AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

R 1468.

S / Mz
81 /2

MISE en FORME
et
ENDOMMAGEMENT

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ

N° inv.	1981003 S
Cote	S/Mz 81/2
Loc	

par

Jean-Michel JALINIER

Ingénieur Arts et Métiers

Docteur Ingénieur

Thèse soutenue le 3 Juin 1981 à l'U. E. R. « Sciences exactes et naturelles » de l'Université de METZ, pour obtenir le titre de **DOCTEUR ES SCIENCES** devant le Jury composé de :

MM.	B. BAUDELET	*Université de Metz*
	C. CRUSSARD	*Pechiney Uginne Kuhlmann*
	D. DURAND	*Université de Metz*
	J. FRIEDEL	*Université de Paris-Sud*
	M. GERL	*Université de Nancy I*
	J.-M. PIERRARD	*I.N.P. de Grenoble*
	G. POMEY	*Ecole des Mines de Paris*

UNIVERSITE DE METZ BIBLIOTHEQUE

Cette thèse est dédiée à ma femme qui m'a permis de trouver l'équilibre nécessaire à la réalisation de ce travail.

Ce travail a été effectué au Centre de Recherche en Génie Physique et Mécanique de l'Université de Metz, Laboratoire de Physique et Technologie des Matériaux. Ce laboratoire fait partie du Laboratoire associé au CNRS n°155 et du GRECO "Grandes Déformations et Endommagement".

Le Professeur Bernard Baudelet a su, tout au long de ce travail, agir en tant que conseiller tout en respectant toujours ma démarche scientifique et mes méthodes de pensée. Il a toujours favorisé mon développement à l'intérieur et à l'extérieur du Laboratoire en me faisant réellement confiance et en respectant mes actes. Je lui suis extrêmement reconnaissant de cette attitude et de l'amitié qu'il m'a témoignée. J'espère pouvoir dans l'avenir lui prouver que j'ai été, durant cette thèse, à très bonne école.

Ce travail doit beaucoup à tous les membres du Laboratoire qui entretiennent une ambiance extrêmement amicale et sympathique très propice au travail. J'aimerais remercier tout particulièrement le Docteur Jean-Hubert Schmitt avec qui j'ai beaucoup apprécié de travailler durant deux ans et dont j'ai repris quelques-uns des résultats.

Durant ce travail j'ai bénéficié de l'assistance de Monsieur Alain Bilocq pour toute la partie expérimentale. J'ai trouvé en lui quelqu'un qui sait comprendre rapidement ce qu'il faut faire et qui sait l'effectuer avec efficacité. Cette compréhension mutuelle associée à des rapports amicaux ont permis un gain de temps très appréciable.

Le financement de ce travail a été assuré pour partie par le Centre National de la Recherche Scientifique, pour partie par la Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique que je remercie de leur aide.

J'ai eu des rapports privilégiés avec la Société Lorraine de Laminage Continu et avec le groupe Pechiney Aluminium qui m'ont toujours fourni le métal que je demandais et qui ont été les éléments de dialogue industriels nécessaires à l'orientation de ce travail. Je les remercie de cette action et de l'intérêt qu'ils ont témoigné à ces travaux. J'aimerais tout particulièrement remercier Monsieur Daniel Rault avec qui j'ai eu de très nombreuses discussions enrichissantes sur l'aspect industriel de la mise en forme.

Sans Madame Georgette Attali que je tiens à remercier, ce travail n'aurait pas vu sa concrétisation sous forme dactylographiée.

Mes remerciements vont enfin à Messieurs Crussard, Durand, Friedel, Gerl, Pierrard et Pomey qui ont bien voulu examiner ce travail et me faire l'honneur de participer au jury. Je suis très reconnaissant à chacun d'eux d'avoir accepté malgré une charge de travail très importante.

INTRODUCTION

A. PRESENTATION

A.1 RESULTATS EXPERIMENTAUX 1

A 1.1 Courbe limite de formage 1

A 111 Introduction 1

A 112 Méthode de détermination 3

A 1.2 Forme et position de la CLFS 7

A 1.3 Influence de l'épaisseur du matériau sur la CLFS 11

A 1.4 Influence du diamètre de matrice en gonflement hydraulique /*/ 15

A 1.5 Influence de la trajectoire de déformation 19

A 1.6 Forme et position de la CLFR 25

Références (A.1) 37

A.2 CALCULS PREDICTIFS DES COURBES LIMITES DE FORMAGE A STRICTION 39

A 2.1 Théorie de l'écoulement plastique 39

A 211 Présentation 39

A 212 Instabilité plastique. Matériau homogène 41

A 213 Instabilité plastique. Matériau hétérogène 43

i- Présentation 43

ii- Résultats 47

iii- Anisotropie 51

A 2.2 Théorie de la déformation plastique 53

A 221 Présentation 53

A 222 Instabilité plastique. Matériau homogène 57

A 223 Instabilité plastique. Matériau hétérogène 62

A 2.3 Analyse critique des deux théories 65

A 231 Fondements 65

i- Etude métallurgique 65

ii- Etude énergétique 77

A 232 Prédiction de l'instabilité plastique 8
Références (A.2) 84

B. ANALYSE THEORIQUE DES COURBES LIMITES DE FORMAGE A STRICTION

B.1 LOI DE COMPORTEMENT 87
B 1.1 Anisotropie cristallographique 87
B 111 Présentation 87
B 112 Evolution 97
B 1.2 Ecrouissage 101
B 121 Présentation 101
B 122 Différentes formes de la loi d'écrouissage 105
B 123 Analyse de l'évolution de l'écrouissage 109
B 1.3 Sensibilité à la vitesse de déformation 113
B 1.4 Discussion 119
B 141 Interaction anisotropie-écrouissage 119
B 142 Calcul de la CLFS 123
B 143 Expression de la loi de comportement 124
Références (B.1) 126

B.2 EVOLUTION DES VARIABLES METALLURGIQUES 129
i- taille de grain 129
ii- rugosité 133
iii- hétérogénéité chimique 135
B 2.1 Présentation de l'endommagement 137
B 2.2 Détermination et mesure expérimentale de l'endommagement 147
B 221 Présentation 147
B 222 Comparaison des méthodes 155
B 2.3 Croissance de l'endommagement 163
B 231 Endommagement par décohésion 167
B 232 Endommagement par fragmentation 179
B 2.4 Fonction Endommagement 189

B 2.5 Effet de l'endommagement sur la rhéologie du matériau 205
B 251 Modélisation 205
B 252 Résultats 217
Références (B.2) 226
3 CALCUL DES COURBES LIMITES DE FORMAGE A STRICTION 231
B 3.1 Introduction 231
B 3.2 Forme et position de la CLFS 237
B 3.3 Effet de l'épaisseur sur la CLFS 245
B 3.4 Effet de rayon de courbure 245
B 3.5 Effet du chemin de déformation sur la forme et le niveau de la CLFS 253
B 3.6 Bilan des calculs prédictifs des CLFS 256
Références (B.3) 259

. ANALYSE THEORIQUE DU PROBLEME DES COURBES LIMITES DE FORMAGE A RUPTURE
.1 PRESENTATION 261
.2 CRITERES MACROSCOPIQUES 263
C 2.1 Critère de Latham et Cockroft 263
C 2.2 Critère de Oyane 266
C 2.3 Autres critères 267
.3 CRITERES MICROSCOPIQUES 269
C 3.1 Modèle de coalescence de l'endommagement de décohésion 269
C 3.2 Modèle de coalescence de l'endommagement par fragmentation 281
.4 DISCUSSION - CONCLUSIONS 285
Références (C) 291

D. CONCLUSIONS GENERALES 293
Références regroupées par chapitre. 297
ANNEXE 1. INFLUENCE EXPERIMENTALE DE CERTAINS PARAMETRES SUR LA COURBE LIMITE DE FORMAGE A STRICTION 311

Annexe 1.1 Les moyens d'essai et leur influence expérimentale sur la CLFS 31
111 Essais de traction 31
112 Essais de gonflement hydraulique 31
113 Essais simulatifs sur presse 31
i- essai Nakazima 31
ii- IPS 31
iii- Essai par poinçon à fond plat 31
iv- Essai Fukui et Swift 31
114 Essais de cisaillement plan 31
115 Comparaison des CLFS 32
Annexe 1.2 Influence de l'épaisseur initiale du matériau sur la position de la CLFS 32
Références (Annexe 1.) 33
ANNEXE 2. CALCULS D'INSTABILITE PLASTIQUE 33
Annexe 2.1 Principe du travail maximum 33
Annexe 2.2 Calcul d'instabilité en théorie de l'écoulement 33
221 Matériau homogène 33
i- Existence d'une striction localisée 33
ii- Condition d'apparition 34
222 Matériau hétérogène 34
Annexe 2.3 Calcul d'instabilité en théorie de l'écoulement pour un matériau hétérogène anisotrope 34
Annexe 2.4 Calcul d'instabilité en théorie de la déformation 35
i- Matériau homogène 35
ii- Matériau hétérogène 35
Références (Annexe 2.) 36
ANNEXE 3. MODELE DE CROISSANCE D'UNE CAVITE SPHERIQUE DANS UNE MATRICE PLASTIQUE /RICE ET TRACEY/
- Linéarisation du modèle 36
Annexe 3.1 Présentation générale 36
Annexe 3.2 Application 36

321 Cavité sphérique dans une matrice rigide parfaitement plastique soumise à un champ de tension uniaxiale 364
322 Champ de contraintes triaxial général 367
3221 Cas où le changement de forme est négligeable 367
3222 Cas où le changement de forme n'est pas négligeable 369
Annexe 3.3 Linéarisation du modèle 371
EXE 4. COALESCENCE PAR BANDE DE CISAILLEMENT LOCALISEE 377

La mise en forme par déformation plastique des métaux et alliages représente un mode d'obtention du produit fini très important actuellement. Ainsi, la mise en forme des métaux en feuilles, dont la carosserie automobile est l'une des grandes applications, est d'un intérêt économique tout particulier de par le tonnage qu'elle représente. Les tôles d'acier représentent toujours la plus grande part du marché mais les tôles d'aluminium sont en progression constante. Du fait de la crise énergétique actuelle, dans l'industrie automobile, la réduction de poids des véhicules est fondamentale et le choix d'un métal s'exprime surtout en prix de revient du kilogramme gagné. Il est donc crucial de savoir utiliser les potentialités maximum d'un métal. Or, le comportement de ces métaux qui entrent dans des systèmes technologiques très évolués est assez mal connu. Il faut savoir que l'étude du procédé de mise en forme par déformation plastique nécessite des analyses complexes et fondamentales telles que :

- l'analyse métallurgique de l'évolution des phénomènes structuraux au cours de la mise en forme,

- l'analyse mathématique du processus d'instabilité plastique qui limite la mise en forme.

Chacune de ces deux analyses, très différentes dans l'esprit et l'approche scientifique n'est l'objet que de peu d'études actuellement. La connaissance du problème de la mise en forme dans le but d'optimiser l'utilisation des métaux nécessitera l'unification des approches mathématiques et métallurgiques dans une description unique et complète du processus.

Ce travail se veut être un pas vers cette connaissance scientifique, en se situant volontairement à l'interface entre l'approche métallurgique et mathématique dans une optique que je qualifierais d'analyse et de modélisation physique du problème de la mise en forme.

Ainsi dans ce travail sont tout d'abord présentés et discutés, dans la partie A, les résultats expérimentaux et théoriques faisant le point des connaissances au début de cette étude. Dans les parties B et C sont développées les observations expérimentales et les analyses théoriques originales introduisant en particulier le concept d'endommagement dont une modélisation physique relativement complète est obtenue. L'influence de l'endommagement sur le processus d'instabilité plastique (partie B) et le processus de rupture ductile (partie C) est étudiée dans une théorie prédictive de comportements expérimentaux jusqu'alors inexpliqués. Les travaux personnels sont référencés par une étoile dans le texte : /*/ afin d'allèger la rédaction pour différencier les travaux propres des travaux d'autres auteurs.

L'esprit de ce travail est de développer une analyse théorique nécessaire, prenant en compte les phénomènes structuraux indispensables à une description juste de la matière, prédictive du comportement pratique, industriel du métal au cours de la mise en forme.

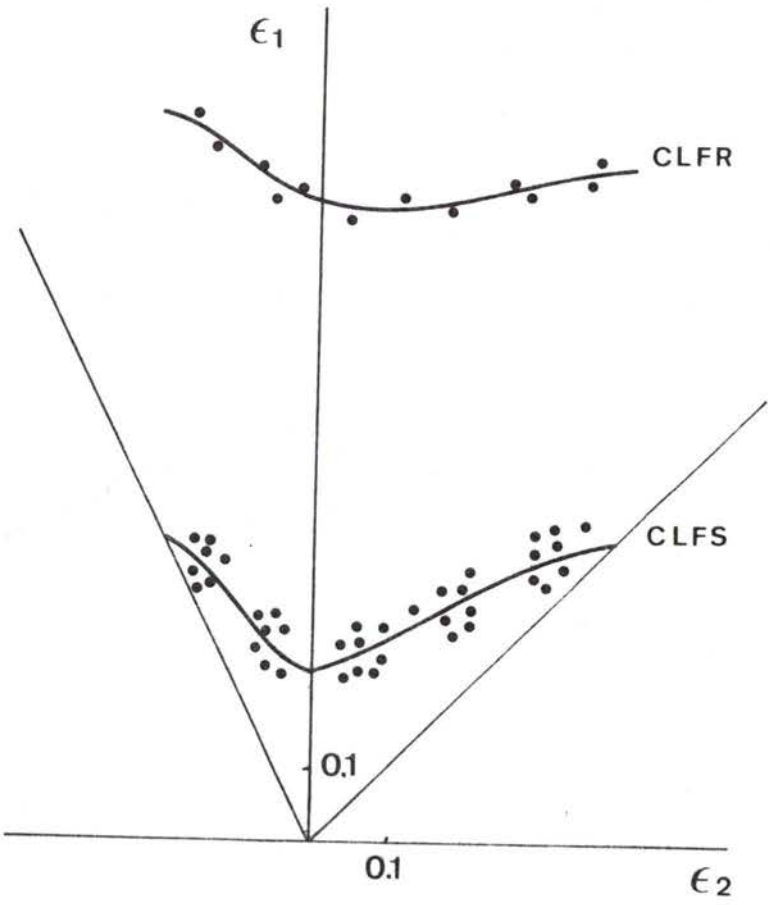


fig.A1/1 Courbes limites de formage à striction (CLFS) et à rupture (CLFR) pour un acier doux

A. Présentation

A.1. RESULTATS EXPERIMENTAUX

A.1.1 COURBE LIMITE DE FORMAGE

A.1.1.1 Introduction

La courbe limite de formage (CLF) a tout d'abord été introduite [1,2] pour représenter la limite supérieure de formage d'une tôle sans qu'il y ait apparition de rupture dans la pièce formée : cette courbe limite de formage à rupture (CLFR) est en général insuffisante car le phénomène de rupture ductile est précédé d'une instabilité plastique donnant lieu à une bande de striction localisée. Cette striction, se manifestant par une sous-épaisseur locale du matériau, est inadmissible dans de nombreuses pièces pour des questions de : résistance mécanique, résistance à la corrosion et esthétique sur les pièces d'habillage. Un deuxième type de courbe : la courbe limite de formage à striction (CLFS) a donc été introduite [3,4] pour marquer la limite supérieure de formage d'une tôle sans qu'il y ait développement d'une instabilité plastique localisée.

Ces courbes sont conventionnellement représentées dans l'espace des déformations principales ε_1, ε_2 dans le plan de la tôle, ε_1 représentant la plus grande des deux déformations. Elles sont déterminées expérimentalement, par des méthodes décrites aux paragraphes suivants, en imposant un chemin de déformation linéaire au matériau caractérisé par le rapport $\rho=\varepsilon_2/\varepsilon_1$. ($\rho=-1/2$ pour la traction simple isotrope, $\rho=0$ en déformation plane, $\rho=1$ en déformation équibiaxée). La figure A1/1 représente les CLFR et CLFS d'un acier doux d'emboutissage. On constate que les points expérimentaux sont bien groupés en deux bandes étroites déterminant chacune des courbes et que l'intervalle de déformation

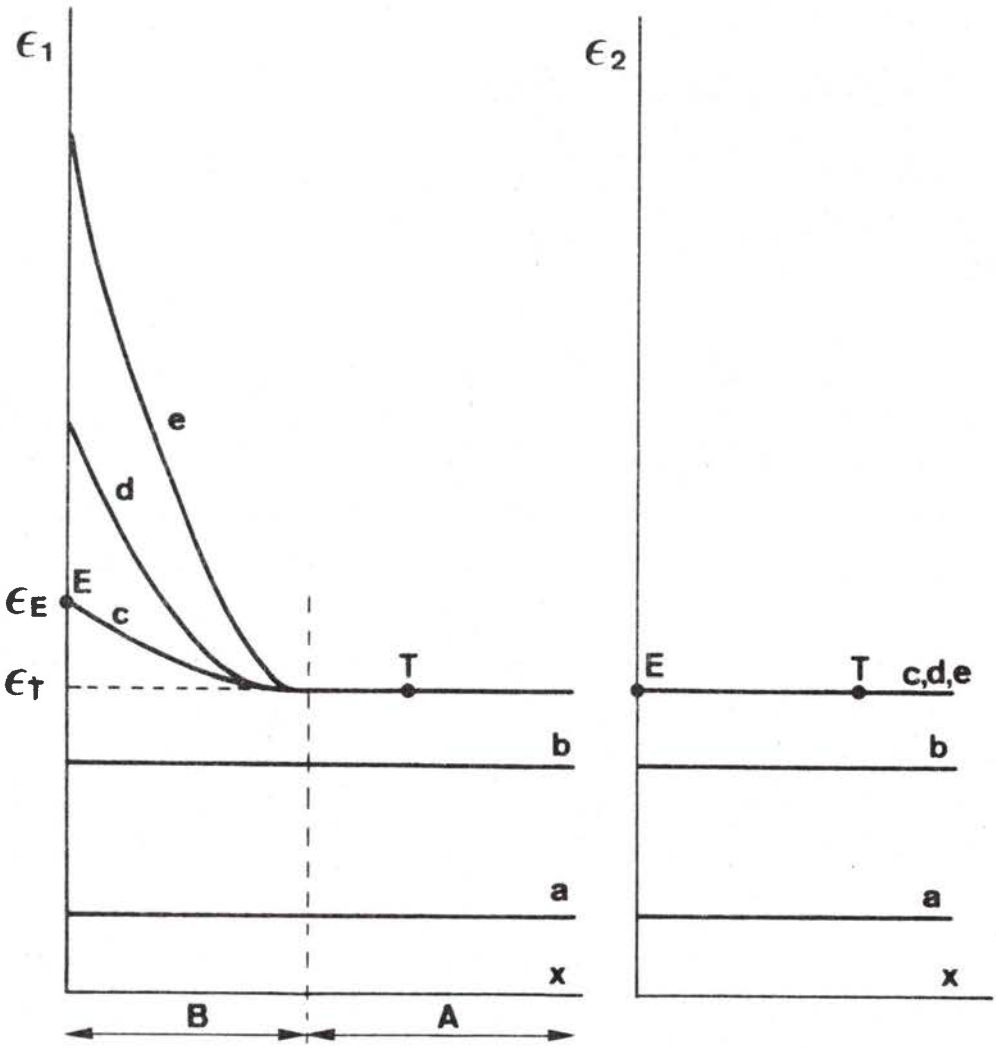


fig.A1/2 Evolution de la répartition des déformations en fonction de la distance le long de l'échantillon pour différentes étapes de la mise en forme.

séparant ces deux courbes est important.

A.1.1.2 Méthode de détermination

Ces méthodes cherchent à cerner avec le plus de précision possible le point d'apparition de la striction donnant le niveau de la CLFS, la CLFR se détermine à partir d'un embouti rompu.

Les méthodes de détermination de la CLFS sont toutes fondées sur la détection de l'apparition d'un fort gradient de déformation caractéristique de la mise en striction. La figure A1/2 représente l'évolution de la répartition des déformations ε_1 et ε_2 pour différents taux de déformations globales. Les déformations sont déterminées à partir d'un réseau de cercles déposés initialement par procédé photographique sur la tôle recouverte d'une fine couche de résine photosensible. Plusieurs grilles de cercles sont utilisées de diamètres différents (fig. A1/3), la distorsion des cercles avec la déformation de la pièce permet d'obtenir les déformations locales de la tôle. On remarque une phase de déformation homogène (étapes a,b) puis le développement d'un gradient de déformation en ε_1 (c,d,e) qui s'aggrave pour conduire à la rupture dans la zone B alors qu'une zone voisine A cesse de se déformer. Parallèlement la déformation ε_2 reste toujours sensiblement homogène et n'évolue plus après la mise en striction. Une première possibilité est de prendre comme niveau de la CLFS la déformation du point T, car tant que cette déformation n'est pas atteinte, la déformation reste homogène. La méthode Veerman /5/ détermine la position de ce point T en mesurant les déformations de cercles voisins et en reportant l'évolution de la déformation d'un cercle en fonction de la déformation moyenne des cercles adjacents (fig. A1/4). Le résultat est une droite de pente 1 tant que la déformation reste homogène, l'apparition de la striction est caractérisée par une augmentation importante de la déformation en un point (W) alors que le reste du matériau cesse de se déformer (v,v'). La limite de formage ainsi déterminée est très sévère et industriellement, pour des raisons d'économie et d'optimisation des matériaux, il est nécessaire d'exploiter au maximum les possibilités de déformation

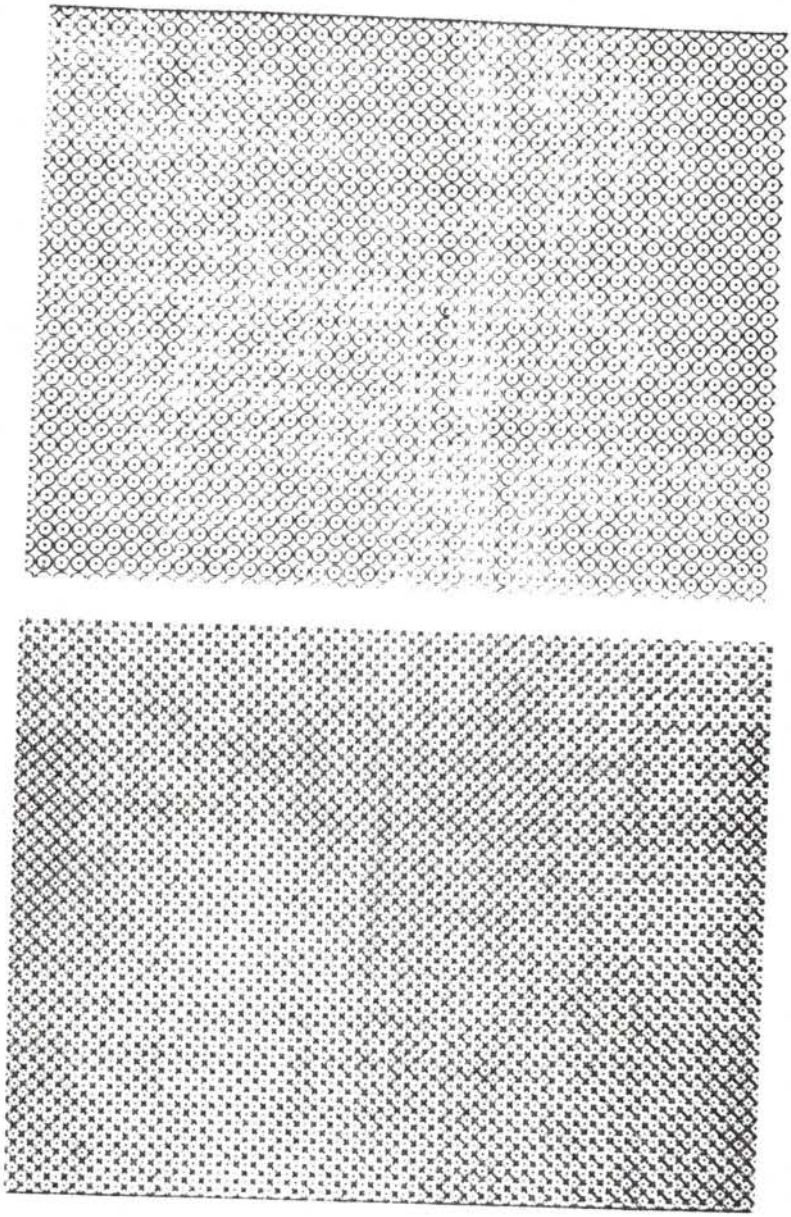


fig.A1/3 Différentes grilles de cercles utilisées pour mesurer les déformations du métal.

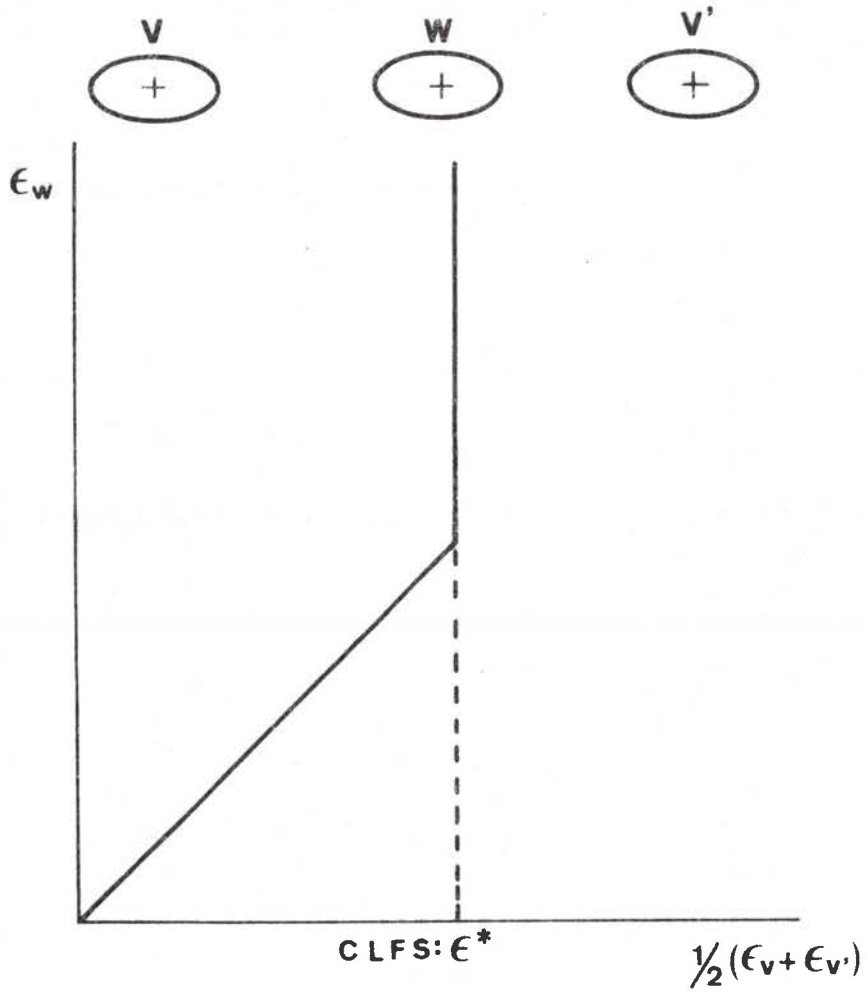


fig.A1/4 Méthode Veerman /5/ décrivant l'évolution de la déformation d'un cercle en fonction de celles des deux cercles voisins.

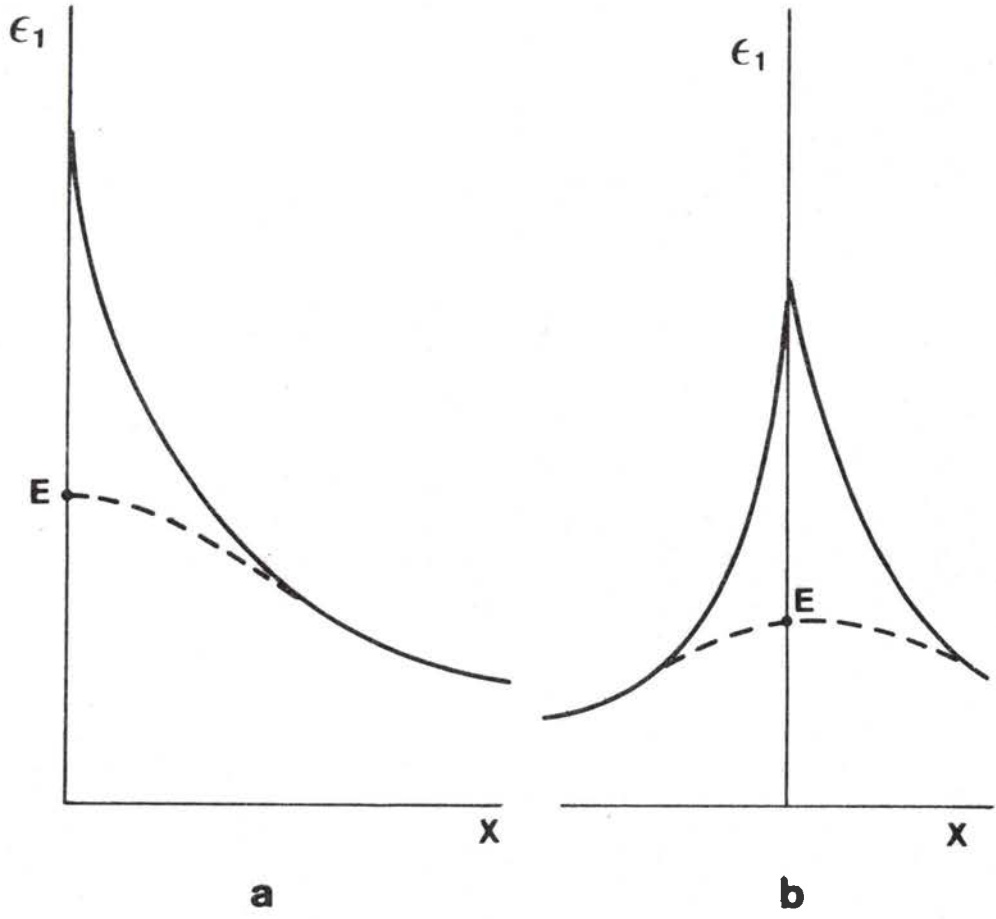


fig.A1/5 Méthode Bragard /6,7/ d'extrapolation de la répartition des déformations à rupture.

du matériau. Pour obtenir ces résultats nous permettons à de faibles gradients de déformation de se développer. Ces gradients ne conduisent pas à un affaiblissement sensible du matériau et ne sont pas visibles à l'oeil nu, de plus ils permettent d'élever sensiblement le niveau de la CLFS en passant du point T au point E (fig. A1/2). La CLFS industriellement efficace se définit donc en terme de gradients de déformations admissibles. Cette notion subjective est très difficile à cerner. La méthode Bragard /6,7/ très largement utilisée donne une voie pour obtenir le niveau de la CLFS. Cette méthode consiste, à partir de la répartition des déformations à rupture, à obtenir par un lissage mathématique le point E correspondant au niveau de la CLFS (fig. A1/5). Cette méthode peut être pratiquée sur un seul profil (fig. A1/5a) ou le double profil des déformations de part et d'autre de la lèvre de rupture (fig. A1/5b).

Une autre méthode (méthode Hecker /8/), aussi répandue, consiste à déterminer le point E comme étant le moment de l'apparition d'une striction visible. Cette méthode empirique correspond tout à fait à la définition donnée au point E. Il suffit de mesurer les déformations des cercles présentant une striction et des cercles n'en présentant pas et de tracer la frontière de séparation de ces deux types de déformations (fig. A1/6).

En marge de ces méthodes, Kobayashi /9/ propose de déterminer la striction comme le moment où une aggravation importante de la rugosité de surface se produit. Cette méthode conduit à un niveau de la CLFS voisin de celui obtenu par la méthode Bragard et Hecker, c'est-à-dire compatible avec la définition de la CLFS par le point E.

En annexe 1.1 sont développés les moyens d'essai et leur influence sur la CLFS.

A.1.2. FORME ET POSITION DE LA CLFS

Les matériaux présentent des CLFS très différentes (fig.A1/7). Le niveau ainsi que la forme dépendent beaucoup du matériau utilisé surtout dans le domaine de l'expansion ($\rho>0$) alors que dans

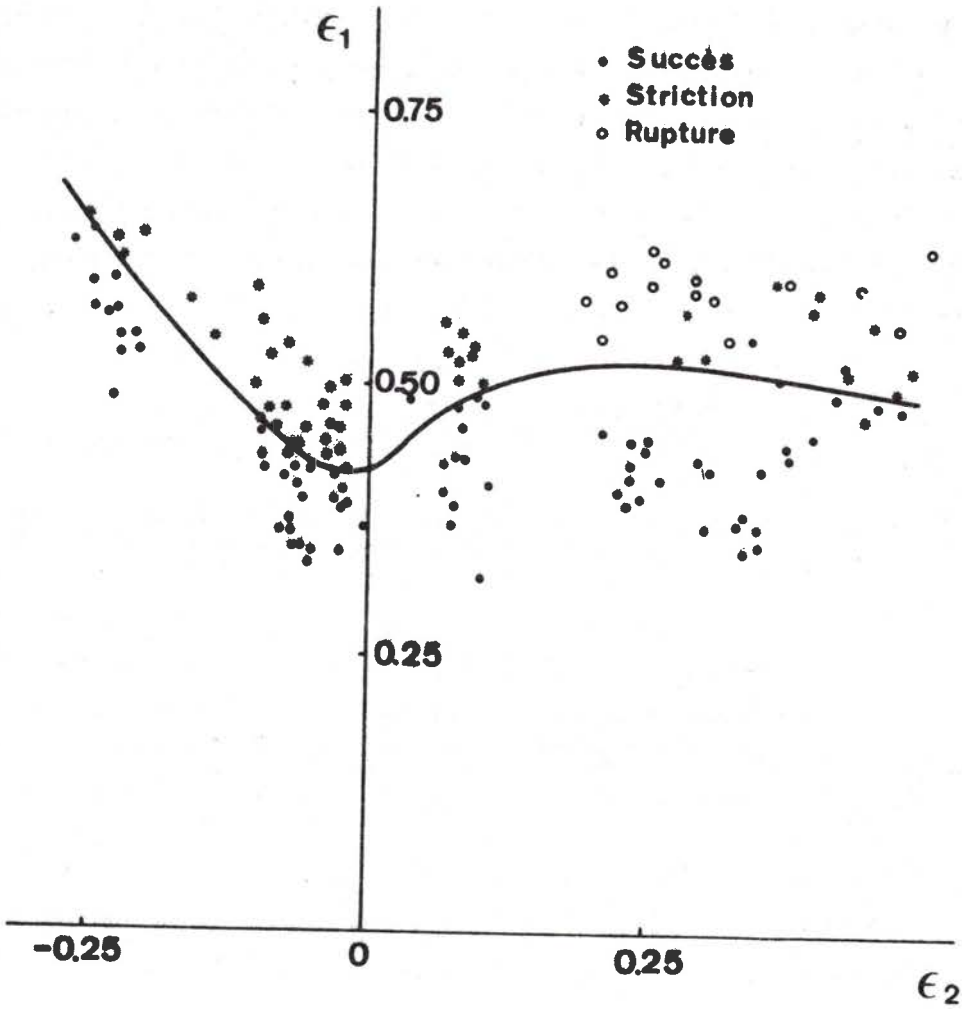


fig.A1/6 Méthode Hecker /9/ de détermination de la CLFS.

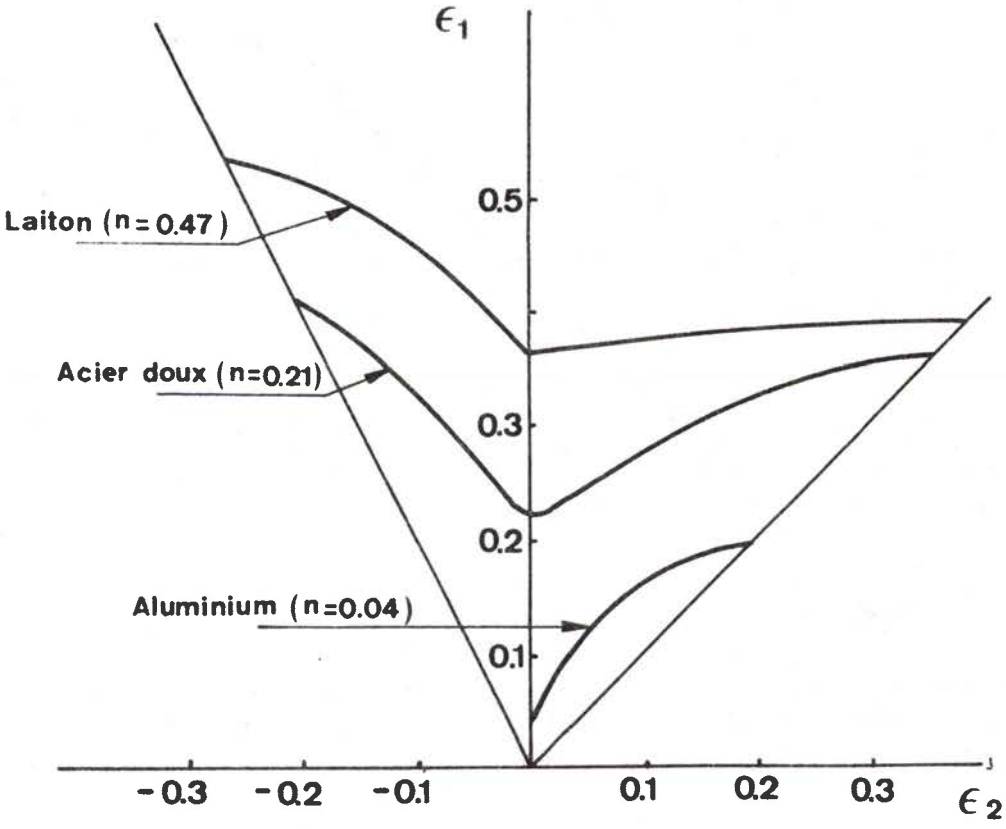


fig.A1/7 Influence du coefficient d'écrouissage sur la forme expérimentale des CLFS.

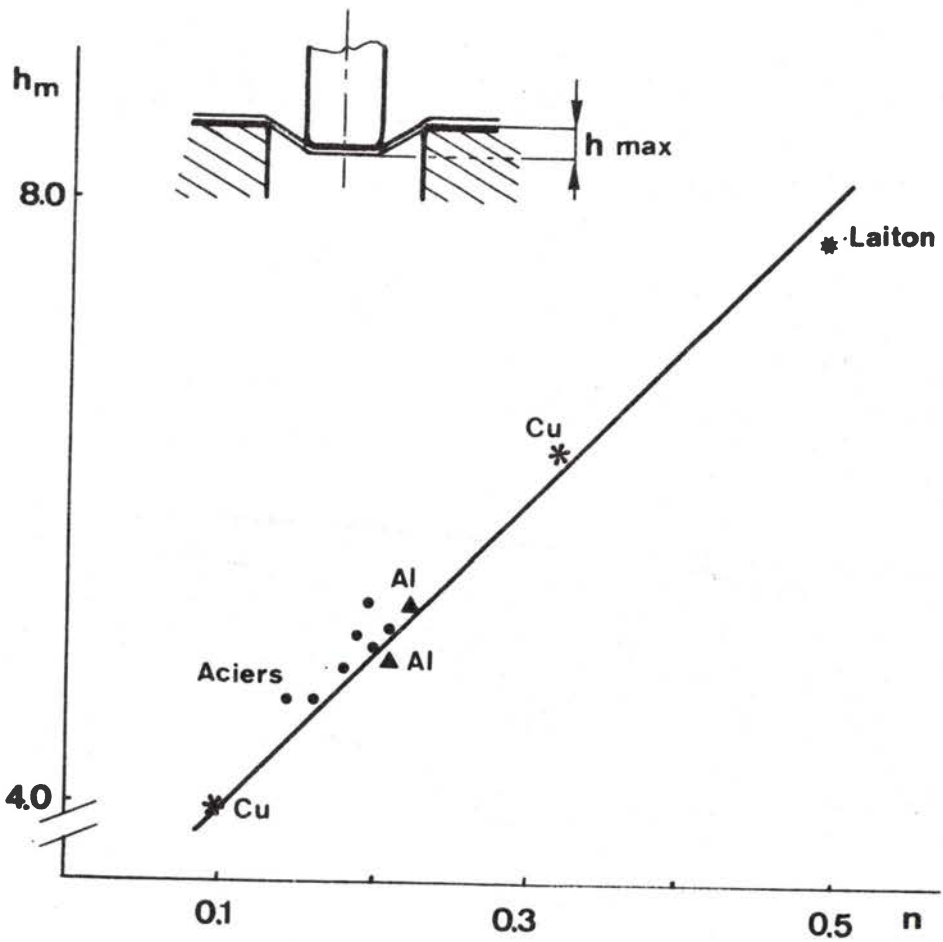


fig.A1/8 Influence de l'écrouissage sur la profondeur d'embouti.

le domaine du rétreint ($\rho<0$) les courbes restent sensiblement parallèles. Les matériaux à fort coefficient d'écrouissage présentent une CLFS plus haute et de pente négative ou nulle dans le domaine de l'expansion alors que les matériaux de faible coefficient d'écrouissage présentent un niveau bas et une pente positive dans le domaine de l'expansion. Il est à noter qu'un matériau de coefficient d'écrouissage voisin de zéro présente un niveau non nul de la CLFS en expansion.

La figure A1/8 montre l'influence du coefficient d'écrouissage sur la profondeur d'embouti obtenue en formage libre /10/. L'effet est très important et l'amélioration du coefficient d'écrouissage des matériaux est un résultat nécessaire industriellement.

La figure A1/9 montre l'influence du coefficient d'anisotropie sur le LDR (Limiting Drawing Ratio), rapport du plus grand diamètre de flan au diamètre du godet cylindrique embouti sans rupture /10/. Pour ce cas de déformation en rétreint, l'effet de l'anisotropie est aussi d'améliorer la formabilité du métal. Il sera montré plus loin qu'à l'inverse, une valeur élevée du coefficient d'anisotropie est défavorable à la formabilité en expansion.

A.1.3 INFLUENCE DE L'EPAISSEUR DU MATERIAU SUR LA CLFS

Un phénomène expérimental important est la variation du niveau de la CLFS avec l'épaisseur initiale de la tôle formée. La figure A1/10 présente les CLFS obtenues pour deux épaisseurs initiales d'un même acier doux /11/. La tôle la plus forte présente une limite de formage plus élevée que la tôle de plus faible épaisseur. Ce résultat est bien connu des emboutisseurs qui ne peuvent diminuer l'épaisseur d'une pièce formée avec succès sans provoquer de défauts ou rupture ; ou au contraire qui savent qu'un remède à la difficulté de former une pièce peut être d'en augmenter l'épaisseur.

La figure A1/11 présente l'effet d'épaisseur observé sur un alliage léger AM1(3003) /*/. Une différence de comportement est observée entre cet alliage et l'acier présenté précédemment (fig. A1/10). En effet, alors que pour l'acier l'influence de l'épaisseur est quasi nulle dans tout le domaine du rétreint, cette influence est importante dans le

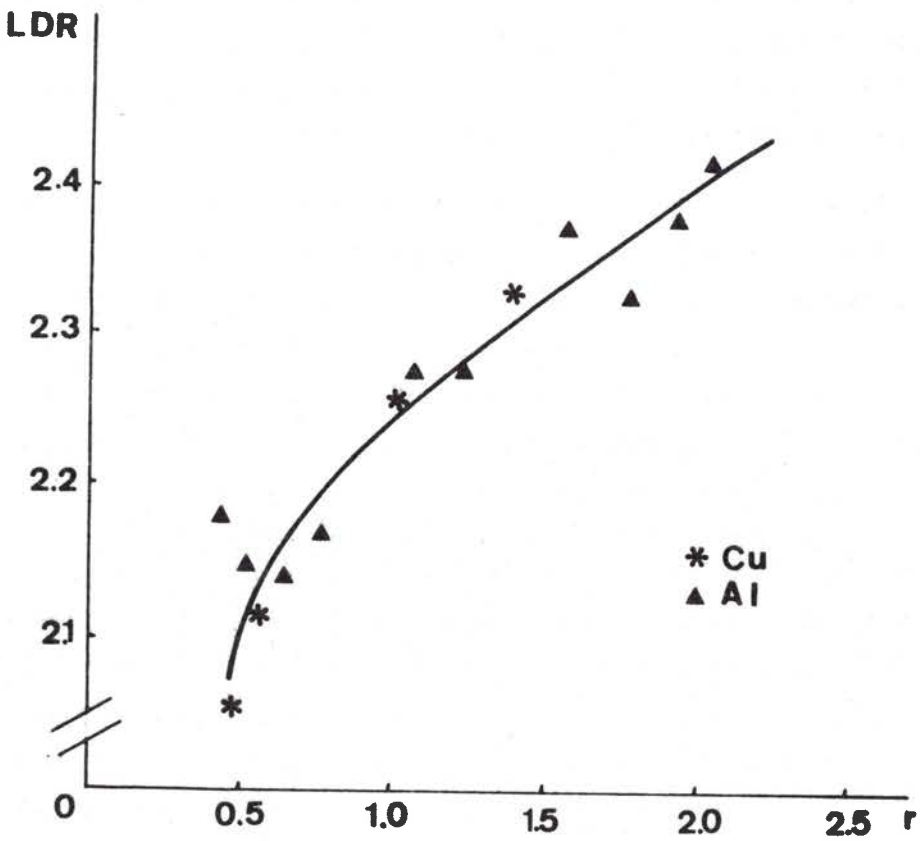


fig.A1/9 Influence de l'anisotropie sur le rapport limite d'emboutissage : LDR défini par le rapport du plus grand diamètre de flan au diamètre du godet formé sans rupture.

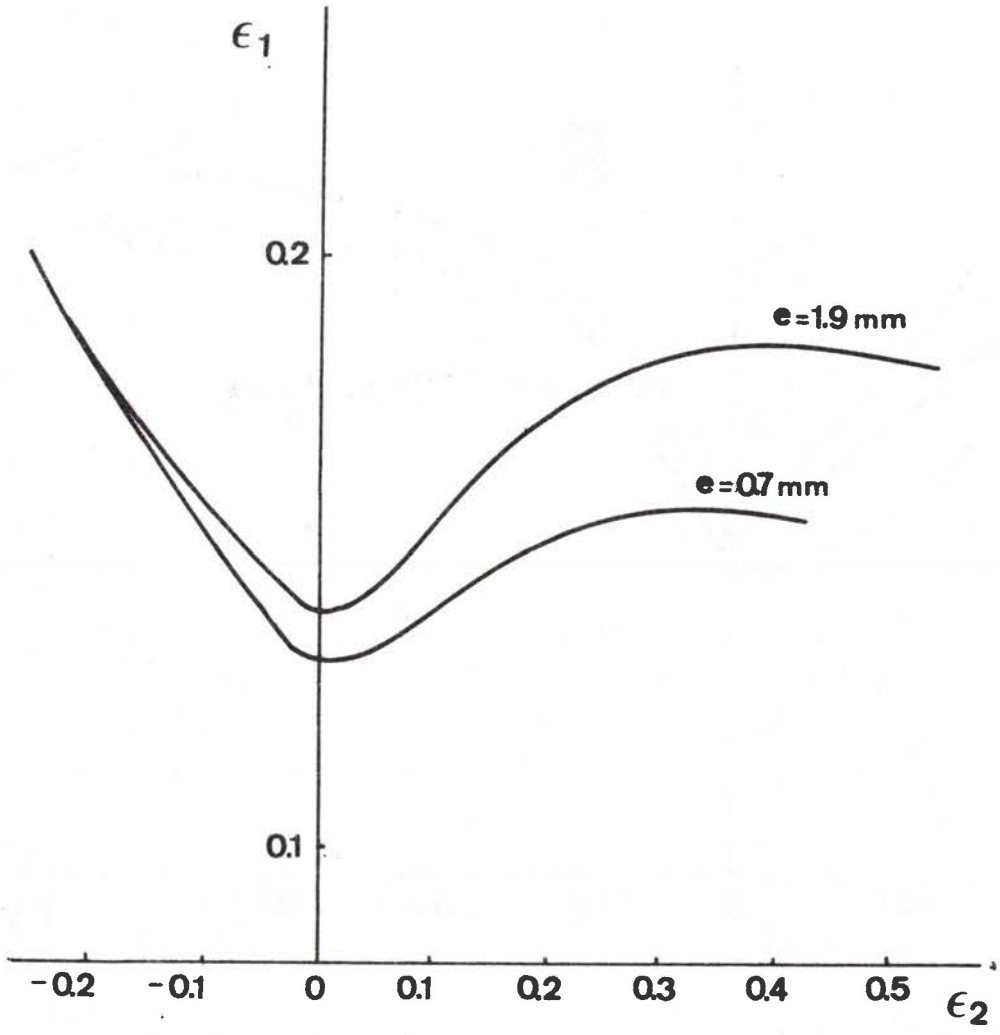


fig.A1/10 Influence de l'épaisseur sur la CLFS pour un acier doux d'emboutissage.

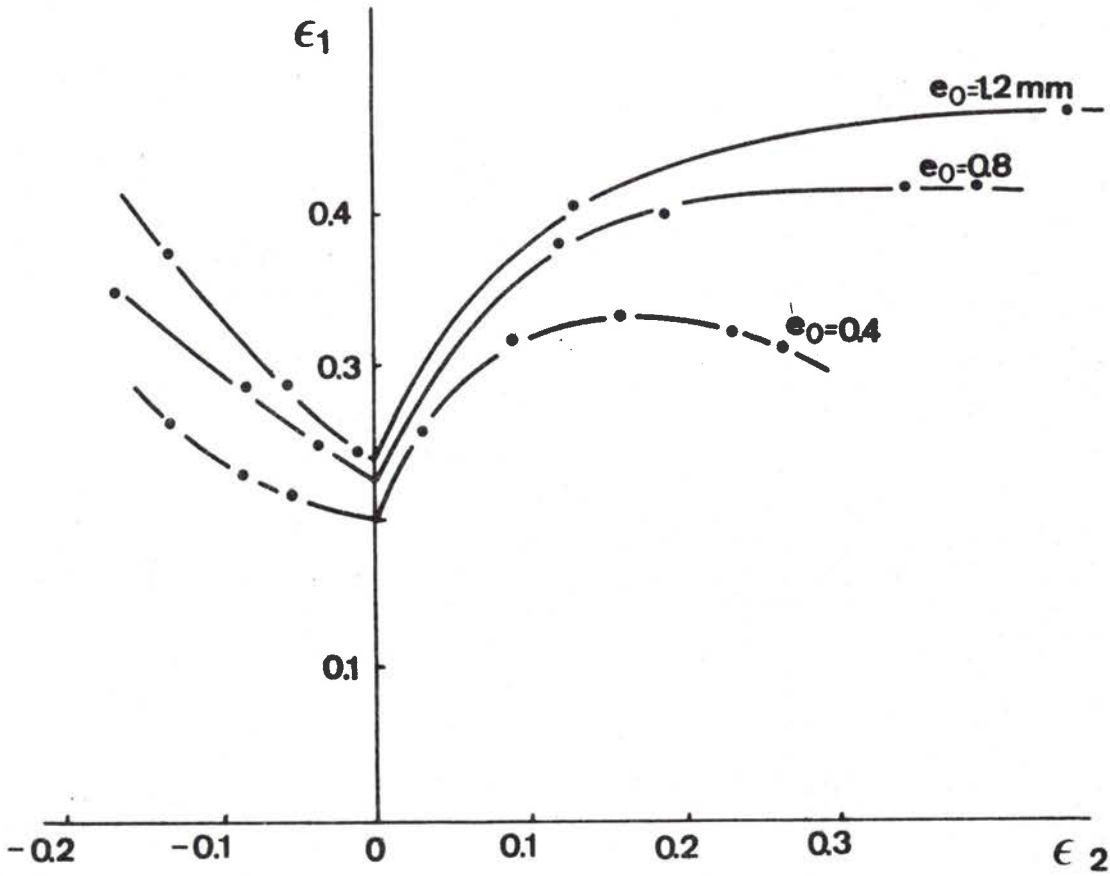


fig.A1/11 Influence de l'épaisseur sur la CLFS pour un alliage léger 3003.

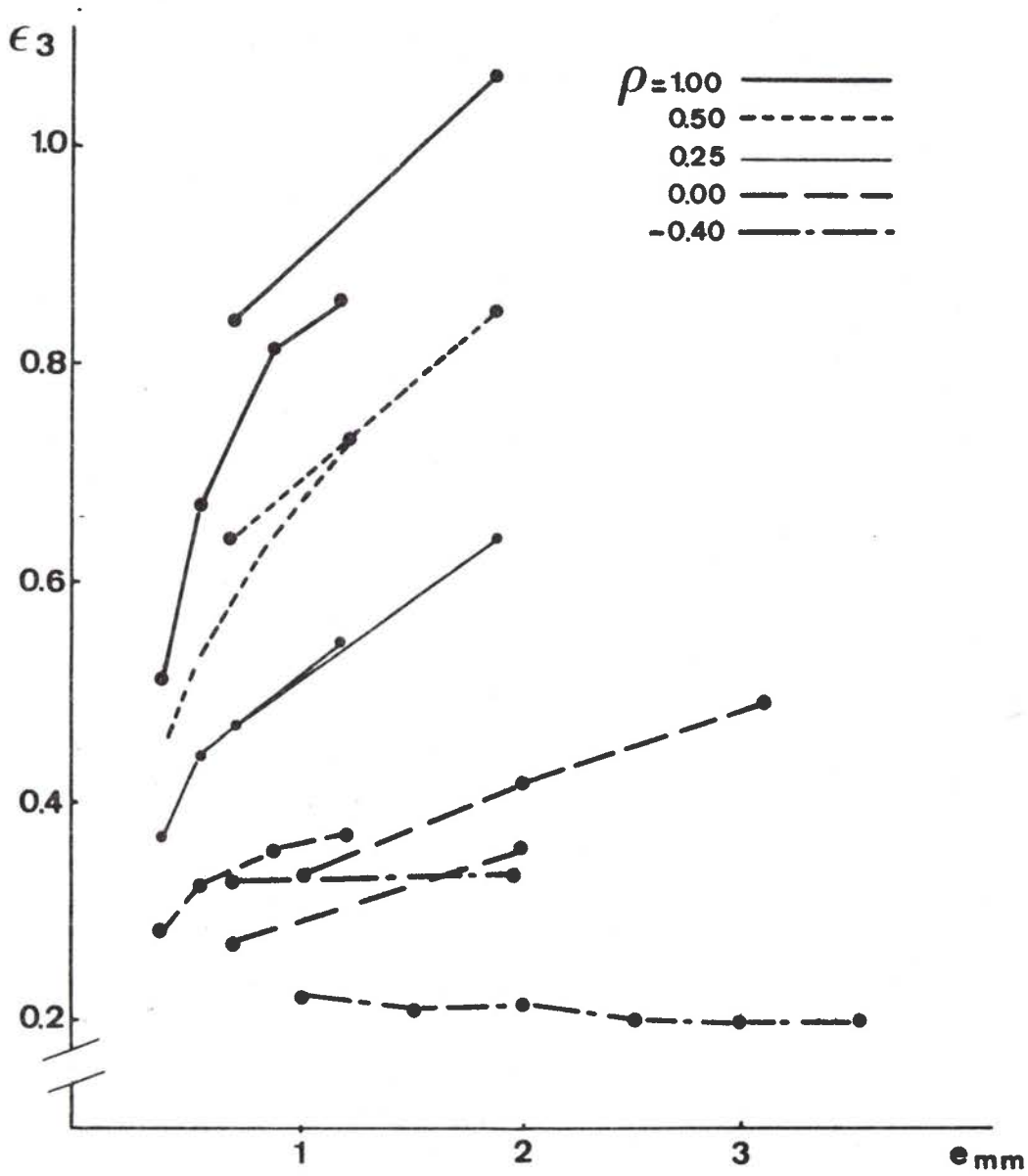


fig.A1/12a Influence de l'épaisseur initiale de la tôle formée sur le niveau de la CLFS caractérisée par la déformation dans l'épaisseur ε_3.

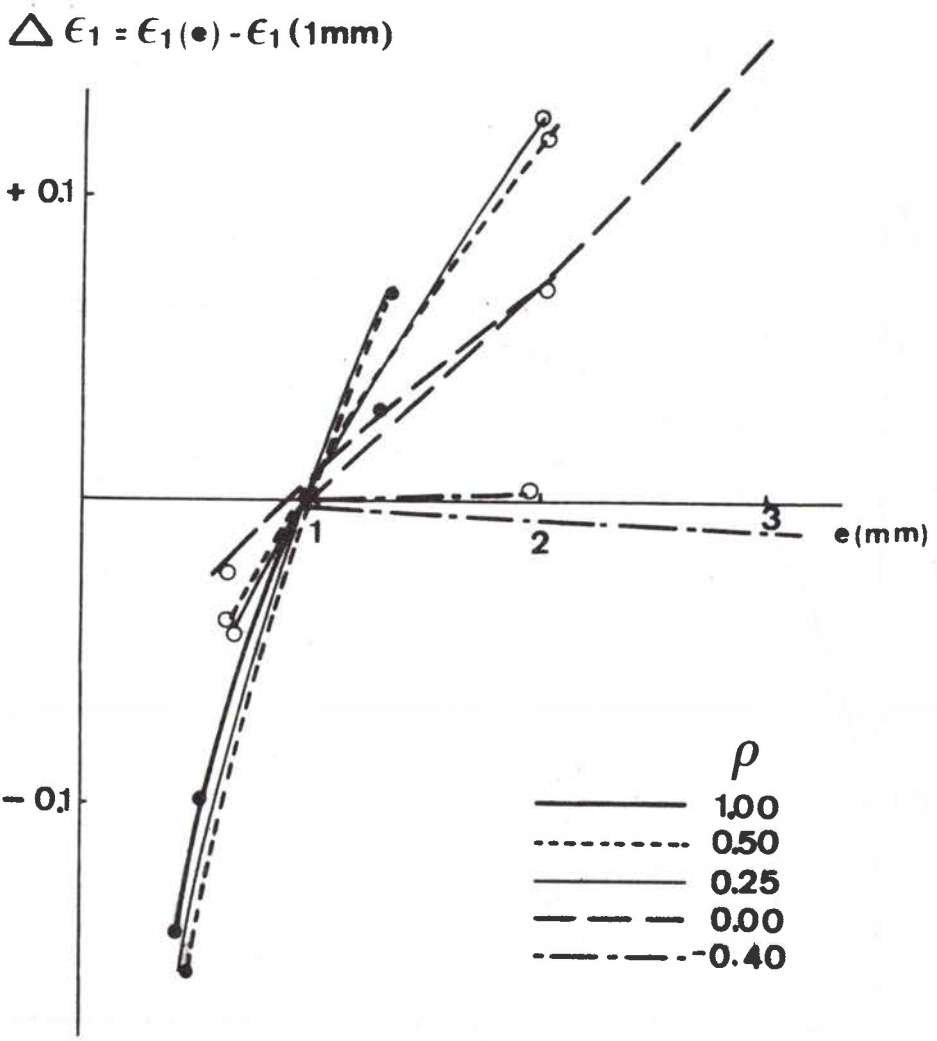


fig.A1/12b Ecart obtenu entre le niveau ε_1 de la CLFS d'une tôle d'épaisseur initiale 1 mm et d'une tôle d'épaisseur initiale quelconque.

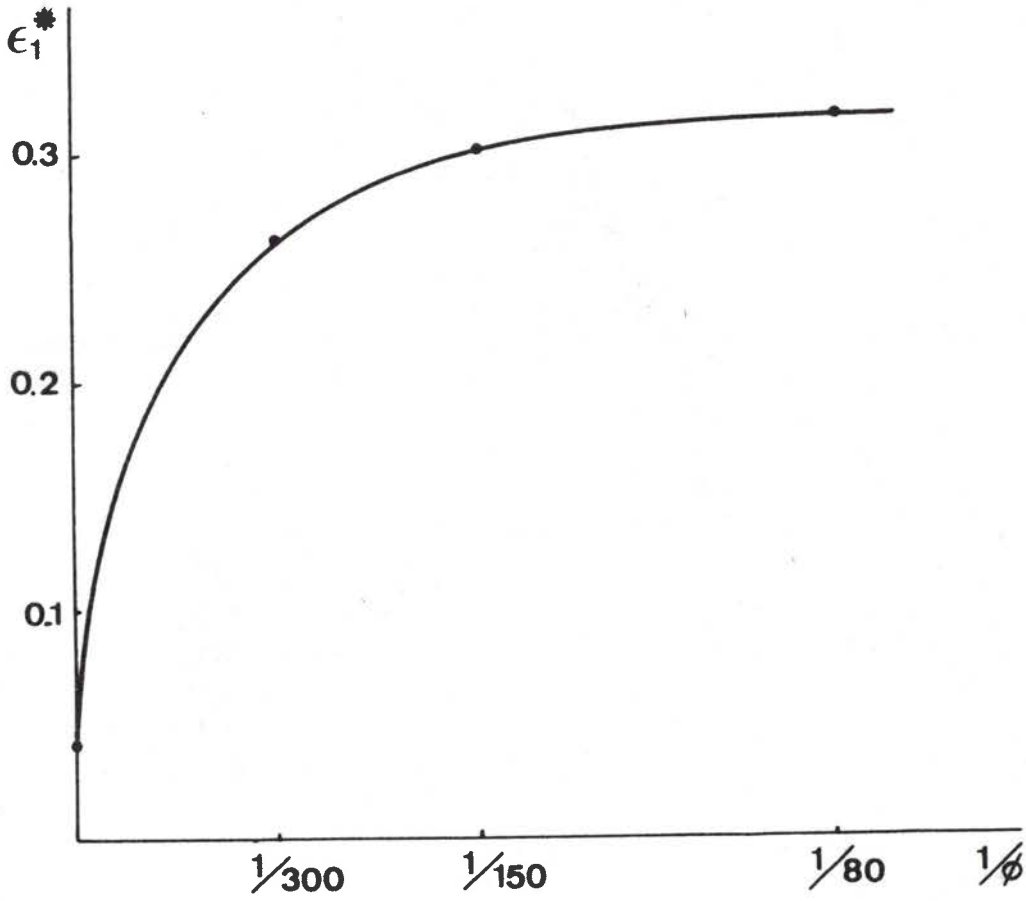


fig.A1/13 Influence du diamètre de la matrice de gonflement sur le niveau de la CLFS.

Une première hypothèse est de considérer les gradients de déformation développés. La figure A1/14 présente les répartitions des déformations mesurées pour les deux diamètres extrêmes de matrice utilisés. Il est aisé de constater qu'une extrapolation des courbes pour déterminer le point E de la CLF par la méthode Bragard, conduit à une CLFS plus élevée pour le plus fort diamètre de matrice. Ce résultat est en contradiction avec la différence observée entre les CLFS et des explications seront avancées et développées dans ce travail.

A.1.5 INFLUENCE DE LA TRAJECTOIRE DE DEFORMATION

La CLFS est déterminée en chemin de déformation linéaire (chargement radial). Il est intéressant de vérifier si cette courbe est aussi applicable pour un chemin de déformation plus complexe. La première étape consiste à effectuer une suite de deux chemins de déformation linéaires (succession de deux chargements radiaux) (fig. A1/15). Une série d'essais systématiques peut être menée de deux manières différentes :

- en pré-déformant le matériau suivant un premier chemin de déformation linéaire puis en déterminant la CLFS obtenue après cette pré-déformation (fig. A1/16a) /16/
- en effectuant une séquence précise de deux chemins de déformation et en augmentant à chaque nouvel essai le taux de la première déformation (fig. A1/16b) /17/.

Les résultats expérimentaux font clairement apparaître une limite de formage en chemin complexe très différente de celle obtenue en chemin direct. En particulier, la séquence traction-expansion conduit à un point de la CLFS plus élevé qu'en chemin direct alors que la séquence expansion-traction diminue les possibilités de formage du métal.

Une méthode très simple fondée sur un raisonnement en déformation équivalente a été proposée /18,19/ qui consiste à reporter, sur la CLFS obtenue en chemins directs, le long du deuxième chemin de déformation, un segment représentant une déformation équivalente égale à celle développée suivant le premier chemin de déformation effectué. La possibilité

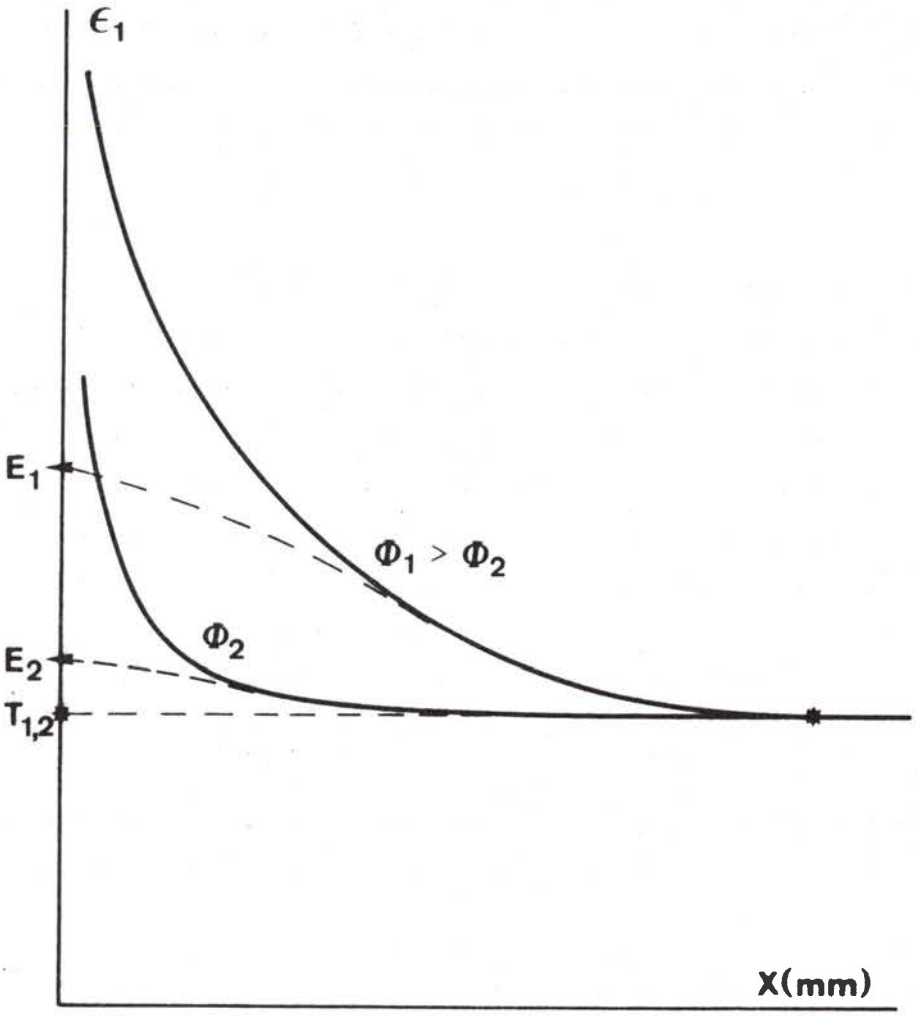


fig.A1/14 Répartition des déformations à la rupture pour deux rayons de courbures et extrapolation pour obtenir le niveau de la CLFS.

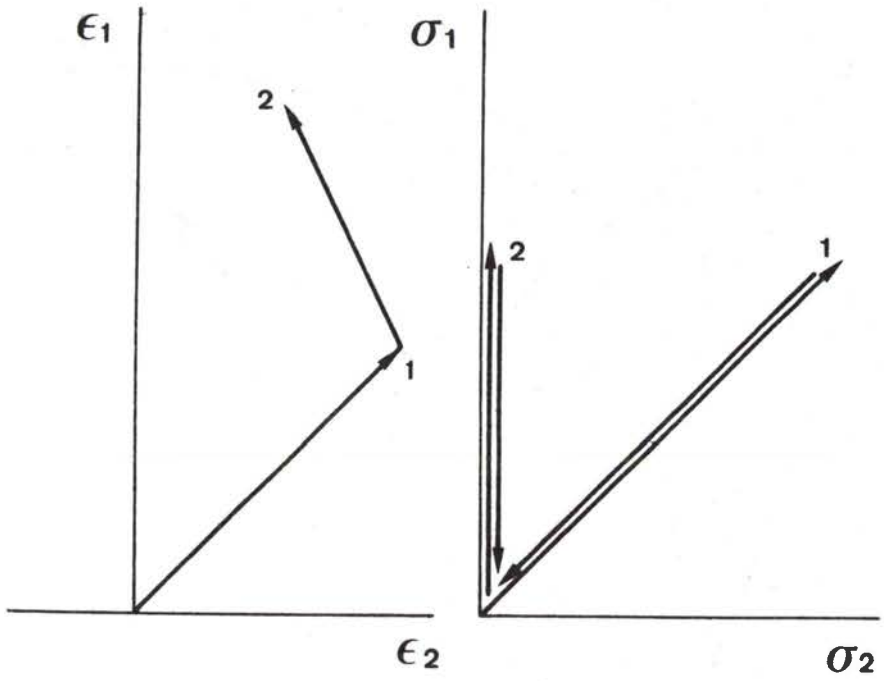


fig.A1/15 Chemin de déformation et de contrainte dans le cas d'un chargement complexe constitué de deux branches linéaires.

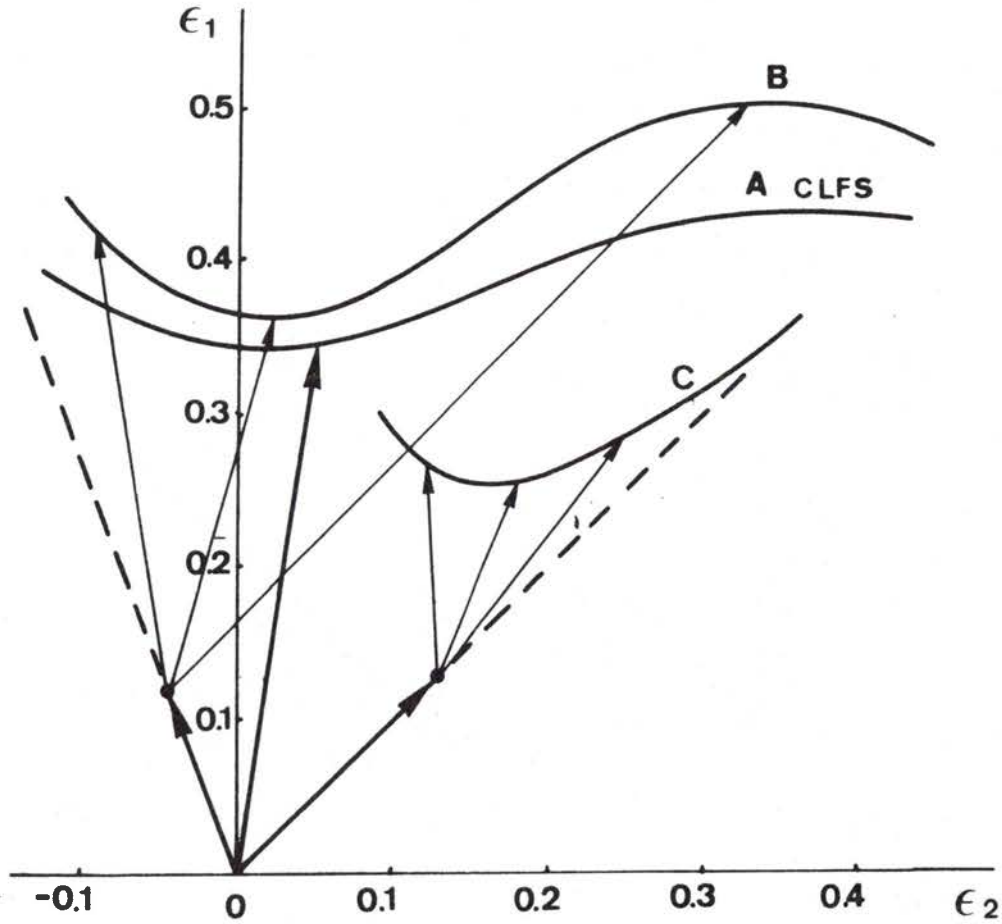


fig.A1/16a Influence d'une prédéformation sur le niveau de la CLFS. - CLFS déterminée classiquement après une prédéformation.

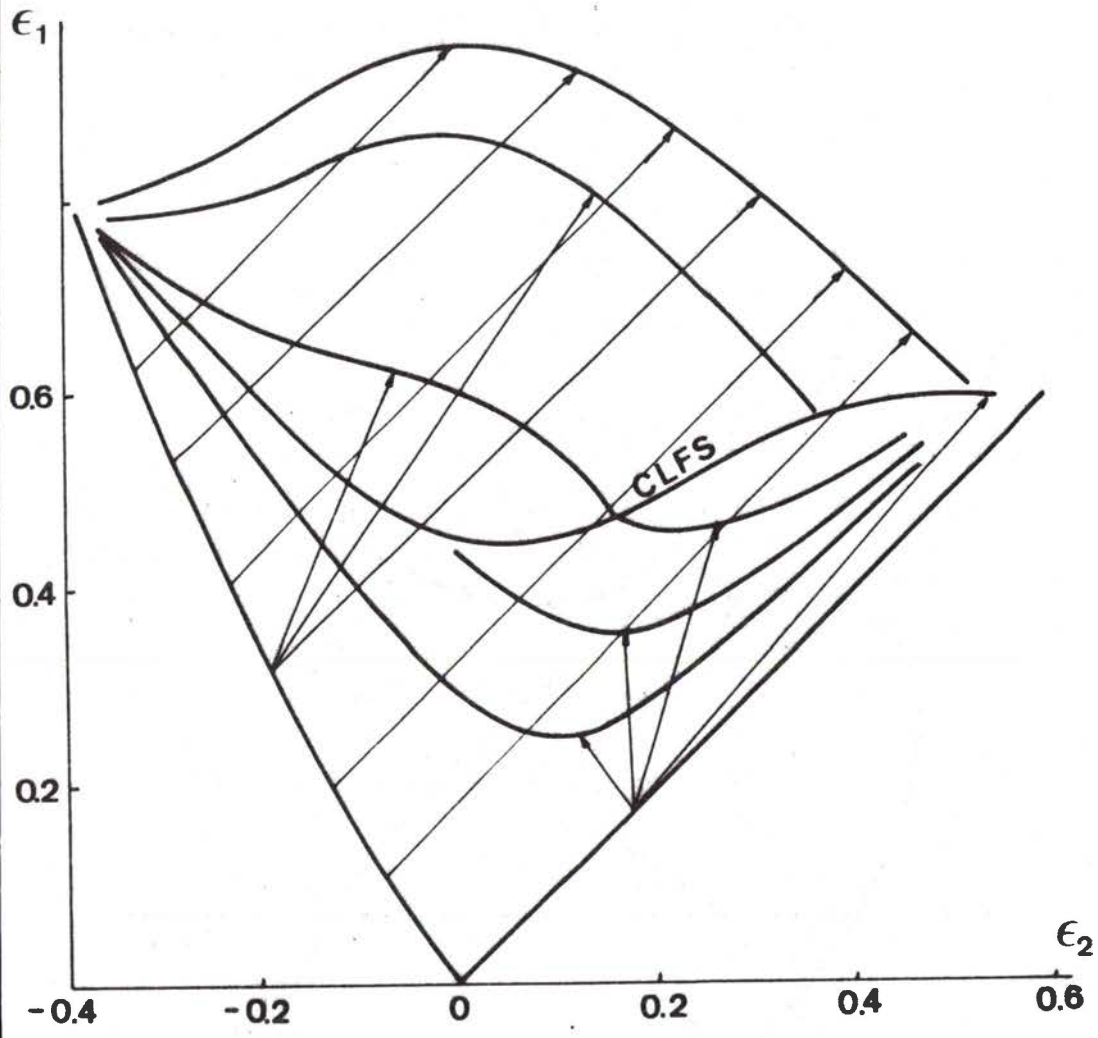


fig.A1/16b Influence d'une prédéformation sur le niveau de la CLFS. - Courbes obtenues par une suite précise de deux chemins de déformations en faisant varier le taux de la première déformation.

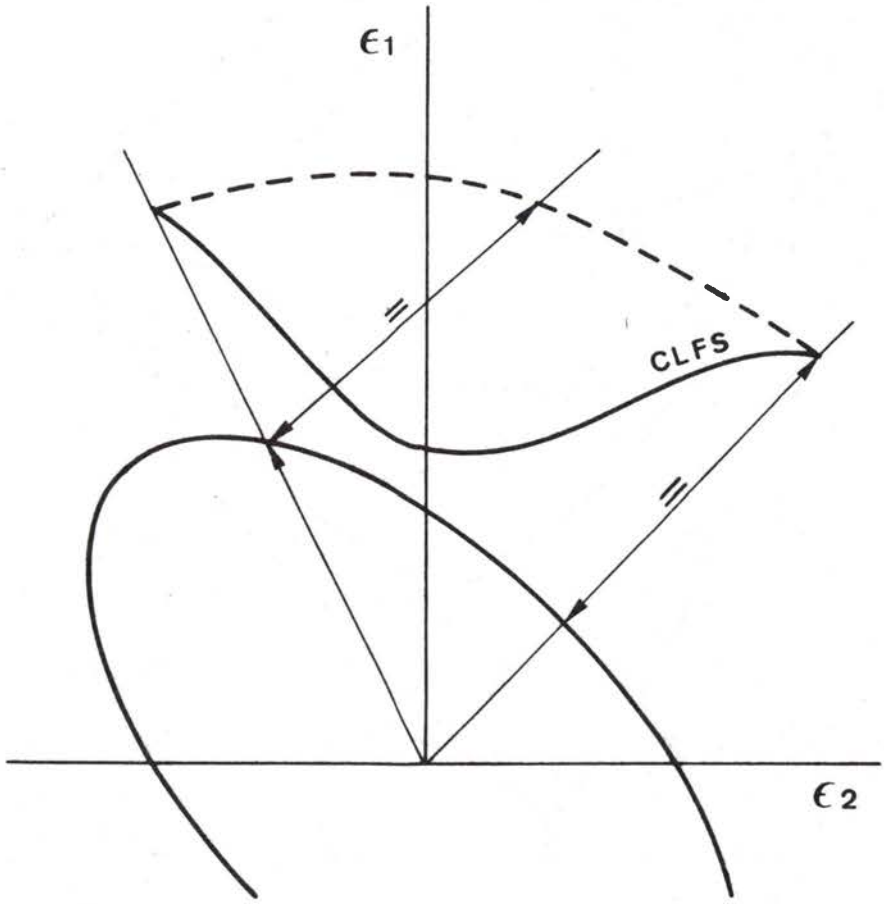


fig.A1/17 Correction proposée pour la détermination du niveau de la CLFS en chemin complexe à partir des déformations équivalentes [18,19].

e formage du matériau suivant le deuxième chemin est supposée être la éformation totale attendue pour le matériau vierge diminué du segment quivalent reporté (fig. A1/17). Dans certains cas cette correction onduit à des résultats en accord avec l'expérience mais, comme il sera ontré plus loin, il semble bien qu'un comportement du matériau ramené ux seules déformation et contrainte équivalentes soit une vue trop rossière de la plasticité.

Des études de la microstructure /$\bar{2}$0-22$\bar{7}$/ menées à la suite d'une ré-déformation en traction uniaxiale ou en expansion équibiaxiale ont ontré des configurations de dislocations très différentes. En traction niaxiale les cellules sont allongées dans le sens de la traction, ectangulaires à paroi relativement peu épaisse (fig. A1/18a) /$\bar{2}$2$\bar{7}$/ lors qu'en déformation équibiaxée, les cellules sont plus équiaxes ormées de 3 à 4 systèmes actifs et à parois plus épaisses (fig. A1/18b) $\bar{2}$2$\bar{7}$. Le fait que la microstructure soit plus bloquée à la suite d'une rédéformation en expansion a été utilisé pour expliquer que le métal e peut plus subir que très peu de déformation supplémentaire, à l'in- erse, la microstructure étant peu bloquée à la suite d'une traction imple, le matériau peut facilement subir d'autres déformations. Ces ésultats seront discutés plus complètement plus loin.

A.1.6 FORME ET POSITION DES CLFR

Les CLFR sont plus difficiles à déterminer que les CLFS car il xiste au voisinage de la rupture un très fort gradient de déformation. es cercles utilisés pour mesurer les déformations donnent une valeur oyenne de la déformation sur la longueur du cercle. La figure A1/19 llustre ce phénomène et l'on remarque que l'on se rapproche d'autant lus du point F que le diamètre de cercle est petit. Ce résultat est ien représenté par la figure A1/20 /$\bar{2}$3$\bar{7}$/ où sont tracées les CLFR obte- ues pour plusieurs diamètres de cercle de la grille initialement éposée sur le matériau. Le cas idéal obtenu pour une grille de cer- les de diamètre nul peut être obtenu, soit en extrapolant les mesures aites pour plusieurs tailles de cercles, soit en utilisant la règle

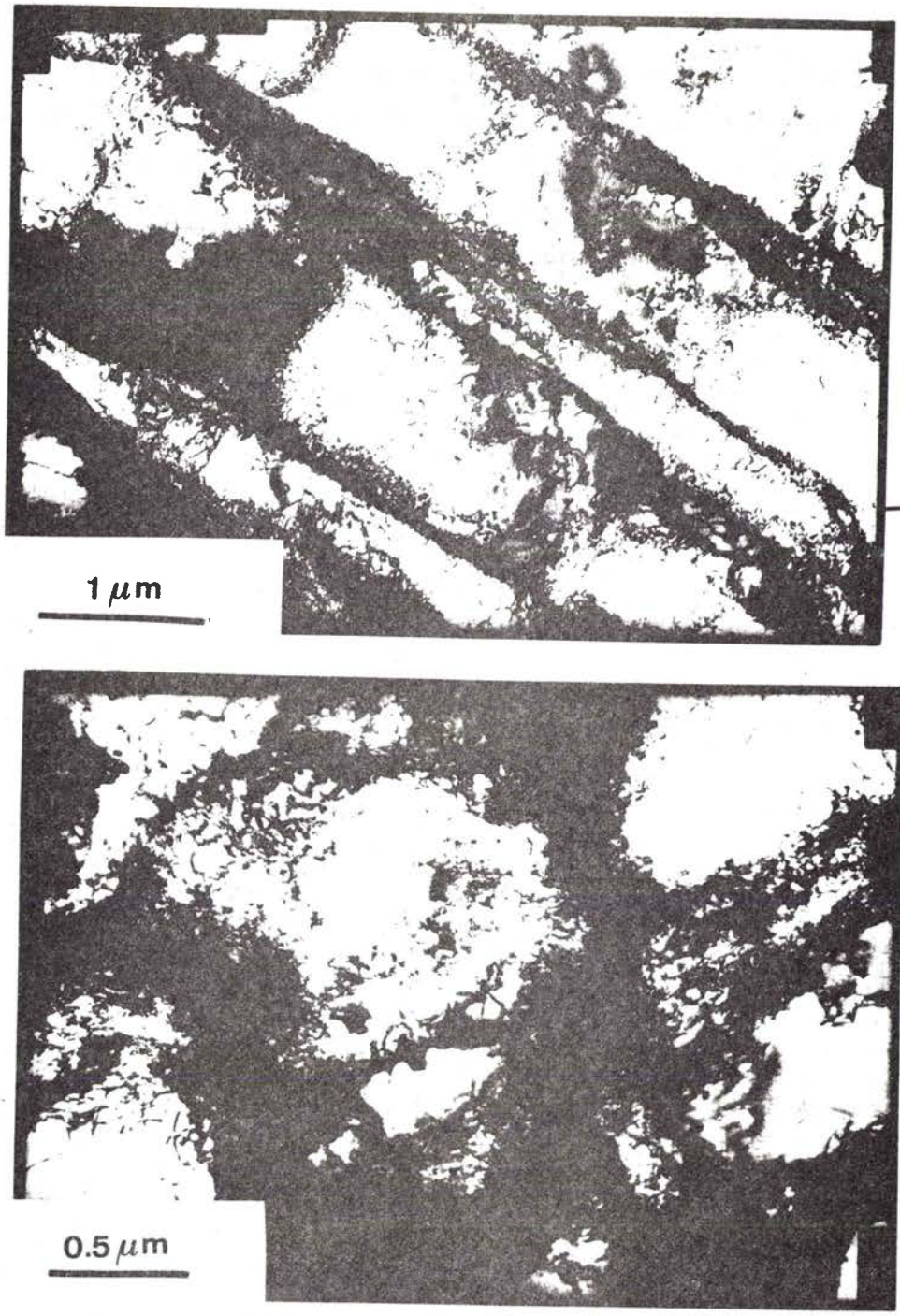


fig.A1/18 Microstructure de cellules à parois de dislocations observées lors d'un chargement d'un acier doux en :
a- traction simple uniaxiale
b- expansion équibiaxée $/\bar{2}1\bar{7}$.

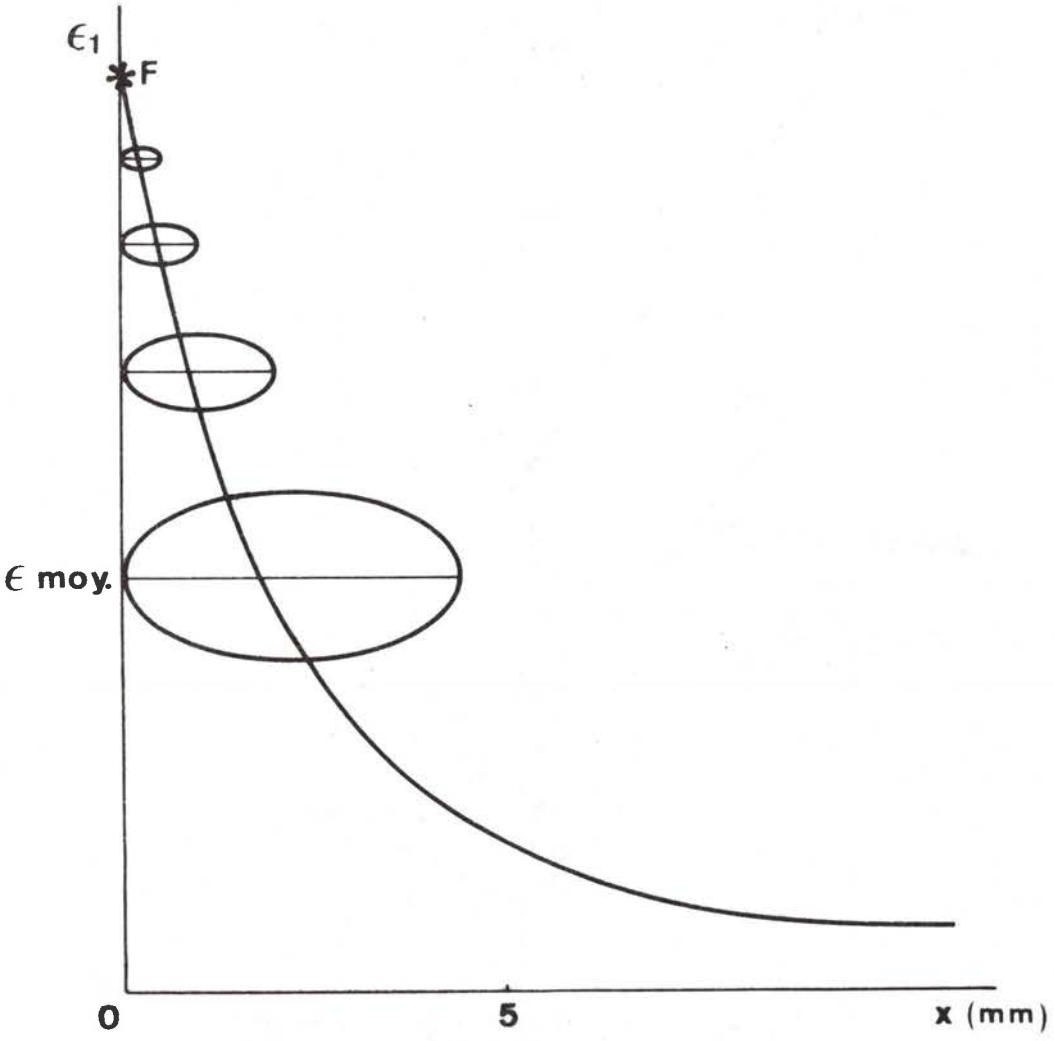


fig.A1/19 Effet de la taille du cercle sur la déformation moyenne mesurée lorsqu'un fort gradient de déformation existe à rupture.

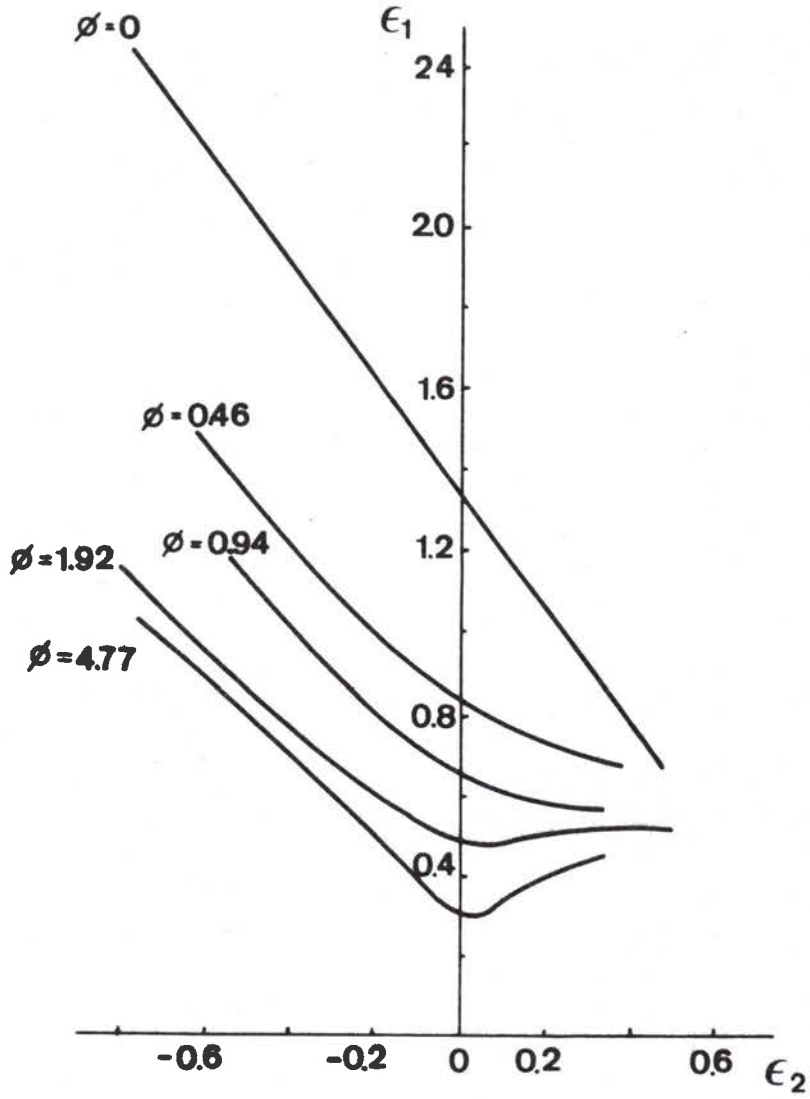


fig.A1/20 Effet du diamètre du cercle de mesure sur le niveau déterminé de la CLFR /$\bar{2}\bar{3}$/.

de conservation du volume. En effet, la figure A1/21 représente les chemins de déformation obtenus jusqu'à la CLFR. La première partie jusqu'à la CLFS est linéaire et imposée par les contraintes appliquées ; la seconde partie, entre la CLFS et la CLFR, est un chemin de déformation plane quel que soit le premier chemin de déformation. Ce résultat a pour conséquence que la déformation ε_2 ne varie pas entre la striction et la rupture et présente donc une répartition homogène facile à mesurer. La déformation dans l'épaisseur ε_3 peut être atteinte par une mesure de l'épaisseur de la lèvre de rupture. La déformation ε_1, niveau de la CLFR, est alors obtenue par la règle de conservation du volume :

$$\varepsilon_1 = -(\varepsilon_2+\varepsilon_3)$$

Cette mesure facile à mettre en oeuvre donne le niveau de la CLFR obtenu par une grille de cercle de diamètre nul, cette courbe est appelée communément, courbe limite de formage à rupture intrinsèque.

Dans le cas des aciers, sa forme est toujours voisine d'une droite (fig A1/22) /24/ de pente p comprise en général dans l'intervalle :

$$-p \in /\bar{1}, 1.5/$$

Dans le cas des alliages légers, certains présentent une courbe intrinsèque linéaire, d'autres gardent une forme de courbe en cuvette (fig. A1/23)/25/.

Il est à noter que le phénomène de rupture étant de type ductile, il est obtenu par coalescence de cavités qui peuvent atteindre un taux de 40% en volume /26/. Dans ces conditions, l'hypothèse de conservation du volume n'est plus vérifiée.

La CLFR peut dans certains cas rencontrer la CLFS dans le domaine de l'expansion. Ce phénomène présent dans l'alliage léger 5154-O, (fig. A1/24)/27/ doit s'interprèter comme une coalescence des cavités intervenant par instabilités microscopiques entre les vides avant que les conditions soient réunies pour une instabilité globale du matériau. Dans ce cas le formage est donc limité par la rupture.

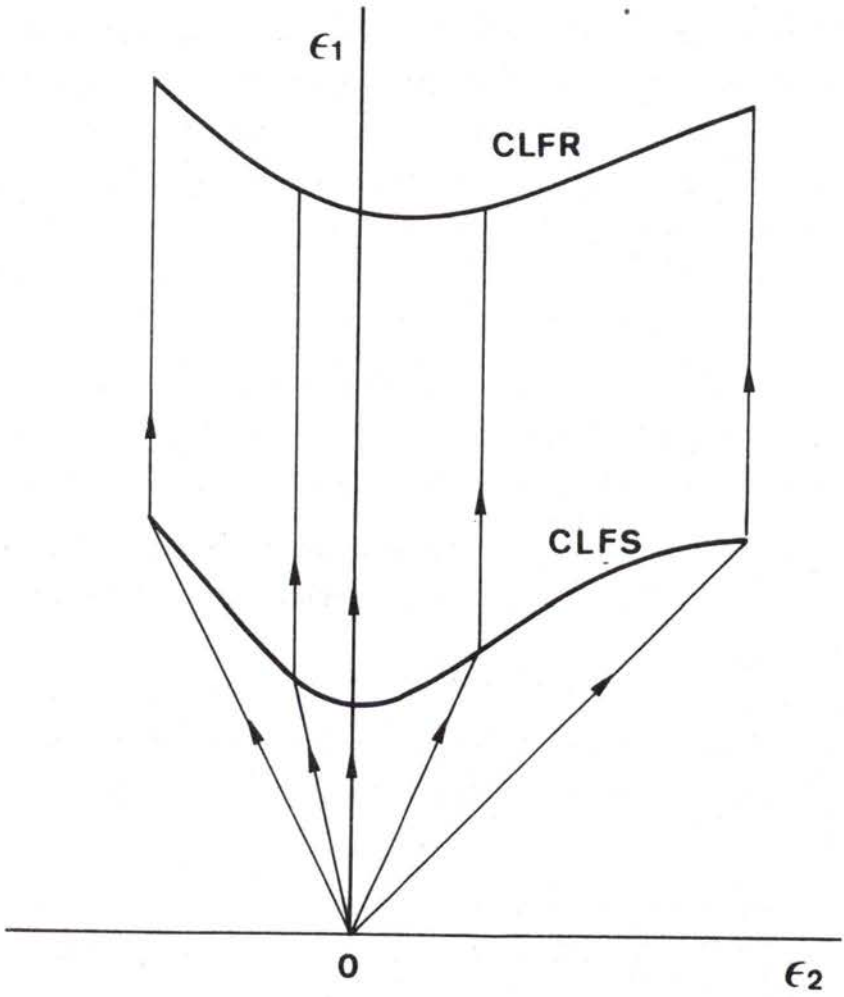


fig.A1/21 Chemins de déformations imposés suivis jusqu'à la CLFS évoluant vers la déformation plane entre la CLFS et la CLFR.

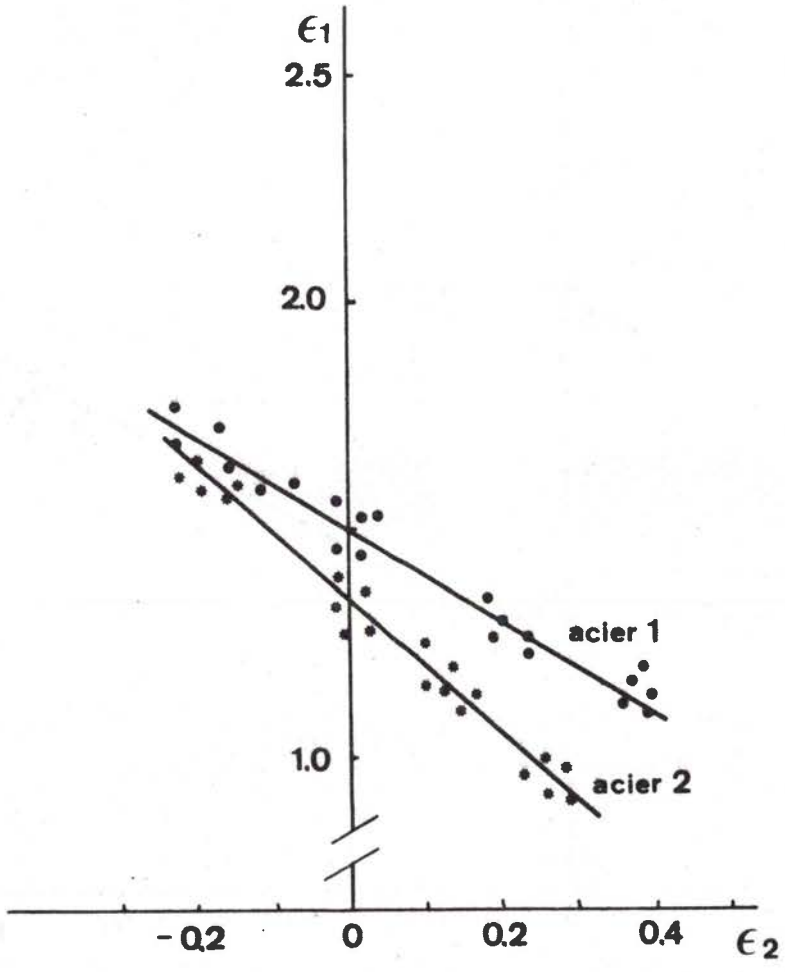


fig.A1/22 CLFR d'un acier doux d'emboutissage présentant une forme linéaire [24].

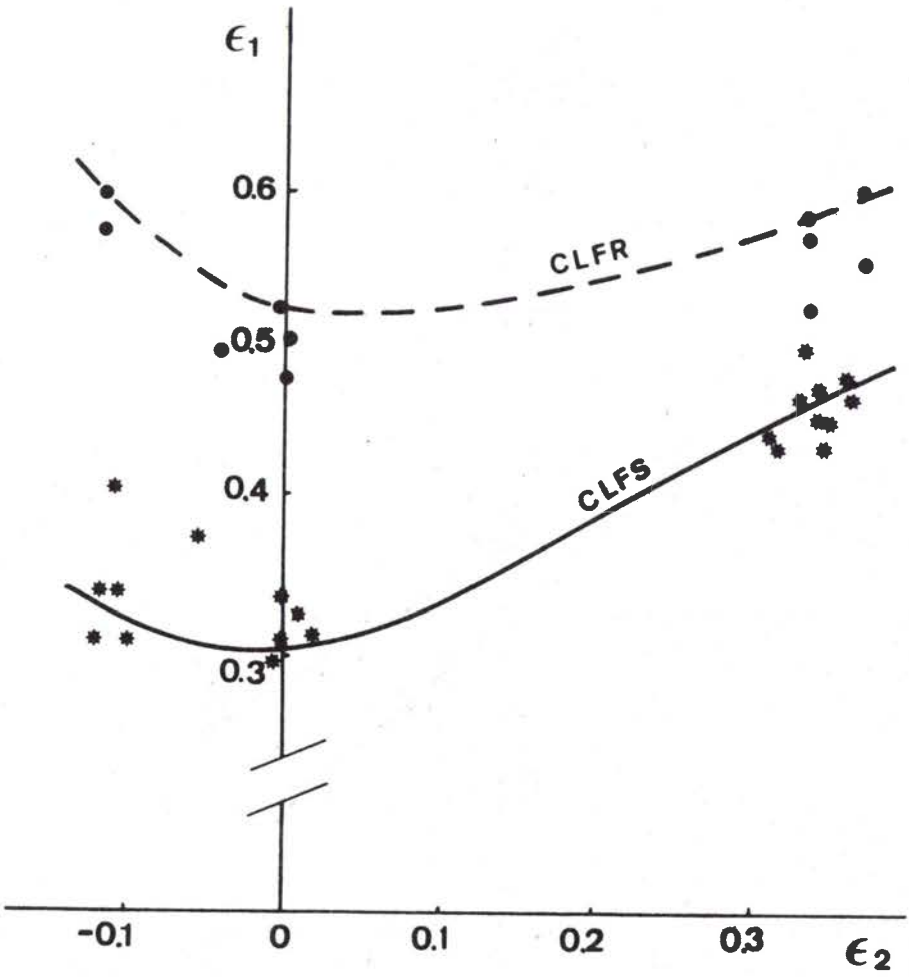


fig.A1/23 CLFR d'un alliage d'aluminium 3003 présentant une forme en cuvette [25].

