



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE ET PRODUCTIQUE.

Université de METZ

THESE

DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE METZ

EN MECANIQUE

\*  
\*\*

présentée à l'Université de METZ

pour l'obtention du grade de

Docteur en Mécanique

par

Said AHZI

assistant à l'Université de Metz

UNE APPROCHE AUTO-COHERENTE POUR LE COMPORTEMENT  
DES POLYCRISTAUX VISCOPLASTIQUES EN GRANDES DEFORMATIONS

Defendue publiquement le 26 mai 1987 devant le jury composé de :

Messieurs : E. KRONER  
M. BERVEILLER  
G. CANOVA  
C. ESLING  
C. G'SELL  
A. MOLINARI  
A. ZAQUI.

Président  
Rapporteur

Rapporteur

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv	1987 0185
Cote	S/M3 87/9
Loc	Magasin

A ma fille,

HINDE,

née le jour de la

soutenance de cette thèse.

Je voudrais tout d'abord remercier le Professeur E. KRÖNER d'avoir accepté de présider le jury, ainsi que le professeur A. ZAOUÏ d'avoir accepté de juger cette thèse.

Je remercie également les Professeurs M. BERVEILLER, C. ESLING et C. G'SELL qui se sont intéressés à cette recherche.

Je tiens à remercier, tout particulièrement, les Professeurs A. MOLINARI et G. CANOVA qui ont dirigé cette thèse. Leur aide et leur amitié m'ont été précieuses le long de tout ce travail.

Je remercie tous mes collègues de travail : BOUAOUINE, BUISSON, TOME, ...

Je remercie enfin Mr A. BILOCQ et Mme MARCELET pour l'impression de la thèse.

## TABLE DES MATIERES.

**Chapitre 0 :** INTRODUCTION

**Chapitre 1 :** REPRESENTATION DES TEXTURES DE DEFORMATION ET APPROCHES  
DU COMPORTEMENT PLASTIQUE DES POLYCRISTAUX.

I- Représentation des textures de déformation.

1- Introduction

2- Traction et compression uniaxiales

3- Laminage

4- Torsion

II-Approches du comportement plastique des polycristaux

1- Généralités

2- Modèle de Sachs et modèle statique

3- Modèle de Taylor

4- Modèles du type Taylor

5- Choix des systèmes actifs

6- modèles auto-cohérents

**Chapitre 2 :** APPROCHE AUTO-COHERENTE POUR LES GRANDES DEFORMATIONS  
VISCOPLASTIQUES.

1- Introduction

2- Loi constitutive du monocristal

3- Loi constitutive du polycristal

4- L'approche auto-cohérente

5- Loi d'interaction

6- Modèle simplifié

**Chapitre 3 : EXPLOITATION ET RESULTATS.**

1- Exploitation

2- Prédiction des textures de déformation

3- Conclusions

**Chapitre 4 : EFFET DE DURCISSEMENT ET EFFET DE FORME.**

1- Effet de durcissement

2- Effet de forme

**Chapitre 5 : APPROCHE VISCOPLASTIQUE A N SITES.**

1- Formulation

2- Résultats et conclusion

**Chapitre 6 : ANALYSE CRITIQUE ET CONCLUSIONS**

1- Analyse critique

2- Conclusion générale

**Annexe A :**

**Annexe B :**

**Annexe C :**

## CHAPITRE 0

### INTRODUCTION

La formulation de la plasticité des polycristaux métalliques a fait l'objet de plusieurs études et approches différentes.

Pour les petites déformations, une approche auto-cohérente a été formulée par différents auteurs : Hill [1], Hutchinson [2], Kröner[3] et Berveiller-Zaoui [4]. Ces approches prennent en compte les interactions entre chaque grain et son environnement supposé être un milieu homogène équivalent (M.H.E). Cette approche a été étendue aux grandes déformations élastoplastiques par Iwakuma et Nemat-Nasser [5] et aux grandes déformations élastoviscoplastiques par Nemat-Nasser et Obatta [6] et ils l'ont appliqué au problème à deux dimensions. L'intérêt pratique des grandes déformations des polycristaux a conduit au développement d'autres approches. L'approche la plus utilisée est la théorie de Taylor [7] qui suppose la déformation dans chaque grain égale à la déformation macroscopique appliquée. Cette théorie a été développée entre autres par Bishop et Hill [8] et par Bunge [9]. Très souvent, en grandes déformations l'élasticité est négligée. La théorie de Taylor a eu un succès dans la prédiction qualitative de l'évolution des textures cristallographiques pour les métaux CFC et les métaux CC.

L'expérience a montré que l'hypothèse de l'uniformité des déformations est grossière. Honneff et Mecking [10] ont modifié cette approche en proposant une théorie de déformation partiellement imposée (DPI)

(ou Taylor relaché). Cette théorie (DPI) à permis d'améliorer le résultat des textures du laminage. Kocks et Canova [11] et Canova et al. [12] ont appliqué cette approche au cas de la torsion et de la compression. Les résultats ont aussi été notablement améliorés en torsion, mais pas en compression.

Récemment, Asaro et Needleman [13] ont proposé une extension de la théorie de Taylor pour les grandes déformations élastovisco-plastiques. Toutes les théories basées sur l'uniformité de la déformation vérifient les conditions de compatibilité mais pas les conditions d'équilibre aux joints de grains.

Dans ce travail, nous utilisons une approche Auto-cohérente pour le comportement des polycristaux viscoplastiques en grandes déformations [14]. Du fait que nous négligeons l'élasticité, cette approche n'est valide que pour des chargements monotones ou quasi monotones. Le comportement du monocristal est basé sur une loi non linéaire [15,16] reliant la cission résolue  $\tau^s$  à la vitesse de glissement  $\dot{\gamma}^s$  sur le système de glissement  $s$ . Cette description inclut, en tant que limite, la plasticité indépendante du temps, c'est à dire le comportement des métaux en déformation à froid quasi-statique. L'approche Auto-cohérente que nous proposons est différente de celle de Nemat-Nasser et Obata ainsi que celle de Hill. A partir du comportement du monocristal, nous formulons les propriétés du polycristal à travers le schéma développé par Zeller et Dederichs [17] pour l'élasticité hétérogène, par Berveiller et Zaoui [4] pour les petites déformations plastiques, et par Buisson et al. [18] pour la thermoélasticité hétérogène. A partir de l'équation



d'équilibre, on obtient une équation intégrale qu'on résout par l'approximation auto-cohérente. Nous utilisons en premier l'approche à 1 site où on prend en compte l'interaction de chaque grain et son environnement qui est remplacé par le M.H.E. Dans le chapitre 5, nous développons l'approche à  $n$  sites dans laquelle on considère l'interaction entre chaque grain et ses premiers voisins, le reste des grains est supposé être le M.H.E. Nous obtenons dans chaque cas une loi d'interaction qu'on résout par la méthode de Newton-Raphson. L'application de ce schéma auto-cohérent viscoplastique est faite pour la prédiction des textures de déformation. Les résultats obtenus sont confrontés aux résultats expérimentaux pour la traction, la compression, le laminage et la torsion.

### REFERENCES

- [1 ] R. Hill, J. Mech. Phys. Sol., 13, 89, (1965).
- [2 ] J. W. Hutchinson, proc. Roy. Soc., A319, 247, (1970).
- [3 ] E. Kröner, Acta Met., 9, 155, (1961).
- [4 ] M. Berveiller and A. Zaoui, C.R. 15e Colloque GFR, 175, Paris, (1980).
- [5 ] T. Iwakuma and S. Nemat-Nasser, Proc. Roy. Soc., A394, 87, (1984).
- [6 ] S. Nemat-Nasser and M. Obata, to appear in proc. Roy. Soc.
- [7 ] G.I. Taylor, J. Inst. Met., 62, 307, (1938).
- [8 ] J.F. W. Bishop and R. Hill, Phil. Mag., 42, 1928, (1951).
- [9 ] H.J. Bunge, Kristall und Technik, 5, 145, (1970).
- [10] H. Honneff and H. Mecking, Textures of Matériaux (eds. G. Gottstein and K. Lucke), 265, Springer Berlin, (1978).
- [11] U.F. Kocks and G.R. Canova, Deformation of Polycrystals (eds. N. Hansen et al.), 35, Riso National Laboratory, Roskilde, Denmark, (1981).
- [12] G.R. Canova, U.F. Kocks et J.J. Jonas, Acta. Met., 32, pp.211-226, (1984).
- [13] R.J. Asaro and A. Needleman, Acta Met., 33, 923, (1985).
- [14] A. Molinari, G. Canova et S. Ahzi à paraître dans Acta-Met.
- [15] J.W. Hutchinson, Proc. R. Soc. Lond. A348, 101-127, (1976)
- [16] J. Pan et J.R. Rice, Int. J. Sol. Str. 19, 11, 973, (1983)
- [17] R. Zeller and P.H. Dederichs, Phys. Stat. Sol.(b), 55, 8310, (1973).
- [18] M. Buisson, A. Molinari and M. Berveiller, submitted to Mech. Mat.

## CHAPITRE 1

### REPRESENTATION DES TEXTURES DE DEFORMATION ET APPROCHES

#### DU COMPORTEMENT PLASTIQUE DES POLYCRISTAUX

### 1) REPRESENTATION DES TEXTURES DE DEFORMATION

#### 1-1) Introduction

Lorsqu'un matériau polycristallin subit une histoire thermo-mécanique, chaque cristallite constituant le polycristal se réoriente de manière non aléatoire. L'ensemble des cristallites peut éventuellement développer une texture, c'est-à-dire un champ d'orientations non aléatoire. Les textures sont en partie à l'origine de l'anisotropie existante ou induite dans le matériau, il est donc important de pouvoir les modéliser. Le présent travail se restreint à la modélisation des textures de déformation qui trouvent leur origine dans la nature cristallographique des modes de déformation plastique qui sont le glissement cristallographique, le maclage, la transformation martensitique... Dans le cas des métaux C.F.C, le glissement cristallographique est le principal mode de déformation plastique à froid observé, les 24 systèmes de glissement sont du type  $\{111\} \langle 110 \rangle$ .

Pour pouvoir comparer les modèles à des résultats connus, nous avons restreint l'étude à quatre tests de laboratoire : traction, compression, laminage et torsion. Nous présentons ici tout d'abord, une brève revue bibliographique des résultats expérimentaux obtenus pour ces tests.

#### 1-2) Traction et compression axisymétriques

##### \* Traction :

Les premiers travaux concernant les textures de déformation se sont portés sur les textures de déformations uniaxiales telles que

l'extrusion, l'étirement, le tréfilage, la traction et la compression. La représentation des textures de déformation est relativement simple du fait de la symétrie axiale de ce type de test. Lorsqu'un test axisymétrique est effectué sur un polycristal, on obtient généralement une texture de fibre où une direction cristallographique  $\langle uvw \rangle$  est alignée avec la direction de traction ou compression. Les orientations cristallines se déduisent alors l'une de l'autre par rotation aléatoire autour de l'axe  $\langle uvw \rangle$ . On a alors une texture de fibre  $\langle uvw \rangle$ . Les résultats de Hibard [2,3] concernant l'étirement du Cu, Ag, Au, Ni, Pb, et Al décrivent la texture par la fibre  $\langle 111 \rangle$ , et pour certains alliages de cuivre, par un mélange des deux fibres  $\langle 111 \rangle$  et  $\langle 100 \rangle$ , dans le même temps, Calnan et al. [4,5] décrivent la texture de la traction pure de l'aluminium comme un mélange des fibres  $\langle 111 \rangle$  et  $\langle 112 \rangle$ .

Bunge [6] a déterminé la texture d'étirement de l'aluminium avec une texture initiale décrite par un mélange des fibres  $\langle 111 \rangle$  et  $\langle 100 \rangle$ . A 84 % de déformation, la texture reste toujours un mélange des deux composantes, mais après 99 % de déformation, la composante  $\langle 100 \rangle$  disparaît. Ceci nous permet de dire que pour l'aluminium, la composante la plus stable est la fibre  $\langle 111 \rangle$ .

English et Chin [7], ont étudié la texture d'étirement d'un certain nombre de métaux C.F.C, et ont représenté (fig.1.1) le pourcentage de la fibre  $\langle 100 \rangle$  en fonction de l'énergie de faute d'empilement.

Il faut noter, comme l'ont mentionné Dillamore et Roberts [8], qu'il est difficile d'obtenir une déformation assez élevée pour une texture prononcée. Mais on peut conclure que pour la plupart des métaux CFC, la texture de traction pure est un mélange des deux composantes  $\langle 111 \rangle$  et

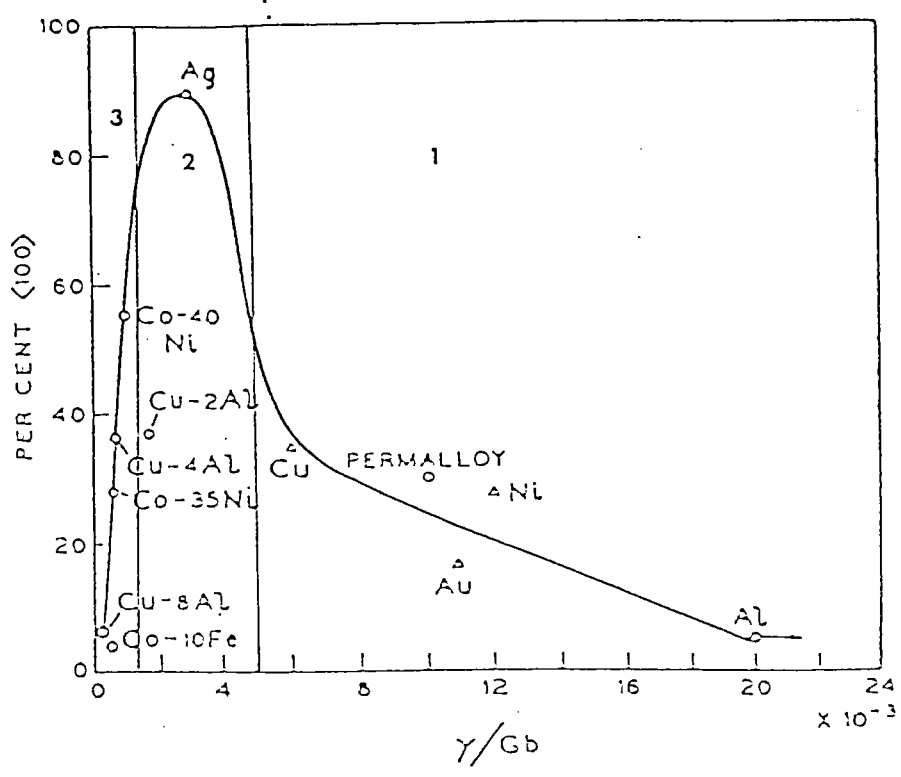


Figure 1.1. : Pourcentage de la fraction volumique de la fibre <100> en fonction de l'énergie de fautes d'empilement pour l'étirement de différents métaux et alliages C.F.C. à température ambiante. [7].

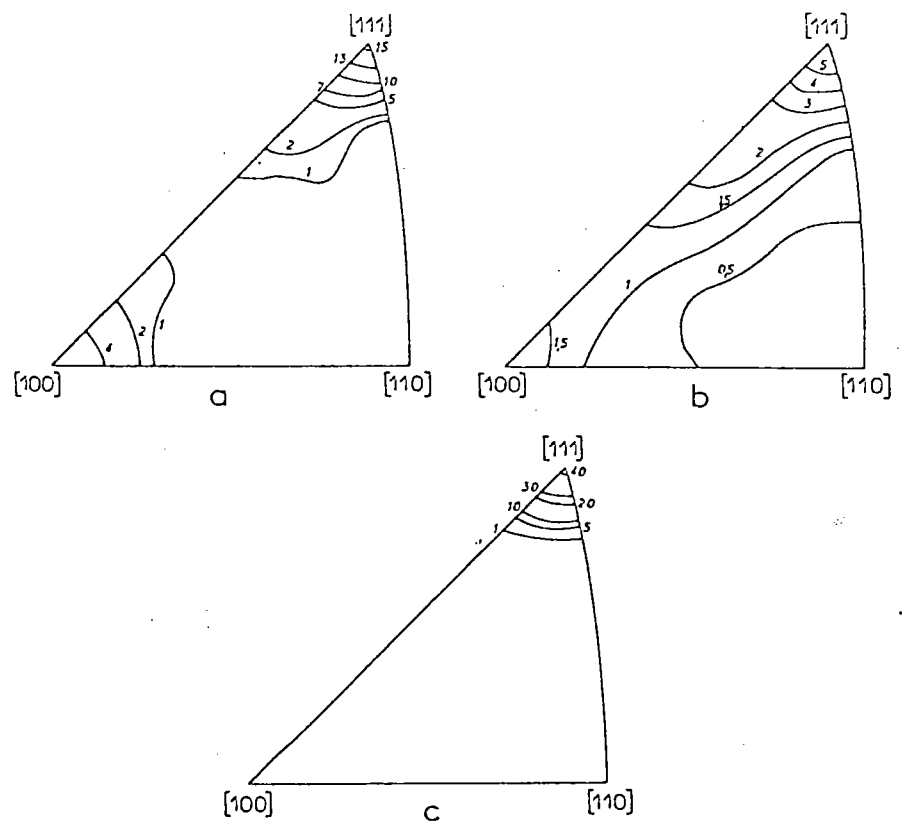


Figure 2.1. : Figures de pôles inverses d'un fil d'aluminium :  
 a) fil recuit de 1 mm de diamètre  
 b) fil après traction à 0,4 mm de diamètre  
 c) fil après traction à 0,1 mm de diamètre (Bunge [6]).

$\langle 100 \rangle$ . Les figures (2-1) montrent quelques résultats expérimentaux de textures de traction.

#### \* compression

Barrett et Levenson [9] ont décrit la texture de compression de l'aluminium par une très forte composante  $\langle 110 \rangle$  et une tendance vers  $\langle 312 \rangle$ , ils ont aussi examiné la texture de compression du Laiton figure(3-1), celle ci est aussi décrite par une très forte composante  $\langle 110 \rangle$  et une faible tendance vers  $\langle 312 \rangle$ .

Les Résultats de H. Naaman et al. [10] concernant la texture de compression du cuivre montrent que l'intensité la plus forte est proche de la composante  $\langle 110 \rangle$  et dans la bande située entre  $\langle 110 \rangle$  et  $\langle 115 \rangle$ .

(figure 3-1)

#### 1-3) Laminage

Du fait de l'intérêt industriel à ce type de déformation on trouve dans la littérature beaucoup de résultats expérimentaux de l'évolution des textures de laminage pour le cuivre, le laiton, l'aluminium... . L'utilisation de la fonction de distribution des orientations cristallines (FDOC) a été développée pour le laminage où la symétrie du processus rend celle-ci simple à déterminer. La représentation des textures de laminage se fait par le système  $\{hkl\} \langle uvw \rangle$  où  $\{hkl\}$  est le plan cristallographique parallèle au plan de laminage et  $\langle uvw \rangle$  est la direction cristallographique parallèle à la direction de laminage.

Deux types de textures de laminage des métaux CFC ont été observés expérimentalement [11] type cuivre et type Laiton. Les figures de pôles

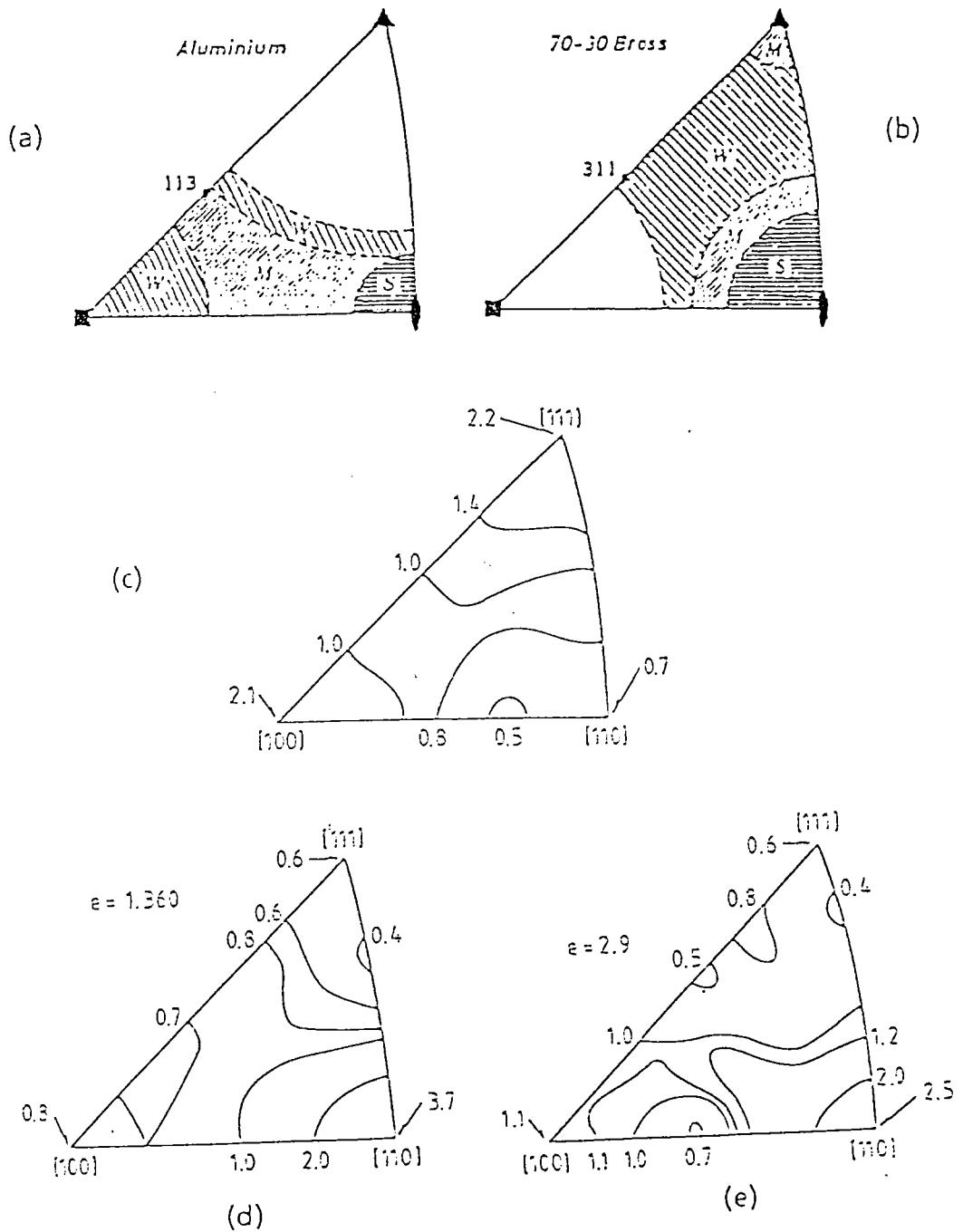


Figure 3.1. : Texture de compression :  
 a) Al et b) Laiton après 97 % de réduction  
 c) avant compression du Cu ; d) après une déformation de 1.36 et e) après une déformation de 2.9 [10].

{111} de la figure (4-1) montrent la différence entre ces deux types de textures.

La texture de cuivre peut être décrite par la superposition de trois composantes : {112} <111> (composante Cu), {123} <634> (composante S) et {110} <112> (composante Laiton) ; la texture du laiton est décrite par deux composantes {110} <112> et la composante Goss {110} <100>. Ces quatre différentes composantes sont décrites par la figure de pôles (111) sur la figure (4-1).

La transition entre ces deux types de texture de laminage a plusieurs origines ; transition par glissement dévié [12-13], par maclage [14] ou par glissement non Octaédral [15]. Une revue bien détaillée sur cette transition a été faite par B. Bacroix [16]. Cette transition de la texture est également traitée par Bouaouine [17] à partir des hétérogénéités de déformation plastique intragranulaires. Pour décrire chacune des composantes de la texture de laminage par son poids, on utilise la fonction de distribution des orientations cristallines (FDOC)  $f(g)$  définie par :

$$dV/V = f(g) dg$$

où  $g$  est une orientation donnée, définie par les angles d'Euler  $\varphi_1$ ,  $\Phi$ ,  $\varphi_2$  ( $g = g(\varphi_1, \Phi, \varphi_2)$ ) par rapport au repère macroscopique lié à l'échantillon, et  $dV/V$  est la fraction volumique des grains qui ont l'orientation  $g$ . La fonction  $f(g)$  est normée. Dans le cas d'une distribution uniforme des orientations,  $f(g)$  est égale à 1 pour chaque orientation  $g$ . la figure (5-1) montre le résultat expérimental de la FDOC pour le cuivre et le laiton laminés à un taux de réduction de 95 % [17].



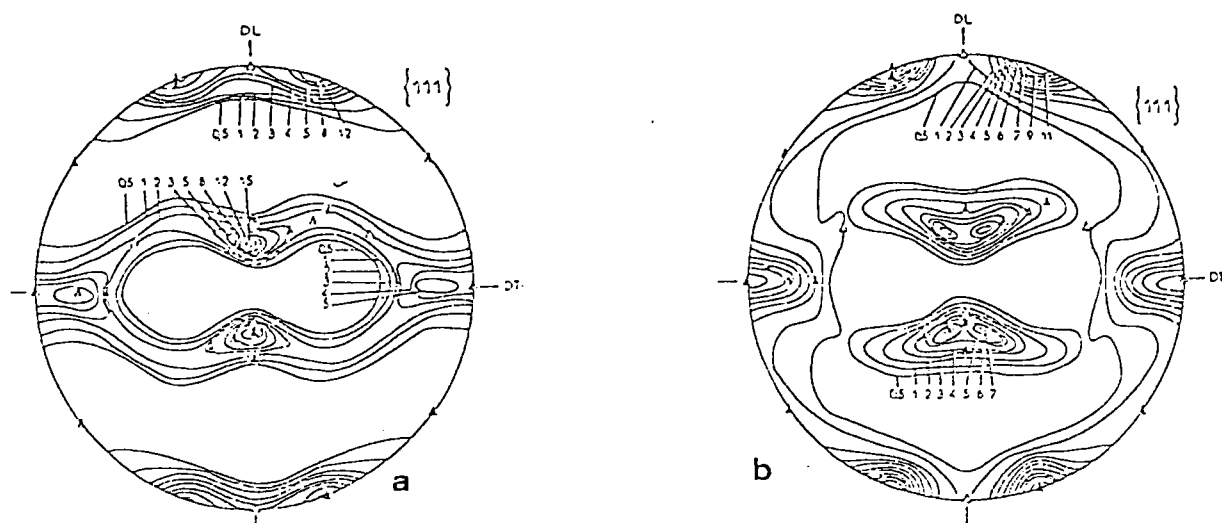


Figure 4.1. : Figure de pôles  $\{111\}$  du cuivre laminé de 96 %.  
 a) à  $25^{\circ}\text{C}$  (Texture du type cuivre)  
 b) à  $-196^{\circ}\text{C}$  (Texture du type laiton). [11].

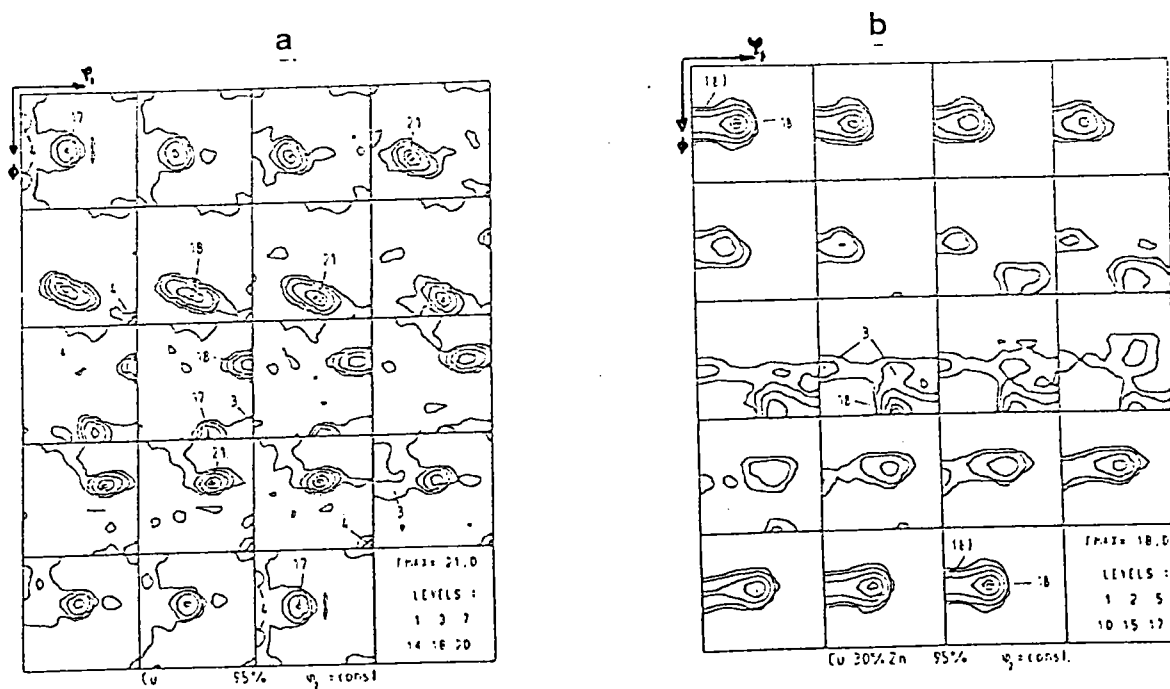


Figure 5.1. : FDO de la texture du laminage de 95 % de réduction  
 a) Cuivre pur, b) laiton (Cu -30 % Zn). [18].

### 3-1) Torsion

La texture de torsion est décrite par les indices  $\{hkl\}\langle uov \rangle$  correspondant respectivement à la normale au plan de cisaillement et à la direction de cisaillement. On trouve dans la littérature [18-21] un certain nombre de résultats concernant la texture de torsion. La figure de pole  $\{111\}$  de la figure (6-1) montre les orientations idéales. Backofen et Hundy [19] ont conclu, d'après une étude quantitative, qu'il n'y a pas une grande différence entre le comportement du laiton et celui du cuivre; les textures dans les deux cas ne sont pas différentes. Van-Houtte et al. [24-25] ont amélioré les essais de torsion à température ambiante pour le cuivre et le laiton et ils ont observé une nette différence entre les deux types de textures, figure (7-1). Cohen et Montheillet [26] ont mesuré les textures pour l'aluminium à très grandes déformations. Ils ont pu observer une forte composante de la fibre  $\langle 111 \rangle$  à un taux de déformation moyen ( $\gamma = 3$ ) qui tend ensuite à disparaître au profit de la composante  $\{100\} \langle 011 \rangle$  à très forte déformation ( $\gamma = 8$ ).

Après avoir décrit les résultats expérimentaux des quatre tests, nous allons maintenant voir les principales approches de la plasticité des polycristaux. Nous comparons aussi les résultats de ces différentes approches aux résultats expérimentaux.

## II) APPROCHES DU COMPORTEMENT PLASTIQUE DES POLYCRISTAUX.

### 1) Généralités

Quand un agrégat polycristallin est soumis à un système de forces à ses frontières, celui ci engendre un champ de contrainte  $\underline{\sigma}$  et de déformation plastique  $\underline{\epsilon}^p$  non uniformes d'un grain à un autre. Le caractère non uniforme de ces champs est lié à la nature hétérogène du

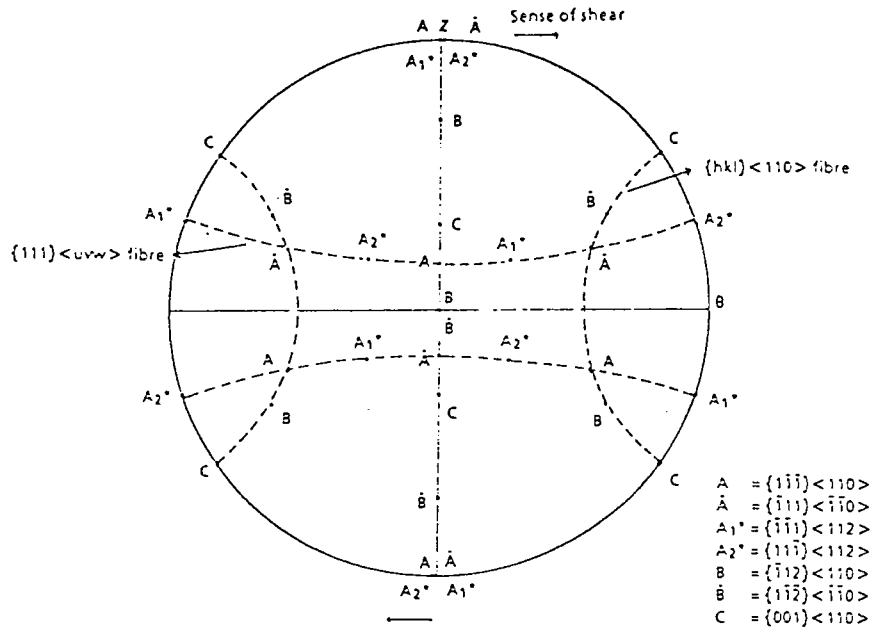


Figure 6.1. : Position des pôles {111} associés aux orientations idéales de la torsion des métaux C.F.C. [16].

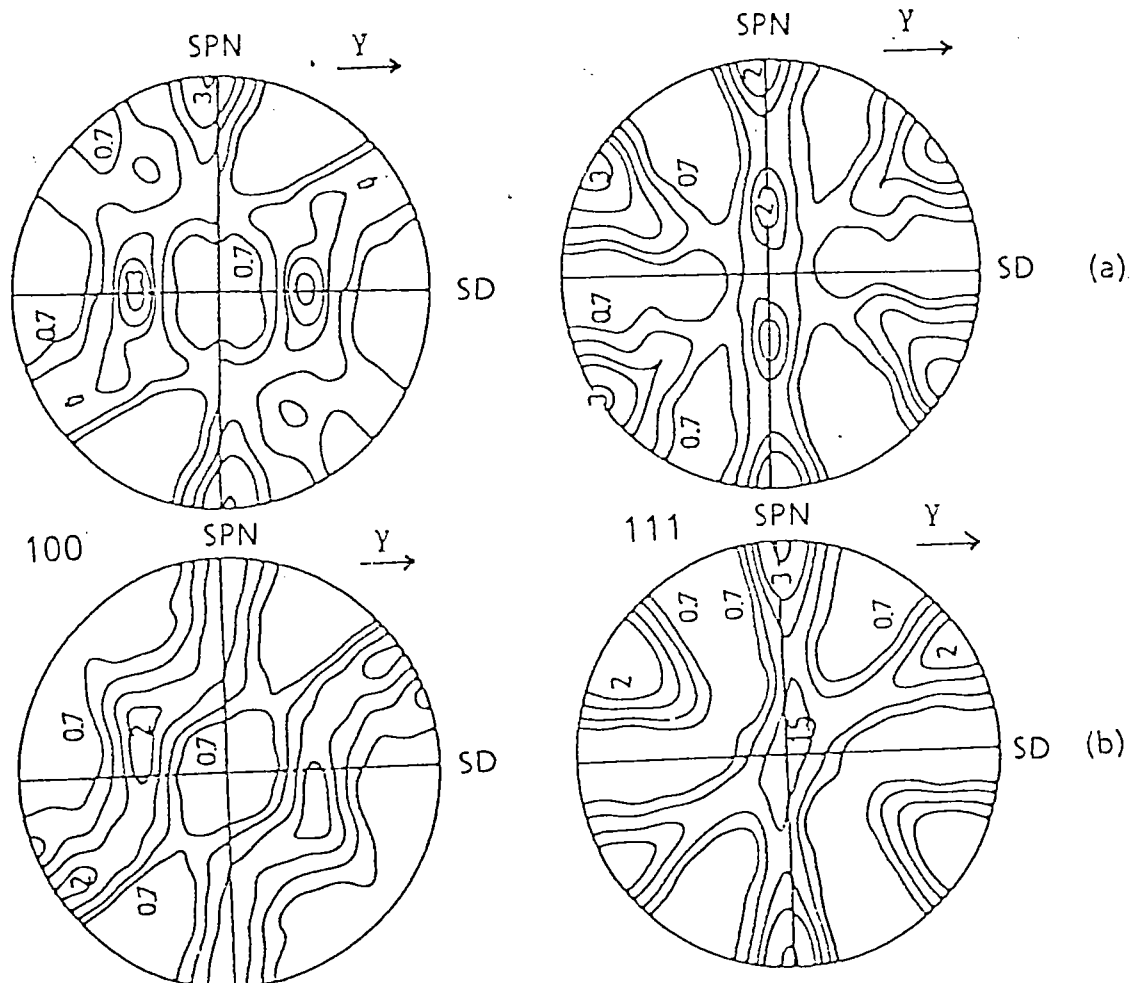


Figure 7.1. : Figures de pôles pour la torsion :  
 a) Texture du type cuivre  
 b) texture du type laiton.

matériau. Pour que le milieu préserve sa continuité, la déformation totale ( $\underline{\epsilon}' = \underline{\epsilon}^* + \underline{\epsilon}^p$ ) doit satisfaire les conditions de compatibilité.

Soit  $\underline{\beta}$  le gradient de déformation total et  $d\vec{u}$  le vecteur incrément de déplacement total

$$d u_i = (\partial u_i / \partial x_j) dx_j = \beta_{i,j} dx_j \quad (1-1)$$

Les conditions de compatibilité s'obtiennent par les relations de Cauchy qui s'écrivent, si on suppose que les transformations sont infiniment petites sous la forme :

$$\epsilon_{i,jk} (\partial \beta_{pk} / \partial x_j) = 0 \quad (2-1)$$

où  $\epsilon_{i,jk}$  est le tenseur permutation de Ricci.

Le champ de contraintes  $\underline{\sigma}$  doit vérifier les équations d'équilibre qui en l'absence de forces de volume s'écrivent :

$$\sigma_{i,j,j} = 0 \quad (3-1)$$

les relations (2-1) et (3-1) sont les équations de base qu'il faut résoudre en faisant appel, en général, à des hypothèses simplificatrices pour aborder le problème du comportement du polycristal et des textures de déformation.

Au niveau microscopique, on admet souvent la loi de Schmid :

soit  $\tau^s$  la cission résolue sur le système de glissement  $s$ ,  $\vec{n}^s$  la normale au plan de glissement et  $\vec{b}^s$  la direction de glissement du système  $s$ . La loi de Schmid s'écrit :

$$\tau^s = m_{ij}^s \sigma_{i,j} \leq \tau_c^s \quad (4-1)$$

où  $m_{ij}^s = b_i^s n_j^s$  et  $\tau_c^s$  la cission résolue critique sur le système de glissement  $s$ .

C'est à dire qu'un système de glissement  $s$  n'est actif que si sa cission résolue  $\tau^s$  atteint la valeur critique  $\tau_c^s$ .

Tous les modèles polycristallins qui essaient de prédire le comportement macroscopique à partir du comportement microscopique prennent plus ou moins en compte les conditions précédentes. Nous allons maintenant faire une brève revue des modèles existants.

## 2) Modèle de Sachs et modèle statique

Sachs [27] suppose que la cission résolue dans le système de glissement principal est la même pour tous les grains et égale à la cission critique  $\tau_0$ , cette hypothèse implique que le tenseur des contraintes dans chaque grain est proportionnel au tenseur des contraintes macroscopiques [28].

Le modèle statique, souvent confondu avec le modèle de Sachs, est en fait un modèle statiquement admissible proposé par Zaoui [28].

L'hypothèse de ce modèle est l'uniformité de l'état de contrainte ; c'est à dire que le champ de contraintes  $\underline{g}$  dans chaque grain est égal au champ  $\underline{\Sigma}$  de contraintes macroscopiques :

$$\sigma_{i,j} = \Sigma_{i,j} \quad (5-1)$$

ceci signifie que les équations d'équilibres sont vérifiées et qu'il n'y a pas de contraintes internes. Par contre les relations de compatibilité sont totalement négligées.

Pour un matériau obéissant à la loi de Schmid, l'application de ce type de modèle implique en général qu'il n'y a qu'un seul système actif par grain. Néanmoins ces modèles prédisent bien la texture de laminage du laiton [29] (figure (8-1)) mais cela ne constitue pas une preuve de validité de ces modèles.

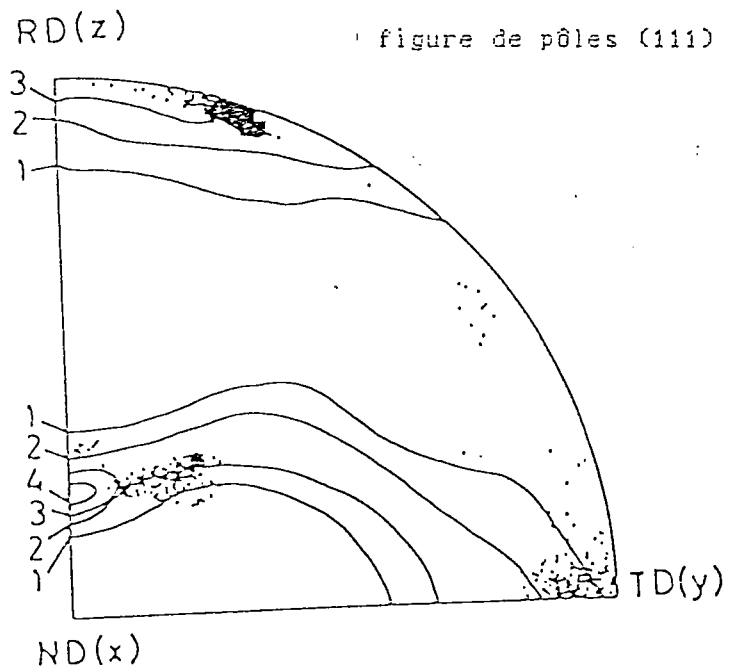


Figure 8.1. : Comparaison de la texture prédite par le modèle de Sachs (points) et la texture expérimentale (lignes pleines).

En effet, le modèle n'explique pas quels paramètres physiques feront évoluer une texture vers celle du laiton (comparativement à celle du cuivre par ex.). Un tel modèle peut donc "masquer" certains phénomènes physiques et donner un résultat correct pour des raisons non expliquées.

### 3) Modèle de Taylor

Proposé par Taylor en 1938 [30], le modèle a été aussi développé par Bishop et Hill [31] et c'est l'un des plus utilisés pour la prédiction des textures en grandes déformations. Il s'agit en fait de l'uniformité de la déformation plastique c'est à dire que la déformation plastique microscopique  $\epsilon^p$  est égale à la déformation plastique macroscopique  $E^p$ :

$$\epsilon_{ij}^p = E_{ij}^p \quad (6-1)$$

de plus, les déformations élastiques sont négligées. L'équation (1-1) s'écrit dans ce cas

$$\text{Rot } \beta = \text{Rot } (\epsilon^p + \omega^p + \omega^*) = 0 \quad (7-1)$$

et puisque  $\epsilon^p = E^p$  on obtient

$$\text{Rot } (\omega^p + \omega^*) = 0 \quad (8-1)$$

où  $\omega^p$  = rotation plastique et  $\omega^*$  la rotation du réseau. Il est supposé de plus que la rotation totale est égale à la rotation macroscopique, ce qui vérifie l'équation (8-1) et donc les équations de compatibilité sont vérifiées.

Pour accommoder les 5 composantes imposées il faut qu'il y ait 5 systèmes indépendants actifs, ces systèmes actifs doivent donc vérifier l'équation suivante :

$$\sum_s (m_{ij}^s + m_{ji}^s) d\gamma^s / 2 = d E_{ij}^p \quad (9-1)$$

où  $d\gamma^s$  = incrément de glissement sur le système s.

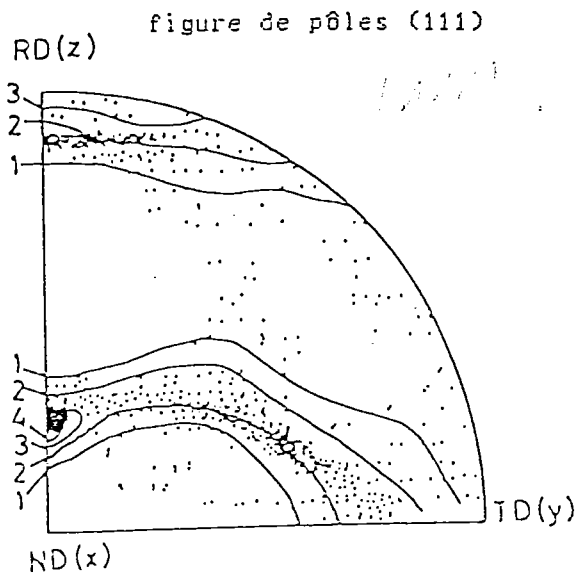


Figure 9a.1. : Comparaison entre la texture prédite (points) par le modèle de Taylor et la texture expérimentale (lignes) du laminage du Cu.

