



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THÈSE

DE DOCTORAT D'ÉTAT ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

MÉCANIQUE

présentée

A L'UNIVERSITÉ DE METZ

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS SCIENCES

par

Alain MOLINARI

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19790215
Cote	S/Mz 79/11
Loc	

ONDES TRANSITOIRES EN MILIEUX SOLIDES DISSIPATIFS

Soutenue le 10 juillet 1979 devant le jury composé de.



M. P. GERMAIN

Ecole Polytechnique

Président

M. L. BRUN

Ecole Polytechnique

Rapporteur

M^{me} M. PIAU

CNRS de Grenoble

"

M. J.-D. WEBER

Université de Metz

"

M^{lle} H. LANCHON

Université de Nancy

Examineur

M. B. SCHMITT

Université de Metz

"

A LA MEMOIRE DE MON PERE

Je suis heureux d'exprimer ma sincère gratitude envers Monsieur L. Brun qui a orienté mes travaux vers un sujet d'étude passionnant. Me témoignant constamment confiance et attention, il a été un maître dont les qualités scientifiques et humaines laisseront en moi une profonde empreinte.

Les encouragements, les critiques et les conseils de Monsieur P. Germain m'ont toujours été précieux. Je le remercie pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail et pour l'honneur qu'il me fait de présider ce jury.

Mes remerciements vont également à Madame Monique Piau et à Monsieur J.D. Weber qui ont accepté d'assumer la lourde tâche de rapporteur, ainsi qu'à Mademoiselle Hélène Lanchon et Monsieur B. Schmitt qui ont bien voulu s'intéresser à cette étude.

Enfin, je n'oublie pas Madame Christiane CHOLLET pour la compétence avec laquelle a été réalisée la mise en forme matérielle de cette thèse.

TABLE DES MATIERES

<u>INTRODUCTION</u>	5

PREMIERE PARTIE : PROBLEMES LINEAIRES

I - UN EXEMPLE INTRODUCTIF, L'EQUATION :

$(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x}) (\frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial}{\partial x}) u + \lambda (\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}) u = 0$, ...	12
1.1 Introduction	12
1.2 Une première étude de l'évolution de l'onde	14
a) Etude près du front	
b) L'évolution ultime de l'onde	
1.3 La méthode de l'échelle variable	20
a) Introduction	
b) Etude près du front d'onde par la méthode des échelles multiples	
c) Etude de l'onde différée	
1.4 Cas où les célérités c_1 et c_2 sont positives	30
a) Etude près des fronts instantanés	
b) L'onde différée et la notion de couche limite	
1.5 Discussion de la méthode de l'échelle variable	36
a) Domaines de validité des solutions approchées	
b) Fin d'un paradoxe	
c) Perspectives de la méthode	
d) Conclusion	
Références.	

II - THERMOELASTICITE GENERALISEE : EQUATIONS GENERALES ET METHODES DE RESOLUTION DU PROBLEME DYNAMIQUE

	43
2.1 Les équations linéarisées de la thermoélasticité dynamique généralisée ...	45
a) Linéarisation	
b) Normalisation	
2.2 Solution exacte	51
a) Factorisation de l'opérateur de la thermoélasticité généralisée	
b) Décomposition de la solution	
c) Calcul de la solution	
d) Conclusion	

2.3 Solution approchée par la méthode de l'échelle variable	61
a) L'onde instantanée	
b) L'onde différée	
2.4 Développement asymptotique par rapport à la constante de couplage thermomécanique	77
a) L'algorithme de calcul	
b) Thermoélasticité classique, problème de Danilovskaïa	
c) Un exemple en théorie du second son	
2.5 Conclusion	97
Références	98

III - REPONSE DYNAMIQUE D'UN CORPS THERMOELASTIQUE CLASSIQUE A UN FLUX D'ENERGIE 100

3.1 Dépôt d'énergie en surface	103
a) Position du problème	
b) L'onde différée	
c) Etude de l'onde aux faibles valeurs de l'abscisse ou du temps	
d) Aspect quantitatif	
e) Conclusion	
3.2 Dépôt d'énergie en volume	118
a) Position du problème	
b) Etude de l'onde aux petites valeurs de l'abscisse ou du temps	
c) Etude de l'onde pour les grandes valeurs de l'abscisse et du temps	
d) Aspects quantitatifs et discussion des résultats dans le cas d'une grande longueur de pénétration	
e) Conclusion	
f) Influence de la longueur de pénétration sur l'évolution de l'onde de contrainte	
Références	150

DEUXIEME PARTIE : PROBLEMES NON LINEAIRES

IV - <u>VERS LA RESOLUTION DE PROBLEMES NON LINEAIRES</u>	151
4.1 Introduction	151
4.2 Etude d'une onde de faible amplitude par la méthode de l'échelle variable .	153
a) L'onde instantanée	
b) L'onde différée	
c) Conclusion	

4.3 L'onde de forte amplitude	161
a) Onde progressive, ligne de propagation	
b) L'onde progressive instantanée	
c) L'onde progressive différée	
Références	174
V - <u>PROBLEMES DYNAMIQUES EN VISCOELASTICITE ET THERMOELASTICITE NON LINEAIRES</u>	175
5.1 L'onde viscoélastique : position du problème	175
5.2 L'onde différée	178
a) Expression de la loi de comportement et de l'équation du mouvement adaptées à l'étude loin du bord	
b) Développements asymptotiques raccordés	
c) Une méthode d'échelles multiples	
5.3 L'onde instantanée	191
a) Calcul de la solution asymptotique	
b) Etude des chocs	
c) Conclusion	
5.4 Thermoélasticité non linéaire	203
a) Les équations du problème	
b) Sollicitation de type mécanique	
c) Sollicitation de type thermique	
Références	210
VI - <u>SYSTEMES DISSIPATIFS</u>	
6.1 Introduction	212
6.2 L'onde de faible amplitude	214
a) La k-onde progressive instantanée	
b) La k-onde progressive différée	
6.3 Applications	220
a) Thermoélasticité non linéaire	
b) Un matériau de type viscoélastique	
c) Matériau viscoélastique à paramètres cachés	
6.4 L'onde de forte amplitude	237
a) La k-onde progressive instantanée	
b) L'onde progressive différée	
Références	250

VII - PERSPECTIVES

7.1 Perspectives	251
7.2 Une théorie des rayons différés	253
a) Notations	
b) L'onde progressive instantanée	
c) L'onde progressive différée	
7.3 Ondes sismiques	260
a) L'onde plane différée	
b) L'onde sphérique différée	
Références	268
<u>CONCLUSION</u>	269
<u>ANNEXES</u>	271
<u>BIBLIOGRAPHIE</u>	297

INTRODUCTION

Ce mémoire traite de la propagation des ondes mécaniques transitoires dans un milieu solide dissipatif.

Il a deux finalités :

- 1°) D'abord une finalité d'ordre physique : on essaye d'éclairer les aspects qualitatifs des phénomènes étudiés notamment en ce qui concerne les effets de la dissipation et de la non-linéarité.
- 2°) La seconde finalité est de dégager une méthodologie de calcul. On se propose d'obtenir des solutions analytiques approchées et suffisamment simples pour pouvoir donner lieu à des interprétations qualitatives et à des évaluations quantitatives.

Une onde mécanique, c'est une perturbation qui se propage dans un milieu matériel en y faisant apparaître des déformations. Si au cours de la propagation l'énergie mécanique se dégrade en chaleur, on dit que le milieu est dissipatif.

Les progrès en matière d'onde ont été beaucoup plus rapides pour les gaz et les fluides que pour les solides. La raison en est que la loi de comportement d'un fluide peut, dans beaucoup de cas offrant un intérêt pratique, prendre une forme simple, plus simple en général que celle qui gouverne la réponse d'un solide. Et puis les besoins de l'industrie et la recherche d'armements de plus en plus performants notamment en matière d'aéronautique, ont donné une impulsion décisive à l'étude des ondes dans les gaz et les liquides.

Pour les solides, mis à part les phénomènes stationnaires ou périodiques, les études ont été conduites dans le passé de manière moins vigoureuse. Les besoins technologiques actuels (par exemple dans le domaine du nucléaire) nécessitent une plus grande connaissance des phénomènes dynamiques transitoires dans les solides. Citons à cet égard quelques thèmes d'étude :

- fracture dynamique
- ondes sismiques
- semi-conducteurs, effet piézoélectrique
- problèmes de choc entre solides.

Précisons le cadre physique dans lequel se place notre étude, puis les techniques de calcul utilisées.

Le Cadre Physique

Les phénomènes auxquels nous nous intéressons ici ont un caractère transitoire, à la différence des phénomènes stationnaires tels que ceux observés dans la célèbre expérience de Melde ou dans le non moins célèbre tube de Kundt. De plus nous ne formulons aucune hypothèse de périodicité. Les perturbations étudiées varient en fonction du temps de façon absolument quelconque à priori.

Les propriétés physiques du matériau dont nous tiendrons compte, sont liées au caractère dissipatif et non linéaire de la loi de comportement. Ces deux aspects, et leur interaction retiendront toute notre attention.

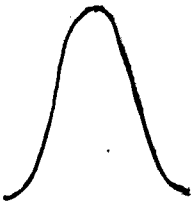
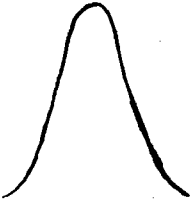
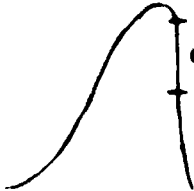
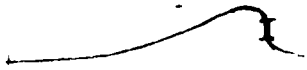
Décrire une onde en tenant compte de ces propriétés physiques est en soi fort complexe. C'est pourquoi, dans la majeure partie de ce mémoire, nous éliminons toute difficulté d'ordre géométrique en supposant que le milieu étudié occupe un demi-espace tout entier et en nous restreignant à l'étude des ondes planes (**). Les phénomènes de réflexion et de réfraction de l'onde sont en particulier ignorés ici.

Considérons une impulsion ayant initialement la forme (1) comme sur la figure ci-jointe. Dans les colonnes (1) (2) et (3) sont représentés des stades successifs de l'évolution de l'onde. Contrairement au cas d'un matériau linéaire et non dissipatif (a), l'impulsion initiale se déforme en s'atténuant lorsqu'elle se propage dans un matériau dissipatif (b) ou en se raidissant dans un matériau non linéaire (c) (*). Ce dernier phénomène résulte du fait que la vitesse de propagation d'un signal dépend, dans un matériau non linéaire de l'amplitude de ce signal (effet convectif). Sauf cas exceptionnel (par exemple : déferlement d'une onde marine), le raidissement du profil de l'onde conduit à l'apparition d'un choc, c'est à dire d'une discontinuité. Le modèle non dissipatif n'est alors plus valable car il y a dissipation de l'énergie mécanique au sein du choc (**). Le cas (d) représente la situation plus générale dans laquelle les propriétés non linéaires et dissipatives se combinent. La compétition entre les effets convectifs de la nonlinéarité qui tendent à raidir le profil et les effets dissipatifs qui tendent à l'émousser donne lieu à deux possibilités :

(*) Le raidissement ne se produit pas nécessairement à l'avant du signal.

(**) Un modèle ne représente jamais toute la réalité physique. Il a un domaine de validité dans lequel il permet de décrire l'essentiel des phénomènes auxquels on s'intéresse.

(***) Sauf au chapitre VII.

Phases Successives Caractéristiques du Matériau	1	2	3
(a) Linéaire non Dissipatif			
(b) Linéaire Dissipatif		 atténuation	
(c) non Linéaire non Dissipatif		 raidissement	 choc solution discontinue
(d) non Linéaire Dissipatif		 atténuation et raidissement	 pas de choc  choc

EVOLUTION D'UNE IMPULSION

- 1°) Si la nonlinéarité est suffisamment prononcée, ou si la perturbation est suffisamment forte, il y a formation d'un choc.
- 2°) Dans le cas contraire, l'apparition du choc est étouffée par les effets dissipatifs.

Les méthodes de calcul

Les problèmes étudiés sont du type suivant. Nous considérons un demi-espace initialement au repos dont le bord est soumis uniformément à une sollicitation de type mécanique, thermique ou de tout autre nature, et nous étudions la propagation de la perturbation ainsi engendrée. Cette propagation est gouvernée par des équations, ou des systèmes d'équations, aux dérivées partielles, linéaires ou non linéaires, homogènes ou non ; voire par des équations intégral-différentielles ; et il est vain d'espérer, dans l'état actuel des connaissances, d'en obtenir des solutions analytiques exactes qui offrent de plus un intérêt pratique.

Cependant, dès l'instant où l'on parvient à faire apparaître un petit paramètre dans ces équations, ou dans les conditions aux limites, il est souvent possible, avec une méthode de perturbation adéquate, de calculer une solution approchée. Ce sont de telles méthodes asymptotiques qui seront élaborées et utilisées dans ce mémoire.

Ces méthodes, comme la plupart de celles utilisées dans la théorie asymptotique des équations aux dérivées partielles, en sont encore au stade formel. Si nous ne démontrons pas ici le caractère rigoureusement asymptotique des méthodes utilisées, nous nous efforçons toutefois, autant que faire se peut, de préciser quels sont les domaines de validité des solutions formelles, c'est à dire les parties de l'espace-temps où elles approchent correctement la solution exacte. Diverses considérations nous permettront de définir au moins grossièrement ces domaines :

- des considérations d'ordre qualitatif, liées à la nature du phénomène physique étudié ou à la nature du processus asymptotique employé ;
- des considérations d'ordre quantitatif, liées à la possibilité de comparer la solution approchée formelle à une solution numérique calculée sur ordinateur, ou bien encore liées à la possibilité de raccorder deux solutions approchées et donc de les comparer dans la zone où elles coïncident.

Les petits paramètres que nous utiliserons pour définir nos processus de perturbation seront de trois types :

- a) Le petit paramètre ϵ est intrinsèquement lié au matériau. Il décrit une caractéristique de son comportement, comme par exemple la constante de couplage thermomécanique dans un corps thermoélastique, ou bien encore comme un petit coefficient qui caractériserait le comportement faiblement viscoélastique d'un corps.
- b) Le paramètre η est construit à partir de la condition à la limite. C'est le cas par exemple lorsqu'on considère une sollicitation au bord de faible amplitude. Le petit paramètre η est alors représentatif de l'amplitude.
- c) Le petit paramètre ϵ_1 a un caractère artificiel, en ce sens qu'il n'est pas défini à partir de quantités physiques mesurables et représentatives du matériau ou de la sollicitation au bord, comme les paramètres de type a) ou b). Le paramètre ϵ_1 est construit à partir d'une échelle de temps (ou de longueur) arbitraire, introduite en réduisant les équations du problème sous forme adimensionnelle. Il servira à décrire l'atténuation de l'onde due à la dissipation.

L'idée de prendre dans les problèmes dynamiques l'échelle de temps ou de longueur comme paramètre perturbateur est assez naturelle. En effet le comportement du matériau est directement tributaire des échelles de temps ou de longueur caractéristiques des phénomènes étudiés. Ainsi le comportement d'un glacier est-il à l'échelle des temps géologiques celui d'un fluide qui s'écoule ; mais à notre échelle il se comporte comme un solide. Autre exemple significatif, celui du mastic rebondissant. Lancé contre le sol il rebondit, posé sur une table il s'étale au bout d'un certain temps. A l'échelle de la durée du choc il se comporte comme un solide ayant une composante élastique, mais à l'échelle du "repos" sur la table il se comporte comme un fluide.

Nous utilisons dans ce mémoire différentes méthodes de perturbation directes ou bien singulières. Nous définissons notamment la méthode de l'échelle variable qui fait usage de paramètres du type c) et de la méthode des échelles multiples.

Chaque méthode donnera une solution approchée qui en général n'est valable que sur une partie de l'espace-temps, et il faudra combiner plusieurs méthodes pour tenter de décrire toute l'évolution de l'onde.

Les résultats obtenus donnent lieu à des interprétations qualitatives intéressantes en observant par exemple de quelle façon intervient le petit paramètre dans la solution approchée.

Le contenu de la thèse

Ce travail est divisé en deux parties. Dans la première on se restreint à l'étude de problèmes linéaires, dans la seconde on traite de problèmes non linéaires.

Le premier chapitre est consacré à l'étude d'un exemple qui, pour être relativement simple, n'en permet pas moins d'introduire certaines idées essentielles qui réapparaîtront souvent dans le corps du mémoire. On présente la méthode de l'échelle variable (M.E.V.) et l'on discute du domaine de validité des solutions approchées obtenues. La M.E.V. permet de calculer une solution approchée près du front (onde instantanée) et loin du bord (onde différée).

Au chapitre suivant, on passe à l'étude de problèmes physiques concrets. Après avoir présenté une théorie simple et cohérente de la thermoélasticité linéaire généralisée (où l'on prend en compte le fait que la chaleur se propage à vitesse finie) on expose différentes méthodes de résolution du problème dynamique. En utilisant une technique due à L. Brun on calcule d'abord une solution exacte sous forme de série. Puis on fait usage de la méthode de l'échelle variable pour calculer l'onde instantanée et l'onde différée. Pour compléter les résultats fournis par la M.E.V. on expose enfin une méthode de perturbation directe relativement à la constante de couplage thermomécanique. Elle se présente sous la forme d'un algorithme qui permet le calcul systématique des approximations successives à tout ordre.

Dans le cadre de la thermoélasticité classique on traite dans le chapitre III de problèmes aux limites particuliers en faisant usage des méthodes exposées au chapitre II. Précisément on étudie au sein du matériau l'évolution de l'onde de contrainte engendrée par un dépôt d'énergie thermique, ce dépôt pouvant être en surface ou en volume. On s'attache à mettre en évidence les aspects qualitatifs : en particulier on dégage les effets du couplage thermomécanique et de la conduction thermique. Le problème fait également l'objet d'applications numériques.

Au chapitre IV on aborde l'étude de problèmes non linéaires au travers d'un exemple typique. Après avoir résolu le problème faiblement non linéaire, on passe à l'étude des perturbations de forte amplitude. On propose notamment une méthode de calcul de l'onde différée.

Le chapitre V traite de la propagation d'une onde de faible amplitude dans un demi-espace viscoélastique dont la loi de comportement est donnée par un développement en intégrales multiples. L'équation qui gouverne le problème est de type intégro-différentiel. Le calcul des ondes viscoélastiques instan-

tanées et différées constitue donc un exemple d'application de la méthode de l'échelle variable à ce type d'équation. A la fin de ce chapitre, on aborde également le cas de la thermoélasticité non linéaire.

L'objet du chapitre VI est d'étudier les systèmes dissipatifs gouvernés par un système quasi-linéaire d'équations aux dérivées partielles. Il comporte principalement une méthode de calcul originale de l'onde différée. Dans le cas d'une perturbation de faible amplitude on propose une méthode matricielle générale que l'on applique ensuite à l'étude d'exemples typiques en viscoélasticité et thermoélasticité.

On dégage dans le dernier chapitre certaines perspectives de recherches auxquelles on donne un début de concrétisation en abordant l'étude de certains problèmes tridimensionnels. On établit d'abord une théorie des rayons différés qui généralise au cas d'une onde non plane les résultats obtenus au chapitre VI pour une onde plane de faible amplitude. On passe ensuite à l'étude de l'onde sphérique viscoélastique et l'on étudie le mode d'atténuation des ébranlements sismiques.

PREMIÈRE PARTIE

PROBLÈMES LINÉAIRES

CHAPITRE I

UN EXEMPLE INTRODUCTIF, L'EQUATION

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) u + \lambda \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$$

1.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous considérons l'équation :

$$(1) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) u + \lambda \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$$

Tout comme Whitham dans son célèbre article [1] "Some Comment on wave propagation and shock wave structure with application to magnetohydrodynamics", il nous paraît en effet utile d'introduire certaines des méthodes utilisées dans ce mémoire en étudiant d'abord un exemple simple.

L'équation (1), aux dérivées partielles en t et x (que nous appellerons le temps et l'abscisse), est linéaire. Elle gouverne l'évolution d'une variable, u , à laquelle nous ne cherchons pas ici à donner un sens physique : les applications seront traitées dans le corps du mémoire.

On se propose de calculer la solution $u(x, t)$ de (1) dans le quart de plan $x \geq 0, t \geq 0$ (fig. 1) lorsque sont données les conditions à la limite en $x = 0$, de régularité à l'infini, et les conditions initiales pour $t = 0$.

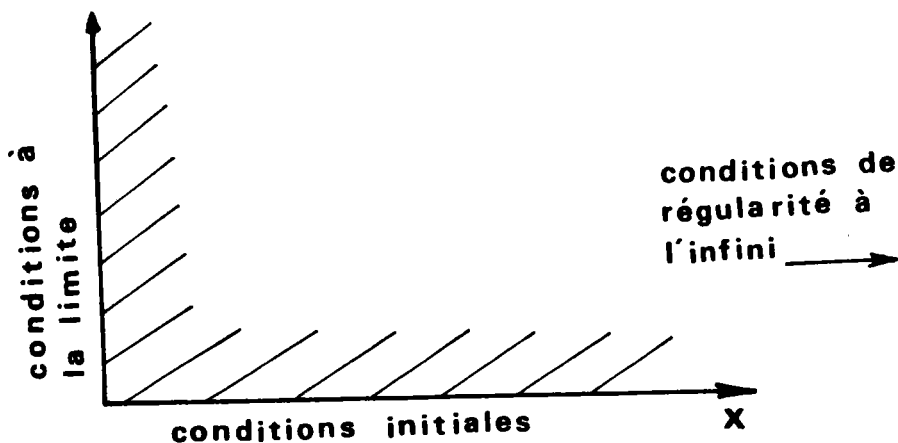


Fig: 1

On se limite dans ce travail aux problèmes pour lesquels il y a repos initial. Dans le cas présent cela se traduit par :

$$u(x, 0) = 0$$

(2)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \geq 0.$$

La transposition des méthodes présentées dans cette thèse, au cas où il n'y a pas de repos initial, ne présente pas de difficultés.

Deux opérateurs sont en présence dans l'équation (1). Le premier $O_2 = (\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial}{\partial x})$ est d'ordre deux, le second $O_1 = \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}$ est d'ordre inférieur. Whitham, [1], a clairement fait ressortir les rôles respectifs de ces opérateurs.

L'opérateur O_2 , d'ordre le plus élevé, gouverne l'évolution de la solution aux premiers instants. La perturbation, -qui se déplace dans notre cas vers les x croissants- comprend alors deux ondes de célérités c_1 et c_2 si ces quantités sont toutes deux positives ; une seule, de célérité c_1 , si c_2 est négative. L'opérateur O_1 , d'ordre inférieur, a pour effet d'amortir exponentiellement les fronts d'ondes.

Aux stades ultimes de l'évolution de l'onde, les rôles sont inversés. C'est O_1 qui régit au premier ordre le comportement de l'onde ; l'opérateur O_2 a pour effet quant à lui de diffuser l'onde.

Ces résultats se résument sous forme d'un tableau

	Opérateur principal	Opérateur secondaire
premiers stades de l'évolution	O_2	$O_1 \rightarrow$ amortissement exponentiel
stades ultimes	O_1	$O_2 \rightarrow$ amortissement par diffusion

L'objet de ce chapitre est d'abord, paragraphe 1.2, de rappeler les considérations qui ont permis à Whitham d'exprimer les résultats précédents.

Puis nous exposerons un point de vue, qui en premier lieu éclaire sous un autre jour le travail de Whitham, et qui fournit ensuite un cadre général permettant l'étude d'une grande variété de problèmes physiques. Cette tech-

nique, que nous appellerons la méthode de l'échelle variable, sera présentée au paragraphe 1.3.

Dans le paragraphe 1.4 nous introduisons l'importante notion de couche limite ; puis, paragraphe 1.5, suivra une discussion de la méthode de l'échelle variable.

1.2 UNE PREMIERE ETUDE DE L'EVOLUTION DE L'ONDE

On peut toujours supposer que $c_2 < c_1$. D'autre part pour des raisons de stabilité (voir Whitham [2]), nous supposerons que les coefficients de l'équation (1.1.1) vérifient les inégalités suivantes :

$$1) \quad c_2 < a < c_1, \quad \lambda > 0$$

Dans tout ce chapitre on admettra que l'hypothèse (1) est vérifiée. Dans les paragraphes 1.2 et 1.3 nous supposerons même que :

$$(2) \quad c_2 < 0 < a < c_1$$

auquel cas il n'y a qu'un seul front se propageant vers la droite.

Nous cherchons une solution de l'équation (1) qui vérifie :

- * les conditions de repos initial (1.1.2)
- * la condition de régularité à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$$

- * la condition à la limite :

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow c} u(x, t) = f(t) \quad (t \geq 0)$$

où f est une fonction donnée.

a) Etude près du front d'onde : transformation de Laplace et méthode heuristique de Whitham.

L'étude de l'onde au voisinage du front en utilisant une méthode qui s'appuie sur la transformation de Laplace est classique.

La transformée de Laplace d'une fonction $h(t)$ est définie par :

$$L h(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt$$

Prenons la transformée de Laplace de l'équation (1.1.1) par rapport au temps t . Compte tenu des conditions initiales (1.1.2) on obtient :

$$(5) \quad (s + c_1 \frac{\partial}{\partial x}) (s + c_2 \frac{\partial}{\partial x}) L u(s, x) + \lambda (s + a \frac{\partial}{\partial x}) L u(s, x) = 0$$

C'est une équation différentielle ordinaire en x dont la solution générale :

$$(6) \quad L u(s, x) = G_1(s) e^{P_1(s) x} + G_2(s) e^{P_2(s) x}$$

contient deux fonctions arbitraires $G_1(s)$ et $G_2(s)$. Quant à $P_1(s)$ et $P_2(s)$ ils sont solutions du polynôme caractéristique de (5) :

$$c_1 c_2 P^2 + (s c_1 + s c_2 + \lambda a) P + s^2 + \lambda s = 0$$

La formule (6) indique a priori que la solution u résulte de la superposition de deux ondes dont les transformées de Laplace sont

$G_1(s) e^{P_1(s) x}$ et $G_2(s) e^{P_2(s) x}$. Pour étudier le comportement de ces ondes au voisinage de leur front respectif on développe $P_1(s)$ et $P_2(s)$ aux grandes valeurs de s :

$$P_1(s) \sim -\frac{s}{c_1} - \frac{\lambda}{c_1} - \frac{c_1 - a}{c_1 - c_2}$$

$$P_2(s) \sim -\frac{s}{c_2} + k, \text{ quand } s \rightarrow \infty, k \text{ étant une constante qu'il n'im-}$$

porte pas de connaître.

Le théorème du retard, voir [3], nous donne l'originale de :

$$G_1(s) e^{-\left(\frac{s}{c_1} + \frac{\lambda}{c_1} \frac{c_1 - a}{c_1 - c_2}\right) x}$$

soit

$$g_1\left(t - \frac{x}{c_1}\right) e^{-\frac{\lambda}{c_1} \frac{c_1 - a}{c_1 - c_2} x}$$

où g_1 est l'originale de G_1 .

C'est une onde dont le front se déplace à la célérité c_1 .

L'originale du terme relatif à $P_2(s)$ ferait intervenir le noyau $g_2\left(t - \frac{x}{c_2}\right)$.

Puisque la célérité c_2 est supposée négative, cette onde se propagerait vers la gauche. Cela est à exclure en raison des conditions aux limites qui gouvernent le problème.

Par conséquent on a $G_2 = 0$ et la solution u prend la forme :

$$(7) \quad u = e^{-\frac{\lambda}{c_1} \frac{c_1 - a}{c_1 - c_2} x} g_1 \left(t - \frac{x}{c_1} \right)$$

au voisinage du front $x = c_1 t$.

La condition à la limite (3) précise que :

$$(8) \quad g_1 = f$$

Il résulte des conditions (1) (2) que le coefficient $\frac{\lambda}{c_1} \frac{c_1 - a}{c_1 - c_2}$ dans l'exponentielle est positif. L'onde est donc exponentiellement amortie en son front. Ainsi, au bout d'un certain temps, la perturbation est-elle négligeable au front ; et il convient maintenant de savoir où se trouve et de quelle façon se propage la partie principale de la perturbation. Cette question a depuis longtemps préoccupé les physiciens [4].

Une méthode heuristique très élégante, due à Whitham, fournit, dans des cas assez simples, linéaires notamment, les équations qui gouvernent le comportement de l'onde près du front et permet aussi de déterminer la partie principale de l'onde aux grands temps.

Le principe de cette méthode est le suivant Whitham [1] :

"In the wave motion with speed v , the derivative $\frac{\partial}{\partial t}$ and $-v \frac{\partial}{\partial x}$ of any quantity are approximately equal".

Ainsi, lorsqu'on s'intéresse à la composante se propageant à la célérité c_1 , on peut poser dans l'équation (1.1.1) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \approx -c_1 \frac{\partial}{\partial x}$$

sauf évidemment dans le terme $\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x}$, et l'on obtient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) (c_2 - c_1) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda (a - c_1) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

soit

$$(9) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) u + \lambda \frac{a - c_1}{c_2 - c_1} u = 0$$

On retrouve la solution (7).

b) L'évolution ultime de l'onde

Nous allons dégager le rôle de l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}$. Appliquant la méthode heuristique de Whitham, on pose $\frac{\partial}{\partial t} \approx -a \frac{\partial}{\partial x}$ dans (1.1.1) et l'on obtient l'équation :

$$(10) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) u - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

régissant le comportement de la composante de la perturbation gouvernée par l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}$. La quantité

$$(11) \quad \kappa = \frac{(c_1 - a)(a - c_2)}{\lambda}$$

est positive, eu égard à la condition (1).

L'équation (10) possède à la fois un caractère de propagation par le terme $\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}$ et un caractère de diffusion par le terme $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. D'ailleurs en faisant le changement de variables $(t, x) \rightarrow (\xi = t - \frac{x}{a}, x)$ on se ramènerait à l'équation de la chaleur. Cela montre que l'onde de célérité a se propage en diffusant.

La solution de l'équation (10) qui satisfait le repos initial et la condition à la limite (3) va être maintenant calculée. On pourra montrer qu'elle est en fait identique à celle que l'on obtiendrait en étudiant l'équation (1.1.1) avec une méthode asymptotique du type point-selle. Or cette dernière approche donne le comportement de l'onde dans la phase ultime de son évolution, il en est donc de même pour l'équation (10) obtenue par la méthode heuristique de Whitham.

Ainsi, au bout d'un certain temps, l'onde se propage à la vitesse différée, a , tout en diffusant.

Calculons d'abord la solution élémentaire $\Delta(x, t)$ de (10), c'est-à-dire la solution qui vérifie :

$$(12) \quad \Delta(0, t) = \delta(t) \quad (\delta \text{ est la distribution de Dirac})$$

$$(13) \quad \begin{aligned} \Delta(x, 0) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \Delta(x, t) &= 0 \end{aligned}$$

Compte tenu de (13)₁, on obtient en appliquant la transformation de Laplace à l'équation (10) dans laquelle on remplace u par Δ :

$$(14) \quad s L \Delta(s, x) + a \frac{\partial}{\partial x} L \Delta(s, x) - \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} L \Delta(s, x) = 0$$

Equation dont la solution s'écrit :

$$(15) \quad L \Delta(s, x) = A(s) e^{\Lambda_1(s)x} + B(s) e^{\Lambda_2(s)x}$$

avec

$$(16) \quad \Lambda_2 = \frac{a \mp \sqrt{a^2 + 4\kappa s}}{2\kappa}$$

Il existe un théorème [3] selon lequel

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s L \Delta(s) = \Delta|_{t=0}$$

D'après (13)₂, cette limite doit être nulle. Mais, d'après (16), le terme $e^{\Lambda_2(s)x}$ de (15) croît exponentiellement vers l'infini quand $s \rightarrow \infty$. On est donc amené à poser $B = 0$ dans (15). (*)

La condition à la limite (12) et le fait que $L \delta(s) = 1$ donnent alors $A = 1$.

Finalement par retour à l'originale:

$$(17) \quad \Delta(x, t) = \frac{x}{2} (\pi \kappa t^3)^{-1/2} e^{-\frac{a^2}{4\kappa t}} \left(\frac{x}{a} - t\right)^2$$

Une convolution par rapport au temps fournit la solution u de (10) telle que $u(0, t) = f(t)$:

$$(18) \quad \begin{aligned} u(x, t) &= f(t) * \Delta(x, t) \\ &= \int_0^t f(\tau) \Delta(x, t - \tau) d\tau = \int_0^t f(t - \tau) \Delta(x, \tau) d\tau \end{aligned}$$

Que (18) est bien une solution de (10) peut se vérifier facilement par le biais de la transformée de Laplace $L u(s, x) = L f(s) L \Delta(s, x)$. Que la condition à la limite est satisfaite résulte de (12) et du fait que δ est l'élément neutre pour le produit de convolution :

$$u(0, t) = f(t) * \Delta(0, t) = f(t) * \delta(t) = f(t)$$

Il est intéressant de se représenter l'allure de la solution élémentaire Δ pour les temps suffisamment grands. Le facteur exponentiel dans la formule (17) montre alors que Δ est négligeable en dehors d'un voisinage $\mathcal{D}$ de la droite $x = at$ de la forme (fig. 2) :

$$(19) \quad \frac{a^2}{4\kappa t} \left(\frac{x}{a} - t\right)^2 \leq 0(1)$$

(*) Une autre manière d'arriver au résultat est de remarquer que (13)₂ implique $\lim_{x \rightarrow \infty} L \Delta(s, x) = 0$, d'où $B = 0$.

La largeur de ce voisinage croît comme $\sqrt{t}$ quand t augmente car (19) équivaut à :

$$\left| \frac{x}{a} - t \right| < 0(1) \frac{2 \sqrt{\kappa} t}{a}$$

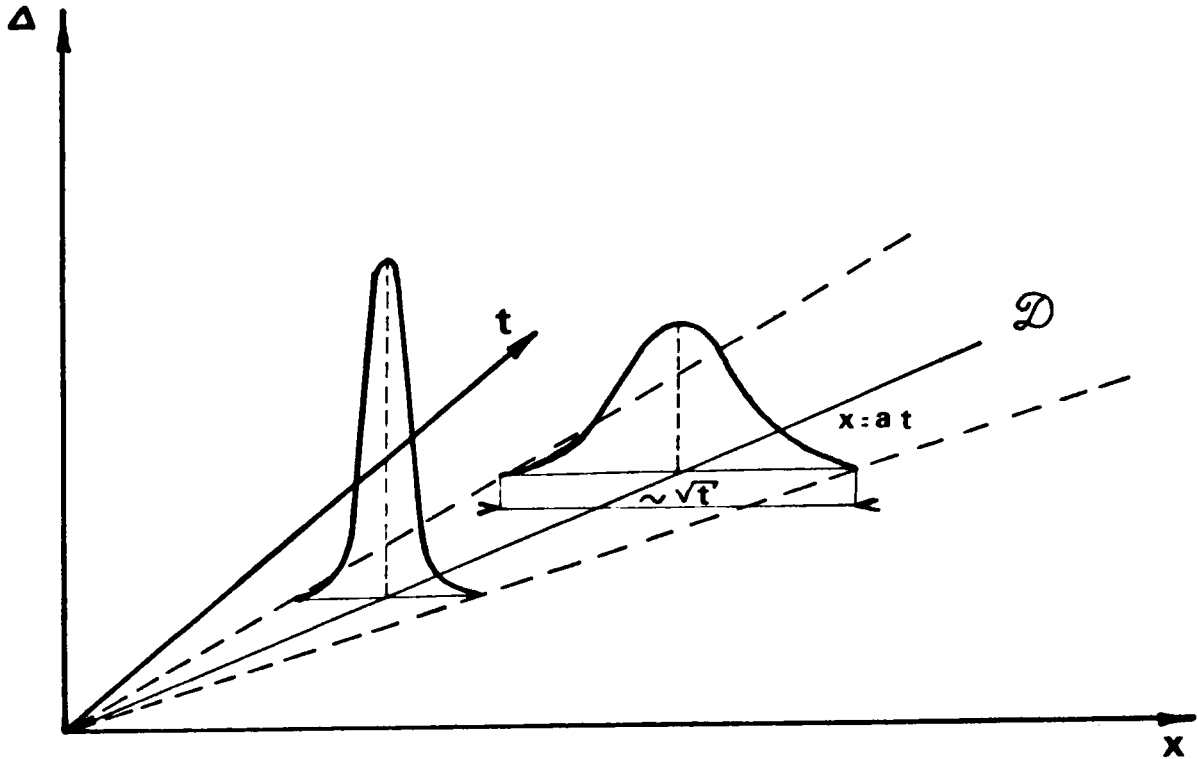


Fig: 2

Les considérations précédentes nous autorisent, pour t suffisamment grand, à approximer Δ par la fonction

$$(20) \quad \Delta_1 = \frac{x}{2} \left(\pi \kappa \frac{x^3}{a^3} \right)^{-1/2} e^{-\frac{a^3}{4 \kappa x} \left(\frac{x}{a} - t \right)^2}$$

obtenue en faisant la substitution $t \rightarrow \frac{x}{a}$ dans la formule (17) à l'exception du terme $\left(\frac{x}{a} - t \right)^2$.

Ceci est légitime, car en dehors de $\mathcal{D}$, Δ_1 , tout comme Δ , est exponentiellement négligeable ; et dans $\mathcal{D}$ on peut prendre $t \approx \frac{x}{a}$.

Si l'on substitue dans (18) Δ_1 à Δ , on obtient :

$$(21) \quad u(x, t) = \frac{1}{2 \sqrt{\pi \kappa \frac{x}{a^3}}} \int_0^t f(\tau) e^{-\frac{a^3}{4 \kappa x} \left(\frac{x}{a} - t + \tau \right)^2} d\tau$$

Ce même résultat aurait pu être obtenu par une méthode de point selle appliquée à l'équation (1.1.1), voir la formule (48) de Whitham [1].

1.3 LA METHODE DE L'ECHELLE VARIABLE (M.E.V.)

a) Introduction :

La méthode de l'échelle variable que nous présentons ici sera l'un des fils directeurs de notre travail. Si Ω est une vitesse et T un temps, nous pouvons à partir de t et x introduire un temps et une abscisse réduits (i.e. sans dimension) t' et x' :

$$(1) \quad \begin{aligned} t &= T t' \\ x &= \Omega T x' \end{aligned}$$

Le paramètre T ayant la dimension d'un temps est arbitraire. Il est à notre disposition et son rôle sera fondamental. Nous l'appellerons échelle de temps. On peut également définir une échelle de longueur $X = \Omega T$ qui jouerait un rôle analogue.

Après avoir opéré le changement de variable (1) dans l'équation (1.1.1) il vient :

$$(2) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{c_1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{c_2}{\Omega} \frac{\partial}{\partial x'} \right) u + T \lambda \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{a}{\Omega} \frac{\partial}{\partial x'} \right) u = 0$$

La méthode de l'échelle variable (en abrégé M.E.V.) est une méthode adaptée à la résolution de problèmes dynamiques. En jouant sur l'échelle de temps T , elle conduit à calculer en général deux solutions formelles :

L'une, S_I , est calculée en prenant une petite échelle de temps T et à l'aide d'un processus asymptotique dans lequel le petit paramètre est la quantité adimensionnelle $\epsilon_1 = T \lambda$

L'autre, S_D , s'obtient dans un processus asymptotique complémentaire du précédent en prenant une grande échelle de temps, de telle sorte que le nombre sans dimension $\epsilon_2 = \frac{1}{T \lambda}$ puisse être considéré comme petit.

Dans les deux cas les processus asymptotiques seront définis en s'appuyant sur la méthode des échelles multiples

Il ne suffit pas de calculer des solutions formelles, encore faut-il savoir dans quels domaines ces solutions approchent de façon correcte la solution exacte. Autrement dit il faut pouvoir définir les domaines de validités de S_I et S_D .

Nous nous appuyerons sur deux hypothèses de travail H_I et H_D .
Près d'un front instantané qui se propage dans une zone au repos, ce sont les composantes instantanées du matériau qui sont sollicitées. Il est donc naturel d'étudier l'onde près du front en prenant une petite échelle de temps T , d'où l'hypothèse :

H_I) la solution S_I calculée à l'aide du petit paramètre $\epsilon_1 = T\lambda$ est valable près du front instantané

Pour étudier le comportement ultime de l'onde il est naturel de prendre une grande échelle de temps, d'où :

H_D) la solution différée S_D (*) est valable lorsqu'on s'éloigne suffisamment du bord.

Nous aurons l'occasion de préciser les domaines de validité de S_I et S_D dans la suite.

Avant d'appliquer ces considérations à l'étude de l'équation (1.1.1) il est utile de faire quelques remarques générales :

* Dans l'exemple (1.1.1) étudié ici, il serait équivalent de faire tendre λ vers zéro ou vers l'infini au lieu de T . (ϵ_1 et ϵ_2 sont construits avec $T\lambda$). On pourrait donc envisager des processus asymptotiques dans lesquels les petits paramètres seraient λ ou bien $\frac{1}{\lambda}$; et les calculs seraient plus concis car on pourrait directement travailler sur l'équation (1.1.1) sans, par exemple, passer par le changement de variable (1). Cependant cette équivalence entre T et λ est liée à la nature particulière de l'exemple (1.1.1). En règle générale le paramètre avec lequel nous travaillerons sera toujours l'échelle de temps T .

* Lorsque nous aborderons les applications physiques il sera de toute façon très utile pour la compréhension du problème de normaliser les équations. La vitesse Ω du changement de variable (1) sera prise de façon à représenter une vitesse caractéristique du phénomène étudié. Celle-ci pourra être choisie différemment (**) suivant que l'on se trouve dans telle partie ou dans telle

(*) Les notations S_I et S_D sont en rapport avec les qualificatifs "Instantanés" et "Différés".

(**) En fait le choix de Ω ne change rien aux résultats, mais il permet d'alléger l'écriture des équations.

autre du plan (t, x) .

De plus nous n'aurons pas en général qu'une seule fonction inconnue u dans nos équations, et la normalisation devra aussi porter sur ces différentes fonctions (pour les rendre adimensionnelles).

* En fin de compte, même si cela n'est pas la façon la plus simple d'étudier l'exemple (1.1.1), notre but est de présenter ici la méthode de l'échelle variable telle qu'elle sera appliquée dans la suite du mémoire.

Les paragraphes suivants sont consacrés à l'étude de l'onde près du front puis loin du bord. Un soin particulier est apporté à la présentation de la technique des échelles multiples dont nous ferons un usage constant au sein de la méthode de l'échelle variable.

b) Etude près du front d'onde par la méthode des échelles multiples

Nous ferons tendre ici l'échelle de temps vers zéro de sorte que :

$$(3) \quad \varepsilon_1 = T\lambda$$

représente un petit paramètre.

Puisqu'on s'intéresse à l'onde dans le voisinage du front de célérité c_1 , on peut poser $\Omega = c_1$ et l'équation (2) s'écrit :

$$(4) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c_2}{c_1} \frac{\partial}{\partial x} \right) u + \varepsilon_1 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{a}{c_1} \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0$$

Remarques

Nous supposerons dans tout ce chapitre que u est une quantité sans dimension.

Pour rendre u adimensionnelle, l'échelle de temps T peut avoir un rôle à jouer. C'est le cas par exemple si u représente une longueur. On posera

$$u = \Omega T u'$$

où u' est la longueur réduite.

Par conséquent, en général, les conditions à la limite relatives au problème réduit sont susceptibles de faire intervenir en facteur l'échelle de temps T .

Pour nous limiter à l'étude d'un cas précis, nous supposerons dans ce paragraphe 1.3 que la condition à la limite sur u ne fait pas intervenir T en facteur.

Dans l'esprit de la méthode des échelles multiples [6][7][8][9] l'on introduit maintenant les variables multiples (*):

$$(5) \quad x'_1 = \epsilon_1^i x'_1$$

et l'on cherche une solution de (4) de la forme :

$$(6) \quad u(t', x', \epsilon_1) = \sum_{i \geq 0} \epsilon_1^i u_i(t', x'_0, x'_1, \dots)$$

On substitue (6) dans (4), après avoir remarqué que

$$\frac{\partial u}{\partial x'} = \frac{\partial u_0}{\partial x'_0} + \epsilon_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x'_0} + \frac{\partial u_0}{\partial x'_1} \right) + \dots$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x'^2_0} + \epsilon_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x'^2_0} + 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x'_0 \partial x'_1} \right) + \dots$$

Il vient après identification des coefficients des puissances de ϵ_1 :

$$(7) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'_0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{c_2}{c_1} \frac{\partial}{\partial x'_0} \right) u_0 = 0$$

$$(8) \quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'_0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{c_2}{c_1} \frac{\partial}{\partial x'_0} \right) u_1 = & - \left(1 + \frac{c_2}{c_1} \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial t' \partial x'_1} \\ & - 2 \frac{c_2}{c_1} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x'_0 \partial x'_1} - \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{a}{c_1} \frac{\partial}{\partial x'_0} \right) u_0 \end{aligned}$$

De plus, la condition à la limite $u(x = 0, t) = f(t)$ peut s'écrire :

$$(9) \quad \begin{aligned} u_0(t', 0, 0, \dots) &= f_1(t') \\ u_i(t', 0, 0, \dots) &= 0 \end{aligned}$$

avec :

$$f_1(t') = f(T t')$$

La solution de (7) qui se propage vers la droite et qui vérifie (9)₁ est donnée par :

(*) Si le problème était à valeurs initiales il serait plus judicieux de prendre les variables multiples $t_i = \epsilon_1^i t$

$$(11) \quad u_0(t', x'_0, x'_1) = u_0(\xi, x'_1)$$

où l'on a posé

$$(12) \quad \xi = t' - x'_0$$

Si l'on suppose que u_0 ne dépend pas des variables $x'_1, x'_2, \dots$ on a tout simplement, d'après (9)₁ :

$$(13) \quad u_0(t', x'_0) = f_1(\xi)$$

L'équation (8) qui s'écrit alors :

$$(14) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'_0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{c_2}{c_1} \frac{\partial}{\partial x'_0} \right) u_1 = - \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{a}{c_1} \frac{\partial}{\partial x'_0} \right) u_0$$

$$= \left(-1 + \frac{a}{c_1} \right) \frac{\partial u_0}{\partial \xi}$$

admet une solution particulière $\hat{u}_1$ de la forme :

$$(15) \quad \hat{u}_1(t', x'_0) = x'_0 K(\xi)$$

où K se détermine par substitution de (15) dans (14) :

$$(16) \quad K = - \frac{c_1 - a}{c_1 - c_2} u_0$$

La forme la plus générale d'une onde, solution de (14) et se propageant vers la droite est donc :

$$u_1(t', x'_0) = x'_0 K(\xi) + \tilde{u}_1(\xi)$$

soit, compte tenu de (9)₂ :

$$(17) \quad u_1 = x'_0 \frac{a - c_1}{c_1 - c_2} u_0$$

Dans le développement

$$(18) \quad u = u_0 + \varepsilon_1 u_1 + \dots$$

le terme $\varepsilon_1 u_1$, qui contient une puissance de x'_0 , est un terme séculaire. Cela signifie qu'il est négligeable par rapport au premier terme u_0 quand x'_0 est suffisamment petit, mais que cela n'est plus le cas dès l'instant où $x'_0 = 0$ ($\frac{1}{\varepsilon_1}$). Le domaine de validité de la formule (18) -qui n'est rien d'autre

qu'un développement direct par rapport à ε_1 - est donc réduit à un petit voisinage de l'origine.

La méthode des échelles multiples permet d'élargir le domaine de validité. A cette fin on introduit les variables multiples $x'_1, x'_2, \dots$ et l'on fait en sorte que le terme séculaire -qui est à l'origine de la mauvaise performance du développement (18)- disparaisse.

Cela est possible en admettant la dépendance de u_0 par rapport à x'_1 et en posant que le second membre de l'équation (8) est nul, soit :

$$(19) \quad \frac{\partial u_0}{\partial x'_1} + \frac{c_1 - a}{c_1 - c_2} u_0 = 0$$

La solution

$$u_0 = A(\xi) e^{-\frac{c_1 - a}{c_1 - c_2} x'_1}$$

de l'équation (19), fait intervenir une fonction arbitraire A que l'on calcule à l'aide de la condition à la limite (9)₁.

$$u_0(t', 0, 0) = A(t') = f_1(t')$$

Finalement la solution

$$(20) \quad u_0 = f_1(t' - x'_0) e^{-\frac{c_1 - a}{c_1 - c_2} x'_1}$$

peut être exprimée en variables physiques si l'on se souvient que $t' = \frac{t}{T}$,

$$x'_0 = \frac{x}{c_1 T}, \quad x'_1 = \varepsilon_1 x'_0 = \lambda \frac{x}{c_1} \text{ et que } f_1(t') = f(T t').$$

Le résultat :

$$(21) \quad u_0 = f\left(t - \frac{x}{c_1}\right) e^{-\frac{c_1 - a}{c_1(c_1 - c_2)} \lambda x}$$

est identique à (1.2.7) (1.2.8).

On remarquera que le rôle de la variable lente x'_1 (c'est la terminologie consacrée) est très précisément de décrire l'atténuation de l'onde au front. Si l'on pose $x'_1 = 0$ dans (20) l'onde se propage au voisinage du front sans se déformer et sans être atténuée :

$$(22) \quad u_0 = f_1(t' - x'_0) = f\left(t - \frac{x}{c_1}\right)$$

On conçoit que dans la réalité physique cela n'est jamais rigoureusement vrai en raison de la dissipation. Cependant il arrive en pratique que les effets

dissipatifs soient très longs à se manifester. La solution (22) est alors valable dans un large domaine, avant que l'usage de la variable lente x'_1 ne s'avère nécessaire.

Dans l'exemple étudié ce domaine est caractérisé par

$$\frac{c_1 - a}{c_1 (c_1 - c_2)} \lambda x \ll 1$$

Nous ne poursuivrons pas plus loin l'étude de la solution approchée au voisinage du front. La formule (21) qui donne la solution au premier ordre contient en effet toute l'information physique relative au problème (propagation et amortissement du signal f). Poursuivre le développement à l'ordre supérieur et faire jouer les variables lentes $x'_2, x'_3 \dots$ ne constitue qu'un raffinement sans intérêt fondamental pour les problèmes que nous traiterons. C'est d'ailleurs l'un des points les plus intéressants des méthodes de perturbations singulières, telles que les échelles multiples ; qu'il suffise en général du premier terme du développement pour avoir de bons renseignements sur la solution exacte.

c) Etude de l'onde différée

On s'intéresse maintenant au comportement de l'onde lorsqu'elle se trouve suffisamment loin du bord. Il est naturel cette fois de donner à l'échelle de temps T de grandes valeurs de sorte que le paramètre

$$(23) \quad \epsilon_2 = \frac{1}{\lambda T}$$

puisse-t-être considéré comme petit.

Les variables multiples sont alors définies par

$$(24) \quad x'_i = \epsilon_2^i x'$$

et la solution est recherchée sous la forme :

$$(25) \quad u(t', x', \epsilon_2) = \sum_{i \geq 0} \epsilon_2^i u_i(t, x'_0, x'_1, \dots)$$

Comme dit précédemment le choix de la vitesse Ω n'est pas primordial puisqu'il ne peut avoir que des conséquences (d'ailleurs négligeables ici) sur l'esthétique des formules. Nous prendrons $\Omega = a$.

La substitution de (25) dans (1.3.2) donne après identification des coefficients des premières puissances de ϵ_2^i :

$$(26) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'_0} \right) u_0 = 0$$

$$(27) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x'_0} \right) u_1 = - \frac{\partial u_0}{\partial x'_1} - \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{c_1}{a} \frac{\partial}{\partial x'_1} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{c_2}{a} \frac{\partial}{\partial x'_0} \right) u_0$$

et les conditions à la limite s'écrivent :

$$(28) \quad u_0(t', 0, 0) = f_1(t') \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} f(T t'), \quad u_i(t', 0, 0) = 0 \quad (i \geq 1)$$

La solution de (26) est :

$$(29) \quad u_0(t', x'_0, x'_1, \dots) = u_0(\xi, x_1, \dots)$$

avec

$$(30) \quad \xi = t' - x'_0$$

Supposons que u_0 ne d\u00e9pende pas des variables lentes $x'_1, x'_2, \dots$, alors l'onde $u_0(\xi)$ se propagerait \u00e0 la vitesse normalis\u00e9e unit\u00e9 sans se d\u00e9former et en particulier sans s'amortir. Comme pr\u00e9c\u00e9demment la variable lente x'_1 servira \u00e0 d\u00e9crire les effets dissipatifs.

Le fait que l'onde diff\u00e9r\u00e9e se propage \u00e0 la vitesse normalis\u00e9e unit\u00e9, c'est-\u00e0-dire \u00e0 la vitesse r\u00e9elle a , montre que la nature dissipative du probl\u00e8me a pour effet de transformer l'onde instantan\u00e9e qui se propagerait \u00e0 l'origine \u00e0 la c\u00e9l\u00e9rit\u00e9 c_1 , en une pseudo-onde se propageant \u00e0 la c\u00e9l\u00e9rit\u00e9 diff\u00e9r\u00e9e a , inf\u00e9rieure \u00e0 c_1 . Ce point avait d\u00e9j\u00e0 \u00e9t\u00e9 not\u00e9 en 1.2.b, mais nous voulons y insister.

Un raisonnement analogue \u00e0 celui du paragraphe pr\u00e9c\u00e9dent, conduit \u00e0 annuler le second membre de (27) si l'on veut \u00e9viter l'apparition d'un terme s\u00e9culaire, soit, compte tenu de (29)-(30) :

$$(31) \quad \frac{\partial u_0}{\partial x'_1} - \beta \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} = 0$$

o\u00f9

$$(32) \quad \beta = \left(\frac{c_1}{a} - 1 \right) \left(1 - \frac{c_2}{a} \right)$$

est une constante positive d'apr\u00e8s (1.2.1).

L'\u00e9quation de la chaleur (31) montre que l'onde diff\u00e9r\u00e9e s'amortit en diffusant.

D'après (28)₁ et (29)-(30), on a :

$$(33) \quad u_0(\xi, x'_1 = 0) = f_1(\xi)$$

Le problème ainsi posé pour l'équation de la chaleur (31) est un problème à valeurs initiales dont la solution est :

$$(34) \quad u_0(\xi, x'_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi x'_1 \beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-\frac{(\xi - \tau)^2}{4\beta x'_1}} d\tau$$

On revient aux variables physiques en remarquant que $\xi = t' - x' = \frac{1}{T} (t - \frac{x}{a})$,

$$x'_1 = \epsilon_2 x' = \frac{x}{\lambda T^2 a}$$

d'où

$$u_0(t, x) = \frac{T}{2\sqrt{\pi \frac{x}{\lambda a} \beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(T\tau) e^{-\lambda a \frac{(t - \frac{x}{a} - T\tau)^2}{4\beta x}} d\tau$$

Après un changement de variable $T\tau \rightarrow \tau$ et tenant compte du fait que $f(\tau) = 0$ si $\tau < 0$, on obtient :

$$(35) \quad u_0(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \frac{x}{\lambda a} \beta}} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{\lambda a (t - \frac{x}{a} - \tau)^2}{4\beta x}} d\tau$$

Cette formule est identique à celle que nous avons obtenue en (1.2.21) - car $\kappa = \frac{a^2 \beta}{\lambda}$ - à la différence près que la borne d'intégration est l'infini au lieu de t . Il y a là semble-t-il, un paradoxe car à l'instant t la réponse $u_0(t, x)$ dépend d'après (35) des valeurs de $f(\tau)$ aux instants futurs $\tau > t$, en contradiction avec le principe de causalité. En fait nous leverons ce paradoxe au paragraphe 1.5 en montrant que cette dépendance par rapport au futur est négligeable dans le domaine de validité de la solution u_0 . De sorte que le symbole $\int_0^{\infty}$ dans (35) peut être remplacé par $\int_0^{t^*}$. La formule coïncide alors avec (1.2.21).

En résumé deux variables d'espace x'_0 et x'_1 ont été nécessaires pour représenter correctement l'onde ; la première sert à décrire la propagation, et la seconde l'amortissement.

On peut se représenter visuellement dans l'espace (t', x'_0, x'_1) la façon dont les variables multiples permettent de décrire l'évolution de l'onde (fig. 3).

(*) On voit bien alors que le repos initial est vérifié dans le domaine de validité de u_0 .