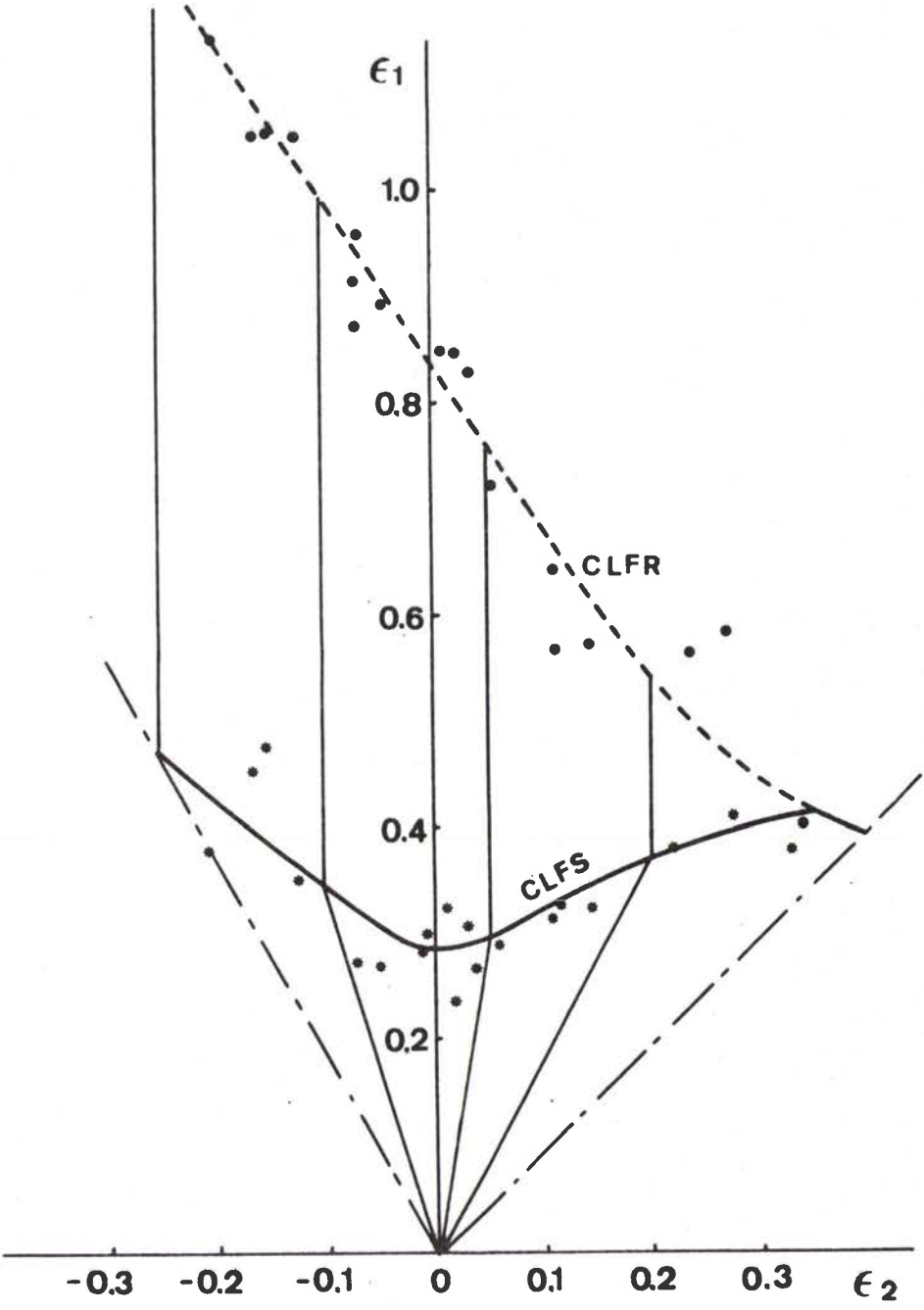


fig.A1/24 Exemple de cas où la CLFR rencontre, dans le domaine de l'expansion, la CLFS /27/.

Des effets décrits précédemment pour la CLFS, peu ont été complètement étudiés pour la CLFR. Il semble néanmoins que cette dernière soit insensible à l'effet d'un chemin de déformation complexe /$\bar{2}$3,1$\underline{8}$/ mais comme le font remarquer les auteurs, l'effet de la pré-déformation suivant le premier chemin est négligeable devant l'amplitude des déformations effectuées jusqu'à la rupture suivant le deuxième chemin.

REFERENCES CHAPITRE A1.

1- S.P. KEELER - Sheet Metal Ind. 42(1965) 683

2- G.M. GOODWIN - Metl. Ital. 8(1968) 767

3- S.P. KEELER - Sheet Metal Ind. Sept(1968) 673

4- K. YOSHIDA, K. ABE, K. MIYAUCHI, T. NAKAGAWA - Met. Ital. 8(1968)

5- C. VEERMAN - 7ème Congrès IDDRG-Amsterdam (1972) 19

6- A. BRAGARD, J.C. BARET, H. BONNARENS - IDDRG- Amsterdam(1972) 72

7- R. D'HAEYER, A. BRAGARD - Met. Rep. C.R.M.n°42-Liège-Belgique (1975) 33

8- S.S. HECKER- IDDRG- Amsterdam(1972) 5

9- I. KOBAYASHI, M. ISHIGAKI, T. ABE - IDDRG- Amsterdam (1972)

10- K. YOSHIDA, K. MIYAUCHI - "Mechanics of sheet metal forming"- Plenum Press. N.Y. London (1978) 19

11- LECLERCQ - Note interne de 1'IRSID - Juillet(1975)

12- M. DEGEN - Rapport interne de 1'IRSID - Août(1976)

13- H.J. KLEEMOLA, J.O. KUMPULAINEN - J. of Mech. Work. Tech. 3(1980)289

14- H.J. KLEEMOLA, J.O. KUMPULAINEN - J. of Mech. Work. Tech. 3(1980)303

15- P.L. CHARPENTIER - Met. Trans. 6A(1975) 1665

16- L. FELGERES - Centre de Recherches P.U.K. Communication privée

17- T.KIKUMA, K. NAKAZIMA - Trans. Iron and Steel Inst. of Jap. 11 (1971)827

18- M. GRUMBACH, G. SANZ - Mem. Sci. Rev. Met. 71(1974)659

19- R. MARTIN - CETIM Informations Oct(1973)38

20- F. RONDE-OUSTAU - Thèse de Docteur-Ingénieur- Université de Metz- 4mai 1977

21- F. RONDE-OUSTAU, B. BAUDELET - Acta Met. 25(1977)1523

22- V. FERNANDES - Communication privée, Université de METZ, mai (1981)

23- M. GRUMBACH, G. SANZ - Rev. met. 69(1972)273

24- M. GRUMBACH, G. SANZ - IDDRG- Amsterdam- Oct(1972)

25- P. VIGIER, S. LEFORT - Rapport DGRST n°73-7.1593- Fév(1975)

26- J. PLATEAU, G. HENRY -"Rupture des Métaux" Ecole d'été -Lacolle-sur-Loup (1970)

27- G. LE ROY, J.D. EMBURY - Rapport interne n°115 McMaster Université- Avril(1977)

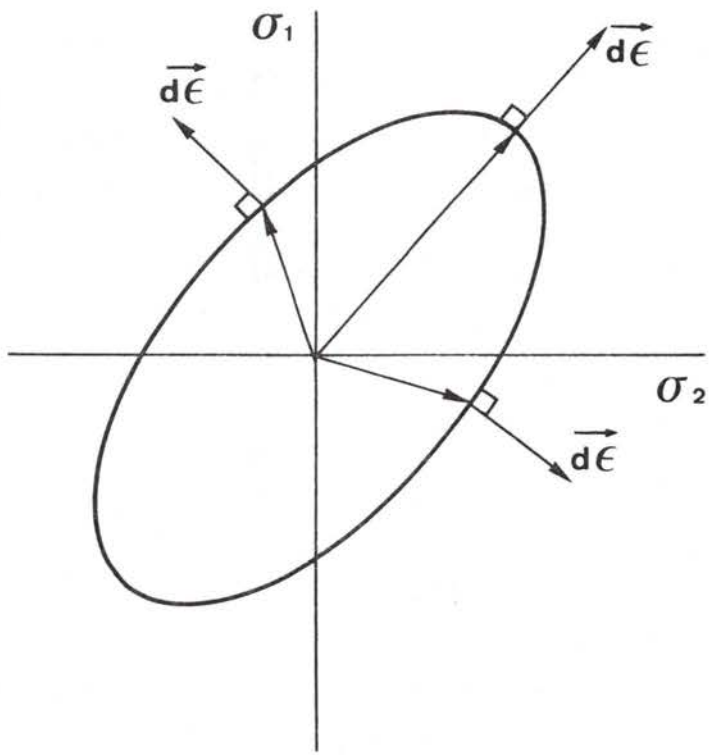


fig.A2/1 Normalité du vecteur incrément de déformation à une surface d'écoulement de Von-Mises.

A.2. CALCULS PREDICTIFS DES COURBES LIMITES DE FORMAGE A STRICTION

Ces calculs ont pour but de prévoir l'apparition des instabilités de l'écoulement plastique du métal et plus particulièrement l'instabilité correspondant à une localisation brusque de l'écoulement qui est celle de la CLFS. Les études peuvent être menées sur un matériau parfaitement homogène, tant du point de vue géométrique (section constante) que du point de vue loi de comportement ; ou sur un matériau hétérogène présentant un défaut inital soit de section, soit de loi de comportement (structure hétérogène). Le mode de définition de la localisation de l'écoulement est différent dans les deux cas car le matériau homogène subit une longue phase de déformation uniforme ou quasi homogène jusqu'à l'apparition de l'instabilité localisée alors que dans le matériau hétérogène le défaut initial localise l'écoulement dès le début de la déformation /1*,2,3/. Dans le cas du matériau homogène la limite de stabilité est définie comme étant le moment où une déformation hétérogène peut se développer dans l'éprouvette (bifurcation). Dans le cas du matériau présentant un défaut initial, la limite de formage est définie par le moment où la localisation de l'écoulement dans le défaut est telle que la partie voisine du matériau ne se déforme plus ou avec une vitesse de déformation très inférieure à la vitesse macroscopique de déformation.

A.2.1 THEORIE DE L'ECOULEMENT PLASTIQUE

A.2.1.1 Présentation

Cette théorie /4,5/ est fondée sur deux hypothèses principales :

- la normalité du vecteur incrément de déformation à la surface d'écoulement (fig. A2/1),
- la surface d'écoulement du matériau du type de Von Mises décrite par l'équation :

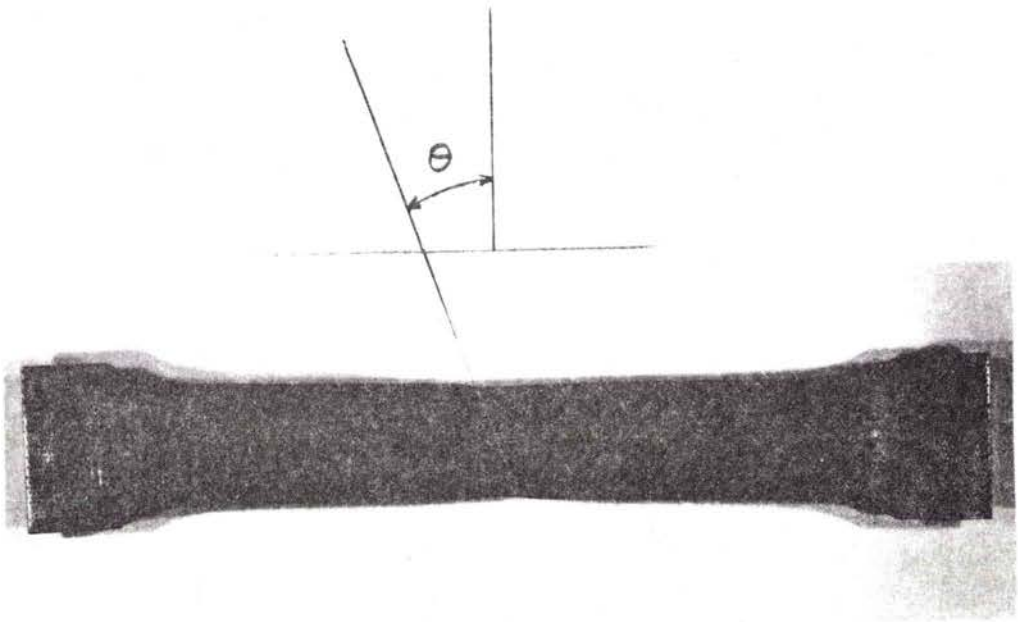


fig.A2/2 Observation expérimentale de l'inclinaison de la striction dans un essai de traction simple sur du cuivre industriel.

$$cte = 2\sigma_e^2 = (\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2+6\tau_{12}^2+6\tau_{23}^2+6\tau_{31}^2$$

Ces deux hypothèses ont pour conséquence le principe du travail plastique maximum (décrit en annexe 2.1) ou inversement, la normalité peut être déduite du système d'hypothèse : principe du travail maximum et surface d'écoulement de Von Mises.

De ces hypothèses de constitution découle la forme suivante des relations contraintes déformations :

$d\varepsilon_{ij} = d\lambda S_{ij}$ où S_{ij} est une composante du déviateur des contraintes associé au tenseur appliqué σ.

Dans le cas d'une loi de comportement exprimée en fonction des deuxièmes invariants des tenseurs de contraintes et des déformations ("théorie du J_2"), et en appliquant la conservation du volume, le terme $d\lambda$ s'exprime simplement par :

$$d\lambda = \frac{3d\bar{\varepsilon}}{2d\sigma_e} \quad \text{avec } d\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{d\varepsilon_1^2+d\varepsilon_2^2+d\varepsilon_3^2}$$

Cette définition est tout à fait cohérente avec l'hypothèse d'une surface d'écoulement de Von Mises (σ_e = cte).

A.2.1.2 Instabilité plastique - Matériau homogène /6/

Un calcul d'instabilité peut être mené dans le cadre de cette théorie pour un matériau homogène mince (tôle). Expérimentalement il est observé sur une éprouvette sollicitée en traction simple que la striction localisée est inclinée d'un angle θ avec l'axe de traction (fig. A2/2). Il semble de plus que la déformation, dans la zone en striction, se fasse essentiellement au détriment de l'épaisseur de la tôle et non de sa largeur. Compte tenu de ces observations, il est recherché s'il existe une direction X_θ inclinée d'un angle θ avec l'axe de traction, le long de laquelle la vitesse de déformation est nulle : $d\varepsilon_\theta=0$. Ensuite est déterminée la déformation pour laquelle les conditions de bifurcation du mode de déformation sont réunies. Ce calcul est présenté complètement en annexe 2.2, les résultats suivants

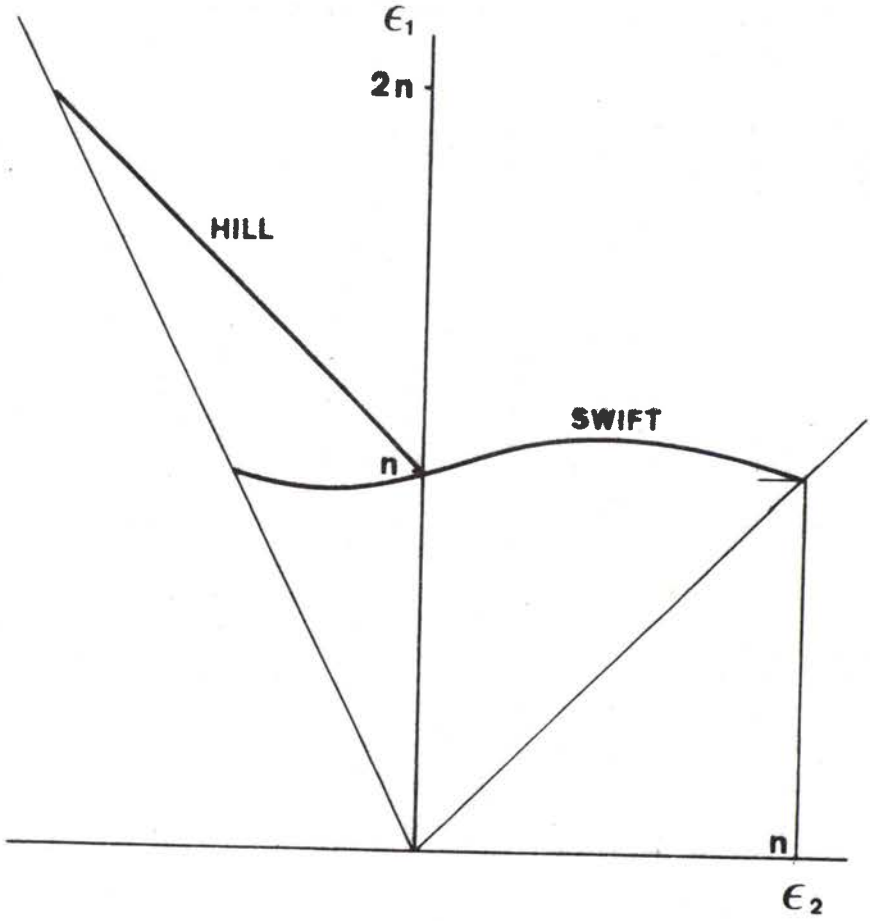


fig.A2/3 Courbe théorique d'apparition de la striction diffuse d'après Swift /7/ et de la striction localisée dans le domaine du rétreint d'après Hill /6/.

sont obtenus :

- la localisation de l'écoulement pour un matériau homogène n'est possible que dans le domaine du rétreint :

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} < 0, \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} < \frac{1}{2} \quad \text{avec } \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \text{ et } \sigma_1 > \sigma_2$$

pour cette définition de l'instabilité plastique.

- dans le domaine du rétreint, la localisation est obtenue pour un taux d'écrouissage $\overline{\gamma}$ défini par :

$$\overline{\gamma} = \frac{\partial \ln \sigma_e}{\partial \ln \bar{\varepsilon}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1+\rho}{\sqrt{1+\rho+\rho^2}}$$

ce qui conduit à une équation de la CLFS, dans le domaine du rétreint de la forme :

$$\varepsilon_1^* = -\varepsilon_2^* + n$$

qui est l'équation d'une droite représentée figure A2/3 au-dessus de la ligne d'apparition de la striction diffuse /7/.

A.2.1.3 Instabilité plastique - Matériau hétérogène /8-11/

i) présentation

Le matériau hétérogène est modélisé par deux zones, chacune homogène, mais de dimension et comportement différents. Le matériau ainsi modélisé (fig. A2/4) est caractérisé par un facteur d'hétérogénéité f_o défini par :

$$f_o = \frac{e_b K_b}{e_a K_a}$$

où e est l'épaisseur et K la constante de la loi de comportement choisie sous la forme :

$$\sigma_e = K(\bar{\varepsilon}+\varepsilon_o)^{n+m}_{\bar{\varepsilon}} \quad \text{dans les zones a et b.}$$

Un défaut caractérisé par une variation du coefficient d'écrouis-

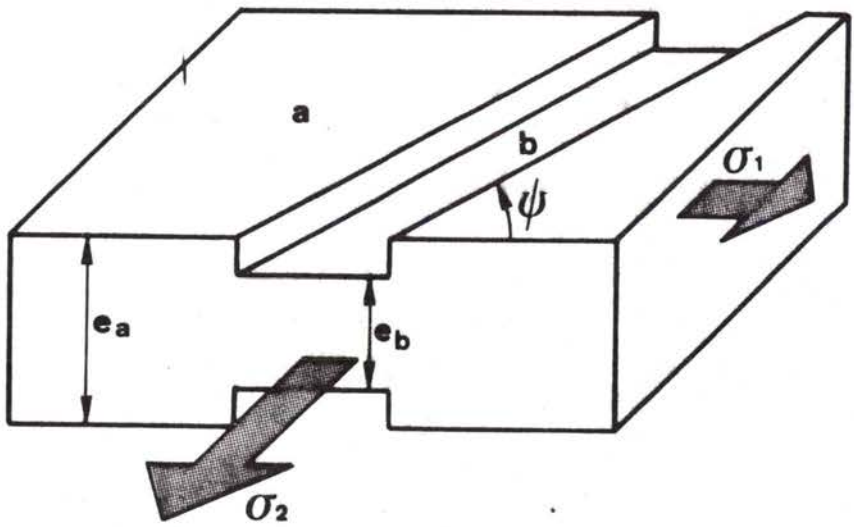


fig.A2/4 Modèle de matériau à deux zones.

sage entre les deux zones peut aussi être considéré [12].

Comme il a été décrit précédemment, le défaut localise l'écoulement dès le début de la déformation et le calcul consiste à prévoir l'évolution comparée des déformations dans les zones a et b. Les équations différentielles régissant le phénomène sont établies en annexe 2.2 et s'écrivent sous la forme :

$$(1-B-G)^{1/2}\, H\left[1-B\left[\frac{d\bar{\varepsilon}_a}{d\bar{\varepsilon}_b}\right]^2\right]^{-1/2}\left[\frac{d\bar{\varepsilon}_a}{d\bar{\varepsilon}_b}\right]^m = f\left[\frac{\bar{\varepsilon}_b+\varepsilon_o}{\bar{\varepsilon}_a+\varepsilon_o}\right]^n \exp(C\bar{\varepsilon}_a+\varepsilon_{3b})$$

$$\text{avec}\quad \frac{d\varepsilon_{3b}}{d\bar{\varepsilon}_a} = -\frac{A}{H}\left[1-B\left[\frac{d\bar{\varepsilon}_a}{d\bar{\varepsilon}_b}\right]^2\right]^{-1/2} - D\,\frac{d\bar{\varepsilon}_a}{d\bar{\varepsilon}_b}$$

$$\text{et}\quad A = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad B = \frac{3(\sin^2\psi+\rho\cos^2\psi)^2}{4(1+\rho+\rho^2)} \qquad C = \frac{\sqrt{3}(1+\rho)}{2(1+\rho+\rho^2)^{1/2}}$$

$$D = \frac{\sqrt{3}(\sin^2\psi+\rho\cos^2\psi)}{4(1+\rho+\rho^2)^{1/2}} \qquad G = \frac{(\rho-1)^2\sin^2\psi\cos^2\psi}{(1+\rho+\rho^2)}$$

$$H = \left[1+\left[\frac{2(\rho-1)\sin\psi\cos\psi}{(\rho+2)\cos^2\psi+(2\rho+1)\sin^2\psi}\right]^2\right]^{1/2}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \exp[(1-\rho)\varepsilon_{1a}]\ \operatorname{tg}\psi_o$$

où ψ_o est l'inclinaison initiale du défaut par rapport à l'axe de traction, ψ l'inclinaison courante de ce défaut.

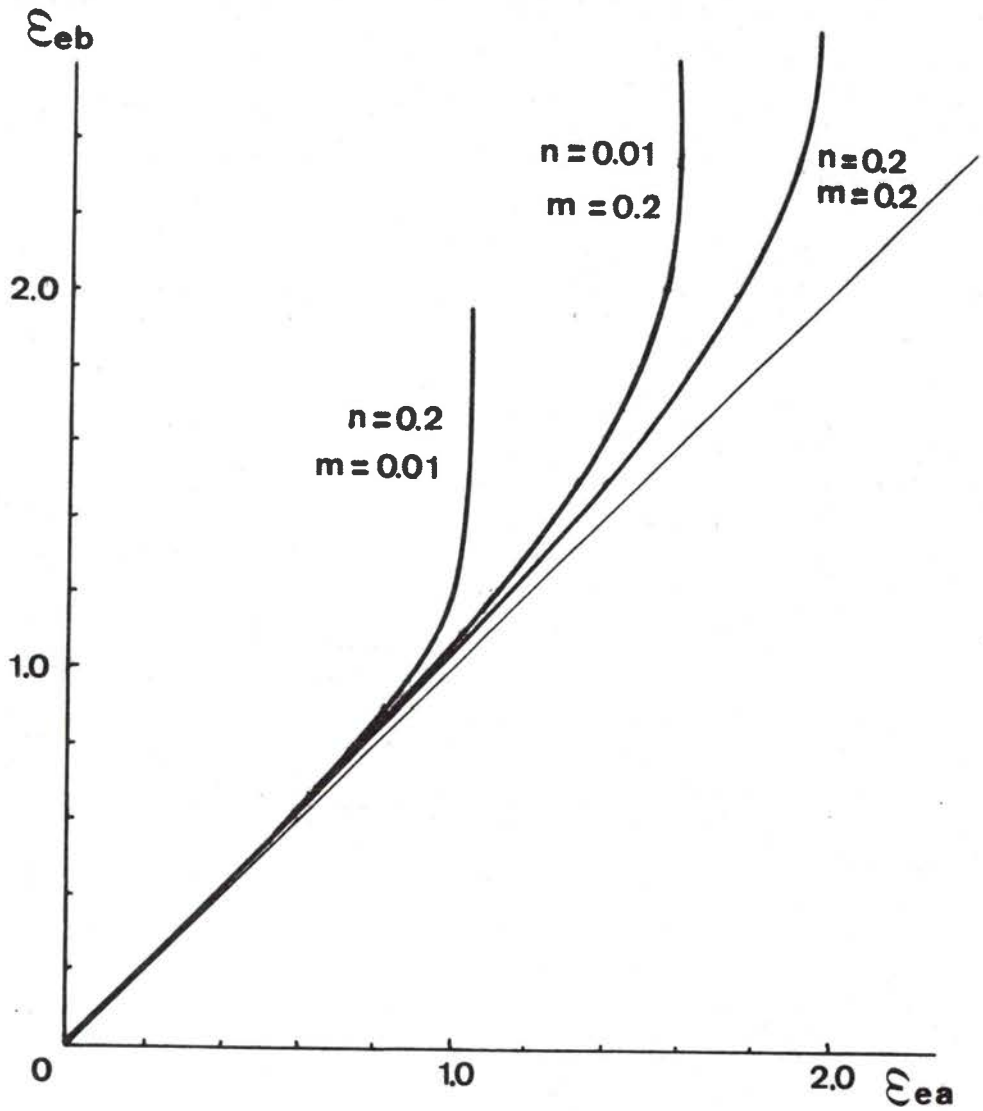


fig.A2/5 Effet de la sensibilité à la vitesse de déformation m et de l'écrouissage n sur le développement de l'instabilité plastique.

ii) résultats

Pour un défaut donné (f_o, ψ_o) l'équation peut être numériquement intégrée par un schéma de Runge Kutta à l'ordre 4 et conduit à la courbe d'évolution de la déformation dans le défaut $\bar{\varepsilon}_b$ en fonction de la déformation dans la zone homogène $\bar{\varepsilon}_a$ (fig. A2/5). On observe bien un moment à partir duquel la vitesse de déformation dans la zone a chute considérablement, ce moment définit la limite de déformage $\bar{\varepsilon}_b^*$ du matériau. Cette figure est obtenue pour un chemin de déformation biaxée symétrique :

$$\rho = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 1$$

La CLFS est obtenue en répétant cette intégration le long de différents chemins linéaires de déformation.

Sur la figure A2/5 est présentée l'influence des coefficients d'écrouissage n et de sensibilité à la vitesse de déformation m. Une augmentation de chacun de ces deux coefficients conduit à une amélioration très sensible du niveau de la limite de formage. L'amélioration de ces deux caractéristiques rhéologiques du matériau est donc un souci constant des sidérurgistes.

La figure A2/6 présente l'influence de l'amplitude du défaut initial sur la limite de formage pour trois chemins de déformation : traction simple $\rho=-0.5$, déformation plane $\rho=0$, déformation biaxée symétrique $\rho=1$. L'influence d'un défaut très faible ($f\simeq 1$) est finie pour les cas de charge $\rho=-0.5$ et $\rho=0$ car le métal homogène présente une localisation de l'écoulement comme il a été montré précédemment, à l'inverse, on retrouve bien une localisation rejettée à l'infini dans le cas de l'expansion $\rho=1$. Ces résultats montrent que dans cette théorie, la CLFS est extrêmement sensible à l'amplitude du défaut initial.

Ce défaut initial peut être incliné d'un angle ψ_o quelconque. Cet angle est susceptible de variations au cours de la déformation et la rotation du défaut est mesurée à chaque instant par la différence $\phi=\psi-\psi_o$. L'influence de l'orientation initiale du défaut sur la limite

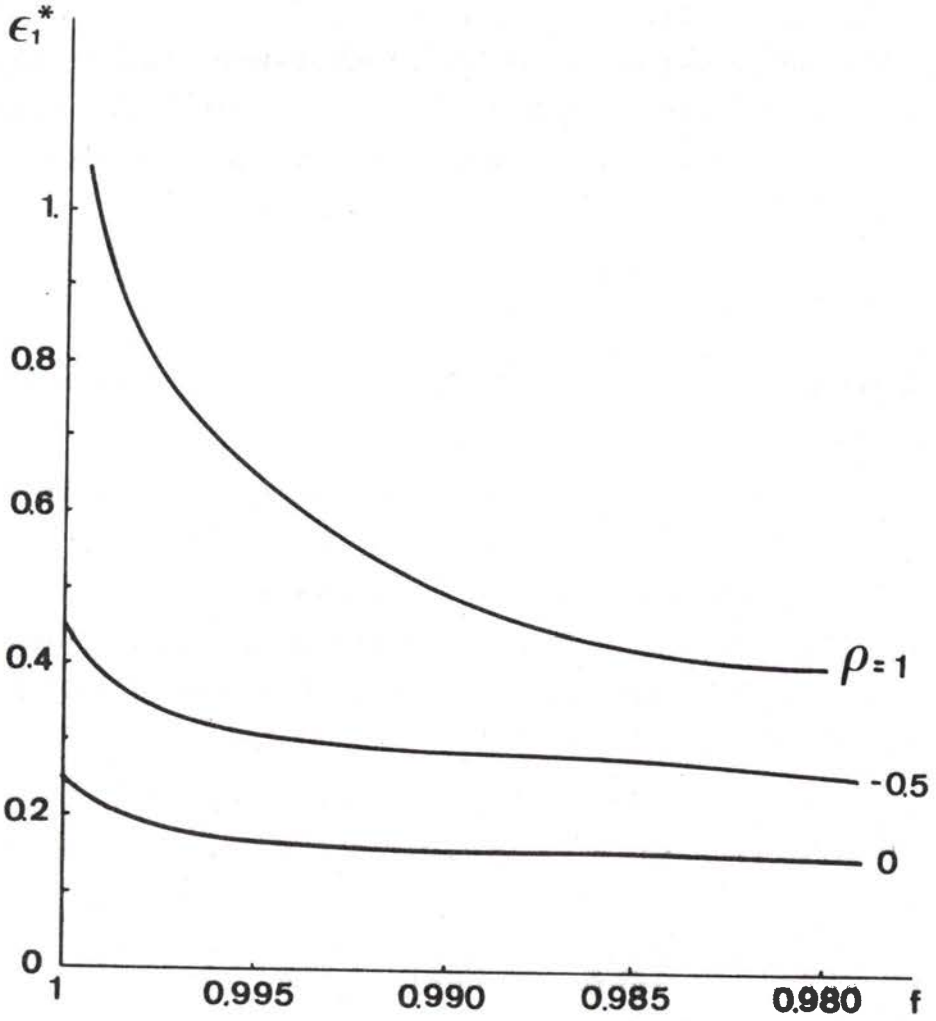


fig.A2/6 Influence de l'amplitude du défaut initial sur le niveau de la CLFS pour trois chemins de déformation d'après la théorie de l'écoulement.

le formage est présentée sur la figure A2/7 et la figure A2/8 représente la limite de formage en fonction de l'angle que fait le défaut au moment de la mise en striction (orientation finale). Ces deux figures sont tracées pour le même matériau sollicité en traction uniaxiale. Un minimum très prononcé de la fonction est observé dans les deux représentations. Dans le cas d'un défaut initial effectivement représenté par une bande inclinée de ψ_o, la limite de formage va dépendre très fortement de l'orientation du défaut par rapport aux axes de chargement. Dans le cas d'une tôle présentant initialement un nombre important de défauts plus ponctuels répartis quasi uniformément, la localisation se produit sur une ligne de défauts inclinée de l'angle conduisant à la limite de formage la plus faible. Il est difficile d'imaginer qu'il puisse en être autrement car le matériau se trouverait en état métastable dès que serait dépassée la déformation correspondant au minimum de la limite de formage.

Pour tous les cas de charge en expansion ($\rho>0$) le minimum de la déformation limite est obtenue pour un angle initial de 90° correspondant à un défaut normal à la direction de la plus grande contrainte principale. La rotation du défaut est alors nulle au cours de la déformation et le système d'équations différentielles se réduit à :

$$(1-B)^{1/2}\left[1-B\left[\frac{d\bar{\varepsilon}_a}{d\bar{\varepsilon}_b}\right]^2\right]^{-1/2}\left[\frac{d\bar{\varepsilon}_a}{d\bar{\varepsilon}_b}\right]^m = f\left[\frac{\bar{\varepsilon}_a+\varepsilon_o}{\bar{\varepsilon}_b+\varepsilon_o}\right]^n \exp(C\bar{\varepsilon}_a+\varepsilon_{3b})$$

avec $$\frac{d\varepsilon_{3b}}{d\bar{\varepsilon}_a} = -A\left[1-B\left[\frac{d\bar{\varepsilon}_a}{d\bar{\varepsilon}_b}\right]^2\right]^{-1/2} - D\,\frac{d\bar{\varepsilon}_a}{d\bar{\varepsilon}_b}$$

et $$A = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad B = \frac{3\rho^2}{4(1+\rho+\rho^2)}$$

$$C = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1+\rho}{(1+\rho+\rho^2)^{1/2}} \qquad D = \frac{\sqrt{3}\rho}{4(1+\rho+\rho^2)^{1/2}}$$

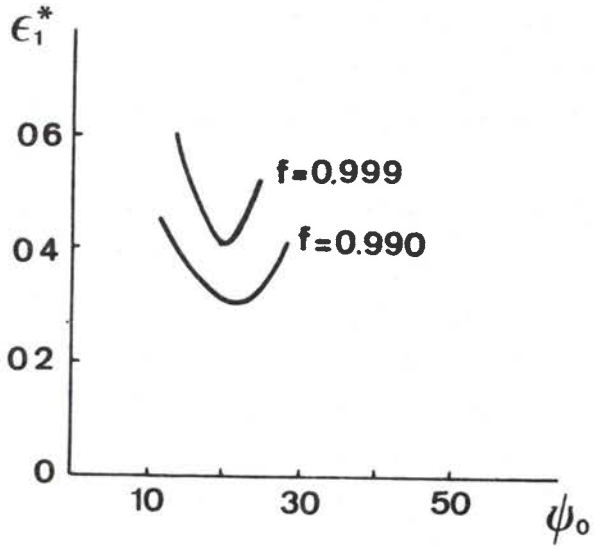


fig.A2/7 Influence de l'inclinaison initiale du défaut sur le niveau de la CLFS en traction uniaxiale d'après la théorie de l'écoulement.

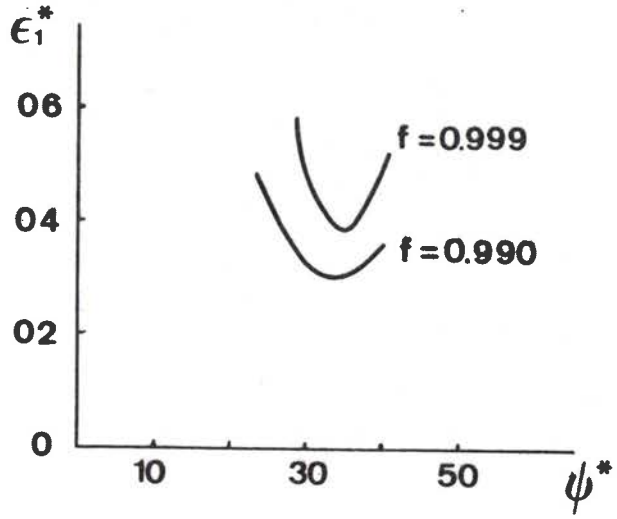


fig.A2/8 Influence de l'inclinaison finale du défaut sur le niveau de la CLFS en traction uniaxiale d'après la théorie de l'écoulement.

iii) anisotropie

L'anisotropie n'est pas prise en compte dans les équations présentées. Ce paramètre est pourtant très important (cf. paragraphe A.1.2) et son introduction dans les calculs théoriques semble nécessaire. La difficulté réside dans le fait que la bande de localisation tourne par rapport aux axes principaux. En effet, supposons les axes principaux d'anisotropie confondus avec les axes principaux de contrainte et de déformation. Alors, en contraintes principales, l'anisotropie peut être caractérisée par deux coefficients indépendants : les coefficients de Langford r_o et r_{90} définis comme le rapport $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}$ des déformations dans la largeur et l'épaisseur d'une éprouvette de traction simple sollicitée suivant chacun des deux axes principaux dans le plan de la tôle. La déformation et la contrainte équivalente s'écrivent alors :

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \left[\frac{\alpha^2(s+r)-2r\alpha+r+1}{r+1}\right]^{1/2}$$

$$d\bar{\varepsilon} = d\varepsilon_1 \left[\frac{s+r}{sr+r+s}\right]^{1/2} \left[\rho^2(1+r)+2\rho r+s+r\right]^{1/2} \quad \text{(cf. paragraphe B.1.1)}$$

avec $r = r_o \qquad s = r_o/r_{90}$

Mais dans la bande de localisation, inclinée d'un angle ψ, l'anisotropie est inconnue et il faut substituer aux deux coefficients précédemment déterminés la fonction $r(\psi)$ donnant la mesure du coefficient d'anisotropie pour chaque cas de traction incliné d'un angle ψ par rapport à l'axe principal de plus grande contrainte.

En annexe 2.3 est développée l'introduction de l'anisotropie dans les équations différentielles du phénomène. La forme finale obtenue est identique globalement à la forme isotrope des équations, seules les constantes sont changées. Dans le cas d'un chargement en expansion elles deviennent :

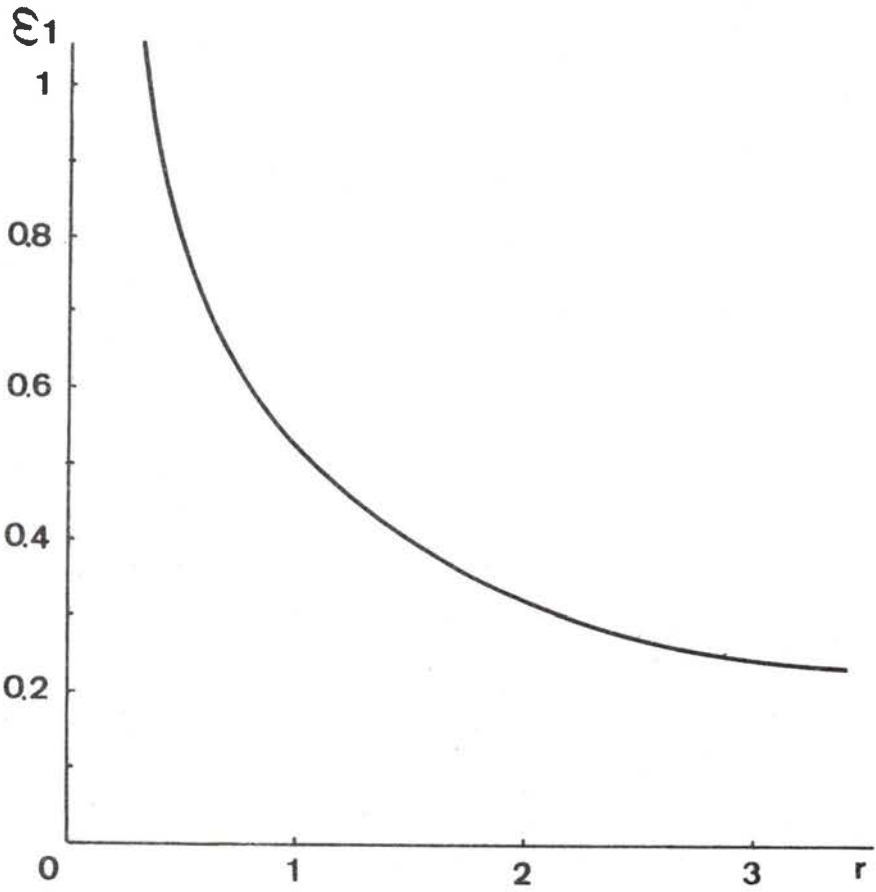


fig.A2/9 Influence de l'anisotropie sur le niveau de la CLFS dans le cas de l'isotropie plane caractérisée par le coefficient r pour un chemin de déformation équibiaxé.

$$A = \frac{J}{(r+s)(1+r)} \qquad B = \frac{J\rho^2}{(r+s)I}$$

$$C = \frac{J}{1+r} \quad \frac{1+\rho}{\sqrt{I}} \qquad D = \frac{s}{r+s} \quad \frac{J}{(1+r)I}$$

$$J = r+s+sr \qquad I = r+s+2r\rho+(1+r)\rho^2$$

Ce qui est identique aux équations établies par Marciniak /8/ pour ce cas de charge. Lorsque le chargement n'est pas en expansion, alors la rotation de la bande de défaut impose un changement d'axes pour toujours exprimer les équations anisotropes dans le repère principal d'anisotropie. Cette opération alourdit considérablement les développements du calcul.

La figure A2/9 présente l'influence de l'anisotropie sur la limite de formage dans le cas simple où la fonction $r(\psi)$ est constante égale à r, pour le cas de charge $\rho=1$. Le sens de variation expérimental est retrouvé, l'anisotropie est un facteur néfaste en expansion alors qu'il est favorable en emboutissage profond (A.1.2).

La figure A2/10 /8/ présente une courbe limite de formage calculée, dans le domaine de l'expansion pour une anisotropie variant dans le plan caractérisé par $r_0=0.9$, $r_{90}=1.1$. L'effet observé est de décaler la CLFS par rapport à la bissectrice du premier quadrant. Dans un tel cas l'orientation de la tôle par rapport aux axes de sollicitation est donc importante.

A.2.2 THEORIE DE LA DEFORMATION PLASTIQUE /13/

A.2.2.1 Présentation

Cette théorie est fondée sur l'hypothèse principale qu'il existe une loi intégrée entre le tenseur des contraintes et des déformations sous la forme :

$$\varepsilon_{ij} = \mu S_{ij}$$

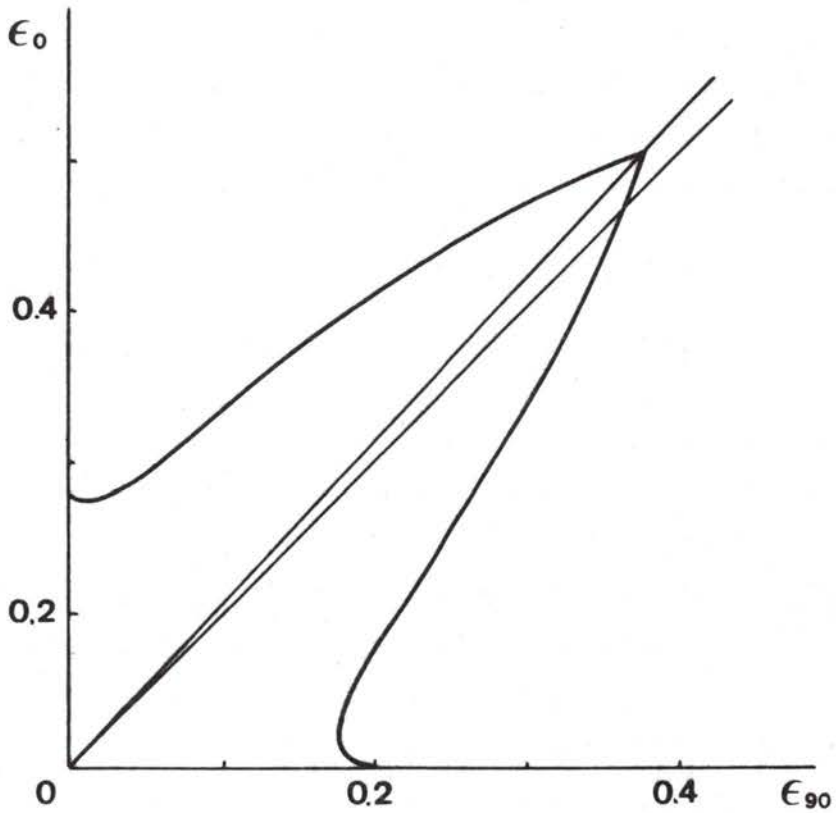


fig.A2/10 Influence de l'anisotropie plane sur le niveau et la forme de la CLFS pour les valeurs : r_0=0.9, r_{90}=1.1

dans le cadre d'une théorie "du J_2" le terme μ prend la forme :

$$\mu = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_e}{\sigma_e} \quad \text{où} \quad \varepsilon_e = \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_1\sqrt{1+\rho+\rho^2}$$

Une dérivation au premier ordre de cette équation donne :

$$d\varepsilon_{ij} = d\mu S_{ij} + \mu dS_{ij}$$

Cette forme est à comparer à l'équation de l'écoulement plastique et il est observé que l'incrément de déformation dépend alors de l'orientation de l'incrément de contrainte qui le produit. Cette propriété conduit à la non normalité du vecteur incrément de déformation à la surface de plasticité de Von Mises et, par suite, à la remise en cause du principe du travail maximal. Ces points seront discutés dans la suite (cf. A.2.3).

La forme différentielle des équations de la théorie s'exprime à l'aide des modules sécant E_s et tangent E_t (fig. A2/11) sous la forme :

$$\frac{2}{3}E_s d\varepsilon_{ij} = S_{ij}\frac{d\sigma_e}{\sigma_e}\left[\frac{1-n}{n}\right] + dS_{ij}$$

avec $\quad E_s = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e}, \quad E_t = \frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_e},$

dans le cas d'une loi de comportement du type $\sigma_e = K\varepsilon_e^{\,n}$ alors $\frac{E_t}{E_s} = n.$

Dans le cas d'un chargement radial on peut écrire :

$$\frac{d\sigma_{ij}}{\sigma_{ij}} = \frac{dS_{ij}}{S_{ij}} = \frac{d\sigma_e}{\sigma_e}$$

l'équation différentielle devient alors :

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2}\frac{d\sigma_e}{\sigma_e}\frac{S_{ij}}{E_t}$$

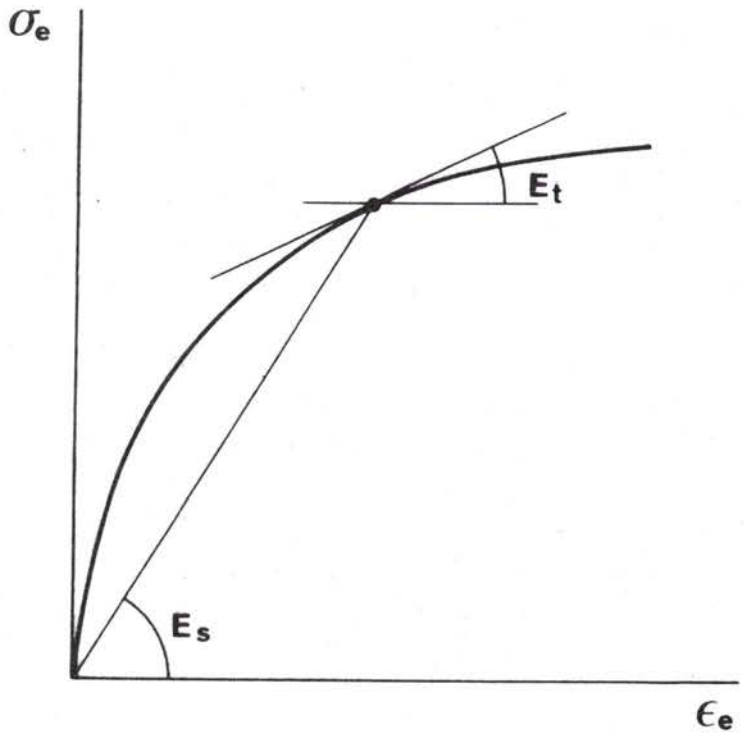


fig.A2/11 Définition des modules sécant E_s et tangent E_t.

ce qui est équivalent à :

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda\, S_{ij} \quad \text{avec } d\lambda = \frac{3}{2}\frac{d\varepsilon_e}{\sigma_e}$$

Il est donc montré que les deux théories coïncident dans le cas d'un trajet de déformation linéaire. Une autre vérification de cette propriété est d'observer que, pour un cas de chargement radial, l'équation de la théorie de l'écoulement est intégrable.

A.2.2.2 Instabilité plastique - matériau homogène /14,15/

Le calcul d'instabilité est mené dans le cas d'un chargement radial imposé. L'utilisation de la forme complète des équations de la théorie de la déformation est néanmoins nécessaire car lors de la bifurcation, le chargement dans la partie en striction s'écarte du chargement radial et la théorie de la déformation se différencie alors de la théorie de l'écoulement.

L'analyse de la bifurcation est faite en cherchant si, dans une zone b, la vitesse de déformation peut être différente de celle du reste du matériau : région a. On exprime la différence de vitesse de déformation par :

$$\Delta\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^a_{ij} - \dot{\varepsilon}^b_{ij}$$

l'analyse consiste à chercher s'il existe un moment où les conditions sont réalisées pour obtenir un $\Delta\dot{\varepsilon}_{ij}$ non nul, car alors la déformation s'écarte du mode homogène ($\Delta\dot{\varepsilon}_{ij}=0$).

Ce calcul est développé à l'annexe 2.4 et conduit à l'équation suivante :

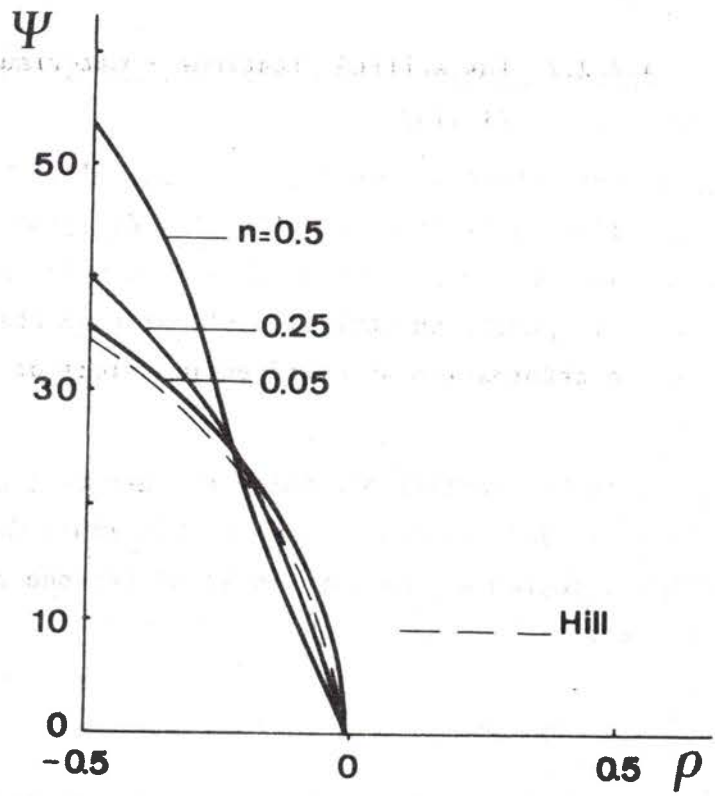


fig.A2/12 Angle de localisation de l'écoulement en fonction du chemin de déformation pour un matériau homogène dans le cadre de la théorie de la déformation, calculé pour différentes valeurs du coefficient d'écrouissage n.

$$\left[\frac{\sqrt{3}E_t}{\sigma_e N}\right]^2 \left[4(1+tg^2\psi)^2 - \frac{3(1-N)}{\sigma_{e^2}} \left[(\sigma_1+\sigma_2 tg^2\psi)^2+4(\sigma_1-\sigma_2)^2 tg^2\psi\right]\right]$$

$$-\left[\frac{\sqrt{3}E_t}{\sigma_e N}\right](1+tg^2\psi)\left[\frac{(2\sigma_2-\sigma_1)+(2\sigma_1-\sigma_2)tg^2\psi}{\sigma_e}\right](\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1{}^2-\sigma_2{}^2 tg^4\psi)$$

$$-\frac{1}{2}(1+tg^2\psi)\frac{(\sigma_1-\sigma_2)}{\sigma_{e^2}}(\sigma_1-\sigma_2 tg^2\psi) = 0$$

Cette équation comporte deux inconnues : l'angle de localisation ψ et la déformation de bifurcation ε_1^* directement relié à E_t^*. L'instabilité se produira suivant l'angle ψ conduisant à la localisation au plus tôt. La figure A2/12 représente l'angle ψ conduisant au minimum de déformation à l'instabilité en fonction du chemin de déformation ρ. A l'opposé de la théorie de l'écoulement, l'angle de localisation dépend des propriétés d'écrouissage de la matrice. La courbe correspondant à la théorie de l'écoulement due à Hill /6/ est représentée, une divergence importante entre les deux théories est observée pour les matériaux à fort écrouissage. Une vérification expérimentale de l'angle de localisation ne peut pas être déterminante car sa mesure est entachée de trop d'incertitudes. Il est à remarquer que la direction de localisation prévue par la théorie de la déformation ne coïncide en général pas avec la direction d'extension nulle.

Pour tous les cas de charge en expansion, l'angle de localisation vaut 90°. L'équation de localisation s'écrit alors simplement :

$$\frac{2}{3}\frac{E_t}{n}\left[2-\frac{3}{2}\frac{1-n}{\sigma_{e^2}}\sigma_1{}^2\right]-\sigma_1 = 0$$

en remarquant que :

$$\frac{E_t}{n} = E_s = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e}$$

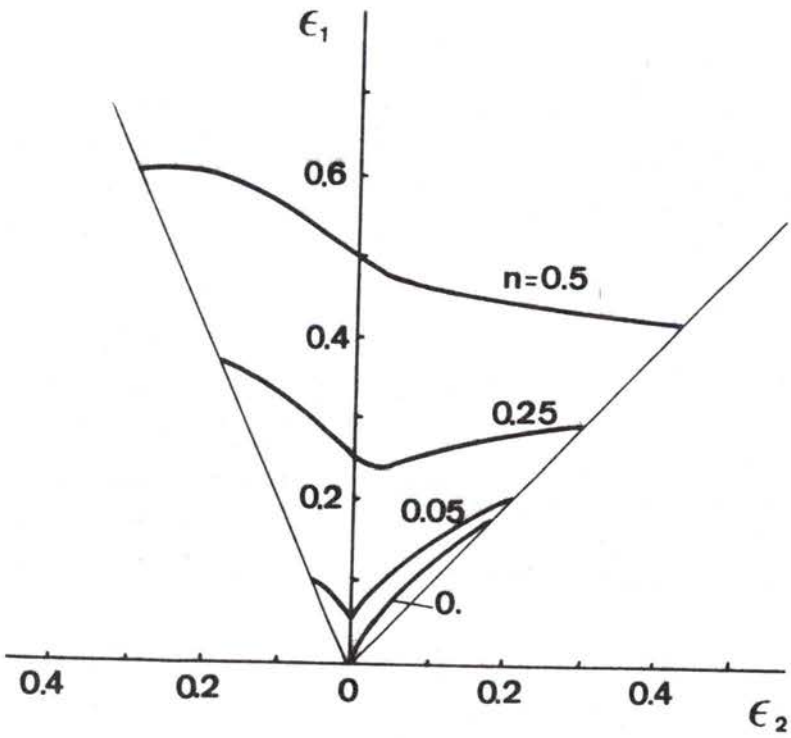


fig.A2/13 Forme et position de la CLFS calculée d'après la théorie de la déformation pour des matériaux homogènes de coefficient d'écrouissage différents.

et $\sigma_e = \sigma_1 \sqrt{1-\alpha+\alpha^2}$ avec $\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$

l'expression devient :

$$\varepsilon_e = \frac{4(1-\alpha+\alpha^2)-3+3n}{3\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}$$

or pour un comportement isotrope :

$$\alpha = \frac{1+2\rho}{2+\rho}$$

ce qui conduit à :

$$\varepsilon_e = \frac{3\rho^2+n(2+\rho)^2}{(2+\rho)\sqrt{3}\sqrt{1+\rho+\rho^2}}$$

or $$\varepsilon_e = \varepsilon_1 \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1+\rho+\rho^2}$$

ce qui donne finalement :

$$\varepsilon_1^* = \frac{3\rho^2+n(2+\rho)^2}{2(2+\rho)(1+\rho+\rho^2)}$$

ce qui est l'équation analytique de la CLFS dans le domaine de l'expansion suivant la théorie de la déformation.

La localisation de l'écoulement intervient pour $\varepsilon_1^*=n$ dans le cas de la déformation plane ($\rho=0$) et pour $\varepsilon_1^* = \frac{1+3n}{6}$ dans le cas de l'expansion symétrique ($\rho=1$). Il est à noter que la CLFS est plus haute en expansion symétrique qu'en déformation plane pour des valeurs de n inférieures à 0.33, à l'inverse pour des valeurs de n supérieures à 0.33 la CLFS est descendante dans le domaine de l'expansion. Ce résultat est observé sur la figure A2/13 [14] qui représente des CLFS théoriques pour plusieurs valeurs de l'exposant d'écrouissage n.

A.2.2.3 Instabilité plastique - Matériau hétérogène /$\bar{1}$0,1$\bar{1}$/

L'analyse est, dans l'esprit, identique à celle menée dans le cadre de la théorie de l'écoulement. La différence essentielle provient du fait que la théorie de la déformation autorise l'utilisation d'une forme intégrée des relations contraintes-déformations. Une attention particulière doit être portée au fait que la bande de localisation tournant au cours de la déformation, la déformation équivalente et la déformation plastique cumulée sont différentes :

$$\varepsilon_e \neq \int d\bar{\varepsilon}$$

Ce qui impose de raisonner sur les allongements pour calculer la déformation équivalente à chaque instant de l'évolution du défaut. Le calcul mené en annexe 2.4 conduit aux équations suivantes reliant ε_e^a et ε_e^b :

$$\frac{(\rho+2)\cos^2\psi+(2\rho+1)\sin^2\psi}{\sqrt{3}(1+\rho+\rho^2)^{1/2}}\left[\frac{d\varepsilon_{e_a}}{d\varepsilon_{e_b}}\right]^m = \frac{f}{\lambda_1\lambda_2}\left[\frac{\varepsilon_{e_b}+\varepsilon_o}{\varepsilon_{e_a}+\varepsilon_o}\right]^n \exp(C\varepsilon_{e_a})\,\frac{y}{\varepsilon_{e_b}}$$

avec $\varepsilon_e = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[(\ln\lambda_1)^2+\ln\lambda_1\ln\lambda_2+(\ln\lambda_2)^2\right]^{1/2}$

et $y = \ln(\lambda_1\lambda_2)+\frac{1}{3}\cos(2\theta)\ln\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right]$, $\lambda_i = \frac{l_i}{l_o}$

où θ est l'angle entre le repère principal de contrainte et le repère lié à l'orientation du défaut,

et $C = \frac{\sqrt{3}(1+\rho)}{2(1+\rho+\rho^2)^{1/2}}$

Dans le cas de l'expansion biaxée ($\rho \geq 0$), l'orientation du défaut reste fixe et ceci simplifie considérablement les équations qui

deviennent alors :

$$(1-B)^{1/2}\left[1-B\left[\frac{\varepsilon_{e_a}}{\varepsilon_{e_b}}\right]^2\right]^{-1/2}\left[\frac{d\varepsilon_e{}_a}{d\varepsilon_e{}_b}\right]^m = f\left[\frac{\varepsilon_{e_b}+\varepsilon_o}{\varepsilon_{e_a}+\varepsilon_o}\right]^n \exp(C\varepsilon_{e_a}+\varepsilon_{3b})$$

avec $$\frac{\varepsilon_{3_b}}{\varepsilon_{e_b}} = -A\left[1-B\left[\frac{\varepsilon_{e_a}}{\varepsilon_{e_b}}\right]^2\right]^{1/2} - D\,\frac{\varepsilon_{e_a}}{\varepsilon_{e_b}}$$

avec $$A = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad B = \frac{3\rho^2}{4(1+\rho+\rho^2)}$$

$$C = \frac{\sqrt{3}(1+\rho)}{2(1+\rho+\rho^2)^{1/2}} \qquad D = \frac{B^{1/2}}{2}$$

Il est à noter que pour un matériau non sensible à la vitesse de déformation l'équation ne comporte aucun terme incrémental. En déformation plane elle devient pour un matériau de loi de comportement $\sigma_e = K\varepsilon_e{}^n$:

$$\varepsilon_{e_a}{}^n \exp\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_{e_a}\right] = f\ \varepsilon_{e_b}{}^n \exp\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \varepsilon_{e_b}\right]$$

ou encore : $$\varepsilon_{1_a}^n \exp\left[-\varepsilon_{1_a}\right] = f\ \varepsilon_{1_b}^n \exp\left[-\varepsilon_{1_b}\right]$$

or nous savons que la condition de bifurcation en déformation plane est donnée par : $\varepsilon^*_{1_b} = n$ d'où la limite de formage dans la zone a :

$$\frac{\varepsilon^*_{1_a}}{n} \exp\left[1-\frac{\varepsilon^*_{1_a}}{n}\right] = f^{1/n}$$

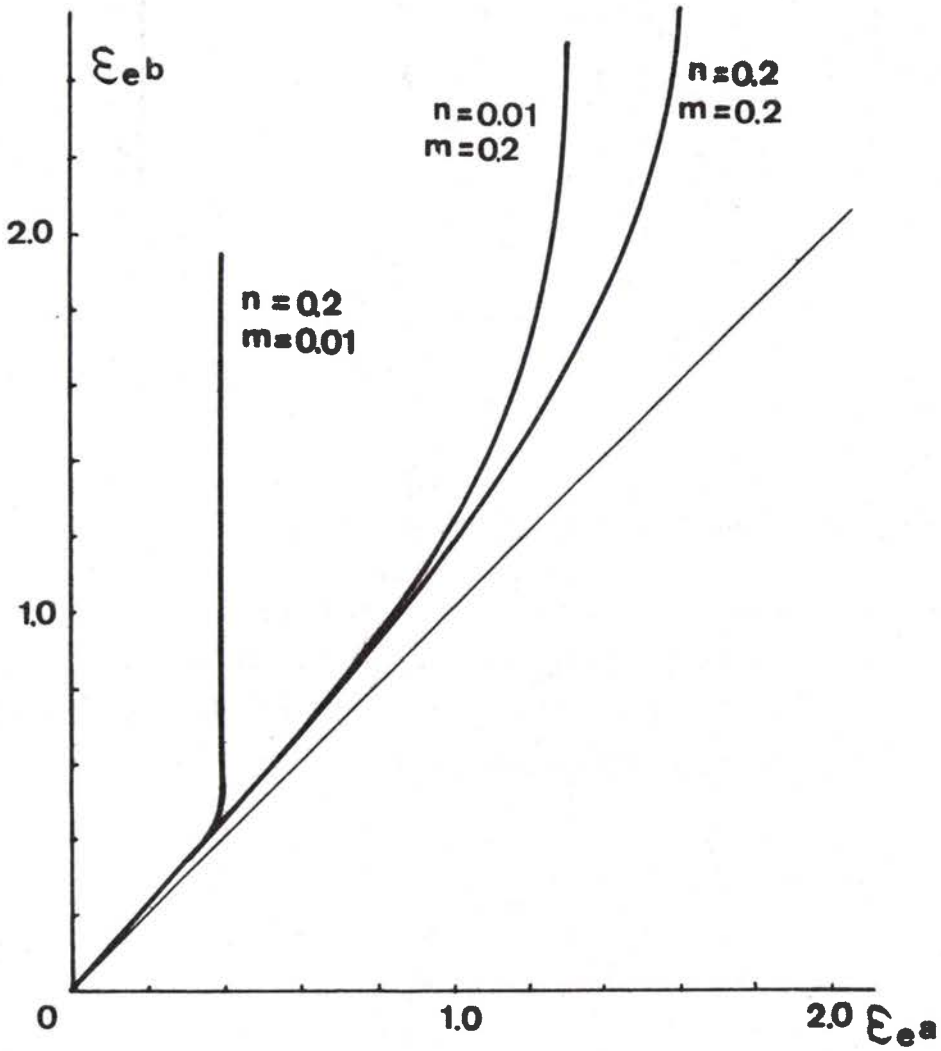


fig.A2/14 Influence de la sensibilité à la vitesse de déformation : m et de l'écrouissage : n sur le développement de l'instabilité plastique dans le cas de la théorie de la déformation.

Pour obtenir la CLFS, l'équation générale est résolue numériquement et l'évolution de ε_a en fonction de ε_b est présentée sur la figure A2/14 pour un chargement biaxé symétrique. La forme des courbes et l'influence des coefficients d'écrouissage et de sensibilité à la vitesse de déformation est à rapprocher de celles obtenues dans le cadre de la théorie de l'écoulement (fig. A2/5), les évolutions sont tout à fait semblables.

La figure A2/15 présente l'influence du défaut initial pour différents chemins de déformation et rappelle les résultats obtenus pour la théorie de l'écoulement. On note que la théorie de la déformation est beaucoup moins sensible à l'amplitude du défaut initial que la théorie de l'écoulement. Ce résultat pouvait être pressenti dans la mesure où une déformation à striction finie est prévue pour un matériau homogène dans le cadre de la théorie de la déformation.

La figure A2/16 présente l'influence de l'orientation initiale ψ_o de la bande sur la limite de formage et la figure A2/17 l'influence de l'orientation finale ψ^*. Les résultats des deux théories sont présentés et la théorie de la déformation montre une sensibilité beaucoup moins importante qui se traduit par un minimum moins marqué de la courbe (ε_1^*, ψ). De plus, le minimum n'est pas obtenu pour les mêmes angles mais il a été montré que, pour un matériau homogène, l'angle de localisation prévu était aussi différent.

A.2.3 ANALYSE CRITIQUE DES DEUX THEORIES /*7

A.2.3.1 Fondements

Un point de divergence important entre les deux théories est la reconnaissance ou non du principe du travail maximum. Deux voies différentes peuvent être choisies pour essayer d'établir ce principe :
- i) une voie métallurgique en examinant le comportement du monocristal,
- ii) une voie thermodynamique en décrivant les échanges d'énergie.

i) étude métallurgique

Examinons tout d'abord la plasticité du grain élementaire mono-

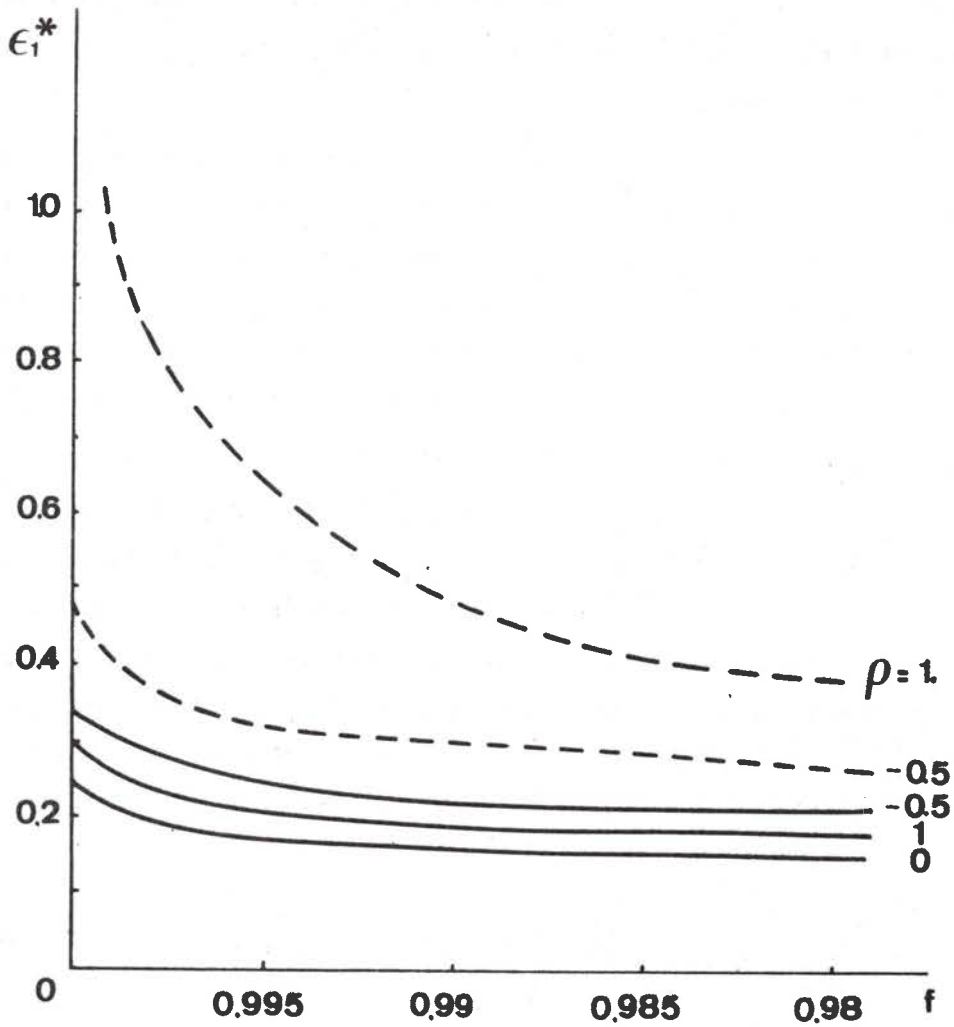


fig.A2/15 Influence de l'amplitude du défaut initiale sur le niveau de la CLFS d'après la théorie de la déformation (traits pleins). Comparaison avec les calculs de la théorie de l'écoulement (traits interrompus).

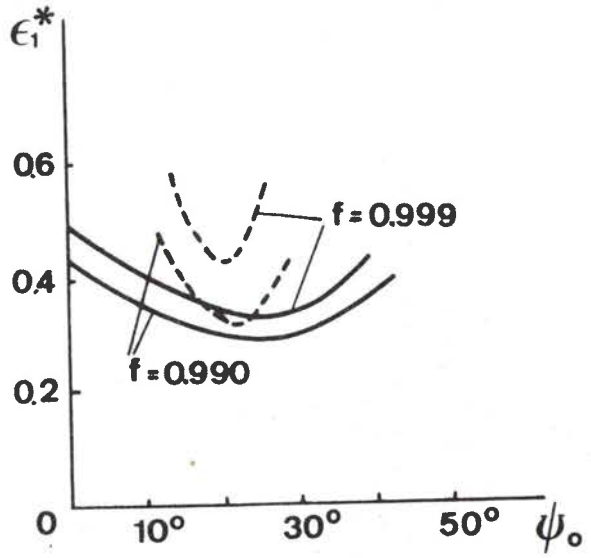


fig.A2/16 Influence de l'angle initial de la bande de défaut sur le niveau de la CLFS d'après la :
- théorie de la déformation (traits pleins),
- théorie de l'écoulement (traits interrompus).

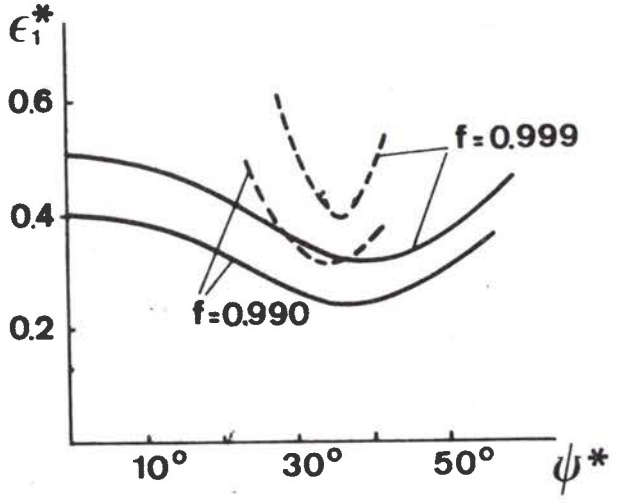


fig.A2/17 Influence de l'angle final da la bande de localisation sur le niveau de la CLFS d'après la :
- théorie de la déformation (traits pleins),
- théorie de l'écoulement (traits interrompus).

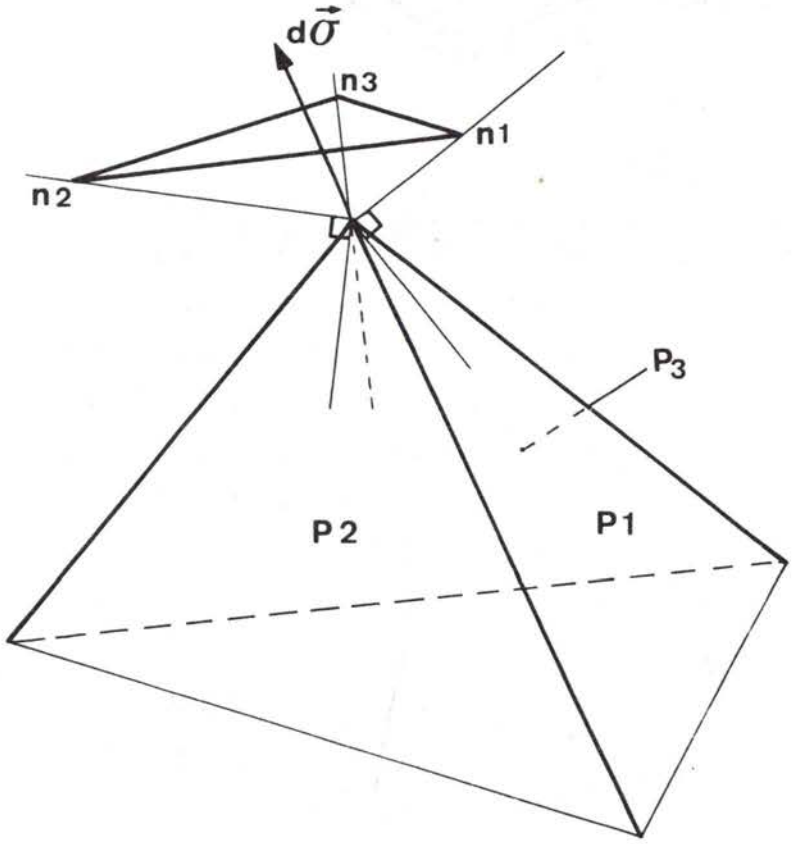


fig.A2/18 Volume limité par la pyramide des normales aux différents plans de la surface de charge.

cristallin formant le polycristal. Si ce monocristal est sollicité suivant un seul système de glissement de normal $\vec{n}$ (composantes n_i) et de direction de glissement $\vec{b}$ (composantes b_i), la loi de Schmidt et Boas [16] donne la fonction de charge $f(\sigma_{ij})$ sous la forme :

$$f(\sigma_{ij}) = b_i \sigma_{ij} n_j - b\tau_c = 0$$

où τ_c est la cission critique nécessaire pour activer le plan de glissement considéré.

Le champ de déplacement est constitué de vecteurs tous parallèles au vecteur $\vec{b}$ dont le module est proportionnel à la distance au plan de glissement considéré. Le champ de déplacement peut donc, en fixant l'origine du repère sur le plan de glissement, s'exprimer sous la forme :

$$U_i = (n_k x_k) b_i . d\lambda$$

En revenant à la définition des petites déformations :

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) = (b_i n_j + b_j n_i) \frac{d\lambda}{2}$$

Or la normale à la surface de charge a pour coordonnées :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = b_i n_j + b_j n_i$$

ce qui permet de vérifier que la direction de l'incrément de déformation est confondue avec la direction normale à la surface de charge du monocristal déformé suivant un seul plan de glissement [17,18]. Il est alors aisé de pouvoir étendre la notion de principe du travail maximal ou la notion de normalité à tout le polycrital considéré comme un agrégat de grains monocristallins.

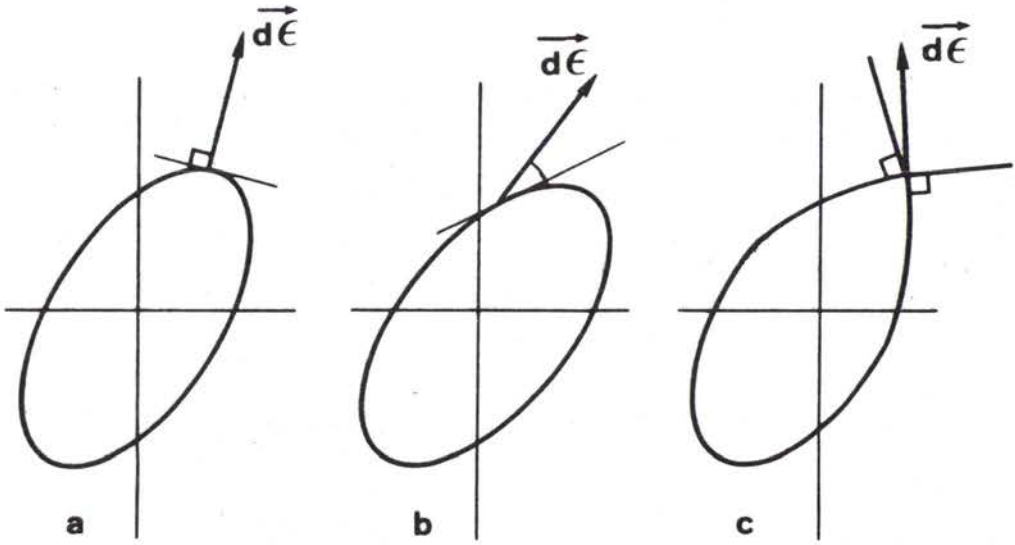


fig.A2/19 Différentes approches acutelles de la plasticité :
a- Surface de charge de forme régulière, normalité du vecteur incrément de déformation : théorie de l'écoulement.
b- Surface de charge de forme régulière, non normalité du vecteur incrément de déformation : entre autres théorie de la déformation.
c- Surface de charge présentant un point anguleux, vecteur incrément de déformation compris dans le cône des normales : théorie du "vertex".

Mais dans un cas général de charge le monocristal possède plusieurs plans actifs. Le point de charge est à l'intersection des plans de charge de chaque système actif. Il s'agit d'un point singulier pour lequel la notion de normalité ne peut pas exister (fig. A2/18). Le principe du travail maximal reste vrai tant que le vecteur incrément de déformation reste compris dans la pyramide des normales à chaque plan de charge. Lors du passage au polycristal plusieurs hypothèses peuvent être faites :

- Le principe du travail maximal, vrai pour le monocristal, est étendu au polycristal, la surface d'écoulement est de forme régulière du type de Von Mises ce qui conduit par exemple à la théorie de l'écoulement (fig. A2/19a).

- Le fait que le vecteur incrément de déformation du monocristal puisse avoir une direction variable dans la limite du prisme des normales a pour conséquence que pour le polycristal le vecteur incrément de déformation doit avoir une certaine liberté dans le choix de son orientation par rapport à la surface d'écoulement régulière : c'est entre autre la théorie de la déformation (fig. A2/19b).

- Le monocristal sollicité suivant plusieurs plans de glissement présente un point singulier au point de charge. Le polycristal constitué de grains monocristallins dont chacun présente ce point de charge anguleux doit présenter une surface d'écoulement reproduisant ce point singulier ("vertex") au point de charge. Un tel comportement du polycristal est prévu par la théorie du glissement /19,20/. Tant que le vecteur incrément de déformation du polycristal est compris dans le cône des normales à la surface de charge, le principe du travail maximal reste vrai. Une telle approche du problème conduit à la théorie du "vertex" (fig. A2/19c). Il a été montré /21/ que, en première approximation, la réponse en déformation à un vertex est donnée par la forme différentielle des équations de la théorie de la déformation. Il a été établi d'autre part /22/ que l'existence d'un point anguleux permet l'utilisation d'équations intégrées du type de celles

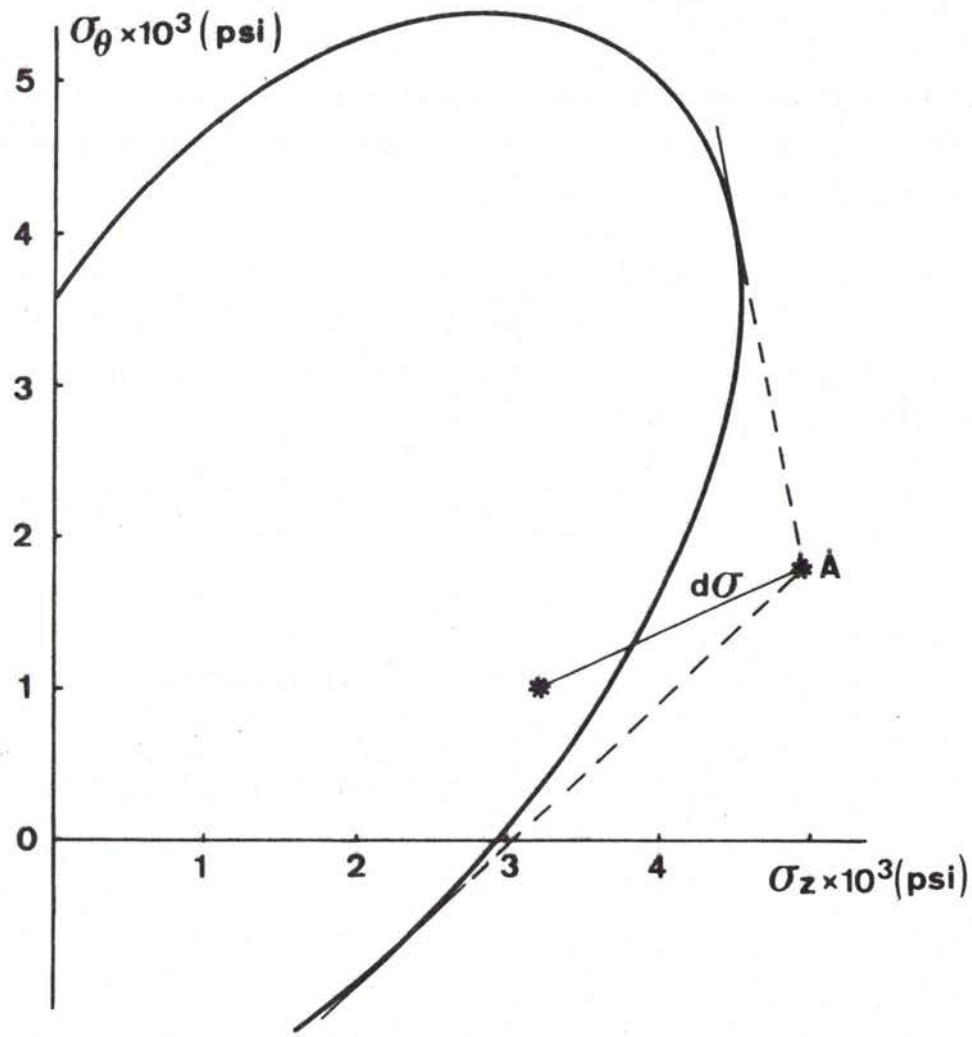


fig.A2/20 Observation expérimentale du point de charge situé à l'extérieur de la surface de plasticité déterminée après décharge. En traits interrompus le "vertex" supposé sur la surface de charge /34-36/.

de la théorie de la déformation sans violer ni les règles thermodynamiques, ni le principe du travail maximal.

Un important travail expérimental a été effectué dans le but de déterminer la forme de la surface de charge et l'orientation du vecteur incrément de déformation. Ces études cherchant à déterminer l'existence ou non d'un "vertex" et l'existence ou non de la règle de normalité sont contradictoires /23-33/, mais un travail important et complet a été mené par Hecker /34-36/. Cet auteur a montré que le point de charge A se trouve en dehors de la surface d'écoulement déterminée après relâchement des contraintes (fig. A2/20). Il est alors possible de supposer l'existence d'un "vertex" (tracé en traits interrompus sur la figure A2/20) qui, par le jeu du mouvement des dislocations pendant la charge et la décharge disparaît lorsque l'on détermine, après décharge, la surface d'écoulement avec une grande précision (seuil de 5.10^{-6} pour ε). L'auteur a par ailleurs noté qu'une détermination plus grossière de la surface de charge (seuil de 0.02 en ε) masque complètement ce phénomène pour une prédéformation imposée au matériau de l'ordre de $200\ 10^{-6}$. Hecker a mené un essai très intéressant de traction-gonflement consistant à faire subir au matériau un trajet de chargement en zig-zag et à déterminer pour chaque étape du chargement la direction du vecteur incrément de déformation (fig. A2/21). Les variations comparées des orientations du vecteur incrément de contrainte et incrément de déformation repèrées par l'angle qu'ils font avec l'un des axes de contrainte principale: σ_1, sont reproduites figure A2/22 pour un exemple de chargement. Il est remarquable de constater que l'orientation du vecteur incrément de déformation suit très bien les changements d'orientation du vecteur incrément de contrainte. L'auteur a, par ailleurs, vérifié que l'incrément de déformation reste compris dans le cône des normales au "vertex" supposé.

Ces travaux expérimentaux très intéressants accréditent les hypothèses d'un "vertex" sur la surface de charge et de l'existence du principe du travail maximal. L'orientation du vecteur incrément de

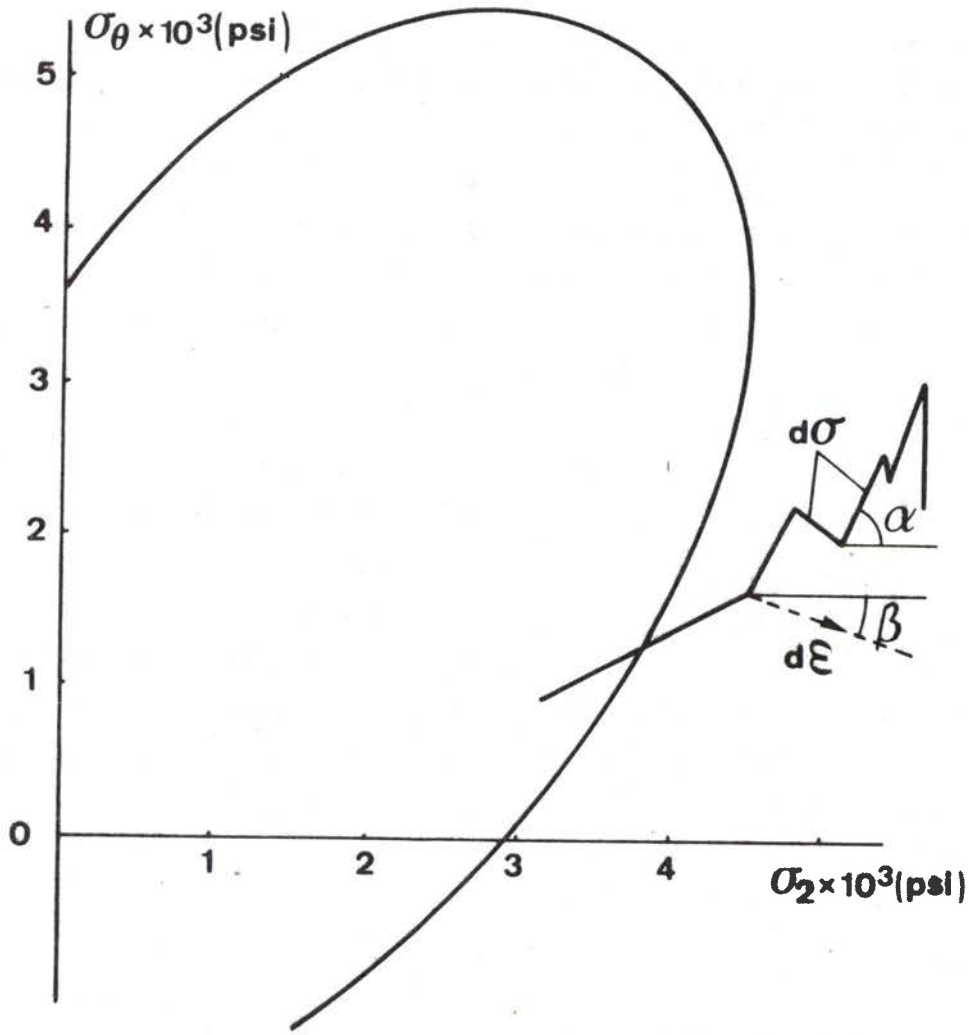


fig.A2/21 Chemin de contrainte en zig-zag effectué en mesuran à chaque étape l'orientation du vecteur incrément de déformation résultant /$\bar{3}$4-3$\underline{6}\bar{7}$.

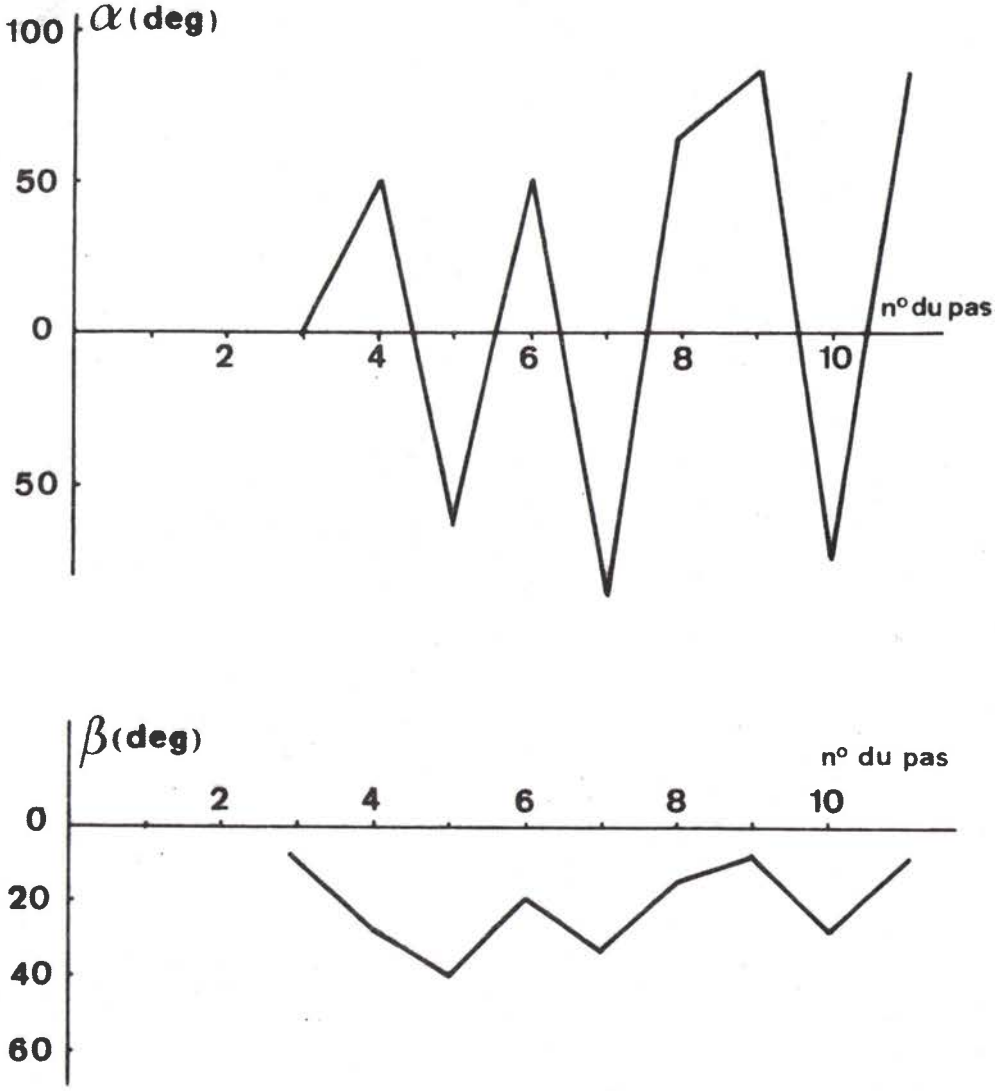


fig.A2/22 Comparaison entre l'évolution de l'orientation α de l'incrément de contrainte imposé dans un chemin en zig-zag et de l'orientation β du vecteur incrément de déformation résultant.

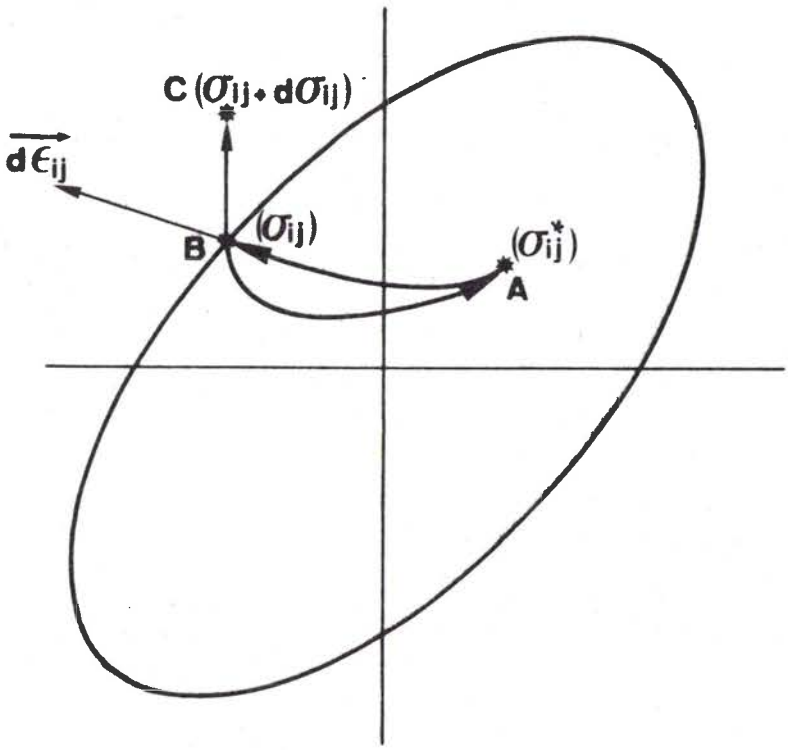


fig.A2/23 Trajet de charggement : A-B élastique, en B $d\sigma_{ij}$ provoque la déformation plastique, retour en A.

déformation dépendant fortement du vecteur de contrainte est compatible avec la forme différentielle des équations de la théorie de la déformation, mais n'impose pas une forme différentielle totale exacte.

Enfin il serait possible de faire l'hypothèse d'un cas plus général où la surface de charge présente un "vertex" et où le matériau n'obéit pas au principe du travail maximal.

ii) étude énergétique /37,*/

Le fondement du raisonnement est d'écrire que l'énergie de déformation plastique acquise par le matériau au cours d'une déformation ne peut pas être supérieure au travail mis en jeu par les forces extérieures pour produire cette déformation.

Prenons un système dans un état de contraintes σ^*_{ij} à l'intérieur de la surface de plasticité -(point A, fig. A2/23)-. On applique des contraintes supplémentaires jusqu'à l'état σ_{ij} sur la surface de plasticité (point B, fig. A2/23). Ensuite on applique un incrément de contrainte $d\sigma_{ij}$ extérieur à la surface de plasticité amenant le système à l'état de contrainte $(\sigma_{ij}+d\sigma_{ij})$ qui s'accompagne d'une déformation plastique $d\varepsilon_{ij}$. On relâche ensuite $d\sigma_{ij}$, le système revient en B puis on relâche les contraintes pour revenir en A à l'état σ^*_{ij}.

Durant ce trajet, le parcours AB est élastique et l'énergie est totalement récupérée en BA. Les forces extérieures n'ont travaillé de manière irréversible que lors du travail plastique, soit :

$$W_f = (\sigma_{ij}+d\sigma_{ij})d\varepsilon_{ij}$$

Globalement le système a reçu entre l'instant initial et l'instant final :

$$W_r = \sigma^*_{ij}\, d\varepsilon_{ij}$$

La condition énoncée :

$$W_f > W_r$$

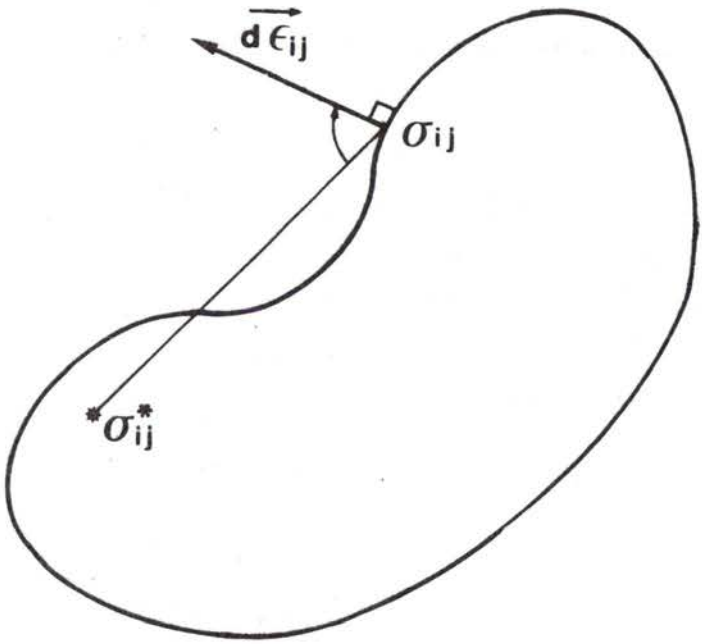


fig.A2/24 Exemple de surface de charge non convexe ne vérifiant pas le principe du travail maximal.

devient :

$$(\sigma_{ij}+d\sigma_{ij})d\varepsilon_{ij} > \sigma^*_{ij}d\varepsilon_{ij}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$(\sigma_{ij}-\sigma^*_{ij})d\varepsilon_{ij}+d\varepsilon_{ij}d\sigma_{ij} > 0$$

ce qui est différent du principe du travail maximum par un terme du second ordre : $d\varepsilon_{ij}\ d\sigma_{ij}$.

Ce terme peut en général être négligé, excepté lorsque σ^*_{ij} tend vers σ_{ij}, car alors le terme $(\sigma_{ij}-\sigma^*_{ij})$ devient infiniment petit, du même ordre que $d\sigma_{ij}$.

Lorsque σ^*_{ij} est loin de σ_{ij} alors la forme du principe du travail maximal est retrouvée imposant à la surface d'écoulement d'être convexe. Si la surface ne l'était pas il serait possible de trouver des états de charge σ^*_{ij} pour lesquels le principe du travail maximal ne serait plus vrai (fig. A2/24). Lorsque σ^*_{ij} est confondu avec σ_{ij} alors la relation établie devient :

$$d\varepsilon_{ij}\ d\sigma_{ij} > 0$$

ce qui impose aux vecteurs incrément de déformation et incrément de contrainte de former un angle aigu, leur produit scalaire étant positif.

Les considérations énergétiques n'établissent pas le principe du travail maximum mais impose à la surface de charge d'être convexe et au vecteur incrément de déformation de former un angle aigu avec le vecteur incrément de contrainte qui le provoque. La théorie de l'écoulement présente donc un cas particulier de l'enveloppe générale définie pour lequel l'angle des vecteurs incrément est droit.

Il est aisé de vérifier que dans la théorie de la déformation le produit $d\sigma_{ij}\ d\varepsilon_{ij}$ est positif, en effet :

$$d\sigma_{ij}\ d\varepsilon_{ij} = d\sigma_{ij}(\mu dS_{ij}+d\mu S_{ij})$$

or $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk}}{3}$ et $dS_{ij} = d\sigma_{ij} - \frac{d\sigma_{kk}}{3}$

ce qui conduit :

$$d\sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\mu d\sigma_e^{\,2} + \frac{2}{3} d\mu \sigma_e d\sigma_e$$

ou encore :

$$d\sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} d\sigma_e\, d(\mu\sigma_e) = d\sigma_e\, d\varepsilon_e$$

ce qui est vérifié pour la plupart des matériaux tant qu'ils présentent une loi de comportement monotone croissante $(d\sigma_e)>0$.

