3e Cycle
d'Enseignement Supérieur

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ DE METZ

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Equations différentielles et Contrôle Optimal des Systèmes
Mention : Mathématiques Appliquées

par

CHAFIQ BENAHMED

SUR LA LOCALE CONTROLABILITE LE LONG D'UNE TRAJECTOIRE DE REFERENCE DE FAMILLES DE CHAMPS DE VECTEURS HOMOGENES

Soutenue le 28 Janvier 1986

Président	:	Monsieur G. SALLET
Membres	:	Monsieur C. ROGER
		Madame D. MICHEL
Invité	:	Monsieur Y. PERAIRE

Année Universitaire 1985 - 1986

Je remercie vivement Monsieur SALLET d'avoir bien voulu diriger ce travail et d'avoir également accepté de présider le Jury. Ses critiques et ses conseils me furent très utiles pour l'élaboration de ce travail.

Je tiens à exprimer ma très profonde gratitude à Monsieur PERAIRE pour l'aide qu'il m'a apportée tout au long de ce travail.

Monsieur ROGER, Madame MICHEL ont accepté de faire partie de ce Jury, je les en remercie très sincèrement.

Enfin, je remercie le département de Mathématique de Metz et tous ses membres, qui m'ont permis de préparer ce travail dans de bonnes conditions.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Un asservissement homogène est un système différentiel de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = X(x) + \sum_{i=1}^{n-1} u_i(t)\, Y_i(x)$$

où $X, Y_1, \ldots Y_{n-1}$ sont des champs homogènes sur $\mathbb{R}^n$.

On appelle contrôle admissible toute fonction $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \ldots, u_{n-1}(\cdot))$ définie sur un intervalle $[0, T]$ contante par morceaux à valeurs dans $[-1, 1]^{n-1}$

A tout couple $(x_0, u(\cdot))$ on associe une réponse $x(x_0, t_1, u(\cdot))$ un élément de $\mathbb{R}^n$ qui est par définition la valeur à l'instant t_1 de l'unique solution du problème de CAUCHY :

$$\frac{dx}{dt}(x_0, t, u(t)) = X(x(x_0, t, u(t))) + \sum_{i=1}^{n-1} u_i(t)\, Y_i(x(x_0, t, u(t)))$$

$$x(x_0, 0, u(0)) = x_0$$

On dit qu'un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$ est accessible depuis x_0, s'il existe un contrôle admissible $u(\cdot)$ assurant le transfert du système de l'état initial x_0 à la réponse x_1. L'étude de l'ensemble des états accessibles $(A(x_0))$ s'appelle l'étude de la contrôlabilité.

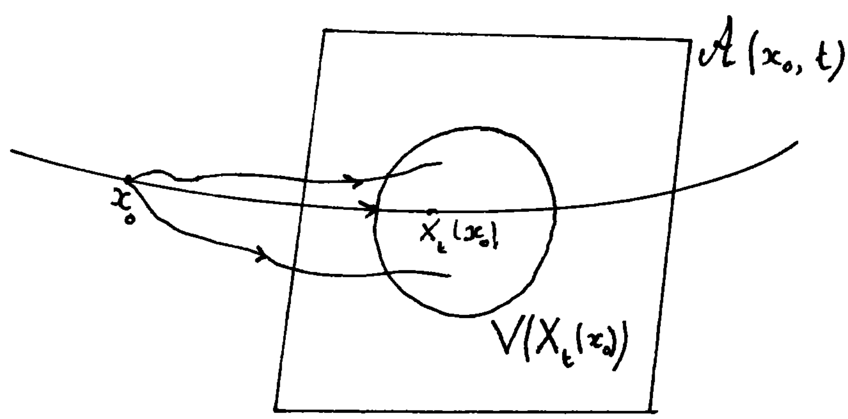
On dit qu'un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$ est accessible depuis x_0 à l'instant t s'il est accessible depuis x_0 et à l'instant t. La description de l'ensemble des états accessibles à un instant t $(A(x_0, t))$ a justifié de nombreuses publications [2] .

On remarque que si les contrôles sont nuls, le système évolue librement suivant :

$$\frac{dx}{dt} = X(x)$$

c'est ce que l'on appelle la dérive du système.

Une propriété souhaitable est que l'on ait locale contrôlabilité le long de la trajectoire de référence X (L.C.T en abrégé)c'est-à-dire : si l'on note X_t (x_0) la trajectoire au temps t, issue de x_0, on désire que X_t (x_0) qui est dans A (x_0, t) soit dans son intérieur, quel que soit t > o.



le cas où X (x_0) est nul est particulier et l'on parle alors de locale contrôlabilité en temps petit.

La locale contrôlabilité en temps petit a suscité beaucoup de publications [7], [9].

Le problème de L.C.T est plus difficile, il a été abordé par HERMES ([1] , [3]), lequel a donné des conditions nécessaires et suffisantes dans le plan. Il a été aussi abordé par KRENER [4] , [5] , [6] qui a donné seulement des conditions suffisantes dans $\mathbb{R}^n$ (n $\geq$ 3).

Il est donc intéressant d'étudier la L.C.T pour des systèmes non linéaires et non triviaux. La classe des champs homogènes est particulièrement intéressante pour les raisons suivantes :

. Elle est suffisamment générale et bien étudiée par les gens des équations différentielles pour constituer un champ d'investigation.

. Le problème de L.C.T est local, ainsi si on linéarise le système on n'a aucune information d'où la nécessité d'aborder des problèmes même locaux par des techniques non linéaires.

. Elle est suffisamment particulière à cause de l'homogénéité qui possède des propriétés particulières simplifiant l'étude de la L.C.T

. Le cas particulier des systèmes quadratiques est une bonne introduction aux systèmes non linéaires.

Plan du travail

Dans le chapitre 0 est présenté les notations et les définitions nécessaires pour ce travail ainsi que deux résultats de HERMES dans $\mathbb{R}^2$.

Le chapitre I sera consacré en grande partie à l'étude de la L.C.T de la F.C.V quadratique $\{ X + ub, -1 \leqq u \leqq 1\}$ (c'est-à-dire X champ quadratique dans $\mathbb{R}^2$) et aux propriétés de stabilité et de généricité. Dans le premier paragraphe, je donnerai une condition nécessaire et suffisante de la L.C.T de la F.C.V quadratique $\{ X + ub, -1 \leqq u \leqq 1 \}$ en un point $x \in \mathbb{R}^2$ (Théorème I.1.1.1. et Proposition I.1.2.1.) ainsi qu'un algorithme à la fin du paragraphe (I.1.2.3.).

Pour cette même famille, je montrerai dans le deuxième paragraphe que la propriété de L.C.T. est stable si on perturbe X, b et x (Proposition I.2.2.). Enfin, je caractériserai les champs quadratiques X tels que la F.C.V $\{ X + ub, -1 \leqq u \leqq 1\}$ est L.C.T sur $\mathbb{R}^2 - \{ (0,0)\}$ pour presque tout vecteur $b \in \mathbb{R}^2$ (Proposition I.2.3.).

Dans le troisième paragraphe sera donnée une condition nécessaire et suffisante de la L.C.T de la F.C.V cubique $\{ X + ub, -1 \leqq u \leqq 1\}$ en un point $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $X(x) \neq 0$ (Théorème I.3.1.1.), et des conditions nécessaires ou des conditions suffisantes pour la F.C.V $\{ X + ub , - 1 \leq u \leq 1 \}$ où X est un champ homogène de degré $n \geq 3$ aux points singuliers de X.

Le chapitre II sera consacré à l'étude de la L.C.T des F.C.V suivantes :

. $\{ X , ub \}$ dans $\mathbb{R}^2$, où X champ homogène sur $\mathbb{R}^2$, b champ constant sur $\mathbb{R}^2$ et $u \in \mathbb{R}$.

. $\{ X , u_1 b_1 , u_2 b_2 \}$ dans $\mathbb{R}^3$, où X champ homogène sur $\mathbb{R}^3$, b_1 et b_2 deux champs indépendants sur $\mathbb{R}^3$ et $(u_1 , u_2) \in \mathbb{R}^2$.

Dans le premier paragraphe, je donnerai une condition nécessaire et suffisante de la L.C.T de la F.C.V $\{ X , ub \}_{u \in \mathbb{R}}$ en un point $x \in D$ (b) (droite de vecteur directeur b et passant par l'origine), et aux points singuliers de X (Théorème II.1.5). Dans le cas où x n'est pas singulier et $\{ b , X (x) \}$ sont indépendants, je n'ai rien pu dire, par ailleurs j'ai donné un exemple de F.C.V $\{ X , ub \}_{u \in \mathbb{R}}$ pour lesquelles la L.C.T n'est vérifiée en aucun point de $\mathbb{R}^2$ (proposition II.1.7). Pour finir ce paragraphe j'ai étudié le cas particulier où X est quadratique et je montrerai que :

étant donné un point $x \neq 0$ singulier de X ; la F.C.V $\{ X + ub , - 1 \leq u \leq 1\}$ est L.C.T en x si et seulement si la F.C.V $\{ X , ub \}_{u \in \mathbb{R}}$ l'est aussi (proposition II.1.10).

Dans le deuxième paragraphe, je donnerai une condition nécessaire et suffisante de la L.C.T de la F.C.V $\{ X , u_1 b_1 , u_2 b_2 \}$ en un point x appartenant au plan engendré par b_1 et b_2 et aux points singuliers de X (Théorème II.2.1).

Les résultats de la L.C.T en un point x singulier de X seront généralisés à la F.C.V $\{ X , ub \}_{u \in \mathbb{R}}$ (respectivement à la F.C.V $\{ X , u_1 b_1 ,$

$u_2 b_2 \}_{u_I, u_2 \in \mathbb{R}}$) où X est un champ C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ (respectivement X champ C^∞ sur $\mathbb{R}^3$).

Le chapitre III exploite les résultats des chapitres I et II pour généraliser certains résultats aux F.C.V suivantes :

$\{X + u Y, - I \leqq u \leqq I\}$ avec X et Y champs homogènes sur $\mathbb{R}^2$.

$\{X, u Y\}_{u \in \mathbb{R}}$ avec X et Y champs homogènes sur $\mathbb{R}^2$.

CHAPITRE o : PRELIMINAIRES

Dans ce chapitre, on va donner l'outil mathématique nécessaire pour ce travail.

Commençons par rappeler deux résultats dûs à HERMES qu'on écrira en abrégé : $(RH)_{1)}$ $(RH)_2$ (voir [3] , [1]).

Considérons le système différentiel :

$$\dot{x} = X(x) + u(t)Y(x) \qquad -1 \leq u(t) \leq 1$$

où X et Y sont deux champs analytiques sur $\mathbb{R}^2$ et u (t) est une fonction à valeurs dans $[-1, 1]$ constante par morceaux.

En posant :

$$ad\,Y\,X = [Y, X] \ , \ ad^m\,Y\,X = [Y, ad^{m-1}\,Y\,X]$$

$$\mathcal{Y}^1 = \{Y, ad\,Y\,X, [X, ad\,Y\,X], \dots [ad^k X, ad\,Y\,X], \dots\}$$

$$\mathcal{Y}^m = \{Y, ad^m\,Y\,X, [X, ad^m\,YX], \dots [ad^k X, ad^m\,YX], \dots\}$$

on a :

$(R\,H)_1$: soit $p \in \mathbb{R}^2$: X (p) et Y (p) sont indépendants.

Une condition nécessaire et suffisante pour que int $\mathcal{A}(t, p) \neq \emptyset$ $\forall\, t > o$ est qu'il existe un entier $m \geq 1$ tel que dim $\mathcal{Y}^m_{e.v}$ (p) = 2.

Une condition nécessaire et suffisante pour que X_t (p) $\in$ int $\mathcal{A}(t,p)$, $\forall\, t > o$ est que le plus petit entier m vérifiant la condition précédente soit impair.

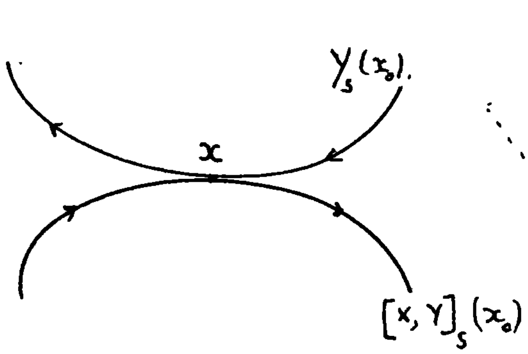
(RH_2):soit $p \in \mathbb{R}^2$: X (p) et Y (p) sont indépendants.

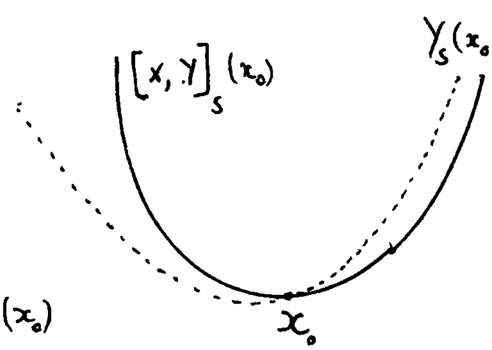
Une condition nécessaire et suffisante pour que $X_t(p) \in \operatorname{int} \mathcal{A}(t,p)$ $\forall t > o$ est qu'il existe $\varepsilon > o$ tel que $\forall t \in]o, \varepsilon[$, l'application :

$$(s_1, s_2) \longmapsto f_t^p(s_1, s_2) = Y_{s_1} \circ [X, Y]_{s_2} X_t(p)$$

soit bijective d'un voisinage de (o,o) de $\mathbb{R}^2$.

Il est évident que si Y (p) et [X, Y](p) sont indépendants, l'application $f_t^p(.,.)$ est bijective d'un voisinage de (o, o) (on dira que le test linéaire s'applique). Le cas intéressant est quand Y (p) et [X, Y](p) sont dépendants, dans ce cas l'application est bijective si et seulement si les trajectoires de Y et de [X, Y]ne sont pas du même côté [1].





0.1 *Familles de champs de vecteurs homogènes sur $\mathbb{R}^n$*

On dit qu'un champ $X = (X_1, .., X_n)$ est homogène, s'il existe un entier m tel que chaque composante X_i s'écrive :

$$X_i(x_1, .. x_n) = \sum_{i_1+..+i_n=m} a_{(i_1,..,i_n)} \, x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

m étant le degré de X.

Une famille $\mathcal{F}$ de champs de vecteurs est dite homogène si : $\forall X \in \mathcal{F}$, X est homogène.

0.1.1. *Premières notations*

i) le degré d'un champs X homogène sera noté : d (X).

ii) pour toutes les F.C.V qu'on va étudier on notera par L.C.T· "la locale controlabilité le long de la trajectoire de référence de X".

iii) si X et Y sont deux champs de vecteurs homogènes on notera par:
$\mathcal{S}(X, Y)$ la F.C.V $\{ X + u Y, - 1 \leq u \leq 1 \}$ dans $\mathbb{R}^2$
$\mathcal{F}(X, Y)$ la F.C.V $\{ X, u Y \}_{u \in \mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}^2$
$\mathcal{F}(X, b_1, b_2)$ la F.C.V $\{ X, u_1 b_1, u_2 b_2 \}$ dans $\mathbb{R}^3$ où b_1 et b_2 sont deux vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^3$, u_1 u_2 parcourent $\mathbb{R}$; X champ homogène sur $\mathbb{R}^3$.

iv) on notera $\mathcal{A}(t, x)$ (respectivement $\mathcal{B}(t, x)$ l'ensemble des états accessibles à l'instant t depuis x par la F.C.V $\mathcal{S}(X, Y)$ (respectivement par $\mathcal{F}(X, Y)$ ou F (X, b_1, b_2)).

v) on notera Γ (X, Y), Δ (X, Y) ou tout simplement Γ, Δ les ensembles :

$$\Gamma = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \det (X (x), Y (x)) \neq 0\}$$

$$\Delta = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \det (Y (x), [X, Y] (x)) = 0 \}$$

Γ^C désignera le complémentaire de Γ.

0.1.2. *Définition*

soit X un champ homogène sur $\mathbb{R}^2$, b un champ constant sur $\mathbb{R}^2$.

si d (X) = 2 (respectivement d(X) = 3) la F.C.V $\{ X + ub, -1 \leq u \leq 1\}$ est dite quadratique (respectivement cubique).

0.1.3. Définition

soit $\mathcal{F}$ une F.C.V. sur $\mathbb{R}^n$, $X \in \mathcal{F}$, $x \in \mathbb{R}^n$. On dit que $\mathcal{F}$ est localement contrôlable le long de la trajectoire de référence X au point x si :

$$\forall\ t > o,\quad X_t\,(x) \in \operatorname{int} \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(t, x).$$

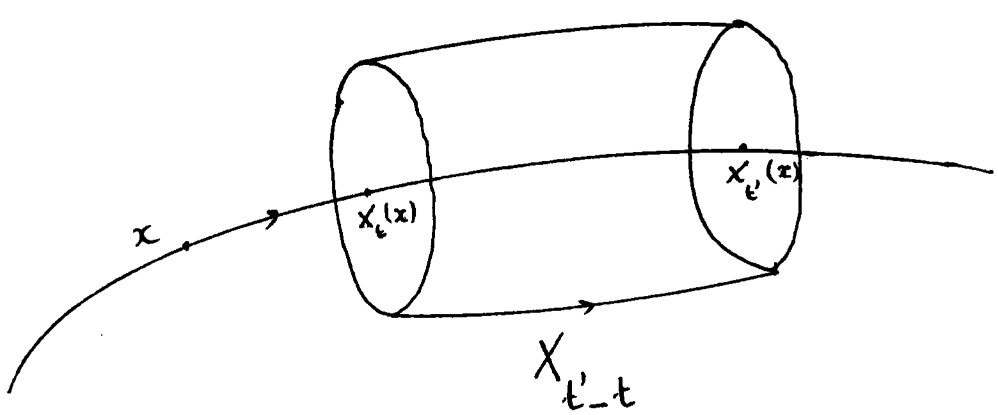
0.1.4. Propriétés

$\mathcal{F}$ est L.C.T au point x si et seulement si : $\exists\ \varepsilon > o$ tel que $\forall t \in]o, \varepsilon[$ $X_t\,(x) \in \operatorname{int} \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(t, x)$.

En effet : soient t, t' tels que $t' > \varepsilon$ et $o < t < \varepsilon$. $\mathcal{F}$ L.C.T en x entraîne que $X_t\,(x) \in \operatorname{int} \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(t, x)$. Montrons que $X_{t'}\,(x) \in \operatorname{int} \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(t', x)$.

$X_{t'-t}$ est un difféomorphisme local, donc on a :

$$X_{t'}\,(x) = X_{t'-t} \circ X_t\,(x) \in \operatorname{int} \mathcal{A}_{\mathcal{F}}(t', x).$$



0.2. Propriétés des F.C.V homogènes

0.2.1. Proposition

Considérons la F.C.V $\{ X + ub,\ u \in U \}$, $d(x) = m$, $b \in \mathbb{R}^2$ définie par le système différentiel.

$$x = X(x) + ub \quad (E) \quad u \in U \quad (U \subset \mathbb{R})$$

Notons par $x_u(t, x_0)$ la solution de (E) qui prend la valeur x_0 à l'instant $t = 0$, alors

$$(0.2.1.)\ \forall \lambda > 0,\ \forall t > 0,\ x_{\lambda^m u}\left(\frac{t}{\lambda},\ \lambda^{\frac{1}{m-1}} x\right) = \lambda^{\frac{1}{m-1}} x_u(t, x)$$

Preuve :

Remarquons d'abord que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $X(\lambda x) = \lambda^m X(x)$.

Posons $Y^u(x) = X(x) + ub$ et $v = \lambda^m u$, alors :

$$Y^v(x) = X(x) + \lambda^m u b$$

$$Y^v(\lambda x) = \lambda^m Y^u(x).$$

Considérons le champ $Z(x) = \frac{1}{\lambda} Y^v(x)$, on a :

$$\frac{d}{dt}\left[\lambda^{\frac{1}{m-1}} x_u(t, x_0)\right] = \frac{\lambda^{\frac{1}{m-1}}}{\lambda^{m/m-1}} \quad \frac{m}{\lambda^{m-1}}\ Y^u(x_u(t, x_0)$$

$$= \frac{1}{\lambda} Y^v\left[\lambda^{\frac{1}{m-1}} x_u(t, x_0)\right]$$

$$= Z\left(\lambda^{\frac{1}{m-1}} x_u(t, x_0)\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left[x_{\lambda^m u}\left(\frac{t}{\lambda},\ \lambda^{\frac{1}{m-1}} x_o\right)\right] = \frac{1}{\lambda}\, Y^v \left[x_v\left(\frac{t}{\lambda}, \lambda^{\frac{1}{m-1}} x_o\right)\right]$$

$$= Z\left[x_v\left(\frac{t}{\lambda},\ \lambda^{\frac{1}{m-1}} x_o\right)\right]$$

à l'instant t = o

$$\lambda^{\frac{1}{m-1}} x_u (t, x_o) = \lambda^{\frac{1}{m-1}} x_o$$

$$x_{\lambda^m u}\left(\frac{t}{\lambda},\ \lambda^{\frac{1}{m-1}} x_o\right) = \lambda^{\frac{1}{m-1}} x_o$$

Il s'ensuit que : $t \longrightarrow \lambda^{\frac{1}{m-1}} x_u (t, x_o)$

$t \longrightarrow x_{\lambda m_u}\left(\frac{t}{\lambda},\ \lambda^{1/m-1} x_o\right)$

sont solutions de l'équation différentielle

$$\dot{x} = Z(x)$$

prenant la même valeur à l'instant t = o

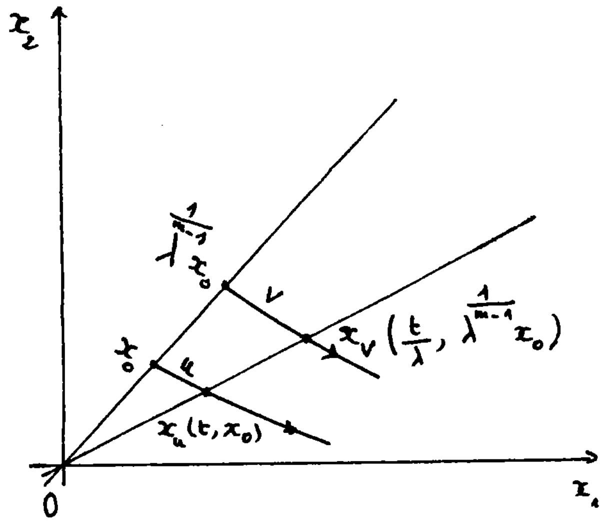
Donc $\forall \lambda > 0, \forall t > 0,\ \lambda^{\frac{1}{m-1}} x_u (t, x_o) = x_{\lambda m_u}\left(\frac{t}{\lambda},\ \lambda^{\frac{1}{m-1}} x_o\right)$

0.2.2. Remarques

1) L'égalité 0.2.1. entraîne que les trajectoires de $\mathcal{S}(X,b)$ sont homothétiques

$n = 2$

$v = \lambda^m u$

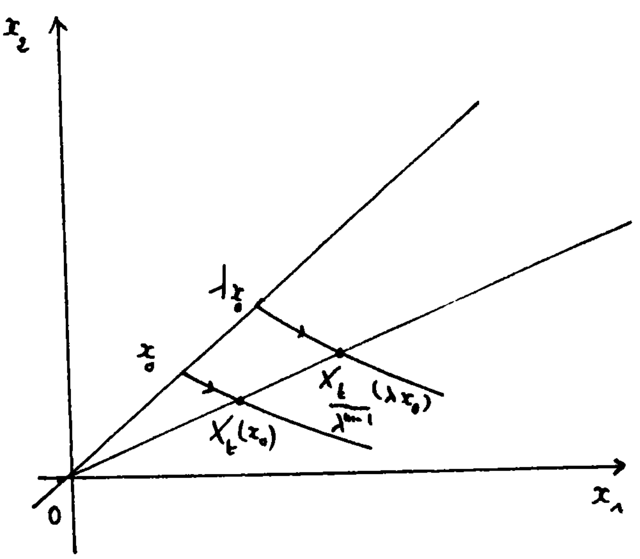


2) Dans le cas où $u = 0$, $x_u\,(t, x_0) = X_t\,(x_0)$; par suite on a la relation : $X_{\frac{t}{\lambda^{m-1}}}(\lambda x_0) = \lambda\, X_t\,(x)$.

De cette égalité on déduit que les trajectoires d'un champ X homogène de degré $d\,(X) > 1$ sont plus rapides ou plus lentes aux points $\lambda\, x_0$ suivant que $\lambda > 1$ ou $\lambda < 1$. Plus précisément, si $p\,(t)$ est le point $X_t\,(x_0)$ atteint à l'instant t, le point $q\left(\frac{t}{\lambda^{m-1}}\right) = X_{\frac{t}{\lambda^{m-1}}}\,(\lambda\, x_0)$ est atteint au temps $\frac{t}{\lambda^{m-1}}$ strictement inférieur à t si $\lambda > 1$.

On conclut que les trajectoires de X issues des points $\lambda\, x_0$ $(\lambda > 1)$ sont plus rapides que la trajectoire de X issue de x_0.

Si $\lambda < 1$, c'est le contraire.



0.2.3. Proposition

Considérons la F.C.V quadratique $\mathcal{S}(X, b)$ sur $\mathbb{R}^2$ et un point x_o de Γ, alors : $\mathcal{S}(X, b)$ L.C.T en x_o entraîne que $\mathcal{S}(X, b)$ L.C.T en tout point λx_o ($\lambda > o$).

Preuve :

Supposons que $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T en x_o ; alors $\exists \varepsilon > o$ tel que $\forall t \in]o, \varepsilon[$:

$$X_t(x_o) \in \operatorname{int} \mathcal{A}(t, x_o).$$

Considérons un point $y = \lambda x_o$ ($\lambda > o$).

Supposons que $\lambda < 1$. Alors $\lambda t \in]o, \varepsilon[$ et par suite on a :

$$X_t(\lambda x_o) = \lambda X_{\lambda t}(x_o) \in \lambda \operatorname{int} \mathcal{A}(\lambda t, x_o)$$

(où $\lambda \operatorname{int} \mathcal{A}(\lambda t, x_o)$ est l'image de $\operatorname{int} \mathcal{A}(\lambda t, x_o)$ par l'homothétie de rapport λ).

Pour montrer que $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T au point λx_o, il suffit de vérifier que $\lambda \mathcal{A}(\lambda t, x_o) \subset \mathcal{A}(t, \lambda x_o)$.

Soit $x \in \lambda \mathcal{A}(\lambda t, x_o)$, alors il existe un contrôle u tel que $-1 \leqq u \leqq 1$ et $x = \lambda x_u(t, x_o)$.

Considérons le contrôle $v = \lambda^2 u$; d'après la proposition 0.2.1. on a alors : $x = x_v(t, \lambda x_o)$.

$\lambda < 1$ entraine que $v \in [-1, 1]$, d'où $x \in \mathcal{A}(t, \lambda x_o)$. C.Q.F.D.
supposons que $\lambda > 1$.

D'après $(R\ H)_2$ mentionné dans le chapitre o, $\mathcal{S}(X, b)$ L.C.T en x_o entraîne qu'il existe $\varepsilon > o$ tel que $\forall t \in]o, \varepsilon[$, l'application

$$f_t^{x_o} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(S_1, S_2) \longrightarrow b\, S_1 + \; [X, b\,]_{S_2} \; X_t \; (x_0)$$

est bijective d'un voisinage $V_t^{x_0}$ de (o, o) dans $\mathbb{R}^2$.

