



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ DE METZ

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Equations Différentielles et Contrôle Optimal

Mention : Mathématiques Appliquées

par

Mohamed KURDI

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv	19840125
Cote	S1M3 84/6
Loc	Magasin

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS PÉRIODIQUES AVEC SYMÉTRIES DE DIMENSION TROIS

JURY

Président : M. R. GÉRARD, Université de Strasbourg

Membres : Madame A. SEC, Université de Metz

M. B. V. SCHMITT, Université de Metz

M. C. ROGER, Université de Metz

Année Universitaire 1983-1984

A MES PARENTS,

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur B.V. SCHMITT qui a accepté de diriger mon travail et m'a prodigué maints conseils et encouragements.

Sa grande disponibilité et sa grande gentillesse m'ont beaucoup touché.

Monsieur le Professeur R. GERARD m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse, je lui en suis reconnaissant.

Mes remerciements vont aussi à Madame A. SEC et à Monsieur C. ROGER qui ont accepté de participer au jury.

C'est également avec plaisir que je remercie le Département de Mathématiques et d'Informatique de l'Université de Metz et tout ses membres qui m'ont permis de préparer ce travail dans d'excellentes conditions.

Madame DAUTRICHE a dactylographié ce texte avec beaucoup de soin et de rapidité, je lui en suis reconnaissant. Le service reprographie (F. LAVIGNE et J. PETERSHEIM) assureront le tirage, d'avance je les en remercie.

TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION	4
<u>CHAPITRE I</u> : <i>Définition et propriétés générales des systèmes différentiels périodiques avec symétries</i>	7
§ 1. Définition et propriétés des systèmes différentiels avec symétries	
§ 2. Propriétés de certaines solutions de systèmes différentiels possédant une symétrie .	
§ 3. Systèmes différentiels P-périodiques avec symétries .	
<u>CHAPITRE II</u> : <i>Etude des systèmes différentiels linéaires avec symétries</i>	17
§ 1. Systèmes différentiels linéaires P-périodiques avec symétries	
§ 2. Solutions P-périodiques d'un système différentiel linéaire P-périodique avec symétries	
§ 3. Systèmes différentiels linéaires autonomes avec symétries	
§ 4. Stabilité	
<u>CHAPITRE III</u> : <i>Systèmes différentiels non linéaires P-périodiques avec symétries</i>	46
§ 1. Introduction .	
§ 2. Equations aux variations associées à une solution périodique symétrique	
§ 3. Systèmes différentiels P-périodiques dépendant de paramètre	
<u>CHAPITRE IV</u> : <i>Etude numérique</i>	60
§ 1. Introduction	
§ 2. La méthode numérique des symétries	
§ 3. Détermination numérique de $\Sigma_0(a^*, 2\pi)$.	
BIBLIOGRAPHIE	79

INTRODUCTION

L'étude des équations différentielles non autonomes, fait l'objet de nombreux sujets de recherche notamment dans l'étude des processus décrivant l'évolution de certains systèmes intervenant dans les sciences physiques, biologiques, dans lesquelles on désire produire ou empêcher l'apparition de certains phénomènes périodiques. Pensons par exemple aux oscillations de l'électron, aux vibrations des ailes d'avion. Ces motivations conduisent à poser des problèmes simples mais combien difficiles à résoudre.

Le but de notre travail consiste à étudier un système différentiel de dimension trois ayant certaines symétries. En dimension deux, lorsque le système différentiel vérifie les deux propriétés suivantes :

1. le système différentiel est périodique (les coefficients dépendent périodiquement de t)
2. le système différentiel possède certaines symétries,

on a pu obtenir des résultats intéressants sur le plan théorique [3], [10], mais aussi sur le plan numérique, lorsque on cherche à localiser numériquement des solutions périodiques avec symétrie.

Ici on va étudier si de telles coïncidences de propriétés (périodicité, symétries), peuvent apporter, en dimension trois, des connaissances nouvelles.

Le premier chapitre est consacré aux définitions et propriétés des symétries; nous montrons dans la proposition (1), qu'un système différentiel avec deux symétries par rapport à deux espaces de symétrie ou un seul, en deux temps différents, est toujours périodique; puis nous montrons que l'orbite d'une solution issue d'un point de l'espace de symétrie d'un système différentiel possédant une symétrie par rapport à cet espace au même temps, est symétrique par rapport à cet espace; on montre également, lorsque le système possède une ou deux symétries en deux temps différents, qu'avec des conditions supplémentaires certaines de ces solutions sont périodiques et ont des orbites symétriques; enfin on termine ce chapitre en traitant les systèmes différentiels P-périodiques avec symétries.

Dans le deuxième chapitre, j'ai étudié les systèmes différentiels périodiques linéaires avec symétries; dans le § 1, on obtient des résultats très semblables aux systèmes différentiels linéaires périodiques avec symétries de dimension deux; par exemple, nous montrons que si $(A) \in L_j^\alpha(P)$, (c'est l'ensemble des systèmes différentiels linéaires P-périodiques avec symétrie par rapport à l'axe ox_i ou au plan ox_jx_k au temps α), alors (A) et ses solutions fondamentales sont entièrement définies par leurs valeurs sur $[0, P/2]$; le § 2, apporte un résultat nouveau, à savoir que tout système différentiel linéaire P-périodique avec symétrie par rapport à un plan ou à un axe au temps α , admet toujours une solution non triviale dont l'orbite est symétrique par rapport à l'espace de symétrie, ce qui veut dire, que tout système $(A) \in L_j^\alpha(P)$ est toujours exceptionnel (proposition 9 et corollaire 5); nous finissons ce paragraphe par une structuration déterminée par l'intermédiaire de $X_A(P/2)$, de $L_j^j(P)$, où j est la dimension de l'espace des solutions P-périodiques dans $L_j(P)$; enfin, nous étudions la stabilité d'un tel système $(A) \in L_j(P), (\alpha=0)$.

Le troisième chapitre est consacré à répondre, dans le cadre des symétries, aux deux questions suivantes :

1. Lorsqu'on a obtenu une solution périodique φ , issue de $x^0 = \varphi(t_0)$ à l'instant $t=t_0$, du système (f) , cette solution périodique est-elle isolée (c'est à dire existe-t-il un voisinage $V \subset \mathbb{R}^3$, espace des phases de (f) , tel qu'aucune autre solution issue de $\bar{x} \in V(\bar{x} \neq x^0)$ au temps $t=t_0$ ne soit périodique) ?
2. Si la réponse à (1) est affirmative, et si (f) dépend d'un paramètre $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}^m$ (on notera (λf) un tel système, peut-on prolonger la solution périodique isolée obtenue pour $\lambda = \delta (\delta \in \Lambda)$ à tout un voisinage W de λ dans Λ , de manière à ce que, pour tout $\lambda \in W$, (λf) admette une solution $\lambda\varphi$ périodique et une seule, qui tend, par l'intermédiaire de sa condition initiale au temps t_0 vers $\delta\varphi$ si λ tend vers δ ?

Il est bien connu depuis Poincaré [2] que la réponse à ces questions est affirmative si l'équation aux variations (A_δ^φ) associée à $\delta\varphi$ est non exceptionnelle (c'est à dire n'admet pas de solutions périodiques non triviales); nous démontrons dans le § 2, que si (λf) et $(\delta\varphi)$ possèdent la même symétrie, alors l'équation aux variations (A_δ^φ) associée à $\delta\varphi$ possède aussi la même symétrie et est toujours exceptionnelle, ce qui rend inapplicable le théorème de prolongement

de Poincaré. Mais nous verrons dans les propositions (16 - 17) une réponse affirmative à ces deux questions lorsque $(A_0^0) \in L_1^1(P)$; enfin nous finissons ce chapitre par une application sur l'étude des systèmes différentiels quasi-linéaires autonomes P-périodiques avec symétries, $i \in \{1,2,3\}$.

J'ai terminé ce travail par une étude numérique (Chap. IV), qui nous permet de trouver, par la "méthode des symétries", des solutions P-périodiques dont les orbites sont symétriques par rapport à l'origine, et d'autres solutions P-périodiques dont les orbites sont symétriques par rapport à un plan.

Après l'exposé de la "méthode des symétries", j'ai appliqué cette étude à l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -ax_1x_2x_3 - 2x_1^3 + b \cos t, \\ \dot{x}_3 = x_1 \end{cases} \quad D(a,b);$$

J'ai tracé pour $(a^*=1,2,3)$ une portion de $\Sigma_0(a^*,2\pi)$, (l'ensemble des conditions initiales pour lesquelles les solutions sont 2π -périodiques d'orbites symétriques par rapport à l'origine) et j'ai tracé également une partie de $\Sigma(1,1,2\pi)$, (l'ensemble des conditions initiales, pour lesquelles les solutions sont 2π -périodiques symétriques par rapport au plan ox_2x_3 dans l'espace des phases (ox_1,ox_2,ox_3)) pour $(a^*,b^*) = (1,1)$ fixé.-

PREMIER CHAPITRE

DEFINITION ET PROPRIETES GENERALES

DES SYSTEMES DIFFERENTIELS

PERIODIQUES AVEC SYMETRIES

CHAPITRE I

I.1. Définition et propriétés des systèmes différentiels avec symétries

Ce paragraphe débute par la définition et une interprétation géométrique de symétries d'un système différentiel d'ordre trois; ensuite nous donnons quelques exemples de systèmes différentiels avec symétries; enfin nous étudierons des systèmes différentiels avec deux symétries en deux temps égaux ou différents.

On considère le système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (f)$$

où $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, est de classe C^1 en x , et continue par morceaux en t ; on notera (x_1, x_2, x_3) les coordonnées de $x \in \mathbb{R}^3$.

Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, on désigne par $V_t(x)$ le vecteur $f(t, x)$ issu de x à l'instant t .

I.1.1. Définition 1

On dira que (f) admet une symétrie par rapport à l'axe $o x_i$ (resp. au plan $o x_j x_k$) au temps $t = \alpha$, si la relation suivante est satisfaite :

$$V_{\alpha+t}(S(x)) = S(-V_{\alpha-t}(x)), \quad (1)$$

où $S(x)$ est la symétrie par rapport à cet axe (resp. ce plan).

Par rapport aux coordonnées de $\mathbb{R}^3$, si l'espace de symétrie est l'axe $o x_1$, alors la relation (1) s'exprime par les égalités suivantes :

$$\begin{cases} f_1(\alpha+t, x_1, x_2, x_3) = -f_1(\alpha-t, x_1, -x_2, -x_3) \\ f_\ell(\alpha+t, x_1, x_2, x_3) = f_\ell(\alpha-t, x_1, -x_2, -x_3) \end{cases} \quad \ell = (2, 3).$$

De même si l'espace de symétrie est le plan ox_2x_3 , alors nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{cases} f_1(\alpha+t, x_1, x_2, x_3) = f_1(\alpha-t, -x_1, x_2, x_3) \\ f_k(\alpha+t, x_1, x_2, x_3) = -f_k(\alpha-t, -x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (k = 2, 3);$$

on désigne dans la suite l'ensemble de tous les espaces de symétries par $E = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3\}$ où σ_1 est l'axe ox_1 , et où $\bar{\sigma}_1$ est le plan ox_2x_3 ; dans la suite, nous noterons σ un élément de E ; $\bar{\sigma}$ représente alors $\bar{\sigma}_i$ si $\sigma = \sigma_i$, et σ_i si $\sigma = \bar{\sigma}_i$. On notera F_σ^α l'ensemble des systèmes différentiels admettant une symétrie par rapport à l'espace σ au temps $t = \alpha$, où $\sigma \in E$.

Remarque 1

Il est possible que le système (f) possède une symétrie par rapport à un espace σ au temps α , et une autre par rapport à l'espace σ' au temps β ; on a alors :

$$(f) \in F_\sigma^\alpha \cap F_{\sigma'}^\beta \quad (\sigma, \sigma') \in E$$

I.1.2. Quelques exemples

Exemple 1 : Soit l'équation différentielle d'ordre trois :

$$y''' + g(t, y, y', y'') = 0 \quad (2)$$

où $y \in \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$. Procédons au changement de variables suivant :

$$y' = x_1, y'' = x_2, y = x_3 \quad (3)$$

on obtient un système équivalent à l'équation (2) :

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -g(t, x_1, x_2, x_3) \\ x'_3 = x_1 \end{cases} \quad (4)$$

le système (4) admet une symétrie par rapport à l'axe σ_1 (resp. plan $\bar{\sigma}_1$) au temps $t=0$ si la fonction g satisfait les conditions suivantes :

$g(t, x_1, x_2, x_3) = g(-t, x_1, -x_2, -x_3)$, (resp. $g(t, x_1, x_2, x_3) = -g(-t, -x_1, x_2, x_3)$)
Ainsi l'équation

$$y''' + y y' y'' + 2y'^3 = \cos 2t$$

se transforme, par le changement de variables (3), en un système différentiel

appartenant à $F_{\sigma_1}^0 \cap F_{\sigma_1}^{\pi/4}$

Exemple 2 : Soit l'équation d'Euler

$$x''' + a_1 t^{-2} x'' + a_2 t^{-3} x' = 0 \quad (E)$$

en procédant au changement de variables :

$$x = x_1, x' = x_2, x'' = x_3$$

on obtient un système différentiel appartenant à $F_{\sigma_2}^0$

Exemple 3 : Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin t \\ \dot{x}_2 = \cos t \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 x_3 \end{cases} \quad (b)$$

on a ici l'exemple d'un système différentiel non linéaire 2π périodique

appartenant à $F_{\sigma_1}^0 \cap F_{\sigma_1}^{\pi/2} \cap F_{\sigma_2}^{\pi/2} \cap F_{\sigma_2}^0$

Exemple 4 : Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = x_2 x_3 \end{cases} \quad (c)$$

on vérifie que (c) appartient à $F_{\sigma_1}^{\alpha_1} \cap F_{\sigma_2}^{\alpha_2} \cap F_{\sigma_3}^{\alpha_3}$ où $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}$.

Pour toutes les démonstrations qui vont suivre, et sauf précision contraire, par symétrie axiale on sous entend la symétrie par rapport à l'axe σ_1 et par symétrie par rapport à un plan on sous entend le plan σ_1 .

I.1.3. Nous examinons dans ce paragraphe des systèmes différentiels quelconques avec deux symétries; on montrera qu'un système différentiel avec deux symétries par rapport à deux espaces de symétrie ou un seul, en deux temps différents est toujours périodique.

Proposition 1

1. Si $(f) \in F_{\sigma}^{\alpha} \cap F_{\sigma}^{\beta}$ où $(\sigma \in E)$ et $\alpha \neq \beta$, alors (f) est périodique de période $2(\beta - \alpha)$.
2. Si $(f) \in F_{\sigma}^{\alpha} \cap F_{\sigma'}^{\beta}$ où $(\sigma \neq \sigma', \sigma \in E, \sigma' \in E)$ et $\alpha \neq \beta$, alors (f) est périodique de période $4(\beta - \alpha)$.

Démonstration

1. D'après la définition (1) on a :

$$\begin{aligned} f_1(t, x_1, x_2, x_3) &= (-1)^i f_1(2\alpha - t, (-1)^{1-i} x_1, (-1)^i x_2, (-1)^i x_3) = \\ &= f_1(2(\beta - \alpha) + t, x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_k(t, x_1, x_2, x_3) &= (-1)^{1-i} f_k(2\alpha - t, (-1)^{1-i} x_1, (-1)^i x_2, (-1)^i x_3) = \\ &= f_k(2(\beta - \alpha) + t, x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

où $(k=2,3)$ et où $(i=0 \text{ ou } 1)$ pour $\bar{\sigma}_1, \sigma_1$ respectivement.

2. On prend $\sigma = \sigma_1, \sigma' = \bar{\sigma}_1$, d'après la définition (1) on a :

$$\begin{aligned} f_1(t, x_1, x_2, x_3) &= -f_1(2\alpha - t, x_1, -x_2, -x_3) = f_1(4\alpha - 2\beta - t, -x_1, x_2, x_3) = \\ &= f_1(2\beta - (4\beta - 4\alpha + t), -x_1, x_2, x_3) = f_1(4\beta - 4\alpha + t, x_1, x_2, x_3) \\ f_k(t, x_1, x_2, x_3) &= -f_k(2\alpha - t, x_1, -x_2, -x_3) = -f_k(2\beta - 2\alpha + t, -x_1, -x_2, -x_3) = \\ &= f_k(2\beta - (4\beta - 4\alpha + t), -x_1, x_2, x_3) = f_k(4\beta - 4\alpha + t, x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

où $k = (2,3)$, ce qui achève la démonstration.

Dans la proposition précédente on s'est limité à étudier des systèmes différentiels admettant des symétries par rapport à deux espaces (deux axes, deux plans, un axe et un plan) car l'étude des systèmes différentiels admettant plus de deux symétries se ramène à l'étude des systèmes différentiels admet-

tant deux symétries en effet si $(f) \in F_{\sigma}^{\alpha} \cap F_{\sigma}^{\beta} \cap F_{\sigma}^{\gamma}$ alors d'après

la proposition (1)(f) est périodique de période $P = \min(2(\beta-\alpha), 2(\beta-\gamma), 2(\gamma-\alpha))$.

I.2. Propriétés de certaines solutions de systèmes différentiels possédant ===== une symétrie =====

On a vu dans (I.1) les propriétés des systèmes différentiels avec symétries. Nous allons voir dans ce paragraphe une propriété de certaines de leurs solutions; on démontrera que lorsque le système (f) possède une symétrie par rapport à l'espace σ ($\sigma \in E$) au temps α , alors l'orbite de la solution issue au temps α d'un point de l'espace σ de symétrie, est symétrique par rapport à cet espace.

On notera $S(f)$ l'ensemble des solutions de (f), on désigne par $I(\varphi) \subset \mathbb{R}$, l'ensemble de définition maximal de la solution $\varphi \in S(f)$ ($\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$).

I.2.1. Proposition 2 =====

Soit $(f) \in F_{\sigma}^{\alpha}$ où ($\sigma \in E$), et soit $\varphi \in S(f)$ tel que $\alpha \in I(\varphi)$; si $\varphi(\alpha) \in \sigma$ alors on a :

1. $I(\varphi)$ est centré en α
2. $\varphi_k(\alpha+t) = (-1)^{v_k} \varphi_k(\alpha-t)$, $v_k \in \{0,1\}$, $k \in \{1,2,3\}$

où $v_k=0$ si l'indice k est le même que l'indice de l'espace de symétrie, sinon $v_k=1$.

L'orbite de φ dans l'espace des phases est alors symétrique par rapport à l'espace de symétrie σ .

Démonstration

Puisque l'ouvert $I(\varphi)$ contient α , il existe un ouvert contenu dans $I(\varphi)$ et centré en α . Soit $J \subset I(\varphi)$ le plus grand intervalle centré en α , soit $t \in J$ alors $(2\alpha - t) \in J$.

Posons :

$$\begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_\ell(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi_1(2\alpha - t) \\ \varphi_\ell(2\alpha - t) \end{pmatrix} \quad \ell = (2, 3);$$

alors

$$\dot{w}(t) = \begin{pmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_\ell(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(2\alpha - t) \\ -\varphi_\ell(2\alpha - t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(2\alpha - t), \varphi_1(2\alpha - t), \varphi_2(2\alpha - t), \varphi_3(2\alpha - t) \\ -f_\ell(2\alpha - t), \varphi_1(2\alpha - t), \varphi_2(2\alpha - t), \varphi_3(2\alpha - t) \end{pmatrix}$$

et d'après la définition (1) on obtient

$$\dot{w}(t) = \begin{pmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_\ell(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t, w_1(t), w_2(t), w_3(t)) \\ f_\ell(t, w_1(t), w_2(t), w_3(t)) \end{pmatrix} \quad (\ell = 2, 3)$$

Donc $w(t)$ est solution de (f); de plus $w(\alpha) = \varphi(\alpha)$, ceci entraîne, d'après le théorème d'unicité que les deux solutions coïncident pour tout $t \in J(\varphi)$.

