



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

TEXTO

# THESE

de Doctorat de l'Université de Metz

Présentée

à l'U E R des Sciences exactes et naturelles

de l'Université de Metz

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR EN MECANIQUE**

Mention : Mathématique Physique

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE -METZ	
N° inv	U9870105
Cote	SI M3 87/5
Log	Magasin

Par

Sonnou TIEM



**PROBLEMES D'INCLUSIONS dans une matrice anisotrope :**  
**Applications à la plasticité des polycristaux et à la**  
**plasticité de transformation couplée**

Soutenue le 6 Juillet 1987 devant le jury composé de :

- M. BERVEILLER      université de Metz
- A. EBERHARDT      université de Metz      Rapporteur
- R. PENELLE      université de Paris Sud      Président
- J. R. KLEPACZKO      université de Metz
- A. SIMON      école des Mines de Nancy
- R. PRIOUL      école Centrale de Paris

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux  
 U.A. au CNRS n 1215 -GRECO- < Grande Déformation et Endommagement >

Cette thèse a été préparée sous la direction de Monsieur le Professeur Marcel BERVEILLER. Ce travail lui doit beaucoup, je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance pour la confiance qu'il m'a témoignée et l'aide qu'il m'a apportée par ses suggestions et conseils.

Que Messieurs J.R. KLEPACZKO, A. SIMON, A. EBERHARDT, A. PRIOUL et R. PENELLE, trouvent ici mes remerciements pour avoir accepté de participer au jury.

Enfin, que l'ensemble des personnes du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Université de METZ soit remercié de l'aide scientifique, mais aussi morale qu'il m'a apportée au cours de ces années.

## P L A N

### I. Introduction

### II. Théorie d'Eshelby pour les problèmes d'inclusion

- 2.1. Rappel des équations de la mécanique des milieux continus
- 2.2. Le problème de l'inclusion plastique
- 2.3. Le problème de l'inclusion hétérogène
- 2.4. Le problème de l'inclusion plastique et hétérogène
- 2.5. Conclusion

### III. Détermination du tenseur $S$ et résultats préliminaires

- 3.1. Calcul du tenseur de Green pour un milieu infini anisotrope
- 3.2. Calcul du tenseur  $t^i$  pour une inclusion sphérique
- 3.3. Calcul du tenseur  $t^i$  pour une inclusion ellipsoïdale
- 3.4. Résultats concernant une inclusion ellipsoïdale dans un milieu isotrope et une inclusion sphérique dans une matrice cubique
- 3.5. Résultats concernant une inclusion ellipsoïdale dans une matrice cubique
- 3.6. Conclusion

IV. Effet de la forme des grains sur les contraintes internes et les rotations du réseau lors de la déformation plastique des polycristaux métalliques

4.1. Généralités

4.2. Théorie de la déformation partiellement imposée

4.3. Interaction grain - matrice

4.4. Changements d'orientation

4.5. Discussions et conclusion

V. Application à la transformation martensitique

5.1. Généralités sur les transformations martensitiques

5.1.1. Définition

5.1.2. Les aspects de la transformation martensitique

5.1.3. Théorie mathématique de Lieberman, Wechler et Read

5.2. Nouvelle approche de la transformation martensitique

5.3. Application au cas de l'alliage Fer-Nickel (30 %)

5.4. Discussion et conclusion

VI Conclusion

Chapitre I

I N T R O D U C T I O N

## CHAPITRE I

### INTRODUCTION

Dans les problèmes de mécanique physique ou dans les techniques de transitions d'échelles (passage micro-macro), les problèmes d'inclusions jouent un rôle déterminant, au même titre que les autres défauts de structure (défauts ponctuels, dislocations...). Ces problèmes d'inclusions ont été abordés par de nombreux auteurs, mais c'est Eshelby [1] qui en a donné une forme compacte et globale. La solution de ces problèmes est simple et analytique dans le cas d'inclusions sphériques dans une matrice à comportement isotrope. Pour de nombreux problèmes, les hypothèses (inclusions sphériques, matrice isotrope) sont souvent trop restrictives et éloignées de la réalité physique. Il est alors indispensable de disposer de la solution aux problèmes d'inclusions dont la forme est plus complexe (mais toujours ellipsoïdale, pour conserver certaines propriétés intéressantes) et situées dans une matrice dont le comportement est anisotrope. Le premier objectif de ce travail consiste donc à élaborer ces méthodes (analytiques et numériques) permettant de calculer tous les champs mécaniques (contraintes, déformations, rotations) à l'intérieur d'une inclusion ellipsoïdale située dans une matrice infinie à comportement linéaire et anisotrope. Pour aboutir à cette solution nous reprenons la technique du tenseur de Green et montrons que tous les problèmes d'inclusions (plastique, hétérogène, problème mixte) se ramènent à la détermination d'un

tenseur d'ordre 4 dont la connaissance permet d'aborder tous les problèmes d'inclusions. La méthode numérique de calcul de ce tenseur d'ordre 4 passe par la transformée de Fourier du tenseur de Green et les calculs numériques sont ramenés à une intégrale double. La solution du problème de l'inclusion est ensuite appliquée à deux situations physiques différentes.

La première relève du domaine de la plasticité des polycristaux métalliques et concerne l'effet de forme (initiale ou induite) des grains sur les contraintes internes d'incompatibilités plastiques intergranulaires telles qu'elles sont prises en compte dans le modèle de Kröner. En effet, lors de grandes déformations plastiques, la microstructure du polycristal évolue et les conditions de compatibilité et d'équilibre prennent une forme particulière aux joints de grains. Dans le cadre du modèle de Kröner, ceci se traduit par une loi d'interaction qui prend la forme

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu (I_{ijkl} - S_{ijkl}) (E_{kl}^p - \epsilon_{kl}^p) \quad (1.1)$$

équation dans laquelle la forme des grains intervient par l'intermédiaire du tenseur d'Eshelby  $S_{ijkl}$ .

Les résultats que nous obtenons sont ensuite comparés à la théorie proposée par Honneff et Mecking [2] consistant à relaxer certaines conditions cinématiques du modèle de Taylor pour tenir compte d'un effet de forme des grains.

Parallèlement à l'influence de la forme des grains sur les contraintes internes, nous analysons l'effet de la forme sur les rotations de réseau cristallin. Les relations obtenues s'écrivent :

$$\omega_{ij}^e = -\omega_{ij}^p + A_{ijkl} (E_{kl}^p - \epsilon_{kl}^p) \quad (1.2)$$

et illustrent, pour des formes particulières, la théorie déjà proposée par Berveiller et Zaoui [3].

La seconde application de la solution du problème de l'inclusion plastique concerne une première approche du mécanisme de plasticité de transformation couplée dans le cas d'une transformation martensitique.

Dans ce cas, on admet toujours (Weschler Liberman et Read, [4] Bowles-Mackenzie [5]) que la déformation inélastique de Bain est accommodée par une transformation à réseau invariant (glissement ou maclage) intervenant uniquement dans la martensite. Cette théorie prévoit des résultats corrects dans de nombreux cas mais n'explique pas certaines situations. Les observations expérimentales les plus récentes montrent souvent qu'il y a eu accommodation plastique dans l'austénite pendant la formation de la martensite.

Pour aborder ce problème, nous calculons, à partir de la solution du problème d'inclusion, l'énergie élastique associée aux contraintes internes dues à la formation de martensite non relaxée et cherchons la situation relaxée par une minimisation de cette énergie élastique. Nous calculons en particulier l'orientation du plan d'habitat (interface austénite-Martensite) dont l'évolution, avec la partition de l'accommodation de la déformation de Bain est très sensible.

## Chapitre II

Théorie d'Eshelby pour les problèmes d'inclusion

## CHAPITRE II

### THEORIE D'ESHELBY POUR LES PROBLEMES D'INCLUSIONS

2.1. Rappel des équations de la mécanique des milieux continus

2.2. Le problème de l'inclusion plastique

2.3. Le problème de l'inclusion hétérogène

2.4. Le problème de l'inclusion plastique et hétérogène

2.5. Conclusion

Ce chapitre est consacré aux différents problèmes d'inclusions dont la solution est connue et maintenant classique. Ces problèmes se subdivisent en trois catégories

- \* Le problème de l'inclusion plastique pour lequel une région (l'inclusion) subit une déformation inélastique homogène et crée des contraintes internes. Le comportement de l'inclusion et de la matrice est supposé élastique et il s'agit de trouver les champs mécaniques (déformation totale, rotations, contraintes) dans le milieu.
- \* Le problème de l'inclusion hétérogène pour lequel l'inclusion possède des constantes élastiques différentes de la matrice, celle-ci étant soumise à des forces de surface. Dans ce cas, il n'y a pas de contraintes internes (ou résiduelles).
- \* Le problème mixte pour lequel l'inclusion, de constantes élastiques différentes de la matrice, subit une déformation inélastique source de contraintes internes. De plus, la matrice est chargée à l'infini.

Ces différents problèmes ont des applications nombreuses en mécanique des solides, physique du métal et métallurgie physique et ont reçu des solutions. L'article d'Eshelby [1] constitue une synthèse remarquable de ces problèmes. Cependant, si les solutions de ces problèmes sont plus ou moins simples dans le cas d'une matrice élastique isotrope, elles nécessitent le recours à des méthodes numériques spécifiques dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale et d'une matrice anisotrope.

Le but de ce chapitre est de rappeler les différentes solutions pour les problèmes d'inclusions en utilisant néanmoins des méthodes plus modernes et plus compactes d'analyse. Cette présentation a l'avantage de montrer la grande unité de ces problèmes et de les réduire finalement au calcul d'un tenseur  $\underline{t}$  qui génère la solution des différents problèmes d'inclusion. Nous rappelons tout d'abord, dans le paragraphe suivant, les équations de la mécanique des milieux continus. Ce rappel nous permet simultanément de présenter les notations utilisées dans cette thèse.

### 2.1) Rappel des équations de la mécanique des milieux continus

Nous nous limitons dans ce travail au cadre classique de l'élasticité en petites déformations, c'est-à-dire au cas où les déformations et rotations sont infinitésimales. De plus, nous nous limitons à l'approximation quasi-statique qui suppose que les forces d'inertie sont négligées.

Nous repérons les coordonnées d'un point matériel  $x_1, x_2, x_3$  (ou  $x_i$ ) dans un système de coordonnées cartésiennes et nous appelons  $u_1, u_2$  et  $u_3$  ( $u_i$ ) les composantes du vecteur déplacement d'un point donné.

#### a) cinématique

Le gradient du déplacement  $\beta_{i,j}$  est donné par

$$\beta_{ij} = u_{i,j} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (11-1)$$

et sa partie symétrique  $\epsilon_{i,j}$ , qui est le tenseur de déformation

s'écrit :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\beta_{ij} + \beta_{ji}) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (11-2)$$

Le tenseur rotation  $\omega_{i,j}$  s'obtient par :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (\beta_{ij} - \beta_{ji}) = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (11-3)$$

Le champ de tenseur  $\beta_{ij}$  caractérisant une transformation donnée n'est pas toujours intégrable. Pour que le milieu ne perde pas sa compacité dans l'espace euclidien, il faut que  $\beta_{ij}$  dérive d'un champ de déplacement.

$\beta_{ij}$  doit être une différentielle totale exacte et vérifier la condition d'intégrabilité de Cauchy

$$\epsilon_{ikl} \beta_{ljk} = 0 \quad (11-4)$$

ou  $\epsilon_{ikl}$  désigne un symbole d'antisymétrie défini par :

$\epsilon_{ikl} = 0$  si deux au moins des indices sont égaux

$\epsilon_{ikl} = 1$  si la séquence  $ikl$  s'obtient par un nombre pair de permutations à partir de la séquence 1,2,3

$\epsilon_{ikl} = -1$  si la séquence  $ikl$  s'obtient par un nombre impair de permutations à partir de la séquence 1,2,3

Nous avons utilisé la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés.

Une autre forme des relations de compatibilité est donnée par Kröner [6] qui introduit le tenseur incompatibilité  $Inc$  et écrit :

$$Inc \underline{\xi} = 0 \quad (11-5)$$

En général pour les problèmes qui nous intéressent ici, la transformation totale, compatible résulte d'une partie inélastique  $\underline{\beta}^p$  et d'une partie élastique  $\underline{\beta}^e$  associée aux contraintes internes (et appliquées). En petites déformations, on a :

$$\beta_{ij} = \beta_{ij}^p + \beta_{ij}^e \quad (11-6)$$

b) Statique

Aux déformations élastiques sont associées les contraintes  $\sigma_{ij}$  composantes d'un tenseur symétrique (équations d'équilibre) et qui vérifient les équations d'équilibre

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma_{ji} \\ \sigma_{ij,j} + f_i &= 0\end{aligned}\tag{II-7}$$

où  $f_i$  désignent les forces de volume.

Sur la frontière du solide, les relations d'équilibre prennent la forme particulière :

$$\sigma_{ij} n_j = T_i\tag{II-8}$$

où  $\underline{n}$  désigne la normale unitaire extérieure au solide et  $T_i$  les forces surfaciques imposées à la frontière.

c) Comportement (élastique) du matériau

Nous ne précisons ici que la forme du comportement élastique du matériau, la déformation inélastique étant supposée connue.

Dans ce cas les contraintes locales en  $\underline{r}$  sont reliées aux déformations élastiques par la relation :

$$\sigma_{ij}(\underline{r}) = C_{ijkl}(\underline{r}) \epsilon_{kl}^e(\underline{r})\tag{II-9}$$

où  $C_{ijkl}$  désigne les constantes élastiques en  $\underline{r}$ . Dans le cas d'un matériau homogène,  $C_{ijkl}$  ne dépend pas de  $\underline{r}$ .

En général  $C_{ijkl}$  possède les symétries suivantes :

$$\begin{aligned}C_{ijkl} &= C_{ijek} \\ C_{ijkl} &= C_{jikl} \\ C_{ijkl} &= C_{klij}\end{aligned}\tag{II-10}$$

d) Elastostatique

Résoudre un problème d'élastostatique revient, pour un solide donné et un chargement connu, à trouver les champs cinématiques ( $\underline{u}$ ,  $\underline{\beta}$ ,  $\underline{\epsilon}$ ) et statiques ( $\underline{\sigma}$ ) satisfaisant aux équations (II.4) (II.5) et (II.7).

En règle générale deux méthodes ont été proposées :

- celle qui part d'une formulation cinématique
- celle qui exprime le problème externe de contraintes ou de potentiel de contraintes.

Nous rappelons la première formulation en l'adaptant au problème qui nous intéresse ici (présence d'une déformation inélastique).

A partir de (II-6) et de (II-1), on a :

$$\beta_{ij}^e = u_{i,j} - \beta_{ij}^p \quad (\text{II-11})$$

soit pour les contraintes (dans un milieu homogène)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (u_{k,l} - \beta_{kl}^p) \quad (\text{II-12})$$

L'équation d'équilibre (II-7) s'écrit alors

$$C_{ijkl} u_{l,ki} - C_{ijkl} \beta_{kl,si}^p + f_j = 0 \quad (\text{II-13})$$

(II-13) consiste en une équation aux dérivées partielles dont la solution  $\underline{u}(\underline{r})$  dépend des données  $f_j$  et  $\beta_{kl}^p$ .

Pour intégrer (II-13) il est commode d'introduire le tenseur de Green  $\Theta_{j,n}(\underline{r})$  qui est le déplacement dans la direction  $j$  au point  $\underline{r}$  dû à une force unité appliquée selon  $n$  à l'origine.

On a donc pour  $\Theta_{j,n}$

$$C_{ijkl} G_{jm,ik}^{(r)} + \delta_{jn} \delta(\underline{r}) = 0 \quad (\text{II-14})$$

avec la condition auxiliaire que  $\Theta_{j,n}$  s'annule à l'infini.  $\delta_{jn}$  est le symbole de Kronecker et  $\delta(\underline{r})$  est la distribution de Dirac. De la définition de cette dernière et de la relation (II-14), on tire

$$u_m(\underline{r}) = \int_V \delta_{lm} \delta(\underline{r}-\underline{r}') u_l(\underline{r}') dv' \quad (II-15)$$

soit d'après (II-13)

$$u_m(\underline{r}) = - \int_V C_{ijkl} G_{jm,ik}(\underline{r}-\underline{r}') u_l(\underline{r}') dv' \quad (II-16)$$

on a la propriété suivante pour  $G_{j,n,i,k}$ ,

$$\frac{\partial G(\underline{r}-\underline{r}')}{\partial x_i} = - \frac{\partial G(\underline{r}-\underline{r}')}{\partial x'_i} \quad (II-17)$$

(II.16) s'écrit alors :

$$u_m(\underline{r}) = - \int_V C_{ijkl} G_{jm,ik}(\underline{r}-\underline{r}') u_l(\underline{r}') dv' \quad (II-18)$$

En utilisant le théorème de la divergence, on a :

$$u_m(\underline{r}) = - \int_S C_{ijkl} G_{jm,i}(\underline{r}-\underline{r}') u_{l,k}(\underline{r}') ds'_k + \int_S C_{ijkl} G_{jm}(\underline{r}-\underline{r}') u_{l,k}(\underline{r}') ds'_i - \int_V C_{ijkl} G_{jm}(\underline{r}-\underline{r}') u_{l,ki}(\underline{r}') dv' \quad (II-19)$$

Nous supposons que le déplacement total tend vers 0 lorsque  $r$

tend vers l'infini. Dans ce cas il reste :

$$u_m(\underline{r}) = - \int_V C_{ijkl} G_{jm}(\underline{r}-\underline{r}') u_{l,ki}(\underline{r}') dv' \quad (II-20)$$

soit en tenant compte de (II-13)

$$u_m(\underline{r}) = \int_V G_{jm}(\underline{r}-\underline{r}') \left\{ f_j(\underline{r}') - C_{ijkl} \beta_{kl,i}^p(\underline{r}') \right\} dv' \quad (II-21)$$

Lorsqu'il n'y a pas de forces volumiques, il reste

$$u_m(\underline{r}) = - \int_V G_{jm}(\underline{r}-\underline{r}') C_{ijkl} \beta_{kl,i}^p(\underline{r}') dv' \quad (II-22)$$

$\beta^p$  étant connu, l'intégrale (II-22) permet de trouver le déplacement total  $u_n$  si on connaît le tenseur de green  $G_{j,n}$ .

Ce formalisme est utilisé dans le paragraphe suivant pour exprimer la solution du problème de l'inclusion plastique.

## 2.2) Le problème de l'inclusion plastique.

Nous considérons un milieu infini, homogène de constantes élastiques  $C_{ijkl}$ . Au sein de ce milieu se trouve une inclusion de volume  $V$  limitée par une surface  $S$ .

Nous supposons que cette inclusion a subi une transformation inélastique uniforme  $\beta^P$ . Le problème résolu par Eshelby revient alors à calculer les champs de contraintes et de rotations dans le milieu infini. Pour retrouver la solution d'Eshelby nous utilisons une méthode directe.

Le gradient du déplacement  $u_{i,j}$  se compose d'une partie élastique  $\beta_{ij}^e$  et d'une partie plastique  $\beta_{ij}^P$  qui s'écrit :

$$\beta_{ij}^P(r) = \beta_{ij}^P \theta(r) \quad (11-23)$$

où  $\theta(r)$  désigne la fonction indicatrice d'Heaviside

$$\theta(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \notin V \\ 1 & \text{si } r \in V \end{cases} \quad (11-24)$$

On a donc :

$$\mu_{i,j} = \beta_{ij}^e + \beta_{ij}^P \quad (11-25)$$

A cause de la symétrie en  $(k,l)$  du tenseur  $C_{ijkl}^0$ , les contraintes  $\sigma_{ij}$  s'écrivent :

$$\sigma_{ij}(r) = C_{ijkl}^0 (\mu_{k,l}(r) - \beta_{kl}^P(r)) \quad (11-26)$$

et les conditions d'équilibre donnent, en l'absence de forces volumiques

$$\sigma_{ij,j}(r) = C_{ijkl}^0 \mu_{k,lj}(r) - C_{ijkl}^0 \beta_{kl,j}^P(r) = 0 \quad (11-27)$$

Le terme  $C_{ijkl}^0 \beta_{kl,j}^P$  s'apparente à des forces volumiques fictives et on a, pour le milieu infini :

$$\mu_m(r) = - \int_{\infty} G_{jm}(r-r') C_{ijkl}^0 \beta_{kl,i}^P(r') dv' \quad (11-28)$$

Le terme  $\beta_{kl,i}^P$  s'écrit compte tenu de (11-23)

$$\beta_{kl,i}^P(r') = -n_i \delta(s) \beta_{kl}^P \quad (11-29)$$

où  $\beta_{ke}^P$  est constante et on a :

$$u_m(\underline{r}) = \int_V G_{jm}(\underline{r}-\underline{r}') C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^P n_i \delta(s) dv' \quad (II-30)$$

Cette intégrale se transforme à l'aide du théorème de Stokes, en intégrale sur le volume  $V$ , soit :

$$u_m(\underline{r}) = \int_V G_{jm,i}(\underline{r}-\underline{r}') C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^P dv' \quad (II-31)$$

Le gradient du déplacement total s'écrit :

$$u_{m,m}(\underline{r}) = \int_V G_{jm,i'm}(\underline{r}-\underline{r}') C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^P dv' \quad (II-32)$$

soit puisque  $C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^P$  est uniforme

$$u_{m,m}(\underline{r}) = C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^P \int_V G_{jm,i'm}(\underline{r}-\underline{r}') dv' \quad (II-33)$$

Soit  $t_{mnij}(\underline{r})$  le tenseur

$$\int_V G_{jm,i'm}(\underline{r}-\underline{r}') dv'$$

on a alors :

$$\beta_{mm}(\underline{r}) = t_{mnij}(\underline{r}) C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^P \quad (II-34)$$

La déformation totale  $\underline{\epsilon}$  en  $\underline{r}$  s'écrit

$$\epsilon_{mn}(\underline{r}) = \frac{1}{2} (t_{mnij}(\underline{r}) + t_{nmij}(\underline{r})) C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^P \quad (II-35)$$

et la rotation totale s'obtient à partir de

$$\omega_{mn}(\underline{r}) = \frac{1}{2} (t_{mnij}(\underline{r}) - t_{nmij}(\underline{r})) C_{ijkl}^0 \beta_{kl}^P \quad (II-36)$$

Il reste alors à calculer le tenseur  $t_{mnij}(\underline{r})$  qui s'écrit :

$$t_{mnij}(\underline{r}) = \int_V G_{jm,i'm}(\underline{r}-\underline{r}') dv' \quad (II-37)$$

Si on note  $x_i$  les coordonnées de  $\underline{r}$  et  $x'_i$  celles de  $\underline{r}'$ , on a :

$$G_{m i, j'}(\underline{r}-\underline{r}') = - G_{m i, j}(\underline{r}-\underline{r}') \quad (II-38)$$

on a donc :

$$t_{mnij}(\underline{r}) = - \int_V G_{jm,i'm}(\underline{r}-\underline{r}') dv' \quad (II-39)$$

En général le tenseur  $\underline{t}$  n'a pas de propriétés particulières. Par contre, Eshelby [1] a montré que dans le cas d'inclusions de forme ellipsoïdales,  $\underline{t}$  est uniforme dans l'inclusion ellipsoïdale. Nous appelons  $\underline{t}^I$  cette valeur et la calculons à partir de la valeur moyenne de  $\underline{t}$  dans  $V$

$$t_{mni}^I = -\frac{1}{V} \int_V \int_{V'} G_{jn,im}^{(r-r')} dv dv' \quad (11-40)$$

Lorsqu'on ne s'intéresse qu'aux champs cinématiques et statiques à l'intérieur d'une inclusion ellipsoïdale (et plastique) le problème se ramène alors à la connaissance du tenseur  $\underline{t}^I$ .

