



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THESE

présentée
à l'U.E.R. SCIENCES EXACTES ET NATURELLES
DE L'UNIVERSITE DE METZ

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ES-GENIE MECANIQUE

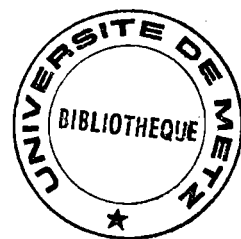
par

Chedli BERADAI

Assistant à l'Université de Metz

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19850185
Cote	S/M3 85/9
Loc	Magasin

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DU COMPORTEMENT PLASTIQUE
DE POLYCRISTAUX METALLIQUES SOUMIS A DES CHARGEMENTS
COMPLEXES ET NON MONOTONES**



Soutenue le 15 Mai 1985 devant le jury composé de :

M. A. ZAQUI	Université de Paris Nord	Président
M. A. MOLINARI	Université de Metz	Rapporteur
M. M. BERVEILLER	Université de Metz	Examineur
M. M. CORDEBOIS	E.N.S.E.T. Cachan	Examineur
M. M. MOUSSY	I.R.S.D. St Germain-en-Laye	Examineur

LABORATOIRE DE PHYSIQUE ET MECANIQUE DES MATERIAUX

GRECO - CNRS « Grandes Déformations et Endommagement »

FACULTE DES SCIENCES - UNIVERSITE DE METZ
Ile du Saulcy - 57045 Metz Cedex - France - Tél. (8) 730.58.40

Cette thèse a été préparée sous la direction de Monsieur le Professeur M. BERVEILLER. Ce travail lui doit beaucoup, je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance pour la confiance qu'il m'a témoignée et l'aide qu'il m'a apportée par ses suggestions et conseils.

Que Monsieur A. ZAQUI trouve ici l'expression de mes remerciements pour avoir accepté de présider ce travail, ainsi que Messieurs CORDEBOIS, MOUSSY et MOLINARI pour leur participation au jury.

Je tiens également à remercier Monsieur le Professeur A. HIHI pour ses recommandations et les appuis qu'il a pu me fournir.

Enfin, que l'ensemble des personnes du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux soit remercié de l'aide scientifique, mais aussi morale qu'il m'a apportée au cours de ces années.

S O M M A I R E

pages

I.- INTRODUCTION	1
II.- LOI DE COMPORTEMENT DU MONOCRISTAL	3
1.- GLISSEMENT PLASTIQUE	3
2.- ECROUISSAGE DU MONOCRISTAL	4
2.1.- Formulation classique	4
2.2.- Formulation viscoplastique	6
3.- REMARQUE : Formulation non locale de l'écrouissage du monocristal	7
III.- METHODES STATISTIQUES POUR LES MILIEUX HETEROGENES CAS DE LA PLASTICITE CLASSIQUE EN PETITES DEFORMATIONS	10
1.- EQUATION INTEGRALE EN PLASTICITE POUR LES MILIEUX HETEROGENES	11
2.- PROPRIETES EFFECTIVES DU POLYCRISTAL	14
3.- MODELES SIMPLIFIES POUR LA PLASTICITE DES POLYCRISTAUX METALLIQUES	17
3.1.- Méthodes de Taylor et de Taylor-Lin	17
3.2.- Méthode statique et modèle de Sachs	17
4.- MODELE POUR LES MILIEUX FAIBLEMENT HETEROGENES	18
IV.- MODELE AUTOEQUILIBRE OU SCHEMA SELF-CONSISTENT	20
1.- MODELE AUTOCOHERENT A UN SITE POUR LA PLASTICITE DES MILIEUX HETEROGENES	20
2.- FORMULATION UTILISEE	23
2.1.- Explicitation pour le glissement plastique	25
2.2.- Détermination du nombre et nature des systèmes actifs	26
2.3.- Formation des textures et lois de comportement macroscopique	26

V.- RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX	28
1.- RAPPELS DES OBSERVATIONS EXPERIMENTALES ET DES THEORIES CLASSIQUES	28
1.1.- Observations expérimentales	28
1.2.- Modélisation phénoménologique	29
1.2.1.- Plasticité parfaite	30
1.2.2.- Ecrouissage isotrope	30
1.2.3.- Ecrouissage cinématique	31
1.2.4.- Critères de plasticité couramment utilisés	31
2.- PARAMETRES PHYSIQUES UTILISES POUR LES CALCULS THEORIQUES	34
3.- RESULTATS POUR DES CHARGEMENTS RADIAUX ET MONOTONES	40
3.1.- Essai de traction simple	40
3.2.- Essai en chargement biaxé	41
4.- RESULTATS CONCERNANT L'EFFET BAUSCHINGER ET L'ECROUISSAGE CYCLIQUE	49
4.1.- Effet Bauschinger	49
4.2.- Ecrouissage cyclique	50
5.- RESULTATS CONCERNANT LES CHARGEMENTS NON RADIAUX ET NON MONOTONES	60
6.- ETUDE EXPERIMENTALE ET THEORIQUE DE LA PLASTICITE DE POLYCRISTAUX METALLIQUES BIPHASES	70
6.1.- Elaboration des matériaux et des éprouvettes	70
6.2.- Essais mécaniques et résultats expérimentaux	71
6.3.- Résultats théoriques et confrontation avec les résultats expérimentaux	71
6.4.- Résultats théoriques concernant le biphase ($\alpha + \beta$) pour des chargements biaxés et monotones	72
VI.- CONCLUSION	88

CHAPITRE I

INTRODUCTION

I. INTRODUCTION

L'évaluation des propriétés macroscopiques de milieux hétérogènes à partir du comportement des constituants constitue une nécessité à la fois pour l'élaboration des matériaux nouveaux et leur utilisation rationnelle. Lorsqu'on se limite aux propriétés linéaires (élasticité, viscoélasticité, ...), de nombreux modèles plus ou moins performants ont été proposés par HERSHEY⁽¹⁾ et KRONER⁽²⁾ et ce n'est que récemment que KRONER⁽³⁾, par l'utilisation de méthodes statistiques directes a pu formuler le problème linéaire de manière générale et ainsi restituer les approches antérieures.

Dans le cas de matériaux à comportement non linéaire tel que la plasticité, le problème est doublement complexe. D'une part, la nature même de la loi de comportement des constituants élémentaires est compliquée mais, en plus il est nécessaire de décrire le comportement à une échelle plus fine liée aux mécanismes physiques de la déformation plastique.

D'autre part, l'intensité des déformations plastiques est souvent d'une telle ampleur, que la structure du matériau se trouve profondément modifiée par la déformation plastique.

Ainsi dans le cas de la plasticité à froid des métaux polycristallins usuels pour lesquels, le glissement plastique cristallographique constitue le mécanisme principal de déformation, la modification de la structure par la déformation plastique affecte essentiellement :

- a) La densité de dislocations qui évolue de manière complexe :
 - augmentation de la densité moyenne
 - répartition non uniforme et anisotrope (formation de cellules, anisotropie de répartition selon les systèmes actifs ...)
- b) L'orientation cristallographique des grains (moyenne ou locale) qui est à l'origine des textures cristallographiques.
- c) La cohérence intragranulaire : il se forme fréquemment des hétérogénéités de déformation à l'intérieur des grains par glissement multiple hétérogène.
- d) La forme des grains évolue avec la déformation, entraînant la formation d'une texture morphologique.
- e) Le développement de contraintes interne associées aux incompatibilités de la déformation plastique à l'intérieur des grains ou de grain à grain.

Enfin pour certains niveaux de déformation plastique, la localisation de la déformation limite les capacités de mise en forme des polycristaux.

Dans ces conditions, il est évident que la modélisation du comportement élastoplastique des matériaux hétérogènes nécessite un effort plus conséquent pour la description du comportement de tels matériaux.

Dans ce travail, nous nous limitons essentiellement aux petites déformations plastiques (de l'ordre de 10 %) pour lesquelles différents modèles ont été proposés. A côté des modèles classiques de Taylor⁽⁴⁾ et Lin⁽⁵⁾ qui ont été repris sous différents aspects, se sont développées des méthodes self-consistantes^{(2), (6), (7), (8), (9), (10)} qui par leur relative facilité de mise en oeuvre et leur versatilité, ont permis de traiter quelques problèmes d'élastoplasticité des matériaux hétérogènes en permettant une meilleure prise en compte d'un certain nombre de paramètres structuraux.

Afin de situer ces méthodes les unes par rapport aux autres et d'envisager des développements ultérieurs, nous utilisons le formalisme général (chapitre (3)) des méthodes statistiques directes pour traiter, en petites déformations, le problème du comportement élastoplastique des polycristaux métalliques après avoir rappelé les bases des lois de comportement du monocristal (chapitre (2)). Le chapitre (4) est consacré au schéma self-consistant à accommodation plastique que nous utilisons dans la suite.

Nous présentons ensuite quelques résultats nouveaux obtenus dans le cadre du schéma self-consistant à accommodation plastique concernant les matériaux biphasés, la réponse des polycristaux en chargement complexe, l'effet Bauschinger et le chargement cyclique de polycristaux.

CHAPITRE II

LOI DE COMPORTEMENT DU MONOCRISTAL

1. GLISSEMENT PLASTIQUE

2. ECROUISSAGE DU MONOCRISTAL

2.1. Formulation classique

2.2. Formulation viscoplastique

3. REMARQUE : formulation non locale de l'écrouissage du monocristal.

II. LOI DE COMPORTEMENT DU MONOCRISTAL

Il existe de nombreux mécanismes physiques de déformations plastiques qui peuvent intervenir simultanément ou séparément en fonction des conditions du chargement thermomécanique :

- diffusion de défauts ponctuels
- mouvement de dislocations et glissement plastique
- transformation de phase et transformation martensitique

Dans la plupart des processus de mise en forme, on peut considérer que le mécanisme prédominant dans le domaine des basses températures est le glissement plastique cristallographique obéissant à la loi de Schmid et n'affectant pas l'élasticité du matériau. C'est ce mécanisme qui sera étudié ici.

1. GLISSEMENT PLASTIQUE

On peut considérer que la vitesse de déformation ($d\epsilon_{ij}$) est composée d'une partie élastique $d\epsilon_{ij}^e$ et d'une partie plastique $d\epsilon_{ij}^p$ telle que

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (2.1)$$

Il est de même pour la vitesse de rotation $d\omega_{ij}$ qui s'écrit :

$$d\omega_{ij} = d\omega_{ij}^e + d\omega_{ij}^p \quad (2.2)$$

où $d\omega_{ij}^e$ est la vitesse de rotation élastique (ou vitesse de rotation du réseau cristallin) et $d\omega_{ij}^p$ la vitesse de rotation plastique associée aux glissements plastiques.

Dans un métal CFC, il existe 12 systèmes de glissement possibles du type $\{111\} \langle 110 \rangle$. Dans la configuration actuelle du monocristal un nombre limité de ces systèmes est actif et contribue à l'écoulement plastique.

Si l'on désigne par n_j^g et m_i^g les vecteurs unitaires suivant la normale au plan de glissement et dans la direction de glissement pour le système g , on a :

$$d\epsilon_{ij}^p + d\omega_{ij}^p = \sum_g d\gamma^g m_i^g n_j^g \quad (2.3)$$

La sommation concerne uniquement les systèmes actifs, $d\gamma^g$ étant la vitesse de glissement sur le système (g).

De l'équation (2.3), on peut déduire séparément la partie symétrique :

$$d\epsilon_{ij}^p = \sum_g \frac{1}{2} d\gamma^g (m_i^g n_j^g + m_j^g n_i^g) = \sum_g R_{ij}^g d\gamma^g \quad (2.4)$$

et la partie antisymétrique de la partie plastique du gradient de la vitesse :

$$d\omega_{ij}^p = \sum_g \frac{1}{2} d\gamma^g (m_i^g n_j^g - m_j^g n_i^g) = \sum_g S_{ij}^g d\gamma^g \quad (2.5)$$

La déformation plastique par glissement cristallographique entraîne une rotation plastique qui elle-même induit une rotation élastique à l'origine de la formation des textures de déformation et d'un écrouissage géométrique⁽¹⁰⁾. Dans ce travail, nous négligerons cet écrouissage géométrique en utilisant pour la suite un formalisme en petites déformations.

La vitesse de la cisssion réduite τ^g sur le système g pour une vitesse des contraintes $d\sigma_{ij}$ s'écrit alors :

$$d\tau^g = R_{ij}^g d\sigma_{ij} \quad (2.6)$$

2. ECROUISSAGE DU MONOCRISTAL

2.1. Formulation classique

On suppose que l'état d'écrouissage ne dépend que de l'amplitude du glissement sur les systèmes actifs

$$\tau_c^g = \tau_0^g (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \quad (2.7)$$

Nous supposons que l'écrouissage intracristallin est linéaire et caractérisé par une matrice d'écrouissage H , dont les termes H^{gh} représentent l'écrouissage sur un système de glissement g créé par un glissement sur un système h . On a donc :

$$d\tau_c^g = H^{gh} d\gamma^h \quad (2.8)$$

$d\tau_c^g$ représente la vitesse de la cisssion critique sur le système g .

Les équations de comportement pour la partie plastique de la déformation totale s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
 d\gamma^h &= 0 & \text{si } 0 < R_{ij}^h \sigma_{ij} < \tau_c^h \\
 d\gamma^h &= 0 & \text{si } \begin{cases} R_{ij}^h \sigma_{ij} = \tau_c^h \\ \text{et } R_{ij}^h d\sigma_{ij} < H^{hg} d\gamma^g \end{cases} \\
 d\gamma^h &> 0 & \text{si } \begin{cases} R_{ij}^h \sigma_{ij} = \tau_c^h \\ \text{et } R_{ij}^h d\sigma_{ij} = H^{hg} d\gamma^g \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

τ_c^h étant la cisssion critique actuelle sur le système h.

Nous désignons par K l'inverse de la matrice H ($K = H^{-1}$) et, nous supposons que K existe. On a alors :

$$d\epsilon_{ij}^p = \sum_g R_{ij}^g K^{gh} R_{kl}^h d\sigma_{kl} \tag{2.10}$$

La vitesse de déformation totale s'écrit d'après (2.10) et (2.1) :

$$d\epsilon_{ij} = (S_{ijkl} + \sum_g R_{ij}^g K^{gh} R_{kl}^h) d\sigma_{kl} \tag{2.11}$$

soit $d\epsilon = L^{-1} d\sigma$ ou $d\sigma = L d\epsilon$

S désignant la compliance élastique du monocristal ($S = C^{-1}$) et L^{-1} représentant le comportement tangent du monocristal.

L fait intervenir à la fois l'écrouissage du monocristal (matrice H), l'orientation des systèmes de glissement (R) mais également l'état de contrainte (Loi de Schmid).

D'apparence simple, L^{-1} est en fait complexe à cause de la partie plastique, on a :

$$\begin{aligned}
 L^{-1} &= S & \text{si } 0 < R_{ij}^h \sigma_{ij} < \tau_c^h & \quad h = 1, 12 \\
 L^{-1} &= S & \text{si } \begin{cases} R_{ij}^h \sigma_{ij} = \tau_c^h \\ \text{et } R_{ij}^h d\sigma_{ij} < \textcircled{0} \end{cases} &
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$L^{-1}_{ijkl} = S_{ijkl} + \sum R_{ij}^g K^{gh} R_{kl}^h \quad \text{si} \quad \begin{cases} R_{ij}^h \sigma_{ij} = \tau_c^h \\ \text{et} \quad R_{ij}^h d\sigma_{ij} = H^{hg} d\gamma^g \end{cases} \quad (2.13)$$

Nous supposons que L^{-1} est inversible et satisfait aux conditions habituelles de stabilité ($L_{dede} \geq 0$).

C'est cette formulation de l'écrouissage du monocristal qui sera utilisée dans la suite de ce travail.

Nous présentons maintenant une autre formulation, concernant plutôt la viscoplasticité mais pouvant également, selon Asaro⁽¹¹⁾ être d'une grande utilité en plasticité classique.

2.2. Formulation viscoplastique

Une autre forme possible pour la description de l'écrouissage intracristallin a été proposée par Pan et Rice⁽¹²⁾ pour le cas de la viscoplasticité. Elle part de la relation d'Orowan

$$d\gamma = \rho b v \quad (2.14)$$

qui explicite la dépendance entre la densité de dislocations mobiles (ρ), leur vitesse (v), les contraintes et la densité de dislocation sous la forme d'une loi phénoménologique

$$d\gamma = da \left(\frac{\tau}{g} \right)^m \quad (2.15)$$

* g décrit la structure interne actuelle (densité de dislocation) qui peut évoluer avec la déformation. Cette évolution est modélisée par une relation empirique prise sous la forme linéaire

$$dg = h d\gamma \quad (2.16)$$

* τ est la cission réduite et da une vitesse de glissement de référence.

La généralisation au cas du glissement plastique multiple consiste à écrire (2.15) sous la forme :

$$\begin{aligned} d\gamma^i &= da^i \left(\frac{\tau^i}{g^i} \right)^n & \text{si } \tau^i > 0 \\ d\gamma^i &= 0 & \text{si } \tau^i \leq 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

où l'évolution de la structure interne actuelle dépend fortement de la nature et de la vitesse de glissement sur les différents systèmes. Il convient alors, comme dans le cas de la plasticité classique, de décrire cette évolution par une matrice H telle que :

$$dg^i = H^{ij} |d\gamma^j| \quad (2.18)$$

(2.17) et (2.18) constituent alors un système d'équations permettant le calcul des vitesses de glissement sur les systèmes en fonction de la cission réduite et des paramètres actuels g .

La vitesse de déformation plastique d'un monocristal s'écrit dans ce cas :

$$d\epsilon_{ij}^p = R_{ij}^{gh} d\gamma_{ij}^h = R_{ij}^{da} da^m \left[\frac{R_{kl}^m \sigma_{kl}}{g^m} \right]^{m-1} R_{pq}^m \sigma_{pq}^m \quad (2.19)$$

Dans cette formulation, tous les systèmes de glissement sont actifs et la vitesse de glissement dépend du rapport τ/g .

Pour des matériaux peu sensibles à la vitesse, c'est à dire lorsque m est très grand ($m \approx 100$), on obtient pratiquement les relations de la plasticité classique décrite en (2.1).

Asaro suggère l'utilisation de cette formulation pour décrire à la fois la plasticité classique et la viscoplasticité du monocristal.

Comme g est fonction de γ , les relations (2.19) constituent de fait une variante de la formulation de Norton :

$$\sigma = A \epsilon^n d\epsilon^m \quad (2.20)$$

habituellement utilisée en rhéologie et en métallurgie.

3. REMARQUE : Formulation non locale de l'écrouissage du monocristal

La formulation du comportement du monocristal par l'intermédiaire d'une matrice d'écrouissage H englobe de nombreux phénomènes physiques dont les rôles sur la plasticité du monocristal sont tout à fait différents.

Parmi les grandeurs physiques, dont le rôle est déterminant, il faut citer, avant tout, la densité de dislocation ρ dont les effets sont prédominants.

Mais ceux-ci sont globalement de nature différente et on peut distinguer deux classes de phénomènes.

- Les actions de "contact" intervenant lors de l'approche d'une dislocation par une autre, de leur interaction attractive ou répulsive, de leur combinaison partielle, de la séparation de la jonction formée⁽¹³⁾.

Ces actions dépendent essentiellement de la densité de dislocation, de la nature des dislocations présentes. Elles sont en fait, prises en compte dans la matrice d'écrouissage classique représentée par H.

- Une deuxième classe de mécanismes intervient dans l'écrouissage du monocristal par les actions à distance pouvant exister du fait d'un arrangement particulier d'une densité de dislocations donnée créant à distance des contraintes internes. Bien que nulles en moyenne, ces contraintes internes contribuent à l'écrouissage du monocristal mais de façon différente que les actions de contact évoquées précédemment. Ces contraintes internes dépendent à la fois de la densité et de l'arrangement des dislocations. Elles peuvent donc favoriser ou empêcher le franchissement des dislocations obstacles freinant ou accélérant des actions à distance des dislocations mobiles.

Sans rentrer dans les détails de telle ou telle configuration de dislocations particulière, on peut formuler, cette partie de l'écrouissage, en partant de la formule de Kröner⁽³⁾ donnant les contraintes internes ($d\sigma_{ij}$) en fonction de la déformation plastique ($d\epsilon_{ij}^P$) sous la forme

$$d\sigma_{ij}(r) = \int_V L_{ijkl}(r-r') d\epsilon_{kl}^P(r') dv \quad (2.21)$$

où

$$L_{klrs}(r-r') = 2 (C_{klmn} C_{pqrs})_{mr} G_{mq}(r-r'), m'p' \quad (2.22)$$

dépend des constantes élastiques et du Tenseur de Green du milieu étudié :

C : sont les constantes élastiques du milieu supposé homogène

G : le Tenseur de Green du milieu infini de constantes C

(2.22) signifie antisymétrisation de (2.21).

En utilisant la propriété $d\epsilon_{kl}^P = \sum R_{kl}^m d\gamma^m$, l'accroissement de la cisssion sur le système n en un point (r), s'écrit :

$$d\tau^n(r) = R_{ij}^n d\sigma_{ij}^n(r) = R_{ij}^n \sum_m R_{kl}^m \int_V L_{ijkl}(r-r') d\gamma^m(r') dv' \quad (2.23)$$

soit sous forme condensée

$$d\tau^n(r) = \sum_m \int_V B^{nm}(r-r') d\gamma^m(r') dv'$$

avec

$$B^{nm} = R_{ij}^n L_{ijkl} (r-r') R_{kl}^m \quad (2.24)$$

En incluant l'écrouissage dû aux actions de contact, la forme générale, non locale, de l'écrouissage du monocristal devient :

$$d\tau^n(r) = H^{nm}(r) d\gamma^m(r) + \int_V B^{nm}(r-r') d\gamma^m(r') dv' \quad (2.25)$$

Le premier terme décrit couramment l'écrouissage "positif", et le second renferme plutôt la partie cinématique de l'écrouissage.

Lorsque la répartition et l'arrangement spatial des dislocations sont connus et stables au cours de la déformation, on peut intégrer (du moins en principe) l'équation (2.25) et obtenir, sous forme phénoménologique, la relation :

$$d\tau^n = H^{nm} d\gamma^m + B^{nm} d\gamma^m \quad (2.26)$$

qui pourra être utilisée en tant qu'équation de comportement du monocristal.

CHAPITRE III

METHODES STATISTIQUES POUR LES MILIEUX HETEROGENES

CAS DE LA PLASTICITE CLASSIQUE EN PETITES DEFORMATIONS

1. EQUATION INTEGRALE EN PLASTICITE POUR LES MILIEUX HETEROGENES
2. PROPRIETES EFFECTIVES DU POLYCRISTAL
3. MODELES SIMPLIFIES POUR LA PLASTICITE DES POLYCRISTAUX METALLIQUES
 - 3.1. Modèles de Taylor et de Taylor-Lin
 - 3.2. Modèle statique et modèle de sachs
4. MODELE POUR LES MILIEUX FAIBLEMENT HETEROGENES

III. METHODES STATISTIQUES POUR LES MILIEUX HETEROGENES

LE CAS DE LA PLASTICITE CLASSIQUE EN PETITES DEFORMATIONS

Par rapport aux milieux hétérogènes élastiques, le problème du comportement élastoplastique des matériaux hétérogènes est plus complexe.

- * La loi du comportement élastoplastique du monocristal décrite de manière approchée dans la première partie, dépend à la fois du trajet de déformation et de l'état de contrainte actuel.
- * La structure même du matériau et son hétérogénéité évoluent avec la déformation. On peut citer différentes classes de phénomènes qu'il serait nécessaire de prendre en compte.

On observe une hétérogénéité de la déformation intragranulaire à l'échelle des cellules de dislocations ($\sim 1\mu\text{m}$) dont la forme, la taille et l'orientation dépendent du trajet de déformation⁽¹⁴⁾. A une échelle plus grande, à cause du glissement multiple hétérogène, le grain se fragmente en domaines possédant des combinaisons différentes de systèmes de glissement actifs⁽¹⁴⁾.

Ces phénomènes ne sont pas pris en compte directement, ni dans la loi de comportement du monocristal, ni dans la description de l'hétérogénéité actuelle du polycristal.

A l'échelle intergranulaire, la formation d'une texture cristallographique (liée à l'orientation des réseaux cristallins) et d'une texture morphologique (liée à la forme) modifient notablement l'hétérogénéité initiale du matériau et lui confèrent souvent des propriétés anisotropes.

A cette même échelle, on observe la présence de contraintes internes associées aux incompatibilités plastiques intergranulaires. C'est surtout cette deuxième classe de phénomènes que nous cherchons à modéliser pour des polycristaux macroscopiquement homogènes.

On voit donc que le problème de la détermination du comportement macroscopique, en plasticité classique, pour un milieu hétérogène polycristallin est extrêmement complexe et qu'il est indispensable d'effectuer des hypothèses simplificatrices.

Par la suite nous supposons donc :

- que les déformations plastiques et les rotations sont petites
- que la structure et la texture n'évoluent pas pendant la déformation
- que le polycristal est macroscopiquement homogène

Les effets que nous cherchons à décrire, concernent alors essentiellement l'écrouissage par les contraintes internes, intergranulaires et l'écrouissage intracristallin dû aux dislocations.

La première partie consiste en une adaptation de l'équation intégrale de Dederichs et Zeller⁽¹⁵⁾ pour le cas de la plasticité et dans la seconde partie, on montre comment il est possible d'obtenir les modules élastoplastiques tangents pour le polycristal. Nous reprenons les arguments développés par M. BERVEILLER et A. ZAOUÏ⁽²¹⁾.

Dans la troisième partie, on montre quelles sont les différentes approximations du problème et on propose une nouvelle méthode pour la plasticité, basée sur l'approximation de Born de l'équation intégrale.

1. EQUATION INTEGRALE EN PLASTICITE POUR LES MILIEUX HETEROGENES

Nous supposons que le matériau a été transformé de l'état initial à l'état actuel pour une déformation totale E^T homogène à l'échelle du polycristal.

A cette déformation est associée une contrainte macroscopique Σ , également uniforme, telle que :

$$\Sigma = \frac{1}{V} \int_V \sigma(r) dv \quad (3.1)$$

et

$$E^T = \frac{1}{V} \int_V \epsilon^T(r) dv \quad (3.2)$$

$\sigma(r)$ est le champ de contraintes (en équilibre) dans le polycristal et $\epsilon^T(r)$ la déformation totale locale (compatible).

Nous supposons qu'à ce stade nous connaissons les systèmes de glissement potentiellement actifs, les contraintes internes, la forme, l'orientation des grains et l'état d'écrouissage des monocristaux.

A un accroissement $d\Sigma$ ou dE^T , sont associées des variations $d\sigma$ et $d\epsilon^T$, dans toutes les parties du polycristal de façon que les équations d'équilibre et de compatibilité soient vérifiées, c'est à dire :

$$\begin{cases} \text{div} (\sigma + d\sigma) = 0 & (\sigma_{ij,j} + d\sigma_{ij,j} = 0) \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \text{Inc} (\epsilon^T + d\epsilon^T) = 0 & \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} (\epsilon_{mn}^T + d\epsilon_{mn}^T)_{,kl} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Ces conditions étant vérifiées pour σ et ϵ^T , on doit avoir pour $d\sigma$ et $d\epsilon^T$

$$\begin{cases} \text{div} (d\sigma) = 0 & ; d\sigma_{ij,j} = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} \text{Inc} d\epsilon^T = 0 & ; \epsilon_{ikm} \epsilon_{jln} d\epsilon_{mn}^T_{,kl} = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

ϵ est le tenseur permutation.

La dernière condition est satisfaite si $d\epsilon^T$ dérive d'un déplacement, c'est à dire :

$$d\epsilon_{ij}^T = \frac{1}{2} (dU_{i,j}^T + dU_{j,i}^T) \quad (3.7)$$

De plus, localement, les contraintes et les déformations sont reliées par la loi de comportement décrite dans le chapitre (2) :

$$d\sigma_{ij}(r) = L_{ijkl}(r) d\epsilon_{kl}^T(r) \quad (3.8)$$

pour laquelle il est avantageux d'introduire un milieu fictif et homogène tel que :

$$L(r) = L^0 + \delta L(r) \quad (3.9)$$

L^0 est alors constant dans tout le milieu.

On a pour les équations d'équilibre :

$$(L_{ijkl}(r) d\epsilon_{kl}^T(r)),_j = 0 \quad (3.10)$$

soit d'après (3.9) :

$$L_{ijkl}^0 d\epsilon_{kl,j}^T + (\delta L_{ijkl} d\epsilon_{kl}^T),_j = 0 \quad (3.11)$$

et d'après les symétries usuelles de L , en introduisant le déplacement dU^T :

$$L_{ijkl}^0 dU_{k,l,j}^T + (\delta L_{ijkl} d\epsilon_{kl}^T),_j = 0 \quad (3.12)$$

La solution de (3.12) s'obtient naturellement par l'intermédiaire du tenseur de Green $G_{km}(r-r')$ du milieu infini fictif homogène de modules L^0 , qui donne le déplacement dans la direction k au point $\vec{r}$, dans la direction m

$$f_i = \delta_{im} \delta(r-r')$$

G est défini par les équations :

$$L_{ijkl}^0 G_{km,l,j}(r-r') + \delta_{im} \delta(r-r') = 0 \quad (3.13)$$

et les conditions aux limites sur la frontière du milieu infini.

Si l'on choisit le tenseur G qui donne un déplacement nul à la frontière à l'infini, la solution de (3.12) s'écrit alors :

$$dU_m^T(r) = dU_m^{T^0}(r) + \int_V G_{mi}(r-r') (\delta L_{ijkl}(r') d\epsilon_{kl}^T(r'))_{,j} dv' \quad (3.14)$$

que l'on peut intégrer par partie et obtenir, lorsqu'on dérive par rapport à x_m et on prend la partie symétrique :

$$d\epsilon_{mn}^T(r) = d\epsilon_{mn}^{T^0}(r) + \int_V \Gamma_{mnkl}(r-r') \delta L_{klpq}(r') d\epsilon_{pq}^T(r') dv' \quad (3.15)$$

où

$$\Gamma_{mnkl} = -\frac{1}{2} [G_{mk,nl} + G_{nk,ml}] \quad (3.16)$$

où nous avons utilisé les relations

$$\begin{cases} d\sigma_{ij,j} = 0 \\ d\epsilon_{ij}^T = \frac{1}{2} (dU_{i,j}^T + dU_{j,i}^T) \\ d\sigma_{ij}(r) = L_{ijkl}(r) d\epsilon_{kl}(r) \end{cases} \quad (3.17)$$

De même pour la partie antisymétrique du gradient du déplacement total, on a :

$$d\omega_{ij}^T(r) = d\omega_{ij}^{T^0} + \int_V A_{ijkl}(r-r') \delta L_{klmn}(r') d\epsilon_{mn}^T(r') dv' \quad (3.18)$$

avec

$$A_{ijkl} = -\frac{1}{2} [G_{ik,jl} - G_{jk,il}] \quad (3.19)$$

(3.15) et (3.18) constituent des équations intégrales.

Pour $d\epsilon^T$, il suffit de résoudre (3.15) ; alors que pour $d\omega^T$, (3.18) montre l'existence d'un effet de couplage entre rotation et déformation.

A partir de (3.15) et (3.8), il est également possible de formuler une équation intégrale pour $d\sigma$ sous forme duale :

$$d\sigma_{ij}(r) = d\sigma_{ij}^0 + \int_V \Gamma'_{ijkl}(r-r') \delta L_{klmn}^{-1}(r') d\sigma_{mn}(r') dv' \quad (3.20)$$

où

$$\Gamma' = -L^0 - L^0 \Gamma L^0$$

La résolution des équations (3.15), (3.18) et (3.20) permet de

connaître directement l'évolution des grandeurs locales telle que les contraintes internes, la forme des grains, l'orientation cristallographique et morphologique des grains. Ces équations sont celles de l'évolution de la structure lorsque l'on s'intéresse aux grandes déformations.

Par ailleurs, comme on va le voir dans le paragraphe suivant, ces équations sont également nécessaires pour calculer le comportement macroscopique du milieu microhétérogène et macrohomogène.

Nous nous intéressons par la suite au cas d'un milieu macrohomogène soumis à des sollicitations "uniformes" à l'infini, ce qui conduit à des quantités de ϵ^0 et σ^0 constantes.

