



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# THESE

présentée

à l'UER SCIENCES EXACTES ET NATURELLES  
DE L'UNIVERSITE DE METZ

pour obtenir le grade de  
DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

**LOUAH Mustapha**

Maître-Assistant à l'Ecole Normale Supérieure de l'Enseignement  
Technique de RABAT (MAROC)

FISSURATION EN FATIGUE EN MODE MIXTE I + II  
A L'AIDE DU DISQUE BRÉSILIEN

soutenue le 21 Mars 1986 devant la Commission d'examen :

MM. HEIZMANN            Université de Metz - rapporteur  
MESMAQUE              Université de Lille - rapporteur  
AYEL                      Institut Français du Pétrole  
JODIN                     Université de Metz  
PLUVINAGE              Université de Metz - rapporteur et Directeur de Thèse

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv	19860185
Cote	S/M3 86/9
Loc	Magasin

A mes parents et à mon épouse

A mon Pays et à l'ENSET de RABAT

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Fiabilité Mécanique de l'Université de Metz, sous la direction de Monsieur Guy PLUVINAGE.

Qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude pour le soutien qu'il m'a fourni.

J'exprime toute ma gratitude à Messieurs HEIZMANN, MESMAQUE, AYEL et JODIN qui ont bien voulu examiner mon travail et me faire l'honneur de participer à mon Jury.

Que soient remerciés aussi Messieurs D. HIEBEL et A. BIA pour l'aide qu'il m'a fournie.

Je remercie chaleureusement mes camarades de laboratoire.

-----

## Table des Matières

<b>1 INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>2 CRITERES DE RUPTURE EN MODE MIXTE</b>	<b>3</b>
2.1 DETERMINATION DES CONTRAINTES EN FOND DE FISSURE	3
2.1.1 Chargement quelconque	3
2.1.2 Chargement biaxial	4
2.1.3 Les différents modes de rupture	5
2.1.3.1 Chargement biaxial	5
2.1.3.2 Chargement uniaxial	6
2.1.4 Calcul des facteurs d'intensité de contrainte	7
2.2 PRINCIPAUX CRITERES DE RUPTURE EN MODE MIXTE	7
2.2.1 Critère de la contrainte tangentielle maximale	7
2.2.2 Critère de la densité d'énergie de déformation minimale	10
2.2.3 Critère du taux de restitution de l'énergie maximale	11
2.2.4 Critère de déformation de traction maximale	14
2.2.5 Critère de l'écartement critique en fond de fissure	15
2.3 Effet de la composante $K_{II}$ sur la plasticité en fond de fissure	17
2.4 Rupture en mode mixte par chargement de compression	20
2.5 CONCLUSIONS	26
<b>3 FATIGUE</b>	<b>28</b>
3.1 PROPAGATION DES FISSURES DE FATIGUE EN MODE I	28
3.2 PROPAGATION DES FISSURES DE FATIGUE EN MODE MIXTE I + II	29
3.2.1 Traction uniaxiale	29
3.2.2 Compression uniaxiale	45
3.2.3 Sollicitation biaxiale	48
3.2.3.1 Chargement proportionnel	50
3.2.3.2 Chargement non proportionnel	51
3.3 FISSURATION EN MODE II	62
3.3.1 Présentation du problème	62
3.3.2 Sollicitation uniaxiale	63
3.3.3 Sollicitation biaxiale	64
3.4 CORRELATION ENTRE LA VITESSE DE FISSURATION ET LA TAILLE DE LA ZONE PLASTIQUE CYCLIQUE	66
3.5 DISCUSSION	69
<b>4 DISQUE BRESILIEN</b>	<b>73</b>
4.1 DIFFERENTES METHODES DE CALCUL DU FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE POUR UN DISQUE CHARGE EN COMPRESSION	73

4.1.1 Historique	73
4.1.2 Champ de contraintes dans un disque non fissuré chargé en mode I pur	74
4.1.3 Modèles donnant la valeur du facteur d'intensité de contrainte	76
4.1.3.1 Chargement en mode I pur	77
4.1.3.2 Chargement en mode mixte I + II	81
4.1.3.3 Chargement en mode II 'impur' ( $K_I < 0$ )	87
4.2 ANALYSE DES RESULTATS NUMERIQUES	88
4.2.1 Cas d'un chargement ponctuel	88
4.2.2 Cas d'un chargement réparti	90
4.3 VALIDATION DES CALCULS DE $K_I$ et de $K_{II}$ A L'AIDE DES RESULTATS EXPERIMENTAUX	91
4.3.1 Matériaux	91
4.3.2 Validité de l'essai sur disque	92
4.3.3 Rupture en mode II pur ( $K_I = 0$ )	93
4.3.4 Rupture en mode II 'impur' ( $K_I < 0$ )	96
4.4 CONCLUSIONS A PROPOS DU DISQUE BRESILIEN	98
<b>5 METHODES EXPERIMENTALES</b>	<b>99</b>
5.1 Matériaux	99
5.1.1 Type de matériaux utilisés	99
5.1.2 Etude métallurgique	99
5.2 TECHNIQUE DE FISSURATION	100
5.2.1 Préparation de l'éprouvette	100
5.2.2 Conditions d'essai	100
5.2.3 Détermination des diagrammes charge--ouverture	101
5.2.4 Détermination de la taille de la zone plastique	102
<b>6 RESULTATS EXPERIMENTAUX</b>	<b>103</b>
6.1 Essai de fissuration en mode I	103
6.1.1 But	103
6.1.2 Modèle de dépouillement	103
6.1.3 Influence de la géométrie du disque sur la loi de PARIS	105
6.2 Essai de fissuration en mode I + II	105
6.2.1 Méthode de dépouillement	105
6.2.2 Evolution de la trajectoire de propagation	107
6.2.3 Evolution des facteurs $K_I$ et $K_{II}$	107
6.2.4 Evolution des angles de bifurcation et de chargement	108
6.2.5 Evolution de la longueur de fissure curviligne $a_T$	108
6.2.6 Evolution de la vitesse de fissuration	109
6.2.6.1 en fonction de la longueur de fissure $a_T$ :	109
6.2.6.2 en fonction de la composante $K_I$	111
6.2.7 Conclusion à la première série d'essais	111
6.3 Deuxième série d'essais – Etude des mécanismes	112
6.3.1 But	112
6.3.2 Essai de fissuration en mode I	112
6.3.3 Essai de fissuration en mode I + II	113

6.3.3.1 Evolution des courbes $a_T - N$ et $da/dN - a_T$	113
6.3.3.2 Evolution des déplacements des lèvres de la fissure	113
6.3.4. Etude microscopique des faciès de rupture	116
6.3.4.1 en mode I	116
6.3.4.2 en mode mixte	116
6.4. Conclusion à la seconde série d'essais	118
<b>7 DISCUSSION</b>	<b>120</b>
7.1 A propos de la direction initiale de bifurcation de la fissure	120
7.1.1 Chargement initial de mode I + II	120
7.1.2 chargement initial de mode II pur	120
7.1.3 chargement initial de mode II impur	121
7.2 A propos de l'évolution de l'angle de bifurcation au cours de la propagation de la fissure	121
7.3 A propos de la vitesse de fissuration	122
7.3.1 Calcul de la vitesse instantanée	122
7.3.2 Chargement initial en mode I + II	122
7.3.3 chargement initial de mode II pur	123
7.3.4 Chargement initial de mode II impur	124
7.4 A propos des déplacements des lèvres de la fissure	125
7.5 A propos de la bifurcation initiale de la fissure suivant deux directions	126
7.6 A propos du frottement	128
7.7 A propos des mécanismes de propagation des fissures de fatigue en mode mixte	129
7.7.1 Lorsque la composante de mode I est positive	130
7.7.2 Lorsque la composante de mode I est de compression	131
7.8 A propos de l'influence du rapport de charge R	134
7.8.1 Sur la vitesse de fissuration	134
7.8.2 Sur la trajectoire de propagation	134
7.9 A propos de l'influence de la limite d'élasticité	135
7.9.1 Sur l'angle de bifurcation	135
7.9.2 Sur la vitesse de fissuration	135
7.10 A propos de la taille de la zone plastique	136
7.11 A propos des prévisions de l'angle de bifurcation initial	137
7.12 A PROPOS DE LA SIMULATION NUMERIQUE DE LA TRAJECTOIRE DE LA	
<b>FISSURE</b>	<b>138</b>
7.12.1 METHODE	138
7.12.2 RESULTATS	139
<b>8 MODELISATION</b>	<b>140</b>
8.1 Généralités	140
8.2 Extension du critère de l'écartement critique	141
8.2.1 Calcul de $\Delta K_{Ieqmax}$ en l'absence de frottement	141
8.2.2 Calcul de $(\Delta K_{Ieq})_{max}$ en présence de frottement	143
8.2.2.1 Estimation de la valeur limite $\beta^*$	144
8.2.2.2 Estimation de la valeur de f	145

8.3 Courbes de vitesse de propagation exprimées à partir des différents critères de bifurcation	145
8.3.1 Présentation des courbes obtenues	145
8.3.2 Analyse des courbes en négligeant le frottement	146
8.3.3 Analyse des courbes de vitesse en tenant compte du frottement	147
<b>9 CONCLUSION GENERALE</b>	<b>149</b>
<b>Annexe A</b>	<b>164</b>
<b>DETERMINATION DES FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE D'UNE FISSURE BRANCHEE</b>	



**Remarques :**

- Les numéros des figures qui se rattachent aux chapitres 1, 2, 3 et 4 seront précédés de la lettre **B**
- Les numéros des figures se rapportant aux autres chapitres seront précédés de la lettre **E**
- Les équations seront numérotées en fonction du chapitre auxquels elles se rattachent

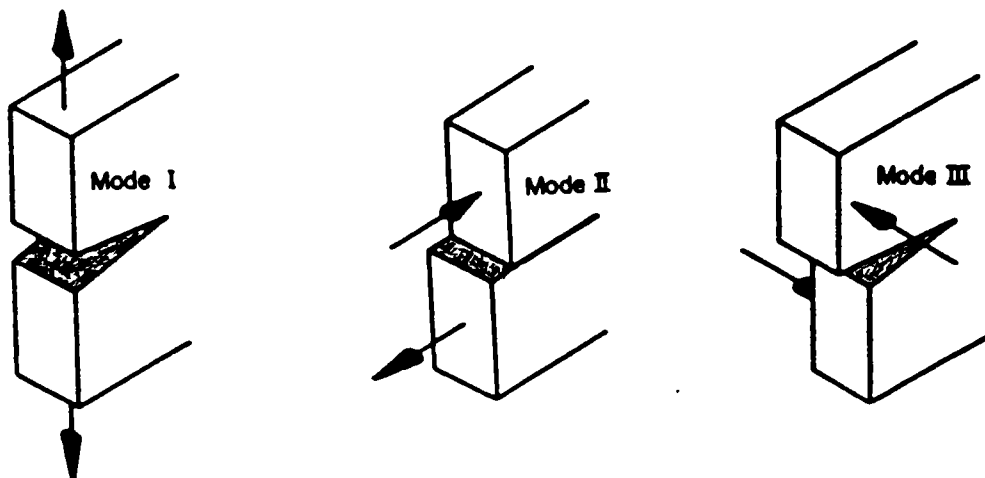
## Chapitre Un

### INTRODUCTION

Selon la terminologie de la mécanique de la rupture linéaire élastique, les fissures peuvent se propager selon trois modes élémentaires, schématisées par la figure B.1.

Ce sont :

- le **mode I** dit d'ouverture
- le **mode II** ou **cisaillement plan**
- le **mode III** encore appelé **cisaillement anti-plan**



- Figure B.1 - Les trois modes de rupture élémentaires

La présence de l'un quelconque de ces modes dépend de l'état des contraintes induit en fond de fissure.

Dans le cas d'un chargement uniaxial, la propagation des fissures se fait en mode I lorsque la contrainte de traction principale maximale est perpendiculaire à la fissure. On a affaire à du mode II lorsqu'une contrainte de cisaillement simple est appliquée le long du plan de la fissure ; il y aura combinaison des deux modes (*mode mixte*) lorsque les deux conditions précédentes sont remplies simultanément.

Les fissures peuvent se propager, soit par rupture fragile instable, soit par propagation cyclique (fatigue), selon l'un de ces trois modes ou toute combinaison de deux ou trois d'entre eux.

Pratiquement, il est reconnu que, dans la plupart des structures qui travaillent, l'état des contraintes n'est pas simplement uniaxial, mais que, bien souvent, il existe des états biaxiaux et triaxiaux (joints de soudure, trains de laminoirs, certaines structures marines formées d'éléments tubulaires soudés ensemble, etc...).

Ainsi, il est nécessaire de savoir comment le processus de fatigue dans les matériaux métalliques, c'est-à-dire l'amorçage des fissures et leur propagation, a lieu dans des états de contrainte complexes et, en particulier, si un chargement en mode mixte va modifier les directions d'amorçage et de propagation.

Le moyen le plus simple d'obtenir une propagation en mode mixte consiste à utiliser une fente inclinée en chargement monoaxial, bien que la gamme de proportion de mode I par rapport au mode 'II' soit alors limitée. De toutes les éprouvettes employées, le *disque brésilien* est celle qui permet un accès aisé à des combinaisons variées de mode I et de mode II.

La facilité avec laquelle on peut obtenir un chargement uniaxial et la validité générale de la loi de PARIS, pour la propagation en mode I, ont abouti à une prépondérance des données sur la propagation des fissures en fatigue monoaxiale.

Par contre, les études en fatigue polymodale sont peu nombreuses. Cela n'est pas dû à un manque d'intérêt, mais vraisemblablement à des difficultés d'ordre pratique au niveau des essais.

Dans un premier chapitre, nous présentons les différents types de chargement en mode I + II, puis nous passerons en revue les principaux critères de bifurcation existant en mécanique de la rupture linéaire élastique.

Une étude bibliographique détaillée portant sur les travaux de fissuration de fatigue en mode mixte fait l'objet du chapitre suivant. Puis, nous recenserons les différents modèles de calcul des facteurs d'intensité de contrainte dans le cas du disque brésilien.

En annexe A, on trouvera une présentation des principales méthodes de calcul des facteurs d'intensité de contrainte à la pointe d'une fissure branchée.

Les chapitres 5 et 6 exposent les essais réalisés, les techniques de dépouillement utilisées, ainsi que les résultats obtenus avant une discussion de ces résultats dans le chapitre 7. Le chapitre 8 propose une tentative de modélisation de la vitesse de propagation d'une fissure chargée en mode mixte.

## Chapitre Deux

### CRITERES DE RUPTURE EN MODE MIXTE

#### 2.1 DETERMINATION DES CONTRAINTES EN FOND DE FISSURE

##### 2.1.1 Chargement quelconque

Dans le cas général d'un problème plan d'élasticité, le calcul du champ des contraintes à la pointe d'une fissure dans un solide homogène, de forme et chargement extérieur quelconques (*figure B.2a*), a été effectué par EFTIS et SUBRAMONIAN (1), à partir de l'analyse de WILLIAMS (2).

Les composantes des contraintes, définies en termes de séries, sont données jusqu'aux termes d'ordre 2 par les expressions suivantes (2.1) :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{5}{4} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( -\frac{5}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \sigma_t \cos^2 \theta \\ (2.1) \quad \sigma_\theta &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{3}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( -\frac{3}{4} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \sigma_t \sin^2 \theta \\ \tau_{r\theta} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{1}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right) - \sigma_t \sin \theta \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

avec :  $K_I$  : facteur d'intensité de contrainte élastique en mode I, dû à l'ouverture de la fissure

$K_{II}$  : facteur d'intensité de contrainte en mode II, dû au glissement parallèle des lèvres de la fissure.

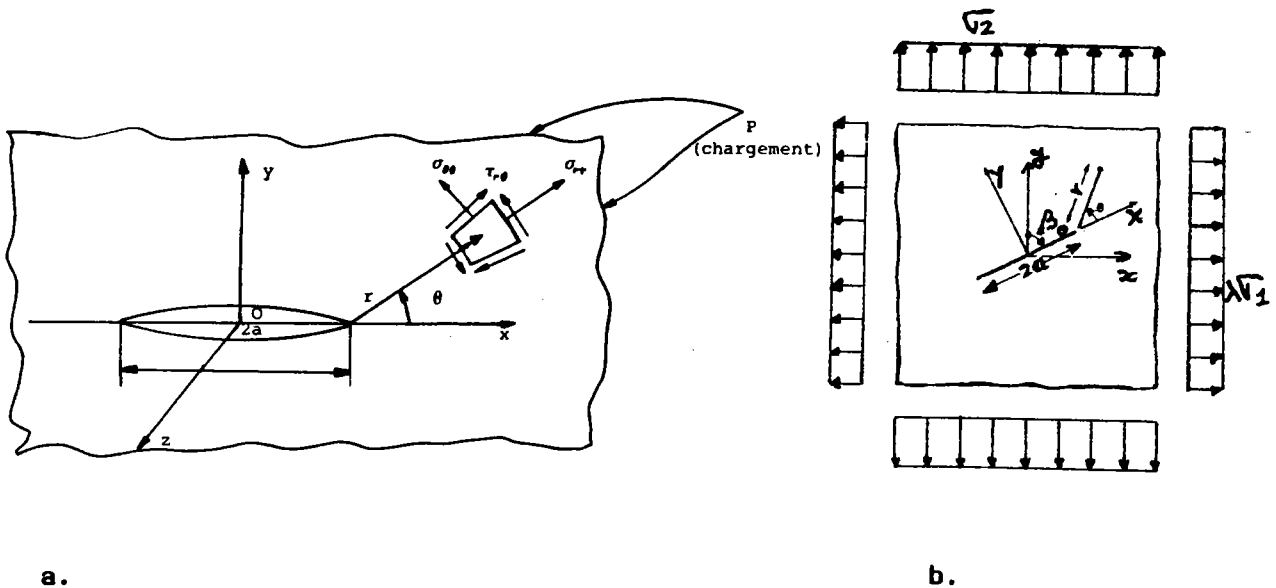
$\sigma_t$  : terme du deuxième ordre

Ces deux facteurs, qui s'expriment en  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ , ne dépendent que de la géométrie du corps fissuré et du type de chargement extérieur appliqué.

Au voisinage immédiat de la pointe de la fissure, c'est-à-dire lorsque la distance  $r$  tend vers zéro, on définit couramment le champ des contraintes par la solution dite singulière. Dans cette approximation, on néglige les termes du deuxième ordre en  $\sigma_t$  qui sont indépendants de  $r$ , et on ne garde que les termes du premier ordre dont la singularité est en  $1/\sqrt{r}$ .

### 2.1.2 Chargement biaxial

La définition du champ des contraintes à partir de la solution singulière a été à l'origine de nombreux travaux d'analyse – cf. : (3), (4), (5), (6) –, le but étant de vérifier si le terme du deuxième ordre peut, ou non, être négligé systématiquement dans les expressions des contraintes, quels que soient l'orientation et le type de chargement extérieur.



- Figure B.2 - Etat de contraintes  
 a. chargement quelconque  
 b. chargement biaxial

Dans le cas d'un chargement biaxial (figure B.2b), EFTIS et SUBRAMONIAN (1) ont défini les composantes des contraintes, dans un repère cartésien, par les expressions (2.2) :

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right) + \sigma_2 (1 - \lambda) \cos 2\beta_0$$

$$(2.2) \quad \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$$

avec :

$$K_I = \frac{\sigma_2 \sqrt{\pi a}}{2} [(1 + \lambda) - (1 - \lambda) \cos 2\beta_o]$$

(2.3)

$$K_{II} = \frac{\sigma_2 \sqrt{\pi a}}{2} (1 - \lambda) \sin 2\beta_o$$

le coefficient  $\lambda$ , appelé rapport de chargement biaxial, représente l'amplitude du chargement suivant la direction horizontale, avec  $\sigma_1 = \lambda \sigma_2$ ,

l'angle  $\beta_o$  définit la direction de la fissure par rapport à celle de  $\sigma_2$  (verticale).

L'analyse des expressions (2.2) implique que :

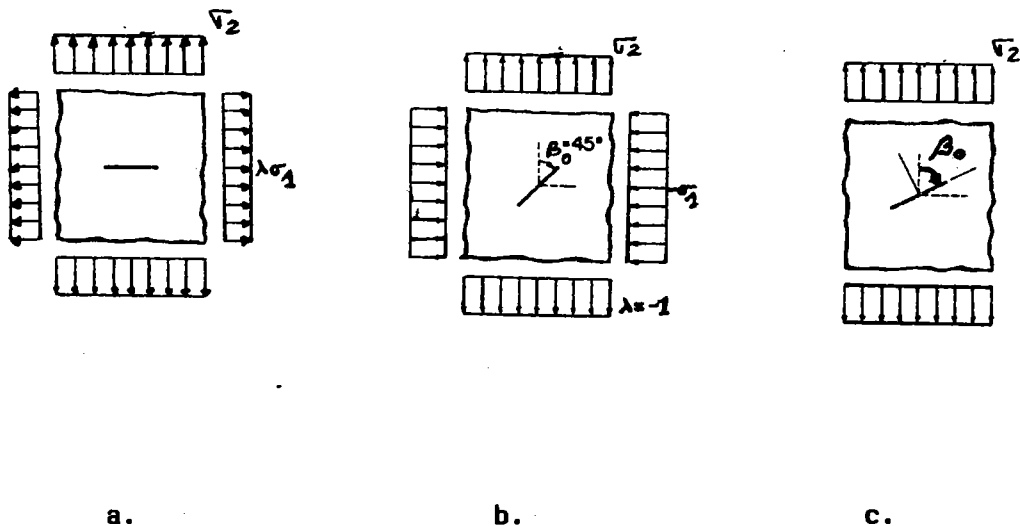
- seule la composante  $\sigma_{xx}$  est fonction du terme non singulier  $\sigma_t$ , avec  $\sigma_t = \sigma_2(1 - \lambda)\cos 2\beta_o$ . Par conséquent, la direction de  $\sigma_t$  est bien parallèle à celle de la fissure principale de longueur  $2a$ .
- la valeur de  $\sigma_t$  est indépendante de la distance  $r$ . Par suite, opter pour la solution singulière des contraintes dans le cas d'un chargement biaxial serait, d'un point de vue théorique, quantitativement et qualitativement, incorrect. En réalité, la solution singulière correspondra au cas d'un chargement biaxial, dit de *traction-traction* ( $\lambda = +1$ ).

### 2.1.3 Les différents modes de rupture

#### 2.1.3.1 Chargement biaxial

A partir des expressions (2.3) exprimant les facteurs d'intensité de contrainte dans le cas général d'un chargement biaxial, on peut distinguer les modes de rupture de la manière suivante :

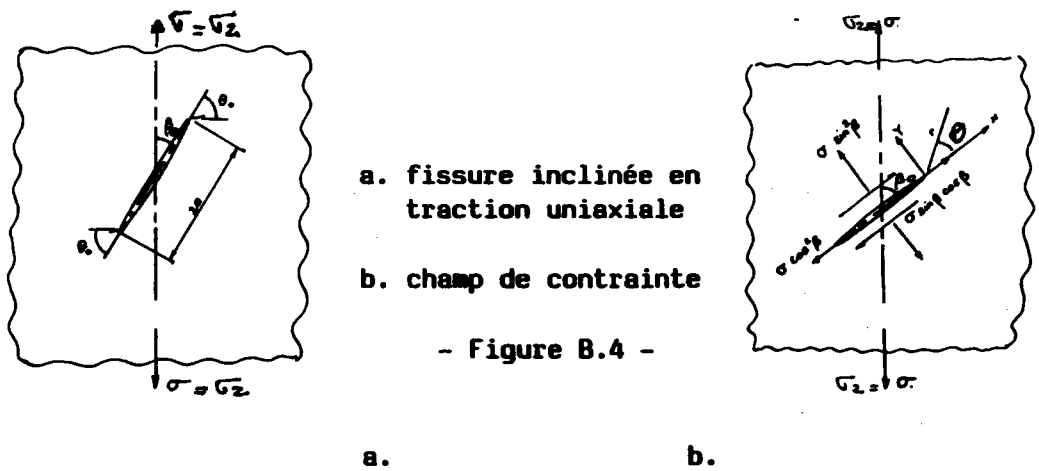
- rupture en mode I pur, avec :  $K_I = \sigma_2 \sqrt{\pi a}$  et  $K_{II} = 0$  lorsque :  
 $\beta_o = \pi/2$  et  $\lambda$  prend une valeur quelconque (*figure B.3a*), ou que :  
 $\beta_o$  est quelconque et  $\lambda = 1$ , ce qui correspond au cas d'un chargement équiaxial.
- rupture en mode II pur, avec  $K_I = 0$  et  $K_{II} = \sigma_2 \sqrt{\pi a}$  si  $\beta_o = \pi/4$  et  $\lambda = -1$  (*figure B.3b*),
- rupture en mode mixte sous sollicitation biaxiale (*figure B.2b*), si  $\beta_o$  est différent de  $\pi/2$ ,  $\pi/4$  et  $0$ , et si  $\lambda$  est différent de  $-1$ ,  $0$ , et  $+1$ .



a. Mode I : cas général  
 b. Mode II : cas idéal  
 c. Mode mixte : cas pratique

- Figure B.3 -

2.1.3.2 Chargement uniaxial



a. fissure inclinée en traction uniaxiale  
 b. champ de contrainte

- Figure B.4 -

Si  $\lambda = 0$ , on retrouve la situation simple et pratique du mode mixte I + II en chargement uniaxial (figure B.3b). Dans ce cas, les expressions des facteurs d'intensité de contrainte sont identiques à celles données par SIH et col. (7) pour une plaque à entaille centrale – appelée C.C.P. – inclinée d'un angle  $\beta_0$  par rapport à la direction de la charge (figure B.4a), c'est-à-dire :

$$(2.4) \quad \begin{aligned} K_I &= \sigma_2 \sqrt{\pi a} \sin^2 \beta_0 \\ K_{II} &= \sigma_2 \sqrt{\pi a} \sin \beta_0 \cos \beta_0 \end{aligned}$$

#### 2.1.4 Calcul des facteurs d'intensité de contrainte

Effectué en mode I pur ainsi qu'en mode mixte, ce calcul a fait l'objet de nombreuses études, étant donné qu'il est nécessaire de le refaire pour chaque géométrie d'éprouvette et chaque type de chargement.

Pour une fissure droite, nous verrons, dans le chapitre 4, les différentes méthodes employées pour déterminer les facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$ , appliquées au cas du disque brésilien.

Nous présenterons également, en annexe A, un résumé bibliographique sur les principaux modèles de calcul des facteurs d'intensité de contrainte à la pointe d'une fissure branchée. Ces facteurs seront notés  $K_I^*$  et  $K_{II}^*$ .

## 2.2 PRINCIPAUX CRITERES DE RUPTURE EN MODE MIXTE

La plupart des études concernant la propagation polymodale des fissures ont porté sur la rupture sous chargement monotone. Elles ont permis de dégager un certain nombre de critères de propagation qui présentent une analogie avec ceux utilisés pour rendre compte de la propagation par fatigue. Il nous est donc apparu intéressant de les présenter brièvement.

Il est à noter que JODIN et PLUVINAGE (8) ont dénombré plus de trente-trois critères de rupture.

### 2.2.1 Critère de la contrainte tangentielle maximale

Le critère de rupture proposé par ERDOGAN et SIH (9) énonce qu'à la pointe d'une fissure, la rupture se produit dans une direction perpendiculaire à celle où la contrainte tangentielle  $\sigma_\theta$  est maximale, lorsque cette contrainte atteint une valeur critique  $\sigma_{\theta cr}$ .

A partir des expressions (2.1), la contrainte tangentielle singulière a pour équation :

$$(2.5) \quad \sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right)$$

La direction  $\theta_0$  suivant laquelle  $\sigma_\theta$  est maximale est donnée par les solutions des équations (2.6) et (2.7) :



$$(2.6) \quad \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad \theta = \theta_0 \quad (2.7) \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\theta}}{\partial \theta^2} < 0$$

Il y a plusieurs solutions à l'équation (2.6). Pour un chargement en mode mixte, la première solution  $\theta_0 = \pm \pi$  est triviale et correspond aux bords libres de la fissure. Les deux autres solutions sont données par l'égalité (2.8). Mais la seule solution retenue est celle qui donne la plus grande valeur de  $\sigma_{\theta}$ .

$$(2.8) \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = \frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}}\right) \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{K_I^2}{K_{II}^2} + 8}$$

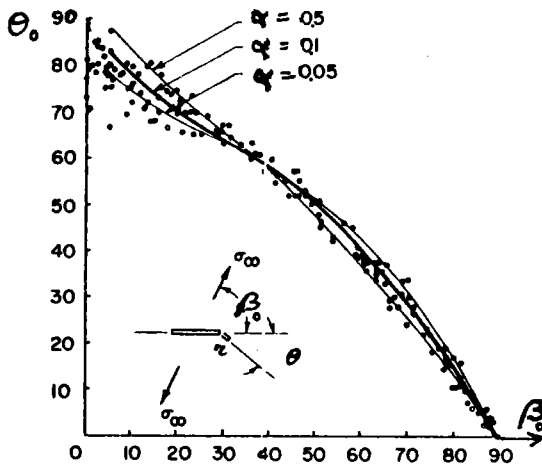
Il est à noter que la condition  $\partial^2 \sigma_{\theta} / \partial \theta^2 < 0$  est toujours vérifiée et que, pour ce critère, la direction de propagation  $\theta_0$  est indépendante de la nature du matériau, et plus particulièrement du coefficient de POISSON  $\nu$ .

Influence du terme non singulier  $\sigma_t$  et de la distance  $r$  :

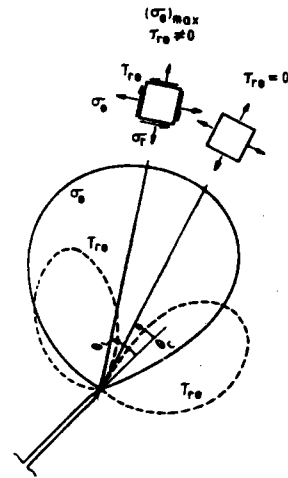
Le critère de  $\sigma_{\theta_{\max}}$  est en bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus sur éprouvette à entaille inclinée, sauf dans le domaine des faibles valeurs de  $\beta_0$ , où les quantités  $K_I$  et  $K_{II}$  tendent vers zéro.

A partir de la *figure B.5*, et pour les valeurs de  $\beta_0$  inférieures à 40 degrés, WILLIAMS et EWING (5) ont montré qu'on obtenait un meilleur accord du critère avec les résultats expérimentaux si on tenait compte, dans l'expression de  $\sigma_{\theta}$  donnée par (2.1), du terme non singulier  $\sigma_t$  et, plus particulièrement, de sa composante  $\sigma_2 \cos^2 \beta_0$ , qui est parallèle à l'entaille (*figure B.4b*).

FINNIE et SAITH (6) ont apporté, par la suite, une correction à l'analyse de WILLIAMS et EWING, permettant d'améliorer le critère pour les valeurs de l'angle  $\beta_0$  supérieures à 40 degrés, en considérant intégralement le terme :  $\sigma_t = \sigma_2(\cos^2 \beta_0 - \sin^2 \beta_0)$ .



- Figure B.5 -  
angle de rupture en fonction de  
l'angle de fissure initial (5)



- Figure B.6 -  
direction de l'angle initial de  
bifurcation selon les critères  
de  $\sigma_{\theta_{max}}$  (9) et de  $\sigma_{IM}$  (10, 11)

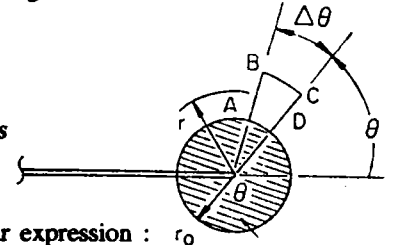
La solution de l'équation  $\partial \sigma_{\theta} / \partial \theta = 0$  dans ce cas, est alors fonction de la distance  $r$  à laquelle les contraintes sont calculées. WILLIAMS et EWING ont été amenés à apporter une modification dans l'hypothèse du critère, en postulant que la valeur maximale de  $\sigma_{\theta}$  n'est atteinte qu'à une distance critique  $r$  de la pointe de la fissure. Ils ont alors obtenu un accord optimal avec les résultats expérimentaux pour une distance  $r$  voisine de 0,05 mm, ce qui correspond à une valeur de  $\alpha = \sqrt{(2r_0/a)}$  égale à 0,1 environ (figure B.5).

**REMARQUE :** Il est à noter qu'il existe un critère dit de la contrainte tangentielle maximale principale, proposé par MAITI et SMITH (10), (11), peu différent, mais cependant distinct du précédent lorsque les composantes des contraintes ne sont pas définies uniquement par les termes singuliers. En effet, si l'on considère plus d'un terme dans les expressions du champ des contraintes (équation 2.1), la direction donnée par  $\partial \sigma_{\theta} / \partial \theta = 0$  n'est pas principale. Par contre, celle donnée par  $\tau_{r,\theta} = 0$  l'est (cf. : figure B.6). Dans ce cas, MAITI et SMITH définissent le critère de la contrainte tangentielle maximale principale  $\sigma_{I_{max}}$ . Toutefois, l'écart entre les directions données par les deux critères reste faible.

### 2.2.2 Critère de la densité d'énergie de déformation minimale

Par rapprochement avec le précédent, ce critère est communément appelé critère de **SIH-2** (12). En se plaçant toujours dans l'hypothèse d'un milieu élastique linéaire continu, l'énergie de déformation  $dW$  d'un élément infinitésimal  $dA$  situé à une distance  $r$  de la pointe d'une fissure chargée en mode mixte s'écrit sous la forme :

$$(2.9) \quad \frac{dW}{dA} = \frac{S}{r} + \text{termes non singuliers}$$



En mode mixte, où  $K_{III} = 0$ , la quantité  $S$  d'énergie de déformation a pour expression :  $r_0$

$$(2.10) \quad S = \frac{1}{\pi} (a_{11}K_I^2 + a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2)$$

où les constantes  $a_{ij}$  sont fonction de l'angle  $\theta$ , ainsi que des propriétés élastiques du matériau, selon (2.11) :

$$(2.11) \quad \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{16\mu} [(1 + \cos \theta)(\kappa - \cos \theta)] \\ a_{12} &= \frac{1}{16\mu} \sin \theta [2 \cos \theta - (\kappa - 1)] \\ a_{22} &= \frac{1}{16\mu} [(\kappa + 1)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1)] \end{aligned}$$

où  $\mu$  désigne le module de cisaillement, et :

$$(2.12) \quad \kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu) \text{ en contraintes planes}$$

$$\kappa = 3 - 4\nu \quad \text{en déformation plane}$$

$\nu$  étant le coefficient de POISSON.

**SIH** (12) propose un critère qui énonce que la rupture intervient dans la direction où  $S$  est minimale ( $\partial S / \partial \theta = 0$ ) lorsque  $S_{\min}$  atteint une valeur critique,  $S_{cr}$ , proportionnelle à une distance de propagation initiale  $r = r_0$ , de sorte que la quantité  $S_{cr}/r_0$  reste constante le long du nouveau front de la fissure.

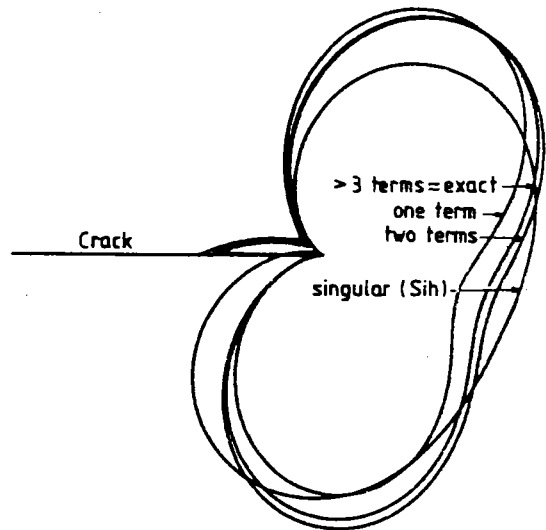
Le calcul de la direction de propagation conduit à deux minima de  $S$ , un minimum local avec  $\sigma_\theta > 0$ , et un minimum global avec  $\sigma_\theta < 0$ . Pour une bonne application du critère de **SIH-2**, **SWEDLOW** (13) veut qu'on lui ajoute un corollaire qui précise que la direction effective de bifurcation  $\theta_0$  doit être associée

à une contrainte tangentielle **POSITIVE**, quelle que soit la nature du chargement extérieur (traction ou compression).

Influence du terme non singulier et de la distance  $r$  :

Pour les mêmes raisons que pour le critère précédent, des calculs ont été effectués pour étudier l'influence que peuvent avoir les termes non singuliers sur la valeur minimale de la fonction  $S$ . THEOCARIS et ANDRIANOPOULOS (14) montrent, à partir de la **figure B.7**, que pour  $\beta_0 = 75$  degrés, la différence est de l'ordre de **40%** entre la valeur de  $\theta_0$  donnée par la solution exacte et celle déduite de la solution singulière ; de même pour la quantité  $S_{\min}$ , la différence est de **30 %**.

- Figure B.7 -  
densité d'énergie de déformation  
pour  $\beta_0 = 75^\circ$ ,  $r = 0,34 \text{ mm}$   
et  $r/2a = 0,05$  (14)



Pour effectuer ces calculs, signalons que l'auteur a opté pour un rapport  $r/a$  de **0,1**.

SIH et KIPP (15) ont étudié théoriquement et expérimentalement le critère de  $S_{\min}$  dans le but de le comparer avec le critère de  $\sigma_{\theta_{\max}}$ . Leurs résultats indiquent que le premier donne des valeurs stables pour un rapport de  $r/a$  compris entre **0,005** et **0,01**.

**2.2.3 Critère du taux de restitution de l'énergie maximale**

L'équation (2.13) où GRIFFITH admet que l'énergie absorbée par l'extension de la fissure est proportionnelle aux surfaces créées dans le plan de celle-ci pour le mode I pur peut, à première vue, être généralisée au mode I + II, selon (2.14) :

$$(2.13) \quad G = \frac{\kappa + 1}{8\mu} K_I^2 \qquad (2.14) \quad G = \frac{\kappa + 1}{8\mu} (K_I^2 + K_{II}^2)$$

L'équation (2.14) suppose implicitement que la fissure en mode mixte se propage suivant son plan

initial, ce qui est en contradiction avec l'expérience où, souvent, la fissure ne se propage pas de façon coplanaire.

Pour résoudre ce délicat problème d'élasticité, des tentatives ont été faites par PALANISWAMY et KNAUSS (16), HUSSAIN et col. (17), NUISMER (18), HWANG (19), ICHIKAWA et TANAKA (20) qui ont tenté d'obtenir une relation plus réaliste entre la quantité  $G$  et les facteurs d'intensité de contrainte, tenant compte de la direction de branchement  $\theta_0$  (cf. : annexe A).

Soit une fissure droite  $OA$  dans une géométrie infinie, soumise à un chargement plan  $(\sigma, \tau)$  - *figure B.8* - et soit la même fissure prolongée à son extrémité par une petite branche  $OB$ , de longueur  $\Delta b$ , suivant un plan  $OD$  faisant un angle  $\theta_0$  avec la fissure droite  $OA$  (*figure B.9*).

Soient :

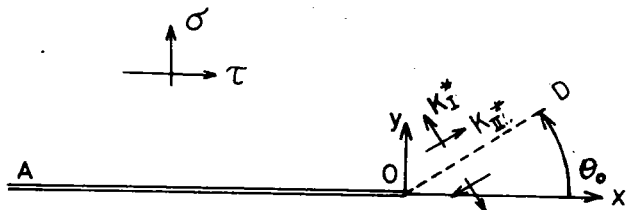
$K_I, K_{II}$  les facteurs d'intensité de contrainte en  $O$

$K_{IB}^*, K_{IIB}^*$  - - - - -  $B$

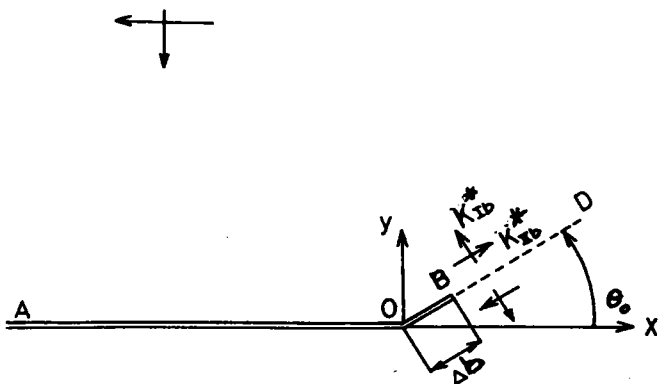
$K_{IB'}^*, K_{IIB'}^*$  - - - - -  $B'$

$K_I^*, K_{II}^*$  - - - - - au voisinage du point  $O$

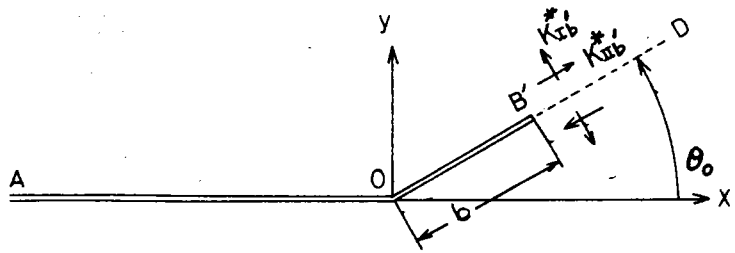
- Figure B.8 -  
fissure droite chargée  
en mode mixte



- Figure B.9 -  
amorçage d'une branche  
infinitésimale à partir  
d'une fissure droite



- Figure B.10 -  
fissure à branche de  
longueur finie



Bien que les formes géométriques des fissures soient supposées identiques, on a généralement :  $K_I^* \neq K_I$  et  $K_{II}^* \neq K_{II}$ .

On appellera  $G$  le taux de libération d'énergie maximale pour l'amorçage de la branche infinitésimale  $OB$ , et  $G(b)$  le taux nécessaire à la propagation de la partie branchée  $OB'$  le long du plan  $OD$  (figure B.10).

Cependant, les formules exprimant  $G$  peuvent ne pas coïncider d'un auteur à l'autre. Ainsi, selon HUSSAIN (17),

$$(2.15) \quad G = \lim_{b \rightarrow 0} G(b) = \frac{\kappa + 1}{8\mu} (K_{IB}^*{}^2 + K_{IIB}^*{}^2)$$

avec :  $K_{IB}^* = \lim_{b \rightarrow 0} K_I(b)$  et  $K_{IIB}^* = \lim_{b \rightarrow 0} K_{II}(b)$ ,

alors que NUISMER(18) propose :

$$(2.16) \quad G = \lim_{b \rightarrow 0} G(b) = \frac{\kappa + 1}{8\mu} (K_{IB}^*{}^2 + K_{IIB}^*{}^2)$$

avec :  $K_I^* = \lim_{b \rightarrow 0} K_I(b)$  et  $K_{II}^* = \lim_{b \rightarrow 0} K_{II}(b)$ .

NUISMER suppose qu'il y a continuité dans le champ de contrainte, avant et après branchement.

Avec les notations précisées ci-dessus, on constate que les valeurs de  $G$  obtenues en mode mixte par HUSSAIN et NUISMER sont définies, pour un même problème, par des facteurs d'intensité de contrainte différents.

ICHIKAWA et TANAKA (20) considèrent qu'il reste à vérifier l'une des hypothèses avancées par ces deux auteurs où l'on suppose implicitement que l'énergie  $G$  est la limite de  $G(b)$  lorsque la branche tend vers zéro. Si, dans l'équation de  $G$  développée par TANAKA, on ne tient pas compte du mode III, on aboutit à une expression identique à celle de HUSSAIN et col. (17).

Bien que, d'après ICHIKAWA et TANAKA, les solutions de NUISMER (18) et de HUSSAIN et col. (17) soient fausses d'un point de vue théorique, elles donnent néanmoins, pour des angles  $\theta_0$  de branchement compris entre 0 et 60 degrés, des résultats voisins de ceux d'AMESTOY (21) et de VITEK (22) – cf. : annexe A –.

Par suite, la détermination du taux de restitution de l'énergie maximale nécessaire à la propagation d'une fissure, repose sur des passages à la limite qu'il convient de considérer avec précaution.

Le critère de propagation s'énonce comme suit : *une fissure se propage dans la direction  $\theta_0$  où  $G$  est maximum et il y a rupture lorsque  $G_{\max}$  atteint une valeur critique  $G_{cr}$ .*

#### 2.2.4 Critère de déformation de traction maximale

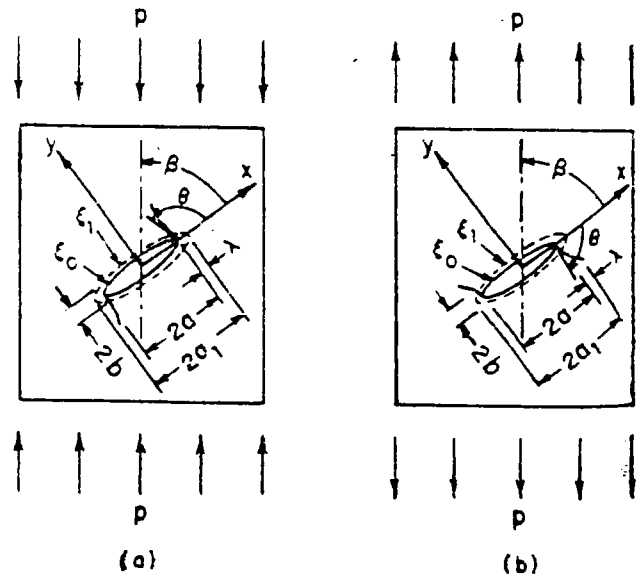
Proposé par WU et CHANG (23),(24) et développé ensuite par CHANG (25), ce critère concerne le cas des fissures elliptiques inclinées sollicitées soit en traction, soit en compression (mode mixte) – figure B.11 –.

Pour des matériaux isotropes à comportement élastique linéaire, où les directions principales données par le tenseur des contraintes sont les mêmes que celles données par le tenseur ( $\bar{\epsilon}$ ) des déformations, la formulation mathématique du critère, en termes de contraintes, s'écrit :

$$(2.17) \quad F = \frac{1}{C} \left( \frac{\sigma_I}{\sigma_T} \right)^2 + \frac{C-1}{C} \left( \frac{\sigma_{II}}{\sigma_T} \right) - \left( \frac{\sigma_T}{\tau_C} \right) \left( \frac{\sigma_{II}}{\sigma_T} \right) = 1$$

où  $\sigma_I$  et  $\sigma_{II}$  sont les invariants du tenseur des contraintes, et  $C = \frac{\sigma_C}{\sigma_T}$  ( $C > 1$  pour les matériaux fragiles),

$\sigma_T$  et  $\sigma_C$  étant respectivement les résistances à la traction et à la compression (rupture fragile),  $\tau_C$  étant la contrainte de cisaillement critique en torsion.



- Figure B.11 -  
entaille elliptique inclinée :  
a. en compression  
b. en traction

CHANG et WU considèrent que l'extension de la fissure se produit sur le contour d'une surface critique  $\xi_1$ , en un point où la fonction scalaire atteint sa valeur critique  $F(\bar{\varepsilon})_{cr}$ , égale à 1 d'après la relation (2.17). La direction initiale d'accroissement de fissure est alors la direction normale à la déformation de traction principale maximale  $\varepsilon_{\theta_{max}}$  en ce point.

Dans la *figure B.11*,  $\xi_0$  est un paramètre de contour qui s'identifie à celui de l'entaille mécanique.

La vérification expérimentale de ce critère sera examinée au paragraphe II.4.

## 2.2.5 Critère de l'écartement critique en fond de fissure

Les critères de rupture précédemment définis en mode mixte, sont bien adaptés au cas de la rupture fragile et lorsque celle-ci est accompagnée d'une déformation plastique plus ou moins importante au niveau de la pointe de la fissure. UEDA et col. (26) proposent un critère de rupture basé sur l'écartement en fond de fissure, ou C.O.D. (*crack opening displacement*).

Pour un matériau élasto-plastique, les auteurs considèrent qu'en mode mixte, la propagation s'amorce dans la direction perpendiculaire au vecteur d'écartement total en fond de fissure  $\vec{V}_T = \vec{BB}'$  (*figure B.12a*), résultant des vecteurs-déplacements  $\vec{V}_I = \vec{BD}$  et  $\vec{V}_{II} = \vec{BC}$ , qui sont imposés aux lèvres de la fissure respectivement par les composantes du mode I et celles du mode II de chargement. La rupture a lieu quand la valeur du déplacement total  $V_T$  donné par :

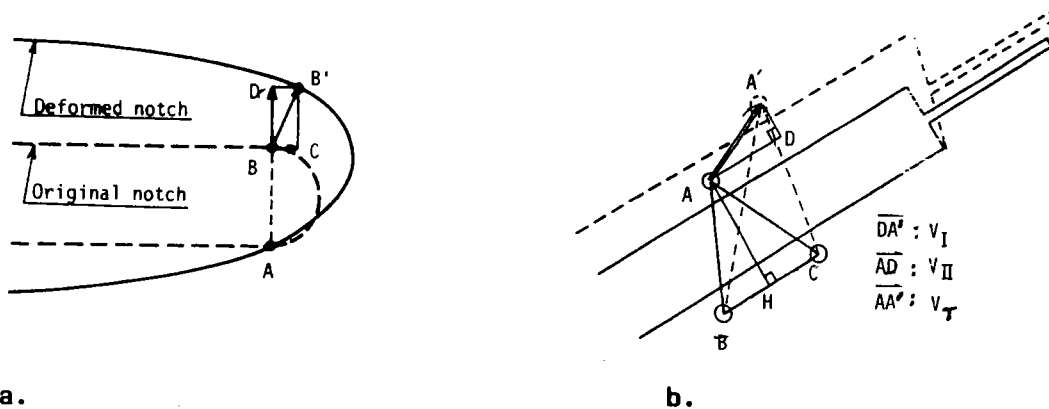
$$(2.18) \quad V_T = \sqrt{V_I^2 + V_{II}^2}$$

atteint une valeur critique  $V_{Tcr}$ .

La détermination expérimentale du vecteur  $\vec{V}_T$  a conduit UEDA et col. (26) à utiliser deux capteurs de déplacement qui mesurent l'écartement, au cours du chargement, entre les points A et B d'une part, et les points A et C d'autre part (*figure B.12b*).



En supposant que la distance  $BC$  reste constante au cours de l'essai, chaque composante du vecteur déplacement peut être déduite graphiquement des mesures des distances  $BA'$  et  $CA'$  (figure B.12b).



- Figure B.12 -

a. définition du C.O.D. en mode I + II (26)

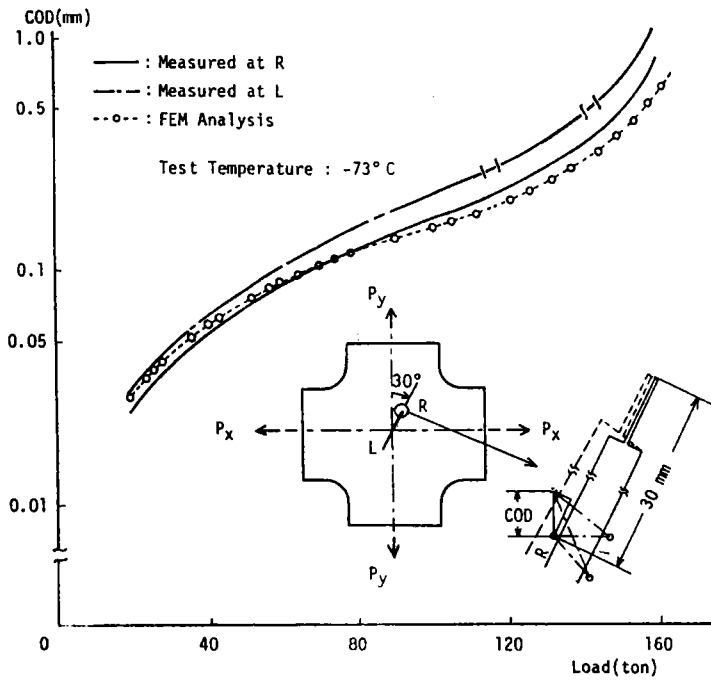
b. principe de mesure du C.O.D. en mode I + II (26)

Au cours des essais, il s'est avéré qu'il est très difficile d'effectuer les mesures du C.O.D. en mode mixte ; de plus, il est compliqué de convertir, au niveau de la pointe de la fissure, ces mêmes mesures qui sont obtenues au point  $A$ . Pour pallier ces difficultés, les auteurs ont alors élaboré un programme de calcul aux éléments finis élasto-plastiques donnant les valeurs du C.O.D. en fonction de l'angle  $\beta$  à une distance de 0,5 mm de la pointe de la fissure.

La figure B.13 compare les valeurs ainsi calculées aux valeurs expérimentales, obtenues à l'aide d'éprouvettes cruciformes en acier doux. La concordance est bonne entre les deux méthodes de mesure jusqu'à une charge avoisinant les cent tonnes.

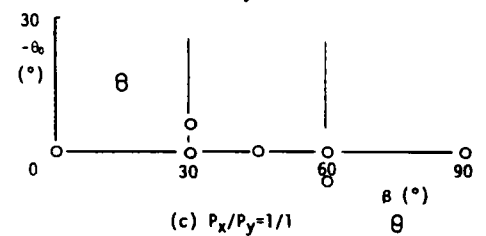
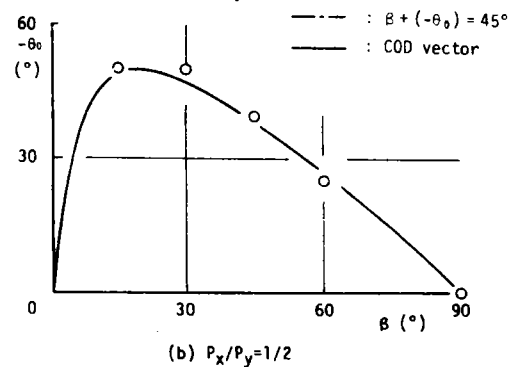
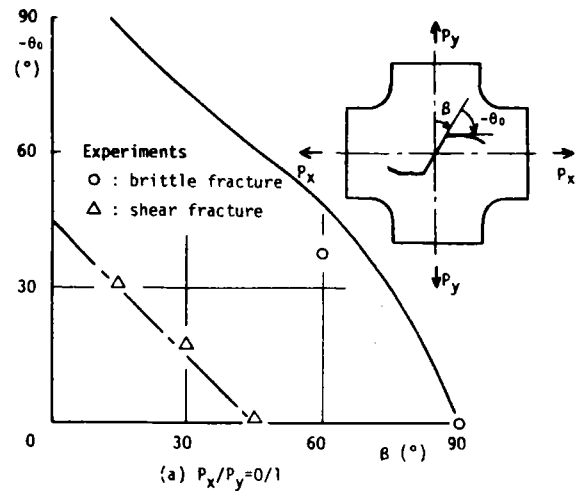
La figure B.14 montre que les angles de bifurcation prédits par le présent critère, sont vérifiés

expérimentalement pour les différentes valeurs de  $\beta_0$ , sauf dans le cas du chargement uniaxial ( $\lambda = 0$ ), où la rupture s'amorce dans la direction de la contrainte de cisaillement maximal :  $\beta_0 + (-\theta_0) = 45^\circ$ .



- Figure B.13 -  
comparaison entre le COD  
mesuré et le COD calculé (26)

- Figure B.14 -  
direction de propagation  
initiale en mode I + II (26)



D'autres critères élasto-plastiques de rupture en mode mixte sont recensés par JODIN (27).

### 2.3 Effet de la composante $K_{II}$ sur la plasticité en fond de fissure

Au cours de la traction, l'intensité des contraintes à proximité du fond de la fissure atteint localement la limite d'élasticité, et il y a alors plastification du fond de fissure dans une zone dont le rayon, en surface, est donné par :

$$(2.19) \quad \omega_m = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{R_c} \right)^2$$

IRWIN (28) définit ainsi le rayon d'une zone plastique monotone à fond de fissure en mode I.

Ce modèle simple prévoit que la section de la zone plastifiée est un cercle. Sur une éprouvette bien polie, on peut facilement visualiser cette zone plastique en forme d'ailes de papillon, et remarquer qu'elle est loin d'être circulaire.

En mode mixte et en contraintes planes, POOK (29) montre que la dimension de la zone plastique, après application du critère de VON MISES, s'écrit (2.20) :

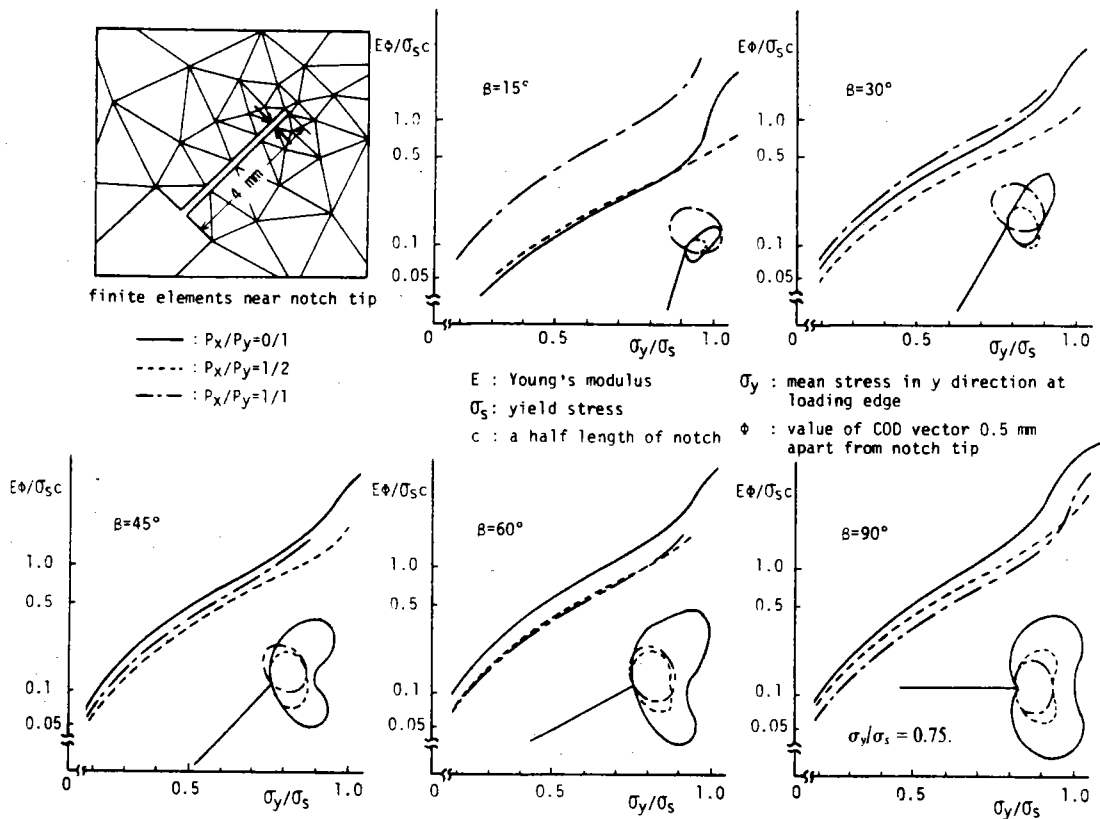
$$(2.20) \quad \omega_m = \frac{1}{\pi R_c^2} \left[ K_I^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} (1 + 3 \sin^2 \frac{\theta}{2}) + K_I K_{II} \sin \theta (3 \cos \theta - 1) + K_{II}^2 (3 + \sin^2 \frac{\theta}{2} (1 - 9 \cos^2 \frac{\theta}{2})) \right]$$

Pour  $\theta_0 = 0$ , la dimension de la zone plastique suivant la direction de la fissure est :

$$(2.21) \quad \omega_m = \frac{1}{\pi R_c^2} (K_I^2 + 3K_{II}^2)$$

UEDA et col. (26), à l'aide du même programme d'éléments finis que celui mentionné précédemment, ont étudié, pour un niveau de contrainte moyenne donné, et pour différentes combinaisons du rapport  $\lambda$  et de l'angle  $\beta_0$ , l'évolution et la forme de la taille de la zone plastique monotone (figure B.15). Pour un angle  $\beta_0$  donné, les contours des zones plastiques sont tout à fait similaires lorsque  $\lambda = 1$ . Par contre,

pour d'autres rapports, et plus particulièrement dans le cas du chargement uniaxial ( $\lambda = 0/1$ ), ces zones sont influencées, dans leur forme et dans leur taille par l'angle  $\beta_0$ .

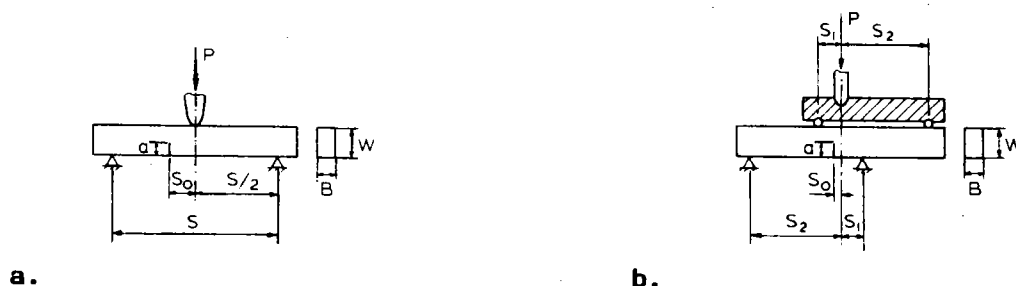


- Figure B.15 - diagrammes contrainte-COD et zone plastique (26)

Les résultats du calcul aux éléments finis obtenu par HUA et XIAOTI (30) sur des éprouvettes de flexion 3 points (figure B.16a) et 4 points (figure B.16b), indiquent que :

- en mode II et suivant la direction de propagation, la taille de la zone plastique en surface est supérieure à celle du mode I d'un ordre de grandeur,
- la surface de la zone plastique en mode II est supérieure de 2 ordres de grandeur à celle du mode I.
- en mode I, toujours suivant la direction de propagation, la taille de la zone plastique en surface est 3 fois supérieure à celle de la zone à coeur. Cependant, lorsque le rapport  $K_{II}/K_I$  augmente, cet écart diminue fortement. En mode II pur, par exemple, il ne dépasse pas 0,5.

Les éprouvettes utilisées sont en acier à haute limite d'élasticité et ont été préfissurées dans des conditions de déformation plane.



- Figure B.16 - éprouvettes de flexion (30)  
a. 3 points    b. 4 points

Dans un travail antérieur (31), nous avons détaillé plusieurs méthodes de mesure de la taille de la zone plastique. Nous avons proposé une méthode fiable et commode d'emploi qui repose sur la rugosité de la surface de l'éprouvette, et qui donne une évaluation précise et objective de la contraction du matériau due à la plastification au voisinage de la pointe de la fissure (32).

## 2.4 Rupture en mode mixte par chargement de compression

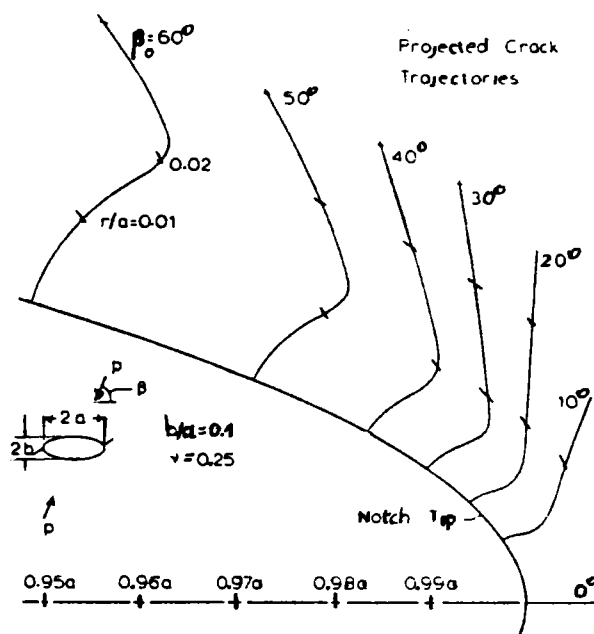
Dans la littérature, le nombre de travaux consacrés à la rupture en mode mixte sous un chargement de compression est très inférieur à celui des études relatives à la traction. Néanmoins, nous pouvons citer les travaux de COTTERELL (33), de KIPP et SIH (15), ainsi que de CHANG et WU (24) dans le cas où la fissure initiale est elliptique, et ceux de SWEDLOW (13) et de WOO et CHOW (34) lorsqu'elle est linéaire.

Pour réaliser ses essais, COTTERELL a utilisé des éprouvettes plates en verre présentant une entaille en forme d'ellipse, dont le rapport des axes  $b/a$  vaut 0,1. Durant les essais, l'auteur a observé que l'endroit où la fissure s'amorce se trouve à proximité immédiate de la pointe de l'ellipse lorsque  $\beta_0$  est inférieur à 47 degrés, alors que pour les valeurs supérieures, ce point d'amorçage se déplace en arrière de la pointe.

En utilisant le critère de la densité d'énergie de déformation minimale de SIH (12), KIPP et SIH (15) ont déterminé, en compression et en traction, le lieu et la direction de propagation en mode mixte pour une fissure elliptique. La figure B.17 indique le résultat de leurs calculs en fonction de l'angle  $\beta_0$ , dans le cas de la compression ( $b/a = 0,1$ ). WU et CHANG (24) comparent, à la figure B.18, les valeurs de  $\theta_0$

calculées par le critère de la déformation de traction maximale en fonction de  $\beta_0$ , avec les valeurs théoriques de KIPP et SIH (15) et les résultats expérimentaux de COTTERELL (33).

- Figure B.17 -  
trajectoires de rupture  
théoriques : fissure  
elliptique en compression  
d'après (15)



Pour être dans les mêmes conditions expérimentales et théoriques que COTTERELL (33), KIPP et SIH (15), WU et CHANG ont considéré 2 modèles géométriques - cf. : *figure B.11* -. Pour le premier modèle,  $\xi_0 = 0,05$  et  $\xi_1 = 0,1$  alors que pour le second,  $\xi_0 = 0,1$  et  $\xi_1 = 0,14$ .

La *figure B.18* indique que les valeurs de  $\theta_0$  déduites du premier modèle sont en excellent accord avec les résultats des essais de COTTERELL. Sur cette même figure, on peut remarquer, dans l'évolution de la courbe de  $\theta_0$ , une discontinuité pour  $\beta_0 = 80$  degrés.

Dans le cas d'une fissure elliptique inclinée, chargée en compression, le problème du frottement entre les lèvres de la fissure ne se pose pas, comme dans le cas d'une fissure linéaire (*figure B.19*), puisque, pour cette dernière, les deux faces de la fissure ont tendance à se fermer sur elles-mêmes.

L'effet de frottement des surfaces en contact doit théoriquement être pris en considération dans les expressions du champ des contraintes et des facteurs d'intensité de contrainte à la pointe de la fissure.

Selon SWEDLOW (13), pour déterminer ce champ, il ne suffit pas de remplacer dans les expressions de  $\sigma_1$  données par l'équation générale (2.1) la contrainte de chargement  $\sigma_2$  par  $-\sigma_2$ . Il propose les expressions (2.22) suivantes, où le coefficient de frottement  $f$  intervient :

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( -\frac{5}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \sigma_2 (\sin^2 \theta - f \sin 2\theta) \sin^2 \beta_o + \sigma_t \cos^2 \theta \\
 (2.22) \quad \sigma_\theta &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( -\frac{3}{4} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{3}{4} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \sigma_2 (\cos^2 \theta + f \sin 2\theta) \sin^2 \beta_o + \sigma_t \sin^2 \theta \\
 \tau_{r\theta} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2} \right) - \sigma_2 (\sin \theta \cos \theta - f \cos 2\theta) \sin^2 \beta_o - \sigma_t \sin \theta \cos \theta
 \end{aligned}$$

avec :  $\sigma_t = -\sigma_2 (\cos^2 \beta_o - \sin^2 \beta_o)$

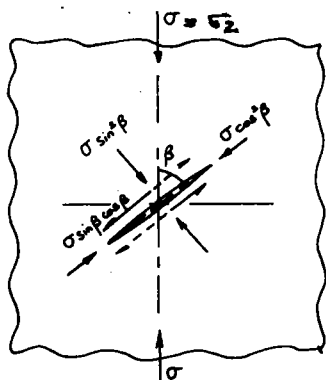
Dans ces expressions, SWEDLOW rejette une valeur négative pour  $K_{II}$ , car, selon lui, cela est en contradiction avec la notion de mode I dont le rôle est de favoriser l'ouverture de la fissure.

L'expression du facteur  $K_{II}$ , déduite de la *figure B.19*, est donnée par :

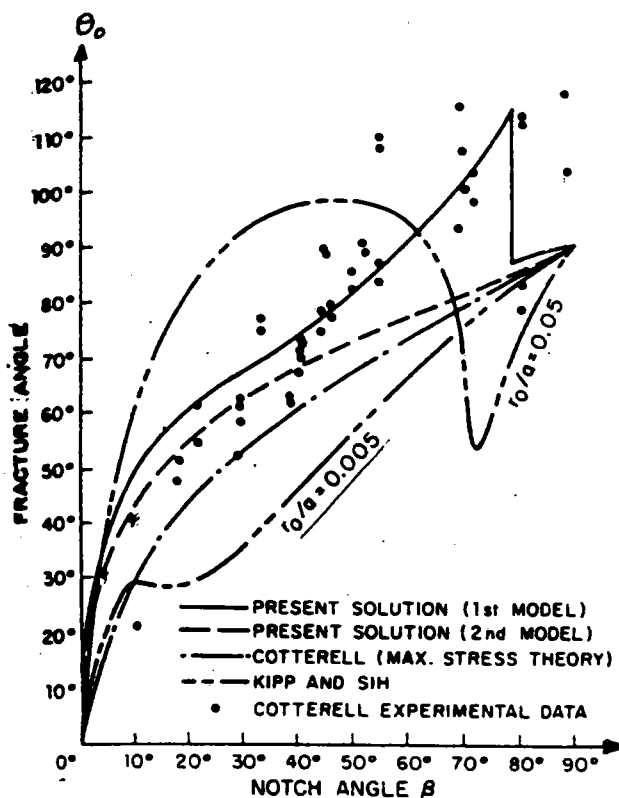
$$(2.23) \quad K_{II} = -\sigma_2 \sqrt{\pi a} (\sin \beta_o \cos \beta_o - f \sin^2 \beta_o)$$

A partir de (2.23), pour qu'il y ait glissement entre les surfaces de la fissure, on doit avoir :

$$(2.24) \quad f \leq \cotg \beta_o.$$



- Figure B.19 -  
fissure en compression  
unaxiale : champ de  
contrainte

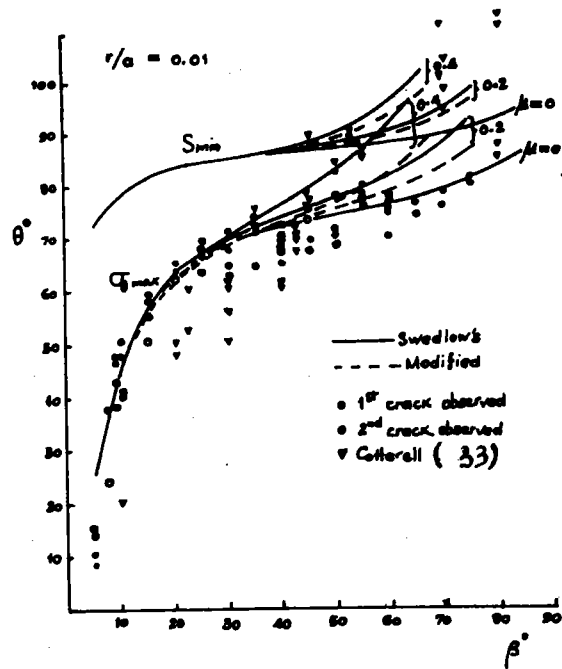


- Figure B.18 - direction de propagation :  
comparaison entre le critère directionnel de WU et CHANG (24)  
et les valeurs expérimentales de COTTERELL (32)

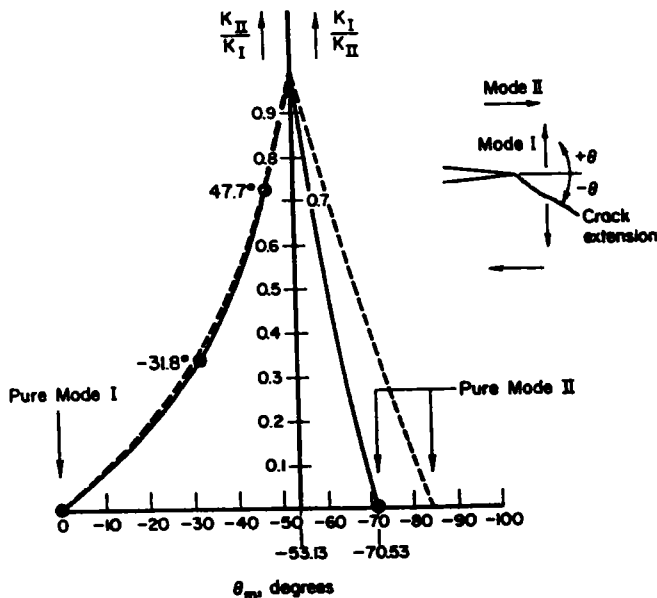
WOO et CHOW (34) proposent une modification du modèle de SWEDLOW (13) qui consiste à ne pas tenir compte, dans les expressions des contraintes (2.22) des termes qui dépendent du coefficient  $f$ . Pour vérifier leur modèle, ils ont effectué des essais de rupture en mode mixte sur des éprouvettes en PMMA (polyméthylmétacrylate).

La figure B.20 montre une comparaison des résultats expérimentaux obtenus avec les valeurs théoriques déduites du modèle de WOO et CHOW et du modèle de SWEDLOW pour différentes valeurs de  $f$ . D'après cette figure, le critère de  $\sigma_{\theta_{max}}$  est expérimentalement le mieux vérifié en compression.

- Figure B.20 -  
angles de bifurcation  
théoriques (13, 34) et  
expérimentaux (33) dans  
le cas d'une fissure linéaire  
chargée en compression  
en présence de frottement  
- WOO CHOW (34) -



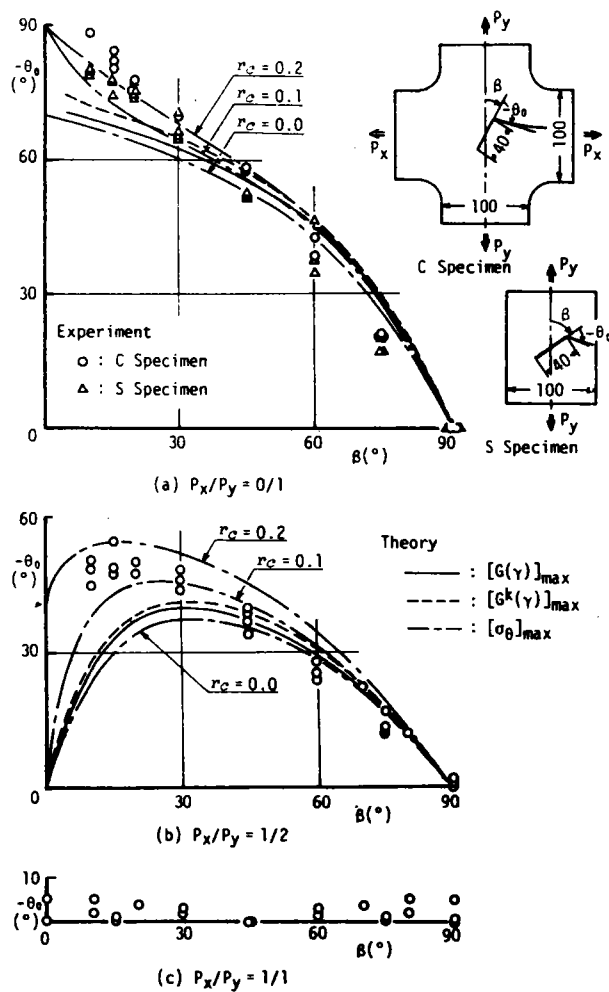
— Principal stress criterion  
- - - Strain energy density criterion ( $\nu = \frac{1}{3}$ )  
● Test cases



- Figure B.21 -  
directions de bifurcation  
théoriques - (9), (12) -  
et expérimentales (35)



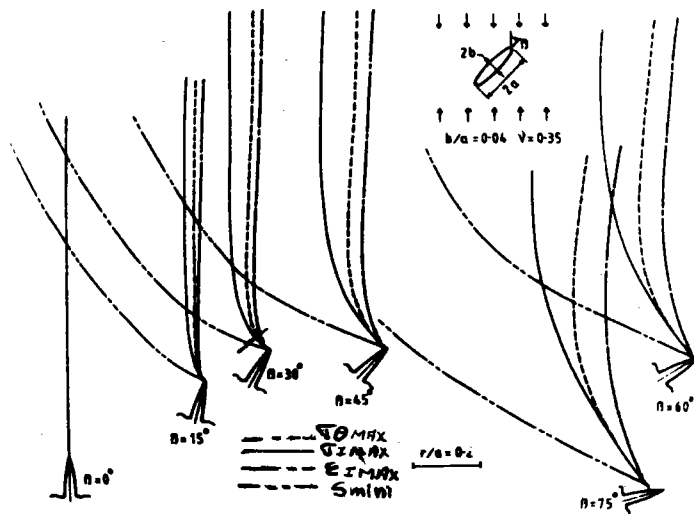
La différence entre les modèles de SWEDLOW et de WOO n'est pas très sensible (*figure B.20*). Par contre, la différence est nettement plus importante en compression qu'en traction entre le critère de la contrainte tangentielle maximale  $\sigma_{\theta_{\max}}$  (9) et celui de l'énergie de déformation minimale  $S_{\min}$  (12).



- Figure B.22 -

directions de propagation de fissure initiale en mode I + II  
 expérimentale : PMMA (26) et théoriques :  $\sigma_{\theta_{\max}}$  (9),  $G_{\max}$  (26)  
 et  $G_{\max}^k$  (17)

- Figure B.23 -  
 comparaison des  
 chemins de fissure  
 pour une fissure  
 elliptique en  
 compression uniaxiale  
 - MAITI (11) -



## 2.5 CONCLUSIONS

Les critères étudiés jusqu'à présent, à part celui de l'ouverture de la fissure sont établis dans le cadre de la mécanique de la rupture linéaire élastique.

Les critères  $\sigma_{\theta_{\max}}$  et  $S_{\min}$  s'intéressent à la fissure dans son état initial et examinent un paramètre à la pointe de la fissure à une distance  $r$ . C'est pourquoi on les appelle des critères locaux, par opposition aux critères globaux, tel que le critère de  $G-(\max)$ .

Mais la signification physique de la distance  $r$  pour les critères  $\sigma_{\theta_{\max}}$  et  $S_{\min}$  est souvent malaisée à interpréter, ce qui explique dans la littérature l'existence de valeurs de  $r$  variables selon les auteurs.

Une comparaison des valeurs des angles de bifurcation prédites par les critères  $\sigma_{\theta_{\max}}$  et  $S_{\min}$ , faite par BROEK et RICE (35) montre que ces deux critères coïncident pour des valeurs du rapport  $K_{II}/K_I$  variant de 0 à 1, mais qu'au-delà de cette valeur, l'écart se creuse jusqu'à atteindre 15 degrés (mode II pur) – cf. : figure 21 – .

Le critère de  $G_{\max}$  est d'un emploi plus délicat encore, dans la mesure où il nécessite la connaissance des facteurs d'intensité de contrainte d'une fissure branchée.

Expérimentalement, le critère du C.O.D. pose des difficultés au niveau des mesures, ce qui n'est pas sans conséquence sur l'interprétation des résultats, d'où le faible nombre de travaux en mode mixte.

Quant au critère de WU et CHANG (22), il semble avoir été très peu utilisé, peut-être du fait du nombre d'essais préliminaires nécessaires à la détermination des différentes grandeurs intervenant dans la formule proposée.

UEDA et col. (26), en comparant les angles de direction de propagation donnés par les critères de  $\sigma_{\theta_{\max}}$  et  $G_{\max}$  (17) aux résultats d'essais expérimentaux sur deux géométries différentes en PMMA (figure B.22), concluent que pour  $r_0 = 0,1$ , les deux critères donnent des valeurs de  $\theta_0$  voisines, quelles que soient la nature du chargement (uniaxial ou biaxial) et la valeur de l'angle  $\beta_0$ .

En général, les dispersions des résultats expérimentaux ne permettent pas de différencier les critères de rupture en mode mixte, tant au niveau de la direction du branchement que de la charge à la rupture, sauf dans le cas où la composante du mode II est prépondérante ou lorsque le chargement appliqué est de compression. Dans ce dernier cas, on attribue la dispersion au niveau des résultats expérimentaux à la présence de frottement, qui est induit par le mouvement relatif entre les lèvres d'une fissure linéaire. Pour la plupart des essais effectués en mode mixte avec un chargement de compression, le critère de  $\sigma_{\theta_{\max}}$  est, de loin, le mieux vérifié.

Une comparaison des critères de rupture en mode mixte, effectuée récemment par MAITI et SMITH

(11) révèle que les critères suivants :  $\sigma_{\theta_{\max}}$ ,  $\sigma_{I_{\max}}$ ,  $S_{\min}$  et  $\varepsilon_{I_{\max}}$  sont plus ou moins applicables selon le type de chargement. En effet, si les chemins de propagation sont pratiquement identiques en traction, ils sont sensiblement différents dans le cas de la compression (auquel cas le critère de  $S_{\min}$  se sépare totalement des autres, ainsi que le montre la *figure B.23*).

L'étude de l'étendue de la zone plastique n'a reçu jusqu'alors que peu d'attention, bien que les rares études publiées sur le sujet aient montré que la zone plastique pouvait se développer en mode mixte de façon bien plus considérable qu'en mode I, notamment en mode II pur (30).

La plupart des critères de rupture présentés ont une analogie avec ceux employés pour rendre compte de la propagation des fissures de fatigue sous sollicitation polymodales. C'est l'étude de leur applicabilité au domaine de la fatigue qui constitue l'un des objets du chapitre suivant.

## Chapitre Trois

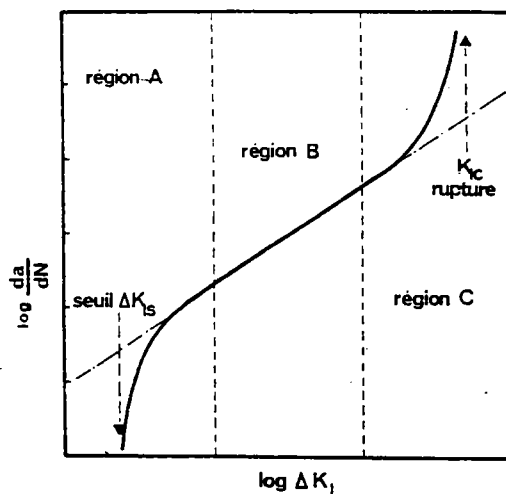
### FATIGUE

Etant donné le nombre réduit de travaux consacrés à la fatigue en mode mixte, il nous est apparu nécessaire de présenter par mode de chargement, une étude détaillée du problème, dont l'apparente longueur ne devra pas rebuter le lecteur. On trouvera en fin de chapitre une synthèse de ces travaux.

Avant d'aborder ce mode de fissuration général et complexe, il semble souhaitable de rappeler certains points concernant la fissuration de fatigue en mode I.

#### 3.1 PROPAGATION DES FISSURES DE FATIGUE EN MODE I

Ce type de propagation est caractérisé par la relation entre l'accroissement de la fissure par cycle  $da/dN$  et l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K_I$  ; pour un rapport de charge  $R$  donné, où  $R = K_{Imin}/K_{Imax}$ , la courbe de vitesse  $da/dN = f(\Delta K_I)$  a l'allure de la *figure B.24*.



- Figure B.24 -  
Allure générale de la courbe  $da/dN - \Delta K_I$

Trois zones sont discernables :

- le domaine des faibles vitesses de fissuration : région A  
dans cette zone, le cheminement de la fissure est souvent lié aux propriétés cristallographiques du matériau.
- le domaine des vitesses intermédiaires : région B  
ce domaine, encore appelé **stade II** de propagation, est caractérisé par la loi de PARIS :

$$(3.1) \quad \frac{da}{dN} = C(\Delta K_I)^m$$

- où C et m sont des constantes intrinsèques du matériau  
Les faciès de rupture sont alors caractérisés par des stries ductiles.
- le domaine des grandes vitesses de fissuration : région C  
Plus on se rapproche du facteur d'intensité de contrainte critique  $K_{Ic}$  pour lequel se produit la rupture, plus on observe sur les surfaces de rupture les cupules qui sont caractéristiques des faciès à ce niveau de propagation. On suppose que dans cette partie de la courbe, une proportion de plus en plus importante de rupture statique se superpose à la propagation par fatigue.

## 3.2 PROPAGATION DES FISSURES DE FATIGUE EN MODE MIXTE I + II

### 3.2.1 Traction uniaxiale

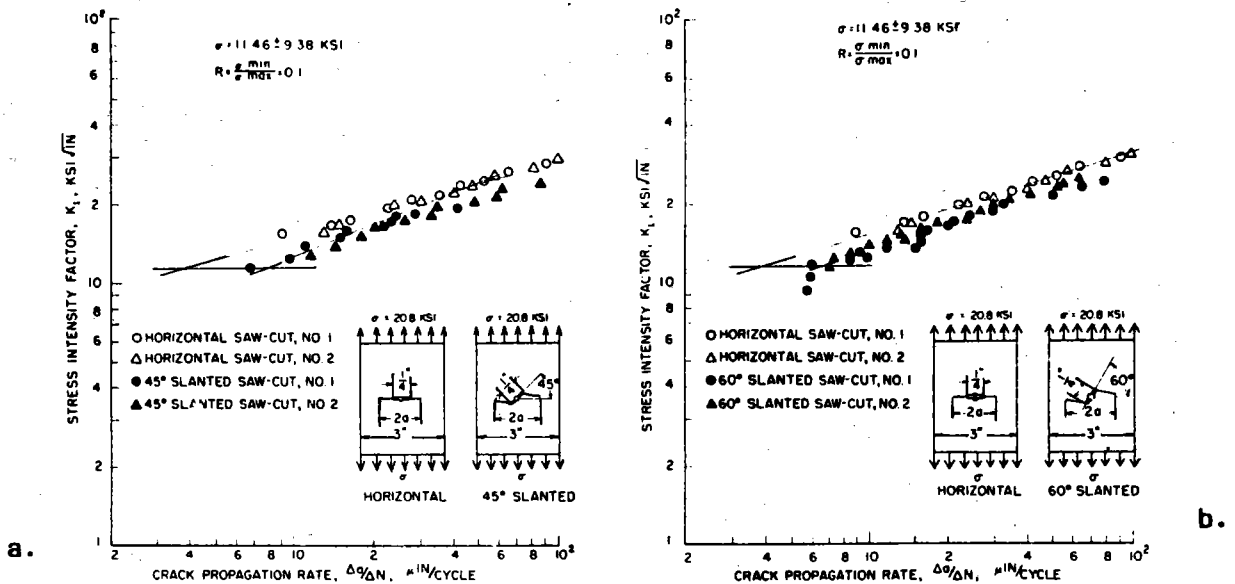
\* Les premiers essais de ce genre ont été effectués en 1969 par IIDA et KOBAYASHI (36) sur des éprouvettes plates, provenant d'une tôle d'alliage d'aluminium Al 7075 T6 d'épaisseur 0,8 mm.

L'influence de la composante  $K_{II}$  sur la vitesse de fissuration a été étudiée pour deux valeurs de l'angle  $\beta_0$  (45 et 60 degrés) et un rapport de charge égal à 0,1.

Les facteurs d'intensité de contrainte  $K_I^*$  et  $K_{II}^*$  à la pointe de la fissure branchée ont été déterminés par la méthode des éléments finis. D'après ces calculs, la fissure bifurque presque immédiatement dans une direction où la valeur de  $K_I^*$  est maximale et celle de  $K_{II}^*$  minimale.

Les courbes de vitesse de propagation obtenues pour  $\beta_0 = 45$  et 60 degrés indiquent qu'une fissure de fatigue en mode mixte croît d'une façon rapide vers la direction qui réduit la composante  $K_{II}^*$  à sa valeur la plus faible (*figure B.25*).

Toutefois, la présence, même faible, du mode II augmente, en début de propagation, la vitesse de fissuration de 10 à 20 % par rapport à celle obtenue en mode I pour une même valeur de  $\Delta K_I$ .



- Figure B.25 - Vitesse de propagation de fissure pour l'Al 7075 T6 d'après (36) a.  $\beta_0 = 45^\circ$  b.  $\beta_0 = 60^\circ$

\* TANAKA (37) a utilisé le même type d'éprouvette en aluminium que IIDA en 3,2 mm d'épaisseur. Il a étudié, pour un rapport de charge de 0,65 l'influence de l'angle  $\beta_0$  sur la vitesse de fissuration ( $\beta_0 = 30, 45, 72$  et  $90$  degrés). A partir des premiers essais, il a déduit une loi expérimentale donnant le seuil de non-fissuration en mode mixte.

Les facteurs  $K_I$  et  $K_{II}$  sont définis par :

$$(3.2) \quad K_I = K_A \sin^2 \beta_0 \quad K_{II} = K_A \cos \beta_0 \sin \beta_0$$

avec :

$$K_A = \sigma \sqrt{\pi a Z}$$

Z étant un coefficient de correction qui dépend de la largeur W, de l'éprouvette, prise suivant la direction initiale de la fissure, selon :  $Z = f(a/W)$ .

Pour une amplitude de contrainte de traction juste supérieure à la valeur du seuil de non-fissuration, TANAKA observe que la propagation initiale de la fissure s'effectue suivant la direction pour laquelle la contrainte  $\sigma_\theta$  est maximale.

D'autre part, il a remarqué que, lorsque la contrainte de traction appliquée à l'éprouvette est supérieure

à 1,6 fois celle du seuil de non-fissuration, la fissure se propage alors dans la direction de la fissure initiale (pas de bifurcation) avec, là encore, des vitesses supérieures à celles du mode I pour un même niveau de  $\Delta K_I$  - figure B.26a -.

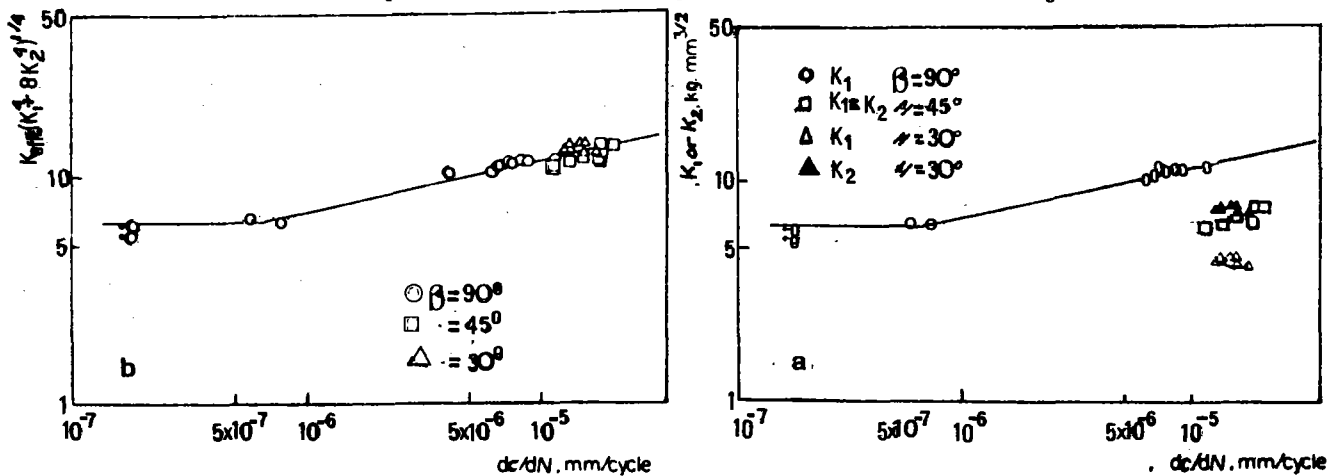
TANAKA propose dans ce cas, une loi de fissuration - équation (3.3) - inspirée du modèle de WEERTMAN (47), modèle basé sur la théorie des dislocations :

$$(3.3) \quad \frac{da}{dN} = C(\Delta K_{eff})^m$$

avec :  $K_{eff} = (K_I^4 + 8K_{II}^4)^{\frac{1}{4}}$

En effet, WEERTMAN émet l'hypothèse qu'une fissure de fatigue se propagera en mode I lorsque la somme des valeurs absolues des déplacements dans une bande de glissement en tête de fissure atteint une valeur critique.

Un dépouillement des vitesses expérimentales en fonction de l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte effectif  $\Delta K_{eff}$  donné par l'équation (3.3) montre, d'après la figure B.26b que les vitesses de fissuration en mode mixte s'alignent sur la même droite que la loi de vitesse en mode I ( $\beta_0 = 90^\circ$ ).



- Figure B.26 - Vitesse de propagation de fissure - TANAKA (37)

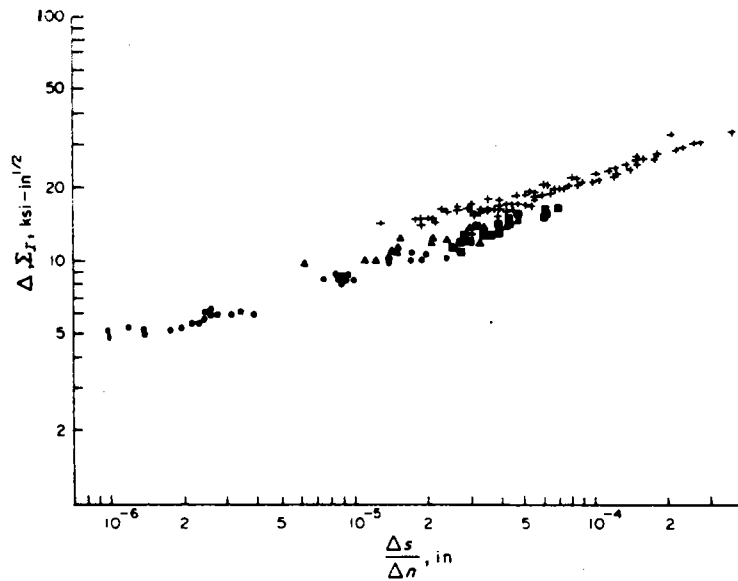
\* PUSTEJOVSKI (38) a également effectué des essais de fissuration en mode mixte sur des éprouvettes C.C.P. en titane (Ti 6Al4V) de 3,17 mm d'épaisseur. Pour le calcul du champ de contrainte à la pointe d'une fissure branchée, dont la branche a une longueur infinitésimale, il utilise une méthode de superposition de dislocations. Les résultats de cette analyse indiquent que les fissures de fatigue en mode mixte se



propagent dans la direction normale à celle de la contrainte singulière principale de tension maximale  $\Sigma_{I_{max}}$  donnée par l'équation :

$$(3.4) \quad \Sigma_I = \text{Vr} \left[ \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right) + \left[ \left( \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right] \right]$$

$\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\tau_{xy}$  étant déterminées numériquement par la méthode des équations intégrales.



- Figure B.27 - Vitesse de propagation en fonction de l'amplitude de la contrainte principale maximale, d'après (38)  
 + ●  $\beta_0 = 90^\circ$     ▲  $\beta_0 = 45^\circ$     ■  $\beta_0 = 30^\circ$

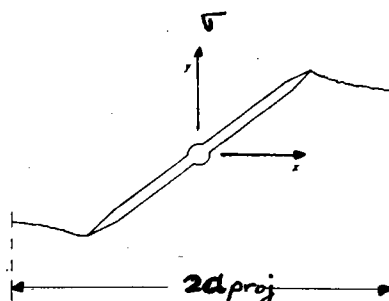
A partir des résultats expérimentaux que présente la figure B.27, PUSTEJOVSKI vérifie que la vitesse de fissuration de fatigue en mode mixte peut être reliée à l'amplitude de la singularité de la contrainte de tension maximale  $\Delta\Sigma_{I_{max}}$  selon :

$$(3.5) \quad \frac{da}{dN} = f(\Delta\Sigma_{I_{max}})$$

D'après cette même figure, la comparaison entre les valeurs de vitesse de propagation obtenues en mode I + II indique que, pour un même niveau de  $\Delta K_I$ , l'influence de la composante  $K_{II}$  sur les premières valeurs des vitesses de propagation est sensible. Pour calculer la valeur de  $K_I$  à la pointe d'une fissure branchée, PUSTEJOVSKI propose d'approximer la longueur de la fissure à celle de sa projection sur la

direction perpendiculaire à la direction du chargement (*figure B.28*). Au cours des essais, l'auteur a constaté que le début de la propagation s'effectue en zigzags sur une longueur de 1 à 4 mm.