Dans ce cas, on a les formules suivantes pour les champs cinématiques et statiques dans l'inclusion.

$$\beta_{i,j}(\underline{r}) = \beta_{i,j}^P \text{ dans } V$$

$$\beta_{i,j} = t_{jke}^I C_{kemn}^0 \beta_{mn}^P$$

$$e_{i,j} = \frac{1}{2} (t_{jke}^I + t_{jike}^I) C_{kemn}^0 \beta_{mn}^P$$

$$e_{ij}^P = \frac{1}{2} (t_{jke}^I + t_{jike}^I) C_{kemn}^0 \beta_{mn}^P - e_{ij}^P$$

$$\omega_{i,j} = \frac{1}{2} (t_{jke}^I - t_{jike}^I) C_{kemn}^0 \beta_{mn}^P$$

$$\omega_{ij}^P = \frac{1}{2} (t_{jke}^I - t_{jike}^I) C_{kemn}^0 \beta_{mn}^P - \omega_{ij}^P$$

$$\sigma_{ij} = C_{jpaq}^0 \left\{ \frac{1}{2} (t_{pake}^I + t_{apke}^I) C_{kemn}^0 \beta_{mn}^P - e_{pa}^P \right\}$$

Le tenseur  $\underline{S}$  d'Eshelby, reliant la déformation totale dans l'inclusion à la déformation plastique  $\underline{e}^P$  s'obtient par

$$S_{ijkl} = \frac{1}{2} (t_{ijmn}^I + t_{jimn}^I) C_{mnkl}^0 \quad (11-41)$$

remarques :

On voit que pour calculer explicitement  $\underline{S}$  il suffit de connaître le tenseur  $\underline{t}^I$ . On remarque également que  $S_{ijkl}$  possède les symétries suivantes :

$$S_{ijkl} = S_{jike}$$

$$S_{ijkl} = S_{ijek}$$

mais en général  $S_{ijkl} \neq S_{klij}$

Le calcul de  $\underline{t}^I$  nécessite la connaissance du tenseur de green  $\underline{G}$  du milieu infini de constantes élastiques  $\underline{C}^0$ .

Dans de nombreux problèmes il est également nécessaire de connaître l'énergie élastique  $W$  associée aux contraintes internes dues à la présence d'une inclusion plastique.

On a :

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \underline{\sigma}_{ij} \underline{\epsilon}_{ij}^e dv \quad (II-43)$$

Soit d'après (II-11)

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \underline{\sigma}_{ij} (\underline{\mu}_{ij} - \underline{\epsilon}_{ij}^P) dv \quad (II-44)$$

Par intégration par parties en tenant compte du fait que  $\underline{\sigma}_{ij} n_j$  est nul sur la frontière du solide, on a :

$$W = -\frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma}_{ij} \underline{\epsilon}_{ij}^P dv \quad (II-45)$$

et puisque  $\underline{\sigma}_{ij}$  est uniforme dans  $V$  (ainsi que  $\underline{\epsilon}^P$ ) on a :

$$W = -\frac{1}{2} V \underline{\sigma}_{ij} \underline{\epsilon}_{ij}^P \quad (II-46)$$

On remarque donc que le calcul de  $W$  se ramène à celui du champ de contrainte dans l'inclusion, c'est à dire finalement au calcul du tenseur  $\underline{t}^I$ .

On a :

$$W = -\frac{1}{2} V C_{ijpq}^0 \left\{ \frac{1}{2} (\underline{t}_{pqkl}^I + \underline{t}_{qpk l}^I) C_{klmn}^0 \underline{\epsilon}_{mn}^P - \underline{t}_{pq}^P \right\} \underline{\epsilon}_{ij}^P \quad (II-47)$$

Avant d'attaquer le problème du calcul de  $t^1$ , nous formulons le problème de l'inclusion hétérogène et le problème mixte (plastique et hétérogène). On verra que, dans ces deux cas, la solution sera également liée au calcul de  $t^1$ .

### 2.3) Le problème de l'inclusion hétérogène.

Nous considérons un milieu infini  $V_\infty$  de constantes élastiques  $C^0$  en tous les points sauf à l'intérieur d'une inclusion ellipsoïdale de volume  $V$  où elles sont égales à  $C^1$ . Comme dans le cas de l'inclusion plastique, nous supposons qu'à l'interface  $S$ , le déplacement est continu.

Dans l'état initial, nous supposons qu'il n'y a pas de contraintes et nous cherchons le champ de déformation (élastique car nous supposons qu'il n'y a pas de déformations inélastiques) dû à des forces surfaciques qui créent un champ uniforme  $\underline{\Sigma}$ ,  $\underline{\epsilon}^0$  dans le milieu infini homogène.

Avec les notations du paragraphe précédent, on a :

$$\begin{aligned} \underline{C}(\underline{r}) &= \underline{C}^0 + (\underline{C}^1 - \underline{C}^0) \theta(\underline{r}) \\ &= \underline{C}^0 + \underline{\Delta C} \theta(\underline{r}) \end{aligned} \quad (11-48)$$

En utilisant l'équation intégrale ou L.S.D. proposé par Dederich et Zeller [7], le déplacement  $\underline{u}(\underline{r})$  s'écrit :

$$u_m(\underline{r}) = u_m^0(\underline{r}) - \int_{V_\infty} G_{mij}^{(\underline{r}-\underline{r}')} \Delta C_{ijkl} \epsilon_{kl}(\underline{r}') \theta(\underline{r}') dv' \quad (11-49)$$

soit pour le gradient  $\underline{\beta}$  et en tenant compte des propriétés de  $\theta$

$$u_{m,n}(\underline{r}) = u_{m,n}^0(\underline{r}) - \int_V G_{mij,n}^{(\underline{r}-\underline{r}')} \Delta C_{ijkl} \epsilon_{kl}(\underline{r}') dv' \quad (11-50)$$

D'après Eshelby [1],  $\epsilon_{kl}$  est uniforme dans l'inclusion ellipsoïdale. Par hypothèse, il en est de même de  $\underline{\Delta c}$  et on a donc :

$$\mu_{mn}(\underline{r}) = \mu_{mn}^{\circ}(\underline{r}) + t_{mnij}(\underline{r}) \Delta C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (II-51)$$

Equation dans laquelle on a posé, comme dans le paragraphe précédent :

$$t_{mnij}(\underline{r}) = - \int_V G_{jn,im}(\underline{r}-\underline{r}') dv' \quad (II-52)$$

La déformation dans l'inclusion est donc solution de :

$$\epsilon_{mn}^I = \epsilon_{mn}^{\circ} + \frac{1}{2} \left\{ t_{mnij}^I + t_{mmij}^I \right\} \Delta C_{ijkl} \epsilon_{kl}^I \quad (II-53)$$

et la rotation s'écrit :

$$\omega_{mn}^I = \omega_{mn}^{\circ} + \frac{1}{2} \left\{ t_{mnij}^I - t_{mmij}^I \right\} \Delta C_{ijkl} \epsilon_{kl}^I \quad (II-54)$$

On voit donc d'après (II-52) (II-53) et (II-54) que la solution du problème de l'inclusion hétérogène se ramène, en fin de compte à la détermination du même tenseur  $\underline{t}^I$  que celui introduit lors du problème de l'inclusion plastique.

#### 2.4) Le problème mixte

Il s'agit du problème d'une inclusion plastique et hétérogène c'est-à-dire une inclusion ayant des constantes élastiques  $\underline{C}^I$  différentes de celles de la matrice  $\underline{C}^{\circ}$  et ayant subi une déformation inélastique uniforme  $\underline{\epsilon}^P$ .

Pour résoudre ce problème, nous partons d'une autre équation intégrale proposée par Berveiller et Zaoui [3] et reprise par Berveiller, O.Fassi Fehri et Hihi [8] pour résoudre le problème de la paire d'inclusions.

Avec les notations des paragraphes précédents, cette équation s'écrit

$$\mu_{m,n}(\underline{r}) = \mu_{m,n}^0(\underline{r}) + \int_{V_\infty} G_{mi,j'n}(\underline{r}-\underline{r}') \left\{ C_{ijkl}^{(r')} E_{kl}^p(\underline{r}') - \delta C_{ijkl}^{(r')} E_{kl}(\underline{r}') \right\} dv' \quad (II-55)$$

avec

$$\delta C_{ijkl}^{(r)} = C_{ijkl}^{(r)} - C_{ijkl}^0$$

Dans notre cas, on a :

$$E_{ij}^p(\underline{r}) = \varepsilon_{ij}^p \theta(\underline{r}')$$

$$\delta C_{ijkl}^{(r')} = (C_{ijkl}^I - C_{ijkl}^0) \theta(\underline{r}') = \Delta C_{ijkl} \theta(\underline{r}') \quad (II-56)$$

l'équation (II-55) se transforme en :

$$\mu_{m,n}(\underline{r}) = \mu_{m,n}^0(\underline{r}) + \int_V G_{mi,j'n}(\underline{r}-\underline{r}') \left\{ C_{ijkl}^I E_{kl}^p - \Delta C_{ijkl} E_{kl} \right\} dv' \quad (II-57)$$

soit :

$$\beta_{mn}(\underline{r}) = \beta_{mn}^0(\underline{r}) + t_{mnij}(\underline{r}) \left\{ C_{ijkl}^I E_{kl}^p - \Delta C_{ijkl} E_{kl} \right\} \quad (II-58)$$

Dans ce problème mixte, on voit à partir de (II-58) que la solution dépend également du tenseur  $t_{mnij}$ , de la même façon que pour les problèmes d'inclusions plastique et les problèmes d'inclusions hétérogènes.

Ce résultat justifie par ailleurs la méthode de l'inclusion plastique équivalente d'Eshelby, qui utilise une déformation plastique fictive pour résoudre le problème de l'inclusion hétérogène.

On peut facilement vérifier que la relation (II-58) contient les solutions (II-53) et (II-54).

## 2.5. Conclusion

La présentation compacte des problèmes d'inclusions plastiques, d'inclusions hétérogènes et les problèmes mixtes montrent que leur solution se ramène en fin de compte au calcul de l'intégrale  $\underline{t}^I$ .

Celle ci ne peut se faire que lorsque le tenseur de Green du milieu  $\underline{C}^0$  est connu, ce qui n'est malheureusement le cas que des milieux isotropes.

Dans le chapitre suivant, nous proposons une méthode numérique pour calculer les tenseurs  $\underline{t}^I$  pour des inclusions ellipsoïdales de forme quelconque et pour des anisotropies de la matrice quelconque.

## Chapitre III

Détermination du tenseur  $\underline{S}$  et résultats préliminaires

## CHAPITRE III

### DETERMINATION DU TENSEUR $\underline{S}$ ET RESULTATS PRELIMINAIRES

- 3.1. Calcul du tenseur de green pour un milieu infini anisotrope
- 3.2. Calcul du tenseur  $t^i$  pour une inclusion sphérique
- 3.3. Calcul du tenseur  $t^i$  pour une inclusion ellipsoïdale
- 3.4. Résultats concernant une inclusion ellipsoïdale dans un milieu isotrope et une inclusion sphérique dans une matrice cubique.
- 3.5. Résultats concernant une inclusion ellipsoïdale dans une matrice cubique.
- 3.6. CONCLUSION.

## INTRODUCTION.

La méthode développée par Eshelby (1) pour résoudre certains problèmes relatifs aux champs de contraintes et de déformation des inclusions est ici étendue aux matériaux anisotropes.

Eshelby (1) a calculé le tenseur  $\underline{S}$  pour une inclusion ellipsoïdale dans une matrice isotrope. Nous étendons en effet le calcul pour une inclusion ellipsoïdale dans un milieu infini anisotrope.

La connaissance des composantes du tenseur  $\underline{S}$  permet de trouver la déformation totale  $\underline{e}^T$  à l'intérieur de l'inclusion, en fonction de la déformation de transformation  $\underline{e}$ .

$$\underline{e}^T = \underline{S} \underline{e}$$

(III-1)

Le calcul est développé tout d'abord pour une inclusion sphérique puis dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale.

Le procédé est fondé sur l'emploi de la transformation de Fourier.

Nous examinons enfin quelques applications préliminaires.

- calcul des composantes littérales du tenseur  $\underline{S}$  pour une inclusion aplatie (disque) dans un milieu isotrope.
- calcul des composantes numériques du tenseur  $\underline{S}$  pour une inclusion sphérique et ellipsoïdale dans une matrice cubique.
- résultats concernant l'anisotropie mécanique.

### 3.1. Calcul du tenseur de Green pour un milieu infini anisotrope.

Le tenseur de Green qui intervient dans l'expression de  $\underline{t}^1$  est solution des équations

$$C_{ijkl} G_{jm,ik}^{(r)} + S_{lm} \delta(r) = 0 \quad (III-2)$$

avec la condition  $\underline{G} \rightarrow 0$  lorsque  $r \rightarrow \infty$ .

Pour un milieu à symétrie isotrope, la forme explicite de  $\underline{G}$  est connue. Par contre pour un milieu à symétrie quelconque, il est difficile de trouver une expression explicite de  $\underline{G}$ .

Pour trouver  $\underline{G}$ , nous partons de la démarche usuelle qui consiste à introduire la Transformée de Fourier  $\tilde{\underline{G}}$  de  $\underline{G}$ .

On a les relations usuelles :

$$\begin{aligned} G_{ij}(r) &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{V_k} \tilde{g}_{ij}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} dV_k \\ \tilde{g}_{ij}(\vec{k}) &= \int_V G_{ij}(r) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} dv \\ \tilde{S}(\vec{k}) &= \int_V S(r) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} dv = 1 \end{aligned} \quad (III-3)$$

de (III-3) on tire la relation :

$$G_{ij,kl}^{(r)} = -\frac{1}{8\pi^3} \int_{V_k} k_k k_l \tilde{g}_{ij}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} dV_k \quad (III-4)$$

et on obtient à la place de (III-2) le système linéaire :

$$C_{ijkl} k_i k_k \tilde{g}_{jm}(\vec{k}) = S_{lm} \quad (III-5)$$

En introduisant le module  $k$  du vecteur  $\vec{k}$ , on a :

$$k^2 C_{ijkl} x_i x_k \tilde{g}_{jm}(\vec{k}) = \delta_{ln} \quad (\text{III-6})$$

et en posant  $C_{ijkl} x_i x_k = A_{jl}$ , (III-6) devient

$$A_{jl} \tilde{g}_{jm} = \frac{1}{k^2} \delta_{ln} \quad (\text{III-7})$$

expression dans laquelle  $\vec{x}$  désigne le vecteur unitaire dans la direction  $\vec{k}$

En supposant que l'inverse de  $A_{jl}$  existe, ce qui nécessite que la forme

$C_{ijkl} x_i x_k$  soit définie, on a pour  $\tilde{g}_{jn}$

$$\tilde{g}_{jm}(\vec{k}) = \frac{1}{k^2} A_{jm}^{-1}(\vec{x}) \quad (\text{III-8})$$

Pour le tenseur de Green  $G_{ij}(\underline{r})$ , on a donc

$$G_{ij}(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{V_k} \frac{1}{k^2} A_{jm}^{-1}(\vec{x}) e^{i\vec{k} \cdot \underline{r}} dv_k \quad (\text{III-9})$$

Cas particulier d'un solide isotrope.

Dans ce cas, on a :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{III-10})$$

on obtient pour  $\tilde{g}$

$$\tilde{g}_{ij}(\vec{k}) = \frac{1}{k^2} \frac{1}{\mu} \left( \delta_{ij} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} x_i x_j \right) \quad (\text{III-11})$$

Dans ce cas on peut trouver la forme explicite de  $G$  :

$$G_{ij}(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi\mu} \left( \delta_{ij} r_{,kk} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} r_{,ij} \right) \quad (\text{III-12})$$

### 3.2. Calcul du tenseur $t^I$ pour une inclusion sphérique.

Le tenseur  $t^I$  qui décrit la solution de tous les problèmes d'inclusions, est donné par :

$$t_{ijkl}^I = -\frac{1}{V} \int_V \int_{V'} G_{lj,ki}(\vec{r}-\vec{r}') dv dv' \quad (\text{III-13})$$

D'après (III-4), on substitue dans (III-13)  $G_{lj,ki}$  par son expression en fonction de  $\bar{g}$ , on a :

$$t_{ijkl}^I = \frac{1}{V} \frac{1}{8\pi^3} \int_V \int_{V'} \int_{V_k} \bar{g}_{lj}(\vec{k}) k_k k_i e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}-\vec{r}')} dv dv' dv_k \quad (\text{III-14})$$

D'après (III-8),  $\bar{g}$  prend la forme  $\frac{1}{k^2} A_{lj}^{-1}(\vec{X})$ , on peut donc simplifier (III-14) sous la forme :

$$t_{ijkl}^I = \frac{1}{8\pi^3 V} \int_V \int_{V'} \int_{V_k} A_{lj}^{-1}(\vec{X}) X_k X_i e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}-\vec{r}')} dv dv' dv_k \quad (\text{III-15})$$

Il est commode d'exprimer le vecteur  $\vec{k}$  en coordonnées sphériques sous la forme :

$$k_1 = k \sin\theta \cos\phi = kx_1$$

$$k_2 = k \sin\theta \sin\phi = kx_2$$

$$k_3 = k \cos\theta = kx_3$$

(III-16)

on a alors :

$$dv_k = k^2 \sin\theta d\theta d\phi dk$$

(III-17)

et  $t^I$  s'écrit :

$$t_{ijkl}^I = \frac{1}{8\pi^3 V} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} A_{lj}^{-1}(\vec{X}) X_k X_i d\phi \left\{ \int_V \int_{V'} \int_0^\infty e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r}-\vec{r}')} k^2 dv dv' dk \right\} \quad (\text{III-18})$$

Pour une inclusion sphérique, l'intégrale sur  $k$  est indépendante de  $\theta$  et  $\phi$  et vaut  $2\pi^2 V$ .

On a donc :

$$\underline{t}_{ijkl}^I = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} A_{lj}^{-1} \chi_i \chi_k d\phi \quad (III-19)$$

Pour un milieu isotrope,  $\underline{t}^I$  s'exprime sous la forme :

$$\underline{t}_{ijkl}^I = \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \left( \delta_{lj} - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \chi_l \chi_j \right) \chi_i \chi_k d\phi \quad (III-20)$$

soit encore :

$$\underline{t}_{ijkl}^I = \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \delta_{lj} \chi_i \chi_k \sin\theta d\theta d\phi - \frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \chi_i \chi_j \chi_k \chi_l \sin\theta d\theta d\phi \right\} \quad (III-21)$$

Les termes

$$\Delta_{ij} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \chi_i \chi_k \sin\theta d\theta d\phi \quad (III-22)$$

et

$$\Lambda_{ijkl} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \chi_i \chi_j \chi_k \chi_l \sin\theta d\theta d\phi \quad (III-23)$$

se calculent facilement et on obtient

$$\Delta_{11} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3\theta \cos^2\phi d\theta d\phi = \frac{4}{3}\pi$$

$$\Delta_{22} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3\theta \sin^2\phi d\theta d\phi = \frac{4}{3}\pi$$

(III-24)

$$\Delta_{33} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta \cos^2\phi d\theta d\phi = \frac{4}{3}\pi$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{13} = \Delta_{23} = 0$$

soit encore de manière condensée :

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \chi_i \chi_k \sin\theta d\theta d\phi = \frac{4}{3}\pi \delta_{ik} \quad (III-25)$$

Le second membre de (III-23) se calcule aussi facilement. Toutes les composantes de  $\underline{\Lambda}$  sont nulles sauf :

$$\Lambda_{1111}, \quad \Lambda_{2222}, \quad \Lambda_{3333}, \quad \Lambda_{1122}, \quad \Lambda_{1133}, \quad \Lambda_{2233}$$

En effet :

$$\Lambda_{1111} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^5 \theta \cos^4 \theta \, d\theta \, d\phi = \frac{12}{15} \pi$$

$$\Lambda_{2222} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^5 \theta \sin^4 \phi \, d\theta \, d\phi = \frac{12}{15} \pi$$

$$\Lambda_{3333} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \cos^4 \theta \, d\theta \, d\phi = \frac{12}{15} \pi$$

$$\Lambda_{1122} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^5 \theta \cos^2 \phi \sin^2 \phi \, d\theta \, d\phi = \frac{4}{15} \pi$$

$$\Lambda_{1133} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \cos^2 \theta \cos^2 \phi \, d\theta \, d\phi = \frac{4}{15} \pi$$

$$\Lambda_{2233} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \phi \, d\theta \, d\phi = \frac{4}{15} \pi$$

(III-26)

Soit encore de manière condensée :

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \chi_i \chi_j \chi_k \chi_l \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \frac{4\pi}{15} \left( \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right) \quad (\text{III-27})$$

Le tenseur  $\underline{t}^T$  s'écrit donc

$$\underline{t}^T_{ijkl} = \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{1}{3} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{15} \left( \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right) \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right\} \quad (\text{III-28})$$

### 3.3. Calcul de $t'$ pour une inclusion ellipsoïdale.

Pour une inclusion ellipsoïdale dont les axes principaux coïncident avec le repère de travail et dont les axes principaux sont  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$ , on peut se ramener à la la forme précédente en effectuant les changements de variables suivant :

$$\begin{aligned} \underline{r}(x_1, x_2, x_3) &\longrightarrow \underline{R}\left(x_1, \frac{a_1}{a_2} x_2, \frac{a_1}{a_3} x_3\right) \\ \underline{k}(k_1, k_2, k_3) &\longrightarrow \underline{K}\left(k_1, \frac{a_2}{a_1} k_2, \frac{a_3}{a_1} k_3\right) \end{aligned} \quad (\text{III-29})$$

On a alors la propriété

$$\underline{r} \cdot \underline{k} = \underline{R} \cdot \underline{K} \quad (\text{III-30})$$

Les composantes  $x_i$  se mettent alors sous la forme

$$x_i = \psi_{ij} K_j \quad (\text{III-31})$$

avec

$$\psi_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_1}{a_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_1}{a_3} \end{pmatrix} \quad (\text{III-32})$$

et on a directement à partir de (III-19)

$$t_{ijkl}^I = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} A_{lj}^{-1} \psi_{im} \psi_{kn} k_m k_n d\phi \quad (\text{III-33})$$

équation qui permet donc le calcul des composantes du tenseur  $t'$  à partir de la forme de l'inclusion définie par  $(a_1, a_2, a_3)$  et les constantes élastiques  $C_{ijkl}$  de la matrice qui interviennent dans  $A_{ij}^{-1}$ .

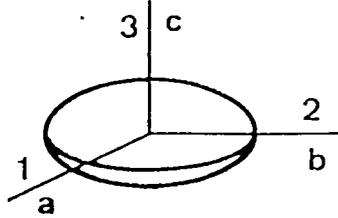
### 3.4. Résultats concernant une inclusion ellipsoïdale dans un milieu isotrope et une inclusion sphérique dans une matrice cubique.

1) Calcul des composantes du tenseur  $\underline{S}$  et du tenseur  $\underline{S}-\underline{I}$  dans un milieu isotrope.

En utilisant le calcul de base d'Eshelby (1) on donne les composantes littérales significatives du tenseur  $\underline{S}$  et  $\underline{S}-\underline{I}$  dans l'approximation  $\frac{c}{a} \ll 1$  sous la forme d'un tableau.

$\underline{I}$  est le tenseur unité d'ordre quatre, défini par :

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$



$$\frac{a}{c} \ll 1$$

$$S'_{ijkl} = S_{ijkl} - I_{ijkl}$$

$S_{ijkl}$	$S'_{ijkl}$
$S_{1111} = \frac{2-\sigma}{1-\sigma} \frac{\pi c}{4a}$	$\frac{2-\sigma}{1-\sigma} \frac{\pi c}{4a} - 1$
$S_{1122} = \frac{2\sigma-1}{1-\sigma} \frac{\pi c}{8a}$	$\frac{2\sigma-1}{1-\sigma} \frac{\pi c}{8a}$
$S_{2211} = \frac{2\sigma-1}{1-\sigma} \frac{\pi c}{8a}$	$\frac{2\sigma-1}{1-\sigma} \frac{\pi c}{8a}$
$S_{1133} = \frac{2\sigma-1}{1-\sigma} \frac{\pi c}{8a}$	$\frac{2\sigma-1}{1-\sigma} \frac{\pi c}{8a}$
$S_{2222} = \frac{2-\sigma}{1-\sigma} \frac{\pi c}{4a}$	$\frac{2-\sigma}{1-\sigma} \frac{\pi c}{4a} - 1$
$S_{2233} = \frac{2\sigma-1}{1-\sigma} \frac{\pi c}{8a}$	$\frac{2\sigma-1}{1-\sigma} \frac{\pi c}{8a}$
$S_{3311} = \frac{8\sigma - (4\sigma+1)\pi c/a}{8(1-\sigma)}$	$\frac{8\sigma - (4\sigma+1)\pi c/a}{8(1-\sigma)}$
$S_{3322} = \frac{8\sigma - (4\sigma+1)\pi c/a}{8(1-\sigma)}$	$\frac{8\sigma - (4\sigma+1)\pi c/a}{8(1-\sigma)}$
$S_{3333} = \frac{(2\sigma-1)\pi c/a}{4(1-\sigma)} + 1$	$\frac{(2\sigma-1)\pi c/a}{4(1-\sigma)}$
$S_{1212} = \frac{1-2\sigma}{8(1-\sigma)} \frac{\pi c}{a}$	$\frac{1-2\sigma}{8(1-\sigma)} \frac{\pi c}{a} - \frac{1}{2}$
$S_{1313} = \frac{\sigma-2}{8(1-\sigma)} \frac{\pi c}{a} + \frac{1}{2}$	$\frac{\sigma-2}{8(1-\sigma)} \frac{\pi c}{a}$
$S_{2323} = \frac{\sigma-2}{8(1-\sigma)} \frac{\pi c}{a} + \frac{1}{2}$	$\frac{\sigma-2}{8(1-\sigma)} \frac{\pi c}{a}$

2) Cas d'une matrice à symétrie cubique et d'une inclusion sphérique plastique.

