



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

**PROJET  
DE THESE**

**PRESENTE  
A L'UNIVERSITE DE METZ**

pour obtenir le titre de  
Docteur de l'Université

par

**Denis HIEBEL**



Sujet :

**FISSURATION DE FATIGUE EN MODE MIXTE  
SUR DISQUE BRESILIEN  
ET INFLUENCE DU LUBRIFIANT**

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE -METZ	
N° inv	19870445
Cote	S/M3 87/22
Loc	Magasin

## **AVANT-PROPOS**

L'Institut Français du Pétrole m'a accueilli dans sa direction des Techniques d'Applications Energétiques, afin de mener à bien cette thèse, en étroite collaboration avec le Laboratoire de Fiabilité Mécanique de l'Université de METZ.

Monsieur le Professeur G. PLUVINAGE a assumé la charge que représente la direction d'une thèse. Qu'il soit remercié de la confiance qu'il m'a accordée et de l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail.

Mes remerciements vont également à Monsieur J. AYEL, Ingénieur Principal à l'I.F.P., pour ses conseils et son soutien constant.

J'ai trouvé en Mustapha LOUAH un appui et un interlocuteur attentif, qui a su me faire profiter de son expérience. Je lui suis infiniment redevable de l'attitude de dialogue et d'encouragement qu'il m'a toujours manifestée.

Que les membres du jury veuillent bien trouver ici l'expression de ma déférente gratitude.

Que tous ceux enfin qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation des travaux que rapporte le présent mémoire sachent combien j'ai apprécié leur aide, notamment Madame H. JARAY, dont l'efficacité aimable et dévouée m'a été précieuse au cours de mes recherches bibliographiques, ainsi que Messieurs J. M. GRAFF et B. BAUDOT pour leur assistance technique.

## RESUME

Du fait de la complexité du phénomène de fatigue–contact, l'interprétation d'essais globaux comme les essais sur machine à galets (machine AMSLER par exemple) ou sur machine 4 billes présente d'énormes difficultés. C'est pourquoi nous avons choisi la voie de la mécanique de la rupture, afin de pouvoir dissocier, d'une part les phases d'amorçage et de propagation des fissures de fatigue et, d'autre part, l'action mécanique de l'action chimique du lubrifiant.

L'application de la mécanique de la rupture à la fatigue–contact est une innovation très récente, mais le nombre croissant depuis dix ans de publications faisant la preuve d'une analogie entre les phénomènes d'usure et de fatigue nous ont conforté dans cette direction.

L'usure par fatigue de contact (fatigue mécanique superficielle) se produit essentiellement entre deux surfaces lubrifiées en régime élastohydrodynamique, régime caractérisé par une pression de contact importante et par un mouvement de roulement pur ou de roulement plus glissement combinés. Elle se manifeste par l'apparition de cavités à la surface du métal issues de la propagation de fissures sous la surface et de la rupture des fragments de métal ainsi formés.

La forme des fissures observées lors des études portant sur le piquage suggère un chargement en mode mixte. En effet, dès lors qu'une fissure ne se propage plus dans sa direction initiale, c'est qu'elle se trouve placée dans des conditions de chargement polymodal (même dans le cas d'un chargement uniaxial).

Par ailleurs, l'examen de la distribution des contraintes résiduelles, mémoire des contraintes appliquées, dans les couches où se propagent les fissures de fatigue–contact révèle que :

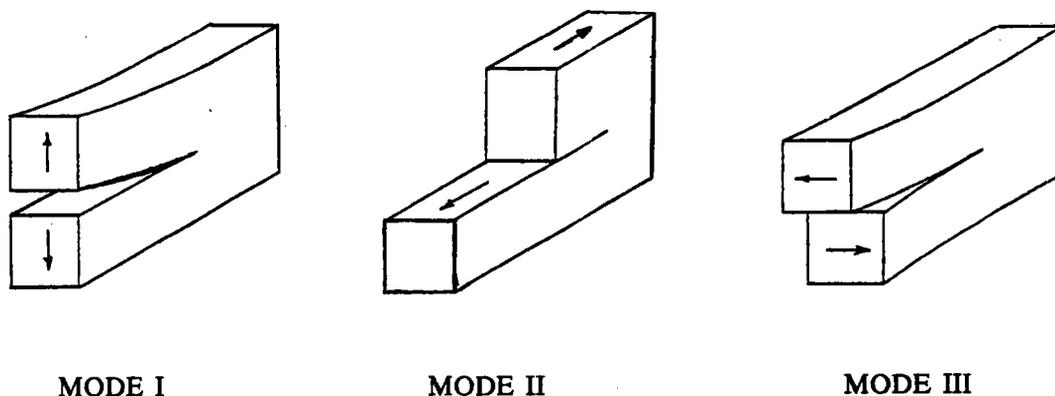
- la direction initiale de la propagation (donc celle de l'amorçage) est la direction du cisaillement maximal en surface,
- la direction de propagation est associée à la normale à la direction principale de traction.

Ainsi, l'écaillage qui apparaît au cours de la fatigue–contact résulte de l'amorçage et de la propagation en mode mixte d'une fissure, suivis de la rupture du ligament séparant l'extrémité de la fissure de la surface.

Nous avons donc choisi un type d'éprouvette permettant de réaliser des conditions de chargement en mode mixte traction + cisaillement et de simuler l'allure des fissures de fatigue contact. Il s'agit du "disque brésilien", encore appelé essai de traction indirecte. Par une simple rotation du disque, il est en effet possible d'obtenir différentes combinaisons des modes I et II. En outre, quoique de compression, le chargement engendre des contraintes de traction en fond d'entaille pour un certain domaine de l'angle d'inclinaison initial, ce qui permet effectivement de réaliser les conditions précédemment énoncées. Bien qu'employée à l'origine pour des essais de rupture des céramiques et des bétons, cette éprouvette s'est révélée parfaitement adaptée à nos essais de fatigue d'un acier à haute résistance.

## INTRODUCTION

La réponse d'un solide homogène, contenant une fissure plane, à des efforts extérieurs, se traduit par un déplacement des lèvres de la fissure, déplacement qui peut se décomposer en trois mouvements ou **modes** élémentaires, ainsi définis selon la terminologie de la mécanique de la rupture linéaire élastique (*figure 1.1*) :



- Figure 1.1 - Les trois modes de rupture élémentaires

Ce sont :

- le **mode I** aussi appelé " mode par ouverture " ; il correspond à des sollicitations de traction ou de compression pure. Les surfaces de la fissure se déplacent perpendiculairement à la direction de sollicitation.
- le **mode II** ou **cisaillement plan** ou " glissement droit ". Les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan, mais selon une direction perpendiculaire au front de fissure.
- le **mode III** encore appelé **cisaillement anti-plan** ou " glissement-vis " ; il correspond à des efforts de cisaillement non coplanaires. Les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction parallèle au front de fissure.

Les fissures peuvent se propager, soit par rupture fragile instable, soit par propagation stable ductile, soit encore par propagation cyclique (fatigue), selon l'un de ces trois modes ou toute combinaison de deux ou trois d'entre eux. La présence de l'un quelconque de ces modes dépend de l'état des contraintes induit en fond de fissure. Dans le cas d'un chargement *uniaxial*, la propagation des fissures se fait en mode I lorsque la contrainte de traction principale maximale est perpendiculaire à la fissure. On a affaire à du mode II lorsqu'une contrainte de cisaillement

simple est appliquée le long du plan de la fissure ; lorsque les deux conditions précédentes sont remplies simultanément, il y aura combinaison des deux modes, auquel cas on parlera alors de *mode mixte*.

Dans la plupart des structures qui travaillent, l'état des contraintes n'est pas simplement uniaxial, mais, bien souvent, biaxial ou triaxial (ex.: joints de soudure, trains de laminoirs, structures marines formées d'éléments tubulaires soudés, dents d'engrenages)

Aussi, il est essentiel de savoir comment le processus de fatigue dans les matériaux métalliques, c'est-à-dire l'amorçage des fissures et leur propagation, a lieu dans des états de contrainte complexes et, en particulier, de quelle manière et dans quelle mesure un chargement en mode mixte va modifier les directions d'amorçage et de propagation.

La facilité avec laquelle on peut obtenir un chargement uniaxial et la validité générale de la loi de **PARIS** pour la propagation en mode I ont abouti à une prépondérance des données sur la propagation des fissures en fatigue monoaxiale. Par contre, les études en fatigue polymodale sont peu nombreuses, probablement du fait de difficultés d'ordre pratique au niveau des essais.

Notre travail s'articule de la façon suivante : après un tour d'horizon succinct des travaux consacrés à la *rupture* et à la *fatigue en mode mixte* (essentiellement en *compression*), nous parlerons d'une approche de la fatigue-contact par la mécanique de la rupture au travers de la *théorie de l'usure par délamination* avant de présenter l'essai de traction indirecte à l'aide du *disque brésilien*, dont l'originalité réside précisément dans l'application à la fatigue d'un acier en mode mixte. Le chapitre suivant sera consacré aux *résultats expérimentaux* des essais menés en milieu ambiant, ainsi que dans un milieu lubrifiant. Ensuite, nous tenterons une *simulation numérique* des trajets de fissure. Puis, après avoir déterminé une loi permettant d'exprimer la *vitesse de propagation* des fissures dans un disque brésilien, nous tirerons des essais et des calculs les *conclusions* essentielles auxquelles nous aurons abouti.

## NOMENCLATURE DES SYMBOLES UTILISES

- a** : longueur de fissure  
**a, b** : grand axe et petit axe d'une fissure elliptique  
**A, B, C, m, n** : coefficients d'une loi du type loi de PARIS  
**A<sub>i</sub>, B<sub>i</sub>, S<sub>i</sub>, T<sub>i</sub>** : coefficients d'ATKINSON  
**b** : demi-largeur d'un contact de HERTZ  
**B** : épaisseur d'une éprouvette  
**f, f<sub>c</sub>** : coefficients de frottement  
**G** : taux de restitution de l'énergie  
**K** : facteur d'intensité de contrainte d'une fissure droite (l'indice indique le mode)  
**K<sub>σ</sub>** : intensité de contrainte  
**k** : facteur d'intensité de contrainte d'une fissure branchée (mode selon indice)  
**N** : nombre de cycles  
**P** : charge appliquée  
**p** : charge par unité de surface  
**R** : rayon d'un disque  
**R<sub>p</sub>** : rapport de charge  
**r** : distance radiale ( $\sigma_{\theta\theta}$ )  
**S** : densité d'énergie de déformation  
**w** : largeur d'une éprouvette  
**W** : énergie de déformation  
**da/dN, ds/dN** : vitesses de fissuration
- $\beta$**  : angle d'inclinaison des fissures  
 **$\Delta$**  : amplitude d'un facteur  
 **$\eta$**  : combinaison d'ordre 1 ou 2  
 **$\theta$**  : angle de bifurcation  
 **$\omega$**  : taille de zone plastique  
 **$\lambda$**  : rapport de chargement biaxial  
 **$\mu$**  : module de cisaillement  
 **$\nu$**  : coefficient de POISSON  
 **$\sigma, \Sigma$**  : contrainte de traction ou de cisaillement (selon indices)  
 **$\tau$**  : contrainte

indices, exposants

a : air

c, cr : critique

eff : efficace

h : huile

min : minimal(e)

max : maximal(e)

o : valeur initiale

s : relatif à l'énergie de déformation (*éventuellement* seuil)

I : relatif au mode I

II : relatif au mode II

III : relatif au mode III

\* : relatif à une fissure branchée

## Table des Matières

<b>1. RUPTURE ET FATIGUE EN MODE MIXTE</b>	
1.1 CONTRAINTES EN FOND DE FISSURE	7
1.1.1 Chargement quelconque	7
1.1.2 Chargement biaxial	8
1.1.3 Chargement uniaxial	9
1.1.4 Facteurs d'intensité de contrainte	10
1.2 PRINCIPAUX CRITERES DE RUPTURE EN MODE MIXTE	10
1.2.1 Critère de la contrainte tangentielle maximale	10
1.2.2 Critère de la densité d'énergie de déformation minimale	12
1.2.3 Critère du taux de restitution de l'énergie maximal	13
1.2.4 Critère de $k_1$	16
1.3 RUPTURE EN MODE MIXTE DE COMPRESSION	16
1.3.1 Fissure elliptique	16
1.3.2 Fissure linéaire	18
1.4 COMPARAISON DES CRITERES DE RUPTURE	20
1.5 FATIGUE EN MODE I	22
1.6 FATIGUE EN MODE MIXTE I + II	23
1.6.1 Traction uniaxiale	23
1.6.2 Compression uniaxiale	25
1.7 FATIGUE EN MODE II	28
1.8 CONCLUSION	29
<b>2. MECANIQUE DE LA RUPTURE ET FATIGUE—CONTACT : LA THEORIE DE L'USURE PAR DELAMINATION</b>	
2.1 CONTRAINTES ET DEFORMATION SOUS LA SURFACE DE CONTACT	30
2.1.1 Nature du contact	30
2.1.2 Nature des contraintes	31
2.1.3 Nature du chargement	33
2.1.4 Zone plastique	33
2.2 MECANISME DE PROPAGATION DES FISSURES LONGUES	34
2.2.1 Propagation	34
2.2.2 Vitesse	35
2.2.3 Zone de formation	35
2.2.4 Influence du coefficient de frottement	35
2.2.5 Influence du lubrifiant	35
2.3 FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE	36
2.4 MODELES – VALIDATION EXPERIMENTALE	36
2.5 AMORCAGE	39

2.6	APPROCHE ELASTO-PLASTIQUE	39
2.7	CONCLUSION	40
<b>3.</b>	<b>DISQUE BRESILIEN</b>	
3.1	CALCUL DES FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE DANS UN DISQUE CHARGE EN COMPRESSION	41
3.1.1	Historique	41
3.1.2	Champ de contraintes dans un disque non fissuré	42
3.1.3	Facteurs d'intensité de contrainte	44
3.2	CONDITIONS EXPERIMENTALES	46
3.2.1	Caractéristiques de l'éprouvette	46
3.2.2	Matériau	47
3.2.3	Mode opératoire	48
3.2.4	Préfissuration	48
3.2.5	Fissuration	49
3.2.6	Acquisition des données	49
3.2.7	Fissure équivalente	49
<b>4.</b>	<b>RESULTATS EXPERIMENTAUX</b>	
4.1	CHOIX DES ANGLES D'INCLINAISON	52
4.2	ANGLE DE BIFURCATION INITIAL	55
4.3	COURBES $a = f(N)$	59
4.3.1	Mode I	59
4.3.2	Mode I + II	60
4.3.3	Mode II impur	61
4.3.4	Nombre de cycles à l'amorçage	62
4.4	LOI DE PROPAGATION	65
4.4.1	Mode I	65
4.4.2	Mode mixte	66
4.5	OBSERVATIONS FRACTOGRAPHIQUES	67
4.5.1	Observations macroscopiques	67
4.5.2	Etude des faciès au M.E.B.	68
4.6	CONCLUSIONS	68
<b>5.</b>	<b>DISCUSSION</b>	
5.1	POSITION DU SUJET	74
5.1.1	Problème initial	74
5.1.2	Approche	75
5.2	ETAT DE CONTRAINTES	75
5.2.1	Contact statique	75

5.2.2	Contraintes dans un disque	76
5.3	CRITERE DE BIFURCATION	77
5.3.1	Bifurcation initiale	77
5.3.2	Bifurcation ultérieure	78
5.3.3	Simulation numérique de la trajectoire de la fissure	79
5.3.3.1	Chemins de fissure expérimentaux	79
5.3.3.2	Prévision des chemins de fissure	79
5.4	PROPAGATION	81
5.4.1	Mode I	81
5.4.2	Energie	82
5.4.3	Facteurs équivalents	82
5.4.4	Proposition de loi	84
5.5	INFLUENCE DU FROTTEMENT – MODE II IMPUR	86
5.5.1	Déplacement	86
5.5.2	Correction	87
5.5.3	Validité du critère proposé	88
5.5.4	Influence du lubrifiant sur le frottement	89
5.5.5	Influence du chevron	89
5.6	ROLE DU LUBRIFIANT	90
5.6.1	Mécanisme d'action de l'huile	90
6.	BILAN – PERSPECTIVES	104
A	DETERMINATION DES FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE D'UNE FISSURE BRANCHEE	
1	Aspect général du problème	106
2	Fissure monobranche ou asymétrique	107
2.1	Fissure à branche évanescence	107
2.2	Solution générale (b/a fini)	109
2.3	Chargement en mode mixte	111
3	Fissure à branches symétriques	112
3.1	Fissure à branches longues	114
3.2	Chargement en mode mixte	114
3.2.1	Traction	114
3.2.2	Compression	116
4	Fissure à ramification	118
4.1	Fissure à ramification simple (double branche)	118
4.2	Fissure à ramification double (double branche symétrique)	119
5	CONCLUSIONS	119

## Chapitre 1

### RUPTURE ET FATIGUE EN MODE MIXTE

#### 1.1 CONTRAINTES EN FOND DE FISSURE

##### 1.1.1 Chargement quelconque

Dans le cas général d'un problème plan d'élasticité, le calcul du champ des contraintes à la pointe d'une fissure dans un solide homogène, de forme et chargement extérieur quelconques (*figure 1.2a*), a été effectué par EFTIS et SUBRAMONIAN /1/, /2/, à partir de l'analyse de WILLIAMS /3/, /4/.

Les composantes des contraintes, définies en termes de séries, sont données jusqu'aux termes d'ordre 2 par les expressions suivantes (1.1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{5}{4} \cos \frac{\theta_o}{2} - \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta_o}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( -\frac{5}{4} \sin \frac{\theta_o}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta_o}{2} \right) + \sigma_t \cos^2 \theta_o \\ \sigma_\theta = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{3}{4} \cos \frac{\theta_o}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta_o}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( -\frac{3}{4} \sin \frac{\theta_o}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta_o}{2} \right) + \sigma_t \sin^2 \theta_o \\ \tau_{r\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( -\frac{1}{4} \sin \frac{\theta_o}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{3\theta_o}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{1}{4} \cos \frac{\theta_o}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta_o}{2} \right) - \sigma_t \sin \theta_o \cos \theta_o \end{array} \right.$$

avec :

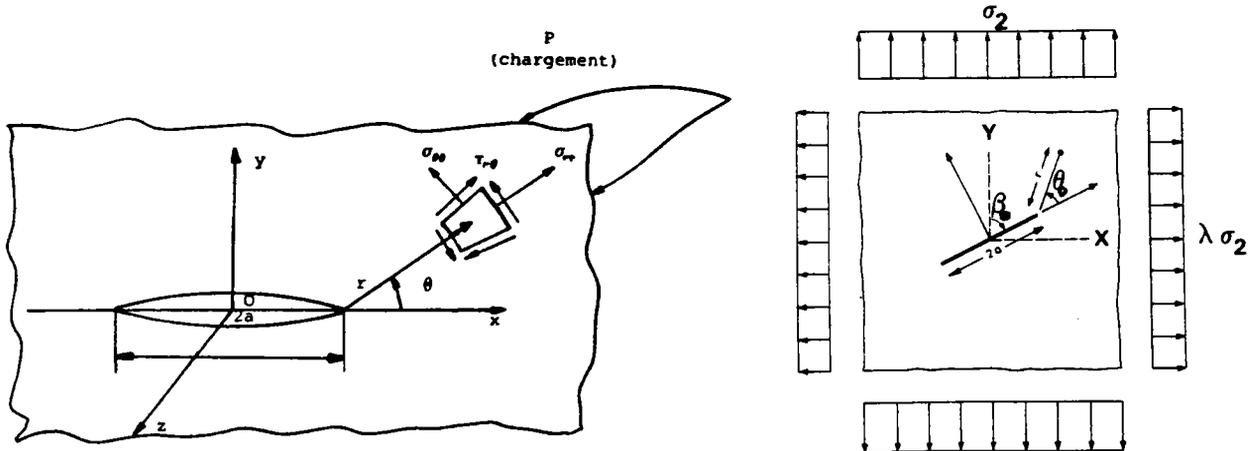
$K_I$  : facteur d'intensité de contrainte élastique en mode I, dû à l'ouverture de la fissure,

$K_{II}$  : facteur d'intensité de contrainte en mode II, dû au glissement parallèle des lèvres de la fissure,

$\sigma_t$  : terme du deuxième ordre.

Ces deux facteurs, qui s'expriment en  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ , ne dépendent que de la géométrie du corps fissuré et du type de chargement extérieur appliqué.

Au voisinage immédiat de la pointe de la fissure, c'est-à-dire lorsque la distance  $r$  tend vers zéro, on définit couramment le champ des contraintes par la solution dite *singulière*. Dans cette approximation, on néglige les termes du deuxième ordre en  $\sigma_i$  qui sont indépendants de  $r$ , en ne conservant que les termes du premier ordre dont la singularité est en  $1/\sqrt{r}$ .



- Figure 1.2 - Etat des contraintes : a. cas d'un chargement quelconque  
b. cas d'un chargement biaxial

### 1.1.2 Chargement biaxial

Dans le cas d'un chargement biaxial (*figure 1.2b*), EFTIS et SUBRAMONIAN ont défini les composantes des contraintes, dans un repère cartésien, par les expressions (1.2) :

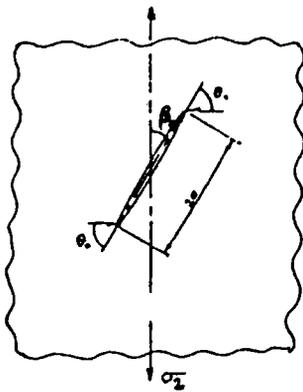
$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) + \sigma_2 (1 - \lambda) \cos 2\beta_0 \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) \end{aligned} \right.$$

où :

$$K_I = \frac{\sigma_2 \sqrt{\pi a}}{2} \left[ (1 + \lambda) - (1 - \lambda) \cos 2\beta_0 \right] \quad K_{II} = \frac{\sigma_2 \sqrt{\pi a}}{2} (1 - \lambda) \sin 2\beta_0 \quad (1.3)$$

avec  $\lambda = \sigma_1 / \sigma_2$  - rapport de chargement biaxial - et  $\sigma_t = \sigma_2 (1 - \lambda) \cos 2\beta_0$ .

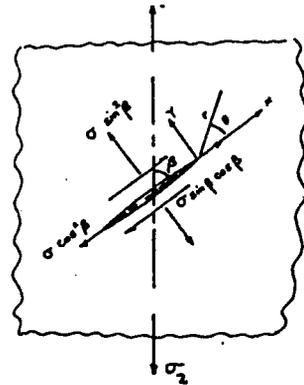




a.

- Figure 1.4 -

a. fissure inclinée en traction uniaxiale



b.

b. champ de contrainte

### 1.1.4 Facteurs d'intensité de contrainte

Le calcul des facteurs d'intensité de contrainte a fait l'objet de nombreuses études, tant en mode I pur qu'en mode mixte. En effet, leurs expressions varient avec la géométrie de l'éprouvette considérée ainsi qu'avec le type de chargement, et les méthodes utilisées sont nombreuses.

Nous nous limiterons par conséquent aux calculs indispensables à la présente étude (*chapitre 3*) et nous présenterons, en annexe, un résumé des principaux modèles de calcul des facteurs d'intensité de contrainte à la pointe d'une fissure dite branchée (non linéaire), facteurs qui seront notés par la suite  $k_1^*$  et  $k_2^*$ .

## 1.2 PRINCIPAUX CRITERES DE RUPTURE EN MODE MIXTE

La plupart des études concernant la propagation polymodale des fissures ont porté sur la rupture sous chargement monotone. Elles ont permis de dégager un certain nombre de critères de propagation qui inspirent ceux utilisés pour rendre compte de la propagation par fatigue. Aussi allons-nous passer brièvement en revue les plus courants.

### 1.2.1 Critère de la contrainte tangentielle maximale

Le critère de rupture proposé par ERDOGAN et SIH /6/ énonce qu'à la pointe d'une fissure, la rupture se produit dans une direction perpendiculaire à celle où la contrainte tangentielle  $\sigma_{\theta}$  est maximale, lorsque cette contrainte atteint une valeur critique  $\sigma_{\theta cr}$ .

A partir des expressions (1.2), la contrainte tangentielle singulière a pour équation :

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{\sqrt{\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta) \quad (1.5)$$

La direction  $\theta_0$  suivant laquelle  $\sigma_{\theta}$  est maximale est donnée par les solutions des équations ci-après :

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{pour} \quad \theta = \theta_0 \quad (1.6) \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\theta}}{\partial \theta^2} < 0 \quad (1.7)$$

Il y a plusieurs solutions à l'équation (1.6). Pour un chargement en mode mixte, la première solution  $\theta_0 = \pm \pi$  est triviale et correspond aux bords libres de la fissure. Les deux autres solutions sont données par l'égalité (1.8), la seule solution retenue étant celle qui donne la plus grande valeur de  $\sigma_{\theta}$ .

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} = \frac{1}{4} \left( \frac{K_I}{K_{II}} \right) \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{K_I^2}{K_{II}^2} + 8} \quad (1.8)$$

Il est à noter que la condition  $\partial^2 \sigma_{\theta} / \partial \theta^2 < 0$  est toujours vérifiée et que, pour ce critère, la direction de propagation  $\theta_0$  est indépendante de la nature du matériau, et plus particulièrement du coefficient de POISSON  $\nu$ .

**Remarque** : Il existe un critère dit de la *contrainte tangentielle maximale principale*, proposé par MAITI et SMITH /7/, /8/, peu différent, mais cependant distinct du précédent lorsque les composantes des contraintes ne sont pas définies uniquement par les termes singuliers. En effet, si l'on considère plus d'un terme dans les expressions du champ des contraintes – cf. (1.1) –, la direction donnée par  $\partial \sigma_{\theta} / \partial \theta = 0$  n'est pas principale. Par contre, celle donnée par  $\tau_{r,\theta} = 0$  l'est. Dans ce cas, MAITI et SMITH définissent le critère de la contrainte tangentielle maximale principale  $\sigma_{I_{max}}$ . Toutefois, l'écart entre les directions données par les deux critères reste faible.

OTSUKA et al. /9/ ont défini à partir de la contrainte tangentielle  $\sigma_{\theta}$  une quantité qu'ils appellent intensité de contrainte, notée  $K_{\sigma}$ , qui s'écrit simplement :

$$K_{\sigma} = \sigma_{\theta} \sqrt{2\pi r} = \cos \frac{\theta}{2} (K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta) \quad (1.9)$$

soit encore :

$$K_{\sigma} = K_I \cos^3 \frac{\theta}{2} - 3 K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (1.10)$$

La condition  $K_{\sigma}(\theta)_{\max} = \text{cte}$  est alors la condition critique pour que la propagation soit de traction. C'est également la condition de transition entre une propagation de traction et une propagation de cisaillement.

### 1.2.2 Critère de la densité d'énergie de déformation minimale

Par rapprochement avec le précédent que l'on désigne encore sous le nom de critère de SIH-1, celui-ci est communément appelé critère de SIH-2 /10/. En se plaçant toujours dans l'hypothèse d'un milieu élastique linéaire continu, l'énergie de déformation  $dW$  d'un élément infinitésimal  $dA$  situé à une distance  $r$  de la pointe d'une fissure chargée en mode mixte s'écrit sous la forme :

$$\frac{dW}{dA} = \frac{S}{r} + \text{termes non singuliers} \quad (1.11)$$

En mode mixte I + II (où  $K_{III} = 0$ ), la quantité  $S$  d'énergie de déformation a pour expression :

$$S = \frac{1}{\pi} (a_{11}K_I^2 + a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2) \quad (1.12)$$

les constantes  $a_{ij}$  étant fonction de l'angle  $\theta_0$ , ainsi que des propriétés élastiques du matériau, selon (1.13) :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{16\mu} [(1 + \cos \theta)(\kappa - \cos \theta)] \\ a_{12} &= \frac{1}{16\mu} \sin \theta [2 \cos \theta - (\kappa - 1)] \\ a_{22} &= \frac{1}{16\mu} [(\kappa + 1)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1)] \end{aligned}$$

où  $\mu$  désigne le module de cisaillement, et :

$$\begin{aligned} \kappa &= (3 - \nu)/(1 + \nu) \text{ en contraintes planes} \\ \kappa &= 3 - 4\nu \text{ en déformation plane} \end{aligned} \quad (1.14)$$

$\nu$  étant le coefficient de POISSON.

SIH /10/ propose un critère qui énonce que la rupture intervient dans la direction où  $S$  est

minimale ( $\partial S / \partial \theta = 0$ ) lorsque  $S_{\min}$  atteint une valeur critique,  $S_{cr}$ , proportionnelle à une distance de propagation initiale  $r = r_0$ , de sorte que la quantité  $S_{cr}/r_0$  reste constante le long du nouveau front de la fissure.

Le calcul de la direction de propagation conduit à deux minima de  $S$ , un minimum local avec  $\sigma\theta > 0$ , et un minimum global avec  $\sigma\theta < 0$ . Pour une bonne application du critère de SIH-2, SWEDLOW /11/ lui ajoute un corollaire qui précise que la direction effective de bifurcation  $\theta_0$  doit être associée à une contrainte tangentielle **POSITIVE**, quelle que soit la nature du chargement extérieur (traction ou compression).

Toutefois, CHANG /12/ signale deux cas où le corollaire de SWEDLOW n'est pas suffisant pour prévoir la direction de rupture de manière univoque, du fait de l'existence de deux minima relatifs de l'énergie de déformation associés à une contrainte tangentielle de traction ( $\sigma_\theta > 0$ ). Il cite l'exemple d'une fissure elliptique en traction uniaxiale pour laquelle l'angle initial d'inclinaison est de 10 degrés, ainsi que celui d'une fissure linéaire en compression uniaxiale, dans le cas où  $\beta_0$  vaut 89 degrés.

### 1.2.3 Critère du taux de restitution de l'énergie maximal

Un autre critère fréquemment rencontré dans la littérature est le critère du taux de restitution de l'énergie  $G$ , qui s'énonce de la façon suivante : *une fissure se propage dans la direction  $\theta_0$  où  $G$  est maximum et il y a rupture lorsque  $G_{\max}$  atteint une valeur critique  $G_{cr}$ .*

L'équation de GRIFFITH (1.15) exprime que l'énergie absorbée par l'extension de la fissure est proportionnelle aux surfaces créées dans le plan de celle-ci, en mode I pur. Son extension au mode I + II, selon (1.16), suppose implicitement que la fissure en mode mixte se propage suivant son plan initial, ce qui est en contradiction avec l'expérience où, souvent, la fissure ne se propage pas de façon coplanaire.

$$G = \frac{\kappa + 1}{8\mu} K_I^2 \quad (1.15)$$

$$G = \frac{\kappa + 1}{8\mu} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (1.16)$$

Plusieurs auteurs comme PALANISWAMY et KNAUSS /13/, HUSSAIN et al. /14/, NUISMER /15/, HWANG /16/, ICHIKAWA et TANAKA /17/ ont tenté d'obtenir une relation plus appropriée entre la quantité  $G$  et les facteurs d'intensité de contrainte qui tiennent compte de la direction de branchement  $\theta_0$  (cf. annexe A).

Considérons une fissure droite OA dans une géométrie infinie, soumise à un chargement plan ( $\sigma, \tau$ ) – *figure 1.5* – et la même fissure prolongée à son extrémité par une petite branche

OB, de longueur  $\Delta b$ , suivant un plan OD faisant un angle  $\theta_0$  avec la fissure droite OA (figure 1.6).

Soient :

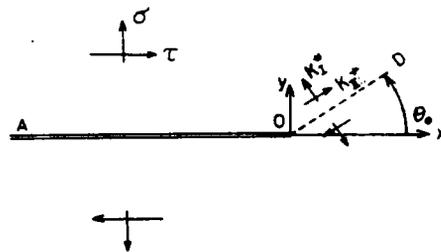
$K_I, K_{II}$  les facteurs d'intensité de contrainte en O

$k_{1B}^*, k_{2B}^*$  B

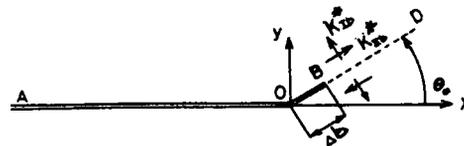
$k_{1B'}^*, k_{2B'}^*$  B'

$k_1^*, k_2^*$  au voisinage du point A

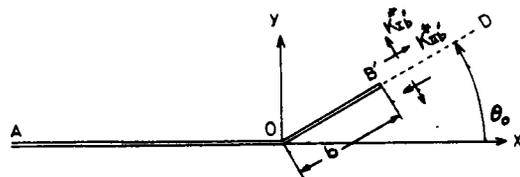
- Figure 1.5 -  
fissure droite chargée  
en mode mixte



- Figure 1.6 -  
amorçage d'une branche  
infinitésimale à partir  
d'une fissure droite



- Figure 1.7 -  
fissure à branche de  
longueur finie



Bien que les formes géométriques des fissures soient supposées identiques, on a généralement :  $k_1^* \neq K_I$  et  $k_2^* \neq K_{II}$ .

On appellera G le taux de libération d'énergie maximale pour l'amorçage de la branche

infinitésimale OB, et G(b) le taux nécessaire à la propagation de la partie branchée OB' le long du plan OD (figure 1.7).

Cependant, les formules exprimant G peuvent ne pas coïncider d'un auteur à l'autre. Ainsi, selon HUSSAIN /14/,

$$G = \lim_{b \rightarrow 0} G(b) = \frac{\kappa + 1}{8\mu} (k_{1B}^{*2} + k_{2B}^{*2}) \quad (1.17)$$

avec :  $k_{1B}^* = \lim_{b \rightarrow 0} K_I(b)$  et  $k_{2B}^* = \lim_{b \rightarrow 0} K_{II}(b)$ ,

alors que NUISMER /15/ supposant qu'il y a continuité dans le champ de contrainte, avant et après branchement, propose :

$$G = \lim_{b \rightarrow 0} G(b) = \frac{\kappa + 1}{8\mu} (k_{1B}^{*2} + k_{2B}^{*2}) \quad (1.18)$$

avec :  $k_1^* = \lim_{b \rightarrow 0} K_I(b)$  et  $k_2^* = \lim_{b \rightarrow 0} K_{II}(b)$ .

Avec les notations précisées ci-dessus, on constate que les valeurs de G obtenues en mode mixte par HUSSAIN et NUISMER sont définies, pour un même problème, par des facteurs d'intensité de contrainte différents.

ICHIKAWA et TANAKA /17/ considèrent qu'il reste à vérifier l'une des hypothèses avancées par ces deux auteurs où l'on suppose implicitement que l'énergie G est la limite de G(b) lorsque la branche tend vers zéro. Si, dans l'expression développée par TANAKA, on ne tient pas compte du mode III, on aboutit à une expression identique à celle de HUSSAIN et al. /xx/. Cependant, bien que les solutions de NUISMER et de HUSSAIN et al. soient fausses d'un point de vue théorique, elles donnent, pour des angles  $\theta_0$  de branchement compris entre 0 et 60 degrés, des résultats voisins de ceux d'AMESTOY et al. /18/ et de VITEK /19/ - cf. annexe A - .

Par suite, la détermination du taux de restitution de l'énergie maximale nécessaire à la propagation d'une fissure, repose sur des calculs aux limites qu'il convient de traiter avec prudence.

#### 1.2.4 Critère de $k_1^*$

AMESTOY, BUI et DANG VAN /18/ dans leur analyse d'une fissure présentant une branche dont la longueur tend vers zéro obtiennent une relation linéaire entre les facteurs d'intensité de contrainte avant branchement et ceux après branchement. D'après eux, il paraît plus naturel d'exprimer un critère de branchement de fissure en fonction des paramètres locaux, c'est-à-dire en fonction de  $k_1^*$  et de  $k_2^*$ , au lieu des paramètres de charge  $K_I$  et  $K_{II}$ .

Ainsi, compte tenu du fait que l'angle de branchement correspond au maximum du taux de restitution de l'énergie, que la fissure se propage localement en mode I ( $k_2^* = 0$ ), et ayant montré que  $G$  est proportionnel à  $k_1^{*2} + k_2^{*2}$ , ils envisagent l'équivalence suivante :

$$(dk_1^*/dm)(\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_2^*(\theta) = 0 \quad \text{avec } m = \frac{\theta}{\pi} \quad (1.19)$$

L'accord qu'ils observent entre ces deux critères est excellent (en traction).

### 1.3 RUPTURE EN MODE MIXTE DE COMPRESSION

Dans la littérature, le nombre de travaux consacrés à la rupture en mode mixte sous un chargement de compression est faible par rapport au nombre des études relatives à la traction. Néanmoins, nous pouvons citer les travaux de COTTERELL /20/, de KIPP et SIH /21/, ainsi que de WU et CHANG /22/, /23/ dans le cas où la fissure initiale est elliptique, et ceux de SWEDLOW /11/, de WOO et CHOW /24/ et de STEIF /25/ lorsqu'elle est linéaire.

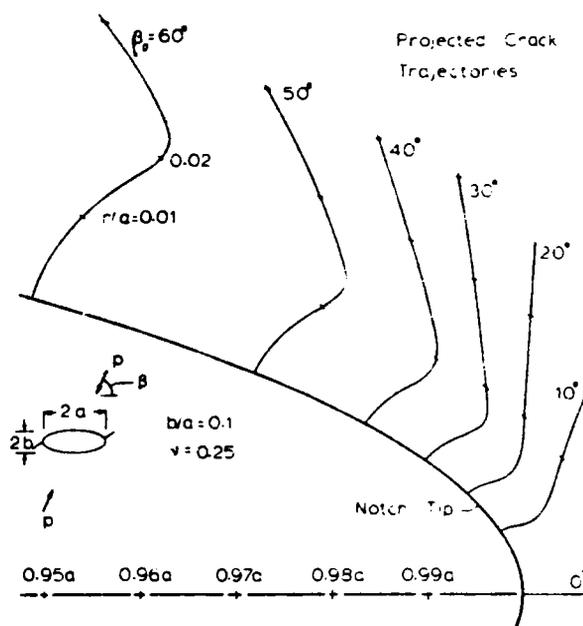
#### 1.3.1 Fissure elliptique

Pour réaliser ses essais, COTTERELL a utilisé des éprouvettes plates en verre présentant une entaille en forme d'ellipse, dont le rapport des axes  $b/a$  vaut 0,1. Durant les essais, l'auteur a observé que l'endroit où la fissure s'amorce se trouve à proximité immédiate de la pointe de l'ellipse lorsque  $\beta_0$  est inférieur à 47 degrés, alors que pour les valeurs supérieures, ce point d'amorçage se déplace en arrière de la pointe.

En utilisant le critère de la densité d'énergie de déformation minimale de SIH /10/, KIPP et SIH /21/ ont déterminé, en compression et en traction, le lieu et la direction de propagation en mode mixte pour une fissure elliptique. La *figure 1.8* indique le résultat de leurs calculs en fonction de l'angle  $\beta_0$ , dans le cas de la compression ( $b/a = 0,1$ ). CHANG et WU /23/ comparent, à la *figure 1.9*, les valeurs de  $\theta_0$  calculées par le critère de la déformation de

traction maximale en fonction de  $\beta_0$ , avec les valeurs théoriques de **KIPP** et **SIH** et les résultats expérimentaux de **COTTERELL**.

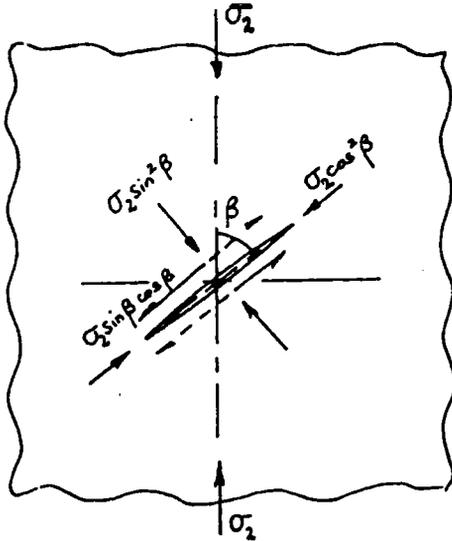
- Figure 1.8 -  
trajectoires de rupture  
théoriques : fissure  
elliptique en compression  
d'après /21/



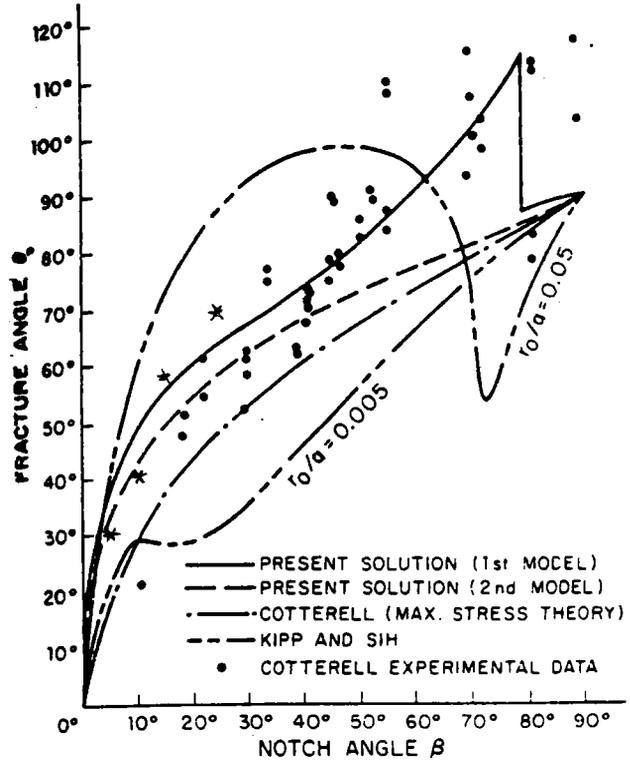
La **figure 1.9** indique que les valeurs de  $\theta_0$  déduites de l'un des modèles proposés par **WU** et **CHANG** pour reproduire les conditions expérimentales et théoriques de **COTTERELL** et de **KIPP** et **SIH**, sont en excellent accord avec les résultats des essais de **COTTERELL**. Sur cette même figure, on peut remarquer, dans l'évolution de la courbe de  $\theta_0$ , une discontinuité pour  $\beta_0 = 80$  degrés.

Dans le cas d'une fissure elliptique inclinée, chargée en compression, le problème du frottement entre les lèvres de la fissure ne se pose pas, comme dans le cas d'une fissure linéaire (**figure 1.10**), pour laquelle les faces opposées de la fissure peuvent venir au contact l'une de l'autre, voire s'interpénétrer. L'effet de frottement des surfaces en contact doit donc

théoriquement être pris en considération dans les expressions du champ des contraintes et des facteurs d'intensité de contrainte à la pointe de la fissure.



- Figure 1.10 -  
fissure en compression  
unaxiale : champ de  
contrainte



- Figure 1.9 -  
direction de propagation : comparaison entre le critère directionnel  
de WU et CHANG /23/ et les valeurs expérimentales de COTTERELL /20/

### 1.3.2 Fissure linéaire

Pour déterminer le champ de contraintes en présence de frottement, SWEDLOW /11/ ne se contente pas de remplacer la contrainte de chargement  $\sigma_2$  par  $-\sigma_2$  dans les expressions de  $\sigma_t$  données par l'équation générale (1.1). Il propose les expressions (1.20) suivantes, faisant intervenir le coefficient de frottement  $f$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( -\frac{5}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \sigma_2 (\sin^2 \theta - f \sin 2\theta) \sin^2 \beta_0 + \sigma_t \cos^2 \theta \\ \sigma_\theta = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( -\frac{3}{4} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \sigma_2 (\cos^2 \theta + f \sin 2\theta) \sin^2 \beta_0 + \sigma_t \sin^2 \theta \\ \tau_{r\theta} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right) - \sigma_2 (\sin \theta \cos \theta - f \cos 2\theta) \sin^2 \beta_0 \end{array} \right.$$

$$\text{avec : } \sigma_t = -\sigma_2 (\cos^2 \beta_0 - \sin^2 \beta_0)$$

En effet, SWEDLOW réfute une valeur négative pour  $K_I$ , ce qui, pour lui, est en contradiction avec la notion de mode I dont le rôle est de favoriser l'ouverture de la fissure.

L'expression du facteur  $K_{II}$  est donnée par :

$$K_{II} = -\sigma_2 \sqrt{\pi a} (\sin \beta_0 \cos \beta_0 - f \sin^2 \beta_0) \quad (1.21)$$

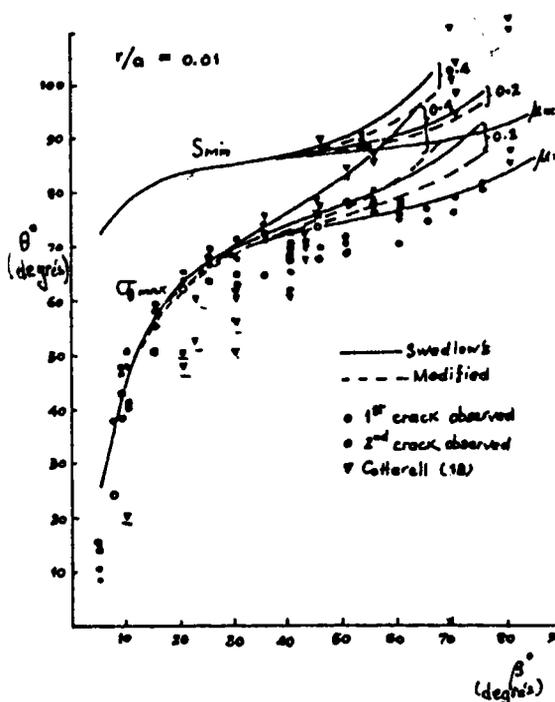
A partir de (1.21), pour qu'il y ait glissement entre les surfaces de la fissure, on doit vérifier la condition :

$$f \leq \cotg \beta_0 \quad (1.22)$$

WOO et CHOW /24/ proposent une modification du modèle de SWEDLOW qui consiste à ne pas tenir compte, dans les expressions des contraintes (1.22) des termes qui dépendent du coefficient  $f$ . Pour vérifier leur modèle, ils ont effectué des essais de rupture en mode mixte sur des éprouvettes en PMMA (*polymétacrylate de méthyle*).