On peut prendre $V_t^{x_0}$ de la forme :

$$V_t^{x_0} = \left]-\varepsilon_1, \varepsilon_1\right[\; X \; \left]-\varepsilon_2, \varepsilon_2\right[$$

D'autre part : $[X, b]$ est un champ linéaire qu'on notera par :

$$[X, b\,] = C \;, \quad C \in \mathcal{L}_2 \;(\mathbb{R})$$

Il s'ensuit que l'expression de $f_t^{x_0}(\cdot\,,\cdot)$ devient :

$$f_t^{x_0}(S_1, S_2) = b\, S_1 + \; e^{S_2 C} \; X_t^{(x_0)} \,.$$

Considérons l'application $f_t^{\lambda x_0}(\cdot\,,\cdot)$:

$$\begin{aligned} f_t^{\lambda x_0}(S_1, S_2) &= b\, S_1 + \lambda\, e^{S_2 C} \; X_{\lambda t}(x_0) \\ &= \lambda\left[\frac{b}{\lambda}\, S_1 + e^{S_2 C} \; X_{\lambda t}\; (x_0)\,\right] \\ &= \lambda\, f_{\lambda t}^{x_0}\left(\frac{S_1}{\lambda}\,,\, S_2\,\right) \end{aligned}$$

Puisque $\lambda > 1$, alors $\forall t \in \left]0, \varepsilon/\lambda\right[$, $\exists$ un voisinage $V_{\lambda t}$ de (o,o) de la forme $V_{\lambda t} = \left]-\varepsilon_2, \varepsilon_2\right[\; X \; \left]-\varepsilon_3, \varepsilon_3\right[$ sur lequel l'application :

$$(S_1, S_2) \longrightarrow f_{\lambda t}^{x_0}\;(S_1, S_2)$$

est bijective, par suite $f_t^{\lambda x_0}(\cdot\,,\cdot)$ est bijective sur $V_{\lambda t}$ $\forall\, t \in \left]0, \frac{\varepsilon}{\lambda}\right[$.

Donc $\mathcal{S}(X, b)$ L.C.T. au point λx_0. C.Q.F.D.

0.2.4. Polynômes homogènes

Soit P un polynôme homogène de degré $n \geq 1$ dans $\mathbb{R}^2$ et soit

S l'ensemble des éléments $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P(x) = 0$; alors S est non vide et a l'une des formes suivantes :

a) $S = \{ (0,0) \}$

b) S est une réunion d'au plus n droites passant par l'origine

c) $S = \mathbb{R}^2$

En effet :

soit P un polynôme homogène de degré $n \geq 1$.

$$P(x_1, x_2) = a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} x_2 + \dots a_1 x_1 x_2^{n-1} + a_0 x_2^n$$

. $(0,0) \in S$ donc $S \neq \emptyset$. Soit un point $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_1 \neq 0$.

. Si P est le polynôme nul, $S = \mathbb{R}^2$

. Supposons P non nul.

$$x_1 \neq 0 \ , \quad P(x_1, x_2) = x_1^n \left[a_n + a_{n-1} \left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \dots + a_1 \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{n-1} + a_0 \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n \right].$$

Posons $X = \dfrac{x_2}{x_1}$, $P(x_1, x_2) = 0 \Longleftrightarrow a_n + a_{n-1} X + \dots + a_1 X^{n-1} + a_0 X = 0$

En posant :

$Q = a_n + a_{n-1} X + .. + a_1 X^{n-1} + a_0 X$, Q peut s'écrire

$$Q = a_0 \left[(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n) \right]$$

où α_i sont les racines complexes de Q.

soit $I = \{ i \in \{1, ..n\} \ \alpha_i \text{ réel} \}$

si $I = \emptyset$ (ce qui peut être le cas lorsque n est pair) alors $S = \{ (0,0) \}$

si $I \neq \emptyset$. Soit $i \in I$, alors $X = \alpha_i$ est une solution réelle de $Q = 0$;
Par suite $(\lambda x_1, \lambda \alpha_i x_1) \in S, \forall \lambda \in \mathbb{R}$; donc la droite passant par l'origine et ayant $(1, \alpha_i)$ comme vecteur directeur est solution de $P = 0$.
Soit $k = \text{Card } I$, $I = \{ i_1, i_2, \dots i_k \}$, $1 \leq i_j \leq n$; S est donc la réunion des k

droites : $D_1(1, \alpha_{i_1})$, ... $D_k(1, \alpha_{i_k})$ de vecteurs directeurs respectivement : $(1, \alpha_{i_1})$, ..., $(1, \alpha_{i_k})$. C.Q.F.D.

Dans le cas où n est impair, on sait que Q a au moins une racine réelle donc S contient au moins une droite.

0.2.5. *Remarques*

Si Q change de signe en passant d'une racine α_{i_k} à une racine α_{i_l} ($l \neq k$), P change de signe dans $\mathbb{R}^2$ en passant d'une droite $D_k(1, \alpha_{i_k})$ à une droite $D_l(1, \alpha_{i_l})$.

Si $\alpha_{i_1}, \ldots \alpha_{i_k}$ sont les racines de Q = 0 telles que : $\alpha_{i_1} < \alpha_{i_2} < \ldots < \alpha_{i_k}$ et Q change de signe comme l'indique par exemple la figure 0.1. Alors P change de signe comme l'indique la figure 0.2

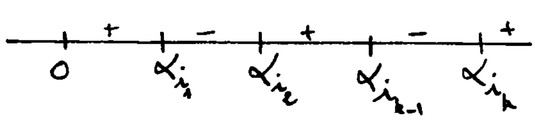


figure 0.1

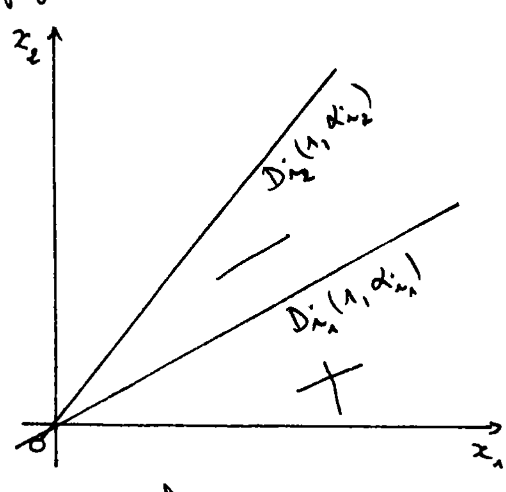


figure 0.2

0.2.6. *Conséquences et Notations*

Supposons que d (X) = m, d (Y) = n, alors les applications

$x \longrightarrow \det(Y(x), X(x))$

$x \longrightarrow \det(Y(x), [X, Y](x))$

sont des polynômes homogènes de degré respectivement : m + n, m + 2 n - 1.

Supposons que Γ^{C} et Δ sont réunions de droites ; alors on écrira :

$$\Gamma^{C} = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i \qquad 1 \leqq k \leqq m + n$$

$$\Delta = \bigcup_{j=1}^{k'} \Delta j \qquad 1 \leqq k' \leqq m + 2n - 1$$

Dans le cas de F.C.V $\mathcal{S}(X, Y)$ non quadratiques, on désignera par :

W_i : vecteur directeur de Γ_i

V_j : vecteur directeur de Δ_j

Le cas d'une F.C.V quadratique ; les notations seront données au chapitre I.

CHAPITRE I : L.C.T DE LA FAMILLE $\{X + ub, -1 \leq u \leq 1\}$ DANS LE PLAN

L'objet de ce chapitre est d'établir pour une F.C.V. $\{X + ub, -1 \leq u \leq 1\}$ des critères algébriques donnant la L.C.T en un point de $\mathbb{R}^2$. Le critère de HERMES $(RH)_2$ (chapitre 0) possède un grand intérêt pour la compréhension de la géométrie de la L.C.T dans $\mathbb{R}^2$. Toutefois sa mise en oeuvre possède des difficultés pratiques. En effet, la principale difficulté vient du fait que dans l'expression de l'application : $(S_1, S_2) \longrightarrow f_t^X (S_1, S_2)$ figure $X_t(x)$, qui en général n'est pas connu explicitement. On peut contourner cette difficulté si l'on connaît $X_t(x)$, ou bien une intégrale première de X.

Dans un premier temps, on traitera des cas particuliers de F.C.V $\{X + ub, -1 \leq u \leq 1\}$ quadratiques, ce qui va nous permettre de généraliser les résultats obtenus à toute F.C.V quadratique.

Dans le premier paragraphe, on étudiera la L.C.T de la F.C.V quadratique $\{X + ub, -1 \leq u \leq 1\}$ en un point x quelconque de $\mathbb{R}^2$.

Le deuxième paragraphe sera consacré à l'étude de stabilité par de petites perturbations et de générecité pour la même famille.

Le troisième paragraphe traitera la L.C.T de la F.C.V cubique $\{X + ub, -1 \leq u \leq 1\}$ (X champ homogène de degré trois) en un point x de $\mathbb{R}^2$ tel que $X(x) \neq 0$ et brièvement la L.C.T de la F.C.V $\{X + ub, -1 \leq u \leq 1\}$ où X champ homogène de degré $n \geq 3$ en un point singulier de X.

I.1 Etude de la L.C.T de la famille quadratique $\{X + ub, -1 \leq u \leq 1\}$ en un point x quelconque de $\mathbb{R}^2$

L'objet de ce paragraphe est de donner une condition nécessaire et suffisante de la L.C.T de la F.C.V quadratique $\{ X + ub, - 1 \leq u \leq 1\}$ qu'on résumera dans (I.2.3.) en un algorithme permettant de déterminer s'il y a L.C.T ou non en un point x de $\mathbb{R}^2$.

On va d'abord commencer par traiter quelques exemples heuristiques.

Exemple 1

Considérons la F.C.V quadratique $\mathcal{S}(X, b)$ définie par :

$X (X_1, X_2) = (a\, x_1^2 + c\, x_2^2 , a'\, x_1^2 + c'\, x_2^2)$

$b = (b_1, b_2)$

Supposons que :

$$ac' = a'c \qquad (1.2.)$$

$$ab_1 + c'\, b_2 = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \qquad (1.3.)$$

En faisant l'hypothèse suivante : Δ est une droite passant par l'origine, on a le résultat suivant :

si l'on note V un vecteur directeur de Δ, une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{S}(X, b)$ soit L.C.T en un point $x_0 \in \Delta \cap \Gamma$ est : V et $X (x_0)$ indépendants.

Preuve :

Les relations (1.2.), (1.3.) entraînent respectivement

$\forall x \in \mathbb{R}^2 \ : a \ X_2 (x) = a'\, X_1 (x)$

$C^2 = \lambda C \quad (C = [X, b])$

Il s'ensuit que :

$\forall\, x \in \mathbb{R}^2, \exists\, \varepsilon > o$, une fonction $\Theta :]o, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ non nulle telle que :

$$\forall\, t \in]o,\varepsilon[\,,\; X_t(x) = x + \Theta(t)\, u \quad \text{avec} \quad u = (a, a')$$
$$\forall S \in \mathbb{R} \;;\; e^{SC} = I + \frac{I}{\lambda}(e^{\lambda S} - I)\, C$$

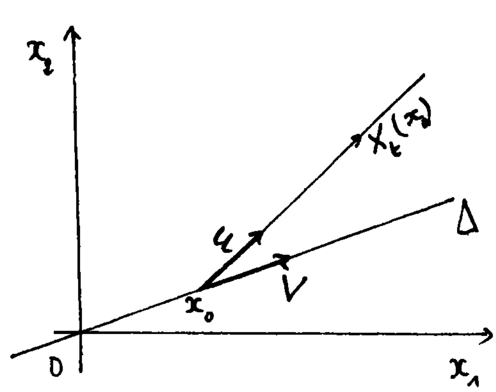
En effet, la relation $a\, X_2(x) = a'\, X_I(x)$ entraîne que les trajectoires de X sont des droites de vecteur directeur u. Soit $X_t(x_0)$ la solution de l'équation $\dot{x} = X(x)$ prenant la valeur $x_I^o = (x_I^o, x_2^o)$ en t = o, alors : $a\,(x_2(t) - x_2^o) = a'\,(x_I(t) - x_I^o)$, par suite on a :

$$\begin{bmatrix} x_I(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_I^o \\ x_2^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_I(t) - x_I^o \\ x_2(t) - x_2^o \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_I^o \\ x_2^o \end{bmatrix} + \frac{x_I(t) - x_I^o}{a} \begin{bmatrix} a \\ a' \end{bmatrix}$$

En posant $\Theta(t) = \dfrac{x_I(t) - x_I^o}{a}$, on obtient : $X_t(x_0) = x_0 + \Theta(t)\, u$

Soit $x_0 \in \Delta \cap \Gamma$. Après tout calcul fait, l'application $f_t^x(\cdot,\cdot)$ est injective si et seulement si $\det(b, Cx_0 + \Theta(t)\; C\; u) \neq o$. Or $\det(b, Cx_0) = o$ $(x_0 \in \Delta)$, donc $\det(b, Cx_0 + \Theta(t)\; C\, u) = \Theta(t) \det(b, C\, u)$, comme $\Theta(t)$ est non nulle sur $]o, \varepsilon[$ alors $\det(b, C\, u) \neq o$ si et seulement si $u \notin \Delta$, ce qui est équivalent à dire que V et $X(x_0)$ sont indépendants C.Q.F.D.



Exemple 2

$$X(x_1, x_2) = (x_1^2\ , x_1^2 + x_1\ x_2)$$

$$b = (b_1, b_2)$$

On vérifie facilement que

$$X_t(x_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{x_1^0}{1 - t\ x_1^0} \\ \\ \dfrac{1}{1 - t\ x_1^0} \quad (x_2^0 - x_1^0 \operatorname{Log}(1 - t\ x_1^0)) \end{bmatrix} \quad \text{pour } t < \frac{1}{x_1^0}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2\ b_1 & 0 \\ \\ 2\ b_1 + b_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

Pour calculer e^{tC}, on peut réduire C à la forme de JORDAN, mais ceci risque de compliquer l'expression de X.

Prenons $b_2 = 0$, alors $C^2 = 4\ b_1^2\ C$

soit $x_0 \in \Delta \cap \Gamma$, pour t assez petit l'application $f_t^X(\cdot\ ,\cdot)$ est injective et seulement si det $(b, C\mathcal{X}_t(x_0)) \neq 0$, ce qui est équivalent à dire que : X (x) et V indépendants.

Exemple 3

$$X(x_1, x_2) = (a\ x_1^2 + b\ x_2^2, -2a\ x_1\ x_2)$$

$$b = (b_1, b_2)$$

Dans cet exemple, on ne connaît pas X_t (x), mais on connaît une intégrale première de X qui est : $y^3 + \frac{3a}{b} y x^2 + C = o$. On remarque que c'est un polynôme du 3e degré. Donc si on sait expliciter y (t) en fonction de x (t), on écartera la difficulté de X_t (x).

Remarquons que dans les exemples 1) et 2), la condition : X (x) et V indépendant est une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{S}$(X, b) soit L.C.T en $x \in \Delta \cap \Gamma$. On va montrer dans le premier paragraphe qu'elle est vraie pour toute F.C.V quadratique.

I.1.1. Etude de la L.C.T en un point x tel que X (x)

Supposons que $\Delta \neq \mathbb{R}^2$, alors Δ est une droite.

Ecrivons Γ^C sous la forme

$$\Gamma^C = D_I \cup D_2$$

(quand D_I et D_2 existent, voir 0.1.1. et 0.2.6.)

Désignons par :

V : vecteur directeur de Δ

V_I : vecteur directeur de D_I

V_2 : vecteur directeur de D_2

I.1.1.1. Théorème

Soit x un point de $\mathbb{R}^2$ tel que X (x) $\neq$ o, alors

1) si $x \in \Gamma - \Delta$, $\mathcal{S}$(X , b) est L.C.T en x.

2) si $x \in \Delta$; une condition nécessaire est suffisante pour que $\mathcal{S}(X, b)$ soit L.C.T en x est : X (x) et V indépendants.

3) si $x \in \Gamma^c$, $\exists\, i \in \{1, 2\}$ tel que $x \in D_i$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{S}(X, b)$ soit L.C.T en x est : b et V_i indépendants

Preuve :

On va d'abord énoncer trois lemmes qui nous seront utiles dans la démonstration.

I.1.1.2. Lemme

$$\forall\, t > 0,\ \forall\, \tau > 0, \text{ on a } : \mathcal{A}(t, X_\tau(x)) = \mathcal{A}(t + \tau, x).$$

I.1.1.3. Lemme

La F.C.V$_I$ $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T en un point $x \in \Gamma$ si et seulement si $\dim \mathcal{G}^I_{e.v.}(x) = 2$. ($\mathcal{G}^I_{e.v.}(x)$ étant l'espace vectoriel engendré par les vecteurs Z (x) tel que $Z \in \mathcal{G}$).

Preuve :

Rappelons que les ensembles $\mathcal{G}^k$ sont définis par :

$$\mathcal{G}^k = \{ b, ad^k\, b\, X, ad\, X \,.\, ad^k\, b\, X, \dots\, ad^n\, X \,.\, ad^k\, b\, X, \dots \}$$

Par un calcul facile on vérifie que $ad^3\, b\, X = 0$, il s'ensuit que $\forall\, k \geq 3$, $\mathcal{G}^k = \{ b \}$. Dans ce cas $(R\ H)_I$ se réduit à :

$$\mathcal{S}(X, b) \text{ L.C.T en } x \in \Gamma \Longleftrightarrow \dim \mathcal{G}^I_{e.v.}(x) = 2.$$

I.1.1.4. Lemme

Soit $x \in \Delta$ tel que la trajectoire de X issue de x est contenue dans Δ, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, les vecteurs b et $(ad^k X \, . \, a\, d\, b\, X)\,(X_t\,(x)\,)$ sont colinéaires.

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\forall\, t \in [\ 0, \varepsilon\ [$, $X_t\,(x)$ est défini. On va montrer par récurrence que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, b et $(ad^k X \, . \, a\, d\, b\, X)\, X_t\,(x)$ sont colinéaires.

$X_t\,(x) \in \Delta$ entraîne par définition que les vecteurs b et $(a\, d\, b\, X)\, X_t\,(x)$ sont colinéaires donc la propriété est vraie pour $k = 0$;

Supposons l'hypothèse de récurrence suivante :

$\forall\, t \in [\ 0, \varepsilon\ [$: b et $(ad^k X.\, a\, d\, b\, X)\, X_t\,(x)$ sont colinéaires. (H.R

$$
\begin{aligned}
(ad^{k+1} X \, . \, a\, d\, b.\, X)\, X_t\,(x) &= [X,\, ad^k X.adbX \quad X_t\,(x)\ ] \\
&= D\, X\, (X_t\,(x)).\, (ad^k X.\, adbX)\, X_t\,(x) - \\
&\quad D\, (ad^k X.\, adbX)\, X_t\,(x).\, X\, X_t\,(x) \\
&= (1) - (2)
\end{aligned}
$$

Montrons que (1) et (2) sont colinéaires à b. D'après l'H.R., $\exists \lambda_k^t \in \mathbb{R}$ tel que

$$(ad^k X \, . \, adbX)\, X_t\,(x) = \lambda_k^t\ b$$

$$
\begin{aligned}
\text{Donc } D\, X\, (X_t\,(x)).\, (ad^k X.\, adbX)\, X_t\,(x) &= \lambda_k^t\ D\, X\, (X_t\,(x)\,)\, .\, b \\
&= \lambda_k^t\ \ [X,\, b\,]\, X_t\,(x)
\end{aligned}
$$

Par conséquent (1) est colinéaire à b.

Pour montrer que (2) est colinéaire à b, considérons la fonction h :

$h(t) = (ad^k X . adbX) X_t (x) / b^{\perp}$

où $b^{\perp}$ est l'orthogonal de b.

/ : produit scolaire dans $\mathbb{R}^2$.

D'après l'H.R. on a : $h(t) = 0$, $\forall t \in [0,\varepsilon[$; par suite $h'(t) = 0$;

Or :

$h'(t) = D(ad^k X. adbX) X_t (x) . X(X_t (x)) / b^{\perp} = 0$

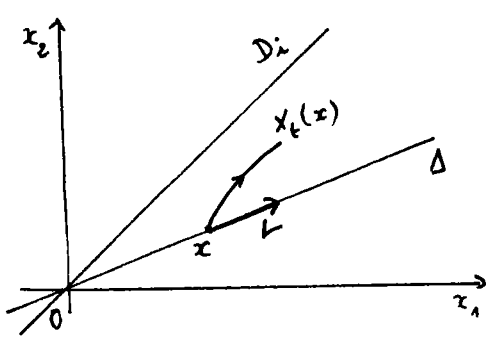
Donc $\forall t \in [0, \varepsilon[$, (2) est colinéaire à b, par conséquent $(ad^{k+1} X. adbX) X_t (x)$ et b sont colinéaires. On conclut que le long de la trajectoire de X, dim $\mathcal{G}^{1}_{e.v}$ $(X_t (x)) = 1$.

<u>Démonstration du théorème</u>

1) si $x \in \Gamma - \Delta$, le test linéaire s'applique et par suite $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T. en x.

2) soit $x \in \Delta \cap \Gamma$

Supposons que X (x) est indépendant avec V , alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que



$\forall \tau \in]0, \varepsilon[$, $X_\tau (x) \in \Gamma - \Delta$, par suite $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T en $X_\tau (x)$.

Donc $\forall \tau \in]0, \varepsilon[$, $\forall t > 0$ on a :

$X_t(X_\tau(x)) \in \text{int}\,\mathcal{A}(t, X_\tau(x))$

D'où : $X_{t+\tau}(x) \in \text{int}\,\mathcal{A}(t+\tau, x)$ (Lemme I.1.1.2.)

On conclut alors que : $\forall T > 0$: $X_T(x)$ soit défini on a :

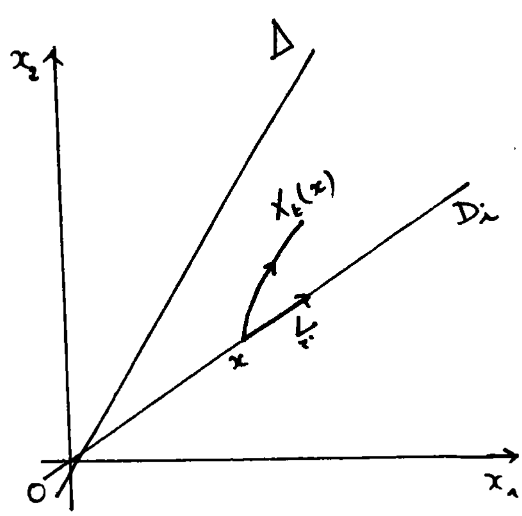
$X_T(x) \in \text{int}\,\mathcal{A}(T, x)$ C.Q.F.D.

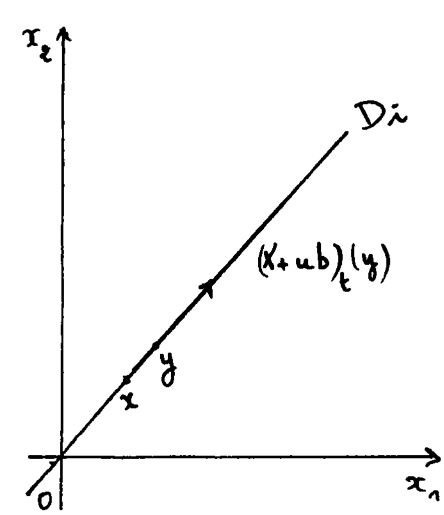
Réciproquement =

Supposons que X (x) et V sont colinéaires, alors $\forall y \in \Delta$ les vecteurs X (y) et V sont colinéaires (homogénéité du champ X) ; par suite la trajectoire $t \longrightarrow X_t(x)$ est contenue dans Δ, ce qui entraîne d'après le lemme I.1.1.3. que les vecteurs b et $(ad^k X \,.\, adbX)\, X_t(x)$ sont colinéaires, $\forall k \in \mathbb{N}$. En particulier pour t = 0. On obtient : $\forall k \in \mathbb{N}$, b et $(ad^k X \,.\, adbX)(x)$ sont colinéaires ; ceci se traduit par : dim $\mathcal{G}^I_{e.v}(x) = 1$. Il en résulte que $\mathcal{S}(X, b)$ n'est pas L.C.T. en x (Lemme I.1.1.3).

3) Soit : $x \in \Gamma^c$, alors $\exists\, i \in \{1, 2\}$ tels que $x \in D_i$.

Supposons que les vecteurs b et V_i sont indépendants. Puisque X (x) $\neq$ 0 et b colinéaire à X (x), les vecteurs X (x) et V_i sont aussi indépendants ; d'où l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que :





$\forall \tau \in]o, \varepsilon[$, $X_\tau(x) \in \Gamma - \Delta$. Par suite $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T. en $X_\tau(x)$, avec le même raisonnement que le 2) du théorème, on aboutit à :

$\mathcal{S}(X, b)$ L.C.T en x.

Réciproquement :

si les vecteurs b et V_i sont colinéaires, alors X (x) et V_i le sont aussi, par suite $\forall\, y \in \Delta$, X (y) est colinéaire à V_i. Soient $u \in [-1,1]$, X^u le champ défini par $X^u(y) = X(y) + ub$; d'après ce qui précède, le champ X^u est colinéaire au champ constant b le long de la droite D_i. Par conséquent, $\forall u \in [-1,1]$, $\forall y \in D_i$, la trajectoire de X^u issue de y est contenue dans D_i. Ceci entraîne que toutes les trajectoires issues de D_i sont contenues dans D_i. Il en résulte que $\forall\, t > o$, int $\mathcal{A}(t, x) = \emptyset$. Donc $\mathcal{S}(X, b)$ n'est pas L.C.T en x. Ce qui achève la démonstration du théorème.

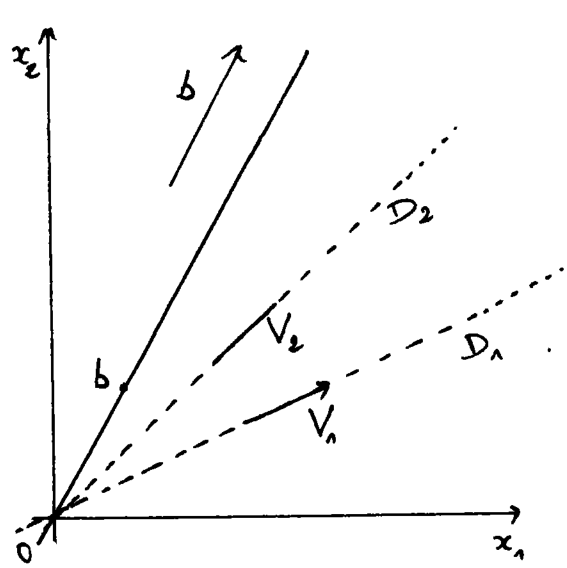
I.1.1.5. Corollaire

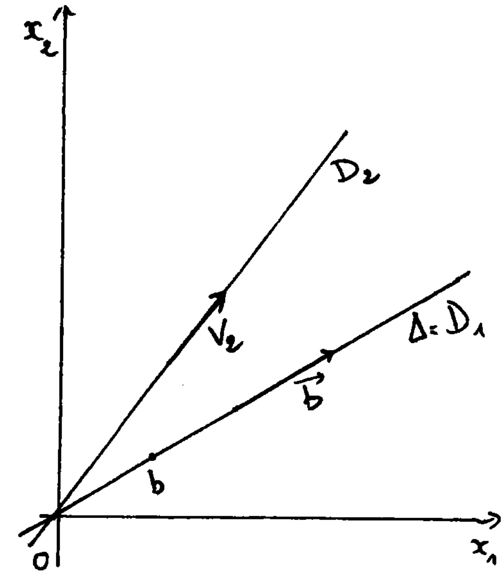
Une condition suffisante pour que $\mathcal{S}(X, b)$ soit L.C.T en tout point $x \in \Gamma^c$ vérifiant $X(x) \neq o$ est : rg (b, Cb) = 2.

Preuve :

Il est facile de vérifier que Cb = 2 X (b).

rg (b, Cb) = 2 entraîne que b et X (b) sont indépendants, il en résulte que b considéré comme un point de $\mathbb{R}^2$ n'appartient pas à Γ^c. Par conséquent : det $(b, V_I) \neq o$ et det $(b, V) \neq o$. D'après le théorème précédent $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T en tout point $x \in \Gamma^c$ vérifiant $X(x) \neq o$.