Dans le cas d'une inclusion plastique, les contraintes dans l'inclusion s'écrivent d'après les résultats du chapitre [II]

$$\sigma_{ij}^I = C_{ijkl} \left\{ \frac{1}{2} (t_{klmn}^I + t_{lkmn}^I) C_{mnpq} \epsilon_{pq}^P - \epsilon_{kl}^P \right\} \quad (\text{III-34})$$

que nous mettons sous la forme :

$$\sigma_{ij}^I = L_{ijkl} \epsilon_{kl}^P \quad (\text{III-35})$$

La connaissance de  $L_{ijkl}$  permet alors de calculer directement les contraintes dans l'inclusion dues à une déformation plastique  $\underline{\epsilon}^P$ . Dans le cas d'un milieu isotrope, d'une inclusion sphérique et d'une déformation plastique incompressible, on aurait :

$$\sigma_{ij}^I = -2\mu(1-\beta) \epsilon_{ij}^P \simeq -\mu \epsilon_{ij}^P \quad (\text{III-36})$$

où  $\beta$  est égal à :  $\frac{2}{15} \frac{4-5\nu}{1-\nu}$

Dans la forme plus générale (III-34), intervient l'anisotropie de  $\underline{c}$  à la fois par  $\underline{C}$  mais également par l'intermédiaire de  $\underline{t}^I$ .

Nous nous limitons ici au cas d'un milieu à symétrie cubique pour lequel  $C_{ijkl}$  peut se mettre sous la forme :

$$C_{ijkl} = C_{12} \delta_{ij} \delta_{kl} + C_{44} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - H \delta_{ip} \delta_{jp} \delta_{kq} \delta_{lq} \quad (\text{III-37})$$

avec

$$H = 2C_{44} + C_{12} - C_{11}$$

Le tableau (a) indique les valeurs  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{44}$  et H de quelques monocristaux cubiques courants.

Tableau a :

MATERIAUX	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{44}$	H
Niobium	24.55	13.90	2.93	- 4.8
Plomb	4.95	4.23	1.49	2.3
Cuivre	16.84	12.14	7.54	10.6
Laiton $\beta$	12.79	10.91	8.22	14.6

Nous donnons ensuite pour ces matériaux les tenseurs  $\underline{S}$  et  $\underline{S-I}$ , dans le cas où la position de l'inclusion par rapport à la matrice est donnée par trois angles d'Euler  $\theta_1 = \theta = \theta_2 = 90^\circ$ .

Dans les matrices  $\underline{S}$  et  $\underline{S-I}$  ne figurent que les valeurs significatives. On pose :  $\underline{S}' = \underline{S-I}$ .

\* CUIVRE

$$\underline{S} = \begin{vmatrix} 0.450 & 0.131 & 0.131 & & & \\ & 0.450 & 0.131 & & & \\ & & 0.450 & & & \\ & & & 0.286 & & \\ & & & & 0.286 & \\ & & & & & 0.286 \end{vmatrix}$$

\* LAITON  $\beta$

$$\underline{S} = \begin{vmatrix} 0.383 & 0.182 & 0.182 & & & \\ & 0.383 & 0.182 & & & \\ & & 0.383 & & & \\ & & & 0.280 & & \\ & & & & 0.280 & \\ & & & & & 0.280 \end{vmatrix}$$

\* NIOBIUM

$$\underline{S} = \begin{vmatrix} 0.622 & 0.089 & 0.089 & & & \\ & 0.622 & 0.089 & & & \\ & & 0.622 & & & \\ & & & 0.200 & & \\ & & & & 0.200 & \\ & & & & & 0.200 \end{vmatrix}$$

\* PLOMB

$$\underline{S} = \begin{vmatrix} 0.452 & 0.191 & 0.191 & & & \\ & 0.452 & 0.191 & & & \\ & & & 0.285 & & \\ & & & & 0.285 & \\ & & & & & 0.285 \end{vmatrix}$$

\* CUIVRE

$$\underline{S}' = \begin{vmatrix} -0.541 & 0.131 & 0.131 & & & \\ & -0.541 & 0.131 & & & \\ & & -0.541 & & & \\ & & & -0.213 & & \\ & & & & -0.213 & \\ & & & & & -0.213 \end{vmatrix}$$

\* LAITON  $\beta$ 

$$\underline{S}' = \begin{vmatrix} -0.615 & 0.182 & 0.182 & & & \\ & -0.615 & 0.182 & & & \\ & & -0.615 & & & \\ & & & -0.219 & & \\ & & & & -0.219 & \\ & & & & & -0.219 \end{vmatrix}$$

\* NIOBIUM

$$\underline{S}' = \begin{vmatrix} -0.380 & 0.089 & 0.089 & & & \\ & -0.380 & 0.089 & & & \\ & & -0.380 & & & \\ & & & -0.299 & & \\ & & & & -0.299 & \\ & & & & & -0.299 \end{vmatrix}$$

\* PLOMB

$$\underline{S}' = \begin{vmatrix} -0.547 & 0.191 & 0.191 & & & \\ & -0.547 & 0.191 & & & \\ & & -0.547 & & & \\ & & & -0.214 & & \\ & & & & -0.214 & \\ & & & & & -0.214 \end{vmatrix}$$

Le tenseur  $\underline{S}$  admet également la symétrie cubique et se met sous la forme :

$$S_{ijkl} = S_{12} \delta_{ij} \delta_{kl} + S_{44} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - H' \delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{kr} \delta_{ls} \quad (\text{III-38})$$

avec 
$$H' = 2 S_{44} + S_{12} - S_{11}$$

Les différentes composantes de  $\underline{S}$  ont été calculées pour les métaux cubiques indiqués dans le tableau (a) et on a obtenu les résultats contenus dans le tableau (b).

Finalement, le tenseur  $\underline{L}$  est décomposé de manière analogue selon la forme

$$L_{ijkl} = L_{12} \delta_{ij} \delta_{kl} + L_{44} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - H'' \delta_{ip} \delta_{jq} \delta_{kr} \delta_{ls} \quad (\text{III-39})$$

et on a :

$$L_{ijkl} = C_{ijpq} (S_{pqkl} - I_{pqkl}) = C_{ijpq} S'_{pqkl} \quad (\text{III-40})$$

Les termes  $L_{12}$ ,  $L_{44}$  et  $H''$  s'expriment en fonction de  $c_{12}$ ,  $c_{44}$ ,  $H$  et  $S'_{12}$ ,  $S'_{44}$  et  $H'$  sous la forme :

$$L_{12} = 3 C_{12} S'_{12} + 2 C_{44} S'_{12} - H S'_{12} + 2 S'_{44} C_{12} - H' C_{12}$$

$$L_{44} = 2 C_{44} S'_{44} \quad (\text{III-41})$$

$$H'' = 3 H H' - 2 H S'_{44} - 2 H' C_{44}$$

Le tableau (b) indique les valeurs  $H$ ,  $H'$ ,  $H''$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{44}$  du Niobium, du matériau isotrope, du Plomb, du Cuivre et du Laiton  $\beta$ .

Tableau b:

	NIOBIUM	MATERIAU	PLOMB	CUIVRE	LAITON $\beta$
H	-4.8	0	2.3	10.4	14.6
H'	-0.129	-0.0030	0.2700	0.276	0.424
H''	-0.2568	0.0040	2.0428	8.8796	17.9967
L <sub>12</sub>	-1.8591	-0.3400	-0.3990	-3.1382	- 3.1127
L <sub>44</sub>	-1.7521	-0.3875	-0.6377	-3.2120	- 3.6000

On trace ensuite les courbes de couplage H' en fonction de H et H'' en fonction de H. Ces courbes marquent l'anisotropie mécanique du plomb, du laiton  $\beta$ , du cuivre et du niobium.

Ce sont les figures (3.1) et (3.2)

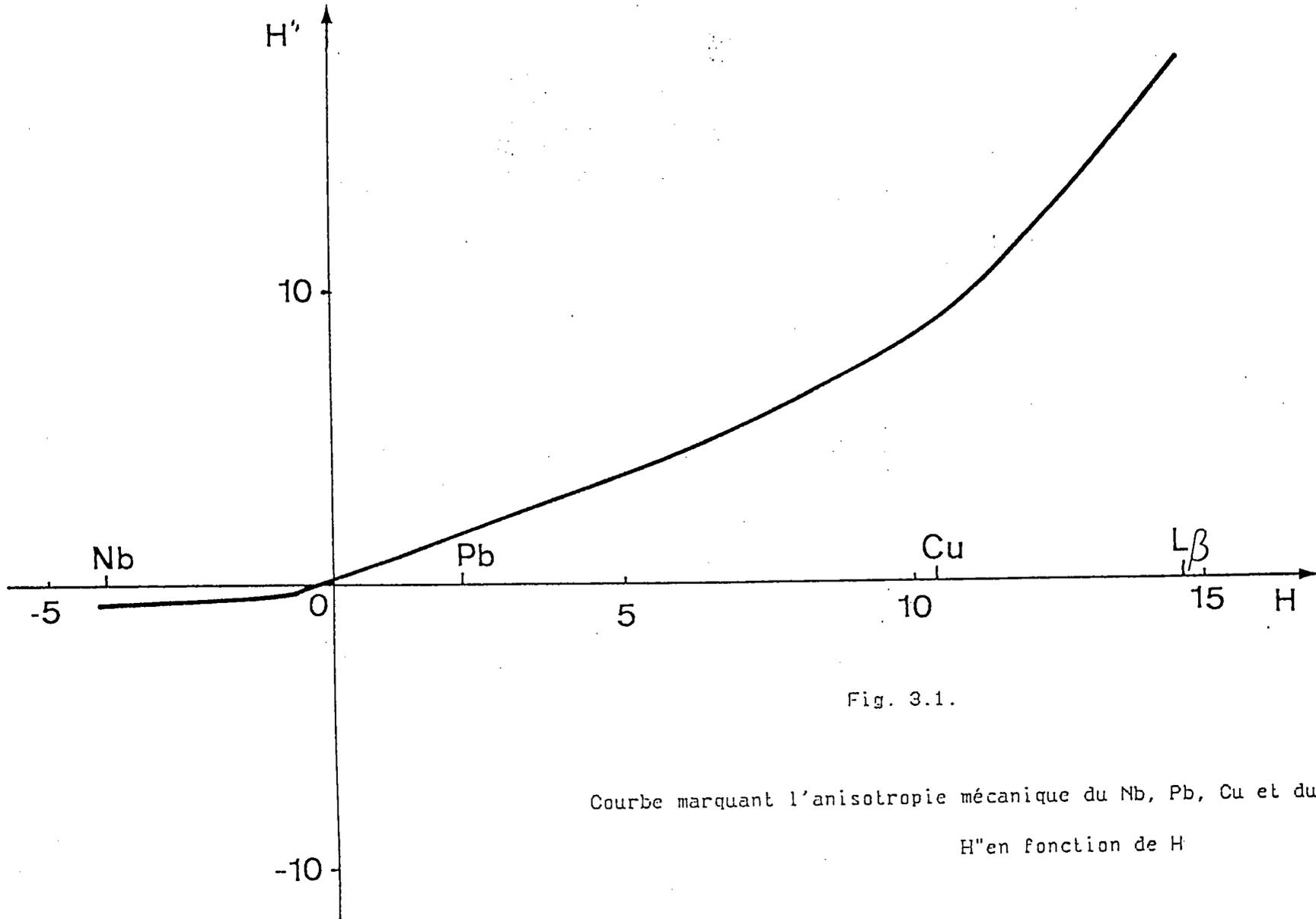


Fig. 3.1.

Courbe marquant l'anisotropie mécanique du Nb, Pb, Cu et du Lβ

$H''$  en fonction de  $H$

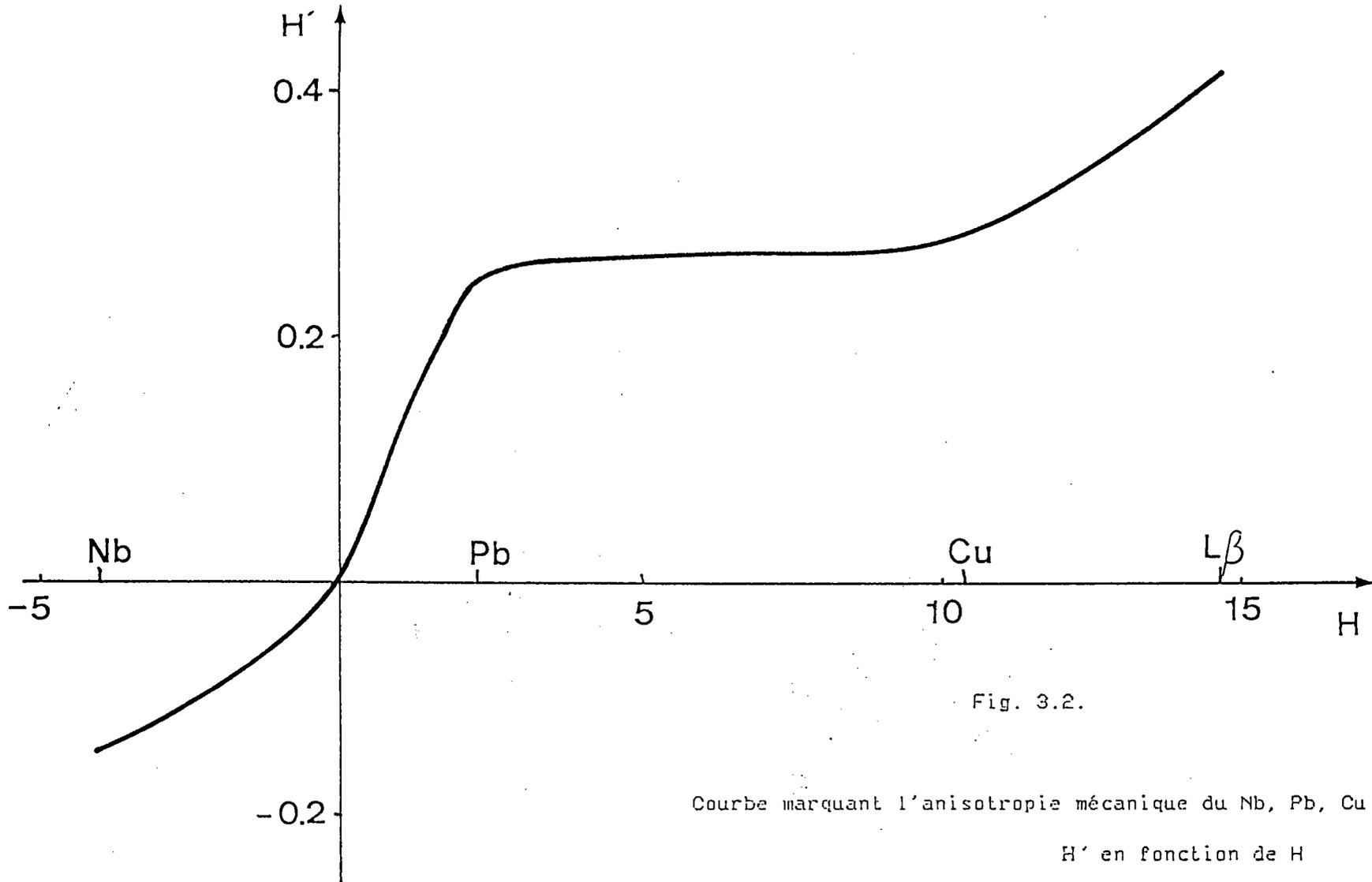


Fig. 3.2.

Courbe marquant l'anisotropie mécanique du Nb, Pb, Cu et du  $L\beta$

$H'$  en fonction de  $H$

### 3.5.b) Cas d'une matrice à symétrie cubique et d'une inclusion ellipsoïdale plastique

Pour la fin des résultats préliminaires, on donne les tenseurs  $\underline{S}$  et  $\underline{S} - \underline{I}$  pour les matériaux comme le cuivre et le laitons  $\beta$  dans les conditions suivantes :

Dans le cas du cuivre :

On considère une inclusion ellipsoïdale telle qu'un de ses axes principaux soit confondu à l'axe cristallographique [111].

La position d'une telle inclusion par rapport au repère cristallographique est donnée par les angles  $\Phi_1 = 45^\circ$ ,  $\Phi = 55^\circ$  et  $\Phi_2 = 73.897^\circ$  qui sont des angles d'Euler.

Dans le cas du laiton  $\beta$  :

L'un des axes principaux de l'inclusion ellipsoïdale est dans la direction  $n$ , normale dont les composantes sont données dans le repère cristallographique par :

$$\vec{n} \begin{cases} 0.6485 \\ -0.141 \\ -0.7481 \end{cases}$$

La position de l'inclusion dans ce cas par rapport à la matrice liée au repère cristallographique est donnée par les angles d'Euler qui sont :

$$\Phi_1 = 77.7331^\circ, \Phi = 133.426, \Phi_2 = 53.201^\circ$$

- Ces deux dernières familles de résultats nous montrent le caractère anisotropique que présentent les tenseurs  $\underline{S}$  et  $\underline{S} - \underline{I} = \underline{S}'$

Dans les deux cas l'inclusion prend des formes successives :

- disque  $a = b = 10, c = 1$

- disque plat  $a = b = 100, c = 1$

Pour le cuivre :

\* a = b = 10 ; c = 1

$$S = \begin{vmatrix} 0.138 & 0.015 & 0.005 & 0.002 & -0.002 & -0.019 \\ 0.019 & 0.178 & -0.002 & 0.000 & 0.000 & -0.005 \\ 0.421 & 0.302 & 0.947 & -0.013 & 0.004 & 0.073 \\ 0.259 & 0.049 & -0.010 & 0.414 & 0.023 & -0.029 \\ -0.049 & -0.007 & 0.000 & 0.024 & 0.442 & 0.132 \\ -0.028 & 0.014 & 0.008 & -0.002 & 0.000 & 0.047 \end{vmatrix}$$

\* a = b = 100 ; c = 1

$$S = \begin{vmatrix} 0.065 & 0.004 & 0.029 & 0.002 & 0.000 & -0.002 \\ 0.003 & 0.066 & 0.014 & -0.001 & 0.000 & 0.001 \\ 0.496 & 0.377 & 0.935 & 0.000 & 0.000 & 0.061 \\ 0.357 & 0.081 & -0.013 & 0.436 & 0.004 & -0.053 \\ 0.090 & -0.022 & -0.001 & 0.004 & 0.491 & 0.164 \\ -0.002 & 0.001 & 0.014 & 0.000 & 0.004 & 0.025 \end{vmatrix}$$

\* a = b = 10 ; c = 1

$$S' = \begin{vmatrix} -0.862 & 0.015 & 0.005 & 0.002 & -0.002 & -0.019 \\ 0.019 & -0.822 & -0.002 & 0.000 & 0.000 & -0.005 \\ 0.421 & 0.302 & -0.053 & -0.013 & 0.004 & 0.073 \\ 0.259 & 0.049 & -0.010 & -0.086 & 0.023 & -0.029 \\ -0.049 & -0.007 & 0.000 & 0.024 & -0.058 & 0.132 \\ -0.028 & -0.014 & 0.008 & -0.002 & 0.000 & -0.453 \end{vmatrix}$$

\* a = b = 100 ; c = 1

$$S' = \begin{vmatrix} -0.935 & 0.004 & 0.029 & 0.002 & -0.000 & -0.002 \\ 0.003 & -0.934 & -0.014 & -0.001 & 0.000 & -0.001 \\ 0.496 & 0.377 & -0.065 & -0.000 & 0.000 & 0.061 \\ 0.357 & 0.081 & -0.013 & -0.014 & 0.004 & -0.053 \\ -0.090 & -0.022 & -0.001 & 0.004 & -0.009 & 0.164 \\ -0.002 & -0.001 & 0.000 & 0.000 & 0.004 & -0.475 \end{vmatrix}$$

Cas du Laiton  $\beta$ 

\* a = b = 10 ; c = 1

$$S = \begin{vmatrix} 0.217 & 0.067 & -0.008 & 0.003 & -0.001 & -0.027 \\ 0.057 & 0.101 & 0.014 & -0.003 & -0.004 & 0.012 \\ 0.154 & 0.424 & 0.943 & -0.002 & 0.021 & 0.045 \\ -0.140 & 0.288 & -0.009 & 0.460 & 0.000 & -0.174 \\ -0.047 & -0.448 & 0.022 & 0.002 & 0.396 & -0.314 \\ -0.021 & 0.016 & 0.000 & 0.002 & -0.004 & 0.049 \end{vmatrix}$$

\* a = b = 100 ; c = 1

$$S = \begin{vmatrix} 0.068 & 0.009 & 0.002 & -0.006 & 0.001 & -0.005 \\ 0.009 & 0.059 & 0.038 & 0.006 & -0.003 & 0.004 \\ 0.231 & 0.511 & 0.935 & 0.000 & 0.000 & 0.062 \\ -0.163 & 0.320 & -0.013 & 0.493 & -0.001 & -0.194 \\ -0.084 & -0.615 & 0.028 & -0.001 & 0.485 & -0.418 \\ -0.004 & 0.004 & -0.001 & -0.006 & -0.006 & 0.027 \end{vmatrix}$$

\* a = b = 10 ; c = 1

$$S' = \begin{vmatrix} -0.783 & 0.067 & -0.008 & 0.003 & -0.001 & -0.027 \\ 0.047 & 0.899 & 0.014 & -0.003 & -0.004 & 0.012 \\ 0.154 & 0.424 & -0.057 & -0.002 & 0.021 & 0.045 \\ -0.140 & 0.288 & -0.009 & -0.040 & 0.000 & -0.174 \\ -0.047 & -0.448 & 0.022 & 0.002 & -0.104 & -0.314 \\ -0.021 & 0.016 & -0.000 & 0.002 & 0.004 & -0.451 \end{vmatrix}$$

\* a = b = 100 ; c = 1

$$S' = \begin{vmatrix} -0.932 & 0.009 & 0.002 & -0.006 & 0.001 & -0.005 \\ 0.009 & -0.941 & 0.038 & 0.006 & -0.003 & 0.004 \\ 0.231 & 0.511 & -0.065 & 0.000 & 0.000 & 0.062 \\ -0.163 & 0.320 & -0.013 & 0.015 & -0.001 & -0.194 \\ -0.084 & -0.615 & 0.028 & -0.001 & -0.015 & -0.418 \\ -0.004 & 0.004 & -0.001 & -0.006 & -0.006 & -0.473 \end{vmatrix}$$

### 3.6 CONCLUSION

Nous avons présenté un calcul et une analyse numérique du tenseur d'Eshelby . Ce résultat nous a permis de faire apparaître les effets de l'anisotropie mécanique de certains matériaux, et surtout va nous permettre d'accéder à d'importantes applications du moins dans les limites de l'obtention des résultats numériques.

Nos résultats montrent clairement les effets de l'anisotropie dus d'une part à la morphologie de l'inclusion, et d'autre part à son orientation.

En effet, la texture cristallographique dans sa forme générale tient compte de l'effet morphologique des grains.