- Figure B.28 -  
Définition de la fissure  
équivalente selon  
PUSTEJOVSKI (38)



\* Pour caractériser le comportement de la propagation des fissures de fatigue, soit en mode I, soit en mode mixte, **BADALIANCE (39), (40)** ainsi que **SIH** et **BARTHELEMY (41)**, ont proposé d'étendre le critère de densité d'énergie de déformation minimale  $S_{min}$ , en postulant que la vitesse de fissuration de fatigue est fonction de l'amplitude de l'énergie de déformation minimale  $\Delta S_{min}$ , selon :

$$(3.6) \quad \frac{da}{dN} = A (\Delta S_{min})^n$$

où  $A$  et  $n$  sont des constantes qui dépendent du matériau.

La quantité  $\Delta S_{min}$  est définie comme la différence entre les valeurs maximale et minimale de l'énergie de déformation minimale calculée suivant la direction  $\theta_o$  de branchement de la fissure, soit :

$$(3.7) \quad \Delta S_{min} = S_{min}^{max} - S_{min}^{min}$$

avec :  $S_{min}^{max} = S(\theta_o, \sigma_{max})$  et  $S_{min}^{min} = S(\theta_o, \sigma_{min})$

A partir de l'expression (2.10) qui définit le facteur  $S$  en mode mixte, la quantité  $\Delta S_{min}$  s'écrit sous la forme :

$$(3.8) \quad \Delta S_{min} = \frac{1}{\pi} \left[ a_{11}(\theta_o) \bar{K}_I \Delta K_I + a_{12}(\theta_o) \bar{K}_{II} \Delta K_I + \bar{K}_I \Delta K_{II} + a_{22}(\theta_o) \bar{K}_{II} \Delta K_{II} \right]$$

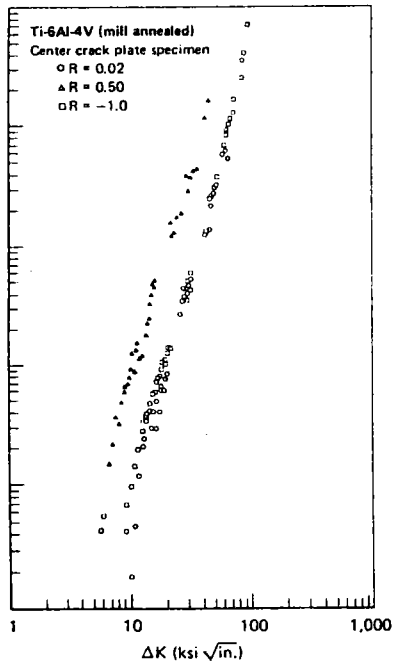
avec :

$$(3.9) \quad \Delta K_j = (K_{max})_j - (K_{min})_j \quad \text{et} \quad \bar{K}_j = \frac{(K_{max})_j + (K_{min})_j}{2} \quad j = 1, 2$$

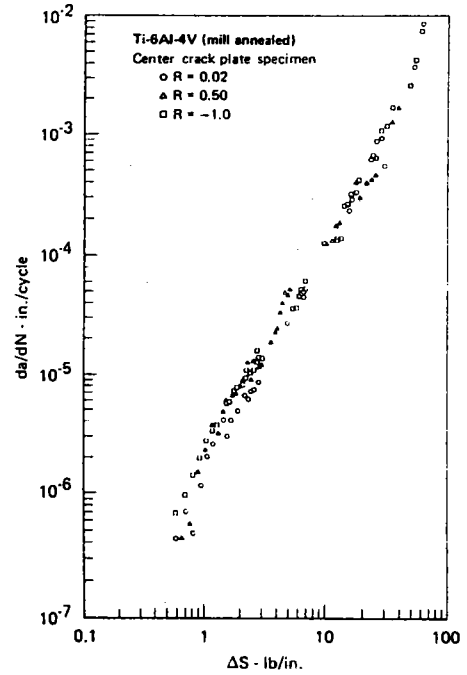
Par l'intermédiaire des égalités (3.8) et (3.9), la relation (3.6), qui exprime la vitesse de fissuration, tient compte de l'amplitude de la contrainte appliquée, de sa valeur moyenne, du mode de chargement et du

matériau, ce qui n'est pas le cas de la loi de **PARIS** – cf. : (3.1) –. A partir de la relation (3.8), l'amplitude  $\Delta S_{min}$  est définie en mode I pur par :

$$(3.10) \quad \Delta S_{min} = \left( \frac{1 - 2\nu}{2\mu\pi} \right) \Delta K_I \bar{K}_I$$



a.

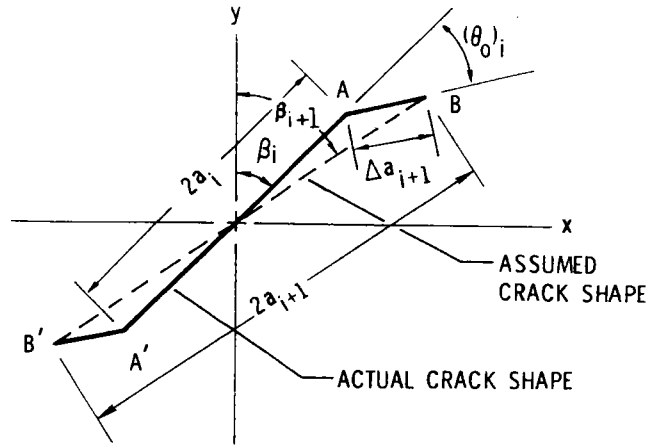


b.

- Figure B.29 - Vitesse de fissuration du titane, d'après (40)  
 a. en fonction de  $\Delta K_I$   
 b. en fonction de  $\Delta S_{min}$

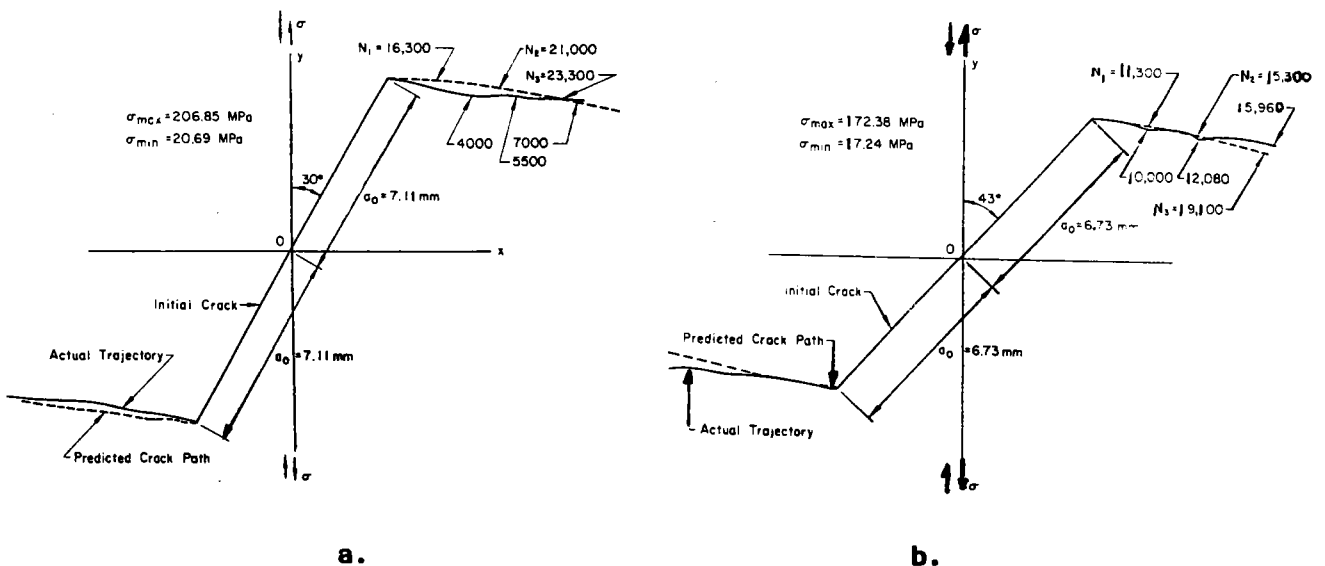
Pour vérifier cette relation, **BADALIANCE** a fissuré, en mode I, des éprouvettes C.C.P. (plaques à entaille centrale) en différents matériaux. Les résultats expérimentaux indiquent que, par rapport à la loi de **PARIS**, l'expression  $da/dN = f(\Delta S_{min})$  est moins sensible au rapport de charge R pour des matériaux tels que le **Ti6 Al4V** (figure B.29).

- Figure B.30 - Définition de la fissure équivalente selon SIH et BARTHELEMY(41)



Pour surmonter les difficultés de calcul des facteurs  $K_I^*$  et  $K_{II}^*$  au cours de la propagation d'une fissure de fatigue en mode mixte, SIH et BARTHELEMY ont approximé la longueur totale de la fissure par sa longueur projetée équivalente (figure 30). Ils ont ainsi comparé les durées de vie obtenues à partir de la loi de propagation, définie par l'équation (3.6), à celles déduites des résultats expérimentaux de PUSTEJOVSKI (38) - figure B.31 -.

Il ressort de cette vérification qu'une loi de vitesse de propagation basée sur l'amplitude de la densité de l'énergie de déformation minimale  $\Delta S_{\min}$  est satisfaisante pour les valeurs telles que :  $K_{II}/K_I < 1$  ( $\beta_0 = 43^\circ$ ). Elle l'est moins pour les valeurs de  $K_{II}/K_I$  supérieures à 1 ( $\beta_0 = 30^\circ$ ).



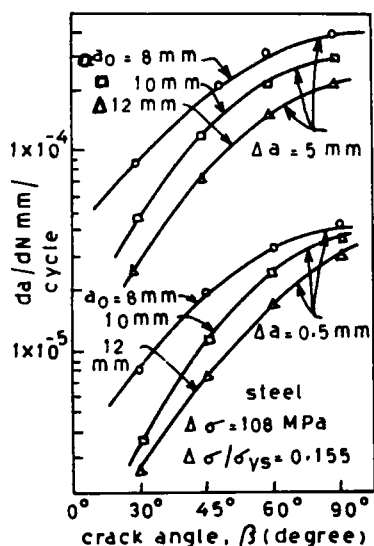
- Figure B.31 - Trajectoire d'une fissure de fatigue en mode mixte pour une fissure inclinée (41)

a. $\beta_0 = 30^\circ$	$\sigma_{\max} = 206,85 \text{ MPa}$	$\sigma_{\min} = 20,69 \text{ MPa}$
b. $\beta_0 = 43^\circ$	$\sigma_{\max} = 172,38 \text{ MPa}$	$\sigma_{\min} = 17,24 \text{ MPa}$

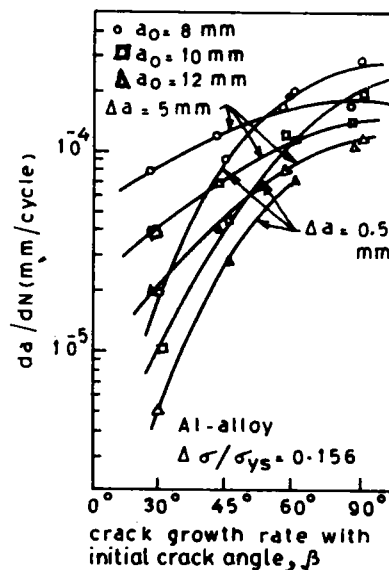
\* CHINADURAI et col. (42) ont choisi deux matériaux, un alliage d'aluminium et un acier dont les limites d'élasticité sont respectivement de 247 et 520 MPa. Ces auteurs ont étudié, au moyen d'éprouvettes C.C.P. l'effet sur la direction de bifurcation et sur la vitesse de propagation de l'angle de chargement ( $\beta_0 = 30, 45$  et  $60$  degrés), de la longueur initiale de la fissure ( $2a_0 = 16, 20$  et  $24$  mm), ainsi que de l'amplitude de la contrainte appliquée  $\Delta\sigma$  :  $\Delta\sigma/R_e = 0,155$  et  $0,191$  dans le cas de l'acier et  $0,156, 0,176$  et  $0,191$  pour l'alliage d'aluminium ( $R = 0$ ).

Ils en déduisent que :

- la direction de bifurcation varie avec l'angle  $\beta_0$ , mais est indépendante de la longueur de la fissure initiale ( $2a_0$ ), ainsi que de l'amplitude de la contrainte appliquée  $\Delta\sigma$  ;
- les valeurs de la vitesse de fissuration à la bifurcation sont inférieures à celles obtenues en mode I pur dans les mêmes conditions de chargement, et augmentent lorsque la longueur de la fissure initiale diminue (*figure B.32*) ;
- après une propagation de 5 mm, la vitesse de fissuration en mode mixte augmente d'une décade, dans le cas de l'acier (*figure B.32a*), et de 50 % dans le cas de l'aluminium (*figure B.32b*) ;
- la vitesse augmente avec l'amplitude de la contrainte appliquée (*figure B.33*).



a.

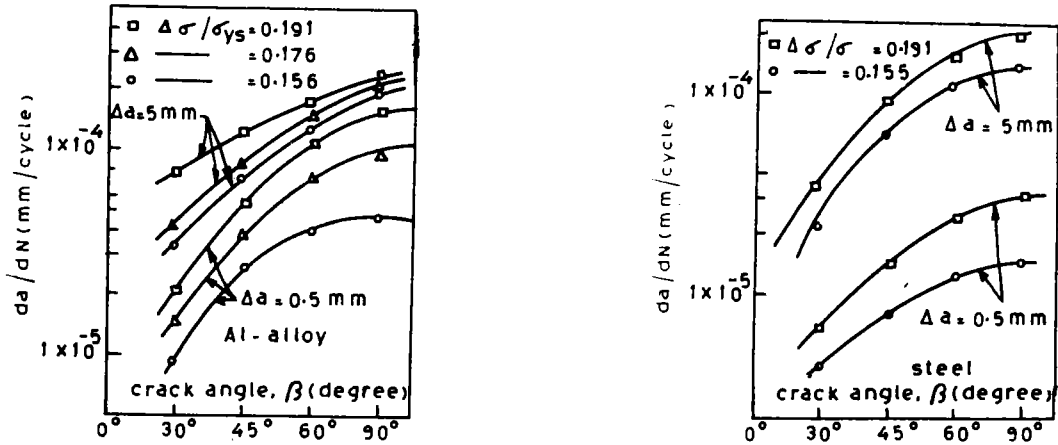


b.

- Figure B.32 - Vitesse de propagation en fonction de l'angle d'inclinaison, d'après CHINADURAI(42)

a. acier

b. aluminium



- Figure B.33 - Influence de l'amplitude de contrainte sur la vitesse de propagation, d'après (42)

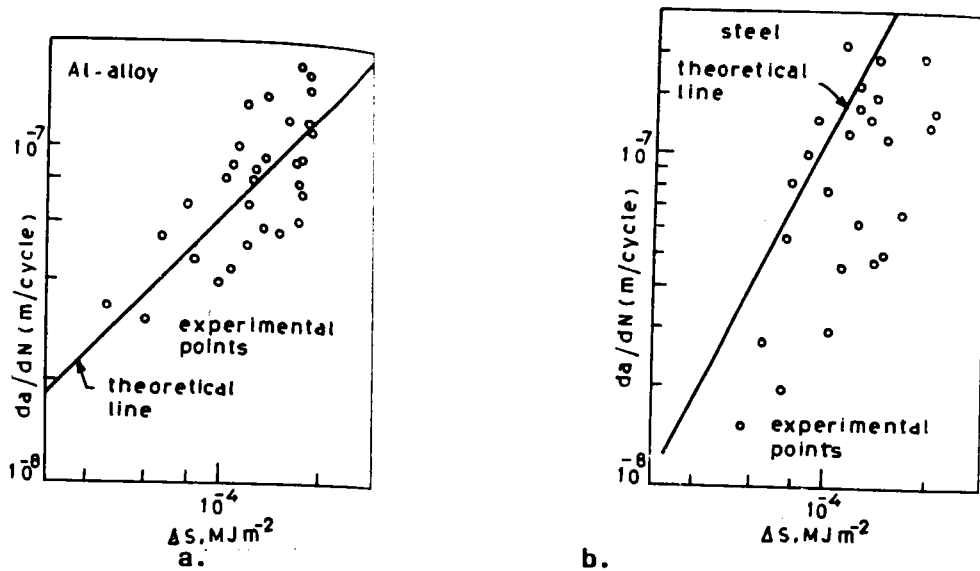
\* Dans des travaux antérieurs, PATEL et PANDEY (43) ont proposé une loi de propagation en mode mixte déduite d'une combinaison entre le critère de l'énergie de déformation minimale  $S_{\min}$  (12) et la loi de PARIS, sous la forme :

$$(3.11) \quad \frac{da}{dN} = C \left( \frac{4\pi\mu}{1-2\nu} \Delta S \right)^{m/2}$$

où C et m sont les coefficients de la loi de PARIS.

CHINADURAI et col. (42) ont montré que l'expression (3.11) est applicable, avec quelques réserves,

au cas des alliages d'aluminium (*figure B.34a*) ; par contre, pour les aciers, elle ne l'est plus du tout (*figure B.34b*).



- Figure B.34 - Vitesse de propagation en fonction de l'amplitude de la densité d'énergie, d'après (42)  
 a. alliage d'aluminium      b. acier

\* BROEK et RICE (35) ont étudié le problème de la fissuration de fatigue en mode mixte sur trois nuances d'acier à rail (catégories I, II et III). Ils ont porté leur choix sur l'éprouvette de flexion (*figure B.16*), chargée en 3 points pour la phase de pré-fissuration, et en 4 points pour la fissuration en mode mixte. Les valeurs initiales du rapport  $K_{II}/K_I$  sont de 0, 0,34 - 0,73 et  $\infty$ .

Tableau 1. B.1

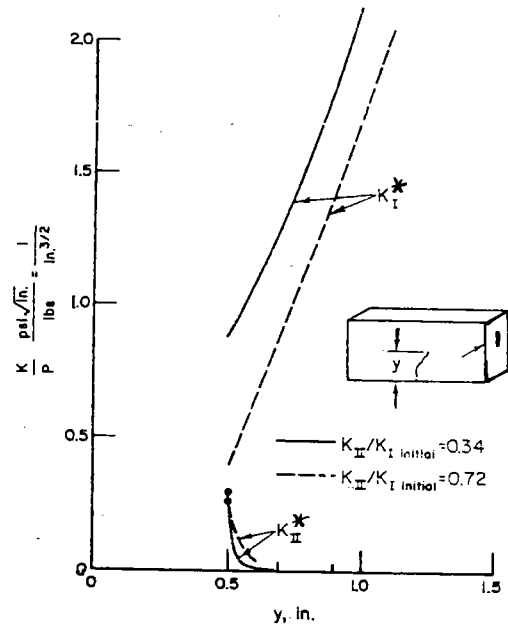
$K_I/K_{II}$	$\theta_0$ théorique (9)	$\theta_0$ expérimental
$\infty$	0°	0°
0,34	-31,8°	-29°
0,73	-47,7°	-45°
0	-70,5°	-56°

Le *tableau B.1* compare les valeurs de l'angle de bifurcation mesurées à celles déduites du critère de la contrainte tangentielle maximale  $\sigma_{\theta_{max}}$  (9).

On remarque que l'accord entre les valeurs est bon sauf dans le cas du mode II pur ( $K_{II}/K_I = \infty$ ).

BROEK et RICE attribuent cet écart à la difficulté rencontrée au niveau de l'alignement de l'éprouvette de flexion 4 points en vue d'obtenir le chargement de mode II pur.

- Figure B.35 -  
Evolution des facteurs  $K_I^*$  et  $K_{II}^*$   
avec la longueur de fissure  $y$   
d'après (35)



La *figure B.35* présente le résultat de calculs aux éléments finis développés afin d'étudier l'évolution des valeurs de  $K_I^*$  et de  $K_{II}^*$  au cours de l'accroissement de la fissure. ( $K_{II}/K_I = 0,34$  et  $0,72$ ). Ceux-ci révèlent qu'après une courte propagation de la fissure après bifurcation, la valeur de la composante  $K_{II}^*$  se réduit à 0.

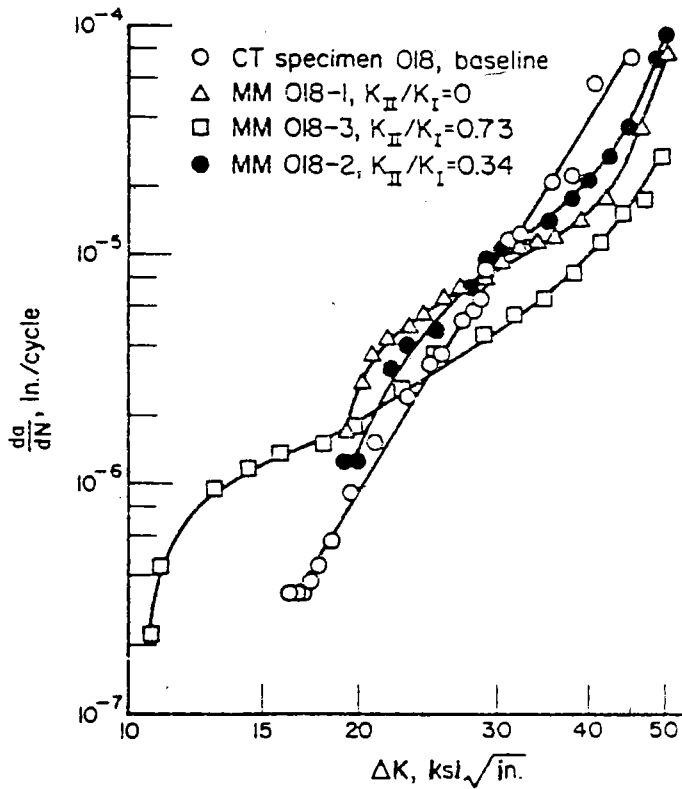
Ainsi, la propagation des fissures de fatigue en mode mixte se ramène essentiellement à une propagation en mode I. De ce fait, BROEK et RICE ont présenté les courbes de vitesse  $da/dN$  uniquement en fonction de l'amplitude  $\Delta K_I$  (*figures B.36* et *B.37*).

La *figure B.36* qui concerne l'acier catégorie II amène deux remarques :

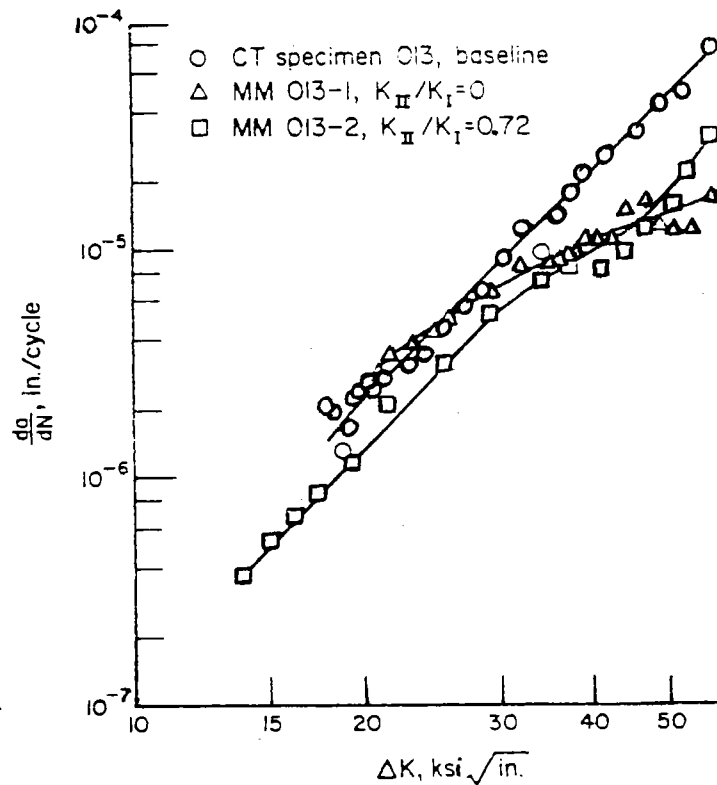
1. en mode I pur, la courbe de vitesse de fissuration, obtenue avec l'éprouvette C.T. , est linéaire sur tout le domaine de  $\Delta K_I$  appliqué, ce qui n'est pas le cas pour l'éprouvette de flexion 3 points ( $K_{II}/K_I = 0$ ).
2. en présence de mode II ( $K_{II}/K_I \neq 0$ ), avec le mode de dépouillement adopté, on observe une diminution de la vitesse (on passe, par exemple pour le premier incrément, de  $1,8 \cdot 10^{-6}$  mm/cycle avec  $K_{II}/K_I = 0$  à  $2 \cdot 10^{-7}$  mm/cycle pour  $K_{II}/K_I = 0,73$ ).



Pour l'acier catégorie I (figure B.37), on retrouve les mêmes allures de courbe.



- Figure B.36 -  
Vitesse de propagation  
en fonction de  $\Delta K_I$   
(catégorie II), d'après  
BROEK et RICE (35)



- Figure B.37 -  
Vitesse de propagation  
en fonction de  $\Delta K_I$   
(catégorie I)

A partir des résultats des calculs aux éléments finis (figure B.35), BROEK et RICE postulent que la vitesse de propagation en mode mixte pourrait être égale à celle que l'on obtiendrait dans le cas d'un mode I pur équivalent.

Par conséquent, ils déduisent du critère de la contrainte maximale  $\sigma_{\theta_{\max}}$  (9) et du critère de la densité d'énergie de déformation minimale  $S_{\min}$  (12) deux expressions, respectivement (3.12) et (3.13) du facteur d'intensité de contrainte équivalent, correspondant à une propagation en mode I pur.

$$(3.12) \quad K_{Ieq} = K_I \cos^3 \frac{\theta}{2} - 3K_{II} \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

$$(3.13) \quad K_{Ieq} = \left\{ \frac{16\mu}{2(\kappa - 1)} \left[ a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 \right] \right\}^{1/2}$$

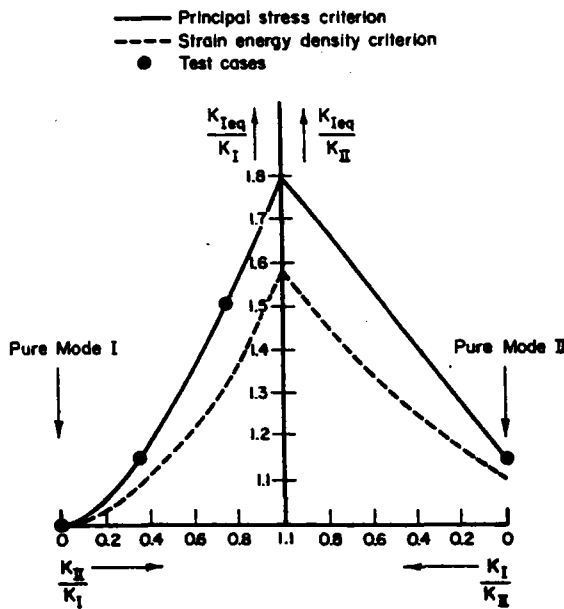
Par analogie avec l'équation de PARIS, BROEK et RICE proposent une loi de propagation en mode mixte sous la forme :

$$(3.14) \quad \frac{da}{dN} = f(\Delta K_{Ieq})$$

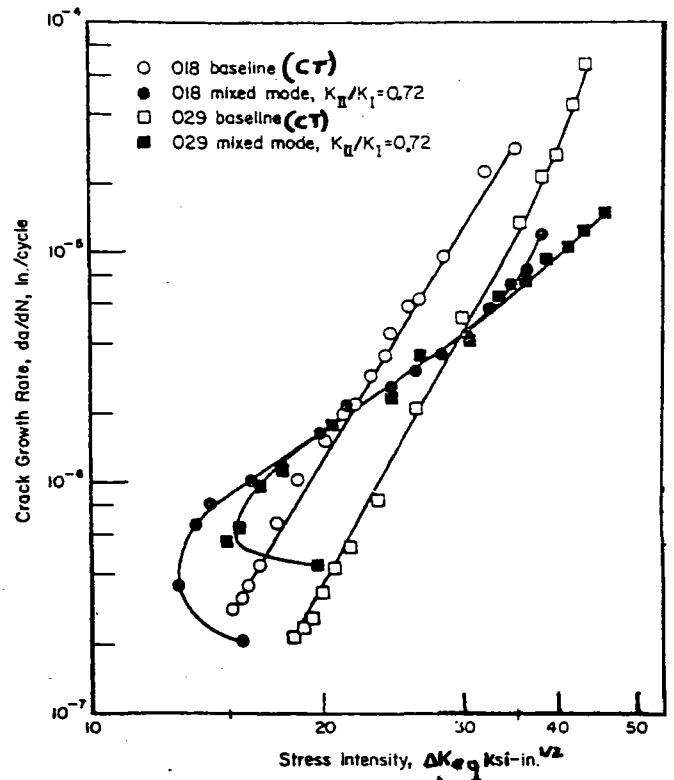
D'après la *figure B.38*, il apparaît que la valeur de  $K_{Ieq}$  donnée par l'équation (3.12) est égale à :  $1,5.K_I$  lorsque  $K_{II}/K_I = 0,73$  et à  $1,15.K_I$  lorsque  $K_{II}/K_I = 0,34$ .

Par contre, la valeur de  $K_{Ieq}$  déduite de l'équation (3.13), n'est plus égale qu'à  $1,3.K_I$  quand  $K_{II}/K_I = 0,73$ . Un dépouillement des points de vitesse expérimentaux de la *figure B.36*, basé sur l'équation (3.12) fait varier l'amplitude  $\Delta K_I$  de l'intensité de contrainte du point le plus bas (*figure B.38*), pour  $K_{II}/K_I = 0,73$ , de 11 à 16,5, ce qui le placerait (*figure B.39*) dans l'alignement de la droite correspondant à l'éprouvette C.T. (mode I pur).

Comme la contribution de  $K_{II}^*$  diminue très rapidement, ainsi que le montre la *figure B.35*, les autres points ne se décalent pas de façon aussi importante, ce qui aboutit aux configurations des courbes de vitesses présentées à la *figure B.39*.



- Figure B.38 - D'après BROEK et RICE (35)



- Figure B.39 - Vitesse de propagation en fonction de  $\Delta K_{Ieq}$  d'après (35)  
 ○ catégorie I      □ catégorie III  
 ● catégorie I      ■ catégorie III

Remarque : le calcul des vitesses de fissuration instantanées est effectué à partir des longueurs réelles ( $\Delta a_T$ ), et non pas des longueurs qu'aurait la fissure si elle était chargée en mode I pur.

\* HUA et col. (44) ont utilisé des éprouvettes de flexion entaillées en déformation plane (figure B.16) pour étudier sur un acier inoxydable (316) l'influence du rapport de charge ( $R = 0,2$  et  $0,5$ ) et de la composante  $K_{II}$  sur le seuil de non-fissuration en mode mixte. La condition de seuil de non-fissuration est déterminée à un niveau de vitesse de l'ordre de  $2,57.10^{-7}$  mm/cycle.

Pour le premier incrément de la branche de la fissure (0,05 mm), les valeurs de  $\Delta K_I^*$  et de  $\Delta K_{II}^*$  sont calculées à partir de la méthode de CHATTERJEE (45) – cf. : annexe A – . Les résultats de ces calculs et ceux d'une partie des essais expérimentaux portés dans le tableau B.2 montrent que :

– le branchement de la fissure suivant la direction  $\theta_o$  s'effectue en mode I puisque suivant cette direction la valeur de  $\Delta K_{II}^*$  est négligeable devant celle de  $\Delta K_I^*$ .

– le critère de  $K\sigma_{\theta_{max}}$  (9) est bien vérifié expérimentalement. En effet, les valeurs de  $\Delta K_I^*$  (fissure branchée) sont voisines de  $\Delta K_{I\sigma_{\theta_{max}}}$  (fissure oblique), et, en mode II pur ( $\Delta K_{II}/\Delta K_I = \infty$ ), la valeur de  $\theta_o$  mesurée est de  $-73$  degrés. Les valeurs de  $\Delta K_{I\sigma_{\theta_{max}}}$  sont déduites de l'expression (3.15), déjà employée par OTSUKA et col. (64) :

$$(3.15) \quad \Delta K_{I\sigma_{\theta_{max}}} = \Delta \sigma_{\theta_{max}} \cdot \sqrt{2\pi r} = (\Delta K_I \cos^2 \frac{\theta_o}{2} - \frac{3}{2} \Delta K_{II} \sin \theta_o) \cos \frac{\theta_o}{2}$$

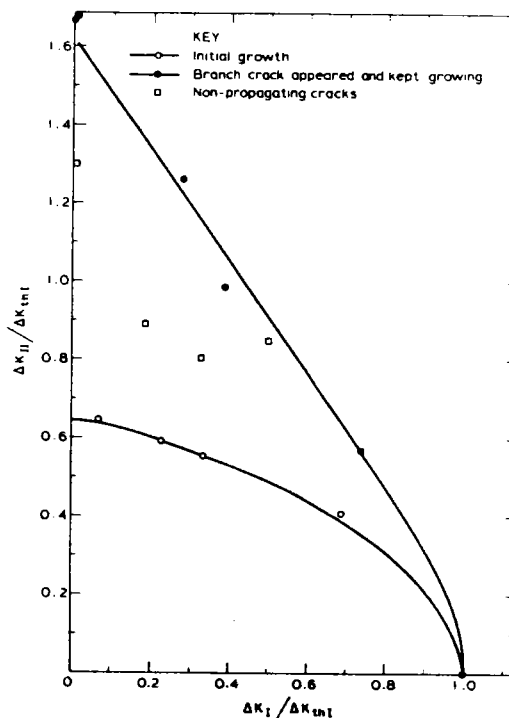
Test	B	W	$a_o$	$a_B$	$a_o/W$	$S_o$	$P_{max}$	$P_{min}$	$\Delta K_I$	$\Delta K_{II}$	$\frac{\Delta K_{II}}{\Delta K_I}$	$\frac{\Delta K_I}{\Delta K_{I,II}}$	$\frac{\Delta K_{II}}{\Delta K_{I,II}}$	$\theta_o$	$\frac{da/dN}{(10^{-7} \text{ mm/cycle})}$	$\Delta K_I^*$	$\Delta K_{II}^*$	$\Delta K_{\sigma_{max}}$
	(mm)	(mm)				(mm)	(kN)		(MN m <sup>-3/2</sup> )				(deg)		(MN m <sup>-3/2</sup> )			
1	11-98	29-80	11-2	0-05	0-375	18-5	7-39	1-48	5-12	1-26	0-25	0-88	0-22	-26	2-6	5-43	-0-17	5-56
2	12-02	29-78	11-8	0-05	0-395	11	11-0	2-22	4-46	1-90	0-42	0-77	0-33	-38	3-0	5-36	-0-29	5-43
3	12-0	29-88	11-4	0-03	0-38	11	10-48	2-1	4-31	1-81	0-42	0-74	0-31	-38	(1-07)	(5-13)	(-0-25)	(5-12)
4	15-5	40	14	0-15	0-35	7-25	26-18	5-23	3-26	2-67	0-82	0-56	0-46	-53	4-0	5-04	-0-15	5-19
5	15-5	40	14	0-05	0-35	4	32-78	6-5	2-23	3-26	1-46	0-38	0-56	-62	2-1	5-16	-0-006	5-15
6	15-5	40	14	0-08	0-35	4	33-69	6-7	2-33	3-41	1-46	0-40	0-59	-62	(5-83)	(5-34)	(-0-006)	(5-32)
7	15-5	40	14-9	0-05	0-37	2	33-11	6-62	1-22	3-72	3-05	0-21	0-64	-69	3-89	5-08	0-1	4-98
8	15-5	40	15	0-08	0-375	0	37-0	7-4	0	4-10	$\infty$	0	0-70	-73	2-5	5-0	0-06	4-73

- Tableau B.2 - Essais expérimentaux pour  $R = 0,2$ , d'après (44).

La figure B.40, tracée à partir des résultats expérimentaux indique deux courbes enveloppes qui traduisent deux modes de propagation au niveau du seuil de non-fissuration. Pour des valeurs des facteurs d'intensité de contrainte en-dessous de la borne inférieure, il n'est apparu aucun amorçage. Par contre, lorsque l'amplitude des facteurs d'intensité de contrainte est au-dessus de la borne supérieure, les fissures bifurquent alors dans la direction perpendiculaire à celle de la contrainte normale maximale, où  $\Delta K_{II}^* = 0$ .

Entre les deux bornes, les auteurs ont constaté que le blocage des fissures est immédiatement atteint après un accroissement très faible suivant la direction initiale de la fissure droite. Ils attribuent ce phénomène de blocage à la présence de la composante du mode II qui, au niveau du seuil de non-fissuration, semble intensifier le frottement entre les zones des deux surfaces de la fissure qui sont en contact.

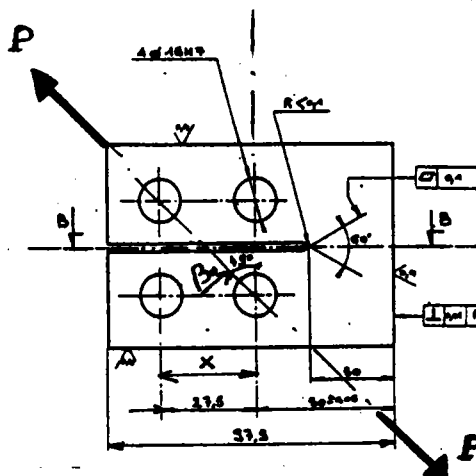
- Figure B.40 -  
Conditions de seuil en  
mode mixte, d'après (44)



\* FLAVENOT et col. (46) ont réalisé des essais de fissuration par fatigue en mode mixte sur un acier de cuve A508, en utilisant des éprouvettes dont la géométrie de base est de type C.T. 25, modifiées pour permettre la superposition du mode II dans une proportion qui varie avec la distance  $x$  (figure B.41).

Après préfissuration en mode I, les éprouvettes sont inclinées par rapport à l'axe de chargement pour réaliser la fissuration en mode I + II.

- Figure B.41 -  
Eprouvette CT 25  
modifiée, d'après (46)



Le rapport de charge est pris égal à 0,05 pour les deux étapes de fissuration, et les valeurs des angles  $\beta_0$  étudiées sont de 30, 45 et 60 degrés, le rapport  $K_{II}/K_I$  valant respectivement 0,19 – 0,32 et 0,52. Les premiers résultats ont permis de mettre au point un nouveau critère de bifurcation ( $\Delta K_{II}^* = 0$ ) et de déduire une loi de propagation en mode mixte sous la forme de celle donnée par PARIS en mode I, soit :

$$(3.16) \quad \frac{da}{dN} = C(\Delta K^*)^m$$

avec :

$$(3.17) \quad K^* = \frac{P \cos \beta}{B \sqrt{w}} f\left(\frac{a}{w}\right)$$

où  $f(a/w)$  est fonction de l'angle  $\theta_0$ .

En ce qui concerne la cinétique de propagation, FLAVENOT et col. (46) ont observé que, pour un même niveau de  $\Delta K_I^*$ , la vitesse de fissuration augmente avec le rapport de chargement initial  $K_{II}/K_I$  et que la différence observée est surtout importante dans le domaine des faibles  $\Delta K_I^*$ , alors que pour les valeurs élevées, les courbes de vitesse se rejoignent.

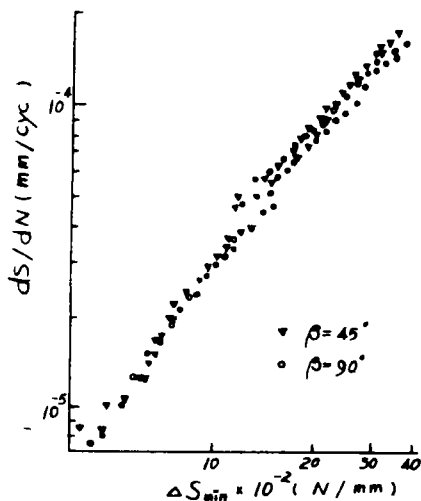
\* Selon XUNFANG et GUANGQIN (48), les critères de rupture en mode mixte peuvent être utilisés pour décrire la propagation des fissures de fatigue, selon une loi plus générale de la forme :

$$(3.18) \quad \frac{da}{dN} = C_n (\Delta n)^n$$

où  $n$  est une combinaison, d'ordre 1 ou 2, des facteurs d'intensité de contrainte, selon le critère de rupture adopté.

Ils donnent également une courbe de vitesse de fissuration exprimée en fonction de l'amplitude de la densité d'énergie de déformation minimale  $\Delta S_{\min}$  pour un alliage d'aluminium, lorsque  $\beta_0 = 45$  et 90

degrés, dans le cas d'une éprouvette C.C.P. et montrent que le comportement d'une fissure en mode mixte se ramène au comportement, en mode I, d'une fissure équivalente (*figure B.42*).



- Figure B.42 -  
Vitesse de propagation  
en fonction de  $\Delta S_{\min}$ , d'après (48)

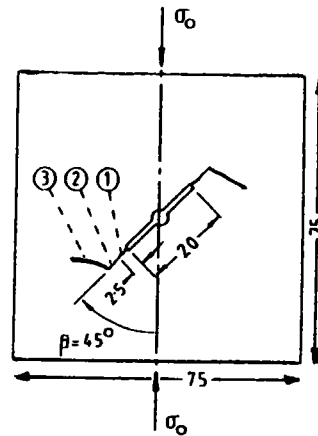
### 3.2.2 Compression uniaxiale

\* Pour ce type de chargement, les essais de fissuration de fatigue en mode mixte sont plutôt rares. SMITH (49) a utilisé l'éprouvette C.C.P. à entaille inclinée, chargée en compression uniaxiale pour réaliser des essais de fissuration en mode II pur, en vue d'aborder le problème de fatigue-contact, où les pressions de HERTZ jouent un rôle important dans le phénomène d'apparition des fissures.

Ces éprouvettes en aluminium, de caractéristiques géométriques identiques à celles de TANAKA (37), pré-fissurées en mode I, ont été ensuite fissurées avec pour un rapport de charge R égal à 0,1 et différentes valeurs de l'angle  $\beta_0$ .

Ces travaux montrent qu'en compression, la fissure se propage de quelques millimètres suivant sa direction initiale (celle du mode II pur) puis bifurque ou se bloque (*figure B.43*). L'auteur explique ce processus de blocage par la présence de frottement entre les lèvres de la fissure en contact, la longueur des surfaces en contact augmentant avec l'accroissement de la fissure.

- Figure B.43 -  
 Fissure inclinée chargée  
 en compression, d'après (49)
- 1 longueur de préfissuration
  - 2 longueur de propagation en mode II
  - 3 branchement de la fissure  
 (propagation en mode I)



Des analyses fractographiques révèlent alors deux sortes de faciès de rupture : l'un présentant des stries de fatigue caractéristiques de la traction, l'autre des cupules de forme sphérique typiques de la fatigue-contact en présence de cisaillement.

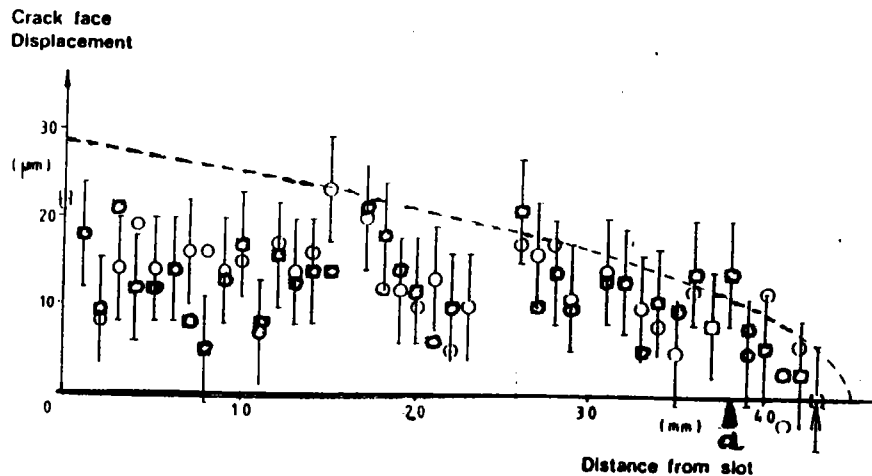
Quant à la direction de branchement, les angles  $\theta_0$  obtenus en compression pour différentes valeurs de  $\beta_0$  sont comparés à ceux obtenus en traction par TANAKA (tableau B.3). Vu le faible nombre des essais, il est délicat d'avancer des conclusions qualitatives quant à l'influence du type de sollicitation sur la direction de bifurcation  $\theta_0$ .

Initial crack angle $\beta_0$ (degrees)	Extension angle, $\theta_0$ (degrees)	
	Tensile load	Compressive load
90	0 (37)	— (49)
72	28	—
60	—	56
45	49	76.5
30	52	63

- Tableau B.3 - Comparaison des directions de bifurcation pour des fissures de fatigue inclinées en traction(37) et en compression(49)

SMITH (50) a également étudié l'évolution des déplacements des lèvres de la fissure suivant la direction de l'entaille mécanique. Les déplacements relatifs des repères tracés perpendiculairement à l'entaille sont mesurés optiquement.

Il ressort de ces mesures effectuées en trois temps ( $N = 1, 54750$  et  $27500$  cycles) qu'au premier cycle de chargement le déplacement au niveau de la pointe de la fissure est au moins trois fois inférieur à celui mesuré  $2,5$  mm en arrière. Immédiatement après branchement ( $275000$  cycles), cet écart devient négligeable (*figure B.44* – la pointe de la fissure est indiquée par la lettre  $a$ ).



- Figure B.44 -

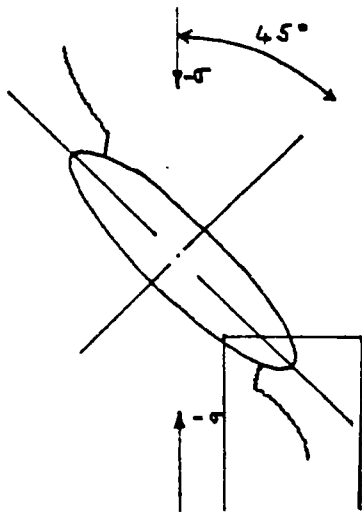
Mesures des déplacements statiques des lèvres de la fissure chargée en compression (éprouvette C.C.P.), d'après (50).

○ points expérimentaux      --- points calculés

\* Par la suite, BRIGGS et SMITH (51) ont fissuré, en compression, des éprouvettes C.C.P. en aluminium, à entaille elliptique inclinée à  $45$  degrés. Les résultats expérimentaux indiquent que l'amorçage des fissures s'effectue perpendiculairement à la surface de l'entaille (*figure B.45*). Après une fissuration sur une longueur de  $2$  mm environ, il se produit un changement brutal dans la direction de propagation et dans le taux d'accroissement de la vitesse de fissuration (qui passe ici de  $5 \cdot 10^{-6}$  mm/cycle à  $10^{-4}$  mm/cycle).

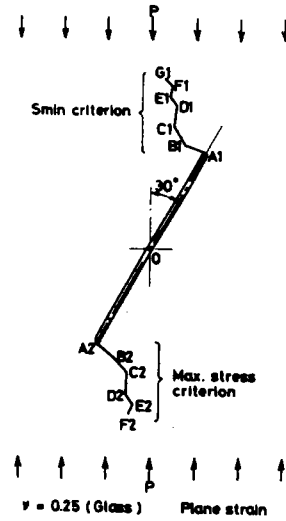


Un calcul des facteurs d'intensité de contrainte basé sur les fonctions de GREEN, indique que le point où la fissure change de direction correspond à une égalité entre  $K_I$  et  $K_{II}$ .



- Figure B.45 -

Trajectoire d'une fissure de fatigue en compression (entaille elliptique inclinée à 45 degrés), d'après (51)



- Figure B.46 -

Trajectoire d'une fissure de fatigue en compression. Comparaison des critères de  $\sigma_{\theta_{max}}$  et  $S_{min}$ , d'après (52)

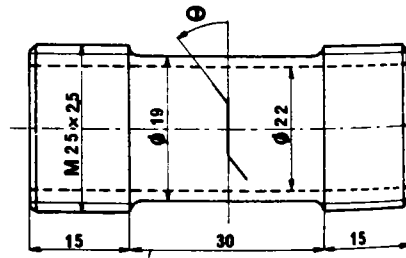
\* Signalons enfin que MIYAMOTO et col. (52) ont simulé la propagation d'une fissure elliptique chargée en compression pour  $\beta_0 = 30$  degrés, en suivant les incréments de propagation donnés par les critères de  $\sigma_{\theta_{max}}$  et de  $S_{min}$ . Les résultats du calcul indiquent que les fissures se propagent en zigzag vers la direction de la charge appliquée, et que l'allure du chemin suivi est identique pour les deux critères (figure B.46).

Les facteurs d'intensité de contrainte sont estimés par un calcul aux éléments finis en supposant que l'effet du frottement entre les surfaces en contact est négligeable.

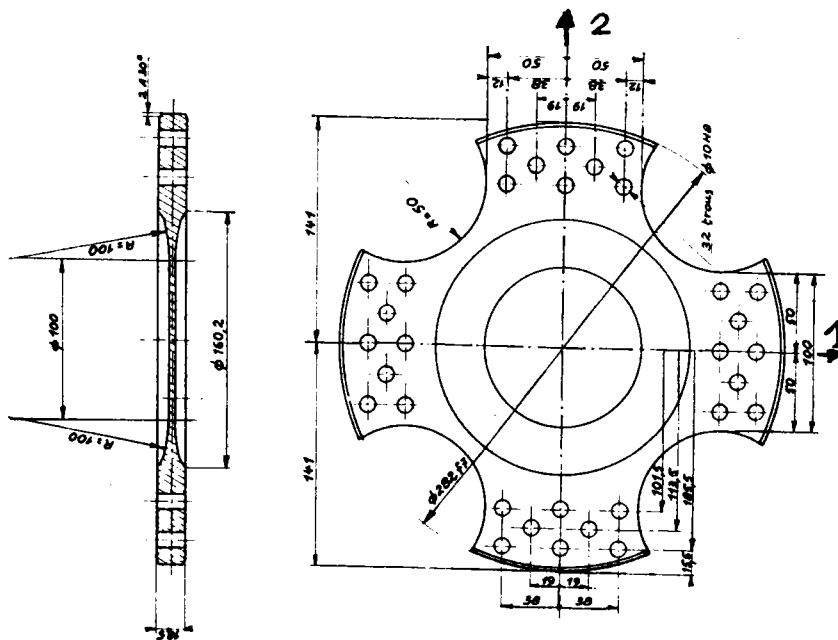
### 3.2.3 Sollicitation biaxiale

On peut également réaliser une fissuration de fatigue en mode mixte sur des éprouvettes sollicitées par un chargement biaxial (figure B.2). Par exemple, des combinaisons de traction, compression et torsion sur une éprouvette cylindrique, creuse ou non, permettent d'obtenir un état de contrainte biaxial sur une partie de l'éprouvette (figure B.47). Les mêmes types de contrainte sont obtenus sur des éprouvettes cruciformes

(de faible épaisseur) sollicitées perpendiculairement suivant les axes de chargement (numérotés 1 et 2 sur la figure B.48).



- Figure B.47 - Epreuve tubulaire utilisée par HOURLIER (55)



- Figure B.48 - Epreuve cruciforme utilisée par TRUCHON (54)

Pour cette géométrie, les facteurs d'intensité de contrainte à la pointe d'une fissure inclinée d'un angle  $\beta_o$  par rapport à la direction de la contrainte appliquée  $\sigma_2$  sont donnés par :

$$K_I = (\sigma_1 \cos^2 \beta_o + \sigma_2 \sin^2 \beta_o) \sqrt{\pi a} \quad (3.19)$$

$$K_{II} = (\sigma_2 - \sigma_1) \sin \beta_o \cos \beta_o \sqrt{\pi a}$$

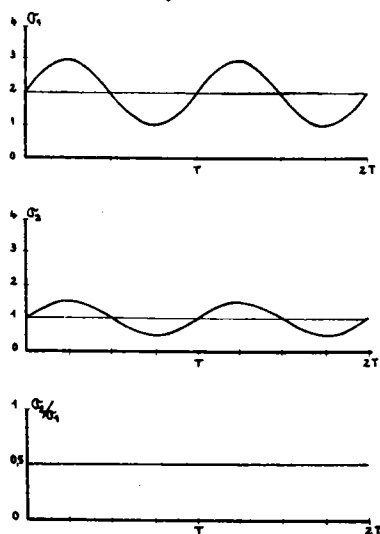
avec :

$$(3.20) \quad \sigma_i = \sigma_m + \sigma_a \sin \phi \quad i = 1, 2$$

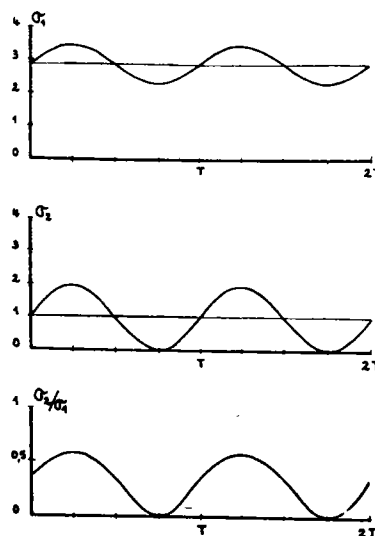
$R_i = (\sigma_{\min}/\sigma_{\max})_i$  : rapport de charge suivant la direction  $i$

### 3.2.3.1 Chargement proportionnel

Un chargement est dit proportionnel lorsque le rapport de biaxialité  $\lambda = \sigma_1/\sigma_2$  reste constant au cours du cyclage (*figure B.49*). Dans ce cas, il est possible de définir sans ambiguïté, d'après le critère de bifurcation d'AMESTOY (21), une direction où  $K_1^*(\theta)$  atteint son maximum puisque cette direction est indépendante de l'instant considéré (*figure B.51*).



- Figure B.49 -  
Définition d'un chargement  
biaxial proportionnel



- Figure B.50 -  
Définition d'un chargement  
biaxial non proportionnel

TRUCHON et col. (53) ont mené des essais de fissuration avec un chargement proportionnel bimodal sur un acier E36 à l'aide d'éprouvettes cruciformes dont les dimensions sont celles de la *figure B.48*. Les contraintes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont appliquées à l'aide d'une machine de traction biaxiale asservie hydrauliquement.

Pour un angle  $\beta_0$  de 45 degrés, les éprouvettes sont préfissurées en mode I avec un chargement équiaxial ( $\lambda = 1$ ) sur une longueur de 3 mm. La fissuration en mode mixte est obtenue en choisissant une valeur de  $\lambda$  différente de l'unité.

Le stade de la préfissuration en mode I et celui de la fissuration en mode mixte sont conduits avec un

rapport  $R = 0,1$  pour chaque direction de sollicitation. Le **tableau B.4** compare les résultats expérimentaux et théoriques et montre que les critères de  $\sigma_{\theta_{\max}}$  (9) et de  $K_{I\max}^*$  d'AMESTOY (21) rendent tous deux compte des angles de branchement observés expérimentalement.

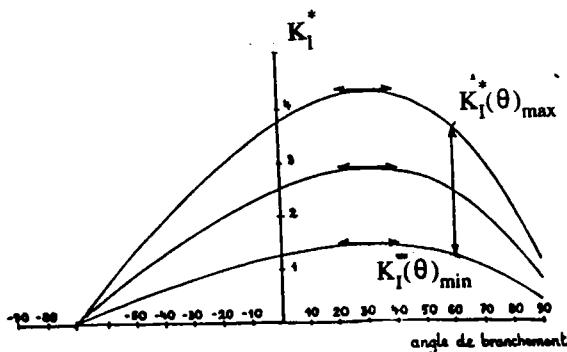
Il est à noter que dans ce travail, le calcul des facteurs d'intensité de contrainte au cours de la propagation n'a pas été entrepris par les auteurs en raison de sa complexité (fissure branchée).

Specimen	$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$	Kink angle		
		Erdogan - Sih (1963)	Amestoy and others (1981)	Experimental
2Z-15	-0,32	61°	66°	57°-65°
2Z-9	0,06	51,5°	55°	57°-59°
2Z-14	0,435	35,5°	36°	35°-36°
2Z-11	0,54	29°	30°	20°-23°

- Tableau B.4 - Comparaison entre valeurs expérimentales et prévisions analytiques de l'angle de bifurcation, d'après (53)

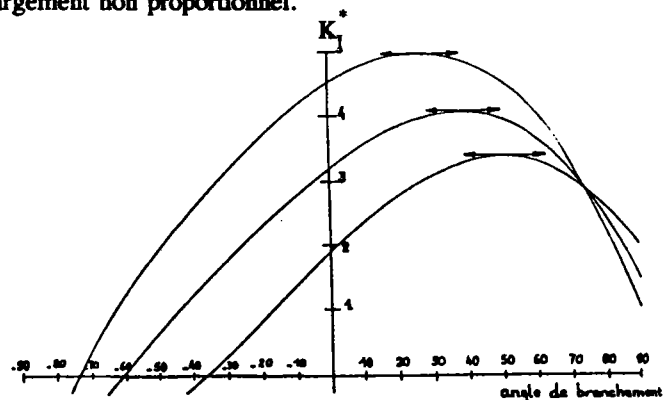
### 3.2.3.2 Chargement non proportionnel

Un chargement est dit non proportionnel lorsque le rapport  $\sigma_1/\sigma_2$  varie au cours d'un cycle de fatigue (**figure B.50**). Les précédents critères de rupture définis en mode mixte, pour un chargement uniaxial ou biaxial proportionnel deviennent alors inadéquats. En effet, la direction où  $K_I^*(\theta)$  atteint son maximum varie au cours du cyclage (**figure B.52**). Il faut donc concevoir un nouveau critère permettant de prévoir les angles de branchement pour des essais effectués sous chargement non proportionnel.



- Figure B.51 -

Profil de  $K_I^*(\theta)$  à divers instants du cycle de fatigue en fonction de l'angle de branchement supposé, pour un chargement proportionnel



- Figure B.52 -

idem pour un chargement non proportionnel

D'après D'HONDT et TRUCHON (54), plusieurs généralisations sont possibles, si l'on considère qu'un tel critère sera nécessairement une extension du critère de  $K_I^*(\theta)_{\max}$ .

Critères de propagation utilisés :

Critère de  $K_I^*(\theta, t)_{\max}$

D'après la *figure B.52*, à chaque instant  $t$  du cycle,  $K_I^*(\theta)$  atteint un maximum dans une direction  $\theta_0$  donnée. On peut supposer que la fissure bifurquera dans la direction  $\theta_0$  où  $K_I^*(\theta, t)$  atteint son maximum absolu, un maximum sur l'espace et sur le temps.

Critère de  $\Delta K_I^*(\theta, t)_{\max}$

Puisque  $K_I^*(\theta, t)$  est une fonction de  $\theta$  et de  $t$ , on peut alors définir, dans une direction  $\theta_0$  donnée, les valeurs  $K_I^*(\theta, t)_{\max}$  et  $K_I^*(\theta, t)_{\min}$  comme étant respectivement le maximum et le minimum au cours du temps, de  $K_I^*(\theta)$ . Par analogie avec la fissuration en mode I, où c'est  $\Delta K_I$  qui contrôle la fissure de fatigue, on peut supposer que dans le cas d'un chargement biaxial non proportionnel, la fissure bifurquera dans la direction où  $\Delta K_I^*(\theta, t)$  est maximal, avec :

$$(3.21) \quad \Delta K_I^*(\theta, t) = K_I^*(\theta, t)_{\max} - K_I^*(\theta, t)_{\min}$$

Pour un chargement monotone, il est établi que la fissure bifurque dans la direction de  $K_I^*(\theta)_{\max}$  et, comme il n'y a pas discontinuité entre les derniers cycles de propagation en fatigue et la rupture instable, D'HONDT et TRUCHON considèrent que le critère de  $K_I^*(\theta, t)_{\max}$  est susceptible d'être le critère approprié dans le domaine des vitesses élevées, et  $\Delta K_I^*(\theta, t)$  dans celui des vitesses intermédiaires.

On remarque, d'après la *figure B.51*, que pour un chargement proportionnel, la direction où  $K_I^*(\theta)$  atteint son maximum à tout instant est aussi celle où  $\Delta K_I^*(\theta)$  atteint son maximum.

Critère de  $\frac{da}{dN}(\theta)_{\max}$  de HOURLIER(55)

HOURLIER (55) propose, en mode mixte, le critère de cheminement suivant : *une fissure de fatigue se propage dans une direction  $\theta_0$  telle que sa vitesse de propagation  $\frac{da}{dN}(\theta)$  déterminée à partir des composantes des facteurs d'intensité de contrainte soit maximale.*

$$(3.22) \quad \frac{\partial \left[ \frac{da}{dN}(\theta) \right]}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial^2 \left[ \frac{da}{dN}(\theta) \right]}{\partial \theta^2} < 0$$

La *figure B.53* qui est une représentation schématique du critère  $\frac{da}{dN}(\theta)_{\max}$  sert à indiquer la démarche à suivre pour son application, ce que l'on peut résumer comme suit :

1. dans la direction repérée par l'angle  $\theta_0$ , on détermine :

$$K_I^*(\theta)_{\max} \text{ et } K_I^*(\theta)_{\min}$$

2. on en déduit :

$$\Delta K_I^*(\theta) = K_I^*(\theta)_{\max} - K_I^*(\theta)_{\min}$$

(3.23)

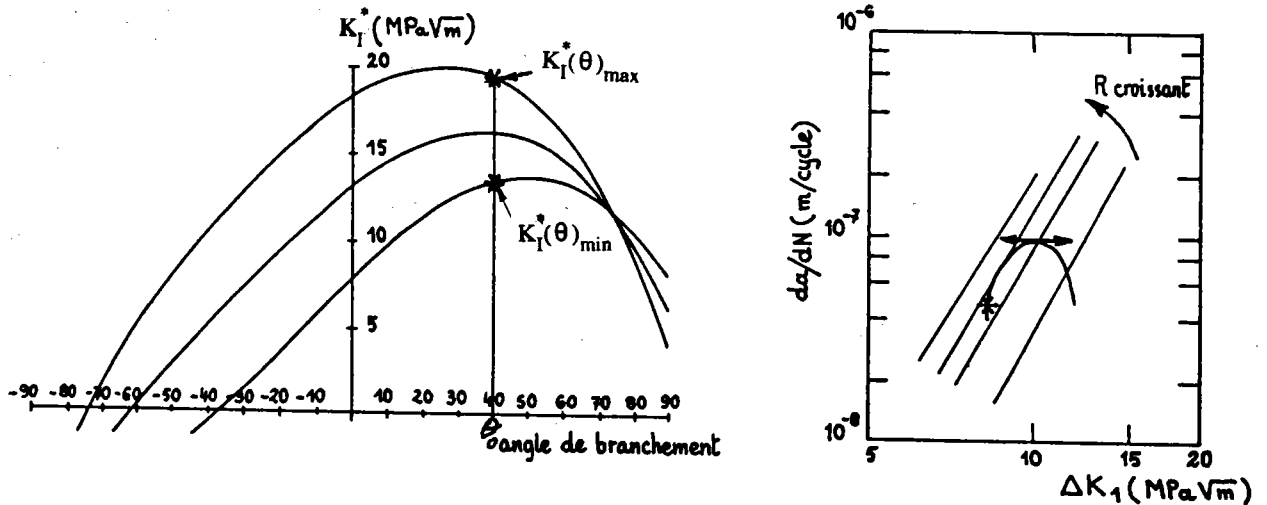
$$\text{et : } R^*(\theta) = K_I^*(\theta)_{\min} / K_I^*(\theta)_{\max}$$

3. puis, en introduisant ces valeurs dans le réseau de courbes  $da/dN - \Delta K_I$  (établies à la suite d'essais effectués sur éprouvette C.T. par exemple), on peut connaître la vitesse selon :

4.

$$(3.24) \quad \frac{da}{dN}(\theta) = f(\Delta K_I^*(\theta), R^*(\theta))$$

5. en procédant de la sorte pour chaque direction  $\theta_0$ , on obtient, dans le diagramme  $da/dN - \Delta K_I$ , une courbe paramétrée en  $\theta$ . HOURLIER formule l'hypothèse que la fissure bifurque dans la direction où  $\frac{da}{dN}(\theta)$  atteint son maximum.



- Figure B.53 - Représentation schématique du critère  $(da(\theta)/dN)_{\max}$  (55)

Sous cette forme, le critère  $\frac{da}{dN}(\theta)_{\max}$  est général et le chemin suivi par une fissure est donc non seulement fonction des sollicitations mécaniques, mais aussi des caractéristiques du matériau contenues dans la loi de propagation des fissures de fatigue en mode I pur (rapport R par exemple).

Résultats :

Les problèmes posés par les sollicitations biaxiales non proportionnelles au niveau de la détermination de la direction de branchement étant exposés, examinons les résultats de différents travaux pour ce cas de chargement plus général de fissuration de fatigue en mode mixte, en commençant par ceux de HOURLIER (55).

\* Pour ce type de chargement, **HOURLIER** a mené des essais de fissuration en mode I cyclique et mode III statique d'une part, mode I cyclique et mode II statique d'autre part sur différents matériaux (2 aciers, 2 alliages de titane, un alliage léger). Pour le chargement en mode I + II, les essais sont effectués sur des éprouvettes tubulaires (épaisseur  $e = 1,5$  mm) en alliage léger *AU4G1 T851* (*figure B.47*). Le choix de ce matériau est dicté par sa grande sensibilité au rapport de charge  $R$ .

Le calcul des facteurs d'intensité de contrainte est inspiré des formules données par **ERDOGAN** et **RATWAMI** (56), basées sur la théorie des coques.

$$(3.25) \quad K_I = \sigma \sqrt{\pi a} B_m \quad K_{II} = \tau \sqrt{\pi a} C_m$$

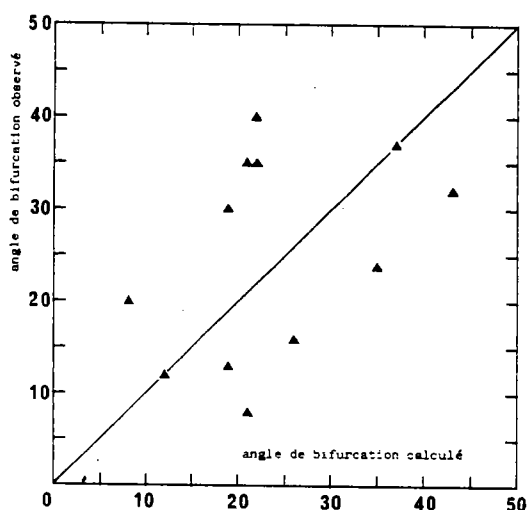
où  $B_m$  et  $C_m$  sont des facteurs correctifs fonction de la géométrie de l'éprouvette. Les facteurs  $K_I^*$  et  $K_{II}^*$  à la bifurcation sont calculés à partir de la solution analytique de **NUISMER** (17).

Pour déterminer la vitesse de fissuration suivant la direction de branchement  $\theta_0$  de la fissure, l'auteur a établi une loi de propagation type **FORMAN** (57) en mode I pur pour l'*AU4G1 T851*. Dans cette expression,  $\Delta K_I$  est remplacé par  $\Delta K_I^*(\theta)$  et le rapport  $R = K_{Imin}/K_{Imax}$  par  $R^* = K_{Imin}^*/K_{Imax}^*$ , d'où la relation :

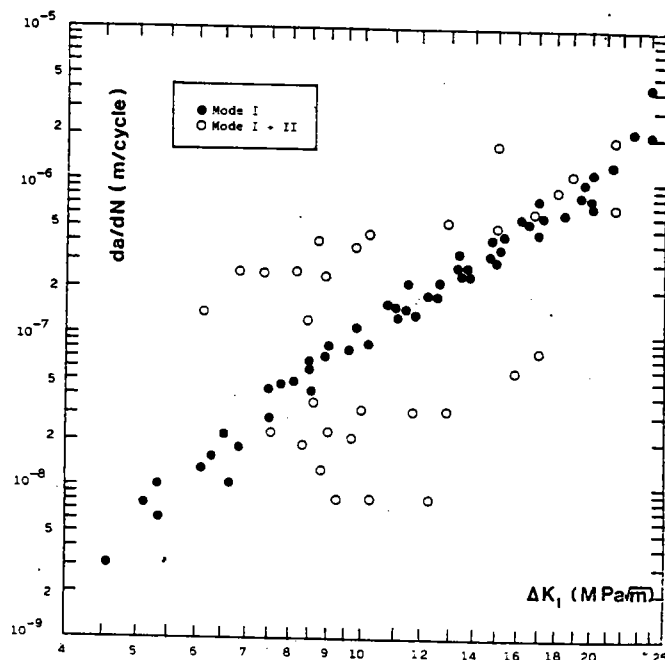
$$(3.26) \quad \frac{da}{dN}(\theta) = \frac{C(\Delta K_I^*)^m}{(1 - R^*) K_{Ic} - (\Delta K_I^*)^{0,4}}$$

D'après les résultats des travaux de **HOURLIER** (55), on peut constater que les valeurs théoriques sont loin d'être en accord avec les résultats expérimentaux, comme l'indiquent la *figure B.54* pour les angles de branchement et la *figure B.55* pour les vitesses de fissuration. Pour un  $\Delta K_I^*$  fixé, cette dernière montre que

la superposition du mode II statique provoque tantôt une diminution, tantôt une légère accélération des vitesses de propagation relatives au mode I pur.



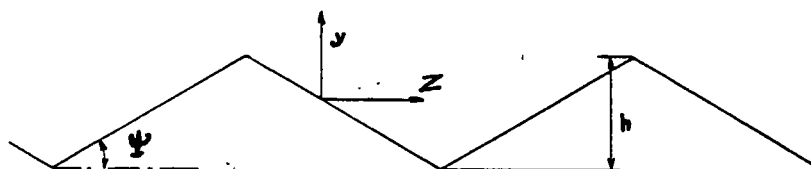
- Figure B.54 -  
Comparaison des angles de bifurcation observés et des angles prédits par le critère  $(da/dN)(\theta)$



- Figure B.55 -  
Influence du mode II statique sur la vitesse de propagation des fissures de fatigue

D'après HOURLIER, cette différence dans les résultats peut s'expliquer par le phénomène de fermeture de la fissure, phénomène dû, en grande partie, à l'effet de coin provoqué par le déplacement relatif des surfaces de rupture initialement en regard, suite à l'application du mode II (figure B.56). Selon lui, cet effet est mis en évidence par le matage important des surfaces de rupture qui couvre, dans certains cas, une part importante de leur superficie.

C'est ELBER (58) qui fut le premier à mettre en évidence le phénomène de fermeture des fissures de fatigue en mode I et à en fournir une explication.



- Figure B.56 - Représentation de la rugosité par deux paramètres : l'amplitude  $h$  des ondulations et l'angle  $\psi$



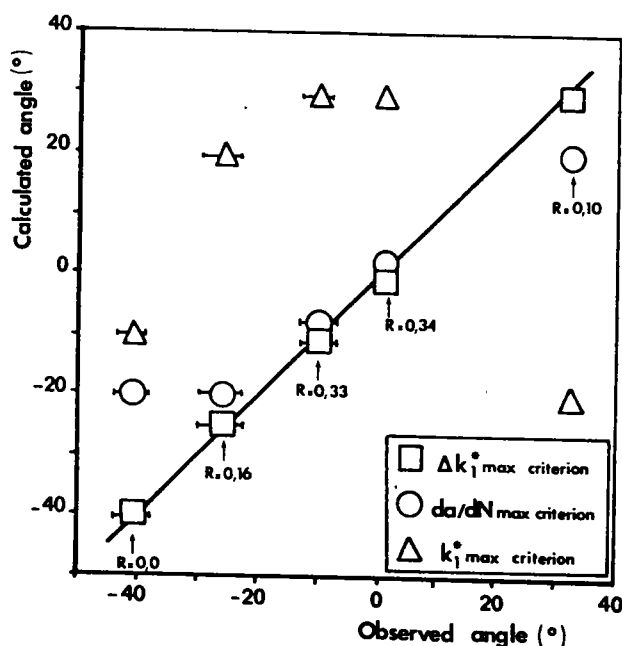
Pour améliorer les prévisions du critère  $\frac{da}{dN}(\theta)_{\max}$ , l'auteur a été amené à prendre en compte l'effet de la fermeture pour le calcul des directions de branchement. Toutefois, ce calcul se fait à partir d'hypothèses dont le bien-fondé est discutable et, dans la mesure où les éprouvettes n'ont pas été instrumentées, il est difficile de discuter plus avant de ce phénomène.

\* D'HONDT et TRUCHON (54) ont repris, sur des éprouvettes cruciformes - cf. : figure B.48 -, des essais de fissuration de fatigue en mode mixte avec un chargement non proportionnel du type mode I cyclique plus mode II cyclique.

Le travail expérimental a été conduit sur un acier à haute résistance de type 35NCD16 et sur un alliage léger AU4G1 T651. Ces matériaux ont été retenus en raison de leurs sensibilités différentes au rapport R, afin de préciser la validité des critères  $\Delta K_{I\max}^*$ ,  $K_{I\max}^*$  et  $\frac{da}{dN}_{\max}$ . Les facteurs d'intensité de contrainte dans le cas d'une fissure linéaire sont donnés, pour l'éprouvette cruciforme, par la relation (3.19).

D'après les résultats expérimentaux, la direction de branchement d'une fissure sous chargement non proportionnel est mieux prédite au moyen du critère de  $\Delta K_{I\max}^*$ , à condition que le matériau présente une faible sensibilité au rapport R - cas du 35NCD16 (figure B.57) -.

- Figure B.57 -  
 Comparaison entre les angles de branchement observés et les angles prévus par les différents critères (35NCD16), d'après (54)



Lorsque le critère  $\frac{da}{dN}(\theta)_{\max}$  ne s'applique pas pour ce type de matériau, on constate, d'après le tableau

B.5, que le rapport de charge  $R^*(\theta)$ , défini suivant la direction du branchement initial de la fissure, est inférieur à 0,3. D'après les auteurs, cette valeur doit être liée à l'apparition du phénomène de fermeture.

REPÈRE	$\frac{K_{MAX} - K_{OP}}{K_{MAX} - K_{MIN}}$ (1)	$R^*(\theta)$ (2)	ANGLE PREVU PAR LE CRITÈRE $da/dN_{max}$	ANGLE OBSERVE
1	-	0,16	- 20°	- 25°
2	1,00	0,34	0°	0°
3	0,80	0,00	- 20°	- 40°
4	0,84	0,33	- 10°	- 10°
5	0,90	0,10	20°	30°

(1)  $\frac{K_{MAX} - K_{OP}}{K_{MAX} - K_{MIN}}$  : MESURE AU DEBUT DU CHARGEMENT DE BIFURCATION

(2)  $R^*(\theta) = \frac{k_{1MIN}^*(\theta)}{k_{1MAX}^*(\theta)}$  OÙ  $\theta$  EST L'ANGLE DE BRANCHEMENT OBSERVE

- Tableau B.5 -  
Analyse des résultats de bifurcation pour l'acier 35NCD16  
d'après (54)

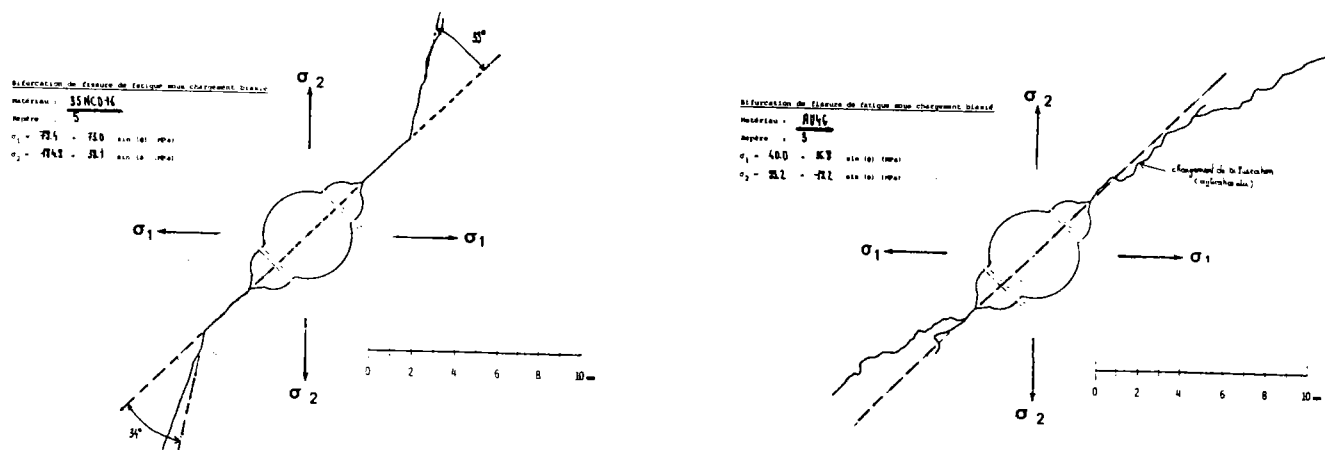
Par contre, pour des matériaux comme l'AU4G qui présente une forte sensibilité au rapport R, le *tableau B.6* montre les limites des critères  $\Delta K_{I_{max}}^*$  et  $K_{I_{max}}^*$  et met en évidence l'intérêt du critère  $\frac{da}{dN}(\theta)_{max}$ .

OBSERVE	$(da/dN)_{max}$	$\Delta k_{I_{max}}^*$	$k_{I_{max}}^*$
0°	0°	- 25°	+ 25°
0°	0°	+ 30°	- 20°

- Tableau B.6 - Comparaison entre les angles de branchement observés sur l'AU4G et les angles prévus par les différents critères, d'après (54)

Puisque, pour les mêmes conditions de chargement, la trajectoire de la fissure est différente pour les deux matériaux étudiés (*figure B.58*), D'HONDT et TRUCHON considèrent que ces résultats confirment ceux des travaux précédents (55), à savoir que le phénomène de branchement n'est pas purement mécanique.

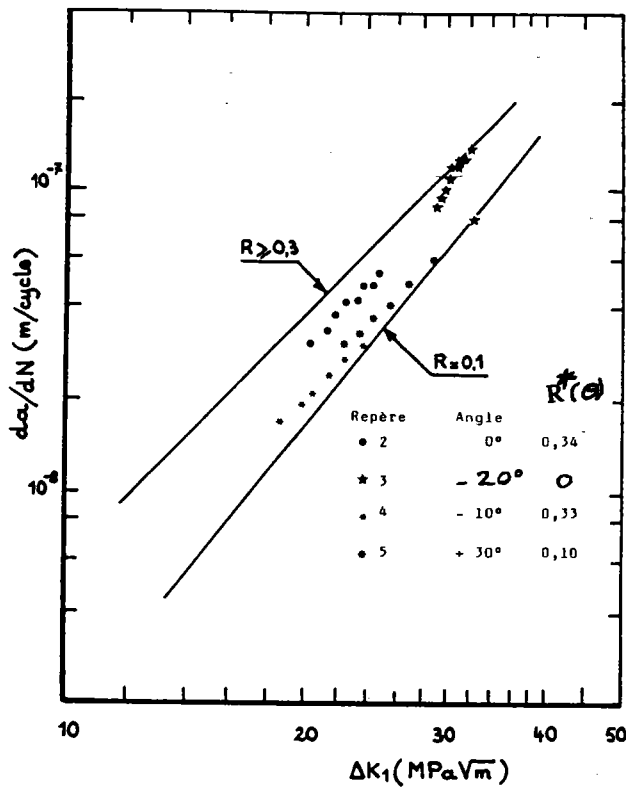
Signalons que les angles de branchement prévus par les critères de  $\Delta K_{I\max}^*$  et  $K_{I\max}^*$  ont été calculés au moyen de la solution d'AMESTOY (21).



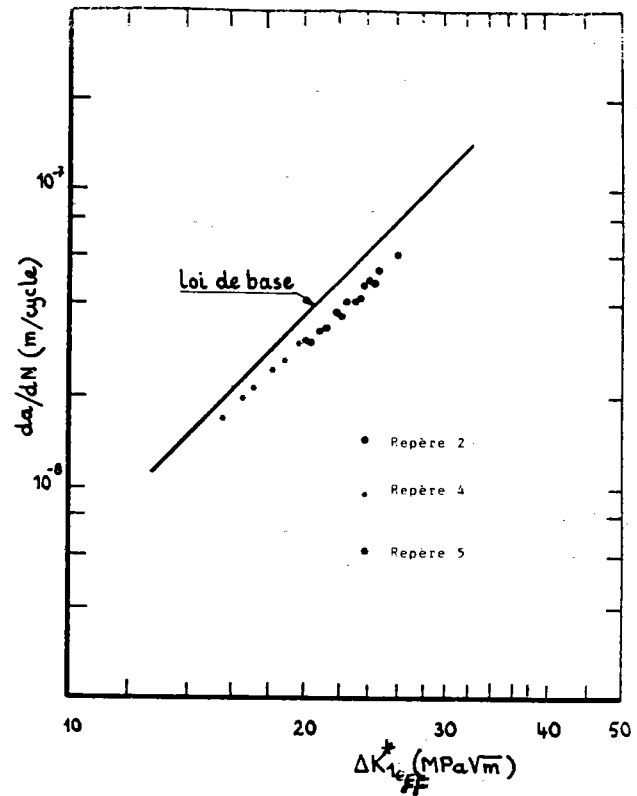
- Figure B.58 - Trajectoires de propagation dans les mêmes conditions de chargement, pour le 35NCD16 et l'1'AU4G, d'après (54)

Les valeurs du facteur  $K_I^*$  ont été déterminés à l'aide de la solution numérique approchée de CHATTERJEE (45) pour une branche de longueur finie (fissure branchée). Ce calcul révèle que pour l'1'AU4G, matériau sensible au rapport de charge R, la corrélation entre les couples de points  $(da/dN - \Delta K_I^*)$  pour les éprouvettes cruciformes et  $(da/dN - \Delta K_I)$  pour les éprouvettes C.T. est satisfaisante.

Par contre, pour le 35NCD16, on constate que l'ensemble des points expérimentaux se trouve situé entre les deux droites de la loi de PARIS, et que la hiérarchie entre les différents groupes de points correspondant à des valeurs différentes de R n'est pas respectée (figure B.59).



- Figure B.59 -  
Vitesse de propagation des  
fissures branchées, d'après  
(54) - acier 35NCD16 -



- Figure B.60 -  
Cinétique de propagation  
des fissures branchées  
après correction  
d'après (54) - 35NCD16 -

En mode mixte, ce phénomène se traduit par le matage dont les auteurs ont signalé la présence sur les surfaces de rupture de l'acier 35NCD16 au cours d'analyses microscopiques.

Ainsi, pour des matériaux sensibles à la fermeture, D'HONDT et TRUCHON (54) proposent une reformulation du critère  $(da/dN)(\theta)_{max}$  qui prendra en compte cet effet de fermeture. La cinétique de propagation des fissures branchées est contrôlée en mode I par l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte efficace  $\Delta K_{I,eff}^*$  défini par :

$$(3.27) \quad \Delta K_{I,eff}^*(\theta) = U \Delta K_I^*(\theta)_{calculé}$$

avec :

$$(3.28) \quad U = \frac{K_{I,max} - K_{ouv}}{K_{I,max} - K_{min}}$$

On vérifie sur la *figure B.60* que tous les points expérimentaux exprimant les vitesses de propagation exprimées en fonction de  $\Delta K_{\text{Ieff}}^*$  sont alignés sur une droite parallèle à celle de PARIS. Dans cette reformulation, les valeurs de U sont données par le *tableau B.5*, et les valeurs du facteur d'intensité de contrainte d'ouverture ( $K_{\text{ouv}}$ ) sont déterminées à partir des enregistrements charge – déplacement obtenus à l'aide d'un capteur à lames placé au centre de l'éprouvette.

A propos des enregistrements effectués dans les travaux de D'HONDT et TRUCHON, il faut signaler que :

- le déplacement mesuré est le déplacement total sans faire de distinction entre la composante du mode I et celle du mode II.
- les mesures ne sont effectuées qu'une seule fois et cela, au niveau de la bifurcation.

\* KITAGAWA et col. (59) ont effectué des essais de fissuration de fatigue en mode mixte sur des éprouvettes cruciformes usinées dans des plaques en acier, d'épaisseur utile 4,5 mm.

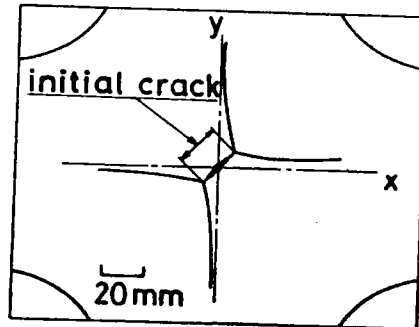
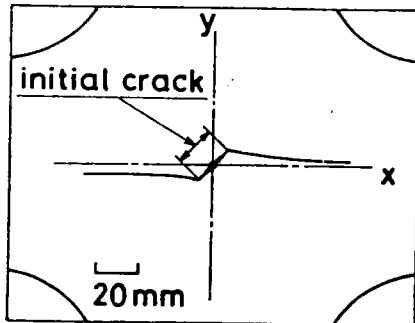
La nature du chargement biaxial permet de classer les essais de la façon suivante :

- les essais n° 1 à 4 où les éprouvettes sont soumises à un chargement uniaxial ( $\Delta\sigma_1 = 0$  et  $\Delta\sigma_2 \neq 0$ ) pour des valeurs de  $\beta_0$  respectivement égales à : 31,5 – 43,5 – 61 et 75,3 degrés et un rapport de charge  $R_2$  égal à 0,1.
- l'essai n° 5, où  $\beta_0 = 45$  degrés et  $R_2 = 0,1$ , sous un chargement non proportionnel uniaxial,  $\Delta\sigma_2$  cyclique et  $\Delta\sigma_1$  statique.
- l'essai n° 6, avec  $\beta_0 = 45$  degrés et  $R_1 = R_2 = 0,1$ , est considéré comme un essai en mode II pur alterné ( $\pm \Delta K_{II}$ ) où les contraintes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  (égales) sont appliquées avec un déphasage  $\phi$  égal à  $\pi$  – cf. : équation (3.20) –.

La *figure B.61a* schématise le type de branchement obtenu à la pointe des fissures pour les 5 premiers essais ; la *figure B.61b* correspond à l'essai n° 6 ; dans ce dernier cas, deux branches se sont développées à partir de chaque extrémité de la fissure principale.

La *figure B.62* indique que c'est le critère de la contrainte tangentielle maximale (9) qui décrit le

mieux les résultats expérimentaux, plus particulièrement pour l'essai n° 6, où les mesures donnent un angle de bifurcation  $\theta_0$  voisin de 70 degrés par rapport à la direction de la fissure principale.

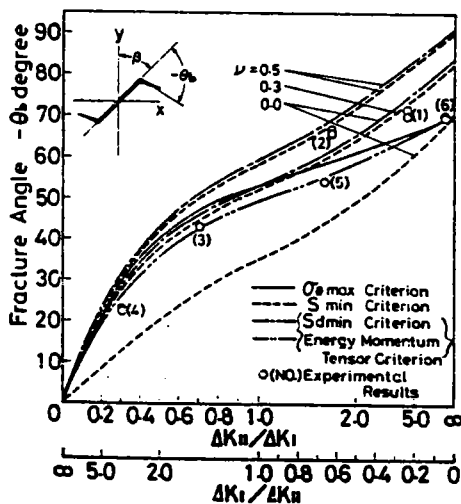


a.

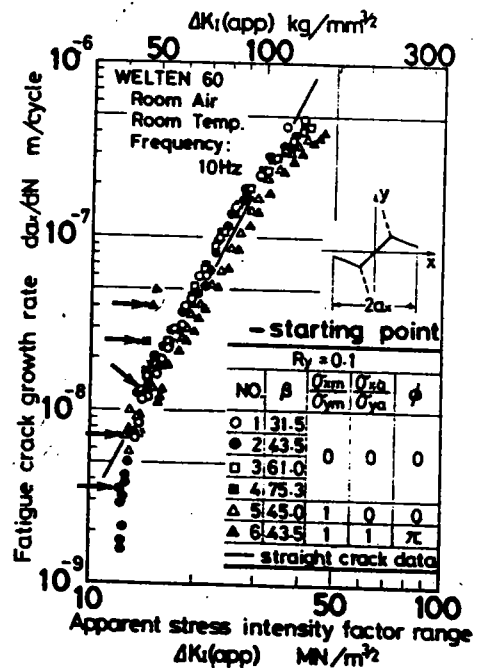
b.

- Figure B.61 - Formes de fissures observées d'après (59)  
a. essai no 2 b. essai no 6

Pour comparer les résultats des vitesses de fissuration mesurées en mode mixte avec celles mesurées en mode I, KITAGAWA et col. (59) ont approché  $\Delta K_I^*$  par un facteur apparent  $\Delta K_{Iapp}$ , qui est fonction de la longueur de la fissure projetée sur l'axe Ox (figure B63).



- Figure B.62 -  
angle de rupture en fonction du rapport  $\Delta K_{II}/\Delta K_I$ , d'après (59)



- Figure B.63 - vitesse de propagation en fonction du  $K_{Iapparent}$ , d'après (59)

La *figure B.63* qui montre l'évolution de  $da/dN$  en fonction de  $\Delta K_{Iapp}$ , indique qu'au début de la propagation, les valeurs des vitesses de fissuration en mode mixte, désignées par des flèches, sont soit supérieures, soit inférieures à celles obtenues en mode I pur, mais qu'au fur et à mesure que la fissure avance, les valeurs pour les six essais ont tendance à se rapprocher des valeurs de la vitesse de propagation en mode I pur.

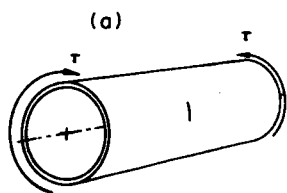
En regardant de plus près, on s'aperçoit que les valeurs des vitesses de fissuration obtenues pour les quatre premiers essais se trouvent être légèrement supérieures aux valeurs des vitesses en mode I, alors que pour les essais n° 5 et 6, les points des vitesses sont déplacés vers les vitesses inférieures par rapport à celles du mode I pur.

KITAGAWA et col. (59) ont déduit de leurs essais qu'à chaque étape du processus de propagation, une fissure de fatigue, qu'elle soit incurvée ou ramifiée, se développe en choisissant la direction où  $\Delta K_{II}^*$  tend vers zéro.

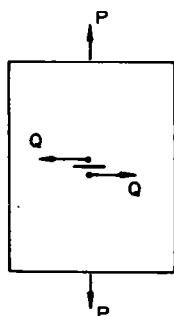
### 3.3 FISSURATION EN MODE II

#### 3.3.1 Présentation du problème

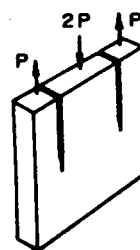
Le principe de fissuration de fatigue en mode II pur est simple à première vue, mais sa réalisation pratique l'est beaucoup moins. Par exemple, le tube à paroi mince (*figure B.64*) soumis à un couple de torsion cyclique, empêche parfois une étude appropriée de l'accroissement de fissure, du fait du flambage des parois au voisinage de la pointe de la fissure (60).



- Figure B.64 - Tube à paroi mince sollicité en mode II pur (60)



- Figure B.65 - Chargement étudié par ERDOGAN (9)



- Figure B.66 - éprouvette de mode II pur (62)

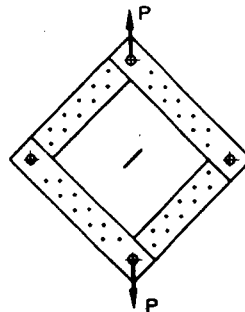
En rupture, ERDOGAN et SIH (9) ont appliqué des charges de cisaillement concentrées, de part et d'autre des faces de la fissure d'une éprouvette plate en plexiglas (*figure B.65*). Les essais indiquent qu'il n'y a pas de rupture en mode II pur. Par contre, JONES et CHISHOLM (61) qui ont effectué des essais à

l'aide d'éprouvettes de cisaillement compactes, à deux fissures de bout identiques – également employées par POOK (62) – *figure B.66* – ont montré que pour l'alliage d'aluminium 2024 T4,  $K_{IIc}$  est supérieur à  $K_{Ic}$  de 5 %.

### 3.3.2 Sollicitation uniaxiale

\* TOOR (63) a utilisé une éprouvette en alliage d'aluminium d'une épaisseur de 3 mm. L'éprouvette présente en son centre une fissure à 45 degrés entourée d'une armature rigide en forme de cadre – utilisée en premier par LIU (67) – *figure B.67*. Il n'a malheureusement pas été possible de comparer les vitesses de propagation en mode I et en mode II, du fait de la dispersion des résultats. Cependant, la propagation en mode II pur n'a pu être réalisée qu'avec difficulté, le branchement de la fissure aboutissant aisément à une propagation en mode I. Dans certains cas même, une composante de mode III semble présente.

- Figure B.67 - Eprouvette "cadre" utilisée par TOOR(63)



\* POOK (62) a utilisé l'éprouvette représentée à la *figure B.66* pour étudier le seuil de non-fissuration d'un acier doux. Préalablement pré-fissurée en mode I, elle est ensuite sollicitée en mode II. Sous un chargement de mode II, la fissure bifurque alors dans une direction située à 70 degrés de la direction initiale.

L'amplitude du facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K_I^*$  de la fissure présentant une branche infinitésimale est approximativement donnée par le critère de  $\sigma_{\theta_{max}}$  :

$$(3.29) \quad \Delta K_I^* = 3 \Delta K_{II} \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$$

Le rapport  $\Delta K_I^* / \Delta K_{II}$  vaut alors 1,15 pour  $\theta_0 = 70,5$  degrés. Ainsi, une fissure sollicitée en mode II pur bifurque dans la direction où sa composante d'ouverture est maximale. En conséquence, POOK émet l'hypothèse qu'il n'y a pas propagation d'une fissure sollicitée en mode II lorsque l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte dans la direction de branchement est inférieure à une valeur limite, notée  $\Delta K_{Iseuil}^*$ , ce qui conduit à la relation :



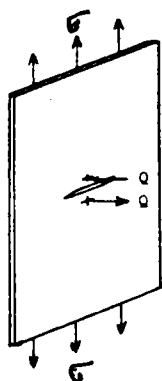
$$(3.30) \quad \Delta K_{IIs} = 0,87 \Delta K_{Is}^*$$

Les résultats expérimentaux obtenus par POOK sont en accord raisonnable avec cette prévision.

### 3.3.3 Sollicitation biaxiale

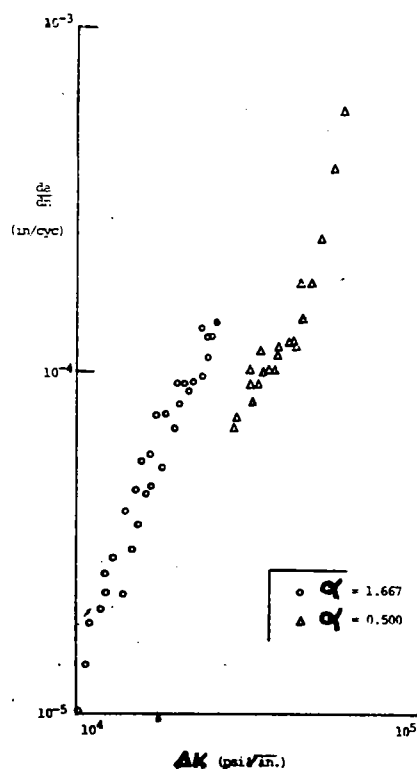
\* ROBERTS et KIBLER (65) ont utilisé une éprouvette à fissure centrale soumise à un chargement de traction normale statique plus un chargement transversal cyclique à chaque extrémité de la fissure (figure B.68). Les éprouvettes sont en alliage d'aluminium 2024 T3.

Par rapport à un chargement classique de mode II, le paramètre  $\Delta K_{II}$  correspond à de la flexion chez ROBERTS et KIBLER et la charge Q de flexion est alternée ( $R = -1$ ). Les données de propagation de la fissure en mode II ont été rassemblées et tracées selon la loi  $da/dN = f(\Delta K)$  - figure B.69 -.



- Figure B.68 -  
éprouvette de ROBERTS  
et KIBLER(65)

- Figure B.69 -  
vitesses de propagation  
influence du mode II(65)



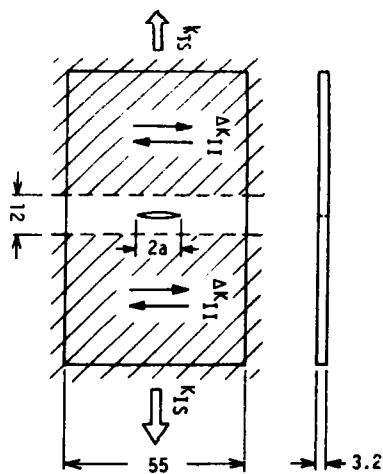
Cette figure indique que la courbe de vitesse, obtenue pour  $\alpha = 0,5$  (composante de mode II importante), se trouve placée à droite de celle correspondant à  $\alpha = 1,667$  (composante de mode II faible). Cela signifie que pour un  $\Delta K$  donné, une fissure en mode II progressera moins vite qu'une fissure équivalente en mode I. A partir de résultats expérimentaux, ROBERTS et KIBLER indiquent qu'une fissure peut se propager de façon importante selon une direction qui ne réduit pas la composante  $K_{II}^*$  à zéro.

\* OTSUKA et col. (66) ont étudié le seuil de non fissuration des fissures de fatigue sous chargement de mode II pour deux alliages d'aluminium, le 7075 T6 et le 2017 T4, ainsi que pour un acier doux. Le chargement extérieur appliqué à l'éprouvette (figure B.70) est biaxial non proportionnel : mode II cyclique ( $\Delta K_{II} = 2K_{II}$ ) + mode I statique ( $K_{IS}$ ). La composante de tension statique est appliquée pour éviter le frottement entre les lèvres de la fissure.