La *figure 1.11* montre une comparaison des résultats expérimentaux obtenus avec les valeurs théoriques déduites du modèle de WOO et CHOW et du modèle de SWEDLOW pour différentes valeurs de  $f$ . D'après cette figure, c'est le critère de  $\sigma_{\theta \max}$  qui est expérimentalement le mieux vérifié en compression.

- Figure 1.11 -  
angles de bifurcation  
théoriques /11/, /24/  
et expérimentaux /20/ dans  
le cas d'une fissure linéaire  
chargée en compression  
en présence de frottement  
- WOO & CHOW /24/ -

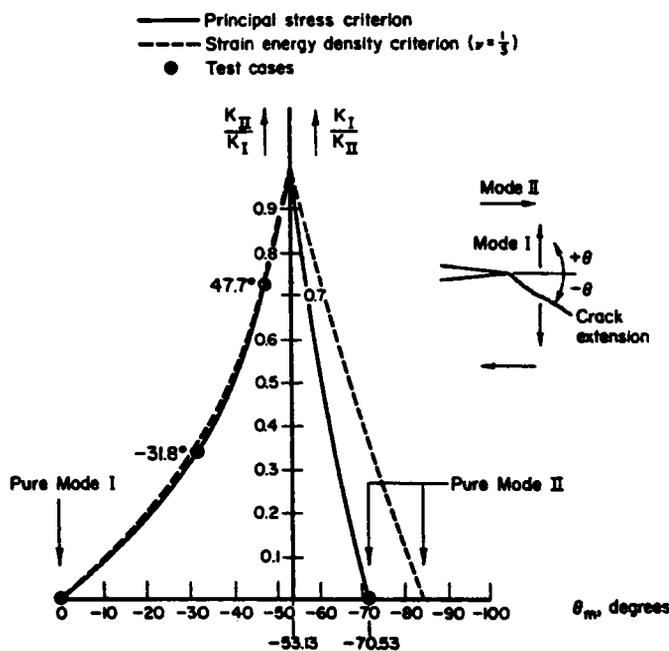


La différence entre les modèles de SWEDLOW et de WOO n'est pas très sensible (figure 1.11). Par contre, la différence est nettement plus importante en compression qu'en traction entre le critère de la contrainte tangentielle maximale  $\sigma_{\theta_{\max}}$  /6/ et celui de l'énergie de déformation minimale  $S_{\min}$  /10/.

#### 1.4 COMPARAISON DES CRITERES DE RUPTURE

En général, les dispersions des résultats expérimentaux ne permettent pas de différencier les critères de rupture en mode mixte, tant au niveau de la direction du branchement que de la charge à la rupture, sauf dans le cas où la composante du mode II est prépondérante ou lorsque le chargement appliqué est de compression. Dans ce dernier cas, on attribue la dispersion des résultats expérimentaux à la présence de frottement, qui est induit par le mouvement relatif entre les lèvres d'une fissure linéaire. Pour la plupart des essais effectués en mode mixte avec un chargement de compression, le critère de  $\sigma_{\theta_{\max}}$  est, de loin, le mieux vérifié.

BROEK et RICE /26/ comparent les valeurs des angles de bifurcation prédites par les critères de  $\sigma_{\theta_{\max}}$  et  $S_{\min}$ . Ils montrent que pour des valeurs du rapport  $K_{II}/K_I$  comprises entre 0 et 1, il y a coïncidence des deux critères ; au-delà, l'écart se creuse jusqu'à atteindre 15 degrés pour un chargement de mode II pur (figure 1.12).

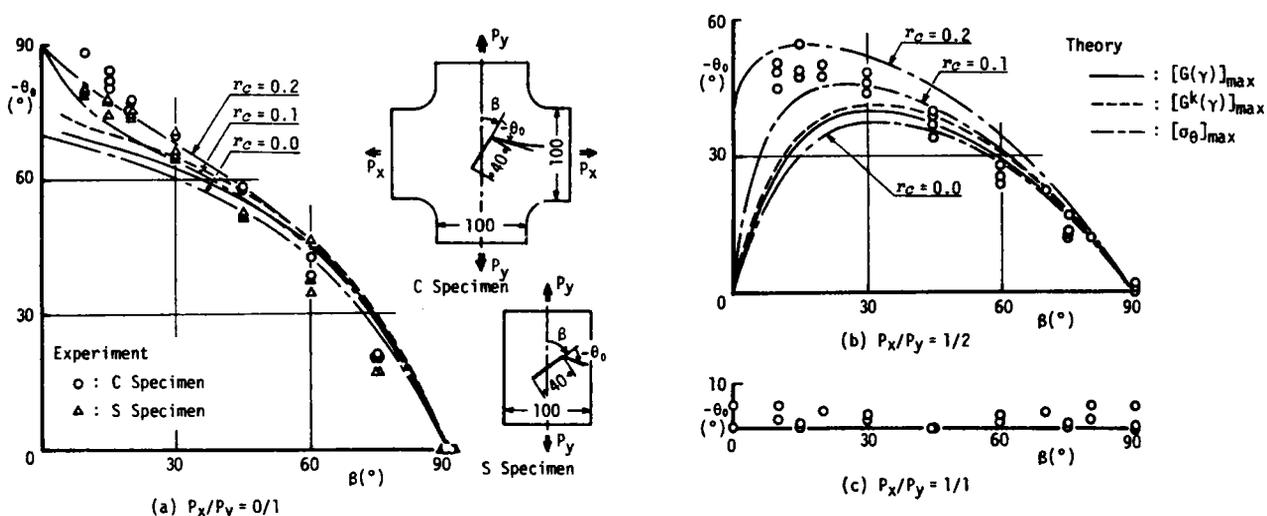


- Figure 1.12 -  
 directions de bifurcation  
 théoriques /6/, /10/  
 et expérimentales /26/

UEDA et al. /27/ comparent les valeurs prédites à l'aide des critères de  $\sigma_{\theta_{\max}}$  et de  $G_{\max}$  aux résultats d'essais expérimentaux sur deux géométries d'éprouvettes en PMMA (figure 1.13).

Cette figure prouve un excellent accord entre les valeurs théoriques et les résultats expérimentaux que le chargement soit uni- ou biaxial, et quel que soit l'angle initial d'inclinaison.

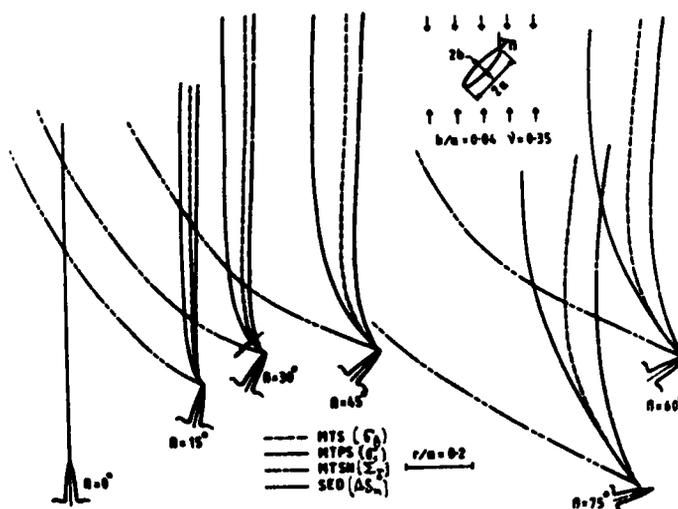
Une comparaison des critères de rupture en mode mixte, effectuée récemment par MAITI et SMITH /8/ révèle que l'adéquation des critères suivants :  $\sigma_{\theta_{max}}$ ,  $\sigma_{I_{max}}$ ,  $S_{min}$  varie avec le type de chargement. En effet, si les chemins de propagation sont pratiquement identiques en traction, ils sont sensiblement différents dans le cas de la compression, auquel cas le critère de  $S_{min}$  s'écarte totalement des autres, ainsi que le montre la figure 1.14 (entaille elliptique).



- Figure 1.13 -

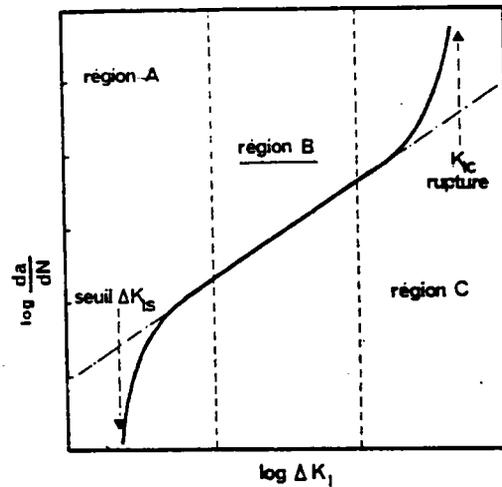
directions de propagation de fissure initiale en mode I + II expérimentale : PMMA /27/ et théoriques :  $\sigma_{\theta_{max}}$  /6/,  $G_{max}$  /27/ et  $G_{max}^*$  /14/

- Figure 1.14 -  
comparaison des chemins de fissure pour une fissure elliptique en compression uniaxiale  
- MAITI /8/ -



## 1.5 FATIGUE EN MODE I

Ce type de propagation est caractérisé par la relation entre l'accroissement de la fissure par cycle  $da/dN$  et l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K_I$  ; pour un rapport de charge  $R$  donné, où  $R = K_{Imin}/K_{Imax}$ , la courbe de vitesse  $da/dN = f(\Delta K_I)$  a l'allure de la *figure 1.15*.



- Figure 1.15 -  
Allure générale de la courbe  $da/dN - \Delta K_I$

On distingue habituellement trois zones :

- le domaine des faibles vitesses de fissuration : région A (*stade I*) dans cette zone, le cheminement de la fissure est souvent lié aux propriétés *crystallographiques* du matériau.
- le domaine des vitesses intermédiaires : région B ce domaine, encore appelé *stade II* de propagation, est caractérisé par la loi de **PARIS** :

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_I)^m \quad (1.23)$$

où  $C$  et  $m$  sont des constantes intrinsèques du matériau  
Les faciès de rupture sont alors caractérisés par des stries ductiles.

- le domaine des grandes vitesses de fissuration : région C Plus on se rapproche du facteur d'intensité de contrainte critique  $K_{IC}$  pour lequel se produit la rupture, plus on observe sur les surfaces de rupture les cupules qui sont caractéristiques des faciès à ce niveau de propagation. On suppose que dans cette partie

de la courbe, une proportion de plus en plus importante de rupture statique se superpose à la propagation par fatigue.

## **1.6 FATIGUE EN MODE MIXTE I + II**

La connaissance que l'on a du mode mixte repose en quasi-totalité sur les résultats fournis par des études portant sur des essais réalisés en traction, le cas d'un chargement de compression étant beaucoup plus rarement traité.

Par suite, les lois de propagation dont on peut disposer sont également issues de travaux concernant le mode mixte sous chargement de traction. C'est pourquoi nous allons simplement présenter les lois existant dans ce domaine sous forme de tableau.

### **1.6.1 Traction uniaxiale**

Le tableau ci-après n'est pas une liste exhaustive des lois de propagation que l'on rencontre en fatigue, mais seulement un aperçu de ce que les auteurs proposent en mode mixte dans le cas d'un chargement uniaxial de traction.

**Tableau 1. Principales lois de propagation  
de fissures en mode mixte sous chargement de traction uniaxial**

AUTEURS	Référence	Vitesse de propagation : da/dN =
XUNFANG et GUANGQIN	/28/	$C_{\eta} (\Delta\eta)^{m\eta}$
TANAKA	/29/	$C(\Delta K_{\text{eff}})^m$ avec : $\Delta K_{\text{eff}} = (\Delta K_I^4 + 8\Delta K_{II}^4)^{1/4}$
PUSTEJOVSKI	/30/	$f(\Delta\Sigma_{\text{Imax}})$ avec : $\Sigma_I = \sqrt{r} \left\{ \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} + \left[ \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{1/2} \right\}$
BADALANCE	/31/, /32/	
SIH et BARTHELEMY	/33/	$A (\Delta S_{\text{min}})^n$
PATEL et PANDEY	/34/	$C \left( \frac{4\pi\mu}{1-2\nu} \Delta S \right)^{m/2}$ (1)
CHINADURAI et al.	/35/	idem (avec restriction)
BROEK et RICE	/26/	$f(\Delta K_{\text{Ieq}})$ avec : $K_{\text{Ieq}} = K_I \cos^3 \frac{\theta_o}{2} - 3K_{II} \cos \frac{\theta_o}{2} \sin \frac{\theta_o}{2}$ ou : $K_{\text{Ieq}} = \left[ \frac{16\mu}{2(\kappa-1)} (a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2) \right]^{1/2}$
FLAVENOT et al.	/36/	$C(\Delta k_1^*)^m$ avec : $k_1^* = \frac{P \cos \beta}{B V w} f\left(\frac{a}{w}\right)$
HILLS et ASHELBY	/37/	$B(\omega_c)^{m/2}$ (2)

(1) Les coefficients C et m sont ceux obtenus pour l'expression de la vitesse en fonction de  $\Delta K_I$  (coefficients de PARIS)

(2)  $\omega_c$  désigne la taille de la zone plastique cyclique et m le coefficient de PARIS

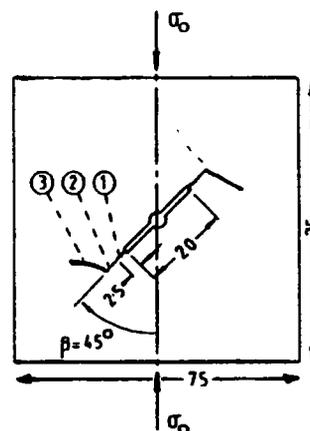
## 1.6.2 Compression uniaxiale

\* Pour ce type de chargement, les essais de fissuration de fatigue en mode mixte sont plutôt rares. SMITH /38/ a utilisé l'éprouvette C.C.P. à entaille inclinée, chargée en compression uniaxiale pour réaliser des essais de fissuration en mode II pur, en vue d'aborder le problème de fatigue-contact, où les pressions de HERTZ jouent un rôle important dans le phénomène d'apparition des fissures.

Ces éprouvettes en aluminium, de caractéristiques géométriques identiques à celles de TANAKA /29/, préfissurées en mode I, ont été ensuite fissurées avec pour un rapport de charge R égal à 0,1 et différentes valeurs de l'angle  $\beta_0$ .

Ces travaux montrent qu'en compression, la fissure se propage de quelques millimètres suivant sa direction initiale (celle du mode II pur) puis bifurque ou se bloque (figure 1.16). L'auteur explique ce processus de blocage par la présence de frottement entre les lèvres de la fissure en contact, la longueur des surfaces en contact augmentant avec l'accroissement de la longueur de fissure.

- Figure 1.16 -  
Fissure inclinée chargée  
en compression, d'après /38/  
1 longueur de préfissuration  
2 longueur de propagation en mode I  
3 branchement de la fissure  
(propagation en mode I)



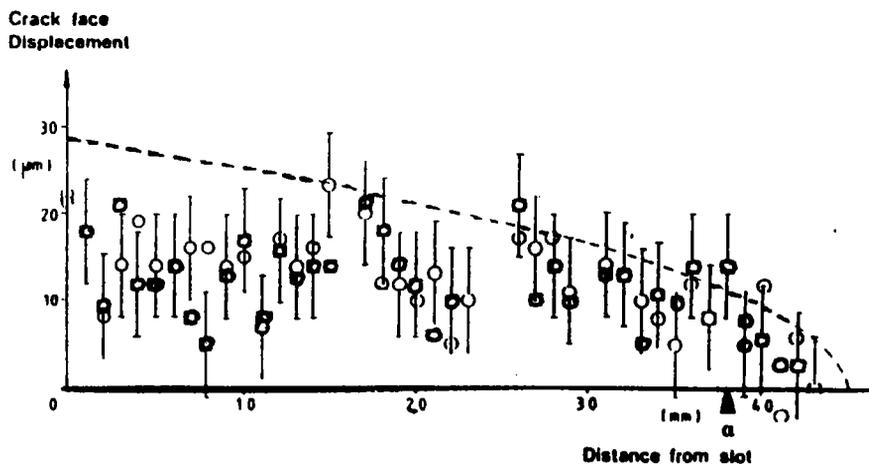
Des analyses fractographiques révèlent alors deux sortes de faciès de rupture : l'un présentant des stries de fatigue caractéristiques de la traction, l'autre des cupules de forme sphérique typiques de la fatigue-contact en présence de cisaillement.

Quant à la direction de branchement, les angles  $\theta_0$  obtenus en compression pour différentes valeurs de  $\beta_0$  sont comparés à ceux obtenus en traction par TANAKA (tableau 2). Eu égard au faible nombre des essais, il est délicat d'avancer des conclusions qualitatives quant à l'influence du type de sollicitation sur la direction de bifurcation  $\theta_0$ .

**Tableau 2. Comparaison des directions de bifurcation pour des fissures de fatigue inclinées en traction /29/ et en compression /38/**

$\beta_0$ (degrés)	$\theta_0$ (degrés)	
	Traction	Compression
90	0	—
72	28	—
60	—	56
45	49	76,5
30	52	63

\* SMITH /39/ a également étudié l'évolution des déplacements des lèvres de la fissure suivant la direction de l'entaille mécanique. Les déplacements relatifs des repères tracés perpendiculairement à l'entaille sont mesurés optiquement.



- Figure 1.17 -

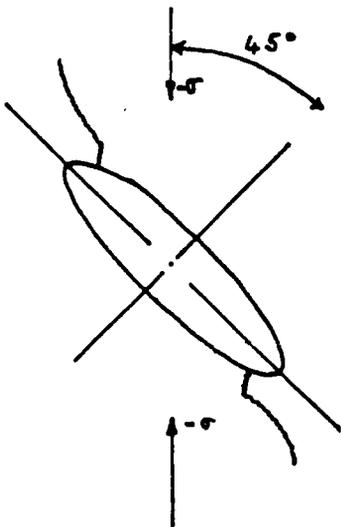
Mesures des déplacements statiques des lèvres de la fissure chargée en compression (éprouvette C.C.P.), d'après /39/.  
 points expérimentaux                      points calculés

Il ressort de ces mesures effectuées en trois temps (N = 1, 54750 et 275000 cycles) qu'au premier cycle de chargement, le déplacement au niveau de la pointe de la fissure est au moins trois fois inférieur à celui mesuré 2,5 mm en arrière. Immédiatement après branchement

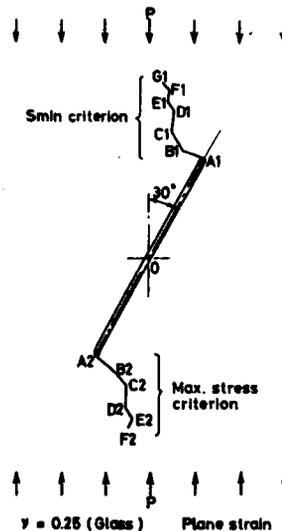
(275000 cycles), cet écart devient négligeable (*figure 1.17* – la pointe de la fissure est indiquée par la lettre a).

\* Par la suite, BRIGGS et SMITH /40/ ont fissuré, en compression, des éprouvettes C.C.P. en aluminium, à entaille elliptique inclinée à 45 degrés. Les résultats expérimentaux indiquent que l'amorçage des fissures s'effectue perpendiculairement à la surface de l'entaille (*figure 1.18*). Après une fissuration sur une longueur de 2 mm environ, il se produit un changement brutal dans la direction de propagation et dans le taux d'accroissement de la vitesse de fissuration (qui passe ici de  $5 \cdot 10^{-6}$  mm/cycle à  $10^{-4}$  mm/cycle).

Un calcul des facteurs d'intensité de contrainte basé sur les fonctions de GREEN, indique que le point où la fissure change de direction correspond à une égalité entre  $K_I$  et  $K_{II}$ .



- Figure 1.18 -  
Trajectoire d'une fissure de fatigue en compression (entaille elliptique inclinée à 45 degrés), d'après /40/



- Figure 1.19 -  
Trajectoire d'une fissure de fatigue en compression. Comparaison des critères de  $\sigma_{\theta_{max}}$  et  $S_{min}$ , d'après /41/

\* MIYAMOTO et al. /41/ ont simulé la propagation d'une fissure elliptique chargée en compression pour  $\beta_0 = 30$  degrés, en suivant les incréments de propagation donnés par les critères de  $\sigma_{\theta_{max}}$  et de  $S_{min}$ . Les résultats du calcul indiquent que les fissures se propagent en zigzag vers la direction de la charge appliquée, et que l'allure du chemin suivi est identique pour les deux critères (*figure 1.19*).

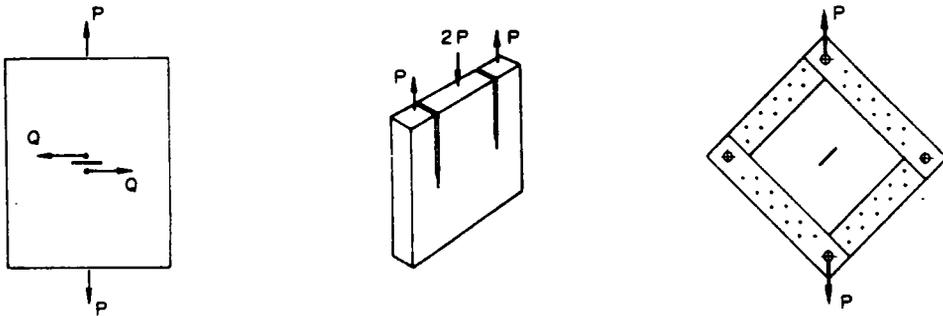
Les facteurs d'intensité de contrainte sont estimés par un calcul aux éléments finis en supposant que l'effet du frottement entre les surfaces en contact est négligeable.

### 1.7 FATIGUE EN MODE II

Bien que le principe de la fissuration de fatigue en mode II soit simple de prime abord, sa réalisation pratique l'est nettement moins.

Les essais réalisés par SIH et ERDOGAN /6/, en rupture, indiquent qu'en mode II pur, celle-ci ne se produit pas. L'éprouvette plate en plexiglas (PMMA) qu'ils ont utilisée est présentée à la *figure 1.20*. Les charges de cisaillement concentrées sont appliquées de part et d'autre des lèvres de l'entaille centrale.

JONES et CHISHOLM /42/ ont choisi une éprouvette de cisaillement compacte en alliage d'aluminium, présentant deux fissures en bout identiques. Leurs essais ont montré que  $K_{IIc}$  est supérieur à  $K_{Ic}$  de 5 %.



- Figure 1.20 - a. chargement étudié par ERDOGAN  
 b. éprouvette de mode II pur de POOK  
 c. éprouvette - cadre de TOOR

TOOR /43/ utilise une éprouvette en alliage d'aluminium d'une épaisseur de 3 mm qui présente en son centre une fissure inclinée à 45 degrés. L'éprouvette est entourée d'une armature rigide (cadre) pour éviter le fluage, d'où son nom - *figure 1.20c* -. Du fait de la dispersion des résultats, les vitesses de propagation en mode I et en mode II n'ont pas pu être comparées. En outre, une propagation en mode II est difficilement réalisable, la branchement de la fissure conduisant rapidement à une propagation en mode I. Dans certains cas même, il apparaît une composante de mode III.

POOK /44/ a étudié le seuil de non-fissuration d'un acier doux au moyen de l'éprouvette

représentée à la *figure 1.20c*. Sous un chargement de mode II, la fissure bifurque alors selon un angle de 70 degrés par rapport à la direction initiale.

L'amplitude du facteur d'intensité de contrainte de la fissure branchée est approximativement donné par :  $\Delta k_1^* = 3\Delta K_{II} \cos^2(\theta/2) \sin(\theta/2)$  – à rapprocher du critère de  $\sigma_{\theta_{max}}$  –. Une fissure sollicitée en mode II pur bifurque dans la direction où sa composante d'ouverture est maximale. En conséquence, **POOK** considère qu'une fissure sollicitée en mode II ne se propage pas lorsque l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte dans la direction de branchement est inférieure à une valeur limite, notée  $\Delta k_{1s}^*$  (*s* comme *seuil*) ce qui conduit à la relation :

$$\Delta K_{II_s} = 0,87 \Delta k_{1s}^* \quad (1.24)$$

Les résultats expérimentaux vérifient assez bien cette hypothèse.

## 1.8 CONCLUSION

Les données disponibles dans la littérature concernant la fatigue en mode mixte proviennent d'essais réalisés au moyen d'éprouvettes de géométries variées soumises dans la quasi-totalité des cas à un chargement de traction.

Ce sont les mêmes critères que ceux utilisés en rupture qui permettent de prévoir la direction initiale de propagation – nous parlerons également de bifurcation –, ainsi qu'éventuellement la trajectoire des fissures de fatigue dans les rares cas où cela est traité.

La diversité des lois de propagation proposées traduit dans une certaine mesure le désaccord entre les auteurs quant à l'influence de la composante de mode II sur la vitesse, qui apparaît avoir tantôt un effet accélérateur (*/29/*, */30/*, */36/*), tantôt un effet retardateur (*/26/*, */35/*), ou même ne pas avoir d'effet du tout (*/28/*).

**Chapitre 2**  
**MECANIQUE DE LA RUPTURE ET FATIGUE – CONTACT**  
**LA THEORIE DE**  
**L'USURE PAR DELAMINATION**

Depuis l'introduction de la théorie de l'usure par délamination en 1973 par SUH /45/, /46/, afin d'expliquer l'usure des métaux et autres solides, l'applicabilité de la mécanique de la rupture au phénomène de fatigue – contact a fait l'objet d'études nombreuses. Selon cette théorie, la formation de particules d'usure est le résultat de la déformation plastique d'une couche superficielle d'épaisseur finie, de la formation de vides/fissures et de la propagation de fissures en sous – couche.

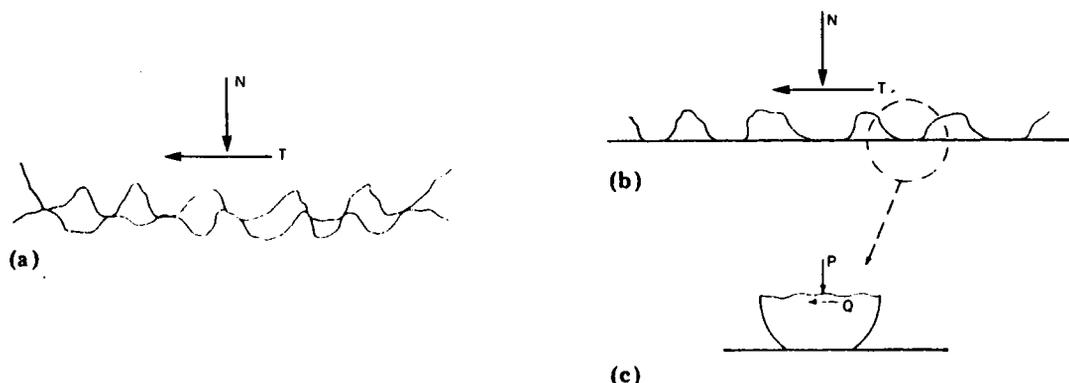
Partant du fait que les deux types de fissure (fatigue et usure) sont soumis à un chargement cyclique et qu'elles croissent par incréments, FLEMING et SUH /47/, /48/ ont assimilé la propagation de fissure par délamination à un processus de propagation en fatigue, et ont tenté d'établir, à partir de données expérimentales, la corrélation entre vitesse d'usure et vitesse de fatigue.

## **2.1 CONTRAINTES ET DEFORMATION SOUS LA SURFACE DE CONTACT**

### **2.1.1 Nature du contact**

Toute surface usinée présente des aspérités. Lorsque deux surfaces glissantes entrent en contact, les charges normale et tangentielle sont transmises par adhésion et "labourage" (*plowing*). Les aspérités de la surface la plus tendre sont facilement déformées, et certaines sont rompues suite à l'action répétée du chargement. Il se forme une surface relativement lisse lorsque ces aspérités sont déformées ou qu'elles sont éliminées. Le contact entre les deux

surfaces qui, initialement, est un contact aspérité–aspérité, évolue ainsi très rapidement vers un contact aspérité–plan (*figure 2.1*).



- Figure 2.1 - Contact de deux surfaces glissantes :  
a. modèle physique    b. modèle idéal    c. modélisation d'un contact unique

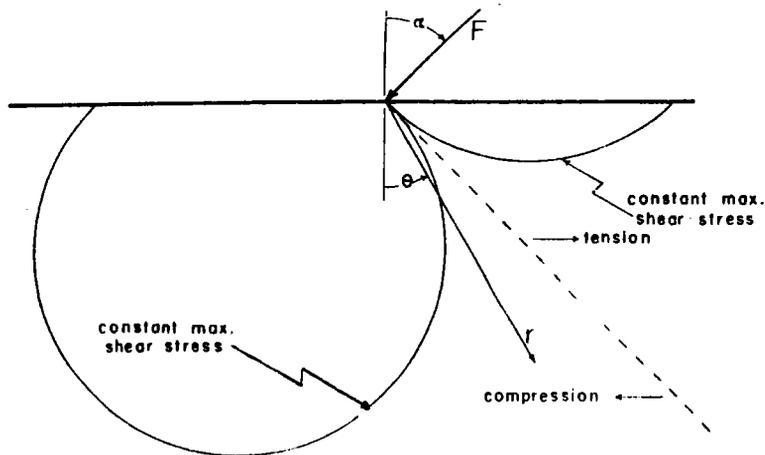
Chaque point le long de la surface la plus tendre subit un chargement cyclique, lorsque ces aspérités la labourent. L'interaction entre les contacts est faible car la distance entre les contacts par aspérités est généralement très grande par rapport à la taille réelle de la zone de contact.

### 2.1.2 Nature des contraintes

La traction en surface exercée par les aspérités les plus dures sur la surface tendre provoque une déformation de cisaillement plastique qui s'accumule avec le chargement répété (l'incrément de déformation permanente par passage des aspérités est faible en comparaison de la déformation plastique par passage). Au fur et à mesure que la déformation en sous-couche se produit, il y a formation (*nucléation*) de fissures en-dessous de la surface. Une nucléation tout près de la surface n'est pas favorisée à cause de la triaxialité de l'état des contraintes (très fortement compressives) qui existe immédiatement en-dessous des zones de contact.

L'analyse des contraintes présentée par JAHANMIR et SUH /40/ montre que la sous-couche en avant de l'aspérité qui se déplace est dans un état plastique, alors que la région située en arrière de l'aspérité est dans un état élastique (*figure 2.2*). En outre, le fond de fissure est

en compression dans la plus grande partie de la zone plastique, et en traction dans la zone élastique.



- Figure 2.2 - Charge ponctuelle sur un demi-espace

Quant aux imperfections au niveau de la surface, elles se ferment très facilement sous l'action du cisaillement, aussi bien en avant qu'en dessous de l'aspérité qui glisse. De plus, la composante de la contrainte normale parallèle à la surface passe de traction en compression à une faible distance de la surface, ce qui empêche les fissures de surface de se propager très profondément.

Par contre, une fissure en sous-couche parallèle à la surface subit un chargement cyclique de traction-compression à chaque passage d'une aspérité sur la surface, ce qui provoque une propagation de la fissure sur une petite distance.

**\* Influence des contraintes résiduelles :** HILLS et ASHELBY /50/, suite à des observations conduites sur PMMA (*Perspex*), affirment que ce sont les contraintes résiduelles (de traction) qui sont responsables de la propagation des fissures. Par contre, FLEMING et SUH /47/, de même que MERWIN et JOHNSON /51/ considèrent que les contraintes résiduelles n'affectent pas la propagation des fissures.

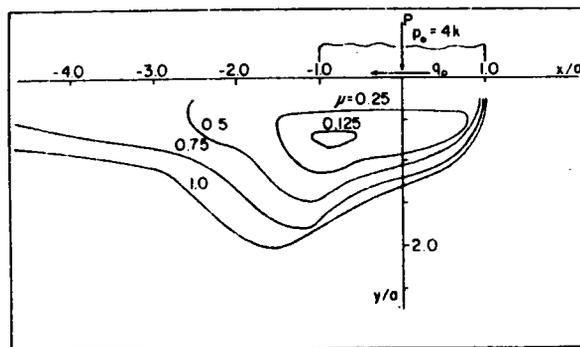
En fait, suivant l'amplitude de la charge, on a affaire à deux comportements différents : pour de faibles charges, on se trouve en-dessous de la limite élastique en tout point du matériau et il n'y a pas apparition de contraintes résiduelles ; par contre, pour des charges comprises entre la limite d'élasticité et la limite d'adaptation ("*shakedown*"), on introduit des contraintes résiduelles lors du premier cycle de chargement seulement. Au-delà de la limite d'adaptation, l'état des contraintes résiduelles évoluera au cours des cycles suivants /52/.

### 2.1.3 Nature du chargement

Dans l'hypothèse générale de déformation plane, le mode III est exclu /7/. La plupart des auteurs sont d'avis qu'il s'agit d'une combinaison de mode I et de mode II (le plus souvent compression et cisaillement combinés).

### 2.1.4 Zone plastique

La déformation plastique ainsi que la profondeur de la zone plastique dépendent de la traction réelle en surface. JAHANMIR et SUH /49/ utilisent la méthode de MERWIN et JOHNSON /51/ pour déterminer la taille de la zone plastique. La *figure 2.3* montre que celle-ci augmente avec le coefficient de frottement  $f$  entre les surfaces en contact. Lorsque ce coefficient est inférieur à 0,5, la zone plastique est en-dessous de la surface, mais elle s'étend vers la surface pour des valeurs supérieures.



- Figure 2.3 - Zone plastique : évolution avec le coefficient de frottement

Dans un solide élastique parfaitement plastique, l'amplitude de la déformation plastique qui s'est accumulée à une certaine profondeur par cycle reste constante si l'amplitude de la traction de surface n'est pas modifiée. Cela implique que la déformation plastique peut s'accumuler indéfiniment lorsque deux surfaces glissent l'une sur l'autre jusqu'à ce que la couche superficielle soit délaminée. La connaissance de la taille de la zone plastique est un des points faibles des études précitées. Nous verrons au *paragraphe 2.6* comment elle a été intégrée aux modèles.

## 2.2 MECANISME DE PROPAGATION DES FISSURES LONGUES

### 2.2.1 Propagation

Selon SUH /46/, dès l'apparition de fissures (résultant d'un processus de nucléation, ou du fait de vides pré-existants), poursuivre le chargement et la déformation provoque une extension et une propagation des fissures, qui se rejoignent alors. Les observations montrent que les fissures ont tendance à se propager parallèlement à la surface à une profondeur dictée par les propriétés du matériau et le coefficient de frottement, et sur une certaine distance, avant de s'infléchir vers la surface. Si les fissures ne peuvent pas se propager, à cause d'une déformation limitée, ou d'une traction tangentielle extrêmement faible au niveau du contact de l'aspérité, c'est la nucléation qui régit la vitesse d'usure.

Lorsque ces fissures finissent par déboucher en surface (à certains emplacements présentant des défauts), il y a délamination de la matière sous la forme de lamelles longues et minces dont l'épaisseur est celle de la profondeur à laquelle il y a propagation de la fissure, profondeur elle-même gouvernée par les charges normale et tangentielle au niveau de la surface.

Une fissure qui est soumise à un chargement de cisaillement pur s'écarte rapidement de son propre plan. En roulement, ce n'est pas le cas, et cela pour deux raisons :

1. tout d'abord, la fissure est soumise à deux composantes de cisaillement (théoriquement) égales et de sens opposé à chaque passage de la charge. On pourrait donc s'attendre à une trajectoire légèrement sinueuse, mais globalement droite. Cependant, lorsque la charge n'est pas au-dessus de la fissure, il est probable que l'une des composantes aura une plus grande amplitude, ce qui provoquera un changement de direction ;
2. d'autre part, la fissure peut se propager essentiellement sous l'action de *contraintes résiduelles*, auquel cas c'est dans son propre plan qu'elle se propagera de la manière la plus stable.

D'après FLEMING et SUH /47/, la fissure a tendance à se fermer dans la zone de compression, et les contraintes normales seront transmises à travers la fissure. Comme près de la surface les contraintes de compression sont élevées, les lèvres d'une fissure s'y trouvant vont se fermer mécaniquement et transmettre les contraintes de cisaillement. La fissure ne peut se propager que si la fissure et le contact sont situés de telle sorte qu'une partie de la fissure se trouve dans la zone de traction et seule cette partie pourra se propager.

### 2.2.2 Vitesse

L'une des clés de la compréhension, de la prévision et de la minimisation de l'usure est la connaissance du mécanisme qui détermine la vitesse d'usure : formation ou propagation des fissures ? En général, la propagation se révèle être le processus déterminant, en tant que phase la plus lente : c'est le cas, par exemple, des métaux de moyenne résistance à la traction et de forte ténacité lorsque le frottement est important. Mais si la déformation est limitée ou si la traction tangentielle est très faible au niveau du contact, l'inverse se produit. Ce peut être le cas des métaux à haute résistance et faible ténacité lorsque le coefficient de frottement n'est pas élevé /49/.

### 2.2.3 Zone de formation

JAHANMIR et SUH /49/ montrent que la formation de vides (fissures) est possible dans une région située sous le contact, et que la taille et la profondeur de cette zone augmentent avec le coefficient de frottement et la charge normale. Par ailleurs, le nombre de passages nécessaire à la nucléation à une profondeur donnée diminue lorsque le coefficient de frottement entre les surfaces augmente.

### 2.2.4 Influence du coefficient de frottement

Il convient de distinguer le frottement intervenant au niveau des deux surfaces en contact (que l'on notera  $f_c$ ) de celui éventuellement présent entre les lèvres de la fissure ( $f$ ).

- profondeur de propagation : elle augmente avec le coefficient de frottement  $f$ .
- taille des particules d'usure : leur épaisseur est une fonction croissante de  $f$ .

### 2.2.5 Influence du lubrifiant

Le rôle du lubrifiant est d'éviter ou de minimiser les contacts métal-métal, en réduisant la composante tangentielle de la traction de surface et en répartissant la charge normale sur une plus grande surface.

L'épaisseur du film lubrifiant est un paramètre qui, avec la rugosité des surfaces, gouverne le régime de lubrification, régime qui influence lui-même fortement la tenue en fatigue de contact.

## 2.3 FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE

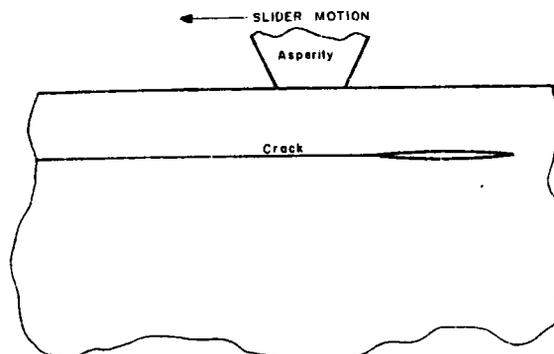
L'analyse faite par JAHANMIR et SUH /49/ révèle que les facteurs d'intensité de contrainte atteignent des valeurs maximales à une distance finie en-dessous de la surface. Par suite, les fissures présentes à cette profondeur se propageront plus rapidement que celles situées ailleurs que dans cette région.

D'après FLEMING et SUH /47/, pour une taille de contact donnée, il existe une seule profondeur et une seule longueur de fissure efficace pour lesquelles le facteur d'intensité (sans précision) est maximal.

L'ordre de grandeur des facteurs d'intensité de contraintes calculés est un point faible des études citées ici. Nous reviendrons sur cet aspect important au paragraphe 2.6.

## 2.4 MODELES – VALIDATION EXPERIMENTALE

FLEMING et SUH /47/ proposent un modèle physique choisi consistant en un demi-espace en déformation plane en contact avec une seule aspérité, contenant une fissure droite parallèle à la surface (figure 2.4).



- Figure 2.4 - Un modèle de fissure en sous-couche en glissement /47/

La mécanique de la rupture linéaire élastique est applicable ici à condition que :

- les contraintes nominales soient élastiques,
- la surface autour de l'extrémité de la fissure soit en déformation plane,
- la zone plastique dans cette région soit petite par rapport aux plus petites dimensions du contact.

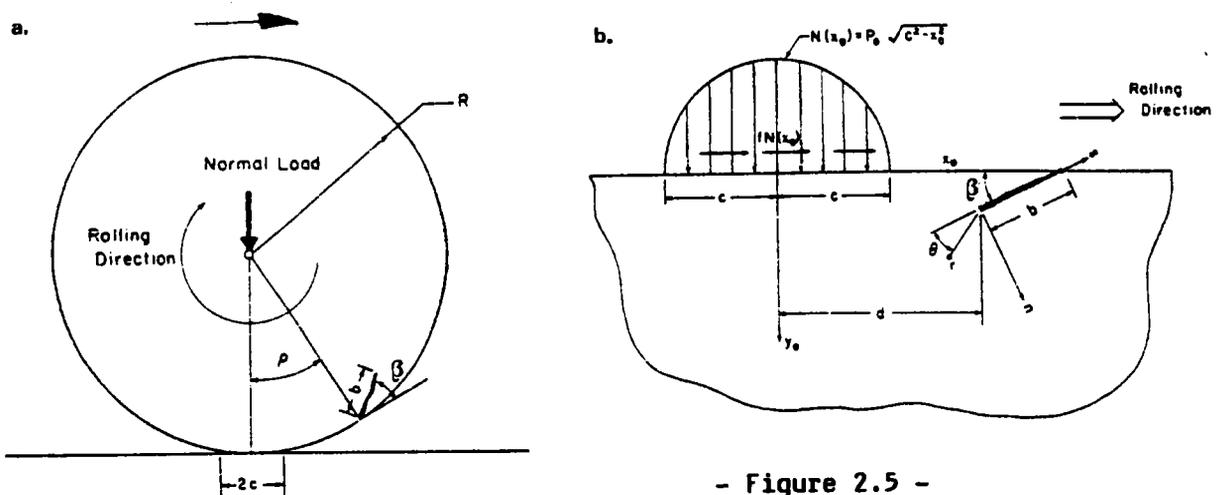
Les deux premières conditions étant remplies, FLEMING et SUH /47/ vérifient la troisième

en calculant les facteurs d'intensité de contrainte. Puis, en s'inspirant de la loi de PARIS, ils développent une équation permettant de prévoir la vitesse d'usure (régie par la vitesse de propagation de fissure), pour un coefficient de frottement supérieur à 0,5.

Les faibles valeurs des facteurs d'intensité de contrainte et, par suite, des vitesses d'usure obtenues par les auteurs ont amené HILLS et ASHELBY /50/, /53/, /54/ à améliorer le modèle de FLEMING et SUH en considérant une distribution de charge à la surface du contact (au lieu d'un contact unique). Ils obtiennent ainsi des vitesses d'usure plus réalistes.

ROSENFELD /55/ confirme les résultats de FLEMING et SUH, mais attribue un rôle majeur au frottement entre les lèvres d'une fissure en sous-couche, avant de s'orienter vers une analyse élasto-plastique /56/, /57/ (cf. §2.6).

KEER et BRYANT /58/ simulent un cycle de roulement de la manière suivante (figure 2.5) : lorsque le disque contenant la fissure se déplace d'une distance  $\rho R$  (rotation d'un angle  $\rho$ ), tout se passe comme si la zone de contact s'était rapprochée d'une distance  $\rho R$  de la fissure ; comme  $R \ll b$  et  $R \ll c$ , le disque fissuré est assimilé à un demi-espace (fissuré) soumis à des contraintes hertziennes de chargement. Un cycle peut donc être remplacé par un déplacement de ces contraintes à la surface du demi-espace dans une direction opposée à celle du roulement ( $b$  désigne ici la longueur de la fissure et  $c$  la demi-longueur du contact).

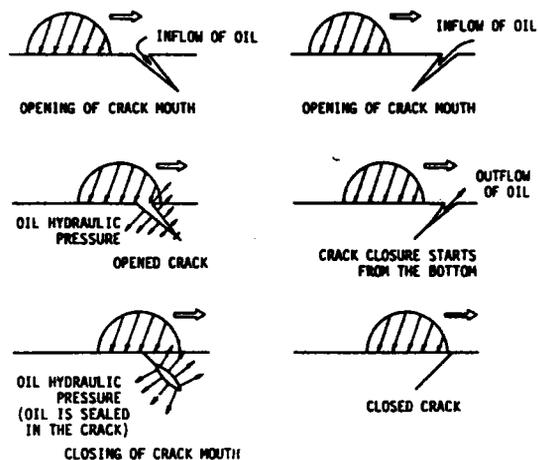


- Figure 2.5 -  
d'après /58/

- a. Disque fissuré en roulement
- b. Simulation : demi-espace élastique fissuré chargé (contraintes de HERTZ)

Remarque : Aucune justification n'est donnée du choix d'un angle initial d'inclinaison de 25 degrés.





- Figure 2.7 - Action de l'huile au sein de la fissure, d'après /60/

## 2.5 AMORCAGE

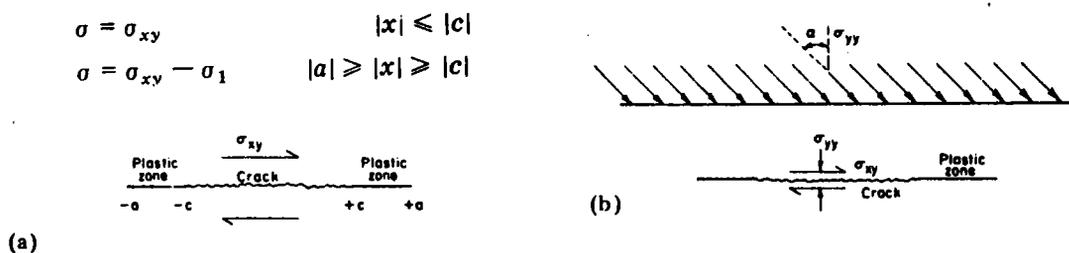
La question essentielle est : les fissures s'amorcent-elles au niveau de la surface ou bien en sous-couche ? ou encore : quel est le critère d'amorçage ? Cela dépend de l'état de contraintes, ainsi que du déplacement relatif entre les surfaces en contact. Il est généralement admis qu'en présence d'un lubrifiant, tout défaut de surface grandira selon une direction verticale descendante, sous l'effet de pressions hydrauliques, puis changera de direction pour se propager horizontalement /50/. Si les surfaces sont sèches et si l'état de surface est de "bonne" qualité, les fissures pourront s'amorcer à partir de défauts en sous-couche. La présence de particules dites de seconde phase, par leur effet de concentration de contrainte est citée par HILLS et ASHELBY /61/ comme un mécanisme possible d'amorçage des fissures.