Le problème de l'inclusion étant alors entièrement résolu par les calculs présentés dans ce chapitre, on va consacrer les chapitres suivants aux applications.

## Chapitre IU

Effet de la forme des grains sur les contraintes internes et les rotations du réseau lors de la déformation plastique des polycristaux métalliques.

## Chapitre IV

Effet de la forme des grains sur les contraintes internes et les rotations du réseau lors de la déformation plastique des polycristaux métalliques.

- 4.1. Généralités
- 4.2. Théorie de la déformation partiellement imposée
- 4.3. Interaction grain - matrice
- 4.4. Changements d'orientation
- 4.5. Discussion et conclusion

## IV. EFFETS DE LA FORME DES GRAINS SUR LES CONTRAINTES INTERNES ET LES ROTATIONS DE RESEAU LORS DE LA DEFORMATION PLASTIQUE DES POLYCRISTAUX METALLIQUES.

Dans ce chapitre, on utilise la solution du problème d'inclusions plastiques ellipsoïdales pour analyser les effets de la forme des grains sur les contraintes internes d'incompatibilités intergranulaires qui prennent naissance lors de la déformation plastique des polycristaux métalliques. On montre ainsi que la forme des grains (initiale ou induite) peut affecter de manière significative les contraintes internes et jouer un rôle important sur l'écoulement plastique. Un deuxième effet de la forme des grains concernant les rotations du réseau cristallin et induit par la rotation plastique est mis en évidence et montre des différences sensibles par rapport aux relations utilisées usuellement dans le cas de grains équiaxes. Bien que la forme des grains modifie sensiblement les résultats de texture, les analyses présentes sont limitées au cas d'une accommodation élastique.

### 4.1. Généralités

Dans les dix dernières années un effort a été fait pour permettre de relier le comportement macroscopique d'agrégats polycristallins aux caractéristiques granulaires de ses constituants. L'écroutissage

macroscopique peut être attribué à des différents facteurs tels que la texture, la forme des grains, le durcissement microscopique. La texture induite par l'orientation cristallographique de chaque grain constituant le matériau, est liée aux conditions aux limites qui sont appliquées à celui-ci, c'est-à-dire à l'interaction entre ce cristallite et son environnement. Le durcissement microscopique, dû aux interactions des dislocations ne sera pas considéré ici.

Pour modéliser la plasticité polycristalline, il est nécessaire de pouvoir évaluer les relations mécaniques entre un grain et son entourage. Dès qu'il y a glissement microscopique sur des systèmes de glissements donnés, la désorientation entre les grains crée des incompatibilités de déformation, ce qui engendre des champs de contraintes. Les modèles statiques (1) ne tiennent pas compte des champs de contraintes internes. Ces modèles semblent prédire correctement la texture du laiton. En revanche ils ne tiennent pas compte de phénomènes tels que le grand durcissement latent, et les hétérogénéités de déformation.

Ces modèles ont été, par le passé, moins développés que les modèles de Taylor (2,3). Ces derniers font intervenir des champs de contraintes importants qui empêchent toutes les hétérogénéités de déformation. L'importance du champ des contraintes provient de la réponse élastique de la déformation incompatible grain-matrice.

Le modèle de Taylor a permis de prédire une grande variété de texture de déformation à un niveau moyen de déformation (4,7). Cependant les modèles de Taylor sont inadaptés aux grandes hétérogénéités de déformation ce qui est le cas pour les matériaux présentant une forte

anisotropie pouvant être due à la forme des grains ; à l'orientation des cristallites ; à la surface d'écoulement anisotrope des monocristaux ou bien à de très fortes différences de tailles entre les grains voisins. (matériaux polyphasés par exemple).

Eshelby (9) a calculé analytiquement l'interaction élastique entre un grain plastique donné et son entourage. Ce calcul a été appliqué par Kröner (10) au cas d'un grain plastique sphérique dans une matrice plastiquement déformée.

Lorsque le grain et la matrice sont élastiquement isotropes, et que la matrice infinie possède une déformation plastique uniforme, pour un grain de forme sphérique, la loi d'interaction s'écrit alors :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + \mu (E_{ij}^P - \underline{E}_{ij}^P) \quad (IV.1)$$

où  $\underline{\sigma}$ ,  $\underline{\epsilon}^P$ ,  $\underline{\Sigma}$ ,  $\underline{E}^P$  sont le tenseur des contraintes et de déformation plastique dans le grain et dans la matrice respectivement ;  $\mu$  désigne le module de cisaillement élastique.

Budianski et Wu (11) ont montré que dans le cas des monocristaux élasto-plastiques parfaits, le modèle self-consistent de Kröner aboutit à la même réponse que celle du modèle de Taylor pour certain pourcentage de déformation.

Pour prendre en compte la forme des grains, il convient d'utiliser le calcul d'Eshelby pour une inclusion ellipsoïdale. C'est ce qui est fait par la suite mais auparavant nous rappelons la théorie de Mecking (2) concernant le modèle de Taylor relâché.

#### 4.2. Théorie de la déformation partiellement imposée.

L'hypothèse de Taylor sur l'uniformité de la déformation suppose implicitement une forme de grain pratiquement équiaxe. Ce type de modèle est nommé DTI (Déformation Totalement Imposée).

Lorsque la forme des grains est prise en compte, certaines composantes de la déformation sont relâchées. Ce type d'approche est nommée DPI (déformation partiellement imposée)

Honneff et Mecking (15) ont observé le phénomène suivant : Lorsqu'un grain est aplati (Fig. 4. a), certaines composantes de cisaillement de ce grain particulier peuvent être très différentes des composantes homologues de la matrice environnante. Ces différences peuvent par conséquent s'accommoder localement, et le formalisme de Kröner, Budianski et Wu trouve dans ce cas son application. La loi d'interaction de Kröner s'applique aux grains sphériques, mais lorsque le grain devient très plat les contraintes de réaction dues à l'incompatibilité de certaines composantes de déformation s'annulent. La relaxation d'une composante de déformation donnée entraîne l'égalité de la composante de contrainte correspondante et de la composante de contrainte macroscopique. La composante de déformation relâchée ne crée pas de contrainte.

D'après le formalisme de Kröner, les composantes de déformation non relâchées sont en fait totalement imposées. En appliquant cette théorie aux matériaux monophasés, possédant une grande énergie de faute d'empilement, on peut montrer en particulier qu'une composante expérimentale de la texture du laminage ne peut pas être représentée par

la théorie de Taylor, Bishop et Hill. Concernant la texture du laminage, on trouve également que la composante de cisaillement  $\epsilon_{12}$  Fig. 4.a, ne soit relaxée, ce qui n'est pas cohérent avec l'argument de la forme du grain.

Les calculs des changements d'orientation ne pourraient être faits qu'en utilisant la méthode classique, comme le montrent Honneff et Mecking (15), et dans un cas plus général par Kocks et Chandra (21), qui consiste à soustraire la rotation plastique de la rotation totale moyenne dans le but d'obtenir la rotation du réseau, plutôt que de chercher à déterminer quelle direction et quel plan matériel restent fixés dans l'espace. Ce travail montre que la relaxation de certaines composantes de déformation diminue le nombre des systèmes de glissement nécessaires. Nous pouvons dire en résumé que la théorie DPI représente mieux les textures en grande déformation aussi longtemps que les grains ont à peu près la même forme que l'échantillon entier. Son application s'avère mauvaise en compression uniaxiale au cours de laquelle certains grains ne conservent plus la forme cylindrique de l'éprouvette, mais se déforment en cisaillement et s'activent également en déformation plane (c'est le cas des métaux cubique face centrée).

Les hétérogénéités de déformation ne sont prises en compte que pour les composantes de déformation relaxées, c'est-à-dire que les composantes de déformation non imposées sont différentes d'un grain à un autre, contrairement à celles qui sont imposées.

Les sollicitations faites sur les monocristaux par J. Driver (27) dans des conditions assez contraignantes, ainsi que les simulations

effectuées sur les polycristaux (torsion, laminage) tendent, à confirmer la validité d'un tel modèle. Cependant le phénomène de courbure dans les grains en compression montre également que les composantes de déformation non relaxées peuvent être très différentes d'un grain à un autre. Ces phénomènes sont des contres exemples concernant les composantes de déformation imposée.

Dans le paragraphe suivant, nous appliquons les calculs relatifs à l'inclusion plastique aux effets de la forme du grain dans le problème de Kröner. La formulation de Kröner pour un grain sphérique, doit être modifiée en tenant compte de l'évolution de la forme du grain. La prédiction des textures peut désormais être faite en considérant deux cas extrêmes : ou les grains sont, soit équiaxes, soit très anisotropes géométriquement, c'est-à-dire dans les conditions DTI ou DPI.

#### 4.3. Interaction grain-matrice.

Nous utilisons la solution du problème d'inclusion pour étudier l'effet de la forme des grains sur les contraintes internes.

Cette étude va nous permettre d'estimer les contraintes de réaction provoquées par des différences entre les composantes de déformation plastique du grain et de son environnement.

Pour mettre en évidence cet effet, on considère que les propriétés élastiques du grain et de la matrice dans laquelle il est inclu sont isotropes.

La loi d'interaction pour le grain alors :

$$\sigma_{ij} = \sum_{ij} + 2\mu (I_{ijkl} - S_{ijkl}) (E_{kl}^p - \epsilon_{kl}^p) \quad (IV.2)$$

$\underline{S}$  est le tenseur d'Eshelby et  $\underline{I}$  le tenseur unité d'ordre quatre. En supposant que les essais de traction et de compression sont effectués respectivement suivant les axes 1 et 3, et que le laminage est fait en comprimant suivant l'axe 3 ; la direction de laminage étant celle de l'axe 1, il est intéressant d'étudier la variation du champ de contraintes en fonction de la déformation et donc de la forme des grains. Qualitativement, plus les termes  $S_{ijkl}$  sont grands, plus les contraintes de réactions provoquées par la différence  $E_{kl}^p - \epsilon_{kl}^p$  seront fortes. Cependant, une réaction faible aura tendance à permettre une grande déviation entre les déformations, et dans le cas limite, une réaction nulle permettra de relaxer entièrement la composante de déformation correspondante.

Pour faciliter la lecture des résultats, on a choisi une représentation vectorielle des tenseurs d'ordre quatre de la manière suivante : les indices 1,2,3,4,5 et 6 se rapportent aux composantes des tenseurs 11,22,33,23,13 et 12 respectivement. Les tenseurs de contrainte et de déformation étant symétriques, six indices suffisent.

$\underline{\sigma}$  est le tenseur des contraintes,  $\underline{\sigma}'$  est le déviateur, on pose

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}' &= (\sigma_{11}', \sigma_{22}', \sigma_{33}', \sigma_{23}', \sigma_{13}', \sigma_{12}') \\ \underline{\varepsilon} &= (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12})\end{aligned}\quad (\text{IV.3})$$

Avec ces notations, la formule (IV.2) s'écrit :

$$\sigma_i = \Sigma_i + Q_{ij} \Delta \varepsilon_j$$

où les  $Q_{ij}$  sont donnés à partir des  $S_{ijkl}$

En posant  $Q_{ijmn} = 2\mu (I_{ijmn} - S_{ijmn})$ , on a :

$$Q_{11} = \frac{1}{3} (2 Q_{1111} - Q_{2211} - Q_{3311})$$

$$Q_{12} = \frac{1}{3} (2 Q_{1122} - Q_{2222} - Q_{3322})$$

$$Q_{13} = \frac{1}{3} (2 Q_{1133} - Q_{2233} - Q_{3333})$$

$$Q_{14} = \frac{1}{6} \left( 2 Q_{1132} - 2 Q_{1123} - Q_{2232} - Q_{2223} - Q_{3323} - Q_{3332} \right)$$

$$Q_{15} = \frac{1}{6} \left( 2 Q_{1113} + 2 Q_{1131} - Q_{2213} - Q_{2231} - Q_{3313} - Q_{3331} \right)$$

$$Q_{16} = \frac{1}{6} \left( 2 Q_{1112} + 2 Q_{1121} - Q_{2212} - Q_{2221} - Q_{3312} - Q_{3321} \right)$$

$$Q_{21} = \frac{1}{3} \left( 2 Q_{2211} - Q_{1111} - Q_{3311} \right)$$

$$Q_{22} = \frac{1}{3} \left( 2 Q_{2222} - Q_{1122} - Q_{3322} \right)$$

$$Q_{23} = \frac{1}{3} \left( 2 Q_{2233} - Q_{1133} - Q_{3333} \right)$$

$$Q_{24} = \frac{1}{6} \left( 2 Q_{2232} + 2 Q_{2223} - Q_{1132} - Q_{1123} - Q_{3332} - Q_{3323} \right)$$

$$Q_{25} = \frac{1}{6} \left( 2 Q_{2213} + 2 Q_{2231} - Q_{1113} - Q_{1131} - Q_{3331} - Q_{3313} \right)$$

$$Q_{26} = \frac{1}{6} \left( 2 Q_{2212} + 2 Q_{2221} - Q_{1112} - Q_{1121} - Q_{3312} - Q_{3321} \right)$$

$$Q_{31} = \frac{1}{3} \left( 2 Q_{3311} - Q_{1111} - Q_{2211} \right)$$

$$Q_{32} = \frac{1}{3} \left( 2 Q_{3322} - Q_{1122} - Q_{2222} \right)$$

$$Q_{33} = \frac{1}{3} \left( 2 Q_{3333} - Q_{1133} - Q_{2222} \right)$$

$$Q_{34} = \frac{1}{6} \left( 2 Q_{3332} + 2 Q_{3323} - Q_{2223} - Q_{2232} - Q_{1123} - Q_{1132} \right)$$

$$Q_{35} = \frac{1}{6} \left( 2 Q_{3313} + 2 Q_{3331} - Q_{2213} - Q_{2231} - Q_{1113} - Q_{1131} \right)$$

$$Q_{36} = \frac{1}{6} \left( 2 Q_{3312} + 2 Q_{3321} - Q_{2212} - Q_{2221} - Q_{1112} - Q_{1121} \right)$$

$$Q_{41} = Q_{2311} ; \quad Q_{42} = Q_{2322} ; \quad Q_{43} = Q_{2333}$$

$$Q_{44} = Q_{2323} ; \quad Q_{45} = Q_{2313} ; \quad Q_{46} = Q_{2312}$$

$$Q_{51} = Q_{1311} ; \quad Q_{52} = Q_{1322} ; \quad Q_{53} = Q_{1333}$$

$$Q_{54} = Q_{1323} ; \quad Q_{55} = Q_{1313} ; \quad Q_{56} = Q_{1312}$$

$$Q_{61} = Q_{1211} ; \quad Q_{62} = Q_{1222} ; \quad Q_{63} = Q_{1233}$$

$$Q_{64} = Q_{1223} ; \quad Q_{65} = Q_{1213} ; \quad Q_{66} = Q_{1212}$$

L'étude des composantes  $Q_{ij}$  est intéressante pour la raison suivante : Lorsqu'une composante  $Q_{ij}$  est importante cela signifie qu'un incrément de la composante de déformation  $\epsilon_j$  conduit à une forte contrainte qui dans un sens tend à diminuer la déformation correspondante, et donc conduit particulièrement à une certaine homogénéisation de cette composante de déformation et prévoit surtout les déviations de la valeur moyenne de la composante de déformation macroscopique correspondante. Par contre lorsque  $\underline{Q}$  a une valeur faible, c'est libérer la composante de déformation correspondante et affaiblir les contraintes de réaction associées. C'est à dire autoriser des déviations importantes autour de la valeur moyenne de la composante de déformation macroscopique.

Les valeurs initiales des composantes du tenseur  $\underline{Q}$  (quand le grain est sphérique) correspondent à la formulation du modèle de Kröner, qui peut être associé à la théorie de la déformation totalement imposée. Quand certaines composantes  $Q_{ij}$  tendent vers des valeurs nulles, on est amené à se placer dans les conditions de déformation partiellement imposée ou le modèle statique.

Nous étudions dans les exemples suivants l'évolution des caractéristiques des termes de réaction  $Q_{ij}$  en fonction de la variation de la forme du grain, au cours des processus mécaniques tels que la traction, la compression et le laminage.

Dans le cadre de la traction, un grain qui pour simplifier, est pris de forme initiale cubique, va se déformer en traction suivant la forme indiquée sur la figure (4.b). Les axes vont dorénavant être choisis de manière à garder l'ordre suivant :

$$L_1 > L_2 > L_3 \quad (IV-4)$$

Ces trois paramètres représentant les longueurs principales du grain suivant les directions 1, 2 et 3. Les relations de compatibilité sur les faces 2 et 3 deviendront prépondérantes. Elles s'écrivent :

$$\epsilon_{22} = E_{22} , \epsilon_{33} = E_{33} , \epsilon_{12} = E_{12} \text{ et } \epsilon_{13} = E_{13} \quad (IV-5)$$

La relation d'équilibre complémentaire est :

$$\sigma_{23} = \Sigma_{23} \quad (IV-6)$$

qui s'annule en l'absence de frottement de surface. Les relations (IV-7) ont été obtenues en réunissant toutes les conditions de compatibilité sur les faces 2 et 3, la relation (IV-6), en gardant l'équilibre commun à ces faces.

En compression uniaxiale, lorsque le grain est comprimé, il adopte la géométrie schématisée sur la figure (4.c). La face 3 devenant prépondérante, il est possible de déterminer des conditions portant sur

les déformations :

$$\epsilon_{11} = E_{11} , \epsilon_{22} = E_{22} \text{ et } \epsilon_{12} = E_{12} \quad (\text{IV-7})$$

les conditions d'équilibre restantes sont :

$$\sigma_{13} = \Sigma_{13} \text{ et } \sigma_{23} = \Sigma_{23} \quad (\text{IV-8})$$

En ce qui concerne le laminage; il est important de noter qu'il s'agit d'un processus industriel très complexe que l'on peut approcher numériquement par une simulation de l'essai de compression plane.

En réalité le frottement exercé par les laminoires sur les tôles influe sur le développement de la texture de surface.

Néanmoins, ce frottement étant symétrique, il existe un domaine où il n'influe plus, et qui est proche des conditions simulées ici. Les conditions sont les mêmes que dans le cas de la compression uniaxiale.

Nous traçons les courbes représentant les coefficients  $Q_{ij}$  en fonction du rapport de forme géométrique des grains. Ainsi la composante  $Q_{21}$  reflète l'influence sur la composante de contrainte  $\sigma_{22}$  de la composante de déformation  $\epsilon_{11}$ . Sur la figure (4.b) correspondant à un grain étiré uniaxialement, les termes de réactions reliés à la composante  $\epsilon_{11}$  croissent de telle sorte que les grains sont susceptibles de n'avoir qu'une faible déviation autour de la valeur  $E_{11}$ . Les composantes de cisaillement ont une certaine déviation, elles n'ont aucune raison d'être relaxées, les contraintes de réactions associées ne tendent par vers zéro. Les termes de réaction associés à la composante  $\epsilon_{22}$  et à la composante  $\epsilon_{33}$  donnent des courbes qui sont à partir d'une certaine déformation moins élevées que celle de la composante  $\epsilon_{11}$ . (La traction s'effectue dans la direction associée à  $\epsilon_{11}$ ).

La figure (4.C) illustre la compression uniaxiale, qui est caractérisée par l'expansion équibiaxée de l'inclusion, dans laquelle les composantes  $Q_{11}$  et  $Q_{22}$  croissent progressivement et de manière importante comme l'indique la figure.

Les termes de réaction  $Q_{11}$  et  $Q_{22}$  provoquent une augmentation assez importante des composantes du champ de contraintes associées à  $\epsilon_{11}$  et  $\epsilon_{22}$ . Cependant le terme correspondant à  $\epsilon_{33}$  donne une courbe qui décroît progressivement avec une forte pente au départ et qui, très vite, se stabilise pour engendrer de faible contrainte dans la direction correspondante à cette composante. Il faut noter l'effet du terme correspondant à la composante  $\epsilon_{12}$  de cisaillement, la courbe  $Q_{66}$  qui traduit cet effet croit de manière significative, puis se stabilise. Les contraintes qu'engendre ce terme sont élevées.

On constate que les autres composantes de cisaillement  $\epsilon_{23}$  et  $\epsilon_{13}$  peuvent être relaxées comme l'indiquent les courbes  $Q_{44}$  et  $Q_{55}$ . Cette dernière remarque confirme les hypothèses simples de Honneff et Mecking. La relaxation des composantes  $\epsilon_{13}$  et  $\epsilon_{23}$  paraît raisonnable. Les autres composantes devant en revanche être imposées. La déviation de la composante  $\epsilon_{12}$  de cisaillement est pour ainsi dire interdite, alors que les deux autres deviennent de plus en plus relaxées.

En examinant les courbes on peut conclure que la théorie DPI est valable pour un champ de déformation infinie.

D'après Eshelby, le champ de déformation est uniforme à l'intérieur du grain, et la décroissance graduelle des termes  $Q_{ij}$  explique simplement qu'il y a de plus en plus d'incompatibilité de déformation entre la matrice et le grain.

Les conditions de compatibilité appliquées aux surfaces de gros grains deviennent de plus en plus importantes, elles sont introduites pour relaxer certaines composantes du tenseur de déformation dans le but de décrire de manière adéquate le phénomène de courbure des grains observés en compression dans les matériaux à structure cubique face centrée.

Par un raisonnement analogue, la figure 4.d montre que  $\epsilon_{23}$  et  $\epsilon_{13}$  peuvent être relaxées ce qui confirme les hypothèses simples faites par Honneff et Mecking. Les conclusions qu'on peut tirer de l'examen de cette figure sont assez similaires à celles de la compression uniaxiale.

Dans le cas du laiton, les grains laminés et orientés ont tendance à vouloir s'activer en cisaillement mais de très fortes contraintes d'interaction grain-matrice développées dans la formulation de Kröner empêchent ce mécanisme de déformation en provoquant une destabilisation de l'orientation du laiton.

En d'autres termes, l'orientation du laiton en laminage et la direction (110) des fibres en compression, sont des composantes de texture associées à une certaine hétérogénéité de déformation qui n'est pas explicable par la variation de la forme du grain. Si le modèle appliqué ne tient pas compte de cette hétérogénéité, alors les résultats prédits ne conviendront pas à ces composantes de texture. Il est nécessaire de noter que la discussion se limite ici à l'effet de la forme du grain, les autres effets d'anisotropie ont été négligés par hypothèse, à savoir les effets d'anisotropie sur les systèmes actifs de glissement qui peuvent avoir une cause mécanique (intra ou intergranulaire), et qui peuvent modifier les conclusions finales.

Nous avons décrit dans ce chapitre comment les états de contraintes du grain peuvent être connus et quels sont les systèmes de glissement qui peuvent être activés. Mis à part les calculs de texture, il est également intéressant et important d'être capable de connaître les rotations du réseau. Dans le chapitre suivant nous parlerons des changements d'orientation dans un cas général et pour une forme donnée.

#### 4.4 Changements d'orientation

Dans la formule de Kröner, Taylor, Bishop et Hill, le gradient total (macroscopique) de déplacement  $\underline{\beta}$  supposé uniforme, la rotation élastique du réseau est obtenue par la formule.

$$\omega_{ij}^e = \Omega_{ij}^T - \omega_{ij}^p \quad (IV-9)$$

où  $\Omega_{ij}^T$  est la partie antisymétrique du tenseur  $\underline{\beta}$  et dont la forme analytique est donnée par (II-30)

La partie plastique de la rotation  $\omega^p$  est donnée par :

$$\omega_{ij}^p = \sum_s (b_i^s n_j^s - b_j^s n_i^s) \gamma^s / 2 \quad (IV-10)$$

où  $S$  représente l'indice du système actif,  $\underline{n}^s$  et  $\underline{b}^s$  sont respectivement le vecteur normal au plan de glissement et la direction du glissement,  $\gamma^s$  est l'incrément de déformation en

cisaillement de ce système actif. Lorsque les grains ne sont pas équiaxes, toutes les composantes du gradient de déplacement total ne peuvent pas être transmises de grain en grain et un calcul approprié a été fait en tenant compte de la forme du grain (18). La formule (IV-11) est encore valable localement lorsque le tenseur de rotation locale  $\underline{\Omega}^r$  est différent de la rotation totale moyenne  $\underline{\Omega}^o$ . Ceci parce que les grains ne se déforment pas exactement comme la matrice, et particulièrement parce que la rotation des axes principaux des grains ne peuvent pas toujours être celle des axes de l'échantillon.