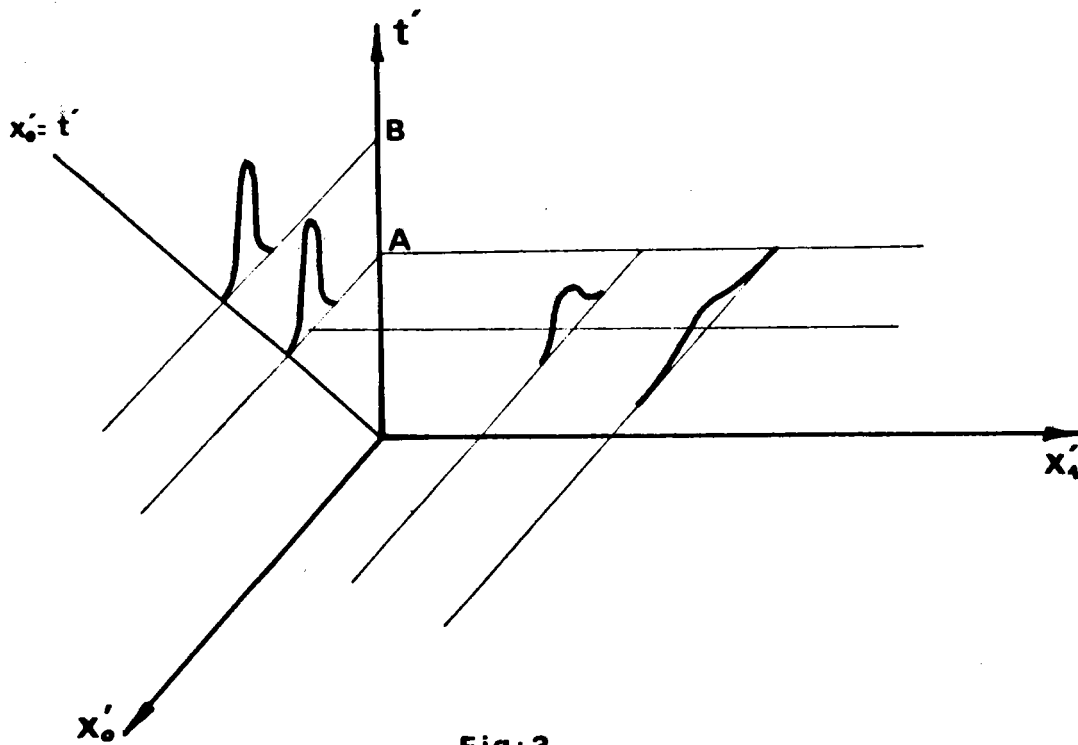


Fig:3

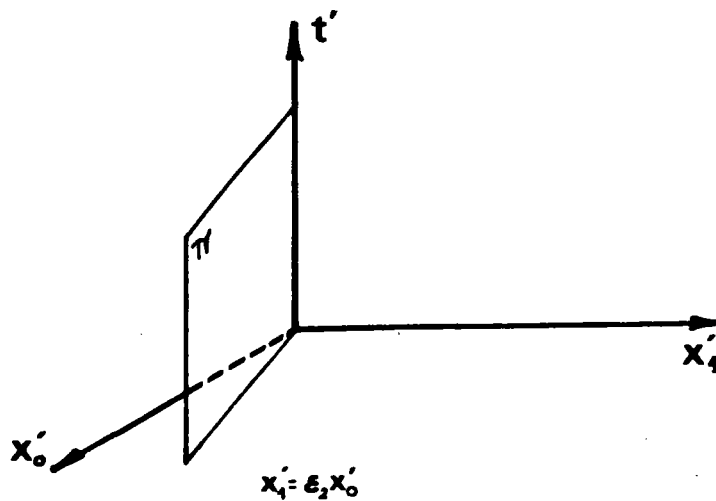


Fig:4

Imaginons pour fixer les idées que l'impulsion f soit en forme de pic. Dans le plan (t', x'_0) où la variable lente x'_1 n'a aucun rôle à jouer, le pic se propage en se translatant parallèlement à la droite $t' = x'_0$. Sur la figure on a représenté deux pics sur les droites Ax'_0 et Bx'_0 . Lorsqu'on s'éloigne du plan (t', x'_0) avec la variable lente x'_1 , ces pics vont diffuser suivant l'équation (31) et donc s'amortir (fig. 3). Ainsi à chaque point de l'espace des variables multiples, on peut associer une valeur de u_0 . Les seuls points représentatifs de la réalité physique sont

ceux qui se trouvent dans le plan π tel que $x'_1 = \epsilon x'_0$ (fig. 4).

Pour les faibles valeurs de x'_0 les points du plan π sont très voisins du plan (t', x'_0) , et l'amortissement est alors négligeable. Mais plus on s'éloigne du bord et plus les effets dissipatifs se font sentir.

1.4 CAS OU LES CELERITES c_1 et c_2 sont positives.

La différence avec le cas précédent ($c_2 < 0$) tient à l'existence, pour l'équation (1.1.1), de deux caractéristiques C_1 et C_2 de pentes positives :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c_1} \text{ et } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{c_2}$$

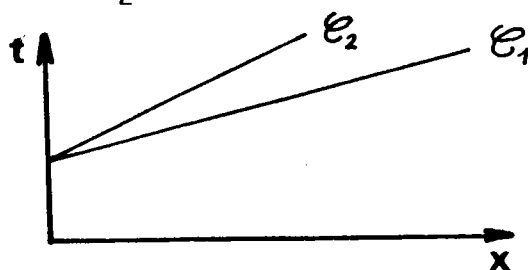


Fig: 5

Par conséquent, la solution u de (1.1.1) sera gouvernée par deux conditions à la limite du type :

$$(1) \quad u(0, t) = f(t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = g(t)$$

Voyons quelles sont les modifications à apporter aux raisonnements antérieurs.

a) Etude près des fronts instantanés

Il y a deux ondes à calculer, l'une de célérité c_1 , l'autre de célérité c_2 . Dans le paragraphe 1.3 b nous avons montré comment obtenir une solution $u^{(1)}$ se propageant à la vitesse c_1 . On pose

$$(2) \quad t = Tt', \quad x = \Omega Tx', \quad x'_1 = \epsilon_1^i x'_0, \quad \epsilon_1 = T\lambda$$

et par substitution dans (1.1.1) on calcule le développement

$$(3) \quad u^{(1)} = \sum_{i \geq 0} \epsilon_1^i u_i^{(1)}(t', x'_0, x'_1 \dots)$$

Le premier terme s'exprime, sous la forme :

$$(4) \quad \begin{aligned} u_0^{(1)} &= f_1 \left(Tt' - \frac{\Omega T}{c_1} x_0' \right) e^{-\frac{c_1 - a}{c_1 - c_2} \frac{\Omega}{c_1} x_1'} \\ &= f_1 \left(t - \frac{x}{c_1} \right) e^{-\frac{c_1 - a}{c_1 (c_1 - c_2)} \lambda x} \end{aligned}$$

En échangeant les rôles de c_1 et c_2 , on obtient de façon identique une solution $u^{(2)}$ se propageant à la vitesse c_2 :

$$(5) \quad u^{(2)} = \sum_{i \geq 0} \epsilon_1^i u_i^{(2)}(t', x_0', x_1' \dots)$$

$$(6) \quad \begin{aligned} u_0^{(2)} &= f_2 \left(Tt' - \frac{\Omega T}{c_2} x_0' \right) e^{-\frac{a - c_2}{c_1 - c_2} \frac{\Omega}{c_2} x_1'} \\ &= f_2 \left(t - \frac{x}{c_2} \right) e^{-\frac{a - c_2}{c_2 (c_1 - c_2)} \lambda x} \end{aligned}$$

L'équation (1.1.1) étant linéaire, la superposition de $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$ fournit une nouvelle solution

$$(7) \quad u = u^{(1)} + u^{(2)}$$

avec laquelle il est possible de vérifier les conditions à la limite (1).

Remarquons que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\Omega T} \frac{u}{\partial x'} = \frac{1}{\Omega T} \left[\left(\frac{\partial u_0^{(1)}}{\partial x_0'} + \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial x_0'} \right) + O(\epsilon_1) \right]$$

D'après (3) (4) (5) (6), les conditions à la limite (1) sont donc vérifiées au premier ordre si :

$$(8) \quad \begin{aligned} f_1 + f_2 &= f \\ -\frac{1}{c_1} f_1' - \frac{1}{c_2} f_2' &= g \end{aligned}$$

Le signe prime, " ' ", représente la dérivation au sens des distributions par rapport à l'argument de f_1 ou de f_2 . L'équation équivalente à (8)₂ :

$$(9) \quad \frac{f_1}{c_1} + \frac{f_2}{c_2} = - \int_0^t g(\tau) d\tau$$

jointe à (8)₁ donne f_1 et f_2 en fonction des conditions à la limite f et g .

Nous discuterons plus loin du domaine de validité de la solution u calculée dans ce paragraphe.

b) L'onde différée et la notion de couche limite

Là aussi, nous allons calculer formellement une solution approchée de l'équation (1.1.1) vérifiant les conditions (1) en superposant deux solutions particulières. L'une d'entre elles est d'ailleurs dégénérée, en ce sens qu'elle ne se propage pas et qu'elle donne lieu à une couche limite.

Comme dans le paragraphe 1.3.c, nous posons $\varepsilon_2 = \frac{1}{T\lambda}$, $t = Tt'$, $x = \Omega Tx'$, $\Omega = a$. Introduisons maintenant les variables multiples :

$$(10) \quad \tilde{x}'_i = \varepsilon_2^{\alpha+i} x'$$

et cherchons une solution sous la forme :

$$(11) \quad u(t', x', \varepsilon_2) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon_2^i u_i(t', \tilde{x}'_0, \tilde{x}'_1, \dots)$$

La substitution dans l'équation (1.1.1) donne au premier ordre :

$$(12) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \varepsilon_2^\alpha \frac{\partial}{\partial \tilde{x}'_0} \right) u_0 + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \varepsilon_2^\alpha \frac{c_1}{a} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}'_0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t'} + \varepsilon_2^\alpha \frac{c_2}{a} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}'_0} \right) u_0 + 0 (\varepsilon_2^{\alpha+1}) = 0$$

Deux cas intéressants se présentent, pour lesquels $\alpha = 0$ et $\alpha = -1$.

Le premier cas ($\alpha = 0$) a été exploité dans le paragraphe 1.3.c. Nous avons obtenu l'onde $u^{(1)}$:

$$(13) \quad u^{(1)} = \sum_{i \geq 0} \varepsilon_2^i u_i^{(1)}(t', x'_0, x'_1, \dots) \quad (x'_i = \varepsilon_2^i x')$$

avec

$$(14) \quad u_0^{(1)} = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{\pi x'_1 \lambda \kappa}{a^2}}} \int_0^\infty f_1(T\tau) e^{-a^2 \frac{(t' - x'_0 - \tau)^2}{4 \lambda \kappa x'_1}} d\tau$$

$$= \frac{1}{2 \sqrt{\frac{\pi \kappa x}{a^3}}} \int_0^\infty f_1(\tau) e^{-\frac{a^2}{4 \kappa x} \left(\frac{x}{a} - t + \tau \right)^2} d\tau$$

$$(15) \quad u_0^{(1)}(t, x = 0) = f_1(t)$$

Mais cette solution ne peut pas à elle seule vérifier les conditions à la limite (1).

Une seconde solution formelle s'obtient en prenant $\alpha = -1$, afin que les deux termes de l'équation (12) soient de même ordre. Il vient alors (*)

$$\frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial \bar{x}'_0} + \frac{c_1 c_2}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}'_0^2} u_0^{(2)} = 0$$

Cette équation, mise sous la forme :

$$(16) \quad \frac{c_1 c_2}{a^2} \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial \bar{x}'_0} + u_0^{(2)} = 0$$

donne le premier terme du développement

$$(17) \quad u^{(2)} = \sum_{i \geq 0} \epsilon_2^i u_i^{(2)}(t', \bar{x}_0, \bar{x}_1 \dots), \text{ (où } \bar{x}'_i = \epsilon_2^{i-1} x')$$

On obtient :

$$(18) \quad u_0^{(2)} = f_2(Tt') e^{-\frac{a^2}{c_1 c_2} \bar{x}'_0} = f_2(t) e^{-\frac{a \lambda}{c_1 c_2} x}$$

formule dans laquelle f_2 est une fonction arbitraire.

On superpose maintenant les solutions $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$:

$$(19) \quad u = u^{(1)} + u^{(2)}$$

et l'on calcule les fonctions arbitraires f_1 et f_2 , intervenant dans (14) et (18), en fonction des conditions à la limite (1).

(*) On peut retrouver ces résultats en utilisant la méthode heuristique suivante, due à Whitham. Dans la couche limite les variations de u par rapport à x sont bien plus importantes que celles relatives à t . Cela se traduit par $\frac{\partial}{\partial x} \gg \frac{\partial}{\partial t}$, et l'équation (1.1.1) donne :

$$c_1 c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

On sait (voir la remarque du paragraphe 1.3.b) que l'échelle de temps T peut éventuellement intervenir en facteur dans les fonctions f et g des conditions à la limite (1). Nous nous limiterons à l'étude de deux cas qui sont représentatifs de ce que nous rencontrerons dans la suite.

Nous supposons que T ne peut être mis en facteur dans f et que pour g on a l'une ou l'autre des situations suivantes :

A) On peut mettre $\frac{1}{T}$ en facteur dans g :

$$(20) \quad g(t) = \frac{1}{aT} \hat{g}(t)$$

avec $\hat{g} = 0(1)$ quand $T \rightarrow \infty$

B) T ne peut pas se mettre en facteur.

Étudions d'abord le cas A). D'après (2), (13) et (17) on a, quand $\epsilon_2 \rightarrow 0$:

$$(21) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{aT} \frac{\partial u}{\partial x'} = \frac{1}{aT} \left[\frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial \bar{x}'_0} + 0(1) \right]$$

Les équations (1)₂ et (20) montrent alors que

$$\frac{1}{\epsilon_2} \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial \bar{x}'_0} = 0(1) \quad \text{quand } \epsilon_2 \rightarrow 0.$$

et la condition (1)₂ est donc vérifiée au premier ordre si :

$$u_0^{(2)} = 0$$

La condition (1)₁ donne alors

$$u_0^{(1)}(0, t) = f(t)$$

soit, d'après (15) :

$$(22) \quad f_1 = f$$

Au premier ordre la seconde condition à la limite (1)₂ n'a aucune influence sur la solution approchée. Compte tenu du domaine de validité de cette solution on peut énoncer la propriété :

Faculté d'oubli : Si la condition A) est réalisée, l'onde, en s'éloignant du bord, oublie en première approximation l'une des conditions à la limite.

Nous rencontrerons ce genre de situation en thermoélasticité. Si l'on se donne une sollicitation au bord de type mécanique, la condition à la limite de type thermique n'influence pas l'onde loin du bord.

Dans le cas B), il convient de remarquer que, T prenant de "grandes valeurs", l'on peut écrire (21) sous la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\lambda}{a} \frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial \bar{x}'_0} + O(\epsilon_2)$$

Par suite, avec $(1)_2$ on a au premier ordre en $x = 0$:

$$\frac{\partial u_0^{(2)}}{\partial \bar{x}'_0} = \frac{a}{\lambda} g(t) = \frac{a}{\lambda} \hat{g}(t') \quad (g(Tt') \stackrel{\text{déf}}{=} \hat{g}(t'))$$

soit, d'après (18) :

$$(23) \quad -\frac{a^2}{c_1 c_2} f_2(t) = \frac{a}{\lambda} g(t)$$

La condition $(1)_1$ détermine la fonction f_1 . Au premier ordre on a en effet :

$$u_0^{(1)}(0, t) + u_0^{(2)}(0, t) = f(t)$$

d'où, en tenant compte de (15) et (18) :

$$(24) \quad f_1 + f_2 = f$$

En résumé, suffisamment loin du bord, la solution du problème est donnée en première approximation par :

$$u_0 = u_0^{(1)} + u_0^{(2)}$$

$u_0^{(1)}$ et $u_0^{(2)}$ étant définis par les formules (14) et (18).

On remarque que $u_0^{(2)}$ décroît exponentiellement avec x . Ce terme est donc négligeable en dehors d'un voisinage de l'origine d'autant plus petit que $\frac{a\lambda}{c_1 c_2}$ est grand. Il est d'usage d'appeler ce voisinage "couche limite".

On se souviendra que celle-ci a été introduite de façon à pouvoir vérifier l'ensemble des conditions à la limite.

Remarque 1 : Le domaine de validité de la solution différée exclue un voisinage de l'origine. La couche limite est donc au moins en partie, voire en totalité, en dehors du domaine de validité de la solution calculée.

Remarque 2 : Nous laissons le soin au lecteur de retrouver tous les résultats de ce chapitre de manière plus directe en prenant λ comme paramètre perturbateur au lieu de T .

1.5 DISCUSSION DE LA METHODE DE L'ECHELLE VARIABLE

a) Domaines de validité des solutions approchées

Nous dirons que $\mathcal{D}$ est un domaine de validité de la solution approchée S , si S est une bonne approximation de la solution exacte sur $\mathcal{D}$. Nous avons déjà utilisé dans ce qui précède cette notion de domaine ; essayons d'en préciser la forme et l'étendue.

Voyons d'abord le cas étudié en 1.3 pour lequel une seule vitesse caractéristique était positive ($c_1 > 0$, $c_2 < 0$). Dans le paragraphe 1.3.b nous avons calculé une solution approchée S_I valable à priori dans un voisinage du front $x = c_1 t$. Le petit paramètre dans le processus de perturbation était $\epsilon_1 = \lambda T$, et l'on peut admettre que ce processus est valable dans la mesure où

$$(1) \quad \epsilon_1 \ll 1, \text{ soit } T \ll \frac{1}{\lambda}$$

Le fait que la solution approchée S_I soit valable dans un voisinage du front et seulement là peut se comprendre en remarquant :

- d'une part, comme nous l'avons déjà fait, qu'au voisinage du front se propageant dans une zone de repos ce sont les composantes instantanées du matériau qui sont sollicitées et qu'il est donc normal d'y étudier l'onde en prenant des échelles de temps T petites.
- d'autre part, qu'à $t' - x'$ fixé, on se rapproche du front d'onde quand $T \rightarrow 0$, car $t - \frac{x}{c_1} = T (t' - x')$.

La formule $(1)_2$ nous conduit maintenant à admettre l'existence d'un domaine $\mathcal{D}_I$ de validité de la solution S_I de la forme (fig. 6) :

$$(2) \quad \mathcal{D}_I = \left\{ (x, t) \mid \left| \frac{x}{c_1} - t \right| \leq T_I \right\}$$

avec

$$(3) \quad T_I \ll \frac{1}{\lambda}$$

La condition (3) a été déduite de $(1)_2$ de façon heuristique. On utilise aussi dans la figure 6 la notation $L_I = c_1 T_I$.

En fait, puisque devant le front $x = c_1 t$ on a le repos, le domaine $\mathcal{D}_I$ suivant est aussi un domaine de validité :

$$(4) \quad \mathcal{D}_I = \left\{ (x, t) \mid \frac{x}{c_1} - t + T_I \geq 0 \right\}$$

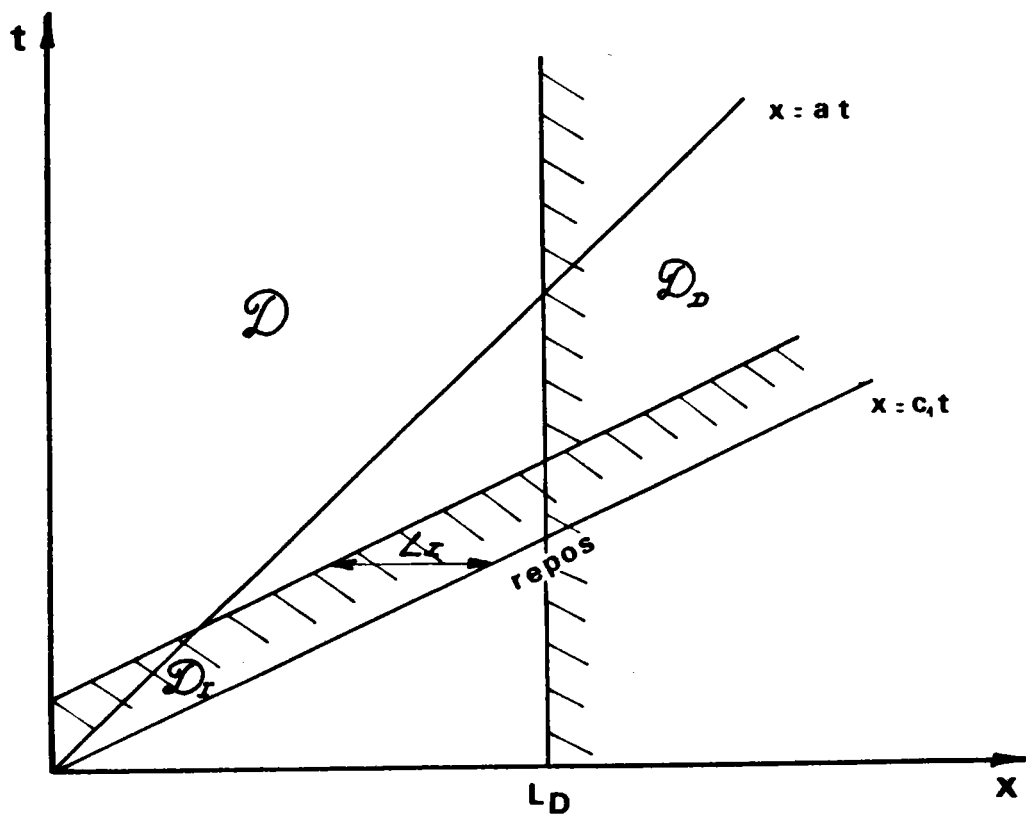


Fig:6

La solution différée S_D a été calculée en 1.3.b en faisant usage du petit paramètre $\varepsilon_2 = \frac{1}{T\lambda}$.

Il faut donc supposer cette fois que

$$(5) \quad \varepsilon_2 \ll 1, \quad T \gg \frac{1}{\lambda}$$

et nous admettons qu'il existe un domaine de validité $\mathcal{D}_D$ de S_D de la forme (fig. 6) (*) :

$$(6) \quad \mathcal{D}_D = \{(x, t) \mid x \geq L_D\}$$

avec la condition heuristique découlant de (5) :

$$(7) \quad \frac{L_D}{a} = T_D \gg \frac{1}{\lambda}$$

Bien sûr ces considérations sur les domaines de validités de S_I et S_D ne sont que très grossières ; mais ce sont des hypothèses de travail utiles pour fixer les idées.

(*) Dans le cas d'un problème à valeurs initiales, $\mathcal{D}_D$ serait de la forme :
 $\mathcal{D}_D = \{(x, t) \mid t \geq T_D\}$. Dans le cas d'un problème mixte où l'on se donne à la fois des conditions à la limite et des conditions initiales, on aurait
 $\mathcal{D}_D = \{(x, t) \mid t \geq T_D \text{ et } x \geq L_D\}$

Dans $\mathcal{D}_D$ la solution prend l'aspect d'une pseudo onde se déplaçant à la vitesse différée a tout en diffusant. A cause de cette diffusion la solution n'est pas nulle en toute rigueur devant le pseudo front $x = at$. Elle ne devient négligeable qu'au delà de la courbe $x = at + O(\sqrt{t})$, qui sépare le domaine $\mathcal{D}_D$ en $\mathcal{D}_D^-$ et $\mathcal{D}_D^+$ (fig. 7). Dans $\mathcal{D}_D^+$ la solution est négligeable.

Les domaines de validité $\mathcal{D}_I$ et $\mathcal{D}_D$ ont une partie commune $\mathcal{D}_I \cap \mathcal{D}_D$ dans laquelle on peut vérifier que les deux solutions approchées S_I et S_D sont compatibles lorsque L_D est suffisamment grand :

- S_I est négligeable à cause de l'amortissement exponentiel qui a lieu dans $\mathcal{D}_I$;
- S_D est négligeable car pour L_D suffisamment grand on a $\mathcal{D}_I \cap \mathcal{D}_D \subset \mathcal{D}_D^+$.

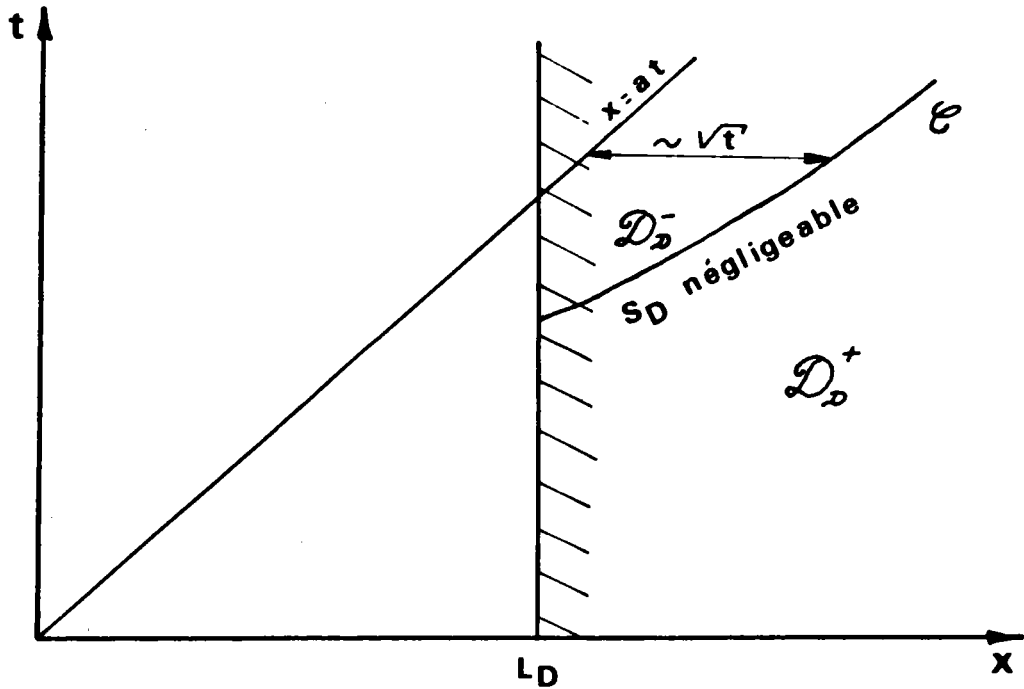


Fig: 7

Dans le cas où $c_1 > c_2 > 0$, on superpose les solutions approchées S_{I_1} et S_{I_2} (voir paragraphe 1.4.a) :

$$S = S_{I_1} + S_{I_2}$$

par conséquent, si $\mathcal{D}_{I_1}$ et $\mathcal{D}_{I_2}$ sont des domaines de validité de S_{I_1} et S_{I_2} , $\mathcal{D}_{I_1} \cap \mathcal{D}_{I_2}$ sera un domaine de validité de S . Compte tenu de la forme (4) de $\mathcal{D}_{I_1}$ et de $\mathcal{D}_{I_2}$, le domaine de validité $\mathcal{D}_{I_1}$ du front le plus rapide est aussi

un domaine de validité S .

Les considérations relatives à l'onde différée sont quant à elles inchangées.

b) Fin d'un paradoxe

On peut maintenant lever le paradoxe qui entachait la formule (1.3.35) relative à l'onde différée, paradoxe selon lequel la solution à l'instant t dépend des valeurs futures de l'excitation au bord.

Supposons que l'excitation f reste bornée : $|f(t)| < M$ pour tout $t \geq 0$. Nous allons montrer que pour x suffisamment grand la valeur relative $\frac{u_0}{M}$ ne dépend pratiquement pas des valeurs futures de f .

Précisément si l'on pose :

$$R_t = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi\lambda\beta}{\lambda a}}} \int_t^\infty \frac{f(\tau)}{M} \exp\left(-\frac{\lambda a(t - \frac{x}{a} - \tau)}{4\beta x}\right) d\tau,$$

on prouve que

$$\forall \kappa > 0, \exists x_\kappa > 0 \quad \text{tel que} \quad x \geq x_\kappa$$

implique $|R_t| \leq \kappa$ uniformément par rapport à t (x_κ indépendant de t).

En effet, on a :

$$|R_t| < \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi\lambda\beta}{\lambda a}}} \int_t^\infty \exp\left(-\frac{\lambda a(t - \frac{x}{a} - \tau)}{4\beta x}\right) d\tau = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\lambda x}{4a\beta}}$$

$|R_t|$ est donc exponentiellement négligeable quand x prend de grandes valeurs (Pour $x \gg \frac{a\beta}{\lambda}$, $|R|$ est pratiquement nul). Pour lever le paradoxe évoqué précédemment, il suffit donc d'admettre que la borne L_D du domaine de validité $\mathcal{D}_D$ doit vérifier la condition supplémentaire

$$L_D \gg \frac{a\beta}{\lambda}$$

soit, compte tenu de (7) :

$$L_D \gg \frac{a}{\lambda} \sup(1, \beta).$$

c) Perspectives de la méthode

Cette méthode constitue un moyen efficace pour l'étude d'une grande variété de problèmes. Nous verrons notamment comment l'adapter à la résolution de problèmes non linéaires, à l'étude de phénomènes physiques gouvernés par des systèmes d'équations (homogènes ou non), et même à la résolution d'équations de type intégral différentiel

La méthode joue sur l'échelle de temps T avec laquelle l'on construit les petits paramètres. Par essence ceux-ci sont en quelque sorte artificiels, puisqu'ils ne représentent pas de petites quantités physiques, attachées par exemple au matériau, ou construites à partir des conditions à la limite, comme c'est souvent le cas dans les méthodes de perturbations. L'échelle de temps T apparaît comme un paramètre commode pour construire de façon naturelle et systématique des solutions approchées ; mais bien sûr cette échelle n'intervient pas dans le résultat final ; elle s'élimine après retour aux variables physiques.

Les solutions approchées calculées avec la M.E.V., ne recouvrent pas tout le quart de plan $\pi = (x \geq 0, t \geq 0)$. Il y a un domaine (fig. 6) $\mathcal{D} = \pi \cap (\mathcal{D}_I \cup \mathcal{D}_D)^C$, dans lequel nous n'avons aucun renseignement.

Il nous faudra donc, pour pallier les lacunes de la M.E.V., utiliser d'autres méthodes.

d) Conclusion

La méthode de l'échelle variable s'appuie en premier lieu sur l'idée fondamentale que les effets dynamiques sont tributaires de l'échelle de temps caractéristique du phénomène observé. Il est habituel au physicien de faire jouer dans un problème donné une échelle de longueur ou de temps. Ainsi par exemple Zaker [10], lorsqu'il étudie l'onde de contrainte thermique transitoire dans une couche d'épaisseur finie, introduit-il comme longueur caractéristique l'épaisseur de la couche. Dans la M.E.V. nous considérons qu'il y a a priori une infinité de valeurs de l'échelle liées au problème ; et nous faisons varier l'échelle de façon à décrire (asymptotiquement) l'onde dans différents domaines de l'espace-temps.

La deuxième idée sur laquelle est construite la M.E.V. est la suivante. Supposons que, pour décrire l'onde dans un certain domaine $\mathcal{D}$ de l'espace-temps, nous ayons fixé le choix d'une échelle avec laquelle nous normalisons les équations et faisons apparaître un petit paramètre ε (égal à ε_1 ou ε_2). Dans $\mathcal{D}$ tous les phénomènes n'évoluent pas avec la même rapidité. Ainsi le temps que

mettra un signal pour parcourir une longueur unité pourra être par exemple égal à l'unité, alors que le temps caractéristique d'amortissement pourra être de l'ordre de 100 unités. C'est pourquoi il est naturel d'introduire dans la description de l'onde des variables multiples du type x (variable rapide) ϵx (variable lente) et d'utiliser la méthode des échelles multiples (qu'il serait presque préférable d'appeler ici la méthode des variables multiples afin d'éviter toute confusion avec la notion d'échelle variable dont nous avons parlé précédemment).

REFERENCES DU CHAPITRE I

- | 1 | WHITHAM G.B., Some comments on wave propagation and shock wave structure with application to magneto-hydrodynamics, Com. Pure Appl. Math, 12, 113-158, 1959.
- | 2 | WHITHAM G.B., Linear and nonlinear waves, John Wiley Publ., 1974.
- | 3 | SNEDDON I.N., The use of integral transforms, Mc Graw-Hill Publ., 1972.
- | 4 | BRILLOUIN L., Wave propagation and group velocity, Academic Press New-York, 1960.
- | 5 | ROSEAU M., Asymptotic wave theory, North-Holland Publ., 1976.
- | 6 | GERMAIN P., Méthodes asymptotiques en mécanique des fluides. Ecole d'été de physique théorique. Les Houches, juillet 1973. Gordon and Breach Publ.
- | 7 | CHIKWENDU S.C. et KEVORKIAN J., A perturbation method for hyperbolic equations with small non linearities, SIAM J. Appl. Math., 22, 235-258, 1972.
- | 8 | NAYFEH A., Perturbation methods, John Wiley Publ., 1973.
- | 9 | COLE J.D., Perturbation methods in applied mathematics, Blaisdell Publ., 1968.
- | 10 | ZAKER T.A., Stress waves generated by heat addition in an elastic solid. J. Appl. Mech., 143-150, 1965.

CHAPITRE II

THERMOELASTICITE GENERALISEE :

EQUATIONS GENERALES ET METHODES DE RESOLUTION

DU PROBLEME DYNAMIQUE

Afin d'illustrer la façon dont on peut résoudre un problème linéaire, nous avons choisi un exemple représentatif, celui de la thermoélasticité dynamique.

Le matériau est dissipatif parce qu'il conduit la chaleur, et que, d'un point de vue thermodynamique, la conduction de la chaleur engendre des processus irréversibles.

L'étude de la dissipation thermoélastique au sein d'une onde est un aspect très intéressant que nous approfondirons dans le chapitre suivant, où l'on étudiera, tant sous l'aspect quantitatif que qualitatif, des problèmes aux limites particuliers.

L'objet de ce chapitre est d'abord de poser les équations qui gouvernent le problème, puis de présenter différentes méthodes de résolution.

Dans le paragraphe 2.1 on linéarise les équations générales de la thermoélasticité généralisée. Ces équations, qui rendent compte de la propagation à vitesse finie de la chaleur (théorie du second son), sont ensuite normalisées, c'est à dire exprimées en fonction de quantités sans dimension. C'est sous cette forme qu'elles se prêtent le mieux à une étude asymptotique.

Mais avant d'entreprendre une telle étude, nous calculons la solution exacte du problème dans le paragraphe 2.2 [1]. Cette solution se présente sous forme de série et généralise celle obtenue par L. Brun [2] en thermoélasticité classique. Elle se doit d'être mentionnée, d'abord parce que c'est la seule solution exacte qui figure dans ce mémoire, et ensuite parce que, par sa complexité même, elle montre quel intérêt il y a d'employer des méthodes asymptotiques quand bien même on connaîtrait une solution exacte.

Puis nous passons à l'étude de différentes méthodes asymptotiques. D'abord, paragraphe 2.3, nous employons la méthode de l'échelle variable pour calculer l'onde au voisinage du front instantané puis loin du bord, Molinari [3], [4].

L'onde instantanée n'a qu'un intérêt académique compte tenu de l'extrême petitesse de son domaine de validité.

L'onde différée par contre, nous fournit de précieux renseignements. On remarque notamment que la dissipation thermoélastique a pour effet de diffuser l'onde mécanique, et que celle-ci se propage à la célérité isentropique du son. Il apparaît également que le domaine d'intérêt de la théorie du second son est singulièrement restreint (du moins dans le cadre de la thermoélasticité).

La méthode de l'échelle variable ne permet pas de décrire l'onde dans tout le quart de plan ($t \geq 0$, $x \geq 0$). Au paragraphe 2.4 nous étudions une technique qui fournit des résultats complémentaires. Il s'agit d'une méthode de développement asymptotique direct relativement à la constante de couplage thermomécanique. Nous donnons à cette méthode un caractère systématique puisque nous la présentons sous la forme d'un algorithme de calcul, Brun-Molinari [5].

2.1 LES EQUATIONS LINEARISEES DE LA THERMOELASTICITE DYNAMIQUE GENERALISEE

Le but de ce travail n'est pas tant d'établir les équations d'un problème que de les résoudre. Cependant, les équations de la thermoélasticité généralisées (où l'on prend en compte le fait que la chaleur se propage à vitesse finie) n'ont pas toujours été établies avec suffisamment de soin dans la littérature, du moins dans celle où l'on se préoccupe de résoudre des problèmes dynamiques. Nous pensons donc qu'il est utile d'exposer une théorie cohérente et simple (*), que nous développons en annexe 2.A.1 afin de ne pas rompre l'unité dans la présentation de ce travail. On y détermine les équations qui gouvernent le comportement du matériau :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \tilde{S} &= - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} (\tilde{\theta}, \underline{E}, \underline{h}) \\
 (2) \quad \underline{\hat{S}} &= \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{E}} \\
 (3) \quad \underline{\tilde{q}}_0 &= -\underline{L} \left(\frac{1}{\tilde{\theta}} \text{grad}_0 \tilde{\theta} + 2 \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{h}} \underline{\tilde{q}}_0 \right)
 \end{aligned}$$

où ψ désigne l'énergie libre massique, $\tilde{S}$ l'entropie massique, $\tilde{\theta}$ la température, $\underline{E}$ le tenseur de Green des déformations, $\underline{\tilde{q}}_0$ le vecteur flux de chaleur dans la configuration de référence, $\underline{h}$ le produit tensoriel $\underline{h} = \underline{\tilde{q}}_0 \otimes \underline{\tilde{q}}_0$, $\underline{\hat{S}}$ le second tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff, ρ_0 la masse volumique dans la configuration de référence et $\underline{L}$ la matrice semi définie positive de la conduction. Les quantités S , θ , $\underline{q}_0$, de l'annexe 2.A.1 sont notées ici $\tilde{S}$, $\tilde{\theta}$, $\underline{\tilde{q}}_0$.

L'équation (3) généralise la loi classique de la conduction de la chaleur (loi de Fourier), que l'on retrouve si ψ ne dépend pas de $\underline{h}$. Cette loi généralisée supprime le paradoxe selon lequel, en théorie classique, la chaleur se "propage à vitesse infinie".

a) Linéarisation.

Nous allons linéariser les équations (1)-(3) en supposant que l'état perturbé reste voisin de l'état naturel de repos. Le processus de linéarisation s'opère en général de la façon suivante. A l'aide des conditions à la limite, on définit un petit paramètre n qui pourra être, par exemple, le rapport d'une contrainte $\tilde{\sigma}_0$ appliquée à la surface du corps, à un module d'élasticité E caractéristique du matériau :

(*) Car des théories cohérentes, très générales, mais inexploitable en pratique, il y en a beaucoup ; voir par exemple Gurtin et Pipkin [6], Mc Carthy [7], Nunziato [8].

$$(4) \quad \eta = \frac{\tilde{\sigma}_0}{E}$$

Par hypothèse, on a $\eta \ll 1$.

Les déformations et les contraintes restant faibles, on peut confondre le tenseur $\hat{S}$ avec le tenseur des contraintes de Cauchy $\tilde{\sigma}$, et le tenseur de Green E avec le tenseur des déformations linéarisées $\tilde{\epsilon}$

($\tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i})$). Il n'y a pas lieu non plus de distinguer $\tilde{q}_0$ du vecteur flux de chaleur dans la configuration actuelle $\tilde{q}$, ni ρ_0 de la masse volumique ρ dans l'état actuel.

Nous supposons que la configuration de référence coïncide avec l'état naturel de repos dans lequel les déformations et les contraintes sont nulles, $\tilde{\theta}_0$ est la température uniforme et $\tilde{S}_0$ l'entropie spécifique uniforme.

On pose :

$$(5) \quad \tilde{\epsilon} = \eta \underline{\epsilon}^{(1)} + O(\eta^2) \quad ; \quad \tilde{S} - \tilde{S}_0 = \eta S^{(1)} + O(\eta^2) \quad ;$$

$$(6) \quad \tilde{\theta} - \tilde{\theta}_0 = \eta \theta^{(1)} + O(\eta^2) \quad ; \quad \tilde{\sigma} = \eta \underline{\sigma}^{(1)} + O(\eta^2) \quad ;$$

$$(7) \quad \tilde{q} = \eta \underline{q}^{(1)} + O(\eta^2) \quad ; \quad \tilde{u} = \eta \underline{u}^{(1)}$$

Après avoir substitué ces expressions dans les équations (1)-(3), et n'avoir retenu que les termes du premier ordre en η , on obtient, compte tenu de $\underline{h} = 0$ (η^2) :

$$(8) \quad S^{(1)} = \frac{\beta_{ij}}{\rho_0} \epsilon_{ij}^{(1)} + a \theta^{(1)}$$

$$(9) \quad \sigma_{ij}^{(1)} = c_{ijkl} \epsilon_{kl}^{(1)} - \beta_{ij} \theta^{(1)}$$

$$(10) \quad q_i^{(1)} = -\hat{L}_{ij} (\theta^{(1)}_{,j} + 2 \rho_0 \alpha_{jk} q_k^{(1)}),$$

avec

$$\beta_{ij} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \epsilon_{ij}} (\tilde{\theta}_0, 0, 0)$$

$$a = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} (\tilde{\theta}_0, 0, 0)$$

$$c_{ijkl} = \rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} (\tilde{\theta}_0, 0, 0)$$

$$\hat{L}_{ij} = \frac{1}{\tilde{\theta}_0} L_{ij} (\tilde{\theta}_0, 0, 0)$$

$$\alpha_{ij} = \tilde{\theta}_0 \frac{\partial \psi}{\partial h_{ij}} (\tilde{\theta}_0, 0, 0)$$

On remarquera que $S^{(l)}$ et $\theta^{(l)}$ désignent des variations d'entropie et de température.

Supposons maintenant le corps isotrope. On peut alors montrer que les différents coefficients, figurant dans les formules (8)-(10), prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 (11) \quad \beta_{ij} &= \beta \delta_{ij} \\
 (12) \quad a &= \frac{c}{\theta_0} \\
 (13) \quad c_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\
 (14) \quad \alpha_{ij} &= \frac{T_r}{2 \rho_0 k} \delta_{ij} \\
 (15) \quad \hat{L}_{ij} &= k \delta_{ij},
 \end{aligned}$$

où β désigne un coefficient de dilatation, c la chaleur spécifique à volume constant, λ et μ les coefficients de Lamé isothermes, k un coefficient de conduction thermique et T_r un temps de relaxation.

Les équations (8)-(10) s'écrivent dans ce cas :

$$\begin{aligned}
 (16) \quad S^{(l)} &= \frac{\beta}{\rho_0} \epsilon_{ii}^{(l)} + \frac{c}{\theta_0} \theta^{(l)} \\
 (17) \quad \sigma_{ij}^{(l)} &= \lambda \epsilon_{kk}^{(l)} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}^{(l)} - \beta \delta_{ij} \theta^{(l)} \\
 (18) \quad q_i^{(l)} + T_r \dot{q}_i^{(l)} &= -k \theta_{,i}^{(l)}.
 \end{aligned}$$

Dans la suite, nous allons restreindre l'étude à celle de problèmes unidimensionnels. Toutes les quantités considérées sont supposées indépendantes de $\tilde{x}_2$ et $\tilde{x}_3$, d'où :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{ij}^{(l)} &= 0 \quad \text{pour } (i, j) \neq (1, 1) \\
 \theta_{,i}^{(l)} &= 0 \quad \text{pour } i \neq 1.
 \end{aligned}$$

Nous supposerons également que :

$$q_i^{(l)} = 0 \quad \text{pour } i \neq 1.$$

En posant

$$\begin{aligned}
 \tilde{x} &= \tilde{x}_1 \quad ; \quad u^{(l)} = u_1^{(l)} \text{ (déplacement)} \quad ; \quad e^{(l)} = \epsilon_{11} = \frac{\partial u^{(l)}}{\partial x} \\
 (19) \quad \sigma &= \sigma_{11}^{(l)} \quad ; \quad q = q_1^{(l)}
 \end{aligned}$$

les équations (16)-(18) deviennent :

$$(20) \quad S^{(\ell)} = \frac{\beta}{\rho_0} e^{(\ell)} + \frac{c}{\theta_0} \theta^{(\ell)},$$

$$(21) \quad \sigma^{(\ell)} = (\lambda + 2\mu) e^{(\ell)} - \beta \theta^{(\ell)},$$

$$(22) \quad q^{(\ell)} + T_r \frac{\partial q^{(\ell)}}{\partial t} = -k \frac{\partial \theta^{(\ell)}}{\partial x},$$

et $\sigma_{ij}^{(\ell)} = 0$ pour $i \neq j$. (Nous n'écrivons pas les équations relatives à σ_{22} et σ_{33} , car elles n'interviennent pas dans la suite).

En combinant les équations (20)-(22), qui gouvernent le comportement unidimensionnel du matériau, et celles de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie (*) :

$$(23) \quad \frac{\partial \sigma^{(\ell)}}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 u^{(\ell)}}{\partial t^2}$$

$$(24) \quad \rho_0 \tilde{\theta}_0 \frac{\partial S^{(\ell)}}{\partial t} = - \frac{\partial q^{(\ell)}}{\partial x} \quad (\text{équation linéarisée}),$$

on obtient les équations de la thermoélasticité dynamique linéarisée :

$$(25) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u^{(\ell)}}{\partial t^2} - \Omega^2 \frac{\partial^2 u^{(\ell)}}{\partial x^2} + \frac{\beta}{\rho_0} \frac{\partial \theta^{(\ell)}}{\partial x} &= 0 \\ \rho_0 c \left(\frac{\partial \theta^{(\ell)}}{\partial t} + T_r \frac{\partial^2 \theta^{(\ell)}}{\partial t^2} \right) - k \frac{\partial^2 \theta^{(\ell)}}{\partial x^2} + \beta \tilde{\theta}_0 \left(\frac{\partial^2 u^{(\ell)}}{\partial t \partial x} + T_r \frac{\partial^3 u^{(\ell)}}{\partial x \partial t^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\Omega = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \right)^{1/2}$$

pour la célérité isotherme du son.

C'est un système d'équations aux dérivées partielles, couplées lorsque $\beta \neq 0$. Ce couplage rend difficile la résolution analytique du problème. Il est la manifestation d'une propriété physique très intéressante : il caractérise l'interaction entre l'énergie thermique et mécanique dans un corps thermoélastique.

Si le temps de relaxation T_r est nul, on retrouve les équations de la thermoélasticité classique.

(*) On écrit ici l'équation de l'énergie dans l'hypothèse où il n'y a pas d'apport d'énergie en volume. Dans le chapitre suivant nous aurons à prendre en compte un tel apport.

Pour calculer une solution, il faut connaître les conditions à la limite en $x = 0$. Celles-ci sont au nombre de deux, l'une de type thermique, l'autre de type mécanique. On peut, par exemple, se donner à l'origine le déplacement et la température, ou la contrainte et la température, ... etc.

Le corps est supposé au repos initial, et la solution devra de plus vérifier la condition de régularité à l'infini, condition selon laquelle toutes les fonctions considérées tendent vers zéro à l'infini.

Conditions de repos initial et de régularité à l'infini seront souvent utilisées dans la suite sans que nous les rappelions explicitement. Remarquons que, compte tenu du repos initial, les dérivées par rapport au temps $\tilde{t}$ dans (25) peuvent être prises au sens des distributions.

Nous allons maintenant écrire les équations fondamentales du problème sous forme réduite, c'est à dire en les exprimant à l'aide de fonctions et de variables sans dimension.

b) Normalisation

Normalisons les équations fondamentales (25) et les équations (20)-(22), en y opérant les changements de variables et de fonctions suivants :

$$\begin{aligned}
 (26) \quad & \tilde{x} = \Omega T x, \quad \tilde{t} = T t \\
 & \tilde{u} = \eta u^{(u)} = \eta \Omega T u \quad ; \quad \tilde{\theta} - \tilde{\theta}_0 = \eta \theta^{(l)} = \eta \sqrt{\epsilon} \frac{\lambda + 2\mu}{\beta} \tau \\
 (27) \quad & \tilde{S} - \tilde{S}_0 = \eta S^{(s)} = \eta \sqrt{\epsilon} \frac{(\lambda + 2\mu)c}{\beta \tilde{\theta}_0} S \quad ; \quad \tilde{\sigma} = \eta \sigma^{(l)} = \eta (\lambda + 2\mu) \sigma \\
 & \tilde{e} = \eta e^{(e)} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = \eta \frac{\partial u}{\partial x} = \eta e \quad ; \quad \tilde{q} = \eta q^{(l)} = \eta \sqrt{\epsilon} \frac{(\lambda + 2\mu)k}{\beta \Omega T} q
 \end{aligned}$$

où T désigne une échelle de temps arbitraire, et :

$$(28) \quad \epsilon = \frac{\beta^2 \tilde{\theta}_0}{(\lambda + 2\mu) \rho_0 c}$$

la constante de couplage isotherme.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 (29) \quad & \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \sqrt{\epsilon} \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \tilde{x}} = 0 \\
 & \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \tilde{t}} + \frac{T_r}{T} \frac{\partial^2 \tilde{\tau}}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{T_c}{T} \frac{\partial^2 \tilde{\tau}}{\partial \tilde{x}^2} + \sqrt{\epsilon} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t} \partial \tilde{x}} + \frac{T_r}{T} \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{t}^2} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

où l'on a introduit un temps caractéristique du matériau :

$$(30) \quad T_c = \frac{k}{c(\lambda + 2\mu)}$$

Les équations (20)-(22) s'écrivent quant à elles :

$$(31) \quad S = \sqrt{\epsilon} e + \tau$$

$$(32) \quad \sigma = e - \sqrt{\epsilon} \tau$$

$$(33) \quad q + \frac{T}{r} \frac{\partial q}{\partial t} = - \frac{\partial \tau}{\partial x}$$

Dans ces équations, l'échelle de temps T reste à notre disposition. Comme l'on peut s'y attendre, elle jouera un rôle fondamental dans le cadre de la méthode de l'échellevariable.

Avant de passer au calcul de solutions approchées, calculons la solution exacte du problème.

2.2 SOLUTION EXACTE

Pour alléger l'écriture des formules nous prenons une échelle de temps particulière :

$$1) \quad T = T_c$$

et nous posons

$$2) \quad m = \frac{T}{T_c} r$$

$$3) \quad H = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad P = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Nous allons calculer la solution du système

$$(4) \quad \begin{aligned} Hu + \sqrt{\epsilon} \frac{\partial \tau}{\partial x} &= 0 \\ P\tau + m \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} + \sqrt{\epsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \sqrt{\epsilon} m \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} &= 0 \end{aligned}$$

en utilisant une méthode due à L. Brun et appliquée par cet auteur aux cas de la viscoélasticité linéaire et de la thermoélasticité classique ($m = 0$), [9] [2].

En éliminant u ou τ entre les équations (4), on obtient les équations

$$(5) \quad 0\tau = 0, \quad 0u = 0,$$

gouvernées par l'opérateur de la thermoélasticité généralisée:

$$(6) \quad 0 = HP - \epsilon \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} H - m \epsilon \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial x^2}$$

Remarque 1 : Compte tenu du repos initial, la dérivation $\frac{\partial}{\partial t}$ peut être prise au sens des distributions.

a) Factorisation de l'opérateur de la thermoélasticité généralisée (*).

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème de factorisation:

L'opérateur de la thermoélasticité généralisée :

$$0 = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \epsilon \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} + m \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - m \epsilon \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial x^2}$$

(*) Cette factorisation est aussi valable pour l'opérateur de la thermoélasticité tridimensionnelle. Il suffit de remplacer $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ par le Laplacien ∇^2 .

se factorise en un produit de deux opérateurs :

$$(7) \quad 0 = \bar{0} \hat{0} = \hat{0} \bar{0}$$

où

$$(8) \quad \bar{0} = \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (\epsilon + 1 - ab) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sqrt{\epsilon}}{a} \frac{\partial \lambda}{\partial t} *$$

$$(9) \quad \hat{0} = \frac{1}{\hat{c}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (\epsilon + 1 + ab) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\sqrt{\epsilon}}{a} \frac{\partial \lambda}{\partial t} *$$

La fonction $\lambda(t)$ est donnée par :

$$(10) \quad \lambda(t) = -\frac{1}{t} e^{-bt} J_1\left(\frac{2\sqrt{\epsilon}}{a} t\right)$$

et la dérivée $\frac{\partial \lambda}{\partial t}$ est prise au sens des distributions.

Les célérités $\bar{c}$ et $\hat{c}$ et les coefficients a et b sont définis par :

$$(11) \quad \hat{c}^2 = \frac{1 + m(1 + \epsilon) - a}{2m}$$

$$(12) \quad \bar{c}^2 = \frac{1 + m(1 + \epsilon) + a}{2m}$$

$$(13) \quad a = \left[(1 + m(1 + \epsilon))^2 - 4m \right]^{1/2}$$

$$(14) \quad b = \frac{m(1 + \epsilon)^2 + \epsilon - 1}{a^2}$$

Les termes $\epsilon + 1 - ab$ et $\epsilon + 1 + ab$ sont positifs.

Démonstration : La méthode consiste à décomposer l'opérateur 0 :

$$0 = \bar{0} \hat{0}$$

en un produit d'opérateurs de la forme

$$(15) \quad \bar{0} = P + U*$$

$$(16) \quad \hat{0} = H + V*$$

où U et V sont des distributions temporelles, et où l'étoile, $*$, désigne la convolution par rapport au temps.

Si l'on substitue (15) et (16) dans (7), et si l'on compare le résultat obtenu avec (6), on constate que l'opérateur suivant est identiquement nul :

$$U * H + V * P + U * V + \epsilon \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} - m \frac{\partial^2}{\partial t^2} H + m \epsilon \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \equiv 0$$

Dans cette identité, on sépare les opérateurs qui dépendent de x , de ceux qui n'en dépendent pas, d'où les deux identités

$$\begin{aligned} 17) \quad & \frac{\partial^2}{\partial t^2} U + \frac{\partial}{\partial t} * V * U * V - m \frac{\partial^4}{\partial t^4} \equiv 0 \\ & U * V * \epsilon \frac{\partial}{\partial t} - m (1 + \epsilon) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv 0 \end{aligned}$$

grâce auxquelles nous allons pouvoir déterminer les distributions U et V .

Appliquons la transformation de Laplace aux équations (17) et (18), et notons $\mathcal{L}U(s)$ et $\mathcal{L}V(s)$ les transformées de U et V . En éliminant $\mathcal{L}V(s)$, on obtient l'équation qui détermine $\mathcal{L}U(s)$:

$$\begin{aligned} 19) \quad & (\mathcal{L}U(s))^2 - s \mathcal{L}U(s) [s(1 + m(1 + \epsilon)) + \epsilon - 1] \\ & - \epsilon s^2 + m s^4 - m(1 + \epsilon) s^3 = 0. \end{aligned}$$

Parmi les deux solutions de cette équation on choisit (*) :

$$20) \quad \mathcal{L}U(s) = -\frac{s}{2} \left\{ -s[1 + m(1 + \epsilon)] - \epsilon + 1 + \Delta^{1/2} \right\}$$

où

$$21) \quad \Delta = a^2 \left[(s + b)^2 + \frac{4\epsilon}{a} \right],$$

a et b étant donnés par (13)-(14).

(*) Choisir l'autre solution serait équivalent, car en fin de compte cela reviendrait à faire la substitution $a \rightarrow -a$ dans les résultats finaux.

Afin de calculer son originale, transformons un peu l'expression (20) :

$$(22) \quad \mathcal{L}U(s) = -\frac{sa}{2} \left[\left((s+b)^2 + \frac{4\varepsilon}{a} \right)^{1/2} - (s+b) \right] + ds^2 + es$$

avec

$$(23) \quad d = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2} + \frac{m}{2} (1 + \varepsilon)$$

$$(24) \quad e = -\frac{ab}{2} + \frac{1}{2} (\varepsilon - 1)$$

Le coefficient d est positif, car :

$$2(a + 1 + m(1 + \varepsilon))d = 4m \geq 0,$$

et l'on peut donc poser :

$$(25) \quad d = \frac{1}{\bar{c}^2} = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2} + \frac{m}{2} (1 + \varepsilon)$$

L'originale de $\mathcal{L}U(s)$ s'écrit alors, voir [10] :

$$(26) \quad U = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{a} \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + e \frac{\partial}{\partial t}$$

où λ est la fonction définie par (10).

L'équation (11) nous fournit V , et l'on obtient (8) et (9) où l'on a posé :

$$(27) \quad \frac{1}{\bar{c}^2} = \frac{a}{2} + \frac{1}{2} + \frac{m}{2} (1 + \varepsilon)$$

La factorisation $0 = \bar{0} \hat{0}$, et les expressions (8) et (9) nous montrent que la perturbation se décompose en ondes de célérités $\pm \bar{c}$ et $\pm \hat{c}$, qui peuvent d'ailleurs s'écrire comme en (11) et (12) si l'on se sert de la formule (13).

Notons que les coefficients $\varepsilon + 1 - ab$ et $\varepsilon + 1 + ab$ qui interviennent dans (23) et (24) sont positifs en vertu de la relation

$$(\varepsilon + 1 + ab)(\varepsilon + 1 - ab) = \frac{4\varepsilon}{a}$$

et du fait que $\varepsilon + 1$ est positif.