L'intérêt de la théorie de la déformation réside principalement dans la prise en compte de l'incrément de contrainte dans le calcul de l'incrément de déformation correspondant. Son introduction est faite ici d'une manière fort simple puisque la déformation prend la forme d'une différentielle totale exacte. Cette propriété est en désaccord mais l'expérience, néanmoins le formalisme développé présente un pas dans la voie de la prise en compte de l'influence de l'orientation du vecteur incrément de contrainte sur l'orientation du vecteur incrément de déformation.

A.2.3.2 Prédictions de l'instabilité plastique

Un premier point important est la définition de la CLFS. Les méthodes expérimentales ont été présentées (§ A.1.1) et conduisent à des résultats voisins, elles sont fondées sur une "moyenne" entre la déformation de la lèvre de rupture et la déformation de la zone homogène dont la vitesse de déformation est quasi nulle à partir de la mise en striction localisée pour les matériaux peu sensibles à la vitesse de déformation.

Les calculs théoriques pour leur part donnent, comme définition de la CLFS, la déformation de la zone homogène au moment de la localisation de l'écoulement. Cette définition est donc pessimiste par rapport

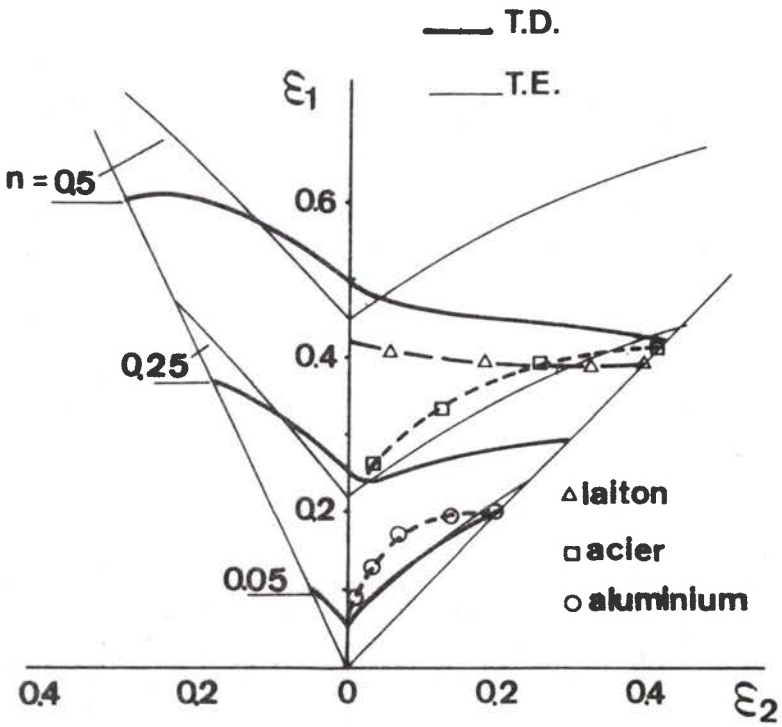


fig.A2/25 Comparaison entre les CLFS théoriques et expérimentales de plusieurs matériaux d'après la théorie de la déformation (f=0) et la théorie de l'écoulement (f=0.99).

à l'expérience et il est raisonnable de prévoir que les courbes théoriques doivent être légèrement plus basses que les courbes expérimentales. Ce point sera repris ultérieurement (§ B.3.1).

La figure A2/25 représente trois courbes limites expérimentales pour un aluminium de coefficient d'écrouissage n déterminé en traction uniaxiale égale à 0.05, un acier doux d'emboutissage (n=0.2), un laiton (n=0.45). Les CLFS calculées sans défaut initial et avec un défaut initial de 1% (f=0.99) sont reportées sur le même diagramme. Trois remarques principales peuvent être faites :

- dans le domaine du rétreint les prédictions théoriques sont toutes voisines et en accord avec l'expérience,
- dans le domaine de l'expansion, la théorie de l'écoulement donne de bons résultats pour les faibles valeurs du coefficient d'écrouissage (acier-aluminium) et présente un important désaccord pour les fortes valeurs de n (laiton).
- la théorie de la déformation rend bien compte de la forme générale des CLFS, même pour les fortes valeurs du coefficient d'écrouissage, mais les prédictions sont en général beaucoup plus basses que l'expérience, surtout dans le cas de l'acier doux.

D'autres éléments seront apportés dans la suite de l'étude pour comparer la validité de ces deux théories de la plasticité quant aux prédictions des CLF à striction.

REFERENCES CHAPITRE A2.

1- J.M. JALINIER, N. CHRISTODOULOU, B. BAUDELET, J.J. JONAS - "Formability"-ASM,AIME- (1977)29

2- J.J. JONAS, B. BAUDELET - Acta Met. 25(1977)43

3- U.F. KOCKS, J.J. JONAS, H. MECKING - Acta Met. 27(1979)419

4- R. HILL -"The mathematical theory of plasticity" Oxford Universi Press(1950)

5- J. MANDEL -"Cours de mécanique des milieux continus"- Gauthier Villars- Tome II(1966)

6- R. HILL - J. Mech. Phys. Solids 1(1952)19

7- H.W. SWIFT - J. Mech. Phys. Solids 1(1952)1

8- Z. MARCINIAK - Int. J. Mech. Sci 9(1967)609

9- Z. MARCINIAK -"Mechanics of sheet metal forming" Plenum Press- N.Y. London-(1978)215

10- J.W. HUTCHINSON, K.W. NEALE - ibid-127

11- J.W. HUTCHINSON, K.W. NEALE - ibid-269

12- A. NEEDLEMAN, N. TRIANTAFYLLIDIS - J. of Eng. Mat. and Tech. 100(1978)164

13- R. HILL - Proc. Roy. Soc. London A314(1970)457

14- S. STOREN, J.R. RICE - J. Mech. Phys. Solids 23(1975)421

15- R. HILL, J.W. HUTCHINSON - J. Mech. Phys. Solids 23(1975)239

16- E. SCHMID, W. BOAS - Kristallplastizität, Springer, Berlin(1936)

17- D. FRANCOIS - "Mise en forme des métaux et alliages" Edition du CNRS(1976)49

18- W. JOHNSON, P.B. MELLOR - "Engineering Plasticity"-Von Nostrand Reinhold Company -Londres(1973)

19- V.D. KLIUSMNIKOV - J. Appl. Math. and Mech. 23(1959)1030

20- B.A. BUDIANSKY - J. Appl. Mech. 26(1959)259

21- J.W. RUDNICKY, J.R. RICE - J. Mech. Phys. Solids 23(1975) 371

22- J.W. HUTCHINSON - Proc. Roy. Soc. London - A319(1970)247

23- S.S. GILL, J. PARKER - J. Appl. Mech. 26(1959)77

24- P.N. NAGHIDI, F. ESSENBERG, W. KOFF - J. Appl. Mech. 25(1958)201

25- J. MIASTROWSKI, W. SCZEPINSKI - Int. J. Solids Struc. 1(1965)189

26- H. IVEY - J. Mech. Eng. Sci. 3(1961)15

27- L.W. MU, J.F. BRATT - J. Appl. Mech. 25(1958)411

28- W. MAIR, H.L. PUGH - J. Mech. Eng. Sci. 6(1964)150

29- E. SHIRATORI, K. IKEGAMI, H. OKANO - Bulletin J.S.M.E. 11(1968)413

30- E. SHIRATORI, K. IKEGAMI - J. Mech. Phys. Solids 16(1968)373

31- F.M. NAGHIDI, J.C. ROWLEY, C.W. BEADLE - J. Appl. Mech. 22(1955)416

32- A. PHILIPS, G.A. GRAY - J. Basic Eng. 83(1961)275

33- W. MAIR - J. Strain Anal. 2(1967)188

34- S.S. HECKER - Acta Mech. 13(1972)69

35- S.S. HECKER - Met. Trans. 2(1971)2077

36- S.S. HECKER - ibid - 4(1973)985

37- D.C. DRUCKER - Proc. 1st U.S. Nat. cong. of Appl. Mech.(1951)487

B. Analyse théorique des CLFS

La détermination théorique des courbes limites de formage est un problème très complexe qui combine trois analyses de la science des matériaux :

- Le problème des lois de comportement,
- Le problème des théories de la plasticité et des calculs d'instabilité plastique,
- Le problème de la prise en compte de l'influence et de l'évolution de certaines variables métallurgiques.

B.1. LOI DE COMPORTEMENT

Nous nous limiterons à l'étude des lois de comportement prenant en compte les paramètres d'anisotropie cristallographiques d'écrouissage et de sensibilité à la vitesse de déformation. Les autres paramètres seront analysés dans le chapitre B.2.

B.1.1 ANISOTROPIE CRISTALLOGRAPHIQUE

B.1.1.1 Présentation

L'anisotropie du polycristal est due au fait que les directions cristallographiques des grains monocristallins anisotropes constituant le matériau ne sont pas réparties au hasard. Certaines directions sont privilégiées formant la texture du matériau. Cette anisotropie

se manifeste de manière simple lors de la traction uniaxiale du matériau : pour un matériau parfaitement isotrope, les déformations de traction : ε_1, dans la largeur : ε_2, et dans l'épaisseur : ε_3 se repartissent suivant l'égalité :

$$\varepsilon_1 = -2\varepsilon_2 = -2\varepsilon_3$$

Or, par exemple, lors de la traction d'une éprouvette d'acier laminé à froid le chemin de déformation obtenu est :

$$\varepsilon_1 = -1.56\varepsilon_2 = -0.87\varepsilon_3$$

lors de la traction d'un alliage léger :

$$\varepsilon_1 = -2.86\varepsilon_2 = -5.3\varepsilon_3$$

Les résultats expérimentaux peuvent varier considérablement par rappo au cas isotrope. Cette anisotropie est caractérisée en général par l rapport des déformations dans la largeur et dans l'épaisseur de la tôle /1/ :

$$r = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_3}$$

Ce coefficient d'anisotropie est égal à 1 dans le cas isotrope, 1.8 pour l'acier et 0.54 pour l'alliage léger présenté.

Le chemin de déformation s'obtient aisément à partir de la conser vation du volume :

$$\rho = -\frac{1+r}{r}$$ pour une traction uniaxée.

Dans un cas plus complexe de chargement, il est nécessaire d'intr duire plusieurs coefficients pour décrire le comportement anisotrope d matériau. Hill /2/ propose l'utilisation de 6 coefficients intervenan dans le calcul de la contrainte équivalente sous la forme :

$$\sigma_e^2 = F(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+G(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+H(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+2L\sigma_{23}^2+2Q\sigma_{31}^2+2P\sigma_{12}^2$$

exprimée dans les axes principaux d'anisotropie -

Le cas isotrope est décrit par :

$$3F=3G=3H=L=Q=P=\frac{3}{2}$$

L'introduction de ces coefficients permet de rendre compte des distorsions de la surface de charge (σ_e=cte) dues à l'anisotropie du matériau.

Les relations contraintes-déformations deviennent dans les axes principaux d'anisotropie :

$$d\varepsilon_{11} = d\lambda\left[H(\sigma_{11}-\sigma_{22})+G(\sigma_{11}-\sigma_{33})\right]$$

$$d\varepsilon_{22} = d\lambda\left[F(\sigma_{22}-\sigma_{33})+H(\sigma_{22}-\sigma_{11})\right]$$

$$d\varepsilon_{33} = d\lambda\left[G(\sigma_{33}-\sigma_{11})+F(\sigma_{33}-\sigma_{22})\right]$$

$$d\varepsilon_{12} = d\lambda P\sigma_{12}$$

$$d\varepsilon_{23} = d\lambda L\sigma_{23}$$

$$d\varepsilon_{31} = d\lambda Q\sigma_{31}$$

Le coefficient d'anisotropie r introduit précédemment devient pour une traction dans le sens de laminage et dans le sens travers :

$$r_0 = \frac{H}{G} = r, \qquad r_{90} = \frac{H}{F}$$

Ces coefficients sont aisés à déterminer expérimentalement mais il est en général plus intéressant d'exprimer les relations de la plasticité en introduisant leur rapport :

$$s = \frac{r_0}{r_{90}} = \frac{F}{G} \quad \text{et} \quad r = r_0$$

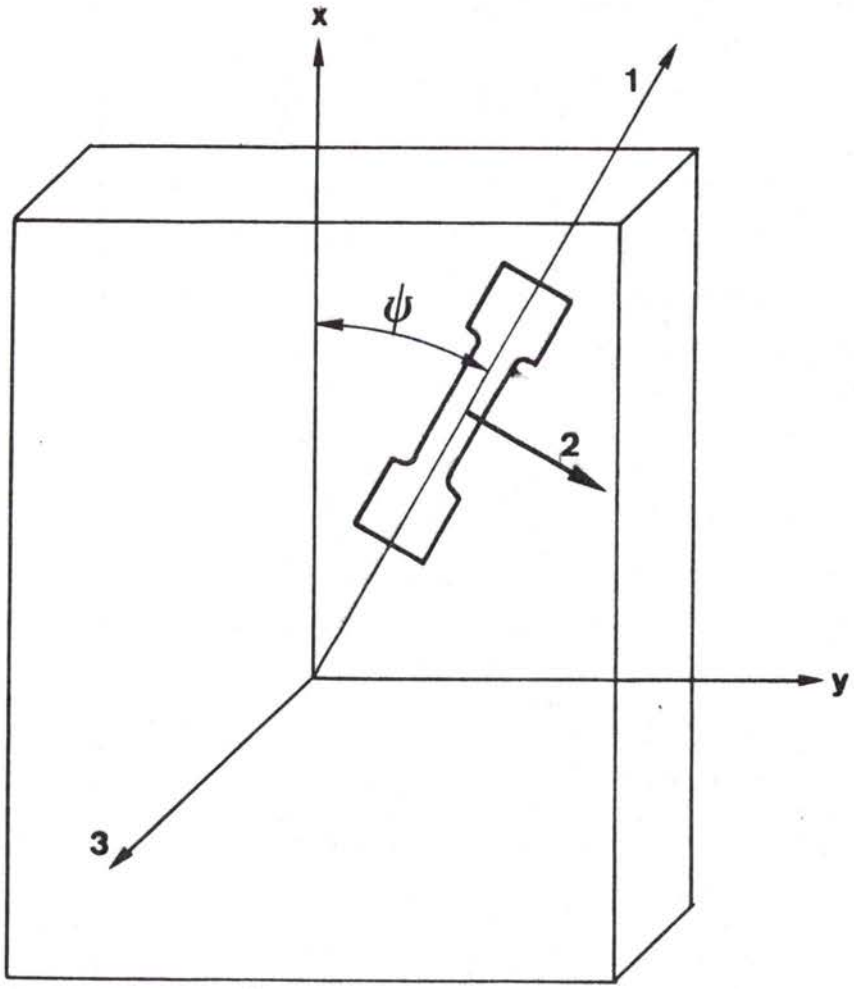


fig.B1/1 Définition des reprès (1,2,3) liés à l'éprouvette et (x,y,3) liés au sens de laminage et travers de la tôle.

Les coefficients F, G, H définis à une constante près s'expriment par :

$$F = \frac{s}{1+r} \qquad G = \frac{1}{1+r} \qquad H = \frac{r}{1+r}$$

en posant comme condition supplémentaire l'égalité de la contrainte équivalente et de la contrainte de traction dans un essai uniaxial.

En contrainte plane, pour les tôles minces, l'expression de la contrainte équivalente devient :

$$\varepsilon_e = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{1+r}{sr+r+s}} \sqrt{\rho^2(1+r)+2\rho r+s+r}$$

où $$\rho = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{r-\alpha(r+s)}{\alpha r-(1+r)}$$

Les relations contraintes-déformations deviennent :

$$\frac{d\varepsilon_1}{(1+r)-r\alpha} = \frac{d\varepsilon_2}{\alpha(r+s)-r} = -\frac{d\varepsilon_3}{1+\alpha s} = \frac{d\varepsilon_e}{\sqrt{1+r}\sqrt{\alpha^2(s+r)-2r\alpha+r+1}}$$

Industriellement il est souvent introduit un coefficient d'anisotropie mesuré dans une traction simple à 45° de la direction de laminage : $r_{45°}$. Le coefficient d'anisotropie moyen est alors définit par :

$$\bar{r} = \frac{r_0 + 2r_{45} + r_{90}}{4}$$

Or, lors de cette traction, le repère principal des contraintes (système 1,2,3) ne correspond plus au repère principal d'anisotropie (système x, y,3) que l'on peut supposer confondu avec les axes de laminage, travers et normal de la tôle (fig. B1/1).

Le calcul anisotrope s'effectuant dans le repère principal d'anisotropie, les contraintes appliquées dans ce système d'axe sont :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{11}\cos^2\psi+\sigma_{22}\sin^2\psi = 0.5\sigma_{11}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{11}\sin^2\psi+\sigma_{22}\cos^2\psi = 0.5\sigma_{11}$$

$$\sigma_{xy} = (-\sigma_{11}+\sigma_{22})\sin\psi\cos\psi = 0.5\sigma_{11}$$

Les relations contraintes-déformations anisotropes donnent :

$$d\varepsilon_{xx} = d\lambda\left[H(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})+G(\sigma_{xx}-\sigma_{zz})\right] = d\lambda\left[0.5G\sigma_{11}\right]$$

$$d\varepsilon_{yy} = d\lambda\left[F(\sigma_{yy}-\sigma_{zz})+H(\sigma_{yy}-\sigma_{xx})\right] = d\lambda\left[0.5F\sigma_{11}\right]$$

$$d\varepsilon_{33} = d\lambda\left[G(\sigma_{33}-\sigma_{xx})+F(\sigma_{33}-\sigma_{yy})\right] = d\lambda\left[-0.5\sigma_{11}(F+G)\right]$$

$$d\varepsilon_{xy} = d\lambda P\sigma_{xy} = d\lambda\left[-0.5P\sigma_{11}\right]$$

ce qui permet de calculer les déformations principales :

$$d\varepsilon_{11} = d\varepsilon_{xx}\cos^2\psi+d\varepsilon_{yy}\sin^2\psi-2d\varepsilon_{xy}\sin\psi\cos\psi$$

$$d\varepsilon_{22} = d\varepsilon_{xx}\sin^2\psi+d\varepsilon_{yy}\cos^2\psi+2d\varepsilon_{xy}\sin\psi\cos\psi$$

$$d\varepsilon_{12} = (-d\varepsilon_{xx}+d\varepsilon_{yy})\sin\psi\cos\psi+d\varepsilon_{xy}(\cos^2\psi-\sin^2\psi)$$

pour le cas étudié :

$$d\varepsilon_{11} = \left[0.25G+0.25F+0.5P\right]\sigma_{11}d\lambda$$

$$d\varepsilon_{22} = \left[0.25G+0.25F-0.5P\right]\sigma_{11}d\lambda$$

$$d\varepsilon_{12} = 0$$

le coefficient d'anisotropie r_{45} s'exprime par :

$$r_{45} = \frac{d\varepsilon_{22}}{d\varepsilon_{33}} = \frac{G+F-2P}{-2(F+G)} = \frac{2P(1+r)-(1+s)}{2(1+s)}$$

La détermination du coefficient r_{45} permet donc de déterminer le coefficient principal d'anisotropie en cisaillement P. Le coefficient r_{45} est une fonction des coefficients r_0, r_{90} et P. La définition d'un coefficient d'anisotropie moyen ne doit donc pas s'effectuer en prenant en compte le coefficient r_{45} mais en effectuant la moyenne de r_0 et r_{90} et en déterminant d'autre part le coefficient P, qui est sans influence pour toute sollicitation dont les axes principaux sont confondus avec les axes principaux d'anisotropie.

Une extension de l'étude précédente permet de déterminer le coefficient d'anisotropie pour n'importe quelle direction inclinée d'un angle ψ par rapport à la direction de laminage :

$$r_{(\psi)} = \frac{d\varepsilon_{22}}{d\varepsilon_{33}} \quad \text{(axe 1 faisant un angle } \psi \text{ avec l'axe x de laminage)}$$

Les contraintes dans le repère principal d'anisotropie sont :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{11}\cos^2\psi$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{11}\sin^2\psi$$

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{11}\sin\psi\cos\psi$$

Les déformations dans le repère principal d'anisotropie s'écrivent :

$$d\varepsilon_{xx} = d\lambda\left[H\sigma_{11}(\cos^2\psi-\sin^2\psi)+G\sigma_{11}\cos^2\psi\right]$$

$$d\varepsilon_{yy} = d\lambda\left[F\sigma_{11}\sin^2\psi+H\sigma_{11}(\sin^2\psi-\cos^2\psi)\right]$$

$$d\varepsilon_{33} = -d\lambda\left[G\sigma_{11}\cos^2\psi+F\sigma_{11}\sin^2\psi\right]$$

$$d\varepsilon_{xy} = -d\lambda P\sigma_{11}\sin\psi\cos\psi$$

Les déformations principales sont :

$$\frac{d\varepsilon_{11}}{d\lambda\sigma_{11}} = \left[H(\cos^2\psi-\sin^2\psi)+G\cos^2\psi\right]\cos^2\psi+\left[F\sin^2\psi+H(\sin^2\psi-\cos^2\psi)\right]\sin^2\psi$$
$$+2P\sin^2\psi\cos^2\psi$$

$$\frac{d\varepsilon_{22}}{d\lambda\sigma_{11}} = \left[H(\cos^2\psi-\sin^2\psi)+G\cos^2\psi\right]\sin^2\psi+\left[F\sin^2\psi+H(\sin^2\psi-\cos^2\psi)\right]\cos^2\psi$$
$$-2P\sin^2\psi\cos^2\psi$$

ce qui permet de calculer le chemin de déformation et le coefficient d'anisotropie :

$$r(\psi) = \frac{d\varepsilon_{22}}{d\varepsilon_{33}} = \frac{4r\cos^2 2\psi-\left[1+s-2P(1+r)\right]\sin^2 2\psi}{2\left[1+\cos 2\psi+s(1-\cos 2\psi)\right]}$$

ou encore :

$$r(\psi) = \frac{2r_0 r_{90}\cos^2 2\psi+r_{45}(r_0+r_{90})\sin^2 2\psi}{r_0(1-\cos 2\psi)+r_{90}(1+\cos 2\psi)}$$

$$\rho = \frac{d\varepsilon_{22}}{d\varepsilon_{11}} = \frac{-4r\cos^2 2\psi+\left[1+s-2P(1+r)\right]\sin^2 2\psi}{4r\cos^2 2\psi+(\cos 2\psi+1)^2+s(1-\cos 2\psi)^2+2P(1+r)\sin^2 2\psi}$$

ou encore :

$$\rho = -\frac{4r_0 r_{90}\cos^2 2\psi+2r_{45}(r_0+r_{90})\sin^2 2\psi}{4r_0 r_{90}\cos^2 2\psi+r_{90}(\cos 2\psi+1)^2+r_0(1-\cos 2\psi)^2+(r_0+r_{90})(1+2r_{45})\sin^2 2\psi}$$

Les mesures expérimentales donnent pour un alliage léger 3003 laminé à froid :

$$r_0=0.54 \qquad r_{90}=0.42 \qquad r_{45}=1.07$$

ce qui permet de calculer les coefficients utilisés :

$$r=0.54 \qquad s=1.29 \qquad P=\frac{(1+s)(2r_{45}+1)}{2(1+r)}=2.33$$

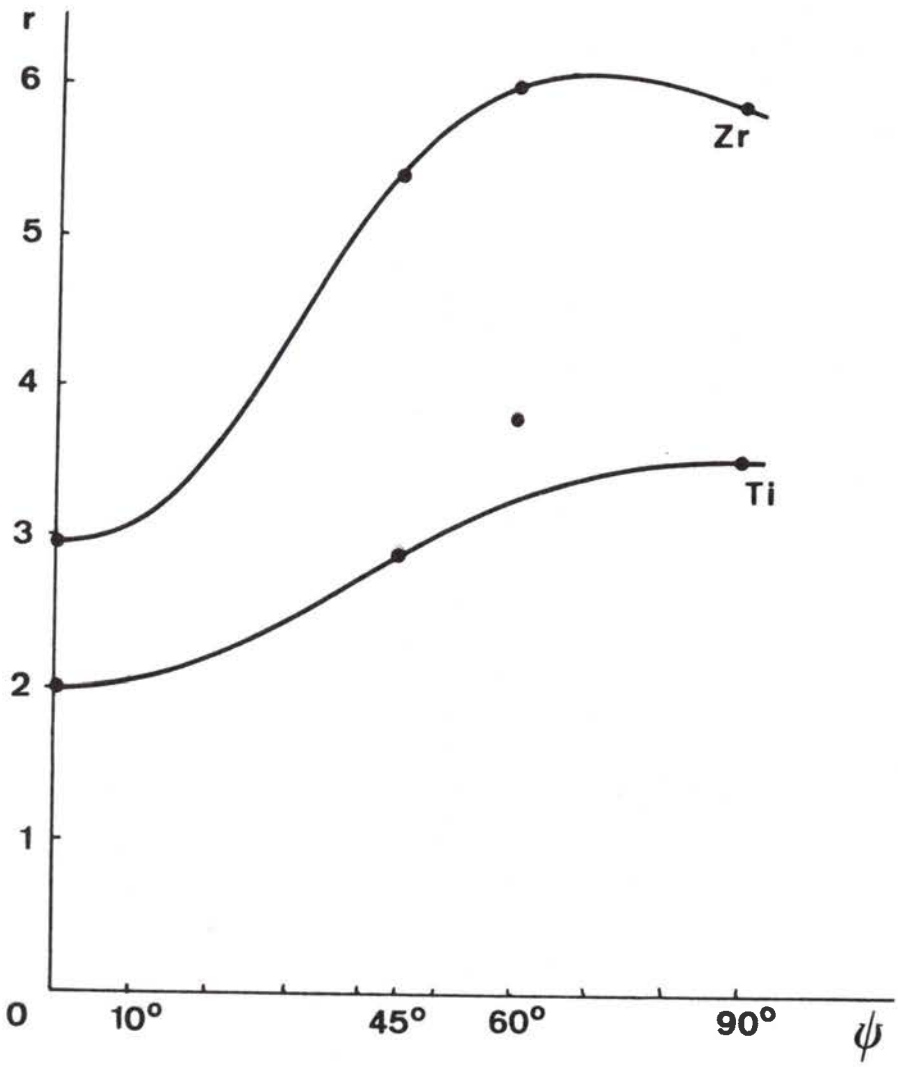


fig.B1/2 Evolution du coefficient d'anisotropie avec l'orientation de l'axe de traction. Courbe théorique en trait plein d'après la théorie de Hill identifiée sur les valeurs r_0, r_{45}, r_{90}. Point expérimental r_{60} $\sqrt{3}$ permettant de vérifier la validité du modèle.

de même pour un acier calmé à l'aluminium :

$$r_0=1.84 \qquad r_{90}=1.99 \qquad r_{45}=1.22$$

ce qui donne : r=1.84 s=0.92 P=1.16

Le cas isotrope correspond à r=s=1, P=1.5.

La figure B1/2 représente l'évolution du coefficient $r(\psi)$ déterminée théoriquement /*/ à partir des valeurs r_0, r_{45} et r_{90} mesurées /3/. La valeur r_{60} est en accord avec la prévision théorique dans le cas du zirconium, la théorie de Hill ne semble par contre pas très bien s'appliquer au cas du titane qui se déforme par maclage. Ces deux matériaux ont été choisis ici pour leur très grande évolution de $r(\psi)$.

B.1.1.2 Evolution

Ces calculs définissent les coefficients d'anisotropie comme étant le rapport d'incréments de déformation. Les coefficients sont donc déterminés autour d'un certain taux de déformation. La texture cristallographique d'un matériau variant au cours d'un essai, les coefficients d'anisotropie doivent être fonction de la déformation.

Le changement de texture au cours de la déformation plastique n'est pas surprenant car il est connu que lors de la sollicitation en traction simple du monocristal, ses plans cristallins tournent avec la déformation plastique. Chaque grain du polycristal va donc subir une certaine rotation à l'image du monocristal. Le grain de matière est chargé en général d'une manière beaucoup plus complexe due à l'état de contrainte triaxial qui peut être appliqué au polycristal et aux contraintes d'accommodation dues à la présence de grains voisins d'orientation différente. La rotation de chacun des grains va être différente suivant l'état de contrainte qui lui est appliqué et, par conséquent va dépendre du chemin de charge imposé au polycristal.

Les variations de texture d'une tôle d'acier déformée en traction simple ou en expansion biaxée symétrique ont été étudiées expérimentalement /4/. Il a été observé une évolution de la texture suivant le chemin, la traction simple renforçant une orientation différente de l'orientation

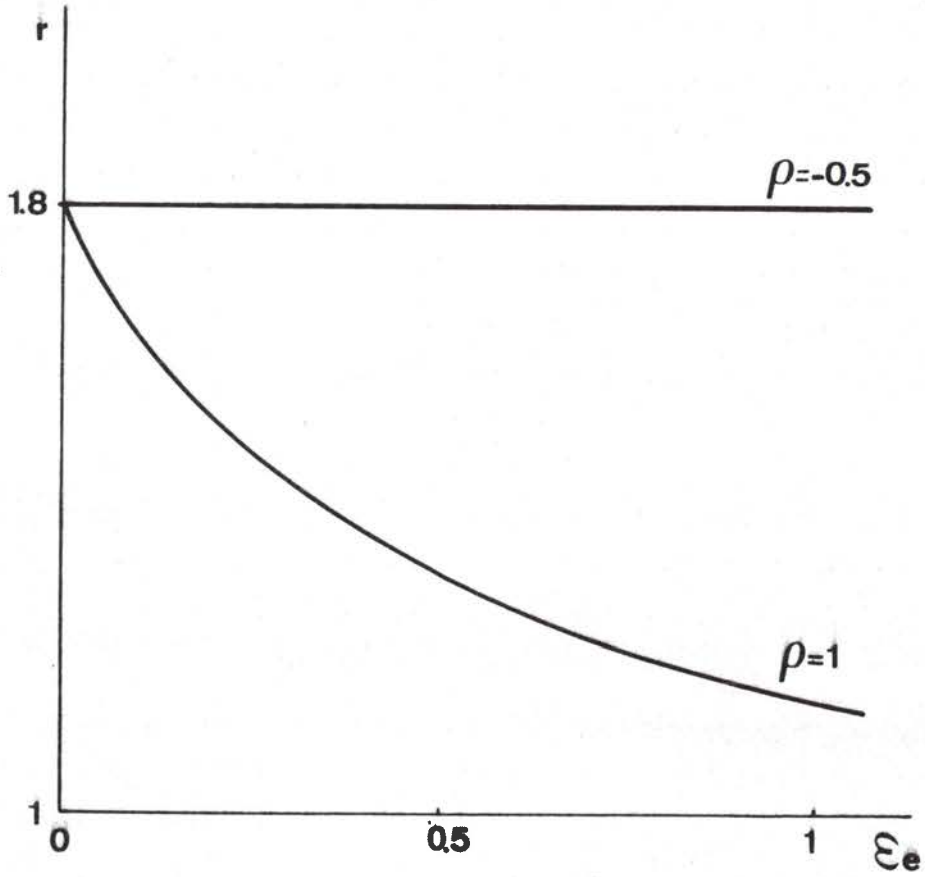


fig.B1/3 Evolution du coefficient d'anisotropie avec la déformation au cours d'une traction uniaxiale et d'une expansion équibiaxée.

préférentielle initiale, alors que l'expansion biaxiale symétrique tend à rendre le matériau isotrope en atténuant sa texture. Le calcul des coefficients d'anisotropie, déterminés à partir des textures, montre que le changement de texture en traction simple n'amène pratiquement pas de changement du coefficient d'anisotropie (fig.B1/3) alors qu'en déformation biaxiale symétrique, le coefficient tend vers la valeur 1 correspondant à l'isotropie (fig.B1/3), pour l'acier étudié.

L'anisotropie d'une tôle doit donc être caractérisée par des coefficients de Hill variables, fonction de la déformation subie et du chemin de déformation suivi :

$$F=F(\bar{\varepsilon},\rho) \quad \text{par exemple, de même pour G, H, P, Q, L.}$$

où la fonction :

$$r(\bar{\varepsilon},\rho) \text{ définie pour } R_0,\ r_{90} \text{ et } r_{45}$$

ces fonctions permettant de déterminer les coefficients de Hill F, G, P, en général suffisants pour les tôles minces. Il peut néanmoins être nécessaire de déterminer les coefficients L et Q respectivement reliés à σ_{23} et σ_{13} qui interviennent par exemple par cisaillement de la tôle entre le poinçon mobile et la matrice fixe.

Dans le cas où les coefficients d'anisotropie sont inférieurs à 1, il a été montré par quelques auteurs /p. ex.5/ que le critère anisotrope de Hill ne rend pas bien compte de la surface de plasticité du matériau. Hill a alors proposé un nouveau critère /6/ où la forme de la contrainte équivalente n'est plus quadratique mais s'écrit avec un exposant quelconque m, fonction du matériau étudié, sous la forme :

$$2(r+1)\sigma_e^{\,m} = (1+2r)|\sigma_1-\sigma_2|^m+|\sigma_1+\sigma_2|^m$$

en contrainte plane et isotropie plane.

Il n'existe pas de fondements physiques relativement aux textures pour l'écriture de ce critère qui n'apporte rien d'autre qu'un paramètre ajustable pour mieux décrire l'expérience. Dans le cas d'un alliage d'aluminium par exemple, le coefficient m a été trouvé égal à 1.8(r=0.7) /5/.

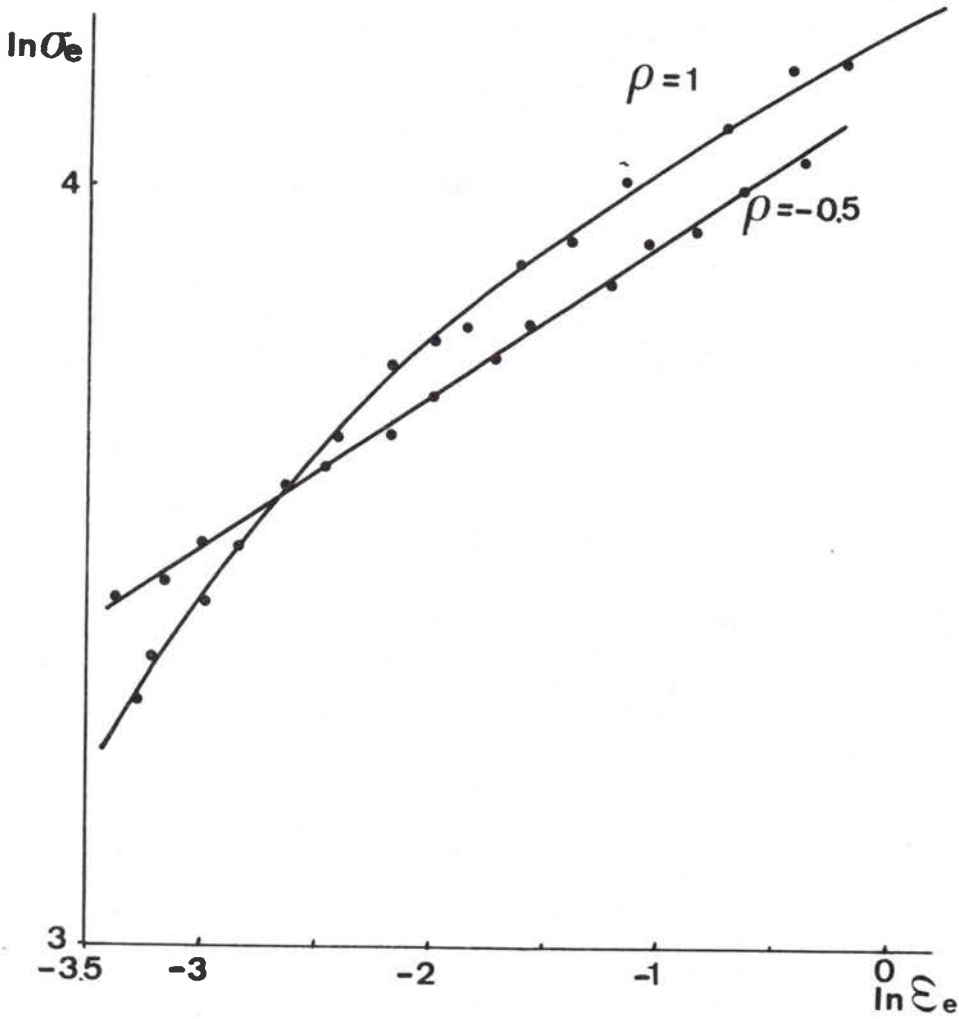


fig.B1/4 Evolution de l'écrouissage avec la déformation pour deux chemins de déformation.

B.1.2 ECROUISSAGE

B.1.2.1 Présentation

L'écrouissage du matériau se caractérise par le fait que la contrainte d'écoulement augmente continuellement avec la déformation plastique. Le coefficient d'écrouissage N est généralement défini comme étant le rapport du module tangent E_t au module sécant E_s de la courbe contrainte-déformation dans un essai de traction simple (fig.A2/11). Cette définition a été étendue à la courbe contrainte équivalente-déformation équivalente pour tout type de sollicitation, on a alors :

$$E_t = \frac{\partial \sigma_e}{\partial \varepsilon_e}, \qquad E_s = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e}$$

d'où

$$N = \frac{\partial \sigma_e}{\sigma_e} \frac{\varepsilon_e}{\partial \varepsilon_e} = \frac{\partial \ln \sigma_e}{\partial \ln \varepsilon_e}$$

Le coefficient d'écrouissage peut donc aussi s'interpréter comme étant à chaque instant la pente de la courbe $(\ln\sigma_e, \ln\varepsilon_e)$ pour une vitesse de déformation donnée.

Comme il a été présenté précédemment (§A.2), il est généralement introduit un coefficient d'écrouissage constant avec la déformation et le chemin de déformation, sa valeur étant déterminée comme la valeur moyenne de l'écrouissage au cours d'un essai de traction simple. Or, il est observé expérimentalement un comportement différent du matériau suivant le type de sollicitation. Des essais de gonflement hydraulique en matrice circulaire permettent d'atteindre les contraintes au sommet de la calotte formée en mesurant les rayons de courbure, l'épaisseur de la tôle et en enregistrant la pression atteinte. Les déformations sont généralement mesurées avec les grilles de cercle présentées.
La courbe contrainte-déformation ainsi obtenue fait apparaître un coefficient d'écrouissage différent de celui obtenu en traction simple. La figure B1/4 [7,*] compare, pour un acier d'emboutissage calmé à l'aluminium, les coefficients d'écrouissage dans l'espace $(\ln\sigma_e, \ln\varepsilon_e)$.

B. U. METZ

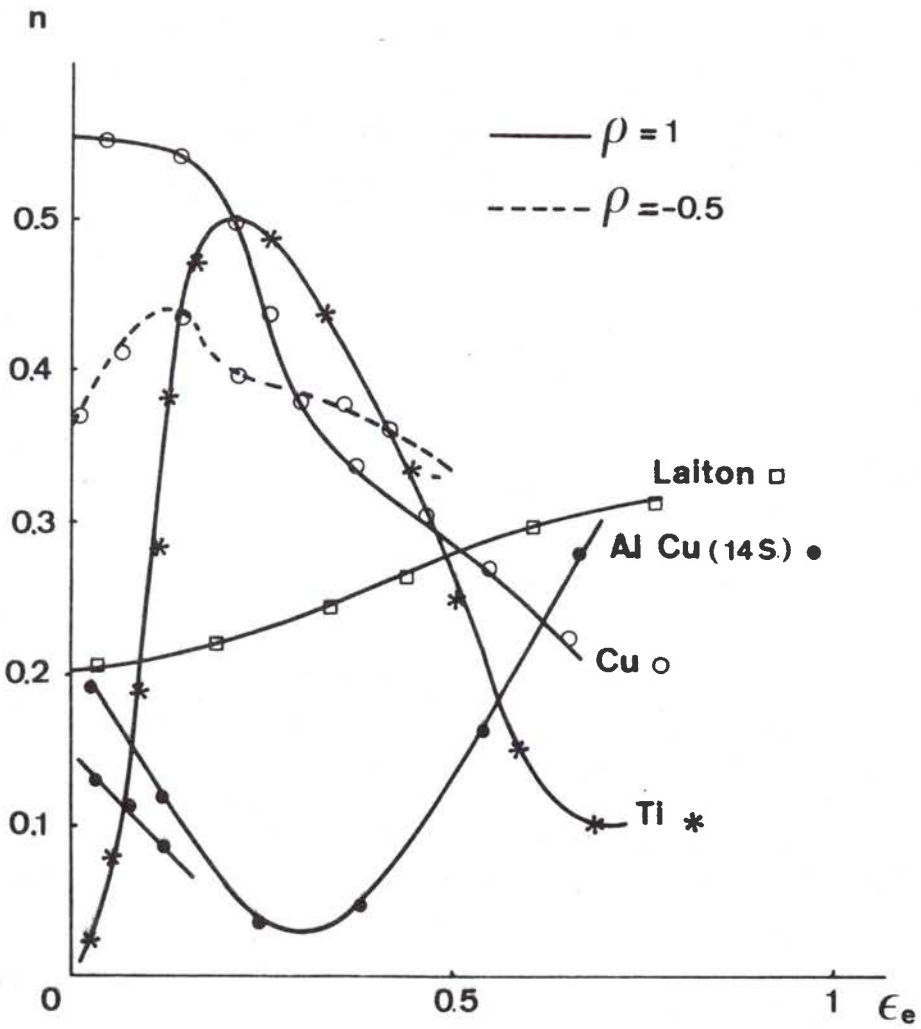


fig.B1/5 Evolution du coefficient d'écrouissage avec la déformation pour deux chemins de déformation.

Il ressort que l'hypothèse d'un coefficient d'écrouissage constant avec la déformation n'est pas vérifiée pour ce matériau en expansion équibiaxée alors qu'elle est bien vérifiée en traction uniaxiale, de plus le coefficient d'écrouissage obtenu en déformation biaxée symétrique est légèrement supérieur à celui obtenu en traction simple. La figure B1/5 /8/ présente quatre matériaux pour lesquels le coefficient d'écrouissage dépend du chemin de déformation et aussi très fortement de la déformation pour chaque chemin. Il n'est alors possible de définir qu'une valeur instantanée du coefficient d'écrouissage, vraie à la valeur de la déformation considérée.

Dans le cas d'un coefficient d'écrouissage constant, ce dernier s'interprète directement comme étant l'exposant de la loi de comportement parabolique :

$$\sigma_e = K\bar{\varepsilon}^{n}\dot{\bar{\varepsilon}}^{m} \Rightarrow N = \frac{\partial \ln \sigma_e}{\partial \ln \varepsilon_e} = n$$

or si le coefficient d'écrouissage n'est pas constant :

$$\sigma_e = K\bar{\varepsilon}^{n(\varepsilon,\rho)}\dot{\bar{\varepsilon}}^{m}$$

pour chaque chemin :

$$N = \frac{\partial \ln \sigma_e}{\partial \ln \varepsilon_e} = n + \varepsilon_e \ln \varepsilon_e \frac{\partial n}{\partial \varepsilon_e}$$

le coefficient d'écrouissage instantané n'est plus égal à l'exposant de la loi de comportement.

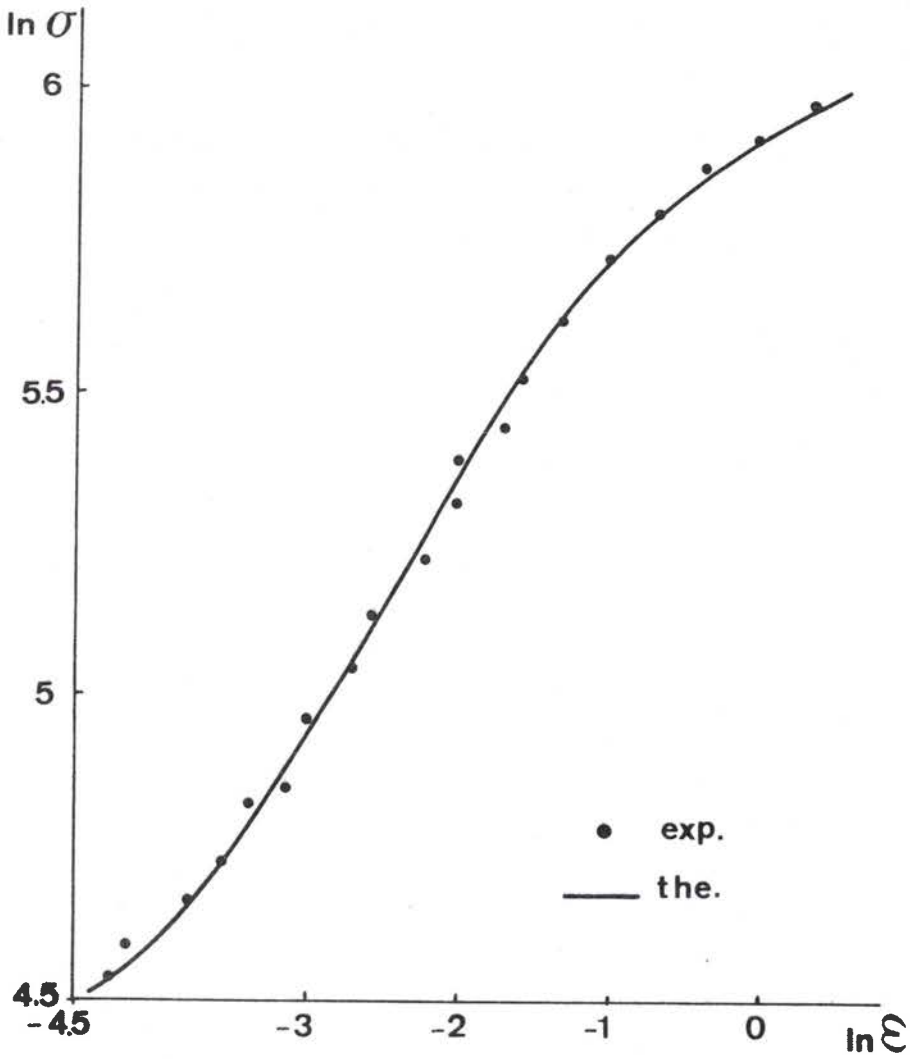


fig.B1/6 Evolution de l'écrouissage dans la cas du cuivre, comparaison avec la loi de comportement de Voce.

B.1.2.2 Différentes formes de la loi d'écrouissage

D'autres formes sont proposées à la loi de comportement rendant compte d'un coefficient d'écrouissage N variant avec la déformation. Ainsi la loi de Voce [9] :

$$\sigma_e = B-(B-A)\exp(-m\varepsilon_e)$$

où A, B et m sont des constantes positives, est une formulation qui semble bien s'appliquer à certains matériaux comme le montre la figure B1/6 pour le cas du cuivre [10]. Dans cette formulation, le coefficient d'écrouissage devient :

$$N = \frac{(B-A)m\varepsilon_e \exp(-m\varepsilon_e)}{B-(B-A)\exp(-m\varepsilon_e)}$$

Une autre forme simple a été proposée récemment par Marciniak [11] :

$$\sigma_e = \frac{c(\varepsilon_e+\varepsilon_o)}{1+c(\varepsilon_e+\varepsilon_o)}\sigma_o$$

où c, ε_o et σ_o sont des constantes positives.
Le coefficient d'écrouissage s'écrit dans ce modèle :

$$N = \frac{\varepsilon_e}{[1+c(\varepsilon_e+\varepsilon_o)](\varepsilon_e+\varepsilon_o)}$$

La figure B1/7 représente la loi de comportement d'un matériau hypothétique, lissée par les représentations proposées. L'accord de chacun des modèles est très bon dans ce cas particulier et la figure B1/8 représente l'évolution du coefficient d'écrouissage calculé N avec la déformation. On constate une forte différence entre chacun des modèles. Ainsi, le maximum de précision pour lisser une loi de comportement n'est pas obtenu sur les couples de valeur (σ,ε) mais sur les couples $(\ln\sigma_e, \ln\varepsilon_e)$ ou d'une manière encore plus précise sur les

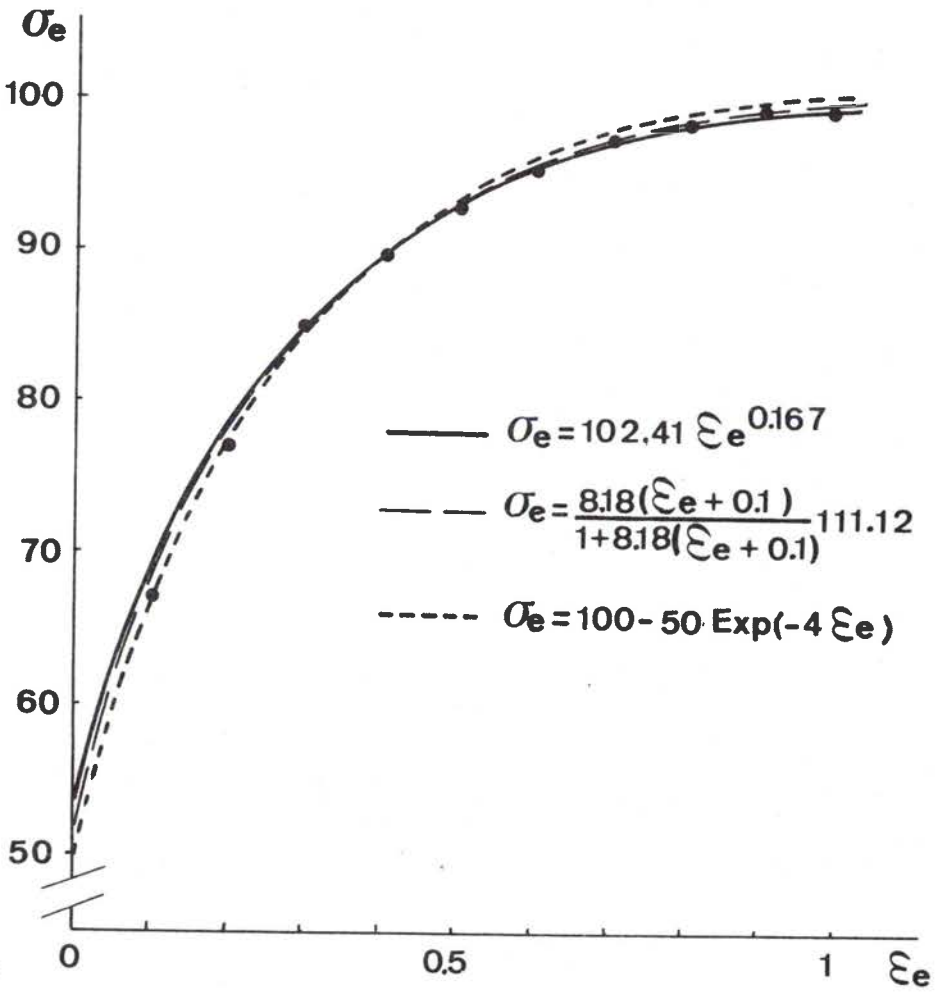


fig.B1/7 Comportement hypothètique d'un matériau exprimé à l'aide des représentations de :

- Ludwig-Hollomon
- Voce
- Marciniak

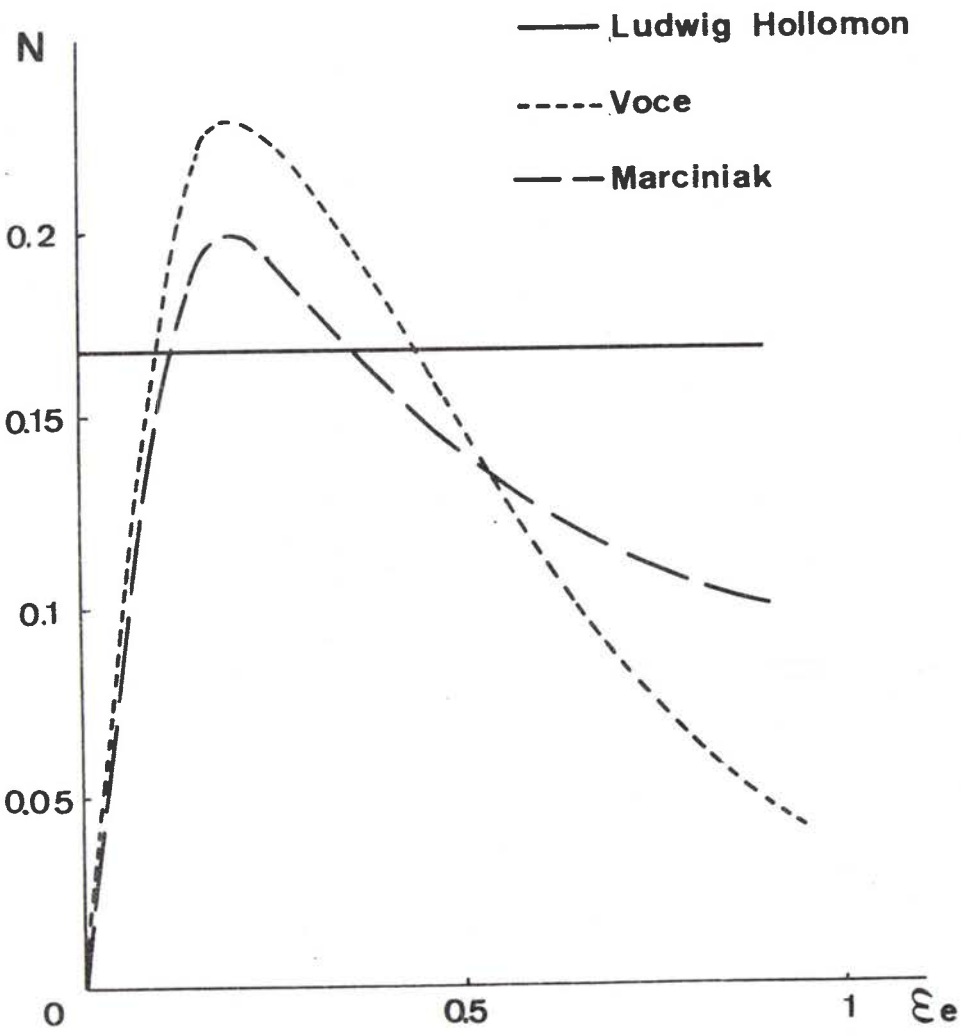


fig.B1/8 Evolution du coefficient d'écrouissage prévu par les lois théoriques utilisées sur la figure B1/7.

couples de points expérimentaux (N,ε_e), mais une telle courbe expérimentale demande de très nombreux points de manière à définir avec le plus de précision possible la valeur du coefficient N à chaque instant Un petit nombre de points entraîne une dispersion énorme des résultats l'erreur absolue calculée sur N étant en général supérieure ou égale à sa propre valeur.

Cette analyse des principales représentations de la loi de comportement ne serait pas complète sans mentionner les équations proposées par Gouzou [12].

Le comportement du matériau est, dans ce modèle, décrit à partir des glissements sur les plans de contrainte de cisaillement la plus élevée. La relation entre les glissements γ_{ij} et les contraintes de cisaillement τ_{ij} se met sous la forme :

$$\tau_{ij} = B_{ij}|\gamma_{ij}|^n(1-c|\gamma_{jk}|^n)(1+c|\gamma_{ki}|^n)$$

Le coefficient n étant constant pour un chemin de déformation donné.

En remarquant que : $\gamma_{ij} = \frac{\varepsilon_i-\varepsilon_j}{3}$

$$\tau_{ij} = \frac{\sigma_i-\sigma_j}{3}$$

L'équation de comportement peut se mettre sous une forme plus habituelle en fonction des contraintes et déformations principales. Une application à un matériau isotrope donne l'égalité de tous les B_{ij} et, dans le cas d'un chemin de charge radial on obtient :

$$\sigma_e = aB\varepsilon_e^n \qquad \text{avec} \quad a=1.59 \text{ pour } \rho=1$$
$$a=1.61 \text{ pour } \rho=-0.5$$
$$a=2.07 \text{ pour } \rho=0$$

L'équation de comportement se ramène donc à la forme simple parabolique pour laquelle le coefficient d'écrouissage est le même dans toute représentation

$$\sigma_i = K\varepsilon_j^n$$

lors d'un chargement strictement radial , la constante K dépendant du chemin de déformation suivi.

Dans la suite de cette étude, il sera le plus souvent fait référence à la loi de comportement parabolique car elle est de loin la plus répandue et des phénomènes interprétés par ses paramètres sont immédiatement figuratifs et compréhensibles par tous.

B.1.2.3 Analyse de l'évolution de l'écrouissage

Il serait intéressant de rechercher les raisons de l'évolution du coefficient d'écrouissage dans la plasticité du grain de matière monocristallin. Comme il a été montré au chapitre précédent, un grain de matière peut être chargé de manière très complexe or l'écrouissage du monocristal n'a été vraiment étudié complètement que pour un état de contrainte uniaxial. Les propriétés d'écrouissage du monocristal sont très anisotropes et dépendent donc très fortement de l'orientation de la contrainte par rapport aux axes cristallins. Ce résultat se retrouve sur un polycristal à forte texture dont les coefficients d'écrouissage peuvent être sensiblement différents pour deux directions de tractions orthogonales. Les théories de l'écrouissage fondées sur les interactions des dislocations entre-elles et avec les inclusions et précipités de la matrice sont donc actuellement insuffisamment développées pour donner des indications sur la plasticité du polycristal. Des renseignements intéressants peuvent être tirés des études phénoménologiques des microstructures formées au cours de la déformation et suivant plusieurs chemins de déformation. Une première étude /13/ a permis de bien mettre en évidence une différence de microstructure entre deux chemins de déformation.

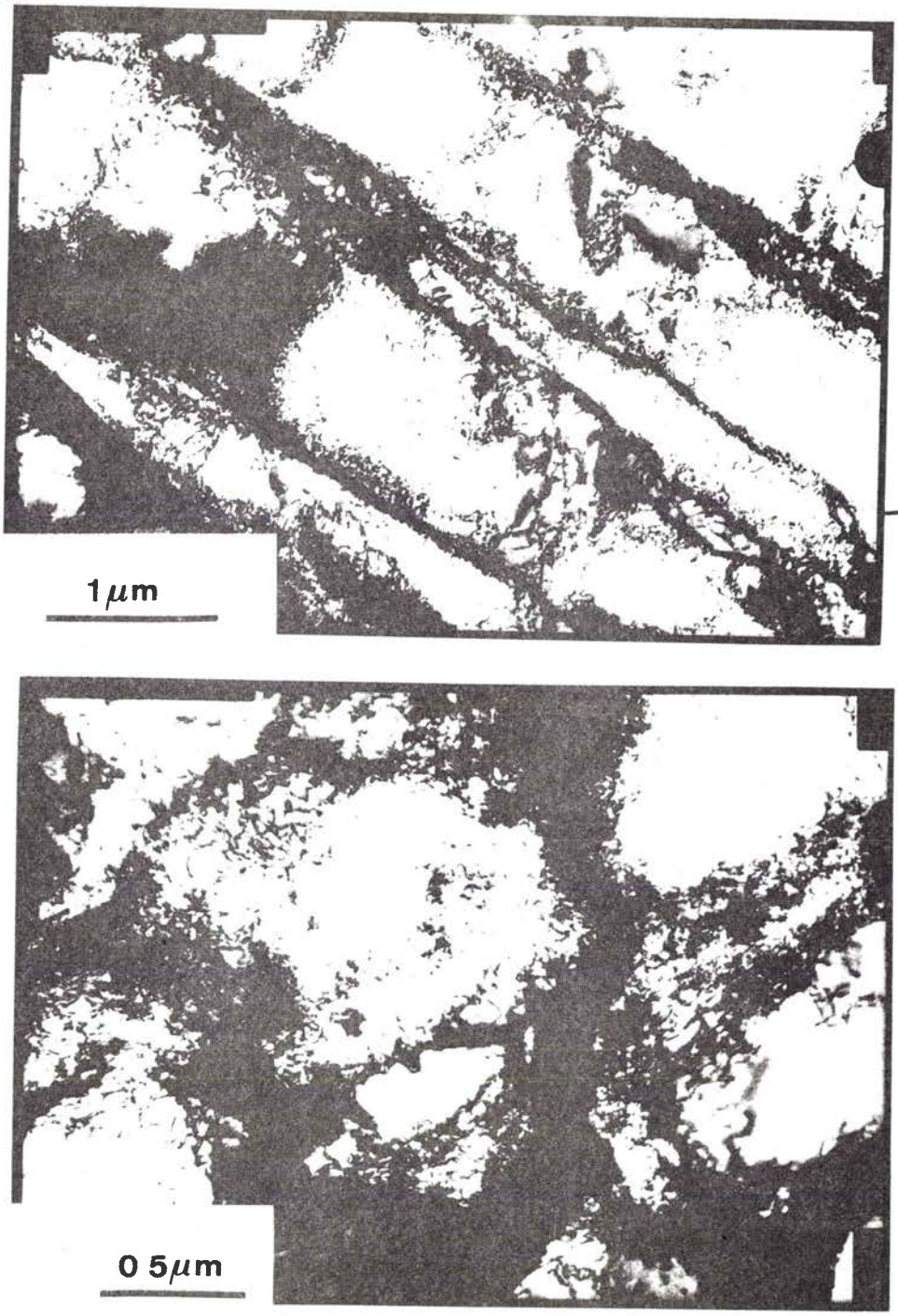


fig.B1/9 Observation des cellules à parois de dislocation en traction uniaxiale et en expansion équibiaxiale.

En traction uniaxiale (fig. B1/9a), les cellules à parois de dislocation formées sont rectangulaires, allongées dans la direction de traction, formées à partir de deux systèmes de glissements actifs principaux et à parois relativement peu épaisses. A l'inverse, en déformation biaxée symétrique (fig. B1/9b), les cellules sont plus équiaxes, formées de trois à quatre systèmes principaux de glissements différents et les parois sont épaisses et opaques. Ces observations réalisées sur un acier pour les grains d'orientation représentatives de la texture instantanée du matériau montrent donc une microstructure plus bloquée dans le cas de la déformation biaxiale qui se traduit par un coefficient d'écrouissage plus élevé que pour la traction simple. Cette étude prouve l'intérêt de ces observations microscopiques dans l'approche fine des problèmes d'écrouissage.

Ces travaux ont ouvert le problème de savoir quelle est l'évolution de l'écrouissage dans une séquence de deux chemins de déformation linéaires différents. Des études récentes [14,15] ont été menées sur la séquence traction-expansion biaxiale en prédéformant le matériau à ε_1=0.05; 0.1; 0.25 en traction uniaxiale puis en mesurant le coefficient d'écrouissage au cours de l'essai suivant de déformation biaxée symétrique. La figure B1/10 [15*] présente les résultats obtenus en fonction de la déformation subie lors de l'essai biaxial symétrique augmentée de la prédéformation en traction. Les évolutions se regroupent en une courbe unique où le coefficient d'écrouissage au cours de la deuxième déformation est, au début de la déformation, égal à celui obtenu au cours de la prédéformation en traction simple : n=0.21 puis le coefficient d'écrouissage augmente pour atteindre l'évolution caractéristique du chemin effectué sans prédéformation. Des études parallèles de la microstructure montrent que la microstructure de traction obtenue par prédéformation se transforme graduellement au cours de la seconde déformation vers la microstructure de déformation biaxiale. Lorsque cette dernière est marquée dans le matériau celui-ci répond avec un coefficient d'écrouissage caractéristique de la microstructure et donc du deuxième chemin de déformation, l'effet de prédéformation

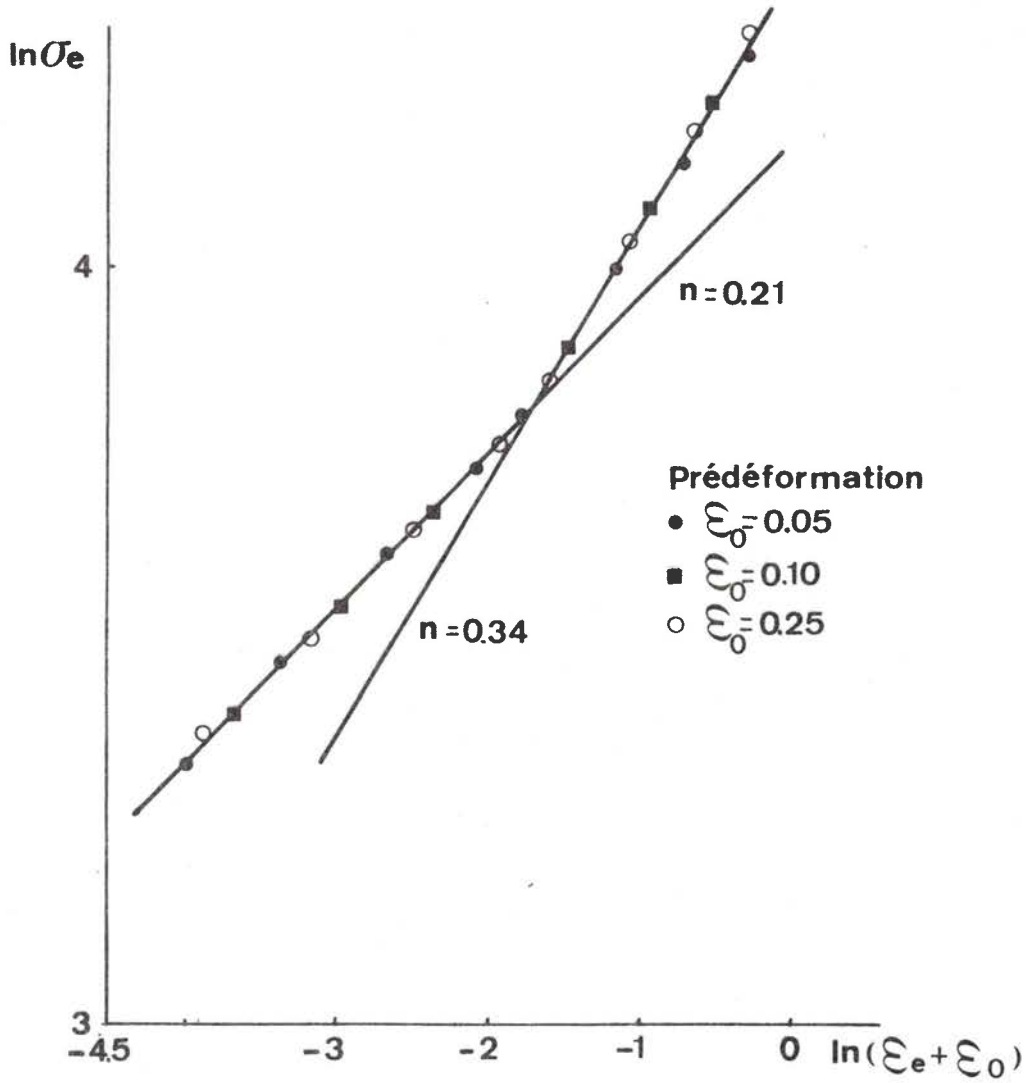


fig.B1/10 Evolution du coefficient d'écrouissage au cours d'une expansion équibiaxiale effectuée après différentes prédéformations en traction uniaxiale :

- ε=0.05
- ε=0.10
- ε=0.25 /15/.

est effacé. Tant que la deuxième microstructure n'est pas marquée, le matériau répond avec la microstructure présente qui est celle de traction et donc avec un coefficient d'écrouissage égal à celui de la traction. Le comportement asymptotique attendu de tout matériau est ici très rapidement atteint. Cette étude est particulièrement intéressante car elle permet de mettre en évidence qu'une microstructure donnée impose le comportement d'écrouissage indépendamment de l'état des contraintes imposées provoquant une faible déformation plastique. Une étude analogue pour la séquence expansion-rétreint a montré, sur des alliages légers /14/, que la microstructure créée au cours de la déformation biaxiale symétrique est très stable et ne présente aucun changement décelable au cours de la traction suivante. Le comportement asymptotique semble donc très long à atteindre pour ce type de déformation et pour cet alliage.

Nous menons actuellement des études plus complètes pour déterminer les lois d'évolution des paramètres caractéristiques de la microstructure et les relier au comportement d'écrouissage du matériau suivant plusieurs chemins de déformation.

B.1.3 SENSIBILITE A LA VITESSE DE DEFORMATION

Ce phénomène se traduit par une augmentation de la contrainte d'écoulement avec la vitesse de déformation pour une déformation donnée. Il est caractérisé par un coefficient M défini par :

$$M = \frac{\partial \ln \sigma_e}{\partial \ln \dot{\varepsilon}_e}$$

dans le cas où ce coefficient est constant il s'identifie à l'exposant m de la loi parabolique :

$$\sigma_e = K \varepsilon_e^{n} \dot{\varepsilon}_e^{m}$$

Ce coefficient a une valeur de 0.2 pour les matériaux déformés dans le domaine de la déformation à chaud; de 0.5 à 1 pour les matériaux

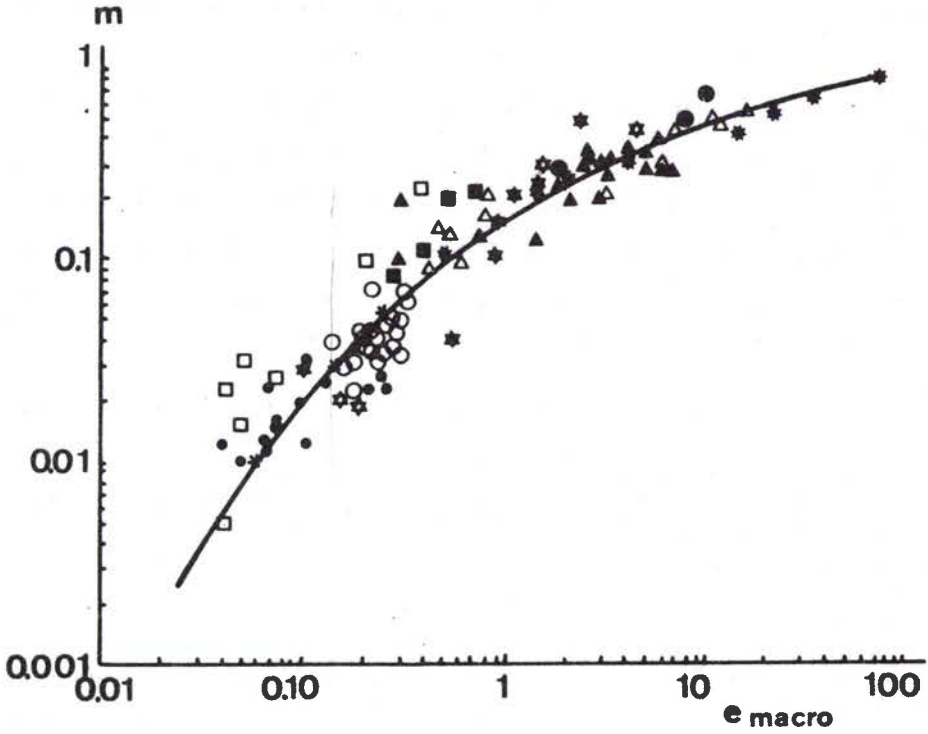


fig.B1/11a Influençe expérimentale du coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation sur le niveau de la limite de formage en traction simple /2̄1̄/.

superplastiques et de l'ordre de 0.01 pour le domaine de la déformation à froid. Plusieurs auteurs /16-20*/ se sont intéressés à l'influence du coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation sur la stabilité du matériau et la figure B1/11a /21/ illustre l'influence générale du coefficient m, la figure B1/11b /17/ présente l'influence des faibles valeurs de m. On remarque une augmentation très marquée de la stabilité du matériau avec les valeurs croissantes de m. En effet, toute initiation du phénomène de striction s'accompagne d'une augmentation de vitesse de déformation dans la zone instable et par conséquent d'une augmentation de la contrainte d'écoulement stabilisant cette zone. L'effet est analogue à celui de l'écrouissage précédemment décrit et se présente donc comme un écrouissage cinétique. Certains auteurs ont relevé sur des alliages légers un coefficient m négatif de l'ordre de -0.012 /22/. L'effet est alors déstabilisant pour le matériau.

Il n'existe que très peu d'études sur l'influence du chemin de déformation sur la valeur du coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation. Des essais de fluage sous contraintes biaxées montrent que la sensibilité à la vitesse de déformation se représente principalement par un écrouissage cinématique, le terme d'écrouissage isotrope étant négligeable /23/.

Des mesures du coefficient M pour différents taux de déformation en traction simple montrent que ce coefficient n'est pas constant et que, en général, il décroît avec la déformation (fig. B1/12) /24/.

Il est très difficile de mesurer la valeur de ce coefficient aux grandes vitesses de déformation. Des essais menés montrent que ce coefficient augmente et tend vers 1 aux très grandes vitesses de déformation /25/. Ce phénomène semblerait s'expliquer par le rôle que jouent alors les forces d'inertie dans le matériau et l'augmentation de M serait alors beaucoup moins importante, voire nulle /26/. Des CLFS déterminées à faible et grande vitesse de déformation montrent un

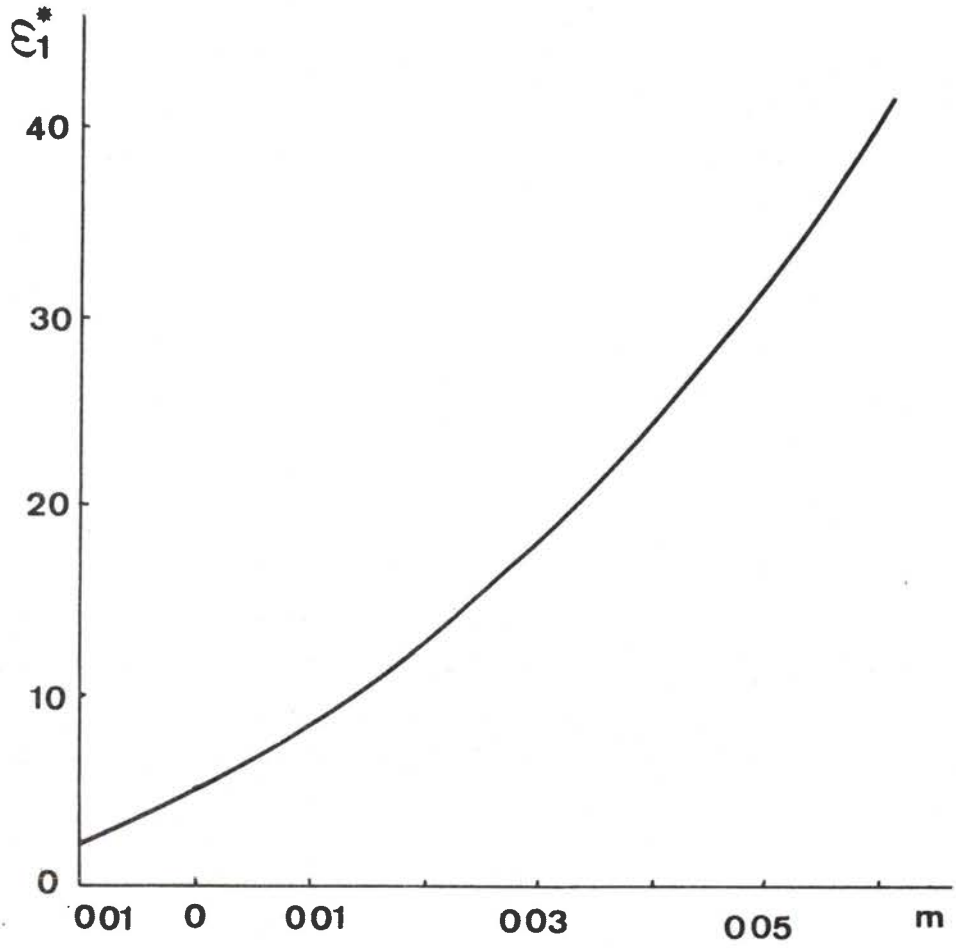


fig.B1/11b Influence théorique des faibles valeurs du coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation m sur le niveau de la limite de formage en traction simple /17/.

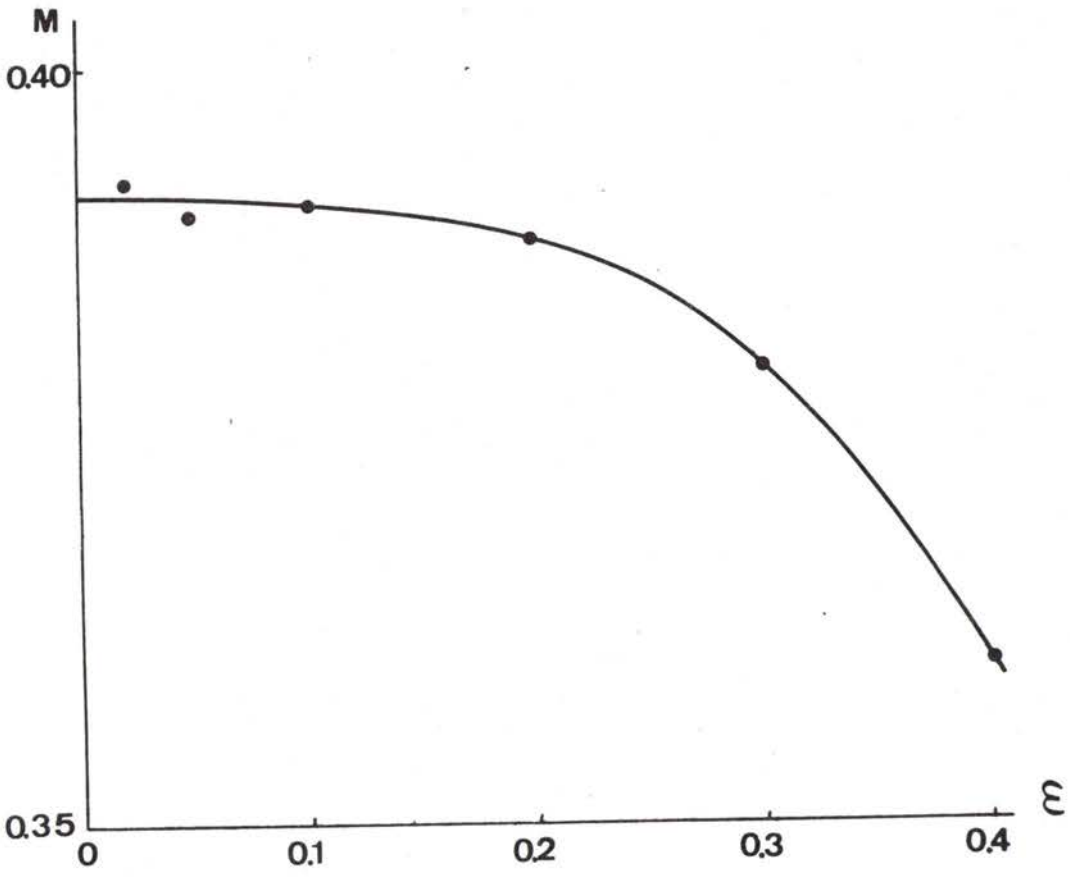


fig.B1/12 Evolution du coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation au cours de la déformation d'un matériau superplastique /24/.

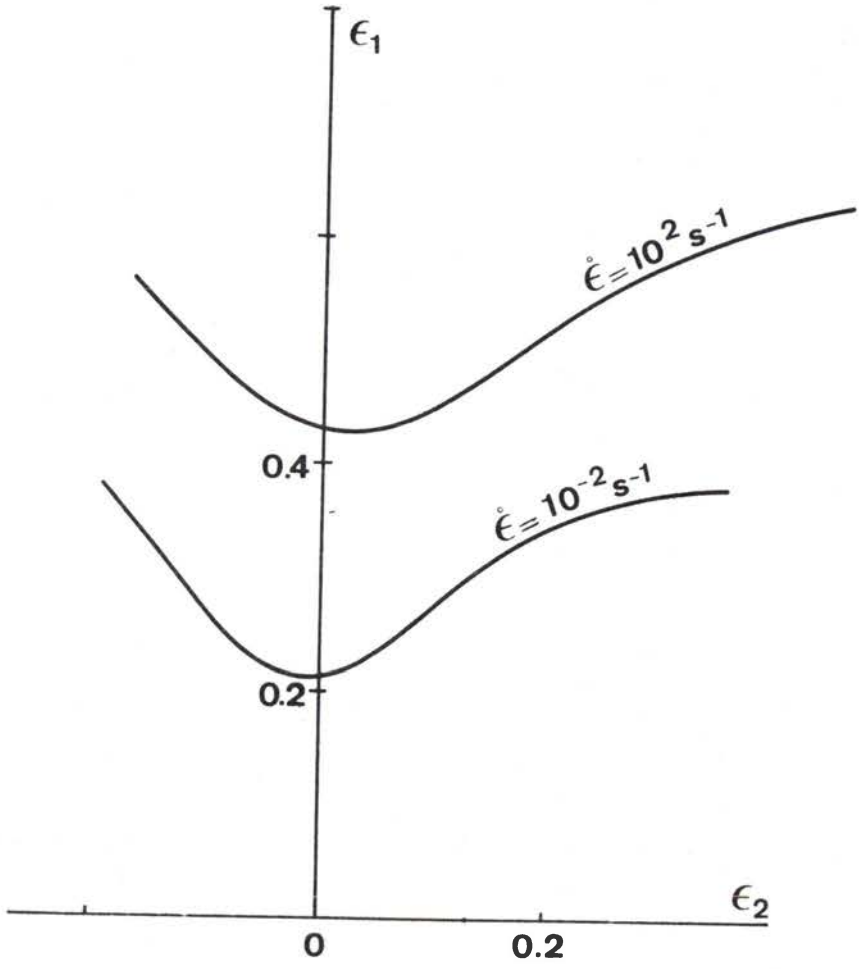


fig.B1/13 Influence de la vitesse de sollicitation sur le niveau de la CLFS /2̄7̄/.

accroissement sensible de la ductilité du matériau (fig. B1/13)[27]. L'interprétation de ces courbes par une augmentation structurale du coefficient M ou par l'effet stabilisant des forces d'inertie est en discussion.

La stabilité plastique plus importante des matériaux présentant une sensibilité à la vitesse non négligeable pose des problèmes pour la détermination de la limite de formage. En effet, comme le montre la figure B1/14, il n'y a plus strictement de limite de formage, le matériau continuant toujours à se déformer dans la zone hors striction avec une vitesse plus faible. Le niveau de la CLFS ne peut alors être déterminé que par la déformation de la zone homogène lors de la rupture de la zone en striction. Un autre critère pourrait être une limite au gradient de déformation admissible dans la pièce formée.

B.1.4 DISCUSSION [*]

B.1.4.1 Interaction anisotropie-écrouissage

L'anisotropie plastique de déformation est un point important à prendre en compte mais comme il a été présenté, cette anisotropie évolue avec la déformation et différemment suivant chaque chemin de déformation. La loi de comportement doit alors s'écrire, dans l'analyse de Hill, en introduisant le calcul anisotrope des contrainte et déformation équivalentes (respectivement σ_e^a et ε_e^a) sous la forme :

$$\sigma_e^a = K \varepsilon_e^{a^n}$$

en négligeant l'exposant m.

La loi de comportement est très souvent établie à partir d'un calcul isotrope des contraintes (σ_e^i) et des déformations (ε_e^i) :

$$\sigma_e^i = K' \varepsilon_e^{i^{n'}}$$

Les coefficients K' et n' de la loi de comportement sont alors vrai-

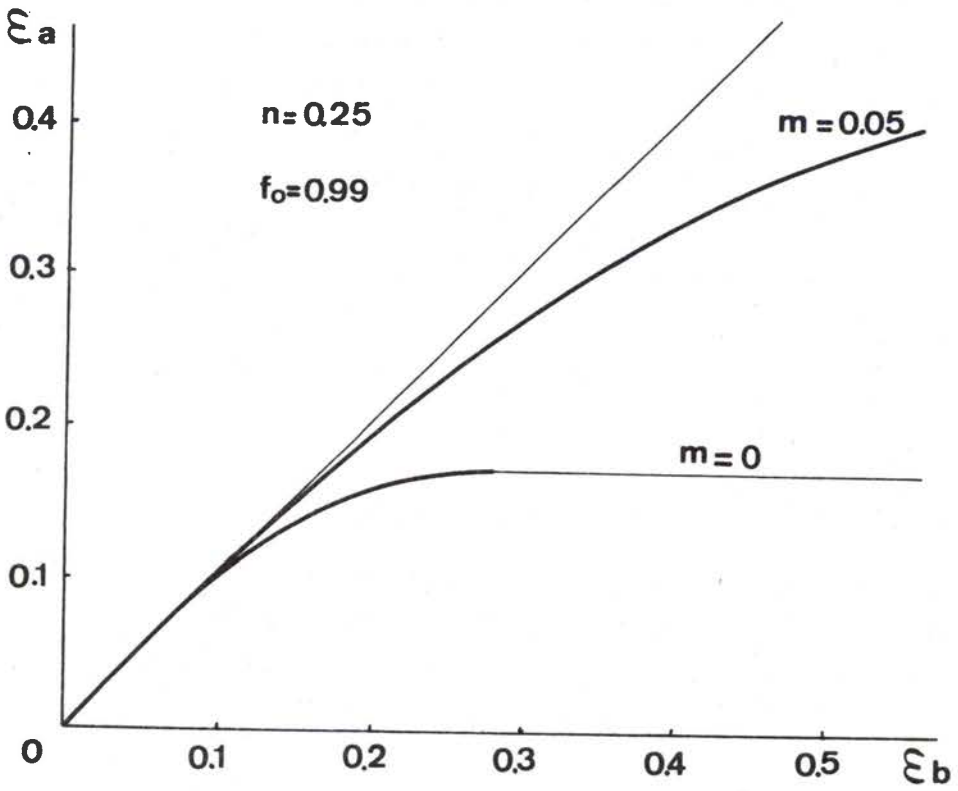


fig.B1/14 Influence de la sensibilité à la vitesse de déformation sur le développement de l'instabilité plastique.

semblablement erronés. En effet, il est possible de relier les calculs anisotropes et isotropes des contraintes et déformations équivalentes sous la forme :

$$\sigma_e{}^a = \sigma_e{}^i \sqrt{\frac{\alpha^2(s+r)-2r\alpha+r+1}{(r+1)(1-\alpha'+\alpha^2)}}$$

$$\varepsilon_e{}^a = \varepsilon_e{}^i \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{1+r}{sr+r+s}} \sqrt{\frac{\rho^2(1+r)+2\rho r+s+r}{1+\rho+\rho^2}}$$

En remplaçant dans l'expression de la loi de comportement anisotrope on obtient :

$$\sigma_e{}^i = K \sqrt{\frac{(r+1)(1-\alpha+\alpha^2)}{\alpha^2(s+r)-2r+r+1}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{1+r}{sr+r+s}} \sqrt{\frac{\rho^2(1+r)+2\rho r+r+s}{1+\rho+\rho^2}}\right]^n \varepsilon_e{}^{in}$$

à comparer à :

$$\sigma_e{}^i = K' \varepsilon_e{}^{in'}$$

On remarque que si l'anisotropie ne dépend pas de la déformation alors le fait d'exprimer la loi de manière isotrope n'affecte pas le coefficient d'écrouissage mais seulement la constante K de la loi de comportement. Dans le cas où l'anisotropie varie avec la déformation alors le coefficient d'écrouissage est aussi affecté par une représentation isotrope. Ainsi dans un essai de déformation biaxiale symétrique sur une tôle d'acier ($\rho=1$) où l'anisotropie passe de 2 à 1 ($r=2$, $s=1$ à $\varepsilon_e=0$, $r=s=1$ à $\varepsilon_e=1$) de manière linéaire, le coefficient d'écrouissage en représentation isotrope est trouvé égal à 0.39 alors qu'il est égal à 0.53 dans une représentation anisotrope évolutive. Comme on le constate sur cet exemple la différence peut être très importante. Il est à noter qu'en déformation biaxiale symétrique, le fait de porter la déformation de l'épaisseur ε_3 à la place de la déformation équivalente ε_e revient à effectuer une représentation isotrope.

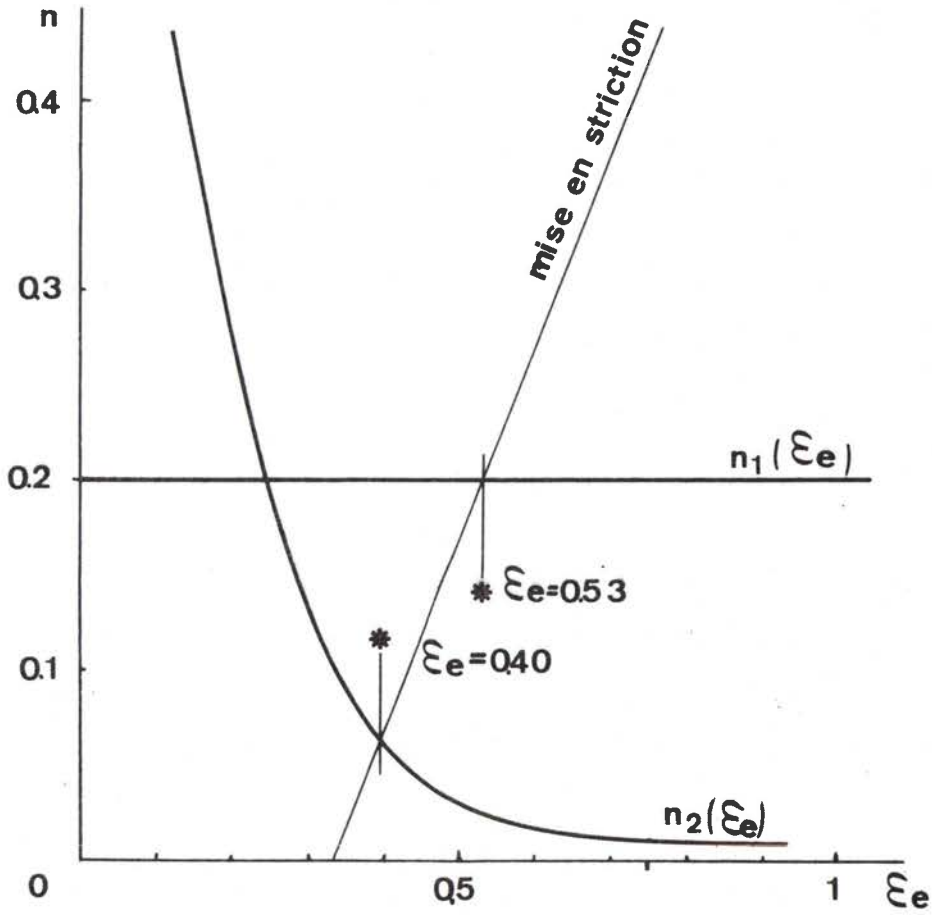


fig.B1/15 Influence de l'évolution du coefficient d'écrouissage avec la déformation sur le niveau de la CLFS.

En effet :

$$\varepsilon_e^{\,i} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\varepsilon_1\,\sqrt{1+\rho+\rho^2} \qquad \varepsilon_3 = -(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = -\varepsilon_1(1+\rho)$$

$$\varepsilon_e^{\,i} = -\varepsilon_3\,\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{1+\rho+\rho^2}}{1+\rho}$$

ce qui pour le cas $\rho=1$ donne $\varepsilon_e^{\,i} = -\varepsilon_3$

alors que pour le cas anisotrope le même calcul donne :

$$\varepsilon_e^{\,a} = -\frac{\varepsilon_3}{1+\rho}\,\sqrt{\frac{1+r}{sr+r+s}}\,\sqrt{(1+r)\rho^2+2\rho r+s+r}$$

ce qui, dans le cas $\rho=1$ conduit à la relation :

$$\varepsilon_e^{\,a} = -\frac{\varepsilon_3}{2}\sqrt{\frac{1+r}{sr+r+s}}\;\sqrt{1+s+4r}$$

B.1.4.2 Calcul de la CLFS

Il a été mis en évidence sur des bases physiques et expérimentales que la rhéologie d'un matériau dépend du chemin de charge suivi. En particulier l'anisotropie et l'écrouissage sont différents et la courbe limite de formage n'est pas une courbe d'iso n ou r. La valeur plus importante du coefficient d'écrouissage trouvée en expansion biaxiale symétrique a pour effet d'élever le niveau de la CLFS théorique pour ce chemin de déformation. Ainsi la théorie de la déformation, dont les prévisions sont en deçà de la réalité, se retrouve plus près des résultats expérimentaux alors que la théorie de l'écoulement conduit à une CLFS trop élevée.

Il est important de noter que lorsque l'écrouissage évolue avec la déformation, il est important de prendre en compte la valeur instantanée du coefficient d'écrouissage: N et non sa valeur moyenne: $\bar{N}$=n sur un intervalle de mesure expérimentale. En effet, la figure B1/15 présente deux évolutions caricaturales du coefficient d'écrouissage avec la déformation, toutes deux de moyenne égale à 0.2, l'une représentant un

écrouissage constant avec la déformation, l'autre un écrouissage fortement décroissant. En théorie de la déformation, le point d'instabilité en déformation biaxiale symétrique pour un matériau isotrope est donné par :

$$\varepsilon_i^* = \frac{1+3N(\varepsilon)}{6} \Rightarrow \varepsilon_e^* = \frac{1+3N(\varepsilon_e)}{3}$$

l'intersection de cette droite avec la courbe d'évolution de l'écrouissage donne le point d'instabilité qui est trouvé égal à : $\varepsilon_e^*=0.53$ dans le cas de l'écrouissage constant et $\varepsilon_e^*=0.40$ dans le cas de l'écrouissage décroissant. Dans cette représentation il est possible d'imaginer la loi d'écrouissage d'un matériau qui ne présenterait jamais de localisation de l'écoulement...!

B.1.4.3 Expression de la loi de comportement

La forme parabolique de la loi de comportement :

$$\sigma_e = K\varepsilon_e^n$$

a été choisie pour sa simplicité d'utilisation. Or, il apparaît nécessaire de présenter l'exposant d'écrouissage n comme une fonction de la déformation et du chemin de déformation, cet exposant étant alors différent du coefficient d'écrouissage N instantané. La forme choisie de la loi de comportement perd alors sa raison d'être et des études plus complètes de la fonction d'écrouissage permettront d'obtenir une nouvelle équation mieux adaptée à la description des phénomènes, pour laquelle il sera peut être nécessaire de remettre en cause l'utilisation du seul deuxième invariant des tenseurs des contraintes et des déformations.

REFERENCES CHAPITRE B1.

1- G. GRUMBACH, G. POMEY - Mem. Sci. Rev. Met. 5(1965)343

2- R. HILL - "The Mathematical Theory of Plasticity"-Oxford Univers Press(1950)

3- M.J. GUILLAUME - C.N.A.M. Paris -Communication privée

4- B. BAUDELET, M. DEGEN, L. FELGERES, P. PARNIERE, F. RONDE-OUSTAU, G. SANZ - W.G.2-IDDRG-Varsovie-Pologne(1977)

5- A. PARMAR, P.B. MELLOR - Int. J. Mech. Sci. 20(1978) 385

6- R. HILL - Communication non publiée 18 janv.1977

7- V. FERNANDES - Université de Metz - Communication privée

8- K. YOSHIDA, K. MIYAUCHI - "Mechanics of sheet metal forming" Plenum Press. N.Y. London(1978)19

9- E. VOCE - J. Inst. Met. 74(1948)537

10- H.J. KLEEMOLA, A.J. RANTA-ESKOLA - Met. Trans. 7A(1976)595

11- Z. MARCINIAK - Inst. J. Mech. Sci. 21(1979)609

12- J. GOUZOU, R. D'HAEYER - Rapport CRM n°532/74- CRM-Liège-Belgique(1974)

13- F. RONDE-OUSTAU, B. BAUDELET - Acta Met. 25(1977)1523

14- L. FELGERES - Rapport DGRST n°75-7.1272 Septembre (1977)

15- D. RAULT, M. ENTRINGER - Mem. Sci. Rev. Fran. Met. 4(1980)

16- A.K. GOSH - J. of Eng. and Tech. Juillet(1977)264

17- J.W. HUTCHINSON, K.W. NEALE - Acta Met. 25(1977)839

18- J.J. JONAS, N. CHRISTODOULOU - Scripta Met. 12(1978)393

19- J.M. JALINIER, N. CHRISTODOULOU, B. BAUDELET, J.J. JONAS - "Formability"- ASM/AIME-(1977)29

20- U.F. KOCKS, J.J. JONAS, M. MECKING - Acta Met. 27(1979)419

21- D.A. WOODFORD - Trans. of the ASM- 62(1969)291

22- H. HERO - Xème Congrès IDDRG- Portcullis Press Ltd-Angleterre(197 179

23- M. OYTANA - Communication privée- Nov. 1980

24- M. SUERY - Thèse d'Etat - Université de Metz- 22 juin(1979)

25- G. REGAZZONI, R. DORMEVAL, C. HOMER, F. MONTHEILLET, M. STELLY, J.M. JALINIER - Communication au "Groupe de réflexion Endommagement" Nantes- Oct.(1980)

26- A. MOLINARI, B. BAUDELET - Soumis pour publication

27- M. LEROY - E.N.S.M. de Nantes - Communication privée - Oct.(1980)

B.2. EVOLUTION DES VARIABLES METALLURGIQUES

Plusieurs variables métallurgiques, dont il n'est pas tenu compte dans l'expression de la loi de comportement, peuvent avoir une influence importante sur le comportement plastique du matériau tels : la taille de grain, la rugosité de surface, les hétérogénéités de composition chimique, l'endommagement, la configuration de dislocations (§B.1.2.3).

i - taille de grain : la taille de grain d'un matériau a une influence expérimentale sur sa formabilité, ainsi la figure B2/1 représente les CLFS obtenues pour un alliage d'aluminium 3003 après deux traitements thermiques différents (homogénéisation -rep 65- ou non -rep 45- du lingot avant laminage à chaud) [1*]. La figure B2/2 présente les microstructures observées au même grandissement qui montrent une très nette différence dans la taille des grains entre les deux matériaux. Il apparaît donc que la formabilité du matériau est d'autant meilleure que sa taille de grain est plus fine. L'étude de l'influence de la taille de grain découplée de l'influence du coefficient d'écrouissage ne semble pas souhaitable car pour les deux matériaux présentés, l'exposant d'écrouissage est trouvé égal à 0.19 et 0.23 respectivement pour le matériau à grains grossiers et fins. De plus la taille et la forme des grains doivent avoir une influence sur la rotation des grains au cours de la déformation et par conséquent sur l'évolution de la texture cristallographique. La taille des grains a aussi une influence sur l'évolution de la rugosité de surface comme il est présenté dans le chapitre suivant.

Une modélisation proposée pour l'influence de la taille de grain sur la contrainte d'écoulement est celle de Hall Petch [2] qui s'écrit :

$$\sigma_f = \sigma_o + kd^{-1/2}$$

où σ_f est la contrainte d'écoulement pour une déformation donnée, d la taille de grain et σ_o et k des constantes du matériau.

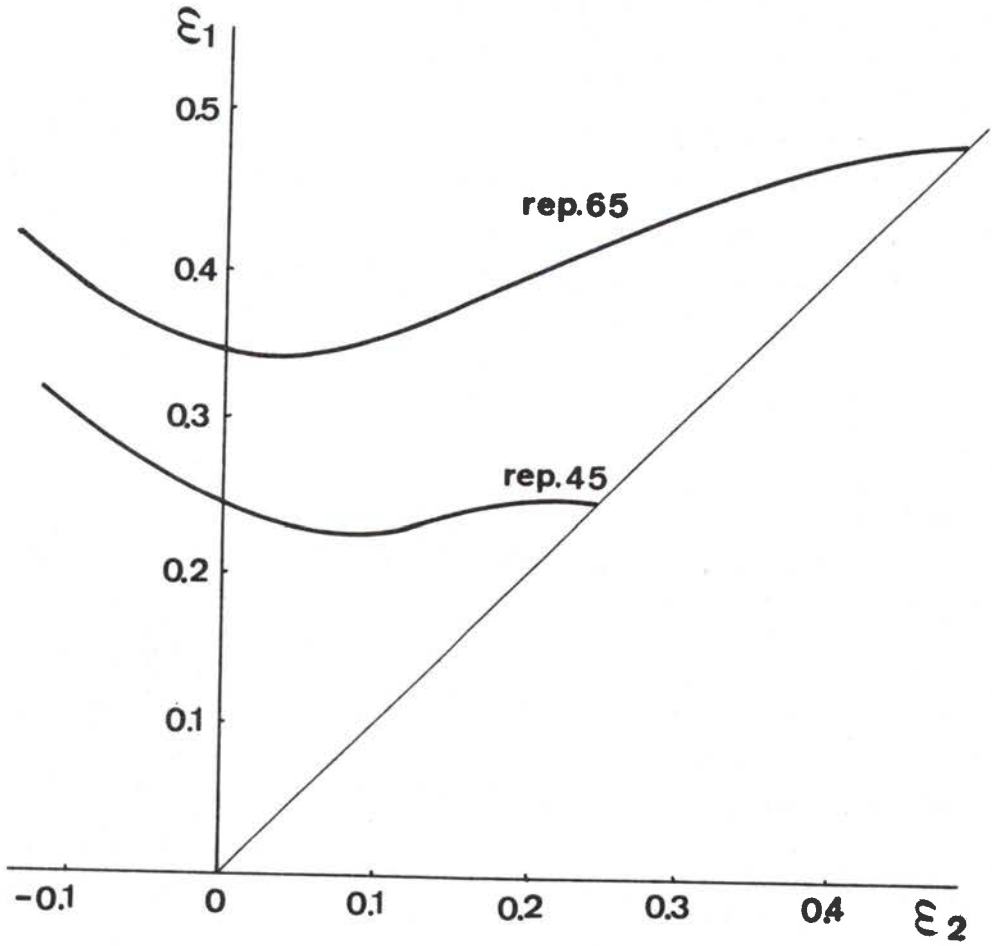


fig.B2/1 Influence expérimentale de la taille de grain sur le niveau de la CLFS $/\bar{\underline{1}}\underline{*}\bar{/}$.