## 2.6 APPROCHE ELASTO-PLASTIQUE

Dans les études précédemment citées, la Mécanique de la Rupture Linéaire Elastique a été utilisée pour prévoir la vitesse de propagation de fissures sous chargement cyclique. Mais, les facteurs d'intensité de contrainte obtenus de cette manière se trouvent être inférieurs aux valeurs seuils, ce qui signifie qu'il ne peut pas y avoir propagation. De surcroît, la taille de la zone plastique est trop importante, car du même ordre ou plus grande que la distance de la surface au fond de fissure. Par suite, il devient nécessaire d'étudier la déformation élasto-plastique du fond de fissure.

ROSENFELD /56/, /57/ applique le modèle de dislocation de BILBY-COTTRELL-

SWINDEN /62/ – *figure 2.8* – afin de tenir compte de la déformation plastique en fond de fissure, montrant que les vitesses d'usure sont gouvernées par le cisaillement en fond de fissure ou *Crack Tip Sliding Displacement* et qu'il peut y avoir propagation de fissure si le frottement entre les lèvres de la fissure n'est pas trop important.



- Figure 2.8 - Modèle de dislocation d'usure par délamination  
a. modèle original de BILBY et al.  
b. modèle modifié

SIN et SUH /63/, puis BHARGAVA et al . /64/ confirment et complètent le travail de ROSENFELD /57/ par une analyse aux éléments finis élasto-plastique du fond de fissure, concluant que la propagation des fissures en sous-couche dans les solides élasto-plastiques peut être caractérisée par le glissement en fond de fissure et que le critère de la contrainte de cisaillement maximale prévoit la direction de propagation observée expérimentalement sous chargement de compression et de cisaillement combinés – qui est parallèle à la direction de glissement.

## 2.7 CONCLUSION

Dans la mesure où l'usure se produit suite à un processus de formation de fissures en sous-couche et de propagation stable, on a affaire à un problème de fatigue. Il s'agit ici de fatigue sous des charges de compression et de cisaillement combinés. Or, il existe malheureusement très peu de données permettant de calculer les facteurs d'intensité de contrainte dans ce cas.

Bien que s'étant révélée imparfaite, voire incorrecte, l'approche de l'usure de glissement par la mécanique de la rupture linéaire élastique a néanmoins permis de donner une idée des mécanismes qui interviennent dans le processus d'usure. Les modèles plus récents qui s'appuient sur la mécanique élasto-plastique avec l'aide des éléments finis en ont amélioré la connaissance, mais ils sont encore imparfaits face à la complexité d'un tel phénomène.

## **Chapitre 3**

### **DISQUE BRESILIEN**

#### **3.1 CALCUL DES FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE DANS UN DISQUE CHARGE EN COMPRESSION**

##### **3.1.1 Historique**

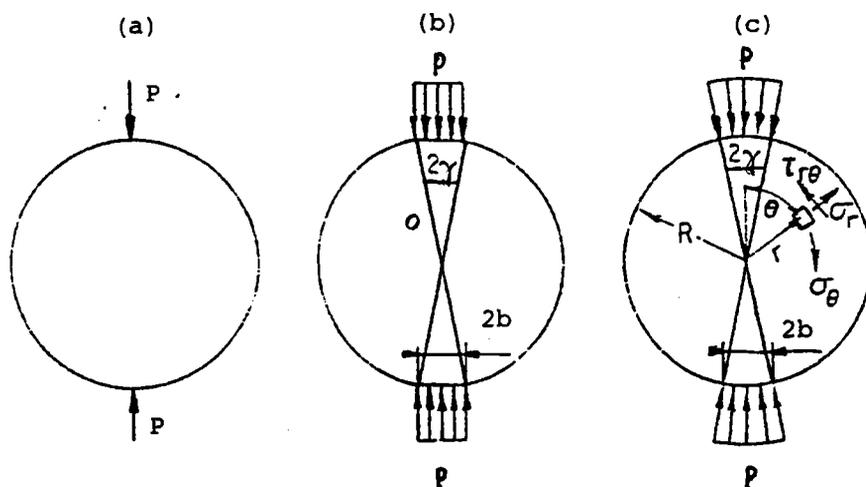
Peu de temps avant la seconde guerre mondiale, les ingénieurs brésiliens se sont trouvés confrontés à un problème épineux. Il s'agissait de déplacer une vieille église de Rio de Janeiro que l'on ne voulait pas détruire, mais qui se trouvait dans l'axe d'une nouvelle avenue que la municipalité projetait d'ouvrir. Les ingénieurs concernés envisagèrent alors de faire "rouler" l'église sur de grand tonneaux métalliques remplis de béton.

CARNEIRO et BARCELLOS /65/, chargés d'étudier la charge portante de ces rouleaux, observèrent que la rupture des cylindres se faisait presque rigoureusement suivant un axe diamétral. A travers les études théoriques, ils constatèrent l'uniformité de la distribution des contraintes de traction, permettant une application idéale de cet essai à l'étude de la résistance à la traction dans le béton.

Ainsi l'essai dit du "disque brésilien" était né. Il est à signaler que dans certains travaux, on préfère parler d'essai de "traction indirecte".

### 3.1.2 Champ de contraintes dans un disque non fissuré

Un tel calcul peut s'effectuer en faisant l'hypothèse d'un chargement  $P$  soit ponctuel (*figure 3.1a*), soit uniformément réparti sur les surfaces de contact dont la longueur  $2H$  est définie par l'angle  $2\gamma$  (*figures 3.1b,c*).



- Figure 3.1 - a. chargement ponctuel  
 b. chargement réparti sur un méplat  
 c. chargement réparti : solution de HONDROS /69/

D'après TIMOSHENKO et GOODIER /66/ et COKER et FILON /67/, la résolution des équations d'élasticité, dans le cas d'un chargement ponctuel, fournit pour les contraintes les expressions suivantes, dans un système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . Ces relations s'écrivent (3.1) :

$$\sigma_r = \frac{2P}{\pi R} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{(1 - \frac{r}{R} \cos \theta)(\cos \theta - \frac{r}{R})^2}{\left[1 + (\frac{r}{R})^2 - 2\frac{r}{R} \cos \theta\right]^2} - \frac{(1 + \frac{r}{R} \cos \theta)(\cos \theta + \frac{r}{R})^2}{\left[1 + (\frac{r}{R})^2 + 2\frac{r}{R} \cos \theta\right]^2} \right\}$$

$$\sigma_\theta = \frac{2P}{\pi R} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{(1 - \frac{r}{R} \cos \theta) \sin^2 \theta}{\left[1 + (\frac{r}{R})^2 - 2\frac{r}{R} \cos \theta\right]^2} - \frac{(1 + \frac{r}{R} \cos \theta) \sin^2 \theta}{\left[1 + (\frac{r}{R})^2 + 2\frac{r}{R} \cos \theta\right]^2} \right\}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{2P}{\pi R} \left\{ \frac{(1 - \frac{r}{R} \cos \theta)(\cos \theta - \frac{r}{R}) \sin \theta}{\left[1 + (\frac{r}{R})^2 - 2\frac{r}{R} \cos \theta\right]^2} - \frac{(1 + \frac{r}{R} \cos \theta)(\cos \theta + \frac{r}{R}) \sin \theta}{\left[1 + (\frac{r}{R})^2 + 2\frac{r}{R} \cos \theta\right]^2} \right\}$$

Les équations précédentes peuvent encore se mettre sous forme de séries :

$$\sigma_{\theta} = \frac{P}{\pi R} \sum_{j=1}^n A_j(\theta) \left(\frac{r}{R}\right)^{2j-2}$$

(3.2)

$$\tau_{r\theta} = \frac{2P \sin 2\theta}{\pi R} \sum_{i=1}^n B_i(\theta) \left(\frac{r}{R}\right)^{2i-2}$$

d'après ERDLAC - cf. /23/ en /68/ -.

Les expressions de  $A_i(\theta)$  et  $B_i(\theta)$  avec  $i = 1, 2, \dots, 5$  sont données dans le **tableau 3**.

**Tableau 3.** Coefficients  $A_i$  et  $B_i$

$A_1$	$1 - 4s^2$
$A_2$	$8s^2(1 - 4c^2)$
$A_3$	$-4s^2(3 - 36c^2 + 64c^6)$
$A_4$	$-16s^2(-1 + 24c^2 - 80c^4 + 64c^6)$
$A_5$	$-20s^2(1 - 40c^2 + 240c^4 - 448c^6 + 256c^8)$
$B_1$	1
$B_2$	$-5 + c^2$
$B_3$	$-3 + 8(1 - 2c^2)(2 - 3c^2)$
$B_4$	$3 + 16(1 - 2c^2) - 12(1 - c^2)^2 - 32(1 - 2c^2)^3$
$B_5$	$5 - 16(1 - 2c^2) - 60(1 - 2c^2)^2 + 32(1 - 2c^2)^3 + 80(1 - 2c^2)^4$

avec :  $c = \cos \beta$  et  $s = \sin \beta$

Pratiquement, un chargement ponctuel n'est pas réalisable puisque la pression locale

deviendrait infinie. C'est pourquoi le cas d'un chargement réparti, défini selon la *figure 3.1b*, a été pris en considération par HONDROS /69/.

Les expressions des contraintes suivant le plan de chargement sont alors données par les équations (3.3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{r/x} = \frac{-2p}{\pi} \left[ \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \sin 2\gamma}{1 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 \cos 2\gamma + \left(\frac{r}{R}\right)^4} + \cotg \left[ \frac{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} \right] \operatorname{tg} \gamma \right] \\ \sigma_{\theta/x} = \frac{2p}{\pi} \left[ \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \sin 2\gamma}{1 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 \cos 2\gamma + \left(\frac{r}{R}\right)^4} - \cotg \left[ \frac{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} \right] \operatorname{tg} \gamma \right] \end{array} \right.$$

avec  $p = \frac{P}{B2H}$ , charge par unité de surface.

### 3.1.3 Facteurs d'intensité de contrainte

Il n'existe pas de solution finie donnant les facteurs d'intensité de contrainte pour un disque entaillé chargé symétriquement en compression — *figure 3.3* —. Cependant, on rencontre diverses solutions approchées notamment sous forme d'intégrales obtenues à partir de la superposition de deux ou plusieurs états de contraintes.

Mais le calcul des facteurs d'intensité de contrainte dans un disque ayant fait l'objet d'un rapport bibliographique préliminaire /70/, nous nous référons à ce document, sans développer plus avant les méthodes de calcul en question, excepté les résultats directement exploités ci-après.

ATKINSON /68/, /71/ propose une résolution numérique à partir d'une équation de FREDHOLM. Les formules qu'il obtient, compte tenu des expressions (3.2), s'écrivent :

$$N_I = \frac{K_I}{K_0} = \sum_{i=1}^n T_i \left(\frac{a}{R}\right)^{2i-2} A_i(\beta)$$

(3.4)

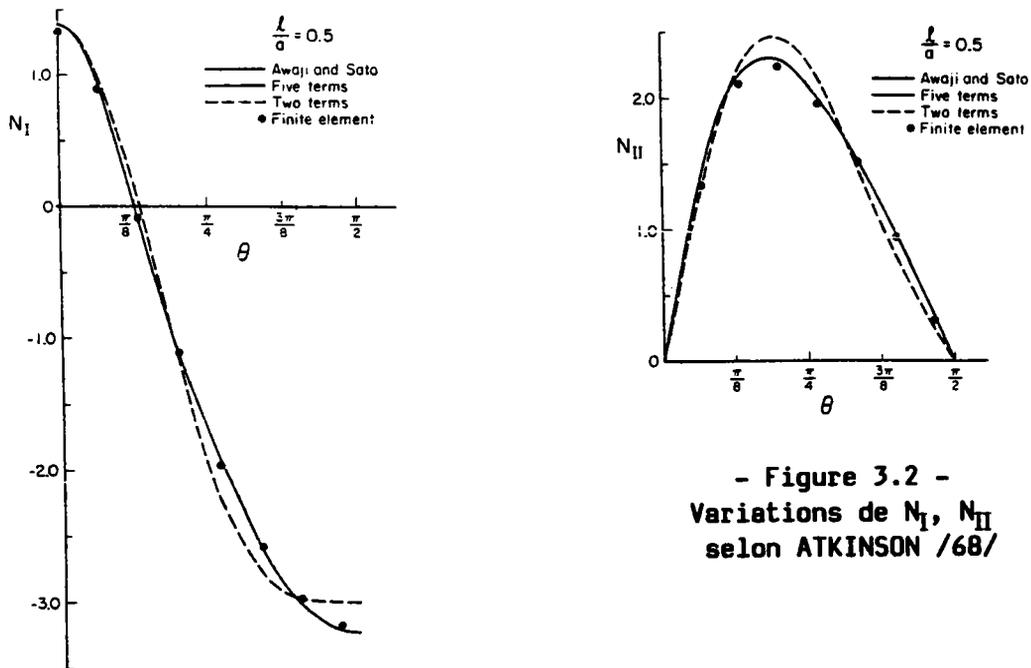
$$N_{II} = \frac{K_{II}}{K_0} = 2 \sin 2\beta \sum_{i=1}^n S_i \left(\frac{a}{R}\right)^{2i-2} B_i(\beta)$$

Le **tableau 4** fournit les premières valeurs des facteurs  $T_i$  et  $S_i$  ; les expressions de  $A_i(\beta)$  et de  $B_i(\beta)$  sont les mêmes que celles données par le **tableau 3**.

**Tableau 4.** Coefficients  $T_i$  et  $S_i$

a/R	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$T_1$	1.014998	1.060049	1.135551	1.243134	1.387239	1.578258
$T_2$	0.503597	0.514907	0.533477	0.559734	0.594892	0.642124
$T_3$	0.376991	0.382430	0.391640	0.404603	0.421949	0.445387
$T_4$	0.376991	0.383392	0.393835	0.408597	0.428353	0.454861
$T_5$	0.314159	0.318086	0.325033	0.334831	0.347941	0.365559
$S_1$	1.009987	1.039864	1.089702	1.160796	1.257488	1.390654
$S_2$	0.502341	0.509959	0.522272	0.539824	0.563966	0.597985
$S_3$	0.376363	0.379956	0.386086	0.394822	0.406869	0.424037
$S_4$	0.376363	0.380584	0.387518	0.397403	0.410966	0.430072
$S_5$	0.314159	0.316245	0.320834	0.327411	0.336447	0.349219

La **figure 3.2** traduit les valeurs de  $N_I$  et de  $N_{II}$  en fonction de l'angle  $\beta_0$  et pour  $a/R = 0,5$ .



Dans le cas de fissures de faible longueur, soit  $a/R < 0,3$ , ATKINSON /68/ propose des formules de  $N_I$  et de  $N_{II}$  simplifiées :

$$N_I = A_I + \frac{A_2}{2} \left(\frac{a}{R}\right)^2 \quad (3.5)$$

$$N_{II} = \left[ B_I + \frac{B_2}{2} \left(\frac{a}{R}\right)^2 \right] 2 \sin 2\beta$$

### 3.2 CONDITIONS EXPERIMENTALES

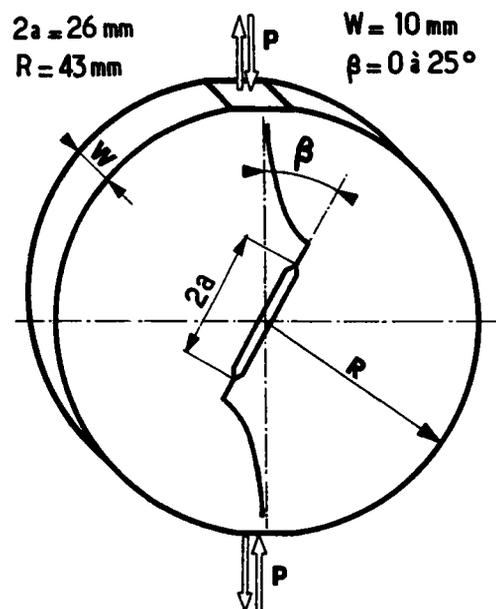
#### 3.2.1 Caractéristiques de l'éprouvette

Les caractéristiques de l'éprouvette sont données par la *figure 3.3*. Il s'agit d'un disque en acier dans lequel a été usinée une entaille possédant à chaque extrémité un chevron.

De plus, sur la tranche sont usinés deux méplats de 5 mm pour la mise en place dans le montage :

- l'un orthogonal à l'axe de l'entaille pour la préfissuration
- l'autre à l'angle d'inclinaison choisi pour la fissuration.

- Figure 3.3 -  
Disque brésilien



L'acier utilisé est un 35 NCD 16, du type acier à engrenage, trempé, revenu. De plus, il est nécessaire d'effectuer, sur les deux faces de l'éprouvette un poli-miroir d'une grande qualité afin de pouvoir suivre la propagation des fissures à la visée optique.

### 3.2.2 Matériau

Tous les essais ont été conduits sur des disques en acier 35NCD16 traité, dont la composition chimique et quelques caractéristiques mécaniques sont respectivement indiqués par les *tableaux 5 et 6*.

Les disques ont été prélevés dans une barre de profilé rond ( $\phi = 90$  mm). Le prélèvement a été réalisé, de sorte que l'axe de chargement se trouve perpendiculaire à l'axe de la barre.

Le traitement est le suivant :

- chauffage à 875 °C pendant 30 minutes,
- refroidissement à l'air calme,
- revenu à 200°C pendant une heure,
- refroidissement à l'air.

Nous distinguerons deux lots d'éprouvette que nous appellerons *série I* et *série II* en raison d'un traitement non simultané des deux lots en question.

Tableau 5. Acier 35NCD16 traité

% C	% Mn	% P	% S	% Si	% Ni	% Cr	% Cu	% Mo	% V	% Al
0,274	0,353	0,013	0,021	0,171	3,793	1,628	0,275	0,282	0,009	0,028

Tableau 6. Caractéristiques mécaniques

$R_e$ (MPa)	$R_m$ (MPa)	HV 30
1100	1500	481

### 3.2.3 Mode opératoire

Les essais sont menés sur une machine dynamique de traction INSTRON 1255.

Pour les essais en milieu lubrifié, les éprouvettes sont placées dans une cellule étanche munie de hublots en verre, à l'intérieur de laquelle on établit une circulation d'huile. L'huile est maintenue à température par l'intermédiaire d'un bain thermostaté TAMSON d'une puissance de 1300 W.

Les photographies de la *planche I* montrent les deux montages de l'éprouvette, pour un essai en milieu ambiant (vue supérieure) et un essai en milieu lubrifiant (vue inférieure).

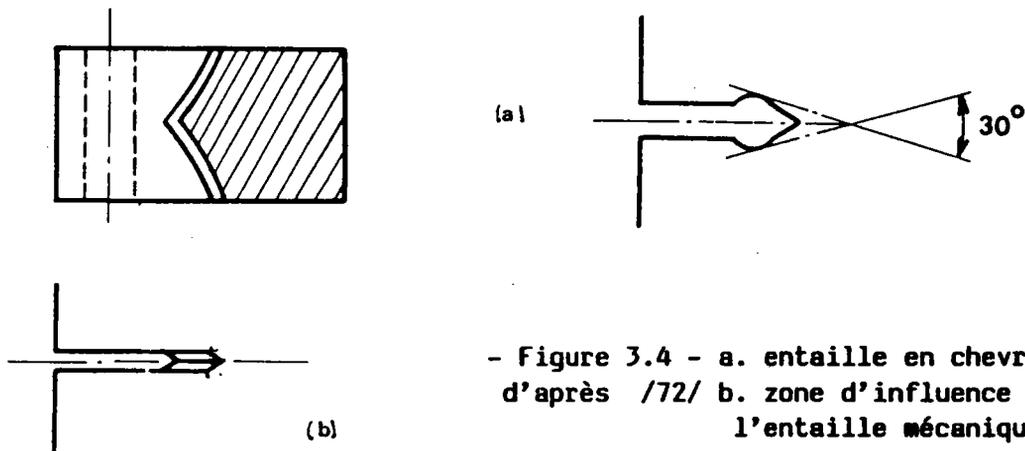
Les éprouvettes sont soumises à un chargement cyclique dans les conditions suivantes :

- charge maximale :  $P_{\max} = 7$  tonnes  
charge minimale :  $P_{\min} = 0,7$  tonne soit  $R_p = 0,1$
- fréquence : 40 Hz (air)  
5 Hz (huile)
- température : ambiante à l'air  
60°C à l'huile
- lubrifiant : huile 200 NS ( neutral solvant )  
viscosité cinématique :  $39,6 \text{ mm}^2 / \text{s}$  à 40°C

Nota : Nous avons choisi une température du bain d'huile de 60°C. degrés. Cette valeur correspond à des conditions de fonctionnement moyennes courantes. En outre, des travaux antérieurs ont montré qu'à cette température, l'effet du lubrifiant sur la fissuration était maximal (corrosion importante, vitesse maximale).

### 3.2.4 Préfissuration

La préfissuration s'effectue à l'air en mode I pur, sur une longueur de 4 mm afin de s'affranchir de la zone plastifiée aux extrémités de l'entaille (figure 3.4).



- Figure 3.4 - a. entaille en chevron d'après /72/ b. zone d'influence de l'entaille mécanique

Dans le cas des essais en milieu lubrifiant, la fin de la préfissure est effectuée dans l'huile : ceci nous assure la présence d'huile en fond de préfissure au début de la phase de fissuration.

### 3.2.5 Fissuration

Une fois la préfissuration terminée, l'éprouvette est mise en place sur le méplat usiné à l'angle d'inclinaison choisi. Le premier relevé doit être effectué assez tôt (10 000 cycles), de façon à obtenir une valeur de l'angle de bifurcation aussi précise que possible. Ensuite, les relevés sont effectués de telle sorte que la propagation de la fissure ne dépasse pas 0,5 à 1 mm entre deux relevés consécutifs.

### 3.2.6 Acquisition des données

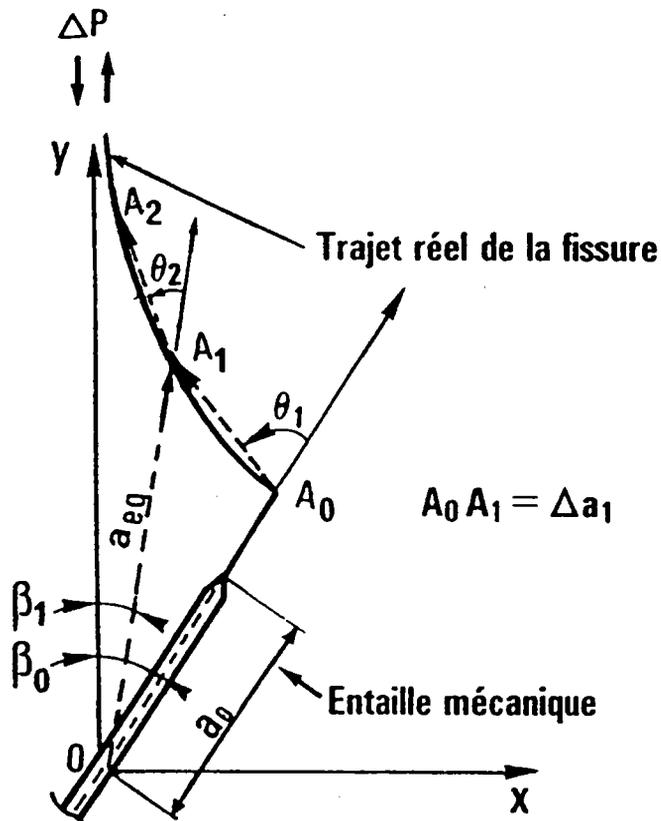
La fissure est suivie au moyen de lunettes optiques, montées sur un support bidimensionnel (direction de chargement et direction perpendiculaire) – *planche I* –.

L'essai est terminé lorsque le rapport de la longueur de la fissure au rayon du disque  $a/R$  dépasse la valeur de 0,6 (pratiquement, on peut extrapoler les valeurs d'ATKINSON jusqu'à une valeur de  $a/R$  de 0,7).

### 3.2.7 Fissure équivalente

En toute rigueur, le calcul des facteurs d'intensité de contrainte devrait tenir compte du fait que nous nous trouvons en présence d'une fissure dite "branchée". En raison de la complexité d'un tel calcul, nous avons raisonné en termes de fissure équivalente – *annexe A* –.

Cette simplification consiste à assimiler l'ensemble demi-entaille, pré-fissure, fissure à une fissure linéaire issue du centre de l'éprouvette et rejoignant la pointe de la fissure (figure 3.5). On définit ainsi, à chaque incrément de propagation un nouvel angle d'inclinaison  $\beta$  et une nouvelle longueur équivalente.



- Figure 3.5 - Détails d'une fissure - Notations.

A l'aide de considérations géométriques simples, on peut établir les relations suivantes :

$$\Delta a_1 = (X_1^2 + Y_1^2)^{1/2}$$

$$\beta_1 = \beta_0 + \arctg(\Delta a_1 \sin \theta_1 / (a_0 + \Delta a_1 \cos \theta_1))$$

$$\theta_1 = \pi / 2 + \beta_0 - \arctg(Y_1 / X_1)$$

$$a_1 = (a_0^2 + 2 a_0 \Delta a_1 \cos \theta_1 + \Delta a_1^2)^{1/2}$$

La généralisation à l'ordre  $k$  donne :

$$\Delta a_k = (X_k^2 + Y_k^2)^{1/2}$$

$$\beta_k = \beta_{k-1} + \arctg( \Delta a_{k-1} \sin \theta_k / ( a_{k-1} + \Delta a_k \cos \theta_k ) )$$

$$\theta_k = \pi / 2 + \beta_{k-1} - \arctg( Y_k / X_k )$$

$$a_k = ( a_{k-1}^2 + 2 a_{k-1} \Delta a_k \cos \theta_k + \Delta a_k^2 )^{1/2}$$

Ainsi, au cours de la propagation de la fissure, les valeurs de l'angle de bifurcation et de l'angle d'inclinaison décroissent de façon continue.

## Chapitre 4

### RESULTATS EXPERIMENTAUX

#### 4.1 CHOIX DES ANGLES D'INCLINAISON

La courbe ci-dessous représente les variations de  $K_I$  et  $K_{II}$  en fonction de l'angle d'inclinaison  $\beta$  pour une valeur du rapport  $a/R$  égale à 0,4, valeur qui correspond aux conditions initiales de fissuration. Nous avons en effet en fin de préfissuration une longueur totale de fissure de : 13 mm (longueur de l'entaille mécanique) + 4 mm environ (préfissure).

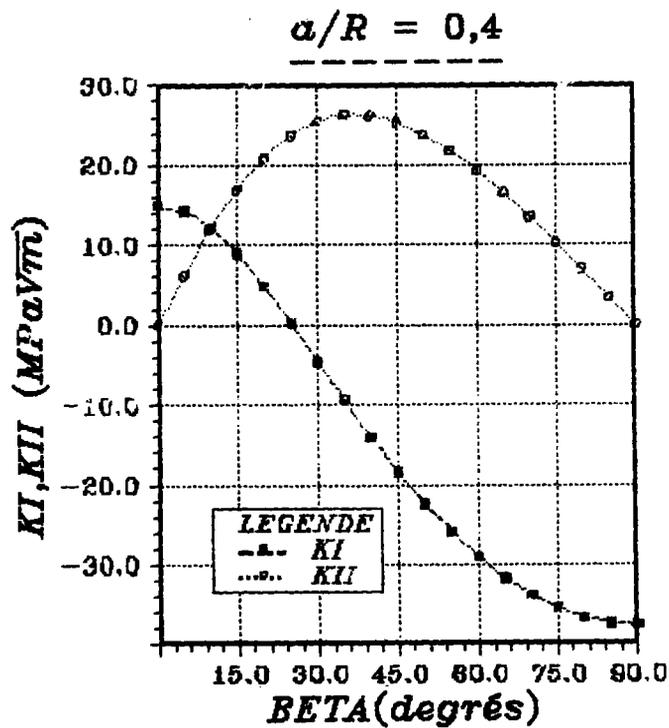


Figure 4.1 : Variations des facteurs d'intensité de contrainte avec l'angle d'inclinaison de l'entaille

D'après la figure 4.1, nous déduisons les renseignements suivants :

- $\beta = 0^\circ$  . . . .  $K_{II} = 0$  . . . . . mode I pur
- $\beta = 5^\circ$  . . . .  $K_I > K_{II}$  . . . . . prédominance du mode I

- $\beta = 10^\circ$  . . . .  $K_I = K_{II}$  . . . . égalité des deux modes
- $\beta = 15^\circ$  . . . .  $K_I < K_{II}$  . . . . prédominance du mode II
- $\beta = 25^\circ$  . . . .  $K_I = 0$  . . . . mode II pur
- $\beta > 25^\circ$  . . . .  $K_I < 0$  . . . . mode II "impur"

Nous avons donc retenu ces angles comme valeurs initiales de nos essais de façon à couvrir un domaine allant du mode I pur au mode II pur, voire au-delà. Les valeurs réelles des angles d'inclinaison – vérifiées après usinage du méplat par mesure optique – peuvent différer légèrement des valeurs précédentes, mais dans une limite de 1 degré au maximum.

**Nota :** Lorsque le rapport  $a/R$  varie, les courbes précédentes se déforment légèrement (le maximum de  $K_{II}$  ainsi que le zéro de  $K_I$  se déplacent vers la gauche, c'est-à-dire vers des valeurs de  $\beta$  inférieures, lorsque le rapport  $a/R$  augmente). La *figure 4.2a* traduit les variations de  $K_I$ , et la *figure 4.2b*, celles de  $K_{II}$  en fonction de  $\beta$  et de  $a/R$ .

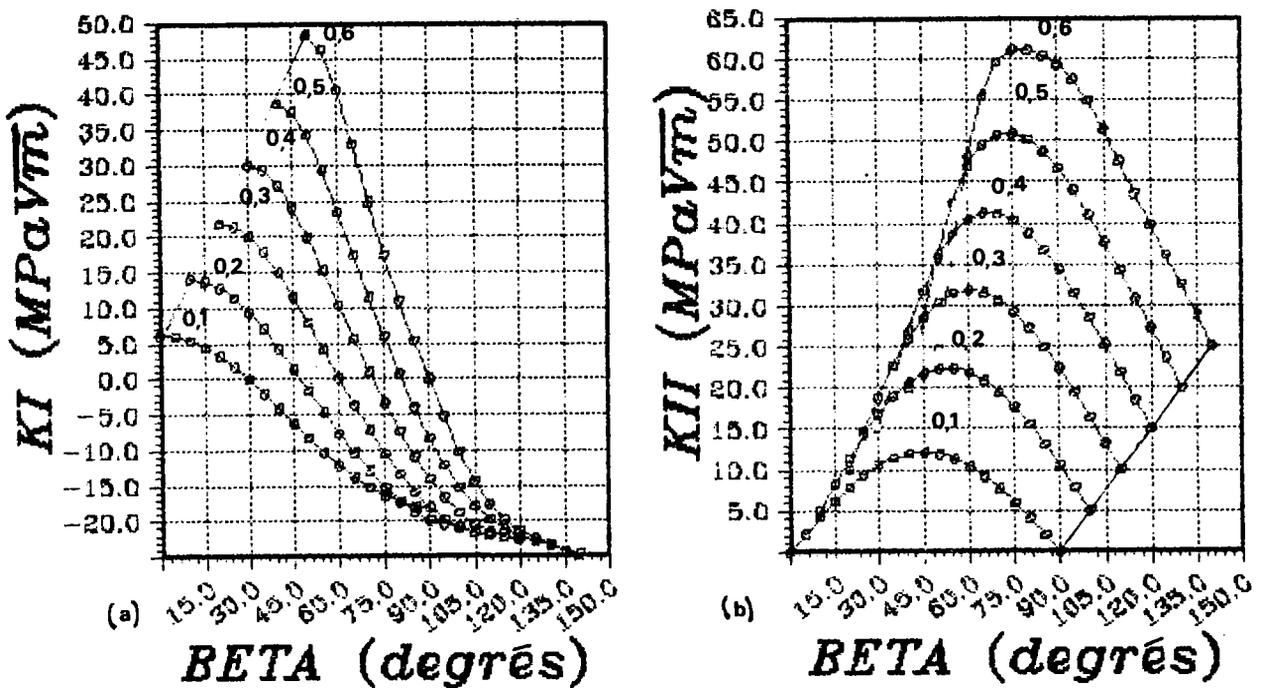


Figure 4.2 : Variations de  $K_I$  (a) et de  $K_{II}$  (b) en fonction de  $a/R$  et de  $\beta$

Les *tableaux 7 à 10* présentent les différents paramètres de nos essais dans les conditions initiales de fissuration, classés par série d'éprouvettes et par milieu ambiant (air ou huile).

Tableau 7. - Série I air -

$\beta_o$ (degrés)	$a_o$ (mm)	$\Delta K_{Io}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$\Delta K_{IIo}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$(K_I/K_{II})_o$	Mode de chargement initial	$-\theta_o$ (degrés)
0	16,15	12,7	0	$+\infty$	I pur	0
4,655	16,8	12,6	5,0	2,52	I + II	28,9
9,08	16,54	11,0	9,3	1,18	I + II	36,9
14,62	16,80	8,2	14,5	0,56	I + II	55,5
25,85	16,99	-0,4	21,4	-0,02	II (im)pur	69,8
34,0	17,04	-7,5	23,4	-0,32	II impur	61,1

Tableau 8. - Série II air -

$\beta_o$ (degrés)	$a_o$ (mm)	$\Delta K_{Io}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$\Delta K_{IIo}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$(K_I/K_{II})_o$	Mode de chargement initial	$-\theta_o$ (degrés)
0	16,92	13,3	0	$+\infty$	I pur	0
3,85	16,40	12,6	3,7	3,10	I + II	33,1
9,84	16,74	10,8	10,2	1,06	I + II	45,3
16,01	16,82	7,3	15,6	0,47	I + II	58,1
24,40	16,83	0,8	20,6	0,04	I + II	67,7
33,71	16,54	-6,8	22,8	-0,30	II impur	74,2
31,67	14,39	-3,8	20,3	-0,18	II impur	65,9

Tableau 9. – Série I huile –

$\beta_o$ (degrés)	$a_o$ (mm)	$\Delta K_{Io}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$\Delta K_{IIo}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$(K_I/K_{II})_o$	Mode de chargement initial	$-\theta_o$ (degrés)
4,85	16,79	12,6	5,2	2,41	I + II	35,2
15,69	16,93	7,5	15,4	0,48	I + II	61,5
24,18	16,80	1,1	20,5	0,05	I + II	66,2

Tableau 10. – Série II huile –

$\beta_o$ (degrés)	$a_o$ (mm)	$\Delta K_{Io}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$\Delta K_{IIo}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$(K_I/K_{II})_o$	Mode de chargement initial	$-\theta_o$ (degrés)
0	16,73	13,1	0	$+\infty$	I pur	0
4,75	17,06	12,8	5,2	2,45	I + II	26,0
10,13	16,80	10,7	10,5	1,02	I + II	45,3
14,48	17,77	8,5	15,37	0,55	I + II	56,5
24,66	16,31	0,8	20,2	0,04	I + II	64,3
24,67	14,50	1,3	18,2	0,07	I + II	61,8
34,43	16,37	-7,3	22,7	-0,32	II impur	65,9
37,33	16,55	-9,8	23,0	-0,43	II impur	71,0

Par la suite, les essais seront repérés au moyen d'un chiffre romain indiquant la série (I ou II) suivi de l'initiale du milieu (a pour air et h pour huile).

#### 4.2 ANGLE DE BIFURCATION INITIAL

Une fissure en mode mixte se caractérise par une direction de propagation distincte de sa direction initiale, définissant ainsi un angle de bifurcation.

Le tableau ci-après permet de comparer les angles initiaux de bifurcation obtenus expérimentalement aux valeurs déduites des différents critères de rupture présentés au *chapitre*

1, à savoir les critères de la *contrainte tangentielle maximale*, de l'*énergie de déformation minimale*, ainsi que ceux proposés par AMESTOY /18/ :  $k_1^*_{\max}$  et  $k_2^* = 0$ .

Tableau 11. Prévion des angles initiaux de bifurcation selon différents critères

$\beta_0$ (degrés)	$a_0$ (mm)	$\theta_{0\text{ ex}}$ (degrés)	$\sigma_{\theta\text{max}_4}$ ( $r=10^{-4}$ )	$\sigma_{\theta\text{max}_6}$ ( $r=10^{-6}$ )	$\Delta S_{\min}$ C.P.	$k_1^*_{\max}$	$k_2^* = 0$
4,65	16,80	- 29	- 42	- 36	- 31	- 34	- 36
4,85	16,80	- 35	- 42	- 37	- 32	- 35	- 37
3,85	16,40	- 33	- 41	- 31	- 28	- 30	- 31
4,75	17,06	- 27	- 42	- 36	- 32	- 35	- 36
9,08	16,54	- 37	- 56	- 51	- 46	- 48	- 52
9,84	16,74	- 45	- 55	- 53	- 48	- 50	- 54
10,13	16,8	- 45	- 56	- 53	- 49	- 51	- 55
14,62	16,80	- 55	- 62	- 60	- 59	- 58	- 66
16,01	16,82	- 58	- 63	- 62	- 62	- 60	- 69
15,69	16,93	- 61	- 64	- 62	- 62	- 59	- 68
14,48	17,77	- 56	- 63	- 61	- 60	- 58	- 66
25,85	16,99	- 70	- 71	- 71	- 80	- 74	- 99
24,40	16,83	- 68	- 71	- 70	- 78	- 72	- 98
24,18	16,79	- 66	- 70	- 70	- 78	- 71	- 98
24,66	16,31	- 64	- 71	- 70	- 78	- 72	- 98
24,67	14,50	- 62	- 70	- 69	- 77	- 71	- 97
34,00	17,04	- 61	- 77	- 77	- 93	- 89	- 105
33,71	16,54	- 74	- 77	- 76	- 92	- 89	- 104
31,67	14,39	- 66	- 75	- 74	- 87	- 83	- 103
34,43	16,37	- 66	- 77	- 77	- 93	- 89	- 105
37,33	16,55	- 71	- 77	- 79	- 97	- 92	- 106

1. Les angles sont exprimés en degrés.
2. Pour le critère de  $\sigma_{\theta\max}$ , les valeurs indiquées de  $10^{-4}$  et de  $10^{-6}$  (mm) correspondent à deux valeurs de la distance à laquelle on calcule la contrainte. Par la suite, on ne retiendra que la seconde.
3. La densité d'énergie de déformation est calculée en contraintes planes (C.P.).

Les **tableaux 12** et **13** montrent l'influence de la longueur de la fissure, ainsi que l'influence de l'angle d'inclinaison sur l'angle de bifurcation théorique.

**Tableau 12.** Influence de la longueur de fissure initiale sur l'angle de bifurcation initial – en degrés –

$a_0$ (mm)	$\beta_0$ (degrés)	$\sigma_{\theta\max}$	$\Delta S_{\min}$	$k_1^*$ max	$k_2^* = 0$
17,80	5,0	– 38	– 33	– 37	– 38
17,30	5,0	– 38	– 33	– 36	– 38
16,80	5,0	– 37	– 33	– 36	– 37
16,30	5,0	– 37	– 33	– 36	– 37
15,80	5,0	– 37	– 32	– 36	– 37

**Tableau 13.** Influence de l'angle d'inclinaison initial sur l'angle de bifurcation initial – en degrés –

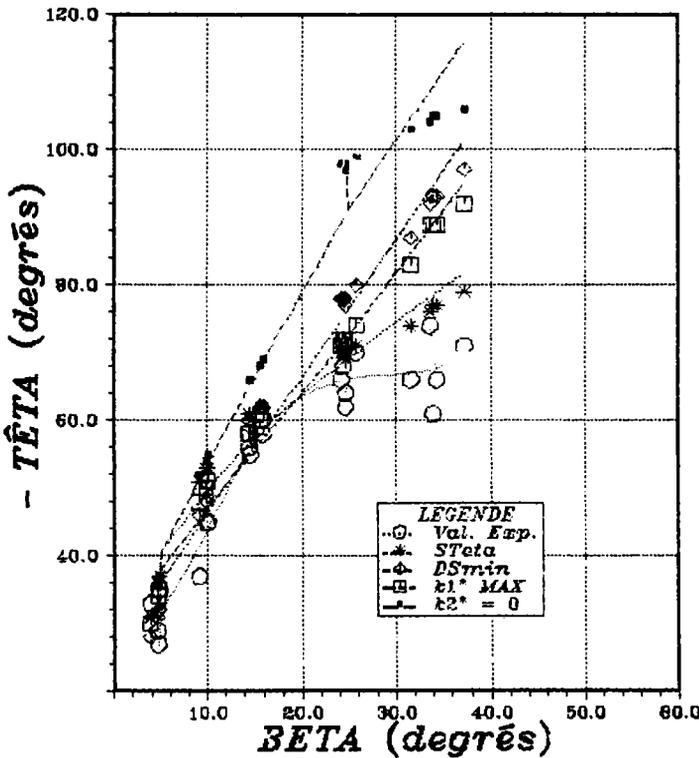
$a_0$ (mm)	$\beta_0$ (degrés)	$\sigma_{\theta\max}$	$\Delta S_{\min}$	$k_1^*$ max	$k_2^* = 0$
16,80	5,0	– 37	– 33	– 36	– 37
16,80	4,5	– 35	– 31	– 34	– 35
16,80	4,0	– 32	– 29	– 31	– 32
16,80	3,5	– 29	– 26	– 28	– 29
16,80	3,0	– 26	– 23	– 25	– 25

- L'influence de la longueur de fissure initiale est faible : 1 degré au maximum pour une variation de 1 mm.

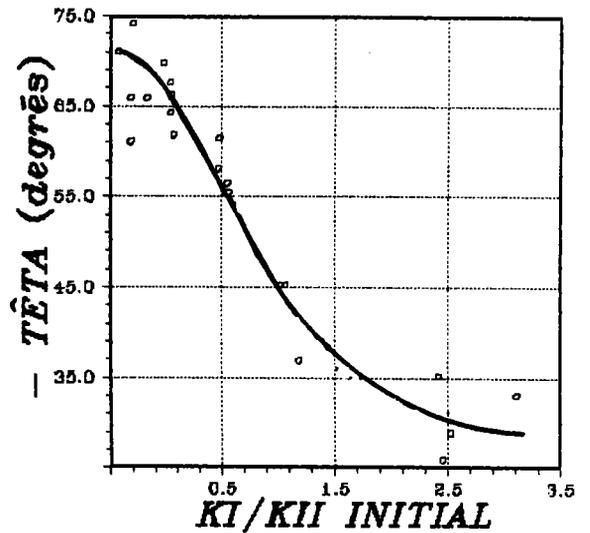
- Une erreur de 1 degré sur l'angle d'inclinaison initial se traduit par un écart sur l'angle de bifurcation initial pouvant aller jusqu'à 5 degrés.

La courbe de la figure 4.3 traduit les variations de l'angle initial de bifurcation avec l'angle initial d'inclinaison. On note l'existence d'une valeur limite de l'angle de bifurcation de l'ordre de 70 degrés.

La courbe de la figure 4.4 montre l'évolution du rapport  $K_I/K_{II}$  initial en fonction de l'angle d'inclinaison initial  $\beta_0$ .



- Figure 4.3 -  
Angles initiaux de bifurcation



- Figure 4.4 -  
Evolution du rapport  $K_I/K_{II}$   
avec l'angle initial de bifurcation

On obtient une relation empirique entre l'inclinaison et la bifurcation initiale sous la forme suivante :

$$\theta = - 14,4 \beta^{1/2} \quad (4.1a)$$

Cette expression est à rapprocher de celle obtenue par COTTERELL /20/ pour une entaille elliptique en traction :

$$\theta = 12,2 \beta^{1/2} \quad (4.1b)$$

### 4.3 COURBES $a = f(N)$

Ces courbes sont tracées directement à partir des relevés expérimentaux. Bien que n'étant pas normalisées, elles ont toutefois l'avantage de permettre une comparaison directe de la longueur de fissure pour un nombre de cycles donné.

Dans ce paragraphe, nous allons procéder par comparaison entre les essais réalisés dans des conditions voisines d'inclinaison initiale, en vue de déduire les conditions susceptibles de provoquer une accélération – ou un ralentissement – du phénomène de fissuration en mode mixte.

#### 4.3.1 Mode I

Le *tableau 14* compare les vitesses de fissuration pour les différents essais en mode I ; ces vitesses "moyennes" sont calculées pour une distance parcourue de 10 mm (cf. courbe de la *figure 4.5*). Les *tableaux 17* et *18* en fin de paragraphe montrent que l'on parvient aux mêmes conclusions en considérant une distance parcourue aussi bien de 5 mm, que de 13 mm (il en ira d'ailleurs de même pour les autres modes).

Tableau 14. Distance curviligne : 10 mm

$\beta_0$ (degrés)	$a_0$ (mm)	10 mm en ... cycles	Vit. moy. (mm/cycle)	Nbre cycles amorçage
0 (Ia)	16,15	490000	$2,0 \cdot 10^{-5}$	640000
0 (IIa)	16,92	255000	$3,9 \cdot 10^{-5}$	320000
0 (IIh)	16,73	270000	$3,7 \cdot 10^{-5}$	400000

Les essais en mode I en milieu lubrifiant, correspondant à la série I, n'ayant pu être validés, nous nous limiterons aux constatations suivantes : la différence de vitesse est nette entre les deux séries (air), alors que l'écart très faible entre les deux milieux pour la série II ne permet pas de mettre en évidence une influence du lubrifiant sur la vitesse de propagation.