Remarque 2 : Remarquons enfin que l'on a toujours $\bar{c} \geq \hat{c}$ (égalité pour $m = 1$ et $\varepsilon = 0$) et que la substitution $a \rightarrow -a$ transforme $\hat{0}$ en $\bar{0}$ et réciproquement. Cela justifie la note (*) de la page précédente.

b) Décomposition de la solution

Considérons dans le quart de plan ($t \geq 0, x \geq 0$), la solution ϕ de

$$(28) \quad \partial \phi = 0$$

vérifiant les conditions de repos initial :

$$(29) \quad \frac{\partial^i \phi}{\partial t^i}(x, 0) = 0 \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

les conditions de régularité à l'infini, et les conditions à la limite :

$$(30) \quad \phi(0, t) = f(t)$$

$$(31) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x}(0, t) = g(t)$$

En se servant de la factorisation $0 = \bar{0} \hat{0}$, nous allons montrer qu'il est possible de décomposer de façon unique une solution ϕ de (28)-(31), sous la forme :

$$(32) \quad \phi = \bar{\phi} + \hat{\phi},$$

où $\bar{\phi}$ et $\hat{\phi}$ sont solutions de :

$$(33) \quad \bar{0} \bar{\phi} = 0$$

$$(34) \quad \hat{0} \hat{\phi} = 0,$$

vérifiant les conditions de régularité à l'infini et les conditions de repos initial :

$$(35) \quad \frac{\partial^i \bar{\phi}}{\partial t^i}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial^i \hat{\phi}}{\partial t^i}(x, 0) = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

Pour démontrer ces résultats, nous allons utiliser une factorisation des opérateurs $\hat{0}$ et $\bar{0}$ sous la forme :

$$(36) \quad \hat{0} = \hat{0}^+ \hat{0}^-$$

$$(37) \quad \bar{0} = \bar{0}^+ \bar{0}^-$$

avec

$$(38) \quad \hat{0}^{\pm} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial t} *$$

$$(39) \quad \bar{0}^{\pm} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial t} *$$

Les fonctions $\hat{\mu}$ et $\bar{\mu}$ sont solutions des équations :

$$(40) \quad (\delta + \hat{c} \hat{\mu})^{*2} = \delta + \hat{\mu}$$

$$(41) \quad (\delta + \bar{c} \bar{\mu})^{*2} = \delta + \bar{\mu}$$

où les fonctions $\hat{\mu}$ et $\bar{\mu}$ sont définies par :

$$(42) \quad \hat{\mu} = \frac{\hat{c}^2}{2} (\epsilon + 1 + ab) H* - \hat{c}^2 \frac{\sqrt{\epsilon}}{a} H*\lambda *$$

$$(43) \quad \bar{\mu} = \frac{\bar{c}^2}{2} (\epsilon + 1 - ab) H* + \bar{c}^2 \frac{\sqrt{\epsilon}}{a} H*\lambda *$$

Avec la convention $T^{*0} = \delta$, les fonctions $\hat{\mu}$ et $\bar{\mu}$ sont données par les développements en série :

$$(44) \quad \delta + \hat{c} \hat{\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n (-\hat{\mu})^{*n}$$

$$(45) \quad \delta + \bar{c} \bar{\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n (-\bar{\mu})^{*n}$$

où les coefficients L_n sont ceux de x^n dans le développement de $(1 - x)^{1/2}$.

On ne s'intéresse qu'aux solutions qui se propagent dans le sens des x croissants, par conséquent on a :

$$(46) \quad \bar{0}\bar{\phi} = 0 \iff \bar{0}^+ \bar{\phi} = 0$$

$$(47) \quad \hat{0}\hat{\phi} = 0 \iff \hat{0}^+ \hat{\phi} = 0$$

Considérons maintenant la solution ϕ de $0\phi = 0$ qui vérifie (29), (30) et (31), et supposons que ϕ admette une décomposition de la forme (32), avec $\bar{\phi}$ et $\hat{\phi}$ solutions de (33) et (34). D'après (46) et (47) on a :

$$(48) \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} = - \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial t} * \right) \bar{\phi} - \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial t} * \right) \hat{\phi}$$

Les équations (32) et (48) nous permettent de calculer $\bar{\phi}$ et $\hat{\phi}$ en fonction de ϕ et $\frac{\partial \phi}{\partial x}$:

$$(49) \quad \hat{\phi} = D^{-1} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial t} * \right) \phi \right]$$

$$(50) \quad \bar{\phi} = -D^{-1} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial t} * \right) \phi \right]$$

où D^{-1} désigne l'opérateur inverse de :

$$(51) \quad D = \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c} \right) \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\mu} - \hat{\mu})}{\partial t} *$$

Ainsi se trouve démontrée l'unicité de la décomposition (32).

Dès lors, l'existence de cette décomposition est facile à montrer. Soit $\hat{\phi}$ et $\bar{\phi}$ les solutions de $\hat{O} \hat{\phi} = 0$, $\bar{O} \bar{\phi} = 0$ vérifiant le repos initial, les conditions de régularité à l'infini ainsi que les conditions à la limite déduites de (49) et (50) :

$$(52) \quad \hat{\phi}(0, t) = D^{-1} \left[g(t) + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial t} * \right) f(t) \right]$$

$$(53) \quad \bar{\phi}(0, t) = -D^{-1} \left[g(t) + \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mu}}{\partial t} * \right) f(t) \right]$$

La fonction $\phi = \bar{\phi} + \hat{\phi}$ est bien sûr solution de :

$$O(\phi) = \hat{O} \bar{O}(\bar{\phi} + \hat{\phi}) = 0$$

et elle vérifie de plus les conditions à la limite (30) et (31).

Remarque 3 : Cette démonstration de l'existence et de l'unicité de la décomposition fournit une façon explicite de construire les fonctions $\hat{\phi}$ et $\bar{\phi}$.

Remarque 4 : Dans le cas tridimensionnel, on peut, en utilisant une autre démonstration (voir l'annexe 2.A.2), prouver qu'il est possible de décomposer ϕ comme en (32).

Remarque 5 : Dans la pratique il est souvent préférable de raisonner directement sur le système (4) plutôt que sur les équations (5). A cet égard nous renvoyons à l'article de Brun [1].

c) Calcul de la solution

On se propose maintenant de calculer explicitement les composantes $\hat{\phi}$ et $\bar{\phi}$ définies dans le paragraphe précédent.

A cette fin il suffit de déterminer les solutions élémentaires $\bar{\Delta}$ et $\hat{\Delta}$ des opérateurs $\bar{O}$ et $\hat{O}$, c'est à dire les solutions qui, outre les conditions initiales et les conditions de régularité à l'infini, vérifient :

$$(54) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \bar{\Delta} = \lim_{x \rightarrow 0} \hat{\Delta} = \delta(t)$$

Ecrivons la dérivée au sens des distributions $\frac{\partial \lambda}{\partial t}$ sous la forme :

$$(55) \quad \frac{\partial \lambda(t)}{\partial t} = \dot{\lambda}(t) - \frac{\sqrt{\epsilon}}{a^2} \delta(t)$$

où $\dot{\lambda}$ désigne la dérivée de λ au sens ordinaire, et posons :

$$(56) \quad \bar{\beta} = \frac{\bar{c}^2}{2} (\epsilon + 1 - ab)$$

$$(57) \quad \bar{\gamma} = -\bar{c}^2 \frac{\epsilon}{a^3}$$

$$(58) \quad \bar{h}(t) = \bar{c}^2 \frac{\sqrt{\epsilon}}{a} \dot{\lambda}(t)$$

Remarquons que la fonction $f(x, t)$ est solution de :

$$(59) \quad \bar{O} f = 0,$$

si et seulement si la fonction f' définie par :

$$(60) \quad f'(t, x') = f(t, \bar{c} x') \quad (x' = \frac{x}{\bar{c}}),$$

est solution de :

$$(61) \quad \bar{O}' f' = 0,$$

où l'opérateur $\bar{O}'$ est donné par :

$$(62) \quad \bar{O}' = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\bar{c}^2}{2} (\epsilon + 1 - ab) \frac{\partial}{\partial t} + \bar{c}^2 \frac{\sqrt{\epsilon}}{a} \frac{\partial \lambda}{\partial t} *.$$

La formule (48) de Brun [9] fournit alors immédiatement la solution élémentaire $\bar{\Delta}$ de l'opérateur $\bar{Q}$, soit :

$$(63) \quad \bar{\Delta}(x, t) = e^{-\frac{\bar{\beta}}{2} \frac{x}{\bar{c}}} \delta\left(t - \frac{x}{\bar{c}}\right) + H\left(t - \frac{x}{\bar{c}}\right) \left[\frac{x}{\bar{c}} e^{-\frac{\bar{\beta}}{2} t} \frac{I_1\left(\bar{\mu} \sqrt{t^2 - \left(\frac{x}{\bar{c}}\right)^2}\right)}{\sqrt{t^2 - \left(\frac{x}{\bar{c}}\right)^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n \right]$$

avec

$$(64) \quad \bar{\mu}^2 = \frac{\bar{\beta}^2}{4} - \bar{\gamma}$$

$$(65) \quad \Delta_n = \frac{x}{2\bar{c}} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{\frac{x}{\bar{c}}}^t \frac{e^{-\frac{\bar{\beta}}{2} s} \left[s^2 - \left(\frac{x}{\bar{c}}\right)^2 \right]^{\frac{n}{2}}}{|t-s|} I_{n-1}\left[\bar{\mu} \left(s^2 - \left(\frac{x}{\bar{c}}\right)^2\right)^{\frac{n}{2}}\right] ds$$

La solution élémentaire $\hat{\Delta}$ de $\hat{Q}$ s'obtient en faisant la substitution $a \rightarrow -a$ dans $\bar{\Delta}$, ce qui implique que les barres, $-$, se changent en chapeaux :

$$(66) \quad \hat{\Delta}(x, t, a) = \bar{\Delta}(x, t, -a)$$

Compte tenu de (54), la solution ϕ de $Q\phi = 0$, vérifiant les conditions initiales et de régularité à l'infini ainsi que les conditions à la limite (30)-(31) est donnée par :

$$(67) \quad \phi = \hat{\phi}(0, t) * \hat{\Delta}(x, t) + \bar{\phi}(0, t) * \bar{\Delta}(x, t),$$

où les valeurs $\hat{\phi}(0, t)$ et $\bar{\phi}(0, t)$ sont explicitées en (52)-(53).

La solution du problème est donc composée de deux ondes dont les célérités sont $\bar{c}$ et $\hat{c}$ (de là la terminologie : théorie du second son). Ces ondes, comme l'indique la formule (63), sont amorties exponentiellement. Le coefficient d'amortissement $\bar{c}_{am}$ de l'onde "-" est donné par :

$$(68) \quad \bar{c}_{am} = \frac{\bar{\beta}}{2\bar{c}} = \frac{\bar{c}}{4} (\epsilon + 1 - ab),$$

tandis que celui de l'onde "+", $\hat{c}_{am}$, s'obtient par la substitution $a \rightarrow -a$.

d) Conclusion

La grande complexité de la solution calculée dans ce paragraphe, le fait aussi qu'elle se prête mal au calcul numérique en raison d'instabilités qui apparaissent dans son comportement, tout cela justifie amplement l'intérêt qu'il y a de chercher des solutions approchées, d'autant que celles-ci seront, d'un point de vue qualitatif, beaucoup plus riches en renseignements.

S'agissant de problèmes linéaires, certaines méthodes de calcul approché font appel aux transformations intégrales. Ainsi, il est facile d'obtenir la transformée de Laplace de la solution du problème thermoélastique. Puis, en développant cette transformée en puissances de ϵ (en pratique la constante de couplage ϵ est petite devant l'unité) et en calculant l'originale des premiers termes de ce développement, on obtient une solution approchée [11] [12] [13].

La transformée de Fourier, quant à elle, permet l'étude du comportement asymptotique de la solution par deux méthodes différentes, selon que le temps t est petit ou grand [14].

Pour notre part nous chercherons des solutions approchées en opérant directement dans l'espace-temps réel. Les méthodes de perturbations utilisées seront en général plus simple à mettre en oeuvre qu'une étude s'appuyant sur les transformations intégrales. De plus certaines d'entre elles pourront s'adapter à l'étude des problèmes non linéaires, problèmes où il est très souvent impossible d'obtenir une solution exacte, et où les transformations intégrales classiques ne sont d'aucun secours.

2.3 SOLUTION APPROCHEE PAR LA METHODE DE L'ECHELLE VARIABLE

Cette première application illustre de quelle façon l'on peut résoudre, avec la M.E.V., des problèmes gouvernés par un système d'équations aux dérivées partielles.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre introductif I, cette méthode joue sur l'échelle de temps T et permet l'étude de l'onde, soit près du front instantané, soit loin du bord.

a) L'onde instantanée

Nous partons du système (2.1.29) normalisé par les changements de variables (2.1.26) et (2.1.27). En dérivant la première équation de ce système par rapport à x , on obtient :

$$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \sqrt{\epsilon} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = 0$$

1)

$$\epsilon_1 \frac{\partial \tau}{\partial t} + m \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \sqrt{\epsilon} \left(\epsilon_1 \frac{\partial e}{\partial t} + m \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \right) = 0$$

où τ et e désignent la variation de température et la déformation unitaire. Nous avons posé :

(2)

$$\epsilon_1 = \frac{T}{T_c}$$

et l'on rappelle la notation :

(3)

$$m = \frac{T_r}{T_c}$$

On introduit les variables multiples :

(4)

$$x_i = \epsilon_1^i x \quad (i = 0, 1, 2 \dots)$$

et l'on cherche une solution $S_I = (e, \tau)$ de (1) sous la forme :

(5)

$$S_I = \sum_{i \geq 0} \epsilon_1^i S_{Ii}(t, x_0, x_1 \dots)$$

Par substitution dans (1), on obtient, après avoir identifié les deux premières puissances de ϵ_1 :

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 e_0}{\partial x_0^2} + \sqrt{\epsilon} \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial x_0^2} &= 0 \\ m \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial x_0^2} + \sqrt{\epsilon} m \frac{\partial^2 e_0}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned}$$

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 e_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 e_1}{\partial x_0^2} + \sqrt{\epsilon} \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x_0^2} &= 2 \frac{\partial^2 e_0}{\partial x_0 \partial x_1} - 2 \sqrt{\epsilon} \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial x_0 \partial x_1} \\ m \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial x_0^2} + \sqrt{\epsilon} m \frac{\partial^2 e_1}{\partial t^2} &= - \frac{\partial \tau_0}{\partial t} + 2 \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial x_0 \partial x_1} - \sqrt{\epsilon} \frac{\partial e_0}{\partial t}. \end{aligned}$$

On élimine τ_0 entre (6)₁ et (6)₂ et l'on obtient l'équation :

$$(8) \quad \left(m \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \right) e_0 - \epsilon m \frac{\partial^4 e_0}{\partial t^2 \partial x_0^2} = 0$$

vérifiée également par τ_0 . Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$(9) \quad \left(\frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \right) \left(\frac{1}{\hat{c}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \right) e_0 = 0,$$

où les célérités $\bar{c}$ et $\hat{c}$ vérifient les relations :

$$(10) \quad \frac{1}{\bar{c}^2 \hat{c}^2} = m \quad ; \quad \frac{1}{\bar{c}^2} + \frac{1}{\hat{c}^2} = 1 + m(1 + \epsilon)$$

Elles sont donc confondues avec celles définies en (2.2.25) et (2.2.27).

Ceci nous conduit à décomposer la solution $S_I = (e, \tau)$:

$$(11) \quad S_I = \bar{S}_I + \hat{S}_I$$

en deux ondes $\bar{S}_I = (\bar{e}, \bar{\tau})$ et $\hat{S}_I = (\hat{e}, \hat{\tau})$ représentées par les développements :

$$(12) \quad \hat{S}_I = \sum_{i \geq 0} \epsilon_1^i \hat{S}_{Ii}(\hat{\epsilon}, x_1, \dots)$$

dans lesquels :

$$(3) \quad \hat{\tau} = t - \frac{x_0}{c}$$

En substituant $(\bar{e}_0, \bar{\tau}_0)$ dans (6), on obtient les relations qui lient $\bar{e}_0$ et $\bar{\tau}_0$

$$(4) \quad (\bar{c}^2 - 1) \bar{e}_0 + \sqrt{\epsilon} \bar{\tau}_0 = 0$$

$$(5) \quad \sqrt{\epsilon} m \bar{c}^2 \bar{e}_0 + (m \bar{c}^2 - 1) \bar{\tau}_0 = 0,$$

Le déterminant du système (14)-(15) étant nul, seule la première relation (14) sera retenue.

De façon identique, on obtient la relation :

$$(6) \quad (\hat{c}^2 - 1) \hat{e}_0 + \sqrt{\epsilon} \hat{\tau}_0 = 0$$

Supposons que les conditions à la limite soient données par :

$$(7) \quad e(x=0, t) = f(t)$$

$$\tau(x=0, t) = g(t)$$

Alors, d'après (11), on a au premier ordre :

$$(8) \quad f(t) = \bar{e}_{00}(t) + \hat{e}_{00}(t)$$

$$g(t) = \bar{\tau}_{00}(t) + \hat{\tau}_{00}(t),$$

si l'on note par $\bar{e}_{00} \dots$ la valeur de $\bar{e}_0 \dots$ en $x=0$.

Compte tenu de (14) et (16), le système (18) fournit :

$$(9) \quad \bar{e}_{00} = \frac{1}{\bar{c}^2 - \hat{c}^2} [(1 - \hat{c}^2) f - \sqrt{\epsilon} g]$$

$$\hat{e}_{00} = \frac{1}{\hat{c}^2 - \bar{c}^2} [(1 - \bar{c}^2) f - \sqrt{\epsilon} g]$$

Pour déterminer l'onde $\bar{S}_I$ au premier ordre, il suffit de calculer $\bar{e}_0$, car $\bar{\tau}_0$ est donné par (14). Jusqu'à présent nous n'avons déterminé la dépendance de $\bar{e}_0$ que par rapport à t et x_0 . Voyons maintenant quel est le rôle joué par la variable lente x_1 .

Par élimination de τ_1 entre les équations (7), on obtient :

$$\begin{aligned}
 (20) \quad & \left(m \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \right) e_1 - \epsilon m \frac{\partial^4 e_1}{\partial t^2 \partial x_0^2} \\
 & = 2 \left(m \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \right) \left(\frac{\partial^2 e_0}{\partial x_0 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial x_0 \partial x_1} \right) + \sqrt{\epsilon} \frac{\partial^3 \tau_0}{\partial t \partial x_0^2} \\
 & - 2 \sqrt{\epsilon} \frac{\partial^4 \tau_0}{\partial x_0^3 \partial x_1} + \frac{\partial^3 e_0}{\partial t \partial x_0^2}
 \end{aligned}$$

Cette équation est vérifiée tant par l'onde $\bar{S}_I$ que par l'onde $\hat{S}_I$ (rajouter des barres ou des chapeaux sur les e_i et les τ_i figurant dans (20)).

Pour éviter l'apparition de termes séculaires, on pose que le deuxième membre de (20) est nul. Pour l'onde $\bar{S}_I$, en se servant de la relation (14), cela conduit au résultat :

$$(21) \quad \frac{\partial \bar{e}_0}{\partial x_1} + \bar{J} \bar{e}_0 = 0,$$

où $\bar{J}$ est la constante :

$$(22) \quad \bar{J} = \frac{\bar{c}^2 - 1 - \epsilon}{2 \bar{c}^2 \left(m \bar{c} - \frac{1}{\bar{c}^3} \right)}$$

Par suite on a :

$$(23) \quad \bar{e}_0(t, x_0, x_1) = e^{-\bar{J} x_1} \bar{e}_{00}\left(t - \frac{x_0}{\bar{c}}\right),$$

où $\bar{e}_{00}$ est donné par la condition à la limite (19).

Les calculs pour l'onde $\hat{S}$ seraient tout à fait identiques. Il suffit d'effectuer dans les formules précédentes la substitution $\rightarrow \hat{}$.

Comparons maintenant ces résultats avec la solution exacte obtenue au paragraphe 2.2.c. Aux fronts d'ondes nous avons des amortissements de la forme $\exp\left(-\frac{\beta}{2\bar{c}} x\right)$. Il y a cohérence avec le résultat (23) si l'on montre

que :

$$(24) \quad \hat{j} = \frac{\hat{\beta}}{2 \hat{c}}$$

ce qui est fait en annexe 2.A.3.

Pour déterminer un domaine de validité $\tilde{\mathcal{D}}_I$ de la solution approchée instantanée, il suffit de raisonner comme au paragraphe 1.5.a, en distinguant toutefois deux cas :

Premier cas ($T_r > T_c$)

On suppose que :

$$(25) \quad T_r > T_c,$$

d'où $m > 1$. Le paramètre $\epsilon_1 = \frac{T}{T_c}$ est négligeable devant l'unité (et donc devant m) dès l'instant où :

$$(26) \quad T < T_c$$

Si l'on note $\tilde{\mathcal{D}}$ et $\tilde{\mathcal{D}}$ des domaines de validité des solutions instantanées $\hat{S}$ et $\bar{S}$ dans le plan des variables physiques $(\tilde{x}, \tilde{t})$, on peut admettre, comme dans le paragraphe 1.5.a., l'existence de domaines de la forme :

$$(27) \quad \tilde{\mathcal{D}} = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{t}) \mid \tilde{t} \geq 0, \frac{\tilde{x}}{\tilde{c}} - \tilde{t} + \hat{T} \geq 0 \right\}$$

$$(28) \quad \tilde{\mathcal{D}} = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{t}) \mid \tilde{t} \geq 0, \frac{\tilde{x}}{\tilde{c}} - \tilde{t} + \bar{T} \geq 0 \right\}$$

où les temps $\hat{T}$ et $\bar{T}$ vérifient

$$(29) \quad \hat{T} \ll T_c, \quad \bar{T} \ll T_c.$$

Les vitesses $\tilde{c}$ et $\tilde{c}$ sont les célérités physiques associées à $\hat{c}$ et $\bar{c}$:

$$(30) \quad \tilde{c} = \Omega \hat{c}, \quad \tilde{c} = \Omega \bar{c}$$

et Ω désigne la célérité isotherme du son.

Le domaine

$$(31) \quad \tilde{\mathcal{D}} = \tilde{\mathcal{D}} \cap \tilde{\mathcal{D}}$$

est un domaine de validité de la solution $S_I = \hat{S}_I + \bar{S}_I$.

Dans le cas particulier où $\bar{T} \leq \hat{T}$, on a (voir la figure 1) :

$$(32) \quad \tilde{\mathcal{D}} = \tilde{\mathcal{D}}$$

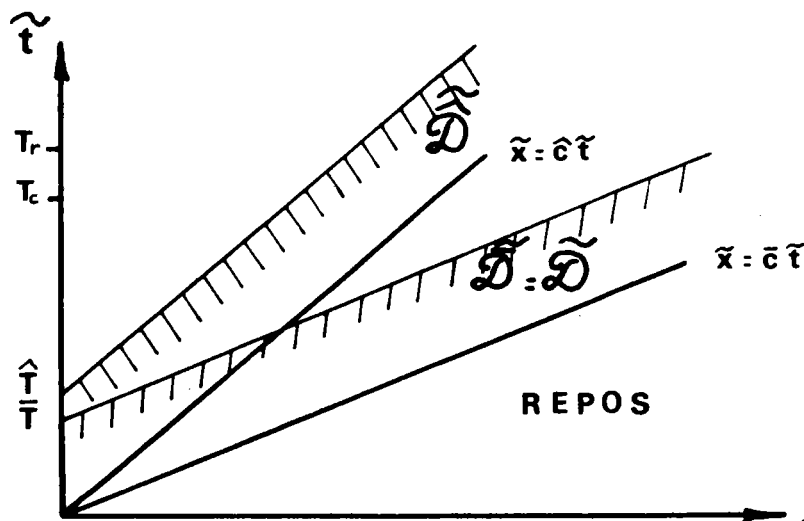


Fig : 1 Domaines de validité des ondes $\hat{S}$ et $\bar{S}$
Deuxième cas ($T_r \leq T_c$)

On suppose que :

$$(33) \quad T_r \leq T_c$$

et l'on a $m \ll 1$.

Le processus de perturbation employé sera donc valide si ϵ_1 est négligeable devant m , c'est-à-dire pour :

$$(34) \quad T \leq T_r.$$

La discussion est identique à celle du premier cas, à ceci près que l'on a cette fois :

$$(35) \quad \hat{T} \ll T_r, \quad \bar{T} \ll T_r$$

Remarque 1 :

La solution instantanée S_I ne décrit l'onde qu'au voisinage du front le plus rapide. Dans le cas de la thermoélasticité, ce voisinage est très petit et par conséquent la solution S_I n'a guère d'intérêt pratique, sinon celui de décrire l'amortissement exponentiel au front. (*)

Illustrons ces considérations par des applications numériques. Considérons le cas de l'aluminium avec les valeurs suivantes, données par Chadwick [15]:

$$(36) \quad \Omega = 6,32 \times 10^3 \text{ m/s (célérité isotherme du son)}$$

$$(37) \quad T_c = 2,14 \times 10^{-12} \text{ s}$$

$$(38) \quad \epsilon = 3,56 \times 10^{-2}$$

que nous complétons par la valeur du temps de relaxation T_r donnée par Francis [16] (à température ambiante)

$$(39) \quad T_r \approx 8,0 \times 10^{-12} \text{ s.}$$

Compte tenu de (29) et (37), on voit que le domaine d'intérêt de S est singulièrement restreint.

Etudions maintenant la rapidité du processus d'amortissement de l'onde $\bar{S}_I$. Celui-ci est de type exponentiel : $e^{-\bar{J}x}$. Avec les valeurs numériques précédentes, on a $\bar{J} \approx 2 \cdot 10^{-3}$. Donc, pour une distance parcourue $x = 1000$, une éventuelle discontinuité au front $\bar{S}$ est amoindrie dans le rapport e^{-2} : elle est environ treize fois moindre. La distance $x = 1000$ étant égale en variable physique à : $x = T_c x = 1,4 \times 10^{-5} \text{ m}$, l'on voit que l'amortissement est très rapide.

b) L'onde différée

Pour des raisons de commodité qui apparaîtront plus loin (l'écriture des résultats sera plus esthétique), nous allons normaliser les équations (2.1.25) à l'aide de formules identiques dans la forme à (2.1.26-27), mais où l'on remplace les quantités isothermes λ, μ, Ω et ϵ par leurs homologues isentropiques, les coefficients de Lamé isentropiques $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$, la vitesse isentropique du son $\bar{\Omega}$ et la constante de couplage isentropique $\bar{\epsilon}$:

(*) En viscoélasticité la solution instantanée n'est pas d'un caractère purement académique, car le temps de relaxation est d'un ordre de grandeur bien plus grand qu'en thermoélasticité.

$$(40) \quad \bar{\Omega} = \sqrt{\frac{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\rho_0}} \quad , \quad \bar{\epsilon} = \frac{\beta \tilde{\theta}_0^2}{\rho_0 C(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})}$$

$$\tilde{x} = \bar{\Omega} T x \quad ; \quad \tilde{t} = T t$$

$$(41) \quad \begin{aligned} \tilde{u} &= \bar{n} u^{(u)} = \bar{n} \bar{\Omega} T u \quad ; \quad \tilde{\theta} - \tilde{\theta}_0 = \bar{n} \theta^{(u)} = \bar{n} \sqrt{\bar{\epsilon}} \frac{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\beta} \tau \\ \tilde{S} - \tilde{S}_0 &= \bar{n} S^{(u)} = \bar{n} \sqrt{\bar{\epsilon}} \frac{(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) C}{\beta \tilde{\theta}_0} S \quad ; \quad \tilde{\sigma} = \bar{n} \sigma^{(u)} = \bar{n} (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \sigma \\ \tilde{e} &= \bar{n} e^{(u)} = \bar{n} e \quad ; \quad \tilde{q} = \bar{n} q^{(u)} = \bar{n} \sqrt{\bar{\epsilon}} \frac{(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) k}{\beta \bar{\Omega} T} q \end{aligned}$$

On introduit également un temps $\bar{T}_c$ et une longueur $\bar{\lambda}_c$ caractéristiques du matériau (*) (**):

$$(42) \quad \bar{T}_c = \frac{k}{C(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})} = \frac{\bar{\lambda}_c}{\bar{\Omega}} .$$

Ces changements de variables et de fonction opérés sur le système (2.1.25) ont pour résultat, si de plus on dérive (2.1.25)₁ par rapport à $\tilde{x}$:

$$(43) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - (1 - \bar{\epsilon}) \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \sqrt{\bar{\epsilon}} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} &= 0 \\ \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \bar{m} \epsilon_2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \right) - \epsilon_2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \sqrt{\bar{\epsilon}} \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \bar{m} \epsilon_2 \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$(44) \quad \bar{m} = \frac{T_r}{\bar{T}_c}$$

$$(45) \quad \epsilon_2 = \frac{\bar{T}_c}{T}$$

(*) $\bar{T}_c$ et $\bar{\epsilon}$ sont très peu différents de T_c et ϵ définis en (2.1.28-30).

(**) Noter les relations liant quantités isothermes et isentropiques :

$\lambda + 2\mu = (1 - \bar{\epsilon})(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})$, $\bar{\lambda} + 2\bar{\mu} = (1 + \epsilon)(\lambda + 2\mu)$, $\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{1 + \epsilon}$, $\epsilon = \frac{\bar{\epsilon}}{1 - \bar{\epsilon}}$,
 $\bar{\Omega} = \sqrt{1 + \epsilon} \Omega$, $\Omega = \sqrt{1 - \bar{\epsilon}} \bar{\Omega}$.

On notera également les relations déduites de (2.1.20-22) :

$$(46) \quad \sigma = (1 - \bar{\epsilon}) e - \sqrt{\bar{\epsilon}} \tau$$

$$(47) \quad S = \tau + \sqrt{\bar{\epsilon}} e$$

$$(48) \quad q + \bar{m} \epsilon_2 \frac{\partial q}{\partial t} = - \frac{\partial \tau}{\partial x}$$

Pour calculer l'onde quand elle s'éloigne du bord (onde différée), on prend de "grandes" valeurs pour l'échelle de temps T , de telle sorte que le paramètre ϵ_2 défini par (45) puisse-t-être considéré comme petit.

Comme auparavant nous allons décomposer la solution $S_D = (e, \theta)$ en :

$$(49) \quad S_D = \hat{S}_D + \bar{S}_D$$

où $\hat{S}_D$ et $\bar{S}_D$ désignent deux solutions particulières que nous appellerons les ondes quasi-élastique (Q.E.) et quasi-thermique (Q.T.).

Pour fixer les idées, nous chercherons la solution relative aux conditions à la limite :

$$(50) \quad \begin{aligned} e(0, t) &= f(t) \\ \tau(0, t) &= g(t). \end{aligned}$$

Remarque 2 :

Les notations $t, x, e, \hat{e}, \bar{e} \dots$, ont déjà été employées dans un contexte différent. Nous les utilisons à nouveau afin de ne pas multiplier les notations.

L'onde quasi-élastique (Q.E.)

Elle est définie par des développements de la forme :

$$(51) \quad \hat{S}_D = (\hat{e}, \hat{\tau})$$

$$(52) \quad \hat{S}_D = \sum_{i \geq 0} \epsilon_2^i \hat{S}_{Di}(t, x_0, x_1, \dots)$$

où l'on a introduit les échelles multiples d'espace :

$$(53) \quad x_i = \epsilon_2^i x.$$

Comme signalé au paragraphe 1.3.b, il est préférable de prendre ces échelles plutôt que des échelles de temps, car il y a repos initial et l'excitation a lieu au bord.

Si l'on substitue les développements (51) et (52) dans (43), on obtient en identifiant les premières puissances de ε_2 :

$$(54) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{e}_0}{\partial t^2} - (1 - \bar{\varepsilon}) \frac{\partial^2 \hat{e}_0}{\partial x_0^2} + \sqrt{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial^2 \hat{\tau}_0}{\partial x_0^2} = 0 \\ \frac{\partial \hat{\tau}_0}{\partial t} + \sqrt{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial \hat{e}_0}{\partial t} = 0, \end{cases}$$

$$(55) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{e}_1}{\partial t^2} - (1 - \bar{\varepsilon}) \frac{\partial^2 \hat{e}_1}{\partial x_0^2} + \sqrt{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial^2 \hat{\tau}_1}{\partial x_0^2} = 2(1 - \bar{\varepsilon}) \frac{\partial^2 \hat{e}_0}{\partial x_0 \partial x_1} - 2\sqrt{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial^2 \hat{\tau}_0}{\partial x_0 \partial x_1} \\ \frac{\partial \hat{\tau}_1}{\partial t} + \sqrt{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial t} = -\bar{m} \frac{\partial^2 \hat{\tau}_0}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \hat{\tau}_0}{\partial x_0^2} - \sqrt{\bar{\varepsilon}} \bar{m} \frac{\partial^2 \hat{e}_0}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Les conditions à la limite au premier ordre sont de la forme :

$$(56) \quad \begin{aligned} \hat{e}_0(t, 0, 0 \dots) &= \hat{f}(t) \\ \hat{\tau}_0(t, 0, 0 \dots) &= \hat{g}(t) \end{aligned}$$

où $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont des fonctions à déterminer.

Compte tenu du repos initial, l'équation (54)₂ fournit :

$$(57) \quad \hat{\tau}_0 = -\sqrt{\bar{\varepsilon}} \hat{e}_0,$$

et en combinant avec (54)₁, il vient :

$$(58) \quad \frac{\partial^2 \hat{e}_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \hat{e}_0}{\partial x_0^2} = 0.$$

D'où :

$$(59) \quad \hat{e}_0(t, x_0, x_1) = \hat{e}_0(\xi, x_1),$$

où l'on a posé :

$$(60) \quad \xi = t - x_0$$

L'onde Q.E. se déplace donc à la vitesse (normalisée) unité, c'est à dire, en revenant aux grandeurs physiques, à la célérité isentropique du son.

Si l'on compare (57) et (47), on voit que $\hat{S}_0$ est nul. L'onde Q.E. est isentropique au premier ordre.

Décrivons maintenant l'atténuation de l'onde avec la variable lente x_1 . On élimine $\hat{\tau}_1$ entre les deux équations (55), et l'on tient compte de (57) ; il vient alors :

$$(61) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \hat{e}_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \hat{e}_1}{\partial x_0^2} \right) = 2 \frac{\partial^3 \hat{e}_0}{\partial t \partial x_0 \partial x_1} + \bar{\varepsilon} \frac{\partial^4 \hat{e}_0}{\partial x_0^4}$$

Pour éviter l'apparition d'un terme séculaire, on pose que le deuxième membre est nul, d'où, compte tenu de (60) :

$$(62) \quad \frac{\partial \hat{e}_0}{\partial x_1} - \frac{\bar{\varepsilon}}{2} \frac{\partial^2 \hat{e}_0}{\partial \xi^2} = 0$$

Cette équation de la chaleur décrit la dissipation thermoélastique. L'onde s'atténue en diffusant.

Quelles sont les conditions à la limite et les conditions initiales qui permettent de résoudre (62)? D'après (56)₁ et (59), on a :

$$(63) \quad \hat{e}_0(\xi = t, 0) = \hat{f}(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Le problème ainsi posé est donc un problème à valeurs initiales pour l'équation de la chaleur (62), dont la solution s'écrit :

$$(64) \quad \hat{e}_0(\xi, x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x_1 \bar{\varepsilon}}} \int_0^\infty \hat{f}(\xi') \exp\left(-\frac{(\xi - \xi')^2}{2\bar{\varepsilon} x_1}\right) d\xi'.$$

Essayons maintenant de définir un domaine de validité pour l'onde Q.E.. Dans le processus de perturbation, nous avons négligé au premier ordre les termes contenant ε_2 , ou $\bar{m} \varepsilon_2$, dans l'équation (43)₂. Cela est possible dans la mesure où l'on a :

$$\sup(\bar{m} \varepsilon_2, \varepsilon_2) \ll 1,$$

soit :

$$(65) \quad T \gg \sup (T_r, \bar{T}_c).$$

Compte tenu de ceci, nous admettons l'existence d'un domaine de validité $\tilde{\mathcal{D}}_D$ défini grossièrement par :

$$(66) \quad \tilde{\mathcal{D}}_D = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{t}) \mid \tilde{x} \geq L_D \text{ et } \tilde{t} \geq \frac{L_D}{\bar{\Omega}} \right\}$$

la borne L_D vérifiant la condition :

$$(67) \quad \frac{L_D}{\bar{\Omega}} \gg \sup (T_r, \bar{T}_c),$$

déduite de (65) de façon heuristique.

S'il y a repos initial, nous admettons qu'il existe un domaine de validité plus grand que $\tilde{\mathcal{D}}_D$:

$$(66)' \quad \tilde{\mathcal{D}}'_D = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{t}) \mid \tilde{x} \geq L_D \right\}$$

Posons maintenant (*) :

$$(68) \quad M = \sup_t |\hat{f}(t)|$$

et revenons à la formule (64) qui fait apparaître une dépendance de $\hat{e}_0$ par rapport aux valeurs futures de $\hat{f}$. Comme nous l'avons fait au paragraphe 1.5, nous allons montrer que pour le rapport $\hat{e}_{0/M}$ cette dépendance est négligeable dans le domaine $\tilde{\mathcal{D}}_D$. Si l'on note :

$$(69) \quad R_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon_2\bar{\epsilon}_x}} \int_t^\infty \frac{\hat{f}(\xi')}{M} \exp\left(-\frac{(t-x-\xi')^2}{2\bar{\epsilon}_2\bar{\epsilon}_x}\right) d\xi',$$

on a :

$$(70) \quad |R_t| \leq \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\bar{\epsilon}_2\bar{\epsilon}_x} \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\tilde{x}}{2\bar{\Omega}\bar{T}_c\bar{\epsilon}} \right)^{1/2}.$$

(*) Accessoirement on peut remarquer que M est petit devant l'unité, puisque $\hat{f}$ est une déformation unitaire.

Dans $\tilde{\mathcal{D}}_D$, le second membre de cette inégalité est tout à fait négligeable compte tenu de (66), (67), et du fait que $\bar{\epsilon} \ll 1$.

Remarque 3 : Puisque les valeurs futures de $\hat{f}$ jouent un rôle négligeable, le symbole $\int_0^{+\infty}$ dans la formule (64) peut être remplacé par $\int_0^t$ et du coup l'on voit bien que la condition de repos initial est satisfaite par la solution (64).

Remarque 4 : Dans l'onde Q.E., au premier ordre le paramètre $\bar{m}$ n'intervient pas. La théorie de la thermoélasticité généralisée ne joue alors aucun rôle. Nous reviendrons sur ce point dans la remarque 4, à la fin de la section 2.3.

Puisque $\hat{e}_0$ et $\hat{\tau}_0$ sont liés par la relation (57), les fonctions $\hat{f}$ et $\hat{g}$ qui interviennent dans les conditions à la limite (56) vérifient la relation :

$$(71) \quad \hat{g} = -\sqrt{\bar{\epsilon}} \hat{f}.$$

Il n'est donc pas possible que l'onde Q.E. satisfasse l'ensemble des conditions à la limite (50), où f et g sont des fonctions indépendantes.

C'est pourquoi nous allons introduire une deuxième solution $\bar{S}_D$, l'onde quasi-thermique, qui, superposée à l'onde quasi-élastique $\hat{S}_D$, fournira une solution $S_D = \bar{S}_D + \hat{S}_D$ satisfaisant l'ensemble des conditions (50).

D'ailleurs d'un point de vue physique l'on sent bien la nécessité d'introduire cette deuxième solution. En effet nous avons vu que l'onde Q.E. est isentropique au premier ordre. Mais, au voisinage du bord, l'entropie varie dès l'instant où il y a une sollicitation thermique (*).

L'onde quasi-thermique (Q.T.)

Nous cherchons une solution de la forme :

$$(72) \quad \bar{S}_D = (\bar{e}, \bar{\tau}) \quad , \quad \bar{S}_D = \sum_{i \geq 0} \epsilon_2^i \bar{S}_{Di} (t, \bar{x}_0, \bar{x}_1 \dots)$$

où nous avons posé :

$$(73) \quad \bar{x}_i = \epsilon_2^{\alpha+i} x \quad (i = 0, 1 \dots),$$

α étant un nombre réel à déterminer.

(*) Ce voisinage n'est rien d'autre qu'une couche limite, au sens du paragraphe 1.4

La substitution de (72) dans (43) donne :

$$(74) \quad \frac{\partial^2 \bar{e}_0}{\partial t^2} - (1 - \bar{\epsilon}) \epsilon_2 \frac{\partial^2 \bar{e}_0}{\partial \bar{x}_0^2} + \epsilon_2 \sqrt{\bar{\epsilon}} \frac{\partial^2 \bar{\tau}_0}{\partial \bar{x}_0^2} + \dots = 0$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\tau}_0}{\partial t} + \bar{m} \epsilon_2 \frac{\partial^2 \bar{\tau}_0}{\partial t^2} \right) - \epsilon_2^{1+2\alpha} \frac{\partial^2 \bar{\tau}_0}{\partial \bar{x}_0^2} + \sqrt{\bar{\epsilon}} \left(\frac{\partial \bar{e}_0}{\partial t} + \bar{m} \epsilon_2 \frac{\partial^2 \bar{e}_0}{\partial t^2} \right) + \dots = 0$$

Pour l'onde Q.E. nous avons $\alpha = 0$, et le terme $\epsilon_2 \frac{\partial^2 \bar{\tau}_0}{\partial \bar{x}_0^2}$ pouvait être négligé par rapport à $\frac{\partial \bar{\tau}_0}{\partial t}$ dans l'équation (74)₂. Dans la couche limite, où les effets thermiques sont importants, les variations des paramètres thermiques (par exemple la température) en fonction de l'abscisse sont grandes et l'on considère alors qu'il n'est plus possible de négliger dans (74)₂ le terme $\epsilon_2^{1+2\alpha} \frac{\partial^2 \bar{\tau}_0}{\partial \bar{x}_0^2}$ par rapport à $\frac{\partial \bar{\tau}_0}{\partial t}$. Ainsi est-on conduit à poser :

$$(75) \quad \alpha = -\frac{1}{2}$$

Par suite, le système (43) donne, au premier ordre :

$$(76) \quad \sqrt{\bar{\epsilon}} \bar{\tau}_0 = (1 - \bar{\epsilon}) \bar{e}_0$$

$$(77) \quad \frac{\partial \bar{\tau}_0}{\partial t} - (1 - \bar{\epsilon}) \frac{\partial^2 \bar{\tau}_0}{\partial \bar{x}_0^2} = 0.$$

Soient :

$$(78) \quad \begin{aligned} \bar{e}_0(t, 0) &= \bar{f}(t) \\ \bar{\tau}_0(t, 0) &= \bar{g}(t), \end{aligned}$$

les conditions à la limite au premier ordre pour l'onde Q.T..

D'après (76), les fonctions $\bar{f}$ et $\bar{g}$ sont liées par la relation :

$$(79) \quad \sqrt{\bar{\epsilon}} \bar{g} = (1 - \bar{\epsilon}) \bar{f}.$$

La solution de l'équation de la chaleur (77), qui vérifie (78)₂, s'écrit :

$$(80) \quad \bar{\tau}_0(t, \bar{x}_0) = \bar{g}(t) * \bar{\Delta}(t, \bar{x}_0),$$

où $\bar{\Delta}$ est la solution élémentaire :

$$81) \quad \bar{\Delta}(t, \bar{x}_0) = \frac{\bar{x}_0}{2(\pi(1-\bar{\epsilon})t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\bar{x}_0^2}{4(1-\bar{\epsilon})t}\right).$$

La solution globale du problème : l'onde différée

L'onde différée s'obtient en superposant l'onde Q.E. et l'onde Q.T. :

$$S_D = \hat{S}_D + \bar{S}_D,$$

de telle sorte que les conditions à la limite (50) soient satisfaites :

$$82) \quad f = \hat{f} + \bar{f}$$

$$g = \hat{g} + g.$$

Il vient alors, en faisant usage de (71) et (79) :

$$83) \quad \begin{aligned} \hat{f} &= (1 - \bar{\epsilon}) f - \sqrt{\bar{\epsilon}} g & \bar{f} &= \sqrt{\bar{\epsilon}} g + \bar{\epsilon} f \\ g &= (1 - \bar{\epsilon}) (g + \sqrt{\bar{\epsilon}} f) & \hat{g} &= -\sqrt{\bar{\epsilon}} (1 - \bar{\epsilon}) f + \bar{\epsilon} g. \end{aligned}$$

Remarque 5 : Le domaine $\tilde{\mathcal{D}}_D$ est à la fois un domaine de validité des ondes Q.E. et Q.T., et donc aussi de l'onde différée.

Comme dans le paragraphe 1.5.a, on peut remarquer que les domaines de validité $\tilde{\mathcal{D}}_I$ et $\tilde{\mathcal{D}}_D$ des solutions instantanée S_I et différée S_D , sont compatibles dans la mesure où, dans $\tilde{\mathcal{D}}_I \cap \tilde{\mathcal{D}}_D$, S_I et S_D sont toutes deux négligeables. Cela est réalisé si la borne L_D (cf. (66)) est suffisamment grande.

Puisque l'amortissement au front de S_I est du type $e^{-\frac{1}{J}x}$, on peut considérer que l'onde S_I est devenue négligeable au front pour des distances parcourues telles que $x \geq \frac{10}{J}$, soit en grandeur physique $\tilde{x} \geq \frac{10}{J} \bar{\Omega} \bar{T}_c$.

D'où la condition que doit vérifier la borne L_D , en plus de (67) :

$$84) \quad \frac{L_D}{\bar{\Omega}} \geq \frac{10}{J} \bar{T}_c.$$

Avec les données numériques relatives à l'aluminium (remarque 1), cette condition s'écrit :

$$85) \quad L_D \geq 5000 \bar{\Omega} \bar{T}_c.$$

En pratique, les conditions (67) et (85) sont satisfaites dans cet exemple, si l'on prend :

$$L_D = 5000 \bar{\Omega} \bar{T}_C \approx 7 \times 10^{-5} \text{ m.}$$

La théorie du second son ne joue aucun rôle dans $\tilde{\mathcal{D}}_D$, au premier ordre, puisque $\bar{m}$ ne figure pas dans les formules qui définissent l'onde différée. Compte tenu de la valeur de L_D calculée précédemment, on voit que l'intérêt de cette théorie est assez restreint.

Remarque 6 : Les conditions à la limite ne sont pas toujours aussi simple qu'en (50). Il se peut qu'y apparaisse l'échelle de temps, comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

Remarque 7 : La M.E.V. ne donne pas la solution dans tout le quart de plan ($\tilde{t} \geq 0, \tilde{x} \geq 0$) ; il est donc nécessaire de recourir à des méthodes complémentaires si l'on veut décrire toute l'évolution de l'onde. Une telle méthode est étudiée dans le paragraphe suivant.

2.4 DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE PAR RAPPORT A LA CONSTANTE DE COUPLAGE THERMOMECHANIQUE.

En pratique la constante de couplage thermomécanique, ϵ , est bien plus petite que l'unité, et il est naturel de chercher la solution du problème sous la forme d'un développement asymptotique par rapport à ϵ . De nombreux travaux ont eu lieu dans cet esprit. Citons, depuis le travail de Danilovskaïa [17], ceux de Nowacki [11], Hetnarski [12] [13], Soler et Brull [18]; et l'on trouvera d'autres références dans Nowacki [19].

Aucun de ces travaux n'a conduit à l'élaboration d'un algorithme de calcul. Brun et Molinari [5] proposent un algorithme qui opère sur l'espace-temps réel, et pour lequel le passage d'une approximation à la suivante ne nécessite à chaque fois que le calcul de 4 coefficients nouveaux.

En [5] nous avons étudié le cas de la thermoélasticité classique, ici nous raisonnons dans le cadre de la thermoélasticité généralisée.

Nous donnons une application au problème de Danilovskaïa et nous discutons du domaine de validité de la solution approchée obtenue.

Nous allons décomposer la solution S du problème en :

$$(1) \quad S = \bar{S} + \hat{S},$$

où les ondes S et $\hat{S}$ seront appelées ondes thermique et élastique modifiées (T.M. et E.M.). L'algorithme que nous proposons permet de calculer séparément les approximations successives de $\bar{S}$ et de $\hat{S}$.

Travaillons avec les équations (2.2.4) que l'on écrit ici sous la forme :

$$(2) \quad \begin{aligned} \hat{H}u + \sqrt{\epsilon} \frac{\partial \tau}{\partial x} &= 0 \\ \bar{H} \tau + \sqrt{\epsilon} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + m \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right) &= 0, \end{aligned}$$

où l'on a introduit les opérateurs hyperboliques :

$$(3) \quad \hat{H} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \bar{H} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

a) L'algorithme de calcul.

Notations

Nous noterons $\hat{\Delta}_0$ et $\bar{\Delta}_0$ les solutions élémentaires des opérateurs $\hat{H}$ et $\bar{H}$. Ces solutions, qui vérifient les conditions de repos initial ainsi que les conditions à la limite :

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \hat{\Delta}_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \bar{\Delta}_0 = \delta(t),$$

s'écrivent :

$$(5) \quad \hat{\Delta}_0(x, t) = \delta(t - x)$$

$$(6) \quad \bar{\Delta}_0(x, t) = e^{-\sqrt{m} \frac{x}{2}} \delta(t - \sqrt{m} x)$$

$$+ H(t - \sqrt{m} x) e^{-\frac{t}{2m}} \frac{x}{2\sqrt{m}} \frac{I_1\left(\frac{1}{2m}(t^2 - m x^2)^{1/2}\right)}{(t^2 - m x^2)^{1/2}}$$

où H est la fonction de Heaviside et I_1 une fonction de Bessel.

Les transformées de Laplace par rapport au temps de ces solutions élémentaires sont données par :

$$(7) \quad \mathcal{L} \hat{\Delta}_0(x, s) = e^{-s x}$$

$$(8) \quad \mathcal{L} \bar{\Delta}_0(x, s) = e^{-x(m s^2 + s)^{1/2}}$$

Compte tenu du repos initial, les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial t}$, qui figurent dans le système (2), peuvent être considérées au sens des distributions. Nous notons $D = \frac{\partial}{\partial t}$ l'opérateur dérivation. Sa transformée de Laplace sera la fonction $s \rightarrow s$.

Par :

$$Q = (m D^2 + D)^{1/2},$$

nous désignons l'opérateur dont la transformée de Laplace est la fonction $s \rightarrow (m s^2 + s)^{1/2}$.

Par convention nous posons :

$$y^{(i)} = 0 \quad \text{pour } i \text{ négatif,}$$

où y désignera $\bar{\tau}$, $\bar{u}$, $\bar{\tau}$ ou $\hat{u}$.

Comme à l'habitude l'étoile, $*$, représente la convolution par rapport au temps, et δ la distribution de Dirac.

Par définition, $[n]$ désigne la partie entière de $n/2$.

Ondes thermique et élastique modifiées

Si ϵ est nul, on voit avec (2) que u et τ se calculent par des convolutions avec les solutions élémentaires $\hat{\Delta}_0$ et $\bar{\Delta}_0$.

Lorsque ϵ est non nul, la solution est donnée par les ondes T.M. et E.M., classes de solutions particulières du système (2) caractérisées par la forme de leurs développements en puissance de $\sqrt{\epsilon}$ et le fait que, l'une est construite avec le "noyau" $\bar{\Delta}_0$, alors que l'autre l'est avec le "noyau" $\hat{\Delta}_0$.

Une onde thermique modifiée $\bar{S} = (\bar{\tau}, \bar{u})$, élément de la première classe, a pour développement :

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}(0) + \epsilon^{1/2} \bar{\tau}(1) + \dots + \epsilon^{n/2} \bar{\tau}(n) + \dots$$

(9)

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\epsilon}} = \bar{u}(0) + \epsilon^{1/2} \bar{u}(1) + \dots + \epsilon^{n/2} \bar{u}(n) + \dots$$

Une onde élastique modifiée $\hat{S} = (\hat{\tau}, \hat{u})$ a pour développement :

$$\frac{\hat{\tau}}{\sqrt{\epsilon}} = \hat{\tau}(0) + \epsilon^{1/2} \hat{\tau}(1) + \dots + \epsilon^{n/2} \hat{\tau}(n) + \dots$$

(10)

$$\hat{u} = \hat{u}(0) + \epsilon^{1/2} \hat{u}(1) + \dots + \epsilon^{n/2} \hat{u}(n) + \dots$$

Dans les paragraphes qui suivent, nous détaillons les calculs concernant l'onde T.M..

Cas de l'onde thermique modifiée

On suppose le semi-espace au repos pour $t < 0$, et la température au bord $\bar{\tau}_0(t)$ donnée. On cherche la solution $\bar{S}$ de (2) qui est de la forme (9), et

qui satisfait la condition à la limite :

$$(11) \quad \bar{\tau}(0, t) = \bar{\tau}_0(t), \quad t > 0.$$

Si $\bar{\tau}_0$ est donnée par :

$$(12) \quad \bar{\tau}_0 = \bar{\tau}_0^{(0)} + \epsilon^{1/2} \bar{\tau}_0^{(1)} + \dots + \epsilon^{i/2} \bar{\tau}_0^{(i)} + \dots,$$

la condition (11) s'écrit également, pour tout i entier positif :

$$(13) \quad \bar{\tau}^{(i)}(0, t) = \bar{\tau}_0^{(i)}(t)$$

Les conditions de repos initial s'écrivent pour $j = 0$ et $j = 1$:

$$(14) \quad \frac{\partial^j \bar{\tau}}{\partial t^j}(x, t) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^j \bar{\tau}^{(i)}}{\partial t^j}(x, t) = 0$$

$$\frac{\partial^j \bar{u}}{\partial t^j}(x, t) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^j \bar{u}^{(i)}}{\partial t^j}(x, t) = 0, \quad \forall x > 0, \quad \forall t < 0.$$

Les conditions à la limite semblent incomplètes puisque nulle part n'apparaît la valeur de $\bar{u}$ à l'extrémité. En fait, la condition manquante est remplacée par une condition a priori sur la forme de la solution cherchée, à savoir les développements (9) (22) et (24). Et il apparaîtra que $\bar{u}(0, t)$ est déterminé de manière unique en fonction de $\bar{\tau}_0(t)$, cette dernière variable gouvernant à elle seule l'onde thermique modifiée.

Substituons maintenant dans le système (2) les expressions (9) de $\bar{S}$; on obtient les équations :

$$(15) \quad \bar{H} \bar{\tau}^{(i)} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + m \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} \right) \bar{u}^{(i-2)} = 0 \quad (i \geq 0)$$

$$(16) \quad \hat{H} \bar{u}^{(i)} + \frac{\partial \bar{\tau}^{(i)}}{\partial x} = 0 \quad (i \geq 0).$$

En combinant (15) et (16), on obtient :

$$(17) \quad \bar{H} \bar{\tau}^{(0)} = 0, \quad \bar{H} \bar{\tau}^{(1)} = 0, \quad \hat{H} \bar{H} \bar{\tau}^{(0)} - \left(\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} + m \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \right) \bar{\tau}^{(i-2)} = 0 \quad (i \geq 2)$$

Les équations (17) qui ne contiennent que les $\bar{\tau}^{(i)}$, permettent leur calcul par récurrence de deux en deux. Les équations (16) donnent ensuite les $\bar{u}^{(i)}$. Nous voici donc conduits à une cascade d'équations aux dérivées partielles en t et x . Dans les paragraphes suivants nous développons une méthode qui ramène la résolution de ces équations à un problème purement algébrique.

Une méthode de résolution des équations (16) et (17) :

Calculons d'abord $\bar{\tau}^{(0)}$ et $\bar{\tau}^{(1)}$. Il s'agit de résoudre les deux premières équations (17) sous les conditions (13) et (14)₁, d'où :

$$(18) \quad \bar{\tau}^{(0)} = \bar{\tau}_0^{(0)} * \bar{\Delta}_0, \quad \bar{\tau}^{(1)} = \bar{\tau}_0^{(1)} * \bar{\Delta}_0$$

Introduisons maintenant les fonctions :

$$(19) \quad \bar{\Delta}_n = \frac{x^n}{n!} \bar{\Delta}_0.$$

Elles satisfont l'équation :

$$(20) \quad \bar{H}^{n+1} \bar{\Delta}_n = 0 \quad (n \geq 0).$$

Ceci résulte immédiatement du lemme suivant, démontré en annexe 2.A.4. :

Lemme : Soit $L = L_t - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, où L_t est un opérateur de convolution par rapport au temps. Si la fonction $f(x, t)$ est solution de $L f = 0$, alors :

$$L \cdot (n+1) (x^n f) = 0.$$

Montrons que :

$$(21) \quad (\hat{H} \bar{H})^{[n]} \bar{H} \bar{\tau}^{(n)} = 0.$$

Raisonnons par récurrence en utilisant (17) :

$$\begin{aligned} (\hat{H} \bar{H})^i \bar{H} \bar{\tau}^{(2i)} &= (\hat{H} \bar{H})^{i-1} \bar{H} (\hat{H} \bar{H}) \bar{\tau}^{(2i)} \\ &= \left(\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \right) (\hat{H} \bar{H})^{i-1} \bar{H} \bar{\tau}^{(2i-2)}. \end{aligned}$$

Le dernier membre est nul par hypothèse de récurrence.