Pour démontrer que $I(\alpha)$ est centré en α on va distinguer deux cas

1. $I(\varphi)$ est égale à $\mathbb{R}$, alors il est centré en α
2. $I(\varphi)$ est borné soit m , M borne inférieure, supérieure respectivement; alors on raisonne par l'absurde :

$$\text{si } \alpha \neq \frac{M + m}{2}, \quad \alpha > \frac{m + M}{2} \text{ par exemple, } (J =]M', M[).$$

Comme $M' \in J$, la solution φ est définie et prolongeable dans un intervalle centré en M' , grace aux propriétés de symétrie de $\varphi(\varphi_k(\alpha + t) = (-1)^k \varphi_k(\alpha - t))$, φ est aussi prolongeable sur un intervalle ouvert centré en M , et donc M n'est pas la borne supérieure de J ni de $I(\varphi)$.

Nous avons vu en proposition (1) que les systèmes différentiels admettant deux symétries par rapport à un espace ou deux espaces en deux temps différents sont des systèmes périodiques; on peut énoncer une proposition semblable concernant les orbites des solutions :

1.2.2. Proposition 3

=====

Soit $(f) \in F_{\sigma}^{\alpha} \cap F_{\sigma'}^{\beta}$, où $\sigma \in E$, $\sigma' \in E$, et $\beta \neq \alpha$; soit $\varphi \in S(f)$ telle que :

$\alpha \in I(\varphi)$, $\beta \in I(\varphi)$; si $\varphi(\alpha) \in \sigma$, $\varphi(\beta) \in \sigma'$ alors on a :

1. φ est définie pour tout t
2. Si $\sigma' = \sigma$ (resp. $\sigma' \neq \sigma$) est périodique de période $2(\beta-\alpha)$, (resp. $4(\beta-\alpha)$).

L'orbite de φ dans l'espace des phases (ox_1, ox_2, ox_3) est symétrique par rapport aux deux espaces de symétries σ, σ' , en particulier à leur intersection.

Démonstration

1. On démontre tout d'abord que $I(\varphi)$ est égale à $\mathbb{R}$

En effet, d'après la proposition (2), $I(\varphi)$ est un intervalle centré en α et β avec $\alpha \neq \beta$, donc $I(\varphi) = \mathbb{R}$.

2. Pour la démonstration on prendra $\sigma' = \sigma = \sigma_1$ (resp. $\sigma = \sigma_1$, $\sigma' = \bar{\sigma}_1$), les autres cas se traitant de manière semblable.

D'après la proposition (2) on a :

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \varphi_1(2\alpha-t) = \varphi_1(2(\beta-\alpha)+t) \\ \varphi_{\ell}(t) = -\varphi_{\ell}(2\alpha-t) = \varphi_{\ell}(2(\beta-\alpha)+t); \end{cases} \quad \ell = (2,3)$$

respectivement :

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \varphi_1(2\beta-(2\beta-2\alpha+t)) = -\varphi_1(2(\beta-\alpha)+t) = \varphi_1(4(\beta-\alpha)+t) \\ \varphi_{\ell}(t) = -\varphi_{\ell}(2\beta-(2\beta-2\alpha+t)) = -\varphi_{\ell}(2(\beta-\alpha)+t) = \varphi_{\ell}(4(\beta-\alpha)+t) \end{cases}$$

ce qui prouve la périodicité de φ ; d'après la proposition (2) on en déduit que l'orbite est symétrique par rapport à l'espace de symétrie.

Remarque 2

Dans le cas (b), si σ, σ' sont deux espaces supplémentaires, alors la solution φ est $2(\beta-\alpha)$ antipériodique (i.e. $\varphi(2(\beta-\alpha)+t) = -\varphi(t)$); son orbite dans l'espace des phases est symétrique par rapport à l'origine.

1.3. Systèmes différentiels P-périodiques avec symétries

=====

Dans ce qui précède, on a vu qu'un système différentiel avec deux symétries en deux temps différents est périodique, et qu'avec des conditions supplémentaires, certaines de ses solutions sont périodiques.

Nous étudions ici des systèmes différentiels périodiques, à priori, et avec symétries.

On notera par $F_{\sigma}^{\alpha}(P) \subset F_{\sigma}^{\alpha}$ l'ensemble des systèmes différentiels (f) avec symétrie par rapport à l'espace de symétrie $\sigma \in E$ au temps α et de période P, c'est à dire tels que :

$$f(t+P, x) = f(t, x) \quad \forall t \in \mathbb{R}; \quad \forall x \in \mathbb{R}^3;$$

Il ne sera pas supposé, sauf mention explicite, que P est la période minimale de (f); on désigne par P(f) l'ensemble des périodes de (f).

On va voir maintenant qu'un système différentiel périodique avec une symétrie possède alors d'autres symétries.

I.3.1. Proposition 4 =====

Si (f) $\in F_{\sigma}^{\alpha}(P)$ où ($\sigma \in E$) alors pour tout $P' \in P(f)$ on a :

$$(f) \in F_{\sigma}^{\alpha+P'/2}$$

Démonstration

D'après la définition (1), au temps $t+P'/2$ on a :

$$\begin{aligned} f_1(\alpha+P'/2+t, x_1, x_2, x_3) &= (-1)^i f_1(\alpha-P'/2-t, (-1)^{1-i}x_1, (-1)^ix_2, (-1)^ix_3) \\ &= (-1)^i f_1(\alpha+P'/2-t, (-1)^{1-i}x_1, (-1)^ix_2, (-1)^ix_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\ell}(\alpha+P'/2+t, x_1, x_2, x_3) &= (-1)^{1-i} f_{\ell}(\alpha-P'/2-t, (-1)^{1-i}x_1, (-1)^ix_2, (-1)^ix_3) \\ &= (-1)^{1-i} f_{\ell}(\alpha+P'/2-t, (-1)^{1-i}x_1, (-1)^ix_2, (-1)^ix_3) \end{aligned}$$

où ($i = 0, 1$) pour $\bar{\sigma}_1, \sigma_1$ respectivement, et ($\ell = 2, 3$)

Ce qui prouve que (f) $\in F_{\sigma}^{\alpha+P'/2}(P)$.

Corollaire 1

Soit $(f) \in F_{\sigma}^{\alpha}(P) \cap F_{\sigma}^{\beta}(P)$ où $(\sigma, \sigma') \in E$, $\beta \neq \alpha$; alors il existe

$P' \in P(f)$ tel que :

- a. $\beta \equiv \alpha \pmod{P'/2}$ pour $\sigma = \sigma'$
- b. $\beta \equiv \alpha \pmod{P'/4}$ pour $\sigma \neq \sigma'$

Démonstration

Pour (a) d'après la proposition (1), on a : $2(\beta - \alpha) \in P(f)$, et de la même façon pour (b) on a : $4(\beta - \alpha) \in P(f)$.

I.3.2. Solutions P-périodiques symétriques d'un système différentiel

P-périodique avec symétrie

Dans notre étude des systèmes différentiels périodiques avec symétries on s'intéresse particulièrement aux solutions périodiques dont les orbites sont symétriques; les propositions (1) et (3) précédentes nous permettent d'énoncer :

Corollaire 2

a. Soit $(f) \in F_{\sigma}^{\alpha}(P)$, $\sigma \in E$; notons par $S_{\sigma}^{\alpha}(P)$ l'ensemble des solutions

$(\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3)$ de (f) qui vérifient :

$$\varphi(\alpha) \in \sigma \text{ et } \varphi(\alpha + P/2) \in \sigma$$

si $\varphi \in S_{\sigma}^{\alpha}(P)$, alors φ est P-périodique, son orbite est symétrique par rapport à l'espace de symétrie σ .

b. Soit $(f) \in F_{\sigma}^{\alpha}(P) \cap F_{\bar{\sigma}}^{\alpha+P/4}(P)$ où $\sigma \in E$, $\bar{\sigma} \in E$; notons par $S_{\sigma,0}^{\alpha}(P)$

l'ensemble des solutions $(\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3)$ qui vérifient

$$\varphi(\alpha) \in \sigma \text{ et } \varphi(\alpha + P/4) \in \bar{\sigma}$$

si $\varphi \in \bigcup_{\sigma,0}^{\alpha} (P)$, alors φ est $P/2$ antipériodique, son orbite est symétrique par rapport à l'espace σ et $\bar{\sigma}$, en particulier par rapport à l'origine

c. Soit $(f) \in \bigcup_{\sigma}^{\alpha} (P) \cap \bigcup_{\sigma'}^{\alpha+P/4} (P)$, où $\sigma \in E$, $\sigma' \in E$, et $(\sigma \cup \sigma') \neq \mathbb{R}^3$;

si φ est une solution vérifiant :

$$\varphi(\alpha) \in \sigma \text{ et } \varphi(\alpha+P/4) \in \sigma'$$

alors φ est P -périodique, son orbite est symétrique par rapport à l'espace σ et σ' .

Nous notons dans la suite l'ensemble $\bigcup_{\sigma}^{\alpha} (P) \cap \bigcup_{\sigma'}^{\alpha+P/4} (P)$ par $\bigcup_{\sigma,0}^{\alpha} (P)$

où $\sigma \in E$, $\bar{\sigma} \in E$.

Remarque 3

1. Soit $(f) \in \bigcup_{\sigma}^{\alpha}$ où $\sigma \in E$, alors (f) est déterminé si on le connaît pour $t \in [\alpha, +\infty[$
2. Soit $(f) \in \bigcup_{\sigma}^{\alpha} \cap \bigcup_{\sigma'}^{\beta}$ où $\sigma \in E$, $\sigma' \in E$, alors (f) est déterminé si on le connaît pour $t \in [\alpha, \beta]$
3. Soit $(f) \in \bigcup_{\sigma}^{\alpha} (P)$ où $\sigma \in E$, alors (f) est déterminé si on le connaît pour $t \in [\alpha, \alpha+P/2]$.

DEUXIEME CHAPITRE

ETUDE DES SYSTEMES DIFFERENTIELS LINEAIRES AVEC SYMETRIES.

CHAPITRE II

II.1. Systèmes différentiels linéaires P-périodiques avec symétries

Nous allons étudier dans ce paragraphe les systèmes linéaires périodiques avec symétries; cette étude est liée au chapitre précédent; nous verrons que si un système linéaire périodique admet une symétrie par rapport à un espace $\sigma \in E$, il admet aussi une symétrie par rapport à l'espace supplémentaire $\bar{\sigma} \in E$, au même temps. Nous donnerons une caractérisation matricielle d'un système linéaire périodique admettant une symétrie et nous verrons également une propriété de sa solution matricielle fondamentale.

II.1.1. Notation

Soit $L(P)$ l'ensemble des systèmes différentiels linéaires P-périodiques de dimension trois

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (A)$$

avec $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, et où $A : \mathbb{R} \rightarrow M(3, \mathbb{R})$ est continue par morceaux et

P-périodique ($A(t+P)=A(t)$).

Définition 2 : On dit que $(A) \in L(P)$ admet une symétrie par rapport à l'espace $\sigma \in E$ au temps α si $(A) \in L(P) \cap F_{\sigma}^{\alpha}(P)$. On notera $L_{\sigma}^{\alpha}(P)$ l'ensemble des systèmes linéaires P-périodiques avec symétrie par rapport à l'espace $\sigma \in E$ au temps α .

II.1.2. Proposition 5

=====

Si (A) appartient à $L_{\sigma}^{\alpha}(P)$, où $\sigma \in E$, alors (A) appartient à $L_{\bar{\sigma}}^{\alpha}(P)$.

Démonstration : Pour la démonstration, on prend $\sigma = \sigma_1$, on considère $A(t) = (a_{mn}(t))$, $(m, n = 1, 2, 3)$, les autres cas se traitant de manière similaire.

En effet, $(A) \in L_{\sigma}^{\alpha}(P)$, entraîne d'après la définition (I.1.1.) que

$$\begin{aligned} a_{mm}(t) &= -a_{mm}(-t) & a_{12}(t) &= a_{12}(-t) & a_{21}(t) &= a_{21}(-t) \\ a_{23}(t) &= -a_{23}(-t) & a_{13}(t) &= a_{13}(-t) & a_{31}(t) &= a_{31}(-t) \\ a_{32}(t) &= -a_{32}(-t) \end{aligned}$$

Ce sont les mêmes conditions pour que $(A) \in L_{\bar{\sigma}_1}^{\alpha}(P)$. Nous allons identifier

ces deux ensembles $L_{\sigma}^{\alpha}(P)$, $L_{\bar{\sigma}}^{\alpha}(P)$, on notera $L_i^{\alpha}(P)$ l'ensemble de

$$L_{\bar{\sigma}_i}^{\alpha}(P) = L_{\sigma_i}^{\alpha}(P), \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

II.1.3. Proposition 6

=====

Soit $(A) \in L_{\sigma}^{\alpha}(P) \cap L_{\bar{\sigma}}^{\alpha+P/4}(P)$, où $\sigma \in E$, alors (A) est périodique de période $P/2$, et $(A) \in L_i^{\alpha}(P/2)$.

Démonstration : En effet soit $(A) \in L_{\sigma}^{\alpha}(P) \cap L_{\bar{\sigma}}^{\alpha+P/4}(P)$, alors d'après la

proposition (5), $(A) \in L_{\sigma}^{\alpha}(P) \cap L_{\sigma}^{\alpha+P/4}(P)$, et de la définition (1) on

déduit que $P/2$ est une période de la matrice A , $[A(t+P/2) = A(t), \forall t \in \mathbb{R}]$;

de plus (A) admet une symétrie par rapport à l'espace $\sigma \in E$ au temps α

c'est à dire $(A) \in L_{\sigma}^{\alpha}(P/2)$.

Nous supposons, sans restriction de la généralité que $\alpha = 0$; en effet soit $(A) \in L_i^\alpha(P)$, $i \in \{1,2,3\}$, posons $\tau = t - \alpha$ et $y(\tau) = x(t)$; on vérifie que $y(\tau)$ est une solution du système :

$$\frac{dy}{d\tau} = B(\tau)y \quad (B),$$

avec $B(\tau) = A(t - \alpha)$ et que $(B) \in L_i^0(P)$, nous noterons $L_i(P)$ l'ensemble $L_i^0(P)$; on considère dans la suite le système (A) avec $A(t) = (a_{mn}(t))$ ($m, n = 1,2,3$).

II.1.4. Caractérisation matricielle de $(A) \in L_i(P)$ =====

Nous allons donner dans la proposition suivante une caractérisation matricielle de $(A) \in L_i(P)$, et aussi par un système (A) avec plusieurs symétries.

Proposition 7 =====

a) un système $(A) \in L(P)$ est dans $L_i(P)$, $i \in \{1,2,3\}$, si et seulement si on a :

1. $a_{mm} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($m=1,2,3$) est une fonction impaire
2. $a_{mn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($m=i, n \neq m, n=i, m \neq n$) est une fonction paire
3. $a_{mn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($m \neq i, n \neq i$) est une fonction impaire.

b) un système $(A) \in L(P)$ est dans $[L_i(P) \cap L_j(P)]$ où $i \neq j, (i,j) \in \{1,2,3\}$ si et seulement si on a

1. $a_{mm} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($m=1,2,3$) est une fonction impaire
2. $a_{mn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($m=i,j, n=j,i$) est une fonction paire
3. toutes les autres fonctions sont nulles.

c) un système $(A) \in L(P)$ est dans $[L_1(P) \cap L_2(P) \cap L_3(P)]$ c'est à dire (A) avec trois symétries (trois axes et trois plans), si et seulement si on a :

1. $a_{mm} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (m=1,2,3)$ est une fonction impaire
2. $a_{mn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (m \neq n)$ est une fonction nulle.

Démonstration : On va démontrer (a) pour $i=1$ c'est à dire

$(A) \in L_1(P) = L_{\sigma_1}(P) = L_{\bar{\sigma}_1}(P)$; si $(A) \in L_1(P)$ alors d'après la définition

(I.1.1.) on a :

$$A(-t) = \begin{pmatrix} a_{11}(-t) & a_{12}(-t) & a_{13}(-t) \\ a_{21}(-t) & a_{22}(-t) & a_{23}(-t) \\ a_{31}(-t) & a_{32}(-t) & a_{33}(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & -a_{22}(t) & -a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & -a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix}$$

ce qu'il faut démontrer.

De la même façon on démontre (b) et (c).

Exemple : Soit l'équation linéaire à coefficient P-périodique

$$y''' + a(t)y'' + b(t)y' + c(t) = 0 \quad (L);$$

en procédant au changement de variables $y=y_1, y'=y_2, y''=y_3$ on obtient un système différentiel P-périodique appartenant à $L_2(P)$, si et seulement si $a(t)$ et $c(t)$ sont fonctions impaires et $b(t)$ est fonction paire.

La proposition précédente (7) nous montre que si $(A) \in L_1(P)$, alors la

trace de la matrice $A(\sum_{m=1}^3 a_{mm}(t))$ est toujours une fonction impaire par

rapport à t . Notons $X_A : \mathbb{R} \rightarrow GL(3, \mathbb{R})$ la solution matricielle fondamentale en $t=0$ de (A)

Corollaire 3

Si $(A) \in L_i(P)$, $i \in \{1,2,3\}$, alors l'application de Poincaré $X_A(P)$ est conservative.

Démonstration : D'après le théorème de Liouville, voir [8], on a :

$$\det X_A(P) = \exp \int_0^P \text{trace } A(t) dt$$

et d'après la proposition (7) on déduit que :

$$\det X_A(P) = 1.$$

Ce qui prouve que $X_A(P)$ est conservative, c'est à dire qu'elle conserve les volumes; on en déduit qu'un système linéaire P-périodique appartenant à $L_i(P)$ ne peut pas être asymptotiquement stable.

II.1.5. Propriétés de la solution matricielle fondamentale d'un système ===== linéaire P-périodique appartenant à $L_i(P)$. =====

On sait pour tout système $(A) \in L(P)$ que, si $X_A(t)$ est sa solution fondamentale, alors $X_A(t+P)$ est aussi solution de (A) , voir [6] de plus, $X_A(t)$ a alors les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_A(t) \in GL^+(3, \mathbb{R}) \\ X_A(0) = I \text{ matrice d'identité} \\ X_A(t+P) = X_A(t) X_A(P) \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (5)$$

On va examiner dans la proposition suivante une propriété concernant la solution matricielle fondamentale d'un système linéaire P-périodique avec symétries.

Proposition 8

=====

Un système $(A) \in L(P)$ de solution matricielle fondamentale $X_A(t)$, est dans $L_i(P)$, $i \in \{1,2,3\}$, si et seulement si on a :

$$X_A(-t) = M_i X_A(t) M_i \quad (6)$$

où $M_i = (a_{mm})$ est une matrice constante diagonale (3×3) telle que :

$$(a_{ii} = 1, a_{mm} = -1 \text{ où } m \neq i).$$

Démonstration : On va démontrer la relation (6) pour $(i=1)$.

Soit $(A) \in L_1(P) = L_{\sigma_1}(P) \cap L_{\bar{\sigma}_1}(P)$,

$$\text{et soit } X_A(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \psi_1(t) & \xi_1(t) \\ \varphi_2(t) & \psi_2(t) & \xi_2(t) \\ \varphi_3(t) & \psi_3(t) & \xi_3(t) \end{pmatrix}$$

la solution matricielle fondamentale de (1); d'après la proposition (2) on a $(\varphi_1, \psi_2, \psi_3, \xi_2, \xi_3)$ sont des fonctions paires par rapport à t , tandis que $(\varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \xi_1)$ sont des fonctions impaires, d'où

$$X_A(-t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & -\psi_1(t) & -\xi_1(t) \\ -\varphi_2(t) & \psi_2(t) & \xi_2(t) \\ -\varphi_3(t) & \psi_3(t) & \xi_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \psi_1(t) & \xi_1(t) \\ \varphi_2(t) & \psi_2(t) & \xi_2(t) \\ \varphi_3(t) & \psi_3(t) & \xi_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$X_A(-t) = M_1 X_A(t) M_1$ ce qu'il faut démontrer.

Corollaire 4

Si $(A) \in L_i(P)$, $i \in \{1,2,3\}$, alors on a :

$$X_A(t+P/2) = M_i X_A(P/2-t) X_A^{-1}(P/2) M_i X_A(P/2) \quad t \in \mathbb{R} \quad (7)$$

Démonstration : En effet, d'après la proposition (8) et la formule (5) on a :

$$X_A(t+P) = X_A(t) X_A(P) \quad t \in \mathbb{R} \quad (a)$$

$$X_A(-t) = M_i X_A(t) M_i \quad t \in \mathbb{R} \quad (b)$$

en prenant dans (b) $t = -t-P/2$ on obtient

$$X_A(t+P/2) = M_i X_A(-t-P/2) M_i = M_i X_A(-t+P/2) X_A^{-1}(P) M_i \quad (c)$$

d'autre part on a :

$$X_A^{-1}(P) = X_A^{-1}(P/2) M_i X_A(P/2) M_i \quad (d)$$

en utilisant (d) dans (c) on obtient la relation (7).