I.1.1.6. Remarque

Si rg (b, Cb) = 1, alors $b \in \Gamma^c \cap \Delta$ et dans ce cas Δ coincide avec l'une des droites D_i.

Si $\Delta = D_1$, il est clair que $\mathcal{S}(X, b)$ n'est L.C.T en aucun point de D_1 et est L.C.T sur D_2 si et seulement si det (b, V_2) $\neq$ o.

I.1.1.7. Corollaire

$$\det (X (V\ ), V) \neq o \Longleftrightarrow \mathcal{S}(X, b) \text{ est L.C.T sur } \Delta - \{(o,o)\}$$

$$\det (b, V_i) \neq o \Longleftrightarrow \mathcal{S}(X, b) \text{ est L.C.T sur } D_i - \{(o,o)\}$$

I.1.2. Etude de la L.C.T en un point x tel que X (x) = 0

Avant d'énoncer un résultat sur la L.C.T de $\mathcal{S}(X, b)$, d (X) = 2 en un point singulier de X ; commençons par rappeler quelques résultats dûs à SUSSMAN sur la S.T.L.C

Soient deux champs de vecteurs analytiques f_O et f_I sur une variété M. Désignons par Lie (f_O, f_I) l'abrègé de Lie engendrée par f_O et f_I.

Soit le système différentiel :

$$\dot{x} = f_O(x) + u f_I(x) \qquad |u(t)| \leq A$$

où $x \in M$, $u(\cdot)$ appartient à l'ensemble des fonctions constantes par moceaux.

Considérons la F.C.V. $\mathcal{F} = \{ f_O + u f_I, -A \leq u \leq A \}$. On dit que $\mathcal{F}$ est S.T.L.C en un point $x \in M$ si : $\forall t > 0$, $x \in \text{int}\mathcal{A}(t, x)$.

On dit que $\mathcal{F}$ vérifie les conditions HLCC en x si :

HLCC 1 : x est un point d'équilibre régulier, c'est-à-dire, $\exists \bar{u}$: $|\bar{u}| < A$ et $f_O(x) + \bar{u} f_I(x) = 0$

HLCC 2 : dim Lie $(f_O, f_I)(x)$ = dim M.

HLCC3 : $\mathcal{S}^m (f_O + \bar{u} f_I, f_I)(x) = \mathcal{S}^{m+I} (f_O + \bar{u} f_I, f_I)(x)$ $\forall m$ impair où $\mathcal{S}^m (f, g)$ est défini par : $\mathcal{S}^m (f, g) = \{ g, ad^m g\, f, \dots\, ad^n f . ad^m g\, f, \dots \}$

<u>Théorème dû à SUSSMAN</u> :

1) Si $\mathcal{F}$ vérifie les conditions HLCC en x alors $\mathcal{F}$ est STLC en x.

2) HLCC 2 est une condition nécessaire de STLC de $\mathcal{F}$ en un point.

3) soit x un point d'équilibre régulier, alors si :

$$[f_I, [f_O, f_I]](x) \notin \mathcal{S}^I (f_O + \bar{u} f_I, f_I(x)$$

$\mathcal{F}$ n'est pas STLC en x.

Revenons à notre étude de L.C.T en un point singulier de X qui est un cas particulier de STLC $(\bar{u} = 0)$.

I.1.2.1. Proposition

Soit $x \in \mathbb{R}^2$: $X(x) = 0$, alors $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T en x si et seulement si $x \notin \Delta$.

Preuve

$X(x) = 0$ entraîne que $\forall\, t > 0$, $X_t(x) = x$. Supposons que $x \in \Delta$, d'après le lemme I.1.1.4. $\mathcal{J}^1_{e.v}(x)$ est la droite vectorielle engendrée par b. On va montrer dans les deux cas suivants que b appartient ou n'appartient pas à Δ, $\mathcal{S}(X, b)$ n'est pas L.C.T en x.

a) si $b \in \Delta$, alors $X(b) = 0$; par conséquent $\forall\, u \in [-1,1]$, le champ X^u défini précédemment vérifie : $\forall\, y \in \Delta$, $X^u(y)$ est colinéaire au vecteur b le long de la droite Δ, ce qui entraîne que toutes les trajectoires de $\mathcal{S}(X, b)$ issues de Δ sont contenues dans Δ, donc $\forall\, t > 0$, $\operatorname{int} \mathcal{A}(t, x) = \emptyset$ C.Q.F.D.

b) si $b \notin \Delta$, b et Cb sont indépendants ; comme $Cb = [b,[b, X]]$, il s'ensuit que $[b, [b, X]] \notin \mathcal{J}^1_{e.v}(X, b)(x)$, par conséquent $\mathcal{S}(X, b)$ n'est pas L.C.T en x (Théorème de SUSSMAN).

Réciproquement :

si $x \notin \Delta$, alors $\dim \mathcal{J}^1_{e.v}(X, b)(x) = 2$, ($\mathcal{J}^k_{e.v}(X, b)(x) = \mathcal{J}^k_{e.v}(x)$).

a) $b \in \Delta$, $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$: $Cb = \lambda b$. Calculons le crochet $[X, ad^2 b\, X](x)$

$$[X, ad^2 b\, X](x) = DX(x).\, Cb$$
$$= \lambda [X, b](x)$$

Il résulte de cette égalité que b et $[X, ad^2 b\, X](x)$ sont indépendants donc $\dim \mathcal{J}^2_{e.v}(X, b)(x) = 2$. Il est facile de voir que $\mathcal{S}(X, b)$ vérifie les trois conditions HLCC donc $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T en x.

c) si $b \notin \Delta$, alors b et Cb sont indépendants, il s'ensuit que dim $\mathcal{G}^{1}_{e.v}$ (X, b) (x) = dim $\mathcal{G}^{2}_{e.v}$ (X, b) (x) donc $\mathcal{S}$(X, b) est L.C.T en x. Ce qui termine la démonstration de la proposition.

Dans tout ce qui précède, notre étude supposait que Δ est une droite. Etudions le cas où $\Delta = \mathbb{R}^2$.

I.1.2.2. Proposition

Une condition suffisante (mais non nécessaire) pour que $\mathcal{S}$(X, b) ne soit L.C.T en aucun point de $\mathbb{R}^2$ est : $\Delta = \mathbb{R}^2$.

Preuve

Supposons que $\Delta = \mathbb{R}^2$, alors toutes les trajectoires de X sont contenues dans Δ, par suite les vecteurs b et $(ad^k X \,.\, a\,d\,b\,X)(x)$ sont colinéaires pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ et tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier les vecteurs (a d b X) (b) et b sont colinéaires ; or (a d b X) (b) = Cb = $[C, b] = [b, [b, X]] = ad^2\, b\, X$.

On conclut d'une part que $\forall\, x \in \mathbb{R}^2$: $\mathcal{S}$(X, b) n'est pas L.C.T en x (dim $\mathcal{G}^{1}_{e.v}$ (x) = 1), d'autre part $\forall\, x \in \mathbb{R}^2, \forall\, t > 0$; $\mathcal{A}(t, x)$ est contenue dans la droite passant par x et ayant pour vecteur directeur b. En effet dim Lie $\mathcal{G}^{1}$ (x) = 1 et plus précisément Lie $\mathcal{G}^{1}$ (x) = droite vectorielle engendrée par b. Donc $\forall\, t > 0$, $\mathcal{A}(t, x)$ est contenu dans la feuille passant par x de Lie $\mathcal{G}^{1}$ qui est la droite vectorielle de vecteur directeur b passant par x.

La condition n'est pas nécessaire, en effet considérons la F.C.V $\mathcal{S}$(X, b) définie par :

$$X(x) = (X_1(x), X_2(x))$$

$$b = (b_1, b_2)$$

telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^2$: $b_2\, X_I\,(x) = b_I\, X_2\,(x)$. En choisissant convenablement les champs X et b, $\Delta \neq \mathbb{R}^2$. Il est clair que les champs X^u et b sont colinéaires, par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\forall\, t > o$ int $\mathcal{A}(t, x) = \emptyset$ donc $\mathcal{S}(X, b)$ n'est L.C.T en aucun point de $\mathbb{R}^2$.

On va maintenant donner un algorithme de la L.C.T de $\mathcal{S}(X, b)$ ~~en~~ sur $\mathbb{R}^2$.

Considérons la F.C.V $\mathcal{S}(X, b)$ où l'on désignera X et b par :

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} b_I \\ b_2 \end{pmatrix}$$

On identifiera dans la suite le champ X à un élément de $\mathbb{R}^6$. Soient les expressions suivantes :

$$A = -\,2\,a'\,b_I^2 + (2a - b')\,b_I\,b_2 + b\,b_2^2$$

$$B = -\,b'\,b_I^2 + (b - 2\,c')\,b_I\,b_2 + 2\,c\,b_2^2$$

$$Q = -\,c\,A^3 + (b - c')\,A^2\,B + (b' - a)\,B^2\,A - a'^3\,B^3$$

$$\delta = (b'^2 - 4\,a'\,c')\,b_I^2 + (4\,a\,c' + 4\,a'\,c - 2\,bb')\,b_I\,b_2 + (b^2 - 4\,a\,c)\,b_2^2$$

$$\beta = -\,b'\,b_I^2 + (b - 2\,c')\,b_I\,b_2 + 2\,c\,b_2^2$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_I &= \beta - b_I\sqrt{\delta} \\ \alpha_2 &= \beta + b_I\sqrt{S} \end{aligned}\right. \qquad \text{si } \delta \geq o$$

$$\alpha = \beta^2 - b_I^2\ \delta$$

Alors :

$$\Delta = [\ (x_I, x_2) \in \mathbb{R}^2 : A\,x_I + B\,x_2 = o\ ]$$

$$Q = \det\,(X\,(V\,),\,V\,)$$

δ est le descriminant de l'équation homogène dans $\mathbb{R}^2$:

det (b, X (x))= o. Si $\delta \geqq o$, les vecteurs V_I et V_2 sont donnés par :

$V_I = (2 (b_I c' - b_2 c), - b_I b' + b_2 b - \sqrt{\delta})$

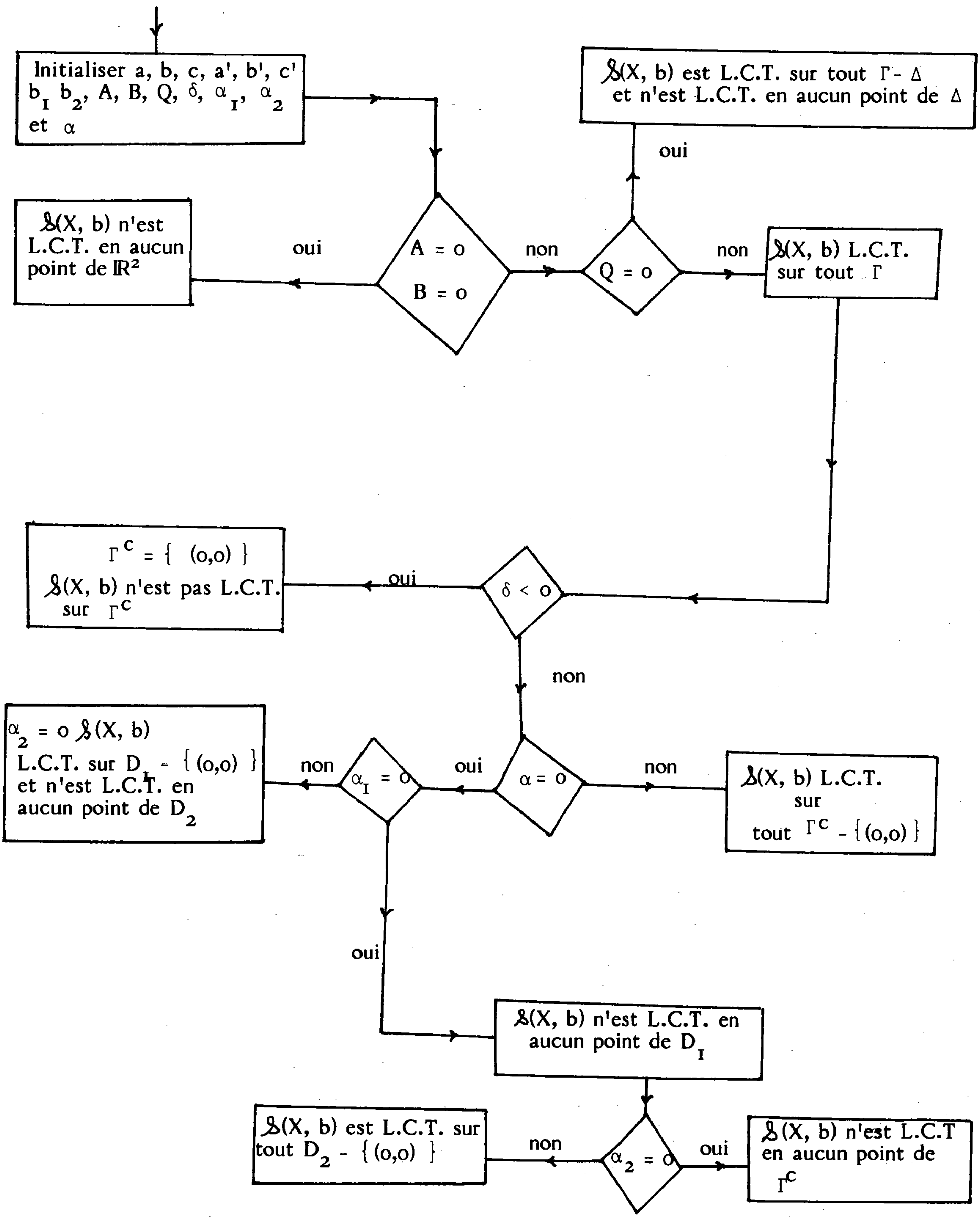
$V_2 = (2 (b_I c' - b_2 c), - b_I b' + b_2 b + \sqrt{\delta})$

$\alpha_I = \det (b, V_I)$

$\alpha_2 = \det (b, V_2)$

$\alpha = \alpha_I \ \alpha_2$

I.1.2.3. Algorithme de la L.C.T. de $\mathcal{S}(X, b)$, $d(X) = 2$



I.1.2.4. Exemples d'application

Exemple 1

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Gamma^C = \{ (0,0) \}$

$\Delta = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0 \} = O x_1$

$Q = 0$

On conclut que $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T sur $\mathbb{R}^2 - O x_1$ seulement.

Exemple 2

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Q = -1$

$\Delta = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0 \}$

$\Gamma^C = \{ (0,0) \}$

$\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T en tout point de $\mathbb{R}^2 - \{ (0,0) \}$

Exemple 3

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Delta = \mathbb{R}^2$, donc $\mathcal{S}(X, b)$ n'est L.C.T en aucun point de $\mathbb{R}^2$

Exemple 4

$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Delta = O x_1$

$\Gamma^C \ \{ (x_1 \ x_2) : \ x_1 = x_2 \} \cup \{ (x_1 , x_2) = x_1 + x_2 = 0 \}$

$Q = 1$, $\alpha = 1$ donc $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T sur $\mathbb{R}^2 - \{ (0,0) \}$

I.2. Propriétés de stabilité et de généricité

Dans ce paragraphe, on va étudier les propriétés de stabilité par de petites perturbations et de généricité de la L.C.T On caractérisera de même les F.C.V $\{ X + ub, -1 \leq u \leq 1 \}$ pour lesquelles la L.C.T est vérifiée sur $\mathbb{R}^2 - \{ (0,0) \}$.

I.2.1. Proposition

Soit l'ensemble $J = \{ (X, b) \in \mathbb{R}^8$ tel que $\Delta(X, b) = \mathbb{R}^2 \}$, alors : J est une sous variété de $\mathbb{R}^8$ de dimension 6.

Preuve

$(X, b) \in J$ est équivalent à : $A = B = 0$ avec :

$$A = 2a' b_1^2 + (b' - 2a) b_1 b_2 - b b_2^2$$

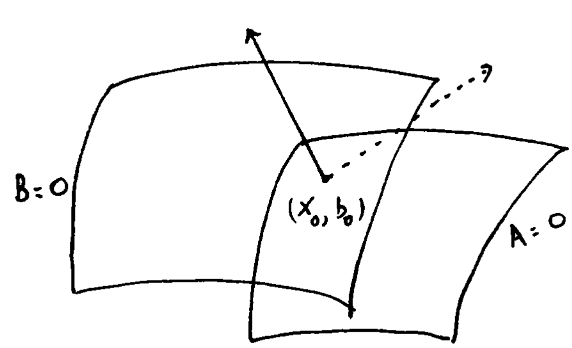
$$B = b' b_1^2 + (2c' - b) b_1 b_2 - 2c b_2^2$$

(voir page 32)

J est l'intersection des deux hyperplans de $\mathbb{R}^8$ définies par $A = B = 0$.
Soit (X_0, b_0) un élément de $\mathbb{R}^8$ tel que :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il est facile de vérifier que $(X_0, b_0) \in J$. Par un calcul simple on vérifie aussi que les vecteurs orthogonaux aux hyperplans $A = 0$ et $B = 0$ au point (X_0, b_0) sont indépendants ; par suite ces deux hyperplans ne coïncident pas. On conclut alors que J est une sous variété de $\mathbb{R}^8$ de dimension 6.



I.2.2. Proposition

Soit $O = \{ (X, b, x) \in \mathbb{R}^{10} : \mathcal{S}(X, b)$ L.C.T. en $x \}$

Alors O est un ouvert de $\mathbb{R}^{10}$.

Preuve

Soit un élément $(X, b, x) \in O$.

1) Supposons que $\det (b, X(x)) \neq 0$, alors :

il existe un voisinage V de (X, b, x) de la forme $V(X) \times V(b) \times V(x)$ tel que :

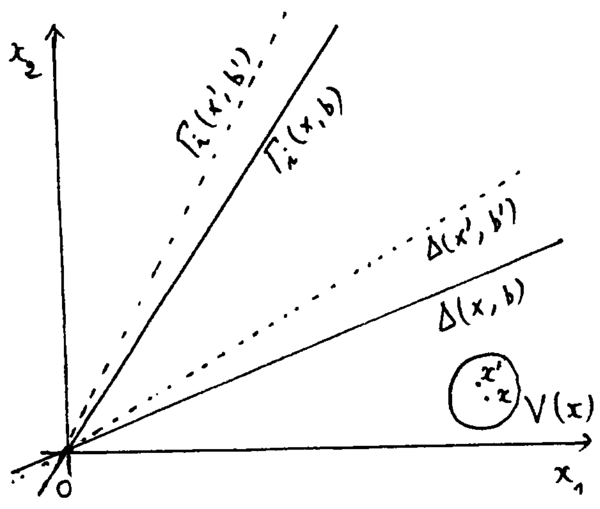
$\forall (X', b', x') \in V : \det (b', X'(x)) \neq 0$.

a) $x \notin \Delta(X, b)$.

Soit $(X', b', x') \in V$. Alors on peut choisir $V(X)$, $V(b)$ et $V(x)$ assez petites pour qu'on ait :

$x' \notin \Delta(X', b')$.

Par suite $\mathcal{S}(X', b')$ est L.C.T en x'



b) $x \in \Delta(X, b)$

$\mathcal{S}(X, b)$ L.C.T en x entraîne que $\det (X(x), V(X, b)) \neq 0$, par suite il existe un voisinage $U = U(X) \times U(b) \times U(x)$ de (X, b, x) tel que :

$$\forall (X', b', x') \in U : \det (X'(x'), V(X', b')) \neq 0$$

En prenant $W = U \cap V$, on vérifie facilement que :

$\forall (X', b', x') \in W \quad \mathcal{S}(X', b')$ L.C.T en x'.

2) Supposons que $\det (b, X(x)) = 0$

$\exists\, i \in \{1, 2\}$ tel que :

$$x \in D_i(X, b)$$

$$\det (V_i(X, b), b) \neq 0$$

d'où l'existence d'un voisinage $O = O(X) \times O(b) \times O(x)$ tel que :

$$\forall (X', b', x') \in O : \det (V_i(X', b'), b') \neq 0.$$

Soit $j \in \{1,2\}$ tel que $\Gamma^c(X, b) = \Gamma_i(X, b) \cup \Gamma_j(X, b)$ (quand $\Gamma_j(X, b)$ existe) alors on peut choisir O assez petit qu'on ait :

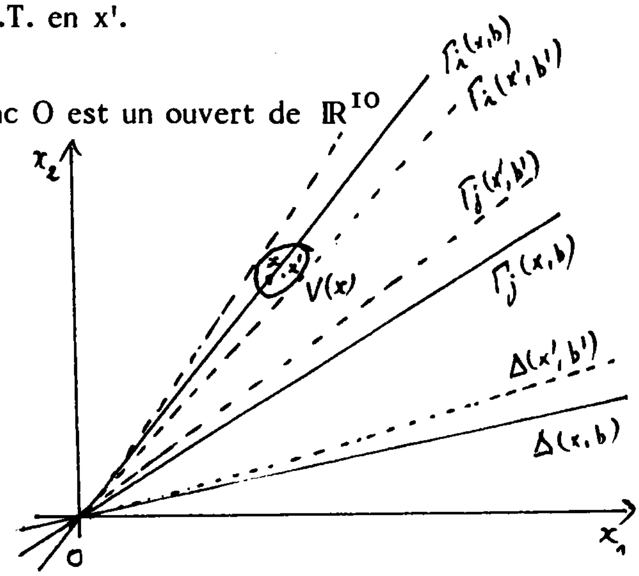
$$\forall (X', b', x') \in O : x' \notin (\Gamma_j(X', b') \cup \Delta(X', b')).$$

Soit $(X', b', x') \in O$.

Si $x' \in \Gamma_i(X', b')$, alors $\mathcal{S}(X', b')$ L.C.T en x'

Si $x' \notin \Gamma_i(X', b')$, alors $x' \in \Gamma(X', b') - \Delta(X', b')$; par suite $\mathcal{S}(X', b')$ L.C.T. en x'.

Donc O est un ouvert de $\mathbb{R}^{10}$



Dans la proposition suivante, on se pose le problème suivant : Etant donné un champ X quadratique sur $\mathbb{R}^2$, existe-t-il toujours un champ constant b tel que la F.C.V $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T en tout point de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Si oui, on va caractériser topologiquement l'ensemble décrit par les champs b.

Soit donc $B(X) = \{b \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{S}(X, b) \text{ L.C.T sur } \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\}$.

Ecrivons X sous la forme :

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

Posons :

$$\Delta(X) = (4a'c + 4ac' - 2bb')^2 - 4(b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c')$$

I.2.3. <u>Proposition</u>

Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}^6$:

$K : \{X \in \mathbb{R}^6 : \Delta(X) < 0\}$, $H = \{X = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ a' & b' & 0 \end{pmatrix}\}$

1) $X \in H \Longrightarrow B(X) = \emptyset$

2) $X \in K - H \Longrightarrow B(X)$ est dense dans $\mathbb{R}^2$

<u>Preuve</u>

Soient Q, α et δ les expressions données à la fin du paragraphe 1

$Q = Q(b_1, b_2)$

$\alpha = \alpha(b_1, b_2)$

$\delta = \delta(b_1, b_2)$

Q, α et δ sont des polynômes homogènes en (b_1, b_2). Posons :

$$S_Q = \{ b \in \mathbb{R}^2 : Q(b) = 0 \}$$

$$S_\alpha = \{ b \in \mathbb{R}^2 : \delta(b) \geqq 0 \text{ et } \alpha(b) = 0 \}$$

Il est facile de voir que $B(X) = (S_Q \cup S_\alpha)^c$

1) Supposons que $X \in H$

$X = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ a' & b' & 0 \end{pmatrix} : (a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$

Par un calcul simple on trouve que :

$\forall b \in \mathbb{R}^2$, $\delta(b) \geqq 0$ et $\alpha(b) = 0$

Par conséquent $S_\alpha = \mathbb{R}^2$, d'où $B(X) = \emptyset$

Si $X = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$, $B(X) = \emptyset$ (même raisonnement)

2) Supposons que $X \in K - H$

on va montrer que :

S_α est $\emptyset$ ou bien une réunion de droites.

S_Q est $(0,0)$ ou bien une réunion de droites.

Dans ce cas $B(X)$ est dense dans $\mathbb{R}^2$.

Supposons que $S_\alpha \neq \emptyset$ et est égal au plan tout entier, alors en particulier

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4c^2 = 0$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4a'c' = 0$$

Contradiction avec le fait que $X \notin H$.

Même chose pour S_Q. Il s'ensuit donc que $B(X)$ est dense dans $\mathbb{R}^2$.

1.2.4. *Exemples d'applications*

Exemple 1

Soit $X \in \mathbb{R}^6$: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

alors :

$\Delta\ (X) = -16 < 0$

$A = b_1 b_2$

$\delta = b_1^2 + 4 b_2^2$, $\beta = - b_1^2 - 2 b_2^2$.

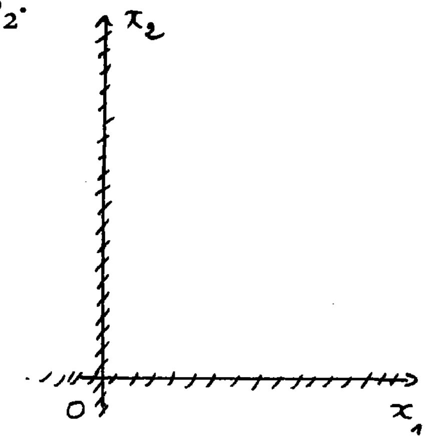
$Q = A^3 = (b_1 b_2)^3$

$\alpha = 4 b_2^3$

On conclut que

$S_Q = O x_1 \cup O x_2$

$S_\alpha = O x_1$



donc $B\ (X) = \{ (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 : b_1 b_2 \neq 0 \}$

Exemple 2 :

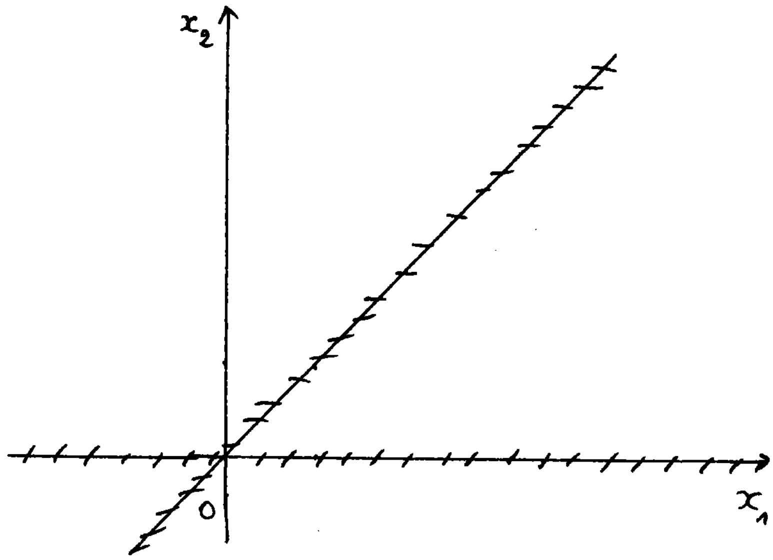
$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Delta\ (X) = -4 < 0$

$Q = - b_2^6$ $S_Q = \{ (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 : b_2 = 0 \} = O x_1$

$\alpha = 4 b_2^3 (b_2 - b_1)$ $S_\alpha = O x_1 \cup \{ (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 : b_2 - b_1 = 0 \}$

donc $B\ (X) = \mathbb{R}^2 - (\{ b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 : b_2 = 0 \} \cup \{ (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 : b_2 - b_1 = 0 \})$.



Exemple 3

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta = (-2\, b_2)^2$$

$$\beta = 2\, b_1\, b_2$$

$$\alpha = \beta^2 - b_1^2\, \delta = 0$$

donc $\mathcal{S}(X, b)$ n'est pas L.C.T sur Γ^c, $\forall\, b \in \mathbb{R}^2$

Par suite B (X) = $\emptyset$

I.3. Cas où X est homogène de degré supérieur à deux :

Dans ce paragraphe, on donnera des conditions nécessaires et suffisantes de la L.C.T de la F.C.V cubique $\{ X + ub, -1 \leqq u \leqq 1 \}$ en un point x tel que X (x) $\neq 0$.