Le rapprochement de (20) et (21) nous conduit à chercher les $\bar{\tau}^{(n)}$ sous la forme des développements :

$$(22) \quad \bar{\tau}^{(n)} = \sum_{k=0}^{[n]} \bar{\tau}_k^{(n)} * \bar{\Delta}_k,$$

dont on voit facilement qu'ils vérifient les conditions (13) et (14)₁. Les $\bar{\tau}_k^{(n)}$ sont fonctions du temps seul.

De même l'équation :

$$(23) \quad (\hat{H} \bar{H})[n] + 1 \bar{u}^{(n)} = 0,$$

obtenue en appliquant $\hat{H}[n] \bar{H}[n] + 1$ à (16), conduit à rechercher $\bar{u}^{(n)}$ sous forme du développement :

$$(24) \quad \bar{u}^{(n)} = \sum_{k=0}^{[n]} \bar{u}_k^{(n)} * \bar{\Delta}_k,$$

où les $\bar{u}_k^{(j)}$ ne dépendent que du temps. Cette formule vérifie les conditions initiales (14)₂.

Dans la suite, nous montrons que l'on peut effectivement calculer les fonctions $\bar{u}_k^{(j)}$ et $\bar{\tau}_k^{(j)}$ de façon que les développements (22) et (24) de $\bar{\tau}^{(j)}$ et $\bar{u}^{(j)}$ satisfassent les équations (17) et (16). L'onde thermique modifiée sera alors entièrement déterminée.

Algorithme de calcul des $\bar{\tau}_k^{(j)}$ et $\bar{u}_k^{(j)}$

Contentons-nous de décrire les étapes du calcul des $\bar{\tau}_k^{(2j)}$ et des $\bar{u}_k^{(2j)}$. Nous substituons dans les équations (16) et (17) à $\bar{\tau}^{(2i)}$ et $\bar{u}^{(2i)}$ leurs développements (22) et (24) en $\bar{\Delta}_k$; nous faisons usage des formules (1) de

l'annexe 2.A.5 exprimant $\frac{\partial \bar{\Delta}}{\partial x}$, $\bar{H} \bar{\Delta}_k$, $\hat{H} \bar{H} \bar{\Delta}_k$ et $\hat{H} \bar{\Delta}_k$ en fonction des $\bar{\Delta}_j$ ($j = k, \dots, k-4$) auxquels sont appliqués des opérateurs de la seule variable temps. Nous identifions alors les coefficients des $\bar{\Delta}_k$ pour obtenir des relations linéaires - dans lesquelles les coefficients sont des opérateurs en $D = \frac{\partial}{\partial t}$ - entre les $\bar{\tau}_k^{(2i)}$ et les $\bar{\tau}_1^{(2i-2)}$ d'une part, les $\bar{\tau}_k^{(2i)}$ et les $\bar{u}_1^{(2i)}$ d'autre part. Ce sont les formules (1) et (2) qui se trouvent en annexe 2.A.6, et qui résultent respectivement de la substitution dans (17) et (16). Le calcul opérationnel ramène la résolution de (2.A.6. 1-2), c'est à dire le

calcul des $\bar{\tau}_k^{(j)}$ et $\bar{u}_k^{(j)}$, à un problème d'algèbre linéaire.

Décrivons maintenant plus en détail l'algorithme de calcul des $\bar{\tau}_k^{(j)}$ et $\bar{u}_k^{(j)}$.

Calcul des $\bar{\tau}_k^{(j)}$

Introduisons les opérateurs

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_0 &= 2 Q (D^2 (1 - m) - D); \bar{A}_1 = \bar{A}_0^{-1} (D + m D^2)^2; \bar{A}_2 = \bar{A}_0^{-1} ((5 m - 1) D^2 + 5 D) \\
 \bar{A}_3 &= -2 \bar{A}_0^{-1} (D + m D^2)^{3/2}; \bar{A}_4 = -4 \bar{A}_0^{-1} Q; \bar{A}_5 = \bar{A}_0^{-1} (D + m D^2); \bar{A}_6 = \bar{A}_0^{-1} \\
 \bar{C}_1 &= \bar{A}_1, \bar{C}_2 = -\bar{A}_2 \bar{A}_1 + \bar{A}_3, \bar{C}_3 = -\bar{A}_2 \bar{C}_2 - \bar{A}_4 \bar{A}_1 + \bar{A}_5 \dots \\
 (25) \quad \bar{C}_i &= -\bar{A}_2 \bar{C}_{i-1} - \bar{A}_4 \bar{C}_{i-2} - \bar{A}_6 \bar{C}_{i-3} \quad (i > 3)
 \end{aligned}$$

Introduisons également les matrices triangulaires suivantes :

$$(26) \quad \bar{M}_i = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & & & 0 \\ \bar{C}_2 & \bar{C}_1 & & \\ \bar{C}_3 & \bar{C}_2 & \bar{C}_1 & \\ \bar{C}_1 & \dots & \bar{C}_2 & \bar{C}_1 \end{bmatrix} \quad \bar{M}_{i,j} = \begin{bmatrix} \bar{M}_i & 0 \\ 0 & I_j \end{bmatrix}$$

$$(27) \quad \bar{Q}_i = \bar{M}_{i,0} \cdot \bar{M}_{i-1,1} \dots \bar{M}_{i-p,p} \bar{M}_{1,i-1}; \bar{P}_i = \begin{bmatrix} \bar{Q}_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les diagonales sont constantes dans $\bar{M}_i$. La matrice I_j est unité d'ordre j .
Remarquons enfin que $\bar{P}_0 = 1$ et que $\bar{P}_i$ est lié à $\bar{P}_{i-1}$ par la relation :

$$(28) \quad \bar{P}_i = \bar{M}_{i,1} \begin{bmatrix} \bar{P}_{i-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M}_i \bar{P}_{i-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous utilisons dans la suite les notations suivantes, $\underline{y}$ désignant au choix $\bar{\tau}$, $\hat{\tau}$, $\bar{u}$ ou $\underline{u}$:

$$\underline{y}^{(2i)} = \begin{bmatrix} y_i^{(2i)} \\ y_{i-1}^{(2i)} \\ \vdots \\ y_0^{(2i)} \end{bmatrix} \quad \underline{y}^{(2i+1)} = \begin{bmatrix} y_i^{(2i+1)} \\ y_{i-1}^{(2i+1)} \\ \vdots \\ y_0^{(2i+1)} \end{bmatrix}$$

(29)

$$\underline{y}_0^{(2i)} = \begin{bmatrix} y_0^{(0)} \\ y_0^{(2)} \\ \vdots \\ y_0^{(2i)} \end{bmatrix} \quad \underline{y}_0^{(2i+1)} = \begin{bmatrix} y_0^{(1)} \\ y_0^{(3)} \\ \vdots \\ y_0^{(2i+1)} \end{bmatrix}$$

Passons maintenant au calcul des $\bar{\tau}_k^{(2i)}$. Avec les formules (1) de l'annexe 2.A.6 on exprime les $\bar{\tau}_k^{(2i)}$, $k = 1 \dots i$, en fonction des $\bar{\tau}_k^{(2i-2)}$, $k = 0 \dots i-1$. Précisément, la relation est de la forme :

$$\begin{bmatrix} \bar{\tau}^{(2i)} \\ \bar{\tau}_{i-1}^{(2i)} \\ \bar{\tau}_1^{(2i)} \end{bmatrix} = \bar{M}_i \begin{bmatrix} \bar{\tau}_{i-1}^{(2i-2)} \\ \bar{\tau}_{i-2}^{(2i-2)} \\ \bar{\tau}_0^{(2i-2)} \end{bmatrix} \quad (30)$$

et en itérant le processus il vient :

$$\bar{\tau}^{(2i)} = \bar{P}_i \cdot \bar{\tau}_0^{(2i)}. \quad (31)$$

Les formules (25) (26) (28) et (31) décrivent entièrement l'algorithme de calcul des $\bar{\tau}_k^{(2i)}$. Cet algorithme assure le passage du rang $2(i-1)$ au rang $2i$ grâce au calcul d'un seul nombre supplémentaire $\bar{C}_i$.

De la même manière on peut calculer les $\bar{\tau}_k^{(2i+1)}$ en fonction des $\bar{\tau}_0^{(k)}$, précisément :

$$\bar{\tau}^{(2i+1)} = \bar{P}_i \bar{\tau}_0^{(2i+1)},$$

que l'on condense avec (31) en :

$$\bar{\tau}^{(n)} = \bar{P}_{[n]} \bar{\tau}_0^{(n)}. \quad (32)$$

on suppose $\hat{u}_0$ développé en série de puissances de $\sqrt{\epsilon}$: $\hat{u}_0(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^{i/2} \hat{u}_0^{(i)} :$

- condition aux limites, pour tout t positif, et $i \geq 0$:

$$(37) \quad \hat{u}^{(i)}(0, t) = \hat{u}_0^{(i)}(t)$$

- conditions initiales (14) à la substitution près : $'-' \rightarrow '\hat{'}$.

Ici aussi nous montrerons que la température à l'extrémité $\hat{\tau}(0, t)$ est fonction de $\hat{u}(0, t) = \hat{u}_0(t)$; cette dernière variable gouverne à elle seule l'onde élastique modifiée.

Les calculs pour l'onde élastique étant semblables en tout point à ceux de l'onde thermique, contentons-nous de les décrire brièvement. En combinant (10) et (2) on obtient les équations :

$$(38) \quad \hat{H} \hat{u}^{(0)} = 0, \quad \hat{H} \hat{u}^{(1)} = 0, \quad \hat{H} \hat{H} \hat{u}^{(i)} - \left(\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} + m \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} \right) \hat{u}^{(i-2)} = 0$$

$$(i \geq 0)$$

$$(39) \quad \hat{H} \hat{\tau}^{(i)} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + m \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} \right) \hat{u}^{(i)} = 0.$$

La fonction : $\hat{\Delta}_0(x, t) = \delta(t - x)$ vérifie $\hat{H} \hat{\Delta}_0 = 0$, par conséquent

$\hat{u}^{(0)} = \hat{u}_0^{(0)} * \hat{\Delta}_0$ est solution de $\hat{H} \hat{u}^{(0)} = 0$ et vérifie les conditions initiales.

De même, on calcule $\hat{u}^{(1)} = \hat{u}_0^{(1)} * \hat{\Delta}_0$.

Posons maintenant :

$$(40) \quad \hat{\Delta}_n = \frac{x^n}{n!} \hat{\Delta}_0.$$

On cherche $\hat{u}^{(n)}$ et $\hat{\tau}^{(n)}$ sous forme de développements :

$$(41) \quad \hat{u}^{(n)} = \sum_{k=0}^{[n]} \hat{u}_k^{(n)} * \hat{\Delta}_k$$

$$(42) \quad \hat{\tau}^{(n)} = \sum_{k=0}^{[n]} \hat{\tau}_k^{(n)} * \hat{\Delta}_k.$$

On substitue dans (38) et (39) à $\hat{u}^{(2i)}$ et $\hat{\tau}^{(2i)}$ (*) leurs développements (41) et (42) et l'on fait usage des formules démontrées en annexe 2.A.5 qui donnent

(*) Les calculs pour l'ordre impair, $2i + 1$, se conduiraient de la même manière.

Section 2.4

$\partial \hat{\Delta}_k / \partial x$, $\partial^2 \hat{\Delta}_k / \partial x^2$, $\hat{H} \hat{\Delta}_k$, $\bar{H} \hat{\Delta}_k$ et $\hat{H} \bar{H} \hat{\Delta}_k$ en fonction des $\hat{\Delta}_i$ auxquels sont appliqués des opérateurs temporels. Dans le résultat de cette substitution on identifie les coefficients de $\hat{\Delta}_k$ pour obtenir les relations linéaires (3) et (4) de l'annexe 2.A.6 entre les $\hat{u}_k^{(2i)}$ et les $\hat{u}_i^{(2i-2)}$ d'une part. et entre les $\hat{t}_k^{(2i)}$ et les $\hat{u}_k^{(2i)}$ d'autre part.

Comme pour l'onde thermique, on introduit des opérateurs $\hat{C}_k$ à partir desquels on construit des matrices $\hat{P}_i$, de la même manière que les $\bar{P}_i$ l'avaient été à partir des $\bar{C}_k$. La relation obtenue est duale de (32) :

$$3) \quad \hat{u}^{(n)} = \hat{P}_{[n]} \hat{u}_0^{(n)}.$$

Enfin, parallèlement aux $\bar{D}_k$ et $\bar{N}_i$, on introduit les coefficients $\hat{D}_k$ et les matrices $\hat{N}_i$.

On trouvera en annexe 2.A.7 les définitions précises des $\hat{C}_i$ et $\hat{D}_i$.

L'homologue de la formule (36) est ici :

$$4) \quad \hat{t}^{(n)} = \hat{N}_{[n]} \hat{P}_{[n]} \hat{u}_0^{(n)}.$$

L'utilité des ondes thermiques modifiée $\bar{S}$ et élastique modifiée $\hat{S}$ résulte du fait que la solution générale S du système (2) se décompose de manière unique sous la forme :

$$45) \quad S = \bar{S} + \hat{S}.$$

Ne nous attardons pas sur la démonstration de (45), qui ne présente d'ailleurs pas de difficultés.

Résumé des résultats

La solution du problème est de la forme :

$$(46) \quad \begin{aligned} u &= \bar{u} + \hat{u} \\ \tau &= \bar{\tau} + \hat{\tau} \end{aligned}$$

Les ondes T.M. et E.M. sont définies par les formules :

$$47) \quad \begin{aligned} \bar{\tau} &= \bar{\tau}(0) + \epsilon^{1/2} \bar{\tau}(1) + \dots + \epsilon^{n/2} \bar{\tau}(n) + \dots \\ \frac{\bar{u}}{\epsilon^{1/2}} &= \bar{u}(0) + \epsilon^{1/2} \bar{u}(1) + \dots + \epsilon^{n/2} \bar{u}(n) + \dots \end{aligned}$$

$$(48) \quad \begin{aligned} \frac{\hat{\tau}}{\varepsilon^{1/2}} &= \hat{\tau}(0) + \varepsilon^{1/2} \hat{\tau}(1) + \dots + \varepsilon^{n/2} \hat{\tau}(n) \\ \hat{u} &= \hat{u}(0) + \varepsilon^{1/2} \hat{u}(1) + \dots + \varepsilon^{n/2} \hat{u}(n), \end{aligned}$$

où l'on a (prendre le chapeau, $\hat{\cdot}$, pour l'onde E.M., et la barre, $\bar{\cdot}$, pour l'onde T.M.) :

$$(49) \quad \hat{\tau}(n) = \sum_{k=0}^{[n]} \hat{\tau}_k(n) * \hat{\Delta}_k : \hat{u}(n) = \sum_{k=0}^{[n]} \hat{u}_k(n) * \hat{\Delta}_k.$$

Les $\hat{\tau}_k(n)$ et les $\hat{u}_k(n)$ dépendent linéairement des $\hat{\tau}_0^{(i)}$, et par conséquent ces derniers gouvernent l'onde T.M. :

$$(50) \quad \bar{\tau}(n) = \bar{P}_{[n]} \bar{\tau}_0^{(n)} ; \quad \bar{u}(n) = \bar{N}_{[n]} \bar{P}_{[n]} \bar{\tau}_0^{(n)},$$

où les expressions du type $\bar{\tau}(n)$ sont définies en (29).

L'onde E.M. est quant à elle gouvernée par les $\hat{u}_0^{(i)}$:

$$(51) \quad \hat{\tau}(n) = \hat{N}_{[n]} \hat{P}_{[n]} \hat{u}_0^{(n)} ; \quad \hat{u}(n) = \hat{P}_{[n]} \hat{u}_0^{(n)}.$$

Les matrices $\hat{P}_i$ et $\hat{N}_i$ sont triangulaires d'ordre $i + 1$, et se déterminent par récurrence. Elles sont données en annexe 2.A.8 pour $0 \leq i \leq 2$. Les coefficients de ces matrices sont des opérateurs temporels que l'on peut calculer une fois pour toute, car ils sont indépendants des conditions à la limite.

Finalement les ondes T.M. et E.M., et partant la solution du problème, sont entièrement déterminées dès que l'on connaît les $\hat{\tau}_0^{(i)}$ et les $\hat{u}_0^{(i)}$. Ceux-ci se calculent par récurrence en fonction des données au bord. Nous illustrerons le procédé de construction avec des exemples concrets.

Insistons bien sur le rôle joué par les conditions aux limites dans l'utilisation de la méthode :

Les conditions aux limites n'interviennent que dans le calcul des $\hat{\tau}_0^{(i)}$ et $\hat{u}_0^{(i)}$.

C'est là un avantage par rapport aux développements en $\sqrt{\varepsilon}$ que l'on obtiendrait à partir de la transformée de Laplace de la solution, voir [13] par exemple. En effet, outre que ces développements deviennent très laborieux à mesure que l'ordre des termes s'élève, la transformée de Laplace dépend des conditions aux limites ; le calcul doit être renouvelé pour chaque type de données au bord.

Calcul de la contrainte

On s'intéresse essentiellement dans la suite au calcul de la contrainte. Compte tenu de la formule (2.1.32) :

$$(52) \quad \sigma = e - \sqrt{\epsilon} \tau,$$

on peut dès à présent en donner l'expression :

$$(53) \quad \sigma = \sum_{i \geq 0} \epsilon^{i/2} \sigma(i),$$

avec :

$$(54) \quad \sigma(0) = -D \hat{u}_0^{(0)} \hat{\Delta}_0,$$

$$(55) \quad \sigma(1) = -D \hat{u}_0^{(1)} \hat{\Delta}_0 - Q \bar{u}_0^{(0)} \bar{\Delta}_0 - \bar{\tau}_0^{(0)} \bar{\Delta}_0,$$

et pour $i \geq 2$:

$$(56) \quad \sigma(i) = \hat{\sigma}(i) + \bar{\sigma}(i),$$

$$(57) \quad \hat{\sigma}(i) = -D \hat{u}_{[i]}^{(i)} \hat{\Delta}_{[i]} + \sum_{k=0}^{[i-2]} (\hat{u}_{k+1}^{(i)} - D \hat{u}_k^{(i)} - \bar{\tau}_k^{(i-2)}) \hat{\Delta}_k,$$

$$(58) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}(i) = & -Q \bar{u}_{[i-1]}^{(i-1)} \bar{\Delta}_{[i-1]} - \bar{\tau}_{[i-1]}^{(i-1)} \bar{\Delta}_{[i-1]} \\ & + \sum_{k=0}^{[i-3]} (\bar{u}_{k+1}^{(i-1)} - Q \bar{u}_k^{(i-1)} - \bar{\tau}_k^{(i-1)}) \bar{\Delta}_k (*) \end{aligned}$$

On rappelle que :

$$Q = D^{1/2} (1 + m D)^{1/2}.$$

b) Thermoélasticité classique, problème de Danislovskaja

La thermoélasticité classique correspond au cas $m = 0$. Toutes les formules précédentes sont valables, il suffit d'y poser $Q = D^{1/2}$.

La solution élémentaire $\bar{\Delta}_0$ donnée par (6) dans le cas général,

(*) avec la convention $\sum_{k=0}^{[i-3]} = 0$ pour $i = 2$

s'écrit ici :

$$(59) \quad \bar{\Delta}_0(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2/4t}}{t^{3/2}}.$$

Passons maintenant à l'étude d'un problème aux limites particulier. On considère un semi-espace, libre de toute contrainte au bord $x = 0$. Nous lui appliquons à l'instant initial un échelon de température. On se propose de calculer la contrainte thermique qui va apparaître dans le corps. Danilovskaïa [17] est semble-t-il la première à avoir étudié ce type de problème.

Les conditions à l'extrémité sont :

$$(60) \quad \tau(0, t) = H(t), \quad \sigma(0, t) = 0.$$

La contrainte est donnée par les formules (52)-(58) dans lesquelles il suffit de déterminer les $\bar{\tau}_0^{(k)}$ et les $\bar{u}_0^{(k)}$ qui sont liés aux conditions à la limite.

Les matrices $\hat{P}_i$ et $\hat{N}_i \hat{P}_i$ sont données en annexe 2.A.9.

En tenant compte des expressions (9)₁, (10)₁, (22) et (42), la condition à la limite (60)₁ s'écrit :

$$(61) \quad \bar{\tau}_0^{(0)} = H, \quad \bar{\tau}_0^{(n)} + \hat{\tau}_0^{(n-1)} = 0 \quad (n \geq 1).$$

La condition à la limite sur la contrainte nous donne, compte tenu de (52)-(58) et (61) :

$$(62) \quad \begin{aligned} & -D\bar{u}_0^{(0)} = 0 \\ & -D\bar{u}_0^{(1)} - D^{1/2}\bar{u}_0^{(0)} = H \\ & \bar{u}_1^{(2)} - D\bar{u}_0^{(2)} - D^{1/2}\bar{u}_0^{(1)} = 0 \\ & \bar{u}_1^{(n)} - D\bar{u}_0^{(n)} + \bar{u}_1^{(n-1)} - D^{1/2}\bar{u}_0^{(n-1)} = 0 \quad (n \geq 3). \end{aligned}$$

Les équations (61) et (62) déterminent $\bar{u}_0^{(n)}$ et $\bar{\tau}_0^{(n)}$ par récurrence. En effet, (61) et (62) donnent :

$$(63) \quad \bar{\tau}_0^{(0)} = H; \quad \bar{u}_0^{(0)} = 0.$$

Supposons maintenant connus $\bar{u}_0^{(0)} \dots \bar{u}_0^{(n-1)}$ et $\bar{\tau}_0^{(0)} \dots \bar{\tau}_0^{(n-1)}$. L'équation (62) fournit la relation :

$$(64) \quad \bar{u}_0^{(n)} = D^{-1} \bar{u}_1^{(n)} + D^{-1} \bar{u}_1^{(n-1)} - D^{-1/2} \bar{u}_0^{(n-1)}.$$

dans laquelle $\hat{u}_1^{(n)}$ est par (51) une combinaison linéaire de $u_0^{(0)}, u_0^{(2)} \dots u_0^{(n-2)}$, ou $\hat{u}_0^{(1)} \dots \hat{u}_0^{(n-2)}$ (*), suivant la parité de n ; d'après (50) $\bar{u}_1^{n-1}$ est une combinaison linéaire de $\bar{\tau}_0^{(0)} \dots \bar{\tau}_0^{(n-3)}$; pour la même raison $\bar{u}_0^{(n-1)}$ est une combinaison de $\bar{\tau}_0^{(0)} \dots \bar{\tau}_0^{(n-1)}$. Quant à $\bar{\tau}_0^{(n)}$, on a d'après (61) :

$$5) \quad \bar{\tau}_0^{(n)} = - \hat{\tau}_0^{(n-1)},$$

où $\hat{\tau}_0^{(n-1)}$ est, par (51), une combinaison linéaire de $u_0^{(0)} \dots u_0^{(n-1)}$. Ainsi les $\bar{\tau}_0^{(n)}$ et les $\hat{u}_0^{(n)}$ sont-ils entièrement déterminés. Et par là même les ondes thermiques et élastiques modifiées dont la somme représente la solution du problème de Danilovskaïa. Sous forme symbolique :

$$6) \quad \bar{\tau}_0^{(0)} = \frac{1}{D}, \quad \bar{\tau}_0^{(2)} = - \frac{1}{(D-1)^2}, \quad \bar{\tau}_0^{(4)} = - \frac{1}{(D-1)^4}, \quad \bar{\tau}_0^{(2i+1)} = 0$$

$$7) \quad \hat{u}_0^{(1)} = - \frac{1}{D(D-1)}, \quad \hat{u}_0^{(3)} = \frac{D+3}{2D(D-1)^3}, \quad \hat{u}_0^{(2i)} = 0.$$

Pour calculer explicitement la contrainte, on est amené à réduire, dans les formules (54)-(58), les fractions rationnelles par rapport à D , en éléments simples, et à calculer les originales d'expressions de la forme : $\frac{D^{m/2}}{(D-a)^n} e^{-D^{1/2}x}$ (**). Ces originaux se trouvent dans le formulaire [20] .

Finalement on a le résultat :

$$8) \quad \sigma = \sqrt{\epsilon} \sigma^{(1)} + (\sqrt{\epsilon})^3 \sigma^{(3)} + (\sqrt{\epsilon})^5 \sigma^{(5)} + \dots,$$

avec :

- pour $t < x$

$$9) \quad \sigma^{(1)} = - \frac{e^t}{2} \left[e^{-x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t} \right) + e^x \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) \right]$$

(*) Le fait que $\hat{P}_i$ soit triangulaire intervient ici, entre autres.

(**) La transformée de Laplace de cette expression, est la fonction :

$$s \rightarrow \frac{s^{m/2}}{(s-a)^n} e^{-s^{1/2}x}$$

$$\begin{aligned}
 (70) \quad \sigma^{(3)} &= \frac{1}{2} e^{t-x} \left(t + t^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} xt \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t} \right) \\
 &+ \frac{1}{2} e^{t+x} \left(t + t^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{2} xt \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) \\
 &- \sqrt{t} \frac{x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (71) \quad \sigma^{(5)} &= \frac{1}{16} \left\{ e^{t-x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t} \right) \left[-2t^4 - \frac{x^4}{2} - \frac{13}{2} t^2 x^2 + 6t^3 x + 3tx^3 \right. \right. \\
 &- 8t^3 - 9tx^2 + \frac{31}{2} t^2 x + \frac{3}{2} x^3 - 4t^2 + 3tx \left. \right] + e^{t+x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) \\
 &\left[-2t^4 - \frac{x^4}{2} - \frac{13}{2} t^2 x^2 - 6t^3 x - 3tx^3 - 8t^3 - 9tx^2 - \frac{31}{2} t^2 x \right. \\
 &- \left. \left. \frac{3}{2} x^3 - 4t^2 - 3tx \right] + \frac{x\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} (10t^2 + 2x^2 + 20t + 12) e^{-x^2/4t} \right\}
 \end{aligned}$$

- et pour $t > x$, en posant $F(X) = \frac{1}{2} \exp X^2 \operatorname{erfc} X$

$$(72) \quad \sigma^{(1)} = e^{-x^2/4t} \left[F\left(\sqrt{t} - \frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - F\left(\sqrt{t} + \frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 (73) \quad \sigma^{(3)} &= e^{-x^2/4t} \left[-\left(t + t^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} xt\right) F\left(\sqrt{t} - \frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right. \\
 &+ \left. \left(t + t^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{3}{2} xt\right) F\left(\sqrt{t} + \frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{x\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (74) \quad \sigma^{(5)} &= \frac{e^{-x^2/4t}}{8} \left\{ F\left(\sqrt{t} - \frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \left[2t^4 + \frac{x^4}{2} + \frac{13}{2} t^2 x^2 - 6t^3 x - 3tx^3 + 8t^3 \right. \right. \\
 &+ 9tx^2 - \frac{31}{2} t^2 x - \frac{3}{2} x^3 + 4t^2 - 3tx \left. \right] - F\left(\sqrt{t} + \frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \\
 &\left[2t^4 + \frac{x^4}{2} + \frac{13}{2} t^2 x^2 + 6t^3 x + 3tx^3 + 8t^3 + 9tx^2 + \frac{31}{2} t^2 x \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{3}{2} x^3 + 4t^2 + 3tx \right] + \frac{x\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} (5t^2 + x^2 + 10t + 6) \right\}.
 \end{aligned}$$

Remarque 2 : On peut vérifier, comme il se doit, que pour tout $x \geq 0$:

$$(75) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma^{(i)}(x, t) = 0.$$

Autrement dit la relaxation des contraintes, en un point, est décrite à tout ordre par la solution approchée.

De plus on vérifie que le saut de σ pour $t = x$ est égal à :

$$(76) \quad \frac{[\sigma]}{\sqrt{\epsilon}} = 1 - \frac{\epsilon x}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon x}{2}\right)^2 + \dots$$

Cela concorde avec l'expression exacte :

$$(77) \quad \frac{[\sigma]}{\sqrt{\epsilon}} = e^{-\epsilon x/2}.$$

La comparaison de ces deux dernières formules met en évidence les limites de la méthode. La solution approchée que nous avons calculée n'est valable, au voisinage de la singularité, que pour de faibles valeurs de l'abscisse ($x \ll \frac{1}{\epsilon}$).

Le comportement de la solution approchée quand x tend vers l'infini est bien restitué. En effet, d'après les conditions de régularité on a :

$$(78) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma(x, t) = 0$$

Tout ceci nous conduit à penser que pour la solution approchée :

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n \epsilon^{i/2} \sigma(i),$$

il existe un domaine de validité $\mathcal{A}$ (dans le plan des variables réduites (x, t)), $\tilde{\mathcal{A}}$ (dans le plan des variables physiques $(\tilde{x}, \tilde{t})$) dont la forme serait grossièrement donnée par (fig. 2) :

$$(79) \quad \begin{aligned} \mathcal{A}_n &= \left\{ (x, t) \mid 0 \leq x \leq x_n \text{ ou } 0 \leq t \leq t_n \right\}, \\ \tilde{\mathcal{A}}_n &= \left\{ (\tilde{x}, \tilde{t}) \mid 0 \leq \tilde{x} \leq \tilde{x}_n \text{ ou } 0 \leq \tilde{t} \leq \tilde{t}_n \right\}, \end{aligned}$$

où les bornes x_n , t_n , $\tilde{x}_n$ et $\tilde{t}_n$ augmentent en module avec n . Pour $n = 1$, on a :

$$(80) \quad \begin{aligned} x_1 &\leq 0 \left(\frac{1}{\epsilon}\right), & t_1 &\leq 0 \left(\frac{1}{\epsilon}\right), \\ \tilde{x}_1 &\leq 0 \left(\frac{\Omega T_c}{\epsilon}\right), & \tilde{t}_1 &\leq 0 \left(\frac{T_c}{\epsilon}\right). \end{aligned}$$

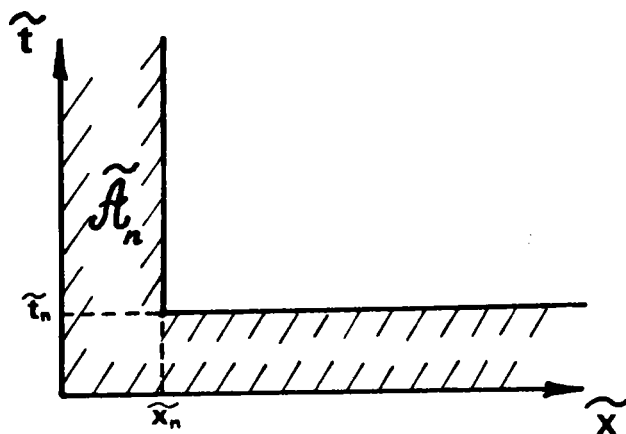


Fig: 2

Remarque 3 : Ces considérations relatives à la détermination d'un domaine de validité sont tout à fait empiriques. L'existence d'un domaine de la forme (79) ne constitue en fait qu'une hypothèse de travail que l'examen des résultats numériques permet éventuellement de confirmer.

c) Un exemple en théorie du second son

Considérons un semi-espace dont le bord est libre de contrainte, et qui est brusquement soumis à un échelon de flux thermique :

$$(81) \quad \begin{aligned} \sigma(0, t) &= 0 \\ q(0, t) &= H(t). \end{aligned}$$

On se propose de calculer la contrainte thermique dans le matériau. Exposons les principales étapes de la résolution de ce problème en théorie du second son.

En tenant compte de la formule :

$$(82) \quad m \frac{\partial q}{\partial t} + q = - \frac{\partial \tau}{\partial x},$$

la condition à la limite $(81)_2$ s'exprime de façon symbolique par :

$$-Q \bar{\tau}_0^{(0)} = -\frac{1}{D} - m\delta$$

$$-Q \bar{\tau}_0^{(1)} - D \hat{\tau}_0^{(0)} = 0$$

83)

$$\bar{\tau}_1^{(2)} - Q \bar{\tau}_0^{(2)} - D \hat{\tau}_0^{(1)} = 0$$

$$\bar{\tau}_1^{(i)} - Q \bar{\tau}_0^{(i)} + \hat{\tau}_1^{(i-1)} - D \hat{\tau}_0^{(i-1)} = 0 \quad (i \geq 3).$$

La condition $(81)_3$ donne, compte tenu de (54)-(58) :

$$\hat{u}_0^{(0)} = 0$$

$$-Q \bar{u}_0^{(0)} - D \hat{u}_0^{(1)} = \bar{\tau}_0^{(0)}$$

84)

$$-Q \bar{u}_0^{(1)} + \hat{u}_1^{(2)} - D \hat{u}_0^{(2)} = \bar{\tau}_0^{(1)} + \hat{\tau}_0^{(0)}$$

$$\bar{u}_1^{(i-1)} - Q \bar{u}_0^{(i-1)} + \hat{u}_1^{(i)} - D \hat{u}_0^{(i)} = \bar{\tau}_0^{(i-1)} + \hat{\tau}_0^{(i-2)} \quad (i \geq 3)$$

En procédant comme au paragraphe précédent, on obtient :

85)

$$\begin{cases} \bar{\tau}_0^{(0)} = D^{-3/2} (1 + mD)^{1/2} \\ \hat{u}_0^{(0)} = 0 \end{cases}$$

86)

$$\begin{cases} \bar{\tau}_0^{(1)} = 0 \\ \hat{u}_0^{(1)} = -\frac{D^{-3/2} (1 + mD)^{1/2}}{D(1-m) - 1} \end{cases}$$

87)

$$\begin{cases} \bar{\tau}_0^{(2)} = -\frac{(1 + mD)}{(D(1-m) - 1)^2} + \frac{1}{2} \frac{D^{-3/2} (1 + mD)^{3/2}}{D(1-m) - 1} \\ \hat{u}_0^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Avec les formules (54)-(58) on obtient les $\sigma^{(i)}$:

(88)

$$\sigma^{(2i)} = 0 \quad (i \geq 0),$$

$$(89) \quad \sigma^{(1)} = A (\hat{\Delta}_0 - \bar{\Delta}_0), \quad A = \frac{D^{-1/2} (1 + mD)^{1/2}}{D(1-m) - 1}$$

$$(90) \quad \sigma^{(3)} = \bar{\sigma}^{(3)} + \hat{\sigma}^{(3)},$$

avec :

$$(91) \quad \bar{\sigma}^{(3)} = B \bar{\Delta}_0 - \frac{1}{2} \frac{(1 + mD)^2}{(D(1-m) - 1)^2} \bar{\Delta}_1$$

$$(92) \quad B = \frac{D(1+mD)}{(D(1-m)-1)^3} + \frac{D^{-1/2} (1+mD)^{3/2} (D(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}m) + \frac{3}{2})}{(D(1-m)-1)^3}$$

$$(93) \quad \hat{\sigma}^{(3)} = -B \hat{\Delta}_0 - \frac{1}{2} \frac{D^{1/2} (1+mD)^{3/2}}{(1-D(1-m))^2} \hat{\Delta}_1.$$

Pour calculer les originales de ces formules, on fait apparaître des expressions de la forme $E_m^n = \frac{Q^n}{(D-a)^m} e^{-Qx}$ ($Q = D^{1/2} (1+mD)^{1/2}$), au besoin

en réduisant certaines fractions en éléments simples. Tout revient donc à calculer les originales des E_m^n , ce qui est fait en annexe 2.A.10.

Afin d'illustrer ce qui précède, traitons le cas de $\sigma^{(1)}$. On décompose A :

$$A = D^{1/2} (1 + mD)^{1/2} \left[\frac{1}{D - \frac{1}{1-m}} - \frac{1}{D} \right],$$

et l'on calcule $A \bar{\Delta}_0$ en utilisant le formulaire 2.A.10.

Pour calculer $A * \hat{\Delta}_0$, on remarque que $A(t) = A * \bar{\Delta}_0|_{x=0}$, et que

$$A * \hat{\Delta}_0 = A(t - x).$$

D'où finalement le résultat :

$$(94) \quad \begin{aligned} \sigma^{(1)} = H(t - \sqrt{m} x) & \left\{ e^{-\frac{x}{2\sqrt{m}}} \left(\frac{1}{2\sqrt{m}} + \frac{x}{8m} \right) \right. \\ & - \left(\frac{\sqrt{m}}{1-m} + \frac{1}{2\sqrt{m}} + \frac{x}{8m} \right) e^{\frac{t}{1-m} - \frac{\sqrt{m}}{1-m} x - \frac{x}{2\sqrt{m}}} \\ & + \frac{1}{4m^{3/2}} \int_{\sqrt{mx}}^t \left(e^{\frac{t}{1-m} - \left(\frac{2}{1-m} + \frac{1}{m} \right) \frac{\tau}{2}} - e^{-\frac{\tau}{2m}} \right) F(\tau, x) d\tau \\ & + H(t-x) \left\{ -\frac{1}{2\sqrt{m}} + \left(\frac{\sqrt{m}}{1-m} + \frac{1}{2\sqrt{m}} \right) e^{\frac{t-x}{1-m}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\sqrt{m}} \int_0^{t-x} \left[e^{-\frac{\tau}{2m}} - e^{\frac{t-x}{1-m} - \left(\frac{2}{1-m} + \frac{1}{m} \right) \frac{\tau}{2}} \right] \frac{I_1\left(\frac{\tau}{2m}\right)}{\tau} d\tau \right\} \end{aligned}$$

où la fonction $F(\tau, x)$ est donnée par la formule (11) de l'annexe 2.A.10.

2.5 CONCLUSION :

De cette étude de différentes méthodes de calcul approché, nous retiendrons que la M.E.V. fournit des renseignements intéressants quand l'onde s'éloigne suffisamment du bord (onde différée), mais que l'onde instantanée a, en thermoélasticité généralisée, un domaine de validité trop restreint pour être vraiment intéressante.

La méthode de développement asymptotique direct par rapport à la constante de couplage thermomécanique, est une méthode qui complète la M.E.V. puisqu'elle permet de calculer l'onde dans la première phase de son évolution.

Dans le chapitre suivant nous verrons, sur des exemples précis, de quelle façon l'on peut conjointement utiliser ces méthodes pour décrire la réponse transitoire d'un corps thermoélastique.

REFERENCES DU CHAPITRE II

- |1| BRUN L. et MOLINARI A., Progressive waves in generalised thermoelasticity, J. of thermal stresses, à paraître.
- |2| BRUN L., L'onde simple thermoélastique linéaire, J. de Mécanique, 863-885, 1975.
- |3| MOLINARI A., Thermoélasticité dynamique : un demi-espace soumis à un échelon de flux thermique, J. de Mécanique, 18, 73-101, 1979.
- |4| MOLINARI A., Réponse dynamique d'un demi-espace thermoélastique à un dépôt d'énergie, J. de Mécanique, 1979.
- |5| BRUN L. et MOLINARI A., Un algorithme de calcul en thermoélasticité dynamique, J. de Mathématiques et de Physique appliquée (ZAMP), 123-139, 1977.
- |6| GURTIN M.E. et PIPKIN A.C., A general theory of heat conduction with finite waves speeds, Arch. Rat. Mech. Anal., 113-126, 1968.
- |7| MCCARTHY M.F., Constitutive equations for thermomechanical material with memory, Int. J. Engng. Sci., 467-474, 1970.
- |8| NUNZIATO J.W., On heat conduction in materials with memory, Quart. Appl. Math., 187-204, 1971.
- |9| BRUN L., L'onde simple viscoélastique linéaire, J. de Mécanique, 449-498, 1974.
- |10| ERDELYI (éditeur), Tables of integral transforms, Bateman Manuscript Project, Vol. 1, Mc Graw Hill Book Co, New-York, 1954.
- |11| NOWACKI W., Certain dynamic problems of thermoelasticity III, Bull. de l'Acad. polonaise des Sciences, série Sci. Techn., 409-418, 1965.
- |12| HETNARSKI R.B., Solution of the coupled problem of thermoelasticity in the form of series of functions, Arch. Mech. Stos., 919-941, 1964.
- |13| HETNARSKI R.B., Coupled thermoelastic problem for the half space, Bull. de l'Acad. polonaise des Sciences, série Sci. Techn., 49-57, 1964.

- [14] BOLEY B.A. et TOLLINS J.S., Transient coupled thermoelastic Boundary Value Problems in the Half-Space, J. Appl. Mech., 637-646, 1962.
- [15] CHADWICK P., Dynamical Thermoelasticity, dans Progress in Solid Mechanics I.N. Sneddon et R. Hill, éd., Vol. 1, North Holland, Amsterdam, 265-328, 1960.
- [16] FRANCIS P.H., Thermomechanical effects in elastic wave propagation : a survey, J. of Sound and Vibration, 21, 181-192, 1972.
- [17] DANILOVSKAÏA V.I., Contraintes thermiques résultant de l'échauffement subit de la surface d'un semi-espace élastique. (En russe), P.M.M., 316-318, 1950.
- [18] SOLER A.I. and BRULL M.A., On the solution to transient coupled thermo-elastic problems by perturbation techniques, J. Appl. Mech., 389-399, 1965.
- [19] NOWACKI W., Dynamic problems of thermoelasticity, Noordhoff Intern. Publ., 1975.
- [20] HETNARSKI R.B., An algorithm for generating some inverse Laplace transforms of exponential form, J. of Appl. Math. Phys. (ZAMP), 249-253, 1975.
- [21] MAXWELL J.C., On the dynamical theory of gases, Phil. Trans. Royal. Soc., 157, 49-88, 1867.
- [22] LORD H.W. and SHULMAN Y., A generalised dynamical theory of thermoelasticity, J. Mech. Phys. Solids, 15, 299-309, 1967.
- [23] NOORWOOD F.R. and WARREN W.E., Wave propagation in the generalized dynamical theory of thermoelasticity, Quart. J. Mech. Appl. Math., 22, 283-290, 1969.
- [24] ACHENBACH J.D., The influence of heat conduction on propagating stress jumps, J. Mech. Phys. Solids, 16, 273-282, 1968.
- [25] LEBON J. et LAMBERMONT J., A consistent thermodynamic formulation of the field equations for elastic bodies removing the paradox of infinite speed of propagation of thermal signals, J. de Mécanique, 15, 579-594, 1976.
- [26] SIDOROFF F., Variables internes en viscoélasticité, J. de Mécanique, 14, 546-566, 1975.
- [27] HLADIK J., La transformation de Laplace, Masson et C^{ie} Ed., 1969.

CHAPITRE III

REPONSE DYNAMIQUE D'UN CORPS THERMOELASTIQUE

CLASSIQUE A UN FLUX D'ENERGIE

Ce chapitre a pour but de montrer, par l'étude d'un cas particulier, qu'il est possible, en combinant certaines des méthodes exposées précédemment, d'aboutir à une représentation satisfaisante de la solution.

Dans la théorie de la thermoélasticité dynamique, les problèmes liés à l'étude des contraintes thermiques sont sans doute parmi les plus intéressants. Il s'agit de problèmes pour lesquels les conditions à la limite sont de nature thermique : on se donne par exemple une température ou un flux de chaleur au bord. L'énergie thermique déposée dans le corps, va se transformer partiellement en énergie élastique, à cause du couplage thermomécanique, et elle donne ainsi naissance à une contrainte thermique.

S'il est souvent possible de négliger cette contrainte (on dit alors que le problème est quasi-statique), ce n'est pas le cas lorsque les vitesses d'échauffement sont très rapides. Or, s'agissant du débit d'un flux d'énergie, on arrive à des montées en régime dont la durée est de l'ordre de la nanoseconde ou de la picoseconde, avec des impulsions laser notamment. On obtient également des vitesses d'échauffement très rapides lorsqu'un solide absorbe le rayonnement électromagnétique produit par un générateur à micro-ondes, ou bien lorsqu'il est soumis à un faisceau d'électrons.

On se propose d'étudier, pour un corps thermoélastique obéissant à la loi de Fourier classique, l'onde de contrainte créée par un flux d'énergie constant que l'on applique brusquement à la surface du corps (échelon de flux), supposée libre de contrainte.

La contrainte thermique apparaît dès les premiers instants sous la forme d'un "pic" ou d'une bosse se déplaçant dans le corps avec une vitesse qui se stabilise bientôt à une valeur égale à la célérité isentropique du son. Ce pic, dont l'extrémum prend d'abord des valeurs croissantes, finit par ne plus croître, puis par s'amortir. Nous étudierons l'évolution de l'onde de contrainte depuis son apparition jusqu'à la phase finale où elle s'amortit.

On s'attachera à mettre en évidence les aspects qualitatifs : en particulier nous dégagerons les effets du couplage thermomécanique et de la conduction thermique.

Le couplage se traduit physiquement par une interaction entre énergies thermique et mécanique. Il est à l'origine de l'apparition de la contrainte, et inversement contribue à son évanescence. Le couplage joue également sur la vitesse de propagation de l'onde de contrainte qui, au bout d'un temps très bref, devient égale à la célérité isentropique du son (alors qu'en théorie découplée c'est la célérité isotherme du son qui jouerait).

Le rôle de la conduction dans la dégradation de l'énergie mécanique est essentiel. Si la conduction est nulle, les échanges entre énergies thermique et élastique sont réversibles, et dans ce cas l'onde de contrainte ne s'amortit pas.

La naissance puis l'évanescence du pic de contrainte s'expliquent de la façon suivante. Le flux d'énergie a pour effet d'échauffer instantanément le corps en tout point et de faire apparaître par couplage thermomécanique des contraintes de compression dont l'existence est essentiellement fugitive, et cela pour deux raisons :

a) d'une part, le bord étant libre, le corps va se dilater et donner naissance, dès l'instant initial, à une onde de détente qui part de l'origine pour pénétrer ensuite dans le corps et relaxer la contrainte en un point donné ; d'où l'aspect de pic ou de bosse que présente la contrainte à t fixé (ou à x fixé), voir la figure 1.

b) d'autre part, le couplage thermomécanique, qui est à l'origine même de l'existence de la contrainte, va ensuite par un effet inverse permettre son évanescence. En effet, le couplage permet la transformation de l'énergie élastique, portée par l'onde de contrainte, en énergie thermique. (Ainsi, sur le passage du pic de contrainte le matériau subit d'abord une phase de compression croissante pendant laquelle de l'énergie thermique est créée). La conduction thermique assure le transport de cette énergie thermique, d'où irréversibilité et dégradation de l'énergie.

L'aspect a) des phénomènes est bien décrit par la théorie découplée qui prévoit, à t fixé par exemple, l'existence d'un pic de contrainte dont le sommet se déplace avec le temps à la vitesse isotherme du son et croît, en valeur absolue, vers une valeur limite, disons σ_m . Cette théorie prédit la relaxation des contraintes en tout point ($\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(x, t) = 0$), mais elle ne décrit pas leur évanescence globale, puisqu'elle donne :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \geq 0} |\sigma(x, t)| = \sigma_m > 0$$



Ainsi la théorie découplée est-elle imparfaite, car prenant en compte d'une certaine façon le couplage pour expliquer l'apparition des contraintes thermiques, elle le fait de manière insuffisante pour rendre compte de leur évanescence globale. Il faut donc faire usage de la théorie couplée pour décrire le point b).

Ce chapitre est divisé en deux parties. D'abord on supposera que l'énergie est déposée à la surface du corps : la valeur du flux de chaleur à l'extrémité du massif est supposée connue.

Dans la deuxième partie nous considérons une situation plus générale, qui contient l'exemple précédent comme cas particulier. On étudie la réponse dynamique d'un corps thermoélastique à un dépôt d'énergie de type volumique. L'énergie n'est plus déposée à la surface du corps, mais à l'intérieur de celui-ci.

On suppose dans tout ce chapitre que les dépôts d'énergie sont de niveau suffisamment bas pour qu'on puisse négliger le rayonnement du solide vers l'extérieur.

Tous les résultats que nous obtiendrons seront illustrés par des applications numériques.

Le contenu de ce chapitre a fait l'objet pour le principal des publications [1] et [2].

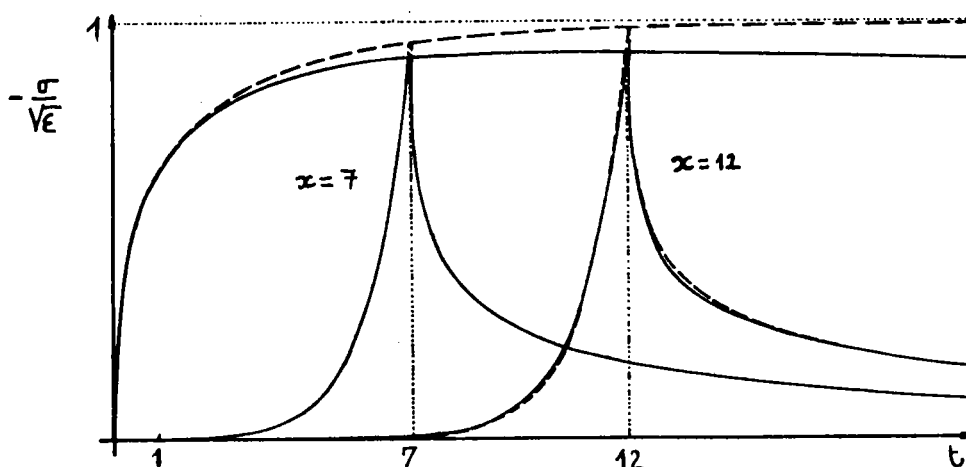


FIG. 1 : Contrainte en fonction de t , à x fixé : — théorie couplée, ---- théorie découplée. Cas du cuivre : $\epsilon = 0.0168$

3.1 DEPOT D'ENERGIE EN SURFACE

On se propose dans cette première partie d'étudier la réponse d'un demi-espace thermoélastique, initialement au repos, à un échelon de flux thermique que l'on applique à son bord supposé libre de contrainte.

Le problème analogue, relatif à un échelon de température, a été étudié par Danilovskaïa en théorie découplée, puis par de nombreux auteurs, voir [3] et [4] p. 269 et suivantes. Par contre le premier problème évoqué, bien que physiquement plus réaliste (*), a semble-t-il, moins retenu l'attention. Signalons toutefois, dans le cadre de la théorie découplée, le travail de Singh [5], revu en [6]. Ici, nous tiendrons compte de façon complète du couplage thermomécanique.

La contrainte thermique retiendra, comme nous l'avons dit, toute notre attention en tant que contrepartie dynamique d'une sollicitation purement thermique.

Afin de poser correctement les conditions à la limite du problème linéarisé, il convient d'abord de définir le petit paramètre qui a permis de linéariser le problème. On s'aperçoit alors que l'échelle de temps T intervient dans la condition à la limite.

On utilise ensuite la méthode de l'échelle variable. Celle-ci nous montre que le problème est partout quasi-statique (contrainte thermique nulle), à l'exception d'un très petit voisinage de l'origine (de l'ordre de 6 microns pour le cuivre), où, aux tous premiers instants, on ne peut négliger la contrainte.

Pour étudier la contrainte dans ce petit domaine, nous employons la méthode de développement asymptotique direct par rapport à la constante de couplage thermomécanique ϵ .

a) Position du problème

On se donne à l'instant initial et à la frontière $\tilde{x} = 0$, libre de contrainte, d'un demi-espace thermoélastique $\tilde{x} \geq 0$ initialement au repos, un échelon de flux thermique. En affectant du symbole $\sim$ les grandeurs physiques (non réduites), les conditions à la limite s'écrivent :

(*) Les données contrôlables portent sur les flux d'énergie et non sur les températures.

$$(1) \quad \begin{aligned} \tilde{q} &= q_0 H(\tilde{t}) \\ \tilde{\sigma} &= 0, \quad \text{en } \tilde{x} = 0 \end{aligned}$$

où H est la fonction de Heaviside, q_0 l'amplitude du flux de chaleur $\tilde{q}$.

Dans la suite, nous travaillons avec des équations écrites sous forme adimensionnelle. Afin de bien poser les conditions à la limite sous forme réduite, il faut préciser de quelle façon le petit paramètre de linéarisation η est construit.

Soit T_1 la durée sur laquelle l'on se propose de décrire le phénomène. Nous allons construire un petit paramètre à partir de T_1 et de la donnée q_0 (amplitude du flux au bord), en raisonnant de la façon suivante. Supposons le problème gouverné par des équations linéaires, et voyons quelle est, à q_0 fixé, la valeur maximum de T_1 pour laquelle l'on reste pendant tout l'intervalle de temps $[0, T_1]$ dans le domaine de validité de la solution linéaire. Ce raisonnement conduira à une détermination a posteriori de η .

Pour rester dans le domaine linéaire, il faut que la déformation unitaire e soit suffisamment petite, disons $\tilde{e} \leq \epsilon_2$. De façon générale, il doit en être de même des autres termes de l'équation de Duhamel :

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\lambda + 2\mu} = \tilde{e} - \frac{\beta}{\lambda + 2\mu} \tilde{\theta}$$

En particulier :

$$(2) \quad \frac{\beta \tilde{\theta}}{\lambda + 2\mu} \leq \epsilon_2$$

Calculons l'élévation de température au bord du massif. En première approximation ne tenons pas compte du couplage, c'est-à-dire résolvons simplement l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{t}} - \frac{k}{\rho_0 c} \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}^2} = 0,$$

avec la condition au bord :

$$\tilde{q}(\tilde{x} = 0, \tilde{t}) = -k \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}} = q_0 H(\tilde{t}).$$

La solution pour $\tilde{x} = 0$ s'écrit :

$$\tilde{\theta}(0, \tilde{t}) = 2 q_0 \left(\frac{\tilde{t}}{\pi k \rho_0 c} \right)^{1/2},$$

et par comparaison avec (2), il vient :

$$\frac{q_0 \beta}{\lambda + 2\mu} \left[\frac{\tilde{t}}{k \rho_0 c} \right]^{1/2} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \varepsilon_2.$$

On se propose donc de décrire le phénomène sur une durée qui n'excède pas la valeur T_1 telle que le paramètre sans dimension :

$$(3) \quad \eta = \left(\frac{T_1}{\rho_0 c k} \right)^{1/2} \frac{q_0 \beta}{\lambda + 2\mu}$$

soit suffisamment petit.

b) L'onde différée

Nous utilisons ici les notations et les équations du paragraphe 2.3.b, où l'on pose $\bar{m} = 0$ puisque nous travaillons en thermoélasticité classique.

Rappelons les équations fondamentales du problème (2.3.43) :

$$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - (1 - \bar{\varepsilon}) \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \sqrt{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = 0$$

(4)

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \varepsilon_2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \sqrt{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial e}{\partial t} = 0$$

(où e désigne la déformation unitaire et τ la variation de température), ainsi que les équations (2.3.46-48) :

$$(5) \quad \begin{aligned} \sigma &= (1 - \bar{\varepsilon}) e - \sqrt{\bar{\varepsilon}} \tau \\ S &= \tau + \sqrt{\bar{\varepsilon}} e \\ q &= - \frac{\partial \tau}{\partial x}, \end{aligned}$$

où σ , S et q désignent la contrainte, l'entropie et le flux de chaleur.

On rappelle que par commodité il est préférable, lorsqu'on calcule l'onde différée, de travailler avec des quantités isentropiques $\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\varepsilon} \dots$ etc. De même, au lieu du petit paramètre donné en (3) nous prendrons :

$$(6) \quad \bar{\eta} = \left(\frac{T_1}{\rho_0 c k} \right)^{1/2} \frac{q_0 \beta}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}$$

qui est légèrement différent de η .

En se servant du changement de variables (2.3.41), les conditions à la limite (1) peuvent s'écrire :

$$(7) \quad q = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \propto \left(\frac{T}{T_c} \right)^{1/2} H(t)$$

$$\sigma = 0, \quad \text{en } x = 0,$$

où l'on a posé :

$$(8) \quad \alpha = \left(\frac{T}{T_1} \right)^{1/2},$$

et où T_c est un temps caractéristique du matériau défini en (2.2.42).

La durée maximum T_1 sur laquelle nous voulons décrire le phénomène est fixée une fois pour toute ; mais l'échelle de temps T est un paramètre qui reste à notre disposition.

Nous supposons dorénavant que (*) :

$$(9) \quad T_1 \gg T_c$$

Pour étudier l'onde différée, nous allons prendre une "grande" échelle de temps ; précisément nous posons :

$$(10) \quad T = T_1,$$

Le paramètre α défini en (8) est alors égal à l'unité, tandis que le petit paramètre ϵ_2 , dont on se sert dans la M.E.V. (voir 2.3.45), s'écrit :

$$(11) \quad \epsilon_2 = \frac{T_c}{T_1}.$$

On calcule la solution différée $S_D = \hat{S}_D + \bar{S}_D$, en se servant des résultats du paragraphe 2.3.b, où l'on a décomposé S_D en une onde quasi-élastique $\hat{S}_D$ et une onde quasi-thermique $\bar{S}_D$.