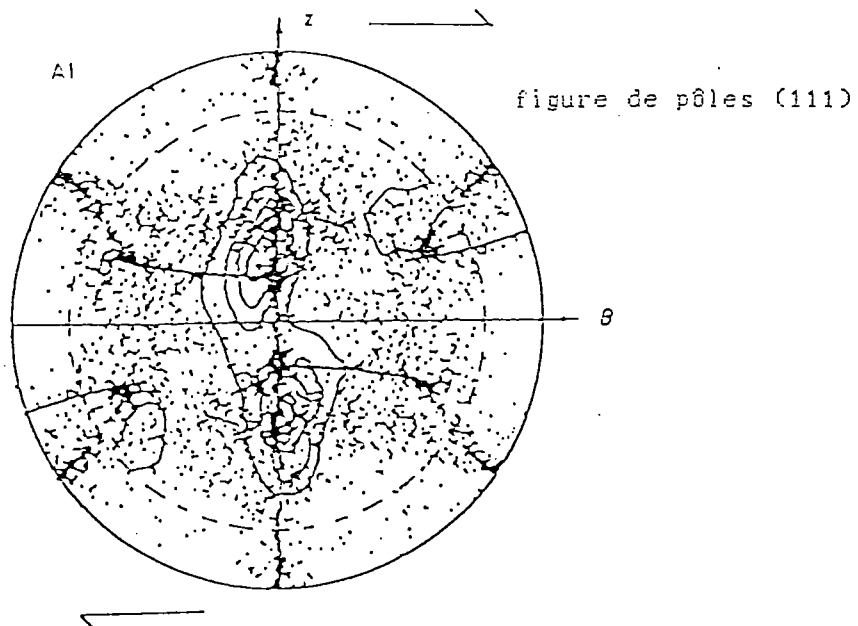


Figure 9b.1. : Comparaison entre la texture prédite (points) en utilisant la théorie de Bishop et Hill et la texture réelle (lignes) de torsion de l'Al.



Dans ce modèle, en revanche, les relations d'équilibre sont totalement négligées et les contraintes internes surestimées.

Il est supposé que les déformations élastiques vont rectifier les conditions d'équilibre. Un certain nombre de résultats de ce modèle sont présentés sur les figures (9-1). Ce modèle présente un problème d'ambiguïté pour le choix des systèmes actifs. Les différentes méthodes utilisées pour ce choix, dans le cadre du modèle de Taylor sont discutées plus loin.

### 5) Modèles du type Taylor

Lin [32] a généralisé le modèle de Taylor en supposant l'uniformité de la déformation totale :

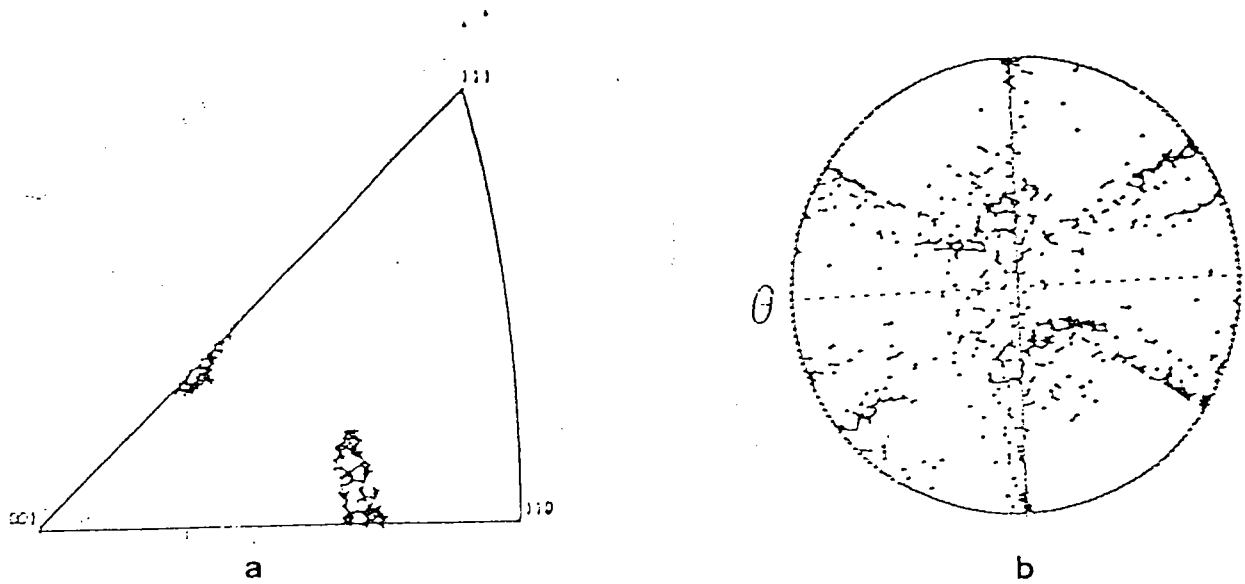
$$e_{ij}^t = e_{ij}^e + e_{ij}^p = E_{ij}^e + E_{ij}^p = E_{ij}^t \quad (10-1)$$

Si l'on suppose l'élasticité isotrope et les déformations plastiques incompressibles on obtient pour les contraintes :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu (E_{ij}^p - e_{ij}^p) \quad (11-1)$$

Malgré le succès qu'a eu la théorie de Taylor-Bishop et Hill, les résultats de textures de déformation dans certains cas montrent l'insuffisance de cette théorie. En effet la figure (9a-1) dans le cas du laminage montre que les pôles prédits par la théorie de Taylor/Bishop Hill sont décalés de la composante cuivre (direction de laminage), la composante prédite est dite composante de Taylor. Dans le cas de la torsion figure (9b-1), la texture prédite coïncide avec la texture expérimentale pour une déformation de cisaillement  $\gamma$  inférieure à 3, au delà, la texture évolue différemment. L'hypothèse de l'uniformité des déformations ou de déformation totalement

imposée (DTI) suppose implicitement que les grains ont une forme pratiquement équiaxe, Honneff et Mecking [33] ont observé, lorsque les grains sont plats, (grains laminés), que certaines composantes de cisaillement peuvent être très différentes de celles imposées à la matrice. Les contraintes internes induites par ces différences de déformation seront négligeables. Honneff et Mecking ont modifié l'approche de Taylor, en imposant des contraintes de réactions nulles correspondants à ces composantes de déformation. Ils ont appliqué cette approche au laminage et ils ont obtenu une meilleure prédiction des textures pour ce mode de déformation. Kocks et Canova [34] ont généralisé cette approche pour d'autres cas tels que la torsion et la compression. Ce dernier type de modèles est dit "théorie D.P.I" (Déformation Partiellement Imposée) ou Taylor relâché. Tiem, Berveiller et Canova [35] ont étayé l'approche DPI en se basant sur la théorie de Kröner. Il ont montré notamment que l'approche DPI était aussi une simulation des fortes interactions, mais où certaines composantes de déformation pouvaient être relâchées à cause de la morphologie des grains. Les figures (10-1) correspondantes à la texture de laminage, de torsion et de compression prédite par l'approche D.P.I [35] montrent que cette théorie ne prédit pas les textures expérimentales dans le cas de la compression. Ceci vient du fait que la théorie de Taylor (DTI ou DPI) ne donne pas la liberté aux grains pour se déformer en déformation plane. Lorsque le polycristal devient texturé, c'est-à-dire que l'axe de compression devient parallèle à la fibre  $\langle 110 \rangle$ , quatre systèmes sont alors activés [59] et les grains se déforment alors en déformation plane.



Honneff and Mecking

$$\epsilon_{xx} = -\epsilon_{zz} ; \epsilon_{xz} = \text{free}$$

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{xy} = \epsilon_{yz} = 0$$

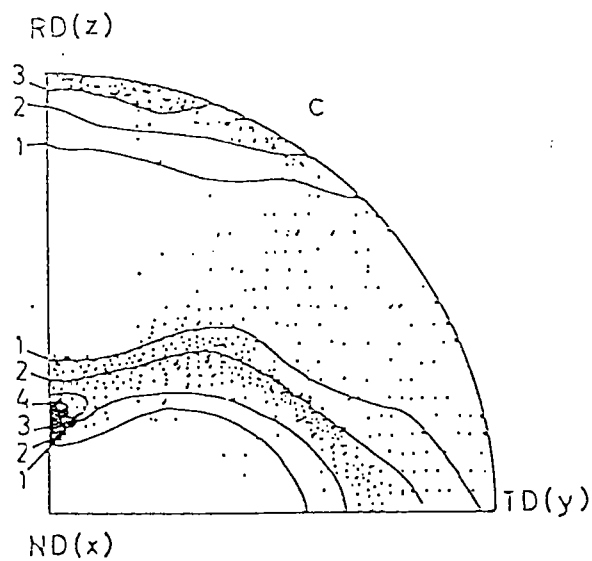


Figure 10.1. : Textures prédites par la théorie DPl.  
 a) figure de pôles inverse pour la compression  
 b) figure de pôles (111) pour la torsion  
 c) figure de pôles (111) pour le laminage.

### Choix des systèmes

Pour le choix des combinaisons de 5 systèmes actifs, Taylor a proposé le critère de travail minimum, c'est à dire la minimisation du travail plastique interne  $dW_i$ ,

$$dW_i = \tau_c^s \cdot d\gamma^s \quad (2-1)$$

L'approche de Bishop et Hill [31] discutée par Chin et Mammel [36], consiste à dire que la combinaison des 5 systèmes choisie doit être dans les conditions critiques. On doit donc se trouver sur la surface de charge du monocristal. L'état de contrainte correspondant à la combinaison choisie doit donc maximiser le travail plastique extérieur  $dW_e$ .

$$dW_e = \sigma : dE^p = \sigma_{i,j} dE^p_{i,j} \quad (13-1)$$

On désigne par  $:$  le double produit contracté.

Ces deux critères de Taylor et de Bishop et Hill, ont été généralisés par Renouard et Winterberger [37]; Chin et Mammel [36] ont montré que les 2 critères (Taylor/Bishop et Hill) sont rigoureusement équivalents.

Une autre approche pour sélectionner les systèmes actifs a été proposée par Canova et al. [38], cette approche est viscoplastique. En effet :

La loi la plus couramment employée en viscoplasticité est la loi puissance :

$$\dot{\gamma}^s = \dot{\gamma}_0 \left( \tau^s / \tau_0^s \right)^n \quad (14-1)$$

où  $\dot{\gamma}^s$  est la vitesse de glissement sur le système de glissement  $s$ ,  $\dot{\gamma}_0$  est une vitesse de référence et  $\tau_0^s$  est la contrainte de référence associée à  $\dot{\gamma}_0$ ,  $n = 1/m$  ( $m$  est la sensibilité à la vitesse). Sur la figure(11.1) représentant cette fonction, on peut remarquer qu'il y a deux zones, sur la première zone  $\dot{\gamma}^s$  est pratiquement nulle et sur la deuxième zone  $\dot{\gamma}^s$  croît très vite, Canova et al [38] approchent alors cette loi par une loi bilinéaire de la forme :

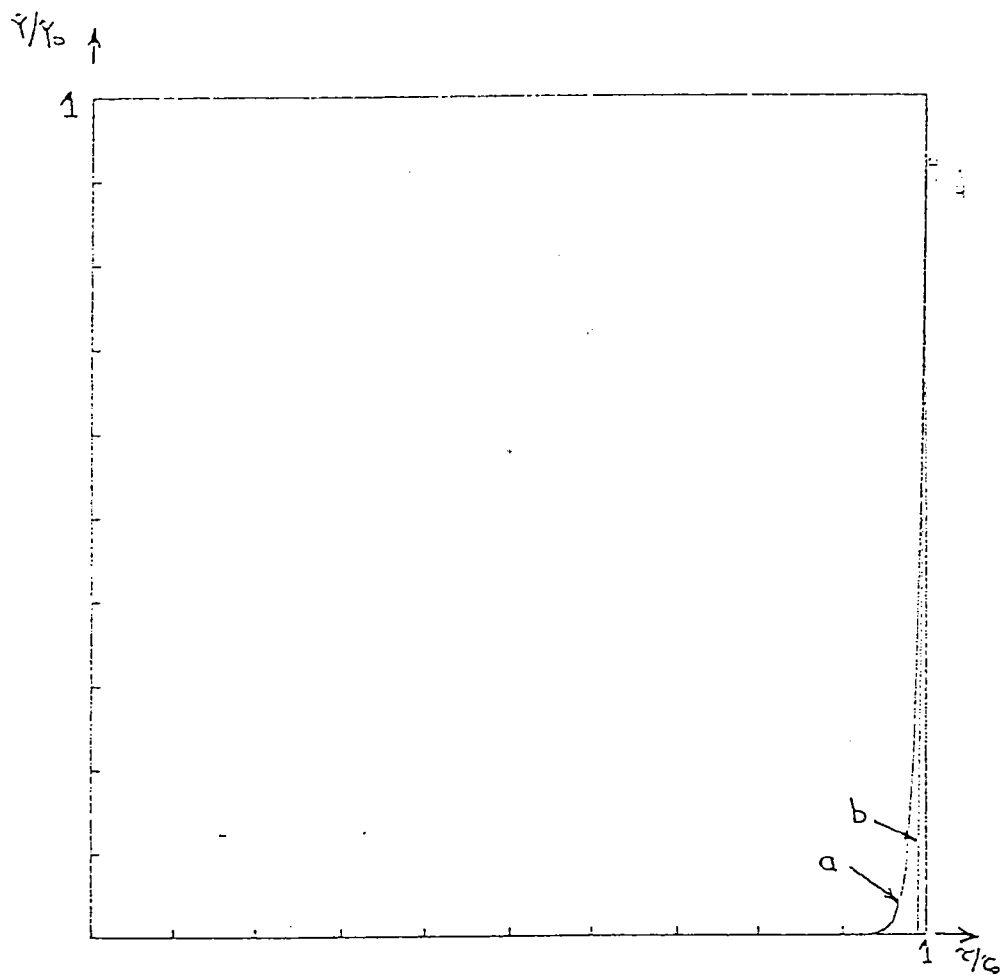


Figure 11.1. : Comparaison entre la loi viscoplastique de type puissance (a) et de type bilinéaire (b). On notera la faible déviation entre les courbes. Cas  $m = 0.01$ .

$$\dot{\gamma} = \begin{cases} p [\tau^s / \tau_c^s - \eta_0] \\ 0 \text{ si } \tau^s < \eta_0 \tau_c^s \end{cases} \quad (15-1)$$

avec  $\eta_0 = 1 - 1/n$  et  $p = n$

où  $p$  représente la pente (en  $s^{-1}$ ) et  $\eta_0$  un terme adimensionnel marquant l'abscisse à l'origine. En déformation à froid,  $n$  a couramment des valeurs de 20 à 100. Lorsque le rapport des contraintes est inférieur au seuil  $\eta_0 \tau_c^s$ , le système est considéré comme inactif.

#### 6) Modèles Autocohérents (ou self-consistants)

Le principe du schéma self consistant, d'une façon simplifiée est le suivant : les interactions entre un grain particulier et tous les autres, sont assimilées à celles entre le grain considéré et un milieu homogène équivalent (M H E).

Ce schéma a été utilisé pour la première fois en plasticité des polycristaux par Hershey [39], Krüner [40] et Budianski [41]. La mise en oeuvre de ce schéma nécessite la résolution du problème d'interaction entre une inclusion et la matrice, puis un traitement statistique sur l'ensemble des grains en faisant appel à des hypothèses simplificatrices.

Eshelby [42] a résolu le problème de l'inclusion ellipsoïdale, plastifiée de façon uniforme dans une matrice élastique infinie non chargée. La déformation totale  $\underline{\epsilon}^T$  de l'inclusion dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale et lorsque l'élasticité est homogène et isotrope, peut se mettre sous la forme

$$\epsilon_{ij}^T = S_{ijkl} \epsilon_{kl}^p \quad (16-1)$$

où  $S$  est le tenseur d'Eshelby et il dépend des caractéristiques élastiques du milieu et de la forme de l'inclusion. Pour une inclusion sphérique on obtient, lorsque  $\epsilon_{kk}^p = 0$  :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^T &= \beta \epsilon_{ij}^p \\ \text{avec } \beta &= \frac{2}{15} \frac{4 - 5\nu}{1 - \nu} \end{aligned} \quad (17-1)$$

d'où, pour les contraintes internes dans l'inclusion :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu(\epsilon_{ij}^p - (\nu/1-2\nu) \epsilon_{ij}^p \delta_{ij}) \\ \text{avec } \epsilon_{ij}^p &= \epsilon_{ij}^T - \epsilon_{ij}^p = - (1-\beta) \epsilon_{ij}^p \end{aligned} \quad (18-1)$$

$$\text{soit : } \sigma_{ij} = - 2\mu (1-\beta) \epsilon_{ij}^p \quad (19-1)$$

$\mu$  est le module de cisaillement et  $\nu$  est le coefficient de Poisson. Ce problème d'inclusion a fait l'objet de beaucoup d'études et parmi les auteurs qui se sont intéressés à ce problème après Eshelby [42] ; Asaro et al. [43], Favre [44], Berveiller [45], Tiem et al. [35], Gilormini [46].....

### 6-1) Modèle de Kröner

En se basant sur les résultats d'Eshelby [42], Kröner [40] considère le cas d'une inclusion ellipsoïdale déformée plastiquement dans une matrice infinie ayant subi la déformation plastique uniforme  $\underline{\epsilon}^p$ . Pour une déformation plastique  $\underline{\epsilon}^p$  homogène dans l'inclusion et lorsque cette dernière est sphérique, Kröner obtient alors les contraintes internes  $\sigma$  dans l'inclusion.

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu (1-\beta) (E'_{ij} - \epsilon'_{ij}) \quad (20-1)$$

où  $\beta$  est donnée par l'équation (17-1) et  $\mu$  le module élastique de cisaillement et  $\Sigma_{ij}$  la contrainte uniforme à l'infini. (20-1) constitue donc la loi d'interaction.

A partir d'un raisonnement dû à Hashin [47] dans le cas élastique, Zaoui [28] montre que dans le modèle de Kröner l'interaction entre matrice et inclusion est purement élastique et conduit à une surestimation des contraintes internes. Les prévisions du modèle de Kröner se rapprochent donc de celles du modèle de Lin-Taylor.

### 6-2) Formulation générale de Hill

Pour prendre en compte l'interaction plastique et non purement élastique, Hill [48] a formulé une théorie plus générale, il obtient la loi d'interaction sous la forme

$$d\sigma_{ij} = d\Sigma_{ij} + L^*_{ijkl} (dE'_{kl} - d\epsilon'_{kl}) \quad (21-1)$$

où  $L^*$ , un tenseur d'ordre quatre, est donné par l'équation intégrale suivante :

$$L^* = \langle L^c (L^c + L)^{-1} (L - L^c) \rangle \quad (22-1)$$

avec  $L^c$  et  $L$  les tenseurs des modules tangents respectivement du grain (cristallite) et de la matrice (agrégat) et  $\langle \rangle$  indique la moyenne volumique sur tous les grains formant le polycristal. Ce modèle nécessite des calculs numériques très lourds [49].

### 6-3) Modèle de Berveiller - Zaoui

Pour tenir compte des interactions plastiques d'une façon plus simple que la formulation généralisée de Hill, Berveiller et Zaoui [50] ont introduit dans la loi d'interaction de Kröner un facteur d'accommodation plastique  $\alpha$  et la loi d'interaction s'écrit quand  $\beta = 0.5$  (ce qui est une bonne approximation pour  $\nu = 1/3$ )



$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + \alpha \mu (E_{ij}^p - \epsilon_{ij}^p) \quad (23-1)$$

Le facteur  $\alpha$  est déterminé à partir de la théorie de la déformation. L'expression simplifiée de  $\alpha$ , donnée par Berveiller [45] est :

$$\alpha = 1/(1+\mu \bar{h}) \quad (24-1)$$

où  $h$  est fixé par l'état de plastification de la matrice à l'infini et dans ce cas,  $\alpha$  peut être déduit d'un essai de traction pour lequel :

$$\begin{aligned} \bar{E}^p &= (2/3)\Sigma\bar{h} \\ \alpha &= \frac{1}{1 + 3\mu \bar{E}^p/2\Sigma} \end{aligned} \quad (25-1)$$

Wierzbanski et al.[51] ont testé ce modèle dans le cas du laminage des métaux CFC pour différentes valeurs de  $\alpha$  et différentes valeurs de l'écroutissage. L'écroutissage a été caractérisé par le paramètre  $A = H2/H1$  où  $H1$  et  $H2$  représentent respectivement les termes diagonaux et non diagonaux de la matrice  $H$  d'écroutissage. Le champ de rotation  $R$  obtenu par ce modèle a été utilisé dans l'équation de continuité, appliquée par Clément [52] à l'évolution des textures, pour en déduire la fonction de distribution des orientations cristallines (FDOC). Cette équation s'écrit :

$$(\partial f / \partial E) = (-1/\sin\Phi) \operatorname{div}(f \cdot \sin \Phi \, dR/dE) \quad (26-1)$$

où  $f$  est la FDOC déterminée par intégration numérique de l'équation (26-1),  $dE$  est l'incrément de déformation appliqué au polycristal.  $dR/dE$  est supposé constant dans un intervalle de validité de déformation. On obtient avec ce modèle deux types de textures. La texture type cuivre et une texture de transition entre cuivre et laiton. Le tableau (1-1) résume ces résultats. Quelques résultats significatifs sont représentés par les figures (12-1)

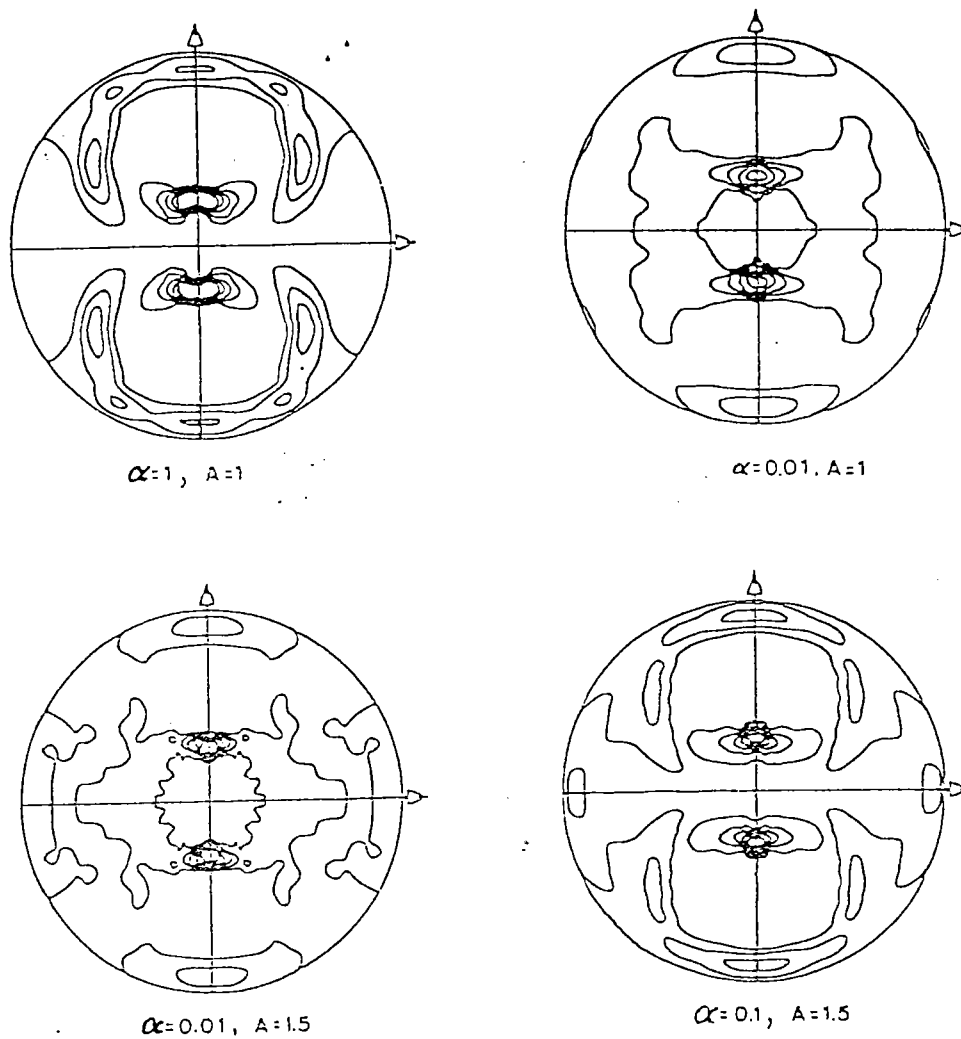


Figure 12.1. : figures de pôles (200) prédites par le modèle de Berveiller et Zaoui pour différentes valeurs de  $A$  et  $\alpha$ . [51-52]

A values	$\alpha$ values				
	0.0001	0.01	0.1	0.5	1
A = 1	0.0001	0.01	0.1	0.5	1
A = 1.5	-	0.01	0.1	-	-
A = 3	0.0001	0.01	0.1	0.5	-

(Type II)                      (Type I)

Tableau 1.1. : Les deux types de la texture prédite par le modèle de Beveiller et Zaoui pour les différentes valeurs de  $\alpha$  et de  $A$ . [52].

### Les limites de ce modèle :

Il faut noter que dans ce modèle, le champ de rotation est supposé constant, les résultats correspondent donc au "rang zero". Le paramètre d'accommodation plastique  $\alpha$  a été pris scalaire ce qui constitue une limite supplémentaire. Le problème d'ambiguïté n'est pas résolu d'une manière catégorique. En ce qui concerne les résultats de la texture on ne peut pas les comparer aux résultats expérimentaux car ces derniers ne sont stables qu'à des taux de déformations plastiques très élevés que l'hypothèse des petites déformations ne nous permet pas d'atteindre.

### 7) Autres modèles

Asaro et Needleman [53] ont proposé un modèle élastoviscoplastique en grandes déformations. ce modèle est du type Taylor car ils supposent l'uniformité du gradient de déplacement:

$$F = \bar{F} \quad (27-1)$$

$F$  et  $\bar{F}$  sont respectivement le gradient de déformation dans l'inclusion et celui appliquée à l'infini. Ce modèle a l'avantage, du fait de la dépendance de la vitesse de déformation, de surmonter le problème d'ambiguïté pour le choix des systèmes actifs. Quelques résultats de ce modèle sont représentés sur la figure (13-1). Iwakuma et Nemat-Nasser Iwakuma [54] ont proposé en 1983 un modèle self-consistent élasto-plastique en grandes déformations, qu'ils ont appliqué au problème plan avec 2 systèmes de glissement. En utilisant les mêmes concepts de base et en considérant cette fois ci le comportement du monocristal viscoplastique, Nemat-Nasser et Obata [55] ont proposé récemment un modèle élastovisco-plastique qu'ils ont également appliqué au problème plan.

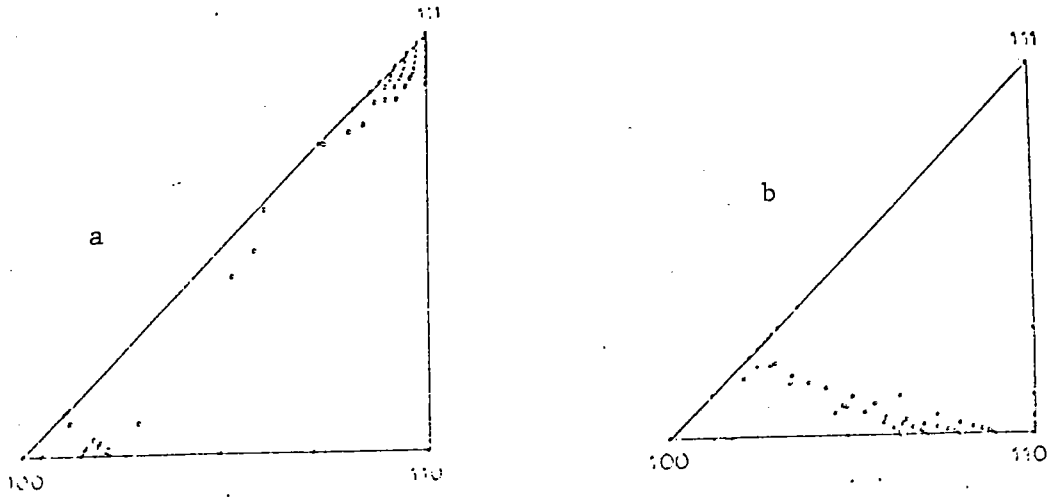


Figure 13.1. : Texture prédite par le modèle d'Asaro et Needleman.  
 a) Traction,  $\epsilon_e = 0.20$   
 b) Compression,  $\epsilon_e = 0.89$ . ( $m = 0.005$ ). [53].

Une approche Auto-cohérente pour les grandes déformations élastoplastiques vient d'être proposée par Lipinski, Berveiller et Carmasol [56]. Cette approche est donc basée sur la loi du monocristal donnée par Nemat-Nasser et al. [54] qui s'écrit :

$$\dot{n}_{i,j} = \mathfrak{F}_{ijkl} v_{k,e} \quad (28-1)$$

où  $\dot{n}$  est la vitesse de la contrainte nominale,  $v_{k,e}$  est le gradient de vitesse de déplacement et  $\mathfrak{F}$  le tenseur des modules instantanés du monocristal. Ce modèle prend en compte les interactions entre les grains, l'élasticité, l'effet de forme et d'écrouissage. Néanmoins, le problème d'ambiguïté pour le choix des systèmes actifs n'est pas résolu. Un autre problème concernant ce modèle, réside dans la perte d'ellipticité du tenseur de Green [54] en grandes déformations. Nous attendons la publication du détail ainsi que les résultats pour pouvoir mieux le juger.

Dans le but de formuler simplement un modèle en grandes déformations qui puisse tenir compte à la fois des effets de forme, de l'interaction entre les grains et de l'anisotropie géométrique et d'écrouissage et qui évite le problème des ambiguïtés, un modèle auto-cohérent en grandes déformations viscoplastiques a été proposé par Molinari, Canova et Ahzi [57]. Il va être présenté dans le prochain chapitre. Cette nouvelle approche est différente de l'approche viscoplastique incrémentale de Hutchinson [58] qu'il a appliqué aux petites déformations.

### REFERENCES

- [11] H. MECKING, in "Preferred Orientation in Deformed Metals and Rocks : An Introduction to Modern Texture Analysis". H.R. WEND editor, Academic Press Inc. (1985), p.267.
- [12] W. R. HIBBARD Jr., J. Inst. Metals, 77 (1950), p. 581.
- [13] W. R. HIBBARD Jr., Trans. AIME, 185 (1949), p. 598.
- [14] E. A. CALNAN, Acta Metall., 2 (1954), p. 865.
- [15] E. A. CALNAN, and B.E. Williams, Trans. AIME, 194 (1952), p. 743.
- [16] H. J. BUNGE, Mber. Dt. Akad. Wiss., 5(1963), p. 293.
- [17] A. T. ENGLISH and G.Y. CHIN, acta Metall., 13 (1965), p. 327.
- [18] I. L. DILLAMORE and W.T. ROBERTS, Metallurgical Reviews, 10 (1965), p.271.
- [19] C. S. BARRETT and L.H. LEVENSON, Trans. AIME, 137 (1940), p. 112.
- [10] H. NAAMAN, R. TALREJA, D. JUUL JENSEN and N. HANSEN, submitted to Textures and Mmicrostructures.
- [111] H. HU and S. R. GOODMAN, Trans. AIME, 227(1963), p.627.
- [12] I. L. DILLAMORE and W.T. ROBERTS, Acta Metall., 12(1964), p.281.
- [13] R. E. SMALLMAN and D.GREEN, Acta Metall., 12(1964), p.145.
- [14] H. AHLBORN, J.GREWEN and G.WASSERMANN, Z. Metallkunde, 55 (1964), p.598.
- [15] F. HAESSENER, Z. Metallkunde, 54 (1963), p.98.
- [16] B. BACROIX, Ph.D. THESIS, Mc Gill University, Canada, (1987).
- [17] H. BOUAQUINE, Thèse d'Etat, Université de Metz (à paraître)
- [18] J. HIRSCH, Ph.D. THESIS, Aachen (1984).

- [191] W. A. BACKOFEN, Trans. Am. Inst. Min. Met. Eng., 188 (1950), p.1954.
- [201] W. A. BACKOFEN and B.B. HUNDY, *ibid.*, 197 (1953), p.61.
- [211] P. J. REGENET and H.P. STUWE Z. Metallkunde, 54 (1963), p.273.
- [221] P. O. WILLIAMS, Trans. Met. Soc. AIME, 224 (1962), p.129.
- [231] J. Gil SEVILLANO, P. van Houtte and E. Aernoudt, Progress in Mat. Science, 25 (1980).
- [241] P. VAN HOUTTE, E. AERNOUDT and K. SEKINE, Proc. ICOTOM 6 p.337.
- [251] P. van HOUTTE, Acta Metall., 26 (1978), p.591.
- [261] M. COHEN , thèse de Docteur-Ingénieur, Ecole des Mines de Paris, (1983).
- [271] G. SACHS, Z.VEREIN DEUT. Ing., vol. 72, p. 734., (1924).
- [281] A. ZAOUÏ, Thèse d'Etat, Paris, (1972).
- [291] K. WIERZBANOWSKI, arch. Hutni., 23, p. 355, (1978).
- [301] G. I. TAYLOR, J. Inst. Metals, vol.62, 1938, p.143.
- [311] J. F. W. BISHOP and R.HILL, Phil. Mag., vol. 42, 1951, p.414.
- [321] T. H. LIN, J.MECH. Phys. Sol., vol.5, 1957, p.143.
- [331] H. HONNEFF and H. MECKING, "Textures of Materials", G.GOTTSTEIN and K. LUCKE eds , 1978, p.265.
- [341] U. F. KOCKS et G. R. CANOVA, Riso National Laboratory, Roskilde, Denmark, 35, (1986).
- [351] S.TIEM, M. BERVEILLER et G.R. CANOVA, Acta.Metall. vol. 34, p. 2139-2149, (1986).
- [361] G.Y. CHIN and W.L. MAMMEL, Trans. TMS-AIME, vol. 245, p. 1211, (1969).
- [371] M. RENOARD et M. WINTENBERGER, C. R. Acad. SC. Paris, B290, p. 403, (1980).
- [381] G. R. CANOVA, C. FRESSENGEAS, A. MOLINARI, U.F. KOCKS, soumis à Acta.Met.

- [39] A. V. HERSHEY, J. Appl. Mech., Vol. 21, p. 241, (1954).
- [40] E. KRONER, Acta. Met., vol.9, p.155, (1961).
- [41] B. BUDIANSKY et T.T. Wu. Proc. 4th compr. Appl, Rech, 1175, (1963).
- [42] J. D. ESHELBY, Proc. Roy. Soc. A241, 376, (1957).
- [43] R. J. ASARO, J. Mechs. Solids., 23, p. 325, (1971).
- [44] G. FAIVRE, J. de Physique, 32, p. 325, (1971).
- [45] M. BERVEILLER, Thèse d'Etat, Paris nord, (1971).
- [46] P.GILORMINI, Thèse d'Etat, grenoble (1986).
- [47] Z. HASHIN, Int. J. Eng. Sci., 7, 11, (1969).
- [48] R. HILL, J.Mech. Phys. Sol., vol. 13, 1965,p.89.
- [49] J.W.HUTCHINSON, Proc.Roy. Soc., A 319,247, 1970
- [50] M. BERVEILLER et A. ZAOUÏ, C.R. 15e colloque GFR, paris  
1980,p.175.
- [51] K.WIERZBANOWSKI, S.AHZI, A.HIHI et M.BERVEILLER, Cryst.Res.  
Technol,Vol.21, pp 395-406,(1986)
- [52] S. AHZI, rapport du DEA, (LPMM), Unversité de METZ. (1984).
- [53] R. J. AZARO and A.NEEDLEMAN, Acta.Met., vol.33 n 6, 1985, p.923.
- [54] T. IWAKUMA et S.NEMAT-NASSER, Proc.Roy.Soc.,A394,1987,p.87.
- [55] S. NEMAT-NASSER et M.OBATA, à paraître dans Proc.Roy.Soc
- [56] P. LIPINSKI, M.BERVEILLER et A. CARMASOL, à paraître.
- [57] A. MOLINARI, G.R.CANOVA et S.AHZI à paraître dans Acta.Metall.
- [58] J.W. HUTCHINSON, Proc. R. Soc. Lond. A348, 101-127, (1976)
- [59] W. HOSFORD, Trans-Met. Soc. AIME, 12, p. 230, (1961).



## Chapitre 2

### APPROCHE AUTO-COHERENTE POUR LES GRANDES DEFORMATIONS VISCOPLASTIQUES

#### 1) Introduction

La simulation des textures de déformation nécessite un modèle en grandes déformations qui puisse prendre en compte à la fois l'anisotropie d'écroutissage et la forme des grains. Ceci est possible dans le cadre des modèles self-consistants. La résolution du problème d'ambiguïtés du choix des systèmes actifs pourra se faire par la considération de la plasticité dépendante du temps (Viscoplasticité). En considérant le cas de chargements linéaires ou quasi-linéaires en grandes déformations, on peut négliger l'élasticité. Ces hypothèses nous permettent de formuler un modèle self-consistant pour les grandes déformations viscoplastiques. Nous proposons donc une nouvelle approche (9) dont la formulation est du même type que le schéma développé par Zeller et Diderichs [1] pour l'élasticité hétérogène, par Berveiller et Zaoui [2] pour les petites déformations plastiques et par Buisson et al. [3] pour la thermoélasticité hétérogène. Cette nouvelle approche est différente de l'approche incrémentale de Nemat-Nasser et Obata [17], ainsi que de celle de Hutchinson [6].

#### 2) La loi constitutive du monocristal

Comme dans certaines modélisations [4-5-6] du comportement du monocristal nous supposons que le glissement est légèrement sensible à la vitesse. On suppose de plus que la vitesse du glissement plastique  $\dot{\gamma}^s$  sur un système de glissement  $s$  est liée à la cission résolue  $\tau^s$  sur ce système par une loi puissance :

$$\tau^s / \tau_0^s = (\dot{\gamma}^s / \dot{\gamma}_0^s)^m \quad (1-2)$$

Le paramètre  $m$  est le coefficient de sensibilité à la vitesse.  $\tau^s$  est lié au tenseur déviateur des contraintes de Cauchy  $S$  par la relation

$$\tau^s = m^s_{,j} S_{,j} = m^s : S \quad (2-2)$$

$$\text{où } m^s_{,j} = b^s n^s_{,j} \quad (3-2)$$

$n^s$  et  $b^s$  sont, respectivement, la normale au plan de glissement, et la direction de glissement sur le système de glissement  $s$ .  $\tau_0^s$  et  $\dot{\gamma}_0^s$  représentent respectivement une contrainte de référence et la vitesse de glissement de référence correspondante.

Le tenseur vitesse de déformation  $D$  est défini par :

$$D_{,ij} = (v_{,ij} + v_{,ji})/2 \quad (4-2)$$

où  $v_{,i}$  sont les composantes de la vitesse de déplacement. On désigne par la virgule la dérivée par rapport aux coordonnées d'un référentiel lié au laboratoire. Le tenseur vitesse de déformation est lié aux vitesses de cisaillement microscopiques par la relation :

$$D_{,ij} = \sum_s r^s_{,ij} \dot{\gamma}^s \quad (5-2)$$

$$\text{avec } r^s_{,ij} = (m^s_{,ij} + m^s_{,ji})/2 \quad (6-2)$$

En utilisant les relations (1-2) et (2-2), on déduit la loi constitutive du monocristal, où l'élasticité est négligée. Cette loi est donnée par la relation non linéaire entre la vitesse de déformation et le déviateur des contraintes de Cauchy :

$$\frac{D_{,ij}}{\dot{\gamma}_0} = r^s_{,ij} \left( \frac{r^s_{,k\ell} S_{k\ell}}{\tau_0^s} \right)^n \quad (7-2)$$

$$\text{où } n = 1/m \quad (8-2)$$

La variation de  $\tau_0^s$  en fonction du temps caractérise l'écroissage microscopique intracristallin et les variations de  $r^s_{,j}$  sont liées au changement des orientations du réseau cristallin.

L'évolution de l'écroissage microscopique est représentée par la relation suivante :

$$\dot{\tau}_0^s = \sum_r H^{sr} \dot{\gamma}^r \quad (9-2)$$

où les termes  $H^{sr}$  représentent les éléments de la matrice d'écroissage.

Le tenseur vitesse de rotation du réseau cristallin  $\underline{\Omega}^*$  est déduit de la différence entre les tenseurs vitesse de rotation totale  $\underline{\Omega}$  et de rotation plastique  $\underline{\Omega}^P$  :

$$\underline{\Omega} = \underline{\Omega}^* + \underline{\Omega}^P \quad (10-2)$$

$\underline{\Omega}$  est la partie antisymétrique du gradient de vitesse de déplacement  $L$

$$\underline{\Omega} = (L - L^T) / 2 \quad (11-2)$$

et  $\underline{\Omega}^P$  est donné par la relation suivante :

$$\underline{\Omega}^P = \sum_s (m^s - m^{sT}) \dot{\gamma}^s / 2 \quad (12-2)$$

Connaissant la vitesse de rotation totale  $\underline{\Omega}$  et les vitesses du cisaillement microscopique  $\dot{\gamma}^s$  on peut donc déterminer la vitesse de rotation du réseau cristallin par (10-2).

La relation non linéaire (7-2) peut s'écrire sous la forme :

$$D_{i,j} = G_{i,j}(S) \quad (13-2)$$

En inversant cette relation, on peut exprimer les contraintes  $S$  en fonction des vitesses de déformation  $D$

$$S_{k,e} = F_{k,e}(D) \quad (14-2)$$

La solution de (14-2) est unique car il existe un potentiel viscoplastique convexe. Le comportement tangent est obtenu par le développement de Taylor au premier ordre de la loi (14-2) autour d'une vitesse de déformation appliquée  $D'$  :

$$\text{avec} \quad S_{k\ell} = A_{k\ell mn}(\mathbf{D}') D_{mn} + S^{\circ}_{k\ell} \quad (15-2)$$

$$A_{k\ell mn}(\mathbf{D}') = \frac{\partial F_{k\ell}}{\partial D_{mn}}(\mathbf{D}') = \left[ \frac{\partial G}{\partial S} \right]_{k\ell mn}^{-1} \quad (16-2)$$

$(\partial G/\partial S)$  est la matrice jacobienne de la fonction  $G(S)$ .

$S^{\circ}_{k\ell}(\mathbf{D}')$  est défini par :

$$S^{\circ}_{k\ell}(\mathbf{D}') = -A_{k\ell mn}(\mathbf{D}') D_{mn} + S_{k\ell} \quad (17-2)$$

Le tenseur  $A$  présente les symétries suivantes :

$$A_{k\ell mn} = A_{\ell kmn} = A_{k\ell nm} = A_{mn\ell k}$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{g}$  est obtenu par l'addition du terme hydrostatique au déviateur  $S$

$$\underline{g} = A(\mathbf{D}) : \mathbf{D} + S^{\circ}(\mathbf{D}) - pI \quad (18-2)$$

où  $p$  est la pression hydrostatique, et  $I$  le tenseur identité du deuxième ordre .

### 3) Loi constitutive du polycristal :

Localement, la loi de comportement du milieu est donnée par l'équation (18-2) où  $A$  et  $S^{\circ}$  sont dépendants de la position  $r$ . Dans chaque grain,  $A$  et  $S^{\circ}$  dépendent de l'écroutissage microscopique et de l'orientation du grain.

