \in \{1,2\}$)
Dans la situation standard, toute solution régulière de l'équation diophantienne :

$$M^2 + \varepsilon_2 M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2 = LMM_1M_2 \qquad (L \in \{1,2\})$$

se déduit d'une solution singulière par la construction de MARKOFF.
(1) Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$
L'équation n'admet pas de solution singulière et donc pas de solution régulière.
(2) Si l'on n'a pas $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$
Toutes les solutions (à une permutation près) se déduisent par la construction de MARKOFF de la solution singulière $(L,1,1)$ racine de :

$$M^2 - M_1^2 + M_2^2 = LMM_1M_2$$

On remarque que pour l'application du Théorème XIII.8, la condition $LM_2 \geqslant 2$ ne vaut pas lorsque l'on a $L = 1$. Dans ce cas, le haut de l'arbre est un peu perturbé.
Il se présente sous la forme suivante :



Dans ce cas, pour avoir comme ci-dessus une liaison avec des suites, il faut considérer au départ $X = (0,1)$

Soit : $$M_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = M_{S^*}$$

Ceci permet d'ailleurs de retrouver certaines des solutions mentionnées ci-dessus, dans le cas non standard, avec le procédé issu du Théorème XIII.3.

On a en effet, dans ce cas, avec les nombres de FIBONACCI :

$$\left(M_{S^*} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{e+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{e+1} = \begin{bmatrix} F_{e-1} & F_e \\ F_e & F_{e+1} \end{bmatrix}$$

On en déduit : $$M_{U_1} = \begin{bmatrix} F_{e-1} & F_e \\ F_e & F_{e+1} \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_1 = (-1)^{e+1}$$

$$M_{U_2} = \begin{bmatrix} F_{e-2} & -F_{e-1} \\ -F_{e-1} & F_e \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_2 = (-1)^e$$

On retrouve ainsi les solutions $(1, F_{e-1}, F_{e-2})$ avec $\varepsilon_1 = (-1)^{e+1} = -\varepsilon_2$ mentionnées dans le cas non standard pour L = 1.

De manière très générale, on peut dans ce cas construire les suites correspondantes par la même méthode que ci-dessus, en évacuant les valeurs L-1 et L-2 qui peuvent valoir 0 ou -1 grâce à des formules utilisées pour la réduction des formes quadratiques et notamment :

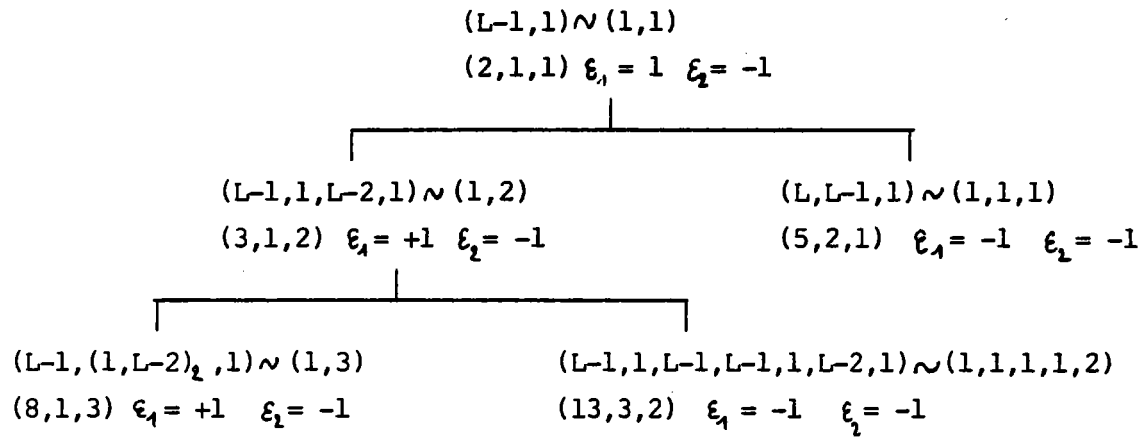
(E.1) : (... A,1,-1,1,B,...) $\sim$ (...,A-1,1,B-1,...)

(E.2) : (... A,0,B,...) $\sim$ (...,A+B,...)

(E.3) : (... A,-1,B,...) $\sim$ (...,A-2,1,B-2,...)

La particularité est cette fois que les nombres qui en résultent dans les suites S ainsi obtenues ne sont pas bornés.

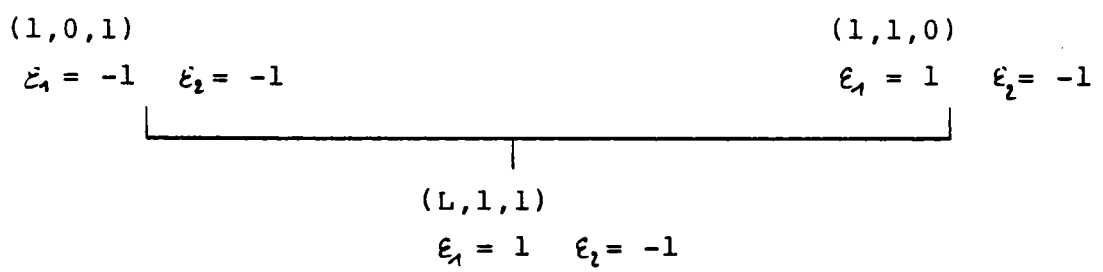
Par exemple, pour L = 2, on obtient :



On voit ainsi apparaître les suites (1,n) où n $\in \mathbb{N}^*$ qui correspondent à :

$$M_{S^n} = \begin{bmatrix} n+1 & 1 \\ n & 1 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, comme dans le cas le plus général, on peut compléter le haut de l'arbre par :



Le triplet (1,0,1) = (M, M_1, M_2), pour les valeurs $\varepsilon_1 = -1$ et $\varepsilon_2 = -1$ est associé aux matrices suivantes :

$$M_X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = M_{\phi}^{v} = M_{\phi} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M_{X_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -L \end{bmatrix}$$

$$M_{X_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La formule : $M_{u_1} = \left(M_{S^*}\begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^{e+1} M_{S_1^*}$ donne par récurrence dans le cas où L = 2 :

$$M_{u_1} = \begin{bmatrix} e+2 & ; & e+1 \\ -e-1 & ; & -e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e+1 & ; & -e \\ -e & ; & e-1 \end{bmatrix}$$

$$M_{u_2} = M_{S_2^*}\left(\begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{S^*}\right)^{-e-1} = \begin{bmatrix} -e & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Et l'on trouve avec ces expressions $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$, ainsi que les solutions $(M,M_1,M_2) = (1,e+1,-e) = (1,1-M_2,M_2)$ que l'on évoquait dans le cas non standard.

D / CONCLUSION GENERALE POUR L'EQUATION ETUDIEE

L'équation $(\mathcal{M})$:

$$\begin{cases} M^2 + \varepsilon_2 M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2 = LMM_1M_2 \\ (M,M_1,M_2) \in \mathbb{Z}^3 \text{ tel que} \\ \text{pgcd}(M,M_1) = \text{pgcd}(M_1,M_2) = \text{pgcd}(M_2,M) = 1 \end{cases}$$

peut être totalement résolue, de même que l'équation $(\mathcal{M}_{reg})$ dont la résolution est équivalente à celle de $(\mathcal{M})$.
En se ramenant au cas $M > 0$ $M_1 > 0$ et $M_2 \neq 0$, après évacuation des cas évidents ($M = 0$ ou $M_1 = 0$, $M_2 = 0$) et utilisation de permutations sur M,M_1,M_2 ou de transformation $(M,M_1,M_2) \longrightarrow (-M,-M_1,M_2)$ on a les cas suivants :

(1) Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$

Les cas standards ne fournissent aucune solution, de même que les cas non standards, hors le cas où l'on a L = 3.
Ce cas particulier correspond à l'équation de MARKOFF classique.
Il donne un arbre de solutions régulières.
Toute solution régulière correspond à une suite $S = (S_1,L-1,S_2)$ telle que l'on puisse écrire :

$$M_S = \begin{bmatrix} M & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

Elle permet de construire d'autres solutions (M,M_1,M_2) avec :

$$(\mathcal{F}) \quad \begin{cases} M_{u_1} = \left(M_{S^*}\begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^{\varepsilon+1} M_{S_1^*} = \begin{bmatrix} M_1 & * \\ * & * \end{bmatrix} \\ M_{u_2} = M_{S_2^*}\left(\begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{S^*}\right)^{-\varepsilon-1} = \begin{bmatrix} M & * \\ * & * \end{bmatrix} \end{cases}$$

On fabrique ainsi toutes les solutions telles que $M > 0$, $M_1 > 0$ et $M_2 \neq 0$.

(2) Si l'on n'a pas $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$

Toutes les solutions régulières du cas standard apparaissent (à une permutation près) dans l'arbre de MARKOFF construit à partir de la solution singulière (L,1,1) de l'équation :

$$M^2 - M_1^2 + M_2^2 = LMM_1M_2$$

Toute solution régulière correspond à une suite $S = (S_1, L-1, S_2)$ telle que l'on puisse écrire :

$$M_S = \begin{bmatrix} M & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

Elle permet de construire d'autres solutions $(M, M_1, M_2) \in \mathbb{Z}^3$ avec les formules ($\mathcal{F}$) données ci-dessus.
On fabrique ainsi toutes les solutions telles que $M > 0$, $M_{-1} > 0$ et $M_2 \neq 0$ du cas standard et certaines du cas non standard.

Dans le cas L = 2, d'autres solutions peuvent être données pour le cas non standard avec cette même formule ($\mathcal{F}$), à partir de la solution (1,0,1) ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$).
Elles correspondent aux expressions $(M, M_1, M_2) = (1, 1-M_2, M_2)$.

Dans ce même cas L = 2, et pour le cas non standard, il existe encore les solutions exceptionnelles $(M, M_1, M_2) = (1, 2-M_2, M_2)$.

Toutes les solutions de l'équation ($\mathcal{M}_0$) sont constructibles par ce qui précède.
Par ailleurs, on déduit de façon évidente de ($\mathcal{M}_0$) toutes les solutions de l'équation diophantienne plus générale :

$$m^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 = L m m_1 m_2$$

où $(m, m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^3$ et $L \in \mathbb{N}^*$

Il suffit de diviser par d^2 où $d = \text{pgcd}(m, m_1) = \text{pgcd}(m_1, m_2) = \text{pgcd}(m_2, m)$

XIV. UNICITE DE LA GENERALISATION DE L'ARBRE DE MARKOFF

A / INTRODUCTION

On a introduit dans ce qui précède une généralisation de l'arbre de MARKOFF. On a montré au Théorème XII.6 qu'elle est reliée à l'équation :

$$(M_3) : m^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 = (b+1-r) m m_1 m_2$$

où
$$\begin{cases} \varepsilon_1 \ , \ \varepsilon_2 \in \{\pm 1\} \\ b \in \mathbb{N}^* \\ r \in \mathbb{Q} \text{ vérifiant } -1 < r < 1 \\ (m, m_1, m_2) \in \mathbb{N}^3 \text{ tel que } r(m, m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^3 \end{cases}$$

On a montré qu'en posant $L = (b+1-r)d \in \mathbb{N}^*$ où
$d = \text{pgcd}(m, m_1) = \text{pgcd}(m_1, m_2) = \text{pgcd}(m_2, m)$
tout revenait à étudier avec

$$M = \frac{m}{d} \qquad M_1 = \frac{m_1}{d} \qquad M_2 = \frac{m_2}{d}$$

l'équation :

$$(\mathcal{M}_3 \text{ reg}) \begin{cases} M^2 + \varepsilon_2 M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2 = L M M_1 M_2 \\ M > 0 \qquad M_1 > 0 \qquad M_2 > 0 \\ M = \text{Max}(M, M_1, M_2) > \text{Max}(M_1, M_2) \\ \text{pgcd}(M, M_1) = \text{pgcd}(M_1, M_2) = \text{pgcd}(M_2, M) = 1 \end{cases}$$

On a traité complètement le cas où $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ qui redonne simplement la Théorie de MARKOFF classique.
Or on a de plus donné toutes les solutions de l'équation $(\mathcal{M}_3$ reg) dans le cas où l'on a $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \neq (1,1)$.
Il en résulte que l'équation (M_3) peut à partir de là être totalement résolue avec :

$$(m, m_1, m_2) = (dM, dM_1, dM_2)$$

Ceci conduit à l'idée de déterminer à partir de là toutes les généralisations de l'arbre de MARKOFF.

B / DEMONSTRATION DE L'UNICITE DE LA GENERALISATION DE L'ARBRE DE MARKOFF

Supposons que le triplet (m, m_1, m_2) corresponde à la suite S décomposée sous la forme :

$$S^* = X = (X_1, b, X_2)$$

avec $\quad r(X) = r(\overset{\vee}{X_1}) = r(\overset{\wedge}{X_2}) = r$

On peut écrire avec les méthodes du chapître XII :

(a_1) : $\varepsilon_1 m_2 = m_1 K_1 - m k_1$

(a_3) : $\varepsilon_2 m_1 = m k_2 - m_2 K_2$

Mais dans la résolution de ($\mathcal{M}$ reg), on peut supposer que le triplet (M, M_1, M_2) corresponde à la suite antidrome (S') décomposée sous la forme :

$$S'^* = X' = (X_1', b', X_2')$$

où avec les méthodes du chapître XII :

(a_1') : $\varepsilon_1 M_2 = M_1 K_1' - M k_1'$

(a_3') : $\varepsilon_2 M_1 = M k_2' - M_2 K_2'$

et par antidromie de S' : $K_1' = K_2'$

En comparant ces expressions à (a_1) et (a_3) :

$\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ $\quad \begin{cases} K_1 = K_1' + \alpha M & 0 \leqslant \alpha < d \\ K_2 = K_2' + \beta M & 0 \leqslant \beta < d \end{cases}$

Avec $\quad r(S) = \dfrac{K_1 - K_2}{m} = \dfrac{\alpha - \beta}{d} = r$

On trouve : $\beta = \alpha - dr$

Soit $\quad \begin{cases} K_1 = K_1' + \alpha M \\ K_2 = K_2' + (\alpha - dr) M \end{cases}$

On trouve aussi :

$$\begin{cases} k_1 = k_1' + \alpha M_1 \\ k_2 = k_2' + (\alpha - dr) M_2 \end{cases}$$

Ces expressions sont utilisables avec :

(a_5') : $M = L M_1 M_2 + M_2 k_1' - M_1 k_2'$

Elles donnent après multiplication par d :

$$m = (b+1-2r) m_1 m_2 + k_1 m_2 - k_2 m_1$$

Cette relation doit être comparée à (c_1) :

$$m = (b+1)m_1 m_2 + k_{21} m_1 - k_{12} m_2$$

Elle s'en déduit puisque l'on a établi dans la généralisation de l'arbre de MARKOFF les expressions :

$$\begin{cases} k_2 + k_{21} = (1 - r)m_2 \\ k_1 + k_{12} = (1 + r)m_1 \end{cases}$$

Comparons maintenant les relations :

(d_1) : $K_1 K_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 = m\,\rho$

(d_1') : $K_1' K_2' + \varepsilon_1 \varepsilon_2 = M\,\rho'$

Elles donnent :

$$\begin{aligned} dM\,\rho &= (K_1' + \alpha M)(K_2' + (\alpha - dr)M) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \\ &= M\,\rho' + M[\alpha K_2' + (\alpha - dr)K_1' + \alpha(\alpha - dr)M] \end{aligned}$$

En simplifiant par M, il reste :

$$d\rho = \rho' + M[\alpha K_2' + (\alpha - dr)K_1' + \alpha(\alpha - dr)M]$$

Utilisons ensuite (d_2) et (d_2')

Avec $k_{12} = - k_1 + (1+r)m_1$

On peut écrire (d_2) sous la forme :

$$\begin{aligned} k_1^2 + \varepsilon_1 &= (1+r)k_1 m_1 - m_1 \rho_{x_1} \\ &= M_1[(1+r)dk_1 - d\,\rho_{x_1}] \end{aligned}$$

Et compte tenu des propriétés vues avant, la relation (d_2') peut être écrite : $k_1'^2 + \varepsilon_1 = M_1[k_1' - \rho'_{x_1}]$

On en déduit par substitution :

$$\begin{aligned} k_1^2 - \varepsilon_1 &= (k_1' + \alpha M_1)^2 + \varepsilon_1 \\ &= M_1[k_1' - \rho'_{x_1}] + 2\alpha k_1' M_1 + \alpha^2 M_1^2 \\ &= M_1[(1+r)d \cdot [k_1' + \alpha M] - d\,\rho_{x_1}] \end{aligned}$$

Soit : $d\,\rho_{x_1} = \rho'_{x_1} + k_1'[(1+r)d - 1 - 2\alpha] + M_1[(1+r)d\alpha - \alpha^2]$

Toutes les expressions données permettent d'écrire :

$$M_{x_1} = \begin{bmatrix} m_1 & m_1 - k_{12} \\ k_1 & k_1 - \rho_{x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dM_1 & ; k_1' + (\alpha - rd)M_1 \\ k_1' + \alpha M_1 & ; \frac{1}{d}(k_1'[1+2\alpha - rd] + M_1[\alpha^2 - rd\alpha] - \rho'_{x_1}) \end{bmatrix}$$

De même :

$$M_{X_2} = \begin{bmatrix} dM_2 & ; \; k'_{21} + (d - \alpha - 1)M_2 + rdM_2 \\ k'_{21} + (d-\alpha-1)M_2 & ; \; \frac{1}{d}[k'_{21}[1+2(d-\alpha-1)+rd]+M_2[(d-\alpha-1)^2+rd(d-\alpha-1) - \rceil'_{X_2}] \end{bmatrix}$$

Pour que ces matrices soient à coefficients dans $\mathbb{Z}$, il faut et suffit, puisque $rd \in \mathbb{Z}$ que l'on ait :

$$(C_g) : \begin{cases} k'_1 [1 + 2\alpha - rd] + M_1[\alpha^2 - (rd)\alpha] \equiv \rceil'_{X_1} & (\text{mod } d) \\ k'_{21} [1 - 2(\alpha+1)+rd]+M_2[(\alpha+1)^2 - (rd)(\alpha+1)] \equiv \rceil'_{X_2} & (\text{mod } d) \end{cases}$$

Inversement, dans ces conditions, on vérifie sans peine que l'on a :

$$r(\overset{\vee}{X}_1) = r(\hat{X}_2) = r$$

Et en effectuant le produit, avec la condition supplémentaire :

$$L = (b+1-r)d \equiv -rd \qquad (\text{mod } d)$$

On trouve : $r = r(X_1 b X_2)$

On peut donc énoncer :

PROPRIETE XIV.1

Pour que l'on puisse trouver deux suites X_1 et X_2 et un nombre $b \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$r(X_1 b X_2) = r(\overset{\vee}{X}_1) = r(\hat{X}_2) = r$$

Il faut que l'on puisse trouver un nombre $L \in \mathbb{N}^*$, deux suites X'_1 et X'_2 associées à une solution de l'équation :

$$(\mathcal{M}_0 \text{ reg}) \begin{cases} M^2 + \varepsilon_2 M_1^2 + \varepsilon_1 M_2^2 = LMM_1M_2 \\ M > 0 \qquad M_1 > 0 \qquad M_2 > 0 \\ M = \text{Max}(M, M_1, M_2) > \text{Max}(M_1, M_2) \\ \text{pgcd}(M, M_1) = \text{pgcd}(M_1, M_2) = \text{pgcd}(M_2, M) = 1 \end{cases}$$

et un nombre $\alpha \in \mathbb{N}$ vérifiant, avec les coefficients des matrices $M_{X'_1}$ et $M_{X'_2}$ les deux conditions :

(C_{g_1}) : $k'_1[1 + 2\alpha + L] + M_1[\alpha^2 + L\alpha] \equiv \rceil'_{X'_1}$ (mod d)

(C_{g_2}) : $- k'_{21} [1 + 2\alpha + L] + M_2[(\alpha + 1)^2 + L(\alpha + 1)] \equiv \rceil'_{X'_2}$ (mod d)

Exemple

Partant de $S' = (L, L-1, 1) = (3, 2, 1) = (X_1', 2, X_2')$

avec L = 3 on trouve :

$M_1 = 3$	$M_2 = 1$	$M = 10$
$k_{11}' = 1$	$k_{21}' = 1$	$K_1' = 3$
$k_{12}' = 2$	$k_2' = 0$	$K_2' = 3$
$\rho_{X_1'} = 1$	$\rho_{X_2'} = 1$	$\rho' = 1$

Ceci donne les deux congruences :

$(C_{g_1}) : (3\alpha^2 + 11\alpha + 3) \equiv 0 \pmod{d}$

$(C_{g_2}) : (\alpha^2 + 3\alpha - 1) \equiv 0 \pmod{d}$

soit : $2\alpha + 6 \equiv 0 \pmod{d}$

puis : $2 \equiv 0 \pmod{d}$

Le cas d = 2 impose $\alpha(\alpha + 1) \equiv 1 \pmod 2$

il donne une impossibilité.

Le cas d = 1 donne $r = 0$ avec $b + 1 - L = r \in \mathbb{Z}$

La suite S' considérée ne permet de construire aucun exemple nouveau d'arbre de MARKOFF.

On va maintenant montrer que les remarques faites sur cet exemple sont générales.

On part des deux conditions :

$(C_{g_1}') : M_1\alpha^2 + [2k_{11}' + M_1 L]\alpha + [k_{11}' + k_{11}' L - \rho_{X_1'}] \equiv 0 \pmod{d}$

$(C_{g_2}') : M_2\alpha^2 + [2k_2' + M_2 L]\alpha + [k_2' + k_2' L - \rho_{X_2'}] \equiv 0 \pmod{d}$

En supprimant le terme en α^2 :

$(C_{g_3}') : [k_{11}' M_2 - k_2' M_1][2\alpha + L + 1] + [\rho_{X_2'} M_1 - \rho_{X_1'} M_2] \equiv 0$

En additionnant les expressions données par les relations :

$(c_2) : K_1' = LM_2 k_{11}' + k_{11}' k_{21}' - M_2 \rho_{X_1'}$ $\qquad (u_1) : M_1 = k_{11}' + k_{12}'$

$(c_3) : K_2' = K_1' = LM_1 k_2' - k_{12}' k_2' + M_1 \rho_{X_2'}$ $\qquad (u_2) : M_2 = k_2' + k_{21}'$

et en substituant dans (C_{g_3}') :

$(C_{g_3}) : 2([k_{11}' M_2 - k_2' M_1]\alpha + [M_1 \rho_{X_2'} - k_2' M_1 + k_{11}' k_2']) \equiv 0 \pmod{d}$

D'autre part, en multipliant (C_{g_1}') par k_2' et (C_{g_2}') par k_{11}' et soustrayant :

$(C_{g_4}') : (k_{11}' M_2 - k_2' M_1)\alpha^2 + (k_{11}' M_2 - k_2' M_1)L\alpha + (k_2' \rho_{X_1'} - k_{11}' \rho_{X_2'}) \equiv 0$

En multipliant cette dernière relation par 2 et soustrayant de (C_{g_3}') multipliée par α , on obtient avec (C_2) et (C_3) :

$$(C_{g_4}) : 2([\,]'_{\chi_1} M_2 - k_1' M_2 + k_1' k_2' \,]\alpha + (k_2']'_{\chi_1} - k_1']_{\chi_2}']) \equiv 0 \qquad (\text{mod } d)$$

Et en éliminant α entre (C_{g_3}) et (C_{g_4}), on obtient une contrainte pour d indépendante de α :

$$\begin{aligned} & 2(M_1 M_2]_{\chi_1'}]_{\chi_1'} - M_1]_{\chi_2'} k_1' M_2 + k_2'^2]_{\chi_1'} M_1 \\ & - k_2' M_1]_{\chi_1'} M_2 + k_1' k_2' M_1 M_2 - k_1' k_2'^2 M_1 \\ & + k_1'^2 M_2]_{\chi_2'} - k_1' k_2' M_2 + k_1'^2 k_2'^2) \equiv 0 \qquad (\text{mod } d) \end{aligned}$$

Remarquons alors que l'on a :

(1) $k_1' k_2' M_1 M_2 - k_1' k_2'^2 M_1 - k_1'^2 k_2' M_2 + k_1'^2 k_2'^2$

$= (k_2' M_1 - k_1' k_2')(k_1' M_2 - k_1' k_2')$

$= k_2' k_{12}' k_1' k_{21}'$

(2) $k_1' M_2]_{\chi_2'} - M_1]_{\chi_2'} k_1' M_2 = -M_2]_{\chi_2'} k_1' k_{12}'$

(3) $k_2']_{\chi_1'} M_1 - k_2' M_1]'_{\chi_1} M_2 = - M_1]_{\chi_1'} k_2' k_{21}'$

En utilisant alors les deux relations : $\begin{cases} (d_2) : k_1' k_{12}' - M]_{\chi_1'} = \varepsilon_1 \\ (d_3) : k_2' k_{21}' - M_2]_{\chi_2'} = \varepsilon_2 \end{cases}$

la contrainte pour d s'écrit alors :

$$\begin{aligned} 0 \equiv\ & 2(M_1 M_2]'_{\chi_1}]_{\chi_2'} - M_2]_{\chi_2'} k_1' k_{12}' - M_1]_{\chi_2'} k_2' k_{21}' + k_2' k_{12}' k_1' k_{21}') \\ =\ & 2(M_1]_{\chi_1'} - k_1' k_{12}')(M_2]_{\chi_2'} - k_2' k_{21}') \\ =\ & 2(-\varepsilon_1)(-\varepsilon_2) = \pm 2 \qquad (\text{mod } d) \end{aligned}$$

Les seuls cas envisageables sont donc d = 1 ou d = 2

* <u>Si d = 1</u>

On a alors : r = b + 1 - L

Et avec la contrainte - 1 < r < 1, il reste r = 0

On trouve dans ce cas, S = S', de sorte que S est simplement une suite déterminée par l'équation ($\mathcal{N}_0$ reg).