La relation (7) permet d'exprimer $X_A(t)$ pour $t \in [P/2, P]$ connaissant $X_A(t)$ pour $t \in [0, P/2]$.

Et même à chaque application

$$[0, P/2] \rightarrow GL^+(3, \mathbb{R})$$

$$t \rightarrow X(t)$$

avec $X(0) = I$, la matrice d'identité, différentiable continument, par morceaux, on peut associer une matrice $A(t)$ continue par morceaux, telle que

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X,$$

c'est à dire $A(t) = \frac{dX(t)}{dt} X^{-1}(t)$.

Si $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, vérifie la relation (c) pour $t \in [0, P/2]$; et la relation (a) pour $t \in \mathbb{R}$, alors on obtient un système $(A) \in L_i(P)$, $i \in \{1, 2, 3\}$. On obtient ainsi tous les systèmes différentiels linéaires P -périodiques avec symétrie, par l'intermédiaire de la solution matricielle fondamentale sur $[0, P/2]$, si celle-ci parcourt l'ensemble des applications continument différentiable par morceaux

$$[0, P/2] \rightarrow GL^+(3, \mathbb{R})$$

telles que $X(0) = I$

II.2. Solutions P-périodiques d'un système différentiel linéaire =====

P-périodique avec symétrie =====

Nous avons vu dans (II.1.) des propriétés concernant les systèmes différentiels linéaires périodiques avec symétries par rapport à l'espace $\sigma \in E$.

Nous nous intéresserons ici à leurs solutions périodiques; leur ensemble, c'est évident, forme un espace vectoriel dont la dimension va de zéro (seulement la solution nulle est périodique) à trois (toutes les solutions sont périodiques). On notera $L_i^j(P)$ l'ensemble des systèmes différentiels linéaires P-périodiques, avec symétrie $\sigma_i \in E$ admettant un espace de solution P-périodiques de dimension j . Il est clair que

$$L_i(P) = L_i^0(P) \cup L_i^1(P) \cup L_i^2(P) \cup L_i^3(P).$$

Une telle décomposition existe également si aucune hypothèse de symétrie n'a été faite; nous allons voir (proposition 9) que du fait des symétries, on a :

$$L_i^0(P) = \emptyset, \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

D'autre part, il serait intéressant de pouvoir faire apparaître une structuration de $L_i^j(P)$ dans $L_i(P)$, de caractère topologique (par exemple quelles sont les composantes connexes par arcs de $L_i^j(P)$ dans $L_i(P)$, et comment peut-on les caractériser); comme les solutions périodiques de (A) sont déterminées par la matrice de Poincaré $X_A(P)$, et que celle-ci est déterminée (d'après la relation 7), par la demi-application de Poincaré $X_A(P/2)$, la structuration est déterminée par l'ensemble des matrices $X_A(P/2)$, qui sont des matrices d'ordre trois, régulières à déterminant positif, sans autre contrainte.

La suite du (II.2.) se propose alors de décrire de la forme de $X_A(P/2)$, la dimension j de l'espace vectoriel des solutions P-périodiques de (A).

II.2.1. Proposition 9 :

=====

Un système différentiel linéaire P-périodique avec symétrie par rapport à l'espace $\sigma \in E$, admet toujours une solution P-périodique non triviale dont l'orbite est symétrique par rapport au plan de symétrie dans l'espace de phases (ox_1, ox_2, ox_3) .

Démonstration : Pour la démonstration, on prendra $\sigma = \sigma_1$, les autres cas se traitant de manière similaire;

Soit $(A) \in L_1(P)$ on suppose que

$$X_A(t) = (\xi_k(t), \psi_k(t), \eta_k(t)), (k=1,2,3),$$

est la solution matricielle fondamentale de (A) au temps t ; une solution issue de $(0, x_2^0, x_3^0) \in \bar{\sigma}_1$ au temps $t=0$ s'écrit

$$\varphi(t) = x_2^0 \psi_k(t) + x_3^0 \eta_k(t).$$

Pour que l'orbite de la solution $\varphi(t)$, symétrique par rapport au plan $\bar{\sigma}_1$, (car $\varphi(0) \in \sigma_1$), soit P-périodique, d'après le corollaire (2) du chapitre (I), il faut et il suffit que :

$$\varphi(P/2) = (X_A(P/2))(\varphi(0)) \in \bar{\sigma}_1 \quad (8),$$

c'est à dire :

$$x_2^0 \psi_1(P/2) + x_3^0 \eta_1(P/2) = 0 \quad (8').$$

Comme $\psi_1(P/2)$ et $\eta_1(P/2)$ sont indépendants dans $\mathbb{R}^3$ (puisque $X_A(P/2)$ est régulière), il existe au moins un espace vectoriel de dimension un de conditions initiales $(0, x_2^0, x_3^0)$, solution de (8).

Donc (A) admet un espace vectoriel de solutions P-périodiques, dont les orbites sont symétriques par rapport à $\bar{\sigma}_1$, de dimension au moins égale à un; cet espace est inclus dans $\bar{\sigma}_1$.

On en déduit donc $L_1^j(P) = \emptyset$ ($j=0$), ou plus généralement $L_i^j(P) = \emptyset$, ($j=0$), $i \in \{1,2,3\}$.

Définition 3 : Un système $(A) \in L_i(P)$, $i \in \{1,2,3\}$, est dit exceptionnel pour la période P si et seulement si

$$\det [X_A(P) - I] = 0$$

où I est la matrice d'identité.

Corollaire 5

Tout système $(A) \in L_i(P)$ est exceptionnel pour la période P .

Démonstration : En effet, d'après la proposition (9), (A) possède au moins une solution P -périodique, et donc la matrice $X_A(P)$ admet au moins une valeur propre valant un, d'où

$$\det [X_A(P) - I] = 0.$$

II.2.2. Proposition 10 :

=====

Soit $(A) \in L_1(P)$ de solution matricielle fondamentale $X_A(t)$, alors il existe un changement de base, laissant les espaces de symétrie invariante, tel que dans la nouvelle base on ait :

$$X_A(P/2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Démonstration : Soit (e_1, e_2, e_3) une base dans $\mathbb{R}^3$; choisissons dans le plan $\overline{\sigma}_1, (ox_2, ox_3)$, le vecteur e_3 dans le sous-espace (de dimension un au moins d'après la proposition 9), conditions initiales de solutions P -périodiques (et symétriques par rapport à $\overline{\sigma}_1$, on a donc

$$X_A(P/2, e_3) \in \overline{\sigma}_1.$$

Si donc on écrit :

$$X_A(P/2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

on a $c_1 = 0$.

II.2.3. Proposition 11

=====

Soit $(A) \in L_1(P)$, de solution matricielle fondamentale $X_A(t)$, et soit

$$X_A(P/2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \text{ où } \Delta = \det X_A(P/2) > 0;$$

soit $\alpha = b_2 c_3 - c_2 b_3$, $\beta = a_2 c_3 - c_2 a_3$, $\gamma = b_2 a_3 - a_2 b_3$, $u = a_2^2 + a_3^2$;

alors on a :

1. a. $(A) \in L_1^1(P) \Leftrightarrow b_1 \cdot u \neq 0$
 b. $(A) \in L_1^1(2P) \Leftrightarrow b_1 \cdot a_1 \cdot \alpha \cdot u \neq 0$
2. a. $(A) \in L_1^2(P) \Leftrightarrow [(b_1=0 \text{ et } u \neq 0) \text{ ou } (u=0 \text{ et } b_1 \neq 0)]$
 b. $(A) \in L_1^2(2P) \Leftrightarrow (a_1=0, b_1 u \alpha \neq 0) \text{ ou } (b_1=0, b_1 u \alpha \neq 0) \text{ ou } (u=0, a_1 b_1 \alpha \neq 0) \text{ ou } (\alpha=0, a_1 b_1 u \neq 0)$
3. a. $(A) \in L_1^3(P) \Leftrightarrow (b_1, u) = (0, 0)$
 b. $(A) \in L_1^3(2P) \Leftrightarrow (a_1, \alpha) = (0, 0), \text{ ou } (b_1, u) = (0, 0)$

Démonstration : D'après le corollaire (4) on a :

$$X_A(P) = M_1 X_A^{-1}(P/2) M_1 X_A(P/2) \text{ où } M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

en calculant d'abord $X_A^{-1}(P/2)$, puis en remplaçant dans la relation précédente on obtient :

$$X_A(P) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2a_1\alpha}{\Delta} & \frac{2b_1\alpha}{\Delta} & 0 \\ \frac{2a_1\beta}{\Delta} & 1 + \frac{2b_1\beta}{\Delta} & 0 \\ \frac{2a_1\gamma}{\Delta} & \frac{2b_1\gamma}{\Delta} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \Delta \det X_A(P/2) = a_1\alpha - b_1\beta > 0, \quad (9)$$

et de la relation (5) on déduit pour $t=P$ que, $X_A(2P) = X_A(P)X_A(P)$, et donc

$$X_A(2P) = \frac{1}{\Delta^2} \begin{pmatrix} \Delta^2 + 8a_1b_1\alpha\beta & 4b_1\alpha(a_1\alpha + b_1\beta) & 0 \\ 4a_1\beta(a_1\alpha + b_1\beta) & \Delta^2 + 8a_1b_1\alpha\beta & 0 \\ 4a_1\gamma(a_1\alpha + b_1\beta) & 8a_1b_1\alpha\gamma & \Delta^2 \end{pmatrix};$$

d'autre part

$$|X_A(P) - \lambda I| = (1-\lambda)Q(\lambda)$$

où $Q(\lambda) = \lambda^2 - \frac{2}{\Delta}(a_1\alpha + b_1\beta)\lambda + 1$, et où I est la matrice d'identité,

$$\text{d'où} \quad \begin{cases} Q(1) = -4 \frac{b_1\beta}{\Delta} \\ Q(-1) = 4 \frac{a_1\alpha}{\Delta} \end{cases} \quad (10)$$

$$1. \quad a. \quad (A) \in \mathbb{L}_1^1(P) \Rightarrow Q(1) \neq 0 \Rightarrow b_1\beta \neq 0 \Rightarrow b_1u \neq 0;$$

réciproquement si

$$b_1u \neq 0,$$

alors deux cas se posent que l'on va étudier séparément :

$$1. \quad (b_1 \neq 0, u \neq 0, \beta \neq 0) \Rightarrow Q(1) \neq 0 \Rightarrow (A) \in \mathbb{L}_1^1(P)$$

$$2. \quad (b_1 \neq 0, u \neq 0, \beta = 0) \Rightarrow \gamma \neq 0$$

(car si $\gamma = 0$, alors $\frac{a_2}{a_3} = \frac{b_2}{b_3} = \frac{c_2}{c_3}$, donc $\Delta = 0$); d'après (9) a_1^α est non nul

et donc la matrice $X_A(P)$ a la forme :

$$X_A(P) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2b_1}{a_1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2\gamma}{\alpha} & \frac{2b_1\gamma}{a_1^\alpha} & 1 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas diagonalisable, et donc $(A) \in \mathbb{L}_1^1(P)$.

$$b. \quad (A) \in \mathbb{L}_1^1(2P) \Rightarrow Q(1)Q(-1) \neq 0 \Rightarrow a_1b_1^{\alpha\beta} \neq 0 \Rightarrow a_1b_1^{\alpha u} \neq 0;$$

réciproquement si

$$a_1b_1^{\alpha u} \neq 0,$$

alors deux cas se posent :

$$1. \quad (a_1b_1^{\alpha\beta} \neq 0, u \neq 0, \beta \neq 0), \text{ et quel que soit } \gamma, \text{ la matrice } (X_A(2P) - I)$$

admet un seul vecteur nul (le dernier), donc $(A) \in \mathbb{L}_1^1(2P)$

$$2. \quad (a_1b_1^{\alpha\beta} \neq 0, u \neq 0, \beta = 0) \Rightarrow \gamma \neq 0;$$

la matrice $(X_A(2P) - I)$ admet un seul vecteur nul (le dernier) et

donc $(A) \in \mathbb{L}_1^1(2P)$.

2. a. $(A) \in L_1^2(P) \Rightarrow Q(1) = 0 \Rightarrow b_1\beta = 0;$

trois cas se posent que l'on va étudier séparément :

1. $(b_1=0, \beta \neq 0) \Rightarrow (b_1=0, u \neq 0)$

2. $(b_1 \neq 0, \beta=0);$ cela entraîne deux cas :

1'. $(b_1 \neq 0, \beta=0, u \neq 0) \Rightarrow b_1 u \neq 0,$

d'après (1.a.) on en déduit que $(A) \in L_1^1(P)$, ce qui est contradictoire, donc le cas (1) ne peut pas être.

2'. $(b_1 \neq 0, \beta=0, u=0)$

3. $(b_1=0, \beta=0),$ deux cas se posent

1''. $(b_1=0, \beta=0, u \neq 0)$

2''. $(b_1=0, \beta=0, u=0) \Rightarrow \gamma=0 \text{ et } \frac{b_2}{b_3} \neq \frac{c_2}{c_3};$

donc la matrice $(X_A(P)-I)$ admet trois vecteurs nuls et donc

$(A) \in L_1^3(P)$ ce qui est contradictoire; réciproquement si :

1. $(b_1=0, u \neq 0)$

alors d'après (9) $a_1\alpha$ est non nul, et $\gamma=\beta=0$ n'est pas possible donc la matrice $(X_A(P)-I)$ admet deux vecteurs nuls (le deuxième et le dernier) et donc $(A) \in L_1^2(P)$

2. $(b_1 \neq 0, u=0) \Rightarrow \beta=0, \text{ et } \gamma=0;$

d'après (9) $a_1\alpha$ est non nul, cela entraîne que $\frac{b_2}{b_3} \neq \frac{c_2}{c_3}$, la matrice

$(X_A(P)-I)$ admet deux vecteurs nuls (le premier et le troisième)

donc $(A) \in L_1^2(P).$

$$b. (A) \in L_1^2(2P) \Rightarrow Q(1) Q(-1) = 0,$$

trois cas se posent et que l'on va étudier séparément :

$$1. [Q(1)=0 \text{ et } Q(-1) \neq 0] \Rightarrow [b_1 \beta = 0 \text{ et } a_1 \alpha \neq 0];$$

d'après (2.a.) on obtient :

$$[(b_1=0, a_1 \alpha u \neq 0) \text{ ou } (u=0, a_1 b_1 \alpha \neq 0)]$$

$$2. [Q(1) \neq 0, Q(-1)=0] \Rightarrow (b_1 \beta \neq 0 \text{ et } a_1 \alpha = 0) \Rightarrow (b_1 u \neq 0 \text{ et } a_1 \alpha = 0);$$

trois cas se posent :

$$1. (b_1 u \alpha \neq 0 \text{ et } a_1 = 0)$$

$$2. (b_1 u a_1 \neq 0 \text{ et } \alpha = 0)$$

$$3. (b_1 u \neq 0 \text{ et } a_1 = \alpha = 0), \text{ la matrice } (X_A(2P) - I) \text{ admet trois vecteurs nuls ce qui est contradictoire à l'hypothèse que}$$

$$(A) \in L_1^2(2P)$$

$$3. [Q(-1)=0 \text{ et } Q(1)=0] \Rightarrow (a_1 \alpha = 0 \text{ et } b_1 \beta = 0),$$

d'après (9) ceci est impossible car $\Delta > 0$, donc la condition est nécessaire.

Pour la réciproque on a d'après (2.a) :

$$(A) \in L_1^2(2P) \Leftrightarrow [(b_1=0, a_1 \alpha u \neq 0) \text{ ou } (u=0, b_1 a_1 \alpha \neq 0)]$$

et il nous reste à démontrer que si

$$[(a_1=0, \alpha b_1 u \neq 0) \text{ ou } (\alpha=0, a_1 b_1 u \neq 0)] \Rightarrow (A) \in L_1^2(P).$$

$$1. (a_1=0, \alpha b_1 u \neq 0) \Rightarrow Q(-1)=0 \Rightarrow (A) \in L_1^2(2P).$$

car la matrice $(X_A(2P) - I)$ admet deux vecteurs nuls (le premier et le troisième).

$$2. (\alpha=0, a_1 b_1 u \neq 0) \Rightarrow \text{d'après (9), } \beta \neq 0, \gamma \neq 0 \Rightarrow (A) \in L_1^2(2P) \text{ donc la trice } (X_A(2P) - I) \text{ admet deux vecteurs nuls (le deuxième et le troisième).}$$

3. a. $(A) \in \mathcal{L}_1^3(P) \Rightarrow Q(1)=0$, d'après (2.a) on obtient $(b_1, u)=(0,0)$ réciproquement si $(b_1, u)=(0,0)$, alors $\beta=0, \gamma=0$ et d'après (9)

$\frac{b_2}{b_3} \neq \frac{c_2}{c_3}$, la matrice $(X_A(P)-I)$ est nulle, donc $(A) \in \mathcal{L}_1^3(P)$.

b. tout d'abord $(A) \in \mathcal{L}_1^3(P) \Rightarrow (A) \in \mathcal{L}_1^3(2P) \Leftrightarrow (b_1, u)=(0,0)$, il nous reste à démontrer $(A) \in \mathcal{L}_1^3(2P) \Leftrightarrow (a_1, \alpha)=(0,0)$.

$$(A) \in \mathcal{L}_1^3(2P) \Rightarrow Q(-1)=0;$$

d'après (2.b.) on en déduit $(a_1, \alpha)=(0,0)$; réciproquement si

$$(a_1, \alpha)=(0,0) \Rightarrow \text{la matrice } (X_A(2P)-I) \text{ est nulle donc } (A) \in \mathcal{L}_1^3(2P)$$

ce qui achève la démonstration.

II.2.4. Structuration de $\mathcal{L}_i^j(P)$ dans $\mathcal{L}_i(P)$, $(i,j) \in \{1,2,3\}$.
 =====

Etant donné $i \in \{1,2,3\}$, l'ensemble $\mathcal{L}_i(P)$ est connexe par arc dans l'ensemble des systèmes différentiels linéaires P-périodiques; en effet, soient $(A_1), (A_2)$ deux systèmes différentiels appartenant à $\mathcal{L}_i(P)$, alors $\frac{dx}{dt} = (\theta A_1 + (1-\theta)A_2)$ est une déformation faisant passer de l'un à l'autre dans $\mathcal{L}_i(P)$, où $0 \leq \theta \leq 1$, car les symétries sont respectées.

D'autre part, nous avons vu plus haut que l'appartenance ou la non appartenance de (A) à l'un des ensembles $\mathcal{L}_i^j(P)$ est déterminée par $X_A(P/2)$, qui dépend de huit paramètres réels soumis à la seule condition

$$\det X_A(P/2) = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - b_1(a_2c_3 - c_2a_3) > 0.$$

Il serait intéressant de pouvoir faire apparaître une structuration de $\mathcal{L}_i^j(P)$ dans $\mathcal{L}_i(P)$, de caractère topologique (par exemple quelles sont les composantes connexes de $\mathcal{L}_i^j(P)$ dans $\mathcal{L}_i(P)$), parce que le passage d'une composante connexe

à l'autre, entraîne le changement de la dimension de l'espace des solutions P-périodiques; nous allons indiquer dans la proposition suivante un minorant du nombre de composantes connexes dans chaque ensemble

$$L_1^j(P), L_1^j(2P), j \in \{1,2,3\}.$$

Proposition 12

=====

1. a. L'ensemble $L_1^1(P) \subset L_1(P)$ admet au moins deux composantes connexes.
 b. L'ensemble $L_1^1(2P) \subset L_1(2P)$ admet au moins huit composantes connexes.
2. a. L'ensemble $L_1^2(P) \subset L_1(P)$ admet au moins six composantes connexes.
 b. L'ensemble $L_1^2(2P) \subset L_1(2P)$ admet au moins quatorze composantes connexes.
3. a. L'ensemble $L_1^3(P)$ admet au moins deux composantes connexes.
 b. L'ensemble $L_1^3(2P)$ admet au moins quatre composantes connexes.