La démarche principale et la suivante, on impose au polycristal un gradient de vitesse de déplacement macroscopique homogène  $\bar{L}$

$$\bar{L}_{i,j} = \bar{V}_{i,j} \quad (19-2)$$

qui vérifie la condition d'incompressibilité ( $\bar{L}_{,i} = 0$ ), et une pression macroscopique  $\bar{p}$ , et on cherche à connaître la pression locale  $p$  et le gradient de vitesse de déplacement local  $L$  défini par :

$$L_{i,j} = V_{i,j} \quad (20-2)$$

L'équation d'équilibre doit être vérifiée dans tout le polycristal, cela se traduit en l'absence des forces de volume par :

$$\sigma_{i,j,j} = 0 \quad (21-2)$$

D'après (18-2), l'équation d'équilibre s'écrit :

$$(A_{i,jke} V_{k,e})_{,j} + S^{\circ}_{i,j,j} - p_{,i} = 0 \quad (22-2)$$

Nous représentons la loi constitutive macroscopique par le comportement tangent :

$$\bar{S} = A^{\circ} \bar{D} + S^{\circ\circ} \quad (23-2)$$

$\bar{D}$  est la vitesse de déformation appliquée,  $A^{\circ}$  et  $S^{\circ\circ}$  dépendent de  $\bar{D}$ .

Nous décomposons les tenseurs  $A$  (respectivement  $S^{\circ}$ ) en une somme d'une partie uniforme  $A^{\circ}$  (respectivement  $S^{\circ\circ}$ ) et une partie dépendante de la position spatiale  $r$  :

$$\begin{aligned} A(r) &= A^{\circ} + \tilde{A}(r) \\ S^{\circ}(r) &= S^{\circ\circ} + \tilde{S}^{\circ}(r) \end{aligned} \quad (24-2)$$

En utilisant cette décomposition dans (22-2), on aboutit aux équations de Navier :

$$A^{\circ}_{i,jke} V_{k,e,j} - p_{,i} + f_i = 0 \quad (25-2)$$

où  $f_i$  peut-être considérée comme une force fictive :

$$f_i = (\tilde{A}_{i,jke} V_{k,e})_{,j} + \tilde{S}^{\circ}_{i,j,j} \quad (26-2)$$

on ajoute aux équations (25-2) l'équation d'incompressibilité

$$V_{k,k} = 0 \quad (27-2)$$

Le système (25-2) et (27-2) peut-être résolu par la méthode de la fonction de Green. Les fonctions de Green  $G_{i,j}$  et  $H_k$  sont solutions du système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} \Delta^0_{i,jke} G_{km,ej}(r-r') - H_{m,i}(r-r') + \delta_{i,m} \delta(r-r') = 0 \\ G_{km,k} = 0 \end{cases} \quad (28-2)$$

Nous considérons le milieu infini et qu'à l'infini  $G_{i,j} = 0$  et  $H_k = 0$ .

La fonction  $\delta(r-r')$  est la fonction de Dirac en  $r'$ . Pour  $m$  fixé, le terme  $\delta_{i,m} \delta(r-r')$  représente la  $i$ -ème composante d'une force unité concentrée au point  $r'$  et parallèle à la direction  $m$ .

Pour un espace infini, les fonctions de Green vérifient la propriété suivante :

$$G_{jm}(r,r') = G_{jm}(r-r') \quad (29.2)$$

$$H_k(r,r') = H_k(r-r')$$

Les solutions  $u_n$  et  $p$  du système d'équation (25-2) et (27-2) s'écrivent sous la forme suivante :

$$u_n = \bar{u}_n + G_{ni} * f_i$$

$$p = \bar{p} + H_i * f_i \quad (30-2)$$

où le symbole  $*$  représente le produit de convolution :

$$G_{ni} * f_i = \int G_{ni}(r-r') f_i(r') dr'^3 \quad (31-2)$$

$V$  est une fonction linéaire obtenue par intégration de l'équation

$V_{n,k} = \text{constante}$  dans tout le volume. En utilisant l'expression (26-2) de  $f_i$ , et après différentiation de (30-2) on obtient :

$$V_{n,m} = \bar{V}_{n,m} + \Theta_{ni,m} * ((\tilde{A}_{i,jke} V_{ke})_{,j} + \tilde{S}_{i,j}^{\circ}) \quad (32-2)$$

ou encore , en utilisant l'intégration par partie :

$$V_{n,m} = \bar{V}_{n,m} + \Theta_{ni,mj} * (\tilde{A}_{i,jke} V_{k,e}) + \Theta_{ni,mj} * \tilde{S}_{i,j}^{\circ} \quad (33-2)$$

Si  $A^{\circ}$ ,  $\tilde{A}$  et  $\tilde{S}^{\circ}$  sont connus, les équations (33-2) constituent un système linéaire d'équations intégrales dont les inconnues sont les  $V_{k,e}$ .

En prenant la partie symétrique de l'équation (33-2), on obtient :

$$D_{nm} = \bar{D}_{mn} + \Gamma_{nmij} * (\tilde{A}_{i,jke} D_{ke}) + \Gamma_{nmij} * \tilde{S}_{i,j}^{\circ} \quad (34-2)$$

$$\text{avec } \Gamma_{nmij} = (\Theta_{ni,mj} + \Theta_{mi,nj} + \Theta_{nj,ni} + \Theta_{mj,ni})/4 \quad (35-2)$$

Nous discuterons plus loin comment  $A^{\circ}$ ,  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{S}^{\circ}$  et  $D$  peuvent être calculés par un processus itératif. Pour une vitesse de déformation locale  $D$  donnée,  $S$  est obtenu par inversion numérique de l'équation (7-2) et on peut donc calculer les vitesses de glissements  $\dot{\gamma}^{\circ}$  ainsi que le tenseur vitesse de rotation plastique  $\Omega^p$ .

La vitesse de rotation totale est obtenue en prenant la partie antisymétrique de l'équation (33-2) :

$$\Omega_{nm} = \bar{\Omega}_{nm} + B_{nmij} * (\tilde{A}_{i,jk} D_{ke}) + B_{nmij} * \tilde{S}_{i,j}^{\circ} \quad (36-2)$$

$$\text{avec } B_{nmij} = (\Theta_{ni,mj} - \Theta_{mi,nj} + \Theta_{nj,mi} - \Theta_{mj,ni})/4 \quad (37-2)$$

Connaissant les vitesses de rotations totale  $\Omega$  et plastique  $\Omega^p$ , la vitesse de rotation du réseau peut être déterminée par l'équation (10-2)

#### 4) L'approche Auto-cohérente

Pour la résolution de l'équation intégrale (34.2), nous faisons appel à une approximation qui consiste à prendre la vitesse de déformation  $D$  uniforme dans chaque grain. Nous ne prenons donc pas en compte l'hétérogénéité intracristalline qui, dans certaines circonstances, apparaît dans les grains [7,8]. Nous estimons que les informations sur ces hétérogénéités sont insuffisantes pour l'instant.

L'hypothèse d'uniformité de  $D$  dans chaque grain peut s'écrire sous la forme :

$$D(r) = \sum_g D^g \Delta_g(r) \quad (38-2)$$

où  $\Delta_g$  est la fonction caractéristique du grain  $g$  définie par :

$$\Delta_g(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in V_g \\ 0 & \text{si } r \notin V_g \end{cases} \quad (39-2)$$

$D^g$  est la vitesse de déformation uniforme dans  $V_g$ .

Ces calculs peuvent être faits dans le cas où les domaines adjacents sont définis. Dans notre cas, ces domaines sont les grains.

Comme  $A$  et  $S^o$  dépendent de  $D$ , nous pouvons écrire :

$$A(r) = \sum_g A^g \Delta_g(r) \quad (40-2)$$

$$S^o(r) = \sum_g S^{og} \Delta_g(r)$$

$A^g$  et  $S^{og}$  sont uniformes dans le grain et dépendent de  $D^g$ .

En substituant (38-2) et (40-2) à (34-2), Nous obtenons :



$$D_{mn}(\mathbf{r}) = \bar{D}_{mn} + \sum_{\alpha} (\tilde{A}_{ij'k\ell}^{\alpha} D_{k\ell}^{\alpha} + \tilde{S}_{ij'}^{\alpha}) \int_{V_{\alpha}} \Gamma_{nmij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (41-2)$$

On remarquera d'après l'équation (41-2) que  $D_{nm}$  est non uniforme.

L'approximation de l'uniformité doit être prise en compte. Pour être cohérent avec cette approximation, la vitesse de déformation uniforme  $D^{\alpha}$  peut être prise comme la moyenne volumique de  $D$  dans le grain :

$$D^{\alpha} = \frac{1}{V_{\alpha}} \int_{V_{\alpha}} D(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (42-2)$$

Après calcul de la moyenne de l'équation (41-2), on obtient :

$$D^{\alpha} = \bar{D} + \sum_{\alpha'} \Gamma^{\alpha\alpha'} : (\tilde{A}^{\alpha'} : D^{\alpha'} + \tilde{S}^{\alpha\alpha'})$$

$$D_{nm}^{\alpha} = \bar{D}_{nm} + \sum_{\alpha'} \Gamma_{nmij}^{\alpha\alpha'} (\tilde{A}_{ij'k\ell}^{\alpha'} D_{k\ell}^{\alpha'} + \tilde{S}_{ij'}^{\alpha\alpha'}) \quad (43-2)$$

$$\text{avec : } \Gamma_{nmij}^{\alpha\alpha'} = (1/V_{\alpha}) \int_{V_{\alpha}} \int_{V_{\alpha'}} (\Gamma_{nmij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}') d^3\mathbf{r} \quad (44-2)$$

En supposant que  $\tilde{A}^{\alpha}$  et  $\tilde{S}^{\alpha}$  sont connues, le système d'équations (43-2), pour un polycristal infini, est un système d'équations avec un nombre infini d'inconnues  $D_{mn}^{\alpha}$ .

Il est possible d'approximer les solutions de ce système en considérant l'interaction de chaque grain avec les voisins les plus proches et remplaçant le reste du milieu par le milieu homogène équivalent (MHE) dont le comportement est identique au comportement macroscopique du polycristal. Ce comportement est formulé par les modules tangents  $A^{\alpha}$  dans l'équation (23-2) .

Nous négligeons dans (43-2) la contribution des termes :

$$E = \sum_{g'} \Gamma_{nmij}^{gg'} [\tilde{A}_{ijk}^{g'} D_{ke}^{g'} + \tilde{S}_{ij}^{g'}] \quad (45-2)$$

pour les grains  $g'$  qui sont très loin du grain  $g$ . Du fait que les  $\Gamma_{nmij}^{gg'}$  tendent vers zéro quand la distance entre les grains  $g'$  et  $g$  augmente ; ainsi que les valeurs moyennes de  $\tilde{A}$  et  $\tilde{S}^0$  sont nulles, nous pouvons considérer que l'approximation précédente est raisonnable.

Cette approximation à  $n$  sites où l'on tient compte de l'interaction entre le grain  $g$  et le grain  $g'$  voisins et où le reste des grains du matériau est remplacé par le MHE sera traité dans le chapitre 5.

Nous allons maintenant considérer l'approximation auto-cohérente à 1 site, dans laquelle tous les grains  $g'$  différents de  $g$  sont remplacés par le MHE. Cette approximation prend en compte l'interaction du grain  $g$  considéré et la matrice (MHE). Le comportement tangent du MHE est donné par la relation (23-2) où  $A^0$  et  $S^0$  sont supposés uniformes dans le MHE. Dans ce cas, la vitesse de déformation, supposée uniforme dans le grain, peut être déduite de l'équation (43-2) en prenant  $\tilde{A}^g = 0$  et  $\tilde{S}^{gg'} = 0$  pour  $g'$  différent de  $g$ .

On obtient donc le système simplifié suivant :

$$D_{nm}^g = \bar{D}_{nm} + \Gamma_{nmij}^{gg} (\tilde{A}_{ijk}^{gg} (D^g) D_{ke}^g + \tilde{S}_{ij}^{gg} (D^g)) \quad (46-2)$$

$$\text{où } \Gamma_{nmij}^{gg} = \int_{V_g} \Gamma_{nmij} (r - r') d^3r' \quad (47-2)$$

Avec le même raisonnement et pour l'approximation à 1 site nous obtenons la vitesse de rotation totale et la pression pour chaque grain, les vitesses de rotation s'écrivent :

$$\Omega_{nm}^g = \bar{\Omega}_{nm} + B_{nmij}^{gg} (\tilde{A}_{ijk}^{gg} (D^g) D_{ke}^g + \tilde{S}_{ij}^{gg} (D^g)) \quad (48-2)$$

$$\text{où} \quad B_{nmij}^g = \int_{V_g} B_{nmij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') d^3 r'$$

et la pression hydrostatique dans le grain  $g$  est :

$$p^g = \bar{p} + \Delta_{ij}^g (\bar{A}_{ijk}^g D_{ke} + \bar{S}_{ij}^g) \quad (51-2)$$

$$\text{avec} \quad \Delta_{ij}^g = \frac{1}{V_g} \int_{V_g} \int_{V_g} H_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') d^3 r' d^3 r \quad (52-2)$$

$\Gamma^{gg}$ ,  $B^{gg}$  et  $\Delta^{gg}$  sont indépendants de  $r$ .

La formule (46-2) peut-être utilisée pour calculer la vitesse de déformation  $D^g$  dans le grain  $g$ . Pour assurer la cohérence, la valeur moyenne de  $D^g$  sur tous les grains  $g$  doit être égale à  $\bar{D}$ . Cette condition va nous servir de condition de convergence du processus de calcul [9].

### 5) Loi d'interaction

Nous pouvons maintenant déduire une relation permettant de calculer les contraintes de réactions dans chaque grain dues à la différence entre la vitesse de déformation dans l'inclusion et celle appliquée à l'infini. Cette relation est analogue à la loi d'interaction de Kröner [10,11] pour les interactions élastiques, et à celle de Berveiller-Zaoui [2] pour les petites déformations plastiques.

Compte tenu de la décomposition de  $A$  et  $S^g$  donnée par (24-2) et du comportement tangent de l'inclusion donnée par (15-2), la relation (46-2) peut s'écrire :

$$D^g - \bar{D} = \Gamma^{gg} : [S^g - A^g(D) : D^g - S^{g0}(D)] \quad (53-2)$$

En éliminant  $S^{g0}$  dans (53-2) par l'utilisation de (23-2), on obtient

$$D^g - \bar{D} = \Gamma^{gg} : (S^g - \bar{S}) - \Gamma^{gg} : A_0 : (D^g - \bar{D}) \quad (54-2)$$

$$\text{ou bien} \quad S^g - \bar{S} = (\Gamma^{gg-1} + A_0) : (D^g - \bar{D}) \quad (55-2)$$

Cette dernière relation (55-2) est donc la loi d'interaction.

On remarque que la valeur moyenne de chaque membre est égale à zéro, et que les caractéristiques du grain apparaissent implicitement dans la loi constitutive (7-2) reliant  $S^0$  et  $D^0$ .

Une relation similaire est obtenue pour les vitesses de rotation. Pour cela on utilise les équations (36-2), (22-2) et (55-2) :

$$\Omega^0 - \bar{\Omega} = (B^{00} : \Gamma^{00-1}) : (D - \bar{D}) \quad (56-2)$$

Dans les deux relations (55-2) et (56-2) les effets de forme sont pris en compte. Les fonctions  $\Gamma^{00}$  et  $B^{00}$  dépendent de la forme de l'inclusion par l'intermédiaire du volume d'intégration  $V$ , dans l'équation (44-2).

Avec le même raisonnement la pression hydrostatique est donnée par la relation suivante :

$$p - \bar{p} = (\Delta^{00} : \Gamma^{00-1}) : (D - \bar{D}) \quad (57-2)$$

Dans la relation (55-2), la norme du tenseur d'interaction ( $\Gamma^{00-1} + A^0$ ) est du même ordre que la norme des modules tangents  $A^0$  (Pour les valeurs du  $\Gamma^{00}$ , voir annexe A). Pour un matériau à faible sensibilité à la vitesse de déformation, le module tangent est faible pour des vitesses de déformation supérieures à la vitesse de référence, c'est à dire pour des vitesses de déformations correspondant à un écoulement plastique significatif. L'interaction donnée par la relation (55-2) est faible. Ceci nous permet d'affirmer que les résultats seront différents de ceux donnés par la théorie de Taylor. Des résultats vont être présentés dans les chapitres suivants.

Les théories de Taylor et de Sachs constituent des limites pour la loi d'interaction (55-2). On tend vers Taylor si le tenseur d'interaction a de très fortes composantes, et vers Sachs (ou le modèle statique) si ces composantes sont très faibles.

### Modèle simplifié.

Le problème de l'inclusion a été abordé par plusieurs auteurs depuis plusieurs années dans des buts différents : modélisation du comportement du polycristal, calcul des concentrations des contraintes, amorçage de l'endommagement, etc... Une revue intéressante des travaux concernant ce problème a été faite par Gilormini [12]. Gilormini et al. [13] ont proposé une approche analytique pour le cas d'une inclusion viscoplastique ellipsoïdale isolée dans une matrice newtonnienne infinie. (cas plan).

Brulé et al [14] ont proposé une nouvelle approche basée sur le modèle viscoplastique que l'on vient de présenter mais dans laquelle l'inclusion ellipsoïdale est supposée obéir à une loi viscoplastique, cette loi est une relation non linéaire entre le déviateur des contraintes et la vitesse des déformations  $D$  :

$$S_{i,j} = (2/\mu_0) D_e^{n-1} D_{i,j} \quad (58-2)$$

et  $D_e$  est la vitesse de déformation équivalente en sens de Von-Mises. La matrice est supposée newtonnienne viscoplastique, son comportement est donné par :

$$\bar{S}_{i,j} = 2\mu_0 \bar{D}_{i,j} \quad (59-2)$$

Le comportement du milieu est donné par la relation :

$$S(r) = 2\mu_0 \bar{D}(r) + [(2\mu_0 D_e^{n-1}(r) D(r) - 2\mu_0 \bar{D}(r)] \theta(r)$$

$$\text{où } \theta \text{ est la fonction indicatrice : } \theta(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in U_0 \\ 0 & \text{si } r \notin U_0 \end{cases} \quad (60-2)$$

Les résultats de la concentration des contraintes obtenus par ce modèle sont en bon accord avec les résultats analytiques de Gilormini et al. [13]. Le détail de ce travail sera publié bientôt [14].

Un cas particulier de ce problème consiste à considérer une inclusion sphérique viscoplastique linéaire dans une matrice viscoplastique newtonnienne ; la loi d'interaction s'écrit dans ce cas :

$$D_{i,j} = \bar{D}_{i,j} + \Gamma_{ijk}^{\alpha\beta} (\mu D_{kl}) \quad (61-2)$$

avec  $\mu = \mu^g - \mu_0$

$\mu^g$  et  $\mu_0$  sont les modules tangents respectifs de l'inclusion g et de la matrice.

Dans le cas d'une inclusion sphérique, les termes  $\Gamma_{ijk}^{\alpha\beta}$  sont donnés dans l'annexe A . Nous obtenons alors :

$$D_{ijk}^{\alpha\beta} = \frac{5\mu_0}{3\mu_0 + 2\mu^g} \bar{D}_{i,j} \quad (63-2)$$

Le déviateur des contraintes est lié à la vitesse de déformation par la loi linéaire :

$$S_{ijk}^{\alpha\beta} = \mu^g D_{ijk}^{\alpha\beta} \quad (64-2)$$

$$\bar{S}_{i,j} = \mu^0 \bar{D}_{i,j}$$

$S^g$  et  $\bar{S}$  sont les déviateurs des contraintes respectifs dans l'inclusion g et dans la matrice. En utilisant les relations [63-2] et [64-2], on obtient pour  $S^g$  :

$$S_{ijk}^{\alpha\beta} = \frac{5\mu^g}{3\mu_0 + 2\mu^g} \bar{S}_{i,j} \quad (65-2)$$

On note que les relations (63-2) et (65-2) sont les mêmes que ceux données par Eshelby [15] dans le cas élastique et retrouvées par Berveiller et Zaoui [16] dans le cas élastoplastique.

REFERENCES

- [11] . R. ZELLER and P.H. DEDERICHS, *phys. Stat. Sol. (b)*, 55, 831, (1973).
- [12] . M. BERVEILLER and A. ZAOUÏ, *C.R. 15e Colloque GFR*, 175, Paris, (1980).
- [13] . M. BUISSON, A. MOLINARI and M. BERVEILLER, Submitted to *Mech. Mat.*
- [14] . R. JASARO and A. NEEDLEMAN, *Acta Met.*, 33, 923, (1985).
- [15] . J. PAN and J.R. Rice, *Int. J. Sol. Str.*, 19, 11, 973, (1983).
- [16] . J. W. HUTCHINSON, *Proc. Roy. Soc.*, A348, 101, (1976).
- [17] . C. RAY, Thèse d'Etat, Paris Nord, (1980).
- [18] . M. BERVEILLER et H. BOUAOUÏNE à paraître.
- [19] . A. MOLINARI, G.R. CANOVA et S. AHZI à paraître dans *Acta. Met.*
- [10] . E. KRONER, *Acta Met.*, 9, 155, (1961).
- [111] . S. TIEM, M. Berveiller, G.R. CANOVA, *Acta Met.*, 34, (1986).
- [121] . P. GILORMINI. Thèse d'Etat, Université de Grenoble, (1985).
- [131] . P. GILORMINI et F. MONTHEILLET, *J.Mec. Th. Appl.* 3, 563-576, (1984).
- [141] . A. BRULE , A. MOLINARI et S. AHZI à paraître.
- [151] . J. D. ESHELBY, *Proc. Roy. Soc.*, A 241, p.376, (1957).
- [161] . M. BERVEILLER et A. ZAOUÏ, *Res.Mech. Let.*, 1, 119-124, (1987).
- [171] . S. NEMAT-NASSER et M. OBATA, à paraître dans *Proc. Roy. Soc.*

### CHAPITRE 3

#### EXPLOITATION ET RESULTATS

##### 1) Exploitation

Après le développement de la méthode auto-cohérente viscoplastique on aboutit donc (chap.2) à une équation d'interaction qu'il faut résoudre pour déterminer les contraintes internes, les vitesses de déformation et les vitesses de rotation dans chaque grain. Les vitesses de rotation nous permettent de connaître l'évolution des textures dans le polycristal.

Pour résoudre l'équation d'interaction, on a besoin de connaître les modules tangents du MHE représentés par le tenseur  $A^\circ$ . Nous supposons que les modules tangents sont des fonctions de  $\bar{D}$ . Nous négligeons donc le fait que les modules tangents dépendent de la vitesse de déformation locale. En effet, le comportement tangent de la matrice s'écrit :

$$\bar{S} = A^\circ (\bar{D}) : \bar{D} + S^{\circ\circ} (\bar{D}) \quad (1-3)$$

où  $\bar{D}$  est la vitesse de déformation appliquée, et  $\bar{S}$  le déviateur des contraintes résultant. On considère maintenant le problème d'une inclusion dans le MHE. On suppose que la vitesse de déformation  $\bar{D}$  est appliquée à l'infini. Les vitesses de déformations  $\bar{D}$  dans la matrice sont non uniformes, cependant  $D$  est différent de  $\bar{D}$ . Notre approximation consiste à considérer que  $A^\circ$  et  $S^{\circ\circ}$  sont "gelés" dans le MHE. Le comportement du MHE est donc approché par son comportement tangent (1-3), où  $A^\circ$  et  $S^{\circ\circ}$  ne dépendent que de  $\bar{D}$ .

Cette approximation est valide si la vitesse de déformation  $D$  dans la matrice n'est pas très différente de  $\bar{D}$ . Ceci est équivalent à supposer que l'hétérogénéité du matériau ne doit pas être très forte.



En utilisant une méthode d'approximation successive, il est possible de calculer les modules tangents macroscopiques  $A^0$ . Mais on fait ici une simplification qui nous permet de gagner un temps de calcul appréciable. La matrice est supposée isotrope, les modules tangents de celle-ci sont donnés par l'approximation :

$$A^0_{ijkl} = \frac{\mu}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = \mu I_{ijkl} \quad (3-3)$$

### 1-1) Estimation du module tangent $\mu$

Une première estimation consiste à considérer pour un polycristal à texture isotrope son comportement au fluage (Annexe B), et de prendre en compte le fait que la vitesse de déformation locale  $\mathbf{D}$  dans le MHE est égale à la vitesse de déformation  $\bar{\mathbf{D}}$  appliquée à l'infini.

Nous aboutissons après cela à la formule donnée par (B5)

$$\mu = \frac{2}{3} m S_{eq} / D_{eq} \quad (4-3)$$

Cette estimation fait intervenir le paramètre de sensibilité à la vitesse  $m$ . Le processus itératif est le suivant : On suppose qu'à l'incrément  $n$ ,  $S^g_n$  et  $D^g_n$  sont connues pour chaque grain  $g$ . On utilise alors l'équation d'interaction (55-2) pour obtenir  $S^g_{n+1}$  comme solution de l'équation non linéaire :

$$S^g_{n+1} - \langle S^g_n \rangle = [(\Gamma^{gg})^{-1} + \mu_n I] : [D^g(S^g_{n+1}) - \bar{D}]$$

où

$$\mu_n = \frac{2}{3} m \langle S^g_n \rangle_{eq} / \langle D^g_n \rangle_{eq} \quad (6-3)$$

On désigne par  $\langle \rangle$  la moyenne volumique et on introduit alors les quantités suivantes :

$$\langle D^g_n \rangle_{eq} = \sqrt{(2/3) \langle D^g_{IJn} \rangle \langle D^g_{IJn} \rangle} \quad (7-3)$$

$$\langle S^n \rangle_{e_q} = \langle S^n \rangle : \langle D^n \rangle / \langle D^n \rangle_{e_q}$$

Les résultats des textures de déformation pour la traction, la compression le laminage et la torsion [1] sont en bon accord avec les résultats expérimentaux du cuivre.

Une deuxième façon d'estimer le module tangent  $\mu$  est décrite ci-dessous. Le comportement tangent du MHE s'écrit :

$$\bar{S} = \mu I \bar{D} + S^{oo} \quad (8-3)$$

En projetant cette équation sur la vitesse de déformation  $\bar{D}$  on obtient :

$$\bar{S} : \bar{D} = \mu \bar{D} : \bar{D} + S^{oo} : \bar{D} \quad (9-3)$$

Cette relation (9-3) nous permet de déduire le module tangent  $\mu$  :

$$\mu = (\bar{S} : \bar{D} - S^{oo} : \bar{D}) / (3 \bar{D}_{e_q}^2 / 2) \quad (10-3)$$

avec 
$$\bar{D}_{e_q} = \sqrt{\frac{2}{3} \bar{D}_{J_i} \bar{D}_{i_j}}$$

Cette nouvelle manière d'estimer  $\mu$  est plus cohérente que la première avec le comportement du MEH imposé.

L'obtention du déviateur de contraintes dans chaque grain à l'incrément  $(n + 1)$ ,  $(S^n_{n+1})$  se fait par la résolution de l'équation non linéaire (5-3). Pour cela, on doit connaître le module tangent à l'incrément  $n$ ,  $(\mu_n)$ . Ce dernier est calculé par un processus itératif expliqué dans l'annexe C. La figure (1-3) montre comment le module tangent  $\mu_n$  est calculé. Pour un écrouissage isotrope et pour des grains sphériques, le module tangent  $\mu$  varie de l'incrément zéro à l'incrément  $n$  comme le rapport des contraintes équivalentes correspondantes.

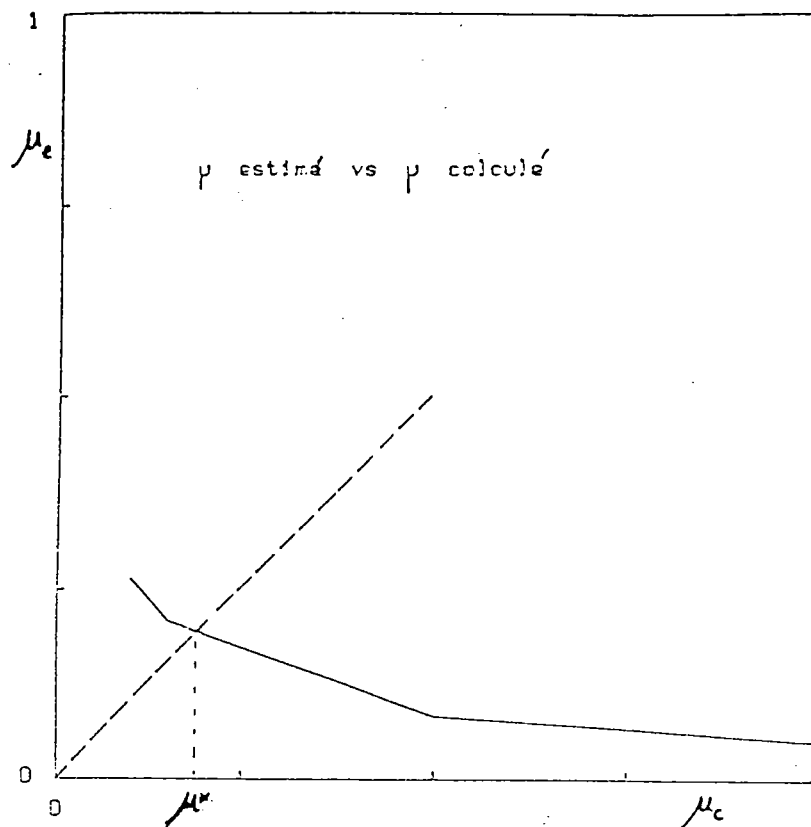


Figure 1.3. : Détermination du module tangent  $\mu^*$   
Traction uniaxiale  $\mu^* = 0.18$

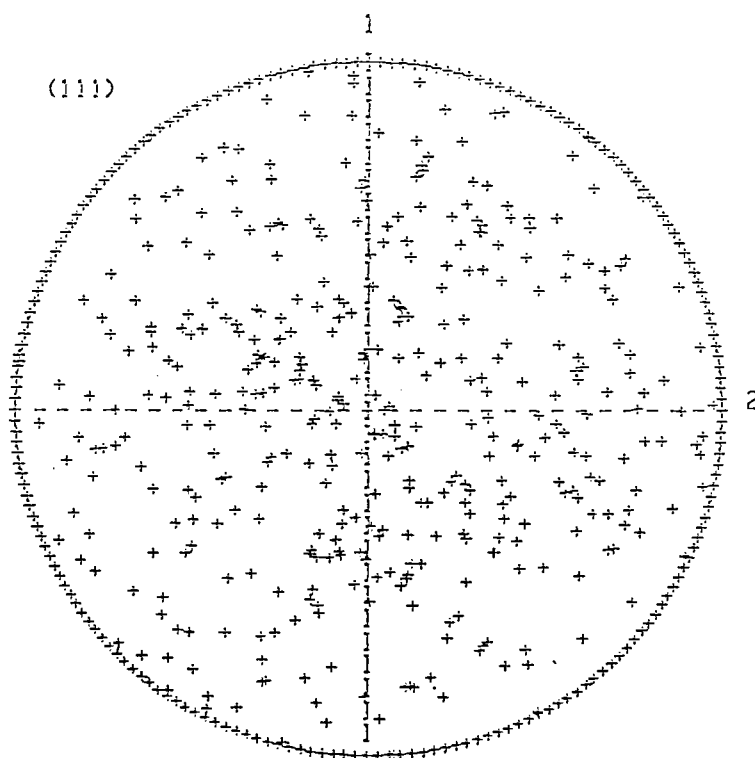


Figure 2.3. Figure de pôles (111) pour 100 grains orientés aléatoirement. (Texture initiale).

Les valeurs  $\Gamma^{ss} = \Gamma^{ss}(\mu_n)$  sont données dans l'annexe A où  $\mu$  est remplacé par  $\mu_n$ .

### Prédiction des textures

Nous allons maintenant appliquer le modèle proposé pour la détermination de l'évolution des textures pour les métaux CFC. L'évolution de la contrainte de référence sur chaque système de glissement est donnée par:

$$\dot{\tau}_0^s / \tau_0^s = \sum_r H^{sr} \dot{\gamma}^s \quad (11-3)$$

où  $\tau_0^s$  est la contrainte de référence initiale, identique à tous les systèmes. La matrice d'écroûissage est supposée dépendre de deux éléments principaux : Les éléments de la diagonale correspondant à l'auto-écrouîssage sh (self hardening) et les éléments non diagonaux représentés par le produit de sh par le rapport d'écrouîssage latent lhr (latent hardening ratio). Le tableau (1-3) montre comment la matrice H est remplie.

Le polycristal est représenté par 100 grains sphériques orientés aléatoirement, c'est à dire que la texture initiale est isotrope (figure (2-3)). Nous prenons  $m = 1/19$  ( $n = 1/m = 19$ ). Cette valeur est plus grande que la valeur réelle du cuivre déformé à froid, ceci dans le but d'accélérer le processus de calcul numérique, en plus, il est improbable que les résultats de textures soient modifiés pour des valeurs de m inférieures à 1/19 [chapitre 6]. Une autre valeur de m correspondant à celle du cuivre en déformation à froid sera prise, et les résultats seront comparés à ceux de  $m = 1/19$  au chapitre 6.

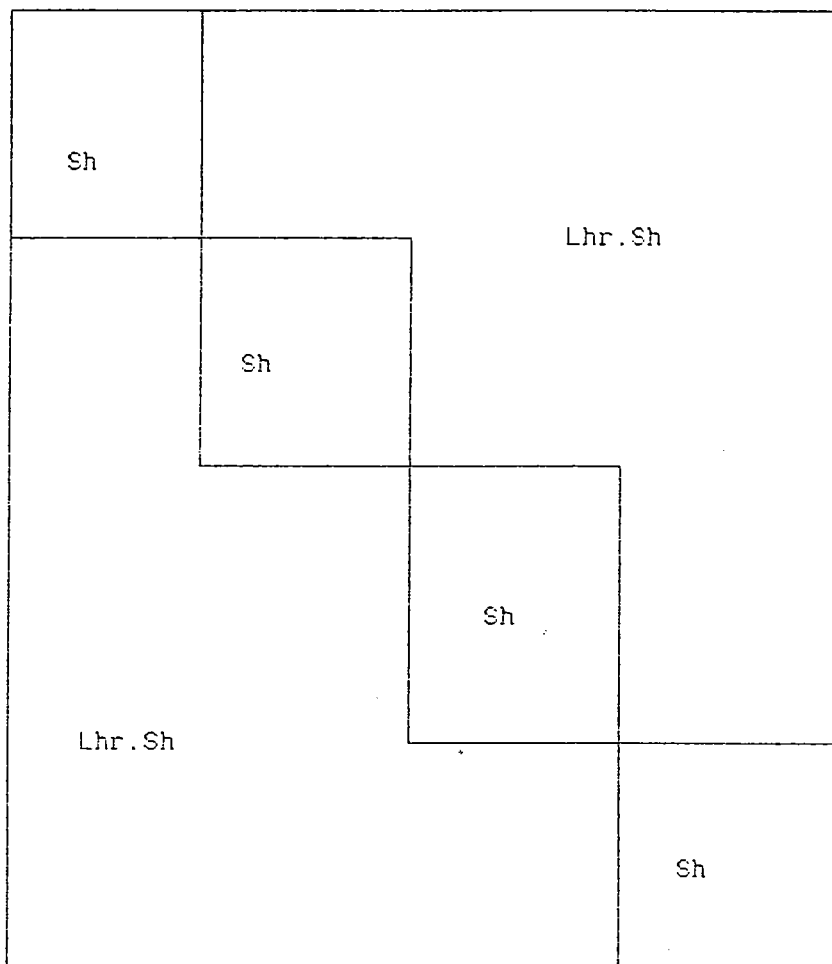


Tableau 1.3. : Matrice d'écrouissage  $H$  ( $12 * 12$ )  
 $Sh$  = coefficient d'auto-écrouissage  
 $Lhr$  = rapport du durcissement latent.

Les modes de déformation que nous avons considéré sont : la traction et la compression uniaxiale, le laminage et la torsion.

Pour chacun de ces tests, le gradient de vitesse macroscopique  $\bar{\mathbf{L}}$  est donné. La forme de  $\bar{\mathbf{L}}$  est décrite ci-dessous pour chacun des quatre tests.

traction suivant l'axe z

compression suivant l'axe z

$$(\bar{\mathbf{L}}) = L_0 \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\bar{\mathbf{L}}) = L_0 \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

laminage dans la direction x

torsion

(12-3)

$$(\bar{\mathbf{L}}) = L_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\bar{\mathbf{L}}) = L_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On note par  $E_{e,q}$ , la déformation équivalente définie par :

$$E_{e,q} = \int_0^1 \bar{\mathbb{D}}_{e,q}(\tau) d\tau \quad (13-3)$$

où  $\bar{\mathbb{D}}_{e,q}$  est la vitesse de déformation, appliquée à l'infini équivalente au sens de Von Mises. Elle est donnée par la relation (10-3).

Nous définissons de la même manière, en tout point, la vitesse de déformation équivalente de Von Mises :

$$\mathbb{D}_{e,q} = \sqrt{(2/3) \mathbb{D}_{i,j} \mathbb{D}_{i,j}} \quad (14-3)$$

Les contraintes équivalentes sont définies par le travail rapporté à la vitesse de déformation équivalente.

$$\bar{\sigma}_{e,q} = \bar{\mathbb{S}}_{e,q} = \frac{\bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{D}}}{\bar{\mathbb{D}}_{e,q}} \quad (15-3)$$

et

$$\sigma_{e,q} = \mathbb{S}_{e,q} = \frac{\mathbf{S} : \mathbf{D}}{\mathbb{D}_{e,q}}$$

Les résultats que nous allons présenter sont pour des grains sphériques. Dans le chapitre 4 nous allons prendre en compte l'effet de forme des grains. Les calculs sont faits pour une déformation équivalente  $E_{e_0}$  égale à 100 %.

Les calculs numériques nécessitent une vectorisation des contraintes et des déformations. Pour cela, nous avons utilisé la vectorisation proposée par Lequeu et al. [2]

$$D = ((D_{22}-D_{11})/\sqrt{2}; \sqrt{(3/2)} D_{33}; \sqrt{2} D_{23}; \sqrt{2} D_{13}; \sqrt{2} D_{12})$$

$$S = ((S_{21}-S_{11})\sqrt{2}; \sqrt{(3/2)} S_{33}; \sqrt{2} S_{23}; \sqrt{2} S_{13}; \sqrt{2} S_{12})$$

Les tenseurs  $A^g$ ,  $\Gamma^{gg}$  et  $B^{gg}$  sont transformés en matrices (5\*5) au lieu de (9\*9). Cette transformation est donnée dans l'annexe B. La résolution de l'équation non linéaire (6-3) est faite par la méthode de Newton-Raphson. Cette équation nous permet d'obtenir le déviateur des contraintes à l'incrément  $n+1$  ( $s_{n+1}^g$ ) pour chaque grain  $g$  avec une erreur de  $10^{-5}$ . La vitesse de déformation correspondante  $D_{n+1}^g$  est calculée par la relation constitutive (7-2). L'algorithme est initialisé avec  $D_0^g = \bar{D}$ , et  $S_0^g$  la contrainte correspondante. La condition de convergence pour les exemples qu'on va voir est la suivante :

$$\max_i \frac{| \langle D_n^g \rangle_i - \bar{D}_i |}{\bar{D}_{e_0}} < 1.10^{-2}$$

En ce qui concerne les rotations du réseau cristallin, elles sont actualisées après chaque incrément par la formule de Rodrigues [3], utilisée par Asaro et Needleman [4]. Cette méthode est expliquée dans l'annexe C. Dans cette annexe C, nous donnons également l'organigramme des calculs numériques.

Pour pouvoir comprendre qualitativement où se situe le modèle, nous présentons (figures 3-3) les statistiques des déviations en norme et en angle des contraintes et des vitesses de déformations correspondantes par rapport à leurs valeurs moyennes. Il est clair que ce modèle qui simule des basses interactions est plus proche des conditions statiques ainsi qu'on le voit sur ces figures.

Sur les figures (4-3 ; 5-3) nous présentons les figures inverses de pôles pour la traction et la compression, ainsi que les courbes contrainte/déformation. Les résultats sont comparés aux résultats du modèle de Taylor viscoplastique. On n'aperçoit pas de différence marquée en traction uniaxiale sur les résultats de textures. Les différences se trouvent notamment dans les courbes d'écrouissage. Le modèle self-consistant prédit des contraintes plus faibles que Taylor en raison des plus faibles contraintes internes simulées. Une différence marquée apparaît pour les textures de compression. Avec le schéma autocohérent viscoplastique on prédit bien la fibre  $\langle 110 \rangle$  pour la compression alors que la théorie DTI ne prédit pas cette fibre. Le motif de cette divergence est l'effet Hosford (ou grain Curling) qui sera expliqué plus loin.

Sur les figures (6-3 ; 7-3), les figures de pôles  $\{111\}$  pour le laminage et la torsion ainsi que le comportement macroscopique ( $S_{e,q} - E_{e,q}$ ) sont comparés au cas de Taylor viscoplastique. Un résultat notable est que le modèle self-consistant prédit des textures de type cuivre en laminage. Etant assez proche du modèle statique, on aurait pu s'attendre à une texture laiton. Il est aussi remarquable que la composante Taylor (T) disparaît. Les résultats de torsion sont similaires à ceux de Taylor, et correspondent assez bien à la réalité.



Pour pouvoir comparer le nombre de systèmes actifs pour les deux modèles : self consistant et Taylor viscoplastiques, nous avons représentés pour les deux modèles, la variation du nombre des systèmes actifs en fonction de la déformation équivalente (figure 8-3). Nous avons aussi représenté pour la traction et la compression (figure 9-3 ; 10-3) les statistiques sur les déviations de  $D$  et  $S$  par rapport à  $\bar{D}$  et  $\bar{S}$  à 100% de déformation, c'est à dire lorsque le polycristal devient texturé. Cela nous permet de voir comment les grains du polycristal se comportent dans ce cas lorsque ce dernier est texturé. Il est tout d'abord notable que le nombre de systèmes actifs moyen est très inférieur à celui prédit par Taylor, ceci est à associer aux faibles contraintes internes. On peut aussi voir que la déviation angulaire sur  $D$  (par rapport à  $\bar{D}$  pour un matériau ayant une texture de traction est faible (par rapport à  $\bar{D}$ ) ce qui veut dire que les grains ont une déformation axisymétrique. Lorsqu'on analyse la répartition de la norme de  $D$ , on voit une répartition bimodale, certains grains (du type  $\langle 111 \rangle$ ) se déforment moins vite que d'autres (type  $\langle 001 \rangle$ ). Dans le cas de la compression, il apparaît, en analysant les déviations sur  $D$ , un très fort pic au voisinage de 0.86 correspondant à une déformation plane. Cet effet appelé l'effet Hosford est lié à la texture  $\langle 110 \rangle$  ainsi que l'a expliqué Hosford [5]. Lorsqu'un modèle comme celui de Taylor contraint les grains à un mode de déformation uniaxial, la texture  $\langle 110 \rangle$  n'est pas prédite car elle est intimement associée à cet effet Hosford. Le "grain curling" est dû au fait que la déformation plane des grains voisins s'effectuant dans différents repères propres, celle-ci s'accompagne de cisaillements pour préserver la continuité de la matière.

Pour prendre en compte un écrouissage non isotrope ( $lhr \neq 1$ ), et voir son influence sur les textures et sur le comportement macroscopique, nous avons pris la valeur de 1.4 pour le coefficient de durcissement latent ( $lhr$ ). Pour voir l'influence de l'auto-écrouissage ( $sh$ ) nous avons choisi la valeur de 0.5 au lieu de 0.1. Les résultats de ces textures (figures (11-3 ; 12-3)) montrent que l'influence du  $lhr$  est faible. Ceci est aussi vrai pour  $Lhr = 3$ . (figure (13-3)). En ce qui concerne les comportements macroscopiques (figure (14.3)), le niveau des contraintes augmente légèrement avec l'augmentation de  $lhr$ . Cet effet est amplifié par l'augmentation de  $sh$ .

### 3) Conclusions

Nous avons testé le modèle proposé dans le cas des métaux CFC, en traction et compression uniaxiale, laminage et torsion. Les résultats de textures obtenus pour les quatre tests mécaniques cités ci-dessus sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. Dans le cas du laminage, la texture obtenue est du type cuivre.