Pour le tenseur de rotation du réseau, on sait que le gradient de déplacement total s'écrit :

$$\underline{\mu}_{n,m}^T(r) = \underline{\mu}_{n,m}^{T_o} + \int_V C_{ijkl} G_{jn,im}^{(r-r')} \Delta \underline{\epsilon}_{kl}^P dV' \quad (IV-11)$$

où  $\underline{\mu}_{n,m}^{T_o}$  est le gradient de déplacement total à l'infini qu'on superpose à celui de l'inclusion pour avoir le gradient de déplacement total  $\underline{\mu}_{n,m}^T(r)$ ,  $\Delta \underline{\epsilon}^P$  est le tenseur d'incompatibilité de déformation plastique entre l'inclusion et la matrice.

On en déduit la partie symétrique du gradient de déplacement total.

$$\underline{\epsilon}_{n,m}^I = \underline{\epsilon}_{n,m}^{I_o} + S_{[nm]ke} \Delta \epsilon_{ke}^P \quad (IV-12)$$

où  $S_{[nm]ke}$  désigne la partie symétrique de  $S_{nmke}$  par rapport aux indices  $n$  et  $m$ .

$$\Omega_{nm}^I = \Omega_{nm}^{I_0} + A_{nmke} \Delta \epsilon_{ke}^I \quad (IV-13)$$

$A_{nmke} = S_{]nm[ke}$  et où  $S_{]nm[ke}$  désigne la partie antisymétrique du tenseur  $S_{nmke}$  par rapport aux indices  $n$  et  $m$ .

Les différentes formes que prennent les inclusions modifient les valeurs des composantes  $\underline{S}$  et  $\underline{A}$  ce qui affecte les interactions et les changements d'orientation.

On a :

$$\Omega_{nm}^I = \omega_{nm}^R + \omega_{nm}^P$$

$$\Omega_{nm}^I = \Omega_{nm}^{I_0} + A_{nmke} \Delta \epsilon_{ke}^I \quad (IV-14)$$

A partir des expressions (IV-15) et (IV-14) on a :

$$\omega_{nm}^R = \Omega_{nm}^{I_0} - \omega_{nm}^P + A_{nmke} (\epsilon_{ke}^I - \epsilon_{ke}^I) \quad (IV-15)$$

où  $\underline{\omega}^*$  représente la rotation du réseau de l'inclusion. Il faut noter que lorsque les inclusions sont sphériques toutes les composantes du tenseur  $\underline{A}$  sont nulles. Pour classifier les résultats sur les rotations

du réseau, on peut écrire que l'expression de la rotation locale totale  $\underline{\Omega}^T$  est :

$$\underline{\Omega}^T = \underline{\Omega}^{T^0} + \begin{vmatrix} 0 & P\Delta\epsilon^P_2 & q\Delta\epsilon^P_3 \\ x & 0 & r\Delta\epsilon^P_{23} \\ x & x & 0 \end{vmatrix} \quad (IV-16)$$

dans laquelle le dernier terme du second membre de cette expression écrite sous forme matricielle représente l'erreur qu'on commet lorsqu'on applique la méthode classique pour les calculs de rotations.

$\Delta\epsilon^P$  est le tenseur d'incompatibilité de déformation plastique entre un point et sa matrice environnante, en d'autres termes, c'est la différence entre le tenseur de déformation plastique local et le tenseur de déformation plastique macroscopique. La variation des termes P, q et r est présentée comme fonction de la déformation pour le cas particulier des conditions déjà analysées antérieurement.

Sur la figure (4.e) sont représentées les variations des trois paramètres P, q et r pour le cas de la traction; on remarque que r garde une valeur nulle. Il faut également voir que ni P, ni q ne tendent vers la valeur asymptotique 1 qui aurait été celle déduite de la théorie DPI.

Ceci nous amène à dire que la texture calculée par le formalisme généralisé de Kröner peut être calculée en utilisant la théorie de la déformation partiellement imposée avec une légère différence.

Cela montre également que si la théorie DPI est souvent utilisée pour simuler la texture de traction (19,20), c'est en désaccord avec le point de vue des changements d'orientation.

En ce qui concerne la compression les termes  $q$  et  $r$  tendent lentement vers la valeur asymptotique 1 de la théorie DPI tandis que  $P$  est constamment nul. La théorie DPI et celle de Kröner généralisée conduisent à la même réponse.

En laminage les courbes des paramètres  $p, q$  et  $r$  sont montrées sur la figure (4.f), où  $r$  et  $q$  tendent vers les valeurs asymptotiques de la théorie DPI, alors que  $P$  reste faible.

#### 4.5 Discussion et conclusion

Dans le passé il a été prouvé que l'approche classique de Kröner et la théorie de DTI sont équivalentes à la limite de grande déformation. Nous avons montré dans ce chapitre [4] qu'il y a une forte similarité entre le modèle de Kröner généralisé et la théorie DPI.

Les résultats montrent que les modèles limités strictement à la théorie DTI ou DPI seulement représentant les extrema de l'interaction mécanique réelle.

Dans le cas de grande déformation, la théorie DPI n'est pas justifiée en traction comme l'ont prédit Kocks et Canova (19), elle diffère également de la théorie de Kröner généralisée dans ce cas bien précis.

La théorie DTI n'est pas souvent justifiée également, les résultats des figures 4.b et 4.e montrent que la réalité est au milieu des théories limites DTI et DPI. Les calculs montrent néanmoins dans ce

chapitre que le principe de la théorie DPI est associé à l'interaction du grain avec ses voisins et y est limité.

Les composantes de déformation non relaxées doivent être égales à celles de la déformation macroscopique, ce qui donne de très grandes valeurs des termes de réactions correspondants. Le formalisme de Kröner, est fondé sur l'interaction élastique, donc sur l'homogénéité de la déformation plastique dans la matrice infinie. Cependant les faits expérimentaux montrent qu'il y a une certaine hétérogénéité de déformation aussi bien dans les grains que dans la matrice, et que l'interaction est plus un problème élastoplastique.

Tous les facteurs conduiraient à diminuer plus souvent l'interaction mécanique, permettant ainsi une certaine liberté supplémentaire dans la déformation du grain.

Il y a une différence entre le phénomène de relaxation de certaines composantes de déformation (ce qui est équivalent à annuler les contraintes correspondantes et à conduire à la désactivation de certains systèmes de glissement) et celui des grandes déviations de certaines autres composantes (qui est induit par des contraintes de réaction mais ne contraint pas à la désactivation des systèmes de glissement).

En effet, prenons le cas d'un grain aplati (théorie DPI), si le phénomène de courbure des grains est traité par la même théorie (21) au cours de l'aplatissement de ce grain (en compression uniaxiale par exemple), alors le grain va se déformer sur un seul système.

Cependant, si les trois composantes de déformation conduisant à de fortes contraintes de réaction sont déviées de leur valeur moyenne en

accord avec certaines règles (Zaoui et Berveiller (22), Kocks (23) ) alors la déformation est activée sur trois systèmes de glissement, qui ne sont pas les mêmes que ceux choisis par la théorie DPI.

Dans le premier traitement, il y a une grande déviation de la déformation plastique parce que les contraintes de réaction et les déformations élastiques sont suffisantes pour remettre le grain dans un état d'équilibre avec ses voisins.

En d'autres termes, l'accommodation de la déformation plastique joue ici un rôle important. Il semble que le phénomène de courbure du grain en compression uniaxiale pourrait être expliqué par les analyses de ce deuxième test.

Dans le cas du laiton en laminage, si les composantes de déformation imposées sont égales aux composantes moyennes correspondantes, alors l'état de contrainte à l'intérieur de ces grains est dévié de l'état de contrainte moyenne de l'échantillon; ce qui nécessite une accommodation plastique qui contribue à l'établissement de l'équilibre. Une telle situation tend à promouvoir un cisaillement qui est habituellement interdit par la théorie DPI. Cela explique pourquoi la composante de la texture du laiton ne peut être prédite ni par la théorie DTI ou la théorie DPI. Cette composante de texture est attribuée à l'absence de cisaillement, et si cette dernière n'est pas prévue par un modèle, alors son orientation n'est pas représentée dans les résultats par un modèle théorique.

Il y a bien une bonne similarité entre les résultats de ces théories et ceux de nos calculs, bien que nous nous soyons limités

aux interactions purements élastiques, et aux matériaux isotropes dans ce chapitre.

Les résultats des calculs s'appliquent mieux à la réalité physique si on tient compte de la non homogénéité de la déformation plastique en dehors de l'inclusion, c'est-à-dire, qu'en réalité, pour tenir compte du fait que la matrice est en écoulement plastique, il faut prendre, dans le calcul du problème d'inclusions, un champ  $\underline{u}$  élastoplastique et non simplement élastique. Ceci a évidemment pour effet d'améliorer les formules d'interactions et des rotations du réseau dans l'inclusion.

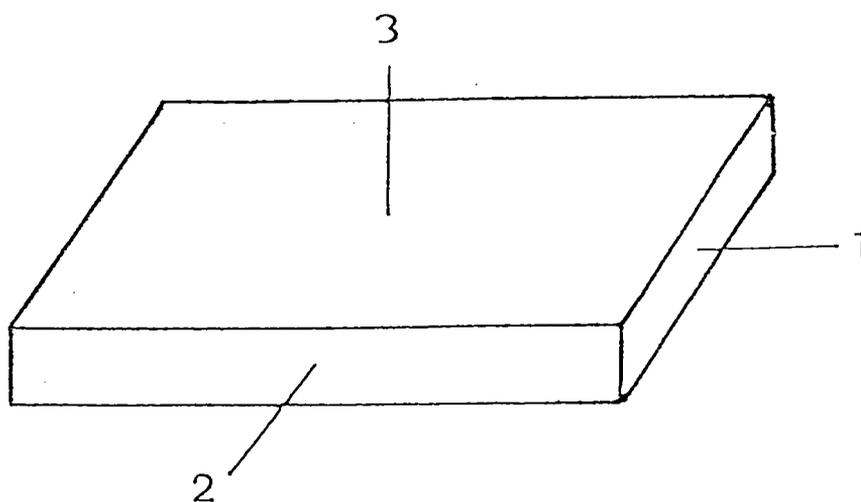


Figure 4.a

Géométrie d'un grain plat. Les composantes de déformation  $\epsilon_{11}$  et  $\epsilon_{32}$  peuvent être relaxées puis les changements de dimensions induites peuvent être accomodés localement par les grains voisins.

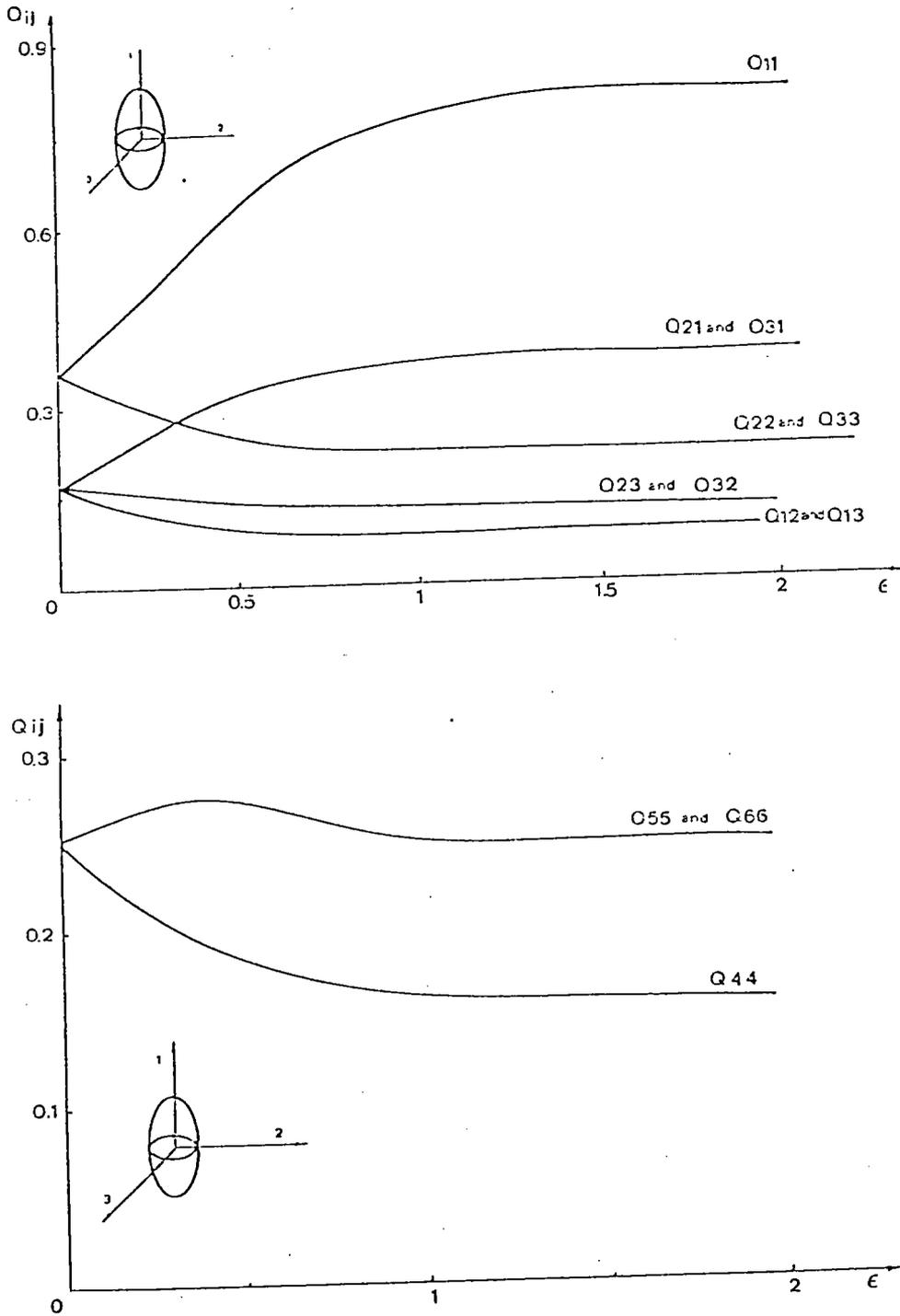


Figure 4.b

Evolution des coefficients montrant la teneur de la réaction des composantes de contraintes associées aux composantes de déformation plastique pour un grain étiré. On note en particulier l'importante augmentation de la composante  $E_{11}$ , et l'importante diminution des composantes  $E_{22}$ ,  $E_{33}$  et  $E_{23}$ .

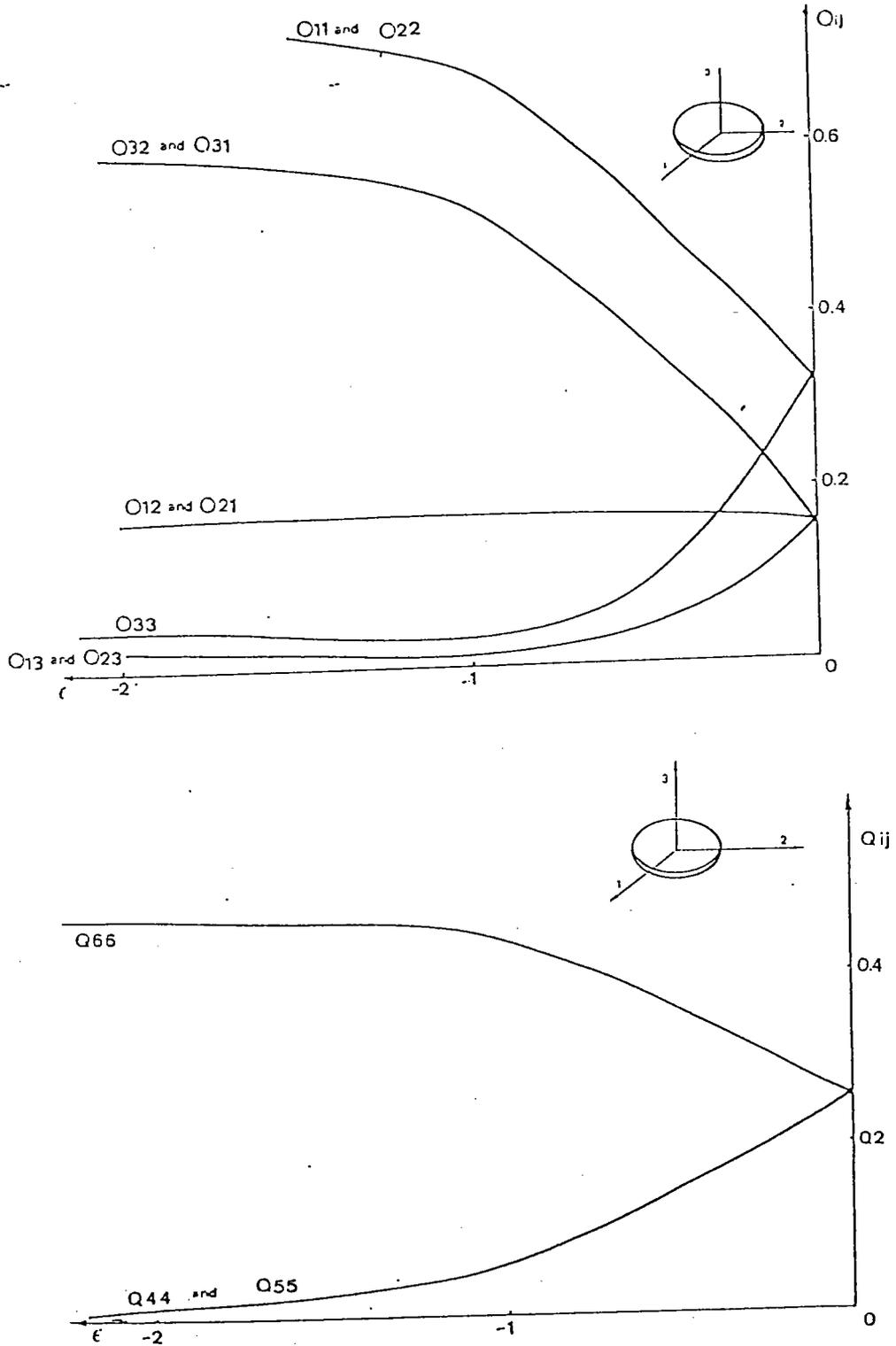
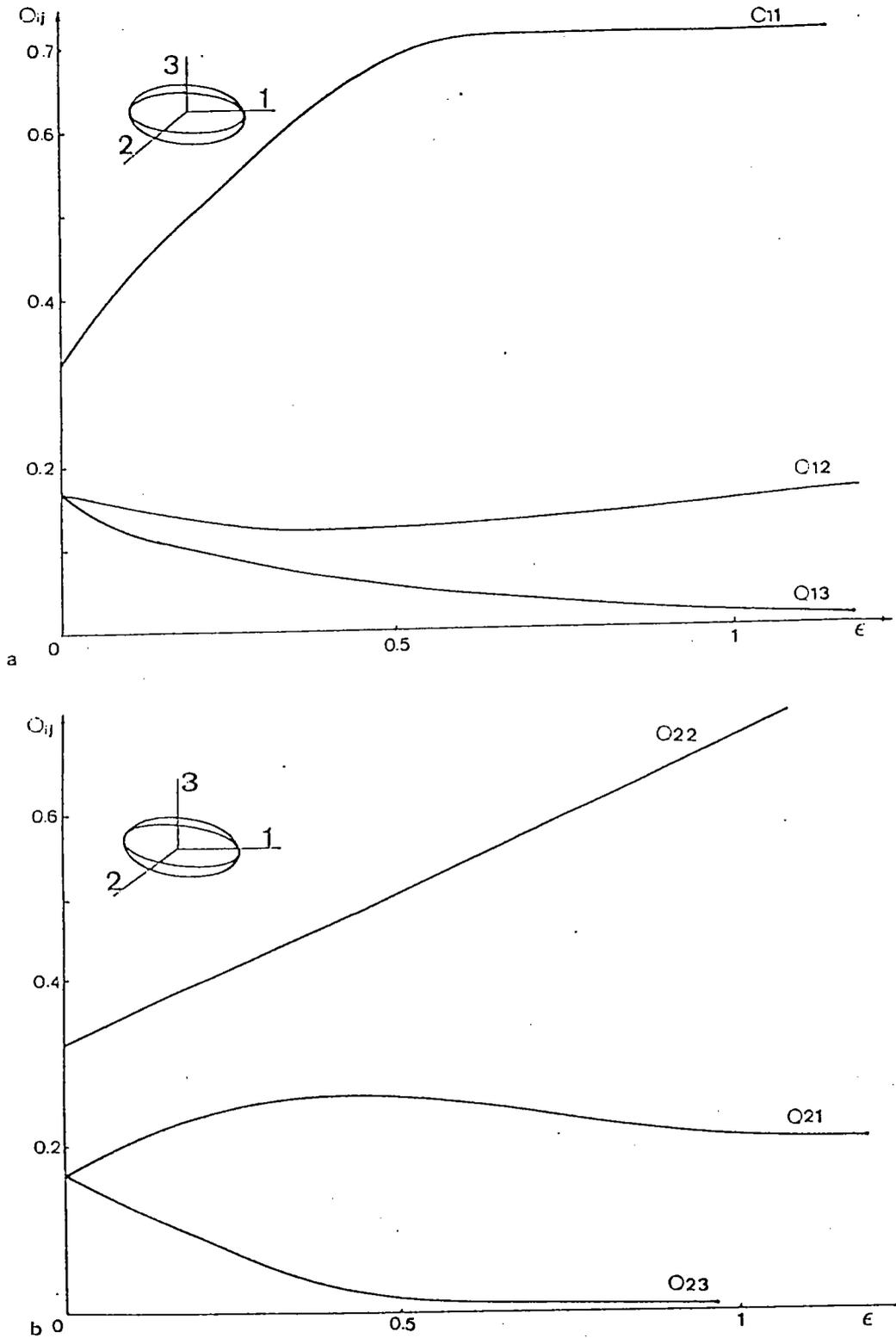


Figure 4.c

Evolution des termes de réaction lors de la compression d'un grain. Les courbes du dessus représentent les caractéristiques des termes de réaction associés aux composantes de la diagonale du tenseur de déformation, celles du dessous correspondent aux cisaillements. Les composantes  $E_{11}$ , et  $E_{22}$  et  $E_{12}$  augmentent alors que les composantes de cisaillement tendent à être relaxées.



**Figure 4.d**

Evolution des termes de réaction des contraintes pour un grain laminé.

Les courbes a, b, et c de la (fig. 4.d) sont respectivement associées aux composantes de contraintes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ , et  $\sigma_{33}$  alors que les dernières courbes correspondent aux contraintes de cisaillement. On note une similarité avec les courbes correspondantes à la compression uniaxiale du grain.