2. PROPRIETES EFFECTIVES DU POLYCRISTAL

Nous cherchons le Tenseur L^{eff} qui couple les accroissements de contraintes macroscopiques $d\Sigma_{ij}$ aux accroissements des déformations macroscopiques dE_{ij}^T qui eux-mêmes sont reliés aux grandeurs microscopiques par les relations de moyenne :

$$d\Sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_V d\sigma_{ij}(r) dv \quad (3.21)$$

$$dE_{ij}^T = \frac{1}{V} \int_V d\epsilon_{ij}^T(r) dv \quad (3.22)$$

La relation entre L^{eff} , $d\Sigma$ et dE^T s'écrit :

$$d\Sigma_{ij} = L_{ijkl}^{eff} dE_{kl}^T \quad (3.23)$$

Pour le calcul de L^{eff} à partir de (3.15), nous introduisons un Tenseur T tel que :

$$\delta L(r) d\epsilon^T(r) = T(r) d\epsilon^0 \quad (3.24)$$

A partir de (3.15) et (3.24), on obtient alors une autre équation intégrale concernant le Tenseur T qui s'écrit :

$$T_{ijkl}(r) = \delta L_{ijkl}(r) + \delta L_{ijkl}(r) \int_V \Gamma_{klmn}(r-r') T_{mnpq}(r') dv' \quad (3.25)$$

D'après la relation du comportement local :

$$d\sigma(r) = [L^0 + \delta L(r)] d\epsilon^T(r)$$

et la définition de $T(r)$, on a pour $d\sigma(r)$:

$$d\sigma_{ij}(r) = L_{ijkl}^0 d\epsilon_{kl}^T(r) + T_{ijkl}(r) d\epsilon_{kl}^{T^0} \quad (3.26)$$

La moyenne de $d\sigma_{ij}(r)$ sur tout le volume est égale à $d\Sigma$.

En prenant la valeur moyenne de (3.26), on a :

$$d\Sigma_{ij} = L_{ijkl}^0 \frac{1}{v} \int d\epsilon_{kl}^T(r) dv + \frac{1}{v} \int_v T_{ijkl}(r) d\epsilon_{kl}^{T^0} dv \quad (3.27)$$

Puisque

$$dE_{kl}^T = \frac{1}{v} \int_v d\epsilon_{kl}^T dv$$

on a aussi

$$d\Sigma_{ij} = L_{ijkl}^0 dE_{kl}^T + \frac{1}{v} \int_v T_{ijkl}(r) d\epsilon_{kl}^{T^0} dv \quad (3.28)$$

Soit dans le cas d'un chargement homogène pour lequel $(d\epsilon^{T^0})$ est constant, en notant $\bar{T}$ la valeur moyenne volumique de T

$$d\Sigma_{ij} = L_{ijkl}^0 dE_{kl}^T + \bar{T}_{ijkl} d\epsilon_{kl}^{T^0} \quad (3.29)$$

avec

$$\bar{T}_{ijkl} = \frac{1}{v} \int_v T_{ijkl}(r) dv \quad (3.30)$$

On peut également exprimer $d\epsilon^{T^0}$ en fonction de dE^T en effectuant la valeur moyenne volumique de

$$d\epsilon_{ij}^T(r) = d\epsilon_{ij}^{T^0} + \int_v \Gamma_{ijkl}(r-r') T_{klmn}(r') d\epsilon_{mn}^{T^0} dv' \quad (3.31)$$

soit

$$dE_{ij}^T = d\epsilon_{ij}^{T^0} + \frac{1}{v} \int_v \int_{v'} \Gamma_{ijkl}(r-r') T_{klmn}(r') d\epsilon_{mn}^{T^0} dv dv' \quad (3.32)$$

En appelant D le Tenseur $\frac{1}{v} \iint \Gamma(r-r') T(r')$, on a alors :

$$dE_{ij}^T = (I_{ijkl} + D_{ijkl}) d\epsilon_{kl}^{T^0} \quad (3.33)$$

où I désigne le Tenseur unité.

En substituant dans (3.29), $d\epsilon^{T^0}$ par sa valeur déduite de (3.33), on obtient finalement :

$$d\Sigma_{ij} = L_{ijkl}^0 dE_{kl}^T + \bar{T}_{ijkl} [I_{klmn} + D_{klmn}]^{-1} dE_{mn}^T \quad (3.34)$$

soit

$$L^{eff} = L^0 + \bar{T} (I + \overline{\Gamma T})^{-1} \quad (3.35)$$

Cette relation formelle, déduite des équations intégrales (3.25) et (3.15), s'apparente aux équations obtenues dans le cas de l'élastostatique établies par Dederichs, Zeller⁽¹⁵⁾ et Kröner. Nous avons repris ici la démarche de cette méthode en l'appliquant au cas de la plasticité.

La difficulté centrale dans le calcul de L^{eff} défini par (3.35) réside en fait dans le calcul de $\bar{T}$, solution de l'équation intégrale (3.25).

Si nous supposons cette difficulté résolue, on a alors le système d'équations suivant pour décrire la plasticité des milieux hétérogènes.

- Calcul des propriétés effectives

$$L_{ijkl}^{eff} = L_{ijkl}^0 + \bar{T}_{ijmn} [I_{mnpq} + \overline{\Gamma_{mnrs} T_{rspq}}]^{-1} \quad (3.36)$$

- Evolution de la microstructure (texture morphologique ou forme des grains)

$$d\epsilon_{ij}^T = d\epsilon_{ij}^{T^0} + \int \Gamma_{ijkl}(r-r') \delta L_{klmn}(r') d\epsilon_{mn}^T(r') dv \quad (3.37)$$

ou

$$d\epsilon_{ij}^T = \delta L_{ijkl}^{-1}(r) T_{klmn}(r) d\epsilon_{mn}^{T^0}$$

- Evolution de la microstructure (texture cristallographique ou orientations des grains)

$$d\omega_{ij}^T = d\omega_{ij}^{T^0} + \int_v A_{ijkl}(r-r') \delta L_{klmn}(r') d\epsilon_{mn}^T(r') dv' \quad (3.38)$$

qui se décompose en partie élastique (cristallographique) et partie plastique (morphologique).

- Evolution des contraintes internes

$$d\sigma_{ij} = (L_{ijkl}^0 + \delta L_{ijkl}) d\epsilon_{kl}^T \quad (3.39)$$

La résolution de l'ensemble de ces équations, couplée avec celle décrivant le comportement du monocristal, ne peut se faire que dans des situations simplifiées.

L'objet du paragraphe suivant est de décrire les différentes approximations qui ont été proposées dans le cadre des différents modèles pour la plasticité des polycristaux métalliques. Nous décrivons sommairement les modèles de Taylor, Taylor-Lin et le modèle statique et proposons une nouvelle formulation valable uniquement pour les milieux faiblement hétérogènes et basée sur l'approximation de Born de l'équation intégrale (3.20). Le modèle autoéquilibré est décrit dans le chapitre (4).

3. MODELES SIMPLIFIES POUR LA PLASTICITE DES POLYCRISTAUX METALLIQUES

3.1. Modèles de Taylor⁽⁴⁾ et de Taylor-Lin⁽⁵⁾

Dans le modèle de Taylor, on suppose que la déformation locale est uniforme (et donc égale dans tous les grains) et égale à la déformation plastique macroscopique E^P , si l'on suppose également que le milieu possède un comportement élastoplastique homogène.

Le modèle de Taylor-Lin⁽⁵⁾ consiste en fait en une généralisation de l'hypothèse de Taylor au cas de la déformation élastoplastique qui est supposée uniforme, on a donc :

$$d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p = dE_{ij}^e + dE_{ij}^p \quad (3.40)$$

Si l'élasticité est isotrope, homogène et si la déformation plastique se fait à volume constant, on a :

$$d\sigma_{ij} = d\Sigma_{ij} + 2\mu (dE_{ij}^p - d\epsilon_{ij}^p) \quad (3.41)$$

où μ est le module élastique de cisaillement.

Lorsqu'un élément de volume a subi une déformation plastique $d\epsilon^p$ différente de la déformation moyenne dE^p , de fortes contraintes internes y prennent naissance et lui imposent pratiquement une déformation plastique égale à la déformation moyenne.

3.2. Modèle statique⁽¹⁶⁾ et modèle de Sachs⁽¹⁷⁾

Signalé par Zaoui⁽¹⁶⁾, le modèle statique est obtenu en supposant que l'état de contrainte locale est égal à l'état de contrainte macroscopique

$$d\sigma_{ij} = d\Sigma_{ij} \quad (3.42)$$

Ce modèle est souvent confondu avec le modèle de Sachs⁽¹⁷⁾ qui suppose que la cisssion sur le système de glissement principal est simultanément la même dans tous les grains du polycristal, et de ce fait qu'il n'y a qu'un seul système actif par grain.

Ces deux modèles constituent, en fait, une première approche du problème de la plasticité du polycristal. Le modèle de Taylor semble plus proche de la réalité, essentiellement par le fait qu'il est utilisé conjointement avec l'hypothèse du glissement multiple homogène.

Les récentes améliorations apportées au modèle de Taylor⁽¹⁸⁾,⁽¹⁹⁾ consistent à introduire les effets morphologiques dus à la déformation des grains. En effet, aux grandes déformations, les grains ne sont plus équiaxes, les relations de compatibilité prennent une signification plus précise et anisotrope. Les résultats obtenus à partir des modèles de Taylor relachés, qui prennent en compte les effets de texture morphologique, montrent à posteriori la nécessité d'une bonne description des contraintes internes induites par la déformation plastique.

4. MODELE POUR LES MILIEUX FAIBLEMENT HETEROGENES

L'inconvénient des modèles de Taylor⁽⁴⁾ et de Sachs⁽¹⁷⁾, y compris pour les versions améliorées, est que l'hétérogénéité de comportement n'est pas prise en compte dans la description de l'écoulement plastique.

Cette hétérogénéité de comportement peut être due soit :

- A une hétérogénéité chimique ou (et) structurale (matériaux biphasés, composite, alliages à dispersoïde ...)
- A une anisotropie de comportement intrinsèque associée à la désorientation entre les grains.

L'hétérogénéité du comportement a certainement un effet non négligeable sur le comportement du polycristal, mais sa prise en compte exacte nécessite la résolution de l'équation intégrale (3.20).

Pour des milieux faiblement hétérogènes, on peut obtenir une solution approchée de (3.20), en remplaçant $d\epsilon^P(r)$ dans l'intégrale du second membre de (3.37) par $d\epsilon^P$ et en adoptant pour L^0 le comportement moyen $\bar{L}$ tel que :

$$\bar{L} = \frac{1}{V} \int L(r) dv \quad (3.43)$$

Puisque le milieu est faiblement hétérogène, $\bar{L}$ est proche de L^{eff} et on a, à la place de (3.37) :

$$d\epsilon^I(r) = dE^I + \int_V \bar{T}(r-r') \delta \bar{L}(r') dE^I dv' \quad (3.45)$$

avec $\delta \bar{L} = L - \bar{L}$

$\bar{T}$ est déduit du Tenseur de Green pour le milieu de comportement tangent $\bar{L}$.

Ramené à un problème d'inclusion-matrice, l'équation (3.45) s'écrit pour la déformation moyenne dans une inclusion I :

$$d\epsilon^{II} = dE^I + \frac{1}{v_I} \int_{V_I} \int_{V_I} \bar{T}(r-r') \delta \bar{L}^I dE^I dv'_I dv_I \quad (3.46)$$

Si l'élasticité est isotrope et homogène, et si les déformations élastiques sont supposées négligeables, on a

$$d\epsilon_{ij}^{PI} = dE_{ij}^P + \frac{1}{v_I} \bar{T}_{ijkl}^{II} \delta \bar{L}_{klmn}^I dE_{mn}^P \quad (3.47)$$

La teneur $\bar{T}$ est lié au tenseur d'Eshelby S^I par la relation

$$S^I = \frac{1}{v_I} \bar{T}^{II} \bar{L} \quad (3.48)$$

et on a, sous forme symbolique

$$d\epsilon^{PI} = (1 + S^I \frac{\delta L^I}{\bar{L}}) dE^P \quad (3.49)$$

Pour des milieux homogènes, $\delta L^I = 0, \forall I$, et on a :

$$d\epsilon^{PI} = dE^P \quad (3.50)$$

quelle que soit la forme de l'inclusion. Par contre, pour des milieux hétérogènes, on peut croire, d'après (3.49), que l'effet de forme, (initial ou induit) est pris en compte dans le terme S. Cet effet intervient simultanément que l'hétérogénéité du milieu caractérisée par le terme $\delta L^I / \bar{L}$.

Cet effet d'anisotropie géométrique et d'hétérogénéité mécanique intervient également pour la rotation totale qui s'écrit, d'après (3.18) et dans le cadre des hypothèses de ce paragraphe :

$$d\omega_{ij}^{II} = d\omega_{ij}^{I0} + \frac{1}{v_I} \bar{A}_{ijkl} \delta \bar{L}_{klmn}^I d\epsilon_{mn}^I \quad (3.51)$$

CHAPITRE IV

LE SCHEMA SELF CONSISTANT

1. MODELE AUTOCOHERENT A UN SITE POUR LA PLASTICITE DES MILIEUX HETEROGENES

2. FORMULATION UTILISEE

2.1. Explicitation pour le glissement plastique

2.2. Détermination du nombre et nature des systèmes actifs

2.3. Formation des textures et lois de comportement macroscopique

Dans la troisième partie, nous avons présenté un ensemble d'équations concernant la plasticité de milieux hétérogènes déduites formellement des équations linéaires de l'élasticité classique pour les milieux hétérogènes. La fin de la troisième partie était consacrée aux discussions sur les modèles classiques de Taylor, Taylor-Lin ou Sachs et nous avons montré leurs insuffisances lorsque le milieu était hétérogène. Les propositions d'un autre modèle, basé sur l'approximation de Born, quoique plus satisfaisante, est limitée aux cas des milieux faiblement hétérogènes.

Le modèle autocohérent proposé initialement par Hershey⁽¹⁾ et Kröner⁽²⁾ dans le cas de l'élasticité, a été repris par Hill⁽⁶⁾ sous forme globale, dans le cas de la plasticité.

Différentes versions (Kröner⁽³⁾, Hutchinson⁽⁷⁾, Budiansky et Wu⁽²⁰⁾, Berveiller et Zaoui⁽²¹⁾, ...) ont été formulées essentiellement à partir du problème d'inclusion dont la solution est due à Eshelby⁽²²⁾.

Dans la première partie de ce chapitre, nous proposons une autre élaboration du schéma self-consistant, à partir des méthodes statistiques du chapitre précédent. Cette formulation est en fin de compte analogue à celle de Hill⁽⁶⁾. Nous simplifions les résultats obtenus en faisant les hypothèses d'isotropie et d'accommodations élastoplastiques. Ceci permet de déboucher sur le modèle de Berveiller et Zaoui⁽²¹⁾. Nous reprenons enfin la formulation de Hill⁽²³⁾ et nous l'élargissons au cas de chargement non radial et non monotone.

1. MODELE AUTO-COHERENT A UN SITE POUR LA PLASTICITE DES MILIEUX HETEROGENES

Dans le chapitre (3), nous avons vu que la difficulté centrale du problème de la détermination des propriétés effectives d'un milieu hétérogène, consiste en la résolution d'une équation intégrale donnant le Tenseur T pour un milieu homogène de référence, où les constantes sont L^0 .

Or L^0 peut être choisi librement et on voit en particulier que si $L^0 = L^{eff}$, alors on doit avoir :

$$\bar{T}(L^{eff}) = 0 \quad (4.1)$$

Cette équation définit de manière implicite la solution du problème : il "suffit" de trouver le Tenseur L^0 qui annule la valeur moyenne de T sur tout le volume.

A ce niveau, le problème est encore doublement complexe. D'une part, l'équation (4.1) est fortement implicite car L^{eff} intervient directement mais également de manière indirecte par l'intermédiaire du Tenseur de Green G du milieu de modules L^{eff} .

D'autre part, effectuer la moyenne de I en tenant compte de la structure réelle polycristalline actuelle du milieu hétérogène, ne peut se faire avec intérêt que dans des situations simples mais trop particulières.

On a donc intérêt à simplifier le problème réel. Ce qui peut se faire en explicitant (4.1) dans le cas d'une hétérogénéité unique prise par exemple sous forme d'inclusion ellipsoïdale.

Cette forme particulière de milieu hétérogène possède deux avantages fondamentaux :

- tout d'abord elle permet, lorsque l'hypothèse d'ergodicité est satisfaite, de remplacer les valeurs moyennes volumiques par des valeurs moyennes d'ensemble.
- ensuite, la forme particulière ellipsoïdale choisie pour le problème hétérogène élémentaire a fait l'objet de nombreuses études⁽²²⁾ et peut trouver une solution sous une forme relativement compacte.

Si on désigne par V_I le volume de l'inclusion de modules tangents L^I située dans un milieu infini de modules tangents L^{eff} uniforme, alors, on a :

$$\begin{aligned} \delta L(r) &= (L^I - L^{eff}) \Theta^I(r) \\ \delta L(r) &= \Delta L^I \Theta^I(r) \end{aligned} \quad (4.2)$$

où

$$\Theta^I(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \notin V_I \\ 1 & \text{si } r \in V_I \end{cases}$$

et pour (3.15), on a :

$$d\epsilon_{mn}^I(r) = dE_{mn}^I + \int_{V_I} \Gamma_{mnkl}(r-r') \Delta L_{klpq}^I d\epsilon_{pq}^I(r') dv \quad (4.3)$$

où, maintenant l'intégrale est étendue au volume de l'inclusion. Or, on sait d'après Eshelby⁽²²⁾ que pour une inclusion ellipsoïdale et homogène, $d\epsilon^I$ est uniforme dans l'inclusion. On peut donc calculer sa valeur moyenne $d\epsilon^I$ par la relation :

$$d\epsilon_{ij}^I = \frac{1}{V_I} \int_{V_I} d\epsilon_{ij}^I(r) dv \quad (4.4)$$

ce qui donne :

$$d\epsilon_{mn}^I = dE_{mn}^I + \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_{V_I} \Gamma_{mnkl}(r-r') \Delta L_{klpq}^I d\epsilon_{pq}^I dv dv' \quad (4.5)$$

En appelant T^{II} le tenseur constant égal à :

$$T_{mnkl}^{II} = \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_{V_I'} \Gamma_{mnkl}(r-r') dv dv' \quad (4.6)$$

on a la relation :

$$d\epsilon_{ij}^I = dE_{ij}^I + T_{ijkl}^{II} \Delta L_{klmn}^I d\epsilon_{mn}^I \quad (4.7)$$

qui permet de trouver l'accroissement de la déformation totale locale en fonction de la déformation macroscopique.

Le tenseur $T_{(r)}$ sera nul en dehors de V_I et prend une valeur constante t^I à l'intérieur de V_I et on a :

$$t_{ijkl}^I = \Delta L_{ijkl}^I + \Delta L_{ijkl}^I T_{klmn}^{II} t_{mnpq}^I \quad (4.8)$$

La valeur moyenne de t^I pour un ensemble d'échantillons pour lesquels la fraction volumique de grains du Type I est f_I doit être nulle. On a choisi pour L^0 les propriétés effectives L^{eff} . On a donc, à la place de (4.1) :

$$\sum_I f_I^I t^I = \sum_I f_I^I (I - \Delta L^I T^{II})^{-1} \Delta L^I = 0 \quad (4.9)$$

Cette équation, plus simple que (4.1) est encore implicite pour L^{eff} . Elle correspond au modèle de Hill⁽⁶⁾.

En effet, L^{eff} intervient directement dans ΔL^I ($\Delta L^I = L^I - L^{eff}$) mais également dans T^{II} qui est calculé à partir des modules L^{eff} du milieu homogène équivalent.

En général, le calcul de T^{II} est complexe et ne peut se faire de façon analytique que dans le cas de milieu isotrope, pour des inclusions sphériques.

Pour être efficace, il est souhaitable que le modèle proposé évite le calcul long fastidieux et répétitif du tenseur T^{II} .

Kröner, en se limitant aux très faibles déformations plastiques et au cas de la plasticité contenue a proposé de calculer T^{II} à partir d'un milieu isotrope effectif dont les modules sont les modules élastiques. Ceci n'a de sens qu'au tout premier stade de la déformation plastique.

Pour étendre le domaine d'application de (4.9) au delà du stade des microdéformations, on peut également, comme l'ont fait Berveiller et Zaoui⁽²¹⁾, évaluer T^{II} pour une inclusion sphérique située dans une matrice en écoulement plastique, dont le comportement serait isotrope, incompressible avec un module tangent évalué à priori.

La relation implicite (4.1) devient alors :

$$\sum f^I (I - (L^I - L^{eff}) T_o^{II})^{-1} (L^I - L^{eff}) = 0 \quad (4.10)$$

où T_o^{II} est maintenant connu d'avance.

Le calcul de L^{eff} à partir de (4.10) devient alors extrêmement simple.

Pour les métaux polycristallins courants, on sait que le module de cisaillement tangent est de l'ordre de $\frac{\mu}{100}$ où μ désigne le module de cisaillement élastique supposé isotrope et uniforme.

Dans ce cas, on peut réécrire (4.10) ou (4.5) sous la forme habituelle :

$$d\sigma_{ij}^I = d\Sigma_{ij}^I + \alpha\mu (d\epsilon_{ij}^P - d\epsilon_{ij}^{PI}) \quad (4.11)$$

qui sera exploitée par la suite avec des valeurs de α de l'ordre de $\frac{1}{100}$ et où les relations entre $d\sigma^I$ et $d\epsilon^{PI}$ seront explicitées ainsi qu'il est indiqué dans le paragraphe suivant.

2. FORMULATION UTILISEE

Pour simplifier la représentation, on considère que le polycristal est monphasé, constitué de grains analogues d'orientations différentes. Soit N le nombre de familles d'orientations cristallines. Chaque famille I est représentée avec une fraction volumique $F_I = \frac{V_I}{V}$ avec $\sum_{I=1}^N F_I = 1$.

On considère que l'élasticité est isotrope, et à partir des relations de moyenne la vitesse de déformation plastique macroscopique $d\epsilon^P$ est donné par la relation :

$$d\epsilon^P = \frac{1}{V} \int d\epsilon^P dv = \sum_{I=1}^N d\epsilon^{PI} F_I \quad (4.12)$$

La loi d'interaction choisie est de la forme

$$\sigma_{ij}^I = \Sigma_{ij} + \alpha\mu (E_{ij}^P - \epsilon_{ij}^{PI}) \quad (4.13)$$

En explicitant la déformation plastique macroscopique dans (4.13), on obtient pour une vitesse de contrainte $d\Sigma$ imposée, la vitesse de contrainte $d\sigma^I$

$$d\sigma^I = d\Sigma + \alpha \mu (\sum_j F_j d\epsilon^{PJ} - d\epsilon^{PI}) \quad (4.14)$$

Le comportement intragranulaire qui donne la relation entre les vitesses de contraintes $d\sigma^I$ et les vitesses de déformation $d\epsilon^{PI}$ s'écrit sous la forme :

$$d\sigma^I = L^I d\epsilon^{PI} \quad (4.15)$$

$$(4.15) \text{ devient } L^I d\epsilon^{PI} = d\Sigma + \alpha \mu (\sum_j F_j d\epsilon^{PJ} - d\epsilon^{PI}) \quad (4.16)$$

On a ainsi un système linéaire de N équations à N inconnues tensorielles :

$$\sum_j M^{IJ} d\epsilon^{PJ} = d\Sigma \quad (4.16)$$

Les termes diagonaux de cette matrice s'écrivent sous la forme :

$$M^{II} = L^I + \alpha \mu (1 - F_I) X_I \quad (4.17)$$

et pour les termes non diagonaux, on a :

$$M^{IJ} = -\alpha \mu F_j$$

En multipliant chaque équation du système par F_I , on a l'avantage de symétriser M_{IJ} dont la solution peut s'écrire sous la forme :

$$d\epsilon^{PI} = \sum_j M_{ij}^{-1} F_j d\Sigma \quad (4.18)$$

En utilisant la relation des moyennes, on a :

$$dE = \frac{1}{V} \int_V d\epsilon dv \quad (4.19)$$

Le comportement macroscopique tangent, défini par la relation : $d\epsilon^P = L^{-1} d\Sigma$ s'obtient alors à partir de (4.18), (3.1) et (3.2)

$$dE^P = \sum_I d\epsilon_I^P F_I = \sum_I \sum_J F_I M_{IJ}^{-1} F_J d\Sigma \quad (4.20)$$

on en déduit :

$$L^{-1} = \sum_I \sum_J F_I M_{IJ}^{-1} F_J \quad (4.21)$$

Cette formulation prend en compte à la fois la texture cristallographique du polycristal et la nature du chargement.

Elle s'étend sans difficulté au cas où l'on impose la vitesse de déformation totale (dE^T). Il suffit d'expliciter dans la relation (4.14) la vitesse de contrainte $d\Sigma$ en fonction de la vitesse de déformation élastique macroscopique ($dE^T - dE^P$) et recomposer dE^P à partir des $d\epsilon_I^P$.

On parvient de la même manière à un système d'équations simultanées où les inconnues sont toujours les $d\epsilon_I^P$ et les grandeurs imposées sont au second membre sous la forme dE^T .

Le fait d'avoir formulé directement le problème en vitesse de contrainte ou de déformation permet d'étudier n'importe quelle histoire de contrainte ou de déformation, ou n'importe quelle histoire mixte de contrainte et de déformation imposées et ceci, quelle que soit la texture initiale.

Les limites de cette approche sont surtout le nombre considérable d'équations qui augmente d'autant plus que la discrétisation de la distribution des orientations cristallines est plus fine. Si l'on veut prendre en compte la nature cristalline du matériau et étudier la formation des textures de déformation, il est nécessaire d'expliciter le comportement plastique intracristallin en reliant L_I pour chaque famille d'orientations aux mécanismes élémentaires de déformation plastique et à l'écrouissage intracristallin. Ceci compliquera encore la résolution du système d'équations.

2.1 Explicitation pour le glissement plastique

Lorsque la texture initiale du polycristal et le comportement du monocristal sont connus, il faut calculer à partir de (4.16) et de (2.9) la réponse à une histoire de sollicitation donnée.

Il faut donc être en mesure de déterminer à tout instant et pour chaque orientation cristalline le nombre et la nature des systèmes actifs et la vitesse de glissement plastique sur chaque système. Ceci permet alors de calculer la vitesse de rotation du réseau cristallin nécessaire au calcul des textures, ainsi que la vitesse de déformation dans chaque grain qui permet le calcul de la vitesse de déformation macroscopique et la détermination de la loi associée.

2.2. Détermination du nombre et nature des systèmes actifs

A chaque instant, le nombre et la nature des systèmes actifs sont connus. Pour ces systèmes, les vitesses de glissement plastique sont les solutions d'un système d'équations obtenu en intégrant les équations (2.9) de la loi d'interaction (4.16).

Le système linéaire (4.16) devient alors :

$$F_I \sum_h (s^{gI}_h s^{gI}_h H^{gIhI} + \alpha \mu R^{gI}_h R^{hI}) d\gamma^{hI} - \alpha \mu R^{gI}_I F_I \sum_J f_J \sum_h R^{hJ} d\gamma^{hJ} = F_I R^{gI} d\Sigma \quad (4.22)$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\sum_{IJ} A^{hIhJ} d\gamma^{hJ} = F_I R^{hI} d\Sigma \quad (4.23)$$

On connaît alors, sous réserve que le nouveau système soit effectivement actif et qu'il n'y ait pas de désactivation, situation qui est discutée dans ⁽²⁷⁾, l'ensemble des nouveaux systèmes actifs et la procédure peut être reprise.

Cette méthode rapide et efficace repose sur le fait que l'équation (4.23) est linéaire tant qu'il n'y a pas de nouveau système actif. A chaque nouvel événement, la taille et la nature de la matrice A changent. Cette "linéarisation" a été obtenue au prix de simplifications physiques (écrouissage linéaire, α constant, effet négligeable des rotations) qui peuvent être excessives dans certaines applications, mais justifiées pour une première approche du polycristal. D'autres procédures de résolution autorisant des non-linéarités pour α et H et l'introduction de dérivées objectives pour σ peuvent être envisagées.

Dans les cas fréquents, pour les applications envisagées ici, où le chargement n'est ni monotone, ni radial, il est indispensable de "suivre" simultanément l'état des contraintes internes dans chaque famille de grains et l'état de l'écrouissage sur chaque système de glissement.

La réponse actuelle d'un grain est très directement liée au chargement antérieur par l'intermédiaire de ces deux grandeurs (état des contraintes internes et de l'écrouissage sur chaque système de glissement).

2.3. Formation des textures et lois de comportement macroscopique

Les vitesses de glissement des systèmes actifs dans les grains en fonction de la vitesse des contraintes macroscopiques $d\Sigma$ sont données par la

résolution de (4.22).

On peut alors calculer la vitesse de déformation plastique macroscopique dE^P par les relations :

$$dE_{ij}^P = \sum_I F_I d\epsilon_{ij}^{PI} = \sum_I F_I \sum_g R_{ij}^{gI} d\gamma^{gI} \quad (4.24)$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$dE^P = L^{P-1} d\Sigma$$

où L^P est le comportement macroscopique recherché. Pour chaque famille de grains I d'orientation donnée, la connaissance des vitesses de glissement $d\gamma^{gI}$ permet le calcul de la vitesse de rotation du réseau cristallin ω^{eI} par l'intermédiaire des relations approchées usuelles ⁽¹⁰⁾ :

$$d\omega_{ij}^{eI} = - d\omega_{ij}^{PI} = - \sum_g S_{ij}^g d\gamma^{gI} \quad (4.25)$$

avec S_{ij} : la partie antisymétrique de la partie plastique du gradient de la vitesse.

Ces vitesses de rotation dépendent évidemment de l'orientation de la famille de grain I et des vitesses de glissement qui sont donc à l'origine de la formation des textures de déformations.

CHAPITRE V

RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX

1. RAPPELS DES OBSERVATIONS EXPERIMENTALES ET DES THEORIES CLASSIQUE

1.1. Observations expérimentales

1.2. Modélisation phénoménologique

1.2.1. Plasticité parfaite

1.2.2. Ecrouissage isotrope

1.2.3. Ecrouissage cinématique

1.2.4. Critères de plasticité couramment utilisés

2. PARAMETRES PHYSIQUES UTILISES POUR LES CALCULS THEORIQUES

3. RESULTATS POUR DES CHARGEMENTS RADIAUX ET MONOTONES

3.1. Essai de traction simple

3.2. Essai en chargement biaxé

4. RESULTATS CONCERNANT L'EFFET BAUSCHINGER ET L'ECROUISSAGE CYCLIQUE

4.1. Effet Bauschinger

4.2. Ecrouissage cyclique

5. RESULTATS CONCERNANT LES CHARGEMENTS NON RADIAUX ET NON MONOTONES

6. ETUDES EXPERIMENTALE ET THEORIQUE DE LA PLASTICITE DE POLYCRISTAUX METALLIQUES BIPHASES

6.1. Elaboration des matériaux et des éprouvettes

6.2. Essais mécaniques et résultats expérimentaux

6.3. Résultats théoriques et confrontation avec les résultats expérimentaux

6.4. Résultats théoriques concernant le laiton biphasé ($\alpha + \beta$) pour des chargements biaxés et monotones

1. RAPPELS DES OBSERVATIONS EXPERIMENTALES ET DES THEORIES CLASSIQUES

1.1. Observations expérimentales

Pour les métaux usuels et dans les conditions normales de sollicitations, il existe une transition entre le comportement élastique et le comportement élastoplastique.

Cette transition dépend de l'état de contrainte et fournit dans l'espace des contraintes la surface seuil.

L'écoulement plastique, lorsqu'il a lieu, modifie la surface seuil : c'est le phénomène d'écrouissage.

De nombreuses difficultés expérimentales surgissent lorsqu'on veut étudier la surface seuil d'un matériau et son évolution.

On peut citer les problèmes suivants :

a) La forme et la position de la surface seuil dépendent de la définition choisie pour caractériser la transition entre élasticité et élastoplasticité.

On peut utiliser :

* Une limite d'élasticité conventionnelle (contrainte atteinte pour une déformation permanente donnée) commode dans le cas d'un chargement à un paramètre (traction ou cisaillement) mais d'utilisation plus délicate lors de chargements multiaxiaux. Dans ce cas, on a recours au concept de contrainte et déformation équivalentes. En fait, expérimentalement, le seuil de plasticité ne peut être apprécié sans une certaine déformation seuil. Dans ces conditions, on observe une influence notable de la déformation seuil retenue sur la forme et la position des surfaces seuils.

* Dans des modélisations théoriques telles qu'elles sont effectuées ici, il est possible de définir la surface seuil à partir de la contrainte nécessaire pour activer le premier système de glissement. De plus, nous pouvons utiliser également la notion de limite d'élasticité conventionnelle, décrite précédemment, ce qui sera le cas par la suite.

b) L'évolution de la surface seuil avec la déformation plastique dépend de la nature du chargement et de son évolution même pour des matériaux non viscoplastiques.

Dans le cas de chargements monotones et radiaux, on observe en général :

- un gonflement de la surface seuil (écrouissage isotrope)
- une translation de cette surface dans le sens et dans la direction du chargement (écrouissage cinématique)
- une déformation de cette surface. En général, il y a apparition de points anguleux dans la direction du chargement.