En comparaison avec le modèle de Taylor viscoplastique, on note que pour la traction, la fraction volumique de la fibre  $\langle 100 \rangle$  est supérieure à celle prédite par ce modèle. Pour la compression, on prédit mieux la texture de ce test mécanique (fibre  $\langle 110 \rangle$ ) que le modèle de Taylor. En ce qui concerne le laminage, la composante Taylor n'apparaît pas dans le cas du modèle proposé. Pour la torsion, la texture prédite est en bon accord avec la texture expérimentale dans les deux cas.

On remarque sur les figures représentant les courbes contrainte-déformation que le modèle de Taylor surestime les contraintes internes.

On prédit pour la compression l'effet "Curling" expliqué par Hosford [5]. Ce phénomène est en contradiction avec l'hypothèse stricte de Taylor et ne peut donc être prédit par cette dernière théorie.

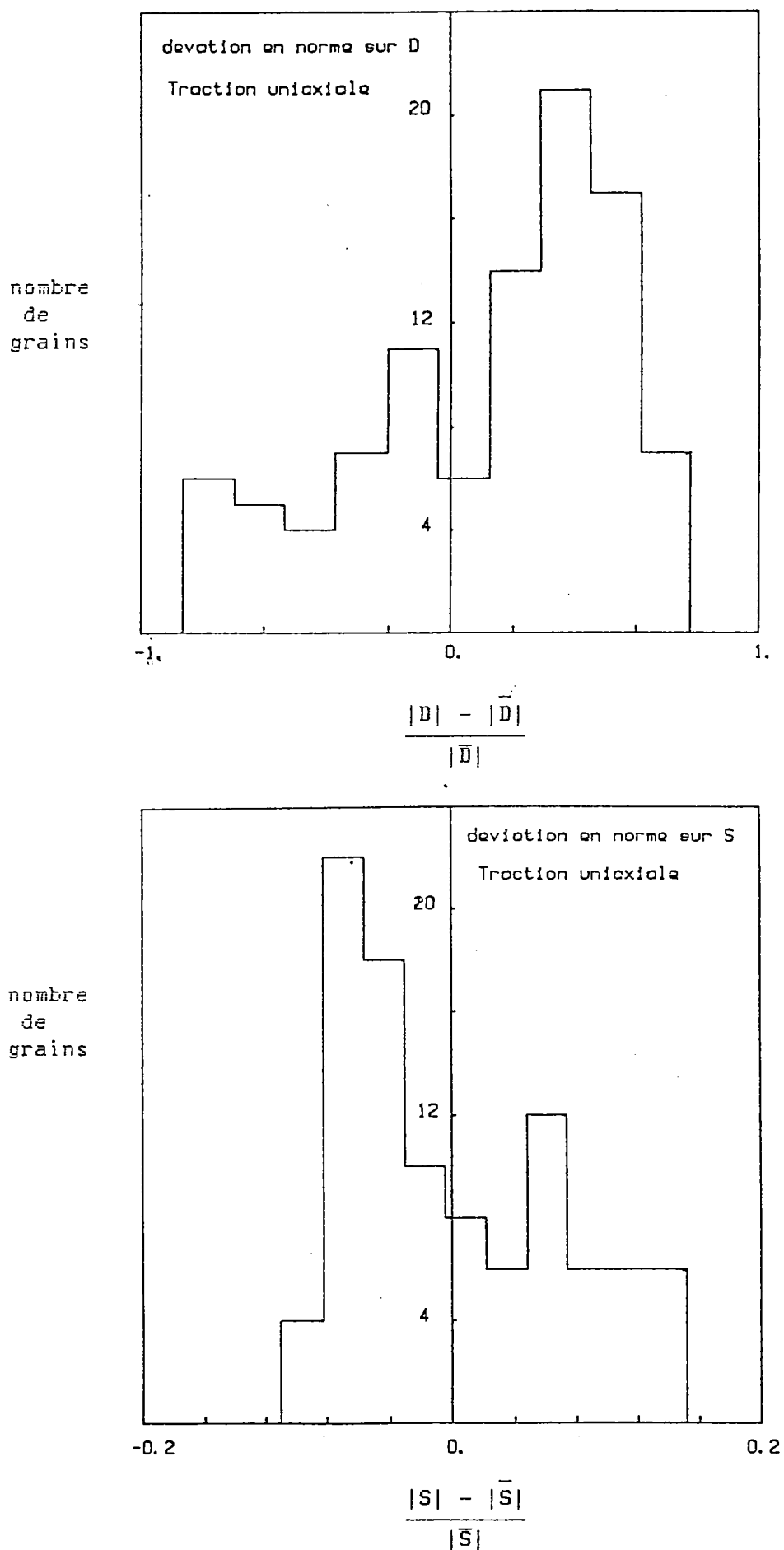


Figure 3.3.a. : Déviation en norme sur S et sur D pour la traction uniaxiale. (premier incrément de déformation)

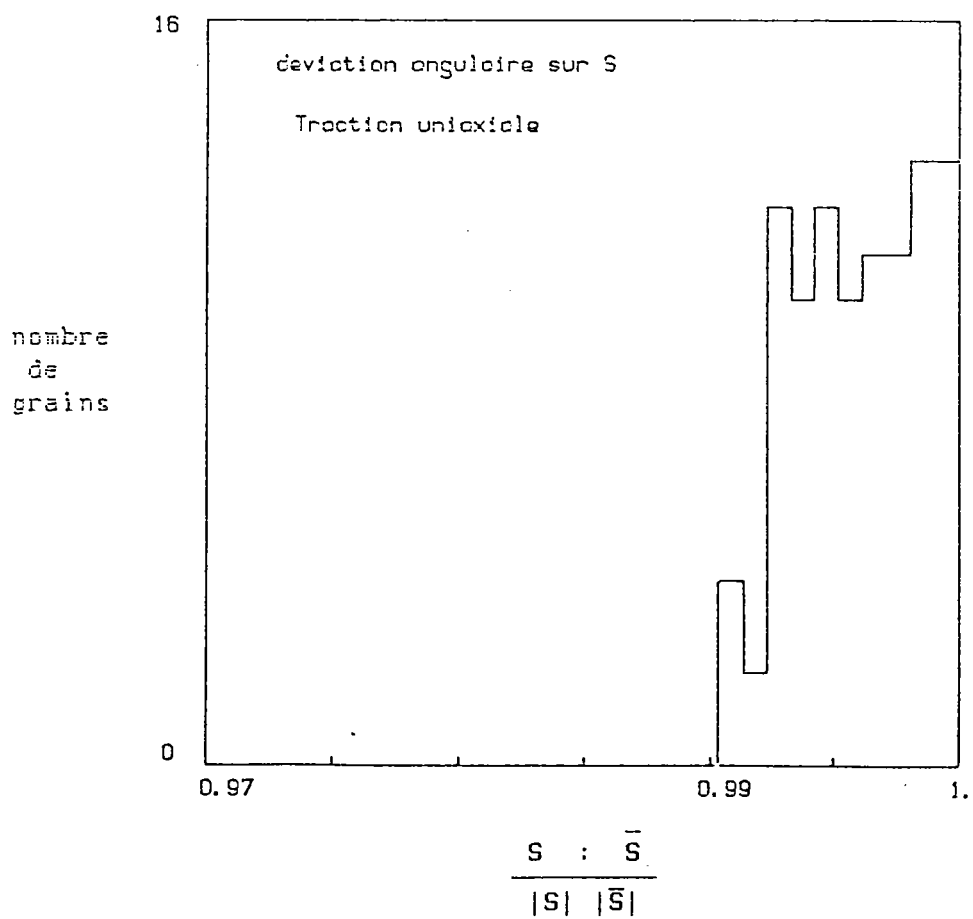
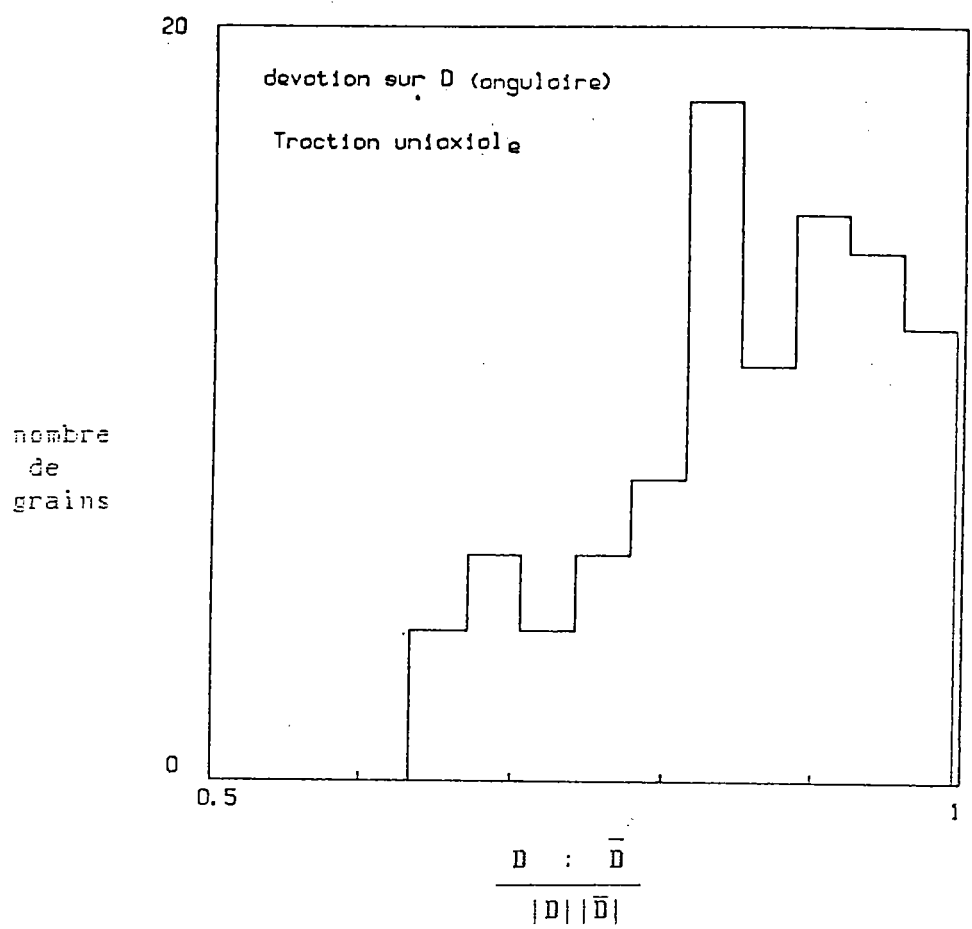


Figure 3.3.b. : Déviation angulaire de D et de S pour la traction uniaxiale. (premier incrément de déformation)

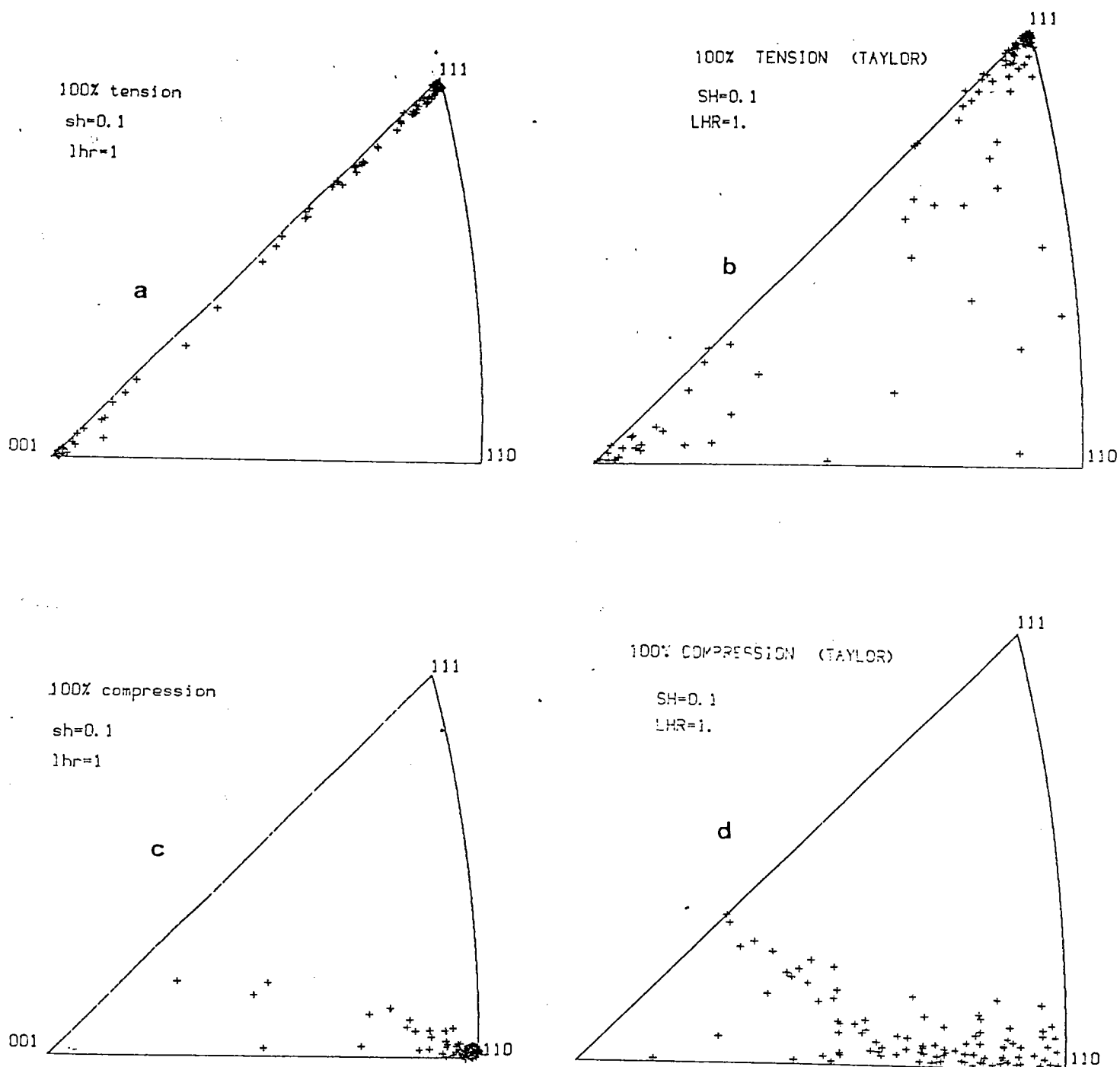


Figure 4.3. : Figures de pôles inverses pour la texture de traction et de compression uniaxiales ( $\epsilon_e = 1$ ). Comparaison des résultats du modèle Auto-cohérent viscoplastique avec ceux de Taylor viscoplastique. ( $Sh = 0.1$  ;  $Lhr = 1$ ).

a) Traction uniaxiale par le modèle Auto-cohérent  
 b) Traction uniaxiale par le modèle de Taylor  
 c) Compression uniaxiale par le modèle Auto-cohérent  
 d) Compression uniaxiale par le modèle de Taylor.

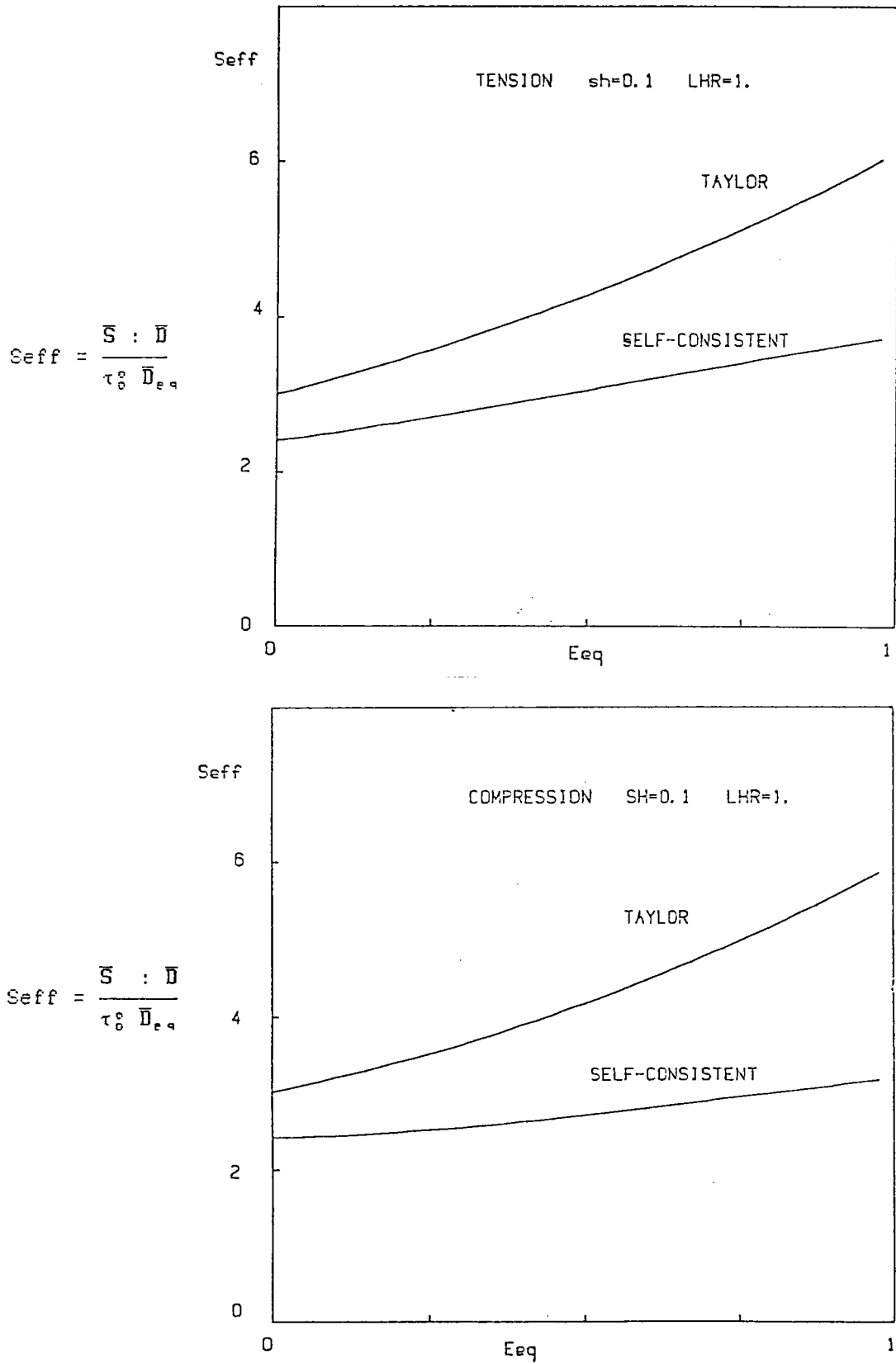


Figure 5.3. : Courbes contrainte-déformation pour la traction et la compression uniaxiales.

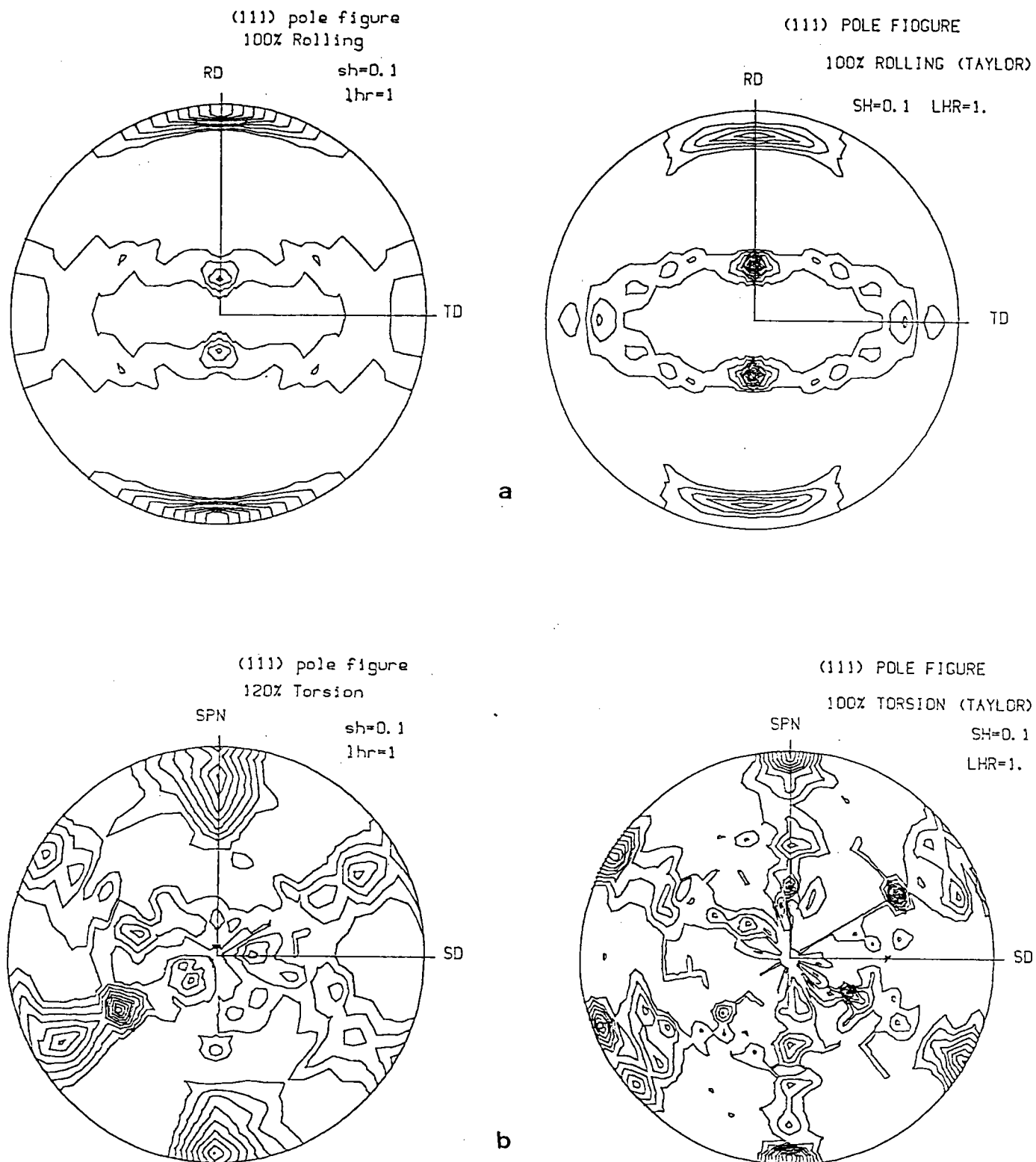


Figure 6.3. : Figures de pôles (111).  
a) laminage ; b) torsion  
Comparaison avec le modèle de Taylor viscoplastique. ( $\epsilon_e = 1$ ).

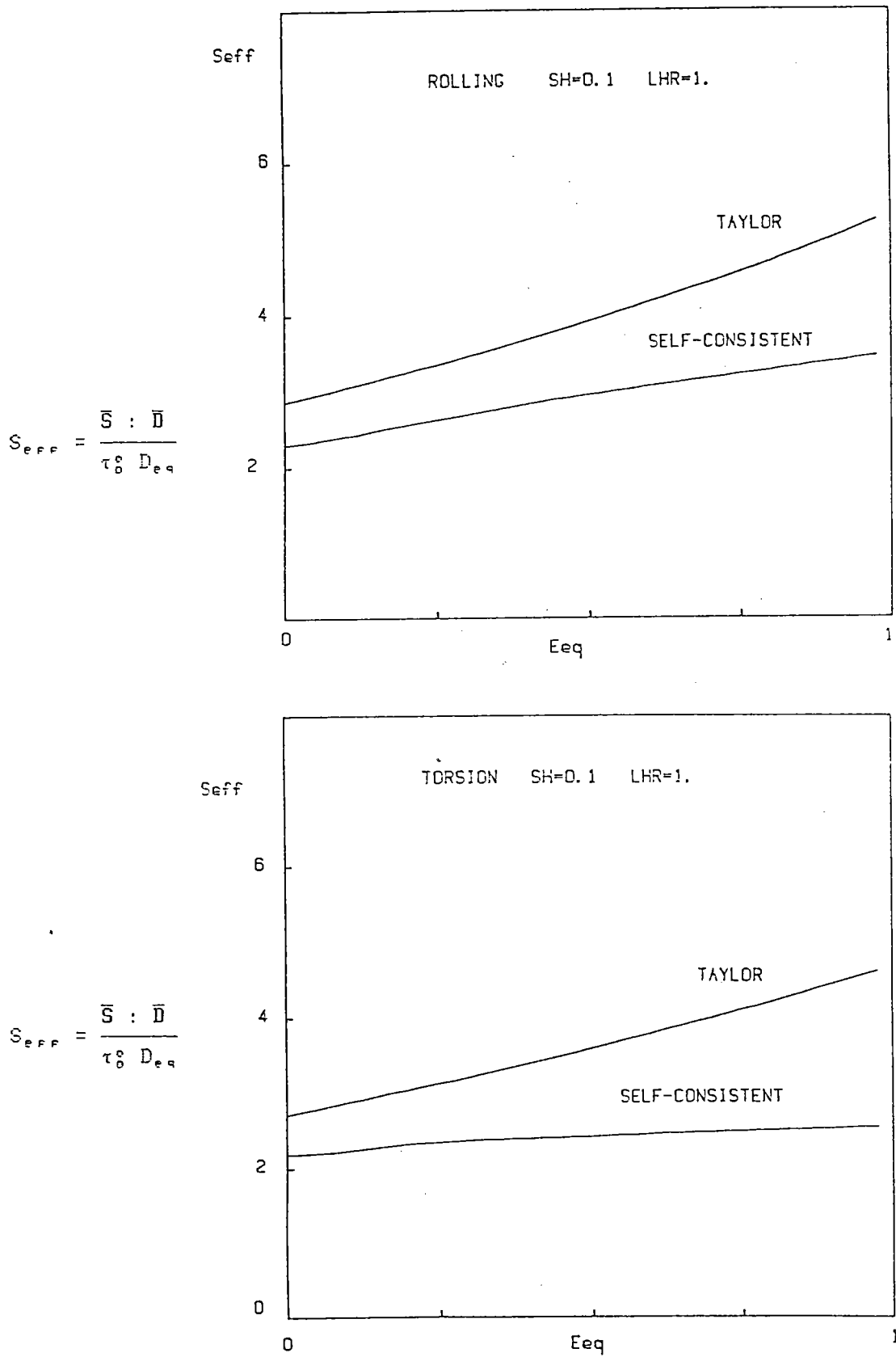


Figure 7.3. : Courbes contraintes-déformations pour le laminage et la torsion.



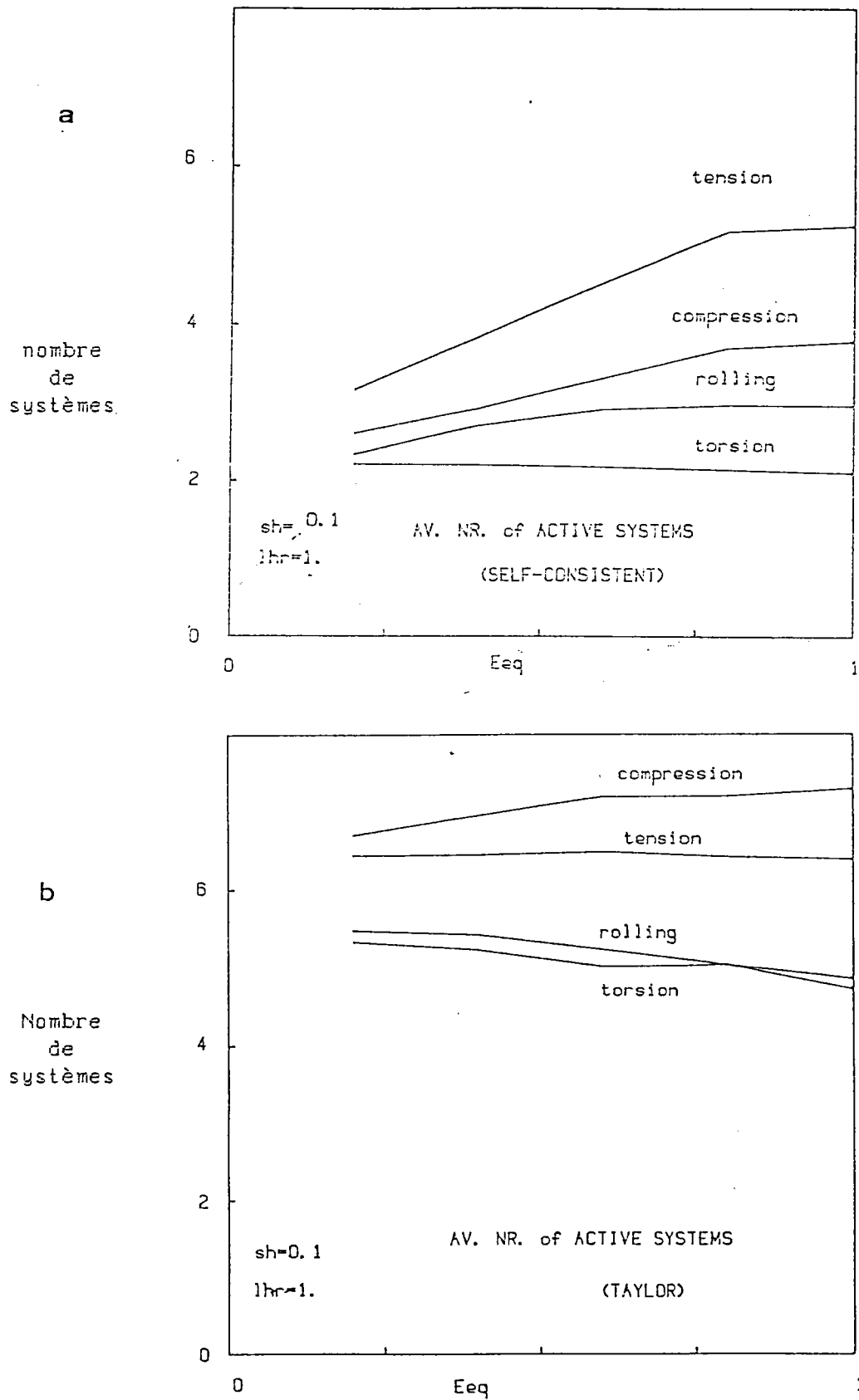
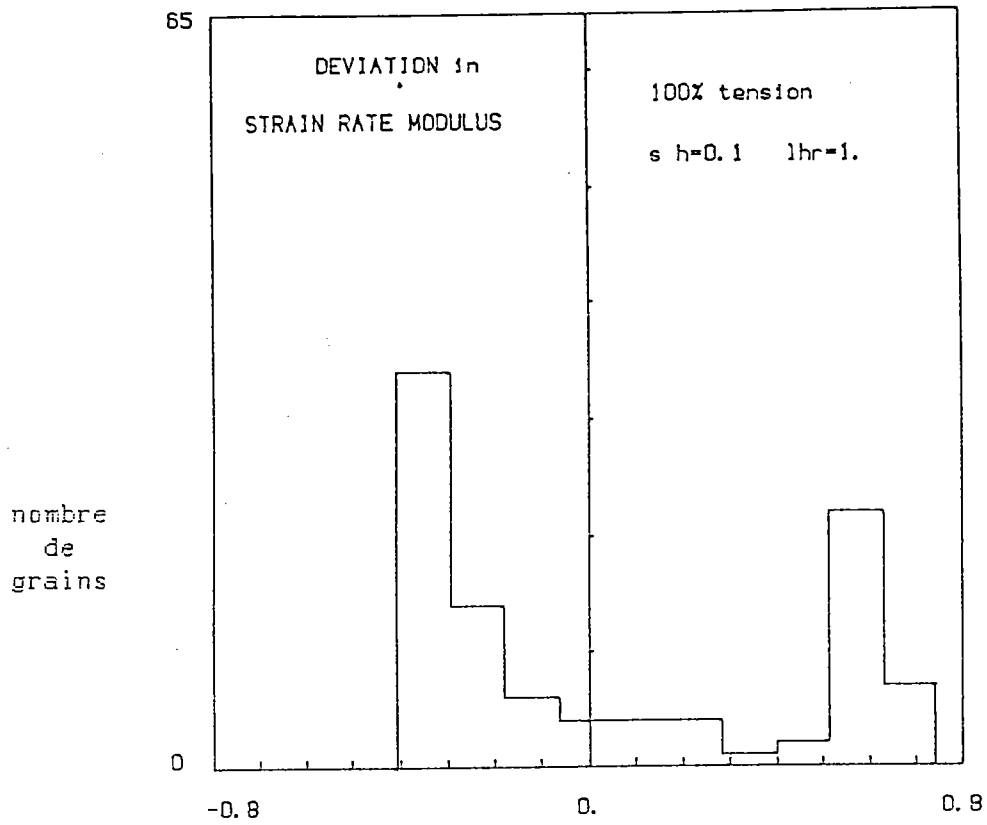
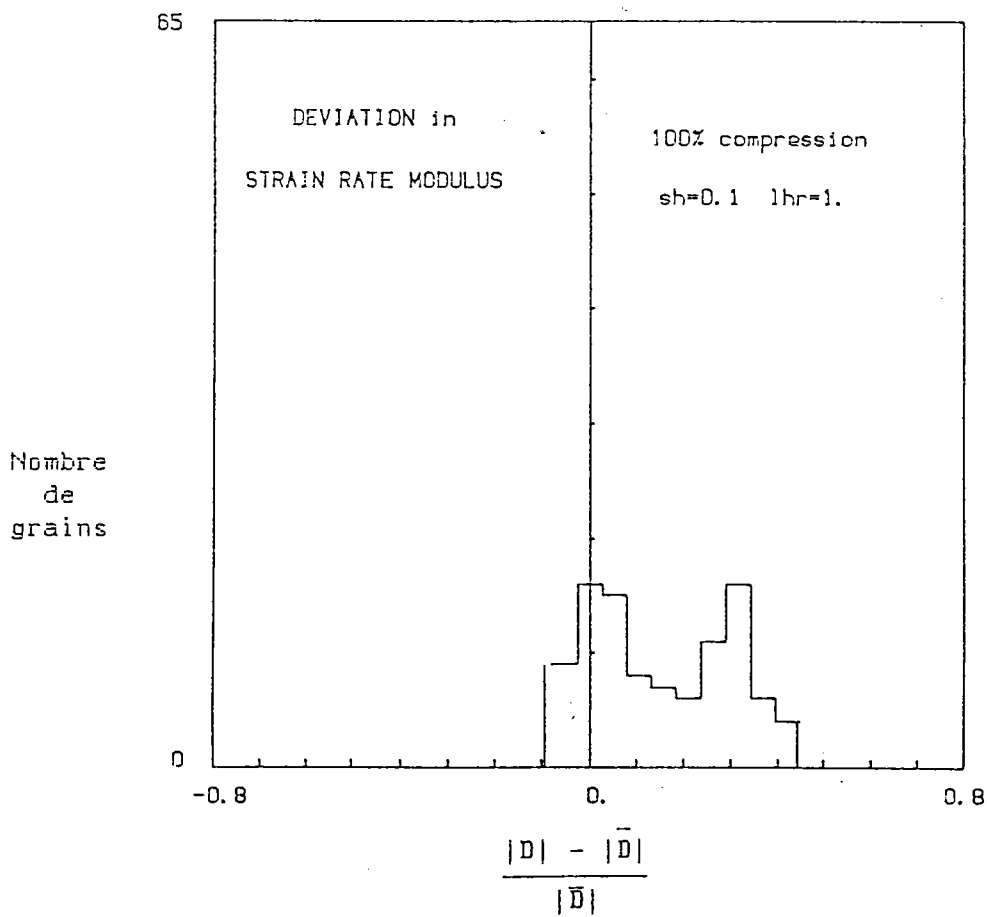


Figure 8.3. : Nombre moyen des systèmes actifs.  
 a) Modèle auto-cohérent viscoplastique.  
 b) Modèle de Taylor viscoplastique.



a



b

Figure 9.3. : Déviation du module de  $D$  ( $\epsilon_e = 1$ ).  
a) traction ; b) compression.

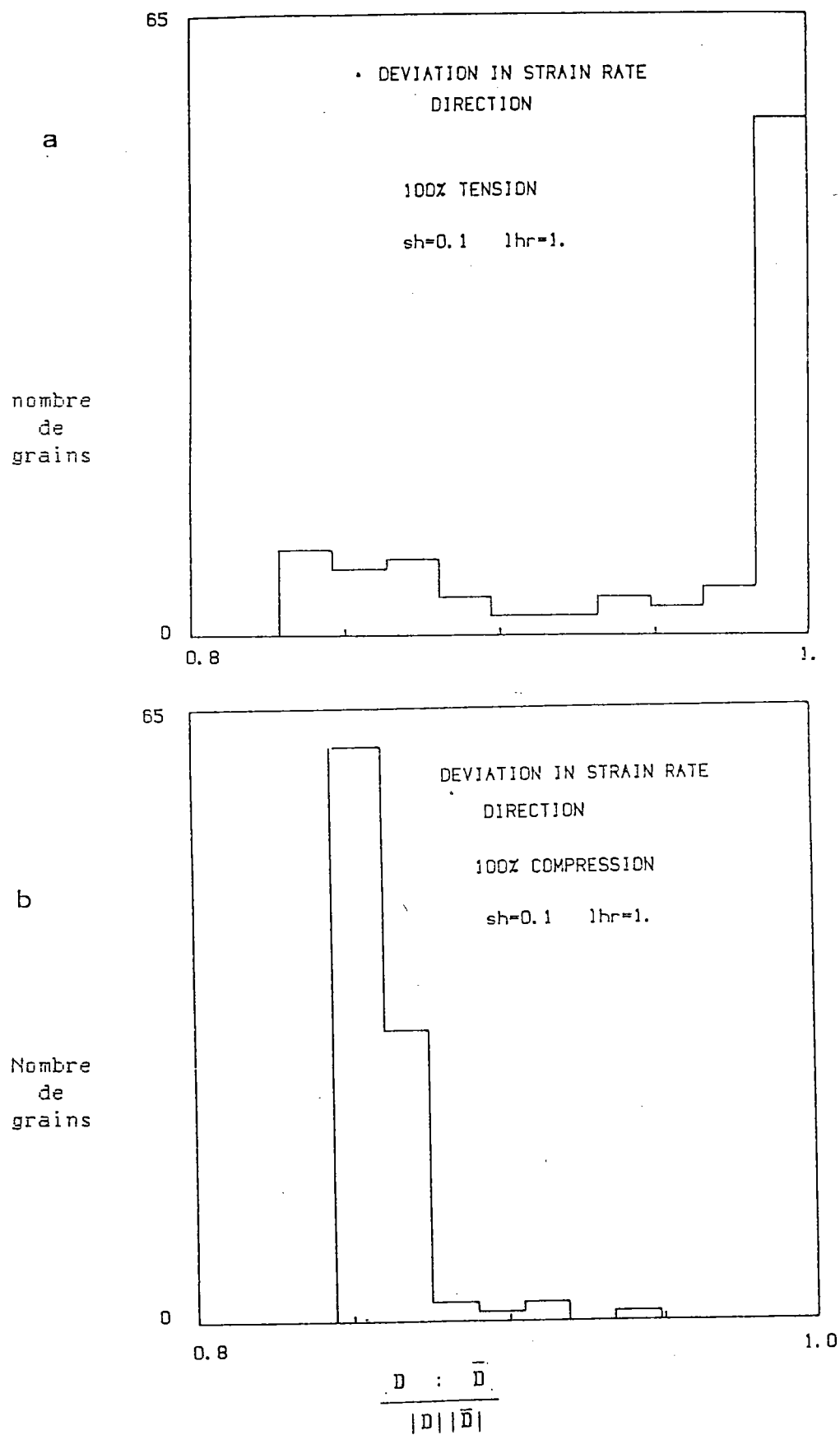


Figure 10.3. : Déviation de la direction de D ( $\epsilon_e = 1$ ).  
a) traction ; b) compression.

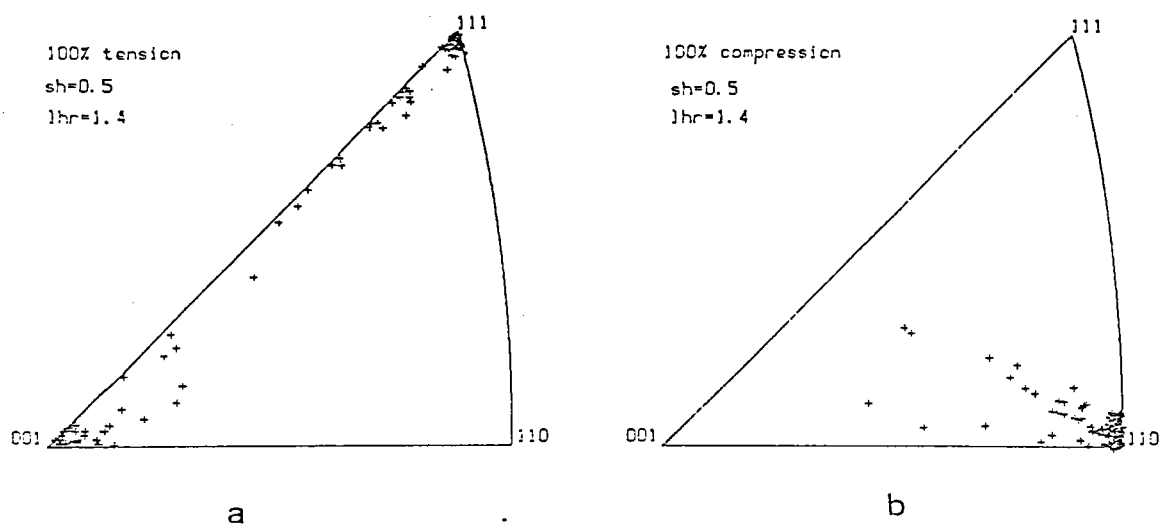


Figure 11.3. : Figure de pôles inverses. Sh = 0.5, Lhr = 1.4 ( $\epsilon_p = 1$ )  
a) Traction uniaxiale ; b) compression uniaxiale.

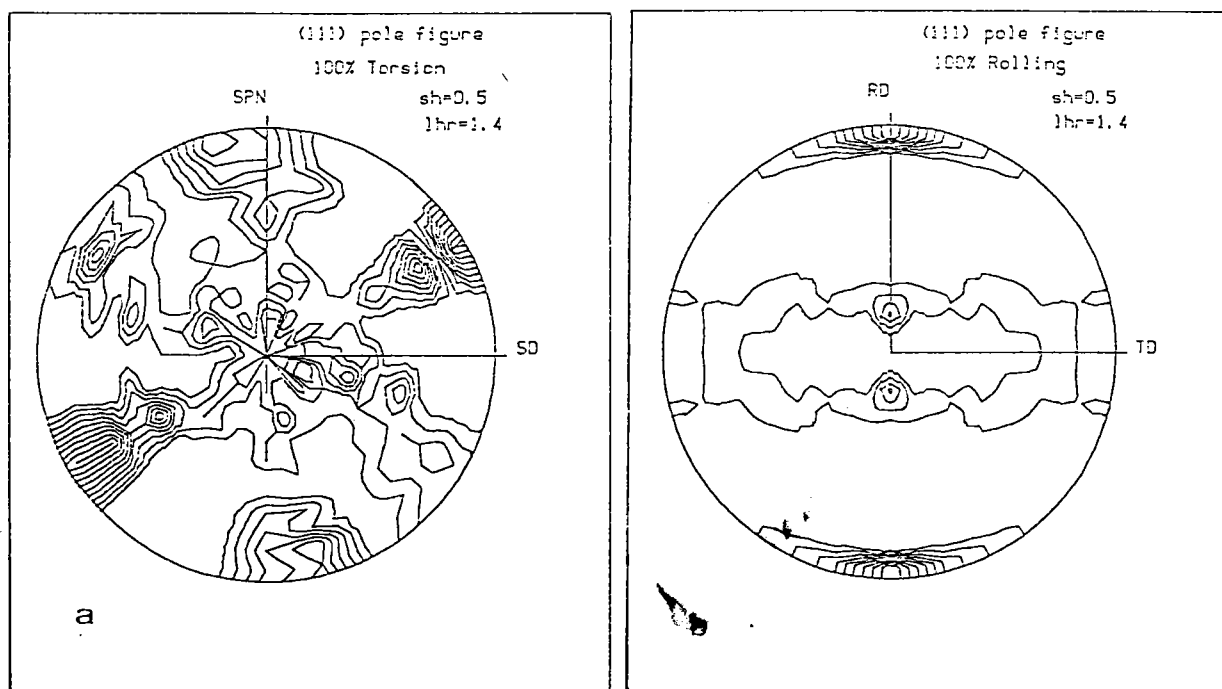


Figure 12.3. : Figure de pôles (111). Sh = 0.5, Lhr = 1.4 ( $\epsilon_p = 1$ ).  
a) Torsion ; b) laminage.