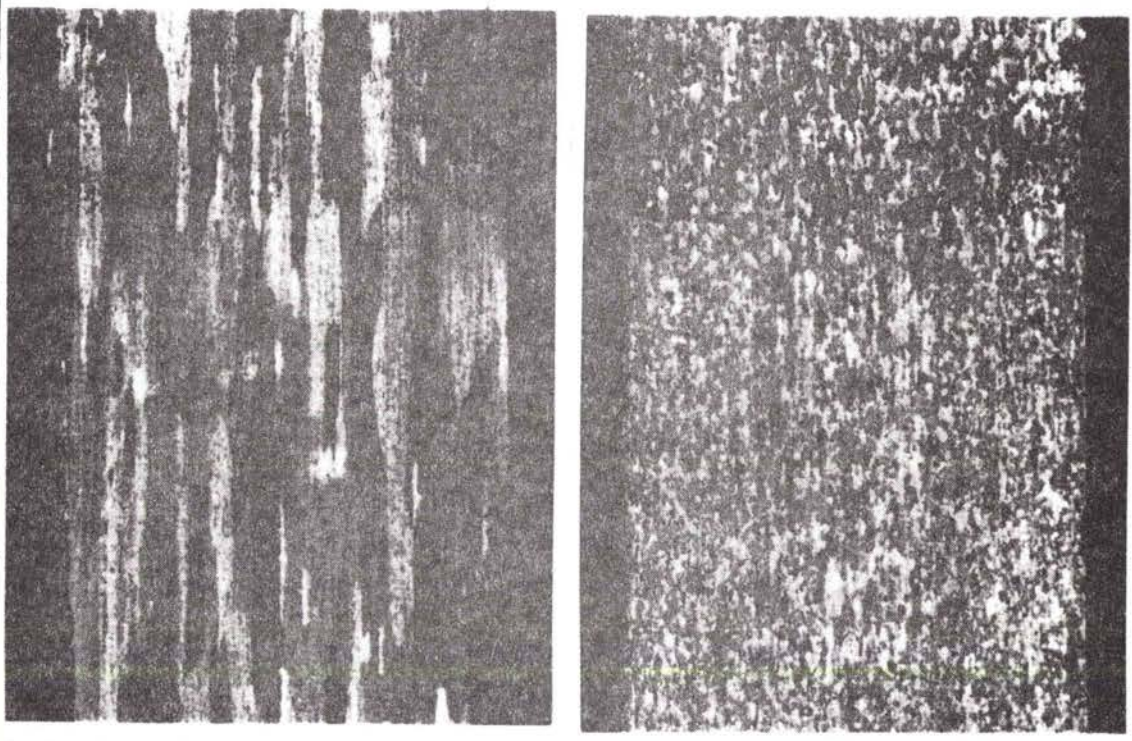


fig.B2/2 Micrographie donnant la taille de grain des matériaux utilisés à la figure B2/1 /1*/.

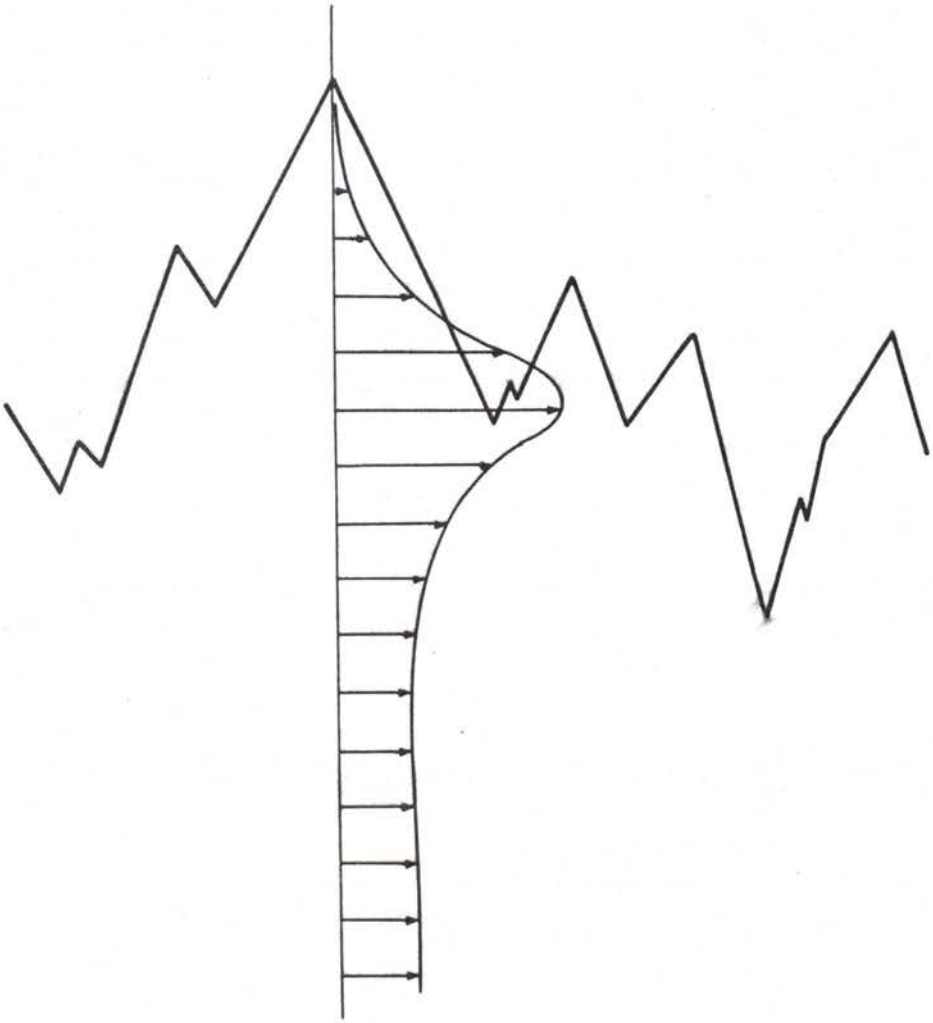


fig.B2/3 Distribution supposée des contraintes au voisinage de la rugosité de surface.

Il est à noter que cette loi ne conduit qu'à une variation du niveau de contrainte sans variation du coefficient d'écrouissage. Cette loi est contestée et certains auteurs proposent de la modifier en prenant en compte, non plus la taille de grain, mais la taille des cellules à parois de dislocations formées /37/.

Une étude /47/ reliant la taille de grain à l'évolution de la rugosité permet de rendre compte de l'effet de la taille de grain sur la position de la CLFS. Cette étude est présentée au paragraphe suivant.

ii- rugosité : Toute tôle brute de laminage possède une rugosité qui est principalement la copie de celle des rouleaux de laminage. Cette rugosité évolue en fonction de la déformation et s'aggrave brusquement au voisinage de la striction. Ce phénomène a été utilisé par certains chercheurs comme critère d'apparition de la striction comme il a été présenté précédemment (§A.1.1). L'influence de la rugosité sur la plasticité du matériau est mal connue. En effet d'un point de vue théorique se pose le problème de connaître l'état des contraintes dans les aspérités. Il est probable que la répartition des contraintes est voisine de celle représentée sur la figure B2/3 avec une concentration de contrainte à l'entaille formée par la vallée de rugosité et un déchargement du pic. Elle fait apparaître la rugosité comme ayant un effet réel d'amplitude beaucoup moins important que l'amplitude absolue des défauts dont les aspérités sont partiellement ou totalement déchargées. La valeur du défaut de rugosité peut, en général, être considérée comme inférieure aux défauts d'endommagement volumique qui sont déterminés (§B.2.3) par un facteur variant de 5 à 10 mais elle est rarement négligeable. Une modélisation de la rugosité a été tentée sous la forme très simple de pyramides /47/. La loi d'évolution de son amplitude est posée sous la forme :

$$R = R_o + k' d_o \bar{\varepsilon}$$

où R, R_o sont les rugosités courante et initiale respectivement, d_o la taille de grain, k' une constante du matériau (k=2 pour le cuivre, 1.4 pour l'aluminium).

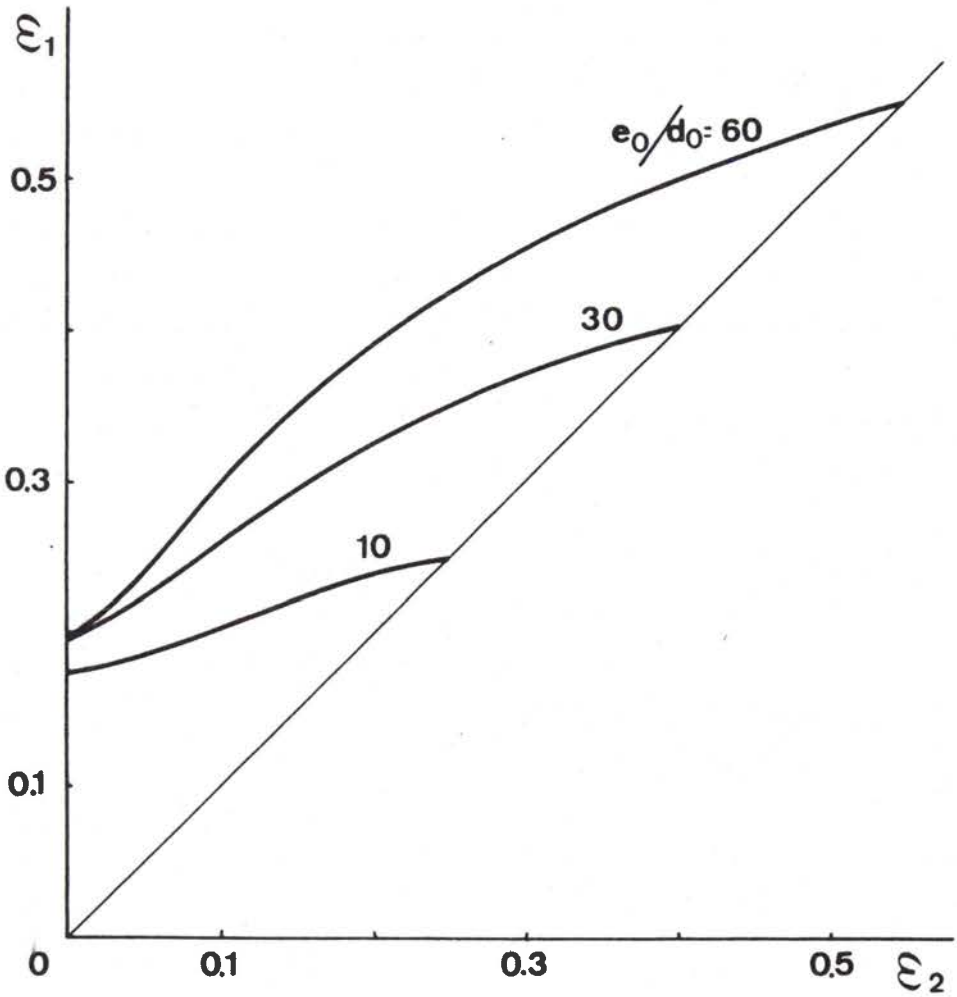


fig. B2/4 Influence de la taille de grain sur le niveau de la CLFS au travers de son influence sur l'évolution de la rugosité initiale choisie égale à R_o = 0,0015 e [47].

Les auteurs supposent que la rugosité ne varie pas jusqu'au point de striction diffuse et évolue ensuite suivant la loi présentée. Le défaut introduit dans la tôle est défini à partir de la valeur absolue de la rugosité, ce qui semble être très pessimiste. Un calcul d'instabilité à deux zones permet de déterminer l'influence de la rugosité et de la taille de grain sur la position de la CLFS.

La figure B2/4 /47/ présente l'évolution de la position de la CLFS avec la taille de grain pour une valeur courante de la rugosité initiale : $R_o = 0.0015 e_o$ où e_o est l'épaisseur initiale de la tôle. Dans ce modèle l'effet de la taille de grain sur la croissance de la rugosité est beaucoup plus important que la valeur initiale R_o de la rugosité elle-même qui varie assez peu d'une tôle à l'autre dans les gammes courantes d'emboutissage.

iii-hétérogénéité de composition chimique

La matrice des matériaux courants de mise en forme a une composition homogène dans tout le produit fini. Néanmoins les inclusions présentes dans le matériau ne sont en général pas réparties de manière très homogène et certaines zones présentent de plus fortes concentrations en inclusions et précipités. Ces parties du matériau ont en moyenne, une composition chimique différente qui peut se traduire par une légère différence de rhéologie. En général, dans une représentation parabolique de la loi de comportement, la constante K et le coefficient n sont affectés. Néanmoins une première approximation simplificatrice est de considérer que seule la constante K est affectée, l'hétérogénéité du matériau peut alors être caractérisée par le coefficient de défaut de Marciniak /57/ :

$$f = \frac{K_b}{K_a}$$

Au cours du laminage et de la déformation ultérieure, ces inclusions donnent en général naissance à des cavités dont l'effet est beaucoup plus important que celui des seules inclusions. C'est le problème de l'endommagement volumique.

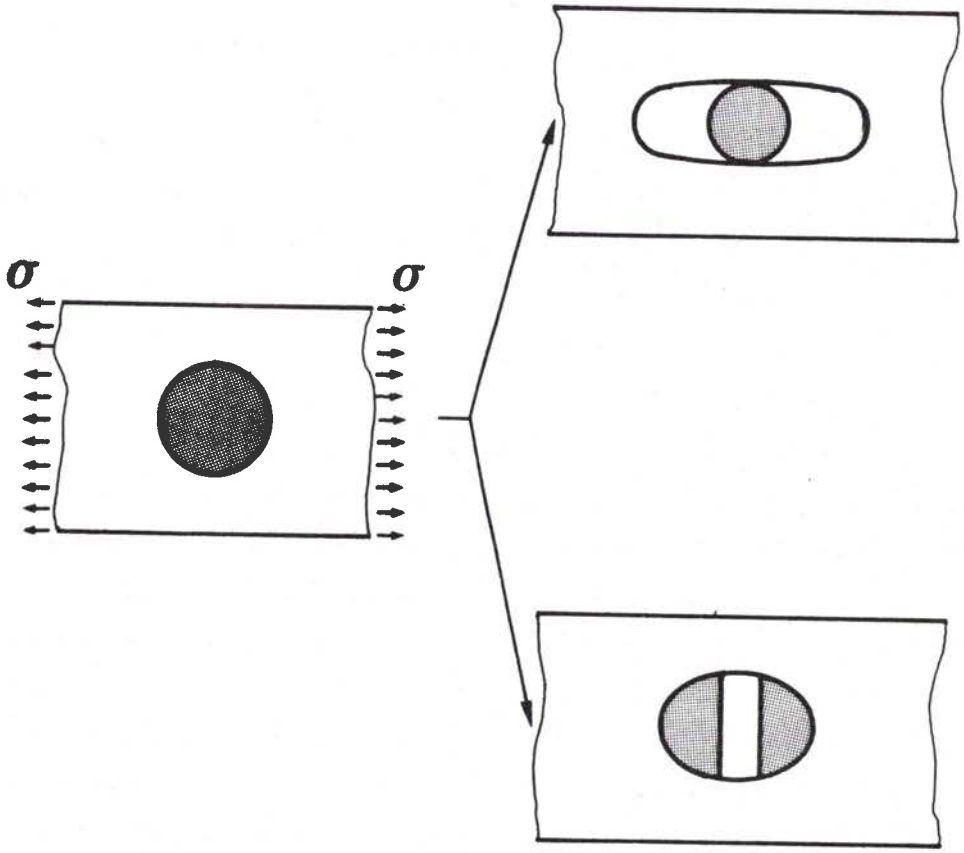


fig.B2/5 Description des deux mécanismes d'endommagement :
- décohésion de l'interface particule-matrice,
- fragmentation de la particule.

B.2.1 PRESENTATION DE L'ENDOMMAGEMENT

L'endommagement est constitué par les cavités qui naissent dans le matériau au cours de tout traitement thermo-mécanique. Dans le cas de la déformation à froid, il s'agit essentiellement de cavités associées aux inclusions et précipités. Cet endommagement de type inclusionnaire est le seul présent dans le cas de déformation aux faibles températures, à l'inverse des températures élevées où les phénomènes de diffusion permettent la création et la croissance de cavités aux joints de grain [6-10]. L'incompatibilité des glissements au joint triple dans une déformation par fluage donne naissance à un endommagement très connu [11-15].

Deux modes principaux d'endommagement sont observés dans le cas de la déformation à froid étudiée dans ce travail. En effet si l'on considère une particule indéformable dans une matrice soumises à un état de contrainte croissant (fig.B2/5), l'incompatibilité des déformations au voisinage de l'inclusion donne lieu soit :

- à une rupture de l'interface inclusion-matrice (endommagement par décohésion),
- à une rupture de la particule si la contrainte de rupture de l'inclusion est plus faible que la contrainte de décohésion de l'interface (endommagement par fissuration).

Ces deux types d'endommagements sont donc déterminés par la valeur comparée des contraintes provoquant la décohésion de l'interface ou la rupture de la particule pour une configuration donnée. La concentration des contraintes sur la particule (de l'ordre de 2 à 4) ne permet pourtant pas dans tous les cas d'atteindre l'une des deux valeurs critiques générant l'endommagement. Les critères de germination sont nombreux et fondés sur différentes approches : énergétique [14], en contrainte [15], par accumulation de dislocations [16,17]. Tous ces critères prévoient une influence de la taille des particules, en particulier, les particules les plus grosses conduisent les premières à la germination de l'endommagement. La figure B2/6 [18] présente l'influence

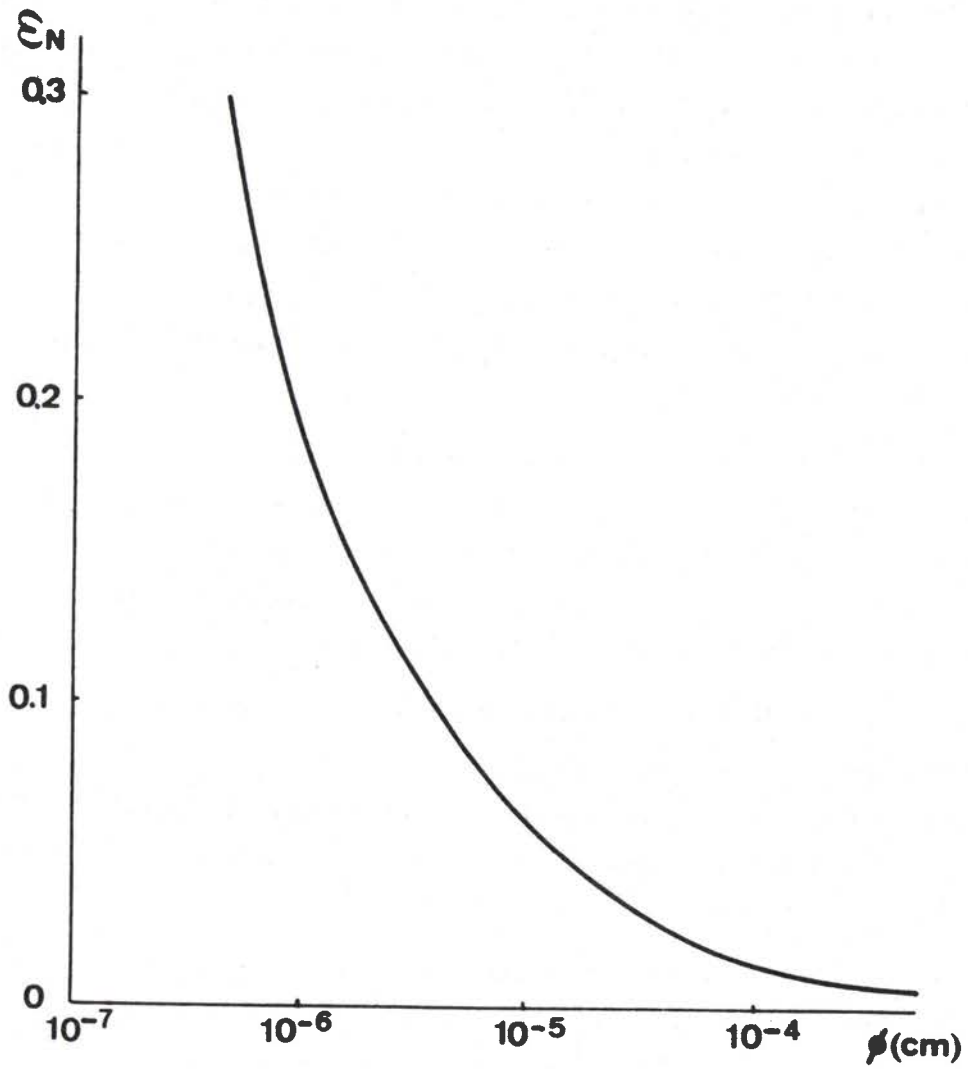


fig.B2/6 Influence de la taille de la particule sur la déformation de germination de l'endommagement d'après un critère énergétique [18].

de la taille de la particule sur la déformation de germination de l'endommagement de décohésion au cours d'un essai de traction simple. Cette courbe est obtenue à partir d'un critère énergétique écrivant que l'énergie de la déformation doit au moins être égale à une valeur critique provoquant la rupture de l'interface. Ce critère conduit pour les plus grosses particules (≈10µm) à une décohésion dans le domaine élastique ce qui est incompatible avec l'expérience où de telles particules sont trouvées non endommagées après le début de la déformation plastique.

Une étude intéressante, alliant des déterminations expérimentales de germination de l'endommagement sur éprouvette de traction entaillée et des calculs aux éléments finis des contraintes et déformation en chaque point de l'éprouvette a permis de proposer le critère suivant de germination pour l'endommagement de décohésion /19,20/:

$$\sigma > \sigma_{crit}$$

avec $\sigma = \sigma_1 + k(\sigma_e - \sigma_o)$

où σ_o et k sont des constantes

σ_1 est la plus grande contrainte principale macroscopique appliquée.

Il est encore très difficile de prévoir le type d'endommagement : décohésion ou fissuration que va subir une particule. La forme de celle-ci, non prise en compte dans les calculs tous effectués dans le modèle d'une inclusions sphérique, a une grande influence. Il semble d'une manière générale que les particules allongées donnent lieu préférentiellement à une fissuration alors que les particules équiaxes donnent plus facilement lieu à décohésion. Le problème est compliqué par le fait qu'un double mécanisme peut être présent pour certaines particules comme le montre la figure B2/7 /22/ pour un sulfure de Manganèse dans un acier doux laminé où la décohésion et la fragmentation sont en même temps présentes. De nombreuses observations analogues ont été rapportées /par ex. 21/.

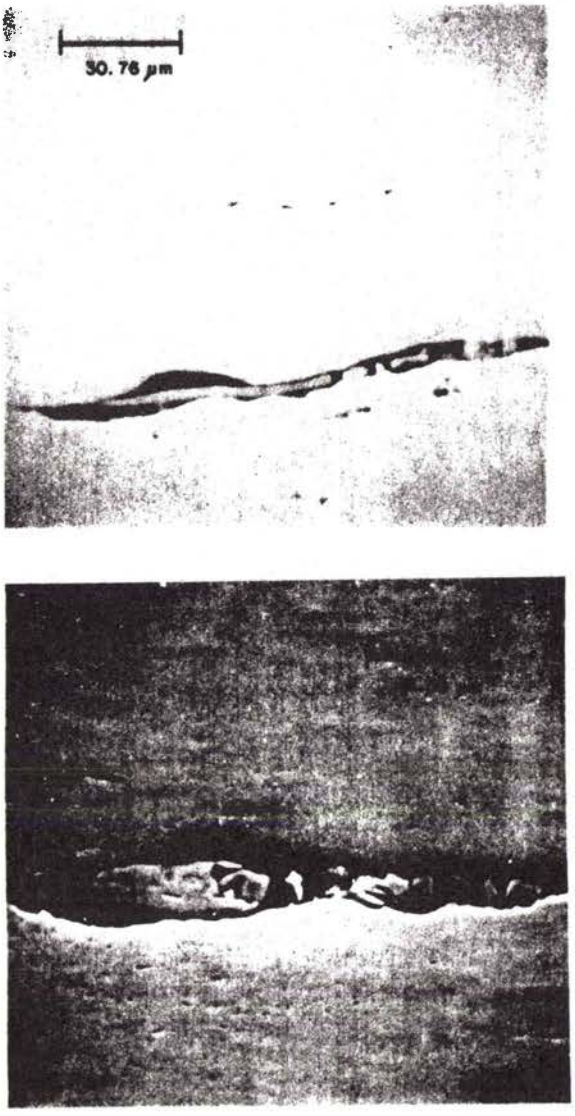


fig.B2/7 Double mécanisme de fragmentation et décohésion sur une particule de MnS dans un acier doux sollicité en traction simple /$\bar{2}\bar{1}$/.

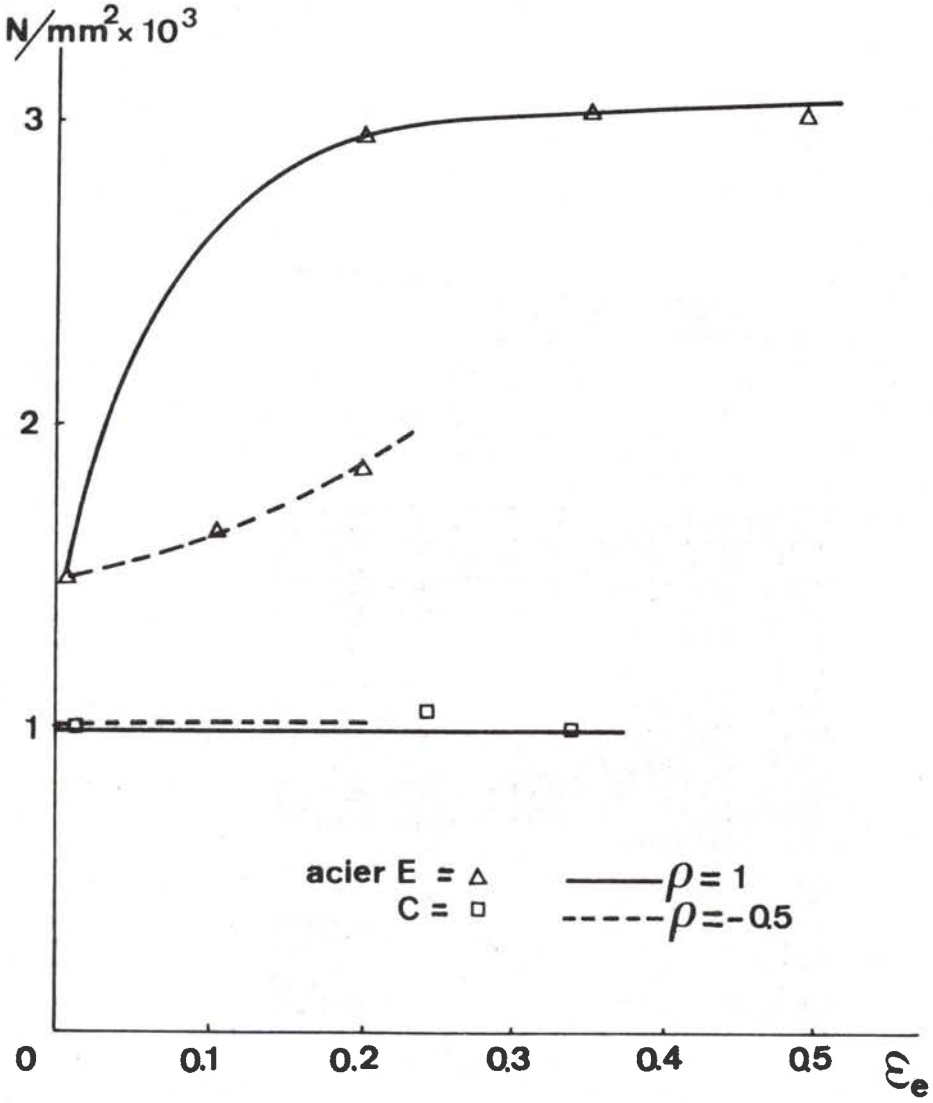


fig.B2/8 Evolution du nombre des sites d'endommagement avec la déformation pour deux aciers :
-E acier effervescent
-C acier calmé à l'aluminium
et deux chemins de déformation :
- traction uniaxiale
- expansion équibiaxée /22*/.

Cet endommagement peut être généré au cours de la déformation lastique de mise en forme de la tôle ou au cours du laminage, en partiulier à froid, lors de l'élaboration de la tôle. Ainsi nous avons mis n évidence que certains matériaux présentent seulement une germination e l'endommagement au cours du laminage et aucune nouvelle germination u cours de la mise en forme. La figure B2/8 /22*/ présente le nombre e défauts par millimètre carré de matière en fonction de la déformation u cours d'un essai de traction simple et de déformation équibiaxée. 'acier effervescent (repère E) présente une germination continue de 'endommagement jusqu'à une déformation d'environ $\varepsilon=0.3$. Le nombre es défauts est ensuite stable. L'acier calmé à l'aluminium (repère AK) e présente pas de germination des cavités qui sont totalement présenes initialement dans la tôle. La figure B2/9a montre le plan d'une ôle d'acier calmé à l'aluminium observé en microscopie électronique balayage où de nombreuses cavités sont visibles /23*/(endommagement ar décohésion). La figure B2/9b montre la présence d'un endommagement nitial par fissuration dans le cas d'un alliage d'aluminium (3003)/24*/. our cet alliage, la courbe de germination au cours de la déformation résente un accroissement faible du pourcentage de particules endomagées de 11% à 17% pour une déformation de l'ordre de $\varepsilon_e=0.3$ /24*,25/. a figure B2/9c /*/ montre la répartition de l'endommagement initial ans une tôle d'acier calmé à l'aluminium. Les mesures sont effectuées elativement à l'échantillon central O. L'endommagement est plus imporant sur les rives qu'au centre de la tôle et, le long de la tôle, il résente une variation périodique. Il ne semble pas que ces variations uissent directement être reliées au diamètre des cylindres de laminage.

Il existe donc au cours de la mise en forme dans chacune des tôles n endommagement évolutif, combinaison de la croissance d'un endommaement initial et d'un endommagement généré par germination de nouvelles avités, le poids de chacun pouvant varier et même être nul.

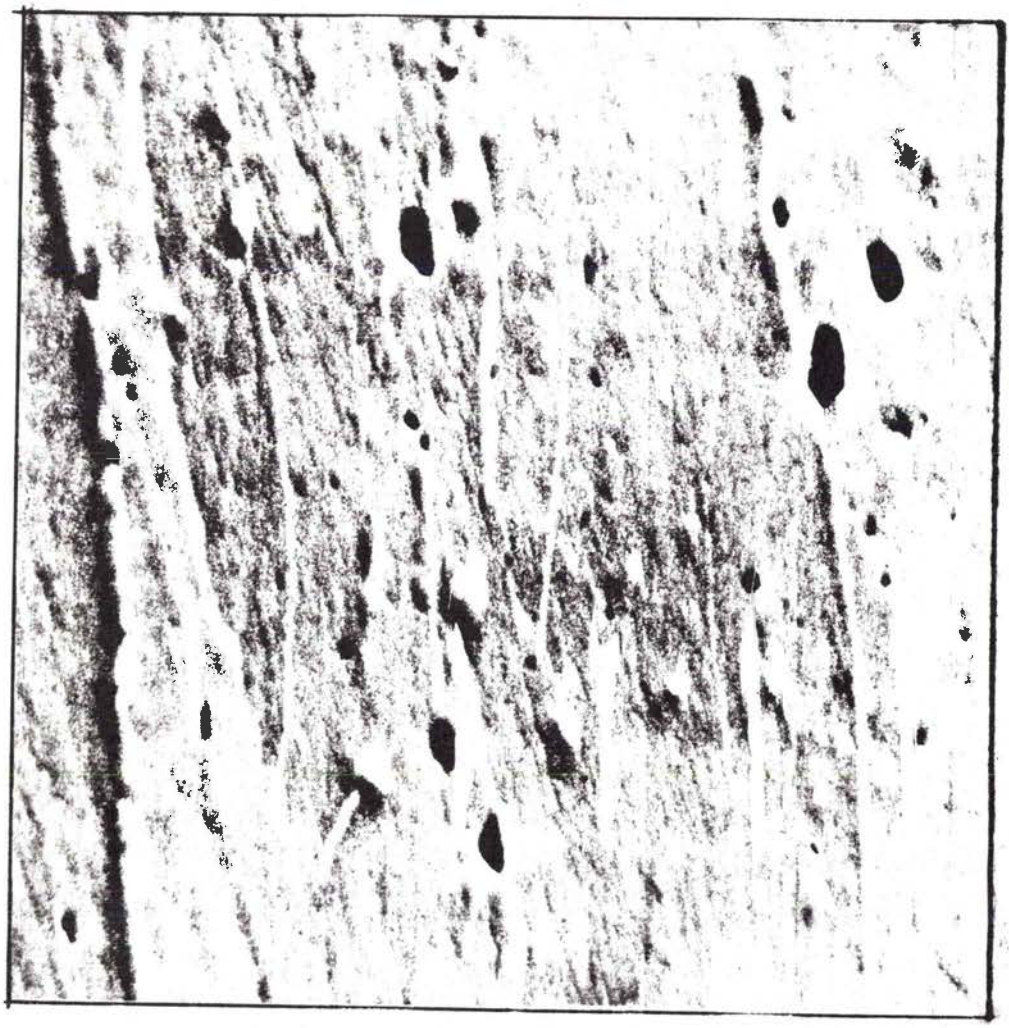


fig.B2/9a Observation de l'endommagement initial dans un acier doux d'emboutissage

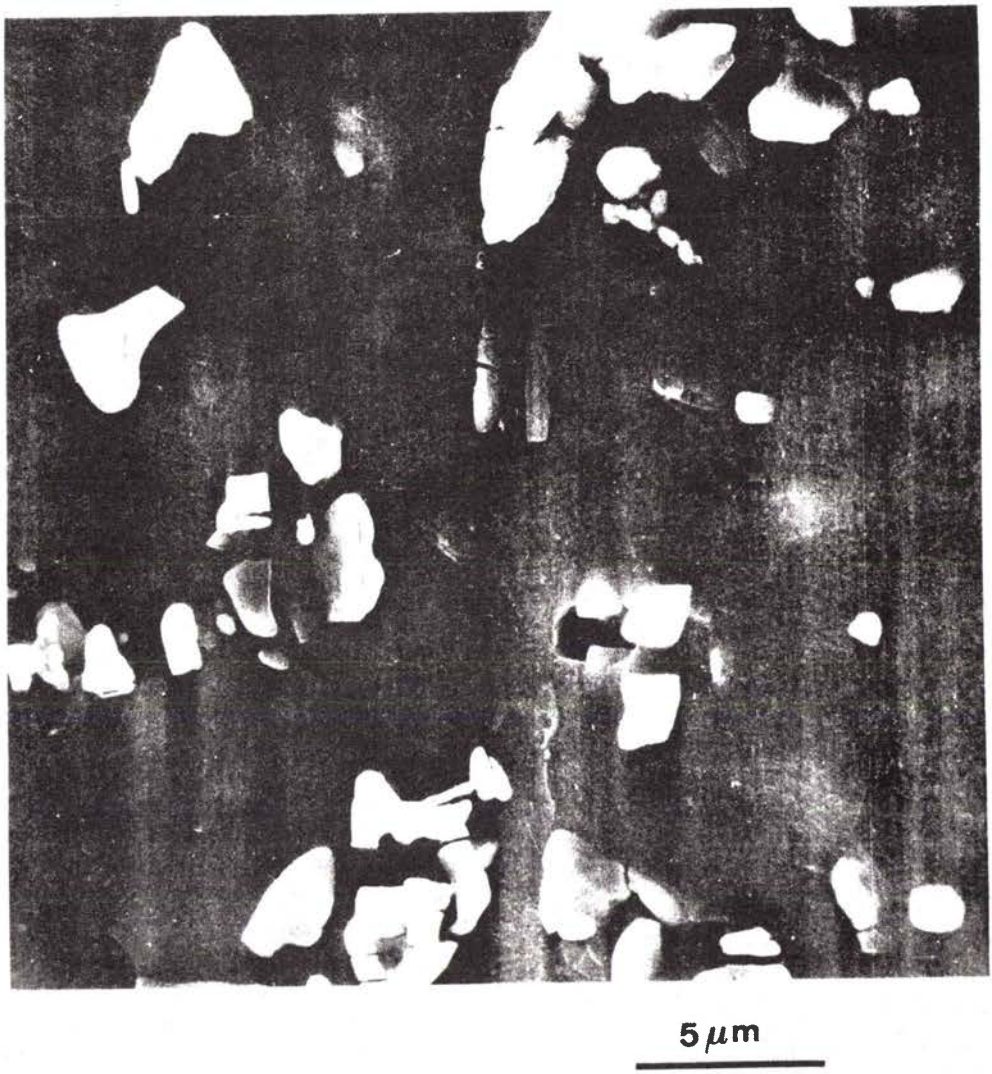


fig.B2/9b Observation de l'endommagement initial dans un alliage d'aluminium 3003.

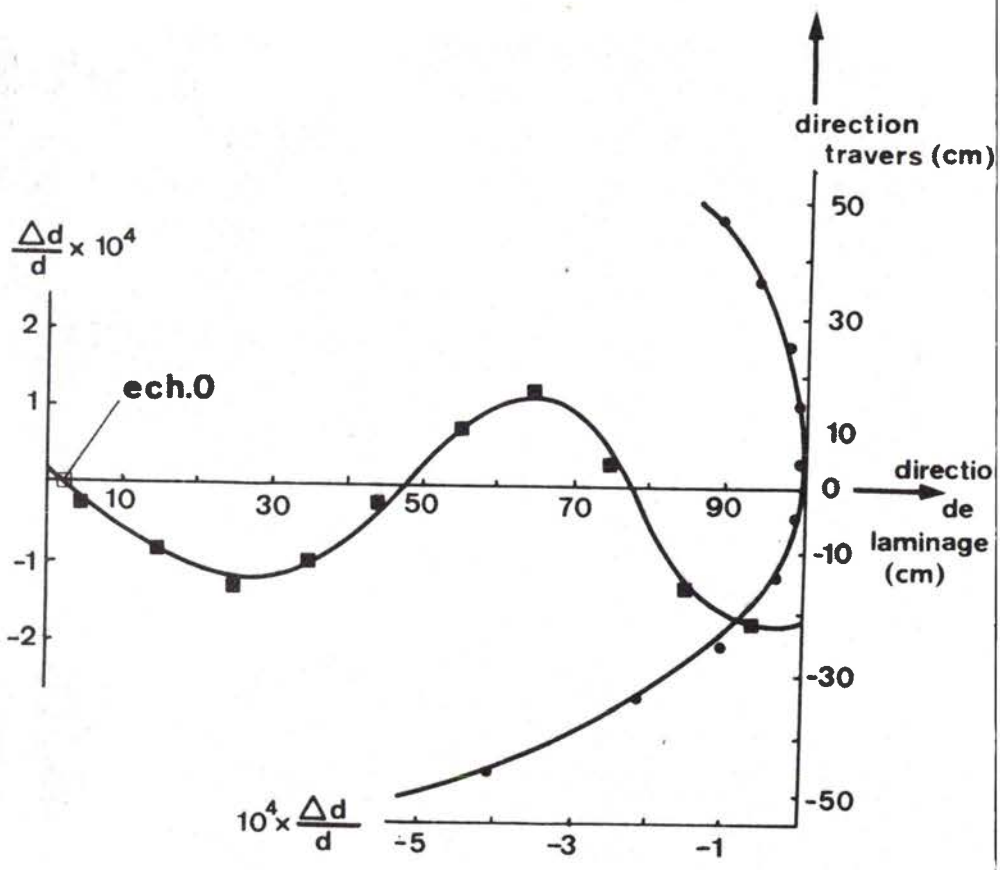


fig.B2/9c Répartition de l'endommagement initial mesuré par variation de densités relativement à l'échantillon 0 dans une tôle laminée.

B.2.2 DETERMINATION ET MESURE EXPERIMENTALES DE L'ENDOMMAGEMENT

B.2.2.1 Présentation

Plusieurs méthodes sont utilisées pour mesurer l'endommagement. Elles donnent en général les mêmes variations qualitatives mais des mesures différentes. Nous nous efforçons de relier les résultats obtenus par les diverses méthodes.

i) Mesure du module d'Young /26-28/

La figure B2/10a présente une succession de cyles charge-décharge dans un essai de traction simple. La pente de la décharge élastique, mesurant le module d'Young, diminue au cours de la déformation. En prenant comme valeur vraie E pour le module d'Young la pente de la remière charge élastique et E' la pente au cours de la déformation, l est possible de définir l'endommagement par :

$$E' = E(1-D)$$

La igure B2/10 b/29/ présente, dans le cas du cuivre, l'évolution de cette variable D mesurant l'endommagement. Le module d'Young étant affecté par les changements de texture, une étude en cours semble montrer que cet effet est peu important et aucun cas ne permet d'expliquer des variations du module d'Young telles que celles observées /30/.

Cette méthode donne un paramètre global mesurant l'accroissement d'endommagement au cours de la déformation.

ii) Absorption d'hydrogène /31/

Cette méthode consiste à émettre, d'un côté de la tôle placée comme écran, un flux d'hydrogène qui va diffuser dans le matériau. La mesure du flux ressortant du matériau et du temps mis pour la diffusion permet de caractériser la quantité d'hydrogène piégée dans le matériau et la facilité de la diffusion. Ces deux phénomènes sont

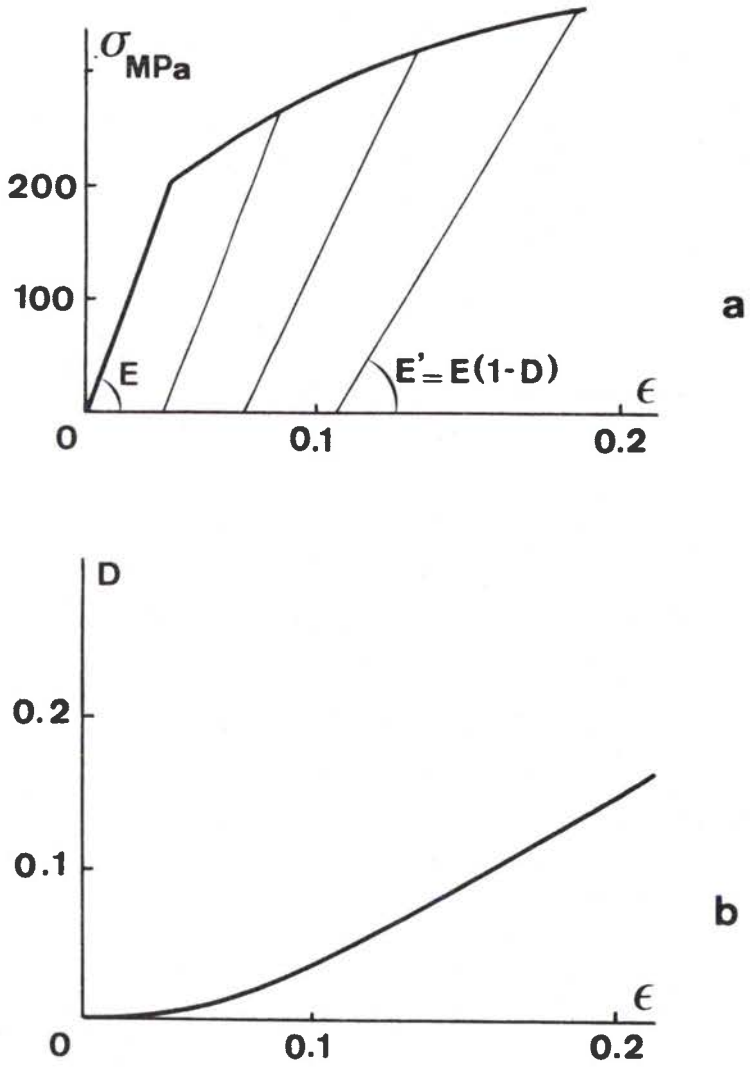


fig.B2/10 a - Cycles charge-décharge en traction simple.

b - Evolution du paramètre endommagement déduit de l'évolution du module d'Young [27].

reliés au taux de cavités présent dans la tôle.

Cette méthode donne un paramètre mesuré révélateur de la valeur absolue de l'endommagement.

iii) Méthode électrique

Cette méthode mesure le changement de résistivité d'un corps qui est directement lié aux défauts présents dans le matériau. Cette méthode est principalement utilisée pour le suivi de la propagation des fissures /par ex. 32/. Cette méthode nécessite des défauts d'assez grande amplitude et semble donc beaucoup mieux adaptée aux défauts surfaciques (fissures) que volumiques (cavités).

iv) Analyse métallographique

Cette méthode consiste à effectuer plusieurs observations du matériau en microscopie optique ou électronique en transmission ou, plus généralement à balayage. Une étude systématique du matériau suivant trois plans de coupe orthogonaux permet d'analyser la taille, la forme des cavités, et la fraction volumique de l'endommagement. Une analyse à la microsonde permet de déterminer la nature des particules à l'origine de l'endommagement. Cette méthode est très complète et permet d'atteindre un grand nombre de paramètres, son inconvénient principal réside dans le fait qu'il faille effectuer un très grand nombre d'observations (plus de 300) pour obtenir une mauvaise précision sur la valeur des paramètres mesurés (de l'ordre de 10 à 200% d'erreur). Cette méthode permet de mesurer l'endommagement initial et d'une manière générale donne une mesure absolue du taux de cavitation.

v) Mesure de densité

Les cavités affectent la densité du matériau, mais il est très difficile de mesurer avec une grande précision, les valeurs absolues de la densité. En particulier les fluctuations de température ont une

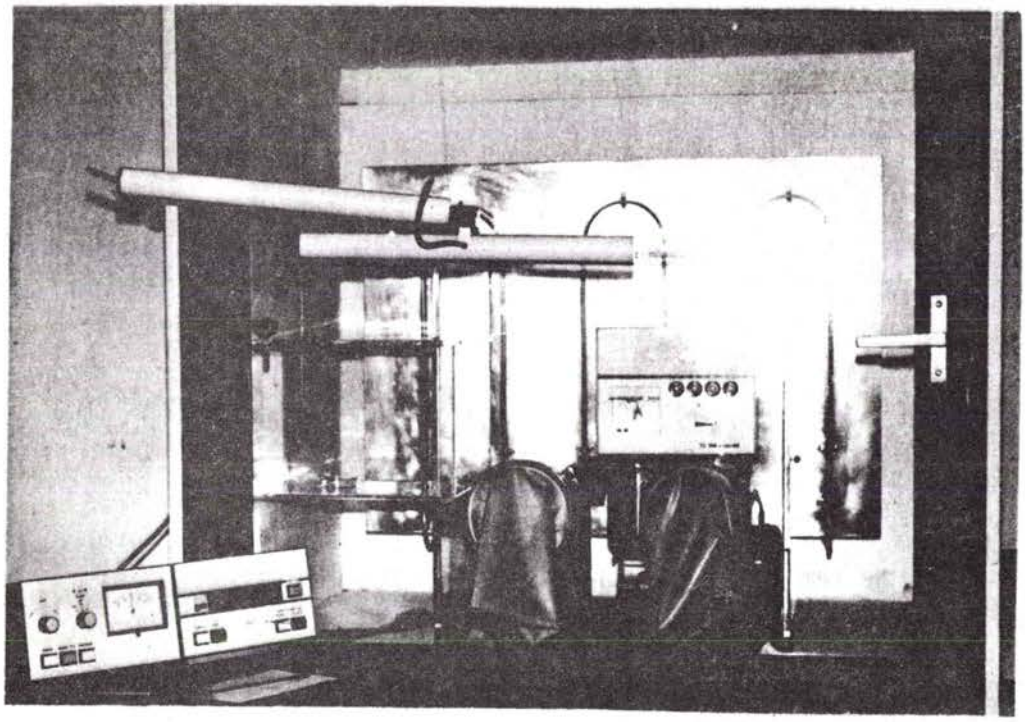


fig.B2/ 11 Installat on de mesure de densité.

rande incidence sur les mesures. Pour palier ces problèmes, il st effectué une mesure relative de densité. Cette méthode [33,34] onsiste à peser alternativement un échantillon de référence, l'échan- illon à analyser et à nouveau l'échantillon de référence, une fois ans l'air et une fois immergé dans un liquide. Cette méthode permet 'éliminer la plupart des phénomènes parasites en déterminant la dif- érence relative de densité de l'échantillon à analyser par rapport l'échantillon témoin :

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{d-d_o}{d_o}$$

ù d est la densité de l'échantillon à analyser,

d_o la densité de l'échantillon témoin.

Le dispositif mis au point [*](fig. B2/11) est constitué d'une alance électronique thermostatée possèdant une sensibilité de 10^{-7}g t une portée maximale de 3g. Cette balance possède une chambre de esée dans laquelle sont effectuées les pesées à l'air. La base de ette chambre est percée afin de permettre le passage d'un fil utilisé our suspendre l'échantillon pour les pesées avec immersion dans le iquide. Le fil est en silice de 0.3mm de diamètre, il a été choisi our son excellent état de surface. Le liquide retenu est du diéthyle htalate qui a déjà été utilisé dans des conditions analogues [35]. l présente une bonne stabilité avec le temps et est neutre avec les étaux, c'est un corps gras, bien mouillant qui s'évapore très peu, a densité n'est pas trop faible (d=1.118). Le liquide est contenu ans un récipient relativement conducteur de la chaleur (ici de 'Inox) de manière à avoir le meilleur équilibre thermique possible ntre le liquide, l'échantillon et l'air environnant. Cet ensemble st entouré d'une double enceinte, la première en plexiglass trans- arent munie d'un sas d'accès, la seconde plus grande est isolée hermiquement par des plaques de polystyrène expansé de 4 cm d'épais- eur. Cette enceinte extérieure est munie sur sa face avant d'une urface à double vitrage dans laquelle sont percés deux trous de

passage pour le montage en boîte à gants. Le volume mort situé entre l'enceinte extérieure et l'enceinte intérieure est un amortisseur thermique devant assurer une plus grande stabilité à l'enceinte de pesée. Cet ensemble repose, par l'intermédiaire de supports élastiques à fort amortissement vibratoire (mousse de matière plastique) sur une table robuste elle-même isolée du sol par les mêmes supports. L'ensemble est placé au sous-sol du bâtiment pour diminuer l'action des causes extérieures de vibrations.

Pour toute manipulation, les échantillons doivent être introduits une nuit avant toute opération de pesée pour permettre la mise à l'équilibre thermique. Les pesées nécessitent une intervention dans l'enceinte intérieure pour changer les échantillons il est nécessaire d'atteindre ensuite la nouvelle stabilisation du système, la commande de la pesée s'effectue à partir d'un bloc de contrôle séparé du système de pesée, ce qui permet de ne plus avoir de contact avec le système après chargement de l'échantillon.

La précision obtenue sur les valeurs mesurées de la variation relative de densité est toujours meilleure que 5.10^{-5} tant que l'on effectue les mesures sur des échantillons de masse comprise entre 0.5 g et 3 g. Des valeurs plus faibles de la masse à peser entraînent une augmentation importante de l'erreur absolue commise. Les essais sont toujours répétés au moins deux fois pour obtenir un ensemble de valeur cohérent, c'est-à-dire de dispersion inférieure à 5.10^{-5}.

vi) Autres méthodes

Des tentatives sont effectuées pour utiliser d'autres méthodes ainsi la détermination du module d'Young par méthode vibratoire /36/ est une méthode voisine de celle présentée pour les mesures à partir des cycles charge-décharge.

L'émission acoustique d'un échantillon au cours de la déformation est utilisée pour chercher à déterminer le moment de la germination des cavités. Ce travail se heurte encore à des difficultés d'interprétation des signaux. Cette méthode a été utilisée avec succès dans le cas

les matériaux présentant un arrachement lamellaire /37/.

Nous menons un travail coopératif pour essayer de déterminer les faibles taux de cavité par annihilation de positrons /38/. Cette méthode devrait permettre d'atteindre les valeurs de l'endommagement non mesurables par les autres techniques.

vii) Méthode retenue /*/

Nous avons retenu d'associer les mesures relatives de densité avec une analyse métallographique. En effet, les mesures de densité donnent avec une grande précision une valeur directement reliée au taux de cavités.

$-\frac{\Delta d}{d} = \frac{C_v - C_{vo}}{1+C_v}$ où C_v est la concentration volumique en cavités à l'instant considéré et C_{vo} la concentration initiale en cavités. Pour des valeurs courantes de l'endommagment de l'ordre de 10^{-3} alors :

$$-\frac{\Delta d}{d} \simeq C_v - C_{vo}$$

Cette méthode donne donc directement l'augmentation de la concentration volumique en cavités.

L'analyse métallographique associée est nécessaire car la "physionomie" de l'endommagement est aussi importante que sa valeur globale. Il est en effet nécessaire de savoir si l'endommagement est localisé en très peu de défauts importants ou au contraire réparti en une multitude de petits défauts. Il est nécessaire de savoir si la répartition est homogène ou si l'endommagement présente une certaine anisotropie de répartition ou de forme des cavités. Cette méthode permet de plus de cerner la valeur de l'endommagement initial, et enfin, c'est la seule permettant de déterminer le mécanisme d'endommagement. Elle est insuffisante seule car sa précision sur les valeurs de la concentration volumique en cavités est très mauvaise, comme il est présenté au paragraphe suivant qui compare les méthodes.

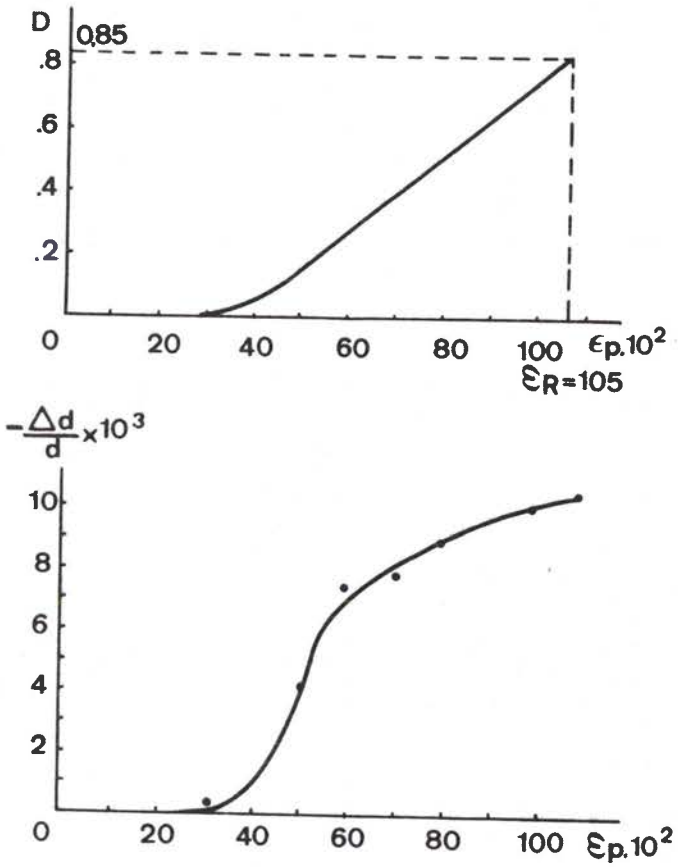


fig.B2/12 Comparaison de l'évolution d'endommagement déterminé sur du cuivre Cu/a_1 par :
- module d'Young (a)
- variations relatives de densité (b) [39*].

D'un point de vue industriel il est intéressant de connaître la nature et la forme des inclusions ou préciptés à l'origine de l'endommagement pour en déduire les affinages économiquement rentables (nature des inclusions) et les traitements thémomécaniques préférables (forme et répartition des particules).

L'association des deux techniques est un outil puissant pour bien connaître d'une part la valeur précise du taux de cavitation et, d'autre part la description de l'endommagement (forme et distribution).

B.2.2.2 Comparaison des méthodes

Plusieurs méthodes permettent de quantifier l'endommagement. Il est fondamental de les comparer de comprendre leur différence et de construire les fonctions de transfert entre les valeurs mesurées. Ce travail de longue haleine n'est qu'à son tout début et nous nous sommes efforcés de collaborer avec les chercheurs développant d'autres techniques pour initier ce travail de comparaison.

i- Une première étude a consisté à comparer sur un même matériau : du cuivre pur industriel Cu/a1, les mesures d'endommagement par module d'Young et par mesure de densité /̄28*, 29*/̄. La figure B2/12 présente les résultats obtenus pour l'évolution de chacun des deux paramètres. Les évolutions sont dissemblables à partir d'une déformation de l'ordre de ε_p=0.5. Or à cette déformation l'écoulement plastique se localise et une striction très prononcée apparaît. La mesure du module d'Young est effectuée pour la zone en striction sur une largeur totale de 0.8 mm alors que les mesures de densité sont effectuées sur un échantillon de longueur: 10mm, la contribution à l'accroissement d'endommagement de la zone en striction étant alors négligeable. Une pesée d'échantillon très fin est impossible pour conserver une bonne précision aux mesures. Une technique de calcul pas à pas, tenant compte du gradient de déformation mesuré sur les échantillons utilisés (fig. B2/13a) a permis de déterminer les valeurs de la variation relative de densité aux fortes déformations dans la zone en striction /̄39*/̄. La courbe corrigée

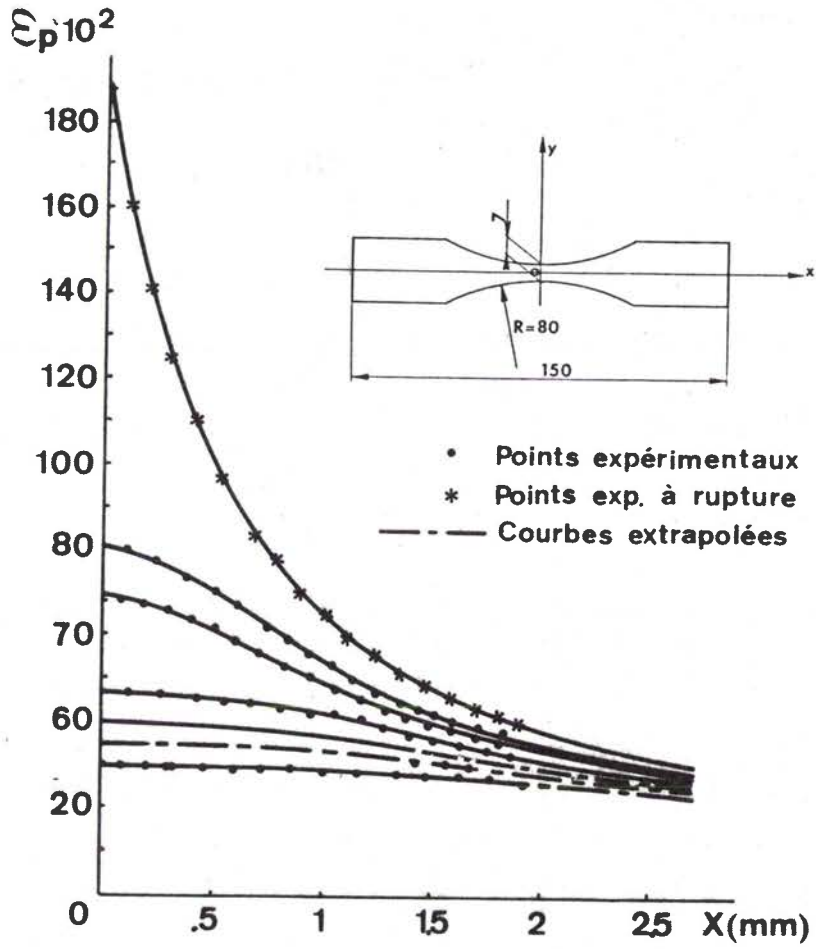


fig.B2/13a Evolution de la répartition des déformations le long de l'échantillon à différentes étapes de l'essai /̲3̲9̲*̲/̲.

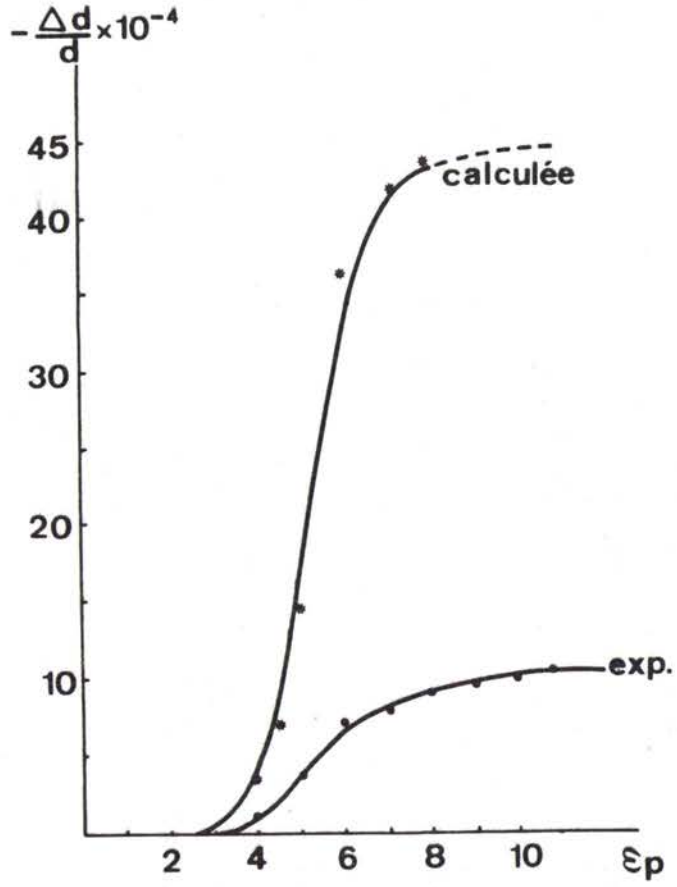


fig.B2/13b Courbe de variation de densité mesurée et corrigée en tenant compte des gradients de déformation /̄39*̲/̄.

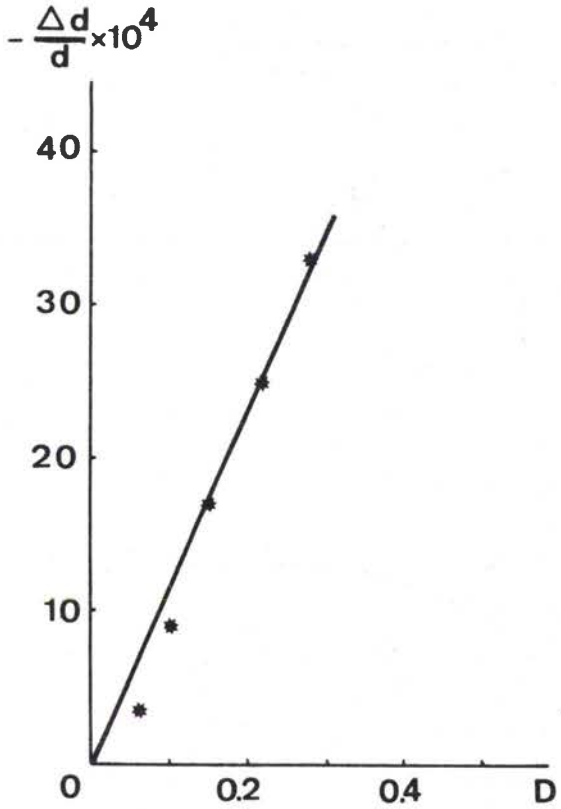


fig.B2/14 Relation entre le paramètre d'endommagement mesuré par module d'Young et les variations relatives de densité.

(fig. B2/13b) présente une croissance très importante de l'endommagement. La correction est sensible dès le début de l'évolution en raison de la forme utilisée pour les éprouvettes développant un fort gradient de déformation qui est nécessaire pour déterminer la position de la jauge de déformation dans les mesures de module d'Young. La courbe corrigée présente à nouveau une saturation lorsque le pas de calcul utilisé devient grand devant les gradients de déformation développés au voisinage de la rupture. Une nouvelle correction avec un pas de calcul plus faible serait nécessaire dans cette zone.

La comparaison des courbes ainsi obtenues (fig. B2/14) montre une corrélation linéaire entre les deux paramètres de mesure de la forme :

$$D \simeq 76.(-\frac{\Delta d}{d})$$

Un modèle constitué de cellules en série contenant des cavités ou des fissures a été construit /40/ pour relier les deux paramètres étudiés par une analyse théorique de la réponse du modèle à une contrainte uniaxiale. Les résultats sont identifiés sur la rupture en prenant pour valeur des paramètres d'endommagement D=0.5 et $-\frac{\Delta d}{d}=4.5\ 10^{-3}$ d'après la figure B2/13 et l'auteur conlue à la nécessité d'avoir un nombre de cellules fissurées 90 fois plus élevé que le nombre de cellules présentant une cavité sphérique et constate le désaccord de ce résultat avec l'expérience.

Or le choix de la rupture pour identifier le modèle ne semble pas judicieux car la courbe de densité corrigée est loin d'être valide à la rupture. De plus, l'observation d'un faciès de rupture (fig. B2/15) prouve un taux de cavitation entrêmement élevé, de l'ordre de 40% /41/ ce qui réduit considérablement le nombre de cellules fissurées nécessaires.

Dans un modèle constitué uniquement de cellules à cavités sphériques, l'auteur établit la relation analytique entre les paramètres $\frac{\Delta d}{d}$ et D définis sur la contrainte par le calcul suivant :

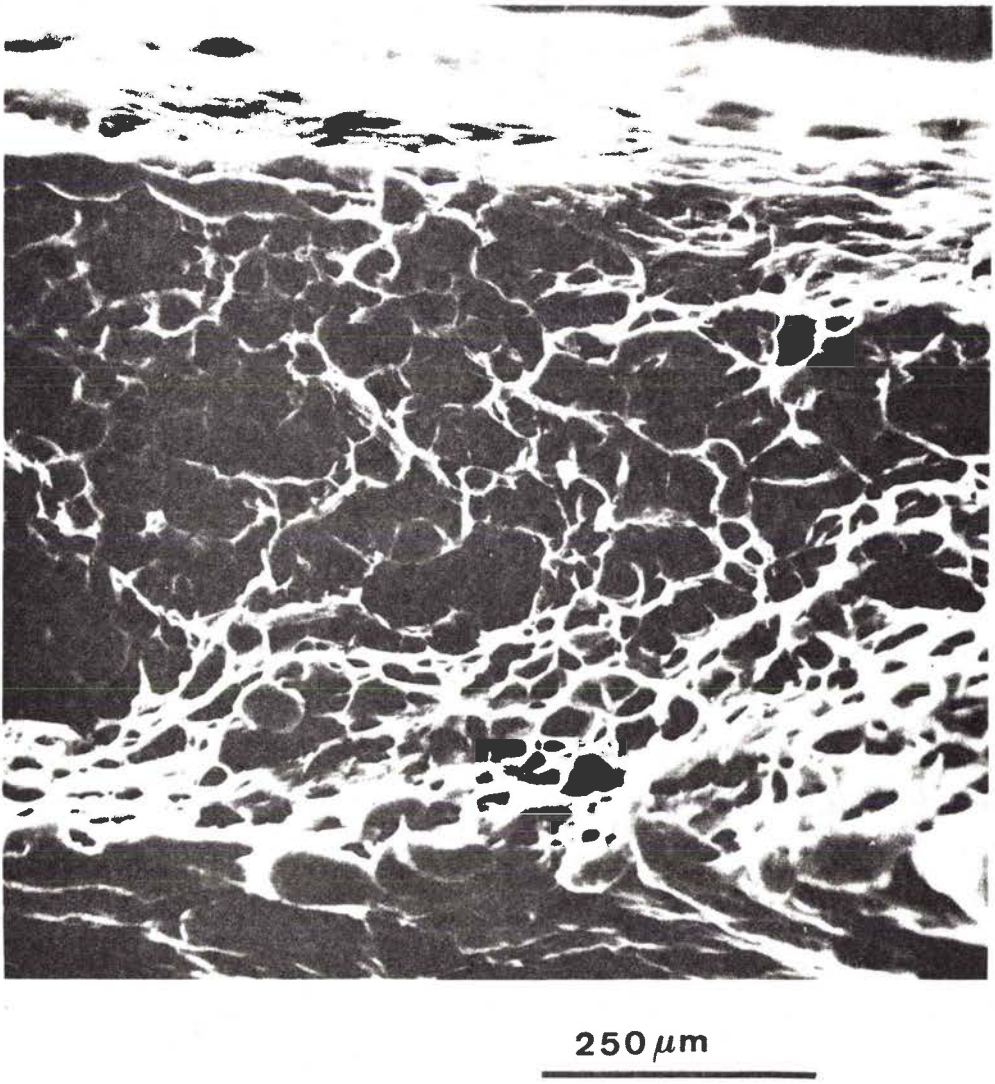


fig.B2/15 Faciès de rupture d'un acier doux calmé à l'aluminium déformé en expansion équibiaxée.

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D} \quad \text{or} \quad \tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{F}{S}$$

où F est la force de traction, $\tilde{\sigma}$ et σ les contraintes vraies et apparentes

il vient donc $\tilde{S} = S(1-D)$

or $\tilde{S} = S(1-C_s)$ ou C_s est la concentration surfacique en cavités

d'où l'égalité : $D = C_s$

pour une cellule cubique de côté 1 contenant une sphère de rayon a l'auteur aboutit très simplement à la relation :

$$C_v \simeq - \frac{\Delta d}{d} = \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{\pi}\right)^{3/2}$$

ce modèle ne conduit pas à un bon accord avec l'expérience. Une analyse globale de la matière nécessiterait l'application des lois de la stéréologie :

$$C_s = C_v$$

et on obtient alors $D = C_v$ ce qui est en contradiction avec les valeurs expérimentales.

Une analyse statistique du phénomène nous semble beaucoup mieux adaptée. En effet, il peut exister dans le matériau des zones où la concentration en cavités peut atteindre 5 à 10 fois la concentration globale et dans cette zone il peut exister des plans de plus forte concentration surfacique en cavités. L'analyse statistique que nous avons menée (§ B.2.3) montre que des défauts de surface de l'ordre de 0.1 à 0.2 peuvent être atteints à la striction ce qui est en accord avec les valeurs mesurées du coefficient D. Au paragraphe B.2.4, un modèle physique est construit avec une tentative d'identification au modèle mécanique en tenant compte des effets statistiques de répartition de l'endommagement.

ii- Nous avons d'autre part comparé les mesures par diffusion d'hydrogène et les mesures de densité pour déterminer la répartition de l'en-

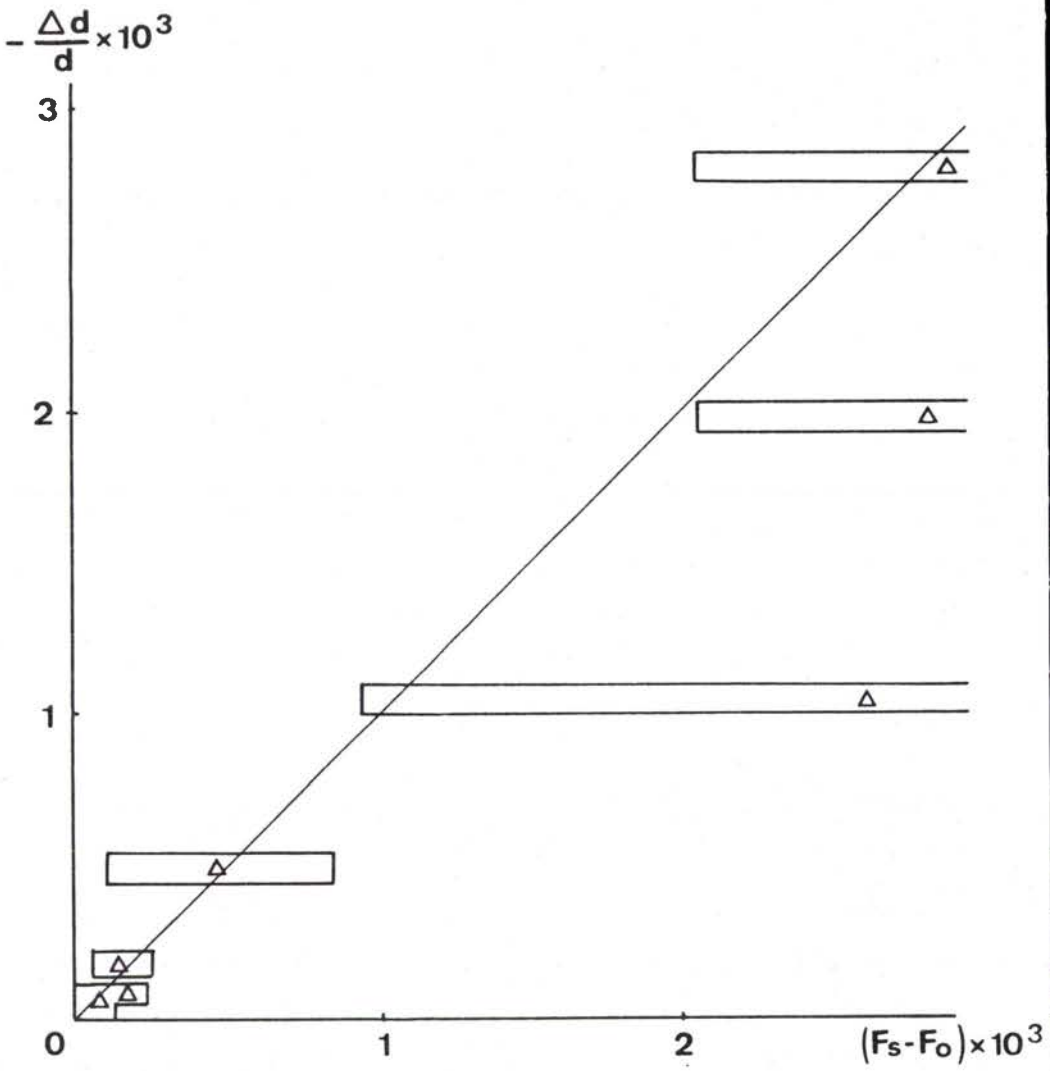


fig.B2/16 Comparaison entre la mesure d'endommagement par variations relatives de densité et par métallographie quantitative [22*].

dommagement initial dans une tôle laminée (fig. B2/ 9c). Les résultats obtenus sont en accord qualitatif et en particulier ils prévoient la même période aux variations longitudinales de l'endommagement /*/.

iii- La figure B2/16 /22*/ présente la comparaison entre l'accroissement de la fraction surfacique de cavités mesuré par analyse métallographique et la variation de densité. Ces deux paramètres doivent être égaux car en effet les lois de la stéréologie donnent :

$$C_S = C_V$$

et de plus

$$-\frac{\Delta d}{d} = \frac{C_V - C_{VO}}{1+C_V} \simeq C_V - C_{VO} \text{ pour les taux d'endommagement}$$

mesurés.

La figure fait clairement apparaître la différence entre les précisions obtenues par chacune des méthodes. Cette différence s'explique en comparant les volumes analysés : de l'ordre de 250 mm^3 pour un échantillon de 2g pour les mesures de densité, et de l'ordre de 5.10^{-2} mm3 pour 300 observations métallographiques !... L'accord entre les deux méthodes de mesures est raisonnable et prouve la cohérence du choix de l'application de ces deux méthodes couplées.

B.2.3 CROISSANCE DE L'ENDOMMAGEMENT /*/

La suivie de l'évolution de la variation de densité au cours de la déformation et pour plusieurs chemins de déformation permet de donner une image de la fonction de croissance des cavités sous état de charge biaxée. La figure B2/17 présente les évolutions observées dans le cas d'un acier doux présentant un endommagement par décohésion. Il est mis en évidence une forte influence du chemin de déformation sur la valeur de l'endommagement développé, l 'endommagement atteint à striction est de 5 à 10 fois plus élevé en déformation équibiaxiale qu'en traction simple. La croissance de l'endommagement présente une forme de type exponentiel qui s'aggrave considérablement pour des taux de

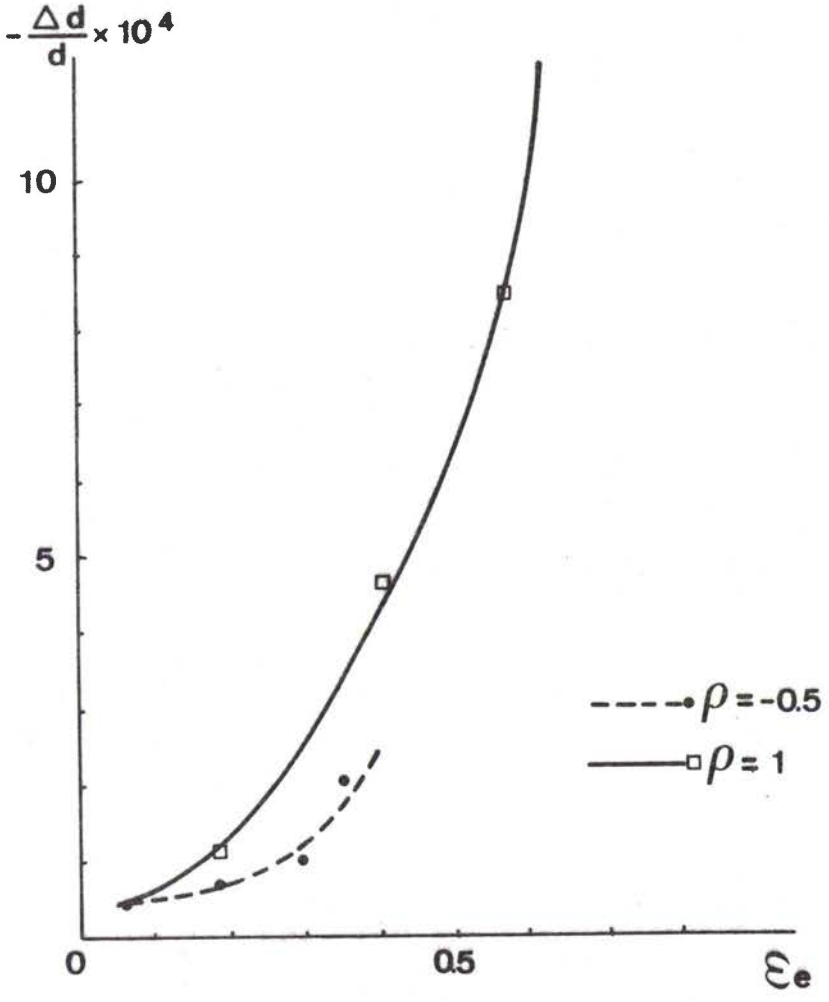


fig.B2/17 Evolution des variations relatives de densité avec la déformation pour deux chemins de déformation. Endommagement par décohésion.

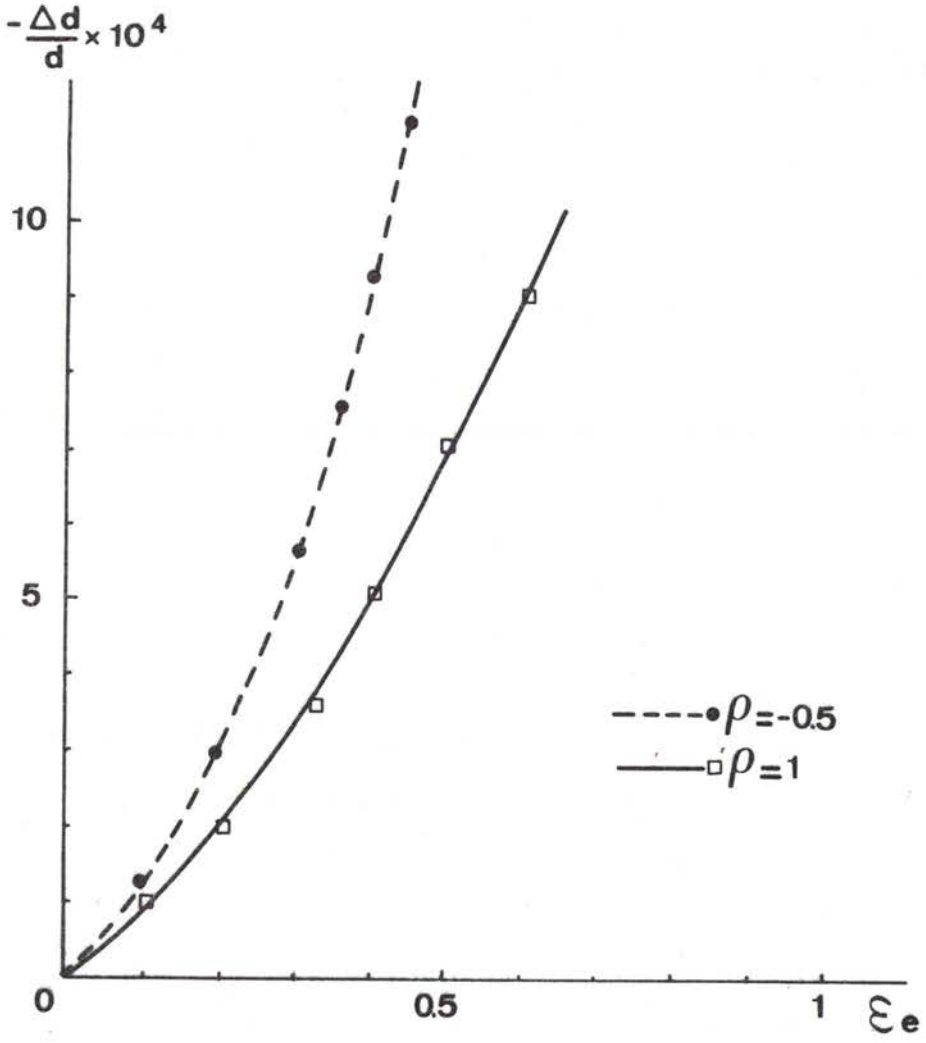


fig.B2/18 Evolution des variations relatives de densité avec la déformation pour deux chemins de déformation. Endommagement par fragmentation.

déformations voisins ou supérieurs à celui de la mise en striction.

La figure B2/18 présente le même type d'évolution mesurée sur un alliage d'aluminium (3003) qui présente principalement un endommagement par fissuration de gros précipités de type $Al_6(Mn,Fe)$. A l'inverse du cas de l'endommagement par décohésion, les taux de cavitations atteints à la striction sont du même ordre de grandeur quel que soit le chemin suivi. De plus la croissance apparaît plus douce que dans le cas précédent.

Ces deux comportements très différents des deux types d'endommagement sont confirmés par les analyses métallographiques. Les figures B2/19a et b /$\bar{4}2*\bar{}$/ présentent les cavités observées autour d'une particule d'oxyde dans un cuivre industriel Cu/a1 pour une déformation en traction simple et en expansion biaxiale respectivement. Le volume des cavités apparaît très différent en accord avec les mesures de densité mais la forme des cavités est aussi très différente. Dans le plan de la tôle les cavités apparaîssent allongées en traction simple dans la direction de traction alors qu'elles sont sensiblement équiaxes en déformation équibiaxée. Un modèle de croissance devra en particulier être prédictif de ce changement de forme.

Les figures B2/20a et b présentent une particule fissurée dans un essai de traction uniaxiale et d'expansion biaxiale respectivement. Aucune différence apparaît tant dans la taille que dans la forme des cavités ouvertes. Ce type d'endommagement semble donc être caractérisé par une évolution du volume et de la forme des cavités indépendantes du chemin.

B.2.3.1 Endommagement par décohésion

La croissance d'une cavité dans une matrice se déformant plastiquement a été étudiée analytiquement /$\bar{4}3,4\bar{4}\bar{}$/ et numériquement /$\bar{4}5\bar{}$/. Une étude /$\bar{4}3\bar{}$/ a considéré la cavité cylindrique de longueur infinie et l'auteur prévoit l'évolution du rayon de cette cavité sous la forme :



fig.B2/19a Observation de l'endommagement par décohésion développé en traction uniaxiale sur du cuivre Cu/al.

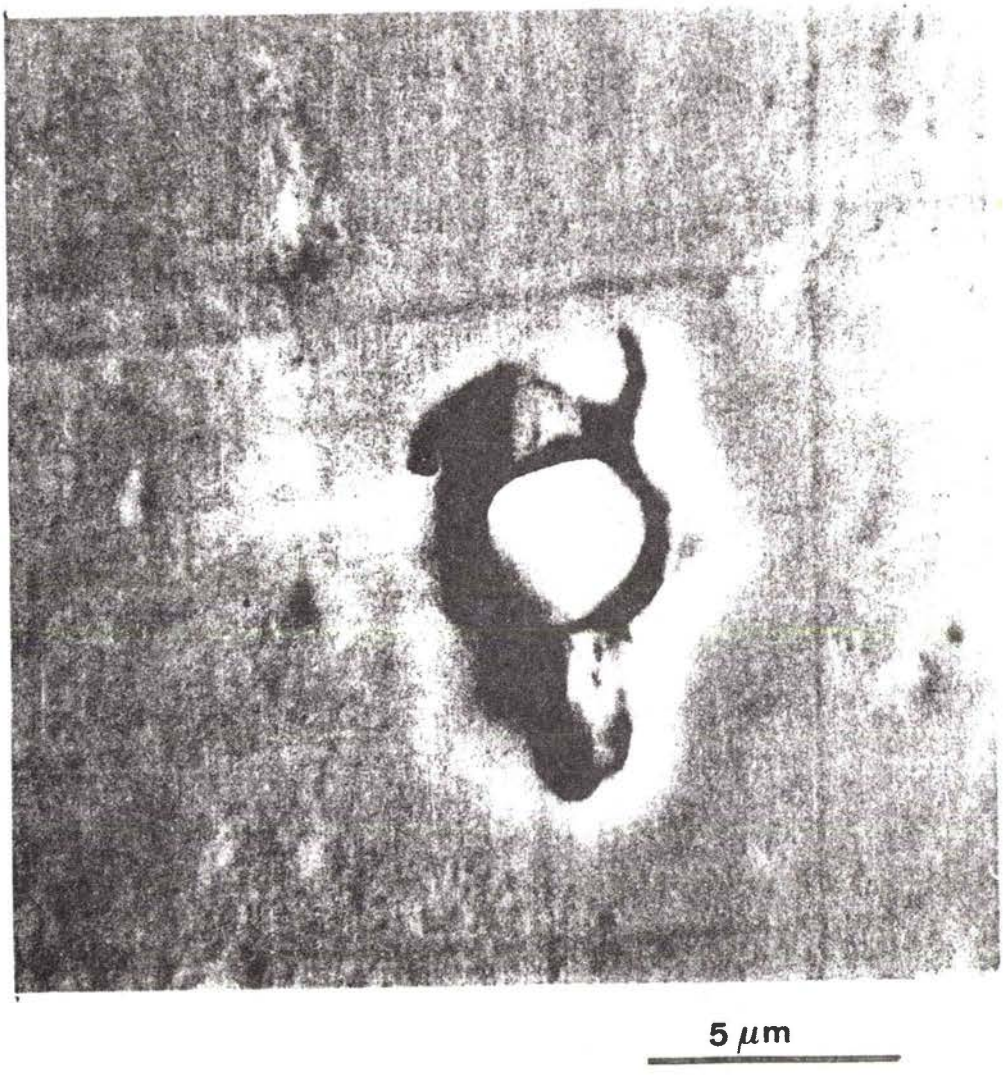


fig.B2/19b Observation de l'endommagement par décohésion développé en expansion équibiaxée sur du cuivre Cu/al.

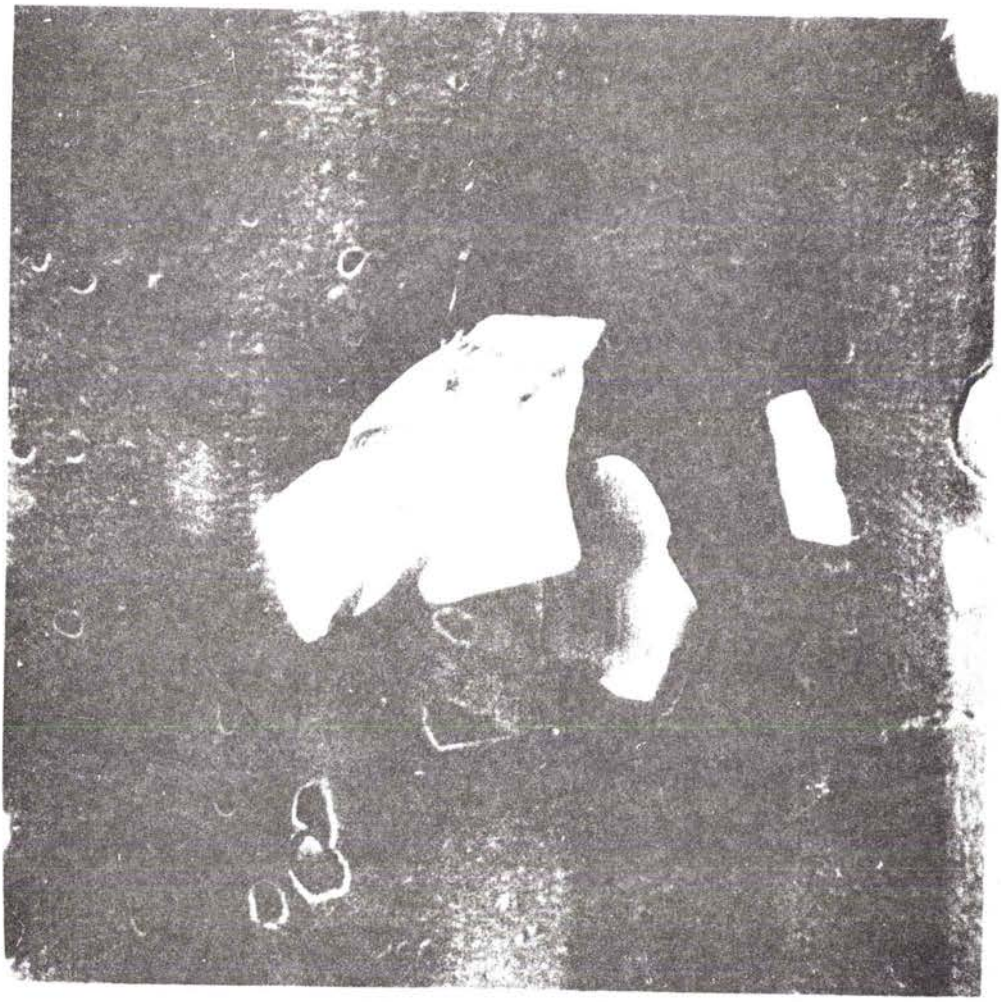


fig.B2/20a Observation de l'endommagement par fragmentation développé en traction uniaxiale sur un alliage d'aluminium 3003.

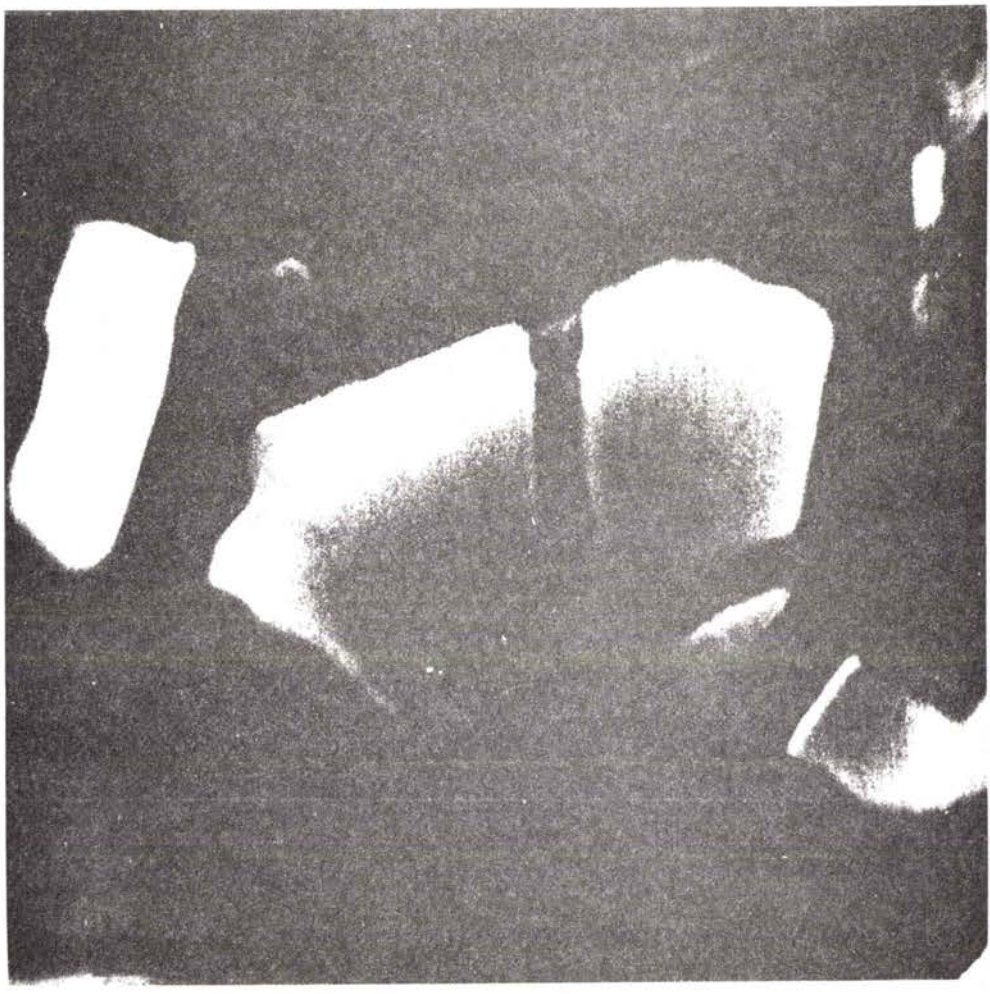


fig.B2/20b Observation de l'endommagement par fragmentation développé en expansion équibiaxée sur un alliage d'aluminium 3003.

$$\ln \frac{r}{r_o} = \frac{\varepsilon_e \sqrt{3}}{2(1-n)} \; sh\left[\frac{\sqrt{3}(1-n)}{2} \; \frac{(\sigma_1+\sigma_2)}{\sigma_e} + \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\right]$$

où n est l'exposant d'écrouissage de la loi de comportement ($\sigma_e = K\varepsilon_e^{\,n}$).

Cette loi est très sensible au chemin de déformation en effet, pour une même déformation équivalente (ε_e=1.2) l'accroissement du rayon (r/r_o) est 20 fois plus important en déformation équibiaxiale qu'en traction simple pour un matériau d'exposant d'écrouissage n=0.3. L'influence de l'écrouissage est peu marquée en traction simple tant que l'on reste en comportement non linéaire (n≠1), elle est marquée en déformation équibiaxée et la vitesse d'accroissement passe par un minimum pour une valeur de l'exposant d'écrouissage voisin de 0.5.

Une autre étude s'est intéressée à la croissance d'une cavité sphérique [44]. Ce modèle décrit en annexe 3. conduit à la forme suivante pour l'évolution de la cavité :

$$\frac{\dot{R}_i}{R_o} = \left[c\dot{\varepsilon}_i^{\infty} + \dot{\varepsilon}_e D\right]$$

où c est un coefficient homogène à un coefficient de concentration de déformation,

$\dot{\varepsilon}_i^{\infty}$ est la vitesse de déformation principale appliquée loin de la cavité dans la direction i,

$\dot{R}_i$ est la vitesse d'accroissement de la dimension radiale de la cavité dans la direction i,

Le terme $c\dot{\varepsilon}_i^{\infty}$ représente le terme déviateur de changement de forme de la cavité sans changement de volume,

le terme $\dot{\varepsilon}_e D$ représente le terme sphérique de changement de volume sans changement de forme,

D est donné par la relation :

$$D = 0.558 \; sh\left[\frac{\sqrt{3}\sigma_m^{\infty}}{2\tau_o}\right] + 0.008\nu \; ch\left[\frac{\sqrt{3}\sigma_m^{\infty}}{2\tau_o}\right]$$

$$\text{avec } \nu = \frac{3\rho}{2+\rho} \qquad \rho \in [-0.5, 1.0]$$

σ_m^∞ est la contrainte moyenne appliquée au matériau ; c'est la pression hydrostatique donnée par $\sigma^\infty_m = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}$

τ_o est la contrainte d'écoulement en cisaillement :

$$\tau_o = \frac{\sigma e}{\sqrt{3}} \qquad \text{pour un matériau de Von-Mises}$$

En trajet de chargement radial et en contraintes planes, l'expression de D devient :

$$D = 0.558\ \mathrm{sh}\left[\mu\right] + 0.008\nu\mathrm{ch}\left[\mu\right]$$

$$\text{avec } \mu = \frac{1}{2}\,\frac{1+\alpha}{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}} \qquad \alpha = \sigma_2/\sigma_1$$

$$\text{et} \quad \nu = \frac{3\rho}{2+\rho} \qquad \rho = \varepsilon_2/\varepsilon_1 \quad \rho \in \left[-0.5, 1.0\right]$$

D apparaît comme un terme constant pour chaque chemin de déformation, caractéristique de la vitesse d'accroissement de volume des cavités pour ce chemin.

Cette expression de l'évolution de taille et de forme de la cavité n'est valide que tant que la cavité reste sphérique. Si la cavité devient elliptique il a été proposé de faire évoluer le coefficient de changement de forme c d'après l'équation /46/:

$$c = 1 + \frac{R_j}{R_i} \qquad \text{dans un cas bidimensionnel.}$$

Cette loi est empirique, elle s'identifie au cas de la cavité sphérique dans une matrice non écrouissable où c=2 et au cas d'un cylindre de longueur infinie où, dans la direction du cylindre, c =1.

Le coefficient c est fonction de l'écrouissage, ainsi Rice et Tracey proposent pour la cavité sphérique qui est le seul cas qu'ils ont traité, c=1.9 dans le cas d'une matrice parfaitement plastique

(n=0) et c=1.6 dans le cas d'une matrice à écrouissage linéaire (n=1

Ce modèle est très intéressant car il décrit l'évolution d'une cavité sphérique ce qui est un modèle proche de la réalité, surtout si l'on étend ce modèle aux grandes déformations en effectuant la correction proposée pour la valeur du coefficient c en fonction de la forme de la cavité. Les équations d'évolution restent néanmoins d'u forme relativement complexe et peu apte aux calculs analytiques simp En annexe 3 est présentée une linéarisation de ces équations que nou avons effectuée, afin d'obtenir une forme approchée de la loi de croi sance très simple et très facilement exploitable.

L'évolution des cavités s'écrit alors :

$$\varepsilon_i^v = A_i \varepsilon_i^\infty$$

où $\varepsilon_i^v = \frac{dR_i}{R_i}$ est la déformation radiale de la cavité dans la direction i.

A_i est un facteur qui dépend du chemin de déformation et de la forme cavités :

$$A_1 = (c+0.64)+0.64\rho$$

$$A_2 = (c+0.64)+0.64/\rho$$

$$A_3 = (c-0.64)$$

Dans ce modèle, l'évolution des cavités dans la direction 3 de contr te nulle est indépendante du chemin pour une même déformation dans l'épaisseur ε_3. Cette écriture présente l'inconvénient d'une discon tinuité dans la définition du terme A_2 en déformation plane, aussi l forme suivante est introduite (Annexe 3)/*/ :

$$\varepsilon_i^v = B_i \varepsilon_1^\infty$$

avec $B_1 = (c+0.64)+0.64\,\rho$

$$B_2 = 0.64+(c+0.64)\rho$$

$$B_3 = (0.64-c)(1+\rho)$$

Cette forme très simple relie la déformation radiale de la cavité dans la direction i à la valeur de la plus grande déformation principale ε_1. Dans ce modèle, pour une même déformation équivalente (ε_e=1.0), l'accroissement relatif du rayon dans la direction 1, $(\frac{R_i}{R_o})$, est deux fois plus faible en déformation équibiaxiale qu'en traction simple. Par contre l'accroissement du volume de la cavité étant donné par :

$$\alpha_v = \frac{V}{V_o} = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_o^3} = \exp(\varepsilon_1{}^v+\varepsilon_2{}^v+\varepsilon_3{}^v)$$

soit $$\alpha_v = \exp\left[1.92(1+\rho)\varepsilon_1\right]$$

pour une même déformation équivalente (ε_e=1), l'accroissement relatif du volume est 2.6 fois plus élevé en déformation équibiaxiale qu'en traction simple et à la striction, où l'on obtient sensiblement la même valeur de la déformation principale ε_1, (par exemple ε_1=0.55) l'accroissement relatif du volume est alors environ cinq fois plus important en déformation équibiaxée qu'en traction simple.