Démonstration

1.a. D'après la proposition (11), (A) appartient à $L_1^1(P)$ si et seulement si $b_1 u \neq 0$; si donc $(A_1) \in L_1^1(P)$ (resp. $(A_2) \in L_1^1(P)$) est un système tel que le coefficient b_1 de la matrice $X_{A_1}(P/2)$ (resp. $X_{A_2}(P/2)$) est positif (resp. négatif), alors (A_1) et (A_2) appartiennent à deux composantes connexes différentes : pour tout chemin joignant l'une à l'autre il existe nécessairement un système $(A) \in L_1^1(P)$ tel que le coefficient b_1 de la matrice $X_A(P/2)$ soit nul.

Les deux ensembles $L_1^{1+}(P)$ et $L_1^{1-}(P)$, où $L_1^{1+}(P)$ est l'ensemble des $(A) \in L_1(P)$, tels que $X_A(P/2)$ vérifie $b_1 > 0$ et $u \neq 0$, et où $L_1^{1-}(P)$ est l'ensemble des $(A) \in L_1(P)$, tels que $X_A(P/2)$ vérifie $b_1 < 0$ et $u \neq 0$, sont donc dans des composantes connexes différentes; ces ensembles ne sont pas vides; en effet

$$X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (A) \in L_1^+(P), \quad X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A) \in L_1^-(P).$$

1.b. D'après la proposition (11), (A) appartient à $L_1^1(2P)$ si et seulement si $a_1 b_1 \alpha u \neq 0$; de même que dans (a), $a_1 = 0$ partage l'espace $\mathbb{R}^7$ des coefficients de $X_A(P/2)$ en deux composantes; de même pour $b_1 = 0$, et $\alpha = 0$; par contre $u = 0$ ne partage pas $\mathbb{R}^7$ en deux composantes, puisque $u = 0$ si et seulement si $a_2 = a_3 = 0$. Donc $L_1^1(2P)$ est la réunion de 8 composantes connexes au moins, non vides. Ces ensembles ne sont pas vides; en effet, si (A) est tel que :

$$X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X_A(P/2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X_A(P/2) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \\ -9 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a_1 > 0, b_1 > 0, \alpha > 0$$

$$a_1 > 0, b_1 > 0, \alpha < 0$$

$$a_1 < 0, b_1 > 0, \alpha < 0$$

$$a_1 < 0, b_1 < 0, \alpha > 0$$

$$X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad X_A(P/2) = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 0 \\ -6 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X_A(P/2) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a_1 > 0, b_1 > 0, \alpha < 0$$

$$a_1 > 0, b_1 < 0, \alpha > 0$$

$$a_1 < 0, b_1 > 0, \alpha > 0$$

$$a_1 < 0, b_1 < 0, \alpha < 0$$

alors (A) $\in L_1^1(2P)$.

2.a. D'après la proposition (11), (A) appartient à $L_1^2(P)$ si et seulement si $[(b_1 = 0, u \neq 0) \text{ ou } (b_1 \neq 0, u = 0)]$.

Si $b_1 = 0$, alors $a_1 \neq 0$ car Δ est nécessairement positif, donc la condition $a_1 = 0$ partage l'ensemble des (A) $\in L_1^2(P)$, tels que $X_A(P/2)$ vérifie $(b_1 = 0, u \neq 0)$, en

deux composantes connexes, non vides; en effet, si (A) est tel que :

$$X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_A(P/2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

alors (A) $L_1^2(P)$.

Si $b_1 \neq 0$ et $u=0$, alors nécessairement $a_1\alpha=0$ car Δ est positif, donc les hyperplans dans $\mathbb{R}^7$ $b_1=0$ et $a_1=0$ partagent l'espace en quatre composantes connexes non vides; en effet, si (A) est tel que :

$$X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, X_A(P/2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, X_A(P/2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

alors (A) $L_1^2(2P)$.

2.b. D'après la proposition (11), (A) appartient à $L_1^2(2P)$ si et seulement si $(a_1b_1\alpha u)=0$, (un seul des facteurs du produit vaut zéro).

Si $a_1=0$, alors $b_1 \neq 0$, car Δ est positif; donc les hyperplans $b_1=0, \alpha=0$, partagent l'espace $\mathbb{R}^6$ des coefficients de $X_A(P/2)$ en quatre composantes connexes, ne sont pas vides; en effet, si (A) est tel que :

$$X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

alors (A) $L_1^2(2P)$.

Si $b_1=0$, alors $a_1 \neq 0$, car Δ est positif, donc l'hyperplan $a_1=0$, partage l'espace $\mathbb{R}^6$ des coefficients de $X_A(P/2)$ en deux composantes connexes, qui ne sont pas vides; en effet, si (A) est tel que :

$$X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X_A(P/2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

alors $(A) \in L_1^2(2P)$.

Si $\alpha = 0$, alors $b_1 \neq 0$, car $\Delta > 0$, donc les hyperplans $a_1 = 0$, $b_1 = 0$, partagent l'espace $\mathbb{R}^6$ des coefficients de $X_A(P/2)$ en quatre composantes connexes, ne sont pas vides; en effet, si (A) est tel que :

$$X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, X_A(P/2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, X_A(P/2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors $(A) \in L_1^2(2P)$.

Si $u = 0$, alors $a_1 \alpha \neq 0$, car $\Delta > 0$; donc on a quatre composantes connexes, qui ne sont pas vides; en effet, si (A) est tel que :

$$X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, X_A(P/2) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, X_A(P/2) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

alors $(A) \in L_1^2(2^\circ)$.

3.a. D'après la proposition (11), (A) appartient à $L_1^3(P)$ si et seulement si $(b_1, u) = (0, 0)$; cela entraîne nécessairement que le signe de a_1 est le même que le signe de α (car $a_1 \alpha = \Delta > 0$); donc on a deux composantes connexes, qui ne sont pas vides; en effet, si (A) est tel que :

$$X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_A(P/2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

alors $(A) \in L_1^3(P)$.

3.b. D'après la proposition (11), (A) appartient à $L_1^3(2P)$ si et seulement si $[(a_1, \alpha) = (0, 0) \text{ ou } (b_1, u) = (0, 0)]$.

Si $(a_1, \alpha) = (0, 0)$, alors $b_1 \neq 0$, car $\Delta > 0$; donc l'hyperplan $b_1 = 0$ partage l'espace $\mathbb{R}^5$ des coefficients de $X_A(P/2)$ en deux composantes connexes, qui ne sont pas vides; en effet, si (A) est tel que :

$$X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors (A) $\in L_1^3(2P)$.

Si $(b_1, u) = (0, 0)$, alors $a_1 = 0$, car $\Delta > 0$; donc les hyperplans $a_1 = 0$, $\alpha = 0$, partagent l'espace $\mathbb{R}^5$ des coefficients de $X_A(P/2)$ en deux composantes connexes qui ne sont pas vides; en effet, si (A) est tel que :

$$X_A(P/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X_A(P/2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

alors (A) $\in L_1^3(2P)$.

Cette proposition met en évidence la grande complexité de la structuration de $L_i^j(P)$ dans $L_i(P)$, complexité qu'on peut opposer à la simplicité de la structure obtenue pour $n = 2$, voir [3].

II.3. Systèmes différentiels linéaires autonomes avec symétrie

Les systèmes différentiels autonomes constituent une classe importante de systèmes différentiels linéaires, et ceci pour deux raisons : contrairement aux systèmes linéaires non autonomes, on sait calculer explicitement leurs solutions; d'autre part ils sont périodiques, de période P , quel que soit $P \in \mathbb{R}^+$. Nous allons ici faire une étude de ces systèmes différentiels linéaires autonomes dans le cadre des symétries, étude à rapprocher, en tant qu'exemple concret, de (II.1.) et (II.2.) et en tant qu'étude préliminaire, de (III.3.5).

II.3.1. Considérons le système différentiel linéaire autonome P -périodique

$$\frac{dx}{dt} = Bx \quad (B)$$

où B est une matrice réelle constante (3.3), $x \in \mathbb{R}^3$, $P \in \mathbb{R}^*$; d'après la proposition (7), le système (B) possède une symétrie par rapport à l'espace $\sigma \in E$ au temps α ($\alpha \in \mathbb{R}$), si et seulement si la matrice B a l'une des formes suivantes

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_1^\alpha(P), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 \\ b_{21} & 0 & b_{23} \\ 0 & b_{32} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_2^\alpha(P), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}_3^\alpha(P)$$

On supposera dans la suite que $\alpha=0$ et $(B) \in \mathcal{L}_1(P)$, les autres cas s'étudient de manière similaire; tout ce que nous avons dit au paragraphe (II.1., II.2.) est valable pour le système (B); de plus, nous allons voir qu'on peut déterminer la dimension de l'espace des solutions périodiques du système (B) à partir des coefficients de la matrice B ; remarquons que tout point de $\text{Ker } B$ est une solution périodique constante de (B).

En effet :

$$\text{Ker } B = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \begin{pmatrix} b_{12} x_1 + b_{13} x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{pmatrix} \right\}$$

L'ensemble de ces points constitue un espace de solutions périodiques constantes, de dimension un (resp. deux) si $b_{12} b_{13} \neq 0$ (resp. $b_{12}=b_{13}=0$); l'espace de dimension un (resp. deux) est une droite dans le plan ox_2x_3 de vecteur directeur $\vec{v}(0, -b_{13}, b_{12})$ (resp. c'est le plan ox_2x_3), B étant une matrice supposée non nulle.

Prenons le cas général c'est à dire $b_{12} b_{21} b_{13} b_{31} \neq 0$, (dans le cas où $b_{12}b_{21}b_{13}b_{31}=0$, on résoud le système B directement; l'espace des solutions P-périodiques constantes est situé sur les axes ou les plans); choisissons une nouvelle base (e'_1, e'_2, e'_3) telle que :

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1, \vec{e}'_2 = \vec{e}_2; \vec{e}'_3 = -b_{13} \vec{e}_2 + b_{12} \vec{e}_3$$

la matrice de passage N de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (e'_1, e'_2, e'_3) a la forme :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b_{13} \\ 0 & 0 & b_{12} \end{pmatrix} \text{ et } N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{b_{13}}{b_{12}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{b_{12}} \end{pmatrix}$$

et la matrice B se transforme en la matrice $B^* = (N^{-1}BN)$

$$B^* = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 \\ \frac{1}{b_{12}}(b_{21}b_{12}+b_{13}b_{31}) & 0 & 0 \\ \frac{b_{31}}{b_{12}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

le système $\frac{dx}{dt} = B^*x$ (B^*)

appartient aussi à $L_1(P)$.

II.3.2. Proposition 13

Soit $(B^*) \in L_1(P)$, où $b_{12}b_{21}b_{13}b_{31} \neq 0$; soit $\omega = \sqrt{|b_{12}b_{21} + b_{13}b_{31}|}$; alors on a :

1. Si $(b_{12}b_{21} + b_{13}b_{31}) \geq 0$ alors $(B^*) \in L_1^1(P)$,
2. Si $(b_{12}b_{21} + b_{13}b_{31}) < 0$ et $P = \frac{2\pi}{\omega}$, alors $(B^*) \in L_1^3(P)$
3. Si $(b_{12}b_{21} + b_{13}b_{31}) < 0$ et $P \neq \frac{2\pi}{\omega}$, alors $(B^*) \in L_1^1(P)$

Démonstration

On sait que l'existence des solutions P -périodiques de (B^*) dépend uniquement des valeurs propres de la matrice B^* , qui sont déterminées par les racines de l'équation caractéristique :

$$\lambda [\lambda^2 - b_{12}b_{21} + b_{13}b_{31}] = 0 \quad (11)$$

1. a. Si $(b_{12}b_{21} + b_{13}b_{31}) > 0$, alors la matrice B admet trois valeurs propres réelles distinctes

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \omega, \lambda_3 = -\omega$$

et la solution matricielle fondamentale s'écrit :

$$X_{B^*}(t, 0) = \begin{pmatrix} \text{ch } \omega t & \frac{b_{12}}{\omega} \text{sh } \omega t & 0 \\ \frac{\omega}{b_{12}} \sin \omega t & \text{ch } \omega t & 0 \\ \frac{b_{31}}{\omega b_{12}} \text{sh } \omega t & \frac{b_{13}}{\omega^2} (-1 + \text{ch } \omega t) & 1 \end{pmatrix};$$

donc (B^*) admet des solutions P-périodiques constantes de la forme $(0,0,c)$ où $c \in \mathbb{R}$; ce sont les seules solutions P-périodiques; elles appartiennent au plan ox_2x_3 dans l'espace des phases (ox_1,ox_2,ox_3) ; donc $(B^*) \in L_1^1(P)$.

b. Si $(b_{12}b_{21}+b_{13}b_{31}) = 0$, alors la matrice B^* admet trois valeurs propres nulles.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

et la solution matricielle fondamentale s'écrit :

$$X_{B^*}(t,0) = \begin{pmatrix} 1 & b_{12}t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{b_{31}}{b_{12}}t & -\frac{b_{31}}{2}t^2 & 1 \end{pmatrix}$$

donc (B^*) admet des solutions P-périodiques constantes de la forme $(0,0,c)$ où $c \in \mathbb{R}$, ce sont les seules solutions P-périodiques; elles sont les mêmes que dans le cas (a); donc $(B^*) \in L_1^1(P)$.

2. Si $b_{12}b_{21}+b_{13}b_{31} < 0$ et $P = \frac{2\pi}{\omega}$, alors la matrice B^* admet une valeur propre nulle et deux autres imaginaires pures

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = i\omega, \lambda_3 = -i\omega$$

et la solution matricielle fondamentale s'écrit :

$$X_{B^*}(t,0) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{b_{12}}{\omega} \sin \omega t & 0 \\ -\frac{\omega}{b_{12}} \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ -\frac{b_{31}}{\omega b_{12}} \sin \omega t & -\frac{b_{31}}{\omega^2} (-1 + \cos \omega t) & 1 \end{pmatrix}$$

Donc (B^*) admet trois solutions P -périodiques, deux solutions non constantes, et une solution constante de la forme $(0,0,c)$ où $c \in \mathbb{R}$; une d'entre les solutions non constantes appartient à $S_{\sigma_1,0}^0(2\pi/\omega)$, et l'autre appartient à $S_{\sigma_1}^{\pi/\omega}(2\pi/\omega)$; et donc $(B^*) \in L_1^3(2\pi/\omega)$.

3. Si $P \neq 2\pi/\omega$ alors d'après (2), le système (B^*) admet des solutions P -périodiques constantes de la forme $(0,0,c)$, où $c \in \mathbb{R}$, ce sont les seules solutions P -périodiques et donc $(B^*) \in L_1^1(P)$.

II.4. Stabilité

=====

II.4.1. Stabilité de la solution $(x=0)$ d'un système linéaire autonome =====

homogène avec symétrie.

=====

Soit :

$$\frac{dx}{dt} = Bx \quad (B)$$

un système différentiel linéaire autonome homogène, où la forme de la matrice B est définie dans (II.3.1.).

Proposition 14 :

Soit $(B) \in L_i(P)$, $i \in \{1,2,3\}$; la solution triviale $x=0$, est stable au sens de Liapounov si :

$$b_{ik} b_{ki} + b_{kj} b_{jk} = -\omega^2 \quad (\omega \in \mathbb{R}) \quad (11)$$

où $[(i \neq k, k \neq j, i \neq j), (i,j,k) \in \{1,2,3\}]$, sinon elle est instable.

Démonstration : En effet d'après (II.3.1.), et la relation (11), l'une des valeurs propres est nulle, les deux autres imaginaires conjuguées pures, et la solution matricielle fondamentale est bornée quand $(t \rightarrow \infty)$. D'après un théorème

général (la solution nulle d'un système différentiel autonome homogène, est stable si et seulement si, la solution matricielle fondamentale est bornée quand $t \rightarrow \infty$; voir [1] pour la démonstration), on obtient donc que $x=0$ est stable.

II.4.2. Etude de stabilité de systèmes différentiels linéaires P-périodiques =====

non autonomes avec symétrie.
=====

Soit

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (A)$$

un système différentiel linéaire P-périodique appartenant à $L_1(P)$, de solution matricielle fondamentale $X_A(t)$, telle que :

$$X_A(P/2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Proposition 15

1. $(A) \in L_1^1(2P)$ est stable au sens de Liapounov si $a_1 b_1 \alpha \beta < 0$, sinon il est instable
2. $(A) \in L_1^2(2P)$ est instable au sens de Liapounov
3. $(A) \in L_1^3(2P)$ est stable au sens de Liapounov.

Démonstration

1. Supposons $(A) \in L_1^1(P) \subset L_1^1(2p)$, alors $X_A(P)$ admet une valeur propre valant un, et les deux autres sont déterminées, d'après la proposition (11), par les racines de $Q(\lambda)$, où

$$Q(\lambda) = \lambda^2 - \frac{2}{\Delta}(a_1 \alpha + b_1 \beta) \lambda + 1 = 0;$$

a. si $a_1 b_1 \alpha \beta = 0$, alors les valeurs propres de $X_A(P)$ sont

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{a_1 \alpha + b_1 \beta + 2i \sqrt{-a_1 b_1 \alpha \beta}}{\Delta}, \lambda_3 = \frac{a_1 \alpha + b_1 \beta - 2i \sqrt{-a_1 b_1 \alpha \beta}}{\Delta};$$

La matrice $X_A(P)$ dans ce cas, a une forme normale réelle, on obtient :

$$X_A(P) = \begin{pmatrix} \frac{a_1 \alpha + b_1 \beta}{\Delta} & -\frac{2}{\Delta} \sqrt{a_1 b_1 \alpha \beta} & 0 \\ \frac{2}{\Delta} \sqrt{-a_1 b_1 \alpha \beta} & \frac{a_1 \alpha + b_1 \beta}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres vérifient :

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3, \text{ et } |\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$$

on en déduit donc la stabilité de (A).

b. Si $a_1 b_1 \alpha \beta = 0$ et $(A) \in L_1^1(P)$, alors on en déduit que $\beta = 0$, et

$u = a_2^2 + a_3^2 \neq 0$ et les valeurs propres de $X_A(P)$ sont $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$;

la matrice $X_A(P)$ n'est pas diagonalisable, donc (A) est instable.

c. Si $a_1 b_1 \alpha \beta > 0$ alors les valeurs propres de $X_A(P)$ sont :

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{a_1 \alpha + b_1 \beta + 2 \sqrt{a_1 b_1 \alpha \beta}}{\Delta}, \lambda_3 = \frac{a_1 \alpha + b_1 \beta - 2 \sqrt{a_1 b_1 \alpha \beta}}{\Delta};$$

comme leur produit vaut un, l'une des valeurs propres est plus grande que un, donc (A) est instable.

Ce résultat paraît étonnant car $(A) \in L_1^1(2p)$ peut être stable ($\text{sgn } \beta \neq \text{sgn } a_1 b_1 \alpha$) ou instable ($\text{sgn } \beta = \text{sgn } a_1 b_1 \alpha$), et on peut trouver dans une région à la fois, stabilité et instabilité, et le changement de stabilité à instabilité, n'entraîne pas nécessairement le changement de la dimension de l'espace des solutions P-périodiques, c'est le cas où le changement de signe de $a_1 b_1 \alpha \beta$ vient du signe de β .

2. Soit $(A) \in L_1^2(2P)$ d'après la proposition (11) la matrice $X_A(2P)$ possède deux valeurs propres valant un, et donc la troisième vaut également un; comme la matrice $X_A(P)$ n'est pas diagonalisable, on en déduit donc que le système (A) est instable.

3. Si $(A) \in L_1^3(2P)$, alors toutes les solutions sont périodiques; donc (A) est stable.

TROISIEME CHAPITRE

SYSTEMES DIFFERENTIELS PERIODIQUES NON LINEAIRES AVEC SYMETRIES

CHAPITRE III

III.1. Introduction

Munissons l'ensemble des systèmes différentiels P-périodiques de dimension trois (en tant qu'ensemble d'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (t,x) \rightarrow f(t,x)$) de la topologie de la convergence compacte, ce qui fait des ensembles $F_\sigma^\alpha(P), F_{\sigma,0}^\alpha(P), \sigma \in E$, des espaces topologiques.