* Si d = 2

La condition rd $\in \mathbb{Z}$ donne plusieurs possibilités : $r = 0$

$r = \frac{1}{2}$

$r = -\frac{1}{2}$

. Le cas r = 0

se traite comme ci-dessus. Il donne seulement une suite déterminée par ($\mathcal{M}$ reg).

. Le cas $r = \frac{1}{2}$

impose avec $0 \leqslant \alpha < d = 2$ deux possibilités pour α :

◊ Si $\alpha = 0$, il vient :

$$M_{\chi_1} = \begin{bmatrix} 2M_1 & ; & (k'_1 - M_1) \\ k'_1 & ; & (\frac{1}{2}(-\rceil_{\chi_1}')) \end{bmatrix}$$

On trouve une contradiction avec le fait que les coefficients de M_{χ_1} sont positifs.

◊ Si $\alpha = 1$,

$$M_{\chi_1} = \begin{bmatrix} 2M_1 & ; & k'_1 \\ k'_1 + M_1 & ; & \frac{1}{2}(2k'_1 - \rceil_{\chi_1}') \end{bmatrix}$$

$$M_{\chi_2} = \begin{bmatrix} 2M_2 & ; & k'_{21} + M_2 \\ k'_{21} & ; & \frac{1}{2}(2k'_{21} - \rceil_{\chi_2}') \end{bmatrix}$$

Il faut $\rceil_{\chi_1}'$ et $\rceil_{\chi_2}'$ pairs, avec par le calcul des déterminants :

$$\varepsilon_2 = \det M_{\chi_2} = -k'^2_{21} + M_2 k'_{21} - 2M_2 \left(\frac{\rceil_{\chi_2}'}{2}\right)$$

Ceci impose k'_{21} impair (car $\varepsilon_2 = \pm 1$) et aussi M_2 pair

$$\varepsilon_1 = \det M_{\chi_1} = -k'^2_1 + M_1 k'^2_1 - 2M_1 \left(\frac{\rceil_{\chi_1}'}{2}\right)$$

Ceci impose k'_1 impair (car $\varepsilon_1 = \pm 1$) et aussi M_1 pair.
Mais alors, on tombe sur une contradiction avec
pgcd$(M_1, M_2) = 1$.

Le cas $r = \frac{1}{2}$ est donc impossible.

. Le cas $r = -\frac{1}{2}$

impose avec $0 \leqslant \alpha < d = 2$ deux possibilités :

◊ Si $\alpha = 1$, il reste

$$M_{X_2} = \begin{bmatrix} 2M_2 & ; & (k'_{21} - M_2) \\ k'_{21} & ; & \frac{1}{2}(-\rfloor_{X_2}) \end{bmatrix}$$

On trouve une contradiction avec le fait que les coefficients de M_{X_2} sont positifs.

◊ Si $\alpha = 0$,

$$M_{X_1} = \begin{bmatrix} 2M_2 & ; & k'_1 + M_1 \\ k'_1 & ; & \frac{1}{2}(2k'_1 - \rfloor_{X_1}) \end{bmatrix}$$

$$M_{X_2} = \begin{bmatrix} 2M_2 & ; & k'_{21} \\ k'_{21} + M_2 & ; & \frac{1}{2}(2k'_{21} - \rfloor_{X_2}) \end{bmatrix}$$

Il faut encore $\rfloor_{X_1}$ et $\rfloor_{X_2}$ pairs.
Et avec le calcul des déterminants, on conclut comme précédemment à une impossibilité :

$$\varepsilon_1 = \det M_{X_1} = -k_1^2 + M_1 k'_1 - 2M_1\left(\frac{\rfloor_{X_1}}{2}\right) = \pm 1$$

Ceci impose que k'_1 soit impair et M_1 pair.

$$\varepsilon_2 = \det M_{X_2} = -k_{21}^{'2} + M_2 k'_{21} - 2M_2\left(\frac{\rfloor_{X_2}}{2}\right) = \pm 1$$

Ceci impose que k'_{21} soit impair, et que M_1 soit pair.
On trouve alors une contradiction avec la condition :

$$\text{pgcd}(M_1, M_2) = 1$$

Ainsi, dans tous les cas, on a démontré :

THEOREME XIV.1
Tous les arbres obtenus par la construction de MARKOFF correspondent à $r = 0$.
On trouve ainsi, à une bijection près :
. pour $b = 2$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, l'arbre de la Théorie de MARKOFF classique.
. pour tout $b \in \mathbb{N}$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \neq (1,1)$ les arbres construits à partir de la suite $S^* = X = (b,1) = (X_1 b X_2)$ où $X_1 = \emptyset$ et $X_2 = (1)$.

Ainsi, l'équation (M_3) qui avait une forme un peu particulière par rapport aux relations de MARKOFF vues avant se réduit seulement à l'équation :

$$(M_3) : \qquad m^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_1 m_2^2 = (b+1) m m_1 m_2$$

Elle peut être interprétée comme une équation (M_1) définie par une forme de MARKOFF F_θ associée à une suite S et à $a = b = L - 1$. On trouve en effet en comparant à (M_1) :

THEOREME XIV.2

Pour $b \in \mathbb{N}^*$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \neq (1,1)$ si $S^* = (X_1 b X_2)$ est une suite construite par la construction de MARKOFF à partir de $X = (b,1)$ définissant avec $a = b$ la forme de MARKOFF F_θ, alors on a :

$$\begin{cases} F_\theta(k_1, m_1) = -\varepsilon_1 \\ F_\theta(k_2 - (b+1)m_2, m_2) = -\varepsilon_2 \end{cases}$$

XV. ETUDE DE $M(F_\theta)$ ET DE A_θ POUR CERTAINES FORMES DE MARKOFF CONSTRUITES A PARTIR DE L'ARBRE DES SOLUTIONS DE $M^2 \pm M_1^2 \pm M_2^2 = LMM_1M_2$

A / INTRODUCTION

On considère ici le cas où $L \in \mathbb{N}^* - \{1,2\}$ pour l'équation diophantienne :

$$(\mathcal{M}_b \text{ reg}) \begin{cases} & M^2 - M_1^2 + M_2^2 = LMM_1M_2 \\ a) & M > 0 \quad M_1 > 0 \quad M_2 > 0 \\ b) & M = \text{Max}(M, M_1, M_2) > \text{Max}(M_1, M_2) \\ c) & \text{pgcd}(M, M_1) = \text{pgcd}(M_1, M_2) = \text{pgcd}(M_2, M) = 1 \end{cases}$$

Ses solutions sont données par la construction de MARKOFF présentée avant :

$$X = S^* = (X_1, L-1, X_2) = (S_1^*, L-1, S_2^*)$$
$$(M, M_1, M_2)$$
$$\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2$$

$$X^G = (X_1, L-1, \hat{X}) = (X_1, L-1, \hat{X}_1, L-1, X_2) \qquad X^D = (\overset{\vee}{X}, L-1, X_2) = (X_1, L-1, \overset{\vee}{X}_2, L-1, X_2)$$

$$(M^G, M_1^G, M_2^G) = (LMM_1 - \varepsilon_1 M_2 ; M_1 ; M) \qquad (M^D, M_1^D, M_2^D) = (LMM_2 - \varepsilon_2 M_1, M, M_2)$$

$$\varepsilon_1^G = \varepsilon_1 \qquad \varepsilon_2^G = \varepsilon_1\varepsilon_2 \qquad \varepsilon_1^D = \varepsilon_1\varepsilon_2 \qquad \varepsilon_2^D = \varepsilon_2$$

La racine correspond à $(M, M_1, M_2) = (L,1,1)$ $\varepsilon_1 = 1$ $\varepsilon_2 = -1$ $X_1 = \emptyset$ et $X_2 = (1)$ qui donnent $X = S^* = (L-1,1)$.

Pour toute suite $X = S^* = (X_1, L-1, X_2)$ apparaissant dans cette construction, on considère la forme de MARKOFF F_θ associée à S et $a = L-1$.
L'application du Théorème X.2 donne, avec $b = L-1$ et la remarque que les deux suites $X_1 = S_1^*$ et $X_2 = S_2^*$ sont palindromes :

$$A_\theta = -\varepsilon_1$$

En particulier, si $\varepsilon_1 = 1$, ce qui arrive dans une infinité de cas, on trouve $A_\theta = -1$.

On est alors assuré que la forme F_θ représente -1

avec $\varepsilon_1 = \det M_{\lambda_1} = \tilde{M}_1 (\tilde{k}_1 - \tilde{l}_{\lambda_1}) - \tilde{k}_1^2$

soit $\tilde{k}_1^2 - \tilde{M}_1 (\tilde{k}_1 - \tilde{l}_{\lambda_1}) = -1 = F_\theta (\tilde{k}_1, \tilde{m}_1)$

Cette condition permet d'appliquer le Théorème III.3 avec dans ce cas :

$$\tilde{l}_1 = \tilde{k}_1 - \tilde{l}_{\lambda_1}$$

Et dans $\mathbb{Z}$:

$$F_\theta (\tilde{k}_1 X - (\tilde{k}_1 - \tilde{l}_{\lambda_1}) Y \; ; \; \tilde{M}_1 X - \tilde{k}_1 Y) = - F_\theta (X,Y)$$

La forme F_θ représente alors $- M(F_\theta)$, de sorte qu'avec le Théorème III.8 on est certain d'avoir alors :

$$A_\theta = - M(F_\theta)$$

Si au contraire, $\varepsilon_1 = -1$, un raisonnement comparable est faisable si l'on a $\varepsilon_2 = 1$.

Et puisque la condition $\varepsilon = - \varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$ est équivalente à $\varepsilon_1 = 1$ ou $\varepsilon_2 = 1$, elle donne aussi : $A_\theta = - M(F_\theta)$.

Le cas le plus délicat est celui où l'on a $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$

Il est moins évident d'établir que l'on a encore $A_\theta = -M(F_\theta)$.

Exemple

Soit $S^* = X = (\overline{L}, L-1, \overline{1})$

Dans ce cas, $F_\theta (X,Y) = X^2 + \dfrac{L^3 - L}{L^2 + 1} XY - \dfrac{L^2 - 1}{L^2 + 1} Y^2$

Pour les réduites successives $\dfrac{p}{q}$ de $[0, \underline{S^*, a}]$, on trouve :

$p = 0 \quad q = 1 \quad F_\theta (p,q) = -(1 - \dfrac{2}{L^2 + 1})$

$p = 1 \quad q = L \quad F_\theta (p,q) = 1$

$p = L-1 \quad q = L^2 - L + 1 \quad F_\theta (p,q) = - (L - 2 + \dfrac{2L}{L^2 + 1})$

$p = L \quad q = L^2 + 1 \quad F_\theta (p,q) = 1$

Soit $M(F_\theta) = 1 - \dfrac{2}{L^2 + 1} = - A_\theta$.

On peut cependant énoncer :

THEOREME XV.1

Soit F une forme de MARKOFF construite à partir d'une suite (S,L-1) où S donnée par la construction de MARKOFF associée à l'équation diophantienne ($\mathcal{M}$ reg).

Alors :

(1) Si $\varepsilon = 1$ (soit $\varepsilon_1 = 1$ ou $\varepsilon_2 = 1$) alors la forme F_θ représente la valeur -1 et l'on a :

$$A_\theta = - M(F_\theta)$$

Dans ce cas, les deux formes F_θ et $- F_\theta$ sont équivalentes.

(2) Si $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$, si l'on n'a pas l'égalité $A_\theta = - M(F_\theta)$, on a nécessairement :

$$M(F_\theta) = 1$$

La vérification de la condition $M(F_\theta) = 1$ s'effectue pour le cas $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$ comme suit :

. ou bien F_θ ne représente pas $M(F_\theta)$

Dans ce cas F_θ représente $- M(F_\theta)$ et l'on a :

$$\begin{cases} M(F_\theta) < 1 \\ A_\theta = - M(F_\theta) \end{cases}$$

. ou bien F_θ représente $M(F_\theta) = - \varepsilon M(F_\theta)$

On peut alors appliquer le Théorème III.6 qui impose l'une des conditions suivantes :

ou

(1) : $M(F_\theta) = 1$

(2) : $\exists (p_0, q_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\begin{cases} F_\theta(p_0, q_0) = - \varepsilon M(F_\theta) = M(F_\theta) \\ |q_0| + |mp_0 - K_1 q_0| \text{ minimum} \\ - \varepsilon q_0 (mp_0 - K_1 q_0) = q_0 r_0 < 0 \end{cases}$$

Or, dans ce second cas, si l'on utilise la transformation définie par :

$$\begin{cases} q_2 = r_0 = mp_0 - K_1 q_0 \\ r_2 = -q_0 = mp_2 - K_1 q_2 \end{cases}$$

c'est-à-dire $\begin{bmatrix} q_1 \\ p_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & -K_1 \\ K_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix}$

on a, par recours aux propriétés de ϕ_θ :

$$\begin{aligned} |m^2 F_\theta(p_1, q_1)| &= |\phi_\theta(mp_1 - K_1 q_1, q_1)| \\ &= |\phi_\theta(r_1, q_1)| \\ &= |\phi_\theta(-q_0, r_0)| \\ &= |q_0^2 - mLq_0 r_0 + r_0^2| \\ &\geqslant m^2 M(F_\theta) = |m^2 F_\theta(p_0, q_0)| \\ &= |r_0^2 + mLq_0 r_0 + q_0^2| \end{aligned}$$

La condition $q_0 r_0 > 0$ conduit alors à une contradiction.
Aussi le seul cas possible est-il ici : $M(F_\theta) = 1$.

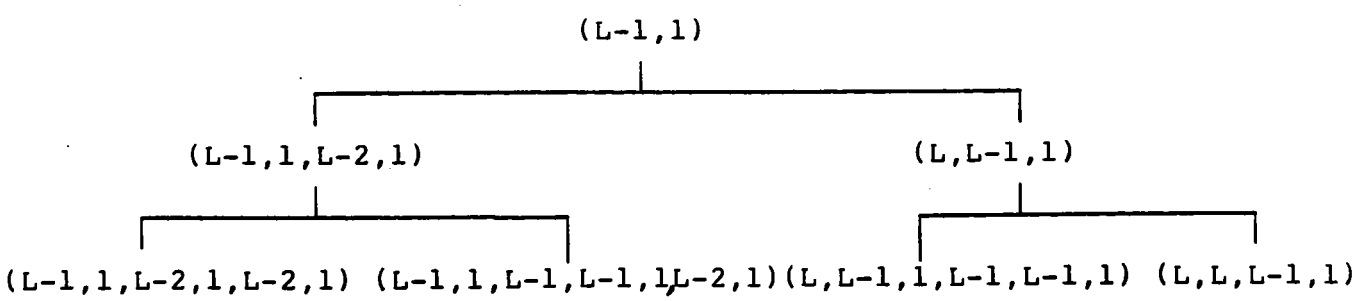
Dans un certain nombre de cas, tel l'exemple présenté ci-dessus, il est facile de vérifier que la condition $M(F_\theta) = 1$ n'a pas lieu. Il suffit par exemple de constater que S, contenant L, ne peut être un mot du L-1 langage de MARKOFF.
Dans ce cas, avec le Théorème I.10, on conduit à :

$$M(F_\theta) \neq 1$$

C'est-à-dire, avec le Théorème XV.1 : $A_\theta = -M(F_\theta)$.

B / CALCUL DE A_θ ET $M(F_\theta)$ SUR LES SUITES (S,L-1) OU S DEFINIE PAR L'ARBRE

Dans ce qui précède, on a fait la remarque que pour les suites, le haut de l'arbre s'écrit :



On en déduit :

PROPRIETE XV.1
Sous la suite (L-1,1,L-2,1) toutes les suites construites s'écrivent avec les nombres 1,L-1,L-2 et elles commencent par (L-1,1) et terminent par (L-2,1).

La vérification est évidente par récurrence avec :

$$X = (L-1,1,T,L-2,1)$$

$$X^{G} = (X_1, L-1,1,L-2,1,T,L-2,1) \qquad X^{D} = (L-1,1,T,L-1,L-1,X_2)$$

De plus,

. à gauche : ◊ si $X_1 = \emptyset$, la suite X^{G} commence par (L-1,1) et finit par (L-2,1)
◊ si $X_1 \neq \emptyset$, la suite X_1 commence par (L-1,1). Il en est de même de X^{G} qui finit aussi par (L-2,1).

. à droite : ◊ $X_2 = \emptyset$ est impossible car X termine par 1 < L-1.
◊ si $X_2 \neq \emptyset$, la suite X_2 se termine par (L-2,1). Il en est de même de X^{D} qui commence par (L-1,1).

De même,

PROPRIETE XV.2
Sous la suite (L,L-1,1) toutes les suites construites s'écrivent avec les nombres 1,L-1,L et elles commencent par L et se terminent par (L-1,1).

La vérification est évidente par récurrence, avec :

$$X = (L,T,L-1,1)$$

$$X^{G} = (X_1, L-1,1,L-1,T,L-1,1) \qquad X^{D} = (L,T,L,L-1,X_2)$$

De plus,

. à gauche : ◊ $X_1 = \emptyset$ est impossible car X commence par L > L-1.

◊ si $X_2 \neq \emptyset$ deux cas sont possibles :

* si $X_2 = (1)$ alors $X^{\flat}$ commence par L et termine par (L-1,1)
* si $X_2 \neq (1)$ alors X_2 termine par (L-1,1).
  Il en est de même de $X^{\flat}$ qui commence par 1.

En appliquant alors ma démonstration du lemme de DICKSON ([a] Théorème III.1), on en déduit :

THEOREME XV.2

Soit F_θ une forme de MARKOFF construite à partir d'une suite (S,L-1) où S donnée par la construction de MARKOFF associée à l'équation diophantienne ($\mathcal{M}_\theta$ reg).

Si S se trouve dans l'arbre sous la suite (L,L-1,1), alors on a :

$$\begin{cases} A_\theta = - M(F_\theta) \\ 0 < M(F_\theta) < 1 \end{cases}$$

La suite S n'est pas un mot du L-1 langage de MARKOFF et le nombre $\theta_{L-1}(S)$ ne fait pas partie de la (L-1,0, $\varepsilon(S)$) Théorie de MARKOFF correspondante.

Remarque :

Avec L = 3, on voit apparaître dans le résultat précédent des suites correspondant à des solutions de l'équation $M^2 - M_1^2 + M_2^2 = 3MM_1M_2$ non associées à des suites de la (2,0,1) Théorie. On retrouve ainsi la remarque (V_6) du chapître XI.

Pour les autres suites apparaissant dans l'arbre, valant S* = (L-1,1) ou situées sous S* = (L-1,1,L-2,1), on peut d'abord étudier celles qui, situées le plus à gauche, s'écrivent :

$$S^* = (L-1,(1,L-2)_t,1) \qquad (\varepsilon_1 = 1 \quad \varepsilon_2 = -1)$$

Pour celles-ci, les réduites permettant de calculer $M(F_\theta)$ sont :

. ou bien $p = K_1 \quad q = m$

$$F_\theta(K_1,m) = -\varepsilon = -1$$

. ou bien $p = 0 \quad q = 1$

$$F_\theta(0,1) = \frac{1 - (a+1)K_1}{m} < 0$$

Si cette expression vaut -1, on a :

$$\rho + m = LK_1$$

Soit de façon équivalente, en multipliant par $m \neq 0$:

$$LmK_1 = K_1K_2 - \varepsilon + m^2 = K_1^2 + m^2 - \rho$$

Comme dans le cas présent, m vaut M et par la construction de MARKOFF $M_1 = 1$, il reste :

$$M^2 - M_1^2 + K_1^2 = LMM_1K_1$$

Soit $K_1 = M_2$ ou $K_1 = LMM_1 - M_2$

Mais remarquons qu'avec $K_1 = LMM_1 - M_2$, on aurait :

$$K_1M_2 = LMM_1M_2 - M_2^2 = M^2 - \rho \geqslant MM_2$$

Soit $K_1 \geqslant M$, ce qui est incompatible avec les conditions existant sur la matrice M_S.

On a donc équivalence de la propriété $F_\theta(0,1) = -1$ et de $K_1 = M_2$.

Or, dans le cas qui nous intéresse, on a toujours :

$$X_1^G = \emptyset \quad \text{et} \quad X_2^G = \hat{X}$$

La dernière égalité donne :

$$M_{X_2^G} = \begin{bmatrix} M_2^G & M_2^G - K_2^G \\ K_2^G & K_2^G - \rho_{X_2}^G \end{bmatrix} = M_{\hat{X}} = \begin{bmatrix} M & M - K_2 \\ M - K_1 & M - K_1 - K_2 + \rho \end{bmatrix}$$

Elle impose donc : $M_2^G = M$

Par ailleurs, avec $X^G = (L-1, \hat{X})$:

$$M_{X^G} = \begin{bmatrix} M^G & M^G - K_2^G \\ K_1^G & K_1^G - \rho^G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & M - K_2 \\ M - K_1 & M - K_1 - K_2 + \rho \end{bmatrix}$$

Soit $K = M$

En comparant les égalités obtenues : $K_1^G = M_2^G$.

On a donc bien : $F_\theta(0,1) = -1$.

Remarque :

Pour $S^* = (L-1,1)$

On a $m = L \qquad K_1 = K_2 = 1 \qquad \rho = 0$

$$F_\theta(X,Y) = X^2 + \frac{L^2 - 2}{L} XY - Y^2$$

Pour les réduites successives $\frac{p}{q}$ de $[0,\underline{S^*,a}]$, on trouve :

$p = 0 \quad q = 1 \qquad F_\theta(p,q) = -1$

$p = 1 \quad q = L-1 \qquad F_\theta(p,q) = L - 2 + \frac{2}{L}$

$p = 1 \quad q = L \qquad F_\theta(p,q) = -1$

Dans tous les cas, on a donc établi :

THEOREME XV.3

Pour toute forme de MARKOFF F_θ associée à une suite S telle que

$$S^* = (L-1,(1,L-2)_t,1)$$

on a $\varepsilon_1 = 1 \quad \varepsilon_2 = -1 \quad \varepsilon = 1$

et $F_\theta(0,1) = F_\theta(K_1,m) = -1 = A_\theta = -M(F_\theta)$

Toutes les suites considérées font donc partie de la (L-1,0,1) Théorie de MARKOFF.

Remarque :

Avec L = 3, on retrouve les résultats que l'on donnait dans le Théorème XI.3.

Pour finir, il faut examiner les suites qui sont sous (L-1,1,L-2,1) et qui ne sont pas de forme $(L-1,(1,L-2)_t,1)$.
On se propose d'établir qu'elles vérifient $M(F_\theta) < 1$.