Il faut utiliser cette fois les conditions à la limite (7) qui s'écrivent au premier ordre, compte tenu de (5) :

(*) Cette condition n'est pas nécessaire quand on étudie l'onde aux premiers instants avec la méthode de développement par rapport à ϵ .

$$\frac{\partial \bar{\tau}_0}{\partial \bar{x}_0} = - \frac{1}{\sqrt{\bar{\epsilon}}} H(t)$$

(12)

$$(1 - \bar{\epsilon}) (\hat{e}_0 + \bar{e}_0) - \sqrt{\bar{\epsilon}} (\hat{\tau}_0 + \bar{\tau}_0) = 0, \quad \text{en } x = 0.$$

La fonction $\bar{\tau}_0$ est donnée par (2.3.77) :

(13)

$$\bar{\tau}_0 = \bar{g} * \bar{\Delta}.$$

Puisque la transformée de Laplace par rapport au temps de $\bar{\Delta}(\bar{x}_0, t)$ s'écrit :

(14)

$$\mathcal{L}\bar{\Delta}(\bar{x}_0, s) = e^{-(1-\bar{\epsilon})^{-1/2} s^{1/2} \bar{x}_0},$$

on déduit de (13) que :

(15)

$$\frac{\partial \bar{\tau}_0}{\partial \bar{x}_0} \Big|_{x=0} = - (1 - \bar{\epsilon})^{-1/2} D^{1/2} \bar{g}$$

En substituant ce résultat dans (12)₁, et en utilisant les équations (2.3.71) et (2.3.79), on détermine $\bar{f}$, $\hat{f}$, $\bar{g}$ et $\hat{g}$, valeurs de $\bar{e}_0$, $\hat{e}_0$, $\bar{\tau}_0$ et $\hat{\tau}_0$ en $x = 0$:

(16)

$$\bar{f} = (1 - \bar{\epsilon})^{-1/2} D^{-3/2}$$

$$\bar{g} = \bar{\epsilon}^{-1/2} (1 - \bar{\epsilon})^{1/2} D^{-3/2}$$

$$\hat{f} = \hat{g} = 0$$

Au premier ordre on a donc :

(17)

$$e_0 = (1 - \bar{\epsilon})^{-1/2} D^{-3/2} * \bar{\Delta}$$

$$\tau_0 = \bar{\epsilon}^{-1/2} (1 - \bar{\epsilon})^{1/2} D^{-3/2} * \bar{\Delta}$$

avec :

(18)

$$D^{-3/2} * \bar{\Delta} = 2 \left(\frac{t}{\pi} \right)^{1/2} e^{-\frac{x^2}{4 \epsilon_2 (1 - \bar{\epsilon}) t}}$$

$$- \epsilon_2^{-1/2} (1 - \bar{\epsilon})^{-1/2} x \operatorname{erfc} \left[\frac{x}{2 [\epsilon_2 (1 - \bar{\epsilon}) t]^{1/2}} \right]$$

En utilisant (5)₁ et (5)₂, on vérifie que :

(19)

$$\sigma_0 = 0$$

$$S_0 = \bar{\epsilon}^{-1/2} (1 - \bar{\epsilon})^{-1/2} D^{-3/2} * \bar{\Delta}$$

De ces calculs, il ressort que la contrainte s'annule quand l'onde s'est suffisamment éloignée du bord. Le problème est alors quasistatique et il suffit de poser $\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = 0$ dans l'équation (4) pour retrouver tous les résultats précédents.

Décrivons maintenant la première phase de l'évolution de l'onde, celle où la contrainte ne peut être négligée.

c) Etude de l'onde aux faibles valeurs de l'abscisse ou du temps

On utilise cette fois les résultats du paragraphe 2.4.

Nous travaillons avec le système d'équations 2.2.4, où l'on pose $m = 0$:

$$(20) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sqrt{\epsilon} \frac{\partial \tau}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \sqrt{\epsilon} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Ce système a été obtenu à la suite des changements de variables (2.1.26-27), où l'on prend pour échelle de temps :

$$(21) \quad T = T_c.$$

Sous forme réduite, les conditions à la limite (1) s'écrivent, en prenant pour η la valeur donnée en (3) :

$$(22) \quad \begin{aligned} q &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \alpha H(t) \\ \sigma &= 0, \quad \text{en } x = 0, \end{aligned}$$

avec

$$(23) \quad \alpha = \left(\frac{T_c}{T_1}\right)^{1/2}$$

On prendra dans la suite à la place de (22)₁ la condition plus simple :

$$(24) \quad q(0, t) = H(t),$$

quitte ensuite à multiplier tous les résultats obtenus par $\alpha/\sqrt{\epsilon}$.

Les équations (2.1.32-33) donnent la contrainte et le flux de chaleur :

$$25) \quad \sigma = e - \sqrt{\epsilon} \tau$$

$$26) \quad q = - \frac{\partial \tau}{\partial x}$$

La contrainte thermique est donnée par (2.4.53) :

$$27) \quad \sigma = \sum_{i \geq 0} \epsilon^{i/2} \sigma^{(i)}$$

où les $\sigma^{(i)}$ se calculent avec les formules (2.4.54-58) dans lesquelles on pose $Q = D^{1/2}$ ($m = 0$).

Conformément à la méthode du paragraphe 2.4, l'onde sera déterminée si l'on parvient à calculer les $\bar{\tau}_0^{(n)}$ et $\hat{Q}_0^{(n)}$.

Calcul des $\bar{\tau}_0^{(n)}$ et $\hat{Q}_0^{(n)}$ en fonction des conditions à la limite

Le calcul se fait par récurrence. Compte tenu des formules (1) et (2) de l'annexe 2.A.5 :

$$\frac{\partial}{\partial x} \bar{\Delta}_k = \bar{\Delta}_k - 1 - D^{1/2} \bar{\Delta}_k, \quad \frac{\partial}{\partial x} \hat{\Delta}_k = \hat{\Delta}_k - 1 - D \hat{\Delta}_k,$$

et de l'expression (2.4.49)₁ de $\bar{\tau}^{(i)}$ et $\hat{\tau}^{(i)}$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x}^{(i)} = \bar{\tau}_1^{(i)} - D^{1/2} \bar{\tau}_0^{(i)}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial x}^{(i)} = \hat{\tau}_1^{(i)} - D \hat{\tau}_0^{(i)}$$

Par suite, si l'on utilise :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{i \geq 0} \epsilon^{i/2} \left(\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x}^{(i)} + \frac{\partial \hat{\tau}}{\partial x}^{(i-1)} \right),$$

la donnée au bord (24) s'écrit :

$$\begin{aligned} D^{1/2} \bar{\tau}_0^{(0)} &= \frac{1}{D} \\ D^{1/2} \bar{\tau}_0^{(1)} + D \hat{\tau}_0^{(0)} &= 0 \\ D^{1/2} \bar{\tau}_0^{(2)} - \bar{\tau}_1^{(2)} + D \hat{\tau}_0^{(1)} &= 0 \\ D^{1/2} \bar{\tau}_0^{(i)} - \bar{\tau}_1^{(i)} + D \hat{\tau}_0^{(i-1)} - \hat{\tau}_1^{(i-1)} &= 0 \quad (i \geq 3) \end{aligned} \quad (28)$$

En opérant de la même manière, la condition $(22)_2$ donne :

$$\hat{u}_0^{(0)} = 0$$

$$-D \hat{u}_0^{(1)} - D^{1/2} \bar{u}_0^{(0)} = \bar{\tau}_0^{(0)}$$

$$(29) \quad -D \hat{u}_0^{(2)} + \hat{u}_1^{(2)} - D^{1/2} \bar{u}_0^{(1)} = \bar{\tau}_0^{(1)} + \hat{\tau}_0^{(0)}$$

$$-D \hat{u}_0^{(i)} + \hat{u}_1^{(i)} + \bar{u}_1^{(i-1)} - D^{1/2} \bar{u}_0^{(i-1)} = \bar{\tau}_0^{(i-1)} + \hat{\tau}_0^{(i-2)}$$

(pour $i \geq 3$)

Les formules (28) et (29) permettent le calcul de $\bar{\tau}_0^{(i)}$ et $\hat{u}_0^{(i)}$ par récurrence. Tout d'abord $(28)_1$ et $(29)_1$ donnent :

$$\bar{\tau}_0^{(0)} = D^{-3/2}$$

$$\hat{u}_0^{(0)} = 0$$

Supposons maintenant connues :

$$(30) \quad \hat{u}_0^{(0)}, \dots, \hat{u}_0^{(n-1)} ; \bar{\tau}_0^{(0)}, \dots, \bar{\tau}_0^{(n-1)} ;$$

On déduit de $(29)_n$:

$$\hat{u}_0^{(n)} = D^{-1} \hat{u}_1^{(n)} + D^{-1} \bar{u}_1^{(n-1)} - D^{-1/2} \bar{u}_0^{(n-1)}$$

$$- D^{-1} (\bar{\tau}_0^{(n-1)} + \hat{\tau}_0^{(n-2)})$$

Visiblement, compte tenu en particulier de la forme triangulaire des matrices qui entrent en jeu, tous les termes du second membre se calculent par les formules (2.4.50) et (2.4.51) en fonction des quantités connues (30). Ainsi la formule $(2.4.51)_2$ donne-t-elle $\hat{u}_1^{(n)}$ en fonction de $\hat{u}_0^{(0)}, \hat{u}_0^{(2)} \dots \hat{u}_0^{(n-2)}$ ou $\hat{u}_0^{(1)} \dots \hat{u}_0^{(n-2)}$ suivant que n est pair ou impair.

De la même façon, on calcule $\bar{\tau}_0^{(n)}$ à partir de $(28)_n$.

Les résultats explicites jusqu'à l'ordre 2 s'écrivent :

$$31) \quad \begin{cases} \bar{\tau}_0(0) = D^{-3/2} \\ \bar{u}_0(0) = 0 \end{cases}$$

$$32) \quad \begin{cases} \bar{\tau}_0(1) = 0 \\ \bar{u}_0(1) = -\frac{D^{-3/2}}{D-1} \end{cases}$$

$$33) \quad \begin{cases} \bar{\tau}_0(2) = -\frac{1}{(D-1)^2} + \frac{D^{-3/2}}{2(D-1)} \\ \bar{u}_0(2) = 0 \end{cases}$$

De plus, on a de façon générale :

$$34) \quad \bar{u}_0(2i) = 0, \bar{\tau}_0(2i+1) = 0 \quad (i \geq 0)$$

Expression analytique de la contrainte

Les $\bar{\tau}_j(i)$, $\bar{u}_j(i)$, $\hat{\tau}_j(i)$, $\hat{u}_j(i)$ sont donnés par les formules (2.4.50) et (2.4.51) sous forme opérationnelle. Il en est de même de la contrainte au travers des formules (2.4.54-58). On se propose maintenant de calculer les originales, c'est-à-dire de déterminer les fonctions $(x, t) \rightarrow \sigma^{(i)}(x, t)$ sous forme explicite.

On remarque tout d'abord, compte tenu des formules (2.4.54-58) et de (34), que :

$$35) \quad \sigma^{(2i)} = 0 \quad (i \geq 0).$$

D'autre part, si l'on appelle A et B les coefficients de $\bar{\Delta}_0$ et $\hat{\Delta}_0$ dans $\sigma^{(i)} = \bar{\sigma}^{(i)} + \hat{\sigma}^{(i)}$, de sorte que :

$$\sigma^{(i)} = A(t) * \bar{\Delta}_0(x, t) + B(t) * \hat{\Delta}_0(x, t) + \dots,$$

la condition (22), portant sur la nullité de la contrainte au bord, s'écrit :

$$36) \quad B(t) = -A(t).$$

On a donc intérêt à calculer d'abord l'originale de $A * \bar{\Delta}_0$, car en prenant $x = 0$ on obtiendra en particulier :

$$(37) \quad B = - A * \bar{\Delta}_0|_{x=0} (= - \bar{\sigma}^{(1)}(0, t)) (*)$$

Cela économise des calculs longs et inutiles.

Calcul de $\sigma^{(1)}$

On a avec (2.4.55), $(32)_2$ et (36) :

$$\sigma^{(1)} = - \frac{D^{-1/2}}{D-1} (\bar{\Delta}_0 - \hat{\Delta}_0).$$

Comme dit précédemment on calcule d'abord l'originale de :

$$(38) \quad - \frac{D^{-1/2}}{D-1} * \bar{\Delta}_0 = - T(1, x, t)$$

où l'on a posé :

$$(39) \quad T(a, x, t) = \frac{e^{at}}{2\sqrt{a}} \left[\exp(-x\sqrt{a}) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} - \sqrt{at}\right) - \exp(x\sqrt{a}) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \sqrt{at}\right) \right]$$

Pour les détails de calcul nous renvoyons à l'annexe 3.A.1. En faisant $x = 0$ dans l'expression (38) on obtient accessoirement l'originale de :

$$\frac{D^{-1/2}}{D-1} = e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}),$$

d'où finalement :

$$(40) \quad \begin{aligned} \sigma^{(1)} = & H(t-x) e^{t-x} \operatorname{erf} \sqrt{t-x} - \frac{1}{2} e^t [e^{-x} \operatorname{erfc}(\frac{x}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}) \\ & - e^x \operatorname{erfc}(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t})] \end{aligned}$$

Calcul des $\sigma^{(3)} = \bar{\sigma}^{(3)} + \hat{\sigma}^{(3)}$

Des calculs semblables conduisent à :

$$(41) \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}^{(3)} = & - \frac{1}{2} e^{t-x} \left(\frac{x^2}{2} + t^2 - \frac{3}{2} tx + \frac{x}{4} + \frac{5}{8} \right) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{t} - \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \\ & + \frac{1}{2} e^{t+x} \left(- \frac{x^2}{4} - \frac{tx}{2} + x + 2t - \frac{5}{8} \right) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{t} + \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \\ & + \left(\frac{x^2}{2} + t^2 - \frac{3}{2} tx + \frac{x}{4} + \frac{5}{8} \right) e^{t-x} + \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4} - \frac{5}{4} \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{aligned}$$

(*) Et par suite $B * \hat{\Delta}_0 = B(t-x)$ est connu.

Le terme en $\hat{\Delta}_0$ de :

$$\hat{\sigma}^{(3)} = - (-\bar{\tau}_0^{(2)} - D^{1/2} \bar{u}_0^{(2)} + \bar{u}_1^{(2)}) \hat{\Delta}_0 - D \bar{u}_1^{(3)} * \hat{\Delta}_1$$

est donné par (37) et (41).

Il reste à évaluer l'originale de :

$$D \bar{u}_1^{(3)} = \frac{1}{2} \frac{D^{1/2}}{(D-1)^2}.$$

Un calcul direct donne (*) :

$$\frac{D^{1/2}}{(D-1)^2} = \frac{D}{(D-1)^2} * D^{-1/2} = (1+t) e^t * \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = \left(\frac{1}{2} + t\right) e^t \operatorname{erf} \sqrt{t} + \sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

En fin de compte on a :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{(3)} = H(t-x) & \left\{ \frac{1}{2} e^{t-x} (t-x) (x-t-2) - \frac{1}{2} e^{t-x} \operatorname{erf} \sqrt{t-x} (t^2 - tx - 2t + \frac{5}{2} x \right. \\ & \left. + \frac{5}{4}) - \left(\frac{t}{2} - \frac{5}{4}\right) \sqrt{\frac{t-x}{\pi}} \right\} \end{aligned}$$

d) Aspect quantitatif

Représentons graphiquement pour le cuivre et le plomb la contrainte approchée :

$$\sigma_a = \sqrt{\epsilon} (\sigma^{(1)} + \epsilon \sigma^{(3)}).$$

Les courbes en trait plein sont relatives à la théorie découplée et représentent à x fixé la fonction (fig. 1 et 2) :

$$t \rightarrow -\frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} = -\sigma^{(1)}.$$

Les courbes hachurées font intervenir le couplage thermomécanique. Elles représentent pour différents x fixés la fonction :

$$t \rightarrow -\frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} = -\frac{\sigma_a}{\sqrt{\epsilon}}.$$

Dans son domaine de validité (défini plus loin), la solution σ_a présente l'aspect d'un pic dont le sommet se trouve, comme en théorie découplée, au front d'onde élastique isotherme $t = x$. Mais, alors que dans la théorie dé-

(*) On retrouve d'ailleurs cette formule à partir de l'équation (6) de la table de transformée [7] (prendre $c = 0$, $a = 1$, $b = 0$)

couplée le pic tend vers 1 lorsque $t = x$ tend vers l'infini, dans la théorie couplée le pic atteint une valeur maximum puis décroît. Ainsi se trouve confirmée l'érosion du pic conduisant à l'évanescence des contraintes.

Introduisons les notations :

$$\sigma_m(x) = \sup_{t \geq 0} \sigma_a(x, t) ; \quad \sigma_s(x) = \sigma_a(x, x).$$

Si l'on trace les courbes $\mathcal{L}_m$ et $\mathcal{L}_s$ définies par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m : x &\rightarrow \frac{\sigma_m}{\sqrt{\epsilon}}(x) \\ \mathcal{L}_s : x &\rightarrow \frac{\sigma_s}{\sqrt{\epsilon}}(x), \end{aligned}$$

on s'aperçoit qu'elles sont sensiblement confondues pour x inférieur à $\frac{2}{\epsilon}$, et qu'elles passent par un maximum. Au delà de ce maximum, on peut montrer que $\mathcal{L}_s$ dégénère en une droite, dont l'équation est de la forme (fig. 2) :

$$x \rightarrow -1 + \epsilon \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{8} \right),$$

et qui coupe l'axe $\sigma = 0$ en :

$$x_r = \frac{4}{\epsilon} - \frac{5}{2} \approx \frac{4}{\epsilon}$$

Comme cette droite est pratiquement tangente à $\mathcal{L}_s$ et $\mathcal{L}_m$, on peut admettre qu'elle définit une distance de relaxation, ou un temps de relaxation :

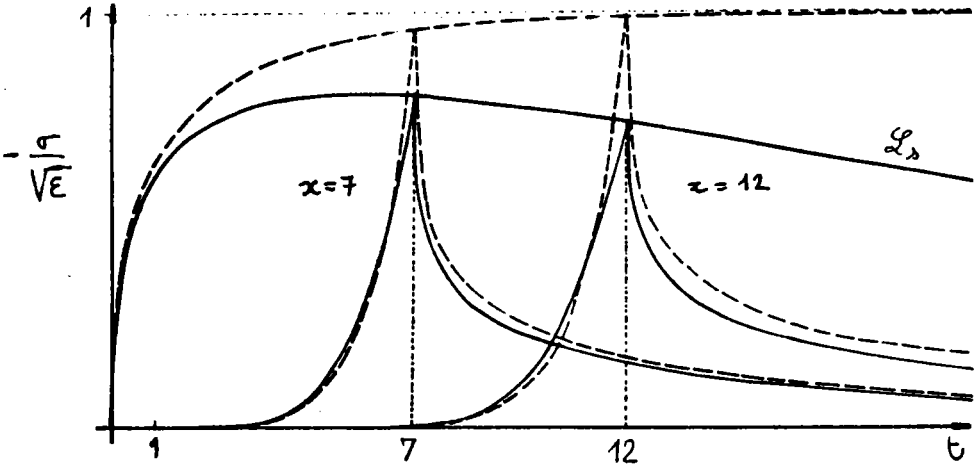
$$(44) \quad t_r = x_r = \frac{4}{\epsilon}$$

qui caractérise la rapidité avec laquelle se déroule le processus d'atténuation. Avec (2.1.26) revenons aux grandeurs physiques, en tenant compte du fait que $T = T_c$:

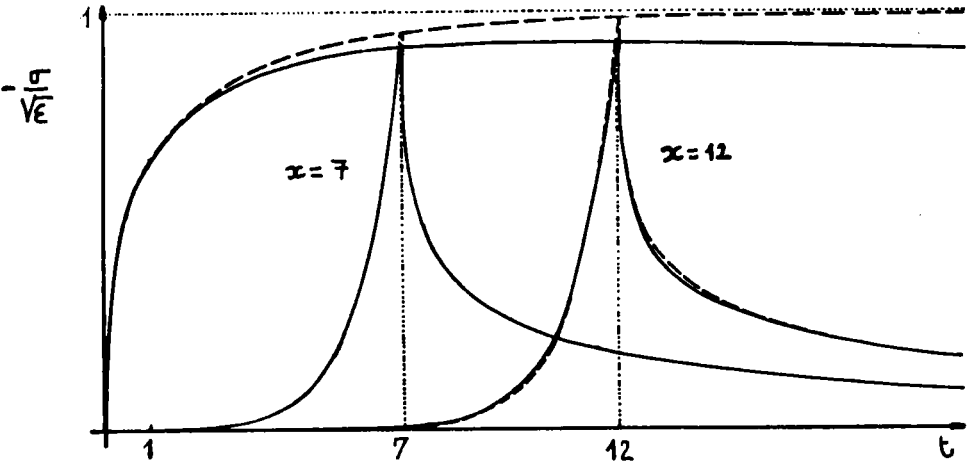
$$(45) \quad T_r = \frac{x_r}{\Omega} = \frac{4}{\epsilon} T_c.$$

Pour le cuivre par exemple on a :

$$T_r = 1,4 \times 10^{-9} \text{ sec}, \quad x_r = 6 \times 10^{-6} \text{ m.}$$



Plomb $\epsilon = 0,0733$



Cuivre $\epsilon = 0,0168$

FIG. 2 : Contrainte en fonction de t à x fixé
—— théorie couplée, ---- théorie découplée

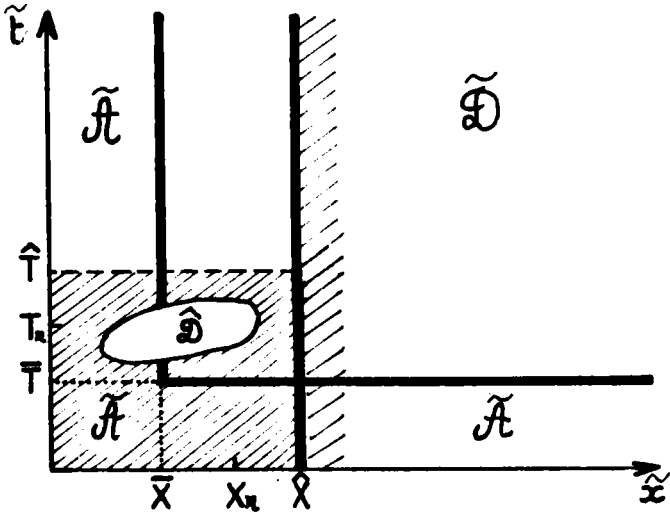


FIG. 3 : Différents domaines utilisés dans la description de l'onde

Les effets dynamiques sont donc très vite dissipés par la conduction thermique. Cela justifie que beaucoup de problèmes, où la sollicitation au bord est de nature thermique, soient considérés comme quasi statiques.

Précisons maintenant le domaine de validité de la solution approchée σ_a . Les expressions (41) et (42) contiennent des polynômes en x et t , et ces termes séculaires limitent a priori le domaine de validité de σ_a aux petites valeurs de x et t . Cependant on peut remarquer qu'à t fixé le comportement de la contrainte est correctement restitué lorsque x tend vers l'infini. En effet on a par construction (conditions de régularité) :

$$(46) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_a = 0$$

De plus on montre en annexe 3.A.2 que la solution approchée décrit la relaxation de la contrainte en un point donné ; c'est à dire qu'à x fixé :

$$(47) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_a = 0$$

Par contre le comportement de $\sigma_a(x, t = x)$ est inacceptable dès que $x \geq x_r$ (voir la valeur de $\sigma_a(x, x)$ calculée précédemment).

Ces considérations permettent d'estimer qu'il existe des quantités réduites $\bar{x}$ et $\bar{t}$ (en variables physiques $\bar{X}$ et $\bar{T}$) vérifiant :

$$\begin{aligned} \bar{x} &\leq x_r, & \bar{t} &\leq t_r \\ \bar{X} &\leq X_r, & \bar{T} &\leq T_r \end{aligned}$$

et telles que les domaines $\mathcal{A}$, en variables réduites, et $\tilde{\mathcal{A}}$ en variables physiques, (fig. 3) :

$$(48) \quad \begin{aligned} \mathcal{A} &= \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq \bar{x} \text{ ou } 0 \leq t \leq \bar{t}\} \\ \tilde{\mathcal{A}} &= \{(\tilde{x}, \tilde{t}) \mid 0 \leq \tilde{x} \leq \bar{X} \text{ ou } 0 \leq \tilde{t} \leq \bar{T}\} \end{aligned}$$

définissent grossièrement des domaines de validité pour la solution approchée σ_a .

e) Conclusion

La méthode de l'échelle variable montre qu'au premier ordre la contrainte est nulle dans un domaine $\tilde{\mathcal{D}}$ du type (2.3.66)', (figure 3) :

$$49) \quad \tilde{\mathcal{D}} = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{t}) \mid \tilde{x} \geq \hat{X} \right\},$$

où la borne $\hat{X}$ vérifie la condition (2.3.64) :

$$50) \quad \hat{X} \gg \bar{\Omega} \bar{T}_c.$$

La méthode de perturbation directe par rapport à la constante ε nous a fourni une solution approchée σ_a , (43), valable dans $\tilde{\mathcal{A}}$. La comparaison avec une simulation numérique sur ordinateur montre que σ_a est une bonne approche de la solution exacte sur $\tilde{\mathcal{A}}$ limité par les bornes $\bar{X} = \frac{X_r}{2}$ et $\bar{T} = \frac{T_r}{2}$.

En poussant plus loin le développement en ε , on peut décrire le domaine compris entre $\tilde{\mathcal{A}}$ et $\tilde{\mathcal{D}}$ (figure 3).

Le problème est quasistatique en dehors du domaine :

$$\hat{\mathcal{D}} = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{t}) \mid 0 \leq \tilde{x} \leq \hat{X} \text{ et } 0 \leq \tilde{t} \leq \hat{T} \right\}$$

C'est dans ce domaine qu'apparaît puis que s'évanouit la contrainte thermique

On peut remarquer à postériori qu'il existe pour l'onde différée un domaine de validité $\mathcal{D}_1$ plus grand que $\tilde{\mathcal{D}}$:

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{t}) \mid \tilde{x} \geq \hat{X} \text{ ou } \tilde{t} \geq \hat{T} \right\}$$

Cela est dû à la nature particulière du problème étudié : donnée à la limite constante pour $\tilde{t} \geq 0$.

Nous n'avons pas tenu compte dans cette étude de tous les facteurs susceptibles de jouer sur la contrainte thermique. En particulier une sollicitation en forme de rampe au lieu d'échelon a pour effet de diminuer considérablement la contrainte thermique [8]. Un autre facteur susceptible d'intervenir dans le domaine $\hat{\mathcal{D}}$ est le fait qu'en réalité la chaleur se propage à vitesse fini (théorie du second son).

3.2 DEPOT D'ENERGIE EN VOLUME

Précédemment l'apport d'énergie thermique était de type surfacique. Nous allons considérer maintenant un dépôt de type volumique. Nous supposons que le flux d'énergie pénètre à l'intérieur du corps et se dépose dans un voisinage de la surface périphérique appelé couche d'absorption. Le dépôt de type surfacique peut s'obtenir alors comme cas limite en faisant tendre l'épaisseur de la couche d'absorption vers zéro.

L'étude de l'impact d'un flux d'énergie sur un corps thermoélastique a été abordé par Zaker [9] pour un corps limité par deux plans parallèles (un mur). Il se limite au cas où la couche d'absorption a une épaisseur suffisamment grande, et il ne décrit pas la phase initiale où l'onde prend naissance, ni la phase finale où les contraintes s'amortissent.

D'un point de vue mathématique, les équations que nous allons étudier diffèrent de celles du paragraphe précédent. En effet le dépôt d'énergie en volume fait apparaître un terme source dans l'équation de l'énergie, et cela a pour effet de rendre non homogène le système fondamental d'équations.

D'un point de vue qualitatif il y a aussi une différence. On a montré en 3.1 que le problème est quasistatique en dehors d'un très petit voisinage de l'origine. Dans le cas présent, le processus d'atténuation n'est pas toujours aussi rapide, car l'onde de contrainte met d'autant plus de temps à s'amortir que l'épaisseur de la couche d'absorption est grande.

Nous étudions l'onde pour les faibles valeurs de l'abscisse ou du temps à l'aide d'une méthode de perturbation directe relativement à la constante de couplage thermomécanique ϵ . Cette méthode est suffisante pour rendre compte de l'atténuation de la contrainte dans le cas où la couche d'absorption est de faible épaisseur.

Dans le cas contraire, cette méthode de perturbation directe ne suffit pas. Elle décrit certes les premières phases de l'évolution de l'onde, mais c'est avec la méthode de l'échelle variable (*) que nous décrivons l'onde différée et l'érosion du pic de contrainte due à la dissipation par conduction. On montre que les deux solutions approchées obtenues à l'aide de ces méthodes - l'une valable pour les abscisses et les temps petits, l'autre pour les grandes valeurs de l'abscisse et du temps - se raccordent, et couvrent ainsi toute l'évolution de l'onde. En outre, grâce à ce raccordement, on peut définir avec précision les domaines de validité de chacune des solutions.

(*) C'est un exemple d'application de la M.E.V. à la résolution de systèmes non homogènes.

a) Position du problème

Le corps, initialement au repos, est brusquement soumis à son extrémité à un flux d'énergie de débit constant. On suppose que la loi d'absorption de l'énergie par le matériau est de type exponentiel (*); d'où, en désignant par $\tilde{P}$ l'énergie thermique déposée par unité de masse et de temps :

$$(1) \quad \tilde{P}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{\chi_c}{\chi_p} P_0 e^{-\frac{\tilde{x}}{\chi_p}} H(\tilde{t})$$

où χ_p est par définition la longueur de pénétration du flux dans le corps, et H la fonction échelon unité de Heaviside.

Les conditions à la limite sont les suivantes :

- le bord est libre de contrainte (condition de type mécanique)
- la température de la paroi est constante (condition de type thermique).

Nous examinerons également plus loin le cas d'une paroi qui n'autorise aucun transfert de chaleur par conduction (nullité du flux).

Le terme $\tilde{P}$ qui représente le dépôt d'énergie en volume s'introduit dans l'équation de l'énergie, de sorte qu'en théorie linéarisée, on a, au lieu de 2.1.24 :

$$(2) \quad \rho_0 \tilde{\theta}_0 \frac{\partial \tilde{S}^{(l)}}{\partial \tilde{t}} = - \frac{\partial q^{(l)}}{\partial \tilde{x}} + \rho_0 \tilde{P}$$

Les équations fondamentales du problème s'écrivent (comparer avec 2.1.25) :

$$(3) \quad \frac{\partial^2 e^{(l)}}{\partial \tilde{t}^2} - \Omega^2 \frac{\partial^2 e^{(l)}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\beta}{\rho_0} \frac{\partial^2 \theta^{(l)}}{\partial \tilde{x}^2} = 0$$

$$\rho_0 C \frac{\partial \theta^{(l)}}{\partial \tilde{t}} - k \frac{\partial^2 \theta^{(l)}}{\partial \tilde{x}^2} + \beta \tilde{\theta}_0 \frac{\partial e^{(l)}}{\partial \tilde{t}} = \frac{\rho_0}{\eta} \tilde{P},$$

où $e^{(l)}$ est la déformation unitaire, et η un petit paramètre de linéarisation. Compte tenu du repos initial, les dérivées par rapport au temps peuvent être prises au sens des distributions.

Dans la suite, sauf mention du contraire, nous supposons la paroi isotherme, de sorte que les conditions à la limite s'écrivent :

(*) C'est le cas pour de nombreux rayonnements.

$$(4) \quad \begin{aligned} \sigma^{(l)}(\tilde{x} = 0, \tilde{t}) &= 0 \\ \theta^{(u)}(\tilde{x} = 0, \tilde{t}) &= 0 \end{aligned}$$

b) Etude de l'onde aux petites valeurs de l'abscisse ou du temps.

On normalise le système (3) avec les changements de variables et de fonctions (2.1.26-27), et l'on pose :

$$(5) \quad \eta = \frac{P_0 \beta T_1}{(\lambda + 2\mu) C}.$$

La durée T_1 , sur laquelle on se propose de décrire le phénomène, est telle que η soit un petit paramètre.

Si l'on pose :

$$(6) \quad \tilde{P} = P_0 P,$$

il vient :

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial \tilde{t}} - \frac{T_c}{T} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \sqrt{\epsilon} \frac{e}{\partial \tilde{t}} &= \frac{\alpha}{\sqrt{\epsilon}} P \\ \frac{\partial^2 e}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \sqrt{\epsilon} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} &= 0, \end{aligned}$$

avec :

$$(8) \quad \alpha = \frac{T}{T_1}.$$

N.B. : Sans restreindre la généralité, on posera dans la suite $\alpha = 1$, quitte à multiplier le résultat final par α .

On rappelle l'équation (2.1.32) qui donne la contrainte :

$$(9) \quad \sigma = e - \sqrt{\epsilon} \tau$$

En posant :

$$(10) \quad T = T_c,$$

le système (7) s'écrit :

$$(11) \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \sqrt{\epsilon} \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} e^{-\gamma x} H(t)$$

$$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \sqrt{\epsilon} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = 0,$$

avec :

$$(12) \quad \gamma = \frac{\chi_c}{\chi_p}.$$

Les équations (11) jointes aux conditions à la limite, en $x = 0$:

$$(13) \quad \tau = 0 \quad ; \quad \sigma = 0$$

ainsi qu'aux conditions initiales et de régularité peuvent être résolues de façon approchée en employant une méthode de perturbation directe relativement au petit paramètre ϵ . On pose, en se limitant au second ordre :

$$(14) \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} (\tau_0 + \epsilon \tau_1 + \dots)$$

$$e = e_0 + \epsilon e_1 + \dots,$$

et on calcule les termes de ces développements par substitution dans (11) et (13). La contrainte σ s'obtient ensuite avec (9) :

$$(15) \quad \sigma = \sigma_0 + \epsilon \sigma_1 + \dots = (e_0 - \tau_0) + \epsilon(e_1 - \tau_1) + \dots$$

On se propose de calculer explicitement σ_0 et σ_1 . Seuls les calculs relatifs au premier ordre sont exposés ici, ceux qui concernent l'ordre suivant, bien plus longs, sont rejetés en annexe 3.A.3. Remarquons que l'algorithme de calcul élaboré au chapitre II ne peut être employé ici, car le problème est non homogène.

La substitution de (14) dans (11) et (13) donne au premier ordre :

$$(16) \quad \frac{\partial \tau_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial x^2} = e^{-\gamma x} H(t)$$

$$\frac{\partial^2 e_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 e_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial x^2} = 0$$

$$(17) \quad \tau_0|_{x=0} = 0 \quad e_0|_{x=0} = 0$$

La transformation de Laplace par rapport à la variable t appliquée au système (16) donne, compte tenu du fait que les dérivées par rapport au temps sont prises au sens des distributions (i.e. Compte tenu des conditions initiales) :

$$(18) \quad \begin{aligned} s \mathcal{L} \tau_0 - \frac{\partial^2 \mathcal{L} \tau_0}{\partial x^2} &= \frac{1}{s} e^{-\gamma x} \\ s^2 \mathcal{L} e_0 - \frac{\partial^2 \mathcal{L} e_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{L} \tau_0}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que la solution de (18)₁ vérifiant la condition de régularité à l'infini ainsi que la condition à la limite :

$$\mathcal{L} \tau_0 (x = 0, s) = 0,$$

est donnée par :

$$\mathcal{L} \tau_0 = \frac{1}{s (s - \gamma^2)} (e^{-\gamma x} - e^{-s^{1/2} x}).$$

On substitue cette expression dans (18)₂ pour calculer $\mathcal{L} e_0$; d'où finalement, après réduction des équations rationnelles en s sous forme canonique (*) :

$$(19) \quad \begin{aligned} \mathcal{L} \sigma_0 (x, s) &= \left(\frac{1}{2\gamma(1-\gamma)(s-\gamma)} - \frac{1}{2\gamma(1+\gamma)(s+\gamma)} - \frac{1}{(1-\gamma^2)(s-1)} \right) e^{-xs} \\ &+ \frac{1}{1-\gamma^2} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-\gamma^2} \right) e^{-xs^{1/2}} + \left(\frac{1}{(1-\gamma^2)(s-\gamma^2)} + \frac{1}{2\gamma(\gamma-1)(s-\gamma)} + \frac{1}{2\gamma(\gamma+1)(s+\gamma)} \right) e^{-\gamma x} \end{aligned}$$

(*) On suppose pour justifier les calculs que $\gamma \neq 1$. La solution relative à $\gamma = 1$ s'obtient en faisant tendre γ vers 1 dans (19)-(20).

On calcule l'originale de cette expression par des formules classiques,
cf [10]

$$\begin{aligned}
 0) \quad \sigma_0(x, t) = & \left(\frac{1}{2\gamma(1-\gamma)} e^{\gamma(t-x)} - \frac{1}{2\gamma(1+\gamma)} e^{-\gamma(t-x)} - \frac{1}{1-\gamma^2} e^{t-x} \right) H(t-x) \\
 & + \frac{1}{1-\gamma^2} \left(\frac{1}{2} e^{t-x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t} \right) + \frac{1}{2} e^{t+x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) \right. \\
 & - \frac{1}{2} e^{\gamma^2 t - \gamma x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} - \gamma \sqrt{t} \right) - \frac{1}{2} e^{\gamma^2 t + \gamma x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \gamma \sqrt{t} \right) \\
 & \left. + \left(\frac{1}{1-\gamma^2} e^{\gamma^2 t} - \frac{1}{2\gamma(1-\gamma)} e^{\gamma t} + \frac{1}{2\gamma(1+\gamma)} e^{-\gamma t} \right) e^{-\gamma x} \right)
 \end{aligned}$$

Pour σ_1 , des calculs laborieux conduisent au résultat (annexe 3.A.3)

$$1) \quad \sigma_1(x, t) = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3,$$

avec :

$$\begin{aligned}
 2) \quad \beta_1 = & \frac{1}{2} A(x, t) e^{t-x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t} \right) + \frac{1}{2} A(-x, t) e^{t+x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) \\
 & + \frac{1}{2} B(t) e^{\gamma^2 t - \gamma x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} - \gamma \sqrt{t} \right) \\
 & + \frac{1}{2} B(t) e^{\gamma^2 t + \gamma x} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \gamma \sqrt{t} \right) + \frac{x}{1-\gamma^2} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 23) \quad A(x, t) = & \left(-\frac{2(1+\gamma^2)}{(1-\gamma^2)^3} - \frac{(3+\gamma^2)}{2(1-\gamma^2)^2} x + \frac{(2+\gamma^2)}{(1-\gamma^2)^2} t + \frac{3}{2(1-\gamma^2)} tx \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2(1-\gamma^2)} x^2 - \frac{1}{1-\gamma^2} t^2 \right),
 \end{aligned}$$

$$(24) \quad B(t) = \frac{2(1+\gamma^2)}{(1-\gamma^2)^3} + \frac{t\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2},$$

$$(25) \quad \begin{aligned} \beta_2 = & \left(\frac{2(1+\gamma^2)}{(1-\gamma^2)^3} - \frac{2+\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2} t + \frac{3+\gamma^2}{2(1-\gamma^2)^2} x + \frac{1}{1-\gamma^2} t^2 \right. \\ & - \frac{3}{2(1-\gamma^2)} tx + \frac{1}{2(1-\gamma^2)} x^2 \Big) H(t-x) e^{t-x} \\ & + \left(-\frac{1+\gamma}{4\gamma(1-\gamma)^3} + \frac{1}{4(1-\gamma)^2} t \right) H(t-x) e^{-(t-x)} \\ & + \left(\frac{1-\gamma}{4\gamma(1+\gamma)^3} + \frac{1}{4(1+\gamma)^2} t \right) H(t-x) e^{-\gamma(t-x)}, \end{aligned}$$

$$(26) \quad \begin{aligned} \beta_3 = & - \left(\frac{2(1+\gamma^2)}{(1-\gamma^2)^3} + \frac{\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2} t \right) e^{\gamma^2 t - \gamma x} \\ & + \left(\frac{1+\gamma}{4\gamma(1-\gamma)^3} - \frac{1}{4(1-\gamma)^2} t \right) e^{\gamma(t-x)} \\ & - \left(\frac{1-\gamma}{4\gamma(1+\gamma)^3} + \frac{1}{4(1+\gamma)^2} t \right) e^{-\gamma(t+x)}. \end{aligned}$$

Essayons maintenant de définir grossièrement un domaine de validité de la solution approchée

$$(27) \quad \sigma_c = \sigma_0 + \varepsilon \sigma_1 + \dots$$

Remarquons d'abord qu'à x fixé (voir la démonstration en annexe 3.1.4)

$$(28) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_c = 0,$$

autrement dit, la solution approchée décrit la relaxation de la contrainte en un point donné. De même le comportement de σ_c à t fixé est correct quand x tend

vers l'infini. En effet, on a par construction (conditions de régularité) :

$$29) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_c = 0$$

Etudions maintenant le comportement asymptotique de σ_c sur la droite $x = t$, quand t tend vers l'infini. Pour les grandes valeurs du temps on a :

$$30) \quad \gamma \sigma_c|_{x=t} \approx - \frac{1}{2(1+\gamma)^{1+\epsilon}} (a + b t)$$

où a et b sont définis par

$$31) \quad a = \frac{1 - \gamma}{4(1 + \gamma)^3}$$

$$32) \quad b = \frac{\gamma}{4(1 + \gamma)^2}$$

La solution approchée σ_c n'est plus représentative de la réalité dès lors que le terme correctif $(a + bt)$ cesse d'être petit par rapport au terme principal $-\frac{1}{2(1+\gamma)}$, c'est à dire lorsque t devient suffisamment grand.

Ainsi la solution approchée σ_c ne permet-elle de décrire l'évolution de l'onde de contrainte que dans les premières phases de son évolution.

Lorsque nous passerons à l'étude des résultats quantitatifs, nous verrons que, pour les grandes valeurs de γ , l'essentiel du processus d'atténuation de la contrainte se produit aux faibles temps et peut donc être décrit par σ_c , au besoin en poursuivant le développement par rapport à ϵ .

Lorsque la longueur de pénétration X_p est grande relativement à X_c ($\gamma \ll 1$), l'onde de la contrainte met bien plus de temps à s'amortir, et pour décrire cet amortissement avec un développement en puissance de ϵ , il faudrait faite appel à un nombre élevé de termes, ce qui ôterait tout intérêt à la méthode.

La M.E.V. donne dans le cas où $X_p \gg X_c$ une représentation simple de l'onde aux grande valeurs du temps.

c) Etude de l'onde pour les grandes valeurs de l'abscisse et du temps (Dans le cas où $X_p \gg \bar{X}_c$)

On normalise cette fois les équations à l'aide des changements de variables (2.3.41) et en prenant pour petit paramètre :

$$(35) \quad \bar{\eta} = \frac{P_0 \beta T_1}{(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})c}$$

La constante de couplage isentropique $\bar{\epsilon}$, les temps et longueur caractéristiques $\bar{T}_c$ et $\bar{X}_c$, la célérité isentropique du son $\bar{\Omega}$, sont définis en (2.3.40) et (2.3.42).

Ces changements de variables conduisent, si l'on utilise la relation $\Omega^2 = (1 - \bar{\epsilon}) \bar{\Omega}^2$ à exprimer le système (3) sous la forme réduite :

$$(36) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - (1 - \bar{\epsilon}) \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \sqrt{\bar{\epsilon}} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\bar{T}_c}{T} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \sqrt{\bar{\epsilon}} \frac{\partial e}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{\epsilon}}} \frac{T}{T_1} P, \end{aligned}$$

avec :

$$(37) \quad P(x, t) = e^{-\frac{x}{X_p}} H(t) \quad (X = \bar{\Omega} T).$$

On rappelle que les dérivées sont prises au sens des distributions. On notera également les relations (2.3.46-47) :

$$(38) \quad \sigma = (1 - \bar{\epsilon}) e - \sqrt{\bar{\epsilon}} \tau$$

$$(39) \quad S = \tau + \sqrt{\bar{\epsilon}} e$$

Il est plus aisé d'aboutir aux résultats si l'on transforme le système fondamental (36) en un système où apparaissent les fonctions inconnues (σ, τ) :

$$(40) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \sqrt{\bar{\epsilon}} \frac{\bar{T}_c}{T} \frac{\partial^3 \tau}{\partial t \partial x^2} &= -\alpha \frac{\partial P}{\partial t} \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\bar{T}_c}{T} (1 - \bar{\epsilon}) \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + \sqrt{\bar{\epsilon}} \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= \frac{\alpha}{\sqrt{\bar{\epsilon}}} (1 - \bar{\epsilon}) P. \end{aligned}$$

On a posé :

$$(41) \quad \alpha = \frac{T}{T_1}$$

L'équation $(40)_2$ s'obtient en éliminant e entre $(36)_2$ et (38) . Pour obtenir $(40)_1$ on élimine e entre $(36)_1$ et (38) , puis à l'équation ainsi obtenue on retranche l'expression $\sqrt{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} (40)_2$

N.B. : Par commodité nous conviendrons de poser dans la suite $\alpha = 1$, quitte à multiplier ensuite les résultats obtenus par α .

Nous travaillons dans ce paragraphe avec le petit paramètre :

$$(42) \quad \varepsilon_2 = \frac{\bar{T}_c}{T}.$$

Compte tenu de l'hypothèse :

$$(43) \quad \chi_p \gg \bar{\chi}_c \quad (\bar{\chi}_c = \bar{\Omega} \bar{T}_c),$$

on peut, tout en gardant à ε_2 son caractère de petit paramètre, donner aux échelles de temps T et de longueur X les valeurs :

$$(44) \quad X = \bar{\Omega} T = \chi_p.$$

Le dépôt d'énergie en volume prend alors la forme :

$$(45) \quad P(x, t) = H(t) e^{-x}.$$

En résumé, on se propose de calculer la solution différée des équations (40) qui vérifie les conditions à la limite :

$$(46) \quad \sigma|_{x=0} = 0, \quad \tau|_{x=0} = 0$$

Comme dans le paragraphe 2.3, la méthode consiste à superposer deux ondes, l'une dite quasi-élastique (Q.E.), l'autre quasi-thermique (Q.T.).

L'onde quasiélastique (Q.E.)

Elle est définie par des développements de la forme :

$$(47) \quad \sigma = \sum_{i \geq 0} \varepsilon_2^i \sigma_i(x, t_0, t_1, \dots)$$

$$(48) \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{i \geq 0} \varepsilon_2^i \tau_i(x, t_0, t_1, \dots)$$

où l'on a introduit les échelles multiples de temps :

$$(49) \quad t_i = \varepsilon_2^i t \quad (i \geq 0)$$

Des échelles multiples d'espace ferait tout aussi bien l'affaire car, la partie principale de l'onde se propage le long de la droite $x = t$ au voisinage de laquelle t et x "jouent des rôles équivalents".

La substitution de ces développements dans le système (40), puis l'identification des deux premières puissances de ε_2 , conduisent aux équations :

$$(50) \quad \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial t_0^2} - \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x^2} = - \frac{\partial P}{\partial t_0}$$

$$\frac{\partial \tau_0}{\partial t_0} + \bar{\varepsilon} \frac{\partial \sigma_0}{\partial t_0} = (1 - \bar{\varepsilon}) P$$

$$(51) \quad \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial t_0^2} - \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x^2} = - 2 \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial t_0 \partial t_1} - \frac{\partial^3 \tau_0}{\partial t_0 \partial x^2}$$

$$\bar{\varepsilon} \frac{\partial \sigma_1}{\partial t_0} + \frac{\partial \tau_1}{\partial t_0} = - \bar{\varepsilon} \frac{\partial \sigma_0}{\partial t_1} - \frac{\partial \tau_0}{\partial t_1} + (1 - \bar{\varepsilon}) \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial x^2}$$

De même la substitution dans les conditions à la limite (46) donne au premier ordre :

$$(52) \quad \sigma_0 (x = 0, t_0, t_1, \dots) = 0$$

$$(53) \quad \tau_0 (x = 0, t_0, t_1, \dots) = 0$$

Réolvons $(50)_1$ sous les conditions :

$$(54) \quad \sigma_0 (x = 0, t_0) = 0$$

$$(55) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_0 (x, t_0) = 0$$

L'utilisation de la transformation de Laplace par rapport à la variable t_0 , et le fait que les dérivées dans (50) sont prises au sens des distributions, conduisent à :

$$(56) \quad s^2 \mathcal{L} \sigma_0 - \frac{\partial^2 (\mathcal{L} \sigma_0)}{\partial x^2} = - e^{-x}$$

La solution de cette équation vérifiant (54) et (55) :

$$\mathcal{L}_{\sigma_0}(x, s) = \frac{1}{s^2 - 1} e^{-sx} - \frac{1}{s^2 - 1} e^{-x}$$

donne par retour à l'originale :

$$(57) \quad \sigma_0(x, t_0) = \frac{1}{2} (e^{t_0 - x} - e^{-(t_0 - x)}) H(t_0 - x) - \frac{1}{2} e^{t_0 - x} + \frac{1}{2} e^{-t_0 - x}$$

Le tracé à t_0 fixé de la courbe

$$x \rightarrow \sigma_0(x, t_0)$$

révèle l'existence d'un pic de contrainte dont le sommet se situe en $x = t_0$. Celui-ci se déplace donc avec une vitesse normalisée de valeur unité ; c'est à dire, en grandeur physique, à la célérité isentropique du son.

La solution approchée (57) rend bien compte de la relaxation de la contrainte en un point donné :

$$(58) \quad \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \sigma_0(x, t_0) = 0$$

Par contre elle ne décrit pas l'atténuation du pic due à la dissipation par conduction. En effet la valeur au sommet

$$(59) \quad \sigma_0(x = t_0, t_0) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t_0}$$

tend vers $-\frac{1}{2}$ quand $t_0 \rightarrow \infty$.

D'ailleurs pour t_0 suffisamment grand, l'équation du pic est :

$$(60) \quad \sigma_0(x, t_0) = -\frac{1}{2} e^{-|t_0 - x|}$$

Le pic se déplace alors sans se déformer, et en particulier il reste symétrique par rapport à une droite verticale passant par le sommet (fig.4).

Calculons la température τ_0 en intégrant la formule (50)₂ par rapport à t_0 . La solution

$$(61) \quad \tau_0(t_0, x) = -\bar{\varepsilon} \sigma_0 + (1 - \bar{\varepsilon}) t_0 e^{-x}$$

vérifie la condition de repos initial, mais pas la condition à la limite (53).

Il est donc impossible pour l'onde Q.E. de satisfaire simultanément les conditions à la limite (46)₁ et (46)₂. D'où la nécessité d'introduire plus loin

l'onde Q.T. pour obtenir une solution rigoureuse du problème. On montrera cependant que l'onde Q.E. est suffisante pour calculer la contrainte au premier ordre.

Voyons maintenant de quelle façon l'on peut décrire l'atténuation du pic de contrainte grâce au temps lent t_1 . Substituons (61) dans (51)₁ :

$$(62) \quad \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial t_0^2} - \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial t_0 \partial t_1} + \bar{\epsilon} \frac{\partial^3 \sigma_0}{\partial t_0 \partial x^2} - (1 - \bar{\epsilon}) e^{-x}$$

Imaginons un instant que σ_0 ne dépende pas de t_1 . La résolution de (62), dont le second membre se réduit alors à deux termes, met en évidence l'apparition d'un terme séculaire engendré par $\frac{\partial^3 \sigma_0}{\partial t_0 \partial x^2}$ (voir annexe 3.A.5).

L'introduction de la variable lente t_1 permet d'éviter l'apparition de ce terme séculaire ; il suffit de poser :

$$(63) \quad \frac{\partial \sigma_0}{\partial t_1} - \frac{\bar{\epsilon}}{2} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x^2} = 0$$

Cette équation de la chaleur, mettant en jeu le temps lent t_1 et la variable d'espace x , fait apparaître la diffusion du pic que nous avons mentionné précédemment, et par conséquent son atténuation.

Raisonnons dans l'espace (x, t_0, t_1) cf. fig. (5). L'équation (63) se résout à t_0 fixé, c'est-à-dire dans le quart de plan $A \times t_1$ orthogonal en t_0 à l'axe $0 t_0$. Les conditions aux limites sont les suivantes :

- Sur le demi axe $A x$, σ_0 est donné par la formule (57) :

$$(64) \quad \sigma_0(x, t_0, t_1 = 0) = \frac{1}{2} (e^{t_0-x} - e^{-(t_0-x)}) H(t_0-x) - \frac{1}{2} e^{t_0-x} + \frac{1}{2} e^{-t_0-x}$$

- Sur le demi axe $A t_1$, on doit avoir, d'après (52) :

$$(65) \quad \sigma_0(x = 0, t_0, t_1) = 0$$

Le problème ainsi posé est un problème à valeur initiale pour l'équation de la chaleur (63), exactement l'analogie de celui où l'on se donnerait une distribution de température initiale dans un massif semi infini, dont le bord serait maintenu à la température nulle.

Avant d'écrire la solution explicite, il est facile maintenant de se représenter visuellement, comme nous l'avons fait au chapitre I la façon dont les variables multiples t_0, t_1 permettent de décrire l'évolution de l'onde : imaginons à t_0 fixé le pic de contrainte non atténué sur $A x$ (cf. fig. 5), puis la diffusion de ce pic lorsqu'on s'éloigne

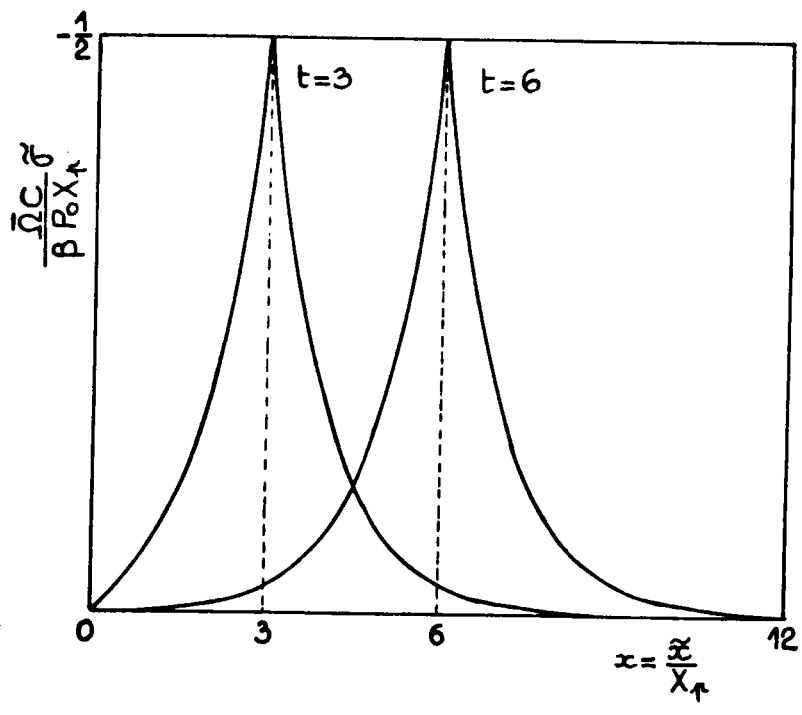


FIG. 4 : L'aspect du pic de contrainte devient symétrique pour $t \geq t_s = 6$

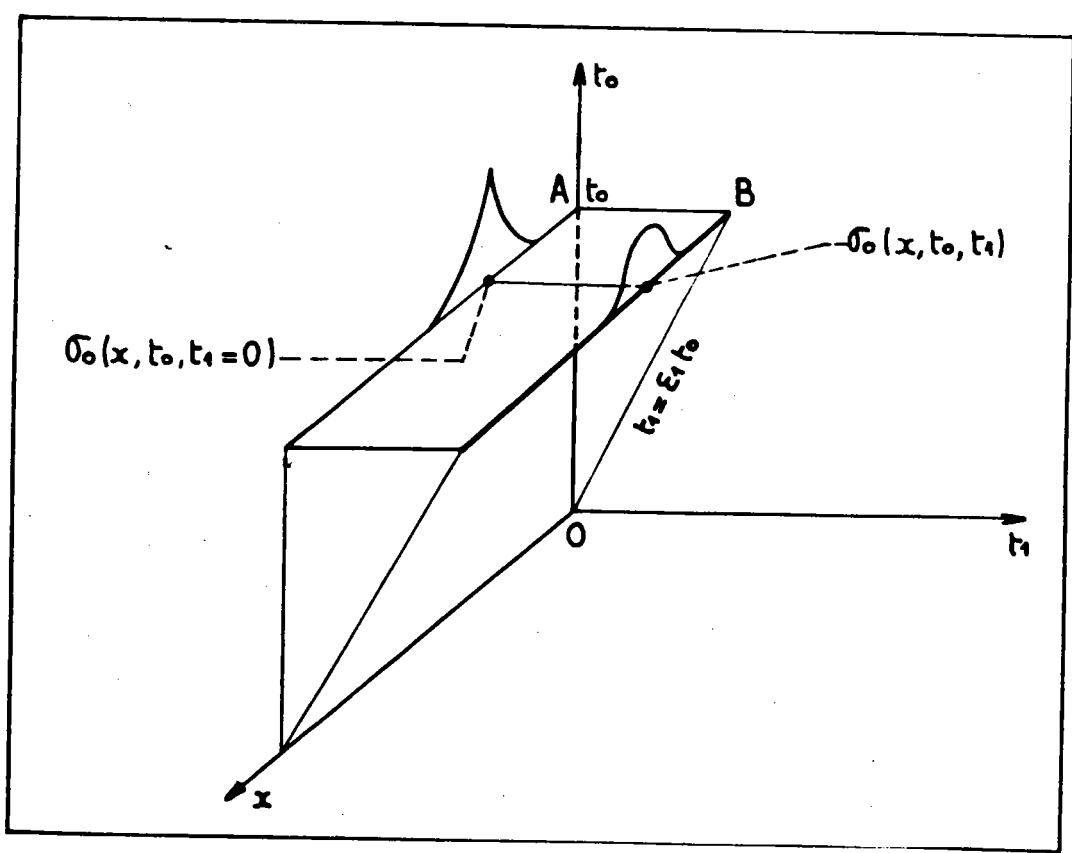


FIG. 5 : Visualisation de la méthode des échelles multiples

avec la variable lente t_1 de l'axe Ax . Le pic représentatif de la réalité physique est celui qui "se trouve" sur Bx . L'atténuation est d'ailleurs assez lente compte tenu du fait que $t_1 = \epsilon_2 t$ et du coefficient $\frac{\bar{\epsilon}}{2}$ dans l'équation de la chaleur (63).