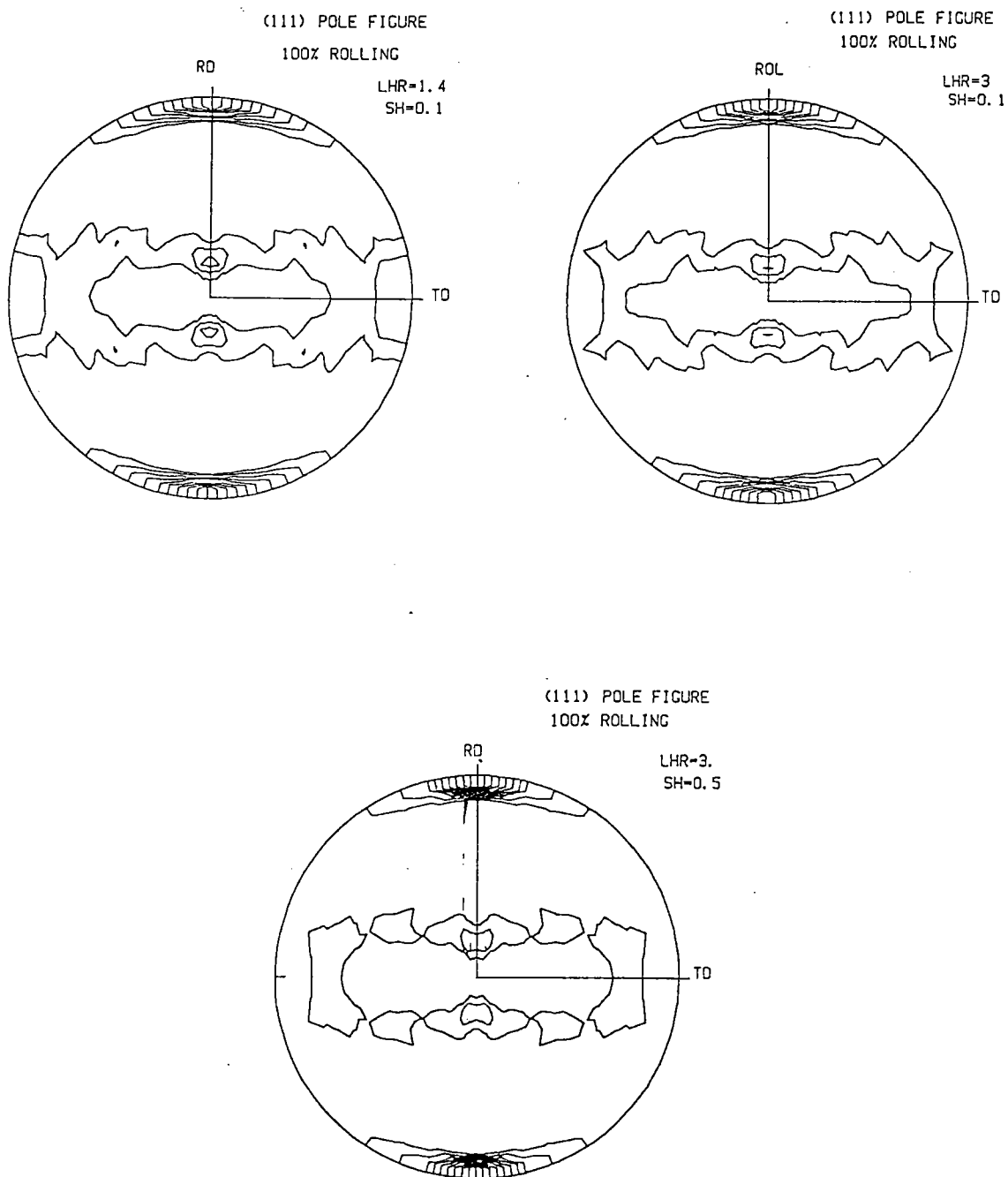
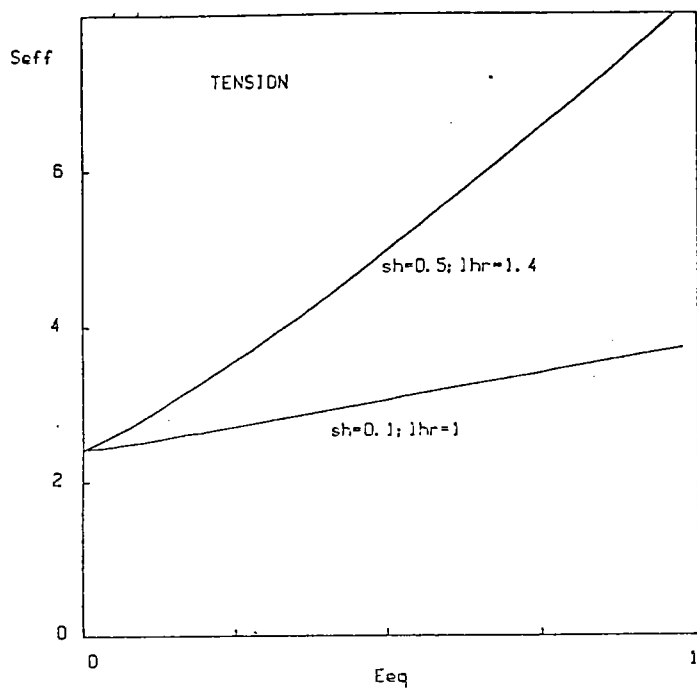
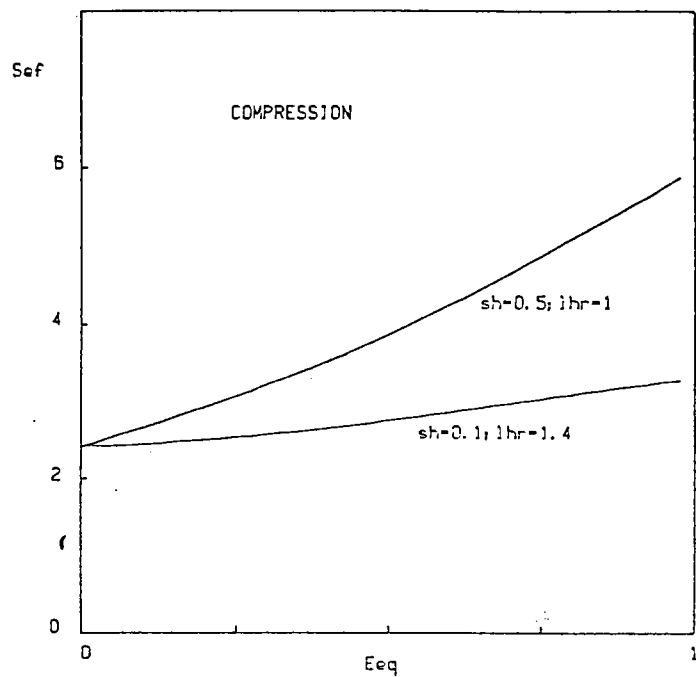


Figure 13.3. : Figures de pôles (111) pour le laminage ( $\epsilon_p = 1$ ).  
 Comparaison des résultats pour différentes valeurs des  
 coefficients d'écroutissage.



a



b

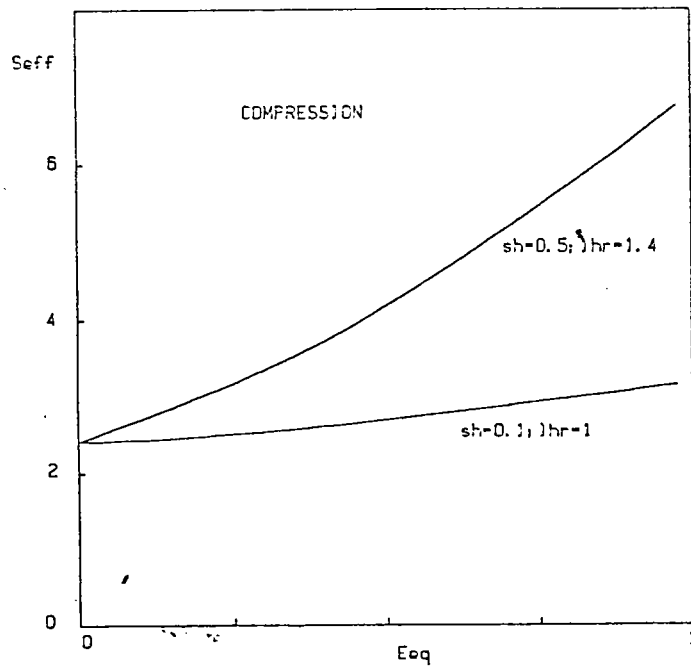
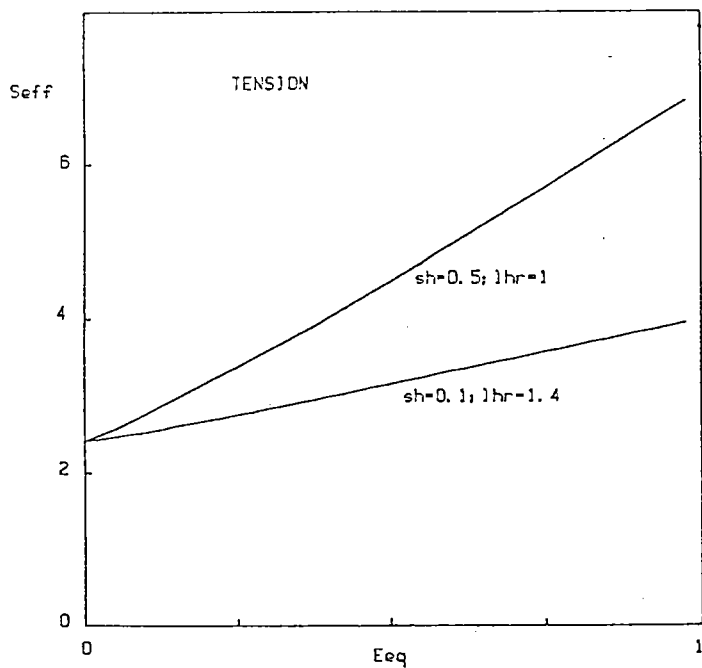
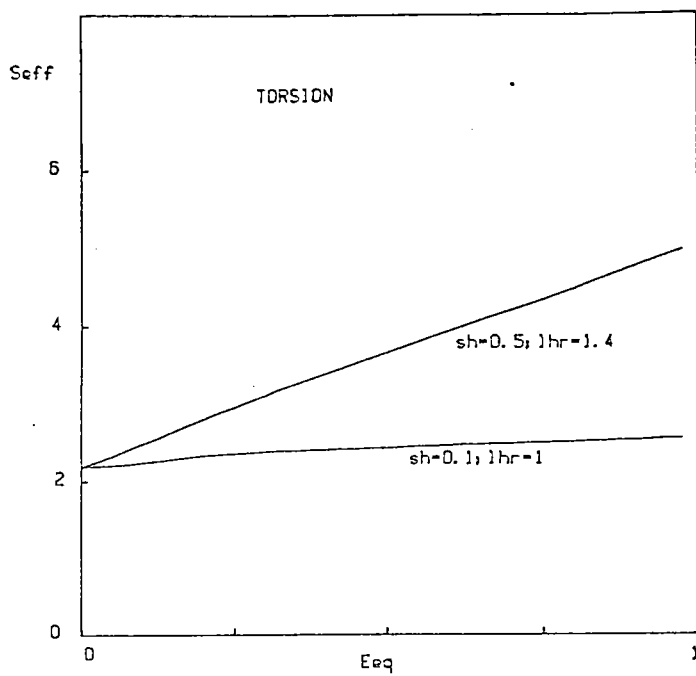


Figure 14.3. : Comportement macroscopique pour différentes valeurs des coefficients d'écroutissage (Sh, Lhr)

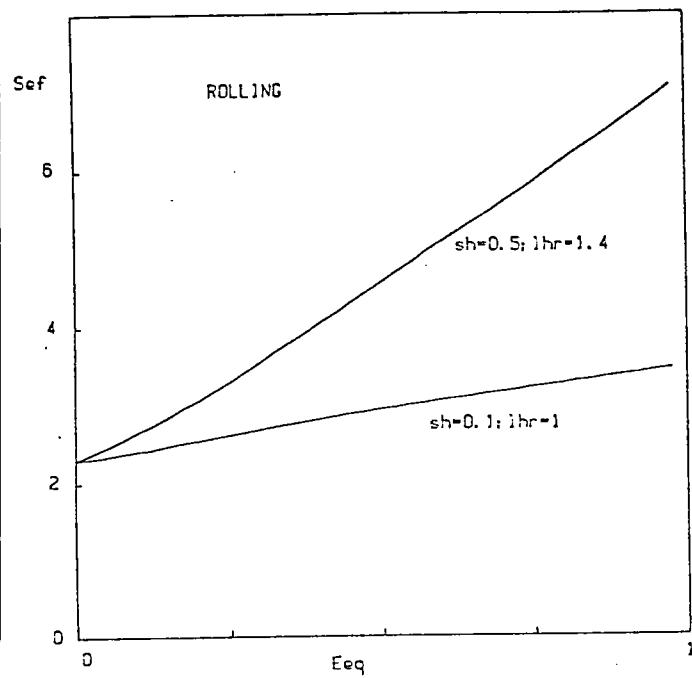
a) Traction uniaxiale

b) compression uniaxiale.

$$Seff = \frac{\bar{S} : \bar{D}}{\tau_0 \bar{D}_{eq}}$$



a



b

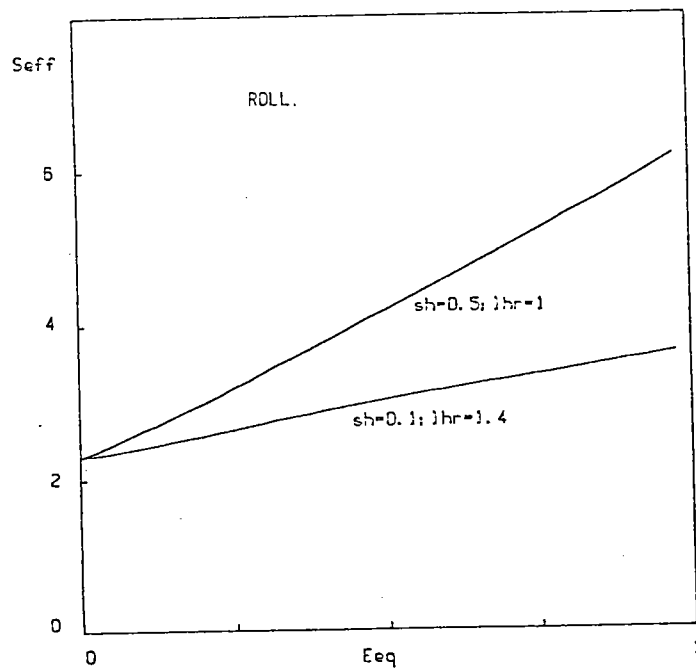
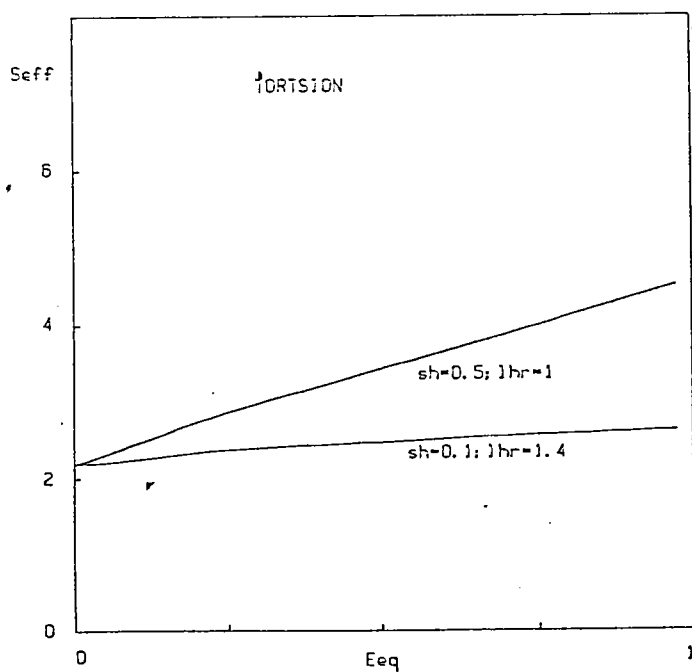


Figure 15.3. : Comportement macroscopique pour différentes valeurs d'écroutissage (Sh, Lhr) :

- a) Torsion  
b) Laminage.

$$Seff = \frac{\bar{S} : \bar{D}}{\tau_0 \bar{D}_{eq}}$$

REFERENCES

- [1]. A. MOLINARI, G.R. CANOVA et S. AHZI à paraître dans Acta.Met.
- [2]. Ph. LEQUEU, P. GILORMINI, F. MONTHEILLET, B. BACROIX et J.J. JONAS,  
Acta.Met. 35, pp 439-451, (1987).
- [3]. T.J.R. HUGHES et J. WINGET, Int. J. Num. Meth. Eng. 15 pp  
1413-1418, (1980).
- [4]. R.J. ASARO et A. NEEDLEMAN, Acta. Met. 33, 926, (1985).
- [5]. W. HOSFORD, Trans-Met. Soc. AIME, 12, p.230, (1961).



## CHAPITRE 4

### EFFET DE DURCISSEMENT ET EFFET DE FORME

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les résultats du modèle auto-cohérent viscoplastique par une description grossière de l'écroutissage (écroutissage linéaire) et nous avons pris une forme particulière des grains qui est la forme sphérique. Le but de ce chapitre, est de prendre en compte d'autres façons de décrire l'écroutissage ainsi que d'autres formes des grains. Les résultats seront discutés et comparés à ceux du chapitre 3 ainsi qu'aux résultats expérimentaux. Pour mieux cerner l'effet de chacun des deux cas : écroutissage / forme, nous allons les étudier séparément.

#### 1) Effet d'écroutissage

Un grand nombre d'études expérimentales s'appuie sur la courbe de traction des monocristaux C.F.C. Le stade I de cette courbe correspond à un glissement simple, l'écroutissage associé à ce glissement est faible pratiquement linéaire. Le stade II se caractérise par un fort écroutissage également linéaire, le stade III correspond à la partie parabolique finale de la courbe. Outre les observations expérimentales basées sur les courbes contrainte-déformation, un certain nombre d'approches [1, 2, 3, 4, 5] se sont développés pour formuler les lois du comportement du monocristal se déformant par glissement. Une revue de ces différentes approches a été faite par Franciosi [6]. Tome et al. [7] ont fait des essais de traction, compression et torsion sur le cuivre OFHC, les courbes

contrainte-déformation de ces trois essais sont reportées sur la figure (1-4). Tome et al. ont essayé d'expliquer ces trois différentes courbes à partir d'une loi unique de durcissement microscopique. Ils ont utilisé une loi empirique de durcissement qui s'écrit sous la forme :

$$\tau_o(\Gamma) = \tau_o^o + (\tau_1 + \theta_1 \Gamma) (1 - \exp(-\Gamma \theta_o / \tau_1)) \quad (1-4)$$

avec  $\Gamma = \int_0^t \sum \dot{\gamma}^s dt$   
 $\tau_o$  est la contrainte critique.  $\tau_o^o, \tau_1, \theta_o$  et  $\theta_1$  sont les paramètres d'ajustement des courbes expérimentales. L'équation (1-4) est une généralisation de la loi de Voce [8] avec une vitesse d'écroutissage asymptotique  $\theta_1$  en grandes déformations. Les paramètres  $\tau_o$  et  $\theta_o$  décrivent respectivement la contrainte d'écoulement initiale et la vitesse d'écroutissage initiale dans le grain.  $\theta_1$  et  $\tau_1$  décrivent les caractéristiques asymptotiques de l'écroutissage. Les valeurs de ces paramètres pour les trois modes de déformation : traction, compression et torsion sont données dans le tableau (1-4). Nous nous sommes intéressé dans un premier temps à cette description empirique de l'écroutissage. L'auto-écrouissage sh est la variation de la contrainte  $\tau$  par rapport au glissement  $\Gamma$ . Pour chacun des 12 systèmes de glissement, on a :

$$sh = d(\tau_o / \tau_o^o) / d\Gamma \quad (3-4)$$

$\tau_o$  est donné par la relation (1-4). On fait ici une simplification qui consiste à prendre une asymptote d'écroutissage horizontale pour les grandes déformations (saturation). Ceci consiste à prendre  $\theta_1$  nulle. Dans ce cas la relation (1-4) s'écrit :

$$(\tau_o / \tau_o^o) = 1 + (\tau_1 / \tau_o^o) (1 - \exp(-\Gamma \theta_o / \tau_1)) \quad (4-4)$$

En dérivant cette relation par rapport à  $\Gamma$  on obtient alors :

$$sh = (\tau_1 / \tau_o^o) (\theta_o / \tau_1) \exp(-\Gamma \theta_o / \tau_1) \quad (5-4)$$

	$\tau_0$	$\theta_0$	$\tau_1$	$\theta_1$
Tension	12	160	98	7
Compression	12	160	98	4
Torsion	12	160	75	9

Tableau 1.4. : Paramètres de la loi d'érouissage microscopique (MPa). [7].

En éliminant le terme exponentiel par l'équation (4-4) on obtient :

$$sh = [1 - (\tau_0/\tau_0^0) + (\tau_1/\tau_0^0)] \theta_0/\tau_0^0 \quad (6-4)$$

La matrice d'écroûissage H est donnée par le tableau (1-3), mais cette fois-ci sh est variable. L'évolution de la contrainte critique  $\tau_0$  pour chaque système est donnée par :

$$\dot{\tau}_0/\tau_0^0 = \sum_r H r^s \dot{\gamma}^s \quad (7-4)$$

Nous avons utilisé ce type d'écroûissage, avec lhr = 1, et nous avons représenté les courbes contrainte-déformation pour les trois modes de déformations traction, compression et torsion, figure (2-4). Nous pouvons voir, en comparant ces courbes avec les courbes expérimentales de Tome et al. [7] (figure 1-4), qu'elles sont en bon accord. En particulier, on peut noter que la courbe de compression est en dessous de celle de traction, ceci est dû au fait que l'effet Hosford est pris en compte. Si la théorie DTI était utilisée, la courbe de compression passerait au dessus de la traction.

Nous nous sommes intéressé dans un deuxième temps aux résultats expérimentaux de l'écroûissage latent de Franciosi et al. [9]. Les mesures du rapport du durcissement latent (lhr), en fonction du glissement  $\gamma^p$  sur le système primaire sont représentées sur la figure (3-4) pour Al, Ca, Ag et Cu 4%. A partir de ces résultats, Franciosi [6] a représenté l'évolution de l'écroûissage en fonction de l'énergie de faute d'empilement figure (4-4).

### Matrice d'écroûissage

D'après ces résultats, Franciosi a classé les 11 systèmes latents de la structure CFC en trois groupes principaux : le groupe de plus fort durcissement réunit les systèmes dont les dislocations forment les

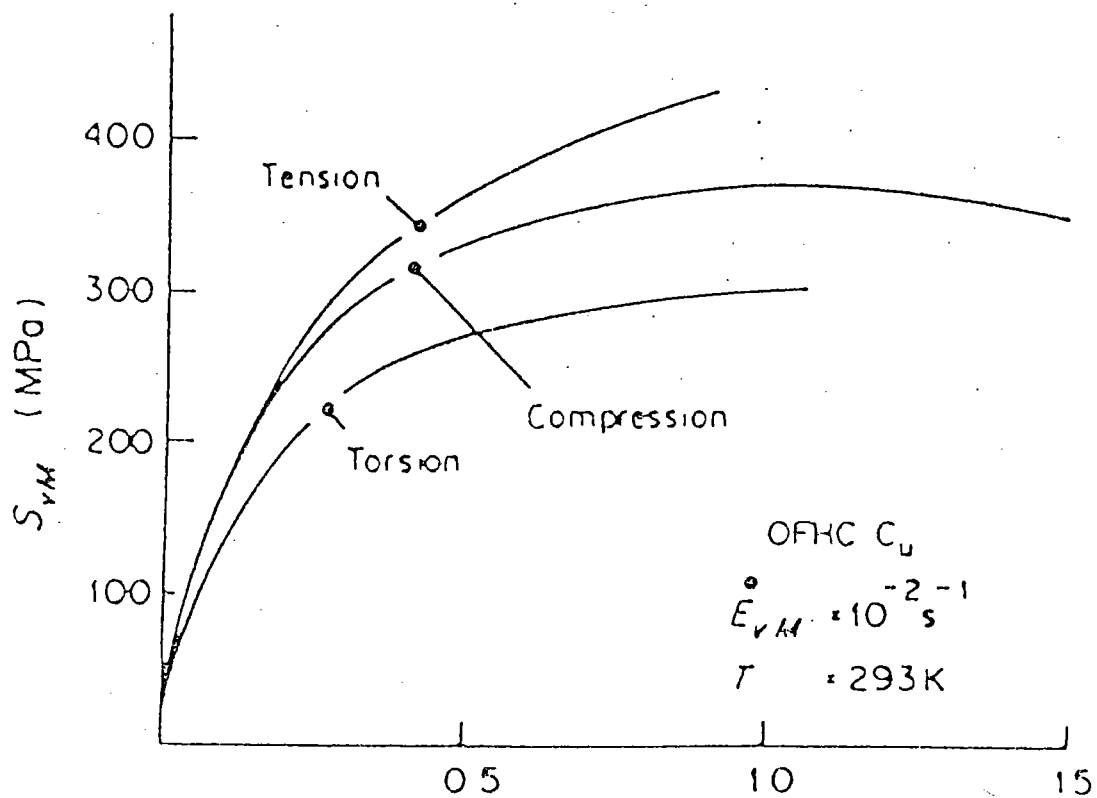


Figure 1-4. Lois macroscopiques expérimentales du cuivre OFHC. [7].

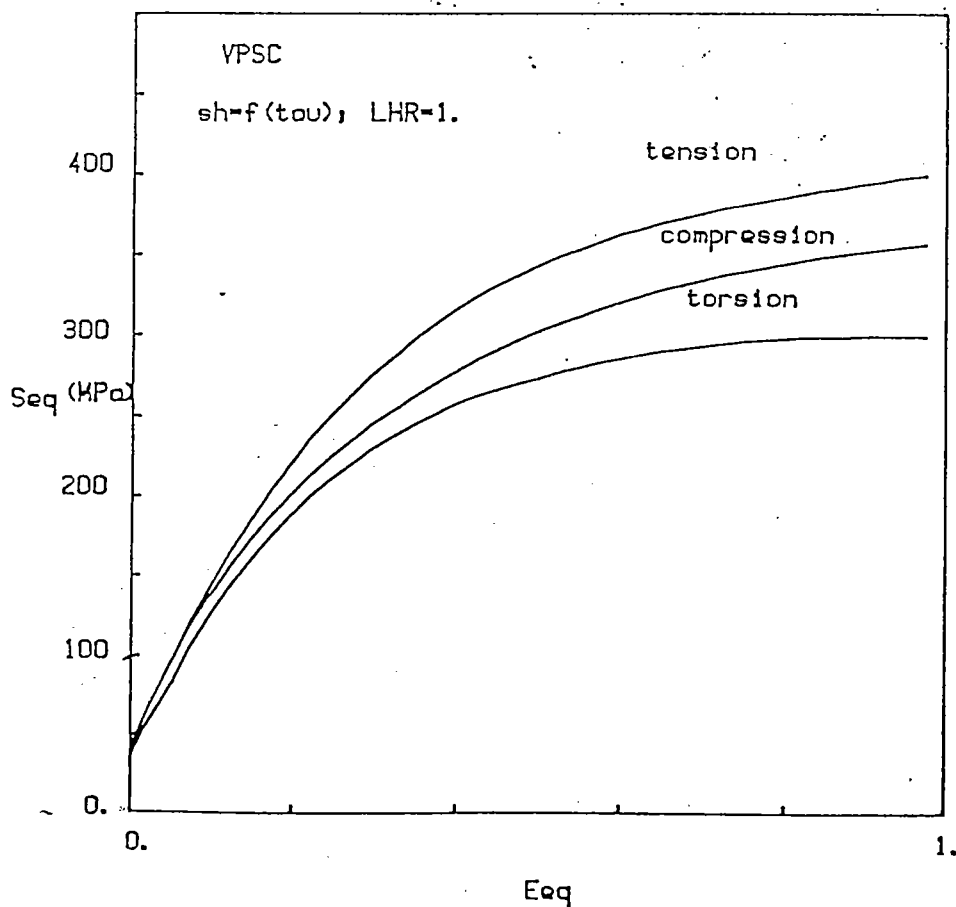


Figure 2-4. Lois macroscopiques prédites par le modèle auto-cohérent avec une loi d'écroutissage du type Voce.

## PLANS

A  $(\bar{1}11)$   
 B  $(111)$   
 C  $(\bar{1}\bar{1}1)$   
 D  $(1\bar{1}1)$

## DIRECTIONS

1  $[011]$       2  $[0\bar{1}1]$   
 3  $[101]$       4  $[\bar{1}01]$   
 5  $[\bar{1}10]$       6  $[110]$

SCH-B : A2 : A3 : A6 : B2 : B4 : B5 : C1 : C3 : C5 : D1 : D4 : D6  
 SIS-H : -c1 : c2 : -c3 : -a1 : a2 : -a3 : -b1 : b2 : b3 : -d1 : d2 : d3

	A2	A3	A6	B2	B4	B5	C1	C3	C5	D1	D4	D6
A2	SH <sup>a<sup>0</sup></sup>	Copl <sup>a<sup>1</sup></sup>	Copl <sup>a<sup>1</sup></sup>	CS <sup>a<sup>1</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>	HL <sup>a<sup>1</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>	LC <sup>a<sup>3</sup></sup>	HL <sup>a<sup>1</sup></sup>	LC <sup>a<sup>3</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>
A3	Copl <sup>a<sup>1</sup></sup>	SH <sup>a<sup>0</sup></sup>	Copl <sup>a<sup>1</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>	HL <sup>a<sup>1</sup></sup>	LC <sup>a<sup>3</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>	CS <sup>a<sup>1</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>	LC <sup>a<sup>3</sup></sup>	HL <sup>a<sup>1</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>
A6	Copl <sup>a<sup>1</sup></sup>	Copl <sup>a<sup>1</sup></sup>	SH <sup>a<sup>0</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>	LC <sup>a<sup>3</sup></sup>	HL <sup>a<sup>1</sup></sup>	LC <sup>a<sup>3</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>	HL <sup>a<sup>1</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>	CS <sup>a<sup>1</sup></sup>
B2				SH <sup>a<sup>0</sup></sup>	Copl <sup>a<sup>1</sup></sup>	Copl <sup>a<sup>1</sup></sup>	HL <sup>a<sup>1</sup></sup>	LC <sup>a<sup>3</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>	HL <sup>a<sup>1</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>	LC <sup>a<sup>3</sup></sup>
B4					SH <sup>a<sup>0</sup></sup>	Copl <sup>a<sup>1</sup></sup>	LC <sup>a<sup>3</sup></sup>	HL <sup>a<sup>1</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>	CS <sup>a<sup>1</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>
B5						SH <sup>a<sup>0</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>	CS <sup>a<sup>1</sup></sup>	LC <sup>a<sup>3</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>	HL <sup>a<sup>1</sup></sup>
C1							SH <sup>a<sup>0</sup></sup>	Copl <sup>a<sup>1</sup></sup>	Copl <sup>a<sup>1</sup></sup>	CS <sup>a<sup>1</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>
C3	SH : Auto écouissage (a <sup>0</sup> ) Copl : Systèmes coplanaires (a <sup>1</sup> ) CS : Systèmes colinéaires (a <sup>1</sup> ) HL : Paires de systèmes à vecteurs de Burgers, Perpendiculaires (a <sup>1</sup> ) GJ : Paires de systèmes formant des jonctions glissiles (a <sup>2</sup> ) LC : Paires de systèmes formant des verrous de Lomer- Cottrell (a <sup>3</sup> ) a <sup>3</sup> > a <sup>2</sup> > a <sup>1</sup> > a <sup>0</sup>							SH <sup>a<sup>0</sup></sup>	Copl <sup>a<sup>1</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>	HL <sup>a<sup>1</sup></sup>	LC <sup>a<sup>3</sup></sup>
C5									SH <sup>a<sup>0</sup></sup>	GJ <sup>a<sup>2</sup></sup>	LC <sup>a<sup>3</sup></sup>	HL <sup>a<sup>1</sup></sup>
D1										SH <sup>a<sup>0</sup></sup>	Copl <sup>a<sup>1</sup></sup>	Copl <sup>a<sup>1</sup></sup>
D4												SH <sup>a<sup>0</sup></sup>
D6												SH <sup>a<sup>0</sup></sup>

Tableau 2.4.: Matrice d'écrouissage H. [6].

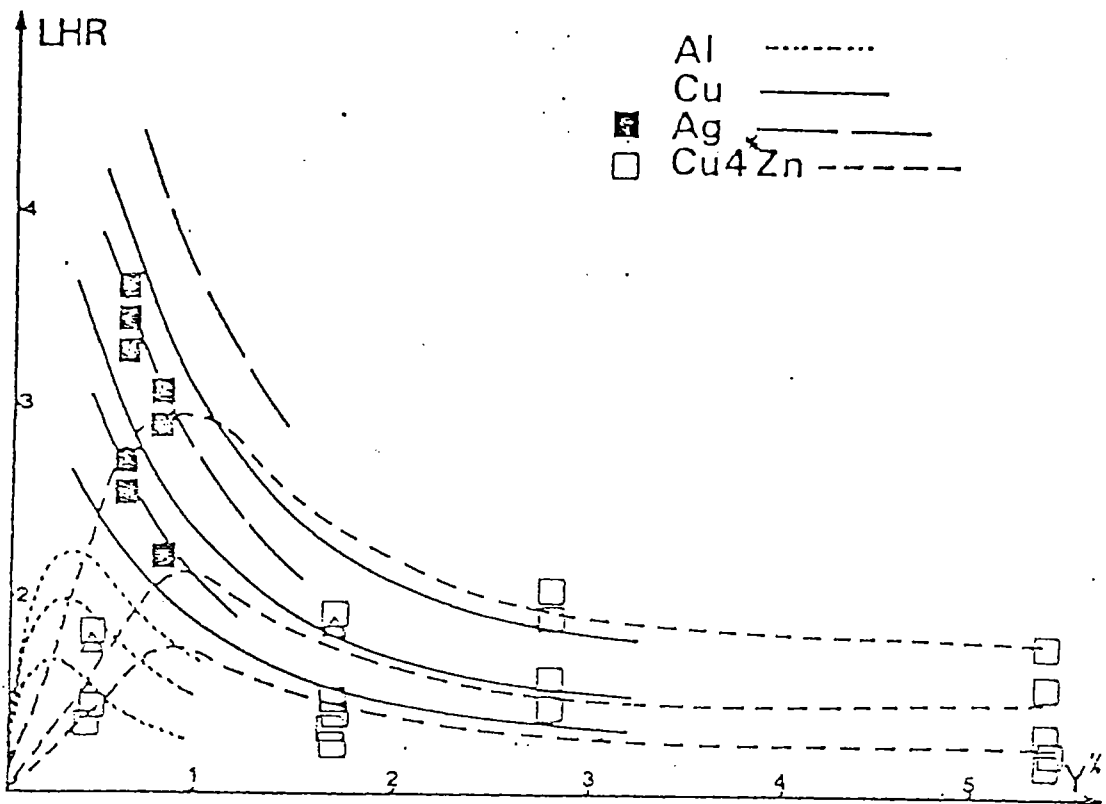


Figure 3.4. : Ensemble des courbes de rapports de durcissement latent (LHR) pour Al, Cu, Cu 4 % Zn, Ag. [6].

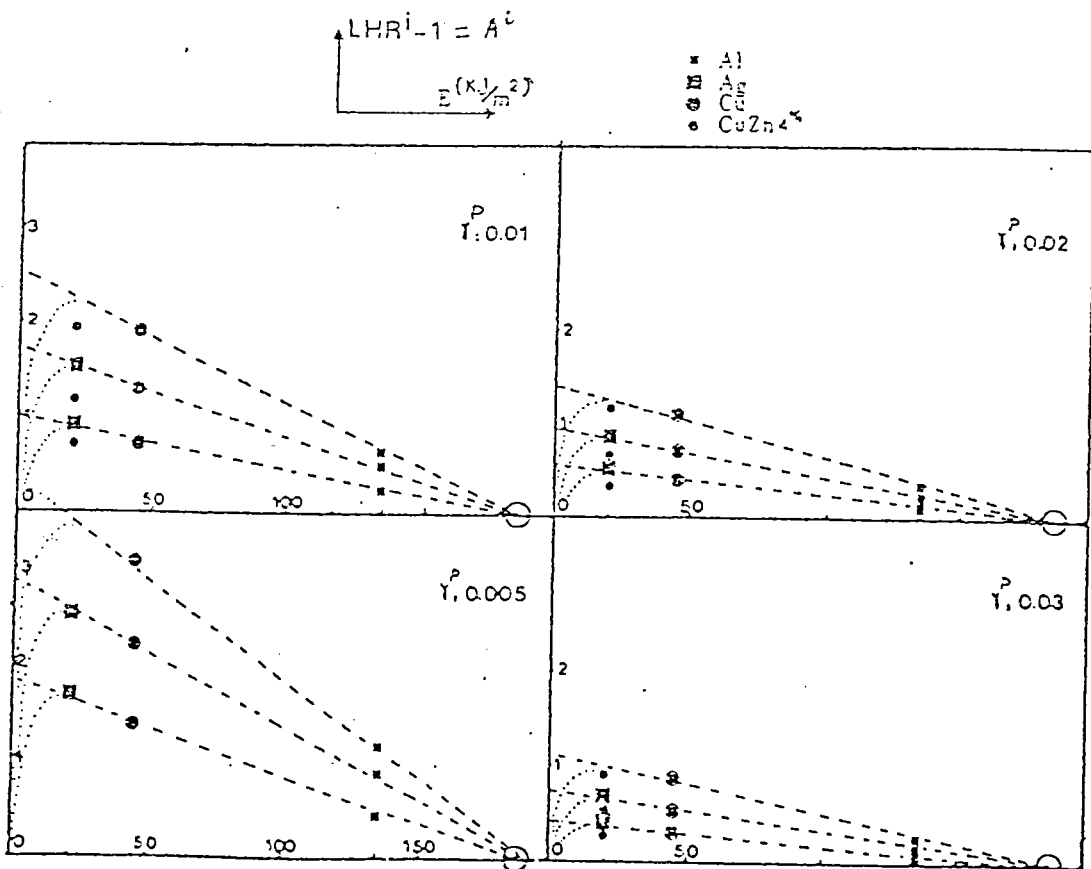


Figure 4.4. : Variation de l'anisotropie de l'écroutissage en fonction de l'énergie de faute d'empilement pour diverses valeurs du glissement primaire. [6].

verrous de Lomer-Cottrel avec celles du primaire, le groupe intermédiaire contient les systèmes dont les dislocations peuvent former des jonctions glissiles avec celle du primaire et le groupe des systèmes faiblement durcis concerne ceux ne faisant pas de jonctions avec le primaire. La matrice d'écroissage donnée par le tableau (2-4) est essentiellement composée de quatre termes ( $a_3, a_2, a_1, a_0$ ) dont les trois premiers termes ( $a_3, a_2, a_1$ ) correspondent aux 3 groupes de durcissement latent cités ci-dessus, et  $a_0$  représente les termes diagonaux de H.

Les valeurs de  $a_3, a_2$  et  $a_1$  peuvent être déduites des courbes de la figure (4-4) pour un glissement primaire  $\gamma^p$  fixé et pour  $a_0$  donné. En effet : Une loi physique représentant la variation de l'anisotropie de l'écroissage en fonction de l'énergie d'empilement peut être écrite [6] sous la forme :

$$A^i = (a^i/a_0)^{1/2} - 1 \quad (7-4)$$

avec  $A^i(\gamma^p) = LHR^i(\gamma^p) - 1 \quad (8-4)$

Pour  $i = 1, 2, 3$  représentant les 3 familles de systèmes, des moins écrouis aux plus écrouis,  $LHR^i$  est le rapport de la cission critique du système  $i$  par la cission critique du système primaire  $\tau_c^p$

$$LHR^i = \tau_c^i / \tau_c^p \quad (9-4)$$

D'après la courbe représentant les mesures du rapport de durcissement latent figure(3-4), deux définitions simplifiées de l'anisotropie d'écroissage sont possibles : la première consiste à prendre les valeurs de  $a_i$  correspondant aux maxima du lhr, c'est à dire pour un glissement primaire  $\gamma^p$  de 0.5%, la deuxième consiste à prendre les valeurs  $a_i$  correspondant à la valeur de saturation du lhr (supérieur à 1) ceci correspond au glissement primaire  $\gamma^p$  supérieur à 3%.



Nous avons considéré ces deux cas pour le cuivre, les valeurs des  $A^i$  sont données par la figure (4-4). La valeur du coefficient d'auto-écrouissage et prise égale à 0.1 (pente de 10%). Nous avons considéré une simplification supplémentaire, au point de vue écrouissage entre les systèmes 2 et 3 ( $a_3 = a_2$ ). Les textures cristallographiques à 100% de déformation sont représentées sur les figures (5-4,6-4) pour les quatre modes de déformation (traction, compression, laminage et torsion). Nous pouvons remarquer, d'après ces résultats qu'un écrouissage fort bloque l'évolution de la texture dans le cas de traction et compression. Pour le cas du laminage un écrouissage fort nous permet d'obtenir un mélange entre les deux types de textures, type cuivre et type laiton, bien que les résultats ne soient pas nettement marqués.

Les courbes contrainte/déformation sont représentées sur les figures (7-4; 8-4) pour les 4 tests. On s'aperçoit que les courbes des matériaux présentant un  $lhr > 1$  sont au dessus de celles ayant un  $lhr = 1$ .