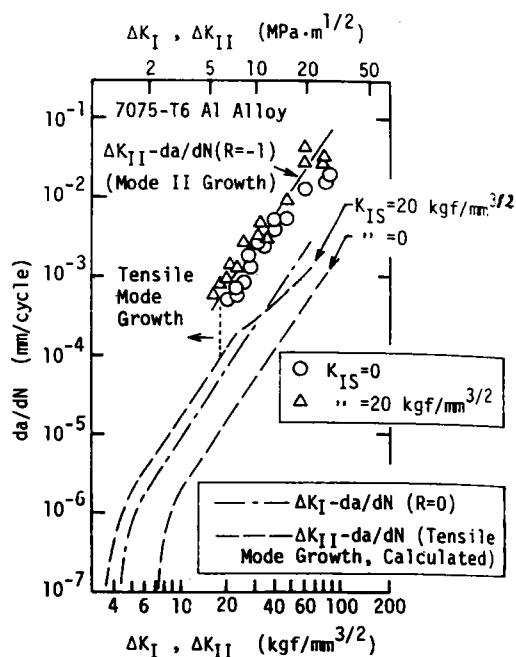
Les résultats des essais ont permis de déterminer, pour le mode II de chargement, une valeur  $\Delta K_{IIseuil}$  par rapport à laquelle la quantité  $\Delta K_{II}$  appliquée induit soit une propagation type mode II, soit une propagation de type mode I (avec bifurcation de la fissure).

Ces mêmes résultats ont révélé que la transition entre ces deux modes de propagation est fonction du matériau. En effet, pour les alliages d'aluminium, la propagation en mode II est possible lorsque la valeur de  $\Delta K_{II}$  appliquée est supérieure à  $\Delta K_{IIseuil}$ . Dans le cas des aciers, on observe une propagation en mode II lorsque  $\Delta K_{II}$  appliqué est inférieur à  $\Delta K_{IIseuil}$ , et une propagation en mode I dans le cas contraire.

Pour les deux alliages d'aluminium, le tracé de  $da/dN$  en fonction de  $\Delta K_{II}$  montre que la droite de propagation en mode II vient se placer à gauche de celle correspondant au mode I. Ainsi, dans des conditions équivalentes, une propagation se poursuivant en mode II serait plus dangereuse qu'en mode I, ce qui est en contradiction avec les résultats de ROBERTS et KIBLER (65).



- Figure B.70 - Eprouvette de mode II utilisée par OTSUKA(66)



- Figure B.71 - vitesse de propagation en mode II (66)

La *figure B.71*, obtenue pour l'alliage 7075 T6, montre que la composante  $K_{I\dot{s}}$  n'a pas d'influence sur la loi  $da/dN = f(\Delta K_{II})$ . Dans des travaux plus récents (1985), OTSUKA et col. (71) proposent une loi de fissuration en mode II semblable à la loi de PARIS :

$$(3.31) \quad \frac{da}{dN} = C(\Delta K_{II})^m$$

D'après ces mêmes travaux, la vitesse de fissuration en mode II n'est pas influencée par le rapport de charge et l'amorçage des fissures a lieu en surface lorsque la fissure se propage en mode II, tandis qu'il se produit à coeur pour une propagation en mode I.

### 3.4 CORRELATION ENTRE LA VITESSE DE FISSURATION ET LA TAILLE DE LA ZONE PLASTIQUE CYCLIQUE

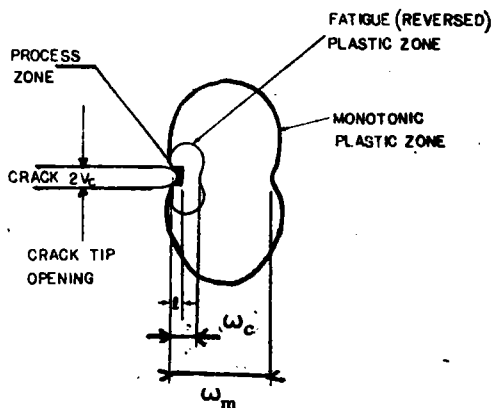
La taille de la zone plastique monotone  $\omega_m$  (*figure B.72*) dont le calcul est basé sur la solution singulière du champ de contrainte et le critère de VON MISES, a été définie par l'équation (2.20).

HILLS et ASHELBY (68), en utilisant les mêmes hypothèses, ont vérifié qu'en mode mixte et en contrainte plane, la taille de la zone plastique cyclique  $\omega_c$  est 4 fois plus petite que la taille de la zone plastique monotone  $\omega_m$ .

On a :

$$(3.32) \quad \omega_c = \frac{A^2}{8\pi\sigma_y^2}$$

où :  $A_2 = K_I^2 + 3K_{II}^2$



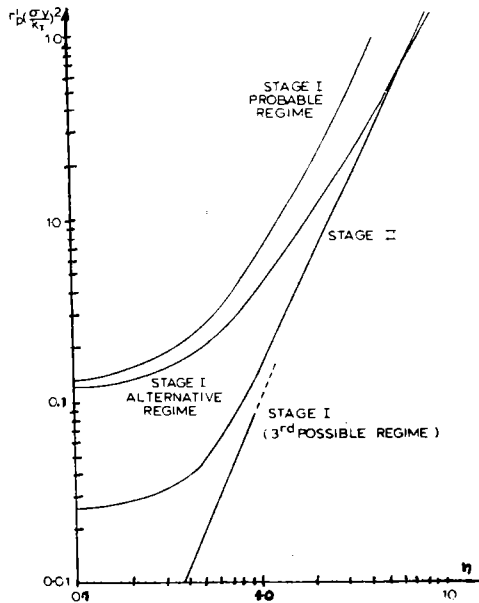
- Figure B.72 -  
Forme des différentes zones plastiques

A partir des travaux d'ANTOLOVITCH (69), et de la loi de PARIS, HILLS et ASHELBY considèrent que la vitesse de propagation de la fissure peut s'écrire en fonction de la taille de la zone plastique cyclique sous la forme :

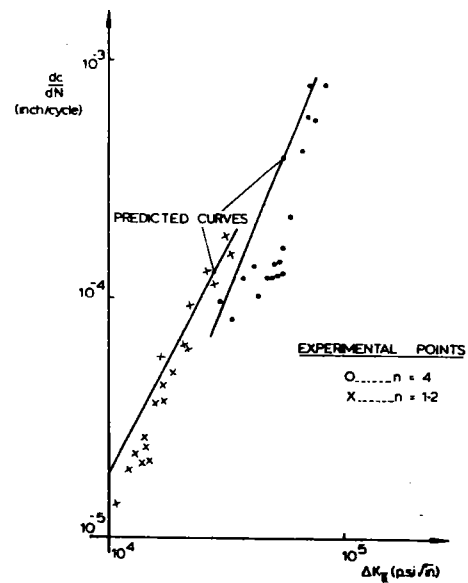
$$(3.33) \quad \frac{da}{dN} = B(\omega_c)^{m/2}$$

m – coefficient de la loi de PARIS – et B étant des constantes du matériau.

Pour une valeur de n donnée ( $n = K_{II}/K_I$ ), la taille de la zone plastique cyclique est déterminée graphiquement à partir de la figure B.73.



- Figure B.73 - Influence du rapport  $K_{II}/K_I$  sur la taille de la zone plastique (68)

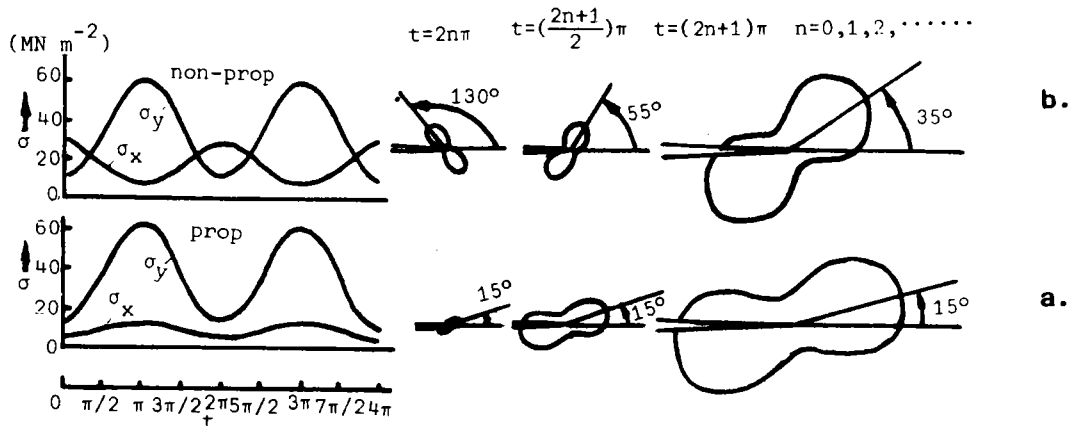


- Figure B.74 - comparaison des courbes de vitesse théoriques et expérimentales d'après (68)

HILLS et ASHELBY (68) vérifient la validité de la loi de vitesse (3.33) en la comparant aux résultats expérimentaux de ROBERTS et KIBLER (65) obtenus dans le cas d'un chargement en mode II. La figure B.74 montre que pour les deux rapports de chargement étudiés, la pente des courbes théoriques est un peu trop forte par rapport à celle des courbes expérimentales.

\* HUA et col. (70) ont comparé l'évolution de la direction de la plasticité maximale monotone à la pointe d'une fissure dans le cas d'un chargement cyclique biaxial, proportionnel et non proportionnel.

D'après ces calculs, la direction qui donne une valeur de  $\omega_m$  maximale reste constante au cours du cyclage pour un chargement proportionnel (figure B.75a). Par contre, dans le cas d'un chargement non proportionnel, où le rapport  $K_{II}/K_I$  varie continuellement durant un cycle, le calcul indique que la direction de la plasticité maximale varie, elle aussi, au cours d'un cycle de chargement (figure B.75b).



- Figure B.75 - Taille de zone plastique d'après (70) :  
 a. chargement non proportionnel  
 b. chargement proportionnel

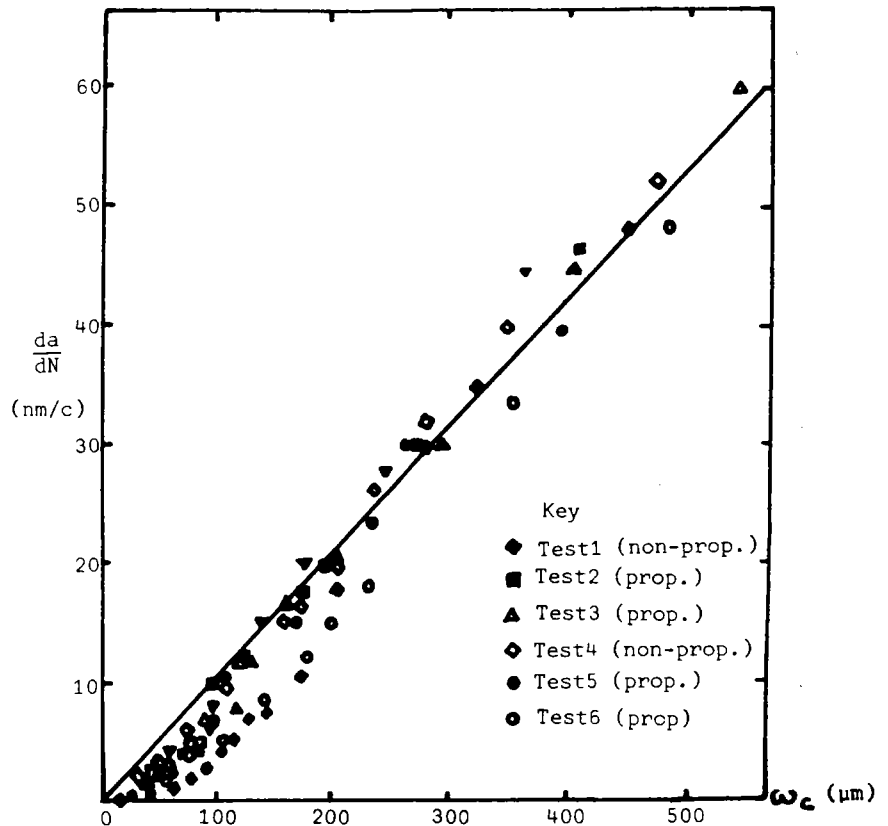
HUA et col. (70) proposent une loi de vitesse en fonction de la taille de la zone plastique cyclique  $\omega_c$ , estimée à l'aide du critère de VON MISES à partir des amplitudes des facteurs d'intensité de contrainte et du terme non singulier  $\sigma_t$  du champ de contrainte.

La figure B.76 montre qu'il y a une relation linéaire entre  $da/dN$  et  $\omega_c$  et, que durant la propagation, les points de vitesse expérimentaux obtenus pour un acier inoxydable (316), dans le cas d'un chargement biaxial, proportionnel ou non, se superposent à la courbe de vitesse obtenue en mode I pur.

Cette même courbe indique que les vitesses mesurées immédiatement après branchement de la fissure

pour un chargement non proportionnel sont globalement inférieures à celles mesurées dans le cas d'un chargement proportionnel.

- Figure B.76 -  
vitesse de propagation  
de fissure en fonction  
de la taille de la  
zone plastique cyclique,  
d'après (70)



HUA et col. (70) concluent que, quelle que soit la nature des sollicitations biaxiales, les fissures bifurquent apparemment suivant la direction où l'amplitude de la contrainte tangentielle est maximale et, par suite, le chemin de propagation est mieux gouverné par le critère de  $\Delta K_{I\max}^*$

### 3.5 DISCUSSION

Nous venons d'inventorier les études d'un grand nombre de chercheurs. A partir de leurs résultats, nous pouvons dégager les points suivants :

#### 1. Matériau

Un grand nombre de matériaux ont été utilisés pour observer les effets du chargement en mode mixte sur la propagation des fissures de fatigue. Dans aucun cas, il n'a été tenu compte des propriétés cycliques du matériau. Pour un matériau fragile, ce n'est pas gênant, mais le comportement cyclique contrainte/déformation d'un matériau ductile ne peut pas être ignoré

lorsque l'on veut expliquer les différences quantitatives dans la propagation des fissures.

La réponse d'un matériau donné à un chargement cyclique en mode mixte peut modifier, non seulement la taille de la zone plastique, mais aussi la façon dont le matériau se comporte : certains s'adoucissent, d'autres s'écrouissent sous chargement cyclique et un même matériau peut ne pas réagir de la même façon, dans des conditions de chargement en mode mixte différentes.

## 2. Géométrie d'essai

Les géométries d'essai utilisées pour étudier la propagation en mode mixte ou en mode II pur sont très variées (une dizaine environ). A l'exception de l'éprouvette cruciforme (*figure B.48*), et de l'éprouvette de flexion entaillée (*figure B.16*), la plupart des autres géométries offrent une gamme de rapport  $K_{II}/K_I$  limitée. Ainsi, une éprouvette bien adaptée à la propagation en mode mixte où le mode I est prédominant (*figure B.4a*) ne peut pas aisément être utilisée pour une propagation où le mode II est prépondérant, et vice-versa (*figure B.67*).

En général, si les sollicitations sont biaxiales, l'éprouvette cruciforme est préconisée. Mais sa fabrication est très coûteuse, et elle exige une machine d'essai très complexe. Si par contre, les sollicitations sont uniaxiales de traction, l'éprouvette de flexion entaillée (*figure B.16*), est plus pratique. De plus, elle requiert un appareillage d'essai standard.

Néanmoins, BROEK et RICE(35) reconnaissent qu'il est difficile de réaliser pratiquement un chargement en mode II pur avec l'éprouvette de flexion 4 points. Nous verrons dans le chapitre suivant que l'éprouvette de traction indirecte dite "disque brésilien" offre une gamme très large de rapport  $K_{II}/K_I$ .

Il est à noter que dans la majorité des travaux, la condition de contrainte plane est dominante pour la plupart des géométries.

## 3. Paramètres d'essai

La définition d'un chargement en mode mixte à l'aide de l'angle  $\beta_0$  et du rapport  $\lambda$  pour un chargement biaxial n'apparaît pas judicieux. En effet, pour deux géométries différentes, un même angle  $\beta_0$  ne correspond pas à un même rapport de  $K_{II}/K_I$ . Par conséquent,  $\beta_0$  n'est pas le paramètre qui convient le mieux pour comparer les résultats expérimentaux. La définition de  $\lambda$  varie d'un auteur à l'autre : il s'agit tantôt du rapport  $\sigma_1/\sigma_2$ , tantôt de la quantité inverse. En outre,  $\lambda$  ne précise pas si la contrainte de chargement  $\sigma_1$  est de nature statique ou cyclique.

En mode I + II, la valeur initiale maximale du rapport  $K_{II}/K_I$  étudiée est souvent inférieure à 2 pour un chargement uniaxial. Elle vaut par exemple 0,52 pour FLAVENOT(46) et 1,7 pour IIDA(36), TANAKA(37) et PUSTEJOVSKY(38).

## 4. Direction de bifurcation

L'étude du phénomène de propagation en mode mixte révèle que dans la majorité des travaux, l'intérêt porte plus sur la direction de bifurcation que sur la vitesse de propagation. En général, ce sont les critères classiques de la mécanique linéaire de la rupture qui sont utilisés pour prévoir la direction de bifurcation.

Il ressort des différents travaux – rares en regard du nombre considérable d'études consacrées au mode I – que, quelle que soit la nature des sollicitations (uniaxiales ou biaxiales), c'est le critère local de la contrainte tangentielle maximale  $\sigma_{\theta_{\max}}$  qui est le mieux en accord avec les résultats expérimentaux quand le rapport  $K_{II}/K_I$  varie de zéro à l'infini – critère qui n'est pas différent de celui de  $\Delta K_I^* = 0$  (21).

Le critère de l'énergie de déformation minimale  $S_{\min}$  convient également, mais pour une gamme plus réduite du rapport  $K_{II}/K_I$  (de 0 à 1). D'après le critère de la vitesse maximale  $(da/dN)_{\max}$ , la direction de bifurcation peut être influencée également par le rapport de charge R, dans le cas d'un matériau dont la vitesse de fissuration en mode I est sensible à ce rapport.

Par contre, CHINADURAI et col. (42) ont montré qu'en fatigue la direction de bifurcation  $\theta_0$  est indépendante de la longueur initiale de la fissure et de l'amplitude de la contrainte appliquée.

D'après KITAGAWA et col. (59) et OTSUKA et col. (64), pour un chargement de mode II pur, il apparaît initialement deux branches de propagation à la pointe de la fissure correspondant chacune à une direction normale à celle de l'amplitude de la contrainte tangentielle maximale.

## 5. Vitesse de propagation

L'étude de la direction de bifurcation ne constitue qu'une étape préalable à la compréhension des mécanismes de propagation des fissures de fatigue en mode mixte. Il est aussi important de traduire la vitesse de propagation.

La représentation d'une courbe de vitesse en mode mixte calquée sur celle d'une courbe en mode I (c.-à-d. en fonction de  $\Delta K$ ), pose le problème du calcul des facteurs d'intensité de contrainte dans le cas d'une fissure branchée (cf. : annexe A).

Il n'existe que peu de travaux ayant adopté ce procédé de calcul dont l'application se trouve souvent limitée aux premiers incréments de propagation – cf. : (54), (55), (70) –. Pour contourner cette difficulté, la fissure branchée a été assimilée soit à une fissure droite équivalente (39), (41), (42), soit à sa projection selon la direction de propagation hypothétique en mode I (35), (36), (37), (38), (46) et (59).

De cette façon, la plupart des résultats indiquent que la présence de la composante du mode II se traduit par une augmentation de la vitesse de propagation au début du phénomène – cf. : (36), (37), (38), (46), (55), (59) –. Ensuite, la propagation en mode I + II se ramène à une propagation en mode I. Ainsi, le chemin de propagation est apparemment mieux gouverné par le critère de  $\Delta K_{I\max}^*$

Des calculs aux éléments finis (35, 36, 38) confirment ce résultat en montrant qu'effectivement la composante  $\Delta K_{II}^*$  tend rapidement vers une valeur nulle dès les premiers incréments de propagation.

Quelques auteurs, cependant, ne signalent aucune influence apparente de la présence de la composante de mode II – cf. : (48) –, alors que d'autres indiquent qu'elle entraîne une



diminution de la vitesse – cf.: (35), (42), (55)– . La contradiction entre les résultats obtenus est due, semble-t-il, en grande partie aux méthodes de dépouillement qui diffèrent d'un auteur à l'autre.

Les travaux d'OTSUKA et col. (66) indiquent que pour un même  $\Delta K$ , les vitesses de fissuration en mode II pur sont supérieures aux vitesses de fissuration en mode I. Par contre, ROBERTS et KIBLER(65) observent le phénomène inverse.

Les propriétés mécaniques des matériaux entrant en jeu hors de la propagation en mode mixte, telles la fermeture de la fissure – cf.: (54) – et la taille de la zone plastique cyclique – cf.: (68), (70) – sont parfois introduites comme paramètres influant sur les mécanismes de propagation .

Il faut retenir que dans les travaux de d'HONDT et TRUCHON (54), les enregistrements des diagrammes ( $P, \delta$ ) ne sont effectués qu'une seule fois et cela, au niveau de la bifurcation.

Le niveau, aussi bien que l'état, des contraintes appliquées sont apparus régir la propagation en mode mixte au niveau du seuil. Toutefois, la propagation n'y était jamais mixte. Ou bien le mode II de cisaillement, ou bien le mode I d'ouverture existait seul. Le passage de l'un à l'autre semblait dicté par la nature du matériau (66).

Signalons enfin que la quasi-totalité des travaux de fatigue en mode mixte est consacrée à des études de fissuration sous un chargement de traction, le cas de la compression ayant retenu l'attention de très peu d'auteurs. Le disque brésilien n'a fait notre connaissance l'objet d'aucune étude de fissuration par fatigue ni en mode I ni en mode mixte.

## Chapitre Quatre

### DISQUE BRESILIEN

#### 4.1 DIFFERENTES METHODES DE CALCUL DU FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE POUR UN DISQUE CHARGE EN COMPRESSION

##### 4.1.1 Historique

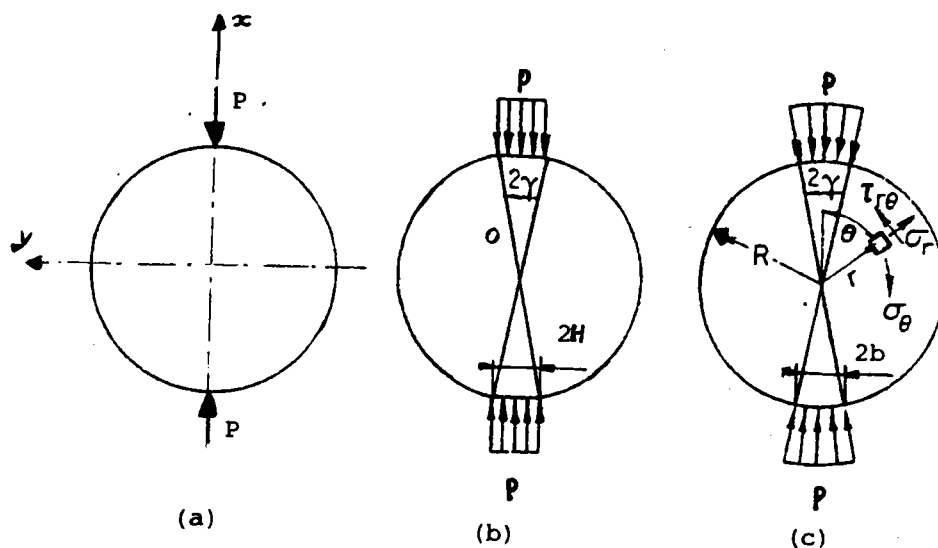
Peu de temps avant la seconde guerre mondiale, les ingénieurs brésiliens se trouvèrent confrontés à un problème épineux. Il s'agissait de déplacer une vieille église de Rio de Janeiro que l'on ne voulait pas détruire, mais qui se trouvait dans l'axe d'une nouvelle avenue que la municipalité projetait d'ouvrir. Les ingénieurs concernés envisagèrent alors de faire "rouler" l'église sur de grands tonneaux en fonte remplis de béton.

CARNEIRO et BARCELLOS 72, chargés d'étudier la force portante de ces rouleaux, observent alors que la rupture des cylindres se fait presque rigoureusement suivant un axe diamétral. A travers les études théoriques, ils constatent l'uniformité de la distribution des contraintes de traction, ce qui prouve une applicabilité idéale de cet essai à l'étude de la résistance à la traction dans le béton.

Ainsi l'essai dit du "disque brésilien" était né. Il est à signaler que dans certains travaux, on préfère parler d'essai de "tension indirecte" – (73) – (74) –.

#### 4.1.2 Champ de contraintes dans un disque non fissuré chargé en mode I pur

Ce calcul peut s'effectuer en faisant l'hypothèse d'un chargement  $P$  soit ponctuel (figure 77a), soit uniformément réparti sur les surfaces de contact dont la longueur  $2H$  est définie par l'angle  $2\gamma$  (figures 77b,c).



- Figure 77 - a. chargement ponctuel  
 b. chargement réparti sur un méplat  
 c. chargement réparti : solution de HONDROS(78)

D'après TIMOSHENKO et GOODIER (75) et COKER et FILON (76), la résolution des équations d'élasticité, dans le cas de chargement ponctuel, fournit les relations suivantes, dans un système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ .

Ces relations s'écrivent (4.1) :

$$(4.1) \quad \sigma_r = \frac{2P}{\pi R} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{(1 - \frac{r}{R} \cos \theta)(\cos \theta - \frac{r}{R})^2}{\left[1 + (\frac{r}{R})^2 - 2\frac{r}{R} \cos \theta\right]^2} - \frac{(1 + \frac{r}{R} \cos \theta)(\cos \theta + \frac{r}{R})^2}{\left[1 + (\frac{r}{R})^2 + 2\frac{r}{R} \cos \theta\right]^2} \right\}$$

$$\sigma_\theta = \frac{2P}{\pi R} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{(1 - \frac{r}{R} \cos \theta) \sin^2 \theta}{\left[1 + (\frac{r}{R})^2 - 2\frac{r}{R} \cos \theta\right]^2} - \frac{(1 + \frac{r}{R} \cos \theta) \sin^2 \theta}{\left[1 + (\frac{r}{R})^2 + 2\frac{r}{R} \cos \theta\right]^2} \right\}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{2P}{\pi R} \left\{ \frac{(1 - \frac{r}{R} \cos \theta)(\cos \theta - \frac{r}{R}) \sin \theta}{\left[1 + (\frac{r}{R})^2 - 2\frac{r}{R} \cos \theta\right]^2} - \frac{(1 + \frac{r}{R} \cos \theta)(\cos \theta + \frac{r}{R}) \sin \theta}{\left[1 + (\frac{r}{R})^2 + 2\frac{r}{R} \cos \theta\right]^2} \right\}$$

Les équations précédentes peuvent encore se mettre sous forme de séries :

$$\sigma_{\theta} = \frac{P}{\pi R} \sum_{i=1}^n A_i(\theta) \left(\frac{r}{R}\right)^{2i-2}$$

(4.2)

$$\tau_{r\theta} = \frac{2P \sin 2\theta}{\pi R} \sum_{i=1}^n B_i(\theta) \left(\frac{r}{R}\right)^{2i-2}$$

d'après ERDLAC (77) - cf. : en (91) -.

Les expressions de  $A_i(\theta)$  et  $B_i(\theta)$  avec  $i = 1, 2, \dots, 5$  sont données dans le **tableau B.7**.

- Tableau B.7 -  
Coefficients angulaires  
d'ATKINSON (91)

$$\begin{aligned} s &= \sin \theta \\ c &= \cos \theta \\ \cos(2\theta) &= 2c^2 - 1 \end{aligned}$$

$A_1$	$1 - 4s^2$
$A_2$	$8c^2(1 - 4c^2)$
$A_3$	$-4s^2(3 - 36c^2 + 64c^4)$
$A_4$	$-16s^2(-1 + 24c^2 - 80c^4 + 64c^6)$
$A_5$	$-20s^2(1 - 40c^2 + 240c^4 - 448c^6 + 256c^8)$
$B_1$	1
$B_2$	$-5 + c^2$
$B_3$	$-3 + 8(1 - 2c^2)(2 - 3c^2)$
$B_4$	$3 + 16(1 - 2c^2) - 12(1 - c^2)^2 - 32(1 - 2c^2)^3$
$B_5$	$5 - 16(1 - 2c^2) - 60(1 - 2c^2)^2 + 32(1 - 2c^2)^3 + 80(1 - 2c^2)^4$

Pratiquement, un chargement ponctuel n'est pas réalisable puisque la pression locale deviendrait infinie. C'est pourquoi le cas d'un chargement réparti, défini selon la **figure 77b**, a été pris en considération par HONDROS (78).

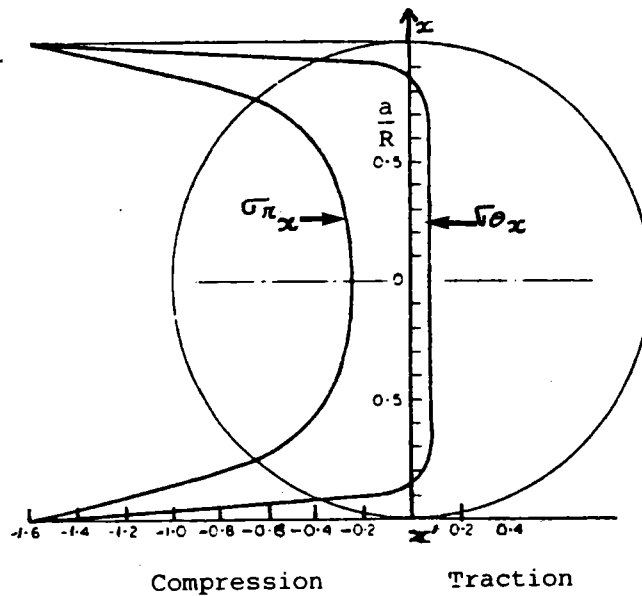
Les expressions des contraintes suivant le plan de chargement Ox sont alors données par les équations (4.3) :

$$(4.3) \quad \sigma_{r/x} = \frac{-2p}{\pi} \left\{ \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \sin 2\gamma}{1 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 \cos 2\gamma + \left(\frac{r}{R}\right)^4} + \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} \right] \operatorname{tg} \gamma \right\}$$

$$\sigma_{\theta/x} = \frac{2p}{\pi} \left\{ \frac{\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \sin 2\gamma}{1 - 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 \cos 2\gamma + \left(\frac{r}{R}\right)^4} - \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} \operatorname{tg} \gamma \right] \right\}$$

avec  $p = \frac{P}{B2H}$ , charge par unité de surface.

La variation de ces contraintes le long du diamètre de chargement est représenté par la *figure B.78*.



- Figure 78 - Distribution des contraintes  $\sigma_r$ ,  $\sigma_{\theta_y}$  suivant le plan de chargement (disque non fissuré), d'après HONDROS(78)

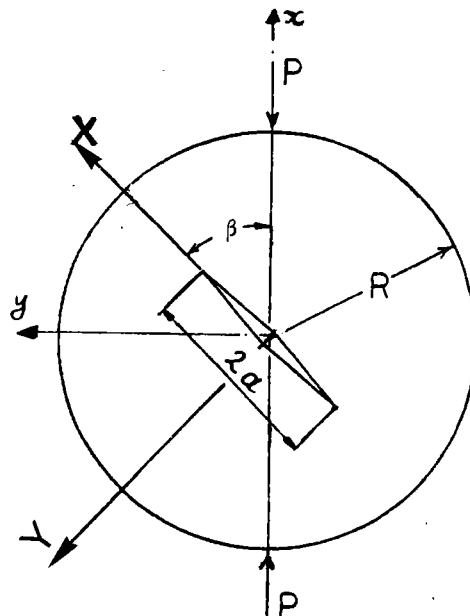
#### 4.1.3 Modèles donnant la valeur du facteur d'intensité de contrainte

Depuis l'introduction par IRWIN (79) de la notion de facteur d'intensité de contrainte à la pointe d'une fissure, le nombre des équations donnant les expressions analytiques dudit facteur pour différentes géométries et conditions de chargement, n'a cessé d'augmenter (80).

Pour le type d'éprouvette que nous avons adopté afin de réaliser nos essais de fissuration de fatigue, à savoir un disque entaillé chargé symétriquement en compression - *figure B.79* -, il n'existe pas de solution finie donnant les facteurs d'intensité de contrainte. On rencontre diverses solutions approchées sous forme d'intégrales obtenues à partir de la superposition de deux ou plusieurs états de contraintes. Certaines

de ces solutions sont énumérées et analysées ci-après (cf. : (81) – (84) – (85) – (86) – (87) – (89) – (90) – (91)).

- Figure B.79 -  
"disque brésilien"  
soumis à un chargement  
en mode I + II



#### 4.1.3.1 Chargement en mode I pur

a) Une solution analytique approchée, limitée aux termes d'ordre 4 à été obtenue par LIBATSKII et KOVCHIK (81).

La valeur de la charge critique  $P_{cr}$  en fonction de la longueur de fissure a est donnée par :

$$(4.4) \quad \frac{P_{cr}}{K_{Ic} B \sqrt{2R}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\epsilon \left( 1 + \frac{3}{2} \epsilon + \frac{3}{4} \epsilon^3 + \frac{3}{64} \epsilon^4 \right)}}$$

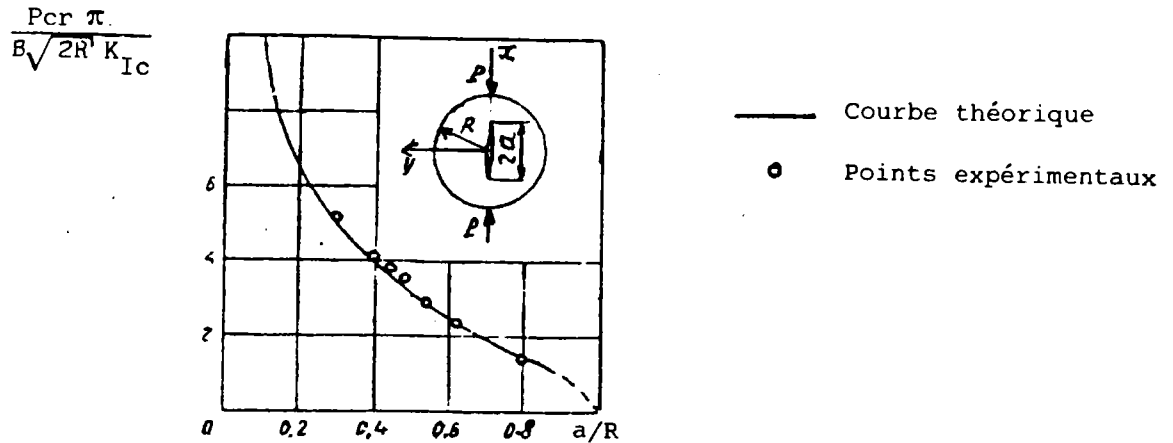
avec :  $\epsilon = (a/R)^2$

B : épaisseur du disque

$K_{Ic}$  : facteur d'intensité de contrainte critique en mode I pur ( $\beta = 0$ )

La figure B.80 donne l'allure de l'équation (4.4) lorsque a/R varie entre 0,3 et 0,8.

Signalons que YAREMA et KRESTIN (82) ont obtenu la même relation en utilisant une méthode de calcul différente.



- Figure 80 - Evolution de la charge critique en fonction de a/R, d'après (81)

b) TADA et col. (83) ont également résolu le problème, et la solution qu'ils proposent se met sous la forme :

$$(4.5) \quad \frac{P_{cr} \sqrt{a}}{K'_{Ic} B R V \sqrt{\pi}} = \frac{1}{f\left(\frac{a}{R}\right)}$$

ce qui permet à SANCHEZ (84) d'établir, à partir des résultats expérimentaux de TADA pour a/R = 0,5, la relation suivante :

$$(4.6) \quad K_{Ic} \text{ (LIBATSKII-KOVCHIK)} = \sqrt{\pi} / 2 K'_{Ic} \text{ (TADA-PARIS-IRWIN)}$$

En combinant les équations (4.4) et (4.6), il déduit :

$$(4.7) \quad \frac{P_{cr} \sqrt{a}}{K_{Ic} B R V \sqrt{\pi}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon + \frac{3}{4} \varepsilon^3 + \frac{3}{64} \varepsilon^4\right)}$$

A partir de cette égalité, le facteur d'intensité de contrainte en mode I pur peut être exprimé par un facteur  $N_I$  sans dimension, tel que :

$$(4.8) \quad N_I = \frac{K_I}{K_o}$$

avec :  $K_o = \sigma_p \sqrt{\pi a}$  et  $\sigma_p = \frac{P}{BR\pi}$ .

A partir des équations (4.7) et (4.8), le facteur d'intensité  $N_I$  est lié à la longueur de fissure par la relation :

$$(4.9) \quad N_I = \left(1 + \frac{3}{2} \varepsilon + \frac{3}{4} \varepsilon^3 + \frac{3}{64} \varepsilon^4\right)$$

c) Pour la *figure B.81a*, où la fissure est définie par les coordonnées polaires  $(r, \beta)$  telles que :

$$\beta = 0 \quad \text{et} \quad 0 < d \leq r \leq e < R,$$

les facteurs d'intensité de contrainte aux points  $d$  et  $e$  sont déterminés d'après **TWEED** et col. (85) par :

$$(4.10) \quad K_d = \sigma_p \sqrt{\frac{e-d}{2}} + \frac{\pi \sigma_p}{n} \sqrt{\frac{2}{e-d}} \sum_{j=1}^n M(d, t_j) q(t_j)$$

$$K_e = \sigma_p \sqrt{\frac{e-d}{2}} - \frac{\pi \sigma_p}{n} \sqrt{\frac{2}{e-d}} \sum_{j=1}^n M(e, t_j) q(t_j)$$

avec :

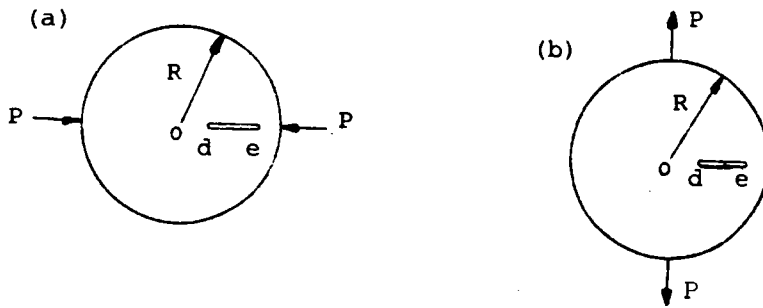
$$\sigma_p = \frac{P}{\pi RB} \quad \text{et} \quad t_j = \frac{d+e}{2} + \frac{e-d}{2} \cos \left[ \frac{(2j-1)\pi}{2n} \right] \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Les quantités  $q(t_i)$  sont solutions du système d'équations linéaires :

$$q(t_i) = \frac{d+e}{2} - t_j = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n M(t_i, t_j) q(t_j) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

où  $M(t_i, t_j)$  est une expression algébrique, fonction des seuls paramètres  $t_i, t_j, d$  et  $e$ .





- Figure B.81 - Disque avec fissure non centrale, d'après (86)  
 a. chargement en compression  
 b. chargement en traction

Le *tableau B.8a* donne pour les différentes combinaisons de *d* et *e* les valeurs du facteur d'intensité de contrainte sans dimension  $N_{Id}$ , tel que :

$$N_{Id} = \frac{K_{Id}}{\sigma_p \sqrt{\frac{e-d}{2}}}$$

Si la fissure est centrale ( $e = -d$ ), les facteurs d'intensité de contrainte sans dimension sont ceux qui correspondent au cas particulier où  $N_{Id} = N_{Ic}$ .

- Tableau B.8a -  
 Variations de  $N_{Id}$   
 en fonction de la  
 longueur et de la  
 position de la  
 fissure selon l'axe  
 de chargement ( $\beta_0 = 0$ )  
 d'après (86)

<i>d</i> \ <i>e</i>	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
-0.9									3.038
-0.8								2.238	2.388
-0.7							1.840	1.954	2.112
-0.6						1.578	1.670	1.783	1.947
-0.5					1.387	1.463	1.551	1.663	1.831
-0.4				1.243	1.304	1.375	1.460	1.571	1.740
-0.3			1.136	1.183	1.238	1.305	1.386	1.494	1.662
-0.2		1.060	1.093	1.134	1.184	1.246	1.324	1.428	1.593
-0.1	1.015	1.034	1.060	1.095	1.139	1.196	1.269	1.369	1.530
0.0	1.004	1.015	1.035	1.063	1.101	1.152	1.219	1.315	1.470
0.1		1.004	1.016	1.037	1.068	1.113	1.175	1.264	1.413
0.2			1.004	1.018	1.042	1.079	1.134	1.216	1.357
0.3				1.005	1.020	1.049	1.096	1.171	1.303
0.4					1.006	1.023	1.062	1.128	1.250
0.5						1.007	1.033	1.086	1.196
0.6							1.010	1.049	1.143
0.7								1.016	1.090
0.8									1.036

Pour un chargement en compression, avec  $\beta_o = 90^\circ$ , les valeurs des coefficients  $N_{Id}$  et  $N_{Ie}$  seront, au signe près, égales à celles données par TWEED et col. (85) dans le **tableau B.8b**, dans le cas d'un chargement en traction - **figure B.81b** -.

- Tableau B.8b -  
Variations de  $N_I$   
en fonction de la  
longueur et de la  
position de la  
fissure selon la  
direction de  
chargement ( $\beta_o = \frac{\pi}{2}$ )  
d'après (86)

d \ e	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.9										4.339
0.8									3.625	3.790
0.7								3.350	3.495	3.675
0.6							3.209	3.346	3.487	3.672
0.5						3.127	3.258	3.382	3.513	3.695
0.4					3.077	3.198	3.308	3.414	3.529	3.699
0.3				3.043	3.148	3.242	3.327	3.410	3.506	3.656
0.2			3.019	3.099	3.171	3.234	3.292	3.349	3.421	3.546
0.1		3.005	3.049	3.090	3.127	3.158	3.187	3.218	3.264	3.362
0.0	3.000	3.001	3.004	3.007	3.008	3.008	3.008	3.013	3.035	3.105
0.1		2.921	2.884	2.850	2.817	2.787	2.761	2.744	2.743	2.787
0.2			2.698	2.630	2.567	2.511	2.463	2.425	2.406	2.428
0.3				2.367	2.278	2.199	2.132	2.079	2.044	2.046
0.4					1.973	1.875	1.792	1.726	1.679	1.666
0.5						1.560	1.463	1.386	1.329	1.303
0.6							1.163	1.074	1.008	0.970
0.7								0.802	0.725	0.677
0.8									0.487	0.426
0.9										0.221

#### 4.1.3.2 Chargement en mode mixte I + II

a) Pour une fissure placée dans une plaque infinie sollicitée en traction, les facteurs d'intensité de contrainte s'écrivent d'après SIH (7) :

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{+a} \sigma_y(x, 0) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$$

(4.11)

$$K_{II} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{+a} \tau_{xy}(x, 0) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$$

où  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  sont les contraintes de traction et de cisaillement au voisinage d'une fissure hypothétique, selon la direction Ox d'une plaque non fissurée .

Dans le cas d'un disque contenant une fissure centrale soumis à un couple de chargement ponctuel P dont la droite d'action fait un angle  $\beta_o$  inférieur à 90 degrés avec la direction de fissure - **figure B.79** - ,

**KIM** et **KITAGAWA** (87) vérifient qu'une bonne approximation des valeurs des facteurs d'intensité de contrainte est obtenue en remplaçant dans les équations (4.11),  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  par les expressions de  $\sigma_\theta$  et  $\tau_{r,\theta}$  données en (4.1).

Les formules qu'ils proposent s'écrivent alors :

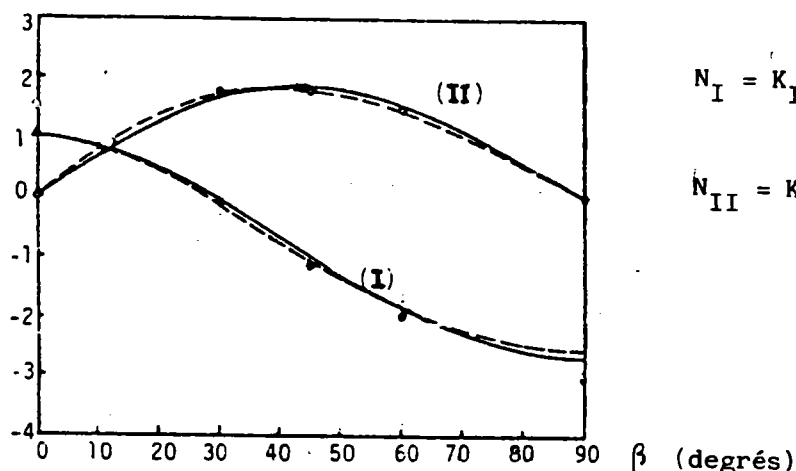
$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{+a} \sigma_\theta(r, \theta = \beta) \sqrt{\frac{a+r}{a-r}} dr \quad (4.12)$$

$$K_{II} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{+a} \tau_{r,\theta}(r, \theta = \beta) \sqrt{\frac{a+r}{a-r}} dr$$

*Remarque* : on notera que, lorsque  $\beta_0$  varie de 0 à 90 degrés, le coefficient  $N_I$  décroît continûment pour prendre des valeurs négatives.

La *figure B.82* présente l'évolution de  $N_I = K_I/K_0$  et de  $N_{II} = K_{II}/K_0$  lorsque  $a/R = 0,2$  et  $0,3$ .

$N_I, N_{II}$



$$N_I = K_I / \left( \frac{P}{RB} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \right)$$

$$N_{II} = K_{II} / \left( \frac{P}{RB} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \right)$$

- *Figure B.82* - Variations de  $N_I, N_{II}$  pour  $a/R = 0,2$  (trait continu) et  $a/R = 0,3$  (trait pointillé) - solution de **KIM** et **KITAGAWA** (87) -

b) En utilisant la méthode des potentiels complexes développée par **MUSKHELISHVILI** (88), **ISIDA** (89) exprime le facteur d'intensité de contrainte sous la forme suivante :

$$(4.13) \quad K_I = 2 \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{z-a} \Phi(z)$$

où  $\Phi(z)$  définit la fonction complexe de contrainte résultant de la superposition des trois étapes de décomposition du cas considéré.

De façon analogue, AWAJI et SATO (90) résolvent le problème en ayant recours à une méthode différente pour chacune des trois étapes en lesquelles ils décomposent le problème – figure B.83 –.

Finalement, les expressions qu'ils proposent pour  $N_I$  et  $N_{II}$  de l'état (B) s'écrivent :

$$N_I = \frac{K_I}{K_o} = \frac{\pi}{a \sigma_p} F\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

(4.14)

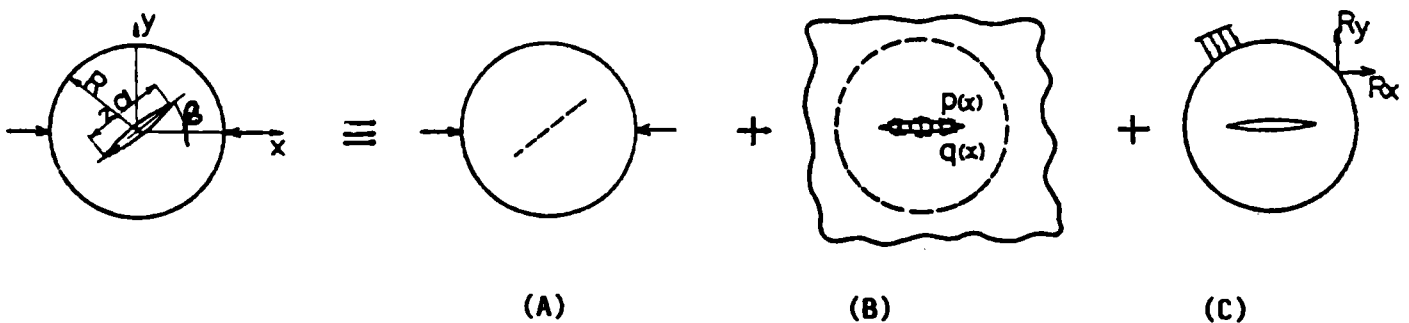
$$N_{II} = \frac{K_{II}}{K_o} = \frac{-\pi}{a \sigma_p} G\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

avec :  $K_o = \sigma_p \sqrt{\pi a}$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{F}(\Phi) \\ \bar{G}(\Phi) \end{array} \right\} = \pm \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=1}^n \int_{D_i} \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x - c \sin \phi} (\alpha_i x + \beta_i) dx$$

$\alpha_i x + \beta_i$  représentant l'équation des segments de droites approximant les fonctions de distribution des contraintes normale  $p(x)$  et tangentielle  $q(x)$  qui s'exercent sur la surface de la fissure – cas B –.

$\bar{F}(\Phi)$  et  $\bar{G}(\Phi)$  étant les fonctions de distribution de dislocations infinitésimales entre  $+a$  et  $-a$ .



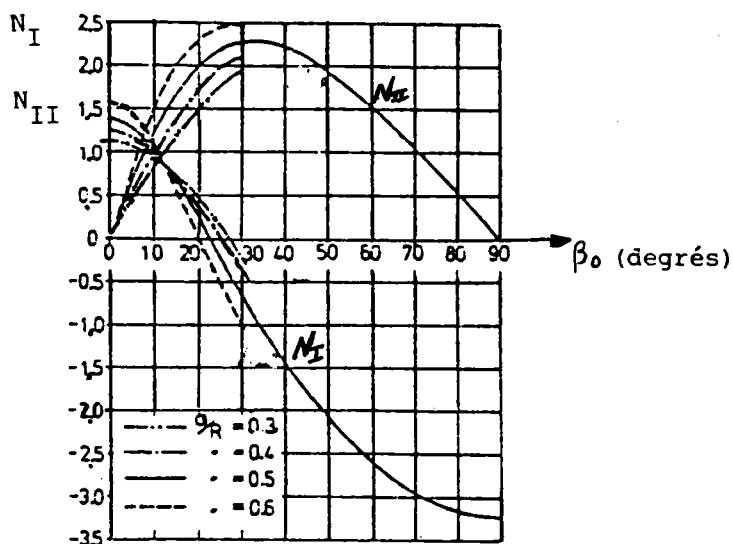
- Figure B.83 - Les trois états de contrainte utilisés par AWAJI et SATO(90) pour le calcul des facteurs d'intensité de contrainte en mode I + II

Pour l'état (C), AWAJI et SATO (90) obtiennent d'après les travaux d'ISHIDA (89) une relation entre  $N_I$  et  $N_{II}$  sous la forme suivante :

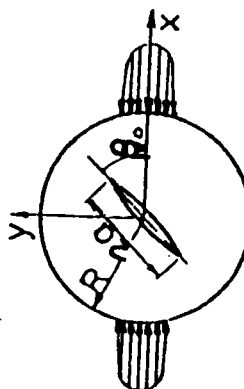
$$(4.15) \quad (N_I - iN_{II}) \pm a = \pm \frac{2}{\sigma_p} \sqrt{\frac{2}{a}} \lim_{z \rightarrow \pm a} \left[ \sqrt{\pm(z \pm a)} \Phi(z) \right]$$

avec :  $\Phi(z) = \Phi_A(z) + \Phi_B(z) + \Phi_C(z)$ .

La figure B.84 traduit les variations de  $N_I$  et  $N_{II}$  en fonction de l'inclinaison  $\beta_0$  pour différentes valeurs du rapport  $a/R$ .



- Figure B.84 -  
Variations de  $N_I$ ,  $N_{II}$   
selon le modèle d'AWAJI(90)



- Figure B.85 -  
Distribution des pressions  
de HERTZ sur les bords du disque  
chargé en compression

Remarque : AWAJI et SATO tiennent également compte d'une distribution hertzienne des contraintes de contact - figure B.85 - et corrigent les formules précédentes par des coefficients  $\gamma_I$  et  $\gamma_{II}$  tels que :

$$(4.16) \quad \begin{aligned} N_{IH} &= N_{IP} - \gamma_I \left(\frac{H}{R}\right)^2 \\ N_{IIH} &= N_{IIP} - \gamma_{II} \left(\frac{H}{R}\right)^2 \end{aligned}$$

où  $H$  est la demi-longueur de la surface de contact (figure B.77c).

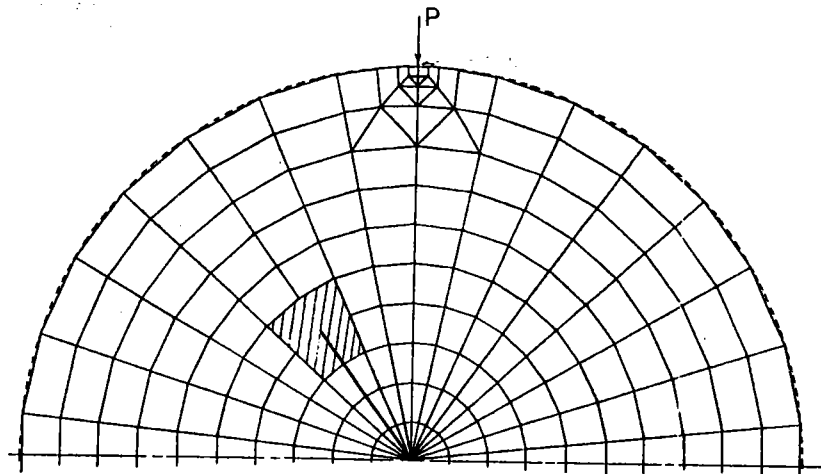
Les facteurs numériques  $\gamma_I$  et  $\gamma_{II}$ , pour  $a/R = 0,3$ , sont présentés dans le **tableau B.9**.

$\beta$	MODE	$(b/R)^2 \quad (\times 10^{-2})$			
		1	2	3	4
0	I	1.67	1.61	1.60	1.58
	II	-	-	-	-
5	I	1.60	1.54	1.53	1.52
	II	0.45	0.43	0.43	0.42
10	I	1.42	1.37	1.36	1.35
	II	0.86	0.82	0.80	0.80
15	I	1.14	1.11	1.10	1.09
	II	1.18	1.12	1.11	1.10
20	I	0.81	0.79	0.79	0.78
	II	1.41	1.34	1.32	1.31
25	I	0.46	0.46	0.46	0.46
	II	1.57	1.44	1.43	1.42
30	I	0.13	0.14	0.14	0.14
	II	1.55	1.45	1.45	1.44

- Tableau B.9 -  
Valeurs des coefficients  
 $\gamma_I$  et  $\gamma_{II}$  en fonction de  
l'angle  $\beta_0$  pour  $a/R = 0,3$   
selon (90)

c) En employant la méthode de calcul aux éléments finis, **SANCHEZ (84)** a également déduit la valeur des coefficients d'intensité de contrainte pour un disque soumis à un mode de chargement de compression en mode I + II. La **figure B.86** présente le maillage utilisé.

- Figure B.86 -  
Maillage utilisé par  
**SANCHEZ (84)** pour le  
calcul aux éléments  
finis des facteurs  
d'intensité de  
contrainte



Signalons que dans le cas d'un disque non fissuré soumis à un couple de chargement ponctuel, **SANCHEZ (84)** a constaté que l'écart est plus sensible entre les valeurs de  $\sigma_r$  et  $\sigma_\theta$  données par un calcul aux éléments finis que pour celles données par l'équation (4.1) quand le rapport  $a/R$  est supérieur à 0,6.

d) **ATKINSON (91)** propose une résolution numérique à partir d'une équation de FREDHOLM. Les formules qu'il obtient s'écrivent :

$$N_I = \frac{K_I}{K_o} = \sum_{i=1}^n T_i \left(\frac{a}{R}\right)^{2i-2} A_i(\beta)$$

(4.17)

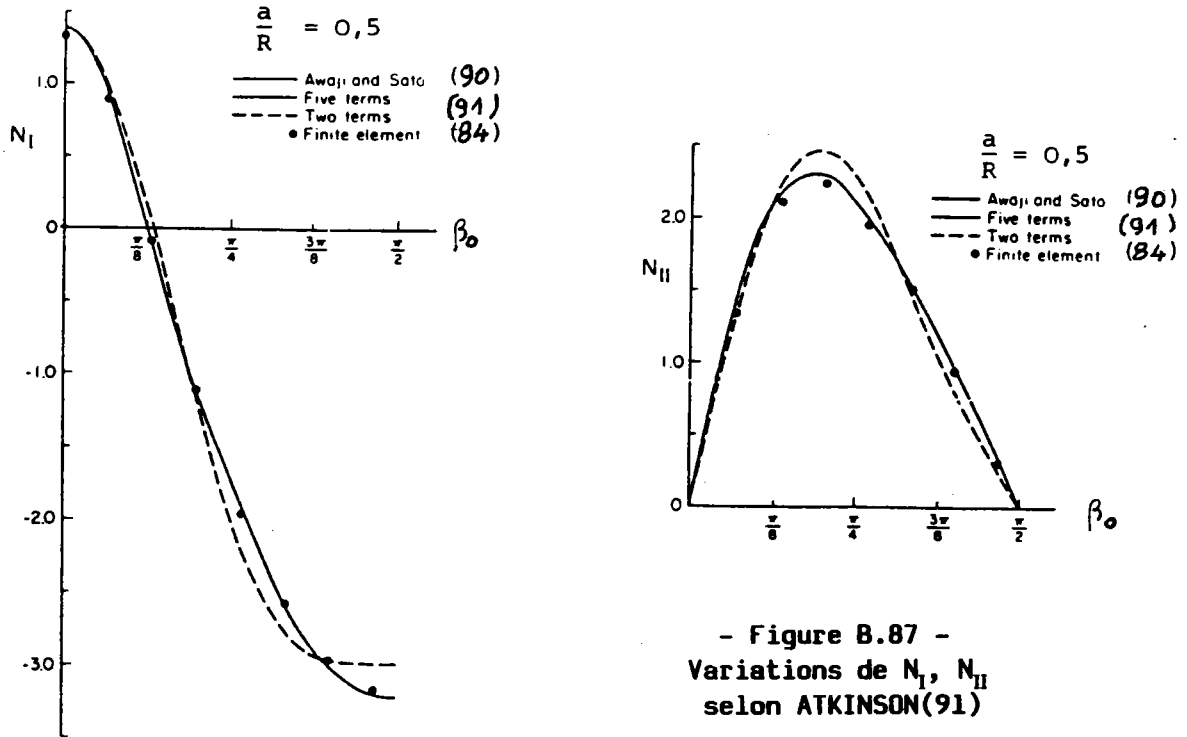
$$N_{II} = \frac{K_{II}}{K_o} = 2 \sin 2\beta \sum_{i=1}^n S_i \left(\frac{a}{R}\right)^{2i-2} B_i(\beta)$$

Le **tableau B.10** fournit les premières valeurs des facteurs  $T_i$  et  $S_i$  ; les expressions de  $A_i(\beta)$  et de  $B_i(\beta)$  sont les mêmes que celles données par le **tableau B.7**.

- Tableau B.10 -  
Coefficients d'ATKINSON  
pour différentes valeurs  
du rapport a/R

a/R	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$T_1$	1.014998	1.060049	1.135551	1.243134	1.387239	1.578258
$T_2$	0.503597	0.514907	0.533477	0.559734	0.594892	0.642124
$T_3$	0.376991	0.382430	0.391640	0.404603	0.421949	0.445387
$T_4$	0.376991	0.383392	0.393835	0.408597	0.428353	0.454861
$T_5$	0.314159	0.318086	0.325033	0.334831	0.347941	0.365559
$S_1$	1.009987	1.039864	1.089702	1.160796	1.257488	1.390654
$S_2$	0.502341	0.509959	0.522272	0.539824	0.563966	0.597985
$S_3$	0.376363	0.379956	0.386086	0.394822	0.406869	0.424037
$S_4$	0.376363	0.380584	0.387518	0.397403	0.410966	0.430072
$S_5$	0.314159	0.316245	0.320834	0.327411	0.336447	0.349219

La *figure B.87* traduit les valeurs de  $N_I$  et de  $N_{II}$  en fonction de l'angle  $\beta_0$  et pour  $a/R = 0,5$ .



- Figure B.87 -  
Variations de  $N_I$ ,  $N_{II}$   
selon ATKINSON(91)

Dans le cas de fissures de faible longueur, soit  $a/R < 0,3$ , ATKINSON (91) propose des formules de  $N_I$  et de  $N_{II}$  simplifiées :

$$N_I = A_I + \frac{A_2}{2} \left(\frac{a}{R}\right)^2$$

(4.18)

$$N_{II} = \left[ B_I + \frac{B_2}{2} \left(\frac{a}{R}\right)^2 \right] 2 \sin 2\beta$$

#### 4.1.3.3 Chargement en mode II 'impur' ( $K_I < 0$ )

Auparavant il a été signalé sur les *figures B.82*, *B.84* et *B.87* qu'il existe un angle  $\beta$  pour lequel  $N_I = 0$  et au-dessus duquel le coefficient  $N_I$  définissant la composante de tension prend des valeurs négatives. Nous définissons le domaine où  $K$  est associé à une tension de compression ( $K_I < 0$ ) comme celui du mode II 'impur'.

En mode II pur et en mode II impur, les surfaces d'une fissure à l'intérieur du disque doivent venir en contact, ce qui implique la fermeture de la fissure.



Si la longueur  $a^*$  sert à définir la position à partir de laquelle se réalise le contact entre les lèvres de la fissure, une contrainte  $\sigma_{xy}^*$  due au frottement prend naissance au cours du chargement, soit :

$$(4.19) \quad \sigma_{xy}^* = - f \sigma_{yy}$$

avec :  $f$  : coefficient de frottement du matériau

$\sigma_{yy}$  : contrainte normale au plan de la fissure

ATKINSON (91) propose, dans le cas de fissures de faible longueur ( $a/R < 0,3$ ), une reformulation de l'équation (4.18) qui tient compte du frottement pour une fissure chargée en mode II, soit pur ( $N_I = 0$ ), soit impur ( $N_I < 0$ ).

Une valeur efficace,  $N_{IIeff}$ , du facteur d'intensité de contrainte sans dimension est donnée par :

$$(4.20) \quad N_{IIeff} = N_{II} + N_{II}^*$$

$$\text{avec : } N_{II} = B_I + \frac{B_2}{2} \left(\frac{a}{R}\right)^2 \cdot 2\sin(2\beta)$$

$$(4.21) \quad N_{II}^* = - f \frac{A_2}{2} (a^2 - a^{*2})$$

( $a - a^*$ ) désignant la longueur de la zone où les surfaces de la fissure sont en contact.

## 4.2 ANALYSE DES RESULTATS NUMERIQUES

### 4.2.1 Cas d'un chargement ponctuel

Pour bien détecter l'écart qui peut exister entre les différentes approches du calcul des facteurs d'intensité de contrainte en mode I + II pour le disque sollicité en compression (cf. : (81) – (84) – (85)

- (86) - (89) - (91)), nous avons comparé dans le *tableau B.11*, les valeurs du coefficient  $N_I$  entre elles en fonction de  $a/R$ , et cela pour les deux valeurs extrêmes de l'angle  $\beta_0$  qui sont 0 et 90 degrés.

$\beta_0$	0°				REFERENCES
	0,3	0,4	0,5	0,6	
$N_I$	1,135 *	1,243 *	1,387 *	1,575 *	LIBATSKII (81)
	1,135 *		1,387 *	1,578 *	ISIDA (89)
	1,136 -3,043	1,243 -3,077	1,387 -3,127	1,578 -3,209	TWEED ROOKE (85-86)
	1,140 -3,005	1,121 -2,697	1,108 -2,389	1,099 -2,091	KIM (87)
	1,10 ⊕	1,195 ⊕	1,322 ⊕	1,488 ⊕	SANCHEZ (84)
	1,135 -3,042	1,195 -3,114	1,387 -3,208	1,578 -3,361	ATKINSON (91)

- Tableau B.11 - Comparaison des solutions donnant la valeur de  $N_I$  en fonction de  $a/R$  pour  $\beta_0 = 0$  et 90 degrés.

\* : modèles valables pour un chargement en mode I seulement  
 ⊕ :  $N_I$  non calculé pour  $\beta_0 = 90$  degrés

Pour ces deux positions du disque, les valeurs de  $N_I$  sont très voisines quelle que soit la méthode de calcul, sauf pour celles qui sont données par KIM et KITAGAWA (87). Dans ce cas, la différence entre les valeurs de  $N_I$ , calculées à partir de la méthode de KIM et les autres méthodes est de plus en plus accentuée pour les valeurs du rapport  $a/R$  supérieures à 0,3.

Dans le *tableau B.12*, on compare les valeurs de  $N_I$  calculées par AWAJI et SATO (90) et SANCHEZ

(84) pour l'angle  $\beta_0$  qui annule  $N_I$ . Là encore, la différence est négligeable. On remarque que pour cette géométrie l'angle de rotation qui favorise le mode II pur diminue avec l'accroissement du rapport  $a/R$ .

a/R	AWAJI (90)		SANCHEZ (84)	
	$\beta_0$	$N_{IIC}$	$N_{IIC}$	$\beta_0$
0,3	27°,2	1,866	1,85	27°,7
0,4	25°,2	1,977	1,92	25°,2
0,5	22°,9	2,133	2,06	23°,2
0,6	20°,1	2,352	2,25	20°,0

- Tableau B.12 - Comparaison entre les valeurs de  $N_{II}$  et de  $\beta_0$  données par AWAJI(90) et SANCHEZ(84) quand  $N_I = 0$ .

#### 4.2.2 Cas d'un chargement réparti

Rappelons que AWAJI et SATO ont introduit, dans leur deuxième approche du calcul des facteurs d'intensité de contrainte en mode I + II les effets de la pression de HERTZ, d'où la définition des coefficients  $N_{IH}$  et  $N_{IIH}$  par l'équation (4.16).

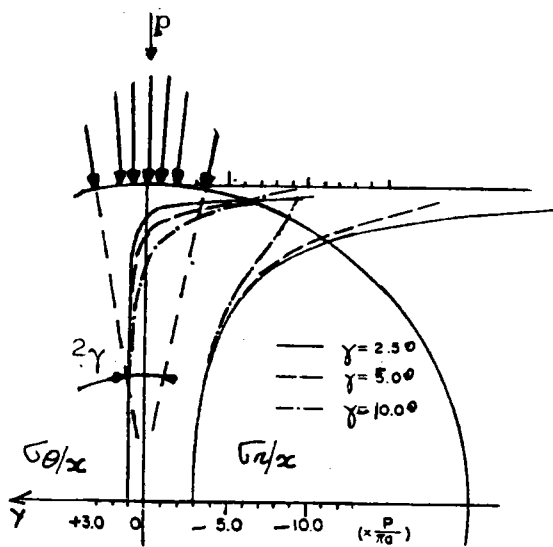
Dans le cas d'un chargement en mode I pur, la *figure B.89* donne pour les différents rapports  $a/R$ , l'évolution du coefficient  $N_I$  en fonction du paramètre  $(H/R)^2$ .

Le fait de tenir compte des pressions de HERTZ se traduit, apparemment, par une baisse du facteur d'intensité de contrainte d'autant plus sensible que la valeur des rapports  $(H/R)^2$  et  $a/R$  augmente. Pour  $(H/R)^2 = 4.10^{-2}$  et  $a/R = 0,5$ , le coefficient  $N_{IH}$  diminue de 8% environ par rapport à la valeur de  $N_I$ . (*figure B.89*).

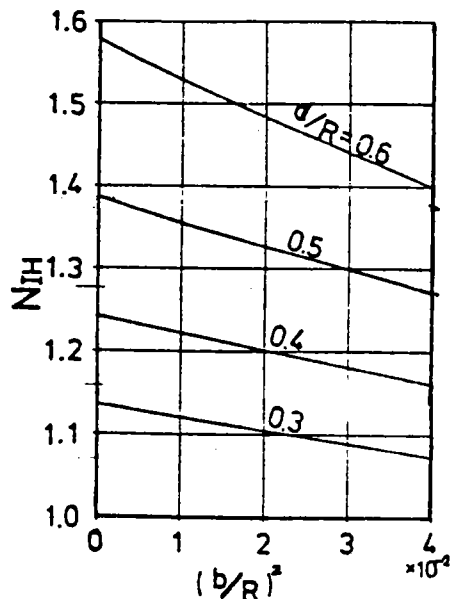
En première approximation, nous considérerons que nous avons affaire à un cas de chargement ponctuel pour les faibles valeurs du rapport  $(H/R)^2$ .

NIWA et col. (93) montrent l'influence de la longueur de la surface de contact  $2H$  sur la distribution des contraintes élastiques radiale  $\sigma_r$  et tangentielle  $\sigma_\theta$  le long du plan de chargement pour un disque non

fissuré (figure B.88). Là aussi, pour un angle  $\gamma$  défavorable ( $\gamma = 10^\circ$ ) tel que  $\gamma = H/R$ , l'effet des pressions de HERTZ ne devient sensible qu'à partir de la valeur  $a/R = 0,7$ .



- Figure B.88 -  
Effet de la largeur de la zone de chargement sur les contraintes radiale et tangentielle dans la direction du chargement (93)



- Figure B.89 -  
Variations de  $N_H$  compte tenu des pressions de HERTZ d'après (90)

### 4.3 VALIDATION DES CALCULS DE $K_I$ et de $K_{II}$ A L'AIDE DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

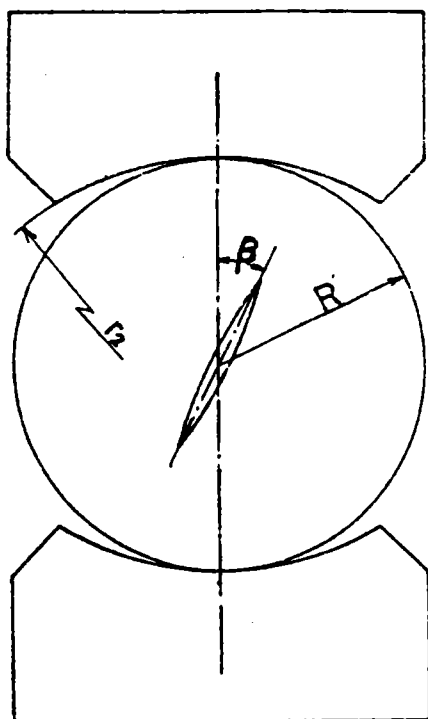
#### 4.3.1 Matériaux

Il apparaît que l'essai sur le disque brésilien a surtout été utilisé pour évaluer la tenacité de matériaux fragiles (marbre, céramique, graphite, etc...).

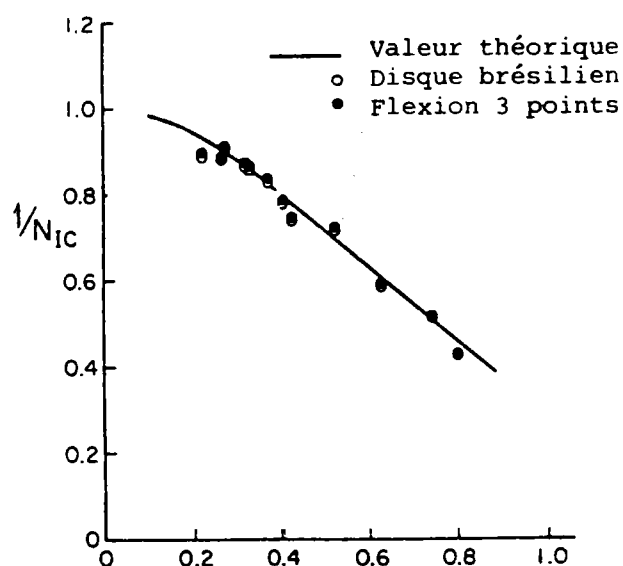
Dans le tableau B.13 sont portés les paramètres géométriques du disque ainsi que le type de matériaux utilisés par KIM et KITAGAWA (87), AWAJI et SATO (90) et SANCHEZ (84) pour déterminer les coefficients  $K_I$  et  $K_{II}$  en fonction de l'angle  $\beta_0$ .

### 4.3.2 Validité de l'essai sur disque

En utilisant le type de chargement donné par la *figure B.90* et en tenant compte des pressions de HERTZ, AWAJI et SATO (90) ont vérifié pour le *graphite SA* que la valeur de  $K_{Ic}$  pour un chargement en mode I pur est indépendante de l'épaisseur du disque lorsque celle-ci varie de 3 à 8 mm. Ils ont constaté de même que cette valeur est comparable à la valeur de  $K_{Ic}$  obtenue l'aide d'une éprouvette de type C.T.



- Figure B.90 -  
Montage expérimental  
utilisé par  
AWAJI et SATO (90)



- Figure B.91 -  
Comparaison des valeurs de  
 $N_{Ic}$  obtenues par disque  
brésilien et par essai de  
flexion 3 points (91)

DIMENSIONS MATERIAUX	2 R (mm)	B (mm)	(a/R) (mm)	$\beta_0$ degré	AUTEURS	REFERENCES
Acrylique	70	10	0,2	15°	S.C. KIM et H. KITAGAWA	(87)
Acier à roulement	100	14		30°		
Marbre	100	20		45°		
Mortier	100 150	34 50		60°		
Béton	100 150	34 50				
Graphite (SA; SM1.24; 7 477)	26	4	0,5	0°	H. AWAJI et S. SATO	(90)
Plâtre	26	4		5°		
Marbre	26	4		10°		
				15°		
Plexiglas PM MA	38,1	3,17	0,2	0°	J. SANCHEZ	(84)
			0,3	23°		
			0,4			
			0,5			
			0,6			

- Tableau B.13 - Matériaux et caractéristiques géométriques utilisés pour des essais de rupture sur disque brésilien

SANCHEZ (84) également, nous montre à l'aide de la *figure B.91* que pour le *plexiglas (PMMA)*, le coefficient  $N_{Ic}$  obtenu par essai sur une éprouvette de flexion trois points est très voisin, pour un défaut équivalent  $1/w = a/R$  - où  $w$  désigne la largeur de l'éprouvette de flexion 3 points - à celui que l'on obtient par un essai sur disque. Il est bien mis en évidence ainsi que les valeurs du coefficient  $N_{Ic}$  pour les deux géométries sont comparables à celles calculées à partir de l'équation (4.1).

#### 4.3.3 Rupture en mode II pur ( $K_I = 0$ )

D'après les essais de KIM et KITAGAWA (87), AWAJI et SATO (90) et SANCHEZ (84), produire la rupture du disque fissuré sous une charge en mode II pur de compression est possible.

Pour AWAJI et SATO d'après le *tableau B.14*, la valeur du rapport  $K_{IIc}/K_{Ic}$  est comprise entre 1,1 et 1,2. Par contre, pour les matériaux testés par KIM et KITAGAWA tels que le *ciment* et l'*acier* de

roulement, la valeur de  $K_{IIc}/K_{Ic}$  peut atteindre 1,6. Dans le cas du PMMA, SANCHEZ (84) trouve un rapport de 1,52.

Matériaux	SA ( $\pm$ )	SA(II)	7477	SM 1.24	Plâtre	Marbre
$\frac{K_{IIc}}{K_{Ic}}$	1,11	1,15	1,16	1,09	1,14	1,13

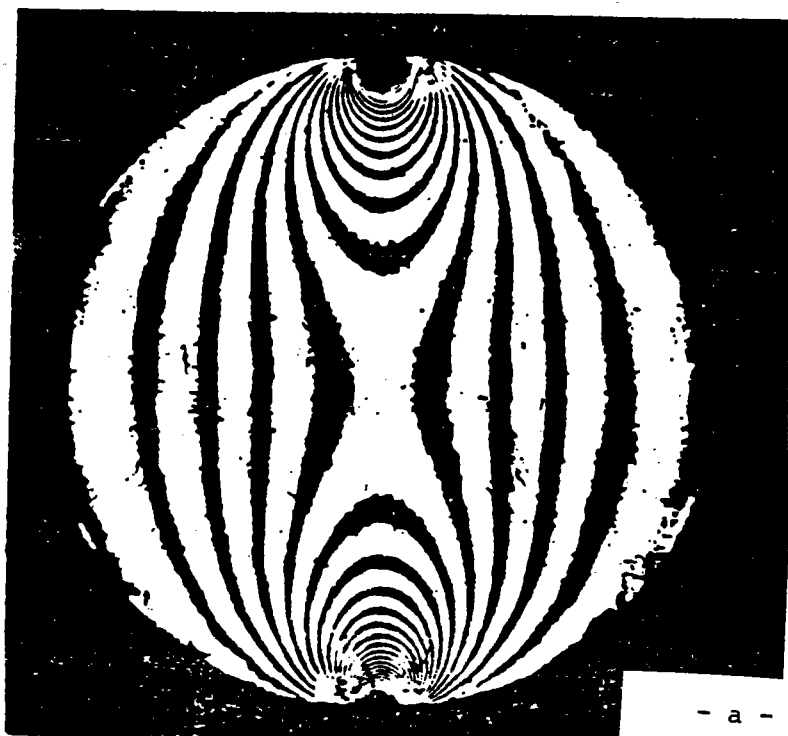
- Tableau B.14 - Valeurs de  $K_{IIc}/K_{Ic}$  pour différents matériaux, d'après (90)

Tous ces essais montrent que le disque brésilien se prête bien à la rupture sous un chargement en mode II pur et que la valeur de  $K_{IIc}/K_{Ic}$  va dans le même sens que celles obtenues pour d'autres matériaux avec des géométries différentes. Par exemple, LIU (67) a montré que  $K_{IIc}/K_{Ic} = 1,18$  pour Al 7075 - T 7651 et 1,01 pour Al 2024 - T 32.

Pour l'acier 4320, SHAH (94) donne  $K_{IIc}/K_{Ic} = 1,09$ .

Comme seconde approche, pour déterminer la charge de rupture en mode I pur et mode II pur, SANCHEZ (84) a utilisé la technique de la photoélasticimétrie.

La figure B.92 met en évidence les lignes isochromatiques aux pointes de la fissure et aux points singuliers du chargement ponctuel P.



- a -



- b -



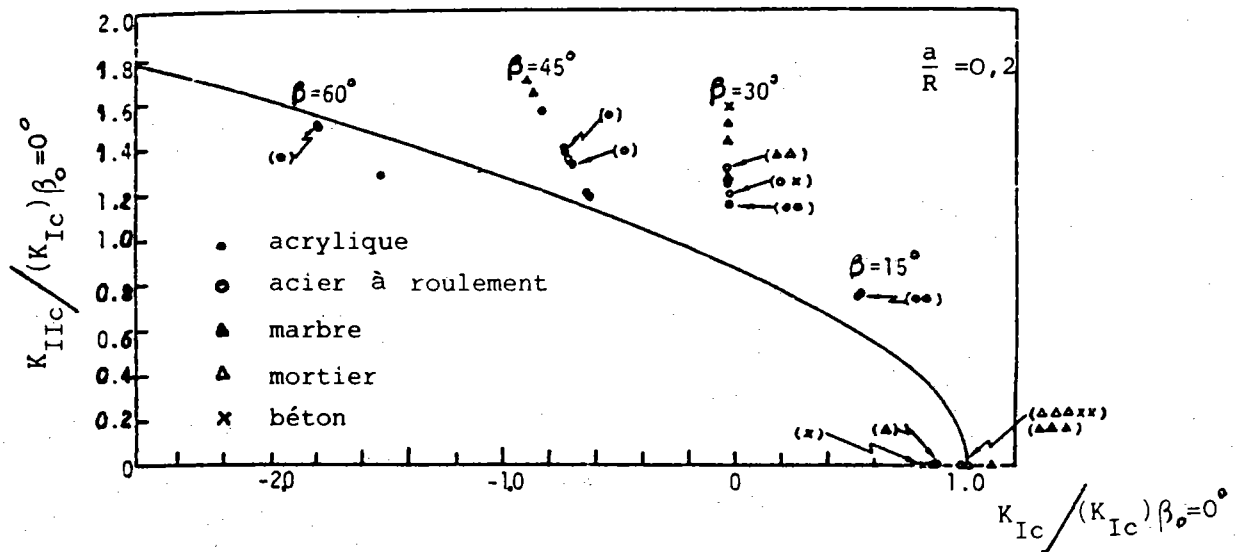
- c -

- Figure B.92 - Evolution des franges isochromatiques (photoélasticimétrie)  
a. disque non fissuré en mode I pur  
b. disque fissuré en mode I pur  
c. disque fissuré en mode I + II



#### 4.3.4 Rupture en mode II 'impur' ( $K_I < 0$ )

Pour les essais effectués par KIM et KITAGAWA (87) dans ce domaine où  $\beta_0 = 45$  et  $60$  degrés, la figure B.93 montre que la rupture a été atteinte.



- Figure B.93 - Variations de  $K_{IIc}$  en fonction de  $K_{Ic}$  pour différents matériaux, d'après (87)

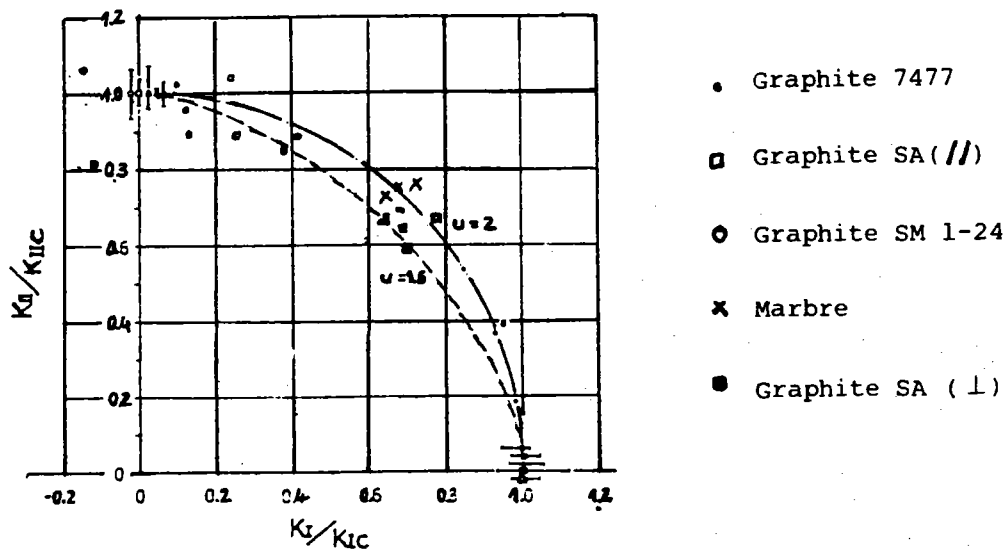
AWAJI et SATO (90), eux aussi, d'après la figure B.94, ont pu réaliser un essai de rupture sur le graphite 7747 avec un rapport de  $K_I/K_{Ic}$  compris entre -0,1 et -0,2. Toujours d'après la figure B.94, AWAJI et SATO (90) proposent dans le cas du disque brésilien un critère de rupture en mode I + II sous la forme :

$$(4.22) \quad \left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^u + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right)^u = 1$$

Les valeurs de  $u$  obtenues sont de 2 pour le cas du *marbre* et 1,6 pour les autres matériaux considérés.

Concernant la direction de bifurcation  $\theta_0$ , KIM et KITAGAWA (87) indiquent que le critère de

bifurcation  $\sigma_{\theta_{\max}}$  (9) est en accord parfait avec les valeurs expérimentales même lorsque le rapport  $K_I/K_{II}$  est négatif.



- Figure B.94 - Critère de rupture en mode mixte pour différents matériaux, selon (90)

#### 4.4 CONCLUSIONS A PROPOS DU DISQUE BRESILIEN

De cette étude bibliographique, il ressort que :

1. quelle que soit la démarche de calcul utilisée, tous les modèles donnent des valeurs de  $N_I$  et de  $N_{II}$  très voisines.
2. pour le chargement en mode I + II, c'est le modèle de KIM et KITAGAWA (87) qui apparaît comme le plus maniable du point de vue mathématique (calculs) ; toutefois, cette approche fournit des valeurs de  $N_I$  et de  $N_{II}$  inférieures à celles que donnent les autres modèles (de l'ordre de quelques dixièmes pour les valeurs de  $a/R$  supérieures à 0,3). C'est pourquoi nous lui préférons le modèle d'ATKINSON (91), en procédant à une interpolation par arcs de cubiques à partir des valeurs fournies.
3. la symétrie parfaite du disque, sa facilité d'usinage et de mise en place au point de vue du chargement, ont permis à l'essai sur disque brésilien de se développer d'une façon constante et plus particulièrement dans le domaine des essais sur matériaux très fragiles.
4. pour calculer les valeurs de  $K_{Ic}$  et de  $K_{IIc}$ , ce type de géométrie est bien adapté quelle que soit la nature du matériau.
5. la rupture peut être obtenue, même avec un faible ligament ( $a/R = 0,2$ ).
6. pour des essais de rupture en mode I + II c'est, a priori, le disque brésilien qui permet d'obtenir une large gamme de rapport  $K_I/K_{II}$  à l'aide d'une simple inclinaison de l'entaille par rapport à la direction de chargement.
7. quand la contrainte de tension indirecte est de compression ( $K_I < 0$ ), on est en présence d'un mode de chargement théorique différent du mode II pur ( $K_{II} = 0$ ) ; c'est ce que nous avons appelé *chargement de mode II impur*.
8. grâce à la géométrie du disque brésilien, on passe d'un chargement en traction ( $K_I > 0$ ) à un chargement de compression ( $K_I < 0$ ) sans modification du chargement extérieur.
9. parmi tous les modèles proposés, seul celui d'ATKINSON (91) tient compte du frottement dans l'expression de  $K_{II}$  quand le chargement est de mode II impur.

## Chapitre Cinq

### METHODES EXPERIMENTALES

#### 5.1 Matériaux

##### 5.1.1 Type de matériaux utilisés

Les essais expérimentaux ont été conduits sur deux types d'acier :

- un acier à engrenage de type **35NCD16**, étudié d'une part à l'état de réception, et d'autre part après traitement thermique ;
- un acier inoxydable.

Ces deux nuances nous ont été livrées sous forme de barres de profilé rond de diamètre  $\Phi = 90$  mm.

Pour l'acier **35NCD16**, nous étions en possession de deux ronds de sources d'approvisionnement différentes :

- celui qui porte le repère  $A_T$  a été utilisé principalement pour mettre au point les diverses techniques d'essai et pour connaître l'influence de différents niveaux de chargement de mode I + II sur la propagation des fissures de fatigue ;
- celui qui porte le repère **B** nous a permis d'étudier certains mécanismes de propagation de fatigue en mode mixte.

L'indice T de l'acier **35NCD16**  $A_T$  signifie que ce dernier a subi le traitement suivant : chauffage à 875°C pendant 30 minutes, refroidissement à l'air calme, puis revenu à 200°C pendant 60 minutes, suivi d'un refroidissement à l'air.

L'acier inoxydable, du type **316**, était à l'état hypertrempé (1050°C, trempé à l'eau).

Le **tableau E.1** présente la composition chimique des nuances d'acier étudiées et le **tableau E.2** certaines de leurs caractéristiques mécaniques, où il apparaît ainsi que ces nuances couvrent une large gamme de résistance mécanique.

##### 5.1.2 Etude métallurgique

\* acier 35NCD16<sub>B</sub> :

une attaque au nital révèle qu'il s'agit d'un acier allié dont la taille de grain  $\gamma$  est de l'ordre de 100  $\mu\text{m}$ . Sa structure est constituée de ségrégations dendritiques, en gris plus ou moins flou sur la figure E.1a. La figure E.1b dont le grossissement est 10 fois celui de la figure précédente indique la présence de gros carbures sur fond de ferrite (bainite aiguillée revenue).

\* acier inoxydable :

une attaque au réactif chloro-nitrique avec inhibiteur de cet acier révèle (figure E.2 a) la présence de ferrite en vermicules blancs et d'inclusions angulaires de nitrure de titane (en sombre) sur fond austénitique maclé avec quelques points de carbure intergranulaire. La taille générale du grain est de 50  $\mu\text{m}$  avec quelques grains à 75  $\mu\text{m}$  (figure E.2b).

## 5.2 TECHNIQUE DE FISSURATION

### 5.2.1 Préparation de l'éprouvette

Nos essais de fissuration en mode mixte sont réalisés sur des disques de 86 mm de diamètre et de 10 mm d'épaisseur (figure E.3). L'entaille centrale, d'une longueur de 26 mm, présente en chacune de ses extrémités un chevron. Tous les disques ont été prélevés de telle sorte que l'axe de chargement soit perpendiculaire à celui de la barre dans laquelle ils ont été prélevés. La direction de l'entaille fait un angle  $\beta_0$  fixé par rapport à la direction du chargement P, à l'aide d'un méplat de positionnement de largeur H. La cote H, qui est de 6 mm environ, est choisie de telle sorte que la condition d'un chargement ponctuel soit respectée au mieux (cf. : chapitre 4).

### 5.2.2 Conditions d'essai

L'évolution de la vitesse de fissuration en mode I et en mode mixte au cours du cyclage mécanique est examinée dans les conditions expérimentales indiquées par les tableaux E.3 et E.4. Il faut retenir de ces tableaux que les disques entaillés ont été amorcés sous un chargement de compression maximale de 7 tonnes, ce qui correspond à un facteur d'intensité de contrainte  $K_{I_{\max}}$  de 12  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ . La charge est maintenue constante au cours de chaque essai. La fréquence du signal sinusoïdal est de 40 Hz et le rapport de charge est fixé à 0,1. Les faces des disques sont polies mécaniquement avec une pâte diamantée de 3  $\mu\text{m}$  (poli miroir).

– Préfissuration en mode I

Préalablement à chaque essai de fatigue, les éprouvettes sont sollicitées en mode I, dans les conditions précédemment décrites, pour réaliser l'amorçage de la fissure et la préfissuration du disque. La longueur de

pré-fissuration est prise égale à 4 mm environ, ce qui correspond à un rapport  $a/R$  de 0,4, de manière à s'affranchir de l'influence de l'extrémité de l'entaille sur la vitesse de fissuration et afin d'obtenir une longueur de pré-fissuration suffisante pour étudier son interaction avec la partie branchée de la fissure, résultant du chargement en mode mixte.

#### – Fissuration en mode I + II

Le disque une fois pré-fissuré est incliné d'un angle  $\beta_0$  déterminé, par rapport à l'axe de sollicitation. La superposition du mode II au mode I est ainsi introduite et la condition de chargement en mode mixte est réalisée.

L'avancée de la fissure est suivie sur les deux faces du disque à l'aide d'un système de visée optique bi-dimensionnel (lunettes) de grossissement égal à 50, monté sur table à déplacements micrométriques. Pour un nombre de cycles donné, on mesure le déplacement de la pointe de la fissure suivant l'horizontale et la verticale. La figure E.4 montre le schéma du montage expérimental. En fin d'essai, le trajet de la fissure est relevé par rétrographie, puis agrandi (9 fois).

### 5.2.3 Détermination des diagrammes charge–ouverture

Afin de mieux comprendre certains mécanismes de propagation des fissures de fatigue en mode mixte, notamment les déplacements relatifs des lèvres de la partie pré-fissurée par rapport aux déplacements des lèvres de la partie fissurée, nous avons instrumenté certains disques en acier 35NCD16<sub>B</sub> et en acier 316.

La figure E.5 montre l'emplacement relatif des deux capteurs à lame utilisée. Ces derniers, appelés A et B, sont fixés chacun à la surface de l'éprouvette à l'aide de deux piges de 1,5 mm de diamètre encastrées dans des trous percés au préalable dans le disque. Les deux capteurs qui sont placés perpendiculairement l'un par rapport à l'autre sont plaqués à la surface de l'éprouvette. Ainsi, chacun d'eux ne mesure que le déplacement selon la perpendiculaire à la direction de ses lames.

En fonction de la charge appliquée, le capteur A permet de mesurer, au centre du disque, le déplacement relatif des deux lèvres de l'entaille mécanique, défini par la quantité  $V_A$ . Le capteur B mesure, lui, le déplacement relatif des deux lèvres de la partie incurvée de la fissure au niveau de son point de bifurcation – représenté par la quantité  $V_B$ .

Lors des enregistrements, les montées et descentes en charge sont réalisées linéairement, à une fréquence de  $5 \cdot 10^{-2}$  Hz, une fois fixées les valeurs minimale et maximale de la charge appliquée.

#### 5.2.4 Détermination de la taille de la zone plastique

L'examen de la zone plastique en fond de fissure, en mode I et en mode mixte a été fait soit au microscope optique, soit par une mesure de rugosité (31), afin de quantifier l'influence de la composante de mode II sur l'évolution de la taille de la zone plastique à la pointe de la fissure.

Pour mesurer la contraction latérale de la pointe de la fissure, on a utilisé un palpeur dont l'aiguille exploratrice est terminée par un arrondi très faible (2 à 15  $\mu\text{m}$ ) qui parcourt le profil à étudier. Les déplacements du stylet sont traduits en une variation de tension, après amplification de 5000 ( $1\text{cm} = 5 \mu\text{m}$ ).

A partir d'un repère tracé préalablement, on déplace le palpeur dans une direction perpendiculaire à la fissure jusqu'au moment où la variation de la profondeur enregistrée devient négligeable. Un balayage permet de tracer le contour de la zone plastique monotone, dont la limite est définie par cette variation. La profondeur maximale de contraction est déterminée à chaque déplacement.

## Chapitre Six

### RESULTATS EXPERIMENTAUX

#### 6.1 Essai de fissuration en mode I

##### 6.1.1 But

Avant d'aborder notre étude de la fissuration de fatigue en mode mixte, il convient tout d'abord de caractériser à la propagation en mode I des aciers que nous avons choisis. Le but visé par cette caractérisation est double :

1. faire le choix d'un modèle de dépouillement, d'application simple, parmi eux qui sont cités dans le chapitre 4 pour calculer les facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  à la pointe d'une fissure linéaire inclinée dans un disque chargé en compression.
2. vérifier que la courbe de vitesse  $da/dN - \Delta K_I$  expérimentale n'est pas influencée par la géométrie du disque.

Pour ce second point, un essai de fissuration a été effectué sur une éprouvette ASTM C.T. d'épaisseur réduite. Cette éprouvette, en acier 35NCD16<sub>B</sub>, non traité, est usinée à partir d'un disque de diamètre  $\Phi = 86$  mm. Les autres dimensions sont définies à la figure E.6. Signalons que le domaine des vitesses de fissuration exploré au cours de cette étude, tant en mode I qu'en mode I + II est, en grande partie, celui des moyennes vitesses de propagation, c'est-à-dire le domaine B, encore appelé stade II (figure B.24), où la propagation des fissures de fatigue peut être essentiellement analysée en termes de mécanique. Les propriétés métallurgiques du matériau et, en particulier, ses propriétés cristallographiques y jouent un rôle moins important.

##### 6.1.2 Modèle de dépouillement

Parmi les trois modèles présentés (87), (90), (91) au chapitre 4, pour calculer les facteurs  $K_I$  et  $K_{II}$  dans un disque entaillé chargé en compression, nous avons étudié ceux de KIM (87) et d'ATKINSON (91). La figure E.7 montre l'allure des deux courbes de vitesse obtenues pour  $\beta_0 = 0^\circ$  à partir de ces deux modèles. Rappelons que KIM et ATKINSON ont proposé respectivement les expressions suivantes des facteurs d'intensité de contrainte :

Les formules qu'ils proposent s'écrivent alors :



$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{+a} \sigma \theta(r, \theta = \beta) \sqrt{\frac{a+r}{a-r}} dr$$

(6.1)

$$K_{II} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^{+a} \tau_r \theta(r, \theta = \beta) \sqrt{\frac{a+r}{a-r}} dr$$

$$N_I = \frac{K_I}{K_o} = \sum_{i=1}^n T_i \left(\frac{a}{R}\right)^{2i-2} A_i(\beta)$$

(6.2)

$$N_{II} = \frac{K_{II}}{K_o} = 2 \sin 2\beta \sum_{i=1}^n S_i \left(\frac{a}{R}\right)^{2i-2} B_i(\beta)$$

Une interpolation par arcs de cubiques permet de calculer ces coefficients pour des valeurs du rapport  $a/R$  comprises entre 0,1 et 0,7.

Revenons à la **figure E.7** ; le calcul du coefficient  $m$ , pente de la loi de PARIS, indique qu'il prend la valeur 7,5 si l'on utilise le modèle de KIM (87) et 3,08 si l'on considère le modèle d'ATKINSON (91).

Apparemment, les expressions de  $K_I$  et  $K_{II}$  formulées par ATKINSON sont plus exactes que celles proposées par KIM. En effet, la plupart des essais de caractérisation en fatigue d'un acier de type 35NCD16 (110) indiquent tous que la valeur de  $m$  est comprise entre 2,5 et 3,1. Ainsi, pour la suite de nos essais, nous avons opté pour le modèle d'ATKINSON. La **figure E.8** qui représente l'évolution de  $K_I$  en fonction de la longueur de fissure  $a$ , révèle effectivement que la valeur de  $K_I$  obtenue selon KIM, dépend du choix de la distance  $r$ . En outre, cette même figure montre que c'est uniquement pour  $a/R < 0,4$  que les formules proposées par KIM donnent des valeurs de  $K_I$  et de  $K_{II}$  voisines de celles calculées à partir des formules d'ATKINSON, et parfaitement égales pour  $a/R = 0,3$  seulement.