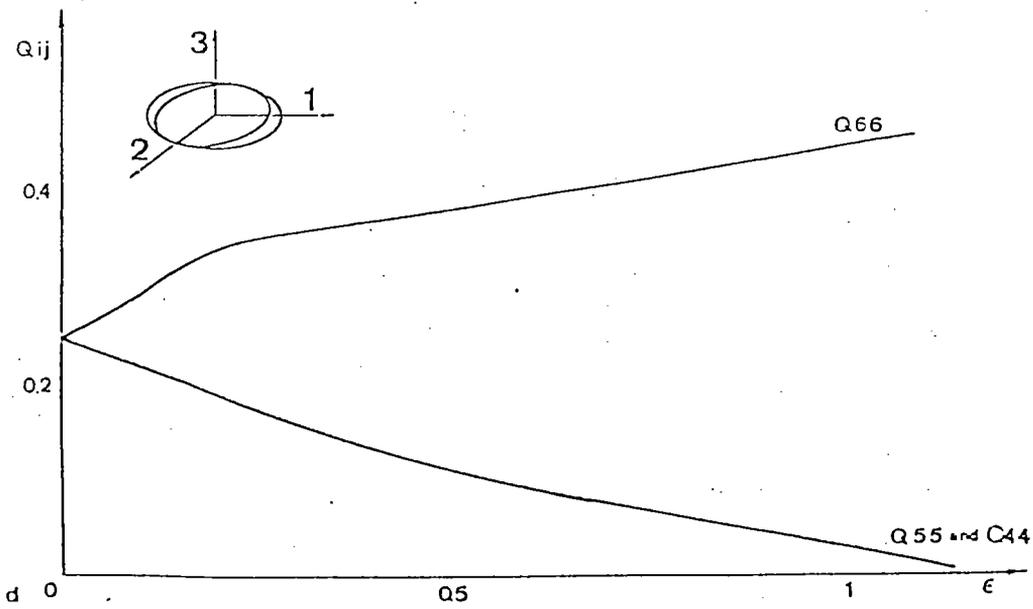
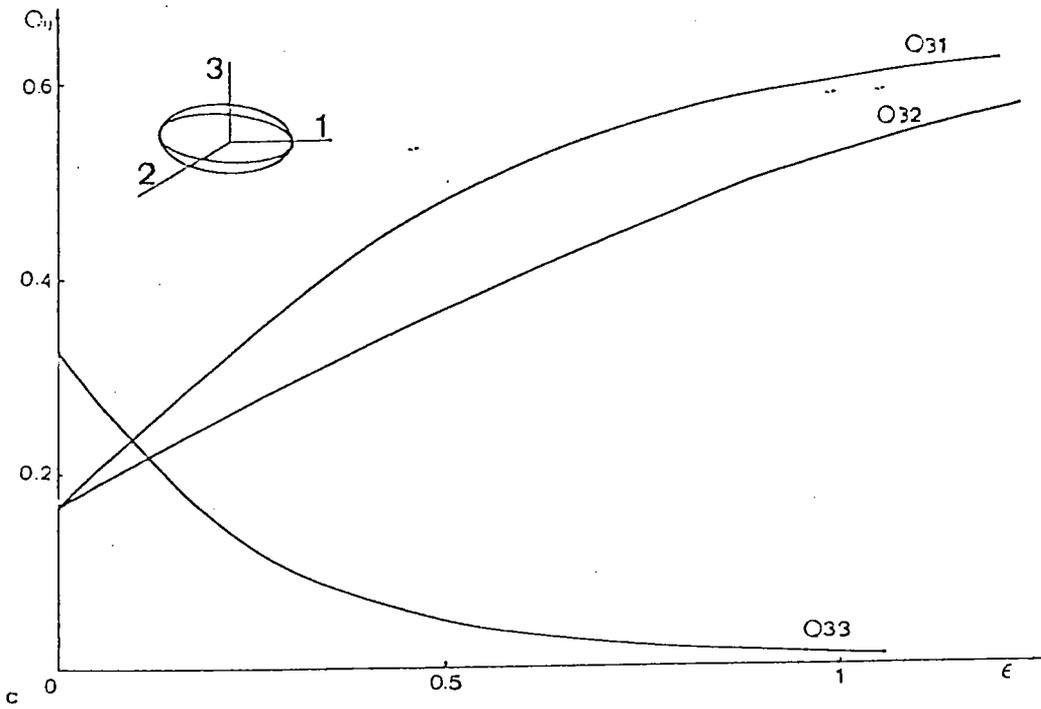


Figure 4.d (suite)

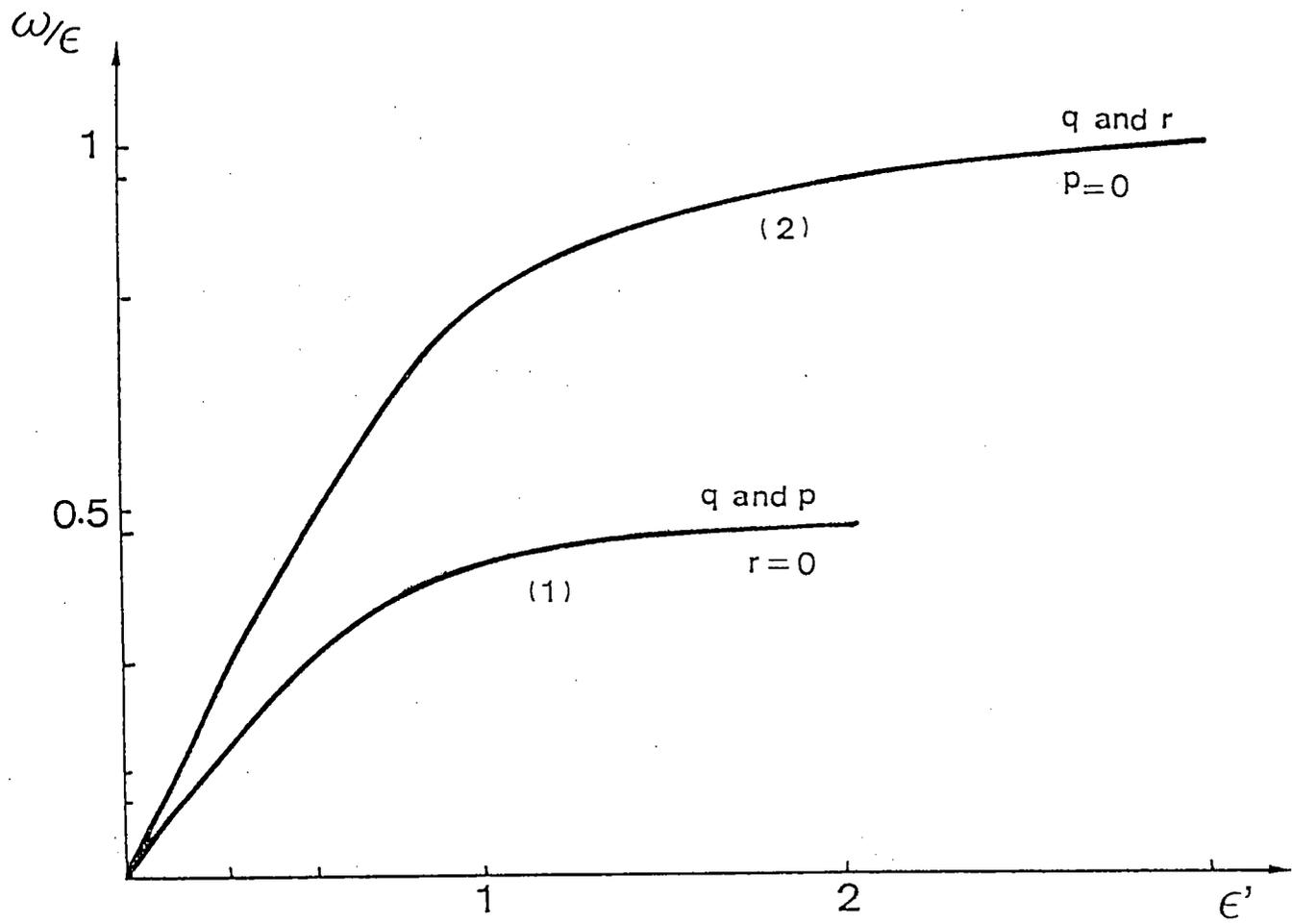


Figure 4.c

Variation des paramètres p, q et r en fonction de la déformation vraie pour les cas de la traction uniaxiale (1) et de la compression uniaxiale (2).

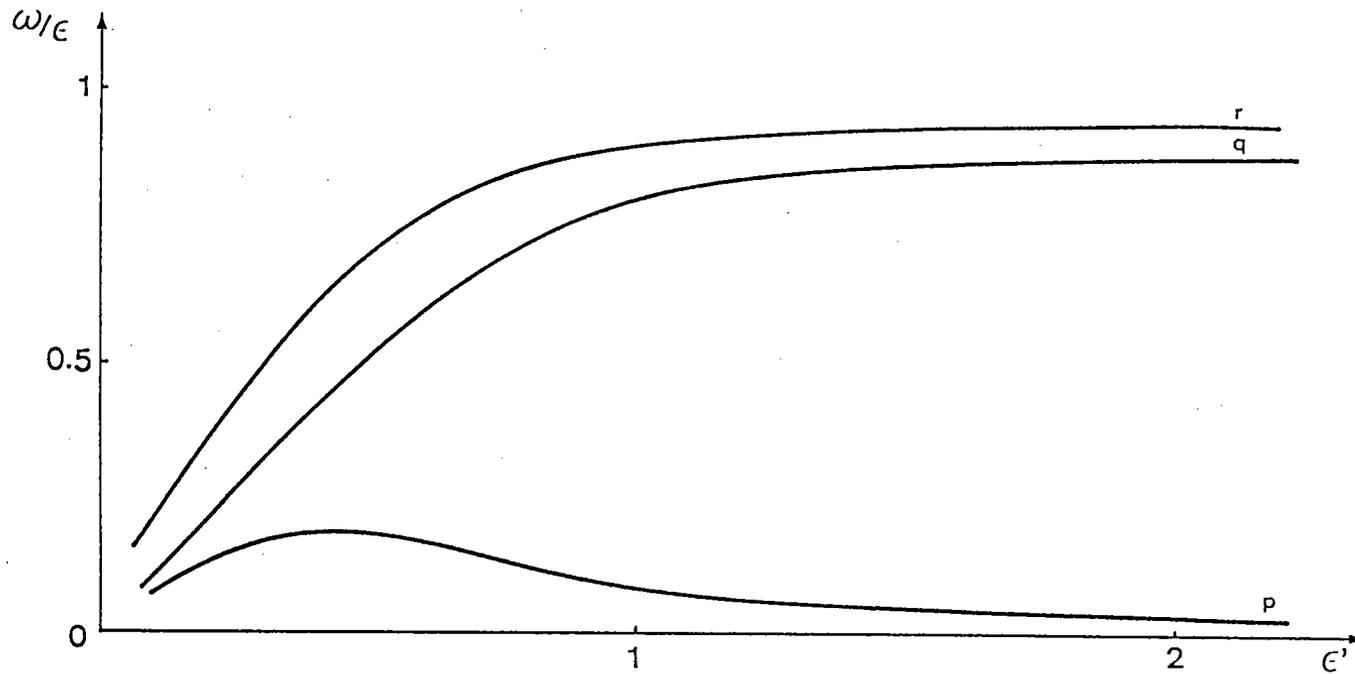


Figure 4.f

Variation des paramètres  $p$ ,  $q$  et  $r$

pour le cas du laminage comme fonction de la déformation vraie accumulée.

## CHAPITRE V

*Application à la transformation martensitique*

## CHAPITRE V

### APPLICATION A LA TRANSFORMATION MARTENSITIQUE

- 5.1 Généralités sur les transformations martensitiques
- 5.2 Nouvelle approche de la transformation martensitique
- 5.3 Application au cas de l'alliage Fer-Nickel (30%)
- 5.4 Discussion et conclusion

D'un point de vue structural la transformation martensitique est caractérisée par l'interface entre l'austenite et la martensite (plan d'habitat) l'orientation cristallographique de la martensite par rapport à l'austenite et la déformation macroscopique associée à la transformation. Les théories phénoménologiques développées par WESCHLER-LIBERMAN-READ (W.L.R) [4] et BOWLES-MACKENZIE (B.M) [5] permettent généralement de déterminer tous les éléments géométriques de la transformation. Elles reposent sur plusieurs hypothèses dont les principales sont les suivantes :

- l'existence d'un plan invariant
- la présence d'une déformation supplémentaire dans la martensite (par rapport à la déformation de Bain) à réseau invariant.

Cette dernière déformation est nécessaire à l'accommodation de la déformation de Bain.

Ces théories ne permettent pas de rendre compte de certaines observations (plan d'habitat) (225)théorique au lieu de (259)expérimentale dans le Fe- 31% Ni. Elles ont été complétées par CROKEN et BILBY [24] qui ont introduit la notion de double cisaillement. BOWLES et DUNE [25] ont également modifié ces théories en introduisant une accommodation plastique dans l'austénite.

L'approche simplifiée que nous proposons dans ce cinquième chapitre est une formulation en petites déformations des théories phénoménologiques

qui décrivent la transformation martensitique. La nouvelle approche est fondée sur la notion d'énergie élastique associée aux déformations inélastiques de la transformation.

Elle permet, par l'intermédiaire de la minimisation de l'énergie élastique de déterminer l'amplitude de cisaillement, la normale du plan d'habitat.

Pour illustrer la nouvelle formulation, nous envisageons deux applications de natures différentes :

- cas de l'accommodation pure dans la martensite ( $E^p = 0$ )

- cas où ( $E^p \neq 0$ ), accommodation au sein de l'austénite.

Toutes ces applications seront faites à partir des solutions numériques du problème de l'inclusion qui sera assimilée à la plaquette martensite formée.

## 5.1. Généralités sur les transformations martensitiques

Les transformations par cisaillement constituent un groupe de transformations dans l'état solide très important, que l'on rencontre dans les alliages, certains métaux purs et même des composés minéraux. L'exemple le plus important de ce type de transformation est celui de la transformation martensitique.

Le nom de "martensite" désigne à l'origine, le produit résultant de la transformation, au cours du refroidissement rapide de l'austénite des alliages fer-carbone.

### 5.1.1. Définition

Les transformations martensitiques sont classées dans la catégorie des transitions displacives.

Dans cette catégorie de transition, il n'y a pas diffusion d'atomes, ni d'ions, il y a cependant un déplacement relatif des ions. Les distances parcourues sont inférieures à la dimension moyenne de la maille du réseau mère. ( $10^{-1}$  à  $10^{-2}$  fois le paramètre de la maille) On peut ainsi définir la transformation martensitique comme suit :

- C'est le passage de la structure cristalline de la phase initiale (phase mère) à celle de la nouvelle phase (produit de transformation) s'effectuant par un mécanisme cristallographique, macroscopiquement équivalent à un cisaillement, qui mène les atomes de leurs positions primitives au sein du réseau initial, en leurs positions finales au sein du réseau de transformation.

Dans tous les cas la composition chimique du produit de transformation est identique à celle de la phase mère. Ces transformations sont appelées également "transformation sans diffusion".

Par extension, le terme de "transformation martensitique" a été généralisé à un grand nombre de systèmes d'alliages dont les transformations possèdent certaines caractéristiques typiques de la transformation martensitique des aciers.

### 5.1.2. Les aspects de la transformation martensitique

Plusieurs aspects des transformations martensitiques sont étudiés et discutés dans la littérature. Un grand nombre de définitions des phénomènes rencontrés dans ces transformations sont proposées par plusieurs auteurs.

#### a) Aspect cinétique

L'étude cinétique a permis de mettre en évidence les divers modes de décomposition de la phase de haute température. Dans le cas des aciers, la décomposition de l'austénite s'effectue selon la température de traitement isotherme (ou selon la vitesse de refroidissement) selon trois modes principaux :

- La transformation perlitique
- La transformation eutectoïde
- La transformation bainitique
- La transformation martensitique

La dernière transformation débute au refroidissement à une température appelée  $M_s$  (M pour martensite, S pour "Start"). Le point  $M_s$  dépend du type d'alliage considéré, des teneurs en éléments d'alliage, également de certains facteurs, tels que la grosseur du grain de la phase de haute température, les traitements thermiques ou mécaniques qui lui ont été appliqués. La température  $M_s$  est cependant, en général, indépendante de la vitesse de refroidissement.

On désigne également par  $M_f$  la température de fin de transformation, le point  $M_f$  est également indépendant de la vitesse de refroidissement. La croissance des plaquettes de martensite s'effectue avec une vitesse assez importante et peut être supérieure à  $10^5 \text{ cm s}^{-1}$ . La composition chimique du produit formé est sensiblement celle de la phase mère. On admet que la transformation s'opère sans diffusion.

#### b) Aspects cristallographiques

La structure du produit martensitique dépend essentiellement de la nature de l'alliage. Les structures cristallographiques sont donc très variées.

Dans le cas des alliages ferreux, on peut envisager trois classes principales de martensite.

- La martensite quadratique centrée
- La martensite cubique centrée
- La martensite de structure hexagonale

#### 1) Relations d'orientation

Une des caractéristiques importantes des transformations martensitiques est la relation d'orientation entre les réseaux de la phase mère (austénite) et de la phase martensitique (produit de transformation). En d'autres termes, il existe des relations d'orientation entre le réseau cristallin du produit martensitique et celui de la phase mère. Elles peuvent être établies expérimentalement avec une très bonne précision, à l'aide des techniques de diffraction des rayons X. Elles dépendent du type d'alliage considéré, de la structure cristallographique des deux phases en question, de la composition de l'alliage, voire même de la température à laquelle s'est formé le produit martensitique.

Elles s'expriment soit en précisant les angles formés par certains vecteurs cristallographiques, convenablement choisis et appartenant aux réseaux des deux structures, soit en spécifiant le parallélisme entre certains plans et directions cristallographiques propres aux deux réseaux.

Nous citerons comme exemple les relations d'orientation de :

$$\text{Kurdjumov et Sachs } \left\{ \begin{array}{l} (111)_A // (011)_M \\ (F_e - C) \\ [011]_A // [111]_M \end{array} \right.$$

$$\text{NISHIYAMA } (F_e - N_i) \left\{ \begin{array}{l} (111)_A // (101)_M \\ [121]_A // [101]_M \end{array} \right.$$

Plusieurs théories ont été élaborées pour trouver des relations mathématiques reliant le réseau martensitique à celui de la phase mère. Elles sont liées à l'énergie élastique d'incompatibilité des déformations inélastiques.

### 2. Le plan d'habitat.

Les plaquettes constituant le produit de transformation sont séparées de la phase mère par une interface plane appelé "plan limite" ou "plan d'habitat". La détermination de la normale à ce plan d'habitat est associée également à l'énergie élastique d'incompatibilité.

### 3. Morphologie de la martensite.

On distingue habituellement deux types de morphologie caractéristique de la martensite formée qui sont :

- Le martensite en lattes ou martensite massive
- La martensite en plaquettes ou martensite lenticulaire.

Ces deux types de martensite correspondent non seulement à des caractéristiques morphologiques distinctes, mais également à des caractéristiques cristallographiques (relations d'orientation, plan d'habitat) différentes ainsi qu'à des mécanismes de formation différents.

La martensite en lattes correspond à une structure morcelée en blocs, à contours déchiquetés. La structure est constituée de plaquettes de dimension  $a \gg b \gg c$  éléments constitutifs de base, alignés parallèlement les unes aux autres et groupées au sein d'ensembles appelés "paquets" ou "bloc".

La martensite en plaquettes correspond à un enchevêtrement de plaquettes ou lentilles individualisées et orientées selon des angles définis au sein de chaque grain de l'austensite. Cette morphologie se distingue de celle de la martensite en lattes, en ce sens qu'il ne se forme pas de plaquettes adjacentes parallèles les unes aux autres.

### c) Aspects géométriques de la transformation martensitique.

L'apparition de la martensite s'accompagne d'une déformation macroscopique de l'échantillon qui se manifeste généralement par l'existence d'un relief superficiel qui permet de la révéler par microscopie.

Les observations expérimentales permettent d'émettre les hypothèses suivantes :

- \* Le plan d'accrolement ne subit aucune rotation et tous les vecteurs de ce plan d'accrolement sont conservés en module et en direction (ni distorsion, ni rotation dans le plan).
- \* Nous pouvons estimer alors que la transformation martensitique est une transformation affine et qu'elle laisse invariant le plan d'accrolement
- \* L'hypothèse d'un cisaillement homogène sur le plan d'accrolement est alors cohérente avec l'apparition de ce relief et une analogie est faite avec le maillage.

### 5.1.3. Théorie mathématique de Lieberman, Wechsler et Read

La théorie mathématique de ces auteurs conduit à la détermination des caractéristiques cristallographiques de la déformation qui permet de passer de la maille de la phase mère à celle de la phase martensitique, en se fondant uniquement sur les valeurs expérimentales des paramètres de ces deux phases. Le calcul repose sur les deux axiomes suivants :

- Parmi toutes les déformations géométriques possibles permettant de passer de la maille de la phase mère à la maille de la martensite, celle qui se reproduira effectivement est celle qui entraînera le minimum de distorsion et nécessitera ainsi une énergie minimale.

- L'interface séparant les deux phases (ou plan d'habitat) est supposée être un plan invariant, c'est à dire un plan de distorsion nulle et dont la position reste fixe au cours de la déformation.

#### a) Modèle de Bain.

Bain a proposé le modèle suivant pour rendre compte du passage d'une structure cubique à faces centrées à une structure quadratique centrée ou cubique centrée. Le modèle s'applique en particulier à la transformation austénitique (martensite des alliages ferreux). Dans cette déformation, chaque atome conserve son entourage. Ce modèle correspond donc bien à une transformation sans diffusion. Mais il n'implique pas un mécanisme de cisaillement.

Une telle déformation est dite déformation homogène de réseau, et représentée par la matrice :

$$B = \begin{bmatrix} \frac{a\sqrt{2}}{a_0} & & \\ & \frac{a\sqrt{2}}{a_0} & \\ & & \frac{c}{a_0} \end{bmatrix}$$

où  $a_0$  est le paramètre de la maille cubique à faces centrées, et  $a$  et  $c$  sont les paramètres de la maille quadratique centrée réelle de la martensite.

En effet selon Bain, la structure cubique à faces centrées peut être décrite en adoptant une maille quadratique centrée dont les axes  $OX'$ ,  $OY'$ ,  $OZ'$  sont parallèles à des directions du type  $\langle 110 \rangle$  et  $\langle 001 \rangle$  et dont les paramètres sont :  $a_0/\sqrt{2}$  selon  $OX'$  et  $OY'$  et  $a_0$  selon  $OZ'$ .

Le passage de la maille quadratique centrée, ainsi isolée, à la maille quadratique centrée réelle de la martensite peut être réalisée par une déformation pure, homogène de réseau, qui se caractérise par une compression  $c/a$  selon  $OZ'$  et une dilatation selon les axes  $OX'$  et  $OY'$

$\frac{a\sqrt{2}}{a_0}$ . La matrice  $\underline{B}$  donnée ci-dessus est rapportée aux axes principaux  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ .

La déformation homogène de Bain conduit à l'existence d'un cône non distordu, donc de l'existence des contraintes internes, ceci exige donc qu'une déformation supplémentaire soit ajoutée à la déformation homogène de réseau de façon à ce que la déformation globale soit à plan invariant.

#### b. Déformation invariante de réseau.

Les contraintes internes induites par la déformation homogène de Bain sont relaxées par une déformation supplémentaire.

Elle doit conserver le réseau puisque la déformation de Bain en donne les paramètres corrects.

Cette déformation accommodante qui assure l'invariance du plan d'accrolement ne peut être qu'un glissement ou un maclage (déformation invariante de réseau) réalisé soit dans l'austénite soit dans la martensite.

Pour que le plan non distordu garde sa position par rapport à la matrice il faut ajouter une rotation à ces deux déformations homogènes de réseau et invariante de réseau.

Ainsi, la déformation totale associée au plan invariant s'écrit :

$$\underline{D} = \underline{R.P.B}$$

B : représente la transformation homogène de Bain.

P : représente le cisaillement (glissement ou maclage)

R : rotation qui laisse invariant le plan d'habitat.

Dans la théorie de Wechsler, Lieberman et Read (4), pour ajuster la déformation totale, deux solutions sont proposées : l'une suppose que le produit martensitique est constitué d'un empilement de macles, dont l'épaisseur relative est calculée de telle manière que la déformation macroscopique totale conduise à l'existence d'un plan invariant ;

L'autre solution implique un cisaillement homogène, combiné à une déformation par glissement, dont l'amplitude est calculée de telle manière que la déformation macroscopique totale laisse un plan invariant.

L'intérêt de cette théorie réside dans le fait qu'il est possible à partir de la condition du plan invariant et de la diagonalisation de B.P, de calculer pour chaque transformation martensitique :

- la normale au plan d'habitat
- la direction de cisaillement
- l'amplitude de cisaillement
- l'orientation relative entre les deux phases.

Il faut cependant noter que cette théorie est purement phénoménologique et qu'elle ne décrit pas obligatoirement les déplacements réels subis par les atomes au cours de la transformation. Par ailleurs, la théorie de W.L.R. possède un certain nombre de restrictions qui ne permettent pas toute la généralité. En particulier, la théorie suppose une accommodation de la déformation de Bain par l'intervention d'un mécanisme à réseau invariant dans la martensite. Elle exclut donc la possibilité d'accommodation plastique dans l'austenite. Afin d'étudier les effets d'une accommodation plastique dans l'austenite, nous reprenons la méthode d'analyse de la transformation martensitique proposée par Ben Salah (26) et nous l'appliquons au cas où il y a plasticité dans l'austénite.