### Conclusions

Il a été montré dans cette première partie qu'une loi d'écrouissage microscopique unique pouvait prédire, en l'absence d'effets morphologiques, les niveaux relatifs des courbes d'écrouissage en traction, compression et torsion. Ce bon accord a été attribué notamment au fait qu'un modèle à basse interaction permettait de simuler le "grain curling" qui tend à baisser le niveau des contraintes en compression. Ce bon accord est impossible avec un modèle à forte interaction sauf en prenant en compte les effets morphologiques auquel cas la texture prédite s'avère erronée. Un modèle à basses interactions tel que le

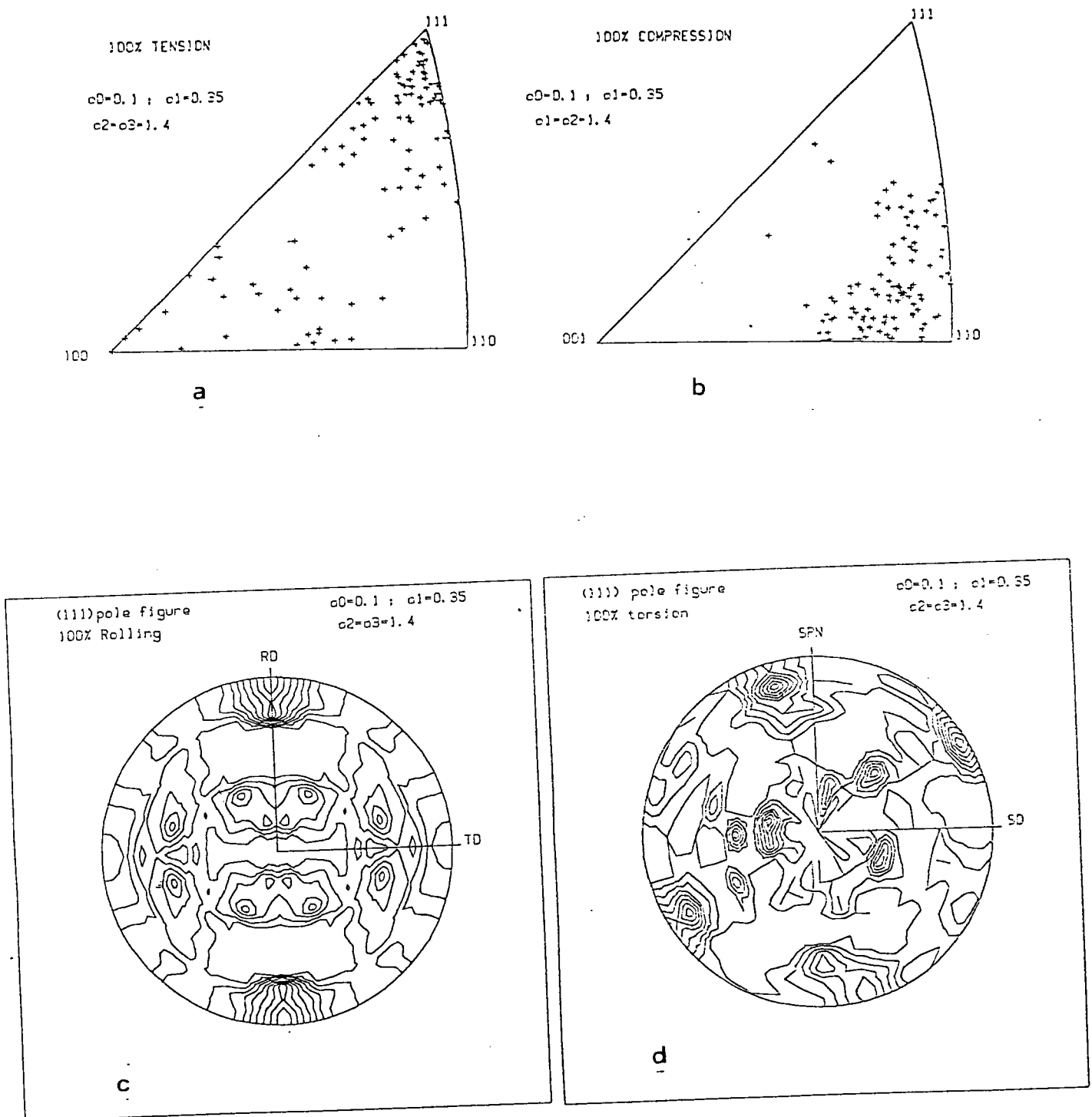


Figure 5.4. : Résultats des textures pour un fort écouissage latent. ( $\epsilon_e = 1$ ). a) Traction ; b) compression ; c) laminage ; d) torsion.

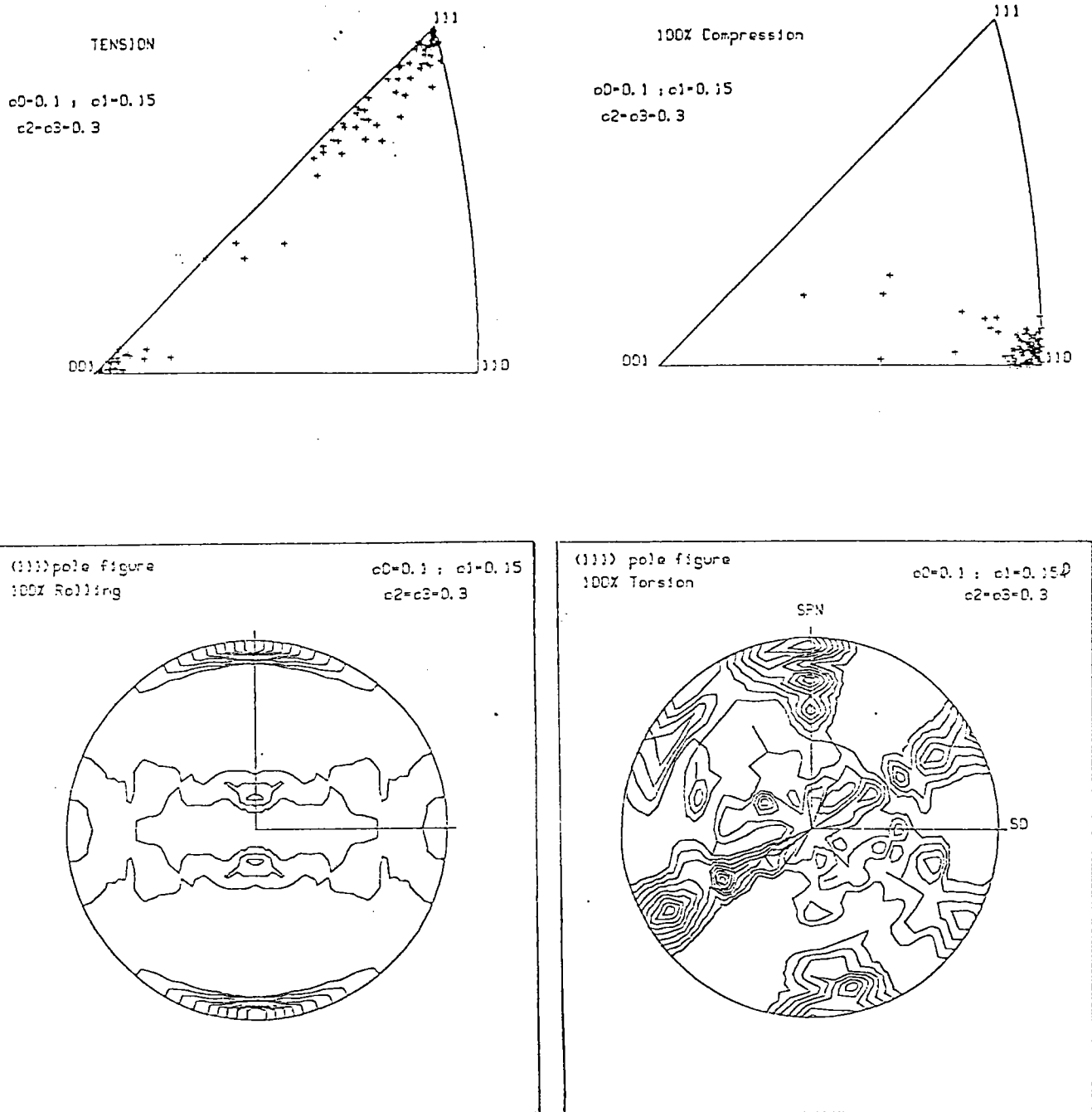
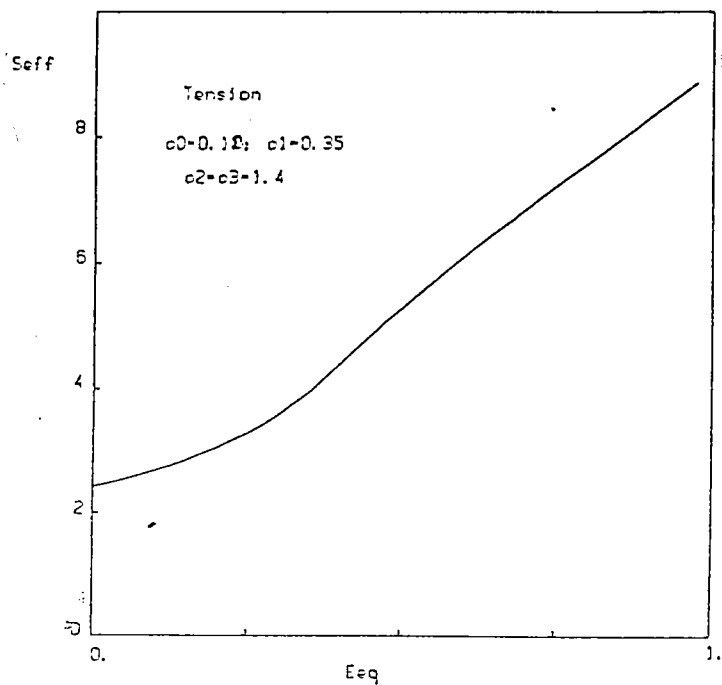
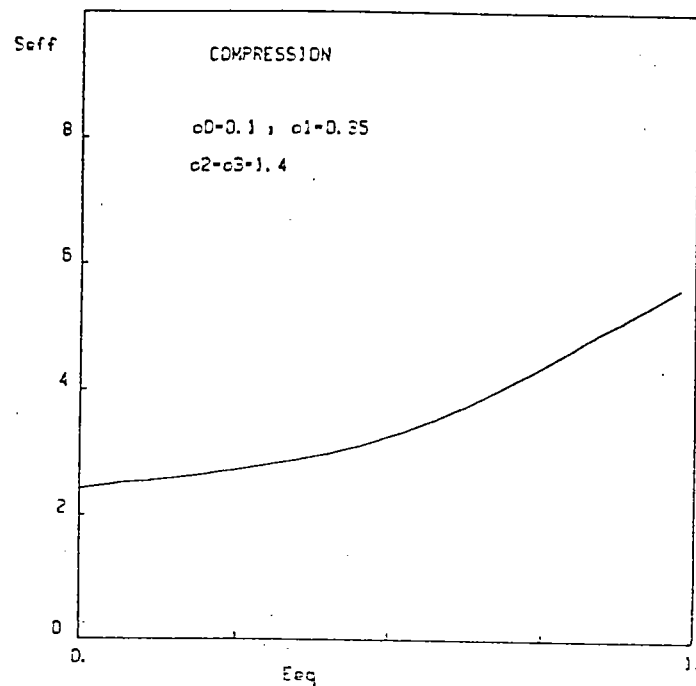


Figure 6.4. : Résultats des textures pour un faible écrouissage latent. ( $\epsilon_e = 1$ ). a) Traction ; b) compression ; c) laminage ; d) torsion.

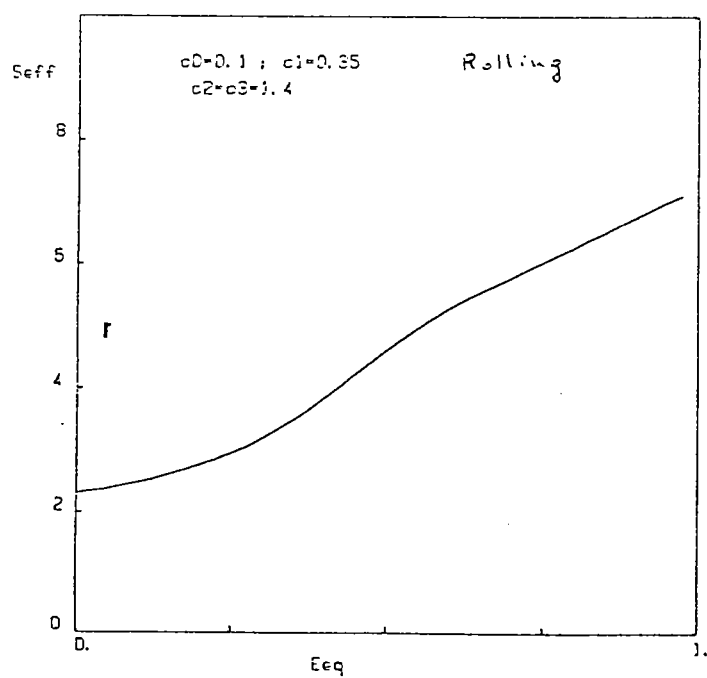


a

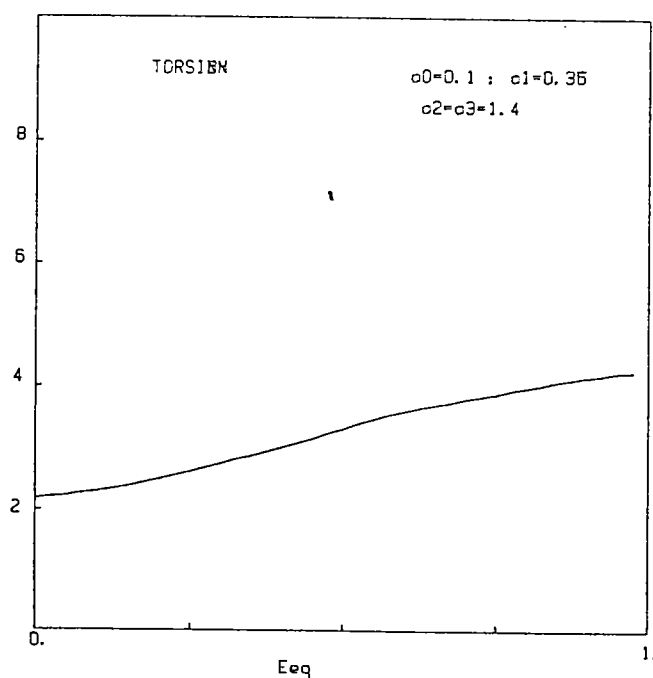


b

$$S_{eff} = S : D / \tau_0^0 D_{eq}$$



c



d

Figure 7.4. : comportement macroscopique pour un fort écouissage latent. a) Traction ; b) compression ; c) laminage ; d) torsion.

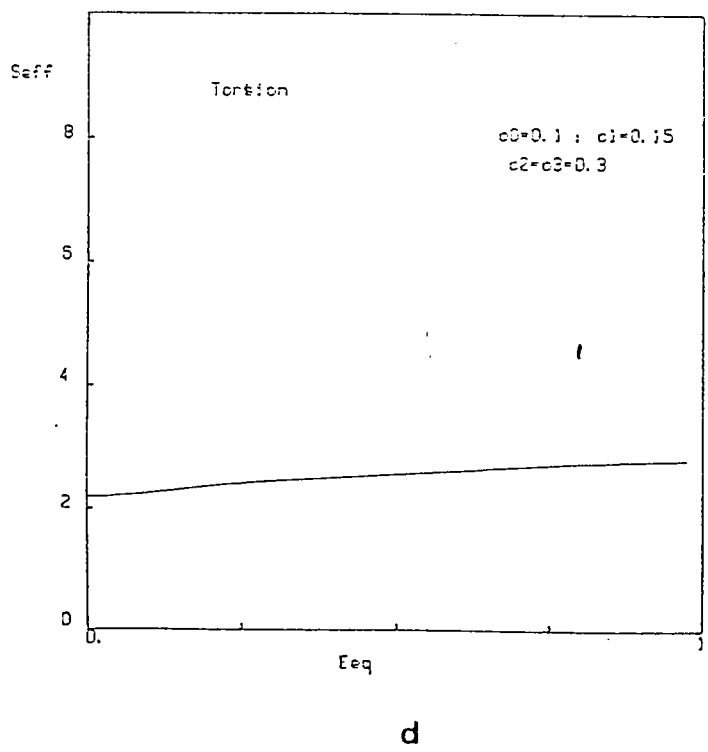
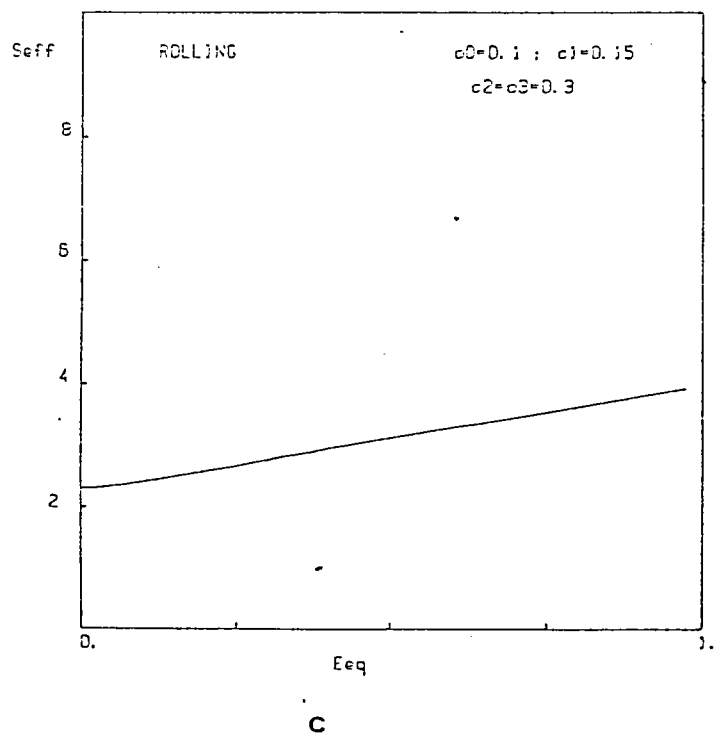
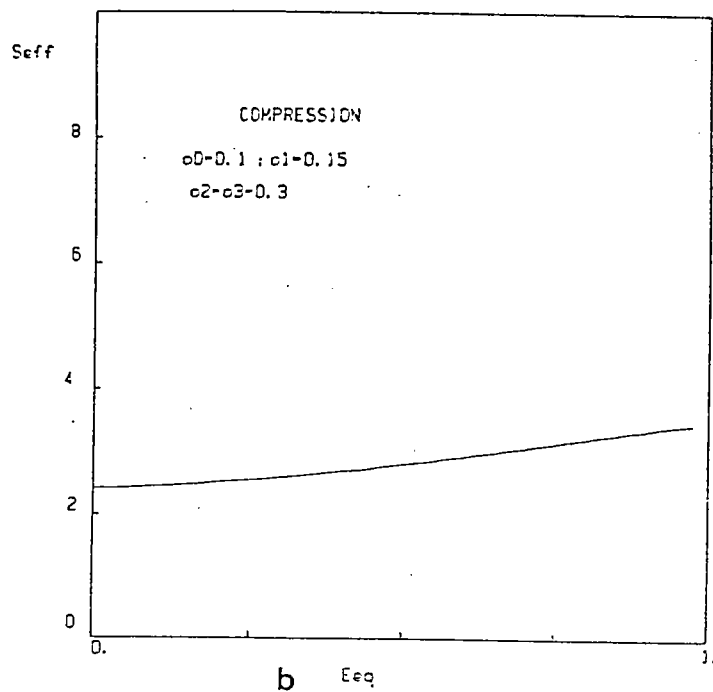
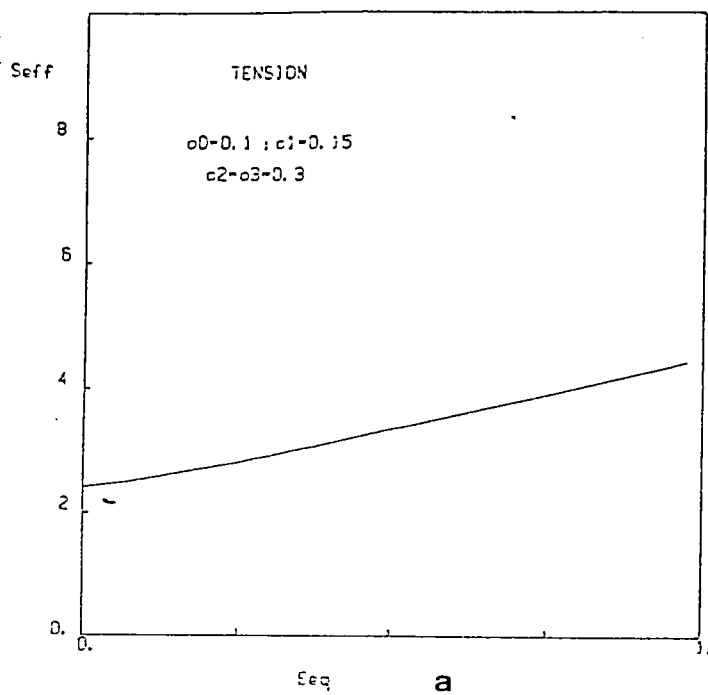


Figure 9.4. : comportement macroscopique pour un faible écouissage latent. a) Traction ; b) compression ; c) laminage ; d) torsion.

modèle-self consistent viscoplastique, donne plus de "liberté" aux grains. On s'attendrait notamment à ce qu'un écrouissage microscopique très anisotrope diminue significativement le nombre de systèmes actifs et trouver des textures prédites plus proches de celle du laiton. En réalité, l'effet n'est pas très marqué et quelle que soit l'anisotropie appliquée, bien que l'on aperçoive parfois la composante laiton, la texture d'ensemble est plutôt de type cuivre.

## II Effet de forme.

Le modèle classique le plus utilisé pour la prédiction des textures de déformation est le modèle de Taylor-Bishop-Hill. Malgré l'accord qualitatif des textures cristallographiques prédites par ce modèle et les textures expérimentales en déformation à froid [10-11], ce modèle a plusieurs limites. Parmi ces limites : le nombre de systèmes actifs qui doit être d'au moins 5 et la forme des grains qui est supposée équiaxe. Pour prendre en compte la forme des grains, Honneff et Mecking [12] ont modifié le modèle de Taylor-Bishop-Hill en proposant le modèle Taylor relaxé (DPI). Ce modèle permet une réduction du nombre des systèmes actifs (3 ou 4 au lieu de 5) et améliore la texture du laminage. L'extension de ce dernier modèle au cas de la torsion, améliore aussi grandement les résultats. Par contre, en compression, le modèle de Taylor relaxé n'améliore pas les résultats. Bunge et al. [13] ont proposé une nouvelle manière de prendre en compte la forme des grains dans la simulation des textures par le modèle de Taylor-Bishop-Hill. Cette nouvelle manière consiste à utiliser la relation de Hall-Petch qui permet d'écrire la cission résolue critique  $\tau_c$  en fonction de la taille moyenne du grain  $l$  :

$$\tau_c = \tau_0 + K\Gamma^{-1/2} \quad (10-4)$$

où  $\tau_0$  est la cission résolue critique pour un grain infiniment grand et  $K$  une constante. Les résultats obtenus pour le laminage de l'acier ont été confrontés à ceux du modèle de Taylor relaxé.

Nous remarquons que la prise en compte de la forme, dans le cadre du modèle classique (Taylor-Bishop-Hill), se fait intuitivement ou par l'utilisation des relations empiriques.

Avec les modèles self-consistants, ce problème de forme est résolu de manière continue car la forme des grains intervient directement dans la loi d'interaction. Dans le cadre de ces modèles, Tiem et al. [14] ont analysé l'effet de forme sur l'activation des systèmes de glissement et sur la rotation cristalline. Ils ont utilisé la loi de Kröner généralisée, qui s'écrit dans le cas de l'élasticité isotrope:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \Sigma_{ij} + 2\mu(I_{ijkl} - S_{ijkl})(E_{ke}^p - \epsilon_{ke}^p) \\ &= \Sigma_{ij} + 2\mu Q_{ijkl} (E_{ke}^p - \epsilon_{ke}^p) \end{aligned} \quad (11-4)$$

où le tenseur d'Eshelby  $S$  dépend de la forme du grain et  $I$  le tenseur identité du quatrième ordre. La variation des coefficients  $Q_{ijkl}$  en fonction de la déformation ont permis de conclure que le modèle de Kröner généralisé est équivalent au modèle de Taylor relaxé.

La rotation totale locale s'écrit dans ce cas sous la forme :

$$\omega^i = \bar{\omega} + \begin{bmatrix} 0 & p\Delta\epsilon_{12}^p & q\Delta\epsilon_{13}^p \\ 0 & 0 & r\Delta\epsilon_{23}^p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12-4)$$

$\bar{\omega}$  est la rotation à l'infini,  $\Delta$  désigne la différence entre la déformation plastique locale et la déformation plastique macroscopique correspondante.  $p$ ,  $q$  et  $r$  dépendent de la déformation. Les résultats de Tiem et al. [14] ont montré l'intérêt de prendre en compte la forme

des grains. Néanmoins, le modèle de Kröner généralisé qu'ils ont utilisé est formulé avec l'hypothèse des petites déformations. Il est donc nécessaire de voir cet effet de forme avec un modèle en grandes déformations dans lequel cet effet pourra être pris en compte pour la prédiction des textures. C'est ce que nous allons voir dans le cas du modèle self-consistant viscoplastique.

La loi d'interaction s'écrit :

$$S = \bar{S} + (\Gamma^{gg-1} + A^0) : (D - \bar{D}) \quad (13-4)$$

Dans le cas d'une matrice isotrope, nous supposons :

$$A^0 = \mu I \quad (14-4)$$

Dans ce cas,  $\Gamma^{gg-1}$  est proportionnel à  $\mu$  (annexe A), la loi d'interaction peut s'écrire sous la forme :

$$S = \bar{S} + \mu K : (D - \bar{D}) \quad (15-4)$$

En utilisant la vectorisation des contraintes et des vitesses de déformation décrite dans l'annexe B, le tenseur  $K$  s'écrit sous la forme d'une matrice carré (5\*5) et la relation (15-4) s'écrit sous la forme :

$$S_i = \bar{S}_i + \mu K_{i,j} (D_j - \bar{D}_j) \quad (16-4)$$

Les coefficients  $K_{i,j}$  dépendent de la forme du grain. Nous avons représenté la variation de ces coefficients pour le cas d'un grain en traction ou compression sur la figure (8-4) et pour le cas du grain laminé sur la figure (9-4).

En ce qui concerne la rotation totale locale, elle est donnée par la relation :

$$\Omega_{i,j}^T = \bar{\Omega}_{i,j} + (B_{ij}^{*g} \Gamma_{k\ell mn}^{*g}) (D_{mn} - \bar{D}_{mn}) \quad (17-4)$$



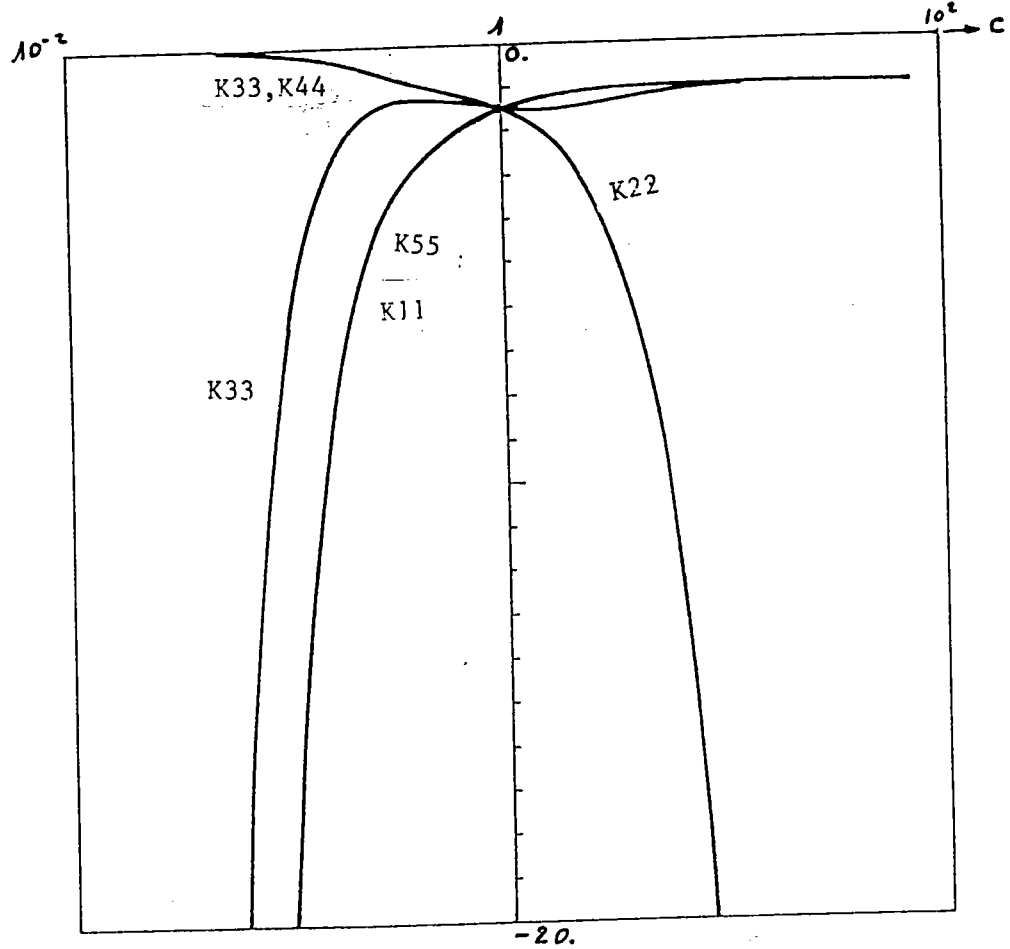


Figure 9.4. : variation des coefficients d'interaction  $K_{ij}$  pour la traction et compression.

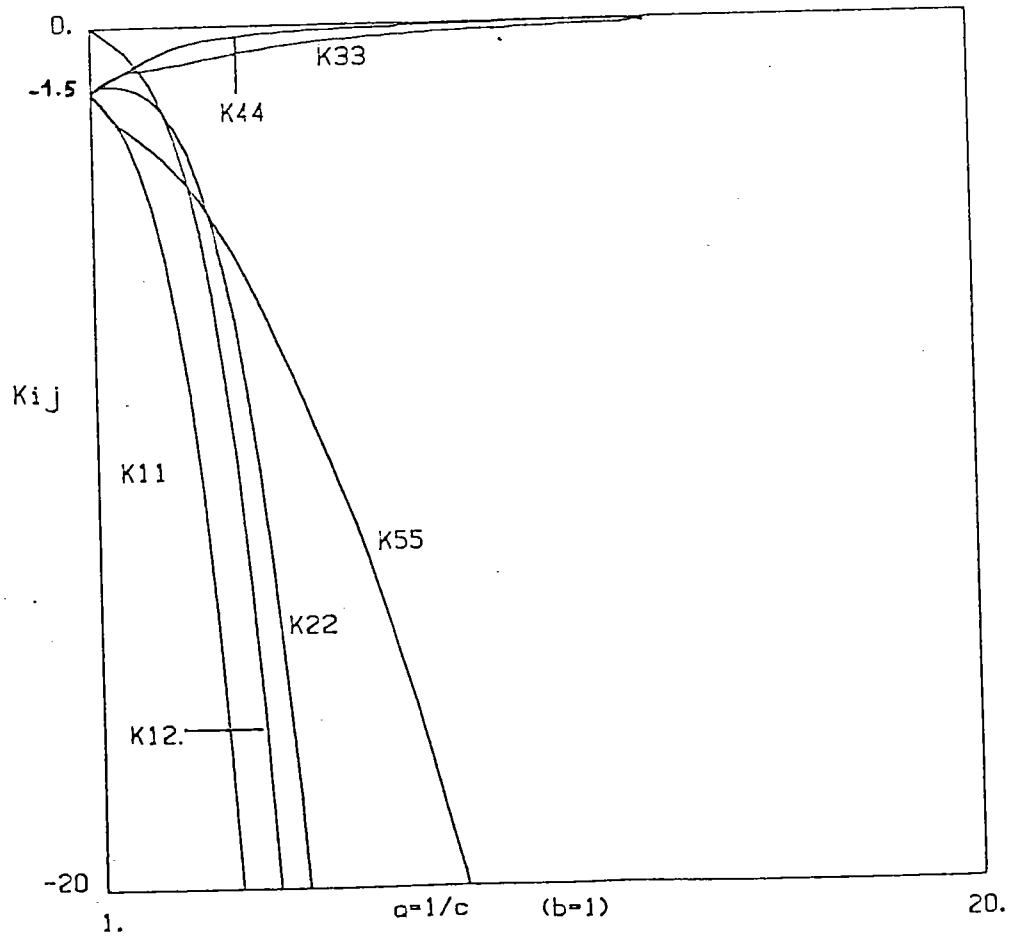


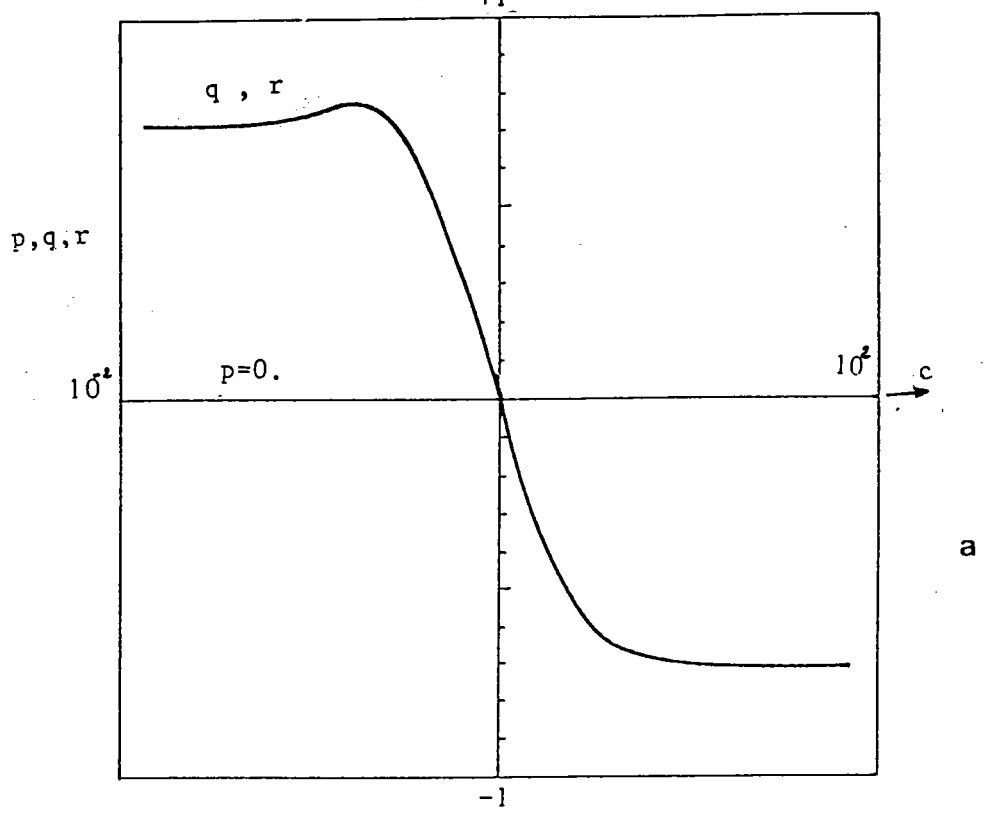
Figure 10.4. : variation des coefficients d'interaction pour une grain laminé.

Les coefficients  $B^{ij}$  sont proportionnels au module tangent  $\mu$  (annexe A). Le produit de  $B^{ij}$  par  $\Gamma^{ij-1}$  donne alors des coefficients sans dimension. En effectuant ce produit, on trouve alors, pour la vitesse de rotation totale locale  $\bar{\Omega}^T$  une relation, similaire à la relation (12-4)

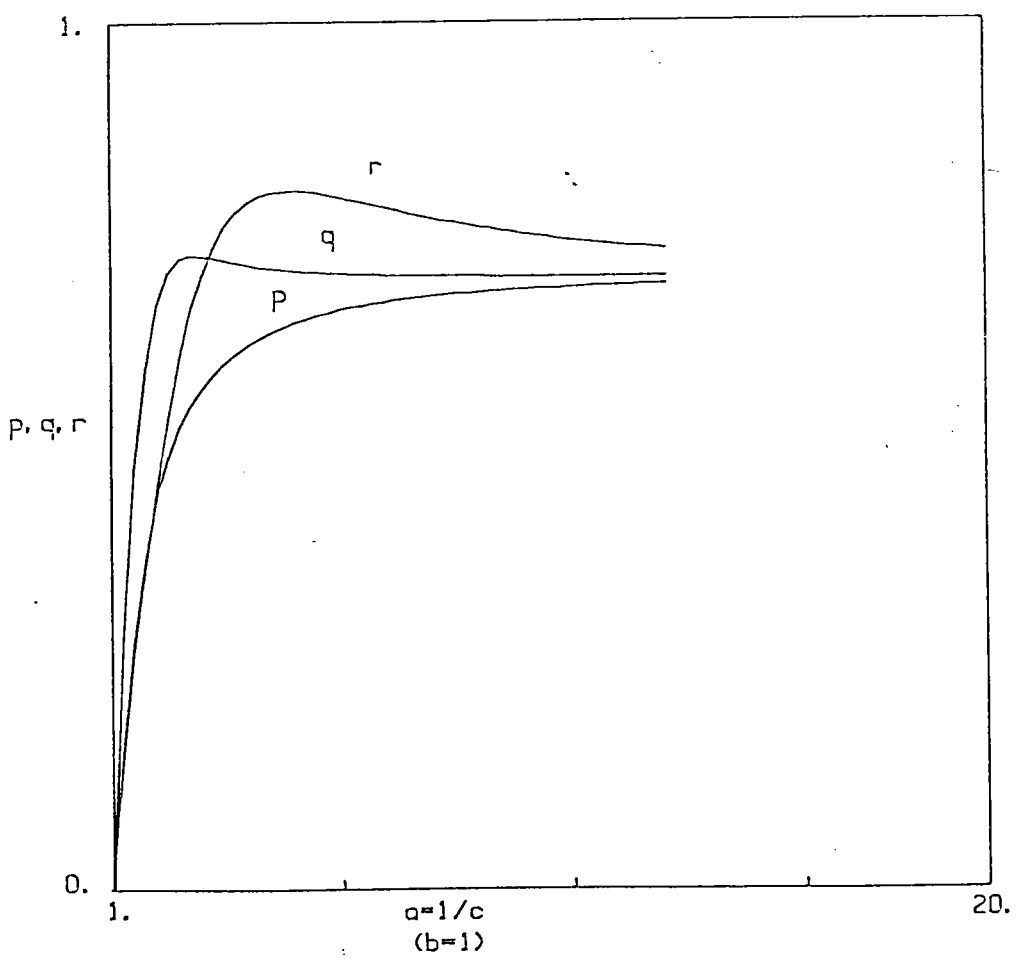
$$\bar{\Omega}_{i,j}^T = \Omega_{i,j} + \begin{bmatrix} 0 & p(D_5 - \bar{D}_5) & q(D_4 - \bar{D}_4) \\ & 0 & r(D_3 - \bar{D}_3) \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad (18-4)$$

Les variations des coefficients  $p, q$  et  $r$  sont représentées sur la figure (10-4) pour la traction et compression et pour le laminage.

Pour prendre en compte la forme du grain dans la prédiction des textures, on peut le faire de deux façons. La façon réaliste consiste à actualiser la forme du grain après chaque incrément de déformation. La procédure d'actualisation des paramètres et des axes principaux du grain est décrite dans le chapitre 6. La façon simplifiée pour la prise en compte de la forme est de considérer une forme initiale (plate-cigare...) non actualisée. C'est cette deuxième façon que nous avons considéré pour les résultats présentés pour cette partie. Nous avons considéré différentes formes de grains dont les axes principaux coïncident avec les axes de l'échantillon. Les résultats de textures pour la compression et le laminage des grains plats sont représentés par les figures (11-4 ; 12-4).



a



b

Figure 11.4. : variation des coefficients  $p, q, r$ , pour :  
a) traction et compression, b) laminage.

### Conclusion

Les prédictions de texture en traction, en prenant en compte les effets morphologiques, ne diffèrent pas trop des prédictions pour les grains sphériques. Par contre, en compression, alors que la texture était très concentrée sur  $\langle 110 \rangle$  pour les inclusions sphériques, elle s'étend à présent vers l'axe  $\langle 100 \rangle$ - $\langle 111 \rangle$ . Le point vers lequel elle tend sur cet axe est difficile à déterminer en raison du nombre restreint de grains. Néanmoins ceci tend à diminuer l'intensité de la fibre  $\langle 110 \rangle$  ce qui est un fait expérimental noté par N. Hansen et T. Leffers [15]. Cette diminution relative est due au fait que la déformation plane est de plus en plus difficile lorsque les grains s'applatissent car l'interaction augmente.

Les résultats en laminage diffèrent notablement lorsque les effets morphologiques sont pris en compte. En effet, on a pu remarquer une accumulation de la composante cuivre. Lorsqu'un rapport de forme est appliqué (par exemple  $a = (1/c) = 2$ ,  $b = 1$ ), on trouve une accumulation de la composante laiton.

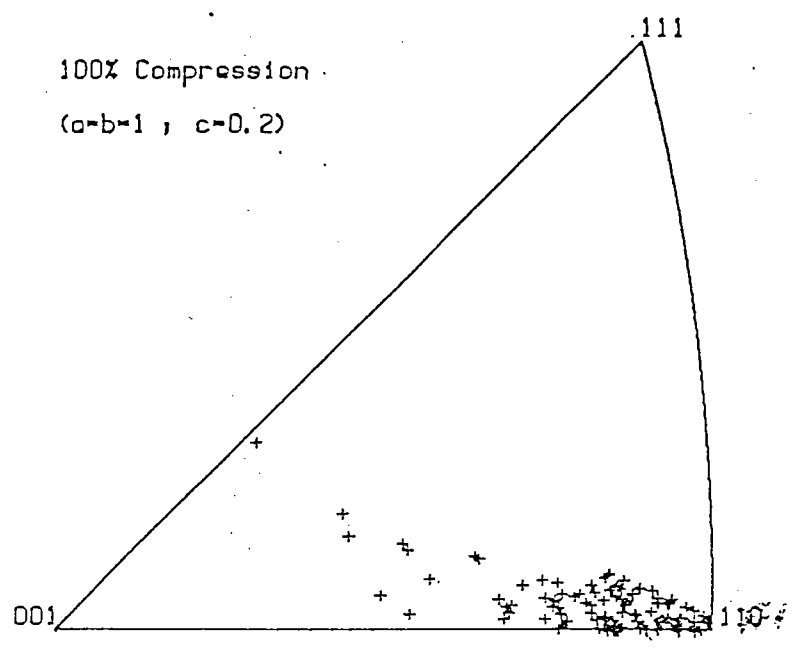


Figure 12.4. : Texture de la compression des grains plats. a, b, et c, sont les paramètres des grains.

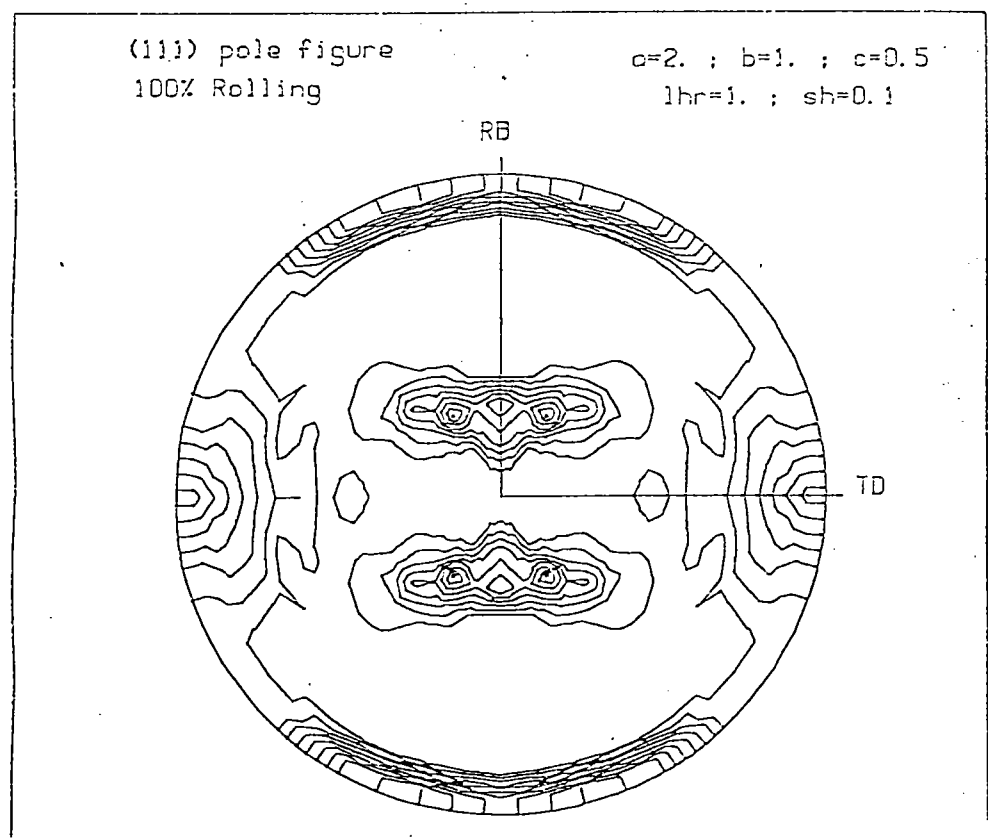


Figure 13.4. : Texture du laminage des grains plats de paramètres a, b, c,

REFERENCES

- [1] . W.PRAGER, J. Appl. Phys. **20**, p.350, (1949).
- [2] . W.T. KOITER, Q. Appl. Math. **11**, p.350, (1953).
- [3] . J. MANDEL, Int. J.Solids Struct. **1**, p.273, (1965).
- [4] . R.HILL et J. R. RICE, J. Mech. Phys. Solids, **20**, p.401, (1972).
- [5] . K.S. HAVNER, Mechanics of solids R.Hill, 60 th. Anniv. **1**,p.265, (1982).
- [6] . P. FRANCIOSI, Thèse d'Etat, Paris Nord, (1984).
- [7] . C. TOME, G.R. CANOVA, U.F. KOCKS, N.CHRISTO DOULOU et J.J.Jonas Acta.Met **32**, pp 1637-1653, (1984).
- [8] . E. VOCE, J. Inst. Metals, **74**, 537, (1948).
- [9] . P. FRANCIOSI M. BERVEILLER et A. ZAOUJ, Acta. Met. **28**, pp 274-283, (1980).
- [10]. H.J. BUNGE, Kristall.Techn., **5**, 145, (1970).
- [11]. J. GIL SEVILLANO, P. VAN HOUTTE et E. AERNOUDT prog. Mat. Sci., **25** , p.69, (1980).
- [12]. H. HONNEFF et H. MECKING. Proc. Icotom **6,1**, p.428, (1978).
- [13]. H.J. BUNGE, F. WAGNER, P.I. Welch et P. Van Houtte. J. Phys. litt., **46** p.1103-1113, (1985).
- [14]. S. TIEM, M. BERVEILLER, G.R. CANOVA, Acta. Met., **34** pp.2139-2149, (1986).
- [15]. N. HANSEN et T. LEFFERS, communication privée.