Exemple

Pour L = 3 $\qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = -1$

$S = (1,L-2,1,L-1,L-1,1,L-1)$

$= (1,1,1,2,2,1,2)$

Dans ce cas, on obtient :

$$F_\theta(X,Y) = X^2 + \frac{165}{73} XY - \frac{71}{73} Y^2$$

D'où facilement : $M(F_\theta) = \frac{71}{73} < 1$

L'idée générale est encore de considérer :

$$F_\theta(0,1) = \frac{1 - LK_1}{M} = -\frac{LK_1 - 1}{M}$$

Comme on a vu que de façon générale on a $-1 \leqslant 1 < K_1$, avec $L \geqslant 3$, ce nombre est strictement négatif.

On a alors : $F_\theta(0,1) > -1$

$$\Longleftrightarrow \quad M + 1 > LK_1$$

$$\Longleftrightarrow \quad M^2 + K_1^2 - \varepsilon > LK_1 M$$

$$\Longleftrightarrow \quad K_1^2 - LMK_1 + (M^2 - \varepsilon) > 0$$

Puisque $K_1 \leqslant M$, cette condition est équivalente à :

$$K < \frac{LM - \sqrt{L^2M^2 - 4M^2 + 4\varepsilon}}{2}$$

C'est-à-dire à : $\frac{K_1}{M} = [0,S^*] < \frac{L - \sqrt{L^2 - 4 + \frac{4\varepsilon}{M^2}}}{2}$

Or il est facile de s'assurer que l'on a, pour un certain $i \in \mathbb{N}$:

$$[0,S^*] = [0,L-1,(1,L-2)_i,1,L-1, \ldots]$$

Et comme on a, si M grand :

$$\frac{L - \sqrt{L^2 - 4 + \frac{4\varepsilon}{M^2}}}{2} \# \frac{L - \sqrt{L^2 - 4}}{2} = \xi = [0,L-1,\underline{1,L-2}]$$

L'inégalité recherchée a toutes chances d'être assurée.

De façon plus précise, notons :

$$\frac{P(\xi)}{Q(\xi)} = [0,L-1,(1,L-2)_i,1,L-1]$$

On a :

$$\frac{K_1}{M} = [0,S^*] < \frac{P(\xi)}{Q(\xi)} < \xi$$

. <u>Si $\varepsilon = -1$</u>

On a : $\xi = \frac{L - \sqrt{L^2 - 4}}{2} < \frac{L - \sqrt{L^2 - 4 + \frac{4\varepsilon}{M^2}}}{2}$

En continuant avec l'inégalité donnée avant, on conclut :

$$0 > F_\theta(0,1) > -1$$

Dans ce cas, on a donc $0 < M(F_\theta) < 1$, et avec le Théorème XV.1 :

$$A_\theta = - M(F_\theta)$$

. Si $\ell = 1$

On a $$\frac{L - \sqrt{L^2 - 4 + \frac{4}{M^2}}}{2} < \xi = \frac{L - \sqrt{L^2 - 4}}{2}$$

Avec :

$$\xi - \frac{L - \sqrt{L^2 - 4 + \frac{4}{M^2}}}{2} = \frac{\sqrt{L^2 - 4 + \frac{4}{M^2}} - \sqrt{L^2 - 4}}{2} < \frac{1}{\sqrt{L^2 - 4}\ M^2}$$

Dans l'arbre de MARKOFF, on trouve pour la suite S* une configuration :

$X = (\emptyset, L-1, (1, L-2)_{i+1}, 1) = (\emptyset, L-1, X_2)$

$X^D = (\overset{V}{X}, L-1, X_2) = \overline{(L-1, (1, L-2)_i, 1, L-1}, L-1, \overline{(1, L-2)_{i+1}, 1)}$

S*

On a donc, de façon évidente : $M \geqslant m(X^D) > (L-1)\ Q(\xi)^2$

D'où l'on déduit :

$$\xi - \frac{L - \sqrt{L^2 - 4 + \frac{4}{M^2}}}{2} < \frac{1}{\sqrt{L^2 - 4}\ (L-1)^2 Q(\xi)^4}$$

Plusieurs cas se présentent :

◊ Si $\dfrac{P(\xi)}{Q(\xi)} \leqslant \dfrac{L - \sqrt{L^2 - 4 + \frac{4}{M^2}}}{2} < \xi$

Dans ce cas, on conclut comme précédemment :

$$0 > F_\theta(0,1) > -1$$

Soit $$0 < M(F_\theta) = - A_\theta < 1$$

◊ Si $\dfrac{L - \sqrt{L^2 - 4 + \frac{4}{M^2}}}{2} < \dfrac{P(\xi)}{Q(\xi)} < \xi$

On a alors l'inégalité :

$$\frac{P(\xi)}{Q(\xi)} - \frac{L - \sqrt{L - 4 + \frac{4}{M\ell}}}{2} < \frac{1}{\sqrt{L^2 - 4}\,(L-1)^2 Q(\xi)^4}$$

Par le Théorème de LAGRANGE, $\frac{P(\xi)}{Q(\xi)}$ est une réduite du nombre $\frac{L - \sqrt{L^2 - 4 + \frac{4}{M\ell}}}{2}$. Et compte tenu de la structure de ξ, le développement de ce nombre s'écrit :

$$\frac{L - \sqrt{L^2 - 4 + \frac{4}{M^2}}}{2} = [0, L-1, (1, L-2)_i, 1, L-1, \ldots]$$

Pour conclure, il faut procéder plus finement.

Considérons :

$$\frac{p}{q} = [0, L-1, (1, L-2)_i, 1, L-1, L-1, 1]$$

On a par construction :

$$\frac{K_1}{M} \leqslant \frac{p}{q} < \frac{P(\xi)}{Q(\xi)} < \xi$$

Le nombre $\frac{p}{q}$ n'étant pas une réduite de ξ, on a par le Théorème de LAGRANGE :

$$\xi - \frac{p}{q} > \frac{1}{2q^2}$$

On a aussi : $(L-1)^2 Q(\xi) < q < L^2 Q(\xi)$

Ceci résulte des formules courantes pour les fractions continues, en comparant $\frac{p}{q}$ et $\frac{P(\xi)}{Q(\xi)}$.

On obtient donc : $\xi - \frac{p}{q} > \frac{1}{2q^2} > \frac{1}{2L^4 Q(\xi)^2}$

En comparant avec : $\xi - \frac{L - \sqrt{L^2 - 4 + \frac{4}{M\ell}}}{2} < \frac{1}{\sqrt{L^2 - 4}\,(L-1)^2 Q(\xi)^4}$

On obtient l'inégalité : $\frac{p}{q} < \frac{L - \sqrt{L^2 - 4 + \frac{4}{M\ell}}}{2}$

pourvu que l'on ait : $\sqrt{L^2 - 4}\,(L-1)^2 Q(\xi)^2 > 2L^4$

ou simplement, puisque $L \geqslant 3$: $(L-1)Q(\xi) > L^2$

. Si l'on suppose i > 0, le nombre $Q(\xi)$ est supérieur au dénominateur de :

$$[0,L-1,1,L-2,1,L-1] = [0,L-1,1,L-2,1,L-2,1]$$

$$= \frac{L^2 - 1}{L^3 - 2L}$$

On a donc $Q(\xi) \geqslant L^3 - 2L > L^2$

Dans ce cas, on a : $0 > F_\theta(0,1) > -1$

. Si l'on suppose i = 0, on trouve :

$$\frac{p}{q} = [0,L-1,1,L-1,L-1,1] = \frac{L^2+1}{L^3}$$

Soit $\xi - \frac{p}{q} > \frac{1}{2L^6}$

En reconsidérant la configuration donnée ci-dessus pour S*, on trouve : $M \geqslant m(X') = L^4 - L^2 + 1 > L^3$

Soit : $$\xi - \frac{L - \sqrt{L^2 - 4 + \frac{4}{M^2}}}{2} < \frac{1}{\sqrt{L^2-4}\ M^2} < \frac{1}{\sqrt{L^2-4}\ L^6}$$

On constatant que l'on a, ce qui est évident avec $L \geqslant 3$:

$$\sqrt{L^2-4} > 2$$

On obtient encore : $$\frac{K_\theta}{M} \leqslant \frac{p}{q} < \frac{L - \sqrt{L^2 - 4 + \frac{4}{M^2}}}{2}$$

soit : $0 > F_\theta(0,1) > -1$

En synthétisant tout ce qui précède, on peut alors énoncer :

THEOREME XV.4

Soit F_θ une forme de MARKOFF construite à partir d'une suite (S,L-1) où S donnée par la construction de MARKOFF associée à l'équation diophantienne ($\mathcal{M}$ reg).

Alors :

(1) On a $0 < M(F_\theta) < 1$ sauf les cas où l'on peut écrire :

$S^* = (L-1,(1,L-2)_t,1)$ $(t \in \mathbb{N})$

Dans ces cas, on a en effet $M(F_\theta) = 1$

(2) On a toujours : $A_\theta = -M(F_\theta)$.

C/ CONSEQUENCES POUR LA (a,0,1) THEORIE DE MARKOFF

Le résultat que l'on vient d'établir confirme en la généralisant une remarque que l'on faisait avant : il n'y a pas équivalence entre l'étude de la (L-1,0,1) Théorie de MARKOFF et l'étude de l'équation diophantienne :

$$m^2 - m_1^2 + m_2^2 = Lmm_1m_2$$

En effet, si l'arbre construit à partir de cette équation donne bien des suites telles que r = 0 (Voir Théorème XIV.1) et situées dans le langage < L-1 >* pour ce qui concerne celles apparaissant sous (L-1,1,L-2,1), si l'on a bien aussi $\varepsilon = -\varepsilon_1\varepsilon_2 = 1$, la condition $-A_\theta = M(F_\theta) \in]0,1[$ établie dans différents cas par le Théorème XV.4 montre que ces suites ne font pas nécessairement partie de la (L-1,0,1) Théorie de MARKOFF.

Les seules pour lesquelles ceci est assuré sont les suites s'écrivant :

$$S^* = (L-1,(1,L-2)_t,1) \quad (t \in \mathbb{N})$$

Ce premier découplage entre l'étude de la (L-1,0,1) Théorie et l'étude de l'équation considérée s'aggrave d'une second concrétisé par la propriété suivante :

PROPRIETE XV.3

Pour toute valeur $a \in \mathbb{N}^*$, la (a,0,1) Théorie de MARKOFF contient une infinité de formes F_θ dont celles définies par les suites S suivantes :

(1) $S^* = (a,(1,a-1)_t,1)$ $\quad (t \in \mathbb{N})$

(2) $S^* = ((a)_{2t},a-1,1)$ $\quad (t \in \mathbb{N})$

(3) $S^* = (a,(1)_{2t},a-1,1)$ $\quad (t \in \mathbb{N})$

Pour vérifier que les suites $S^* = ((a)_{2t},a-1,1)$ conviennent, on introduit $(F_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ suite définie par :

$$\begin{cases} F_0(a) = 1 \\ F_1(a) = a \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad F_{n+1}(a) = aF_n(a) + F_{n-1}(a) \end{cases}$$

On trouve ainsi :

$$M_{S^*} = \begin{vmatrix} F_{2t+1}(a) & F_{2t+1}(a) - F_{2t}(a) \\ F_{2t}(a) & F_{2t}(a) - F_{2t-1}(a) \end{vmatrix}$$

Par le Théorème I.13, on observe alors que le minimum arithmétique de la forme

$$F_\theta(X,Y) = X^2 + \left[\frac{(a+1)F_{2t+1}(a) - 2F_{2t}(a)}{F_{2t+1}(a)}\right]XY - \left[\frac{(a+1)F_{2t}(a) - F_{2t-1}(a)}{F_{2t+1}(a)}\right]Y$$

est obtenu pour les valeurs :

$$\begin{cases} k_1 = K_1 = F_{2t}(a) \\ m_1 = m = F_{2t+1}(a) \end{cases}$$

On trouve ainsi : $M(F_\theta) = 1$

Le reste des vérifications est évident.

Les suites $S^* = ((a)_{2t}, a-1, 1)$ apparaissent bien dans la (a,0,1) Théorie de MARKOFF, mais non dans l'arbre que l'on considère. On remarque d'ailleurs que pour ces suites, on a :

$$\text{pgcd}(m, m_1) = m = m_1$$

Pour les autres suites mentionnées dans la propriété XV.3, les calculs s'effectuent de même.

XVI - EXEMPLES D'ARBRES DANS LA (3,0,-1) THEORIE DE MARKOFF

A / INTRODUCTION

On utilise ici les moyens qui ont été développés aux chapitres X et XI et dont il s'agit maintenant d'illustrer l'efficacité.

Grâce au programme GENTRI, avec a = 3, on fabrique diverses possibilités de suites S*, avec les valeurs correspondantes m, $K_1 = K_2$, $\varepsilon = (-1)^{m-1} = -1$,] .

Par recours au programme EXTREMUM, on sélectionne parmi les suites obtenues celles qui sont telles que l'on ait : $m = m_3(S)$: elles correspondent à la (3,0,-1) Théorie de MARKOFF.

Ce même programme fournit le polynôme $f_\theta(X,Y)$, ainsi que les valeurs N_θ, k_1, m_1.
A partir de celles-ci, en observant que l'on a toujours $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, on détermine k_1 et m_1, d'où k_2 et m_2 par les formules :

$$\begin{cases} m_2 = m_1 K_1 - m k_1 \\ k_2 = m_1] - K_2 k_1 \end{cases}$$

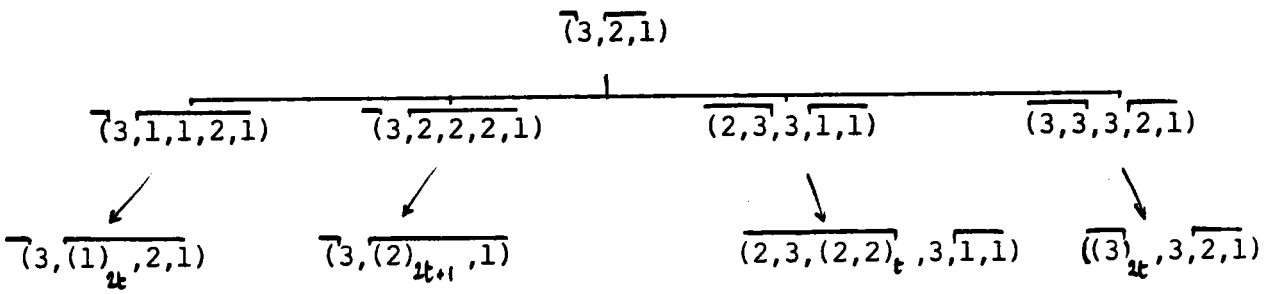
Ceci permet d'équiper la suite S* des deux symboles ¬ correspondant à m_1 et k_1, et ⌐ correspondant à k_2, m_2 par les formules :

$$\begin{cases} \dfrac{k_1}{m_1} = [0, X_1] \\ \dfrac{k_2}{m_2} = [0, \tilde{X}_2] \\ S^* = X = (\overline{X_1}, 3, \overline{X_2}) \\ \dfrac{K_1}{m} = [0, X] = [0, S^*] \end{cases}$$

On obtient ainsi le tableau donné en annexe qui décrit pour $m \in \mathbb{N}^*$ inférieur ou égal à 3050 toutes les possibilités pour S*.

B / ARBORESCENCES

L'analogie avec l'arbre de MARKOFF permet d'envisager une organisation arborescente dont le sommet serait le suivant :



B.1 - Suites $\overline{(3},(1)_{2t},\overline{2,1)}$

Les paramètres intervenant pour ces suites sont calculables :

D'abord :

$$M_{\chi_2} = \begin{bmatrix} m_2 & m_2 - k_2 \\ k_{21} & k_{21} - \gamma_{\chi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2t} & F_{2t-1} \\ F_{2t-1} & F_{2t-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{2t} + F_{2t+2} & ; & F_{2t+2} \\ F_{2t-1} + F_{2t+1} & ; & F_{2t+1} \end{bmatrix}$$

donne :

$$\begin{cases} m_2 = F_{2t+2} + F_{2t} \\ k_2 = F_{2t} \\ k_{21} = F_{2t+1} + F_{2t-1} \\ \gamma_{\chi_2} = F_{2t-1} \end{cases}$$

Ensuite :

$$M_{\chi} = \begin{bmatrix} m & m - K_2 \\ K_1 & K_1 - \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{\chi_2} = \begin{bmatrix} F_{2t+4} + 2F_{2t+2} + F_{2t} & ; & F_{2t+4} + F_{2t+2} \\ F_{2t+2} + F_{2t} & ; & F_{2t+2} \end{bmatrix}$$

donne :

$$\begin{cases} m = F_{2t+4} + 2F_{2t+2} + F_{2t} \\ K_1 = K_2 = F_{2t+2} + F_{2t} \\ \gamma = F_{2t} \end{cases}$$

Enfin :

$$M_{\chi_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donne :
$$\begin{cases} m_1 = 1 \\ k_1 = 0 \\ k_{12} = 1 \\ \gamma_{X_1} = -1 \end{cases}$$

On trouve ainsi : $a = 3 \quad r = K_1 - K_2 = 0 \quad \varepsilon = (-1)^{k+1} = -1$

Soit : $f_\theta(X,Y) = mX^2 + (4m - 2K_1)XY + (\gamma - 4K_1)Y^2$

$$= (F_{2k+4} + 2F_{2k+2} + F_{2k})X^2 + (4F_{2k+4} + 6F_{2k+2} + 2F_{2k})XY - (4F_{2k+2} + 3F_{2k})Y^2$$

Et à partir de l'expression $\theta_3(S) = [0, \underline{S^*, 3}]$, on peut calculer les valeurs $m_3(S)$ et N_θ, par exemple en utilisant le lemme de DICKSON. On trouve ainsi :

$$\begin{cases} m_3(S) = m = f_\theta(K_1, m) \\ N_\theta = f_\theta(0,1) = -4F_{2k+2} - 3F_{2k} = -(m + F_{2k+2}) \end{cases}$$

Les suites considérées font donc bien partie de la (3,0,-1) Théorie de MARKOFF, tout en étant telles que l'on ait : $N_\theta \neq -m$.
De façon plus précise, on peut énoncer :

PROPRIETE XVI.1

La (3,0,-1) Théorie de MARKOFF contient une infinité de suites S*, dont celles qui s'écrivent sous la forme :

$$S^* = (3, (1)_{2k}, 2, 1) \qquad (k \in \mathbb{N})$$

Pour celles-ci, on a : $N_\theta = -(m + F_{2k+2})$

B.2 - Suites $\overline{(3, (2)_{2k+1}, 1)}$

Les paramètres intervenant pour ces suites sont calculables :

$$M_{X_2} = \begin{bmatrix} m_2 & m_2 - k_2 \\ k_{21} & k_{21} - \gamma_{X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2k+1}(2) & F_{2k}(2) \\ F_{2k}(2) & F_{2k-1}(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

donne :
$$\begin{cases} m_2 = F_{2k+1}(2) + F_{2k}(2) \\ k_2 = F_{2k}(2) \\ k_{21} = F_{2k}(2) + F_{2k-1}(2) \\ \gamma_{X_2} = F_{2k-1}(2) \end{cases}$$

$$M_{\lambda} = \begin{bmatrix} m & m - K_2 \\ K_1 & K_1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{K_2}$$

donne :
$$\begin{cases} m = 2F_{2k+2}(2) \\ K_2 = F_{2k+1}(2) + F_{2k}(2) \\ K_1 = F_{2k+1}(2) + F_{2k}(2) \\ 1 = F_{2k}(2) \end{cases}$$

Enfin, comme dans le cas précédent :

$$\begin{cases} m_1 = 1 \\ k_1 = 0 \\ k_{12} = 1 \\ 1_{K_1} = -1 \end{cases}$$

On trouve ainsi : $a = 3 \quad r = K_1 - K_2 = 0 \quad \varepsilon = (-1)^{n+1} = -1$

En calculant comme avant f_θ , et en appliquant le lemme de DICKSON, on vérifie sans difficulté que les suites considérées font partie de la (3,0,-1) Théorie de MARKOFF.

On peut ainsi énoncer :

PROPRIETE XVI.2

La (3,0,-1) Théorie de MARKOFF contient l'infinité des suites S* qui s'écrivent sous la forme :

$$S^* = (3,(2)_{2k+1},1)$$

Pour celles-ci, on a : $N_\theta = -(m + F_{2k}(2))$

Pour les autres formes de suites mentionnées ci-dessus dans le haut de l'arborescence, des calculs comparables sont faisables sur lesquels on n'insiste pas.

C / CONSTRUCTION D'ARBRES DANS LA (3,0,-1) THEORIE DE MARKOFF

Sur le tableau annexe, on trouve dans tous les cas pour expression de N_θ la forme suivante :

$$N_\theta = -(m + u_\theta) \qquad (u_\theta \in \mathbb{N}^*)$$

Cette écriture est très générale.

Avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, elle permet d'écrire la relation de MARKOFF généralisée sous la forme :

(M'_1) : $\quad m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 4mm_1m_2 - u_0 m$

Cette condition montre que m divise $m_1^2 + m_2^2$

Et l'on a : $u_0 = 4m_1m_2 - \dfrac{m_1^2 + m_2^2}{m} - m$

La difficulté est cette fois que la valeur u_0 change à chaque niveau de l'arborescence que l'on étudie. Ceci est donc différent de la situation rencontrée dans la Théorie de MARKOFF classique, où l'on avait à tous les niveaux $u_0 = 0$.

Une autre différence est qu'il arrive que l'on ait : $\text{pgcd}(m_1, m_2) \neq 1$.

EXEMPLE

$m = 578 \quad m_1 = 76 \quad m_2 = 2$

donne pour $S^* = (\overline{2,3,3,3}, 3, \overline{1,1})$ la condition :

$\text{pgcd}(m_1, m_2) = 2$

L'étude de l'équation (M'_1) peut cependant se faire en appliquant des principes comparables à ceux utilisés dans la Théorie de MARKOFF classique.