Pour des chargements cycliques, on observe :

- une diminution de la limite d'élasticité dans le sens inverse du premier chargement (Effet Bauschinger)
- des courbes "contrainte-déformation" qui traduisent un durcissement, un adoucissement ou une stabilisation du matériau sous sollicitations cycliques

c) Si des chargements à un paramètre (traction, torsion, ...) sont relativement simples à mettre en oeuvre, il n'en est pas ainsi pour des chargements multiaxiaux séquentiels. D'un point de vue expérimental, on peut distinguer deux méthodes :

- * La méthode de Taylor⁽²⁴⁾ consiste à soumettre un certain nombre d'éprouvettes à un programme de chargement identique, puis à déterminer les seuils de plasticité selon des trajets de chargement distincts pour chaque éprouvette. L'inconvénient de cette méthode est la dispersion expérimentale des résultats liés à l'hétérogénéité du lot d'éprouvettes.
- * La méthode de Naghdi, Bertsch et Findley⁽²⁵⁾ consiste à prendre une seule éprouvette pour étudier aussi bien la frontière initiale que les frontières successives. Elle a l'avantage de permettre l'obtention d'une frontière d'élasticité avec une très bonne résolution et une bonne régularité mais modifie de fait les résultats, par l'introduction d'un écrouissage "parasite" lié à la mesure.

d) Dans la plus part des cas, les résultats expérimentaux sont obtenus à partir d'expériences effectuées sur des tubes minces sollicités en traction et torsion (éventuellement avec une pression interne). La surface seuil est alors limitée au plan(Σ , τ) correspondant à la contrainte de traction et à la contrainte de torsion.

En conclusion, on constate la difficulté des problèmes liés à la détermination expérimentale des surfaces seuils et de leur évolution avec la déformation plastique. Ces difficultés expliquent en partie la complexité et la diversité des modèles phénoménologiques élaborés pour décrire les observations expérimentales et justifient, par ailleurs, les efforts théoriques qui sont faits pour une détermination directe, à partir des phénomènes physiques, des surfaces seuils.

1.2. Modélisation phénoménologique

Dans cette partie, nous rappelons les différents modèles proposés pour décrire les observations expérimentales concernant l'écoulement élastoplastique. Nous négligeons la partie viscoplastique de telle manière que

les effets de fluage et de relaxation deviennent secondaires et négligeables.

La déformation totale mesurée est composée d'une partie plastique et d'une partie élastique. Cette dernière est négligée dans ce qui suit.

Dans ces conditions, la surface seuil a pour équation générale :

$$F(\sigma, y) = 0 \quad (5.1)$$

σ représente l'état de contrainte et y l'ensemble des paramètres d'écrouissage actuels.

Pour des matériaux standards obéissant au principe du travail maximal de Hill, l'écoulement plastique s'écrit :

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad (5.2)$$

où F joue le rôle de potentiel plastique.

Dans les théories de plasticité, il reste à préciser la fonction F et son évolution avec la déformation plastique.

1.2.1. Le cas de la plasticité parfaite

Dans ce cas, la surface seuil est choisie constante ayant pour équation :

$$F(\sigma, y) = J(\sigma) - R_0 = 0 \quad (5.3)$$

où J est une fonction scalaire du tenseur des contraintes et R_0 une caractéristique scalaire du matériau. Ce modèle ne permet pas de décrire l'écrouissage (ni isotrope, ni cinématique) et représente donc une première approche simplifiée. Néanmoins, il est bien adapté aux calculs de la mise en forme car très simple à mettre en oeuvre.

1.2.2. Le cas de l'écrouissage isotrope

Dans ce cas, on autorise la surface seuil à se dilater de manière homothétique autour de l'origine. Cette dilatation est liée à la déformation plastique ou au travail de déformation plastique.

Dans ce cas l'équation (5.1) devient :

$$F(\sigma, y) = J(\sigma) - (R + R_0) = 0 \quad (5.4)$$

(R) dépend maintenant de la déformation plastique (ϵ^P) ou du travail de déformation plastique (w^P).

Dans le cas d'un chargement radial, on peut montrer que ces deux approches sont équivalentes.

Cette forme de loi d'écrouissage traduit bien le gonflement de la surface seuil, mais ne décrit pas l'écrouissage cinématique et par là l'effet Bauschinger.

1.2.3. Ecrouissage cinématique

L'hypothèse d'une translation de la surface seuil pour décrire l'écrouissage cinématique a été introduit par Prager⁽²⁶⁾ sous la forme d'une variable tensorielle X telle que :

$$F(\sigma, X) = J(\sigma - X) - R_0 \quad (5.5)$$

Les variables X étant associées aux contraintes internes intra et intergrannulaires dont il a été question dans les chapitre 2 et 3, et pouvant évoluer avec l'écoulement plastique. La variable X représente en fait la translation de l'origine des contraintes, mais ne permet pas la description du durcissement intrinsèque dû à l'augmentation de la densité de dislocations, c'est à dire le gonflement de la surface seuil.

La combinaison de l'écrouissage isotrope et cinématique peut donc être décrite par une fonction seuil de la forme :

$$F(\sigma, X, R) = J(\sigma - X) - (R + R_0) \quad (5.6)$$

où il reste encore à préciser les évolutions de X et de R avec la déformation plastique et la forme de la fonction J pour laquelle on définit des critères de plasticité.

1.2.4. Critères de plasticité couramment utilisés (matériaux isotropes)

On distingue de manière usuelle, deux critères liés soit à la cisssion maximale (Tresca) soit à la cisssion octaédrale (Von Mises). Le critère de Tresca s'écrit :

$$\left| \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \right| = K \quad (5.7)$$

où σ_I et σ_{III} désignent respectivement la plus grande et la plus petite contrainte principale. La déformation plastique peut commencer lorsque la cisssion maximale atteint une valeur critique K . Pour un état de contrainte plane ($\sigma_I, \sigma_{II}, 0$), la trace de la surface de charge dans le plan (σ_I, σ_{II}) est un hexagone ; figure (F.5.1).

Pour le critère de Von Mises, plusieurs simplifications physiques peuvent justifier la forme utilisée. En effet, on peut associer à ce critère soit la cisssion octaédrale, soit l'énergie de distorsion d'un matériau élastique isotrope, ou encore le deuxième invariant du déviateur S_{ij} des contraintes σ_{ij} .

Le critère prend alors la forme très simple :

$$J_2 \equiv \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = k^2 \quad (5.8)$$

Le critère de Von Mises est souvent choisi de préférence au critère de Tresca. Il permet une écriture plus simple dans le cas tridimensionnel. Lorsqu'il est associé à l'hypothèse de normalité, ses propriétés de dérivabilité permettent l'application de la théorie du potentiel plastique dans de meilleures conditions que le critère de Tresca.

Dans le cas d'un état de contraintes planes ($\sigma_I, \sigma_{II}, 0$), la trace de la surface de charge dans le plan (σ_I, σ_{II}) est une ellipse qui contient l'hexagone de Tresca figure (F.5.1). On voit donc, à la fois, sur la forme des expressions mathématiques décrivant les surfaces seuils et sur les équations décrivant l'évolution des paramètres internes R et X (équations qui n'ont pas été rappelées ici) que la description directe du comportement plastique des métaux est très complexe et souvent incomplète.

Ceci est lié à la complexité et à la variété des phénomènes en jeu, à la difficulté des expériences et à l'impossibilité d'effectuer certaines vérifications expérimentales, en particulier lors de chargements complexes. Ces difficultés conceptuelles justifient une approche plus physique partant de phénomènes physiques élémentaires connus et maîtrisés et ayant pour but de décrire le comportement global des métaux polycristallins.

Dans ce sens, le chapitre (2) de cette thèse a décrit le comportement du monocristal, tandis que dans les chapitres (3) et (4), nous avons passé en revue les différents modèles pour la plasticité des polycristaux métalliques.

Après avoir rappelé dans le paragraphe (2), les différents paramètres du modèles utilisé, nous présentons les résultats théoriques obtenus dans le cadre du schéma self-consistant et montrons comment ils se situent par rapport aux observations expérimentales. Auparavant, nous préciserons les différents paramètres physiques intervenant dans nos calculs.

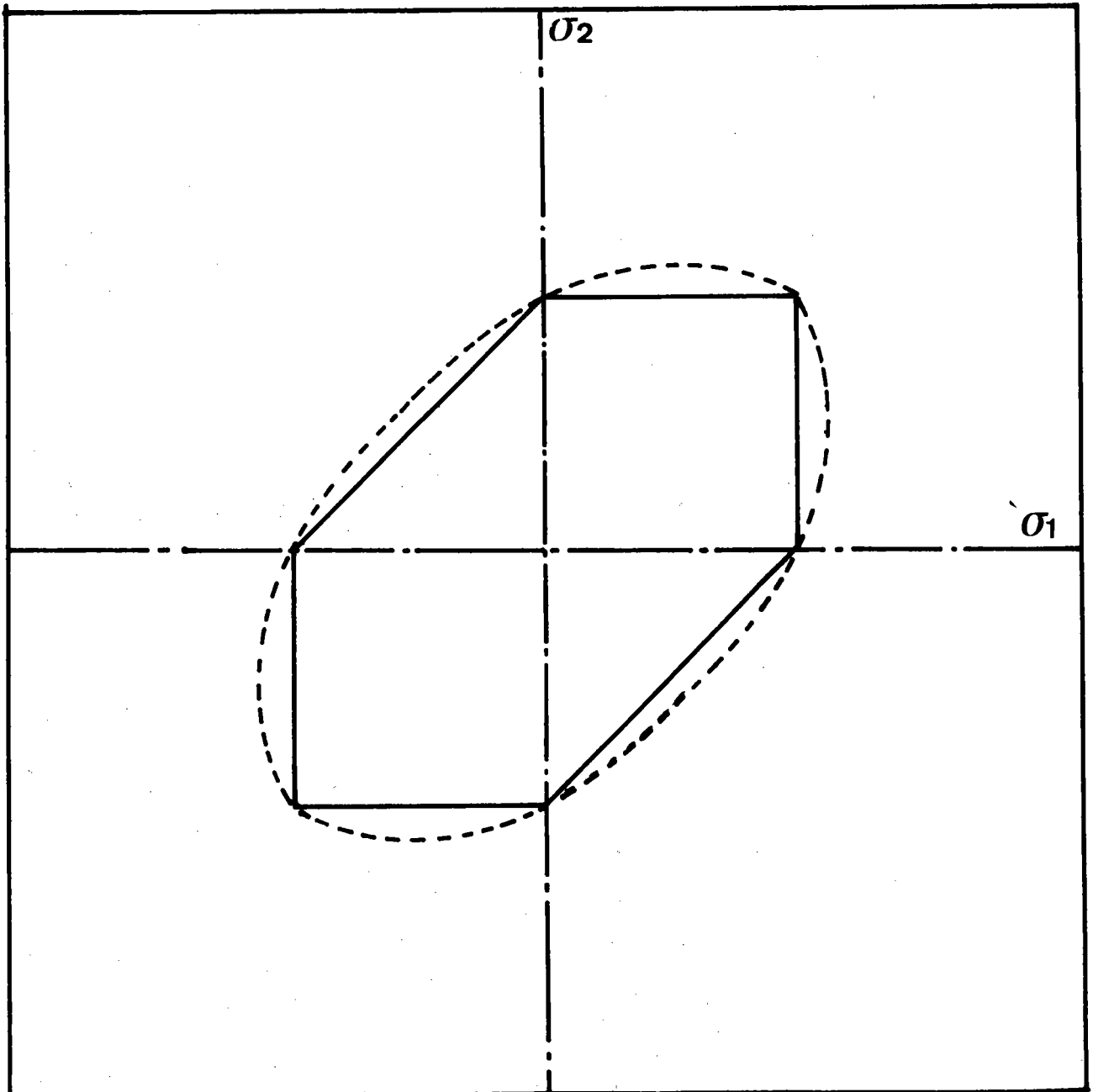


FIGURE (F.5.1)

- (—) Trace de la surface de charge dans le plan des contraintes principales (σ_I, σ_{II}) suivant critère de Tresca.
- (---) Trace de la surface de charge suivant critère de Von Mises.

2. PARAMETRES PHYSIQUES UTILISES POUR LES CALCULS

Les grandeurs physiques utilisées, comme caractéristiques "élémentaires" pour le comportement plastique du monocristal, correspondent globalement au comportement des monocristaux CFC (cubique à faces centrées) typiques tels que le Cuivre, l'Aluminium ou l'Argent. Pour ces métaux, le seuil initial τ^0 est faible et de l'ordre de $2 \cdot 10^{-5} \mu$ (μ est le module de cisaillement élastique supposé isotrope).

Les systèmes de glissement facile sont au nombre de 12 et correspondent aux plans denses $\{111\}$ et aux directions denses $\langle 110 \rangle$ figure (F.5.2).

Pour les monocristaux CFC, les courbes d'écrouissage (τ, γ) présentent généralement trois stades figure (F.5.3) associés :

- au glissement facile (stade 1) (sur un seul système de glissement) dont la pente est de l'ordre de $10^{-4} \mu$
- au glissement double ou multiple (stade 2) (sur plusieurs systèmes de glissement) et dont la pente, pratiquement constante est de l'ordre de $4 \mu \cdot 10^{-3}$
- au glissement dévié (stade 3) : apparaissant aux contraintes élevées et correspondant à la possibilité qu'ont les dislocations de contourner un obstacle en changeant leur plan de glissement

Dans le cas d'un grain contenu dans un polycristal, le stade 1 du monocristal est pratiquement absent, car le développement des contraintes internes va conduire très rapidement au glissement multiple.

Il semble donc logique d'utiliser pour les termes de la matrice H, des valeurs dont l'ordre de grandeur est comparable à la pente observée dans le stade 2, des courbes de traction du monocristal, c'est à dire $4 \mu \cdot 10^{-3}$.

L'anisotropie de la matrice H a été représentée à la lumière des résultats expérimentaux ⁽²⁷⁾ sur les caractéristiques d'écrouissage latent des monocristaux CFC. Ceux-ci font apparaître plusieurs types d'interactions à courte distance entre les familles de dislocations qui leurs sont associées.

Le durcissement latent étant toujours supérieur à l'autodurcissement ($H^{gh} > H^{gg}$ pour $g \neq h$), on peut distinguer quatre familles d'interaction, par ordre croissant d'intensité :

- les interactions entre systèmes d'une même famille (autodurcissement)
- les interactions entre systèmes ne pouvant pas créer de réactions de jonction entre les dislocations qui leurs appartiennent (coplanaires...)
- les interactions entre systèmes créant des réactions de jonctions glissiles

- les interactions entre systèmes créant des réactions de jonctions sessiles (barrières de Lomer-Cottrell).

Nous avons schématisé cette situation en regroupant deux à deux ces types d'interactions, caractérisés par des coefficients égaux à H_1 pour les deux premiers, à H_2 pour les deux derniers. Un seul coefficient $A = \frac{H_2}{H_1}$, caractérisant ainsi l'anisotropie de la matrice d'écrouissage, tableau (T.5.1).

Les mesures indiquent une relative stabilisation d'un tel coefficient pour un glissement primaire suffisant, nous avons choisi pour A des valeurs caractéristiques de cet état stabilisé (soit $A \approx 1,5$ pour le Cuivre, mais plus proche de l'unité pour l'Aluminium). Cependant, pour tester l'influence de ce paramètre physique, nous avons dans certaines situations envisagé des valeurs très différentes, allant de 1 à 3.

Cette représentation de l'écrouissage intracristallin ne tient compte en fait que des actions de contact et néglige les effets à distance dont il a été question au paragraphe (3) du chapitre (2).

Ceci conduit à négliger l'effet Bauschinger propre au monocristal. Les résultats obtenus par la suite sur l'effet Bauschinger du polycristal concernent donc exclusivement les rôles des contraintes intergranulaires sur l'écrouissage du polycristal.

Pour les métaux biphasés dont il sera question au paragraphe (6), la phase CFC est modélisée par le comportement typique décrit précédemment. Pour la phase CC par contre, nous supposons que le seuil initial est le double de celui du monocristal CFC, et que les systèmes de glissement facile sont du type $\{110\} \langle 111 \rangle$ figure (F.5.2). Ceci interdit des possibilités de glissement sur des systèmes du type $\{123\} \langle 111 \rangle$ ou $\{112\} \langle 111 \rangle$ qui peuvent être présent dans le cas du pencil glide, mais en général dans des proportions relativement faibles. L'écrouissage des métaux CC est en général plus faible que celui des métaux CFC. Nous prendrons donc pour les termes de la matrice H des valeurs de $2 \mu 10^{-3}$ et nous choisirons une matrice H isotrope ($A = \frac{H_2}{H_1} = 1$).

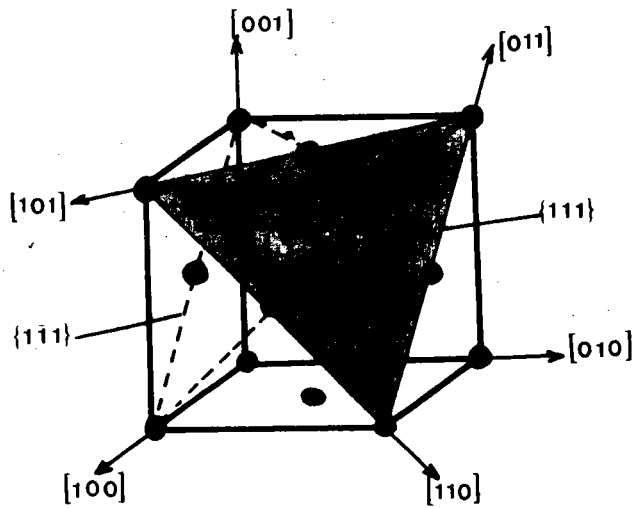
Le choix du nombre de familles d'orientations différentes relève d'un double compromis :

- il s'agit d'abord de limiter le temps et le coût du calcul compatible avec un nombre de passages importants permettant une vaste exploitation du programme
- en même temps, il est indispensable d'avoir une modélisation suffisamment représentative des différentes orientations d'un polycristal, ceci pour ne pas attribuer à tel ou tel phénomène observé une signification générale, alors que son origine serait plutôt dans la discrétisation trop brutale des familles d'orientations.

Nous utilisons donc un polycristal caractérisé par 33 orientations différentes décrites par ⁽²³⁾.

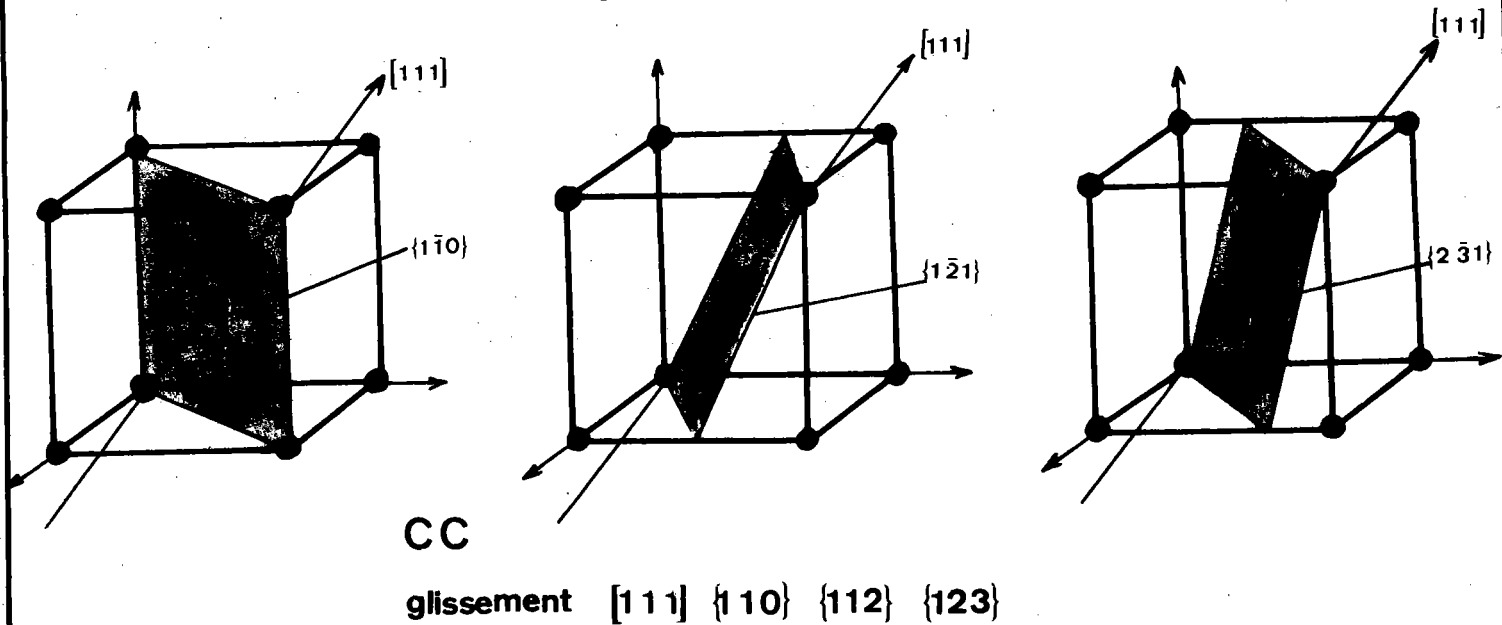
Le seul paramètre "ajustable" du modèle concerne le facteur d'accommodation plastique isotrope α qui devrait, ent toute logique, être obtenu par des résultats d'un calcul d'homogénéisation.

On a vu que le fait de choisir, à priori, une valeur de α compatible avec le module tangent du polycristal, c'est à dire de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-1} , doit conduire à une représentation correcte du comportement du polycristal.



C FC

glissement $\{110\} \{111\}$



C FC

Directions	011	0 $\bar{1}$ 1	101	$\bar{1}$ 01	$\bar{1}$ 10	110
Plans	$\bar{1}\bar{1}1$ $\bar{1}\bar{1}1$	$\bar{1}11$ 111	$\bar{1}11$ $\bar{1}\bar{1}1$	111 1 $\bar{1}1$	111 $\bar{1}\bar{1}1$	$\bar{1}11$ 1 $\bar{1}1$

CC

Directions	$\bar{1}11$	111	$\bar{1}\bar{1}1$	1 $\bar{1}1$
Plans	0 $\bar{1}$ 1 101 110	0 $\bar{1}$ 1 $\bar{1}$ 01 $\bar{1}$ 10	011 101 $\bar{1}$ 10	011 $\bar{1}$ 01 110

FIGURE (F.5.2)

Systèmes de glissements dans les structures CFC et CC

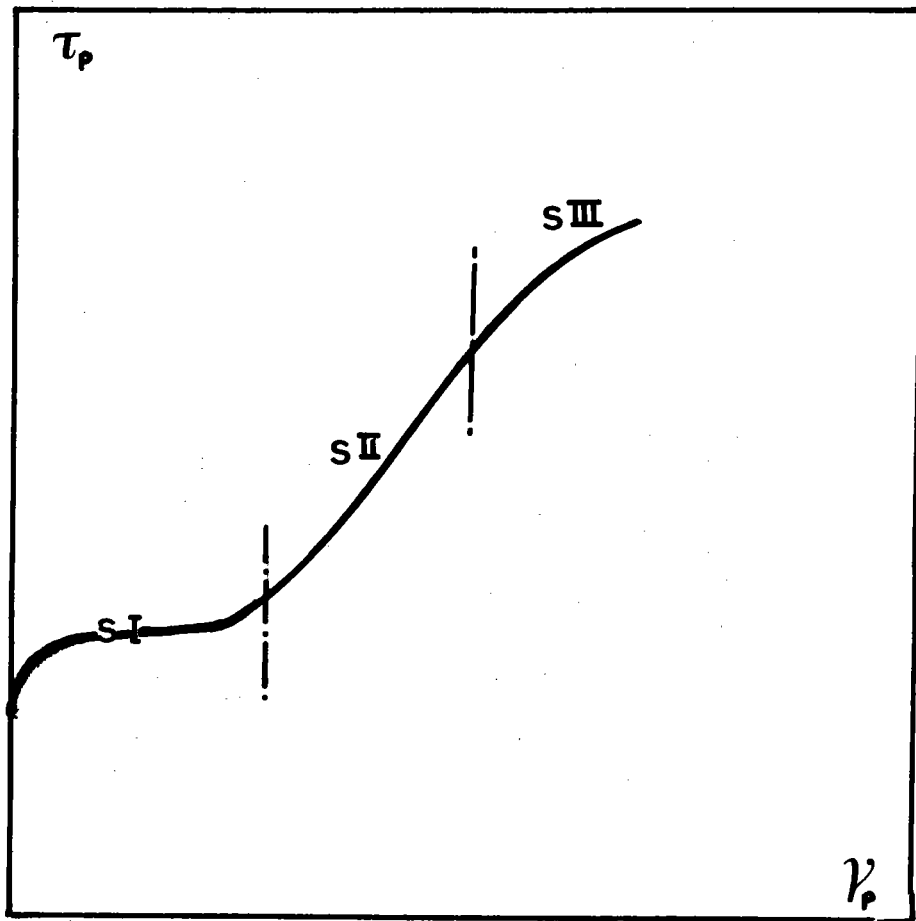


FIGURE (F.5.3)

Courbe d'écrouissage "à 3 stades" d'un monocristal CFC

	A ₂	A ₃	A ₆	B ₂	B ₄	B ₅	C ₁	C ₃	C ₅	D ₁	D ₄	D ₆
A ₂	H ₁											
A ₃	H ₁	H ₁										
A ₆	H ₁	H ₁	H ₁									
B ₂	H ₁			H ₁								
B ₄		H ₁		H ₁	H ₁							
B ₅			H ₁	H ₁	H ₁	H ₁						
C ₁	H ₁	H ₁		H ₁			H ₁					
C ₃		H ₁			H ₁		H ₁	H ₁				
C ₅			H ₁			H ₁	H ₁	H ₁	H ₁			
D ₁	H ₁	H ₂	H ₂	H ₁	H ₂		H ₁		H ₁	H ₁		
D ₄		H ₁			H ₁			H ₁		H ₁	H ₁	
D ₆			H ₁	H ₂	H ₂	H ₁			H ₁	H ₁	H ₁	H ₁

TABLEAU (T.5.1)

Matrice H des coefficients d'interactions
au contact entre dislocations pour la
structure CFC.

3. RESULTATS POUR DES CHARGEMENTS RADIAUX ET MONOTONES

Ce paragraphe concerne l'exploration de la surface seuil "initiale" pour un polycristal isotrope constitué de grains CFC et les résultats concernant l'écoulement plastique lorsque le chargement correspond soit à un essai de traction simple, soit un essai biaxé.

3.1. Essai de traction simple

La figure (F.5.4) montre les différentes courbes de traction obtenues avec plusieurs valeurs de α telles qu'elles ont été calculées par Hihi⁽²³⁾. Sur cette même figure, on trace les courbes de tractions expérimentales pour différentes tailles de grains⁽¹⁰⁾ obtenus sur du Cuivre OFHC.

On constate que les courbes se composent de trois parties différentes :

- a) La limite d'élasticité, qui physiquement correspond à l'activation du système de glissement le plus chargé

$$\Sigma \approx 2 \tau_0$$

Macroscopiquement, l'écoulement plastique n'est appréciable que si un certain nombre de systèmes de glissement devient actif.

L'influence du facteur α est dominant sur le nombre de systèmes actifs, pour $0 < \alpha < 0.1$. La limite d'élasticité physique est confondue avec la limite macroscopique. Si $\alpha > 1$ l'écoulement plastique macroscopique est faible et ce n'est que pour $\Sigma / 2\tau_0 \approx 1,5$ que celui-ci devient appréciable.

si $\alpha = 10$ modèle de Taylor $\Sigma / 2\tau_0 = 1,53$

$\alpha = 0$ modèle de Statique $\Sigma / 2\tau_0 = 1,12$

Dans cette région l'effet de l'anisotropie de la matrice d'écrouissage est dominé par l'écrouissage dû aux contraintes internes.

- b) Un stade parabolique : qui correspond à la mise en place progressive des systèmes de glissement. Le facteur α joue un rôle important sur l'allure de ce stade ; ce qui montre que l'écrouissage intercristallin a plus d'influence que l'écrouissage intracristallin, tout au moins dans ce stade. Lorsque $\alpha = 0,1$, on observe un accord correct entre la courbe théorique et les courbes expérimentales obtenues sur du Cuivre pour différentes tailles de grains⁽¹⁰⁾. On peut dire alors qu'une valeur de $\alpha \approx 0,01$ est correcte pour des déformations plastique $E^P > 10E_0$.

c) Un régime stationnaire (stade linéaire) où aucun système ne s'active lorsque Σ augmente. Si α est faible, l'effet des contraintes internes diminue et le glissement multiple est plus difficile à obtenir. Ceci explique que le démarrage de ce stade se produit pour des valeurs de $\frac{E_P}{E_0}$ plus grandes lorsque α est plus faible.

La figure (F.5.5) montre l'influence des facteurs α et A sur le nombre moyen de systèmes actifs. Ce nombre moyen croît avec α , ce qui correspond à une augmentation des effets des contraintes internes. On sait selon Von Mises, que pour obtenir une déformation quelconque sans variation de volume, il faut cinq systèmes de glissement.

L'influence du facteur d'anisotropie A est plus difficile à analyser. On peut néanmoins conclure que lorsque $A > 1$ l'écrouissage intracristallin est important et rend difficile le glissement multiple homogène.

3.2. Essai en chargement biaxé

La figure (F.5.6) montre les résultats obtenus pour le même polycristal que celui étudié lors de l'essai de traction simple, mais pour différents chargements biaxés radiaux et monotones dans le plan (σ_1, σ_2) .

La surface seuil initiale, correspondant à la contrainte macroscopique nécessaire pour activer le premier système de glissement du polycristal, est pratiquement confondue avec le critère de Tresca. Il lui correspond une résolution en déformation qui est nulle. La symétrie de la surface dans le plan (σ_1, σ_2) montre que la discrétisation des différentes orientations a été choisie correctement pour représenter un polycristal pratiquement isotrope.

Lorsqu'on augmente la résolution en déformation du seuil d'écoulement plastique, en choisissant une déformation plastique équivalente au sens de Von Mises $E_e^P = \sqrt{\frac{2}{3} \epsilon_{ij}^P \epsilon_{ij}^P}$ différente de zéro, on observe un gonflement irrégulier de la surface, qui tend à prendre une allure "elliptique" proche de l'ellipse de Von Mises et à perdre ainsi son caractère angulaire.

Cette transformation est extrêmement sensible et rapide et se produit pour des déformations équivalentes comprises entre zéro et $5 \cdot 10^{-5}$. Au delà, la surface seuil gonfle de manière régulière.

Dans ce domaine de déformation, il faudrait en fait tenir compte des déformations élastiques bloquées dans le polycristal qui se manifestent exclusivement dans le cas de matériaux élastiquement hétérogènes. En effet, la

déformation E^T mesurée à l'échelle macroscopique dans le cas de la plasticité continue, est la moyenne des déformations locales.

$$E_{ij}^T = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij}^T(r) dv \quad (5.9)$$

ϵ_{ij}^T est la somme d'une partie élastique ϵ^e et de la partie plastique ϵ_{ij}^p telle que :

$$E_{ij}^T = \frac{1}{V} \int_V (\epsilon_{ij}^p + \epsilon_{ij}^e) dv \quad (5.10)$$

Lorsque le polycristal est déchargé, les contraintes macroscopiques Σ_{ij} sont nulles et on a pour les contraintes locales σ_{ij} :

$$\frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(r) dv = 0 \quad (5.11)$$

soit, d'après la loi de Hooke

$$\frac{1}{V} \int_V C_{ijkl}(r) \epsilon_{kl}^e(r) dv = 0 \quad (5.12)$$

Si le milieu est homogène pour l'élasticité, on peut écrire :

$$\frac{1}{V} C_{ijkl} \int_V \epsilon_{kl}^e(r) dv = 0 \quad (5.13)$$

ce qui donne pour (5.10)

$$E_{ij}^T = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij}^p(r) dv \quad (5.14)$$

La déformation totale est uniquement plastique. Par contre, dans le cas de milieux hétérogènes pour l'élasticité on aura :

$$E_{ij}^T = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij}^p(r) dv + \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij}^e dv \neq \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij}^p dv \quad (5.15)$$

La surface seuil, pour un écoulement plastique donné, peut donc être affectée par l'hétérogénéité élastique. En particulier, dans le cas des métaux CFC tels que l'Aluminium et le Cuivre, on devrait observer un effet spécifique attaché à l'anisotropie élastique du Cuivre. Le monocristal d'Aluminium est quasiment isotrope alors qu'il n'en est pas ainsi pour le Cuivre.

Les courbes obtenues sont à rapprocher des courbes expérimentales obtenues par Bui⁽²⁸⁾ et Rousset⁽²⁹⁾ qui, en utilisant la méthode de Naghdi, Bertsch et Findley⁽²⁵⁾, imposent plusieurs chargements dans le plan (traction-torsion) avant d'obtenir une stabilisation progressive vers une courbe fermée dans le cas de l'Aluminium figure (F.5.7). Le même effet est observé dans le cas du fer doux Bui⁽²⁸⁾ mais pratiquement absent dans le cas du Cuivre figure (F.5.8).

Par ailleurs, il semble assez difficile de rapprocher ces courbes expérimentales de l'un ou de l'autre des critères utilisés. Les points expérimentaux étant suffisamment dispersés pour que le lissage de ces derniers ne passe par aucune des courbes modèles. Ce résultat est bien conforme aux courbes (1) et (2) que nous avons obtenues par voie théorique directe.