De même, munissons l'ensemble $S(P)$ des fonctions $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, continues et P-périodiques, de cette même topologie.

Soient $m \in \mathbb{N}$ et Λ un domaine de $\mathbb{R}^n$, et soit :

$$F : \Lambda \rightarrow F_\sigma^\alpha(P) \quad \text{ou} \quad F : \Lambda \rightarrow F_{\sigma,0}^\alpha(P)$$

une application continue, dite famille continue de systèmes différentiels P-périodiques avec une symétrie σ au temps $t=\alpha$, ou avec deux symétries (symétrie par rapport à l'origine), paramétrée par $\lambda \in \Lambda$; on note $F(\lambda)$ par $(^\lambda f)$, par $^\lambda \varphi$ une solution de $(^\lambda f)$ et par $^\lambda \varphi(., t_0, x^0)$ la solution de $(^\lambda f)$ telle que $^\lambda \varphi(t_0, t_0, x^0) = x^0$ ($^\lambda \varphi(., t_0, x^0)$ est une solution vectorielle de composantes $(^\lambda \varphi_1, ^\lambda \varphi_2, ^\lambda \varphi_3)$, x^0 est une variable vectorielle).

Deux problèmes importants se présentent dans l'étude des systèmes différentiels (non linéaires) :

1. Etant donnée une solution $\delta\varphi$ (pour $\lambda=\delta$) P-périodique, celle-ci est-elle isolée dans l'ensemble des solutions P-périodiques de (δf) [c'est à dire existe-t-il un voisinage $V \subset \mathbb{R}^3$ de la condition initiale $x^0 = \delta\varphi(0,0,x^0)$, tel qu'aucune solution issue de $\bar{x} \in V (\bar{x} \neq x^0)$ à cet instant ne soit périodique] ?

2. La solution $\delta\varphi$ est-elle prolongeable à une famille $\lambda\varphi$ de solutions P-périodiques de (λf) ? [c'est à dire existe-t-il un voisinage W de δ dans Λ tel que pour tout $\lambda \in W$, il existe une solution $\lambda\varphi$ P-périodique de (λf) , et une seule, qui tende, par l'intermédiaire de sa condition initiale au temps $t_0=0$, vers $\delta\varphi$ si λ tend vers δ] ?

Une réponse partielle à ces problèmes est donnée par le théorème de continuité de Poincaré [2] :

Si l'équation aux variations $(A^\delta\varphi)$ associée à $\delta\varphi$ (voir III.2.) est non exceptionnelle, c'est à dire admet une seule solution P-périodique, à savoir la solution nulle, alors la réponse est positive à chacune des deux questions.

Or nous verrons dans (III.2., III.2.3.) que si (λf) admet une symétrie σ au temps α ou symétrie par rapport à l'origine, et si $\delta\varphi$ admet la même symétrie alors $(A^\delta\varphi)$ est une équation linéaire P-périodique, elle-même symétrique (de même espace de symétrie au même instant) qui de plus est toujours exceptionnelle, et le théorème de Poincaré ne peut pas s'appliquer.

Cependant, il est possible dans certains cas, de donner malgré tout, une réponse à ces problèmes : nous démontrerons dans (III.3.3., III.3.4.) les deux propositions suivantes :

Proposition 16 (*)
=====

Soit $(\lambda f) \in F_\sigma^0(P)$, et soit (pour $\lambda=\delta \in \Lambda$) $\delta\varphi \in S_\sigma^0(P)$, où $\sigma = \bar{\sigma}_i$, $i \in \{1,2,3\}$, et soit (pour $\sigma = \bar{\sigma}_1$).

(*) voir [4].

$$X_{(A^{\delta}\varphi)}^{(P/2)} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

la matrice de demi-application de Poincaré de l'équation aux variations $(A^{\delta}\varphi)$ associée à $\delta\varphi$ écrite dans une base bien choisie; alors si $(A_{\varphi}^{\delta}) \in L_1^1(P)$

1. La solution $\delta\varphi$ est non isolée dans l'ensemble des solutions P-périodiques appartenant à $S_{\sigma}^0(P)$ de (δf) ; de manière plus précise, il existe un chemin $c : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \sigma$, où $J =]-1, +1[$, paramétré par $\mu \in J$, tel que $c(0) = \delta\varphi(0)$ et tel que pour tout point $c(\mu) \in \sigma$, la solution $\mu\varphi$ issue au temps α de $c(\mu)$ soit P-périodique appartenant à $S_{\sigma}^0(P)$.
2. La famille $\mu\varphi$ de solutions périodiques de (δf) peut être prolongée à tout un voisinage V de δ dans Λ , de manière unique et continue en λ .

Proposition 17
=====

Soit $(\lambda f) \in F_{\sigma,0}^0(P)$, $\sigma \in \{\sigma_i\}$, $i \in \{1,2,3\}$, une famille de systèmes différentiels P-périodiques avec symétrie (par rapport à l'origine), et soit $\delta\varphi \in S_{\sigma,0}^0(P)$ une solution P-périodique de (λf) pour la valeur $\lambda = \delta \in \Lambda$ du paramètre λ , et soit (pour $\sigma = \sigma_1$).

$$X_{(A^{\delta}\varphi)}^{(P/4)} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

la matrice de la quart-application de Poincaré de l'équation aux variations $(A^{\delta}\varphi)$ associée à $\delta\varphi$ écrite dans une base bien choisie; alors si $(A_{\varphi}^{\delta}) \in L_1^1(P/2)$.

1. La solution $\delta\varphi$ P-périodique est isolée dans l'ensemble des solutions P-périodiques avec symétrie $S_{\sigma,0}^\alpha(P)$

2. La solution $\delta\varphi$ P-périodique est prolongeable à une famille $\lambda\varphi \in S_{\sigma,0}^\alpha(P)$ de solutions P-périodiques isolées de (λf) .

III.2. Equation aux variations associée à une solution périodique symétrique =====

III.2.1. Soit

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (f)$$

un système différentiel d'ordre trois, où $x \in \mathbb{R}^3$, et $f = (f_1, f_2, f_3)$; soit une solution de (f); effectuant le changement de variable :

$$x = \varphi(t) + y, \quad y \in \mathbb{R}^3$$

dans le système (f), en prenant en considération le fait que φ est une solution du système (f) et en développant les seconds membres en y, nous obtenons le système

$$y' = A(t) y + R(t, y)$$

où le terme $R(t, y)$ est infiniment petit du deuxième ordre par rapport à y, et où $A(t)$ est une matrice d'ordre trois telle que

$$A(t) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(t, \varphi(t)) \right) \quad (k, j) \in \{1, 2, 3\}.$$

Linearisant ce système, c'est à dire négligeant le terme $R(t, y)$, on obtient un système linéaire, appelé l'équation aux variations associée à φ ; on notera ce système par (A_φ) ; on a donc :

$$y' = A(t) y \quad (A_\varphi).$$

Il est évident que si le système (f) est P-périodique et si la solution φ est aussi P-périodique, alors l'équation aux variations (A_φ) , est P-périodique; nous allons montrer dans ce paragraphe que, si le système (f) $\in F_\sigma^\alpha(P)$ (resp. $F_{\sigma,0}^\alpha(P)$)

et si $\varphi \in S_{\sigma}^{\alpha}(P)$, (resp. $S_{\sigma,0}^{\alpha}(P)$), alors l'équation aux variations (A_{φ}) admet la même symétrie que la solution φ .

III.2.2. Proposition 18

=====

Soit $\varphi: (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3)$ une solution de (f) et soit (A_{φ}) l'équation aux variations associée à φ , on a :

1. Si $(f) \in F_{\sigma}^{\alpha}(P)$ et si $\varphi \in S_{\sigma}^{\alpha}(P)$, ($\sigma \in E$), alors (A_{φ}) appartient à $L_i^{\alpha}(P)$ où $i \in \{1,2,3\}$ est tel que $\sigma = \sigma_i$ ou $\sigma = \bar{\sigma}_i$
2. Si $(f) \in F_{\sigma,0}^{\alpha}(P)$ et si $\varphi \in S_{\sigma,0}^{\alpha}(P)$, alors (A_{φ}) est périodique de période $P/2$; et $(A_{\varphi}) \in L_i^{\alpha}(P/2)$, $i \in \{1,2,3\}$.

Démonstration

Pour la démonstration de (1) et (2), on prend $\sigma = \sigma_1$, et $\alpha = 0$, les autres cas se traitant de manière semblable.

1. Puisque $(f) \in F_{\sigma_1}^0(P)$ et $\varphi \in S_{\sigma_1}^0(P)$, d'après le corollaire (2), φ est P -périodique et donc (A_{φ}) est aussi P -périodique; il nous reste à montrer que (A_{φ}) admet une symétrie par rapport à σ_1 au temps $\alpha = 0$:

En effet;

$$\begin{aligned} A(-t) &= \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(-t, \varphi_1(-t), \varphi_2(-t), \varphi_3(-t)) \right) \\ &= \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(-t, \varphi_1(t), -\varphi_2(t), -\varphi_3(t)) \right) \end{aligned}$$

d'après la proposition(I.2.1.)

D'autre part ; $(f) \in F_{\sigma_1}^{\alpha}(P)$, entraîne d'après la définition (1) que :

$$\begin{cases} f_1(t, x_1, x_2, x_3) = -f_1(-t, x_1, -x_2, -x_3) \\ f_{\ell}(t, x_1, x_2, x_3) = f_{\ell}(-t, x_1, -x_2, -x_3) \end{cases} \quad \ell = (2,3)$$

$$\text{d'où } \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(t, x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} -\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(-t, x_1, -x_2, -x_3) & \text{si } j = 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(-t, x_1, -x_2, -x_3) & \text{si } j \neq 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(t, x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} -\frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(-t, x_1, -x_2, -x_3) & \text{si } j = \ell \\ \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}(-t, x_1, -x_2, -x_3) & \text{si } j \neq \ell \end{cases}$$

d'après la proposition (7) dans le chapitre (II), on déduit que $(A_\varphi) \in L_1(P)$.

2. Puisque $(f) \in F_{\sigma_{1,0}}^0(P)$ d'après la définition (1) on a :

$$\begin{cases} f_1(t, x_1, x_2, x_3) = -f_1(-t, x_1, -x_2, -x_3) = f_1(-t+P/2, -x_1, x_2, x_3) \\ f_\ell(t, x_1, x_2, x_3) = f_\ell(-t, x_1, -x_2, -x_3) = -f_\ell(-t+P/2, -x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad \ell = (2, 3)$$

d'où

$$f_k(t+P/2, -x_1, -x_2, -x_3) = -f_k(t, x_1, x_2, x_3) \quad (12)$$

où $k = (1, 2, 3)$.

Grace à (1), il suffit de montrer que (A_φ) est de période $P/2$; par hypothèse la solution $\varphi \in S_{\sigma_{1,0}}^0(P) = S_{\sigma_1}^0(P) \cap S_{\sigma_1}^{P/4}(P)$, est $P/2$ anti-périodique.

$$\begin{aligned} A(t+P/2) &= \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(t+P/2, \varphi_1(t+P/2), \varphi_2(t+P/2), \varphi_3(t+P/2)) \right) \quad t \in \mathbb{R} \\ &= \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(t+P/2, -\varphi_1(t), -\varphi_2(t), \varphi_3(t)) \right) \end{aligned}$$

en décrivant la relation (12) par rapport à x_1, x_2, x_3 , on obtient

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(t+P/2, -x_1, -x_2, -x_3) = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(t, x_1, x_2, x_3) \quad k = (1, 2, 3)$$

donc on a

$$A(t+P/2) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) \right) = A(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ce qui prouve que $(A\varphi)$ est $P/2$ -périodique et donc appartient à $L_1(P/2)$.

III.2.3. Corollaire 6

L'équation aux variations $(A\varphi)$ associée à la solution $\varphi \in S_\sigma^\alpha(P)$ (resp. $S_{\sigma,0}^\alpha(P)$) est toujours exceptionnelle pour la période P .

Démonstration

D'après la proposition précédente (17) et la définition (3) dans le chapitre (II) on déduit que :

$$\det [X_{(A\varphi)}(P) - I] = 0$$

ce qui prouve que $(A\varphi)$ est exceptionnelle.

III.2.4. Equations aux variations associées à une solution d'un système ===== différentiel autonome possédant une symétrie par rapport au plan =====

Soit

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (f_a)$$

où $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, est de classe C^1 .

Pour un système différentiel autonome, qui est un cas particulier de système périodique, on sait que l'équation aux variations associée à une solution périodique non constante du système (f_a) , admet une solution périodique, voir [5].

Nous allons démontrer dans la proposition suivante, que si (f_a) possède une symétrie par rapport à σ_i , $i \in \{1,2,3\}$, et si la solution périodique φ appartient à $S_{\sigma_1}^\alpha(P)$, alors l'équation aux variations $(A\varphi)$ du (f_a) admet au moins deux solutions périodiques linéairement indépendantes.

Proposition 19

=====

Soit $(f_a) \in F_\sigma^\alpha(P)$; si $\varphi \in S_\sigma^\alpha(P)$ n'est pas constante, où $\sigma = \sigma_i$, $i \in \{1,2,3\}$ alors l'équation aux variations associée à $\varphi, (A\varphi)$, admet au moins deux solutions P-périodiques linéairement indépendantes.

Démonstration

Prenons $\sigma = \sigma_1$, et $\alpha = 0$, d'après la proposition précédente (18), $(A\varphi)$ appartient à $L_1(P)$, et donc admet au moins une solution P-périodique issue de l'espace σ_1 au temps $t=0$.

D'autre part, on démontre que la fonction $\psi(t) = \dot{\varphi}(t) \neq 0$, est une solution de $(A\varphi)$; en effet, on a :

$$\frac{d}{dt} \varphi(t) = f(\varphi(t))$$

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = \varphi''(t) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\varphi(t)) \right) \psi(t) \quad , \quad (k,j) \in \{1,2,3\}$$

ce qui prouve que $\psi(t)$ est une solution de $(A\varphi)$; de plus elle est P-périodique (car la fonction φ est P-périodique non constante); on démontre aussi qu'elle est issue de l'espace $\sigma_1(ox_1)$ au temps $t=0$. En effet, puisque $\varphi \in S_{\sigma_1}^0(P)$ et d'après la proposition (2) on déduit que :

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = -\varphi_1(-t) \\ \varphi_2(t) = \varphi_2(-t) \\ \varphi_3(t) = \varphi_3(-t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_1(0) = \dot{\varphi}_1(0) \neq 0 \\ \psi_2(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0 \\ \psi_3(0) = \dot{\varphi}_3(0) = 0 \end{cases}$$

Ce qui prouve que $\psi(t)$ est une solution P -périodique non nulle, issue de l'espace σ_1 (axe ox_1) et donc $(A\varphi)$ admet au moins deux solutions P -périodiques linéairement indépendantes.

EXEMPLE : Soit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 \end{cases} \quad (f_a)$$

un système différentiel autonome appartenant à $F_{\sigma_1}^\alpha(P)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $P \in \mathbb{R}^*$; supposons que $\alpha = \pi/2$, et $P = 2\pi$, alors (f_a) admet φ comme une solution, où

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\frac{1}{2} \sin^2 t \end{pmatrix}$$

solution 2π -périodique non constante appartenant à $S_{\sigma_1}^{\pi/2}(2\pi)$; l'équation aux variations associée à φ , $(A\varphi)$, est définie par la relation :

$$\dot{y}_i = \left(\frac{\partial f_i(\varphi(t))}{\partial x_j} \right) y_j \quad (A\varphi)$$

où $(i,j) \in \{1,2,3\}$, on a donc l'équation linéaire non autonome

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (A\varphi)$$

on vérifie que $(A\varphi) \in L_1^{\pi/2}(2\pi)$, et $\dot{\varphi}(t) \neq 0$, est une solution de $(A\varphi)$ dont la matrice fondamentale au temps $t = \pi/2$ a la forme

$$Y(t, \pi/2) = \begin{pmatrix} \sin t & -\cos t & 0 \\ \cos t & \sin t & 0 \\ \frac{1}{2}\sin^2 t & \cos^2 t & 1 \end{pmatrix}$$

Donc l'équation aux variations $(A\varphi)$ possède deux solutions 2π -périodiques non constantes, et une troisième constante.

III.3. Systèmes différentiels P-périodiques dépendant de paramètre =====

Nous allons considérer le même système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = {}^\lambda f(t, x) \quad (f)$$

qu'au (III.1.) appartenant à $F_\sigma^\alpha(P)$ ou $F_{\sigma,0}^\alpha(P)$; et soit $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ une solution de $({}^\lambda f)$ issue de $x^0 \in \mathbb{R}^3$ à l'instant $t = t_0$, dépend analytiquement de tous ces arguments.

III.3.1. Points exceptionnels et points ordinaires =====

On sait depuis Poincaré que, étant donné $\delta \in \Lambda$ et ${}^\delta\varphi$ une solution P-périodique de $({}^\delta f)$, alors si l'équation aux variations $(A{}^\delta\varphi)$, associée à ${}^\delta\varphi$, n'est pas exceptionnelle pour la période P, il existe pour $\lambda \in \Lambda$ voisin de δ , une solution P-périodique et une seule, ${}^\lambda\varphi$ de $({}^\lambda f)$, qui soit une petite perturbation de ${}^\delta\varphi$.

Définition 4

Etant donné $({}^\lambda f) \in F_\sigma^\alpha(P)$, (resp. $F_{\sigma,0}^\alpha(P)$), $\sigma \in E$, soit ${}^\delta\varphi$ (pour $\lambda = \delta$) une solution de $({}^\delta f)$ appartenant à $S_\sigma^\alpha(P)$, (resp. $S_{\sigma,0}^\alpha(P)$); on dit que ${}^\delta\varphi$ est un point exceptionnel dans $S_\sigma^\alpha(P)$, (resp. $S_{\sigma,0}^\alpha(P)$), si l'équation aux variations $(A{}^\delta\varphi)$

est exceptionnelle pour la période P ; dans le cas contraire, $\delta\varphi$ est un point ordinaire dans $S_\sigma^\alpha(P)$ (resp. $S_{\sigma,0}^\alpha(P)$).

III.3.2. Corollaire 7

Soit $(\delta f) \in F_\sigma^\alpha(P)$ (resp. $F_{\sigma,0}^\alpha(P)$) pour $(\lambda = \delta)$; soit $\delta\varphi$ une solution de (δf) appartenant à $S_\sigma^\alpha(P)$ (resp. $S_{\sigma,0}^\alpha(P)$), alors $\delta\varphi$ ne peut pas être ordinaire dans $S_\sigma^\alpha(P)$ ($S_{\sigma,0}^\alpha(P)$).

Démonstration

D'après le corollaire (6) l'équation aux variations $(A^\delta\varphi)$ est toujours exceptionnelle, et d'après la définition (4), on déduit que $\delta\varphi$ est toujours un point exceptionnel de $S_\sigma^\alpha(P)$, (resp. $S_{\sigma,0}^\alpha(P)$) où $\sigma \in E$.

Nous allons démontrer maintenant les propositions (16) et (17) qui ont été énoncées au début de ce chapitre.

III.3.3. Démonstration de la proposition (16)

=====

Nous allons démontrer la proposition pour $\sigma = \bar{\sigma}_1$, les autres cas démontrant de manière similaire; soit $\varphi \in S_{\bar{\sigma}_1}^0(P)$ $\left[\delta\varphi(0) \in \bar{\sigma}_1, \delta\varphi(P/2) \in \bar{\sigma}_1 \right]$ une solution de (f) et soit

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

l'application de classe c^1 qui à $x^0 \in \bar{\sigma}_1$ associe $T(x^0) = \hat{\varphi}(P/2, 0, x^0)$, où $\hat{\varphi}$ est la solution de (δf) issue au temps $\alpha = 0$ du point x^0 ; on a donc :

$$T(\delta\varphi(0)) = \delta\varphi(P/2) \in \bar{\sigma}_1 ,$$

D'après le corollaire (2), la solution φ est P-périodique, et d'après le corollaire (6) l'équation aux variations associée à $\delta\varphi(A\varphi)$ appartient au moins à $L^1_1(P)$; soit T^* l'application linéaire tangente de T au point $\varphi(0)$, T^* est représentée par la matrice

$$X_{(A\varphi)}(P/2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

dans une base choisie respectant la symétrie, (voir la proposition (9) dans le chapitre (II)).