On donnera dans le cas où d (X) > 2 des conditions nécessaires ou des conditions suffisantes de la L.C.T de $\{ X + ub, -1 \leqq u \leqq 1 \}$ en un point x singulier de X.

I.3.1. Etude de la L.C.T. de $\{X + ub, -1 \leq u \leq 1\}$ où $d(X) = 3$ en un point $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $X(x) \neq 0$

X étant homogène de degré 3 entraîne que det (b, $[X, b](x)$) (respectivement det (b, X (x)) est un polynôme homogène de degré 2 (respectivement un polynôme homogène de degré 3).

Rappelons les notations données dans 0.1.1. et 0.2.6.

$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ (quand Δ_1 et Δ_2 existent)

$\Gamma^c = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ (quand Γ_1, Γ_2 et Γ_3 existent)

V_i, vecteur directeur de Δ_i

W_j : vecteur directeur de Γ_j

Remarquons que $ad^4 b\, X = 0$, par suite $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T en un point $x \in \Gamma \cap \Delta$ si et seulement si : dim $\mathcal{G}^1_{e.v}(x) = 2$ ou dim $\mathcal{G}^3_{e.v}(x) = 2$

I.3.1.1. Théorème (supposons que $\Delta \neq \mathbb{R}^2$)

1) si $x \in \Gamma - \Delta$, $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T en x.

2) si $x \in \Gamma \cap \Delta$, alors $\exists\, i \in \{1, 2\}$ tel que $x \in \Delta_i$ et on a alors :

a) si X (x) est indépendant avec V_i, $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T en x.

b) si X (x) est dépendant avec V_i, $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T en x si et seulement si les vecteurs b et X (b) sont indépendants.

3) si $x \in \Gamma^c$, $\exists\, i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $x \in \Gamma_i$ et on a : $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T en x si et seulement si b et W_i sont indépendants.

Preuve

Le principe de la démonstration du 1), 3), a) est exactement le même que dans le théorème I.1.1.1.

Montrons le b) du 2).

Notons d'abord que $ad^3\, b\, X = 6\, X\,(b)$. Supposons que les vecteurs $X\,(x)$ et V_i sont dépendants, alors $\dim \mathcal{G}^1_{e.v}\,(x) = 1$.

Si b et $X\,(b)$ sont indépendants, alors $\dim \mathcal{G}^3_{e.v}\,(x) = 2$, par suite $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T en x.

Réciproquement :

Si b et $X\,(b)$ sont colinéaires, alors $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$: $ad^3\, b\, X = \lambda\, b$, par suite $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $(ad^k\, X \,.\, ad^3\, b\, X)\,(x) = \lambda\, ad^k\, X.\, b$. Il en résulte que $\forall k \in \mathbb{N}$ les vecteurs $(ad^k\, X \,.\, ad^3\, b\, X)\,(x)$ et b sont colinéaires, ce qui entraîne que $\dim \mathcal{G}^3_{e.v}\,(x) = 1$, donc $\mathcal{S}(X, b)$ n'est pas L.C.T en x. Ce qui termine la démonstration du théorème.

I.3.2. *Etude aux points singuliers de X*

I.3.2.1. Proposition

Supposons que $d\,(X) = 3$.

Soit $x \in \Delta$ tel que $X\,(x) = 0$.

Une condition nécessaire pour que $\mathcal{S}(X, b)$ soit en L.C.T en x est que les vecteurs b et $X\,(b)$ soient indépendants.

Preuve

Supposons que b et $X\,(b)$ sont dépendants. On va montrer dans les deux cas suivants que b et $(ad^2\, b\, X)(x)$ sont ou ne sont pas colinéaires, $\mathcal{S}(X, b)$

n'est pas L.C.T en x.

a) b et $(ad^2\, b\, X)(x)$ indépendants.

$x \in \Delta$ et $X(x) = 0$ entraîne que $\mathcal{G}^{I}_{e.v}(X, b)$ est la droite vectorielle engendrée par b ; il s'ensuit que le vecteur $(ad^2\, b\, X)(x) = [\, b, [\, b, X\,]\,](x) \notin \mathcal{G}^{I}_{e.v}(X, b)(x)$, par conséquent $\mathcal{S}(X, b)$ n'est pas L.C.T en x.

b) b et $(ad^2\, b\, X)(x)$ dépendants.

On va montrer dans ce cas que dim Lie $(X, b)(x) = 1$, ce qui entraîne que $\mathcal{S}(X, b)$ n'est pas L.C.T en x. (Théorème de SUSSMAN).

Pour montrer que tous les crochets engendrés par X et b au point x sont colinéaires à b, il suffit de montrer que, $\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2$, $\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$, les vecteurs $[\, Y_i^k\, ,\, Y_j^n\,](x)$ et b sont colinéaires où $Y_i^k(x) = [\, ad^k\, X, ad^i\, b\, X\,](x)$.

$$[Y_i^k, Y_j^n](x) = DY_i^k(x)\, .\, Y_j^n(x) - DY_j^n(x)\, .\, Y_i^k(x).$$

On va montrer que: $\begin{cases} Y_i^n(x) \text{ est colinéaire à b.} & (I.3.2.2.) \\ DY_i^n(x)\, .\, b \text{ est colinéaire à b.} & (I.3.2.3. \end{cases}$

et dans ce cas $[\, Y_i^k, Y_j^n\,](x)$ est colinéaire à b.

Il est évident que I.3.2.2. est vraie pour $i = 1$ ou $i = 3$. Pour $i = 2$ on va montrer par récurrence que $Y_2^n(x)$ est colinéaire à b.

$n = 0$,$(ad^2\, b\, X)(x)$ est colinéaire à b par hypothèse.

Supposons l'hypothèse de récurrence : $(ad^n\, X\, .\, ad^2\, b\, X)(x)$ colinéaire à b. Alors $\exists\, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $Y_2^n(x) = \lambda_n\, b$.

$$\begin{aligned}(ad^{n+1}\, X\, .\, ad^2\, b\, X)(x) &= [\, X, ad^n\, X\, .\, ad^2\, b\, X\,](x) \\ &= DX(x)\, .\, Y_2^n(x) - DY_2^n\underset{\underset{0}{\shortparallel}}{(x)}\, X(x) \\ &= \lambda_n\, [\, X, b\,](x)\end{aligned}$$

Par suite, puisque $x \in \Delta$, alors $(ad^{n+I} X \,.\, ad^2 b\, X)(x)$ est colinéaire à b.

Montrons de même par récurrence que $DY_i^n(x) \,.\, b$ est colinéaire à b . (Prenons i = 1, la démonstration est la même si i = 2 ou 3).

$n = 0,\quad Y_I^0(x) = (a\,d\,b\,X)(x)$

$D\,Y_I^0(x) \,.\, b = D\,(a\,d\,b\,X)(x) \,.\, b = (ad^2 b\,X)(x)$ colinéaire à b.

Supposons que $DY_I^n(x) \,.\, b$ est colinéaire à b, alors $\exists\, \delta_n \in \mathbb{R}$: $DY_I^n(x) \,.\, b = \delta_n\, b$.

$$\begin{aligned} DY_I^{n+I}(x) \,.\, b &= D\,[X, Y_I^n](x) \,.\, b \\ &= D\,[DX(x) \,.\, Y_I^n(x) - DY_I^n(x) \,.\, X(x)] \,.\, b \\ &= [\,\{D\,(DX)(x) \,.\, Y_I^n(x) + D\,X(x) \,.\, DY_I^n(x)\} \\ &\quad - \{D\,(DY_I^n)(x) \,.\, X(x) - DY_I^n(x) \,.\, DX(x)\}\,] \,.\, b \end{aligned}$$

$(D\,(DX))(x) \,.\, Y_I^n(x) \,.\, b = \lambda_I^n\,[(D\,(DX))(x) \,.\, b\,] \,.\, b = \lambda_I^n\,(ad^2 b\,X)(x)$

$D\,X(x) \,.\, DY_I^n(x) \,.\, b = D\,X(x) \,.\, \delta_I^n\, b = \delta_I^n\,[X, b](x)$

$(D\,(DY_I^n(x)))\,.\, X(x) = 0$

$(DY_I^n(x) \,.\, D\,X(x))\,.\, b = \lambda DY_I^n(x) \,.\, b.$

λ et λ_I^n étant les réels tels que $Y_I^n(x) = \lambda_I^n\, b$ et $[X, b](x) = \lambda\, x$.

Les quatre expressions sont colinéaires à b, par suite les vecteurs $DY_I^{n+I}(x) \,.\, b$ et b sont colinéaires, CQFD

I.3.2.2. <u>Proposition</u>

Considérons la F.C.V $\mathcal{S}(X, b)$, $d(X) = n$ et soit $x \in \Delta$ tel que

$X(x) = 0$, alors :

si $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T. en x, on a nécessairement :

1) b et $(ad^2\, b\, X)(x)$ dépendants.

2) $\exists\, p \in \{2, \dots n\}$ tel que b et $(ad^p\, b\, X)(x)$ indépendants.

Preuve

Si $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T en x, alors b et $(ad^2\, b\, X)(x)$ sont dépendants car sinon $ad^2\, b\, X(x) = [\, b, [\, b, X\,]\,](x) \notin \mathcal{G}^1_{e.v}\ (X, b)(x)$ contradiction.

On a aussi 2) car sinon : $\forall\, p \in \{1, \dots n\}$, b et $(ad^p\, b\, X)(x)$ seront dépendants, il en résulte que $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\forall\, p \in \{1, \dots n\}$ les vecteurs b et $Y^k_p\ (x)$ (défini précédemment) sont dépendants ; par le même raisonnement que dans I.3.2.1. on vérifie que dim Lie $(X, b)(x) = 1$ donc $\mathcal{S}(X, b)$ n'est pas L.C.T en x (contradiction).

I.3.2.3. Proposition

Considérons la F.C.V $\mathcal{S}(X, b)$, $d(X) = 2n$, alors :

$\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T en tout point $x \notin \Delta$ tel que $X(x) = 0$.

Preuve

Montrons que $\mathcal{S}(X, b)$ satisfait les conditions HLCC en x.

HLCC1 et HLCC2 sont évidentes. Pour montrer HLCC3, on va vérifier que $\forall\, k \in \{2, \dots 2n\}$, $\mathcal{G}^k_{e.v}\ (X, b)(x) = \mathbb{R}^2$.

Soit $k \in \{2, \dots 2n\}$. Il est clair que si b et $(ad^k\, b\, X)(x)$ sont indépendants alors $\mathcal{G}^k_{e.v}\ (X, b)(x) = \mathbb{R}^2$. Supposons donc que b et $(ad^k\, b\, X)(x)$ sont dépendants et calculons le corchet $[\, X, ad^k\, b\, X\,]$ en x.

$$[X, ad^k b X](x) = D X(x) . (ad^k b X)(x)$$

$$= \lambda_k [X, b](x) \qquad (I.3.2.4.)$$

où λ_k est le scalaire tel que $(ad^k b X)(x) = \lambda_k b$. Il s'ensuit de l'égalité (I.3.2.4) et du fait que $x \notin \Delta$ que $[X, ad^k b X](x)$ et b sont indépendants, donc $\mathcal{G}^k_{e.v}(X, b)(x) = \mathbb{R}^2$.

On conclut que :

$\dim \mathcal{G}^k_{e.v}(X, b)(x) = \dim \mathcal{G}^{k+1}_{e.v}(X, b)(x), \forall k$ impair.

Donc $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T en x.

Pour finir ce chapitre, on va donner quelques exemples d'application

Exemple 1

$$X = \begin{pmatrix} x_1 x_2 (x_1 - x_2) \\ x_1 (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ avec :

$\Gamma_1 = \{ x = (x_1, x_2) : x_2 = 0\}$, $\Gamma_2 = \{ x = (x_1, x_2) : x_1 = x_2)$, $\Gamma_3 = \{ x = (x_1, x_2) : x_1 = 0 \}$

$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ avec :

$\Delta_1 = \{ x = : (x_1, x_2) : x_1 = 0\}$, $\Delta_2 = \{ x = (x_1, x_2) : x_1 - 2 x_2 = 0 \}$

Δ_1 coïncide avec Γ_3.

a) soit $x \in \Delta_2 - \{ (0,0) \}$, $X(x) = 2 x_2^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est indépendant avec $V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\mathcal{S}(X, b)$ est L.C.T sur $\Delta_2 - \{ (0,0) \}$.

b) soit $x \in \Gamma^c : X(x) \neq 0$

$W_1 = \binom{1}{0}$, $W_2 = \binom{1}{1}$, $W_3 = V_1 = \binom{0}{1}$

det (b, W_1) $\neq$ 0 donc $\mathcal{S}$(X, b) est L.C.T. sur $\Gamma_1 - \{(0,0)\}$

X (b) = 0 donc $\mathcal{S}$(X, b) n'est L.C.T. en aucun point x de Δ vérifiant X (x) = 0.

Exemple 2

$$X = \begin{pmatrix} x_1^4 - x_1^2 x_2^2 \\ x_1^3 x_2 - x_1^2 x_2^2 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\{ x = (x_1, x_2) : X(x) = 0 \} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ où :

$\Gamma_1 = \{ x = (x_1, x_2) : x_1 = x_2 \}$

$\Gamma_2 = \{ x = (x_1, x_2) : x_1 = 0 \}$

$\Delta = \{ x = (x_1, x_2) : x_1 x_2 = 0 \}$

$\mathcal{S}$(X, b) est L.C.T sur $\Gamma_1 - \{(0,0)\}$

$\mathcal{S}$(X, b) n'est L. C.T en aucun point de Γ_2 (b Γ_2).

Exemple 3

$$X = \begin{pmatrix} x_1^4 - x_2^4 \\ x_1^2 x_2^2 - x_2^4 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta = \{ x = (x_1, x_2) : x_2 = 0 \}$

$\{ x = (x_1, x_2) : X(x) = 0 \} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ où

$\Gamma_1 = \{ x = (x_1, x_2) : x_1 = x_2 \}$

$\Gamma_2 = \{ x = (x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 0 \}$

$\mathcal{S}$(X, b) est L.C.T en tout point $x \neq 0$ singulier de X.

considérons un champ X cubique.

$$X = \begin{pmatrix} a x_I^3 + b\, x_1^2\, x_2 + c\, x_I\, x_2^2 + d\, x_2^3 \\ a'\, x_I^3 + b' x_1^2\, x_2 + c'\, x_I\, x_2^2 + d'\, x_2^3 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$$

Une condition nécessaire pour que $\mathcal{S}(X, b)$ soit L.C.T en un point x singulier de X appartenant à Δ est : $d \neq o$.

CHAPITRE II : L.C.T DES FAMILLES SUIVANTES :

$\{ X, ub \}_{u \in \mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}^2$

$\{ X, u_1 b_1, u_2 b_2 \}_{u_1, u_2 \in \mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}^3$

Ce chapitre est consacré à l'étude de la L.C.T des F.C.V suivantes : $\{ X, ub \}_{u \in \mathbb{R}}$ où X champ homogène sur $\mathbb{R}^2$, $b \in \mathbb{R}^2$ et $u \in \mathbb{R}$

$\{ X, u_1 b_1, u_2 b_2 \}_{u_1, u_2 \in \mathbb{R}}$ ou X champ homogène sur $\mathbb{R}^3$, b et b_2 deux vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^3$ et u_1, u_2 parcourent l'ensemble $\mathbb{R}$.

Le caractère homogène du champ X est exploité principalement dans la détermination géométrique du voisinage de X_t (x) atteint à l'instant t en un point x non singulier de X appartenant à la droite D (b) dans $\mathbb{R}^2$ (au plan engendré par $\{ b_1, b_2 \}$ dans $\mathbb{R}^3$). On remarquera que lorsque x est singulier, l'homogénéité du champ X n'intervient pas, ainsi on généralisera les résultats obtenus aux mêmes F.C.V avec X champ C^{∞}. On étudiera le cas particulier de la F.C.V $\{ X, ub \}_{u \in \mathbb{R}}$ où X est quadratique pour comparer les résultats obtenus avec ceux du chapitre I pour la F.C.V $\{ X + ub, -1 \leq u \leq 1 \}$.

Le premier paragraphe traitera l'étude de la L.C.T de la F.C.V $\{ X, ub \}_{u \in \mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}^2$

Le deuxième paragraphe traitera l'étude de la L.C.T de la F.C.V $\{ X, u_1 b_1, u_2 b_2 \}$ sur $\mathbb{R}^3$.

II.1. Etude de la L.C.T de la famille $\{ X, ub \}_{u \in \mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}^2$

Dans ce paragraphe, on donnera une condition nécessaire et suffisante de la L.C.T de la F.C.V. $\{ X, ub \}_{u \in \mathbb{R}}$ en un point $x \in D$ (b) et aux points singuliers de X (Théorème II.1.5). Dans la proposition II.1.7. on caractérisera une classe de F.C.V $\{X, ub\}_{u \in \mathbb{R}}$ pour lesquelles la L.C.T n'est vérifiée en aucun point de $\mathbb{R}^2$ puis on généralisera certains résultats de la L.C.T. aux points singuliers de X pour la F.C.V $\{X, ub\}_{u \in \mathbb{R}}$ où X champ C^{∞}(proposition II.1.9.). On achèvera ce paragraphe par l'étude du cas particulier la F.C.V $\{X, ub\}$ où X est quadratique pour comparer les résultats obtenus avec ceux du chapitre I pour la F.C.V $\{X + ub, -1 \leq u \leq 1\}$ (proposition II.1.10).

Commençons d'abord par donner quelques définitions et notations.

II.1.1. Définition

On dit qu'une partie $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert strictement positif si U est un ouvert de R^n vérifiant : $\forall (x_1, \dots x_n) \in U : x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$.

II.1.2. Notations

Soit $V \in \mathbb{R}^2$. On désignera par $D(V, x_0)$ la droite affine de vecteur directeur V et passant par le point x_0 (quand $x_0 = 0$, $D(V, x_0)$ est notée $D(V)$).

Soient V_1, V_2 deux vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^3$, on désignera par $P(V_1, V_2, x_0)$ le plan affine parallèle au plan vectoriel $P(V_1, V_2)$ et passant par le point $x_0 \in \mathbb{R}^3$ (quand $x_0 = 0$, $P(V_1, V_2, x_0)$ sera noté $P(V_1, V_2)$.

. Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite singulière pour X si : $\forall x \in A, X(x) = 0$

. Soient D_1, D_2 deux droites parallèles dans $\mathbb{R}^2$, on notera par $D(D_1, D_2)$ le domaine de $\mathbb{R}^2$ limité par les droites D_1, D_2.

. On notera :

$x_0 \xrightarrow{\quad X \quad} y_0$: y_0 accessible depuis x_0 par la trajectoire de X

$x_0 \xrightarrow{\quad (X, Y) \quad} y_0$: y_0 accessible depuis x_0 une trajectoire de la F.C.V $\mathcal{F}(X, Y)$

$x_0 \xrightarrow{\mathcal{F}(X,\, b_I,\, b_2)} y_0$: y_0 accessible depuis x_0 par une trajectoire de la F.C.V $\mathcal{F}(X, b_I, b_2)$.

II.1.3. Proposition

Soit la F.C.V $\mathcal{F}(X, b)$, $d(X) = n$, $b \in \mathbb{R}^2$.

Il existe un changement de variables $x = Py$ transformant $\mathcal{F}(X, b)$ en $\mathcal{F}(Y, c)$ où Y est un champ homogène de degré n et $c = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$.

Preuve

Posons $X = (P_I, P_2)$ et $V = -b^{\perp}$.

Considérons la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B} = (V, b)$ et le changement de variable suivant :

$x = Py$ avec $P = \begin{pmatrix} b_2 & b_I \\ -b_I & b_2 \end{pmatrix}$

Alors on a :

$$\frac{dy}{dt} = P^{-I} \frac{dx}{dt} = P^{-I} X(x)$$

Par suite le champ X exprimé dans la base $\mathcal{B}$ devient :

$Y = P^{-I} X P$

D'où un calcul facile, on obtient :

$Y = \frac{I}{\|b\|^2} (Q_I, Q_2)$ avec

$Q_I = b_2 P_I P - b_I P_2 P.$

$Q_2 = b_I P_I P + b_2 P_2 P.$

De plus le champ b exprimé dans $\mathcal{B}$ est $c = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$. On obtient donc une F.C.V. $\mathcal{F}(Y, c)$ telle Y homogène de degré n et $c = \binom{0}{1}$.

II.1.4. Remarques :

L'étude de la L.C.T de la F.C.V $\mathcal{F}(X, b)$, $d(X) = n$ en un point x est équivalent à l'étude de la L.C.T de $\mathcal{F}(Y, c)$ au point $y = P^{-1}x$.

II.1.5. Théorème

Soit la F.C.V $\mathcal{F}(X, b)$, $d(X) = n$, $b \in \mathbb{R}^2$, $X = (P_1, P_2)$.

1) Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{F}(X, b)$ soit L.C.T sur D (b) est que b et X (b) soient indépendants.

2) soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $X(x) = 0$, alors :

a) si $X(b) \neq 0$; une condition nécessaire et suffisante pour que $x \notin D(b)$ est : $\exists\, i \in \{1, \ldots n\}$ tel que b et $ad^i\, b\, X(x)$ soient indépendants.

b) si $X(b) \neq 0$; une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{F}(X, b)$ soit L.C.T en x est que Q_1 ne garde pas un signe constant sur $\mathbb{R}^2$.

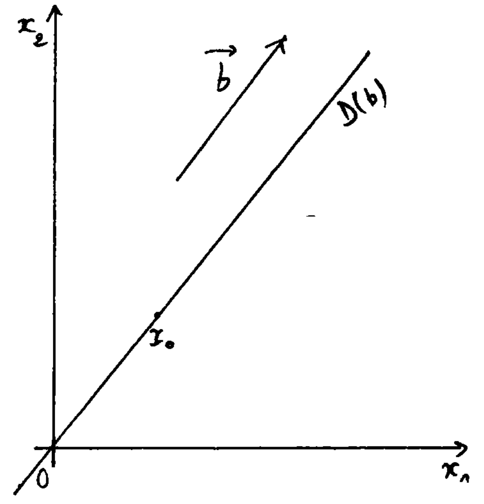
c) si $X(b) = 0$; une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{F}(X, b)$ soit L.C.T en x est que : $x \notin D(b)$ et Q_1 ne garde pas un signe constant sur $\mathbb{R}^2$

($Q_1 = b_2 P_1 P - b_1 P_2 P$, avec $P = \begin{pmatrix} b_2 & b_1 \\ -b_1 & b_2 \end{pmatrix}$)

Preuve

1) Soit $x_0 \in D(b)$.

Supposons d'abord que b et X (b) sont dépendants. Alors $\forall y \in D(b)$



b et X (y) sont aussi dépendants, par suite X est tangent à la sous variété D (b). On déduit que toutes les trajectoires de $\mathcal{F}$(X, b) issues de D (b) sont contenues dans D (b) ; par suite on a :

$\forall t > 0$, int $\mathcal{B}(t, x_0) = \emptyset$, donc $\mathcal{F}$(X, b) n'est pas L.C.T en x_0.

Supposons que bet X (b) sont indépendants et soit $x_0 \in D$ (b) ; alors b et X (x_0) sont indépéndants, d'où l'existance d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\forall t \in]0, \varepsilon[$: $X_t(x_0) \notin D$ (b).

Soit $\lambda > 1$, alors $X_t(\lambda x_0)$ est défini $\forall t \in]0, \frac{\varepsilon}{\lambda}[$. En posant $t' = \frac{t}{\lambda^{n-1}}$, on obtient

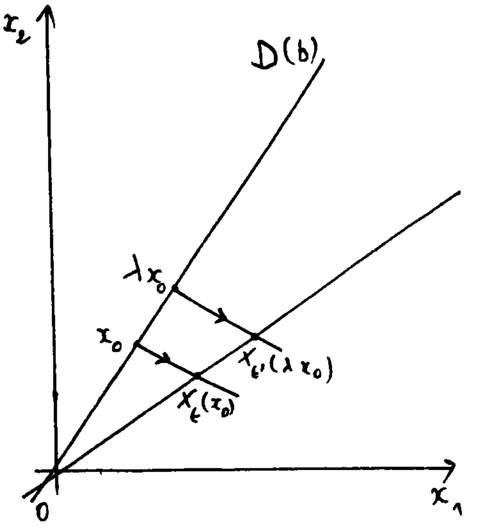
$$X_{t'}(\lambda x_0) = \lambda X_t(x_0)$$

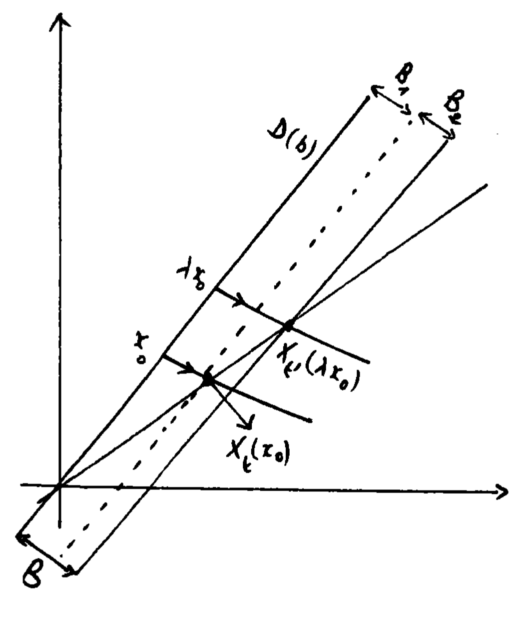
Considérons les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

B_1 : bande limitée par D (b, x_0) et D (b, $X_t(x_0)$)

B_2 : bande limitée par D (b, $X_t(x_0)$ et D (b, $X_{t'}(\lambda x_0)$).

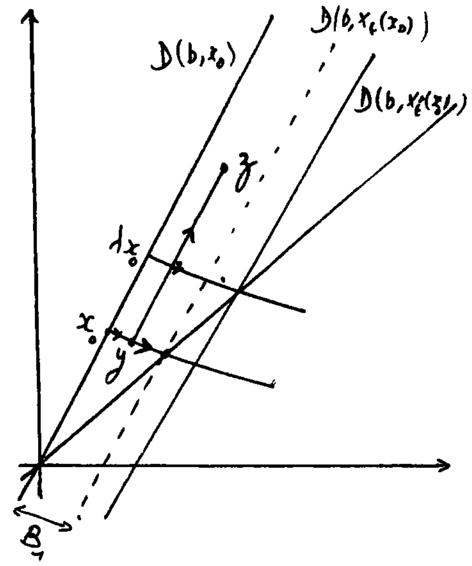
Il est clair que B = $B_1 \cup B_2$ est un voisinage de $X_t(x_0)$





Montrons qu'on peut atteindre tous les points de B à l'instant t par des trajectoires de $\mathcal{F}(X, b)$ issues de x_0.

a) soit un point $z \in B_I$.



Appelons y la projection du point z sur la trajectoire de X issue de x_0 parallèlement à la droite D (b), alors :

$x_0 \xrightarrow{X} y$ en un temps $t_I < t$.

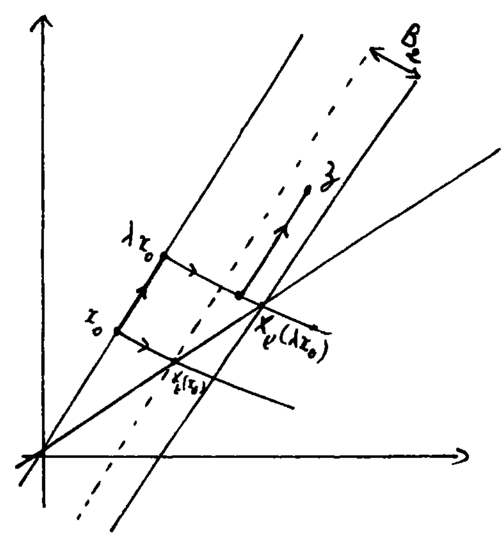
soit $u \in \mathbb{R}$ et considérons le champ ub, alors :

$y \xrightarrow{(ub)} z$ en un temps $t_2 = \dfrac{d(y, z)}{u \, \|b\|}$

($u > 0$, cas de la figure).