On établit alors :

THEOREME XVI.1

Pour $u_0 \in \mathbb{N}$, considérons l'équation diophantienne :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4xyz - u_0 x$$

Supposons qu'elle admette au moins une solution. Alors elle admet un arbre de solutions descriptible à partir de toute solution $(x,y,z) = (m, m_1, m_2)$ par la figure suivante :

$(m\ ;\ m_1\ ;\ m_2)$

G D

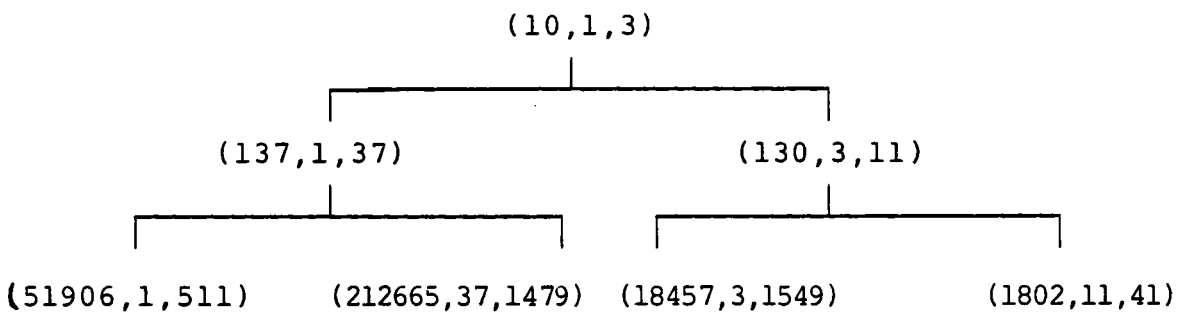
$(m^G\ ;\ m_1^G\ ;\ m_2^G)$ $(m^D\ ;\ m_1^D\ ;\ m_2^D)$

$$\begin{cases} (G_1) : m^G = 4m_1[4mm_1 - m_2] - m - u_0 \\ (G_2) : m_1^G = m_1 \\ (G_3) : m_2^G = 4mm_1 - m_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (D_1) : m^D = 4m_2[4m_2M - m_1] - M - u_0 \\ (D_2) : m_1^D = m_2 \\ (D_3) : m_2^D = 4m_2M - m_1 \end{cases}$$

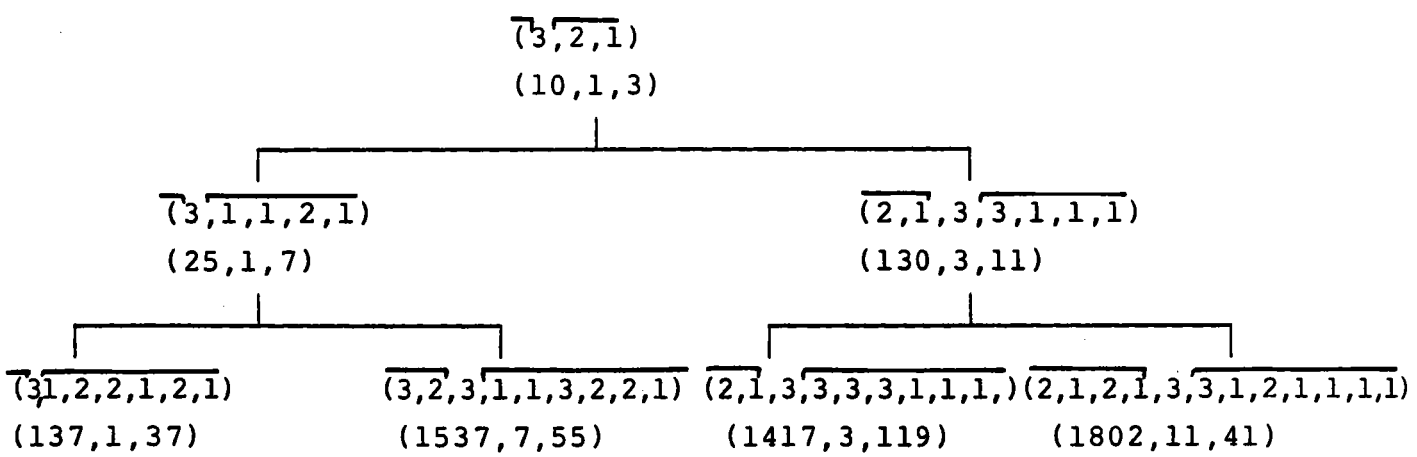
où

$$(D) : M = 4m_2m_1 - m - u_0$$

La vérification de ce résultat est évidente.
Et par exemple, avec $u_0 = 1$, ces formules donnent l'arbre suivant :



Si l'on compare à ce qui apparaissait dans le tableau donné en annexe, ceci suggère d'organiser les suites y apparaissant et correspondant à $u_0 = 1$ selon l'arbre suivant :



Le Théorème XVI.1 décrit imparfaitement l'arbre que l'on met ainsi en évidence, mais tous les résultats fournis ici illustrent malgré tout la pertinence de la méthode d'analyse développée dans tous les chapitres antérieurs.

De plus, ce théorème permet de décrire à partir des autres valeurs u_p qui peuvent être rencontrées dans la (3,0,-1) Théorie -certaines de ces valeurs sont fournies par les propriétés XVI.1 et XVI.2- de nombreux autres arbres apparaissant dans la (3,0,-1) Théorie de MARKOFF.

Il donne une idée de ce que peut être la complexité de cette dernière théorie.

B I B L I O G R A P H I E

[1] O. PERRON - *Die Lehre von den Kettenbrüchen*
Teubner (BI 1954 - B II 1957)

[2] I.F. KOKSMA - *Diophantische Approximationen*
Reprint Springer Verlag (1974)

[3] L.E. DICKSON - *Studies in the Theory of numbers*
Chelseas Pub.Co (1957)

[4] A.A. MARKOFF - *Sur les formes quadratiques indéfinies*
Mathematische Annalen
Band VI (1878) (P.381-406)
Band XVII (1880) (P.377-399)

[5] J.W.S. CASSELS - *An introduction to diophantine approximation*
Cambridge tracts in mathematics n° 45 (1957)

[6] M. HALL - *On the sum and product of continued fractions*
Annals of Mathematics Vol 48 n° 4 oct 47
(P. 966-993)

[7] P.BARRUCAND
M.DUBOUE - *Fractions continues - Sommes de DEDEKIND et formes quadratiques*
Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo - Série II - Tomo XXXIII (1984)
(P.62-84)

[a] S. PERRINE - Thèse 2ème partie : Propriétés des spectres de MARKOFF et de PERRON.

ANNEXES

A LA TROISIEME PARTIE

PROGRAMME "FRACTION"

```
10 PRINT"E)cran, I)mprimante,":INPUT A$
20 IF A$="E" OR A$="e" THEN OPEN "O",#1,"SCRN:"ELSE OPEN "O",#1,"LPT1:"
30 PRINT#1,"PROGRAMME DE CALCUL DU DEVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE"
40 REM Les donnees se rentrent a l'instruction suivante
45 DIM A#(100)
46 DIM B#(100)
47 DIM C#(100)
48 DIM G#(100)
49 DIM M#(100)
50 DATA 142008,-2,83164,8
60 READ A#,B#,C#,D#
70 REM On teste ici si D est un carre
80 LET FAC#=1
90 MAX#=INT(SQR(D#)+1)
100 FOR K=1 TO MAX#
110 IF(D#/(K*K))=INT(D#/(K*K)) THEN GOTO 120 ELSE GOTO 160
120 LET FAC#=K
130 IF K*K=D# THEN GOTO 140 ELSE GOTO 160
140 PRINT#1,"ATTENTION! D=";D#;"est un carre"
150 GOTO 1160
160 NEXT K
170 LET COMPTEUR#=0
180 LET I=0
190 REM On est pret a effectuer le developpement de l'algebrique considere
200 REM Il faut creer des fichiers pour les matrices utilisees
210 REM On demarre les calculs sur les donnees initiales
220 LET A#(I)=A#
230 LET B#(I)=B#
240 LET C#(I)=C#
250 LET S#=C#(I)*C#(I)
260 LET R#=-(2*A#(I)*C#(I))
270 LET T#=((A#(I)^2)-((B#(I)^2)*D#))
280 LET UU#=ABS(R#)
290 LET VV#=ABS(S#)
300 LET WW#=ABS(UU#-(VV#*INT(UU#/VV#)))
310 LET UU#=VV#
320 LET VV#=WW#
330 IF VV#=0 THEN GOTO 340 ELSE GOTO 300
340 LET ZZ#=ABS(T#)
350 LET PP#=ABS(UU#-(ZZ#*INT(UU#/ZZ#)))
360 LET UU#=ZZ#
370 LET ZZ#=PP#
380 IF ZZ#=0 THEN GOTO 390 ELSE GOTO 350
390 LET S#=(S#/UU#)
400 LET R#=(R#/UU#)
410 LET T#=(T#/UU#)
420 LET J#=((R#^2)-(4*S#*T#))
430 REM La plus petite valeur entre S et T est utilisee
440 IF ABS(S#)(ABS(T#) THEN M#(I)=ABS(S#) ELSE M#(I)=ABS(T#)
450 REM La valeur M(I) est utilisee pour la constante de MARKOFF
460 IF COMPTEUR# =0 THEN GOTO 470 ELSE GOTO 900
470 LET M#=M#(I)
480 PRINT#1,"Valeurs determinant G:"
490 PRINT#1,"A=";A#,"B=";B#,"C=";C#,"D=";D#
500 PRINT#1,"Polynome minimal de G:((";S#;")*X*X)+((";R#;")*X+(";T#;")"
510 PRINT#1,"DELTA=";J#,"Quadratfrei=";D#/(FAC#*FAC#),"Facteur=";FAC#
520 PRINT#1,"Le developpement donne les valeurs suivantes:"
530 PRINT#1,"A(I+1)","B(I+1)","C(I+1)","Entier","G(I)"
540 REM On passe maintenant aux calculs du developpement
550 LET G#(I)=((A#(I)+(B#(I)*SQR(D#)))/C#(I))
560 LET A#(I+1)=((C#(I)*A#(I))-((C#(I)^2)*INT(G#(I))))
570 LET B#(I+1)=-(B#(I)*C#(I))
580 REM Le calcul de C(I+1) doit etre decompose
590 LET X#=((A#(I)-(C#(I)*INT(G#(I))))^2)
600 LET Y#=((B#(I)^2)*D#)
610 LET C#(I+1)=X#-Y#
620 REM C(I+1) est maintenant calcule
```

```
630 REM Il faut calculer le PGCD de A(I+1),B(I+1),C(I+1)
640 LET U#=(A#(I+1))
650 LET V#=(B#(I+1))
660 LET W#=U#-(V#*INT(U#/V#))
670 LET U#=V#
680 LET V#=W#
690 IF V#=0 THEN GOTO 700 ELSE GOTO 660
700 LET Z#=(C#(I+1))
710 LET P#=U#-(Z#*INT(U#/Z#))
720 LET U#=Z#
730 LET Z#=P#
740 IF Z#=0 THEN GOTO 750 ELSE GOTO 710
750 REM La valeur du PGCD est disponible en U
760 LET A#(I+1)=(A#(I+1)/U#)
770 LET B#(I+1)=(B#(I+1)/U#)
780 LET C#(I+1)=(C#(I+1)/U#)
790 REM Pour commodite on va maintenant imposer que C(I+1) soit positif
800 IF C#(I+1))0 THEN GOTO 840
810 LET A#(I+1)=-A#(I+1)
820 LET B#(I+1)=-B#(I+1)
830 LET C#(I+1)=-C#(I+1)
840 REM Maintenant C(I+1) est positif
850 LET S#=C#(I+1)*C#(I+1)
860 LET R#=-(2*A#(I+1)*C#(I+1))
870 LET T#=((A#(I+1)^2)-((B#(I+1)^2)*D#))
880 LET COMPTEUR#=1
890 GOTO 280
900 IF M#(M#(I) THEN GOTO 930
910 LET M#=M#(I)
920 REM On a mis en M la plus petite valeur trouvee avant
930 PRINT #1,A#(I+1),B#(I+1),C#(I+1),INT(G#(I)),G#(I)
940 IF I=1 GOTO 1110
950 REM La boucle suivante determine ou commence la periode
960 FOR K=1 TO (I-1)
970 REM
980 IF(A#(K+1)=A#(I+1)) THEN GOTO 990 ELSE GOTO 1090
990 IF(B#(K+1)=B#(I+1)) THEN GOTO 1000 ELSE GOTO 1090
1000 IF(C#(K+1)=C#(I+1)) THEN GOTO 1010 ELSE GOTO 1090
1010 PRINT #1,"Le developpement devient periodique a partir du rang K=";K+1
1020 PRINT#1,"La periode a pour longueur L=";I -K
1030 PRINT#1,"La constante de Markoff est donnee par M=";M#;"et DELTA=";J#
1040 PRINT#1,"Une valeur approchee de cette constante est:";M#/SQR(J#)
1050 PRINT#1,"FIN"
1060 LET M#=0
1070 LET COMPTEUR=0
1080 GOTO 1170
1090 NEXT K
1100 REM On traverse la boucle si la periode n'est pas trouvee
1110 LET I=I+1
1120 IF I( 100 THEN GOTO 550
1130 PRINT#1,"---ATTENTION!---CAPACITE DU PROGRAMME ATTEINTE---D=";J#
1140 REM Le programme calcule les periodes de longueur moindre que 100
1150 GOTO 1050
1160 IF A$ () "E" AND A$ )( "e" THEN CLOSE 1
1170 END
```

EXEMPLE :

```
PROGRAMME DE CALCUL DU DEVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE
Valeurs determinant G:
A= 7          B= 1          C= 8          D= 96
Polynome minimal de G:(( 64 )*X*X)+((-112 )*X+(-47 )
DELTA= 24576  Quadratfrei= 6              Facteur= 4
Le developpement donne les valeurs suivantes:
```

A(I+1)	B(I+1)	C(I+1)	Entier	G(I)
72	8	15	2	2.099744915962219
39	4	2	10	10.02557830810547
78	8	15	39	39.09591865539551
9	1	8	10	10.42557830810547
56	8	47	2	2.349744915962219
19	4	50	2	2.859227119608128
62	8	23	1	1.16383674621582
19	2	4	6	6.103638027025306
68	8	95	9	9.648979663848877
27	8	57	1	1.540880785490337
15	4	46	1	1.84883639686986
62	8	25	1	1.178083419799805
63	8	87	5	5.615346984863281
3	1	8	1	1.625099708294046
40	8	71	1	1.599744915962219
31	8	73	1	1.667375698895522
21	4	30	1	1.498406501665507
78	8	1	2	2.006394577026367
39	4	30	156	156.383674621582
42	8	73	2	2.606394577026367
31	8	71	1	1.649091433172357
5	1	8	1	1.54061513551524
24	8	87	1	1.849744915962219
63	8	25	1	1.176823846225081
31	4	46	5	5.655346984863281
30	8	57	1	1.525909506756326
27	8	95	1	1.901467975817229
17	2	4	1	1.109301838121916
76	8	23	9	9.148979663848877
31	4	50	6	6.712333679199219
38	8	47	1	1.40383674621582
7	1	8	2	2.476248396203873
72	8	15	2	2.099744915962219
39	4	2	10	10.02557830810547

```
Le developpement devient periodique a partir du rang K= 2
La periode a pour longueur L= 32
La constante de Markoff est donnee par M= 1 et DELTA= 24576
Une valeur approchee de cette constante est: 6.378879306359169D-03
FIN
```

PROGRAMME "CONTINUE"

```
10 PRINT"E)cran, I)mprimante?":INPUT A$
11 IF A$="E" OR A$="e" THEN OPEN "O",£1,"SCRN:" ELSE OPEN "O",£1,"LPT1:"
20 PRINT£1,"PROGRAMME DE CALCUL DU DEVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE"
30 DATA 1,1,3,51
40 READ A,B,C,D
50 REM On peut entrer ici des series de donnees dans l'instruction DATA
60 LET APER =0
70 LET PER=0
80 REM On teste ici si D est un carre
90 FOR RAC=1 TO (INT(SQR(D))+1)
100 IF RAC=(INT(SQR(D))+1) THEN GOTO 160
110 LET CAR=(RAC*RAC)
120 IF CAR=D THEN GOTO 130 ELSE GOTO 150
130 PRINT"ATTENTION! D=";D;"est un carre"
140 GOTO 1560
150 NEXT RAC
160 LET COMPTEUR=0
170 LET I=1
180 REM On est pret a effectuer le developpement de l'algebrique considere
190 REM Il faut creer des fichiers pour les matrices utilisees
250 REM Il faut dimensionner les matrices utilisees
260 DIM A(200)
270 DIM B(200)
280 DIM C(200)
290 DIM G(200)
300 DIM M(200)
310 REM On demarre les calculs sur les donnees initiales
320 LET A(I)=A
330 LET B(I)=B
340 LET C(I)=C
350 LET S=C(I)*C(I)
360 LET R=-(2*A(I)*C(I))
370 LET T=((A(I)^2)-((B(I)^2)*D))
380 LET UU=ABS(R)
390 LET VV=ABS(S)
400 LET WW=ABS(UU-(VV*INT(UU/VV)))
410 LET UU=VV
420 LET VV=WW
430 IF VV=0 THEN GOTO 440 ELSE GOTO 400
440 LET ZZ=ABS(T)
450 LET PP=ABS(UU-(ZZ*INT(UU/ZZ)))
460 LET UU=ZZ
470 LET ZZ=PP
480 IF ZZ=0 THEN GOTO 490 ELSE GOTO 450
490 LET S=(S/UU)
500 LET R=(R/UU)
510 LET T=(T/UU)
520 LET J=((R^2)-(4*S*T))
530 REM La plus petite valeur entre S et T est utilisee
540 IF ABS(S)<ABS(T) GOTO 550 ELSE GOTO 570
550 LET M(I)=ABS(S)
560 GOTO 580
570 LET M(I)=ABS(T)
580 REM La valeur M(I) est utilisee pour la constante de MARKOFF
590 IF COMPTEUR=0 THEN GOTO 600 ELSE GOTO 1120
600 LET M=M(I)
610 PRINT£1,"Valeurs determinant G:"
620 PRINT£1,"A=";A,"B=";B,"C=";C,"D=";D
630 PRINT£1,"Polynome minimal de G:((";S;")*X*X)+((";R;")*X+(";T;")"
```

```
640 REM
650 REM
660 REM
670 REM On passe maintenant aux calculs du developpement
680 LET G(I)=((A(I)+(B(I)*SQR(D)))/C(I))
690 LET A(I+1)=((C(I)*A(I))-((C(I)^2)*INT(G(I))))
700 LET B(I+1)=-(B(I)*C(I))
710 REM Le calcul de C(I+1) doit etre decompose
720 LET X=((A(I)-(C(I)*INT(G(I))))^2)
730 LET Y=((B(I)^2)*D)
740 LET C(I+1)=X-Y
750 REM On fait en sorte que le PGCD de A(I+1),B(I+1),C(I+1) soit 1
760 LET U=(A(I+1))
770 LET V=(B(I+1))
780 LET W=U-(V*INT(U/V))
790 LET U=V
800 LET V=W
810 IF V=0 THEN GOTO 820 ELSE GOTO 780
820 LET Z=(C(I+1))
830 C(I+1)=X-Y
840 REM C(I+1) est maintenant calcule
850 REM Il faut calculer le PGCD de A(I+1),B(I+1),C(I+1)
860 LET U=(A(I+1))
870 LET V=(B(I+1))
880 LET W=U-(V*INT(U/V))
890 LET U=V
900 LET V=W
910 IF V=0 THEN GOTO 920 ELSE 880
920 LET Z=(C(I+1))
930 LET P=U-(Z*INT(U/Z))
940 LET U=Z
950 LET Z=P
960 IF Z=0 THEN GOTO 980 ELSE GOTO 930
970 REM La valeur du PGCD est disponible en U
980 LET A(I+1)=(A(I+1)/U)
990 LET B(I+1)=(B(I+1)/U)
1000 LET C(I+1)=(C(I+1)/U)
1010 REM Pour commodite on va maintenant imposer que C(I+1) soit positif
1020 IF C(I+1)<0 THEN GOTO 1030 ELSE GOTO 1060
1030 LET A(I+1)=-A(I+1)
1040 LET B(I+1)=-B(I+1)
1050 LET C(I+1)=-C(I+1)
1060 REM Maintenant C(I+1) est positif
1070 LET S=C(I+1)*C(I+1)
1080 LET R=-(2*A(I+1)*C(I+1))
1090 LET T=((A(I+1)^2)-((B(I+1)^2)*D))
1100 LET COMPTEUR=1
1110 GOTO 380
1120 IF M(M(I) THEN GOTO 1150 ELSE GOTO 1130
1130 LET M=M(I)
1140 REM On a mis en M la plus petite valeur trouvee avant
1150 REM
1160 IF I=1 GOTO 1320
1170 REM La boucle suivante determine ou commence la periode
1180 FOR K=1 TO (I-1)
1190 IF(G(K)=G(I)) THEN GOTO 1200 ELSE GOTO 1300
1200 IF(A(K+1)=A(I+1)) THEN GOTO 1210 ELSE GOTO 1300
1210 IF(B(K+1)=B(I+1)) THEN GOTO 1220 ELSE GOTO 1300
1220 IF(C(K+1)=C(I+1)) THEN GOTO 1230 ELSE GOTO 1300
1230 PRINT&1,"Rang de debut de periode:K=";K
1231 REM
1240 LET APER=K
1250 LET PER=(I-K)+1
1251 IF K=1 THEN GOTO 1415 ELSE GOTO 1260
```

```
1260 REM
1270 REM
1280 GOTO 1370
1290 IF K=I THEN GOTO 1320 ELSE GOTO 1300
1300 NEXT K
1310 REM On traverse la boucle si la periode n'est pas trouvee
1320 LET I=I+1
1330 IF I(=100 THEN GOTO 680 ELSE GOTO 1340
1340 PRINT£1,"---ATTENTION!---CAPACITE DU PROGRAMME ATTEINTE---ATTENTION!---"
1350 REM Le programme calcule les periodes de longueur moindre que 100
1360 GOTO 1560
1361 PRINT£1,"                                                              "
1370 PRINT£1, "Partie non periodique:"
1380 FOR TT=1 TO(APER-1)
1390 PRINT£1, INT(G(TT));"*";
1400 NEXT TT
1408 PRINT£1,,,,,
1409 PRINT£1,"                                                              "
1410 PRINT£1,"Periode:"
1411 GOTO 1420
1415 PRINT£1,"Periode:"
1420 FOR TT=APER TO PER
1430 PRINT£1, INT(G(TT));"*";
1440 NEXT TT
1450 PRINT£1,,,,,
1451 PRINT£1,"                                                              "
1452 PRINT£1,"Longueur de la periode:L=";I-K
1460 PRINT£1,"Constante de Markoff avec M=";M;"et DELTA=";J
1470 PRINT£1,"C(G)=";M/(SQR(J))
1480 REM
1540 LET M=0
1550 LET COMPTEUR=0
1560 PRINT£1,"FIN"
1570 IF A$ <> "E" AND A$ <> "e" THEN CLOSE 1
1580 END
```

EXEMPLE :

```
PROGRAMME DE CALCUL DU DEVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE
Valeurs determinant G:
A= 1          B= 1          C= 3          D= 51
Polynome minimal de G:(( 9 )*X*X)+((-6 )*X+(-50 )
Rang de debut de periode:K= 2
Partie non periodique:
 2 *

Periode:
 1 * 2 * 2 * 42 * 2 * 2 * 1 * 4 * 21 * 4 *


Longueur de la periode:L= 10
Constante de Markoff avec M= 1 et DELTA= 1836
C(G)= .023338
FIN
```

PROGRAMME "RATIO"

```
5 CLS
10 PRINT "E)cran ,I)morimante ?":INPUT A$
15 IF A$ ="E" OR A$ ="e" THEN OPEN "O",#1,"SCRN:" ELSE OPEN "O",#1,"LPT1:"
20 LET P=135
30 LET Q=28
40 PRINT#1,"P=";P,"Q=";Q
50 PRINT#1,"Developpement:"
60 LET I=0
70 IF (P/Q)=INT(P/Q) THEN GOTO 160 ELSE GOTO 80
80 LET A=INT(P/Q)
90 PRINT#1,A
100 LET X=Q
110 LET Y=(P-(A*Q))
120 LET P=X
130 LET Q=Y
140 LET I=I+1
150 GOTO 70
160 PRINT#1,(P/Q)
170 PRINT#1,"Longueur:";I+1
180 IF A$ <> "E" AND A$ >< "e" THEN CLOSE 1
190 END
```

EXEMPLE :

```
P= 135          Q= 28
Developpement:
 4
 1
 4
 1
 1
 2
Longueur: 6
```