## 5.2. Nouvelle approche de la transformation martensitique

Les déformations mises en jeu dans la transformation martensitique sont généralement de l'ordre de 10 %. Une formulation en petites déformations peut donc être justifiée.

La théorie de W.L.R. ou B.M. considère une interface plane et infinie entre l'austénite et la martensite. Cette hypothèse simplificatrice permet de simplifier les calculs géométriques. Une autre manière de décrire le volume d'une plaquette de martensite consiste à l'assimiler à une inclusion ellipsoïdale aplatie c.a.d. de rapport  $c/a$  très faible.

Pour analyser les différents aspects cristallographiques et morphologiques associés à la Transformation martensitique, nous utilisons donc la solution de problème de l'inclusion plastique (homogène) pour décrire l'énergie élastique associée aux déformations inélastiques de la transformation.

Nous négligeons l'hétérogénéité élastique engendrée par la transformation et supposons que la matrice possède un comportement élastique isotrope.

### 1) Aspects cinématiques

Nous supposons que dans l'inclusion de martensite, deux déformations inélastiques se sont produites :

- la déformation de Bain :  $\epsilon^B$
- la transformation a réseau invariant  $\epsilon^{R1} + \omega^{R1}$

qui comporte une déformation pure  $\epsilon^{RI}$  et une rotation "plastique"  $w^{RI}$ . Dans la matrice, nous supposons qu'une déformation plastique  $E^P$  uniforme s'est produite.

Si on désigne par  $V_I$  le volume de l'inclusion de martensite, la déformation inélastique dans tout le milieu s'écrit :

$$\beta_{ij}^{in}(r) = E_{ij}^P + (\epsilon_{ij}^B + \epsilon_{ij}^{RI} + \omega_{ij}^{RI} - E_{ij}^P) \theta(r)$$

ou

$$\theta(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \notin V_I \\ 1 & \text{si } r \in V_I \end{cases} \quad (V.1)$$

## 2) Aspects statiques

En l'absence de contraintes appliquées, l'énergie élastique  $W$  dans le milieu est uniquement associée aux contraintes internes, on a :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(r) \epsilon_{ij}^e(r) dv \quad (V.2)$$

puisque  $\mathcal{U}_{\{i,j\}}^T = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^{in}$ , on a :

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(r) (\mathcal{U}_{\{i,j\}}^T - \epsilon_{ij}^{in}) dv \quad (V.3)$$

où  $\epsilon_{ij}$  désigne toutes les déformations d'origine inélastiques

soit

$$W = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(r) \mathcal{U}_{\{i,j\}}^T dv - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(r) \epsilon_{ij}^{in} dv \quad (V.4)$$

La première intégrale se transforme en intégrale de surface et en intégrale de volume après intégration par parties

$$W = \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij}^T(r) \mu_i^T n_j ds - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij,j}^T(r) \mu_i^T dv - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^T(r) \varepsilon_{ij}^{in} dv \quad (V.5)$$

Le premier terme est nul puisque  $\sigma_{ij} n_j$  est nul sur S

Le second terme est nul à cause de la propriété  $\sigma_{ij,j} = 0$

on a donc :

$$W = -\frac{1}{2} \int_{V_I} \sigma_{ij}^T(r) \varepsilon_{ij}^{in}(r) dv \quad (V.6)$$

Le terme  $\varepsilon_{ij}^{in}(r)$  s'écrit d'après (V-1)

$$\varepsilon_{ij}^{in}(r) = E_{ij}^P + (\varepsilon_{ij}^B + \varepsilon_{ij}^{R1} - E_{ij}^P) \theta(r) \quad (V.7)$$

et on a pour W

$$W = -\frac{1}{2} \int_{V_I} \sigma_{ij}^T (\varepsilon_{ij}^B + \varepsilon_{ij}^{R1}) dv - \frac{1}{2} \int_{V_M} \sigma_{ij}^T E_{ij}^P dv \quad (V.8)$$

ou  $V_I$  désigne le volume de la martensite et  $V_M$  le volume d'austénite.

Pour une inclusion ellipsoïdale et une déformation inélastique uniforme dans  $V_I$ ,  $\sigma^I$  est uniforme dans  $V_I$ . On a donc :

$$W = -\frac{1}{2} V_I \sigma_{ij}^T (\varepsilon_{ij}^B + \varepsilon_{ij}^{R1}) - \frac{1}{2} E_{ij}^P \sigma_{ij}^T V_M \quad (V.10)$$

Où  $\bar{\sigma}^M$  désigne la valeur moyenne des contraintes dans la matrice

$$\bar{\sigma}_{ij}^M = \frac{1}{V_M} \int_{V_M} \sigma_{ij}^M dv \quad (V.11)$$

La valeur moyenne sur tout le volume des contraintes internes étant nulle, on a:

$$\frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(\underline{r}) dv = \frac{1}{V} \int_{V_M} \sigma_{ij}^M dv + \frac{1}{V} \int_{V_I} \sigma_{ij}^I dv = 0 \quad (V.12)$$

$$\text{soit } V_M \bar{\sigma}_{ij}^M + V_I \sigma_{ij}^I = 0$$

on a finalement :

$$W = -\frac{1}{2} V_I \sigma_{ij}^I (\epsilon_{ij}^B + \epsilon_{ij}^{RI}) + \frac{1}{2} E_{ij}^P \sigma_{ij}^I V_I \quad (V.13)$$

$$W = -\frac{1}{2} V_I \sigma_{ij}^I (\epsilon_{ij}^B + \epsilon_{ij}^{RI} - E_{ij}^P)$$

L'état de contrainte dans l'inclusion se calcule aisément à partir de la solution du problème de l'inclusion plastique.

on a:

$$\sigma_{ij}^I = C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}) \left\{ E_{mn}^P - (\epsilon_{mn}^B + \epsilon_{mn}^{RI}) \right\}$$

Soit :

$$W = \frac{1}{2} V_I C_{ijkl} \left( I_{klmn} - S_{klmn} \right) \left\{ E_{mn}^P - \left( \epsilon_{mn}^B + \epsilon_{mn}^{RI} \right) \right\} \left\{ \epsilon_{ij}^P - \left( \epsilon_{ij}^B + \epsilon_{ij}^{RI} \right) \right\} \quad (V.15)$$

La plaquette de martensite va se former en cherchant à minimiser l'énergie  $W$ . Plusieurs solutions sont possibles selon le comportement rhéologique de l'austénite et de la martensite.

. pas d'accommodation plastique dans l'austénite :  $E^P = 0$

alors :

$$W = \frac{1}{2} V_I C_{ijkl} \left( I_{klmn} - S_{klmn} \right) \left( \epsilon_{mn}^B + \epsilon_{mn}^{RI} \right) \left( \epsilon_{ij}^B + \epsilon_{ij}^{RI} \right) \quad (V.16)$$

L'accommodation se fait alors par l'intermédiaire de la déformation à réseau invariant  $\epsilon^{RI}$  et par une forme et une orientation de l'ellipsoïde adaptée.

. accommodation uniquement dans l'austénite  $\epsilon^{RI} = 0$

alors :

$$W = \frac{1}{2} V_I C_{ijkl} \left( I_{klmn} - S_{klmn} \right) \left( E_{mn}^P - \epsilon_{mn}^B \right) \left( \epsilon_{ij}^P - \epsilon_{ij}^B \right) \quad (V.17)$$

Là encore, les déformations  $E^P$  et l'inclusion peuvent s'ajuster pour que  $W = 0$

. accommodation mixte  $\epsilon^{RI} \neq 0, E^P \neq 0$

Dans ce cas, les incompatibilités de la déformation de Bain sont accommodées à la fois par une transformation à réseau invariant de l'austénite et par une déformation plastique de la martensite.

### 5.3 Application au cas des alliages Fer-Nickel (30 %)

a) Méthodologie - paramètres du calcul.

Dans ces alliages, la déformation de bain, décrite dans le repère de l'austénite s'écrit sous la forme

$$\epsilon_{ij}^B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } a_1 = 0.132136$$

$$c_1 = -0.199459$$

Le système de glissement conduisant à la transformation à réseau invariant est choisi sous la forme

$$\begin{matrix} \uparrow \\ n \end{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ m \end{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

H. BOUAQUINE A.EBERHARDT et M.BERVEILLER [27] ont montré que c'est effectivement un tel système qui supporte la plus grande cisson réduite sous l'effet des contraintes internes dues à  $\epsilon^B$

Le tenseur  $\epsilon^B$  et  $\epsilon^{R1}$  prend donc la forme

$$\epsilon_{ij}^B + \epsilon_{ij}^{R1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Où  $g$  désigne l'amplitude du glissement dans la martensite servant à accommoder totalement ou partiellement, les incompatibilités dues à  $\epsilon^p$

Pour les constantes élastiques nous choisissons un matériau isotrope et homogène tel que

$$\lambda = 1.2140 \text{ daN/mm}^2$$

$$\mu = 7540 \text{ daN/mm}^2$$

L'accommodation plastique dans la matrice est difficile à analyser en général car elle dépend des contraintes internes pendant la formation de la plaquette de  $M_s$  et des contraintes appliquées.

Dans ce travail nous avons uniquement tenté de mettre en évidence l'effet d'une accommodation plastique dans la matrice sur l'orientation finale du plan d'habitat. A cet effet, nous avons choisi des formes particulières de  $E^p$ ; en laissant néanmoins variable la quantité de déformation plastique dans la matrice. Les détails de la forme précise de  $E^p$  sont précisés lors des résultats.

La méthode générale de calcul consiste à chercher le minimum de  $W$  fonction de  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  et  $g$

-  $a, b, c$  sont les paramètres de l'ellipsoïde

-  $\alpha, \beta, \gamma$  repèrent l'orientation de l'ellipsoïde par rapport à l'austénite

-  $g$  mesure à la fois le glissement plastique dans la martensite et la part de  $E^p$  dans l'accommodation de  $\epsilon^p$ . Pour limiter les calculs, nous avons fixé les valeurs de  $a, b$  et  $c$  en choisissant un ellipsoïde de révolution ( $a = b$ ) et de rapport de forme  $c/a = 10^{-3}$

Pour les différents cas envisagés, nous traçons des courbes de niveau de  $w$  dans le repère cristallographique courbes qui permettent de trouver l'orientation de la plaquette  $w$  est minimale. Cette orientation définit le plan d'habitat. Un exemple est donné sur la figure (5.1).

$$(E^P = 0)$$

La figure (5.2) représente la variation de  $w$  en fonction de  $g$ .

## b) Résultats

Les résultats théoriques que nous présentons, sont sous la forme de figures inverses de pôles sur lesquelles on représente les positions des normales au plan d'habitat trouvées pour des énergies minimales.

### 1. Accomodation pure dans la martensite ( $E^P = 0$ )

Dans ce cas, la normale au plan d'habitat trouvée correspond au vecteur

$$\vec{n} (0.795 ; -0.069 ; 0.601)$$

Sur la figure (5.1) on a les courbes d'isoénergie tracées en fonction de la normale au plan d'habitat.

L'orientation de la plaquette de martensite correspondant au minimum d'énergie de déformation élastique est donnée par le plan d'habitat cristallographique (7.95 0.69 6.01. ), c'est à dire (11  $\bar{1}$  9)

Le plan d'habitat observé expérimentalement par NISHIYAMA [28] pour des teneurs en nickel s'étendant entre 27 et 34% en poids est sensiblement

ce plan cristallographique (259).

On remarque une différence entre les deux plans d'habitats. Mehl et Derge (29) ont montré que les plans d'habitats présentés par les alliages Fe-Ni dépendaient de la température de déformation de la martensite.

Si on observe parfois une dispersion notable entre les résultats présentés par différents auteurs c'est parceque le plan d'habitat dépend aussi de la composition de l'alliage ; de plus la détermination expérimentale des indices cristallographiques du plan d'habitat est délicate.

## 2) Accommodation mixte

La formation des plaquettes de martensite implique un cisaillement donc une modification de forme de la région transformée. Il s'ajoute en outre une variation relative de volume, lorsque le produit martensitique et la phase mère ont des densités différentes. En conséquence la formation de la martensite entraîne la création de contraintes au sein de la matrice non transformée, dont l'importance est d'autant plus grande que les plaquettes de martensite sont plus épaisses.

Le niveau de contraintes peut atteindre la limite d'élasticité de la phase mère. Celle-ci se déforme plastiquement et cette déformation peut également affecter la martensite elle-même.

Nous illustrons sur les figures suivantes l'influence de l'accommodation au sein de la phase mère sur l'orientation du plan

d'habitat.

On note  $E^p$  le tenseur de déformation plastique macroscopique de la phase mère. Nous choisissons différentes formes pour  $E^p$  mais autorisons par l'intermédiaire d'un facteur d'accommodation  $\alpha$  une répartition de celle-ci entre la phase mère et la martensite.

### 1er cas

La forme de  $E^p$  est donnée par : 
$$E^p = \alpha g \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas la normale au plan d'habitat trouvée dépend de la valeur de  $\alpha$ . Sur la figure (5.3) on montre les différentes positions des plans d'habitats en fonction de  $\alpha$ . La position 1 est une position de référence où  $\alpha = 0$  alors que la position 2 correspond à  $\alpha = 1/2$  et au plan (8 0 6) comme il fallait s'y attendre, on observe une influence notable de l'accommodation plastique dans l'austénite sur l'orientation du plan d'habitat. Dans ce cas, la normale au plan d'habitat se rapproche de la zone (100),(111), ce qui est plus conforme aux observations expérimentales.

### 2e cas : Accommodation par cisaillement dans le plan (2,3)

Dans ce cas, on a :

$$E^p = \alpha g \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La normale au plan d'habitat a tendance, lorsque  $\alpha$  augmente à se rapprocher de l'axe (100).

3e cas : Accommodation par un double cisaillement

$$E^P = \alpha g \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, l'orientation finale du plan d'habitat lorsque  $\alpha$  augmente tend à se rapprocher de l'orientation (225) qui est couramment observée dans le cas de certains aciers (Fe 3%Cr 1%C)

4e cas :

L'accommodation plastique dans l'austénite dépend à la fois des contraintes internes associées à la formation des plaquettes de martensite et des contraintes appliquées qui peuvent orienter l'écoulement plastique dans l'austénite. Pour prendre en compte l'effet des contraintes appliquées nous supposons que l'état de contraintes appliquées est une traction simple.

La forme de l'écoulement plastique associée à cette contrainte est choisie d'après la loi de Levy Mises

$$d E_{ij}^P = s_{ij} d\lambda$$

Dans le cas où une contrainte de traction est appliquée selon l'axe 3,  $E_{ij}^P$  prend la forme

$$E_{ij}^p = \alpha g \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La figure (5.6) représente l'évolution de la normale au plan d'habitat dans ce cas. On observe que cette normale tend à se rapprocher de l'axe [111] lorsque l'accommodation plastique dans la matrice augmente. Ceci peut se faire par augmentation des contraintes appliquées et doit pouvoir s'observer expérimentalement.

De la même manière, lorsque la contrainte de traction est parallèle à [111] on observe (fig 5.7) que la normale au plan d'habitat tend à se rapprocher de l'axe [ 225 ]

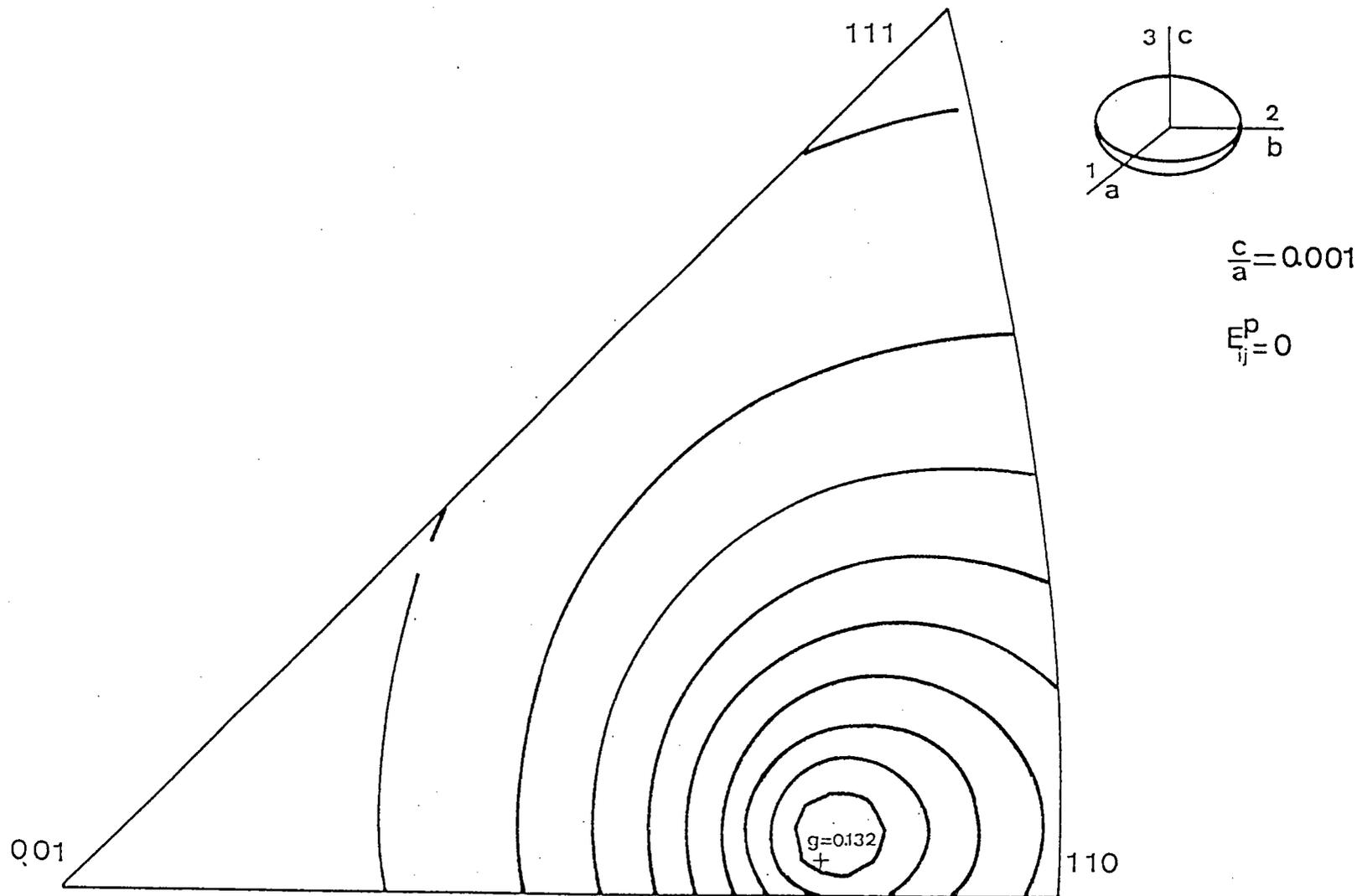


Figure 5.1 : figure inverse de pôle, montrant les courbes d'isoénergie autour du plan d'habitat dans le cas où on a l'accommodation pure dans la martensite.

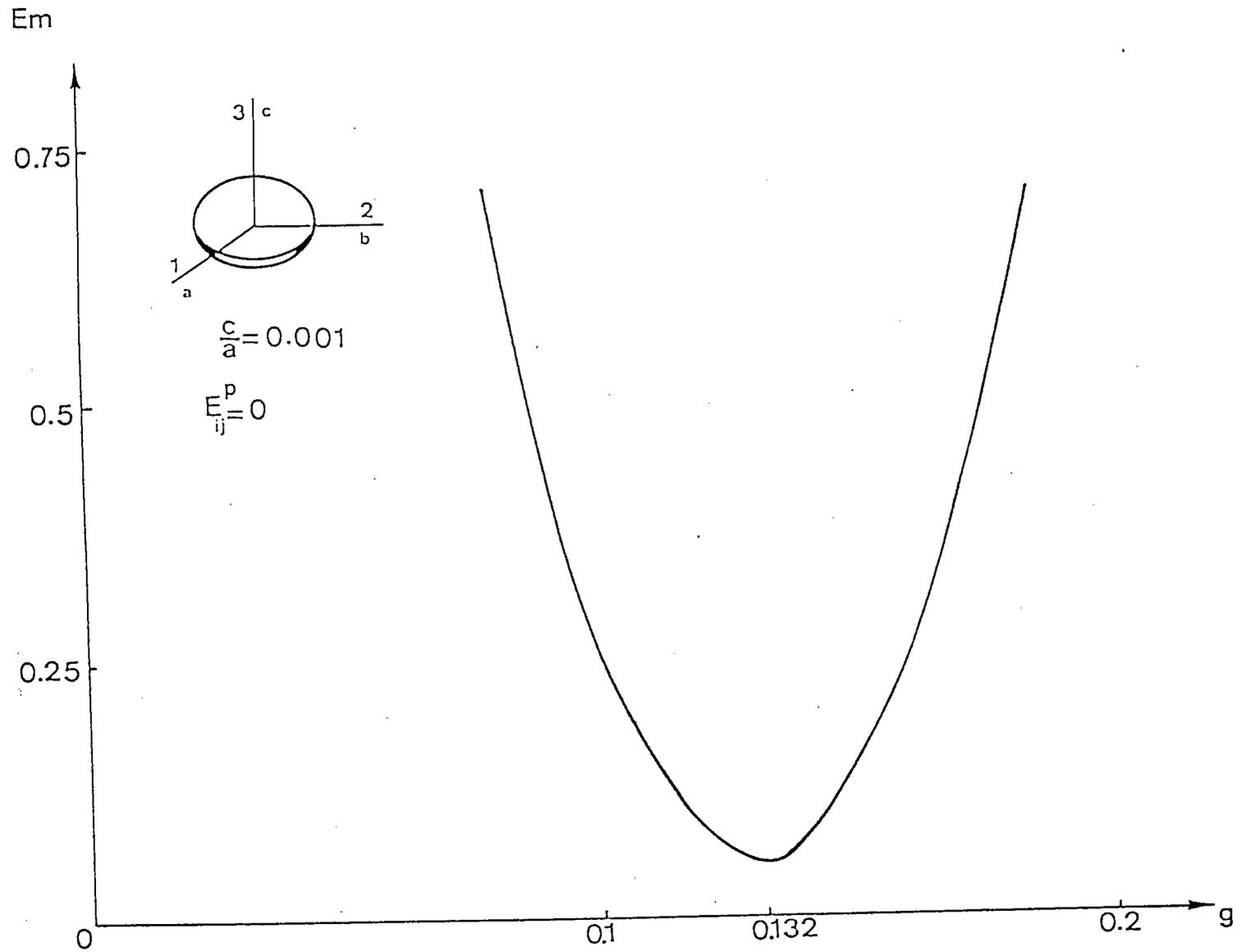


Figure 5.2. : Variation du minimum d'énergie en fonction de l'amplitude du glissement plastique.