La résolution de (63) sous les conditions (64) et (65) est donnée en annexe 3.A.6, on obtient :

$$\begin{aligned}
 (66) \quad \sigma_0(x, t_0, t_1) = & -\frac{1}{4} e^{-t_0 + x + \frac{\bar{\epsilon} t_1}{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{-t_0 + x + \frac{\bar{\epsilon} t_1}{2}}{\sqrt{2 \bar{\epsilon} t_1}}\right) \\
 & + \frac{1}{4} e^{-t_0 - x + \frac{\bar{\epsilon} t_1}{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{-t_0 - x + \frac{\bar{\epsilon} t_1}{2}}{\sqrt{2 \bar{\epsilon} t_1}}\right) \\
 & - \frac{1}{4} e^{t_0 - x + \frac{\bar{\epsilon} t_1}{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{t_0 - x + \frac{\bar{\epsilon} t_1}{2}}{\sqrt{2 \bar{\epsilon} t_1}}\right) \\
 & + \frac{1}{4} e^{t_0 + x + \frac{\bar{\epsilon} t_1}{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{t_0 + x + \frac{\bar{\epsilon} t_1}{2}}{\sqrt{2 \bar{\epsilon} t_1}}\right)
 \end{aligned}$$

En faisant tendre t_1 vers zéro dans cette expression, on retrouve la formule (57).

L'onde quasi thermique (Q.T.)

Nous avons remarqué que l'onde Q.E. ne vérifie pas la condition à la limite sur la température. D'où la nécessité d'introduire l'onde quasi thermique $(\bar{\sigma}, \bar{\tau})$ qui fournira la solution différée (σ_D, τ_D) du problème par superposition avec l'onde quasi élastique (σ, θ) :

$$(67) \quad (\sigma_D, \tau_D) = (\sigma, \tau) + (\bar{\sigma}, \bar{\tau})$$

Puisqu'il s'agit d'un problème de raccordement aux données à la frontière $x = 0$, il est judicieux de prendre ici des échelles multiples d'espace. Introduisons les variables :

$$(68) \quad \bar{x}_0 = \frac{x}{\sqrt{\epsilon_2}}, \quad \bar{x}_1 = x,$$

et cherchons au premier ordre une solution de (40) de la forme :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \bar{\sigma}_0(t, \bar{x}_0) + \dots \\ \bar{\tau} &= \frac{\bar{\tau}_0}{\sqrt{\varepsilon}}(t, \bar{x}_0, \bar{x}_1) + \dots \end{aligned} \quad (69)$$

En substituant dans (40) et en identifiant les puissances de ε_2 il vient, au premier ordre :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \bar{\sigma}_0}{\partial \bar{x}_0^2} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\tau}_0}{\partial t} - (1 - \bar{\varepsilon}) \frac{\partial^2 \bar{\tau}_0}{\partial \bar{x}_0^2} + \frac{\partial \bar{\sigma}_0}{\partial t} &= (1 - \bar{\varepsilon}) e^{-\bar{x}_1} H(t), \end{aligned} \quad (70)$$

d'où immédiatement :

$$\bar{\sigma}_0 = 0. \quad (71)$$

Avant de passer au calcul de τ_0 montrons qu'il est possible de vérifier les conditions à la limite (46) en superposant les ondes Q.E. et Q.T.. En effet (σ_D, τ_D) doit vérifier au premier ordre ; en $x = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{D0} &= \sigma_0 + \bar{\sigma}_0 = 0 ; \\ \tau_{D0} &= \tau_0 + \bar{\tau}_0 = 0 \end{aligned} \quad (72) \quad (\sqrt{\varepsilon} \tau_D = \tau_{D0} + \dots = \tau_0 + \bar{\tau}_0 + \dots)$$

Compte tenu de (71) la formule (72)₁ se réduit à :

$$\sigma_{0|x=0} = 0. \quad (73)$$

C'est la condition (52) que nous avons utilisée dans le calcul de l'onde Q.E..

L'équation (72)₂ fournit quant à elle la condition à la limite pour résoudre (70)₂, soit compte tenu de (61) :

$$\bar{\tau}_{0|x=0} = - (1 - \bar{\varepsilon}) t \quad (74)$$

d'où la solution, sous forme de transformée de Laplace par rapport à t :

$$(75) \quad \mathcal{L}_{\tau_0} \bar{\tau}(x, s) = -\frac{2(1-\bar{\varepsilon})}{s^2} e^{-\frac{s^{1/2} \bar{x}_0}{\sqrt{1-\bar{\varepsilon}}}} + \frac{(1-\bar{\varepsilon})}{s^2} e^{-\bar{x}_1}$$

dont l'originale est facile à calculer.

Remarque 1 : L'onde Q.T. n'apporte aucune contribution dans le calcul de la contrainte au premier ordre. Donc tous les résultats précédents relatifs à cette contrainte restent valables.

Domaine de validité de l'onde différée (α_D, τ_D)

Nous admettrons qu'il existe pour l'onde différée un domaine de validité dont la forme est grossièrement définie par :

$$(76) \quad \tilde{\mathcal{D}}_D = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{t}) \text{ tel que } \tilde{x} \geq \tilde{l} \text{ et } \tilde{t} \geq \frac{\tilde{l}}{\tilde{\Omega}} \right\},$$

avec :

$$(77) \quad \tilde{l} \gg \bar{x}_c.$$

La borne $\tilde{l}$, dont la valeur sera précisée plus loin, est sujette pour le moment à la condition (77) déduite de façon heuristique de la condition :

$$(78) \quad \varepsilon_2 = \frac{\bar{T}_c}{T} = \frac{\bar{x}_c}{X} \ll 1.$$

Passons maintenant à l'étude des aspects quantitatifs. Nous examinerons d'abord le cas où $X_p \gg \bar{x}_c$.

d) Aspects quantitatifs et discussion des résultats dans le cas d'une grande longueur de pénétration ($X_p \gg \bar{x}_c$)

Pour fixer les idées considérons le cas de l'aluminium :

$$\varepsilon = 3,56 \times 10^{-2}$$

$$\Omega = 6,32 \times 10^3 \text{ m/s}$$

$$T_c = 2,14 \times 10^{-12} \text{ s}, (X_c = \Omega T_c \approx 1,35 \times 10^{-8} \text{ m})$$

et supposons que $\gamma = \frac{\chi_c}{\chi_p} = 10^{-6}$, ce qui correspond à la longueur de pénétration $\chi_p \approx 1,35 \times 10^{-2} \text{ m}$ (*).

Les premières phases de l'évolution de l'onde

On utilise les résultats du paragraphe b). Traçons deux séries de courbes, les unes $\mathcal{E}_d$ en hachuré, les autres $\mathcal{E}_c$ en trait plein, relatives respectivement à la théorie découplée et couplée :

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{E}_d \quad x \rightarrow \gamma \sigma_0 \\ \mathcal{E}_c \quad x \rightarrow \gamma \sigma_c \end{array} \right\} \text{ à } t \text{ fixé ,}$$

avec :

$$(79) \quad \sigma_c = \sigma_0 + \varepsilon \sigma_1.$$

On constate dans les deux cas l'apparition d'un pic de contrainte (fig. 6).

En théorie découplée l'extrémum de $\mathcal{E}_d$ se déplace avec le temps à la vitesse normalisée unitée, c'est à dire à la célérité isotherme du son. De plus cet extrémum tend asymptotiquement et de façon monotone vers la valeur $-\frac{1}{2}$, quand le temps croît vers l'infini.

On a également :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_0(x, t) = 0$$

Par conséquent, si la théorie découplée rend compte de la relaxation de la contrainte avec le temps en un point donné, elle ne décrit pas cependant l'atténuation globale des contraintes, puisque le pic ne s'érode pas.

Les courbes $\mathcal{E}_c$, obtenues à partir de la contrainte approchée σ_c , mettent en évidence un premier effet du couplage total, celui d'augmenter la vitesse du pic de contrainte jusqu'à une valeur dont on montrera plus loin qu'elle est égale à la célérité isentropique du son.

Le bon comportement de σ_c lorsque t ou x tendent vers l'infini (formules (28) et (29) et les considérations qui suivent la formule (30), nous conduisent à penser qu'il pourrait exister des bornes $\bar{t}$ et $\bar{x}$ telles que les

(*) C'est une longueur de pénétration typique d'une micro-onde.

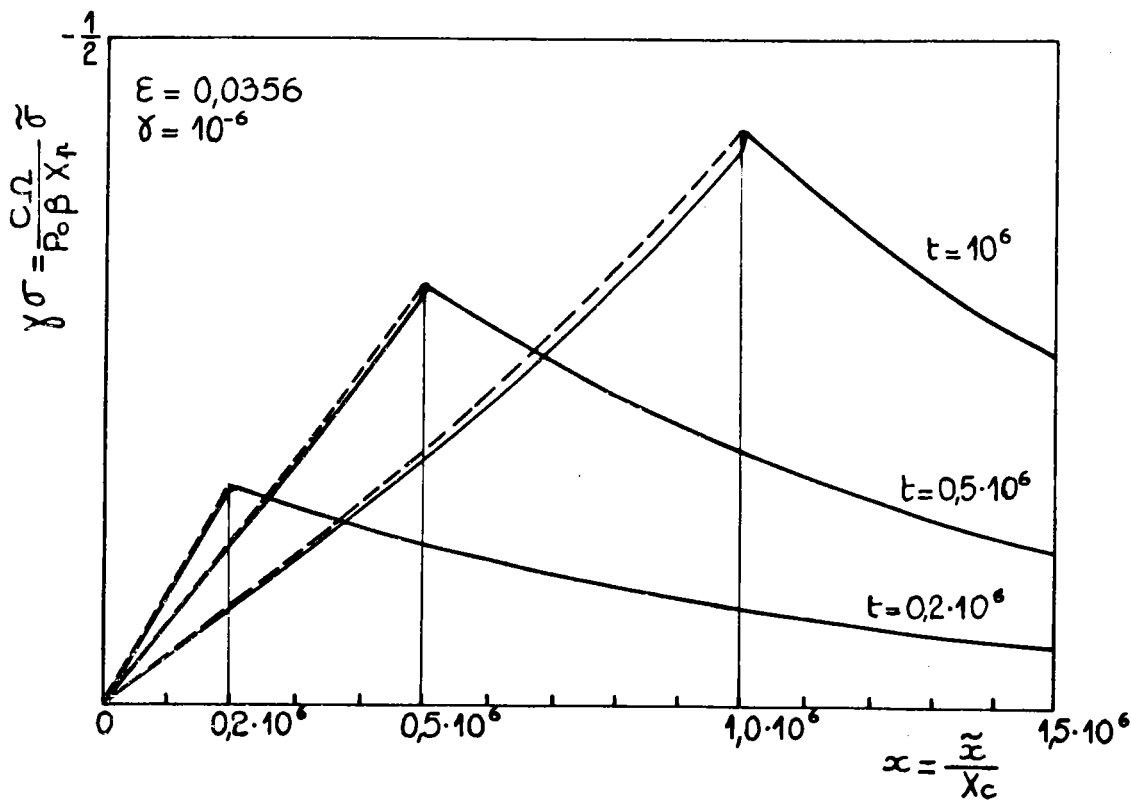


FIG. 6 : Comparaison des théories couplée et découplée.

----- théorie découplée : $\sigma = \sigma_0$
—— $\sigma = \sigma_0 + \varepsilon \sigma_1$

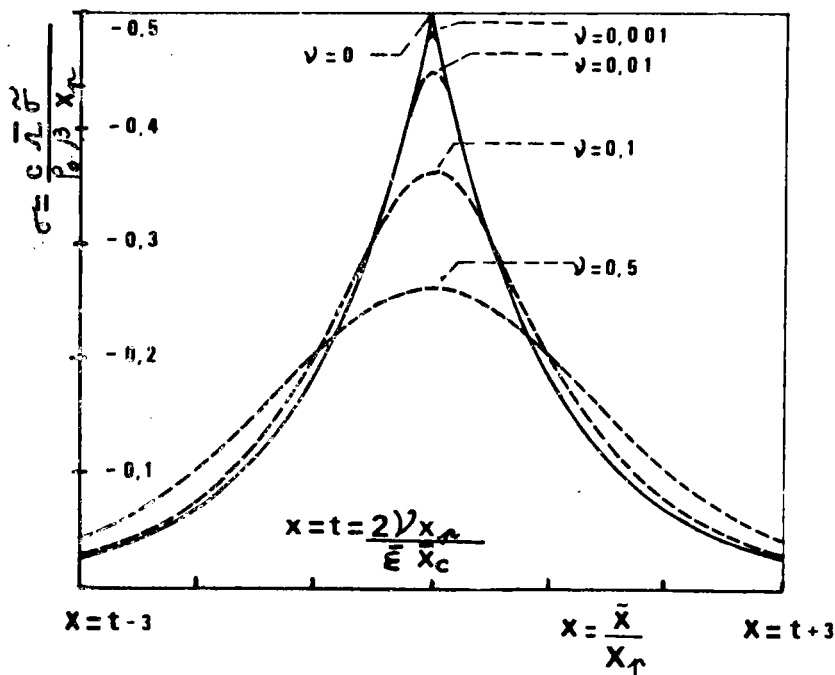


FIG. 7 : Amortissement du pic de contrainte en fonction de $\nu = \frac{\varepsilon \bar{X}_c \bar{\Omega}}{2 X_p^2} \tilde{t}$

domaines :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \left\{ (x, t) \text{ tel que } x \leq 1 \text{ ou } t \leq 1 \right\} \\ 80) \quad \tilde{\mathcal{D}} &= \left\{ (x, t) \text{ tel que } \tilde{x} \leq \tilde{1} \text{ ou } \tilde{t} \leq \frac{\tilde{1}}{\Omega} \right\} \end{aligned}$$

relatifs respectivement aux variables réduites et physiques, définissent grossièrement des domaines de validité pour la solution approchée σ_c .

Pour le cas $\gamma \ll 1$ qui nous préoccupe actuellement, les bornes 1 et $\tilde{1}$ seraient sujettes, compte tenu de (33), aux conditions suivantes :

$$1 \leq 0 \left(\frac{1}{\varepsilon \gamma} \right), \quad \tilde{1} \leq 0 \left(-\frac{X_p}{\varepsilon} \right)$$

Insistons bien sur le fait que l'existence d'un domaine de la forme (80) ne constitue qu'une hypothèse de travail. Cette hypothèse semble plausible lorsque $\gamma \ll 1$, car l'aspect des courbes $x \rightarrow \sigma_c(x, t)$ pour t suffisamment petit, et $t \rightarrow \sigma_c(x, t)$ pour x suffisamment petit, ne présente aucun caractère pathologique (*).

L'onde différée

Introduisons le coefficient d'amortissement ν qui caractérise dans la formule (66), l'atténuation du pic :

$$81) \quad \nu = \frac{\bar{\varepsilon}}{2} t_1 = \frac{\bar{\varepsilon} \bar{X}_c}{2 X_p} t$$

On notera à cet égard le rôle joué par les différents paramètres physiques. En particulier couplage $\bar{\varepsilon}$ et conduction k (cf. la définition (2.3.42) de $\bar{X}_c$) interviennent conjointement : ce sont les facteurs physiques de l'amortissement.

Remarquons ensuite que pour des temps suffisamment grands des simplifications interviennent dans (66), car les deuxième et quatrième termes du second membre sont alors négligeables ; il vient :

$$82) \quad \sigma_0(x, t_0, t_1) \approx A(\xi, \nu) + A(-\xi, \nu)$$

(*) Lorsque γ prend des valeurs de l'ordre de 0.1, les courbes $t \rightarrow \sigma_c(x, t)$ présentent un caractère pathologique pour certains temps. Le domaine de validité ne saurait être alors de la forme (80).

avec

$$(83) \quad \xi = t_0 - x$$

$$(84) \quad A(\xi, \nu) = -\frac{1}{4} e^{-\xi + \nu} \operatorname{erfc}\left(\frac{-\xi + 2\nu}{2\sqrt{\nu}}\right)$$

Le pic de contrainte présente alors une propriété de symétrie.

Précisément notons $(t, \bar{\varepsilon}, \bar{X}_C, X_p)$ la courbe $x \rightarrow \sigma_0(x, t)$ tracée à $t, \bar{\varepsilon}, \bar{X}_C$ et X_p fixés. Alors, il existe un temps t_s indépendant de ν , tel que pour $t > t_s$ le profil $\mathcal{C}$ soit symétrique par rapport à une droite verticale passant par le sommet du pic.

Soit $\mathcal{C}'$ le profil relatif aux paramètres $t', \bar{\varepsilon}', \bar{X}'_C$ et X'_p . Il résulte de ce qui précède que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont superposables par translation si l'on a $t > t_s, t' > t_s$ et $\nu = \nu'$. Il suffit donc, pour avoir des profils symétriques représentatifs de tous ceux qu'il est possible d'obtenir, de tracer les courbes $\mathcal{C}$ à $\bar{\varepsilon}, \bar{X}_C$ et X_p fixés et pour différents temps t tels que $t > t_s$.

Sur la figure (4) nous avons reporté deux courbes $\mathcal{C}$ relatives aux temps $t = 3$ et $t = 6$. A ce stade l'influence de ν est nulle. La propriété de symétrie est pratiquement vérifiée à partir de $t = t_s = 6$, c'est à dire en variable physique après une distance parcourue de l'ordre de six fois la longueur de pénétration.

Tant que la valeur de ν est faible le pic se déplace sans s'amortir. Nous avons reporté sur la figure (7) plusieurs aspects du pic de contrainte correspondant à différents instants $t > t_s$, ou ce qui revient au même à différentes valeurs de ν . On remarque que la dissipation commence à se manifester de façon significative pour $\nu = 0,001$. Avec nos données numériques cela correspond à un temps réduit $t = 59206$, soit une distance parcourue égale à $59206 X_p \approx 800$ m. Cette distance est grande ; remarquons cependant qu'elle est divisée par λ^2 si la longueur de pénétration X_p est divisée par λ .

Les courbes $\mathcal{C}$ tracées pour $\nu = 10^{-4}$ et $\nu = 0$ se superposent parfaitement. Donc dans l'exemple choisi, on peut considérer que pour $t_d = 5,9206 \times 10^3$ la contrainte est très valablement donnée par la formule (57).

Terminons ce paragraphe par quelques considérations d'ordre qualitatif sur la décroissance du pic et la dégradation de l'énergie élastique.

La loi de décroissance du pic peut être précisée. En effet d'après (66) la valeur de la contrainte en $x = t_0$ est :

$$\begin{aligned}
 (85) \quad \sigma_0(x = t_0, t_0, t_1) = & -\frac{1}{2} e^{\frac{\bar{\epsilon} \epsilon_2 t_0}{2}} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_2 t_0}{2}}\right) \\
 & + \frac{1}{4} e^{-t_0(2 - \frac{\bar{\epsilon} \epsilon_2}{2})} \operatorname{erfc}\left(\frac{-2 + \bar{\epsilon} \epsilon_2}{\sqrt{2 \bar{\epsilon} \epsilon_2}} \sqrt{t_0}\right) + \frac{1}{4} e^{t_0(2 + \frac{\bar{\epsilon} \epsilon_2}{2})} \operatorname{erfc}\left(\frac{2 + \bar{\epsilon} \epsilon_2}{\sqrt{2 \bar{\epsilon} \epsilon_2}} \sqrt{t_0}\right)
 \end{aligned}$$

Le développement asymptotique de la fonction erfc pour les grandes valeurs de l'argument montre que les deux derniers termes de l'expression (85) tendent exponentiellement vers 0 quand $t_0 \rightarrow \infty$, alors que le premier terme tend vers zéro comme $t_0^{-1/2}$. La décroissance de l'extrémum obéit pour les grands temps à une loi de puissance.

Posons nous à présent la question suivante : la solution obtenue rend compte de l'atténuation des contraintes, mais décrit-elle aussi la dégradation de l'énergie élastique ? Cela n'est pas évident a priori.

Convenons d'appeler "énergie élastique" la quantité :

$$(86) \quad E = \frac{1}{2} \int_0^\infty \sigma^2 dx.$$

En se donnant la contrainte σ sous la forme d'un développement :

$$\sigma = \sigma_0 + \epsilon_2 \sigma_1,$$

on peut montrer que :

$$(87) \quad \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{2} \epsilon_2 \bar{\epsilon} \int_0^\infty \left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial x}\right)^2 dx \leq 0$$

On a en effet :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[\frac{\partial \sigma_0^2}{\partial t_0} + \epsilon_2 \left(\frac{\partial \sigma_0^2}{\partial t_1} + 2 \frac{\partial (\sigma_0 \sigma_1)}{\partial t_0} \right) \right] dx.$$

Or σ_0 et σ_1 sont fonction de $t_0 - x$, donc en posant $A = \sigma_0^2 + 2 \epsilon_2 \sigma_0 \sigma_1$

$$\int_0^\infty \frac{\partial A}{\partial t_0} dx = - \int_0^\infty \frac{\partial A}{\partial x} dx = A(0) - A(\infty) = 0$$

où l'on a tenu compte des conditions à la limite et de régularité.

D'autre part, σ_0 étant solution de l'équation de la chaleur (63), il

est facile de vérifier que :

$$\frac{\partial \sigma_0^2}{\partial t_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_0^2}{\partial x^2} = -\bar{\epsilon} \left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial x} \right)^2$$

d'où le résultat (87).

L'énergie E décroît donc avec le temps. De plus l'équation (87) montre que cette décroissance se poursuit tant que le profil de σ_0 n'est pas aplati, et cela de façon d'autant plus rapide que les variations de σ_0 en fonction de x sont fortes. Par exemple, si l'on considère respectivement un pic et une "bosse arrondie" de contrainte, l'énergie E , supposée identique dans les deux cas à un instant de référence, décroît plus vite pour le pic.

Comparaison des deux solutions approchées

Appelons S la solution approchée obtenue avec la méthode de perturbation directe relativement à la constante de couplage ϵ , et S_D celle obtenue à l'aide de la méthode d'échelles multiples dans laquelle le petit paramètre est $\epsilon_1 = \bar{X}_c/X$. Nous avons déjà défini au moins grossièrement, des domaines de validité $\tilde{\mathcal{D}}$ et $\tilde{\mathcal{D}}_D$ pour S_ϵ et S_D .

Il est fort intéressant maintenant d'essayer de comparer ces solutions approchées qui ont été obtenues par deux méthodes bien différentes. La forme a priori de $\tilde{\mathcal{D}}$ et $\tilde{\mathcal{D}}_D$ (cf (33) et (76) suggère d'ailleurs l'existence d'une zone de raccordement $\tilde{\mathcal{D}} \cap \tilde{\mathcal{D}}_D$ non vide (voir fig. 12).

Il est nécessaire de distinguer ici les variables réduites utilisées dans le calcul de S_ϵ , de celles que nous avons utilisés ensuite dans le calcul de S_D . Les secondes seront affectés d'une barre. On passe d'un groupe de variables à l'autre par les relations :

$$(88) \quad \bar{x} = \gamma x \quad \bar{t} = \gamma \sqrt{1 + \epsilon} t$$

$$(89) \quad \bar{\sigma} = \sqrt{1 + \epsilon} \gamma \sigma$$

La contrainte calculée à partir de la solution S_ϵ est de la forme

$$(90) \quad \sigma = \sigma_0 + \epsilon \sigma_1$$

où σ_0 et σ_1 , sont donnés par (20)-(26).

En utilisant l'hypothèse selon laquelle $\gamma \ll 1$, il est possible de simplifier les formules (20) et (26) qui donnent σ_0 et σ_1 .

Pour $t > x$, on a :

$$\sigma_0 = - \frac{1}{2 \gamma (\gamma + 1)} (e^{-\gamma (t-x)} - e^{-\gamma (t+x)}) + A(x, t),$$

où $A(x, t)$ est une expression qui est $O(1)$ lorsque $\gamma \rightarrow 0$. Il est donc loisible de considérer ce terme comme négligeable, tant que les autres sont $O(\frac{1}{\gamma})$. Cela n'est plus le cas quand on a simultanément $\gamma t \ll 1$ et $\gamma x \ll 1$, puisqu'alors :

$$- \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma (t-x)} + \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma (t+x)} \approx -2x$$

En raisonnant de la sorte, on obtient en fin de compte des formules simplifiées valables dans $\tilde{\mathcal{D}}$ et en dehors d'un voisinage de l'origine :

$$(91) \quad \sigma_0 = \frac{1}{2\gamma} (e^{\gamma(t-x)} - e^{-\gamma(t-x)}) H(t-x) \\ + \frac{1}{2\gamma} (e^{-\gamma(t+x)} - e^{\gamma(t-x)})$$

$$(92) \quad \sigma_1 = \frac{1}{4\gamma} (-1 + \gamma t) e^{\gamma(t-x)} H(t-x) \\ + \frac{1}{4\gamma} (1 + \gamma t) e^{-\gamma(t-x)} H(t-x) \\ + \frac{1}{4\gamma} (1 - \gamma t) e^{\gamma(t-x)} - \frac{1}{4\gamma} (1 + \gamma t) e^{-\gamma(t+x)}$$

La contrainte σ donnée par la solution S_D est représentée en général par la formule (66). Cependant dans le domaine $\tilde{\mathcal{D}}$ où nous cherchons à comparer S_ϵ et S_D on a $\bar{t} \leq 0$ (1) et la formule (57) fournit une excellente approximation de $\bar{\sigma}$. En tenant compte de (57), développons par rapport à ϵ l'expression $(1 + \epsilon)^{-1/2} \bar{\sigma}$. Pour $t \geq x$, il vient :

$$(1+\epsilon)^{-1/2} \bar{\sigma} = - \frac{1}{2} e^{-\gamma(t-x)} (1 - \frac{\epsilon}{2} (1+\gamma t)) + \frac{1}{2} e^{-\gamma(t+x)} (1 - \frac{\epsilon}{2} (1+\gamma t)).$$

En opérant de même pour $t \leq x$, on vérifie que les formules obtenues coïncident avec l'expression $\gamma \sigma$ telle qu'elle ressort de (90) et des formules (91) et (92) de l'annexe. Donc (89) est vérifié.

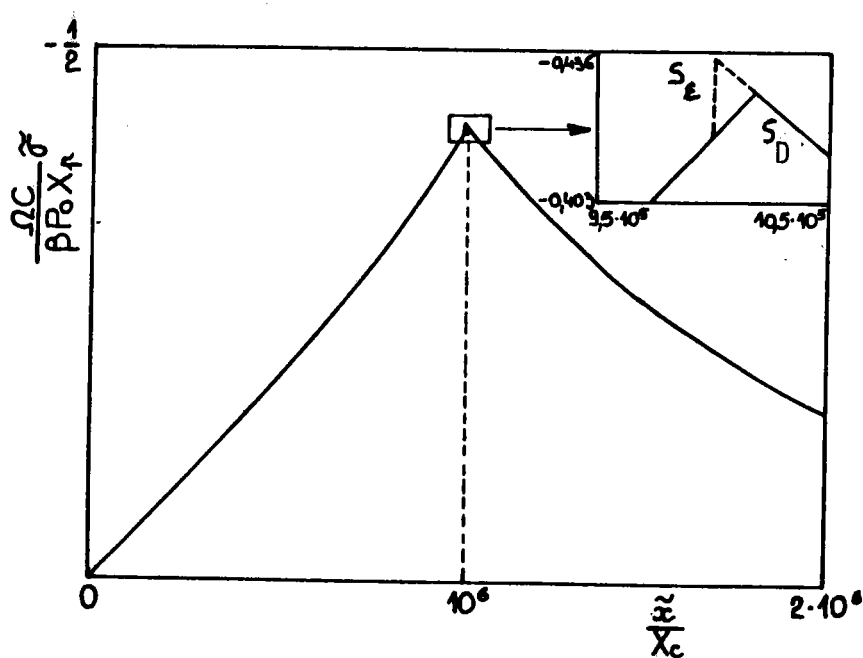


FIG. 8 : Comparaison des deux solutions approchées S_e et S_{e1} pour $t = \frac{\tilde{t}}{T_c} = 10^6$

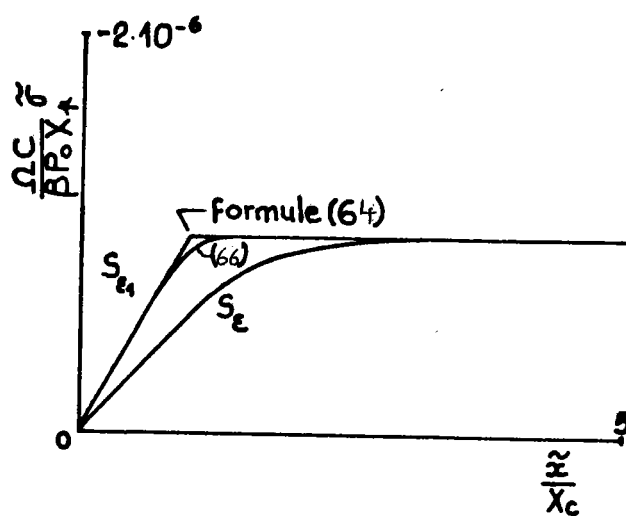


FIG. 9 : Pour les petites valeurs de l'abscisse et du temps la solution approchée S_{e1} n'est plus valable (ici $t = \frac{\tilde{t}}{T_c} = 1$)

Ainsi les solutions S_E et S_D sont-elles identiques dans $\tilde{\mathcal{D}}$ en dehors d'un voisinage $\tilde{\mathcal{A}}$ de l'origine. Le calcul numérique confirme ce résultat et aide à préciser le voisinage $\tilde{\mathcal{A}}$ en question.

En prenant toujours les données numériques relatives à l'aluminium traçons sur la figure (8) les courbes :

$$\mathcal{C}: x \rightarrow \gamma \sigma$$

$$\text{et } \mathcal{C}_1: x \rightarrow (1 + \epsilon)^{-1/2} \bar{\sigma},$$

où $\gamma \sigma$ est donnée par (90) et les formules (20)-(26) tandis que $\bar{\sigma}$ est donnée par (66). On remarque la très bonne concordance de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$.

Ce n'est que dans un voisinage $\tilde{\mathcal{A}}$ de l'origine qu'apparaît une différence relative, qui n'est pas négligeable, cf. figure (9). On peut définir approximativement :

$$\mathcal{A} = \{(x, t) \text{ tel que } x \leq 30 \text{ et } t \leq 30\} \quad \text{en variables réduites}$$

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{x}, \tilde{t}) \text{ tel que } \tilde{x} \leq 30 \leq X_c \text{ et } \tilde{t} \leq 30 \leq T_c\} \quad \text{en variables physiques}$$

En corollaire sont confirmées les formes à priori des domaines $\tilde{\mathcal{D}}$ et $\tilde{\mathcal{D}}_D$; sont précisées également les bornes de $\tilde{\mathcal{D}}_D$:

$$\tilde{\mathcal{D}}_D = \{(\tilde{x}, \tilde{t}) \text{ tel que } \tilde{x} \geq 30 X_c \text{ ou } \tilde{t} \geq 30 T_c\}$$

e) Conclusion

La figure (10) donne une vue d'ensemble des différents domaines du quart de plan $\tilde{x} \geq 0, \tilde{t} \geq 0$ qui présentent un intérêt dans la description de l'onde. Les domaines $\tilde{\mathcal{D}} = \tilde{\mathcal{A}} \cup \tilde{\mathcal{B}}$ et $\tilde{\mathcal{D}}_D = \tilde{\mathcal{F}} \cup \tilde{\mathcal{E}}$ sont des domaines de validité pour les solutions approchées S_E et S_D qui se raccordent sur $\tilde{\mathcal{B}}$.

La naissance du pic de contrainte, l'évolution de sa vitesse vers la célérité isentropique du son, la croissance en valeur absolue de l'extrémum jusqu'à la valeur limite $-\frac{1}{2} \frac{\beta P_0 X_P}{\Omega C}$; tout cela a lieu dans $\tilde{\mathcal{B}} \cup \tilde{\mathcal{E}}$.

Ensuite le profil de contrainte a un aspect symétrique. Il se déplace sans se déformer dans $\tilde{\mathcal{F}}$, et ce n'est que dans $\tilde{\mathcal{E}}$ que l'amortissement se manifeste de façon significative.

Exprimons maintenant la contrainte sous une forme concise, en empruntant à chacune des solutions approchées ce qu'elle offre de plus simple.

Sur le domaine $\tilde{\mathcal{A}}$ on prend :

$$93) \quad \tilde{\sigma} = \frac{\beta P_0 X_p}{\tilde{\Omega} C} \gamma \sigma_0 \left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{X}_c}, \frac{\tilde{t}}{\tilde{T}_c} \right)$$

où σ_0 est donné par (20).

Ensuite on peut poser :

$$94) \quad \tilde{\sigma} = \frac{\beta P_0 X_p}{\tilde{\Omega} C} \sigma_0 \left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{X}_p}, \frac{\tilde{t}\tilde{\Omega}}{\tilde{X}_p} \right)$$

expression dans laquelle σ_0 est donné par (57) sur $\tilde{\mathcal{F}}$ et par (66) sur $\tilde{\mathcal{E}}$. Ces formules explicites et relativement simples décrivent toute l'évolution de l'onde de contrainte. Il va de soi que l'on pourrait calculer de la même façon la température et toute autre variable susceptible de nous intéresser.

Revenons sur la remarque 1. Il apparaît finalement que la condition à la limite de type thermique n'influence la contrainte que dans le domaine $\tilde{\mathcal{A}}$. Tout se passe ensuite comme si l'onde de contrainte oubliait cette condition.

Rappelons que les méthodes utilisées mettaient en jeu les petits paramètres ϵ et ϵ_2 définis par (2.1.28), (42) et (2.3.42). Ceux-ci s'annulent pour $\beta = 0$ et $k = 0$, c'est à dire respectivement lorsque le couplage est inexistant et lorsque la conduction est nulle. Des résultats obtenus on peut donc dégager certaines conclusions relatives aux phénomènes physiques qui gouvernent l'évolution de l'onde.

Dans $\tilde{\mathcal{A}}$ la solution est donnée par la théorie "découplée". L'énergie thermique s'est transformée partiellement en énergie élastique, sans que l'inverse ait eu le temps de produire un effet. De plus la condition à la limite de type thermique, et partant la conduction, influencent dans $\tilde{\mathcal{A}}$ la contrainte de façon non négligeable (*).

Ensuite l'onde de contrainte oublie la condition à la limite de type thermique. Quant au couplage il intervient pleinement. Les effets de la conduction sont négligeables dans $\tilde{\mathcal{F}}$; non pas qu'ils soient nuls, mais ils sont très lents à se manifester et c'est seulement dans $\tilde{\mathcal{E}}$ qu'ils apparaissent.

Couplage et conduction sont les facteurs physiques de l'amortissement. Le couplage en permettant la transformation de l'énergie élastique en énergie thermique et la conduction en assurant le transport de cette dernière, d'où irréversibilité et dégradation de l'énergie.

(*) Dans le problème étudié au paragraphe 3.1, ces conclusions sont identiques, à la différence près que le couplage total joue très vite un rôle déterminant.

f) Influence de la longueur de pénétration sur l'évolution de l'onde de contrainte

L'objet de ce paragraphe, dont les résultats ont donné lieu à la publication [12] de C. Fressengeas et A. Molinari, est de préciser l'influence de la longueur de pénétration du flux d'énergie sur l'évolution de l'onde de contrainte.

On suppose cette fois que la paroi n'autorise aucun transfert d'énergie par conduction : le flux de chaleur est nul à la paroi (alors que précédemment on supposait la température nulle au bord). Nous prenons cette condition à la limite afin de retrouver, comme cas limite, le dépôt d'énergie de type surfacique lorsqu'on fait tendre la longueur de pénétration vers zéro.

On pourra donc comparer les conséquences sur l'évolution de l'onde de contrainte de deux apports d'énergie différents : l'un de type conductif (dépôt en surface), l'autre de type radiatif (dépôt en volume).

On se limite à l'étude des premières phases de l'évolution de l'onde, et à cette fin on utilise la méthode de perturbation directe par rapport à la constante de couplage thermomécanique.

Afin de ne pas alourdir l'exposé, on se contente ici de donner une discussion des résultats, sans reproduire l'expression analytique de la solution approchée que l'on pourra trouver dans la référence [12].

Les équations fondamentales du problème sont encore celles données en (11), mais les conditions à la limite sont différentes de (13). On a ici :

$$(95) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \tau}{\partial x} &= 0 \\ \sigma &= 0 \end{aligned}$$

Posons $P_0 = \frac{A}{X_p}$ dans l'expression (5) qui définit η . Par suite, d'après (2.1.27), on a :

$$(96) \quad \tilde{\sigma} = \eta (\lambda + 2\mu) = \frac{A \beta T_1}{X_c C} \gamma \sigma$$

Nous allons faire varier la longueur de pénétration X_p (donc aussi $\gamma = \frac{X_c}{X_p}$) tout en maintenant constant le débit d'énergie du flux. Dans ce cas $\int_0^\infty P(\tilde{x}, \tilde{t}) d\tilde{x}$

est indépendant de X_p et par conséquent $\frac{AB}{X_c^2 C^2 (\lambda + 2\mu)}$ est constant. Ce sont donc les variations de $\gamma\sigma$ qu'il convient d'étudier.

Pour les calculs numériques nous prenons encore les valeurs de Ω , ϵ et X_c relatives à l'aluminium (paragraphe d).

Sur la figure 11 nous avons tracé pour $t = 5$, et pour différentes valeurs de γ , des courbes :

$$x \rightarrow \gamma \sigma_a (x, t, \gamma)$$

en prenant pour contrainte approchée σ_a le développement au premier ordre par rapport à ϵ :

$$\sigma_a = \sigma_0 + \epsilon \sigma_1$$

dans lequel σ_0 représente la contrainte en théorie découplée. Ces courbes ont l'aspect d'un pic dont la vitesse est, aux premiers instants, égale à la célérité isotherme du son.

On a également tracé le lieu des singularités :

$$x \rightarrow \gamma \sigma_a (x, x, \gamma)$$

Il est confondu dans les premières phases de l'évolution de l'onde avec le lieu des extrémums :

$$t \rightarrow \gamma \inf_{x > 0} (\sigma(x, t, \gamma))$$

Pour un γ donné, on constate que le pic de contrainte croît en valeur absolue, passe par un extrémum :

$$(97) \quad M_\gamma = \inf_t \inf_x (\gamma \sigma(x, t, \gamma))$$

puis décroît en valeur absolue. Cette décroissance se poursuit jusqu'à l'évanouissement total des contraintes thermiques dans le corps.

Si on appelle x_γ l'abscisse où a lieu l'extrémum de la contrainte, on constate que

$$(98) \quad \gamma_1 > \gamma_2 \Rightarrow \begin{cases} |M_{\gamma_1}| > |M_{\gamma_2}| \\ x_{\gamma_1} < x_{\gamma_2} \end{cases}$$

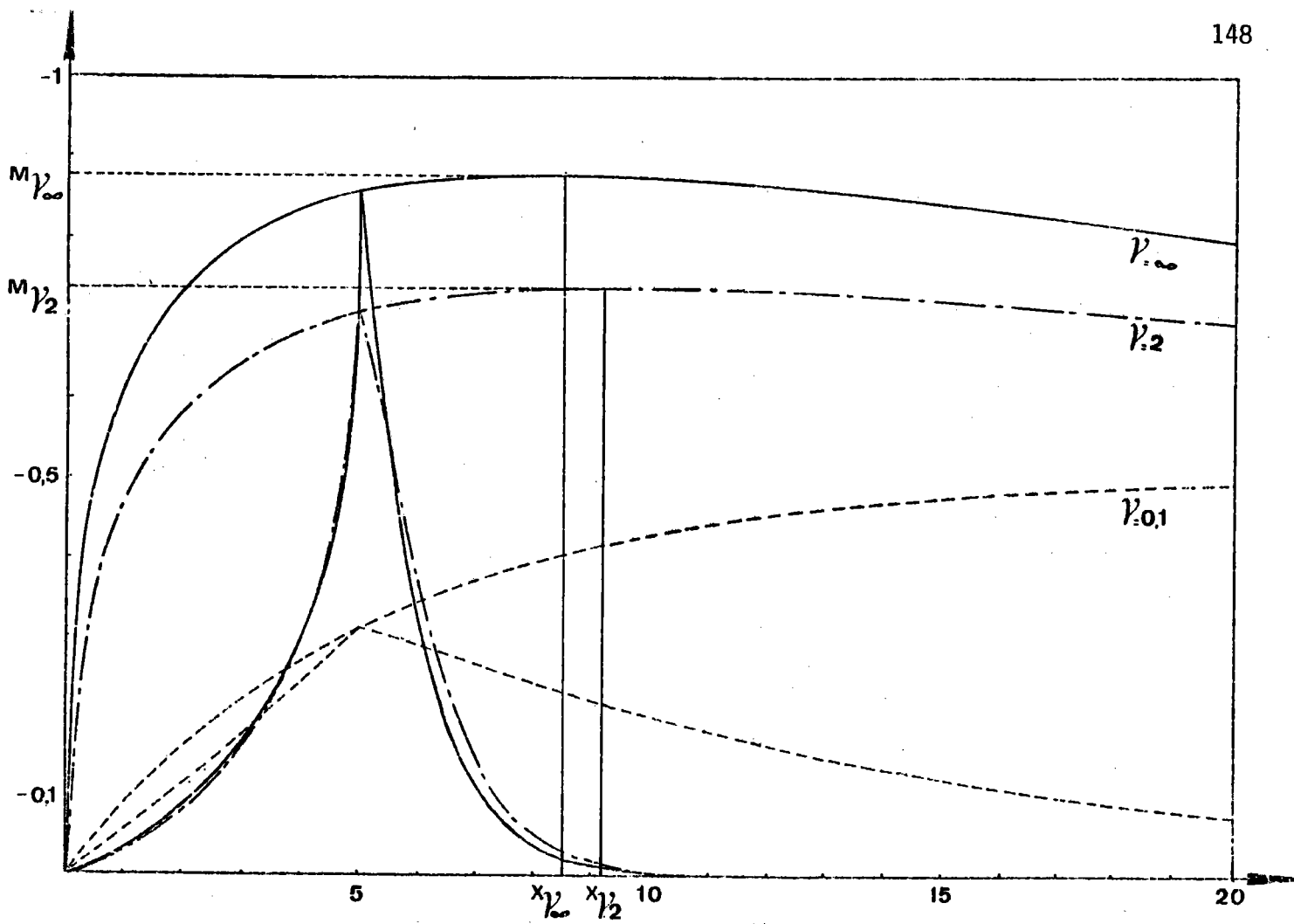


Fig. 11 : Evolution de l'onde de contrainte pour différentes longueurs de pénétration, lieu des extrémums.

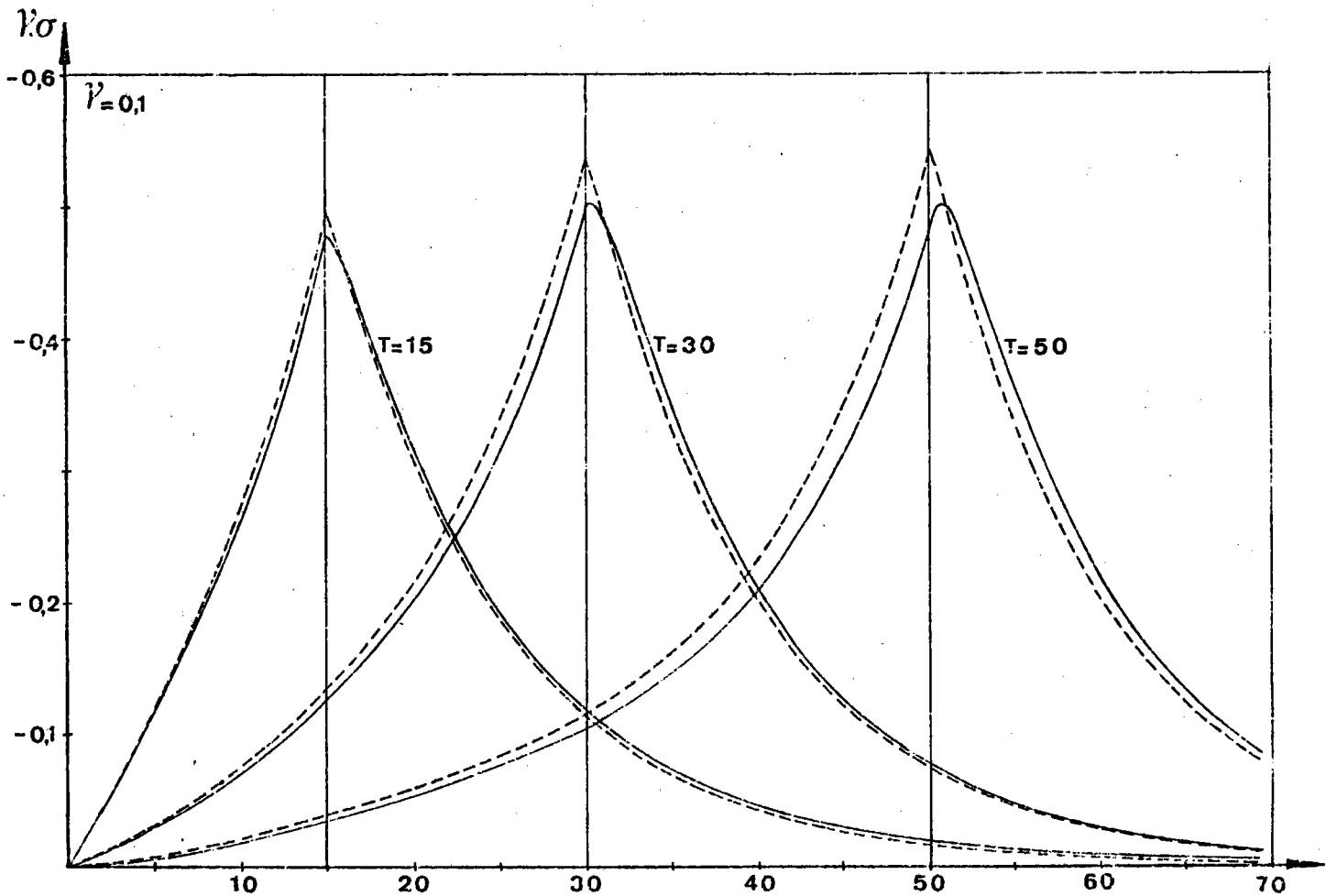


Fig 12 : Comparaison de la théorie couplée (—) et découplée (----) ;

Plus la longueur de pénétration X_p est petite, plus près du bord est atteinte la contrainte extrême, et plus cet extrémum est grand.

Lorsque X_p tend vers zéro, γ tend vers l'infini, et l'on retrouve le cas limite du dépôt d'énergie de type surfacique (section 3.1).

Sur la figure 12, nous comparons la solution approchée σ_0 (théorie découplée) avec σ_a qui tient compte du couplage thermomécanique. On constate à nouveau qu'avec σ_a il est possible de décrire l'atténuation des contraintes dans les premières phases de l'évolution de l'onde. La figure met également en évidence l'accélération du pic dont la vitesse passe rapidement de la célérité isotherme du son à la célérité isentropique.

REFERENCES DU CHAPITRE III

- |1| MOLINARI A., Thermoélasticité dynamique : un demi-espace soumis à un échelon de flux thermique, J. de mécanique, 18, 73-101, 1979.
- |2| MOLINARI A., Réponse dynamique d'un corps thermoélastique à un dépôt d'énergie, J. de mécanique, 1979.
- |3| DANILOVSKAÏA V.I., Contraintes thermiques résultant de l'échauffement subit de la surface d'un semi-espace élastique. (En russe), P.M.M., 14, 316-318, 1950.
- |4| NOWACKI W., Dynamic Problems of Thermoelasticity, Noordhoff Int. Publ., 1975.
- |5| SINGH D.V., Thermal stresses in a semi-infinite medium due to constant heat flux at the surface, Arch. Budowy Maszyn, 65-72, 1967.
- |6| GRIMADO P.B., On the thermal stress induced in a semi-infinite body as a result of a suddenly applied step heat input, J. of Appl. Mech., 1149-1150, 1970.
- |7| HETNARSKI R.B., An algorithm for generating some inverse Laplace transforms of exponential form, J. of Appl. Math. Phys. (ZAMP), 249-253, 1975.
- |8| STERNBERG E. et CHAKRAVORTY J.G., On inertia effect in a transient thermoelastic problem, J. of Appl. Mech., 503-509, 1959.
- |9| ZAKER T.A., Stress waves generated by heat addition in an elastic solid, J. Appl. Mech., 143-150, 1965.
- |10| ERDELYI (Editeur), Bateman Manuscript Project, Tables of integral transforms, Vol. 1, Mc Graw Hill Book.Co, New-York, 1954.
- |11| CARSLAW H.S. and JAEGER J.C., Conduction of Heat in Solids, Oxford University Press, 1959.
- |12| FRESSENGEAS C. et MOLINARI A., Sur la contrainte transitoire engendrée par un choc thermique, J. of Thermal Stresses (soumis pour publication).

DEUXIÈME PARTIE

PROBLÈMES NON LINÉAIRES

CHAPITRE IV

VERS LA RESOLUTION DE PROBLEMES NON LINEAIRES

4.1 INTRODUCTION

La première partie de ce mémoire se limitait à l'étude de problèmes linéaires et dissipatifs. L'approche linéaire d'un problème est souvent fructueuse lorsque la perturbation est faible. Toutefois dans un problème faiblement non linéaire (perturbation pas trop grande), les effets de la nonlinéarité, quoique localement faibles, sont cumulatifs et peuvent donc produire un effet du premier ordre au bout d'un temps fini. C'est pourquoi la résolution d'un problème dynamique par une théorie linéaire n'est valable en général que pour les faibles temps.

Une petite perturbation se propage dans un corps élastique à la célérité du son. Cette célérité est constante si le problème est linéaire. Mais en général cette célérité n'est pas constante, elle dépend de l'état local des déformations. De façon assez vague, mais suggestive, on peut dire que la vitesse avec laquelle se propage une perturbation dépend de l'amplitude de celle-ci.

On conçoit donc que la nonlinéarité a pour effet de distordre le profil de l'onde. Dans certains cas elle accuse ce profil et elle est à l'origine de l'éventuelle apparition de chocs.

Dans les chapitres suivants, on se propose d'étudier les effets combinés de la nonlinéarité et ceux de la dissipation qui, comme on sait, dégrade l'énergie mécanique au sein du matériau et atténue le profil de l'onde.

Dans un problème faiblement non linéaire, cette combinaison des effets sera entièrement décrite loin du bord par la seule équation de Burgers :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a f \frac{\partial f}{\partial x} = b \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} .$$

Equation bien connue et qu'il est naturel de rencontrer dans un problème de propagation d'onde en milieu dissipatif non linéaire, voir par exemple [1] , [2] et [3] . Elle s'obtient en employant des techniques asymptotiques mises au point initialement en mécanique des fluides, voir par exemple [4] [5] [6].

Pour $a = 0$, le problème est linéaire et dissipatif ; l'équation de Burgers se

réduit à l'équation classique de la chaleur. Pour $b = 0$ le problème est non linéaire et non dissipatif.

Dans ce chapitre nous voulons introduire certaines méthodes de calcul en étudiant un exemple relativement simple. On se propose de résoudre l'équation :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2} - c^2 \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \lambda \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} \right) + a \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = 0$$

qui est de la même forme que celle étudiée dans le chapitre I. Le caractère non linéaire de cette équation tient au fait que c et a dépendent de $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}$.

Nous supposons pour fixer les idées que $\tilde{u}$ et $\tilde{x}$ ont la dimension d'une longueur et $\tilde{t}$ celle d'un temps. Par suite a et c sont des célérités et λ est l'inverse d'un temps. Nous admettrons également que :

$$(2) \quad 0 < a < c$$

Au paragraphe 2.2 nous étudions l'évolution d'une perturbation de faible amplitude. On définit à partir des conditions à la limite un petit paramètre η . Dans l'application de la méthode de l'échelle variable apparaît un autre petit paramètre (lié à la dissipation) que l'on combine avec le précédent. On détermine l'évolution de l'onde près du front (onde instantanée) et loin du bord (onde différée).

Les applications physiques sont étudiées dans les chapitres suivants, notamment la formation et l'évolution des chocs,

On s'intéresse ensuite aux perturbations de fortes amplitudes. Pour l'étude de l'onde instantanée, on présente une méthode qui s'inspire largement des travaux de Varley et de son école. L'usage d'une variable caractéristique combiné à la méthode de l'échelle variable nous donne la solution près du front.

Pour l'étude de l'onde différée, on utilise une variable α qui n'est pas caractéristique. On détermine l'équation non linéaire qui gouverne la dissipation. Celle-ci se réduit à une équation de la chaleur non linéaire si a ne dépend pas de $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}$, et cette équation devient bien sûr linéaire si de plus c ne dépend pas de $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}}$.

4.2 ETUDE D'UNE ONDE DE FAIBLE AMPLITUDE PAR LA METHODE DE L'ECHELLE VARIABLE

On cherche dans le quart de plan ($\tilde{x} \geq 0, \tilde{t} \geq 0$) la solution $\tilde{u}$ de (1) qui vérifie la condition à la limite :

$$3) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = \eta F(\tilde{t}) \quad , \quad \text{en } \tilde{x} = 0,$$

et les conditions de repos initial :

$$4) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{u} = 0 \quad \text{pour } \tilde{t} < 0.$$

Le paramètre η qui figure dans (3) est, par hypothèse, un petit paramètre sans dimension :

$$5) \quad \eta \ll 1 ,$$

et la fonction F est telle que :

$$6) \quad |F(\tilde{t})| \leq 1 \quad \text{pour } \tilde{t} \geq 0.$$

Compte tenu de (5) et (6), nous dirons que la sollicitation (3) est de faible amplitude.

Les changements de variables et de fonction :

$$7) \quad \tilde{t} = T^* t \quad , \quad \tilde{x} = \Omega T^* x$$

$$\tilde{u} = \eta \Omega T^* u,$$

dans lesquels T^* est une échelle de temps arbitraire et Ω une vitesse également arbitraire, permettent d'écrire l'équation (1) et la condition à la limite (3) sous la forme :

$$(8) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left[\frac{c(\eta \frac{\partial u}{\partial x})}{\Omega} \right]^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda T^* \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a(\eta \frac{\partial u}{\partial x})}{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0$$

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = F(T^* t) = f(t)$$

La deuxième égalité dans (9) constitue la définition de la fonction f .

a) L'onde instantanée

Pour étudier l'évolution instantanée de l'onde près du front, on prend une petite échelle de temps T^* , de sorte que :

$$(10) \quad \epsilon_1 = \lambda T^*$$

puisse être considéré comme un petit paramètre.

En développant c et a par rapport à η :

$$(11) \quad c(\eta \frac{\partial u}{\partial x}) = c_0 + \eta \frac{\partial u}{\partial x} c'_0 + O(\eta^2),$$

l'équation (8) peut s'écrire :

$$(12) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{c_0^2}{\Omega^2} (1 + 2\eta \frac{c'_0}{c_0} \frac{\partial u}{\partial x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \epsilon_1 (\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a_0}{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x}) + O(\epsilon, \eta) = 0$$

Posons :

$$(13) \quad e = \frac{\partial u}{\partial x},$$

et dérivons (12) par rapport à x :

$$(14) \quad \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - \frac{c_0^2}{\Omega^2} \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} - 2\epsilon_1 \left(\frac{\eta}{\epsilon_1} \right) \frac{c_0 c'_0}{\Omega^2} \frac{\partial}{\partial x} (e \frac{\partial e}{\partial x}) + \eta (\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{a_0}{\Omega} \frac{\partial e}{\partial x}) + O(\epsilon_1, \eta) = 0$$

Dans cette équation il y a deux petits paramètres η et ϵ_1 . On se ramène au cas d'un seul petit paramètre en supposant que η est une fonction puissance de ϵ_1 :

$$(15) \quad \eta = O(\epsilon_1^\alpha)$$

L'exposant α est choisi de telle sorte que la solution asymptotique rende compte à la fois des effets de la nonlinéarité et de la dissipation. Il est facile de voir qu'il faut prendre ici $\alpha = 1$.