PROGRAMME "SEQUENCE"

```
10 PRINT"E)cran. I)morimante?":INPUT A$
11 IF A$="E" OR A$="e" THEN OPEN "O",£1,"SCRN:" ELSE OPEN "O",£1,"LPT1:"
20 PRINT£1,"PROGRAMME DE CALCUL D'UN ALGEBRIQUE DONNE PAR SON DEVELOPPEMENT"
30 REM La partie non periodique se rentre en 140
40 REM La partie periodique se rentre en 540
50 LET FIL=0
60 REM On ouvre les fichiers necessaires pour le calcul des reduites
65 DIM A(100)
66 DIM B(100)
67 DIM C(100)
68 DIM G(100)
69 DIM M(100)
70 DIM P(100)
80 DIM U(100)
90 DIM V(100)
100 DIM Q(100)
110 PRINT£1,"Partie non periodique:"
120 REM On rentre ici la sequence suivie de 0
130 REM ATTENTION:S'il n'y a pas de sequence initiale mettre un 0 seul
140 DATA 1,2,1,1,3,0
150 READ PER
160 IF PER =0 GOTO 180 ELSE GOTO 170
170 PRINT£1, PER
180 IF PER =0 GOTO 290 ELSE GOTO 190
190 LET FIL=FIL+1
200 IF FIL=1 GOTO 210 ELSE GOTO 260
210 LET P(1)=1
220 LET Q(1)=0
230 LET P(2)=PER
240 LET Q(2)=1
250 GOTO 150
260 LET P(FIL+1)=(P(FIL)*PER)+P(FIL-1)
270 LET Q(FIL+1)=(Q(FIL)*PER)+Q(FIL-1)
280 GOTO 150
290 IF FIL=0 THEN GOTO 360 ELSE GOTO 300
300 PRINT£1,"Longueur k+1=";FIL
310 PRINT£1,"MATRICE M(k):"
320 PRINT£1, "P(k)=";P(FIL+1),"P(k-1)=";P(FIL)
330 PRINT£1, "Q(k)=";Q(FIL+1),"Q(k-1)=";Q(FIL)
340 PRINT£1,"Disc(M(k))=";((P(FIL+1)*Q(FIL))-(P(FIL)*Q(FIL+1)))
350 GOTO 400
360 PRINT£1, "Il n'y en a pas."
```

```
370 IF FIL=0 THEN GOTO 380 ELSE GOTO 400
380 LET PUM=7
390 GOTO 440
400 LET XX1=P(FIL+1)
410 LET XX=P(FIL)
420 LET YY1=Q(FIL+1)
430 LET YY=Q(FIL)
460 LET FIL=0
470 REM On ouvre les fichiers necessaires pour le calcul des reduites
520 PRINT#1,"Sequence donnee:"
530 REM On rentre ici la periode suivie de 0
540 DATA 1,1,2,2,1,1,0
550 READ REP
560 IF REP=0 GOTO 580 ELSE GOTO 570
570 PRINT#1, REP
580 IF REP =0 GOTO 690 ELSE GOTO 590
590 LET FIL=FIL+1
600 IF FIL=1 GOTO 610 ELSE GOTO 660
610 LET U(1)=1
620 LET V(1)=0
630 LET  U(2)=REP
640 LET V(2)=1
650 GOTO 550
660 LET U(FIL+1)=((U(FIL)*REP)+U(FIL-1))
670 LET V(FIL+1)=(V(FIL)*REP)+V(FIL-1)
680 GOTO 550
690 PRINT#1, "Matrice associee a la periode"
700 PRINT#1,"P(1-k)=";U(FIL+1),"P(1-k-1)=";U(FIL)
710 PRINT#1,"Q(1-k)=";V(FIL+1),"Q(1-k-1)=";V(FIL)
720 PRINT#1,"Disc(M(1-k)=";((U(FIL+1)*V(FIL))-(U(FIL)*V(FIL+1)))
730 LET BB=1
740 LET CC=2*V(FIL+1)
750 LET AA=U(FIL+1)-V(FIL)
760 LET D=(((V(FIL)-U(FIL+1))*(V(FIL)-U(FIL+1)))+(4*V(FIL+1)*U(FIL)))
770 IF PUM=7 THEN GOTO 780 ELSE GOTO 820
780 LET A=AA
790 LET B=BB
800 LET C=CC
810 GOTO 850
820 LET A=(((XX1*AA)+(XX*CC))*((YY1*AA)+(YY*CC)))-((XX1*YY1)*D)
830 LET B=(((YY1*AA)+(CC*YY))*XX1)-(((XX1*AA)+(XX*CC))*YY1)
840 LET C=(((YY1*AA)+(YY*CC))*((YY1*AA)+(YY*CC)))-(YY1*YY1*D)
850 REM Le programme vient de calculer G
860 REM On applique ensuite le programme "FRACTION CONTINUE"
870 REM On teste ici si D est un carre
880 FOR RAC=1 TO (INT(SQR(D))+1)
890 IF RAC=(INT(SQR(D))+1) THEN GOTO 950
900 LET CAR=(RAC*RAC)
910 IF CAR=D THEN GOTO 920 ELSE GOTO 940
920 PRINT#1,"ATTENTION! D=";D;"est un carre"
930 GOTO 2230
940 NEXT RAC
950 LET COMPTEUR=0
960 LET I=1
970 REM On est pret a effectuer le developpement de l'algebrique considere
980 REM Il faut creer des fichiers pour les matrices utilisees
1100 REM On demarre les calculs sur les donnees initiales
1110 LET A(I)=A
1120 LET B(I)=B
1130 LET C(I)=C
1140 LET S=C(I)*C(I)
1150 LET R=-(2*A(I)*C(I))
1160 LET T=((A(I)^2)-((B(I)^2)*D))
1170 LET UU=ABS(R)
1180 LET VV=ABS(S)
1190 LET WW=ABS(UU-(VV*INT(UU/VV)))
```

```
1200 LET UU=VV
1210 LET VV=WW
1220 IF VV=0 THEN GOTO 1230 ELSE GOTO 1190
1230 LET ZZ=ABS(T)
1240 LET PP=ABS(UU-(ZZ*INT(UU/ZZ)))
1250 LET UU=ZZ
1260 LET ZZ=PP
1270 IF ZZ=0 THEN GOTO 1280 ELSE GOTO 1240
1280 LET S=(S/UU)
1290 LET R=(R/UU)
1300 LET T=(T/UU)
1310 LET J=((R^2)-(4*S*T))
1320 REM La plus petite valeur entre S et T est utilisee
1330 IF ABS(S)<ABS(T) GOTO 1340 ELSE GOTO 1360
1340 LET M(I)=ABS(S)
1350 GOTO 1370
1360 LET M(I)=ABS(T)
1370 REM La valeur M(I) est utilisee pour la constante de MARKOFF
1380 IF COMPTEUR=0 THEN GOTO 1390 ELSE GOTO 1900
1390 LET M=M(I)
1400 PRINT&1,"Valeurs pour G:"
1410 PRINT&1,"A=";A,"B=";B,"C=";C,"D=";D
1420 PRINT&1,"Polynome minimal:              ((";S;")*X*X)+((";R;")*X)+(";T;")"
1430 PRINT&1,"Le developpement donne les valeurs suivantes:"
1440 PRINT&1,"A(I+1)","B(I+1)","C(I+1)","ENTIER","M(I)"
1450 REM On passe maintenant aux calculs du developpement
1460 LET G(I)=((A(I)+(B(I)*SQR(D)))/C(I))
1470 LET A(I+1)=((C(I)*A(I))-((C(I)^2)*INT(G(I))))
1480 LET B(I+1)=-(B(I)*C(I))
1490 REM Le calcul de C(I+1) doit etre decompose
1500 LET X=((A(I)-(C(I)*INT(G(I))))^2)
1510 LET Y=((B(I)^2)*D)
1610 C(I+1)=X-Y
1620 REM C(I+1) est maintenant calcule
1630 REM Il faut calculer le PGCD de A(I+1),B(I+1),C(I+1)
1640 LET U=(A(I+1))
1650 LET V=(B(I+1))
1660 LET W=U-(V*INT(U/V))
1670 LET U=V
1680 LET V=W
1690 IF V=0 THEN GOTO 1700 ELSE 1660
1700 LET Z=(C(I+1))
1710 LET P=U-(Z*INT(U/Z))
1720 LET U=Z
1730 LET Z=P
1740 IF Z=0 THEN GOTO 1760 ELSE GOTO 1710
1750 REM La valeur du PGCD est disponible en U
1760 LET A(I+1)=(A(I+1)/U)
1770 LET B(I+1)=(B(I+1)/U)
1780 LET C(I+1)=(C(I+1)/U)
1790 REM Pour commodite on va maintenant imposer que C(I+1) soit positif
1800 IF C(I+1)<0 THEN GOTO 1810 ELSE GOTO 1840
1810 LET A(I+1)=-A(I+1)
1820 LET B(I+1)=-B(I+1)
1830 LET C(I+1)=-C(I+1)
1840 REM Maintenant C(I+1) est positif
1850 LET S=C(I+1)*C(I+1)
1860 LET R=-(2*A(I+1)*C(I+1))
1870 LET T=((A(I+1)^2)-((B(I+1)^2)*D))
1880 LET COMPTEUR=1
1890 GOTO 1170
1900 IF M<M(I) THEN GOTO 1930 ELSE GOTO 1910
1910 LET M=M(I)
1920 REM On a mis en M la plus petite valeur trouvee avant
1930 PRINT&1, A(I+1), B(I+1),C(I+1),INT(G(I)),M(I)
1940 IF I=1 GOTO 2070
```

```
1950 REM La boucle suivante determine ou commence la periode
1960 FOR K=1 TO (I-1)
1970 REM
1980 IF(A(K+1)=A(I+1)) THEN GOTO 1990 ELSE GOTO 2050
1990 IF(B(K+1)=B(I+1)) THEN GOTO 2000 ELSE GOTO 2050
2000 IF(C(K+1)=C(I+1)) THEN GOTO 2010 ELSE GOTO 2050
2010 PRINT£1,"Debut periode K=";K
2020 PRINT£1,"Longueur L=";I-K
2030 GOTO 2120
2040 IF K=I THEN GOTO 2070 ELSE GOTO 2050
2050 NEXT K
2060 REM On traverse la boucle si la periode n'est pas trouvee
2070 LET I=I+1
2080 IF I<=100 THEN GOTO 1460 ELSE GOTO 2090
2090 PRINT£1,"---ATTENTION!---CAPACITE DU PROGRAMME ATTEINTE---D=";J
2100 REM Le programme calcule les periodes de longueur moindre que 100
2110 GOTO 2230
2120 PRINT£1,"M=";M;"DELTA=";J
2130 PRINT£1,"C(G)=";M/(SQR(J))
2210 LET M=0
2220 LET COMPTEUR=0
2230 PRINT£1,"FIN"
2250 END
```

PROGRAMME "MOTS"

```
5 TIME$="00:00:00"
10 CLS
15 DIM P1(100):DIM Q1(100):DIM A(100):DIM B(100):DIM C(100):DIM G(100):DIM M(
):DIM P(100):DIM U(100):DIM V(100):DIM Q(100)
30 INPUT "combien de caract
res seront utiliss ( (=9 ) : ";JJ
31 IF JJ)9 THEN GOTO 30
35 GOSUB 500
40 LOCATE 3,1
50 INPUT "longueur des mots du langage ( (=255 ) : ";N
60 IF N)255 THEN GOTO 50
70 A$=""
80 FOR II=1 TO N
90 A$=A$+"1"
100 NEXT II
107 GOSUB 10020
110 FOR II=1 TO JJ^N-1
210 NO=LEN(A$)
220 CH$=MID$(A$,NO,1)
230 WHILE CH$=MID$(STR$(JJ),2,1) AND NO<>0
240 MID$(A$,NO,1)="1"
250 NO=NO-1
260 CH$=MID$(A$,NO,1)
270 WEND
280 MID$(A$,NO,1)=MID$(STR$(VAL(MID$(A$,NO,1))+1),2,1)
290 PRINT A$,
293 GOSUB 10020
300 NEXT II
345 PRINT
350 PRINT "le calcul a pris ";TIME$;" secondes"
355 IF R$="i" OR R$="I" THEN PRINT#1,CHR$(12)
360 IF R$="I" OR R$="i" THEN CLOSE #1
370 END
500 R$=""
505 LOCATE 2,1
510 PRINT "E(cran, I(mprimante    "
520 WHILE R$<>"E" AND R$<>"e" AND R$<>"I" AND R$<>"i"
530 LOCATE 2,23
540 PRINT " "
550 LOCATE 2,23
560 INPUT R$
570 WEND
580 IF R$="E" OR R$="e" THEN OPEN "O",#1,"SCRN:" ELSE OPEN "O",#1,"LPT1:"
585 PRINT#1,"ENUMERATION DES MOTS DE MARKOFF"
590 RETURN
10020 LET AAA=0
10050 LET FIL=0
10400 LET XX1=P(FIL+1)
10410 LET XX=P(FIL)
10420 LET YY1=Q(FIL+1)
10430 LET YY=Q(FIL)
10470 REM On ouvre les fichiers necessaires pour le calcul des reduites
10535 PO=1
10540 WHILE PO<=LEN(A$)
```

```
10550 REP=VAL(MID$(A$,PO,1))
10555 IF AAA(REP THEN GOTO 10556 ELSE GOTO 10590
10556 LET AAA=REP
10590 LET FIL=FIL+1
10600 IF FIL ()1 THEN GOTO 10660
10610 LET U(1)=1
10620 LET V(1)=0
10630 LET  U(2)=REP
10640 LET V(2)=1
10650 GOTO 10675
10660 LET U(FIL+1)=((U(FIL)*REP)+U(FIL-1))
10670 LET V(FIL+1)=(V(FIL)*REP)+V(FIL-1)
10675 PO=PO+1
10680 WEND
10715 LET DISC=((U(FIL+1)*V(FIL))-(U(FIL)*V(FIL+1)))
10724 LET DELTA=(((AAA*U(FIL+1))+U(FIL)+V(FIL+1))^2)+(4*DISC)
10730 LET   B=1
10740 LET  C=2*U(FIL+1)
10750 LET  A=(U(FIL+1)*(AAA-2))+V(FIL+1)-U(FIL)
10760 LET D=DELTA
10850 REM Le programme vient de calculer G
10860 REM On applique ensuite le programme "FRACTION CONTINUE"
10870 REM On teste ici si D est un carre
10880 MAX=INT(SQR(D)+1)
10890 FOR K=1 TO MAX
10900 IF K*K=D THEN GOTO 12235
10910 NEXT K
10950 LET COMPTEUR=0
10960 LET I=1
10970 REM On est pret a effectuer le developpement de l'algebrique considere
10980 REM Il faut creer des fichiers pour les matrices utilisees
11100 REM On demarre les calculs sur les donnees initiales
11110 LET A(I)=A
11120 LET B(I)=B
11130 LET C(I)=C
11140 LET S=C(I)*C(I)
11150 LET R=-(2*A(I)*C(I))
11160 LET T=((A(I)^2)-((B(1)^2)*D))
11170 LET UU=ABS(R)
11180 LET VV=ABS(S)
11190 LET WW=ABS(UU-(VV*INT(UU/VV)))
11200 LET UU=VV
11210 LET VV=WW
11220 IF VV()0 THEN GOTO 11190
11230 LET ZZ=ABS(T)
11240 LET PP=ABS(UU-(ZZ*INT(UU/ZZ)))
11250 LET UU=ZZ
11260 LET ZZ=PP
11270 IF ZZ()0 THEN GOTO 11240
11280 LET S=(S/UU)
11290 LET R=(R/UU)
11300 LET T=(T/UU)
11310 LET J=((R^2)-(4*S*T))
11320 REM La plus petite valeur entre S et T est utilisee
11330 IF ABS(S)(ABS(T) THEN M(I)=ABS(S) ELSE M(I)=ABS(T)
11370 REM La valeur M(I) est utilisee pour la constante de MARKOFF
11380 IF COMPTEUR ()0 THEN GOTO 11900
11390 LET M=M(I)
11450 REM On passe maintenant aux calculs du developpement
11460 LET G(I)=((A(I)+(B(I)*SQR(D)))/C(I))
11470 LET A(I+1)=((C(I)*A(I))-((C(I)^2)*INT(G(I))))
11480 LET B(I+1)=-(B(I)*C(I))
11490 REM Le calcul de C(I+1) doit etre decompose
11500 LET X=((A(I)-(C(I)*INT(G(I))))^2)
11510 LET Y=((B(I)^2)*D)
11610 C(I+1)=X-Y
```

```
11620 REM C(I+1) est maintenant calcule
11630 REM Il faut calculer le PGCD de A(I+1),B(I+1),C(I+1)
11640 LET U=(A(I+1))
11650 LET V=(B(I+1))
11660 LET W=U-(V*INT(U/V))
11670 LET U=V
11680 LET V=W
11690 IF V()0 THEN GOTO 11660
11700 LET Z=(C(I+1))
11710 LET P=U-(Z*INT(U/Z))
11720 LET U=Z
11730 LET Z=P
11740 IF Z()0 THEN GOTO 11710
11750 REM La valeur du PGCD est disponible en U
11760 LET A(I+1)=(A(I+1)/U)
11770 LET B(I+1)=(B(I+1)/U)
11780 LET C(I+1)=(C(I+1)/U)
11790 REM Pour commodite on va maintenant imposer que C(I+1) soit positif
11800 IF C(I+1))0 THEN GOTO 11840
11810 LET A(I+1)=-A(I+1)
11820 LET B(I+1)=-B(I+1)
11830 LET C(I+1)=-C(I+1)
11840 REM Maintenant C(I+1) est positif
11850 LET S=C(I+1)*C(I+1)
11860 LET R=-(2*A(I+1)*C(I+1))
11870 LET T=((A(I+1)^2)-((B(I+1)^2)*D))
11880 LET COMPTEUR=1
11890 GOTO 11170
11900 IF M(M(I) THEN GOTO 11940
11910 LET M=M(I)
11920 REM On a mis en M la plus petite valeur trouvee avant
11940 IF I=1 GOTO 12070
11950 REM La boucle suivante determine ou commence la periode
11960 FOR K=1 TO (I-1)
11970 REM
11980 IF(A(K+1)()A(I+1)) THEN GOTO 12050
11990 IF(B(K+1)()B(I+1)) THEN GOTO 12050
12000 IF(C(K+1)()C(I+1)) THEN GOTO 12050
12030 GOTO 12131
12050 NEXT K
12060 REM On traverse la boucle si la periode n'est pas trouvee
12070 LET I=I+1
12080 IF I(=100 THEN GOTO 11460
12090 PRINT#1,"---ATTENTION!---CAPACITE DU PROGRAMME ATTEINTE---D=";J
12100 REM Le programme calcule les periodes de longueur moindre que 100
12110 GOTO 12235
12131 IF (DELTA*M*M)=(J*U(FIL+1)*U(FIL+1)) THEN GOSUB 20000 ELSE GOTO 12210
12210 LET M=0
12220 LET COMPTEUR=0
12235 PRINT#1,"---------------------------------------"
12250 RETURN
20000 REM module d'impression des rsultats
20001 CLS
20010 PRINT#1,"Priode de Markoff"
20015 PRINT A$,
20020 PRINT#1,"a=";AAA
20030 PRINT#1,"Matrice MS"
20040 PRINT#1,"P(1-k)=";U(FIL+&00),"p(1-k-1)=";U(FIL)
20050 PRINT#1,"q(1-k)=";V(FIL+1),"q(1-k-1)=";V(FIL)
20060 PRINT#1,"disc=";DISC
20070 PRINT#1,"m=";U(FIL+1),"V1=";U(FIL)+U(FIL+1),"k1=";U(FIL)
20080 PRINT#1,"V2=";V(FIL+1)+U(FIL+1),"w=";V(FIL)+U(FIL)+V(FIL+1)+U(FIL+1),"k2
;U(FIL+1)-V(FIL+1)
20090 PRINT#1,"l=";(((U(FIL)*(U(FIL+1)-V(FIL+1)))-DISC)/U(FIL+1))
20100 PRINT#1,"DELTA=";DELTA
```

```
20110 PRINT#1,"Valeurs pour G:"
20120 PRINT#1,"A=";A,"B=";B,"C=";C,"D=";D
20130 PRINT#1,"Polynome minimal:                ((";S;")*X*X)+((";R;")*X)+(";T;"
20140 PRINT#1,"Le dveloppement donne les valeurs suivantes:"
20150 PRINT#1,"A(I+1)","B(I+1)","C(I+1)","ENTIER","M(I)"
20160 PRINT#1,A(I+1),B(I+1),C(I+1),INT(G(I)),M(I)
20170 PRINT#1,"Dbut priode K=";K
20180 PRINT#1,"Longueur L=";I-K
20190 PRINT#1,"M=";M;"DELTA=";J
20200 PRINT#1,"C(G)=";M/(SQR(J))
20205 PRINT#1,"":PRINT#1,""
20210 RETURN
```

```
1121221222     a= 2
A= 164         B= 1          C= 1986        D= 8820904
Longueur L= 11
M= 903 DELTA= 8820904
C(G)= .3040404
-----------------------

1121222111     a= 2
A=-22          B= 1          C= 834         D= 1790248
Longueur L= 11
M= 407 DELTA= 1790248
C(G)= .304185
-----------------------

1121222112     a= 2
A= 130         B= 1          C= 1360        D= 4064260
Longueur L= 11
M= 306 DELTA= 1016065
C(G)= .3035713
-----------------------

1121222121     a= 2
A=-87          B= 1          C= 1142        D= 3568325
Longueur L= 11
M= 551 DELTA= 3568325
C(G)= .2916886
-----------------------

1121222122     a= 2
A= 154         B= 1          C= 1976        D= 8785300
Longueur L= 11
M= 900 DELTA= 8785300
C(G)= .3036437
-----------------------
```