Pour les courbes d'écrouissage donnant la contrainte équivalente en fonction de la déformation équivalente pour différents trajets de chargement dans le plan (σ_1, σ_2), on observe des résultats qui dépendent légèrement du trajet choisi. Ceci est dû en priorité à l'anisotropie de texture qui a des effets plus sensibles sur l'écoulement plastique que sur le seuil initial.

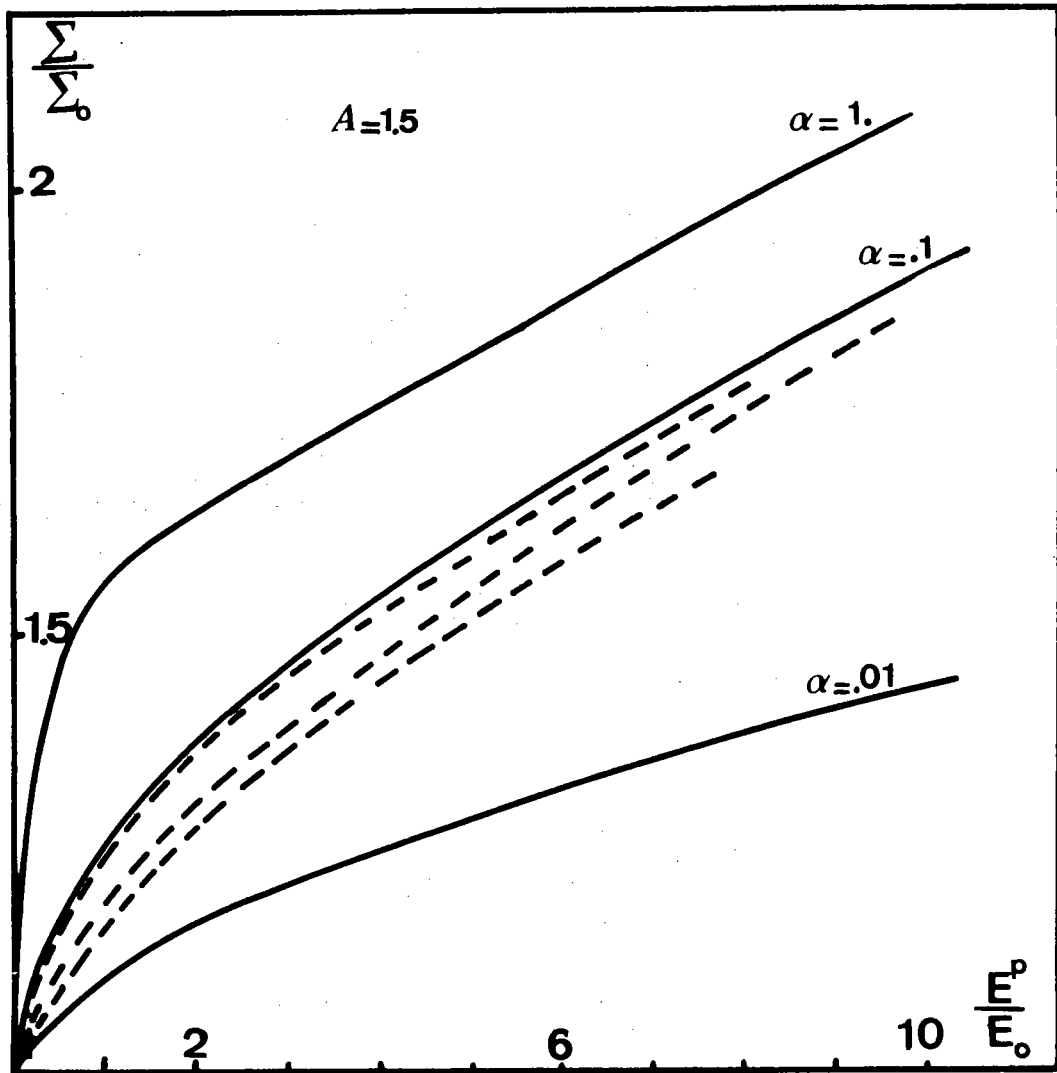


FIGURE (F.5.4)

- (—) Courbes de traction calculées pour plusieurs valeurs du module tangent ($\alpha \mu$)
- (---) Courbes expérimentales obtenues sur des polycristaux de Cuivre.
- Σ_0 et E_0 représentent la contrainte et la déformation élastique à la limite d'élasticité.

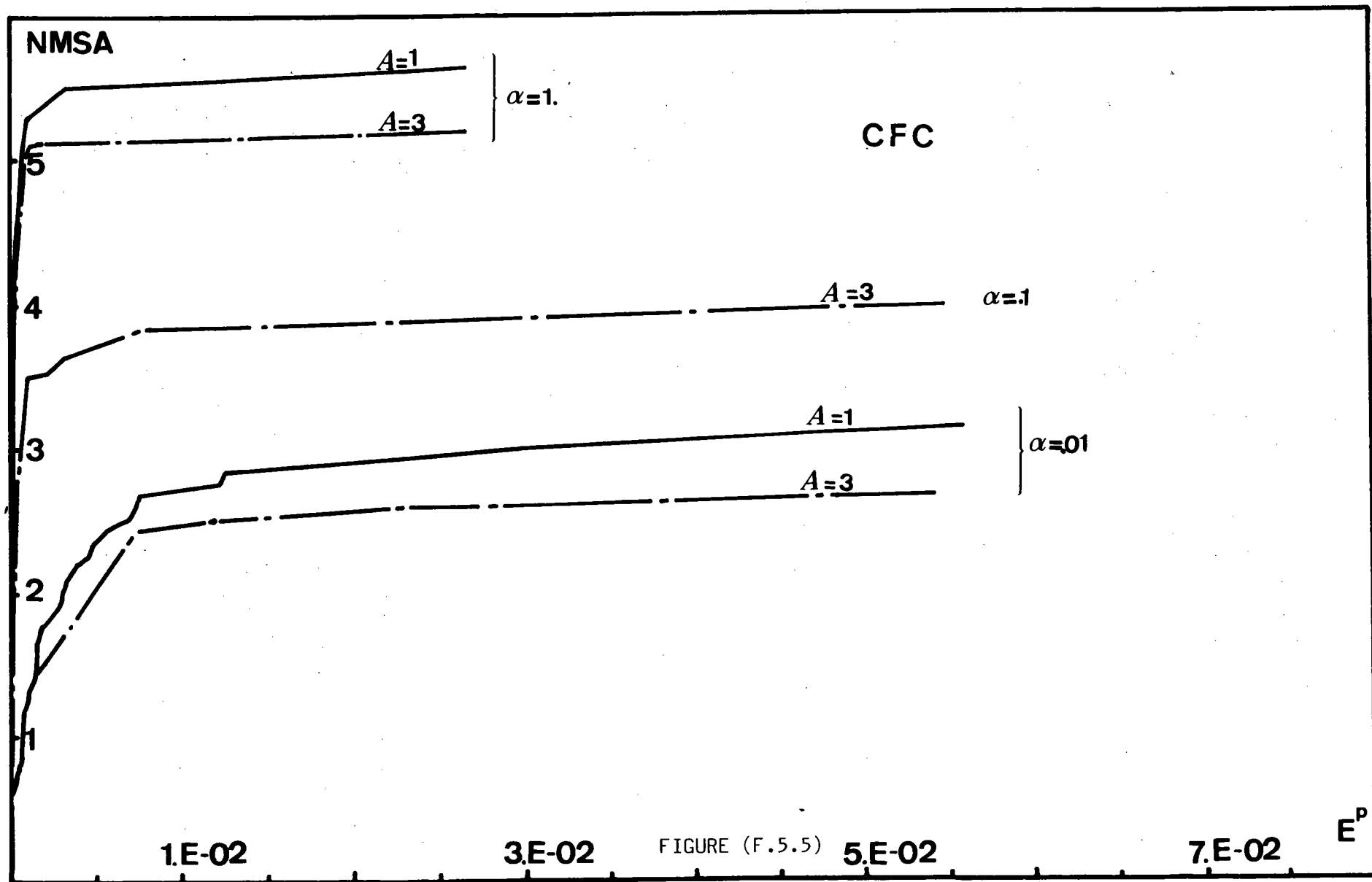


FIGURE (F.5.5)

Evolution du nombre moyen de systèmes de glissements actifs (NMSA) en fonction de E^p pour plusieurs valeurs de A et de α

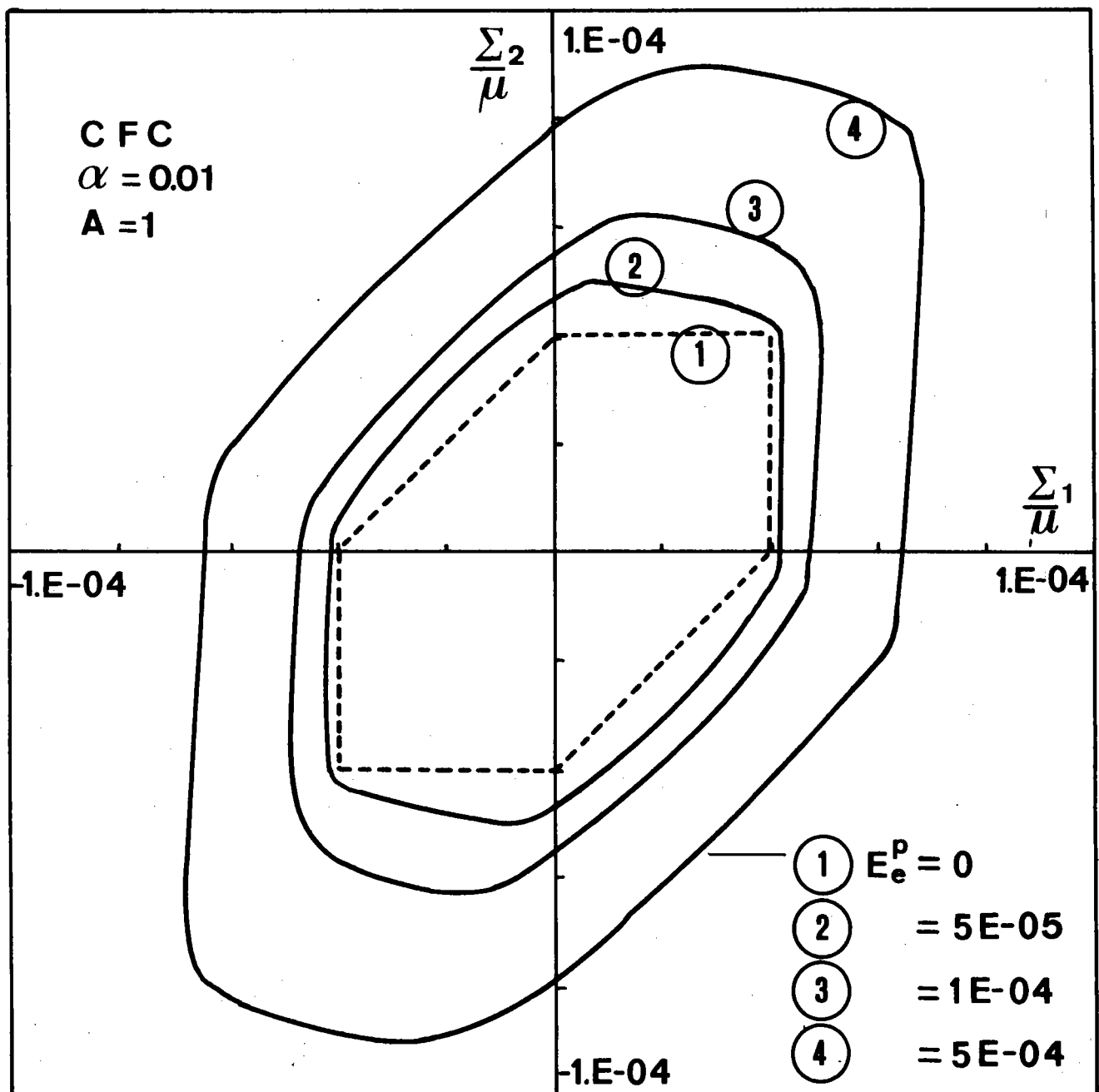


FIGURE (F.5.6)

Surface de plasticité en chargement radial pour différents chargements biaxés en fonction de la résolution en déformation

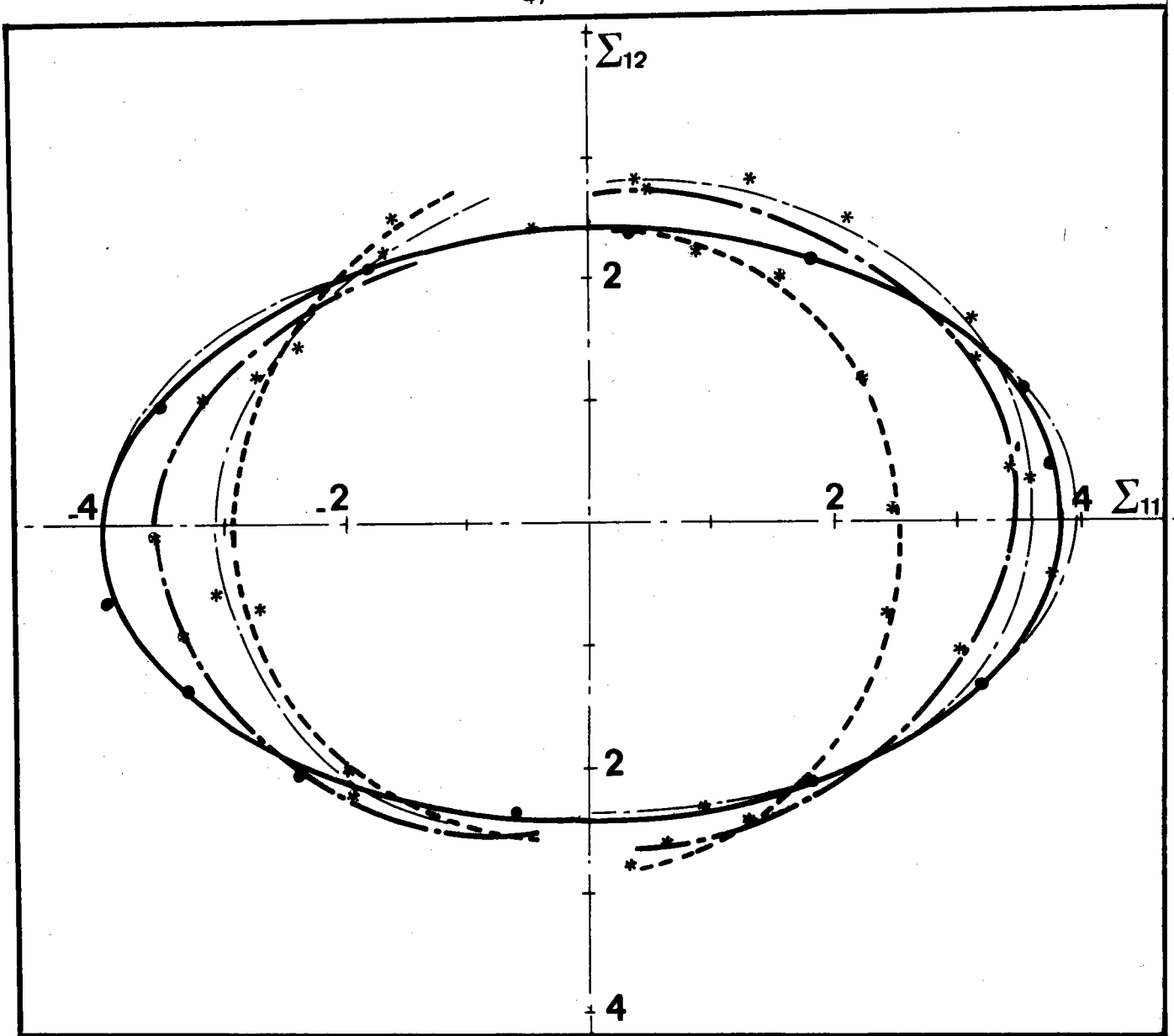


FIGURE (F.5.7) (28)

Seuil de plasticité avant toute déformation
préalable d'une éprouvette d'Aluminium 99.5 %
avec résolution expérimentale de l'ordre de
 $5 \cdot 10^{-3}$

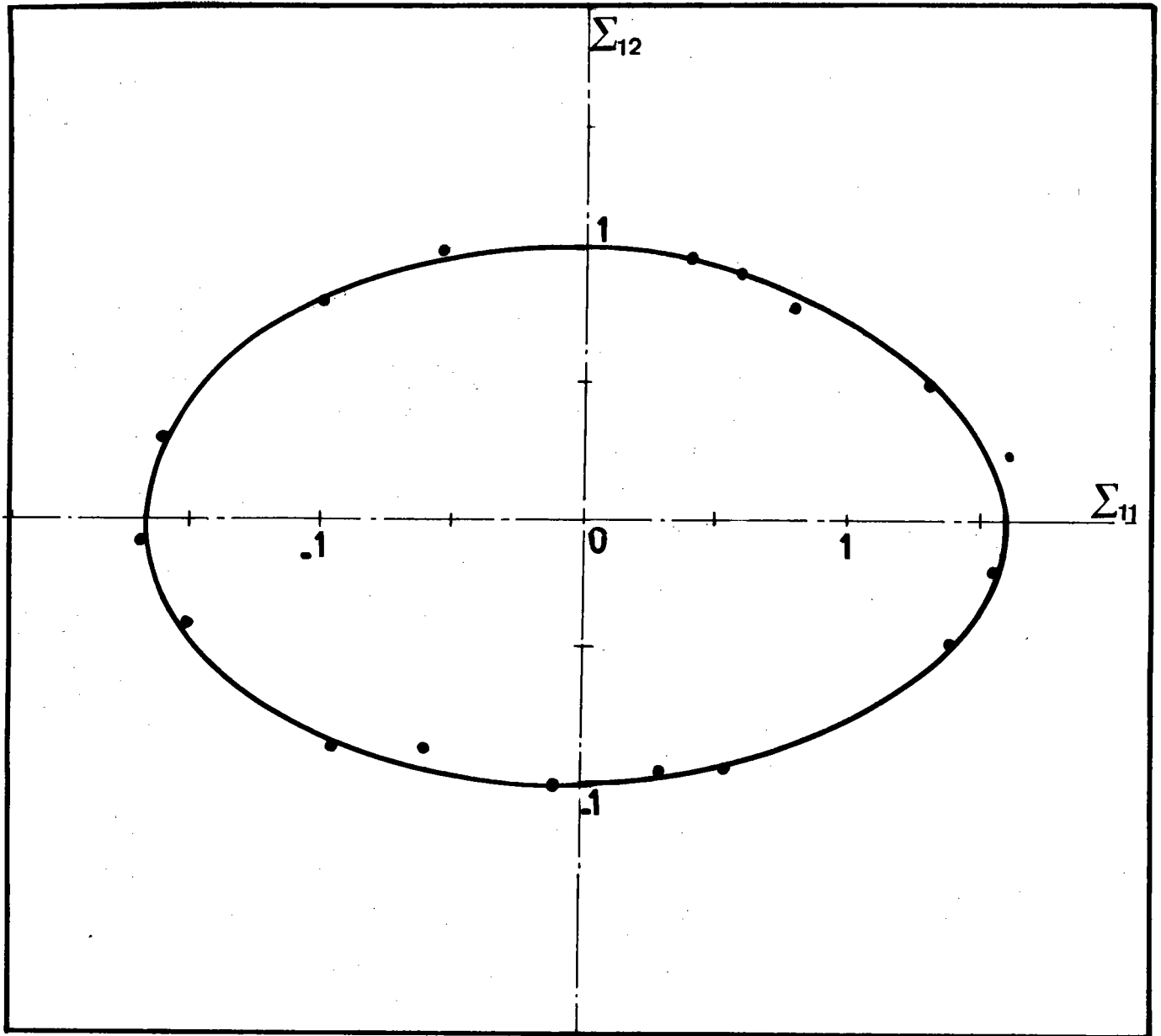


FIGURE (F.5.8) (28)

Seuil de plasticité avant toute déformation
d'une éprouvette de Cuivre 99,5 %

4. RESULTATS CONCERNANT L'EFFET BAUSCHINGER ET L'ECROUISSAGE CYCLIQUE

On sait d'après Bauschinger⁽³⁰⁾ qu'après une prédéformation en traction, la limite d'écoulement en compression est inférieure (en valeur absolue) à celle atteinte lors de l'écoulement en traction. Ce phénomène a été modélisé par Mandel⁽³¹⁾ sous la forme d'un modèle rhéologique comprenant figure (F.5.9) :

- un ressort E_1 représentant l'élasticité du matériau
- un ressort E_2 capable de stocker des contraintes internes dans le matériau
- un patin P_1 représentant le seuil "interne" actuel du matériau

L'effet Bauschinger associé à un tel modèle montre clairement qu'il résulte du développement de contraintes internes. Ces contraintes internes peuvent exister :

* A l'échelle du grain : elles sont dues à l'hétérogénéité de la déformation plastique intragranulaire (formation de cellules de dislocations, sous grains ...). Ces contraintes internes expliquent ainsi l'existence de l'effet Bauschinger pour le monocristal ; voir chapitre (2) paragraphe (1).

* A l'échelle intergranulaire : les contraintes internes sont dues aux incompatibilités plastiques de la déformation ou (et) du matériau lorsque celui-ci est initialement hétérogène (matériau biphasé, présence de précipités, polycristal ...). Dans ce cas, les contraintes internes et l'effet Bauschinger associé ont une origine intra et intercristalline.

Dans ce qui suit, nous négligerons les effets intragranulaires et étudierons l'effet Bauschinger et l'écrouissage cyclique dûs aux contraintes internes telles qu'elles sont prises en compte par le modèle autocohérent à accommodation plastique.

4.1. Effet Bauschinger

Dans la littérature, différents paramètres sont utilisés pour caractériser l'effet Bauschinger. On peut signaler par exemple :

- l'écart relatif entre limite d'écoulement en traction σ_T et en compression σ_c qui définit le paramètre Bauschinger BEF égal à

$$BEF_1 = \frac{|\sigma_T| - |\sigma_c|}{|\sigma_T|} \quad (5.16)$$

- d'un point de vue plus pratique, il est également intéressant de comparer la limite d'écoulement σ_c obtenue en compression après une prédéformation à la limite d'élasticité initiale en traction σ_o . On utilise alors le paramètre :

$$BEF_2 = \frac{|\sigma_c|}{|\sigma_o|} \quad (5.17)$$

L'évolution de ces paramètres avec la déformation plastique caractérise alors globalement l'état de contraintes internes introduit dans le matériau par la prédéformation plastique. Nous étudions uniquement l'effet Bauschinger en sollicitation simple de traction-compression.

La figure (F.5.10) montre l'évolution du paramètre (BEF_1) en fonction de la déformation plastique macroscopique dans le cas d'un polycristal CFC avec des monocristaux dont la matrice d'écrouissage est choisie isotrope ($A = 1$).

On observe tout d'abord une croissance très rapide de l'effet Bauschinger que l'on peut associer au développement intense des contraintes internes d'incompatibilités intergranulaires.

A partir d'une certaine déformation ($\epsilon^P \approx 0.2 \%$), il y a saturation de l'effet Bauschinger, ce qui correspond à une relaxation contrôlée des contraintes internes par le glissement plastique multiple intra ou intergranulaire.

Cette courbe est tout à fait conforme aux courbes expérimentales figure (F.5.11) obtenues par Robillier⁽³²⁾ dans le cas d'acier non alliés pour différentes valeurs de la résistance à la traction R , caractéristique en fait de la limite d'élasticité initiale.

4.2. Ecrouissage cyclique

L'endommagement des matériaux métalliques sollicités en chargement cyclique résulte essentiellement de leur déformation plastique dont l'effet Bauschinger n'est que le premier aspect.

Les amplitudes des déformations plastiques sont en générales faibles (10^{-4} à 10^{-2}) et le comportement cyclique est habituellement étudié en traction-compression.

A chaque cycle d'effort, si la déformation n'est pas parfaitement élastique, une boucle d'hystérésis est observée sur la courbe contrainte-déformation. D'un point de vue pratique, il est important de connaître la durée de vie N_R en fatigue plastique qui est souvent reliée à

l'amplitude de la déformation plastique du cycle $\Delta \epsilon^P$ par la relation de Manson-coffin

$$\Delta \epsilon_p N_R^\alpha = C \quad (5.18)$$

où α et c sont des constantes.

Très souvent, les essais sont conduits à $\Delta \epsilon^P$ constant, et l'on enregistre l'évolution de $\Delta \sigma$ qui est la variation maximale de la contrainte enregistrée au cours d'un cycle en fonction du nombre de cycles. On observe généralement une stabilisation du cycle correspondant à une saturation de la contrainte.

Ces résultats permettent alors de tracer les courbes d'écrouissage cyclique qui donnent la contrainte de saturation ($\frac{\Delta \sigma_s}{2}$) en fonction de l'amplitude de la déformation plastique imposée ($\Delta \epsilon^P/2$).

Pour un chargement cyclique, la déformation plastique cumulée est égale à $\epsilon_{cum}^P = 2 \Delta \epsilon^P N$ où N est le nombre de cycles.

L'écrouissage cyclique a été étudié en traction compression sur un polycristal CFC isotrope constitué de grains à écrouissage isotrope pour une valeur de α égale à 0.01.

Les figures (F.5.12) (F.5.13) et (F.5.14) montrent les courbes d'hystérésis directe pour plusieurs valeurs de l'amplitude de la déformation plastique 10^{-4} , 10^{-3} et 10^{-2} .

Dans les deux premiers cas, on obtient une saturation de la contrainte pour un nombre de cycle faible (11 et 21), alors que pour une amplitude de déformation plus importante (10^{-2}) nous n'avons pu vérifier l'existence d'une contrainte de saturation qui semble néanmoins apparaître pour un nombre de cycle beaucoup plus élevé.

La figure (F.5.15) représente l'évolution de $\frac{|\sigma_t| + |\sigma_c|}{2\mu}$ en fonction de la déformation cumulée et indique bien l'existence d'une contrainte de saturation. Une courbe analogue peut être constituée pour le cas où $\Delta \epsilon^P = 10^{-3}$.

Lorsqu'on compare la contrainte d'écoulement σ_s en traction monotone et la contrainte à saturation pour un écrouissage cyclique σ_c pour une même amplitude de déformation plastique, on observe que le rapport σ_c/σ_s croît avec l'amplitude de la déformation et prend des valeurs de l'ordre de 5.

L'ensemble de ces résultats est qualitativement en bon accord avec les résultats expérimentaux obtenus par Mughrabi⁽³³⁾ ou par I. Magnin et coll.⁽³⁴⁾ dont certaines courbes sont reproduites sur la figure (F.5.16).

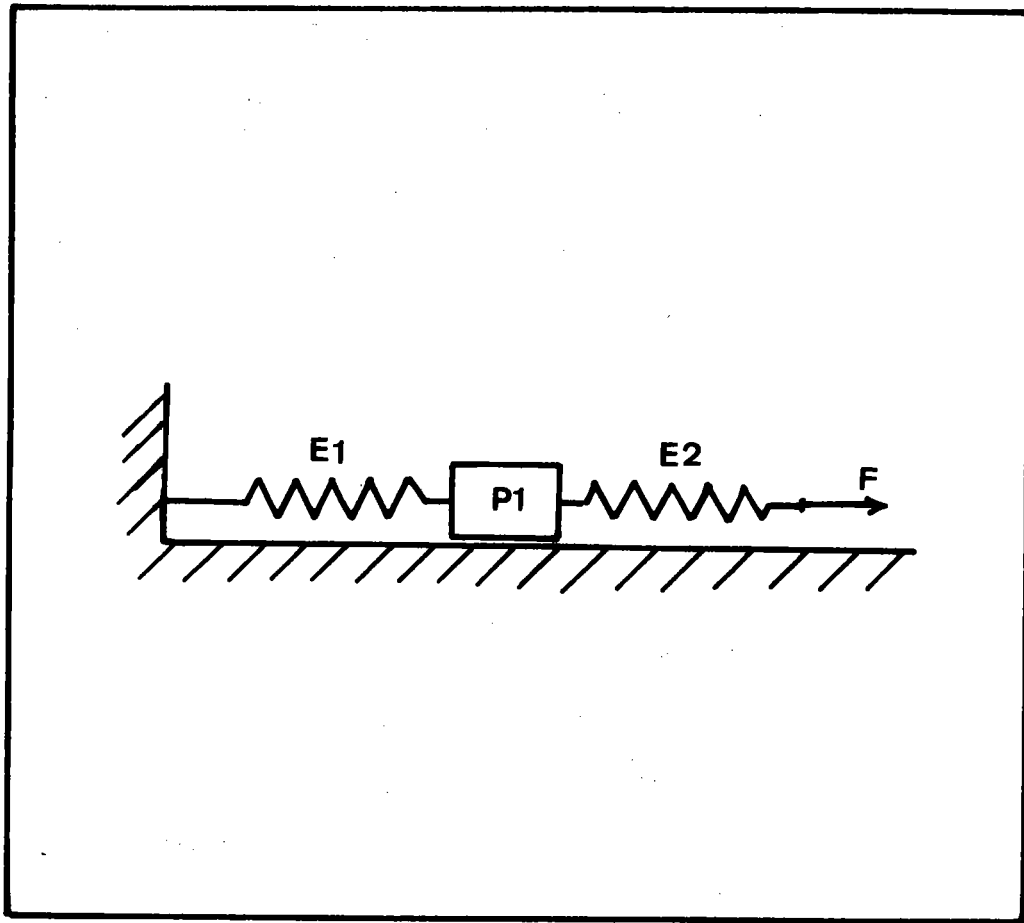


FIGURE (F.5.9)

Modèle rhéologique rendant compte de l'effet
Bauschinger proposé par Mandel⁽³¹⁾

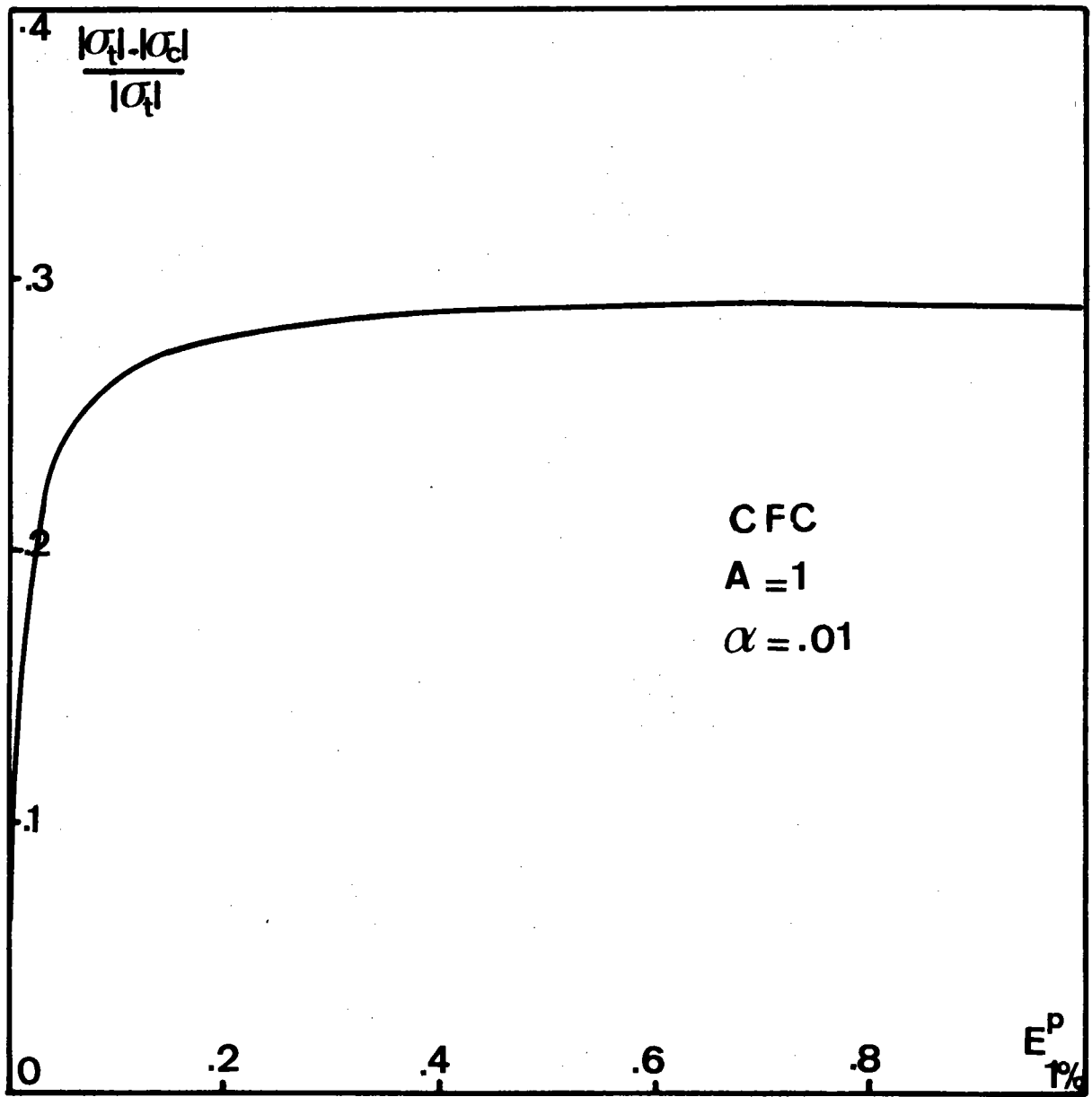


FIGURE (F.5.10)