Or u est non borné, donc on peut le choisir comme on veut pour que $\dfrac{d(y, z)}{u \, \|b\|} = t - t_I$; par conséquent $x_0 \xrightarrow{\mathcal{F}(X, b)} z$ au temps t.

b) soit $z \in B_2$



appelons y la projection du point z sur la trajectoire de X issue de λx_0 parallèllement à D (b), alors :

$\lambda x_0 \xrightarrow{X} y$ en un temps $t_2 < t'$ $(t_2 < t)$.

Soient $u_I, u_3 \in \mathbb{R}$ et considérons les champs $u_I b$, $u_3 b$, on a alors $x_0 \xrightarrow{(u_I b)} \lambda x_0$

$t_I = \dfrac{d(x_0, \lambda x_0)}{u_1 \, \|b\|}$

$y \xrightarrow{(u_3 b)} z$ en un temps $t_3 = \dfrac{d(y, z)}{u_3 \, \|b\|}$

Choisissons u_I et u_3 pour que $t_I + t_3 = t - t_2$, on a alors :

$x_0 \xrightarrow{\mathcal{F}(X, b)} z$ au temps t ; par conséquent $\forall z \in B : x_0 \xrightarrow{\mathcal{F}(X, b)} z$ au temps t.

Il s'ensuit que :

$$\forall t \in]0, \varepsilon[\ : X_t(x_0) \in \text{int}\, \mathcal{B}(t, x_0)$$

donc $\mathcal{F}(X, b)$ est L.C.T en x_0.

2) soit $x \in \mathbb{R}^2$: $X(x) = 0$

. $X(b) \neq 0$

a) Supposons que $x \notin D(b)$ et montrons $\exists\, i \in \{1, ..n\}$ tel que bet $ad^i\, b\, X(x)$ sont indépendants.

Par l'absurde : supposons que $\forall\, i \in \{1, ..n\}$, b et $ad^i\, b\, X(x)$ sont dépendants.

En posant $ad^0\, b\,(X) = X$, il est facile de voir que $\forall\, i \in \{0, ...n\}$ $ad^i\, b\, X$ est un champ homogène de degré n - i. ($ad^n\, b\, X = n\,!\, X(b)$).

Par conséquent on a :

$$\forall\, i \in \{0, , n\} : \ x \in \Delta\,(ad^i\, b\, X, b) \qquad \text{(II.1.6.)}$$

Considérons le champ quadratique :

$Y = ad^{n-2}\, b\, X$

Soit alors le champ linéaire

$C = ad^{n-1}\, b\, X$

On a $ad^n\, b\, X = [\, b, C\,] = -\, C\, b$, donc C b est colinéaire à b, ce qui entraîne que $b \in \Delta(Y, b)$.

. Si $\Delta(Y, b)$ est une droite, alors d'après l'égalité II.1.6. on a : $D(b) = \Delta(Y, b)$ par suite $x \in D(b)$ (contradiction).

. Si $\Delta(Y, b) = \mathbb{R}^2$. En faisant le changement de variable $x = Py$ (Proposition II.1.3), on obtient une F.C.V $\mathcal{F}(Z, c)$ telle que $c = \binom{0}{1}$. Suite p 59

Posons $Z = (R_I, R_2)$. Par un calcul simple on a :

$$\Delta (Z, c) = \{ (y_I, y_2) : \frac{\partial R_I}{\partial y_2} (y_I, y_2) = o \}$$

Comme $\Delta (Y, b) = \mathbb{R}^2$, alors $\Delta (Z, c) = \mathbb{R}^2$ et par suite le polynôme R_I ne dépend que de y_1. Il en résulte que :

$$\{ y : Z (y) = o\} = D (c) \quad (x \notin D (b), x \neq o)$$

Par conséquent :

$$\{ x : Y (x) = o \} = D (b)$$

donc $Y (b) = o$, or $Y (b) = \frac{I}{2} C b = \frac{I}{2} ad^n b X$. Il s'ensuit donc que :

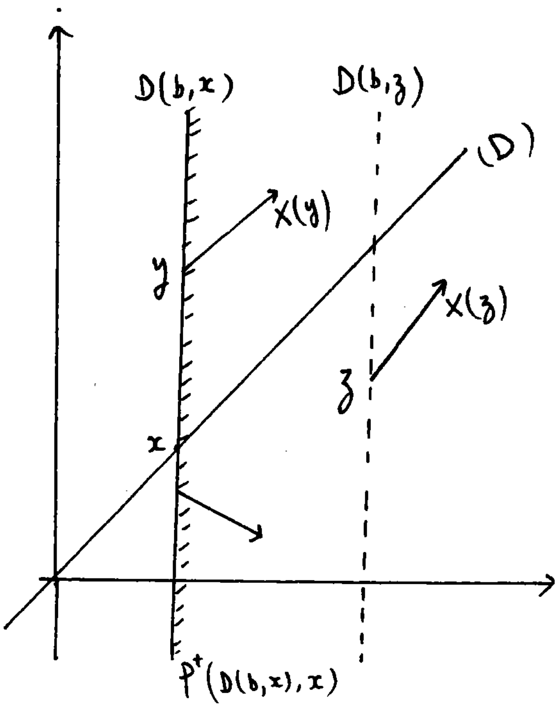
$$Y (b) = \frac{I}{2} n ! X (b) = o$$

c'est-à-dire $X (b) = o$ Contradiction.

La réciproque est évidente (ce qui achève la démonstration du a) du 2).

b) D'après la remarque II.1.4., en prenant $b = \binom{o}{I}$ le problème ne perd pas sa généralité.

Supposons que Q_I (= P_I) a un signe constant sur $\mathbb{R}^2$. Appelons D la droite telle $x \in D$ et $P^+ (D (b, x), x)$ le demi-plan (resp. $P^- (D (b, x), x)$). Le demi-plan droit (resp. gauche) limité par D (b, x). Alors $\forall y \in D (b, x)$, $X (y)$ pointe vers l'un des deux demi-plans $P^+ (D (b, x), x)$, $P^- (D (b, x), x)$ (Fig. II.1) ($X (y)$pointe vers $P^+ (D (b, x), x)$ dans le cas de la figure.



P^+ (D (b, x), x) Figure II.1

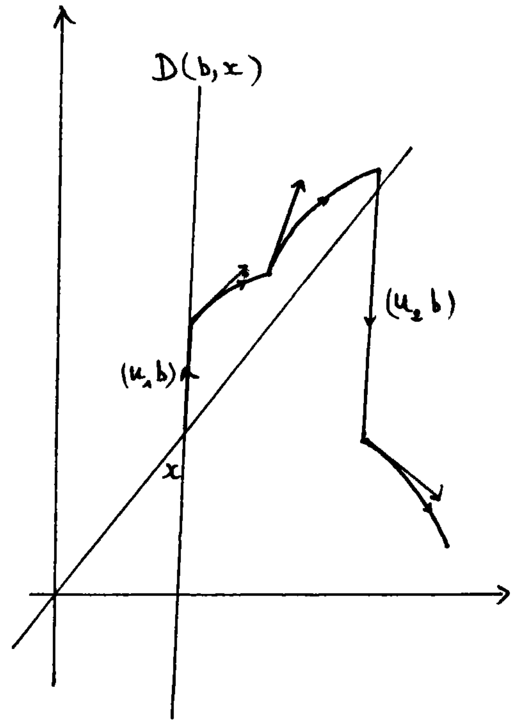


Figure II.2.

$\forall x \in \mathbb{R}^2$: $P_I(x) \geq 0$

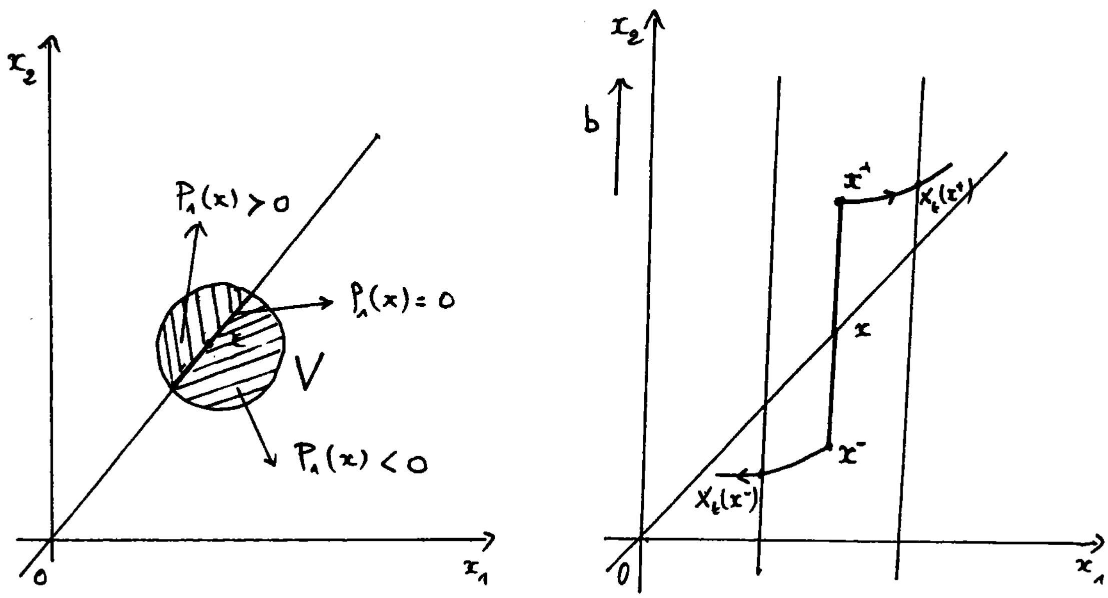
Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}^2$: $P_I(x) \geq 0$, alors : X (y) pointe vers P^+ (D (b, x), x). Il s'ensuit que $\forall z \in P^+$ (D (b, x), x), X (z) pointe vers P^+ (D (b, z), z). Par conséquent, toutes les trajectoires issues de x de $\mathcal{F}$(X, b) se trouvent dans P^+ (D (b, x), x), donc $x \in \mathrm{Fr}\,\mathcal{B}(t, x)$ $\forall t > 0$. On conclut que $\mathcal{F}$(X, b) n'est pas L.C.T en x. (Figure II.2)

Réciproquement :

X (b) $\neq$ o entraîne que $x \notin$ D (b), donc $\exists\, i \in \{1, ..n\}$ tel b, ad^i b X (n) sont indépendants ; par conséquent dim Jo ($\mathcal{F}$(X, b)) (x) = 2 donc $\forall t > 0$, int $\mathcal{B}(t, x) \neq \phi$.

Supposons que P_I change de signe sur $\mathbb{R}^2$, alors il existe un voisinage V de x sur lequel P_I change de signe ; d'où l'existance de $(\tau_I, \tau_2) \in \mathbb{R}^2_+$, $(u_I, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $(x^+, x^-) \in V^2$ tels que :

$$x^+ = \tau_I\, u_I\, b + x$$
$$x^- = \tau_2\, u_2\, b + x$$
$$P_I(x^+) \,.\, P_I(x^-) < 0$$
$$\det(b, X(x^+)).\det(b, X(x^-)) \neq 0$$



(Figure II.3)

Dans le cas de figure, $\exists\, \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tels que les trajectoires

$$\tau_1 \longrightarrow X_{\tau_1}(x^+) \qquad \tau_1 \in [0, \varepsilon_1[$$

$$\tau_2 \longrightarrow X_{\tau_2}(x^-) \qquad \tau_2 \in [0, \varepsilon_2[$$

appartiennent respectivement à P^+ (D (b, x), x), P^- (D (b, x), x).

Soit $\eta = \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et soit $t \in]0, \eta[$, alors on peut atteindre le domaine limité par les deux droites D (b, $X_t(x^-)$), D (b, $X_t(x^+)$) par des trajectoires issues de x de la F.C.V $\mathcal{F}(X, b)$ à l'instant t. (même raisonnement que 1), mais cette fois-ci sans utiliser l'homogénéité du champ X). Par suite $\mathcal{F}(X, b)$ est L.C.T en x.

c) Supposons que X (b) = 0

Montrons que si $x \in D$ (b) ou P_1 garde un signe constant sur $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}(X, b)$ n'est pas L.C.T en x.

Si P_1 a un signe constant, $\mathcal{F}(X, b)$ n'est pas L.C.T en x (déjà vu).

Si $x \in D$ (b), alors $\forall\, y \in D$ (b), X (y) = 0 ; il s'ensuit que toutes les trajectoires issues de D (b) sont contenues dans D (b). Par conséquent $\forall\, t > 0$, int $\mathcal{B}(t, x) = \emptyset$, donc $\mathcal{F}(X, b)$ n'est pas L.C.T en x.

Réciproquement

si $x \notin D$ (b) et P_I change de signe, on peut sortir de D par des trajectoires des champs ub vers les régions où P_I change de signe ; donc $\mathcal{F}(X, b)$ est L.C.T en x (même raisonnement qu'en b). Ce qui achève la démonstration du théorème.

II.1.7. Proposition

Soit la F.C.V $\mathcal{F}(X, b)$, d (X) = 2. Si l'une des conditions suivantes :

i) la première composante de $X = (P_I, P_2)$ ne dépend que de la variable x_I et $b = \binom{o}{I}$

ii) la deuxième composante de $X = (P_I, P_2)$ ne dépend que de la variable x_2 et $b = \binom{I}{o}$

Alors $\mathcal{F}(X, b)$ n'est L.C.T en aucun point de $\mathbb{R}^2$.

Preuve

Supposons i) ; alors :

det (b, X (b)) = o ; par suite $\mathcal{F}(X, b)$ n'est L.C.T en aucun point de D (b).

Soit $x_o \notin D$ (b) et supposons que P_I s'écrive sous la forme $P_I(x_I) = a x_I^2$ avec $a > o$, alors $P_I(x) \geq o, \forall x \in \mathbb{R}^2$. Il s'ensuit que toutes les trajectoires de $\mathcal{F}(X, b)$ issues de x_o se trouvent dans $P^+(D(b, x_o), x_o)$ demi-plan limité par la droite $D(b, x_o)$, figure II.4). Pour montrer que $\mathcal{F}(X, b)$ n'est pas L.C.T en x_o, on va considérer une trajectoire quelconque de $\mathcal{F}(X, b)$ issue de $x_o : (t \longrightarrow \varphi_t(x_o))$ coupant la droite $D(b, X_t(x_o))$ en un point z à l'instant T ($z = \varphi_T(x_o)$) et on montrera que $T \geq t$; il s'ensuit donc $X_t(x) \in Fr\,\mathcal{B}(t, x)\ \forall t > o$.

φ peut prendre les deux formes suivantes :

- $\varphi_t(x_o) = \Psi_t(X_\tau(x_o))$
- $\varphi_t(x_o) = \psi_t((ub)_\eta(x_o))$

ou Ψ_t est une trajectoire de $\mathcal{F}(X, b)$.

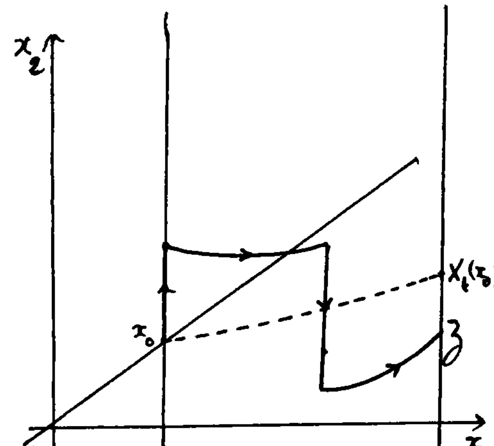


figure II.4

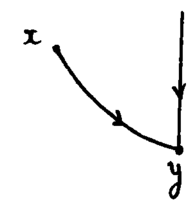
Supposons donc que $\varphi_t\ (x_o) = \psi_t\ (ub)_\tau\ (x_o)$ avec $\eta > o$ on va d'abord donner une définition qui nous servira dans la démonstration.

Définition

On dit qu'un point $y \in \{\ t \longrightarrow \varphi_t\ (x_o),\ \ t > o \}$ est un sommet du champ X (respectivement du champ b), s'il existe τ_I, $\varepsilon_I > o$, $u_I \in \mathbb{R}$ et $x \in \{\ t \longrightarrow \varphi_t\ (x_o),\ t > o \}$ (respectivement τ_2, $\varepsilon_2 > o$, $u_2 \in \mathbb{R}$, $x' \in \{t \longrightarrow \varphi_t\ (x_o) \}$ tels que :

$$y = X_{\tau_I}\ (x)$$

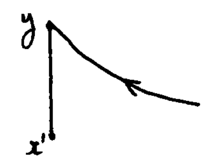
$$\varphi_\tau\ (x_o) = (u_I\ b)\ \tau + y, \forall \tau \in]\tau_I,\ \tau_I + \varepsilon_I\ [$$



respectivement

$$y = (u_2\ b)\ \tau_2 + x'$$

$$\varphi_\tau\ (x_o) = X_\tau\ \ (y), \forall \tau \in]\tau_2,\ \tau_2 + \varepsilon_2\ [$$

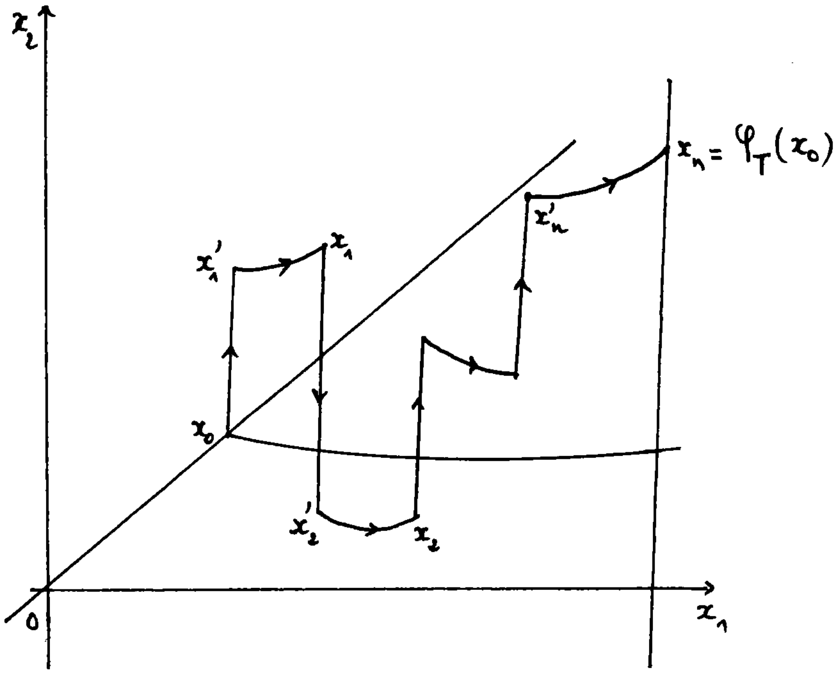


on dira que x_o est un sommet X si φ est de la forme $\varphi_t = \psi_t\ o\ (ub)_\tau$

on dira que x_o est un sommet b si φ est de la forme $\varphi_t = \psi_t\ o\ X_\tau$

soit p la projection sur l'axe Ox parallèlement à b.

Considérons la suite finie $(x_o,\ x_I\ ,\ \dots\ x_n)$ des sommets de X pour la trajectoire $\{\ t \longrightarrow \varphi_t\ \ (x_o)\ \}$; la suite $(x'_I,\ x'_2,\ ..\ x'_n)$ des sommets de b (voir fig. II.5).



(Figure II.5)

Soit $(t_1 \dots t_n)$ la suite définie par :

$x_i = X_{t_i}(x'_i) \quad i \in \{1, ..n\}$

On a alors

$p(x_{i-1}) = p(x'_i) \qquad i \in \{1, ..n-1\}$

$p(x_n) = p(X_t(x_0))$.

Il est clair que $T \geqq \sum t_i$.

p_1 ne dépend que de x_1, donc en projetant sur l'axe O x on obtient

$$dt = \frac{dx_1}{p_1(x_1)}$$

d'où : $t_i = \displaystyle\int_{p(x'_i)}^{p(x_i)} \frac{dx_1}{p_1(x_1)} = \int_{p(x_{i-1})}^{p(x_i)} \frac{dx_1}{p_1(x_1)}$

Par conséquent $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = \int_{p(x_0)}^{p(x_n)} \frac{d\,x_1}{p_1(x_1)} = \int_{p(x_0)}^{p(X_t(x_0))} \frac{d\,x_1}{p_1(x_1)} = t$

On conclut que $T \geqq t$ CQFD.

On montrera de la même façon que si on a ii), $\mathcal{F}(X, b)$ n'est pas L.C.T. en x_0.

II.1.8. Remarques

1) Dans la démonstration du 1) du Théorème, on n'a pas utilisé le fait que d(X) est un entier naturel.

2) Dans le 2) du Théorème et dans la proposition précédente, on n'a pas utilisé l'homogénéité du champ X, d'où la proposition suivante :

II.1.9. Proposition

Soit la F.C.V. $\mathcal{F}(X, b)$ telle que X est un champ α homogène ($\alpha \in \mathbb{R}^*$) défini sur un ouvert strictement positif U vérifiant : $D(b) \cap U \neq \emptyset$ et $b_1 b_2 \neq 0$.

1) si $\alpha > 1$, $\mathcal{F}(X, b)$ est L.C.T en un point $x \in D(b) \cap U$ si et seulement si b et X (x) sont indépendants.

2) soit la F.C.V $\mathcal{F}(X, b)$ telle que $X = (X_1, X_2)$ est un champ de vecteurs C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, $b = (b_1, b_2)$ $\mathbb{R}^2$, alors $\mathcal{F}(X, b)$ est L.C.T en un point x_0 singulier de X si et seulement si :

a) D (b) n'est pas singulière pour X

b) Il existe un voisinage $V(x_0)$ de x_0 tel que l'application : $x \longrightarrow (b_2 X_1 P - b_1 X_2 P)(x)$ change de signe sur $V(x_0) \cap D(b, x_0)$

3) avec les mêmes notations du 2). Si l'une des conditions suivantes :

i) X_1 ne dépend que de la variable x_1 et $b = \binom{0}{1}$

ii) X_2 ne dépend que de la variable x_2 et $b = \binom{1}{0}$

sont vérifiées, alors $\mathcal{F}(X, b)$ n'est L.C.T en aucun point de $\mathbb{R}^2$.

Preuve :

1) Un champ X α - homogène défini sur un ouvert strict positif est de la forme :

$$X(x_1, x_2) = \Big(\sum_{\substack{\lambda+\mu=\alpha \\ (\lambda,\mu)\ A_f}} a_{\lambda,\mu}\, x_1^{\mu} x_2^{\lambda} \;,\; \sum_{\substack{\lambda+\mu=\alpha \\ (\lambda,\mu)\ B_f}} b_{\lambda,\mu}\, x_1^{\mu}\, x_2^{\lambda} \Big)$$

où A_f et B_f sont des parties finies de $\mathbb{R}^2$, $a_{\lambda,\mu}$ et $b_{\lambda,\mu} \in \mathbb{R}$.

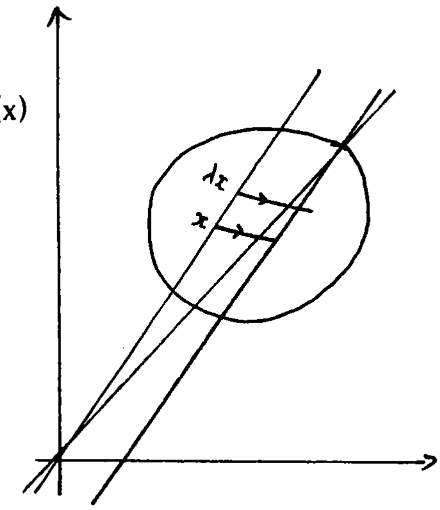
Soit $x \in D(b) \cap U$ tel que b et X (x) sont indépendants, alors on peut trouver $\varepsilon > 0$ assez petit et un voisinage V (x) de x tels que :
b et X (X_t (x) sont indépendants et $X_t(x) \in V(x)$ $\forall t \in [0, \varepsilon[$

Soit $\lambda > 1$ tel que $\lambda x \in V(x)$ et $\forall t \in [0, \frac{\varepsilon}{\lambda}[$ $X_t(\lambda x) \in V(x)$ (un tel λ existe)

en considérant les trajectoires

$t \longrightarrow X_t(x)$ pour $t \in [0, \varepsilon[$

$t \longrightarrow X_t(\lambda x)$ pour $t \in [0, \frac{\varepsilon}{\lambda^{\alpha-1}}[$



on montrera de la même façon que dans le 1) du Théorème que $\mathcal{F}(X, b)$ est L.C.T en x.

Si b et X (x) sont dépendants, il est clair que int $\mathcal{B}(t, x) = \emptyset$ $\forall t > 0$. Donc $\mathcal{F}(X, b)$ n'est pas L.C.T en x.

2) Si a) ou b) n'est pas vérifiée par le même raisonnement que dans le 2) du Théorème, on montrera que $\mathcal{F}(X, b)$ n'est pas L.C.T en un point singulier de X.

Réciproquement

Si a) et b) sont vérifiées. Puisque X est C^∞, alors il existe deux points x_o^+ , x_o^- appartenant à D (b , x_o)$\cap$ V (x_o) tels que

$X(x_o^+) \neq o$

$X(x_o^-) \neq o$

$X_I'(x_o^+) . X_I'(x_o^-) < o$ avec $X_I' = b_2 X_I P - b_I X_2 P$

Par suite le même raisonnement que dans 2) du Théorème, on montrera que $\mathcal{F}$(X , b) est L.C.T en x_o.

Dans ce qui suit on va étudier le cas particulier où X est quadratique pour comparer les résultats obtenus avec ceux du chapitre I.

Soit la F.C.V $\mathcal{F}$(X , b) telle que X = (P_I , P_2) et b = (b_I , b_2).
Ecrivons X sous la forme :

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

Posons

$$\alpha = \begin{vmatrix} a & b_I \\ a' & b_2 \end{vmatrix} = ab_2 - a'b_I$$

$$\beta = \begin{vmatrix} b & b_I \\ b' & b_2 \end{vmatrix} = b\,b_2 - b'b_I$$

$$\gamma = \begin{vmatrix} c & b_I \\ c' & b_2 \end{vmatrix} = c\,b_2 - c'b_I$$

II.1.10 Proposition

1) si X (b) $\neq$ o ; une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{F}$(X , b) soit L.C.T. en un point x_o singulier de X est : $\beta^2 - 4\,\alpha\gamma > o$.

2) Si X (b) = o ; une condition nécessaire et suffisante pour que

$\mathcal{F}(X\ ,\ b)$ soit L.C.T en un point x_0 singulier de X est : $x_0 \notin D\ (b)$ et $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$

3) soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$. $X\ (x_0) = 0$, alors :

$\mathcal{F}(X\ ,\ b)$ est L.C.T en $x_0 \neq 0$ si et seulement si $\mathcal{S}(X\ ,\ b)$ est L.C.T en $x_0 \neq 0$.

4) soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que $X\ (x_0) \neq 0$ et $\{\ b\ ,\ X\ (x_0)\ \}$ dépendants, alors $\mathcal{F}(X\ ,\ b)$ est L.C.T en x_0 entraîne que $\mathcal{S}(X\ ,\ b)$ est L.C.T en x_0.

Preuve

1) D'après le b du 2) du Théorème II.1.5, $\mathcal{F}(X\ ,\ b)$ est L.C.T en x_0 si et seulement si Q_I change de signe sur $\mathbb{R}^2$. Or en écrivant $Q_I\ (y_I\ ,\ y_2) = Ay_I^2 + By_I\ y_2 + Cy_2^2$, Q_I change de signe si et seulement si $B^2 - 4\ A\ C > 0$. Par un calcul facile on trouve que :

$$B^2 - 4\ A\ C = \beta^2 - 4\ \alpha\ \gamma$$

2) évident.