PROGRAMME "CLASSES"

```
10 DIM A#(100)
20 DIM B#(100)
30 DIM C#(100)
40 DIM G#(100)
50 DIM M#(100)
60 PRINT"E)cran, I)morimante,":INPUT A$
70 IF A$="E" OR A$="e" THEN OPEN "O",#1,"SCRN:"ELSE OPEN "O",#1,"LPT1:"
80 LET MIN=140
90 LET MAX=145
100 LET D#=MIN-1
110 LET D#=D#+1
120 IF D#=(4*INT(D#/4)) THEN GOTO 150
130 IF D#=(4*INT(D#/4))+1 THEN GOTO 150
140 GOTO 110
150 IF D#)MAX THEN GOTO 1590
160 REM Les donnees se rentrent a l'instruction suivante
170 REM On teste ici si D est un carre
180 LET FAC#=1
190 MU=INT(SQR(D#)+1)
200 FOR RAC=1 TO MU
210 IF(D#/(RAC*RAC))=INT(D#/(RAC*RAC)) THEN GOTO 220 ELSE GOTO 270
220 LET FAC#=RAC
230 IF RAC*RAC=D# THEN GOTO 240 ELSE GOTO 270
240 PRINT#1,"ATTENTION! D=";D#;"est un carre"
250 PRINT#1,"-----------------------------------"
260 GOTO 110
270 NEXT RAC
280 REM On determine l'algebrique a etudier
290 LET MM=0
300 LET MM=MM+1
310 LET H=0
320 LET C#=(2*MM)
330 IF D#((5*MM*MM) THEN GOTO 110 ELSE GOTO 340
340 LET COMPTEUR#=0
350 IF H=(2*MM) THEN GOTO 300
360 LET BO=(D#-(H*H))
370 FOR Q=1 TO BO
380 IF Q=BO THEN GOTO 390 ELSE GOTO 410
390 LET H=H+1
400 GOTO 350
410 IF (Q*(4*MM))=(BO) THEN GOTO 430
420 NEXT Q
430 LET B#=1
440 LET A#=H
450 REM On determine le PGCD de MM,H,(H*H)-D#:(4*MM)
```

```
460 LET U=H
470 LET V=((H*H)-D#)/(4*MM)
480 LET W=U-(V*INT(U/V))                                          B1.18
490 LET U=V
500 LET V=W
510 IF V=0 THEN GOTO 520 ELSE GOTO 480
520 LET Z=MM
530 LET P=U-(Z*INT(U/Z))
540 LET U=Z
550 LET Z=P
560 IF Z=0 THEN GOTO 570 ELSE GOTO 530
570 REM La valeur du PGCD est en U
580 IF U=1 THEN GOTO 590 ELSE GOTO 390
590 REM
600 LET I=0
610 REM On est pret a effectuer le developpement de l'algebrique considere
620 REM Il faut creer des fichiers pour les matrices utilisees
630 REM On demarre les calculs sur les donnees initiales
640 LET A#(I)=A#
650 LET B#(I)=B#
660 LET C#(I)=C#
670 LET S#=C#(I)*C#(I)
680 LET R#=-(2*A#(I)*C#(I))
690 LET T#=((A#(I)^2)-((B#(I)^2)*D#))
700 LET UU#=ABS(R#)
710 LET VV#=ABS(S#)
720 LET WW#=ABS(UU#-(VV#*INT(UU#/VV#)))
730 LET UU#=VV#
740 LET VV#=WW#
750 IF VV#=0 THEN GOTO 760 ELSE GOTO 720
760 LET ZZ#=ABS(T#)
770 LET PP#=ABS(UU#-(ZZ#*INT(UU#/ZZ#)))
780 LET UU#=ZZ#
790 LET ZZ#=PP#
800 IF ZZ#=0 THEN GOTO 810 ELSE GOTO 770
810 LET S#=(S#/UU#)
820 LET R#=(R#/UU#)
830 LET T#=(T#/UU#)
840 LET J#=((R#^2)-(4*S#*T#))
850 REM La plus petite valeur entre S et T est utilisee
860 IF ABS(S#)<ABS(T#) THEN M#(I)=ABS(S#) ELSE M#(I)=ABS(T#)
870 REM La valeur M(I) est utilisee pour la constante de MARKOFF
880 IF COMPTEUR# =0 THEN GOTO 890 ELSE GOTO 1320
890 LET M#=M#(I)
900 PRINT#1,"Valeurs determinant G:"
910 PRINT#1,"A=";A#,"B=";B#,"C=";C#,"D=";D#
920 PRINT#1,"Polynome minimal de G:((";S#;")*X*X)+((";R#;")*X+(";T#;")"
930 PRINT#1,"DELTA=";J#,"Quadratfrei=";D#/(FAC#*FAC#),"Facteur=";FAC#
940 PRINT#1,"Le developpement donne les valeurs suivantes:"
950 PRINT#1,"A(I+1)","B(I+1)","C(I+1)","Entier","G(I)"
960 REM On passe maintenant aux calculs du developpement
970 LET G#(I)=((A#(I)+(B#(I)*SQR(D#)))/C#(I))
980 LET A#(I+1)=((C#(I)*A#(I))-((C#(I)^2)*INT(G#(I))))
990 LET B#(I+1)=-(B#(I)*C#(I))
1000 REM Le calcul de C(I+1) doit etre decompose
1010 LET X#=((A#(I)-(C#(I)*INT(G#(I))))^2)
1020 LET Y#=((B#(I)^2)*D#)
1030 LET C#(I+1)=X#-Y#
1040 REM C(I+1) est maintenant calcule
1050 REM Il faut calculer le PGCD de A(I+1),B(I+1),C(I+1)
1060 LET U#=(A#(I+1))
1070 LET V#=(B#(I+1))
1080 LET W#=U#-(V#*INT(U#/V#))
1090 LET U#=V#
1100 LET V#=W#
1110 IF V#=0 THEN GOTO 1120 ELSE GOTO 1080
1120 LET Z#=(C#(I+1))
1130 LET P#=U#-(Z#*INT(U#/Z#))
1140 LET U#=Z#
1150 LET Z#=P#
```

```
1160 IF Z#=0 THEN GOTO 1170 ELSE GOTO 1130
1170 REM La valeur du PGCD est disponible en U
1180 LET A#(I+1)=(A#(I+1)/U#)                                    Bl.19
1190 LET B#(I+1)=(B#(I+1)/U#)
1200 LET C#(I+1)=(C#(I+1)/U#)
1210 REM Pour commodite on va maintenant imposer que C(I+1) soit positif
1220 IF C#(I+1))0 THEN GOTO 1260
1230 LET A#(I+1)=-A#(I+1)
1240 LET B#(I+1)=-B#(I+1)
1250 LET C#(I+1)=-C#(I+1)
1260 REM Maintenant C(I+1) est positif
1270 LET S#=C#(I+1)*C#(I+1)
1280 LET R#=-(2*A#(I+1)*C#(I+1))
1290 LET T#=((A#(I+1)^2)-((B#(I+1)^2)*D#))
1300 LET COMPTEUR#=1
1310 GOTO 700
1320 IF M#(M#(I) THEN GOTO 1350
1330 LET M#=M#(I)
1340 REM On a mis en M la plus petite valeur trouvee avant
1350 PRINT #1,A#(I+1),B#(I+1),C#(I+1),INT(G#(I)),G#(I)
1360 IF I=1 GOTO 1540
1370 REM La boucle suivante determine ou commence la periode
1380 FOR K=1 TO (I-1)
1390 REM
1400 IF(A#(K+1)=A#(I+1)) THEN GOTO 1410 ELSE GOTO 1520
1410 IF(B#(K+1)=B#(I+1)) THEN GOTO 1420 ELSE GOTO 1520
1420 IF(C#(K+1)=C#(I+1)) THEN GOTO 1430 ELSE GOTO 1520
1430 PRINT #1,"Le developpement devient periodique a partir du rang K=";K+1
1440 PRINT#1,"La periode a pour longueur L=";I-K
1450 PRINT#1,"La constante de Markoff est donnee par M=";M#;"et DELTA=";J#
1460 PRINT#1,"Une valeur approchee de cette constante est:";M#/SQR(J#)
1470 PRINT#1,"FIN"
1480 PRINT#1,"----------------------------------------"
1490 LET M#=0
1500 LET COMPTEUR#=0
1510 GOTO 390
1520 NEXT K
1530 REM On traverse la boucle si la periode n'est pas trouvee
1540 LET I=I+1
1550 IF I( 100 THEN GOTO 970
1560 PRINT#1,"---ATTENTION!---CAPACITE DU PROGRAMME ATTEINTE---D=";J#
1570 REM Le programme calcule les periodes de longueur moindre que 100
1580 GOTO 1470
1590 IF A$ () "E" AND A$ )( "e" THEN CLOSE 1
1600 END
```

TABLE DES ORBITES

DES NOMBRES ALGEBRIQUES DE DEGRE 2

Cette table est fournie par le programme "CLASSES" selon les valeurs croissantes de Δ possibles.

Dans certains cas, la valeur Δ considérée est multiplé du carré d'un nombre baptisé "facteur". Le terme $\frac{\Delta}{(\text{facteur})^2}$ est le quadratfrei, ou nombre sans carré correspondant.

Cette table correspond aux nombres :

$$\gamma = \frac{H + \sqrt{\Delta}}{2MM}$$

Où

$$\begin{cases} H^2 \equiv \Delta \quad (\text{modulo } 4\ MM) \\ 0 \leqslant H < 2\ MM \\ p\ g\ c\ d\ (MM, H, \frac{H^2 - \Delta}{4\ MM}) = 1 \end{cases}$$

De plus, grâce au théorème de Serret, elle ne comprend qu'un nombre correspondant à toute période donnée : celui associé à la plus petite valeur de Δ , puis de MM et enfin de H.

```
A= 0          B= 1          C= 2          D= 32
P(X)=( 1 )*X*X)+((-4 )*X+(-4 )
DELTA= 32     Quad= 2       Facteur= 4    M= 1
Periode:
 1 * 4 *
alp= 2
----------------------------------------
A= 1          B= 1          C= 2          D= 33
P(X)=( 3 )*X*X)+((-3 )*X+(-2 )
DELTA= 33     Quad= 33      Facteur= 1    M= 1
Periode:
 2 * 1 * 2 * 5 *
alp= 2
----------------------------------------
A= 1          B= 1          C= 2          D= 37
P(X)=( 3 )*X*X)+((-1 )*X+(-3 )
DELTA= 37     Quad= 37      Facteur= 1    M= 1
Periode:
 1 * 1 * 5 *
alp= 2
----------------------------------------
A= 0          B= 1          C= 2          D= 40
P(X)=( 1 )*X*X)+((-6 )*X+(-1 )
DELTA= 40     Quad= 10      Facteur= 2    M= 1
Periode:
 6 *
alp= 3
----------------------------------------
```

TABLE DES PERIODES POUR t(S) = 2

VALEURS DONNES POUR LES CONTRAINTES

$0 < m < 1\,000$ et $0 < K_1 = K_2 < \frac{m}{2}$

m	m + K_1	Période (S,2)	$m_2(S)$
5*	7	(1,1,2,2)	5 = m
13*	18	(1,1,1,1,2,2)	13 = m
29*	41	(1,1,2,2,2,2)	29 = m
34*	47	(1,1,1,1,1,1,2,2)	34 = m
73	100	(1,1,1,2,2,1,2,2)	71
74	105	(1,1,2,1,1,2,2,2)	70
89*	123	(1,1,1,1,1,1,1,1,2,2)	89 = m
169*	239	(1,1,2,2,2,2,2,2)	169 = m
185	253	(1,1,1,2,1,1,2,1,2,2)	169
193	274	(1,1,2,1,1,1,1,2,2,2)	181
194*	269	(1,1,1,1,2,2,1,1,2,2)	194 = m
233*	322	(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2)	233 = m
410	583	(1,1,2,1,2,2,1,2,2,2)	374
425	582	(1,1,1,2,2,2,2,1,2,2)	409
433*	612	(1,1,2,2,1,1,2,2,2,2)	433 = m
482	659	(1,1,1,2,1,1,1,1,2,1,2,2)	436
493	684	(1,1,1,1,2,1,1,2,1,1,2,2)	463
505	697	(1,1,1,1,1,2,2,1,1,1,2,2)	503
505	717	(1,1,2,1,1,1,1,1,1,2,2,2)	473
610*	843	(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2)	610 = m
985*	1 393	(1,1,2,2,2,2,2,2,2,2)	985 = m

* Ces cas correspondent à la Théorie de MARKOFF classique.

– De cette table se déduisent les suites (S,3). Pour celles-ci on a $m_3(S) = m$.

EXEMPLE DE LA (3,0,-1) THEORIE

TABLE DES PERIODES POUR t(S) = a = 3

VALEURS DONNEES POUR LES CONTRAINTES

$0 < m < 1\ 000$ et $0 < K_1 = K_2 < \frac{m}{2}$

m	m + K_1	Période (S, 3)	m_3(S)
10	13	(1,2,3,3)	10 = m
25	32	(1,2,1,1,3,3)	25 = m
53	76	(1,1,3,3,2,3)	53 = m
58	75	(1,2,2,2,3,3)	58 = m
65	83	(1,2,1,1,1,1,3,3)	65 = m
109	142	(1,2,3,3,3,3)	109 = m
130	177	(1,1,1,3,3,1,2,3)	130 = m
130	187	(1,1,3,1,1,3,2,3)	126
137	174	(1,2,1,2,2,1,3,3)	137 = m
149	193	(1,2,2,1,1,2,3,3)	149 = m
170	217	(1,2,1,1,1,1,1,1,3,3)	170 = m
241	305	(1,2,1,3,3,1,3,3)	239
269	351	(1,2,3,1,1,3,3,3)	269 = m
305	438	(1,1,3,2,2,3,2,3)	305 = m
314	443	(1,1,2,3,3,2,2,3)	314 = m
317	431	(1,1,1,3,1,1,3,1,2,3)	298
337	485	(1,1,3,1,1,1,1,3,2,3)	323
338	437	(1,2,2,2,2,2,3,3)	338 = m
346	439	(1,2,1,2,1,1,2,1,3,3)	346 = m
349	485	(1,1,1,1,3,3,1,1,2,3)	349 = m
373	477	(1,2,1,1,2,2,1,1,3,3)	373 = m
389	504	(1,2,2,1,1,1,1,2,3,3)	389 = m
445	568	(1,2,1,1,1,1,1,1,1,1,3,3)	445 = m
578	829	(1,1,3,3,3,3,2,3)	578 = m
586	741	(1,2,1,3,1,1,3,1,3,3)	542
625	807	(1,2,2,3,3,2,3,3)	625 = m
629	820	(1,2,3,2,2,3,3,3)	629 = m
674	863	(1,2,1,1,3,3,1,1,3,3)	674 = m
698	911	(1,2,3,1,1,1,1,3,3,3)	698 = m
706	1 017	(1,1,3,1,2,2,1,3,2,3)	662
725	1 032	(1,1,2,1,3,3,1,2,2,3)	725 = m

746	1 015	(1,1,1,3,2,2,3,1,2,3)	727
773	1 090	(1,1,2,3,1,1,3,2,2,3)	773 = m
785	1 127	(1,1,3,2,1,1,2,3,2,3)	785 = m
793	1 087	(1,1,1,2,3,3,2,1,2,3)	793 = m
797	1 012	(1,2,1,2,2,2,2,1,3,3)	797 = m
821	1 116	(1,1,1,3,1,1,1,1,3,1,2,3)	763
829	1 075	(1,2,2,1,2,2,1,2,3,3)	829 = m
853	1 186	(1,1,1,1,3,1,1,3,1,1,2,3)	818
865	1 118	(1,2,2,2,1,1,2,2,3,3)	865 = m
881	1 268	(1,1,3,1,1,1,1,1,1,3,2,3)	843
901	1 143	(1,2,1,2,1,1,1,1,2,1,3,3)	901 = m
905	1 248	(1,1,1,1,1,3,3,1,1,1,2,3)	905 = m
949	1 214	(1,2,1,1,2,1,1,2,1,1,3,3)	949 = m
962	1 227	(1,2,1,1,1,2,2,1,1,1,3,3)	962 = m

PROGRAMME "EXTREMUM"

```
10 PRINT"ETUDE DE LA (a,r,E)-THEORIE"
20 PRINT"E)cran, I)mprimante":INPUT A$
30 IF A$="E" OR A$="e" THEN OPEN "O",#1,"SCRN:"ELSE OPEN "O",#1,"LPRT:
(80)"
40 LET E#=1
50 DATA 2378,985
60 READ M#,K1#
70 LET K2#=K1#
80 LET A#=2
90 LET L#=(((K1#**K2#)-E#)/M#)
100 IF INT(L#)=L# THEN GOTO 130 ELSE GOTO 110
110 PRINT#1,"Attention!ln'est pas entier"
120 GOTO 670
130 LET R#=M#
140 LET S#=((M#*(A#+1))-(K1#+K2#))
150 LET T#=(L#-((A#+1)*K1#))
160 LET U#=(K1#-L#)
170 LET V#=(M#-K2#)
180 LET MN#=(T#*2)
190 LET MX#=(R#*2)
200 IF E=-1 THEN GOTO 210 ELSE GOTO 240
210 P#=U#:MP#=K1#
220 Q#=V#:MQ#=M#
230 GOTO 260
240 LET P#=((((A#+1)*K1#)-L#)*V#)+(K1#*U#)
250 LET Q#=((((A#+1)*M#)-K2#)*V#)+(M#*U#)
251 LET MP#=((K1#*K1#)+(((A#+1)*M#)*K1#))-(M#*L#)
252 LET MQ#=((M#*K1#)+(((A#+1)*M#)*M#))-(M#*K2#)
260 PRINT#1,"**************************************"
261 PRINT#1,"a=";A#,"m=";M#,"eps=";E#
262 PRINT#1,"K1=";K1#,"K2=";K2#,"l=";L#
270 PRINT#1,"f(X,Y)=((";R#;")*X*X)+((";S#;")*X*Y)+((";T#;")+Y*Y)"
275 PRINT#1,"--------------------"
276 LET B#=MIN(INT(MP#/P#),INT(MQ#/Q#))
280 LET F#=(R#*(MP#*MP#))+((S#*(MP#*MQ#))+(T#*(MQ#*MQ#)))
300 PRINT#1,"k1=";MP#,"m1=";MQ#,"a=";B#,"f(x,y)=";F#
310 REM  #1,"p(n)=";P#,"Q(n)=";Q#
320 IF F#>0 THEN GOTO 360 ELSE GOTO 330
330 IF F#>MN# THEN GOTO 340 ELSE GOTO 390
340 LET MN#=F#
350 GOTO 390
360 IF F#<MX# THEN GOTO 370 ELSE GOTO 390
370 LET MX#=F#
390 IF P#>1 THEN GOTO 400 ELSE GOTO 460
400 LET XX#=(MP#-(B#*P#))
410 LET YY#=(MQ#-(B#*Q#))
420 MP#=P#:P#=XX#
430 MQ#=Q#:Q#=YY#
440 LET B#=MIN(INT(MP#/P#),INT(MQ#/Q#))
450 GOTO 280
460 LET F#=(R#*(P#*P#))+((S#*(P#*Q#))+(T#*(Q#*Q#)))
470 IF F#<0 THEN GOTO 480 ELSE GOTO 540
480 LET B#=1
481 IF F#>MN# THEN GOTO 482 ELSE GOTO 483
482 LET MN#=F#
483 PRINT#1,"k1=";1,"m1=";Q#-1,"a=";1,"f(x,y)=";F#
484 REM  #1,"p(n)=";0,"Q(n)=";1
485 LET F#=(R#+((S#*(Q#-1))+(T#*((Q#-1)*(Q#-1)))))
486 IF F#<MX# THEN GOTO 487 ELSE GOTO 488
487 LET MX#=F#
488 PRINT#1,"k1=";0,"m1=";1,"a=";(Q#-1),"f(x,y)=";F#
489 GOTO 620
540 LET B#=Q#
545 IF F#<MX# THEN GOTO 550 ELSE GOTO 560
```

```
550 LET MX#=F#
560 PRINT#1,"k1=";1,"m1=";B#,"a=";B#,"f(x,y)=";F#
570 REM  #1,"p(n)=";0,"Q(n)=";1
590 REM Calcul de fin d'algorithme:
595 IF(-T#)<MN# THEN GOTO 596 ELSE GOTO 597
596 LET MN#=(-T#)
597 PRINT#1,"k1=";0,"m1=";1,"      ","f(x,y)=";T#
620 PRINT#1,"--------------------"
630 PRINT#1,"N(THETA)=";MN#,"Soit A(THETA)=";(MN#/M#)
640 PRINT#1,"Ma(S)=";MX#,"Soit m(f)=";(MX#/M#)
650 PRINT#1,"--------------------"
660 GOTO 50
670 IF A$<>"E" AND A$><"e" THEN CLOSE 1
680 END
690 PRINT#1,"STOP"
700 GOTO 670
```

E X E M P L E

```
*******************************
a= 2          m= 2378       eps= 1
K1= 985       K2= 985       l= 408
f(X,Y)=(( 2378 )*X*X)+(( 5164 )*X*Y)+((-2547 )+Y*Y)
--------------------
k1= 7026991   m1= 16964652 a= 1          f(x,y)= 2378
k1= 4116316   m1= 9937663  a= 1          f(x,y)=-3364
k1= 2910675   m1= 7026989  a= 2          f(x,y)= 3362
k1= 1205641   m1= 2910674  a= 2          f(x,y)=-2378
k1= 499393    m1= 1205641  a= 2          f(x,y)= 2547
k1= 206855    m1= 499392   a= 2          f(x,y)=-2518
k1= 85683     m1= 206857   a= 2          f(x,y)= 2523
k1= 35489     m1= 85678    a= 2          f(x,y)=-2522
k1= 14705     m1= 35501    a= 2          f(x,y)= 2523
k1= 6079      m1= 14676    a= 2          f(x,y)=-2518
k1= 2547      m1= 6149     a= 2          f(x,y)= 2547
k1= 985       m1= 2378     a= 1          f(x,y)=-2378
k1= 577       m1= 1393     a= 1          f(x,y)= 3363
k1= 408       m1= 985      a= 2          f(x,y)=-3363
k1= 169       m1= 408      a= 2          f(x,y)= 2378
k1= 70        m1= 169      a= 2          f(x,y)=-2547
k1= 29        m1= 70       a= 2          f(x,y)= 2518
k1= 12        m1= 29       a= 2          f(x,y)=-2523
k1= 5         m1= 12       a= 2          f(x,y)= 2522
k1= 2         m1= 5        a= 2          f(x,y)=-2523
k1= 1         m1= 2        a= 2          f(x,y)= 2518
k1= 0         m1= 1                      f(x,y)=-2547
--------------------
N(THETA)=-2378             Soit A(THETA)=-1
Ma(S)= 2378  Soit m(f)= 1
--------------------
```

PROGRAMME "T2"

```
1 ON ERROR GOTO 375
10 DIM A(10000)
20 PRINT"E)cran,I)mprimante?";:INPUT A$
30 IF A$="E" OR A$="e" THEN OPEN "O",#1,"SCRN:" ELSE OPEN "O",#1,"LPT1:"
40 LET MU=2
41 IF MU<0 THEN GOTO 42 ELSE GOTO 45
42 LET MUX=1
43 GOTO 50
45 LET MUX=MU+1
50 LET EPS=1
60 REM MU=K1-K2,EPS=+/-1
65 LET T=2
70 PRINT#1,"Calcul fait pour MU=";MU;",t(S)=";T;",et (-1)^n=";EPS
80 PRINT#1,"++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++"
90 FOR M=1 TO 100000!
100 FOR K1=MUX TO ((M+MU)/2)
110 IF INT((((K1*K1)-(MU*K1))+EPS)/M)=((((K1*K1)-(MU*K1))+EPS)/M) THEN GOTO 12
ELSE GOTO 460
120 LET P=M
130 LET Q=((M-K1)+MU)
140 IF (K1-MU)<0 THEN GOTO 460
150 IF (K1-MU)>4M/2) THEN GOTO 460
160 LET I=0
170 IF (P/Q)=INT(P/Q) THEN GOTO 260 ELSE GOTO 180
180 LET V=INT(P/Q)
190 LET A(I)=V
200 LET X=Q
210 LET Y=(P-(V*Q))
220 LET P=X
230 LET Q=Y
240 LET I=I+1
250 GOTO 170
260 LET L=I+1
270 LET A(L-1)=INT(P/Q)
280 IF ((1-EPS)/2)=((L+1)-(2*INT((L+1)/2))) THEN GOTO 320 ELSE GOTO 290
290 LET A(L-1)=A(L-1)-1
300 LET L=L+1
310 LET A(L-1)=1
320 LET MAX=A(0)
330 FOR N=0 TO L-1
340 IF A(N)>MAX THEN GOTO 350 ELSE GOTO 360
350 LET MAX=A(N)
360 NEXT N
370 IF MAX=T THEN GOTO 375 ELSE GOTO 440
375 PRINT #1, "Pour m=";M;",K1=";K1;",K2=";K1-MU;"et 1=";INT((((K1*K1)-(MU*K1)
EPS)/M)
380 FOR N=0 TO L-1
390 PRINT#1,A(N);"*";
400 NEXT N
420 PRINT #1,MAX;"=t(S)"
430 PRINT #1,"--------------"
440 LET MAX=0
450 ERASE A
460 NEXT K1
470 NEXT M
480 PRINT #1,"FIN"
490 IF A$<>"E" AND A$><"e" THEN CLOSE 1
500 END
```

PROGRAMME "GENERAL"

```
10 PRINT"E)cran,I)mprimante":INPUT A$
20 IF A$="E" OR A$="e" THEN OPEN "O",#1,"SCRN:"ELSE OPEN "O",#1,"LPRT:
(80)"
30 DIM A(100)
40 PRINT"Valeur minimale de MI:":INPUT BK#
50 PRINT"Valeur maximale de MI:":INPUT CK#
60 LET MX=0
70 LET E=1
80 LET R2=7
90 LET R1=1
100 IF(-R2)>=(R1) OR (R2)<(R1) THEN GOTO 320
110 DIM N#(100)
120 GOSUB 360
130 IF UU#=1 THEN GOTO 140 ELSE GOTO 320
140 FOR MI=BK# TO CK#
150 LET PI=(R2*MI)
160 FOR QI=1 TO PI
170 IF MAX(0,((PI*R1)/R2))>=QI THEN GOTO 220
180 IF QI>((PI/R2)*((R1+R2)/2)) THEN GOTO 220
190 LET TI=(((QI*QI)+E)/MI)
200 IF INT(TI)=TI THEN GOTO 210 ELSE GOTO 220
210 IF INT((TI-(QI*R1))/R2)=((TI-(QI*R1))/R2) THEN GOTO 250
220 NEXT QI
230 NEXT MI
240 GOTO 330
250 PRINT#1,"-----------------"
260 PRINT#1,"m=";PI;"K1=";QI;"K2=";QI-MI;"l=";((TI-(QI*R1))/R2)
270 PRINT#1,"R1=";R1;"R2=";R2;"((-1)^n)=";E
280 LET P#=PI
290 LET Q#=QI
300 GOSUB 620
310 GOTO 220
320 PRINT#1,"PGCD(R1,R2) different de 1"
330 IF A$<>"E" AND A$><"e" THEN CLOSE 1
340 PRINT#1,"-----------------"
350 END
360 REM Sous programme PGCD:entrees UU#et VV#
370 REM Il faut avoir ouvert N#(100)
380 LET P1#=ABS(R1)
390 LET Q1#=ABS(R2)
400 LET P#=P1#
410 LET Q#=Q1#
420 LET II=0
430 IF (P#/Q#)=INT(P#/Q#) THEN GOTO 510 ELSE GOTO 440
440 LET N#(II)=INT(P#/Q#)
450 LET Z#=(INT(P#/Q#)*Q#)
460 LET Y#=(P#-Z#)
470 LET P#=Q#
```

```
480 LET Q#=Y#
490 LET II=II+1
500 GOTO 430
510 REM Si II>100 le sous programme chutte
520 LET PP#=1
530 LET QQ#=0
540 FOR J=1 TO II
550 LET RR#=QQ#
560 LET QQ#=PP#
570 LET PP#=(((N#(II-J)*PP#)+RR#))
580 NEXT J
590 LET UU#=ABS((PP#*Q1#)-(P1#*QQ#))
600 REMSortie du sous programme:UU#
610 RETURN
620 REM Sous programme"RATIO"
630 REM Entrer P#,Q#
640 PRINT#1, "Developpement:"
650 LET I=0
660 IF (P#/Q#)=INT(P#/Q#) THEN GOTO 770 ELSE GOTO 670
670 LET A=INT(P#/Q#)
680 PRINT#1,A
690 IF MX<A THEN GOTO 700 ELSE GOTO 710
700 LET MX=A
710 LET X#=Q#
720 LET Y#=(P#-(A*Q#))
730 LET P#=X#
740 LET Q#=Y#
750 LET I=I+1
760 GOTO 660
770 IF (INT(I/2)+((1-E)/4))=(I/2) THEN GOTO 840 ELSE GOTO 780
780 PRINT#1,(P#/Q#)-1
790 IF MX<((P#/Q#)-1) THEN GOTO 800 ELSE GOTO 810
800 LET MX=((P#/Q#)-1)
810 PRINT#1,1
820 LET I=I+1
830 GOTO 870
840 PRINT#1,(P#/Q#)
850 IF MX<(P#/Q#) THEN GOTO 860 ELSE GOTO 870
860 LET MX=(P#/Q#)
870 PRINT#1,MX"=a=t(S)"
880 LETS=PI:R=((PI*(MX+1))-QI)-(QI-MI):T=((TI-(QI*R1))/R2)-((MX+1)*QI)
890 PRINT#1,"S=";S,"R=";R,"T=";T
900 LET MX=0
910 RETURN
```