Evolution du rapport $BEF_1 = \frac{|\sigma_t| - |\sigma_c|}{|\sigma_c|}$
 caractérisant l'effet Bauschinger en
 fonction de la déformation plastique

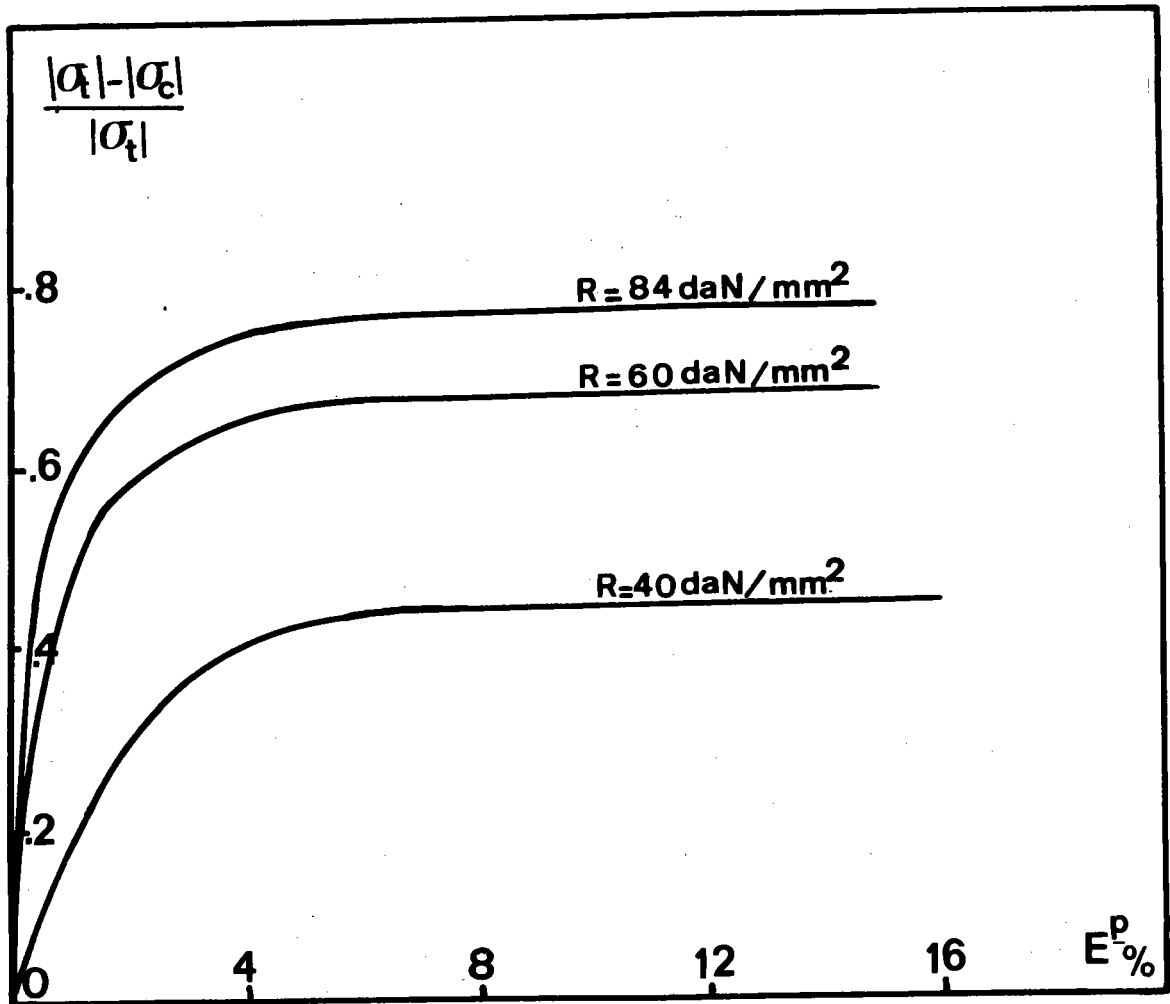


FIGURE (F.5.11)

Variations de l'effet Bauschinger

$\frac{|\sigma_t| - |\sigma_c|}{|\sigma_t|}$ en fonction de la

prédéformation et de la résistance à la traction pour des aciers non alliés⁽³²⁾

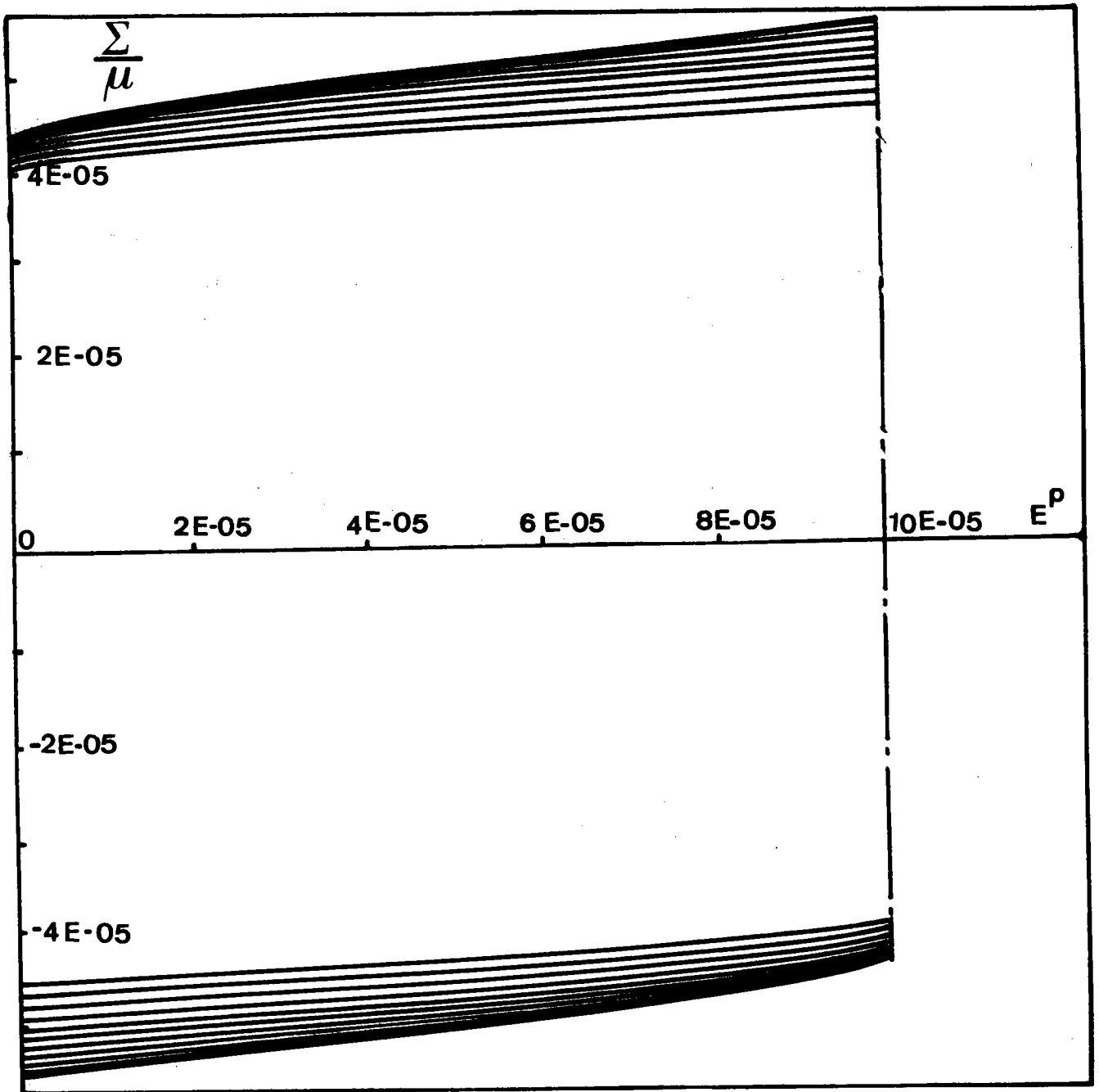


FIGURE (F.5.12)

Courbes de tractions cycliques à
déformation plastique imposée
 $E^P = 10.E-05$ $\tau_0 = 2.10^{-5} \mu$

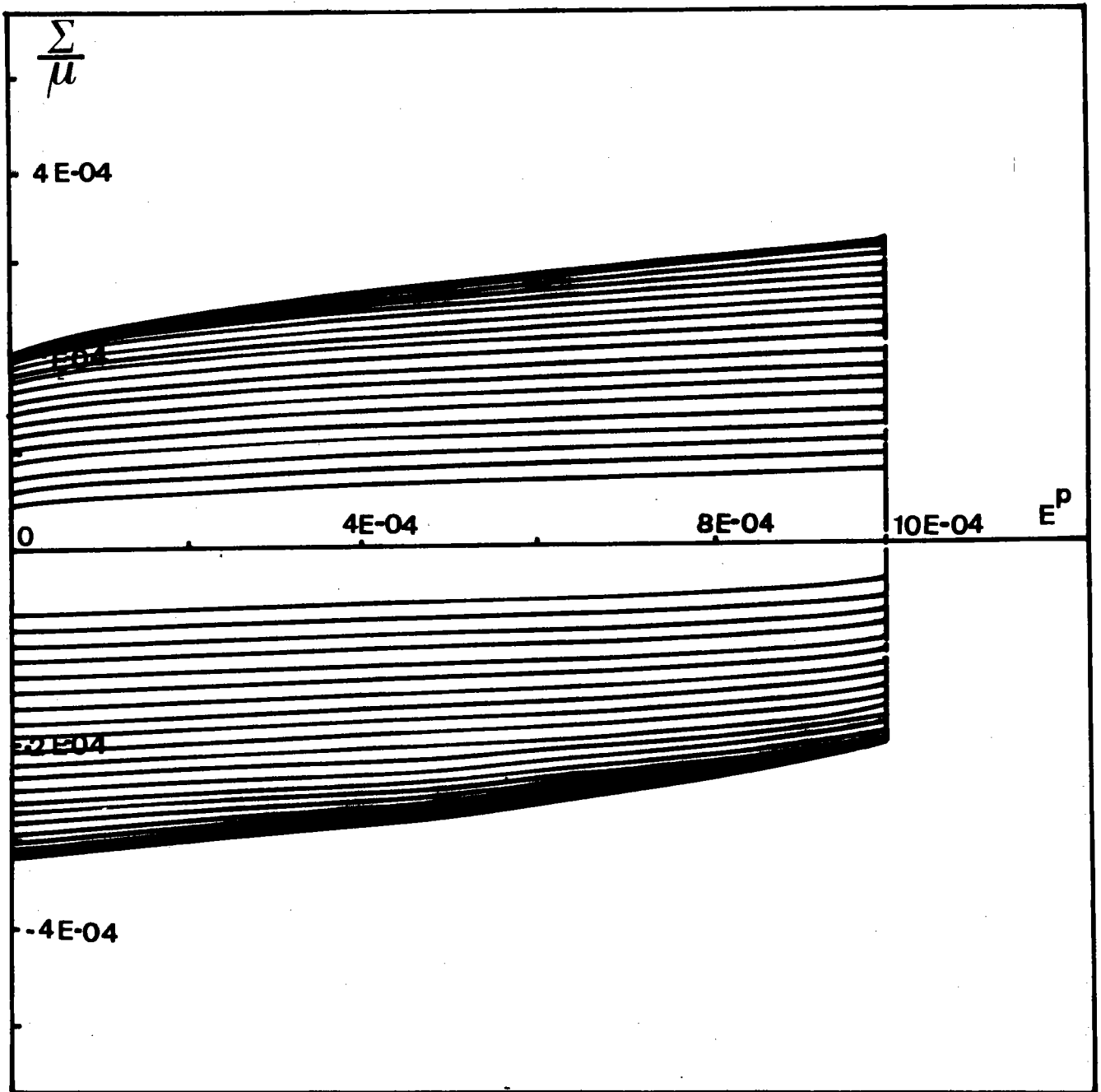


FIGURE (F.5.13)

Courbes de traction cyclique à
déformation plastique imposée
 $E^P = 10.E-04$ $\tau_0 = 2.10^{-5} \mu$

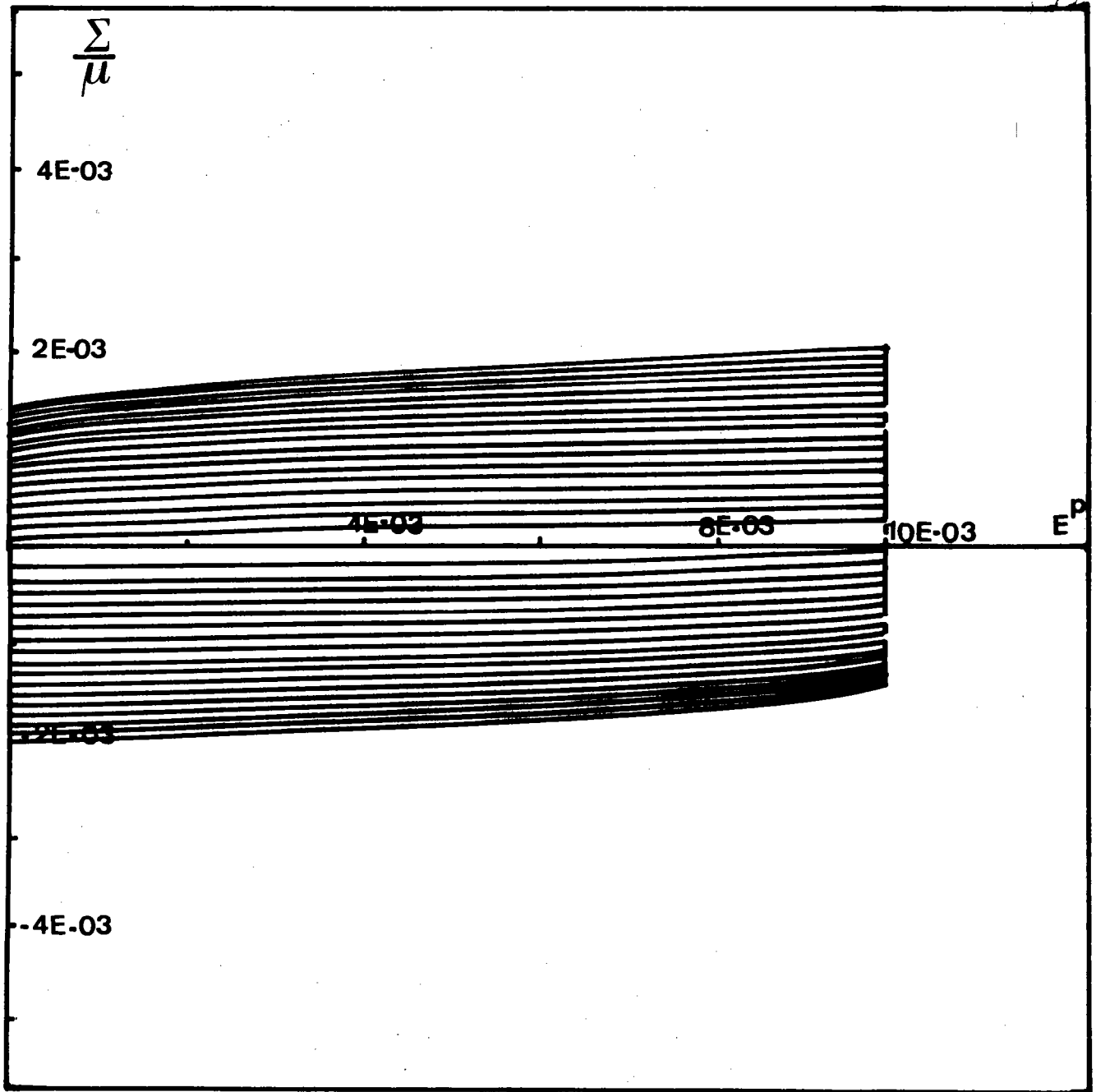


FIGURE (F.5.14)

Courbes de traction cyclique à déformation
plastique imposée $E^P = 10.E-03$
 $\tau_o = 2.10^{-5} \mu$

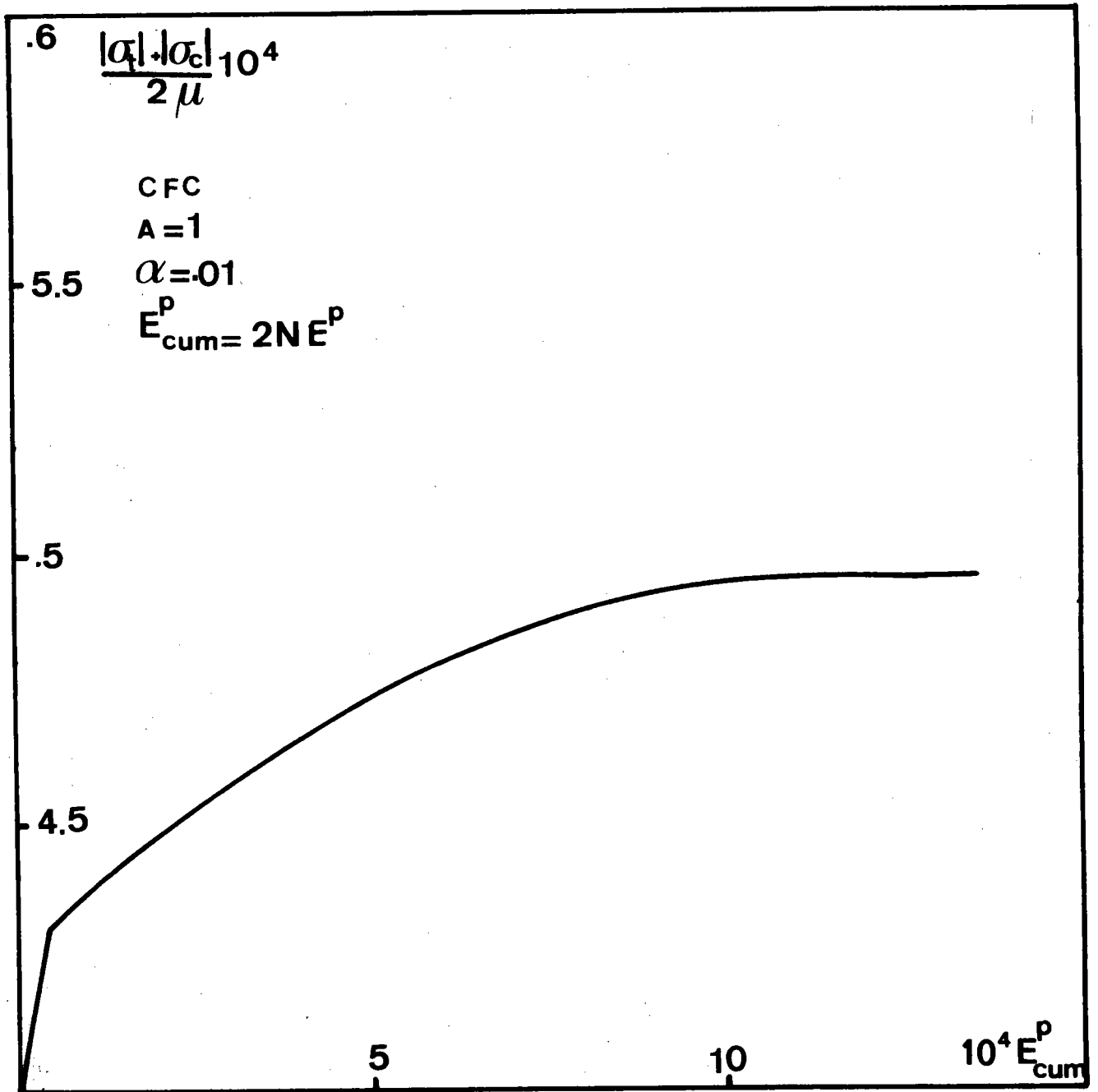


FIGURE (F.5.15)

Evolution de l'amplitude moyenne des contraintes $\frac{|\sigma_t| + |\sigma_c|}{2\mu}$ en fonction de la déformation plastique cumulée pour un polycristal CFC déformé à $\Delta \epsilon^p = 10^{-4}$

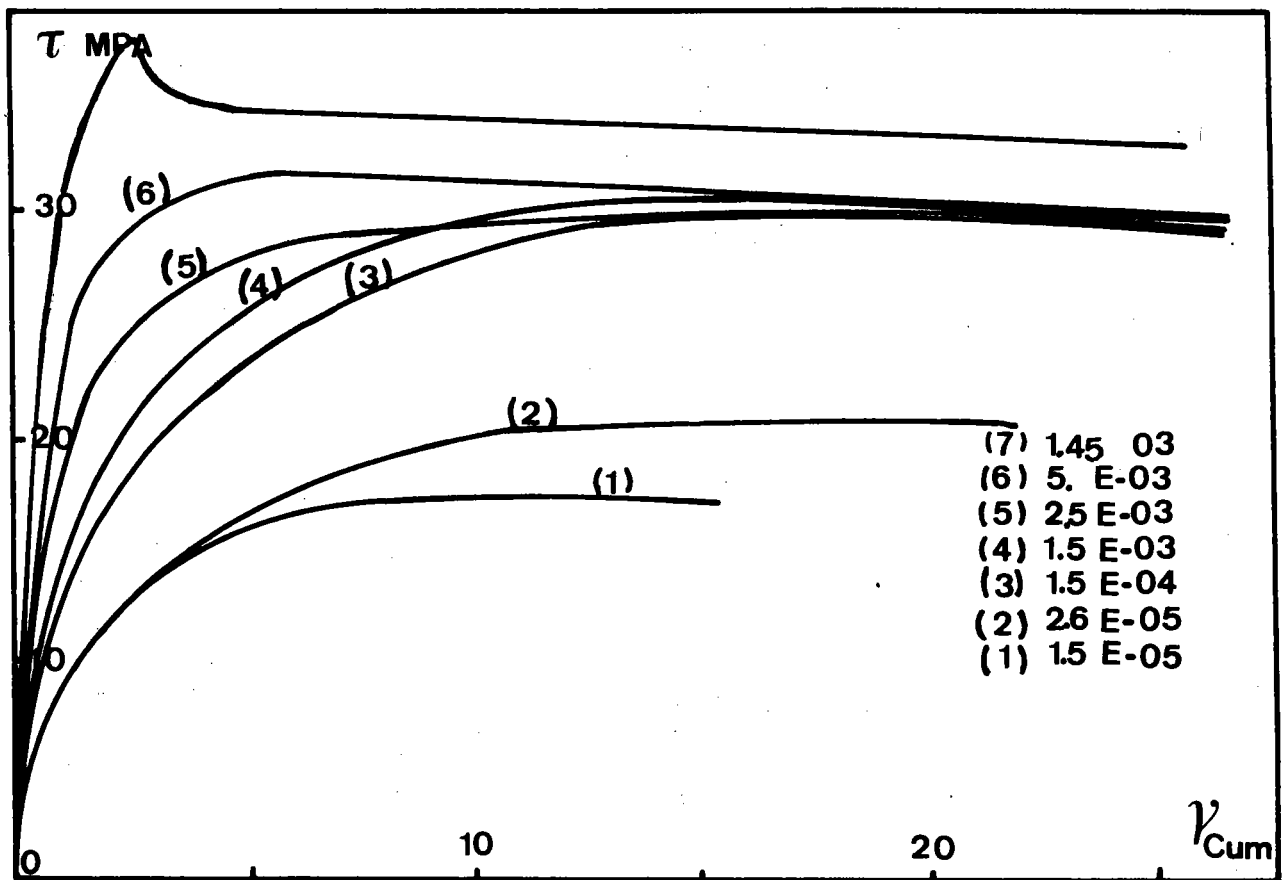


FIGURE (F.5.16)

Courbes d'écrouissage cycliques pour des monocristaux à différents taux de déformations $\dot{\gamma}^p$ $\gamma^p_{cum} = 4N\dot{\gamma}^p$ (33)

5. RESULTATS CONCERNANT LES CHARGEMENTS NON RADIAUX ET NON MONOTONES

Dans les différents processus de mise en forme utilisés couramment pour la production de pièces métalliques, il arrive fréquemment qu'un ou plusieurs éléments de volume matériel subissent au cours du processus un chargement complexe caractérisé dans l'espace des contraintes par un trajet non radial et non monotone.

Dans le cas de l'emboutissage, par exemple, le même élément de matière peut subir des séquences de chargement allant du retreint à l'expansion ou inversement. On observe dans ces conditions une altération de la formabilité de la tôle, montrant ainsi clairement que les courbes limites de formage dépendent en fait du trajet de chargement et ne sont pas une caractéristique intrinsèque du matériau.

Ces différences de comportement ont été attribuées :

- * Au développement d'une sous structure de dislocations sous forme de cellules caractéristiques du trajet de chargement .
- * A l'apparition d'un endommagement spécifique par décohésion à l'interface inclusion-matrice ductile ou par rupture fragile à l'intérieur des inclusions .
- * Au développement des textures de déformation qui confèrent une anisotropie mécanique au comportement global ⁽³⁷⁾.

Dans notre étude, tous ces effets ne sont pas pris en compte. Par contre, nous étudions l'influence de deux autres facteurs, dont l'effet sur le comportement plastique lors d'un chargement non radial et non monotone, est loin d'être négligeable.

Il s'agit du nombre et de la nature des systèmes de glissements actifs, ainsi que des contraintes internes.

Tout d'abord, il semble évident que le nombre et la nature des systèmes de glissements actifs pour un trajet de déformation donné sont différents pour un autre trajet. Ces effets seront d'autant plus marqués que la matrice d'écrouissage est anisotrope et seront accompagnés d'un "régime transitoire" caractérisé par le passage progressif d'un mode de déformation à un autre.

Ensuite, il est clair que le système de contraintes internes intergranulaires développées lors d'un trajet partiel soit profondément modifié lorsqu'on change la trajectoire du chargement. Cet effet est directement associé à l'effet précédent concernant la modification du nombre et de la nature des systèmes de glissements actifs.

Dans cette étude, nous nous sommes limités à des états plans de contraintes, ce qui nous autorise à limiter la représentation des phénomènes dans le plan (σ_1, σ_2).

Ainsi, la figure (5.18) indique les résultats obtenus pour le polycristal CFC isotrope étudié tout le long de ce travail, lorsqu'on impose une séquence traction-chargement équi-biaxé-traction.

En ordonnée, est portée la contrainte équivalente au sens de Von Mises (σ_e) et en abscisse, on porte la déformation équivalente (ϵ_e).

La partie OA de la courbe correspond à la première séquence, c'est à dire à la traction. En A, nous effectuons une décharge totale, puis le chargement est poursuivi par un essai équi-biaxé jusqu'en C. En ce point, on décharge, puis la sollicitation est poursuivie sous la forme d'un essai de traction.

La partie AA' de la courbe est obtenue directement lors d'un chargement radial et monotone en traction ou lors d'un essai équi-biaxé.

L'analyse de ces courbes montre qu'il existe bien un régime transitoire dont l'étendue semble diminuer au fur et à mesure que la déformation augmente. Une deuxième observation montre que le niveau de la contrainte d'écoulement diminue lorsqu'on modifie la nature du trajet de chargement par rapport au chargement monotone et radial.

Ces observations se retrouvent sur la figure (F.5.19) qui montre en plus une différence de comportement en traction ou en chargement équi-biaxé lorsque la prédéformation est équi-biaxée ou de traction.

Afin d'exploiter d'autres chargements non radiaux, nous avons calculé l'évolution de la surface de charge pour différentes prédéformations d'amplitudes et d'orientations variables. Les résultats sont reproduits sur les figures (F.5.21), (F.5.22), (F.5.20) et (F.5.23) pour lesquelles nous avons utilisé une résolution nulle (premier système actif) pour définir l'état de contrainte limite.

L'analyse de ces courbes montre :

- * Qu'il y a pour les différents trajets envisagés, un assez large effet d'expansion non symétrique qui semble être le plus important dans le cas du chargement équi-biaxé.
- * L'existence d'un écrouissage cinématique significatif, du même ordre de grandeur que l'effet d'expansion et qui translate le centre de la surface dans la direction du chargement.
- * Qu'il y a distorsion de la surface seuil dont la forme s'apparente de moins en moins à l'hexagone de Tresca ou à l'ellipse de Von Mises, mais ne présentant pas de manière nette et certaine des points coniques dans

la direction du chargement tels qu'on peut les observer expérimentalement ⁽²⁸⁾, ⁽²⁹⁾ ; par exemple sur les résultats de Bui⁽²⁸⁾ figure (F.5.24).

On peut néanmoins observer que la superposition de l'écrouissage cinématique et de l'écrouissage isotrope "entraînent" plus la surface seuil dans la direction de chargement que dans une autre direction.

L'apparition de points coniques plus nets pourrait être obtenue sans doute par la prise en compte de la texture induite, mais surtout par l'introduction d'une interaction mécanique anisotrope entre les grains liée à des effets mécaniques et morphologiques.