La variation de densité, assimilée à la concentration volumique en cavités s'écrit :

$$-\frac{\Delta d}{d} = C_v - C_{vo} = C_{vo}(\alpha_v - 1)$$

d'où la formule définitive :

$$-\frac{\Delta d}{d} = C_{vo}\left[\exp\left[1.92(1+\rho)\varepsilon_1\right]-1\right]$$

dépendant du chemin de déformation mais indépendante du coefficient c.

Par exemple, pour un matériau d'endommagement initial $C_{vo}=10^{-3}$, les valeurs de la variation relative de densité sont respectivement à striction (ε_1=0.4) : $-\frac{\Delta d}{d} = 3.65\ 10^{-3}$ et $-\frac{\Delta d}{d} = 4.68\ 10^{-4}$ pour une

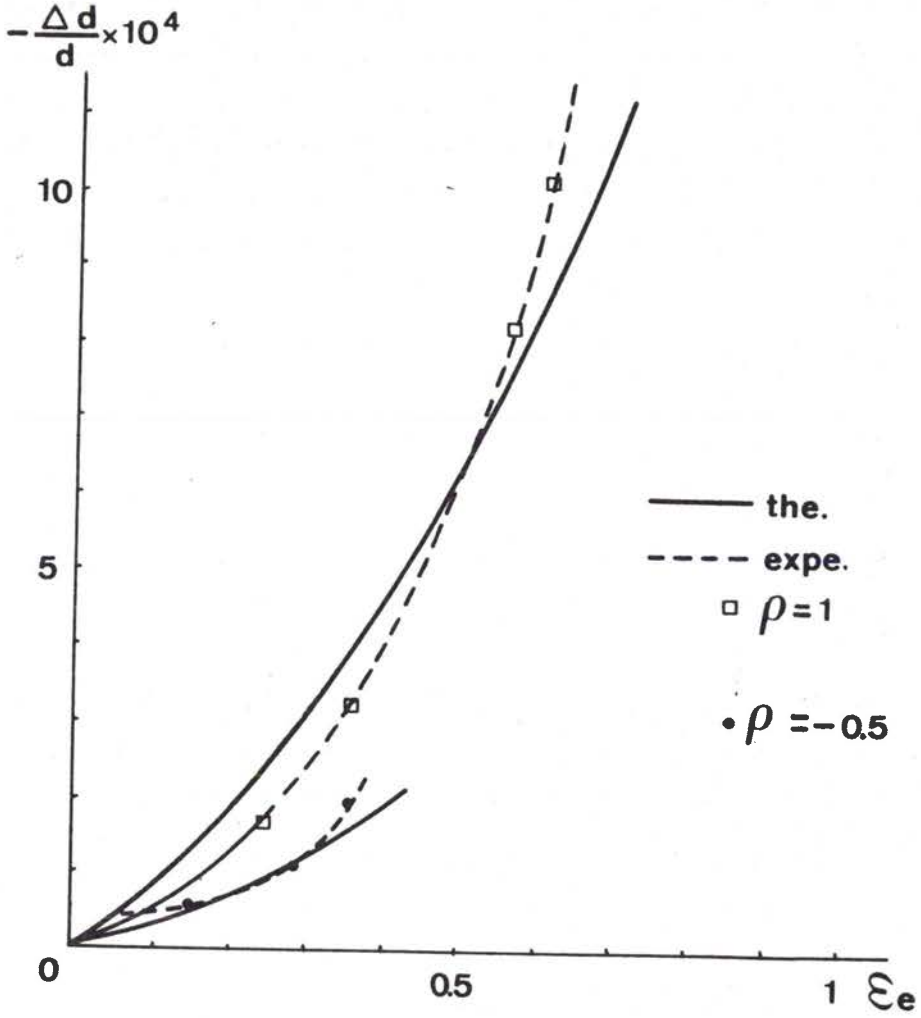


fig.B2/21 Comparaison des évolutions expérimentales et théoriques de la variation relative de densité.

déformation équibiaxiale et en traction simple. Ces valeurs sont tout à fait compatibles avec les résultats présentés et couramment rencontrés. Ce calcul fait apparaître la variation de densité en déformation biaxée 5 à 10 fois plus forte qu'en traction simple en accord avec les chiffres avancés d'après l'expérience au début de ce paragraphe.

La figure B2/21 présente la comparaison entre le modèle proposé et les mesures expérimentales pour deux chemins de déformation. L'accord est très bon pour la majeure partie de la courbe, un désaccord aux faibles déformations est dû à la phase de germination et au manque relatif de précision sur les mesures aux faibles taux d'endommagement. Aux fortes déformations (voisin de la striction), la croissance des variations de densité est plus importante que la croissance du modèle à cause de phénomènes de striction interne décrits au chapitre B.3. Nous avons donc retenu ce modèle de croissance pour décrire l'endommagement par décohésion. Cette vérification du modèle est indépendante de la valeur du coefficient c et ne permet donc pas de la déterminer par identification sur les mesures de densité. Ce point est prévisible car le coefficient c est relié au terme déviateur de changement de forme sans changement de volume alors que les mesures de densité ne s'intéressent qu'au changement de volume donc au terme sphérique.

Pour identifier le coefficient c, la méthode la plus directe est de mesurer, sur des observations métallographiques, le changement de forme des cavités. Comme il a été présenté, les mesures métallographiques sont entachées d'une grande incertitude, ceci d'autant plus que les formes des cavités sont en général assez mal définies. Néanmoins, il est observé dans les matériaux ne présentant pas ou peu d'endommagement initial une croissance des cavités, après germination, très différente suivant le chemin de déformation imposé (fig. B2/19), en accord qualitatif avec le modèle de croissance retenu. Dans les matériaux présentant un endommagement initial, les cavités sont en général très allongées dans la direction de laminage, alors aucune évolution du facteur de forme n'est décelable suivant le chemin de déformation, seul l'accroissement de volume des cavités est différent /22/.

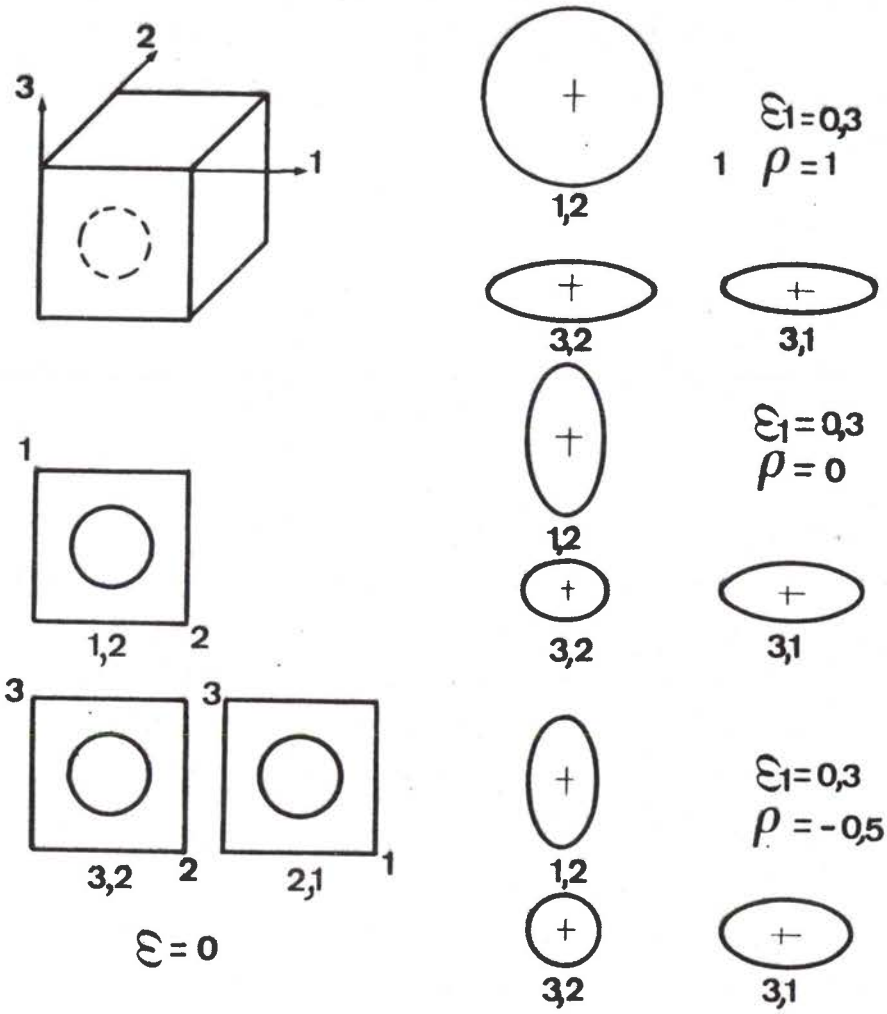


fig.B2/22 Evolution théorique de la forme d'une cavité initialement sphérique sollicitée en :

- traction uniaxiale (a)
- déformation plane (b)
- expansion équibiaxée (c)

La figure B2/22 /*/ présente la croissance prévue théoriquement d'une cavité placée au centre d'un cube soumis soit à une traction simple, soit à une déformation plane, soit à une expansion biaxiale symétrique. Le calcul est mené en prenant c=1.5 qui est une valeur obtenue par identification sur les courbes limites de formage à rupture (§C.3). Cette valeur est donc une valeur moyenne du coefficient c entre la déformation nulle et la rupture.

B.2.3.2 ENDOMMAGEMENT PAR FRAGMENTATION

i) Comme il a été présenté précédemment, cet endommagement est pratiquement indépendant du chemin de déformation suivi. La forme des cavités et leur évolution observées métallographiquement semblent similaires. Il n'existe pas, à notre connaissance, de modélisation de la croissance de la largeur d'une fissure ouverte dans un précipité dur placé dans une matrice supportant de fortes déformations plastiques. Nous travaillons en collaboration avec des numériciens pour établir, par calcul aux éléments finis la loi de croissance de ce type d'endommagement. Le calcul ne pourra néanmoins être mené que pour un cas bidimensionnel dans un premier temps, la réponse apportée ne sera donc que partielle. Ces raisons nous ont conduit à proposer une modélisation de la croissance fondée sur les mesures expérimentales sous la forme /25/:

$$\varepsilon_{\perp}^{f} = \zeta \varepsilon_{\perp}^{\infty}$$

où $\varepsilon_{\perp}^{f}$ est la déformation de l'ouverture de la fissure. $d\varepsilon_{\perp}^{f} = \frac{dW}{W}$ où W est l'ouverture de la fissure (fig. B2/23), $\varepsilon_{\perp}^{\infty}$ est la déformation normalement à la direction de la fissure, ζ est un coefficient constant de concentration de déformation.

Une identification de cette loi peut être faite sur les courbes présentées de variation de densité (fig. B2/18). La variation de densité s'écrit en effet à partir de la concentration volumique en cavité :

$$C_V = C_{VO} \exp(\zeta \varepsilon_{\perp}^{\infty})$$

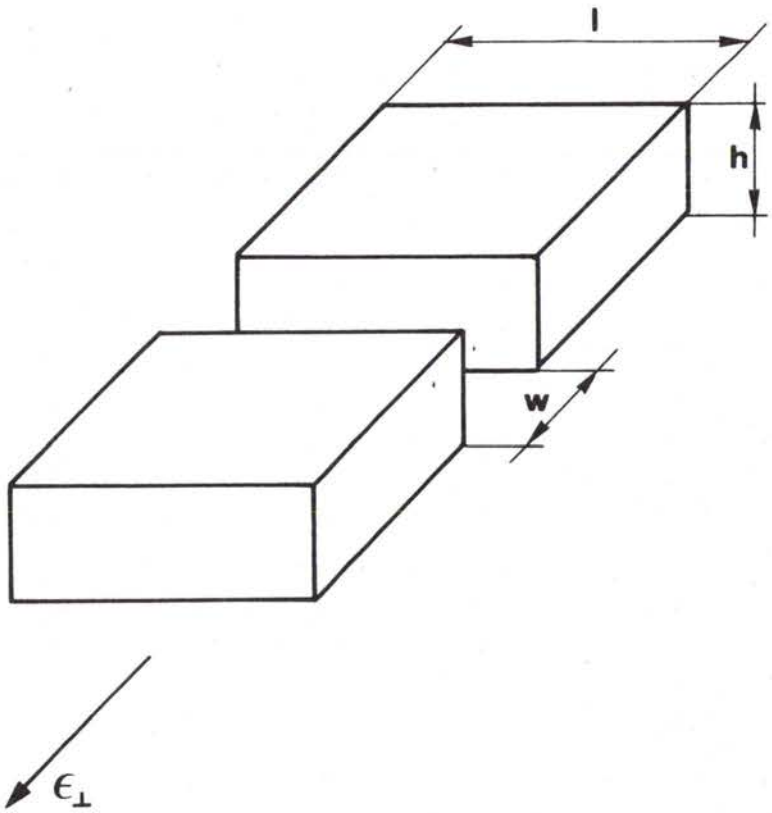


fig.B2/23 Fragmentation d'un précipité parallélépipédique situé dans une matrice ductile.

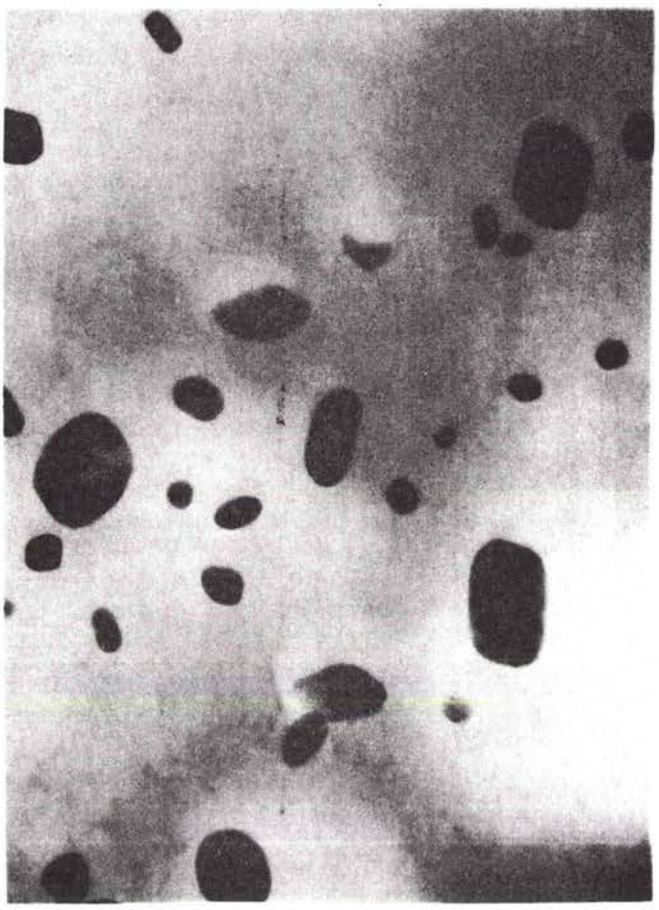


fig.B2/24 Observation au microscope électronique en transmission de la précipitation dans l'alliage d'aluminium 3003 étudié /1*/.

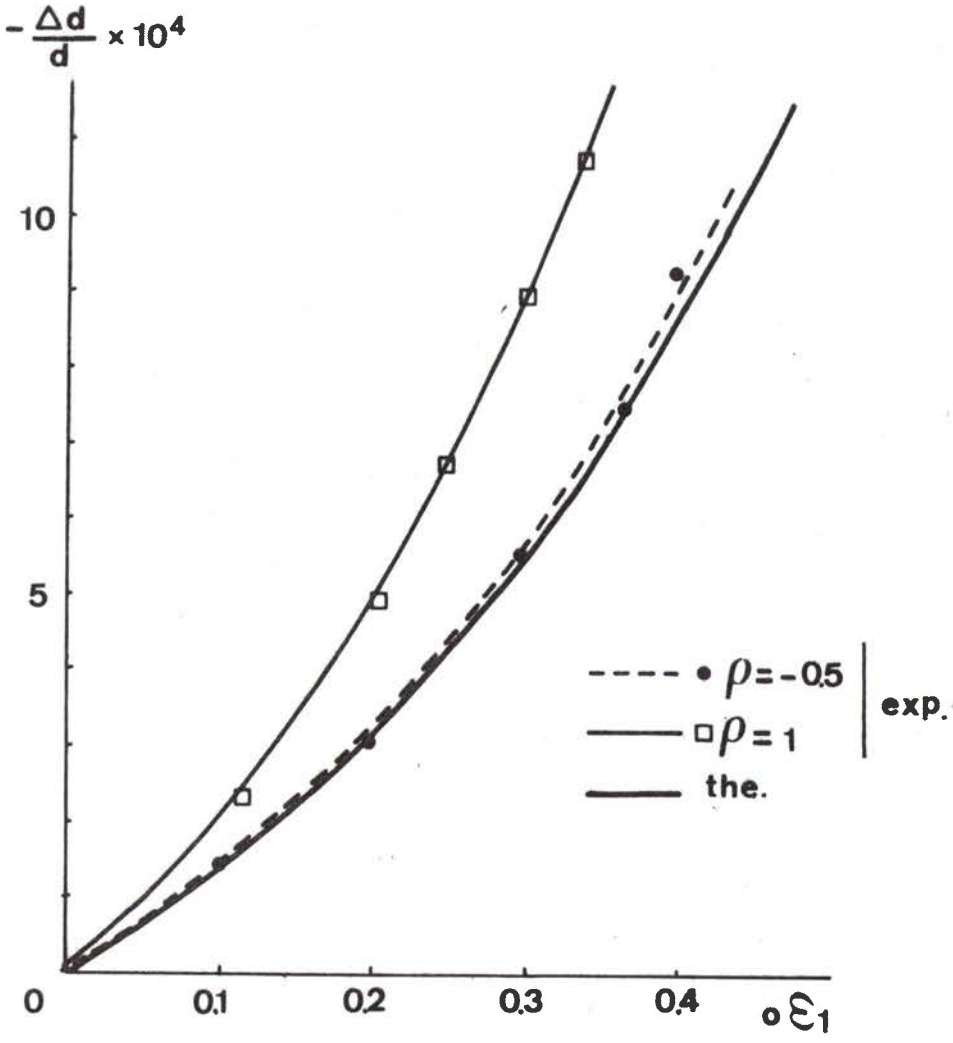


fig.B2/25 Comparaison entre les évolutions théorique et expérimentale de la variation de densité pour l'alliage léger 3003 étudié au cours d'une expansion équibiaxée.

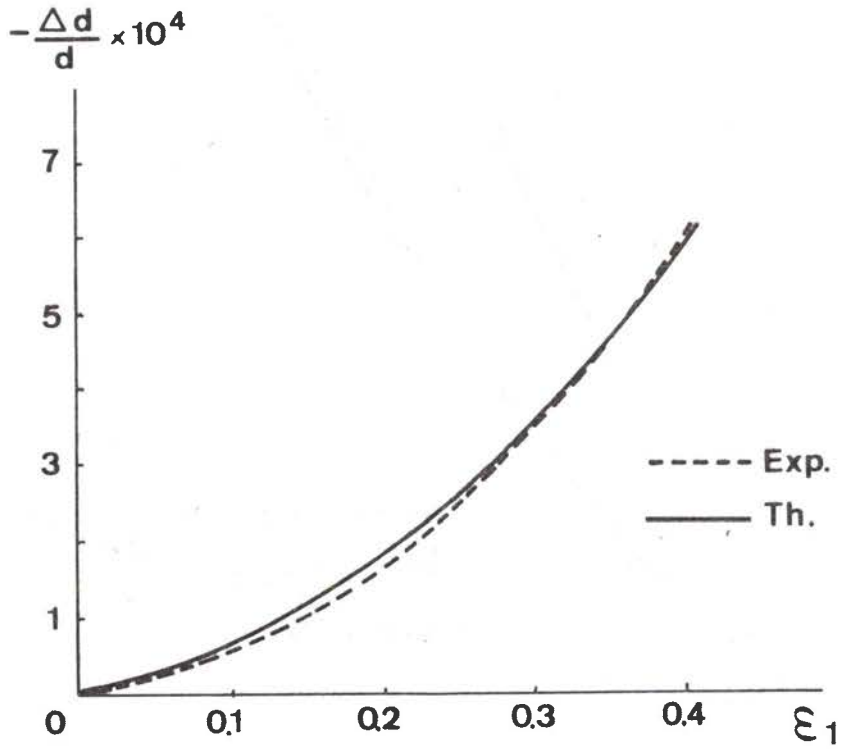


fig.B2/26 Evolution de la perte de densité attribuée aux petits précipités par différence entre l'évoltuion théorique et expérimentale.

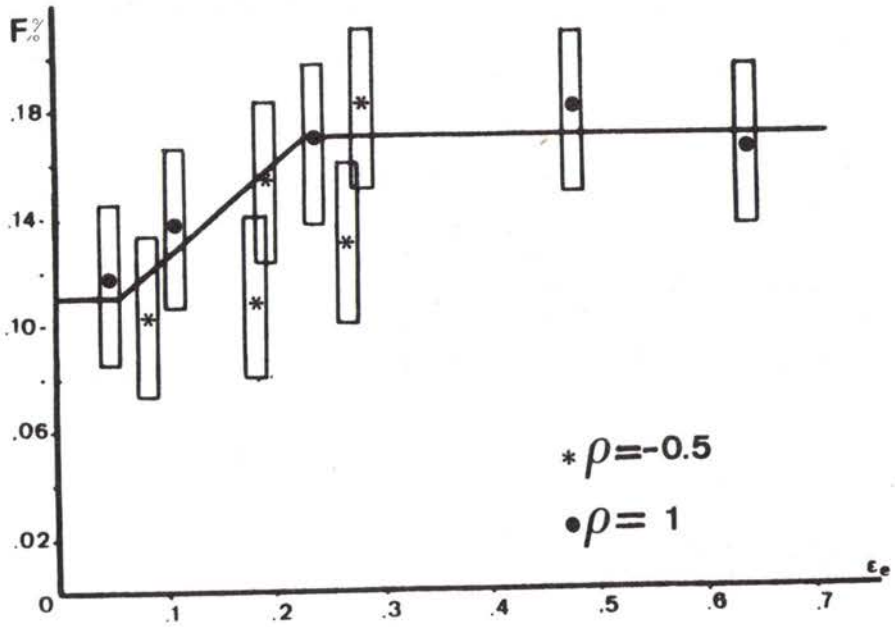


fig.B2/27 Courbe de germination de l'endommagement par fragmentation dans l'alliage 3003.

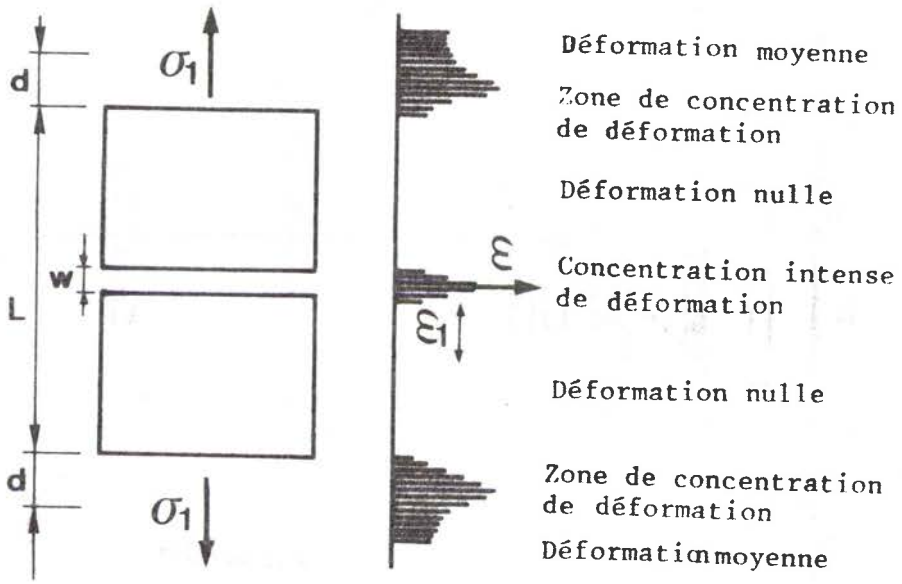


fig.B2/28 Modèle simple d'accomodation de la déformation plastique.

déformation : traction uniaxiale et expansion équibiaxiale.

La variation de densité s'exprime alors par :

$$-\frac{\Delta d}{d} = C_v - C_{v_o} = C_{v_o}\left[\delta \exp(\zeta \varepsilon_1) - 1\right]$$

L'identification aux variations de densité en tractions uniaxiales, compte tenu de la germination présentée, donne :

$$\zeta = 3.6$$

Cette valeur est compatible avec des cas semblables déjà étudiés :

- La concentration de déformation autour d'une fissure elliptique dans une matrice élastique qui donne pour notre cas $\zeta=4.4$ pour $\rho=-0.5$ $\zeta=3.5$ pour $\rho=1$.

- La concentration de contrainte autour d'une particule dure dans une matrice ductile : $\zeta=2.4$ pour $\rho=-0.5$, $\zeta=1.6$ pour $\rho=1$.

- La concentration de déformation obtenue en supposant une zone d'influence autour de la particule de dimension égale à 1.3 fois celle de la particule pour laquelle la déformation s'effectue de part et d'autre de la particule qui rend rigide la matrice en contact avec elle (fig.B2/28) $\zeta=3.6$.

La figure B2/29 présente l'évolution d'une fissure dans un précipité placé au centre d'un cube sollicité en traction uniaxiale et en expansion équibiaxée.

iii) Conclusion:

La croissance de l'endommagement peut donc s'écrire sous la forme générale : $\varepsilon_i^v = B_i \varepsilon_1$ où les facteurs B_i prennent les valeurs suivantes pour les deux cas d'endommagement :

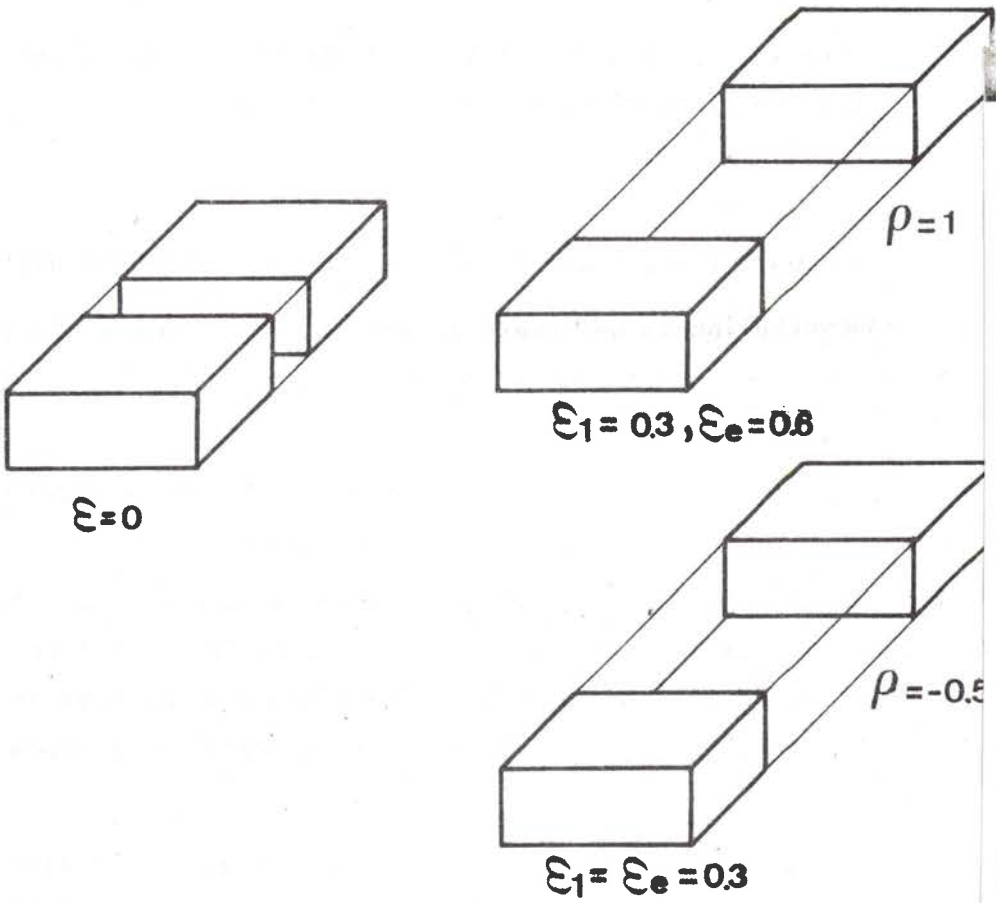


fig.B2/29 Evolution de la taille d'une fissure pour deux chemins de déformation : - traction uniaxiale
- expansion équibaxée.

$$\varepsilon_i^{v} = B_i \varepsilon_1$$

décohésion	fragmentation
$B_1 = (c+0.64)+0.64\rho$	$B_1 = \zeta$
$B_2 = 0.64+(c+0.64)\rho$	$B_2 = 0$
$B_3 = (0.64-c)(1+\rho)$	$B_3 = 0$

avec la convention supplémentaire que, dans le cas de la fragmentation, la direction 1 représente la direction normale à la fissure (généralement direction de laminage).

B.2.4 FONCTION ENDOMMAGEMENT /*/

Nous sommes en présence d'un matériau contenant des cavités dont la taille, la forme et la loi de croissance sont connues. La répartition de ces cavités est un problème important, la figure B2/30 montre un alignement de particules dans du cuivre industriel. L'endommagement présente donc une forte anisotropie de distribution. La figure B2/31 présente une répartition quasi homogène des précipités dans l'alliage d'aluminium 3003. Pour les aciers doux calmés à l'aluminium d'emboutissage, une légère anisotropie de distribution existe par alignement de précipités dans le sens de laminage mais elle est en général peu marquée. Nous avons donc choisi de faire l'hypothèse d'une distribution au hasard des cavités.

Nous devons donc modéliser un matériau soumis à des contraintes et subissant des déformations plastiques, dans lequel sont réparties un nombre très important de cavités (fig. B2/32). Ces cavités provoquent des défauts géométriques dans la tôle par diminution de la section portant effectivement la charge imposée. Il est aisé de constater que, pour une répartition au hasard des cavités, il existe des sections pour lesquelles le défaut créé est plus important (fig. B2/32).

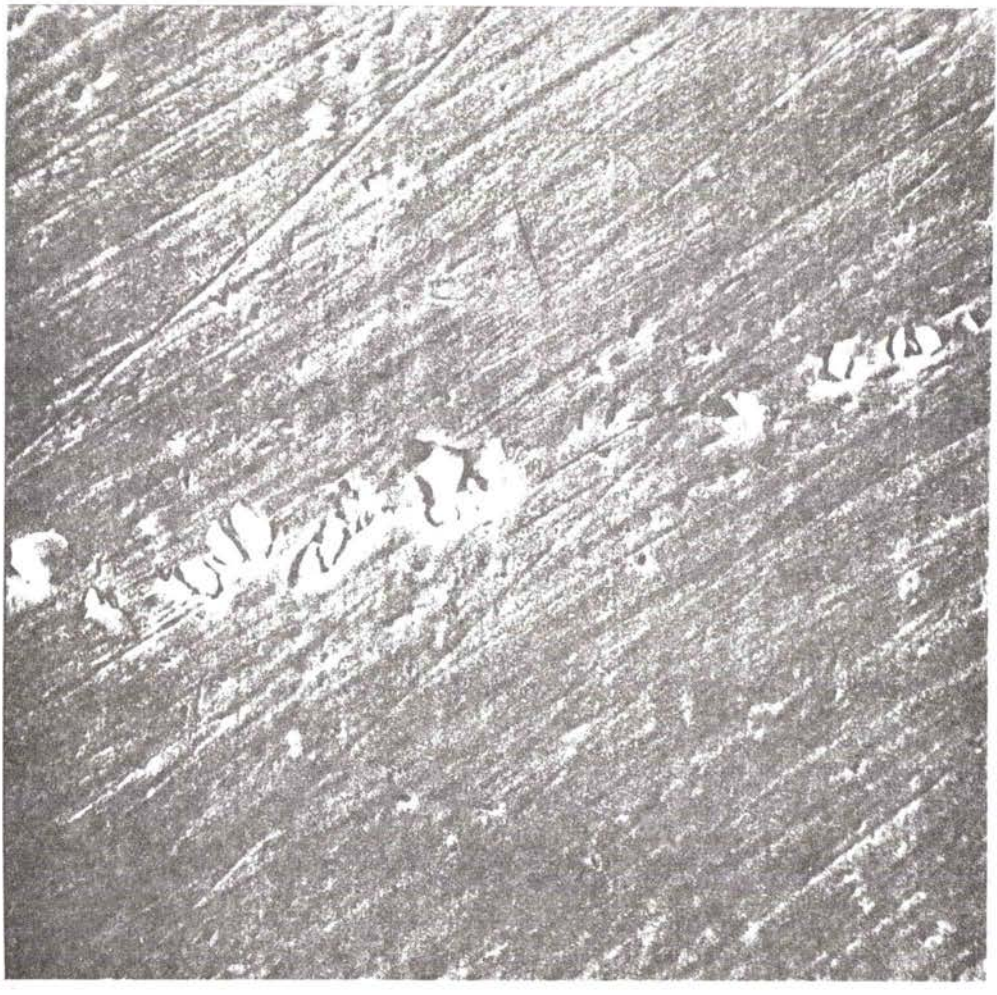


fig.B2/30 Alignement de précipités dans du cuivre Cu/a_1 laminé.



fig.B2/31 Répartition des précipités dans l'alliage 3003.

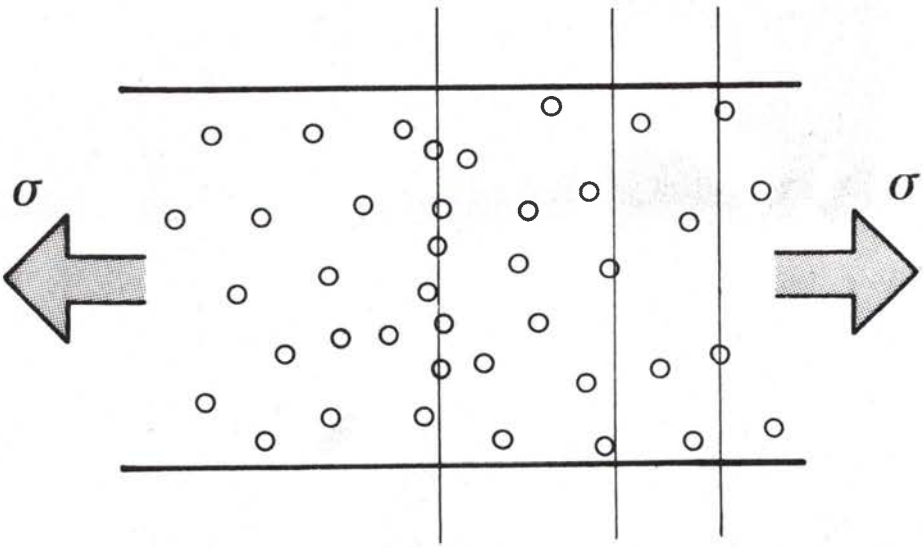


fig.B2/32 Mise en évidence de sections plus endommagées dans un matériau contenant des cavités réparties au hasard.

Nous avons donc développé une étude statistique dans le but de déterminer la probabilité d'existence d'un défaut d'amplitude donné dans un matériau contenant une fraction volumique fixée de cavités de taille donnée. Dans cette analyse, les cavités seront supposées parallélépipédiques ce qui simplifie les problèmes de recouvrement, la section du vide étant constante le long de celui-ci. Le défaut créé peut être considéré soit en défaut de surface : il est alors défini par la différence d'aire entre la zone endommagée et une zone non endommagée, soit en défaut linéaire : il est alors défini comme une sous-épaisseur locale. La figure B2/33 est une représentation schématique de ces deux types de défauts. L'observation de la matière montre essentiellement des zones de concentrations de cavités relativement ponctuelles, de plus il est très difficile de définir une section endommagée dans le cas de l'essai Jovignot par exemple ou d'emboutis industriels. Une étude du développement de l'instabilité plastique à partir de défauts ponctuels créés par usinage de cuvettes coniques de petits diamètres sur la surface de l'échantillon montre que ceux-ci se rejoignent par une bande de striction localisée dès que le rapport de leur distance sur leur amplitude atteint une valeur critique /47/. Un tel cas est celui qui se présente en considérant des défauts d'épaisseurs localisés dans la tôle. Le matériau est donc, selon cette approche, constitué d'une matrice dans laquelle sont répartis de nombreux défauts d'épaisseurs localisés d'amplitude différente. La localisation de l'écoulement s'effectue par une bande de striction (localisée) rejoignant entre eux des défauts le long de la direction la plus favorable définie par les calculs d'instabilités (cf. § A.2.1). Ce modèle est très souple car il peut être appliqué à n'importe quelle géométrie de pièce formée et il décrit la localisation en accord avec des expériences.

L'analyse statistique a été menée en divisant l'épaisseur du matériau en ν tranches d'épaisseur égale à celle des cavités supposées toutes de mêmes taille et forme à chaque instant (fig. B2/34). Chacune des tranches a une section définie par les dimensions de la cavité, la longueur 1 de la tranche est imposée par la concentration volumique

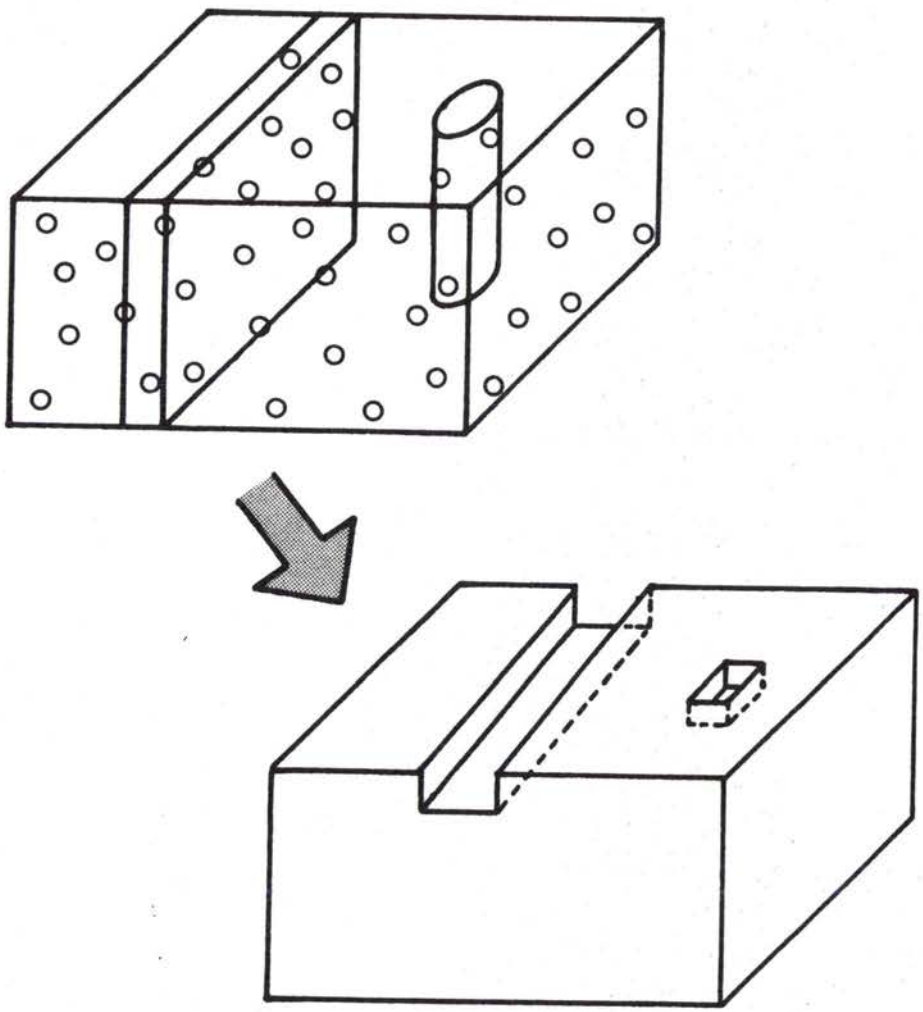


fig.B2/33 Modélisation des deux types d'approche de l'endommagement :
- défaut de surface,
- sous-épaisseur locale.

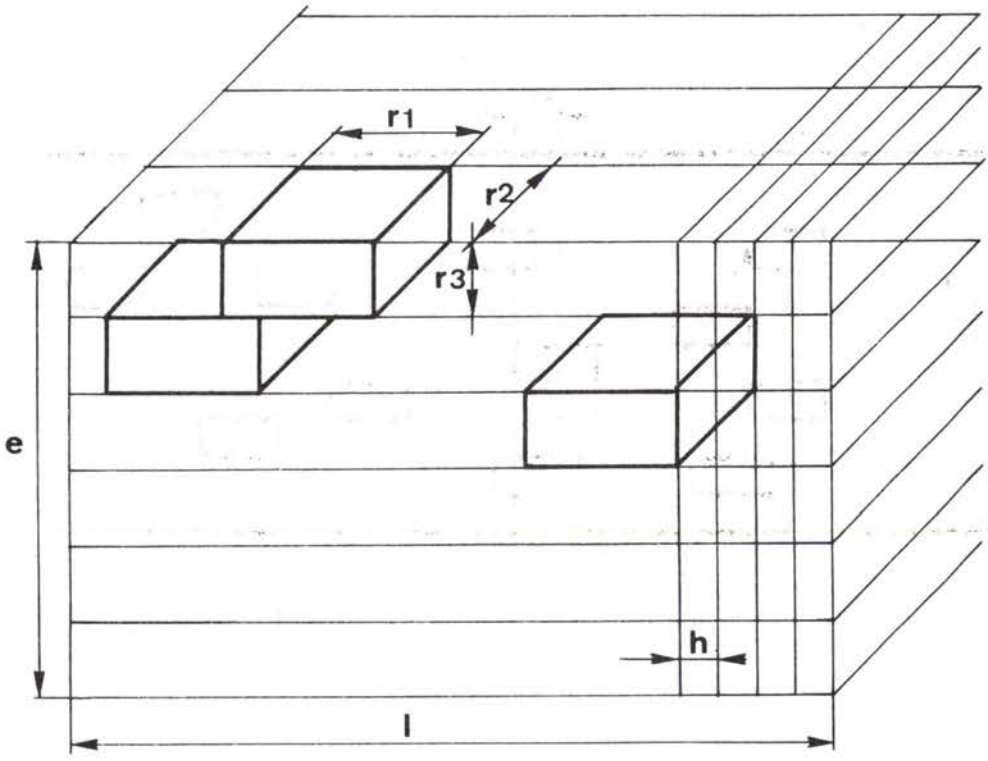


fig.B2/34 Modélisation de l'épaisseur du matériau en vue du calcul statistique.

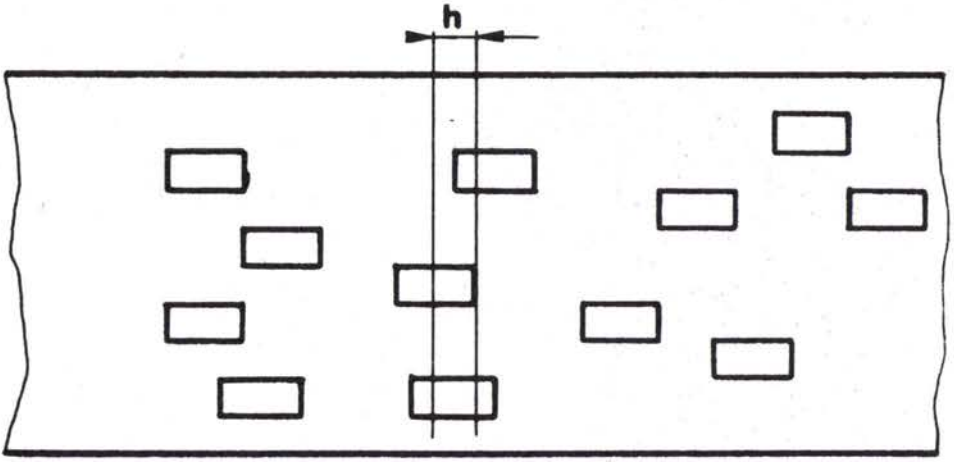


fig.B2/35 Défaut local d'épaisseur obtenu par alignement de cavité dans une bande de largeur h.

en cavités :

$$C_v = \frac{r_1}{1}$$

Chacune des cavités est supposée libre de se déplacer à l'intérieur de sa tranche de manière discrète par pas de dimension h (fig. B2/34).

Un défaut d'épaisseur D est donné par l'alignement de x cavités sur une bande verticale de largeur h (fig. B2/35).

L'amplitude du défaut est définie par :

$$\xi = 1-D = \frac{e-xr_3}{e}$$

où e est l'épaisseur de la tôle et r_3 la dimension verticale de la cavité.

La probabilité de trouver ce défaut ξ est donnée par :

$$P(\xi) = C_\nu^x \left[\frac{r_1/h}{1/h}\right]^x \left[1- \frac{r_3/h}{1/n}\right]^{\nu-x}$$

en remarquant que $r_1/1=C_v$ on obtient finalement :

$$P(\xi) = C_\nu^x (C_v)^x (1-C_v)^{\nu-x}$$

relation qui est indépendante de la représentation choisie, ce qui est en accord avec la définition d'un défaut dans l'épaisseur défini indépendamment de la coupe verticale effectuée pour l'observer.

Cette relation est établie pour une configuration fixée, c'est-à-dire une épaisseur, une forme des cavités et une concentration volumique des cavités fixées. Or ces paramètres évoluent au cours de la déformation et pour une déformation ε_1 on peut écrire :

i) <u>dans le cas de l'endommagement par décohésion</u>

$$C_v = C_{v_o} \text{Exp}\left[1.92\ (1+\rho)\varepsilon_1\right]$$

$$r_3 = r_o \exp \varepsilon_3^v$$

avec $\varepsilon_3^v = A_3\varepsilon_3$

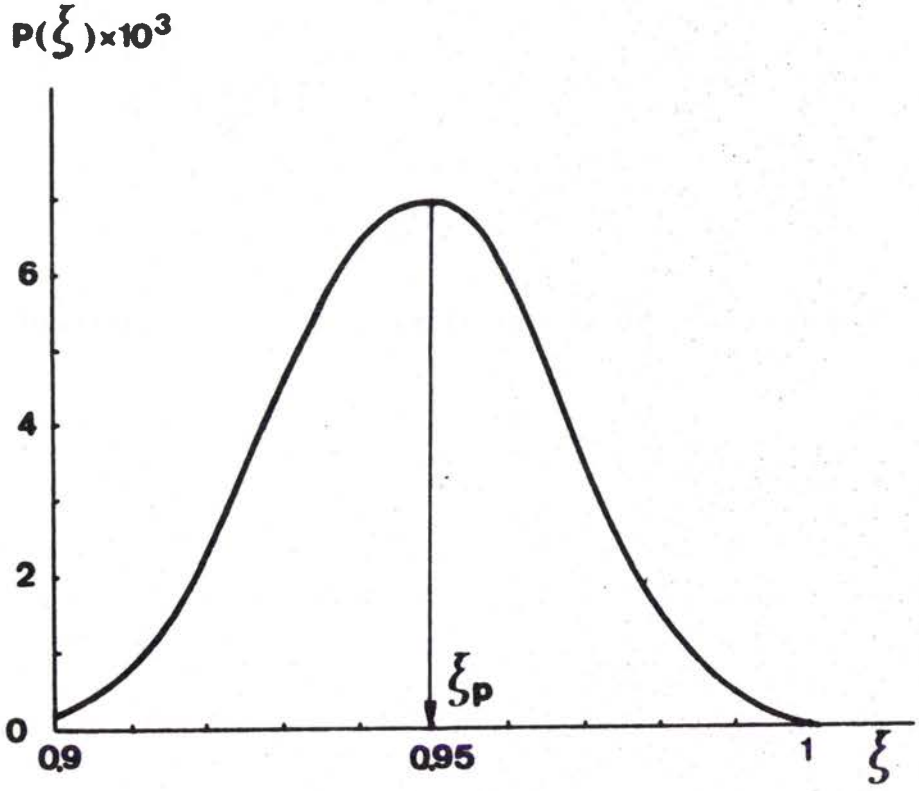


fig.B2/36 Evolution de la probabilité d'existence d'un défaut ξ donné.

r le facteur A_3 est constant et très voisin de 1, en posant $A_3=1$
n obtient :

$$r_3 = r_o \exp\varepsilon_3$$

$$e = e_o \exp\varepsilon_3$$

$$x = \frac{e(1-\xi)}{r_3} = \frac{e_o}{r_o}(1-\xi) = \nu_o(1-\xi)$$

$$\nu = \frac{e}{r} = \frac{e_o}{r_o} = \nu_o = cte$$

'où le système d'équation :

$$P(\xi) = C_{\nu_o}^{\nu_o(1-\xi)} (C_v)^{\nu_o(1-\xi)} (1-C_v)^{\nu_o \xi}$$

avec $C_v = C_{v_o} \exp\left[1.92(1+\rho)\varepsilon_1\right]$

ii) <u>dans le cas de l'endommagement par fragmentation</u>

$$C_v = C_{v_o} \mathrm{Exp}(\zeta\varepsilon_1)$$

$$r_3 = h_o = cte$$

$$x = \frac{e(1-\xi)}{r_3} = \nu_o \exp(\varepsilon_3)(1-\xi)$$

$$\nu = \frac{e}{r_3} = \nu_o \exp\varepsilon_3$$

'où le système d'équation :

$$P(\xi) = C_{\nu}^{\nu(1-\xi)} (C_v)^{\nu(1-\xi)} (1-C_v)^{\nu\xi}$$

avec $\nu = \nu_o \exp\left[-(1+\rho)\varepsilon_1\right]$

$$C_v = C_{v_o} \exp(\zeta\varepsilon_1)$$

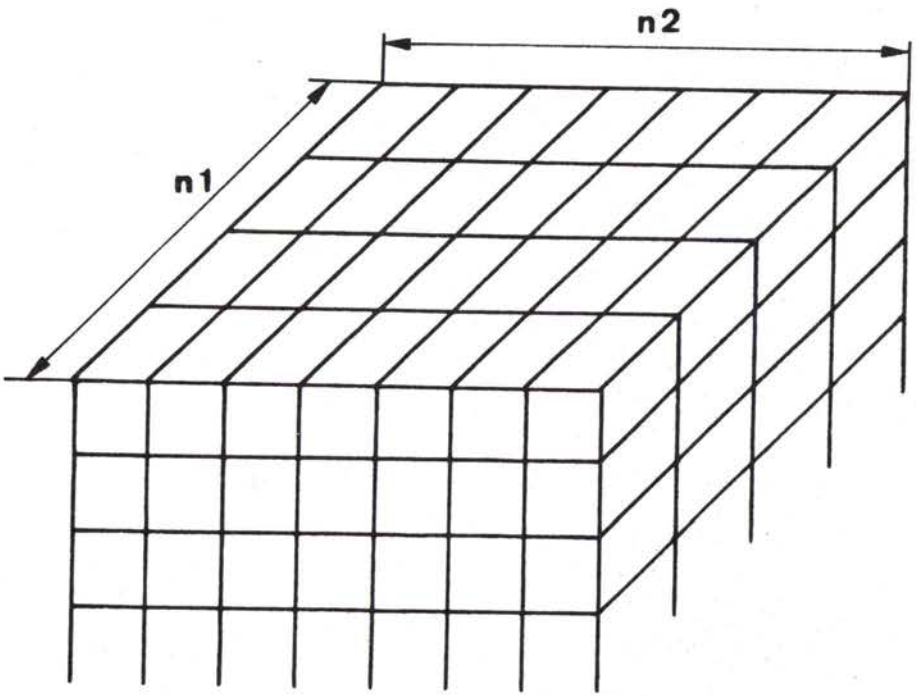


fig.B2/37 Modélisation de l'ensemble du matériau.

Ce modèle tient compte de l'évolution de forme de la cavité ce qui est un progrès très important par rapport au modèle précédent [34].

La figure B2/36 présente la courbe de probabilité d'existence d'un défaut ξ pour une configuration donnée. On retrouve une distribution "en cloche" attendue dans ces analyses statistiques, ξ_p est le défaut le plus probable dans la tôle. L'instabilité puis la rupture vont s'initier sur les défauts les plus importants restant en interaction. L'étude précédemment présentée [47] montre que pour une amplitude de défaut de l'ordre de 0.9, l'interaction est obtenue à partir d'un espacement entre défaut égal à 10 mm. Considérons donc un défaut par surface de $10 \times 10 mm^2$ cette surface est constituée de $n_1 x n_2$ modules élémentaires de surface dans le plan (fig.B2/37) :

$$n_1 \cdot \frac{r_1}{C_v} \cdot n_2 r_1 = 100$$

pour $r_1 = 3\mu m$

on obtient $n_1 n_2 \simeq 10^4$

Il suffit donc d'une probabilité d'existence de 10^{-4} à un défaut pour contrôler le processus de localisation. La figure B2/38 présente donc la valeur du défaut critique ξ_c correspondant à une probabilité d'existence de 10^{-4}. La mise en striction est facilitée par le fait qu'un défaut ξ_v d'amplitude voisine mais très légèrement plus faible, qui présente une probabilité d'existence de 10^{-3}, sera présent dix fois entre chaque défaut ξ_c pour aider la propagation de la striction. Il en est de même pour un nombre croissant de défauts plus faibles.

En répétant ce calcul pour différentes valeurs de la déformation ε_1 on obtient, pour une configuration initiale donnée caractérisée par $\nu_o = \frac{e_o}{r_o}$, la courbe d'évolution du défaut critique avec la déformation.

La figure B2/39 présente l'évolution de la fonction endommagement $(1-\xi_c)$ pour trois chemins de déformation, dans le cas d'un endommagement par décohésion. La traction uniaxiale (ρ=-0.5) ne développe qu'une

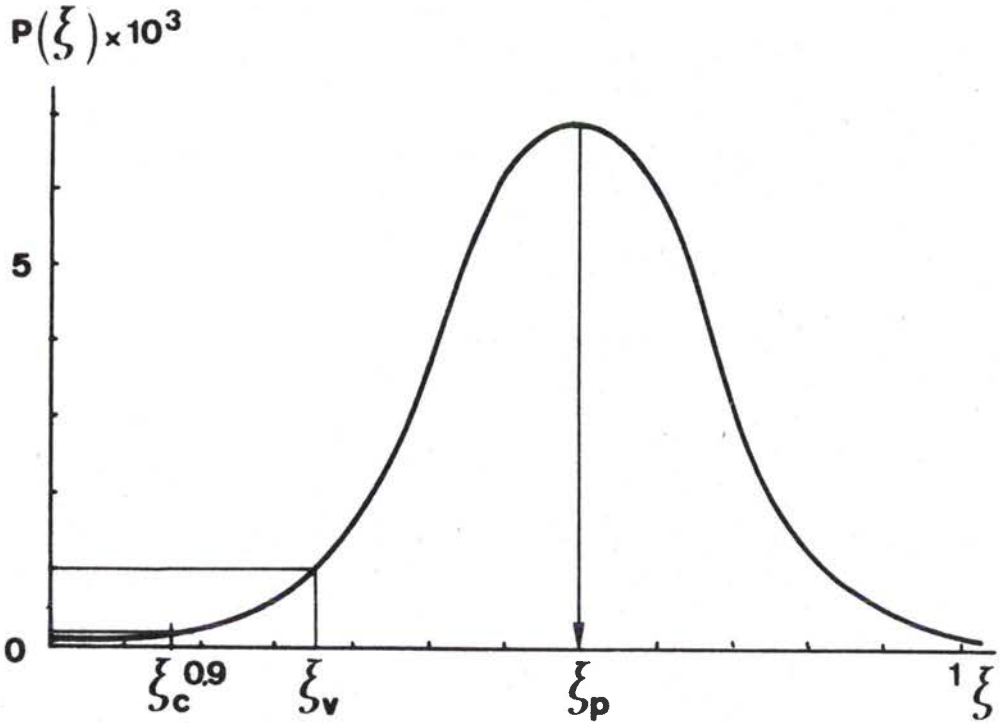


fig.B2/38 Courbe de probabilité d'existence d'un défaut donné ξ : - ξ_p défaut le plus probable
- ξ_c défaut critique de probabilité 10^{-4}
- ξ_v défaut de probabilité 10^{-3}

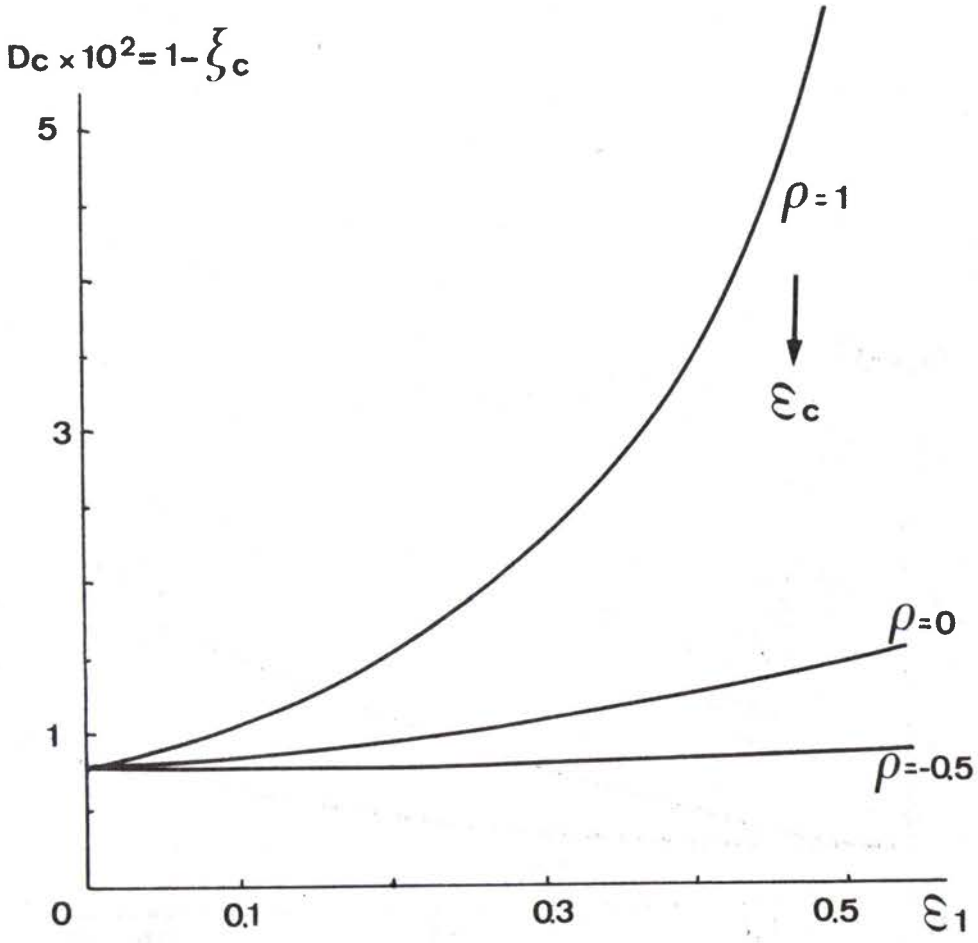


fig.B2/39 Evolution du défaut critique Dc pour différents chemins de déformation dans le cas de l'endommagement par décohésion.

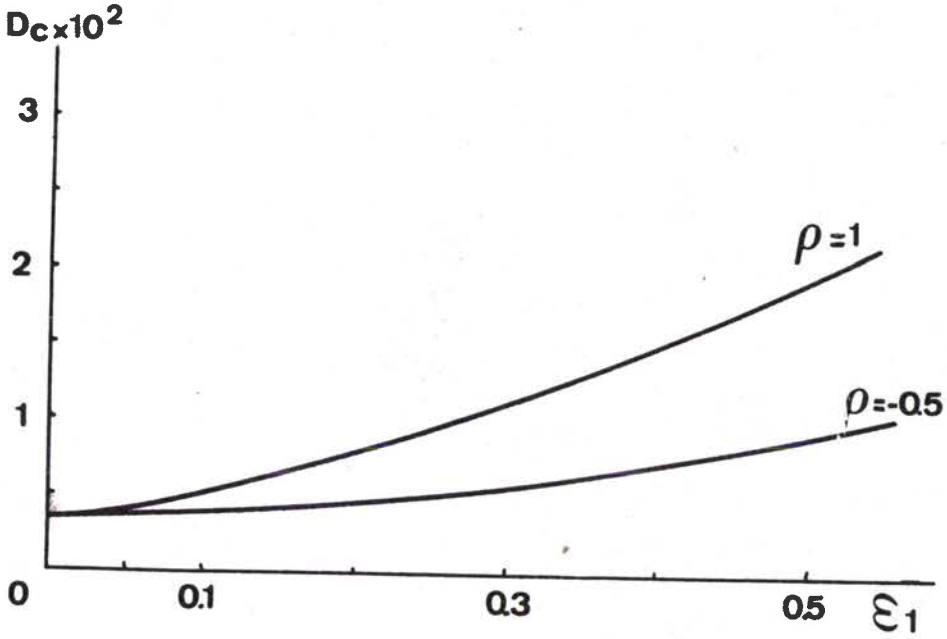


fig.B2/40 Evolution du défaut critique Dc pour différents chemins de déformation dans le cas de l'endommagement par fragmentation.

croissance très faible de l'endommagement, seule la valeur de l'endommagement initial est importante et le modèle proposé est donc très voisin de celui du défaut initial /5/. A l'inverse, l'expansion équibiaxiale développe une évolution très importante de l'endommagement devenant catastrophique pour une déformation ε_c.

La figure B2/40 présente l'évolution de la fonction endommagement pour le cas de la fragmentation. Les évolutions sont beaucoup plus douces que pour le cas de la décohésion et la différence entre les chemins de déformation est moins marquée.

La figure B2/41 présente l'influence de la configuration initiale sur la fonction endommagement dans le cas de la décohésion et pour un chemin de déformation biaxée symétrique. La valeur de l'endommagement est d'autant plus grande que le paramètre ν_o est plus petit. Ce résultat signifie qu'à épaisseur égale et à concentration volumique égale, peu de grosses cavités sont plus dangereuses que beaucoup de petites ; ou encore qu'à taille initiale donnée des cavités, les tôles minces développent plus d'endommagement que les tôles épaisses. Deux conséquences sont à tirer, il y a toujours intérêt à obtenir une précipitation la plus finement dispersée possible et deux tôles de même configuration métallurgique mais d'épaisseur différente auront une formabilité différente, la tôle la plus épaisse ayant une limite de formage la plus élevée, toutes choses égales par ailleurs.

L'évolution de la fonction endommagement est en général lissée par une fonction exponentielle pour obtenir une forme analytique qui sera ensuite introduite dans les calculs d'instabilité.

B.2.5 EFFET DE L'ENDOMMAGEMENT SUR LA RHEOLOGIE DU MATERIAU /*/

B.2.5.1 Modélisation /49*,50*/

Un calcul d'instabilité doit faire intervenir la rhéologie de la matrice dans laquelle l'endommagement s'est développé caractérisé par la fonction précédemment établie. Or, les cavités provoquant en par-

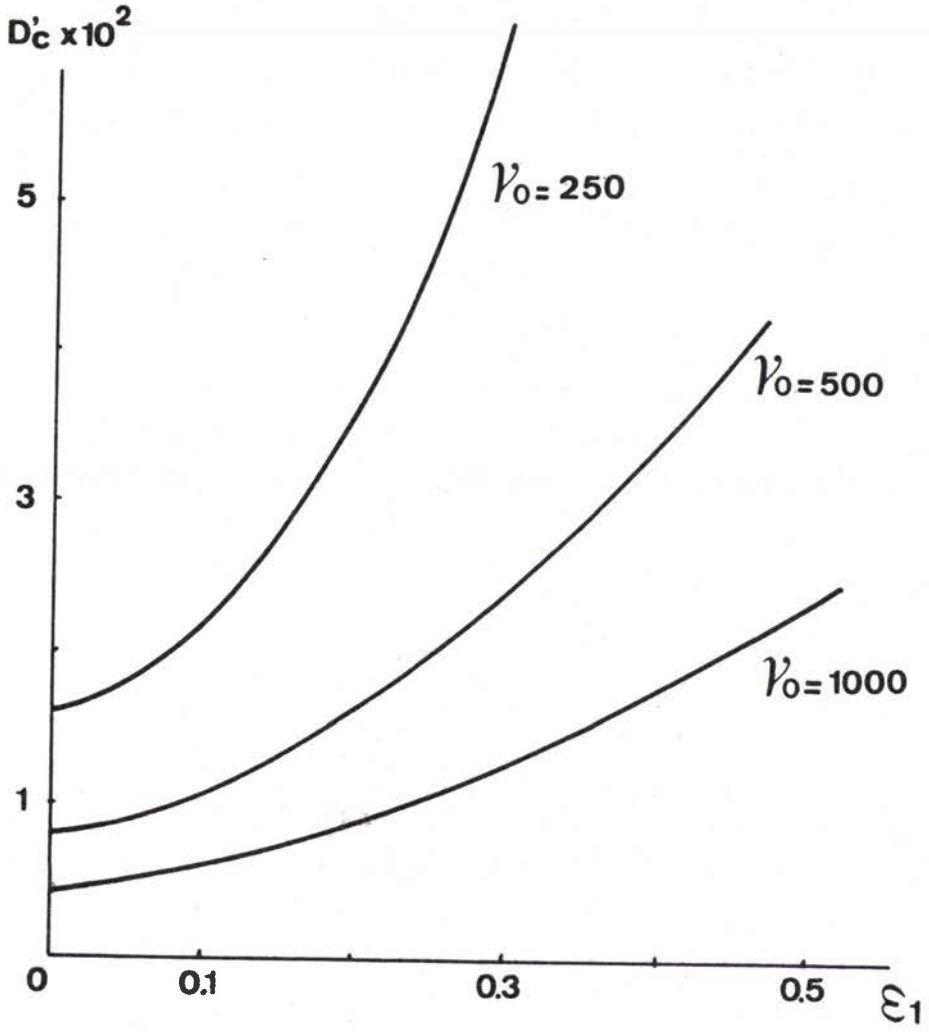


fig.B2/41 Evolution du défaut critique Dc pour différentes configurations initiales. ($\nu_o = l_o / r_o$)

culier un défaut de section, les contraintes calculées en effectuant rapport de la force par la section apparente de l'échantillon ne nt pas vraies. Il importe de calculer les contraintes dans la matrice r le rapport de la force par la section effectivement résistante de la tière. De même, les déformations apparentes de l'échantillon ne sont s celles réellement subies par la matrice, la différence étant due x cavités. A la différence du problème précédent de la détermination la fonction endommagement, ce problème est essentiellement volumique. s'agit donc de modèliser le volume du matériau contenant des cavités parties au hasard. Ce problème nécessiterait une analyse tridimen-nnelle de la répartition statistique, aussi avons-nous tourné la fficulté en nous plaçant dans une zone de plus forte concentration atistique en cavités mais en supposant les cavités régulièrement parties en un réseau à l'intérieur de cette zone. La répartition atistique dans le matériau est donc obtenue par variation du pas du seau pour chaque zone du matériau.

Le réseau choisi est un réseau octaédrique (fig.B2/42). Ce réseau, me holoèdre du cube, a l'avantage que des sections par trois plans rpendiculaires donnent la même distribution des cavités (fig.B2/43). suffit d'orienter convenablement le réseau pour que ces trois direc-ns orthogonales correspondent aux axes principaux des contraintes et formations dans les cas simples.

En isolant un cube élémentaire représentatif de l'ensemble (fig. /44) il est possible de définir les paramètres apparents et réels e référant à la matrice) du matériau.

Nous noterons l_i, l_j, l_k les dimensions du cube dans les direc-ns i, j, k et r_i, r_j, r_k les dimensions radiales des cavités dans s mêmes directions

La contrainte apparente moyenne est donnée par :

$$\sigma_i^{ap} = \frac{F_i}{l_j l_k}$$

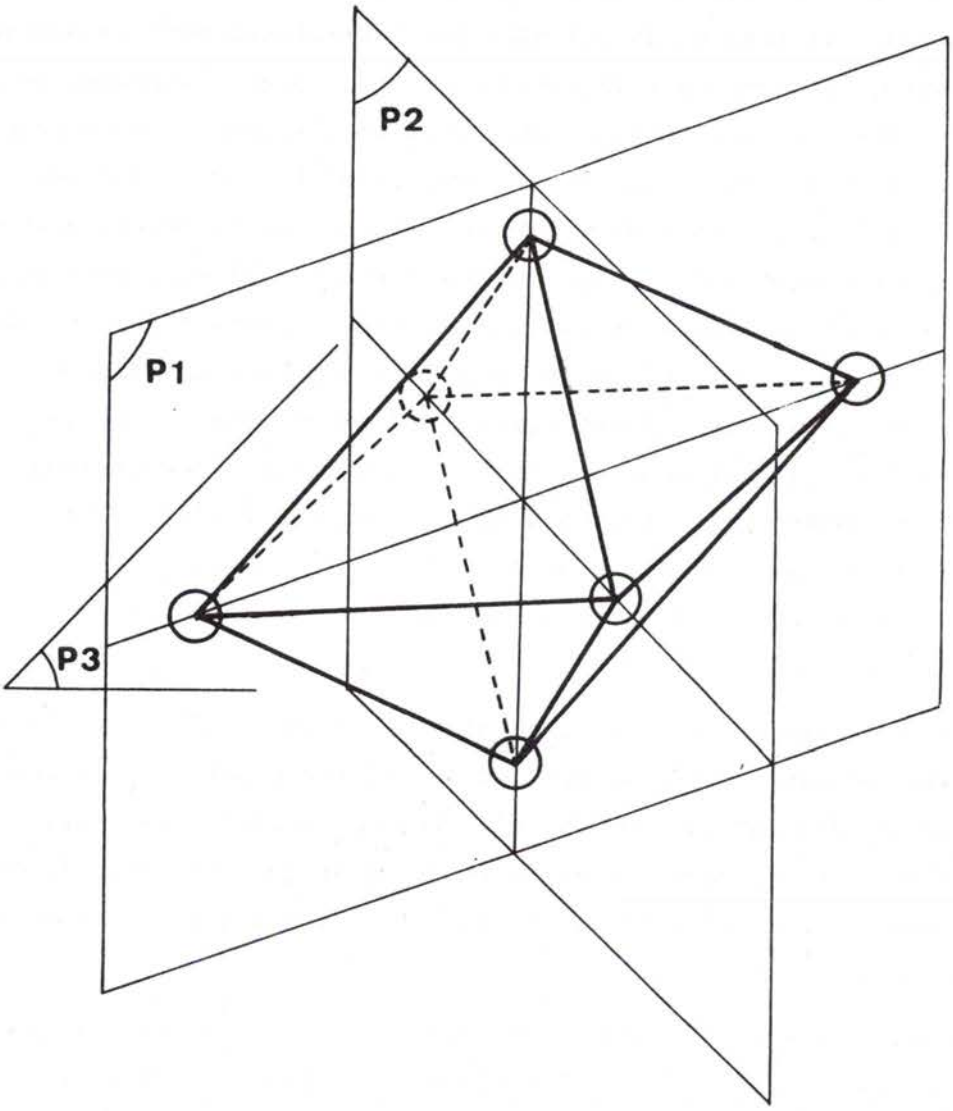


fig.B2/42 Modèle de répartition des cavités au sommet d'une maille octaédrique.

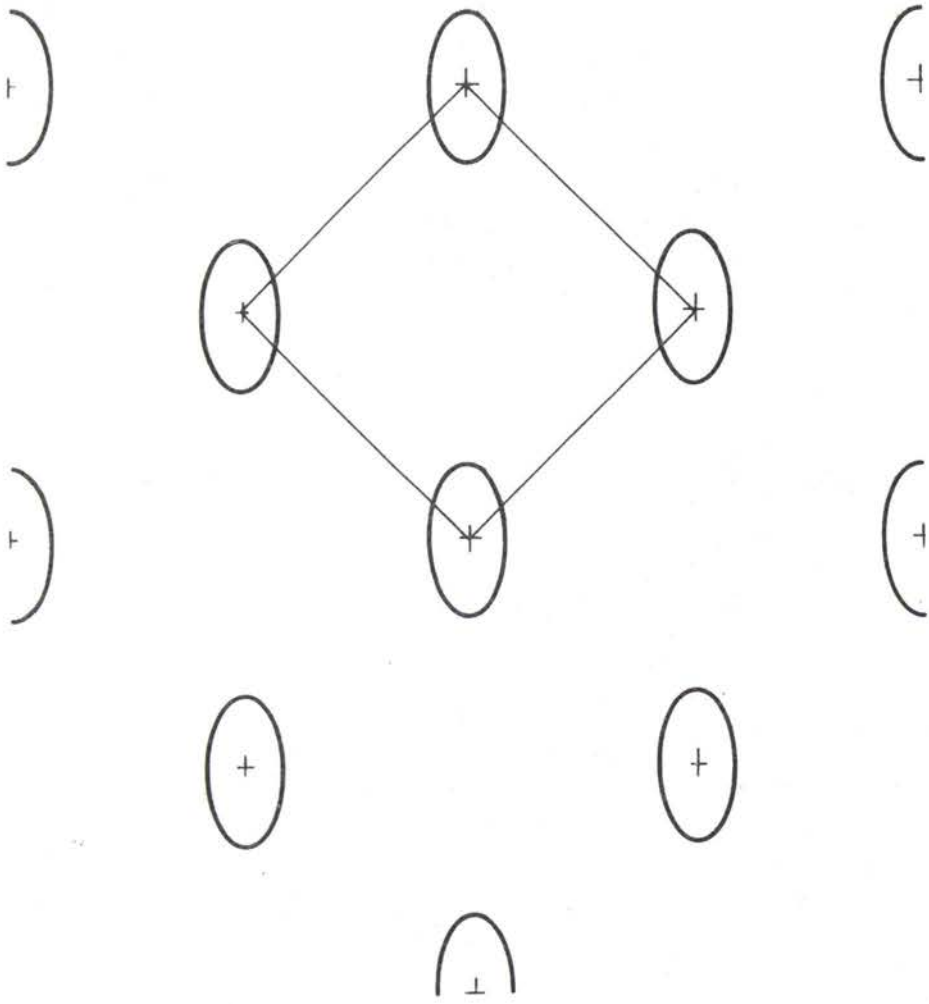


fig.B2/43 Section du matériau modèle.

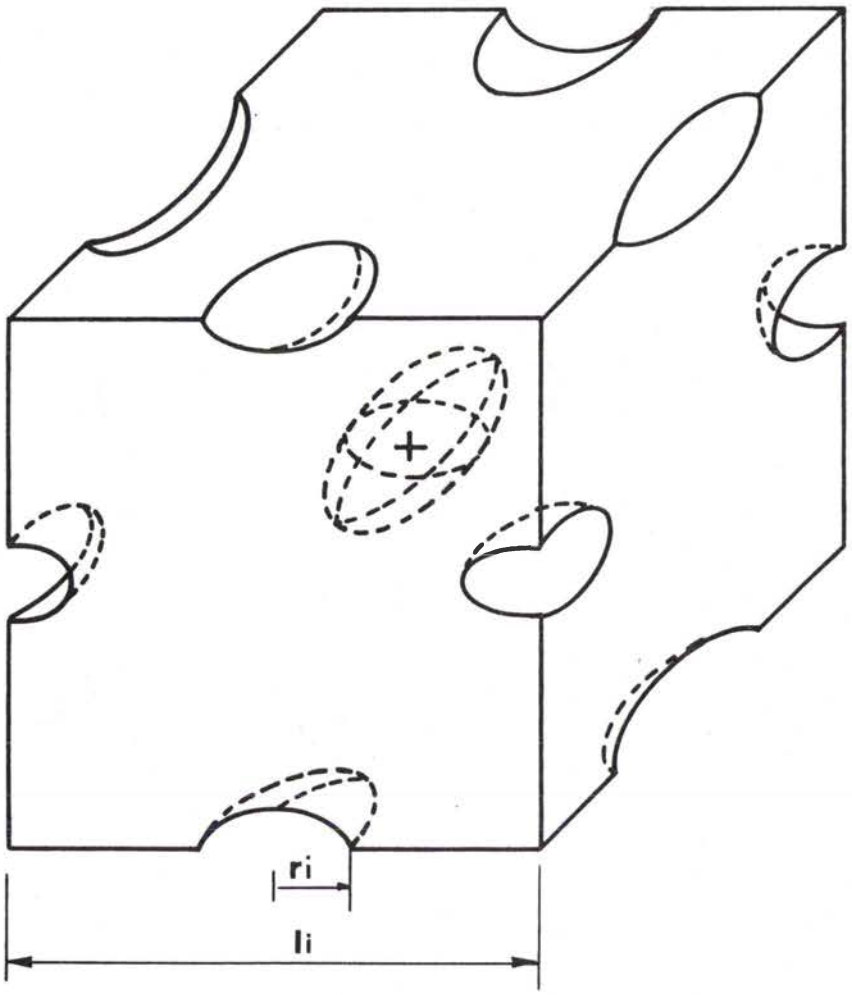


fig.B2/44 Volume élémentaire isolé.

a contrainte moyenne vraie de la matrice est donnée par :

$$\sigma_i^m = \frac{Fi}{l_j l_k - 2\pi r_j r_k}$$

où $$\frac{1}{\sigma_i^m} = \frac{1}{\sigma_i^{ap}} - \frac{2\pi r_j r_k}{F_i}$$

ı encore : $$\frac{1}{\sigma_i^m} = \frac{1}{\sigma_i^{ap}}\left[1 - \frac{2\pi r_j r_k}{l_j l_k}\right]$$

e qui donne la relation :

$$\sigma_i^m = \sigma_i^{ap}\left[\frac{1}{1-2\pi\frac{r_j r_k}{l_j l_k}}\right]$$

ous pouvons écrire :

$$l_i = l_o \exp \varepsilon_i^{ap}$$

t $$r_i = r_o \exp \varepsilon_i^{v}$$

vec $$\varepsilon_i^{v} = B_i \varepsilon_1$$

. La déformation ε_1 de la loi de croissance devrait être la déformation de la matrice mais nous ferons l'hypothèse, que pour la loi de roissance, elle est peu différente de la déformation apparente ce qui implifie considérablement les développements analytiques.

$$\sigma_i^m = \sigma_i^{ap}\left[\frac{1}{1-D_i}\right]$$

vec $$D_i = 2\pi\frac{r_o^2}{l_o^2}\,\mathrm{Exp}\left[(B_j + B_k - a_j - a_k)\varepsilon_1\right]$$

ù $$\varepsilon_i = a_i \varepsilon_1$$

Les déformations de la matrice sont définies à partir de l'évolution de la section normale à l'axe de mesure de la déformation. Cette méthode a l'avantage de faire apparaître la déformation moyenne normalement à la section, directement reliée à la contrainte moyenne sur la section qui vient d'être calculée .

$$\varepsilon_i^m = \ln \frac{l_o^2 - 2\pi r_o^2}{l_j l_k - 2\pi r_j r_k}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\varepsilon_i^m = \ln \left[\frac{l_o^2}{l_j l_k} \left[\frac{1-2\pi \frac{r_o^2}{l_o^2}}{1-2\pi \frac{r_j r_k}{l_j l_k}} \right] \right]$$

en remarquant que :

$$\varepsilon_i^{ap} = \ln \frac{l_i}{l_o}$$

l'expression devient :

$$\varepsilon_i^m = -\varepsilon_j^{ap} - \varepsilon_k^{ap} + \ln \left[\frac{1-D_o}{1-D_i} \right]$$

avec la même définition que précédemment pour D_i.
Ou encore, en appliquant la conservation du volume le matrice :
$\sum_i \varepsilon_i^m = 0$

$$\varepsilon_i^m = \varepsilon_i^{ap} - \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(1-D_o)(1-D_i)}{(1-D_j)(1-D_k)} \right]$$

Les relations entre les contraintes et déformations vraies de la matrice et les contraintes et déformations apparentes du matériau s'écrivent donc complètement sous la forme :

$$\sigma_i^m = \frac{\sigma_i^{ap}}{1-D_i}$$

$$\varepsilon_i^m = \varepsilon_i^{ap} - \frac{1}{2} \ln\left[\frac{(1-D_o)(1-D_i)}{(1-D_j)(1-D_k)}\right] \qquad \text{et} \quad \sum_i \varepsilon_i^m = 0$$

où $$D_o = 2\pi\frac{r_o^2}{l_o^2} = 2\pi\left(\frac{3}{16\pi}\right)^{2/3} C_{v_o}'^{2/3} = 0.960\ C_{v_o}'^{2/3}$$

et $$D_i = D_o \exp(C_i \varepsilon_1)$$

$$C_i = B_j + B_k - a_j - a_k$$

$$a_j = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_1}$$

Les coefficients c_i prennent les valeurs suivantes dans les deux cas d'endommagement :

décohésion	fragmentation
$C_1 = (2.28-c)+1.28\rho$	$C_1 = 1$
$C_2 = 1.28+(2.28-c)\rho$	$C_2 = \zeta+\rho$
$C_3 = (1.28+c-1)(1+\rho)$	$C_3 = \zeta-(1+\rho)$

La condition de conservation du volume appliqué à la matrice s'écrit :

$$\sum_i \varepsilon_i^m = 0$$

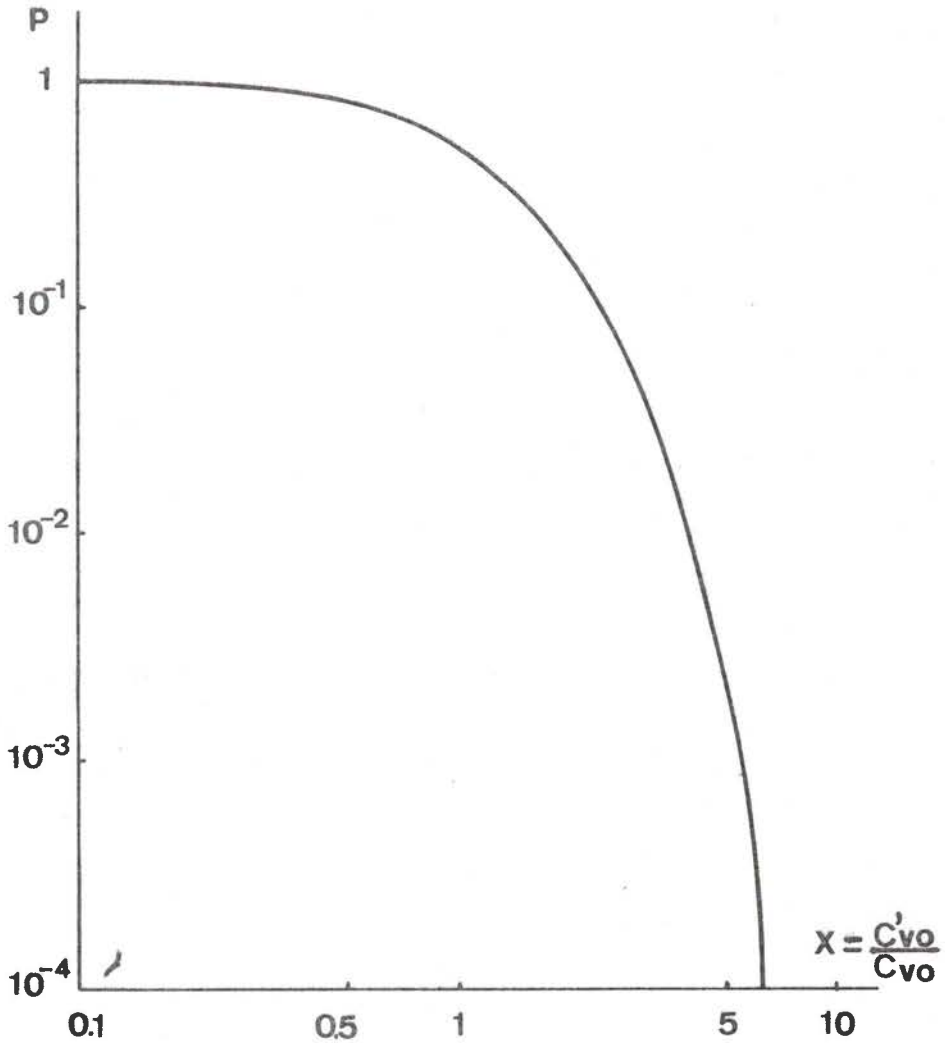


fig.B2/45 Evolution de la probabilité d'existence d'une zone de concentration supérieure ou égale à $x.C_{v_o}$ dans un matériau de concentration moyenne C_{v_o} [5][7].

ce qui revient à écrire :

$$\sum_i \varepsilon_i^{ap} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{(1-D_o)^3}{\prod_i (1-D_i)} \right] \quad \text{avec} \quad \prod_i (1-D_i) = (1-D_1)(1-D_2)(1-D_3)$$

ou encore

$$\frac{V}{V_o} = \left[\frac{(1-D_o)^3}{\prod_i (1-D_i)} \right]^{1/2}$$

soit

$$+ \frac{\Delta V}{V} = - \frac{\Delta d}{d_o} = 1 - \left[\frac{\prod_i (1-D_i)}{(1-D_o)^3} \right]^{1/2}$$

Ce terme de variation de densité dans la zone de plus forte concentration en cavités peut atteindre des valeurs très élevées, théoriquement voisines de 1. Ce point n'est pas du tout en désaccord avec l'expérience où il a été montré à la figure B2/13 du paragraphe B.2.2.2 que les variations de densité dans les zones de plus forte déformation peuvent atteindre des valeurs considérables variant de 0.2 à 0.8 à la rupture dans le cas d'un endommagement par décohésion.

La valeur de la concentration en cavités C'_{v_o} dans cette zone peut être approchée par une analyse statistique cherchant à prévoir la probabilité d'existence d'une zone à concentration xC_{v_o} dans un matériau de concentration moyenne C_{v_o}. Une telle étude a déjà été menée /16/ et la figure B2/45 présente le résultat obtenu. Pour une probabilité de 10^{-4} retenue pour la zone la plus déformée, le facteur multiplicatif de la concentration est trouvé voisin de 7. Nous prendrons donc comme valeur pour la concentration volumique dans la zone la plus déformée :

$$C'_{v_o} = 7 C_{v_o}$$

La forme obtenue pour les équations générales est à rapprocher de celle utilisée dans une approche mécanique de l'endommagement /51-54/ où l'action de celui-ci est entièrement portée sur la contrainte sous la forme :

$$\tilde{\sigma}_i = \frac{\sigma_i^{ap}}{1-D'_i} \qquad \tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_i^{ap}$$

où $\tilde{\sigma}_i$ est la contrainte vraie dans le matériau. Une approche physique telle que celle que nous avons proposée ne peut pas admettre l'égalité des déformations. Les facteurs endommagement affectant la contrainte ne sont donc pas tout à fait équivalents dans les deux modèles. Dans le cas d'une relation contrainte-déformation du type : $\sigma=K\varepsilon^n$ de la matrice sollicitée en traction simple on obtient :

$$\frac{\sigma_i^{ap}}{1-D'} = K\varepsilon_i^{ap^n}$$

où

$$\frac{\sigma_i^{ap}}{1-D} = K\left[\varepsilon_i^{ap} - \frac{1}{2}\ln\frac{1-D_o}{1-D}\right]^n \quad \text{si } D = D_1=D_2=D_3$$

la relation entre les deux paramètres d'endommagement devient :

$$(1-D') = (1-D)\left[1-\frac{1}{2}\frac{\ln\frac{1-D_o}{1-D}}{\varepsilon_i^{ap}}\right]^n$$

ou

$$(1-D') = m(1-D)$$

le coefficient m étant toujours inférieur à 1.

L'inégalité suivante est donc toujours vérifiée :

$$D < D'$$

Les valeurs obtenues pour les variables d'endommagement physique D restent inférieures ou voisines de 0.1 pour la plupart des cas en traction uniaxiale. Les valeurs obtenues pour la variable d'endommagement mécanique D' pour ce type d'essai sont plus importantes de l'ordre de 0.4 à 0.8. Cette différence peut provenir du fait que la variable d'endommagement mécanique est identifiée sur des mesures de l'évolution du module d'Young sensibles aux variations de textures et surtout à la répartition des contraintes alors que le modèle physique ne prend en compte qu'une valeur moyenne de la contrainte.

B.2.5.2 Résultats

La loi de comportement connue est en général la loi apparente sous la forme :

$$\sigma_e^{ap} = f(\varepsilon_e^{ap})$$

caractérisée par un coefficient d'écrouissage :

$$N_{ap} = \frac{\partial ln \sigma_e^{ap}}{\partial ln \varepsilon_e^{ap}}$$

La loi de comportement de la matrice est caractérisée par le même type de coefficient d'écrouissage :

$$N_m = \frac{\partial ln \sigma_e^{m}}{\partial ln \varepsilon_e^{m}}$$

Les fonctions de passage entre les contraintes et déformations apparentes et celles de la matrice précédemment établies, permettent de passer numériquement du coefficient d'écrouissage apparent à celui de la matrice. Durant ce calcul il est nécessaire de vérifier la conservation du volume de la matrice :

$$d\varepsilon_1^{m} + d\varepsilon_2^{m} + d\varepsilon_3^{m} = 0$$

Les déformations et chemin de déformation sont donc imposés dans la matrice, le matériau répondant avec des déformations et un chemin de déformation apparent.

Les figures B2/46a et b montrent l'évolution du chemin de déformation apparent caractérisé par $\rho = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ et $\omega = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}$ lorsqu'un chargement proportionnel est imposé à la matrice pour le cas d'un endommagement par décohésion. Dans le cas de l'endommagement par fragmentation (fig. B2/47a et b) la divergence est plus importante.

Les figures B2/48 et B2/49 présentent l'évolution du coefficient d'écrouissage apparent lorsque la matrice présente un exposant d'écrou-

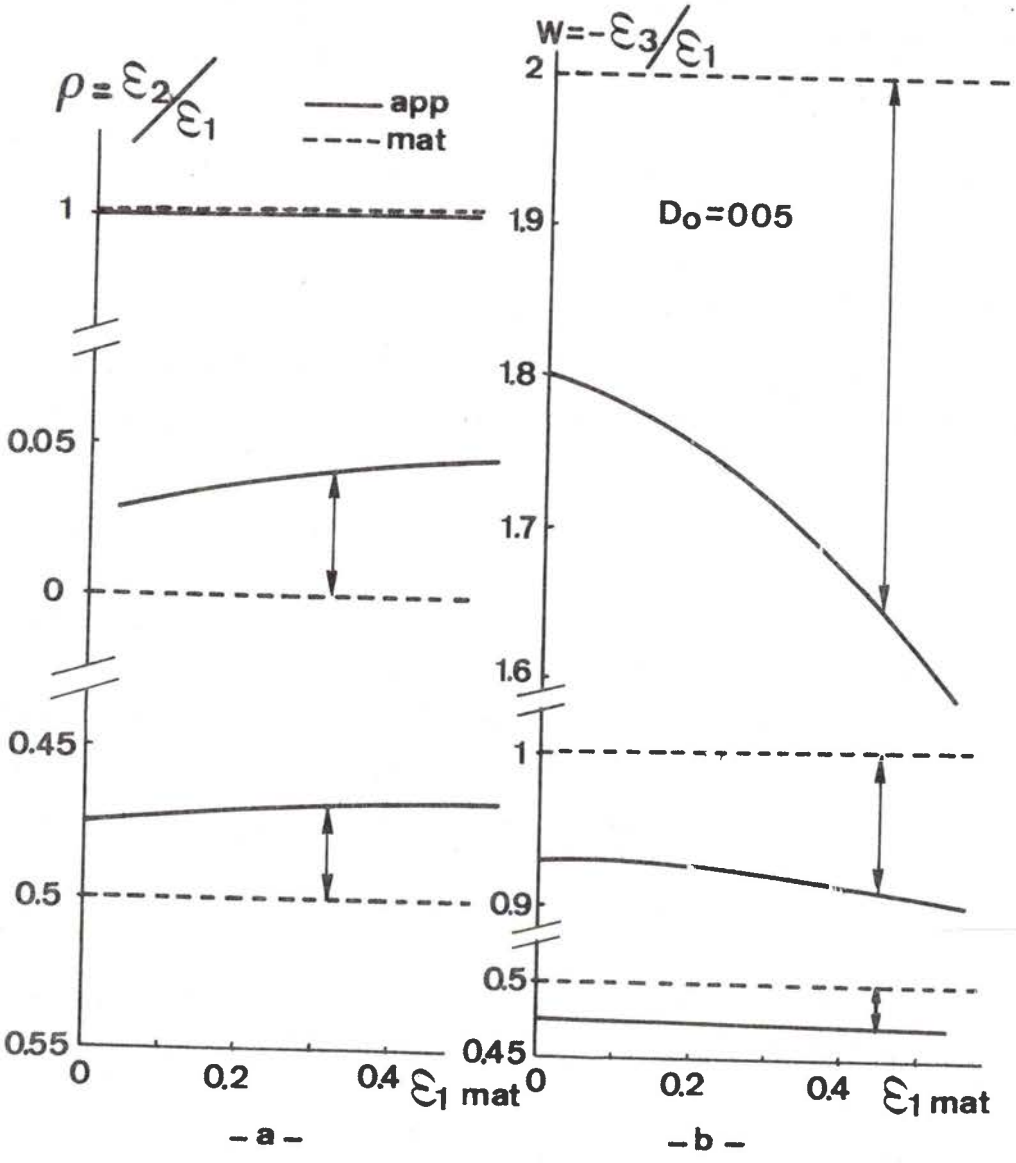


fig.B2/46 Evolution du chemin de déformation apparent pour différentes chemins de déformations imposés dans la matrice. Endommagement par décohésion.

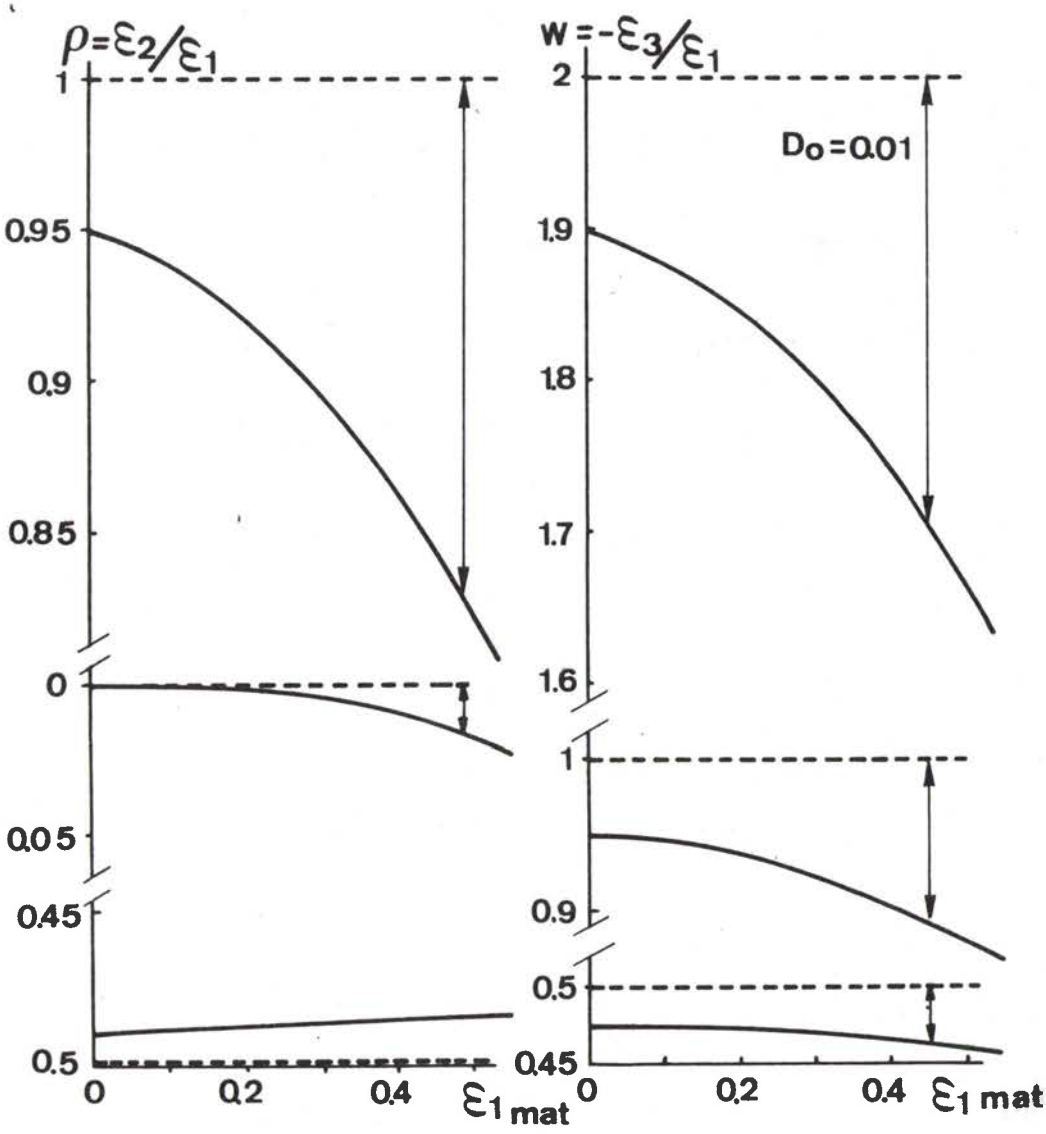


fig.B2/47 Evolution du chemin de déformation apparent pour différents chemins de déformations imposés dans la matrice. Endommagement par fragmentation.

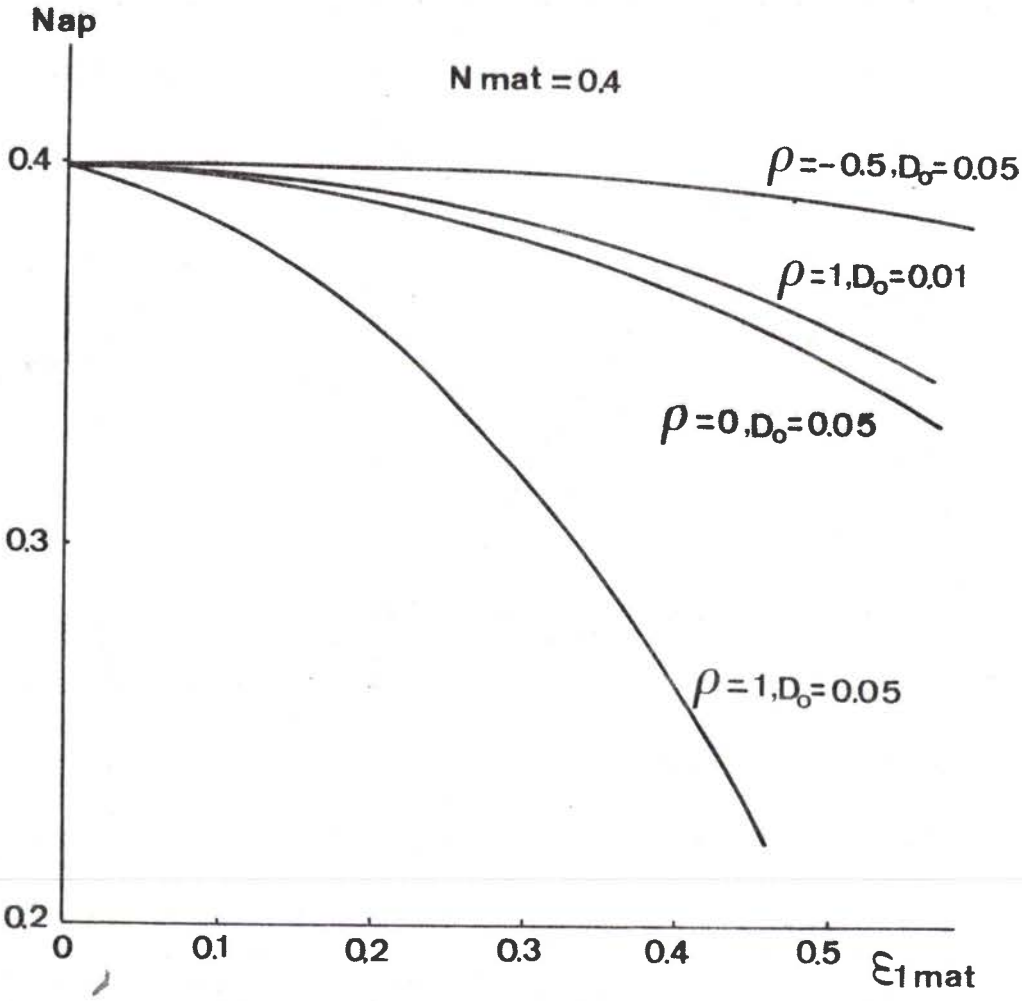


fig.B2/48 Evolution du coefficient d'écrouissage apparent pour différents chemins de déformations imposés à une matrice de coefficient d'écrouissage constant : n_m=0.4. Endommagement par décohésion.