### 4.3.2 Mode I + II

Le tableau ci-après compare de la même façon que précédemment les vitesses de fissuration pour les différents essais en mode mixte.

Tableau 15. Distance curviligne : 10 mm

$\beta_0$ (degrés)	$a_0$ (mm)	10 mm en ... cycles	Vit. moy. (mm/cycle)	Nbre cycles amorçage
4,65 (Ia)	16,80	318000	$3,1 \cdot 10^{-5}$	520000
4,85 (Ih)	16,79	404000	$2,5 \cdot 10^{-5}$	530000
3,85 (IIa)	16,40	292000	$3,4 \cdot 10^{-5}$	330000
4,75 (IIh)	17,06	160000	$6,2 \cdot 10^{-5}$	320000
9,08 (Ia)	16,54	270000	$3,7 \cdot 10^{-5}$	430000
9,84 (IIa)	16,74	260000	$3,8 \cdot 10^{-5}$	320000
10,13 (IIh)	16,80	242000	$4,1 \cdot 10^{-5}$	410000
14,62 (Ia)	16,80	250000	$4,0 \cdot 10^{-5}$	460000
15,69 (Ih)	16,93	240000	$4,1 \cdot 10^{-5}$	500000
16,01 (IIa)	16,82	294000	$3,4 \cdot 10^{-5}$	640000
14,48 (IIh)	17,77	160000	$6,2 \cdot 10^{-5}$	330000
25,85 (Ia)	16,99	220000	$4,5 \cdot 10^{-5}$	640000
24,18 (Ih)	16,79	213000	$4,7 \cdot 10^{-5}$	490000
24,40 (IIa)	16,83	175000	$5,7 \cdot 10^{-5}$	340000
24,66 (IIh)	16,31	210000	$4,8 \cdot 10^{-5}$	610000
24,67 (IIh)*	14,50	247000	$4,0 \cdot 10^{-5}$	400000

En raisonnant sur la vitesse moyenne telle que nous l'avons définie au paragraphe précédent, nous parvenons aux résultats suivants :

- 5 degrés : – série I  $\frac{da}{dN}(\text{huile}) < \frac{da}{dN}(\text{air})$   
 – série II  $\frac{da}{dN}(\text{huile}) > \frac{da}{dN}(\text{air})$   
 – les vitesses sont voisines à l'air pour les 2 séries ;  
 – par contre,  $\frac{da}{dN}(\text{huile II}) \gg \frac{da}{dN}(\text{huile I})$
- 10 degrés : – série II  $\frac{da}{dN}(\text{huile}) > \frac{da}{dN}(\text{air})$   
 – à l'air, les vitesses sont également voisines pour les deux séries
- 15 degrés : – série I  $\frac{da}{dN}(\text{huile}) = \frac{da}{dN}(\text{air})$   
 – série II  $\frac{da}{dN}(\text{huile}) > \frac{da}{dN}(\text{air})$   
 – à l'air, on observe que  $\frac{da}{dN}(\text{air II}) > \frac{da}{dN}(\text{air I})$   
 – par contre, on constate que  $\frac{da}{dN}(\text{huile II}) \gg \frac{da}{dN}(\text{huile I})$
- 25 degrés : – série I  $\frac{da}{dN}(\text{huile}) = \frac{da}{dN}(\text{air})$   
 – série II  $\frac{da}{dN}(\text{huile}) < \frac{da}{dN}(\text{air})$   
 – à l'huile, les vitesses sont voisines pour les deux séries ;  
 – par contre, on constate que  $\frac{da}{dN}(\text{air II}) > \frac{da}{dN}(\text{air I})$   
 (voir § 1.4.4)

Pour la série I, l'influence du lubrifiant est pratiquement inexistante, les vitesses de propagation étant très voisines dans les deux milieux. On observe même une vitesse plus faible en milieu lubrifiant pour un angle initial de 25 degrés.

Les résultats de la série II sont plus nets : si le lubrifiant accélère sensiblement le processus de fissuration pour des angles initiaux d'inclinaison de 5, de 10 et de 15 degrés, c'est l'inverse qui se produit pour 25 degrés.

En examinant les figures 4.6a à 4.6d, il apparaît que pour un nombre de cycles donné, la longueur de la fissure augmente avec l'angle initial d'inclinaison. Par suite, la vitesse de propagation de fissure augmente, elle – aussi, avec l'angle d'inclinaison, c'est – à – dire avec la proportion de mode II.

### 4.3.3 Mode II impur

Nous comparons dans le tableau suivant les vitesses de fissuration pour les essais réalisés dans des conditions (initiales) de mode II impur, de la même manière que dans les deux paragraphes précédents.

Tableau 16. Distance curviligne : 10 mm

$\beta_o$ (degrés)	$a_o$ (mm)	10 mm en ... cycles	Vit. moy. (mm/cycle)	Nbre cycles amorçage
34,00 (Ia)	17,04	395000	$2,5 \cdot 10^{-5}$	510000
31,67 (IIa)*	14,38	370000	$2,7 \cdot 10^{-5}$	420000
33,71 (IIa)	16,54	410000	$2,4 \cdot 10^{-5}$	485000
34,43 (IIh)	16,37	90000	$11,1 \cdot 10^{-5}$	375000
37,33 (IIh)	16,55	90000	$11,1 \cdot 10^{-5}$	384000

- 35 degrés : – série II  $\frac{da}{dN}(\text{huile}) \gg \frac{da}{dN}(\text{air})$   
– à l'air, les vitesses sont voisines pour les deux séries

Les courbes  $a = f(N)$  correspondant aux essais en mode II impur viennent se placer "en dessous" des autres courbes (hormis en milieu lubrifiant). Il apparaît ici un phénomène de retard que l'on étudiera au paragraphe 5.5.

Nota : Le cas de la série II en milieu lubrifiant sera traité au paragraphe 5.5.2.

#### 4.3.4 Nombre de cycles à l'amorçage

Une certaine dispersion au niveau du nombre de cycles nécessaire à l'amorçage des fissures nous a suggéré l'éventualité d'une corrélation entre cette quantité et la vitesse de fissuration. Il s'avère en effet que pour des angles voisins, la vitesse de propagation moyenne est plus faible lorsque le nombre de cycles à l'amorçage correspondant est plus grand, et inversement.

Si l'on exclut les deux essais pour lesquels on a supprimé les chevrons (repérés par un astérisque), la longueur initiale de la fissure étant inférieure de 2 mm environ, on ne relève que deux exceptions à cette corrélation (flèches). Il semblerait donc exister une relation entre la vitesse de propagation de fissure et le nombre de cycles à l'amorçage. Cependant, on note dans certains cas, pour deux valeurs voisines de l'angle  $\beta_o$ , une très grande différence entre les vitesses, alors que l'écart entre les nombres de cycles à l'amorçage correspondant est faible, ou vice-versa. L'origine de la dispersion observée est délicate à déterminer.

Tableau 17. Distance curviligne : 5 mm

$\beta_o$ (degrés)	$a_o$ (mm)	5 mm en ... cycles	Nbre cycles amorçage
0 (Ia)	16,15	335000	640000
0 (IIa)	16,92	168000	320000
0 (IIh)	16,73	196000	400000
4,655 (Ia)	16,80	217000	520000
4,85 (Ih)	16,79	286000	530000
3,85 (IIa)	16,40	203000	330000
4,75 (IIh)	17,06	110000	320000
9,08 (Ia)	16,54	167000	430000
9,84 (IIa)	16,74	168000	320000
10,13 (IIh)	16,80	161000	410000
14,62 (Ia)	16,80	156000	460000
15,69 (Ih)	16,93	150000	500000
16,01 (IIa)	16,82	190000	640000
14,48 (IIh)	17,77	103000	330000
25,85 (Ia)	16,99	142000	640000
24,18 (Ih)	16,79	120000	490000
24,40 (IIa)	16,83	110000	340000
24,66 (IIh)	16,31	112000	610000
24,67* (IIh)	14,50	155000	400000
34,00 (Ia)	17,04	321000	510000
31,67* (IIa)	14,38	300000	385000
33,71 (IIa)	16,54	323000	470000
34,43 (IIh)	16,37	65000	280000
37,33 (IIh)	16,55	60000	340000

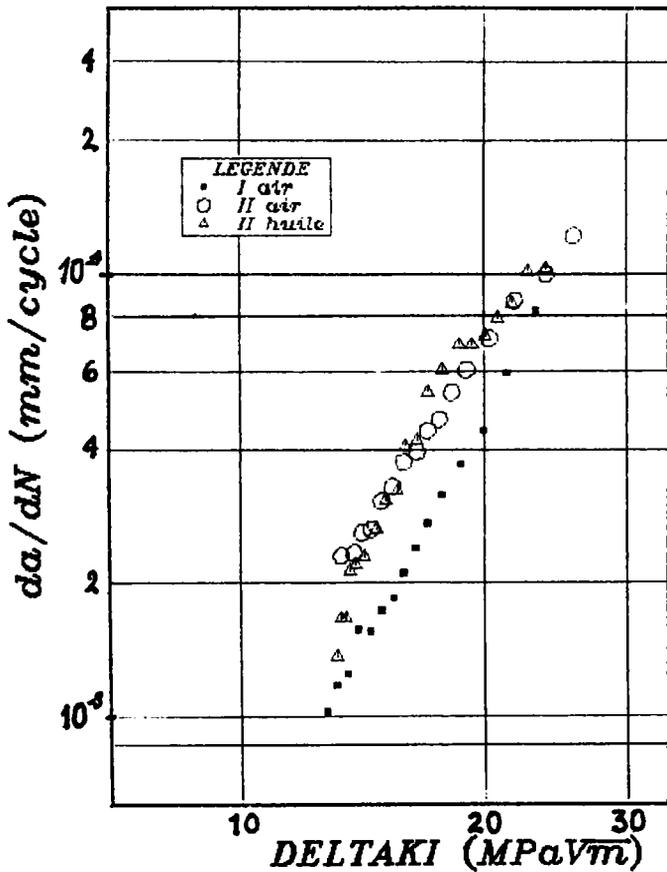
Tableau 18. Distance curviligne : 13 mm

$\beta_o$ (degrés)	$a_o$ (mm)	13 mm en ... cycles	Nbre cycles amorçage
0 (Ia)	16,15	>500000	640000
0 (IIa)	16,92	286000	320000
0 (IIh)	16,73	298000	400000
4,655 (Ia)	16,80	354000	520000
4,85 (Ih)	16,79	433000	530000
3,85 (IIa)	16,40	346000	330000
4,75 (IIh)	17,06	172000	320000
9,08 (Ia)	16,54	304000	430000
9,84 (IIa)	16,74	290000	320000
10,13 (IIh)	16,80	273000	410000
14,62 (Ia)	16,80	284000	460000
15,69 (Ih)	16,93	265000	500000
16,01 (IIa)	16,82	190000	640000
14,48 (IIh)	17,77	184000	330000
25,85 (Ia)	16,99	247000	640000
24,18 (Ih)	16,79	243000	490000
24,40 (IIa)	16,83	202000	340000
24,66 (IIh)	16,31	247000	610000
24,67* (IIh)	14,50	274000	400000
34,00 (Ia)	17,04	420000	510000
31,67* (IIa)	14,38	400000	385000
33,71 (IIa)	16,54	434000	470000
34,43 (IIh)	16,37	109000	280000
37,33 (IIh)	16,55	110000	340000

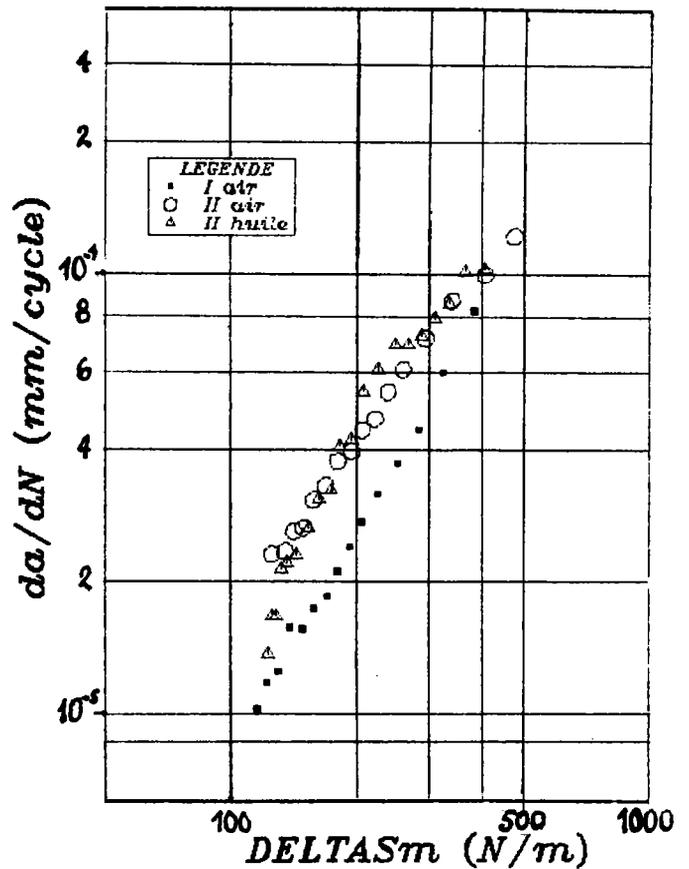
## 4.4 LOI DE PROPAGATION

### 4.4.1 Mode I

La courbe de la figure 4.7a exprime les vitesses de propagation de fissures en fonction du facteur d'intensité de contrainte en mode I lorsque l'angle initial d'inclinaison est nul (mode I pur). On constate que les points exprimant ces vitesses s'alignent pratiquement sur une droite dans un diagramme log-log, ce qui permet de retrouver la loi de PARIS. De même, si l'on exprime les vitesses en fonction de la densité d'énergie (figure 4.7b), les points correspondant s'alignent encore sur une droite (en effet, l'expression donnant l'énergie se réduit au seul terme  $a_{11}K_I^2$ , dont le logarithme est proportionnel à  $K_I$ ). Ainsi, dans ce dernier cas, la vitesse pourra s'exprimer sous la forme :  $da/dN = C_s(\Delta S)^{m_s}$ , l'exposant  $m_s$  étant lié à  $m$  par :  $m_s = m / 2$ .



- Figure 4.7a -



- Figure 4.7b -

Le **tableau 19** donne les coefficients  $m$  et  $m_s$  que l'on obtient pour chaque essai, ainsi que la valeur moyenne sur les trois séries considérées. On pourra noter un faible écart entre ces

valeurs. En outre, il apparaît que les pentes sont pratiquement égales à l'air pour la série I et en milieu lubrifiant pour la série II, alors que paradoxalement, la différence est plus sensible pour un même milieu (l'air) entre les deux séries.

Tableau 19. "Coefficients de PARIS"  
Mode I

Série	$I_{\text{air}}$	$\Pi_{\text{air}}$	$\Pi_{\text{huile}}$	Val. moy.
m	3,37	2,63	3,32	3,21
C	$1,92 \cdot 10^{-9}$	$2,48 \cdot 10^{-8}$	$3,46 \cdot 10^{-9}$	$4,1 \cdot 10^{-9}$
$m_s$	1,68	1,31	1,66	1,61
$C_s$	$3,4 \cdot 10^{-9}$	$3,8 \cdot 10^{-8}$	$6,0 \cdot 10^{-9}$	$7,0 \cdot 10^{-9}$

Les exposants sont bien dans le rapport indiqué.

Remarque : si l'on inclut les deux dernières mesures effectuées en fin de préfissuration, uniquement pour les deux séries à l'air bien sûr, les valeurs se dispersent un peu (tableau 20) :

Tableau 20. "Coefficients de PARIS"  
Mode I

Série	$I_{\text{air}}$	$\Pi_{\text{air}}$	$\Pi_{\text{huile}}$	Val. moy.
m	3,14	2,45	3,32	3,10
C	$3,8 \cdot 10^{-9}$	$4,3 \cdot 10^{-8}$	$3,46 \cdot 10^{-9}$	$5,7 \cdot 10^{-9}$

#### 4.4.2 Mode mixte

Lorsque l'angle initial d'inclinaison augmente, la composante de mode II augmente. Il est donc légitime de s'attendre à ce que la présence de cisaillement "perturbe" le processus de fissuration. Ainsi, si l'on exprime la vitesse de fissuration en fonction du seul facteur d'intensité de contrainte en mode I, ou du facteur de densité d'énergie de déformation, on obtient les courbes présentées aux figures 4.8 et 4.9.

Pour des angles initiaux d'inclinaison voisins de 5 degrés, on retrouve pratiquement l'allure de la loi de PARIS. En effet, la valeur du facteur d'intensité de contrainte en mode II est, au départ, de 5 MPaVm environ, c'est-à-dire 2,5 fois plus faible que le facteur d'intensité de

contrainte en mode II. Le **tableau 21** compare de la même façon qu'au paragraphe précédent les coefficients  $m$  et  $m_s$  que l'on obtient par une interpolation au sens des moindres carrés.

**Tableau 21. "Coefficients de PARIS"**  
 $\beta_0 = 5$  degrés

Série	$I_{air}$	$I_{huile}$	$\Pi_{air}$	$\Pi_{huile}$	Val. moy.
$m$	3,13	3,44	2,99	3,23	3,73
$C$	$5,45.10^{-9}$	$1,91.10^{-9}$	$8,65.10^{-8}$	$7,96.10^{-9}$	$1,17.10^{-9}$
$m_s$	1,84	2,05	1,68	1,82	2,14
$C_s$	$2,04.10^{-9}$	$5,6.10^{-10}$	$5,3.10^{-9}$	$4,22.10^{-9}$	$5,0.10^{-10}$

Il convient de considérer avec précaution ces valeurs qui, malgré tout, nous permettent d'avoir une idée de la différence que le phénomène de fissuration en mode mixte peut présenter lorsqu'on passe d'un milieu à un autre.

Il apparaît de façon non équivoque que les pentes sont plus fortes en milieu lubrifiant qu'en atmosphère libre.

Lorsque l'angle initial d'inclinaison devient supérieur à 5 degrés, le calcul des coefficients n'a plus de sens, étant donné l'allure des courbes que l'on observe alors (**figure 4.8c** et **4.9**). Par conséquent, il s'agit de déterminer un paramètre adapté à une traduction de la vitesse sous la forme d'une droite. Ce sera l'objet du paragraphe 5.4.4.

## 4.5 OBSERVATIONS FRACTOGRAPHIQUES

### 4.5.1 Observations macroscopiques

Les **planches V** et **VI** présentent pour chacun des angles étudiés le faciès de rupture par fatigue obtenu à l'air ambiant et le faciès obtenu en milieu lubrifiant (série II) à faible grossissement.

On observe très nettement les stries de fatigue d'une part, et d'autre part sur une partie de la fissure des taches brunâtres caractéristiques des essais réalisés en milieu lubrifiant, quel que soit l'angle initial d'inclinaison ( $\gamma$  compris en mode I), sauf pour 25 degrés, où cet effet semble moins marqué. On remarque cependant la présence d'une telle tache pour cette même valeur de l'angle d'inclinaison initial lorsque le chevron de l'entaille a été supprimé.

D'une manière générale, les faciès présentent un profil plus marqué en milieu lubrifiant qu'à l'air ambiant où les surfaces apparaissent "lisses".

#### 4.5.2 Etude des faciès au M.E.B.

Les planches VIII à XIII permettent de visualiser la différence entre une fissure se propageant en mode I et une fissure se propageant en mode mixte.

L'aspect de la préfissure varie considérablement avec l'angle d'inclinaison initial. Ainsi, on met en évidence l'existence d'un frottement entre les lèvres d'une préfissure qui a subi une sollicitation de mode II pur ou impur par la présence de zones plus claires, rayées, plus ou moins nombreuses. On parlera de zones de matage, mises en évidence par les photographies des planches VII et XII.

#### 4.6 CONCLUSIONS

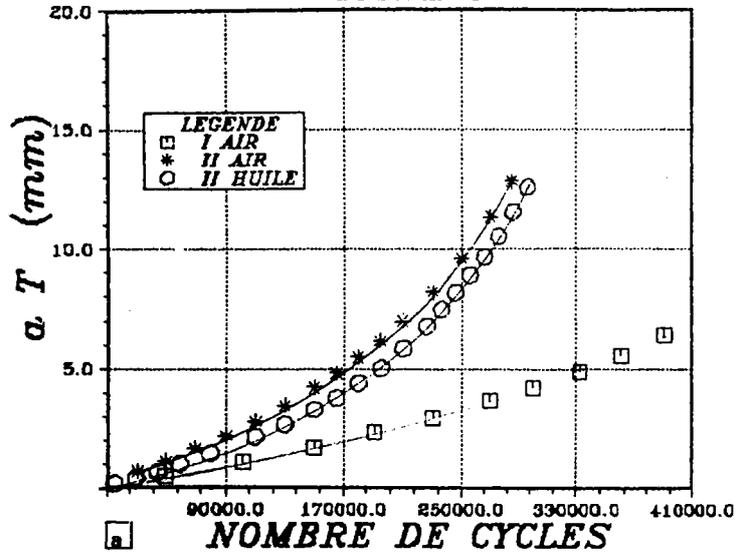
Aussi bien à l'air ambiant qu'en milieu lubrifiant, nous observons que :

- la superposition de mode II cyclique à du mode I cyclique entraîne une bifurcation des fissures selon une direction très sensiblement distincte de leur direction initiale ; la trajectoire alors suivie est curviligne ;
- la valeur de l'angle initial de bifurcation varie de 0 à 70 degrés lorsque l'angle initial d'inclinaison varie de 0 à 35 degrés ;
- la vitesse augmente avec la longueur de fissure ;
- la vitesse augmente avec l'angle initial d'inclinaison, c'est-à-dire avec la proportion de mode II ;
- les fissures se propagent de telle sorte que la composante de mode II diminue ; autrement dit, elles tendent à se ramener à une propagation en mode I. En effet, les fissures ont tendance à adopter une trajectoire qui tend asymptotiquement vers l'axe de chargement.

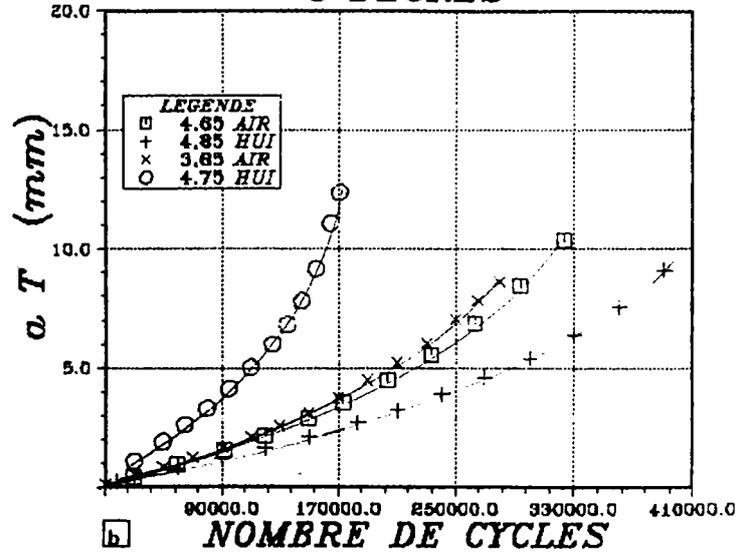
Bien que l'on se soit servi du même acier et que l'on ait suivi un processus de traitement thermique dans des conditions analogues (mais difficilement vérifiables), les caractéristiques mécaniques varient suffisamment d'une série à l'autre pour que l'on ne puisse pas clairement conclure quant à l'influence du lubrifiant sur la vitesse de fissuration sur l'ensemble des essais des deux séries réunies, alors que l'on pensait précisément être à même de confirmer les résultats partiels de la première série au moyen de ceux de la seconde. En fait, la vitesse de

propagation en mode mixte n'apparaît pas être indépendante de l'histoire du matériau et cet effet masque ou tout au moins perturbe l'influence du milieu.

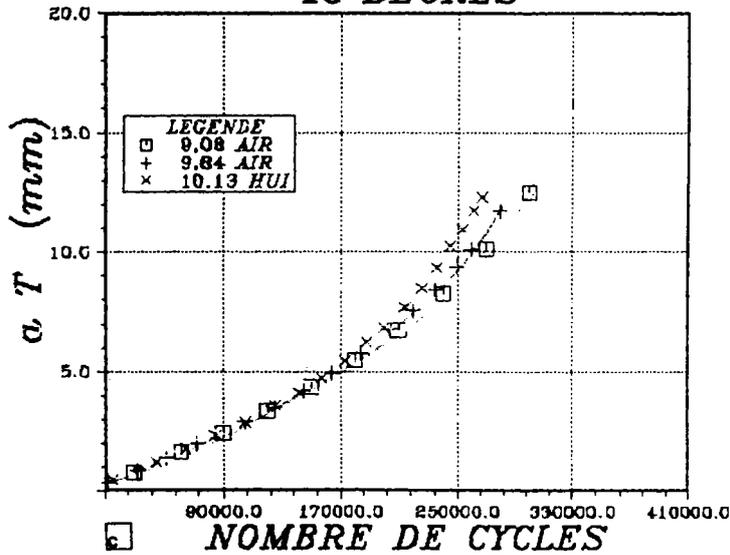
**\*\* MODE I \*\***



**\*\* 5 DEGRES \*\***



**\*\* 10 DEGRES \*\***



**\*\* 15 DEGRES \*\***

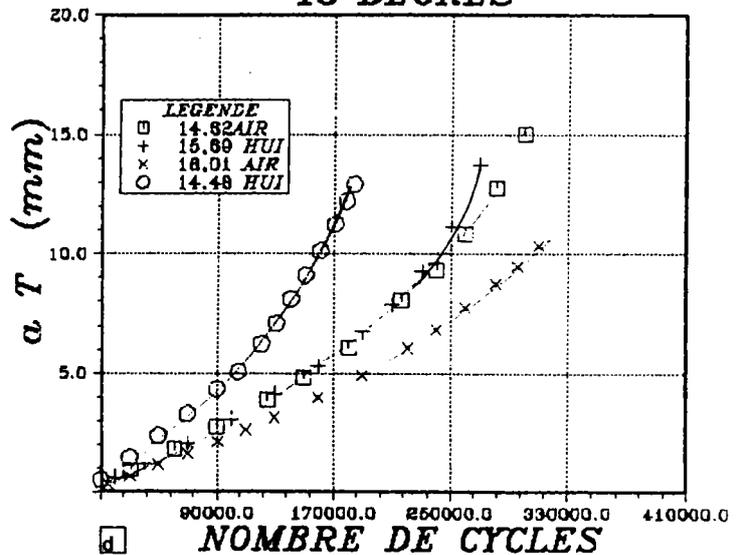
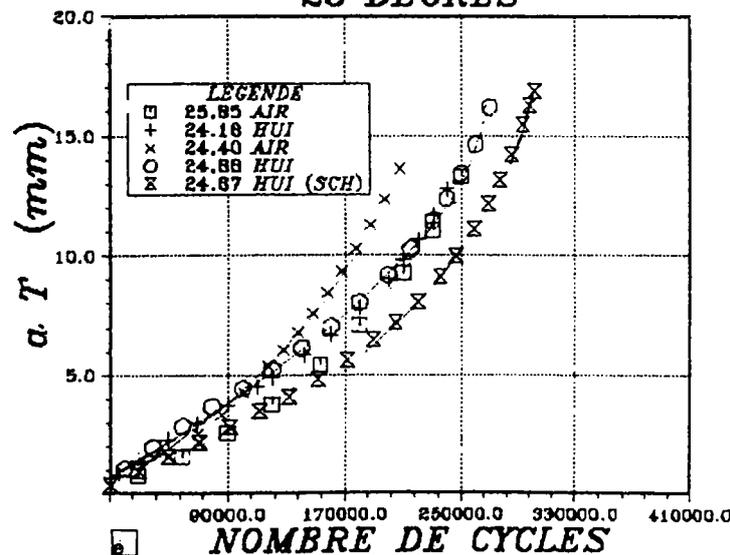
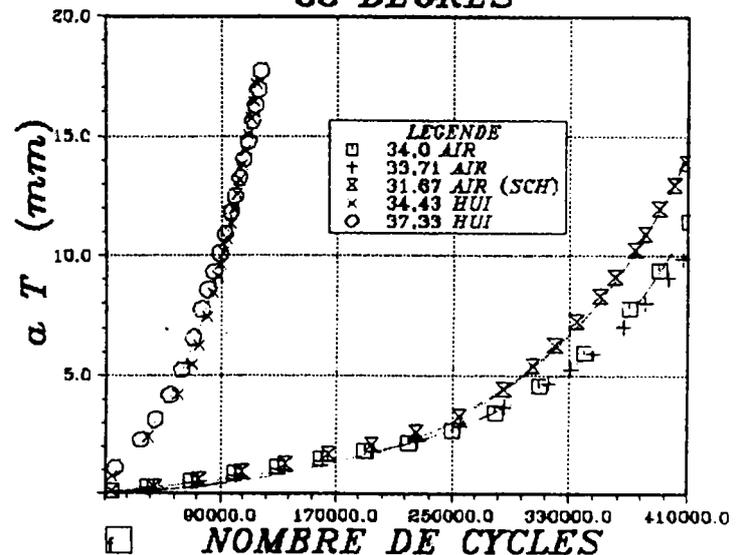


Figure 4.5 : longueur de fissure curviligne en fonction du nombre de cycles

**\*\* 25 DEGRES \*\***



**\*\* 35 DEGRES \*\***



**\*\* SERIE I air \*\***

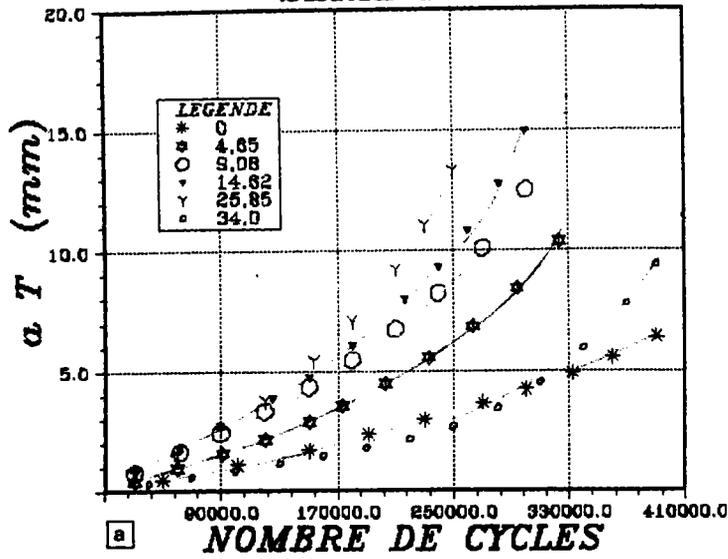
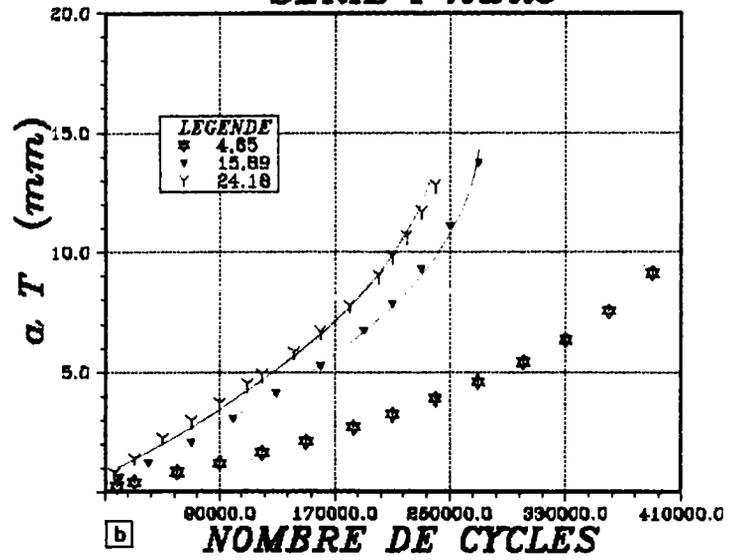
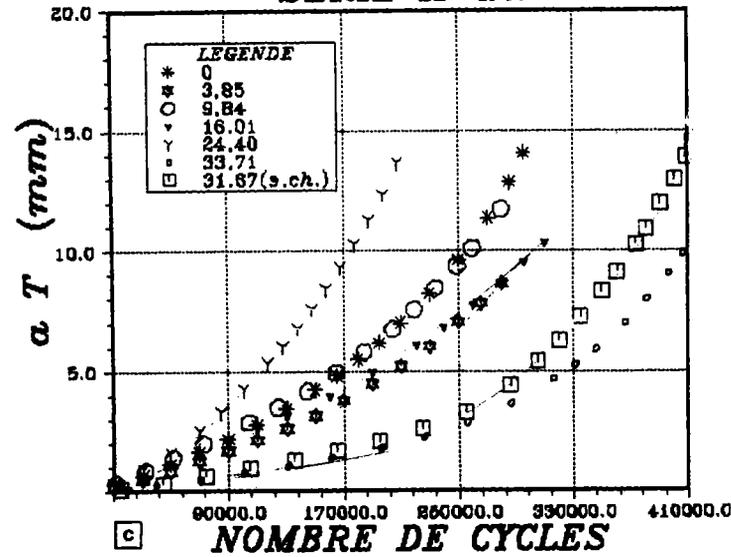


Figure 4.6  
Longueur de fissure  
curviligne en  
fonction du nombre  
de cycles

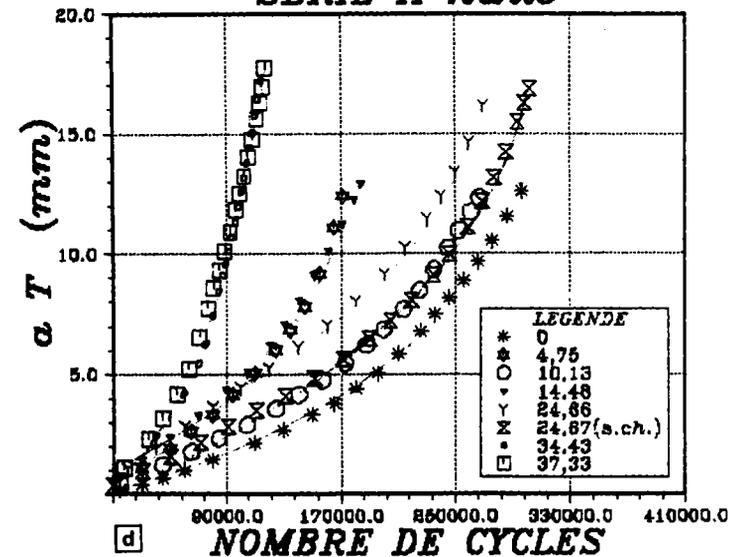
**\*\* SERIE I huile \*\***



**\*\* SERIE II air \*\***



**\*\* SERIE II huile \*\***



**\*\* 5 degrés \*\***

**\*\* 5 degrés \*\***

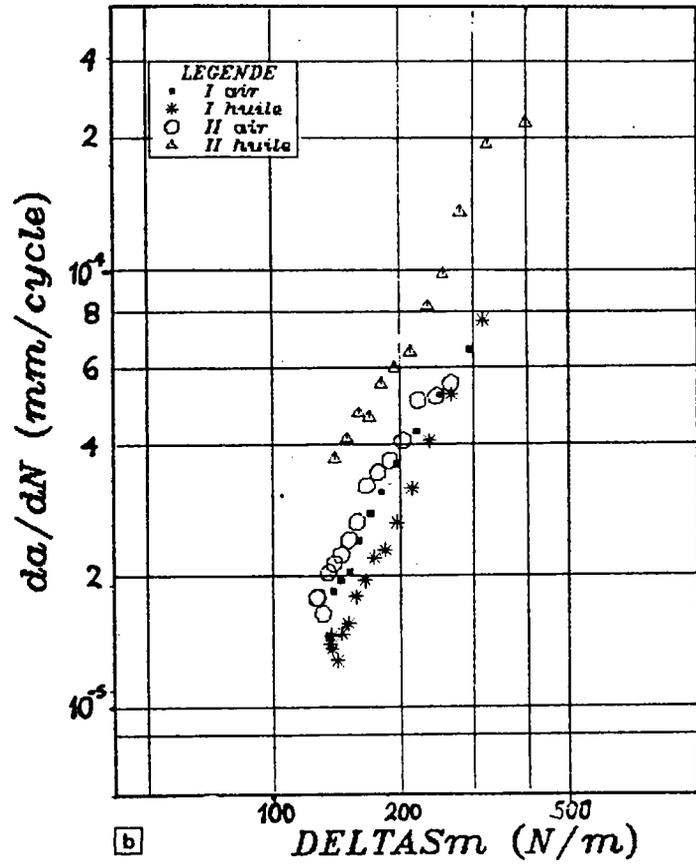
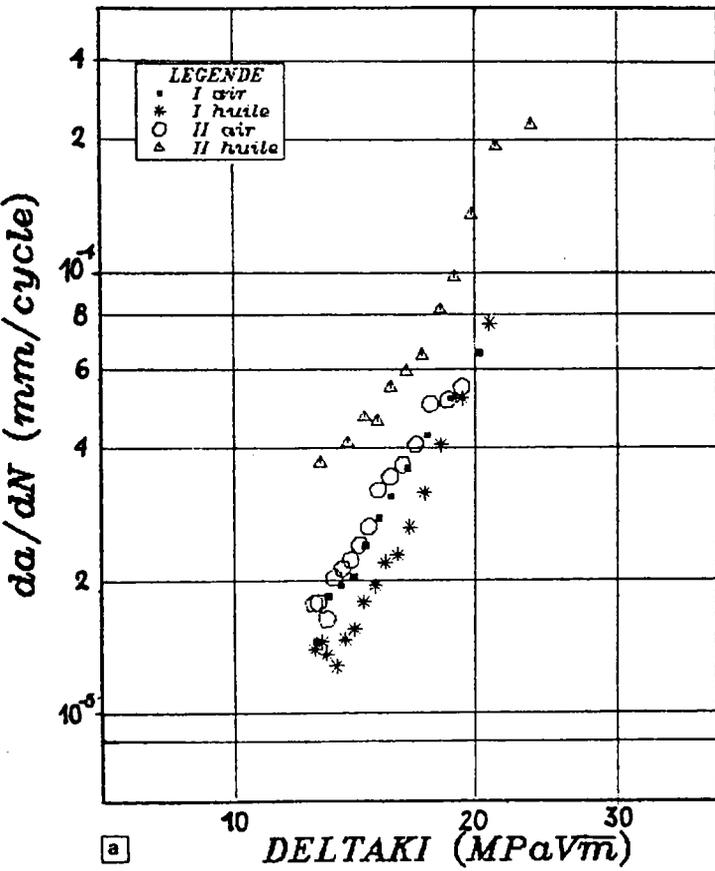
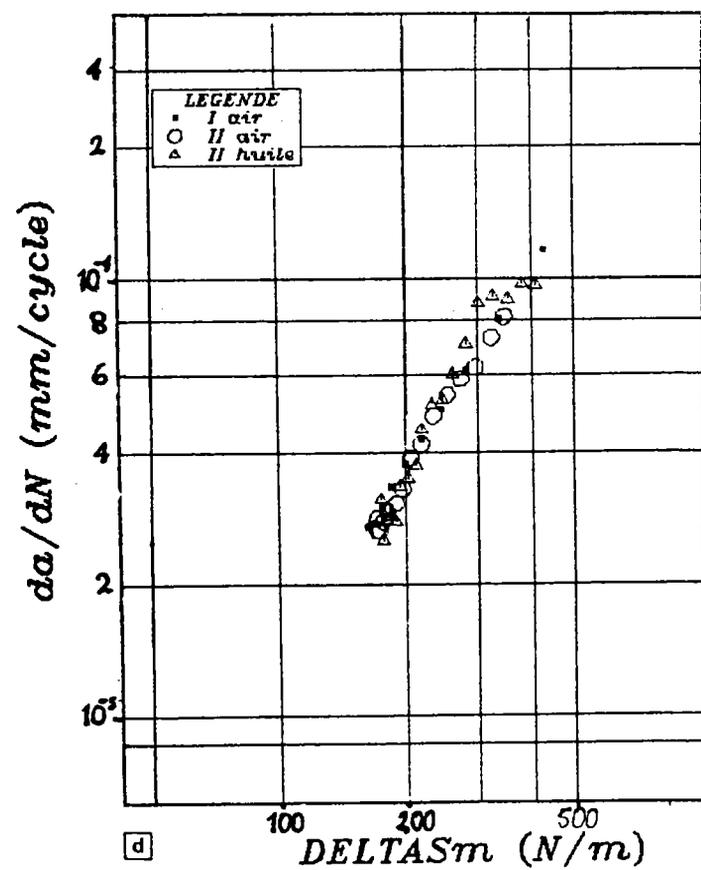
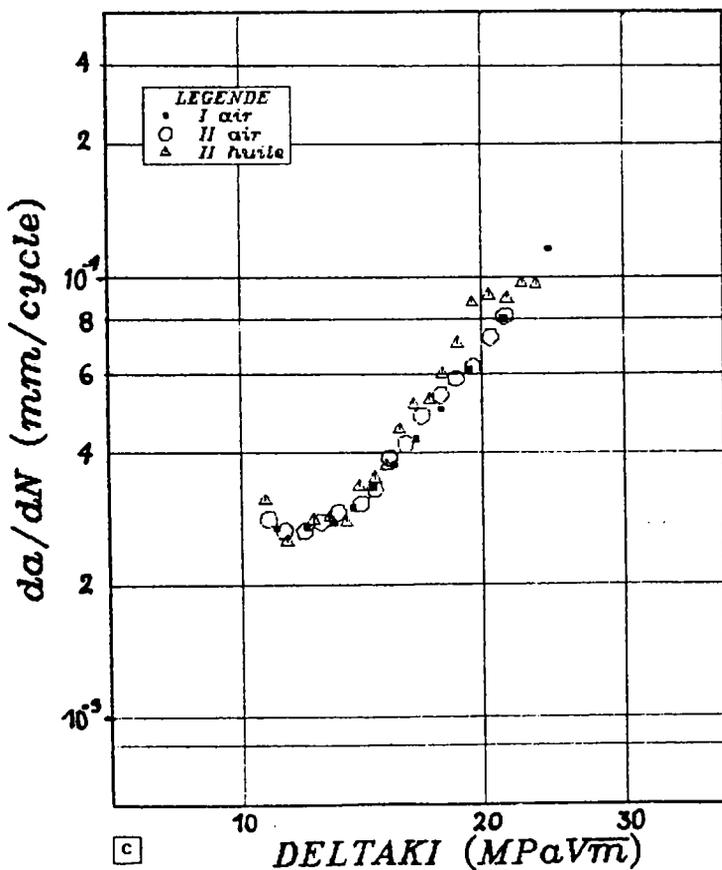


Figure 4.8 : vitesse de propagation en fonction du facteur d'intensité de contrainte en mode I ( $\Delta K_I$ ) et de l'amplitude de la densité d'énergie ( $\Delta S_m$ )

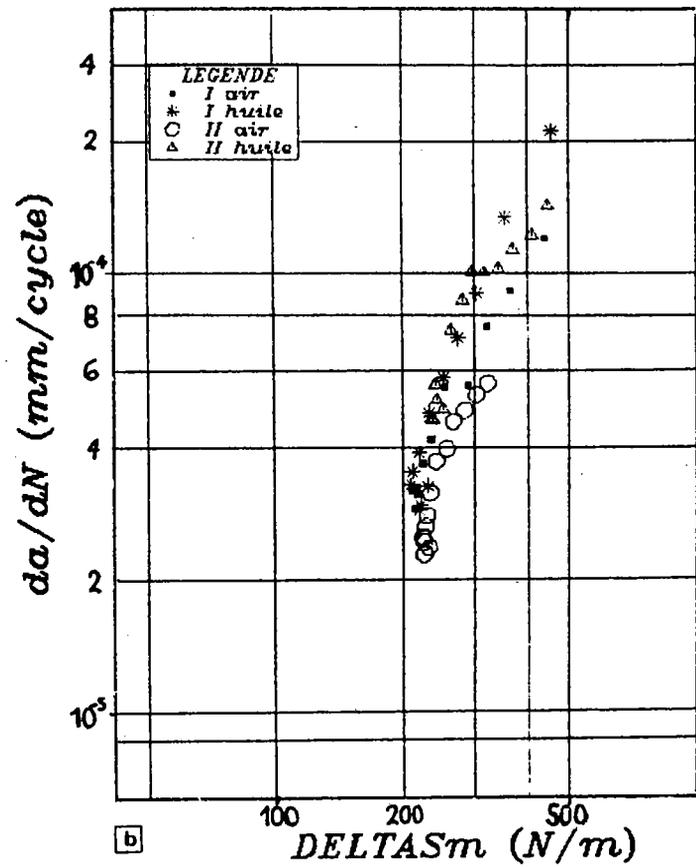
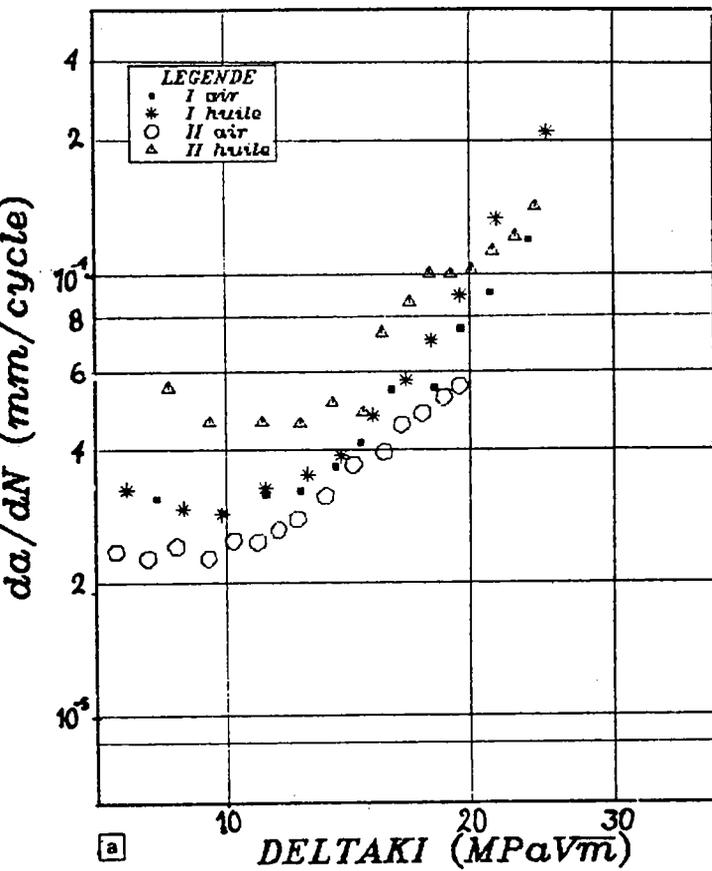
**\*\* 10 degrés \*\***

**\*\* 10 degrés \*\***



\*\* 15 degrés \*\*

\*\* 15 degrés \*\*



\*\* 25 degrés \*\*

\*\* 25 degrés \*\*

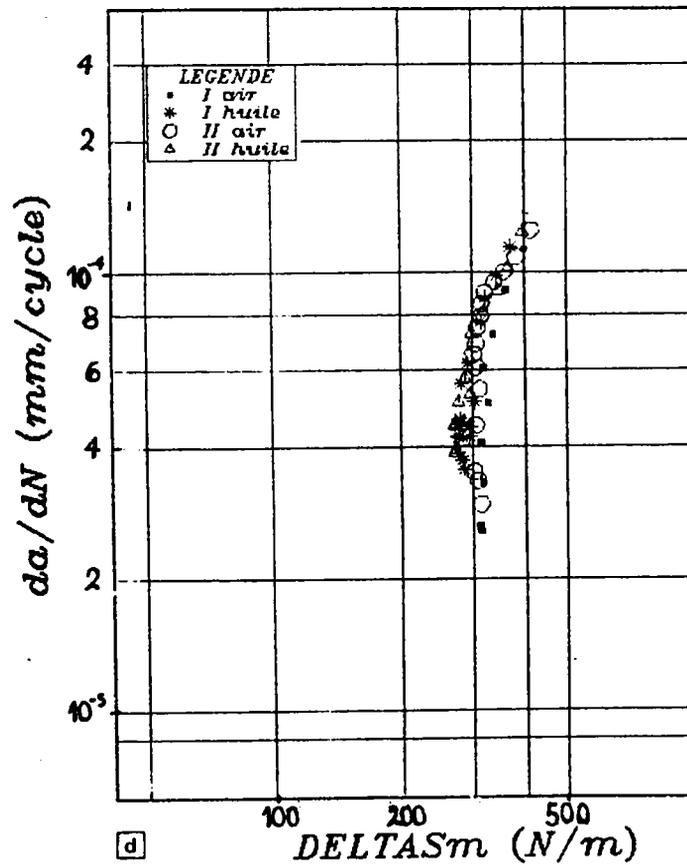
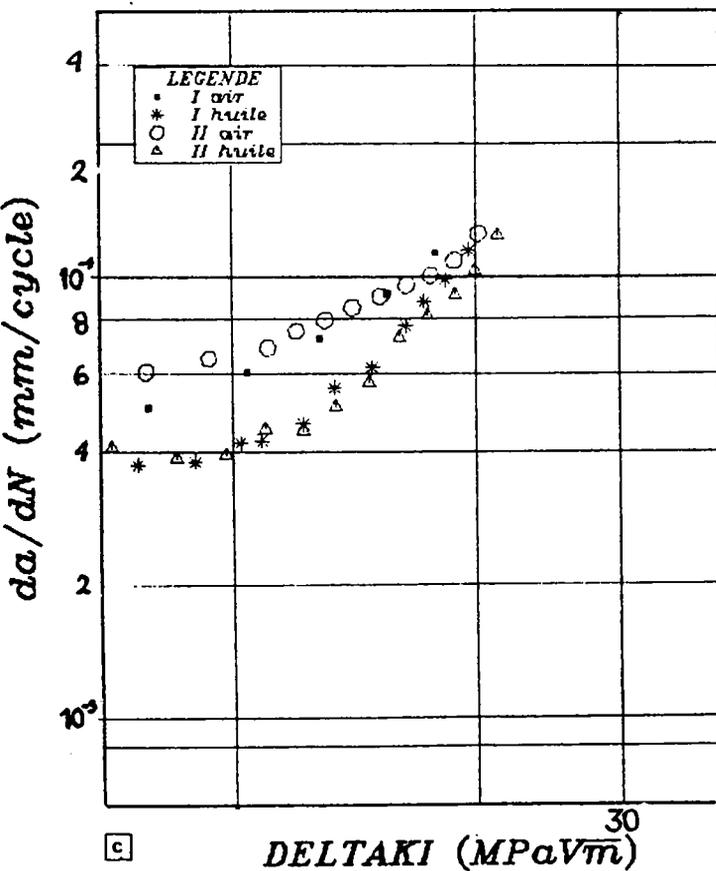


Figure 4.9 : vitesse de propagation en fonction du facteur d'intensité de contrainte en mode I ( $\Delta K_I$ ) et de l'amplitude de la densité d'énergie ( $\Delta S_m$ )

## Chapitre 5

### DISCUSSION

#### 5.1 POSITION DU SUJET

##### 5.1.1 Problème initial

L'origine de l'usure par *fatigue mécanique superficielle* des surfaces lubrifiées en contact est liée à de nombreux facteurs, parmi lesquels le *lubrifiant* et ses propriétés.