Rappelons que KIM a mené tous ses essais de rupture en mode mixte sur des disques brésiliens dont la longueur de fissure est équivalente à  $a/R = 0,3$ . Puisque nous avons opté pour le modèle d'ATKINSON, nous avons tracé l'évolution de  $N_I$  et de  $N_{II}$  en fonction de l'angle d'inclinaison  $\beta_o$  pour quatre valeurs du rapport  $a/R$  : 0,3 ; 0,4 ; 0,5 ; 0,6 – **figure E.9** –. Ces tracés permettent de déterminer la valeur du rapport  $K_{II}/K_I$  pour une valeur de  $a/R$  donnée et une valeur particulière de l'angle  $\beta_o$  donné.

Nous remarquons que l'angle  $\beta_o$  correspondant à un chargement de mode II pur diminue légèrement avec l'augmentation du rapport  $a/R$ .

### 6.1.3 Influence de la géométrie du disque sur la loi de PARIS

Pour aborder ce point, nous avons comparé la courbe des vitesses  $da/dN - \Delta K_I$  obtenue à partir d'un essai de fissuration sur une éprouvette C.T. en acier 35NCD16<sub>B</sub> à celle obtenue pour un disque brésilien en acier de même nuance.

A partir de la figure E.10 qui présente cette comparaison, nous pouvons dire que, pour un même matériau et pour le même domaine de  $\Delta K_I$ , les deux courbes de vitesse de fissuration ont des pentes voisines ( $m = 2,74$  pour le disque et  $m = 3,44$  pour l'éprouvette C.T. , soit une différence de 20 %).

A priori, on peut considérer que le domaine d'utilisation du disque brésilien, limité jusqu'à présent à celui de la rupture, peut être étendu à celui de la fatigue, qu'il s'agisse de mode I ou de mode I + II comme on le verra par la suite.

## 6.2 Essai de fissuration en mode I + II

### 6.2.1 Méthode de dépouillement

Du fait de la symétrie de la géométrie, nous ne considérons que la demi-vue que présente la figure E.11.

- la longueur  $a_{eq0}$  représente la demi-entaille ( $a_0$ ) plus la préfissure
- $\beta_0$  est l'angle initial d'inclinaison de l'entaille par rapport à l'axe de chargement de compression
- la quantité  $\Delta a_T$  (arc de cercle assimilé à un segment de droite) représente la quantité dont a avancé la fissure pour un nombre de cycles donné
- $\theta_0$  est défini comme l'angle de bifurcation de ce premier incrément ( $A_0$  désigne le point de bifurcation de la fissure).

En toute rigueur, le calcul des facteurs d'intensité de contrainte devrait tenir compte du fait que l'on se trouve en présence d'une fissure courbe, et non linéaire ; en raison de la complexité d'un tel calcul, nous avons préféré raisonner en termes de fissure équivalente – comme la définit BADALIANCE (39).

Cela consiste à assimiler l'ensemble demi-entaille, préfissure et fissure à une fissure droite hypothétique, issue du centre de l'entaille et aboutissant à l'extrémité de l'incrément de fissure (on assimile l'ensemble  $OA_0 + A_0A_1$  à  $OA_1$ ). Puis, partant de cette fissure hypothétique et de l'incrément suivant, on définit une nouvelle longueur équivalente, renouvelant cette démarche pour chaque incrément de longueur. On définit également à chaque fois un angle de bifurcation  $\theta_i$  entre la direction de  $\Delta a_{Ti}$  et celle de la fissure équivalente précédente, ainsi qu'un angle d'inclinaison équivalent  $\beta_i$ .

A l'aide de considérations géométriques simples, on établit les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \pi/2 + \beta_0 - \arctg(\Delta a_{y1}/\Delta a_{x1}) \\ (6.3a) \quad \beta_1 &= \beta_0 - \arctg(\Delta a_{T1} \sin \theta_1 / (a_0 + \Delta a_{T1} \cos \theta_1)) \\ a_{eq1} &= (a_{eq0}^2 + 2a_{eq0} \Delta a_{T1} \cos \theta_1 + \Delta a_{T1}^2)^{1/2} \end{aligned}$$

où  $\Delta a_{x1}$  et  $\Delta a_{y1}$  représentent les projections suivant les axes  $Ox$  et  $Oy$  respectivement de l'incrément de fissure  $\Delta a_{T1} = (\Delta a_{x1}^2 + \Delta a_{y1}^2)^{1/2}$  - ce qui correspond directement aux mesures que l'on effectue.

Ces formules se généralisent à un ordre  $k$  quelconque (6.3.b) :

$$\begin{aligned} \Delta a_k &= (\Delta a_{xk}^2 + \Delta a_{yk}^2)^{1/2} \\ (6.3.b) \quad \theta_k &= \pi/2 + \beta_{k-1} - \arctg(\Delta a_{yk}/\Delta a_{xk}) \\ \beta_k &= \beta_{k-1} - \arctg(\Delta a_{Tk-1} \sin \theta_k / (a_{k-1} + \Delta a_{Tk} \cos \theta_k)) \\ a_{eqk} &= (a_{k-1}^2 + 2a_{k-1} \Delta a_{Tk} \cos \theta_k + \Delta a_{Tk}^2)^{1/2} \end{aligned}$$

Remarques :

- nous avons constaté, à partir des essais préliminaires, que les fissures aux deux extrémités de la fissure se propagent de façon symétrique de part et d'autre du disque. Par conséquent, nous nous sommes contentés de n'effectuer les mesures des quantités  $\Delta a_x$  et  $\Delta a_y$  que sur un seul côté de chaque front de fissure,
- nous considérons les quantités  $\theta_k$ ,  $\beta_k$ , et  $a_{eqk}$  comme des valeurs expérimentales, même si seules les quantités  $\Delta a_{xk}$  et  $\Delta a_{yk}$  sont effectivement mesurées,
- l'incertitude sur les mesures des angles est estimée à  $\pm 2$  degrés,
- le point de bifurcation  $A_0$  est pris comme origine pour la plupart des courbes tracées,
- la longueur totale de la branche de la fissure  $a_T$  est définie comme la somme des incréments  $\Delta a_{Ti}$  (figure E.11). Nous verrons par la suite que ce choix a une influence significative sur les valeurs de la vitesse de propagation,
- dans la suite du texte, l'expression *chargement en mode mixte* englobera tous les essais effectués pour des valeurs de  $\beta_0$  inférieures à 25 degrés ; on parlera de *chargement de mode II pur* lorsque  $\beta_0$  est voisin de 25 degrés et de *chargement de mode II impur* pour les valeurs de  $\beta_0$  supérieures à 25 degrés,
- la condition de chargement sera définie par  $K_I/K_{II}$ , au lieu du rapport inverse, comme dans les chapitres précédents. En effet, cette nouvelle notation évite une discontinuité lorsqu'on passe d'un chargement de mode mixte à un chargement de mode II impur.

- enfin, pour alléger les notations, nous emploierons l'expression **essai à x degrés** au lieu de : *essai avec un angle d'inclinaison égal à x degrés* .

### 6.2.2 Evolution de la trajectoire de propagation

Des éprouvettes en acier 35NCD16 A<sub>T</sub>, au nombre de 11, ont été testées au cours de la première campagne d'essais. Le **tableau E.3** indique les paramètres étudiés.

Lorsque l'on incline le disque – préalablement fissuré en mode I – d'un angle  $\beta_0$  non nul, c'est-à-dire lorsque l'on superpose une composante de mode II cyclique, on constate, d'après les figures E.12 et E.13 que pour chacune des orientations étudiées, la fissure dévie de sa trajectoire linéaire et adopte au cours de sa propagation une trajectoire curviligne. Cela reste vrai pour les disques non préfissurés ( $\beta_0 = 31^\circ$  et  $42^\circ$  \* )

La **figure E.14** où sont superposées ces différentes trajectoires l'illustre bien. De cette même figure on peut tirer les remarques suivantes :

1. après bifurcation, la fissure se propage vers la direction de chargement qui favorise la composante du mode I par rapport à celle du mode II,
2. le rayon de courbure de la trajectoire augmente avec la valeur de la composante initiale du mode II,
3. pour les valeurs de  $\beta_0$  supérieures ou égales à 25 degrés, la trajectoire est linéaire dans sa partie inférieure, représentée en pointillés sur la **figure E.14**,
4. pour les valeurs de  $\beta_0$  comprises entre 0 et 45 degrés, la fissure bifurque exactement à partir de chaque extrémité de la préfissuration. Par contre, pour l'angle  $\beta_0$  qui vaut 45 degrés, cela ne se vérifie que partiellement, puisque d'un côté, la fissure s'amorce au niveau du bord libre de l'entaille mécanique. On peut même avancer, d'après l'essai à 60 degrés, que le lieu de bifurcation a tendance à se déplacer vers le centre du disque au fur et à mesure que la valeur de l'angle d'inclinaison se rapproche de 90 degrés.

### 6.2.3 Evolution des facteurs $K_I$ et $K_{II}$

Avant d'aller plus loin dans la présentation des résultats expérimentaux, nous avons préféré d'abord connaître, pour les principaux essais de fissuration que nous avons réalisés sur disque brésilien en acier 35NCD16 A<sub>T</sub>, l'évolution des facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$  et  $K_{II}$  au cours de la propagation de la fissure. Rappelons que le calcul de ces facteurs s'effectue à partir des formules d'ATKINSON (91), où la longueur de la fissure équivalente est le paramètre qui est pris en compte (**figure E.11**).

Les **figures E.15** et **E.16** montrent l'évolution des composantes  $K_I$  et  $K_{II}$  en fonction de la longueur de

fissure curviligne  $a_T$  pour les différentes valeurs de  $\beta_o$ . La figure E.15 indique que pour une valeur de  $a_T$  donnée, la composante  $K_I$  devient inférieure à celle du mode I pur, au fur et à mesure que l'angle  $\beta_o$  augmente. Pour l'essai à 34 degrés, la composante  $K_I$  prend des valeurs négatives sur une longueur de fissure de 4 mm environ, tandis que les valeurs de  $K_{II}$  restent quasiment constantes (figure E.16).

Pour une orientation donnée, les valeurs de la composante  $K_I$  augmentent avec la longueur de la fissure et tendent à se rapprocher de celles du mode I pur quand les valeurs de la composante de mode II deviennent très faibles.

#### 6.2.4 Evolution des angles de bifurcation et de chargement

L'évolution de l'angle de bifurcation  $\theta$  est examinée au cours de la propagation de la fissure pour les différentes inclinaisons étudiées. Les valeurs expérimentales portées sur la figure E.17 sont celles fournies par l'équation donnant  $\theta_k$  (6.3b).

On remarque que pour toutes les courbes, la valeur maximale de l'angle de bifurcation  $\theta_1$  est obtenue au tout début de la bifurcation. Les valeurs de  $\theta$  diminuent avec l'accroissement de la longueur de fissure  $a_T$  pour atteindre pratiquement une valeur nulle si la fissuration était maintenue sur une longueur de fissure plus grande.

Pour les essais où l'angle initial d'inclinaison est égal à 34 et 45 degrés, la valeur de  $\theta$  chute rapidement pendant les premiers incréments de propagation et se stabilise par la suite avant de chuter à nouveau.

La valeur maximale de l'angle de bifurcation  $\theta_1$  est portée sur la figure E.18 en fonction de l'angle  $\beta_o$ . L'angle  $\theta_1$  croît avec  $\beta_o$  pour atteindre 70 degrés lorsque  $\beta_o$  vaut 25 degrés. L'évolution de  $\theta_1$  se stabilise autour de cette valeur lorsque l'angle initial d'inclinaison est compris entre 25 et 60 degrés.

A partir de la relation donnant  $\beta_k$  (6.3b), on a tracé l'évolution de l'angle de chargement  $\beta$  en fonction de la longueur de la fissure  $a_T$ . La figure E.19 montre que les valeurs de  $\beta$  diminuent de façon continue en fonction de la longueur de fissure, et cela quel que soit l'angle de chargement initial.

#### 6.2.5 Evolution de la longueur de fissure curviligne $a_T$

L'évolution de la longueur de fissure  $a_T$  est examinée au cours du cyclage mécanique pour une large gamme du rapport  $K_I/K_{II}$ . L'ensemble des résultats est présenté à la figure E.20.

– chargement en mode mixte :

dans ce domaine de chargement, où la valeur initiale de  $K_I/K_{II}$  est positive, on constate que pour un

nombre de cycles donné, l'accroissement de la fissure en mode mixte est plus important qu'en mode I pur.

– chargement en mode II pur :

la composante initiale du mode I est nulle dans ce cas. Comparativement à l'essai à 14,5 degrés, un léger retard est apparu dans la propagation de la fissure sur une longueur de 4 mm environ (en pointillés sur la figure E.20).

– chargement en mode II impur :

pour ce domaine où le chargement est de compression ( $\Delta K_{I_0} < 0$ ), le phénomène de retard est plus important que pour l'essai à 25 degrés. En effet, d'après la figure E.20, le nombre de cycles de retard relevé pour l'essai à 45 degrés est supérieur à celui que l'on obtient pour 34 degrés. Rappelons que pour l'essai à 45 degrés, le lieu de bifurcation n'est pas l'extrémité de la préfissure pour chaque côté de l'entaille mécanique (figure E.14). Nous pensons que pour ce type de représentation  $a(T) = f(N)$ , la comparaison des résultats de l'essai à 45 degrés avec ceux des autres essais a tout de même une signification.

## 6.2.6 Evolution de la vitesse de fissuration

### 6.2.6.1 en fonction de la longueur de fissure $a_T$ :

la mesure de la vitesse est effectuée optiquement suivant une procédure pas à pas. Le nombre de cycles entre deux mesures consécutives est gardé pratiquement constant. La vitesse est donc définie de la façon suivante :

$$(6.4) \quad \frac{da}{dN} = \frac{a_{T_{i+1}} - a_{T_i}}{N_{i+1} - N_i}$$

( $a_{T_{i+1}}$ ,  $N_{i+1}$ ) et ( $a_{T_i}$ ,  $N_i$ ) étant des couples de mesures fournissant une valeur instantanée de la vitesse.

L'ensemble des résultats est présenté sur les figures E.21, E.22, E.23, et E.24. La figure E.21 montre simplement que le fait de présenter les courbes exprimant la vitesse en fonction de la quantité  $\Delta a_T$  et non de  $\Delta a_y$  permet de mieux tenir compte, a priori, de l'effet de la composante  $K_{II}$  sur les valeurs de la vitesse, surtout pour les premiers incréments de propagation. Les deux quantités précédentes ont été définies à la figure E.11.

– chargement en mode mixte (figure E.22)

Nous constatons, immédiatement après avoir incliné le disque, un saut des vitesses de propagation vers des valeurs supérieures à celles mesurées en mode I, en fin de préfissuration. Par comparaison avec le mode I pur, la vitesse initiale mesurée après bifurcation de la fissure est environ le double pour l'essai à 9,5 degrés et 2,5 fois supérieure pour l'essai à 14,5 degrés. La différence des vitesses de fissuration entre le mode I et le mode mixte pour l'essai à 5 degrés est de l'ordre de 25 %.

Le niveau des vitesses de fissuration obtenu avec un chargement de mode mixte reste constant au début, sur une longueur  $a_T$  de 2,5 mm environ pour l'essai à 9,5 degrés, et sur une longueur de 4 mm environ pour l'essai à 14,5 degrés. Par la suite, les vitesses de propagation augmentent linéairement avec la longueur de fissure.

– chargement en mode II pur (figure E.22) :

Pour ce cas particulier de chargement en mode mixte ( $\beta_o = 25$  degrés), on remarque que la vitesse initiale mesurée après rotation du disque est inférieure à celle obtenue pour l'essai à 14,5 degrés, mais qu'elle est double par rapport au mode I pur. Cette diminution sensible des vitesses de fissuration sera expliquée par la suite. La courbe  $\beta_o = 25$  degrés peut être divisée en deux parties, la pente de la première qui est la plus forte devenant égale à celle de la seconde après une propagation de la fissure d'une longueur  $a_T$  égale à 3,75 mm.

– chargement en mode II impur (figures E.23 et E.24) :

La figure E.23 est constituée des résultats obtenus avec un chargement en mode II impur. Par rapport au mode I pur, on constate :

- un ralentissement des vitesses de fissuration qui suit immédiatement la rotation du disque, soit  $5,5 \cdot 10^{-6}$  mm/cycle pour un angle initial d'inclinaison de 34 degrés, et  $2 \cdot 10^{-6}$  mm/cycle pour 45 degrés,
- un redémarrage accompagné d'une accélération,
- un stade de retour à des vitesses de propagation supérieures à celles du mode I pur, après une propagation de 2,5 mm dans le cas de 34 degrés, et au bout de 5 mm dans le cas de 45 degrés.

Ces deux essais mettent clairement en évidence l'existence d'un mécanisme de retard qui doit être à l'origine du ralentissement de la vitesse de fissuration, et dont l'effet est plus accentué en mode II impur ( $\Delta K_I < 0$ ) qu'en mode II pur ( $\Delta K_I = 0$ ).

La figure E.24 sert de comparaison entre les résultats de l'essai à 60 degrés et ceux de l'essai en mode I pur. Elle indique une accélération des vitesses de propagation après rotation du disque. L'effet de retard n'existe pas, dans ce cas, puisque le lieu de propagation de la fissure se trouve sur les bords libres de l'entaille mécanique, comme le montre la figure E.14.

### 6.2.6.2 en fonction de la composante $K_I$

pour avoir une première idée de l'influence de la composante du mode II sur la vitesse de fissuration en mode mixte, nous avons porté sur la **figure E.25** l'évolution de la vitesse de fissuration en fonction de la seule composante du mode I. Pour les différentes positions du disque, les valeurs de  $K_I$  sont celles qui sont données par les formules d'ATKINSON (91).

La **figure E.25** montre que ce type de dépouillement est tout à fait en contradiction avec l'expérience. En effet, pour l'essai à 14,5 degrés par exemple, on mesure pour le premier incrément de propagation une vitesse de  $3.10^{-5}$  mm/cycle, ce qui correspond sur la courbe à un  $\Delta K_I$  de  $8,3 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ . Pour atteindre le même niveau de vitesse avec un chargement de mode I pur, il faut une valeur de  $\Delta K_I$  de  $18 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ , soit plus du double de la valeur précédente. Par contre, ce type de dépouillement fait clairement apparaître le rôle de la composante  $K_{II}$  sur la vitesse de fissuration en mode mixte. Par suite, un modèle de dépouillement adapté consisterait à ramener tous les points de vitesse obtenus en mode mixte sur la même droite que ceux obtenus en mode I pur. Nous reviendrons sur le problème de modélisation de la vitesse en fonction des facteurs d'intensité de contrainte dans le chapitre 8.

### 6.2.7 Conclusion à la première série d'essais

D'après les résultats de la première série d'essais effectués sur des disques en acier 35NCD16 traité, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

1. le domaine d'utilisation de l'éprouvette disque brésilien se trouve étendu du domaine de la rupture à celui de la fatigue
2. la géométrie du disque brésilien s'adapte facilement non seulement à des essais de fissuration de fatigue en mode I, mais aussi à des essais de mode mixte, et pour une gamme étendue du rapport  $K_I/K_{II}$ .
3. le dépouillement des essais de fissuration en mode I, une fois basé sur le modèle de KIM (87), une fois sur le modèle d'ATKINSON (91) nous a permis de déceler les limites du premier modèle et les avantages du second.
4. lorsqu'on superpose du mode II cyclique à du mode I cyclique, on constate que la fissure bifurque selon une direction nettement différente de sa direction première et adopte une trajectoire curviligne.
5. les mêmes fissures tendent à venir se placer au cours de la fissuration dans la direction qui favorise le chargement en mode I pur.
6. la valeur de l'angle de bifurcation maximal  $\theta_1$  varie de 0 à 70 degrés lorsque  $\beta_0$  varie de 0 à 45 degrés.
7. pour un chargement en mode I + II et en mode I pur, les vitesses de fissuration sont supérieures à celles du mode I pur pour la même longueur de la fissure curviligne



8. en mode II impur, les vitesses de fissuration passent initialement par une phase de ralentissement, suivie d'une phase d'accélération vers des valeurs supérieures à celles du mode I équivalent.
9. pour les trois modes de chargement, un dépouillement correct des vitesses de fissuration en fonction des facteurs d'intensité de contrainte passe nécessairement par un calcul qui tient compte à la fois des composantes  $K_I$  et  $K_{II}$  calculées à la pointe de la fissure équivalente et de l'angle de bifurcation.
10. en mode II pur et en mode II impur, il faut faire intervenir dans le calcul des facteurs d'intensité de contrainte un mécanisme de retard pour tenir compte du ralentissement observé au cours de la propagation de la fissure.

### 6.3 Deuxième série d'essais – Etude des mécanismes

#### 6.3.1 But

Le but de la deuxième série d'essai est de répondre à deux questions :

1. les conclusions que nous venons de tirer des résultats de la première série sont-elles dépendantes de la nature du matériau ?
2. pour un chargement en mode II, pur et impur, quel est le mécanisme qui est responsable du ralentissement de la vitesse de fissuration et quelle est son évolution au cours de la propagation ?

Pour répondre à la première question, nous avons fissuré des disques en acier 35NCD16 non traité ( $R_e = 450 \text{ N/mm}^2$ ). Les résultats obtenus sont comparés à ceux obtenus, d'une part, sur des disques en acier inoxydable ( $R_e = 265 \text{ N/mm}^2$ ) et d'autre part, sur les disques en acier 35NCD16 traité ( $R_e = 1100 \text{ N/mm}^2$ ).

Quant à la seconde question, nous avons essayé d'y trouver une réponse en faisant instrumenter les éprouvettes avec des capteurs à jauge, selon la méthode décrite au § 5.2.3 et en effectuant des examens au microscope à balayage des faciès de rupture obtenus. Les conditions expérimentales pour les essais de la seconde série sont portés dans le tableau E.4.

#### 6.3.2 Essai de fissuration en mode I

Avant d'entreprendre les essais de fissuration de la seconde série, nous avons caractérisé la propagation des fissures de fatigue en mode I sur l'acier inoxydable et sur l'acier 35NCD16. Nous avons vérifié, pour ce dernier, que le rapport de charge n'a, effectivement, pas d'influence sur la loi de PARIS.

La figure E.26 confirme qu'un rapport de charge  $R$  égal à 0,3 n'a pas d'influence significative sur la

loi de propagation en mode I dans le domaine où  $\Delta K_I$  varie entre 12 et 22  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ . Nous remarquons également sur cette figure que pour une même valeur de  $K_I$ , les valeurs de vitesses de fissuration pour l'acier inoxydable sont supérieures à celles de l'acier 35NCD16<sub>B</sub>.

### 6.3.3 Essai de fissuration en mode I + II

#### 6.3.3.1 Evolution des courbes $a_T - N$ et $da/dN - a_T$

\* cas du 35NCD16<sub>B</sub> :

Les figures E.27 et E.28 représentent respectivement pour l'acier 35NCD16<sub>B</sub>, l'évolution de la longueur de fissure en fonction du nombre de cycles, ainsi que celle de la vitesse de propagation en fonction de la longueur de fissure. Pour les valeurs de  $\beta_0$  suivantes : 0, 15, 24 et 35 degrés, on remarque que l'allure des courbes en question obtenues avec l'acier 35NCD16<sub>B</sub> est semblable à celle que l'on obtient avec le 35NCD16 A<sub>T</sub> – figures E.20, E.22 et E.23 –. Ainsi, d'après les figures E.27 et E.28, un chargement en mode I + II et en mode II pur entraîne une augmentation de la vitesse de fissuration par rapport au mode I pur, et un ralentissement dans le cas d'un chargement en mode II impur. Après une propagation de 10 mm environ, la courbe de vitesse correspondant à l'essai à 35 degrés rejoint celle du mode I pur (figure E.28).

Pour tous les essais de la deuxième série, nous notons au tout début de la propagation, un pic dans les vitesses de fissuration (figure E.28). Ces pics n'apparaissent pas dans les courbes de la première série, car les relevés correspondant étaient effectués tous les 30000 cycles environ, au lieu de tous les 5000 cycles pour la deuxième série.

\* cas de l'acier inoxydable (type 316) :

Les figures E.29 et E.30 indiquent pour ce type d'acier et pour les quatre orientations étudiées, l'évolution des courbes  $a_T = f(N)$  et  $da/dN = F(a_T)$ . Par rapport au mode I, on remarque que l'influence de la composante du mode II sur la vitesse de fissuration n'est pas significative pour l'essai à 15 degrés, sauf pour le premier incrément de propagation. Par contre, les courbes de vitesse obtenues avec un chargement de mode II pur ou impur se situent nettement au-dessus de celles obtenues avec un chargement de mode I pur. Les figures E.29 et E.30 révèlent que pour l'acier inoxydable, un chargement de mode II impur n'introduit pas un retard de propagation aussi important que celui que l'on obtient pour le même angle de chargement avec l'acier 35NCD16 A<sub>T</sub> (figure E.20) et l'acier 35NCD16<sub>B</sub> (figure E.27).

#### 6.3.3.2 Evolution des déplacements des lèvres de la fissure

\* cas du 35NCD16<sub>B</sub>

Nous avons étudié l'évolution des diagrammes charge-déplacement de la partie préfissurée et de la partie branchée de la fissure au cours de la fissuration, avant et après inclinaison du disque. L'enregistrement des diagrammes est obtenu selon la méthode décrite au paragraphe 5. 2.3.

La figure E.31 montre comment évoluent les diagrammes  $(P, V_A)$  et  $(P, V_B)$  au cours du cyclage mécanique pour une éprouvette en acier 316 inclinée à 33 degrés.

De tels enregistrements sont effectués de façon systématique pour chaque orientation de l'entaille ( $\beta_o = 0, 16, 25$  et  $35$  degrés) et à différentes phases de chaque essai : fin de préfissuration, début de bifurcation, pendant la fissuration.

Après inclinaison du disque d'un angle  $\beta_o$  donné, en général, l'orientation des diagrammes  $P - V_A$  et  $P - V_B$  sont différentes en comparaison de ce que l'on observe en fin de préfissuration. Par exemple, le diagramme  $P - V_A$  de la figure E.31a prend une orientation opposée à celle qu'il avait à la fin de la préfissuration. Mais, au cours du cyclage mécanique, ce même diagramme tourne progressivement pour retrouver son orientation d'avant bifurcation. Par contre, les diagrammes  $P - V_B$  gardent au long de l'essai l'orientation qu'ils avaient prise à la bifurcation.

Un examen plus précis montre que pour le premier cycle, l'hystérésis des diagrammes  $P - V_A$  et  $P - V_B$  est beaucoup plus large que pour les autres enregistrements. La largeur de cette boucle est moins prononcée pour les essais à  $16$  et  $25$  degrés.

Remarque : Le point d'ouverture de la fissure n'apparaît pas sur nos diagrammes, mais l'étude de ce dernier avec un chargement en mode mixte n'est pas envisagée dans le cadre du présent travail.

Pour l'acier 35NCD16<sub>B</sub>, l'évolution des quantités  $V_A$  et  $V_B$  en fonction de la longueur de fissure  $a_T$  est représentée sur les figures E.32 et E.33. La figure E.32 montre que la courbe  $V_A - a_T$ , obtenue en mode I, se place au-dessus de celles obtenues lorsque  $\beta_o$  vaut  $16, 25$  et  $35$  degrés. Immédiatement après inclinaison du disque,  $V_A$  passe de  $14,7 \mu\text{m}$  (valeur en fin de préfissuration) à  $6,4 \mu\text{m}$  (début de bifurcation) pour l'essai à  $16$  degrés. Cette même quantité devient négligeable pour l'essai à  $25$  degrés et instantanément négative pour  $\beta = 35$  degrés (chargement en mode II impur).

Des problèmes de fixation des capteurs nous ont empêchés de poursuivre les enregistrements des diagrammes charge - déplacement  $(P - V_A)$  pour l'essai à  $25$  degrés.

Après une propagation de  $10 \text{ mm}$ , on remarque que les déplacements  $V_A$  de l'essai à  $35$  degrés commencent à prendre des valeurs positives, selon la figure E.32. Ainsi, la partie droite de la fissure qui était fermée auparavant s'ouvre après une propagation de la fissure de  $10 \text{ mm}$  environ.

La figure E.33 nous montre l'évolution du déplacement  $V_B$  - mesuré au niveau du point de bifurcation - en fonction de l'acroissement de la fissure. D'après cette figure, pour un chargement de compression de

mode I pur ( $\beta_o = 0$ ), les déplacements  $V_B$  sont négatifs ( $-11 \mu\text{m}$ ) et n'évoluent pas avec l'accroissement de la fissure  $a_T$ . Pour cet essai, la valeur négative de  $-11 \mu\text{m}$  est du même ordre de grandeur que la valeur mesurée par le capteur A juste après inclinaison du disque de 35 degrés (figure E.32).

Apparemment, la valeur de  $11 \mu\text{m}$  correspondrait au déplacement linéaire élastique du matériau étudié, sous l'amplitude de chargement de compression appliquée.

D'après la figure E.33, le fait que, immédiatement après inclinaison du disque, les quantités  $V_B$  passent d'une valeur négative à une valeur positive pour les trois orientations considérées (16, 25 et 35 degrés) signifie qu'au voisinage du point de bifurcation, les lèvres de la partie pré-fissurée se déplacent parallèlement l'une par rapport à l'autre et que l'amplitude de ce déplacement est d'autant plus grande que l'angle de chargement est plus important.

Vu l'emplacement du capteur B (figure E.5), on peut estimer que les quantités  $V_B$  traduisent en réalité le déplacement dû à l'ouverture de la partie incurvée de la fissure, au niveau de son point de bifurcation. D'après la figure E.33, les quantités  $V_B$  de l'essai à 35 degrés sont supérieures à celles de l'essai à 25 degrés pour les 2 premiers millimètres de propagation.

Normalement, les deux courbes doivent se croiser une seconde fois vers la fin de l'essai. Cela est confirmé par des essais complémentaires effectués sur le même acier, afin d'étudier l'influence du rapport de charge R sur les déplacements  $V_A$  et  $V_B$  et sur les vitesses de fissuration. Les résultats obtenus avec un rapport de 0,3 et une amplitude de chargement équivalente à celle prise pour  $R = 0,1$  sont représentés figures E.34 et E.35.

La figure E.35 montre, en effet, qu'après une propagation de 11 mm, la courbe de l'essai à 37 degrés croise une seconde fois celle à 25 degrés pour venir se placer au-dessus. Ce second point d'intersection, obtenu après une propagation de 10 mm correspond à celui où la quantité  $V_A$  devient positive sur la figure E.34 d'une part, et à celui où la vitesse de fissuration du même essai ( $\beta_o = 37$  degrés) atteint le niveau des vitesses de fissuration en mode I pur (figure E.36).

*Quelle est l'influence du rapport  $R = 0,3$  sur les valeurs de  $V_A$  et  $V_B$  ?*

En examinant de plus près les figures E.32 et E.34, on remarque que pour l'essai à 37 degrés avec un rapport de charge R égal à 0,3 (figure E.34), les valeurs absolues des déplacements  $V_A$  sont généralement inférieures à celles obtenues pour l'essai à 35 degrés avec un rapport de charge égal à 0,1 (figure E.32).

Par ailleurs, si pour l'essai à 16 degrés, la valeur de  $V_B$ , juste après inclinaison du disque est nulle (figure E.33), cette même valeur est légèrement supérieure à zéro pour l'essai à 15 degrés avec un rapport de charge de 0,3 (figure E.35).

\* cas de l'acier inoxydable :

Nous avons porté, en fonction de la longueur de fissure  $a_T$ , l'évolution de  $V_A$  (figure E.37) et celle de  $V_B$  (figure E.38).

Notons que l'essai à 26 degrés n'a pas été instrumenté. D'après ces figures, les valeurs de  $V_A$  et de  $V_B$  évoluent au cours de la propagation de la fissure qualitativement de la même façon que dans le cas de l'acier 35NCD16<sub>B</sub>. Par conséquent, les interprétations avancées dans ce cas restent valables, à notre avis, pour l'acier inoxydable, en ce qui concerne le déplacement relatif des lèvres de la fissure, aussi bien de sa partie linéaire que de sa partie incurvée.

### 6.3.4 Etude microscopique des faciès de rupture

#### 6.3.4.1 en mode I

Pour mieux comprendre les mécanismes qui gouvernent la propagation des fissures de fatigue soumises à un chargement de mode mixte, nous avons observé au microscope électronique à balayage les surfaces de rupture des disques fissurés.

L'acier 316 (figure E.39) et l'acier 35NCD16<sub>B</sub> (figure E.40), présentent des faciès différents, en relation avec leur microstructure. La figure E.40b, prise à fort grossissement, à proximité de la surface latérale de l'échantillon, montre clairement le relief du faciès de rupture en mode I correspondant à l'acier 35NCD16<sub>B</sub>. La flèche indique le sens de propagation de la fissure.

Rappelons que l'étude métallurgique effectuée pour les deux nuances d'acier considérées (cf. : § 5 .1.2) a montré que la structure de l'acier 316 renferme des inclusions angulaires de nitrure de titane sur fond austénitique maclé. On retrouve sur les figures E.39a et E.39b les traces de ces inclusions dont l'orientation est perpendiculaire à la direction de la propagation de la fissure.

#### 6.3.4.2 en mode mixte

Lorsqu'on superpose au mode I cyclique du mode II cyclique également, on a pu constater que :

- la fissure initialement parallèle à l'axe de chargement dévie d'un angle  $\theta_1$  et adopte une trajectoire incurvée.
- la vitesse de propagation accuse, sur les premiers millimètres du chemin de fissure un ralentissement lorsque le chargement initial est de mode II (pur ou impur).

\* Chargement initial en mode I + II

– acier 316 :

Les faciès que l'on observe (figure E.41) sont analogues à ceux obtenus pour un chargement en mode I

pur (figure E.39). Ainsi, pour une valeur de  $(\Delta K_I/\Delta K_{II})_0$  égale à 0,48 ( $\beta_0 = 15^\circ$ ), on n'observe aucun matage, même local, des surfaces, tant au niveau de la partie droite de la fissure (pré-fissure) que de sa partie incurvée (figure E.41b).

– acier 35NCD16<sub>B</sub> :

La figure E.42 qui présente le faciès de rupture de la pré-fissure pour l'essai à 16 degrés confirme l'absence de zones matées. Des observations faites sur la partie incurvée vont dans le même sens. ( $R = 0, 1$ )

\* Chargement initial en mode II pur

– acier 316

Les faciès de rupture obtenus pour un essai à 26 degrés révèlent un effet de frottement entre les surfaces de la fissure au cours du cyclage, qui se traduit par la présence de zones matées sur la partie droite de celle-ci, ainsi que le montre la figure E.43a. Par contre, il n'existe aucune trace semblable sur la partie incurvée de la fissure (figure E.43b).

– acier 35NCD16<sub>B</sub>

Les analyses microscopiques réalisées sur un disque fissuré à 25 degrés montrent le même aspect de matage que dans le cas de l'acier 316 (figure E.43a).

\* Chargement initial en mode II impur

– acier 316

Rappelons que lorsque l'angle initial d'inclinaison est supérieur à 26 degrés, la valeur de la composante de mode I à la pointe de la pré-fissure devient négative.

Les surfaces d'une fissure correspondant à un essai à 33 degrés présentent un faciès fortement maté sur la partie droite de cette fissure. La figure E.45a prise à fort grossissement donne une idée de l'aspect local du matage. Les figures E.45b et E.45c prises sous un champ de lumière rasante montrent l'étendue des surfaces matées.

La figure E.45d, quant à elle, présente le faciès de rupture par fatigue correspondant à la partie incurvée de la fissure. On ne remarque aucune trace de matage à cet endroit. Le faciès observé est analogue à celui de la figure E.39b qui correspond à un chargement de mode I pur.

– acier 35NCD16<sub>B</sub>

Là encore, nous parvenons aux mêmes constatations que dans le cas précédent, avec une partie incurvée vierge de tout matage et une partie droite présentant une forte proportion de zones de matage (figure E.46).

Pour confirmer ce qui vient d'être dit, nous avons effectué une analyse macroscopique des faciès de rupture précédemment étudiés au microscope à balayage :

- la figure E.47 représente les faciès de rupture des essais sur disque en acier 316 pour les trois orientations suivantes :  $\beta_o = 0, 15$  et  $33$  degrés ;
- la figure E.48 représente les faciès de rupture des essais sur acier 35NCD16<sub>B</sub> pour les valeurs suivantes de  $\beta_o$  :  $16, 25$  et  $35$  degrés.

Ces deux figures permettent de visualiser de façon nette que les zones matées – en noir du fait de l'oxydation – se trouvent uniquement sur la partie droite de la fissure lorsque l'angle  $\beta_o$  est supérieur à  $15$  degrés et que l'étendue des surfaces matées est plus importante dans le cas du mode II impur qu'en mode II pur.

Une prise de vue à l'échelle 11 (figure E.49) de la surface extérieure d'un disque brésilien fissuré montre qu'il y a effectivement des traces de débris d'oxydation, de couleur ocre, qui ne se retrouvent que sur la partie droite de la fissure. L'origine de ces traces d'oxyde se trouve dans le frottement des surfaces en contact. La figure E.49 correspond à un essai à  $37$  degrés sur disque en acier 316.

#### 6.4 Conclusion à la seconde série d'essais

Ces essais ont permis de montrer que :

1. pour deux matériaux de limites d'élasticité différentes, un chargement de mode mixte de rapport  $K_{II}/K_I$  donné, n'influe pas de la même façon sur la vitesse de fissuration. Plus la limite d'élasticité est faible, moins l'effet de la composante de mode II sur l'accroissement de la vitesse de fissuration est important.
2. l'emploi de capteurs de déplacement nous a permis de comprendre, d'une part, comment s'effectuent les déplacements des lèvres de la partie linéaire et de la partie incurvée de la fissure durant le cycle de chargement, et d'autre part, comment ces déplacements évoluent au cours de la propagation de la fissure.
3. lorsque la partie linéaire de la fissure est comprimée ( $V_A < 0$ ), on observe un phénomène de retard dans la propagation de la fissure. Ce phénomène disparaît lorsque la quantité  $V_A$  redevient positive (ce qui, pour un angle de  $37$  degrés, correspond à une propagation de  $10$  mm environ).
4. quand l'angle de chargement  $\beta_o$  est supérieur à  $25$  degrés, le retard est plus important pour l'acier 35NCD16<sub>B</sub> ( $R_e = 450$  daN/mm<sup>2</sup>) que pour l'acier inoxydable ( $R_e = 265$  daN/mm<sup>2</sup>).

Des observations au microscope à balayage, à fort grossissement, des faciès de rupture par fatigue de l'acier 35NCD16<sub>B</sub> et de l'acier inoxydable nous ont révélé que :

1. dans le cas d'un chargement en mode II pur et impur ( $\beta \geq 25^\circ$ ), il y a frottement entre les surfaces de la préfissure – indiqué par la présence de matage –, mais pas entre les lèvres de la partie incurvée de la fissure.
2. pour les essais effectués sur des disques, avec un chargement initial en mode I + II ( $0 < \beta_0 < 25^\circ$ ), il n'y a pas de frottement entre les surfaces de la fissure au cours de sa propagation, aussi bien au niveau de la partie incurvée que de la partie droite de la fissure.
3. la taille des zones matées est plus importante pour un chargement initial de mode II impur que pour un chargement de mode II pur.



## Chapitre Sept

### DISCUSSION

#### 7.1 A propos de la direction initiale de bifurcation de la fissure

##### 7.1.1 Chargement initial de mode I + II

Nous avons montré à travers les essais de fissuration de fatigue sur disques brésiliens, que l'association d'une composante de mode II cyclique, même de faible valeur, à celle du mode I, se traduit par un changement de direction au cours de la propagation de la fissure. Lorsque la valeur de  $\beta_0$  n'excède pas 34 degrés, l'amorçage de la fissure suivant la direction  $\theta_1$  s'effectue à partir de chaque extrémité de la préfissure.

Dans les *tableaux E.5* et *E.6*, nous avons comparé les valeurs de  $\theta_1$  correspondant à nos essais à celles données dans la littérature consacrée aux travaux de fissuration de fatigue en mode mixte – (35), (37), (42), (44), (46), (53), (59) –. A partir de ces tableaux, nous avons tracé l'évolution de l'angle de bifurcation en fonction du rapport de chargement initial :  $(\Delta K_I/\Delta K_{II})_0$  – *figure E.50* –.

On remarque que lorsque l'amplitude de la composante du mode I est positive, les valeurs de  $\theta_1$  correspondant à nos essais sont du même ordre de grandeur que celles obtenues par la plupart des auteurs, avec des géométries différentes.

On constate également que la valeur de  $\theta_1$  est fonction du rapport  $(\Delta K_I/\Delta K_{II})_0$  et non de l'amplitude des facteurs d'intensité de contrainte  $\Delta K_{I0}$  et  $\Delta K_{II0}$ . En effet, d'après les travaux de TANAKA (37),  $\theta_1$  vaut 22 degrés lorsque ces amplitudes valent respectivement 5,67 et 1,85 MPa $\sqrt{m}$ . Le même angle, d'après KITAGAWA (59), vaut 28 degrés avec des amplitudes sensiblement plus fortes, soit respectivement 14,08 et 4,37 MPa $\sqrt{m}$ .

La *figure E.50* révèle que la géométrie du disque brésilien permet de couvrir une gamme du rapport  $\Delta K_I/\Delta K_{II}$  plus étendue que les autres géométries.

##### 7.1.2 chargement initial de mode II pur

Le nombre d'essais effectués en fatigue avec un chargement de mode II pur qui font l'objet de publications est très inférieur au nombre d'essais réalisés lorsque le chargement est de mode mixte I + II. La raison principale à cette disproportion est la mauvaise adaptation de la plupart des géométries

d'éprouvettes à la fois à un chargement de mode I + II et à un chargement de mode II pur sans modification du système de chargement.

Les essais sur disques brésiliens avec un chargement de mode II pur (obtenu lorsque  $\beta_0 \cong 25$  degrés avec  $a/R = 0,4$ ) ont tous révélé que la valeur de l'angle  $\theta_1$  qui définit la nouvelle direction de propagation de fissure, se situe autour de 70 degrés (*figure E.50*).

Nos essais confirment ainsi les résultats des travaux effectués avec des géométries d'éprouvettes différentes : ainsi, ceux de POOK (62), avec une éprouvette compacte de mode II (cf. : *figure E.66*), ceux de HUA et col. (44) sur une éprouvette entaillée en flexion 4 points excentrés (*figure B.16*), ceux de KITAGAWA et col. (59) avec une éprouvette cruciforme (*figure B.48*), ainsi que ceux d'OTSUKA et col. (66) sur des éprouvettes plates (*figure B.70*).

### 7.1.3 chargement initial de mode II impur

Une telle condition de chargement s'obtient sur disque brésilien pour une longueur de fissure  $a_0$  équivalente à  $0,4R$  si l'angle de chargement  $\beta_0$  est supérieur à 25 degrés. En fatigue, à part nos essais à 35, 45 et 60 degrés, n'ont été publiés que les essais de SMITH (49), (50), (51). Rappelons que SMITH a pu réaliser une condition de chargement de mode II impur en compression sur des éprouvettes plates à entaille inclinée (*figure B.43*).

Comme dans le cas d'un chargement de mode II pur, nos essais avec un angle d'inclinaison supérieur à 25 degrés (*figure E.50*) et ceux de SMITH pour un angle  $\beta_0$  de 45 et de 30 degrés (*tableau B.3*) montrent que la valeur de l'angle de bifurcation initial est toujours de l'ordre de 70 degrés.

Des essais sur disques en acier de différentes limites d'élasticité confirment que la valeur maximale de l'angle de bifurcation est de l'ordre de 70 degrés, quelle que soit la valeur initiale du rapport  $\Delta K_I/\Delta K_{II}$ .

## 7.2 A propos de l'évolution de l'angle de bifurcation au cours de la propagation de la fissure

La quasi-totalité des travaux (37), (35), (42), (46), (53), (54), (55), (59), (63), (71) sont limités à l'étude de l'évolution de la valeur initiale de l'angle de bifurcation  $\theta_1$  en fonction de la composante du mode II de chargement.

D'un point de vue pratique, une évaluation correcte de la direction qu'empruntera une fissure se propageant dans une structure chargée en mode mixte est d'une importance indéniable. Aussi s'intéresser à l'évolution de la trajectoire de cette même fissure au cours du cyclage mécanique apportera, à notre avis,

une meilleure connaissance du phénomène de fissuration en mode mixte, pour une éventuelle prévision de la durée de vie.

La *figure E.17* montre que l'allure des courbes  $\theta - a_T$  est influencée par le signe de l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K_I$ . Lorsque  $\Delta K_I$  est positif (*figure E.15*), la diminution de  $\theta$  avec l'accroissement de la longueur de fissure  $a_T$  s'effectue de façon continue (*figure E.17*).

Dans le cas de l'essai à 34 degrés, où les valeurs de  $\Delta K_I$  sont d'abord négatives, après rotation du disque, la valeur de  $\theta$  chute rapidement au cours des premiers incréments de propagation, pour se stabiliser ensuite avant de chuter de nouveau de façon continue avec l'accroissement de la fissure. Cette deuxième phase de diminution apparaît après une distance de propagation supérieure à 5mm, distance nécessaire pour que la composante de mode I redevienne positive.

Nous pensons que la linéarité des trajectoires de fissure – représentées en pointillés sur la *figure E.14* – pour les essais à 34, 45 et 60 degrés correspond au domaine où la fissuration s'effectue pour des valeurs négatives de  $\Delta K_I$ .

## 7.3 A propos de la vitesse de fissuration

### 7.3.1 Calcul de la vitesse instantanée

Rappelons que nous avons basé le calcul des vitesses de fissuration instantanées sur des incréments de propagation  $\Delta a_T$ , c'est-à-dire sur les incréments qui sont mesurés suivant la direction de branchement de la fissure (*figure E.21*).

**BROEK** et **RICE** (35), **TANAKA** (37), **PUSTEJOVSKI** (38) et **XUNFANG** et **GUANGQIN** (48) ont, eux aussi, adopté cette définition pour le calcul des vitesses de fissuration en mode mixte. Dans d'autres travaux, par contre, les auteurs se contentent de calculer les vitesses instantanées à partir des incréments mesurés suivant la direction qu'aurait adoptée la fissure si elle était chargée uniquement en mode I.

Pour distinguer les deux méthodes, certains auteurs, comme **PUSTEJOVSKI** (38) ou **XUNFANG** et **GUANGQIN** (48) préfèrent noter la vitesse  $da/dN$  au lieu de  $da/dN$ ,  $s$  indiquant que la trajectoire de la fissure de fatigue est plus curviligne que linéaire.

### 7.3.2 Chargement initial en mode I + II

D'après les essais effectués sur disques brésiliens en acier 35NCD16, un chargement de mode I + II entraîne une augmentation de la vitesse de fissuration par rapport à celle que l'on obtiendrait en mode I pur

pour les mêmes conditions d'essai. Ainsi, nos résultats confirment ceux obtenus par IIDA (36) et TANAKA (37) sur des éprouvettes C.C.P. en aluminium, ceux de FLAVENOT et col. (46) sur des éprouvettes C.T. modifiées (figure B.41) en acier pour cuve de réacteur ainsi que ceux de KITAGAWA (59) sur éprouvette cruciforme en acier de 4,5 mm d'épaisseur.

IIDA considère que la présence d'une composante de mode II, même faible, accroît au début de la propagation la vitesse de fissuration de 10 à 20 % par rapport à celle du mode I.

Si PUSTEJOVSKI (38), FLAVENOT et col., ainsi que TANAKA et KITAGAWA ont remarqué une augmentation de la vitesse de fissuration en mode mixte, surtout au début de la propagation de la fissure, n'ont pas chiffré en pourcentage la différence entre les vitesses observées, d'une part pour un chargement en mode I, et pour un chargement en mode I + II d'autre part.

A partir des résultats expérimentaux obtenus sur disques brésiliens en acier 35NCD16 A<sub>T</sub>, nous avons présenté, en fonction de la longueur de propagation de la fissure, l'évolution du rapport D défini comme le rapport des vitesses en mode I + II aux vitesses en mode I pur.

La figure E.51 révèle que pour les essais sous chargement de mode I + II, les valeurs des vitesses pour une même longueur de la fissure curviligne sont largement supérieures à celles du mode I pur, principalement au début de la fissuration.

En effet, après 1 mm de fissuration le rapport des vitesses est de 1,25 pour l'essai à 5 degrés, de 1,8 pour celui à 9,5 degrés et de 2,4 pour l'essai à 14,5 degrés. Après 10 mm de fissuration, cet écart n'est plus que de 1,25 pour 14,5 degrés et 1,4 pour 9,5.

Ainsi, les vitesses de fissuration sous chargement de mode mixte sont effectivement supérieures à celles du mode I, non seulement au début de la propagation, comme l'ont souligné IIDA (36) et KITAGAWA (59), mais également par la suite.

A contrario, CHINADURAI (42), BROEK et RICE (35), ainsi que HOURLIER (55) ont même constaté une diminution de la vitesse de fissuration en mode I + II par rapport à la vitesse en mode I pur. Si HOURLIER relie cette diminution au phénomène de fermeture à la pointe de la fissure, comme nous le verrons par la suite, CHINADURAI, BROEK et RICE n'en donnent aucune explication.

### 7.3.3 chargement initial de mode II pur

Nous avons présenté au § 3.3 les principaux travaux effectués en mode II pur. Des résultats expérimentaux d'OTSUKA et col. (66) par exemple, il ressort qu'il existe une valeur seuil de  $\Delta K_{II}$  par rapport à laquelle la quantité  $\Delta K_{II}$  appliqué conduit à une fissuration de fatigue soit de mode II pur ( $\theta_1 = 0$ ), soit de mode I pur ( $\theta_1 \neq 0$ ).

Nous limiterons ici la discussion aux résultats des travaux où une fissure chargée initialement en mode II pur bifurque suivant une direction de mode I pur.

Au vu de la *figure E.51*, on observe que dans le cas d'un disque chargé initialement en mode pur ( $\beta_0 = 25$  degrés), le rapport D des vitesses n'évolue pas tout à fait de la même façon que pour les essais 9,5 ou 14,5 degrés. Pour une longueur de fissure comprise entre 1 et 3 mm, les vitesses de fissuration correspondant à un chargement initial de mode II pur sont supérieures d'au moins 50% à celles correspondant à un chargement en mode I pur, mais inférieures en même temps à celles correspondant à un chargement initial de mode I + II ( $\beta_0 = 14,5$  degrés).

Après 4 mm de propagation, la vitesse de l'essai à 25 degrés est maximale, elle est de 90 % supérieure à celle de l'essai à 0 degré. Au bout de 10mm, l'écart est de l'ordre de 40%.

D'après la *figure B.63*, tirée des travaux de KITAGAWA et col. (59), où les vitesses de fissuration sont exprimées cette fois-ci en fonction de  $\Delta K$  appliqué, un chargement initial de mode II pur (essai n° 6) accroît au début de la propagation la vitesse de fissuration d'au moins 50% par rapport à la vitesse en mode I pur. Mais ensuite, le niveau de vitesse devient légèrement inférieur à celui du mode I pur, pour un même niveau de  $\Delta K$  appliqué.

### 7.3.4 Chargement initial de mode II impur

Nous avons abordé le problème de la fissuration avec un chargement de mode mixte où la composante initiale de mode I est de compression dans son ensemble : étude de la direction de bifurcation de la fissure et étude de la vitesse de fissuration.

Considérons l'essai à 34 degrés : la *figure E.51* montre qu'après rotation, les valeurs des vitesses de fissuration sont inférieures de 40% à celles de l'essai à 0 degré et d'au moins 180% à celles de l'essai à 25 degrés. Après une longueur de 3 mm, elles deviennent égales à celles obtenues pour l'essai à zéro.

Sur la *figure E.52*, nous avons porté pour chaque angle de chargement  $\beta_0$ , la valeur de la vitesse correspondant au premier incrément de propagation. Il ressort de cette représentation que la valeur de la vitesse de propagation maximale est apparemment atteinte pour un angle voisin de 20 degrés, ce qui correspond pour nos conditions d'essai à une rotation du disque qui défavorise au maximum l'effet de frottement entre les surfaces de la préfissure.

D'après cette même figure, le blocage de la fissure doit être atteint pour une inclinaison du disque d'un angle voisin de 45 degrés, ce qui se traduit pratiquement par un déplacement du point de bifurcation vers le centre du disque (*figure E.14*).

## 7.4 A propos des déplacements des lèvres de la fissure

La mise en place de capteurs de déplacement (*figure E.5*) nous a permis de mieux cerner l'effet de la composante du mode II cyclique sur les déplacements des lèvres de la partie droite de la fissure (pré-fissure) et de la partie incurvée (branche).

Pour les quatre orientations étudiées, nous avons porté en fonction de la longueur de fissure  $a_T$ , l'évolution des amplitudes des déplacements  $V_A$  (*figures E.32, E.34 et E.37*) et  $V_B$  (*figures E.33, E.35 et E.38*). Nous avons en effet voulu savoir si pour chaque orientation, il existe une relation entre l'amplitude  $\Delta K_I$  de la composante du mode I et le déplacement  $V_A$  d'une part, et entre l'amplitude  $\Delta K_{II}$  de la composante du mode II et le déplacement  $V_B$  d'autre part.

Pour cela, nous avons tracé pour chaque valeur de l'angle  $\beta_o$ , l'évolution de  $\Delta K_I$  en fonction de  $V_A$  (*figure E.53*) et celles de  $\Delta K_I$  et  $\Delta K_{II}$  en fonction de  $V_B$  (*figure E.54*).

Pour une longueur de fissure donnée, les couples  $(\Delta K_I, V_A)$  et  $(\Delta K_{II}, V_B)$  sont ceux qui correspondent aux essais effectués avec un rapport de charge égal à 0,3 sur des disques en acier 35NCD16<sub>B</sub>. Le premier point de chaque courbe correspond à une fissure dont la longueur de la fissure  $a_T$  est telle que  $a/R = 0,4$ .

Pour l'essai en mode I pur ( $\beta_o = 0^\circ$ ), la *figure E.53* confirme qu'au cours de la propagation de la fissure, l'amplitude du déplacement  $V_A$  des lèvres de l'entaille mécanique croît de façon proportionnelle avec l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K_I$ . La courbe  $\Delta K_I - V_A$  de l'essai à 15 degrés ne devient linéaire que lorsque la valeur de la composante du mode I devient supérieure à  $13 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ . Pour des valeurs inférieures,  $\Delta K_I$  n'est plus proportionnel à  $V_A$ .

Les courbes des essais à 27 et 37 degrés (*figure E.53*) nous révèlent par contre que des valeurs négatives du déplacement  $V_A$  correspondent à des conditions de chargement où la valeur de la composante  $\Delta K_I$  est, elle aussi, négative ou très faible. Ainsi, pour 27 degrés, la partie droite de la fissure qui correspond à la pré-fissure de mode I, est à peine fermée au début de la fissuration, avec un chargement initial de mode II pur, alors que pour 37 degrés, cette même partie de la fissure reste complètement fermée tandis que la valeur de  $\Delta K_I$  passe de  $-10$  à  $6 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ .

Les courbes  $V_A - \Delta K_I$  correspondant à ces deux derniers essais ne deviennent linéaires que lorsque la composante de mode I prend des valeurs supérieures à  $10 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ . La *figure E.53* nous précise qu'à part le domaine où les valeurs de  $\Delta K_I$  sont négatives, les valeurs des déplacements données par le capteur A augmentent avec  $\Delta K_I$  au cours de la fissuration.

Quant à l'évolution des déplacements indiqués par le capteur B en fonction de l'amplitude des facteurs d'intensité de contrainte en mode I et en mode II, (*figure E.54*) on constate par contre que pour les premiers incréments de propagation, l'écartement des lèvres de la partie incurvée augmente avec la valeur

initiale de la composante de mode II ; ensuite,  $V_B$  continue d'augmenter pendant que la valeur de  $\Delta K_{II}$  chute et que l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte de mode I augmente. Les deux figures E.53 et E.54 nous amènent à considérer qu'avec un chargement de mode I + II, l'influence de la composante du mode II sur l'ouverture  $V_B$  de la fissure au niveau de la bifurcation est plus importante en début de propagation qu'ensuite.

Nous pensons qu'une fois la valeur de  $\Delta K_I$  redevenue positive, les deux composantes de chargement s'associent pour écarter les lèvres de la partie incurvée de la fissure. Le cas de l'essai à 37 degrés montrent que les valeurs du déplacement  $V_B$  augmentent avec les valeurs positives de  $\Delta K_I$ .

Dans la quasi-totalité des travaux de fatigue en mode mixte, l'influence de la composante du mode II sur l'ouverture de la fissure n'a guère suscité jusqu'à présent la curiosité des chercheurs. Or, on sait fort bien qu'en fatigue les mécanismes de propagation sont étroitement liés à ceux de l'ouverture de la fissure. Nous pouvons néanmoins citer les travaux de d'HONDT et TRUCHON (54) et ceux de SMITH (50). Les premiers ont effectué des enregistrements des diagrammes charge-déplacement, à l'aide d'un seul capteur à lame placé au centre de leurs éprouvettes cruciformes.

Il faut noter que, dans ce cas, on mesure le déplacement total sans faire de distinction entre le déplacement qui est dû au mode I et celui imputable au mode II. Avec notre système de mesure, cette distinction est possible avec une précision suffisante, surtout au début de la propagation de la branche.

De plus, dans les travaux de d'HONDT et TRUCHON, les mesures ne sont effectuées qu'une seule fois, et cela, immédiatement après les premiers incréments de propagation. Signalons au passage que dans ses travaux, SMITH (50) a tracé à l'aide d'un microscope optique les profils des déplacements dus au glissement des lèvres de la pré-fissure sous un chargement de mode II.

## 7.5 A propos de la bifurcation initiale de la fissure suivant deux directions

Pour les essais effectués sur disques brésiliens avec un angle de chargement  $\beta_0$  supérieur ou égal à 15 degrés, nous avons constaté qu'au début des sollicitations, la fissure bifurque suivant deux directions symétriques par rapport à la direction de l'entaille mécanique. La figure E.55 montre pour l'une des deux extrémités de la fissure, l'aspect général de la deuxième branche, de plus petite taille. La figure E.55a correspond à un essai à 15 degrés sur un disque en acier inoxydable, la figure E.55b à un essai à 16 degrés sur un disque en acier 35NCD16<sub>B</sub>.

Au cours de l'essai, seule une des deux branches continue à se propager : celle qui tend à se mettre dans la direction du chargement de mode I pur ( $n^{\circ} 1$ ), l'autre branche se bloquant par la suite ( $n^{\circ} 2$ ).

Pour un acier donné, on constate que la longueur totale de la petite branche augmente avec la valeur de l'angle de chargement  $\beta_o$  :

- dans le cas de l'acier 316, cette longueur est de 1 mm environ pour l'essai à 15 degrés ; elle atteint le triple pour l'essai à 33 degrés.
- dans le cas de l'acier 35NCD16<sub>B</sub>, la taille de la petite branche vaut à peu près 0,24 mm pour 16 degrés et 1 mm pour 35 degrés.
- pour l'acier 35NCD16 A<sub>T</sub>, dont la limite d'élasticité est supérieure à celle de l'acier 316, la petite branche ne fait son apparition que pour des essais en mode II impur. En outre, sa longueur totale ne dépasse jamais le demi-millimètre.

A priori, l'augmentation de la limite d'élasticité rend plus difficile l'apparition d'une deuxième branche au point de bifurcation.

Sur la *figure E.56*, nous avons essayé d'illustrer le mécanisme de propagation de la petite branche. A la pointe d'une fissure de fatigue en mode I, on sait que la zone plastique a la forme de deux ailes. D'après le modèle de BILBY et col. (111), la direction moyenne d'une aile fait un angle de 45 degrés par rapport à la direction de la fissure principale (*figure E.56a*). La *figure E.56a* montre aussi l'orientation de la préfissure après rotation du disque d'un angle  $\beta_o$ .

Le disque est soumis à la valeur minimale de la charge P. La *figure E.56b* indique la même fissure après l'apparition des branches numérotées 1 et 2 quand la charge P est maximale. A ce niveau de chargement, les lèvres de la préfissure doivent se déplacer par glissement l'une par rapport à l'autre d'une quantité  $V_{II}$ . Ce déplacement dû à un mode de cisaillement pour la préfissure se transforme en grande pâtie en mode d'ouverture pour la branche n° 1 ( $V_{I1} > 0$ ) et en même temps à de la fermeture par compression pour la branche n° 2 ( $V_{I2} < 0$ ).

La *figure E.56c* montre la position relative des deux branches quand la charge est de nouveau minimale. La *figure E.56* révèle, d'après ce mécanisme, que la propagation de la "grande branche" s'effectue sous l'action de contraintes de tension et celle de la petite branche sous l'action de contraintes de compression jusqu'à son blocage.

Rappelons que dans des travaux récents effectués par CHU et col. (112), on montre qu'une fissure de fatigue entièrement chargée en compression peut se propager sur quelques dixièmes de millimètres avant de se bloquer ensuite.

Nous avons effectué des analyses fractographiques des faciès de rupture de la petite branche dont la *figure E.57* montre le site d'amorçage à deux grossissements différents ( $\beta = 15^\circ$  - acier 316).

La *figure E.58* montre que, dans le cas de l'acier 35NCD16<sub>B</sub>, le faciès de rupture de la branche n° 2 est légèrement maté par compression ( $\beta_o = 25^\circ$ ).



La *figure E.59* montre comment évolue la propagation de la petite branche par rapport à la branche principale de la fissure en fonction du nombre de cycles. Les deux courbes correspondent à un essai sur disque en acier inoxydable avec un angle  $\beta_0$  de 37 degrés et un rapport de charge égal à 0,1.

Cette figure nous révèle que lorsque la valeur de  $\Delta K_I$  est négative, la propagation de la branche n° 2 est plus importante que celle de la branche n° 1, et qu'après 3 mm de propagation, il y a blocage de la plus petite branche.

## 7.6 A propos du frottement

Les examens microscopiques à fort grossissement des faciès de rupture par fatigue relatifs à des disques brésiliens en acier 35NCD16<sub>B</sub> et en acier 316 fissurés avec un rapport de charge de 0,1 nous ont révélé que :

- lorsque le rapport initial de chargement  $\Delta K_I/\Delta K_{II}$  est supérieur à zéro, il n'y a pas de frottement entre les lèvres de la fissure, tant pour la préfissure que pour la fissure curviligne ;
- lorsque la valeur initiale de ce même rapport est nulle ou négative, il y a frottement entre les lèvres de la préfissure, mais pas entre celles de la fissure curviligne ;
- l'étendue des surfaces matées est plus importante lorsque la composante de mode I est de compression ( $\Delta K_I < 0$ ).

**HOURLIER (55)** a observé lors de la superposition du mode II au mode I cyclique une diminution des vitesses de propagation, pouvant atteindre dans certains cas, deux ordres de grandeur. Pour expliquer cette baisse, l'auteur considère qu'une telle superposition provoque un phénomène de déplacement des surfaces de rupture qui étaient initialement en regard en mode I. Etant donné la rugosité des surfaces de rupture, l'effet de ce déplacement se traduit par un matage important des surfaces de rupture.

**HOURLIER** a observé des zones matées sur toute l'étendue des faciès de rupture analysés, préfissure et partie branchée. Il précise même que les zones les plus matées sont celles de la partie branchée de la fissure. Ainsi, ces analyses de faciès de rupture, en grande partie, en contradiction avec les nôtres.

Autre contradiction : d'après nos essais, la présence du frottement au niveau de la préfissure est étroitement liée à la valeur initiale du rapport  $\Delta K_I/\Delta K_{II}$  et, par conséquent, à la valeur de l'angle de bifurcation  $\theta_1$ . En effet, nous observons un matage des surfaces uniquement pour une valeur de  $\Delta K_I/\Delta K_{II}$  négative ou voisine de zéro. Cela se traduit, à la pointe de la fissure, par un angle de bifurcation de l'ordre de 70 degrés. Or, dans les travaux de **HOURLIER**, les valeurs de l'angle initial de bifurcation ne dépassent jamais 40 degrés (*figure B.54*).

**DHONDT et TRUCHON (54)** qui ont effectué des essais de fissuration en mode I + II, non

proportionnel, sur des éprouvettes cruciformes, attribuent la différence entre les valeurs des angles de bifurcation mesurés (qui ne dépassent jamais 40 degrés) et celles prévues par le critère de  $(da/dN)_{\max}$  dans le cas de l'acier 35NCD16 au phénomène de fermeture à la pointe de la fissure (**tableau B.6**).

D'après les mêmes auteurs, ce phénomène se traduit par un important matage des surfaces de rupture. Mais il faut signaler que les auteurs n'ont justifié leur argumentation par aucune photographie d'un faciès de rupture indiquant effectivement la présence de zones matées. Ils ne précisent pas non plus s'ils pensent que les traces de matage devraient être localisées sur toute la surface ou sur une partie de cette surface dont la localisation reste à préciser.

D'après ce qui vient d'être dit, la notion de matage ou de frottement est invoquée dans le domaine de la fatigue en mode mixte pour expliquer parfois les contradictions qui existent entre les résultats expérimentaux et les prévisions théoriques de l'angle initial de bifurcation de la fissure.

Nous considérons que la vitesse de fissuration est effectivement sensible à la présence du frottement entre les lèvres de la pré-fissure, mais que l'angle de bifurcation initial l'est moins.

### **7.7 A propos des mécanismes de propagation des fissures de fatigue en mode mixte formule proposée – aux valeurs prévues par différents critères.**

Les courbes des vitesses de fissuration (**figures E.22, E.23, E.28 et E.36**), obtenues pour un chargement où la valeur de la composante du mode II est non nulle présentent des différences par rapport aux courbes de vitesse de fissuration correspondant à un chargement de mode I pur. Ces différences sont les suivantes :

- lorsque la valeur initiale de la composante du mode I est positive ou nulle, les vitesses de fissuration sont supérieures à celles du mode I pour une même longueur de fissure équivalente ;
- lorsque la valeur initiale de la composante du mode I est négative, les vitesses de fissuration restent globalement inférieures à celles du mode I ;
- les premiers incréments de propagation de la fissure indiquent la présence d'un pic dans les courbes de vitesse.

Ainsi, le mode de propagation d'une fissure de fatigue chargée en mode mixte est influencé par la valeur algébrique de la composante du mode I. Le but de ce paragraphe est de rechercher les mécanismes de propagation qui conduisent à cette différence entre les vitesses selon le mode.

### 7.7.1 Lorsque la composante de mode I est positive

Afin d'éclaircir les mécanismes de propagation quand la composante  $\Delta K_I$  est positive, nous nous proposons de vérifier si, après rotation des disques, les courbes donnant les vitesses de fissuration en fonction de  $a_T$  évoluent ou non de la même façon que les courbes des déplacements  $V_A$  et  $V_B$ .

Considérons la *figure E.34* qui correspond aux résultats des enregistrements obtenus sur des disques en acier 35NCD16<sub>B</sub> avec un rapport de charge  $R$  égal à 0,3. On constate, par comparaison avec la courbe du mode I pur, qu'après rotation du disque, les déplacements des lèvres de la partie droite de la fissure sont plus faibles pour l'essai à 15 degrés et quasiment nuls pour l'essai à 27 degrés.

Après 2 mm de propagation, la partie droite de la fissure s'ouvre ( $V_A > 0$ ) pour l'essai à 27 degrés. Mais l'amplitude de cette ouverture reste inférieure à celle de l'essai à 15 degrés, ainsi qu'à celle de l'essai à zéro degré, même pour des longueurs de fissures supérieures à 2 mm.

On constate, par contre, d'après la *figure E.36*, que les vitesses de fissuration de l'essai à 15 degrés et de l'essai à 27 degrés sont supérieures à celles de l'essai à zéro degré et que cet écart se maintient au cours de la fissuration. Ainsi, les courbes de déplacement ( $V_A - a_T$ ) seules ne sont pas suffisantes pour expliquer l'accroissement de la vitesse de fissuration quand la valeur de la composante du mode I est positive.

Examinons à présent les courbes  $V_B - a_T$  de la *figure E.35*, et plus particulièrement celles obtenues pour les essais à 15 et à 27 degrés. On constate que les valeurs du déplacement  $V_B$  évoluent en fonction de la longueur de fissure de la même façon que les courbes des vitesses de fissuration correspondantes. En réalité, cette concordance n'est que partielle, puisque le capteur B n'est sensible qu'aux déplacements dont la direction est parallèle à la préfissure.

Au vu de ce résultat, nous pensons que le mécanisme de propagation en mode mixte est dû à l'additivité des déplacements  $V_A$  et  $V_B$  résultant de l'action de l'amplitude des facteurs d'intensité de contrainte  $\Delta K_I$  et  $\Delta K_{II}$ .

On peut faire l'hypothèse que le déplacement total  $V_T$  des lèvres de la préfissure équivalent à un chargement de mode I + II, mesuré au centre du disque, est donné par :

$$(7.1) \quad V_{Teq} = \sqrt{V_A^2 + V_B^2}$$

Nous avons d'ailleurs déplacé le capteur  $V_B$  vers le centre du disque et constaté que la valeur du déplacement obtenue pour une même longueur de fissure est pratiquement identique à la valeur mesurée au niveau de la bifurcation de la fissure. Les *figures E.60* et *E.36* nous révèlent que les courbes  $V_{Teq} - a_T$  et les courbes  $da/dN - a_T$  évoluent dans le même sens par rapport aux courbes en mode I pur, sauf pour l'essai à 15 degrés où, normalement, d'après la *figure E.60*, la courbe  $V_{Teq} - a_T$  doit se placer au-dessus

de la courbe obtenue pour l'essai à zéro degré. Pour l'essai à 37 degrés, on n'a pas tenu compte des valeurs négatives de  $V_A$  dans le calcul du déplacement total.

Vu l'hypothèse adoptée, (7.1), et la forme de la trajectoire empruntée par la fissure, nous considérons que les courbes de la *figure E.60* permettent de dire que les deux composantes du chargement, lorsqu'elles sont positives, s'associent pour ouvrir la fissure et la faire se propager suivant la direction qui favorise la composante de mode I.

Suite à ce qui vient d'être dit, nous avons tracé, pour les diverses orientations étudiées, les variations de l'amplitude d'un facteur d'intensité de contrainte équivalent  $\Delta K_{Ieq}$  en fonction de la longueur de fissure  $a_T$  (*figure E.61*) dans le cas de l'acier 35NCD16 A<sub>T</sub>. Ce facteur d'intensité de contrainte équivalent est défini comme résultant de l'action conjuguée du mode I et du mode II. Son expression est donnée par :

$$(7.2) \quad \Delta K_{Ieq} = \sqrt{\Delta K_I^2 + \Delta K_{II}^2}$$

expression analogue à celle du déplacement total  $V_{Teq}$  (les valeurs négatives de  $\Delta K_{Ieq}$  ne sont pas prises en compte).

La *figure E.61* montre que pour une longueur de fissure  $a_T$  donnée, les valeurs de  $\Delta K_{Ieq}$  pour les essais à 9,5 et 14,5 degrés et celles de l'essai à 25 degrés sont au-dessus de celles correspondant à l'essai à 0°. Cela explique jusqu'à une valeur de  $a_T$  donnée pourquoi les vitesses de fissuration en mode I + II sont au-dessus de celles du mode I pur, quand la composante de mode I est positive.

Mais la *figure E.61* nous pose la question suivante, à propos de l'essai à 3,4 degrés : étant donné que la courbe  $\Delta K_{Ieq} - a_T$  est largement au-dessus de celle à 0°, pourquoi la courbe  $V_{Teq} - a_T$  (*figure E.60*) et la courbe  $da/dN = a_T$  (*figure E.36*) du même essai se trouvent-elles en-dessous de celles à zéro degré ?

Nous allons y répondre dans le paragraphe suivant.

### 7.7.2 Lorsque la composante de mode I est de compression

Une approche de ce problème doit tenir compte des corrélations qui existent entre les évidences expérimentales suivantes :

- les mesures des déplacements des lèvres de la fissure,
- les examens des faciès de rupture,
- l'évolution de  $\Delta K_I$  et de  $\Delta K_{II}$  en fonction de la longueur de fissure équivalente.

Rappelons (cf.: § 6.3.4) que lorsque la composante de mode I initiale est négative, on observe un

matage des surfaces de la préfissure, matage dont l'étendue est d'autant plus importante que la valeur initiale de  $\Delta K_I$  est nulle ou largement inférieure à zéro.

Au paragraphe 7.4 (*figure E.53*), nous avons montré que lorsque la partie droite de la fissure est comprimée, cela correspond globalement à un domaine où la valeur de la composante du mode I est soit négative, soit positive, mais faible.

Par suite, nous considérons que c'est le frottement des surfaces de la partie droite de la fissure dû à des contraintes de compression qui est à l'origine du ralentissement de la fissuration.

Remarque : pour l'essai à 37 degrés (*figure E.34*), au bout de 10 mm de propagation, les surfaces de la partie droite de la fissure ne sont plus en contact ( $V_A > 0$ ) ; les vitesses de fissuration deviennent alors supérieures à celles de l'essai à zéro degré (*figure E.36*).

Ainsi, pour les essais de fissuration en mode mixte où la composante de mode I est de compression, l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte équivalent appliqué  $(\Delta K_{Ieq})_{app}$  se trouve réduite d'une quantité  $(\Delta K_{Ieq})_f$  dues aux contraintes de frottement.

L'amplitude efficace du facteur d'intensité de contrainte équivalent sera donné par :

$$(7.3) \quad (\Delta K_{Ieq})_{eff} = (\Delta K_{Ieq})_{app} - (\Delta K_{Ieq})_f$$

*N.B.* : une étude détaillée sera consacrée au calcul de cette expression au chapitre 8 .

D'après la *figure E.35* on constate que le frottement des lèvres de la partie droite de la fissure fait diminuer l'ouverture de la partie incurvée de la fissure. En effet, la courbe  $V_B - a_T$  de l'essai à 37 degrés se situe globalement en-dessous de celle à 27 degrés ; après 10 mm de propagation, c'est l'inverse que l'on observe.

En regardant de plus près la *figure E.35* on constate, d'après les mesures du capteur B, que la fissure est plus ouverte quand la composante du mode I est de compression ( $\beta_o = 37$  degrés) que lorsque cette même composante est de traction ( $\beta_o = 15$  degrés).

Il y a donc une contradiction entre ouverture et vitesse de fissuration, puisque la courbe des vitesses pour 37 degrés se trouve nettement en-dessous de celle pour 15 degrés.

L'explication que nous proposons est basée sur l'influence de l'amplitude et du mode d'ouverture de la fissure, dont les mécanismes sont schématisés à la *figure E.62*.

Schéma 1 : cas d'un chargement en mode I pur :

$$\Delta K_{I1} > 0 ; \Delta K_{II1} = 0 ; V_{A1} > 0 ; V_{B1} < 0 ;$$

pas de frottement au niveau de la préfissure,

Schéma 2 : cas d'un chargement où la composante de mode I est de traction :

$$\Delta K_{I2} > 0 ; \Delta K_{II2} > 0 ; V_{A2} > 0 ; V_{B2} > 0 ; \quad V_{A1} > V_{A2} > 0$$

pas de frottement

Schéma 3 : cas d'un chargement de mode II pur :

$$\Delta K_{I3} = 0 ; \Delta K_{II3} > 0 ; V_{A3} = 0 ; V_{B3} > 0 ; \quad V_{B3} > V_{B2} > 0 ;$$

début de frottement

Schéma 4 : cas d'un chargement où la composante de mode I est de compression :

$$\Delta K_{I4} < 0 ; \Delta K_{II4} > 0 ; V_{A4} < 0 ; V_{B4} > 0 \text{ avec : } V_{B4} > V_{B3} > 0 ;$$

frottement

Schéma 4' : idem au schéma 4, mais le frottement des surfaces en contact est annulé par une entaille mécanique de longueur plus grande :

$$\Delta K_{I4'} < 0 ; \Delta K_{II4'} > 0 ; V_{A4'} < 0 ; V_{B4'} > V_{B4} > 0 ;$$

pas de frottement

Schéma 5 : configuration comparée de la pointe de la fissure incurvée (schémas 2, 4 et 4') :

On peut alors conclure, d'après le schéma 5, que la présence du frottement réduit l'amplitude de l'ouverture  $V_{B4}$  d'une quantité équivalente à :  $\Delta V_B = V_{B4'} - V_{B4}$  et ramène par conséquent le fond de la fissure d'une forme pointue à une forme émoussée.

Nous considérons que c'est l'émoussement de la pointe de la fissure engendré par le frottement des surfaces de la partie préfissurée, qui amène les valeurs des vitesses de fissuration de l'essai à 15 degrés à être supérieures à celles de l'essai à 37 degrés (*figure E.36*), bien que, à 37 degrés, l'ouverture de la fissure soit plus grande qu'à 15 degrés ( $V_{B4} > V_{B2}$ ) pour une longueur de fissure donnée (*figure E.35*).

Pour vérifier le cas du schéma 4', nous avons effectué un essai à 35 degrés après avoir scié la partie préfissurée du disque pour y éliminer le frottement. Le résultat de cet essai (*figure E.63*) montre qu'en l'absence de frottement (S.F.), les déplacements  $V_B$  sont plus grands que ceux obtenus en présence de frottement. Les valeurs des vitesses vont également dans ce sens (*figure E.64*).

Remarque : dans le cas d'un chargement de mode II pur (schéma 3), le frottement existe entre les lèvres de la partie préfissurée, mais son effet sur l'ouverture de la partie incurvée de la fissure (*figure E.35*) et, par conséquent, sur la vitesse de fissuration (*figure E.36*) est moins sensible que dans le cas d'un chargement de mode II impur (schéma 4).

Enfin, en ce qui concerne la présence d'un pic dans les courbes des vitesses de fissuration (*figures E.28*

et E.36), nous pensons qu'un chargement de mode mixte produit au coeur de l'éprouvette, dès le premier cycle, une déchirure statique de très faible longueur, vraisemblablement suivant la direction de la préfissuration.

La *figure E.31* montre en effet que l'hystérésis du diagramme charge-déplacement obtenue pendant le premier cycle de chargement est plus importante que celle que l'on observe pour les enregistrements suivants.

## 7.8 A propos de l'influence du rapport de charge R

### 7.8.1 Sur la vitesse de fissuration

Pour un chargement de mode I pur, les essais de fissuration sur des disques brésiliens confirment, dans le cas de l'acier 35NCD16<sub>B</sub>, que la loi de PARIS n'est pas influencée par la variation de la valeur du rapport de charge (*figure E.26*).

Lorsque le chargement initial est du mode I + II (*figure E.65*) ou du mode II pur (*figure E.66*), la superposition des courbes de fissuration révèle que le passage de R d'une valeur de 0,1 à une valeur de 0,3 n'affecte pas non plus de manière sensible les vitesses de fissuration, sauf pour le premier incrément de propagation. En effet, le pic mentionné précédemment est apparemment plus important lorsque R vaut 0,3.

Quand la valeur de la composante du mode I est négative, on constate, d'après la *figure E.67* que la diminution des vitesses de fissuration est globalement plus importante avec un rapport de charge de 0,1. En effet, pour les mêmes conditions d'essai, le frottement entre les surfaces de la partie droite de la fissure est moins important pour un rapport de charge égal à 0,3. Nos résultats sont donc en accord avec les résultats de HUA et col. (44) qui ont étudié l'influence du rapport de charge R sur la vitesse de fissuration au voisinage du seuil de non-fissuration.

La *figure E.68* qui montre les faciès de rupture des essais avec un chargement de mode II pur ( $\beta_0 \cong 25$  degrés) confirme que la densité des traces d'oxyde (en noir) est plus importante pour un rapport de charge de 0,1 que pour un rapport de 0,3.

### 7.8.2 Sur la trajectoire de propagation

A partir des essais effectués sur des disques en acier 35NCD16<sub>B</sub>, nous avons superposé, pour les trois orientations étudiées, les trajectoires des fissures obtenues pour R = 0,1 et R = 0,3 (*figure E.69*). On constate que les directions de propagation des fissures de fatigue en mode mixte ne diffèrent pas quand on fait varier le rapport de charge de 0,1 à 0,3.

Il ressort de la superposition des trajectoires de propagation obtenues sur deux disques en acier 35NCD16<sub>B</sub> (figure E.70) que l'absence de frottement entre les lèvres de la préfissure (essai à 35 degrés sans préfissuration) semble modifier légèrement la trajectoire de la fissure curviligne.

Dans le cas de l'acier 35NCD16<sub>B</sub>, nous considérons que le fait que les vitesses de fissuration en mode mixte ne sont pas affectées par la variation du rapport de charge, comme c'est le cas pour les vitesses de fissuration en mode I pur, constitue une preuve supplémentaire qu'une fissure de fatigue chargée en mode mixte ne se peut propager que suivant la direction qui rend maximale la valeur de la composante de mode I.

## 7.9 A propos de l'influence de la limite d'élasticité

### 7.9.1 Sur l'angle de bifurcation

D'après les tableaux E.5 et E.6, on remarque que pour un même rapport initial de  $\Delta K_I/\Delta K_{II}$ , la valeur de l'angle  $\theta_1$  est identique pour des matériaux de nuances différentes, ainsi que pour deux aciers de même nuance, mais de limite d'élasticité différente (35NCD16) – tableau E.6 –.

La figure E.71 a été obtenue par superposition des différentes trajectoires de fissure obtenues pour les orientations étudiées avec des disques en acier 35NCD16 A<sub>T</sub>, en acier 35NCD16<sub>B</sub> et en acier 316. On constate que pour des conditions de chargement identiques, l'allure des trajectoires est la même d'une nuance à l'autre.

D'après nos essais, le phénomène de branchement des fissures de fatigue chargées en mode mixte est purement mécanique. Ce résultat est en contradiction avec ceux de HOURLIER (55), et de d'HONDT et TRUCHON (54) pour lesquels le chemin de fissure dépend des conditions d'essai, ainsi que du type de matériau utilisé.

### 7.9.2 Sur la vitesse de fissuration

Les figures E.29 et E.30 montrent que pour l'acier 316, un chargement de mode II impur n'introduit pas un retard à la propagation aussi important que celui que l'on observe, dans les mêmes conditions d'essai, avec l'acier 35NCD16 A<sub>T</sub>, dont la limite d'élasticité est plus grande.

Ainsi, plus la limite d'élasticité est faible, plus le matage des surfaces en contact est important. En effet, un matage plus important signifie que l'usure par frottement se fait plus facilement, d'où une faible résistance à la propagation dans le cas d'un acier inoxydable, type 316.



## 7.10 A propos de la taille de la zone plastique

La connaissance de la zone plastifiée à fond de fissure est utile quand on considère que la propagation de celle-ci est localisée dans la zone déformée. HUA et XIATI (30) ont montré par calcul aux éléments finis que sous un chargement de mode II pur, la taille de la zone plastique monotone suivant la direction de propagation, est supérieure d'un ordre de grandeur à celle du mode I, et que sa surface est supérieure de deux ordres de grandeur à celle du mode I.

HILLS et ASHELBY (68), HUA et col. (70) ont proposé une loi de vitesse de fissuration en mode mixte exprimée en fonction de la taille de la zone plastique cyclique  $\omega_c$  – cf. : 3.4 ) –.

Pour quantifier expérimentalement l'influence de la composante du mode II sur la taille de la zone plastique, notre étude s'est limitée aux deux cas particuliers de mode de chargement suivants :

- chargement en mode I pur ( $\beta_o = 0^\circ$ ),
- chargement en mode II pur ( $\beta_o = 25^\circ$ ,  $a_o/R = 0,4$ ).

Nous avons délimité le contour de la zone plastique monotone  $\omega_m$  à l'aide de mesures de rugosité dont le principe a déjà été exposé (cf. : 5.2.4). Les mesures sont effectuées avec deux amplifications différentes :

- 5000 (1 cm sur le papier correspond à  $2 \mu\text{m}$ ) pour l'éprouvette en acier 35NCD16<sub>B</sub>
- 2000 pour l'éprouvette en acier 316

Les figures E.72a et E.73a donnent la forme et la taille de la zone plastique en mode I et en mode II pour chacun des deux types de matériau.

Les figures E.72b et E.73b nous donnent le déplacement dans la direction perpendiculaire à la surface de la pièce dû à la formation de la zone plastique à fond de fissure.

Les résultats expérimentaux obtenus sont consignés dans les tableaux E.7 et E.8. Pour construire ces tableaux, nous nous sommes contentés de la dimension dans la direction de propagation de la fissure définie par l'axe Ox, puisqu'on ne cherche qu'à connaître la longueur dont doit avancer la fissure pour quitter la zone perturbée.

La dimension théorique de la zone plastique est déduite de l'équation (2.21) de POOK (29).

Pour le disque en acier 35NCD16<sub>B</sub>, les mesures expérimentales du tableau E.7 nous révèlent que la taille de la zone plastique  $\omega_m$  mesurée en mode II pur vaut au moins le triple de celle obtenue en mode I.

Dans le cas de l'acier inoxydable, dont la limite d'élasticité est inférieure à celle du 35NCD16<sub>B</sub>, l'écart

entre les deux tailles est de l'ordre de 5 (*tableau E.8*). La solution de POOK accentue encore l'écart avec une valeur de 7,8.

Il ressort de l'examen de ces tableaux que la différence existant entre valeurs expérimentales et valeurs théoriques de  $\omega_m$  se trouve réduite quand on passe d'un chargement de mode I à un chargement de mode II pur.

Dans le cas de l'acier 35NCD16<sub>B</sub>, la faible taille de la zone plastique en mode I ( $\omega_m = 0,32\text{mm}$ ) associée à une forte amplification de l'échelle de mesure (jusqu'à une sensibilité de  $0,1 \mu\text{m}$  environ) doit, à notre avis, être à l'origine de l'écart important qui existe entre les deux méthodes de détermination de la zone plastique (rapport de 3,9)

Pour les deux nuances d'acier étudiées, on remarque, d'après les *figures E.72a* et *E.73a* que l'aire de la zone plastique devient très grande quand on passe du mode I au mode II.

D'après les *figures E.72b* et *E.73b*, il semble que la zone plastique cyclique  $\omega_c$  puisse être décelée par un léger changement d'allure de la courbe donnant la profondeur de la contraction.

Pour avoir une idée de l'exactitude de nos mesures de taille de zone plastique par rugosimétrie, nous avons pris des clichés de ces zones sous lumière rasante (*figures E.74 a* et *b*). Nous avons constaté que la taille de la zone plastique suivant la direction de la fissure est du même ordre de grandeur que la taille plastifiée déterminée par rugosimétrie.

D'après ces mesures de rugosimétrie, l'influence de la composante du mode II sur la taille de la zone plastique à la pointe de la fissure est moins importante que ne le prévoient les calculs aux éléments finis de HUA et XIAOTI (30).

## 7.11 A propos des prévisions de l'angle de bifurcation initial

Nous avons présenté aux chapitres 2 et 3, les principaux critères de rupture en mode mixte. Sur la *figure E.75*, nous avons confronté les valeurs de l'angle de bifurcation initial  $\theta_1$  relevées sur la plupart des disques brésiliens aux valeurs prédites par les critères de rupture les plus connus :  $S_{\min}$  (12),  $G_{\max}$  (17),  $\sigma_{\theta_{\max}}$  (9) et  $K_1^{\max}$  (21).

Les deux critères d'énergie  $S_{\min}$  et  $G_{\max}$  sont définis en contraintes planes.

Les valeurs de  $K_1$  et de  $K_{II}$  sont calculées au moyen de la solution d'ATKINSON (91).

La *figure E.75* présente l'évolution de l'angle  $\theta_1$  en fonction de l'angle de chargement initial  $\beta_0$ . Elle montre que, mis à part le critère du taux de restitution de l'énergie maximale proposé par NUISMER (18),

les trois autres donnent des valeurs de  $\theta_1$  voisines lorsque le chargement est de mode I + II, l'écart maximal ne dépassant pas 5 degrés. Si le chargement est de mode II, pur ou impur, cet écart peut atteindre 15 degrés.

La *figure E.75* montre, de plus, que l'écart est au maximum de 10 degrés entre les valeurs observées et les valeurs prédites par les critères, sauf celui de  $G_{\max}$  lorsque la valeur de  $\beta_0$  ne dépasse pas 20 degrés. Au-delà de cette valeur, seuls les critères de  $\sigma_{\theta_{\max}}$  et de  $K_{I\max}^*$  restent en bon accord avec les valeurs observées.

Remarque : L'angle  $\theta_1$  expérimental est déterminé à l'aide de la corde qui relie deux points successifs du chemin de fissure ; par suite, plus cette corde est faible, plus l'angle de bifurcation sera exact.

Nos essais sur disques brésiliens confirment les travaux de **BROEK et RICE (35)** à savoir que les valeurs de  $\theta_1$  prédites par le critère de  $\sigma_{\theta_{\max}}$  (9) restent en bon accord avec les valeurs de  $\theta_1$  mesurées même avec un chargement de mode II pur.

Par conséquent, nous avons opté pour le critère de  $\sigma_{\theta_{\max}}$  pour simuler numériquement la trajectoire de propagation d'une fissure de fatigue soumise à du mode mixte dans un disque brésilien.

## 7.12 A PROPOS DE LA SIMULATION NUMERIQUE DE LA TRAJECTOIRE DE LA FISSURE

### 7.12.1 METHODE

La simulation numérique de la trajectoire de la fissure a été réalisée à l'aide d'une méthode aux éléments finis développée par le CETIM (Centre Technique des Industries Mécaniques de SENLIS) et désignée sous le nom de CODE CA.ST.OR.2D. Les calculs sont réalisés sur un ordinateur VAX/11/780.

L'éprouvette est maillée dans sa totalité par des éléments triangulaires comportant 6 noeuds (*figure E.76*), avec un maillage plus fin près de la pointe de la fissure (*figures E.77a, E.77b*). Un remaillage de l'éprouvette est réalisé automatiquement après chaque incrément de propagation.

Les hypothèses et conditions dans lesquelles ce calcul est conduit sont les suivantes :

1. contraintes planes (comportement élastique) ;
2. le noeud A (*figure E.76*) ne peut pas se déplacer selon la direction y ;
3. les noeuds situés sur les bords de la fissure sont libres ;

4. les noeuds sur lesquels s'appliquent les forces P restent situés dans un même plan horizontal ;
5. la charge appliquée est de 7000 daN (valeur expérimentale), ce qui n'entraîne pas de plastification dans l'éprouvette en dehors des points de chargement et de la proximité de la pointe de la fissure.

La trajectoire de la fissure est alors simulée de la manière suivante :

- à partir de la longueur initiale de la fissure  $a_{eq0}$  et de l'angle d'inclinaison correspondant  $\beta_0$ , on recherche la direction de bifurcation  $\theta_1$ ,
- le long de cette direction, on fait alors progresser la fissure d'un incrément de longueur  $\Delta a_{T1}$  égal à  $a_{eq0}/30$ ,
- on calcule ensuite la longueur de la nouvelle fissure équivalente, ainsi que son angle d'inclinaison
- à partir de ces données, on détermine la direction de bifurcation de l'incrément suivant, et l'on renouvelle le processus cinq fois.

Remarque : On utilise le critère de la contrainte tangentielle maximale, sans tenir compte du frottement observé lorsque  $\beta_0$  vaut 25 degrés.

## 7.12.2 RESULTATS

La simulation a été conduite pour deux essais (disques en acier 35NCD16 A<sub>T</sub>), l'un sous un chargement initial de mode mixte (9,5 degrés), l'autre sous un chargement initial de mode II pur (25 degrés).

Le **tableau E.9** permet de comparer les valeurs calculées aux valeurs expérimentales de l'angle de bifurcation et de la longueur de fissure équivalente. On constate un bon accord entre les deux séries de valeurs, sauf pour les deux premiers incréments de l'essai à 25 degrés où l'on observe un écart maximal de l'ordre de 8 degrés au niveau des angles de bifurcation.

A partir des valeurs du **tableau E.9**, nous avons comparé à la **figure E.78** les trajectoires de propagation. Il apparaît que pour l'essai à 9,5 degrés, trajectoire expérimentale et trajectoire théorique se superposent exactement. Par contre, on observe un léger décalage entre les deux chemins dans le cas de l'essai à 25 degrés.

Le **tableau E.10** présente une comparaison des valeurs des facteurs d'intensité de contrainte obtenues numériquement d'une part, et par la méthode analytique d'ATKINSON (91) d'autre part. Si les valeurs de la composante de mode I sont très voisines, il n'en va pas tout à fait de même pour la composante de mode II, pour laquelle on observe un écart maximal de 20 % lorsque  $\beta_0 = 25$  degrés. L'écart est pratiquement négligeable à 9,5 degrés.

En fatigue, la méthode d'ATKINSON, basée sur l'approximation de la fissure équivalente semble un bon moyen d'estimer les facteurs d'intensité de contrainte dans un disque brésilien.

## Chapitre Huit

### MODELISATION

#### 8.1 Généralités

Au paragraphe 6.7, nous avons souligné que pour un angle  $\beta_0$  donné, la courbe des vitesses de fissuration  $\frac{da_T}{dN} - a_T$  (figure E.36), et la courbe des déplacements équivalents  $V_{Teq} - a_T$  (figure E.60) se placent de la même façon par rapport à la courbe correspondante obtenue en mode I.

Au vu de ce résultat, nous avons pensé comme UEDA et col. (26) – cf. § 2.2.5 – et TANAKA (37) – cf. : § 3.1 – que le mécanisme de propagation en mode I + II est gouverné par le critère de l'écartement des lèvres de la fissure, basé sur l'additivité des déplacements  $V_I$  et  $V_{II}$  en tête de fissure.

En effet, lorsqu'on remplace dans les équations des champs de déplacement calculés par la méthode de WEERTMAN (47) l'angle  $\theta$  par  $\pm 180^\circ$ , on obtient le mouvement relatif des deux lèvres de la fissure à partir des relations suivantes :

$$V_I = \frac{1 + \nu}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [K_I (2\kappa - 2)] \quad (8.1)$$

$$V_{II} = \frac{1 + \nu}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} [K_{II} (2\kappa + 2)]$$

avec :  $\kappa = 3 - \nu / 1 + \nu$  en contraintes planes

$\kappa = 3 - 4\nu$  en déformation plane.

D'après le critère de l'écartement critique à fond de fissure., la valeur du déplacement critique total  $V_{Tcr}$  est fonction de  $\Delta K$  selon :

$$(8.2) \quad V_{T Ic} = \beta_I \frac{\Delta K_I^2}{ER_{eI}} \quad \text{pour un chargement de mode I}$$

$$(8.3) \quad V_{T IIc} = \beta_{II} \frac{\Delta K_{II}^2}{ER_{eII}} \quad \text{pour un chargement de mode II.}$$

$\beta_I$ ,  $\beta_{II}$  sont des facteurs sans dimension qui dépendent du matériau, mais qui sont indépendants du chargement appliqué et de la géométrie de l'éprouvette,

$R_{el}$  est la limite d'élasticité en traction,

$R_{eII}$  est la limite d'élasticité en torsion.

## 8.2 Extension du critère de l'écartement critique

Rappelons que TANAKA (37) a proposé une loi de fissuration en mode mixte lorsque la fissure se propage suivant sa direction initiale (pas de bifurcation) sous la forme donnée par l'équation, (3.3). Pour aboutir à l'expression de  $\Delta K_{eq}$  correspondant, TANAKA formule les hypothèses suivantes :

1. les déplacements  $V_{Io}$  et  $V_{IIo}$  ne sont pas interactifs,
2. en mode I + II, le déplacement total des lèvres de la fissure est donné par la somme des valeurs absolues des déplacements  $V_{Io}$  et  $V_{IIo}$  calculés à chaque cycle :  $V_T = |V_{Io}| + |V_{IIo}|$ ,
3. la fissure avance lorsque  $V_T$  atteint une valeur critique  $V_{Tcr}$ ,
4. la limite d'élasticité en torsion,  $R_{eII}$ , vaut la moitié de la limite d'élasticité en traction,  $R_{el}$

Lorsqu'il y a branchement de la fissure, la valeur de l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte équivalent à un chargement de mode I + II est fonction de  $\Delta K_I$ , de  $\Delta K_{II}$  ainsi que de l'angle de bifurcation  $\theta$ .

### 8.2.1 Calcul de $\Delta K_{Ieqmax}$ en l'absence de frottement

Reprenons les hypothèses de TANAKA et considérons les déplacements  $V_{Io}$  et  $V_{IIo}$  non pas par rapport au repère  $(A_o, x_o, y_o)$  qui est lié à la direction de la fissure initiale  $\overline{OA_o}$ , mais plutôt leurs valeurs dans le repère  $(A_o, X_1, Y_1)$  lié à la fissure curviligne, valeurs que nous noterons  $V_{I1}$  et  $V_{II1}$  (figure E.79).

Le repère  $(A_o, X_1, Y_1)$  s'obtient à partir du repère  $(A_o, x_o, y_o)$  par une simple rotation, d'angle  $\theta_1$ .

L'indice 1 indique que les grandeurs considérées se rapportent au premier incrément de propagation.