## CHAPITRE 5

### APPROCHE VISCOPLASTIQUE A N SITES

L'approche autocohérente à n sites consiste à prendre en compte l'interaction entre chaque grain g et son environnement représenté par les n premiers voisins g' et la matrice infinie. Au delà des premiers voisins, les grains sont remplacés par le milieu homogène équivalent (M.H.E).

#### FORMULATION

La formulation de base a été faite dans le chapitre 2. [1,2]. Nous reprenons cette formulation, mais cette fois-ci pour l'approximation à n sites. et dans ce cas on obtient pour les vitesses de déformation (équation (43-2)):

$$D_{nm}^g = \bar{D}_{nm} + \sum_{g'} \Gamma_{nmij}^{gg'} \left[ \tilde{A}_{ijk}^g D_{ke}^{g'} + \tilde{S}_{ij}^{gg'} \right] \quad (1-5)$$

$$\text{avec} \quad \Gamma_{nmij}^{gg'} = (1/V_g) \int_{V_g} \int_{V_{g'}} (\Gamma_{nmij}(r-r') d^3 r') d^3 r \quad (2-5)$$

L'approche à n sites consiste à remplacer les grains g' assez éloignés du grain g par le MHE. On pose donc, pour ces grains :

$$\tilde{A}^{g'} = 0 \text{ et } \tilde{S}^{gg'} = 0$$

Le fait de négliger ces termes dans (1-5) peut se justifier en considérant que  $\Gamma^{gg'}$  tend vers zéro quand g' s'éloigne de g (propriété de la fonction de Green) et par le fait que  $\tilde{A}$  et  $\tilde{S}^0$  sont nuls en moyenne.

En raisonnant de la même manière que pour les vitesses des déformations, on obtient pour les vitesses de rotation totale :

$$\Omega_{nm}^g = \bar{\Omega}_{nm} + \sum_{g'} B_{nmij}^{gg'} [\tilde{A}_{ijk}^g D_{ke}^{g'} + \tilde{S}_{ij}^{gg'}] \quad (3-5)$$

$$\text{avec } B_{nmij}^{gg'} = (1/V_g) \int_{V_g} \int_{V_{g'}} (B_{nmij} (r-r') d^3r') d^3r \quad (4-5)$$

Une nouvelle loi d'interaction pour le schéma à n sites peut-être déduite de la relation (1-5). En utilisant la décomposition de A et S° définie par les relations (24-2), ainsi que les relations du comportement tangent à la fois du grain (15-2) et de la matrice (23 -2), la relation (1-5) s'écrit alors :

$$D^g - \bar{D} = \sum_{g'} \Gamma^{gg'} [S^{g'} - \bar{S} - A^0 (D^{g'} - \bar{D})] \quad (5-5)$$

ou encore :

$$D^g - \bar{D} = \Gamma^{gg} (S^g - \bar{S} - A^0 (D^g - \bar{D})) + \sum_{g' \neq g} \Gamma^{gg'} [S^{g'} - \bar{S} - A^0 (D^{g'} - \bar{D})]$$

Cette équation nous permet d'exprimer la loi d'interaction par la relation suivante :

$$S^g - \bar{S} = [\Gamma^{gg-1} + A^0] (D^g - \bar{D}) - \Gamma^{gg-1} \sum_{g' \neq g} \Gamma^{gg'} [S^{g'} - \bar{S} - A^0 (D^{g'} - \bar{D})] \quad (6-5)$$

Le tenseur  $\Gamma^{gg}$  est dépendant de la forme du grain g, la méthode de calcul des coefficients de ce tenseur est donnée en annexe A. Le tenseur  $\Gamma^{gg'}$  est dépendant de la forme des grains g et g' ainsi que de la position du grain g' par rapport à g. Ce tenseur est calculé pour la moitié des (n - 1) paires d'inclusions (g,g'). Si les positions des inclusions g' et g" sont symétriques par rapport à g, alors :

$$\Gamma^{gg'} = \Gamma^{gg''} \quad (7-5)$$

Les coefficients  $\Gamma_{ijkl}^{gg'}$  présentent les symétries suivantes :

$$\Gamma_{ijkl}^{gg'} = \Gamma_{jikl}^{gg'} = \Gamma_{ijlk}^{gg'} = \Gamma_{jilk}^{gg'} \quad (8-5)$$



Le problème de la paire d'inclusion [3-4] constitue une des bases de l'approche à n sites. Ce problème a fait l'objet de quelques études et applications [3-4-5-6]. La méthode numérique du calcul du tenseur  $\Gamma^{gg'}$  dans le cas de deux inclusions ellipsoïdales d'axes principaux différents a été développée par Fassi-Fehri [6]. Elle consiste à utiliser la méthode de la transformation de Fourier déjà utilisée pour le calcul des coefficients de  $\Gamma^{gg}$  (annexe A) dans le cas d'une seule inclusion [7-8-9]. Cette méthode numérique est la suivante :

Le calcul des coefficients de  $\Gamma^{gg'}$  est lié au calcul des coefficients  $\gamma^{gg'}$  définis par :

$$\gamma_{ijkl}^{gg'} = (1/8\pi^3 V_g) \int_{V_g} \int_{V_{g'}} \int_{V_k} k_i k_j k_l \tilde{G}_{ijk} \exp[-ik(r-r')] d^3r d^3r' dV_k \quad (9-5)$$

$V_g$  et  $V_{g'}$  sont les volumes des grains  $g$  et  $g'$  et  $V_k$  est le volume de l'espace de Fourier.  $\Gamma^{gg'}$  est la partie symétrique de  $\gamma^{gg'}$  :

$$\Gamma_{ijkl}^{gg'} = 1/4 (\gamma_{ijkl}^{gg'} + \gamma_{ijlk}^{gg'} + \gamma_{jilk}^{gg'} + \gamma_{iljk}^{gg'}) \quad (10-5)$$

Soit  $a_1, b_1, c_1$  et  $a_2, b_2, c_2$  les paramètres respectifs des inclusions  $g$  et  $g'$  et  $R^g$ , et  $R^{g'}$  sont leurs repères principaux respectifs. Soit  $R^0$  le vecteur liant les centres  $o_1$  et  $o_2$  des deux inclusions. Le vecteur  $r'$  peut s'écrire alors :

$$r' = R^0 + r_2 \text{ et } dr' = dr_2 \quad (11.5)$$

Les coefficients de  $\gamma^{gg'}$  s'écrivent dans ce cas :

$$\gamma_{ijkl}^{gg'} = 1/8\pi^3 V_g \int_{V_k} dV_k k_j k_l \tilde{G}_{ijk} \exp(ik \cdot R^0) \int_{V_{g'}} \exp(ik \cdot r_2) d^3r_2 \int_{V_g} \exp(-ik \cdot r) d^3r \quad (12.5)$$

En utilisant le changement de variable ( $r \rightarrow R$  et  $k \rightarrow K$ ) donnée dans l'annexe A, et en exprimant les vecteurs dans le repère  $R^0$ , Fassi-Fehri [6] a calculé les intégrales sur  $V_0$  et  $V_0'$  en utilisant les résultats de Morris [7].

En coordonnées cylindriques,  $dV_k$  s'écrit :

$$dV_k = k^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, dk$$

Les calculs de l'intégrale sur  $k$  ont conduit Fassi-Fehri [6] à définir une fonction  $F(\theta, \varphi)$  par :

$$\begin{aligned} F(\theta, \varphi) = & 1/24 [-\alpha^3 + 3b\alpha^2 + 3a\alpha^2 - 6ab\alpha] \int_0^{+\infty} \sin(\alpha k)/k \, dk + \\ & 1/24 [\beta^3 - 3b\beta^2 + 3a\beta^2 - 6ab\beta] \int_0^{+\infty} \sin(\beta k)/k \, dk + \\ & 1/24 [\gamma^3 + 3b\gamma^2 - 3a\gamma^2 - 6ab\gamma] \int_0^{+\infty} \sin(\gamma k)/k \, dk + \\ & 1/24 [-\delta^3 + 3b\delta^2 + 3a\delta^2 - 6ab\delta] \int_0^{+\infty} \sin(\delta k)/k \, dk + \end{aligned} \quad (13.5)$$

avec  $\alpha = a + b - c$  ;  $\beta = b + c - a$

$$\gamma = c + a - b$$
 ;  $\delta = a + b + c \quad (14.5)$

Les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont liés aux cosinus directeurs  $x_i$  du vecteur  $k$  par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a &= a_1 [x_1^2 + (b_1/a_1)^2 x_2^2 + (c_1/a_1)^2 x_3^2]^{1/2} \\ b &= a_2 [(\alpha_{1j} x_j)^2 + (b^2/a^2)^2 (\alpha_{2j} x_j)^2 + (c_2/a_2)^2 (\alpha_{3j} x_j)^2]^{1/2} \\ c &= x_1 R_1^2 + x_2 R_2^2 + x_3 R_3^2 \end{aligned} \quad (15.5)$$

où  $\alpha_{ij}$  est la matrice de passage du repère  $R^{0'}$  au repère  $R^0$ .

Les intégrales sur  $k$  sont données par :

$$\int_0^{+\infty} \sin(\alpha k)/k \, dk = \begin{cases} +\pi/2 & \text{si } \alpha > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \quad (16.5)$$

Finalement, les coefficients de  $\gamma^{00'}$  pour deux inclusions ellipsoïdales  $g$  et  $g'$  sont :



$$\gamma^{gg'}_{ijk} = (2/\pi V_g) (a_1 b_1 c_1 a_2 b_2 c_2) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta k_j \tilde{k}_k G_{ij} F d\theta / a^3 b^3 \quad (17.5)$$

Les coefficients du tenseur  $B^{gg'}$  qui interviennent dans le calcul des vitesses de rotation sont liés aux coefficients de  $\gamma^{gg'}$  par les relations suivantes :

$$B^{gg'}_{ijk} = 1/4 (\gamma^{gg'}_{ijek} - \gamma^{gg'}_{jik} + \gamma^{gg'}_{ijek} - \gamma^{gg'}_{jik}) \quad (18.5)$$

Dans le cas de deux inclusions sphériques inhomogènes de même rayon  $R$  dont la droite joignant leurs centres est parallèle à l'axe  $x_3$  (figure(1-5)), Berveiller et Zaoui [4] ont représenté la variation du rapport  $\epsilon_{33}/E_{33}$  entre la déformation élastique moyenne  $\epsilon_{33}$  dans l'inclusion isotrope et la déformation de la matrice isotrope  $E_{33}$  en fonction de la distance  $X$  ( $X = \rho/R$ , avec  $\rho$  la distance entre les inclusions), et du rapport des modules élastiques  $\mu_1/\mu_0$  (figure (1-5)). Ces courbes montrent que "l'effet de paire" est sensible pour des inclusions proches et des inhomogénéités marquées.

Nous supposons le cas des deux inclusions sphériques de même rayon  $R$  tangentes suivant l'axe  $\vec{x}_3$  ( $\rho = 2R \vec{x}_3$ ). Pour une matrice isotrope de module tangent  $\mu$  ( $A^0 = \mu I$ ). Les coefficients du tenseur d'interaction  $\Gamma^{gg'}$  sont donnés analytiquement par les relations suivantes :

$$\begin{array}{l|l} \Gamma_{11}^{11} = \Gamma_{22}^{22} = -1/240 \mu & \Gamma_{13}^{13} = \Gamma_{23}^{23} = 1/40 \mu \\ \Gamma_{22}^{11} = \Gamma_{11}^{22} = -7/240 \mu & \Gamma_{33}^{33} = -1/15 \mu \\ \Gamma_{33}^{11} = \Gamma_{11}^{33} = 1/30 \mu & \Gamma_{22}^{22} = 1/80 \mu \\ \Gamma_{33}^{22} = \Gamma_{22}^{33} = 1/30 \mu & \end{array} \quad (19.5)$$

Cette expression analytique est analogue à celle qui a été proposée par Berveiller et al. [5] dans le cas de l'élasticité isotrope.

En ce qui concerne la vitesse de rotation totale  $\Omega^g$  dans chaque grain  $g$ , elle est donnée par la relation (3-5). Cette relation peut s'écrire, en utilisant la loi d'interaction (6-5), sous la forme :

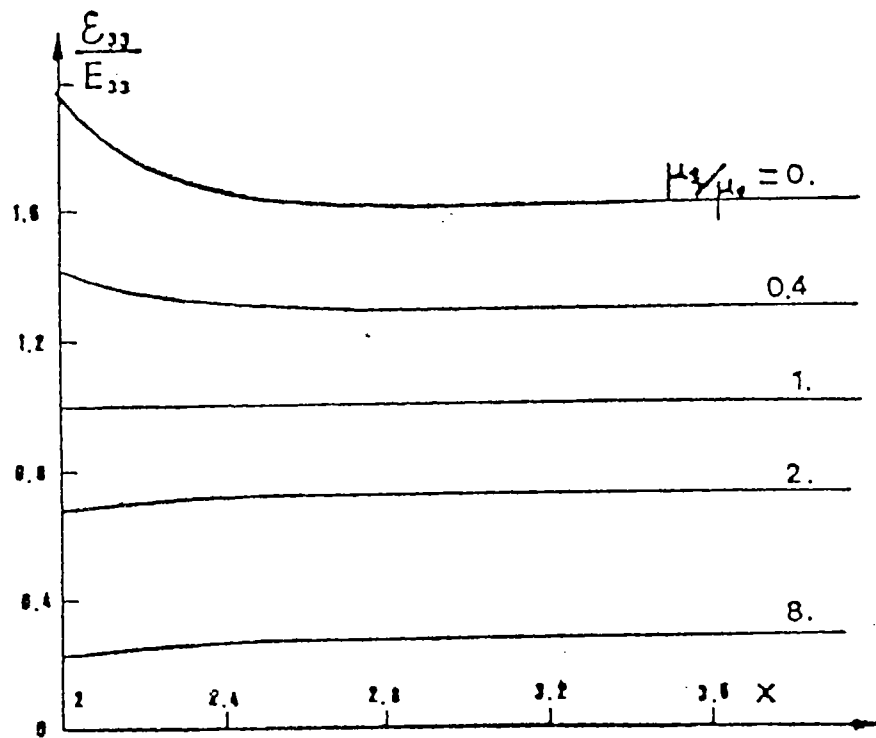


Figure 1.5. : Rapport  $\epsilon_{33}/E_{33}$  entre la déformations élastique moyenne  $\epsilon_{33}$  et la déformation de la matrice  $E_{33}$  en fonction du rapport  $x = \rho/R$  dans le cas de deux inclusions sphériques inhomogènes.

$$\Omega^g - \bar{\Omega} = B^{gg} [\Gamma^{gg}]^{-1} (D^g - \bar{D}) + \sum_{g' \neq g} [-B^{gg'} [\Gamma^{gg'}]^{-1} \Gamma^{gg'} + B^{gg'}] [\bar{S}^{g'} - S + A^0 (D^{g'} - \bar{D})] \quad (20-5)$$

La méthode numérique du calcul du tenseur  $B^{gg'}$  est la même que celle du tenseur  $\Gamma^{gg'}$ , les coefficients de  $B^{gg'}$  sont donnés par la relation (18.5). Dans le cas d'inclusions sphériques dans une matrice isotrope de module tangent  $\mu$  ( $A^0 = \mu I$ ),  $\Omega^g$  s'écrit sous la forme simple :

$$\Omega^g = \bar{\Omega} + \begin{bmatrix} 0 & P & Q \\ & 0 & R \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad (21-5)$$

avec

$$\begin{aligned} P &= \sum_{g' \neq g} B^{gg'}{}'_{12k} [S^{g'}_k - \bar{S}_k - \mu(D^{g'}_k - \bar{D}_k)] \\ Q &= \sum_{g' \neq g} B^{gg'}{}'_{13k} [S^{g'}_k - \bar{S}_k - \mu(D^{g'}_k - \bar{D}_k)] \\ R &= \sum_{g' \neq g} B^{gg'}{}'_{23k} [S^{g'}_k - \bar{S}_k - \mu(D^{g'}_k - \bar{D}_k)] \end{aligned} \quad (22-5)$$

Les coefficients  $B^{gg'}{}'_{ijkl}$  sont symétriques par rapport à  $kl$  et antisymétriques par rapport à  $ij$ . Le dernier indice  $k$  des relations (12-5) correspond à la vectorisation (1 → 5) des indices  $kl$ .

Nous avons testé cette approche dans le cas de traction et compression uniaxiales et dans le cas du laminage. Pour cela, nous avons considéré une distribution périodique des grains sphériques dans l'espace. Les grains qui sont à la surface du volume considéré ont une solution à un site. Cependant, seuls les grains du coeur de ce volume sont traités en  $n$  sites. Nous avons considéré dans un premier temps une approche à 6

sites. Les 6 premiers voisins sont tangents au grain considéré dans les trois directions  $x_1, x_2$  et  $x_3$ . (Nous avons pris dans ce cas 125 grains, 27 grains parmi les 125 ont une solution à 6 sites). Nous avons représenté le résultat des textures de traction, de compression et du laminage pour les 125 grains (figures 2-5 et 3-5).

Pour voir l'évolution de la texture des grains dont la solution correspond à 6 sites, nous avons représenté la texture de traction pour les 27 grains du coeur (figure (4-5)). Les courbes contrainte-déformation sont représentées par les figures (5-5 ; 6-5). Dans un deuxième temps, nous avons considéré l'approche à 26 sites en traitant 343 grains. Il y a donc, dans ce cas, 125 grains dont la solution correspond à l'approche de 26 sites. Le résultat des textures de traction, de compression et du laminage pour les 125 grains traités en 26 sites sont représentés sur la figure (8-5).

Sur les figures (9-5) nous avons représenté la loi d'écrouissage macroscopique. Les figures (7-5) représentent les déviations de D et de S par rapport à D et S (respectivement).

#### CONCLUSION.

Nous avons pris en compte les interactions entre les grains en considérant l'approche à 6 sites puis l'approche à 26 sites. Les résultats de texture apportent une petite correction aux résultats de l'approche à 1 site. C'est ce qu'on pouvait attendre car d'après la loi d'interaction, le terme correctif est du second ordre. La texture se développe plus vite avec l'approche à n sites.

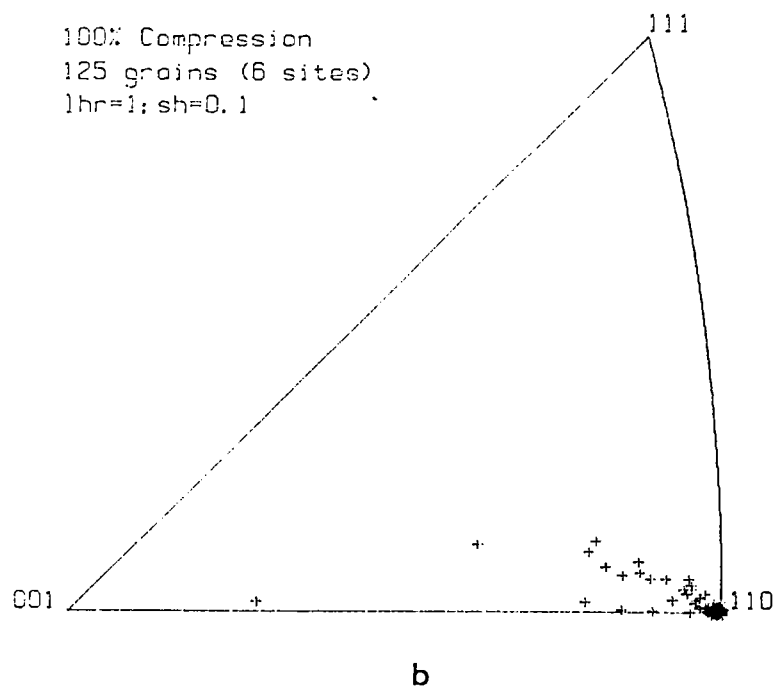
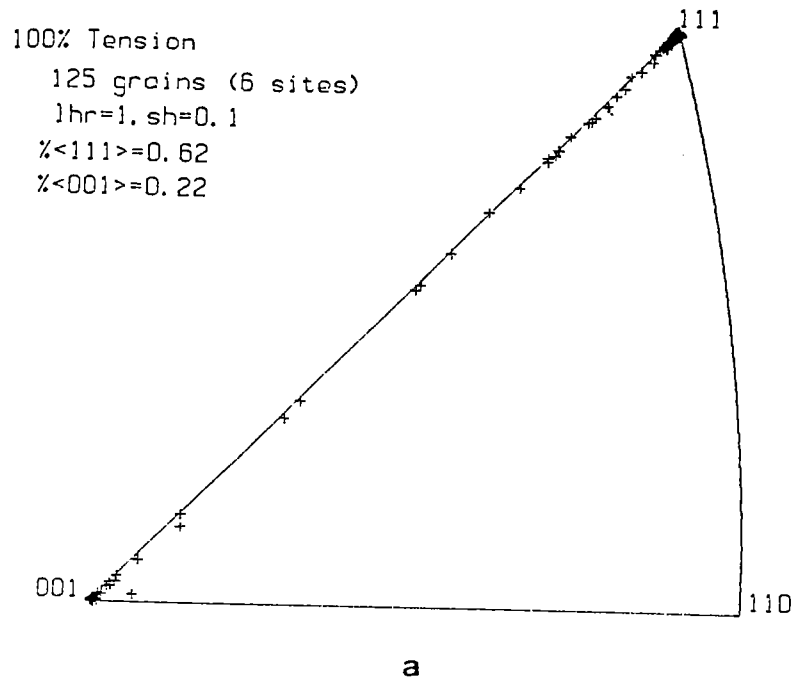


Figure 2.5. : Texture prédites par l'approche à 6 sites ( $\epsilon_e = 1$ ).  
 a) Traction uniaxiale  
 b) Compression uniaxiale.

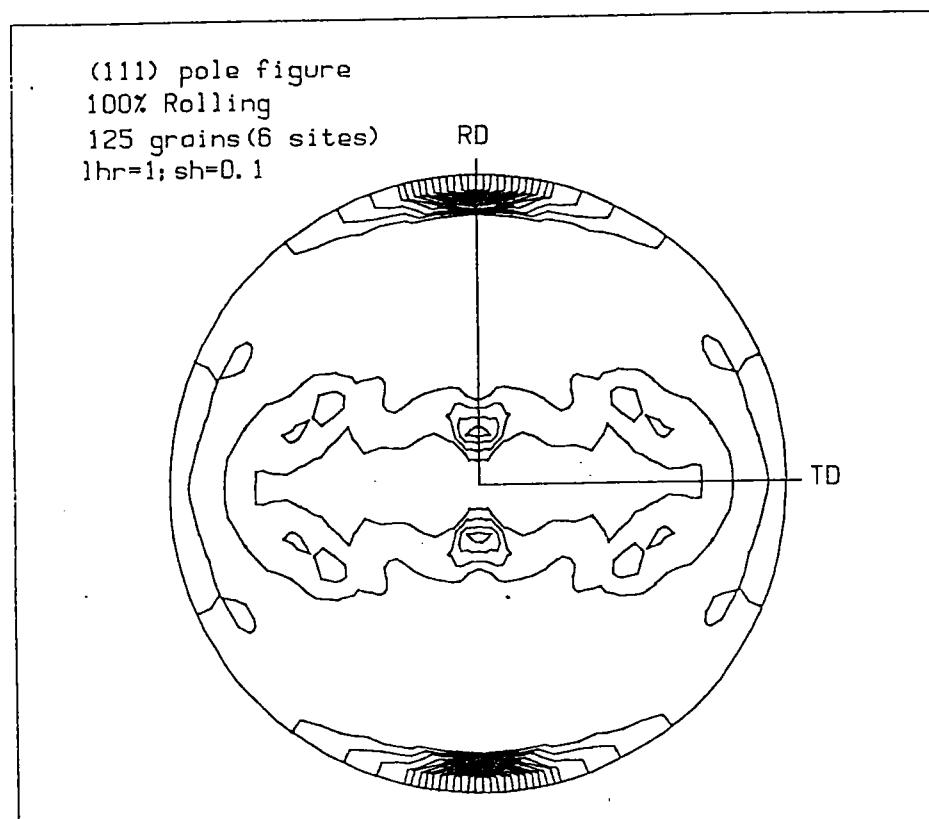
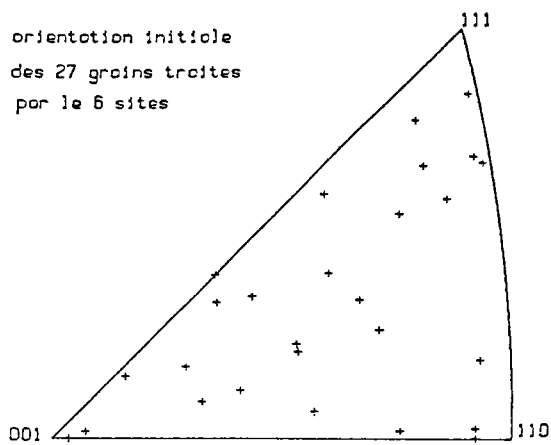
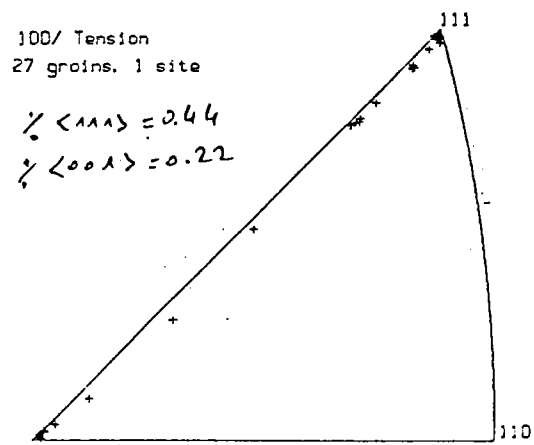


Figure 3.5. : Figure de pôles (111) ( $\epsilon_p = 1$ ). Laminage (approche à 6 sites).





a



b

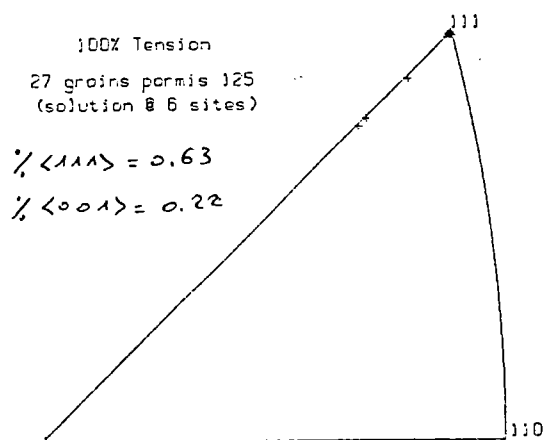


Figure 4.5. : Comparaison de l'évolution de la texture de traction prédites par l'approche à 6 sites et l'approche à 1 site.  
a) Texture initiale pour 27 grains  
b) Texture prédite par l'approche à 1 sites.  
c) Texture prédite par l'approche à 6 sites.

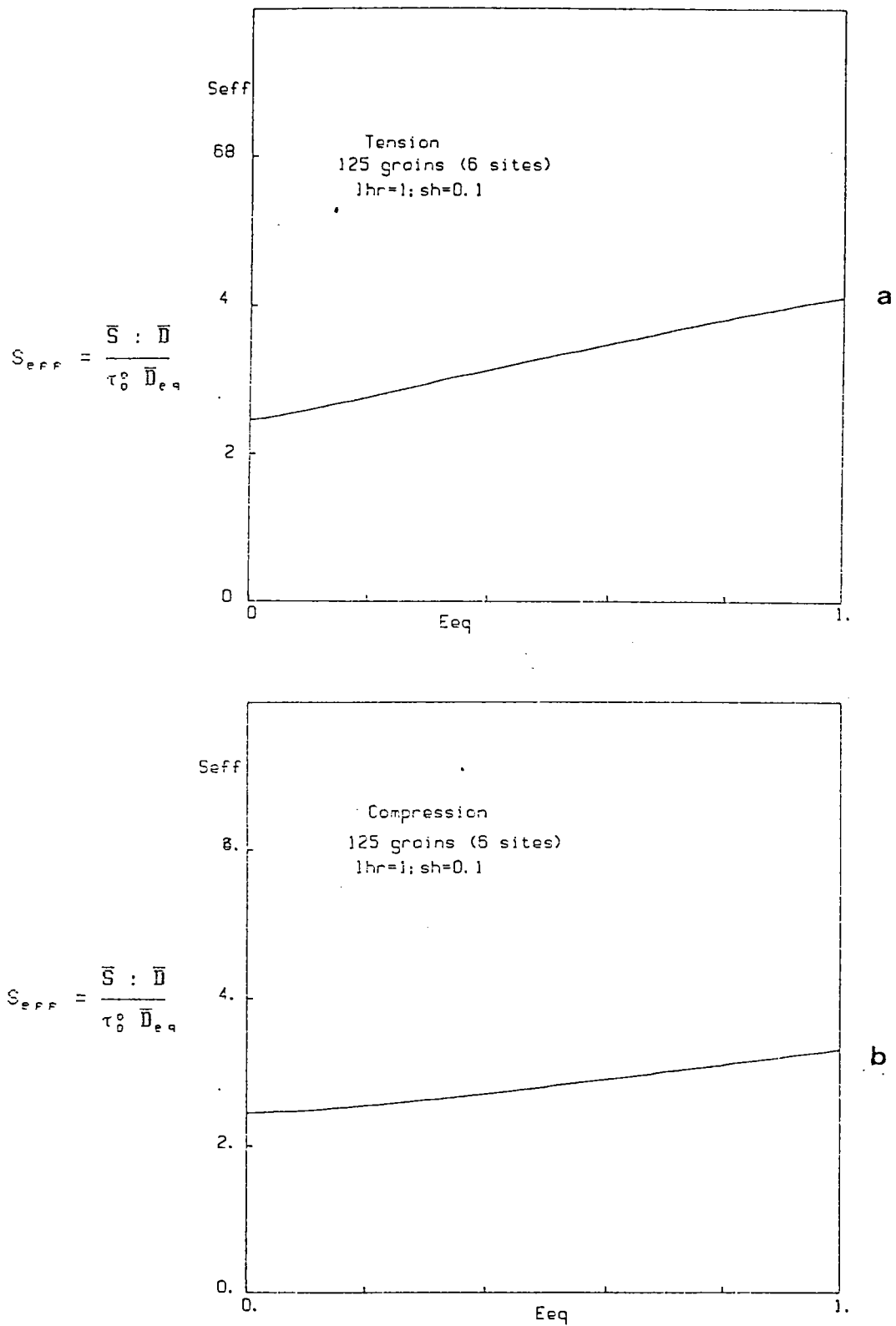


Figure 5.5. : comportement macroscopique pour l'approche à 6 sites.  
a) Traction ; b) compression.

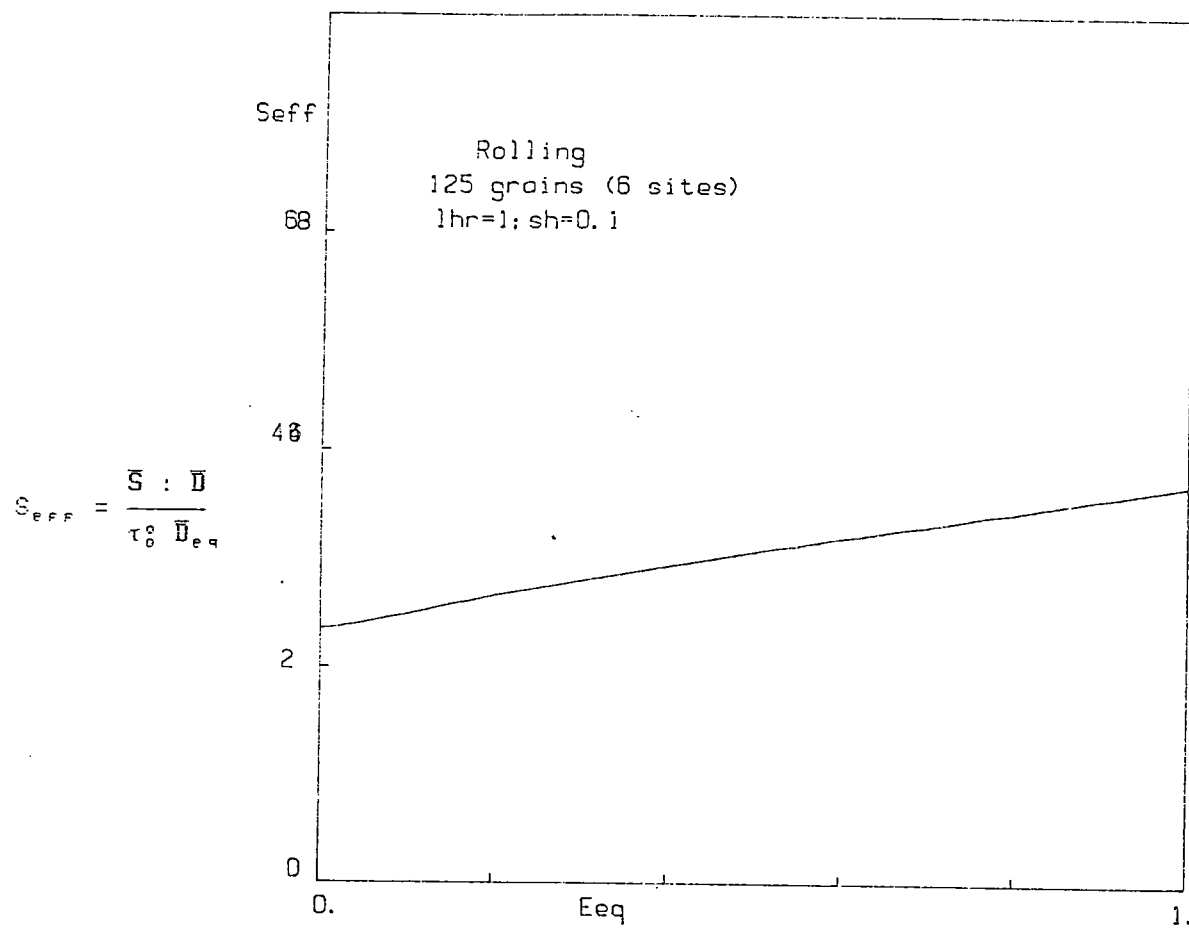


Figure 6.5. : comportement macroscopique pour le laminage (approche à 6 sites).

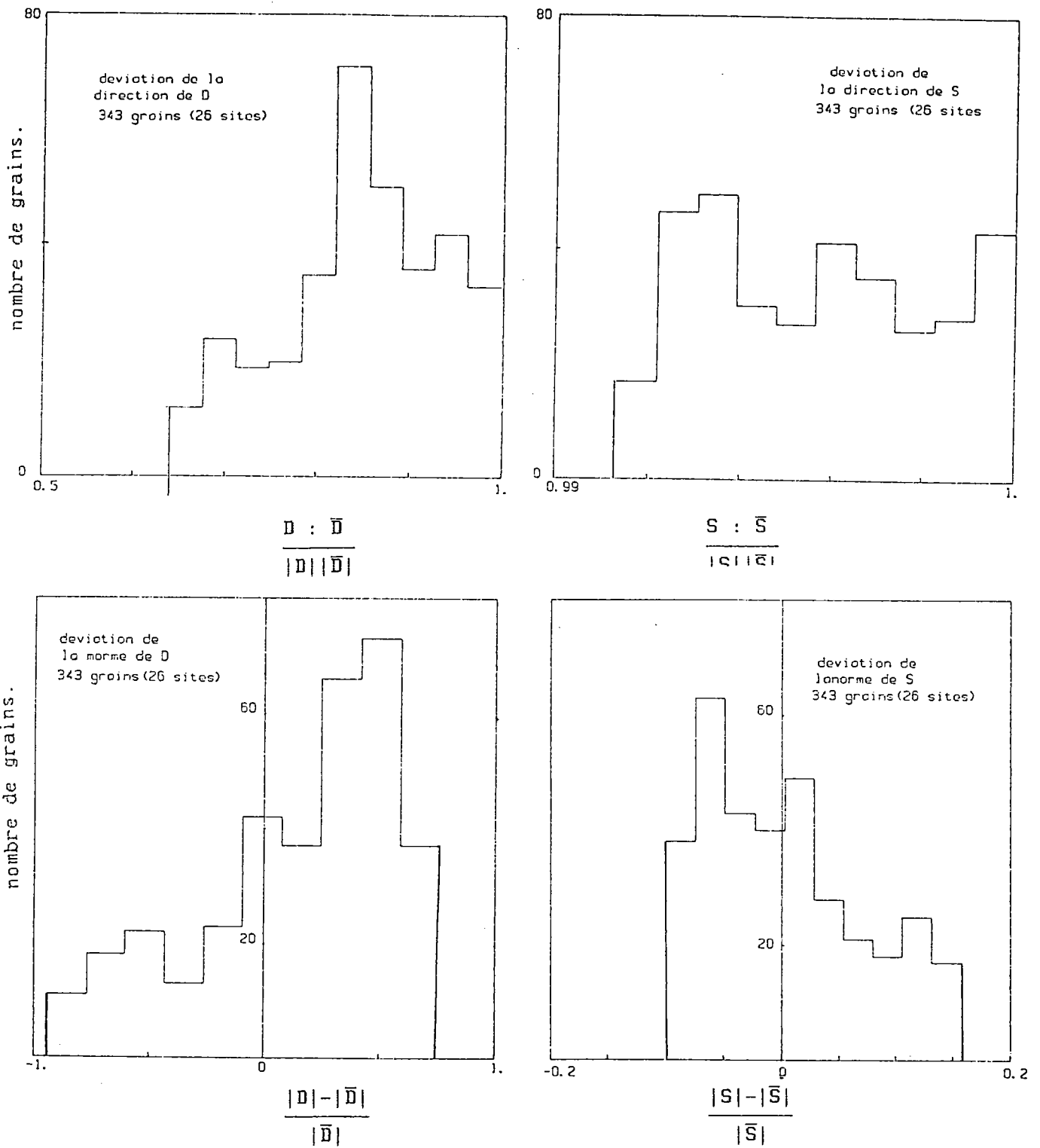


Figure 7.5. : Déviations en norme et en direction de D et S par rapport à  $\bar{D}$  et  $\bar{S}$  (respectivement). (premier incrément)

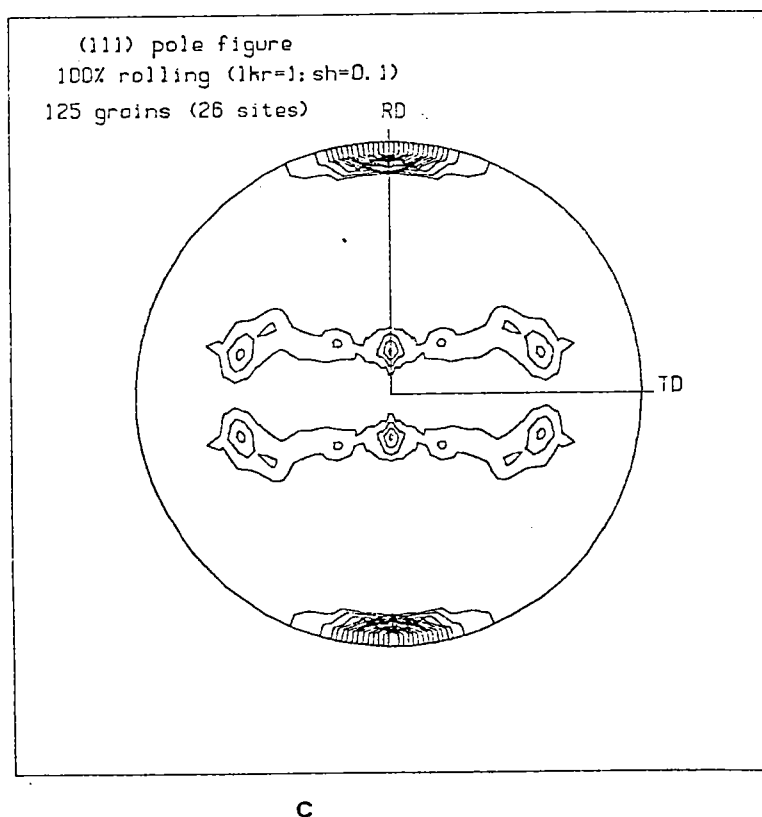
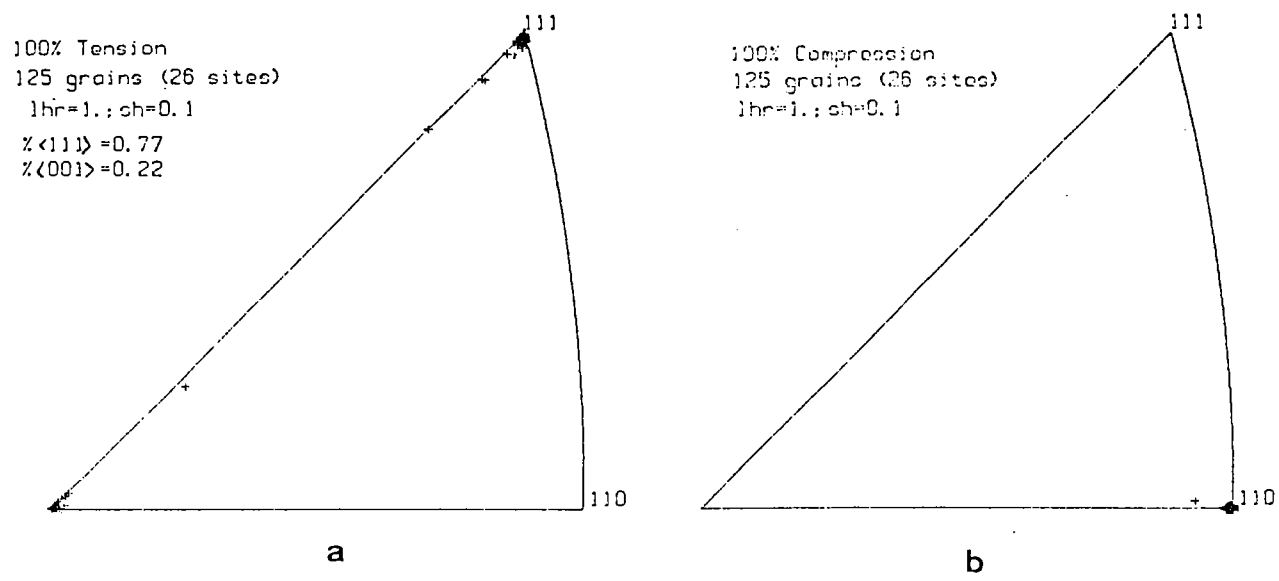


Figure 8.5. : Résultats des textures prédites par l'approche à 26 sites.  
( $\epsilon_p = 1$ ).  
a) Traction ; b) compression ; c) laminage.