3) Prenons $b = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$

En gardant les même notations du chapitre I (page 32) on a dans ce cas :

$V = (-\ 2c\ ,\ b)$

$P_I\ (V) = -\ c\ (b^2 - 4\ ac)$

$\beta\ = 2\ c$

$\delta\ = b^2 - 4\ ac$

$\alpha\ = 4\ c^2$

$\det\ (X\ (V)\ ,\ V) = P_I\ (V)$

Soit $x_0 \neq 0$ tel que $X\ (x_0) = 0$. Supposons que $\mathcal{F}(X\ ,\ b)$ est L.C.T en x_0, montrons que $\mathcal{S}(X\ ,\ b)$ l'est aussi c'est-à-dire $x_0 \notin \Delta$ (Théorème I.1.2.1.).

Par l'absurde :

Supposons que $x_0 \in \Delta$, alors $X\ (V) = 0$, par suite $P_I\ (V) = 0$.

Si $b^2 - 4\,ac = o$, P_I ne changera pas de signe sur $\mathbb{R}^2$, ce qui entraîne que $\mathcal{F}(X\,,\,b)$ n'est pas L.C.T en x_o (contradiction).

Si $c = o$, alors V est colinéaire à b, par suite $b \in \Delta$. $x_o \in \Delta$ et $X\,(x_o) = o$ entraînent que $X\,(b) = o$, donc $x_o \in D\,(b)$, il en résulte que $\mathcal{F}(X\,,\,b)$ n'est pas L.C.T en x_o (contradiction).

On conclut que $x_o \notin \Delta$.

Réciproquement :

Supposons que $\mathcal{S}(X\,,\,b)$ est L.C.T en x_o ; alors $x_o \notin \Delta$; $X\,(x_o) = o$ et $x_o \notin \Delta$ entraînent que $\det\,(b, V_I) \neq o$ et $\det\,(b, V_2) \neq o$, par suite $\alpha \neq o$, c'est-à-dire $c \neq o$.

Or $x_o \neq o$ et $X\,(x_o) = o$ entraînent que $\delta \geqq o$, c'est-à-dire $b^2 - 4\,ac \geqq o$.

Si $b^2 - 4\,ac = o$, alors :

$$\det\,(X\,(V)\,,\,V) = o.$$

D'autre part, $\delta = o$ entraîne que l'ensemble $\{\,x \in \mathbb{R}^2 = \det\,(b\,,\,X\,(x)) = o\,\}$ est une droite ; par suite (puisque $\det\,(X\,(V)\,,\,V) = o$), l'ensemble $\{\,x \in \mathbb{R}^2 : X\,(x) = o\,\}$ est une droite confondue avec Δ ; d'où $x_o \in \Delta$, contradiction. On conclut que $b^2 - 4\,ac > o$ ce qui entraîne que P_I change de signe sur $\mathbb{R}^2$, ce qui revient à dire que $\mathcal{F}(X\,,\,b)$ L.C.T en x_o.

4) Il est facile de voir qu'une condition nécessaire pour que $\mathcal{F}(X\,,\,b)$ soit L.C.T en un point $x \in \Gamma^c$ est : $\det\,(b\,,\,V_i) \neq o$ où V_i est un vecteur directeur de D_i ($x \in D_i$). Cette condition est nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{S}(X\,,\,b)$ soit L.C.T en x ; d'où le résultat.

II.1.11 <u>Corollaire</u>

Considérons les expressions suivantes :

$$A_I = b_I^2\,\alpha + b_I\, b_2\, \beta + b_2^2\, \gamma$$

$$B_I = (b_I^2 + b_2^2)\,\beta + 2\, b_I\, b_2\,(\alpha + \gamma)$$

$$C_I = (b_2^2 - b_I^2)\,\beta - 2\, b_I\, b_2\,(\gamma - \alpha)$$

Une condition suffisante pour que $\mathcal{F}(X\,,\, b)$ ne soit L.C.T en aucun point de $\mathbb{R}^2$ est : $A_I = 0$ et $B_I\, C_I = 0$.

Preuve :

Application de la proposition II.1.7.

II.2. Etude de la L.C.T de la famille $\{X\,,\, u_1\, b_1\,,\, u_2\, b_2\}_{(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2}$ sur $\mathbb{R}^3$

Dans ce paragraphe, on va étudier la L.C.T de la F.C.V $\{X,\, u_I\, b_I\,,\, u_2\, b_2\}_{(u_I\,,\, u_2)\in\mathbb{R}^2}$ sur le plan $P\,(b_I\,,\, b_2)$ et aux points singuliers de X.

Notons d'abord que puisque b_I et b_2 sont indépendants, on peut à l'aide d'un changement de variable se ramener au cas où :

$$b_I = \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

Considérons donc la F.C.V $\mathcal{F}(X\,,\, b_I\,,\, b_2)$ avec X champ homogène de degré $m \in \mathbb{N}$. Il est facile de voir que l'application

$$\psi : x \xrightarrow{\ \mathbb{R}^3\ } \det\,(b_I\,,\, b_2\,,\, X\,(x)\,)$$

(respectivement l'application :

φ = restriction de ψ au plan $P(b_1 , b_2)$)

est un polynôme homogène de degré m définie sur $\mathbb{R}^3$ (respectivement un polynôme homogène de degré m définie sur $\mathbb{R}^2$).

Si on écrit X sous la forme :

$X = (P_1 , P_2 , P_3)$

on a alors :

$\forall\ x \in \mathbb{R}^3 \ :\ \psi(x) = P_1(x)$

$\forall\ x \in P(b_1 , b_2) : \varphi(x) = P_1(0 , x_2 , x_3)$ qu'on écrira tout simplement $P_1(x_2 , x_3)$.

Posons $\Phi = \{x : \varphi(x) = 0\}$. Pour $x \in \Phi$, on désignera par D la droite (quand elle existe) passant par x, V son vecteur directeur. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^3$, on désignera pas $P(x_0 , b_1 , b_2)$ le plan parallèle à $P(b_1 , b_2)$ contenant x_0.

II.2.1 Théorème

Soit la F.C.V $\mathcal{F}(X , u_i\ b_i)$, X homogène de degré m.

Supposons que $\Phi \neq \mathbb{R}^2$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que $X(x_0) \neq 0$, alors

1) une condition suffisante pour que $\mathcal{F}(X , u_i\ b_i)$ soit L.C.T en x_0 est : $\varphi(x_0) \neq 0$

2) $\varphi(x_0) = 0$

a) Une condition suffisante pour que $\mathcal{F}(X , u_i\ b_i)$ soit L.C.T en x_0 est : $\det(V , X(x)) \neq 0$.

b) si det $(V , X(x)) = 0$, une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{F}(X , u_i b_i)$ soit L.C.T en x_0 est : l'application $x \longrightarrow \varphi(x)$ change de signe sur $P(b_1 , b_2)$.

3) Soit la F.C.V $\mathcal{F}(X , u_i b_i)$, X champ C^∞, $X = (X_1 , X_2 , X_3)$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$: $X(x_0) = 0$. $\mathcal{F}(X , u_i b_i)$ est L.C.T en x_0 si et seulement si :

i) $P(x_0 , b_1 , b_2)$ n'est pas singulier pour X_1.

ii) $\exists$ un voisinage $V(x_0)$ de x_0 dans $\mathbb{R}^3$ tel que l'application $x \longrightarrow X_1(x)$ change de signe sur $V(x_0) \cap P(x_0 , b_1 , b_2)$.

Preuve :

1) Supposons que $\varphi(x_0) \neq 0$, alors $\exists \varepsilon > 0 : \forall t \in]0, \varepsilon[$, $X_t(x_0) \notin P(b_1 , b_2)$.

Soit $\lambda > 1$. Considérons la trajectoire de X issue de λx_0 définie sur $[0, \varepsilon / \lambda^{m-1}[$. En posant $t' = t/\lambda^{m-1}$ on a : $X_{t'}(\lambda x_0) = \lambda X_t(x_0)$. On va montrer qu'on peut atteindre tout l'espace défini par :

B : l'espace limité par $P(b_1 , b_2)$ et $P(X_{t'}(\lambda x_0) , b_1 , b_2)$ en un instant t choisi arbitrairement dans $]0 , \frac{\varepsilon}{\lambda^{m-1}}[$

Soit B_1 : l'espace limité par $P(b_1 , b_2)$ et $P(X_t(x_0) , b_1 , b_2)$

B_2 : l'espace limité par $P(X_t(x_0) , b_1, b_2)$ et $P(X_{t'}(\lambda x_0) , b_1 , b_2)$

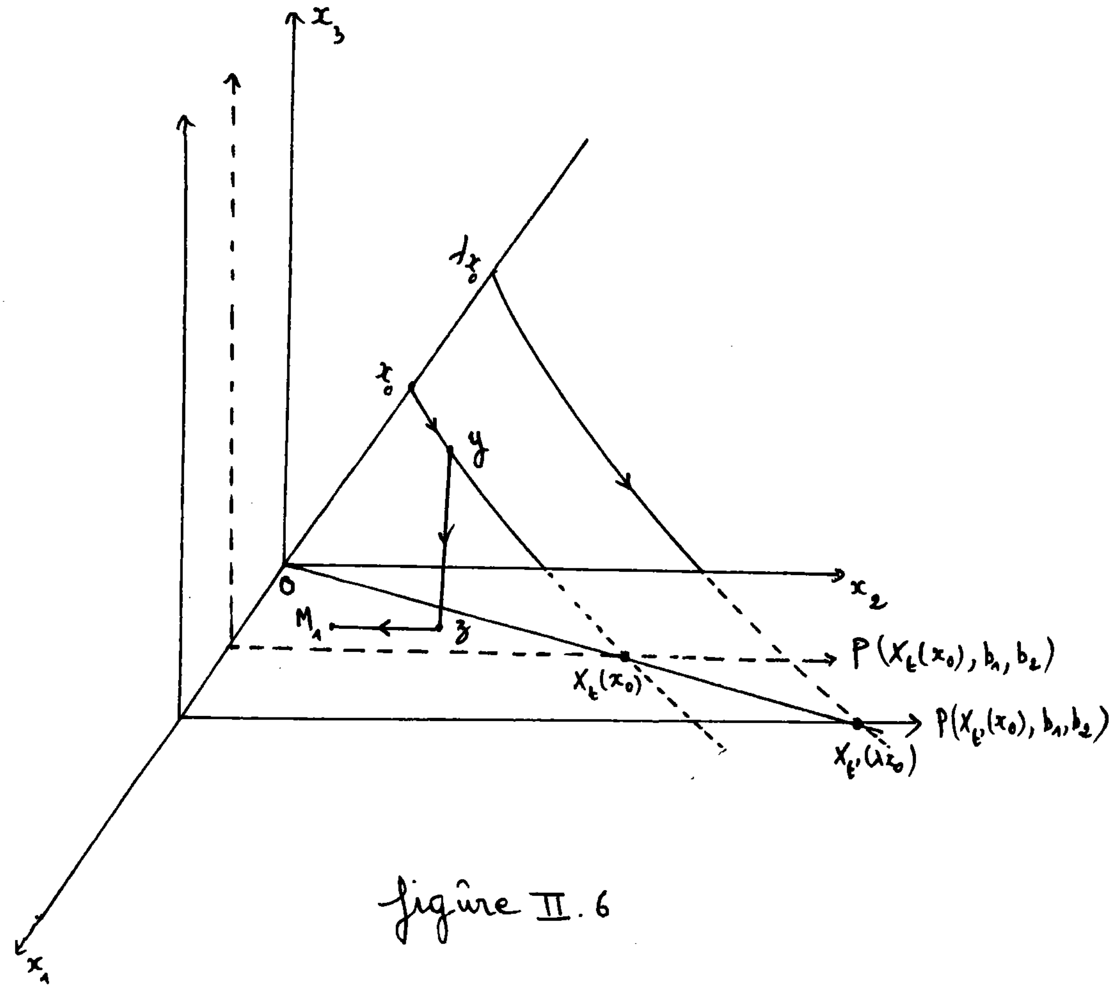


figure II.6

Soit $M_I \in B_I$, alors

$x_0 \xrightarrow{X} y$ en un instant $t_I < t$

$y \xrightarrow{u_2\, b_2} z$ en un instant t_2

$z \xrightarrow{(u_I\, b_I)} M_I$ en un instant t_3

t_2 et t_3 sont choisis arbitrairement, donc $\exists\, u_I, u_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$t_I + t_2 + t_3 = t$$

Soit $M_2 \in B_2$ (figure II.7)

$x_0 \xrightarrow{u_I\, b_I} x'$ au temps t_I.

$x' \xrightarrow{u_2\, b_2} \lambda\, x_0$ au temps t_2.

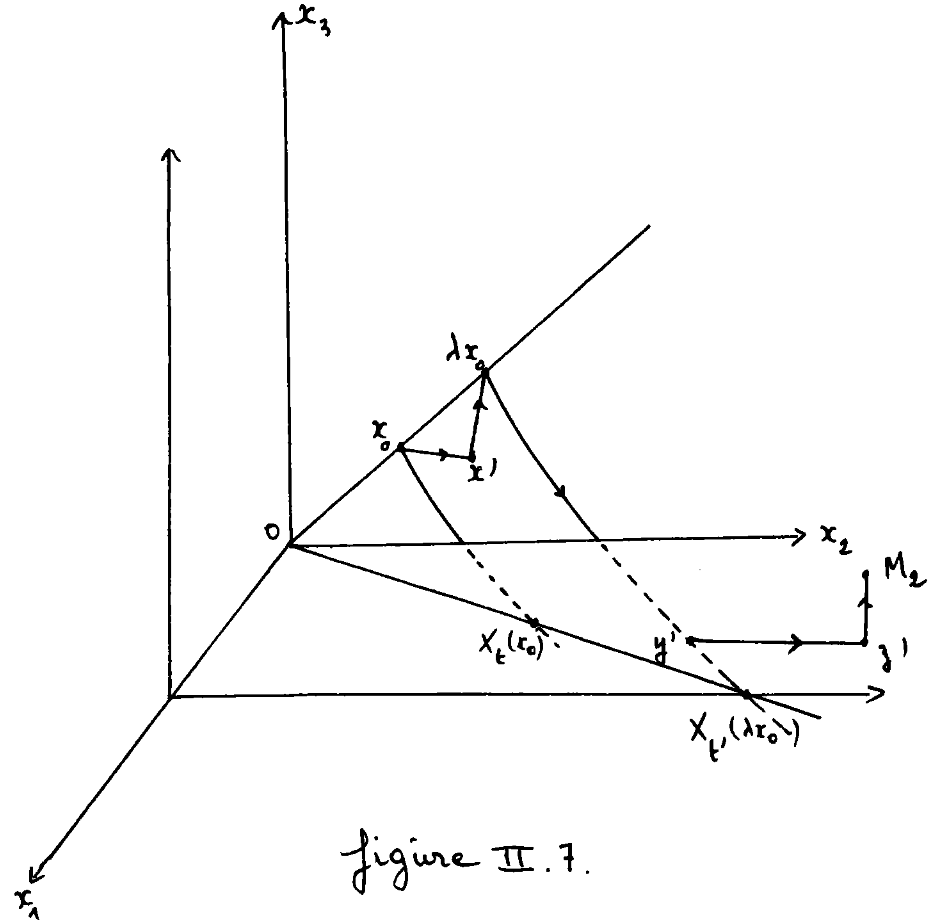


figure II.7.

$\lambda x_0 \xrightarrow{\quad X \quad} y'$ en un temps $t'_2 < t'$

$y' \xrightarrow{u_3\, b_I} z'$ au temps t_3 (Figure II.7)

$z' \xrightarrow{u_4\, b_2} M_2$ au temps t_4

$\exists\, u_I , u_2 , u_3 , u_4$ $\mathbb{R}$ tels que :

$$t_I + t_2 + t_3 + t_4 + t'_2 = t.$$

Par conséquent $\mathcal{F}(X , u_i\, b_i)$ est L.C.T en x.

2) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^3$: $\varphi(x_0) = 0$.

On sait que $\{ x : \varphi(x) = 0 \}$ est en général une réunion de droites, soit D la droite contenant x_0 et V son vecteur directeur.

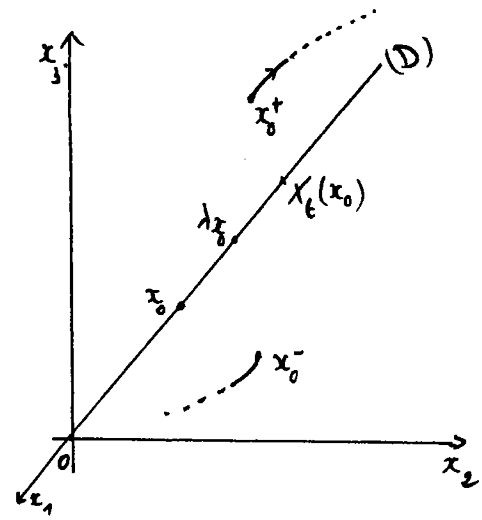
a) Si $X(x_0)$ et V sont indépendants, alors $\exists \varepsilon > o : \forall t \in]o, \varepsilon[$ $X_t(x) \notin P(b_I, b_2)$ (car $\Phi \neq \mathbb{R}^2$).

$\forall \lambda > I$, $X(\lambda x)$ et V sont indépendants, d'où en reprenant le même raisonnement du I), on montrera facilement que $\mathcal{F}(X, u_i b_i)$ est L.C.T en x_0.

b) Supposons que $X(x)$ et V sont dépendants, alors la trajectoire de X issue de x_0 est contenue dans D ; par suite $\exists \varepsilon > o : \forall t \in]o, \varepsilon[$, $X_t(x_0)$ est définie.

Il est clair qu'on peut atteindre le plan $P(b_I, b_2)$ à l'instant t par $\mathcal{F}(X, u_i b_i)$.

D'autre part φ change de signe entraîne qu'il existe deux points x_0^+, x_0^- appartenant à $P(b_I, b_2)$ tels que les trajectoires de X issues de x^+ et de x^- sont situées de part et d'autre du plan $P(b_I, b_2)$.



Soit $\varepsilon_I, \varepsilon_2 > o$ tels que

$$\forall t \in [o, \varepsilon_I[\; : \; X_t(x_0^+) \text{ défini.}$$

$$\forall t \in [o, \varepsilon_2[\; : \; X_t(x_0^-) \text{ défini.}$$

Alors en prenant :

$$\eta = \inf(\varepsilon_I, \varepsilon_2)$$

on montre facilement que $\forall t \in]o, \eta[$; on peut atteindre l'espace limité par : $P(X_t(x_0^+), b_I, b_2)$ et $P(X_t(x_0^-), b_I, b_2)$ à l'instant t par $\mathcal{F}(X, u_i b_i)$.

Par conséquent $\mathcal{F}(X, u_i b_i)$ est L.C.T en x_0.

Réciproquement

Supposons que φ a un signe constant, alors appelons $P^+(b_I, b_2, ox_I)$ si $\varphi \geq o$) le demi-espace limité par $P(b_I, b_2)$ de direction ox_I. On a $\forall y \in P(b_I, b_2)$, $X(y)$ pointe vers $P^+(b_I, b_2, ox_I)$; il s'ensuit que toutes les trajectoires de $\mathcal{F}(X, u_i b_i)$ issues de x_0 se trouvent dans $P^+(b_I, b_2, ox_I)$. Par conséquent

$\forall\ t > o : X_t\ (x_o) \in Fr\ \mathcal{B}(t\ , x)$ donc $\mathcal{F}(\ X\ , u_i\ b_i)$ n'est pas L.C.T en x_o.

3) Soit $x_o \in \mathbb{R}\ \ : X\ (x_o) = o$

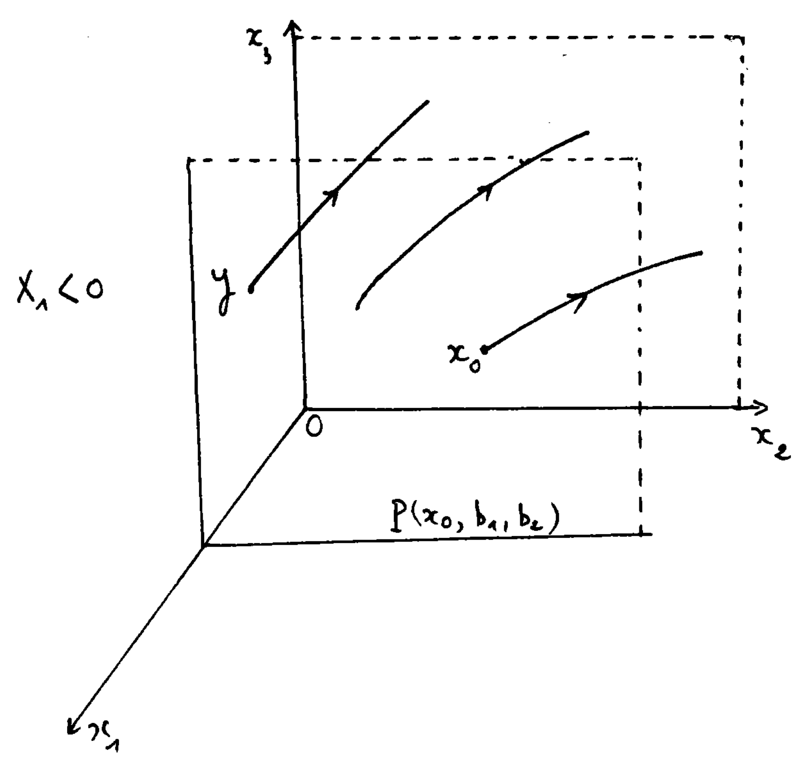
Supposons que a) n'est pas vérifié, alors $\forall\ y \in P\ (x_o\ , b_I\ , b_2)$, X (y) = o . Il s'ensuit que toutes les trajectoires issues de P $(x_o\ , b_I\ , b_2)$ sont contenues dans P $(x_o\ , b_I\ , b_2)$; on conclut que :

$$\forall\ t > o,\ \text{int}\,\mathcal{B}(t,\ x_o) = \emptyset$$

d'où : $\mathcal{F}(X\ , u_i\ b_i)$ n'est pas L.C.T en x_o.

Supposons que b) n'est pas vérifiée, alors l'application $x \longrightarrow X_I$ (x) a un signe constant. Il s'ensuit que $\forall\ y \in P\ (x_o\ , b_I\ , b_I)$, la trajectoire de X issue de y se trouve dans l'espace limité par P $(x_o\ , b_I\ , b_2)$ (droit ou gauche) (Figure II.8)

Côté droit dans le cas de la figure



(Figure II.8)

Par conséquent $x_0 \in Fr\mathcal{B}(t, x_0)$; $\forall t > o$ d'où : $\mathcal{F}(X, u_i b_i)$ n'est pas L.C.T en x_0.

Réciproquement

Soit X'_I la restriction de X_I à $P(x_0, b_I, b_2)$, alors $V(x_0) \cap P(x_0, b_I, b_2)$ est un voisinage du point (x_2^0, x_3^0) (où $(x_I^0, x_2^0, x_3^0) = x_0$) dans $P(x_0, b_I, b_2)$ non singulier pour X'_I. Or X'_I est C^∞ donc il existe deux points y_0^+ et y_0^- appartenant à $V(x_0) \cap P(x_0, b_I, b_2)$ tels que $X'_I(y_0^+) \cdot X'_I(y_0^-) < o$.

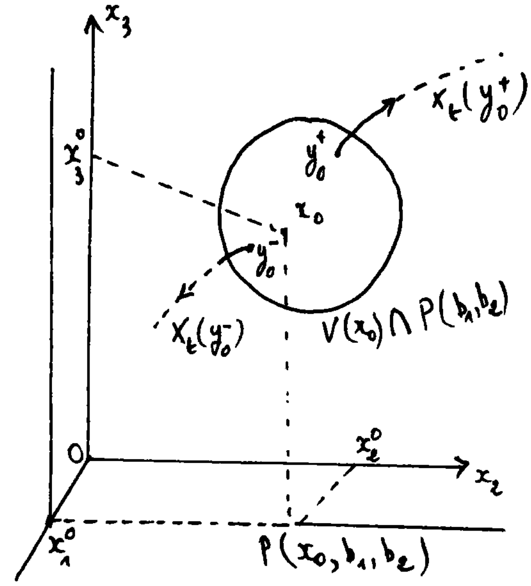
D'où : $\exists\, \varepsilon_I, \varepsilon_2 > o$ tels que les trajectoires

$t \longrightarrow X_t(y_0^+)$ $t \in [o, \varepsilon_I[$

$t \longrightarrow X_t(y_0^-)$ $t \in [o, \varepsilon_2[$

sont situées de part et d'autre de $P(x_0, b_I, b_2)$.

Soit $\eta = \inf(\varepsilon_I, \varepsilon_2)$, alors $\forall t \in [o, \eta[$, on peut atteindre l'espace limité par : $P(X_t(y_0^+), b_I, b_2)$ et $P(X_t(y_0^-), b_I, b_2)$ à l'instant t par des trajectoires de la F.C.V $\mathcal{F}(X, u_i b_i)$. On conclut que $\mathcal{F}(X, u_i b_i)$ est L.C.T en x_0. Ce qui achève la démonstration du théorème.



Remarque : Si $\Phi = \mathbb{R}^2$, X est tangent au plan $P(b_I, b_2)$, par suite toutes les trajectoires de $\mathcal{F}(X, u_i b_i)$ issues de $P(b_I, b_2)$ sont contenues dans $P(b_I, b_2)$ donc : $\forall t > o$, $\forall x \in P(b_I, b_2)$, $\mathrm{int}\,\mathcal{B}(t, x) = \emptyset$; il s'ensuit que $\mathcal{F}(X, u_i b_i)$ n'est L.C.T en aucun point de $P(b_I, b_2)$.

II.2.2. Application du théorème aux champs quadratiques dans $\mathbb{R}^3$

Soit X un champ quadratique dans $\mathbb{R}^3$

$X = (P_I, P_2, P_3)$

Exemple I :

Prenons P_I de la forme

$P_I(x_I, x_2, x_3) = (ax_I + bx_2 + cx_3)(a' x_I + b' x_2 + c' x_3)$.

Pour un point $x = (x_2, x_3) \in P(b_I, b_2)$ on a

$\varphi(x) = (b x_2 + c x_3)(b' x_2 + c' x_3)$

Soient les droites

$D_I = \{ (x_2, x_3) : bx_2 + cx_3 = 0 \}$ $\quad V_I = (-c, b)$

$D_2 \quad \{ (x_2, x_3) : b' x_2 + c' x_3 = 0 \}$ $\quad V_2 = (-c', b')$

Alors

I) $\mathcal{F}(X, u_i b_i)$ est L.C.T. en tout point $x \in P(b_I, b_2) - (D_I \cup D_2)$

2) si $x \in D_I$.

$\det(X(x), V_I) = -(b P_2(0, x_2, x_3) + c P_3(0, x_2, x_3)$
c'est un polynôme homogène de degré 2.

Si $\det(X(x), V_I) = 0$, la trajectoire de X issue de x est contenue dans D_I, par suite $\mathcal{F}(X, u_i b_i)$ est L.C.T en x si et seulement si : $bc' - c' b \neq 0$.