Au cours de la formation de piqûres de fatigue, le lubrifiant peut agir aussi bien sur la phase d'*amorçage* que sur la phase de *propagation* des fissures, selon des mécanismes différents. Son rôle peut se décomposer en une *action mécanique* d'une part et en une *action chimique et physico-chimique* d'autre part.

L'influence du lubrifiant sur l'amorçage a tout d'abord été étudiée en contact hertzien, *sous état de contrainte complexe*, à l'aide d'une *machine 4 billes modifiée fatigue*, améliorée ensuite en *machine cône / 3 billes* permettant un dépouillement plus performant. Pratiquement, un tel système ne permet d'aborder qu'un aspect qualitatif du phénomène, en aboutissant à une classification des lubrifiants selon le délai d'apparition du piquage.

L'*aspect mécanique* a été étudié au travers d'essais réalisés sur *machine à galets* sollicités en roulement et glissement combinés, où les mécanismes d'*amorçage* et de *propagation* ont pu être mis en évidence à l'aide de la mesure des contraintes résiduelles (diffraction des rayons X), en reliant la nature des contraintes mesurées (direction et amplitude) à la géométrie des fissures observées (direction et profondeur).

Dans le but de simuler uniquement l'*action chimique et physico-chimique* du lubrifiant, l'étude de la *propagation* de fissures en milieu lubrifiant a été réalisée sur des éprouvettes de *Mécanique de la Rupture*, de type compact, en traction ondulée. Nous avons alors voulu poursuivre dans cette dernière direction, mais en envisageant cette fois non plus une simple sollicitation des fissures en mode I, mais un *chargement de mode mixte I + II* afin de reproduire la morphologie des fissures observées sur les galets de la machine AMSLER, tout en s'affranchissant des problèmes de contact, de glissement, et de distribution de pression élastohydrodynamique..

Précisons que nous n'aborderons pas l'aspect amorçage des fissures, pour lequel se pose la

question de l'origine des fissures : amorçage en surface ou amorçage en sous-couche ? De fait, les deux théories coexistent et correspondent à des conditions différentes.

### 5.1.2 Approche

Une fissure de fatigue-contact telle qu'elle apparaît dans un galet est une fissure courte et courbe. Elle est sollicitée en mode mixte de façon complexe.

Le problème des fissures courtes droites est un problème complexe, encore non résolu actuellement : qu'appelle-t-on fissure courte, à partir de quelle longueur n'est-on plus en présence d'une fissure longue, comment la caractériser...? Il existe d'ailleurs assez peu de travaux auxquels se référer, même depuis que les fissures courtes sont reconnues en tant que telles, c'est-à-dire depuis vingt ans environ. Ainsi, la vitesse de propagation des fissures dites courtes – leurs dimensions restant toutefois bien supérieures à la taille du grain – est apparemment discontinue (influence des joints de grain), remettant en cause l'hypothèse de continuité du milieu. En outre, l'influence de paramètres comme le rapport de charge, la température, ... est très mal connue (PEARSON /73/, PINEAU /74/, HUDAK /75/, EL HADDAD et al. /76/, SHEPPARD et al. /77/).

Il s'avère donc particulièrement délicat de traiter directement le problème tel qu'il se pose. Par suite, l'idée est venue d'approcher les fissures courtes que l'on observe en fatigue-contact par des fissures longues, incurvées elles-aussi, étant donné que, bien que l'on parle d'un antagonisme fissures longues/fissures courtes, les analyses du comportement des fissures courtes partent de la connaissance que l'on a des fissures longues.

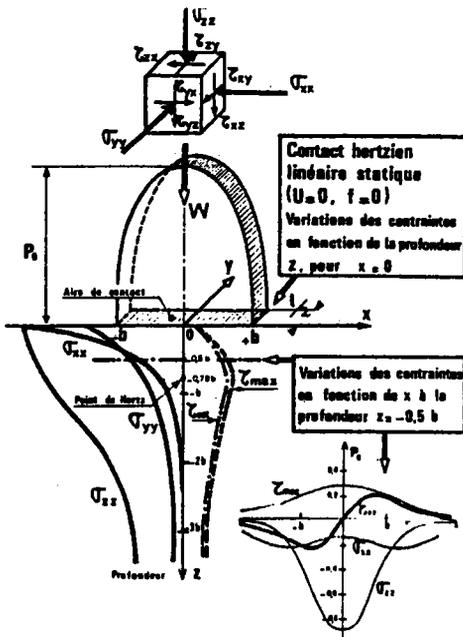
Bien sûr, moyennant ces approches successives, nous nous trouvons assez éloignés du point de départ. Cependant, nous pensons tirer d'une telle approche des éclaircissements qui permettront d'avancer dans la compréhension et la modélisation du problème.

## 5.2 ETAT DE CONTRAINTES

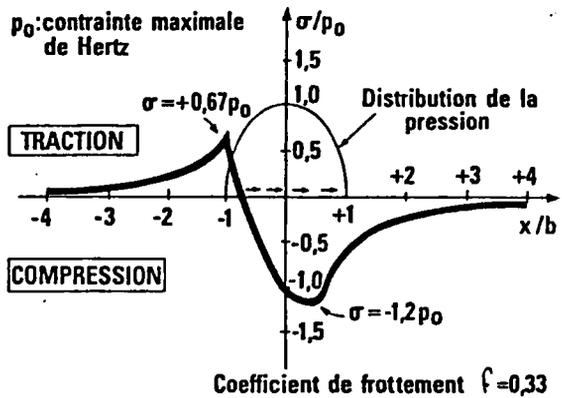
### 5.2.1 Contact statique

La répartition des contraintes dans le cas d'un contact hertzien de largeur  $2b$  est représenté à la figure 5.1. Au centre du contact, les contraintes principales sont des contraintes de *compression*. Le cisaillement maximal – situé dans le plan bissecteur des contraintes principales – passe par un maximum à une profondeur  $z = 0,47b$  dans le cas d'un contact ponctuel, et

0,78b si le contact est linéaire. C'est d'ailleurs en ce point (dit point de HERTZ) que la déformation plastique s'amorce en chargement statique.



- Figure 5.1 -  
Répartition des contraintes dans un contact hertzien



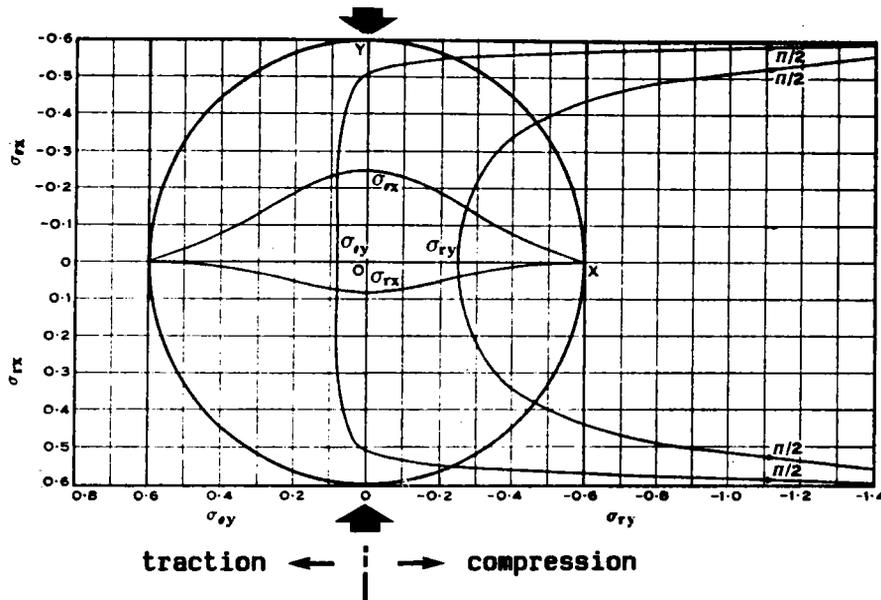
- Figure 5.2 -  
Variations de la contrainte  $\sigma_{xx}$  au voisinage d'un contact avec effort tangentiel

En présence d'un effort tangentiel, deux des trois contraintes précédentes deviennent des contraintes de traction, à l'arrière de la zone de contact (figure 5.2). Le point de cisaillement maximal, quant à lui, se déplace vers la surface avec le frottement.

### 5.2.2 Contraintes dans un disque

La figure 5.3 donne la répartition le long des diamètres OY et OX des contraintes à l'intérieur d'un disque non fissuré, chargé comme indiqué. La contrainte de compression — notée  $\sigma_{ry}$  — augmente depuis le centre du disque jusqu'à la génératrice du contact (où elle atteindrait une valeur infinie si le contact entre disque et plateau de compression n'avait pas une certaine largeur). La contrainte de traction  $\sigma_{\theta y}$  initialement constante, décroît au voisinage de la bande de contact, devient nulle et change de signe (compression).

**Nota** : si la largeur du contact est faible, les tractions s'annulent très près de la périphérie du disque, ce qui assure une plus grande uniformité de répartition.



- Figure 5.3 - Répartition des contraintes à l'intérieur d'un disque /78/.

Bien que l'analogie entre les deux distributions de contrainte ne soit pas évidente, il apparaît que dans un cas comme dans l'autre, une situation de compression engendre une composante de traction.

### 5.3 CRITERE DE BIFURCATION

#### 5.3.1 Bifurcation initiale

La comparaison des angles initiaux de bifurcation est un moyen de comparer entre eux les différents critères.

D'une manière générale, les critères que nous avons retenus coïncident jusqu'à une valeur de  $\beta$  voisine de 15 degrés. L'écart entre les angles de bifurcation théoriques ne dépasse pas 5 degrés. L'écart entre ces valeurs et les valeurs expérimentales sont du même ordre.

L'accord entre le critère de l'énergie de déformation minimale et celui d'AMESTOY /18/ ( $k_1^*$ ) est excellent jusqu'à 15 degrés et reste très bon au-delà. Par contre, lorsque  $\beta$  augmente, les deux critères d'AMESTOY ne sont plus tout à fait équivalents ; lorsque  $\beta$  est voisin de 25 degrés, les valeurs de  $\theta$  prévues par  $k_2^* = 0$  sont supérieures à 90 degrés, ce que, expérimentalement, nous n'avons jamais observé.

On note l'existence d'une valeur limite de l'angle de bifurcation de l'ordre de 70 degrés. Cependant, des auteurs comme THEOCARIS et ANDRIANOPOULOS /79/ ou HWANG et al. /16/ prévoient des angles de bifurcation pouvant atteindre des valeurs supérieures à 90 degrés.

On remarquera que le choix de la distance  $r$  à laquelle on calcule la contrainte tangentielle intervient de façon très sensible dans la prévision de l'angle de bifurcation. Ainsi, une valeur de  $10^{-6}$  mm permet d'obtenir un accord très satisfaisant entre le calcul et l'expérience, alors que pour une valeur 100 fois supérieure cet accord se dégrade, notamment pour des angles d'inclinaison faibles.

### 5.3.2 Bifurcation ultérieure

Il est vital de savoir si une fissure qui se propage est susceptible de ruiner une construction. Si l'on peut, en effet, prévoir le chemin suivi par la fissure, ainsi que les conditions de sa propagation, on pourra alors se prononcer sur le caractère nocif – ou non – de cette fissure.

Les études se bornant généralement à prévoir ou à comparer les angles initiaux en rupture, on dispose de peu de données lorsqu'il s'agit de prévoir la direction de propagation d'une fissure au-delà du point de départ, ce qui revient en fait à simuler la trajectoire de la fissure.

MURAKAMI /80/ applique avec succès la méthode des forces de volume et le critère de la contrainte tangentielle maximale à la rupture fragile. Par contre, il reconnaît que leur application à la prévision de la trajectoire d'une fissure de fatigue n'est pas appropriée.

PARLETUN /81/ étudie la propagation des fissures branchées dans les matériaux fragiles par la méthode des éléments finis, en utilisant le critère selon lequel  $K_{II} = 0$ , mais ses calculs se limitent aux premiers incréments de la propagation seulement.

COTTERELL /82/, KARIHALOO et al. /83/, /84/, /85/ ainsi que NEMAT-NASSER /86/, /87/ établissent l'équation de la trajectoire d'une fissure, au moyen d'une méthode de perturbations. Le critère qu'ils retiennent est le critère du taux maximal de restitution de l'énergie. Les angles de bifurcation pour lesquels leur méthode est valable sont limités à 15 degrés. En outre, ils ne proposent aucune confrontation expérimentale.

### 5.3.3 Simulation numérique de la trajectoire de la fissure

Partant des diverses trajectoires expérimentales que nous avons obtenues, nous avons tenté de les mettre en équation, ou plus précisément de les déterminer au moyen d'un critère adéquat, à partir des conditions initiales de longueur et d'inclinaison.

#### 5.3.3.1 Chemins de fissure expérimentaux

Les *figures 5.4* et *5.5* présentent différents chemins de fissure tracés à partir des relevés effectués au cours des essais. On constate que pour un angle initial d'inclinaison donné, quel que soit le milieu considéré, les trajectoires se superposent (sauf lorsque le chevron a été supprimé, la longueur initiale de fissure étant alors sensiblement inférieure à celles des autres essais). Par suite, un même critère sera capable de prévoir la trajectoire d'une fissure quel que soit le milieu considéré. Par ailleurs, on peut s'attendre à ce que la vitesse à laquelle la propagation a lieu soit le seul moyen d'évaluer la différence de comportement d'un milieu à un autre.

#### 5.3.3.2 Prévision des chemins de fissure

L'obstacle majeur à une telle démarche est le recours à une approximation du type fissure équivalente, toujours afin de contourner la difficulté que présente le calcul des facteurs d'intensité de contrainte d'une fissure branchée. Plusieurs concepts de fissures équivalentes sont proposés, de la fissure équivalente en mode I à la fissure tangente que définissent XUNFANG et GUANGQIN /28/, en passant par le modèle de SIH et BARTHELEMY /33/ que nous avons adopté.

Les critères que nous avons retenus pour les prévisions de trajectoire sont les suivants : critère de l'énergie de déformation minimale et critère de la contrainte tangentielle maximale (sous les deux formes  $\sigma_{\theta\max}$  et  $K_{\sigma}$ ).

La démarche est la suivante : partant d'une longueur et d'un angle d'inclinaison donnés, on détermine l'angle initial de bifurcation déterminé en recherchant la direction selon laquelle l'énergie de déformation initiale est minimale (ou la contrainte tangentielle maximale). A partir de cet angle et d'un incrément de longueur choisi arbitrairement, on détermine la longueur équivalente de la fissure. Puis on renouvelle le processus pour l'incrément de longueur suivant, en recherchant de la même façon la direction de bifurcation correspondant au critère considéré.

Pour les angles compris entre 5 et 25 degrés, il apparaît de façon immédiate que les trajectoires théoriques se situent toutes "au-dessus" du chemin de fissure expérimental, c'est-

à—dire qu'elles se rapprochent plus rapidement de la direction de l'axe de chargement (*figures 5.6 à 5.9*).

Or, en réduisant la composante de mode II, on parvient à améliorer très sensiblement ces trajectoires. Plusieurs tentatives ont abouti à définir une composante de mode II dite "efficace", en multipliant  $K_{II}$  par  $(\cos 2\beta_o)/2$ . Cette correction est sensible pour les premiers incréments surtout et permet d'obtenir une courbure proche de la courbure du chemin réel de la fissure.

L'idée d'une surestimation de la composante de mode II nous a été suggérée grâce à une ébauche de calcul aux éléments finis, réalisée au CÉTİM. La *figure 5.10* présente le maillage utilisé alors et le *tableau 16* compare les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte calculés d'une part au moyen des formules d'ATKINSON /68/ et d'autre part à l'aide de la technique des éléments finis. Il apparaît que si l'accord est bon pour les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte en mode I, il n'en est pas tout à fait de même pour le mode II.

**Tableau 22.** Comparaison des valeurs de l'angle de bifurcation  $\theta_i$  et de la longueur de fissure équivalente obtenues par calcul aux éléments finis avec les données expérimentales

$\beta_o$ (degrés)	$\beta_i$ (degrés)	$\theta_{iexp}$ (degrés)	$\theta_{iE.F.}$ (degrés)	$a_{eqexp}$ (mm)	$a_{eqE.F.}$ (mm)
9,5	8,37	41,40	42,73	17,57	17,566
	7,51	30,29	27,95	17,91	18,152
	6,55	25,33	25,15	18,58	18,757
	5,67	21,43	22,03	19,41	19,382
	4,85	19,05	20,13	20,34	20,028
25	22,68	68,92	64,09	17,31	17,567
	20,21	69,44	61,52	17,61	18,153
	17,45	59,05	59,33	18,11	18,757
	14,37	52,89	52,06	18,91	19,380
	11,74	34,17	34,42	20,31	20,028

Ainsi, le critère de  $K_{\sigma}$  permet une bonne prévision des chemins de fissure, moyennant une correction du facteur d'intensité de contrainte en mode II.

**Remarque :** pour des angles supérieurs à 25 degrés, nous n'avons pas pu mener à bien la simulation des trajectoires de la manière annoncée, ni d'une autre façon, du reste. Cela semble dû au fait que les facteurs d'intensité de contrainte en mode I sont négatifs au cours des

premiers incréments de propagation, ce qui se traduit au niveau des critères par des valeurs des angles de bifurcation physiquement aberrantes, et une discontinuité dans ces valeurs.

## 5.4 PROPAGATION

Le but d'un essai de fissuration en fatigue est de déterminer la loi de variation de la vitesse de fissuration  $da/dN$  en fonction de l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K$  au cours d'un cycle de charge. Pour les aciers, le domaine des vitesses est compris entre  $10^{-6}$  et  $10^{-3}$  mm/cycle.

L'essai de fissuration idéal serait celui qui permettrait d'obtenir la loi  $a = f(N)$ , la vitesse de fissuration à chaque instant étant obtenue par simple différenciation. Or, le plus souvent, on obtient cette loi sous la forme d'une série discrète de points  $(a_i, N_i)$ . De plus, au cours d'un essai de fissuration conduit à amplitude de charge constante – ce qui est le cas ici – la vitesse de fissuration augmente lorsque la fissure croît. Aussi est-il difficile d'obtenir à partir des données expérimentales une relation constamment croissante entre la longueur  $a$  de la fissure et la vitesse  $da/dN$ .

Notre hypothèse de départ est la suivante : en vertu du fait que la vitesse de propagation est sensible aux contraintes en fond de fissure et à un gradient de contrainte, nous recherchons une loi de propagation sous la forme :  $da/dN = A(\Delta X)^b$ .

Nous avons présenté au *chapitre 2* les lois de propagation proposées par différents auteurs pour traduire leurs essais de fatigue en mode mixte, lois qui, toutes, se mettent sous la forme annoncée, la quantité  $X$  étant un facteur d'intensité de contrainte, une contrainte ou une taille de zone plastique, grandeurs qui ne sont pas indépendantes d'ailleurs.

**Nota** : En toute rigueur, la vitesse devra être notée  $ds/dN$  au lieu de  $da/dN$ , comme le soulignent BROEK et RICE /2/ ou XUFANG et GUANGQIN /29/. Il s'agit en effet plus exactement d'une vitesse curviligne que d'une vitesse le long d'une droite.

### 5.4.1 Mode I

La majorité des auteurs sont unanimes : la propagation en mode mixte se ramène à une propagation en mode I (/26/, /30/, /88/). Autrement dit, une fissure soumise à une combinaison de cisaillement et de traction adopte une trajectoire amenant l'extrémité qui avance dans une direction telle que la composante de mode II disparaisse.

C'est effectivement ce que nous observons, ainsi que le confirment les planches photographiques II à IV. Les chemins de fissure s'infléchissent avec une courbure fonction de l'angle d'inclinaison, et tendent asymptotiquement vers la direction de chargement.

Aussi, les vitesses de fissuration sont-elles souvent exprimées en fonction du seul facteur d'intensité en mode I. Cependant, il est aisé de se rendre compte à l'examen des figures 4.8 et 4.9, que la loi de PARIS n'est pas adéquate, dès lors et tant que la composante de mode II n'est pas négligeable par rapport à celle de mode I.

#### 5.4.2 Energie

Une autre façon – assez répandue – de traduire les essais de fatigue en mode mixte est de tracer les vitesses de fissuration en fonction de l'amplitude de la densité d'énergie minimale (/26/, /28/, /32/). Cette quantité a l'avantage de tenir compte de la composante de chaque mode. Cependant, dans l'expression qu'il propose, BADALIANCE /32/ ne fait intervenir rien moins que 7 constantes (empiriques) afin d'obtenir un tracé satisfaisant !

Les figures 4.8 et 4.9 montrent que la traduction de la vitesse de propagation en termes d'énergie n'est pas appropriée au cas du disque brésilien soumis à du mode mixte.

#### 5.4.3 Facteurs équivalents

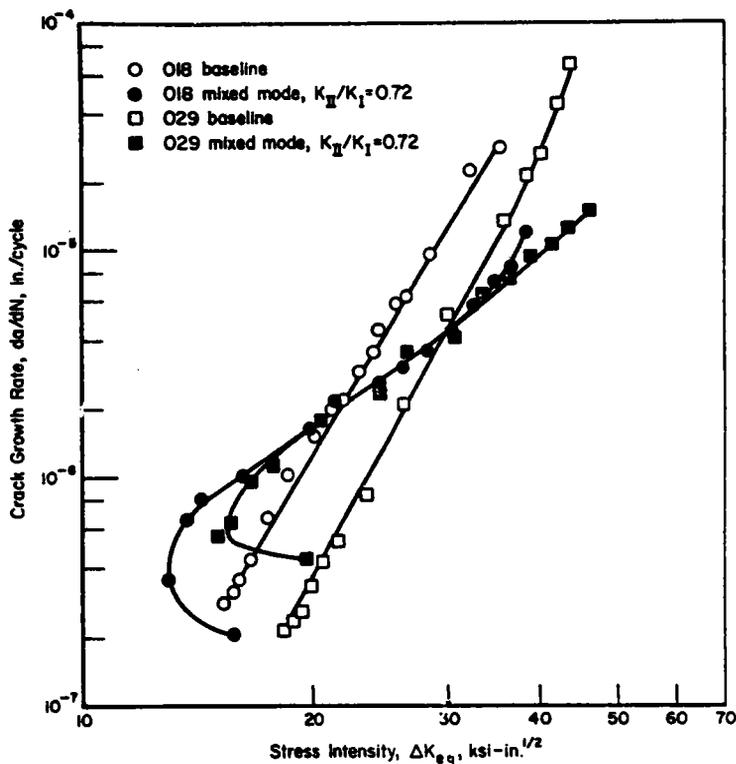
Au fur et à mesure que l'angle initial d'inclinaison augmente, on s'éloigne de la droite de PARIS originelle. Nous avons alors recherché une quantité fonction des facteurs  $K_I$  et de  $K_{II}$ , de manière à pouvoir obtenir une droite lorsque l'on trace la vitesse de fissuration (instantanée) en fonction de cette quantité.

La littérature foisonne de lois de propagation qui – rappelons-le – ont été obtenues empiriquement suite à des essais sous chargement de traction. Ces lois peuvent se répartir en deux grandes catégories, la première contenant les combinaisons des facteurs d'intensité de contrainte d'ordre 1 ou 2, la seconde regroupant des expressions faisant intervenir les contraintes ou la taille de la zone plastique. Ainsi, dans la première, nous trouverons les lois proposées par TANAKA /29/, SIH et BARTHELEMY /33/, BROEK et RICE /26/, alors que dans la seconde figurent des expressions comme celles de PUSTEJOVSKI /30/, ou d'ANTOLOVICH /89/.

Aucune de ces lois n'est apparue appropriée au dépouillement de nos résultats : dans un diagramme log – log habituel, les points exprimant les vitesses de propagation en fonction de

l'une quelconque des expressions citées ne s'alignent pas sur une droite. Par contre, nous avons obtenu des allures analogues à celles que présentent BROEK et RICE /26/ à la figure 5.11.

- Figure 5.11 -  
Vitesse de propagation  
de fissure en fonction  
d'un facteur équivalent,  
selon /26/



Etant donné la configuration particulière des fissures que nous observons, nous avons alors envisagé de substituer dans les expressions précédemment mentionnées les facteurs d'intensité  $k_1^*$  et  $k_2^*$  aux facteurs  $K_I$  et  $K_{II}$ , de manière à faire intervenir la présence d'une branche.

Nous nous sommes donc penchés sur les travaux établissant les facteurs d'intensité de contrainte d'une fissure branchée. Après une étude des différents modèles et expressions disponibles dans la littérature - annexe A -, nous avons retenu les expressions données par AMESTOY et al. /18/. Rappelons qu'elles s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} k_1^* \\ k_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix} \quad (7)$$

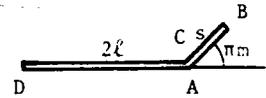
les  $K_{ij}$  étant déterminés comme suit:

$$K_{11} = \left( \cos \pi m - \frac{\sin \pi m \cdot L}{2\pi} \right) \left( \frac{1-m}{1+m} \right)^{m/2} \quad K_{12} = -\left( \frac{3}{2} \sin \pi m \right) \left( \frac{1-m}{1+m} \right)^{m/2}$$

$$K_{21} = \left( \frac{1}{2} \sin \pi m \right) \left( \frac{1-m}{1+m} \right)^{m/2} \quad K_{11} = \left( \cos \pi m + \frac{\sin \pi m \cdot L}{2\pi} \right) \left( \frac{1-m}{1+m} \right)^{m/2}$$

avec  $L = \text{Log} \left( \frac{1-m}{1+m} \right) - \frac{2m}{1-m^2}$

Les notations sont celles précisées par la figure ci-contre, avec  $\pi m = \theta$  (attention :  $m$  désigne ici une quantité totalement distincte de l'exposant de la loi de PARIS).



Nous respectons ici l'hypothèse d'une branche infinitésimale en procédant de la façon suivante : les facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  sont calculés pour la fissure équivalente ainsi que nous l'avons définie précédemment ; puis les  $K_{ij}$  sont déterminés en substituant à  $\pi m$  la valeur de l'angle de bifurcation correspondant à l'incrément de longueur suivant (et non pas la valeur qui est intervenue dans le calcul de la fissure équivalente).

Le tracé de la vitesse de fissuration en fonction de  $k_1^*$  seul, ou en fonction des expressions précédentes des facteurs équivalents où l'on remplace  $K_I$  par  $k_1^*$  et  $K_{II}$  par  $k_2^*$  est resté infructueux.

#### 5.4.4 Proposition de loi

Ce sont finalement OTSUKA et col. /9/ qui nous ont suggéré une idée plus satisfaisante. Dans l'expression qu'ils donnent de  $K_\sigma$ , nous avons remplacé  $K_I$  par  $k_1^*$  et, considérant que la propagation se faisait selon la nouvelle direction de mode I ainsi définie, nous avons substitué zéro à  $k_2^*$ , aboutissant ainsi à la relation :

$$\frac{da}{dN} = C^* (k_{\sigma 1}^*)^{m^*} \quad (5.1)$$

$$\text{avec : } k_{\sigma 1}^* = k_1^* \cos^3 \frac{\theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{à partir de : } k_\sigma^* &= k_1^* \cos^3 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} k_2^* \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ &= k_{\sigma 1}^* + k_{\sigma 2}^* \end{aligned}$$

De fait, ce n'est pas uniquement l'ouverture "locale" ( $k_1^*$ ) qui intervient, mais aussi l'ouverture et le cisaillement de la branche principale.

Nous comparons dans le tableau suivant les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte initiaux calculés en fond de fissure équivalente d'une part sans tenir compte du changement de direction ( $K_I$ ,  $K_{II}$ ), d'autre part en faisant intervenir le branchement ( $k_1^*$ ,  $k_2^*$ ).

Tableau 23. – Facteurs branchés –

$\beta_0$ (degrés)	$\Delta K_{I0}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$\Delta k_{10}^*$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$\Delta K_{II0}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$\Delta k_{20}^*$ (MPa $\sqrt{m}$ )
4,65	12,6	15,0	5,0	1,0
9,08	11,05	17,4	10,4	3,2
14,62	8,2	21,5	14,5	2,4
25,85	-0,4	25,5	21,4	4,0
34,00	-7,5	23,0	23,4	9,6
4,85	12,6	15,2	5,2	0,2
15,69	7,5	22,3	15,4	1,4
24,18	1,06	24,9	20,5	4,0
3,85	12,5	14,2	4,0	-0,3
9,84	10,8	18,5	10,2	2,0
16,01	7,3	22,3	15,6	2,4
24,40	0,86	25,1	20,6	3,8
31,67	-3,8	22,3	20,3	6,0
33,71	-6,8	25,3	22,8	5,9
4,75	12,8	15,1	5,2	1,6
10,13	10,7	18,8	10,5	2,2
14,48	8,5	22,8	15,3	2,3
24,66	0,8	24,3	20,1	4,5
34,43	-7,3	23,5	22,7	7,9

On remarque que le facteur  $k_2^*$  est faible par rapport à  $k_1^*$ , lui-même systématiquement supérieur à  $K_I$  et de l'ordre de grandeur de  $K_{II}$  lorsque le chargement est de mode II. Cela

signifie donc qu'au niveau de la branche considérée, on a essentiellement un mode d'ouverture ( $k_1^*$  important) et peu de cisaillement ( $k_2^*$  faible).

Nous allons voir au paragraphe suivant les modifications à apporter dans le domaine du mode II impur où nous discuterons également de la validité de la loi que nous proposons.

## 5.5 INFLUENCE DU FROTTEMENT – MODE II IMPUR

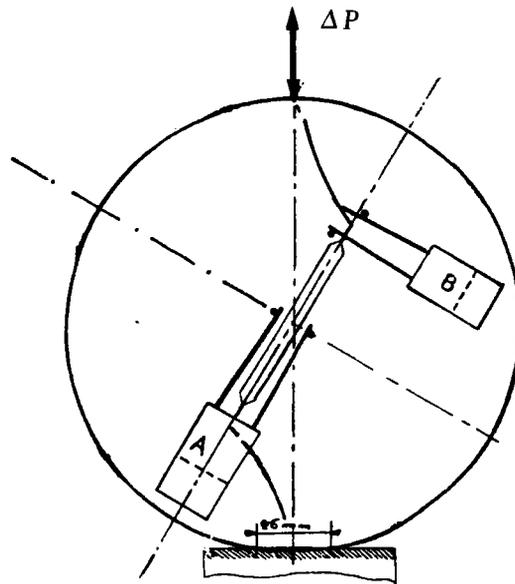
### 5.5.1 Déplacement

Des mesures des déplacements des lèvres de fissure faites parallèlement à la présente étude /90/ permettent d'apporter des éléments à la compréhension des mécanismes de propagation. Ces mesures ont été réalisées au moyen de capteurs d'ouverture disposés ainsi que l'indique la figure 5.12 :

1. d'une part perpendiculairement à l'entaille mécanique, afin de mesurer les déplacements des lèvres de la préfissure,
2. d'autre part, parallèlement à la préfissure, au niveau de la zone de bifurcation, en vue d'accéder au déplacement des lèvres de la fissure (partie incurvée).

On en a tiré les enseignements suivants :

- les lèvres de la préfissure viennent au contact l'une de l'autre lorsque l'on passe d'un chargement de mode mixte à un chargement de mode II (pur ou impur). Cependant, s'il y a fermeture au départ (ce qui correspond à une valeur négative de  $K_I$ ), les lèvres s'écartent après une propagation d'une certaine longueur (environ 10 mm pour un angle initial de l'ordre de 35 degrés).
- les lèvres de la partie préfissurée se déplacent parallèlement l'une à l'autre, et l'amplitude de ce déplacement est d'autant plus grande que l'angle de chargement est plus important (davantage de cisaillement)



- Figure 5.12 - Emplacement de capteurs d'ouverture /90/

Par ailleurs, l'examen microscopique des lèvres des fissures montre que :

- en mode I + II, on n'observe aucune trace de matage tant au niveau de la préfissure que de la fissure proprement dite : il n'y a donc pas de contact et, par conséquent, pas de frottement sur ces surfaces,
- en mode II pur et impur, la présence de matage cette fois sur les lèvres de la préfissure traduit un frottement métallique à ce niveau. Au niveau de la fissure en mode mixte, aucune trace semblable n'apparaît.

### 5.5.2 Correction

On peut donc s'attendre à ce que l'existence d'un frottement dans les conditions de mode II impur ait une répercussion sur la vitesse de propagation.

De fait, les courbes des *figures 5.13* (I air) et *5.14* (II air) montrent que les premiers points correspondant à un angle de 35 degrés s'écartent de l'ensemble des autres points vers des vitesses inférieures, traduction manifeste d'un phénomène de retard.

Aussi, pour que la loi de propagation que nous proposons puisse encore s'appliquer au cas du mode II impur, il convient d'apporter une correction à son expression.

LOUAH /90/ propose à cette fin le terme correctif suivant :

$$\alpha = \left( \frac{\beta - \beta^*}{\beta^*} \right) \cdot f \quad (5.2)$$

Ainsi, dans le cas du mode II impur, en adoptant cette correction, l'expression que nous proposons se met sous la forme :

$$k_{\sigma 1}^* = k_1^* \cos^3 \frac{\theta}{2} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{\beta - \beta^*}{\beta^*} \right) \cdot f \right] \quad (5.3)$$

Ce terme correctif ne doit intervenir que sur une certaine distance, c'est-à-dire seulement tant que les lèvres de la préfissure sont soumises à du frottement. La valeur limite  $\beta^*$  a été estimée égale à 13 degrés, ce qui correspond en fait à l'angle d'inclinaison (équivalent) pour lequel les lèvres de la préfissure cessent d'être en contact. La valeur de  $f$  sera prise égale à 0,18, ce qui correspond à un coefficient de frottement moyen. Notons que LOUAH /90/ proposait une valeur de 0,41 un peu trop élevée.

### 5.5.3 Validité du critère proposé

Le **tableau 24** ci-après récapitule les coefficients  $m^*$  (cf. relation 5.1) que l'on obtient pour chaque série en portant les vitesses de fissurations en fonction de  $k_{\sigma 1}^* = k_1^* \cos^3(\theta/2)$  - approximation au sens des moindres carrés -.

Tableau 24. Coefficient  $m^*$

Série Angle	I <sub>air</sub>	I <sub>huile</sub>	II <sub>air</sub>	II <sub>huile</sub>
5°	3,72	4,05	3,23	3,80
10°	2,99	—	3,03	3,24
15°	3,17	3,83	3,02	2,68
25°	3,40	2,34	3,24	2,57
35°	3,57	—	3,24	3,08
35° **	6,41	—	5,61	—
$m^*$ moy.	3,36	(4,00)	3,30	3,72
$C^*$ moy.	$2,66 \cdot 10^{-9}$	$(4,41 \cdot 10^{-10})$	$3,61 \cdot 10^{-9}$	$1,52 \cdot 10^{-9}$

**Nota :** – les valeurs pour le mode I sont les mêmes qu’au paragraphe 4.4.1

– les valeurs pour 35 degrés tiennent compte de la correction (la ligne repérée par \*\* indique les valeurs obtenues avant correction)

– les valeurs moyennes tiennent compte des essais en mode I, ainsi que de la correction pour le mode II impur.

**Remarque :** Les valeurs du coefficient  $m^*$  exposées ci-dessus ne peuvent évidemment pas servir à comparer les essais entre eux, l’intérêt de ce calcul étant d’établir une loi de propagation valable pour tous les essais réalisés à l’aide du disque brésilien et, par conséquent, de proposer une valeur unique pour le coefficient  $m^*$ .

#### 5.5.4 Influence du lubrifiant sur le frottement

Si l’on compare les courbes des *figures 5.13 à 5.16*, il apparaît que :

1. à l’air, l’introduction du terme correctif réduit la dispersion ; les points correspondant à un angle de l’ordre de 35 degrés s’alignent sur les autres,
2. à l’huile, au contraire, le même terme augmente la dispersion déjà existante, de façon sensible. Une correction se révèle pratiquement inutile. Par suite, le lubrifiant joue un rôle au niveau du frottement des lèvres de la préfissure en le réduisant de manière importante, alors que son influence en fond de fissure n’a pas pu être clairement établie.

Toutefois, lorsque le frottement disparaît, après une certaine longueur de fissuration, la forte augmentation de la vitesse de fissuration que l’on observe au départ subsiste ensuite. Les vitesses sont dans un rapport de 4,5 (*tableau 22*), ce qui permet d’affirmer qu’*en mode II impur, le lubrifiant a un effet néfaste sur la fissuration, dans le sens où il entraîne une augmentation très nette de la vitesse de propagation.*

Nous pensons qu’il s’agit ici essentiellement d’un rôle mécanique.

#### 5.5.5 Influence du chevron

La suppression du chevron a été réalisée dans deux cas ( $\beta_0 = 25$  et 35 degrés) mais la préfissure subsistant, la distance sur laquelle le frottement est susceptible de se produire ne se trouve que partiellement réduite (3/4 environ).

Par suite, à l'air, la présence du frottement sera vraisemblablement encore sensible, alors qu'en milieu lubrifiant, du fait d'une réduction du frottement par l'huile, celui-ci risque d'être atténué.

De fait, on observe que :

- en milieu ambiant, la courbe  $a_T = f(N)$  pour un angle d'inclinaison initial de 35 degrés se place au-dessous de la courbe correspondant au même angle lorsque le chevron a été supprimé.
- en milieu lubrifiant, la courbe obtenue pour 25 degrés se trouve en-dessous de celle correspondant au même angle en l'absence de chevron, compte tenu d'une différence de longueur initiale de 2 cm environ.

Par conséquent, dans les deux cas, la suppression du chevron bien que partielle, entraîne une légère augmentation de la vitesse.

Les valeurs de  $m^*$  obtenues en l'absence de chevron sont respectivement de 3,42 pour 25 degrés et de 3,72 pour 35 degrés, valeurs qui restent dans le domaine de celles contenues dans le *tableau 24*.

## 5.6 ROLE DU LUBRIFIANT

L'un des volets de la présente étude était d'appréhender l'influence du lubrifiant sur la vitesse de propagation des fissures. Pour ce faire, nous avons procédé, ainsi que décrit au paragraphe 3.2.3, à des essais sous circulation d'huile (*planche I*).

Seul le cas du mode II impur permet de conclure de manière tranchée dans le sens d'une influence néfaste du lubrifiant. Dans tous les autres cas, compte tenu de la dispersion naturelle des essais de fatigue, le rapport des vitesses d'un milieu à l'autre étant toujours inférieur à 2, il n'est pas possible d'être aussi catégorique dans un sens ou dans l'autre.

### 5.6.1 Mécanisme d'action de l'huile

En vertu des observations précédentes, nous pouvons distinguer les situations suivantes :

$\beta_0 < 25$  degrés :

les lèvres de la pré-fissure ne sont pas en contact ; l'huile atteint le fond de fissure de deux manières : d'une part par "pompage" depuis la pré-fissure, d'autre part par pénétration latérale

au niveau de la fissure elle-même. On assiste ainsi à un effet chimique double, le fond de fissure étant largement baigné par un apport renouvelé de lubrifiant arrivant à la fois par la préfissure et par le côté de l'éprouvette. Aucun effet mécanique n'entre ici en jeu, l'absence de frottement ayant été mise en évidence. En conséquence, la vitesse en milieu lubrifiant augmente par rapport à l'air.

$\beta_0$  voisin de 25 degrés :

les lèvres de la préfissure entrent en contact ; l'effet mécanique existe, mais il est encore faible, d'autant plus que le lubrifiant le réduit. Par ailleurs, du fait de la fermeture des lèvres de la préfissure, l'huile arrive uniquement latéralement ; l'effet chimique est de ce fait moins important : la vitesse stagne ou diminue.

$\beta_0 > 25$  degrés :

les lèvres de la préfissure sont fortement en contact, mais le lubrifiant réduit le frottement. La vitesse augmente considérablement, du fait, nous semble-t-il, d'une ouverture importante de la petite branche, permettant une action chimique qui était empêchée dans le cas précédent (les taches de corrosion réapparaissent de manière très nette).