Nous considérons donc un processus asymptotique dans lequel ϵ_1 est le petit paramètre tout en supposant que :

$$(16) \quad \frac{\eta}{\epsilon_1} = O(1).$$

Dans le cadre de la méthode des échelles multiples, nous cherchons la solution de (14) sous la forme :

$$(17) \quad e(t, x, \eta, \epsilon_1) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon_1^i e_i(t, x_0, x_1, \dots, \frac{\eta}{\epsilon_1}).$$

où l'on a posé :

$$(18) \quad x_i = \epsilon_1^i x$$

La substitution de (17) dans (14), donne en identifiant les premières puissances de ϵ_1 :

$$(19) \quad \frac{\partial^2 e_0}{\partial t^2} - \frac{c_0^2}{\Omega^2} \frac{\partial^2 e_0}{\partial x_0^2} = 0$$

$$(20) \quad \frac{\partial^2 e_1}{\partial t^2} - \frac{c_0^2}{\Omega^2} \frac{\partial^2 e_1}{\partial x_0^2} = 2 \frac{c_0^2}{\Omega^2} \frac{\partial^2 e_0}{\partial x_0 \partial x_1} + 2 \frac{\eta}{\epsilon_1} \frac{c_0' c_0}{\Omega^2} \frac{\partial}{\partial x_0} (e_0 \frac{\partial e_0}{\partial x_0}) - (\frac{\partial e_0}{\partial t} + \frac{a_0}{\Omega} \frac{\partial e_0}{\partial x_0})$$

Posons dorénavant :

$$(21) \quad \Omega = c_0,$$

et

$$(22) \quad \xi = t - x_0.$$

La fonction e_0 est, d'après (19), de la forme :

$$(23) \quad e_0 = e_0(\xi, x_1).$$

La dépendance de e_0 par rapport à la variable lente x_1 est régie par l'équation aux dérivées partielles :

$$(24) \quad \frac{\partial e_0}{\partial x_1} - \frac{\eta c_0'}{\epsilon_1 c_0} e_0 \frac{\partial e_0}{\partial \xi} + \frac{\beta}{2} e_0 = 0$$

obtenue en annulant le second membre de (20), ceci afin d'éviter l'apparition d'un terme séculaire dans le calcul de e_1 . Dans (24) nous avons introduit le coefficient positif (voir (2)) :

$$(25) \quad \beta = 1 - \frac{a_0}{c_0}.$$

Compte tenu de (9), la condition à la limite qui gouverne la solution e_0 de (24) est donnée par :

$$(26) \quad e_0(\xi = t, x_1 = 0) = f(t).$$

Remarque 1 :

Il est équivalent d'utiliser un processus asymptotique dans lequel le petit paramètre est η . On pose alors :

$$(27) \quad x_i = \eta^i x, \quad \epsilon_1 = \eta \left(\frac{\epsilon_1}{\eta} \right) \quad \text{avec} \quad \frac{\epsilon_1}{\eta} = 0 \quad (1),$$

et l'on obtient à la place de (24)

$$(28) \quad \frac{\partial e_0}{\partial x_1} - \frac{c'_0}{c_0} e_0 \frac{\partial e_0}{\partial \xi} + \frac{\epsilon_1}{\eta} \frac{\beta}{2} e_0 = 0$$

Dans le cas non linéaire le terme $\frac{c'_0}{c_0} e_0 \frac{\partial e_0}{\partial \xi}$ de (24) disparaît et l'on retrouve une équation du type (1.3.19) qui décrit l'amortissement exponentiel de l'onde au front.

Si le problème est non dissipatif ($\epsilon_1 = 0$) l'équation (28) se simplifie :

$$(29) \quad \frac{\partial e_0}{\partial x_1} - \frac{c'_0}{c_1} e_0 \frac{\partial e_0}{\partial \xi} = 0$$

Cette équation est la plus simple qu'on puisse imaginer des équations aux dérivées partielles qui gouvernent l'évolution d'une onde non linéaire.

On se propose maintenant de calculer dans le quart de plan ($\xi \geq 0, x_1 \geq 0$) la solution de (24) vérifiant la condition (26).

On effectue un changement de fonction inconnue :

$$(30) \quad e_0(\xi, x_1) = e^{-\frac{\beta}{2} x_1} g(\xi, x_1)$$

La fonction g est solution de l'équation

$$(31) \quad \frac{\partial g}{\partial x_1} - k(x_1) g \frac{\partial g}{\partial \xi} = 0$$

où nous avons posé :

$$(32) \quad k(x_1) = \frac{\eta}{\varepsilon} \frac{c'_0}{c_0} e^{-\frac{\beta}{2} x_1}$$

L'équation (31) est non linéaire, mais d'un type simple. Ses caractéristiques sont solutions de l'équation :

$$(33) \quad \frac{d\xi}{dx_1} = -k(x_1) g(\xi, x_1)$$

Appelons $\mathcal{C}_\alpha$ celle qui vérifie

$$(34) \quad \xi(x_1 = 0) = \alpha$$

D'après (31) et (33) g a une valeur constante sur $\mathcal{C}_\alpha$ qui est donnée par (26) :

$$(35) \quad g(\xi, x_1) = f(\alpha) \text{ sur } \mathcal{C}_\alpha.$$

On obtient alors l'équation de $\mathcal{C}_\alpha$ en intégrant (33) avec la condition (34) :

$$(36) \quad \xi(x_1) = \alpha - \frac{\eta}{\varepsilon} \frac{2}{\beta} \frac{c'_0}{c_0} f(\alpha) \left(1 - e^{-\frac{\beta x_1}{2}}\right)$$

Remarquons que $\mathcal{C}_\alpha$ a pour asymptote la droite :

$$(37) \quad \xi = \text{Const} = \alpha - \frac{2}{\beta} \frac{\eta}{\varepsilon} \frac{c'_0}{c_0} f(\alpha)$$

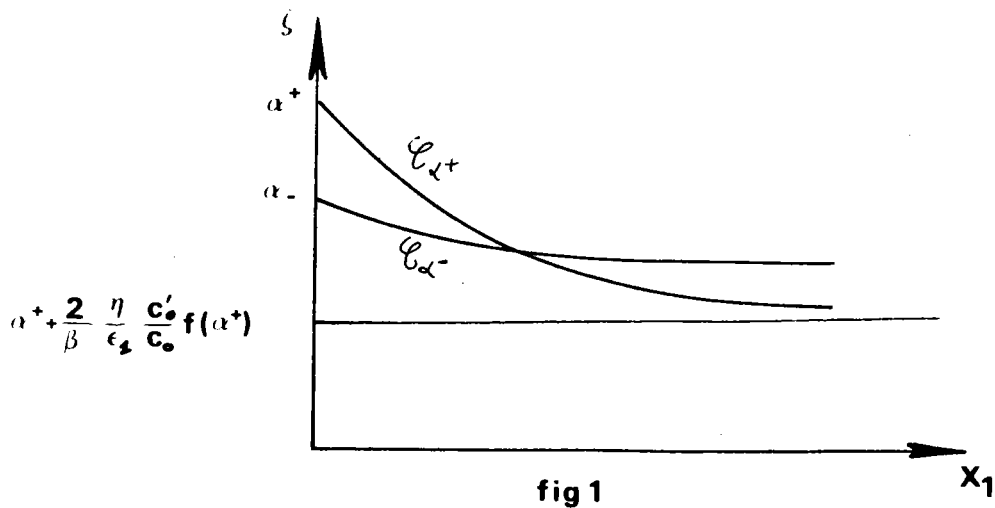
Finalement la solution e_0 de (24) est donnée par :

$$(38) \quad e_0(\xi, x_1) = e^{-\frac{\beta}{2} x_1} f(\alpha),$$

où α est déterminé implicitement en fonction de ξ et x_1 par (36). L'amortissement de la solution est représenté dans (38) par le facteur exponentiel.

Dès l'instant où les caractéristiques se coupent (fig. 1), il n'y a plus unicité de la solution, ce qui en général est inacceptable (*).

(*) Exemple de cas où l'on peut accepter une description non univoque de la solution : une vague qui déferle sur une plage.



Ainsi est-on conduit à se placer dans la classe des solutions faibles, c'est à dire à admettre la possibilité d'une discontinuité sur les dérivées premières de u , voir Germain [7]. Dans un problème physique donné, il n'y a en général qu'une seule solution faible qui soit acceptable : celle qui vérifie les lois de conservations. Les discontinuités qui apparaissent dans cette solution s'appellent des chocs. Ce sont des manifestations directes de la nonlinéarité. Nous étudierons cette question dans les chapitres suivants.

Comme dans le problème linéaire (voir par exemple la section 1.5), nous sommes amenés à définir un domaine de validité de la solution approchée que l'on vient de calculer. Nous admettrons qu'il existe au voisinage du front un domaine de validité défini grossièrement en variables physiques et réduites par :

(39)
$$\widetilde{\mathcal{D}}_I = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{t}) \mid \frac{\tilde{x}}{c_0} - \tilde{t} + T_I \geq 0 \right\}$$

(40)
$$\mathcal{D}_I = \left\{ (x, t) \mid x - t + \frac{T_I}{T^*} \geq 0 \right\}$$

Compte tenu de la relation (10) qui définit le petit paramètre ϵ_1 , nous admettons également que la borne T_I vérifie la relation heuristique :

(41)
$$T_I \ll \frac{1}{\lambda} \quad \left(\frac{T_I}{T^*} \ll \frac{1}{\epsilon} \right)$$

b) L'onde différée

En prenant comme petit paramètre :

$$(42) \quad \epsilon_2 = \frac{1}{\lambda T^*},$$

l'équation (8) s'écrit, en la dérivant par rapport à x :

$$(43) \quad \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{a_0}{\Omega} \frac{\partial e}{\partial x} + \epsilon_2 \left(\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - \frac{c_0^2}{\Omega^2} \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right) + 2 \epsilon_2 \left(\frac{\eta}{\epsilon_2} \right) \frac{a'_0}{\Omega} e \frac{\partial e}{\partial x} + 0 (\epsilon_2 \eta) = 0.$$

En supposant que :

$$(44) \quad \left(\frac{\eta}{\epsilon_2} \right) = 0 \quad (1),$$

et en introduisant comme en (18) les variables multiples x_i , on cherche une solution de (43) de la forme (17).

Si l'on pose :

$$(45) \quad \Omega = a_0$$

la méthode des échelles multiples donne :

$$(46) \quad e_0(t, x_0, x_1) = e_0(\xi, x_1)$$

avec

$$(47) \quad \xi = t - x_0$$

La dépendance de e_0 relativement à la variable lente x_1 est gouvernée par l'équation de Burgers :

$$(48) \quad \frac{\partial e_0}{\partial x_1} - \frac{c_0^2 - a_0^2}{a_0^2} \frac{\partial^2 e_0}{\partial \xi^2} = 2 \frac{a'_0}{\epsilon_2 a_0} e_0 \frac{\partial e_0}{\partial \xi}$$

Cette équation aux dérivées partielles intervient très fréquemment dans l'étude des ondes de faible amplitude. Elle fait à la fois jouer la dissipation et la nonlinéarité. Grâce à la transformation de Cole-Hopf, on ramène la résolution de l'équation (48) à celle d'une équation de la chaleur ; d'où l'importance théorique considérable de l'équation de Burgers (voir Whitham [8]).

Remarque 2 : Si l'on prend pour variables multiples :

$$x_i = \eta^i x ,$$

on obtient, en multipliant (48) par $\frac{\varepsilon}{\eta}$:

$$(49) \quad \frac{\partial e_0}{\partial x_1} - \frac{\varepsilon}{\eta} \frac{c_0^2 - a_0^2}{a_0^2} \frac{\partial^2 e_0}{\partial \xi^2} = 2 \frac{a'_0}{a_0} e_0 \frac{\partial e_0}{\partial \xi}$$

En l'absence de dissipation ($\varepsilon = 0$), cette équation se réduit à une équation des ondes non linéaire alors que pour $\eta = 0$ l'équation (48) se réduit à une équation linéaire de la chaleur.

Nous admettrons comme dans le paragraphe 1.5 qu'il existe un domaine de validité, pour la solution différée, dont la forme est, respectivement en variables physiques et réduites :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_D &= \left\{ (\tilde{x}, \tilde{t}) \mid \frac{\tilde{x}}{a_0} \geq T_D \right\} \\ \mathcal{D}_D &= \left\{ (x, t) \mid x \geq \frac{T_D}{T^*} \right\} \end{aligned}$$

avec

$$T_D \gg \frac{1}{\lambda} \quad , \quad \frac{T_D}{T^*} \gg \varepsilon$$

L'équation de Burgers n'autorise aucune formation de discontinuités dans la solution ; les chocs faibles sont donc structurés par la dissipation lorsqu'on s'éloigne suffisamment du bord.

c) Conclusion

Comme pour le problème linéaire la méthode de l'échelle variable permet de calculer la solution faiblement non linéaire près du front d'onde et loin du bord.

4.3 L'ONDE DE FORTE AMPLITUDE

a) Onde progressive, ligne de propagation

Ici la sollicitation n'est plus supposée de faible amplitude.

On connaît l'importance de la notion d'onde simple dans la description des perturbations se propageant dans un corps non dissipatif.

L'onde progressive est une généralisation du concept d'onde simple permettant notamment de tenir compte des effets dissipatifs. Toutes les ondes que nous étudions dans ce mémoire sont d'ailleurs des ondes progressives au sens défini par Germain :

On dit que $O(x, t)$ décrit une onde progressive s'il existe une famille de courbes $\alpha(x, t) = \text{const}$ telle que la variation de O en fonction de x , à α fixé, est petite comparée à la variation de O en fonction de α à x fixé.

Nous appellerons les courbes $\alpha(x, t) = \text{const}$ lignes de propagation (dans la littérature anglo-saxonne on les appelle wavelets).

La variable α est appelée variable de phase.

Une onde simple est une onde progressive particulière, car par définition elle ne dépend que de la seule variable α :

$$O(x, t) = O(\alpha(x, t))$$

Pour une onde simple, la perturbation reste constante le long des lignes de propagation, alors que pour une onde progressive l'amplitude de l'onde est faiblement modulée par x à α fixé. Dans les problèmes que nous étudions, cette faible modulation est la manifestation des effets dissipatifs.

Cette notion d'onde progressive a été utilisée par Varley et son école [9] [10] [11] [12] sous le nom de "modulated simple wave", pour décrire la propagation de perturbation de forte amplitude et de haute fréquence en milieux dissipatifs. Dans la description de l'onde ces auteurs utilisent la notion d'Invariant de Riemann et ils font usage d'une variable caractéristique α (Les courbes $\alpha = \text{const}$ sont les caractéristiques du système).

Nos résultats concernent une perturbation quelconque, sans restriction sur la fréquence. En combinant la méthode de l'échelle variable et la notion de ligne de propagation nous définissons une onde progressive instantanée et une onde progressive différée représentatives respectivement de la solution près du front et loin du bord.

b) L'onde progressive - instantanée

L'équation (4.1.1) dans laquelle on opère les changements de variables :

$$(1) \quad \tilde{t} = T^* t \quad , \quad \tilde{x} = \Omega T^* x$$

$$(2) \quad \tilde{u} = \Omega T^* u \quad ,$$

s'écrit :

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\Omega^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \epsilon_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

On utilise le petit paramètre

$$(4) \quad \epsilon_1 = \lambda T^*$$

pour étudier l'évolution instantanée de l'onde près du front.

Si l'on pose :

$$(5) \quad v = \frac{\partial u}{\partial t} \quad , \quad e = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ,$$

l'équation (3) est équivalente au système :

$$(6) \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{c^2(e)}{c_0^2} \frac{\partial e}{\partial x} = - \epsilon_1 \left(v + \frac{a(e)}{c_0} e \right)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad ,$$

où l'on a pris :

$$(7) \quad \Omega = c_0$$

L'équation (6)₂ est une équation de compatibilité.

A l'exemple de Varley, nous allons prendre comme nouvelles fonctions inconnues des invariants de Riemann, et nous allons introduire la variable caractéristique α .

La variable caractéristique

Une caractéristique du système (6) est une courbe du plan (t, x) à la traversée de laquelle, les quantités v et e étant continues, leurs dérivées sont susceptibles de subir des discontinuités.

Notons $\mathcal{C}_\alpha$ la caractéristique d'équation (fig. 2) :

$$(8) \quad \mathcal{C}_\alpha : x \rightarrow T(\alpha, x)$$

telle que

$$(9) \quad T(\alpha, 0) = \alpha$$

$$(10) \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{c_0}{c(e)}.$$

Dans un domaine $\mathcal{D}$ du quart de plan $(t \geq 0, x \geq 0)$ où les caractéristiques ne se coupent pas, à tout point de coordonnées (t, x) on peut associer un nombre α unique tel que la caractéristique $\mathcal{C}_\alpha$ passe par ce point. Ainsi, dans $\mathcal{D}$ le changement de variable suivant est-il bien défini et bijectif :

$$(11) \quad (t, x) \leftrightarrow (\alpha, X), \quad \text{avec } X(t, x) = x.$$

Les invariants de Riemann

Soit

$$(12) \quad F = \frac{1}{2} \left(v - \int_0^e \frac{c(y)}{c_0} dy \right)$$

$$(13) \quad S = \frac{1}{2} \left(v + \int_0^e \frac{c(y)}{c_0} dy \right)$$

les invariants de Riemann associés au système homogène déduit de (6) :

$$(14) \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{c^2(e)}{c_0^2} \frac{\partial e}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Réolvons d'abord le problème relatif au système non dissipatif (14). F est constant sur une caractéristique $\mathcal{C}_\alpha$, tandis que S est constant sur une caractéristique $\mathcal{C}^-$ définie par (fig. 2) :

$$(15) \quad \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{c_0}{c(e)}$$

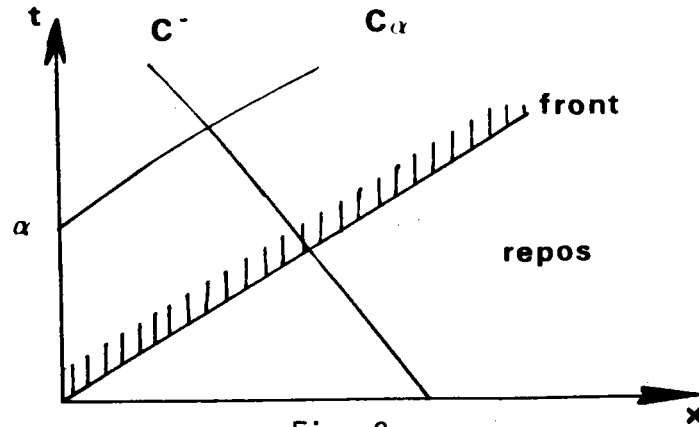


Fig. 2

Compte tenu de l'état de repos devant le front d'onde, l'invariant S est partout nul :

$$(16) \quad S = 0$$

On en déduit que v et e sont constants sur les caractéristiques $\mathcal{C}_\alpha$, et que celles-ci sont des droites. La solution du système (14) est une onde simple.

Réolvons maintenant le système (6). On prend les invariants F et S définis en (12) et (13) comme nouvelles fonctions inconnues et (α, X) définies en (8)-(11) comme nouvelles variables. Nous noterons E et V les quantités e et v considérées comme fonctions de F et S .

Les formules (12) et (13) nous donnent :

$$(17) \quad V = S + F$$

$$E = E(S - F)$$

la fonction $E(S - F)$ étant telle que

$$(18) \quad S - F = \int_0^{E(S - F)} \frac{c(y)}{c_0} dy$$

Changement de variables et de fonctions

La fonction T étant celle définie en (8)-(10), introduisons la notation :

$$(19) \quad p = T,_{\alpha}$$

En se servant des relations

$$(20) \quad \alpha,_{t} = \frac{1}{p}, \quad \alpha,_{x} = -\frac{c_0}{cp}$$

déduites de $T(x, \alpha(x, t)) = t$, on montre que :

$$v,_{t} = \frac{1}{p} (F,_{\alpha} + S,_{\alpha})$$

$$v,_{x} = -\frac{c_0}{cp} (F,_{\alpha} + S,_{\alpha}) + F,_{\chi} + S,_{\chi}$$

$$e,_{t} = \frac{1}{p} \left(-\frac{c_0}{c} F,_{\alpha} + \frac{c_0}{c} S,_{\alpha} \right)$$

$$(21) \quad e,_{x} = -\frac{c_0^2}{c^2 p} (-F,_{\alpha} + S,_{\alpha}) - \frac{c_0}{c} F,_{\chi} + \frac{c_0}{c} S,_{\chi}$$

Par conséquent le système (6) peut s'écrire :

$$(22) \quad \begin{aligned} F,_{\chi} - S,_{\chi} &= -\frac{2c_0}{cp} S,_{\alpha} - \varepsilon_1 \psi(F, S) \\ F,_{\chi} + S,_{\chi} &= \frac{2c_0}{cp} S,_{\alpha} \end{aligned}$$

où ψ est une fonction de S et F :

$$(23) \quad \psi(F, S) = \frac{c_0}{C(E)} \left[F + S + \frac{a(E)}{c_0} E \right] \quad (E = E(S - F) \text{ est défini en (18)})$$

Si $\varepsilon_1 = 0$, en additionnant les deux équations (22) on retrouve ce que nous avons mentionné précédemment, à savoir que F ne dépend que de α . La seule solution S de l'équation $(22)_2 \quad S,_{\chi} - \frac{2c_0}{cp} S,_{\alpha} = 0$ qui vérifie la condition $S = 0$ dans la zone de repos est la solution identiquement nulle.

Si ε_1 est non nul, on introduit les variables multiples :

$$(24) \quad X_i = \varepsilon_1^i X$$

et l'on pose :

$$(25) \quad F(\alpha, X, \varepsilon_1) = F_0(\alpha, X_0, X_1, \dots) + \varepsilon_1 F_1 + \dots$$

$$S(\alpha, X, \varepsilon_1) = \varepsilon_1 S_0(\alpha, X_0, X_1) + \dots$$

Le développement (25)₂ est compatible avec le résultat obtenu dans le cas où $\varepsilon_1 = 0$.

On pose également :

$$(26) \quad T(\alpha, x, \varepsilon_1) = T_0(\alpha, x_0, x_1, \dots) + \varepsilon_1 T_1(\alpha, x_0, x_1, \dots) + \dots$$

La substitution de (25) dans (22) et l'identification des premières puissances de ε_1 donnent :

$$(27) \quad F_{0, X_0} = 0$$

$$(28) \quad F_{1, X_0} = -F_{0, X_1} + S_{0, X_0} - \frac{2 c_0}{c_1 p_0} S_{0, \alpha} - \psi(F_0, 0)$$

$$(29) \quad F_{1, X_0} = -F_{0, X_1} - S_{0, X_0} + \frac{2 c_0}{c_1 p_0} S_{0, \alpha}$$

On a noté :

$$(30) \quad c_1 = c(E_0(F_0, 0))$$

$$(31) \quad p_0 = T_{0, \alpha}$$

T_0 étant d'après (9) (10) et (25) la solution de :

$$(32) \quad T_{0, X_0} = \frac{c_0}{c_1}$$

$$T_0(X_0 = 0, \alpha) = \alpha$$

L'équation (27) montre que F_0 ne dépend pas de X_0 :

$$(33) \quad F_0 = F_0(\alpha, X_1)$$

En ajoutant (28) et (29), on obtient :

$$(34) \quad F_{1, X_0} = -F_{0, X_1} - \frac{1}{2} \psi(F_0, 0)$$

Si F_0 ne dépendait pas de X_1 , la solution F_1 de (34) ferait apparaître un terme séculaire, car F_0 est indépendant de X_0 . On est donc conduit à poser que le deuxième membre de (34) est nul :

$$(35) \quad F_{0, X_1} + \frac{1}{2} \psi(F_0, 0) = 0$$

Supposons le problème gouverné par la condition à la limite :

$$(36) \quad e(x = 0, t) = f(t)$$

La substitution des développements (22) dans (13) (14), donne pour $x = 0$ et en identifiant les premières puissances de ε_1 :

$$(37) \quad \begin{cases} F_0(\alpha, 0) = \frac{1}{2} \left[v(0, t) - \int_0^{f(t)} \frac{c(y)}{c_0} dy \right] \\ F_i(\alpha, 0) = 0 \quad (i \geq 1) \end{cases}$$

$$(38) \quad \begin{cases} v(0, t) + \int_0^{f(t)} \frac{c(y)}{c_0} dy = 0 \\ S_i(\alpha, 0) = 0 \quad (i \geq 0) \end{cases}$$

Par suite on a, compte tenu de $T(\alpha, 0) = \alpha$:

$$(39) \quad F_0(\alpha, 0) = - \int_0^{f(\alpha)} \frac{c(y)}{c_0} dy \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} g(\alpha)$$

La deuxième \u00e9galit\u00e9 dans (39) est une d\u00e9finition de la fonction g .

Une fois calcul\u00e9e la solution F_0 de (35) qui v\u00e9rifie la condition \u00e0 la limite (39), on peut calculer la solution T_0 de (32). Ainsi se trouve enti\u00e8rement d\u00e9termin\u00e9 la solution au premier ordre.

L'\u00e9quation (35) est appel\u00e9e \u00e9quation de transport. Elle gouverne la modulation de F le long d'une ligne de propagation $\alpha = \text{const.}$

Si le probl\u00e8me \u00e9tait lin\u00e9aire, $\psi(F_0, 0)$ serait une fonction lin\u00e9aire de F_0 , soit (voir (23) et (18)) :

$$(40) \quad \psi(F_0, 0) = \lambda F_0 \quad (\lambda = 1 - \frac{a_0}{c_0} > 0)$$

La solution de (35) vérifiant la condition à la limite (39) s'écrirait alors :

$$(41) \quad F_0(\alpha, x_1) = e^{-\frac{\lambda}{2} x_1} g(\alpha)$$

On retrouve la propriété selon laquelle l'onde s'amortit exponentiellement au front d'onde. On peut remarquer que le coefficient d'amortissement

$e^{-\frac{x_1}{2}}$ est indépendant de l'amplitude de la sollicitation $g(\alpha)$.

Dans le cas non linéaire cette dernière propriété n'est plus vraie. En effet la solution de (35) et (37) s'écrit en général :

$$(42) \quad F_0(\alpha, x_1) = \hat{F}_0(x_1, g(\alpha))$$

Il n'est pas possible, sauf cas particulier, de séparer, comme dans la formule (41), les variables x_1 et α .

L'amortissement dissipatif (décrit par la variable lente x_1) est donc dépendant de l'amplitude de la perturbation. (Varley et son école parlent d'"amplitude attenuation"). Cette dépendance disparaît lorsque le problème est faiblement non linéaire.

c) L'onde progressive différée

Ce paragraphe ne constitue qu'une tentative de description de l'onde différée de forte amplitude. Cette tentative étant purement formelle ; il convient donc d'être prudent à l'égard des résultats obtenus tant qu'ils n'auront pas contribué à la résolution qualitative et quantitative d'un problème concret (résolution que nous n'aborderons pas dans le cadre de ce mémoire).

Pour étudier la perturbation quand elle s'éloigne suffisamment du bord, on pose :

$$(43) \quad \epsilon_2 = \frac{1}{\lambda T}$$

Après avoir tenu compte de (1) et (2), on remarque que l'équation (4.1.1) est équivalente au système :

$$(44) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{c^2(e)}{\Omega^2} \frac{\partial e}{\partial x} &= -\frac{1}{\epsilon_2} \left(v + \frac{a(e)}{\Omega} e \right) \\ \frac{\partial e}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Comme précédemment, nous allons opérer un changement de variable

$$(45) \quad (t, x) \leftrightarrow (\alpha, X) \quad (X(t, x) = x)$$

Nous noterons $\mathcal{L}_\alpha$ les lignes de propagation :

$$(46) \quad \alpha(x, t) = \text{const}$$

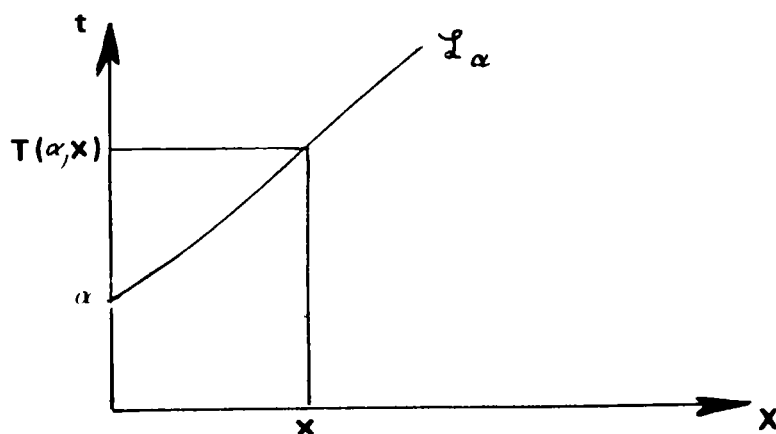


Fig. 3

Dans le plan (t, x) , l'équation de $\mathcal{L}_\alpha$ est de la forme (fig. 3) :

$$(47) \quad x \rightarrow T(\alpha, x)$$

et l'on peut toujours supposer que :

$$(48) \quad T(\alpha, 0) = \alpha$$

Les courbes $\mathcal{L}_\alpha$ sont à déterminer ; elles ne coïncident pas comme précédemment avec les courbes caractéristiques.

Une fois les $\mathcal{L}_\alpha$ connues, le changement de variable (45) est parfaitement défini dans le domaine $\mathcal{D}$ du quart de plan $(t \geq 0, x \geq 0)$ où les $\mathcal{L}_\alpha$ ne se coupent pas. Au couple (t, x) , on associe (α, X) tel que $X = x$ et tel que $\mathcal{L}_\alpha$ soit l'unique ligne de propagation passant en (t, x) . Réciproquement au couple (α, X) , on associe $(t = T(\alpha, x), x = X)$.

Note : Dans la suite nous noterons V et E les quantités v et e considérées comme fonctions de (α, X) , et sans ambiguïté possible nous pourrions confondre les notations x et X .

Les relations

$$(49) \quad \alpha, x = - \frac{T_{,x}}{T_{,\alpha}}, \quad \alpha, t = \frac{1}{T_{,\alpha}}$$

obtenues à partir de l'identité :

$$T(x, \alpha(x, t)) = t$$

permettent d'écrire le système (44) en fonction des variables (α, x) :

$$(50) \quad \begin{aligned} \epsilon_2 \left[\frac{V_{,\alpha}}{T_{,\alpha}} - \frac{c^2(E)}{\Omega^2} \left(- \frac{T_{,x}}{T_{,\alpha}} E_{,\alpha} + E_{,x} \right) \right] + V + \frac{a(E)}{\Omega} E &= 0 \\ - T_{,x} V_{,\alpha} + T_{,\alpha} V_{,x} &= E_{,\alpha} \end{aligned}$$

Introduisons maintenant les variables multiples :

$$(51) \quad x_i = \epsilon_2^i x$$

et cherchons une solution (V, E) de (50) de la forme :

$$(52) \quad \begin{aligned} V &= V_0(\alpha, x_1, \dots) + \epsilon_2 V_1(\alpha, x_1, \dots) + \dots \\ E &= E_0(\alpha, x_1, \dots) + \epsilon_2 E_1(\alpha, x_1, \dots) + \dots \end{aligned}$$

Il y a une troisième fonction inconnue à déterminer : c'est la fonction T qui détermine les lignes de propagation :

$$(53) \quad T = T_0(\alpha, x_0, x_1, \dots) + \epsilon_2 T_1(\alpha, x_0, x_1, \dots) + \dots$$

En conformité avec la notion d'onde progressive, nous supposons que les V_i et les E_i ne dépendent pas de x_0 , mais seulement de la variable rapide α et des variables lentes x_1, x_2 .

La substitution de (52) et (53) dans (50) donne au premier ordre :

$$(54) \quad V_0 + \frac{a(E_0)}{\Omega} E_0 = 0$$

$$(55) \quad - T_{0,x_0} V_{0,\alpha} = E_{0,\alpha}$$

puis à l'ordre suivant :

$$6) \quad \frac{V_{0,\alpha}}{T_{0,\alpha}} + \frac{c^2(E_0)}{\Omega^2} \frac{T_{0,x_0}}{T_{0,\alpha}} E_{0,\alpha} + V_1 + \frac{a(E_0)}{\Omega} E_1 + \frac{a_E(E_0)}{\Omega} E_1 E_0 = 0$$

$$7) \quad - (T_{1,x_0} + T_{0,x_1}) V_{0,\alpha} - T_{0,x_0} V_{1,\alpha} + T_{0,\alpha} V_{0,x_1} = E_{1,\alpha}$$

Des formules (54) et (55) on déduit l'équation :

$$8) \quad T_{0,x_0} = \frac{\Omega}{A(E_0)}$$

où l'on a posé

$$9) \quad A(E_0) = (E_0 a(E_0))_{,E_0}$$

Puisque E_0 ne dépend pas de x_0 , la formule (58) donne par intégration et compte tenu de (48) :

$$10) \quad T_0 = \frac{\Omega x_0}{A(E_0)} + \alpha.$$

Par suite, on a :

$$11) \quad T_{0,\alpha} = 1 + \Omega x_0 \left(\frac{1}{A(E_0)} \right)_{,E_0} E_{0,\alpha}$$

En éliminant V_0 entre (56) et (54), on obtient :

$$12) \quad V_1 = \theta(E_0) \frac{E_{0,\alpha}}{T_{0,\alpha}} - \frac{1}{\Omega} A(E_0) E_1,$$

où l'on a introduit l'expression

$$13) \quad \theta(E_0) = \frac{A(E_0)}{\Omega} - \frac{c^2(E_0)}{\Omega^2} T_{0,x_0}$$

qui d'après (58), est bien une fonction de E_0 .

Substituons (61) dans (62) :

$$14) \quad V_1 = \theta(E_0) \frac{E_{0,\alpha}}{1 + \Omega x_0 \left(\frac{1}{A(E_0)} \right)_{,E_0} E_{0,\alpha}} - \frac{1}{\Omega} A(E_0) E_1$$

puis (64) dans (57), et éliminons V_0 avec (54). On obtient une équation de

la forme :

$$(65) \quad G(E_1, T_1, x_0) + K(E_0, E_{0,\alpha}, E_{0,x_1}) = 0$$

dans laquelle tous les termes affectés de l'indice 1 sont regroupés au sein de G.

On pose que chacune des expressions G et K est nulle. Ceci est toujours possible car on dispose de T_1 pour annuler G. Il vient alors :

$$(66) \quad T_{1,x_0} + \frac{A'}{A^2} \Omega E_1 = 0$$

$$(67) \quad E_{0,x_1} + \frac{\Omega^2}{A^2} \left[\frac{\theta(E_0) E_{0,\alpha}}{1 + \Omega x_0 \left(\frac{1}{A} \right)_{E_0} E_{0,\alpha}} \right]_{,\alpha} = 0$$

Cette dernière expression est l'équation de transport qui gouverne la variation de E_0 le long d'une ligne de propagation $\mathcal{L}_\alpha$ dont l'équation est déterminée au premier ordre par (60).

On remarquera que cette fois la courbe $\mathcal{L}_\alpha$ se détermine à partir de la célérité $a(E)$ qui figure dans le terme d'ordre inférieur de l'équation (1), alors que pour l'onde progressive instantanée, les lignes de propagation étaient les caractéristiques $\mathcal{L}_\alpha$ construites à partir de la célérité $c(E)$ figurant dans les termes d'ordre supérieur. On retrouve là, une propriété classique dont nous avons parlé au chapitre I : l'onde différée est gouvernée au premier ordre par l'opérateur de plus faible degré.

L'équation (67) est une équation de la diffusion non linéaire. Dans le cas particulier où $a(E)$ est indépendant de E, on a :

$$(68) \quad A = a = \text{const},$$

on obtient l'équation de la chaleur non linéaire :

$$(69) \quad E_{0,x_1} + \frac{\Omega^2}{a^2} (\theta(E_0) E_{0,\alpha})_{,\alpha} = 0$$

Si de plus c est indépendant de E, alors θ est constant :

$$(70) \quad \theta = -\frac{a}{\Omega} \left(\frac{c^2}{a^2} - 1 \right)$$

et l'on retrouve la solution linéaire gouvernée par l'équation de la chaleur (poser $\eta = 0$ dans 4.2.48)

$$E_{0,x_1} - \frac{\Omega}{a} \left(\frac{c^2}{a^2} - 1 \right) E_{0,\alpha\alpha} = 0$$

Dans la description de l'onde progressive différée, comme dans celle de l'onde instantanée, la nonlinéarité se manifeste de deux façons :

- a) d'une part elle distord les lignes de propagation (voir l'équation (60)) qui seraient des droites parallèles en théorie linéaire.
- b) d'autre part elle donne un caractère non linéaire à l'équation de transport (67).

Signalons que pour un problème faiblement non linéaire la méthode exposée au paragraphe 4.2.b est mieux adaptée à l'appréhension du problème. L'équation de Burgers permet notamment de décrire les chocs stationnaires alors qu'il semble difficile d'en rendre compte avec la théorie exposée ici.

Remarque 3 : La méthode se prête à quelques critiques :

D'abord l'équation de transport (67) est de structure complexe. S'il s'avérait impossible d'en obtenir des solutions suffisamment simples, ne serait-ce que dans des cas particuliers, la méthode ne présenterait que peu d'intérêt.

Une autre question à éclaircir est celle du domaine de validité de la solution formelle obtenue. On sait bien que l'onde progressive différée n'est représentative de la réalité que pour des abscisses suffisamment grandes, disons pour $x \geq L_1$. D'autre part on peut constater que la distorsion des lignes de propagation est décrite de façon approchée par la formule (60). L'erreur due à cette approximation est négligeable quand x est petit, mais elle ne l'est plus pour les grands x . Par conséquent la solution approchée calculée dans ce paragraphe n'est valable que dans un segment de la forme :

$$[0, L_2] \cap [L_1, +\infty]$$

dont il n'est pas exclu à priori qu'il puisse être réduit à l'ensemble vide dans certains cas.

REFERENCES DU CHAPITRE IV

- |1| GERMAIN P., Progressive waves, Ludwig Prandtl memorial lecture, Mannheim, April 16, 1971.
- |2| NARIBOLI G.A., LIN W.C., A new type of Burgers' equations. ZAMM, 53, 505-510, 1973.
- |3| SEDOV A., NARIBOLI G.A., viscoelastic wave by the use of wave-front theory. Int. J. Nonlinear Rech., 6, 615-624, 1971.
- |4| MORAN J.P. et SHEN S.F., On the formation of weak plane shock waves by impulsive motion of a piston, J. of Fluid Mech., 25, 705-718, 1966.
- |5| LIGHTHILL M.J., viscosity effects in sound waves of finite amplitude., Surveys in Mechanics, Cambridge University Press., 250-351, 1965.
- |6| GERMAIN P., Méthodes asymptotiques en mécanique des fluides. Ecole d'Eté de Physique Théorique. Les Houches. Gordon and Breach Publisher, 1973.
- |7| GERMAIN P., Shock waves, jump relations and structure, Advance in applied Mech., 12, 1972.
- |8| WHITHAM G.B., Linear and nonlinear waves, John Wiley Publ., 1974.
- |9| SEYMOUR B.R. and VARLEY E., High Frequency Periodic Disturbances in Dissipative Systems : I. Small Amplitude Finite Rate Theory, Proc. Roy. Soc. London, A 314, 387-415, 1970.
- |10| VARLEY E. and CUMBER BATCH E., Large Amplitude Waves in Stratified Media : Acoustic Pulses, J. Fluid Mech., 43, 513-537, 1970.
- |11| PARKER D.F., Propagation of a Rapid Pulse Trough a Relaxing Gas, Phys. Fluids, 15, 256-262, 1972.
- |12| SEYMOUR B.R. and MORTELL M.P., Nonlinear Geometrical Acoustics, Mechanics Today, Vol 2, 251-313, Pergamon Press, 1975.

CHAPITRE V

PROBLEMES DYNAMIQUES EN VISCOELASTICITE ET

THERMOELASTICITE NON LINEAIRES

Ce chapitre est consacré pour l'essentiel à l'étude des ondes viscoélastiques non linéaires de faibles amplitudes (sections 5.1 à 5.3). Puis, dans la dernière partie 5.4, nous donnons quelques indications relatives à la thermoélasticité non linéaire.

5.1 L'ONDE VISCOELASTIQUE : POSITION DU PROBLEME

On se propose d'étudier l'onde transitoire se propageant dans un demi-espace viscoélastique non linéaire initialement au repos dont le bord est soumis à une contrainte uniforme, variable avec le temps, et de faible amplitude.

Deux propriétés du matériau vont se manifester :

- la non linéarité, dont les effets convectifs, en accusant le profil de l'onde, sont à l'origine de l'éventuelle apparition de chocs.
- la viscoélasticité qui, en dissipant l'énergie mécanique au sein du matériau, tend au contraire à atténuer le profil de la perturbation.

Ces effets, en quelque sorte antagonistes, donnent lieu à certaines propriétés particulières. Ainsi, une sollicitation qui dans un corps purement élastique conduirait à la formation d'un choc, peut dans un corps viscoélastique ne pas produire de choc, tout comme si l'apparition de ce dernier était étouffée par la viscoélasticité du matériau.

Si l'étude des ondes non linéaires dans les corps élastiques a fait d'appréciables progrès, grâce notamment à la notion d'onde simple, les résultats dans le domaine viscoélastique sont plus limités ; surtout lorsqu'il s'agit, comme on se propose de le faire ici, de résoudre un problème à valeurs aux limites, ou à valeurs initiales, et d'en donner une solution analytique.

Parmi les progrès les plus typiques en la matière, citons les travaux de Varley et Rogers [1], Seymour et Varley [2], Mortell et Seymour [3], qui ont étudié la propagation d'ondes de hautes fréquences. Ces ondes sont

amorties exponentiellement. La perturbation se limite donc en pratique à un voisinage de l'origine d'autant plus restreint que le temps de relaxation instantané du matériau est faible.

Ce n'est pas le cas si la sollicitation au bord est de nature quelconque. Le front d'onde est toujours amorti exponentiellement, mais il n'en est pas de même de toute la perturbation. La partie principale de celle-ci se déplace, quand on est loin du bord, à une vitesse peu différente de la célérité différée du son (*) et son évolution est gouvernée au premier ordre par une équation de Burgers. C'est le résultat auquel aboutissent Blake [4] et Bland [5] pour des corps viscoélastiques non linéaires, dont le comportement est régi pour le premier par des paramètres cachés, pour le second par un assemblage en parallèle d'un ressort non linéaire avec un amortisseur linéaire.

Nous prenons ici une loi de comportement de type intégral et cherchons à décrire la solution du problème dans tout le quart de plan ($\tilde{x} \geq 0$, $\tilde{t} \geq 0$).

L'équation qui gouverne le problème est de type intégral-différentiel. Le calcul des ondes viscoélastiques instantanées et différées, section 5.2 et 5.3, constitue donc un exemple d'application de la méthode de l'échelle variable à ce type d'équation, A. Molinari [6].

La loi de comportement du matériau est donnée au second ordre par un développement en intégrales multiples de la forme (**):

$$(1) \quad \begin{aligned} \tilde{\sigma}(\tilde{t}) = & \int_0^{\tilde{t}} G_1(\tilde{t} - \tau) \frac{\partial \tilde{e}}{\partial \tau}(\tau) d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{t}} \int_0^{\tilde{t}} G_2(\tilde{t} - \tau_1, \tilde{t} - \tau_2) \frac{\partial \tilde{e}}{\partial \tau}(\tau_1) \frac{\partial \tilde{e}}{\partial \tau}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \dots \end{aligned}$$

où $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{e} = \frac{\partial u}{\partial x}$ représentent la contrainte et la déformation unitaire, $\tilde{x}$ et $\tilde{t}$

(*) Peu différente, parce que nous supposons que l'amplitude de l'onde est faible.

(**) Prendre un développement à un ordre supérieur ne changerait rien aux résultats. On ne tient pas compte ici de la variation d'entropie, ce qui est justifié en première approximation par les ondes de faible amplitude.

l'abscisse et le temps $(^*)$; G_1, G_2 des fonctions de relaxation. Les dérivées

du type $\frac{\partial \tilde{e}}{\partial \tau}$ sont éventuellement à prendre au sens des distributions.

La contrainte au bord est donnée par

$$(2) \quad \tilde{\sigma}(0, \tilde{t}) = F(\tilde{t})$$

où F est une fonction connue, nulle pour $\tilde{t} < 0$.

(*) Précisément si l'on convient de désigner par $\tilde{x}$ et $\hat{x}$ la position d'une particule respectivement à l'instant initial et à l'instant $\tilde{t}$, on a :

$$\tilde{u} = \hat{x} - \tilde{x}$$

5.2 L'ONDE DIFFEREE

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la recherche d'une solution asymptotique loin du bord. Transformons d'abord la loi de comportement sous une forme adaptée à cette étude.

a) Expression de la loi de comportement et de l'équation du mouvement adaptées à l'étude loin du bord

Introduisons les notations :

$$(1) \quad \begin{aligned} E_1 &= G_1(\infty) & E_2 &= G_2(\infty, \infty) \\ \mu &= \int_0^\infty (G_1(\xi) - G_1(\infty)) d\xi \end{aligned}$$

qui désignent les coefficients d'élasticité différée du premier et du second ordre, et une viscosité différée.

Le premier terme de (5.1.1) peut s'écrire :

$$I = \int_0^{\tilde{t}} G_1(\tilde{t} - \tau) \frac{\partial \tilde{e}}{\partial \tau}(\tau) d\tau = E_1 \tilde{e}(\tilde{t}) + \int_0^{\tilde{t}} (G_1(\tilde{t} - \tau) - E_1) \frac{\partial \tilde{e}}{\partial \tau}(\tau) d\tau$$

puis, moyennant une intégration par parties et compte tenu du repos initial ($\dot{\tilde{e}} = 0$ pour $\tilde{t} \leq 0$) (*)

$$I = E_1 \tilde{e}(\tilde{t}) + \mu \dot{\tilde{e}}(\tilde{t}) - \int_0^{\tilde{t}} \ddot{\tilde{e}}(\tilde{t} - \tau) \left(\int_\tau^\infty (G_1(\xi) - E_1) d\xi \right) d\tau$$

Après avoir également transformé le terme non linéaire, l'équation (5.1.1) s'écrit :

$$(2) \quad \begin{aligned} \tilde{\sigma}(\tilde{x}, \tilde{t}) &= E_1 \tilde{e}(\tilde{t}) + \frac{1}{2} E_2 \tilde{e}^2(\tilde{t}) + \mu \dot{\tilde{e}}(\tilde{t}) \\ &- \int_0^{\tilde{t}} \ddot{\tilde{e}}(\tilde{t} - \tau) \left(\int_\tau^\infty (G_1(\xi) - E_1) d\xi \right) d\tau \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{t}} \int_0^{\tilde{t}} \dot{\tilde{e}}(\tilde{t} - \tau_1) \dot{\tilde{e}}(\tilde{t} - \tau_2) (G_2(\tau_1, \tau_2) - E_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

(*) Le point "." désigne la dérivation par rapport à $\tilde{t}$ ici, par rapport à t dans la suite.

Posons :

$$(3) \quad \Omega = \left(\frac{E_1}{\rho_0}\right)^{1/2}; \quad \eta = \sup_{\tilde{t}} \frac{|F(\tilde{t})|}{E_1}$$

où Ω désigne la vitesse différée du son, et η un paramètre sans dimension supposé petit ($\eta \ll 1$), et opérons les changements de variable et de fonction :

$$(4) \quad \begin{aligned} \tilde{x} &= \Omega T x & \tilde{t} &= T t & \tilde{u} &= \eta \Omega T u \\ \tilde{\sigma} &= \eta E_1 \sigma & \tilde{e} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = \eta \frac{\partial u}{\partial x} = \eta e \end{aligned}$$

où T désigne une échelle de temps ($X = \Omega T$: échelle de longueur associée).

L'équation qui gouverne la propagation de l'onde s'obtient en combinant l'équation du mouvement (écrite sous forme lagrangienne).

$$(5) \quad \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{x}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2} \quad (\rho_0 \text{ densité dans l'état initial})$$

avec (2) et (4) :

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\mu}{E_1 T} \frac{\partial^2 e}{\partial t \partial x} + \eta \frac{E_2}{E_1} e \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{1}{T} \int_0^t \frac{\partial \ddot{e}}{\partial x}(t-v) \left(\int_{Tv}^{\infty} \frac{G_1(\xi) - E_1}{E_1} d\xi \right) dv \\ + \eta \int_0^t \int_0^t \frac{\partial \ddot{e}}{\partial x}(t-u_1) \ddot{e}(t-u_2) \frac{(G_2(u_1 T, u_2 T) - E_2)}{E_1} du_1 du_2 = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{aligned}$$

La condition à la limite (5.1.2) s'écrit quant à elle :

$$(7) \quad \sigma(0, t) = \frac{F(T t)}{\eta E_1} \stackrel{\text{def}}{=} f(t) \quad (|f(t)| \leq 1, f(t) = 0 \text{ pour } t < 0)$$

expression dans laquelle la deuxième égalité constitue une définition de f . Dans toute la suite nous utiliserons, sans les rappeler, les conditions de repos initial :

$$(8) \quad e(x, 0) = \frac{\partial e}{\partial t}(x, 0) = 0$$

Nous utilisons deux méthodes l'une s'appuyant sur les développements asymptotiques raccordés puis celle des échelles multiples, ceci afin de bien montrer la grande simplicité de cette dernière.

b) Développements asymptotiques raccordés

Une première idée venant à l'esprit lorsqu'on examine l'équation (6) est d'imaginer que les termes en η sont négligeables, c'est-à-dire de linéariser cette équation en posant $\eta = 0$:

$$(9) \quad \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\mu}{E_1 T} \frac{\partial^2 e}{\partial t \partial x} - \frac{1}{T} \int_0^t \frac{\partial \ddot{e}}{\partial x} (t-v) \left(\int_{vT}^{\infty} \frac{G_1(\xi) - E_1}{E_1} d\xi \right) dv = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

En fait il est bien connu que la solution approchée donnée par (9) ne peut être valable que pour des temps suffisamment faibles, car les termes non linéaires, même petits, prennent par un effet cumulatif de l'importance aux grands temps.

Résolvons néanmoins le problème linéaire afin de dégager d'une part son domaine de validité et de bien préciser d'autre part l'esprit de la méthode qui reste constant par delà le cas particulier.

Problème linéaire

En général la fonction $G_1(\xi) - E_1$ décroît exponentiellement à l'infini par conséquent nous admettrons que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{\partial^2 \ddot{e}}{\partial x^2} (t-v) \left(\int_{vT}^{\infty} \frac{G_1(\xi) - E_1}{E_1} d\xi \right) dv = 0$$

Posons :

$$(10) \quad \epsilon_2 = \frac{\mu}{E_1 T}$$

paramètre qui tend vers zéro quand $T \rightarrow \infty$. Après une dérivation par rapport à x , (9) s'écrit :

$$(11) \quad \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \epsilon_2 \frac{\partial^3 e}{\partial t \partial x^2} + \epsilon_2^0(\epsilon_2) = \frac{\partial^2 e}{\partial t^2},$$

équation dont on cherche une solution approchée au premier ordre. La condition à la limite (7) s'écrit, compte tenu de (2) :

$$(12) \quad \sigma(0, t) = \left(e + \epsilon_2 \frac{\partial e}{\partial t} + \epsilon_2^0(\epsilon_2) \right) \Big|_{x=0} = f(t)$$

Calculons d'abord, à l'aide d'un processus de perturbation directe, le développement extérieur :

$$(13) \quad e^{(e)} = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_2^n e_n^{(e)}(x, t)$$

Par substitution dans (11) et (12), on trouve au premier ordre, en faisant tendre ε_2 vers 0 à x et t fixés :

$$(14) \quad \frac{\partial^2 e_0^{(e)}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 e_0^{(e)}}{\partial x^2} = 0$$

$$e_0^{(e)}(0, t) = f(t)$$

soit :

$$(15) \quad e_0^{(e)}(x, t) = f(t - x)$$

Cette solution approchée ne peut tenir compte de la réalité physique du problème car elle propage un signal sans l'atténuer, c'est à dire sans faire jouer la viscosité du matériau.

Pour pallier cela on introduit des variables et un développement dits intérieurs, et défini comme suit :

$$(16) \quad \xi = t - x$$

$$x_1 = \varepsilon_2 x$$

$$(17) \quad e^{(i)} = \sum_{n \geq 0} \varepsilon_2^n e_n^{(i)}(\xi, x_1)$$

L'équation (11) s'exprime avec ces variables par :

$$(18) \quad \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 e + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 e + \varepsilon_2 o(\varepsilon_2) = \frac{\partial^2 e}{\partial \xi^2}$$

La substitution de (17) donne au premier ordre, lorsqu'on fait tendre ε_2 vers 0 à ξ et x_1 fixés :

$$\frac{\partial^2 e_0^{(i)}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 e_0^{(i)}}{\partial \xi^2}$$

puis à l'ordre suivant :

$$(19) \quad \frac{\partial e_0^{(i)}}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 e_0^{(i)}}{\partial \xi^2} = 0$$

Les conditions qui permettent de résoudre cette équation s'obtiennent en "raccordant" $e_0^{(e)}$ et $e_0^{(i)}$ par un processus dans lequel interviennent les variables intermédiaires :

$$\bar{\xi} = \bar{x} = \phi(\varepsilon_2) \times \quad (\varepsilon_2 \ll \phi(\varepsilon_2) \ll 1)$$

On écrit que, à $\bar{\xi}$ et $\bar{x}$ fixés :

$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} e_0^{(e)} = \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} e_0^{(i)}$$

et l'on obtient :

$$(20) \quad e_0^{(i)}(\xi, x_1 = 0) = f(\xi)$$

La solution composite au premier ordre e_0 , obtenue en retranchant à la somme $e_0^{(e)} + e_0^{(i)}$ la limite intermédiaire $f(\xi)$, s'identifie à $e_0^{(i)}$ et s'obtient en résolvant (19), (20) :

$$(21) \quad e_0(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi\mu x}{E_1 T}}} \int_0^\infty f(v) \exp\left(-\frac{(t - x - v)^2}{\frac{2\mu x}{E_1 T}}\right) dv$$

Comme nous l'avons déjà remarqué au chapitre I, il semble y avoir ici un paradoxe, puisqu'à un instant donné t la solution approchée fait dépendre e_0 de toutes les valeurs de $f(v) = \sigma(0, v)$ y compris des valeurs futures ($v > t$). En fait ces dernières n'influencent pas la solution (21) dans son domaine de validité et du même coup la condition de repos initial est vérifiée dans celui-ci.

Et d'abord définissons, au moins approximativement, dans le quart de plan $\tilde{x} \geq 0, \tilde{t} \geq 0$, un domaine de validité $\tilde{\mathcal{D}}$ sur lequel la solution approchée (21) est une bonne approximation de la solution exacte. Pour cela on examine de quelle façon le terme intégral J de (9) tend vers zéro quand T tend vers l'infini. On définit à partir de G_1 un temps de relaxation moyen T_m :

$$\mu T_m \stackrel{\text{d}\tilde{e}f}{=} \int_0^\infty \mathcal{J}(G_1(\mathcal{J}) - E_1) d\mathcal{J}$$

où le deuxième membre représente le moment d'ordre 1 de G_1 . En effectuant une intégration par partie on peut exprimer le terme intégral J sous la forme :

$$J = - \frac{\mu T_m}{E_1 T^2} \frac{\partial \ddot{e}}{\partial x} - R$$

avec

$$R = \frac{1}{T^2} \int_0^t \frac{\partial \ddot{e}}{\partial x} (t - v) \left[\int_{T_v}^{\infty} (T_v - \varphi) \left(\frac{G_1(\varphi) - E_1}{E_1} \right) d\varphi \right] dv$$

L'équation (9) s'écrit alors :

$$\frac{\partial e}{\partial x} + \epsilon_2 \frac{\partial^2 e}{\partial t \partial x} - \epsilon_2 \frac{T_m}{T} \frac{\partial^3 e}{\partial t^2 \partial x} - R = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Par conséquent, pour valider les approximations faites, on peut estimer que T doit satisfaire la condition heuristique :

$$(22) \quad T \gg T_s = \text{Sup} \left(\frac{\mu}{E_1}, T_m \right)$$

et l'on supposera que les domaines donnés en (23) et (24), respectivement par rapport aux variables physiques et réduites, sont des domaines de validité de la solution (21) (*)

$$(23) \quad \tilde{\mathcal{D}}_D = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{t}) \text{ tel que } \tilde{x} > \tilde{L}_D \right\}$$

$$(24) \quad \mathcal{D}_D = \left\{ (x, t) \text{ tel que } x \geq L_D \right\}$$

On admettra également que les bornes L_D et $\tilde{L}_D = X L_D$ de $\mathcal{D}_D$ et $\tilde{\mathcal{D}}_D$ vérifient les conditions (25) et (26) déduites de (22) de façon heuristique :

$$(25) \quad \tilde{L}_D \gg \Omega T_s$$

$$(26) \quad L_D \gg \text{Sup} \left(\epsilon_2, \frac{T_m}{T} \right)$$

(*) La solution (21) est valable pour $x \geq L_D$ pour $x = 0$, mais pas pour les x compris entre 0 et L_D !