Dans le repère  $(A_o, x_o, y_o)$ , le critère de l'écartement critique en mode mixte se traduit, d'après TANAKA, par la relation :

$$(8.4) \quad V_{Tcr} = |V_{Io}| + |V_{IIo}|.$$

Dans le repère  $(A_o, X_1, Y_1)$ , le même critère s'écrira :

$$(8.5) \quad V_{Tcr/l} = |V_{I1}| + |V_{II1}|.$$

avec (8.6) :

$$\begin{aligned} |V_{Icr/l}| &= \left| V_{Io} \cos \theta_1 \right| + \left| V_{IIo} \sin \theta_1 \right| \\ |V_{IIcr/l}| &= \left| V_{Io} \sin \theta_1 \right| + \left| V_{IIo} \cos \theta_1 \right|. \end{aligned}$$

En substituant les expressions des déplacements données par (8.6) dans (8.5), il vient :

$$(8.7) \quad V_{Tcr/l} = |V_{Io}(\cos \theta_1 + \sin \theta_1)| + |V_{IIo}(\cos \theta_1 + \sin \theta_1)|$$

Puisque la valeur critique du déplacement  $V_{Io}$  et du déplacement  $V_{IIo}$  est respectivement proportionnelle à  $\Delta K_{Io}^2$  et  $\Delta K_{IIo}^2$ , l'équation (8.7) peut s'écrire sous la forme :

$$(8.8) \quad (\Delta K_{Ieq}^2)_l = \Delta K_{Io}^2 (\cos \theta_1 + \sin \theta_1) + \Delta K_{IIo}^2 (\cos \theta_1 + \sin \theta_1)$$

La valeur maximale du facteur d'intensité de contrainte équivalent, nécessaire pour faire dévier la fissure de sa direction initiale vers la direction définie par l'angle  $\theta_1$ , est donnée par :

$$(8.9) \quad (\Delta K_{Ieqmax})_l = \sqrt{\Delta K_{Io}^2 + \Delta K_{IIo}^2} \times \sqrt{\cos \theta_1 + \sin \theta_1}$$

Dans l'équation (8.9), la valeur de  $\theta_1$ , qui doit être positive, est déterminée soit à partir des relevés expérimentaux, soit à partir d'un critère de propagation.

Le premier incrément de propagation  $\Delta a_{T1}$  (figure E.79) est gouverné par deux valeurs :  $\Delta K_{Io}$  et  $\Delta K_{IIo}$  calculées à partir de la longueur de la fissure initiale  $a_{exp}$ .

Pour le deuxième incrément de propagation,  $\Delta a_{T2} = |A_1 A_2|$ , les valeurs  $\Delta K_{I1}$  et  $\Delta K_{II1}$  sont calculées à partir de la longueur de fissure équivalente  $a_{eq1}$ . Cette longueur est fictive, la longueur de fissure le plus près de la réalité étant celle constituée par la somme des segments de droite :  $a_{eq0}$  et  $\Delta a_{T1}$ .

Pour approcher au mieux la longueur réelle de la fissure, les valeurs de  $K_I$  et  $K_{II}$  doivent être multipliées par un facteur de correction géométrique  $\alpha$ , donné par :

$$(8.10) \quad \alpha = \frac{a_{eq0} + \Delta a_{T1}}{a_{eq1}}$$

L'équation (8.9) se généralise alors pour un incrément de propagation, sous la forme :

$$(8.11) \quad (\Delta K_{Ieqmax})_k = \alpha_{k-1} (\sqrt{\Delta K_{I_{k-1}}^2 + \Delta K_{II_{k-1}}^2}) \cdot (\sqrt{\cos|\theta_k| + \sin|\theta_k|})$$

Pour une valeur de  $\theta_1$ , de  $\Delta K_{Io}$  et de  $\Delta K_{IIo}$  donnée, nous avons comparé (*tableau E.11*) la valeur de  $(\Delta K_{Ieqmax})_1$  calculée à partir de l'équation 8.9) aux valeurs correspondantes déduites soit à partir du critère de  $(\Delta K_{I\sigma\theta})_{max}$  (9). – équivalent au critère de la contrainte tangentielle maximale –, soit à partir du critère de  $\Delta K_{I_{max}}$  proposé par AMESTOY (21).

On constate alors que l'équation que nous proposons à partir du critère du déplacement critique nous donne des valeurs de  $\Delta K_{Ieqmax}$  très voisines de celles obtenues à partir de critères de propagation plus développés comme le critère d'AMESTOY – cf. : annexe A –.

### 8.2.2 Calcul de $(\Delta K_{Ieq})_{max}$ en présence de frottement

Les résultats des essais obtenus avec un chargement initial de mode II pur ( $\beta_o = 25^\circ$ ), et de mode II impur ( $\beta_o = 34^\circ$ ) ont montré, pour les deux nuances étudiées (acier 35NCD16 et acier 316) que :

- la diminution des vitesses de propagation est importante lorsque la composante de mode II est de compression ( $\Delta K_I < 0$ ),
- le ralentissement observé dépend du matériau, puisque l'étendue des surfaces matées de la préfissure devient plus importante quand on passe de l'acier 35NCD16 à l'acier 316.

Fort de ces résultats, nous avons considéré que l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte équivalent appliqué  $(\Delta K_{Ieq})_{app}$  se trouve réduit d'une quantité  $(\Delta K_{Ieq})_f$  due aux forces de frottement.

A partir de l'équation (7.2), qui exprime l'amplitude efficace du facteur d'intensité de contrainte équivalent, on déduit :

$$(8.12) \quad (\Delta K_{Ieq})_{eff} = (\Delta K_{Ieq})_{app} (1 - \Phi)$$

avec :

$$(8.13) \quad (\Delta K_{Ieq})_f = \Phi (\Delta K_{Ieq})_{app}$$

$\Phi$  désignant un coefficient qui traduit l'intensité des contraintes de fermeture s'exerçant sur les surfaces de la préfissure au cours de la propagation de la fissure.

A priori,  $\Phi$  est fonction des paramètres suivants :

- l'amplitude des déplacements  $V_I$  et  $V_{II}$  consécutifs à l'application simultanée du mode I cyclique et du mode II cyclique,
- la longueur des surfaces de la préfissure qui entrent en contact pendant le cyclage mécanique,



- la rugosité des surfaces de rupture qui caractérise leur géométrie,
- caractéristiques mécaniques du matériau qui définissent l'aptitude au matage des surfaces de rupture en contact.

Vu le nombre des paramètres, une évaluation précise du coefficient  $\Phi$  est difficile. On peut toutefois préciser davantage les principaux paramètres dont dépend ce coefficient en traduisant :

- le premier paramètre par l'angle  $\beta$  qui est lié aux valeurs de  $K_I$  et de  $K_{II}$  par :  $\beta = \text{Arctg}\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)$ ,
- les trois autres paramètres par un coefficient  $f$ , dont la valeur doit être proche du coefficient de frottement du matériau.

Au cours de la propagation, lorsque la longueur de la fissure équivalente devient importante, il doit exister une valeur limite de  $\beta$ , que nous noterons  $\beta^*$ , au-dessous de laquelle les surfaces de la préfissure ne sont plus en contact, c'est-à-dire pour laquelle  $\Phi$  est nul.

Compte tenu des hypothèses ci-dessus le coefficient de réduction de l'intensité des contraintes de fermeture peut être décrit par l'équation :

$$(8.14) \quad \Phi = \left(\frac{\beta - \beta^*}{\beta^*}\right) \cdot f$$

L'équation (8.12) se met alors sous la forme:

$$(8.15) \quad (\Delta K_{Ieq})_{eff} = (\Delta K_{Ieq})_{app} \left[ 1 - \left(\frac{\beta - \beta^*}{\beta^*}\right) \cdot f \right]$$

### 8.2.2.1 Estimation de la valeur limite $\beta^*$

Pour trouver une valeur approchée de  $\beta^*$ , nous nous sommes inspirés des figures E.32, E.34 et E.37 qui donnent l'évolution des déplacements  $V_A$  en fonction de la longueur  $a_T$  de la fissure.

Pour les essais à 15 degrés (pas de frottement entre les surfaces), la valeur du déplacement  $V_A$ , mesuré au premier incrément de propagation en mode I + II est de l'ordre de 6  $\mu\text{m}$  (figure E.32).

Sur la figure E.80, nous avons tracé l'évolution de l'angle  $\beta$  en fonction des déplacements  $V_A$  pour les essais de fissuration effectués avec un chargement de mode II pur et impur.

Dans le cas des essais de fissuration sur disques en acier 35NCD16<sub>B</sub>, un déplacement  $V_A$  de 6  $\mu\text{m}$  correspond, d'après la figure E.80 à un angle  $\beta$  compris entre 11 et 14 degrés et, d'après la figure E.53, à une valeur de  $\Delta K_I$  de 7  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  pour l'essai à 27 degrés, et de 10  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  pour l'essai à 37 degrés.

En tenant compte de la *figure E.80*, nous avons fixé la valeur de  $\beta^*$  à 13 degrés. Quand l'angle  $\beta$  de l'équation (8.14) atteindra cette valeur de 13 degrés, l'effet du frottement sur les vitesses de fissuration deviendra inexistant et le coefficient  $\Phi$  prendra une valeur nulle.

### 8.2.2.2 Estimation de la valeur de f

D'après l'équation (8.15) le blocage de la fissure aura lieu lorsque la valeur du coefficient  $\Phi$  atteint l'unité. Dans ce cas, f prendra la valeur suivante :

$$(8.16) \quad f = \frac{\beta^*}{\beta - \beta^*}$$

Pour la géométrie du disque brésilien, lorsque l'amorçage de la fissure sollicitée en mode I+II s'effectue en arrière plutôt qu'en avant de la pointe de la fissure, on considère que le blocage de la préfissure est déjà atteint. C'est la cas de l'essai à 45 degrés (*figure E.14*).

Pour un angle  $\beta$  de 45 degrés, et une valeur de  $\beta^*$  de 13 degrés, le coefficient f de frottement du matériau sera alors de 0,41, d'après l'équation (8.16).

Tous les paramètres intervenant dans le modèle simple que nous proposons pour calculer la valeur efficace du facteur d'intensité de contrainte équivalent à un chargement de mode I + II, avec ou sans frottement, sont ainsi entièrement définis.

## 8.3 Courbes de vitesse de propagation exprimées à partir des différents critères de bifurcation

### 8.3.1 Présentation des courbes obtenues

Sur les *figures E.81, E.82, E.83, E.84 et E.85*, nous avons présenté l'évolution des courbes exprimant les vitesses de fissuration en fonction des différents critères de bifurcation. Les résultats présentés sont ceux des essais effectués sur disque en acier 35NCD16  $A_T$  pour différentes valeurs de  $\beta_0$ .

La *figure E.81* montre l'évolution des courbes de vitesse de fissuration  $da_T/dN$  en fonction de  $\Delta K_I$ . Dans ce cas, les valeurs de  $\Delta K_I$  sont calculées pour une fissure dont la longueur est donnée par la projection de la fissure équivalente  $a_{eq}$  sur l'axe de chargement Oy (*figure E.79*).

La *figure E.82* montre l'évolution des courbes de vitesse en fonction de  $\Delta K_{\sigma\theta_{max}}$ . Les valeurs de

$\Delta K_{I\sigma\theta_{\max}}$  sont calculées à partir de l'équation (3.15) déduite du critère de la contrainte tangentielle maximale  $\sigma_{\theta_{\max}}$  (9).

La *figure E.83* montre les vitesses de fissuration exprimées, cette fois, en fonction de  $\Delta K_{I\max}^*$  dont les valeurs sont calculées à partir de l'équation (A.4) donnée par AMESTOY (21). Dans ce calcul, on considère le cas d'une fissure équivalente avec une branche dont la longueur tend vers zéro.

La *figure E.84* présente l'évolution des courbes  $da_T/dN$  en fonction de l'amplitude de l'énergie de déformation minimale, les valeurs de  $\Delta S_{\min}$  étant obtenues au moyen de l'équation (3.8).

La *figure E.85* indique l'évolution des courbes  $da_T/dN$  en fonction de l'amplitude maximale du facteur d'intensité de contrainte équivalent à un chargement de mode I + II ( $\Delta K_{Ieq\max}$ ). Les valeurs de ce facteur sont données par l'équation (8.11).

Pour toutes les figures, excepté la première (*figure E.81*), les abscisses des points sont calculées en multipliant les valeurs de  $\Delta K_I$  et de  $\Delta K_{II}$  par le facteur de correction géométrique  $U$  - cf. : équation (8.10) -, dont la valeur varie entre 1 et 1,6.

Pour tracer les courbes précédentes, nous avons postulé, comme l'ont fait BROEK et RICE (35) que la valeur de la vitesse de propagation d'une fissure chargée en mode I + II est égale à celle que l'on obtiendrait dans le cas d'un chargement en mode I pur avec une valeur de  $\Delta K_I$  ou de  $\Delta S_{\min}$  équivalente.

Le but recherché par les différentes méthodes de dépouillement est de rechercher le critère qui place le mieux les points de mesure des vitesses de fissuration sur la droite de PARIS obtenue en mode I.

### 8.3.2 Analyse des courbes en négligeant le frottement

La méthode de dépouillement utilisée dans le cas de la *figure E.81* est loin d'être satisfaisante : les courbes des vitesses dues à un chargement de mode I + II se placent trop largement au-dessus de la courbe correspondant au mode I pur, lorsque la valeur de  $\beta_0$  passe de 0 à 34 degrés. Toutefois, cette méthode de dépouillement est, de loin, la plus utilisée par les différents chercheurs - cf. : (35), (38), (46), (59) -.

Quant aux courbes de la *figure E.82*, on constate que pour un même niveau de vitesse, les valeurs de  $\Delta K_{I\sigma\theta_{\max}}$  sont plus faibles que celles du mode I pur lorsque le chargement initial est du mode I + II ( $\beta_0 = 5, 9,5$  et  $14,5$  degrés).

C'est l'inverse que l'on observe dans le cas d'un chargement initial en mode II pur ( $\beta = 25^\circ$ ) et impur ( $\beta = 34^\circ$ ). Les pentes des courbes sont nettement différentes de celle correspondant au mode I pur.

Rappelons que pour les essais à 25 et 34 degrés les vitesses de fissuration sont affaiblies par la présence du frottement.

En comparant les courbes de BROEK et RICE (*figure B.39*) à la nôtre (*figure E.82*), on constate qu'au début de la propagation de la fissure, les courbes  $\frac{da}{dN_T} - \Delta K_I$  obtenues avec un chargement de mode I + II n'évoluent pas de façon linéaire, mais présentent un 'coude'.

Les courbes de la *figure E.83* sont semblables, dans l'ensemble, aux courbes de la *figure E.82*. Cela confirme que le critère proposé par AMESTOY  $(\Delta K)_{I_{max}}^*$  diffère très peu du critère de la contrainte tangentielle maximale.

Le dépouillement des vitesses de propagation basé sur le critère de la densité d'énergie de déformation minimale  $(\Delta S_{min})$  montre, d'après la *figure E.84*, que tous les points de vitesse se placent sur une droite légèrement décalée vers la gauche de la courbe correspondant au mode I pur. Les pentes des essais à 5, 9,5 et 14,5 degrés sont les mêmes que pour l'essai en mode I pur.

D'après la *figure E.84*, lorsque la composante de mode I est de traction, le critère de  $SIH - 2$  donne globalement un meilleur résultat que le critère de  $SIH - 1$ .

La *figure E.85* montre l'évolution des courbes de vitesse de fissuration en fonction de  $(\Delta K_{I_{eq}})_{max}$ . Pour les courbes des essais sans frottement, on constate que, mis à part les deux premiers points, tous les autres ont tendance à se placer sur une même droite qui est parallèle à la courbe du mode I pur.

Lorsque le dépouillement est basé sur l'équation (8.11) que nous proposons, on obtient une évolution des courbes de vitesse de fissuration semblable à celle obtenue avec le critère de  $SIH - 2$ .

### 8.3.3 Analyse des courbes de vitesse en tenant compte du frottement

Dans le paragraphe précédent, nous avons constaté que lorsque les surfaces de la pré-fissure frottent l'une sur l'autre ( $\beta_o = 25$  et  $34$  degrés), les courbes de vitesse de fissuration se placent nettement en-dessous et à droite de la courbe de base ( $\beta_o = 0^\circ$ ).

Pour les essais à 25 et 34 degrés, la *figure E.86* indique que le coefficient de réduction de l'intensité des contraintes de fermeture  $\Phi$  décroît de manière progressive en fonction de la longueur de fissure  $a_T$ .

La *figure E.87* présente les courbes de vitesse des essais à 25 et 34 degrés lorsque le dépouillement est effectué en fonction de l'amplitude efficace de la densité d'énergie de déformation minimale, avec :  $(\Delta S_{min})_{eff} = (\Delta S_{min})_{app} (1 - \Phi)$ . On constate que les valeurs de  $(\Delta S_{min})_{eff}$  sont réduites, mais de façon insuffisante encore pour venir se placer sur la courbe du mode I pur.

Lorsque les courbes de vitesse des deux essais précédents sont tracées à partir de l'équation (8.15) les

points de vitesse correspondant aux essais à 25 et 34 degrés s'alignent mieux sur la courbe des vitesses obtenues en mode I pur (*figure E.88*).

Nous avons proposé un modèle simple qui permet de calculer la valeur du facteur d'intensité de contrainte maximal équivalent à un chargement de mode I + II. Ce modèle donne des résultats satisfaisants quelle que soit la valeur du rapport  $\Delta K_I/\Delta K_{II}$ . Lorsque la composante de mode I est négative, le frottement est modélisé par un coefficient de réduction de l'intensité des contraintes de fermeture  $\Phi$ .

## Chapitre Neuf

### CONCLUSION GENERALE

Dans le cadre d'une étude sur l'influence d'un chargement bimodal I + II sur la propagation des fissures de fatigue, dans les conditions expérimentales que nous avons précisées, nous avons pu mettre en évidence les résultats suivants :

- le domaine d'utilisation de l'éprouvette dite *disque brésilien* se trouve, pour la première fois étendu du domaine de la rupture à celui de la fatigue,
- cette éprouvette, dont le coût de fabrication est modique par rapport aux autres types d'éprouvette, s'adapte facilement, à l'aide d'un montage simple, non seulement à des essais de fissuration de fatigue en mode I, mais aussi en mode mixte.
- de toutes les éprouvettes employées habituellement pour les études de rupture ou de fissuration bimodale, seul le disque brésilien permet un accès aisé à une gamme étendue et continue de rapports  $K_I/K_{II}$ .
- à l'aide de cette même éprouvette, on passe très facilement du domaine de chargement de traction ( $\Delta K_I > 0$ ) à celui d'un chargement de compression ( $\Delta K_I < 0$ ) par simple rotation du défaut initial par rapport à la direction de chargement. Nous avons défini le mode pour lequel  $\Delta K_I$  est négatif comme le *mode II impur*.
- un inconvénient à cete éprouvette est que sa fisuration exige une charge importante, néanmoins tout à fait accessible à une machine de fatigue de capacité moyenne.
- la comparaison des vitesses de fissuration des essais réalisés en mode I sur disque brésilien en acier 35NCD16, basées sur les modèles de KIM et d'ATKINSON à des essais de fissuration en mode I sur éprouvettes C.T. nous a permis de conclure à l'adéquation du modèle d'ATKINSON.
- un calcul des facteurs d'intensité de contrainte par la méthode des éléments finis et avec l'approximation de la fissure équivalente, a révélé, dans deux cas de chargement en mode mixte différents, que l'utilisation conjointe des formules d'ATKINSON et du critère de rupture de la contrainte tangentielle maximale  $\sigma_{\theta_{max}}$  est un bon moyen d'estimer les facteurs d'intensité de contrainte au cours de la propagation d'une fissure de fatigue dans un disque brésilien.
- en toute rigueur, le calcul des facteurs d'intensité de contrainte correspondant à un chargement de fatigue en mode mixte doit tenir compte du fait que l'on se trouve en présence d'une fissure curviligne, et non pas linéaire. En raison de la complexité d'un tel calcul, nous avons choisi de

raisonner en termes de fissure rectiligne équivalente, ce qui consiste à assimiler l'ensemble demi-entaille, préfissure et branche à une fissure droite issue du centre du disque.

- les résultats expérimentaux des essais menés sur disque en acier 35NCD16 et en acier 316 dans un domaine où les vitesses sont comprises entre  $10^{-5}$  mm/cycle et  $10^{-4}$  mm/cycle ont montré que, pour une même longueur de fissure initiale, la superposition d'un mode II cyclique à un mode I cyclique engendre, par rapport au mode I pur, trois effets :

1. *une modification de la direction initiale de la fissure :*

Notre étude a confirmé qu'une fissure de fatigue chargée en mode I + II bifurque suivant une direction  $\theta_1$ , nettement différente de sa direction première, et adopte une trajectoire curviligne en tendant à venir se placer au cours de la fissuration dans la **direction qui favorise un chargement de mode I pur**.

La valeur maximale de l'angle initial de bifurcation varie de 0 à 70 degrés environ, lorsque l'angle de chargement  $\beta_0$  varie de 0 à 45 degrés.

2. *une modification de la vitesse de propagation qui va généralement dans le sens d'une augmentation lorsque la composante de mode I est de traction, et dans le sens d'une diminution quand cette composante est de compression*

L'analyse des résultats expérimentaux concernant les vitesses de fissuration a révélé qu'un dépouillement *correct* de ces vitesses en fonction d'un paramètre représentatif de la variation des amplitudes des facteurs d'intensité de contrainte passe nécessairement par un calcul qui tient compte des deux composantes,  $\Delta K_I$  et  $\Delta K_{II}$ , ainsi que de l'angle de bifurcation  $\theta$ .

Si le chargement initial est de mode II pur ou impur ( $\Delta K_I < 0$ ), il faut, en plus, tenir compte du **frottement** dont la présence a été confirmée par le **matage** des surfaces de la préfissure (nous n'avons pas observé de matage au niveau des surfaces de la partie curviligne de la fissure).

Tenant compte des phénomènes mécaniques qui viennent d'être évoqués, nous avons proposé un modèle qui permet de calculer la valeur d'un paramètre appelé **facteur d'intensité de contrainte maximale équivalent à un chargement de mode I + II**,  $(\Delta K_{Ieq})_{max}$ .

Ce modèle fait intervenir dans sa formulation les valeurs de  $\Delta K_I$ , de  $\Delta K_{II}$ , de l'angle de bifurcation  $\theta$  et d'un facteur de correction de géométrie  $Q$  qui tient compte de la longueur de la fissure curviligne.

En présence de frottement, nous proposons une nouvelle expression donnant la valeur de l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte maximale efficace,  $(\Delta K_{Ieqmax})_{eff}$ . Sa valeur est alors fonction d'un coefficient de réduction  $\Phi$  qui traduit l'intensité des contraintes de fermeture s'exerçant au niveau des surfaces de la préfissure au cours de la fissuration.

La validité du modèle proposé semble confirmée par les résultats expérimentaux obtenus au moyen des éprouvettes type disque brésilien en acier 35NCD16.

3. *une augmentation importante de la taille de la zone plastique à la pointe de la fissure*

En effet, les mesurs de rugosité ont révélé qu'en mode II pur, la taille de la zone plastique monotone suivant la direction de la pré-fissure peut atteindre, dans le cas de l'acier 316 cinq fois la taille de la zone plastique en mode I pur.

La présente étude a montré que le domaine de fissuration par fatigue en mode mixte est complexe et les résultats auxquels nous avons abouti à l'aide des éprouvettes du type disque brésilien ne permettent d'examiner qu'une petite partie du domaine relatif à ce problème.

Toutefois, ces résultats ouvrent la voie à d'autres études comme par exemple, l'influence du milieu ou l'influence des surcharges sur la propagation des fissurs de fatigue en mode mixte.



## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

(1) EFTIS J. SUBRAMONIAN N.

The inclined cracks under biaxial load

Eng. Fract. Mech. Vol. 10 p.43–67 1978

(2) WILLIAMS M.L.

On the stress distribution at the base of a stationary crack

J. of Appl. Mech. Vol. 24 p.109–114 1957

(3) EFTIS J. SUBRAMONIAN N. LIEBOWITZ H.

Crack border stress and displacement equations revised

Eng. Fract. Mech. Vol. 9 p.189–210 1977

(4) DALLY J.W. SANFORD R.J.

Classification of stress intensity factors from isochromatic fringe patterns

Exp. Mech. Vol. 18 p.441–448 1978

(5) WILLIAMS J.G. EWING P.D.

Fracture under complex stress. The angled crack problem

Int. J. of Fract. Mech. Vol. 8 no 4 p.441–445 1972

(6) FINNIE I. SAITH A.

A note on the angled crack problem and the directional stability of cracks

Int. J. of Fract. Vol. 9 p.484–486 1973

(7) SIH G.C. PARIS P.C. ERDOGAN F.

Crack–tip stress intensity factors for plane extension and plate bending problems

J. of Appl. Mech. no 29 p.306–312 1962

(8) JODIN P. PLUVINAGE G.

Critères de rupture en condition polymodale (mode I + II)

Cahiers du Gr. Fr. de Rhéologie no 5 p.59–69 1979

(9) ERDOGAN F. SIH G.C.

On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear

J. of Basic Eng. Vol. 85 p.519–527 1963

(10) MAITI S.K. SMITH R.A.

Comparison of the criteria for mixed mode brittle fracture based on the preinstability stress strain field  
Int. J. of Fract. Vol. 23 p.281-295 1983 - Vol. 24 p.5-22 1984

(11) MAITI S.K.

The unstable extension of inclined cracks under uniaxial tension and compression  
Advances in fracture research  
I.C.F.6 NEW DELHI India Tome 2 p.987-993 1984

(12) SIH G.C.

Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems  
Int. J of Fract. Vol. 10 no 3 p.305-321 1974

(13) SWEDLOW J.L.

Criteria for growth of the angled crack  
ASTP 601 p.506-521 1976

(14) THEOCARIS P.S. ANDRIANOPOULOS N.P.

A modified strain energy density criterion applied to crack propagation  
J. of Appl. Mech. Vol. 49 p.81-86 1982

(15) KIPP M.E. SIH G.C.

The strain energy density failure criterion applied to notched elastic solids  
Int. J. of Sol. Str. Vol. 11 no 2 p.153-173 1975

(16) PALANISWAMY K. KNAUSS W.G.

On the problem of crack-extension in brittle solids under general loading  
Mechanics today 1st Ed. Pergamon Press Vol. 4 p.87-145 1978

(17) HUSSAIN M.A. PU S.L. UNDERWOOD J.

Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II  
Fract. Analysis A.S.T.M. STP 560 p. 2-28 1974

(18) NUISMER R.J.

An energy release rate criterion for mixed mode fracture  
Int. J. of Fract. Vol. 11 no 2 p.245-250 1975

- (19) HWANG K.C. HUA D.H. YU S.W.  
On the maximum energy release-rate criterion for fracture under combined loads  
Proc. of I.C.F.5 CANNES p.123-130 1981
- (20) ICHIKAWA M. TANAKA S.  
A critical analysis of the relationship between the energy release rate and the stress intensity factors for non-planar crack extension under combined mode loading  
Int. J. of Fract. Vol. 18 no 1 p.19-28 1982
- (21) AMESTOY M. BUI H.D. DANG VAN K.  
Analytic asymptotic solution of the kinked crack problem  
Proc. of I.C.F.V CANNES p.348- 1981
- (22) VITEK V.  
Plane strain stress intensity factors for branched cracks  
Int. J. of Fract. Vol. 13 no 4 p.481-501 1977
- (23) WU H.C. CHANG K.J.  
Strain failure criterion and its application to angled crack problem in compression  
Univ. of IOWA Report no G378-DME-75-004 1975
- (24) WU H.C. CHANG K.J.  
Angled elliptic notch problem in compression and tension J. of Appl. Mech. Vol. 45 p.258-262 1978
- (25) CHANG K.J.  
On the maximum strain criterion - A new approach to the angled crack problem  
Eng. Fract. Mech. Vol. 14 p.107-124 1981
- (26) UEDA Y. IKEDA K. YAO T.  
Characteristics of brittle fracture under general combined modes including those under bi-axial tensile loads  
Eng. Fract. Mech. Vol. 18 no 6 p.1131-1158 1983
- (27) JODIN P.  
Contribution à l'étude des modes mixtes de rupture (mode I + II)  
Université de METZ Thèse de Doctorat ès Sciences 1984
- (28) IRWIN G.R.  
Structural aspects of brittle fracture  
Applied Materials Research p.65-81 1964

(29) POOK L.P.

The effect of crack angle on fracture toughness

Eng. Fract. Mech. Vol. no 3 p.205–218 1971

(30) HUA G. XIAOTI Z.

A study on the plastic zone ahead of mixed mode crack tip fractured under linear elastic condition

Acta Metal. Sinica Vol. 17 no 1 p.74–82 1981

(31) LOUAH M.

Rapport de DEA

Université de Technologie de COMPIEGNE 1978

(32) LOUAH M.

Détermination de la taille de la zone plastique en fond de fissure à l'aide de mesures de rugosité

Scripta metal. Vol. 13 p.677–680 1979

(33) COTTERELL B.

Brittle fracture in compression

Int. J. of Fract. Mech. Vol. 8 no 2 p.195–208 1972

(34) WOO C.W. CHOW C.L.

On inclined crack under compressive loading

Proc. of Int. Symposium on Fracture Mechanics CHINA p.251–257 1984

(35) BROEK D. RICE R.C.

Fatigue crack propagation of rail steels

Rapport no FRA/ORD–81/30 Battele Columbus Lab. 1981

(36) HIDA S. KOBAYASHI A.S.

Crack propagation rate in 7075 T 6 plates under cyclic tensile and transverse shear loading

J. of Basic Eng. A.S.M.E. p.764–769 1969

(37) TANAKA K.

Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis

Eng. Fract. Mech. Vol. 6 p.493–507 1974

- (38) PUSTEJOVSKY M.A.  
Fatigue crack propagation in Titanium under general in-plane loading  
I. Experiments - II. Analysis  
Eng. Fract. Mech. Vol. 11 p.9-31 1979
- (39) BADALIAN R.  
Mixed mode fatigue crack propagation  
Proc. of U.S. - Greece Symp. on mixed mode crack propagation  
Sitjhoff and Nordhoff Intern. Publ. Netherlands 1981
- (40) BADALIAN R.  
Application of strain energy density factor to fatigue crack growth analysis  
Eng. Fract. Mech. Vol. 13 p.657-666 1980
- (41) SIH G.C. BARTHELEMY B.M.  
Mixed mode fatigue crack growth predictions  
Eng. Fract. Mech. Vol. 13 p.439-451 1980
- (42) CHINADURAI R. PANDEY R.K. JOSHI B.K.  
Fatigue crack propagation from an inclined crack under combined mode loading  
Adv. in Fract. Res. I.C.F.6 NEW DELHI India Vol. 2 p.1703-1710 1984
- (43) PATEL A.B. PANDEY R.K.  
Fatigue crack growth under mixed mode loading  
Fatigue of Eng. Mat. and Struct. Vol. 4 no 1 p.65-77 1981
- (44) HUA G. BROWN M.W. MILLER K.J.  
Mixed-mode fatigue thresholds  
Fatigue of Eng. Mat. and Struct. Vol. 5 no 1 p.1-17 1980
- (45) CHATTERJEE S.N.  
The stress field in the neighborhood of a branched crack in an infinite elastic sheet  
Int. J. of Sol. Struct. Vol. 11 p.521-538 1975
- (46) FLAVENOT J.F. SERRES D. GREGOIRE R. ANTON F.  
Essai de fissuration par fatigue en mode I et II en phase sur un acier de cuve A508  
C.E.A. Institut de Prot. et Santé Nucl. Rapport DSN no358 1980

- (47) WEERTMAN J.  
Rate of growth of fatigue cracks calculated from the theory of infinitesimal dislocations distributed on a plane  
Int. J. of Fract. Mech. Vol. 2 p.460–467 (1966)
- (48) XUNFANG S. GUANGQIN W.  
Fatigue propagation of inclined crack in uniaxial tension stress field  
Proc. of I.C.F. Int. Symp. on Fract. Mech. Science Press China p.804–809 1983
- (49) SMITH R.A.  
Interfaces of wear and fatigue  
Proc. Conf. on Fundamentals of Tribology Ed. N.P. SUH and N. SAHA M.I.T. CAMBRIDGE p.605–616 1980
- (50) SMITH M.C. SMITH R.A.  
The formation of spherical wear debris in mode II fatigue cracks  
Wear Vol. 76 p.105–128 1982
- (51) BRIGGS G.A.D. SMITH R.A.  
Stress intensity factor calculation of a mixed mode crack growth problem  
Proc. Conf. SWANSEA U.K. p.135–144 1980
- (52) MIYAMOTO H. FUKUDA S. KAGEYAMA K.  
Finite element analysis of crack propagation under compression  
Fracture I.C.F. IV WATERLOO Canada Vol. 3 p.491–494 1977
- (53) TRUCHON M. AMESTOY M. DANG VAN K.  
Experimental study of fatigue crack growth  
Proc. of I.C.F. V CANNES France p.1841–1850 1981
- (54) D'HONDT H. TRUCHON M.  
Etude du branchement des fissures de fatigue sous sollicitations bimodales non proportionnelles. Influence de la cinétique de propagation  
IRSID PE 3459 313221 1982
- (55) HOURLIER F.  
Propagation des fissures de fatigue sous sollicitations polymodales  
Thèse d'Etat Université de Technologie COMPIEGNE 1982

- (56) ERDOGAN F. RATWANI M.  
A circumferential crack in cylindrical shell under torsion  
Int. J. of Fract. Mech. Vol. 8 p.87–95 1972
- (57) FORMAN  
Journal of Basic Eng. Vol. 89 p.459–465 1967
- (58) ELBER W.  
The significance of fatigue crack closure  
A.S.T.M. STP 486 p.230– 197.
- (59) KITAGAWA H. YUUKI R. TOHGO K.  
Fatigue crack propagation behavior under mixed mode conditions  
Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. Vol. 47 no 424A p.1283–1292 1981
- (60) POOK L.P. DENTON K.  
The fatigue crack growth in thin-walled mild steel cylinders loaded in torsion  
Int. J. of Fract. Mech. Vol. 8 p.118–120 1972
- (61) JONES D.L. CHISHOLM D.B.  
An investigation of the edge sliding modes in fracture mechanics  
Eng. Fract. Mech. Vol. 7 no 3 p.261–270 1975
- (62) POOK L.P.  
An observation on mode II fatigue crack growth threshold behaviour  
Int. J. of Fract. Vol. 13 p.867–869 1977
- (63) TOOR R.M.  
On fracture mechanics under complex stress  
Eng. Fract. Mech. Vol. 7 p.321–329 1975
- (64) OTSUKA A. MORI K. MIYATA T.  
The condition of fatigue crack growth in mixed mode condition  
Eng. Fract. Mech. Vol. 7 no 3 p.429–439 1975
- (65) ROBERTS R. KIBLER J.J.  
Mode II fatigue crack propagation  
J. of Basic Eng. p.671–680 1971

- (66) OTSUKA A. MORI K. OASHIMA T. TSUYAMA S.  
 Mode II fatigue crack growth in aluminium alloys and mild steel  
 Advances in Fracture Research. Proc. of I.C.F. V CANNES p.1851–1858 1981
- (67) LIU A.F.C.  
 Crack growth and failure of aluminum plate under in--plane shear  
 A.I.A.A. J. Vol. 12 no 2 p.180–185 1974
- (68) HILLS D.A. ASHELBY D.W.  
 Combined mode fatigue crack propagation predictions using mode I data  
 Eng. Fract. Mech. Vol. 13 p.589–594 1979
- (69) ANTOLOVICH K.D. SAXENA A. CHANANI G.R.  
 A model for fatigue crack propagation  
 Eng. Fract. Mech. Vol. 17 p.649–652 1975
- (70) HUA G. BROWN M.W. MILLER K.J.  
 Fatigue crack growth under non--proportionnal loading  
 Proc. of I.C.F. Int. Symp. on Fract. Mech. Science Press China p.666–671 1983
- (71) OTSUKA A. MORI K. TOHGO K.  
 Mode II fatigue crack growth in aluminum alloys  
 The Society of Mat. Sc. Japan 1985
- (72) CARNEIRO F.L.L.B. et BARCELLOS A.  
 Concrete tensile strength  
 Union of testing and research laboratoires for materials and structures no 13 1953
- (73) ADEDIMILA A.S.  
 Indirect tensile test equations for tensile and elastic properties of materials  
 Proc.Instn Civ.Engrs Vol.69 Part 2 p.175–184 1980
- (74) HENRY J.P. PACQET J. , présenté par GERMAIN P.  
 Mécanique de la rupture appliquée aux dépouillements des essais brésiliens sur disques  
 et anneaux de roches  
 C.R.Acad.Sc.Paris Série B t.284 no 23 p.511–514 Juin 1977



**(75) TIMOSHENKO S.P. GOODIER J.N.**

Theory of elasticity

Third edition Mc Graw-Hill New-York 1970

**(76) COKER E.G. FILON L.N.G.**

A treatise on photo-elasticity

Cambridge University Press London 1931

**(77) Pr. ERDLAC R.J. - cf. : (91) -**

Dept. of Mech.Engineering University of Pittsburgh

**(78) HONDROS G.**

The evaluation of Poisson's ratio and the modulus of materials of a low tensile resistance by the Brazilian (indirect tensile) test with particular reference to concrete

Aust.J.of Appl.Sc. Vol.10 p.361-364 1957

**(79) IRWIN G.R.**

Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate

J.of Appl.Mech. Vol.79 no 24 p.361-364 1957

**(80) ROOKE D.P. CARTWRIGHT D.J.**

Compendium of stress intensity factors

Her Majesty's sttionary office London 1979

**(81) LIBATSKII I.L. KOVCHIK S.E.**

Fracture of discs containing cracks

F.K.M.M. Vol.3 no 4 p.458-464 1967

**(82) YAREMA S.Y. KRESTIN G.S.**

Determination of the modulus of cohesion of brittle materials by compressive tests on disc specimens containing crack

F.K.M.M. Vol.2 no 1 p.10-14 1966

**(83) TADA H. , PARIS P.C. et IRWIN G.R.**

The stress analysis of cracks handbook Del.research corporation

Hellertown PA 1973

**(84) SANCHEZ J.**

Application of the disk test to mode I + II fracture analysis

M.S.Thesis Mechanical Engineering Departement University of Pittsburgh PA 1979

**(85) TWEED J. et DAS S.C. ROOK D.P.**

The stress intensity factors of a radial-crack in a finite elastic disc

Int.J.Engng Sci. Vol.10 p.323-335 1972

**(86) ROOKE D.P. TWEED J.**

The stress intensity factors of a radial crack in a point loaded disc

Int.J.Engng Sci. Vol.11 p.285-290 1973

**(87) KIM C.S. KITAGAWA H.**

A method of determination of mixed mode fracture toughness of brittle materials under compression

Fract.Mech.and Technology - Edited by SIH G.C. CHOW C.L. Vol.II p.1011 - 1019 1977

**(88) MUSKHELISHVILI N.I.**

Singular integral equations

Translated by RADOK J.R.M. Noordhoff Netherlands p.251 1953

**(89) ISIDA M.**

Arbitrary loading problems of doubly symmetric regions containing a central crack

Eng.Fract.Mech. Vol.7 p.505-514 1975

**(90) AWAJI H. SATO S.**

Combined mode fracture toughness measurement by the disk test

J.of Eng.Mat.Tech. Vol.100 p.175-182 1978

**(91) ATKINSON C.**

Combined mode fracture via the cracked Brazilian disc test

Int.J.of Fract. Vol.18 no 4 p.279-291 1982

**(92) ATKINSON C.**

On dislocation densities and stress singularities associated with cracks and pile-ups  
in inhomogenous media

Int.J.Engng.Sci. Vol.10 p.45-71 1972

**(93) NIWA Y. KOBAYASHI S. FUKUI T.**

Effects of couple stresses on stress distributions in a disc specimen subjected to diametral compression  
Mem.Fac.Eng. Kyoto Univ. Vol.33 no 3 p.118–127 1971

**(94) SHAH R.C.**

Fracture under combined modes in 4340 steel  
ASTM S.T.P. 560 p.29–52 1974

**(95) PARLETUN L.G.**

Determination of the growth of branched cracks by numerical methods.  
Eng. Fract. Mech. Vol. 11 p.343–358 1979

**(96) WU H.C.**

Fracture under combined loads by maximum energy release rate criterion.  
J. of Appl. Mech. Vol. 45 p.553–558 1978

**(97) BILBY B.A. CARDEW G.E. HOWARD I.C.**

Stress intensity factors at the tip of kinked and forked cracks.  
Fracture 1977 Vol. 3 I.C.F. 4 WATERLOO Canada p.197–200 19–24 juin 1977

**(98) BILBY B.A. CARDEW G.E.**

The crack with a kinked tip  
Int. Journal of Fract. Vol. 11 p.708–712 1975

**(99) KITAGAWA H. YUUKI R. OHIRA T.**

Crack morphological aspects in fracture mechanics  
Eng. Fract. Mech. Vol. 7 p.515–529 1975

**(100) WIESELMANN P.A.**

Doctoral dissertation –  
Massachusetts Institute of Technology CAMBRIDGE 1969

**(101) BOWIE O.L.**

Rectangular tensile sheet with edge cracks  
J. of Appl. Mech. Vol. 31 p.208 1964

**(102) LO K.K.**

Analysis of branched cracks  
J. of Appl. Mech. Vol. 45 p.797–802 1978

- (103) KARIHALOO B.L. KEER L.M. NEMAT-NASSER S.  
Crack kinking under non symmetric loading  
Eng. Fract. Mech. Vol. 13 p.879-888 1980
- (104) COTTERELL B. RICE J.R.  
Slightly curved or kinked cracks  
Int. J. of Fract. Vol. 16 no 2 p.155-169 1980
- (105) BANICHUK N.V.  
Determination of the form of a curvilinear crack by small parameter technique  
Izv. An. SSR MTT Vol. 7 no 2 p.130-137 1970
- (106) HWANG K.C. HUA D.H. YU S.W.  
On the maximum energy-release-rate criterion for fracture under combined loads  
Proceedings of I.C.F. 5 p.123-130 CANNES 1981
- (107) STEIF P.S.  
Crack extension under compressive loading  
Eng. Fract. Mech. Vol. 20 no 3 p.463-473 1984
- (108) NEMAT-NASSER S. HORII H.  
Compression-induced nonplanar crack extension with application to splitting, exfoliation, and rockburst  
J. of Geoph. Res. Vol. 87 no B8 p.6805-6821 1982
- (109) KARIHALOO B.L. et NEMAT-NASSER S.  
Thermally induced crack curving in brittle solids  
Analytical and experimental fracture mechanics  
SIH G. E. and MIRABILE M. ed. Sijthoff and Noordhoff p.265-272 1981
- (110) LIEURADE H.P.  
Comportement mécanique et métallurgique des aciers dans le domaine de la fatigue oligocyclique -  
Etude des phénomènes et application à la croissance des fissures  
Thèse d'Etat Université de METZ 1978
- (111) BILBY B.A. COTTERELL A.H. SWINDEN K.H.  
Presentation of plasticity at notches by linear dislocation arrays  
Proc. Royal Soc. série A Vol. 285 p.22 1965
- (112) CHU W.Y. HSIAO C.M. HUALIU T.  
Fatigue under cyclic compressive load  
Fat. Eng. Mat. Str. Vol. 7 no 4 p. 279-284 1984

## Annexe A

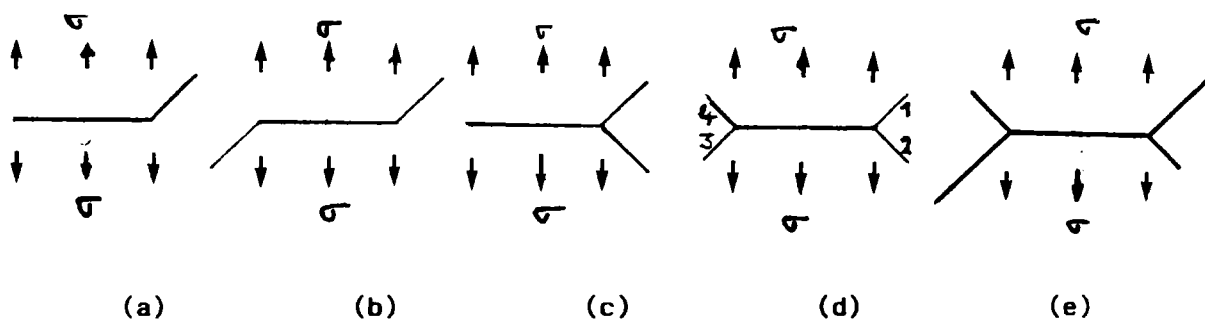
### DETERMINATION DES FACTEURS D'INTENSITE DE CONTRAINTE

#### D'UNE FISSURE BRANCHEE

##### 1 Aspect général du problème

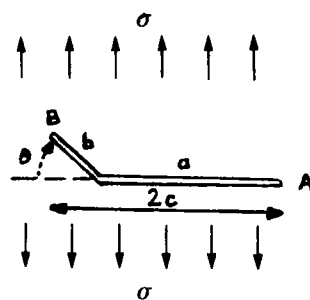
Le terme de *branche* ou de *branchement* désigne toute extension d'une fissure dans une direction non colinéaire à sa direction initiale.

La figure A.1 illustre les différentes morphologies de fissures branchées que l'on peut rencontrer. Parmi ces différentes formes, c'est la fissure à branche unique (figure A.1a) qui a le plus retenu l'attention des auteurs.



- Figure A.1 -  
Chargement en mode I

La plupart des auteurs ont tenté de résoudre le problème pour des valeurs arbitraires de la quantité  $b/a$ , dans le cas d'un chargement de traction en mode I pour un angle de branchement  $\theta_0$  donné (figure A.2). Certains ont tenté de trouver une solution à ce problème dans le cas où le chargement est de mode mixte, soit de traction (16) - (17) - (22) - (103), soit de compression (107) - (109) -.



- Figure A.2 -

Nous ne considérerons, ici, que le cas de fissures linéaires. A quelques exceptions près, la majorité des méthodes d'étude sont basées sur la formulation des potentiels complexes de **MUSKHELISHVILI (88)** et une représentation conforme (consistant à transformer la fissure en un cercle), la solution finale se ramenant ainsi :

- soit à des développements en séries infinies (21),
- soit à la résolution (numérique) d'équations intégrales (22), (45).

Citons également des calculs aux éléments finis, comme le fait **PARLETUN (95)** pour déterminer l'angle de branchement, ainsi que la propagation des branches.

Nous allons distinguer, pour une même forme de fissure, le cas où le branchement est fini et le cas où il tend vers zéro, ceci pour les deux types de chargement : mode I et mode I + II.

## 2 Fissure monobranche ou asymétrique

### 2.1 Fissure à branche évanescence ( $b \rightarrow 0$ )

\* **NUISMER (18)** propose une solution analytique très simple ; il suppose une continuité des contraintes entre l'état initial ( $b = 0$ ) et celui d'une fissure avec branchement évanescence ( $b \rightarrow 0$ ).

Soit  $\sigma_\theta$  la contrainte de traction perpendiculaire à la direction de la branche, et soit  $\tau_{r\theta}$  la contrainte de cisaillement dans le plan de branchement ; les facteurs d'intensité de contrainte de la fissure branchée s'écrivent alors :

$$(A.1) \quad \begin{aligned} K_I^* &= \sigma_\theta \sqrt{2\pi r} \\ K_{II}^* &= \tau_{r\theta} \sqrt{2\pi r} \end{aligned}$$

Compte tenu de l'hypothèse de continuité des contraintes, dont le champ est donné par **WILLIAMS (2)**,  $K_I^*$  et  $K_{II}^*$  ont pour expression, en fonction des facteurs d'intensité de contrainte avant branchement,  $K_I$  et  $K_{II}$  :

$$(A.2) \quad \begin{aligned} K_I^* &= K_I \cos \frac{3\theta}{2} - 3 K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{2\theta}{2} \\ K_{II}^* &= K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{2\theta}{2} + K_{II} \cos \frac{\theta}{2} (1 - 3 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \end{aligned}$$

Les relations précédentes peuvent encore se mettre sous la forme matricielle suivante, où les fonctions  $K_{ij}$  dépendent de l'angle de bifurcation  $\theta_0$ .

$$(A.3) \quad \begin{bmatrix} * \\ K_I \\ * \\ K_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{bmatrix}$$

Bien que fautive d'un point de vue théorique – cf. : ISHIKAWA et TANAKA (20) –, la solution de NUISMER donne pour des angles de branchement compris entre 0 et 60 degrés, des résultats voisins de la solution exacte proposée par AMESTOY et col. (21) – tableau A.1 – .

\* En partant de l'équation obtenue par HUSSAIN et col.(17) au moyen de la méthode générale présentée en introduction, dans le cas d'une branche de longueur  $b$  finie, AMESTOY et col. (21) déduisent une équation asymptotique de façon simple et la résolvent par l'intermédiaire de séries jusqu'aux premiers termes, quand  $b \rightarrow 0$ .

Ils énoncent que la propagation de la branche aura lieu suivant la direction définie par l'angle  $\theta = \pi m$  lorsque :

$$(A.4) \quad \frac{dK_I^*}{dm} = 0 \quad K_{II}^* = 0$$

Ils proposent, pour les coefficients  $K_{ij}$ , des formules analytiques approchées, (A.5), dont l'écart avec la solution numérique est au maximum de 2% lorsque :  $0 < \theta_0 < \pi/4$ , et reste très acceptable au-delà de 40 degrés.

$$(A.5) \quad \begin{aligned} k_{11} &= \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{m/2} \left(\cos \theta - \frac{1}{2\pi} \sin L \theta\right) \\ k_{12} &= \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{m/2} \left(-\frac{3}{2} \sin \theta\right) \\ k_{21} &= \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{m/2} \left(\frac{1}{2} \sin \theta\right) \\ k_{22} &= \left(\frac{1-m}{1+m}\right)^{m/2} \left(\cos \theta + \frac{1}{2\pi} \sin L \theta\right) \end{aligned}$$

avec :

$$L = \text{Log} \left[ \frac{1-m}{1+m} \right] - \frac{2m}{1-m^2} \quad \text{avec} \quad m = \frac{\theta}{\pi}$$

```

*****
*Réf !  $\theta$  ! 0° * 10° * 20° * 30° * 40° * 50° *
*-----*
*(18)! K ! 1 * 0,988 * 0,955 * 0,901 * 0,830 * 0,744 *
*(21)! 11 ! 1 * 0,988 * 0,955 * 0,901 * 0,831 * 0,748 *
* * * * *
*(18)! K ! 0 * -0,259 * -0,504 * -0,725 * -0,907 * -1,04 *
*(21)! 12 ! 0 * -0,260 * -0,507 * -0,730 * -0,919 * -1,066 *
* * * * *
*(18)! K ! 0 * 0,086 * 0,168 * 0,241 * 0,302 * 0,347 *
*(21)! 21 ! 0 * 0,086 * 0,168 * 0,240 * 0,299 * 0,343 *
* * * * *
*(18)! K ! 0 * 0,973 * 0,895 * 0,771 * 0,609 * 0,420 *
*(21)! 22 ! 0 * 0,976 * 0,907 * 0,797 * 0,654 * 0,487 *
*****

```

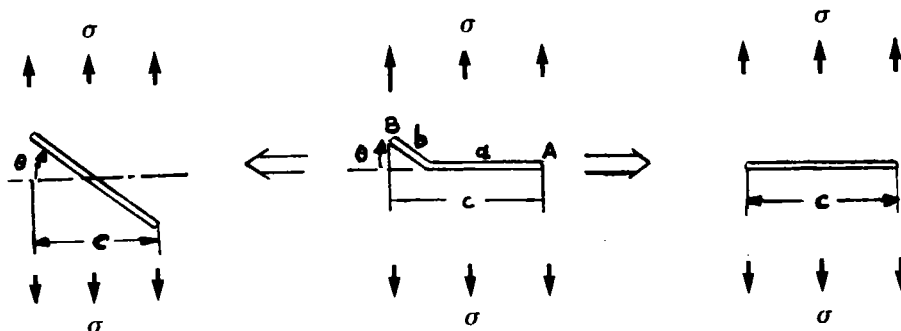
- Tableau A.1 -

Comparaison des solutions de NUISMER(18) et d'AMESTOY(21) donnant les facteurs d'intensité de contraintes d'une fissure à branches évanescentes.

\* WU (96), ainsi que BILBY et col. (97) obtiennent, par une autre approche, des résultats en excellent accord avec ceux des précédents auteurs (18) - (21).

## 2.2 Solution générale (b/a fini)

a) Le modèle traité par KITAGAWA et col. (99) est représenté à la figure A.4. La fissure monobranchée considérée est supposée incluse dans une plaque infinie, homogène et isotrope sollicitée en traction. A l'extrémité A, elle est assimilée à une fissure droite de longueur  $c = a + b\cos\theta$ , tandis qu'en B, son comportement est considéré comme identique à celui d'une fissure droite également, mais inclinée d'un angle  $\beta$  par rapport à la direction initiale de la fissure principale, et de longueur  $c/\cos\theta$ .



- Figure A.4 - Modèle de fissure branchée de KITAGAWA (99)



$$\text{en A : } K_I = \sigma \sqrt{\pi (c/2)} \quad c = a + b \cos\theta$$

$$K_{II} = 0$$

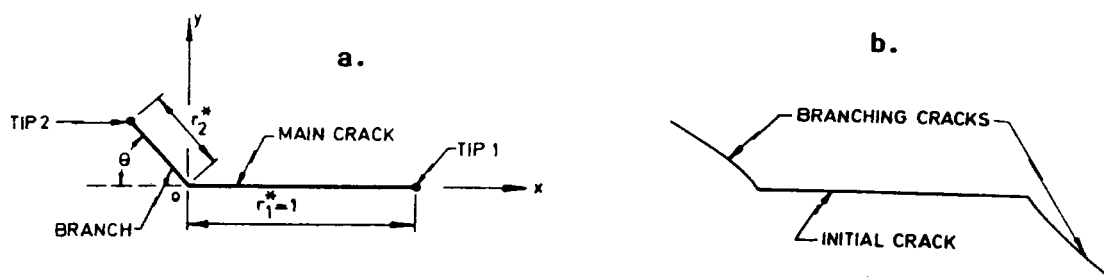
$$\text{en B : } K_I = \sigma \sqrt{\pi (c/2)} \cos^{3/2}\theta \quad 0,3 < b/a < 2$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi (c/2)} \cos^{1/2}\theta \sin\theta \quad 0^\circ < \theta < 45^\circ$$

On considère dans cette méthode que les facteurs d'intensité de contrainte à l'extrémité d'une fissure placée perpendiculairement à l'axe de traction ne sont pas beaucoup affectés par la configuration de l'autre extrémité, dans la mesure où elles ne se rapprochent pas l'une de l'autre.

Cette approximation n'est plus valable lorsque la branche est petite par rapport à la fissure principale ( $b/a < 0,3$ ) ou pour une fissure courbe.

b) CHATTERJEE (45) a adopté la même géométrie que KITAGAWA et col. (99) ; il traite, en outre, le cas d'une sollicitation de cisaillement. Pour que la solution numérique qu'il propose sous forme graphique soit correcte, la longueur de la branche doit être petite par rapport à la longueur de la fissure principale ( $10^{-3} < b/a < 1$ ), afin que les champs de contrainte en fond de fissure soient pratiquement identiques pour les deux configurations de la figure A.5. En effet, la configuration de la figure A.5a permet une approche, plus simple mathématiquement, que celle de la figure A.5b.



- Figure A.5 - Modèle de fissure branchée de CHATTERJEE (40)

Lorsque le branchement tend vers zéro, les résultats de CHATTERJEE sont eux-mêmes en accord avec ceux d'AMESTOY et col. (21), ainsi qu'avec ceux de WIESELMANN (100) et de BOWIE (101). CHATTERJEE a, de plus, vérifié que pour  $b = a$ , sa solution répond à certains impératifs de symétrie et semble donc exacte.

c) La solution de LO (102) consiste à modéliser la fissure par une distribution continue de dislocations, méthode qui s'applique aussi bien à un branchement infinitésimal qu' à un branchement fini. Ses résultats sont en accord avec ceux de PALANISWAMY et KNAUSS (16) et de BILBY et col. (97) dans le premier cas, ainsi qu'avec ceux de CHATTERJEE (45) et de KITAGAWA et col. (99) dans le second cas.

### 2.3 Chargement en mode mixte

A partir d'une solution analogue à celle de LO (102), KARIHALOO et col. (103) déduisent une solution du premier ordre pour de faibles valeurs de la branche ( $b \ll 2a$ ) et de l'angle de bifurcation ( $\theta < 18^\circ$ ). Les facteurs d'intensité de contrainte à l'extrémité de la fissure branchée soumise à un chargement biaxial où la composante de mode I est maximale sont alors donnés par les expressions suivantes (A.6) :

$$(A.6) \quad \begin{aligned} K_I^* &= K_I + o(\theta^2) \\ K_{II}^* &= \frac{K_I}{2} \theta + K_{II} - 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} T \theta + o(\theta^2) \end{aligned}$$

avec  $T = (\lambda - 1)\sigma_\infty$  : contrainte portée par le plan de la fissure principale.

Les expressions (A.6) sont identiques à celle obtenues par COTTERELL et RICE (104) à l'aide d'une méthode de perturbations inspirée par BANICHUK (105). Pour des angles de bifurcation plus grands, KARIHALOO fait intervenir des termes correctifs,  $A_{ij}$  de second ordre, sous la forme suivante (A.7) :

$$(A.7) \quad \begin{aligned} K_I^* &= (C_{11} + A_{11})K_I + (C_{12} + A_{12})K_{II} + (2\sqrt{2/\pi} \sin^2\theta + A_{13})T \\ K_{II}^* &= (C_{21} + A_{21})K_I + (C_{22} + A_{22})K_{II} - (2\sqrt{2/\pi} \sin 2\theta - A_{23})T \end{aligned}$$

Les coefficients  $C_{ij}$  et  $A_{ij}$  sont donnés sous forme de tableaux en fonction de  $\theta$  (tableau A.2). On constate que les termes en  $A_{ij}$  n'interviennent sensiblement que pour des valeurs de l'angle de bifurcation supérieures à 60 degrés.

$\theta$	$K^*_I$					$K^*_{II}$				
	C <sub>11</sub>	A <sub>11</sub>	C <sub>12</sub>	A <sub>12</sub>	$2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin^2 \theta$ A <sub>13</sub>	C <sub>21</sub>	A <sub>21</sub>	C <sub>22</sub>	A <sub>22</sub>	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2\theta$ A <sub>23</sub>
0	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	0.00000
2	0.99954	0.00008	-0.05236	0.00011	0.00194	-0.00006	0.01745	-0.00029	0.99893	-0.00004
8	0.99270	0.00040	-0.20833	0.00007	0.03093	-0.00017	0.06944	-0.00024	0.98299	0.00057
14	0.97779	0.00071	-0.36032	0.00003	0.09345	-0.00015	0.12011	-0.00020	0.94828	0.00209
20	0.95508	0.00099	-0.50542	-0.00140	0.18676	-0.00002	0.16847	-0.00018	0.89564	0.00443
26	0.92501	0.00125	-0.64093	-0.00587	0.30683	0.00021	0.21364	-0.00016	0.82632	0.00752
32	0.88814	0.00153	-0.76434	-0.01032	0.44635	0.00059	0.25478	-0.00013	0.74197	0.01137
38	0.84518	0.00178	-0.87344	-0.01477	0.60515	0.00089	0.29115	-0.00099	0.64460	0.01598
44	0.79692	0.00202	-0.96636	-0.01877	0.77038	0.00127	0.32212	-0.00063	0.53652	0.02138
50	0.74425	0.00221	-1.04163	-0.02237	0.93680	0.00163	0.34721	-0.00222	0.42029	0.02748
56	0.68813	0.00231	-1.09817	-0.02514	1.09714	0.00193	0.36606	-0.00224	0.29867	0.03406
62	0.62954	0.00272	-1.13536	-0.02673	1.24438	0.00215	0.37845	-0.00670	0.17542	0.04069
68	0.56952	0.00210	-1.15304	-0.02687	1.37209	0.00227	0.38435	-0.01070	0.05077	0.04683
74	0.50909	0.01798	-1.15149	-0.02551	1.47467	0.00230	0.38383	-0.01381	-0.06970	0.05187
80	0.44922	0.01417	-1.13145	-0.02282	1.54765	0.00224	0.37715	-0.01574	-0.18408	0.05528
86	0.39085	0.01008	-1.09410	-0.01917	1.58782	0.00213	0.36470	-0.01642	-0.28973	0.05747

- Tableau A.2 - d'après (103)

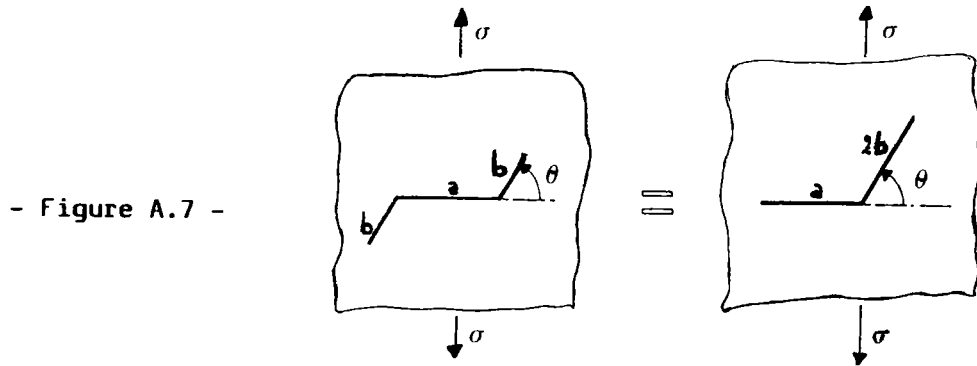
### 3 Fissure à branches symétriques (figure A.1b)

a) VITEK (22) considère que le cas de la fissure à branches symétriques constitue un cas particulier de la fissure à ramification double traitée au paragraphe 4.2 (figure A.1d) lorsque les branches numérotées 2 et 4 (ou 1 et 3) sont absentes.

Il a obtenu une solution numérique du problème général (b/a quelconque) en représentant la fissure par une distribution continue de dislocations, tout comme LO (102). Sa méthode s'applique à n'importe quelle longueur de branche. De plus, la fissure principale peut-être de forme elliptique, à rayon à fond d'entaille fini.

b) Une autre approche due à HOURLIER (55) consiste à dire que les facteurs d'intensité de contrainte d'une fissure branchée aux deux extrémités sont équivalents à ceux d'une fissure ayant une seule branche de longueur double (figure A.7). L'accord raisonnable des résultats de VITEK (22) avec ceux de

CHATTERJEE (45) et de KITAGAWA et col. (99), dans le cas d'une fissure sollicitée en traction, semble justifier cette approximation (tableau A.3 ).



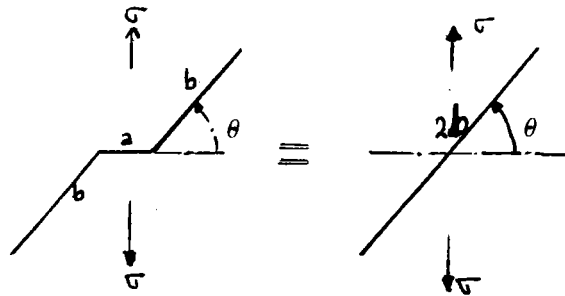
* Réf.	(45)	(22) *	(45)	(22) *
* $\theta$	$K_I^*$	*	$K_{II}^*$	*
* 0 *	1,0	1,0	* 0	0 *
* 15 *	0,9457	0,9367	* -0,272	-0,230 *
* 30 *	0,792	0,802	* -0,498	-0,425 *
* 45 *	0,569	0,592	* -0,641	-0,565 *
* 60 *	0,316	0,338	* -0,677	-0,608 *

b/a = 1

- Tableau A.3 -  
 Comparaison des résultats de VITEK (22) et de CHATTERJEE (45)

### 3.1 Fissure à branches longues (figure A.8)

- Figure A.8 -



D'après HOURLIER (55), cette configuration peut être assimilée à celle d'une fissure droite de longueur  $2b$  inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport à l'axe de traction ( $\sigma$ ). Les facteurs d'intensité de contrainte ont alors pour expression :

$$(A.8) \quad \begin{aligned} K_I^* &= (\sigma \cos^2 \theta + \tau \sin 2\theta) \sqrt{\pi b} \\ K_{II}^* &= (\sigma \sin \theta \cos \theta - \tau \cos 2\theta) \sqrt{\pi b} \end{aligned}$$

VITEK montre que, lorsque  $b/a$  est supérieur à 50, ses résultats concordent à moins de 2% avec la solution analytique suivante :

$$\begin{aligned} K_I^* &= \sigma \sqrt{\pi b} \cos^2 \theta \\ K_{II}^* &= \sigma \sqrt{\pi b} \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

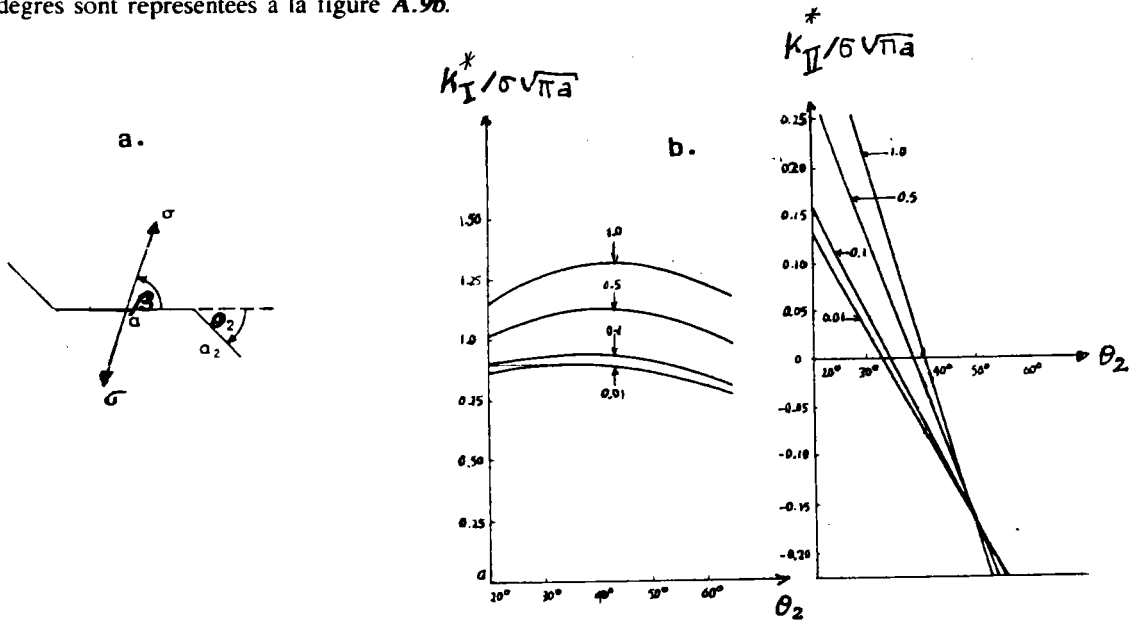
et que lorsque  $\theta = 0$ , il retrouve  $K_I = \sigma \sqrt{\pi(b+a)}$ , ce qui correspond à une simple extension de la fissure d'une longueur  $b$ , également à moins de 2%.

### 3.2 Chargement en mode mixte

#### 3.2.1 Traction :

Considérons le cas où la fissure symétrique est sollicitée en mode mixte – figure A.9a –. VITEK (22) considère ce cas comme une variante du cas général traité au paragraphe 3, les branches manquantes étant

numérotées 2 et 4 sur la figure A.1d. Les variations de  $K_I^*$  et de  $K_{II}^*$  en fonction de l'angle  $\theta$ , lorsque  $\beta = 45$  degrés sont représentées à la figure A.9b.



- Figure A.9 - Modèle de fissure branchée proposé par VITEK (22)

Acceptable dans le cas d'une fissure sollicitée en mode I avant branchement, cette solution est fautive si la fissure est sollicitée en mode mixte avant branchement - cf. : HOURLIER (55) -.

Dans le cas de très petites longueurs de branches, HUSSAIN et col. (17) ont proposé les expressions analytiques suivantes des facteurs d'intensité de contrainte :

$$(A.9) \begin{pmatrix} K_I^* \\ K_{II}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 1,5\sin\theta \\ -0,5\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix} \quad \times F(\theta)$$

avec :

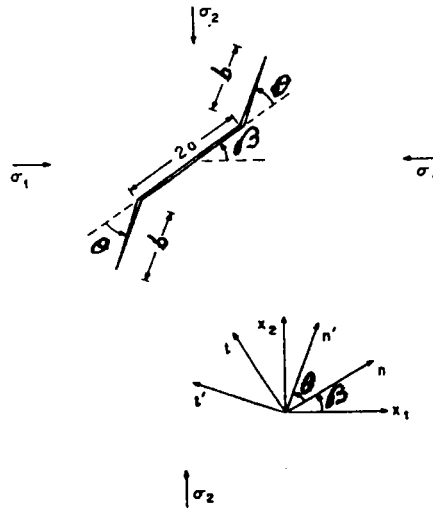
$$F(\theta) = \frac{4}{(3 + \cos^2 \theta)} \left[ \frac{1 - \frac{\theta}{\pi}}{1 + \frac{\theta}{\pi}} \right]^{\frac{\theta}{2\pi}}$$

Si pour l'équation (A.9) l'accord est satisfaisant pour des angles de bifurcation inférieurs à 50 degrés, il ne l'est plus du tout au voisinage de 90 degrés.

### 3.2.2 Compression :

Dans le cas d'une fissure linéaire contenue dans un corps infini en déformation plane, soumis à un état de contraintes de compression biaxiale uniformes (figure A.10a), STEIF (107) exprime les facteurs d'intensité de contrainte à l'extrémité d'une branche de longueur finie sous la forme suivante :

$$(A.10) \quad \begin{aligned} K_I^* &= K_I^{isol} + K_I^{infl} \\ K_{II}^* &= K_{II}^{isol} + K_{II}^{infl} \end{aligned}$$



- Figure A.10a -  
Modèle de STEIF (107)

$K_I^{isol}$  et  $K_{II}^{isol}$  sont les facteurs d'intensité de contrainte à l'extrémité d'une branche si elle existait seule dans le corps, avec :

$$K_I^{isol} = \sigma_{n'n} \sqrt{\pi b/2} \quad K_{II}^{isol} = \sigma_{n't'} \sqrt{\pi b/2}$$

et :

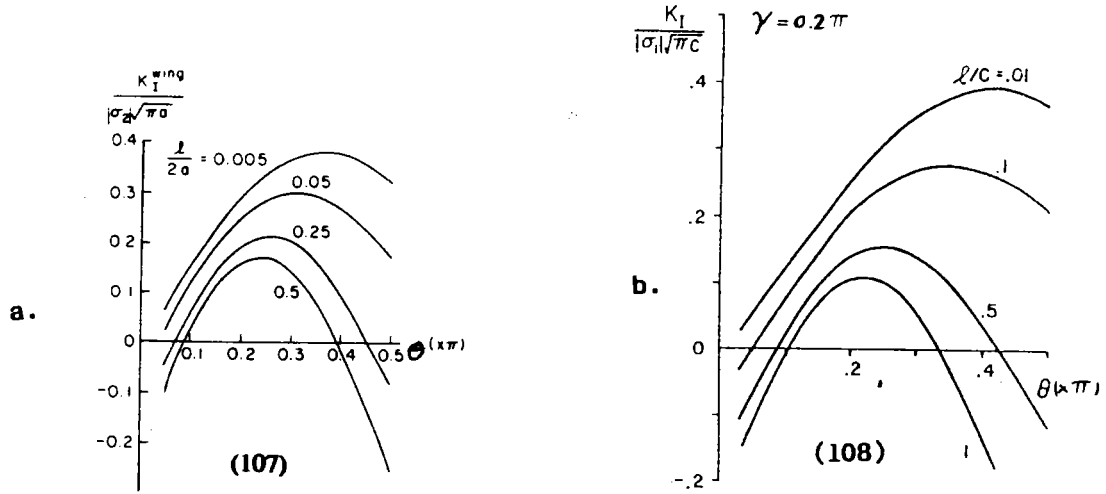
$$K_I^{infl} = \beta_I E \Delta(b, a) / \sqrt{b} \quad K_{II}^{infl} = \beta_{II} E \Delta(b, a) / \sqrt{b}$$

$E$  : module d'Young,

$\beta_I, \beta_{II}$  fonctions sans dimension qui dépendent du coefficient de POISSON et de l'angle  $\theta$ .

$K_I^{infl}$  et  $K_{II}^{infl}$  traduisent l'influence de la fissure principale sur le champ de contrainte à l'extrémité des

branches, en tenant compte du glissement relatif des lèvres de la fissure principale qui se traduit par l'ouverture  $\Delta(b,a)$  des branches par un effet de coin .



- Figure A.10b - Résultats de STEIF comparés à ceux de NEMAT-NASSER et HORII (108) : cas d'un chargement uniaxial

Finalement, les formules approchées proposées par STEIF s'écrivent (A.11) :

$$\underline{K_I^{wing}} = \left[ \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\cos(2\theta + 2\beta) \right] \sqrt{\frac{\pi b}{2}}$$

$$- \frac{3}{4} \left( \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\sin 2\theta + f \left( \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\cos 2\beta \right) \right] (\sqrt{2a+b} - \sqrt{b})$$

$$\underline{K_{II}^{wing}} = \left[ \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\sin(2\theta + 2\beta) \right] \sqrt{\frac{\pi b}{2}}$$

$$+ \frac{1}{4} \left( \cos \frac{\theta}{2} + 3\cos \frac{3\theta}{2} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\sin 2\theta + f \left( \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\cos 2\beta \right) \right] (\sqrt{2a+b} - \sqrt{b})$$

où  $f$  désigne le coefficient de frottement.

Les expressions (A.11) ne sont valables que si :

$$\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\sin 2\theta + f \left( \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\cos 2\beta \right) < 0$$

sinon il n'y a pas de mouvement relatif entre les lèvres de la fissure.



La figure A.10b compare les résultats de STEIF à ceux de NEMAT-NASSER et HORII (108) dans le cas où  $\lambda = 0$  (compression uniaxiale),  $\nu = 0,3$  et  $\beta_0 = 54$  degrés. Bien que les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte diffèrent quelque peu entre les deux auteurs, notamment pour des branches plutôt longues, les allures des courbes représentatives restent tout à fait similaires. Quand  $b$  tend vers zéro, STEIF trouve les même expressions de  $K_I^*$  et de  $K_{II}^*$  que RICE et COTTERELL (104).

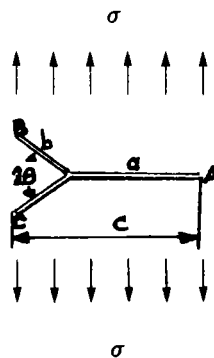
## 4 Fissure à ramification

### 4.1 Fissure à ramification simple (double branche)

a) La méthode développée par LO (102), présentée au paragraphe 2.2, est encore applicable au cas présent (figure A.11), moyennant une expression appropriée des potentiels. Là encore, les deux cas de branchement (fini et asymptotique) sont résolus par une même formulation.

b) KITAGAWA et col. (99) se sont également intéressés à la question et proposent une solution calquée sur celle obtenue dans le cas d'une fissure monobranche.

- Figure A.11 -



A l'extrémité A, les facteurs d'intensité de contrainte sont à nouveau donnés par :

$$(A.12) \quad K_{IA} = \sigma \sqrt{\pi c/2} \quad K_{IIA} = 0$$

En B, les valeurs diffèrent selon la valeur de l'angle  $2\theta$ .

c) Pour une fissure longue, mais finie (rapport de 1 à 40) et un angle de bifurcation supérieur à 5 degrés, BILBY et col. (97) traitent la question au moyen d'une distribution continue de dislocations, la méthode de la représentation conforme qu'ils avaient précédemment utilisée, dans le cas d'une fissure monobranche, posant un problème de convergence.

#### 4.2 Fissure à ramification double (double branche symétrique)

Ce sont à nouveau VITEK (22) et LO (102) qui, de même que dans les paragraphes précédents, ont résolu le problème dans le cas où les branches sont de longueur finie.

Rappelons que VITEK représente une telle fissure (figure A.1d) par une distribution continue de dislocations. Ainsi, une fois ces distributions connues, on obtient les facteurs d'intensité de contrainte.

## 5 CONCLUSIONS

Les facteurs d'intensité de contrainte  $K_I^*$  et  $K_{II}^*$  sont déterminés, à angle de branchement donné, pour une longueur variable de la branche, ou inversement. Le calcul de ces facteurs requiert l'emploi de méthodes mathématiques compliquées, dont la résolution exige d'importants moyens de calcul.

Pratiquement toutes les études développées dans le cas d'une branche évanescence ne sont plus valables lorsque le rapport  $b/a$  prend une valeur finie (non asymptotique), et réciproquement – excepté LO (102)–.

On notera qu'il n'existe que très peu d'études consacrées à ce genre de calcul pour un chargement en mode mixte, qu'il soit de traction (22) ou de compression (107).

Il existe des solutions exactes (18) – (21) qui permettent de calculer les valeurs des  $K_i^*$  ( $i = 1, 2$ ) lorsque la longueur de la branche tend vers zéro. Par contre, pour une longueur finie, on passe par des méthodes approximatives, qui assimilent la longueur réelle de la fissure à une longueur équivalente.

Dans le cas de la fatigue en mode mixte, la direction de la fissure varie continûment au cours du cyclage mécanique ; or, là encore, aucun travail n'a, à notre connaissance, tenu compte de cette variation, mis à part KARIHALOO et col. (103) qui proposent, dans le cas où la longueur de la branche est petite, une prévision du chemin de propagation.

Enfin il est à noter que la plupart des auteurs ont justifié la validité de leur solution en la comparant avec celle des autres. Mais toutes ces solutions ont rarement été comparées à des résultats expérimentaux.

- Acier 35NCD16 A<sub>T</sub> -

% C	% Mn	% P	% S	% Si	% Ni	% Cr	% Cu	% Mo	% V	% Al
0,274	0,353	0,013	0,021	0,171	3,793	1,628	0,275	0,282	0,009	0,028

Cette nuance a été étudiée après traitement thermique

.. Acier 35NCD16<sub>B</sub>

% C	% Mn	% P	% S	% Si	% Ni	% Cr	% Cu	% Mo	% V	% Al
0,358	0,380	0,013	0,006	0,367	3,64	1,706	0,094	0,282	0,068	0,011

Cette nuance a été étudiée à l'état brut (réception)

- Acier 316 -

% C	% Mn	% P	% S	% Si	% Ni	% Cr	% Mo
0,091	1,76	0,027	0,026	0,32	14,45	16,8	2,10

Cette nuance a été étudiée à l'état brut (réception)

**- Tableau E.1 - Composition chimique des aciers étudiés**

	R <sub>e</sub> N/mm <sup>2</sup>	R <sub>m</sub> N/mm <sup>2</sup>	Dureté	Hv/30
35NCD16 A <sub>T</sub>	1100	1500	HRc = 46	481
35NCD16 <sub>B</sub>	450	800	HRc = 20	263
316	265	550	HR <sub>b</sub> = 83	171

**- Tableau E.2 - Caractéristiques mécaniques des aciers étudiés**

Acier 35NCD16 A<sub>T</sub> – R = 0.1 –

Essai n°	$\beta_0$ (degrés)	$a_{eq0}$ (mm)	$K_{I0}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$K_{II0}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$(K_I/K_{II})_0$	Mode de chargement initial
1	0	17,27	15,03	0	$+\infty$	I pur
2	5	17,09	14,17	6,11	2,32	I + II
3	9,5	16,62	12,41	11,34	1,09	I + II
4	14,5	17,43	9,05	15,38	0,58	I + II
5*	21	15,92	1,65	21,51	0,07	I + II
6	25	17,03	0,32	23,46	0,01	II pur
7	34	17,34	-8,3	25,97	-0,32	II impur
8	45	17,44	-16,62	24,036	-0,69	II impur
9**	31	12,69	-2,44	19,67	-0,12	II impur
10**	42	11,95	-10,25	20,57	-0,49	II impur
11***	60	7,25	-16,66	13,01	-1,28	II impur

- Tableau E.3 - Paramètres mécaniques des essais de la première campagne

- \* : résultats expérimentaux limités à la direction initiale de bifurcation
- \*\* : disque non préfissuré en mode I
- \*\*\* : point de bifurcation situé sur le bord libre de l'entaille mécanique  
(longueur initiale de fissure : 7,2 mm)

Acier 35NCD16<sub>B</sub> - R = 0.1 -

Essai n°	$\beta_o$ (degrés)	$a_{eqo}$ (mm)	$K_{Io}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$K_{IIo}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$(K_I/K_{II})_o$	Mode de chargement initial
12	0	17,23	15	0	$+\infty$	I pur
13	16	16,42	8,06	17,81	0,45	I + II
14	25	16,72	0,45	23,07	0,19	II pur
15	35	17,05	-9,25	26,07	-0,35	II impur

Acier 35NCD16<sub>B</sub> -R = 0.3 -

Essai n°	$\beta_o$ (degrés)	$a_{eqo}$ (mm)	$K_{Io}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$K_{IIo}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$(K_I/K_{II})_o$	Mode de chargement initial
16	0	16,87	17,73	0	$+\infty$	I pur
17	15	17,19	11,61	21,48	0,54	I + II
18	27	16,97	-1,98	31,15	-0,06	II impur
19	37	16,9	-14,27	33,41	-0,42	II impur
20	35	17,71	-14,53	35,87	-0,40	II impur

Acier 316 - R = 0.1 -

Essai n°	$\beta_o$ (degrés)	$a_{eqo}$ (mm)	$K_{Io}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$K_{IIo}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$(K_I/K_{II})_o$	Mode de chargement initial
21	0	16,65	13,84	0	$+\infty$	I pur
22	15	16,95	8,27	17,28	0,478	I + II
23	26	17,43	-0,74	24,37	-0,03	II impur
24	33	17,31	-7,63	26,17	-0,29	II impur

- Tableau E.4 - Paramètres mécaniques des essais de la seconde campagne

AUTEURS	GEOMETRIE	MATERIAU	$\beta_0$ (degrés)	$\Delta K_{I_0}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$\Delta K_{II_0}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$\frac{\Delta K_{I_0}}{\Delta K_{II_0}}$	$(\theta)_{I'_{ex}}$ (degrés)
TANAKA (37)	Plaque à entaille inclinée (C.C.P.)	alliage d' aluminium	72	5,67	1,85	3,06	-28
			45	3,82	3,82	1,00	-49
			30	2,50	4,33	0,57	-52
CHINA – DURAI (42)	C.C.P.	"	60			1,70	33 – 40,5
			45			1	44 – 57
			30			0,57	58 – 72
		acier	60			1,75	32,5 – 42
			45			1	54 – 70
			30			0,57	62 – 77
FLAVENOT et col. (46)	C.T. 25 modifiée	acier A 508	30	18,3	3,4	5,38	20 – 22
			45	17,0	5,35	3,18	31 – 37
			60	14,44	7,45	1,94	42 – 52
BROEK et RICE (35)	barreau flexion 4 points	acier à roult				2,94	-29
						1,35	-45
						0	-56
HUA (44)	barreau flexion 4 points	inox 316		5,12	1,26	4	-26
				4,46	1,90	2,38	-38
				3,26	2,67	1,22	-53
				2,23	3,26	0,68	-62
				1,22	3,72	0,33	-69
				0	4,10	0	-73
KITAGAWA (59)	cruciforme	acier		14,08	4,34	3,32	22
				10,59	7,71	1,38	42
				6,08	9,25	0,65	53
				5,59	1,62	0,617	67
				1,89	8,18	0,23	71
				0,84	18,38	0,04	71
TRUCHON (53)	cruciforme	acier E 36				3,36	20 – 23
						2,56	35 – 36
						0,89	57 – 59
						0,515	57 – 65

- Tableau E.5 - Evolution de l'angle de bifurcation initial avec le rapport de chargement initial

MATERIAU	R	$\beta_0$	$K_{I_0}$	$K_{II_0}$	$\Delta K_I / \Delta K_{II_0}$	$\theta_{lex}$
35NCD16 A <sub>T</sub>  $R_e = 1100$ N/mm <sup>2</sup>	0,1	5	14,17	6,11	2,32	-29,82°
		9,5	12,41	11,34	1,09	-41,90
		14,5	9,05	15,38	0,6	-53,30
		21	1,65	21,51	0,077	-64,76
		25	0,317	23,46	0,01	-68,90
		34	-8,3	25,97	-0,32	-69,80
		45	-16,6	24,03	-0,69	-70
35NCD16 <sub>B</sub>  $R_e = 450$ N/mm <sup>2</sup>	0,1	16	8,06	17,81	0,45	-58,11
		25	0,45	23,07	0,19	-70,08
		35	-9,25	26,07	-0,35	-73,21
	0,3	15	11,61	21,48	0,54	-57,84
		27	-1,98	31,15	-0,06	-74,66
		37	-14,27	33,41	-0,42	-73,3
316 $R_e = 265$ N/mm <sup>2</sup>	0,1	15	8,7	17,3	0,478	-59,46
		26	-0,74	24,37	-0,03	-63,35
		33	-7,49	26,24	-0,28	-70,70

- Tableau E.6 - Evolution de l'angle de bifurcation initial



$\beta_0$ (degrés)	K (MPa $\sqrt{m}$ )	$(\omega_m)_{th}$ (mm)	$(\omega_m)_{exp}$ (mm)	$\frac{\omega_{m(I+II)_{th}}}{\omega_{m(I)}}$	$\frac{\omega_{m(I+II)_{exp}}}{\omega_{m(I)}}$	$\frac{(\omega_m)_{exp}}{(\omega_m)_{th}}$
0	$K_I = 14,28$	0,32	1,25			3,9
25	$K_{II} = 23,0$	2,5	4,25	7,8	3,4	1,7

- Tableau E.7 - mesures de la taille de la zone plastique

$\beta_0$ (degrés)	K (MPa $\sqrt{m}$ )	$(\omega_m)_{th}$ (mm)	$(\omega_m)_{exp}$ (mm)	$\frac{\omega_{m(I+II)_{th}}}{\omega_{m(I)}}$	$\frac{\omega_{m(I+II)_{exp}}}{\omega_{m(I)}}$	$\frac{(\omega_m)_{exp}}{(\omega_m)_{th}}$
0	$K_I = 15,20$	1,04	2,5			2,4
25	$K_{II} = 24,37$	8,07	12,0	7,8	4,8	1,48

- Tableau E.8 - mesures de la taille de la zone plastique

$\beta_o$ (degrés)	$\beta_i$ (degrés)	$\theta_{iexp}$ (degrés)	$\theta_{iE.F.}$ (degrés)	$a_{eqexp}$ (mm)	$a_{eqE.F.}$ (degrés)
9,5	8,37	41,40	42,73	17,57	17,566
	7,51	30,29	27,95	17,91	18,152
	6,55	25,33	25,15	18,58	18,757
	5,67	21,43	22,03	19,41	19,382
	4,85	19,05	20,13	20,34	20,028
25	22,68	68,92	64,09	17,31	17,567
	20,21	69,44	61,52	17,61	18,153
	17,45	59,05	59,33	18,11	18,757
	14,37	52,89	52,06	18,91	19,380
	11,74	34,17	34,42	20,31	20,028

- Tableau E.9 - Comparaison des valeurs de l'angle de bifurcation  $\theta_i$  et de la longueur de fissure équivalente obtenues

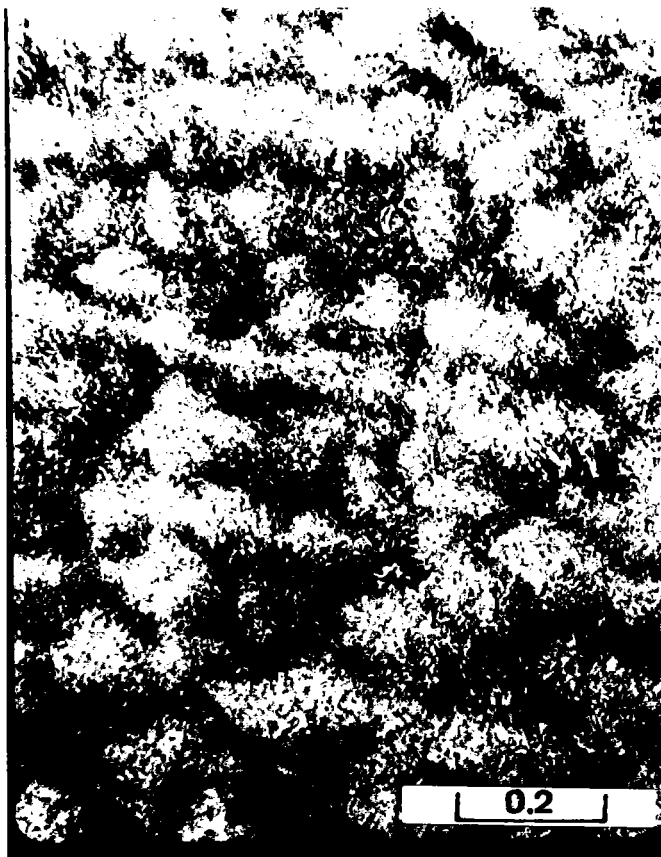
$\beta_o$ (degrés)	$\beta_i$ (degrés)	$K_{Ianal}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$K_{IE.F.}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$K_{IIanal}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$K_{IIE.F.}$ (MPa $\sqrt{m}$ )
9,5	8,37	12,41	12,0019	11,34	10,641
	7,51	13,19	12,781	10,38	9,681
	6,55	13,88	13,471	9,7	9,001
	5,67	14,74	14,3319	8,95	8,2501
	4,85	15,65	15,241	8,27	7,701
25	22,68	0,318	0,264	23,47	20,232
	20,21	2,37	2,076	22,64	19,402
	17,45	4,57	4,276	21,50	18,462
	14,37	6,99	6,696	20,14	16,902
	11,74	9,72	9,4266	18,35	15,112

- Tableau E.10 - Comparaison des valeurs de  $K_I$  et  $K_{II}$  obtenues par la méthode analytique d'ATKINSON (91) et par un calcul (EF)

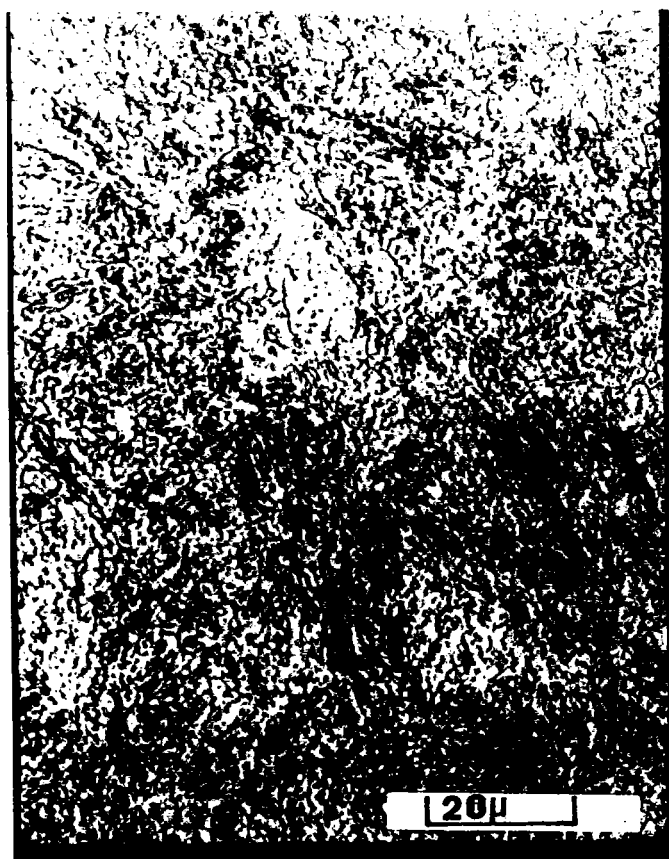
$\theta_1$ (degrés)	$\Delta K_I$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$\Delta K_{II}$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$\Delta K_{I\sigma} \theta_{max}$ (9)	$\Delta K_{I_{max}}^*$ (21)	$(\Delta K_{I_{eq}})_{max}$ proposé
-26	5,12	1,26	5,56	5,52	6,06
-38	4,46	1,9	5,43	5,40	5,74
-53	3,26	2,67	5,19	5,15	4,98
-62	2,23	3,26	5,12	5,05	4,6
-69	1,22	3,72	4,98	4,98	4,45
-73	0	4,10	4,72	4,94	4,58

- Tableau E.11 - Comparaison des valeurs de  $(\Delta K_{I_{eq}})_{max}$  (formule proposée) aux valeurs prévues par différents critères -(9-21).

a.



b.

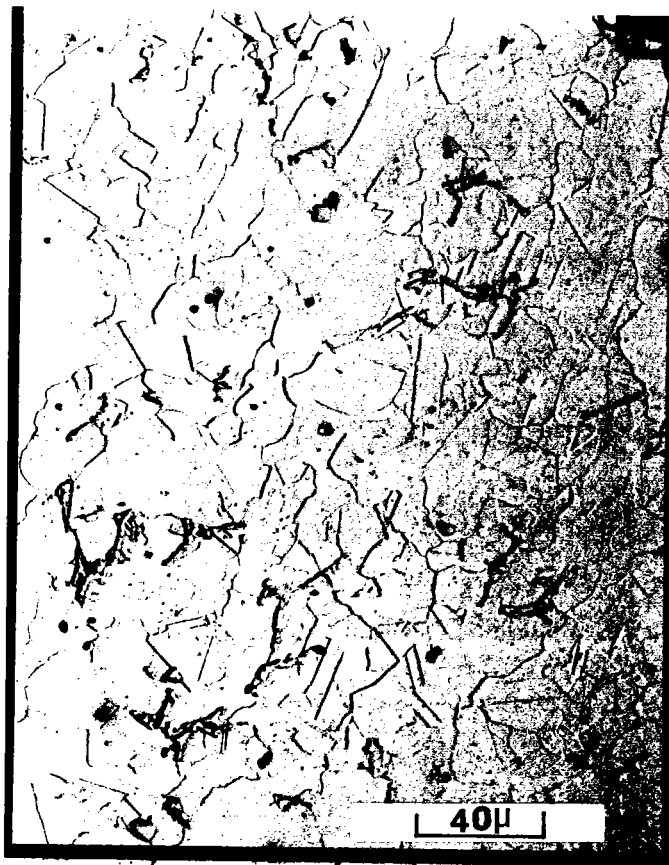


- Figure E.1 - Structure de l'acier 35NCD16<sub>p</sub>

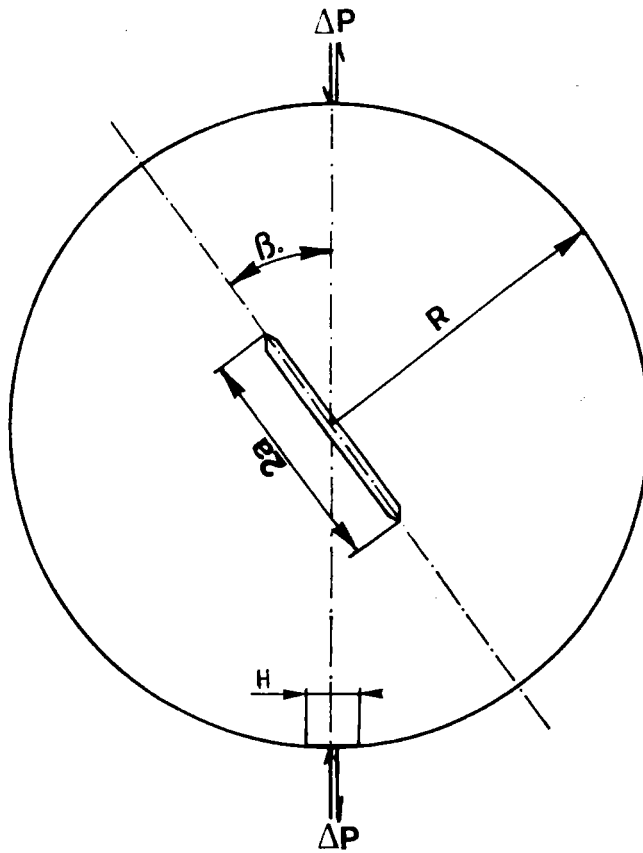
a.



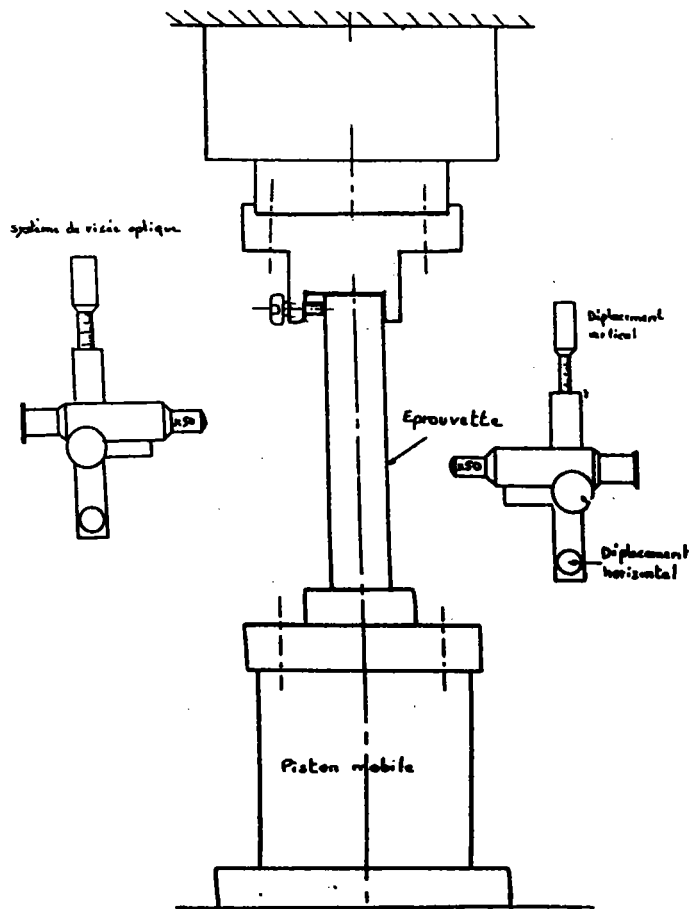
b.