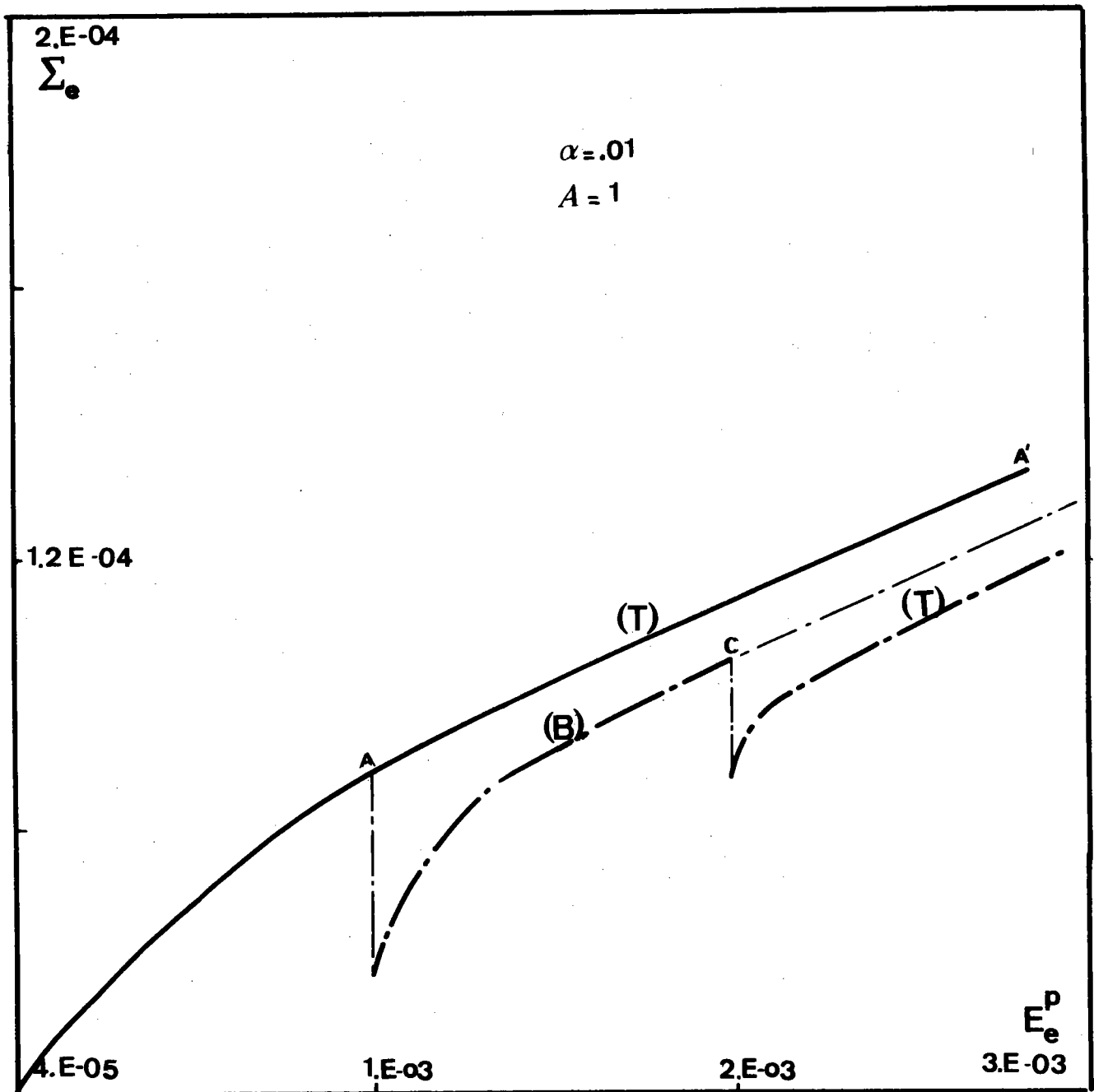


FIGURE (F.5.18)

Courbes d'écrouissage obtenues sur un polycristal CFC isotrope chargé en traction-chargement équi-biaxé-traction

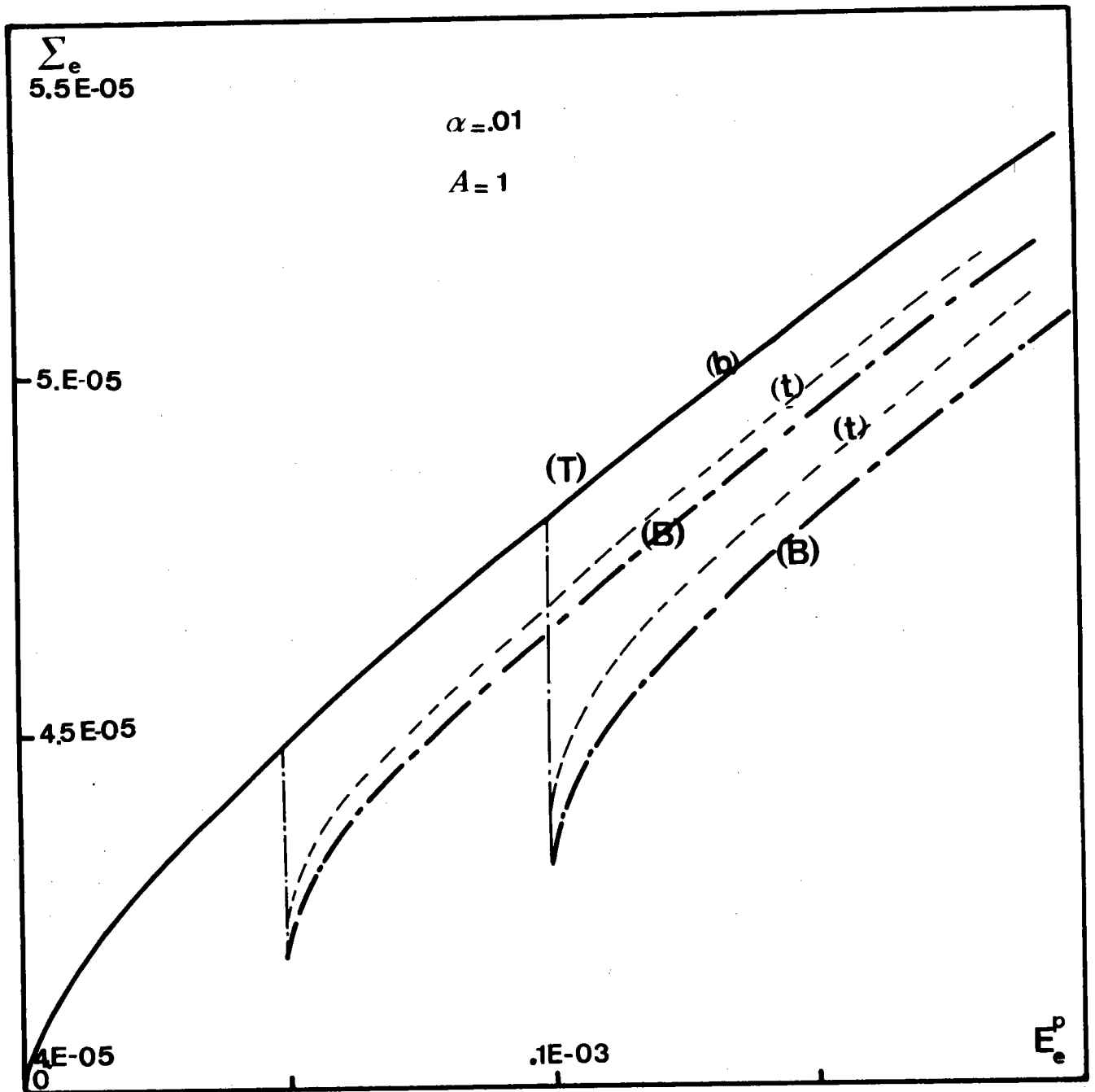


FIGURE (F.5.19)

Courbes d'écrouissage obtenues sur un polycristal CFC isotrope chargé en traction (T), puis équibiaxé (B) ou équibiaxé (b), puis traction (t)

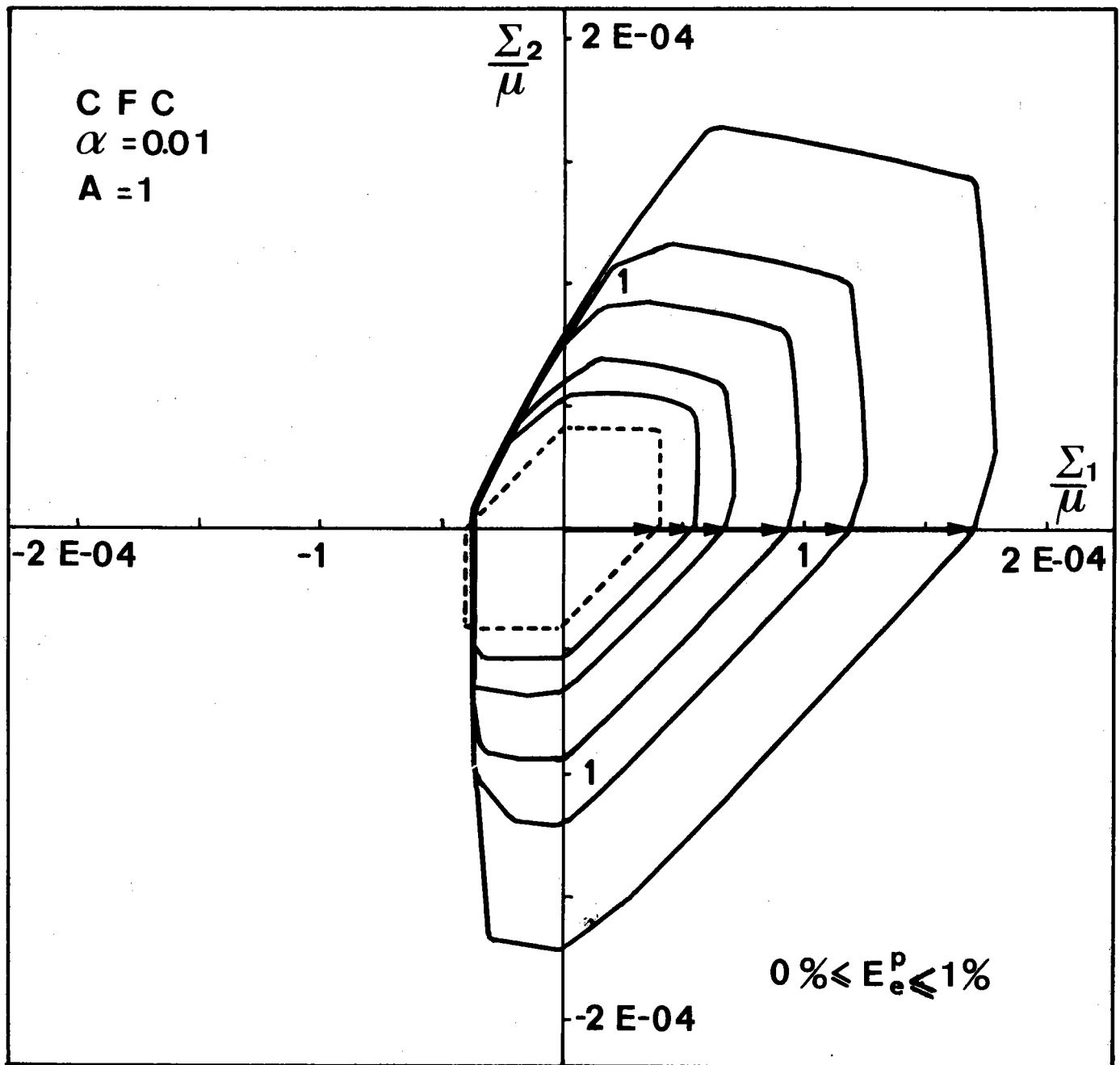


FIGURE (F.5.20)

Evolution de la surface de plasticité
 suite à un préchargement monoaxial
 d'amplitude croissante d'un polycristal
 CFC

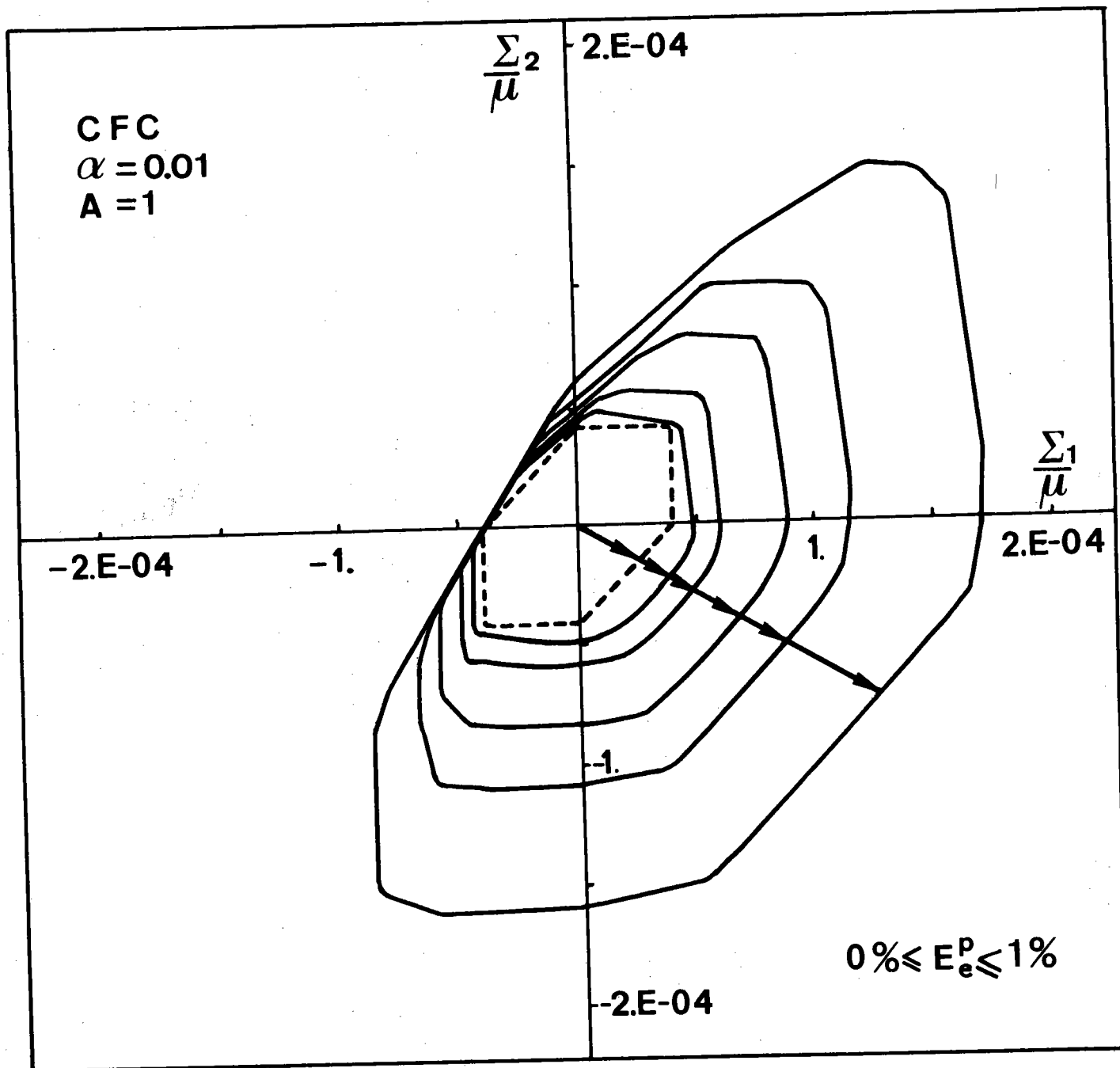


FIGURE (F.5.21)

Evolution de la surface de plasticité
suite à un préchargement biaxé
d'amplitude croissante d'un polycristal
CFC

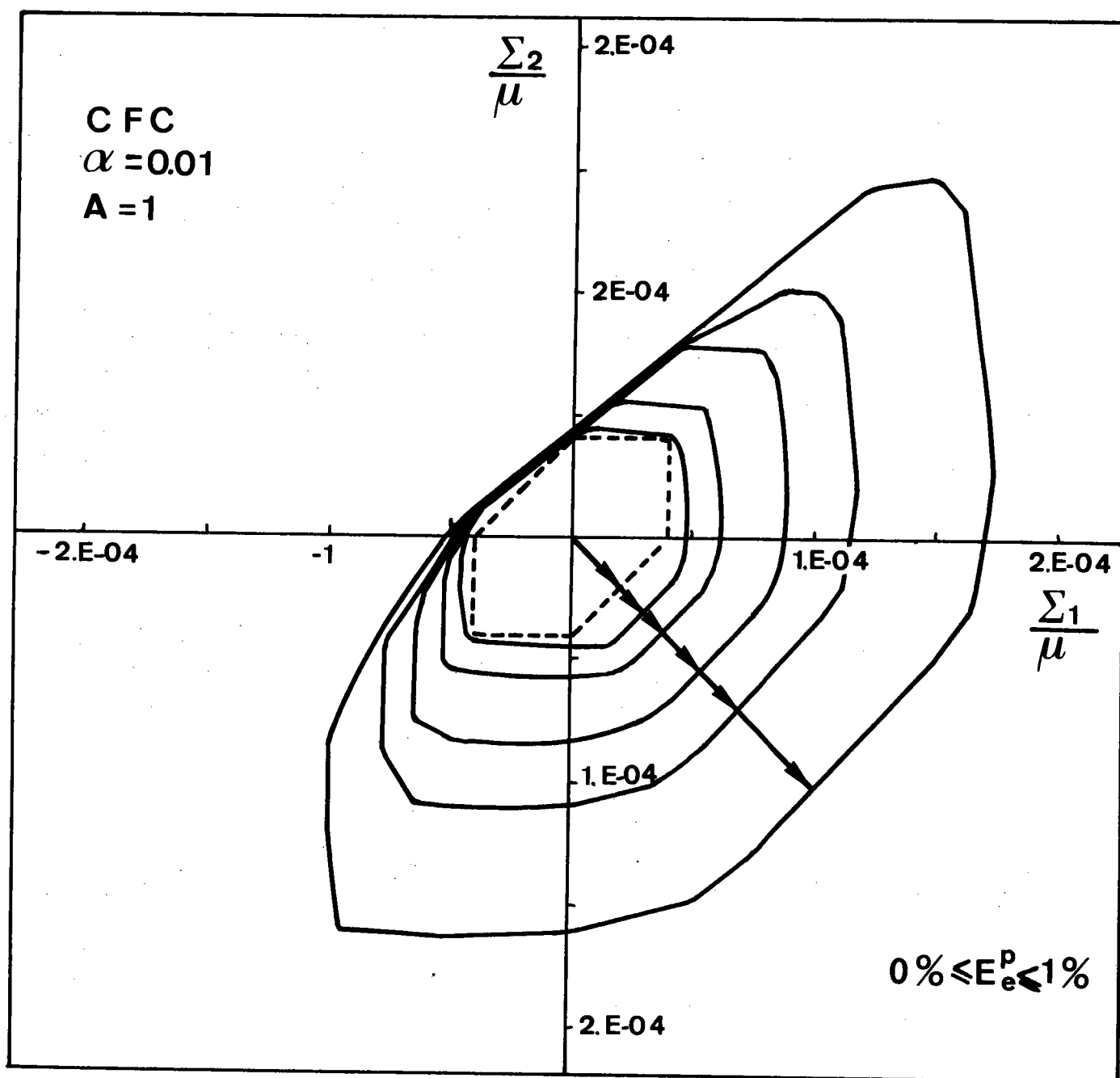


FIGURE (F.5.22)

Evolution de la surface de plasticité
 suite à un préchargement équi-
 biaxé d'amplitude croissante d'un polycristal
 CFC

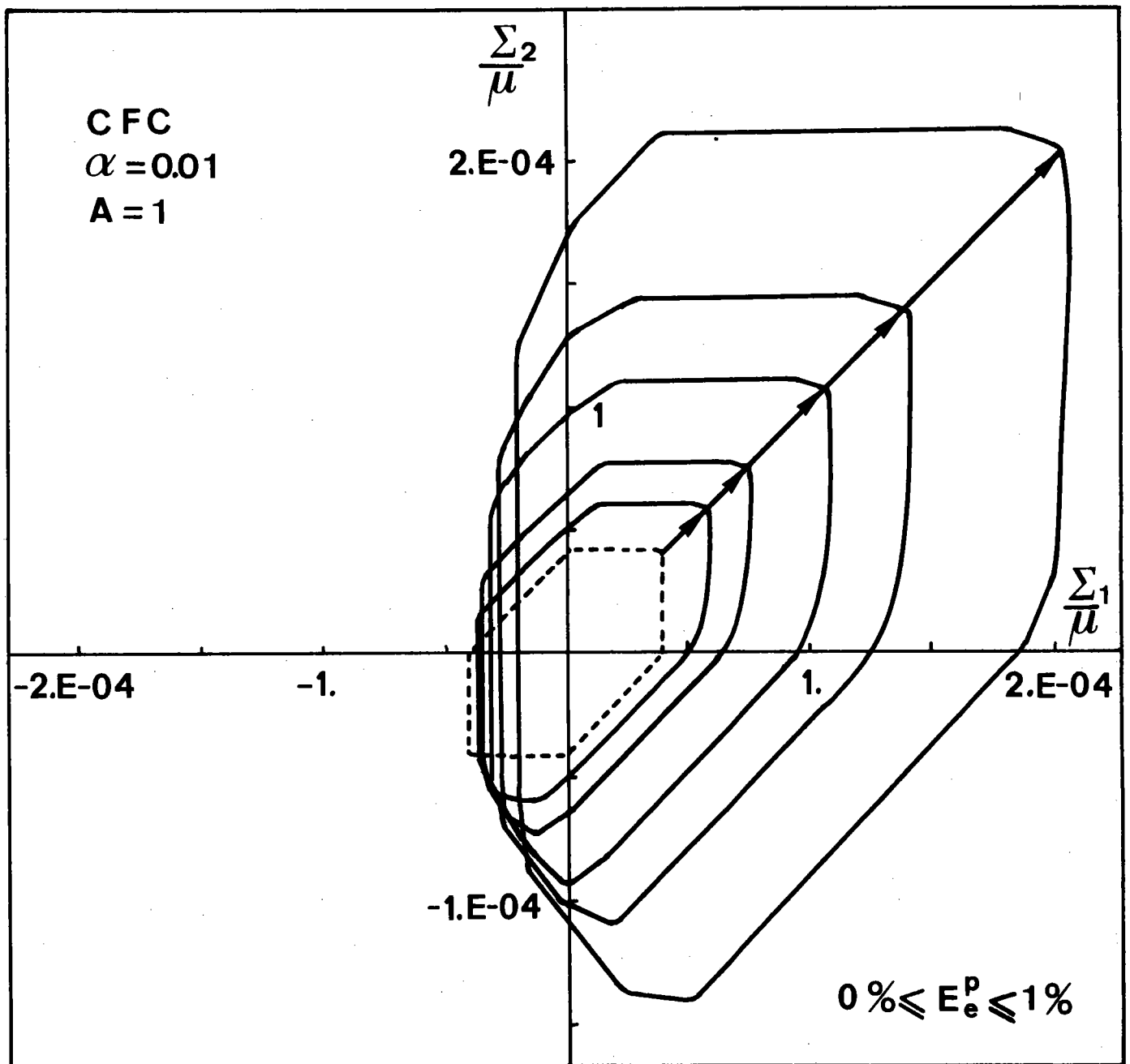


FIGURE (F.5.23)

Evolution de la surface de plasticité
 suite à un préchargement équibiaxé
 d'amplitude croissante d'un polycristal
 CFC

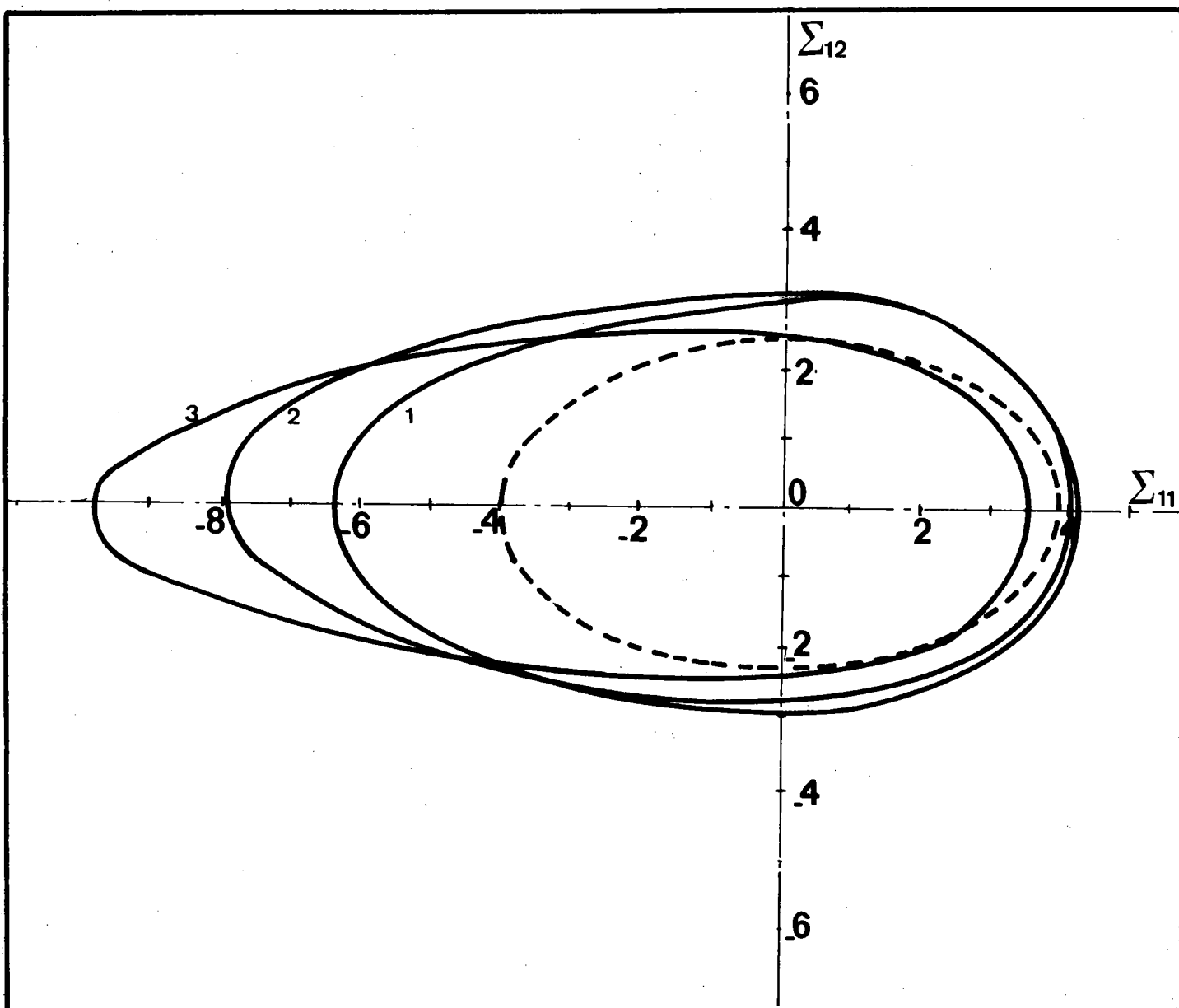


FIGURE (F.5.24)

Frontières d'élasticité successives après
écrouissage, obtenues dans l'écrouissage
en compression pure d'un tube mince en
Aluminium 99,5 (28)

6. ETUDES EXPERIMENTALE ET THEORIQUE DE LA PLASTICITE DE POLYCRISTAUX METALLIQUES BIPHASES

Pour tester les modèles théoriques développés dans le cadre de cette étude, nous avons choisi un matériau hétérogène particulier constitué à partir d'un alliage du type laiton, sous la forme d'un matériau biphasé. Cet alliage est hétérogène à deux échelles différentes :

- * A l'échelle de chaque phase prise séparément. On a un polycristal monophasé dont "l'hétérogénéité" est liée à la désorientation cristallographique des grains. Nous supposons que l'hétérogénéité "intrapphase" est inférieure à l'hétérogénéité due au fait que le matériau est biphasé.
- * L'hétérogénéité du matériau provient donc exclusivement de la différence de comportement entre les deux phases.

Dans le cas des laitons ($\alpha+\beta$), il existe deux phases dont les caractéristiques principales sont les suivantes (modèle) :

Tableau (T.53)

GRAINS	CISSION INITIALE			MATRICE D'ECROUISSAGE			FACTEUR D'ACCOMMODATION			SYSTEME DE GLISSEMENT	
α CFC	$\tau_{\alpha}^0 = 2.E. - 05$			$H_1 = 4 E - 03$ $H_2 = 12 E - 03$			$\alpha = . 01$			$\{ 111 \}$	$<110>$
β CC	$\tau_{\beta}^0 = 4.E - 05$			$H_1 = 2 E - 03$ $H_2 = 2 E - 03$			$\alpha = . 01$			$\{ 110 \}$	$<111>$
φ_1^0	10 ; 130 ; 250										
Φ	15	21	26	30	33	36.5	39.5	42.5	45	48	50
φ_2	3.5	7	10.5	14	17.5	21	24.5	28	31.5	38	38.5
F	.26	.36	.43	.5	.55	.59	.64	.68	.71	.74	.77

6.1. Elaboration des matériaux et des éprouvettes

A partir de différentes coulées spéciales de composition chimique différente (Tableau T5.2), nous avons obtenu des lingots qui ont été laminés à

froid, usinés (figure (F.5.25)) et recuits à 525° C. Les différentes microstructures sont données sur la figure (F.5.26). Le fait d'avoir utilisé des alliages de compositions différentes donne après recuit, des matériaux biphasés pour lesquels la fraction volumique des constituants varie, ainsi qu'il est indiqué dans le tableau (I.53).

6.2. Essais mécaniques et résultats expérimentaux

Les essais mécaniques de traction simple ont été réalisés sur une machine de traction (Instron) sous une vitesse de déformation pratiquement constante ($\dot{\epsilon} = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$). L'utilisation de mors autoserrant limite les glissements des têtes de l'éprouvette. L'allongement est donné par un capteur de déplacement extensométrique dont la base de mesure est 25 mm. L'allongement de l'éprouvette et la force de traction sont enregistrés sur une table traçante. L'interprétation des résultats est faite à partir d'un microordinateur.

Les courbes présentées sont sous la forme (Σ/Σ_0) en fonction de (E^P/E_0) où Σ_0 et E_0 sont respectivement la contrainte et la déformation à la limite élastique conventionnelle de 0,1 %.

Les résultats expérimentaux sont reportés sur la figure (F.5.27). A chaque courbe correspond un matériau biphasé différent par la fraction volumique des deux phases qui le constituent.

Pour un écoulement plastique donné, on observe un accroissement du seuil d'écoulement plastique avec la fraction volumique de phase β ce qui est bien conforme au fait que la phase β est plus dure que la phase α .

6.3. Résultats théoriques et confrontation avec les résultats expérimentaux

* Résultats théoriques : pour les calculs théoriques, chaque phase est constituée de grains de caractéristique identique, mais d'orientation différente, ainsi qu'il est indiqué dans le tableau (I.53).

Les courbes de traction (Σ/Σ_0) en fonction de (E^P/E_0) ont été tracées dans les mêmes conditions que pour les résultats expérimentaux figure (F.5.28).

On peut noter les observations suivantes :

* Lorsque la fraction volumique de la phase β augmente, la limite d'écoulement, pour une déformation donnée, croît, cette croissance est plus régulière que celle indiquée par les résultats expérimentaux.

- * La transition entre l'écoulement monophasique (α) et l'écoulement généralisé ($\alpha + \beta$) est relativement brutale et se produit pour des déformations d'autant plus faibles que la fraction volumique de β augmente. Ceci est dû aux contraintes internes provoquées par l'écoulement plastique hétérogène du biphasé.

Cette transition étant beaucoup plus progressive dans la situation expérimentale semble indiquer une différence plus marquée à l'intérieur de chacune des deux phases entre les différentes caractéristiques mécaniques. Ceci doit en particulier être vrai pour les effets induits de la taille des grains sur le comportement global du matériau.

- * Comparaison avec l'expérience : sur les figures F(5.29), F(5.30) et F(5.31), nous comparons les résultats expérimentaux obtenus pour les alliages à 25 %, 50 % et 75 % de phase α , aux résultats calculés lorsque deux valeurs du facteur d'accommodation plastique α sont choisies ($\alpha = 0.01$ et $\alpha = 0.1$). Dans les trois cas, on obtient un accord satisfaisant dans le domaine de déformation, considéré pour une valeur relativement forte ($\alpha \sim 0.1$) du facteur d'accommodation plastique par rapport aux cas des polycristaux monophasés CFC. Ceci semble dû au caractère doublement hétérogène du matériau biphasé.

Les figures (F.5.32) représentent pour chaque phase α et β l'évolution du nombre moyen de systèmes actifs (NMSA) en fonction de la déformation macroscopique pour différentes valeurs de α .

On observe un premier domaine où seule intervient la plastification de la phase α . Elle est suivie d'un second régime où les deux phases sont actives ; en fin d'un plateau indiquant que la déformation se fait par augmentation du glissement plastique sur les systèmes actifs et non pas par activation de nouveaux systèmes. Ceci ne serait probablement pas le cas si nous avions pris en compte l'écrouissage géométrique dû aux rotations du réseau cristallin.

L'amplitude et la forme de ces différents stades sont fortement influencées par la valeur de α , ainsi que le nombre final de systèmes actifs par grain et par phase.

6.4. Résultats théoriques concernant le biphasé ($\alpha + \beta$) pour des chargements biaxés et monotones

Le polycristal étudié ici est le même que celui du paragraphe (6.3). Il possède deux phases à symétrie cubique (phase α : CFC, phase β : cc) dont la fraction volumique peut varier.

Dans le cas du chargement monoaxé, nous avons observé un régime

transitoire important associé à la transition entre l'écoulement monophasique et l'écoulement généralisé. Cet effet doit se retrouver lors de chargements biaxés.

L'état des contraintes appliqué au matériau biphasé à la forme :

$$\Sigma_{ij} \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où le rapport $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_2}$ est constant.

La définition de la surface seuil peut se faire de plusieurs manières. Nous avons choisi ici d'utiliser le critère de la déformation équivalente qui consiste à dire que la surface de plasticité est atteinte lorsque la déformation équivalente au sens de Von Mises atteint une valeur donnée. En plus de ce critère, nous avons utilisé un critère, plus physique, pour la limite élastique initiale. Il consiste à admettre que l'état de contrainte est un point de la surface macroscopique initiale, lorsque la cisssion critique initiale est atteinte sur le premier système de glissement actif.

Dans tous les cas étudiés, la surface initiale, ainsi décrite, correspond à celle obtenue à partir du critère de Tresca, c'est à dire un critère de cisssion maximale sur le système le plus chargé. Cette surface initiale est la surface de plasticité de la phase α (CFC).

Par contre, lorsque nous utilisons un critère à déformation plastique équivalente imposée, l'allure de la surface "initiale" se rapproche d'une ellipse (critère de Von Mises) et dépend beaucoup du niveau de la déformation équivalente choisi.

Les figures (F.5.34 -a,b-) représente la section par le plan ($\Sigma_3 = 0$) de la surface de plasticité pour les deux matériaux constituant le biphasé.

Pour la phase α , comme il faut s'y attendre, le diamètre de la surface est plus petit que pour la phase β . De même, l'écrouissage est plus faible pour la phase β , ($H \approx \frac{\mu}{500}$) que pour la phase α ($H \approx \frac{\mu}{250}$) comme on peut le constater sur les figures.

La figure (F.5.35) représente les résultats obtenus dans les mêmes conditions, mais pour le biphasé 50 % de α et de β .

La première surface correspond à l'écoulement de la phase α ; à la seconde surface (0,01 %) est déjà associé l'écoulement généralisé ($\alpha+\beta$) alors même que pour la phase β seule figure (F.5.34b) on serait encore dans le domaine élastique. Cette plastification précoce de la phase β est due aux contraintes internes induites par l'écoulement hétérogène du milieu biphasé.

De même, on observe que le taux d'écrouissage pour le biphasé est nettement supérieur à celui des phases α et β prises séparément. Ceci est également dû aux contraintes internes.

Ces résultats sont confirmés par l'analyse de la figure (F.5.36) où la surface associée au biphasé (surface n°2) croît beaucoup plus vite que les surfaces (1) et (2) pour les deux phases du biphasé. Ce phénomène est très important jusqu'à des déformations réduites E^P/E_0 de l'ordre de 10. Au delà, l'action des contraintes internes aura partiellement réduit les hétérogénéités de déformations plastiques et les contraintes internes associées. Ce résultat est analogue à celui qui a été observé dans le cas des sollicitations cycliques.