Un autre type d'essai a été effectué en fatigue par DELEBECQ /91/ sans contact sur des éprouvettes de type CTW80B20 sollicitées en traction (mode I pur). Ces essais indiquaient un effet néfaste du lubrifiant sur la fissuration, du fait de la pollution de l'huile par l'eau. Par contre, on observait un effet bénéfique du lubrifiant au niveau de l'amorçage des fissures (éprouvettes cylindriques) par substitution d'environnement. En effet, celui-ci empêche le libre accès du fond du défaut (extrémité de la fissure) aux constituants agressifs de l'air, tels que l'oxygène ou la vapeur d'eau. En contrepartie, par un effet physico-chimique (tensio-activité), le lubrifiant favorisait le nombre de sites d'amorçage.

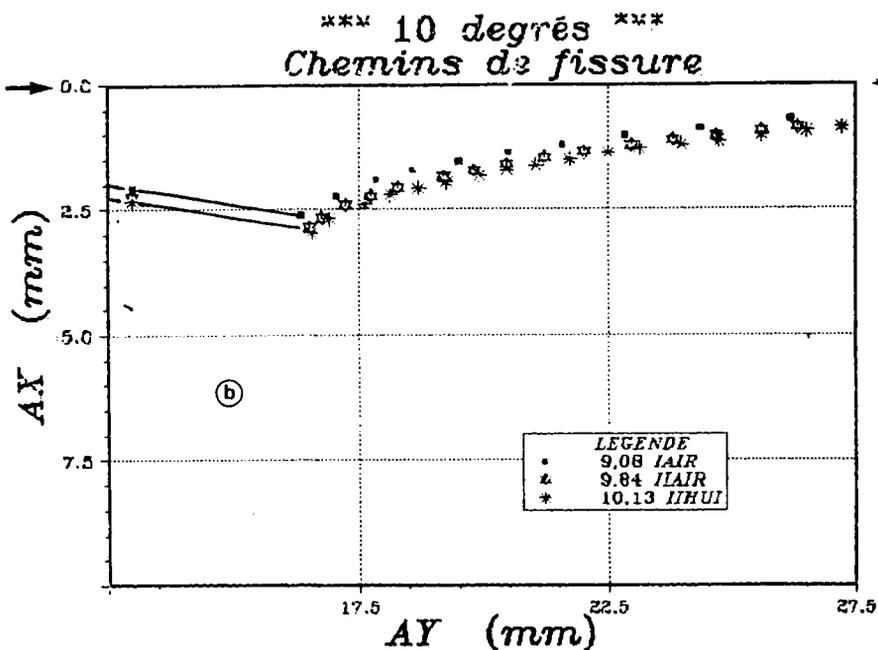
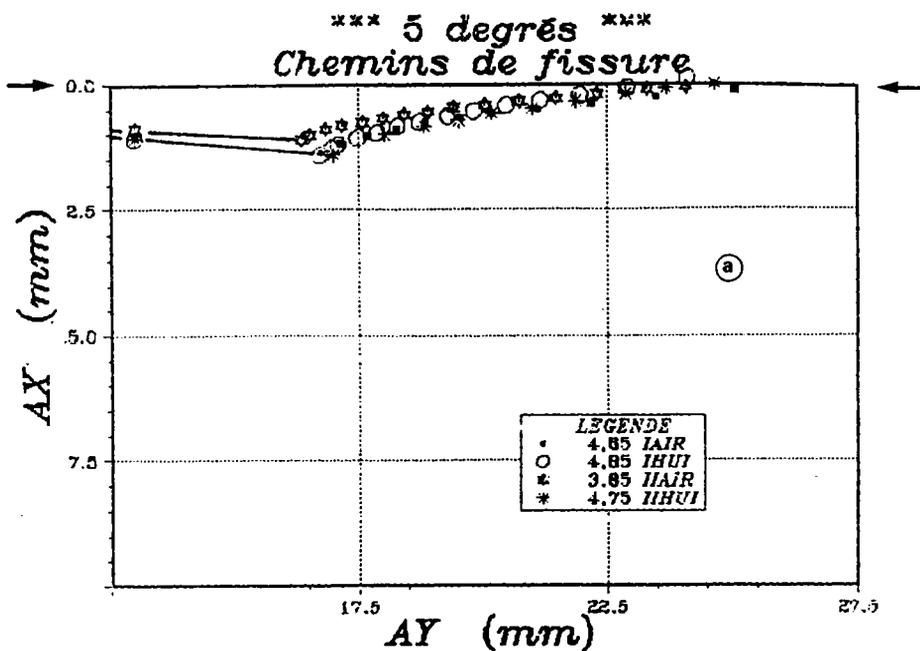
Dans le cas du disque brésilien, nous retrouvons ces effets de pollution et de substitution d'environnement, mais ils s'expriment différemment.

En mode I pur, en milieu lubrifiant, la rupture est de type intergranulaire, comme en témoignent les vues de la *planche XII*. Cependant, on ne relève pas d'augmentation sensible de la vitesse de fissuration par rapport à ce qu'elle est en milieu air ambiant.

En mode I + II, au fur et à mesure que l'angle d'inclinaison augmente, la géométrie de la fissure (coude et branche) est telle que le renouvellement d'huile dans la fissure se fait plus difficilement. La couche d'huile au contact des lèvres s'appauvrit donc en éléments agressifs (eau notamment). Les fractographies de la *planche V* en sont la preuve : les taches brunâtres traduisant une oxydation des surfaces sont de moins en moins marquées lorsque l'angle d'inclinaison augmente.

Par contre, en mode II impur, où la vitesse de fissuration augmente considérablement, les traces de corrosion réapparaissent sur une portion plus importante de la fissure. Toutefois, nous n'avons pas pu mettre en évidence une rupture de type intergranulaire.

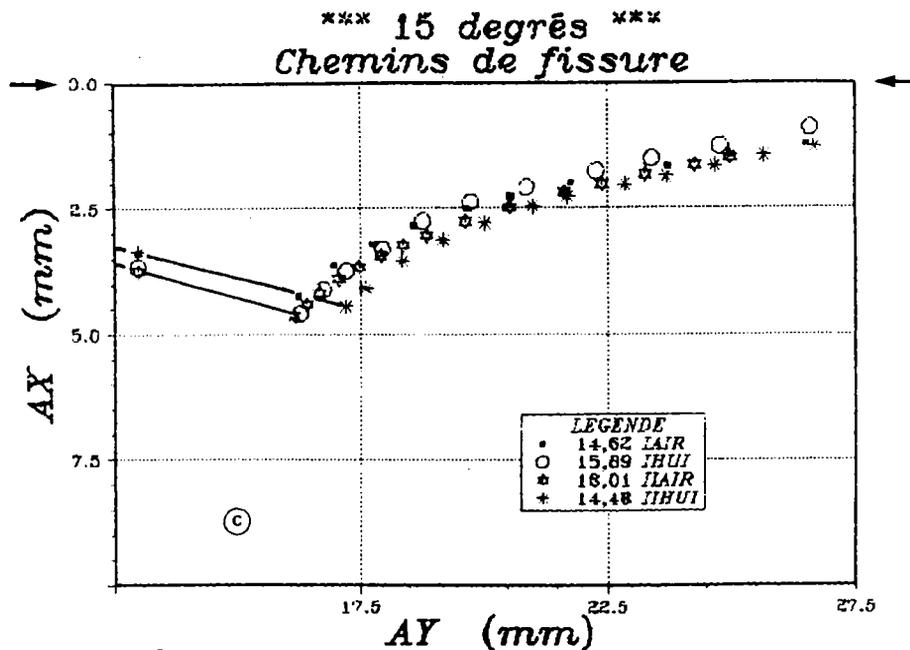
direction d'application  
de la charge



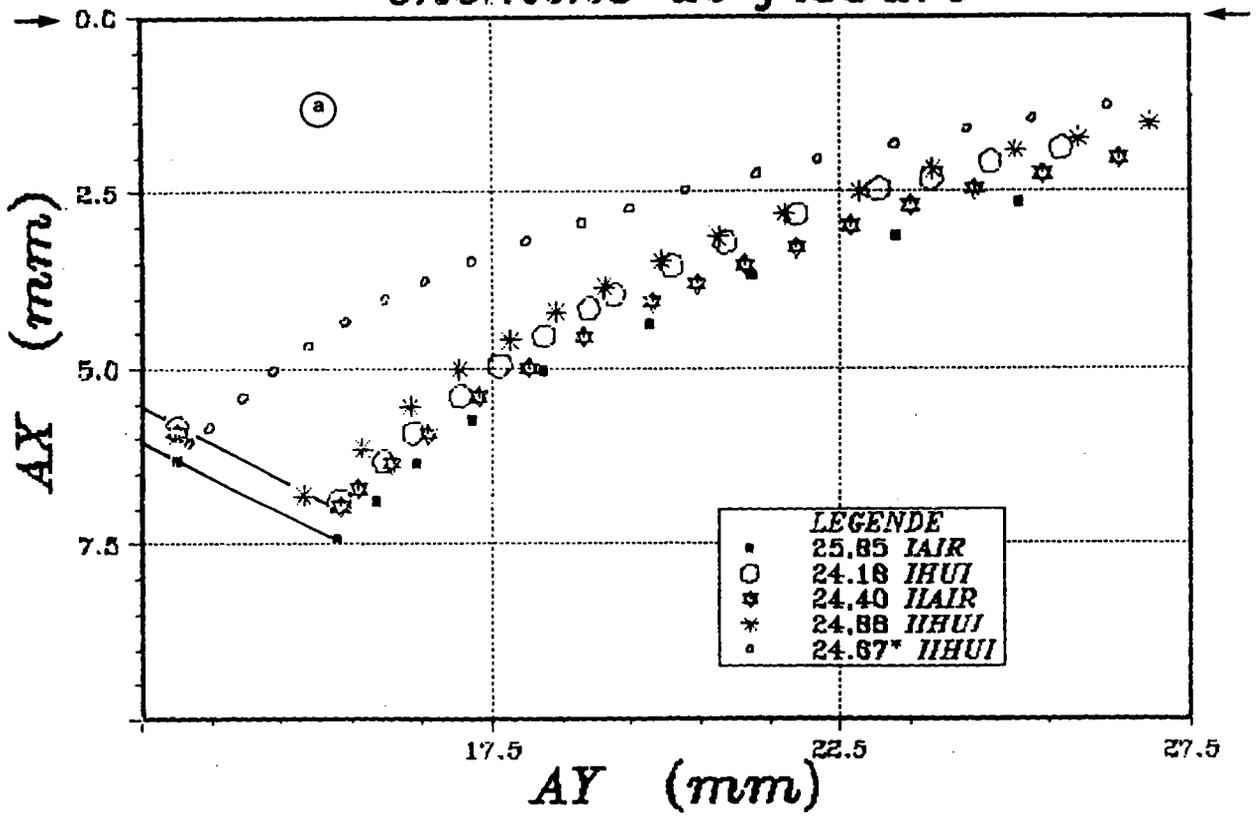
direction d'application  
de la charge

- Figure 5.4 -  
Comparaison  
des chemins  
de fissure  
expérimentaux

direction d'application  
de la charge



\*\*\* 25 degrés \*\*\*  
Chemins de fissure



\*\*\* 35 degrés \*\*\*  
Chemins de fissure

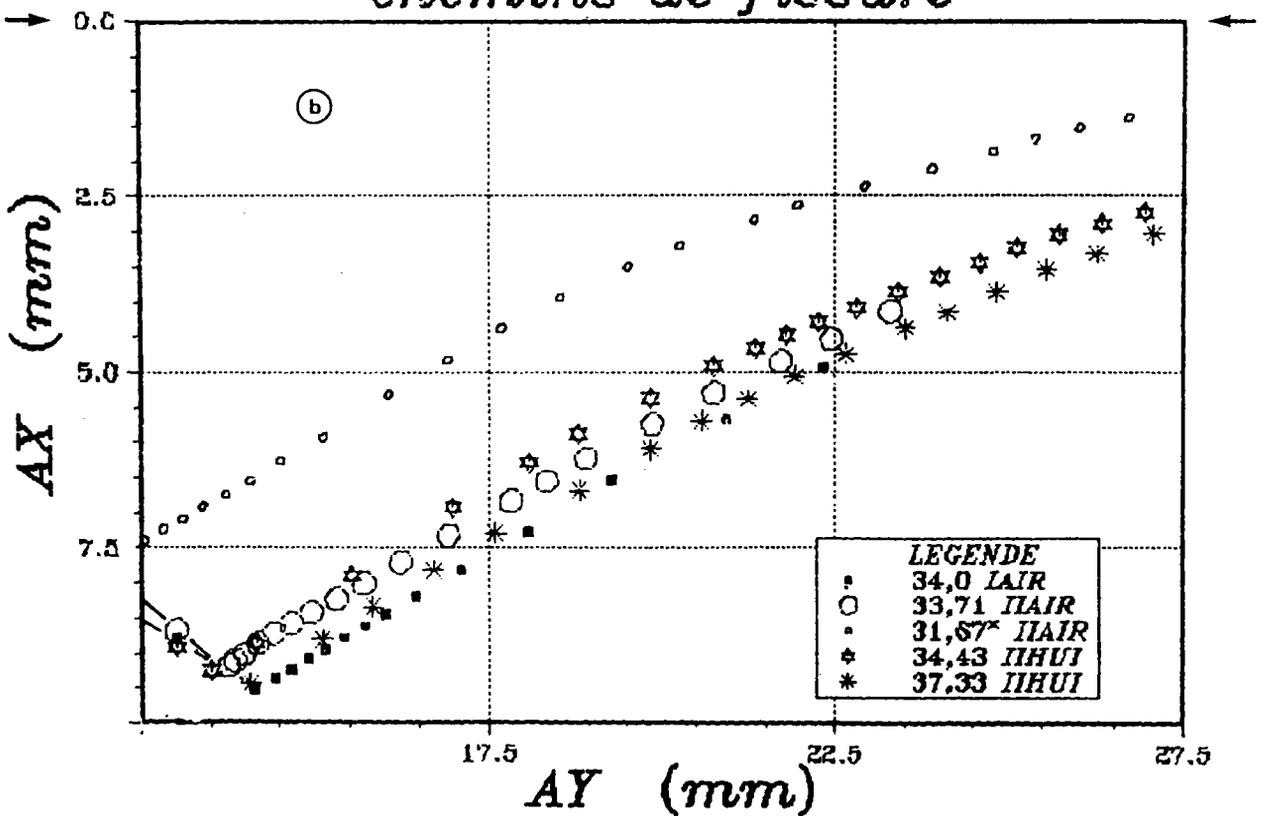
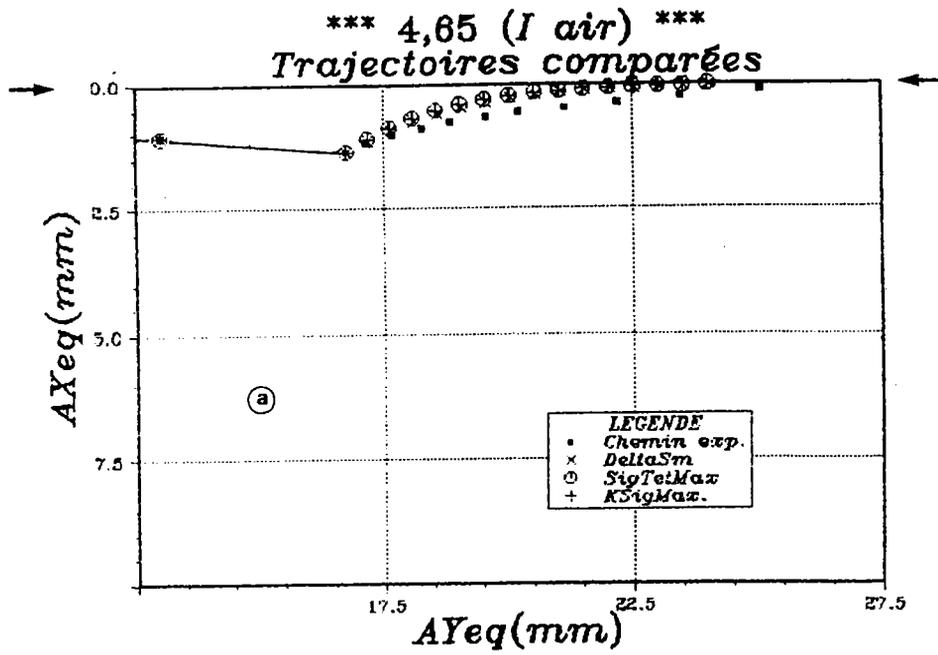
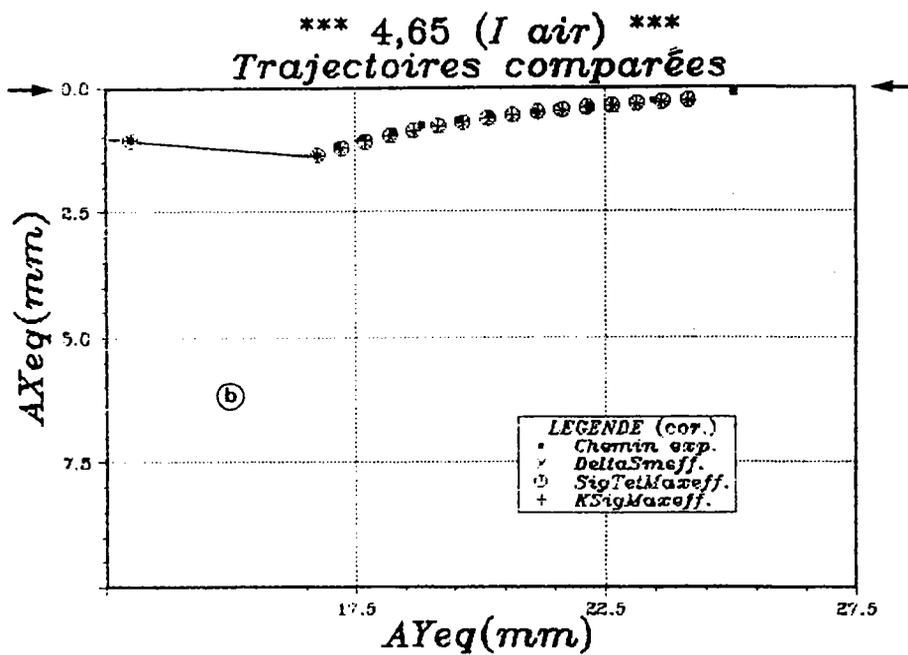
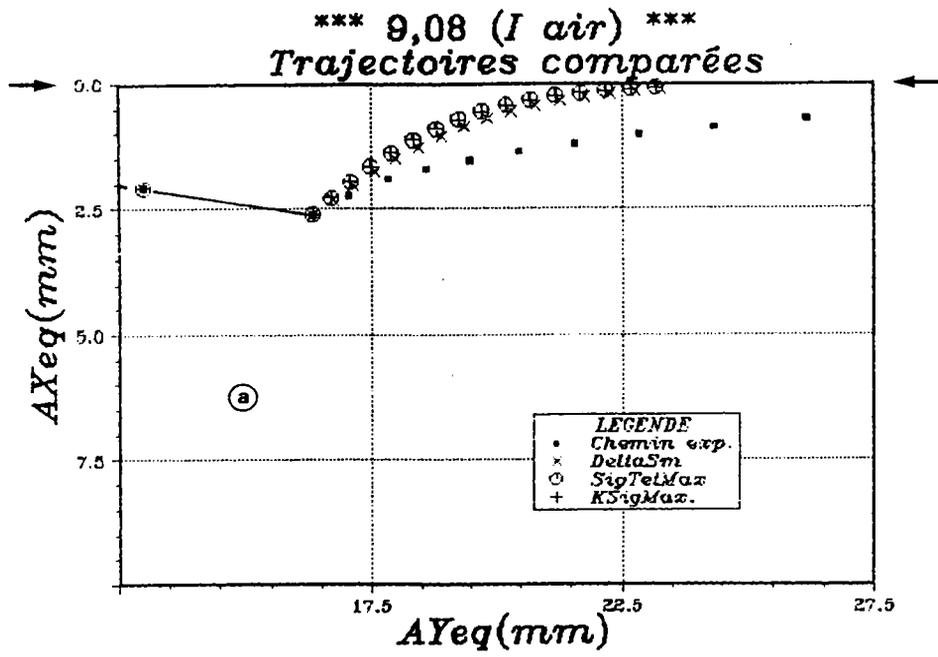


Figure 5.5 : comparaison des chemins de fissure expérimentaux

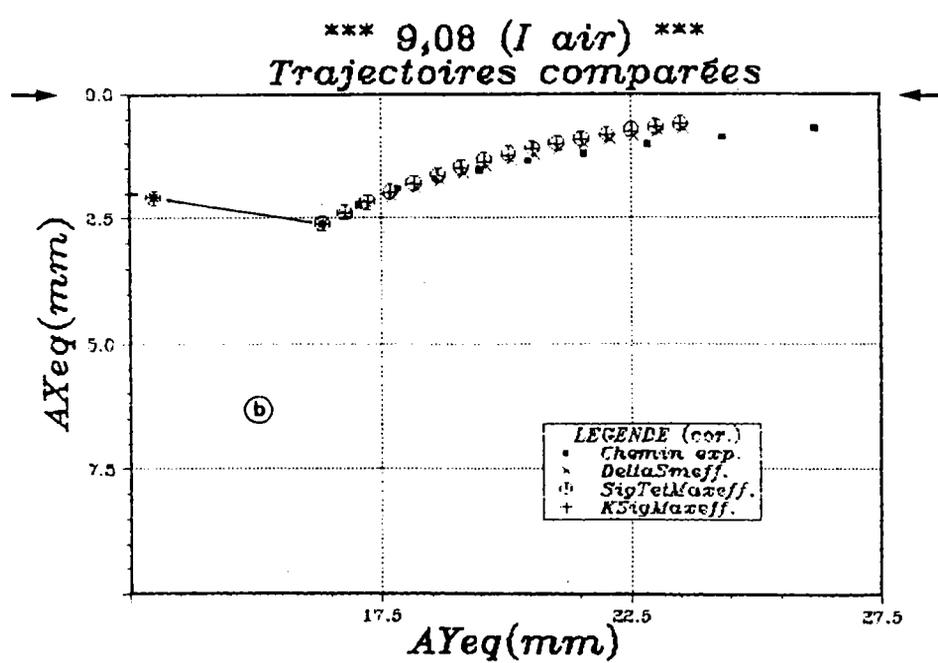


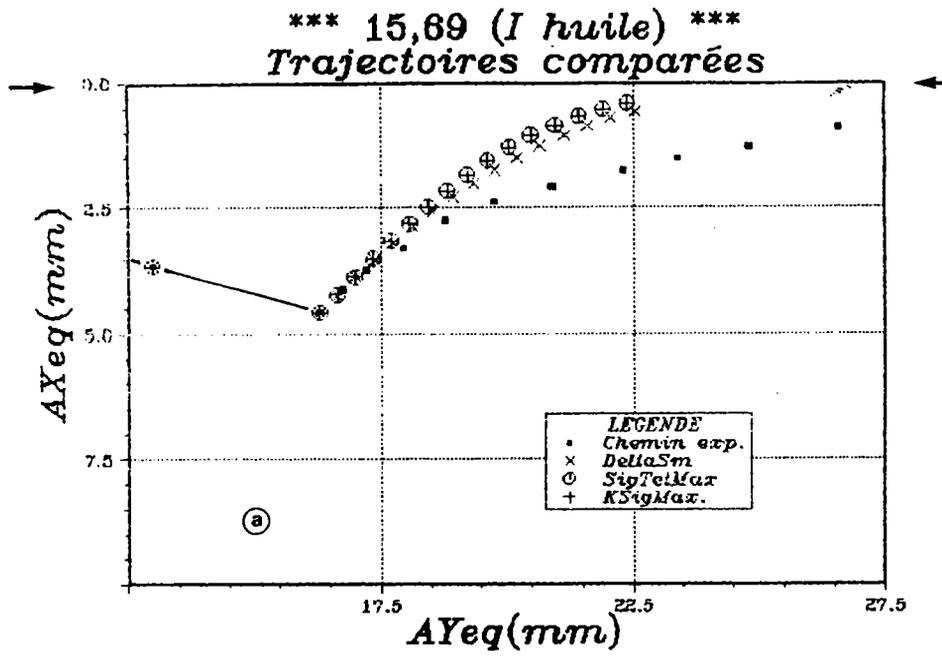
- Figure 5.6 -  
Simulation numérique des trajectoires  
Comparaison avec les chemins expérimentaux  
a. sans correction    b. après correction



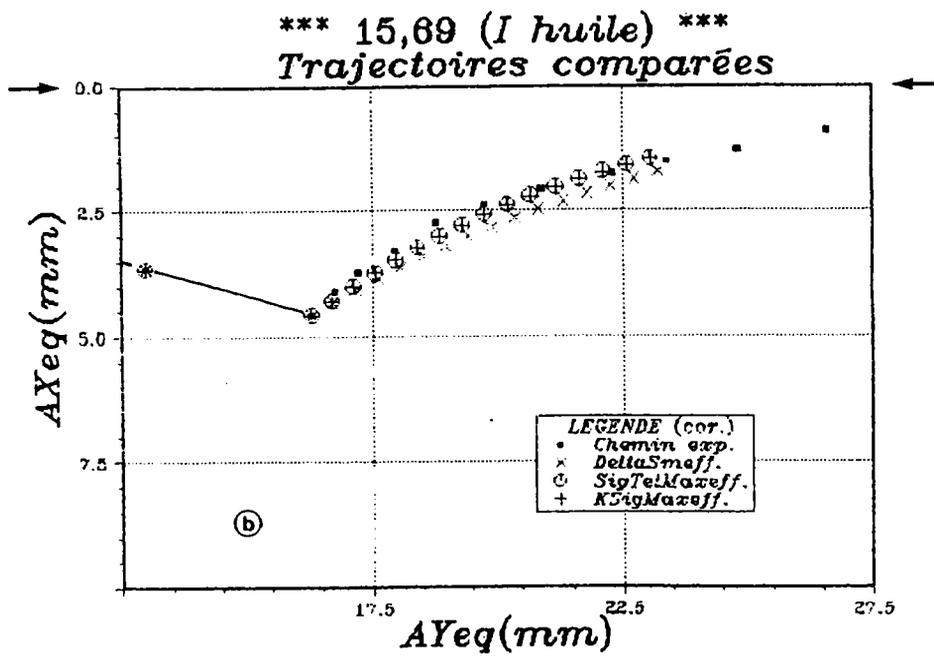


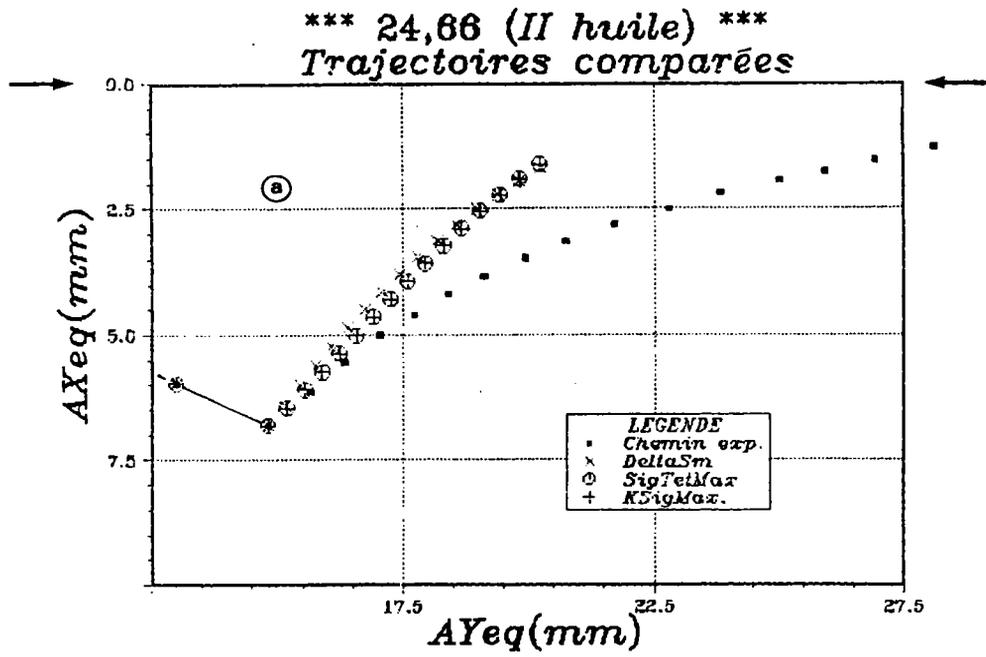
- Figure 5.7 -  
Simulation numérique des trajectoires  
Comparaison avec les chemins expérimentaux  
a. sans correction    b. après correction



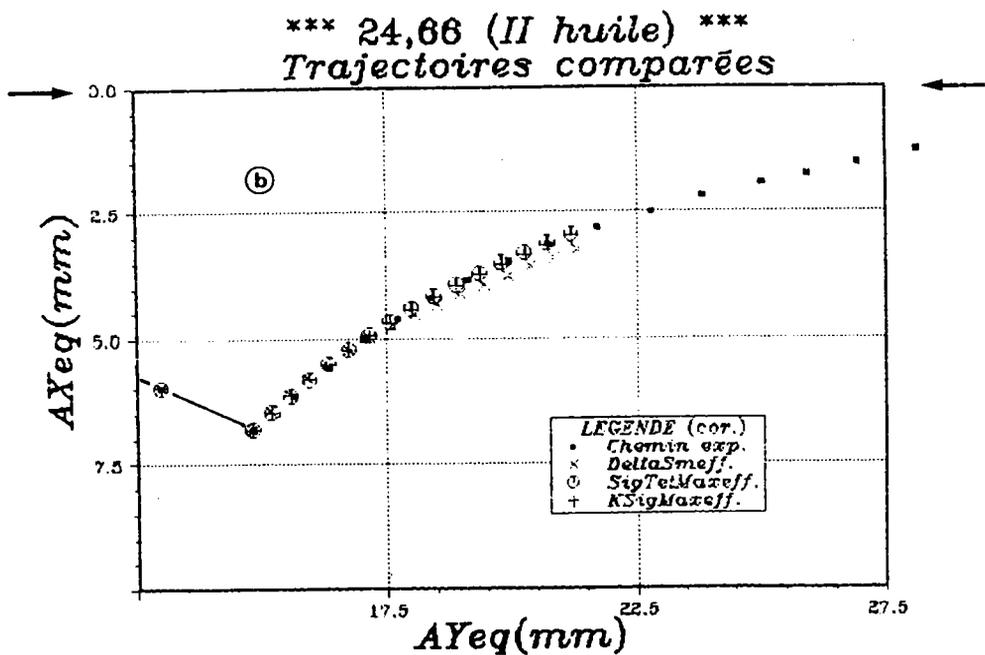


- Figure 5.8 -  
Simulation numérique des trajectoires  
Comparaison avec les chemins expérimentaux  
a. sans correction b. après correction





- Figure 5.9 -  
 Simulation numérique des trajectoires  
 Comparaison avec les chemins expérimentaux  
 a. sans correction    b. après correction



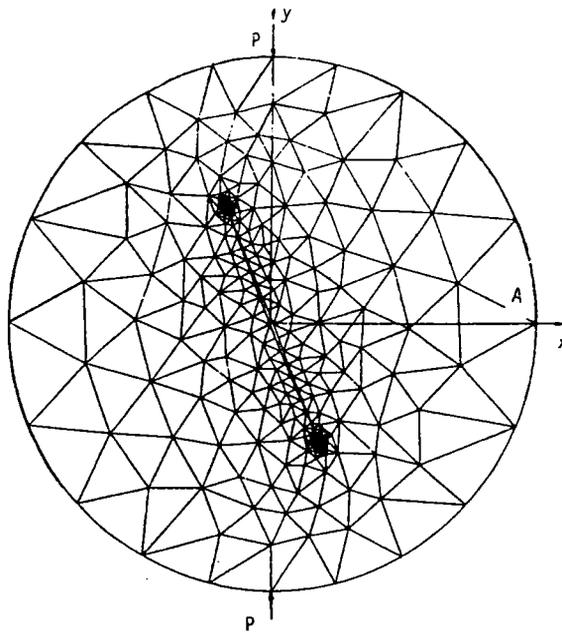
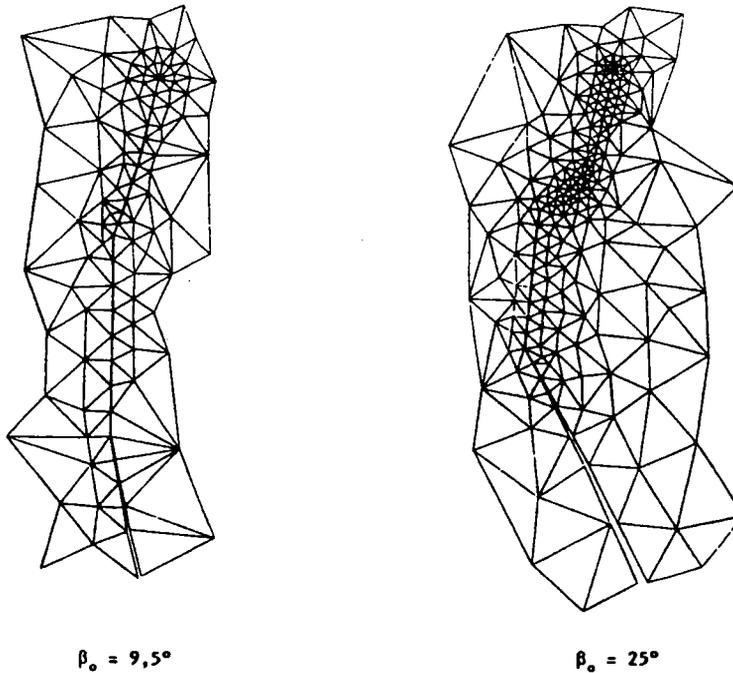
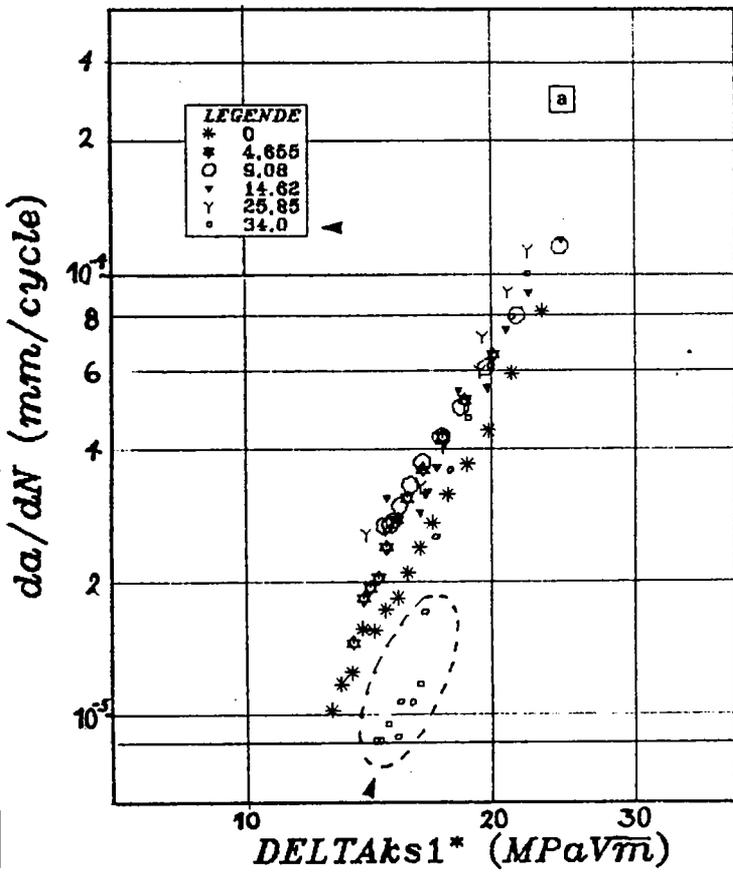


Figure 5.10  
a. Maillage du disque brésilien

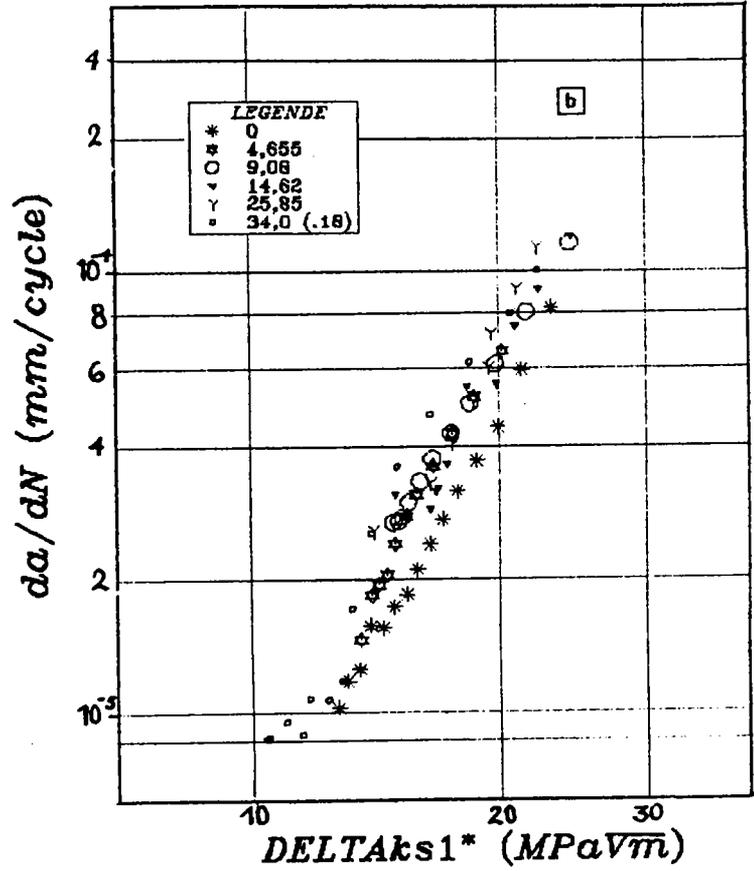


b. Evolution du maillage à la pointe de la fissure  
au cours de sa propagation

**\*\* SERIE I air \*\***



**\*\* SERIE I air \*\***



**\*\* SERIE I air \*\***

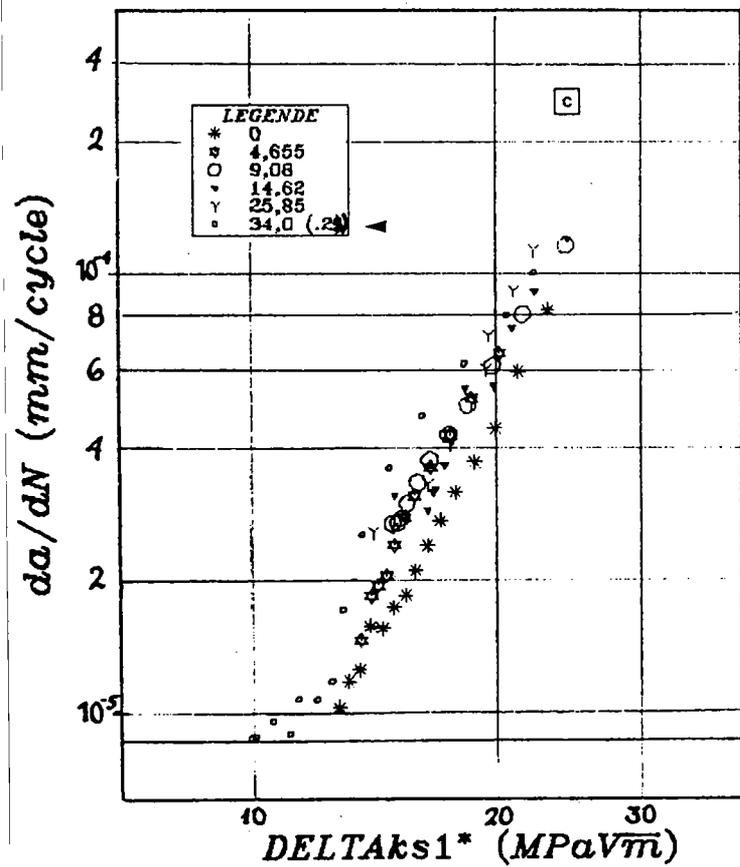
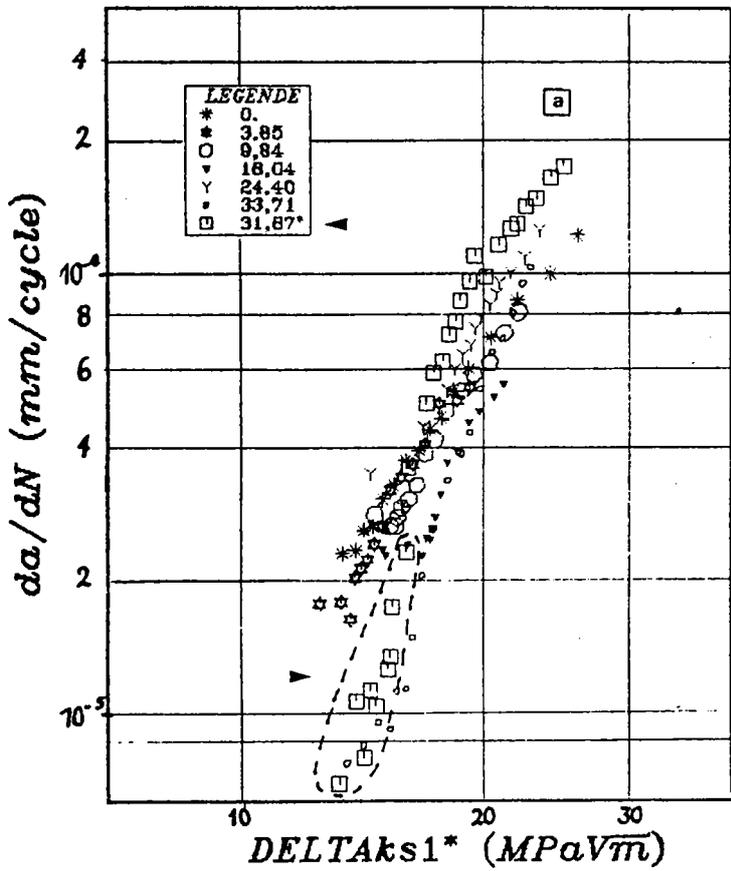
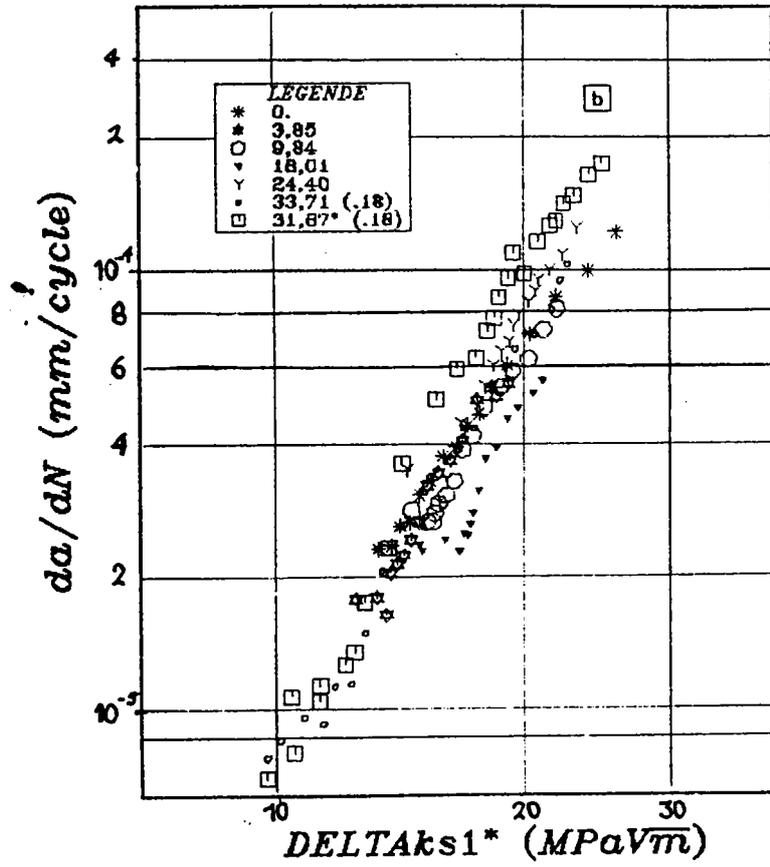


Figure 5.13  
 Vitesse de propagation  
 en fonction du facteur  
 proposé  
 Influence du terme correctif  
 (Série I air)

**\*\* SERIE II air \*\***



**\*\* SERIE II air \*\***



**\*\* SERIE II air \*\***

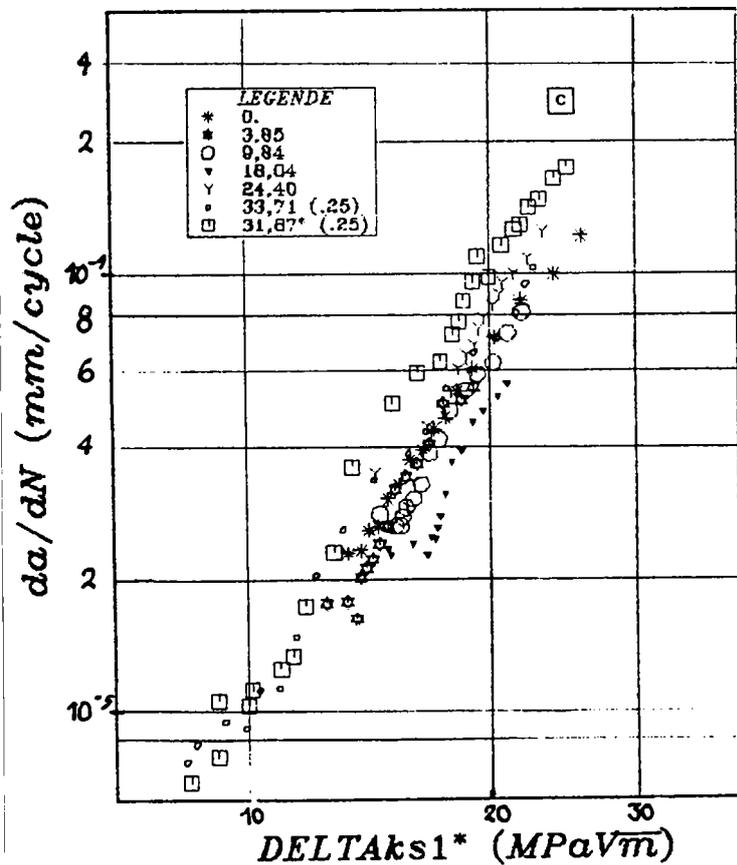


Figure 5.14  
Vitesse de propagation  
en fonction du facteur  
proposé  
Influence du terme correctif  
(Série II air)