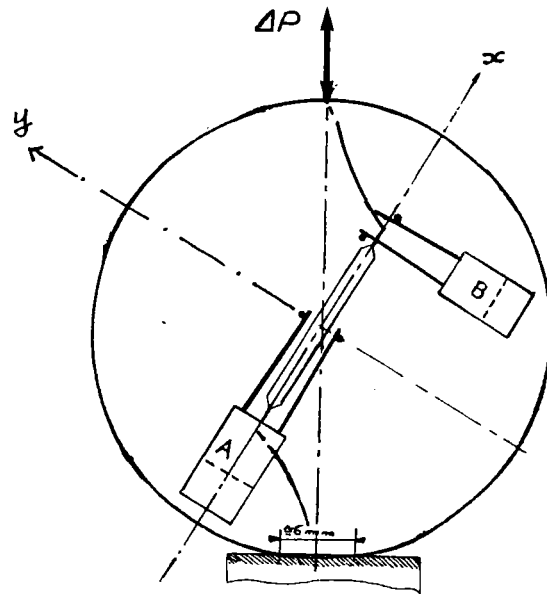
- Figure E.2 - Structure de l'acier 316



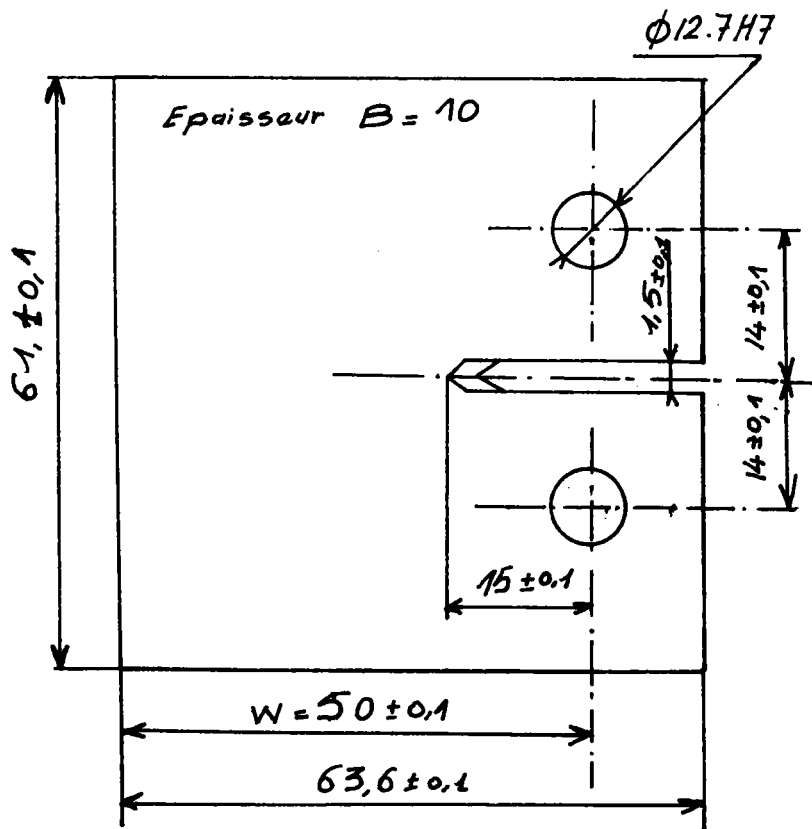
- Figure E.3 - Géométrie du disque



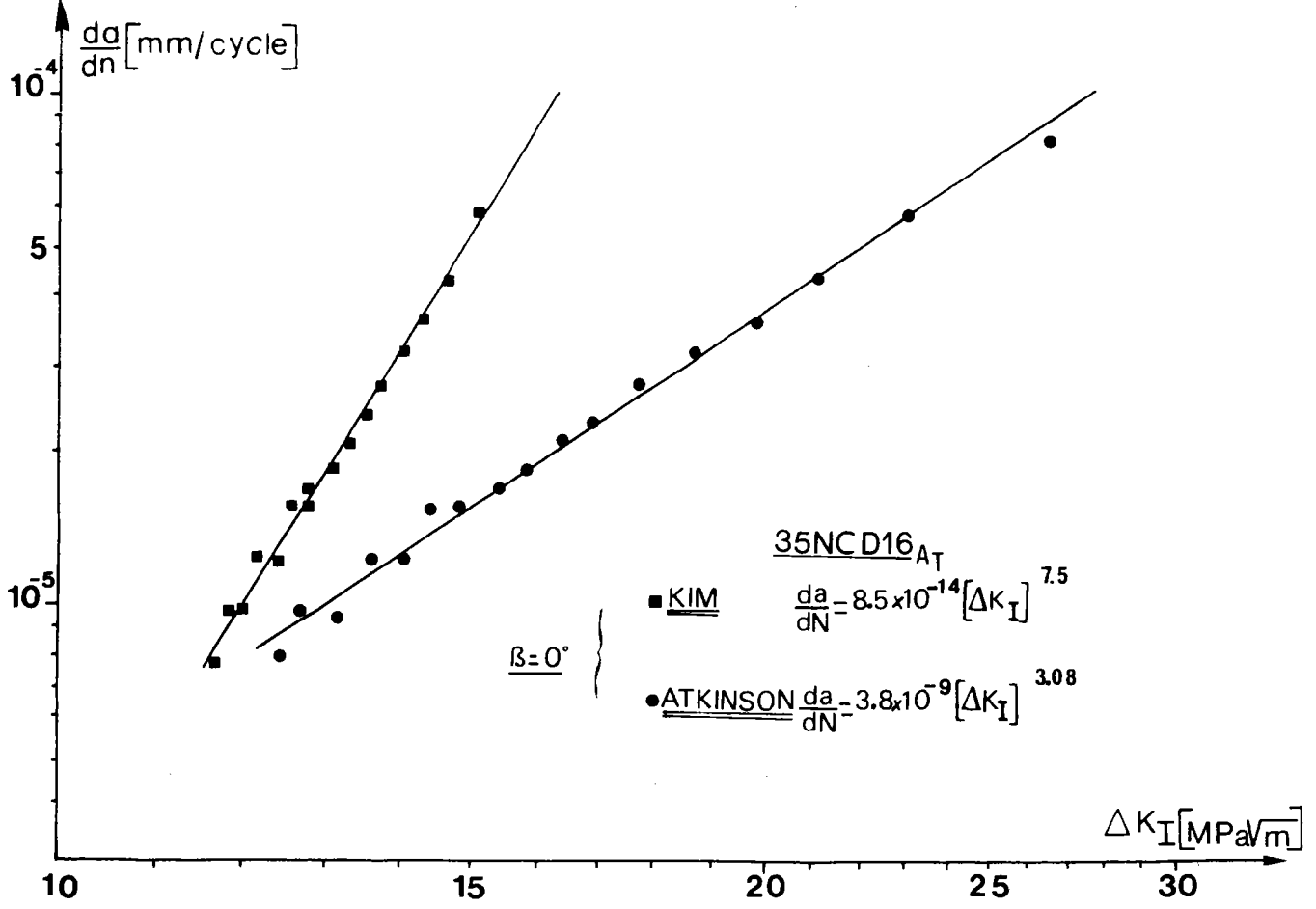
- Figure E.4 - Schéma du montage expérimental



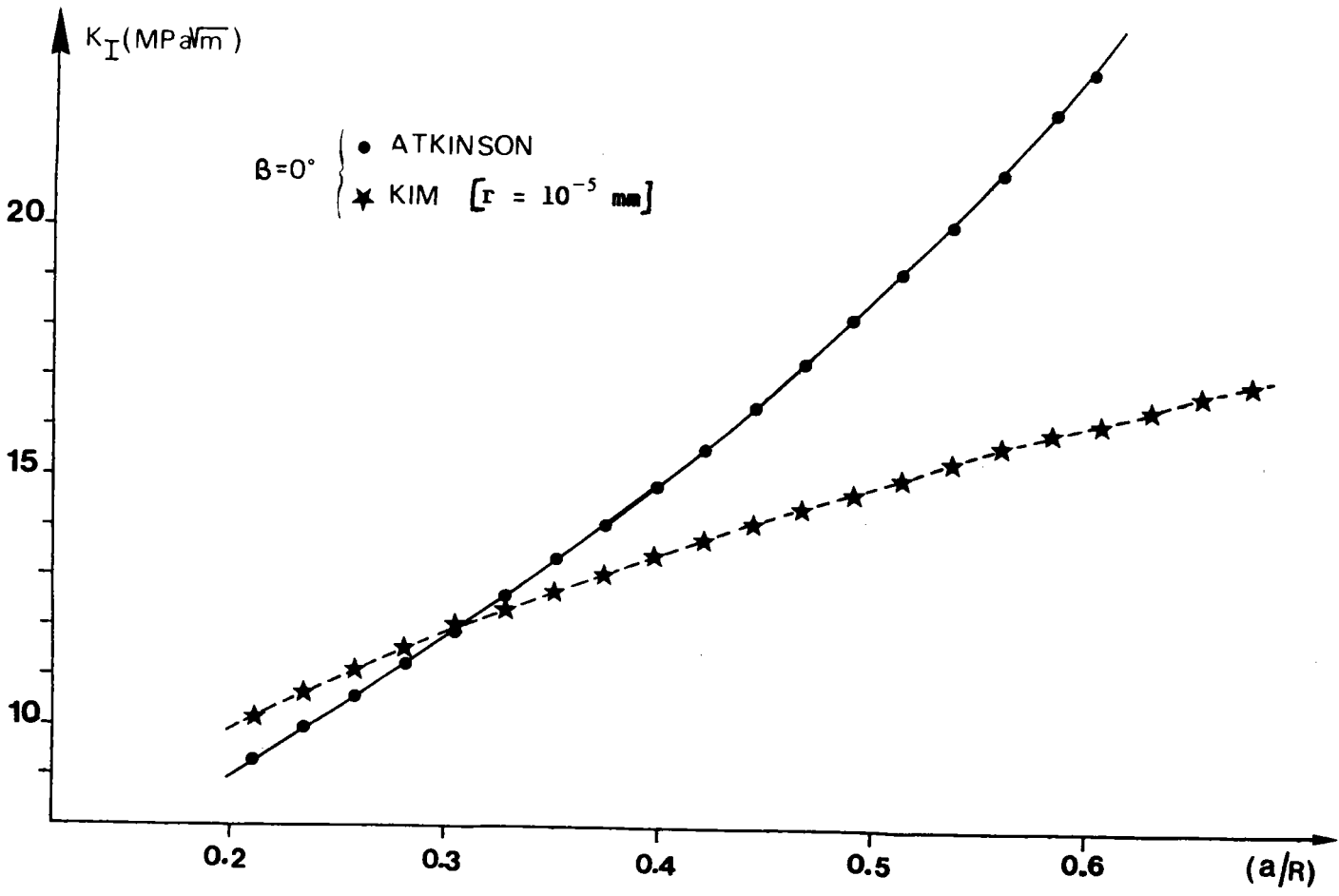
- Figure E.5 - Emplacement des capteurs A et B sur le disque



- Figure E.6 - Dimensions de l'éprouvette C.T.

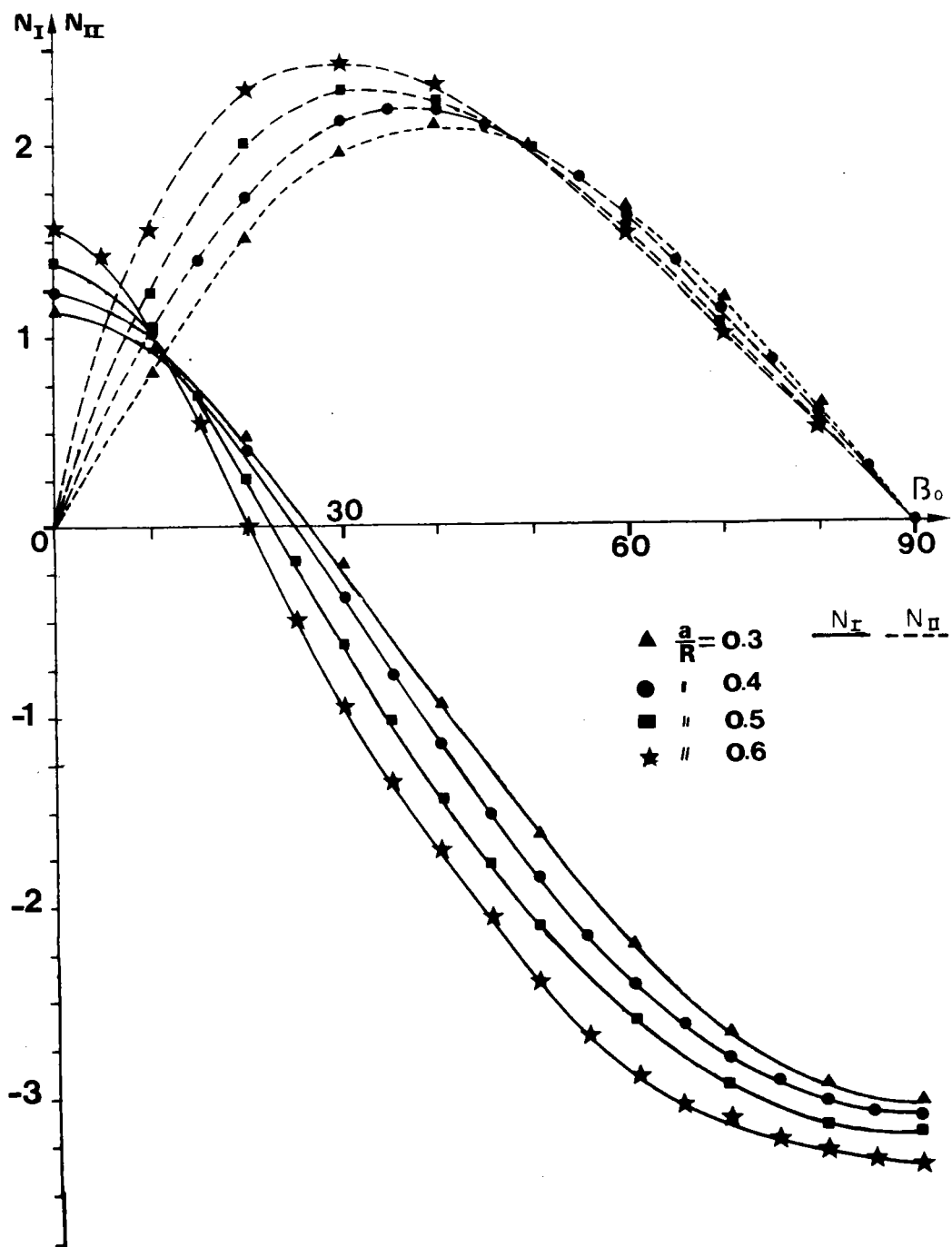


- Figure E.7 - Comparaison des courbes de vitesse de fissuration en fonction de  $\Delta K_I$  calculé à partir des formules de KIM (87) et d'ATKINSON (91)

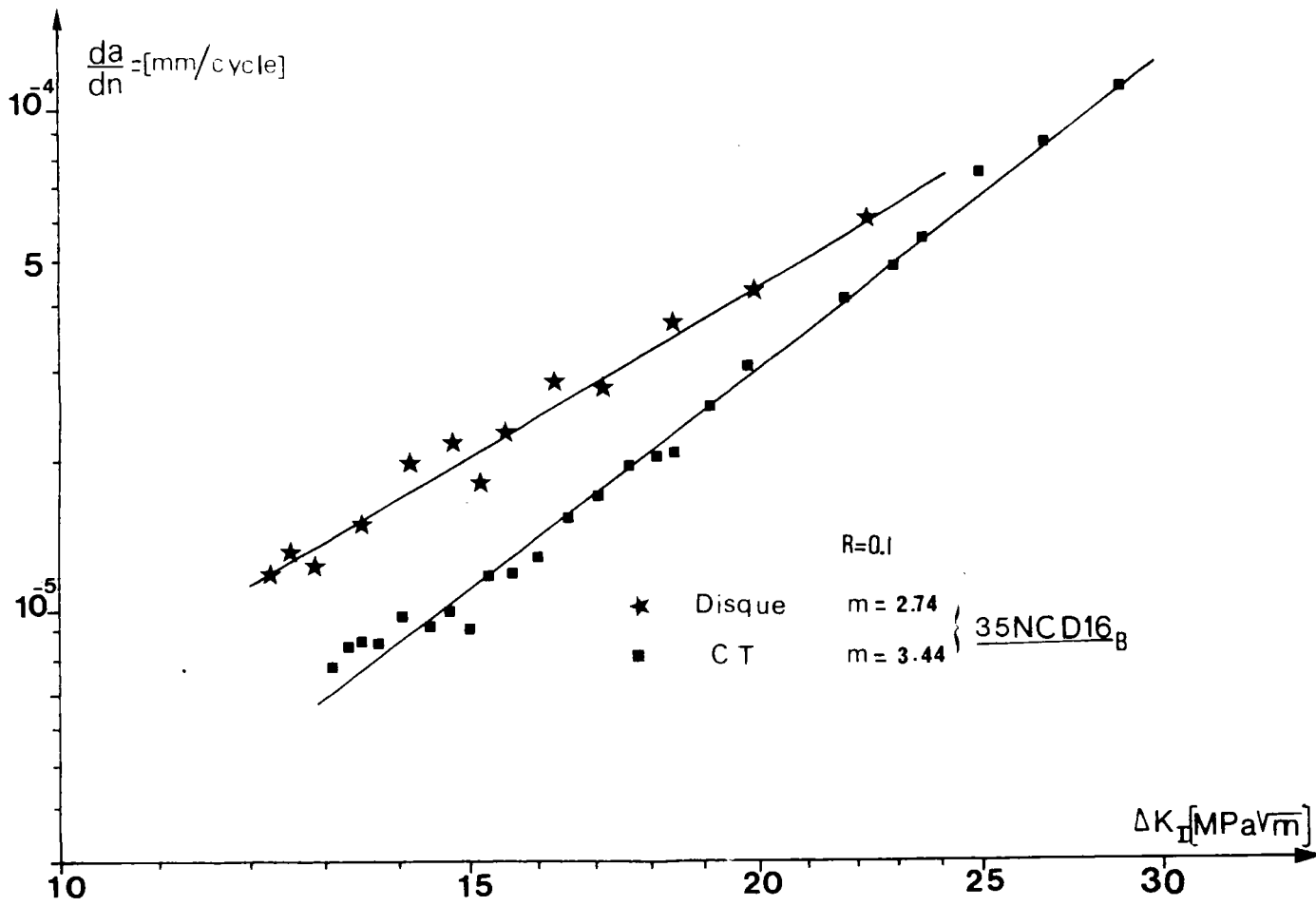


- Figure E.8 - Evolution de  $\Delta K_I$  en fonction de la longueur de fissure

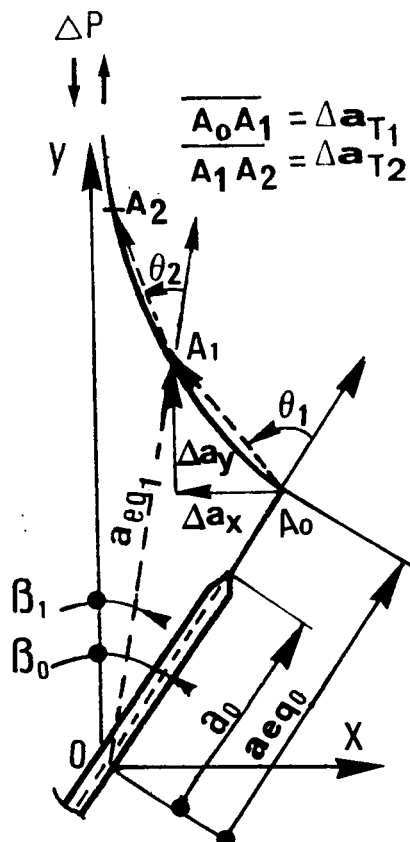




- Figure E.9 - Evolution des valeurs théoriques de  $N_I$  et de  $N_{II}$  en fonction de l'angle  $\beta_0$  pour différentes valeurs de  $a/R$  (91)

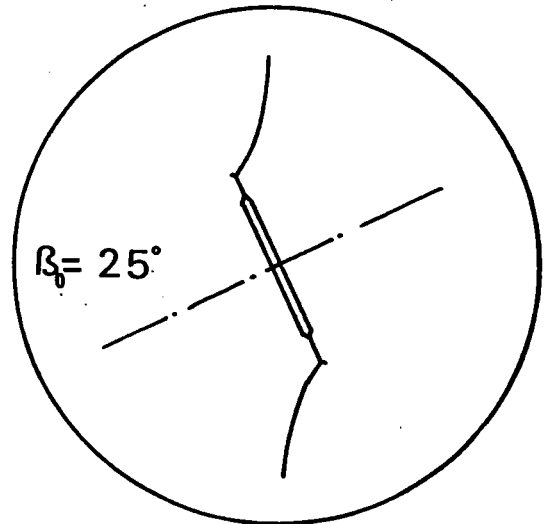
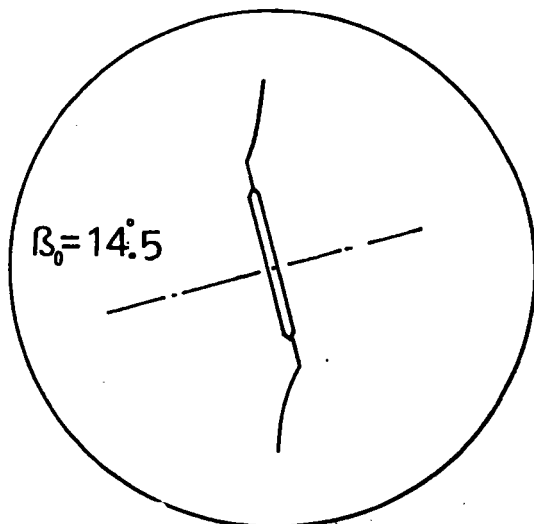
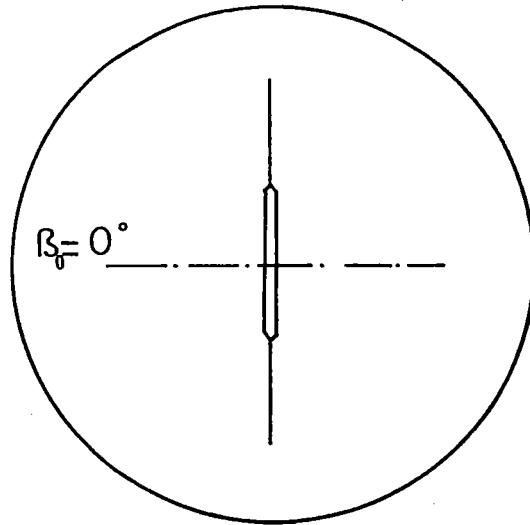
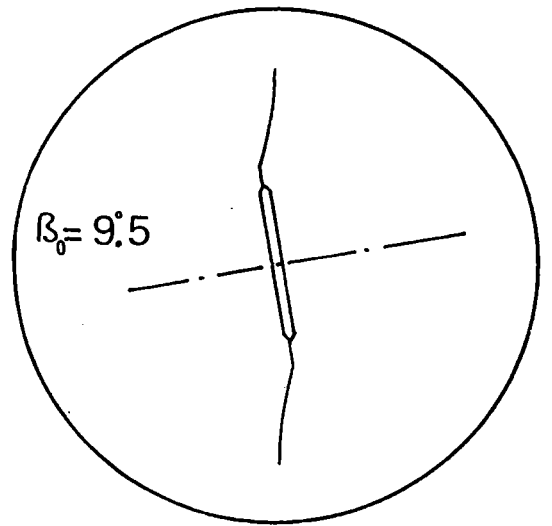
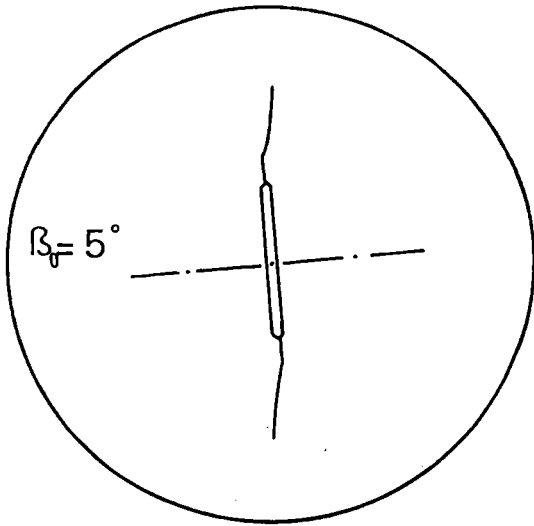


- Figure E.10 - Comparaison des courbes de vitesse de fissuration obtenues sur disque brésilien et sur éprouvette C.T.

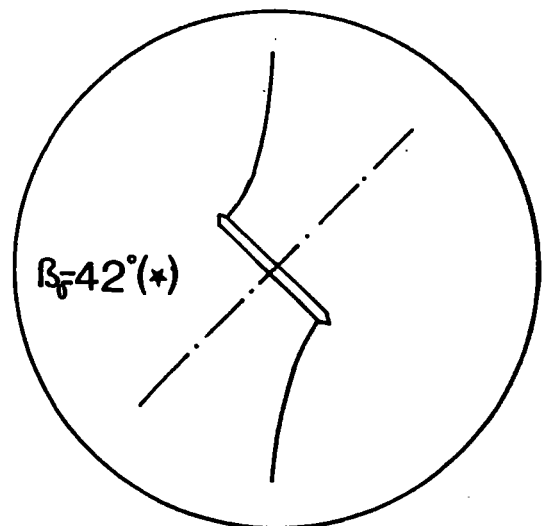
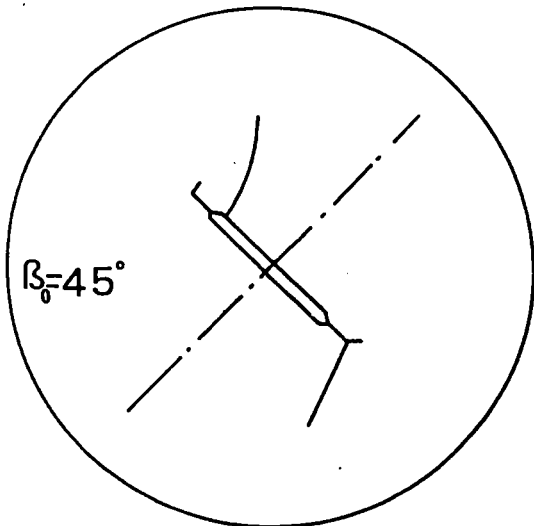
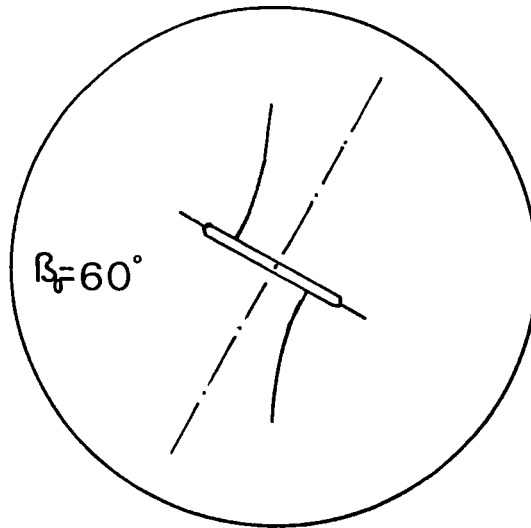
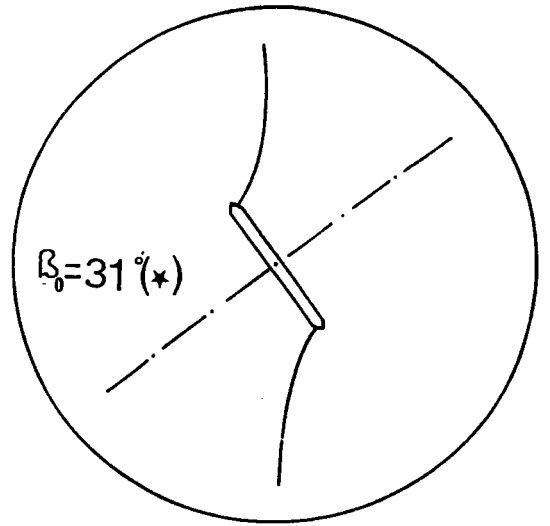
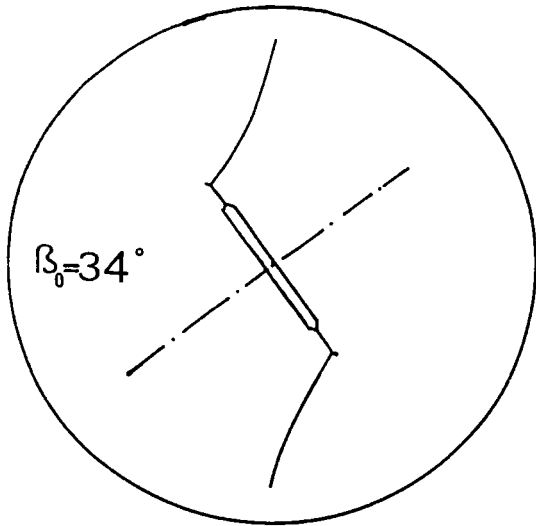


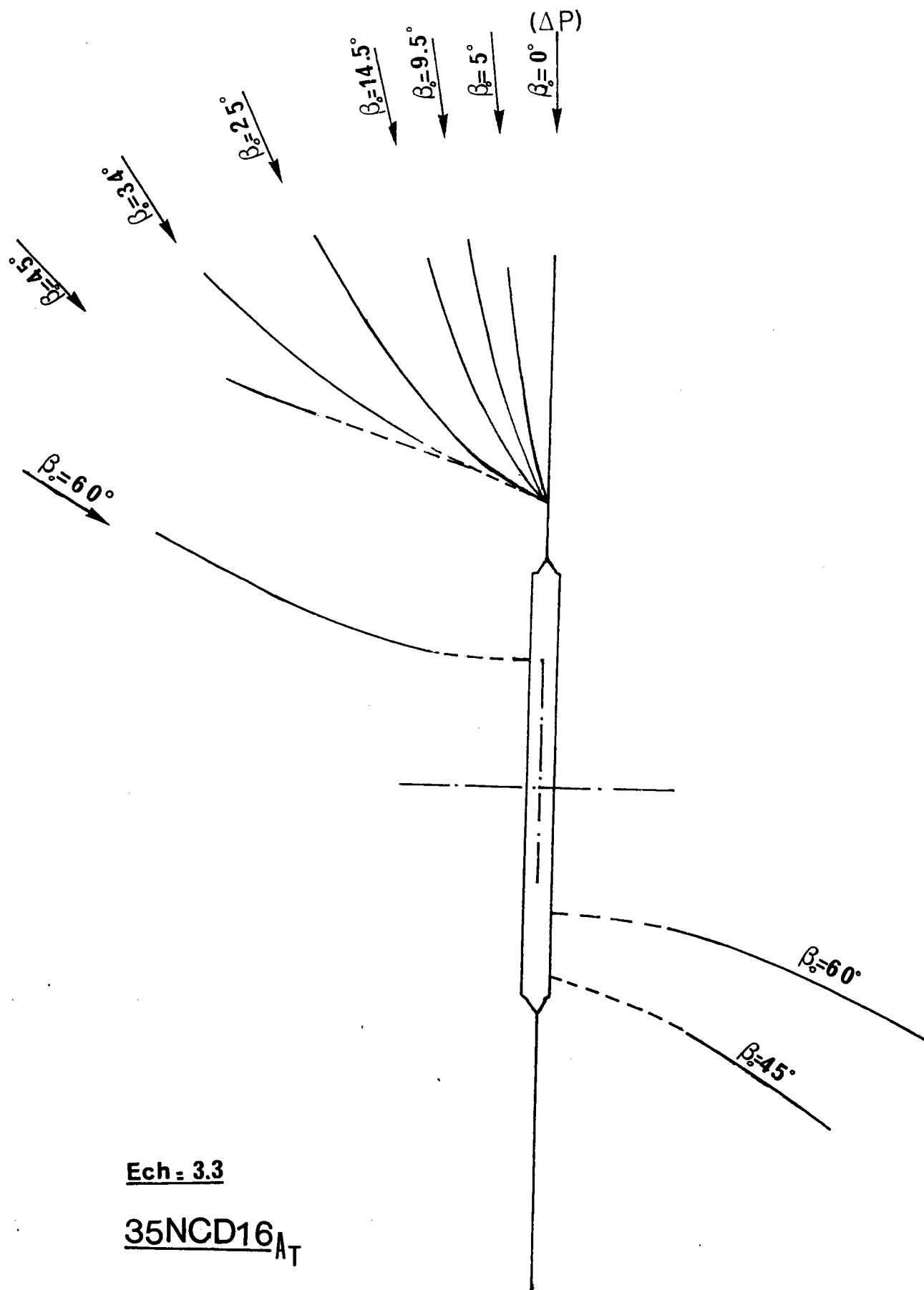
- Figure E.11 - Fissure équivalente - Notations

- Figure E.12 - Evolution de la trajectoire de la fissure en fonction de l'angle de chargement

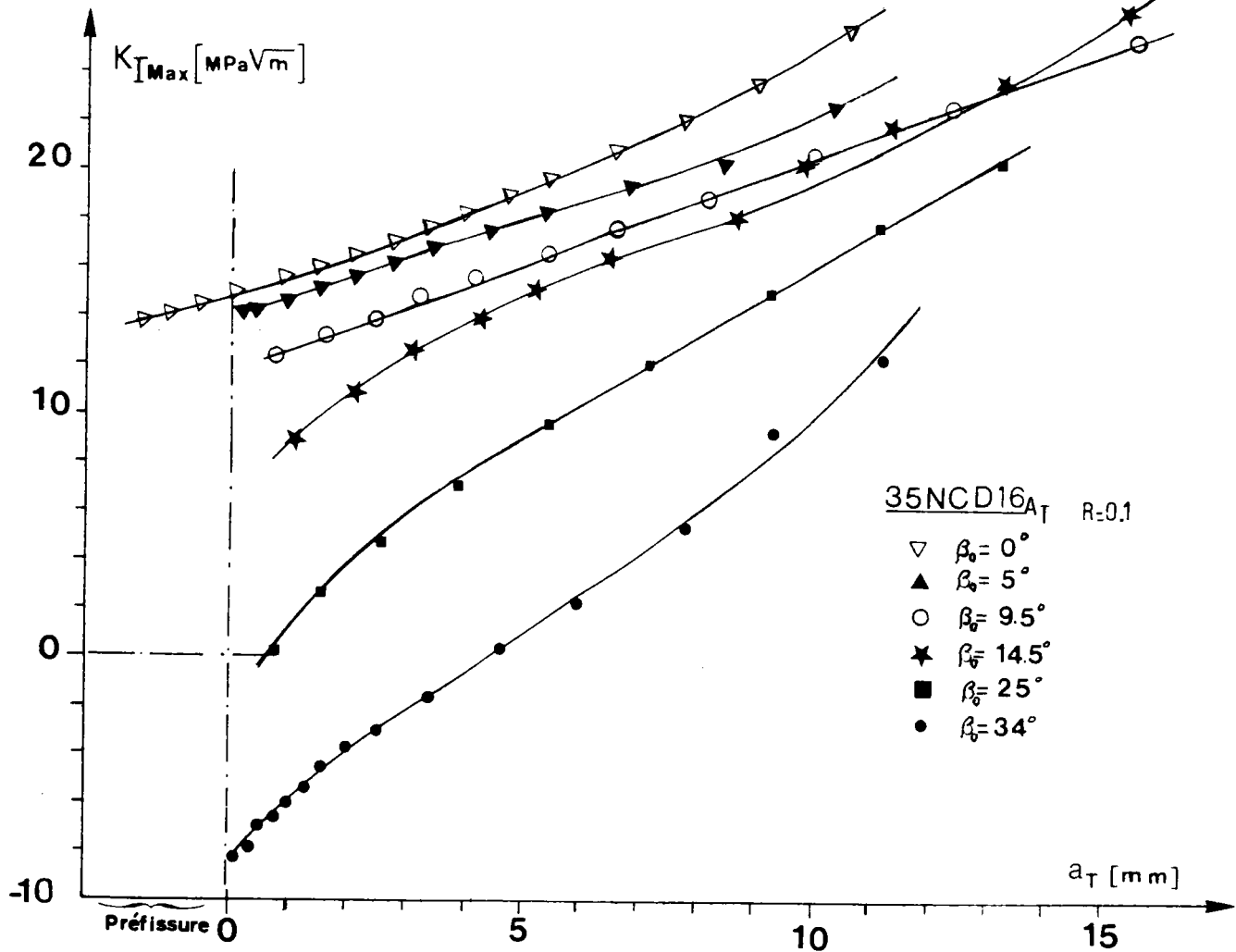


- Figure E.13 - Evolution de la trajectoire de la fissure en fonction de l'angle de chargement - chargement initial de mode II impur

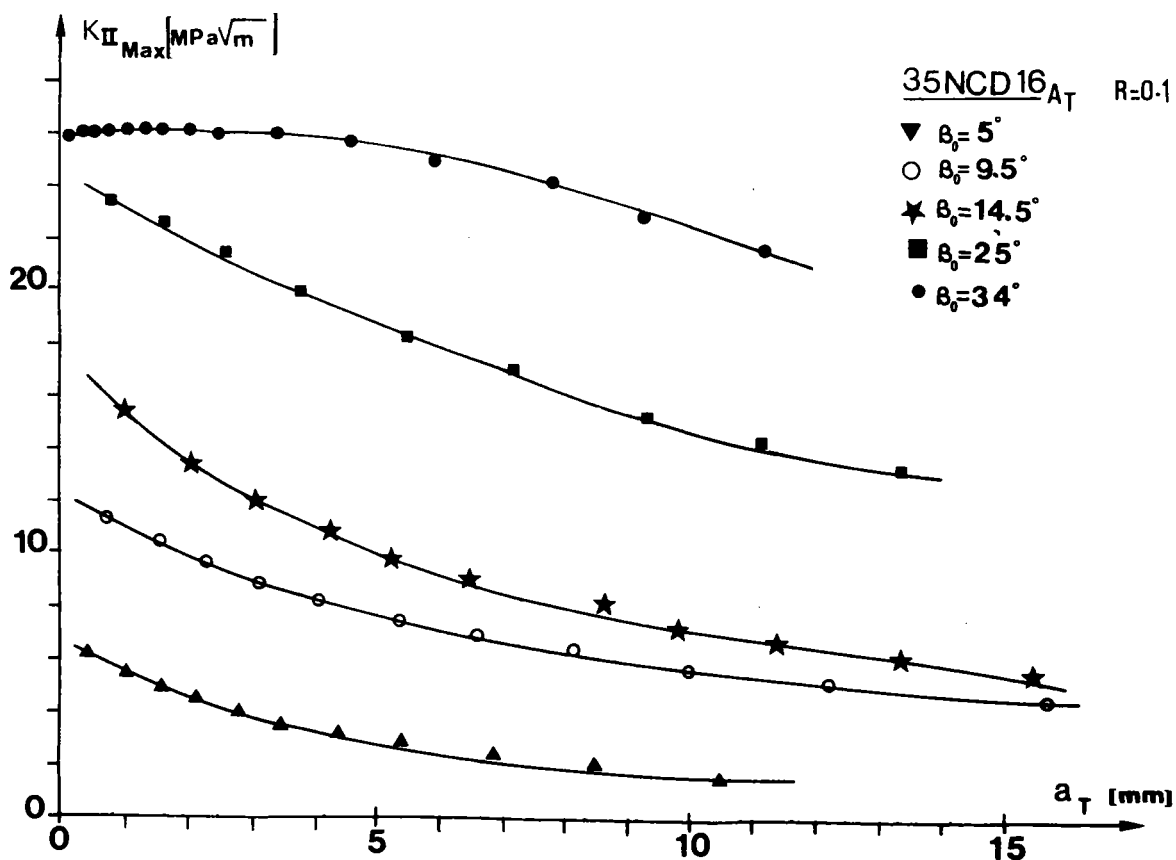




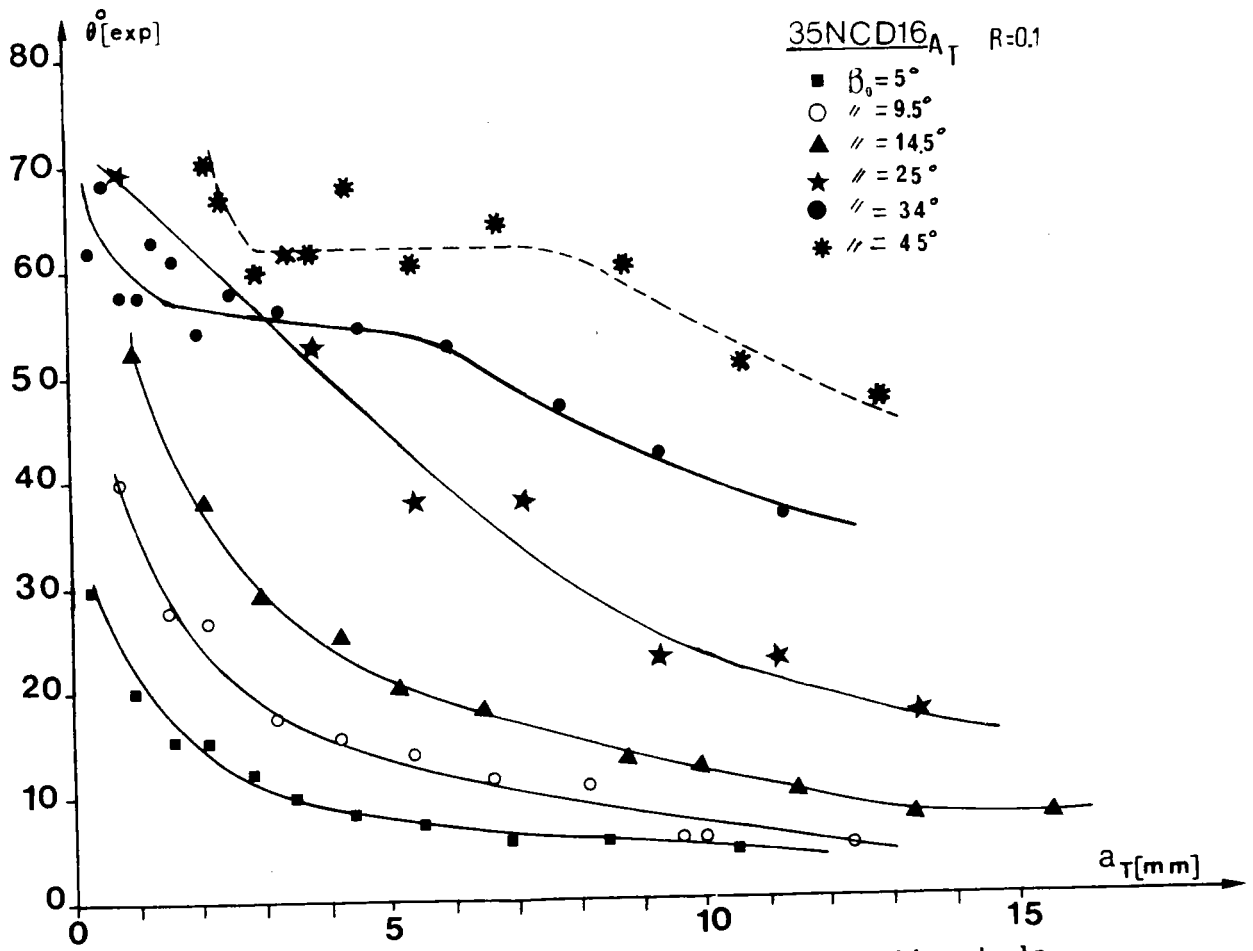
- Figure E.14 - Influence de l'angle de chargement sur la trajectoire de la fissure



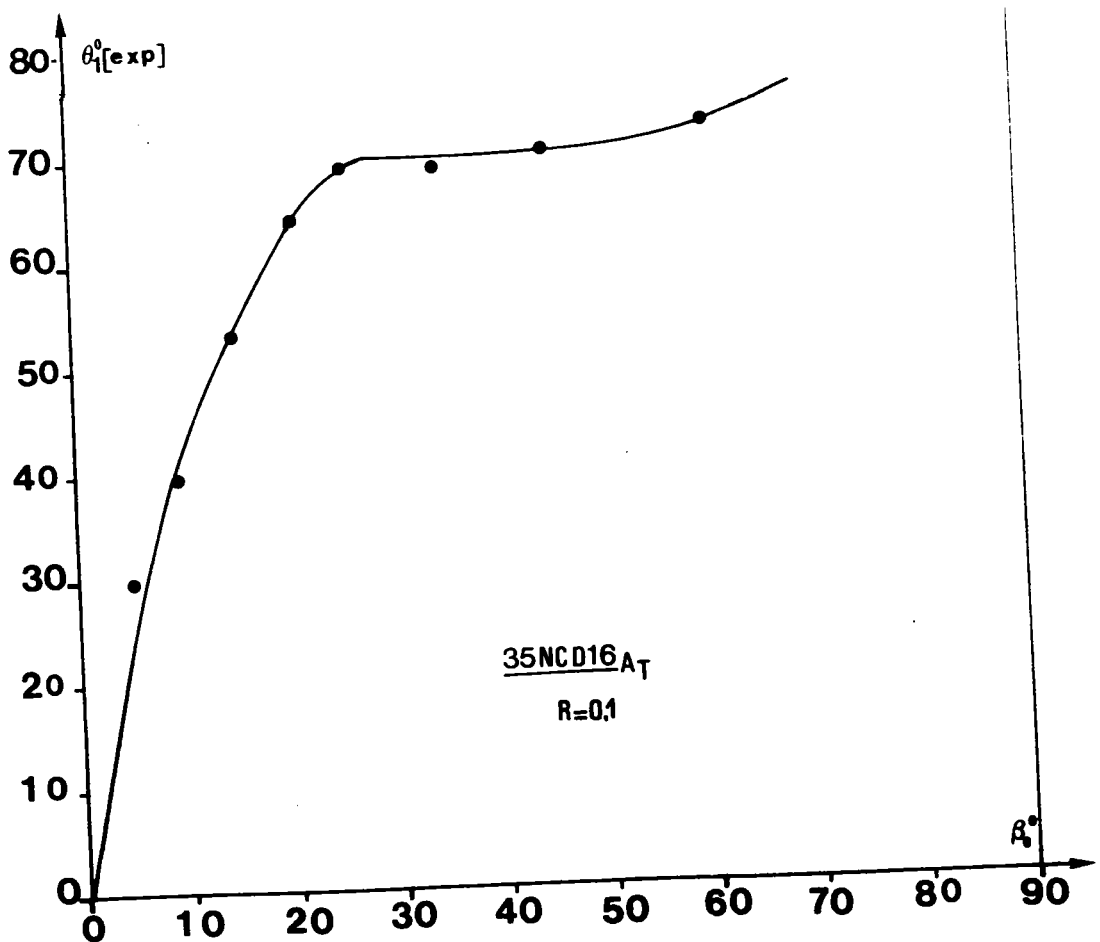
- Figure E.15 - Evolution du facteur  $(K_I)_{\text{max}}$  en fonction de la longueur de la fissure curviligne pour différentes valeurs de l'angle de chargement



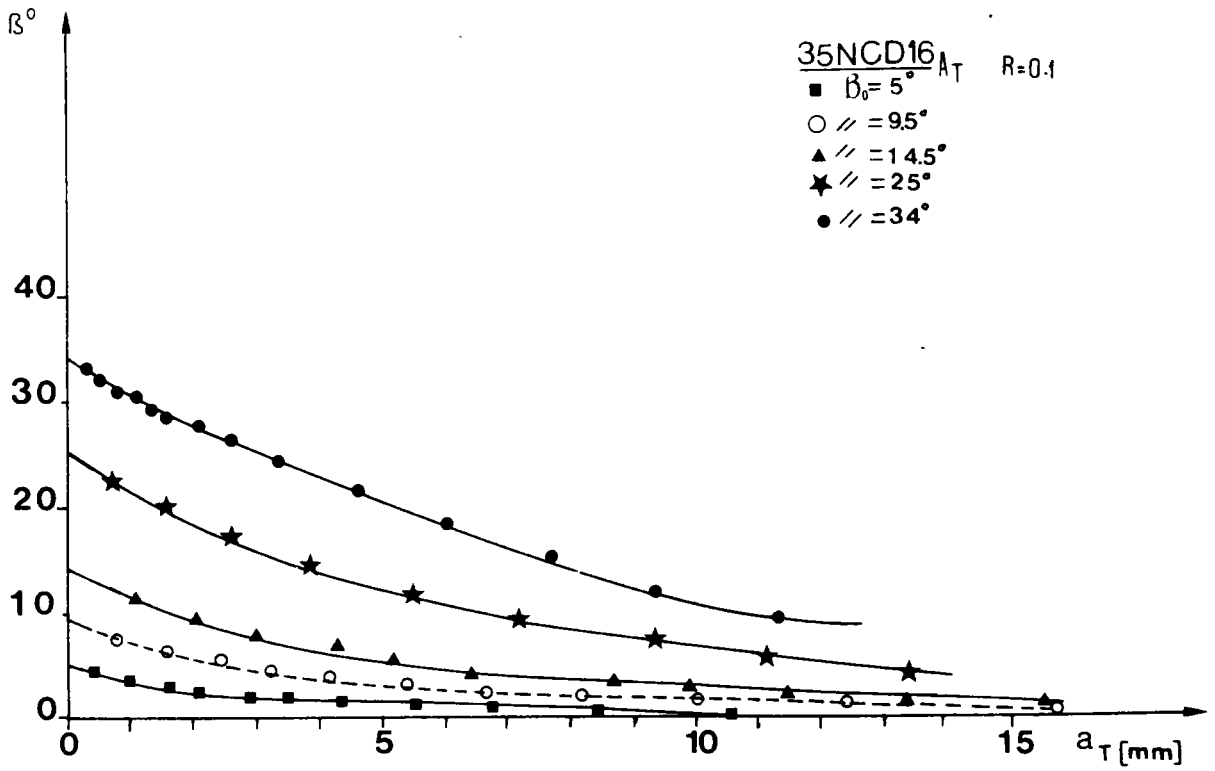
- Figure E.16 - Evolution du facteur  $(K_{II})_{\text{max}}$  en fonction de la longueur de la fissure curviligne pour différentes valeurs de l'angle de chargement



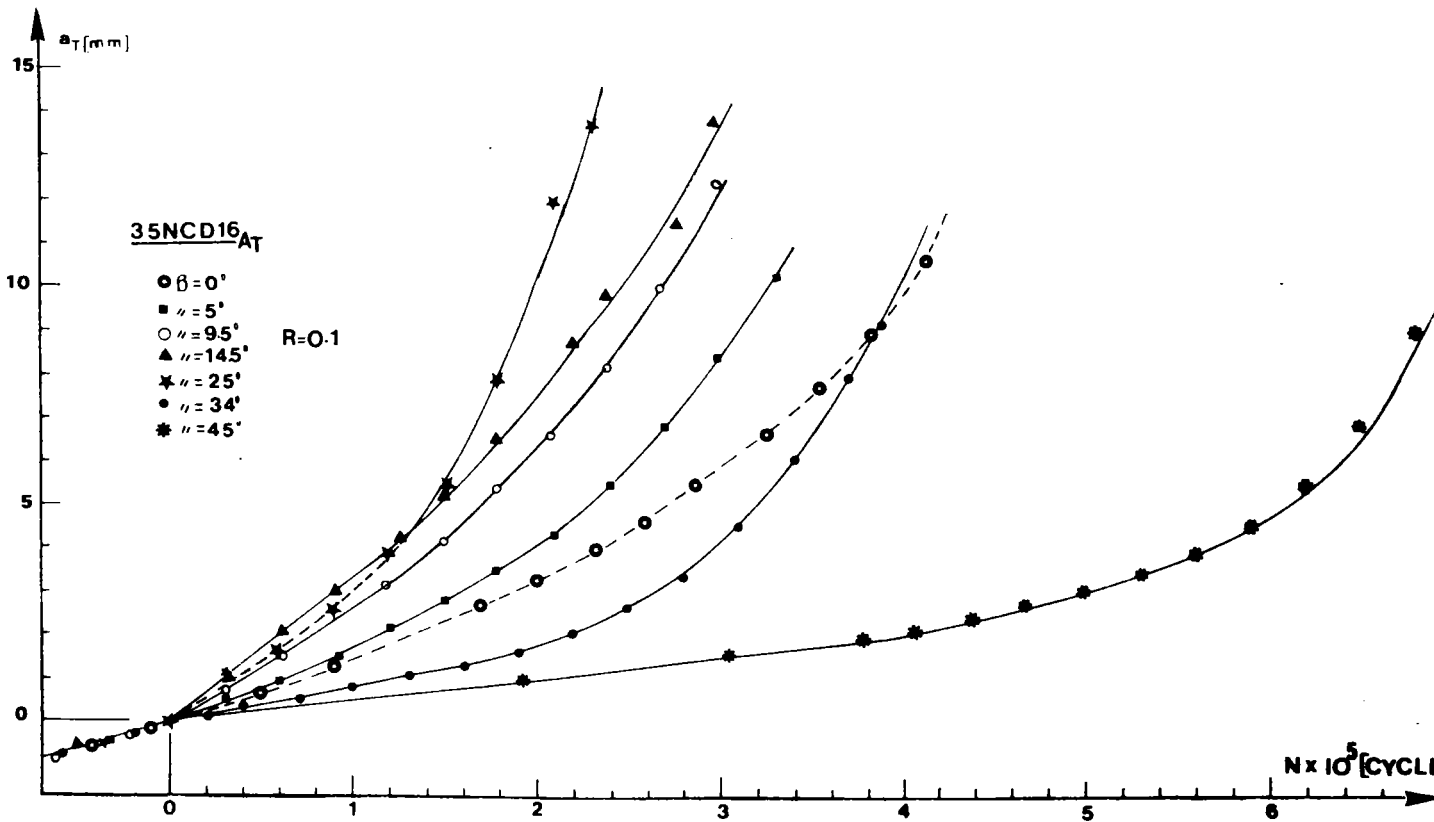
- Figure E.17 - Evolution de l'angle de bifurcation en fonction de la longueur de la fissure curviligne pour différentes valeurs de  $\beta_0$ .



- Figure E.18 - Evolution de l'angle de bifurcation initial en fonction de l'angle de chargement initial

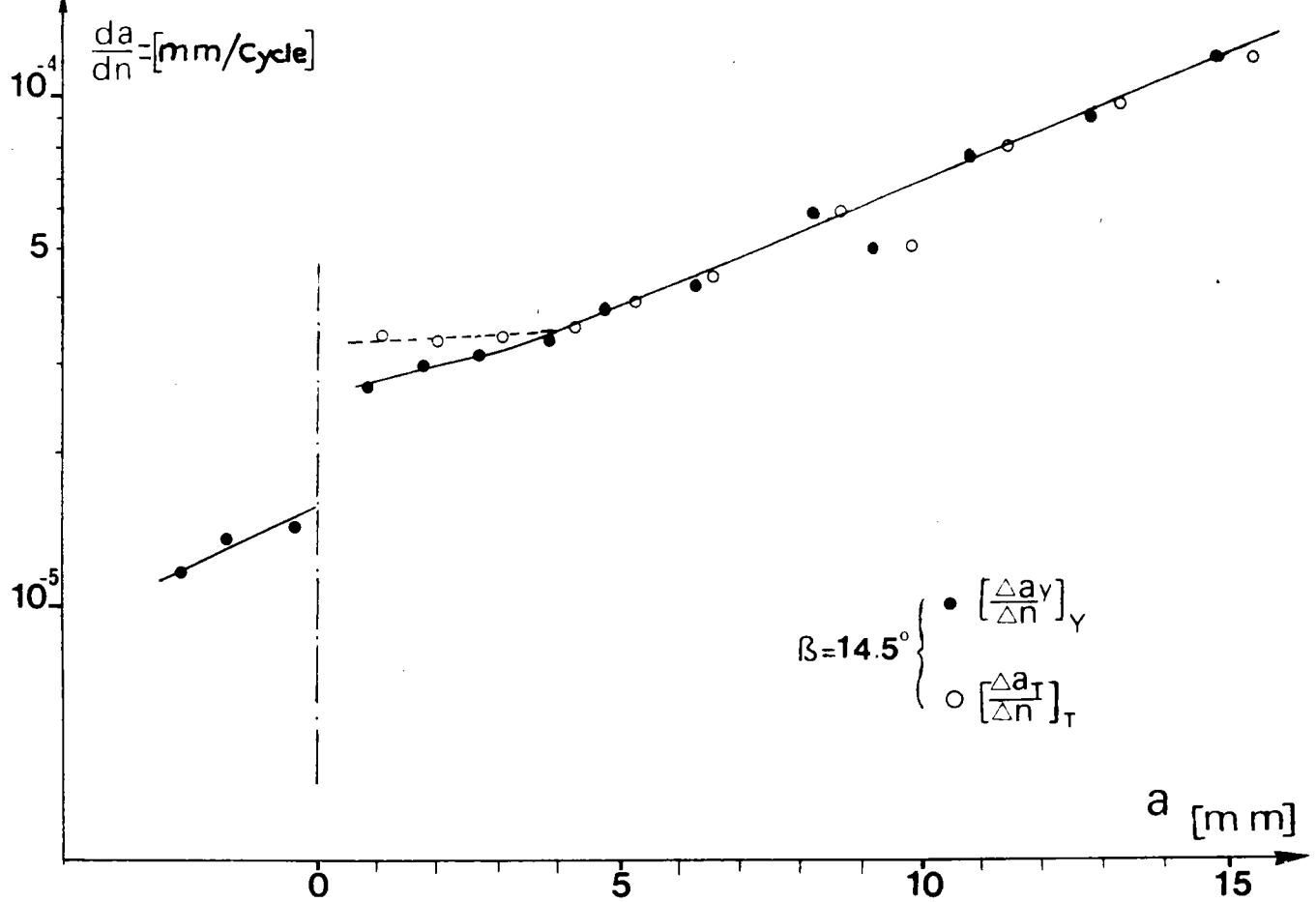


- Figure E.19 - Evolution de l'angle de chargement en fonction de la longueur de la fissure curviligne

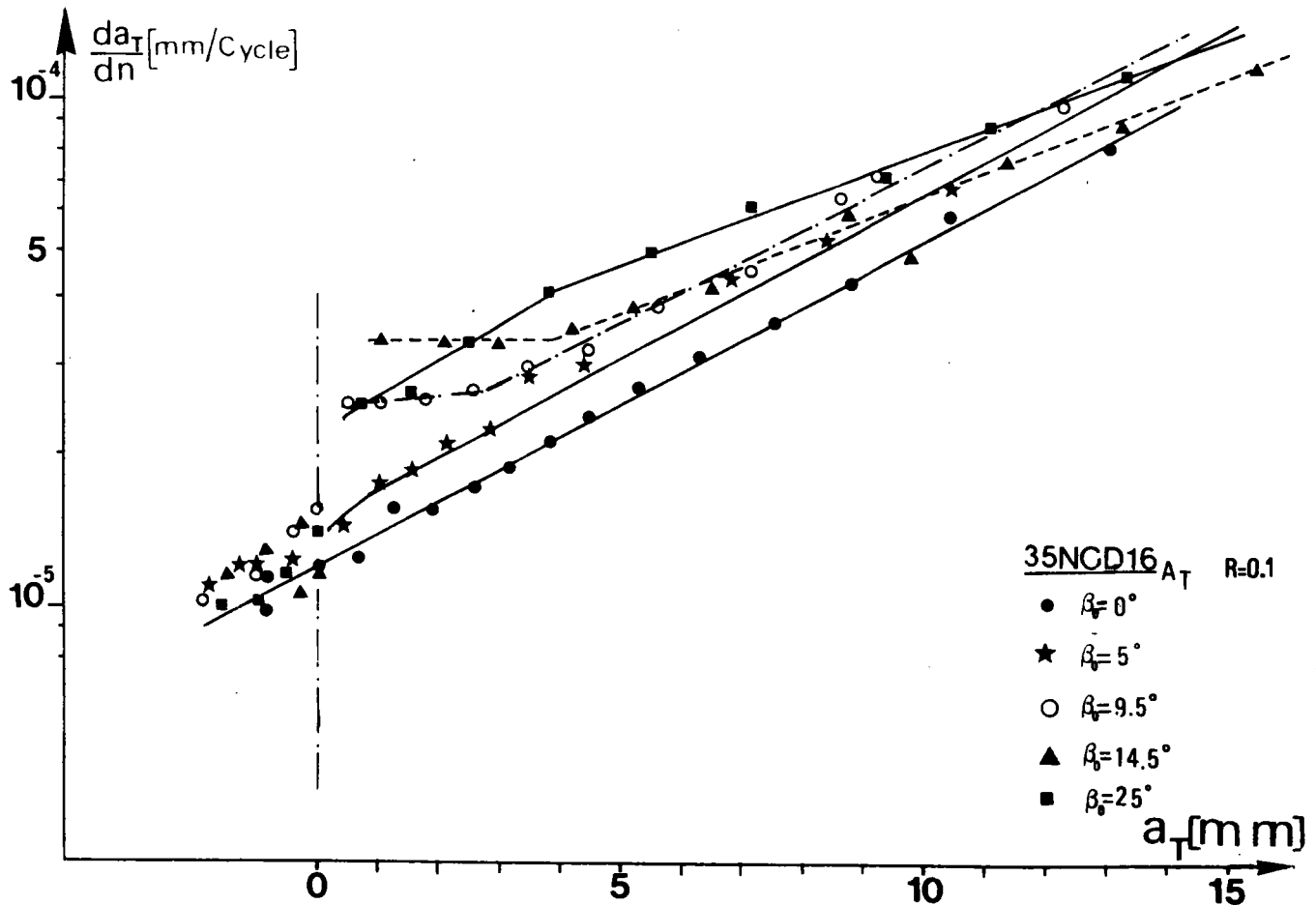


- Figure E.20 - Evolution de la longueur de la fissure curviligne en fonction du nombre de cycles pour différentes valeurs de  $\beta_0$

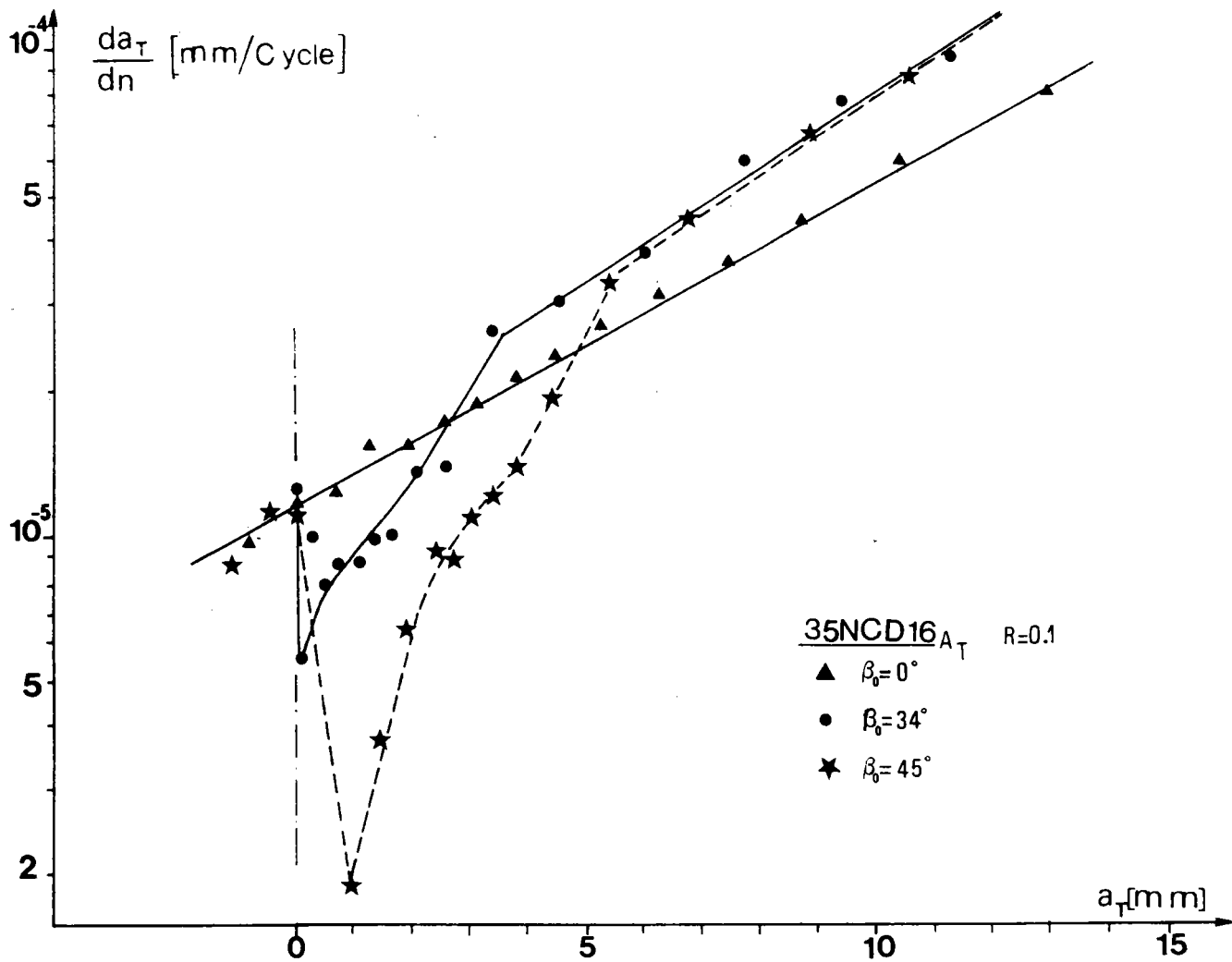




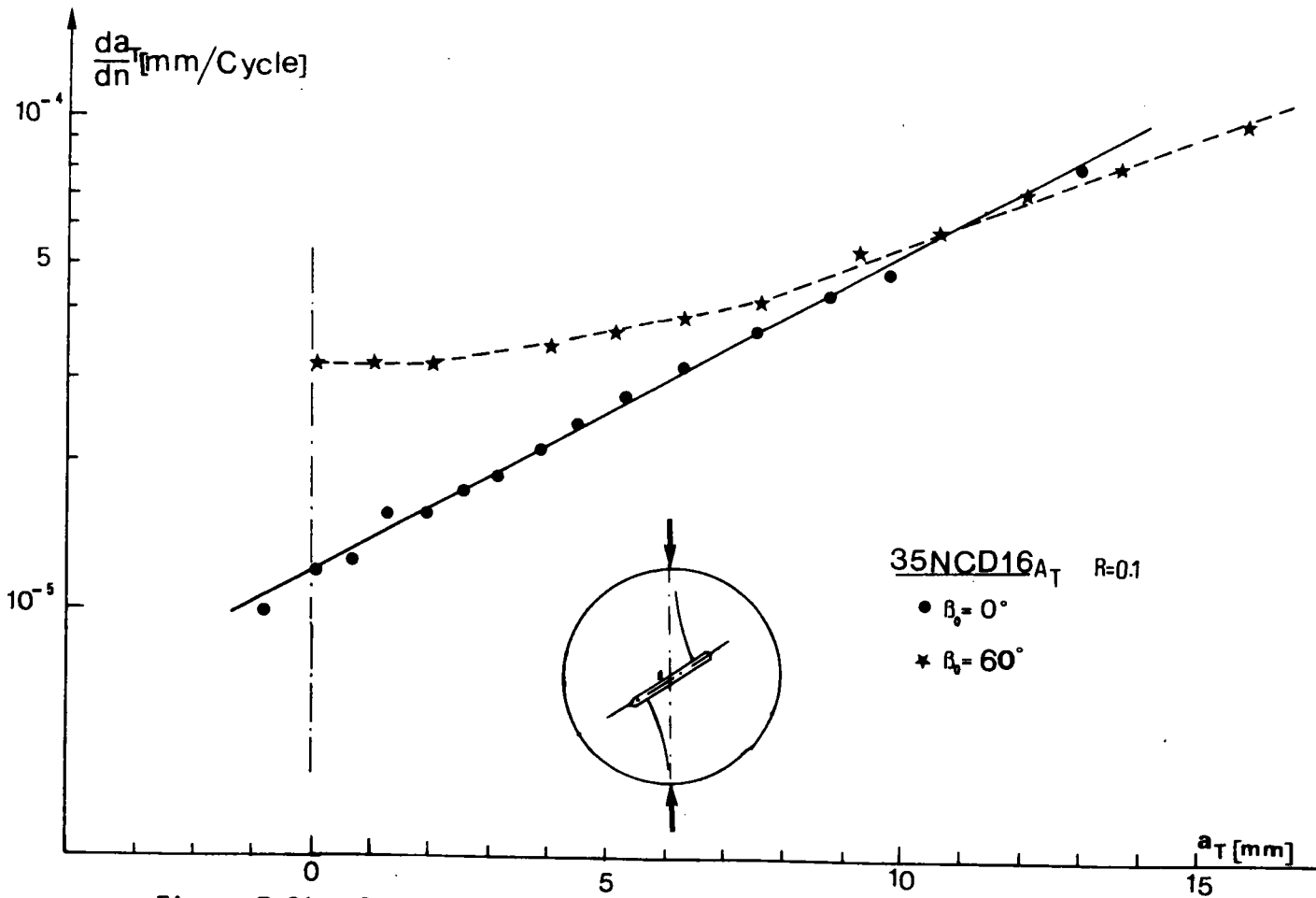
- Figure E.21 - Comparaison de l'évolution des vitesses de fissuration instantanées  $\Delta a_Y/\Delta N$  et  $\Delta a_T/\Delta N$  en fonction de la longueur de fissure



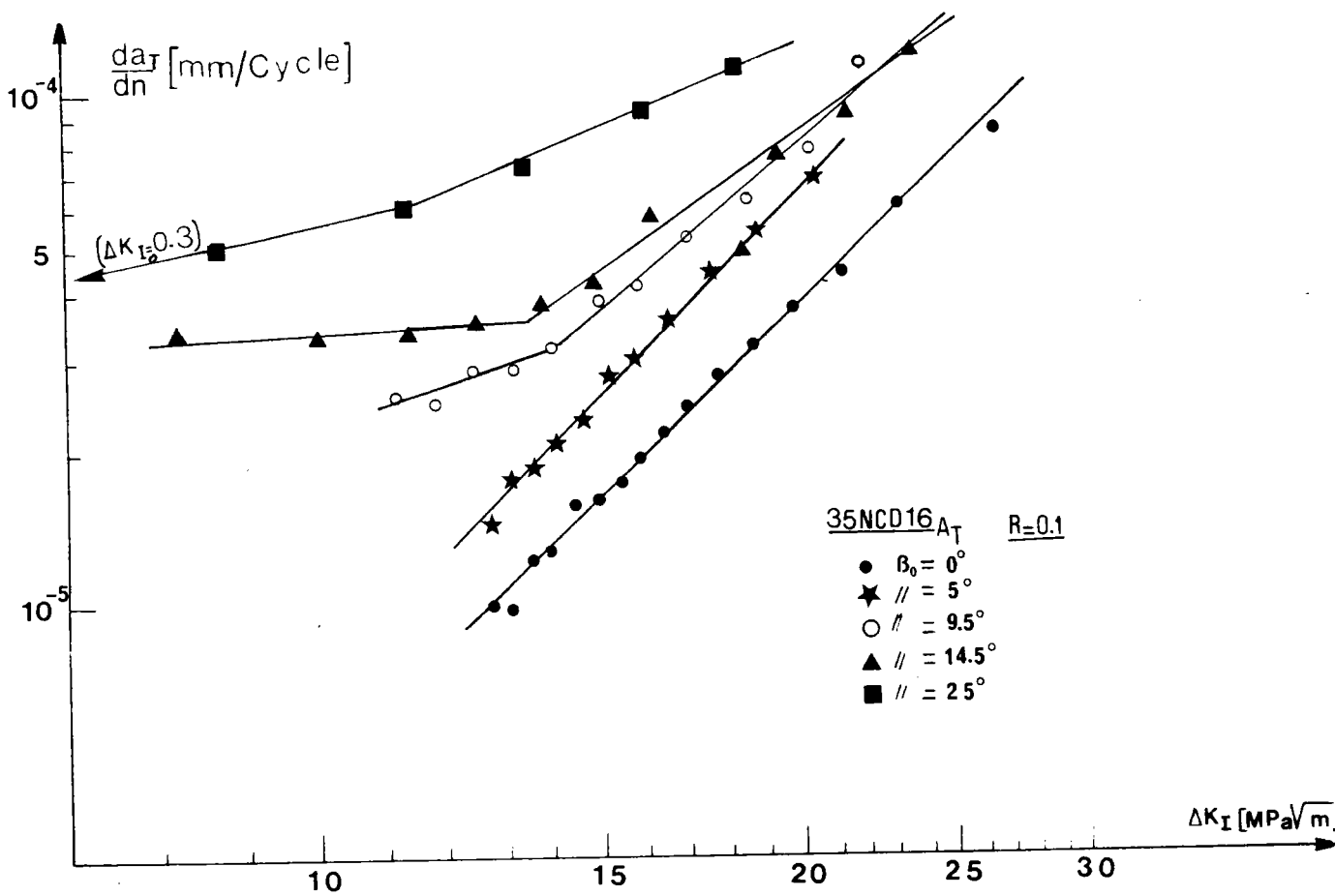
- Figure E.22 - Evolution de la vitesse de fissuration en fonction de la longueur de la fissure curviligne (chargement initial de mode I + II et de mode II pur)



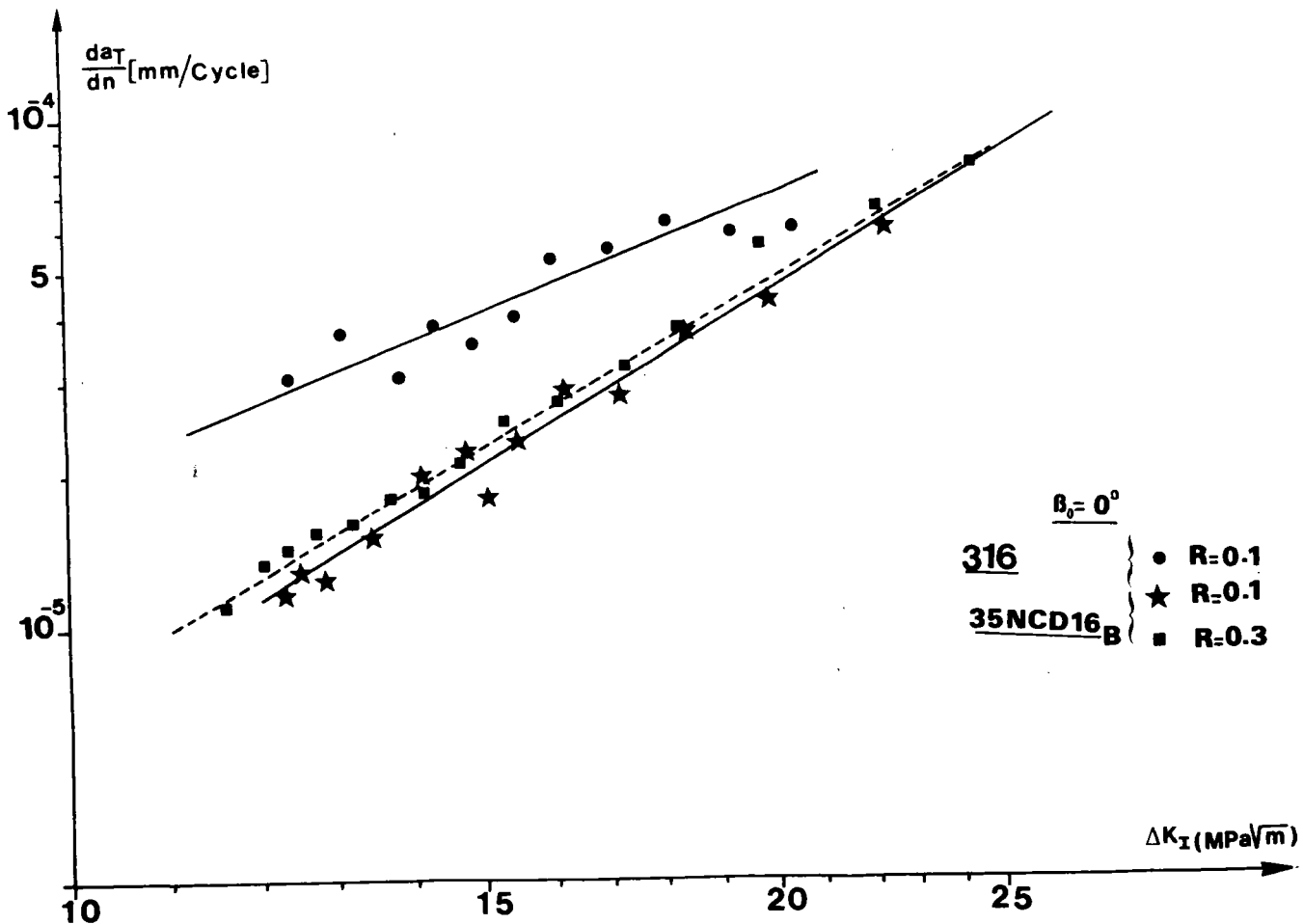
- Figure E.23 - Evolution de la vitesse de fissuration en fonction de la longueur de la fissure curviligne (chargement initial de mode II impur)



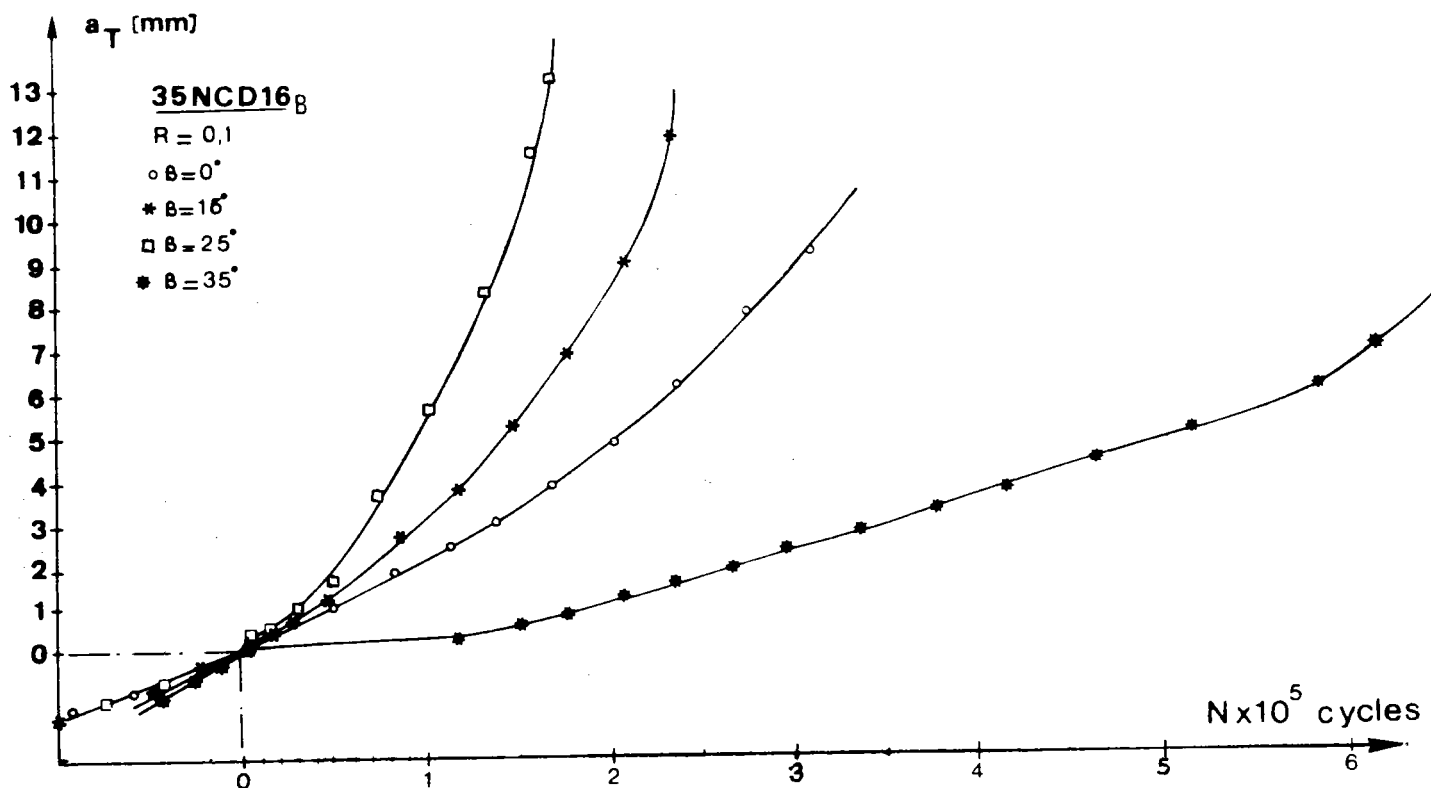
- Figure E.24 - Comparaison des vitesses de fissuration pour l'essai à  $60^\circ$  et de *Levai* en mode I.



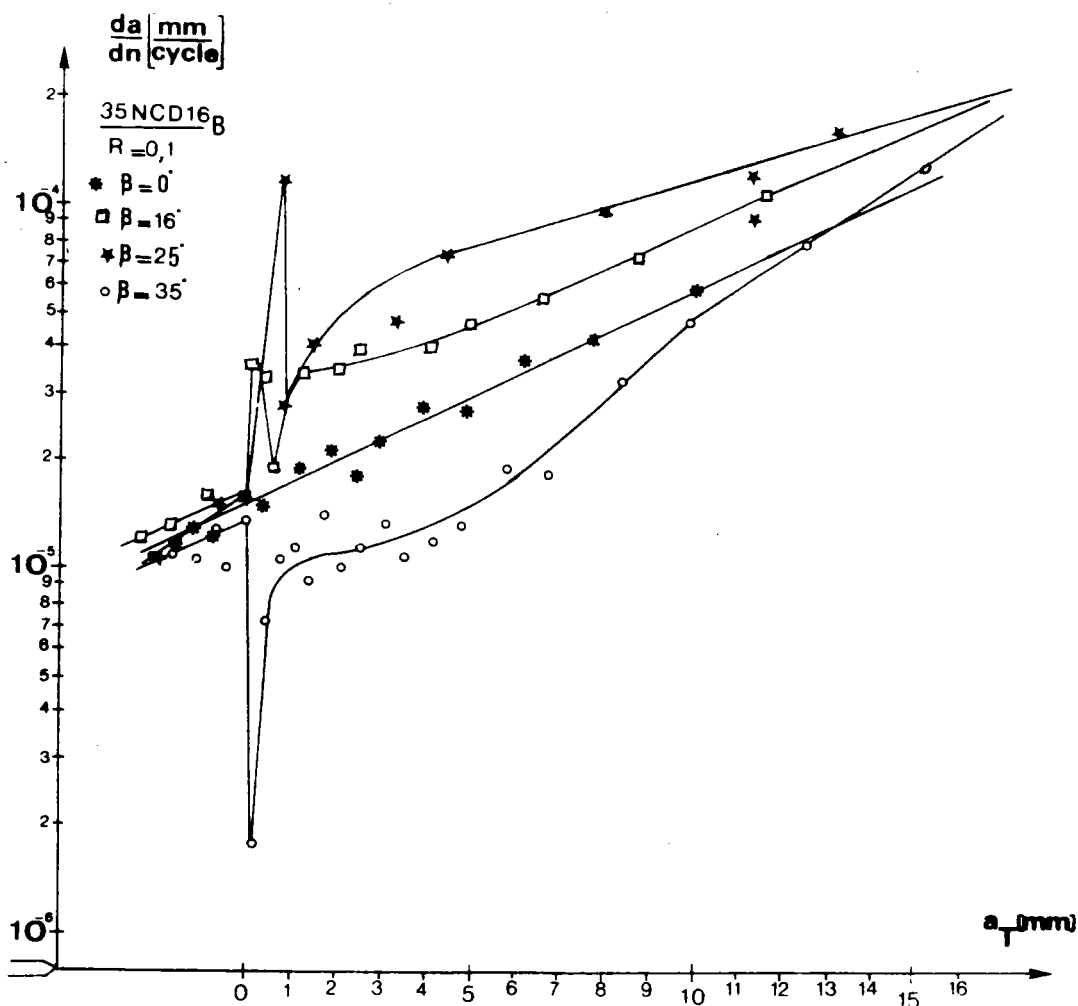
- Figure E.25 - Evolution des courbes de vitesse de fissuration en fonction de la composante du mode I seule, pour différentes valeurs de  $\beta_0$ .