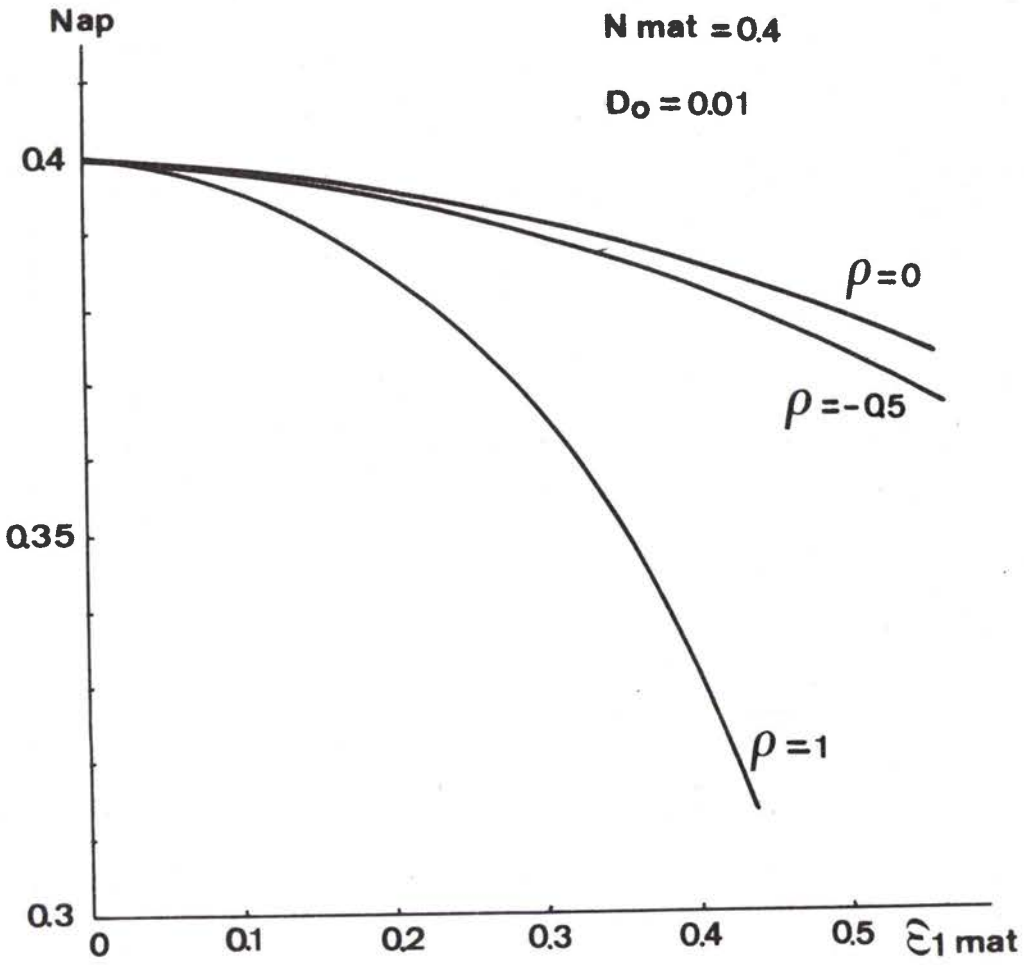


fig.B2/49 Evolution du coefficient d'écrouissage apparent pour différents chemins de déformations imposés à une matrice de coefficient d'écrouissage constant : n_m=0.4. Endommagement par fragmentation.

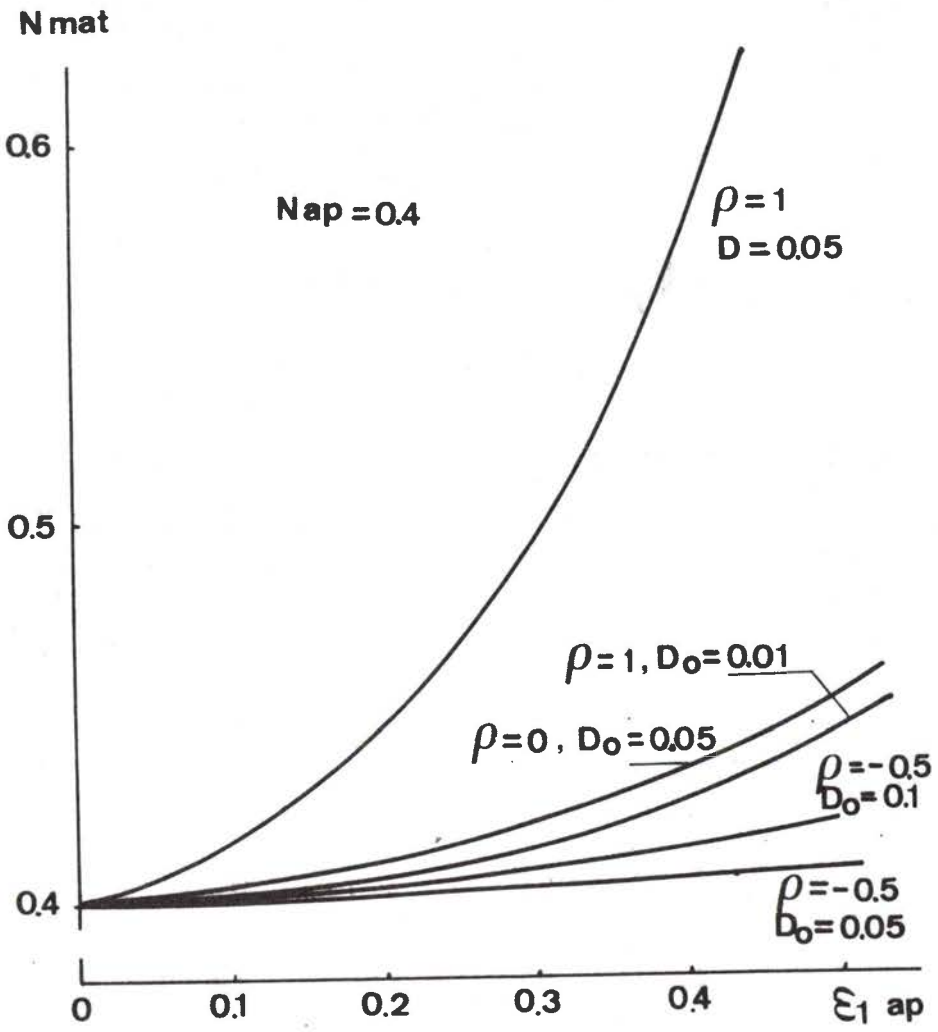


fig.B2/50 Evolution du coefficient d'écrouissage de la matrice pour différents chemins de déformations imposés à un matériau de coefficient d'écrouissage apparent constant. Endommagement par décohésion.

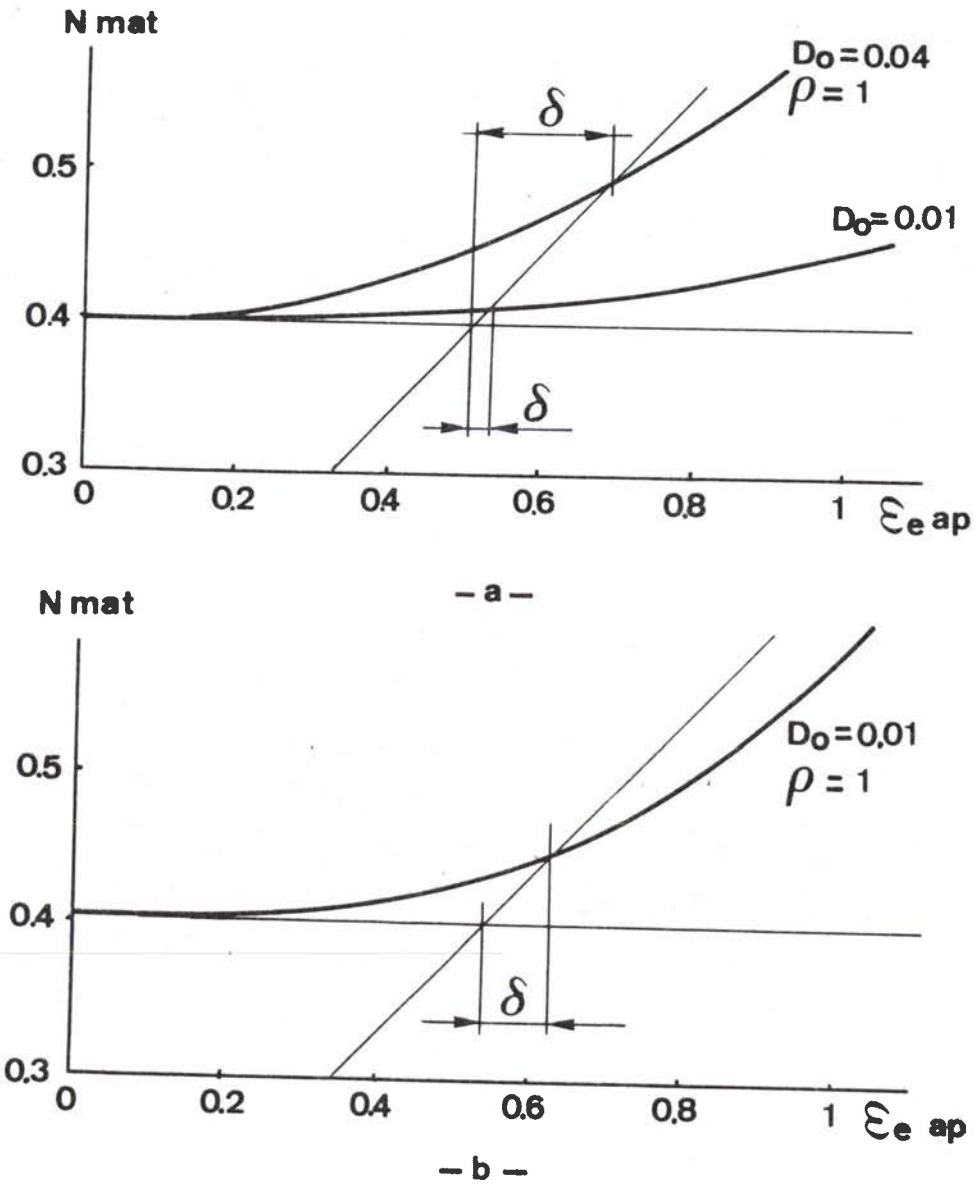


fig.B2/51 Influence de la correction de rhéologie sur le niveau de la CLFS :

a- endommagement par décohésion

b- endommagement par fragmentation.

issage constant. L'effet de l'endommagement dans le cas de la décohésion (fig. B2/48) est très important en déformation équibiaxée, insensible en traction uniaxiale pour une valeur courante de l'endommagement initial correspondant à $C_{V_o}=10^{-3}$. Dans le cas de l'endommagement par fragmentation (fig. B2/49) l'effet est du même ordre quel que soit le chemin de déformation imposé et reste relativement important.

Un calcul inverse, posant le coefficient d'écrouissage apparent constant montre un écrouissage qui augmente avec la déformation pour la matrice (fig. B2/50). Cette évolution est en accord qualitatif avec celle obtenue à partir d'une définition mécanique de l'endommagement /40/.

L'incidence de cette rhéologie sur les calculs d'instabilité est montrée à la figure B2/51a et b où sur les lignes correspondant à la localisation selon la théorie de déformation sont représentées. En déformation équibiaxée, l'écart δ avec le niveau de la CLFS déterminée avec la rhéologie de la matrice est très sensible. Cette représentation est très schématique car les lignes de localisation présentées sur la figure B2/51 correspondent au cas du matériau homogène. Il convient bien entendu de mener le calcul dans le cas d'un matériau hétérogène présentant un défaut d'endommagement et caractérisé par la rhéologie de la matrice.

REFERENCES CHAPITRE B2.

1- J.H. SCHMITT, J.M. JALINIER, B. BAUDELET, L. FELGERES, F. BOUTIN Rapport DGRST n°78-7.2710- Juin(1980)

2- W.J. PETCH - J. Iron Steel Inst. 173(1954)25

3- U.F. KOCKS - Scripta Met. 14(1980) 449

4- A. PARMAR, P.B. MELLOR, J. CHAKRABARTY - Int. J. Mech. Sci. 19(1977)389

5- Z. MARCINIAK - Cours présentés en 1973 à l'Université Mc Master, Hamilton - Ontario-Canada

6- B.J. CANE, G.W. GREENWOOD - Met. Sci. 9(1975)55

7- M.V. SPEICHT, W. BEERE - Met. Sci. 9(1975) 190

8- R.RAJ, M.F. ASHBY - Acta Met. 23(1975)653

9- D. HULL, D.E. RIMMER - Phil. Mag. 4(1959)673

10- M.F. ASHBY, G. GANDHI, D.M. TAPLIN - Acta Met. 27(1979)1565

11- S. TAKEUCHI, A.S. ARGON - J. Mat. Sci. 11(1976)1542

12- A.J. PERRY - J. Mat. Sci. 9(1974)1016

13- I. SERVI, N.J. GRANT - Trans. AIME 191(1951)909

14- J.D. ESHELBY - Proc. R. Soc. A241(1957)376

15- M.F. ASHBY - Phil. Mag. 14(1966)1157

16- A.S. ARGON, J. IM, R. SAFOGLU - Met. Trans. 6A(1975)825

17- A. MELANDER - Scand. J. Met. 8(1979)99

18- K. TANAKA, T. MORI, T. NAKAMURA - Phil. Mag.(1970)267

19- F.M. BEREMIN - Soumis pour publication à Met. Trans.

20- F.M. BEREMIN - Réunion du "Groupe de réflexion Endommagement"- Nantes-France-Oct(1980)

21- F. MOUSSY - Rapport interne IRSID n°PA1-3955FM/NG(1977)

22- C. SOUZA-NOBREGA, B. FIDELIS DA SILVA, G. FERRAN, J.M. JALINIER, B. BAUDELET - Mem. Sci. Rev. Met. 3(1980)293

23- J.M. JALINIER, R. ARGEMI, B. BAUDELET - J. Mat. Sci. 13(1978)1142

24- J.M. JALINIER, J.H. SCHMITT, R. ARGEMI, J.L. SALSMANN, B. BAUDELE Mem. Sci. Rev. Met. 3(1980)313

25- J.H. SCHMITT, J.M. JALINIER - Soumis pour publication à Acta Met.

26- J. DUFAILLY - Thèse de 3° cycle- Université de Paris VI-(1980)

27- J. LEMAITRE, J. DUFAILLY - 3ème Congrès Franc. de Mécanique- Grenoble(1977)

28- J.P. CORDEBOIS, J.M. JALINIER, J. DUFAILLY, P. LE NEVEZ - Rapport DGRST n°11636- Oct(1978)

29- J. LEMAITRE, J.P. CORDEBOIS, J.M. JALINIER - Rapport DGRST n°78-7.2704- Juin(1980)

30- J.P. CORDEBOIS - Communication privée - Oct(1980)

31- S. BLOUET, R. RAULT, M. ENTRINGER - Symposium Hydrogène- Metz-mars(1981)

32- D. WAGNER - réunion du "Groupe de réflexion Endommagement" Sophia-Antipolis- Oct(1979)

33- R.T. RATCLIFFE - Brit. J. Appl. Phys. 16(1965)1193

34- J.M. JALINIER - Thèse de Docteur-Ingénieur- Université de Metz - 17 mai(1978)

35- P.D. HOLMES - Thèse de Ph. D.-Université de Sheffield-Angleterre- Oct.(1973)

36- M. HERITIER - réunion du "Groupe de réflexion Endommagement"-Sophia-Antipolis- Oct(1979)

37- D. ROUBY, J. FALCE, P. FLEISHMANN - 3ème colloque "Méthodes d'Investigation dans les métaux"- St.Etienne- Déc(1980)

38- C. JANOT - Communication privée

39- J. DUFAILLY, J.M. JALINIER, J.H. SCHMITT, J. LEMAITRE, B. BAUDELET - J. Mat. Sci. 15(1980)3162

40- J. DUFAILLY - Thèse de 3° cycle- Université de Paris VI (1980)

41- J. GURLAND - Acta Met. 20(1972)735

42- J.H. SCHMITT, J.M. JALINIER; B. BAUDELET - J. Mat. Sci. 16(1981)95

43- F.A. McCLINTOCK - J. Appl. Mech. 35(1968)363

44- J.R. RICE, D.M. TRACEY - J. Mech. Phys. Solids 17(1969)201

45- A. NEEDLEMAN - J. Appl. Mech. 36(1972)1

46- G. LE ROY, J.D. EMBURY, G. EDWARD, M.F. ASHBY - Accepté pour publication dans Acta Met.(1981)

47- O. ASCEIRAD, D.V. WILSON - Xème congrès IDDRG-Porculiss Press-Londres-(1978)155

48- J.M. JALINIER, J.H. SCHMITT - Soumis pour publication à Acta Met.

49- J.M. JALINIER - Proc. 4ème I.C.P.E. - Tokyo-Japon- Août(1980)150

50- J.M. JALINIER - à publier dans les "Cahiers du Groupe Français de Rhéologie"

51- C.M. KATCHANOV - Izv. Akad. Nank. S.S.R. Otd. Tekh.Nank.8(1958)26

52- Y.N. RABOTNOV - Proc. XIIème Cong. Appl. Mech. Stanford(1968)

53- J. LEMAITRE, J.L. CHABOCHE - J. Mec. Appl. 3(1978)317

54- F. SIDOROFF - J. Mech. 3(1975)

B.3. CALCUL DES COURBES LIMITES DE FORMAGE A STRICTION [*7]

B.3.1 INTRODUCTION

Nous avons établi les schémas de calcul de la CLFS dans le cadre de deux théories de la plasticité pour un matériau présentant un défaut f. Dans notre calcul, ce défaut initial est remplacé par un défaut évolutif d'endommagement. A chaque instant, le défaut alors généré d'amplitude f va croître suivant deux phénomènes :

- l'aggravation du défaut dû à la localisation de l'écoulement : df_p,
- l'aggravation du défaut dû à la croissance de l'endommagement interne df_D.

A chaque instant f est défini par :

$$f = \frac{e_b}{e_a}$$

d'où :
$$\frac{df_p}{f} = \frac{de_b}{e_b} - \frac{de_a}{e_a}$$

soit :
$$df_p = f(d\varepsilon_{3b} - d\varepsilon_{3a})$$

ou encore par analogie aux calculs d'instabilité présentés :

$$df_p = f(Cd\varepsilon_{e_a} + d\varepsilon_{3_b})$$

avec C et $d\varepsilon_{3_b}$ donnés par les équations présentées au paragraphe A.2 :

$$C = \frac{\sqrt{3}(1+\rho)}{2(1+\rho+\rho^2)^{1/2}}$$

et
$$d\varepsilon_{3_b} = \left[-\frac{A}{H}\left[1 - B\left[\frac{d\bar{\varepsilon}_a}{d\bar{\varepsilon}_b}\right]^2\right]^{1/2} - D\,\frac{d\bar{\varepsilon}_a}{d\bar{\varepsilon}_b}\right] d\bar{\varepsilon}_a$$

avec $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $B = \frac{3(\sin^2\psi+\rho\cos^2\psi)^2}{4(1+\rho+\rho^2)}$

$$D = \frac{\sqrt{3}(\sin^2\psi+\rho\cos^2\psi)}{4(1+\rho+\rho^2)^{1/2}}$$

$$H = \left[1+\left[\frac{2(\rho-1)\sin\psi\cos\psi}{(\rho+2)\cos^2\psi+(2\rho+1)\sin^2\psi}\right]^2\right]^{1/2}$$

Le défaut d'endommagement, déterminé par la fonction endommagement, peut s'écrire sous la forme :

$$\xi = 1-D_o\exp(b.\varepsilon_{e_b})$$

A chaque instant, l'accroissement de ce défaut est donné par :

$$df_D = d\xi = -D_o b\exp(b\varepsilon_{e_b})$$

Un calcul d'instabilité peut donc être mené en reprenant les équations générales établies pour un matériau hérogène mais en incrémentant à chaque pas de calcul la valeur du défaut f d'une quantité df donnée par :

$$df = f(d\varepsilon_{3_b}+Cd\varepsilon_{e_a}) - D_o b\exp(b\varepsilon_{e_b})$$

La figure B3/1 résume la démarche de pensée. Le matériau présente un défaut d'endommagement symbolisé par une cavité (schéma 1). Du point de vue des calculs d'instabilité, ce défaut est strictement identique à un défaut de section de même amplitude situé à l'extérieur (cas 1"). Lorsque le matériau subit un incrément de déformation, deux phénomènes se produisent :

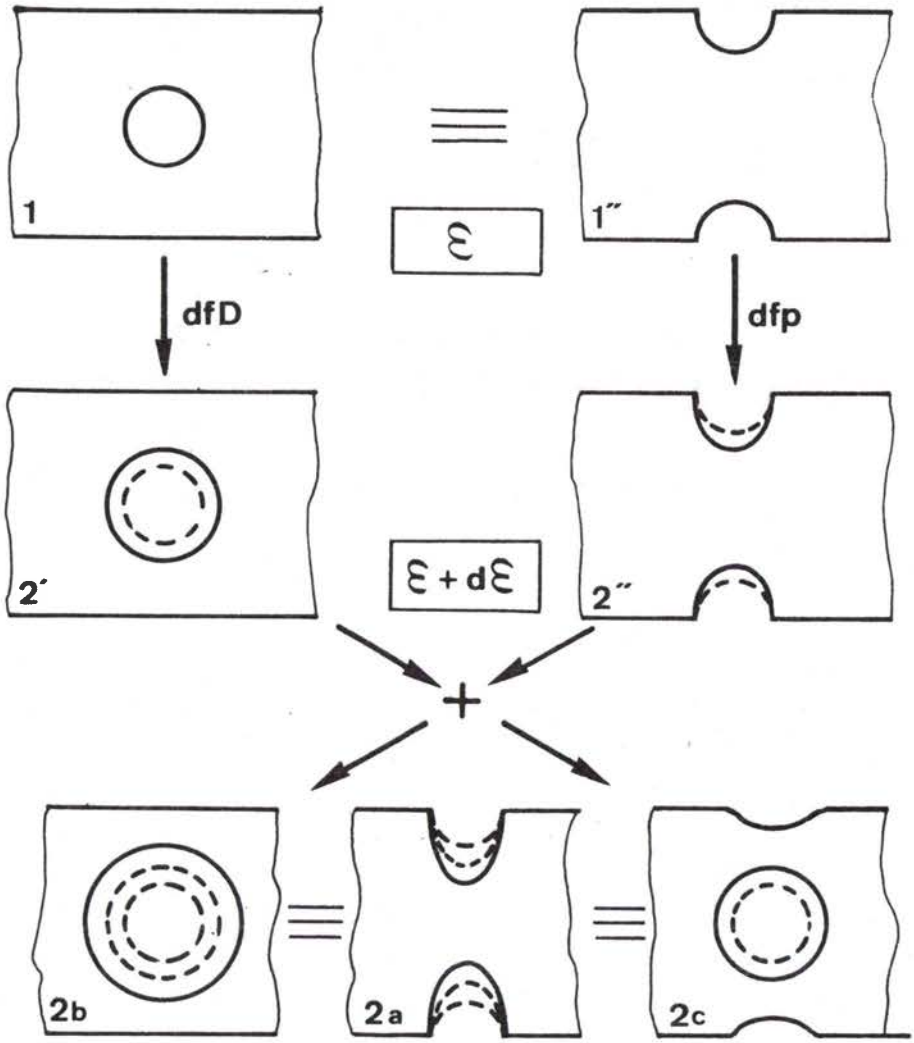


fig.B3/1 Modèle de traitement du défaut d'endommagement dans les calculs d'instabilité.

- d'une part le défaut géométrique existant (cas 1") croît à cause de l'hétérogénéité de la déformation plastique entre les zones a et b. C'est l'incrément de défaut df_p qui conduit à la configuration 2".

- d'autre part, l'augmentation de déformation dans la zone b endommagée entraîne un accroissement de la taille des cavités : df_D, qui conduit de la configuration 1 à la configuration 2'.

Le défaut résultant f est obtenu en effectuant la somme des deux incréments de défaut (df_p+df_D) et ce défaut total peut être soit porté entièrement sur l'extérieur de l'échantillon (cas 2a), soit entièrement de manière interne (cas 2b), soit en partageant les effets comme dans le cas réel (cas 2c). Ces trois configurations sont identiques du point de vue instabilité plastique. Il est à noter que la configuration 2b ou 2c où tout ou partie de l'aggravation du défaut est représenté de manière interne, conduit à une augmentation des pertes de densité supérieure à celle prévue par le modèle de Rice et Tracey, la différence est due à l'incrément df_p. Or l'incrément df_p étant relié à l'hétérogénéité des déformations, ce phénomène ne devient sensible qu'aux fortes localisations de l'écoulement, c'est-à-dire au voisinage de la striction. Il a été en effet observé au chapitre B.2 que dans cette zone, les variations relatives de densité mesurées sont supérieures à la croissance théorique prévue par le modèle d'endommagement.

Au cours du calcul, la fonction d'écrouissage de la matrice doit intervenir et ses variations sont prises en compte à chaque pas de calcul.

Tous les calculs ont été menés en négligeant la sensibilité à la vitesse de déformation ou en la prenant arbitrairement égale à m=0.01 qui est une valeur raisonnable pour les matériaux considérés à la température ambiante, les résultats sont présentés dans la suite pour l'acier et l'alliage léger étudiés dans tout ce travail.

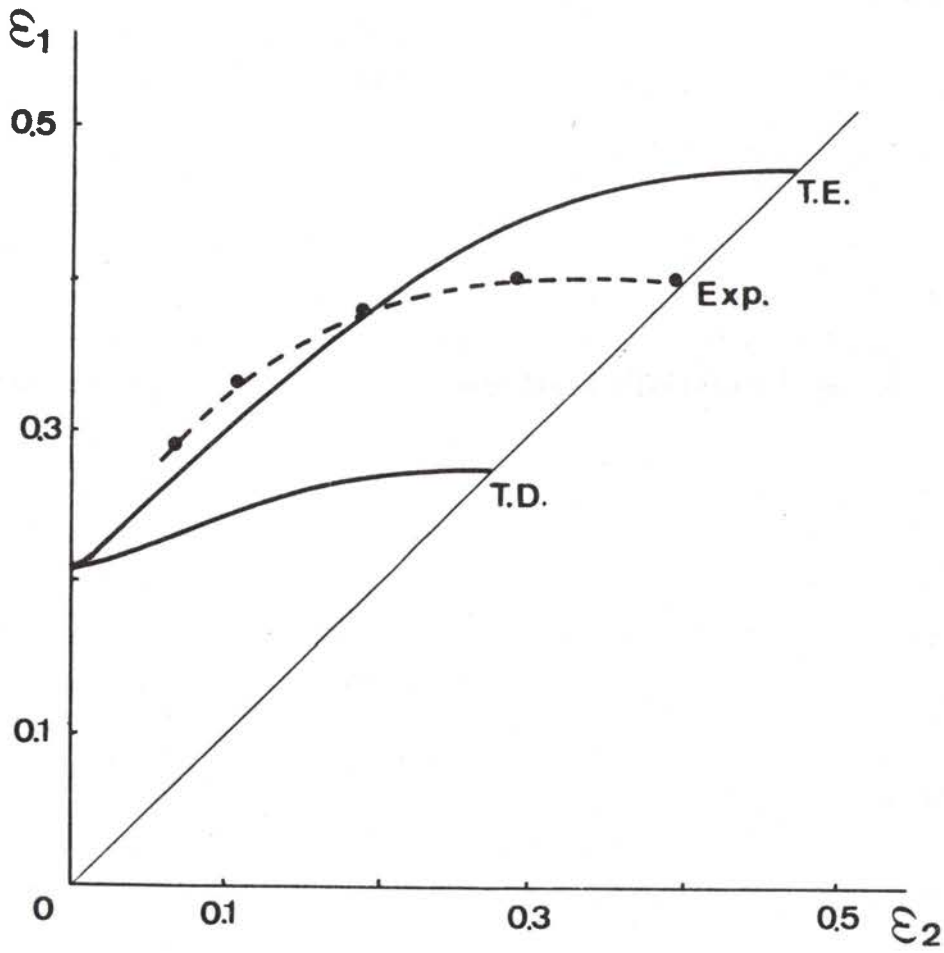


fig.B3/2 Comparaison des CLFS obtenues par les deux théories de la plasticité avec l'expérience (T.E. théorie de l'écoulement, T.D. théorie de la déformation). Cas d'un acier doux -endommagement par décohésion.

B.3.2 FORME ET POSITION DE LA CLFS

La CLFS est déterminée en tenant compte :

- des fonctions endommagement déterminées pour le cas de la décohésion (acier) et le cas de la fragmentation (3003),

- des corrections de rhéologie déterminées pour ces deux cas d'endommagement.

Les lissages des fonctions d'endommagement suivant plusieurs chemins de déformation pour identifier les constantes D_o et b de la loi de croissance du défaut ne sont pas développés.

La figure B3/2 présente les CLFS obtenues par le calcul suivant les deux théories de la plasticité ainsi que la CLFS expérimentale pour l'acier considéré. Il est tenu compte d'un écrouissage choisi en déformation plane égale à celui de la traction simple et variant linéairement avec le chemin de déformation jusqu'aux valeurs déterminées en déformation équibiaxée.

La CLFS prévue par la théorie de l'écoulement est plus haute que la CLFS expérimentale alors que celle prévue par la théorie de la déformation est plus basse. Il faut ici revenir sur la définition de la CLFS. En effet au chapitre A.1,(§A.1.1) il a été présenté plusieurs méthodes permettant de déterminer expérimentalement la CLFS. La figure B3/3 présente la forme type du profil des déformations ε_1 en fonction de la distance à la lèvre de rupture d'un embouti. La définition théorique de la limite de formage correspond au moment où la zone homogène a hors striction arrête de se déformer (point T). La définition expérimentale la plus avantageuse est donnée par le point E. La différence est évidente et il a été montré qu'une définition de la CLFS expérimentale par le point T (fig. B3/3) permettait un excellent accord avec la théorie /17/. Mais cette définition, satisfaisante sur le plan théorique, est beaucoup trop sévère en pratique. En effet la définition de la CLFS par le point E donne un niveau plus élevé de la limite de formage et conduit à une utilisation plus poussée des possi-

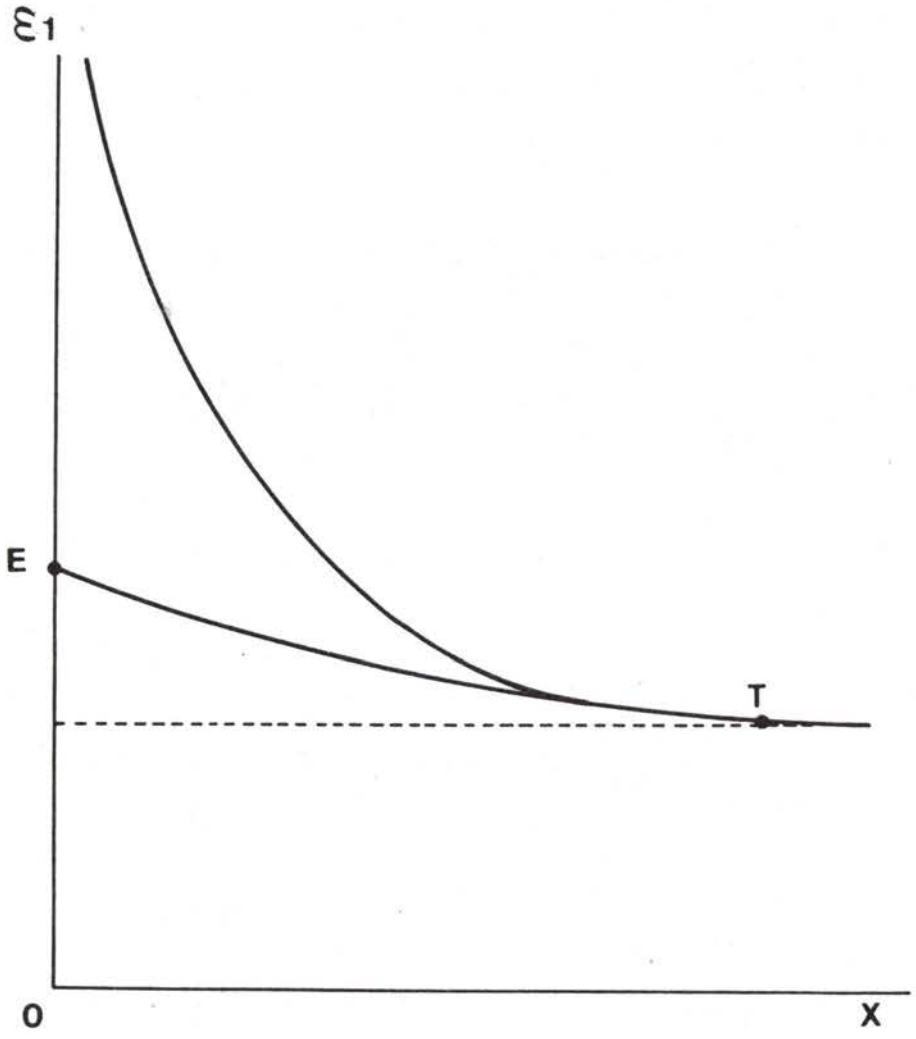


fig.B3/3 Définition de la limite de formage théorique (point T) et expérimentale (point E).

bilités de mise en forme du matériau tout en ne développant que des gradients de déformation limités et tout à fait acceptables. Industriellement c'est cette dernière définition qui est intéressante et la prédiction des possibilités de mise en forme d'une pièce doit absolument tenir compte de ce point. Il est donc nécessaire de pouvoir prédire théoriquement la répartition des déformations dans le matériau pour appliquer une définition de la limite de formage identique à celle de l'expérience industrielle. Ce problème est très compliqué et non résolu dans le cas général d'une déformation sous contraintes biaxiales. Des résultats ont été établis en traction uniaxiale /2*/ où le problème, alors unidimensionnel, se simplifie beaucoup. En l'absence de toute analyse et résultats théoriques nous considèrerons que la définition expérimentale de la CLFS par le point E conduit à augmenter la valeur théorique (point T) par un facteur multiplicatif constant.

L'application de cette condition (fig. B3/4) montre que la CLFS définie par la théorie de la déformation présente une forme et position en bon accord avec l'expérience alors que la théorie de l'écoulement conduit à des résultats trop élevés.

Les figures B3/5a et b présentent les résultats obtenus dans le cas de l'alliage léger 3003 avant (fig.B3/5a) et après correction (fig. B3/5b) de la définition de la limite de formage. L'accord entre la forme et la position de la CLFS expérimentale et théorique définie par la théorie de la déformation est très bon.

Dans le domaine du rétreint les calculs présentent moins d'intérêt car les prévisions théoriques se regroupent et sont toujours en assez bon accord avec l'expérience. Dans le cas de la traction uniaxiale, la prévision du niveau théorique de la CLFS dans le cas de l'alliage 3003 est présentée sur la figure B3/6. Le calcul a été mené en cherchant l'angle ψ_o d'inclinaison de la bande de défaut initiale qui conduit au minimum de la limite de formage. La figure B3/7 présente l'influence de l'orientation initiale ψ_o de la bande de défaut sur la limite de formage dans le cas de la fonction endommagement déterminée pour

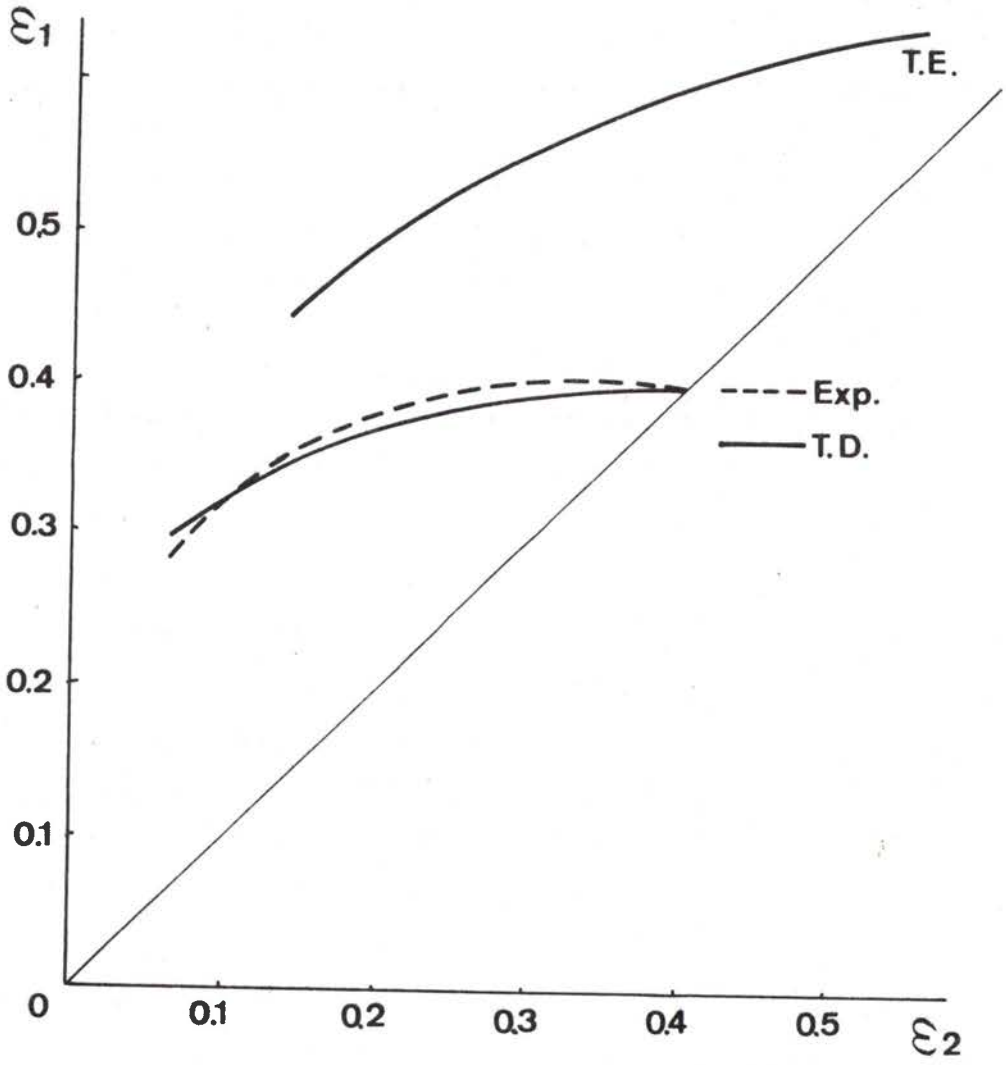


fig.B3/4 Comparaison entre les CLFS théorique et expérimentale après correction des effets de gradients de déformation dans le cas d'un acier doux - endommagement par décohésion.

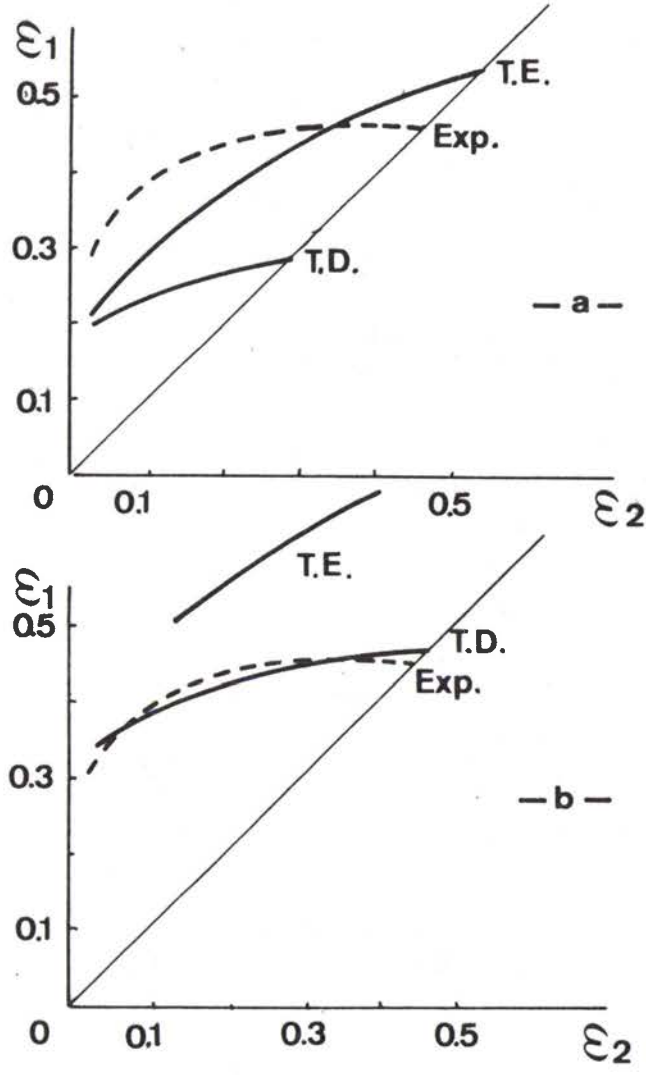


fig.B3/5 Comparaison entre les CLFS théorique et expérimentale pour un alliage d'aluminium 3003 :
a- avant correction des effets de gradient de déformation,
b- après correction
Endommagement par fragmentation.

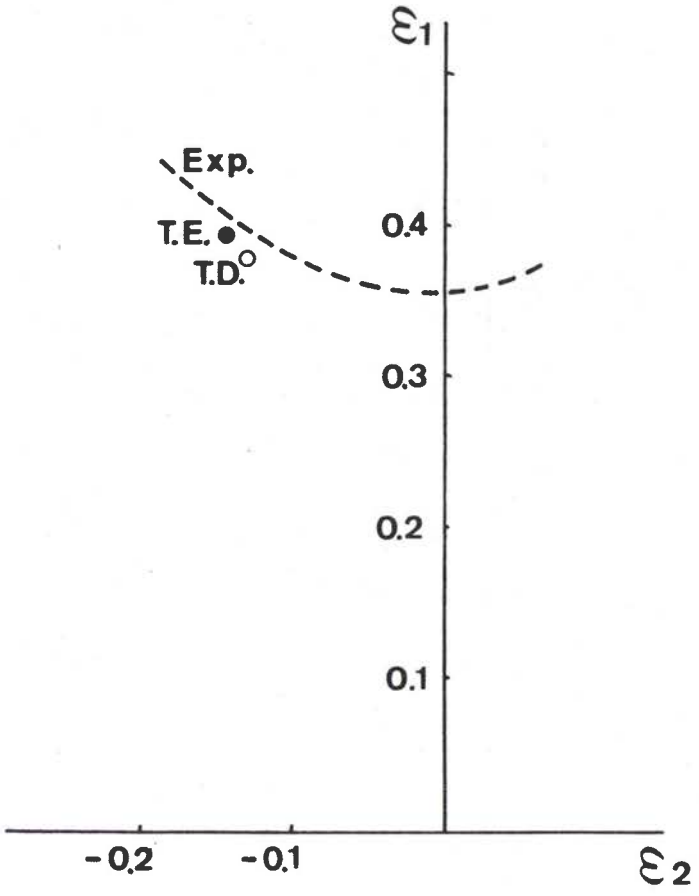


fig.B3/6 Points obtenus en traction uniaxiale dans le cas de l'alliage 3003.

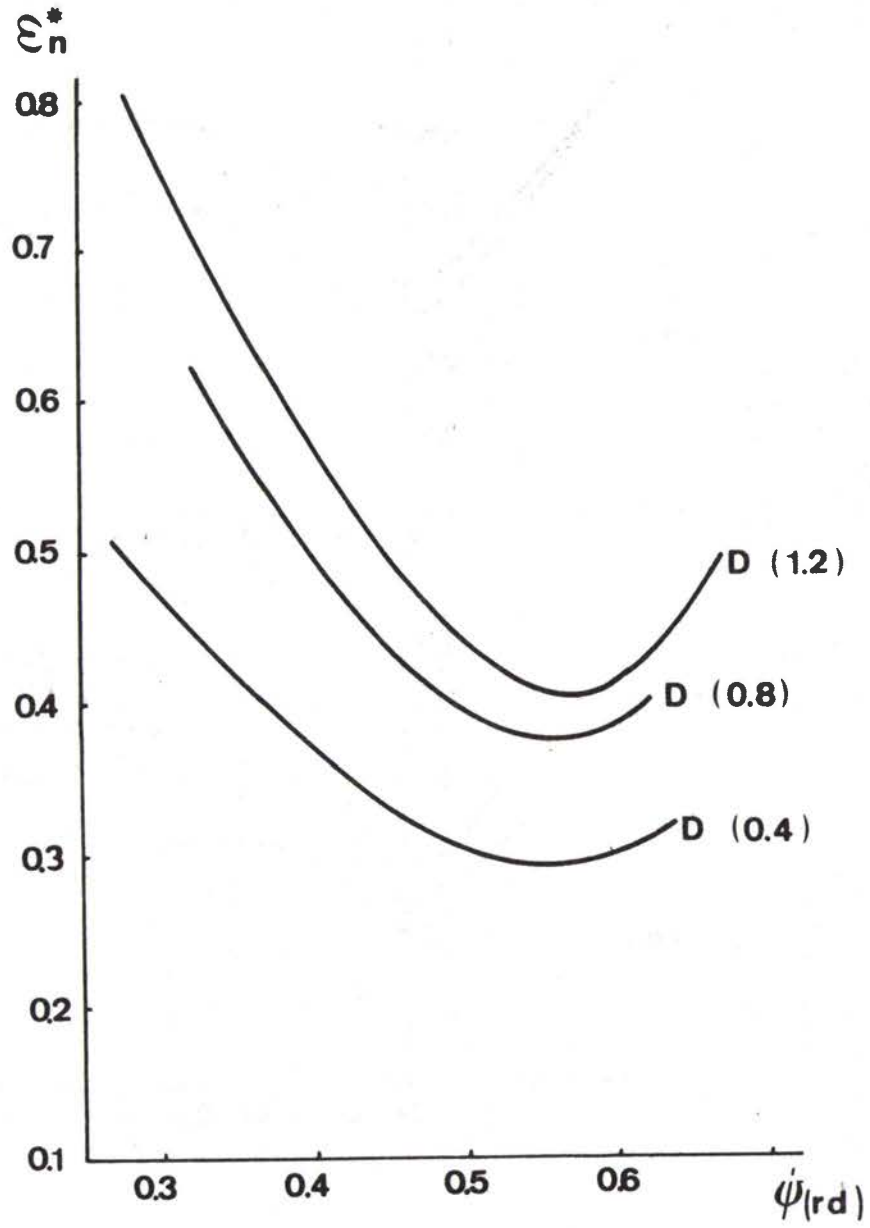


fig.B3/7 Influence de l'angle initial de localisation de l'écoulement sur le niveau de la CLFS dans le cas de l'endommagement par fragmentation pour trois fonctions endommagement correspondant à trois épaisseurs initiales du matériau : e_o = 1.2 , 0.8 et 0.4 mm.

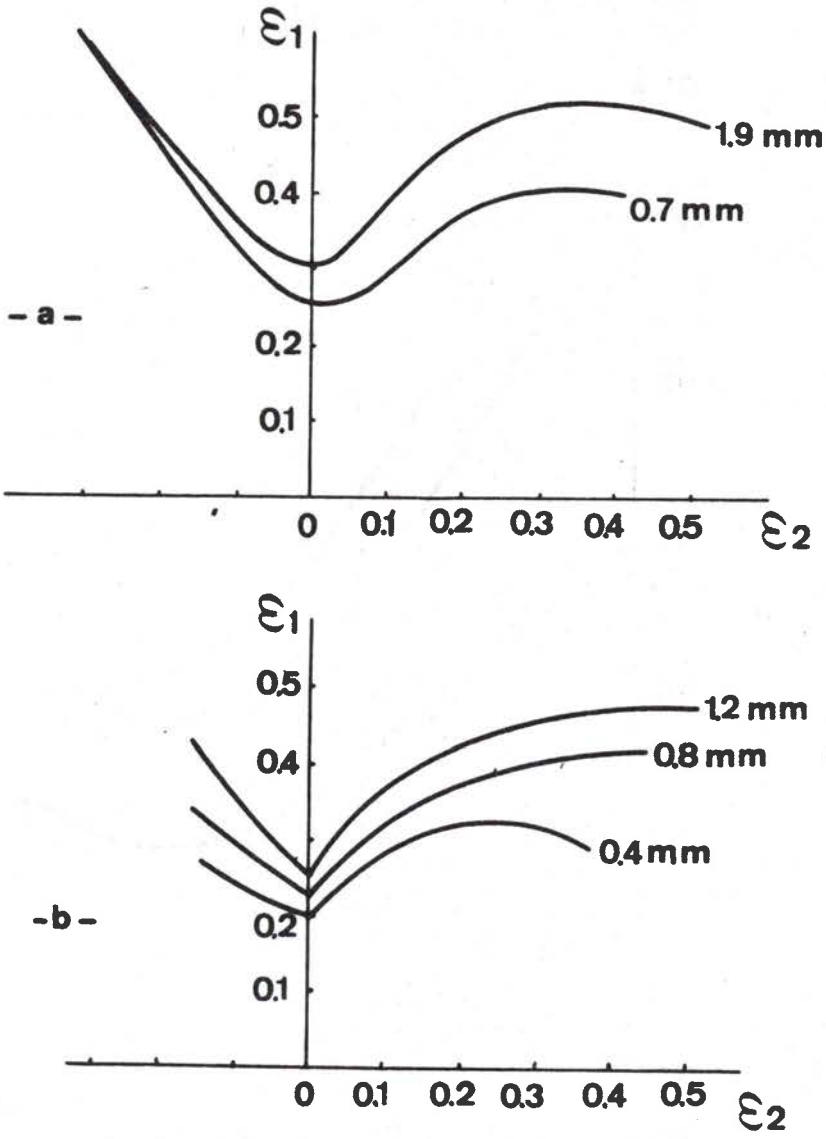


fig.B3/8 Effet expérimental de l'épaisseur sur le niveau de la CLFS dans le cas :
- d'un acier doux (a),
- de l'alliage 3003 (b).

l'alliage considéré. La figure B3/7 fait apparaître une influence de l'épaisseur initiale du matériau sur le niveau de la limite de formage, comme attendu, mais aussi une influence sur l'angle de localisation de l'écoulement.

B.3.3 EFFET DE L'EPAISSEUR SUR LA CLFS

Il a été présenté expérimentalement au chapitre A.1(§ A.1.3) que l'épaisseur du matériau a une influence sur le niveau de la CLFS. Cette influence se manifeste différemment dans le cas de l'acier étudié et dans le cas de l'alliage léger 3003 (fig. B3/8a et b).

Lors de la détermination de la fonction endommagement, il a été mis en évidence une influence de l'épaisseur de la tôle sur les valeurs de cette fonction par l'intermédiaire du coefficient $\nu_o = \frac{e_o}{r_o}$. Une détermination de la fonction endommagement correspondant à différentes épaisseurs initiales du matériau permet de déterminer théoriquement l'influence de l'épaisseur sur la CLFS. Les figures B3/9a et b présentent les résultats obtenus en portant la déformation dans l'épaisseur $-\varepsilon_3^* = +(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ caractéristique du niveau de la CLFS en fonction de l'épaisseur initiale de la tôle formée pour le cas d'un endommagement par décohésion (fig. B3/9a) et par fragmentation (fig. B3/9b). L'accord est dans les deux cas très bon. Ce résultat permet de proposer le type d'endommagement comme étant l'un des facteurs déterminant du type d'influence de l'épaisseur sur la CLFS.

L'approche par l'endommagement est actuellement l'une des seules permettant d'expliquer l'effet de l'épaisseur sur la CLFS et surtout de séparer les deux types d'effets observés.

B.3.4 EFFET DU RAYON DE COURBURE

Au chapitre A.1 il a été présenté que le niveau des CLFS obtenu par des essais de gonflements hydrauliques dans des matrices de différents diamètres est différent.

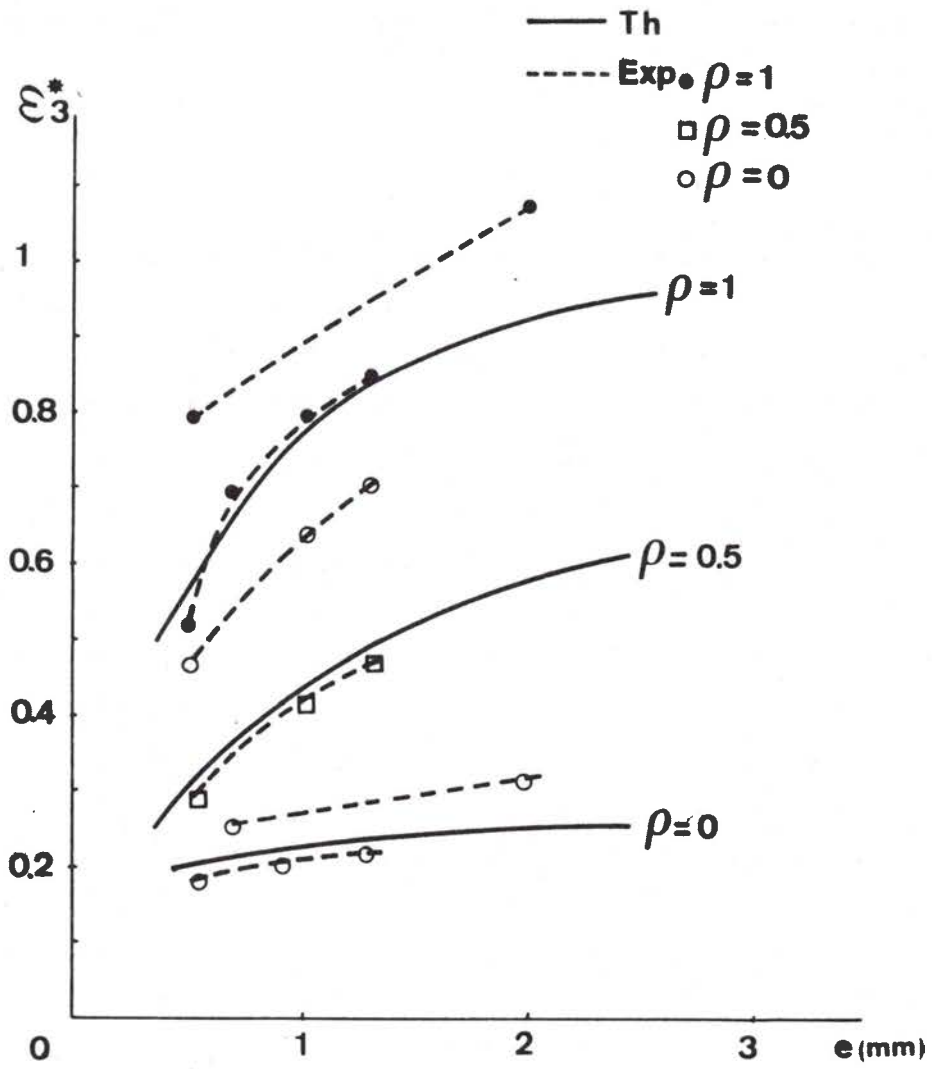


fig.B3/9a Comparaison entre les prédictions expérimentale et théorique de l'effet d'épaisseur sur la CLFS : - acier doux - endommagement par décohésion.

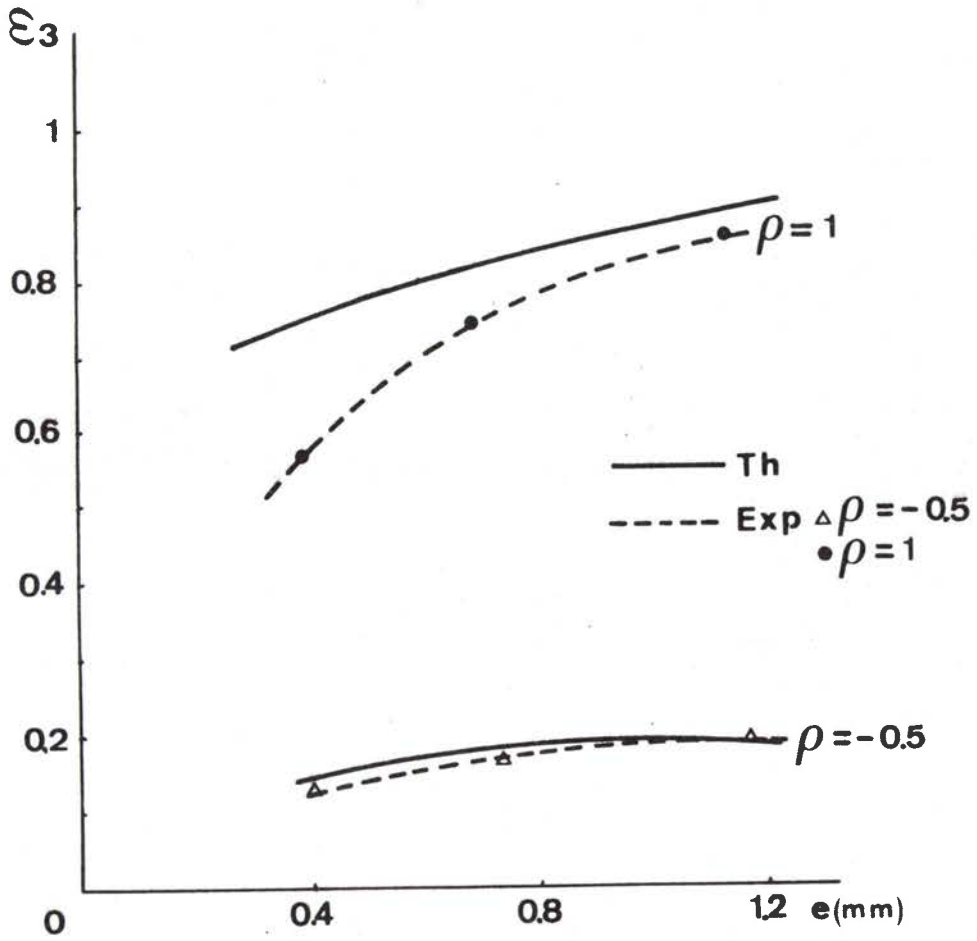


fig.B3/9b Comparaison entre les prédictions expérimentale et théorique de l'effet d'épaisseur sur la CLFS : - alliage 3003 - endommagement par fragmentation.

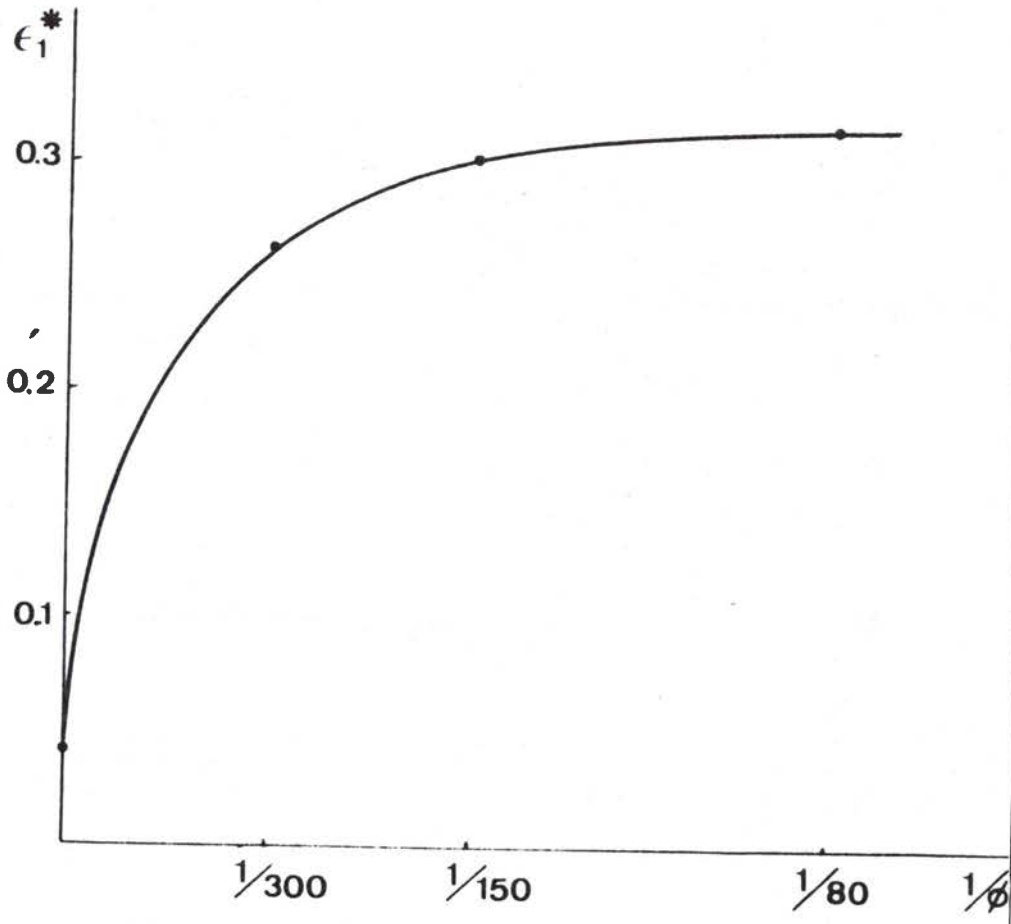


fig.B3/10 Influence expérimentale de l'effet du diamètre de matrice sur le niveau de la CLFS.

Le diamètre de matrice le plus petit conduit à la CLFS la plus élevée comme il est rappelé sur la figure B3/10.

Une première interprétation est de penser que les gradients de déformation sont plus pronconcés dans le cas des petits diamètres de matrices, bien que la limite de formage théorique soit identique pour les deux matériaux. La figure B3/11 illustre cette hypothèse où les points T sont au même niveau mais où les points E caractéristiques de la CLFS apparaîssent différents, mais l'écart est à l'opposé de celui attendu, la CLFS étant la plus élevée pour les plus forts rayons de courbure. Le rayon de courbure n'ayant pas dans notre cas d'influence significative sur l'état des contraintes, une autre hypothèse de mécanisme peut être avancée : celle de l'endommagement. En effet, la surface sollicitée de manière quasi homogène au pôle de l'échantillon est beaucoup plus importante dans le cas des forts rayons de courbure. Si l'on considère qu'un certain nombre constant de sites de défaut est nécessaire pour que le processus de striction soit initié sur ces défauts, la probabilité d'existence de ce défaut D_c est d'autant plus grande que la surface considérée est faible, c'est-à-dire que le rayon matrice est petit. La figure B3/12 illustre ce point où l'on remarque que le défaut ξ_c est plus important (D_c plus faible) dans le cas des plus faibles rayons de courbure. La CLFS obtenue sera donc plus élevée en accord qualitatif avec l'expérience. Une autre formulation du phénomène d'endommagement décrit est de constater qu'un défaut très important qui est donc très peu présent dans le matériau a d'autant plus de chance d'interagir avec un de ses défauts homologues que la surface considérée est grande.

En choisissant la probabilité seuil d'existence du défaut critique inversement proportionnelle à la surface sollicitée, et en estimant le rayon de la surface sollicitée de manière homogène proportionnel au rayon matrice, la probabilité de seuil devient :

$$P_c(\xi) = P_o \frac{\pi r_o^2}{\pi r^2} = p_o \left(\frac{r_{omat}}{r_{mat}}\right)^2$$

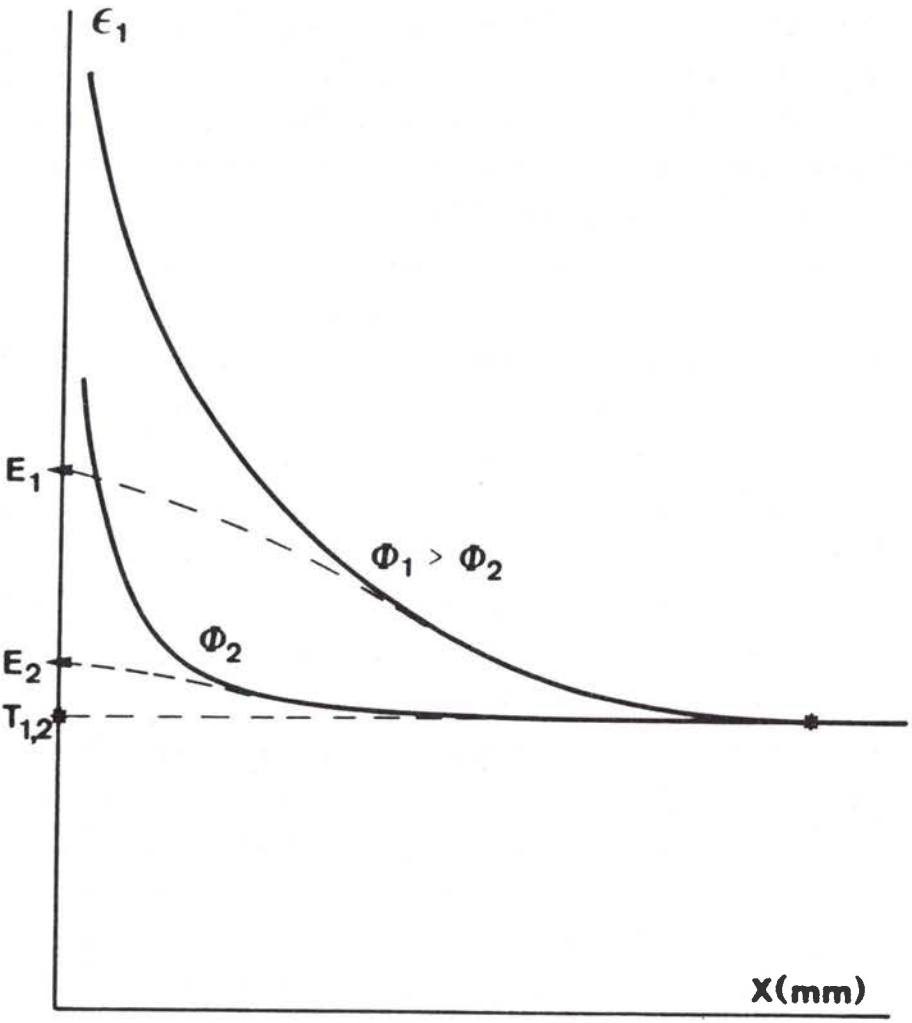


fig.B3/11 Effet des gradients de déformation pour un grand diamètre de matrice (a) et un petit diamètre (b).

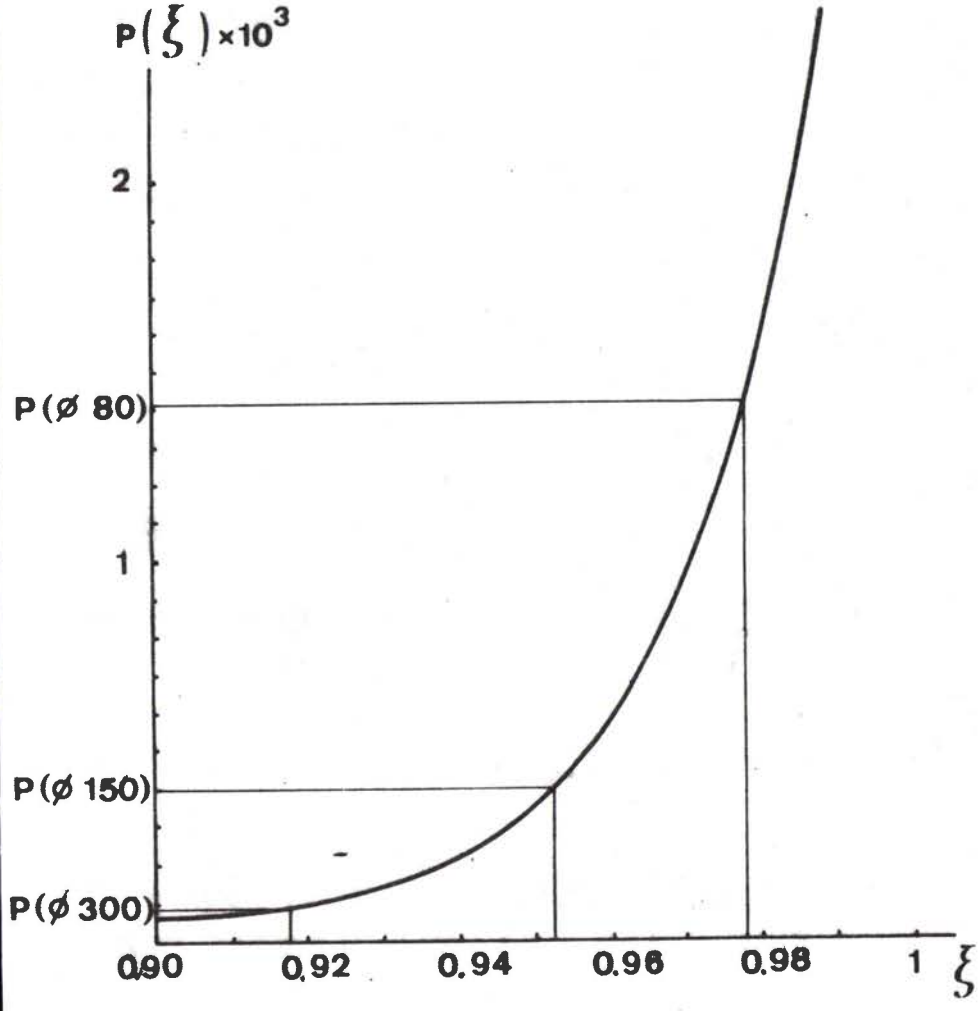


fig.B3/12 Définition du défaut critique pour différentes probabilités correspondantes à différents diamètres de matrice.

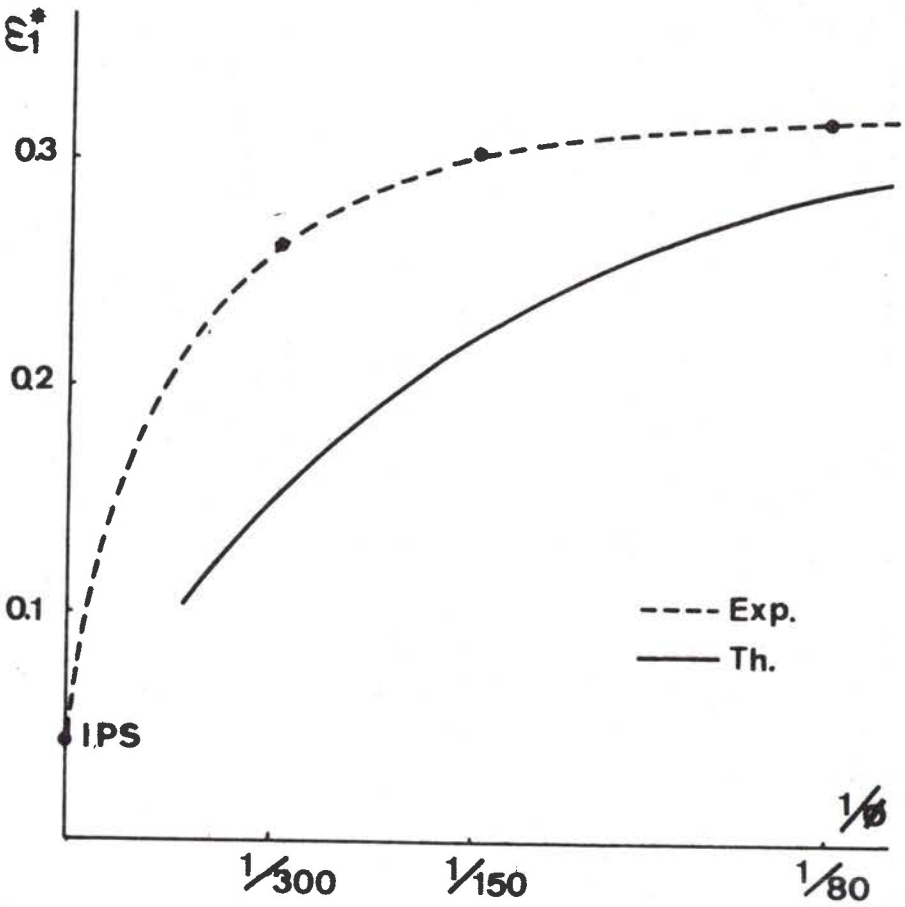


fig.B3/13 Comparaison entre les prévisions théoriques et expérimentales de l'effet du diamètre de la matrice sur le niveau de la CLFS. (Théorie de la déformation)

P_o est la probabilité seuil choisie pour le rayon r_o de matrice. s calculs ayant conduit à de bons résultats en choisissant une obabilité $P_o = 10^{-4}$ dans le cas d'une CLFS définie à partir de nflement hydraulique en matrice de diamètre 300 mm nous retiendrons ur forme numérique à la probabilité de seuil :

$$P_c(\xi) = 10^{-4} \left(\frac{300}{\phi mat}\right)^2$$

défaut ξ correspondant est présenté sur la figure B3/12. L'applica- on de cette condition à la déformation d'un matériau endommagé conduit une courbe d'évolution du défaut critique qui dépend du diamètre de matrice d'encastrement, le défaut D_c est d'autant plus faible que matrice présente un diamètre d'encastrement plus petit. Les résultats calcul d'instabilité sont présentés sur la figure B3/13. On remarque e les variations prévues sont en accord qualitatif avec l'expérience, forme de l'évolution est respectée. Le niveau est différent car il est pas tenu compte de la correction due aux gradients de déformations i se développent différemment dans chacun des cas. Là encore apparaît nécessité d'une étude du développement de ces gradients de déforma- ons sous diverses conditions de sollicitations en fonction des para- tres rhéologiques du matériau et de la répartition de l'endommagement.

B.3.5 EFFET DU CHEMIN DE DEFORMATION SUR LA FORME ET LE NIVEAU DE LA CLFS

Il a été présenté (§A.1.5) que la CLFS déterminée en chemins de formations linéaires n'est pas applicable aux cas de chargement plus mplexes. En particulier une séquence traction-expansion conduit à un int situé au-dessus de la CLFS alors qu'une séquence expansion-trac- on conduit à un point situé en-dessous de la CLFS. Il n'existe pas, notre connaissance, de calculs d'instabilité publiés rendant compte cet effet.

Il serait tentant dans une première approche de considérer le

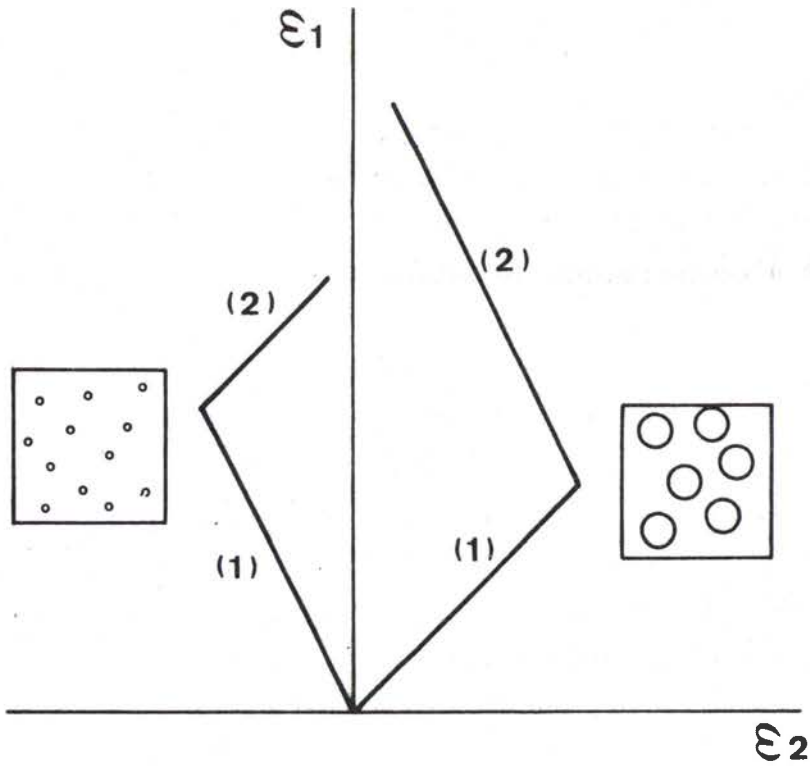


fig.B3/14 Influence qualitative de l'effet d'un chemin complexe de déformation sur le niveau de la CLFS.

remier chemin de déformation (fig. B3/14) comme n'introduisant qu'un erme de prédéformation ε_o dans la loi de comportement qui se trans- orme donc de la forme initiale :

$$\sigma_e = K\varepsilon_e^{\,n}$$

la forme : $\sigma_e = K(\varepsilon_e+\varepsilon_o)^n$

urant le deuxième chemin linéaire. ε_o représente la déformation quivalente développée suivant le premier chemin. Le calcul d'insta- ilité peut donc être mené normalement suivant le deuxième chemin inéaire en prenant en compte le coefficient d'écrouissage instantané :

$$N = \frac{n\varepsilon_e}{\varepsilon_e+\varepsilon_o}$$

un matériau d'écrouissage nul présente un niveau non nul de la CLFS expansion, ce résultat a pour conséquence que, aussi grande que isse être la prédéformation ε_o, la déformation à l'instabilité ne ra jamais nulle au cours du deuxième chemin, dans le cas d'une ex- nsion équibiaxée elle sera au minimum de ε_1^*=0.167. Ce résultat est en ntradiction avec l'expérience et le bon sens car lorsqu'un matériau t sollicité jusqu'à une déformation voisine de celle de l'instabilité, apparaît impossible d'imaginer un chemin de déformation différent i permettrait de produire de manière stable de grandes déformations pplémentaires.

Le problème doit donc être considéré de manière plus complexe. est toutefois à noter que l'effet de la première déformation est en rticulier de diminuer les possibilités d'écrouissage ultérieures du tériau. Cet effet est grave pour une déformation ultérieure en action simple où le niveau de la CLFS varie dans de grandes propor- ons avec le coefficient d'écrouissage jusqu'à atteindre un niveau l pour un coefficient d'écrouissage nul, alors que dans le cas de expansion équibiaxée, le niveau varie dans de moindres proportions ne descend jamais jusqu'à une valeur nulle. Cette considération

purement qualitative laisse pressentir qu'un calcul d'instabilité devrait pouvoir rendre compte de l'effet du chemin sur le niveau de la CLFS.

Un autre point à considérer est l'endommagement développé au co de la séquence de déformation. Comme il a été montré précédemment, l'effet de l'endommagement est d'abaisser la valeur de la déformatio l'apparition de l'instabilité par rapport au cas du matériau homogèn Comme nous venons de le mettre en évidence, nous ne connaissons pas niveau de la CLFS en chemins complexes pour un matériau homogène, néanmoins, nous pouvons analyser qualitativement les effets de l'end magement. Dans le cas de la fragmentation, l'endommagement dépend t peu du chemin de déformation et aucune indication n'est donnée quant à la position de la CLFS en chemins complexes. Par contre,dans le c de la décohésion, l'expansion équibiaxée provoquant un taux d'endomm gement très élevé sera très néfaste aux déformations ultérieures, al que la traction ne développant que très peu d'endommagement sera pro pice aux déformations suivantes. Cette considération qualitative prévoit des effets allant dans le même sens que l'expérience (fig.B3

L'étude des chemins de déformations complexes est très important puisque, industriellement, toutes les séquences de mise en forme d'u pièce ne sont que des suites de chemins de déformations complexes en général non linéaires. Cette étude est très ouverte car actuellemen les théories de l'instabilité ne sont pas applicables directement, l lois de comportement et les lois d'endommagement sont très mal connu Les effets qualitatifs présentés semblent aller dans le sens de l'ex rience et sont, à ce titre, encourageants.

B.3.6 BILAN DES CALCULS PREDICTIFS DES CLFS

Les calculs de détermination de la CLFS menés dans le cadre de deux théories de la plasticité font apparaître la théorie de la défo mation comme décrivant le mieux l'expérience. Bien que cette théori soit à de nombreux titres critiquable, elle semble bien présenter un

étape dans la bonne direction pour la description des phénomènes d'instabilité plastique. Elle a de plus l'avantage de rendre compte du changement de forme de la CLFS lorsque le coefficient d'écrouissage augmente.

Ces calculs doivent tenir compte de l'écrouissage du matériau déterminé pour chaque chemin de déformation et des évolutions de l'anisotropie différente pour chaque chemin.

Enfin la définition théorique de la CLFS doit être en accord avec la définition expérimentale.

Ces conditions réunies dans un calcul d'instabilité tenant compte de l'endommagement permet de bien décrire la position et la forme de la CLFS expérimentale.

De plus, l'endommagement permet d'expliquer et de prévoir l'effet de l'épaisseur sur la courbe limite de formage et d'associer au type d'endommagement le type d'effet observé.

L'influence du rayon de courbure de la pièce sollicitée sur le niveau de la CLFS est aussi interprétée en terme d'endommagement.

Ces résultats très importants renforcent le modèle proposé car c'est le seul actuellement permettant de rendre compte de ces phénomènes.

Cette étude ne représente qu'une étape qui doit être suivie par des analyses en chemins de déformations complexes.

REFERENCES CHAPITRE B3.

1- C.C. VEERMAN - Communication au 7ème congrès IDDRG- Amsterdam- Oct(1972)

2- J.M. JALINIER, N. CHRISTODOULOU, B. BAUDELET, J.J. JONAS - "Formability"-ASM/AIME-(1977)29

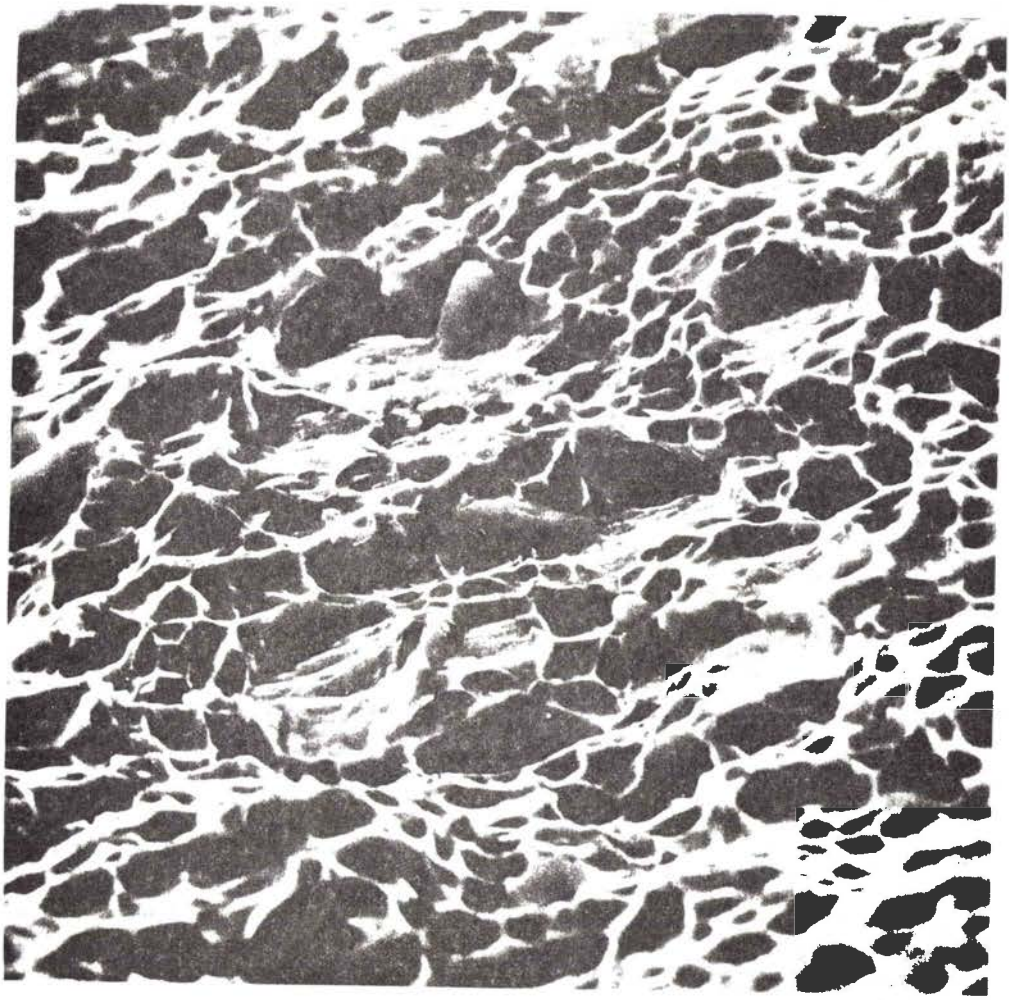


fig.C1/1 Faciès de rupture d'un acier doux d'emboutissage sollicité en déformation équibiaxée.

C* Analyse théorique des CLFR

1. PRESENTATION

La courbe limite de formage à rupture intrinsèque obtenue par les éthodes décrites au chapitre A présente des formes différentes ivant les matériaux (§A.1.6). La rupture présente toujours un faciès rupture ductile (fig.C1/1) pour les matériaux courants d'emboutissage. étude théorique des CLFR est donc une étude de rupture ductile sous ntraintes biaxiales. Le problème est encore compliqué par le fait e le chemin de déformation n'est pas linéaire, la partie de la défor- tion post-striction s'effectuant sensiblement en déformation plane ns la striction (fig.C1/2).

Les critères de ruptures peuvent se séparer en deux grandes asses :

Les critères de ruptures macroscopiques fondés sur une relation entre s variables macroscopiques à rupture (énergie, contrainte, déformation, riable mécanique d'endommagement,...),

Les critères de ruptures microscopiques fondés sur une modélisation ysique de la phase de coalescence de l'endommagement conduisant à la pture ductile.

Notre démarche est de bénéficier de la description physique obtenue l'endommagement pour établir un critère de rupture microscopique. rès avoir introduit et discuté les deux principaux critères macros- piques, la description de notre modèle sera menée en montrant les militudes entre les résultats obtenus par les différentes approches.

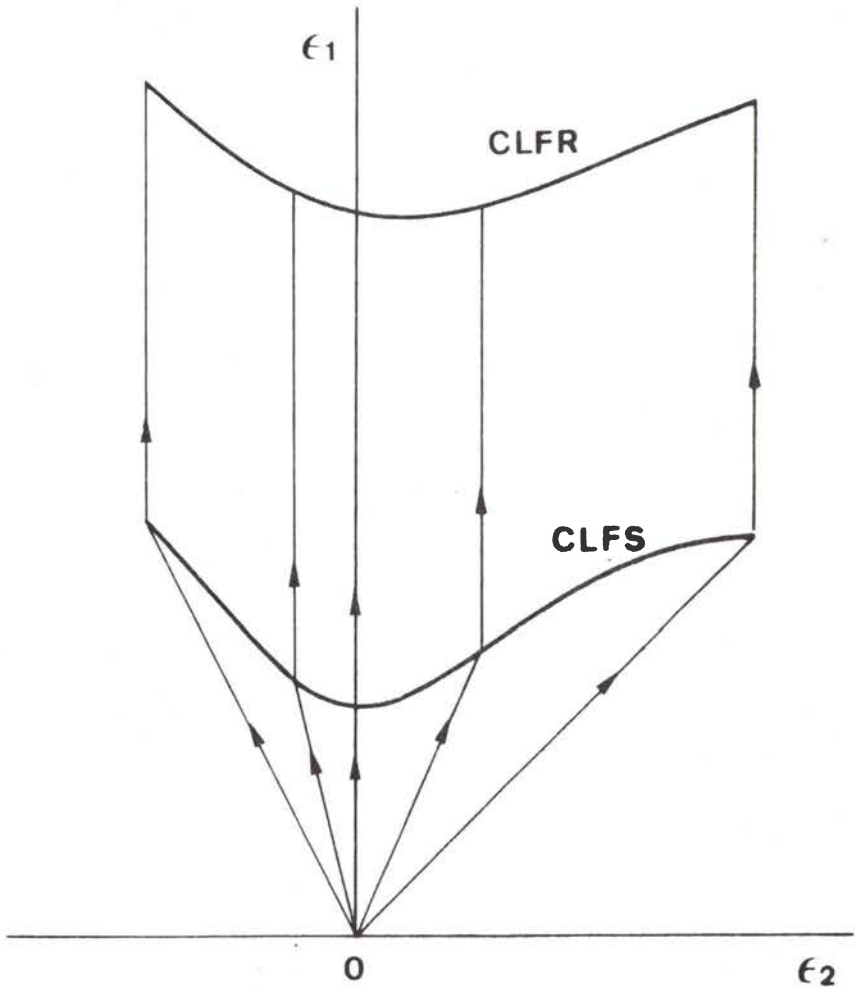


fig.C1/2 Modélisation des trajets de déformation jusqu'à la rupture.

C.2. CRITERES MACROSCOPIQUES

Deux principaux critères macroscopiques retiendront notre attention. Le critère de Latham et Cockroft /1/ très utilisé et le critère d'Oyane /2,3/ plus récent. Quelques autres critères ont été proposés /4,5,6/ applicables en états de contraintes biaxées mais dont les prévisions théoriques sont trop optimistes par rapport à la réalité.

C.2.1 CRITERE DE LATHAM ET COCKROFT

Le critère de Latham et Cockroft s'écrit sous la forme /1/ :

$$\int_0^{\varepsilon_{ef}} \sigma_e \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_e}\right] d\varepsilon_e = C$$

où ε_{ef} est la déformation équivalente à rupture, σ_1 la plus grande des contraintes principales appliquées et C une constante du matériau à identifier expérimentalement.

/*/ Un chemin de déformation linéaire est caractérisé par la relation :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_e} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}$$

en utilisant la loi de comportement du matériau, le critère peut se mettre sous la forme :

$$\int_0^{\varepsilon_{ef}} \frac{K\varepsilon_e{}^n}{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}\, d\varepsilon_e = C$$

ce qui peut se séparer en deux intégrales correspondant à chacune des branches linéaires du chemin de déformation :

$$C = \frac{K}{\sqrt{1-\alpha_1+\alpha^2}} \int_0^{\varepsilon_{es}} \varepsilon_e{}^n\, d\varepsilon_e + \frac{K}{\sqrt{1-\alpha_2+\alpha_2^2}} \int_{\varepsilon_{es}}^{\varepsilon_{ef}} \varepsilon_e{}^n d\varepsilon_e$$

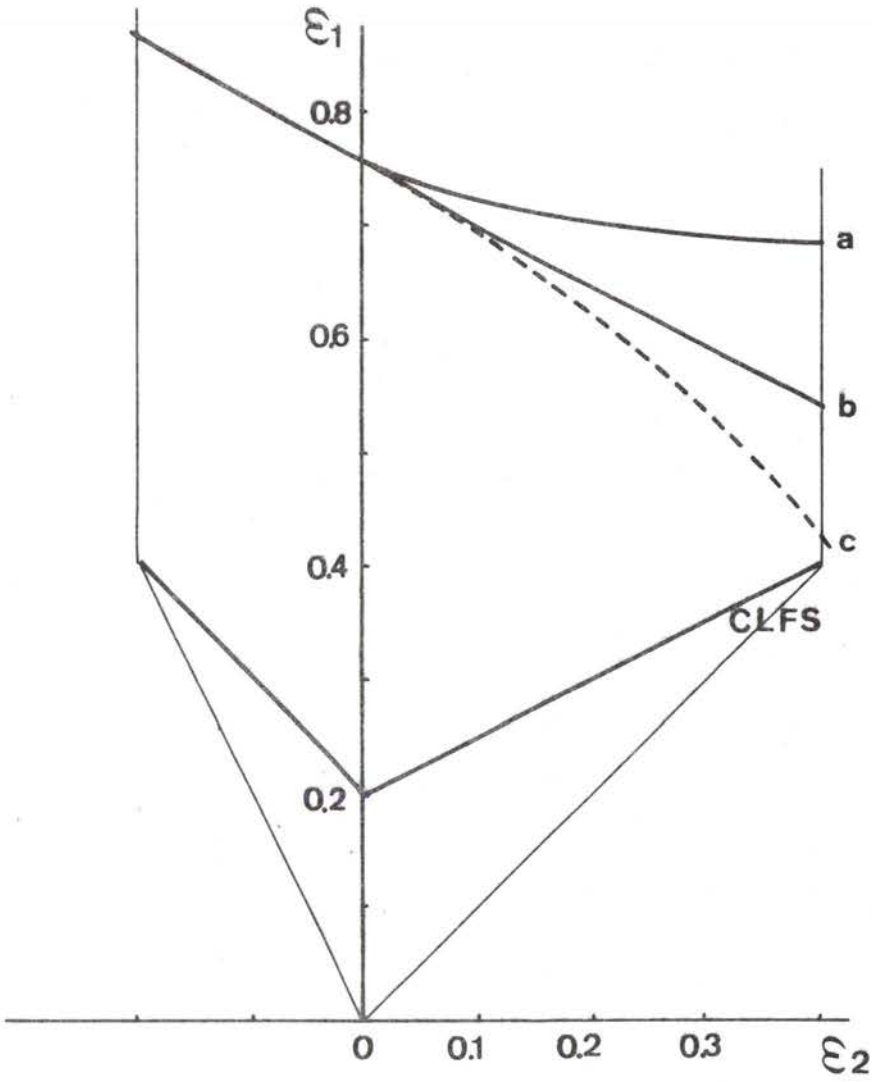


fig.C1/3 Prévision comparée de la CLFR par les critères de : Latham et Cockroft, et Oyane.

a- Latham et Cockroft $n(\rho)$

b- " " $n=Cte$

c- Oyane

En intégrant et en tenant compte du fait que le deuxième chemin est en déformation plane ($\alpha_2=0$) on obtient :

$$\varepsilon_{ef} = \frac{\sqrt{3}}{2}(n+1)\left[\frac{C}{K} - \frac{\varepsilon_{es}^{n+1}}{n+1}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\right]\right]^{\frac{1}{n+1}}$$

Ce calcul suppose bien sûr connue la CLFS. Il est alors intéressant de connaître la différence de niveau entre les deux courbes données par la différence dans les déformations principales ε_1 à striction et rupture :

$$\Delta\varepsilon_1 = \varepsilon_{1f} - \varepsilon_{1s}$$

or en déformation plane :

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\varepsilon_{ef} - \varepsilon_{es})$$

ε_{ef} étant donné par la relation établie précédemment, ε_{es} est donné simplement par le niveau de la CLFS.

Il est à remarquer que pour un premier chemin en déformation plane la relation devient simplement :

$$\varepsilon_{ef} = \frac{\sqrt{3}}{2}(n+1)\left[\frac{C}{K}\right]^{\frac{1}{n+1}}$$

ce qui est le cas le plus simple pour identifier la constante C.

La figure C1/3 représente un calcul de la CLFR à partir d'une CLFS schématisée pour une valeur de la constante $\frac{C}{K}$ égale à 0.7 et pour deux cas de rhéologie :

- n = cte = 0.2 quel que soit le chemin,
- n = 0.2 dans le domaine du rétreint et n varie linéairement de 0.2 à 0.4 dans le domaine de l'expansion.

La CLFR obtenue est sensiblement linéaire de pente différente

suivant les deux cas. Ce calcul est effectué en considérant que la rhéologie du matériau est la même dans l'étape post-striction en déformation plane que dans le premier chemin linéaire.

C.2.2 CRITERE DE OYANE

Le critère d'Oyane s'écrit sous la forme [2,3] :

$$\int_{0}^{\varepsilon_{e_f}} \left(1+\frac{1}{d}\frac{\sigma_m}{\sigma_e}\right) d\varepsilon_e = \int_{\varepsilon_{v_o}}^{\varepsilon_{v_f}} \frac{\gamma f^2}{d}\, d\varepsilon_v = b$$

avec

- $\gamma = \frac{\rho^*}{\rho_o}$ densité relative du matériau au cours de la déformat
- $f = \frac{1}{3}\left(1+\sqrt{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\right)$
- $\varepsilon_v = \ln\frac{v}{v_o} = -\ln\gamma$ déformation volumique du matériau,
- d et b des constantes du matériau, b définie par l'intégrale

$$b = \int_{\varepsilon_{v_o}}^{\varepsilon_{v_f}} \frac{\gamma f^2}{d}\, d\varepsilon_v$$

en tenant compte comme précédemment des deux chemins linéaires, on peut écrire [*] :

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{3} = \sigma_1\frac{(1+\alpha)}{3}$$

et

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_e} = \frac{1+\alpha}{3\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}$$

d'où l'expression du critère :

$$\int_{0}^{\varepsilon_{e_s}} \left(1+\frac{1}{d}\frac{1+\alpha_1}{3\sqrt{1-\alpha_1+\alpha_1^2}}\right) d\varepsilon_e + \int_{\varepsilon_{e_s}}^{\varepsilon_{e_f}} \left(1+\frac{1}{d}\frac{1+\alpha_2}{3\sqrt{1-\alpha_2+\alpha_2^2}}\right) d\varepsilon_e = b$$

Le deuxième chemin étant en déformation plane, on obtient finalement :

$$(1+\frac{1}{d}\frac{1+\alpha}{3\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}})\varepsilon_{e_s} + (1+\frac{\sqrt{3}}{d})(\varepsilon_{e_f}-\varepsilon_{e_s}) = b$$

Si l'on s'intéresse à la différence entre la CLFS et la CLFR, on a :

$$\Delta\varepsilon_1 = \varepsilon_1-\varepsilon_{1s} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\varepsilon_{e_f}-\varepsilon_{e_s})$$

d'où :

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{3}}{2(1+\frac{\sqrt{3}}{d})}\left[b-(1+\frac{1}{d}\frac{1+\alpha}{3\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}})\varepsilon_{e_s}\right]$$

en identifiant les constantes d et b sur le niveau de la CLFR en déformation plane et en traction simple (fig.C1/3) déterminée par le critère de Latham et Cockroft, on peut mesurer l'écart obtenu en déformation biaxiale symétrique pour les deux théories. Comme nous pouvons le constater le critère d'Oyane est, sur ce cas d'identification des paramètres, plus pessimiste en déformation biaxiale symétrique que le critère de Latham et Cockroft. Le fait d'avoir deux paramètres à identifier au lieu d'un permet, d'une part d'ajuster le niveau de la CLFR, comme dans le critère de Latham et Cockroft avec la condition supplémentaire que le paramètre du critère d'Oyane peut être relié à l'endommagement, et d'autre part d'ajuster la pente de la courbe ce qui n'est pas faisable avec le critère de Latham et Cockroft.

C.2.3 AUTRES CRITERES

D'autres critères peuvent être utilisés basés sur des relations entre les paramètres macroscopiques (σ_m,σ_e,ε_{ef}...etc) [4,6] qui donnent des résultats divers et en général non convaincants. Un type de critère simple est aussi utilisé qui consiste à écrire que l'endommagement,

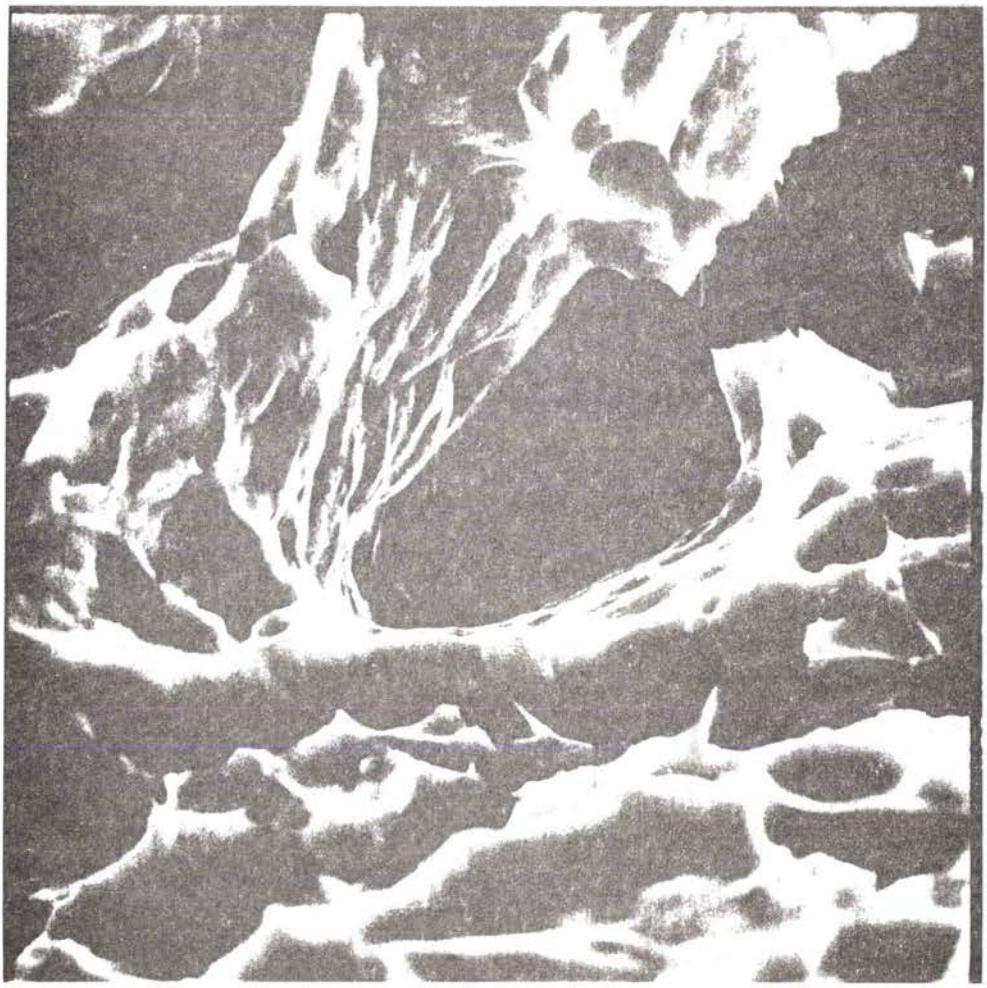


fig.C1/4 Mise en évidence du processus de coalescence par observation du faciès de rupture.

défini comme une variable mécanique, atteint une valeur critique à rupture /7,8/ :

$$D = D_c$$

ou encore que la déformation dans l'épaisseur à rupture est une constante du matériau : ε_{3f} = cte /9/.