**\*\* SERIE II huile \*\***

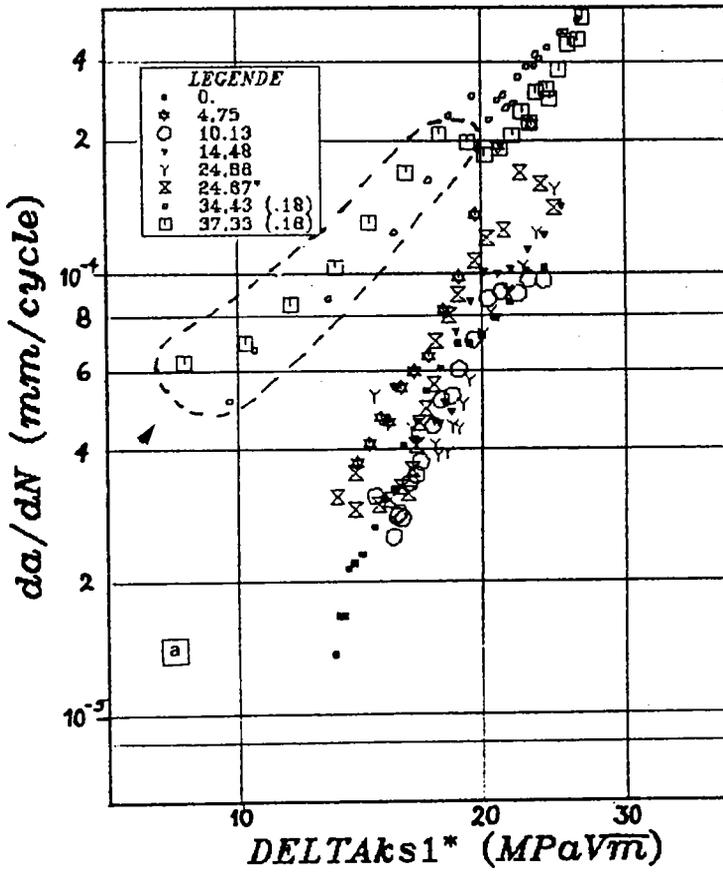
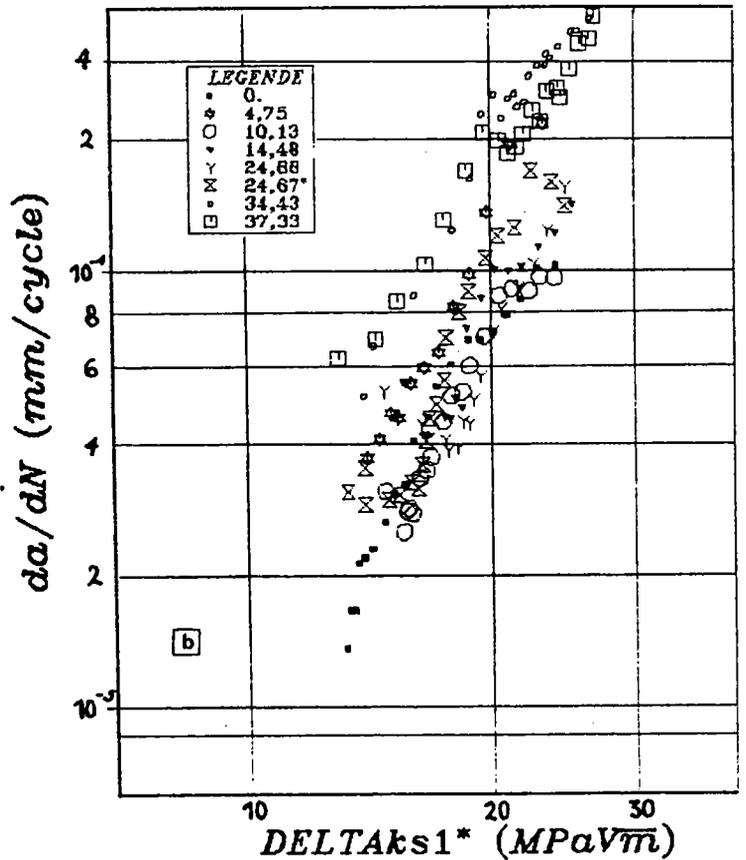
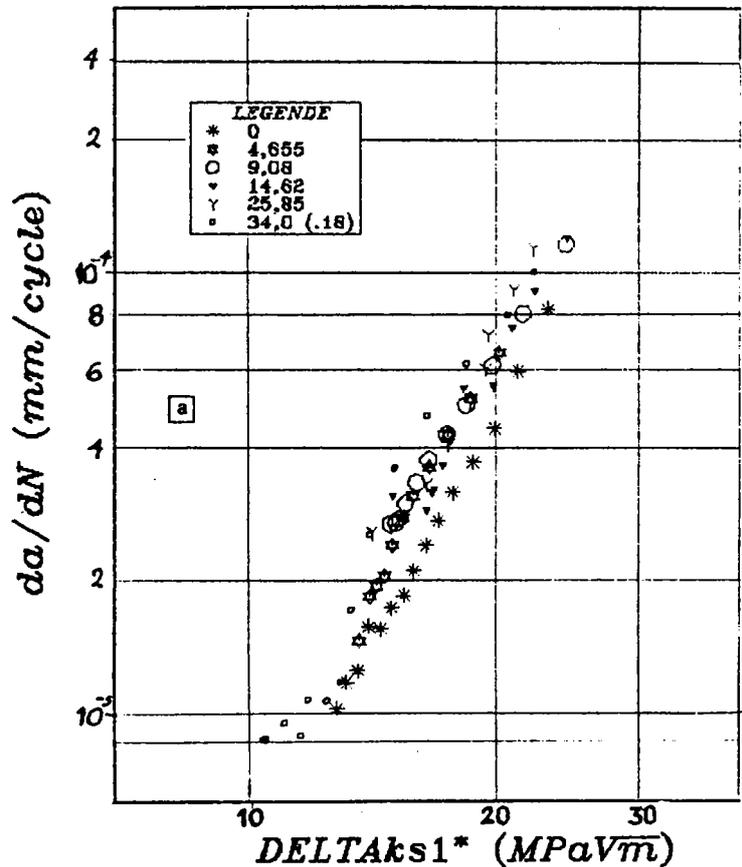


Figure 5.15  
Vitesse de propagation  
en fonction du facteur  
proposé  
Influence du terme correctif  
(Série II huile)

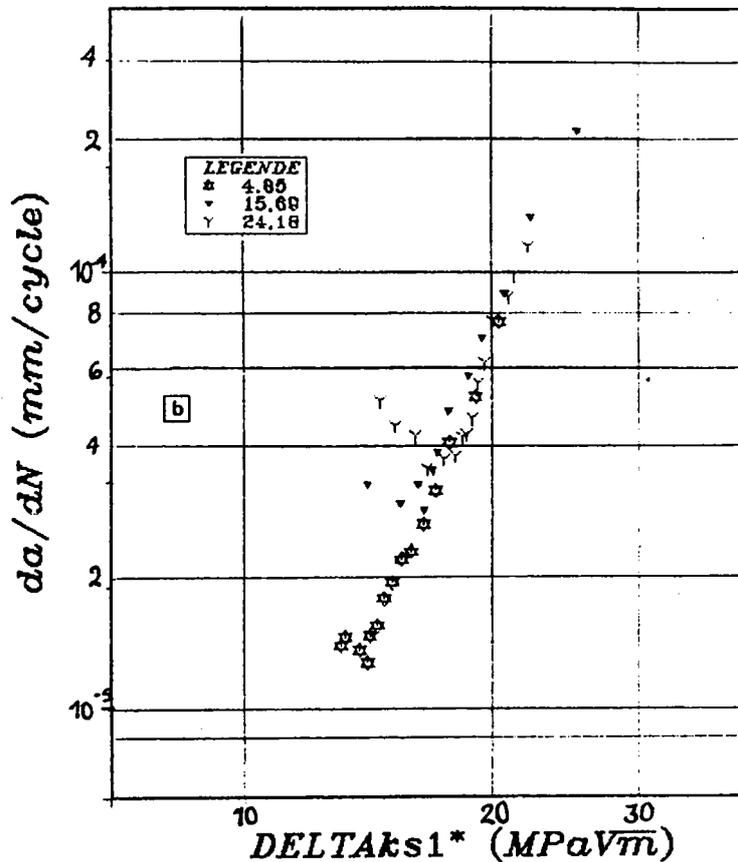
**\*\* SERIE II huile \*\***



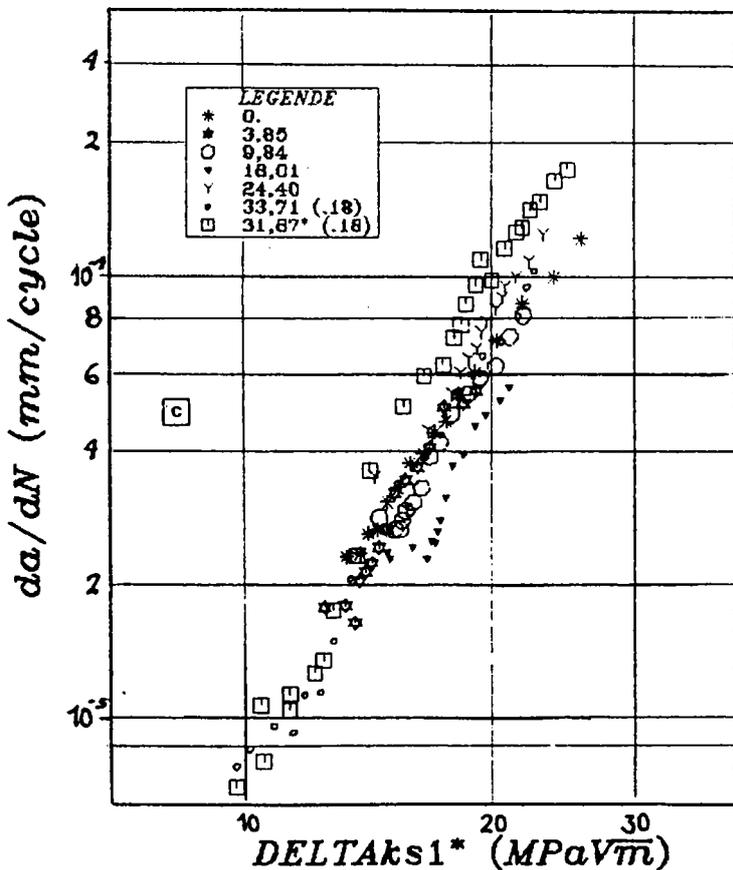
**\*\* SERIE I air \*\***



**\*\* SERIE I huile \*\***



**\*\* SERIE II air \*\***



**\*\* SERIE II huile \*\***

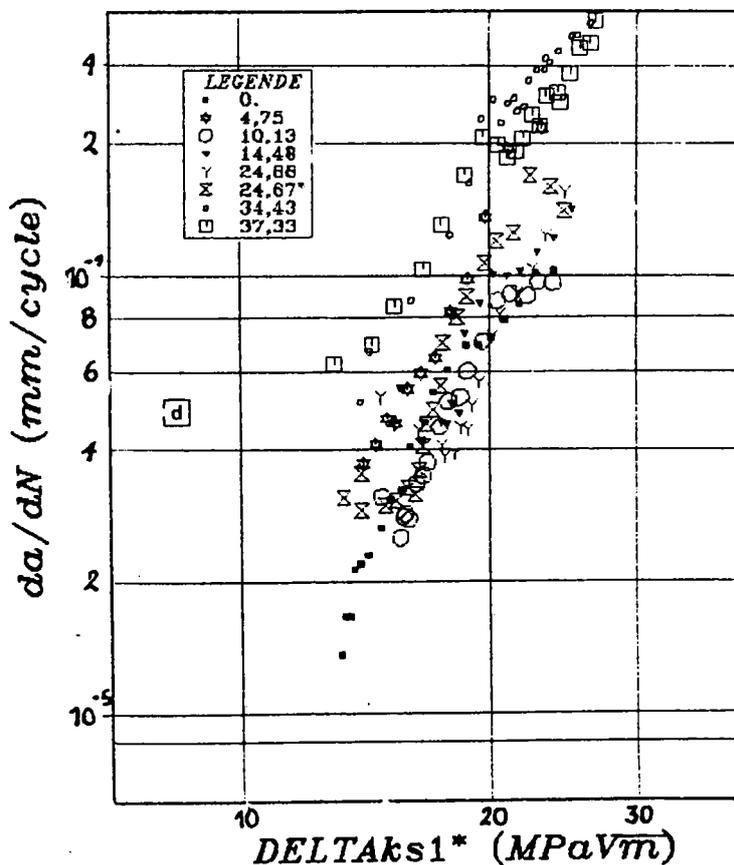


Figure 5.16 : Vitesse de propagation en fonction du facteur proposé

## Chapitre 6

### BILAN – PERSPECTIVES

Grâce à une méthode originale, les travaux qui font l'objet du présent mémoire traitent du phénomène de fissuration par fatigue en mode mixte. Originale en effet, car à notre connaissance, il n'existe pas d'autre étude réalisée au moyen du disque brésilien, portant aussi bien sur la fatigue des aciers – alors qu'il constitue une méthodologie d'essai courante pour la rupture des bétons et des céramiques – que sur l'influence d'un lubrifiant sur ce même processus de fissuration par fatigue.

Nous avons donc, d'une part, mis au point l'essai proprement dit, et d'autre part, recherché une méthode de calcul des facteurs d'intensité de contrainte, compte tenu de la géométrie particulière des fissures et du type de chargement considéré. Ces calculs ont été réalisés en faisant appel à la notion de fissure équivalente.

Nous avons alors pu d'une part, simuler les trajectoires des fissures, et d'autre part, proposer une loi de propagation des fissures tant en milieu ambiant qu'en milieu lubrifiant, moyennant une correction en présence de frottement. Le critère qui nous est apparu le plus adapté pour ce faire tant pour la prévision des angles initiaux de bifurcation que pour celle des angles de bifurcation ultérieurs (trajectoires) est le critère de la contrainte tangentielle maximale, compte tenu, dans le second volet, d'une correction.

Malgré la longueur et la courbure des fissures qui se développent dans un disque soumis à du mode mixte, l'huile pénètre dans ces fissures, ainsi que l'a prouvé l'examen des surfaces au microscope (ce sera a fortiori le cas pour les fissures courtes).

La fissuration en mode mixte est influencée par le lubrifiant, malgré la géométrie qui rend malaisé son accès en fond de fissure. Cette influence est variable selon le domaine considéré (mode I, mode mixte, mode II, mode II impur). Du fait de la géométrie des fissures, l'effet de pollution par l'eau de surfaces fraîches est diminué.

Les essais en mode I se révèlent représenter des tests plus sélectifs que les essais en mode mixte. En effet, des travaux antérieurs ont montré une influence plus forte du lubrifiant sur la phase de propagation des fissures. Dans le présent cas du disque brésilien, cette influence est moins marquée hormis lorsque la sollicitation est du mode II impur.

Le domaine du mode II que nous avons dénommé impur – mettant en jeu un processus de

frottement – nécessite d'être exploré davantage. Il semble que l'on pourrait ainsi simuler de manière plus appropriée les conditions d'un contact avec roulement et glissement combinés.

Une étape supplémentaire dans la compréhension de la fissuration en fatigue–contact pourra être franchie, selon nous, en adoptant une approche élasto–plastique du phénomène, à l'aide de la technique des éléments finis. Par ailleurs, on peut envisager de passer de la géométrie d'un disque fissuré diamétralement à celle d'un anneau où l'on aura pratiqué une entaille de bord.

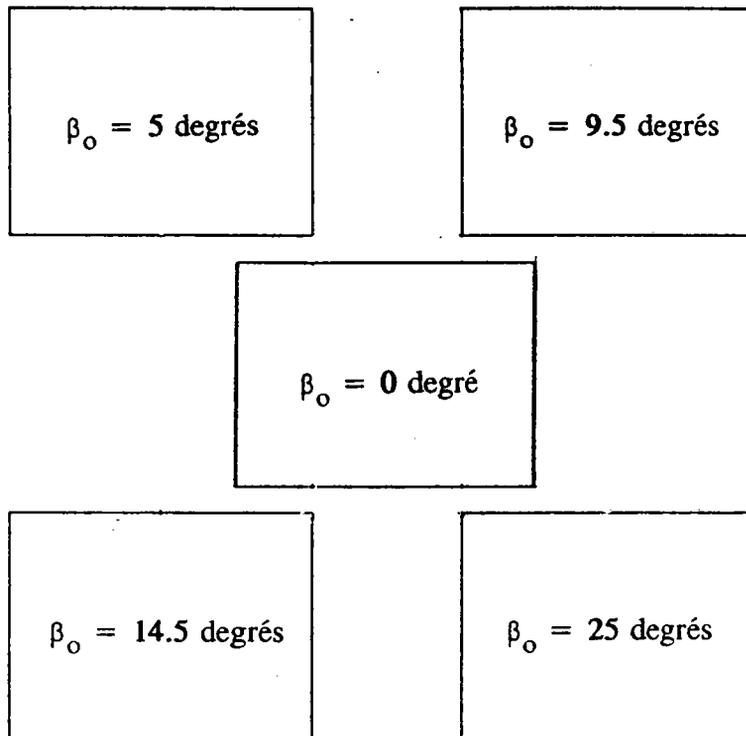
**Dispositif expérimental  
d'un essai sur disque brésilien  
en milieu ambiant**

**Vue des plateaux de compression  
et du système de lunettes  
à déplacement bi-dimensionnel  
pour le suivi des fissures**

**Dispositif expérimental  
d'un essai sur disque brésilien  
en milieu lubrifiant**

**Vue de la cellule  
de circulation d'huile  
munies de hublots pour la visée  
optique (même système de mesure  
que ci-dessus)**

**PLANCHE I**



**Disques brésiliens après fissuration  
en milieu air ambiant**

**Au centre des disques, en sombre,  
l'entaille mécanique, prolongée par la fissure**

**On a matérialisé la direction d'application  
de la charge : droite passant par le centre du disque  
et asymptote aux trajectoires des fissures**

**PLANCHE II**

$\beta_0 = 5$ degrés A I R	$\beta_0 = 5$ degrés 200 N.S.
$\beta_0 = 15$ degrés A I R	$\beta_0 = 15$ degrés 200 N.S.
$\beta_0 = 25$ degrés A I R	$\beta_0 = 25$ degrés 200 N.S.

Comparaison des chemins de fissure  
en milieu air ambiant  
et en milieu lubrifiant (huile 200 N.S.)  
en mode mixte

La direction d'application de la charge  
est matérialisée par une droite passant par  
le centre du disque  
et asymptote aux chemins de fissure

PLANCHE III

$\beta_0 = 25$  degrés  
A I R

$\beta_0 = 35$  degrés  
A I R

$\beta_0 = 25$  degrés  
sans chevron  
A I R

$\beta_0 = 35$  degrés  
sans chevron  
200 N.S.

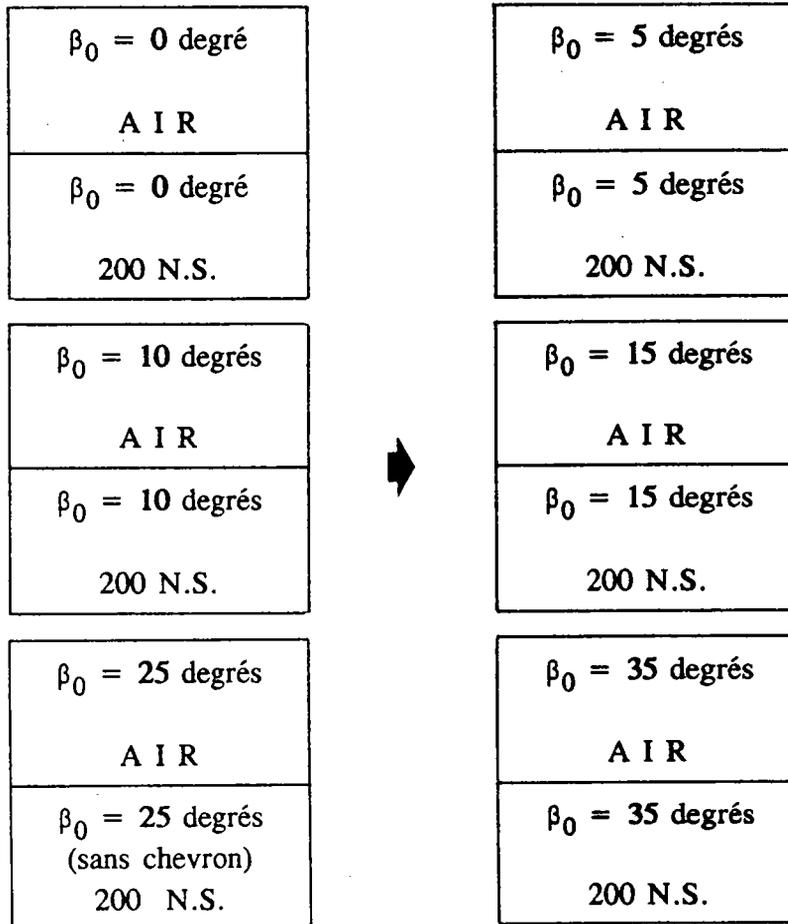
$\beta_0 = 25$  degrés  
200 N.S.

$\beta_0 = 35$  degrés  
200 N.S.

Comparaison des chemins de fissure  
en milieu air ambiant  
et en milieu lubrifiant (huile 200 N.S.)  
avec et sans chevron  
en mode II pur et impur

Les trajectoires des fissures  
ne sont pas modifiées

PLANCHE IV



X 3

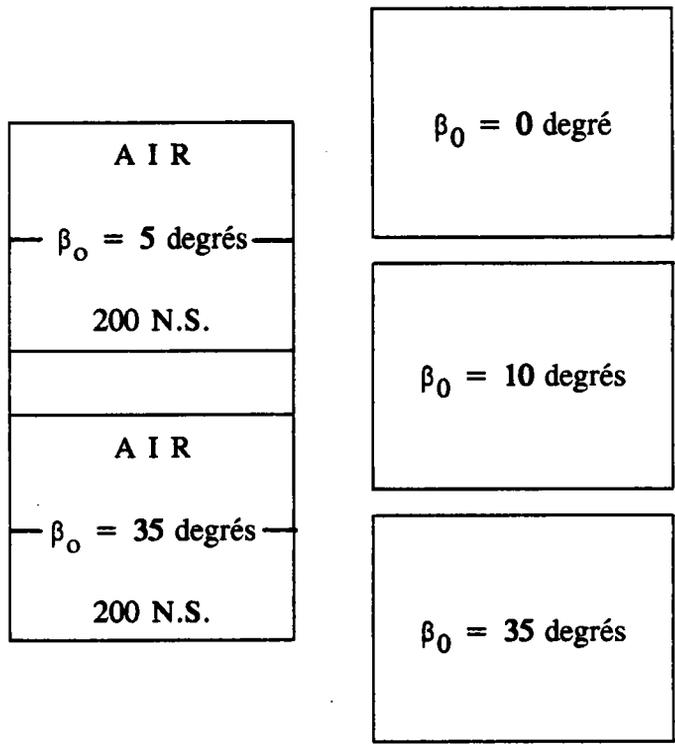
**Comparaison des faciès  
de rupture par fatigue**

**Mise en évidence de taches d'oxydation  
en présence du lubrifiant**

**(Le repère est gradué de 5 en 5 mm)**

**La flèche indique le sens de propagation**

**PLANCHE V**



Comparaison des faciès  
air / huile

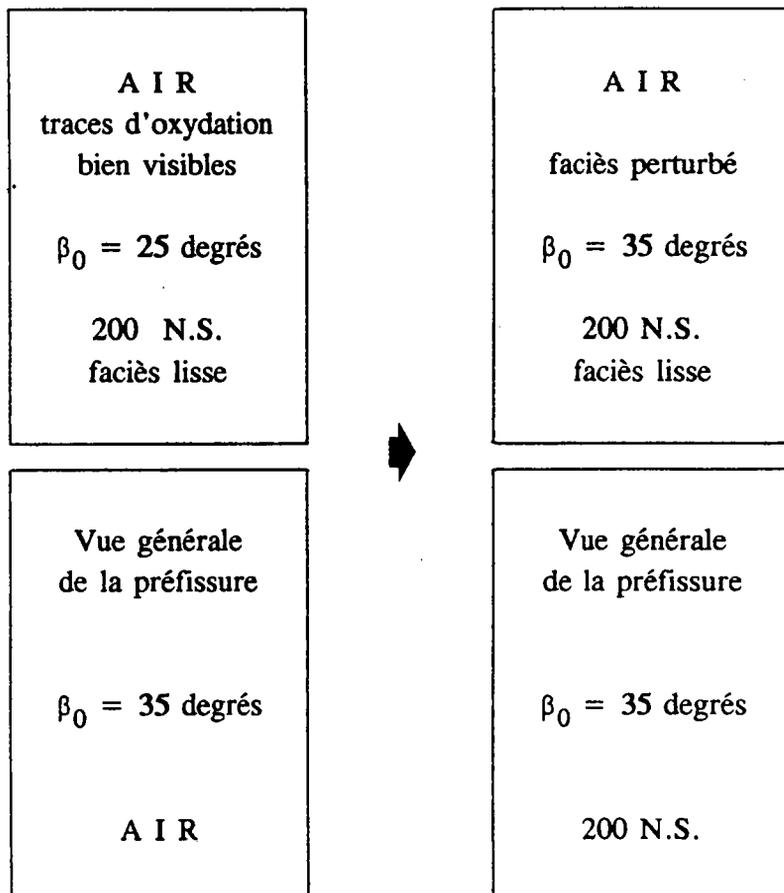
X 15

Le profil est plus tourmenté  
en milieu lubrifiant

Agrandissement local  
des taches d'oxydation

X 15

La flèche indique le sens de propagation



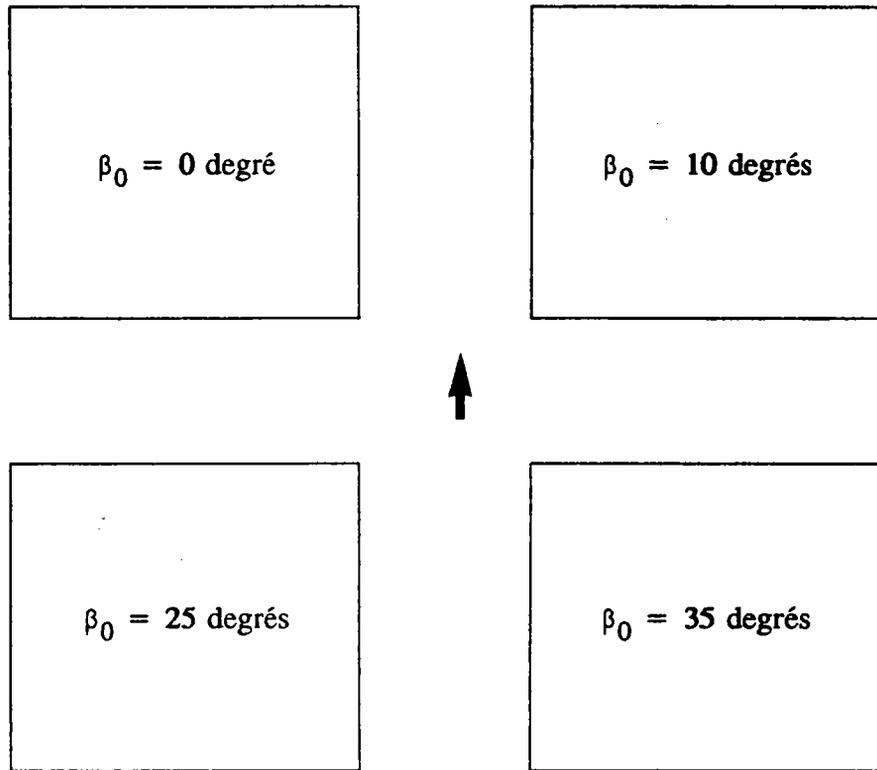
La flèche indique le sens de propagation

Comparaison des zones  
de préfissure  
en mode II impur

Les surfaces sont plus "lisses"  
en milieu lubrifiant qu'en milieu air ambiant

X 15

PLANCHE VII



Faciès de rupture des préfissures  
vues au M.E.B.

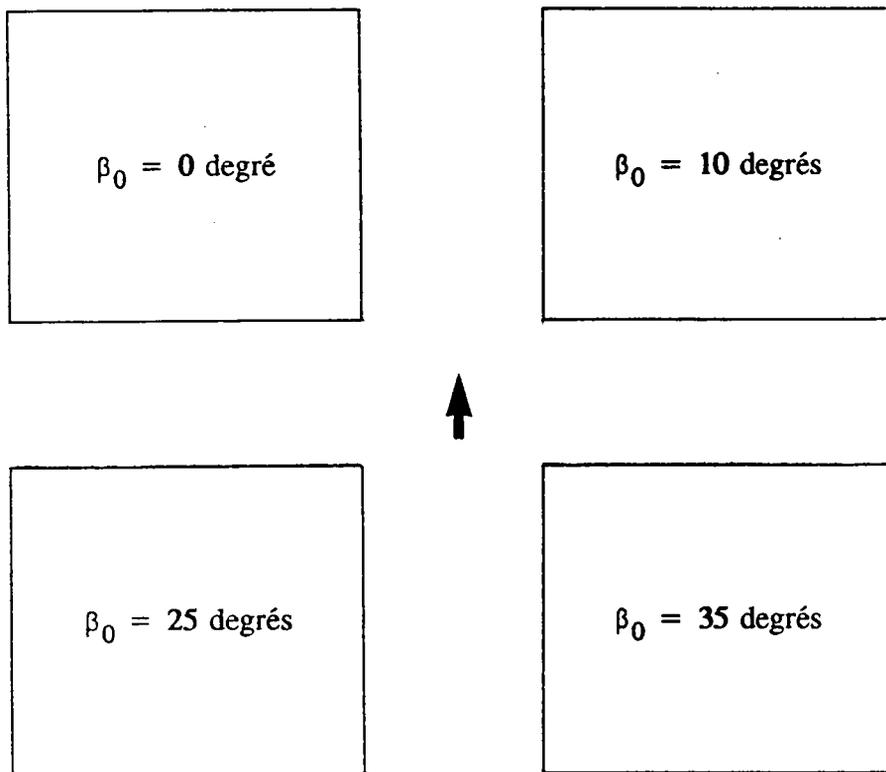
A I R

(X 1000)

Mise en évidence des zones de matage  
en mode II pur et impur

La flèche indique la direction de propagation

PLANCHE VIII



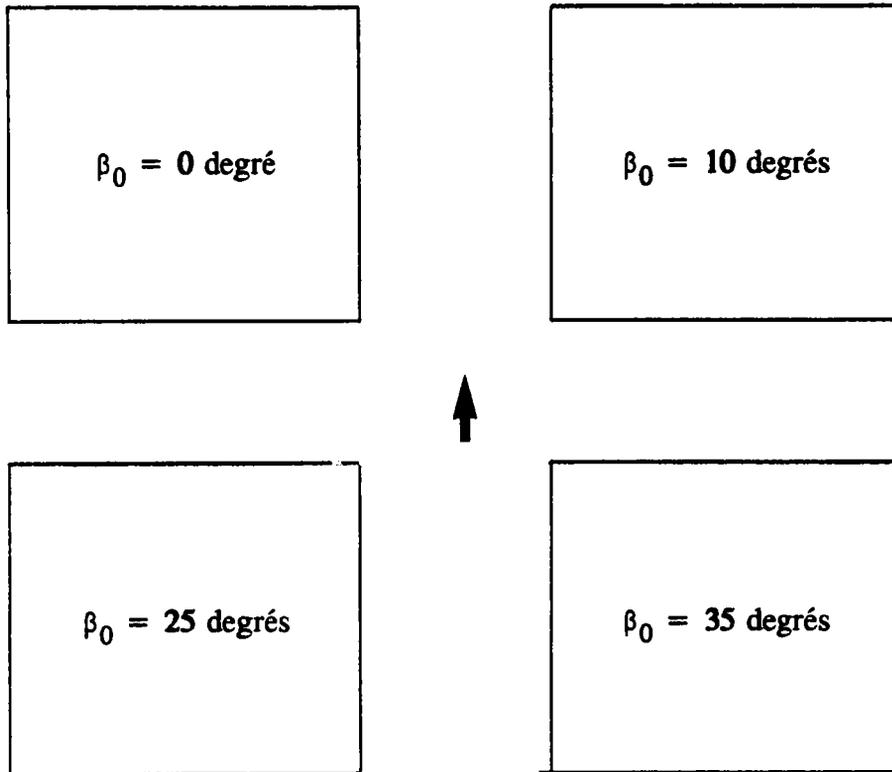
Faciès de rupture des préfissures  
vues au M.E.B.

200 N.S.

(X 1000)

La flèche indique la direction de propagation

PLANCHE IX



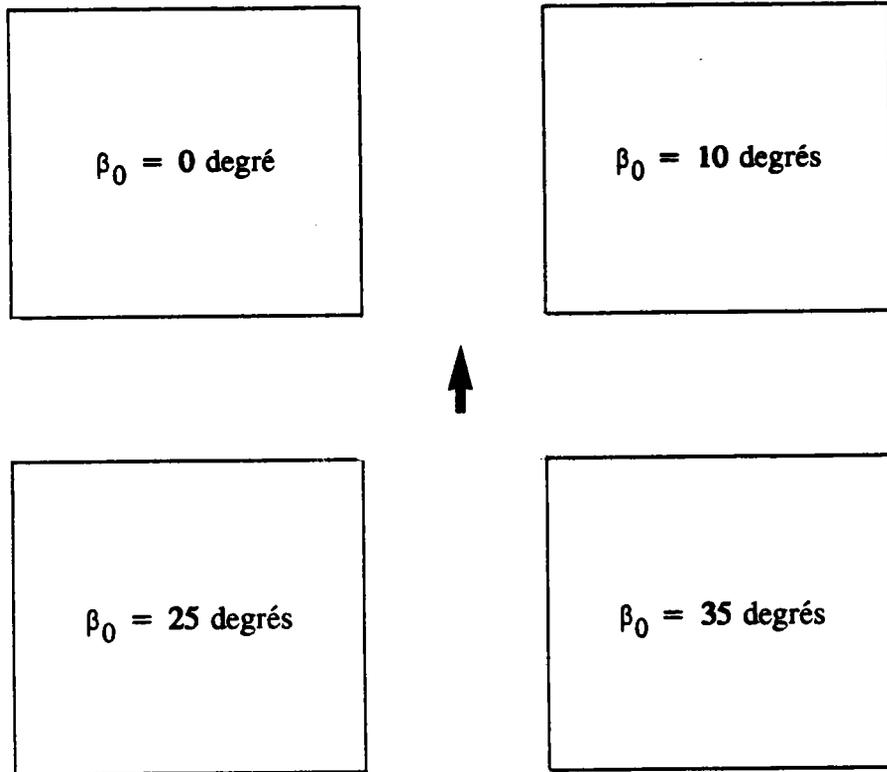
**Faciès de rupture des fissures  
vues au M.E.B.**

**A I R**

**(X 1000)**

**La flèche indique la direction de propagation**

**PLANCHE X**



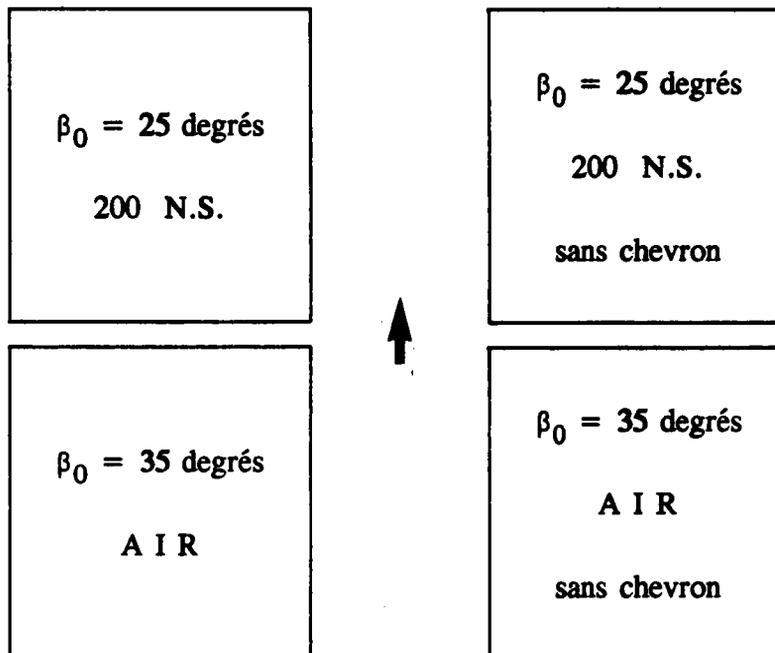
**Faciès de rupture des fissures  
vues au M.E.B.**

**200 N.S.**

**(X 1000)**

**La flèche indique la direction de propagation**

**PLANCHE XI**



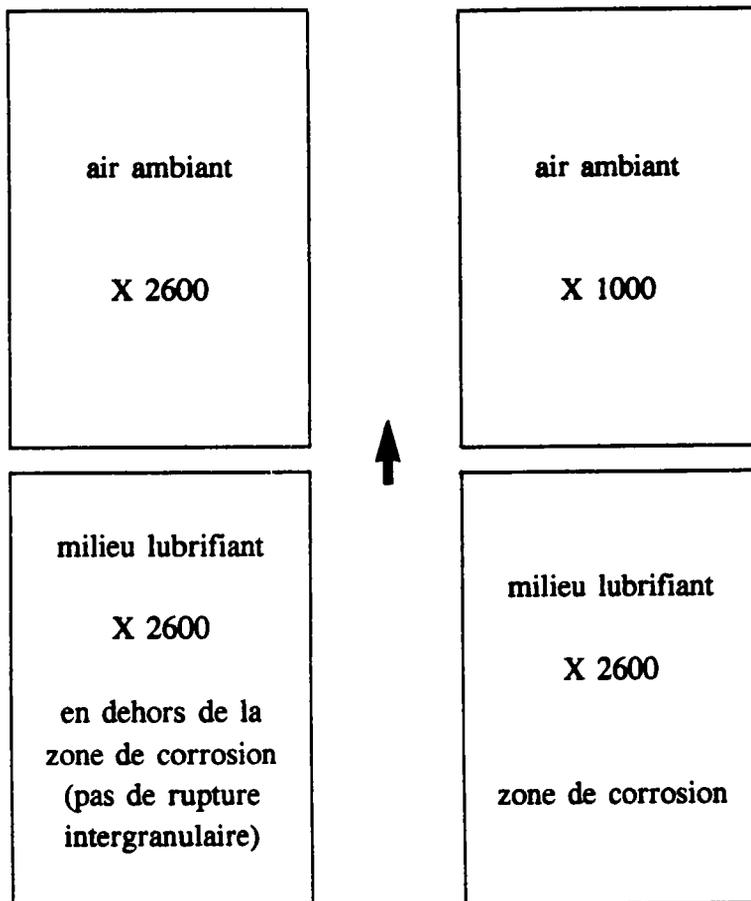
**Vue générale au M.E.B.  
des faciès de rupture des préfissures**

**Mise en évidence des zones de matage**

**X 200**

**La flèche indique le sens de propagation**

**PLANCHE XII**



La flèche indique le sens de propagation

Agrandissement local des  
faciès de rupture des fissures obtenues  
en mode I

(rupture intergranulaire)

PLANCHE XIII

## Annexe A

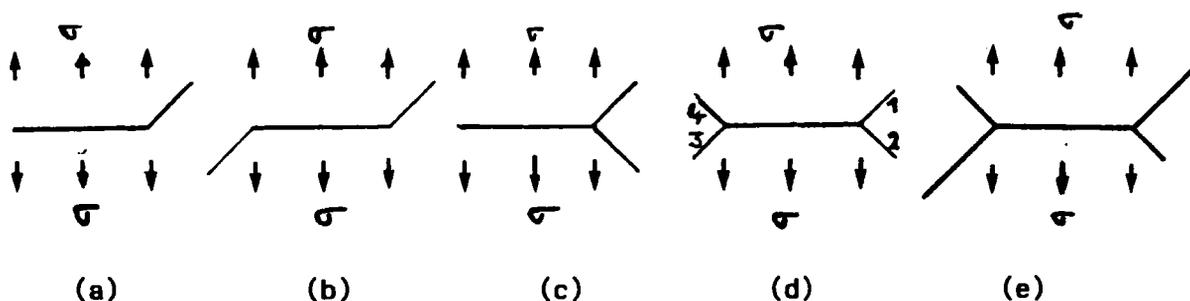
### DETERMINATION DES FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE

#### D'UNE FISSURE BRANCHEE

##### 1 Aspect général du problème

Le terme de *branche* ou de *branchement* désigne toute extension d'une fissure dans une direction non colinéaire à sa direction initiale.

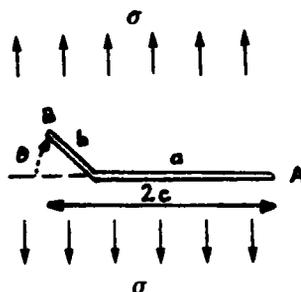
La *figure A.1* illustre les différentes morphologies de fissures branchées que l'on peut rencontrer. Parmi ces différentes formes, c'est la fissure à branche unique (*figure A.1a*) qui a le plus retenu l'attention des auteurs.



- Figure A.1 -  
Chargement en mode I

La plupart des auteurs ont tenté de résoudre le problème pour des valeurs arbitraires de la quantité  $b/a$ , dans le cas d'un chargement de traction en mode I pour un angle de branchement  $\theta_0$  donné (*figure A.2*). Certains ont tenté de trouver une solution à ce problème dans le cas où le chargement est de mode mixte, soit de traction /13/-/14/-/19/-/84/, soit de compression /25/-/85/.

- Figure A.2 -



Nous ne considérerons, ici, que le cas de fissures linéaires. A quelques exceptions près, la majorité des méthodes d'étude sont basées sur la formulation des potentiels complexes de **MUSKHELISHVILI /92/** et une représentation conforme (consistant à transformer la fissure en un cercle), la solution finale se ramenant ainsi :

- soit à des développements en séries infinies /18/,
- soit à la résolution (numérique) d'équations intégrales /19/, /93/.

Citons également des calculs aux éléments finis, comme le fait **PARLETUN /81/** pour déterminer l'angle de branchement, ainsi que la propagation des branches.

Nous allons distinguer, pour une même forme de fissure, le cas où le branchement est fini et le cas où il tend vers zéro, ceci pour les deux types de chargement : mode I et mode I + II.

## 2 Fissure monobranche ou asymétrique

### 2.1 Fissure à branche évanescence

\* **NUISMER /15/** propose une solution analytique très simple ; il suppose une continuité des contraintes entre l'état initial ( $b = 0$ ) et celui d'une fissure avec branchement évanescence ( $b \rightarrow 0$ ).

Soit  $\sigma_\theta$  la contrainte de traction perpendiculaire à la direction de la branche, et soit  $\sigma_{r\theta}$  la contrainte de cisaillement dans le plan de branchement ; les facteurs d'intensité de contrainte de la fissure branchée s'écrivent alors :

$$(A.1) \quad \begin{cases} k_1^* = \sigma_\theta \sqrt{2\pi r} \\ k_2^* = \sigma_{r\theta} \sqrt{2\pi r} \end{cases}$$

Compte tenu de l'hypothèse de continuité des contraintes, dont le champ est donné par **WILLIAMS /3/**,  $k_1^*$  et  $k_2^*$  ont pour expression, en fonction des facteurs d'intensité de contrainte avant branchement,  $K_I$  et  $K_{II}$  :

$$(A.2) \quad \begin{cases} k_1^* = K_I \cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3 K_{II} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ k_2^* = K_{II} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + K_I \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (1 - 3 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)) \end{cases}$$

Les relations précédentes peuvent encore se mettre sous la forme matricielle suivante, où les fonctions  $K_{ij}$  dépendent de l'angle de bifurcation  $\theta_0$ .

$$(A.3) \quad \begin{pmatrix} * \\ k_1 \\ * \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix}$$

Bien que fautive d'un point de vue théorique – cf. ISHIKAWA et TANAKA /94/ –, la solution de NUISMER /15/ donne pour des angles de branchement compris entre 0 et 60 degrés, des résultats voisins de la solution exacte proposée par AMESTOY et al. /18/ – tableau A.1 – .

\* En partant de l'équation obtenue par HUSSAIN et al. /14/ au moyen de la méthode générale présentée en introduction, dans le cas d'une branche de longueur  $b$  finie, AMESTOY et al. /18/ déduisent une équation asymptotique de façon simple et la résolvent par l'intermédiaire de séries jusqu'aux premiers termes, quand  $b \rightarrow 0$ .