E X E M P L E

```
------------------
m= 7 K1= 3 K2= 2 l= 1
R1= 1 R2= 7 ((-1)^n)= 1
Developpement:
 2
 2
 1
 2 =a=t(S)
S= 7          R= 16         T=-8
------------------
m= 35 K1= 13 K2= 8 l= 3
R1= 1 R2= 7 ((-1)^n)= 1
Developpement:
 2
 1
 2
 3
 1
 3 =a=t(S)
S= 35         R= 119        T=-49
```

RESULTATS FOURNIS PAR "GENERAL" DANS LE CAS OÙ

$R_1 = 1$, $R_2 = 7$, $(-1)^n = 1$

(La barre ¯ indique le développement de la réduite $\frac{k_1}{m_1}$ telle que $f_\theta(k_1, m_1) = A_\theta$, ⌐¯ correspond à $\frac{k_2}{m_2}$)

m_{i-2}	$p_{i-2} = 7\, m_{i-2} = m$	$q_{i-2} = K_1$	$q_{i-2} - m_{i-2} = K_2$	]	$[S^*] = \frac{p_{i-2}}{q_{i-2}}$	a=t(S)	$f_\theta(X,1)$	N_θ	$m_a(S)$
1	7	3	2	1	$[\overline{2,2,1}]$	2	$7X^2 + 16X - 8$	- 8	7 = m
5	35	13	8	3	$[\overline{2,1,2,3,1}]$	3	$35X^2 + 119X - 49$	- 49	35 = m
13	91	18	5	1	$[\overline{5,17,1}]$	17	$91X^2 + 1615X - 323$	- 323	91 = m
13	91	44	31	15	$[\overline{2,14,1,1,1}]$	14	$91X^2 + 1290X - 645$	- 645	91 = m
26	182	83	57	26	$[\overline{2,5,5,2,1}]$	5	$182X^2 + 952X - 472$	- 202	182 = m
29	203	75	46	17	$[\overline{2,1,2,2,2,3,1}]$	3	$203X^2 + 691X - 283$	- 271	201
34	238	81	47	16	$[\overline{2,1,15,4,1}]$	15	$238X^2 + 3680X - 1280$	- 242	238 = m
34	238	123	89	46	$[\overline{1,1,14,2,1,1,1}]$	14	$238X^2 + 3358X - 1799$	- 242	238 = m
37	259	43	6	1	$[\overline{6,42,1}]$	42	$259X^2 + 11088X - 1848$	- 1848	259 = m
41	287	114	73	29	$[\overline{2,1,1,13,1,2,1}]$	13	$287X^2 + 3831X - 1567$	- 1567	283
50	350	143	93	38	$[\overline{2,2,4,3,1,2,1}]$	4	$350X^2 + 1514X - 677$	- 385	350 = m

m_{i-2}	$p_{i-2}=7 \quad m_{i-2}=m$	$q_{i-2}=K_1$	$q_{i-2}-m_{i-2}=K_2$	]	$[S^*]=\frac{p_{i-2}}{q_{i-2}}$	a=t(S)	$f_\theta(X,1)$	N_θ	m (S)
50	350	157	107	48	$[\overline{2,4,2,1},\overline{3,2,1}]$	4	$350X^2+1486X-737$	- 445	350 = m
58	406	99	41	10	$[\overline{4,9,1,8,1}]$	9	$406X^2+3920X-980$	- 980	406 = m
61	427	111	50	13	$[\overline{3,1},\overline{5,1,1,7,1}]$	7	$427X^2+3255X-875$	- 553	413
65	455	148	83	27	$[\overline{3,\overline{13,2,4,1}}]$	13	$455X^2+6139X-2045$	- 2045	455 = m
82	574	237	155	64	$[\overline{2,2},\overline{2,1,2,2,1,2,1}]$	2	$574X^2+1330X-647$	- 579	529
85	595	157	72	19	$[\overline{3,1},\overline{3,1,3,7,1}]$	7	$595X^2+4531X-1237$	- 1073	595 = m
85	595	208	123	43	$[\overline{2,1},\overline{6,5,1,3,1}]$	6	$595X^2+3834X-1413$	- 620	595 = m
85	595	327	242	133	$[\overline{1,1},\overline{4,1,1,5,2,1,1}]$	5	$595X^2+3001X-1829$	- 719	595 = m
97	679	172	75	19	$[\overline{3,1},\overline{18,8,1}]$	18	$679X^2+12654X-3249$	- 689	679 = m
97	679	366	269	145	$[\overline{1,1,5,1},\overline{9,1,1,1,1}]$	9	$679X^2+6155X-3515$	- 659	679 = m
106	742	129	23	4	$[\overline{5,1,3,31,1}]$	31	$742X^2+23592X-4124$	- 4124	740
106	742	341	235	108	$[\overline{2,5,1,2},\overline{6,2,1}]$	6	$742X^2+4618X-2279$	- 791	742 = m
113	791	241	128	39	$[\overline{3,3,1,1},\overline{5,5,1}]$	5	$791X^2+4377X-1407$	- 847	791 = m
113	791	437	324	179	$[\overline{1,1},\overline{4,3,1,3,2,1,1}]$	4	$791X^2+3194X-2006$	- 845	791 = m

m_{i-2}	$p_{i-2} = 7 \quad m_{i-2} = m$	$q_{i-2} = K_1$	$q_{i-2} - m_{i-2} = K_2$	l	$[S^*] = \frac{p_{i-2}}{q_{i-2}}$	a=t(S)	$f_\theta(X,1)$	N	m (S)
125	875	193	68	15	$[\overline{4,1,1,6,1,11,1}]$	11	$875X^2 + 10239X - 2301$	- 2301	831
125	875	443	318	161	$[\overline{1,1,39,3,1,1,1}]$	39	$875X^2 + 34239X - 17559$	- 883	875 = m
145	1015	307	162	49	$[\overline{3,3,3,1,3,5,1}]$	5	$1015X^2 + 5621X - 1793$	- 1535	1015 = m
145	1015	447	302	133	$[\overline{2,3,1,2,3,1,2,2,1}]$	3	$1015X^2 + 3311X - 1655$	- 1035	1015 = m
146	1022	319	173	54	$[\overline{3,4,1,9,1,4,1}]$	9	$1022X^2 + 9728X - 3136$	- 3136	974
146	1022	557	411	224	$[\overline{1,1,5,18,2,1,1}]$	18	$1022X^2 + 18450X - 10359$	- 3514	1022 = m
149	1043	491	342	161	$[\overline{2,8,20,2,1}]$	20	$1043X^2 + 21070X - 10150$	- 1078	1043 = m
169	1183	437	268	99	$[\overline{2,1,2,2,2,2,2,3,1}]$	3	$1183X^2 + 4027X - 1649$	- 1577	1171
169	1183	577	408	199	$[\overline{2,19,1,8,1,1,1}]$	19	$1183X^2 + 22675X - 11341$	- 11341	1169
170	1190	183	13	2	$[\overline{6,1,1,90,1}]$	90	$1190X^2 + 108094X - 16651$	- 16651	1185
170	1190	463	293	114	$[\overline{2,1,1,3,16,3,1}]$	16	$1190X^2 + 19474X - 7757$	- 1234	1190 = m

VALEURS CORRESPONDANT A LA THEORIE DE MARKOFF

$(r = 0\ ,\ (-1)^n = 1\ ,\ a = 2\ ,\ m_2(S) = m < 1000)$

(La barre $\overline{\ \ }\urcorner$ correspond au développement de $\frac{k_1}{m_1}$; la barre $\ulcorner\overline{\ \ }$ correspond à $\frac{k_2}{m_2}$).

m	$K_1 = K_2$	]	$[S^*] = \frac{m}{K_1}$	a = t(S)	$f_\theta(X,1)$	N_θ	k_1	m_1	k_2	m_2
5	2	1	$\overline{(2,\ulcorner\overline{1,1}})$	2	$5X^2 + 11X - 5$	- 5	0	1	1	2
13	5	2	$\overline{(2,\ulcorner\overline{1,1,1,1}})$	2	$13X^2 + 29X - 13$	- 13	0	1	2	5
29	12	5	$\overline{(2,2},\ulcorner\overline{2,1,1}})$	2	$29X^2 + 63X - 31$	- 29	2	5	1	2
34	13	5	$\overline{(2,\ulcorner\overline{1,1,1,1,1,1}})$	2	$34X^2 + 76X - 34$	- 34	0	1	5	13
89	34	13	$\overline{(2,\ulcorner\overline{1,1,1,1,1,1,1,1}})$	2	$89X^2 + 199X - 89$	- 89	0	1	13	34
169	70	29	$\overline{(2,2,2,2},\ulcorner\overline{2,1,1}})$	2	$169X^2 + 367X - 181$	- 169	12	29	1	2
194	75	29	$\overline{(2,1,1,2},\ulcorner\overline{2,1,1,1,1}})$	2	$194X^2 + 432X - 196$	- 194	5	13	2	5
233	89	34	$\overline{(2,\ulcorner\overline{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1}})$	2	$233X^2 + 521X - 233$	- 233	0	1	34	89
433	179	74	$\overline{(2,2},\ulcorner\overline{2,1,1,2,2,1,1}})$	2	$433X^2 + 941X - 463$	- 433	2	5	12	29
610	233	89	$\overline{(2,\ulcorner\overline{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1}})$	2	$610X^2 + 1364X - 610$	- 610	0	1	89	233
985	408	169	$\overline{(2,2,2,2,2,2},\ulcorner\overline{2,1,1}})$	2	$985X^2 + 2139X - 1055$	- 985	70	169	1	2

RESULTATS SUR LA (2,0,1) THEORIE

$R_1 = 0 \quad R_2 = 1 \quad (-1)^n = -1 \quad m < 1\,200$

Dans le tableau construit avec "GENTRI", le signe * dans la colonne m signale une suite de la (2,0,1) Théorie : $m_2(S) = m$.

(La barre ¬ correspond au développement de $\frac{k_1}{m_1}$; la barre ⌐ correspond à $\frac{k_2}{m_2}$).

$p_{i-2} = m$	$m_2(S)$	$K_1 = K_2 = q_{i-2}$	l	$[S^*] = \frac{m}{K_1}$	$f_\theta(X,1)$	N_θ	k_1	m_1	k_2	m_2
3*	3	1	0	$\overline{[21]}$	$3X^2 + 7X - 3$	- 3	0	1	0	1
8*	8	3	1	$\overline{[2111]}$	$8X^2 + 18X - 8$	- 8	0(3)	1(8)	1(-1)	3(0)
12*	12	5	2	$\overline{[2211]}2\overline{[2}$	$12X^2 + 26X - 13$	- 12	5(31)	12(74)	-1(123)	0(-132
21*	21	8	3	$\overline{[211111]}$	$21X^2 + 47X - 21$	- 21	0(8)	1(21)	3(-1)	8(0)
30	27	11	4	$\overline{[21}2\overline{111]}$	$30X^2 + 68X - 29$	- 27	1	3		
45	41	19	8	$\overline{[221211]}2\overline{[221}$	$45X^2 + 97X - 49$	- 41	400	947		
55*	55	21	8	$\overline{[21111111]}$	$55X^2 + 123X - 55$	- 55	0(21)	1(55)	8(-1)	21(0)
70*	70	29	12	$\overline{[222211]}$	$70X^2 + 152X - 75$	- 70	29	70	-1	0
80	75	31	12	$\overline{[21121111]}$	$80X^2 + 178X - 81$	- 75	467	1205		
112	98	41	15	$\overline{[21}2\overline{12111]}$	$112X^2 + 254X - 108$	- 98	1	3		
119	117	50	21	$\overline{[22111211]}2\overline{[2}$	$119X^2 + 257X - 129$	- 117	308	733		

$p_{i-1} = m$	$m_{i-1}(S)$	$K_i = K_{i-1} = q_{i-1}$	]	$[S^*] = \frac{m}{K_i}$	$f_\theta(X,1)$	N_θ	k_1	m_1	k_2	m_2
144*	144	55	21	$\overline{[2\overline{1111111111}]2}$	$144X^2 + 322X - 144$	- 144	0(55)	1(144)	21(-1)	55(0)
168	147	71	30	$[\overline{22121211}]2[\overline{221}$	$168X^2 + 362X - 183$	- 147	1 494	3 535		
176	169	65	24	$[\overline{21}\overline{222111}]$	$176X^2 + 398X - 171$	- 169	1	3		
208	192	79	30	$[\overline{2111}\overline{211111}]$	$208X^2 + 466X - 207$	- 192	3	8		
264	254	109	45	$[\overline{22}\overline{212211}]$	$264X^2 + 574X - 282$	- 254	2	5		
297	267	109	40	$[\overline{21}\overline{2}\overline{1112111}]$	$297X^2 + 673X - 287$	- 267	1	3		
299	269	116	45	$[\overline{2112121111}]2[\overline{21121}$	$299X^2 + 665X - 303$	- 269	6266	16151		
312	308	131	55	$[\overline{2211111211}]2[\overline{2}$	$312X^2 + 674X - 338$	- 308	807	1922		
377*	377	144	55	$\overline{[2\overline{111111111111}]}$	$377X^2 + 843X - 377$	- 377	0(144)	1(377)	55(-1)	144(0)
408*	408	169	70	$[\overline{22222211}]$	$408X^2 + 886X - 437$	- 408	169	408	-1	0
418	363	153	56	$[\overline{2121}\overline{212111}]$	$418X^2 + 948X - 403$	- 363	4	11		
456	432	191	80	$[\overline{2211}\overline{211211}]$	$456X^2 + 986X - 493$	- 432	5	12		
468	463	181	70	$[\overline{2112221111}]2[\overline{21122}$	$468X^2 + 1042X - 473$	- 463	16835	43529		
546	507	209	80	$[\overline{211112111111}]2[\overline{22112}$	$546X^2 + 1220X - 547$	- 507	8156	21307		

$p_{i-2} = m$	$m_2(S)$	$K_1 = K_2 = q_{i-2}$	τ	$[S^*] = \frac{m}{K_1}$	$f_\theta(X,1)$	N_θ	k_1	m_1	k_2	m_2
627	545	265	112	$\overline{[2212121211]2[2212}$	$627X^2 + 1351X - 683$	- 545	20673	48913		
665	-647	246	91	$\overline{[2122122111]2[21221}$	$665X^2 + 1503X - 647$	- 647	19929	53873		
697	687	288	119	$\overline{[22211112211]}$	$697X^2 + 1515X - 745$	- 687	2	5		
777	695	295	112	$\overline{[2111}2\overline{1211111]}$	$777X^2 + 1741X - 773$	- 695	3	8		
779	703	286	105	$\overline{[21}2\overline{111112111]}$	$779X^2 + 1765X - 753$	- 703	1	3		
792	732	307	119	$\overline{[211211121111]2[211211}$	$792X^2 + 1762X - 802$	- 732	28546	73643		
817	765	343	144	$\overline{[221111111211]2[2211111112}$	$817X^2 + 1765X - 885$	- 765	352947	840692		
986	867	407	168	$\overline{[2221}2\overline{12211]}$	$986X^2 + 2144X - 1053$	- 867	7	17		
987*	987	377	144	$\overline{[2\overline{111111111111]}}$	$987X^2 + 2207X - 987$	- 987	1(377)	0(987)	-377(-1)	-987(0)
988	900	417	176	$\overline{[2212221211]2[2212212}$	$988X^2 + 2130X - 1075$	- 900	192655	456458		
1026	987	379	140	$\overline{[21}2\overline{2222111]}$	$1026X^2 + 2320X - 997$	- 987	1	3		
1116	972	433	168	$\overline{[2112121211}11]2[21121$	$1116X^2 + 2482X - 1131$	- 972	23389	60282		
1140	1041	419	154	$\overline{[21}2\overline{112112111]}$	$1140X^2 + 2582X - 1103$	- 1041	1	3		
1178	1083	495	208	$\overline{[2211121112}11]2[2212$	$1178X^2 + 2544X - 1277$	- 1083	28223	67165		

Equation $m^2 - m_1^2 + m_2^2 = 3 m m_1 m_2$

où $(m, m_1, m_2) \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$m = \text{Max}(m, m_1, m_2) > \text{Max}(m_1, m_2)$

$\text{pgcd}(m, m_1) = \text{pgcd}(m_1, m_2) = \text{pgcd}(m_2, m) = 1$

TABLE DES SOLUTIONS OBTENUES POUR $m < 789$

m	m_1	m_2
3	1	1
8	1	3
21	1	8
33	10	1
55	1	21
91	10	3
144	1	55
360	109	1
377	1	144
665	73	3

PROGRAMME "GENTRI"

```
10 PRINT"E)cran,I)mprimante":INPUT A$
20 IF A$="E" OR A$="e" THEN OPEN "O",#1,"SCRN:"ELSE OPEN "O",#1,"LPRT:
(80)"
30 DIM A(100)
40 PRINT"Valeur minimale de MI:":INPUT BK#
50 PRINT"Valeur maximale de MI:":INPUT CK#
55 LET AA=2
60 LET MX=0
70 LET E=1
80 LET R2=7
90 LET R1=1
100 IF(-R2)>=(R1) OR (R2)<(R1) THEN GOTO 320
110 DIM N#(100)
120 GOSUB 360
130 IF UU#=1 THEN GOTO 140 ELSE GOTO 320
140 FOR MI=BK# TO CK#
150 LET PI=(R2*MI)
160 FOR QI=1 TO PI
170 IF MAX(0,((PI*R1)/R2))>=QI THEN GOTO 220
180 IF QI>((PI/R2)*((R1+R2)/2)) THEN GOTO 220
190 LET TI=(((QI*QI)+E)/MI)
200 IF INT(TI)=TI THEN GOTO 210 ELSE GOTO 220
210 IF INT((TI-(QI*R1))/R2)=((TI-(QI*R1))/R2) THEN GOTO 250
220 NEXT QI
230 NEXT MI
240 GOTO 330
250 REM
260 REM
270 REM
280 LET P#=PI
290 LET Q#=QI
300 GOSUB 620
310 GOTO 220
320 PRINT#1,"PGCD(R1,R2) different de 1"
330 IF A$<>"E" AND A$><"e" THEN CLOSE 1
340 PRINT#1,"-----------------"
350 END
360 REM Sous programme PGCD:entrees UU#et VV#
370 REM Il faut avoir ouvert N#(100)
380 LET P1#=ABS(R1)
390 LET Q1#=ABS(R2)
400 LET P#=P1#
410 LET Q#=Q1#
420 LET II=0
430 IF (P#/Q#)=INT(P#/Q#) THEN GOTO 510 ELSE GOTO 440
440 LET N#(II)=INT(P#/Q#)
450 LET Z#=(INT(P#/Q#)*Q#)
460 LET Y#=(P#-Z#)
470 LET P#=Q#
480 LET Q#=Y#
490 LET II=II+1
500 GOTO 430
510 REM Si II>100 le sous programme chutte
520 LET PP#=1
530 LET QQ#=0
540 FOR J=1 TO II
550 LET RR#=QQ#
560 LET QQ#=PP#
570 LET PP#=(((N#(II-J)*PP#)+RR#))
580 NEXT J
590 LET UU#=ABS((PP#*Q1#)-(P1#*QQ#))
600 REMSortie du sous programme:UU#
610 RETURN
```

```
620 REM Sous programme"RATIO"
630 REM Entrer P#,Q#
640 REM
650 LET I=0
660 IF (P#/Q#)=INT(P#/Q#) THEN GOTO 770 ELSE GOTO 670
670 LET A=INT(P#/Q#)
680 REM
690 IF MX<A THEN GOTO 700 ELSE GOTO 710
700 LET MX=A
710 LET X#=Q#
720 LET Y#=(P#-(A*Q#))
730 LET P#=X#
740 LET Q#=Y#
750 LET I=I+1
760 GOTO 660
770 IF (INT(I/2)+((1-E)/4))=(I/2) THEN GOTO 840 ELSE GOTO 780
780 REM
790 IF MX<((P#/Q#)-1) THEN GOTO 800 ELSE GOTO 810
800 LET MX=((P#/Q#)-1)
810 REM
820 LET I=I+1
830 GOTO 870
840 REM
850 IF MX<(P#/Q#) THEN GOTO 860 ELSE GOTO 870
860 LET MX=(P#/Q#)
870 REM
875 IF MX=AA THEN GOSUB 1000 ELSE GOTO 900
880 REM
890 REM
900 LET MX=0
910 RETURN
1000 REM Programme d'impression
1250 PRINT#1,"------------------"
1260 PRINT#1,"m=";PI;"K1=";QI;"K2=";QI-MI;"l=";((TI-(QI*R1))/R2)
1270 PRINT#1,"R1=";R1;"R2=";R2;"((-1)^n)=";E
1880 LETS=PI:R=((PI*(MX+1))-QI)-(QI-MI):T=((TI-(QI*R1))/R2)-((MX+1)*QI
)
1890 PRINT#1,"S=";S,"R=";R,"T=";T
2000 RETURN
```

VALEURS CORRESPONDANT A LA (3,0,-1) THEORIE DE MARKOFF

($r = 0$ $(-1)^n = 1$ $a = 3$ $m_3(S) = m$ $\varepsilon_1 = 1 = \varepsilon_2$)