C.3. CRITERES MICROSCOPIQUES

Les critères microscopiques sont fondés sur des modèles cherchant à décrire la coalescence des cavités. De ces modèles, peu sont utilisables dans le cas d'états de contraintes biaxiales. Certains tiennent compte de la répartition non uniforme des contraintes entre les cavités /10/, mais ne sont applicables qu'au cas de la traction plane (ρ=0). Un autre critère suppose une coalescence par rupture de type fragile entre les cavités /11/ mais les ténacités nécessaires pour identifier le modèle aux résultats expérimentaux sont en général irréalistes.

Notre démarche est de partir des deux grands types d'endommagement étudiés et de modéliser leur coalescence. Les lois de croissance de l'endommagement ont été déterminées sous la forme :

$$\varepsilon_i^{\,v} = B_i \varepsilon_1$$

Les B_i étant différents dans les deux cas d'endommagement.

Les deux types très différents de croissance nous ont conduits à faire l'hypothèse de deux mécanismes différents de coalescence.

C.3.1 MODELE DE COALESCENCE DE L'ENDOMMAGEMENT DE DECOHESION /*/

Dans le cas de l'endommagement par décohésion, la rupture présente un faciès ductile où l'on remarque des cupules très importantes. La figure C1/4 montre,à un grand facteur de grandissement, une zone du

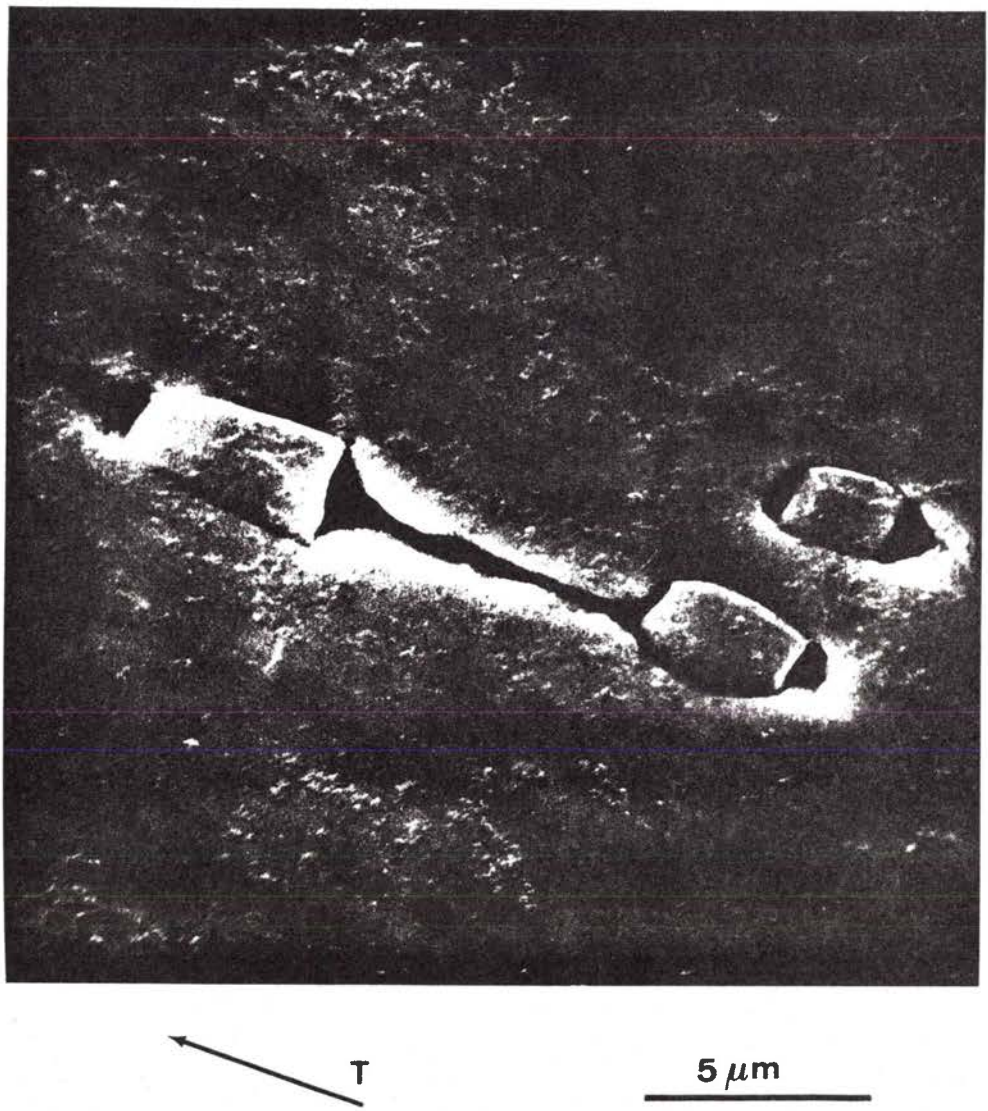


fig.C1/5 Coalescence des cavités le long de l'axe de traction dans un cuivre Cu/a_1 sollicité en traction uniaxiale.

faciès de rupture où la coalescence entre deux cavités par rupture du pédoncule de séparation est bien mise en évidence. Un polissage de la zone de rupture permet des observations à une déformation immédiatement inférieure à celle de la rupture et donc l'observation du processus de coalescence. Les analyses montrent des cavités importantes dont la première phase de coalescence intervient en général parallèlement à la direction de plus grande déformation /$\bar{1}\underline{2}\bar{7}$/. La figure C1/5 est un exemple typique de ce cas où la coalescence est intervenue parallèlement à l'axe de traction, la rupture macroscopique se produisant évidemment normalement à cette direction. Compte-tenu des observations permettant de constater un fort grossissement des cavités jusqu'à ce que leur proximité devienne dangereuse au point d'entraîner la rupture, un modèle géométrique de coalescence a été retenu qui consiste à écrire que la coalescence a lieu lorsque la distance entre cavités atteint une valeur critique (fig.C1/6) :

$$l_i = \alpha r_i$$

où l_i est l'espacement dans la direction i et r_i le rayon de la cavité dans cette même direction.

Une coalescence parfaitement ductile obtenue par contact des cavités se caractérise par une valeur de α égale à 2. Il est à noter que ce critère doit être réalisé sur l'une des trois directions pour que la coalescence intervienne.

La phase de rupture intervenant dans la zone de maximum concentration en cavité déterminée pour le modèle de mise en striction, il est nécessaire d'avoir une image de cette zone. La concentration volumique en cavités est choisie égale à la concentration critique déterminée par le calcul statistique (§B.2.3). Les cavités sont supposées réparties uniformément aux sommets d'un réseau octaédrique comme présenté précédemment (§B.2.4). La dualité entre la concentration volumique

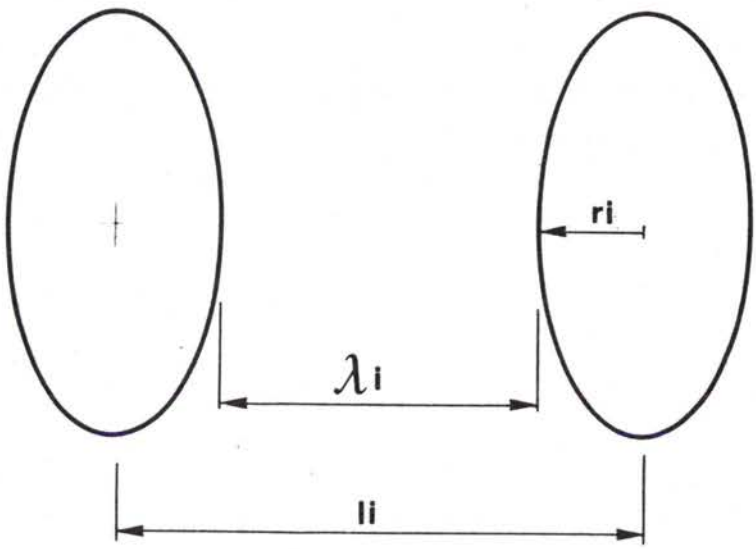


fig.C1/6 Définition des paramètres pour l'étude de la coalescence de l'endommagement par décohésion.

déterminée statistiquement et la répartition uniforme des cavités est imposée par le calcul qui demande une maille régulière construite à partir des distances moyennes entre plus proches voisins.

A partir des dimensions initiales de la maille: l_o et de la taille initiale des cavités : r_o (fig.C1/7), connaissant les déformations appliquées et le modèle de croissance des cavités, il est possible de chercher pour quelle déformation le critère de coalescence est vérifié. Il s'avère que pour une maille régulière le critère est toujours vérifié d'abord dans la direction 1 de plus grande déformation principale. Ce résultat conforme à certaines observations rapportées précédemment conduit à penser que la rupture procède tout d'abord par une coalescence, parallèlement à l'axe 1 de plus forte déformation entre quelques cavités conduisant à des trous de grand volume qui vont immédiatement donner lieu à coalescence dans la direction 2 ou 3 normale à la direction 1, les grosses cavités obtenues conduisant à la vérification immédiate du critère imposé. Un processus très rapide, quasi instantané à l'échelle macroscopique est donc initié par une coalescence le long de l'axe 1 de plus forte déformation.

Suivant cet axe l'évolution du rayon de la cavité et de la taille de la maille s'écrivent :

$$r_1 = r_o \exp\left[B_1(\rho)\varepsilon_1\right]$$

$$l_1 = l_o \exp \varepsilon_1$$

A striction la valeur atteinte est donc :

$$r_{1s} = r_o \exp\left[B_1(\rho)\varepsilon_{1s}\right]$$

$$l_{1s} = l_o \exp(\varepsilon_{1s})$$

étant caractéristique du chemin de déformation imposé avant mise en striction.

Entre striction et rupture, le chemin est en déformation plane,

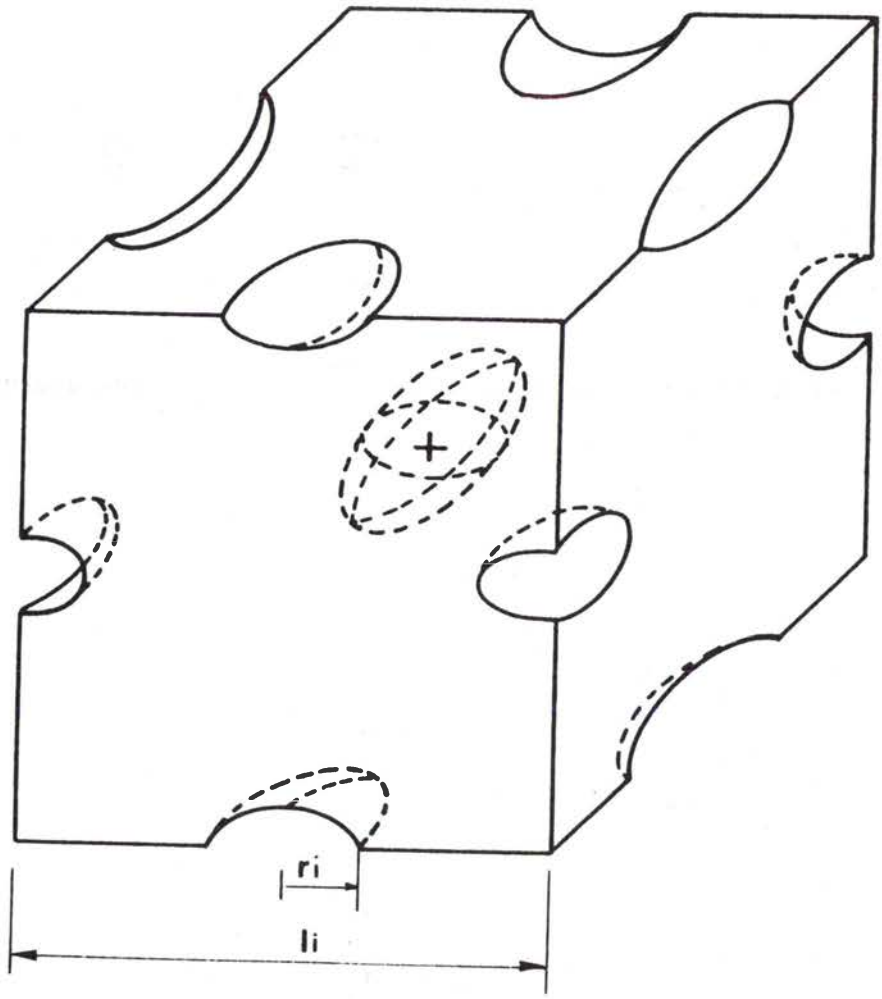


fig.C1/7 Volume élémentaire de matériau isolé.

l'amplitude de la différence de niveau entre la CLFS et la CLFR est donnée par :

$$\Delta\varepsilon_1 = \varepsilon_{1f} - \varepsilon_{1s} = x$$

L'évolution des paramètres géométriques du réseau durant cette étape sont donc :

$$r_1 = r_{1s} \exp[B_1(o)x]$$

$$l_1 = l_{1s} \exp[x]$$

or $$B_1 = c+0.64$$

d'où la forme complète de l'évolution en tenant compte des deux chemins :

$$r_1 = r_o \exp[(c+0.64\rho)\varepsilon_{1s}+cx]$$

$$l_1 = l_o \exp[\varepsilon_{1s}+x]$$

à rupture le critère est vérifié :

$$l_1 = \alpha r_1$$

ce qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{l_o}{\alpha r_o} = \exp\left[[(c-1)+0.64\rho]\varepsilon_{1s}+(c-1)x\right]$$

ou encore :

$$\ln \frac{l_o}{\alpha r_o} - [(c-1)+0.64\rho]\varepsilon_{1s} = (c-1)x$$

ce qui donne finalement :

$$x = \frac{1}{c-1} \ln \frac{l_o}{\alpha r_o} - \left[1+ \frac{0.64}{1-c} \rho\right]\varepsilon_{1s}$$

En écrivant que la déformation est rupture est donnée par :

$$\varepsilon_{1f} = \varepsilon_{1s}+x$$

et que de plus la déformation dans la direction 2 ne change pas entre la striction et la rupture, le chemin étant en déformation plane :

$$\varepsilon_{2f} = \varepsilon_{2s} = \rho\varepsilon_{1s}$$

l'équation obtenue devient :

$$\varepsilon_{1f} = \frac{1}{c-1} \ln\left[\frac{l_o}{\alpha r_o}\right] - \frac{0.64}{c-1} \varepsilon_{2f}$$

Il est remarquable de constater que ce calcul permet d'obtenir analytiquement l'équation de la courbe limite de formage à rupture. Pour une valeur constante du coefficient c cette courbe est une droite de pente p_o donnée par :

$$p_o = - \frac{0.64}{c-1}$$

Une telle forme de la CLFR est observée pour la plupart des aciers courants d'emboutissage. La pente expérimentale est en général de l'ordre de :

$$+1 < -p_o < +1.5$$

ce qui conduit aux valeurs pour c :

$$1.43 < c < 1.64$$

Il est montré en annexe 3. que ces valeurs du coefficient c sont tout à fait compatibles avec les valeurs tirées de la théorie de croissance des cavités. Notons qu'elles conduisent aux valeurs du coefficient B_1 :

$1.11 < B_1 < 1.32$ en traction simple

$2.07 < B_1 < 2.28$ en expansion équibiaxée

Ces valeurs sont des valeurs moyennes du coefficient de concentration de déformation sur tout le domaine de déformation et elles sont

compatibles avec le cas du cylindre et de la sphère où l'on admet généralement comme valeur pour B_1 respectivement 1 et 2 en traction uniaxiale.

La pente de la CLFR théorique n'est donc fonction que du coefficient c dépendant de la forme des défauts et de la nature de la matrice, le niveau de la CLFR est fonction de ce même coefficient mais surtout de l'endommagement initial (ou généré au tout début de la déformation) et du critère choisi α.

Une valeur approximative du coefficient c peut être choisie égale à 1.5 compte tenu de l'encadrement obtenu pour cette valeur, ce qui permet de calculer le niveau de la CLFR en déformation plane :

$$\varepsilon_{1f_o} = \frac{1}{c-1} \ln\left[\frac{l_o}{\alpha r_o}\right] = 2\ln\left[\frac{l_o}{\alpha r_o}\right]$$

pour une valeur expérimentale courante de :

$$\varepsilon_{1f_o} = 1.5$$

Il est possible de déterminer le paramètre α du critère de coalescence si l'on connaît la valeur de l'endommagement initial. Des observations présentées au paragraphe B.2.1 donnent sur les aciers étudiés un encadrement de la valeur de l'endommagement initial :

$$5\ 10^{-4} < C_{v_o} < 2\ 10^{-3}$$

Il est nécessaire de connaître, pour cette valeur globale, le taux maximum d'endommagement obtenu dans la zone critique étudiée. En reprenant l'analyse du paragraphe B.2.4, nous pouvons estimer le facteur d'augmentation de la concentration en cavité dans cette zone à 7.

La concentration critique en cavités dans la zone étudiée est donc :

$$3.5\ 10^{-3} < C'_{v_o} < 1.4\ 10^{-2}$$

or :

$$C'_{v_o} = 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \left[\frac{r_o}{l_o}\right]^3$$

d'où l'expression du coefficient de coalescence α :

$$\alpha = 1.2(C'_{v_o})^{-1/3}$$

ce qui nous permet de déterminer son encadrement :

$$5<\alpha<8$$

Il est souvent plus représentatif d'exprimer ce critère en fonction de la dimension du pédoncule et du diamètre des cavités :

$$\lambda_i = \beta d_i = (\alpha-2) r_i$$

d'où les valeurs extrêmes de β :

$$1.5<\beta<3$$

Ces valeurs sont tout à fait compatibles avec les observations expérimentales rapportées /13,14/ où il est admis que la coalescence intervient lorsque la dimension du pédoncule atteint 1 à 2 fois le diamètre de la cavité.

Le critère utilisé par Brown et Embury /15/ consiste à écrire qu la coalescence intervient lorsque la largeur du pédoncule dans la dir tion 2 est égale à la plus grande dimension de la cavité :

$$\lambda_2 = d_1$$

L'application aux cas étudiés précédemment montre que la vérification de ce critère conduit à des valeurs du coefficient de coalescence retenu ici : α dépendant du chemin de déformation variant dans limites suivantes :

$$3<\alpha<5$$

Ces valeurs sont légèrement inférieures à celles obtenues dans notre modèle. Une application du critère de Brown et Embury à la détermination de cartes de rupture a été menée [16,17] en supposant une déformation suivant un seul chemin linéaire. Les résultats partiels présentés se regroupent approximativement autour des lignes théoriques.

Le modèle de coalescence construit est compatible, dans les ordres de grandeurs des paramètres mis en jeu, avec d'autres modèles existants. Il a l'avantage de donner l'équation analytique de la courbe limite à rupture et de rendre compte de la forme linéaire de cette courbe.

Nous retiendrons donc l'équation de la courbe limite de formage à rupture sous la forme :

$$\varepsilon_{1f} = \frac{1}{c-1} \ln\left[\frac{l_o}{\alpha r_o}\right] - \frac{0.64}{c-1}\varepsilon_{2f}$$

où, en l'absence d'autres indications, nous recommandons pour un premier calcul les valeurs suivantes pour les paramètres :

$$c = 1.5$$

$$\alpha = 6.0$$

$$\frac{l_o}{r_o} = \left[\frac{4x4x\pi}{3(C_{v_o}x7)}\right]^{1/3} = 1.34\ C_{v_o}^{-1/3}$$

où C_{v_o} est la concentration moyenne en cavités dans l'état initial ou immédiatement après germination.

Il est à noter que la déformation dans l'épaisseur à rupture : ε_{3f} n'est en général pas constante :

$$-\varepsilon_{3f} = \frac{1}{c-1} \ln\frac{l_o}{\alpha r_o} + \left[1 - \frac{0.64}{c-1}\right]\varepsilon_{2f}$$

excepté lorsque c=1.64, la pente de la CLFR étant alors égale à -1.

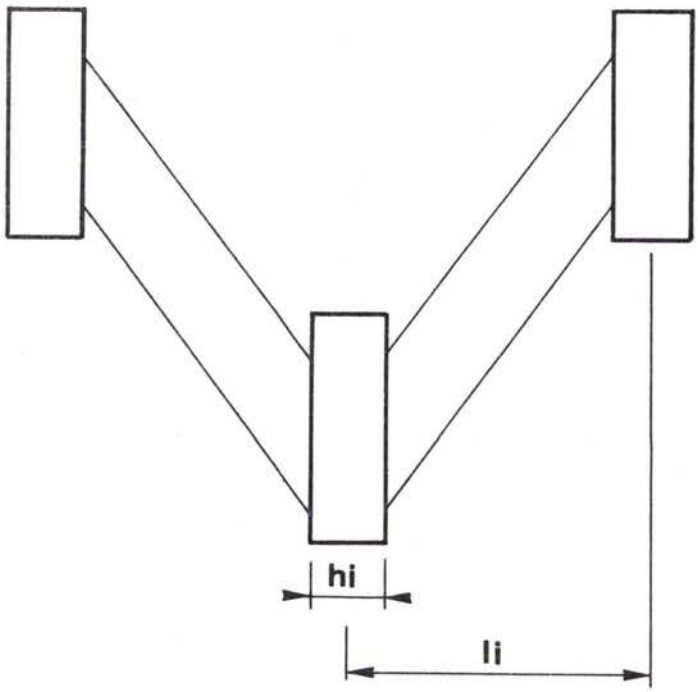


fig.C1/8 Définition des paramètres pour l'étude de la coalescence de l'endommagement par fragmentation.

C.3.2 MODELE DE COALESCENCE DE L'ENDOMMAGEMENT PAR FRAGMENTATION /*/

A l'inverse de l'endommagement par décohésion, les cavités ouvertes par fissuration restent de dimensions relativement faibles. Il paraît donc exclu d'obtenir, pour ce cas d'endommagement le même type de coalescence que pour le cas de la décohésion. Des observations au microscope électronique à balayage, menées dans des zones immédiatement voisines de la rupture ne permettent pas de mettre en évidence de larges cavités /18-20/. Le mécanisme de coalescence n'est pas observable et doit donc être très brutal et intervenir alors que les cavités sont encore éloignées et de tailles relativement faibles comparées à celles obtenues en décohésion. Il a été supposé dans cette étude que la coalescence procède par une instabilité plastique de la matrice provoquant une bande de cisaillement localisée joignant deux cavités. Ce type de processus de coalescence a été étudié par McClindock /21/ à partir d'une analyse d'instabilité tenant compte de la géométrie du réseau. Les calculs développés en annexe 4 conduisent à l'expression suivante (fig. C1/8) :

$$\gamma_e^{\,c} = \frac{\partial \ln \sigma_e}{\partial \varepsilon_e} = \sqrt{6}\,\frac{h_3\sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}}{l_2 l_3}$$

où h_i est la dimension de la cavité et l_i la distance entre cavités dans la direction i.

La rupture intervient lorsque le taux d'écrouissage développé dans le matériau : γ_e atteint la valeur critique $\gamma_e^{\,c}$ définie à chaque instant en fonction des variables géométriques du réseau d'endommagement. De même que pour l'analyse du cas de l'endommagement par décohésion, les cavités sont supposées réparties uniformément aux noeuds d'un réseau octaédrique.

Pour une loi parabolique : $\sigma_e = K\varepsilon_e^{\,n}$ le taux d'écrouissage est donné par :

$$\gamma_e = \frac{n}{\varepsilon_e}$$

or la déformation équivalente peut être décomposée suivant chacun des deux chemins linéaires sous la forme :

$$\varepsilon_e = \varepsilon_{e_s} + \Delta\varepsilon_e \quad \text{avec } \Delta\varepsilon_e = \frac{2}{\sqrt{3}}\Delta\varepsilon_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}x$$

en utilisant les notations précédemment introduites.

Le taux d'écrouissage prend donc la forme :

$$\gamma_e = \frac{n}{\varepsilon_{e_s} + \frac{2}{\sqrt{3}}x}$$

Il se pose alors le problème du coefficient d'écrouissage n en chemin complexe. Nous supposerons d'après l'étude du paragraphe B.1. que ce coefficient est constant dans le domaine du rétreint et garde donc la même valeur lors du trajet en déformation plane post-strictio que ce coefficient peut dépendre du chemin de déformation dans le domaine de l'expansion et que la microstructure développée est suffisamment stable pour imposer, durant l'étape en déformation plane, le même coefficient d'écrouissage que pendant le premier chemin de déformatio

La loi de croissance des cavités s'écrit :

$$h_1 = h_o \exp(\zeta\varepsilon_1) = h_o \exp\left[\zeta(\varepsilon_{1_s}+x)\right]$$

$$h_2 = h_{o_2}$$

$$h_3 = h_{o_3}$$

L'évolution de la maille est donnée par des équations analogues au cas de l'endommagement par décohésion :

$$l_2 = l_o \exp(\varepsilon_{2_s}) = l_o \exp(\rho\varepsilon_{1_s})$$

$$l_3 = l_o \exp(\varepsilon_{3_s}-x) = l_o \exp\left[-(1+\rho)\varepsilon_{1_s}-x\right]$$

En introduisant ces expressions dans le définition de γ_e^c il vient :

$$\gamma_e^c = \sqrt{3}\,\frac{h_{o3}\sqrt{h_o^2\exp(2\zeta\varepsilon_1)+h_{o2}^2}}{1_o^2\exp(-\varepsilon_{1s}-x)}$$

or :

$$\gamma_e^c = \frac{n(\rho)}{\varepsilon_{e_s}+\frac{2}{\sqrt{3}}x} = \frac{\sqrt{3}n(\rho)}{2\left[\sqrt{1+\rho+\rho^2}\varepsilon_{1s}+x\right]}$$

Il s'agit donc de déterminer x donné par l'équation :

$$\frac{2\sqrt{2}\ h_{o3}}{1_o^2 n(\rho)}\ \frac{\sqrt{h_o^2\exp\left[2\zeta(\varepsilon_{1s}+x)\right]+h_{o2}^2}\left[\sqrt{(1+\rho+\rho^2)}\varepsilon_{1s}+x\right]}{\exp\left[-(\varepsilon_{1_s}+x)\right]} = 1$$

Il est à noter qu'il est, dans ce calcul, nécessaire de connaître le niveau de la CLFS pour pouvoir calculer la CLFR , excepté en déformation plane où l'équation s'écrit simplement :

$$\frac{\delta h_{o3}^2}{1_o^4 n^2}\ \frac{\left[h_o^2\exp(2\zeta\varepsilon_{1f})+h_{o2}^2\right]\varepsilon_{1f}}{\exp(-2\varepsilon_{1_f})} = 1$$

La CLFS peut être obtenue par l'un des calculs d'instabilité présentés précédemment, nous la supposerons ici connue. L'équation donnant x est alors résolue numériquement.

La figure C1/9 représente la CLFR calculée pour un alliage d'aluminium AM1 (3003) déjà décrit dont les paramètres caractéristiques ont été déterminés expérimentalement :

$h_o = 0.01$ $\qquad$ $h_{o2} = 3$

$h_{o3} = 2$ $\qquad$ $\zeta = 4$

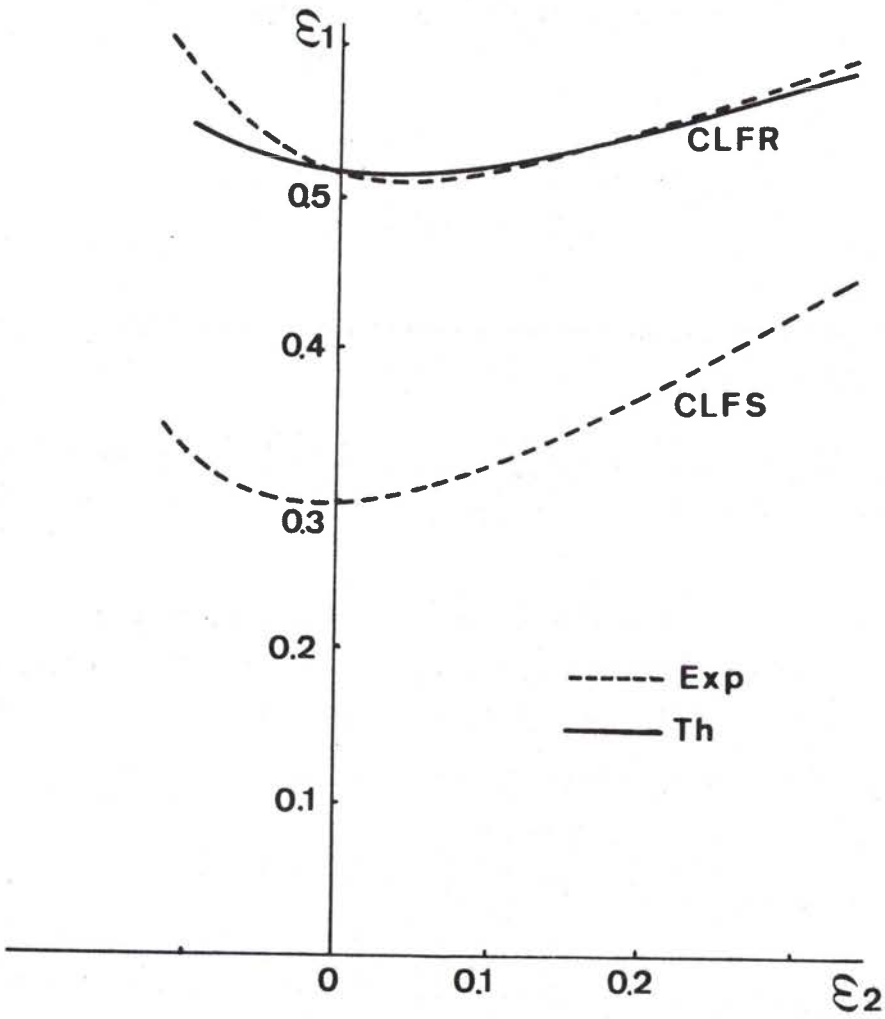


fig.C1/9 Comparaison entre la CLFR théorique et expérimentale dans le cas d'un endommagement par fragmentation.

le paramètre de la maille est choisi à $l_o = 10$, le coefficient d'écrouissage est pris égal à 0.2 dans le domaine de rétreint et variant linéairement de 0.2 à 0.4 dans le domaine de l'expansion.

Il est remarquable de constater que la CLFR présente une forme en cuvette. A l'inverse du cas d'endommagement par décohésion, cette courbe est fonction de la forme et du niveau de la CLFS et de la rhéologie du matériau. Sur la figure C1/10 est représentée la CLFR qui serait obtenue dans le cas d'un exposant d'écrouissage constant et égal à 0.2 quel que soit le chemin de déformation suivi. La CLFR perd alors sa forme en cuvette.

Les valeurs introduites pour les paramètres conduisent à une valeur de la fraction initiale en cavités de :

$$C'_{v_o} = 4x \frac{h_o h_{o2} h_{o3}}{l_o^3} = 2.4\ 10^{-4}$$

Ce résultat est tout à fait compatible avec les valeurs expérimentales mesurées.

C.4. DISCUSSION - CONCLUSIONS [7]

Cette étude fait apparaître le mode d'endommagement comme une signature de la forme de la courbe limite de formage à rupture :

- La forme linéaire est associée au cas d'endommagement par décohésion.
- La forme en cuvette au cas de l'endommagement par fragmentation.
- Le niveau de la CLFR est, dans les deux cas, très influencé par le taux d'endommagement initial.

Il est à noter que si un matériau présente un exposant d'écrouissage constant avec le chemin de déformation, la distinction est moins évidente (fig.C1/10).

Le calcul présenté donne une équation analytique de la CLFR, dans le cas de l'endommagement par décohésion, qui ne dépend ni de la forme

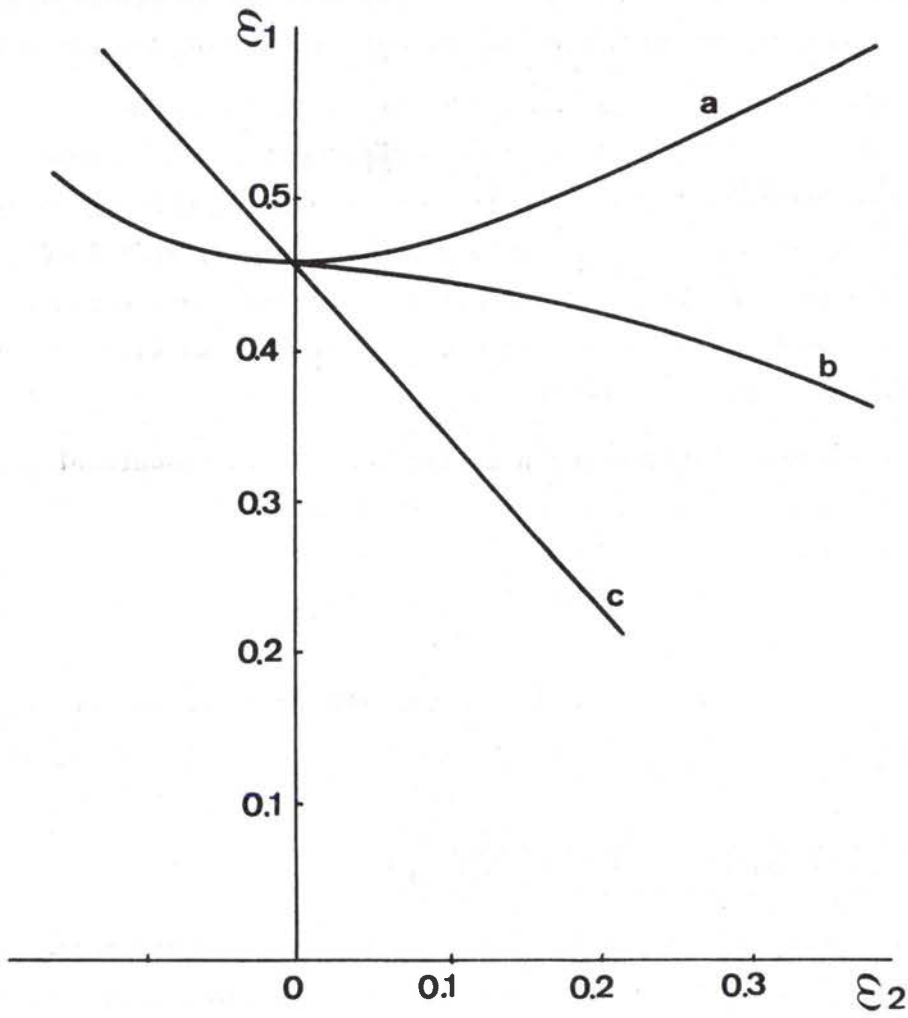


fig.C1/10 CLFR théoriques

a - Endommagement par fragmentation, écrouissage variant avec le chemin de déformation.

b - Endommagement par fragmentation, écrouissage constant.

c - Endommagement par décohésion

ni du niveau de la CLFS, ni de la rhéologie du matériau. A l'inverse la CLFR dans le cas de l'endommagement par fissuration ne peut être déterminée que numériquement et dépend fortement des paramètres énoncés précédemment.

Dans la plupart des matériaux, la propagation de la rupture est en général aidée par la présence d'une précipitation plus fine qui produit des sites d'endommagement relais entre deux cavités plus grosses. Ainsi la figure C1/ 11 présente un faciès de rupture sur lequel on remarque très nettement un ensemble de petites cupules entre les très grosses cavités considérées dans cette étude. Ce phénomène n'est pas du tout pris en compte dans cette première approche.

Compte-tenu de la forme des CLFR obtenues, il ressort que les critères de Latham et Cockroft et d'Oyane ne semblent applicables qu'au cas de la décohésion. Un rapprochement peut être fait entre ces critères, en effet le critère de Latham et Cockroft ne présente qu'une constante C qui peut être identifiée sur le niveau de la CLFR en déformation plane. Par comparaison avec le modèle proposé dans ce travail il ressort :

$$\varepsilon_1 f_o = \frac{3}{4}(n+1)\left[\frac{C}{K}\right]^{n+1} = \frac{1}{c-1}\ln\frac{1_o}{\alpha r_o}$$

le coefficient c dépendant de la forme des cavités mais aussi de la rhéologie de la matrice, le coefficient C apparaît comme une fonction de l'endommagement initial du matériau et du critère α de coalescence.

Il est plus difficile d'effectuer un rapprochement simple avec le critère d'Oyane mais il est néanmoins remarquable de constater que ce critère est à deux paramètres ajustables et que le modèle proposé est aussi à deux paramètres, essentiellement c un facteur de concentration de déformation et α le critère de coalescence où le terme $\ln\frac{1_o}{\alpha r_o}$ puisque l'endommagement initial a une valeur fixée par le matériau. Dans le critère d'Oyane un choix arbitraire a été fait sur le rôle

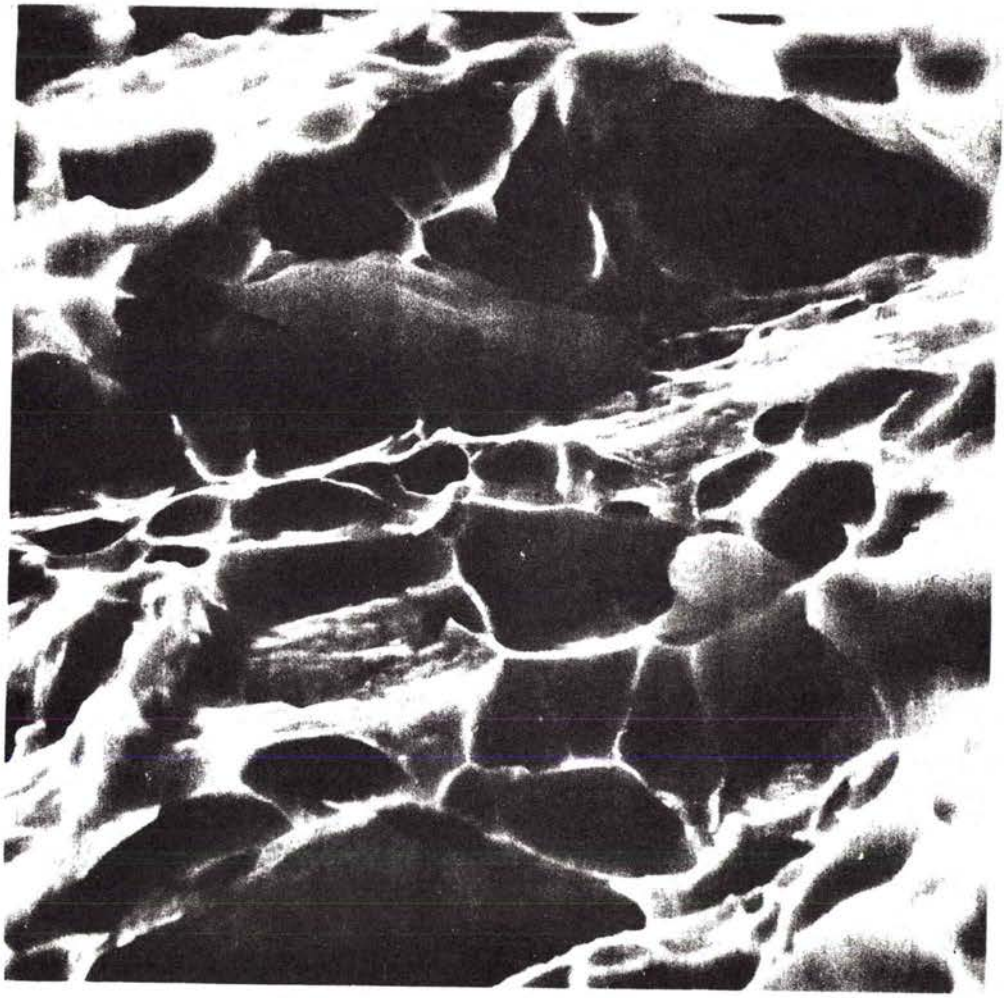


fig.C1/11 Faciès de rupture mettant en évidence de grosses et de nombreuses petites cupules.

des deux paramètres, dans le modèle présenté, ces deux paramètres sont reliés à un comportement physique du matériau et peuvent donc être déterminés expérimentalement avant le calcul et non identifiés seulement à postériori. C'est en quoi un modèle physique pour décrire les phénomènes est en général plus performant qu'un modèle mécanique, lorsque toute fois les calculs peuvent être menés à bien avec des approximations raisonnables.

REFERENCES PARTIE C

CHAPITRES C1 - C2 - C3

1- M.G. COCKCROFT, D.J. LATHAM - J. Inst. Met. 96(1968)33

2- M. OYANE - Bull. J.S.M.E. 15(1972)1507

3- M. OYANE, T. SATO, K. OKIMOTO, S. SHIMA - J. Mech. Work. Tech. 4(1980)65

4- D.M. NURRIS, J.E.E REAUGH, M. MORAN, D.F. QUINONES - J. Eng. Mat. Tech. 100(1978)279

5- J.W. HANCOCK, A.C. MACKENZIE - J. Mech. Phys. Solids 24(1976)147

6- P. W. BRIDGMAN - "Large Plastic Flow and Fracture"-McGraw Hill/Book Co, N.Y.(1952)

7- J. LEMAITRE, J.L. CHABOCHE - J. Mec. Appl. 2(1978)

8- Y.N. RABOTNOV - Proc. XII Int. Cong. Appl. Mech.(1968)

9- Z. MARCINIAK - Cours présentés à l'Université McMaster-Hamilton-Ontario-Canada(1973)

10- P.F. THOMASON - J. Inst. Met. 96(1968)360

11- A.K. GOSH - Met. Trans. 7A(1976)523

12- J.H. SCHMITT, J.M. JALINIER, B. BAUDELET - J. Mat.Sci. 16(1981)95

13- I.A. FRENCH, P.F. WEINRICH - Met. Trans. 6A(1975)785

14- J. GURLAND - Acta Met. 20(1972)735

15- L.M. BROWN, J.D. EMBURY - Proc. 3ème Int. Conf.Strength of Metals and Alloys - Cambridge-Angleterre(1973)164

16- G. LE ROY - Communication au "Groupe de réflexion Endommagement"- Nantes- Oct(1980)

17- G. LE ROY, J.D. EMBURY, G. EDWARD, M.F. ASHBY - accepté pour publication dans Acta Met.

18- S. FLOREEN, M.W. HAYDEN - Met. Sci. J. 4(1970)77

19- S. FLOREEN, H.W. HAYDEN - Scripta Met. 4(1970)87

20- A. MELANDER - Rapport Interne TRITA-MAC-0142- Roy. inst. Tech.- Stockholm-Suède-1978

21- F.A. McCLINTOCK - "Ductility"-ASM-Metals Park-Ohio- (1968)255

D. Conclusions générales

L'un des résultats important de ce travail est de présenter une modélisation physique relativement complète de l'endommagement caractérisé par deux mécanismes principaux :

- l'endommagement par décohésion de l'interface entre la particule et la matrice,
- l'endommagement par fragmentation de la particule.

Les lois de croissance obtenues sont simples à utiliser et sont applicables pour tout chemin de contrainte linéaire biaxé.

La connaissance de ces lois de croissance a permis de proposer un paramètre statistique physique d'endommagement pouvant être introduit dans des calculs d'instabilité plastique. De plus, l'influence de l'endommagement sur les valeurs rhéologiques apparentes mesurées dans un essai sur un matériau endommagé a été analysée. Le modèle proposé est comparé au modèle global mécanique et montre sa cohérence et ses divergences par rapport à cette approche. Il est en particulier calculé le comportement intrinsèque de la matrice connaissant le comportement apparent et la fonction d'endommagement.

L'introduction du paramètre endommagement dans la prévision des courbes limites de formage à striction a permis d'obtenir un bon accord entre le théorie et l'expérience dans la prédiction de la forme et de la position de la CLFS pour un calcul mené dans le cadre de la théorie de la déformation.

De plus l'introduction de l'endommagement permet de prévoir et d'expliquer l'influence de l'épaisseur de la tôle formée sur le niveau de la CLFS. Il est montré que chacun des deux types d'endommagement produit une influence différente de l'épaisseur sur le niveau de la CLFS en particulier :

- pas d'effet en traction uniaxée, un effet important en déformati équibiaxée pour l'endommagement par décohésion,

- un effet sensiblement égal quel que soit le chemin de déformatio pour l'endommagement par fragmentation.

Des phénomènes comme l'effet du rayon de courbure d'une pièce formée sur le niveau de la CLFS ou l'effet de chemins de déformations complexes est relié au phénomène d'endommagement.

L'étude du processus de rupture ductile permet d'obtenir une for analytique à la CLFR d'un matériau présentant un endommagement par décohésion. La forme linéaire connue est bien prévue par le modèle proposé.

Dans le cas de l'endommagement par fragmentation, un calcul numé que de la CLFR est mené donnant des résultats en accord avec l'expéri et permettant en particulier de relier la forme en cuvette obtenue po certaines CLFR à ce type d'endommagement.

Cette étude met en évidence plusieurs lacunes dans les connaiss ces scientifiques liées au problème de mise en forme. En particulier les théories de la plasticité apparaîssent incomplètement formulées. théorie de la déformation semble donner de meilleurs résultats et pou tant la forme intégrée des relations contraintes-déformations à laque elle conduit est en opposition avec le comportement expérimental du matériau. La loi de comportement sous contraintes biaxées est aussi très mal formulée par la seule utilisation des deuxièmes invariants d tenseur des contraintes et des déformations. Ces deux sujets doivent faire l'objet d'études extensives et nous commençons, pour notre part à y travailler.

L'endommagement est bien décrit dans ce travail du point de vue de croissance et de coalescence en chemins de déformation linéaires. reste à étudier plus précisément la germination de cet endommagement à l'appui des nombreux modèles existants et aussi l'extension et la généralisation des lois de croissances aux cas de chemins de déformat

non linéaires. Nous mènerons cette étude en nous appuyant, comme nous l'avons fait dans ce travail, sur l'évolution des variations de densités.

L'étude du processus de localisation a été menée pour un matériau à deux zones. Or, il est apparu la nécessité de mener une étude sur un matériau continu afin de prévoir le développement des gradients de déformation. Cette étude sera menée en tenant compte d'une part de la répartition statistique de l'endommagement volumique et d'autre part de la répartition de l'endommagement de surface non considéré dans ce travail.

Enfin la poursuite des travaux se fera en étudiant les matériaux nouveaux, en particulier actuellement les aciers à hautes limites d'élasticité, tant du point de vue loi de comprotement que du point de vue endommagement de volume et de surface.

Ce travail ouvre plusieurs voies de recherches pour la poursuite de l'analyse du processus de mise en forme par déformation plastique. Il représente une étape menée à l'interface entre l'approche métallurgique et l'approche mécanique. Cette position interface est souvent difficile et inconfortable à assumer mais elle représente une voie extrêmement riche de l'étude scientifique du comportement des métaux.

REFERENCES

BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES CHAPITRE A1.

1- S.P. KEELER - Sheet Metal Ind. 42(1965) 683

2- G.M. GOODWIN - Metl. Ital. 8(1968) 767

3- S.P. KEELER - Sheet Metal Ind. Sept(1968) 673

4- K. YOSHIDA, K. ABE, K. MIYAUCHI, T. NAKAGAWA - Met. Ital. 8(1968)

5- C. VEERMAN - 7ème Congrès IDDRG-Amsterdam (1972) 19

6- A. BRAGARD, J.C. BARET, H. BONNARENS - IDDRG- Amsterdam(1972) 72

7- R. D'HAEYER, A. BRAGARD - Met. Rep. C.R.M.n°42-Liège-Belgique (1975) 33

8- S.S. HECKER- IDDRG- Amsterdam(1972) 5

9- I. KOBAYASHI, M. ISHIGAKI, T. ABE - IDDRG- Amsterdam (1972)

0- K. YOSHIDA, K. MIYAUCHI - "Mechanics of sheet metal forming"- Plenum Press. N.Y. London (1978) 19

1- LECLERCQ - Note interne de l'IRSID - Juillet(1975)

2- M. DEGEN - Rapport interne de l'IRSID - Août(1976)

3- H.J. KLEEMOLA, J.O. KUMPULAINEN - J. of Mech. Work. Tech. 3(1980)289

4- H.J. KLEEMOLA, J.O. KUMPULAINEN - J. of Mech. Work. Tech. 3(1980)303

5- P.L. CHARPENTIER - Met. Trans. 6A(1975) 1665

6- L. FELGERES - Centre de Recherches P.U.K. Communication privée

7- T.KIKUMA, K. NAKAZIMA - Trans. Iron and Steel Inst. of Jap. 11 (1971)827

8- M. GRUMBACH, G. SANZ - Mem. Sci. Rev. Met. 71(1974)659

9- R. MARTIN - CETIM Informations Oct(1973)38

0- F. RONDE-OUSTAU - Thèse de Docteur-Ingénieur- Université de Metz- 4mai 1977

1- F. RONDE-OUSTAU, B. BAUDELET - Acta Met. 25(1977)1523

2- V. FERNANDES - Communication privée, Université de METZ, mai (1981)

3- M. GRUMBACH, G. SANZ - Rev. met. 69(1972)273

4- M. GRUMBACH, G. SANZ - IDDRG- Amsterdam- Oct(1972)

5- P. VIGIER, S. LEFORT - Rapport DGRST n°73-7.1593- Fév(1975)

6- J. PLATEAU, G. HENRY -"Rupture des Métaux" Ecole d'été -Lacolle-sur-Loup (1970)

7- G. LE ROY, J.D. EMBURY - Rapport interne n°115 McMaster Université- Avril(1977)

REFERENCES CHAPITRE A2.

1- J.M. JALINIER, N. CHRISTODOULOU, B. BAUDELET, J.J. JONAS - "Formability"-ASM,AIME- (1977)29

2- J.J. JONAS, B. BAUDELET - Acta Met. 25(1977)43

3- U.F. KOCKS, J.J. JONAS, H. MECKING - Acta Met. 27(1979)419

4- R. HILL -"The mathematical theory of plasticity" Oxford Universi Press(1950)

5- J. MANDEL -"Cours de mécanique des milieux continus"- Gauthier Villars- Tome II(1966)

6- R. HILL - J. Mech. Phys. Solids 1(1952)19

7- H.W. SWIFT - J. Mech. Phys. Solids 1(1952)1

8- Z. MARCINIAK - Int. J. Mech. Sci 9(1967)609

9- Z. MARCINIAK -"Mechanics of sheet metal forming" Plenum Press- N.Y. London-(1978)215

10- J.W. HUTCHINSON, K.W. NEALE - ibid-127

11- J.W. HUTCHINSON, K.W. NEALE - ibid-269

12- A. NEEDLEMAN, N. TRIANTAFYLLIDIS - J. of Eng. Mat. and Tech. 100(1978)164

13- R. HILL - Proc. Roy. Soc. London A314(1970)457

14- S. STOREN, J.R. RICE - J. Mech. Phys. Solids 23(1975)421

15- R. HILL, J.W. HUTCHINSON - J. Mech. Phys. Solids 23(1975)239

16- E. SCHMID, W. BOAS - Kristallplastizität, Springer, Berlin(1936)

17- D. FRANCOIS - "Mise en forme des métaux et alliages" Edition du CNRS(1976)49

18- W. JOHNSON, P.B. MELLOR - "Engineering Plasticity"-Von Nostrand Reinhold Company -Londres(1973)

19- V.D. KLIUSMNIKOV - J. Appl. Math. and Mech. 23(1959)1030

20- B.A. BUDIANSKY - J. Appl. Mech. 26(1959)259

21- J.W. RUDNICKY, J.R. RICE - J. Mech. Phys. Solids 23(1975) 371

22- J.W. HUTCHINSON - Proc. Roy. Soc. London - A319(1970)247

23- S.S. GILL, J. PARKER - J. Appl. Mech. 26(1959)77

24- P.N. NAGHIDI, F. ESSENBERG, W. KOFF - J. Appl. Mech. 25(1958)201

25- J. MIASTROWSKI, W. SCZEPINSKI - Int. J. Solids Struc. 1(1965)189

26- H. IVEY - J. Mech. Eng. Sci. 3(1961)15

7- L.W. MU, J.F. BRATT - J. Appl. Mech. 25(1958)411

8- W. MAIR, H.L. PUGH - J. Mech. Eng. Sci. 6(1964)150

9- E. SHIRATORI, K. IKEGAMI, H. OKANO - Bulletin J.S.M.E. 11(1968)413

0- E. SHIRATORI, K. IKEGAMI - J. Mech. Phys. Solids 16(1968)373

1- F.M. NAGHIDI, J.C. ROWLEY, C.W. BEADLE - J. Appl. Mech. 22(1955)416

2- A. PHILIPS, G.A. GRAY - J. Basic Eng. 83(1961)275

3- W. MAIR - J. Strain Anal. 2(1967)188

4- S.S. HECKER - Acta Mech. 13(1972)69

5- S.S. HECKER - Met. Trans. 2(1971)2077

6- S.S. HECKER - ibid - 4(1973)985

7- D.C. DRUCKER - Proc. 1st U.S. Nat. cong. of Appl. Mech.(1951)487

REFERENCES CHAPITRE B1.

1- G. GRUMBACH, C. POMEY - Mem. Sci. Rev. Met. 5(1965)343

2- R. HILL - "The Mathematical Theory of Plasticity"-Oxford Univers Press(1950)

3- M.J. GUILLAUME - C.N.A.M. Paris -Communication privée

4- B. BAUDELET, M. DEGEN, L. FELGERES, P. PARNIERE, F. RONDE-OUSTAU G. SANZ - W.G.2-IDDRG-Varsovie-Pologne(1977)

5- A. PARMAR, P.B. MELLOR - Int. J. Mech. Sci. 20(1978) 385

6- R. HILL - Communication non publiée 18 janv.1977

7- V. FERNANDES - Université de Metz - Communication privée

8- K. YOSHIDA, K. MIYAUCHI - "Mechanics of sheet metal forming" Plenum Press. N.Y. London(1978)19

9- E. VOCE - J. Inst. Met. 74(1948)537

10- H.J. KLEEMOLA, A.J. RANTA-ESKOLA - Met. Trans. 7A(1976)595

11- Z. MARCINIAK - Inst. J. Mech. Sci. 21(1979)609

12- J. GOUZOU, R. D'HAEYER - Rapport CRM n°532/74- CRM-Liège-Belgique(1974)

13- F. RONDE-OUSTAU, B. BAUDELET - Acta Met. 25(1977)1523

14- L. FELGERES - Rapport DGRST n°75-7.1272 Septembre (1977)

15- D. RAULT, M. ENTRINGER - Mem. Sci. Rev. Fran. Met. 4(1980)

16- A.K. GOSH - J. of Eng. and Tech. Juillet(1977)264

17- J.W. HUTCHINSON, K.W. NEALE - Acta Met. 25(1977)839

18- J.J. JONAS, N. CHRISTODOULOU - Scripta Met. 12(1978)393

19- J.M. JALINIER, N. CHRISTODOULOU, B. BAUDELET, J.J. JONAS - "Formability"- ASM/AIME-(1977)29

20- U.F. KOCKS, J.J. JONAS, M. MECKING - Acta Met. 27(1979)419

21- D.A. WOODFORD - Trans. of the ASM- 62(1969)291

22- H. HERO - Xème Congrès IDDRG- Portcullis Press Ltd-Angleterre(1 179

23- M. OYTANA - Communication privée- Nov. 1980

24- M. SUERY - Thèse d'Etat - Université de Metz- 22 juin(1979)

25- G. REGAZZONI, R. DORMEVAL, C. HOMER, F. MONTHEILLET, M. STELLY, J.M. JALINIER - Communication au "Groupe de réflexion Endommagement" Nantes- Oct.(1980)

26- A. MOLINARI, B. BAUDELET - Soumis pour publication

27- M. LEROY - E.N.S.M. de Nantes - Communication privée - Oct.(1980)

REFERENCES CHAPITRE B2.

1- J.H. SCHMITT, J.M. JALINIER, B. BAUDELET, L. FELGERES, F. BOUTI Rapport DGRST n°78-7.2710- Juin(1980)

2- W.J. PETCH - J. Iron Steel Inst. 173(1954)25

3- U.F. KOCKS - Scripta Met. 14(1980) 449

4- A. PARMAR, P.B. MELLOR, J. CHAKRABARTY - Int. J. Mech. Sci. 19(1977)389

5- Z. MARCINIAK - Cours présentés en 1973 à l'Université Mc Master Hamilton - Ontario-Canada

6- B.J. CANE, G.W. GREENWOOD - Met. Sci. 9(1975)55

7- M.V. SPEICHT, W. BEERE - Met. Sci. 9(1975) 190

8- R.RAJ, M.F. ASHBY - Acta Met. 23(1975)653

9- D. HULL, D.E. RIMMER - Phil. Mag. 4(1959)673

10- M.F. ASHBY, G. GANDHI, D.M. TAPLIN - Acta Met. 27(1979)1565

11- S. TAKEUCHI, A.S. ARGON - J. Mat. Sci. 11(1976)1542

12- A.J. PERRY - J. Mat. Sci. 9(1974)1016

13- I. SERVI, N.J. GRANT - Trans. AIME 191(1951)909

14- J.D. ESHELBY - Proc. R. Soc. A241(1957)376

15- M.F. ASHBY - Phil. Mag. 14(1966)1157

16- A.S. ARGON, J. IM, R. SAFOGLU - Met. Trans. 6A(1975)825

17- A. MELANDER - Scand. J. Met. 8(1979)99

18- K. TANAKA, T. MORI, T. NAKAMURA - Phil. Mag.(1970)267

19- F.M. BEREMIN - Soumis pour publication à Met. Trans.

20- F.M. BEREMIN - Réunion du "Groupe de réflexion Endommagement"- Nantes-France-Oct(1980)

21- F. MOUSSY - Rapport interne IRSID n°PA1-3955FM/NG(1977)

22- C. SOUZA-NOBREGA, B. FIDELIS DA SILVA, G. FERRAN, J.M. JALINIER B. BAUDELET - Mem. Sci. Rev. Met. 3(1980)293

23- J.M. JALINIER, R. ARGEMI, B. BAUDELET - J. Mat. Sci. 13(1978)11

24- J.M. JALINIER, J.H. SCHMITT, R. ARGEMI, J.L. SALSMANN, B. BAUDE Mem. Sci. Rev. Met. 3(1980)313

25- J.H. SCHMITT, J.M. JALINIER - Soumis pour publication à Acta Me

26- J. DUFAILLY - Thèse de 3° cycle- Université de Paris VI-(1980)

7- J. LEMAITRE, J. DUFAILLY - 3ème Congrès Franc. dé Mécanique- Grenoble(1977)

8- J.P. CORDEBOIS, J.M. JALINIER, J. DUFAILLY, P. LE NEVEZ - Rapport DGRST n°11636- Oct(1978)

9- J. LEMAITRE, J.P. CORDEBOIS, J.M. JALINIER - Rapport DGRST n°78-7.2704- Juin(1980)

0- J.P. CORDEBOIS - Communication privée - Oct(1980)

1- S. BLOUET, R. RAULT, M. ENTRINGER - Symposium Hydrogène- Metz- mars(1981)

2- D. WAGNER - réunion du "Groupe de réflexion Endommagement" Sophia-Antipolis- Oct(1979)

3- R.T. RATCLIFFE - Brit. J. Appl. Phys. 16(1965)1193

4- J.M. JALINIER - Thèse de Docteur-Ingénieur- Université de Metz - 17 mai(1978)

5- P.D. HOLMES - Thèse de Ph. D.-Université de Sheffield-Angleterre- Oct.(1973)

6- M. HERITIER - réunion du "Groupe de réflexion Endommagement"-Sophia-Antipolis- Oct(1979)

7- D. ROUBY, J. FALCE, P. FLEISHMANN - 3ème colloque "Méthodes d'Investigation dans les métaux"- St.Etienne- Déc(1980)

8- C. JANOT - Communication privée

9- J. DUFAILLY, J.M. JALINIER, J.H. SCHMITT, J. LEMAITRE, B. BAUDELET - J. Mat. Sci. 15(1980)3162

0- J. DUFAILLY - Thèse de 3° cycle- Université de Paris VI (1980)

1- J. GURLAND - Acta Met. 20(1972)735

2- J.H. SCHMITT, J.M. JALINIER; B. BAUDELET - J. Mat. Sci. 16(1981)95

3- F.A. McCLINTOCK - J. Appl. Mech. 35(1968)363

4- J.R. RICE, D.M. TRACEY - J. Mech. Phys. Solids 17(1969)201

5- A. NEEDLEMAN - J. Appl. Mech. 36(1972)1

6- G. LE ROY, J.D. EMBURY, G. EDWARD, M.F. ASHBY - Accepté pour publication dans Acta Met.(1981)

7- O. ASCEIRAD, D.V. WILSON - Xème congrès IDDRG-Porculiss Press- Londres-(1978)155

8- J.M. JALINIER, J.H. SCHMITT - Soumis pour publication à Acta Met.

9- J.M. JALINIER - Proc. 4ème I.C.P.E. - Tokyo-Japon- Août(1980)150

0- J.M. JALINIER - à publier dans les "Cahiers du Groupe Français de Rhéologie"

51- C.M. KATCHANOV - Izv. Akad. Nank. S.S.R. Otd. Tekh.Nank.8(1958)

52- Y.N. RABOTNOV - Proc. XIIème Cong. Appl. Mech. Stanford(1968)

53- J. LEMAITRE, J.L. CHABOCHE - J. Mec. Appl. 3(1978)317

54- F. SIDOROFF - J. Mech. 3(1975)

REFERENCES CHAPITRE B3.

1- C.C. VEERMAN - Communication au 7ème congrès IDDRG- Amsterdam-Oct(1972)

2- J.M. JALINIER, N. CHRISTODOULOU, B. BAUDELET, J.J. JONAS - "Formability"-ASM/AIME-(1977)29

REFERENCES PARTIE C

CHAPITRES C1 - C2 - C3

1- M.G. COCKCROFT, D.J. LATHAM - J. Inst. Met. 96(1968)33

2- M. OYANE - Bull. J.S.M.E. 15(1972)1507

3- M. OYANE, T. SATO, K. OKIMOTO, S. SHIMA - J. Mech. Work. Tech. 4(1980)65

4- D.M. NURRIS, J.E.E REAUGH, M. MORAN, D.F. QUINONES - J. Eng. Mat. Tech. 100(1978)279

5- J.W. HANCOCK, A.C. MACKENZIE - J. Mech. Phys. Solids 24(1976)147

6- P. W. BRIDGMAN - "Large Plastic Flow and Fracture"-McGraw Hill/Book Co, N.Y.(1952)

7- J. LEMAITRE, J.L. CHABOCHE - J. Mec. Appl. 2(1978)

8- Y.N. RABOTNOV - Proc. XII Int. Cong. Appl. Mech.(1968)

9- Z. MARCINIAK - Cours présentés à l'Université McMaster-Hamilton-Ontario-Canada(1973)

10- P.F. THOMASON - J. Inst. Met. 96(1968)360

11- A.K. GOSH - Met. Trans. 7A(1976)523

12- J.H. SCHMITT, J.M. JALINIER, B. BAUDELET - J. Mat.Sci. 16(1981)95

13- I.A. FRENCH, P.F. WEINRICH - Met. Trans. 6A(1975)785

14- J. GURLAND - Acta Met. 20(1972)735

15- L.M. BROWN, J.D. EMBURY - Proc. 3ème Int. Conf.Strength of Metals and Alloys - Cambridge-Angleterre(1973)164

16- G. LE ROY - Communication au "Groupe de réflexion Endommagement"-Nantes- Oct(1980)

17- G. LE ROY, J.D. EMBURY, G. EDWARD, M.F. ASHBY - accepté pour publication dans Acta Met.

18- S. FLOREEN, M.W. HAYDEN - Met. Sci. J. 4(1970)77

19- S. FLOREEN, H.W. HAYDEN - Scripta Met. 4(1970)87

20- A. MELANDER - Rapport Interne TRITA-MAC-0142- Roy. inst. Tech.-Stockholm-Suède-1978

21- F.A. McCLINTOCK - "Ductility"-ASM-Metals Park-Ohio- (1968)255

REFERENCES ANNEXE I.

1- K. NAKAZIMA, T. KIKUMA, H. KANAME - Yawata Tech. Rep. 264(1968)

2- S. FUKUI - Sci. pap. of the Inst. Phys. Chem. Res. 34(1938)1422

3- H.W. SWIFT - J. Mech. Phys. Solids 1(1952)1

4- Z. MARCINIAK, J. KOLODZIEJSKI - Proc. 7ème Congrès IDDRG Amsterdam (1972) 6.1

5- P. VIGIER; S. LEFORT - Rapport DGRST n°73-7.1593 - Fév(1975)

6- G. LECLERCQ - Note interne à l'IRSID -Juillet(1975)

7- S.P. KEELER - IDDRG-Dusseldorf- WGII- Oct(1975)

8- M. DEGEN - Rapport interne à l'IRSID- n°2071MD/RA- Août(1976)

9- A. HABERFIELD, M. BOYLES - Sheet Met. Ind. juillet(1973)400

10- M.J. PAINTER, R. PEARCE - J. Appl. Phys. 7(1974)992

11- MARTIN - CETIM Informations - Oct(1975)38

12- H.J. KLEEMOLA, J.O. KUMPULAINEN - J. Mec. Work. Tech. 3(1980)28

13- H.J. KLEEMOLA, J.O. KUMPULAINEN - ibid. 3(1980)303

REFERENCES ANNEXE 2.

1- J. MANDEL - "Cours de Mécanique des Milieux Continus"- Gauthier-Villars- tome II(1966)

2- J. LEMAITRE -"Mise en forme des métaux et alliages" Ed. du CNRS-(1976)145

3- H.W. SWIFT - J. Mech. Phys. Solids 1(1952)1

4- A. CONSIDERE - Ann. des Ponts et Chaussées 9(1885)574

5- R. HILL - J. Mech. Phys. Solids 1(1952)19

6- J.W. HUTCHINSON, K.W. NEALE - "Mechanics of sheet metal forming" Plenum Press, N.Y. Londres (1978)127

7- J.W. HUTCHINSON, K.W. NEALE - Ibid. (1978)269

8- Z. MARCINIAK - Int. J. Mech. Sci. 9(1967)609

9- Z. MARCINIAK - Met. Italiana 8(1968)701

0- Z. MARCINIAK - Cours présentés à l'Université McMaster, Hamilton, Ontario-Canada (1973)

1- J.W. HUTCHINSON, K.W. NEALE, A. NEEDLEMAN - "Mechanics of sheet metal forming" Plenum Press, N.Y. Londres (1978)11

2- S. STOREN, J.R. RICE - J. Mech. Phys. Solids 23(1975) 421

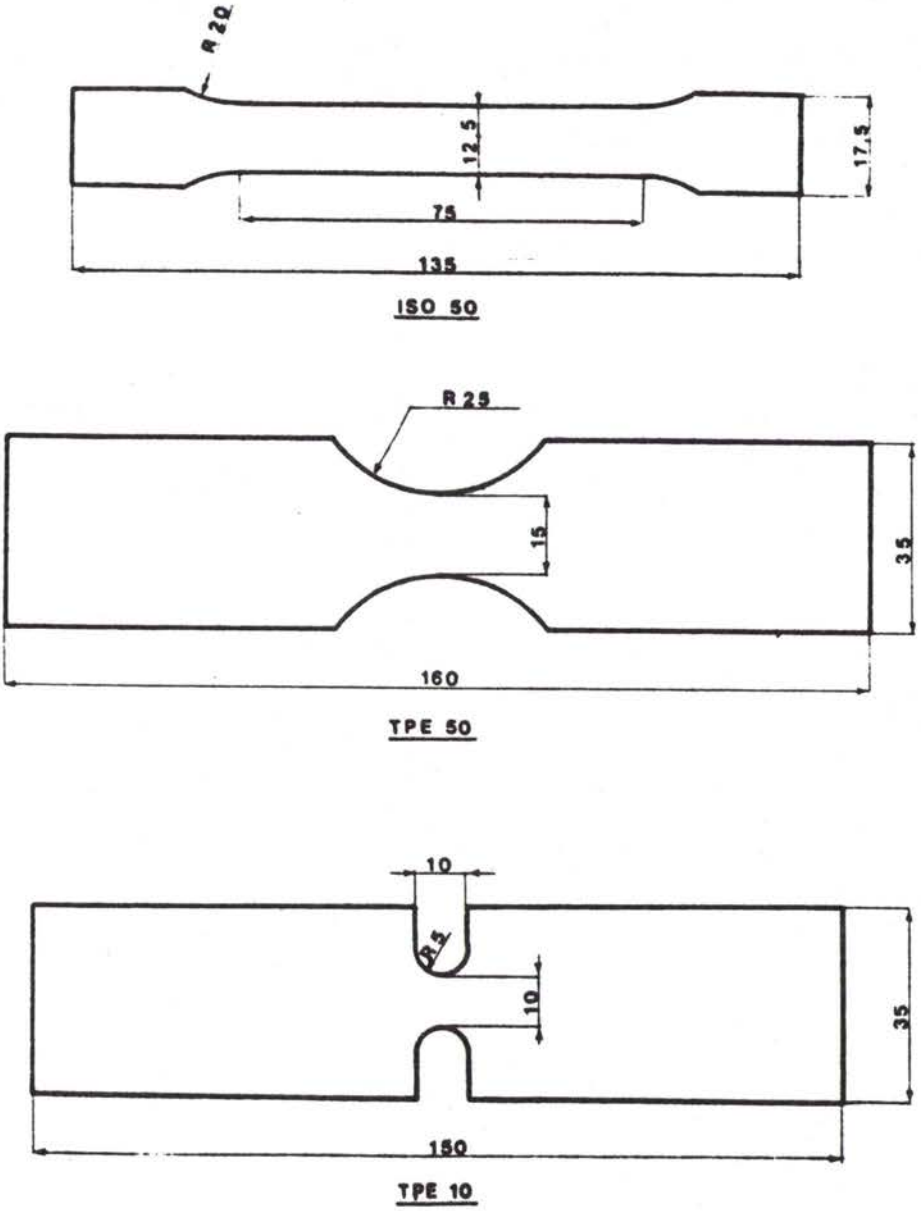


fig.N1/1 Eprouvettes de traction entaillées.

ANNEXE 1.

INFLUENCE EXPERIMENTALE DE CERTAINS PARAMETRES SUR LA COURBE LIMITE DE FORMAGE A STRICTION

Annexe 1.1 LES MOYENS D'ESSAIS ET LEUR INFLUENCE EXPERIMENTALE SUR LA CLFS

Différents essais simulatifs permettent de déterminer la CLFS. Chaque type d'essai permet d'effectuer différents chemins de déformation linéaires permettant d'établir tout ou partie de la CLFS. Les principaux essais seront décrits en représentant la partie de la CLFS accessible dans l'espace $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

1.1.1 Essais de traction.

Ces essais consistent à effectuer, à l'aide d'une machine de traction conventionnelle, des essais sur différentes géométries d'éprouvettes (fig.N1/1).

L'éprouvette lisse correspond à la traction simple uniaxiale, les éprouvettes entaillées permettent de se rapprocher de la déformation plane, d'autant plus que le rayon à fond d'entaille est plus faible.

Il est à noter que les éprouvettes entaillées développent de très forts gradients de déformation qui rendent difficile les mesures. Une autre solution est d'employer des éprouvettes larges qui permettent aussi de se rapprocher de la déformation plane d'autant plus que le rapport largeur sur longueur utile est plus grand (fig.N1/2). Ces éprouvettes présentent au centre une zone de déformation quasi homogène suffisante pour permettre de bonnes mesures et autoriser le prélèvement d'échantillons.

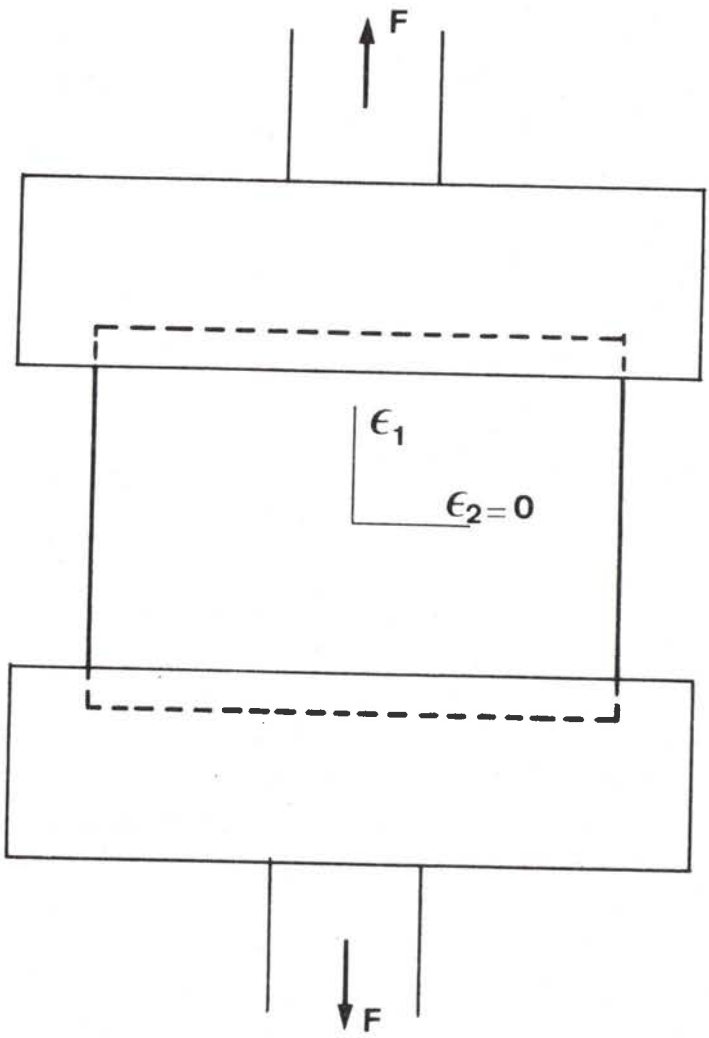


fig.N1/2 Eprouvette large utilisée pour obtenir un état de déformation plane.

1.1.2 Essais de gonflement hydraulique.

L'essai Jovignot du gonflement hydraulique (fig.N1/3) consiste à appliquer une pression d'huile sous un flan encastré dans une matrice présentant une ouverture de forme circulaire ou elliptique. La pièce ainsi formée est un dôme en forme d'ellipsoïde. Cet essai permet de déterminer la CLFS dans tout le domaine de l'expansion et complète ainsi l'essai précédant. Une grande zone de déformation homogène existe au sommet de l'embouti.

Cet essai est très pur car il n'existe pas de contact outil pièce et seul le comportement du métal est testé de plus, cet essai permet de déterminer les contraintes appliquées par mesure de l'épaisseur e, de la pression courante p et des rayons de courbure R_1 et R_2 au sommet en appliquant les équations suivantes établies à partir de l'équation d'équilibre :

$$\frac{\sigma_1}{R_1} + \frac{\sigma_2}{R_2} = \frac{p}{e}$$

$$\sigma_1 = \frac{pR_1}{2e}\left[2 - \frac{R_1}{R_2}\right]$$

$$\sigma_2 = \frac{pR_1}{2e}$$

Dans cette mesure, la plus grande difficulté réside dans la détermination avec précision des rayons de courbure.

1.1.3 Essais simulatifs sur presse.

Les essais décrits dans ce pragraphe nécessitent une presse d'emboutissage ou, à défaut, une machine de compression.

i) Essai Nakazima /17/

Cet essai consiste à emboutir à l'aide d'un poinçon hémisphérique, des flans rectangulaires de différentes largeur (fig.N1/4). Le fait de

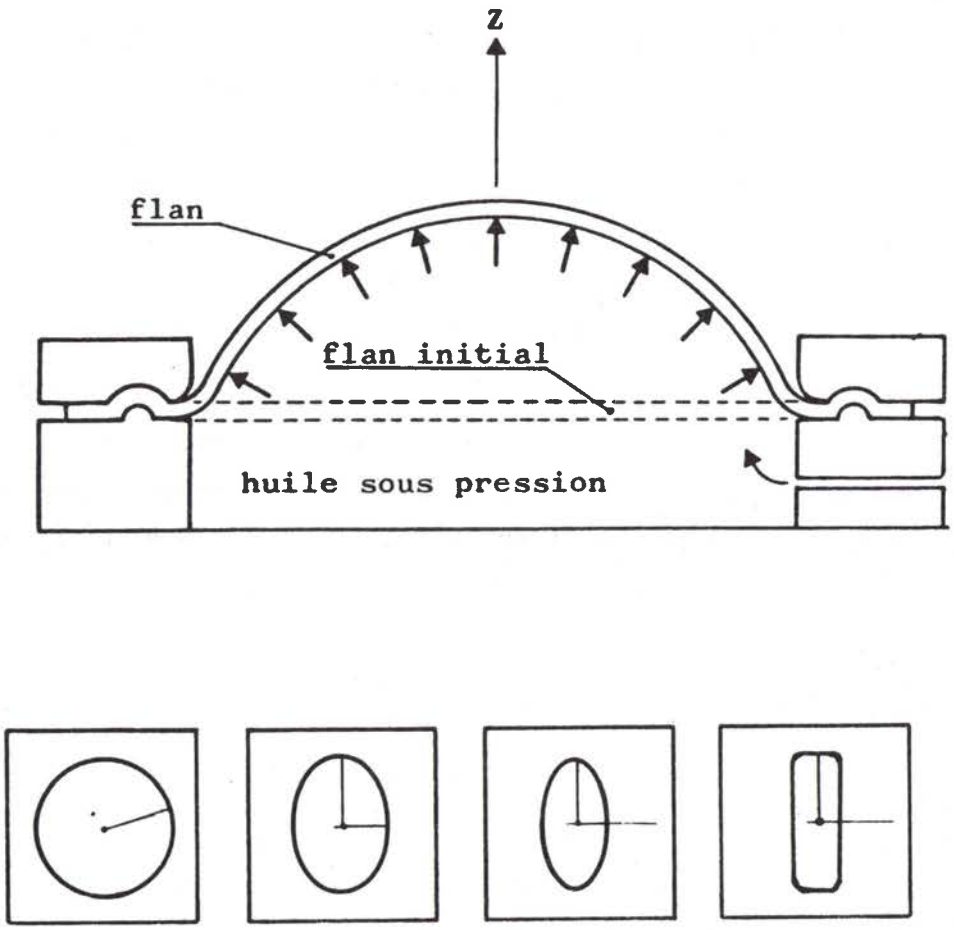


fig.N1/3 Essai Jovignot de gonflement hydraulique - Géométrie des différentes matrices utilisées.

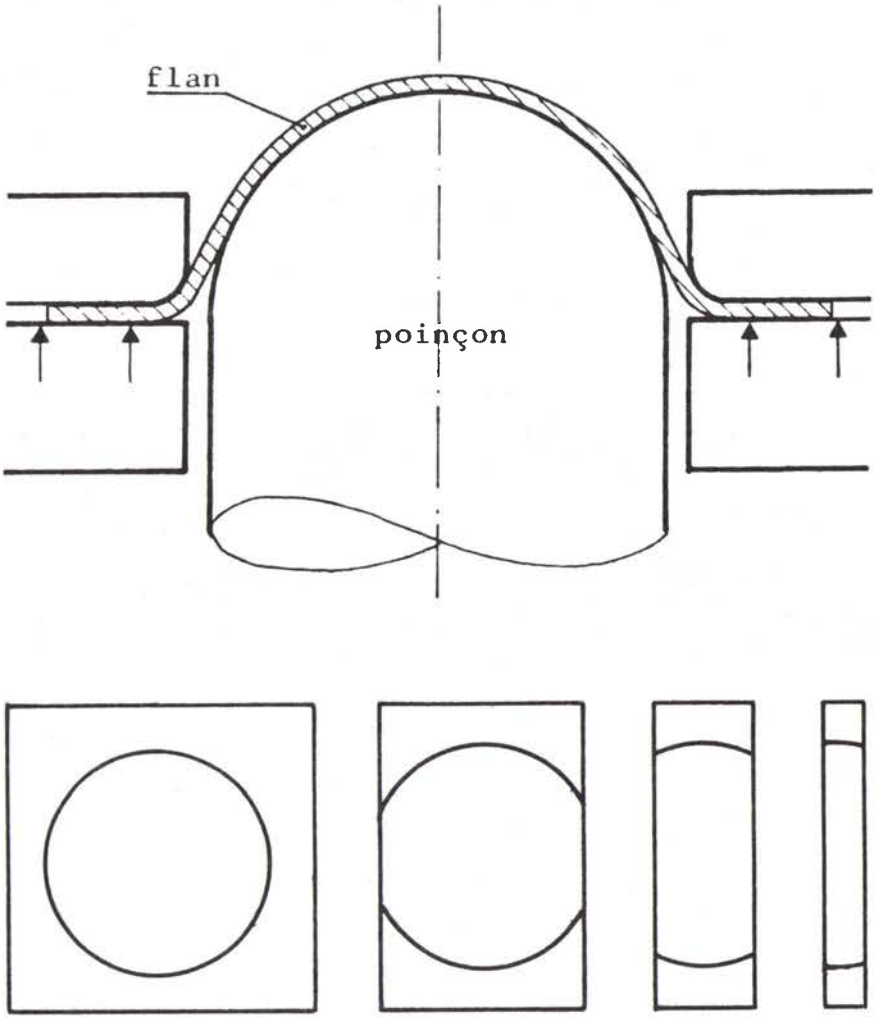


fig.N1/4 Essai Nakazima d'emboutissage - Géométrie des différents flans utilisés.

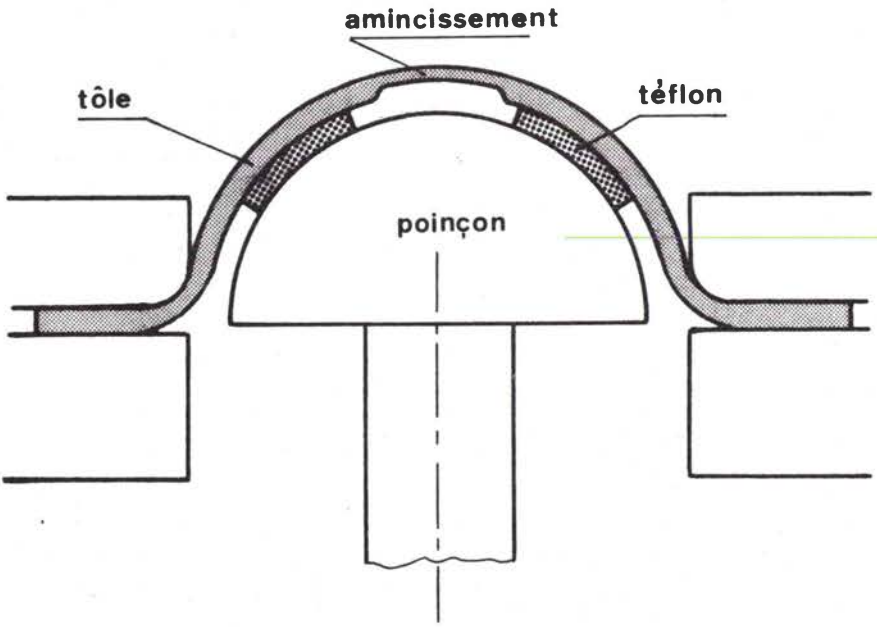


fig.N1/5 Essai de déformation "In plane stretching".

faire varier la largeur de ces flans permet de décrire toute la CLF. Les frottements entre le poinçon et la tôle ne permettent pas d'obtenir, à sec, un état de déformation équibiaxé. Il est alors nécessaire d'utiliser des combinaisons de lubrifiant solide P.T.F.E. :("teflon") et liquide (huile minérale) entre l'outil et la pièce.

Cet essai a l'avantage de permettre, à lui seul, de décrire toute la CLF. Il simule mieux l'emboutissage réel par la présence du contact outil-pièce, par contre il ne permet pas de distinguer les phénomènes liés au comportement du matériau de ceux liés au contact avec frottement entre le flan et le poinçon.

ii) I.P.S. (In Plane Stretching).

Cet essai consiste à effectuer un amincissement circulaire ou elliptique de l'épaisseur de la tôle et de déformer la tôle ainsi amincie à l'aide d'un poinçon hémisphérique en interposant une rondelle de P.T.F.E. (fig.N1/5). Cet essai permet d'obtenir des chemins de déformation dans le domaine de l'expansion par variation de la forme de l'amincissement. Il est surtout surprenant par les résultats obtenus pour la détermination des CLFS qui sont présentées au paragraphe 1.1.5.

iii) Essai par poinçon à fond plat.

Dans cet essai, la tôle est emboutie à l'aide d'un poinçon à fond plat de forme circulaire ou elliptique. La partie de la tôle en contact avec le fond du poinçon subit une expansion tout en restant plane ce qui est très intéressant pour découper dans cette partie des éprouvettes dans le but d'effectuer des chemins de déformation complexes. La déformation atteinte est en général faible car la rupture intervient par localisation intense de la déformation au voisinage du rayon de fond du poinçon. Cet essai est donc surtout employé pour la détermination des CLF en chemin de déformation complexe.

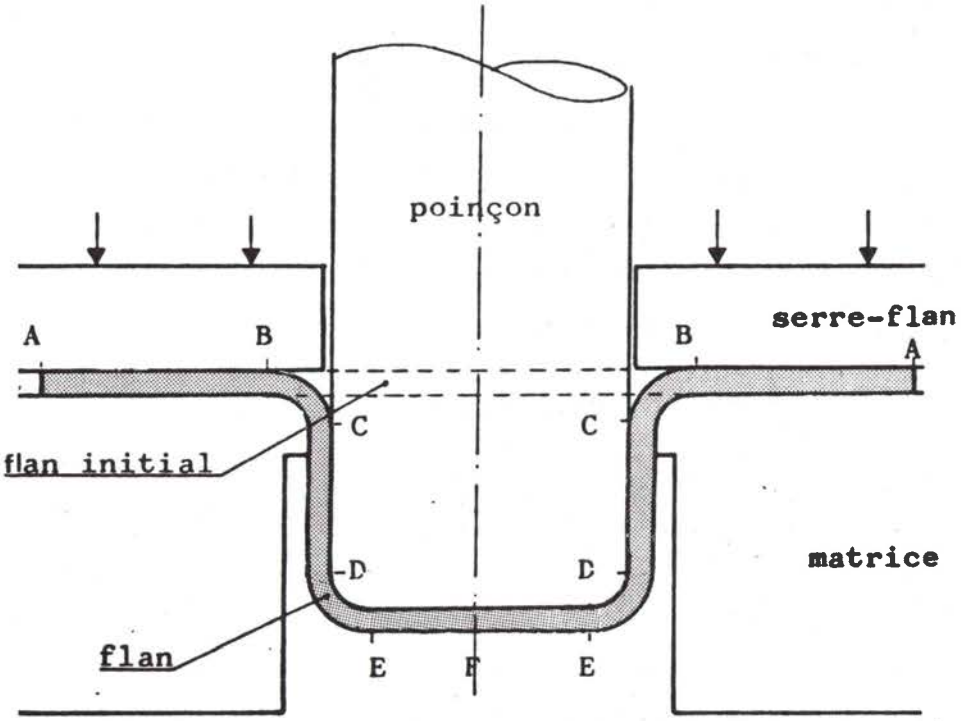


fig.N1/6 Essai Swift.

iv) Essais Fukui et Swift /2,3/

Ces essais ne permettent que d'effectuer un seul chemin de déformation. Aussi leur rôle principal n'est pas de contribuer à la détermination de la CLF mais surtout de donner un paramètre représentatif de la mise en forme du métal.

L'essai Swift consiste à emboutir un flan avec un poinçon cylindrique à fond plat en autorisant le glissement de la tôle sous le serre-flan (fig.N1/6). L'essai Fukui (ou essai de coupelle conique) consiste à à emboutir, dans une matrice tronc-conique, un flan circulaire libre à l'aide d'une bille (fig.N1/7). La mesure des déformations atteintes à rupture et de la profondeur de l'embouti sont deux paramètres représentatifs des possibilités de mise en forme du métal.

1.1.4 Essais de cisaillement plan.

Un dispositif simple permet de faire tourner l'extérieur d'un disque de tôle par rapport à l'intérieur fixe (fig.N1/8). Cet essai permet d'effectuer un cisaillement simple dans l'épaisseur du matériau, le chemin de déformation suivi est $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 (\varepsilon_3 = 0, \rho = -1)$. La CLFS présente un niveau très élevé dans cette zone, infini d'après la théorie de Hill. Ce type de sollicitation conduit donc toujours à des déformations grandes par rapport à celles obtenues en traction uniaxiale.

Par comparaison des déformations entre deux cercles situés sur des rayons voisins, il est possible de déterminer le coefficient d'écrouissage n d'une loi de comportement $\sigma_e = K\varepsilon_e^n$ sans mesure du couple appliqué /4/. La déformation évoluant de zéro à la périphérie fixe à sa valeur extrême à la périphérie mobile, l'évolution du coefficient n peut être déterminée pour tout le domaine de déformation accessible avec une seule éprouvette déformée. De plus, cette évolution peut être déterminée, sur cette seule éprouvette, le long de différentes directions inclinées par rapport à la direction de laminage.

Ainsi, cet essai très simple à mettre en oeuvre, permet d'accèder à de nombreuses informations importantes.

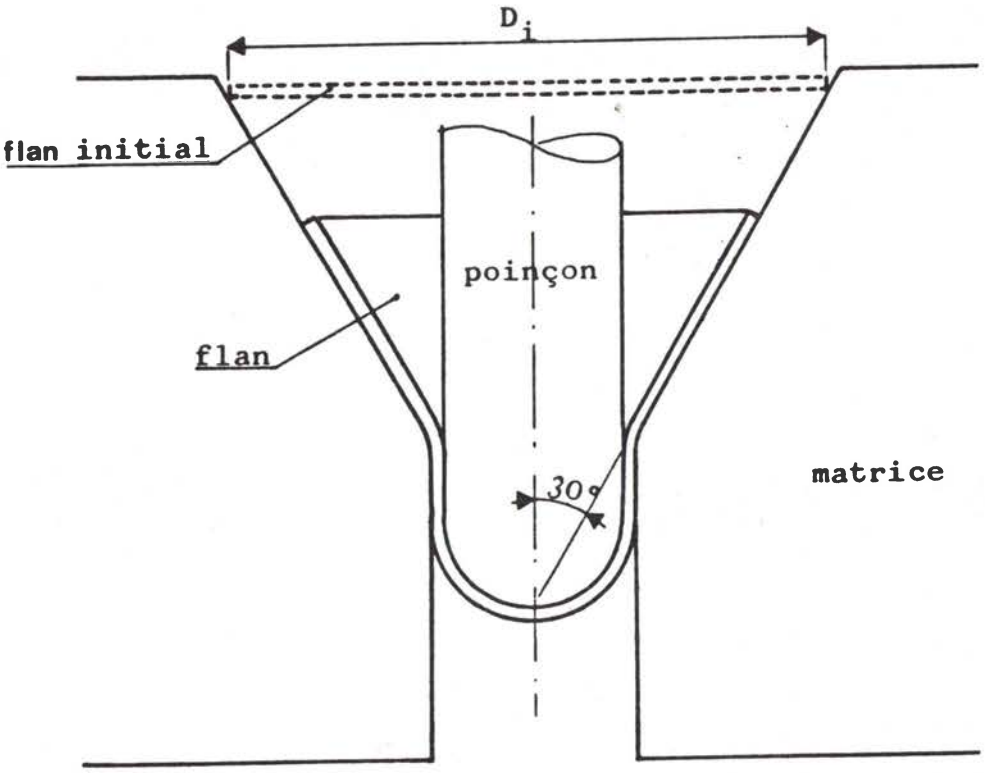


fig.N1/7 Essai Fukui.

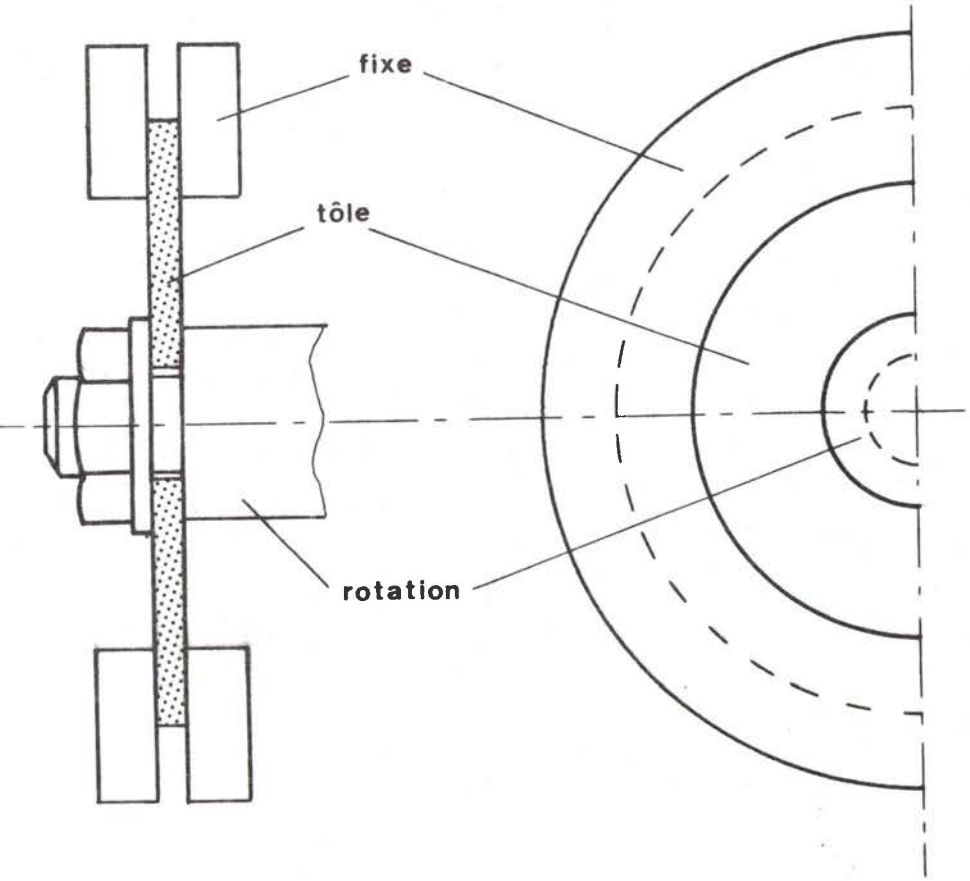


fig.N1/8 Essai de cisaillement sur disques de tôle.

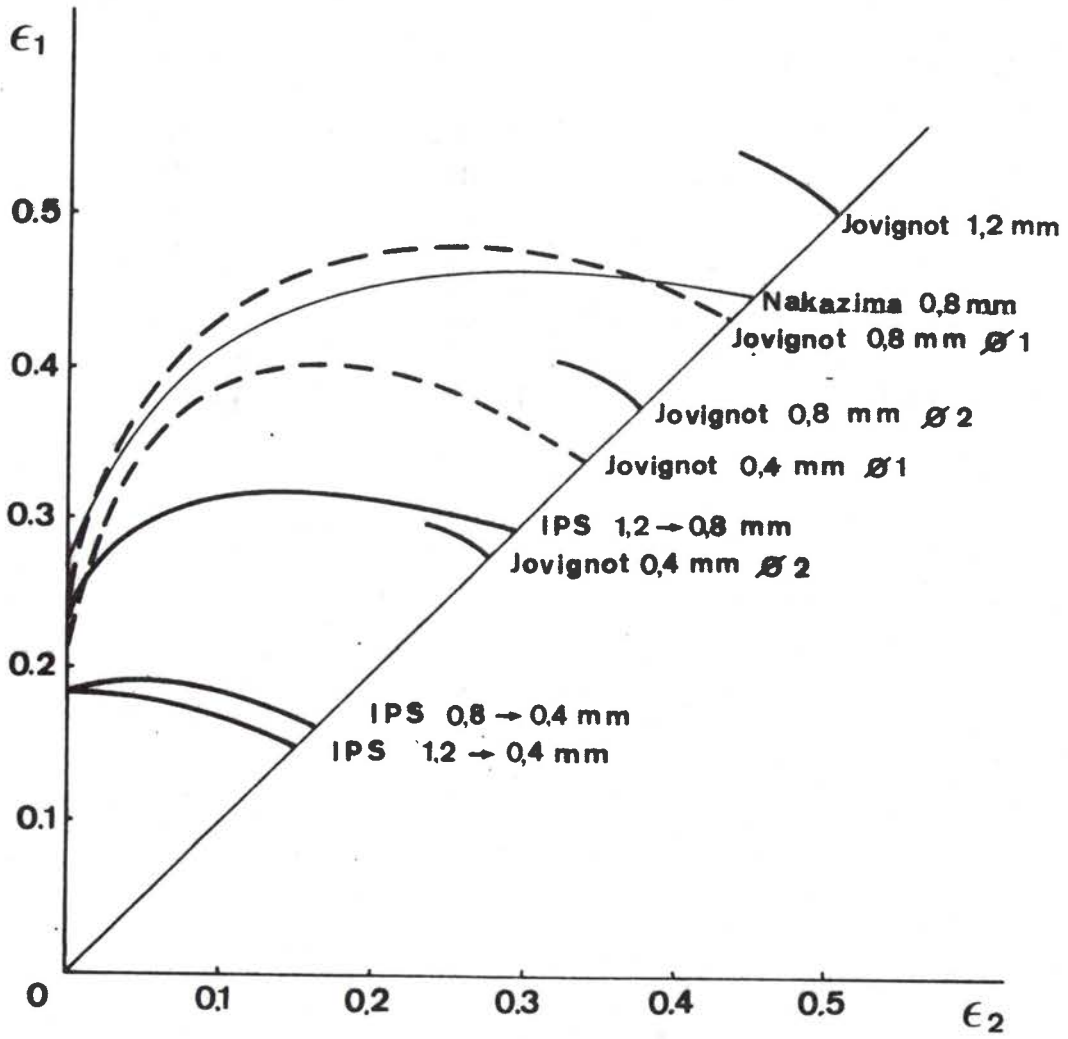


fig.N1/9 Effet du système de sollicitation et de l'épaisseur de la tôle sur le niveau de la CLFS. Trois épaisseurs 1.2mm, 0.8mm, 0.4mm d'alliage d'aluminium 3003 ont été essayées en gonflement hydraulique en matrice de grand axe : $\emptyset_1$=150mm, $\emptyset_2$=300mm et en essai I.P.S. en amincissant la tôle de 1.2mm à 0.8mm, de 1.2mm à 0.4mm, de 0.8mm à 0.4mm.

1.1.5 Comparaison des CLF.

Les CLFS obtenues à l'aide de ces différents essais simulatifs peuvent être comparées. La figure N1/9 présente, pour une même méthode de dépouillement (méthode Hecker) les CLFS obtenues par essais Nakazima, Jovignot, traction entaillée et IPS. Tous ces essais, sauf l'essai IPS, donnent la même limite de formage, la différence entre cette courbe et celle déterminée en IPS est considérable. Le fait de solliciter le matériau dans une zone amincie conduit à un tenseur des contraintes appliquées dans cette zone probablement très hétérogène. Les chemins de déformation relevés sont d'ailleurs très différents comme le montre la figure N1/10, où l'on observe une localisation beaucoup plus rapide de la déformation dans l'essai IPS que dans l'essai Jovignot. Ce phénomène reste actuellement inexpliqué.