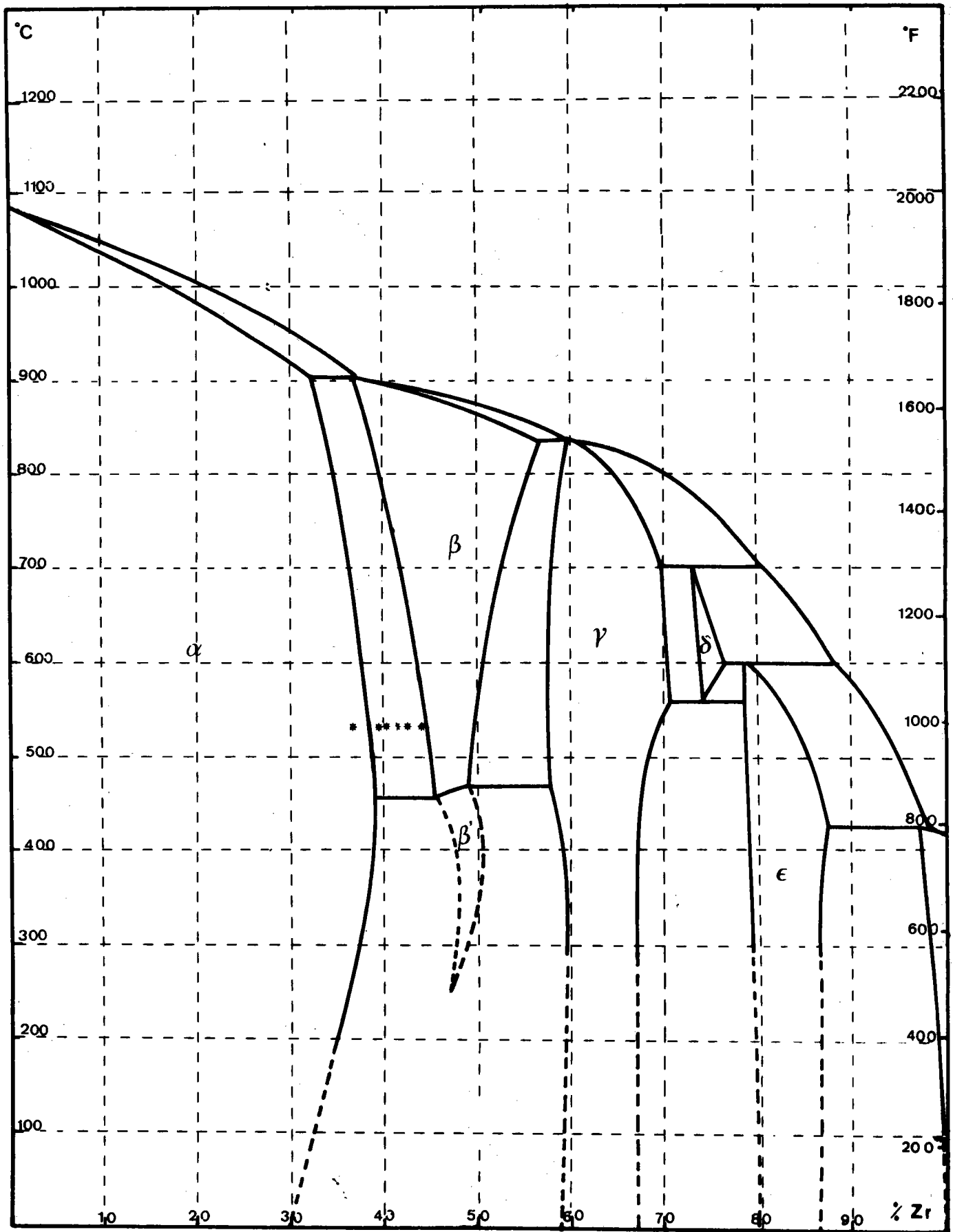


TABLEAU (T.5.2)

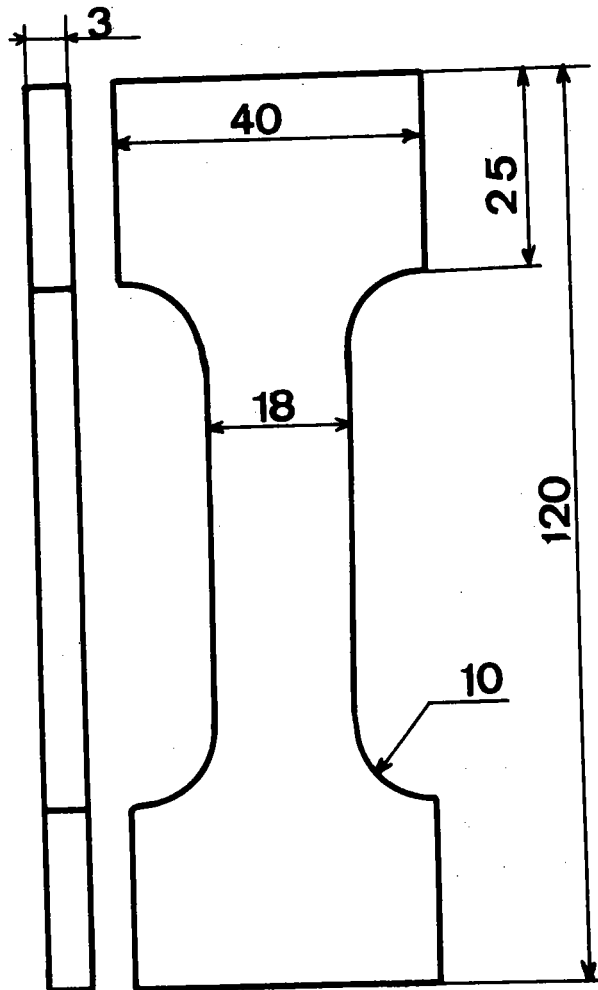
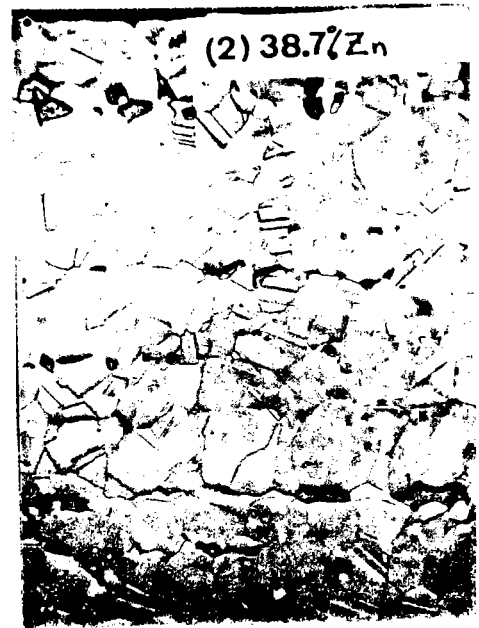


FIGURE (F.5.25)

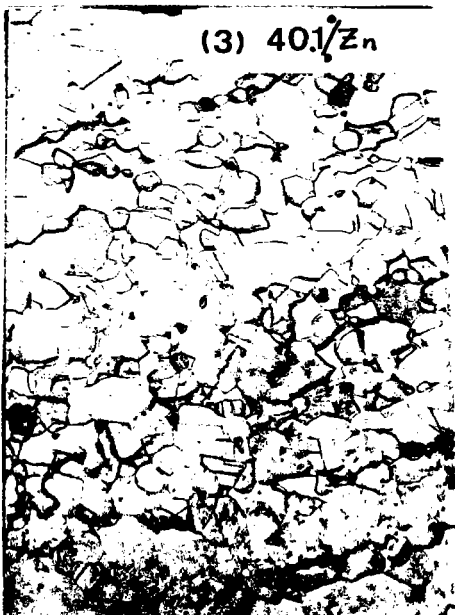
(a)



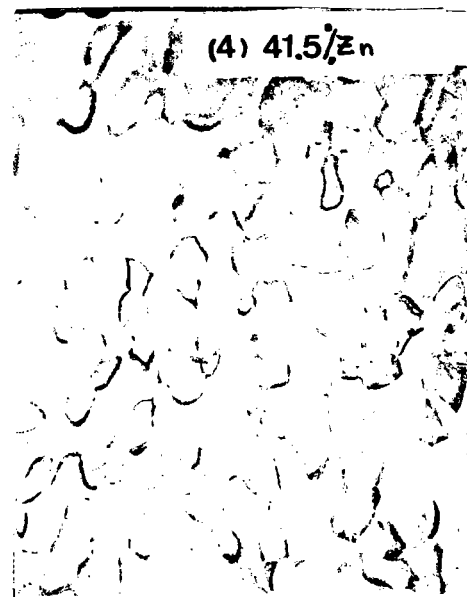
(b)



(c)



(d)



(e)

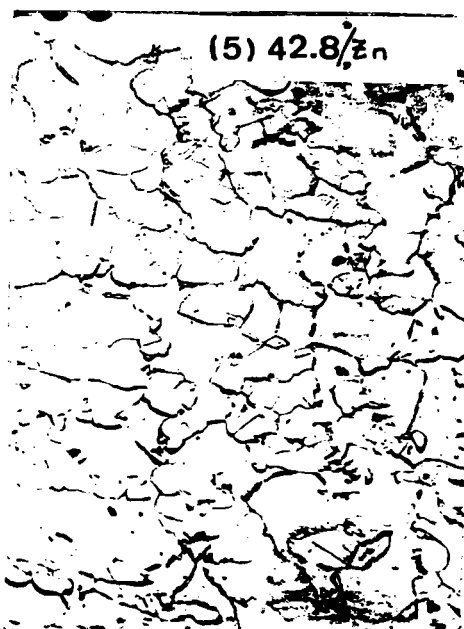


Figure (F.5.26)

Microstructure des différents lingots après laminage et recuit à 525° C pour les différentes compositions chimiques :

- (a) 36.9 % Zn -- 100 %
- (b) 38.7 % Zn -- 95.4 %
- (c) 40.1 % Zn -- 72.7 %
- (d) 41.5 % Sn -- 49.1 %
- (e) 42.8 % Zn -- 26.4 %

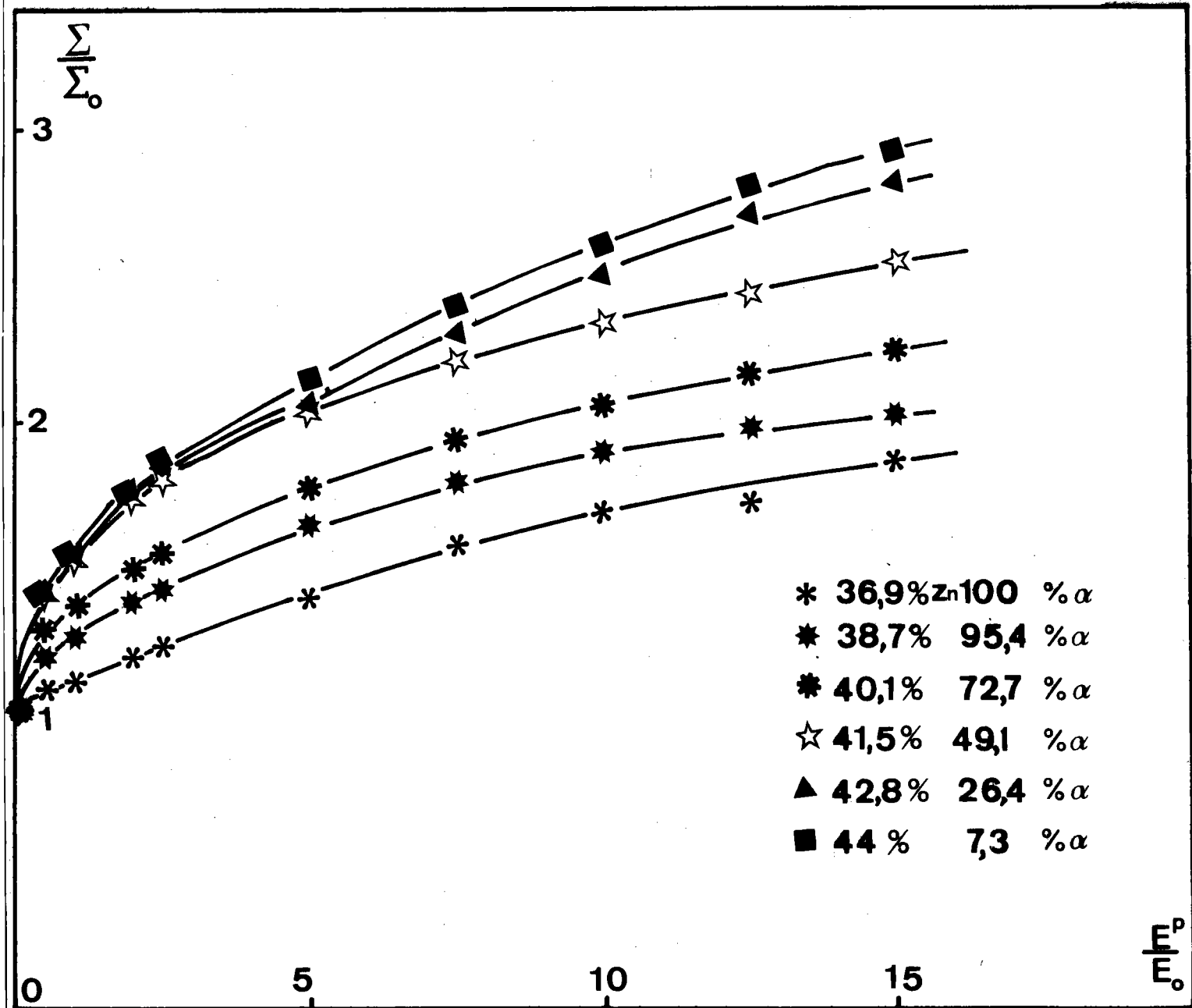


FIGURE (F.5.27)

Courbes de tractions expérimentales d'un matériau biphasé "laiton" avec des compositions chimiques différentes.

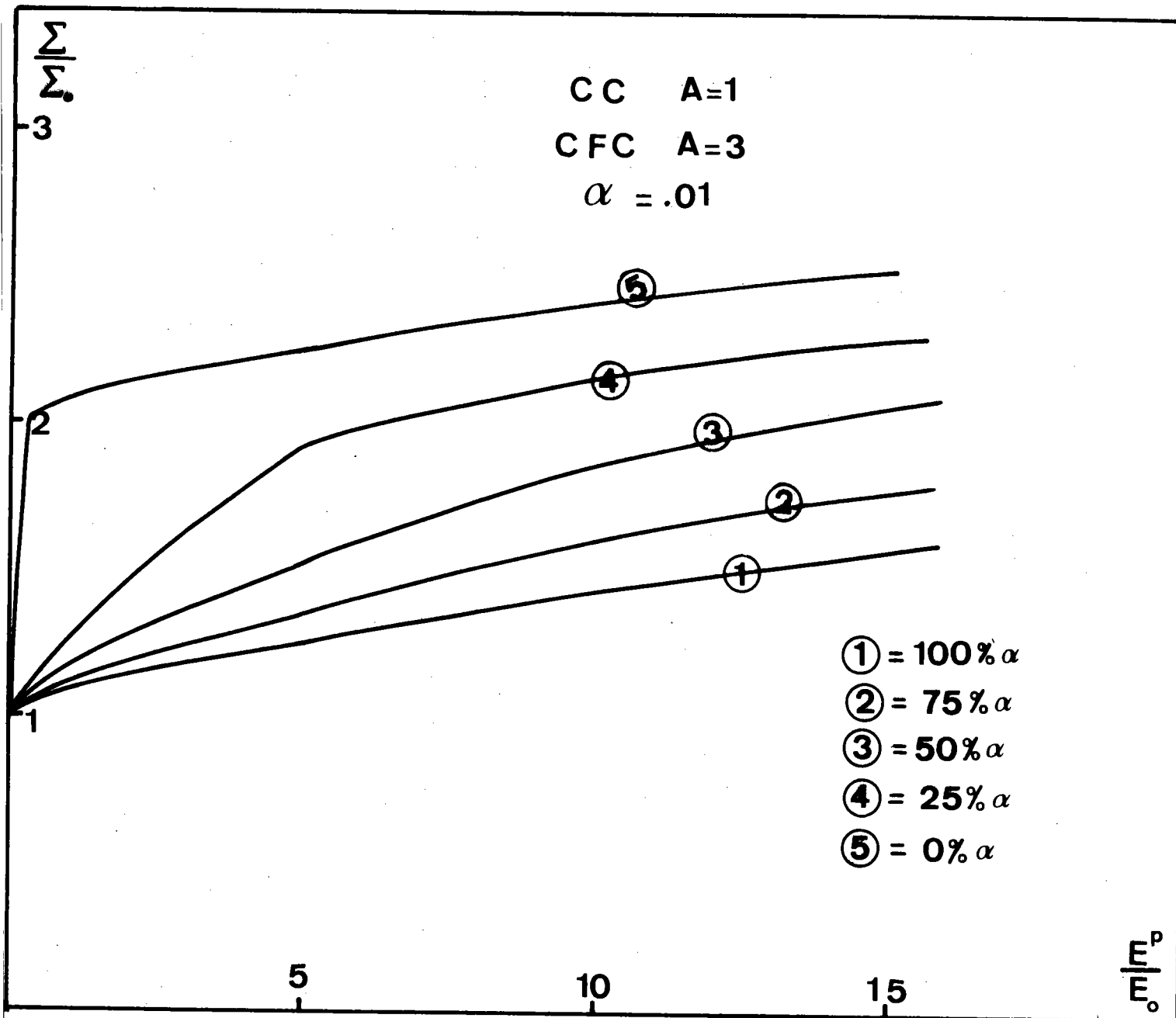


FIGURE (F.5.28)

Courbes de tractions théoriques obtenues
par le présent modèle pour différents
pourcentages de la phase α "CFC".

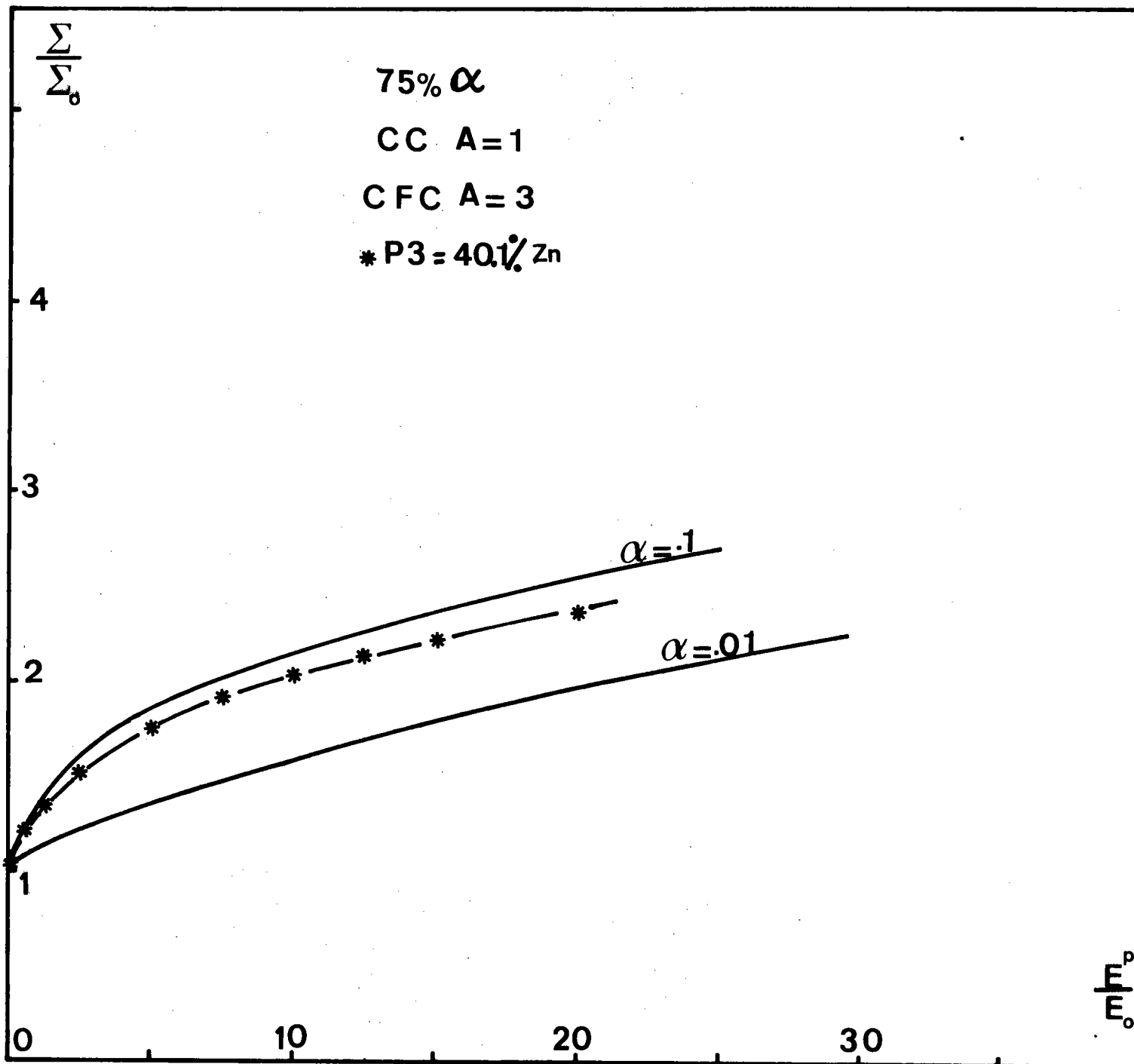


FIGURE (F.5.29)

- (—) Courbes de tractions théoriques obtenues par le présent modèle
 ($\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.1$) avec 75 % de la phase α CFC
- (*) Courbe expérimentale obtenue sur du laiton 40.1 % Zn

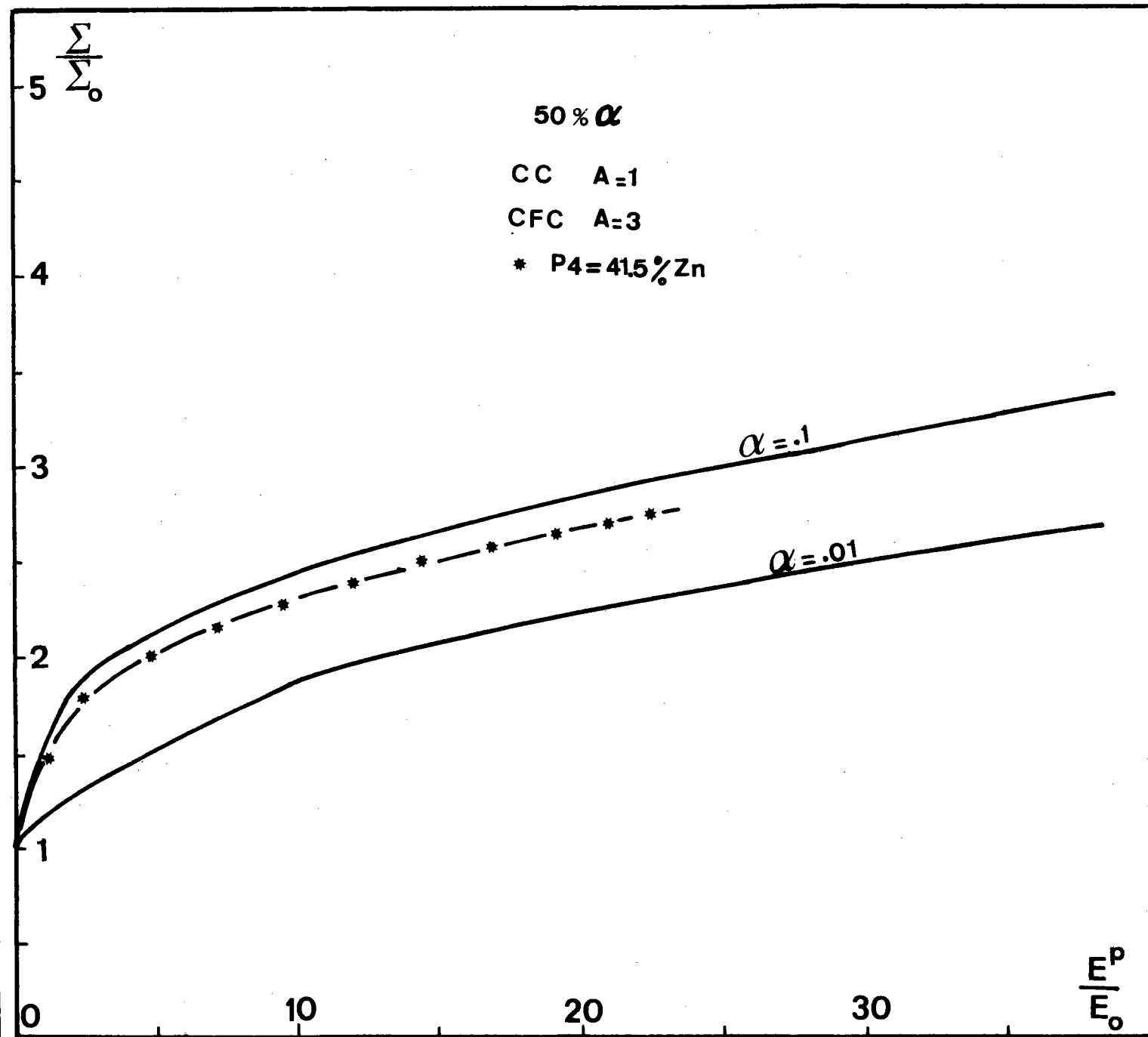


FIGURE (F.5.30)

- (—) Courbes de tractions théoriques obtenues par le présent modèle
 ($\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.1$) avec 50 % α CFC et 50 % β CC.
- (*) Courbe expérimentale obtenue sur du laiton 41.5 % Zn.

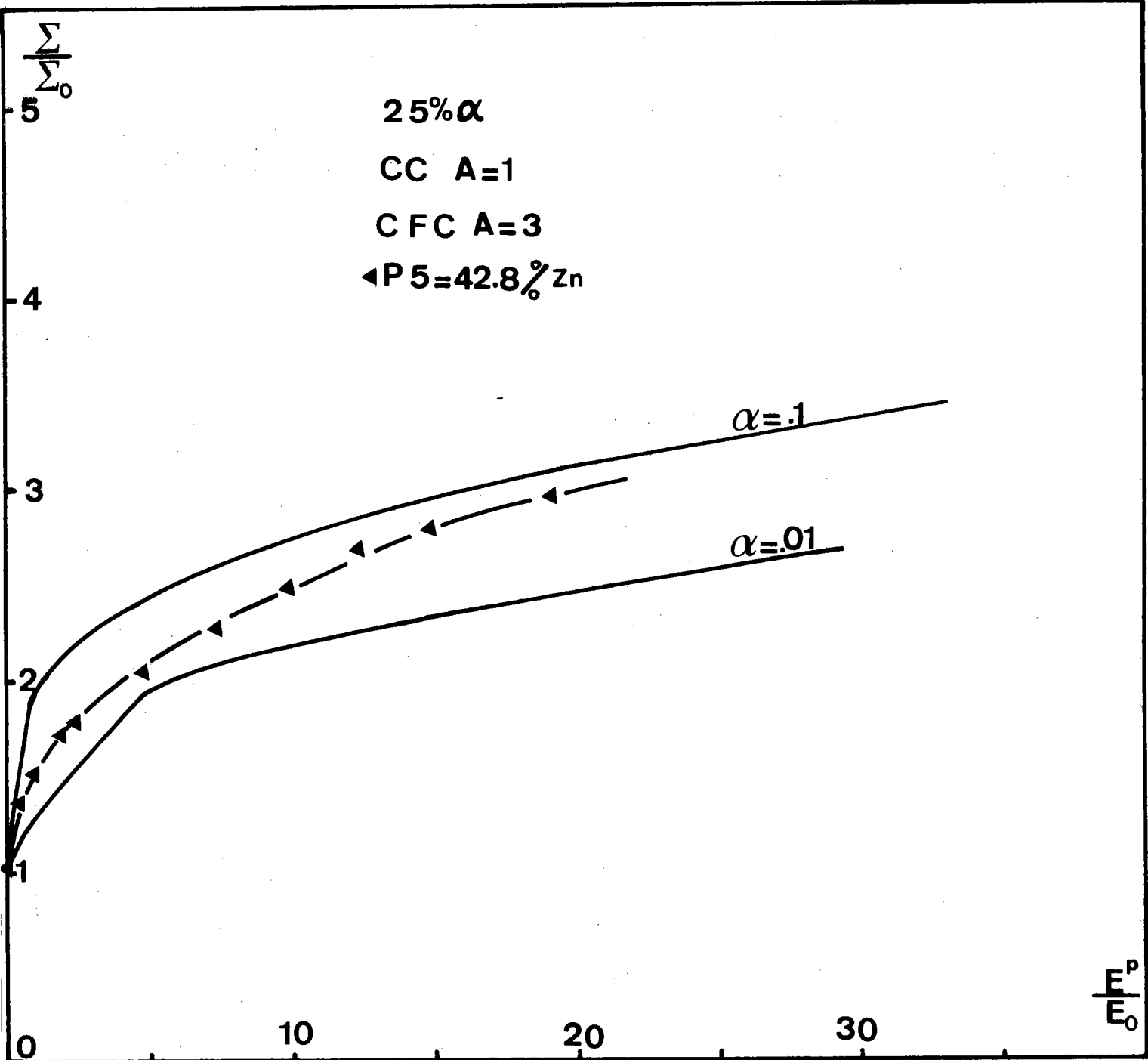
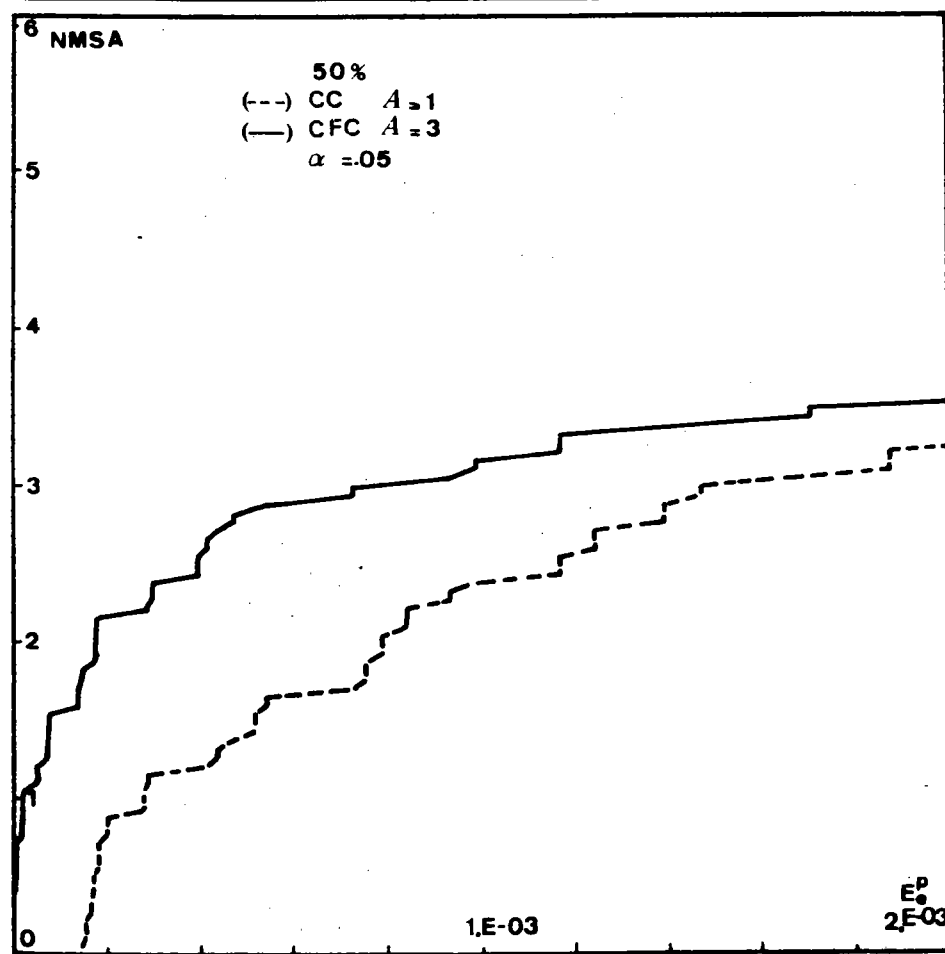
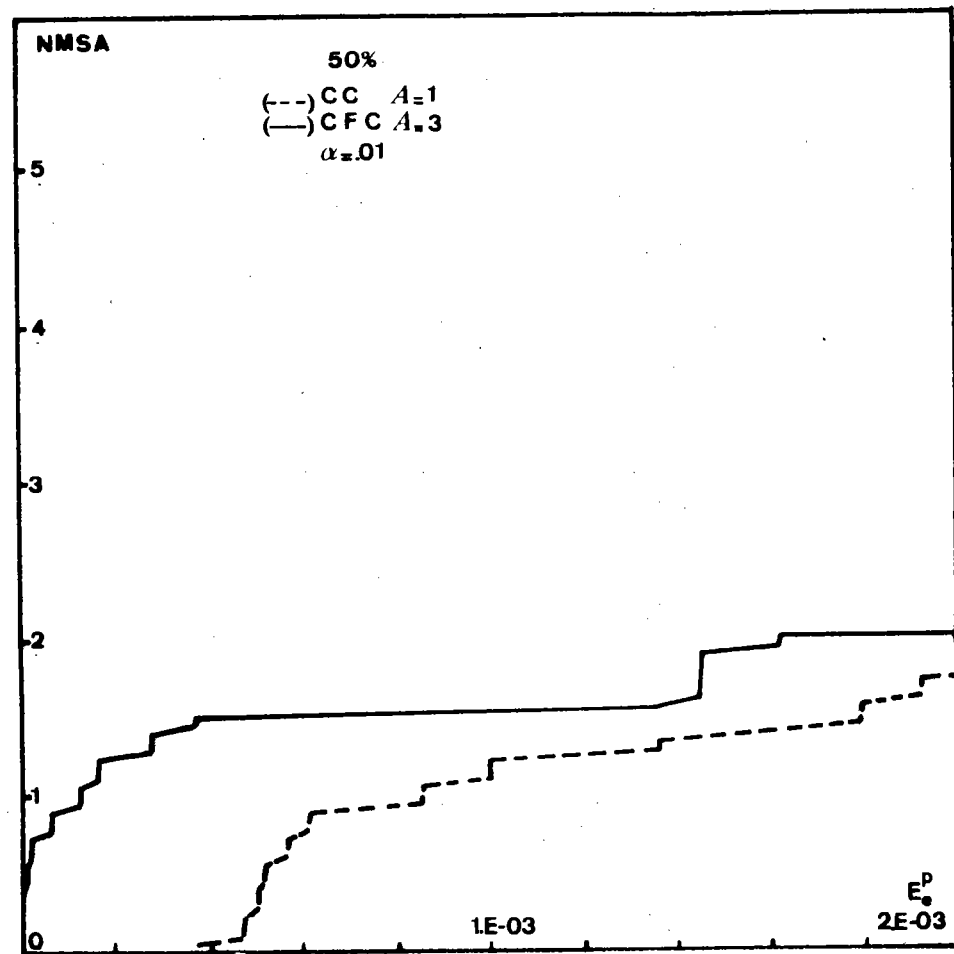


FIGURE (F.5.31)

- (—) Courbes de tractions théoriques obtenues par le présent modèle
 ($\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.1$) avec 25 % α CFC et 75 % β CC.
 (---) Courbe expérimentale obtenue sur du laiton 42.8 % Zn.