La barre ¬ correspond au développement de $\frac{k_1}{m_1}$, la barre ⌐ correspond à $\frac{k_2}{m_2}$

m	$K_1 = K_2$	⌐	$S^*([S^*] = \frac{m}{K_1})$	Polynôme $f_\theta(X,Y)$	N_θ	k_1	m_1	k_2	m_2	$-N_\theta - m$
10	3	1	$\overline{(3,2,1)}$	$10X^2 + 34XY - 11Y^2$	- 11	0	1	1	3	1
25	7	2	$\overline{(3,1,1,2,1)}$	$25X^2 + 86XY - 26Y^2$	- 26	0	1	2	7	1
53	23	10	$(2,3,3,1,1)$	$53X^2 + 166XY - 82Y^2$	- 55	3	7	1	2	2
58	17	5	$\overline{(3,2,2,2,1)}$	$58X^2 + 198XY - 63Y^2$	- 63	0	1	5	17	5
65	18	5	$\overline{(3,1,1,1,1,2,1)}$	$65X^2 + 224XY - 67Y^2$	- 67	0	1	5	18	2
109	33	10	$(3,3,3,2,1)$	$109X^2 + 370XY - 122Y^2$	- 119	3	10	1	3	10
130	47	17	$(2,1,3,3,1,1,1)$	$130X^2 + 426XY - 171Y^2$	- 131	1	3	4	11	1
137	37	10	$\overline{(3,1,2,2,1,2,1)}$	$137X^2 + 474XY - 138Y^2$	- 138	0	1	10	37	1
149	44	13	$(3,2,1,1,3,2,1)$	$149X^2 + 508XY - 163Y^2$	- 163	0	1	13	44	14
170	47	13	$\overline{(3,1,1,1,1,1,1,2,1)}$	$170X^2 + 586XY - 175Y^2$	- 175	0	1	13	47	5
269	82	25	$(3,3,1,1,3,2,1)$	$269X^2 + 912XY - 303Y^2$	- 274	7	23	1	3	5
305	133	58	$(2,3,2,2,3,1,1)$	$305X^2 + 954XY - 474Y^2$	- 307	17	39	1	2	2
314	129	53	$(2,2,3,3,2,1,1)$	$314X^2 + 998XY - 463Y^2$	- 339	2	5	7	17	25
338	99	29	$\overline{(3,2,2,2,2,2,1)}$	$338X^2 + 1154XY - 367Y^2$	- 367	0	L	29	99	29
346	93	25	$\overline{(3,1,2,1,1,2,1,2,1)}$	$346X^2 + 1198XY - 347Y^2$	- 347	0	1	25	93	1
349	136	53	$(2,1,1,3,3,1,1,1,1)$	$349X^2 + 1124XY - 491Y^2$	- 359	7	18	2	5	10

m	$K_1 = K_2$	τ	S*	Polynôme $f_\theta(X,Y)$	N_θ	k_1	m_1	k_2	m_2	$-N_\theta$
373	104	29	$\overline{(3,1,1,2,2,1,1,2,1)}$	$373X^2 + 1284XY - 387Y^2$	- 387	0	1	29	104	14
389	115	34	$\overline{(3,2,1,1,1,1,2,2,1)}$	$389X^2 + 1326XY - 426Y^2$	- 426	0	1	34	115	37
445	123	34	$\overline{(3,1,1,1,1,1,1,1,2,1)}$	$445X^2 + 1534XY - 458Y^2$	- 458	0	1	34	123	13
578	251	109	$(\overline{2,3,3,3},3,\overline{1,1})$	$578X^2 + 1810XY - 895Y^2$	- 598	33	76	1	2	20
625	182	53	$(\overline{3,2},3,\overline{3,2,2,1})$	$625X^2 + 2136XY - 675Y^2$	- 671	2	7	7	24	46
629	191	58	$(\overline{3,3,2,2},3,\overline{2,1})$	$629X^2 + 2134XY - 706Y^2$	- 667	17	56	1	3	38
674	189	53	$(\overline{3,1,1,3},3,\overline{1,1,2,1})$	$674X^2 + 2318XY - 703Y^2$	- 699	7	25	2	7	25
698	213	65	$(\overline{3,3,1,1,1,1},3,\overline{2,1})$	$698X^2 + 2366XY - 787Y^2$	- 703	18	59	1	3	5
725	307	130	$(\overline{2,2,1,3},3,\overline{1,2,1,1})$	$725X^2 + 2286XY - 1098Y^2$	- 727	11	26	3	7	2
773	317	130	$(\overline{2,2},3,\overline{1,1,3,2,1,1})$	$773X^2 + 2458XY - 1138Y^2$	- 778	2	5	16	39	5
785	342	149	$(\overline{2,3,2,1,1,2},3,\overline{1,1})$	$785X^2 + 2456XY - 1219Y^2$	- 795	44	101	1	2	10
793	294	109	$(\overline{2,1,2,3},3,\overline{2,1,1,1})$	$793X^2 + 2584XY - 1067Y^2$	- 863	10	27	3	8	70
797	215	58	$\overline{(3,1,2,2,2,2,1,2,1)}$	$797X^2 + 2758XY - 802Y^2$	- 802	0	1	58	215	5
829	246	73	$\overline{(3,2,1,2,2,1,2,2,1)}$	$829X^2 + 2824XY - 911Y^2$	- 911	0	1	73	246	82
865	253	74	$\overline{(3,2,2,1,1,2,2,2,1)}$	$865X^2 + 2954XY - 938Y^2$	- 938	0	1	74	253	73
901	242	65	$\overline{(3,1,2,1,1,1,1,2,1,2,1)}$	$901X^2 + 3120XY - 903Y^2$	- 903	0	1	65	242	2
905	343	130	$(\overline{2,1,1,1},3,\overline{3,1,1,1,1,1})$	$905X^2 + 2934XY - 1242Y^2$	- 927	3	8	11	29	22
949	265	74	$\overline{(3,1,1,2,1,1,2,1,1,2,1)}$	$949X^2 + 3266XY - 986Y^2$	- 986	0	1	74	265	37
962	265	73	$\overline{(3,1,1,1,2,2,1,1,1,2,1)}$	$962X^2 + 3318XY - 987Y^2$	- 987	0	1	73	265	25

m	$K_1 = K_2$	l	S*	Polynôme $f_\theta(X,Y)$	N_θ	k_1	m_1	k_2	m_2	$-N_\theta - m$
1018	301	89	$\overline{(3,2,1,1,1,1,1,1,2,2,1)}$	$1018X^2 + 3470XY - 1115Y^2$	- 1115	0	1	89	301	97
1165	322	89	$\overline{(3,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,1)}$	$1165X^2 + 4016XY - 1199Y^2$	- 1199	0	1	89	322	34
1189	360	109	$\overline{(3,3,3,3,3,2,1)}$	$1189X^2 + 4036XY - 1331Y^2$	- 1298	33	109	1	3	109
1417	512	185	$\overline{(2,1,3,3,3,3,1,1,1)}$	$1417X^2 + 4644XY - 1863Y^2$	- 1418	1	3	43	119	1
1429	620	269	$\overline{(2,3,3,1,1,3,3,1,1)}$	$1429X^2 + 4476XY - 2211Y^2$	- 1482	3	7	23	53	53
1469	437	130	$\overline{(3,2,1,3,3,1,2,2,1)}$	$1469X^2 + 5002XY - 1618Y^2$	- 1479	11	37	3	10	10
1490	403	109	$\overline{(3,1,2,3,3,2,1,2,1)}$	$1490X^2 + 5154XY - 1503Y^2$	- 1503	0	1	109	403	13
1537	447	130	$\overline{(3,2,3,1,1,3,2,2,1)}$	$1537X^2 + 5254XY - 1658Y^2$	- 1538	2	7	16	55	1
1618	491	149	$\overline{(3,3,2,1,1,2,3,2,1)}$	$1618X^2 + 5490XY - 1815Y^2$	- 1727	44	145	1	3	109
1721	473	130	$\overline{(3,1,1,1,3,3,1,1,1,2,1)}$	$1721X^2 + 5938XY - 1762Y^2$	- 1759	3	11	11	40	38
1777	775	338	$\overline{(2,3,2,2,2,2,3,1,1)}$	$1777X^2 + 5558XY - 2762Y^2$	- 1787	99	227	1	2	10
1802	659	241	$\overline{(2,1,2,1,3,3,1,2,1,1,1)}$	$1802X^2 + 5890XY - 2395Y^2$	- 1803	4	11	15	41	1
1810	743	305	$\overline{(2,2,3,2,2,3,2,1,1)}$	$1810X^2 + 5754XY - 2667Y^2$	- 1895	2	5	39	195	85
1825	557	170	$\overline{(3,3,1,1,1,1,1,1,3,2,1)}$	$1825X^2 + 6186XY - 2058Y^2$	- 1835	47	154	1	3	10
1825	757	314	$\overline{(2,2,2,3,3,2,2,1,1)}$	$1825X^2 + 5786XY - 2714Y^2$	- 1967	17	41	5	12	142
1906	511	137	$\overline{(3,1,2,1,2,2,1,2,1,2,1)}$	$1906X^2 + 6602XY - 1907Y^2$	- 1907	0	1	137	511	1
1954	725	269	$\overline{(2,1,2,3,1,1,3,2,1,1,1)}$	$1954X^2 + 6366XY - 2631Y^2$	- 1982	23	62	3	8	28
1970	577	169	$\overline{(3,2,2,2,2,2,2,2,1)}$	$1970X^2 + 6726XY - 2139Y^2$	- 2139	0	1	169	577	169
1993	834	349	$\overline{(2,2,1,1,3,3,1,1,2,1,1)}$	$1993X^2 + 6304XY - 2987Y^2$	- 2063	5	12	18	43	70

m	$K_1 = K_2$	l	S*	polynôme $f_\theta(X,Y)$	N_θ	k_1	m_1	k_2	m_2	$-N_\theta - m$
2005	782	305	$\overline{(2,1,1,3,2,2,3,1,1,1,1)}$	$2005X^2 + 6456XY - 2823Y^2$	- 1995	39	100	2	5	10
2045	552	149	$\overline{(3,1,2,2,1,1,2,2,1,2,1)}$	$2045X^2 + 7076XY - 2059Y^2$	- 2059	0	1	149	552	14
2050	893	389	$\overline{(2,3,2,1,1,1,1,2,3,1,1)}$	$2050X^2 + 6414XY - 3183Y^2$	- 2078	115	264	1	2	28
2098	623	185	$\overline{(3,2,1,2,1,1,2,1,2,2,1)}$	$2098X^2 + 7146XY - 2307Y^2$	- 2307	0	1	185	623	209
2105	813	314	$\overline{(2,1,1,2,3,3,2,1,1,1,1)}$	$2105X^2 + 6794XY - 2938Y^2$	- 2287	5	13	17	44	182
2173	606	169	$\overline{(3,1,1,2,2,2,2,1,1,2,1)}$	$2173X^2 + 7480XY - 2255Y^2$	- 2255	0	1	169	606	82
2225	657	194	$\overline{(3,2,1,1,2,2,1,1,2,2,1)}$	$2225X^2 + 7586XY - 2434Y^2$	- 2434	0	1	194	657	209
2257	660	193	$\overline{(3,2,2,1,1,1,1,2,2,2,1)}$	$2257X^2 + 7708XY - 2447Y^2$	- 2447	0	1	193	600	190
2357	633	170	$\overline{(3,1,2,1,1,1,1,1,1,2,1,2,1)}$	$2357X^2 + 8162XY - 2362Y^2$	- 2362	0	1	170	633	5
2378	911	349	$\overline{(2,1,1,1,1,3,3,1,1,1,1,1,1)}$	$2378X^2 + 7690XY - 3295Y^2$	- 2443	18	47	5	13	65
2441	672	185	$\overline{(3,1,1,1,2,1,1,2,1,1,1,2,1)}$	$2441X^2 + 8420XY - 2503Y^2$	- 2503	0	1	185	672	62
2474	691	193	$\overline{(3,1,1,2,1,1,1,1,2,1,1,2,1)}$	$2474X^2 + 8514XY - 2571Y^2$	- 2571	0	1	193	691	97
2533	701	194	$\overline{(3,1,1,1,1,2,2,1,1,1,1,2,1)}$	$2533X^2 + 8730XY - 2610Y^2$	- 2610	0	1	194	701	77
2938	889	269	$\overline{(3,3},3,\overline{1,1,3,3,2,1)}$	$2938X^2 + 9974XY - 3287Y^2$	- 3038	3	10	23	76	100
3050	843	233	$\overline{(3,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,1)}$	$3050X^2 + 10514XY - 3139Y^2$	- 3139	0	1	233	843	89

DEVELOPPEMENTS EN FRACTION CONTINUE

SOMMES DE DEDEKIND

ET NOMBRES DE CLASSES DES CORPS QUADRATIQUES

I. INTRODUCTION

Dans la suite, on considère une suite

$$X = (a_n, \ldots, a_0) = S^*$$

La suite $S = (a_0, \ldots, a_n)$ est une suite de nombres de $\mathbb{N}^*$ telle que l'on ait :

$$M_S = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & ; & K_1 \\ m-K_2 & ; & K_1 - l \end{bmatrix}$$

avec m, K_1, K_2, l nombres entiers tels que :

$$\det M_S = (-1)^{n+1} = K_1 K_2 - m l = \varepsilon$$

On considère aussi la somme de DEDEKIND $s(d,c)$ définie pour $(d,c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$ par les conditions suivantes :

(1) $\forall (d,c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} \quad s(d,c) = s(d,-c)$

(2) $\forall (d_1, d_2, c) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z} - \{0\} \quad d_1 \equiv d_2 \pmod{c} \Longrightarrow s(d_1,c) = s(d_2,c)$

(3) $s(0,1) = s(1,1) = 0$

(4) $\forall c \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ $\forall d \in \mathbb{N}$ vérifiant $0 \leqslant d < c$

$$s(d,c) = \sum_{k=1}^{c-1} \frac{k}{c} \left(\frac{kd}{c} - \left[\!\left[\frac{kd}{c} \right]\!\right] - \frac{1}{2} \right)$$

(où $[\![x]\!]$ désigne la partie entière de x).

On a alors avec les notations précédentes (cf. [2]) :

THEOREME I.1

Pour toute suite $S = (a_0, \ldots a_n)$ de nombres de $\mathbb{N}^*$ définissant la matrice $M_S = \begin{bmatrix} m & K_1 \\ m-K_2 & K_1-1 \end{bmatrix}$, on a la relation :

$$(a) : \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i a_i = 3\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right) + \varepsilon\,\frac{K_1}{m} - \frac{m-K_2}{m} + 12\, s(m-K_2, m)$$

Démonstration (cf. [4]) :

On note $A_i = \begin{bmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A_i^* = \begin{bmatrix} a_i & (-1)^{i+1} \\ (-1)^i & 0 \end{bmatrix} \qquad (\forall\, i \quad \det A_i^* = 1)$$

et l'on utilise la relation :

$$\begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\beta+1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Si n impair, on en déduit l'égalité :

$$M_S = \prod_{i=0}^{i=n} A_i^*$$

En définissant alors, pour $u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de déterminant $\det u = 1$ la fonction $\psi(u)$ par :

$$\psi(u) = \begin{cases} -\left(\dfrac{a+d}{12c}\right) + \dfrac{1}{4}\,\mathrm{Sgn}(c) + \mathrm{sgn}(c)\,s(a,c) & \text{si } c \neq 0 \\ -\dfrac{b}{12d} & \text{si } c = 0 \end{cases}$$

(où sgn(c) est le signe de c)

Une vérification directe donne la formule de composition :

$$\psi(u_1 u_2) = \psi(u_1) + \psi(u_2) + \tfrac{1}{4}(\mathrm{sgn}(c_1)+\mathrm{sgn}(c_2)-\mathrm{sgn}(c_3)-\mathrm{sgn}(c_1 c_2 c_3))$$

Avec $u_1 = \prod_{i=0}^{n-2} A_i^*$ et $u_2 = A_{n-1}^* \; A_n^*$ si $n > 1$ ou par une vérification directe si $n = 1$, un raisonnement par récurrence établit le Théorème I.1.

- Si n pair, on considère $S' = (a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 1)$ au lieu de $S = (a_0, \ldots a_n)$.

Avec $$M_{S'} = M_S \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & ; \; m - K_1 \\ m - K_2 & ; \; m - K_2 - K_1 + 1 \end{bmatrix}$$

et en appliquant à S' la formule démontrée dans le cas précédent (avec un indice impair), on en déduit pour S la formule du Théorème I.1, qui est ainsi valable dans tous les cas.

La formule ainsi obtenue s'écrit encore :

$$(b) : \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i (a_i - 3) = \varepsilon \frac{K_1}{m} - \frac{m - K_2}{m} + 12 \, s(m - K_2, m)$$

Appliquée à la suite palindrome $S^* = X$ de S, elle donne par comparaison à la formule disponible pour S l'égalité suivante :

$$(c) : s(K_1, m) = -\varepsilon \, s(m - K_2, m).$$

II. COMPLEMENTS POUR LES SOMMES DE DEDEKIND

Les sommes de DEDEKIND vérifient un certain nombre de propriétés classiques que l'on trouve exposées dans RADEMACHER [6] :

$$(d) : \forall (d,c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} \qquad 6cs(d,c) \in \mathbb{Z}$$

$$(e) : \forall (d,c) \in (\mathbb{Z} - \{0\})^2 \qquad s(d,c) + s(c,d) = \frac{c^2 + d^2 + 1 - 3cd}{12 \, cd}$$

Cette dernière égalité est la loi de réciprocité pour les sommes de DEDEKIND. Elle interprète la loi de réciprocité quadratique valable pour les symboles de LEGENDRE. En effet, pour c impair, le symbole de LEGENDRE est lié à la somme de DEDEKIND par la formule suivante :

(f) : $\left(\frac{d}{c}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}\left(\frac{c-1}{2} - 6cs(d,c)\right)}$

Et de la loi de réciprocité (e) on déduit de façon évidente la loi de réciprocité quadratique.

On a encore :

(g) : si $\forall k = 0,1,\ldots,c-1 \quad \frac{kd}{c}$ non entier

$$s(-d,c) = -s(d,c)$$

Et par des calculs directs issus de la relation (4) de la définition de s :

(h) : $\forall c \in \mathbb{Z} - \{0\} \qquad s(c,c) = -\left(\frac{c-1}{4}\right) = s(0,c)$

(i) : $\forall c \in \mathbb{Z} - \{0\} \qquad s(d,c) = \frac{c(c-1)(c-2)}{12c^2}$

On a encore, par la loi de réciprocité, à partir des formules qui précèdent :

(j) : si $c \equiv 1 \pmod{d} \quad s(d,c) = \frac{(c-1)(c-d^2-1)}{12cd}$

De façon plus générale, les trois dernières formules proposées conduisent à supposer que l'on a pour $(d,c) \in (\mathbb{Z} - \{0\})^2$ une relation du type suivant :

$$s(d,c) = \frac{d^2 + c^2 + 1 - a(d,c)c}{12\ cd}$$

Ceci donne :

$$s(d,c) + \frac{a(d,c)}{12d} = \frac{d^2 + c^2 + 1}{12cd}$$

En comparant à la loi de réciprocité (e) écrite sous la forme :

$$s(d,c) + s(c,d) + \tfrac{1}{4} = \frac{d^2 + c^2 + 1}{12\ cd}$$

On trouve : $a(d,c) = 12ds(c,d) + 3d$

Avec la condition (d), on observe que ce nombre est dans $\mathbb{Z}$.
Ceci permet d'énoncer le résultat suivant, qui généralise certains résultats de BARRUCAND et DUBOUE [8].

THEOREME II.1
$\forall (d,c) \in (\mathbb{Z} - \{0\})^2$ on peut écrire :

(k) : $$s(d,c) = \frac{d^2 + c^2 + 1 - a(d,c)c}{12cd}$$

où l'entier $a(d,c) \in \mathbb{Z}$ a l'expression suivante :

$$a(d,c) = 12ds(c,d) + 3d$$

En particulier, avec $a(d,c) \equiv c' \pmod{d}$

Et $a(d,c) = c' + td$

Il vient lorsque l'on a : $d \mid c^2 - c'c + 1 = d_1 d$

l'expression (1) : $s(d,c) = \frac{1}{12}\left(\frac{d + d_1}{c} - t\right)$

III. LOI DE COMPOSITION POUR LES SOMMES DE DEDEKIND

On suppose ici que l'on a (cf. [5] et [3]) :

$$X = (a_n, \ldots, a_0) = X_1 b X_2$$

avec : $$M_{X_1} = \begin{bmatrix} m_1 & m_1 - k_{X_1} \\ k_1 & k_1 - l_{X_1} \end{bmatrix} \qquad (\det M_{X_1} = \varepsilon_1 = (-1)^{n_1+1})$$

$$M_{X_2} = \begin{bmatrix} m_2 & m_2 - k_2 \\ k_{21} & k_{21} - l_{X_2} \end{bmatrix} \qquad (\det M_{X_2} = \varepsilon_2 = (-1)^{n_2+1})$$

En d'autres termes, on peut écrire :

$$\begin{cases} X_1 = (a^1_{n_1}, \ldots, a^1_0) = (a_n, \ldots a_{n-n_1}) \\ b = a_{n-n_1-1} \\ X_2 = (a^2_{n_2}, \ldots, a^2_0) = (a_{n-n_1-2}, \ldots, a_0) \\ n_1 + n_2 + 2 = n \quad (\text{ou } \varepsilon = (-1)^{n+1} = -\varepsilon_1\varepsilon_2) \end{cases}$$

L'application du Théorème I.1 aux suites X_1, X_2 et X donne les trois égalités suivantes :

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} + a_{n-2} \dots + (-1)^n a_0 = 3\left(\dfrac{1-\varepsilon}{2}\right) + \varepsilon\,\dfrac{m-K_2}{m} - \dfrac{K_1}{m} + 12s(K_1, m) \\ a_n - a_{n-1} + \dots + (-1)^{n_1} a_{n-n_1} = 3\left(\dfrac{1-\varepsilon_1}{2}\right) + \varepsilon_1\,\dfrac{m_1 - k_{12}}{m_1} - \dfrac{k_1}{m_1} + 12s(k_1, m_1) \\ (-1)^{n_2} a_{n_2} \dots a_1 + a_0 = 3\left(\dfrac{1-\varepsilon_2}{2}\right) + \varepsilon_2\,\dfrac{k_{21}}{m_2} - \dfrac{m_2 - k_2}{m_2} + 12s(m_2 - k_2, m_2) \end{cases}$$

D'où, en comparant les premiers membres de ces égalités :

$$12s(K_1, m) = 12s(k_1, m_1) + 12s(m_2 - k_2, m_2) - \varepsilon\,\frac{m-K_2}{m} + \frac{K_1}{m} + \varepsilon_1\,\frac{m_1 - k_{12}}{m_1} - \frac{k_1}{m_1} + \varepsilon_1\,\frac{k_{21}}{m_2} + \varepsilon\,\frac{m_2 - k_2}{m_2} + \varepsilon_1 b - 3\varepsilon_1$$

En utilisant alors les relations suivantes obtenues à partir du produit matriciel :

$$M_X = M_{X_1}\begin{bmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} M_{X_2}$$

(a_1) : $\quad m_1 K_1 - m k_1 = \varepsilon_1 m_2$

(a_3) : $\quad m k_2 - m_2 K_2 = \varepsilon_2 m_1$

(c_1) : $\quad m = (b+1) m_1 m_2 + k_{21} m_1 - k_{12} m_2$

On a de façon directe :

THEOREME III.1

Dans les conditions précédentes déduites de la loi de composition

$$X = X_1 b X_2$$

On a avec les coefficients et les déterminants des matrices M_X, M_{X_1} et M_{X_2} la relation suivante :

$$(m) : s(K_1, m) = s(k_1, m_1) + s(m_2 - k_2, m_2) + \frac{\varepsilon_1}{12 m m_1 m_2}\left[m^2 + m_1^2 + m_2^2 - 3 m m_1 m_2\right]$$

IV. LIEN AVEC LES NOMBRES DE CLASSES DE CORPS QUADRATIQUES

Soit p un nombre premier congru à 3 modulo 4 tel que le nombre de classes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ vaille 1, alors le nombre de classes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ vaut :

$$\frac{1}{3}[a_n - a_{n-1} + a_{n-2} \ldots + (-1)^{n-1} a_1] = \frac{(-1)^{n+1}}{3}\left[\sum_{i=1}^{i=n} (-1)^i a_i\right]$$

où $\sqrt{p} = [a_0, \underline{a_1, a_2, \ldots, a_n}]$

Compte tenu du Théorème I.1, ce résultat remarquable de F. HIRZEBRUCH [9] concrétise le lien qui existe entre les nombres de classes des corps quadratiques et les sommes de DEDEKIND (voir [1] ou [7]) p.193).

B I B L I O G R A P H I E

[1a] DON ZAGIER — Nombre de classes et fractions continues
Astérisque 24.25 (1979)

[1b] DON ZAGIER — Higher dimensional Dedekind sums
Math.Ann. 202.149.172 (1985)

[2] PH. BARKAN — Sur les sommes de DEDEKIND et les fractions continues
CR Acad Sci t 284 A 983

[3a] G. HUMBERT — Sur les fractions continues et les formes quadratiques indéfinies
CR Acad Sci 1916 p. 23

[3b] G. HUMBERT — Sur les réduites d'Hermite
CR Acad Sci 1916 p. 67

[4] H. LANG — Uber einfache periodische Kettenbrüche und Vermutungen von P. Chaola und S.Chowia
Acta Arithmetica XXVIII 4

[5] S. PERRINE — Une extension d'un raisonnement de MARKOFF
Non publié

[6] H. RADEMACHER — Dedekind sums
Carus monographs

[7] K. IRELAND ET M.ROSEN — A classical introduction to modern number theory
Springer Verlag (1982)

[8] BARRUCAND-DUBOUE — Fractions continues, sommes de DEDEKIND et formes quadratiques
Rendicondi del circolo mathematico de Palermo II T. XXXIII (1984)

[9] F. HIRZBRUCH — Hilbert modular surfaces
Monographie n° 21 de l'Enseignement Mathématique. (Genève 1973)