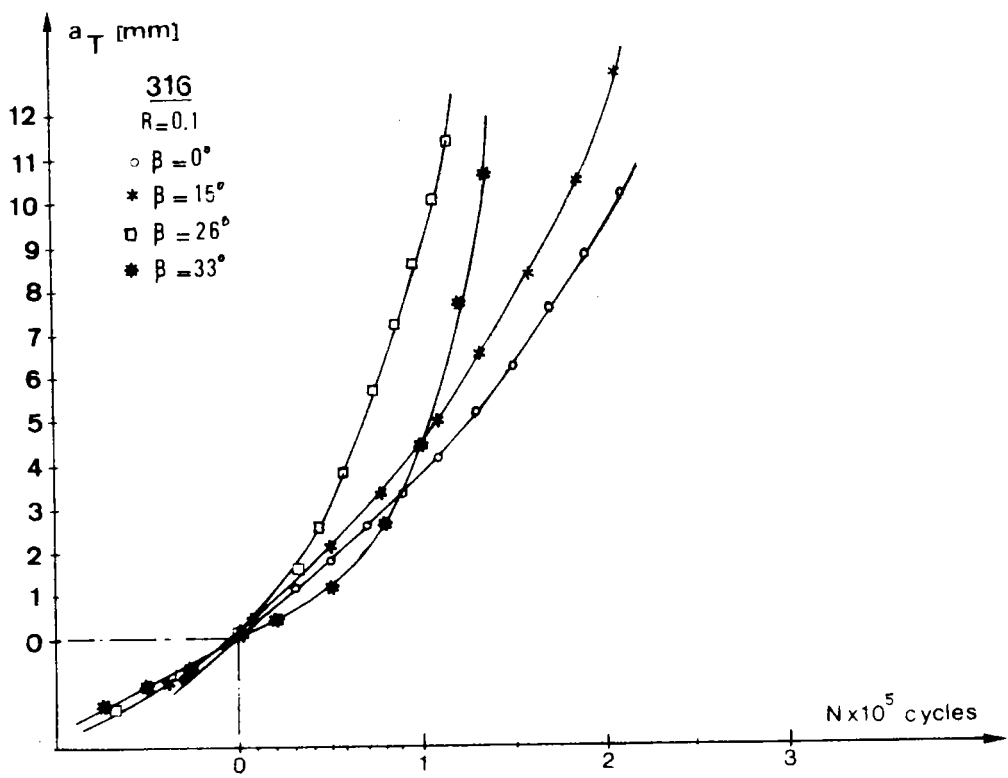
- Figure E.26 - Evolution de la vitesse de propagation en mode I pur en fonction de  $\Delta K_I$  (cas de l'acier 316)  
Influence du rapport R sur la vitesses de propagation en mode I (cas de l'acier 35NCD16<sub>B</sub>)



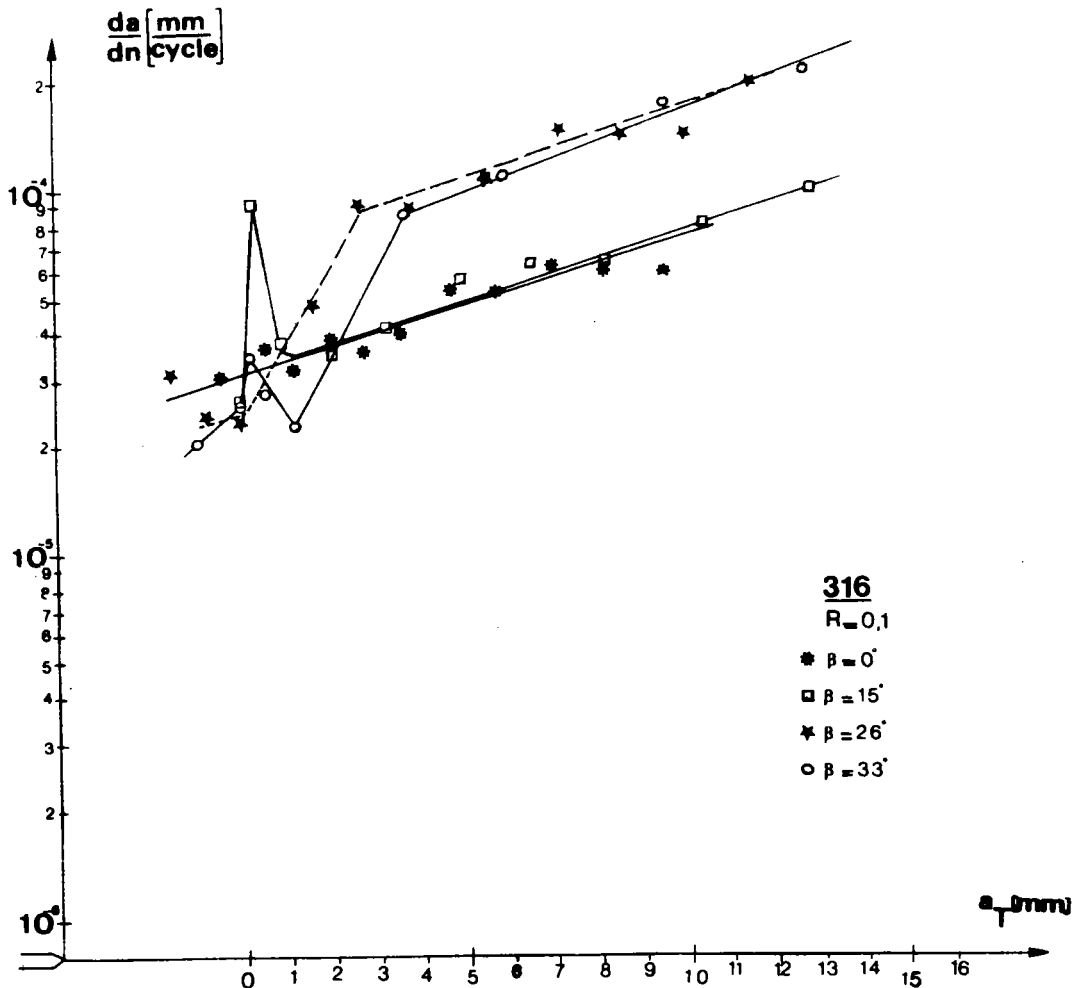
- Figure E.27 - Evolution de la longueur de la fissure curviligne en fonction du nombre de cycles pour différentes valeurs de l'angle de chargement initial



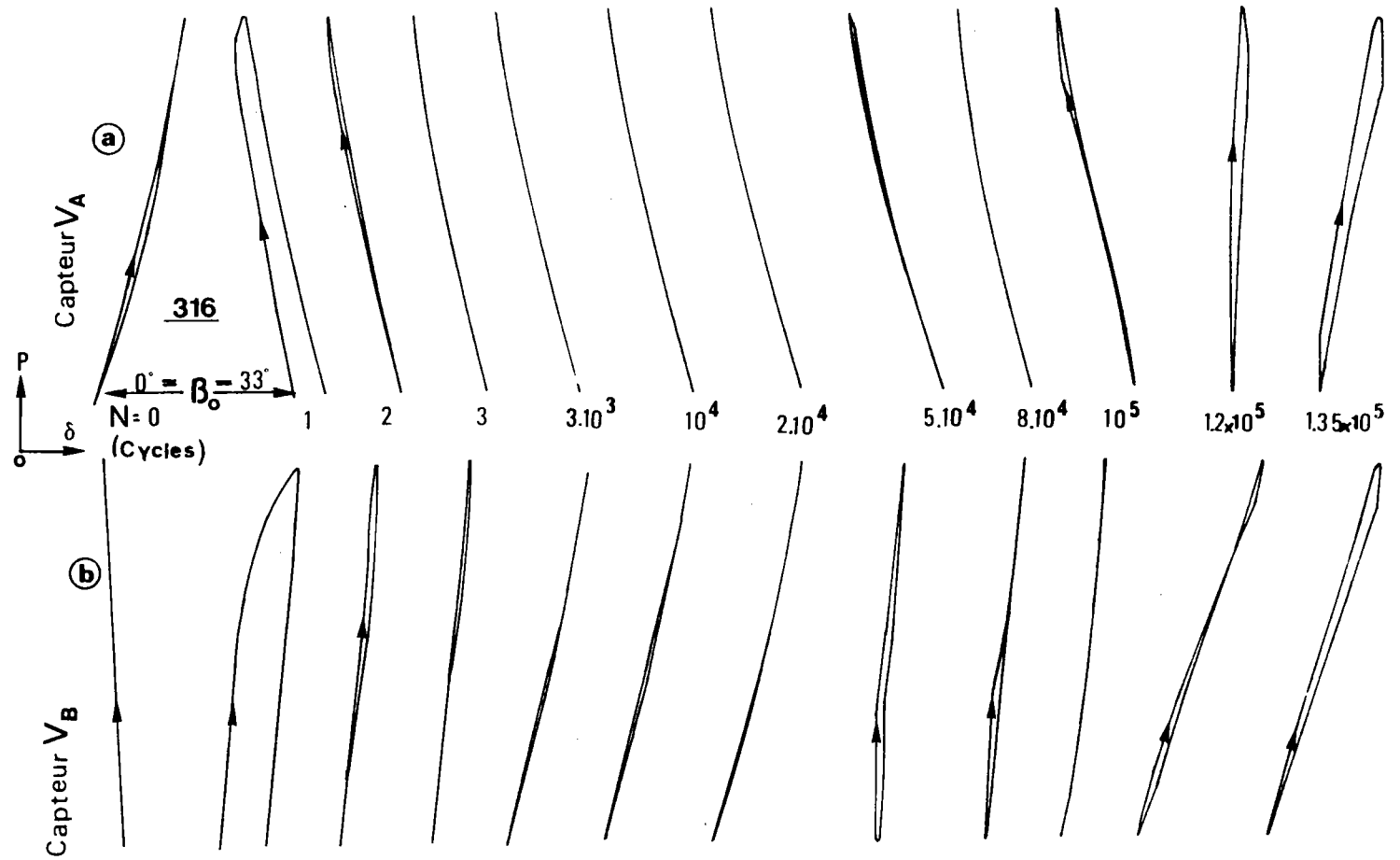
- Figure E.28 - Evolution de la vitesse de fissuration en fonction de la longueur de la fissure curviligne pour différents valeurs de l'angle de chargement initial



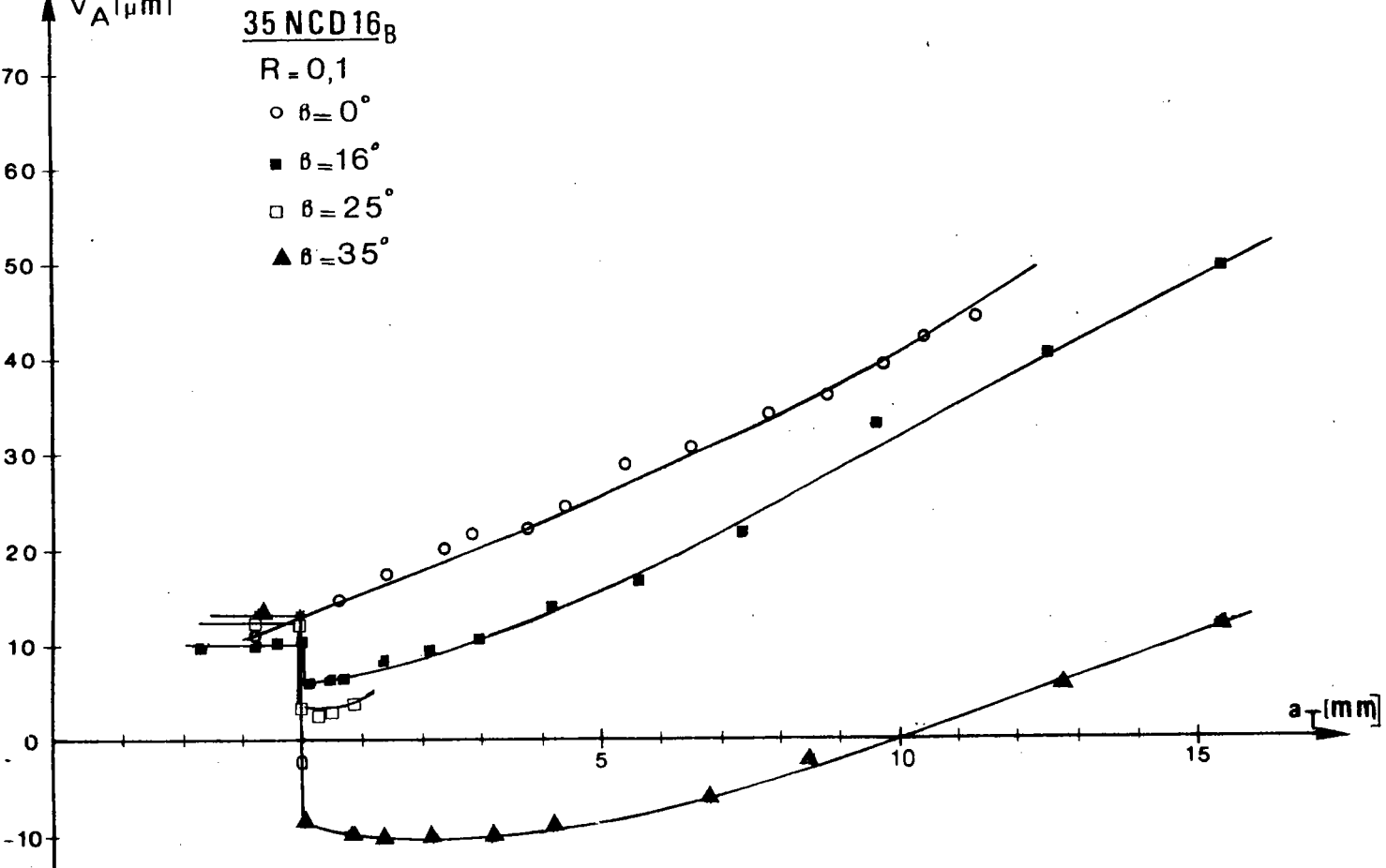
- Figure E.29 - Evolution de la longueur de la fissure curviligne en fonction du nombre de cycles pour différentes valeurs de l'angle de chargement initial



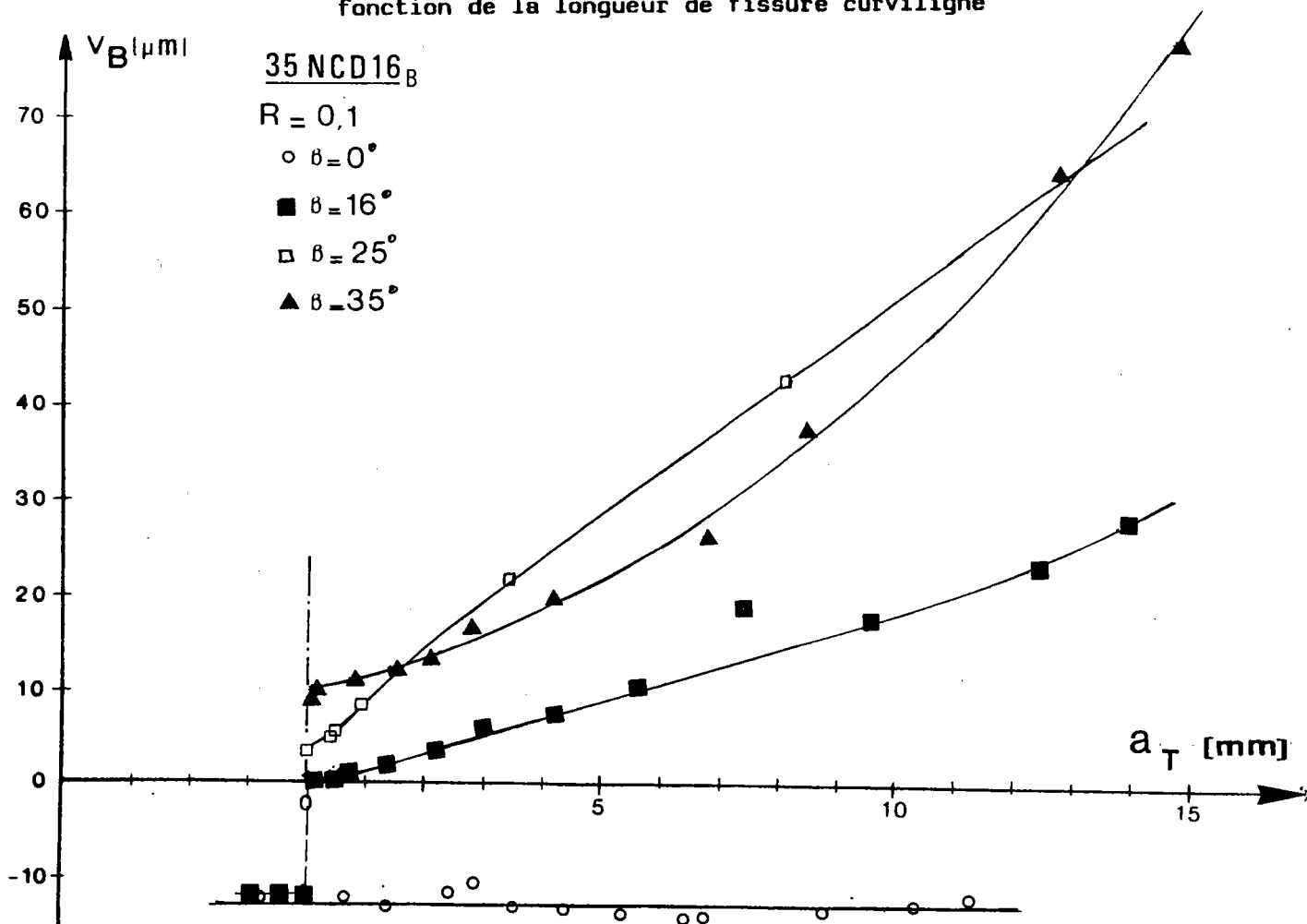
- Figure E.30 - Evolution de la vitesse de fissuration en fonction de la longueur de la fissure curviligne pour différents valeurs de l'angle de chargement initial



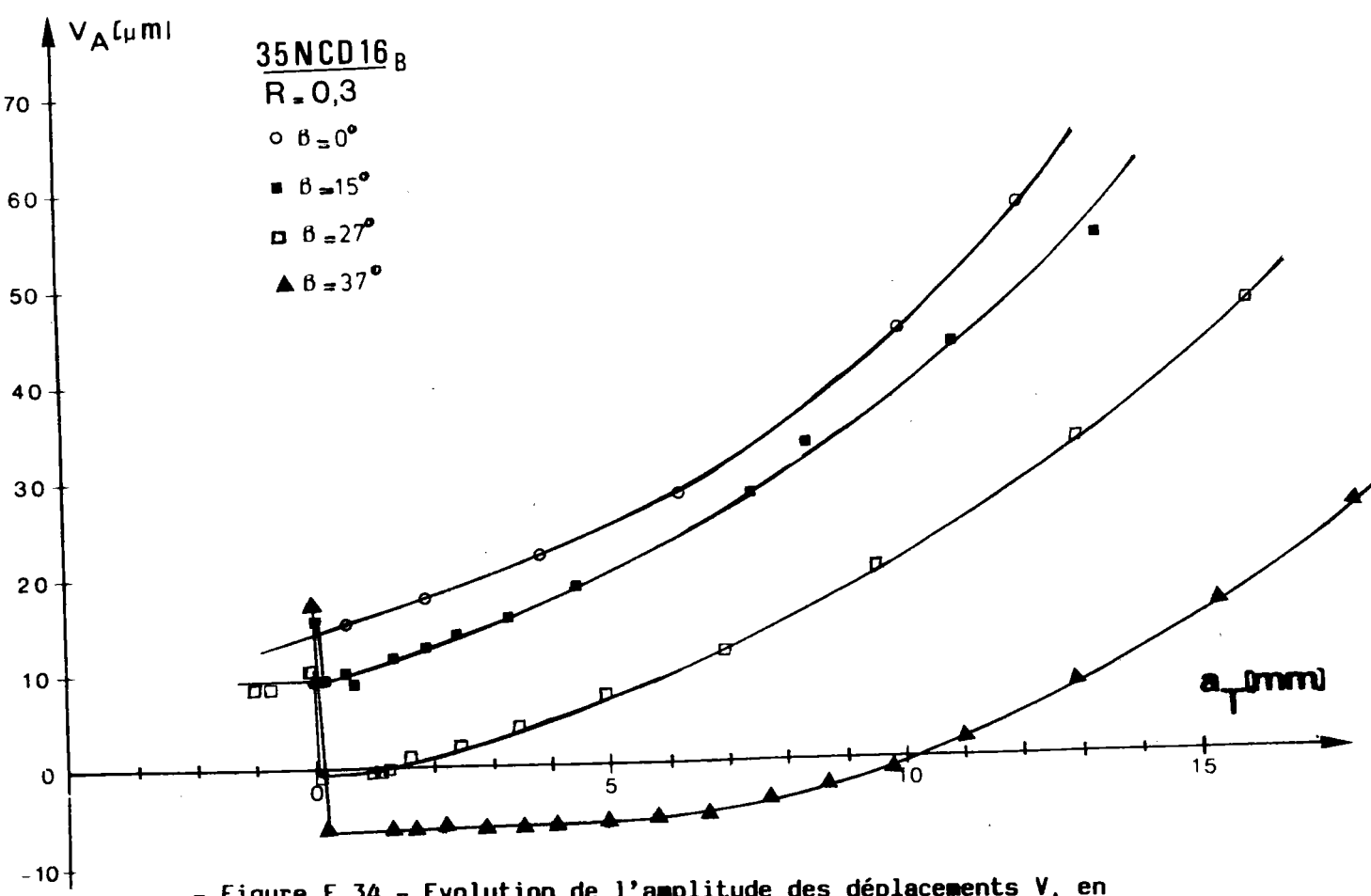
- Figure E.31 - Evolution des diagrammes P -  $\delta$  après inclinaison du disque d'un angle de 33 degrés (acier 316)



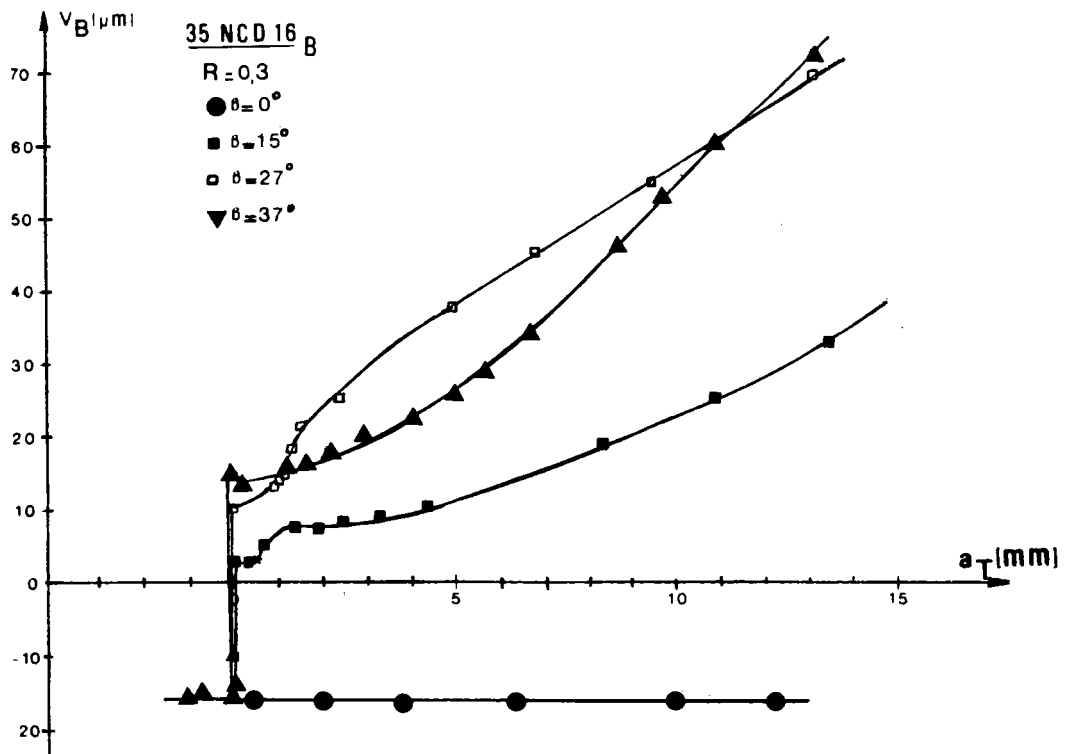
- Figure E.32 - Evolution de l'amplitude des déplacements  $V_A$  en fonction de la longueur de fissure curviligne



- Figure E.33 - Evolution de l'amplitude des déplacements  $V_B$  en fonction de la longueur de fissure curviligne

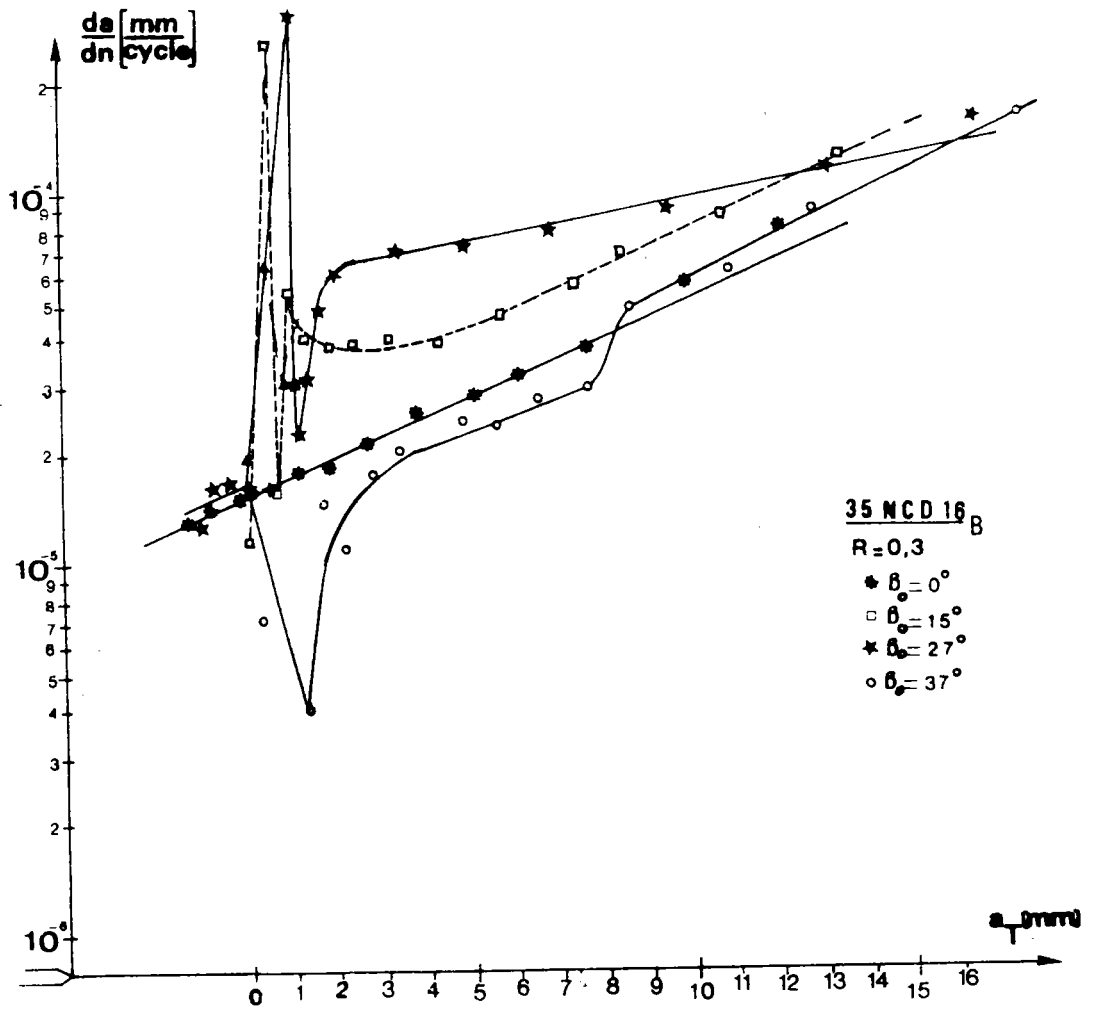


- Figure E.34 - Evolution de l'amplitude des déplacements  $V_A$  en fonction de la longueur de fissure curviligne

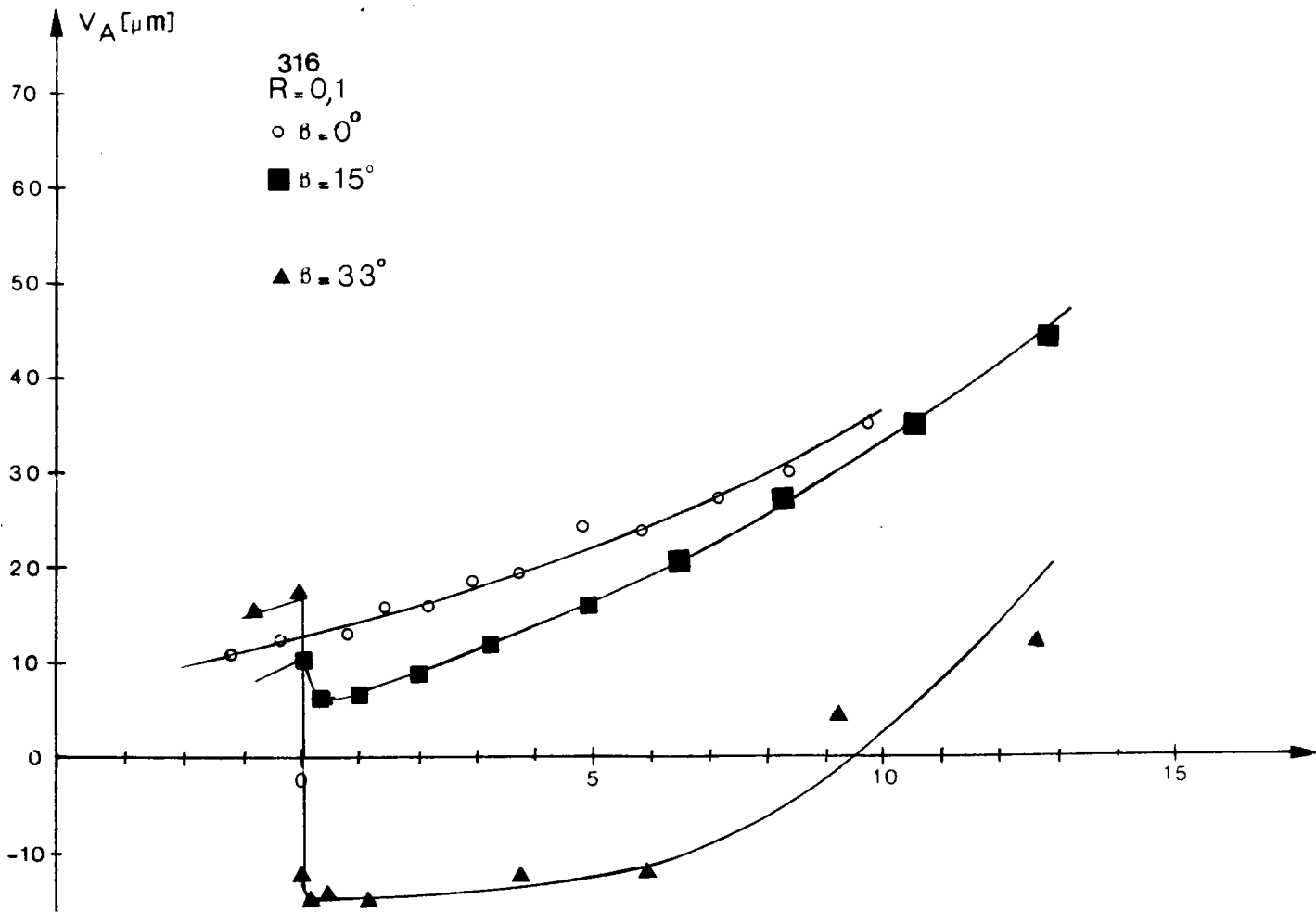


- Figure E.35 - Evolution de l'amplitude des déplacements  $V_B$  en fonction de la longueur de fissure curviligne ( $R=0,3$ )

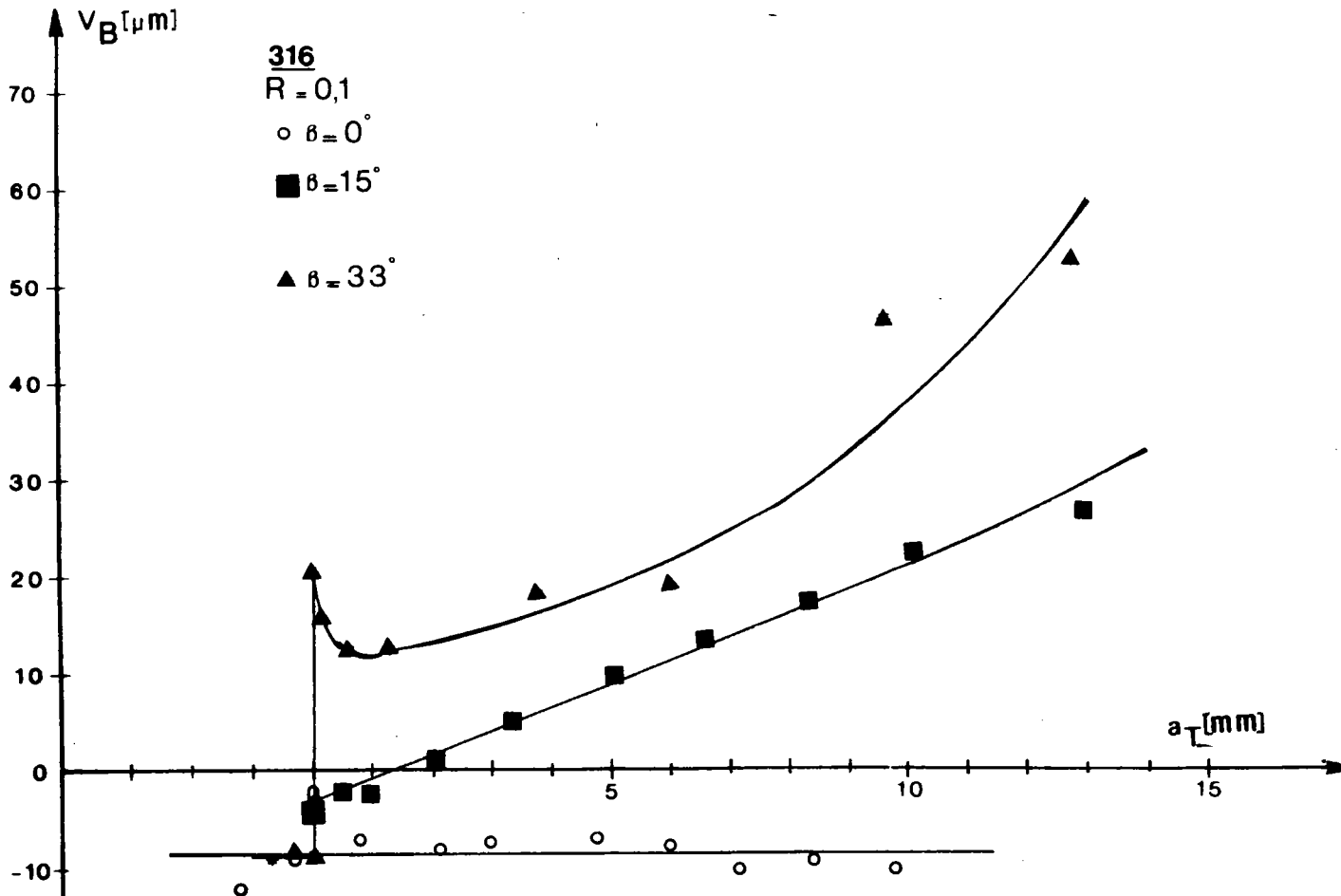




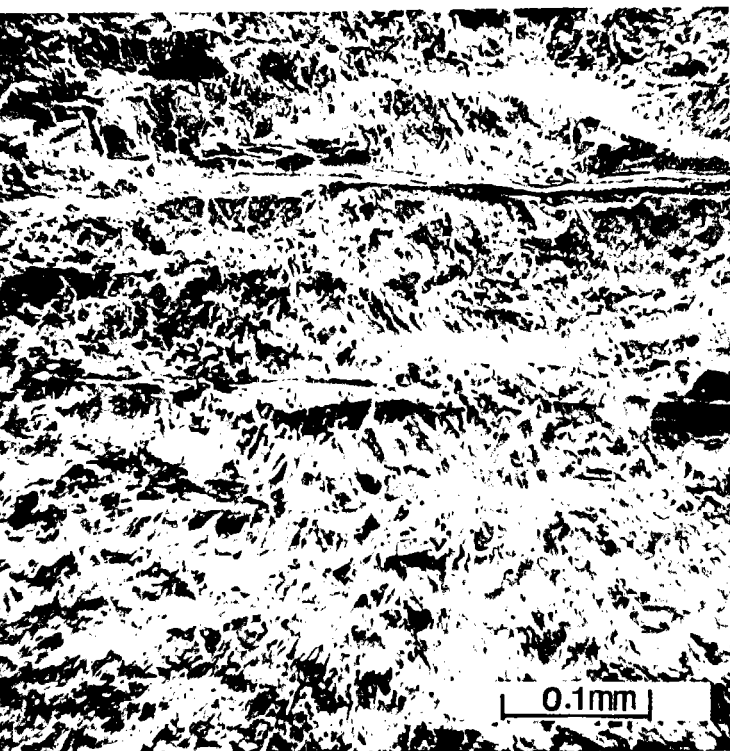
- Figure E.36 - Vitesse de fissuration en fonction de la longueur de fissure curviligne pour différentes valeurs de l'angle de chargement initial ( $R = 0,3$ )



- Figure E.37 - Evolution de l'amplitude des déplacements  $V_A$  en fonction de la longueur de fissure curviligne



- Figure E.38 - Evolution de l'amplitude des déplacements  $V_B$  en fonction de la longueur de fissure curviligne

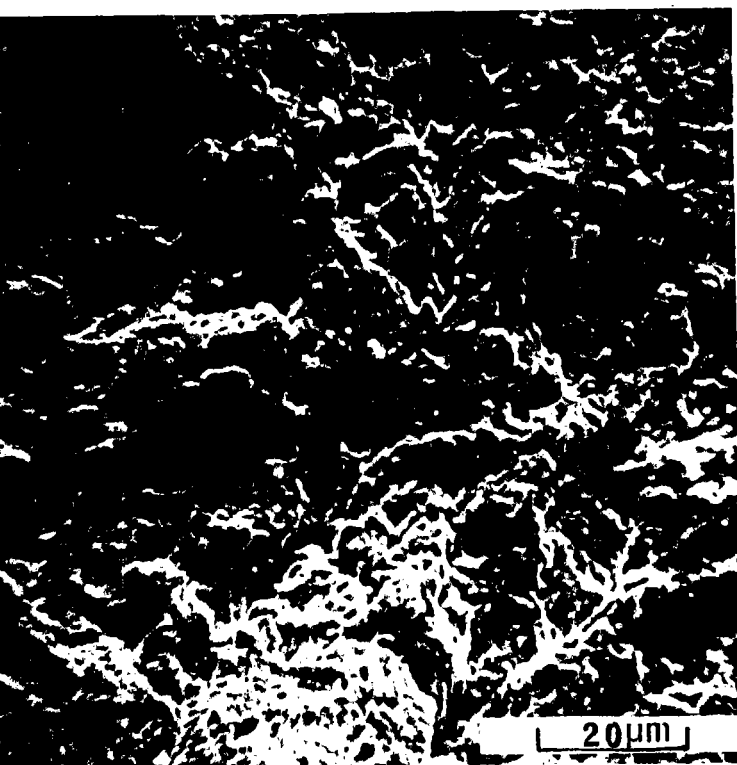


a.



b.

- Figure E.39 - Faciès de rupture ( $\beta_0 = 0^\circ$ ) = acier 316 =

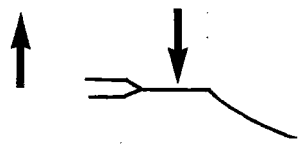
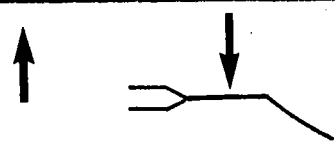
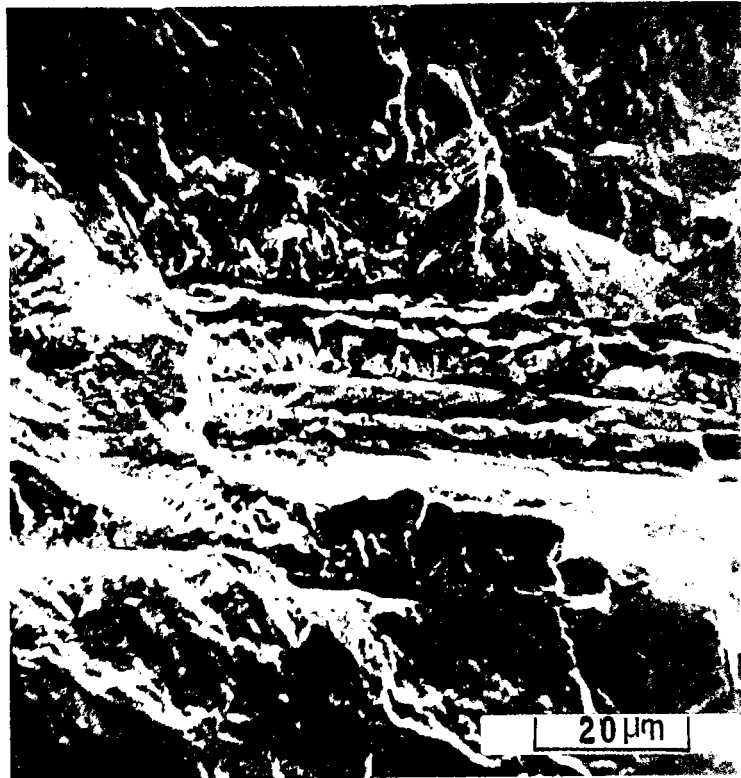
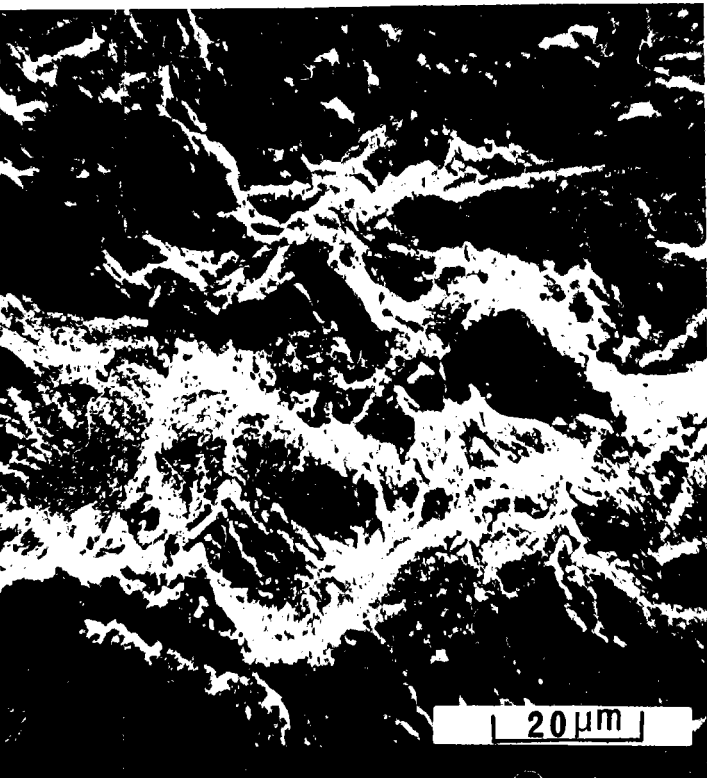


a.



b.

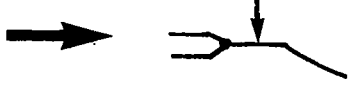
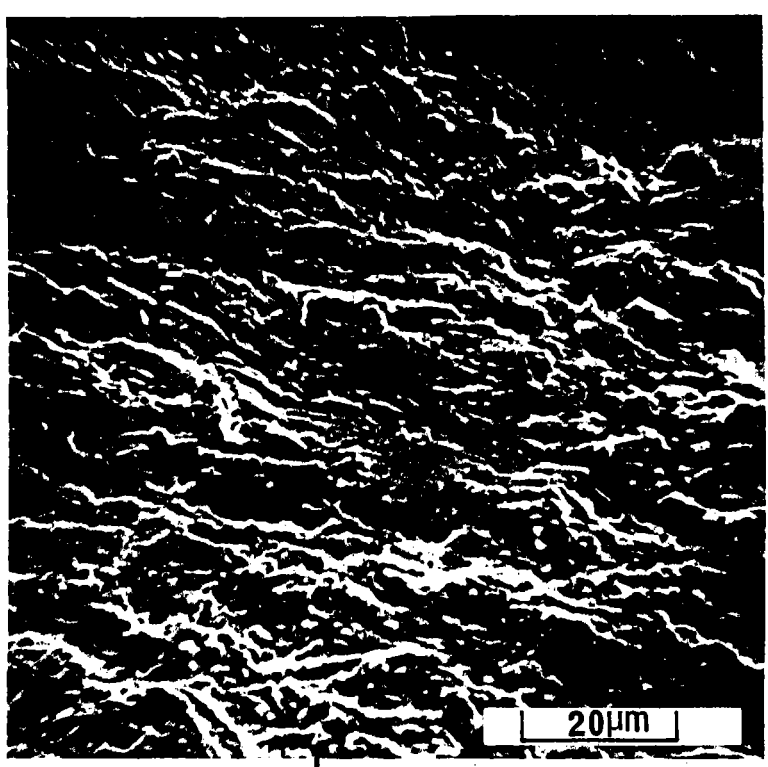
- Figure E.40 - Faciès de rupture ( $\beta_0 = 0^\circ$ ) = acier 35NCD16<sub>B</sub> =



a. absence de matage sur la préfissure

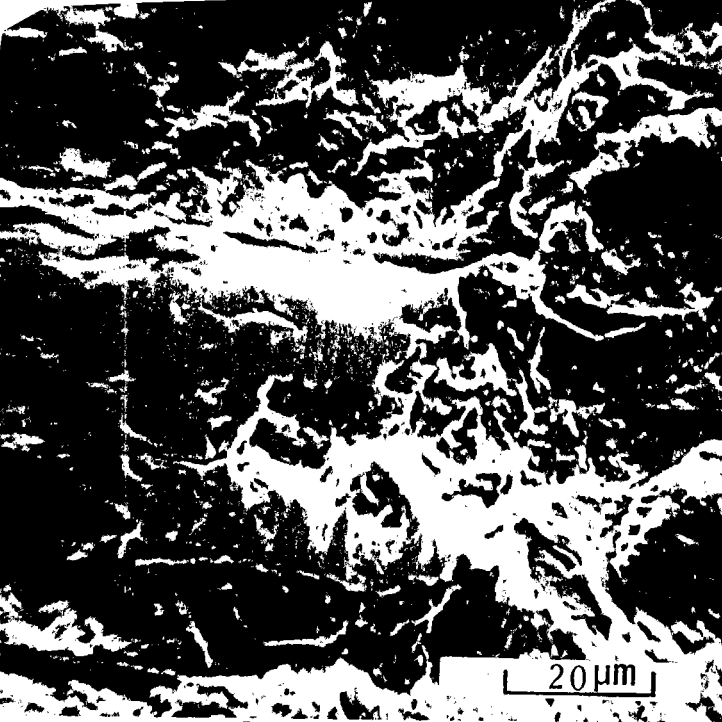
b. absence de matage sur la fissure curviligne

- Figure E.41 - Faciès de rupture ( $\beta_0 = 15^\circ$ ) = acier 316 =

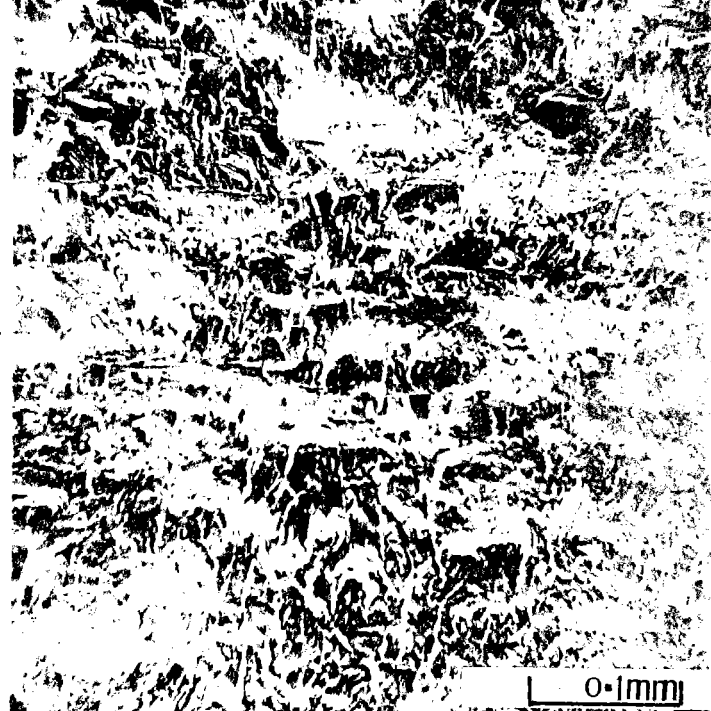


absence de matage sur la préfissure

- Figure E.42 - Faciès de rupture ( $\beta_0 = 16^\circ$ ) = acier 35NCD16<sub>B</sub> =

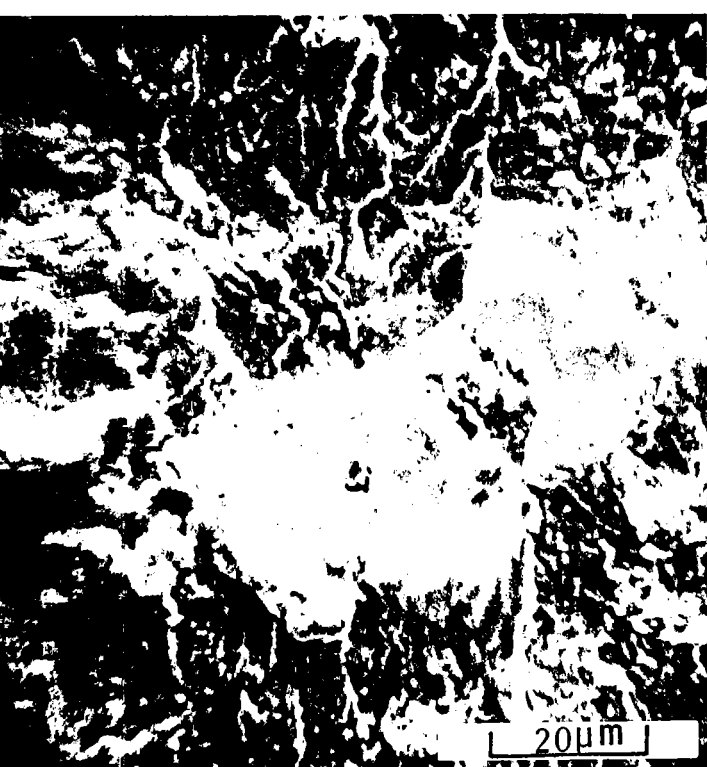


a. aspect d'une zone matée de la préfissure

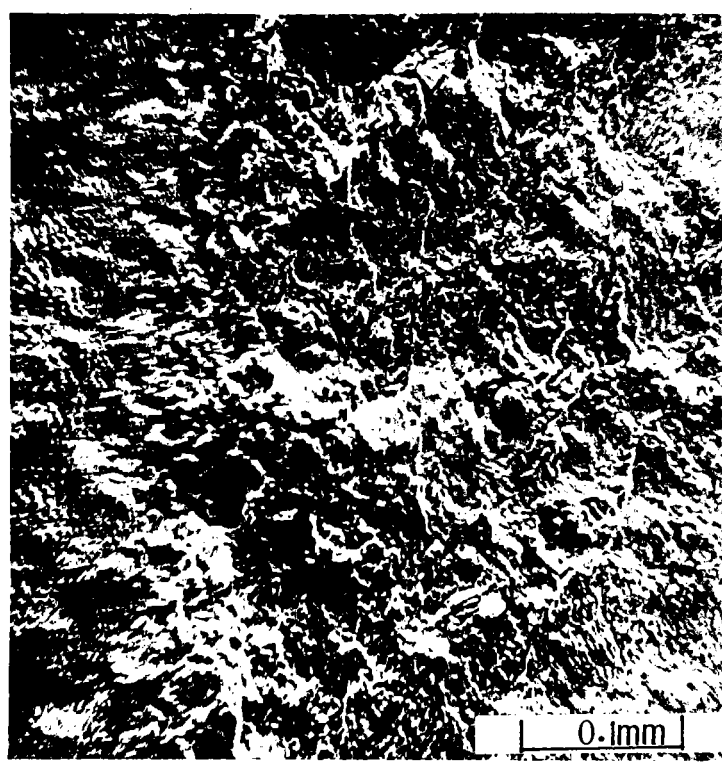


b. absence de matage sur la fissure curviligne

- Figure E.43 - Faciès de rupture ( $\beta_0 = 25^\circ$ ) = acier 316 =

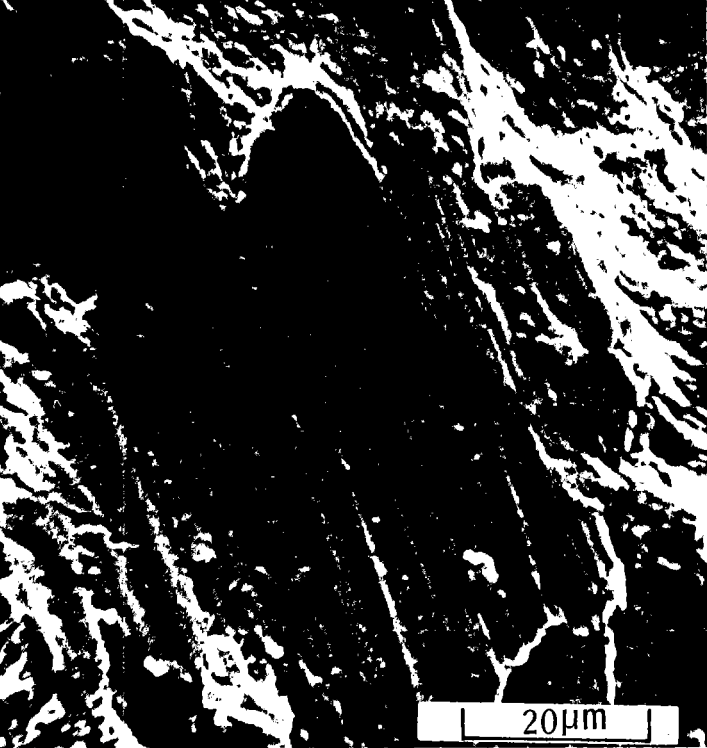


a. aspect d'une zone matée

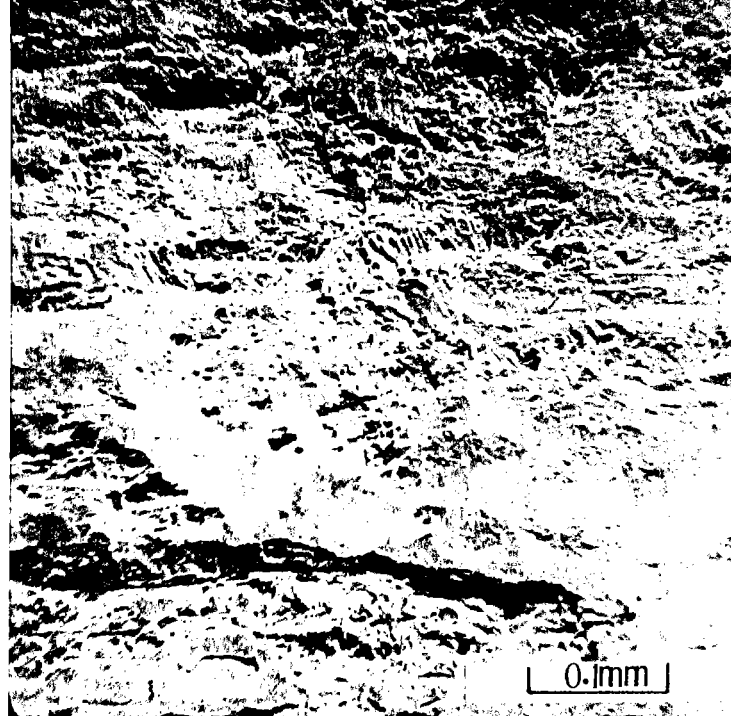


b. étendue des zones matées sur la préfissure

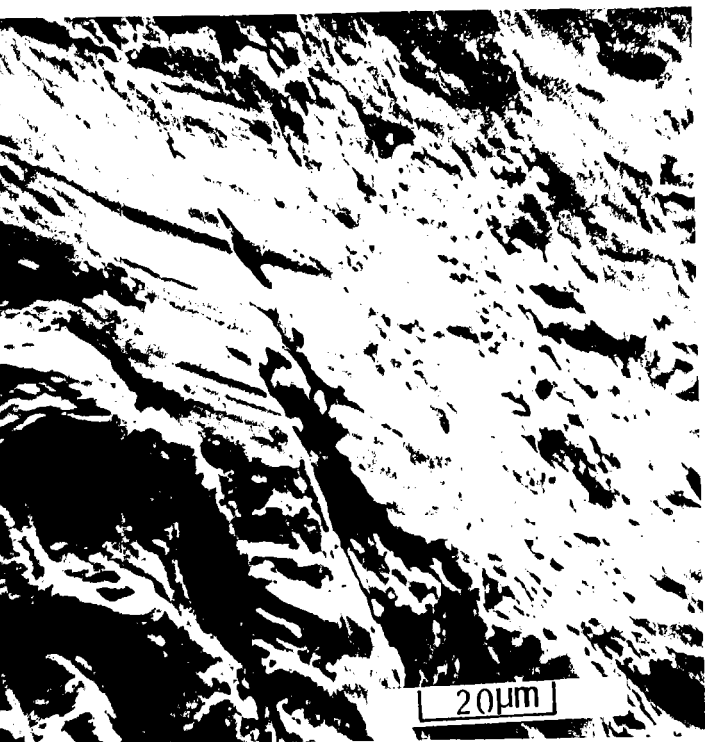
- Figure E.44 - Faciès de rupture ( $\beta_0 = 25^\circ$ ) = acier 35NCD16 =



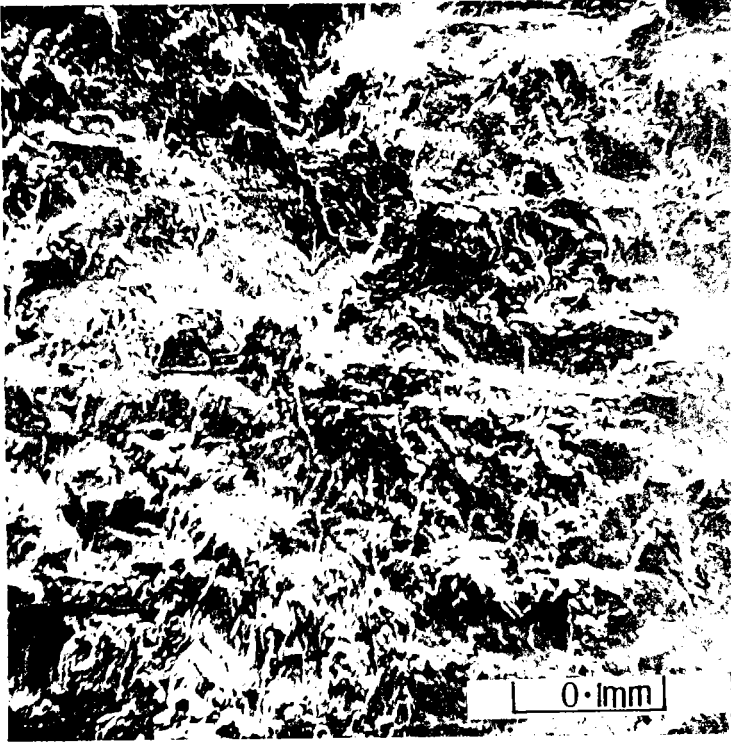
a. aspect d'une zone matée de la préfissure



b. étendue des zones matées sur la préfissure (vue en relief)

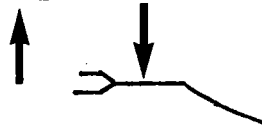
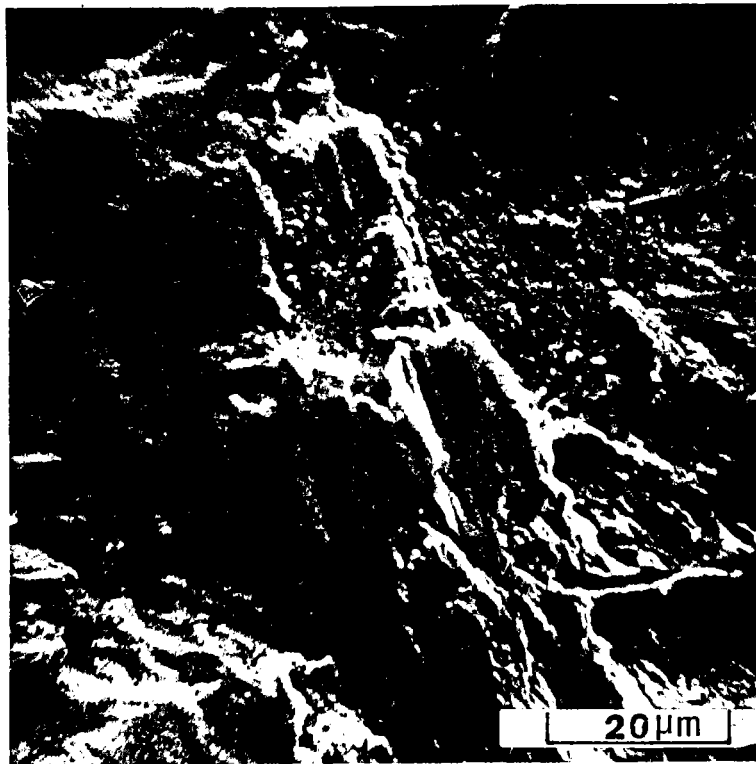


c. aspect d'une zone matée de la préfissure (vue en relief)



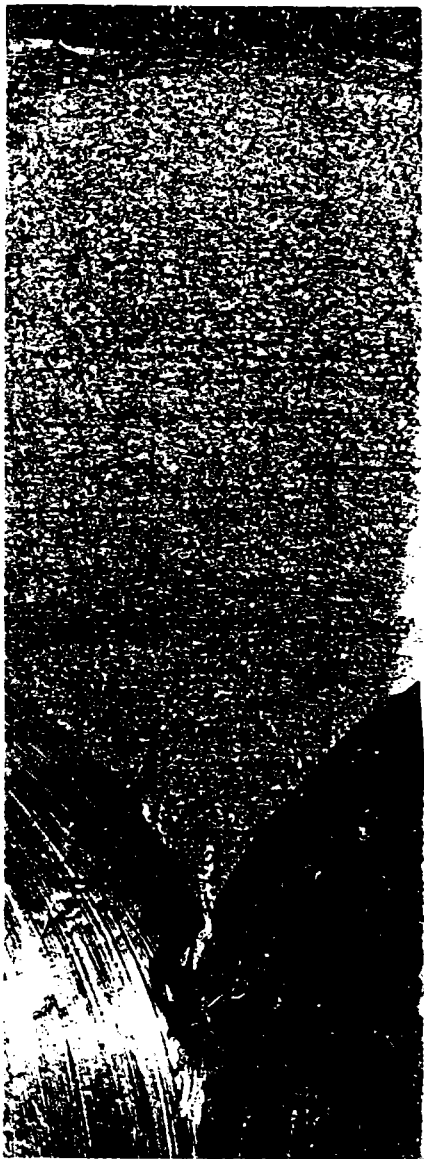
d. absence de matage sur la fissure curviligne

- Figure E.45 - Faciès de rupture ( $\beta_0 = 33^\circ$ ) = acier 316 =

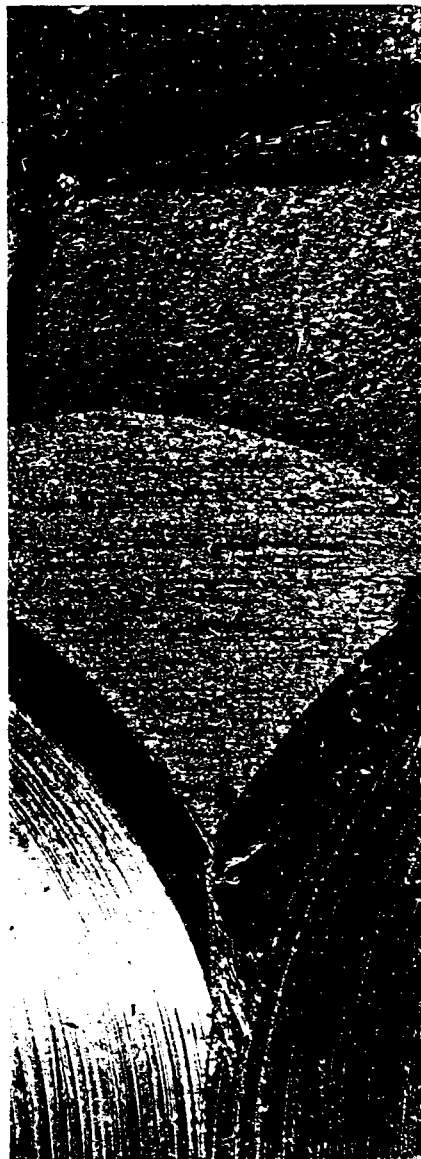


- Figure E.46 - Faciès de rupture ( $\beta_o = 35^\circ$ ) = acier 35NCD16<sub>B</sub> =  
Présence de matage sur la préfissure

316 R=0.1



$\beta = 0^\circ$



$15^\circ$

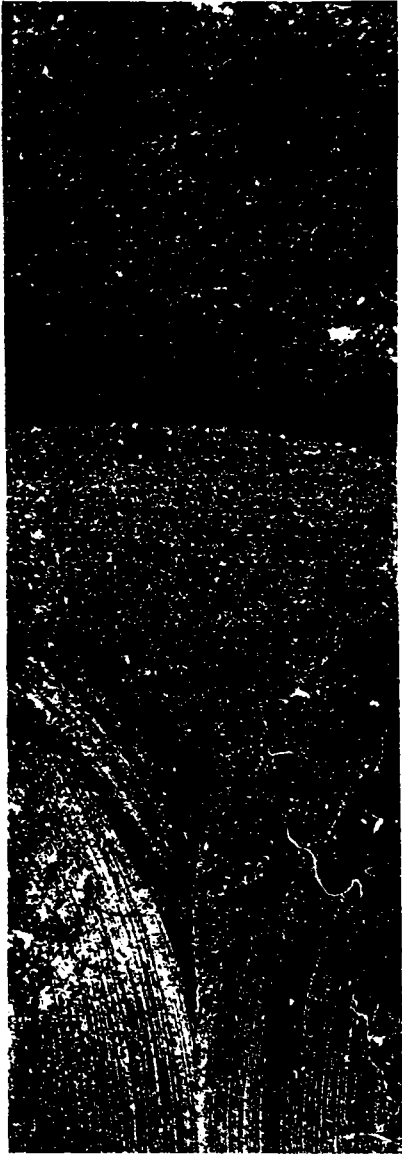


$33^\circ$

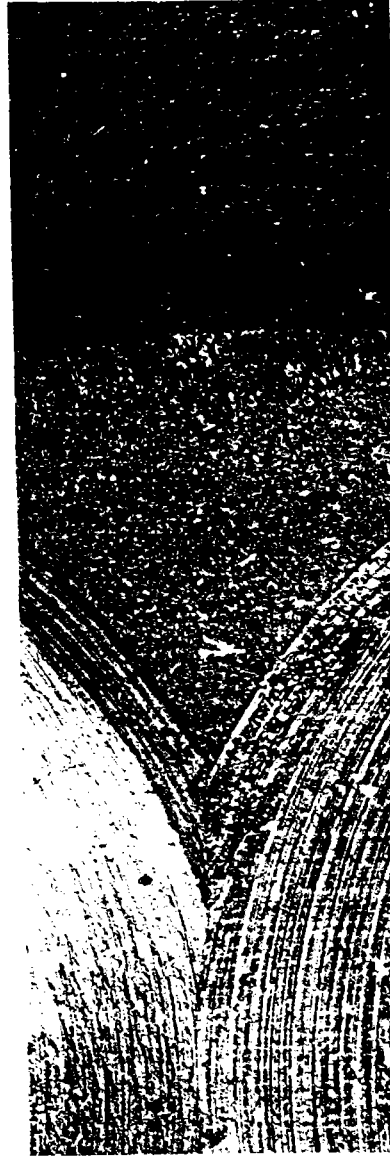
- Figure E.47 - Faciès de rupture macroscopique (acier 316)
- absence de traces d'oxydes sur la préfissure ( $\beta_0 = 15^\circ$ )
- présence de traces d'oxyde sur la préfissure ( $\beta_0 = 33^\circ$ )

(x5)





$\beta_0 = 16^\circ$



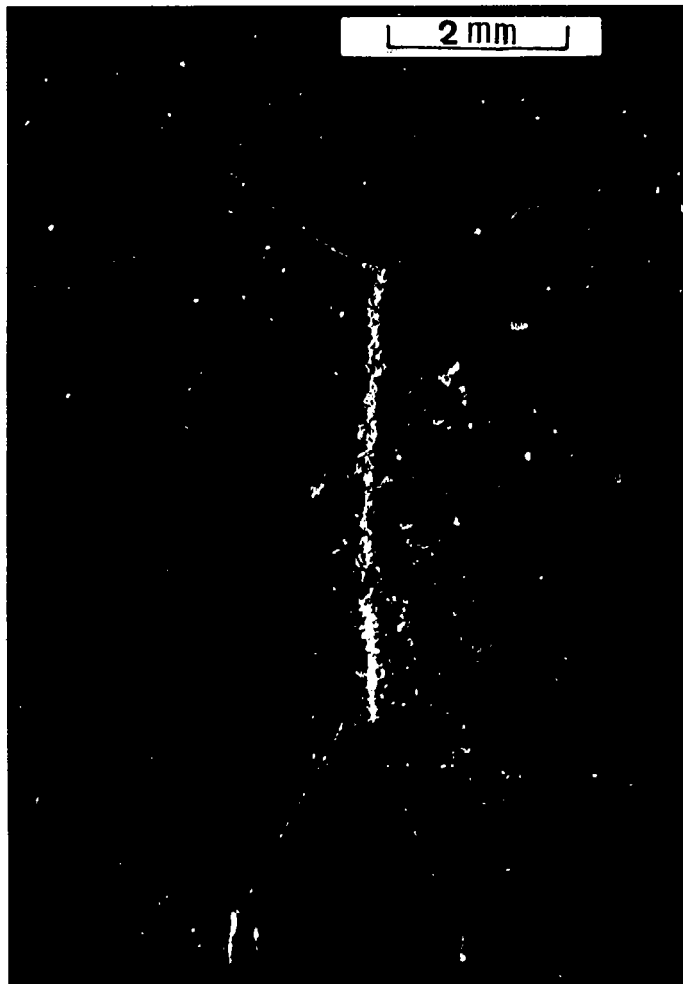
$25^\circ$



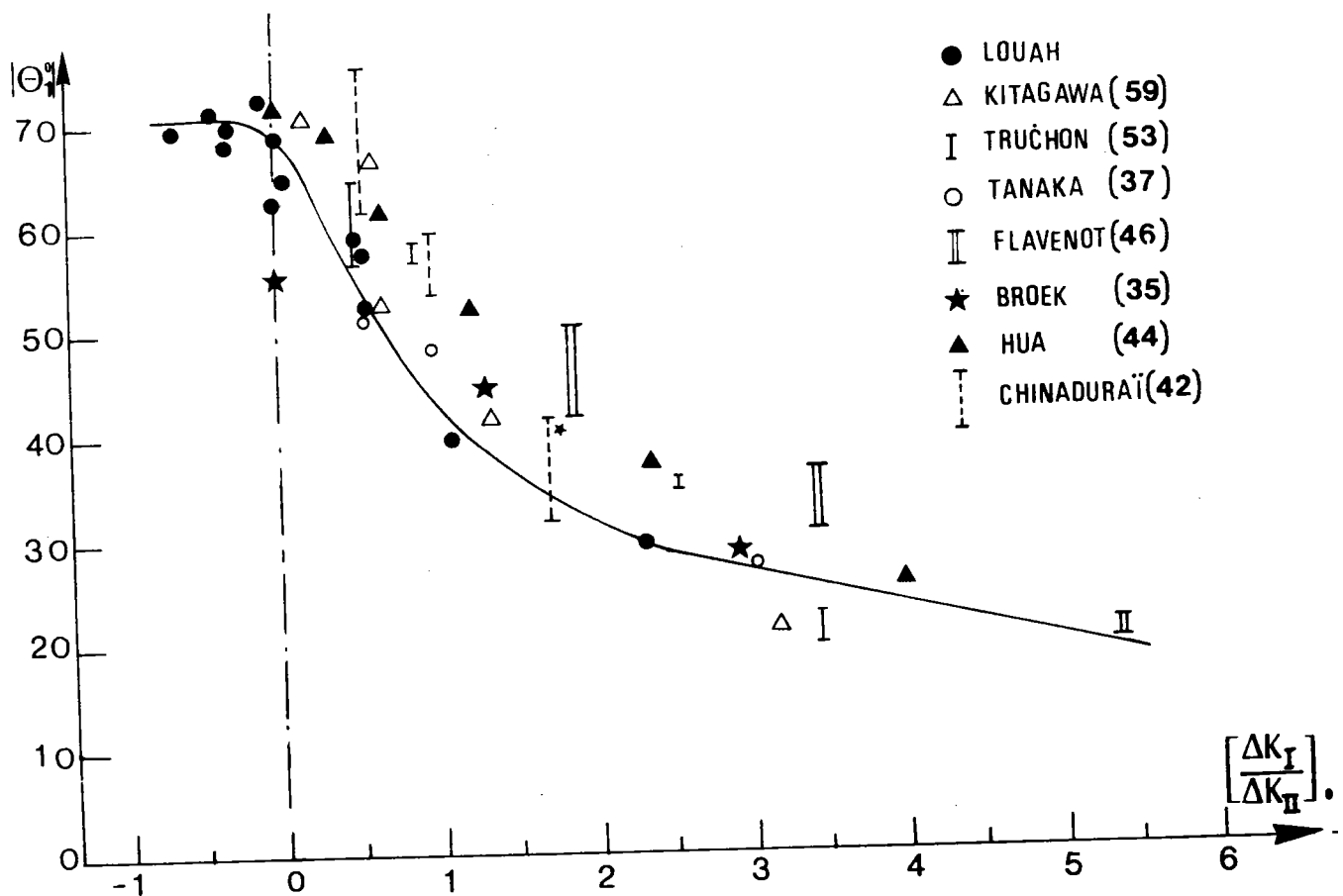
$35^\circ$

- Figure E.48 - Faciès de rupture macroscopique (acier 35NCD16<sub>B</sub>)
- absence de traces d'oxydes sur la préfissure ( $\beta_0 = 16^\circ$ )
- présence de traces d'oxyde sur la préfissure ( $\beta_0 = 25^\circ$  et  $35^\circ$ )

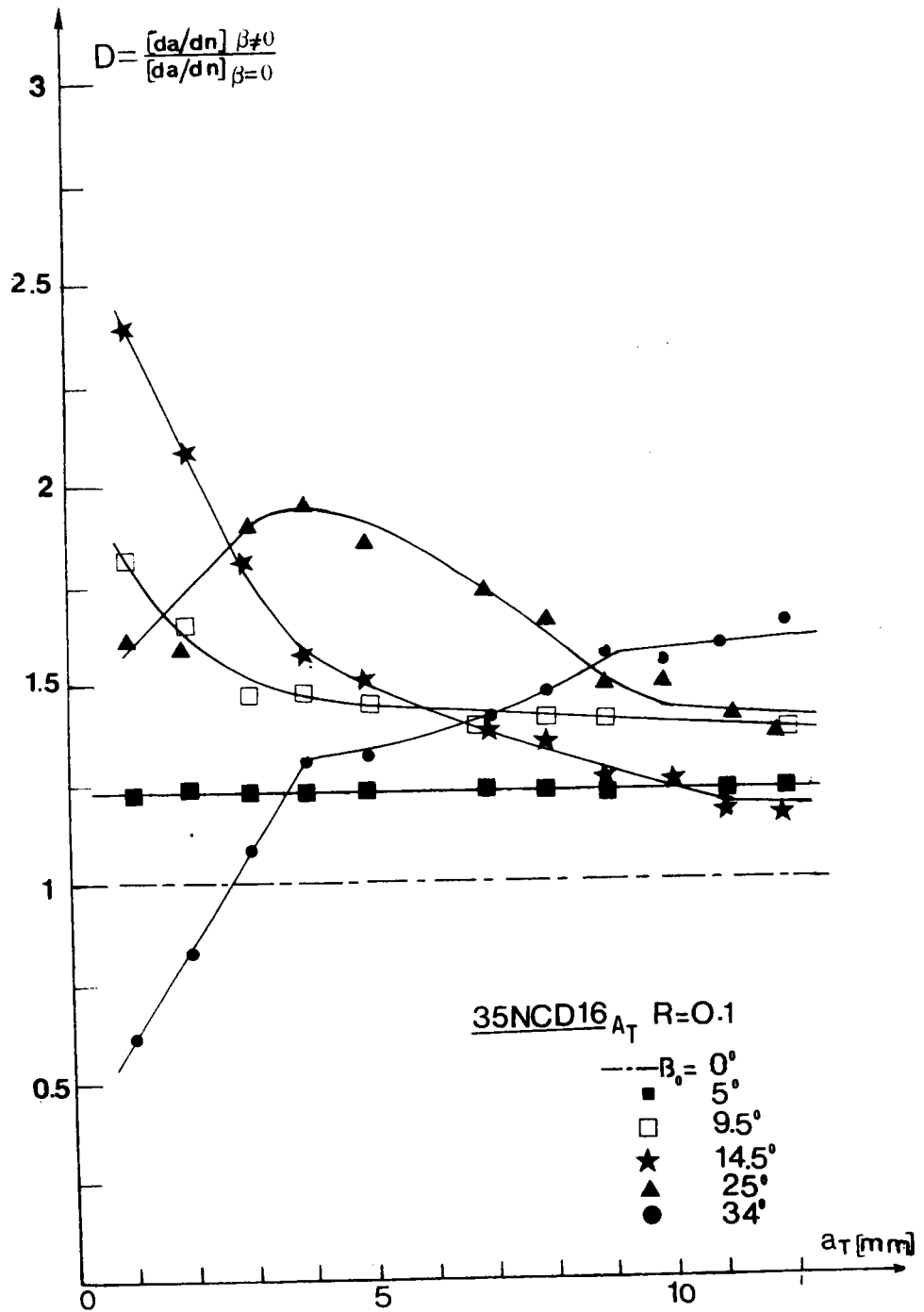
x 5



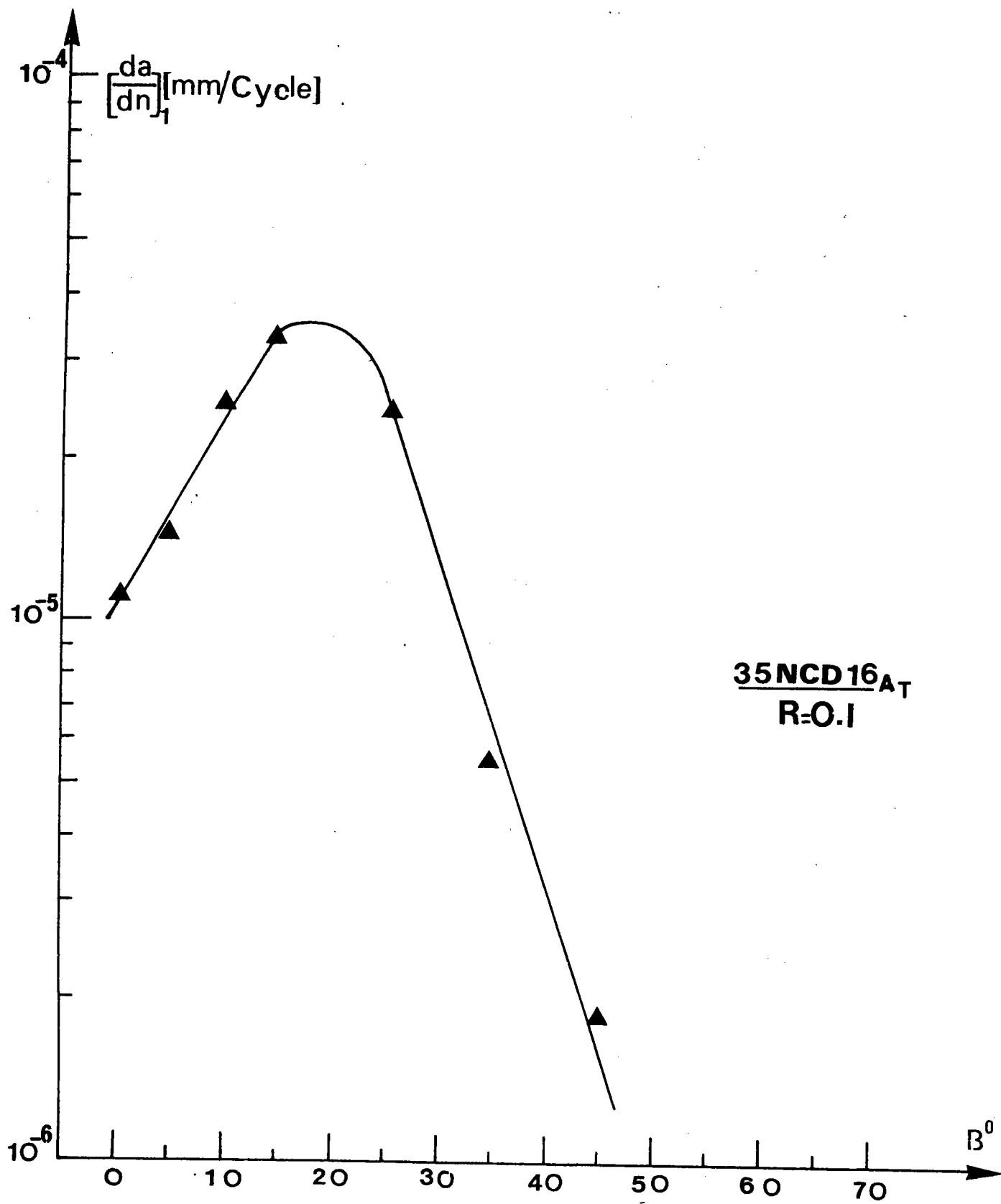
- Figure E.49 - Débris d'oxyde provenant de la préfissure (acier 316)



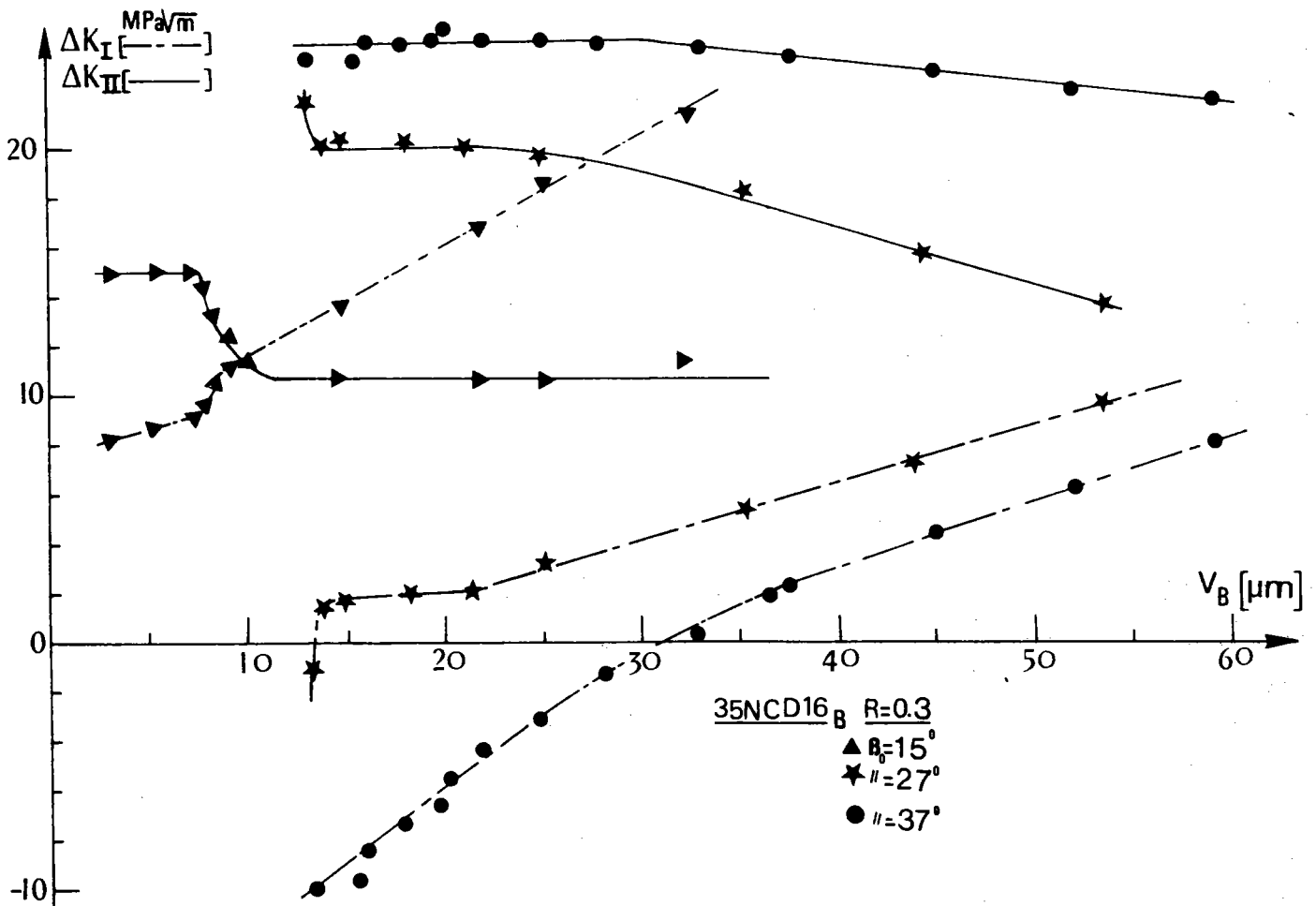
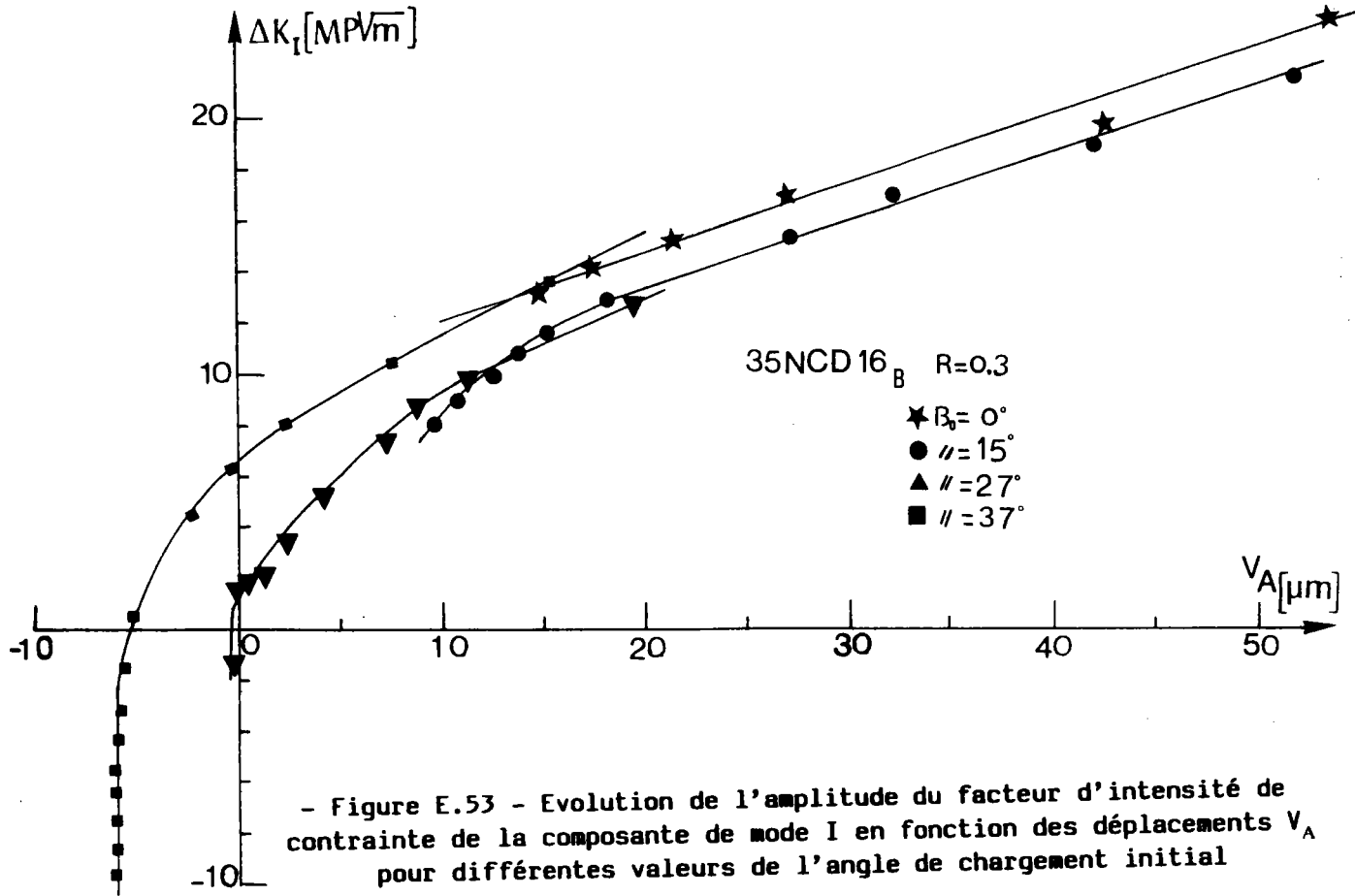
- Figure E.50 - Comparaison des angles initiaux de bifurcation expérimentaux obtenus sur disque brésilien et sur éprouvettes de géométries différentes, en fonction du rapport de chargement initial

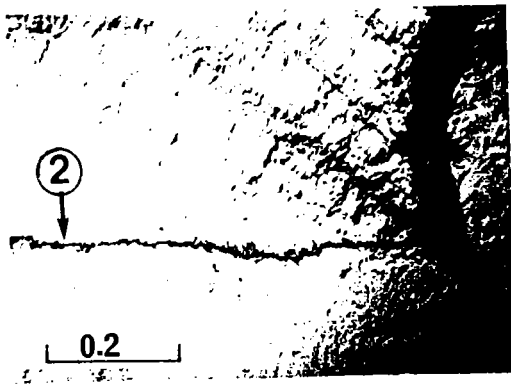


- Figure E.51 - Evolution du rapport de la vitesses de fissuration en mode mixte à la vitesse de fissuration en mode I en fonction de la longueur de fissure curviligne

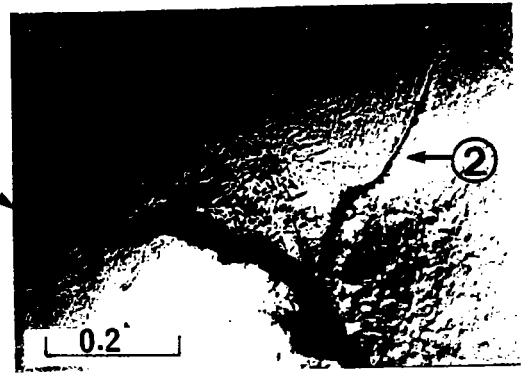


- Figure E.52 - Evolution de la vitesse de fissuration initiale de la fissure curviligne en fonction de l'angle de chargement initial



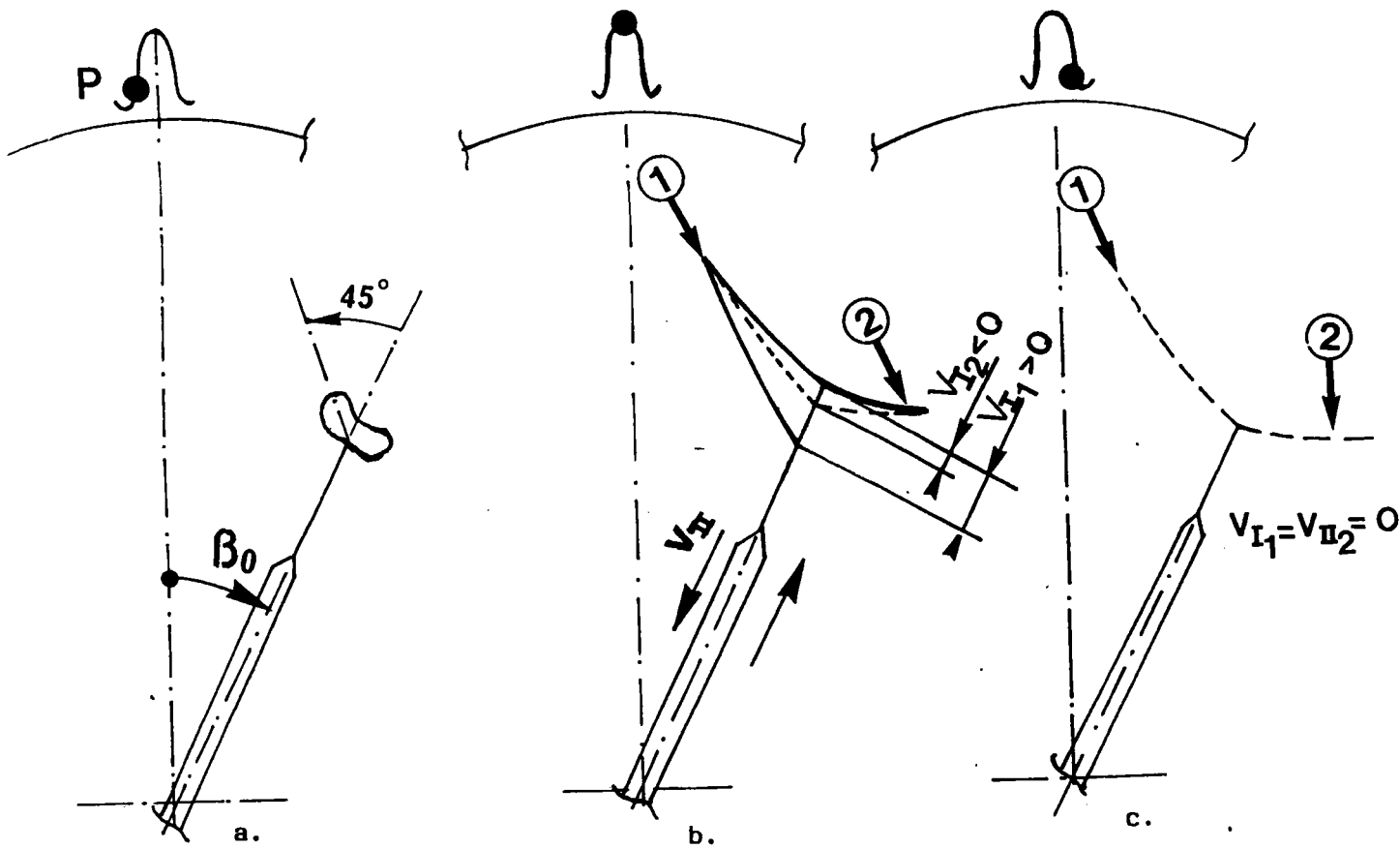


a. acier 316 ( $\beta_0 = 15^\circ$ )

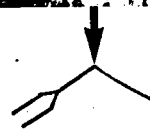
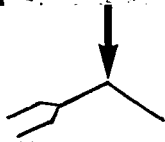


b. acier 35NCD16<sub>B</sub> ( $\beta_0 = 16^\circ$ )

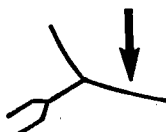
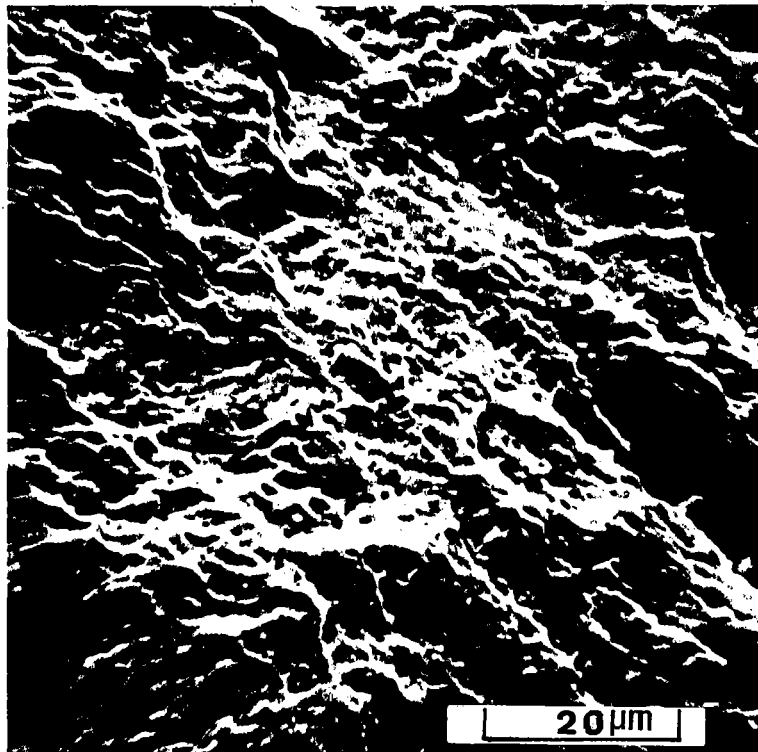
- Figure E.55 - Bifurcation de la fissure chargée en mode mixte



- Figure E.56 - Mécanisme de propagation de la branche n° 2

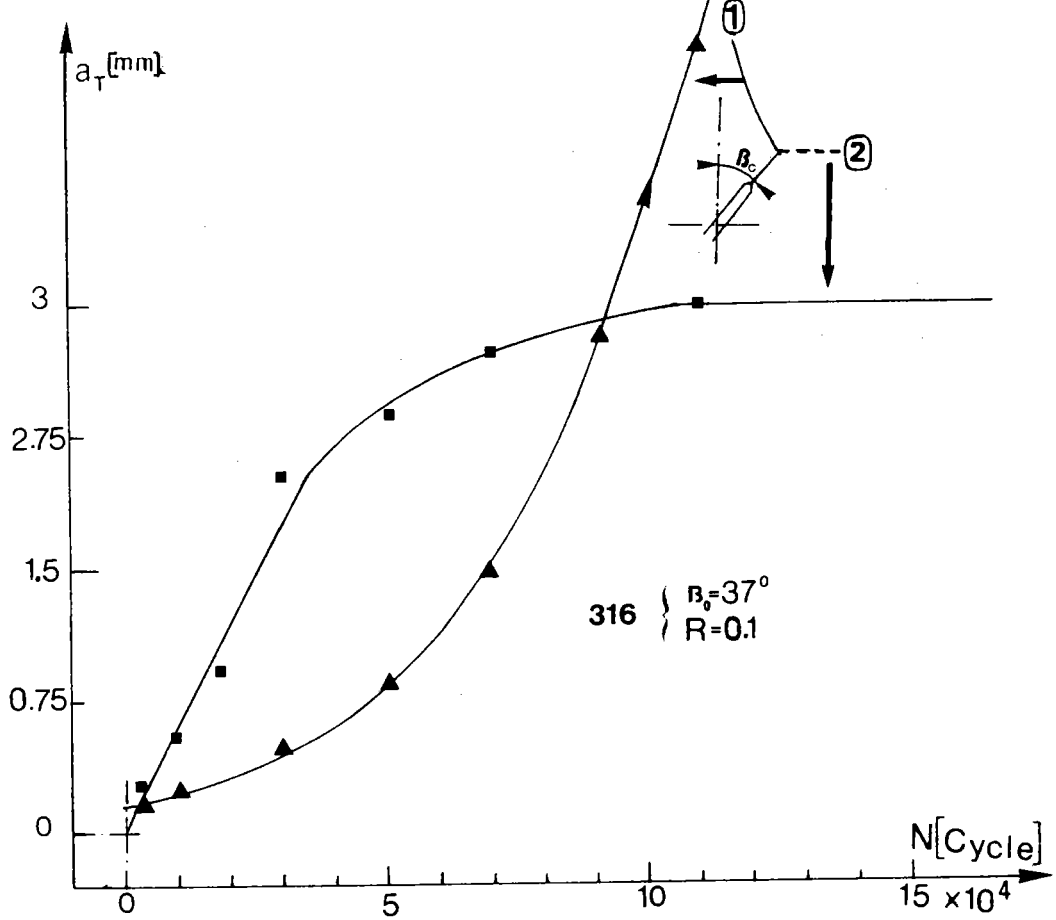


- Figure E.57 - Site d'amorçage de la branche n° 2 = acier 316 =

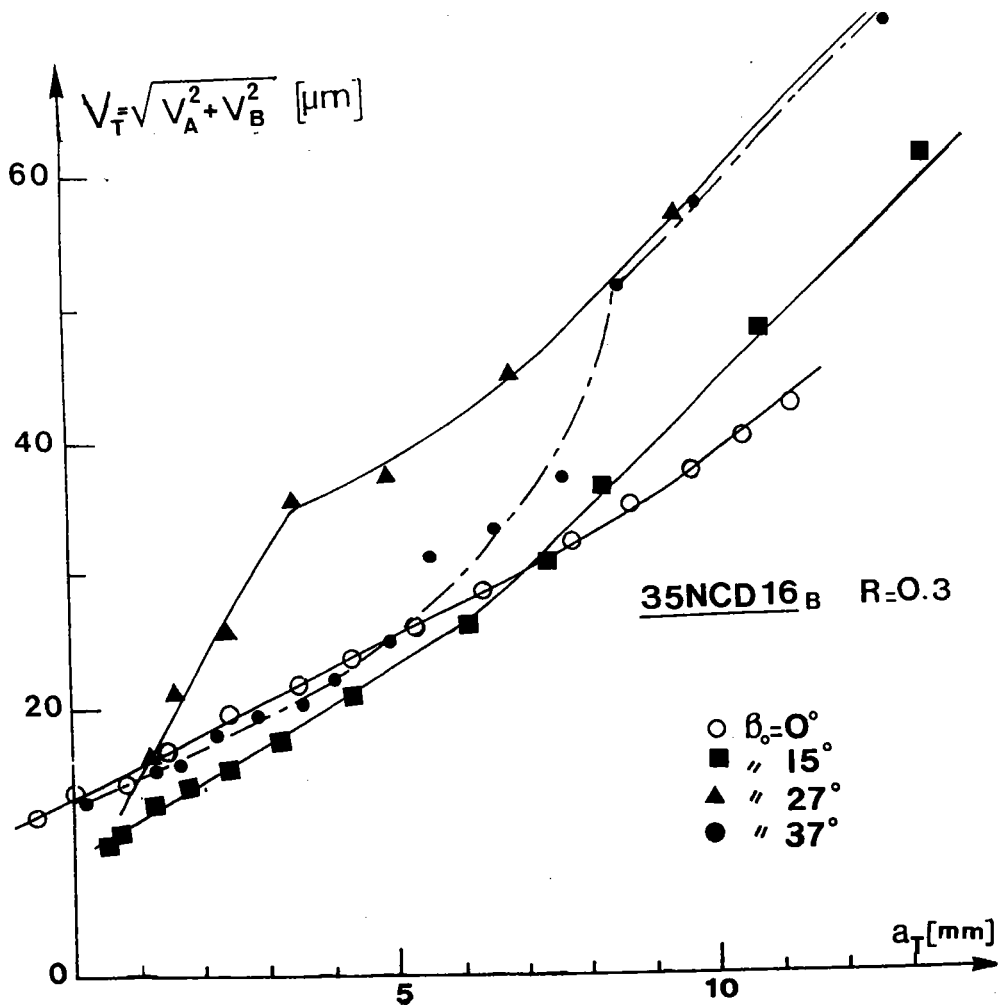


- Figure E.58 - Faciès de rupture de la branche n° 2 (trace de matage) = acier 35NCD16<sub>B</sub> =

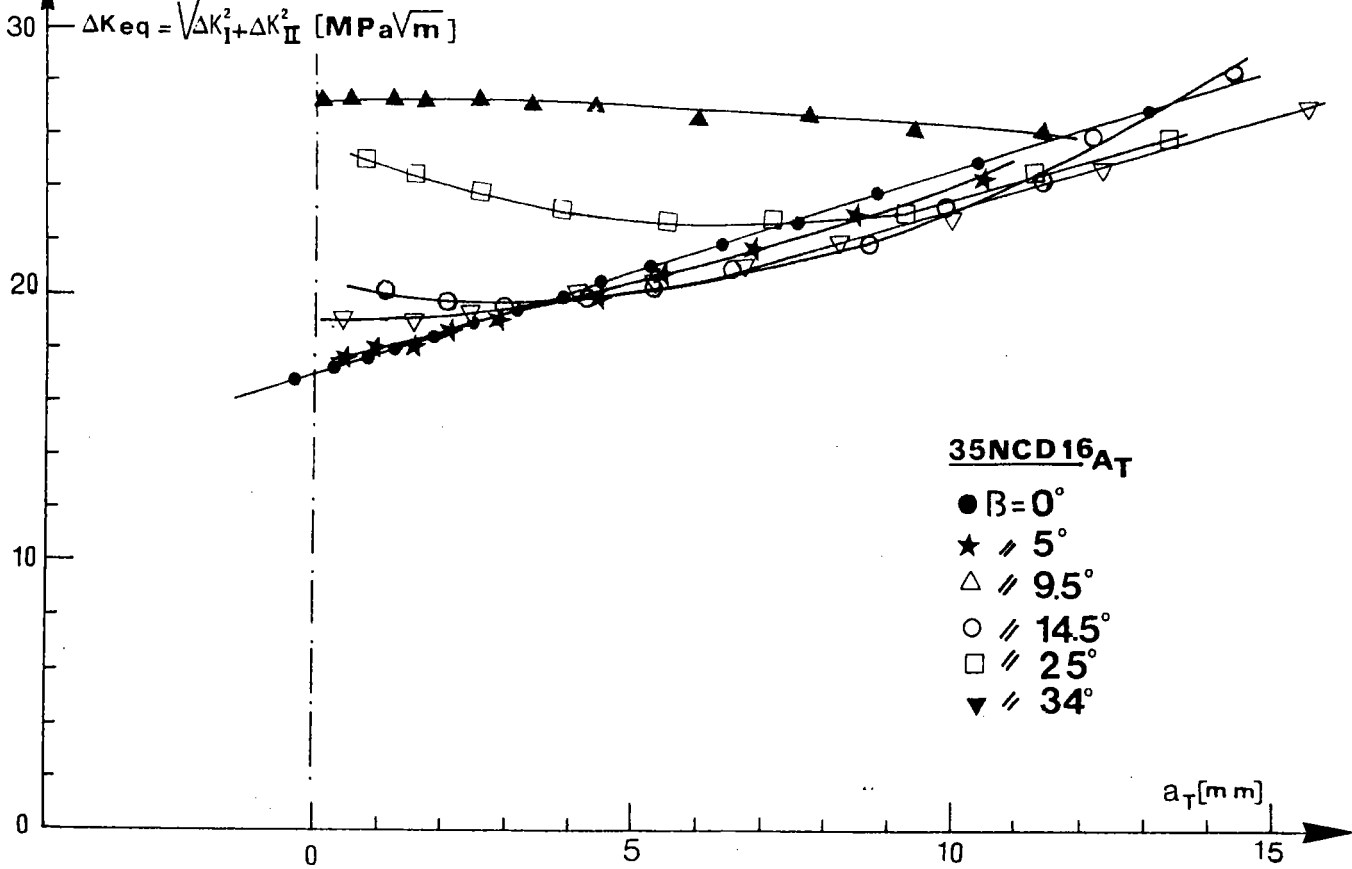




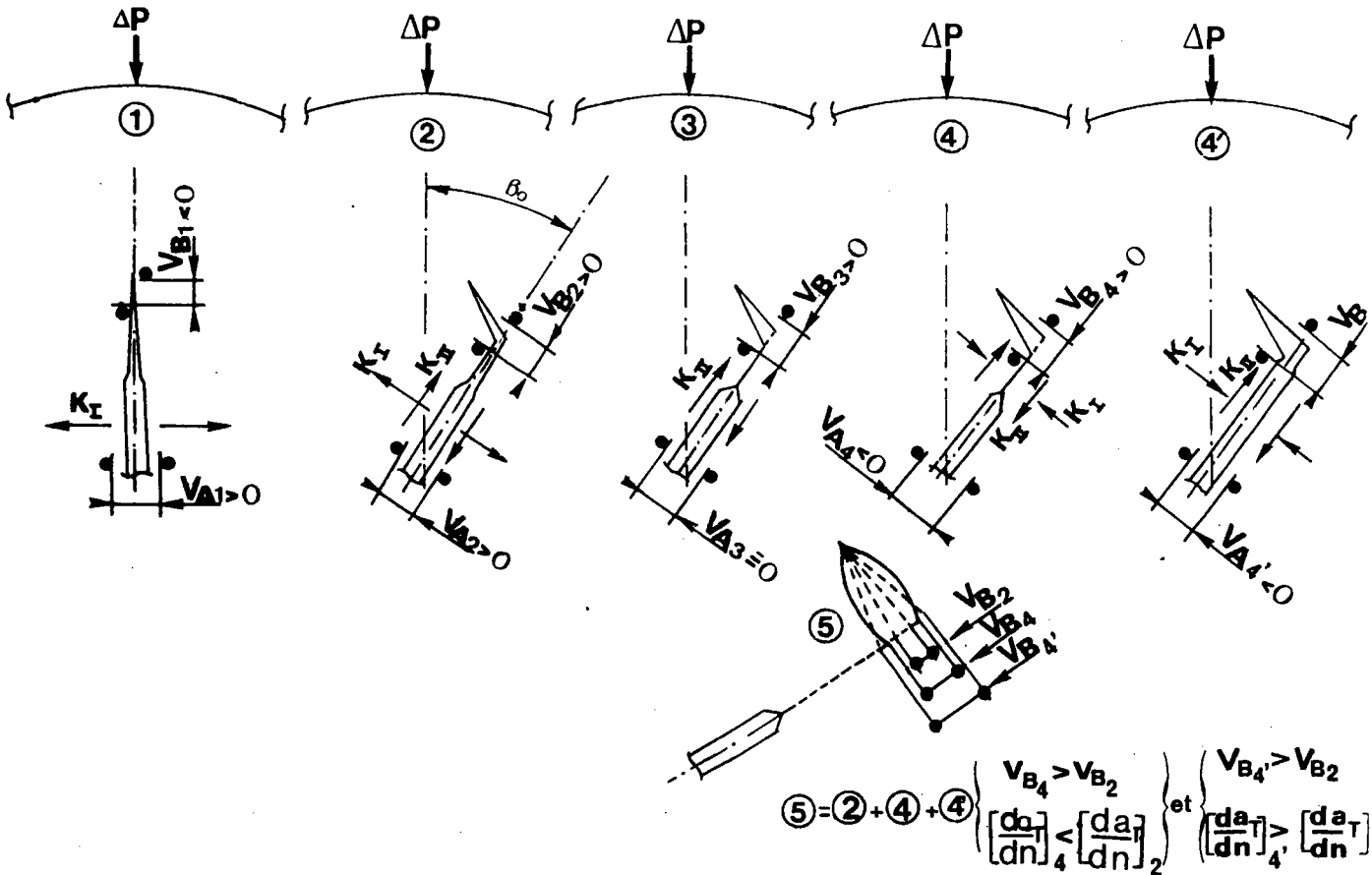
- Figure E.59 - Evolution des longueurs de la fissure curviligne (n° 1) et de la fissure n° 2 en fonction du nombre de cycles