Le coefficient b_1 est non nul, donc $T^*(\bar{\sigma}_1)$ est transverse à $\bar{\sigma}_1$, et donc $T(\bar{\sigma}_1)$ est transverse aussi à $\bar{\sigma}_1$ au point $\delta\varphi(P/2) \in \bar{\sigma}_1$; cela entraîne que la surface $T(V)$, où $V \subset \bar{\sigma}_1$ est un voisinage de $\delta\varphi(0)$, est transverse à $\bar{\sigma}_1$ et coupe donc $\bar{\sigma}_1$ au voisinage de $\delta\varphi(P/2)$, selon un arc de courbe de classe C^1 . Donc, l'image réciproque de cet arc par T , est un chemin $c : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \bar{\sigma}_1$, où $J =]-1, +1[$, passant de $\delta\varphi(0) = c(0)$, tel que pour tout point $c(\mu) \in \bar{\sigma}_1$, où $\mu \in J$, la solution ${}^\mu\varphi$ issue au temps $t=0$ de $c(\mu)$, et de plus

$${}^\mu\varphi(0) \in \bar{\sigma}_1 \text{ et } {}^\mu\varphi(P/2) \in \bar{\sigma}_1;$$

d'après le corollaire (2) ${}^\mu\varphi$ est P-périodique appartenant à $S^0_{\bar{\sigma}_1}(P)$, ce qui prouve que la solution $\delta\varphi$ n'est pas isolée dans l'ensemble des solutions P-périodiques appartenant à $S^0_{\bar{\sigma}_1}(P)$.

III.3.4. Démonstration de la proposition (17)

=====

1. La démonstration sera très semblable à la démonstration de la proposition précédente; prenons :

$\sigma = \sigma_1$, $\alpha = 0$, soit ${}^\delta\varphi \in S_{\sigma_1,0}^0(P)$ [${}^\delta\varphi(0) \in \sigma_1$, ${}^\delta\varphi(P/4) \in \bar{\sigma}_1$] une solution de $({}^\delta f)$ pour $\lambda = \delta$, et soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application de classe C^1 qui à $x^0 \in \sigma_1 \subset \mathbb{R}^3$ associe $T(x^0) = \hat{\varphi}(P/4, 0, x^0)$, où $\hat{\varphi}$ est la solution de $({}^\delta f)$ issue au temps $\alpha = 0$ du point x^0 , on a donc

$$T({}^\delta\varphi(0)) = {}^\delta\varphi(P/4) \in \bar{\sigma}_1$$

Soit T^* l'application linéaire tangente représentée par la matrice

$$X_{(A)}({}^\delta\varphi)(P/4) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

dans une base choisie respectant la symétrie; le coefficient a_1 est non nul donc $T^*(\sigma_1)$ est transverse à $\bar{\sigma}_1$, et donc $T(\sigma_1)$ est transverse aussi à $\bar{\sigma}_1$ au point $T({}^\delta\varphi(0)) = {}^\delta\varphi(P/4) \in \bar{\sigma}_1$; il en résulte que la solution ${}^\delta\varphi$ est isolée dans l'ensemble des solutions P-périodiques appartenant à $S_{\sigma_1,0}^0(P)$.

2. Etant donné que l'application $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dépend continûment de $\lambda \in \Lambda$, alors il existe un voisinage W de δ dans Λ tel que la solution ${}^\lambda\varphi(t)$ appartient à $S_{\sigma_1,0}^0(P)$, où $\lambda \in W(\delta)$; cette solution est issue d'un voisinage de la condition initiale de la solution ${}^\delta\varphi(t)$ [c'est à dire de ${}^\delta\varphi(0)$] et elle tend vers ${}^\delta\varphi(t)$ quand λ tend vers δ .

III.3.5. Application

Considérons le système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = B^*x + \lambda g(t, x) \quad (B_\lambda^*)$$

où, B^* est une matrice constante réelle d'ordre trois,

et où

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

est P-périodique de classe C^1 , et λ est petit, $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$.

Lorsque $\lambda = 0$, le système (B_λ^*) devient

$$\frac{dx}{dt} = B_0^* x \quad (B_0^*)$$

et est dit système non perturbé; lorsque $\lambda \neq 0$, (B_λ^*) est dit système perturbé ou système différentiel quasi-linéaire.

D'après la définition (I.1.1.) le système (B_λ^*) admet une symétrie par rapport à $\bar{\sigma}_1$ au temps α si et seulement si les deux conditions sont satisfaites :

1. $(B_0^*) \in L_1^\alpha(P)$
2.
$$\begin{cases} g_1(t, x_1, x_2, x_3) = g_1(2\alpha - t, -x_1, x_2, x_3) \\ g_\ell(t, x_1, x_2, x_3) = -g_\ell(2\alpha - t, -x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (\ell=2,3)$$

Supposons que $(B_\lambda^*) \in F_{\bar{\sigma}_1}^0(P)$, et (B_0^*) est défini comme (II.3.1.), appartenant à $L_1^1(P)$; alors (B_λ^*) admet, pour λ petit, des solutions P-périodiques dont les orbites sont symétriques par rapport à l'espace $\bar{\sigma}_1(ox_2x_3)$ dans l'espace des phases (ox_1, ox_2, ox_3) ; en effet, étant donné que (B_0^*) est autonome, on connaît explicitement toutes ses solutions, et puisque $(B_0^*) \in L_1^1(P)$, $X_{B_0^*}(P/2)(\bar{\sigma}_1)$ est transverse à $\bar{\sigma}_1$, selon une droite (c'est l'espace de solutions P-périodiques constantes); d'autre part, l'équation aux variations de (B_λ^*) associée à une solution constante, est dans $L_1^1(P)$, et d'après la proposition (16), le système (B_λ^*) admet des solutions P-périodiques dont les orbites sont symétriques par rapport à l'espace $\bar{\sigma}_1(ox_2x_3)$

QUATRIEME CHAPITRE

ETUDE NUMERIQUE.

CHAPITRE IV

IV.1. Introduction

La localisation numérique de solutions périodiques d'équation différentielle à coefficients périodiques, en général, est difficile, elle devient aisée si l'équation admet une ou deux symétrie(s).

Nous présentons ici une méthode numérique pour trouver certaines solutions périodiques d'une équation différentielle périodique avec symétrie (linéaire ou non linéaire) d'ordre trois; le moyen que nous utilisons est la "METHODE DES SYMETRIES"; elle s'appuie sur les symétries de l'équation et des solutions recherchées; cette méthode était présentée par B.V.SCHMITT dans [9] pour trouver des solutions périodiques d'une équation différentielle d'ordre deux (l'équation de Duffing sans dissipation).

Nous allons généraliser cette méthode pour une équation différentielle périodique avec symétrie, d'ordre trois, et grâce à cette méthode, pour une équation différentielle périodique donnée admettant une ou deux symétrie(s), nous pouvons localiser numériquement deux types de solutions périodiques dont les orbites ont la même symétrie que l'équation donnée (pour fixer les idées, on prend $\sigma = \sigma_1, \sigma = \bar{\sigma}_1, \alpha = 0$)

1. Lorsque l'équation différentielle périodique possède deux symétries par rapport à σ_1 au temps $t=0$ et $\bar{\sigma}_1$ au temps $t=P/4$, on dit qu'il y a symétrie par

rapport à l'origine; il y a dans ce cas une solution P-périodique isolée $\varphi^*(\varphi^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3)$ appartenant à $S_{\sigma_1,0}^0(P)$ si la condition de transversalité a lieu c'est à dire $T(\sigma_1)$ coupe transversalement $\bar{\sigma}_1$ au point $T(\varphi^*(0)) = \varphi^*(P/4) \in \bar{\sigma}_1$, où T est le quart d'application de Poincaré de (f) au temps $t=0$, on en déduit qu'une perturbation de l'équation par un paramètre laisse $T(\sigma_1)$ transverse à $\bar{\sigma}_1$.

Pour avoir d'autres solutions, il faut varier un paramètre, car la solution φ^* est isolée dans l'ensemble des solutions P-périodiques appartenant à $S_{\sigma_1,0}^0(P)$; nous verrons dans (IV.3.) une localisation numérique de ce type de solutions (c'est à dire la localisation numérique de $\varphi^*(0) \in \sigma_1$ et du paramètre pour lesquels la solution est P-périodique appartenant à $S_{\sigma_1,0}^0(P)$).

2. Lorsque l'équation différentielle P-périodique possède une symétrie par rapport à l'espace $\bar{\sigma}_1$ (plan ox_2x_3) au temps $t=0$, alors la solution φ^* issue de $x^0 = \varphi^*(0) \in \bar{\sigma}_1$ au temps $t=0$, est P-périodique appartenant à $S_{\bar{\sigma}_1}^0(P)$ si $T(\varphi^*(0)) = \varphi^*(P/2, 0, x^0) \in \bar{\sigma}_1$, où T est la demi-application de Poincaré; et il existe dans $\bar{\sigma}_1$, passant par $\varphi^*(0)$, une courbe isolée de conditions initiales de solutions P-périodiques appartenant à $S_{\bar{\sigma}_1}^0(P)$ si la condition de transversalité (voir la proposition (16) dans le chapitre III)) est satisfaite; d'après la proposition (16), ceci est possible si le coefficient b_1 de la matrice $(X_{(A^*\varphi)}(P/2))$ est non nul; cela entraîne que $T(\bar{\sigma}_1)$ est transverse à $\bar{\sigma}_1$ et coupe $\bar{\sigma}_1$ au voisinage de $\varphi^*(P/2)$, selon un arc de courbe. On obtient donc dans ce cas toute une famille de solution P-périodique de l'équation, sans aucune variation de paramètre; dans le paragraphe (IV-3.2.) nous avons expliqué la localisation numérique de ce type de solutions.

Par contre, cette méthode ne nous permet pas de localiser numériquement, pour une équation P-périodique possédant une symétrie par rapport à l'espace $\sigma_1(\text{ox}_1)$, des solutions P-périodiques appartenant à $S_{\sigma_1}^0(P)$, parce que la condition de transversalité est impossible à réaliser pour des raisons de dimension; en effet si deux courbes de $\mathbb{R}^3$ se coupent, même transversalement, en un point, une petite perturbation de ces courbes fait disparaître, en général, leur intersection.

Nous verrons dans (IV.2.) le principe de la méthode des symétries; nous en présentons un organigramme, permettant de déterminer des conditions initiales de solutions P-périodiques appartenant à $S_{\sigma_1,0}^0(P)$; nous donnons enfin un exemple de recherche numérique, où nous calculons explicitement des familles à un paramètre de conditions initiales de solutions périodiques d'un système différentiel de dimension trois.

IV.1.1. Soit l'équation différentielle périodique d'ordre trois :

$$y''' + a y y' y'' + 2y'^3 = b \cos t \quad (13)$$

où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}$; procédons au changement de variables suivants :

$$y' = x_1, y'' = x_2, y = x_3;$$

on obtient un système équivalent à l'équation (13)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -ax_1 x_2 x_3 - 2x_1^3 + b \cos t \\ \dot{x}_3 = x_1 \end{cases} \quad D(a,b);$$

d'après la définition (I.1.1.), le système $D(a,b) \in F_{\sigma_1,0}^0(2\pi)$; nous avons choisi le système $D(a,b)$ comme un exemple à étudier; et nous allons chercher deux types de solutions périodiques.

1. Solutions périodiques harmoniques de période minimale 2π (resp. sous-harmoniques de période minimale $2K\pi$, $K=3,5,\dots$) dont les orbites sont symétriques par rapport à l'origine,

2. Solutions périodiques harmoniques de période minimale 2π , dont les orbites sont symétriques seulement par rapport au plan $\bar{\sigma}_1(ox_2x_3)$.

IV.1.2. Solutions périodiques de $D(a,b)$, notations. =====

Soit $\varphi(t,0,x^0,a,b)$ la solution vectorielle (de composantes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$) de $D(a,b)$ pour des valeurs fixées de (a,b) , dépendant analytiquement de tous ses arguments, issue de

$$x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ au temps } t=0;$$

1. Si $\varphi \in S_{\sigma_1,0}^0(2\pi)$, alors sa première composante φ_1 est 2π -périodique paire et harmonique, impaire son développement en série de Fourier est de la forme :

$$\varphi_1(t) = a_1 \cos t + a_3 \cos 3t + a_5 \cos 5t + \dots$$

On notera par $S_{\sigma_1,0}^0(D,2\pi)$, [resp. $S_{\sigma_1,0}^0(D,2K\pi)$] l'ensemble des solutions 2π -périodiques dont la première composante est 2π -périodique paire et harmonique impaire [resp. $2K\pi$ -périodique paire et sous-harmonique impaire]; dans l'espace (x_1^0, a^*, b) notons par $\Sigma_0(a^*, 2\pi)$ [resp. $\Sigma_0(a^*, 2K\pi)$] l'ensemble des (x_1^0, b) tels que :

$$\varphi(t,0,x_1^0,0,0,a^*,b^*) \in S_{\sigma_1,0}^0(D,2\pi), [\text{resp. } S_{\sigma_1,0}^0(D,2K\pi)]$$

A chaque point (x_1^0, a^*, b) de $\Sigma_0(a^*, 2\pi)$ correspond la solution $\varphi(t, 0, x_1^0, 0, 0, a^*, b^*)$ de $D(a^*, b)$ qui est 2π -périodique et sa première composante est 2π -périodique paire et harmonique impaire; comme une solution 2π -périodique est une solution $2K\pi$ -périodique on a donc :

$$\Sigma_0(a^*, 2\pi) \subset \Sigma_0(a^*, 2K\pi)$$

2. Si $\varphi \in S_{\overline{\sigma}_1}^{\pi/2}(2\pi)$, alors sa première composante φ_1 est 2π -périodique impaire de $t-\pi/2$ son développement en série de Fourier est de la forme

$$\varphi_1(t) = a_1 \cos t + b_2 \sin 2t + a_3 \cos 3t + \dots$$

On notera par $S_{\overline{\sigma}_1}^{\pi/2}(D, 2\pi)$ l'ensemble des solutions 2π -périodiques dont la première composante est 2π -périodique impaire; dans l'espace (x_2^0, x_3^0) notons les paramètres (a, b) sont fixées par $\Sigma(a^*, b^*, 2\pi)$ l'ensemble des points (x_2^0, x_3^0) tel que

$$\varphi(t, \pi/2, 0, x_2^0, x_3^0, a^*, b^*) \in S_{\overline{\sigma}_1}^{\pi/2}(2\pi);$$

on notera par $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ l'ensemble des a et b .

Notre but est de déterminer, par des moyens numériques, certaines branches des surfaces $\Sigma_0(a, 2\pi) \subset \sigma_1 \times \mathbb{A} \times \mathbb{B}$, (resp. $\Sigma(a, b^*, 2\pi) \subset \overline{\sigma}_1 \times \mathbb{A} \times \mathbb{B}$), engendrées par $\Sigma_0(a^*, 2\pi) \subset \sigma_1 \times \mathbb{B}$, (resp. $\Sigma(a^*, b^*, 2\pi) \subset \overline{\sigma}_1$) lorsque a^* parcourt $\mathbb{A}$; la détermination numérique des courbes correspondantes à $\Sigma_0(a^*, 2\pi)$, $\Sigma_0(a^*, 2K\pi)$ ne diffère que par la période, et pour cela nous allons expliquer dans la suite la méthode correspondant à la courbe $\Sigma_0(a^*, 2\pi)$

On fixe $a(a=a^*)$, on rapporte le plan $q^{a^*} = (\sigma_1, a^*, b)$ au système d'axe (ox_1^0, ob) et on note par (u_i, v_i) les coordonnées d'un point m_i appartenant à q^{a^*} et par

$$R^{a^*}(m_i^*) = \varphi_1(\pi/2, 0, u_i, 0, 0, a^*, v_i) = 0$$

l'équation de définition de $\Sigma_0(a^*, 2\pi) = \Sigma_0(a, 2\pi) \cap q^{a^*}$; et pour $\Sigma(a^*, b^*, 2\pi)$ nous déterminons numériquement une section de surface par certains plans $q_{b^*}^{a^*} = \bar{\sigma}_1 \times \{a^*\}$; où a et b sont fixées $(a, b) = (a^*, b^*)$.

On rapporte $q_{b^*}^{a^*}$ au système (ox_2^0, ox_3^0) , on note par

$$R_{b^*}^{a^*}(n) = \varphi(3\pi/2, \pi/2, 0, x_{2,n}^0, x_{3,n}^0, a^*, b^*) = 0$$

l'équation de définition de $\Sigma(a^*, b^*, 2\pi) = \Sigma(a, b^*, 2\pi) \cap q_{b^*}^{a^*}$.

IV.2. La méthode numérique des symétries =====

Le principe de la méthode des symétries est le suivant :

Supposons qu'on veuille chercher une solution de $D(a, b)$ appartenant à

$S_{\sigma_1, 0}^0(D, 2\pi)$; soient $\varphi, \tilde{\varphi}$ deux solutions de $D(a^*, b)$, issues de $\varphi_1(0), \tilde{\varphi}_1(0)$

au temps $t=0$, on calcule par une méthode d'intégration numérique (par exemple la méthode de Rung-Kutta d'ordre 4) $\varphi_1(\pi/2)$ et $\tilde{\varphi}_1(\pi/2)$; si :

$$\varphi_1(\pi/2) \cdot \tilde{\varphi}_1(\pi/2) < 0$$

alors il existe nécessairement entre $\varphi_1(0)$ et $\tilde{\varphi}_1(0)$, sur ox_1^0 , au moins une condition initiale $\varphi_1^*(0)$ d'une solution 2π -périodique paire et harmonique impaire, car $\varphi^*(\pi/2)$ dépend continûment de $\varphi^*(0)$; par dichotomie on localise $\varphi^*(0)$ avec la précision désirée; ceci est considéré comme étant la première étape programme qui calcule toute une branche, ce programme se constitue en trois étapes suivantes :

1. Recherche du premier point de $\Sigma_0(a^*, 2\pi)$ (PROC1)
2. Recherche d'un deuxième point de $\Sigma_0(a^*, 2\pi)$ (PROC2)
3. Recherche d'autres points de $\Sigma_0(a^*, 2\pi)$

Nous allons détailler chaque étape.

IV.2.1. Première étape PROC1 (m_1, m_2, m^*)

Cette étape nous permet de calculer un point $\tilde{a} \in \text{près}$ (où ϵ est donné) de $\Sigma_0(a^*, 2\pi)$ à partir de deux points quelconques de q^{a^*} ; soient $m_1(u_1, v_1)$, $m_2(u_2, v_1)$ deux points de q^{a^*} tels que

$$R^{a^*}(m_1) > 0, R^{a^*}(m_2) < 0;$$

on calcule $R^{a^*}(m_3)$, où m_3 est le milieu de m_1 et m_2 , si $|R^{a^*}(m_3)| < \epsilon$ alors on s'arrête et donc $m^* = m_3$ est le point cherché de $\Sigma_0(a^*, 2\pi)$, sinon, et si $R^{a^*}(m_3) > 0$ on appelle m_1 le point m_3 , au contraire si $R^{a^*}(m_3) < 0$ on appelle m_2 le point m_3 on recommence ainsi jusqu'à ce que $|R^{a^*}(m_3)| < \epsilon$.