(a)



(b)

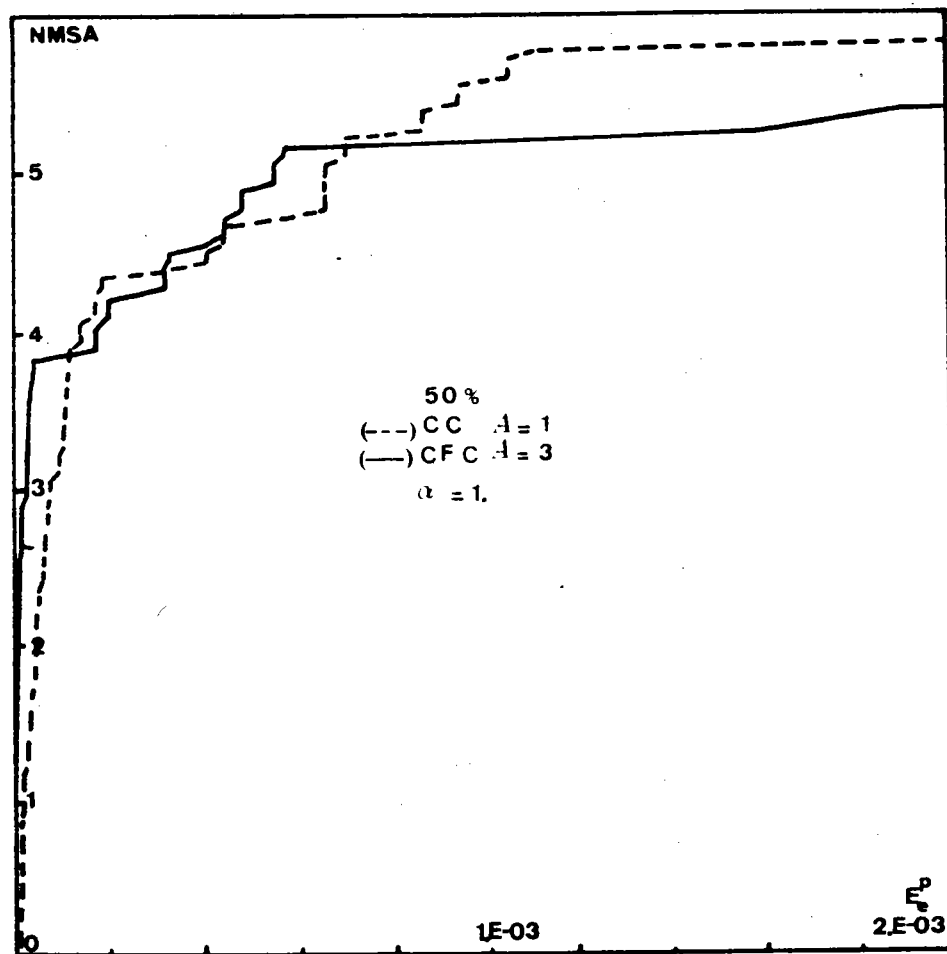
FIGURE (F.5.32)

Evolution du nombre moyen de systèmes actifs (NMSA) en fonction de la déformation macroscopique d'un polycristal 50 % α + 50 % β avec

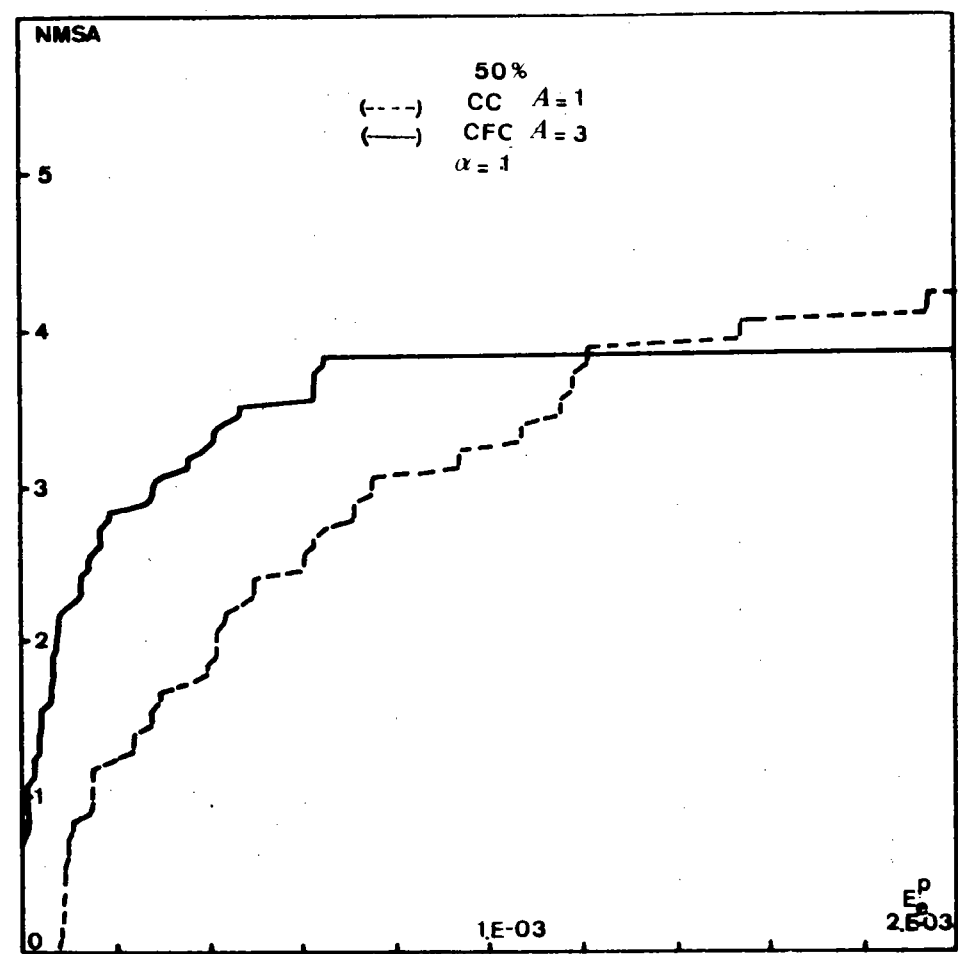
(a) $\alpha = 0.05$ (b) $\alpha = 0.1$

(—) phase CFC

(---) phase CC



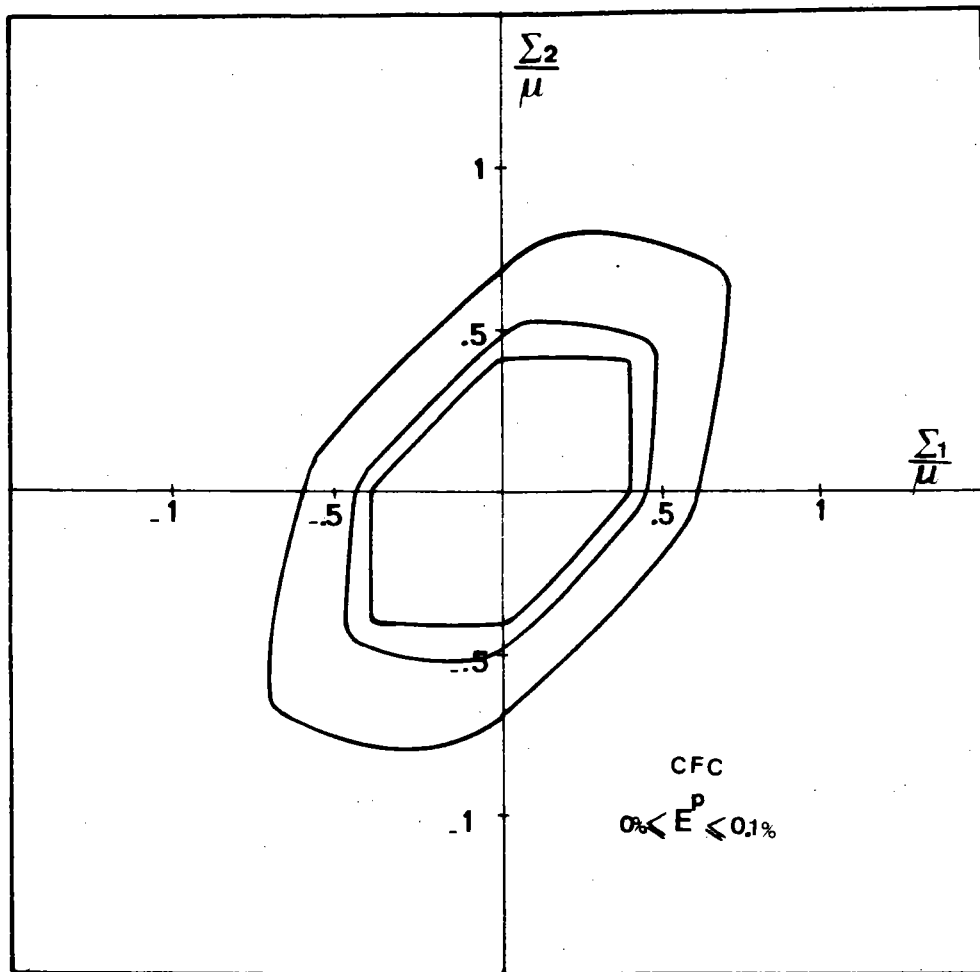
(a)



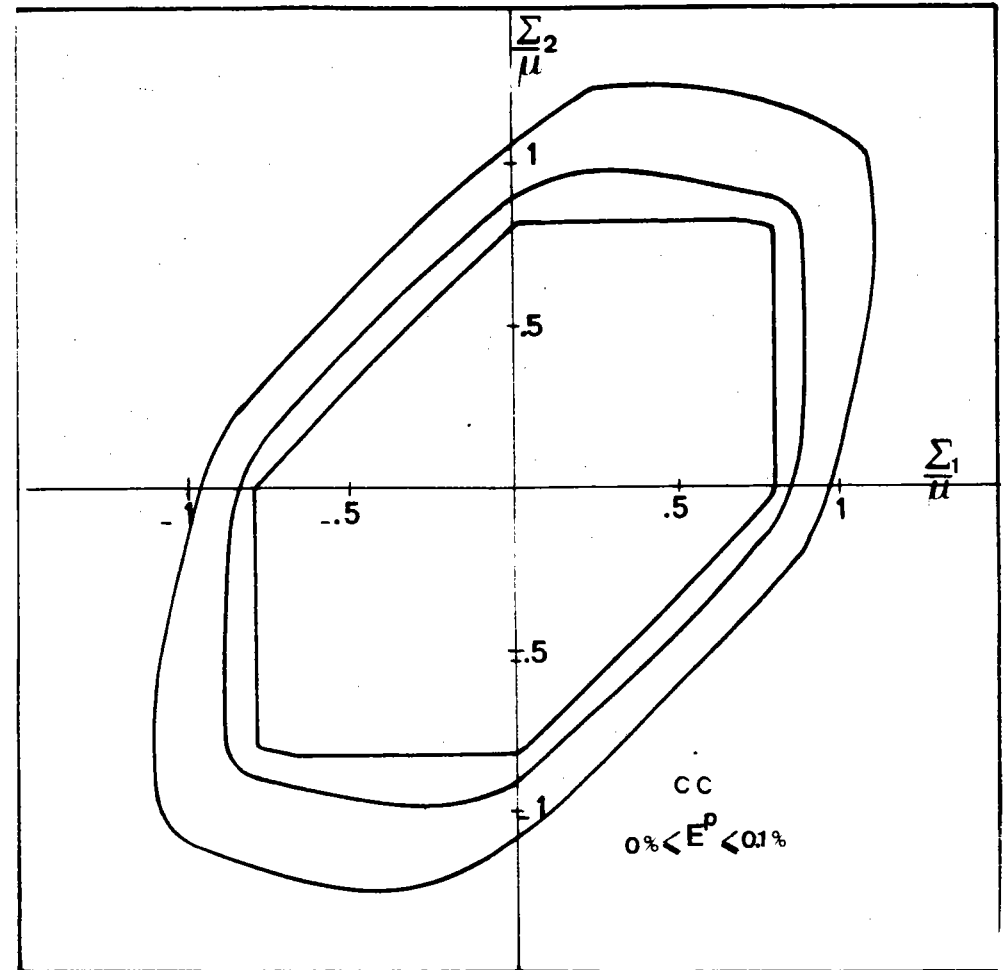
(b)

FIGURE (F.5.33)

Evolution du nombre moyen de systèmes actifs (NMSA) en fonction de la déformation macroscopique d'un polycristal 50 % α CFC + 50 % β CC avec (a) $\alpha = 1$ (b) $\alpha = .1$



(a)



(b)

FIGURE (F.5.34)

Surface de plasticité dans le plan $\Sigma_3 = 0$ obtenue par le présent modèle pour différents niveaux de déformations

(a) phase α CFC pur

(b) phase β CC pur

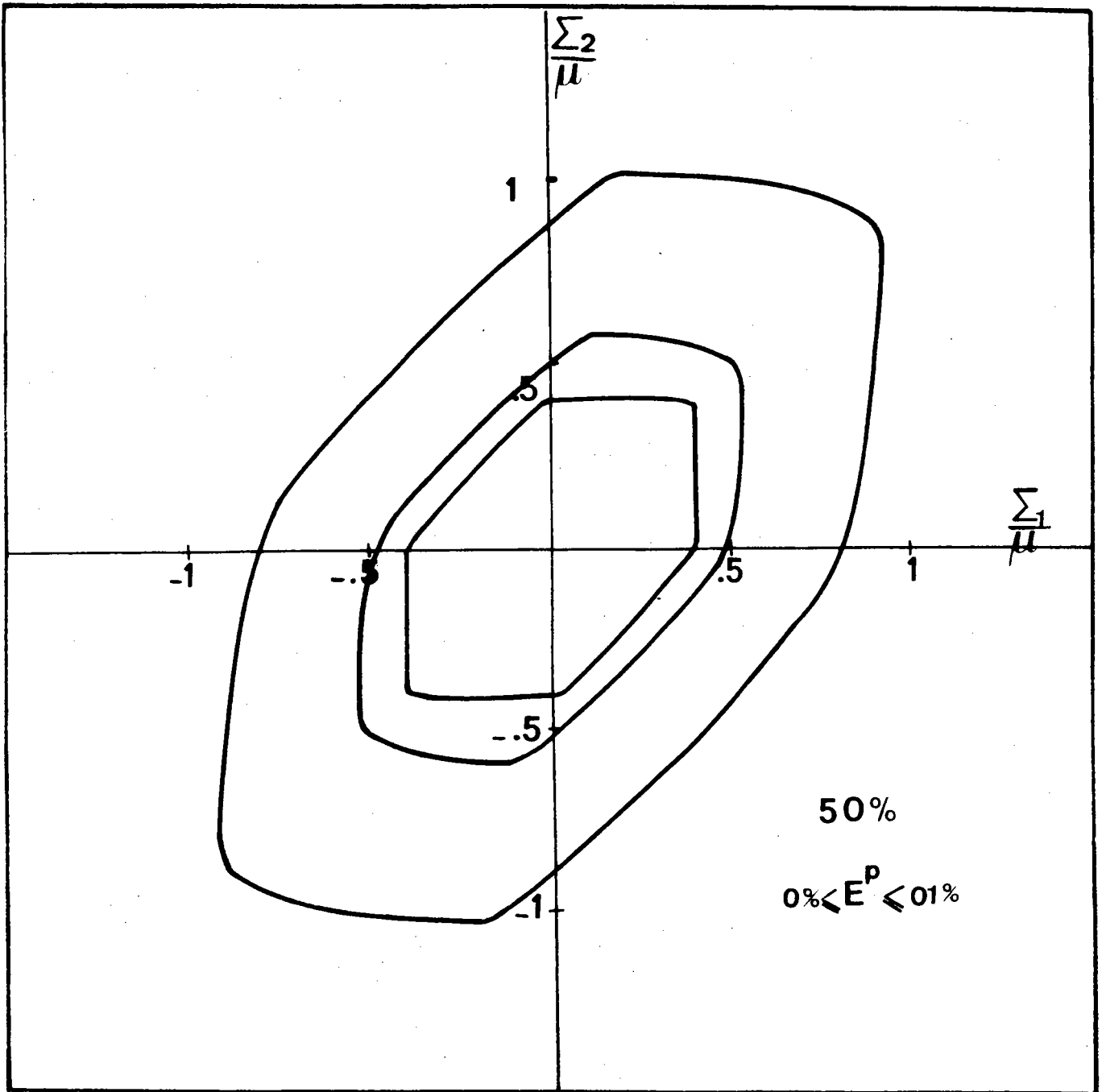


FIGURE (F.5.35)

Surface de plasticité dans le plan $\Sigma_3 = 0$
 obtenue par le présent modèle pour un
 polycristal biphasé 50 % de α CFC et 50 % β
 CC à différents niveaux de déformations.

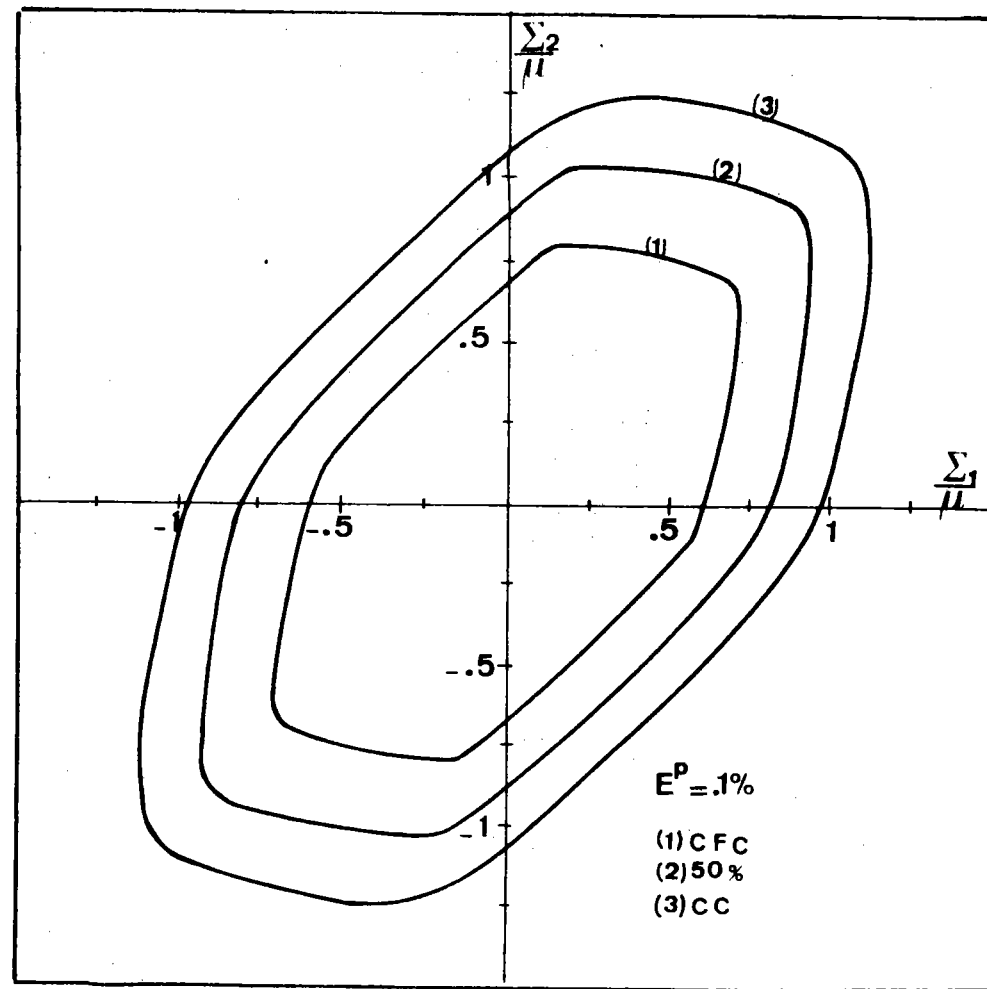
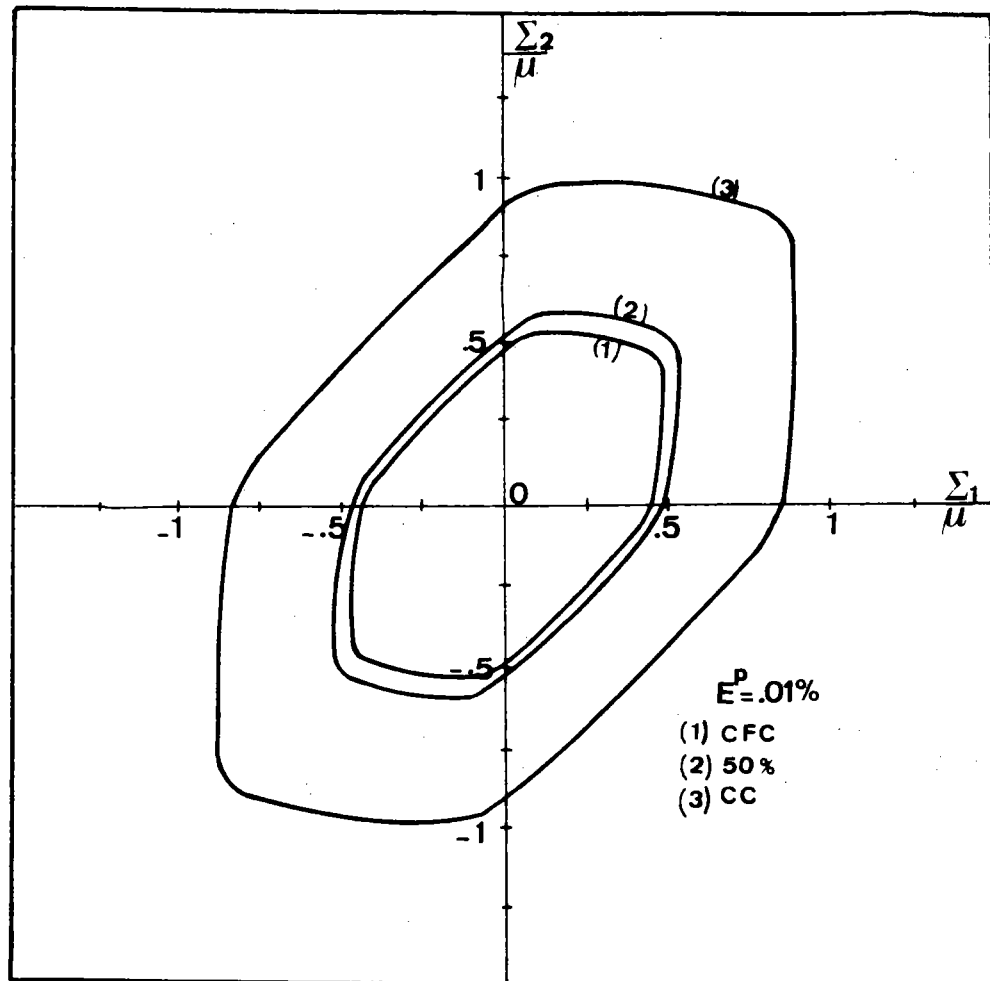


FIGURE (F.5.36)

Surface de plasticité dans le plan $\Sigma_3 = 0$ obtenue par le présent modèle pour des polycristaux CC, CFC, 50 % CC + 50 % CFC, à différents niveaux de déformation (a) $E^p = .01\%$, (b) $E^p = .1\%$

CHAPITRE VI

CONCLUSION

Le présent travail est une contribution à l'étude du comportement plastique des polycristaux métalliques dans le cas où le chargement n'est ni radial, ni monotone.

Pour mener ces études, nous avons exploité un modèle self-consistant à accommodation plastique dont les résultats, déjà connus pour des chargements simples (traction), sont en bons accords avec les observations expérimentales, à la fois pour le comportement plastique et pour la formation des textures de déformations.

Dans nos applications, nous retrouvons cet accord qualitatif tant pour la modélisation de l'effet Bauschinger et de l'écrouissage cyclique, que pour les chargements biaxés non radiaux. Cet accord qualitatif montre à posteriori le rôle des contraintes internes dans le comportement plastique du polycristal. Il montre également que l'évolution de ces contraintes internes par le modèle self-consistant peut être considéré comme acceptable.

Dans le cas des matériaux biphasés, pour lesquels nous avons effectué nous-mêmes une série d'essais expérimentaux sur des laitons ($\alpha+\beta$) spécialement élaborés et préparés pour cette étude, la confrontation entre les résultats théoriques et expérimentaux donne un accord satisfaisant compte tenu des hypothèses simplificatrices utilisées.

D'un point de vue théorique, nous proposons, sans la développer une nouvelle formulation pour l'écrouissage du monocristal, prenant en compte les actions à distances entre dislocations et intégrant ainsi la partie cinématique de l'écrouissage du monocristal dû aux contraintes internes intragranulaires.

De même, lors de la revue bibliographique sur les méthodes d'évaluation des propriétés effectives des milieux hétérogènes, nous avons montré l'intérêt d'un modèle simple, valable pour les milieux faiblement hétérogènes et qui, développé dans le cas de la plasticité des polycristaux métalliques, permettrait sans doute, avec des moyens numériques relativement simples, d'obtenir des résultats meilleurs que ceux que l'on obtient actuellement à partir des modèles de Taylor ou Taylor relaxé.

Cette étude a été centrée plus particulièrement sur l'influence des contraintes internes et de l'écrouissage intracristallin sur le comportement plastique, il faudrait faire intervenir en plus les effets de la

texture cristallographique induite et des modifications de la structure du polycristal en particulier de la forme des grains.

Ces effets, sensibles aux grandes déformations, vont moduler l'influence des contraintes internes et de l'écrouissage intracristallin, dans un sens qu'il est difficile d'apprécier à priori.

L'introduction, dans les calculs de ces nouveaux paramètres, exige une analyse plus fine des équations du problème et nécessitera sans doute une révision profonde des programmes de calculs actuels, afin que les temps de calculs et la taille des programmes informatiques restent raisonnables.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) HERSHEY . Av (J. Appl. Mech., 1954 vol. 21, p 236.
- (2) KRONER E., Linear properties of random media : the systematic theory (15^e colloque du groupe français de Rhéologie, Paris, 1980).
- (3) KRONER E; Berechnung der Elastischen Konstanten des vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls (Z. physik, vol. 151, 1958, p. 504).
- (4) TAYLOR G.I., Plastic strain in Metals (J. Inst. Metals, vol. 62, 1938, p 307).
- (5) LIN T.H. (J. Mech. Phys. Solids, vol. 5, 1957, p. 143).
- (6) HILL R., continuum Micro-Mechanisme of Elastoplastic Polycrystal (J. Mech. Phys. solids, vol. 13, 1965, p.89).
- (7) HUTCHINSON J.W., Elastic-Plastic Behaviour of polycrystalline Metals and composites (Proc. Roy. Soc., vol. A319, 1970, p. 247).
- (8) BERVEILLER M. et ZAQUI A., An Extension of the self-consistent scheme to Plastically flowing Polycrystal (J. Mech. Phys. solids, vol. 6, 1979, p. 326).
- (9) WENG G.J., self-consistent Determination of Time-Dependent Behavior of Metals (J. Appl. Mech., vol. 48, 1981, p. 41).
- (10) BERVEILLER M., Contribution à l'étude du comportement plastique et des textures de déformations des polycristaux métalliques. Thèse université Paris XIII (1978).
- (11) ASARO, Micromechanics of crystals and Polycrystals Adv in Appl. Mech., vol. 23, 1983.
- (12) PAN RICE Brown University Providence Rhode Island, 1981.
- (13) SAADA G. Publication de l'IRSID Série A n°251, 1961.
- (14) J.V. FERNANDES, JM. SCHMITT. Caractéristiques géométriques des cellules de dislocations), revue de métallurgie - octobre 1983 -.
- (15) DEDERICHS P.H., ZELLER R., Variational treatment of the Elastic constants of disordered materials (Z physik, vol. 259, 1973, p. 103-116).
- (16) ZAQUI A. Thèse Paris (1970).
- (17) SACHS G. Zur Ableitung einer Fließbedingung (Z. der V.D.I. vol. 72, 1928, p. 739).
- (18) MECKING H. et HONNEFF H., In texture of materials, (Springer Berlin, 1978, p. 265).
- (19) CANOVA G.R et KOCKS U.F - JONAS J.J., Theory of torsion texture development.
- (20) BUDIANSKY B. et WU T., Theoretical Prediction of plastic strains of polycrystals (Proc. 4th Cong. Appl. Mech., 1962, p. 1175).

- (21) BERVEILLER M. et ZAOUÏ A. Modelling of the Plastic Behaviour of inhomogeneous media (J. Eng. Mater. Tech., 1984).
- (22) ESHELBY J.D, The determination of the elastic field of an Ellipsoïdal Inclusion and Related problems (Proc. Roy. Soc) vol A241, 1957, p. 376).
- (23) HIHI A. Nouvelle formulation et mise en oeuvre d'un modèle self-consistant...) Thèse Paris XIII, 1982.
- (24) TAYLOR G.I. QUINNEY H. (Trans. Roy. Soc, London, 1931, p. 230).
- (25) BERTSCH PK, FINDLEY W. (Proc. 4th US Nat. cong Appl. Mech., 1962, p. 893).
- (26) PRAGER W. Recent development in the matematical theory of plasticty (J. Applied Phys. vol. 20 n°3, p. 253-241).
- (27) FRANCIOSI. Etude théorique et expérimentale du comportement elastoplastique des monocristaux,(thèse Paris-nord, 1984).
- (28) BUI. HD. Ecrouissage des métaux. (C.R. Acad. Sci, Paris, 1964, p. 259).
- (29) ROUSSET M. Surface seuil de plasticité détermination automatique et modélisation, thèse Paris VI, 1985).
- (30) BAUSCHINGER J. Veber die Veränderung der Elasticitätsgrenze und des Elasticitäts moduls verschie-dener (Metall civiling, NF 27, 1881, p. 289-384).
- (31) MANDEL. Plasticité classique et viscoplasticité CISM n°97, 1971, springer-verlag, wien, New-York.
- (32) ROBILIER G., STRASSBURGER. Effet Bauschinger dans des aciers non alliés (Material prufung vol. 11 n°3, 1969, p. 89-95).
- (33) MUGHRABI H. The cyclic hardening and saturation Behaviour of copper single crystals (Mat. Sci. Eng. vol. 33, 1978, p. 207).
- (34) MAGNINT., DRIVER J. Aspects microstructuraux de la déformation cyclique dans les métaux et alliages CC et CFC (Revue Phys. Appl. n°19, 1984, p. 483-502).