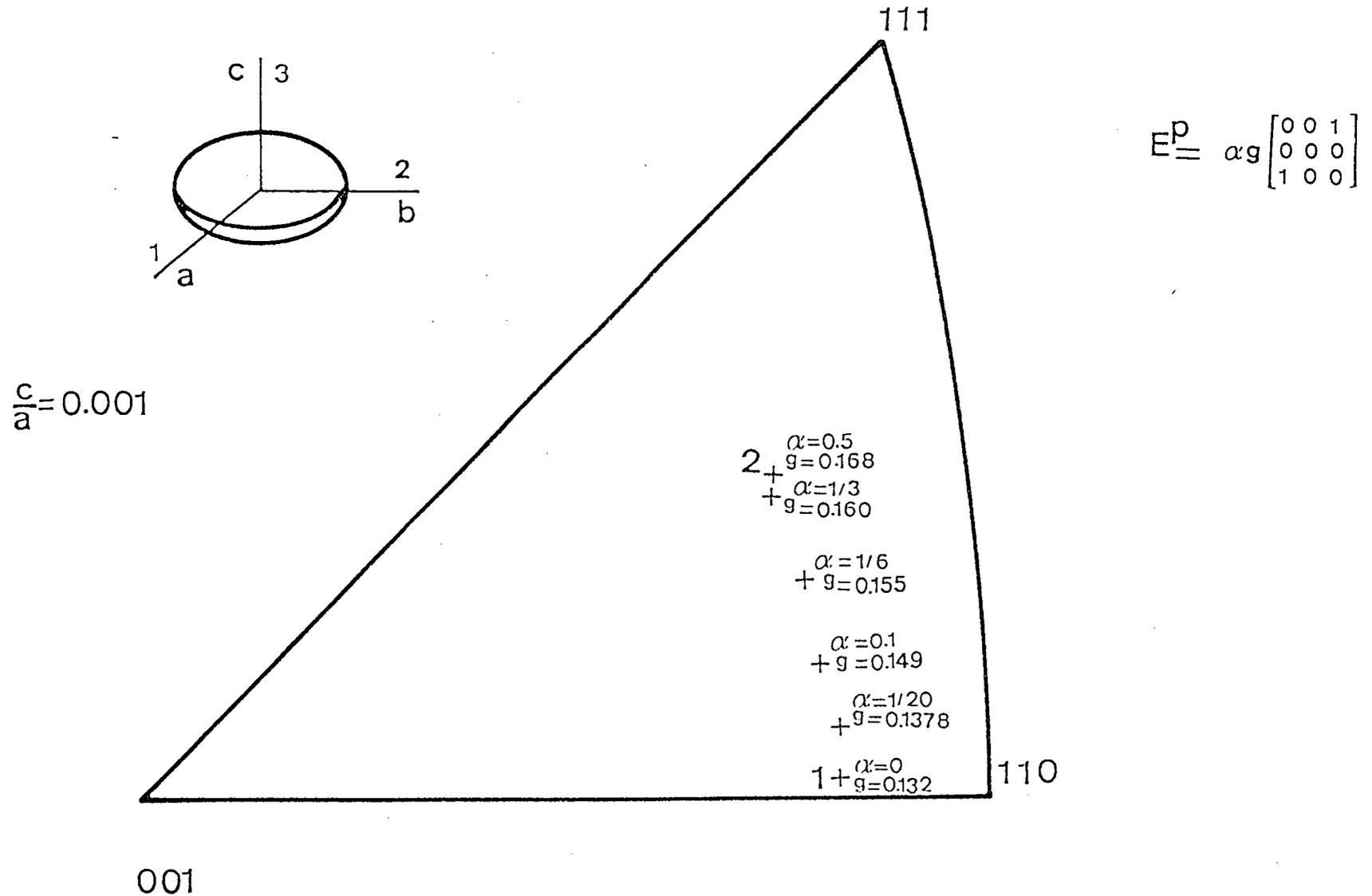


Figure 5.3 : Figure inverse de pôle, montrant les normales aux plans d'habitats dans le cas de l'accommodation mixte en fonction de la valeur du paramètre  $\alpha$ .

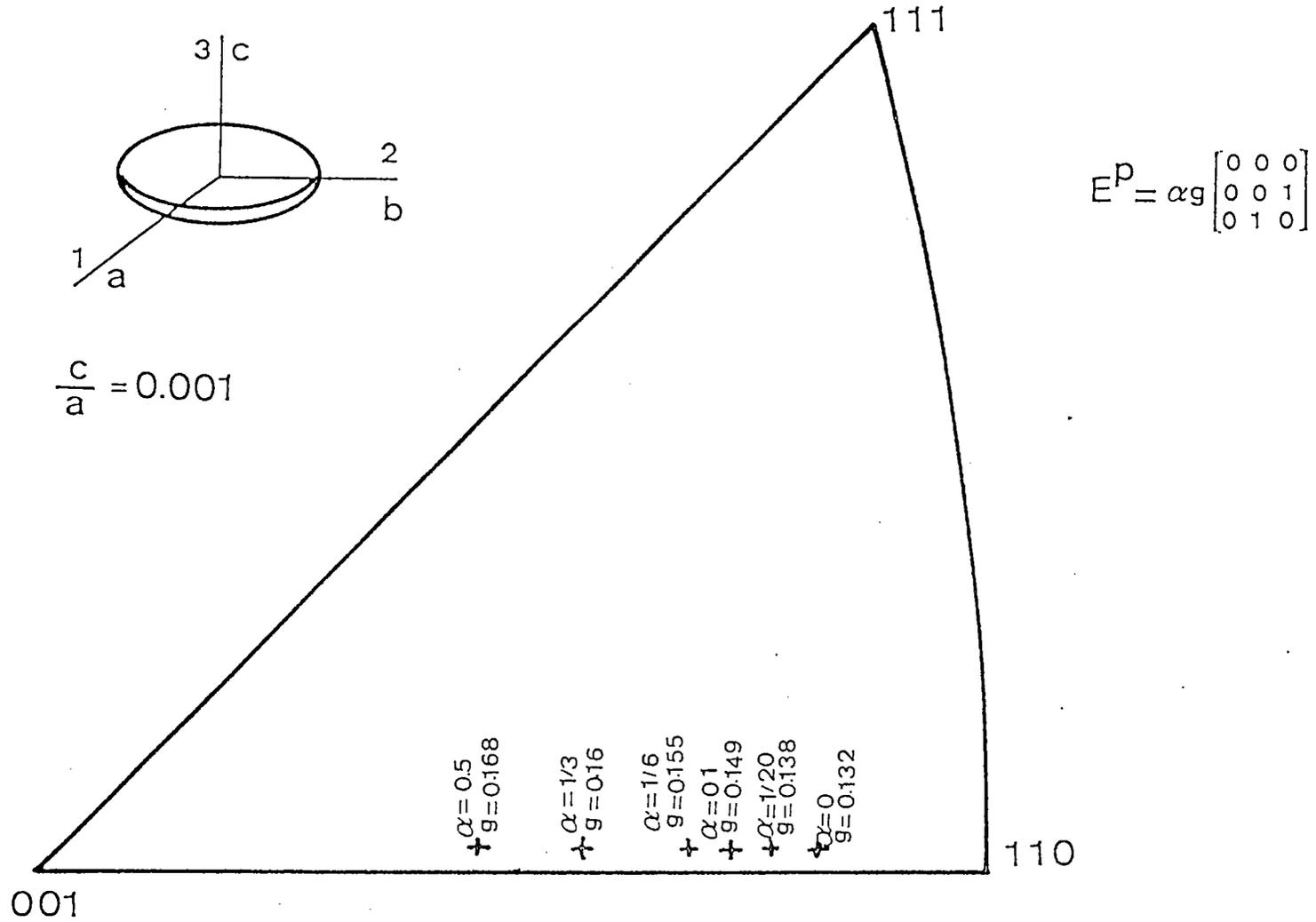


Figure 5.4 : Figure inverse de pôle, montrant les normales aux plans d'habitat dans le cas de l'accommodation mixte en fonction de la valeur du paramètre  $\alpha$ .

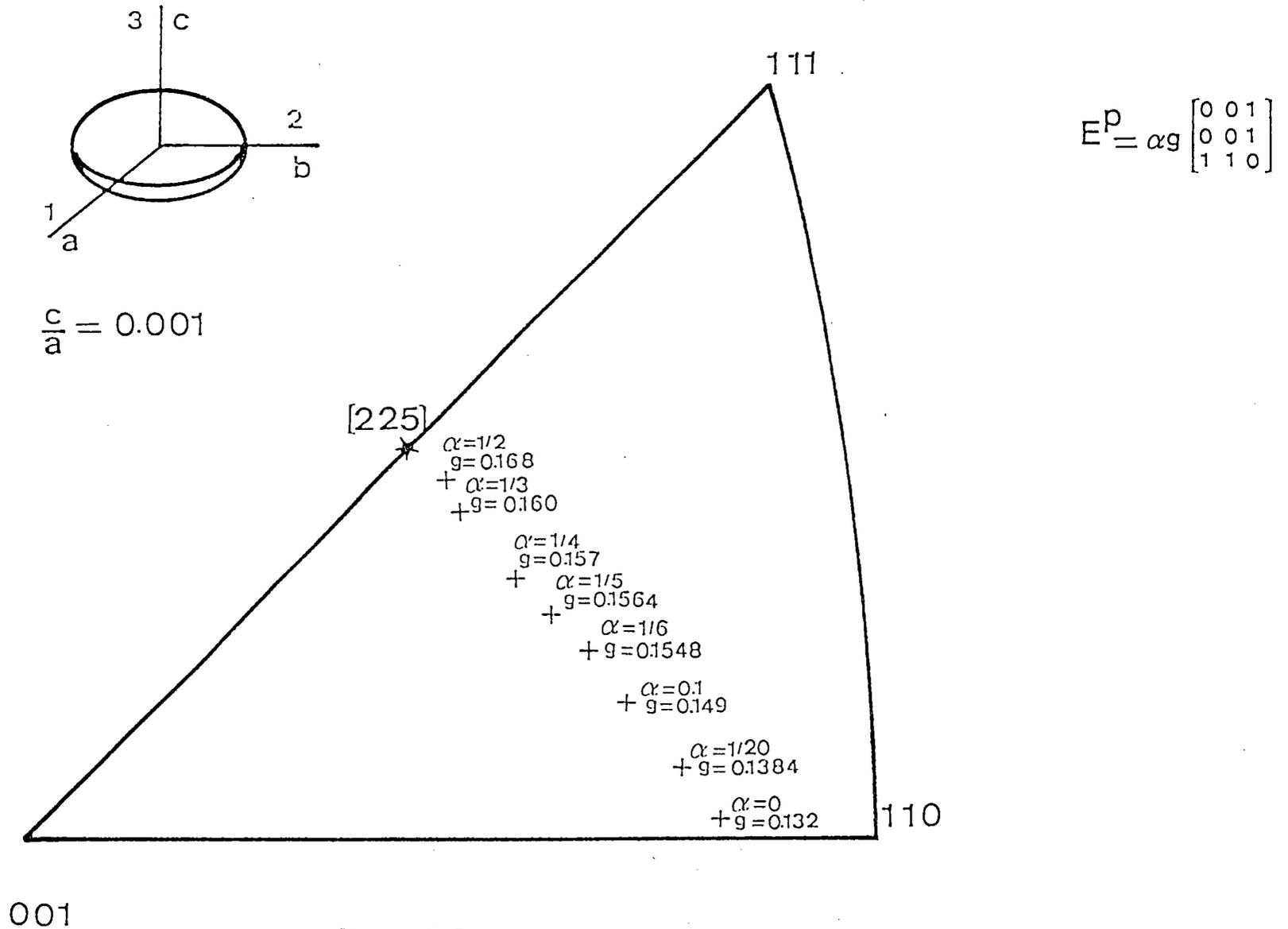


Figure 5.5 : Figure inverse de pôle montrant les normales aux plans d'habitat dans le cas de l'accommodation mixte en fonction de la valeur du paramètre  $\alpha$ .

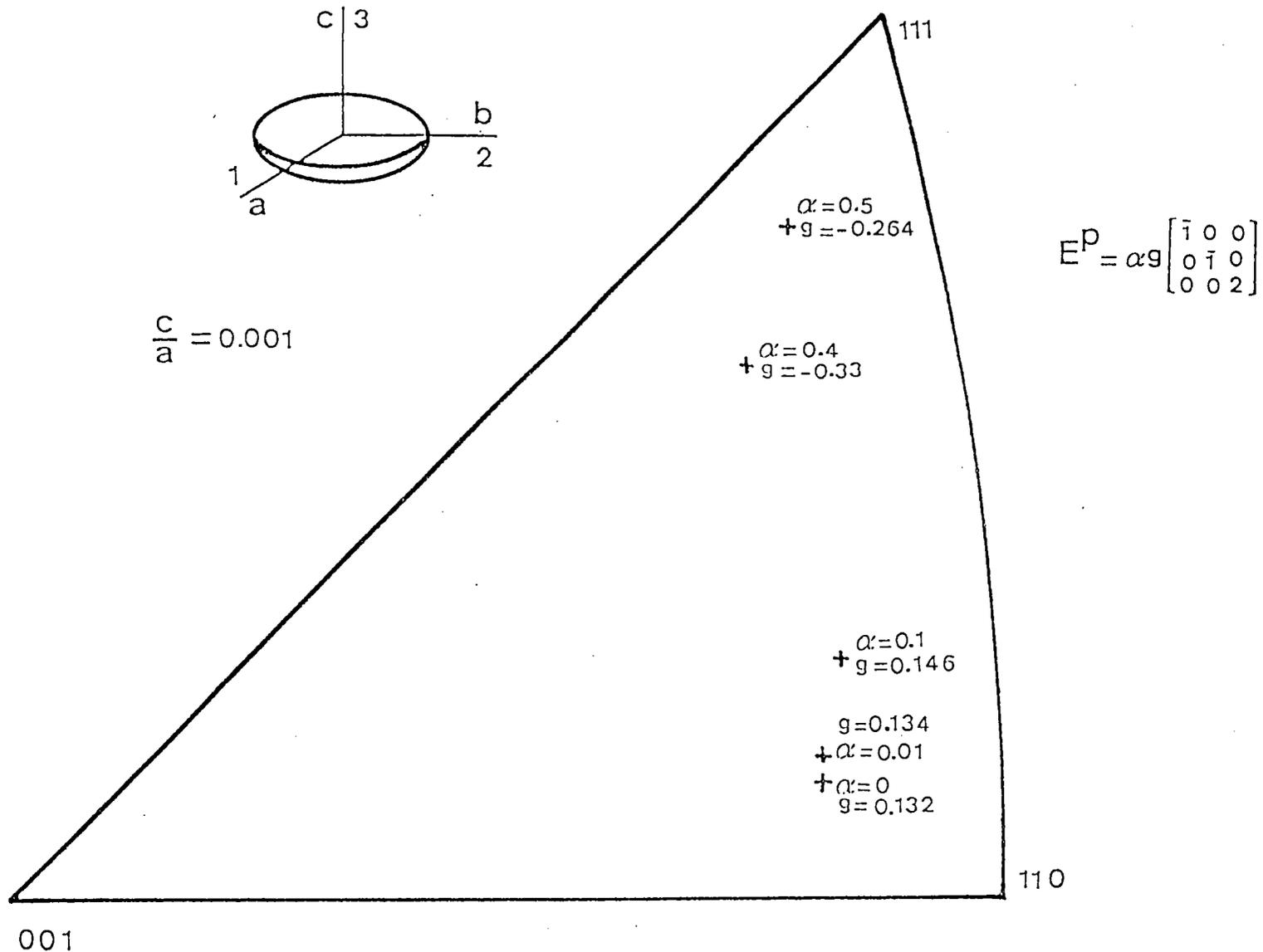
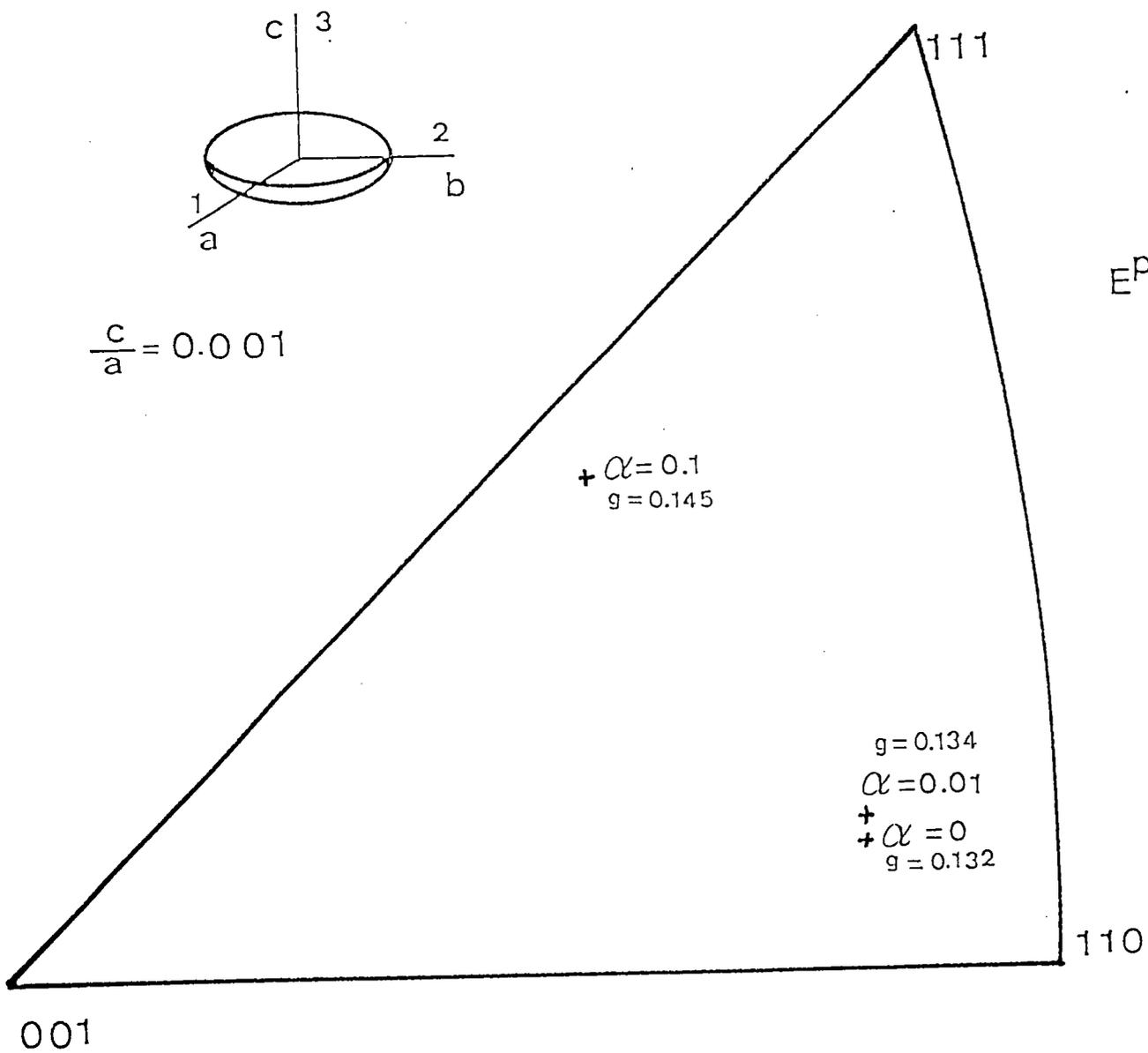


Figure 5.6. : Figure inverse de pôle montrant les normales aux plans d'habitat dans le cas de l'accommodation mixte en fonction du paramètre  $\alpha$ .



$$E^P = \alpha g \begin{pmatrix} 0.1935 & 0.3959 & -0.5792 \\ -0.5857 & 0.5668 & -0.5792 \\ -0.787 & -0.2272 & 0.5735 \end{pmatrix}$$

Figure 5.7. : Figure inverse de pôle, montrant les normales aux plans d'habitats dans le cas de l'accommodation mixte en fonction du paramètre

#### 5.4. Discussion et conclusions

Le mécanisme physique de déformation associé à une transformation de phase est complexe et difficile à analyser dans le cas général. Pour les transformations martensitiques, les théories classiques supposent qu'une transformation à réseau invariant (glissement ou maclage) suffisent pour accommoder les contraintes internes dues à la déformation inélastique de Bain. Dans de nombreux cas, il en est ainsi. Ces cas correspondent en général aux situations dans lesquelles l'austénite possède une limite élastique suffisamment élevée, pour que, en l'absence de contraintes appliquées, il n'y ait pas d'écoulement plastique dans la phase mère.

Par contre, il existe de nombreuses situations pour lesquelles la théorie phénoménologique classique est insuffisante car elle ne prend pas en compte la possibilité de relaxation plastique dans la phase mère. C'est le domaine de la plasticité de transformation couplée telle qu'elle a été définie par Patoor et Berveiller [30]. Ce cas est nettement plus complexe à analyser. Nous avons montré sur des cas simples et avec des hypothèses simplificatrices, que les effets d'une accommodation plastique dans l'austénite sur l'orientation de la normale au plan d'habitats sont très importants.

Cette première approche est actuellement reprise dans un contexte plus global.

**Chapitre UI**

**Conclusion**

## UI) Conclusion

Le but de ce travail était double.

1) élaborer un programme permettant de traiter les problèmes complexes d'inclusions (inclusion ellipsoïdale dans une matrice linéaire anisotrope). Cet objectif a été atteint et ce programme est actuellement utilisé par de nombreuses personnes au laboratoire.

2) appliquer les solutions du problèmes de l'inclusion ellipsoïdale à deux situations physiques pour lesquelles les effets de forme sont importants :

- le problème de l'évolution du champ de contrainte interne et de rotation de réseau cristallin dans les polycristaux possédant une texture morphologique

- le problème de l'accommodation plastique d'une plaquette de martensite par déformation plastique de l'austénite.

Dans ces deux situations physiques, nous avons montré que les effets de formes et d'orientation jouent un rôle considérable qui doivent être pris en compte dans les modèles plus globaux de détermination des propriétés effectives des matériaux hétérogènes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- (1) J.D. ESHELBY, 1957, proc. Roy. Soc. A 241, 376
- (2) H. Honneff et H. Mecking , Textures of Materials (edited by C.M. Brakmann et al.) p. 573 Netherlands Soc. for Metals (1984)
- (3) M. Berveiller et Zaoui Coll. int. du CNRS n°319  
comportement plastique des solides anisotropes plasticité anisotrope des polycristaux métalliques  
Ed. JP Boekler
- (4) Wechsler M.S, Lieberman D.S., Read T.A. J. of Metals, 1935, 5, 1503
- (5) J.S. Bowles, J.K. Mackenzie Acta. Met. 2, 129 (1954)
- " " " " " " 2, 138 (1954)
- " " " " " " 2, 224 (1954)
- (6) E. Kröner, 1961, Acta Met. 9, 155

- (7) P.H. Dederichs et Zeller - Elastic inclusions and inhomogeneities.
- (8) M. Berveiller - O. Fassi-Fehri et Hihi  
Comptes rendus des cinquièmes Journées Nationales sur les composites. JNC5, Paris, 9/11/ Sept. 1986 pp. 237-247
- (9) G. Sachs, Z. des U.D.I. 72, 734 (1928)
- (10) G.I. Taylor, J. Inst. Metals 62, 307 (1938)
- (11) J.F. W. Bishop et R. Hill, Phil. Mag. 42, 1298 (1951)
- (12) J.F.W. Bishop, J. Mech. Phys. Solids 3, 130 (1954)
- (13) P. Van Houtte, Ph. D. thesis, Katholieke Univ. Leuven (1975)
- (14) J.D. Eshelby, Proc. R. Soc. A319, 247 (1970)
- (15) B. Budianski and T.T. Wu, Proc. Fourth Congr. Appl. Mech., p. 1175 (1962)
- (16) U.F. Kocks et H.H Chandra, Acta. met. 30, 695 (1982)
- (17) J. Driver, A. Skalli and M. Wintenberger, Mém. Scient. Revue. Metall. 8, 241 (1983)

- (18) M. Berveiller . Thèse d'état . paris XIII (1978)
- (19) U.F. Kocks et G.R. Canova, Déformation of Polycristals  
(edited by N. Hansen et al.), p. 35 Riso National Lab.  
Roskilde, Denmark (1981)
- (20) C.N. Tomé, G.R. Canova, U.F. Kocks, N. Christodoulou  
et J.J. Jonas, Acta met. 32, 1637 (1984)
- (21) P. Van Houtte; H.R. Wenk et F. Wagner, Proc. ICOTOM 7  
(edited by C.M. Brakman et al.) p. 153
- (22) M. Berveiller et A. Zaoui, c.r. 15<sup>e</sup> colloque GFR,  
Paris, p. 175 (1980)
- (23) U.F. Kocks, C.N. Tomé et G.R. Canova, Proc. Mandel Symp.  
Paris (1985)
- (24) Croken et Bilby Acta. Met. A, 9, 1961 , 678
- (25) Bowles et Dune Acta. Met. 17, 1969, 677
- (26) Ben Salah, Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle METZ (1986)
- (27) H. Bouaouine, A. Eberhardt et M. Berveiller  
(à paraître)

(28) Nishiyama Z. - Sci. Rep. Tohoku Univ. 1934, 23, 637

(29) Mehl R.F., Derge G. - Trans. Aime, 1937, 125, 482

(30) E. Patoor, A. Eberhardt, M. Berveiller

L.P.M.M. U.A. CNRS 1215