IV.2.2. Deuxième étape PROC2 ($m_1, L_1, L_2, \alpha, \beta, m_2^*, L_1^*, L_2^*$)

Cette étape nous donne un second point $\tilde{a} \in \text{près}$ de $\Sigma_0(a^*, 2\pi)$; étant donné $\epsilon > 0$, $L_1 > 0$, $L_2 > 0$, (D) une direction de demi-droite, et m_1^* situé sur $\Sigma_0(a^*, 2\pi)$ à ϵ près,

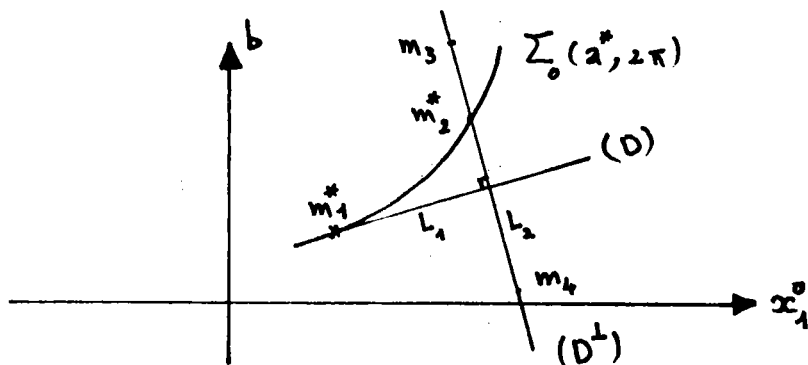


Fig. (1)

On calcule (voir la fig.1) $R^{a^*}(m_3)$, $R^{a^*}(m_4)$ et puis le produit

$$R^{a^*}(m_3) \cdot R^{a^*}(m_4)$$

Si $R^{a^*}(m_3) \cdot R^{a^*}(m_4) < 0$, alors on applique la première étape; on obtient un nouveau point m_2^* situé à ϵ près de $\Sigma_0(a^*, 2\pi)$, si $R^{a^*}(m_3) \cdot R^{a^*}(m_4) > 0$, alors on remplace L_1 par $L_1/2$ et L_2 par $3L_2/4$ et on recommence

IV.2.3. Troisième étape

Cette étape nous donne un autre point situé à ϵ près sur $\Sigma_0(a^*, 2\pi)$ à partir de deux points de $\Sigma_0(a^*, 2\pi)$.

Soit $m_n^*(u_n, v_n)$, $m_{n+1}^*(u_{n+1}, v_{n+1})$ deux points de $\Sigma_0(a^*, 2\pi)$; soit (D) la demi-droite $m_n^* m_{n+1}^*$; et soit m_5 le point de q^{a^*} situé sur la direction (D) à distance L_1 de m_{n+1}^* , et m_6, m_7 des points de q^{a^*} , obtenus à partir de n_1 dans la direction $(D^\perp)$, à une distance égale à L_2 .

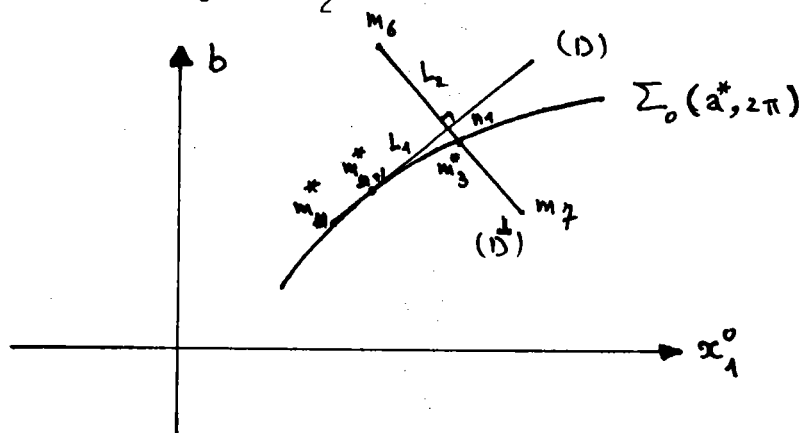


Fig. (2)

En appliquant (PROC2) et (PROC1) on obtient un nouveau point situé à ϵ près de $\Sigma_0(a^*, 2\pi)$.

Sur la fig.(3) on a représenté un organigramme regroupant les trois étapes pour la détermination point par point de la courbe $\Sigma_0(a^*, 2\pi)$ dans le plan q^{a^*} .

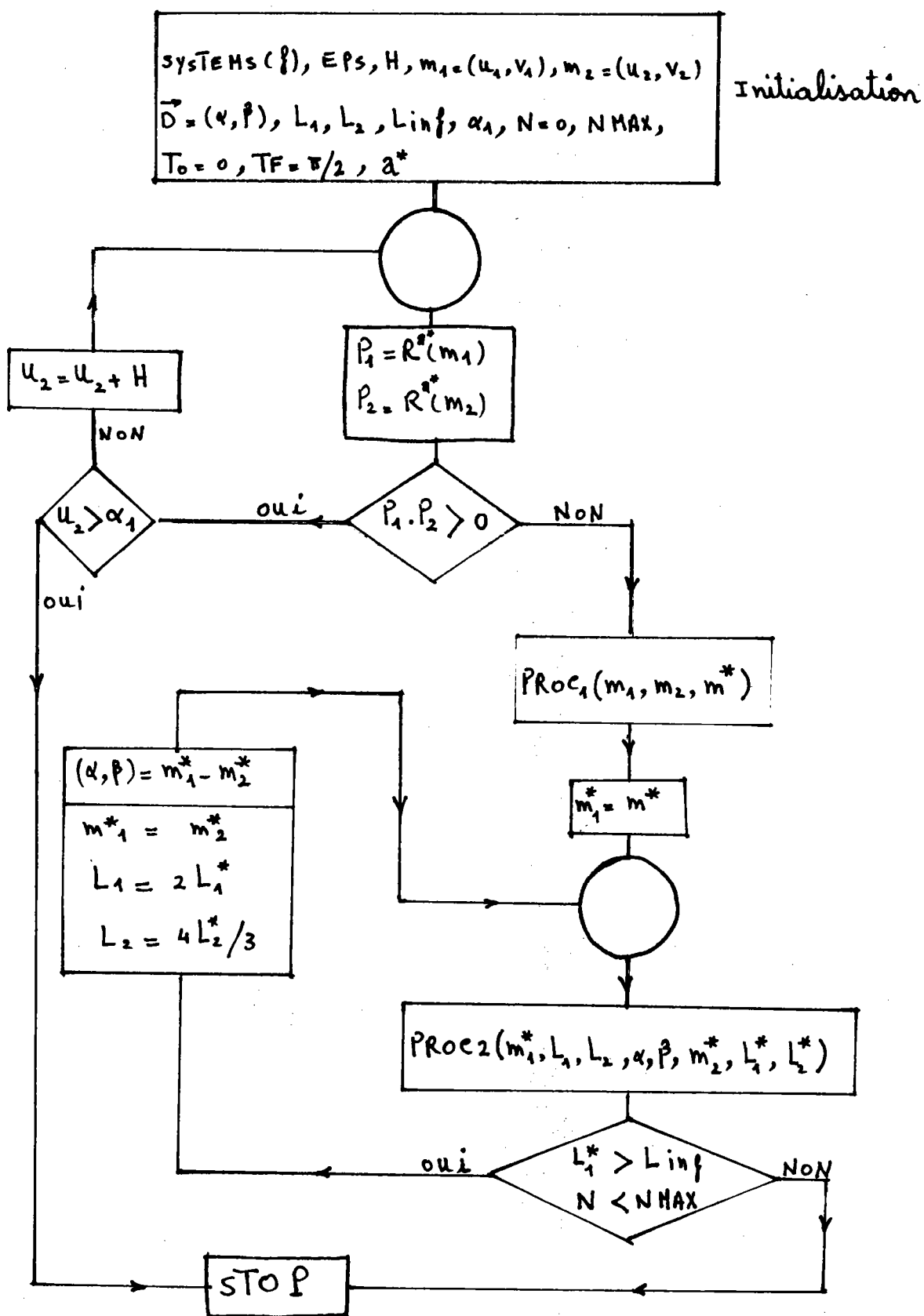


Fig. (3)

Organigramme de $\Sigma_0(a^*, 2\pi)$

IV.3.2. Détermination numérique de $\Sigma(a^*, b^*, 2\pi)$

La méthode de détermination numérique de toute une branche $\Sigma(a^*, b^*, 2\pi)$ ne diffère pas beaucoup de celle de $\Sigma_0(a^*, 2\pi)$, et elle peut être effectuée de la manière suivante :

On choisit tout d'abord deux valeurs pour a, b , soit $a=a^*, b=b^*$; puis on calcule le point $(x_1^0, a^*, b^*) \in \Sigma_0(a^*, 2\pi)$ avec un temps initial $t_0=0$ et le temps final (TF) = $\pi/2$, cela nous permet de considérer

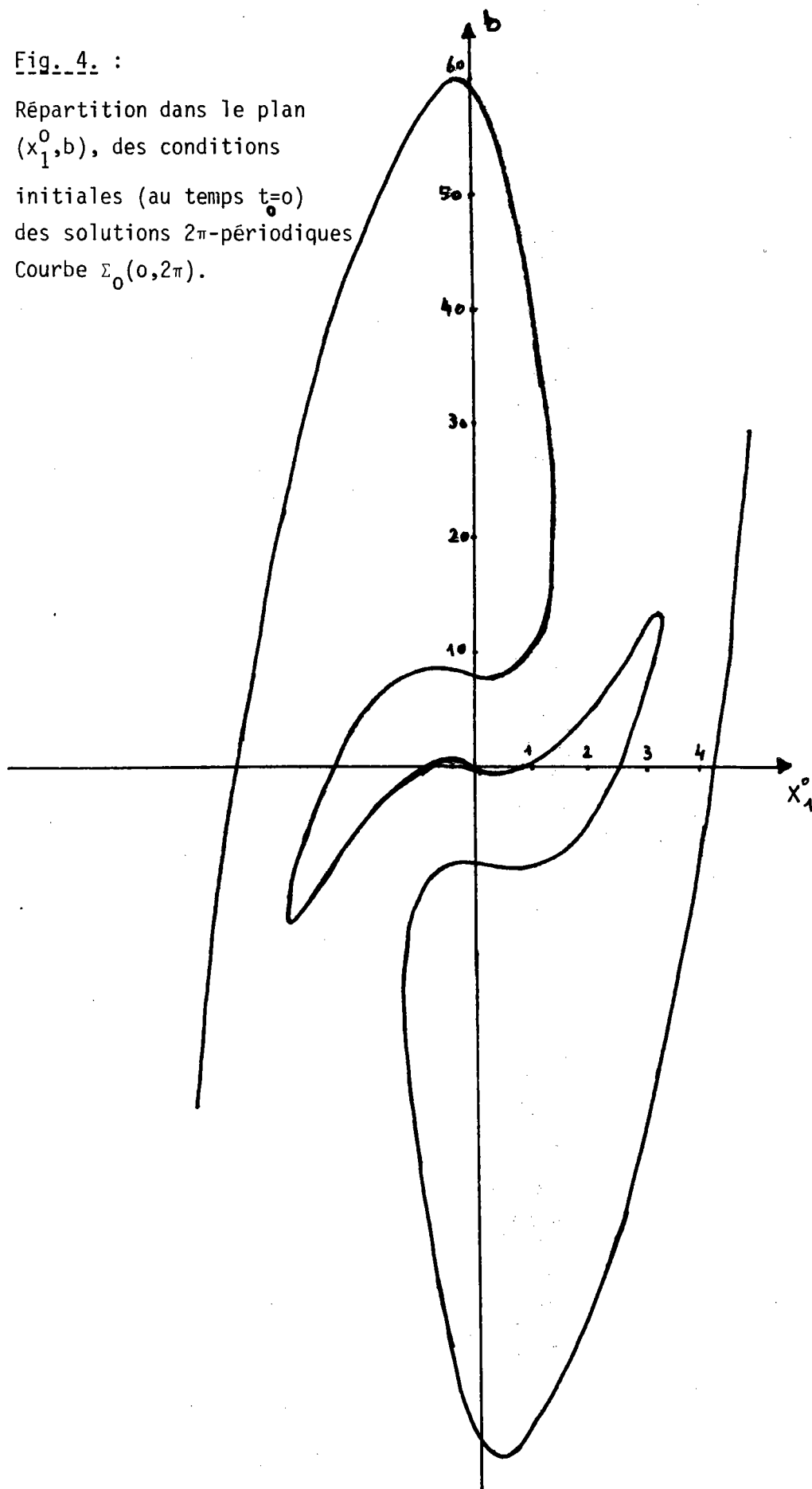
$$\left\{ \begin{array}{l} x_2^0 = \varphi_2^*(\pi/2, 0, x_1^0, 0, 0, a^*, b^*) \\ x_3^0 = \varphi_3^*(\pi/2, 0, x_1^0, 0, 0, a^*, b^*) \end{array} \right.$$

comme un point appartenant au plan $q_{b^*}^{a^*}$ et à partir de ce point on applique les trois étapes de calcul pour un temps initial $t_0=\pi/2$, TF= $3\pi/2$ avec $x_1^0=0$, $b=b^*$ fixés; ces deux paramètres correspondant à (u, v) dans la description de l'organigramme, seront remplacés ici par (x_2^0, x_3^0) puisque c'est dans $\overline{\sigma}_1 = (ox_2x_3)$ que nous déterminons $\Sigma(a^*, b^*, 2\pi)$; nous choisissons donc ces deux points initiaux du plan $\overline{\sigma}_1(ox_2x_3)$ et une direction $\vec{D} = (\alpha, \beta)$ dans ce plan pour calculer une courbe $\Sigma(a^*, b^*, 2\pi)$ ou portion de courbe, dans (ox_2x_3) ; sur la figure (8) nous avons représenté la branche $\Sigma(1, 1, 2\pi)$.

Nos programmes ont été exécutés en BASIC; tous les calculs ont été effectués sur un ordinateur COMMODORE 4016, en langage BASIC.

Fig. 4. :

Répartition dans le plan
 (x_1^0, b) , des conditions
 initiales (au temps $t_0=0$)
 des solutions 2π -périodiques
 Courbe $\Sigma_0(0, 2\pi)$.



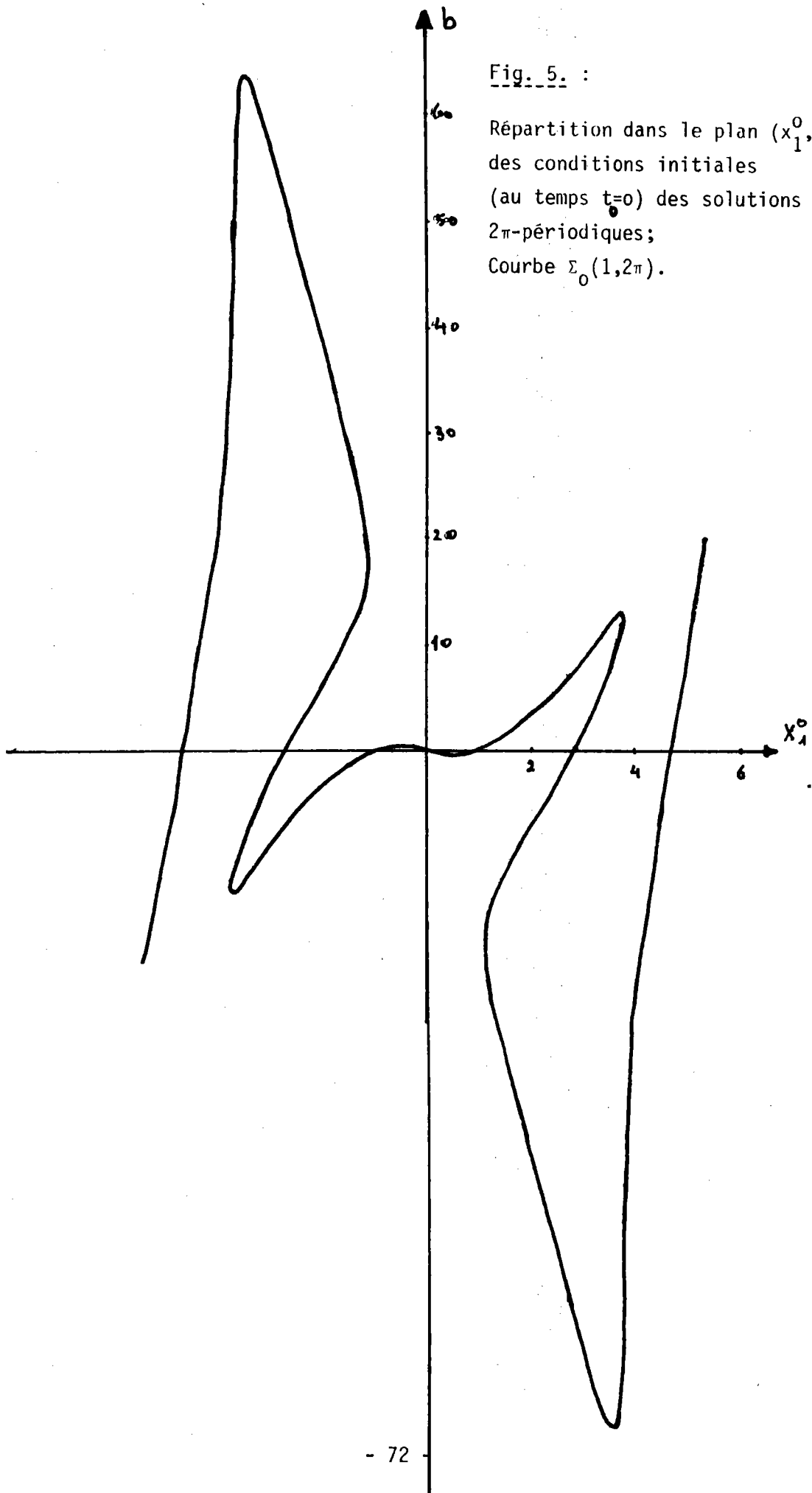


Fig. 5. :

Répartition dans le plan (x_1^0, b) ,
des conditions initiales
(au temps $t=0$) des solutions
 2π -périodiques;
Courbe $\Sigma_0(1, 2\pi)$.

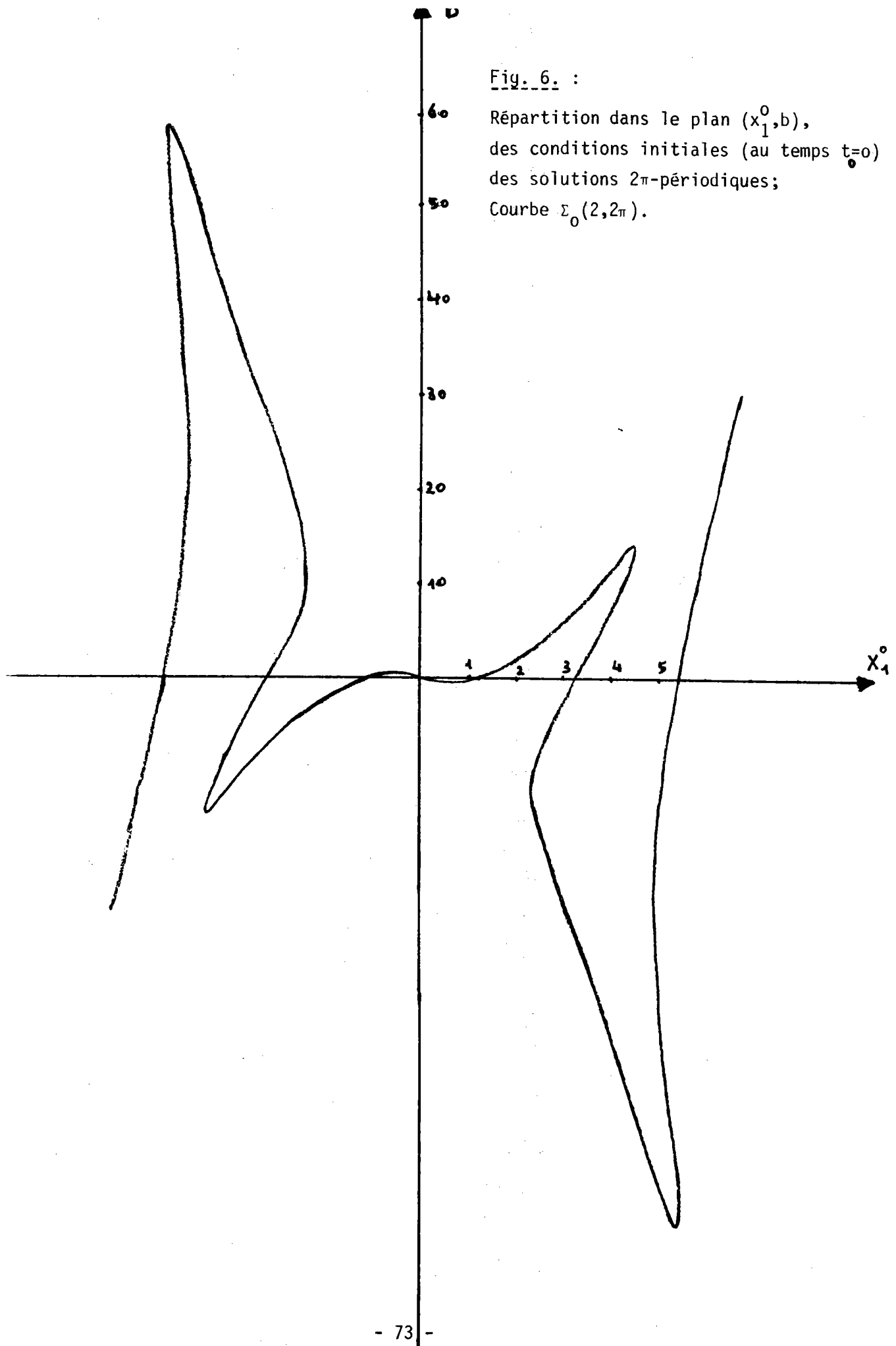


Fig. 7. :

Répartition dans le plan (x_1^0, b) ,
des conditions initiales (au temps $t=0$)
des solutions 2π -périodiques;
Courbe $\Sigma_0(3, 2\pi)$.