3) Supposons que $\{x : X(x) = 0\}$ est non vide, alors il est contenu dans la réunion des deux plans P_I, P_2 définis par :

$P_I = \{ (x_I, x_2, x_3) : a x_I + b x_2 + c x_3 = 0 \}$

$P_2 = \{ (x_I, x_2, x_3) : a' x_I + b' x_2 + c' x_3 = 0 \}$

soit $x_0 : X(x_0) = 0$

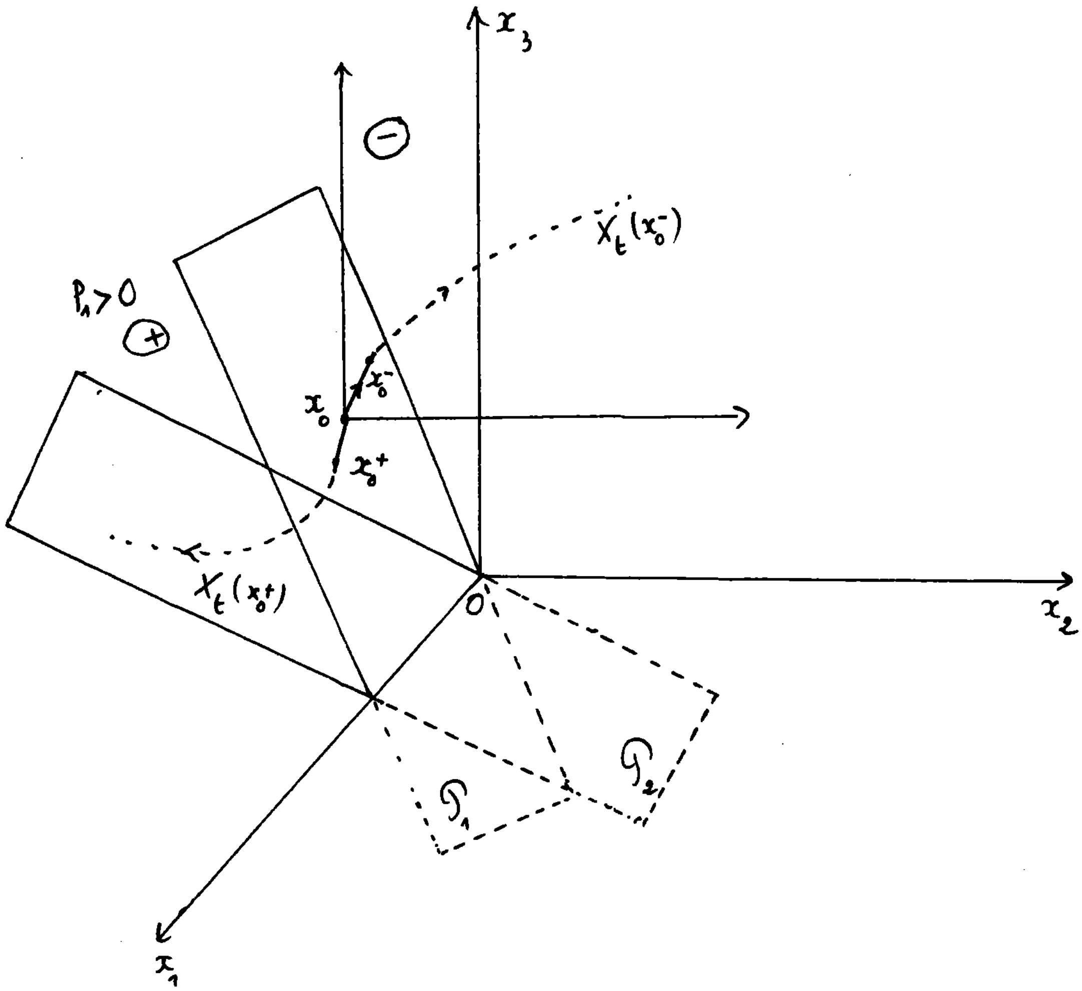
$\mathcal{F}(X, u_i b_i)$ est L.C.T en x_0 si et seulement si

a) $(b \neq 0$ ou $c \neq 0)$ et $(b' \neq 0$ ou $c' \neq 0)$

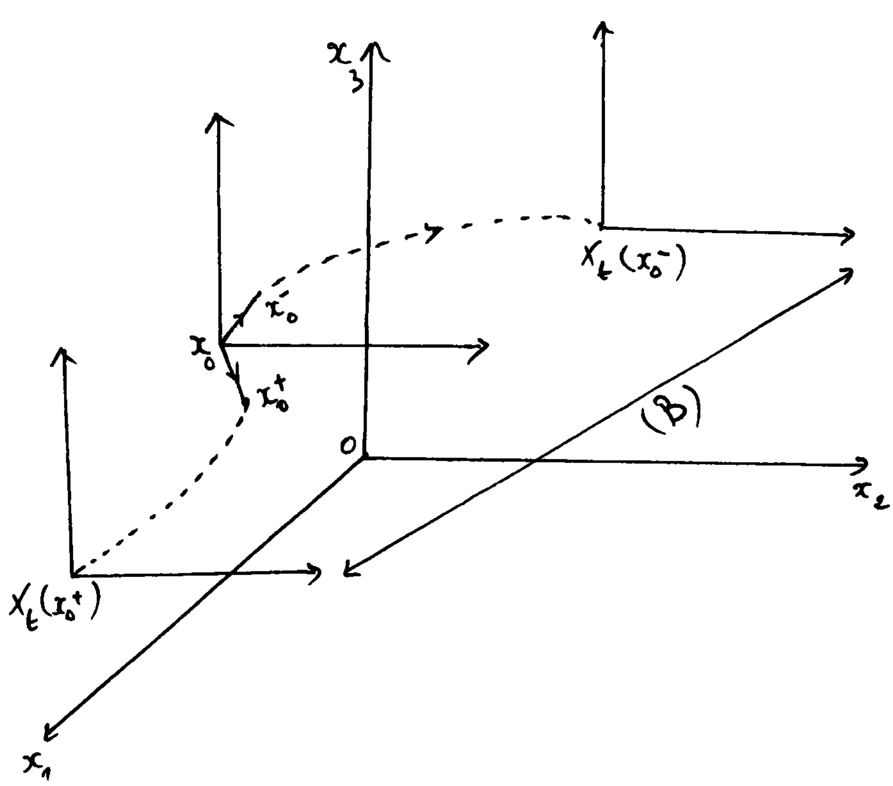
b) l'un des déterminants

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$$

est non nul.



En effet la condition a) entraîne que P (x_O , b_I , b_2) n'est pas singulier pour X la condition b) entraîne que P_I change de signe de part et d'autre de P_I et de P_2 donc $\mathcal{F}$(X , u_i b_i) est L.C.T en x_O.



Exemple 2 :

Prenons P_I de la forme

$P_I(x_I, x_2, x_3) = x_I x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_I$

Pour un point $x = (x_2, x_3) \in P(b_I, b_2)$ on a

$\varphi(x) = x_2 x_3$

$\{ x : \varphi(x) = o \} = D(b_I) \cup D(b_2)$

φ change de signe sur $\mathbb{R}^2$, donc $\mathcal{F}(X, u_i b_i)$ est L.C.T en tout point x de $P(b_I, b_2)$ tel que $X(x) \neq o$.

Soit $x_o \in \mathbb{R}^2 : X(x_o) = o$

Il est clair que $P(x_o, b_I, b_2)$ n'est pas singulier pour X_I donc a fortiori il ne l'est pas pour X. Il est évident que :

$x_o \in \{ x : P_I(x) = o \} \subset \{ x : X(x) = o \}$

Posons $x_o = (x_I^o, x_2^o, x_3^o)$.

Si $x_I^o = o$ alors $P_I(x_o) = o \Longleftrightarrow x_o \in D(b_I) \cup D(b_2)$. Or la fonction P_I définie sur $P(x_o, b_I, b_2)$ (= $P(b_I, b_2)$) est dans ce cas φ ; comme φ change de signe sur un voisinage de x_o, alors $\mathcal{F}(X, u_i b_i)$ est L.C.T en x_o.

Supposons que $x_I^o \neq o$, alors $\exists V(x_o)$ tel que $\forall x = (x_I, x_2, x_3) \in V(x_o)$.

On a : $x_I \neq o$; d'où en posant :

$X = \dfrac{x_2}{x_I}$, $Y = \dfrac{x_3}{x_I}$ et $Q(X, Y) = X + Y + XY$

On obtient :

$P(x_I, x_2, x_3) = o \Longleftrightarrow Q(X, Y) = o$

Il est facile de voir que Q change de signe sur un voisinage de $\left(\dfrac{x_2^o}{x_I^o}, \dfrac{x_3^o}{x_I^o} \right)$; par suite P change de signe sur un voisinage de

(x_1^0 , x_2^0 , x_3^0). Donc $\mathcal{F}(X , u_i b_i)$ est L.C.T en x_0 .

Exemple 3

Prenons P_1 de la forme

$$P_1 (x_1 , x_2 , x_3) = x_1 x_2 + x_3 x_1$$

On a alors $\varphi (x) = 0, \forall x \in P (b_1 , b_2)$. Cette égalité entraîne que X est tangent au plan $P (b_1 , b_2)$, donc toutes les trajectoires de $\mathcal{F}(X , u_i b_i)$ sont contenues dans $P (b_1 , b_2)$. Par conséquent :

$$\forall t > 0 \text{ int } \mathcal{B}(t , x) = \emptyset$$

donc $\mathcal{F}(X , u_i b_i)$ n'est pas L.C.T en aucun point de $P (b_1 , b_2)$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2 : X (x_0) = 0$

Si $x_0 \in \{ x : P_1 (x) = 0 \} \subset \{ x : X (x) = 0 \}$

Or $\{ x : P_1 (x) = 0 \} = P (b_1 , b_2) \cup \mathcal{P}$

où $\mathcal{P}$ est le plan défini par :

$$\mathcal{P} = \{ x_2 + x_3 = 0 \}$$

Si $x_0 \in P (b_1 b_2)$, alors pour tout voisinage $V (x_0)$, $\varphi_1 = \varphi = 0$ sur $V (x_0) \cap P (b_1 , b_2)$ donc $\mathcal{F}(X , u_i b_i)$ n'est pas L.C.T en x_0.

Si $x_0 \in \mathcal{P} - P (b_1 , b_2)$ alors il existe un voisinage $V (x_0)$ tel que : P_1 change de signe sur $V (x_0) \cap P (x_0 , b_1 , b_2)$. Par suite $\mathcal{F} (X , u_i b_i)$ est L.C.T en x_0.

CHAPITRE III : L.C.T DES F.C.V SUIVANTES $\{X + u\,Y\,,\ -1 \leq u \leq 1\}$ OU X ET Y HOMOGENES SUR $\mathbb{R}^2$ $\{X\,,\ u\,Y\}_{u \in \mathbb{R}}$ OU X ET Y HOMOGENES SUR $\mathbb{R}^2$

Dans ce chapitre, on va étendre certains résultats obtenus dans les chapitres I et II aux F.C.V : $\{X + u\,Y\,,\ -1 \leq u \leq 1\}$ et $\{X\,,\ u\,Y\}_{u \in \mathbb{R}}$ où X et Y sont deux champs homogènes sur le plan tels que d (X) ≥ 1, d (Y) ≥ 1.

Le premier paragraphe traitera l'étude de la L.C.T de la F.C.V $\{X + u\,Y,\ -1 \leq u \leq 1\}$ en un point x non singulier de X et les propriétés de stabilité et de généricité.

Le deuxième paragraphe est consacré à l'étude de la L.C.T de la F.C.V $\{X\,,\ u\,Y\}_{u \in \mathbb{R}}$ en un point x appartenant à l'ensemble H défini par $H = \{(x_1\,,\ x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1\,Q_2\,(x_1\,,\ x_2) - x_2\,Q_1\,(x_1\,,\ x_2) = 0\}$ où Q_1 et Q_2 sont les composantes du champ Y.

III.1 Cas de la famille $\{X + u\,Y,\ -1 \leq u \leq 1\}$ dans le plan

Dans ce paragraphe, on donnera une condition nécessaire et suffisante de la L.C.T en un point $x \notin \Delta$ tel que X (x) $\neq 0$. Dans le cas où $x \in \Delta$, on donnera seulement une condition suffisante qui en général n'est pas nécessaire (Théorème III.1.3). En utilisant le critère géométrique de HERMES $(R\ H)_2$, on montrera dans la proposition III.1.4. que si la F.C.V $\{X + u\,Y\,,\ -1 \leq u \leq 1\}$ est L.C.T en au moins un point, alors elle l'est presque partout.

III.1.1. Proposition

Supposons que les champs X et Y sont colinéaires ($\Gamma^C = \mathbb{R}^2$), alors $\mathcal{S}(X , Y)$ n'est L.C.T en aucun point de $\mathbb{R}^2$.

Preuve :

Remarquons d'abord que de tels champs X , Y existent, par exemple : pour m = n = 2

$$X(x_1 , x_2) = (x_1^2 , x_1 x_2)$$

$$Y(x_1 , x_2) = (x_1 x_2 , x_2^2)$$

Montrons maintenant la proposition.

Il est clair que $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $\exists \lambda(x) \in \mathbb{R}$: $X(x) = \lambda(x) Y(x)$. Soit $u \in [-1 , 1]$; alors le champ Z^u défini par $Z^u(x) = X(x) + u\, Y(x)$ est colinéaire au champ Y.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$; montrons que $\mathcal{S}(X , Y)$ n'est pas L.C.T en x_0.

Si $Y(x_0) \neq 0$, alors $\exists \varepsilon > 0 : \forall t \in [0 , \varepsilon[$, $Y_t(x_0)$ est défini. Considérons la sous-variété S_Y de dimension 1 définie par :

$$S_Y = \{ Y_t(x_0) : t \in [0 , \varepsilon[\}$$

Alors $\forall y \in S_Y, \exists \tau \in [0 , \varepsilon[: y = Y_\tau(x_0)$. $Z^u(Y_\tau(x_0))$ est colinéaire à $Y(Y_\tau(x_0))$, donc le champ Z^u est tangent à la sous-variété S_Y ; par suite d'après un résultat de géométrie différentielle, toutes les trajectoires issues de S_Y du champ Z^u sont contenues dans S_Y. On conclut que $\forall t > 0$, $\operatorname{int} \mathcal{A}(t , x_0) = \emptyset$; donc $\mathcal{S}(X , Y)$ n'est pas L.C.T en x_0.

Si $Y(x_0) = 0$ et $X(x_0) = 0$ alors $\mathcal{A}(t , x_0) = \{ x_0 \}$

Si $Y(x_0) = 0$ et $X(x_0) \neq 0$, on considérera la sous-variété S_X définie par

$$S_X = \{ X_t(x_0) : t \in [0 , \eta[\}$$

et en procédant de la même façon, on a le même résultat.

III.1.2 Remarque

Ce résultat est vrai pour toute F.C.V $\mathcal{S}(X , Y)$ où X et Y sont des champs C^{∞}.

III.1.3. Théorème

Supposons que $\Delta \neq \mathbb{R}^2$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$: $X(x_0) \neq 0$

1) Si $x_0 \in \Gamma - \Delta$ alors $\mathcal{S}(X , Y)$ est L.C.T en x_0.

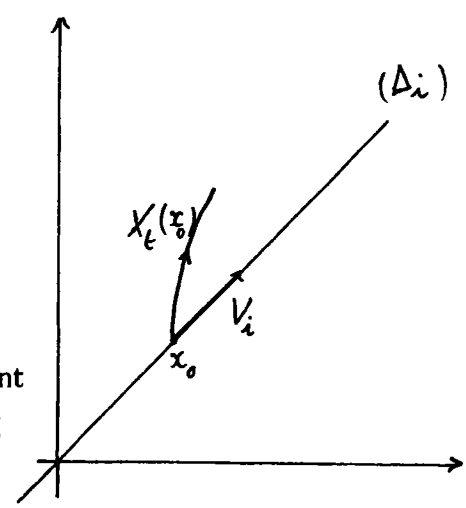
2) Si $x_0 \in \Gamma \cap \Delta$, une condition suffisante pour que $\mathcal{S}(X , Y)$ soit L.C.T en x_0 est que : X (x) est indépendant avec V_i (V_i i est tel que $x \in \Delta_i$).

3) Si $x_0 \in \Gamma^C$, alors $\mathcal{S}(X , Y)$ est L.C.T en x_0 si et seulement si X (x) est indépendant avec W_j , (j est tel que $x \in \Gamma_j$).

Preuve :

1) évident d'après $(R\ H)_2$

2) Soit $x_0 \in \Gamma \cap \Delta$



Si X (x_0) est indépendant avec V_i, alors $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $\forall \tau \in \,]0 , \varepsilon[$: $X_\tau (x_0) \in \Gamma - \Delta$ donc $\mathcal{S}(X , Y)$ est L.C.T en x_0.

3) Si $x_0 \in \Gamma^C$, alors $\exists\, i \in \{1, \ldots k\}$ tel que $x \in \Gamma_i$.

Supposons que X (x) est indépendant avec W_i, alors $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $\forall \tau \in \,]0 , \varepsilon[$: $X_\tau (x) \in \Gamma - \Delta$; par conséquent $\mathcal{S}(X , Y)$ est L.C.T en x_0.

Réciproquement

Supposons que X (x_0) est dépendant avec W_i. Puisque X (x) et Y (x) sont dépendants, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ les vecteurs $X(\lambda x_o)$ et $Y(\lambda x_o)$ sont colinéaires au vecteur W_i ; par conséquent, $\forall u \in [-1, 1]$, le champ $Z^u = X + uY$ est tangent à la sous-variété Γ_i, il s'ensuit que toutes les trajectoires issues de Γ_i sont contenues dans Γ_i, d'où :

$$\forall t > o, \ \text{int}\,\mathcal{A}(t, x_o) = \emptyset$$

Par suite $\mathcal{S}(X, Y)$ n'est pas L.C.T en x_o.

III.1.3. Proposition

Si $\Delta = \mathbb{R}^2$, alors $\mathcal{S}(X, Y)$ n'est L.C.T en aucun point de Γ.

Preuve

Supposons que $\forall x \in \mathbb{R}^2$: $Y(x)$ est colinéaire à $[Y, X](x)$.

Soit $x \in \Gamma$, alors les courbes intégrales de Y et de $[Y, X]$ en tout point $X_t(x)$ se trouvent du même côté. D'après $(R\ H)_2$ $\mathcal{S}(X, Y)$ n'est pas L.C.T en x_o.

On va maintenant étudier les propriétés de stabilité et de généricité de la L.C.T de la F.C.V $\mathcal{S}(X, Y)$.

III.1.4 Proposition

Soit la F.C.V $\mathcal{S}(X, Y)$, $d(x) = m$, $d(Y) = n$. Supposons qu'il existe $x_o \in \Gamma$ tel que $\mathcal{S}(X, Y)$ est L.C.T en x_o, alors l'ensemble $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{S}(X, Y)$ L.C.T en $x\}$ est dense dans $\mathbb{R}^2$.

Preuve

Par l'absurde :

Supposons qu'il existe un ouvert O de $\mathbb{R}^2$ sur lequel $\mathcal{S}(X, Y)$ n'est

L.C.T en aucun point. Θ contient un ouvert sur lequel X et Y sont indépendants car sinon :

$\forall\, x \in O$, det (X (x) , Y (x))= o, d'où par analyticité, det (X (x) , Y (x)) = o $\forall\, x \in \mathbb{R}^2$ c'est-à-dire $\Gamma^C = \mathbb{R}^2$, ceci qui entraîne d'après la proposition précédente que $\mathcal{S}$ (X , Y) n'est L.C.T en aucun point de $\mathbb{R}^2$ (contradiction).

Soit $U \subset O$ tel que $\forall\, x \in U$: det (X (x) , Y (x)) $\neq$ o.

D'après $(RH)_2$, puisque $\forall\, x \in U$, $\mathcal{S}$(X , Y) n'est pas L.C.T en x, on a :

$\forall\, x \in U$: det (Y (x), [X , Y] (x)) = o

Donc $\forall\, x \in \mathbb{R}^2$: det (Y (x), [X , Y](x)) = o (par analycité).

Par conséquent $\mathcal{S}$(X , Y) n'est L.C.T en aucun point de Γ (proposition III.1.3) Contradiction avec l'hypothèse.

III.1.5. Remarques

1) La proposition précédente est vraie pour toute F.C.V $\{ X + u\,Y ,\ -1 \leq u \leq 1 \}$ où X et Y sont analytiques.

2) x_0 peut être choisi même dans Γ^C, car dans ce cas $\Delta \neq \mathbb{R}^2$, $\Gamma^C \neq \mathbb{R}^2$ donc $\mathcal{S}$(X , Y) est au moins L.C.T sur $\Gamma - \Delta$ qui est dense dans $\mathbb{R}^2$ pour X et Y homogènes.

Avant d'énoncerla proposition III.1.6, remarquons que la donnée d'un champ X homogène de degré m est la donnée de 2(m + 1) coefficient réels, d'où son identification à un élément de $\mathbb{R}^{2(m+1)}$.

III.1.6 Proposition

Considérons les ensembles suivants :

$A = \{ (X , X , x) \in \mathbb{R}^{2(m+n+3)} : x \in \Gamma (X , Y) - \Delta (X , Y) \}$

$B = \{ (X , Y , x) \in \mathbb{R}^{2(m+n+3)} : \mathcal{S}(X , Y) \text{ L.C.T en } x \}$

Alors

A est un ouvert de $\mathbb{R}^{2(m+n+3)}$

B est dense dans $\mathbb{R}^{2(m+n+3)}$

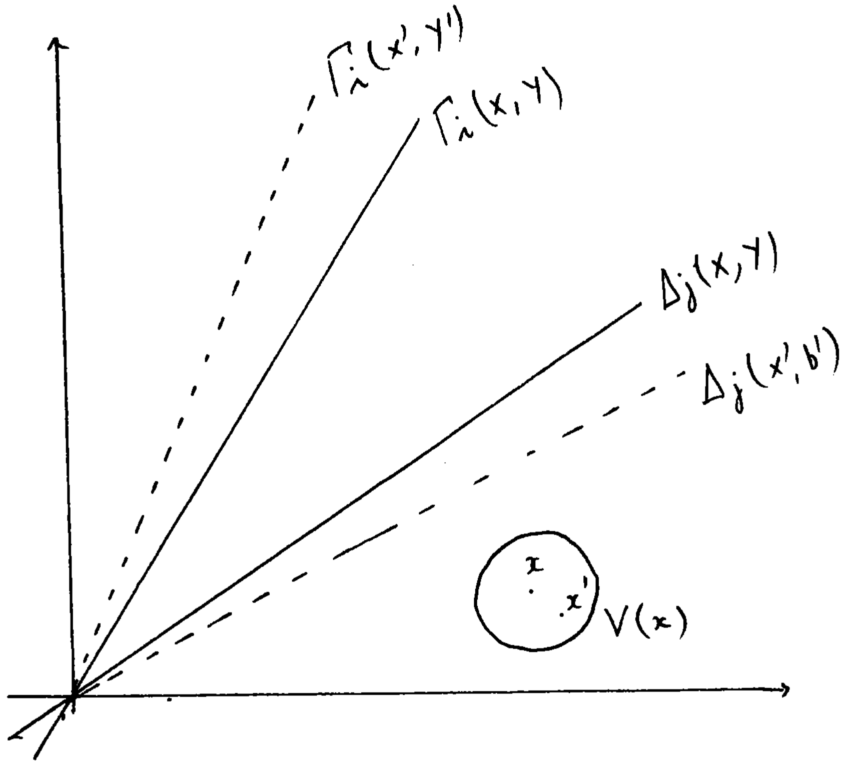
Preuve

1) Soit $(X , Y , x) \in A$, alors on a :

$$\det (X (x), Y (x)) \neq 0$$

$$\det (Y (x) , [X , Y] (x)) \neq 0$$

d'où l'existence d'un voisinage V de (X , Y , x) qu'on peut prendre de la forme $V = V (X) \times V (Y) \times V (x)$,



tel que $\forall (X' , Y' , x') \in V : x' \in \Gamma (X' , Y') - \Delta (X' , Y')$
donc A est un ouvert de $\mathbb{R}^{2(m+n+3)}$

On conclut que si $x \in \Gamma_{(X,Y)} - \Delta_{(X,Y)}$ c'est-à-dire $\mathcal{S}(X , Y)$ L.C.T en x, alors $\mathcal{S}(X', Y')$ est L.C.T en x' pour tout $(X', Y', x') \in V$.

2) Par l'absurde :

Supposons qu'il existe un ouvert O de $\mathbb{R}^{2(m+n+3)}$ tel que :
$\forall (X', Y', x') \in O$, $\mathcal{S}(X', Y')$ n'est pas L.C.T en x'.

Ecrivons :

$$\Gamma^c (X', Y') = \bigcup_{j=I}^{k} \Gamma_j (X', Y')$$

$$\Delta(X', Y') = \bigcup_{i=I}^{k} \Delta_i (X', Y')$$

$\mathcal{S}(X' Y')$ non L.C.T en x' entraîne que $x' \notin \Gamma - \Delta$; d'où l'existence de $(i, j) \in \{ I, ...k \} \times \{ I, ...k' \}$ tel que $x' \in \Delta_i \cup \Gamma_j$, par suite il résulte du théorème III.I.3 que, $\forall (X', Y', x') \in O$ on a :

$$(I) \quad \prod_{i=I}^{k} \det (X'(x'), V_i (X', Y')) \times \prod_{i=I}^{k'} \det (X'(x'), W_j (X', Y')) = 0$$

Par analycité, (I) est vraie pour tout $(X, Y, x) \in \mathbb{R}^{2(m+n+3)}$ Contradiction.

Contre exemple

$X (x_I, x_2) = (o, x_I^m)$, $Y (x_I, x_2) = (x_2^n, - x_I^n)$

$\Delta = \{ (x_I, x_2) : n x_I^{n+I} + m x_2^{n+I} = o \}$

$\Gamma^c = \{ (x_I, x_2) : x_I = o \text{ ou } x_2 = o \}$

Si n est impair $\Delta = \{ (o,o) \}$

$W_I = \binom{I}{o}$, $W_2 = \binom{o}{I}$

$X (W_I) = W_2$, $X (W_2) = W_I$.

Les vecteurs $X(W_i)$ et W_i $(i \in \{1,2\})$ sont indépendants, par suite $(1) \neq 0$.

Si n est pair :

$$n\, x_1^{n+1} + m\, x_2^{n+1} = \left(n^{\frac{1}{n+1}} x_1\right)^{n+1} + \left(m^{\frac{1}{n+1}} x_2\right)^{n+1} = 0$$

donc $V_1 = \left(-\dfrac{m^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{1}{n+1}}}\right)$ est un vecteur directeur de $\Delta = \Delta_1$

Or $\det(X(V_1), V_1) \neq 0$. Il s'ensuit que $(1) \neq 0$.

On conclut que B est dense dans $\mathbb{R}^{\ell(m+n+3)}$

III.2 Etude de la L.C.T. de la F.C.V. $\{X, uY\}_{u \in \mathbb{R}}$: $d(X) \geq 1$, $d(Y) \geq 1$

On a vu dans le chapitre II que la F.C.V $\{X, ub\}_{u \in \mathbb{R}}$ est L.C.T en un point $x_0 \in D(b) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 b_2 - x_2 b_1 = 0\}$ si et seulement si b et $X(x_0)$ sont indépendants. Dans ce paragraphe, on va montrer que ce résultat reste vrai pour la F.C.V $\{X, uY\}_{u \in \mathbb{R}}$ sous certaines conditions.

Posons : $Y(x) = (Q_1(x), Q_2(x))$, $x = (x_1, x_2)$

$R(x) = x_1 Q_2(x) - x_2 Q_1(x)$

$H = \{x \in \mathbb{R}^2 : R(x) = 0\}$

R est un polynôme homogène de degré $(n+1)$.

Supposons que H s'écrive $H = \bigcup_{i=1}^{k} H_i$ (H_i des droites).

III.2.1 Proposition

Soit $x_o \in H$, une condition nécessaire et suffisante pour que int $\mathcal{B}(t, x) \neq \emptyset$

$\forall t > o$ est : $X(x_o)$ et $Y(x_o)$ indépendants.

Preuve :

Remarquons d'abord que $x_o \in H$ est équivalent à dire que x_o et $Y(x_o)$ sont colinéaires. On va montrer que la première implication est vraie pour x_o quelconque de $\mathbb{R}^2$.