Il est à noter qu'aucune influence notable n'a été observée sur le niveau de la CLFR, ainsi, la différence de niveau des CLFS semble être uniquement un problème de conditions mécaniques (champ de contrainte) amenant à la striction.

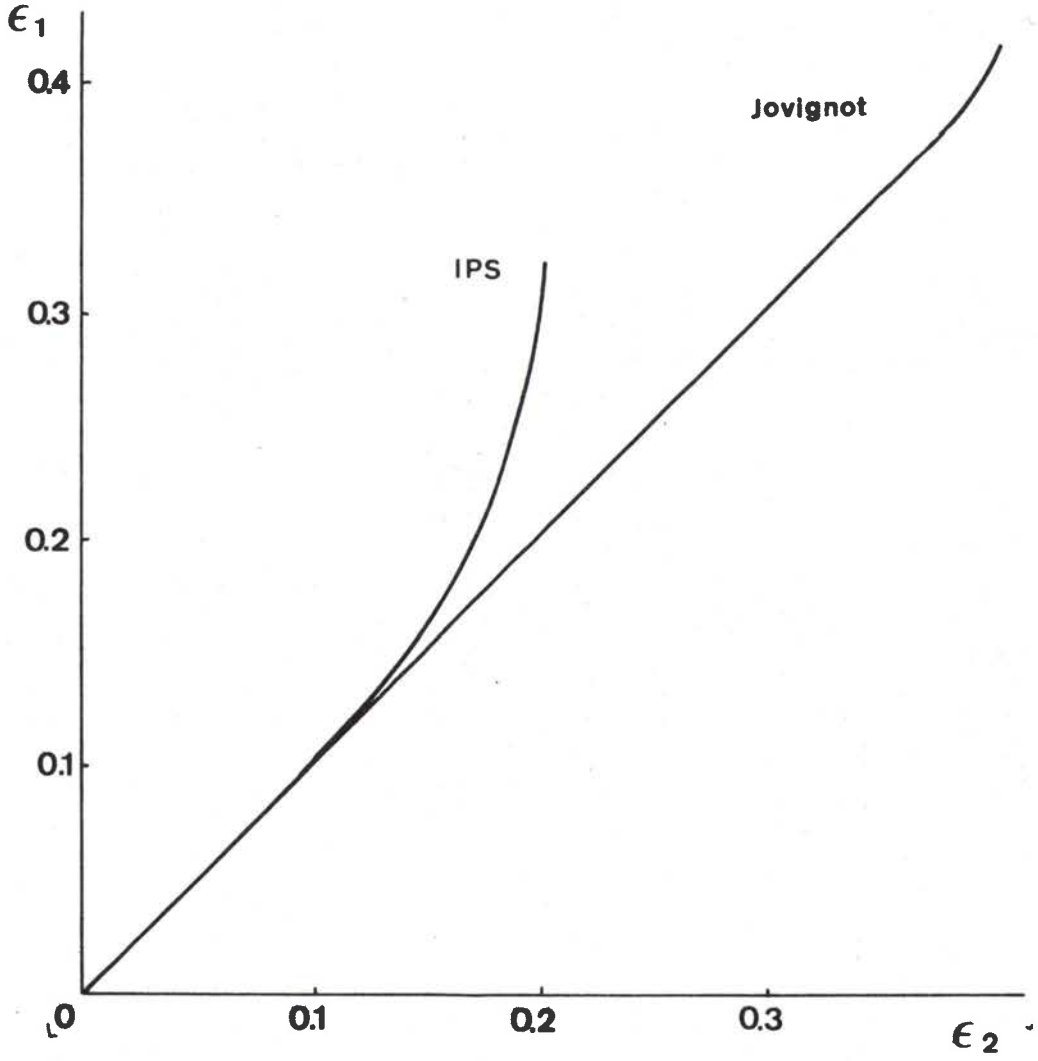


fig.N1/10 Comparaison des chemins de déformation obtenus en essai Jovignot et en essai I.P.S.

Annexe 1.2 INFLUENCE DE L'EPAISSEUR INITIALE DU MATERIAU SUR LA POSITION DE LA CLFS.

Plusieurs auteurs ont apporté une influence expérimentale de l'épaisseur de la tôle formée sur la forme et la position de la CLFS. L'étude de cette influence doit être menée, toutes choses égales par ailleurs. Ce point est important et deux approches principales ont été retenues :

- un même lingot de métal laminé jusqu'à différentes épaisseurs,
- une tôle épaisse usinée de façon symétrique sur chacun de ses plans pour en diminuer l'épaisseur.

La première méthode a l'inconvénient que le métal subit des taux d'écrouissage différents pour différentes épaisseurs et qu'ainsi ses caractéristiques d'écrouissage et d'anisotropie sont légèrement différentes. Il a été vérifié que l'incidence sur le niveau de la CLFS des variations de ces paramètres pour différentes épaisseurs est négligeable devant l'effet expérimental observé pour des épaisseurs voisines (de 0,5 à 2mm) /*/.

Une tôle laminée n'est pas parfaitement homogène dans l'épaisseur. La deuxième méthode, procédant par enlèvement de matière, a donc l'inconvénient de faire apparaître une variation des propriétés de la tôle avec l'épaisseur. Il a aussi été vérifié dans ce cas que ce phénomène avait une influence négligeable sur le niveau de la CLFS /5/.

La figure N1/11 /6/ représente l'influence de l'épaisseur observé pour un acier doux d'emboutissage. On remarque une influence très sensible dans le domaine de l'expansion alors que dans le domaine du rétreint les courbes se ressèrent pour se rejoindrent en traction uniaxiale.

La figure N1/12 /*/ présente l'influence de l'épaisseur observée sur un alliage d'aluminium 3003. On remarque cette fois-ci un effet

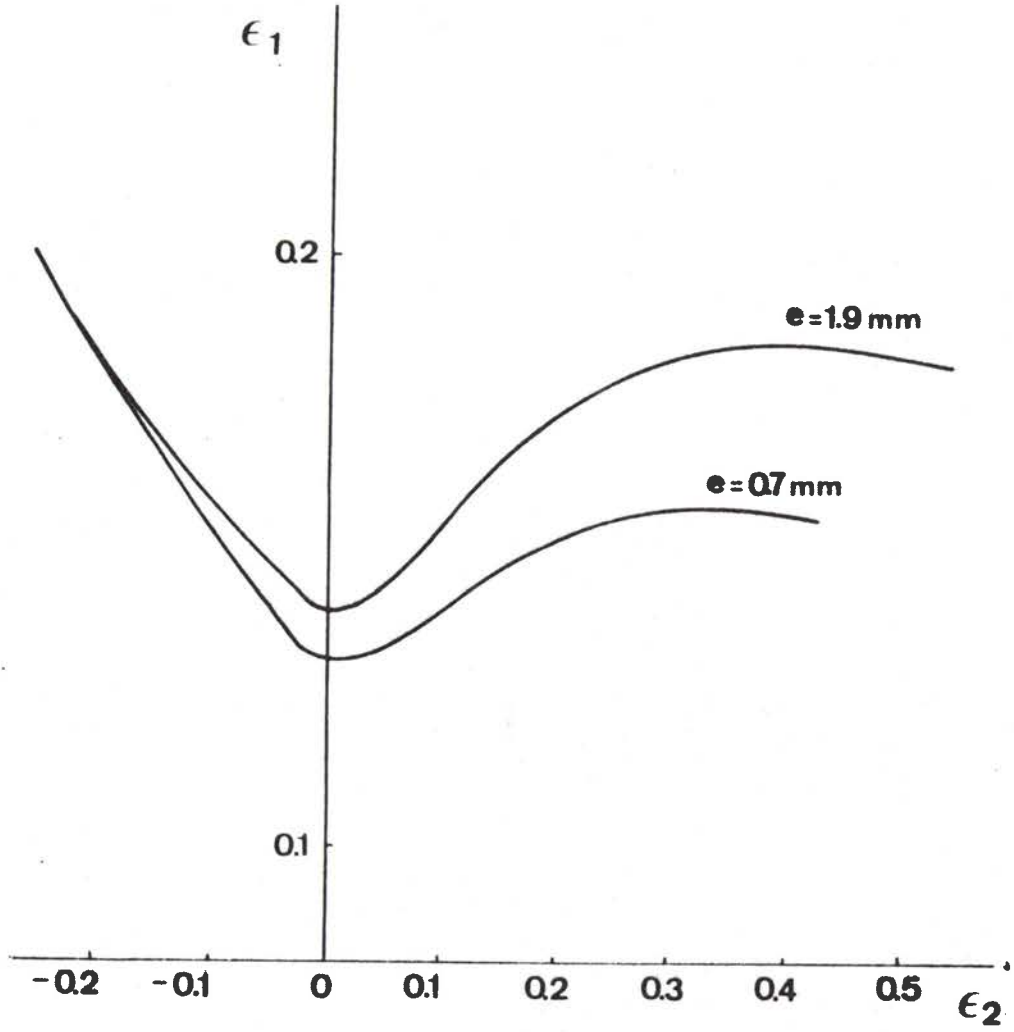


fig.N1/11 Effet expérimental de l'épaisseur initiale de la tôle formée sur le niveau de la CLFS pour un acier doux d'emboutissage.

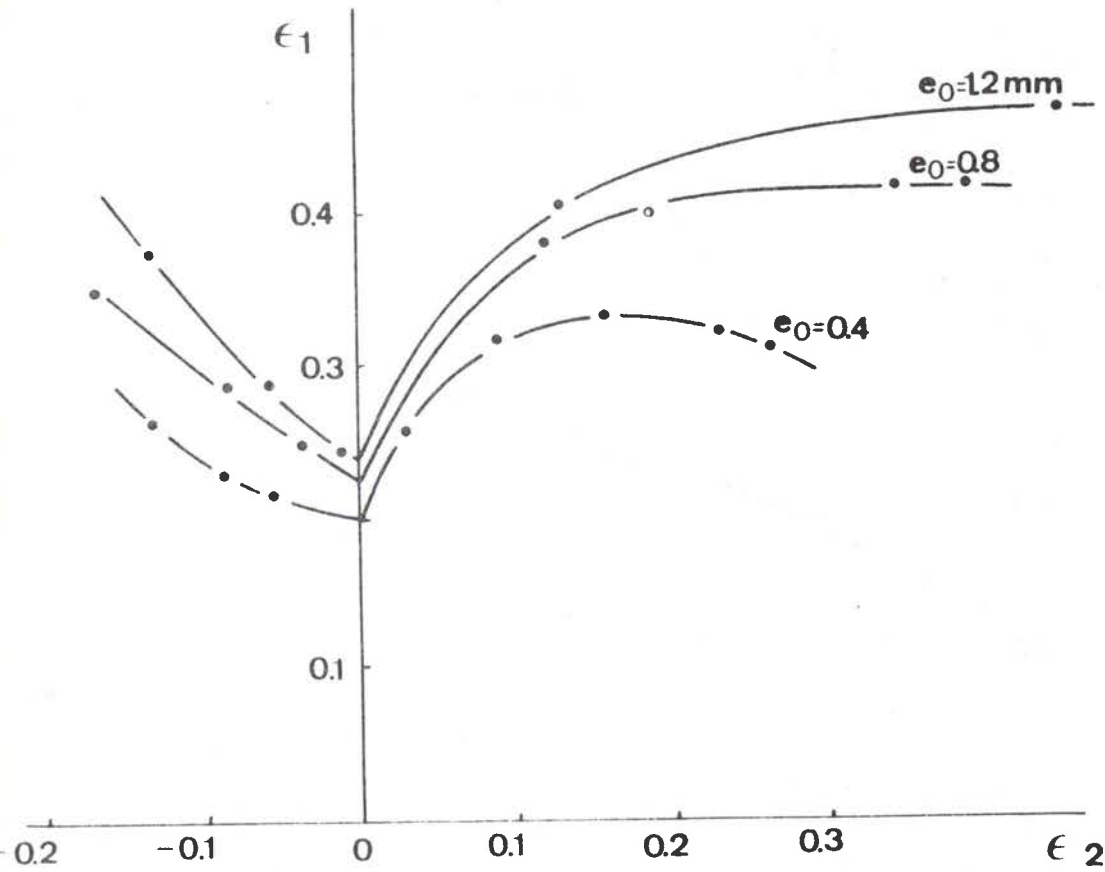


fig.N1/12 Effet expérimental de l'épaisseur initiale de la tôle formée sur le niveau de la CLFS pour un alliage d'aluminium 3003.

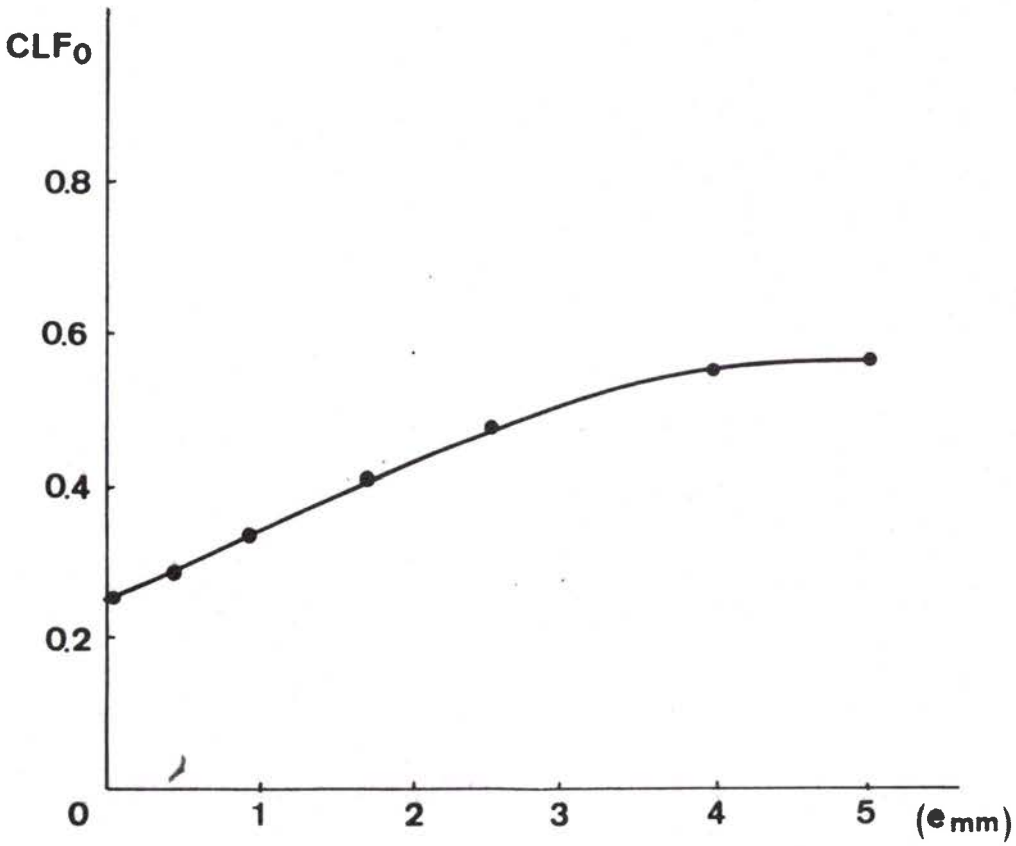


fig.N1/13 Influence de l'épaisseur sur le niveau de la CLFS en déformation plane (CLFO)/6/.

de l'épaisseur aussi marqué en rétreint qu'en expansion. Ces deux types de comportement se rencontrent pour différents métaux, le premier mode d'influence étant le plus courant. Il est établi dans le texte (§B.3.3) un calcul prédictif de ces phénomènes en les reliant au mode d'endommagement présent dans le matériau.

Le niveau de la CLFS en déformation plane (CLF_o) est un paramètre rapide et très simple pour repérer la position de la CLFS. Ce paramètre utilisé seul est bien sûr très incomplet car aucune indication n'est donnée sur la forme de la courbe. La figure N1/13 /7/ présente l'évolution du coefficient CLF_o en fonction de l'épaisseur de la tôle. On remarque que la valeur de ce paramètre croît avec la déformation, puis se stabilise pour une épaisseur supérieure à environ 4mm. L'effet d'épaisseur est donc particulièrement sensible pour les tôles minces (~1mm). C'est le domaine des tôles de carrosserie automobile.

Un travail de synthèse bibliographique a été mené par Deguen /8/ qui a regroupé les résultats expérimentaux obtenus par différents auteurs /5-10/ ayant tous étudié l'influence de l'épaisseur sur la CLFS à l'aide de tôles amincies par usinage. La figure N1/14 reprend ces résultats expérimentaux en portant la déformation dans l'épaisseur au niveau de la CLFS en fonction de l'épaisseur initiale de la tôle e. Tous ces résultats sont relatifs à des aciers doux d'emboutissage et l'on retrouve une influence importante du chemin de déformation sur l'effet observé :

- quasi nulle en traction uniaxée ($\rho = -0.5$),
- très importante en déformation équibiaxée ($\rho = 1$).

Il a été reporté des sens de variations tout à fait analogues pour un alliage léger AU2G /5/.

Il est donc établi expérimentalement une influence de l'épaisseur initiale de la tôle formée sur le niveau de la CLFS. Cette influence est principalement de deux types :

- une influence nulle en traction uniaxiale et augmentant avec la bi-

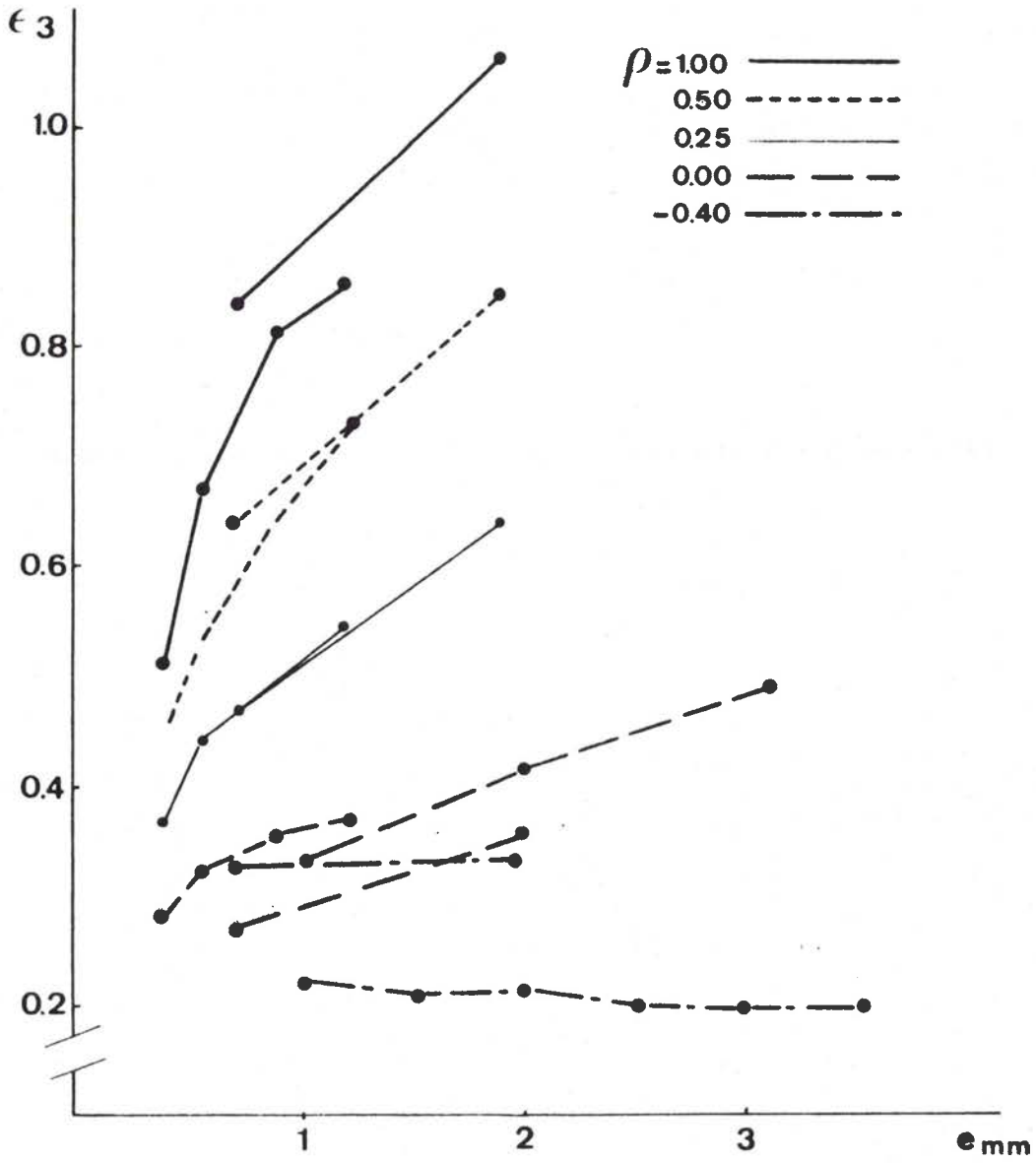


fig.N1/14 Influence de l'épaisseur, selon différents auteurs, exprimée par la déformation ε_3 dans l'épaisseur au niveau de la CLFS /77/.

axialité des contraintes (aciers doux),
- un effet quasi uniforme quel que soit le chemin de déformation suivi (3003).

DISCUSSION :

Certains auteurs /12,13/ concluent que l'effet d'épaisseur sur la CLFS n'existe pas si l'on tient compte de la non-linéarité du chemin de déformation. Cette non-linéarité est due d'une part à la mise en striction du matériau mais aussi à l'évolution de la texture provoquant une évolution de l'anisotropie dont les auteurs n'ont pas tenu compte. Ils proposent de calculer la déformation plastique cumulée, au niveau de la CLFS, le long du chemin de déformation expérimental et de répartir ensuite cette déformation cumulée suivant les deux déformations principales ε_1 et ε_2. Pour se faire, ils appliquent les relations de Levy-Mises intégrées en utilisant la pente finale du chemin de déformation. Ce calcul n'a aucune base théorique et le fait de calculer des déformations principales à partir de la déformation plastique cumulée conduit à des valeurs n'ayant aucun sens physique. De plus, ce calcul, effectué à partir de la pente du chemin de déformation au point final, peut conduire très facilement à des valeurs tout à fait aberrantes des déformations obtenues. En l'absence de justifications théoriques rigoureuses aux calculs menés, nous avons rejetté ce modèle et nous concluons à un effet réel de l'épaisseur sur la CLFS.

REFERENCES ANNEXE 1.

1- K. NAKAZIMA, T. KIKUMA, H. KANAME - Yawata Tech. Rep. 264(1968)141

2- S. FUKUI - Sci. pap. of the Inst. Phys. Chem. Res. 34(1938)1422

3- H.W. SWIFT - J. Mech. Phys. Solids 1(1952)1

4- Z. MARCINIAK, J. KOLODZIEJSKI - Proc. 7ème Congrès IDDRG Amsterdam (1972) 6.1

5- P. VIGIER; S. LEFORT - Rapport DGRST n°73-7.1593 - Fév(1975)

6- G. LECLERCQ - Note interne à l'IRSID -Juillet(1975)

7- S.P. KEELER - IDDRG-Dusseldorf- WGII- Oct(1975)

8- M. DEGEN - Rapport interne à l'IRSID- n°2071MD/RA- Août(1976)

9- A. HABERFIELD, M. BOYLES - Sheet Met. Ind. juillet(1973)400

10- M.J. PAINTER, R. PEARCE - J. Appl. Phys. 7(1974)992

11- MARTIN - CETIM Informations - Oct(1975)38

12- H.J. KLEEMOLA, J.O. KUMPULAINEN - J. Mec. Work. Tech. 3(1980)289

13- H.J. KLEEMOLA, J.O. KUMPULAINEN - ibid. 3(1980)303

ANNEXE 2.

CALCULS D'INSTABILITE PLASTIQUE.

Annexe 2.1 PRINCIPE DU TRAVAIL MAXIMUM /1̄,2̄/

Au chapitre A.2.3, ce principe est discuté à partir de deux approches :

- la plasticité du monocristal,
- les échanges d'énergie au cours de la déformation plastique.

Dans cette annexe, une troisième voie globale /1̄,2̄/ est présentée. En effet, le travail plastique maximum est une propriété établie lorsque les déformations dérivent d'un potentiel scalaire $\psi(\sigma_{ij})$.

Alors les déformations plastiques s'écrivent :

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial\psi(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}} \, d\lambda'$$

où $d\lambda'$ est une constante de proportionalité.

Dans le cas du critère de Von Mises où le potentiel plastique est choisi égal à la fonction de charge :

$$\psi(\sigma_{ij}) = (\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2+6\sigma_{12}^2+6\sigma_{23}^2+6\sigma_{31}^2$$

on a alors : $\dfrac{\partial\psi}{\partial\sigma_{11}} = 2(2\sigma_{11}-\sigma_{22}-\sigma_{33})$

ou encore : $\dfrac{\partial\psi}{\partial\sigma_{11}} = 6(\sigma_{11}-\sigma_m)$ où $\sigma_m = \dfrac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}$

d'où $d\varepsilon_{11} = 6(\sigma_{11}-\sigma_m)d\lambda'$

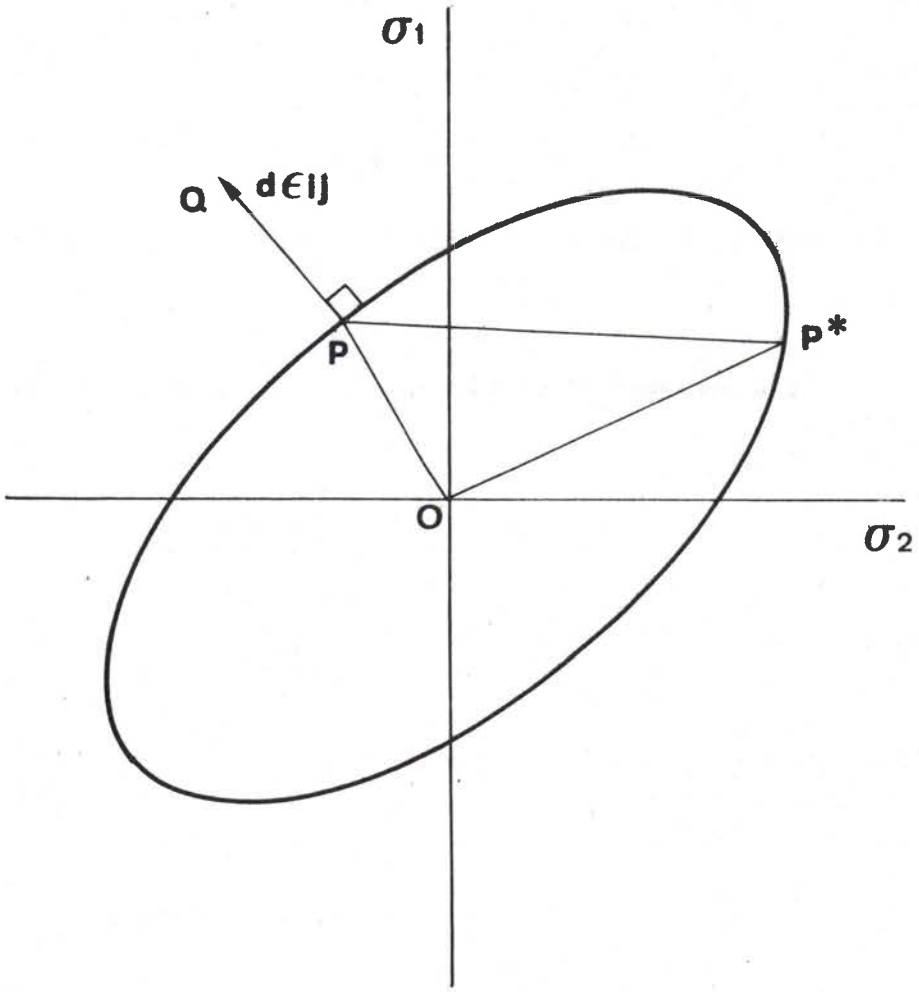


fig.N2/1 Surface de plasticité du polycristal.

qui s'écrit plus couramment :

$$d\varepsilon_{11} = S_{11}d\lambda$$ où S_{11} est un terme du déviateur des contraintes

et d'une manière générale :

$$d\varepsilon_{ij} = S_{ij}d\lambda$$

En remarquant que la normale $\vec{n}$, dans l'espace $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ des contraintes principales, en un point de la surface de charge a pour composante :

$$n_i = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_i}$$

On constate que le vecteur incrément de déformation est porté par la normale à la surface de charge. Il en résulte le principe du travail maximum car en effet, le travail plastique s'écrit, dans les axes principaux :

$$dW = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 + \sigma_3 d\varepsilon_3$$

ou encore : $dW = \vec{OP}.\vec{PQ}$

où $\vec{OP}$ est vecteur contrainte et $\vec{PQ}$ le vecteur incrément de déformation, normal à la surface de charge au point p (fig.N2/1).

Prenons un point quelconque P^* sur la surface de charge et calculons :

$$dW^* = \vec{OP}^*.\vec{PQ} = \sigma_1^* d\varepsilon_1 + \sigma_2^* d\varepsilon_2 + \sigma_3^* d\varepsilon_3$$

alors : $dW - dW^* = \vec{OP}.\vec{PQ} - \vec{OP}^*.\vec{PQ}$

$$\rightarrow \quad dW - dW^* = \vec{P^*P}.\vec{PQ}$$

La surface d'écoulement étant convexe, ce produit scalaire est toujours

positif. Cette propriété est le principe du travail plastique maximum qui s'énonce :

Pour tout accroissement de déformation plastique, le travail produit par l'état réel des contraintes provoquant cette déformation plastique est supérieur à celui produit par tout autre état de contrainte situé à l'intérieur ou sur la surface de charge.

nexe 2.2 CALCUL D'INSTABILITE EN THEORIE DE L'ECOULEMENT.

2.1 Matériau homogène

L'instabilité plastique recherchée est celle correspondant à une riction localisée et non celle correspondant à une striction diffuse i est donnée par un critère de force appliquée maximum /3,4/.

i) Existence d'une striction localisée /5/

L'hypothèse est faite que la striction se produit le long d'une gne d'extension nulle, inclinée d'un angle θ par rapport à l'axe de us grande contrainte principale σ_1 (fig.N2/2). Le long de cette rection, l'allongement ne se fait donc qu'au détriment de l'épaisseur ovoquant la striction.

La mise en striction est donc, dans ce modèle, subordonnée à l'existence d'une direction d'extension nulle :

$$\dot{\varepsilon}_\theta = 0$$

r :
$$d\varepsilon_\theta = d\varepsilon_1 \cos^2\theta + d\varepsilon_2 \sin^2\theta = 0$$

oû :
$$tg^2\theta = -\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon_2} = -\frac{1}{\rho}$$

qui n'est possible que si :

$$\rho < 0$$

La localisation de l'écoulement n'est donc possible que dans le maine du rétreint ($\rho<0$).

Pour le cas de la traction uniaxiale, l'angle de localisation est ouvé égal :

$$\theta = \text{Arctg}(\sqrt{2}) = 54{,}7°$$

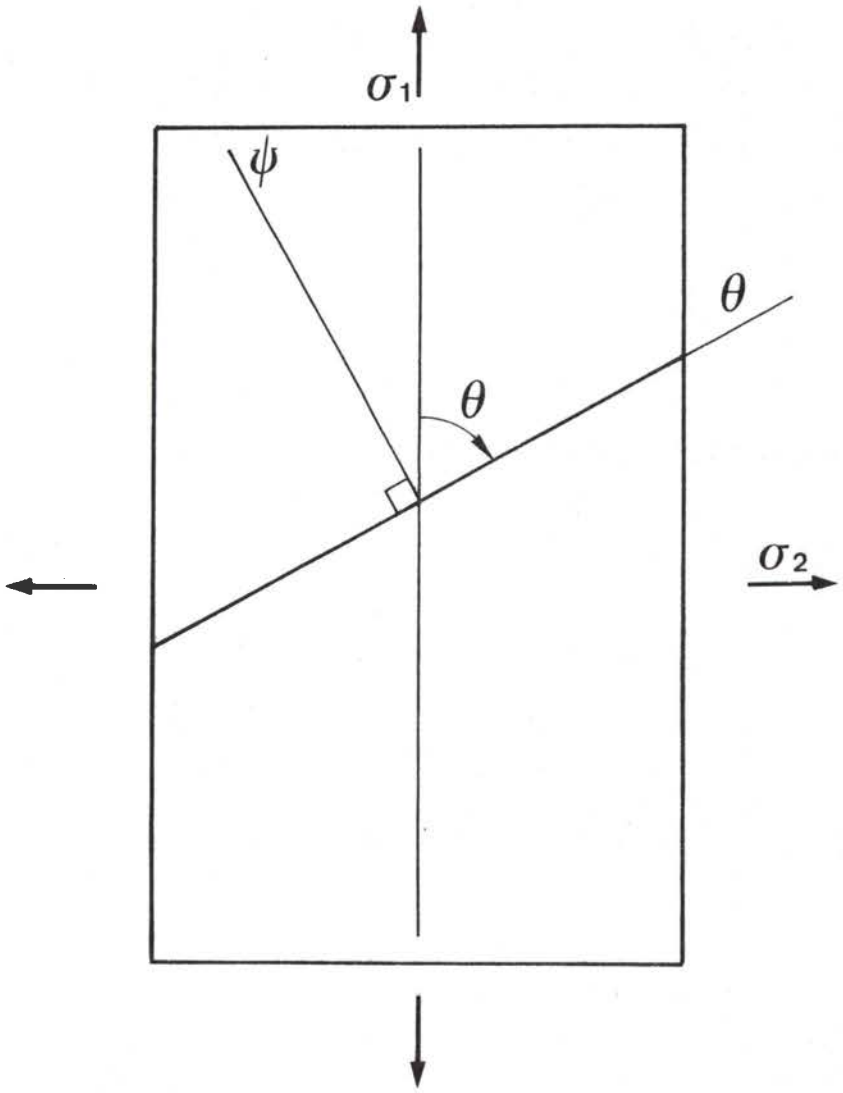


fig.N2/2 Définition des directions de localisation de l'écoulement dans le plan de la tôle.

et angle est compatible avec l'expérience.

Pour le cas de la déformation plane ($\rho=0$) l'angle θ est trouvé gal à 90°, en accord avec l'expérience.

ii) Condition d'apparition /5/

La striction le long de la direction θ se produit lorsque la rce normale à cette direction F_ψ passe par son maximum :

$$dF_\psi = 0$$

$$F_\psi = \sigma_\psi S$$

$$\frac{dF_\psi}{F_\psi} = \frac{d\sigma_\psi}{\sigma_\psi} + \frac{dS}{S} = 0$$

Au moment précis de la mise en striction, la déformation est encore iforme, par conséquent :

$$\frac{d\sigma_\psi}{\sigma_\psi} = \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = \frac{d\sigma_e}{\sigma_e}$$

long de la direction θ la déformation est nulle, par conséquent :

$$\frac{dS}{S} = d\varepsilon_3$$

condition de mise en striction devient :

$$0 = \frac{d\sigma_e}{\sigma_e} + d\varepsilon_3$$

remarquant que : $d\varepsilon_e = \frac{2}{\sqrt{3}} d\varepsilon_1 \sqrt{1+\rho+\rho^2} = -\frac{2}{\sqrt{3}} d\varepsilon_3 \frac{\sqrt{1+\rho+\rho^2}}{1+\rho}$

obtient finalement :

$$\gamma_e = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1+\rho}{\sqrt{1+\rho+\rho^2}}$$

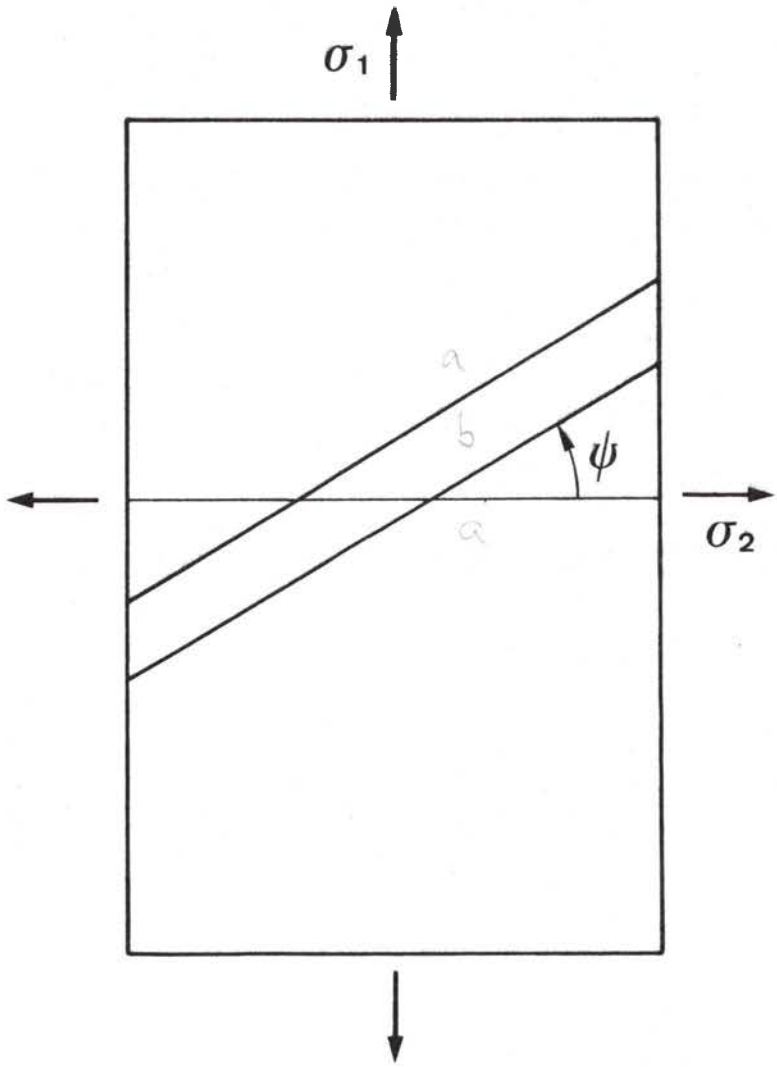


fig.N2/3 Modèle de matériau présentant une bande de localisation de l'écoulement.

ù γ_e est le taux d'écrouissage défini par :

$$\gamma_e = \frac{\partial \ln \sigma_e}{\partial \ln \varepsilon_e}$$

Dans le cas d'un matériau de loi de comportement :

$$\sigma_e = K\varepsilon_e^{\,n}$$

e critère d'instabilité s'écrit simplement :

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = n$$

e qui représente l'équation analytique de la CLFS dans le domaine du étreint.

2.2.2 Matériau hétérogène /6-11/.

Comme nous venons de le mettre en évidence, la localisation de 'écoulement pour un matériau homogène apparaît impossible dans ce odèle pour les déformations en expansion. Il est alors nécessaire 'introduire un défaut dans le matériau pour localiser l'écoulement.

Une hypothèse simple est de considérer un matériau présentant un défaut géométrique initial modélisé par une bande de sous épaisseur inclinée d'un angle ψ par rapport à la plus petite contrainte principale σ_2 (fig.N2/3).

Le matériau est supposé avoir une loi de comportement de la forme :

$$\sigma_e = K\bar{\varepsilon}^{n}\dot{\bar{\varepsilon}}^{m}$$

où $\bar{\varepsilon}$ est la déformation plastique cumulée.

Le défaut introduit est caractérisé par le facteur f :

$$f = \frac{e_a - e_b}{e_a}$$

La tôle est soumise à un chargement radial caractérisé par :

$$\frac{\varepsilon_2^a}{\varepsilon_1^a} = \rho = cte \qquad et \qquad \frac{\sigma_2^a}{\sigma_1^a} = \frac{1+2\rho}{2+\rho}$$

Les axes principaux de contrainte et de déformation sont confondus dans la zone a et sont repérés par les directions x_1 et x_2. La bande repérée par son orientation ψ, va tourner au cours de la déformation. L'angle courant est donné par :

$$tg\psi = \frac{l_1^a}{l_2^a}$$

où l_1 et l_2 sont les allongements du matériau dans les directions 1 e

or : $\varepsilon_i = \ln\lambda_i \qquad \lambda_i = \frac{l_i}{l_{o_i}}$

d'où il vient : $tg\psi = \frac{l_{o_1}^a}{l_{o_2}^a} \exp\left[\varepsilon_1^a - \varepsilon_2^a\right]$

ou encore : $tg\psi = tg\psi_o \exp\left[\varepsilon_1^a(1-\rho)\right]$

où ψ_o est l'inclinaison initiale de la bande.
La rotation en cours de déformation est donc donnée par :

$$\phi = \psi - \psi_o$$

Les équations d'équilibre peuvent s'écrire :

$$\sigma_{nn}^a e_a = \sigma_{nn}^b e_b$$

$$\sigma_{nt}^a e_a = \sigma_{nt}^b e_b$$

ce qui peut encore se mettre sous la forme :

$$\frac{\sigma_{nt}^{b}}{\sigma_{nn}^{b}} = \frac{\sigma_{nt}^{a}}{\sigma_{nn}^{a}}$$

ns la zone a de déformation homogène, un simple changement d'axe
nne :

$$\sigma_{nn}^{a} = \sigma_1{}^{a}\cos^2\psi+\sigma_2{}^{a}\sin^2\psi$$

$$\sigma_{tt}^{a} = \sigma_1{}^{a}\sin^2\psi+\sigma_2{}^{a}\cos^2\psi$$

$$\sigma_{nt}^{a} = (-\sigma_1{}^{a}+\sigma_2{}^{a})\sin\psi\cos\psi$$

est d'autre part possible d'évaluer le terme : $\frac{\sigma_{nn}^{a}}{\sigma_{nn}^{b}}$ en utilisant
équation d'équilibre :

$$\frac{\sigma_{nn}^{a}}{\sigma_{nn}^{b}} = \frac{e_b}{e_a} = (1-f)\exp\left[\varepsilon_3{}^{b}-\varepsilon_3{}^{a}\right]$$

encore en introduisant la loi de comportement :

$$\frac{\sigma_{nn}^{a}/\sigma_e^{a}}{\sigma_{nn}^{b}/\sigma_e^{b}} = (1-f)\left[\frac{\bar{\dot{\varepsilon}}^{b}}{\bar{\dot{\varepsilon}}^{a}}\right]^{n}\left[\frac{\dot{\bar{\varepsilon}}^{b}}{\dot{\bar{\varepsilon}}^{a}}\right]^{m}\exp(\varepsilon_3{}^{b}-\varepsilon_3{}^{a})$$

:
$$\frac{\sigma_{nn}^{a}}{\sigma_e^{a}} = \frac{(\rho+2)\cos^2\psi+(2\rho+1)\sin^2\psi}{\sqrt{3}(1+\rho+\rho^2)^{1/2}}$$

plus :
$$\varepsilon_3{}^{a} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(1+\rho)}{(1+\rho+\rho^2)^{1/2}}\bar{\varepsilon}^{a} = -C\bar{\varepsilon}^{a}$$

terme $\sigma_{nn}^{b}/\sigma_e^{b}$ est inconnu.

définition de la contrainte équivalente permet d'écrire :

$$2\sigma_e^{2} = 2\sigma_{nn}{}^{2}+2\sigma_{tt}{}^{2}-2\sigma_{nn}\sigma_{tt}+6\sigma_{nt}{}^{2}$$

ou encore : $$1 = \left[\frac{\bar{\sigma}^{b}_{nn}}{\sigma^{b}_{e}}\right]^2 + \left[\frac{\bar{\sigma}^{b}_{tt}}{\sigma^{b}_{e}}\right]^2 - \left[\frac{\bar{\sigma}^{b}_{nn}}{\sigma^{b}_{e}}\right]\left[\frac{\bar{\sigma}^{b}_{tt}}{\sigma^{b}_{e}}\right] + 3\left[\frac{\bar{\sigma}^{b}_{nt}}{\sigma^{b}_{e}}\right]^2$$

les relations contraintes déformation de la théorie de l'écoulement donnent :

$$d\varepsilon^{b}_{tt} = \frac{3}{2}\,\frac{d\bar{\varepsilon}^{b}}{\sigma^{b}_{e}}\left[\frac{2\sigma^{b}_{tt}-\sigma_{nn}{}^{b}}{3}\right]$$

d'où l'on tire : $$2\,\frac{\sigma^{b}_{tt}}{\sigma^{b}_{e}} = 2\,\frac{d\varepsilon^{b}_{tt}}{d\bar{\varepsilon}^{b}} + \frac{\sigma^{b}_{nn}}{\sigma^{b}_{e}}$$

en remplaçant dans l'expression de la contrainte équivalente on obtie

$$\frac{d\varepsilon^{b}_{tt}}{d\bar{\varepsilon}^{b}} = \pm\left[1 - \frac{3}{4}\left[\frac{\bar{\sigma}^{b}_{nn}}{\sigma^{b}_{e}}\right]^2 - 3\left[\frac{\sigma^{b}_{nt}}{\sigma^{b}_{e}}\right]^2\right]^{1/2}$$

La condition de compatibilité des déformations à la limite de la band de défaut s'écrit :

$$d\varepsilon_{tt}{}^{a} = d\varepsilon_{tt}{}^{b}$$

or : $$d\varepsilon_{tt}{}^{a} = d\varepsilon_1{}^{a}\sin^2\psi + d\varepsilon_2{}^{a}\sin^2\psi$$

ce qui permet de remplacer dans l'expression de la contrainte équivalente $\sigma^{b}_{nt}/\sigma^{b}_{e}$ par la valeur en fonction de $\sigma^{b}_{nn}/\sigma^{b}_{e}$, $d\varepsilon_i{}^{a}$ et de tirer :

$$\frac{\sigma^{b}_{nn}}{\sigma^{b}_{e}} = \frac{1}{AH}\left[1-B\left[\frac{d\bar{\varepsilon}^{a}}{d\bar{\varepsilon}^{b}}\right]^2\right]^{1/2} -$$

en choisissant la valeur positive de σ_{nn}.

avec $$A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$B = \frac{3(\sin^2\psi+\rho\cos^2\psi)^2}{4(1+\rho+\rho^2)}$$

$$H = \left[1+\left[\frac{2(\rho-1)\sin\psi\cos\psi}{(\rho+2)\cos^2\psi+(2\rho+1)\sin^2\psi}\right]^2\right]^{1/2}$$

En reportant dans l'équation d'équilibre on obtient finalement :

$$(1-B-G)^{1/2}\ H\left[1-B\left[\frac{d\bar{\varepsilon}^a}{d\bar{\varepsilon}^b}\right]^2\right]^{-1/2}\left[\frac{d\bar{\varepsilon}^a}{d\bar{\varepsilon}^b}\right]^m$$

$$= (1-f)\left[\frac{\bar{\varepsilon}^b}{\bar{\varepsilon}^a}\right]^n \exp\left[C\bar{\varepsilon}^a+\varepsilon_3{}^b\right]$$

avec $$G = \frac{(\rho-1)^2\sin^2\psi\cos^2\psi}{1+\rho+\rho^2}$$

le calcul de $\varepsilon_3{}^b$ s'effectue en utilisant les relations contrainte déformation :

$$d\varepsilon_3{}^b = \frac{3}{2}\frac{d\bar{\varepsilon}^b}{\sigma_e{}^b}\left[\frac{\sigma_{nn}{}^b-\sigma_{tt}{}^b}{3}\right]$$

en remplaçant $\sigma_{nn}^b/\sigma_e{}^b$ et $\sigma_{tt}^b/\sigma_e{}^b$ par leur valeur précédemment établie on obtient :

$$\frac{d\varepsilon_3{}^b}{d\bar{\varepsilon}^b} = -\frac{A}{H}\left[1-B\left[\frac{d\bar{\varepsilon}^a}{d\bar{\varepsilon}^b}\right]^2\right]^{1/2} - D\,\frac{d\varepsilon^a}{d\bar{\varepsilon}^b}$$

avec $$D = \frac{\sqrt{3}(\sin^2\psi+\rho\cos^2\psi)}{4(1+\rho+\rho^2)^{1/2}}$$

Ce système d'équation est résolu numériquement pas à pas en utilisant un schéma de Rangè-Kutta à l'ordre 4, à partir d'une orientation initiale ψ_o de la bande et en tenant compte à chaque pas de calc de la rotation de celle-ci.

Dans le cas où $\psi_o=0$ alors la bande ne tourne pas et le système d'équations différentielles se ramène à celui obtenu par Marciniak /8

Annexe 2.3 CALCUL D'INSTABILITE EN THEORIE DE L'ECOULEMENT POUR UN MATERIAU HETEROGENE ANISOTROPE /87/.

L'anisotropie du matériau est prise en compte en corrigeant le calcul de la contrainte équivalente sous la forme :

$$\sigma_e = \sigma_1 \left[\frac{\alpha^2(s+r)-2r\alpha+r+1}{r+1}\right]^{1/2}$$

avec $\alpha = \sigma_2/\sigma_1$

et $r=r_0$ et $s=r_0/r_{90}$ où r_0 et r_{90} sont les coefficients de Landford déterminés dans une traction uniaxiale effectuée respectivement à 0° et 90° de la direction de laminage.

Dans le cas d'une bande inclinée d'un angle ψ, le calcul devient vite très lourd car il est nécessaire de connaître les valeurs du coefficient d'anisotropie $r(\psi)$ pour cette direction.

Le calcul anisotrope est donc mené dans le cas simple où la bande de défaut du matériau hétérogène fait initialement un angle $\psi_o=0$. La bande alors ne tourne pas en cours de déformation et le problème se simplifie beaucoup.

Pour un matériau anisotrope les relations de Levy-Mises s'écrivent :

$$\frac{d\varepsilon_1}{(1+r)-r\alpha} = \frac{d\varepsilon_2}{\alpha(r+s)-r} = \frac{-d\varepsilon_3}{1+\alpha s} = \frac{d\varepsilon_e}{\sqrt{1+r}\sqrt{\alpha^2(s+r)-2r\alpha+r+1}}$$

et la déformation équivalente a pour expression :

$$d\bar{\varepsilon}_e = d\varepsilon_1 \frac{1+r}{sr+r+s} \sqrt{(1+r)\rho^2+2\rho r+r+s}$$

avec $\rho = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = \frac{r-\alpha(r+s)}{\alpha r-(1+r)}$

L'application de ces équations dans le calcul d'instabilité conduit au même système d'équation que pour le matériau isotrope (Annexe 2.2), seules les constantes sont changées de la manière suivante :

$$A = \frac{J}{(r+s)(1+r)} \qquad B = \frac{J\rho^2}{(r+s)I}$$

$$C = \frac{J}{1+r}\,\frac{\rho+1}{\sqrt{I}} \qquad D = \frac{s}{r+s}\,\frac{J}{(1+r)I}$$

$$G = 0 \qquad H = 1$$

$$J = r+s+sr \qquad I = r+s+2r\rho+(1+r)\rho^2$$

Annexe 2.4 CALCUL D'INSTABILITE EN THEORIE DE LA DEFORMATION.

i) Matériau homogène /6,7,12/

Le calcul d'instabilité est mené dans le cas d'un chargement proportionnel imposé. Dans ce cas les deux théories de la plasticité présentées se rejoignent mais uniquement dans la zone de déformation uniforme car dans la zone en striction le chargement change ce qui justifie une différence dans les résultats obtenus par les deux théories.

Une instabilité se développe dans le matériau si la déformation cesse d'être homogène, c'est-à-dire si en deux points a et b du matériau des vitesses de déformation peuvent être différentes :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{a} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{b} = \Delta\dot{\varepsilon}_{ij} \neq 0$$

En supposant que la striction se produit en une bande inclinée d'un angle ψ (fig.N2/4), le champ de vitesse s'écrit :

$$\Delta V_i = V_i^{a} - V_i^{b} = f_i(x_1\cos\psi + x_2\sin\psi) = f_i(\delta)$$

où δ est la distance normale du point courant au centre de la bande.
En fonction des composantes m_1, m_2 du vecteur normal à bande $\vec{m}$,
le champ de vitesse s'écrit :

$$\Delta V_i = f_i(m_j x_j)$$

l'expression de la différence des vitesses de déformation devient :

$$\Delta\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(g_i m_j) \quad \text{avec} \quad g_i = \frac{df_i}{d\delta}$$

l'instabilité se produira lorsque les fonctions g_i ne seront pas simultanément nulles.

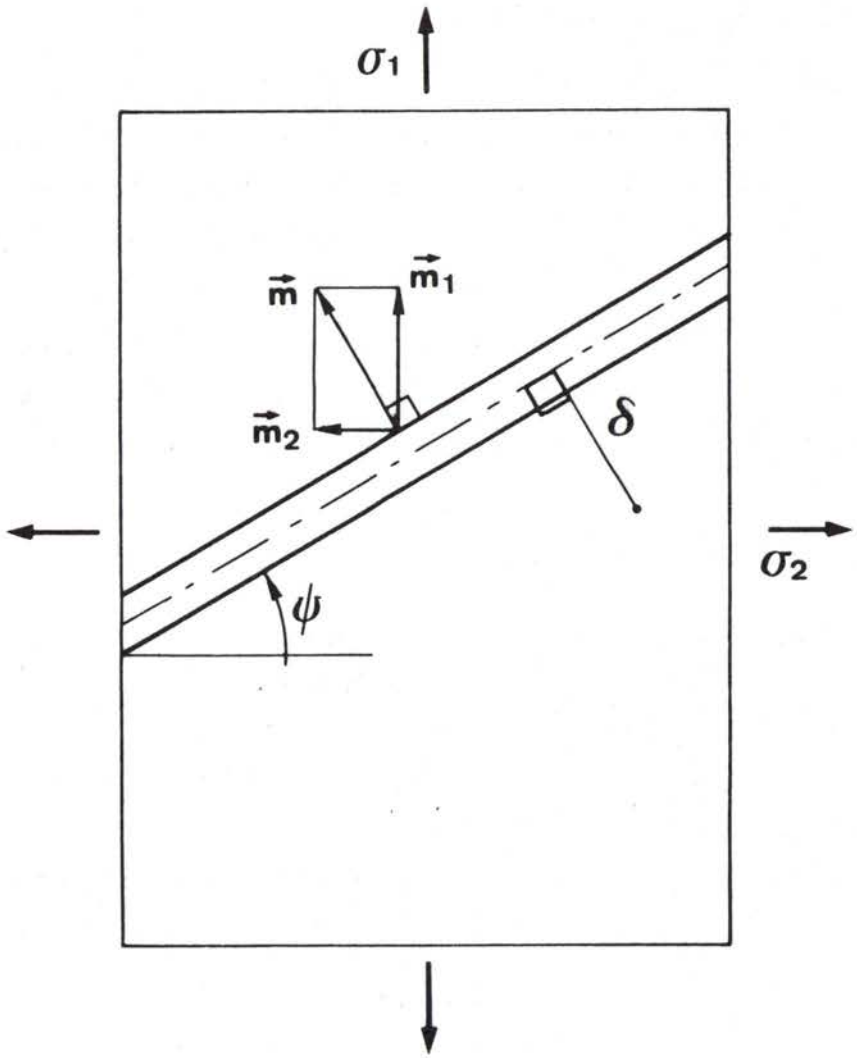


fig.N2/4 Définition des paramètres intervenant dans le calcul d'instabilité.

Les équations générales d'équilibre du matériau sont données par :

$$m_i \Delta\dot{\sigma}_{ij} + m_i \sigma_{ij} \Delta\dot{\varepsilon}_{33} = 0$$

avec $$\Delta\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^{a} - \dot{\sigma}_{ij}^{b}$$

Exprimée dans les axes principaux du tenseur des contraintes appliquées, cette expression devient :

$$m_1 \Delta\dot{\sigma}_{11} + m_2 \Delta\dot{\sigma}_{12} - m_1 \sigma_{11} (g_1 m_1 + g_2 m_2) = 0$$

$$m_2 \Delta\dot{\sigma}_{22} + m_1 \Delta\dot{\sigma}_{12} - m_2 \sigma_{22} (g_1 m_1 + g_2 m_2) = 0$$

Les relations contraintes-déformations s'écrivent en théorie de la déformation :

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda S_{ij} + \lambda dS_{ij}$$

ou encore à l'aide des modules sécants E_s et tangents E_t :

$$E_s = \frac{\sigma_e}{\varepsilon_e} \qquad E_t = \frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_e} \;,\; \frac{E_t}{E_s} = n \qquad (\sigma_e = K\varepsilon_e^{\,n})$$

en remarquant que $\lambda = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_e}{\sigma_e}$

il vient : $$\frac{2}{3} E_s \, d\varepsilon_{ij} = S_{ij} \frac{d\sigma_e}{\sigma_e} \frac{1-n}{n} + dS_{ij}$$

Ces relations permettent, de manière réciproque, d'exprimer les incréments de contraintes en fonction des déformations et contraintes sous la forme :

$$d\sigma_{11} = \frac{2}{3} \frac{E_t}{n} \left[2 - \frac{3}{2} \frac{(1-n)}{\sigma_e^2} \sigma_{11}^2 \right] d\varepsilon_{11} + \frac{2}{3} \frac{E_t}{n} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{(1-n)}{\sigma_e^2} \sigma_{11}\sigma_{22} \right] d\varepsilon_{22}$$

$$d\sigma_{22} = \frac{2}{3} \frac{E_t}{n} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{(1-n)}{\sigma_e^2} \sigma_{11}\sigma_{22} \right] d\varepsilon_{11} + \frac{2}{3} \frac{E_t}{n} \left[2 - \frac{3}{2} \frac{(1-n)}{\sigma_e^2} \sigma_{22} \right] d\varepsilon_{22}$$

$$d\sigma_{12} = 2 \frac{E_t}{n} \, d\varepsilon_{12}$$

en reportant dans les équations d'équilibre on obtient finalement :

$$g_1\left[\frac{2}{3}\frac{E_t}{n}\left[2-\frac{3}{2}\frac{1-n}{\sigma_e^2}\sigma_{11}^2\right]m_1^2+\frac{E_t}{n}m_2^2-\sigma_{11}m_1^2\right]$$

$$+g_2m_1m_2\left[\frac{2}{3}\frac{E_t}{n}\left[1-\frac{3}{2}\frac{1-n}{\sigma_e^2}\sigma_{11}\sigma_{22}\right]+\frac{E_t}{n}-\sigma_{11}\right]=0$$

$$g_1m_1m_2\left[\frac{2}{3}\frac{E_t}{n}\left[1-\frac{3}{2}\frac{1-n}{\sigma_e^2}\sigma_{11}^2\right]+\frac{E_t}{n}-\sigma_{22}\right]$$

$$+g_2\left[\frac{2}{3}\frac{E_t}{n}\left[2-\frac{3}{2}\frac{1-n}{\sigma_e^2}\sigma_{22}^2\right]m_2^2+\frac{E_t}{n}m_1^2-\sigma_{22}m_2^2\right]=0$$

avec $\quad m_1^2+m_2^2=1 \quad$ et $\quad \frac{m_2}{m_1}=tg\psi$

ce qui s'écrit plus simplement sous la forme :

$$g_1\alpha+g_2\beta=0$$

$$g_1\gamma+g_2\delta=0$$

Ce système admet comme solution triviale :

$$g_1=g_2=0$$

qui correspond au mode de déformation homogène.

L'écoulement peut se localiser si une autre solution existe au systèm
ce qui ne peut se produire que si le déterminant est nul, soit :

$$\alpha\delta-\gamma\beta=0$$

Cette équation comporte deux inconnues :

- l'angle de localisation ψ (donnant m_1, m_2),
- la déformation à laquelle se produit cette localisation (donnant

La solution du problème correspond à l'angle de localisation conduisant à la plus faible déformation à l'instabilité. C'est le premier mode de bifurcation rencontré.

En déformation biaxée, le système se simplifie considérablement car la première bifurcation est toujours obtenue pour : $\psi=0$.
Le système devient alors :

$$g_1\left[\frac{2}{3}\frac{E_t}{n}\left[2-\frac{3}{2}\frac{1-n}{\sigma_e^2}\sigma_{11}^2\right]-\sigma_{11}\right] = 0$$

$$g_2\frac{E_t}{n} = 0$$

Le système admet pour solution $g_2=0$, ce qui signifie que les déformations ε_2 dans la striction et à l'extérieur restent égales. L'instabilité n'est donc possible que si $g_1\neq 0$, soit :

$$\frac{2}{3}\frac{E_t}{n}\left[2-\frac{3}{2}\frac{1-n}{\sigma_e^2}\sigma_1^2\right]-\sigma_1 = 0$$

Cette expression s'exprime facilement uniquement à l'aide de la déformation principale ε_1 sous la forme :

$$\varepsilon_1 = \frac{3\rho^2+n(2+\rho)^2}{2(2+\rho)(1+\rho+\rho^2)}$$

Ce résultat est l'équation analytique de la CLFS dans le domaine de l'expansion.

ii) Matériau hétérogène /6,7/

Le même modèle de matériau hétérogène est utilisé que dans le cas de la théorie de l'écoulement (fig.N2/5).

La différence entre les deux théories provient principalement de l'utilisation de la forme intégrée des déformations dans la théorie de la déformation. Il est nécessaire alors d'être très attentif à la

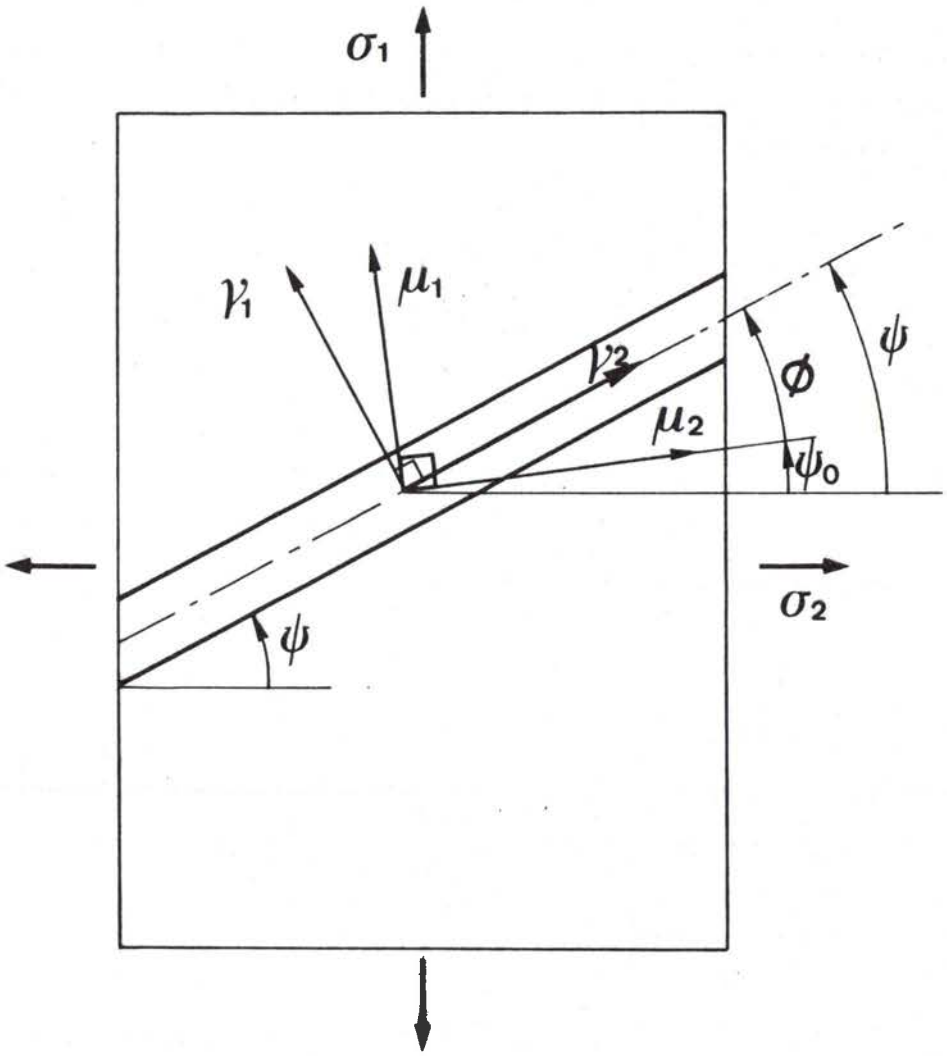


fig.N2/5 Définition des axes initiaux et courants liés à l'orientation de la bande de localisation.

otation de la bande de localisation au cours de la déformation.

Dans les axes μ_1, μ_2 repérés par l'orientation initiale de la bande
e localisation, les coordonnées courantes d'un point sont données par :

$$\mu_1 = \delta\mu_1^\circ + \gamma\mu_2^\circ$$

$$\mu_2 = \eta\mu_1^\circ + \varepsilon\mu_2^\circ$$

i $(\mu_1^\circ, \mu_2^\circ)$ sont les coordonnées initiales du point.

L'angle θ° entre les axes principaux de contrainte et les axes
μ_1°, μ_2°) est donné par :

$$\operatorname{tg} 2\theta^\circ = \frac{2(\delta\eta+\gamma\varepsilon)}{(\delta^2+\gamma^2)-(\eta^2+\varepsilon^2)}$$

L'angle θ entre les axes principaux de contrainte et les axes
ourants (ν_1, ν_2) est donné par :

$$\theta = \theta^\circ - \psi$$

n remarquant que les contraintes sont données par :

$$\sigma_1 = \frac{2}{3}\frac{\sigma_e}{\varepsilon_e}\ln(\lambda_1^2\lambda_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{3}\frac{\sigma_e}{\varepsilon_e}\ln(\lambda_1\lambda_2^2)$$

$$\lambda_i = \frac{l_i}{l_o}$$

n contrainte plane, que de plus, dans la rotation de la bande, les
longements s'écrivent :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\delta^2+\eta^2+\gamma^2+\varepsilon^2) \pm R\right]^{1/2}$$

vec

$$R = \left[\left[(\delta^2+\eta^2)-(\gamma^2+\varepsilon^2)\right]^2 + 4(\delta\gamma+\eta\varepsilon)^2\right]^{1/2}$$

Les contraintes dans les axes courants (ν_1,ν_2) peuvent s'écrire

$$\sigma_{nn} = \frac{1}{2}\left[(\sigma_1+\sigma_2)+(\sigma_1-\sigma_2)\cos 2\theta\right]$$

$$\sigma_{tt} = \frac{1}{2}\left[(\sigma_1+\sigma_2)-(\sigma_1-\sigma_2)\cos 2\theta\right]$$

$$\sigma_{nt} = \frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\sin 2\theta$$

de même que pour le cas de la théorie de l'écoulement, les équations d'équilibre donnent :

$$\frac{\sigma_{nt}^{b}}{\sigma_{nn}^{b}} = \frac{\sigma_{nt}^{a}}{\sigma_{nn}^{a}}$$

il est possible de calculer $\sin 2\theta$:

$$\sin 2\theta \ln\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right] = 3MY$$

avec
$$M = \frac{\sigma_{nt}^{a}}{\sigma_{nn}^{a}} = \frac{(\rho-1)\sin\psi\cos\psi}{(\rho+2)\cos^2\psi+(2\rho+1)\sin^2\psi}$$

et
$$Y = \ln(\lambda_1\lambda_2)+\frac{1}{3}\cos 2\theta \ln\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right]$$

ce qui permet d'exprimer l'équation d'équilibre précédemment obtenue pour la théorie de l'écoulement :

$$\frac{\sigma_{n_n}^{a}/\sigma_e^{a}}{\sigma_{n_n}^{b}/\sigma_e^{b}} = (1-f)\left[\frac{\sigma_e^{b}}{\sigma_e^{a}}\right]^n \exp(\varepsilon_3^{b}-\varepsilon_3^{a})$$

sous la forme :

$$\left[\frac{d\varepsilon_e^{a}}{d\varepsilon_e^{b}}\right]^m \frac{(\rho+2)\cos^2\psi+(2\rho+1)\sin^2\psi}{\sqrt{3}(1+\rho+\rho^2)^{1/2}} = \frac{(1-f)}{\lambda_1\lambda_2}\left[\frac{\varepsilon_e^{b}}{\varepsilon_e^{a}}\right]^n \exp(C\varepsilon_e^{a})\,\frac{Y}{\varepsilon_e^{b}}$$

vec $$C = \frac{\sqrt{3}(1+\rho)}{2(1+\rho+\rho^2)^{1/2}}$$

a résolution de cette équation nécessite, à chaque étape du calcul, a connaissance des paramètres $(\delta,\gamma,\eta,\varepsilon)$.

Dans la zone a, par définition les allongements s'écrivent :

$$\lambda_1^{\,a} = \frac{x_1}{x_1^{\circ}} \qquad \lambda_2^{\,a} = \frac{x_2}{x_2^{\circ}}$$

ans les axes (μ_1,μ_2) cette relation s'écrit :

$$\mu_1 = (\lambda_1^{\,a}\cos^2\psi_\circ+\lambda_2^{\,a}\sin^2\psi_\circ)\mu_1^{\circ}-(\lambda_1^{\,a}-\lambda_2^{\,a})\sin\psi_\circ\cos\psi_\circ\mu_2^{\circ}$$

$$\mu_2 = -(\lambda_1^{\,a}-\lambda_2^{\,a})\sin\psi_\circ\cos\psi_\circ\mu_1^{\circ}+(\lambda_1^{\,a}\sin^2\psi_\circ+\lambda_2^{\,a}\cos^2\psi_\circ)\mu_2^{\circ}$$

La compatibilité des déformations pour $\mu_1^{\circ}=0$ donne par identifi-ation :

$$\gamma = -(\lambda_1^{\,a}-\lambda_2^{\,a})\sin\psi_\circ\cos\psi_\circ$$

$$\varepsilon = \lambda_1^{\,a}\sin^2\psi_\circ+\lambda_2^{\,a}\cos^2\psi_\circ$$

e qui permet de calculer à chaque instant γ et ε. η et δ sont obtenues as à pas à partir de l'équation établie :

$$\sin 2\theta \ln\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right] = 3MY$$

t de la définition de la déformation équivalente :

$$\varepsilon_e = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[(\ln\lambda_1)^2+\ln\lambda_1\ln\lambda_2+(\ln\lambda_2)^2\right]^{1/2}$$

e calcul numérique nécessite un temps beaucoup plus long que dans le adre de la théorie de l'écoulement.

Dans le cas où l'orientation initiale du défaut est nulle : $\psi_o = 0$

Les équations deviennent simplement :

$$(1-B)^{1/2}\left[1-B\left[\frac{\varepsilon_e^{\,a}}{\varepsilon_e^{\,b}}\right]\right]^{-1/2}\left[\frac{d\varepsilon_e^{\,a}}{d\varepsilon_e^{\,b}}\right]^{m} = (1-f)\left[\frac{\varepsilon_e^{\,b}}{\varepsilon_e^{\,a}}\right]^{n}\exp(C\varepsilon_e^{\,a}+\varepsilon_3^{\,b})$$

avec

$$\frac{\varepsilon_3^{\,b}}{\varepsilon_e^{\,b}} = -A\left[1-B\left[\frac{\varepsilon_e^{\,a}}{\varepsilon_e^{\,b}}\right]^2\right]^{1/2} - D\,\frac{\varepsilon_e^{\,a}}{\varepsilon_e^{\,b}}$$

et

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad B = \frac{3\rho^2}{4(1+\rho+\rho^2)}$$

$$C = \frac{\sqrt{3}(1+\rho)}{2(1+\rho+\rho^2)^{1/2}}$$

$$D = \frac{\sqrt{3}\,\rho}{4(1+\rho+\rho^2)^{1/2}} = \frac{B^{1/2}}{2}$$

Le calcul est alors plus simple qu'en théorie de l'écoulement, du fai même que l'équation n'est plus intro-différentielle.

REFERENCES ANNEXE 2.

- J. MANDEL - "Cours de Mécanique des Milieux Continus"- Gauthier-Villars- tome II(1966)
- J. LEMAITRE -"Mise en forme des métaux et alliages" Ed. du CNRS-(1976)145
- H.W. SWIFT - J. Mech. Phys. Solids 1(1952)1
- A. CONSIDERE - Ann. des Ponts et Chaussées 9(1885)574
- R. HILL - J. Mech. Phys. Solids 1(1952)19
- J.W. HUTCHINSON, K.W. NEALE - "Mechanics of sheet metal forming" Plenum Press, N.Y. Londres (1978)127
- J.W. HUTCHINSON, K.W. NEALE - Ibid. (1978)269
- Z. MARCINIAK - Int. J. Mech. Sci. 9(1967)609
- Z. MARCINIAK - Met. Italiana 8(1968)701
- Z. MARCINIAK - Cours présentés à l'Université McMaster, Hamilton, Ontario-Canada (1973)
- J.W. HUTCHINSON, K.W. NEALE, A. NEEDLEMAN - "Mechanics of sheet metal forming" Plenum Press, N.Y. Londres (1978)11
- S. STOREN, J.R. RICE - J. Mech. Phys. Solids 23(1975) 421

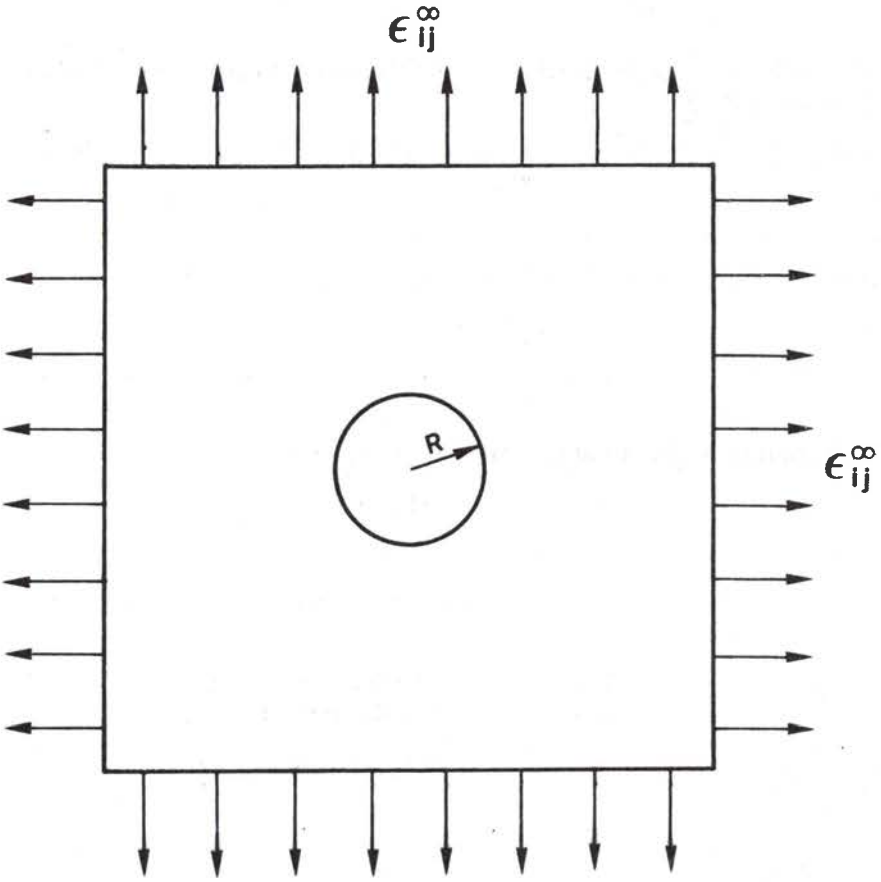


fig.N3/1 Modèle de matériau contenant une cavité sphérique et soumis à l'infini à un champ de déformation imposé.

ANNEXE 3.

. MODELE DE CROISSANCE D'UNE CAVITE SPHERIQUE DANS UNE MATRICE PLASTIQUE [RICE ET TRACEY]*

. LINEARISATION DU MODELE [*]

Annexe 3.1 PRESENTATION GENERALE

Le problème est de prévoir la croissance d'une cavité sphérique dans une matrice plastique (fig.N3/1) soumise à l'infini à :

- des vitesses de déformation : $\dot{\varepsilon}_{ij}^{\infty}$
- un déviateur des contraintes : S_{ij}^{∞}
- une pression hydrostatique superposée : σ^{∞}

La contrainte appliquée est donc donnée par :

$$\sigma_{ij}^{\infty} = S_{ij}^{\infty} + \delta_{ij}\sigma^{\infty} \qquad \text{où} \quad \delta_{ii} = 1, \quad \delta_{ij}\,(\text{avec } i \neq j) = 0$$

Il s'agit de déterminer un champ de vitesses satisfaisant les conditions aux limites (à l'infini) et la condition d'incompressibilité de la matrice, soit :

$$\lim_{\substack{x_i \to \infty \\ x_j \to \infty}} \frac{1}{2}(\dot{U}_{i,j} + \dot{U}_{j,i}) = \dot{\varepsilon}_{ij}^{\infty}$$

et $$\Sigma \dot{\varepsilon}_{ii} = 0$$

---

* J.R. RICE et D.M. TRACEY. J. Mech. Phys. Solids 17(1969), p 201.

Les auteurs établissent un principe variationnel qui indique que tout champ de vitesse supposé donnera à la fonction $Q(\dot{u})$ une valeur plus élevée que le champ réel $(\dot{u}^\circ)$. La fonction $Q(\dot{u})$ est définie par

$$Q(\dot{u}) = \iiint_V [S_{ij}-S_{ij}^\infty]\dot{\varepsilon}_{ij}dv-\sigma_{ij}^\infty \iint_S n_i\dot{u}_j dS$$

où V est le volume infini entourant le vide et S la surface de la par de la cavité.

Le principe variationnel s'écrit :

$$Q(\dot{u})-Q(\dot{u}^\circ) > 0$$

Le champ de vitesse se pose sous la forme générale :

$$\dot{u}_i = \varepsilon_{ij}^\infty x_j+q_1\dot{u}_i^{(1)}+q_2\dot{u}_i^{(2)} + \ldots \quad +q_n\dot{u}_i^{(n)}$$

où chaque $\dot{u}_i^{(k)}$ est un champ de vitesse vérifiant l'incompressibilité et qui tend vers zéro à l'infini pour vérifier les conditions aux limites.

Il faut chercher une forme de $\dot{u}_i$ qui minimise la fonction $Q(\dot{u})$.

Annexe 3.2. APPLICATION.

3.2.1 Cavité sphérique dans une matrice rigide parfaitement plastique soumise à un champ de tension uniaxiale.

Le champ de vitesse est séparé en trois termes :

- le champ à l'infini,
- un terme révélateur du changement de volume (terme symétrique): u
- un terme révélateur du changement de forme sans variation de volu (terme déviateur): u_i^E

$$\dot{U}_i = \varepsilon_{ij}^\infty x_j+D\ \hat{u}_i^D+E\ \hat{u}_i^E$$

Le terme de changement de volume est pris simplement sous la forme :

$$U_i^D = \frac{\dot{\varepsilon}}{3}\left[\frac{R_o}{R}\right]^3 x_i \quad \text{d'où} \quad D = \frac{\dot{R}_o}{\dot{\varepsilon} R_o}$$

Le terme de changement de forme sans changement de volume est le champ de déplacement, par ailleurs mathématiquement établi, permettant de passer d'une sphère à un ellipsoïde :

$$\dot{U}_R^E = \frac{1}{R^2 \sin\psi} \frac{\partial \psi^E}{\partial \psi}, \qquad \dot{U}^E = \frac{-1}{R \sin\psi} \frac{\partial \psi^E}{\partial R}$$

avec $$\psi^E = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon} R_o^3 F(R) \sin^2\psi \cos\psi$$

La fonction F(R) est à définir et doit vérifier la condition :

$$F(R_o) = 1$$

Différentes formes de cette fonction sont essayées :

$$F_1(R) = \frac{1}{2}\left[5 - 3(R_o/R)^2\right]$$

$$F_2(R) = 2 - (R_o/R)^3$$

$$F_3(R) = 4 - 3(R_o/R)^2$$

$$F_4(R) = 7 - 9(R_o/R) + 3(R_o/R)^2$$

$$F_5(R) = 3(R_o/R)^3 - 2(R_o/R)^6$$

$$F_6(R) = \frac{1}{9}\left[13(R_o/R) - 4(R_o/R)^{10}\right]$$

Choisies par rapport à des cas connus :

F_1, F_2, F_3 sont des solutions trouvées pour une inclusion dans une matrice visqueuse.

F_4, F_5, F_6 sont choisies arbitrairement pour évaluer l'incidence de la forme donnée à F(R) sur le résultat.

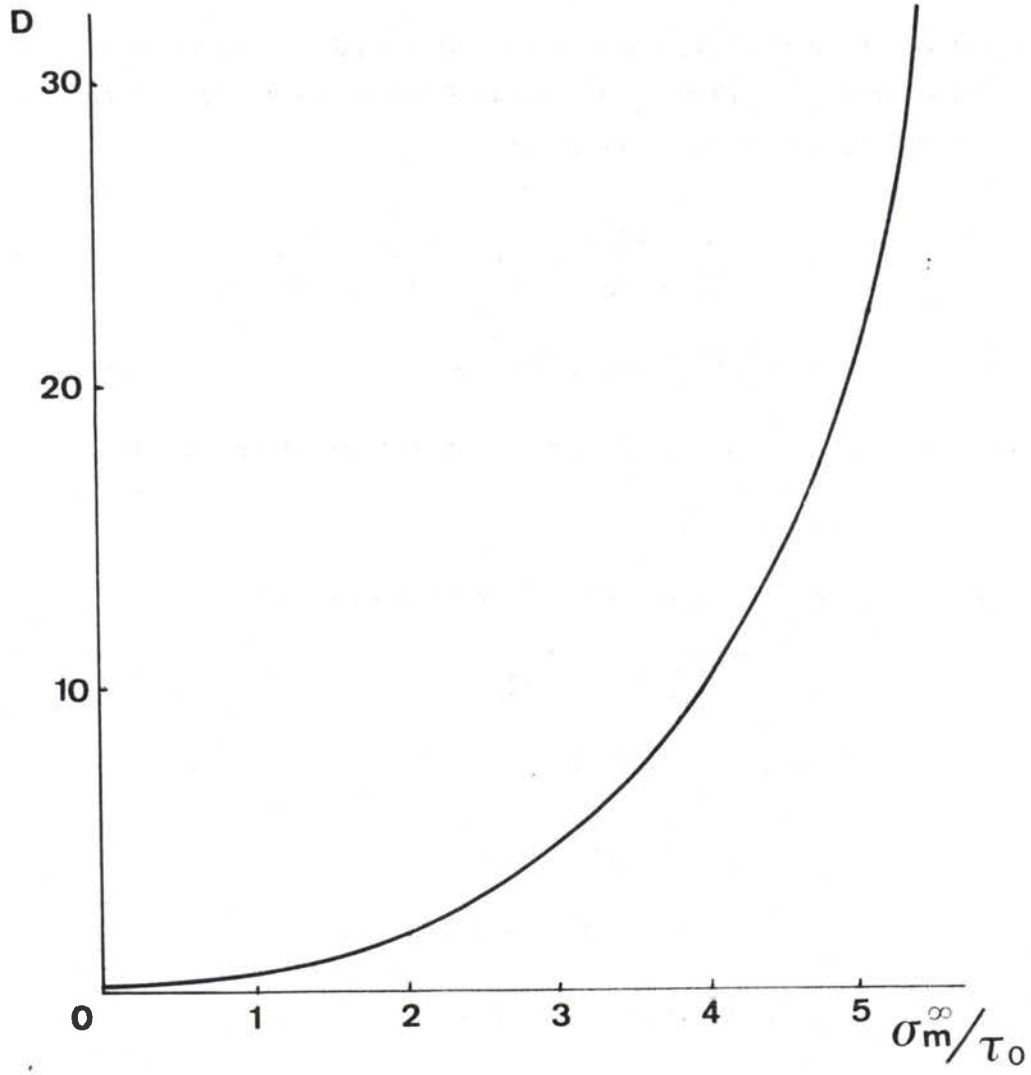


fig.N3/2 Evolution du facteur D caractéristique de la vitesse de dilatation volumique de la cavité en fonction de la triaxialité des contraintes.

Ces différentes formes sont utilisées pour déterminer les valeurs des coefficients D et E qui minimisent la fonction $Q(\dot{u})$.

Les résultats trouvés sont voisins pour les formes F_1 à F_4, les formes F_5 et F_6 conduisant à des résultats absurdes (par exemple fermeture du vide dans la direction d'extension). Les figures N3/2 et N3/3 présentent les valeurs de D et (1+E) obtenues.

3.2.2 Champ de contraintes triaxial général.

3.2.2.1 Cas où le changement de forme est négligeable : $E \simeq 0$

Le champ de vitesse s'écrit alors :

$$\dot{u}_i = \dot{\varepsilon}_{ij}^{\infty} x_j + D\ \dot{u}_i^{D}$$

Le champ $\dot{u}_i^{D}$ est choisi sous la forme :

$$\dot{u}_i^{D} = \left[\frac{2}{3}\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{\infty}\ \dot{\varepsilon}_{ij}^{\infty}\right]^{1/2} \left[\frac{R_o}{R}\right]^3 x_i = \left[\frac{R_o}{R}\right]^3 x_i\ \dot{\bar{\varepsilon}}$$

Il est cherché D qui minimise $Q(\dot{u})$:

$$D = C(\nu)\ \exp\left|\frac{\sqrt{3}\sigma^{\infty}}{2\tau_o}\right| \qquad \text{pour} \quad \frac{\sigma^{\infty}}{\tau_o} \geq 1.5$$

où τ_o est la limite d'écoulement du matériau en cisaillement. Si le matériau suit le critère de Von Mises alors : $\sigma_e = \sqrt{3}\tau_o$

$$\nu = -\frac{3\varepsilon_{II}}{\varepsilon_I - \varepsilon_{III}}$$

avec la convention : $\varepsilon_I^{\infty} > \varepsilon_{II}^{\infty} > \varepsilon_{III}^{\infty}$

Cette convention est différente de celle généralement adoptée pour les tôles où ε_1 et ε_2 sont des déformations dans le plan de la tôle avec la convention $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ et ε_3 la déformation dans l'épaisseur. Cette différence conduit aux valeurs suivantes pour ν :

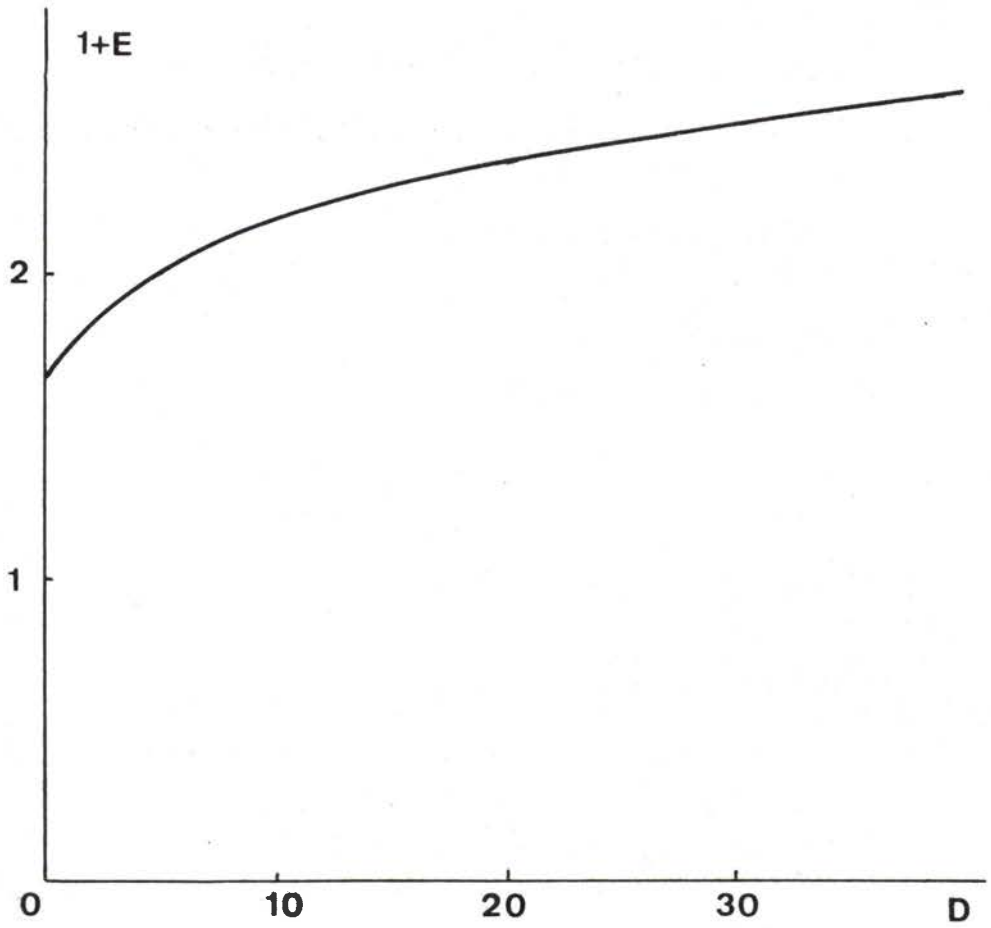


fig.N3/3 Evolution du facteur 1+E caractéristique du changement de forme de la cavité en fonction du facteur de dilatation volumique D.

si $\rho \in [-0.5,+1]$ alors $\varepsilon_I=\varepsilon_1$, $\varepsilon_{II}=\varepsilon_2$, $\varepsilon_{III}=\varepsilon_3$

et $\nu = -\frac{3\rho}{2+\rho}$

si $\rho \in [-1,-0.5]$ alors $\varepsilon_I=\varepsilon_1$, $\varepsilon_{II}=\varepsilon_3$, $\varepsilon_{III}=\varepsilon_2$

et $\nu = \frac{3(1+\rho)}{1-\rho}$

$C(\nu)$ est défini par une intégrale mais avec une approximation meilleure que 0.2%, $C(\nu)$ peut s'écrire sous la forme :

$$C(\nu) = 0.279+0.004$$

Dans le cas de fortes pressions imposées négatives, une étude analytique conduit à :

$$D = -C(-\nu)\exp -\left[\frac{\sqrt{3}\sigma^{\infty}}{2\tau_o}\right]$$

La solution générale pour tous les cas de charge est choisie comme la somme des deux solutions correspondant aux fortes pressions surimposées positives ou négatives.

En notant que :

$$\exp(x) = \mathrm{sh}x+\mathrm{ch}x$$

Il vient la forme finale de D :

$$D = 0.558\ \mathrm{sh}\left[\frac{\sqrt{3}\sigma^{\infty}}{2\tau_o}\right]+0.008\nu\mathrm{ch}\left[\frac{\sqrt{3}\sigma^{\infty}}{2\tau_o}\right]$$

3.2.2.2 Cas où le changement de forme n'est pas négligeable

Les calculs précédents ne sont valides que lorsque la triaxialité des contraintes est élevée :

$$\frac{\sigma^{\infty}}{\tau_o} > 1.5$$

Dans ce cas, par analogie à la traction simple, la valeur de E est beaucoup plus faible que celle de D. Les essais courants effectués sur la tôle mince développent une triaxialité variant de :

$$\frac{\sigma^\infty}{\tau_o} = 1.15 \quad \text{pour la traction équibiaxée } (\rho=1)$$

à

$$\frac{\sigma^\infty}{\tau_o} = 0.58 \quad \text{pour la traction simple } (\rho=-0.5)$$

et

$$\frac{\sigma^\infty}{\tau_o} = 0 \quad \text{pour le cisaillement pur } (\sigma^\infty=0,\ \rho=-1)$$

Cette triaxialité est toujours faible et en particulier inférieu à 1.5, il convient donc de prendre en compte le terme de changement d forme de la cavité qui peut être prépondérant devant le terme de chan ment de volume.

Par analogie à la traction simple et au cas où la matrice est élastique (par ailleurs résolu), il est posé :

$$\frac{\dot{R}_i}{R} = C\dot{\varepsilon}_i^\infty + D\dot{\bar{\varepsilon}} \quad \text{où} \quad C = 1+E$$

Les valeurs de D et E peuvent être identifiées sur le cas de la traction où l'on trouve (fig.N3/2, N3/3) pour les valeurs courantes de la triaxialité :

$D\simeq 1$ pour $\rho=1$

$D\simeq 0.5$ pour $\rho=-0.5$

Les valeurs de 1+E correspondantes sont de l'ordre de :

$1+E\simeq 1.5$ à 2

Les auteurs proposent : $C=1+E=5/3$

Ces valeurs correspondent donc à la croissance d'une cavité sphé rique en milieu non écrouissable.

Le cas de l'écrouissage est considéré sous la forme extrême d'u

écrouissage linéaire (n=1) où alors le coefficient D est trouvé égal à :

$$D = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\sigma^{\infty}}{\tau^{\infty}}$$

τ^{∞} étant la contrainte courante d'écoulement en cisaillement.

Le facteur D apparaît environ 2 fois plus faible dans le cas de l'écrouissage linéaire que dans le cas d'un écrouissage nul.

Annexe 3.3 LINEARISATION DU MODELE EN CONTRAINTES PLANES /*/.

Le résultat général du modèle est donné par l'ensemble d'équations suivant :

$$\frac{\dot{R}_i}{R_i} = C\dot{\varepsilon}_i^{\infty} + D\dot{\bar{\varepsilon}}$$

où, si n=0, $D = 0.558\ \mathrm{sh}\left[\frac{\sqrt{3}\sigma^{\infty}}{2\tau_o}\right] + 0.008\nu\,\mathrm{ch}\left[\frac{\sqrt{3}\sigma^{\infty}}{2\tau_o}\right]$

si n=1, $D = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\sigma^{\infty}}{\tau^{\infty}}$

$$\nu = \frac{-3\varepsilon_{II}}{\varepsilon_I - \varepsilon_{III}} \quad \text{(avec la convention } \varepsilon_I > \varepsilon_{II} > \varepsilon_{III})$$

et $C \in [1.5, 2]$

Dans le cas d'un chargement radial, en introduisant le rapport des contraintes principales :

$$\alpha = \sigma_2/\sigma_1$$

on peut écrire :

$$\sigma^{\infty} = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{3} = \sigma_1\frac{(1+\alpha)}{3}$$

et

$$\tau_o = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}{\sqrt{3}}\sigma_1$$

L'expression de D prend alors la forme :

$$D = 0.558\ \mathrm{sh}\left[\frac{1}{2}\,\frac{1+\alpha}{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}\right] + 0.008\nu\mathrm{ch}\left[\frac{1}{2}\,\frac{1+\alpha}{\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}\right]$$

qui ne dépend que du chemin de déformation et de charge suivi.

En notant que :

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1+\rho+\rho^2}\,\dot{\varepsilon}_1$$

La relation génétale peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\dot{R}_i}{R_i} = \dot{\varepsilon}_i^{\infty}\left[C + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1+\rho+\rho^2}\,\frac{\dot{\varepsilon}_1^{\infty}}{\dot{\varepsilon}_i^{\infty}}\,D\right]$$

ou encore : $\varepsilon_i^{V} = \varepsilon_i^{\infty}\, A_i(\rho)$

où ε_i^{V} représente la déformation de la cavité dans la direction i,

ε_i^{∞} est le champ de déformation imposé aux limites,

$A_i(\rho)$ est une constante pour chaque chemin de déformation.

Les coefficients $A_i(\rho)$ peuvent se mettre, avec une très bonne approximation, sous la forme linéaire suivante :

$$A_i = C + 0.64(1+\rho)\varepsilon_1^{\infty}/\varepsilon_i^{\infty}$$

ce qui donne : $A_1 = C + 0.64(1+\rho)$

$$A_2 = C + 0.64\left(1+\frac{1}{\rho}\right)$$

$$A_3 = C - 0.64$$

Il est remarquable de constater que le coefficient A_3 est constant quel que soit le chemin de déformation suivi et que, de plus, pour la valeur recommandée de C=1.66 il est très voisin de 1. Dans la plupart des cas nous pourrons donc faire l'approximation :

$$\varepsilon_3^{V} \simeq \varepsilon_3^{\infty}$$

La représentation à l'aide des coefficients A_i fait apparaître ne discontinuité dans la définition du terme A en déformation plane ρ=0). Aussi la représentation suivante est-elle introduite pour alier ce phénomène :

$$\varepsilon_i^{v} = B_i \varepsilon_1^{\infty}$$

ù ε_1^{∞} est la plus grande déformation principale imposée aux limites.

Les coefficients B_i découlent très simplement des coefficients A_i t l'on obtient :

$$\varepsilon_i^{v} = B_i \varepsilon_1^{\infty}$$

vec :
$$B_i = C\varepsilon_i^{\infty}/\varepsilon_1^{\infty} + 0.63(1+\rho)$$

oit :
$$B_1 = C + 0.64(1+\rho)$$

$$B_2 = C\rho + 0.64(1+\rho)$$

$$B_3 = -(C-0.64)(1+\rho)$$

ette forme linéaire approche la forme complète avec une approximation eilleure que 5% pour le domaine $\rho \in [-0.5, 1]$, l'erreur maximum commise eut atteindre 10% dans le domaine $\rho \in [-1, -0.5]$.

Ces équations de croissance de la cavité permettent de vérifier que a dilatation volumique ne dépend pas du coefficient c, ce qui est vident par définition puisque c est relié au terme déviateur de chan- ement de forme sans changement de volume. En effet :

$$\varepsilon_1^{v} + \varepsilon_2^{v} + \varepsilon_3^{v} = (B_1 + B_2 + B_3)\varepsilon_1^{\infty}$$

où
$$\varepsilon_1^{v} + \varepsilon_2^{v} + \varepsilon_3^{v} = 1.92(1+\rho)\varepsilon_1^{\infty}$$

Il est de plus vérifié que lors d'une déformation en cisaillement =1) il n'y a pas accroissement de volume de la cavité ce qui est rmal d'après le modèle car dans cette déformation $\sigma^{\infty}=0$ et $\nu=0$.

Cette forme linéaire a l'avantage très intéressant de pouvoir être introduite très facilement dans les calculs analytiques. Nous utiliserons donc le modèle de croissance sous la forme :

$$\varepsilon_i^{v} = B_i \varepsilon_1^{\infty}$$

avec les valeurs précédemment calculées pour les B_i.

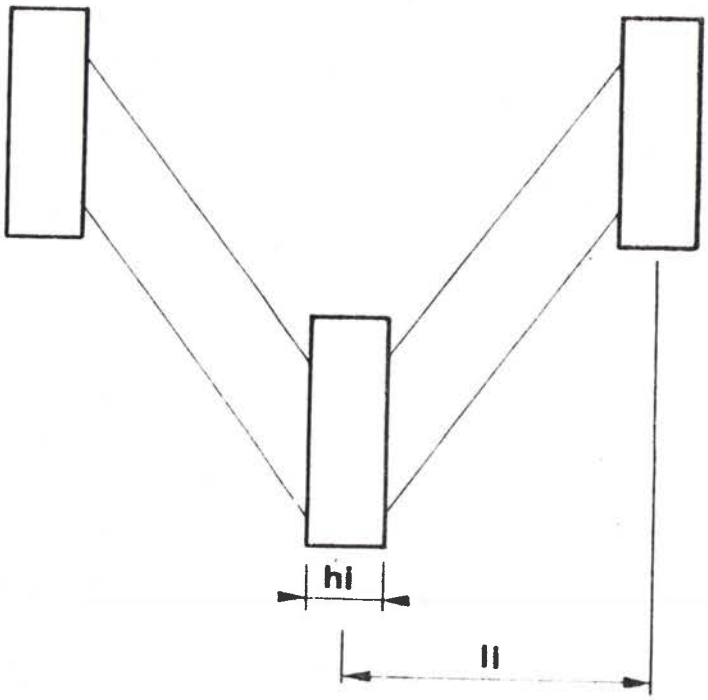


fig.N4/1 Modèle de répartition des cavités dans le matériau.

ANNEXE 4.

COALESCENCE PAR BANDE DE CISAILLEMENT LOCALISEE[+]

Le matériau est supposé contenir un réseau de cavités présentées
ır la figure N4/1.

Si l'écoulement se localise en une bande fine de cisaillement
ignant les cavités, l'augmentation de section des trous dans ce cisail-
ement est :

$$dA_v = 2cdu$$

c est la dimension des cavités normalement au glissement
du est le déplacement de cisaillement donné par :

du = edγ où e est l'épaisseur de la bande cisaillée,

dγ est la déformation de cisaillement.

La surface des cavités interceptée par le plan de cisaillement est :

$$Av = \pi bc\sqrt{2/\left[\frac{a^2}{b^2}+1\right]}$$

ur une bande inclinée à 45°.

La surface résistante est :

$$A_r = A_t - A_v = \sqrt{2}\,l_b\,l_c - \pi bc\sqrt{2/\left[\frac{a^2}{b^2}+1\right]}$$

[+] F.A. McCLINTOCK - in "Ductility" - ASM. Metals Park- Ohio
(1967) p.255

Imprimé au Service de Reprographie
de l'U.E.R. Sciences de l'Université de METZ
par M. F. LAVIGNE et Melle J. PETERSHEIM que
je tiens à remercier pour la rapidité et la
qualité apportées à ce tirage.