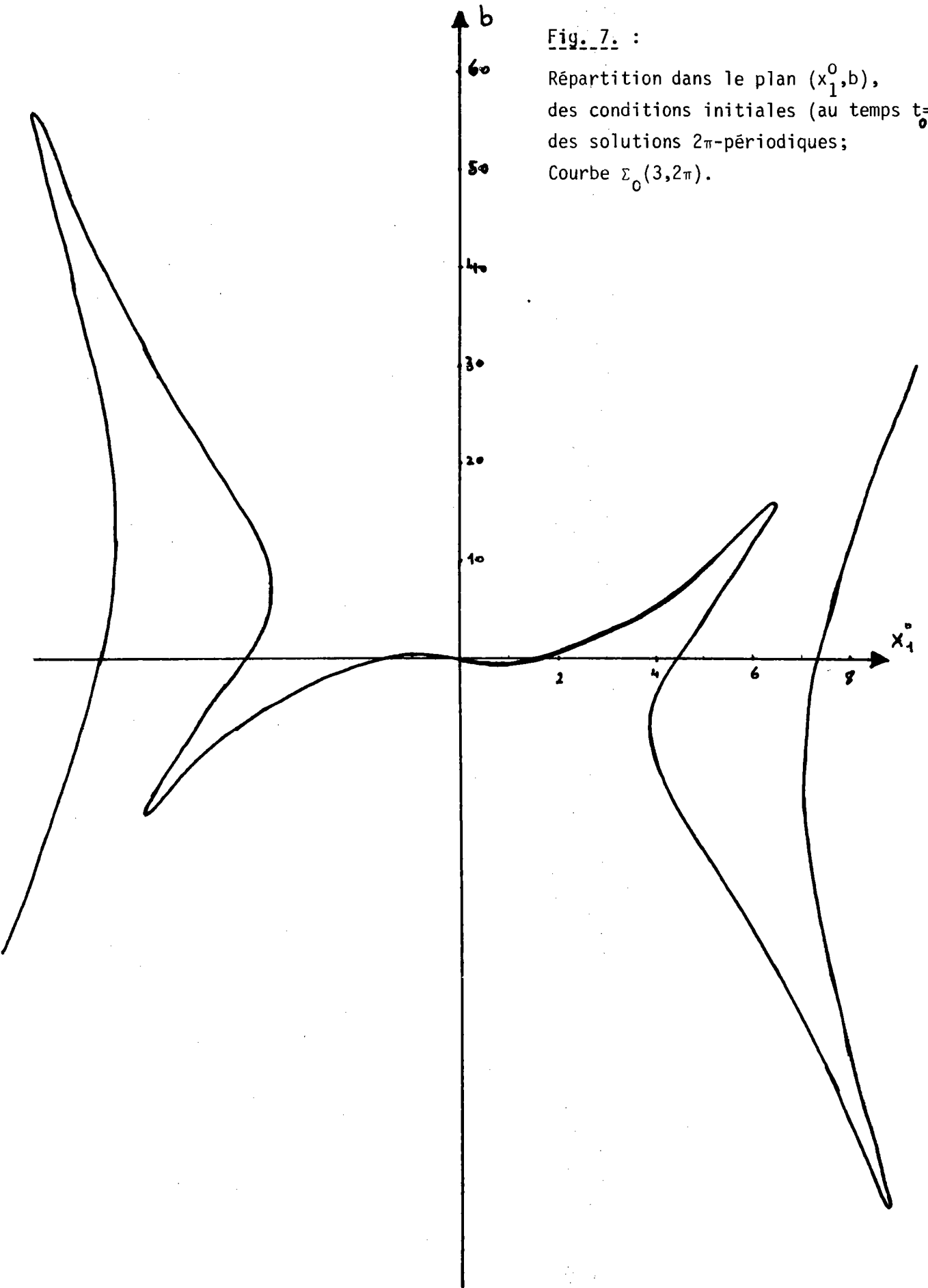
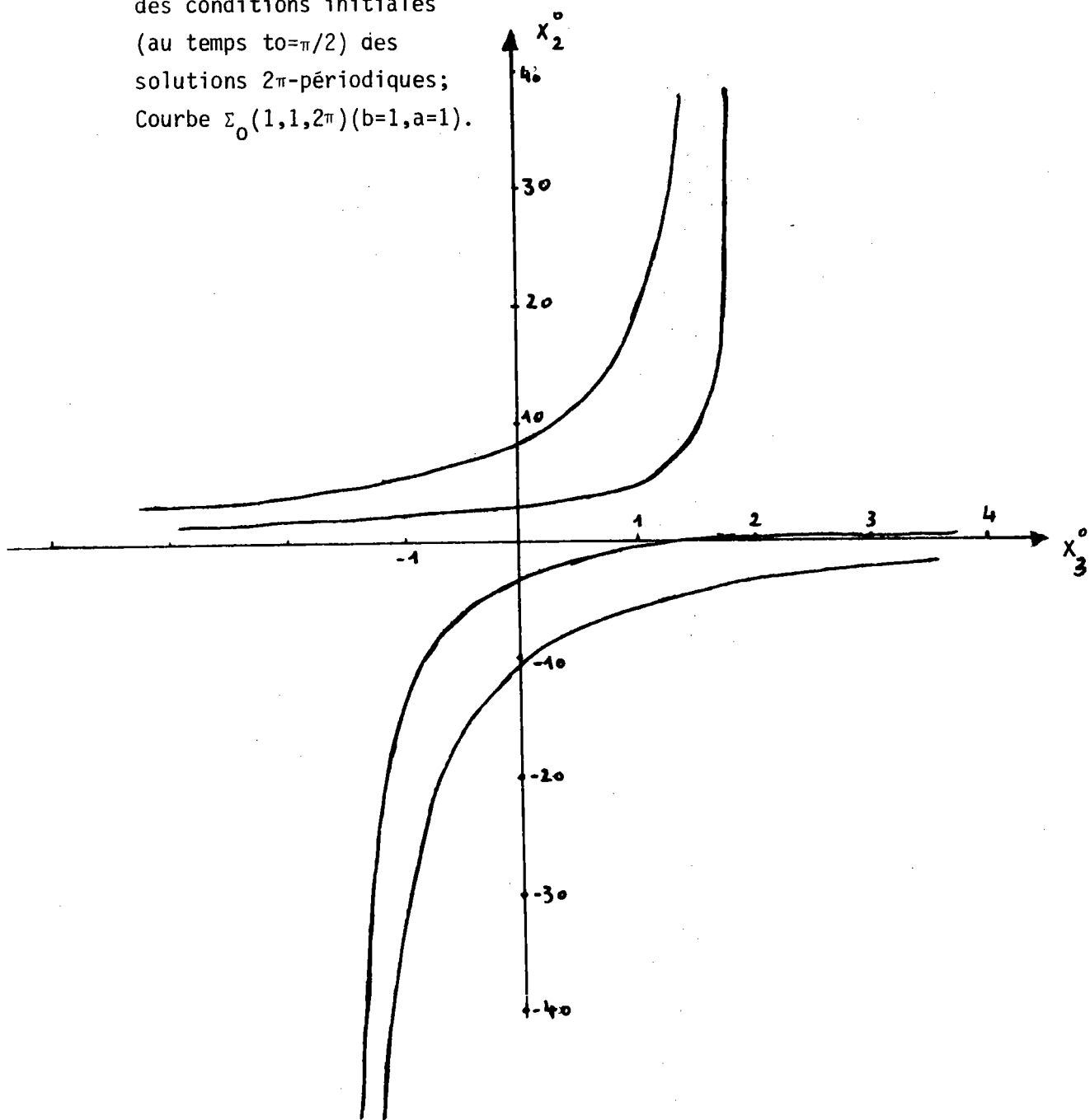


Fig. 8. :

Répartition dans le plan (x_3^0, x_2^0) ,
des conditions initiales
(au temps $t_0 = \pi/2$) des
solutions 2π -périodiques;
Courbe $\Sigma_0(1,1,2\pi)(b=1,a=1)$.



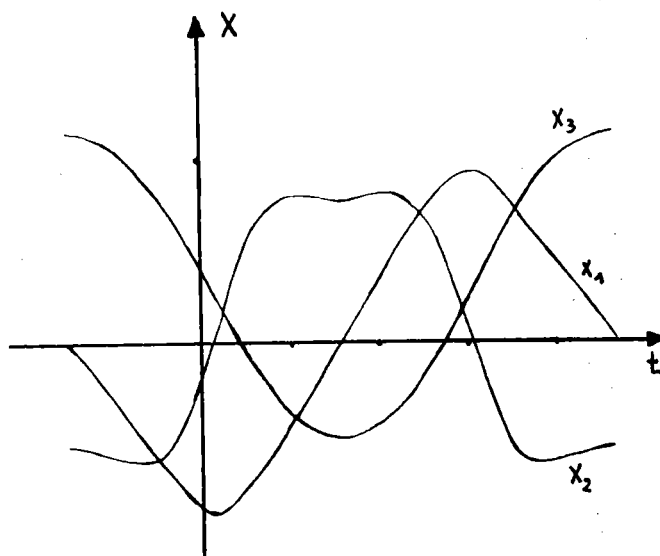
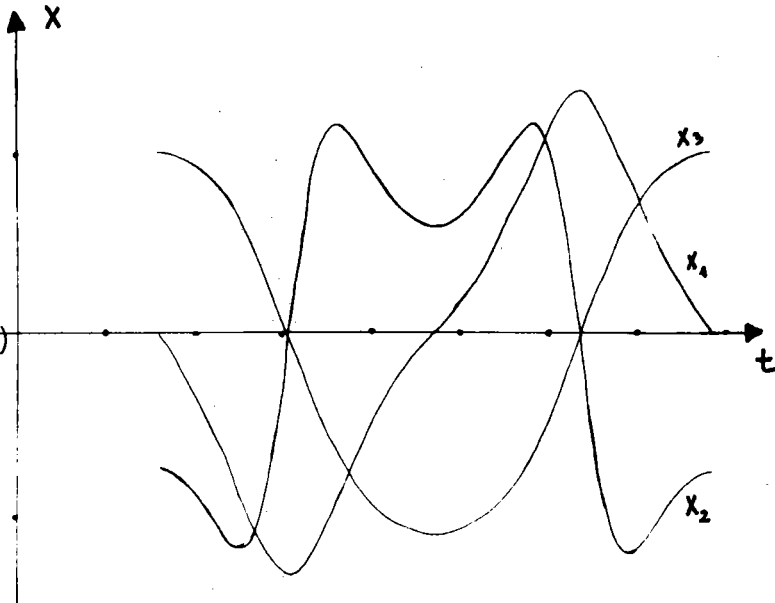
graphe, dans le plan (t, x) ,

$x = (x_1, x_2, x_3)$, d'une solution 2π -périodique appartenant à

$S_{\sigma_1}^{\pi/2}(2\pi)$; issue du point

$(x_2^0 = 0.75274178,$

$x_3^0 = 1.01419581) \in \Sigma(1, 1, 2\pi)$



graphe dans le plan (t, x) ,

$x = (x_1, x_2, x_3)$, d'une solution 2π -périodique appartenant à

$S_{\sigma_1}^{\pi/2}(2\pi)$, issue à l'instant

$t = \pi/2$ du point

$x_2^0 = 0.592778466,$

$x_3^0 = 1.15511072) \in \Sigma(1, 0, 2\pi)$

graphe dans le plan (t, x) ,

$x = (x_1, x_2, x_3)$, d'une solution 2 -périodique appartenant à

$S_{\sigma_1, 0}^0(2\pi)$, issue à l'instant

$t = 0$ du point

$(x_1^0 = 1.103125, b = 0) \in \Sigma_0(2, 2\pi)$

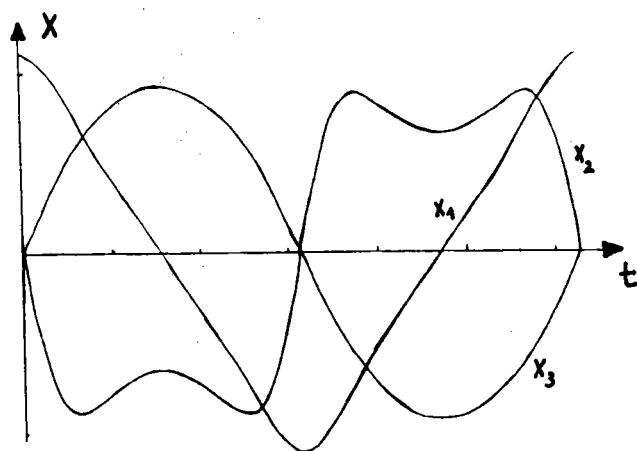
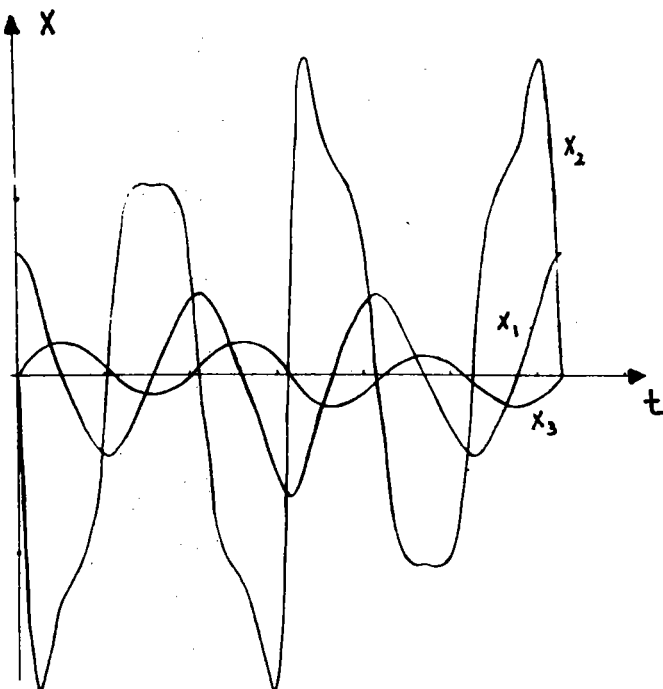


Fig. (10)

graphe, dans le plan (t, x)
 $x = (x_1, x_2, x_3)$, d'une solution
 2π -périodique appartenant à
 $S_{\sigma_1, 0}^0(2\pi)$ issue à l'instant
 $t=0$ du point $(x_1^0=4.159375,$
 $b=8.14221438) \in \Sigma_0(1, 2\pi)$.



graphe, dans le plan (t, x)
 $x = (x_1, x_2, x_3)$, d'une solution
 2π -périodique appartenant à
 $S_{\sigma_1, 0}^0(2\pi)$ issue à l'instant
 $t=0$ du point $(x_1^0=4.159375,$
 $b=-2) \in \Sigma_0(3, 2\pi)$.

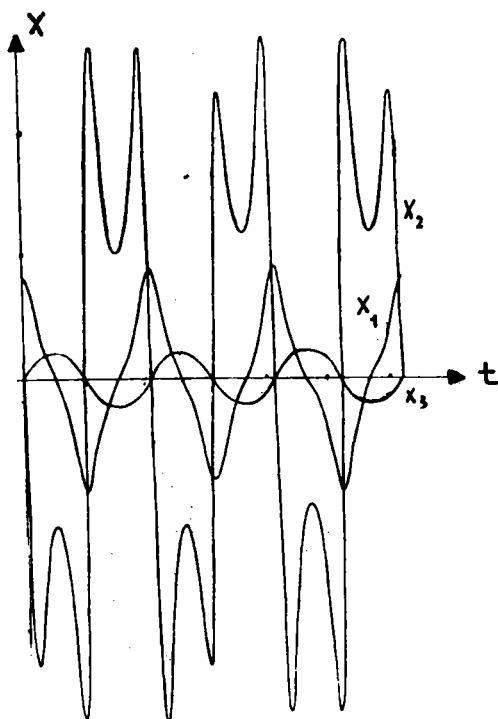


Fig. (9)

TABLEAU 1

Points $(x_{1i}^0, b_i) \in \Sigma_0(1, 2\pi)$,
correspondants aux solutions
 m_i^* de la Fig. (5).

m_i^*	x_{1i}^0	b_i
1	0.580415274	-0.330148631
2	1.10323525	0.328111274
3	3.14110856	10.00117185
4	3.73496348	13.987005
5	3.76575625	13.1345079
6	3.49025258	8.14221438
7	2.92693369	1.16506967
8	2.81640625	0.0000000
9	2.7844341	-0.328147062
10	1.63073449	-10.2609686
11	1.20999306	-21.2416787
12	2.10056171	-40.7206925
13	3.55129249	-64.089831
14	3.68306539	-56.916988
15	4.23091009	-14.922048
16	4.59952711	-2.9277144
17	4.69375	0.0000000
18	4.72875117	1.07019788

TABLEAU 2

Points $(x_{2i}^0, x_{3i}^0) \in \Sigma(1, 1, 2\pi)$,
correspondants aux solutions
 n_i^* de la Fig. (8).

n_i^*	x_{2i}^0	x_{3i}^0
1	0.012101272	1.77193386
2	-0.0302525238	1.68115509
3	-0.25975945	1.35387001
4	-0.75274178	1.01419581
5	-2.06287452	0.392580931
6	-2.87005673	0.115846605
7	-3.69428155	-0.100994709
8	-12.4980208	-0.965018764
9	-22.4944105	-1.22857166
10	-26.0440281	-1.2806186
11	6.75851363	-0.519933887
12	7.04162843	-0.420694053
13	8.58783287	0.0000000
14	11.005549	0.416941868
15	20.5821851	1.07453187
16	30.1793869	1.30290219
17	39.7787018	1.41754898
18	2.92945345	-0.0865705823
19	3.07320893	0.0525874293
20	7.01883241	1.33221243

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. ARNOLD *"Equations différentielles ordinaires"*
Editions Mir, Moscou, (1974).
- [2] S. LEFSCHETZ *"Differential Equations : geometric theory interscience"*
New-York, (1950).
- [3] B. KARR *"Systèmes différentiels périodiques avec symétries :
Stabilité et bifurcations; application à l'équation du
pendule forcé"*
Thèse, Univ. de Metz, (1982).
- [4] M. KURDI,
M.H. TIHAMI et
B.V. SCHMITT *"Perturbation de solutions périodiques de systèmes
différentiels"*
Soumis pour publication aux Comptes-Rendus de l'Académie
des Sciences, Paris.
- [5] L. PONTRIAGUINE *"Equations différentielles ordinaires"*
Editions Mir, Moscou.
- [6] N. ROUCHE et
J. MAWHIN *"Equations différentielles ordinaires" - T.1 et T.2.*
Masson, Paris, (1979).
- [7] R. REISSIG,
G. SANSONE et
R. CONTI *"Non-linear differential equations of higher order"*
Leyden : Noordhoff International Pub. Cop., (1974).
- [8] M. ROSEAU *"Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité"*
New-York, (1966).
- [9] B.V. SCHMITT *"Sur la structure de l'équation de Duffing sans dissipation"*
SIAM J. Appl. Math. - Vol.42, (1982), pp. 868-894.
- [10] B.V. SCHMITT et
S. MAZZALI *"Solutions périodiques symétriques de l'équation de
Duffing sans dissipation"*
J. Differential Equations, Vol.42, (1981), pp. 199-214.