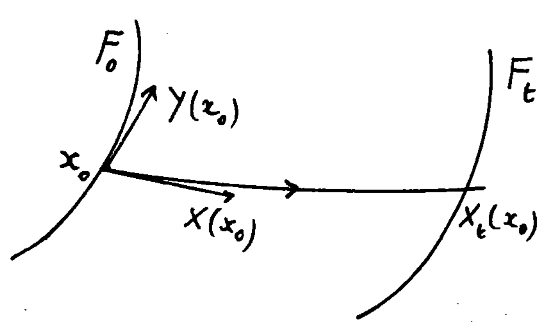
Supposons que $X(x_o)$ et $Y(x_o)$ sont indépendants.

$Y(x_o) \neq o$ entraîne qu'il existe $\varepsilon > o$ tel que $\forall t \in [o, \varepsilon[$, $Y(X_t(x_o)) \neq O$; par suite l'application Ψ_t ($t \in [o, \varepsilon[$) définie par :

$$\Psi_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\Psi_t(s) = Y_s(X_t(x_o))$$

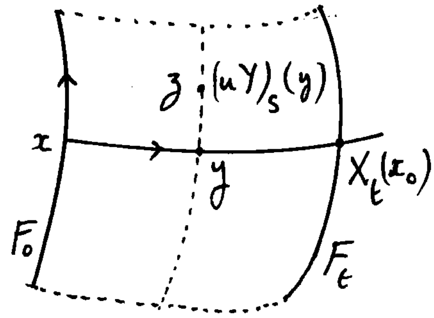
est bijective d'un voisinage V_t de $O \in \mathbb{R}$ dans un voisinage de $X_t(x_o)$. Soit $F_t = \Psi_t(V_t)$, $t \in [o, \varepsilon[$, F_t est une sous variété de dimension 1.



Les (F_t) $o \leq t \leq \varepsilon$ définissent un feuilletage de dimension 1 d'un voisinage de la trajectoire $\{ t \longrightarrow X_t(x_o), o \leq t \leq \varepsilon \}$ qu'on notera : $V_\varepsilon(X, x_o)$

Soit $t \in [\, o , \varepsilon \,[$ et soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenu dans $V_\varepsilon\,(X , x_o)$ limité par les feuilles, F_o et F_t

qu'on notera : $D\,(F_o , F_t)$.



(Figure III.1)

Montrons que $U \subset \mathcal{B}(t , x_o)$

soit $z \in U$, alors :

$x_o \xrightarrow{\quad X \quad} y$ en un temps $t_I < t$

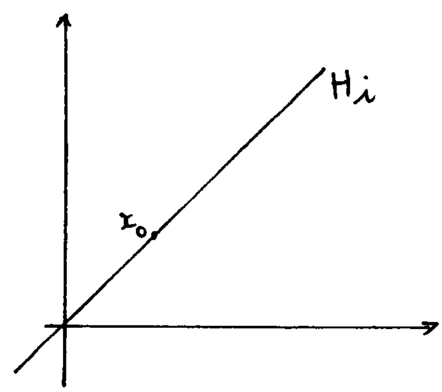
$y \xrightarrow{\quad uY \quad} z$ en un temps u s

($u \in \mathbb{R}$, $s \in V_t$). On peut choisir u assez grand pour que $u\,s + t_I = t$

donc $x_o \xrightarrow{\mathcal{F}(X , Y)} z$ au temps t.

($u > o$, $s > o$ dans le cas de la figure, si $s < o$ on choisira $u < o$).

Réciproquement, soit $x_o \in H$.



Supposons que $X\,(x_o)$ et $Y(x_o)$ sont dépendants. x_o et $Y\,(x_o)$ sont dépendants entraîne que la trajectoire de Y est entièrement contenue dans H_i. Par suite les champs X et Y sont trangents à la droite H_i. Il s'ensuit que toutes les trajectoires de $\mathcal{F}\,(X , Y)$ issues de H_i sont contenues dans H_i ; On conclut donc :

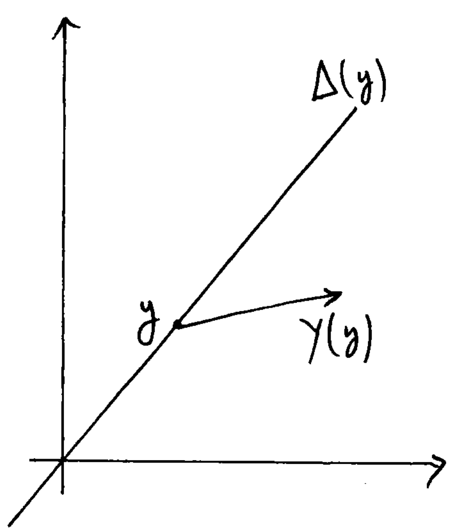
$$\forall\, t > o \qquad \text{int}\,\mathcal{B}(t , x_o) = \emptyset \qquad \text{CQFD}$$

Avant d'énoncer une proposition, on va donner une définition.

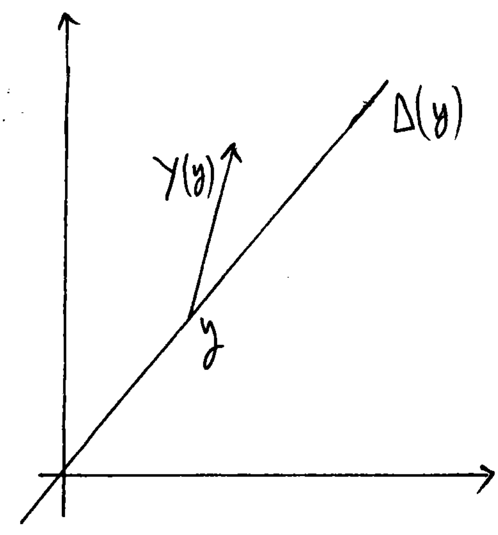
III.2.2. <u>Définition</u>

Soit $y \in \mathbb{R}^2$ et $\Delta\,(y)$ la droite passant par y. On dit que $Y\,(y)$

pointe à droite (respectivement à gauche) de $\Delta(y)$ si (figure III.2)(respectivement figure III.3).



(Figure III.2)



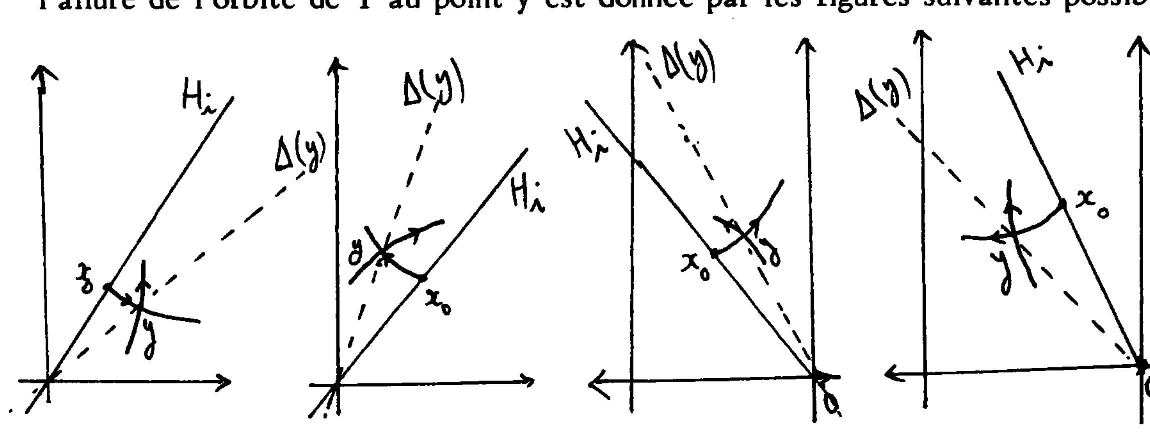
(Figure III.3)

III.2.3. <u>Proposition</u>

Soit $x_0 \in H$. Supposons qu'il existe un voisinage $V(x_0)$ de x_0 tel que : $\forall y \in V(x_0)$, $X(x_0)$ et $Y(y)$ ne pointent pas du même côté des droites H_i et $\Delta(y)$; Alors $\mathcal{F}(X , Y)$ est L.C.T en x_0 si et seulement si $X(x_0)$ est indépendant avec $Y(x_0)$

<u>Preuve</u> :

L'hypothèse de la proposition III.2.3. signifie géométriquement que l'allure de l'orbite de Y au point y est donnée par les figures suivantes possibles



Etudions le premier cas (la démonstration est la même pour les trois autres cas).

Supposons que $X(x_o)$ et $Y(x_o)$ sont indépendants.

Soit $\eta > o$ tel que $Y_t(x_o)$ est définie $\forall\, t \in\,]-\eta, \eta[$ et soit $t_o \in\,]o, \eta[$ (cas de la figure III.3'), alors $\exists\, \lambda > 1$; $Y_{t_o}(x_o) = \lambda x_o$. Choisissons ε, η, t_o assez petits pour que l'on ait :

a) les trajectoires suivantes :

$$t \longrightarrow X_t(x_o)\,, \qquad t \longrightarrow X_t(\lambda x_o)$$

Soient contenues dans $V(x_o) \cap V_\varepsilon(X, x_o)$. ($V_\varepsilon(X, x_o)$ est le voisinage de $X_t(x_o)$ défini dans la proposition III.2.1).

b) la feuille F_τ passant par le point $X_{\frac{t}{\lambda^{m-1}}}(\lambda x_o)$ est telle que $\tau < \varepsilon$

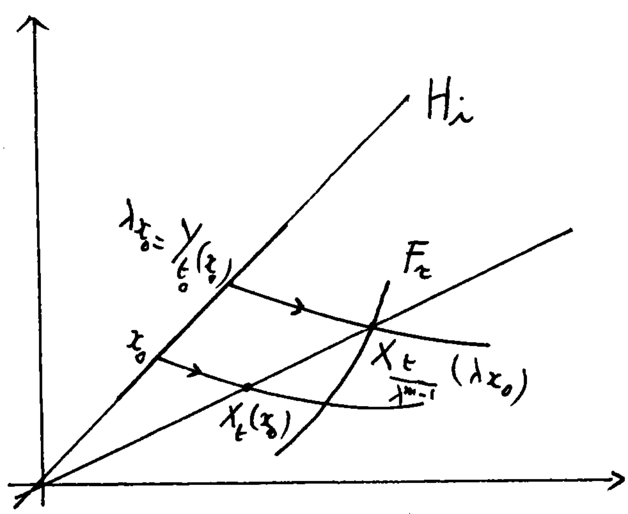
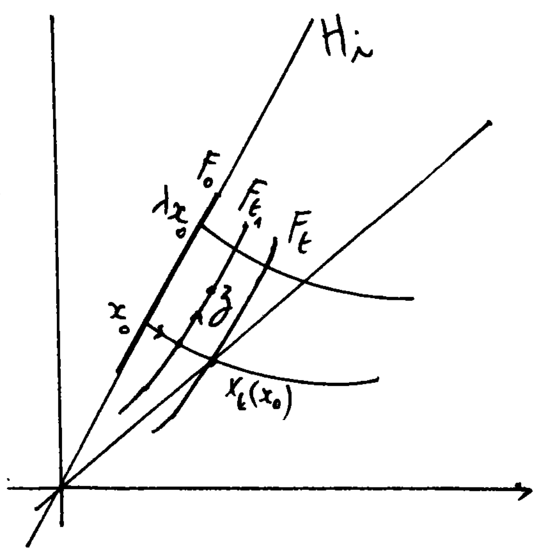


figure III.3'.

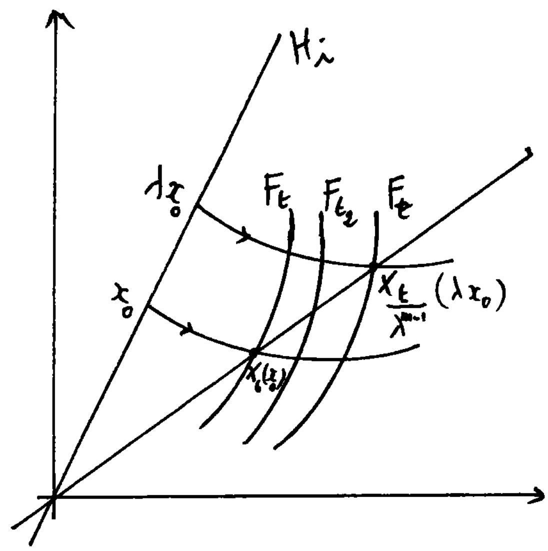
Considérons le voisinage de $X_t(x_o)$ définie par :

$$V = D(F_o, F_\tau) \cap V(x_o) \cap V_\varepsilon(X, x_o)$$

Montrons que $V \subset \mathcal{B}(t\ ,\ x_0)$



(Figure III.4)



(Figure III.5.)

Supposons que $z \in D\ (F_0\ ,\ F_t) \cap V\ (x_0) \cap\ V_\varepsilon(X\ ,\ x_0)$; alors $\exists\ t_I$, s_I tels que :

$$z = Y_{s_I} \circ X_{t_I}\ (x_0)$$

avec $t_I \in\ ]o\ ,\ t[\ \ ,\ s_I \in\ ]o\ ,\ \eta\ [$ (figure III.4)

Soit $u \in \mathbb{R}\ ,\ z = (u\ Y)_{\frac{s_I}{u}} \circ X_{t_I}\ (x_0)$

Choisissons u tel que $\frac{s_I}{u} + t_I = t$. Il s'ensuit que $x_0 \xrightarrow{\mathcal{F}(X\ ,\ Y)} z$ à l'instant t.

Si $z \in D\ (F_t\ ,\ F_\tau\ ) \cap V\ (x_0) \cap V_\varepsilon\ \ (X\ ,\ x_0)$, alors $\exists\ t_2 \in\ ]o\ ,\varepsilon\ [$, $s_2 \in\ ]o\ ,\ \eta\ [$, $s'_2 \in\ ]-\ \eta,\ o\ [$, $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$z = Y_{s_2} \circ X_{t_2}\ (x_0)$$

$$= Y_{s'_2} \circ X_{t_2} \circ Y_{t_0}\ (x_0) \qquad \text{(Figure III.5)}$$

$$= (u_2\ Y)_{\left(\frac{u_2}{s'_2}\right)^{-1}} \circ\ X_{t_2} \circ\ (u_0\ Y)_{\left(\frac{u_0}{t_0}\right)^{-1}}\ (x_0)$$

Or $t_2 < \frac{t}{\lambda^{m-1}}$, donc $t_2 < t$

D'où :

En choisissant u_0 et u_2 convenablement on obtient :

$$\left(\frac{u_2}{s'_2}\right)^{-1} + \left(\frac{u_0}{t_0}\right)^{-1} + t_2 = T$$

Par suite $x \xrightarrow{\mathcal{F}(X\ ,\ Y)} z$ à l'instant t.

Donc $\mathcal{F}(X , Y)$ est L.C.T en x_0

Réciproquement

Si $X(x_0)$ et $Y(x_0)$ sont dépendants, alors $\mathrm{int}\,\mathcal{B}(t , x_0) = \emptyset\ \forall t > 0$, par suite $\mathcal{F}(X , Y)$ n'est pas L.C.T en x_0.

III.2.4. Proposition

Supposons que $d(X) > 1$.

Si $H = \mathbb{R}^2$, alors $\mathcal{F}(X , Y)$ est L.C.T en un point $x_0 \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si les vecteurs $X(x_0)$ et $Y(X_0)$ sont indépendants.

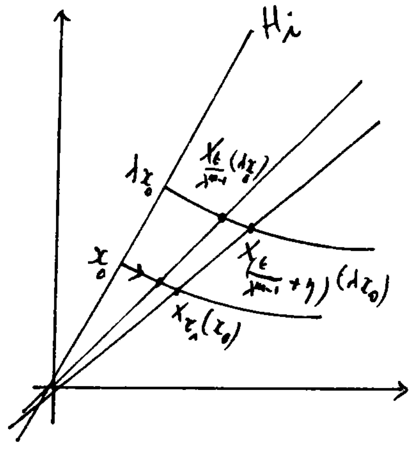
Preuve :

Remarquons que dans ce cas $\forall\ y \in \mathbb{R}^2$, $Y(y)$ est parallèle à $\Delta(y)$; en plus la trajectoire de Y issue de y est contenue dans $\Delta(y)$.

Soit $\varepsilon > 0$: $X_t(x_0)$ est définie $\forall\ t \in [\ 0 , \varepsilon\ [$

Soit $\eta_1 \in\ ]\ 0 , \varepsilon\ [$ tel que $\eta_1 < \varepsilon - t$

Alors on a :



$$X_{t+\eta_1}(x_0) = X_{\frac{t+\eta_1}{\lambda^{m-1}}}(\lambda x_0)$$

$$= X_{\left(\frac{t}{\lambda^{m-1}} + \frac{\eta_1}{\lambda^{m-1}}\right)}(\lambda x_0)$$

Puisque $\lambda > 1$, $\frac{t}{\lambda^{m-1}} + \frac{\eta_1}{\lambda^{m-1}} < t$

Posons $\eta = \frac{\eta_1}{\lambda^{m-1}}$ et considérons le point $X_{\left(\frac{t}{\lambda^{m-1}}+\eta\right)}(\lambda x_0)$

Soit C le cône limité par les droites H_i et $\Delta(X_{\left(\frac{t}{\lambda^{m-1}}+\eta\right)}(\lambda x_0))$; en posant :

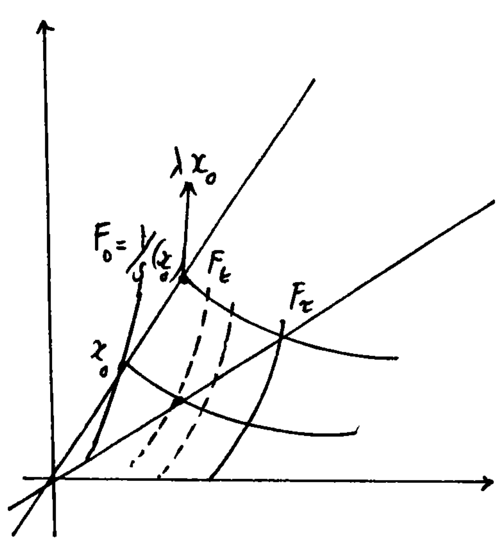
$$V = V_\varepsilon (X , x_0) \cap C$$

Il est facile de voir que : $X_t (x_0) \in V \subset \mathcal{B}(t , x_0)$. Par conséquent $\mathcal{F}(X , Y)$ est L.C.T au point x_0.

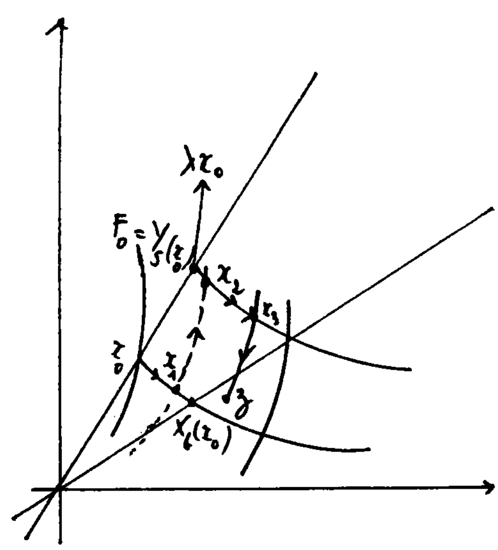
III.2.5. Remarque

Dans la proposition III.2.3. on a utilisé l'homogénéité du champ X pour atteindre le point z à partir de λx_0 (à l'aide du champ X en un temps strictement inférieur à t). Or le point λx_0 est atteint à partir de x_0 par le champ u Y en un instant qu'on peut choisir arbitrairement d'où le choix de $x_0 \in H$.

Si $x_0 \notin H$ et det $(X (x_0) , Y (x_0)) \neq 0$, l'allure de l'orbite de Y au point x_0 est donnée par la figure III.6.



(Figure III.6.)



(Figure III.7.)

En prenant $t \in [o , \varepsilon[$, ε assez petit on peut avoir :

$$X_t (x_o) \notin H \text{ et } X_{\frac{t}{\lambda^{m-1}}} (\lambda x_o) \notin H$$

Soit $z \in D (F_{t'} \; F_\tau)$. Une possibilité d'atteindre le point z à partir de x_o est :

$$x_o \xrightarrow{X} x_1 \text{ au temps } t_1$$

$$x_1 \xrightarrow{u_1 Y'} x_2 \qquad \text{(voir figure III.7.)}$$

$$x_2 \xrightarrow{X} x_3 \text{ au temps } t_2$$

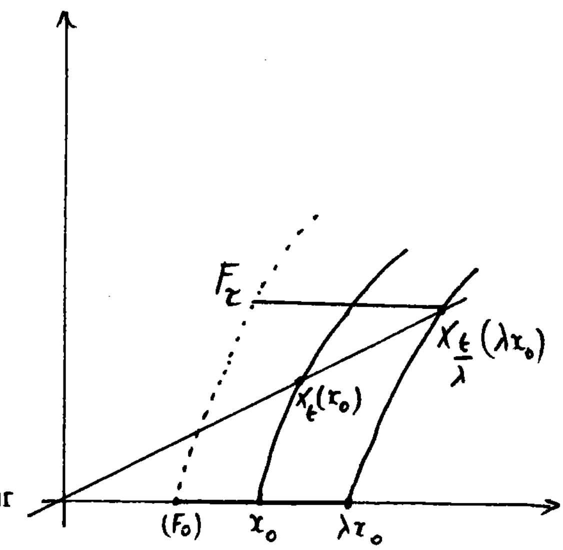
$$x_3 \xrightarrow{u_2 Y} z$$

$$t_1 < t$$

$$t_2 < \frac{t}{\lambda^{m-1}} < t$$

La difficulté qui se pose pour atteindre le point z au temps t réside dans le fait qu'on ne sait pas comment varie $t_1 + t_2$ en fonction de t · dans le chapitre II on a vu que $\mathcal{F}(X , b)$ n'est L.C.T en aucun point de $\mathbb{R}^2$ si X_1 ne dépend que de la variable x_1 et $b = \binom{0}{1}$. Il s'ensuit qu'en général on ne peut rien dire pour la somme $t_1 + t_2$.

III.2.6. Exemples d'applications



Exemple 1 :

$m = n = 2$

$X(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2, x_1^2)$

$Y(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 0)$

$H = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2(x_1^2 - x_2^2) = 0\}$

soit $x_0 = (1,0)$, $X(x_0)$ pointe à gauche de ox_1 ; $Y(y)$ pointe à droite de $\Delta(y)$ pour $y \in V(x_0)$.

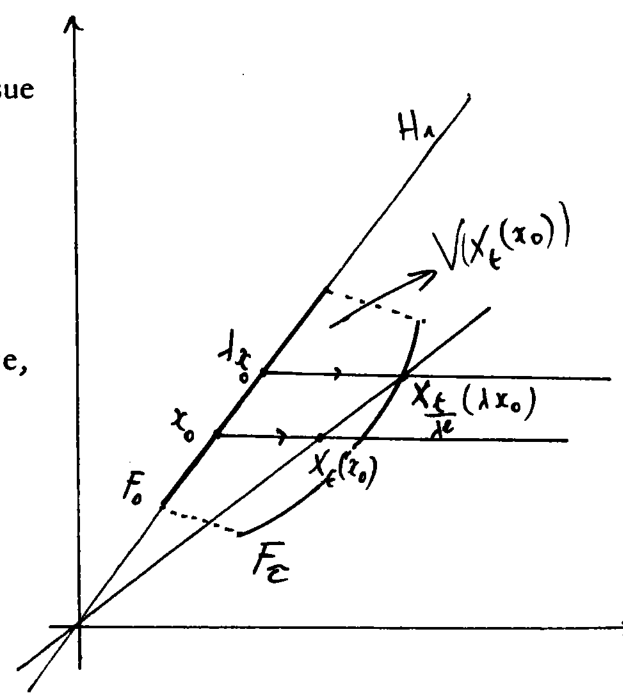
Comme $\det(X(x_0), Y(x_0)) \neq 0$, $\mathcal{F}_{(X,Y)}$ est L.C.T au point x_0.

Exemple 2

$X(x_1, x_2) = (x_2^3, 0)$, $Y(x_1, x_2) = (x_1^3 - 2x_1^2 x_2, -x_2^3)$

$H = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 (x_1 - x_2)^2 = 0\}$

$\Gamma^C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$



soit $x_0 = (2, 2)$, la trajectoire de X issue de $x_0 = (2, 2)$ est une droite.

$X(x_0)$ pointe à droite de H_1 .

pour $y \in V(x_0)$, $-Y(y)$ pointe à gauche de $\Delta(y)$ d'où l'allure de l'orbite de Y au point y comme l'indique la figure, $\left(y = X_{\frac{t}{\lambda^2}}(\lambda x_0)\right)$.

Exemple 3

$m = 3 \ , \ n = 1$

$X\,(x_1 \ , \ x_2) = (b\ x_1^2\ x_2 + d\ x_2^3 \ , \ a'\ x_1^3 + c'\ x_1\ x_2^2) \ , \ Y\,(x_1 \ , \ x_2) = (x_1 \ , \ x_2)$

$H = \mathbb{R}^2$

$\det\,(X\,(x), Y\,(x) = -\ a'\ x_1^4 \ + (b - c')\ x_1^2\ x_2^2 \ + d\ x_2^4.$

donc si $(b - c')^2 + 4\,a'\,d < 0, \mathcal{F}(X \ , \ Y)$ est L.C.T sur tout $\mathbb{R}^2 - \{\,(0,0)\,\}$

CONCLUSION

Ce travail ne constitue qu'un premier pas vers la recherche de la locale controlabilité le long de la trajectoire X des systèmes homogènes sur $\mathbb{R}^n$ ($n \geqq 3$), dont l'importance est considérable.

D'autre part le critère de HERMES $(RH)_2$ n'est pas vrai dans $\mathbb{R}^3$, par ailleurs HERMES a donné des conditions nécessaires qui ne sont pas suffisantes ainsi que des conjonctures. Il serait donc intéressant d'étudier la L.C.T de la F.C.V $\{X + u\, Y \;,\; -1 \leqq u \leqq 1\}$ dans $\mathbb{R}^3$ où X et Y sont deux champs homogènes dans $\mathbb{R}^3$.

Dans le chapitre II de ce travail, je n'ai rien pu dire pour la F.C.V $\{ X, ub \}_{u \in \mathbb{R}}$ si elle est (ou non) L.C.T en un point $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\{ b \;,\; X(x) \}$ indépendants. Il serait donc souhaitable d'étudier ce problème et le généraliser à la F.C.V $\{X \;,\; u_1\, Y_1 \;,\; \dots\; u_{n-1}\, Y_{n-1} \}$ avec :

. $X \;,\; Y_1 \;,\; \dots\; Y_{n-1}$ sont des champs homogènes sur $\mathbb{R}^n$

. $u_1 \;,\; \dots\; u_{n-1}$, sont des contrôles non bornés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. HERMES — On local controllability
SIAM J Contrôl and optimization
Volume 20 N° 2 - March 1082

[2] H. J. SUSSMAN and V. JURDJEVIC — Controllability of non linear systems,
J. Differential equations 12 (1972) 95-116

[3] H. HERMES — Local Controllability and sufficient conditions in singular problems, J. Differential equations (20. 1976, pp 213 - 232).

[4] A.J. KRENER — A generalization of chow's Théorème and the Bang Bang Theorem to Nonlinear Control systems (to appear), SIAM J Control.

[5] H. HERMES — On local and global controllability

[6] H. HERMES, J.P. LASALLE — Functional Analysis and Time optimal Contrôl,
Academic Press, N.Y. (1969)

[7] R.M. BIANCHINI, G. STEFANI — Normal local controllability of order one
Int. J. Control (1984) VOL. 39 n° 4 p. 701 - 714

[8] H. HERMES — Control systems wich generate decomposable Lie algebra.
J. Diff. Equations (1982) Vol 44 p. 166-187

[9] Local controllability of oder p and holder conditions on the minimum time map G. STEFANI to appear (1985)

[10] GRARCH C.I. Birgmes Local accessibility, local reachability and représentations of Compact Group to appear

[11] C. LOBRY Cours de contrôle de l'université de Bordeaux (1975).