Ils énoncent que la propagation de la branche aura lieu suivant la direction définie par l'angle  $\theta = \pi m$  lorsque :

$$(A.4) \quad \frac{dk_1^*}{dm} = 0 \quad \text{ou bien} \quad k_2^* = 0$$

Ils proposent, pour les coefficients  $K_{ij}$ , des formules analytiques approchées, (A.5), dont l'écart avec la solution numérique est au maximum de 2% lorsque :  $0 < \theta_0 < \pi/4$ , et reste très acceptable au-delà de 40 degrés :

$$\begin{aligned} K_{11} &= \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{m/2} \left(\cos \theta - \frac{1}{2\pi} \sin L \theta\right) \\ K_{12} &= \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{m/2} \left(-\frac{3}{2} \sin \theta\right) & K_{21} &= \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{m/2} \left(\frac{1}{2} \sin \theta\right) \\ K_{22} &= \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{m/2} \left(\cos \theta + \frac{1}{2\pi} \sin L \theta\right) \end{aligned}$$

avec :

$$L = \text{Log} \left[ \frac{1-m}{1+m} \right] - \frac{2m}{1-m^2} \quad \text{et} \quad m = \frac{\theta}{\pi}$$

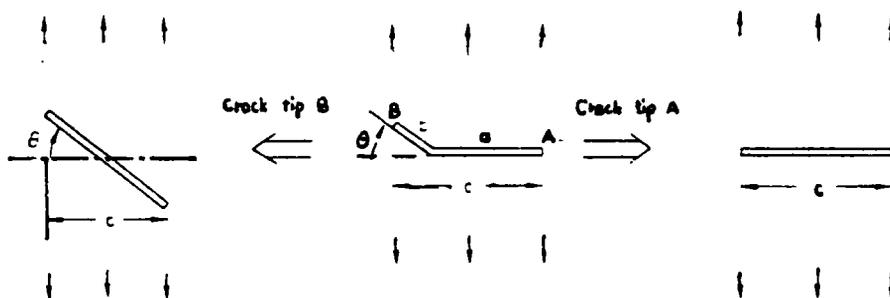
Tableau 25. Comparaison des solutions de NUISMER /15/ et d'AMESTOY /18/ donnant les facteurs d'intensité de contraintes d'une fissure à branches évanescentes

Réf.	$\theta$	0°	10°	20°	30°	40°	50°
/15/ /28/	$K_{11}$	1	0,988	0,955	0,901	0,830	0,744
/15/ /18/	$K_{12}$	0	-0,259	-0,504	-0,725	-0,907	-1,04
/15/ /18/	$K_{21}$	0	0,086	0,168	0,241	0,302	0,347
/15/ /18/	$K_{22}$	0	0,973	0,895	0,771	0,609	0,420

\* WU /95/, ainsi que BILBY et al. /96/ obtiennent, par une autre approche, des résultats en excellent accord avec ceux des précédents auteurs (/15/-/18/).

## 2.2 Solution générale (b/a fini)

a) Le modèle traité par KITAGAWA et al. /97/ est représenté à la **figure A.3**. La fissure monobranchée considérée est supposée incluse dans une plaque infinie, homogène et isotrope sollicitée en traction. A l'extrémité A, elle est assimilée à une fissure droite de longueur  $c$  telle que  $c = a + b \cos \theta$ , tandis qu'en B, son comportement est considéré comme identique à celui d'une fissure droite également, mais inclinée d'un angle  $\beta$  par rapport à la direction initiale de la fissure principale, et de longueur  $c / \cos \theta$ .



- Figure A.3 - Modèle de fissure branchée de KITAGAWA /97/

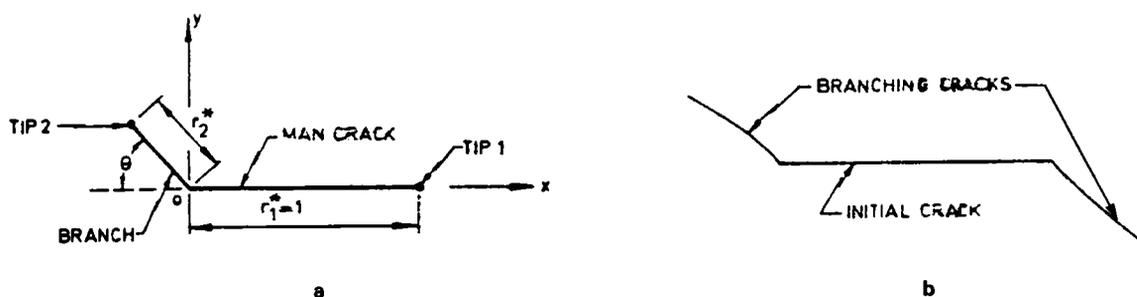
$$\text{en A : } \begin{cases} K_I = \sigma \sqrt{\pi (c/2)} & \text{où } c = a + b \cos\theta \\ K_{II} = 0 \end{cases}$$

$$\text{en B : } \begin{cases} K_I = \sigma \sqrt{\pi (c/2)} \cos^{3/2}\theta & 0,3 < b/a < 2 \\ K_{II} = \sigma \sqrt{\pi (c/2)} \cos^{1/2}\theta \sin\theta & 0^\circ < \theta < 45^\circ \end{cases}$$

On considère dans cette méthode que les facteurs d'intensité de contrainte à l'extrémité d'une fissure placée perpendiculairement à l'axe de traction ne sont pas beaucoup affectés par la configuration de l'autre extrémité, dans la mesure où elles ne se rapprochent pas l'une de l'autre.

Cette approximation n'est plus valable lorsque la branche est petite par rapport à la fissure principale ( $b/a < 0,3$ ) ou pour une fissure courbe.

b) CHATTERJEE /93/ a adopté la même géométrie que KITAGAWA et al. /97/ ; il traite, en outre, le cas d'une sollicitation de cisaillement. Pour que la solution numérique qu'il propose sous forme graphique soit correcte, la longueur de la branche doit être petite par rapport à la longueur de la fissure principale ( $10^{-3} < b/a < 1$ ), afin que les champs de contrainte en fond de fissure soient pratiquement identiques pour les deux configurations de la *figure A.4*. En effet, la configuration de la *figure A.4a* permet une approche, plus simple mathématiquement, que celle de la *figure A.5b*.



- Figure A.4 - Modèle de fissure branchée de CHATTERJEE /93/

Lorsque le branchement tend vers zéro, les résultats de CHATTERJEE sont eux-mêmes en accord avec ceux d'AMESTOY et al. /18/, ainsi qu'avec ceux de WIESELMANN /98/ et de BOWIE /99/. CHATTERJEE a, de plus, vérifié que pour  $b = a$ , sa solution répond à certains impératifs de symétrie et semble donc exacte.

c) La solution de LO /100/ consiste à modéliser la fissure par une distribution continue de

dislocations, méthode qui s'applique aussi bien à un branchement infinitésimal qu'à un branchement fini. Ses résultats sont en accord avec ceux de PALANISWAMY et KNAUSS /13/ et de BILBY et al. /96/ dans le premier cas, ainsi qu'avec ceux de CHATTERJEE /93/ et de KITAGAWA et al. /97/ dans le second cas.

### 2.3 Chargement en mode mixte

A partir d'une solution analogue à celle de LO /100/, KARIHALOO et al. /84/ déduisent une solution du premier ordre pour de faibles valeurs de la branche ( $b \ll 2a$ ) et de l'angle de bifurcation ( $\theta < 18^\circ$ ). Les facteurs d'intensité de contrainte à l'extrémité de la fissure branchée soumise à un chargement biaxiale où la composante de mode I est maximale sont alors donnés par les expressions suivantes (A.6) :

$$\begin{cases} k_1^* = K_I + o(\theta^2) \\ k_2^* = \frac{K_I}{2} \theta + K_{II} - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} T \theta + o(\theta^2) \end{cases}$$

avec  $T = (\lambda - 1)\sigma_\infty$  : contrainte portée par le plan de la fissure principale.

Les expressions (A.6) sont identiques à celle obtenues par COTTERELL et RICE /82/ à l'aide d'une méthode de perturbations inspirée par BANICHUK /101. Pour des angles de bifurcation plus grands, KARIHALOO fait intervenir des termes correctifs,  $A_{ij}$  de second ordre, sous la forme suivante (A.7) :

$$\begin{cases} k_1^* = (C_{11} + A_{11})K_I + (C_{12} + A_{12})K_{II} + (2\sqrt{2}/\pi \sin^2\theta + A_{13})T \\ k_2^* = (C_{21} + A_{21})K_I + (C_{22} + A_{22})K_{II} - (2\sqrt{2}/\pi \sin 2\theta - A_{23})T \end{cases}$$

Les coefficients  $C_{ij}$  et  $A_{ij}$  sont donnés sous forme de tableaux en fonction de  $\theta$  (tableau A.2). On constate que les termes en  $A_{ij}$  n'interviennent sensiblement que pour des valeurs de l'angle de bifurcation supérieures à 60 degrés.

Angle, $\theta$ (degrees)	$k_1^*$						$k_2^*$					
	$C_{11}$	$A_{11}$	$C_{12}$	$A_{12}$	$2\sqrt{2}/\pi \sin^2 \theta$	$A_{13}$	$C_{21}$	$A_{21}$	$C_{22}$	$A_{22}$	$\sqrt{2}/\pi \sin 2\theta$	$A_{23}$
0	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	0.99954	0.00008	-0.05236	0.00011	0.00194	-0.00006	0.01745	-0.00029	0.99893	-0.00004	0.05567	0.00003
8	0.99270	0.00040	-0.20833	0.00007	0.03093	-0.00017	0.06944	-0.00024	0.98299	0.00057	0.21997	0.00051
14	0.97779	0.00071	-0.36032	0.00003	0.09345	-0.00015	0.12011	-0.00020	0.94828	0.00209	0.37465	0.00183
20	0.95508	0.00099	-0.50542	-0.00140	0.18678	-0.00002	0.16847	-0.00018	0.89564	0.00443	0.51294	0.00425
26	0.92501	0.00125	-0.64093	-0.00587	0.30683	0.00021	0.21364	-0.00016	0.82632	0.00752	0.62879	0.00800
32	0.88814	0.00153	-0.76434	-0.01032	0.44835	0.00053	0.25478	-0.00013	0.74197	0.01137	0.71715	0.01328
38	0.84518	0.00178	-0.87344	-0.01477	0.60515	0.00089	0.29115	-0.00099	0.64460	0.01598	0.77413	0.02016
44	0.79692	0.00202	-0.96636	-0.01877	0.77038	0.00127	0.32212	-0.00063	0.53652	0.02138	0.79726	0.02863
50	0.74425	0.00221	-1.04163	-0.02237	0.93680	0.00163	0.34721	-0.00222	0.42029	0.02748	0.78551	0.03848
56	0.68813	0.00231	-1.09817	-0.02514	1.09714	0.00193	0.36606	-0.00224	0.29867	0.03406	0.73940	0.04925
62	0.62954	0.00272	-1.13536	-0.02673	1.24438	0.00215	0.37845	-0.00670	0.17542	0.04069	0.66095	0.06027
68	0.56952	0.00210	-1.15304	-0.02687	1.37209	0.00227	0.38435	-0.01070	0.05077	0.04683	0.55360	0.07070
74	0.50909	0.01798	-1.15149	-0.02551	1.47467	0.00230	0.38383	-0.01381	-0.06970	0.05187	0.42203	0.07964
80	0.44922	0.01417	-1.13145	-0.02282	1.54765	0.00234	0.37715	-0.01574	-0.18408	0.05528	0.27199	0.08631
86	0.39085	0.01008	-1.09410	-0.01917	1.58782	0.00213	0.36470	-0.01642	-0.28973	-0.36747	0.11007	0.09018

- Tableau A.2 - Coefficients de KARIHALOO /84/

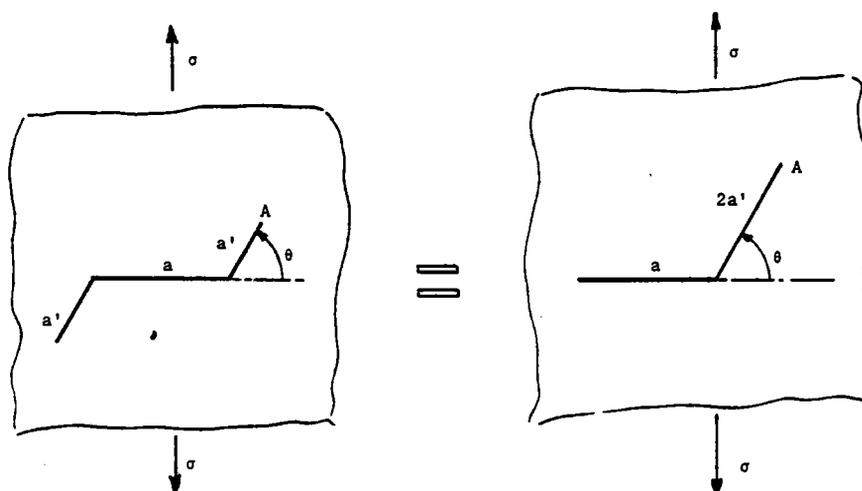
### 3 Fissure à branches symétriques

a) VITEK /19/ considère que le cas de la fissure à branches symétriques constitue un cas particulier de la fissure à ramification double traitée au paragraphe 4.2 (figure A.1d) lorsque les branches numérotées 2 et 4 (ou 1 et 3) sont absentes.

Il a obtenu une solution numérique du problème général (b/a quelconque) en représentant la fissure par une distribution continue de dislocations, tout comme LO /101/, et ultérieurement GDOUTOS /102/. Sa méthode s'applique à n'importe quelle longueur de branche. De plus, la fissure principale peut-être de forme elliptique, à rayon à fond d'entaille fini.

b) Une autre approche due à HOURLIER /103/ consiste à dire que les facteurs d'intensité de contrainte d'une fissure branchée aux deux extrémités sont équivalents à ceux d'une fissure ayant une seule branche de longueur double (figure A.5). L'accord raisonnable des résultats de

VITEK /19/ avec ceux de CHATTERJEE /93/ et de KITAGAWA et al. /97/, dans le cas d'une fissure sollicitée en traction, semble justifier cette approximation (tableau A.3).

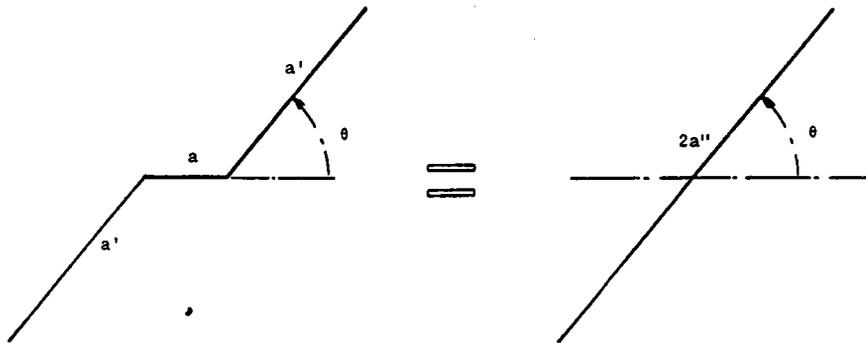


- Figure A.5 - Approximation de HOURLIER /103/

Tableau 26. Comparaison des résultats de VITEK /19/ et de CHATTERJEE /93/ (b/a = 1)

Réf.	/45/	/22/	/45/	/22/
$\theta$	$k_1^*$		$k_2^*$	
0	1,0	1,0	0	0
15	0,9457	0,9367	-0,272	-0,230
30	0,792	0,802	-0,498	-0,425
45	0,569	0,592	-0,641	-0,565
60	0,316	0,338	-0,677	-0,608

### 3.1 Fissure à branches longues



- Figure A.6 - Approximation pour une fissure à branches longues /103/

D'après HOURLIER /103/, cette configuration peut être assimilée à celle d'une fissure droite de longueur  $2b$  inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport à l'axe de traction ( $\sigma$ ). Les facteurs d'intensité de contrainte ont alors pour expression :

$$\begin{cases} K_I = (\sigma \cos^2 \theta + \tau \sin 2\theta) \sqrt{\pi b} \\ K_{II} = (\sigma \sin \theta \cos \theta - \tau \cos 2\theta) \sqrt{\pi b} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

VITEK montre que, lorsque  $b/a$  est supérieur à 50, ses résultats concordent à moins de 2% avec la solution analytique suivante :

$$\begin{cases} K_I = \sigma \sqrt{\pi b} \cos^2 \theta \\ K_{II} = \sigma \sqrt{\pi b} \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

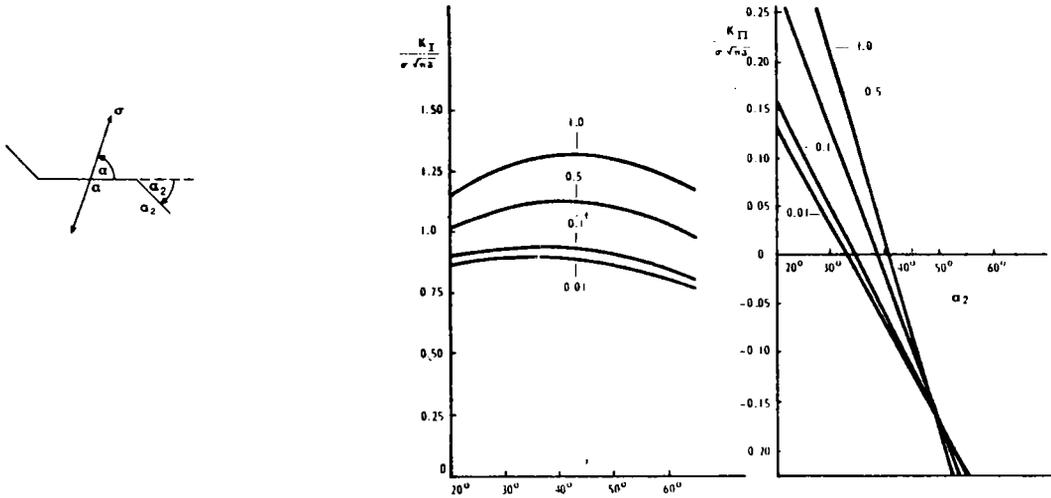
et que lorsque  $\theta = 0$ , il retrouve  $K_I = \sigma \sqrt{\pi(b+a)}$ , ce qui correspond à une simple extension de la fissure d'une longueur  $b$ , également à moins de 2%.

### 3.2 Chargement en mode mixte

#### 3.2.1 Traction

Considérons le cas où la fissure symétrique est sollicitée en mode mixte – *figure A.7a* –. On peut considérer comme VITEK /19/ qu'il s'agit là d'une variante du cas général de la fissure à double ramification (les branches manquantes étant numérotées 2 et 4 sur la *figure*

A.1d. Les variations de  $k_1^*$  et de  $k_2^*$  en fonction de l'angle  $\theta$ , lorsque  $\beta = 45$  degrés sont représentées à la figure A.9b.



- Figure A.7 - Modèle de fissure branchée proposé par VITEK /19/

Acceptable dans le cas d'une fissure sollicitée en mode I avant branchement, cette solution est fautive si la fissure est sollicitée en mode mixte avant branchement (HOURLIER /103/).

Dans le cas de très petites longueurs de branches, HUSSAIN et al. /14/ ont proposé les expressions analytiques suivantes des facteurs d'intensité de contrainte :

$$(A.9) \begin{pmatrix} k_1^* \\ k_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 1,5\sin\theta \\ -0,5\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix} \times F(\theta)$$

avec :

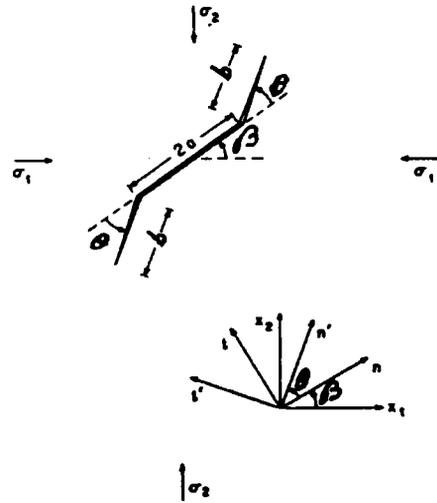
$$F(\theta) = \frac{4}{(3 + \cos^2 \theta)} \left[ \frac{1 - \frac{\theta}{\pi}}{1 + \frac{\theta}{\pi}} \right]^{\frac{\theta}{2\pi}}$$

Si pour l'équation (A.9) l'accord est satisfaisant pour des angles de bifurcation inférieurs à 50 degrés, il ne l'est plus du tout au voisinage de 90 degrés.

### 3.2.2 Compression

Dans le cas d'une fissure linéaire contenue dans un corps infini en déformation plane, soumis à un état de contraintes de compression biaxiale uniformes (*figure A.8*), STEIF /25/ exprime les facteurs d'intensité de contrainte à l'extrémité d'une branche de longueur finie sous la forme suivante :

$$(A.10) \quad \begin{cases} k_1^* &= K_I^{\text{isol}} + K_I^{\text{infl}} \\ k_2^* &= K_{II}^{\text{isol}} + K_{II}^{\text{infl}} \end{cases}$$



- Figure A.8 -  
Modèle de STEIF /25/

$K_I^{\text{isol}}$  et  $K_{II}^{\text{isol}}$  sont les facteurs d'intensité de contrainte à l'extrémité d'une branche si elle existait seule dans le corps, avec :

$$K_I^{\text{isol}} = \sigma_{n'n} \sqrt{\pi b/2} \quad K_{II}^{\text{isol}} = \sigma_{n't'} \sqrt{\pi b/2}$$

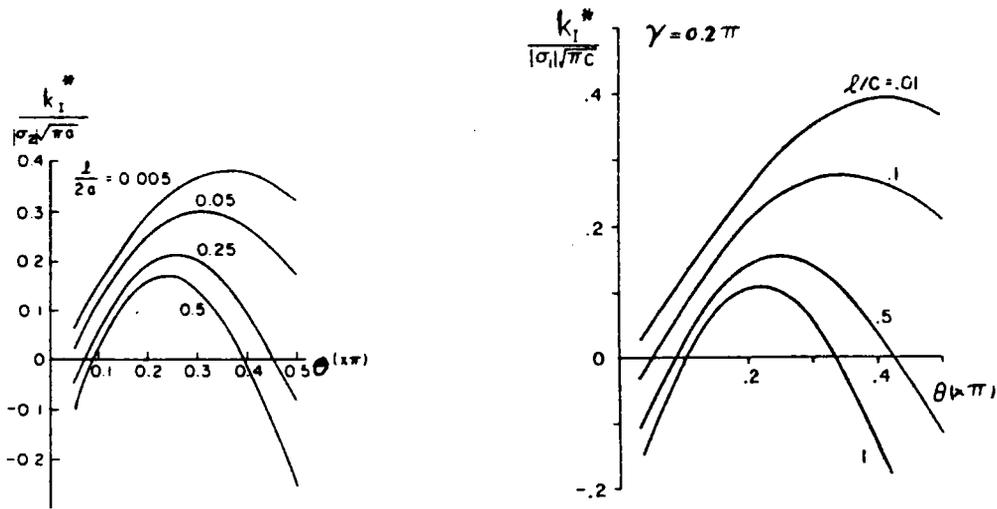
et :

$$K_I^{\text{infl}} = \beta_I E \Delta(b, a) / \sqrt{b} \quad K_{II}^{\text{infl}} = \beta_{II} E \Delta(b, a) / \sqrt{b}$$

$E$  : module d'Young,

$\beta_I, \beta_{II}$  fonctions sans dimension qui dépendent du coefficient de POISSON et de l'angle  $\theta$ .

$K_I^{\text{infl}}$  et  $K_{II}^{\text{infl}}$  traduisent l'influence de la fissure principale sur le champ de contrainte à l'extrémité des branches, en tenant compte du glissement relatif des lèvres de la fissure principale qui se traduit par l'ouverture  $\Delta(b, a)$  des branches par un effet de coin .



- Figure A.9 - Résultats de STEIF /25/ comparés à ceux de NEMAT-NASSER et HORII /86/ : cas d'un chargement uniaxial

Finalement, les formules approchées proposées par STEIF s'écrivent (A.11) :

$$k_1^* = \left[ \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\cos(2\theta + 2\beta) \right] V \frac{\pi b}{2}$$

$$- \frac{3}{4}(\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2}) V \frac{\pi}{2} \left[ \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\sin 2\theta + f \left( \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\cos 2\beta \right) \right] (V2a + b - Vb)$$

$$k_2^* = \left[ \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\sin(2\theta + 2\beta) \right] V \frac{\pi b}{2}$$

$$+ \frac{1}{4}(\cos \frac{\theta}{2} + 3\cos \frac{3\theta}{2}) V \frac{\pi}{2} \left[ \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\sin 2\theta + f \left( \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\cos 2\beta \right) \right] (V2a + b - Vb)$$

où f désigne le coefficient de frottement.

Les expressions (A.11) ne sont valables que si :

$$\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\sin 2\theta + f \left( \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\cos 2\beta \right) < 0,$$

sinon il n'y a pas de mouvement relatif entre les lèvres de la fissure.

La *figure A.9* compare les résultats de STEIF à ceux de NEMAT-NASSER et HORII /86/ dans le cas où  $\lambda = 0$  (compression uniaxiale),  $\nu = 0,3$  et  $\beta_0 = 54$  degrés. Bien que les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte diffèrent quelque peu entre les deux auteurs, notamment pour des branches plutôt longues, les allures des courbes représentatives restent tout à fait similaires. Quand  $b$  tend vers zéro, STEIF trouve les même expressions de  $k_1^*$  et de  $k_2^*$  que COTTERELL et RICE /82/.

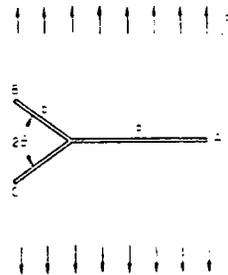
#### 4 Fissure à ramification

##### 4.1 Fissure à ramification simple (double branche)

a) La méthode développée par LO /100/, présentée au paragraphe A.2.2, est encore applicable au cas présent (*figure A.10*), moyennant une expression appropriée des potentiels. Là encore, les deux cas de branchement (fini et asymptotique) sont résolus par une même formulation.

b) KITAGAWA et al. /97/ se sont également intéressés à la question et proposent une solution calquée sur celle obtenue dans le cas d'une fissure monobranche.

- Figure A.10 -



A l'extrémité A, les facteurs d'intensité de contrainte sont à nouveau donnés par :

$$(A.12) \quad K_{IA} = \sigma \sqrt{\pi c/2} \quad K_{IIA} = 0$$

En B, les valeurs diffèrent selon la valeur de l'angle  $2\theta$ .

c) Pour une fissure longue, mais finie (rapport de 1 à 40) et un angle de bifurcation supérieur à 5 degrés, BILBY et al. /96/ traitent la question au moyen d'une distribution continue de dislocations, la méthode de la représentation conforme qu'ils avaient précédemment utilisée, dans le cas d'une fissure monobranche, posant un problème de convergence.

## 4.2 Fissure à ramification double (double branche symétrique)

Ce sont à nouveau VITEK /19/ et LO /100/ qui, de même que dans les paragraphes précédents, ont résolu le problème dans le cas où les branches sont de longueur finie.

Rappelons que VITEK représente une telle fissure (*figure A.1d*) par une distribution continue de dislocations. Ainsi, une fois ces distributions connues, on obtient les facteurs d'intensité de contrainte.

## 5 CONCLUSIONS

Les facteurs d'intensité de contrainte  $k_1^*$  et  $k_2^*$  sont déterminés, à angle de branchement donné, pour une longueur variable de la branche, ou inversement. Le calcul de ces facteurs requiert l'emploi de méthodes mathématiques compliquées, dont la résolution exige d'importants moyens de calcul.

Pratiquement toutes les études développées dans le cas d'une branche évanescence ne sont plus valables lorsque le rapport  $b/a$  prend une valeur finie (non asymptotique), et réciproquement – excepté LO /100/ –.

On notera qu'il n'existe que très peu d'études consacrées à ce genre de calcul pour un chargement en mode mixte, qu'il soit de traction /19/ ou de compression /25/.

Il existe des solutions exactes /15/ – /18/ qui permettent de calculer les valeurs des  $k_i^*$  ( $i = 1, 2$ ) lorsque la longueur de la branche tend vers zéro. Par contre, pour une longueur finie, on passe par des méthodes approximatives, qui assimilent la longueur réelle de la fissure à une longueur équivalente.

Enfin il est à noter que la plupart des auteurs ont justifié la validité de leur solution en la comparant avec celle des autres. Mais toutes ces solutions ont rarement été comparées à des résultats expérimentaux.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. **EFTIS J. SUBRAMONIAN N. LIEBOWITZ H.**  
Crack border stress and displacement equations revised  
Eng. Fract. Mech. Vol. 9 p.189–210 1977
2. **EFTIS J. SUBRAMONIAN N.**  
The inclined cracks under biaxial load  
Eng. Fract. Mech. Vol. 10 p.43–67 1978
3. **WILLIAMS M.L.**  
On the stress distribution at the base of a stationary crack  
J. of Appl. Mech. Vol. 24 p.109–114 1957
4. **WILLIAMS J.G. EWING P.D.**  
Fracture under complex stress. The angled crack problem  
Int. J. of Fract. Mech. Vol. 8 no 4 p.441–445 1972
5. **SIH G.C. PARIS P.C. ERDOGAN F.**  
Crack–tip stress intensity factors for plane extension and plate bending problems J. of Appl. Mech. no 29 p.306–312 1962
6. **ERDOGAN F. SIH G.C.**  
On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear  
J. of Basic Eng. Vol. 85 p.519–527 1963
7. **MAITI S.K. SMITH R.A.**  
Comparison of the criteria for mixed mode brittle fracture based on the preinstability stress strain field  
Int. J. of Fract. Vol. 23 p.281–295 1983 – Vol. 24 p.5–22 1984
8. **MAITI S.K.**  
The unstable extension of inclined cracks under uniaxial tension and compression  
Advances in fracture research I.C.F.6 NEW DELHI India Tome 2 p.987–993 1984
9. **OTSUKA A. MORI K. MIYATA T.**  
The condition of fatigue crack growth in mixed mode condition  
Eng. Fract. Mech. Vol. 7 no 3 p.429–439 1975
10. **SIH G.C.**  
Strain–energy–density factor applied to mixed mode crack problems  
Int. J of Fract. Vol. 10 no 3 p.305–321 1974
11. **SWEDLOW J.L.**  
Criteria for growth of the angled crack  
ASTP 601 p.506–521 1976

12. **CHANG K.J.**  
A further examination on the application of the strain energy density theory to the angled crack problem  
J. of Appl. Mech. Vol. 49 no 2 p.377–382 1982
13. **PALANISWAMY K. KNAUSS W.G.**  
On the problem of crack–extension in brittle solids under general loading  
Mechanics today 1st Ed. Pergamon Press Vol. 4 p.87–145 1978
14. **HUSSAIN M.A. PU S.L. UNDERWOOD J.**  
Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II  
Fract. Analysis A.S.T.M. STP 560 p. 2–28 1974
15. **NUISMER R.J.**  
An energy release rate criterion for mixed mode fracture  
Int. J. of Fract. Vol. 11 no 2 p.245–250 1975
16. **HWANG K.C. HUA D.H. YU S.W.**  
On the maximum energy release–rate criterion for fracture under combined loads  
Proc. of I.C.F.5 CANNES p.123–130 1981
17. **ICHIKAWA M. TANAKA S.**  
A critical analysis of the relationship between the energy release rate and the stress intensity factors for non–planar crack extension under combined mode loading  
Int. J. of Fract. Vol. 18 no 1 p.19–28 1982
18. **AMESTOY M. BUI H.D. DANG VAN K.**  
Analytic asymptotic solution of the kinked crack problem  
Proc. of I.C.F.V CANNES p.348– 1981
19. **VITEK V.**  
Plane strain stress intensity factors for branched cracks  
Int. J. of Fract. Vol. 13 no 4 p.481–501 1977
20. **COTTERELL B.**  
Brittle fracture in compression  
Int. J. of Fract. Mech. Vol. 8 no 2 p.195–208 1972
21. **KIPP M.E. SIH G.C.**  
The strain energy density failure criterion applied to notched elastic solids  
Int. J. of Sol. Str. Vol. 11 no 2 p.153–173 1975
22. **WU H.C. CHANG K.J.**  
Strain failure criterion and its application to angled crack problem in compression  
Univ. of IOWA Report no G378–DME–75–004 1975
23. **WU H.C. CHANG K.J.**  
Angled elliptic notch problem in compression and tension  
J. of Appl. Mech. Vol. 45 p.258–262 1978

24. **WOO C.W. CHOW C.L.**  
On inclined crack under compressive loading  
Proc. of Int. Symposium on Fracture Mechanics CHINA p.251–257 1984
25. **STEIF P.S.**  
Crack extension under compressive loading  
Eng. Fract. Mech. Vol. 20 no 3 p.463–473 1984
26. **BROEK D. RICE R.C.**  
Fatigue crack propagation of rail steels  
Rapport no FRA/ORD–81/30 Battele Columbus Lab. 1981
27. **UEDA Y. IKEDA K. YAO T.**  
Characteristics of brittle fracture under general combined modes including those under bi-axial tensile loads  
Eng. Fract. Mech. Vol. 18 no 6 p.1131–1158 1983
28. **XUNFANG S. GUANGQIN W.**  
Fatigue propagation of inclined crack in uniaxial tension stress field  
Proc. of I.C.F. Int. Symp. on Fract. Mech. Science Press China p.804–809 1983
29. **TANAKA K.**  
Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis  
Eng. Fract. Mech. Vol. 6 p.493–507 1974
30. **PUSTEJOVSKI M.A.**  
Fatigue crack propagation in Titanium under general in-plane loading  
I. Experiments – II. Analysis  
Eng. Fract. Mech. Vol. 11 p.9–31 1979
31. **BADALIAN R.**  
Mixed mode fatigue crack propagation  
Proc. of U.S. – Greece Symp. on mixed mode crack propagation Sitjhoff and Nordhoff Intern. Publ. Nederlands 1981
32. **BADALIAN R.**  
Application of strain energy density factor to fatigue crack growth analysis  
Eng. Fract. Mech. Vol. 13 p.657–666 1980
33. **SIH G.C. BARTHELEMY B.M.**  
Mixed mode fatigue crack growth predictions  
Eng. Fract. Mech. Vol. 13 p.439–451 1980
34. **PATEL A.B. PANDEY R.K.**  
Fatigue crack growth under mixed mode loading  
Fatigue of Eng. Mat. and Struct. Vol. 4 no 1 p.65–77 1981
35. **CHINADURAI R. PANDEY R.K. JOSHI B.K.**  
Fatigue crack propagation from an inclined crack under combined mode loading  
Adv. in Fract. Res. I.C.F.6 NEW DELHI India Vol. 2 p.1703–1710 1984

36. **FLAVENOT J.F. SERRES D. GREGOIRE R. ANTON F.**  
Essai de fissuration par fatigue en mode I et II en phase sur un acier de cuve A508  
C.E.A. Institut de Prot. et Santé Nucl. Rapport DSN no358 1980
37. **HILLS D.A. ASHELBY D.W.**  
Combined mode fatigue crack propagation predictions using mode I data  
Eng. Fract. Mech. Vol. 13 p.589–594 1979
38. **SMITH R.A.**  
Interfaces of wear and fatigue  
Proc. Conf. on Fundamentals of Tribology Ed. N.P. SUH and N. SAHA M.I.T.  
CAMBRIDGE p.605–616 1980
39. **SMITH M.C. SMITH R.A.**  
The formation of spherical wear debris in mode II fatigue cracks  
Wear Vol. 76 p.105–128 1982
40. **BRIGGS G.A.D. SMITH R.A.**  
Stress intensity factor calculation of a mixed mode crack growth problem  
Proc. Conf. SWANSEA U.K. p.135–144 1980
41. **MIYAMOTO H. FUKUDA S. KAGEYAMA K.**  
Finite element analysis of crack propagation under compression  
Fracture I.C.F. IV WATERLOO Canada Vol. 3 p.491–494 1977
42. **JONES D.L. CHISHOLM D.B.**  
An investigation of the edge sliding modes in fracture mechanics  
Eng. Fract. Mech. Vol. 7 no 3 p.261–270 1975
43. **TOOR R.M.**  
On fracture mechanics under complex stress  
Eng. Fract. Mech. Vol. 7 p.321–329 1975
44. **POOK L.P.**  
An observation on mode II fatigue crack growth threshold behaviour  
Int. J. of Fract. Vol. 13 p.867–869 1977
45. **N. P. SUH**  
The delamination theory of wear  
Wear 25 p. 111 – 124 1973
46. **N. P. SUH**  
An overview of the delamination theory of wear  
Wear 44 p. 1 – 16 1977

47. **J. R. FLEMING – N. P. SUH**  
 Mechanics of crack propagation in delamination wear  
 Wear 44 p. 39 – 56 1977
48. **J. R. FLEMING – N. P. SUH**  
 The relationship between crack propagation rates and wear rates  
 Wear 44 p. 57 – 64 1977
49. **50. S. JAHANMIR – N. P. SUH**  
 Mechanics of subsurface void nucleation in delamination wear  
 Wear 44 p. 17 – 38 1977
50. **D. A. HILLS – D. W. ASHELBY**  
 A fracture mechanics approach to rolling contact fatigue  
 Tribology intern. p. 115 – 119 1979
51. **J. E. MERWIN – K. L. JOHNSON**  
 An analysis of plastic deformation in rolling contact  
 Proc. Inst. Mech. Eng. LONDON 177 p. 676 – 690 1963
52. **K. L. JOHNSON – J. A. JEFFERIS**  
 Plastic flow and residual stresses in rolling and sliding contact  
 Proc. of Symp. on fatigue in rolling contact I.M.E. London p.54–65 1963
53. **D. A. HILLS – D. W. ASHELBY**  
 On the application of fracture mechanics to wear  
 Wear 54 p. 321 – 330 1979
54. **D. A. HILLS – D. W. ASHELBY**  
 On the determination of stress intensification factors for a wearing half-space  
 Eng. Fract. Mech. 13 p. 69 – 78 1980
55. **A. R. ROSENFELD**  
 A fracture mechanics approach to wear  
 Wear 61 p. 125 – 132 1980
56. **A. R. ROSENFELD**  
 A dislocation theory approach to wear  
 Wear 72 p. 97 – 103 1981
57. **60. A. R. ROSENFELD**  
 Elastic–plastic fracture mechanics and wear  
 Wear 72 p. 245 – 254 1981
58. **L. M. KEER – M. D. BRYANT**  
 A pitting model for rolling contact fatigue  
 Journal of Lubrication Technology A.S.M.E. 105 p.198 – 205 1983

59. **L. M. KEER – M. D. BRYANT – G. K. HARITOS**  
 Subsurface cracking and delamination  
 Solid contact and Lubrication A.S.M.E. AMD 39 p.79 – 95 1980
60. **M. KANETA – Y. MURAKAMI – H. YATSUZUKA**  
 Fracture mechanics considerations of crack growth in lubricated rolling/sliding contact  
 4° Congrès Européen de Tribologie EUROTRIB 1985 ECULLY 1985
61. **D. A. HILLS – D. W. ASHELBY**  
 The initiation of wear cracks  
 Wear 70 p. 365 – 371 1981
62. **B. A. BILBY – A. H. COTTRELL – K. H. SWINDEN**  
 The spread of plastic yield from a notch  
 Proc. of the Royal Soc. , London Series A Vol. 272 p. 304 –314 1963
63. **H. C. SIN – N. P. SUH**  
 Subsurface crack propagation due to surface traction in sliding wear  
 J. of Appl. Mech. 51 p. 317 – 323 1984
64. **V. BHARGAVA – G. T. HAHN – C. A. RUBIN**  
 An elastic–plastic finite element model of rolling contact  
 J. of Appl. Mech. 52 p. 67 – 82 1985
65. **CARNEIRO F.L.L.B. et BARCELLOS A.**  
 Concrete tensile strength  
 Union of testing and research laboratoires for materials and structures no 13 1953
66. **TIMOSHENKO S.P. GOODIER J.N.**  
 Theory of elasticity  
 Third edition Mc Graw–Hill New–York 1970
67. **COKER E.G. FILON L.N.G.**  
 A treatise on photo–elasticity  
 Cambridge University Press London 1931
68. **ATKINSON C.**  
 Combined mode fracture via the cracked Brazilian disc test  
 Int.J.of Fract. Vol.18 no 4 p.279–291 1982
69. **HONDROS G.**  
 The evaluation of Poisson's ratio and the modulus of materials of a low tensile resistance by the Brazilian (indirect tensile) test with particular reference to concrete  
 Aust.J.of Appl.Sc. Vol.10 p.361–364 1957
70. **M. LOUAH D. HIEBEL**  
 Calcul des facteurs d'intensité de contrainte dans un disque fissuré soumis à une compression  
 Rapport I.F.P. no 32383 1984

71. **ATKINSON C.**  
On dislocation densities and stress singularities associated with cracks and pile-ups in inhomogeneous media  
Int.J.Engng.Sci. Vol.10 p.45-71 1972
72. **LIEURADE H.P.** et la commission Fatigue des Métaux de la S.F.M.  
La pratique des essais de fatigue  
PYC Edition 1982
73. **PEARSON S.**  
Initiation of fatigue cracks in commercial aluminium alloys and the subsequent propagation of very short cracks  
Eng. Fract. Mech. Vol. 7 p.235-247 1975
74. **PINEAU A.**  
Journée-débat du G.T. 5 de la S.F.M.  
Comportement des fissures courtes (nov. 1983)
75. **HUDAK S.J., Jr**  
Small crack behavior and the prediction of fatigue life  
J. of Eng. Mat. and Tech. Vol. 103 p. 26-35 1981
76. **EL HADDAD M. H. SMITH K. N. TOPPER T. H.**  
Fatigue crack propagation of short cracks  
J. of Eng. Mat. and Tech. Vol. 101 p. 42-46 1979
77. **SHEPPARD S. BARBER J. R. COMNINOU M.**  
Short subsurface cracks under conditions of slip and stick caused by a moving compressive load  
J. of Appl. Mech. Vol. 52 p. 811-817 1985
78. **FAIRHURST C.**  
On the validity of the "Brazilian" test for brittle materials  
Int. J. Rock Mech. Min. Sc. Vol. 1 p. 535-546 (1964)
79. **THEOCARIS P.S. ANDRIANOPOULOS N.P.**  
A modified strain energy density criterion applied to crack propagation  
J. of Appl. Mech. Vol. 49 p.81-86 1982
80. **MURAKAMI Y.**  
Prediction of crack propagation path (numerical analysis and experiments)  
Nordhoff ed. 1977
81. **PARLETUN L.G.**  
Determination of the growth of branched cracks by numerical methods.  
Eng. Fract. Mech. Vol. 11 p.343-358 1979

82. **COTTERELL B. RICE J.R.**  
Slightly curved or kinked cracks  
Int. J. of Fract. Vol. 16 no 2 p.155–169 1980
83. **KARIHALOO B.L. et NEMAT–NASSER S.**  
Thermally induced crack curving in brittle solids  
Analytical and experimental fracture mechanics  
SIH G. E. and MIRABILE M. ed. Sijthoff and Noordhoff p.265–272 1981
84. **KARIHALOO B.L. KEER L.M. NEMAT–NASSER S.**  
Crack kinking under non symmetric loading  
Eng. Fract. Mech. Vol. 13 p.879–888 1980
85. **KARIHALOO B. L. NEMAT–NASSER S.**  
Thermally induced crack curving in brittle solids  
Analytical and experimental fracture mechanics NOORDHOFF 1981
86. **NEMAT–NASSER S. HORII H.**  
Compression–induced nonplanar crack extension with application to splitting,  
exfoliation, and rockburst  
J. of Geoph. Res. Vol. 87 no B8 p.6805–6821 1982
87. **NEMAT–NASSER S.**  
Non–planar crack growth  
1982
88. **IIDA S. KOBAYASHI A.S.**  
Crack propagation rate in 7075 T 6 plates under cyclic tensile and transverse shear  
loading  
J. of Basic Eng. A.S.M.E. p.764–769 1969
89. **ANTOLOVICH K.D. SAXENA A. CHANANI G.R.**  
A model for fatigue crack propagation  
Eng. Fract. Mech. Vol. 17 p.649–652 1975
90. **LOUAH M.**  
Fissuration en fatigue en mode mixte I + II à l'aide du disque brésilien  
Thèse d'état – Université de METZ 1986
91. **DELEBECQ J.**  
Contribution à l'étude de la fatigue de contact en milieu lubrifiant  
et à sa simulation  
Thèse de Docteur–ingénieur – Université de METZ 1984
92. **MUSKHELISHVILI N.I.**  
Singular integral equations  
Translated by RADOK J.R.M. Noordhoff Netherlands p.251 1953

93. **CHATTERJEE S.N.**  
The stress field in the neighborhood of a branched crack in an infinite elastic sheet  
Int. J. of Sol. Struct. Vol. 11 p.521–538 1975
94. **ICHIKAWA M. TANAKA S.**  
Energy release rate of combined mode cracks  
Int. J. of Fract. Vol. 15 p. R183–R185 1979
95. **WU H.C.**  
Fracture under combined loads by maximum energy release rate criterion.  
J. of Appl. Mech. Vol. 45 p.553–558 1978
96. **BILBY B.A. CARDEW G.E. HOWARD I.C.**  
Stress intensity factors at the tip of kinked and forked cracks.  
Fracture 1977 Vol. 3 I.C.F. 4 WATERLOO Canada p.197–200 19–24 juin 1977
97. **KITAGAWA H. YUUKI R. OHIRA T.**  
Crack morphological aspects in fracture mechanics  
Eng. Fract. Mech. Vol. 7 p.515–529 1975
98. **WIESELMANN P.A.**  
Doctoral dissertation –  
Massachusetts Institute of Technology CAMBRIDGE 1969
99. **BOWIE O.L.**  
Rectangular tensile sheet with edge cracks  
J. of Appl. Mech. Vol. 31 p.208 1964
100. **LO K.K.**  
Analysis of branched cracks  
J. of Appl. Mech. Vol. 45 p.797–802 1978
101. **BANICHUK N.V.**  
Determination of the form of a curvilinear crack by small parameter technique  
Izv. An. SSR MTT Vol. 7 no 2 p.130–137 1970
102. **GDOUTOS E. E.**  
Problems of mixed mode crack propagation  
M. Nijhoff Publish. p. 41–69 1984
103. **HOURLIER F.**  
Propagation des fissures de fatigue sous sollicitations polymodales  
Thèse d'Etat Université de Technologie COMPIEGNE 1982