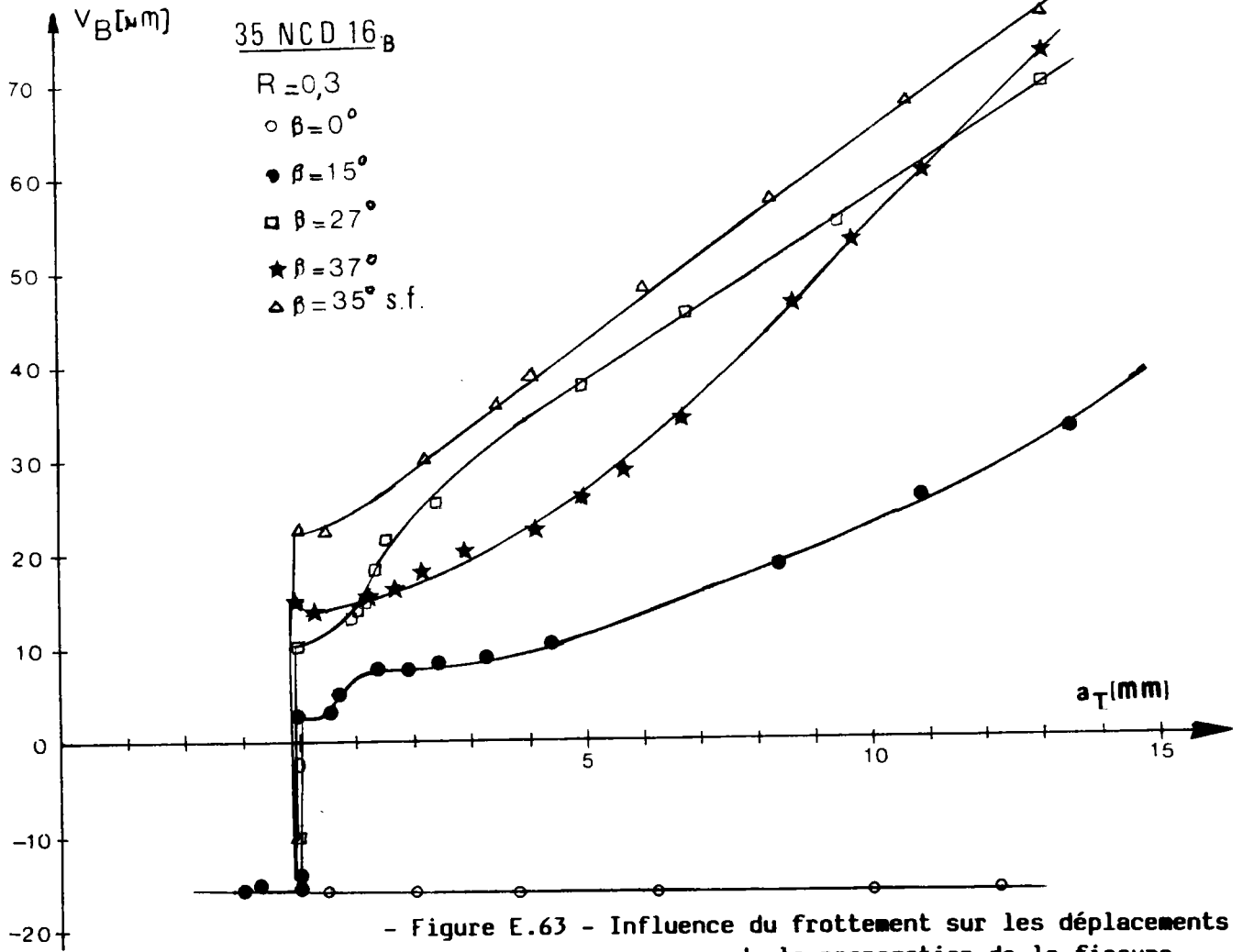
- Figure E.60 - Evolution du déplacement total  $V_T$  en fonction de la longueur de la fissure curviligne pour différentes valeurs de l'angle de chargement initial



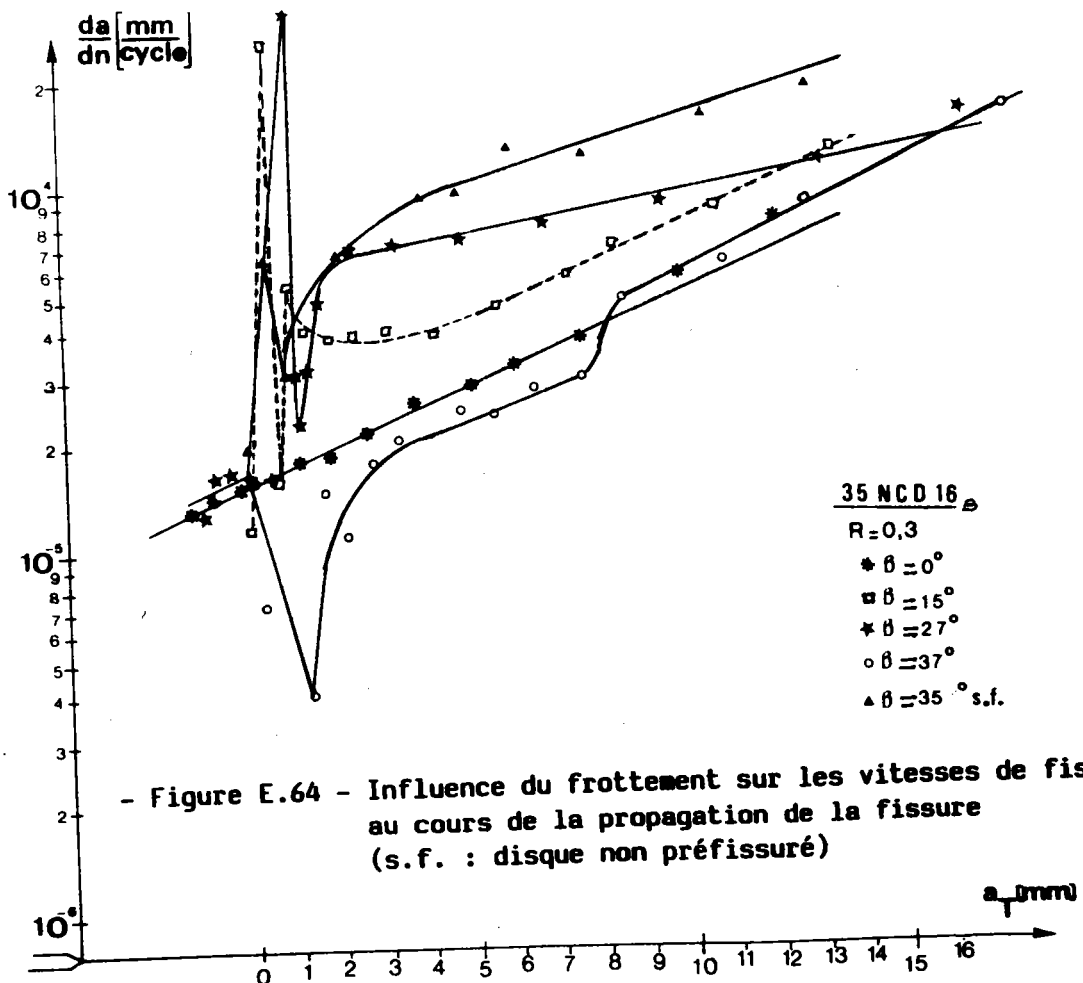
- Figure E.61 - Evolution de l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte équivalent à un chargement de mode I + II en fonction de la longueur de fissure curviligne



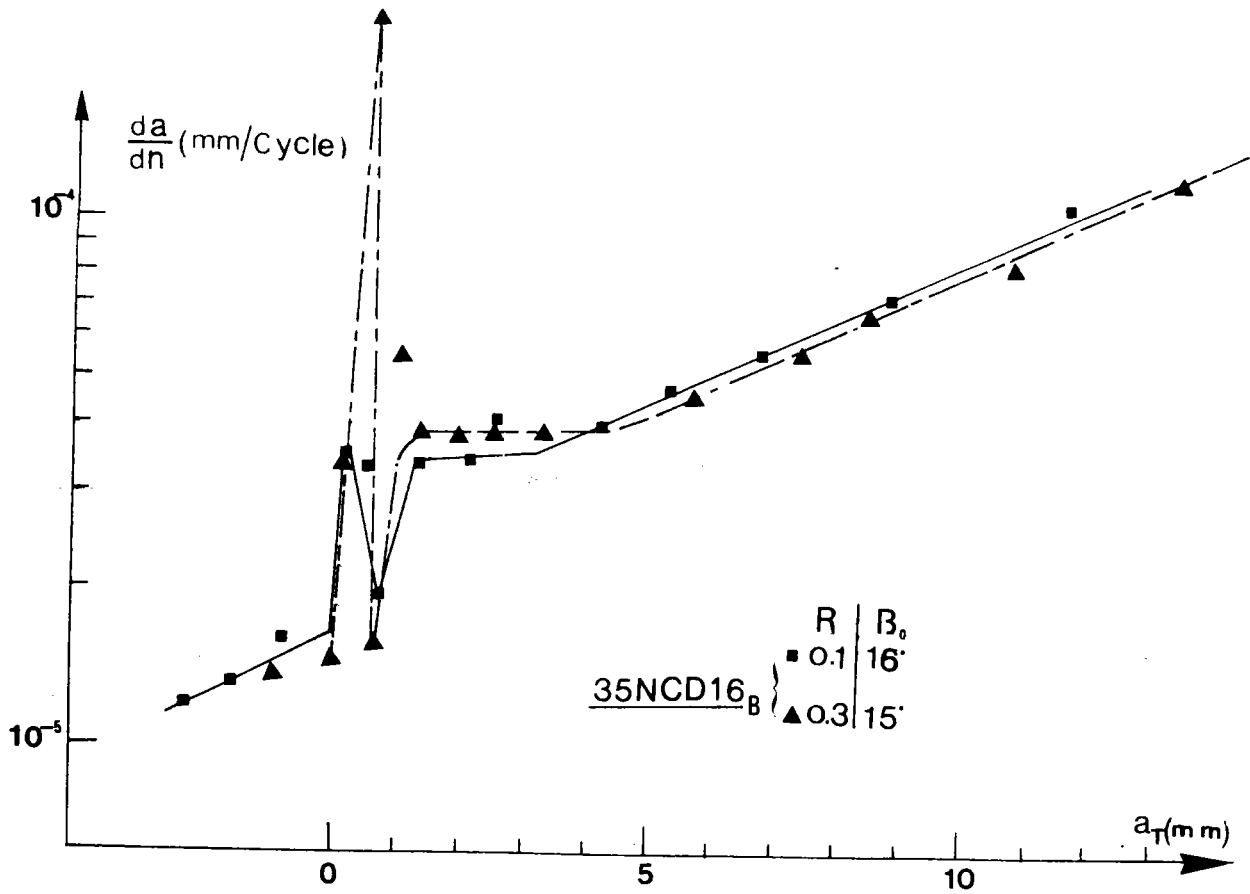
- Figure E.62 - Mécanismes de propagation d'une fissure de fatigue chargée initialement en mode mixte



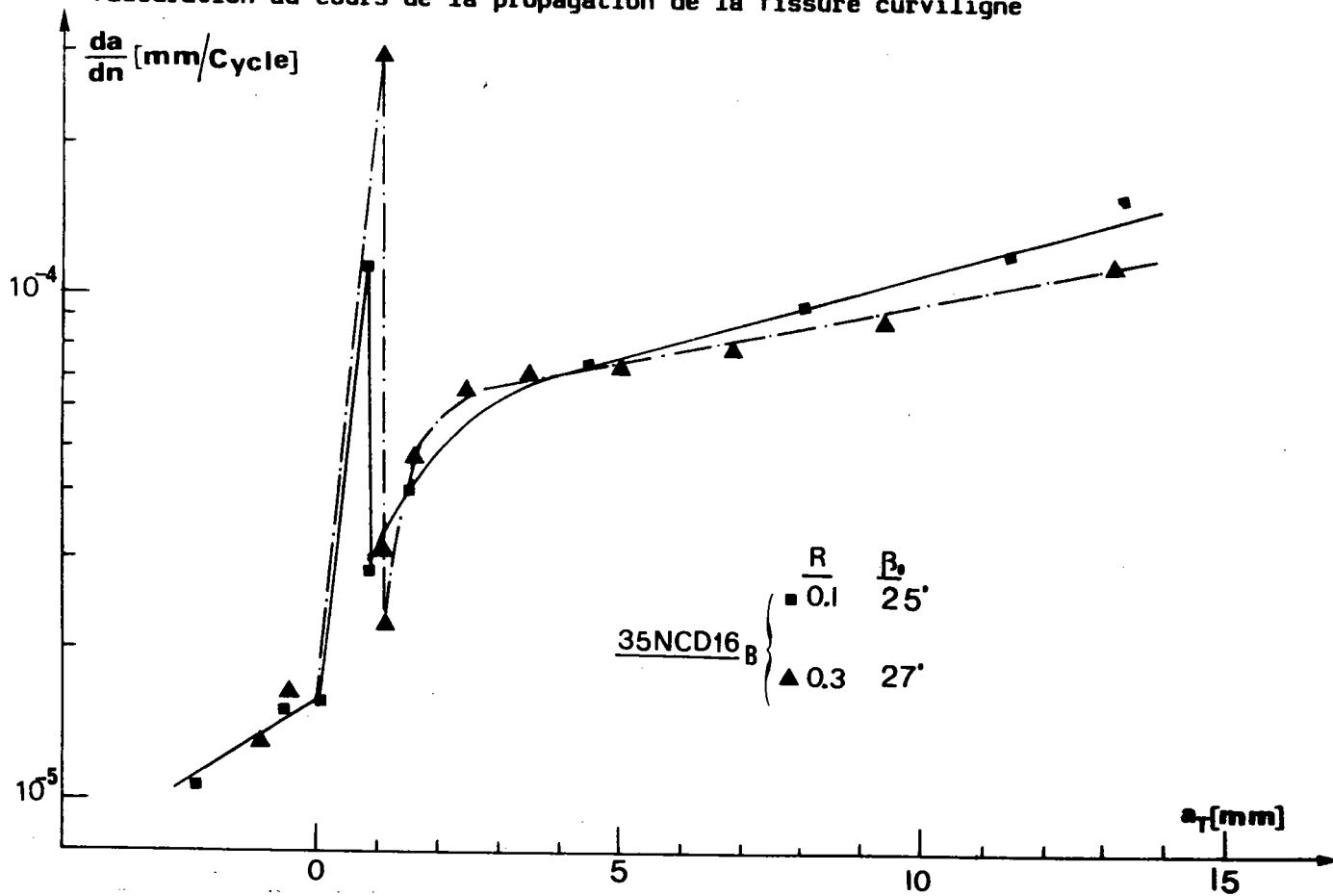
- Figure E.63 - Influence du frottement sur les déplacements  $V_B$  au cours de la propagation de la fissure (s.f. : disque non préfissuré)



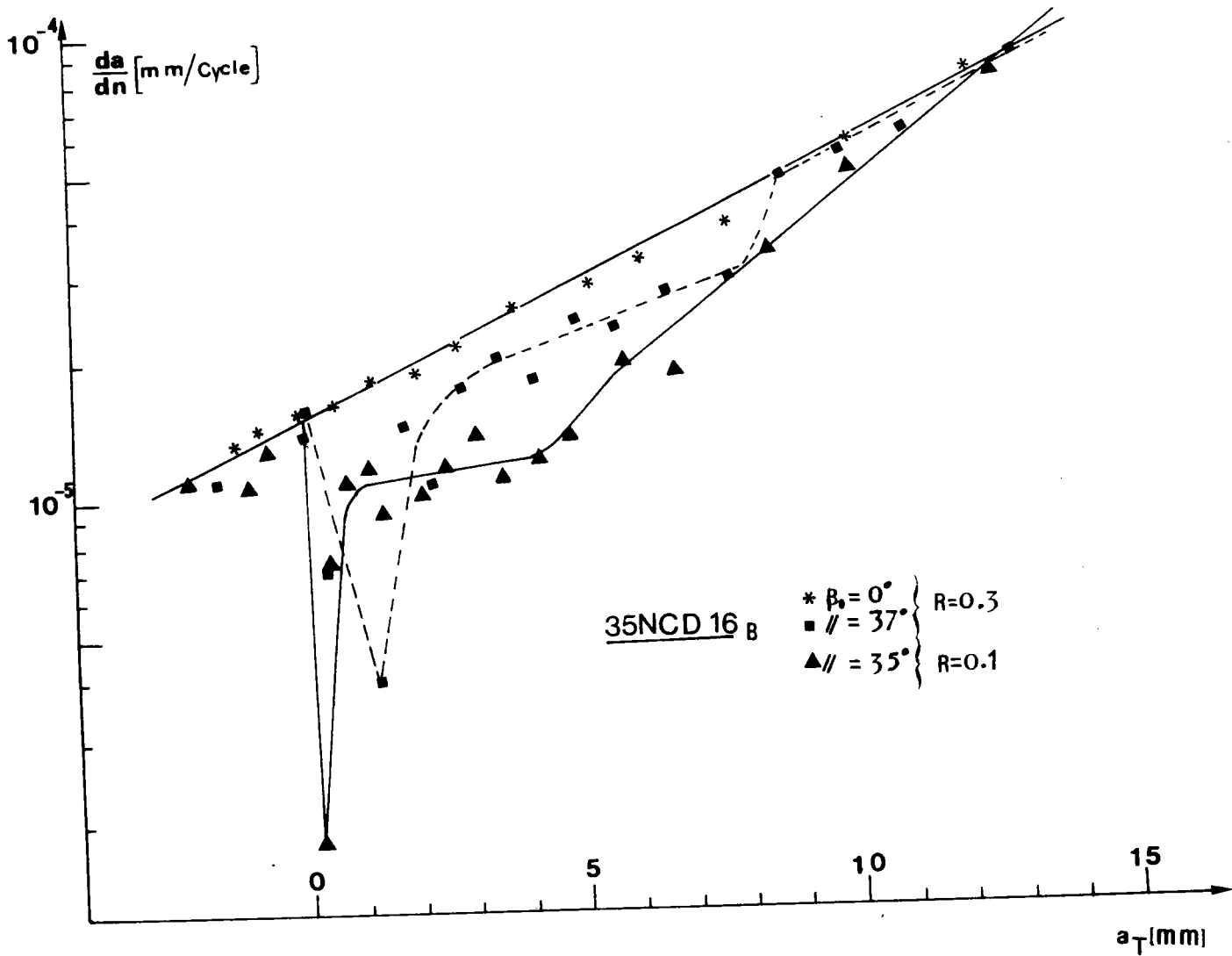
- Figure E.64 - Influence du frottement sur les vitesses de fissuration au cours de la propagation de la fissure (s.f. : disque non préfissuré)



- Figure E.65 - Influence du rapport de charge sur les vitesses de fissuration au cours de la propagation de la fissure curviligne



- Figure E.66 - Influence du rapport de charge sur les vitesses de fissuration au cours de la propagation de la fissure curviligne  
= chargement initial de mode II pur =



- Figure E.67 - Influence du rapport de charge sur les vitesses de fissuration au cours de la propagation de la fissure curviligne = chargement initial de mode II impur =

R=0.1

35NCD10<sub>B</sub>

R=0.3



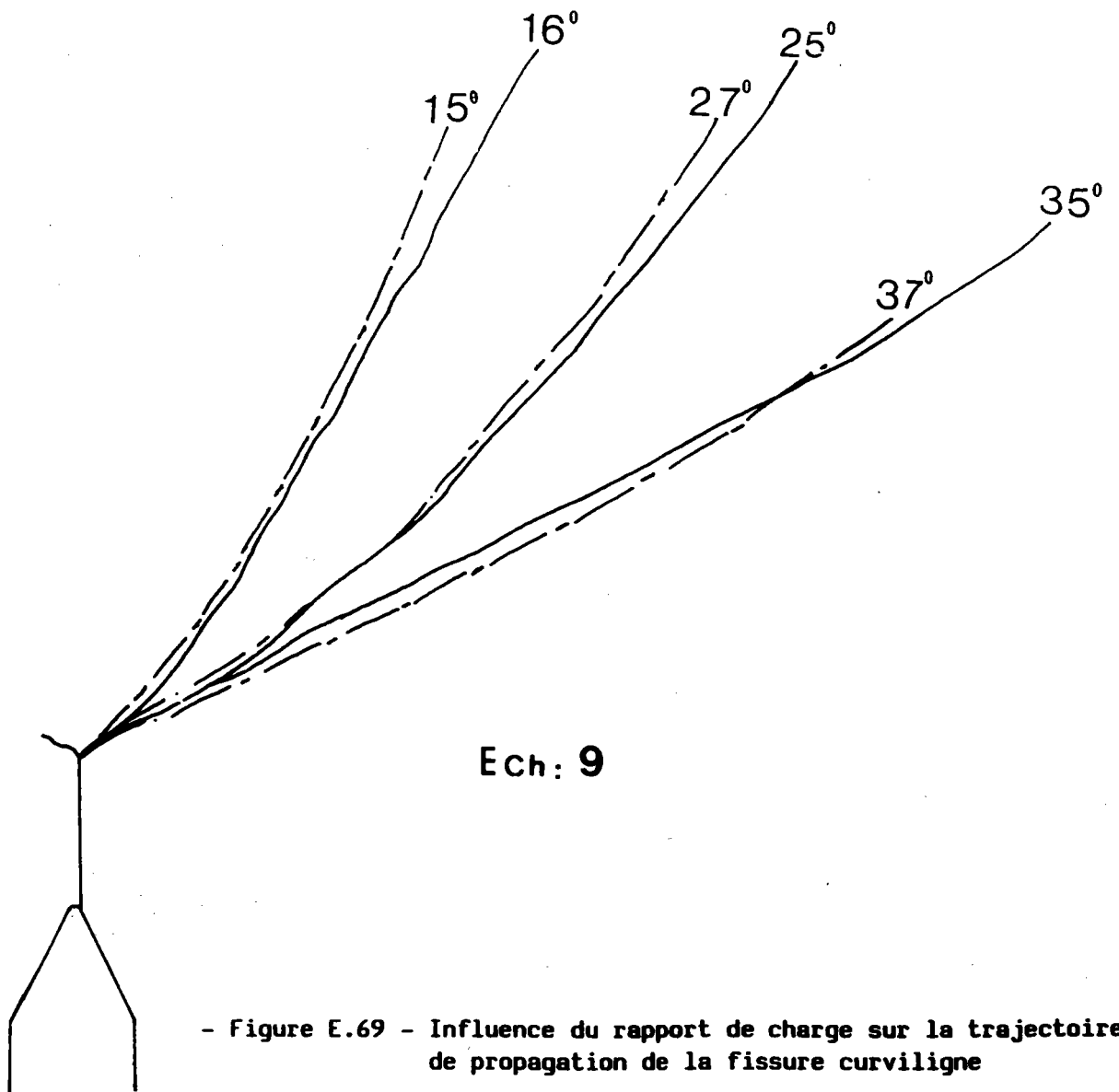
$\beta \approx 25^\circ$



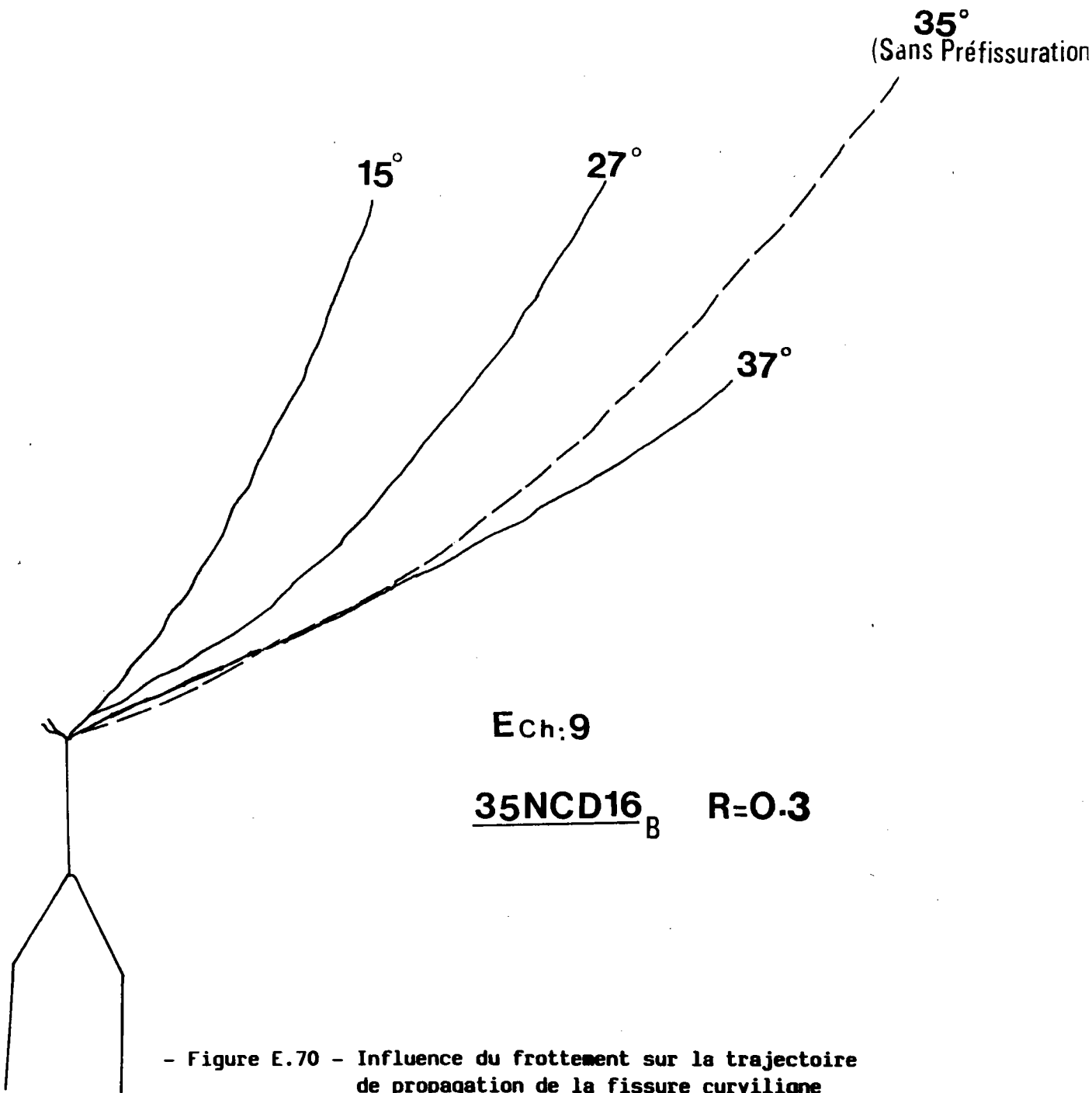
x5

- Figure E.68 - Influence du rapport de charge sur le frottement au niveau des surfaces de rupture de la préfissure

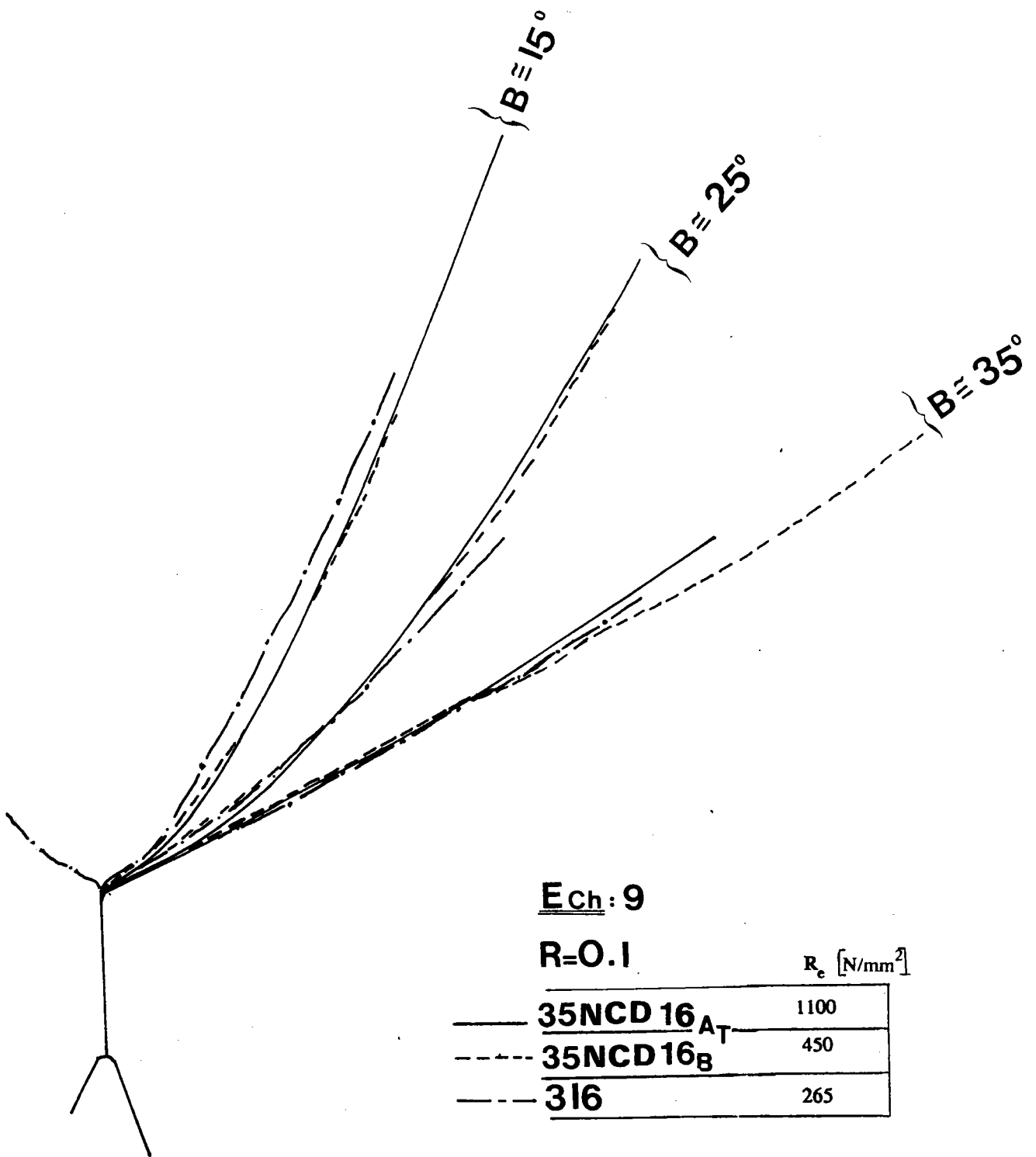
35NCD 16 B  $\left\{ \begin{array}{l} R = 0.1 \text{ ———} \\ R = 0.3 \text{ - - - -} \end{array} \right.$



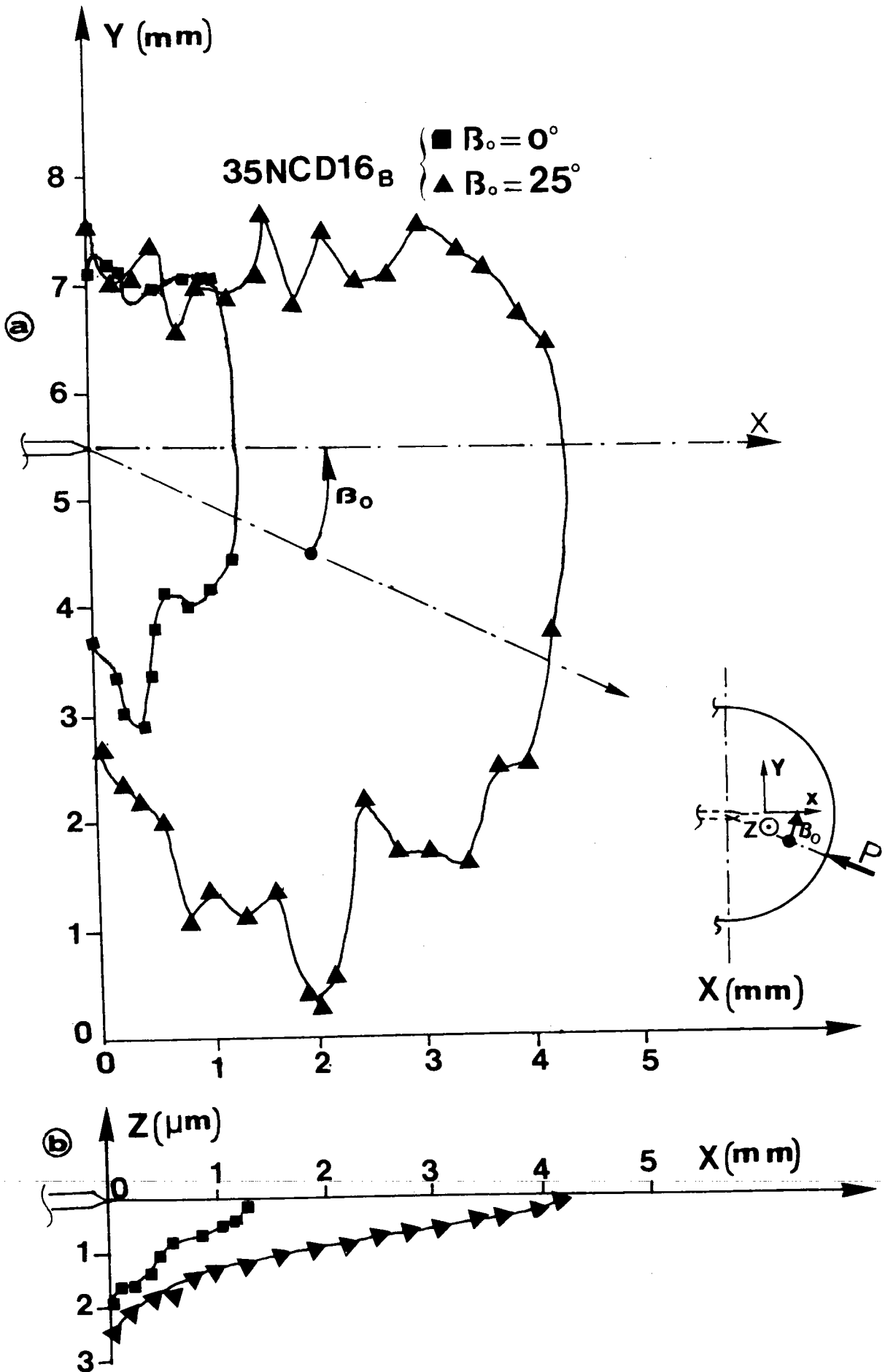
- Figure E.69 - Influence du rapport de charge sur la trajectoire de propagation de la fissure curviligne



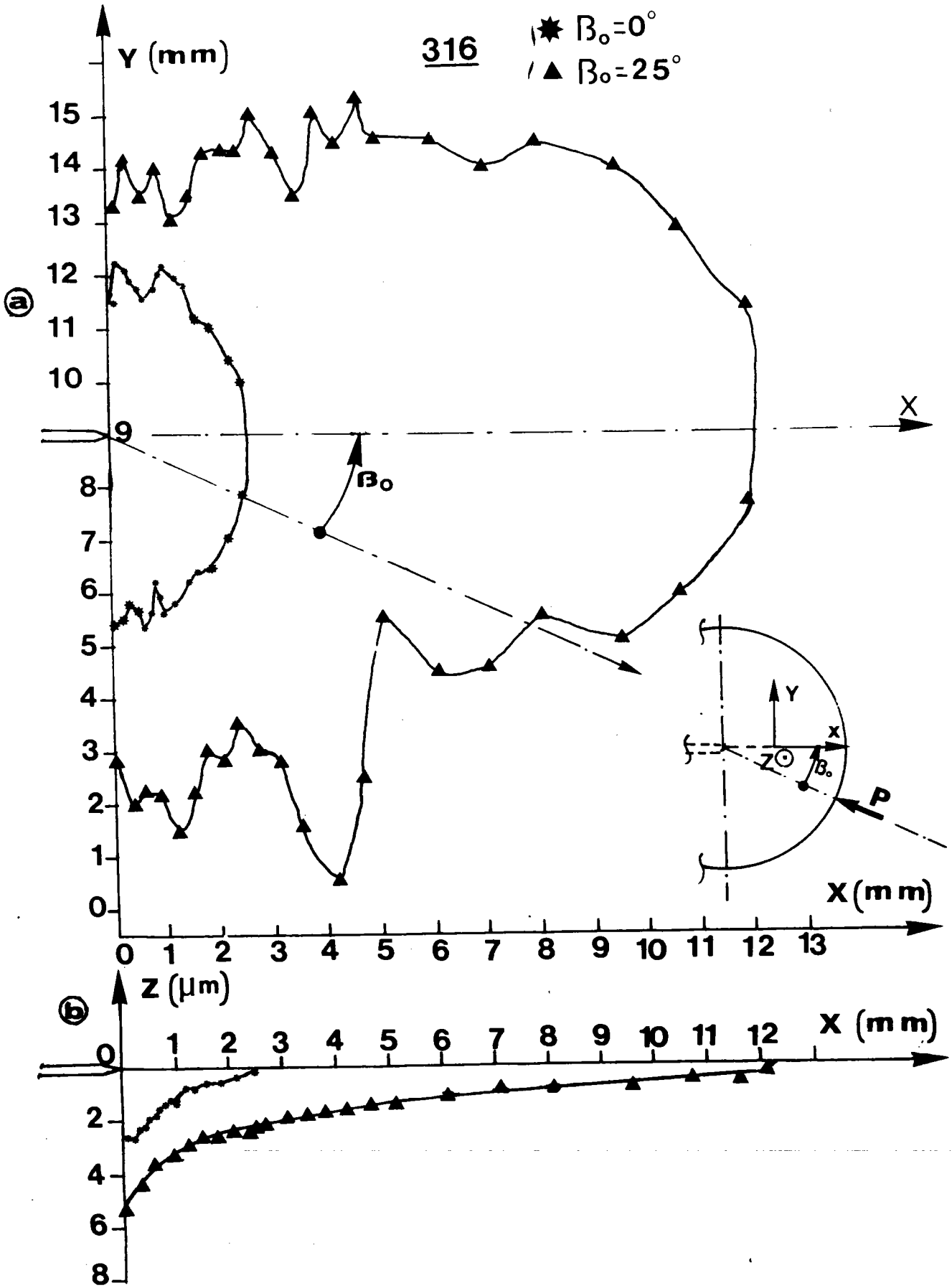




- Figure E.71 - Trajectoires de propagation obtenues dans des conditions de chargement identiques pour différentes nuances d'acier

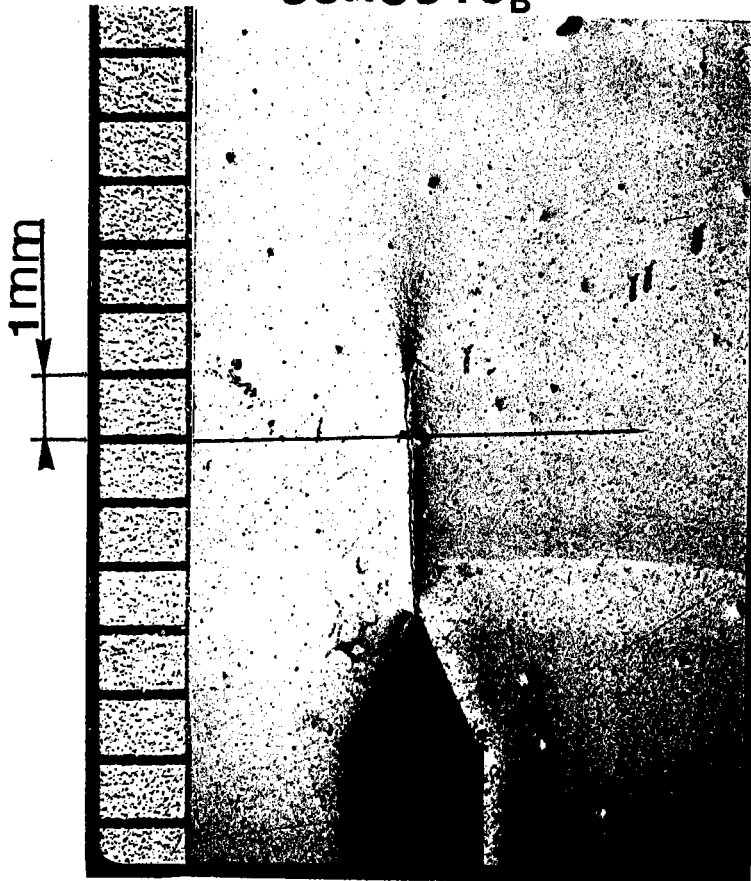


- Figure E.72 - Mise en évidence de l'influence de la composante du mode II sur la taille de la zone plastique monotone (rugosimètre)



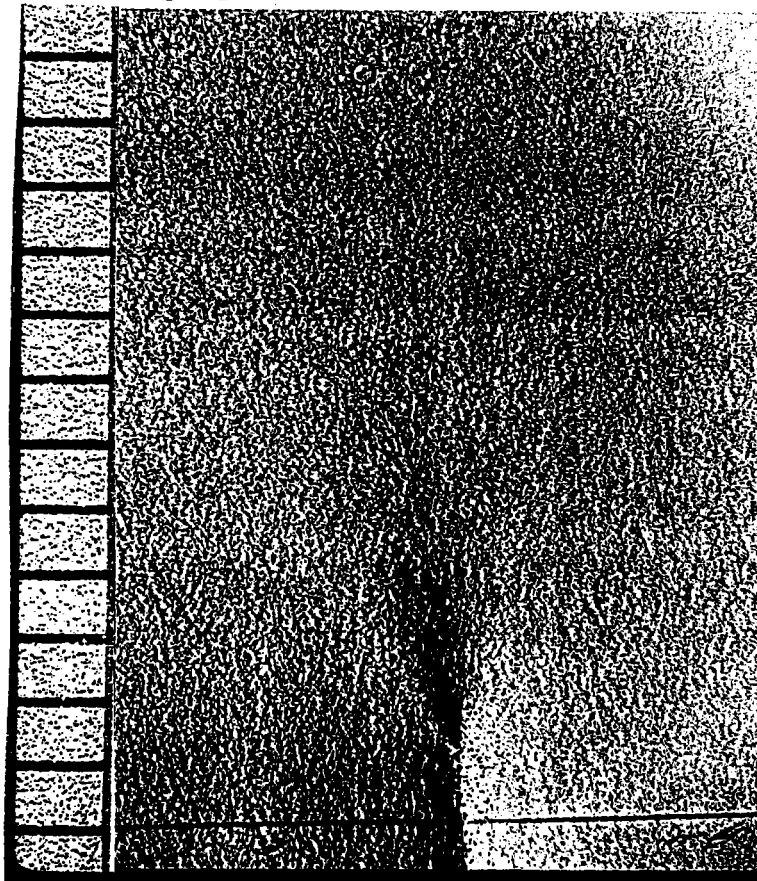
- Figure E.73 - Mise en évidence de l'influence de la composante du mode II sur la taille de la zone plastique monotone (rugosimètre)

35NCD16<sub>B</sub>



x8.3

316



x8.3

- Figure E.74 - Zone plastique obtenu avec un chargement initial de mode II pur : mise en évidence par lumière rasante

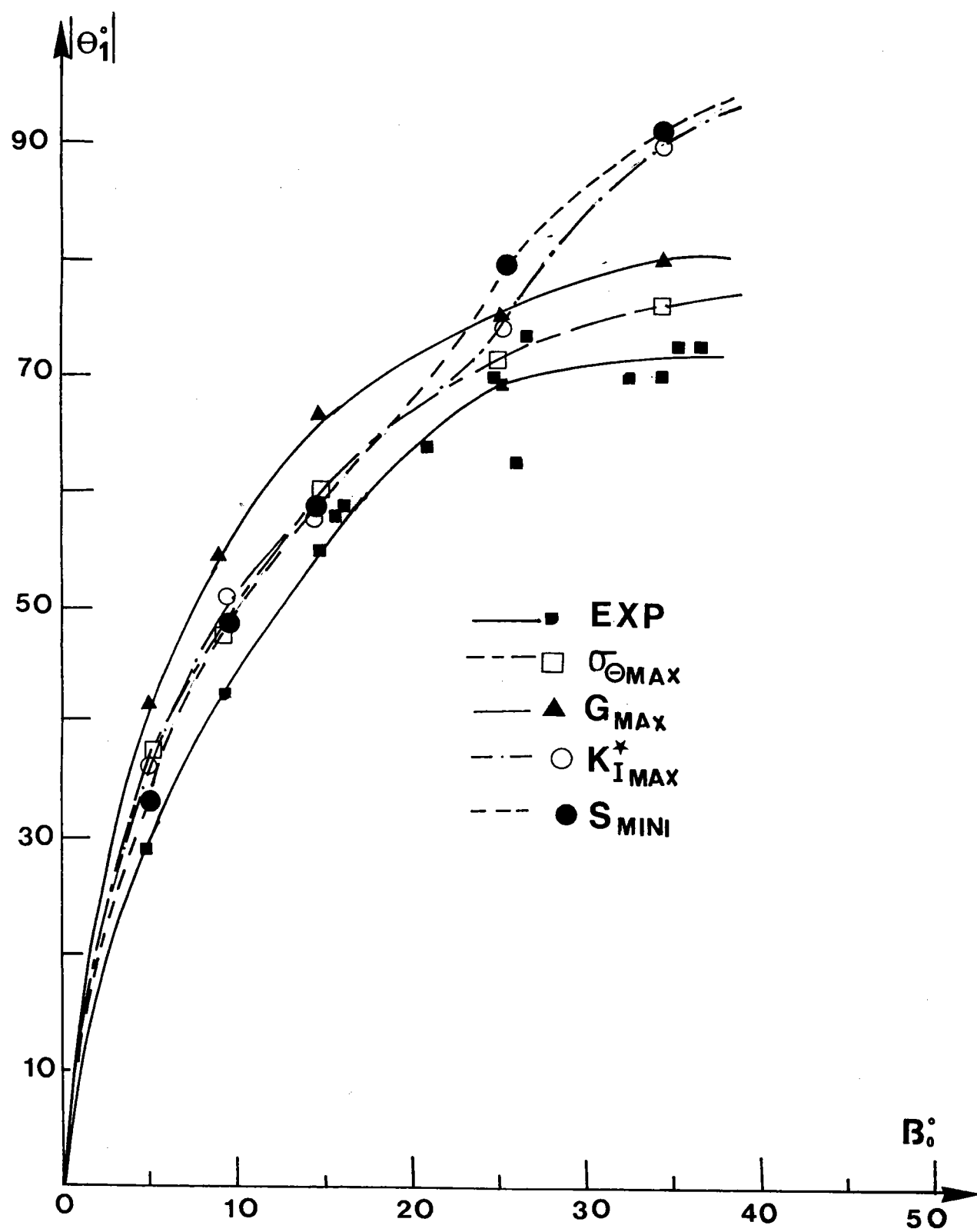
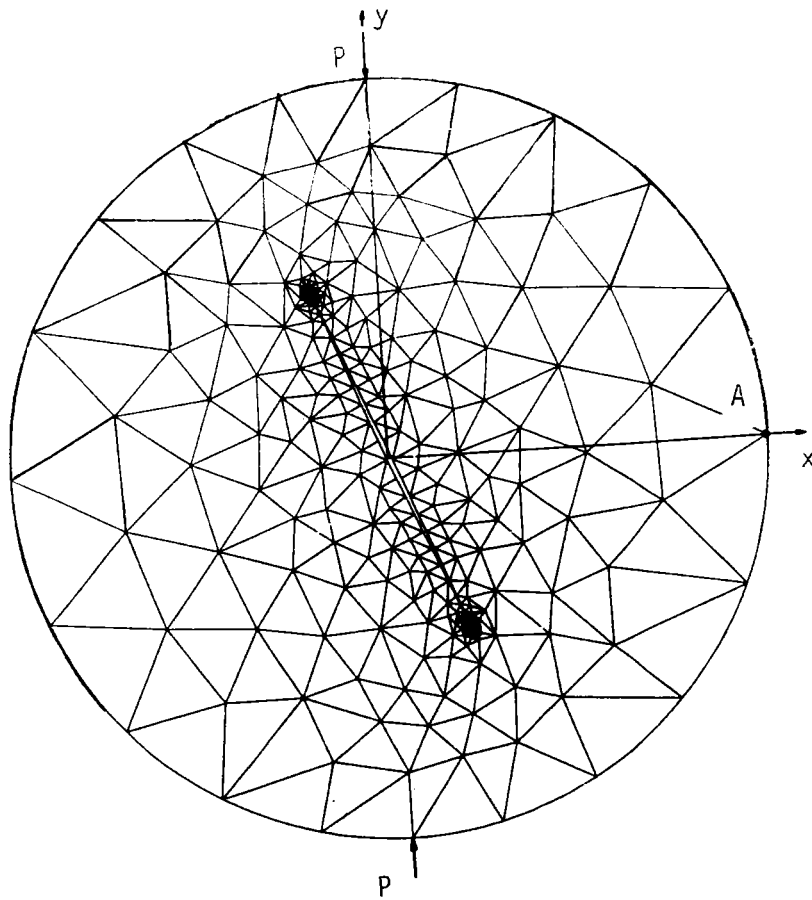
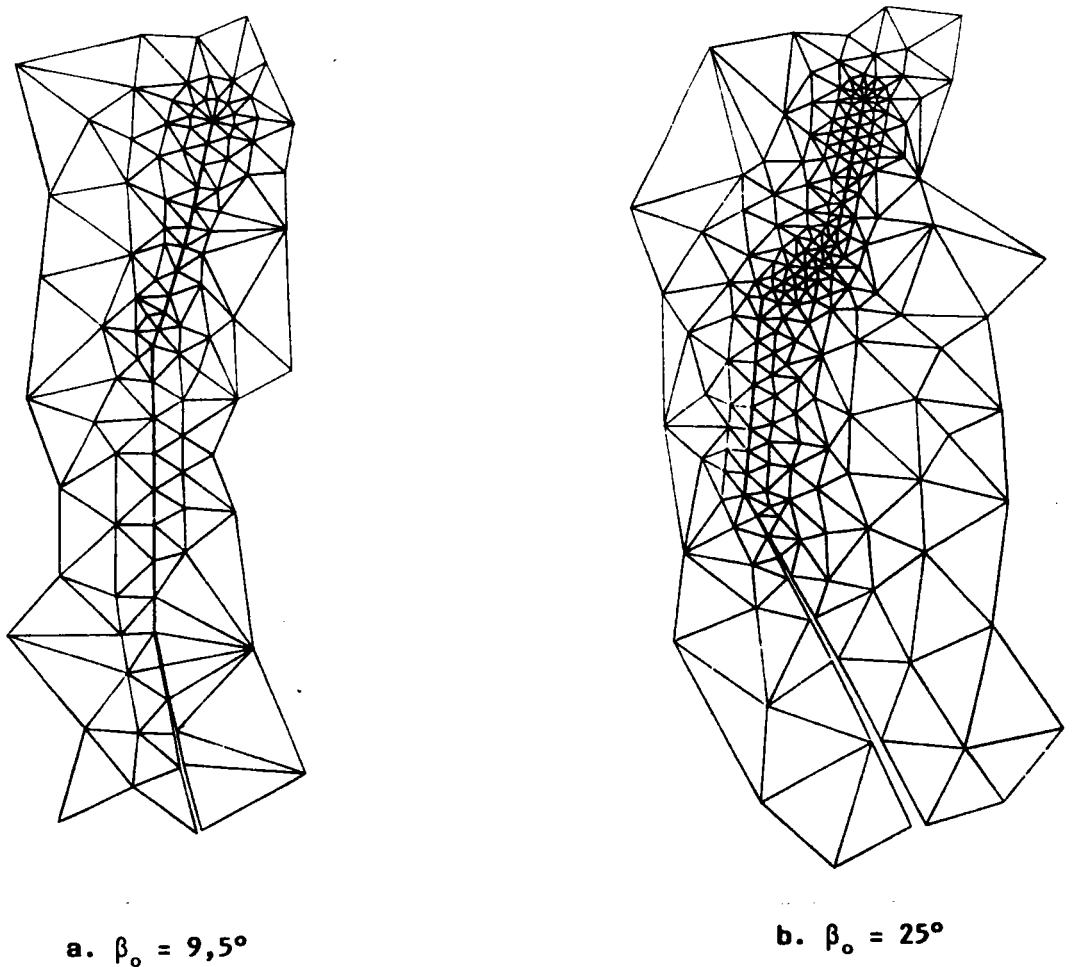


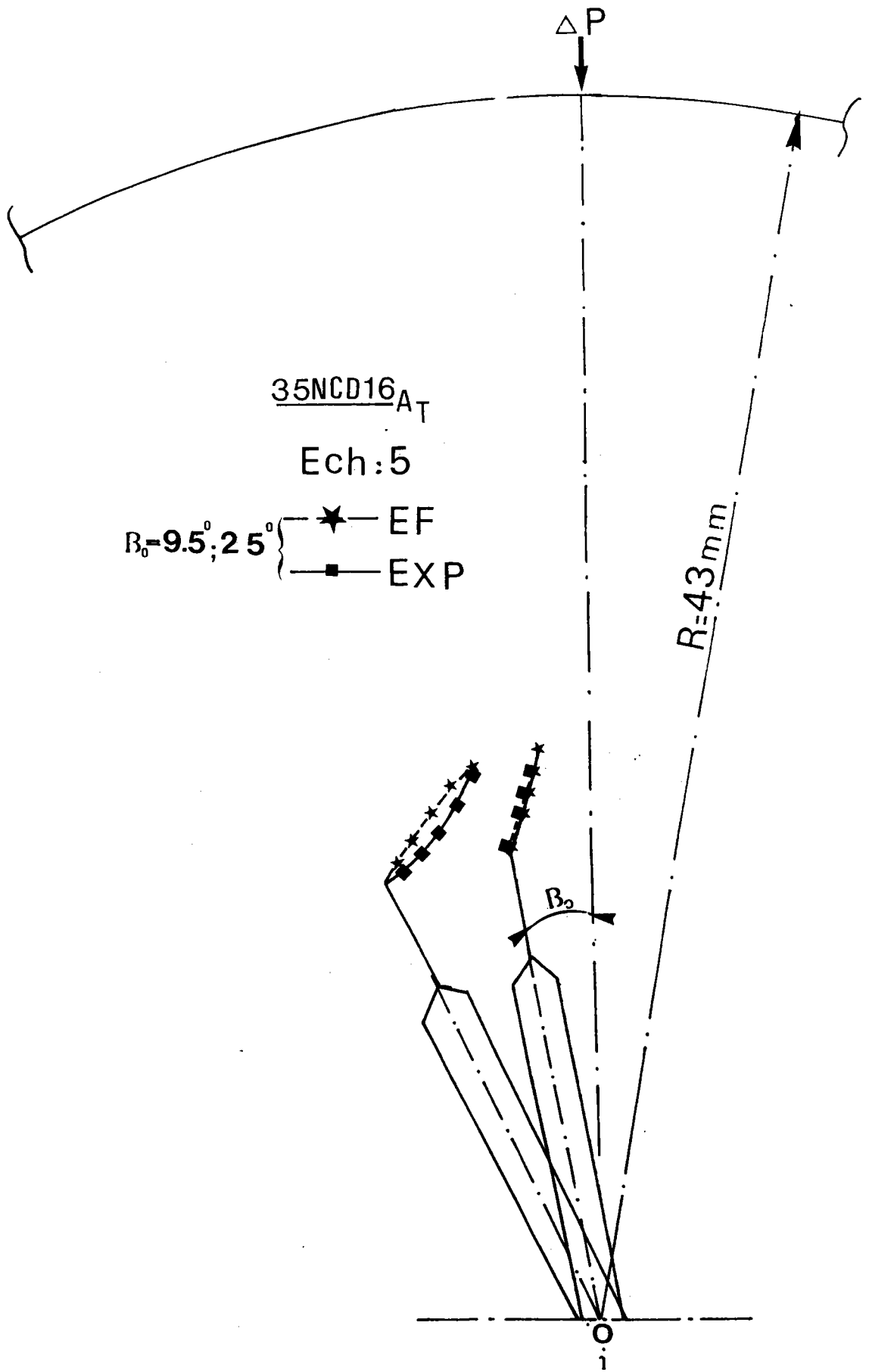
Figure E.75 - Comparaison des angles de bifurcation théoriques et expérimentaux en fonction de l'angle de chargement initial  $\beta_0$



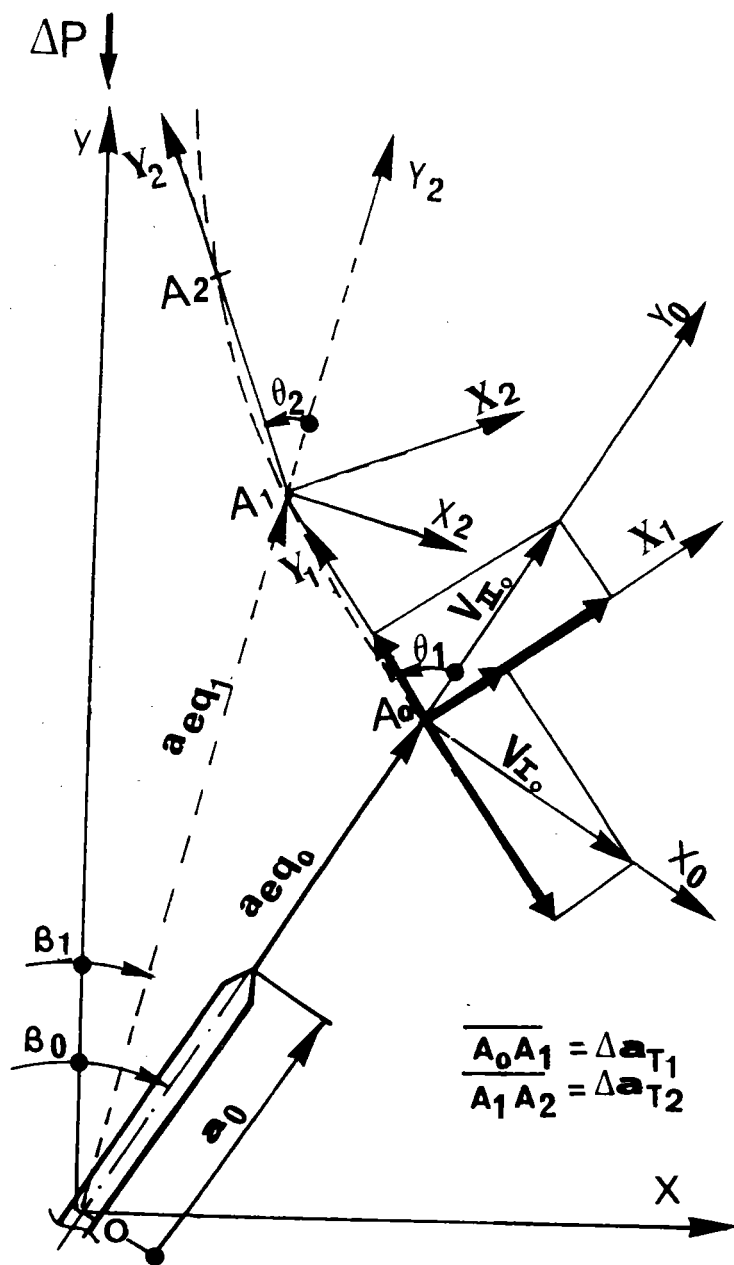
- Figure E.76 - Maillage du disque brésilien



- Figure E.77 - Evolution du maillage à la pointe de la fissure au cours de sa propagation

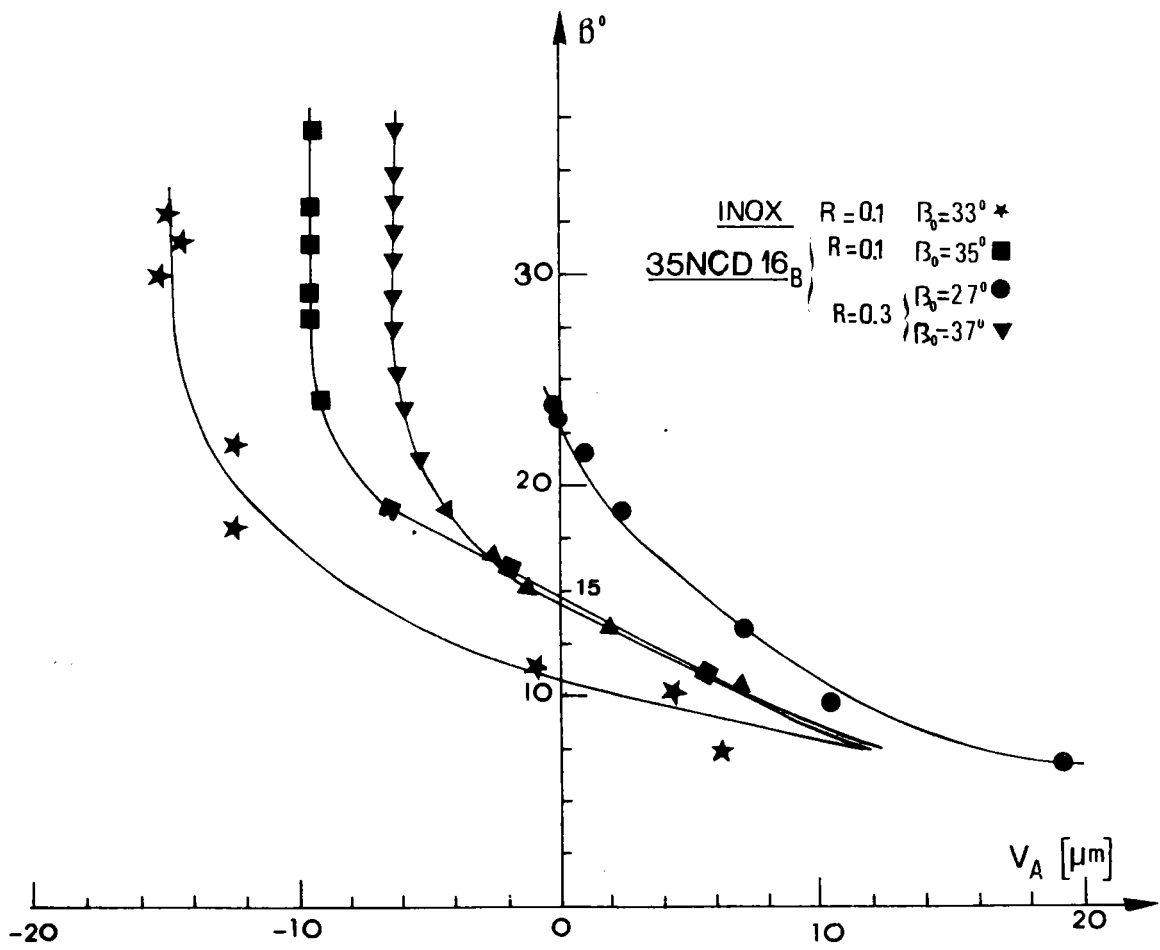


- Figure E.78 - Comparaison des trajectoires de propagation expérimentales et théoriques déterminées par calcul aux éléments finis

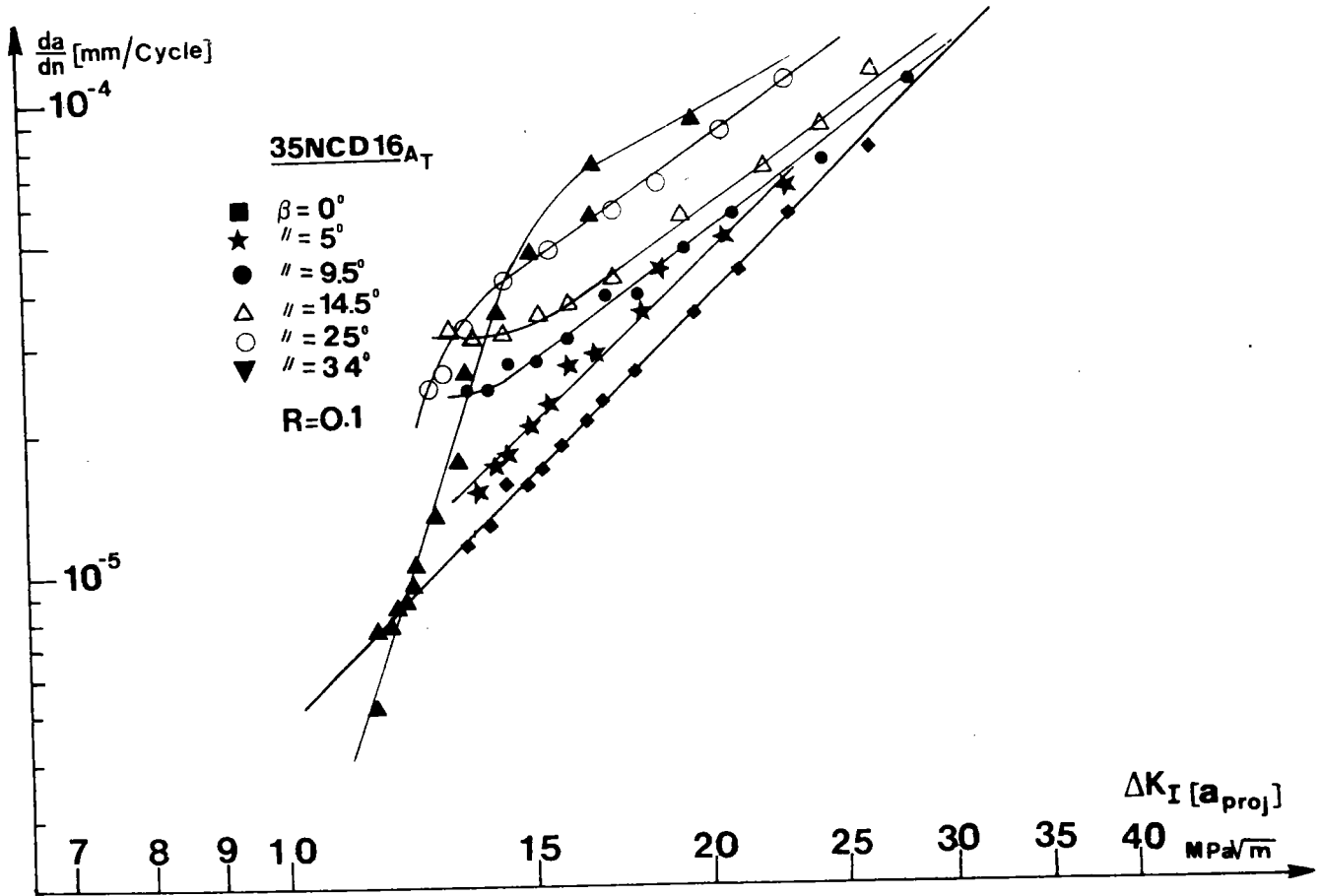


- Figure E.79 - Définition des déplacements  $V_{I0}$  et  $V_{II0}$  dans le repère lié à la préfissure ( $A_0, X_0, Y_0$ ) et dans le repère lié à la fissure curviligne ( $A_0, X_1, Y_1$ )

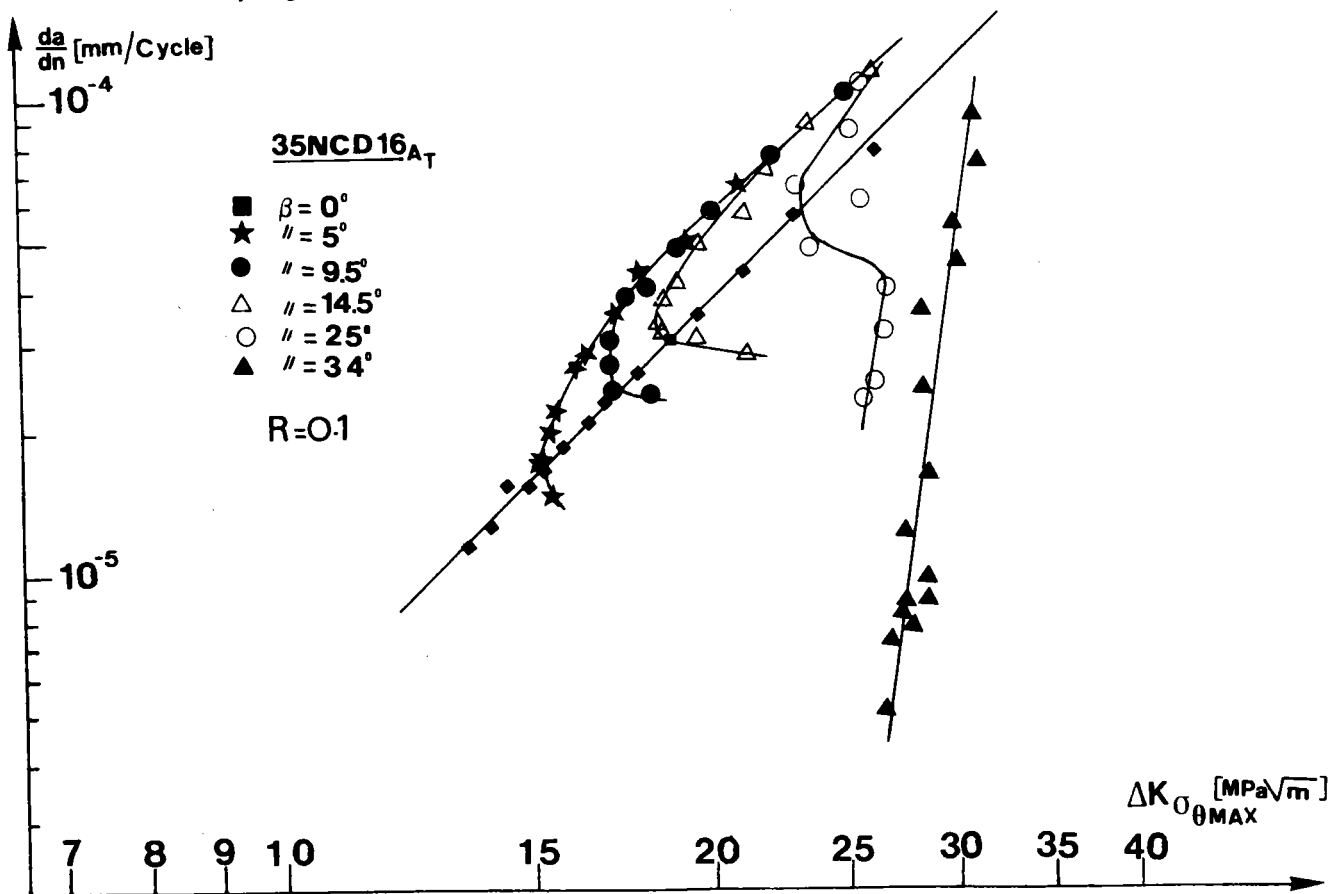




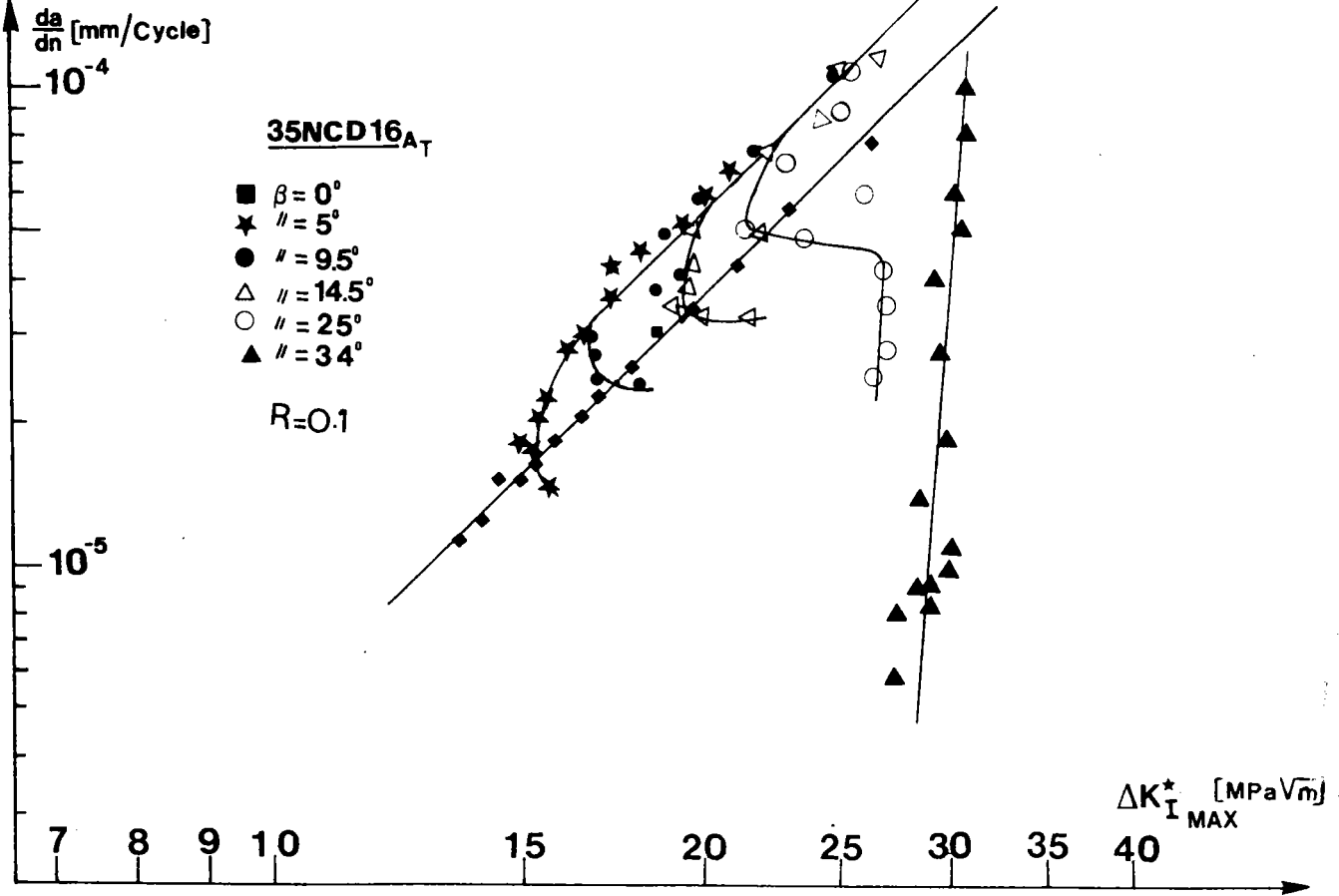
- Figure E.80 - Evolution de l'angle de chargement en fonction des déplacements  $V_A$  (chargement de mode II pur et de mode II impur)



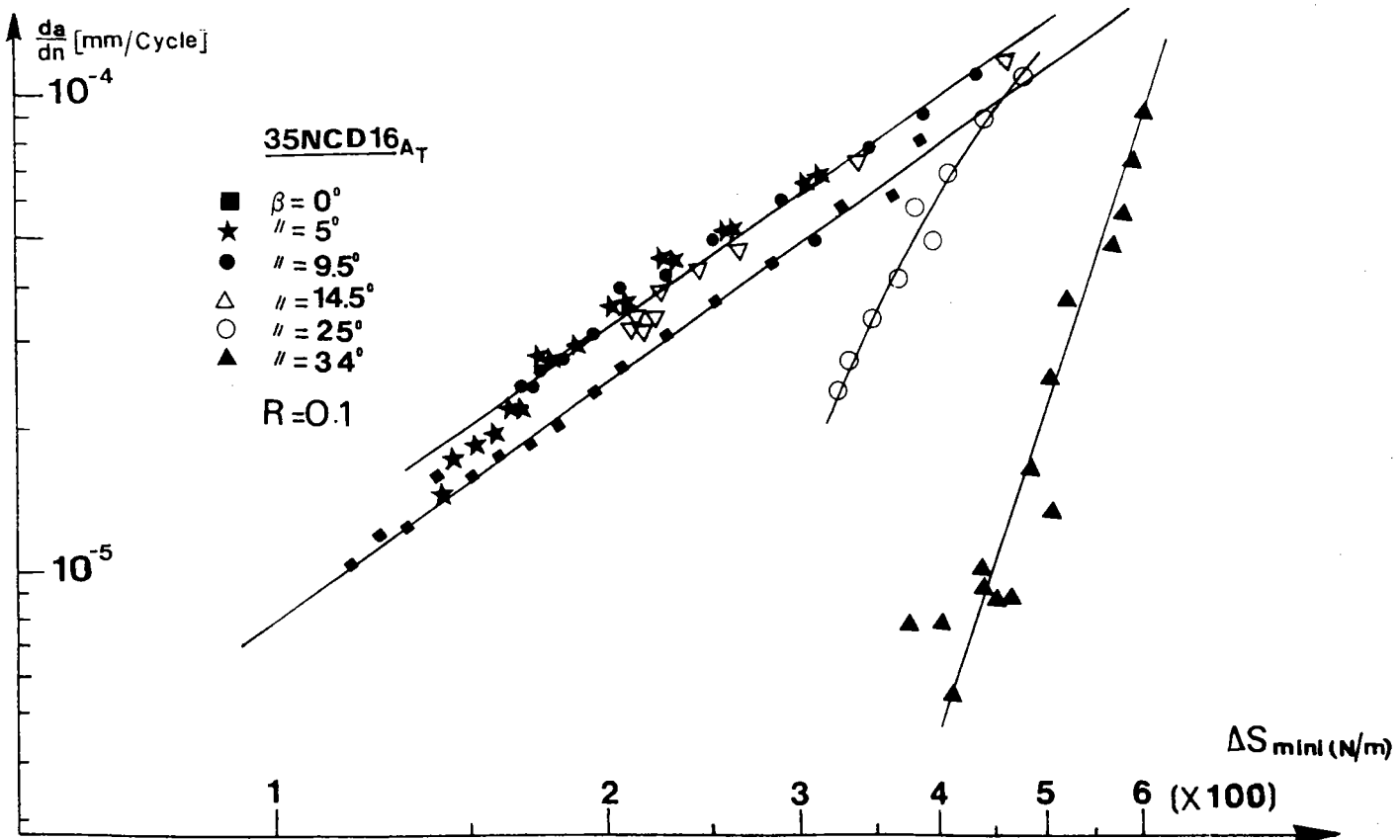
- Figure E.81 - Evolution des vitesses de fissuration en fonction de  $\Delta K_I$  calculé à partir de la longueur de la fissure projetée sur la direction de chargement



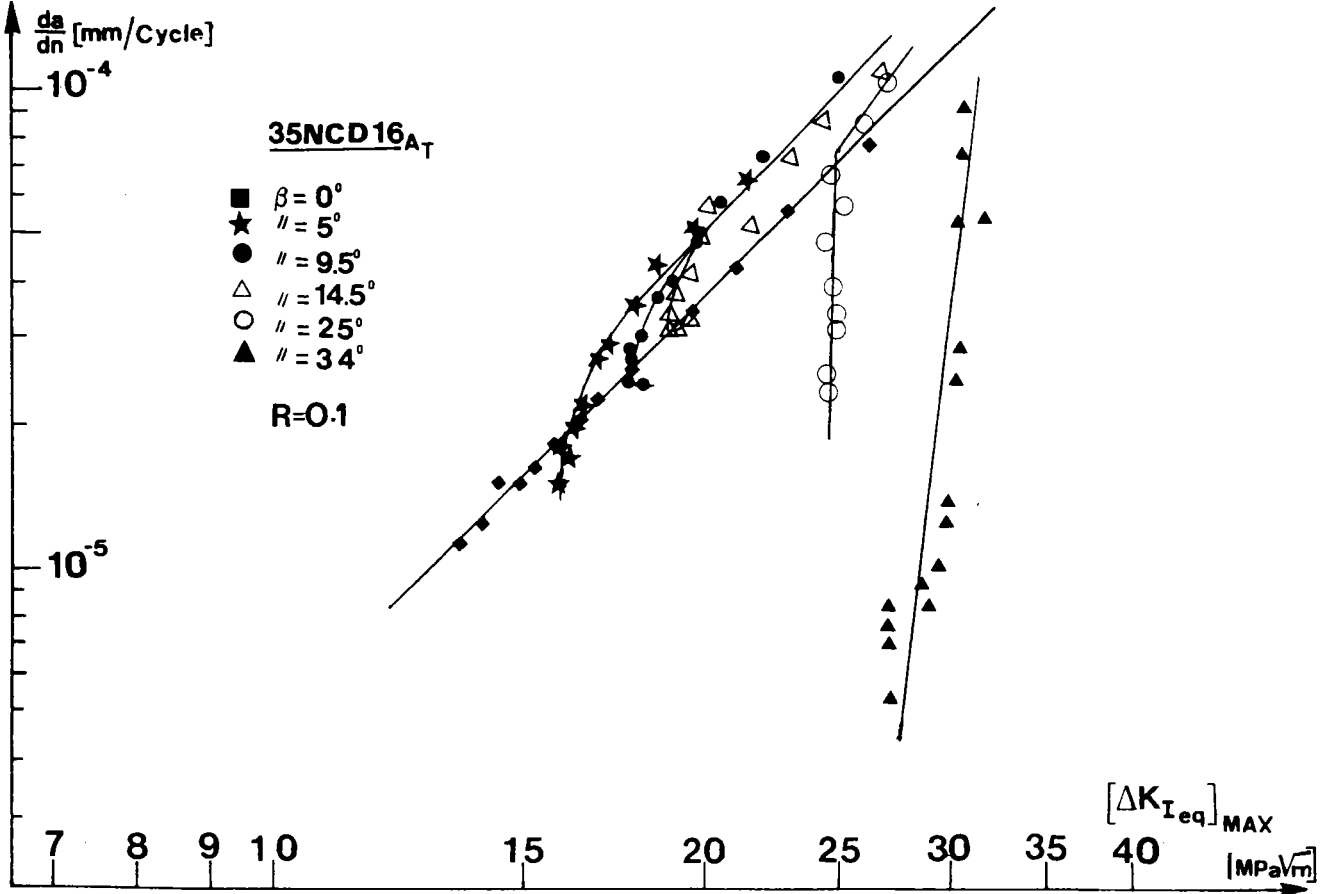
- Figure E.82 - Dépouillement des vitesses de fissuration basé sur le critère de la contrainte tangentielle maximale  $\sigma_{\theta_{max}}$



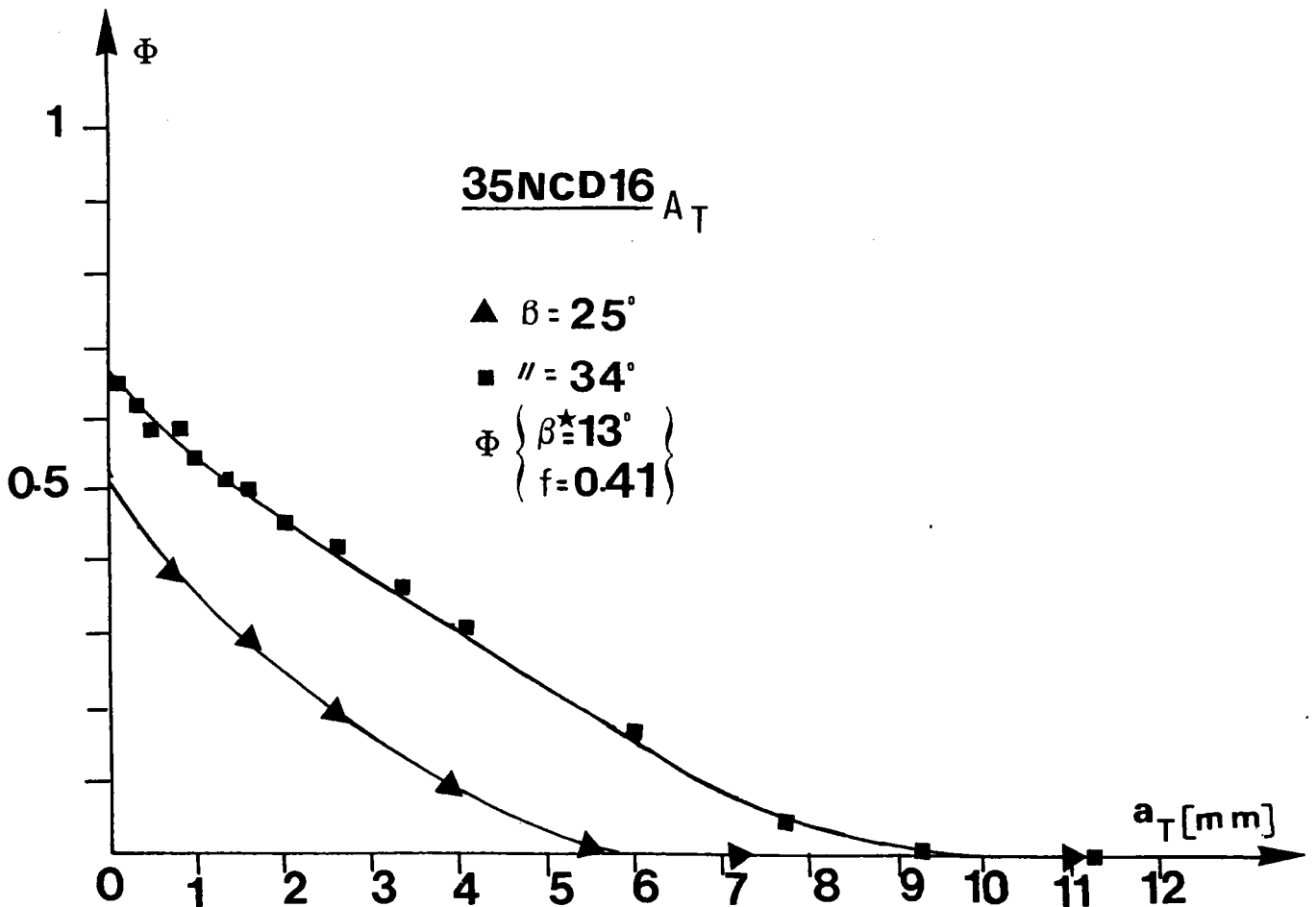
- Figure E.83 - Dépouillement des vitesses de fissuration basé sur le critère du facteur d'intensité de contrainte maximal d'AMESTOY (21)



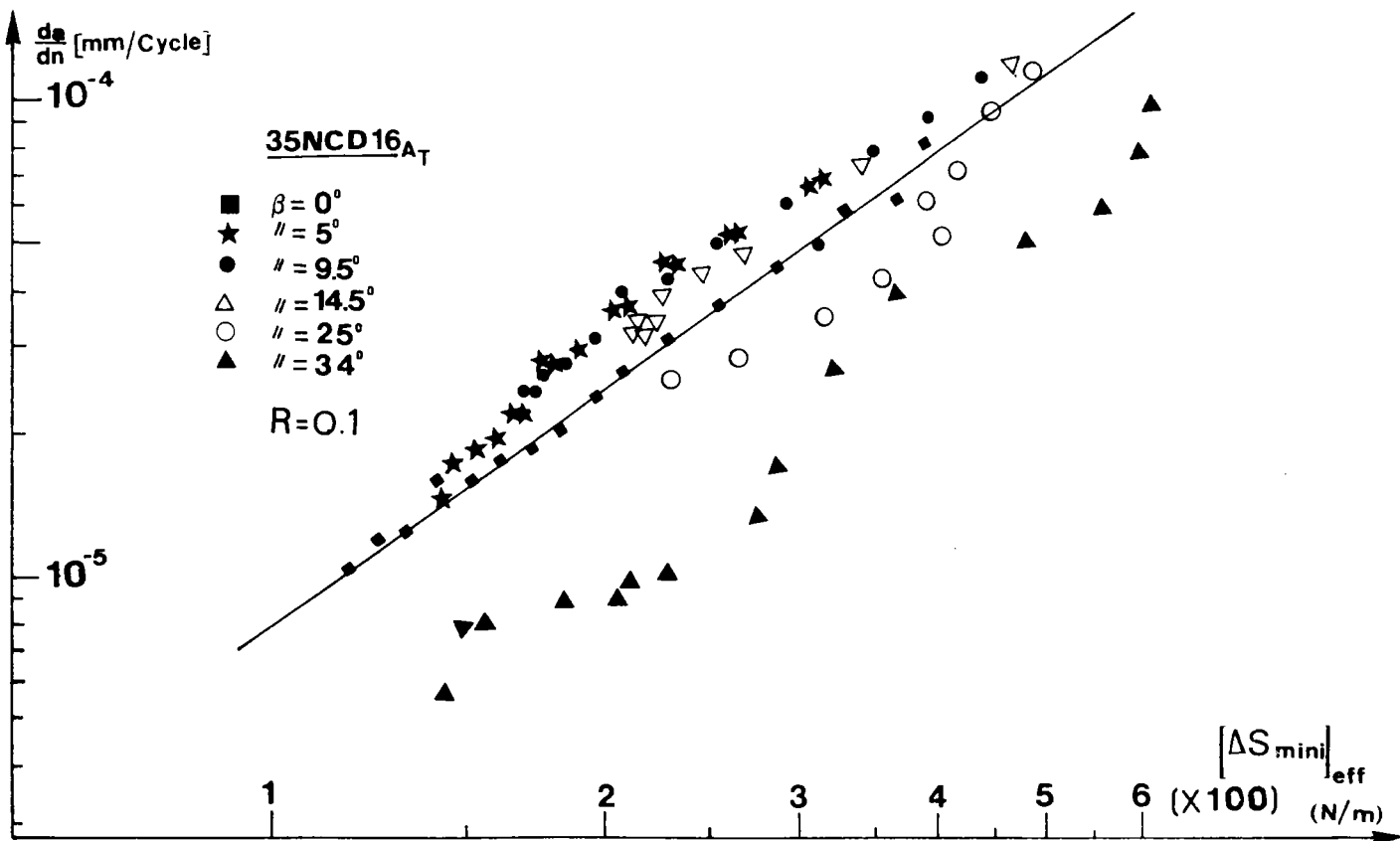
- Figure E.84 - Dépouillement des vitesses de fissuration basé sur le critère de la densité d'énergie minimale de déformation ΔS-(min)



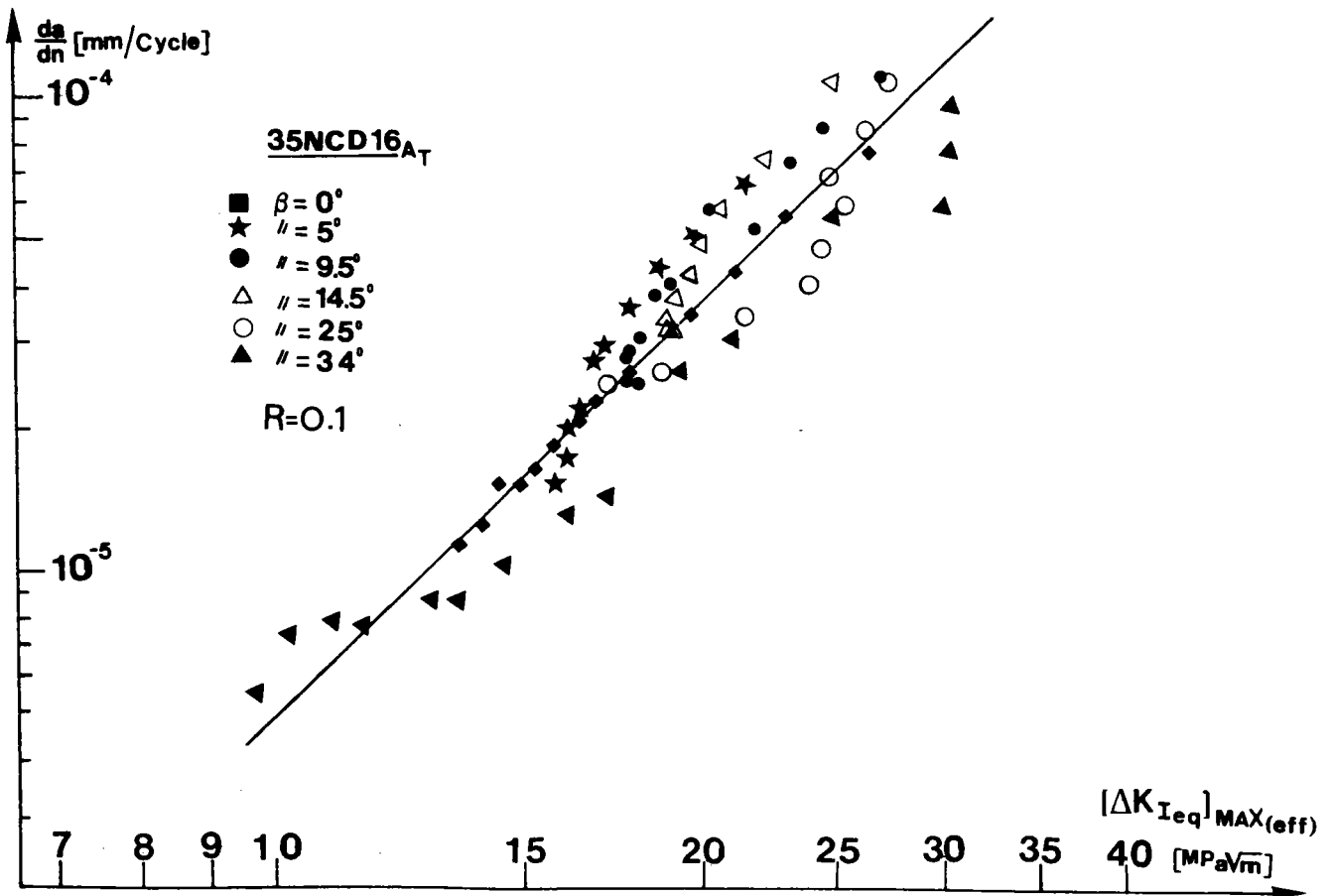
- Figure E.85 - Dépouillement des vitesses de fissuration basé sur le modèle du facteur d'intensité de contrainte équivalent maximal proposé



- Figure E.86 - Evolution du coefficient de réduction des contraintes de fermeture en fonction de la longueur de fissure curviligne



- Figure E.87 - Dépouillement des vitesses de fissuration basé sur le critère de l'énergie de déformation minimale, en tenant compte du frottement



- Figure E.88 - Dépouillement des vitesses de fissuration basé sur le modèle du facteur d'intensité de contrainte équivalent maximal proposé, en tenant compte du frottement