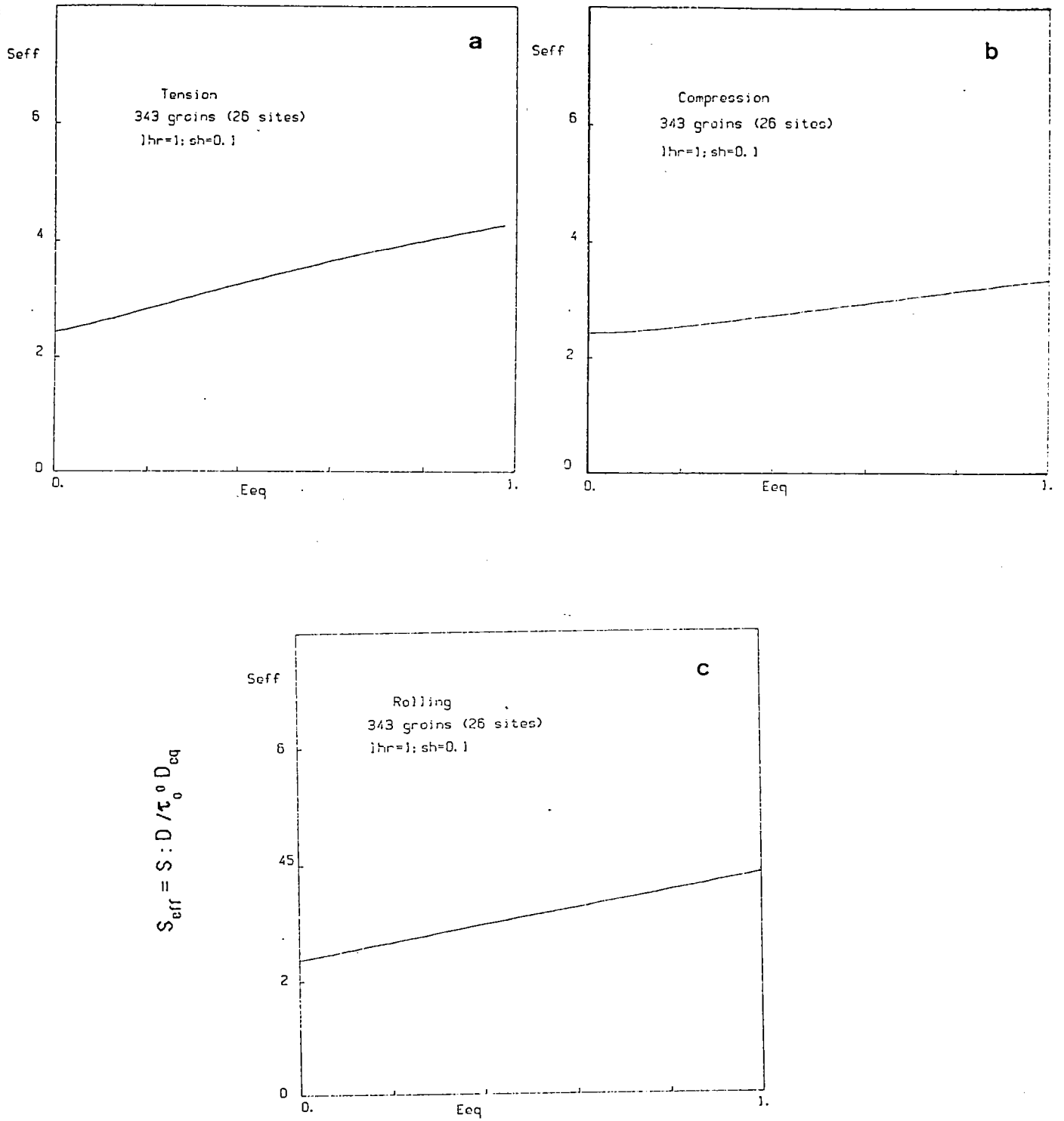


Figure 9.5. : Comportement macroscopique pour l'approche à 26 sites.  
 a) Traction ; b) compression ; c) laminage.

REFERENCES.

- [1] A. MOLINARI, G.R. CANOVA et S. AHZI. à paraître dans Acta. Met.
- [2] S. AHZI, A. MOLINARI et G.R. CANOVA. à paraître.
- [3] M. BERVEILLER. Thèse d'Etat, Université de Paris Nord, (1978).
- [4] M. BERVEILLER et A. ZAOUÏ, C.R. 15\*\*\* coll. G.F.R., Paris, (1980).
- [5] M. BERVEILLER, O. FASSI-FEHRI et A. HIHI. à paraître.
- [6] O. FASSI-FEHRI, Thèse d'Etat, Université de Metz, (1986).
- [7] P.R. MORRIS. *Int. J. Eng. Sci.* 9, pp. 917-920, (1971).
- [8] G. FAIVRE. *J. de Physique*, 32, p. 325, (1971).
- [9] S. TIEM, M. BERVEILLER et G.R. CANOVA, Acta. Met., 34, 2139, (1986).

## CHAPITRE 6

### ANALYSE CRITIQUE ET CONCLUSION

#### I. Analyse critique :

Dans le modèle Auto-cohérent proposé [1], nous avons négligé l'élasticité. Dans le cas de la prédiction des textures de déformation en grandes déformations des métaux polycristallins, cette hypothèse est justifiée. Mais dans le cas d'autres matériaux (polymères semi-cristallins), cette hypothèse ne peut pas être considérée car l'élasticité est importante et le reste au cours de la déformation. Le modèle viscoplastique, n'est donc valide qu'en chargement monotone (pas de décharge), nous ne pouvons donc pas traiter rigoureusement les cas de chargement complexe. Une extension de ce modèle à l'élastoviscoplasticité est donc nécessaire. La formulation Auto-cohérente est plus complexe dans ce cas que dans le cas où on néglige l'élasticité. Nous avons commencé à aborder ce problème.

Dans l'exploitation du modèle, nous avons considéré quelques approximations pour diminuer le temps de calcul. Ces approximations concernent le coefficient de sensibilité à la vitesse et le tenseur des modules tangents de la matrice.

En ce qui concerne le coefficient de sensibilité à la vitesse  $m$ , Canova et al. [2] ont montré, dans le cadre du modèle de Taylor, et pour les déformations à froid, que pour des vitesses faibles ( $m \leq 0.05$ ) le nombre des systèmes actifs ne change pas, et que la répartition des quantités de glissement  $\gamma^s$  sur les systèmes actifs est la même pour différentes valeurs inférieures ou égales à 0.05. Nous avons considéré, dans tous les résultats précédents la valeur maximale admissible donnée



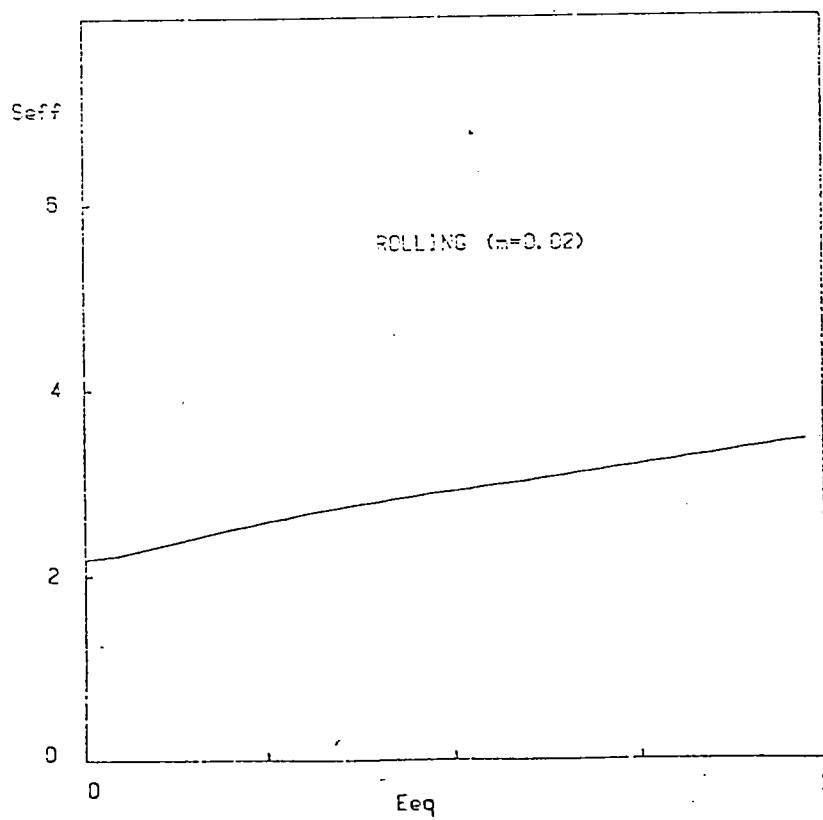
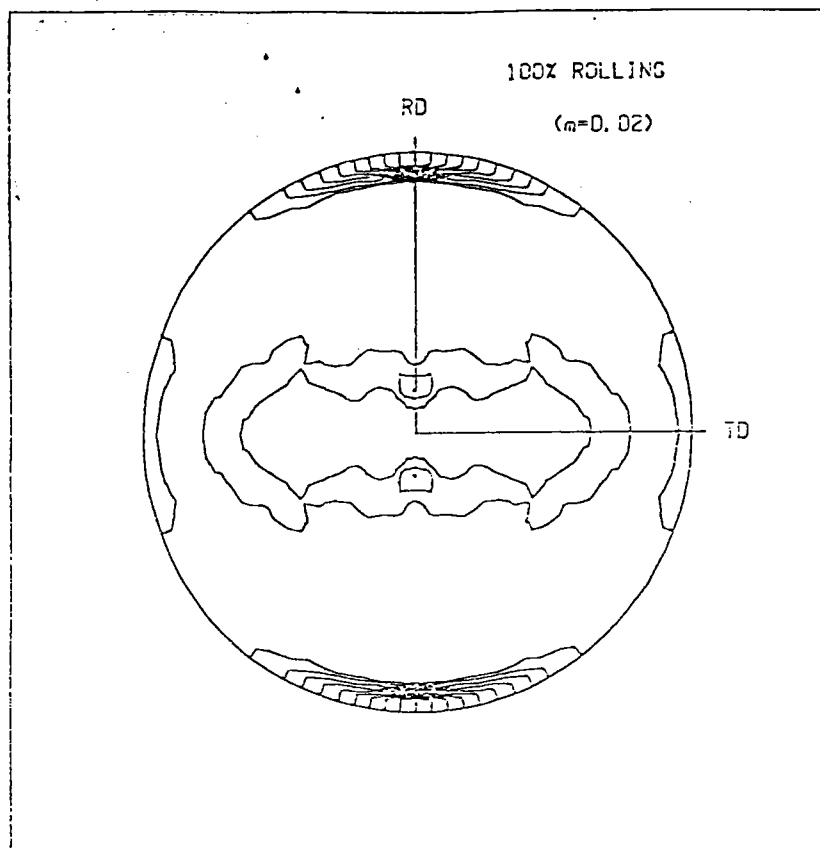


Figure 1.6. : Résultats pour  $m = 0.02$ .

- a) figure de pôles (111) pour le laminage.  $\epsilon_{eq} = 1$ .  
 b) courbe contrainte-déformation.

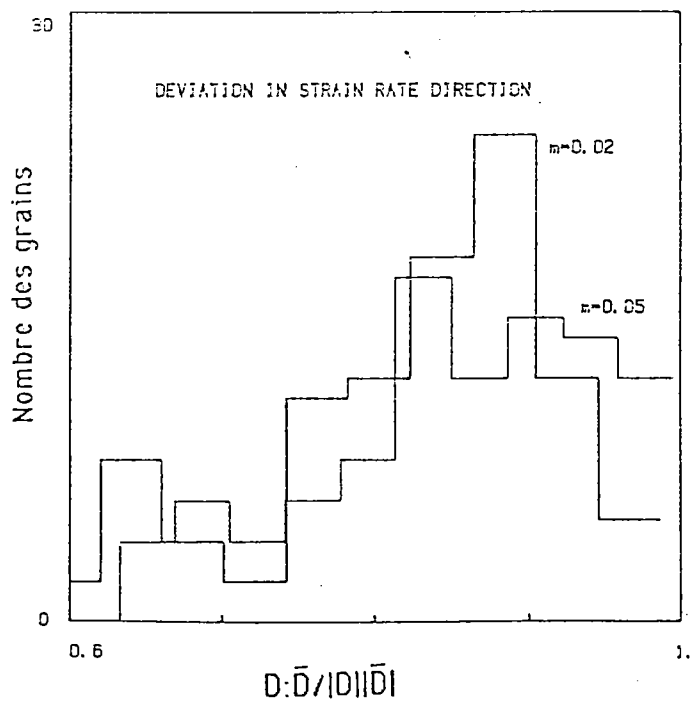
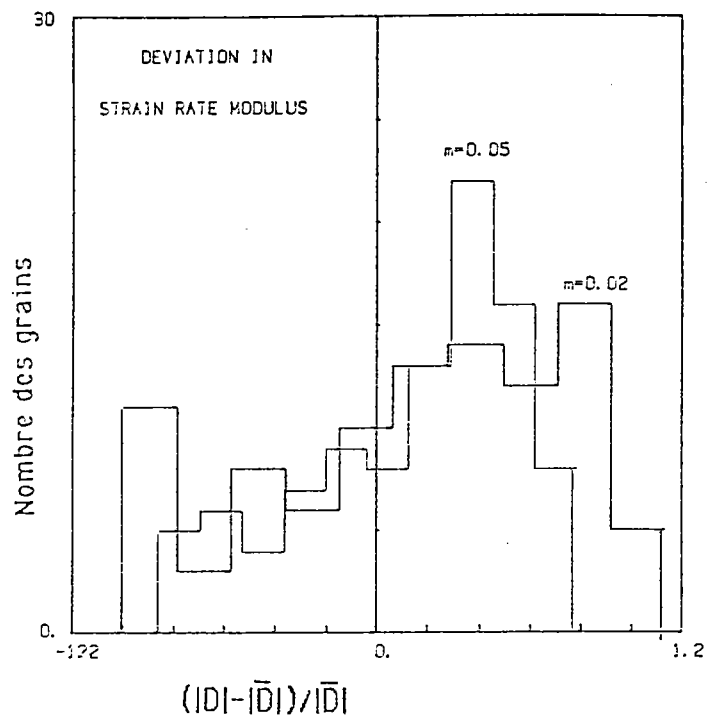


Figure 2.6. : a) Déviation de la norme de D par rapport à  $|\bar{D}|$ .  
 b) Déviation de la direction de D par rapport à celle de  $\bar{D}$  comparaison pour deux valeurs de m.

par Canova et al. [2] ( $m = 0.05$ ). Cette valeur est supérieure à la valeur expérimentale du cuivre en déformation à froid qui est de l'ordre de 0.02. Nous avons comparé les textures du laminage pour ces deux valeurs (figure 1-6), ainsi que les déviations sur les contraintes et les déformations (figure 6-2). Une analyse de ces données nous permet de conclure qu'il n'y a pas de différence significative entre ces deux cas, et que notre approximation du départ ( $m = 0.05$ ) est donc raisonnable. Le comportement tangent de la matrice est donnée par la relation suivante :

$$\bar{S} = A^\circ : \bar{D} + \bar{S}^\circ \quad (1.6)$$

où  $A^\circ$  est le tenseur des modules tangents. Dans le cas d'une matrice isotrope nous avons approché  $A^\circ$  par :

$$A^\circ = \mu I \quad (2.6)$$

avec  $I$  le tenseur identité du quatrième ordre et  $\mu$  le module tangent dont la méthode d'estimation est expliquée dans l'annexe C. Pour une matrice isotrope et pour des grains sphériques, cette approximation est légitime. Mais pour des grains de formes ellipsoïdales (cigare, plat..) la méthode numérique du calcul de  $\mu$  ne converge pas pour certaines formes, en particulier pour des rapports de forme très grands.

Dans le cas d'une matrice anisotrope, la détermination de  $A^\circ$  peut se faire par la méthode suivante :

En partant de la solution de Taylor ( $D^\circ = \bar{D}$ ), nous pouvons déterminer  $S$ . On applique alors à chaque grain une déformation  $D + dD$  avec  $dD$  un incrément de vitesse de déformation dans une direction donnée. Ceci nous permet de déterminer la moyenne des contraintes  $\langle S' \rangle$  ainsi que la différence entre les moyennes successives  $d\bar{S}$

$$d\bar{S} = \bar{S} - \langle S' \rangle \quad (3.6)$$

En choisissant 5 directions correspondantes aux directions dans lesquelles on peut exprimer  $D$  sous forme vectorielle, la division de  $dS$  par l'incrément de vitesse de déformation correspondant est égale à une colonne de  $A^\circ$ . Les 5 colonnes de  $A^\circ$  sont ainsi déterminées par l'application d'un incrément de déformation dans les 5 directions (successivement).

Dans le chapitre 4, nous avons traité l'effet d'écroûissage et l'effet de forme [3]. Pour ce qui concerne l'écroûissage, nous avons présenté des résultats pour des définitions simplifiées de l'écroûissage. En fait lorsqu'il y a de l'écroûissage latent, le rapport d'écroûissage latent varie avec la déformation, ce qui n'a pas été pris en compte. Néanmoins, les résultats obtenus nous permettent d'affirmer que l'écroûissage joue un rôle dans la transition entre les 2 types de textures (type cuivre et type laiton).

Lorsque la texture morphologique est prise en compte, nous avons présenté le résultat des textures pour le cas des grains plats en compression et laminage ainsi que pour les grains cigare pour la traction. Nous avons obtenu pour le laminage une texture du type laiton, ceci nous permet de penser que lors du laminage, il y a une transition entre la texture du type laiton et type cuivre. lorsqu' on accumule la déformation certains coefficients  $K_{i,j}$  tendent vers des valeurs importantes, et on tend donc vers la solution de Taylor relaché.

Nous avons considéré les formes initiales des grains avec axes principaux parallèles aux axes du polycristal, et forme constante. Or en réalité, les grains décident de leur forme en fonction de la déformation subie et du voisinage. Pour être cohérent avec cela, il faut donc actualiser la forme des grains ainsi que ses axes principaux après chaque incrément de déformation. Cette actualisation doit se

faire de la manière suivante :

soit  $L$  le gradient de vitesse de déplacement dans le grain  $g$ .  $L$  est lié au gradient de déformation  $F$  par la relation :

$$L = \dot{F}F^{-1} \quad (4.6)$$

où  $\dot{F}$  est la dérivée de  $F$  par rapport au temps. Donc on a :

$$F = \int LF dt \quad (5-6)$$

Le tenseur des déformations  $U^2$  est donné par :

$$U^2 = F F^t \quad (6-6)$$

La forme initiale du grain est connue donc  $F_0$  est connu. Pour l'incrément  $n + 1$ ,  $L$  est donnée par la somme des vitesses des déformations  $D$  et des rotations  $\Omega$  dans le grain  $g$ , le gradient de déformation à l'incrément  $n + 1$  est donc obtenu par la relation :

$$F_{n+1} = F_n + L_{n+1} F_n \Delta t \quad (6-4)$$

Le tenseur  $U_{n+1}^2$  est obtenu par la relation (6-3). Les vecteurs propres de  $U^2$  sont les axes principaux et les racines carrées de ces valeurs propres sont les paramètres  $a, b, c$  du grain  $g$  à l'incrément  $n+1$ . Pour accélérer la convergence de la méthode numérique avec laquelle on résout la relation d'interaction ; nous faisons une correction sur la norme de  $S$ . Nous supposons donc de ce fait, que la direction reste constante. Ceci ne pose pas de problèmes numériques dans le cas des chargements simples que nous avons considéré moyennant isotropie initiale du matériau. Pour d'autres chargements et pour l'actualisation de la forme des grains, il est probable que la direction de la contrainte macroscopique change, il est donc nécessaire de corriger aussi la direction de  $S$ . Pour cela, une procédure numérique plus générale pourra être envisagée :

soit

$$P(\bar{S}) = \frac{||\langle D \rangle - \bar{D}||}{||\bar{D}||}$$

on peut utiliser un programme de minimisation de la fonctionnelle  $P$ , sur la variable  $\bar{S}$ .

Finalement, pour l'approche à  $n$  sites, nous avons considéré une distribution spatiale particulière des grains [4]. Cette distribution induit des symétries qui ne correspondent pas forcément à la réalité. Néanmoins, les résultats des textures de cette approche sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. Pour éviter cette symétrie spatiale, il est possible de prendre en compte les interactions avec des premiers voisins générés aléatoirement.

#### CONCLUSION GENERALE.

Dans la nouvelle formulation auto-cohérente proposée pour les grandes déformation viscoplastiques des polycristaux, nous avons négligé l'élasticité. Nous avons développé à la fois l'approche à 1 site et l'approche à  $n$  sites, ces deux approches sont basées sur l'approximation de la solution du problème de l'inclusion non linéaire. Une approche auto-cohérente simplifiée dérive de la formulation à 1 site, cette approche est basée sur l'approximation phénoménologique du comportement de l'inclusion non linéaire. Les lois constitutives du monocristal et de la matrice (MHE) sont représentées par leurs comportements tangents. Nous aboutissons à une loi d'interaction du type Kröner avec faibles interactions viscoplastiques. Les résultats de texture en traction, compression, laminage et torsion des métaux C.F.C sont en bon accord avec les résultats expérimentaux en déformation à froid. Pour le laminage, nous obtenons une texture du type cuivre. La comparaison des résultats avec ceux de Taylor viscoplastique montrent qu'ils sont

améliorés par le modèle auto-cohérent et que la composante Taylor en laminage n'apparaît pas. Dans le cas de la compression, l'effet curling (ou effet d'Hosford) est prédit par le modèle proposé, cet effet ne peut être prédit par la théorie DTI ni même par la théorie DPI.

Le nombre des systèmes actifs prédit par le schéma auto-cohérent viscoplastique est inférieur à celui prédit par la théorie de Taylor. Cette dernière théorie conduit aussi à une surestimation des contraintes internes, on voit cela sur les courbes contraintes-déformation pour les quatre tests (traction-compression-laminage-torsion) en comparaison avec celle prédites par le modèle proposé.

En prenant une loi d'auto-écrouissage du type Voce, nous obtenons une loi d'écrouissage macroscopique en bon accord avec celle trouvée expérimentalement pour le cuivre (OFHC) en traction, en compression et en torsion.

Nous avons testé l'effet d'écrouissage sur la texture en prenant une matrice d'écrouissage  $H$  linéaire définie par Franciosi, d'une part pour un rapport d'écrouissage latent fort et d'autre part pour un rapport de durcissement latent faible. Les résultats obtenus pour la texture du laminage montrent que l'écrouissage latent contribue à l'apparition des composantes laiton, et que pour un écrouissage latent fort, la texture se développe moins vite, on observe cela en particulier sur la texture de traction et de compression.

Nous avons considéré une formulation simple de l'écrouissage, car les résultats expérimentaux du rapport d'écrouissage montrent que ce dernier varie avec la déformation et non constant comme on l'a considéré.

En ce qui concerne la forme des grains, nous avons considéré des formes des grains cigares et plats pour le cas du laminage, et

compression. Pour le laminage des grains plats, nous avons obtenu une texture du type laiton, ce résultat correspond en réalité à une transition lorsque la déformation cumulée dans le grain atteint un certain taux. En compression, la texture obtenue montre qu'il y a une déviation vers la gauche de la fibre  $\langle 110 \rangle$ , ce résultat correspond au fait que l'intensité est forte pour des déformations moyennes et tend à s'affaiblir lorsque la déformation augmente.

Finalement, on a pris en compte les interactions entre les grains en considérant l'approche auto-cohérente à  $n$  sites. Nous avons obtenu une correction des résultats des textures de déformation. D'après ces résultats, nous pouvons conclure qu'avec le schéma à  $n$  sites, la texture se développe plus vite par rapport à celle obtenue par le schéma à 1 site.

Pour pouvoir tester des chargements complexes, et prendre en compte les interactions élastiques, une extension de ce schéma au schéma auto-cohérent élastoviscoplastique est nécessaire. Un effort pour l'amélioration de la description de l'écroutissage ainsi que la détermination des modules tangents de la matrice doit se faire. L'actualisation de la forme des grains doit être faite, pour mieux décrire l'effet de forme.



REFERENCES.

- [1] A. MOLINARI, G.R. CANOVA et S. AHZI. à paraître dans Acta. Met .
- [2] G.R. CANOVA, C. FRESSENGEAS, A. MOLINARI et F. KOCKS. soumis à Acta. Met .
- [3] S. AHZI, G.R. CANOVA, A. MOLINARI. à paraître.
- [4] S. AHZI, A. MOLINARI, G. CANOVA. à paraître

## Annexe A

### Calcul des tenseurs $\Gamma^{pq}$ , $B^{pq}$ et $\Delta^{pq}$

Le calcul des coefficients  $\Gamma^{pq}_{Jmn}$  et  $B^{pq}_{Jnm}$  se font de la même manière que dans le cas du problème élastique traité par Favier (1) Berveiller (2) Tiem et al (3) et Fassi-Fehri (4). On calcule d'abord les termes  $P_{iJmn}$  qu'on symétrise pour obtenir les  $\Gamma^{pq}_{Jmn}$  et la partie antisymétrique nous donne les  $B^{pq}_{Jmn}$

$$P_{iJmn} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \int_{V_0} G_{i,m,Jn}(r-r') d^3r d^3r' \quad (A-1)$$

En utilisant les propriétés de la transformation inverse de Fourier, on obtient facilement :

$$P_{iJmn} = - \frac{1}{8\pi^3 V_0} \int_{V_0} \int_{V_0} \int_{\mathbb{R}^3} k_i k_n \tilde{G}_{i,m}(k) \exp(ik(r-r')) d^3k d^3r d^3r' \quad (A-2)$$

Les transformations de Fourier  $\tilde{G}_{i,m}$  et  $\tilde{H}_m$  des fonctions de Green sont solutions du système d'équations suivant qui résulte de la transformation de Fourier du système (28-2) :

$$\begin{cases} A^o_{iJke} k_e k_J \tilde{G}_{km}(k) + ik_i \tilde{H}_n(k) + \delta_{i,m} = 0 \\ K_n \tilde{G}_{km}(k) = 0 \end{cases} \quad (A-3)$$

On montre facilement que  $K^2 \tilde{G}_{km}(k)$  et  $k H_m(k)$  sont indépendants du module  $k$  du vecteur  $k$ .

#### \* Inclusion sphérique de rayon a

En coordonnées sphériques on a :

$$d^3k = k^2 \sin\theta d\theta d\varphi dk$$

$$\text{et } k_1 = k \sin\theta \cos\varphi ; k_2 = k \sin\theta \sin\varphi ; k_3 = k \cos\theta \quad (A-4)$$

Les termes  $P_{i,jmn}$  s'écrivent alors, en tenant compte du fait que  $G_{i,m}(k)$   $k_i$ ,  $k_m$  sont indépendants du module  $k$  de  $k$

$$P_{i,jmn} = -\frac{1}{8\pi^3 V_0} \frac{1}{V_0} \int_0^\pi \sin \theta \int_0^{2\pi} G_{i,m}(k) k_i k_n d\varphi \int_0^\infty \int_{V_0} \int_{V_0'} \exp(-ik(r-r')) d^3r d^3r' k^2 dk \quad (A-6)$$

avec  $V_0 = (4/3) \pi a^3$

$$P_{i,jmn} = (-1/8\pi^3 V_0) \int_0^\pi \sin \theta \int_0^{2\pi} \tilde{G}_{i,m}(k) k_m k_j \left[ \int_0^\infty k^2 \int_{V_0} \int_{V_0'} \exp(-ik(r-r')) d^3r d^3r' dk \right] d\varphi d\theta$$

Le dernier terme de cette intégrale se calcule facilement [ 5 ], on obtient alors :

$$(1/8\pi^3 V_0) \int_0^\infty \int_{V_0} \int_{V_0'} \exp(-ik(r-r')) d^3r d^3r' k^2 dk = 1/4\pi \quad (A-7)$$

et finalement, pour une inclusion sphérique :

$$P_{i,jmn} = (-1/4\pi) \int_0^\pi \sin \theta \left\{ \int_0^{2\pi} \tilde{G}_{i,m}(k) k_n k_j d\varphi \right\} d\theta \quad (A-8)$$

#### Inclusion ellipsoïdale de paramètres a,b et c :

On passe directement du précipité sphérique à l'ellipsoïdal d'axes a,b,c suivant  $ox_1$ ,  $ox_2$ ,  $ox_3$  par le changement de variables ci-dessous[1]

$$\begin{aligned} k(k_1, k_2, k_3) &\rightarrow K(k_1, a/b k_2, c/a k_3) \\ r(x_1, x_2, x_3) &\rightarrow R(x_1, a/b x_2, a/c x_3) \end{aligned} \quad (A-9)$$

Le passage des composantes  $k_i$  aux composantes  $K_i$  s'écrit :

$$k_i = \psi_{i,j} K_j$$

La matrice  $\psi$  est définie par :

$$(\psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a/b & 0 \\ 0 & 0 & a/c \end{bmatrix} \quad (A-10)$$

Les transformations de Fourier des fonctions de Green  $\Theta$  et  $H$  sont données par l'équation (A-2) qui s'écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned} A^0_{ijkl} \psi_{er} k_r \psi_{js} k_s \tilde{G}_{km}(k) + i\psi_{is} k_s \tilde{H}_m + \delta_{im} &= 0 \\ \psi_{kr} k_r \tilde{G}_{km}(k) &= 0 \end{aligned} \quad (A-11)$$

Les coefficients  $P_{ijnm}$  s'écrivent alors :

$$P_{ijnm} = -(1/4) \int_0^\pi \sin \theta \left\{ \int_0^{2\pi} \psi_{jr} k_r \psi_{ns} k_s \tilde{G}_{im}(\psi k) d\varphi \right\} d\theta$$

Les coefficients de  $\Gamma^{gg}$  et de  $B^{gg}$  sont donnés par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \Gamma^{gg}_{ijmn} &= 1/4 \left( P_{ijmn} + P_{ijnm} + P_{jinm} + P_{jimn} \right) \\ B^{gg}_{ijmn} &= 1/4 \left( P_{ijmn} - P_{jinm} - P_{jimn} + P_{ijnm} \right) \end{aligned} \quad (A-13)$$

Les coefficients de  $\Delta^{gg}$  se calculent de la même manière et on obtient alors :

$$\Delta^{gg}_{ij} = (1/4) \int_0^\pi \sin \theta \int_0^{2\pi} iH_i(\psi k) \psi_{jk} k_k d\varphi d\theta \quad (A-14)$$

Pour une matrice isotrope incompressible nous avons :

$$A^0_{ijkl} = \mu/2 \left( \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right) = \mu I_{ijkl} \quad (A-15)$$

Les transformations de Fourier et les fonctions de Green sont dans ce cas :

$$\tilde{G}_{ni}(k) = 2/\mu k^2 \delta_{ni} - 2/\mu k^4 k_n k_i \quad (A-16)$$

$$\tilde{H}_n(k) = -k_n/k^2$$

Si de plus, les inclusions sont sphériques, les coefficients  $P_{ijkl}$  et  $\Delta_{ij}$  ont l'expression analytique suivante :

$$P_{1111} = P_{2222} = P_{3333} = -4/15\mu$$

$$P_{1122} = P_{2211} = P_{1133} = P_{3311} = P_{2233} = P_{3322} = 2/15\mu$$

$$P_{1212} = P_{2121} = P_{1313} = P_{3131} = P_{2323} = P_{3232} = -8/15\mu$$

$$P_{1221} = P_{2112} = P_{1331} = P_{3113} = P_{2332} = P_{3223} = 2/15\mu$$

et

$$\Delta_{11} = \Delta_{22} = \Delta_{33} = -1/3$$

Les autres coefficients sont nuls.

**REFERENCES**

- [1] G. FAIVRE. Journal de physique, 32, p 325 (1971).
- [2] M. BERVEILLER. Thèse d'état, Paris nord, (1978).
- [3] S. TIEM, M.Berveiller et G.R. Canova, Acta. Met. 34, 2139, (1986).
- [4] O. FASSI-FEHRI, Thèse d'Etat, Université de Metz, (1986).
- [5] P. R. MORRIS, Int.J. Eng.Sci. , 9, 971. 920, (1971).

## ANNEXE B

VECTORISATION

Le tenseur des déformations étant symétrique, il peut donc être représenté par un  $\vec{D}$ . Les composantes de ce vecteur sont :

$$\vec{D} = (D_{11}; D_{12}; D_{33}; D_{23}; D_{13}; D_{12}) \quad (\text{B-1})$$

Du fait de l'incompressibilité, ce vecteur peut-être remplacé par un vecteur  $\vec{D}'$  à 5 composantes indépendantes :

$$\vec{D}' = [(D_{22}-D_{11})/\sqrt{2}]; \sqrt{(3/2)}D_{33}; \sqrt{2} D_{23}; \sqrt{2} D_{13}; \sqrt{2} D_{12}] \quad (\text{B-2})$$

De même pour le déviateur des contraintes, on définit les deux vecteurs  $\vec{S}$  et  $\vec{S}'$  :

$$\vec{S} = (S_{11}; S_{22}; S_{33}; S_{23}; S_{13}; S_{12}) \quad (\text{B-3})$$

$$\text{et } \vec{S}' = [(S_{22}-S_{11})/\sqrt{2}]; \sqrt{(3/2)}S_{33}; \sqrt{2} S_{23}; \sqrt{2} S_{13}; \sqrt{2} S_{12}] \quad (\text{B-4})$$

La relation entre les vecteurs s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{D}_i &= \beta_{i,j} \vec{D}'_j ; \vec{D}'_j = \alpha_{j,i} \vec{D}_i \\ \vec{S}_i &= \beta_{i,j} \vec{S}'_j ; \vec{S}'_j = \alpha_{j,i} \vec{S}_i \end{aligned} \quad (\text{B-5})$$

avec  $i=1,6$  correspond aux 6 composantes de  $\vec{D}$  (respectivement  $\vec{S}$ )  
et  $j = 1,5$  correspond aux 5 composantes  $\vec{D}'$  (respectivement  $\vec{S}'$ )

Les deux matrices de passage  $\beta$  et  $\alpha$  sont donnée par :

$$\begin{aligned} (\alpha) &= \begin{bmatrix} -(1/\sqrt{2}) & (1/\sqrt{2}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt{3}/2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1/\sqrt{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1/\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1/\sqrt{2}) \end{bmatrix} \\ (\beta) &= \begin{bmatrix} -(1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{6}) & 0 & 0 & 0 \\ (1/\sqrt{2}) & -(1/\sqrt{6}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\sqrt{2}/3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt{2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\sqrt{2}) \end{bmatrix} \quad (\text{B-6}) \end{aligned}$$

Le tenseur  $\Gamma_{ij,kl}^{\circ}$  étant symétrique par rapport à  $ij$  et par rapport à  $kl$ , on peut donc représenter  $ij$  par  $m(m=1,6)$  et  $kl$  par  $n(=1,6)$ , et la transformation en un tenseur  $(5 \times 5)$  s'écrit :

$$\Gamma'_{i,j} = \alpha_{i,m} \Gamma_{mn} \beta_{n,j} \quad (B-7)$$

avec  $i = 1,5$

Pour la transformation de  $A^{\circ}$ , on utilise la relation (B-7).

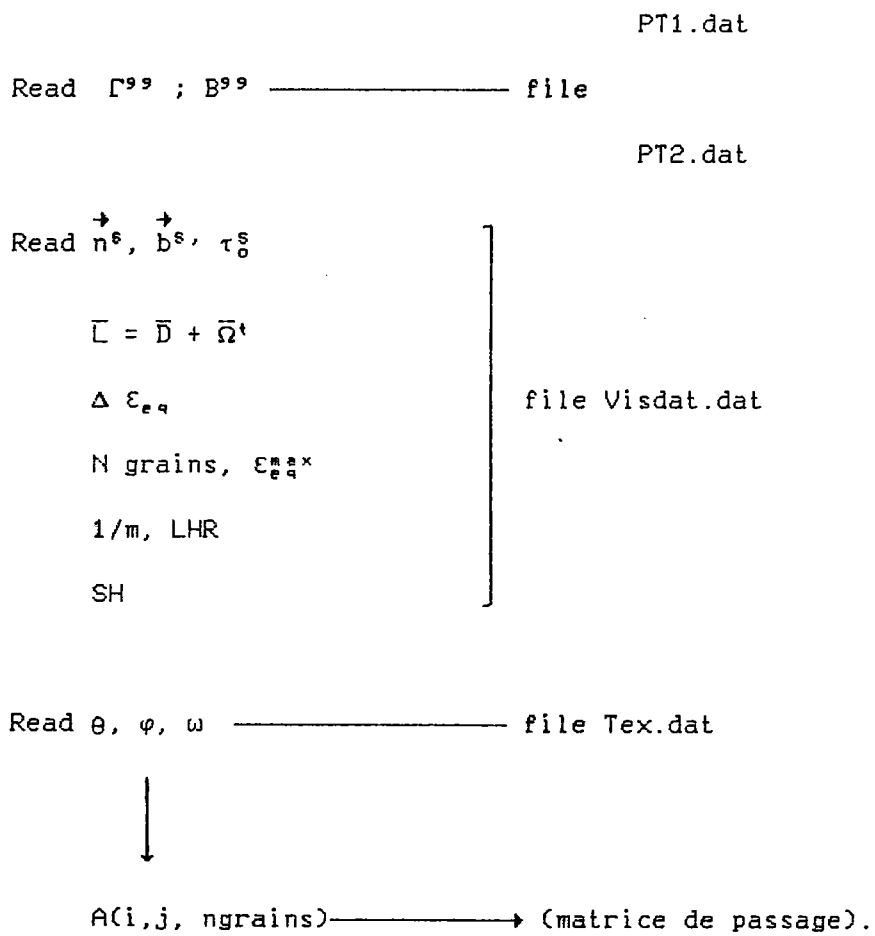
Cette vectorisation a plusieurs avantages :

- elle vérifie le critère de normalité
- la norme du vecteur  $D$  (ou  $S$ ) est égale au deuxième invariant.
- $S_i D_i = S_{k,e} D_{k,e}$
- Pour les rotations, la matrice de passage  $(3 \times 3)$  peut être transformée en matrice  $(5 \times 5)$  qui permet de transformer les vecteurs de dimension 5



ANNEXE C.Organigramme.

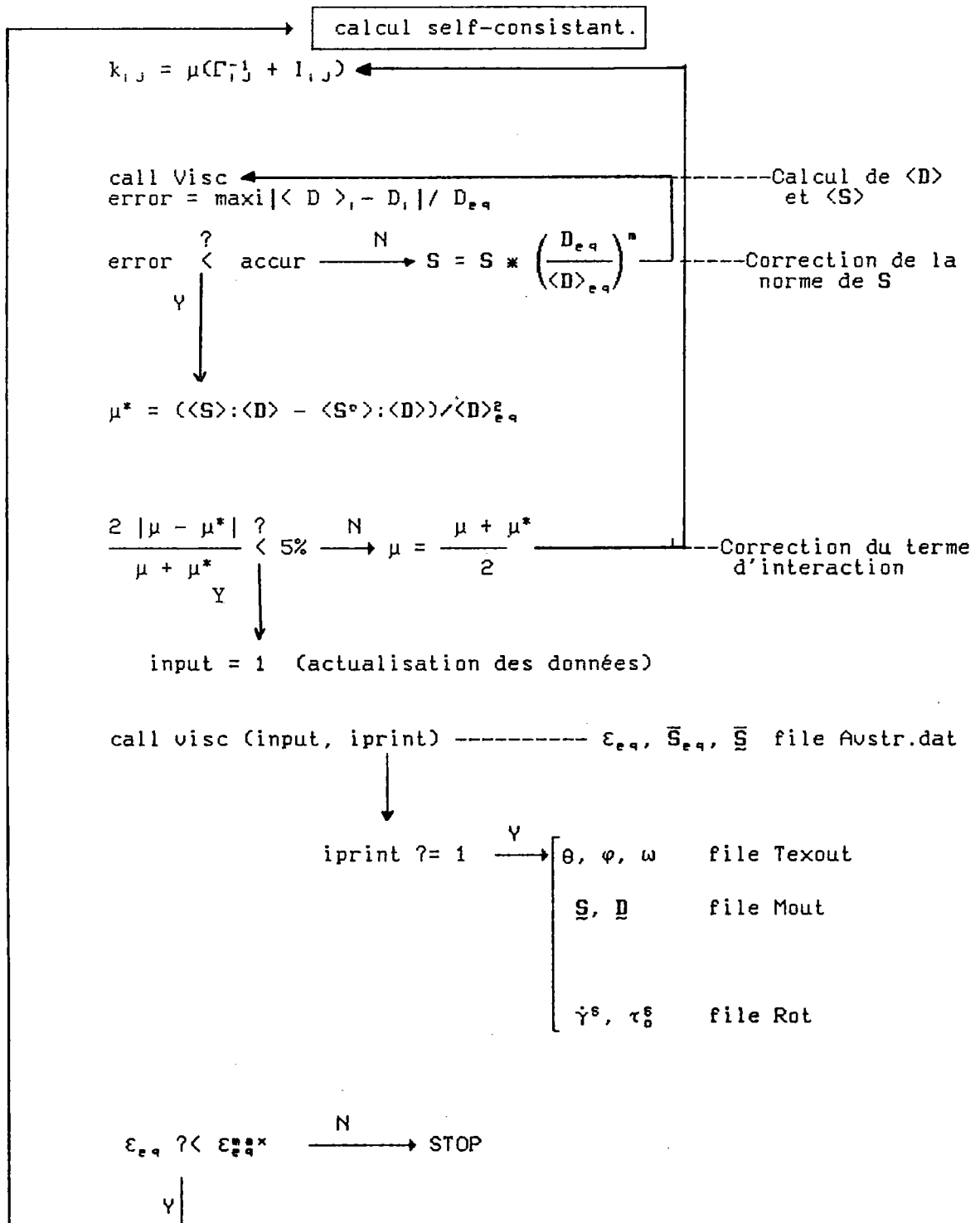
Lecture des données.



Initialisation de la solution par Taylor

call maxwk. ----- calcul des états de contraintes  $\bar{S}$  maximisation du travail plastique.

call visc (Taylor) →  $\bar{S}$  de Taylor



Subroutine Visc

$$n_i^s = P_{i,j} n_j^s$$

$$b_i^s = P_{i,j} n_j^s$$

$$m_{i,j}^s = b_i^s n_j^s$$

call Slnr -----résolution du système non  
linéaire par déterminer S.  
-équation(7-2) pour Taylor  
-équation(44-2) pour le  
self-consistant

$$S^o = S - A : D$$

iupt ?= 1  $\xrightarrow{N}$  return  
 $\downarrow$   
 Y

calcul des  $\dot{\gamma}^s$

calcul de  $L^p$

call Orient-----actualisation de la matrice  
de passage par la méthode  
de Rodrigues

call Latent-----actualisation de  $\tau_0^s$

Return

Subroutine Orient

c méthode de Rodrigues

$\Delta \omega^* = \Omega^* \cdot \Delta t$  ----- Tenseur des rotations du  
réseau cristallin.

$$\vec{V} = (\Delta \omega^*_{23}; \Delta \omega^*_{13}; \Delta \omega^*_{21})$$

$$\vec{Vb} = (\text{tg}(|V|/2)/|V|) \cdot \vec{V}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & -Vb(3) & Vb(2) \\ Vb(3) & 0 & -Vb(1) \\ -Vb(2) & Vb(1) & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\theta^2)_{i,j} = \theta_{i,k} \theta_{k,j}$$

c Rot = exp( $\theta$ )

$$(\text{Rot})_{i,j} = \delta_{i,j} + 2(\theta_{i,j} + \theta^2_{i,j}) / (1 + |Vb|^2)$$

c actualisation de la matrice de passage

$$(\text{Pnew})_{i,j} = (\text{Rot})_{i,k} P_{k,j}$$

Return

~~Exercice~~