D'autre part il est bien connu qu'en théorie linéaire une discontinuité $[f]$ de la sollicitation au bord f se propage à la vitesse instantanée du son tout en s'atténuant avec un facteur d'amortissement exponentiel

$$e^{-\frac{\tilde{x}}{2 T_r \Omega_i}},$$

où :

$$(27) \quad T_r = - \frac{G_1(0)}{\dot{G}_1(0)}$$

$$(28) \quad \Omega_i = \sqrt{\frac{G_1(0)}{\rho_0}}$$

désignent un temps instantané de relaxation du matériau, et la vitesse instantanée du son. Or l'équation (21) montre que dans $\mathcal{D}_D$ un signal se propage à la vitesse différée du son tout en diffusant. Par conséquent, pour une raison de compatibilité, toute discontinuité de f doit être devenue négligeable dans $\mathcal{D}_D$, ce qui conduit à admettre que

$$\tilde{L}_D \geq 0 \quad (T_r \Omega_i).$$

Il est facile de voir que les valeurs futures de f n'influencent pas e_0 dans le domaine de validité $\mathcal{D}_D$. Ainsi peut-on remplacer dans la formule (21) le signe $\int_0^\infty$ par $\int_0^t$:

$$(29) \quad e_0(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi\mu x}{E_1 T}}} \int_0^t f(v) \exp\left(-\frac{(t-x-v)^2}{\frac{2\mu x}{E_1 T}}\right) dv$$

Remarque 1 :

Examinons le cas particulier où

$$f(t) = H(t) \quad (\text{fonction échelon unité de Heaviside})$$

Les équations (21), (29) et (32) fournissent successivement :

$$(30) \quad e_{(1)}(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{x-t}{\sqrt{2\epsilon_2 x}}$$

$$(31) \quad e_{(2)}(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{x-t}{\sqrt{2\epsilon_2 x}} - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{x}{2\epsilon_2}}$$

$$(32) \quad e_{(3)}(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \frac{x-t}{\sqrt{2\epsilon_2 t}}$$

Ces solutions approchées sont différentes à certains égards, mais on peut montrer qu'elles coïncident toutes sur un domaine tel que $\mathcal{D}_D$ défini en (24) et (26).

On peut constater sur le cas particulier de la remarque 1 qu'au voisinage du front $x = t$:

$$\frac{\partial e_{(1)}}{\partial x} = 0 \quad (x^{-1/2})$$

$$\frac{\partial^2 e_{(1)}}{\partial t \partial x} = 0 \quad (x^{-3/2})$$

$$\frac{\partial^2 u_{(1)}}{\partial t^2} = 0 \quad (x^{-1/2})$$

De sorte que dans la formule (6) il n'y a plus de raison de négliger le terme

$A = n e_{(1)} \frac{\partial e_{(1)}}{\partial x} = 0 \quad (n x^{-1/2})$ relativement à $B = \frac{\mu}{E_1 T} \frac{\partial^2 e_{(1)}}{\partial t \partial x} = 0 \quad (\epsilon_2 x^{-3/2})$ dès lors que $x = 0 \quad (\frac{\epsilon_2}{n})$. La solution linéaire échoue si l'on s'éloigne suffisamment du bord.

Problème non linéaire

Dans le problème non linéaire interviennent deux petits paramètres n et ϵ_2 . Si l'on fait tendre l'un vers 0, par exemple n , il faudra, pour que les expressions A et B dont on vient de parler soient de même ordre, prendre $T = 0 \quad (\frac{1}{n})$. En somme plus la non-linéarité est faible ($n \rightarrow 0$), plus loin du bord se produiront ses effets et l'échelle de temps adéquate pour "accompagner" ceux-ci est :

$$T = T^*/n = 0 \quad (\frac{1}{n})$$

Nous posons par conséquent pour $n \neq 0$: (*)

$$(33) \quad \epsilon_2 = \frac{\mu n}{E_1 T^*} \quad \text{de sorte que} \quad \frac{\epsilon_2}{n} = 0 \quad (1) \quad \text{quand} \quad n \rightarrow 0$$

(*) Cette condition autorise la nullité de ϵ_2 , sans pour autant que n soit nul ($\mu = 0$).

$$(34) \quad \xi = t - x$$

$$\underline{x}_1 = \eta x$$

Alors, compte tenu de

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial}{\partial \underline{x}_1} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}$$

l'équation (6) s'écrit après une dérivation par rapport à x (*) :

$$(35) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial}{\partial \underline{x}_1} \right)^2 e + \eta \left(\frac{\xi}{\eta} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial}{\partial \underline{x}_1} \right)^2 e + \eta \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial}{\partial \underline{x}_1} \right) \left[e \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial}{\partial \underline{x}_1} \right) e \right] + \eta o(\eta) = \frac{\partial^2 e}{\partial \xi^2}$$

Cherchons un développement intérieur sous la forme :

$$(36) \quad e^{(i)} = \sum_{n \geq 0} \eta^n e_n^{(i)}(\xi, \underline{x}_1)$$

La substitution dans (35) donne en identifiant les coefficients de η :

$$\frac{\partial^2 e_0^{(i)}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 e_0^{(i)}}{\partial \xi^2}$$

puis :

$$(37) \quad \frac{\partial e_0^{(i)}}{\partial \underline{x}_1} - \frac{E_2}{2E_1} e_0^{(i)} \frac{\partial e_0^{(i)}}{\partial \xi} = \frac{\epsilon_2}{2\eta} \frac{\partial^2 e_0^{(i)}}{\partial \xi^2}$$

C'est une équation de Burgers.

Ce résultat a été obtenu par Blacke [4] dans le cas d'un matériau dont le comportement est décrit à l'aide de paramètres cachés et par Bland [5] en prenant une loi de comportement du type :

$$(38) \quad \sigma = E_1 \dot{e} + E_2 \dot{e}^2 + \mu \ddot{e}$$

(*) En s'appuyant sur le fait qu'en général la fonction $G_2(t_1, t_2)$ tend exponentiellement vers E_2 quand $(t_1, t_2) \rightarrow (\infty, \infty)$, nous admettons pour trouver la formule (35) que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \int_0^t \frac{\partial \dot{e}}{\partial x}(t - u_1) \dot{e}(t - u_2) \frac{G_2(u_1, u_2) - E_2}{E_1} du_1 du_2 = 0$$

L'étude faite sur la loi de comportement de type intégral montre que le modèle (38) choisi par Bland présente le degré de généralité suffisant pour décrire au premier ordre les phénomènes se produisant loin du bord. Les coefficients figurant dans (38) sont dans ce cas donnés par (1).

Pour déterminer la condition à la limite qui permet le calcul de $e_0^{(i)}$ il convient d'utiliser un processus de raccordement avec la solution extérieure définie par un développement du type :

$$(39) \quad e^{(e)}(x, t) = \sum_{n \geq 0} \eta^n e_n^{(e)}(x, t)$$

Rappelons qu'au premier ordre la condition à la limite (7) s'écrit :

$$(40) \quad e_0^{(e)}(0, t) = f(t)$$

si bien que :

$$(41) \quad e_0^{(e)}(x, t) = f(t - x)$$

En prenant comme variables intermédiaires :

$$(42) \quad \begin{aligned} \bar{\xi} &= \xi = t - x \\ \bar{x} &= \phi(\eta) x \quad (\eta \ll \phi(\eta) \ll 1) \end{aligned}$$

on obtient la condition de raccordement :

$$(43) \quad e_0^{(i)}(\xi, \underline{x}_1 = 0) = f(\xi)$$

Là aussi la solution composite e_0 est confondue avec $e_0^{(i)}$.

Remarque 2 :

La formule (33) indique qu'il est équivalent d'utiliser un processus dans lequel $\epsilon_2 \rightarrow 0$. On pose alors :

$$(44) \quad x_1 = \epsilon_2 x, \quad \eta = \epsilon_2 \left(\frac{\eta}{\epsilon_2} \right) \text{ avec } \frac{\eta}{\epsilon_2} \neq 0(1) \text{ quand } \epsilon_2 \rightarrow 0$$

et l'on obtient à la place de (37) :

$$(45) \quad \frac{\partial e_0^{(i)}}{\partial x_1} - \frac{E_2}{2E_1} \frac{\eta}{\epsilon_2} e_0^{(i)} \frac{\partial e_0^{(i)}}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 e_0^{(i)}}{\partial \xi^2}$$

On remarque que l'on passe de (37) à (45) par une simple multiplication en $\frac{\eta}{\epsilon_2}$.

Si l'on pose $\eta = 0$ dans (45) on retrouve la formule (19). Cela montre que la solution de (45) (ou de (37)) contient celle du paragraphe précédent. Précisément elles sont confondues pas trop loin du bord puis divergent pour $x \geq 0$ ($\frac{\epsilon_2}{\eta}$) lorsque les effets cumulés de la nonlinéarité interviennent et ne sont pas suffisamment étouffés par la viscosité.

Remarque 3 :

Comme précédemment, on peut définir approximativement un domaine de validité $\tilde{\mathcal{D}}_D$ de la solution de l'équation (37) :

$$(46) \quad \tilde{\mathcal{D}}_D = \left\{ (\tilde{x}, \tilde{t}) \text{ tel que } \tilde{x} > \tilde{L}_D \right\}$$

avec $\tilde{L}_D$ vérifiant les conditions heuristiques :

$$(47) \quad \begin{aligned} \tilde{L}_D &\gg \sup \left(\frac{\mu}{E_1} \Omega, T_m \Omega \right) \\ \tilde{L}_D &\gg 0 \quad (\Omega, T_r) \\ \tilde{L}_D^2 &\gg \frac{\Omega^2 \mu_2}{E_1} \end{aligned}$$

où μ_2 est une quantité ayant la dimension d'une contrainte par un temps au carré :

$$(48) \quad \mu_2 = \int_0^\infty \int_0^\infty (G_2(\tau_1, \tau_2) - E_2) d\tau_1 d\tau_2$$

Remarque 4 :

La condition "initiale" (43) implique que la solution $e_0^{(i)}$ de (37) dépend à un instant donné t des valeurs futures de $f(\tau)$ ($\tau > t$). Cette dépendance est là aussi négligeable car elle n'influence pas la solution approchée dans le domaine de validité $\tilde{\mathcal{D}}_D$.

c) Une méthode d'échelles multiples

Les résultats précédents se retrouvent facilement en employant la méthode des échelles multiples.

Construisons un processus de perturbation dans lequel $\eta \rightarrow 0$. Posons comme en (33) :

$$(49) \quad \epsilon_2 = \eta \left(\frac{\epsilon_2}{\eta} \right) \quad \text{avec} \quad \frac{\epsilon_2}{\eta} = 0 \quad (1) \quad \text{quand} \quad \eta \rightarrow 0$$

L'équation (6) s'écrit, après une dérivation en x :

$$(50) \quad \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \eta \left(\frac{\epsilon_2}{\eta} \right) \frac{\partial^3 e}{\partial t \partial x^2} + \eta \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(e \frac{\partial e}{\partial x} \right) + \eta 0 (\eta) = \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$$

Introduisons les variables multiples :

$$(51) \quad \underline{x}_i = \eta^i x \quad (i \geq 0)$$

et cherchons une solution de (50) sous la forme :

$$(52) \quad e(x, t, \eta, \epsilon_2) = \sum_{i \geq 0} \eta^i e_i(t, \underline{x}_0, \underline{x}_1, \dots, \frac{\epsilon_2}{\eta})$$

On obtient après une substitution dans (50) et l'identification des coefficients de η^0, η^1 :

$$(53) \quad \frac{\partial^2 e_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 e_0}{\partial \underline{x}_0^2} = 0$$

$$(54) \quad \frac{\partial^2 e_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 e_1}{\partial \underline{x}_0^2} = 2 \frac{\partial^2 e_0}{\partial \underline{x}_0 \partial \underline{x}_1} + \frac{\epsilon_2}{\eta} \frac{\partial^3 e_0}{\partial t \partial \underline{x}_0^2} + \frac{E_2}{E_1} \frac{\partial}{\partial \underline{x}_0} \left(e_0 \frac{\partial e_0}{\partial \underline{x}_0} \right)$$

La condition à la limite (7) s'écrit :

$$(55) \quad f(t) = \sigma(0, t) = e(0, t) + 0(\eta) = e_0(t, \underline{x}_0 = 0, \underline{x}_1 = 0, \dots, \frac{\epsilon_2}{\eta}) + 0(\eta)$$

et donne au premier ordre :

$$(56) \quad e_0(t, \underline{x}_0 = 0, \underline{x}_1 = 0, \dots) = f(t)$$

L'équation (53) montre que e_0 est de la forme :

$$(57) \quad e_0(t, x_0, x_1) = e_0(\xi, x_1) \quad \text{avec } \xi = t - x_0$$

Pour éviter l'apparition de termes séculaires dans la résolution de (54), on pose que le deuxième membre est nul, d'où :

$$(58) \quad \frac{\partial e_0}{\partial x_1} + \frac{E_2}{2E_1} e_0 \frac{\partial e_0}{\partial x_0} = - \frac{\epsilon_2}{2\eta} \frac{\partial^2 e_0}{\partial t \partial x_0}$$

soit aussi, compte tenu de (57) et (56)

$$(59) \quad \frac{\partial e_0}{\partial x_1} - \frac{E_2}{2E_1} e_0 \frac{\partial e_0}{\partial \xi} = \frac{\epsilon_2}{2\eta} \frac{\partial^2 e_0}{\partial \xi^2}$$

$$(60) \quad e_0(\xi = t, x_1 = 0) = f(t)$$

Ces équations sont identiques à (37) et (43).

Naturellement si l'on prend comme variables multiples :

$$x_i = \epsilon_2^i x$$

et si l'on pose :

$$\eta = \epsilon \left(\frac{\eta}{\epsilon_2} \right)$$

on obtient l'équation (45).

5.3 L'ONDE INSTANTANEE

Le front d'onde sépare la zone perturbée de la zone de repos et il se déplace à la vitesse instantanée du son Ω_i s'il ne contient pas de choc, à une vitesse un peu différente de Ω_i dans le cas d'un choc faible. Les propriétés de l'onde au voisinage de ce front sont assez bien connues aussi se contente-t-on d'une étude rapide.

De nombreux travaux ont montré que l'évolution du front est gouvernée par la réponse instantanée du matériau, évolution que l'on peut d'ailleurs déterminer de manière exacte et explicite. Dans un voisinage du front il est logique de penser que seules les "composantes instantanées" de la loi de comportement générale (5.1.1) auront un rôle à jouer. Nous écrivons, dans le paragraphe a), cette dernière sous une forme mettant en valeur ces "composantes instantanées". Cette forme a déjà été utilisée par Huang et Lee [14] et Lubliner [15]. Elle donne la réponse du matériau de manière exacte au front et de façon approchée dans son voisinage.

Puis au paragraphe b) nous décrivons l'onde près du front en construisant un processus asymptotique dans lequel le paramètre perturbateur est l'éloignement par rapport au front de la théorie linéaire, éloignement que nous faisons tendre vers zéro (alors que précédemment c'était l'éloignement par rapport à l'origine que nous faisons tendre vers l'infini).

a) Calcul de la solution asymptotique

Expressions de la loi de comportement et de l'équation du mouvement adaptées à l'étude près du front

En intégrant par parties le terme $I = \int_0^{\tilde{t}} G_1 (\tilde{t} - \tau) \frac{\partial \tilde{e}}{\partial \tau} (\tau) d\tau$

qui figure dans la loi de comportement (5.1.1), on obtient, compte tenu du repos initial :

$$I = \hat{E}_1 \tilde{e}(\tilde{t}) + \int_0^{\tilde{t}} \dot{G}_1 (\tilde{t} - \tau) \tilde{e}(\tau) d\tau$$

avec

$$(1) \quad \hat{E}_1 = G_1(0)$$

En réitérant le procédé sur le terme $\int_0^{\tilde{t}} \dot{G}_1(\tilde{t} - \tau) \tilde{e}(\tau) d\tau$ ainsi que sur le terme non linéaire de (5.1.1), on obtient finalement :

$$(2) \quad \begin{aligned} \tilde{\sigma}(\tilde{t}, \tilde{x}) = & \hat{E}_1 \tilde{e}(\tilde{t}) + \frac{1}{2} \hat{E}_2 \tilde{e}^2 + \dot{G}_1(0) \int_0^{\tilde{t}} \tilde{e}(u) du \\ & + \int_0^{\tilde{t}} \ddot{G}_1(\tilde{t} - \tau) \left(\int_0^{\tau} \tilde{e}(u) du \right) d\tau + \tilde{e}(\tilde{t}) \int_0^{\tilde{t}} \frac{\partial G_2}{\partial \tilde{t}}(\tilde{t} - \tau, 0) \tilde{e}(\tau) d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{t}} \int_0^{\tilde{t}} \frac{\partial^2 G_2}{\partial \tau_1 \partial \tau_2}(\tilde{t} - \tau_1, \tilde{t} - \tau_2) \tilde{e}(\tau_1) \tilde{e}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

avec

$$(3) \quad \hat{E}_2 = G_2(0, 0)$$

Rappelons les définitions :

$$(4) \quad \Omega_i = \left(\frac{\hat{E}_1}{\rho_0} \right)^{1/2}$$

$$(5) \quad T_r = - \hat{E}_1 / \dot{G}_1(0)$$

de la vitesse instantanée du son, et d'un temps de relaxation "instantané" du matériau.

Puis, après avoir posé :

$$(6) \quad \eta = \sup_{\tilde{t}} \frac{|F(\tilde{t})|}{\hat{E}_1}$$

opérons dans (2) les changements de variables et de fonctions suivants (*) :

$$(7) \quad \begin{aligned} \tilde{x} &= \Omega_i T x & \tilde{t} &= T t \\ \tilde{u} &= \Omega_i T u & \tilde{\sigma} &= \eta \hat{E}_1 \sigma \\ \tilde{e} &= \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = \eta \frac{\partial u}{\partial x} = \eta e \end{aligned}$$

(*) On utilise aussi dans la suite la notation $X = \Omega_i T$ pour désigner l'échelle de longueur associée à T .

Cela donne :

$$(8) \quad \sigma = e + \frac{1}{2} \eta \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_1} e^2 - \epsilon_1 \int_0^t e(\tau) d\tau + 0(\eta, \epsilon)$$

où

$$(9) \quad \epsilon_1 = \frac{T}{T_r}$$

Nota :

Pour ne pas alourdir les notations, on utilise sans inconvénient majeur les lettres x , t , σ , e , η , ϵ , f etc employées dans la section 5.2 dans un contexte un peu différent.

L'équation du mouvement (5.2.5) et la condition à la limite (5.1.2) prennent la forme, compte tenu de (7) et (8) :

$$(10) \quad \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \eta \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_1} \frac{\partial}{\partial x} \left(e \frac{\partial e}{\partial x} \right) - \epsilon_1 \int_0^t \frac{\partial^2 e}{\partial x^2}(\tau) d\tau + 0(\eta, \epsilon_1) = \frac{\partial^2 e}{\partial t^2}$$

$$(11) \quad \sigma(0, t) = \frac{F(T, t)}{\eta \hat{E}_1} \stackrel{\text{déf}}{=} f(t)$$

Le processus asymptotique

On pose :

$$x_i = \epsilon_1^i x \quad (i \geq 0), \quad \eta = \epsilon_1 \left(\frac{\eta}{\epsilon_1} \right)$$

et l'on suppose que

$$\left(\frac{\eta}{\epsilon_1} \right) = 0(1) \text{ quand } \epsilon_1 \rightarrow 0.$$

Après substitution du développement

$$(12) \quad e(t, x, \epsilon, \eta) = \sum_{i \geq 0} \epsilon_1^i e_i(t, x_0, x_1, \dots, \frac{\eta}{\epsilon})$$

dans l'équation (10) et identification des coefficients de ϵ_1^1 , il vient :

$$(13) \quad \frac{\partial^2 e_0}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 e_0}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 e_0}{\partial x_0 \partial x_1} + \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_1} \frac{\eta}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial x_0} (e_0 \frac{\partial e_0}{\partial x_0}) - \int_0^t \frac{\partial^2 e_0}{\partial x_0^2} (u) du = 0$$

La méthode des échelles multiples montre que e_0 est une fonction de la forme :

$$(14) \quad e_0(t, x_0, x_1) = e_0(\xi, x_1) \quad (\xi = t - x_0)$$

qui vérifie de plus l'équation :

$$(15) \quad \frac{\partial e_0}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_1} \frac{\eta}{\epsilon} e_0 \frac{\partial e_0}{\partial \xi} + \frac{1}{2} e_0 = 0$$

D'après (8) et (12) la condition à la limite (11) s'écrit au premier ordre :

$$(16) \quad e_0(t, x_0 = 0, x_1 = 0) = e_0(\xi = t, x_1 = 0) = f(t)$$

Nous avons vu au chapitre IV que la caractéristique $\mathcal{C}_\alpha$ de l'équation (15) passant par le point de coordonnées $\xi = \alpha, x_1 = 0$ a pour équation :

$$(17) \quad x_1 \rightarrow \xi(x_1) = \alpha - \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_1} \frac{\eta}{\epsilon} f(\alpha) (1 - e^{-\frac{x_1}{2}})$$

La solution e_0 de (15) et (16) est donnée par

$$(18) \quad e_0(\xi, x_1) = e^{-\frac{x_1}{2}} f(\alpha)$$

où α est déterminé implicitement en fonction de ξ et x_1 par (17).

Passons maintenant à l'étude des chocs qui apparaissent lorsque les caractéristiques sont amenées à se couper.

b) Etude des chocs

Dans une première étape nous allons déterminer les points du plan (ξ, x_1) où prennent naissance des chocs, puis nous étudierons l'évolution de ces chocs. Tous les calculs sont effectués en fonction des variables x_1 et ξ ,

mais les relations $\xi = t - x$ et $x_1 = \epsilon_1 x$ nous font passer immédiatement aux résultats exprimés en fonction de x et t .

Formation d'un choc

L'enveloppe $\mathcal{E}$ des caractéristiques $\mathcal{C}_\alpha$ ($\alpha \geq 0$) est une limite du domaine $\mathcal{D}$ du quart de plan ($\xi \geq 0, x_1 \geq 0$) dans lequel les $\mathcal{C}_\alpha$ ne se coupent pas. Pour tout (ξ, x_1) appartenant à $\mathcal{D}$, il existe donc un α et un seul tel que (ξ, x_1) appartiennent à $\mathcal{C}_\alpha$. L'application bijective G :

$$G : \mathcal{D} \rightarrow G(\mathcal{D})$$

$$(\xi, x_1) \rightarrow (\alpha, x_1)$$

définit donc dans $\mathcal{D}$ un changement de coordonnées.

L'équation implicite de l'enveloppe $\mathcal{E}$, en coordonnées (α, x_1) :

$$1 = \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_1} \frac{\eta}{\epsilon_1} f'(\alpha) \left(1 - e^{-\frac{x_1}{2}}\right)$$

s'obtient en écrivant que $\mathcal{E}$ est constituée de l'ensemble des points (α, x_1) qui vérifient simultanément l'équation (17) :

$$\xi = \xi(\alpha, x_1) = \alpha - \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_1} \frac{\eta}{\epsilon_1} f(\alpha) \left(1 - e^{-\frac{x_1}{2}}\right)$$

et la relation :

$$\xi = \xi(\alpha + d\alpha, x_1) = \alpha + d\alpha - \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_1} \frac{\eta}{\epsilon_1} f(\alpha + d\alpha) \left(1 - e^{-\frac{x_1}{2}}\right)$$

L'équation (20) fournit une condition suffisante de formation d'un choc qui s'énonce de la façon suivante : la caractéristique aboutit à un choc s'il existe un x_1 tel que (20) soit vérifié.

L'expression de (20) dans le cas non dissipatif ($\epsilon_1 = 0$) s'obtient en faisant tendre ϵ_1 vers zéro :

$$1 = \frac{\hat{E}_2}{2 \hat{E}_1} \eta f'(\alpha) x$$

Par suite, la caractéristique $\mathcal{C}_\alpha$ aboutit à un choc dès l'instant où $\hat{E}_2 f'(\alpha)$ est positif.

Sur la figure 2 nous comparons la formation d'un choc élastique et viscoélastique (au voisinage du front), dans l'hypothèse $E_2 f'(\alpha) > 0$.

Posons $I = \inf_{\alpha} \left(\frac{\hat{E}_1}{\hat{E}_2} \frac{\epsilon_1}{\eta} \frac{1}{f'(\alpha)} \right)$. Ce n'est que sous la condition $I < 1$

qu'il y a formation d'un choc viscoélastique. On notera également que la dissipation exerce un effet retardé sur la formation d'un choc, puisque :

$$x_{10} \text{ visc.} > x_{10} \text{ élast.}$$

Enfin, sur la figure 3, nous avons représenté dans le plan (t, x) l'allure des courbes caractéristiques dans les quatre cas où un choc peut se former.

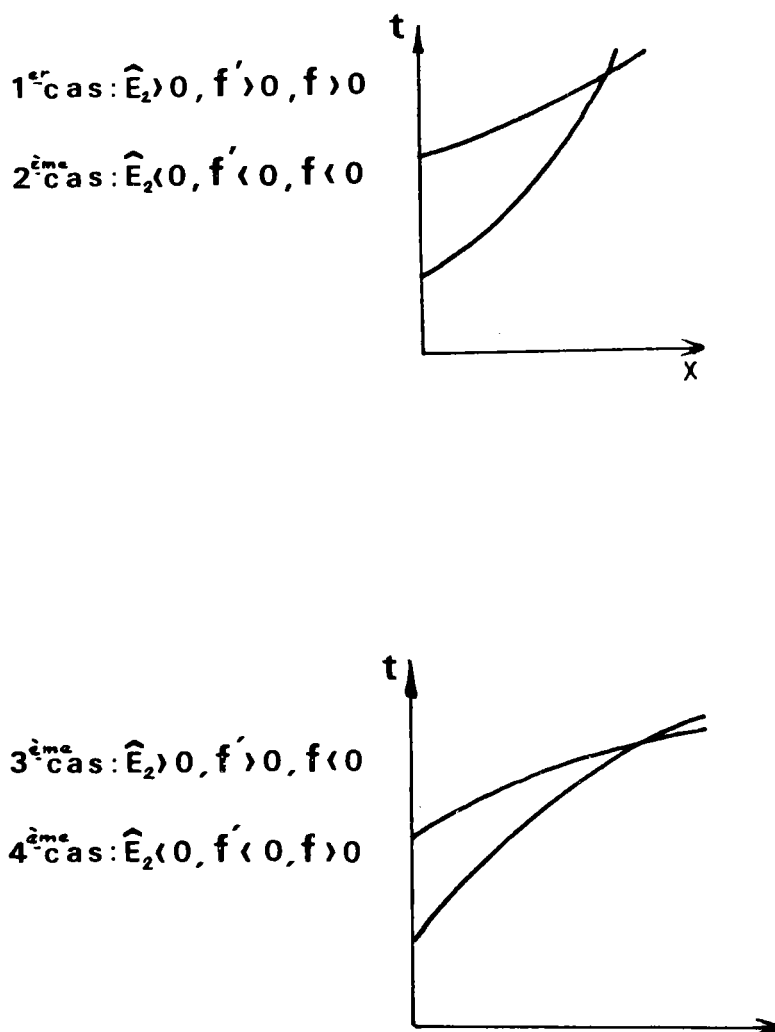


Fig:3

Allure des courbes caractéristiques

Evolution du choc

Dans ce qui précède, nous avons vu comment localiser le début d'un choc. Intéressons-nous maintenant à son évolution. Considérons dans le plan (ξ, x_1) un choc dont le point de départ est (α_0, x_{10}) . Notons $\hat{\xi}(x_1)$ la valeur de ξ telle que $(\hat{\xi}(x_1), x_1)$ soit un point situé sur la ligne de choc (figure 4), et $\mathcal{C}_{\alpha^+}$, $\mathcal{C}_{\alpha^-}$ les deux caractéristiques aboutissant en ce point.

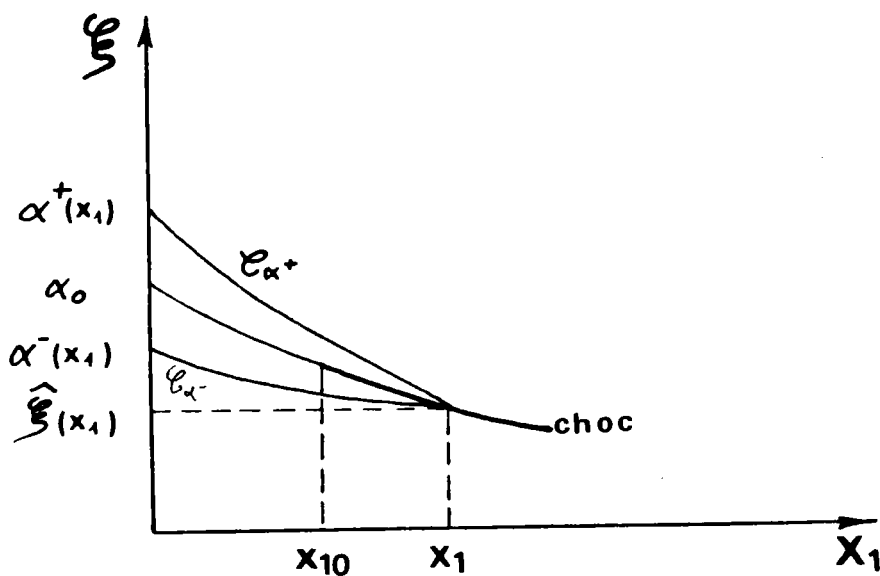


Fig: 4

Ainsi, à tout point du choc de coordonnée $x_1 > x_{10}$, peut-on associer deux nombres $\alpha^+(x_1)$ et $\alpha^-(x_1)$.

Ecrivant que le point $(\hat{\xi}(x_1), x_1)$ est situé sur les caractéristiques $\mathcal{C}_{\alpha^+}(x_1)$ et $\mathcal{C}_{\alpha^-}(x_1)$, on obtient, compte tenu de (17) :

$$(23) \quad \hat{\xi}(x_1) = \alpha^+(x_1) - \frac{\eta}{\epsilon_1} \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_1} f(\alpha^+(x_1)) (1 - e^{-\frac{x_1}{2}})$$

$$(24) \quad \hat{\xi}(x_1) = \alpha^-(x_1) - \frac{\eta}{\epsilon_1} \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_1} f(\alpha^-(x_1)) (1 - e^{-\frac{x_1}{2}})$$

Une troisième équation est nécessaire pour calculer les fonctions inconnues $\hat{\xi}(x_1)$, $\alpha^+(x_1)$ et $\alpha^-(x_1)$. Celle-ci s'obtient à partir de la loi de conservation de la quantité de mouvement [11]. Elle exprime que la vitesse du choc est égale à la moyenne des célérités soniques amont et aval, résultat classique pour les chocs faibles (formule (3) de l'annexe 4.A.1) :

$$(25) \quad \frac{d\hat{\xi}}{dx_1} = -\frac{1}{4} \frac{\eta}{\epsilon_1} \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_1} (f(\alpha^+(x_1)) + f(\alpha^-(x_1))) e^{-\frac{x_1}{2}}$$

Si l'on retranche (25) à la moyenne arithmétique des équations (23) et (24) dérivées par rapport à x_1 , il vient :

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{d\alpha^+}{dx_1} \left[1 - \frac{\eta}{\epsilon_1} \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_1} f'(\alpha^+) (1 - e^{-\frac{x_1}{2}}) \right] \\ + \frac{d\alpha^-}{dx_1} \left[1 - \frac{\eta}{\epsilon_1} \frac{\hat{E}_2}{\hat{E}_1} f'(\alpha^-) (1 - e^{-\frac{x_1}{2}}) \right] = 0 \end{aligned}$$

En faisant la différence des équations (23) et (24), on peut calculer $1 - e^{-\frac{x_1}{2}}$ en fonction de α^+ et α^- , puis on élimine cette expression dans (26), et l'on obtient comme dans [1] :

$$(27) \quad \left(\frac{d\alpha^+}{dx_1} + \frac{d\alpha^-}{dx_1} \right) (f(\alpha^+) - f(\alpha^-)) = (\alpha^+ - \alpha^-) (f'(\alpha^+) \frac{d\alpha^+}{dx_1} + f'(\alpha^-) \frac{d\alpha^-}{dx_1})$$

Si l'on pose

$$(28) \quad B(\alpha^+, \alpha^-) = \int_{\alpha^-}^{\alpha^+} f(s) ds - \frac{1}{2} (f(\alpha^+) - f(\alpha^-)) (\alpha^+ - \alpha^-),$$

on voit facilement que (27) est équivalent à

$$(29) \quad \frac{d}{dx_1} B(\alpha^+(x_1), \alpha^-(x_1)) = 0,$$

d'où

$$(30) \quad B = 0$$

puisque au point de formation du choc on a :

$$x_1 = x_{10}, \alpha = \alpha_0.$$

L'équation (30) est la propriété bien connue de conservation des aires [7] qui fournit une représentation géométrique permettant la construction aisée d'un choc. Cette propriété n'est valable que dans un voisinage du front viscoélastique. Elle est classique dans le cas non dissipatif.

c) Conclusion

Les résultats relatifs à l'onde instantanée sont un prolongement de ceux de Varley et Rogers [1] (ondes de hautes fréquences), dans le cas d'une excitation au bord de nature quelconque. Les méthodes employées sont différentes, puisque le paramètre de perturbation dans [1] est une fréquence que l'on fait tendre vers l'infini. De plus ces auteurs font leur étude avec les variables (α, x) où α est une variable caractéristique.

On peut définir, comme au chapitre I, de façon grossière un domaine de validité $\tilde{\mathcal{D}}_I$ dans le plan des variables physiques $(\tilde{x}, \tilde{t})$ (ou $\mathcal{D}_I$ dans le plan des variables réduites) pour l'onde instantanée :

$$(31) \quad \tilde{\mathcal{D}}_I = \{(\tilde{x}, \tilde{t}) \mid |\tilde{t} - \tilde{x}| \leq \tilde{L}_I\}$$

$$(32) \quad \mathcal{D}_I = \{(x, t) \mid |t - x| \leq L_I\}$$

avec

$$33) \quad \tilde{L}_I < \tau_r \quad \Omega_i \quad \text{et} \quad L_I \ll \frac{1}{\epsilon}$$

Bien sûr ceci ne définit pas le domaine de validité optimal, c'est-à-dire le plus grand domaine sur lequel l'onde instantanée est une bonne représentation de la réalité. Ainsi lorsque la sollicitation est périodique et de haute fréquence, (cas examiné en [1]), l'onde instantanée est valable dans le quart de plan tout entier.

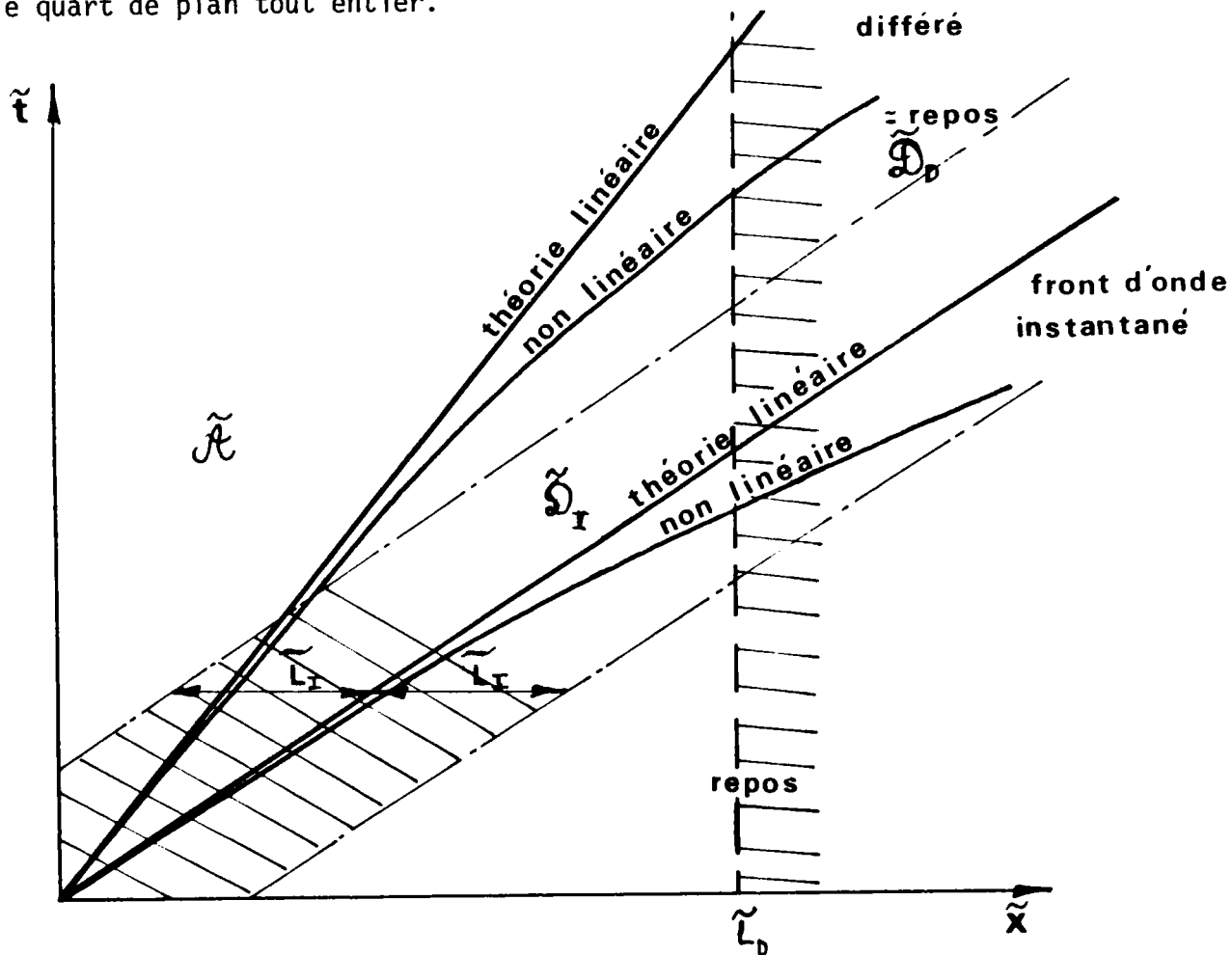


Fig: 5

La solution n'a pas été décrite dans le domaine (figure 5) constitué des points $(\tilde{x}, \tilde{t})$ qui se trouvent derrière le front d'onde et à l'extérieur de $\mathcal{D}_I$ et $\mathcal{D}_D$. Le matériau est alors sollicité à la fois de façon instantanée à cause de la proximité du bord et de façon différée parce que les temps sont grands et que le corps se souvient depuis l'instant initial de toutes les sollicitations imposées au bord.

S'agissant de l'évolution d'un choc, on peut souligner qu'au voisinage du front un choc est amené à disparaître rapidement par amortissement exponentiel. Mais il n'en apparaît pas moins au sein de l'onde différée une "structure de choc stationnaire" donc il est possible d'entreprendre l'étude au moyen de l'équation de Burgers.

L'existence d'un choc au voisinage du front est liée à la propriété d'élasticité instantanée du matériau. Loin du bord, ce sont les propriétés "visqueuses" qui structurent le choc.

5.4 THERMOELASTICITE NON LINEAIRE

Dans une intéressante publication [16], Johnson a étudié la propagation d'un échelon de contrainte dans un corps thermoélastique non linéaire. Le comportement du matériau est décrit par une théorie du second ordre [17], et par conséquent la perturbation doit être supposée de faible amplitude. Dans ces conditions Johnson montre que, suffisamment loin du bord, l'échelon de contrainte est modulé par une équation de Burgers.

On se propose ici, en prenant les mêmes équations fondamentales que Johnson, d'étudier la réponse d'un corps thermoélastique soumis à une sollicitation de type thermique. Auparavant, le cas de la sollicitation de type mécanique (cadre dans lequel s'inscrit le travail de Johnson) fait l'objet d'un bref exposé.

On ne s'intéresse ici qu'à l'étude de l'onde différée. Il n'est donc pas nécessaire de tenir compte du fait que la chaleur se propage à vitesse finie.

a) Les équations du problème

Dans une théorie du second ordre, le comportement d'un matériau thermoélastique non linéaire est décrit par les équations [16] :

$$(1) \quad \begin{aligned} \tilde{\sigma} = & (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \tilde{e} - \beta \tilde{\theta}_0 (\tilde{S} - \tilde{S}_0) / C \\ & + \frac{1}{2} [3(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) + \nu] \tilde{e}^2 + \rho_0 \tilde{C}_1 \tilde{e} (\tilde{S} - \tilde{S}_0) + \frac{1}{2} \rho_0 \tilde{C}_2 (\tilde{S} - \tilde{S}_0)^2 \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} \tilde{\theta} - \tilde{\theta}_0 = & \tilde{\theta}_0 (\tilde{S} - \tilde{S}_0) / C - \beta \tilde{\theta}_0 \tilde{e} / (\rho_0 C) + \frac{1}{2} \tilde{C}_1 \tilde{e}^2 \\ & + \tilde{C}_2 \tilde{e} (\tilde{S} - \tilde{S}_0) + \frac{1}{2} \tilde{C}_3 (\tilde{S} - \tilde{S}_0)^2 \end{aligned}$$

Les notations sont identiques à celles du chapitre II ($\tilde{\sigma}$: contrainte, $\tilde{e}$: déformation unitaire, $\tilde{\theta}$: température, $\tilde{S}$: entropie ...). Les coefficients $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, $\tilde{C}_3$ sont des constantes, et ν est un coefficient d'élasticité du second ordre. L'indice zéro fait référence à l'état initial.

La conduction de la chaleur est gouvernée par la loi de Fourier :

$$(3) \quad \tilde{q} = - [k + \tilde{k}_1 \tilde{e} + \tilde{k}_2 (\tilde{S} - \tilde{S}_0)] \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}}$$

Les lois de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie s'écrivent :

$$(4) \quad \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{x}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2}$$

$$(5) \quad \rho_0 \tilde{\theta} \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{t}} = - \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{x}}$$

Effectuons le changement de variables et de fonctions suivant :

$$(6) \quad \tilde{x} = \bar{\Omega} T x \quad ; \quad \tilde{t} = T t$$

$$\tilde{u} = \eta \bar{\Omega} T u \quad ; \quad \tilde{e} = \eta e$$

$$(7) \quad \tilde{S} - \tilde{S}_0 = \eta (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) C S / \beta \tilde{\theta}_0 \quad ; \quad \sigma = \eta (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \sigma$$

$$\tilde{\theta} - \tilde{\theta}_0 = \eta (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \theta / \beta \quad ; \quad \tilde{q} = \eta (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) k q / \beta \bar{\Omega} T$$

où $\bar{\Omega} = \sqrt{\frac{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\rho_0}}$ est la célérité isentropique du son, T une échelle de temps

arbitraire et η un petit paramètre représentatif de la faible non linéarité du problème.

Les équations (1), (2) et (3) s'écrivent alors sous forme réduite :

$$(8) \quad \begin{aligned} \sigma &= e - S + \frac{1}{2} \eta \left(3 + \frac{\nu}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right) e^2 + \eta C_1 e S + \frac{1}{2} \eta C_2 S^2 \\ \theta &= S - \bar{\epsilon} e + \frac{1}{2} \eta \bar{\epsilon} C_1 e^2 + \eta \bar{\epsilon} C_2 e S + \frac{1}{2} \eta C_3 S^2 \end{aligned}$$

$$q = - (1 + \eta k_1 e + \eta k_2 S) \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

où $\bar{\epsilon}$ est la constante de couplage thermomécanique définie en (2.3.40).

En combinant ces équations avec celles du mouvement et de l'énergie, on obtient les équations fondamentales suivantes :

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \eta \left\{ \left(3 + \frac{\nu}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(e \frac{\partial e}{\partial x} \right) + C_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (eS) \right. \\ \left. + C_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial S}{\partial x} \right) \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad & \frac{\partial S}{\partial t} \left\{ 1 + \eta (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) (S - \bar{\epsilon}e) / (\beta \tilde{\theta}_0) \right\} = \frac{\bar{T}_c}{T} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \bar{\epsilon} \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} \right) \\
 & + \eta \frac{\bar{T}_c}{T} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \bar{\epsilon} (C_1 - k_1) e \frac{\partial e}{\partial x} + (\bar{\epsilon} C_2 + k_1) e \frac{\partial S}{\partial x} \right. \\
 & \left. + \bar{\epsilon} (C_2 - k_2) S \frac{\partial e}{\partial x} + (C_3 + k_2) S \frac{\partial S}{\partial x} \right\}
 \end{aligned}$$

On a introduit, comme au chapitre II, un temps caractéristique du matériau :

$$11) \quad \bar{T}_c = \frac{k}{C (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})}$$

On s'intéresse dans la suite à l'étude de l'onde différée ; on pourra donc considérer que :

$$12) \quad \epsilon_2 = \frac{\bar{T}_c}{T}$$

est un petit paramètre.

Lorsque l'excitation au bord porte uniquement sur une variable de "type mécanique", contrainte, déformation, déplacement, (resp. de type thermique), nous dirons que le problème est de type mécanique (resp. de type thermique).

b) Sollicitation de type mécanique

Supposons par exemple que la contrainte au bord est une fonction donnée du temps, alors que la température est maintenue constante :

$$\begin{aligned}
 13) \quad & \tilde{\sigma}(0, \tilde{t}) = F(\tilde{t}) \\
 & \tilde{\theta}(0, \tilde{t}) = \tilde{\theta}_0
 \end{aligned}$$

Le petit paramètre η est alors défini par :

$$14) \quad \eta = \sup_{\tilde{t} \geq 0} |F(\tilde{t})| / (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})$$

De la sorte, les conditions à la limite (13) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
 15) \quad & \sigma(0, t) = f(t) \quad \text{avec } |f(t)| \leq 1 \\
 & \theta(0, t) = 0
 \end{aligned}$$

On pose :

$$(16) \quad \eta = \epsilon_2 \left(\frac{\eta}{\epsilon_2} \right), \quad x_i = \epsilon_2^i x$$

et l'on définit l'onde quasi-élastique (Q.E.) par son développement :

$$(17) \quad \begin{aligned} e(x, t) &= \sum_{i \geq 0} \epsilon_2^i e_i(t, x_0, x_1, \dots) \\ S(x, t) &= \sum_{i \geq 0} \epsilon_2^i S_i(t, x_0, x_1, \dots) \end{aligned}$$

Il est facile de montrer que l'entropie est nulle au premier ordre :

$$(18) \quad S_0 = 0$$

et que

$$(19) \quad e_0(t, x_0, x_1) = e_0(\xi, x_1)$$

avec

$$(20) \quad \xi = t - x_0$$

La dépendance de e_0 par rapport à la variable lente x_1 est gouvernée par l'équation de Burgers :

$$(21) \quad \frac{\partial e_0}{\partial x_1} - \frac{\bar{\epsilon}}{2} \frac{\partial^2 e_0}{\partial \xi^2} - \frac{\eta}{2\epsilon_2} \left(3 + \frac{v}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right) e_0 \frac{\partial e_0}{\partial \xi} = 0$$

à résoudre sous la condition "initiale" :

$$(22) \quad e_0(\xi, x_1 = 0) = f(\xi)$$

La solution approchée que nous venons de calculer ne vérifie pas en toute rigueur la condition à la limite (15). Toutefois, l'expérience acquise dans le cadre du problème linéaire, nous autorise à penser qu'en dehors d'une couche limite à l'origine, l'onde Q.E. donne en première approximation la déformation e .

c) Sollitation de type thermique :

Considérons un problème de type thermique, par exemple celui du chapitre III où l'on se donnait un échelon de flux de chaleur à l'extrémité, libre de contrainte, d'un massif thermoélastique.

Les conditions à la limite peuvent s'écrire sous forme réduite :

$$\sigma(0, t) = 0$$

$$q(0, t) = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_2}} H(t)$$

où H est la fonction de Heaviside.

Nous allons montrer qu'au premier ordre la solution de ce problème faiblement non linéaire est quasistatique, tout comme dans le cas linéaire. De plus nous déterminerons l'équation non linéaire qui régit l'évolution de l'entropie S .

Nous posons encore :

$$\eta = \epsilon_2 \left(\frac{\eta}{\epsilon_2} \right)$$

et nous introduisons, comme dans le problème linéaire les variables multiples :

$$x_i = \epsilon_2^{-1/2} + i x$$

ainsi que les développements :

$$e = \sum_{i \geq 0} \epsilon_2^i e_i(x_0, x_1, \dots, \frac{\eta}{\epsilon_2})$$

$$S = \sum_{i \geq 0} \epsilon_2^i S_i(x_0, x_1, \dots, \frac{\eta}{\epsilon_2})$$

représentatif de l'onde quasi-thermique (Q.T.).

Substituons (6) dans (9) et (10) et identifions les premières puissances de ϵ_2 . Il vient, au premier ordre :

$$-\frac{\partial^2 e_0}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 S_0}{\partial x_0^2} = 0$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 S_0}{\partial x_0^2} + \epsilon \frac{\partial^2 e_0}{\partial x_0^2} = 0$$

REFERENCES DU CHAPITRE V

- |1| VARLEY E., ROGERS T.G., The propagation of high frequency, finite acceleration pulses and shocks in viscoelastic materials, Proc. Roy. Soc., 296, 498-518, 1967.
- |2| SEYMOUR B.R. et VARLEY E., High frequency, periodic disturbances in dissipative systems, Proc. Roy. Soc., 314, 387-415, 1970.
- |3| MORTELL M.P. et SEYMOUR B.R., Pulse propagation in a nonlinear viscoelastic rod of finite length, SIAM J. appl. Math., 22, 209-224, 1972.
- |4| BLAKE T.R., Plane longitudinal waves of small amplitude in a nonlinear viscoelastic material. Acta mechanica, 17, 211-226, 1973.
- |5| BLAND D.R., On shock structure in a solid, J. Inst. Math. Applic., 1, 56-75, 1965.
- |6| MOLINARI A., Onde viscoélastique non linéaire de faible amplitude, Arch. Mech., n° 3, 1979.
- |7| WHITHAM G.B., Linear and nonlinear waves, John Wiley publ., 1974.
- |8| LANDAU I.D., On shock waves at large distances from the place of their origin, Soviet J. of phys., 9, 496-500, 1945.
- |9| GURTIN M.E. et STERNBERG E., On the linear theory of viscoelasticity, Arch. Rat. Mech. Anal., 11, 291-356, 1962.
- |10| BRUN L., L'onde simple viscoélastique linéaire, J. de Mécanique, 13, 449-498, 1974.
- |11| GERMAIN P., Shock waves, jump relations and structure, Advances in appl. mech., 12, 1972.
- |12| VARLEY E., Acceleration fronts in viscoelastic materials, Arch. Rat. Mech. Anal., 19, 215-225, 1965.
- |13| COLEMAN B.D. et GURTIN M.E., On the growth and decay of one dimensional acceleration waves, Arch. Rat. Mech. Anal., 19, 239-265, 1965.

- |14| HUANG N.C. et LEE E.H., Nonlinear viscoelasticity for short time ranges, J. Appl. Mech., 33, 313-321, 1966.
- |15| LUBLINER J., Short-time approximations in nonlinear viscoelasticity, Int. J. Solids Structures, 3, 513-520, 1967.
- |16| JOHNSON A.F., Pulse propagation in heat-conducting elastic materials, J. Mech. Phys. Solids, 23, 55-75, 1975.
- |17| CHADWICK P. et SEET L.T.C., Trends in Elasticity and Thermoelasticity, (R.E. Czarnota - Bojarski, M. Sokolowski, H. Zorski editeurs) p 31, Walters-Noordhoff, Groningen.

CHAPITRE VI

SYSTEMES DISSIPATIFS

6.1 INTRODUCTION

L'évolution d'une perturbation dans un milieu dissipatif est souvent gouvernée par un système quasilinéaire du premier ordre d'équations aux dérivées partielles de la forme :

$$(1) \quad \frac{\partial \tilde{\underline{u}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\underline{A}}(\tilde{\underline{u}}) \frac{\partial \tilde{\underline{u}}}{\partial \tilde{x}} = \tilde{\underline{C}}(\tilde{\underline{u}})$$

où les n composantes du vecteur $\tilde{\underline{u}} = (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$ sont des paramètres, mesurables ou bien cachés, qui caractérisent l'évolution du système. Comme précédemment on désigne par $\tilde{t}$ et $\tilde{x}$ le temps et l'abscisse. Nous supposerons que le système (1) est hyperbolique.

Le problème est en général non linéaire car la matrice $\tilde{\underline{A}}$ et le vecteur $\tilde{\underline{C}}$ dépendent de $\tilde{\underline{u}}$. Il est de nature dissipative si $\tilde{\underline{C}}$ est un vecteur non nul.

Il y a de multiples exemples de problèmes dynamiques gouvernés par des équations du type (1) : viscoélasticité, thermoélasticité, viscoplasticité, transmission dans les lignes électriques, gaz réactifs, ondes marines, atmosphères à température variable etc

On traite ici de la propagation d'une onde plane dans un demi espace $\tilde{x} \geq 0$ homogène. Le cas du matériau non homogène ($\tilde{\underline{A}}(\tilde{\underline{u}}, \tilde{x})$ et $\tilde{\underline{C}}(\tilde{\underline{u}}, \tilde{x})$ dépendent alors explicitement de $\tilde{x}$) se traiterait sans grandes difficultés supplémentaires. Les ondes non planes sont étudiées au chapitre VII.

Les seuls effets dissipatifs pris en compte ici sont donc ceux qui résultent de la dégradation de l'énergie mécanique par frottement interne, conduction thermique etc ...

L'onde de faible amplitude est étudiée dans la section 6.2 en faisant usage de la méthode de l'échelle variable et de la notion d'onde progressive, Germain [1]. Ces résultats ont fait l'objet de la note [2]. Puis, dans la section 6.3, on donne des applications à la thermoélasticité et à la viscoélasticité non linéaires.

L'objet de la section 6.4 est d'étudier les perturbations de forte amplitude. On utilise les notions d'onde progressive et d'invariant de Riemann, pour calculer l'onde près du front. La méthode est une transposition de celle utilisée par Seymour et Mortell [3] dans l'étude des ondes de haute fréquence.

Les résultats obtenus dans l'étude de l'onde différée sont moins généraux. On se limite à l'analyse d'un cas particulier.

6.2 L'ONDE DE FAIBLE AMPLITUDE

La solution $\tilde{u}$ est supposée de faible amplitude. En admettant que $\tilde{C}(0) = 0$, et que $\tilde{C}(u)$ peut se développer, au voisinage de zéro, en série de Taylor relativement à $\tilde{u}$, le système (6.1.1) peut s'écrire sous la forme (*) :

$$(1) \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{A}(\tilde{u}) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = \tilde{B}(\tilde{u}) \tilde{u}$$

où $\tilde{B}(\tilde{u})$ est une matrice carrée de dimension n .

L'hypothèse de faible amplitude permet en général d'introduire un petit paramètre η sans dimension et d'écrire chacune des composantes $\tilde{u}_i$ du vecteur $\tilde{u}$ sous la forme :

$$(2) \quad \tilde{u}_i = \eta k_i u_i \quad (\text{sans sommation sur } i)$$

où les k_i sont des constantes qui dépendent des propriétés du matériau et qui sont de même dimension que $\tilde{u}_i$.

Introduisons les variables réduites x et t :

$$(3) \quad \tilde{t} = T^* t, \quad \tilde{x} = \Omega T^* x$$

Dans ce chapitre nous notons échelles de temps et de longueur par T^* et X^* , car T et X désignerons des variables. Ω est une célérité pour le moment arbitraire.

Moyennant les transformations (2) et (3), le système (1) peut en général s'écrire sous la forme :

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \underline{A}(\eta u) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{T^*}{T_r} \underline{B}(\eta u) u$$

où T_r est un temps de relaxation caractéristique du matériau.

a) La k-onde progressive instantanée

Pour étudier l'onde près du front on introduit le petit paramètre

$$(5) \quad \epsilon_1 = \frac{T^*}{T_r}$$

$$(*) \quad \tilde{C}(\tilde{u}) = [\tilde{C}_{,\tilde{u}}(0) + \frac{1}{2} \tilde{C}_{,\tilde{u}\tilde{u}}(0) \tilde{u} + \dots] \tilde{u}$$

les variables multiples

$$(6) \quad x_i = \varepsilon_1^i x \quad (i = 0, 1, \dots)$$

et l'on pose :

$$(7) \quad \eta = \varepsilon_1 \left(\frac{\eta}{\varepsilon_1} \right).$$

On cherche une solution du système (4) ayant le caractère d'une onde progressive, Germain [1] :

$$(8) \quad \underline{u}(t, x, \varepsilon_1, \eta) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon_1^i \underline{u}_i \left(\xi, x_1, x_2, \dots, \frac{\eta}{\varepsilon_1} \right)$$

où

$$(9) \quad \xi = \xi(t, x_0)$$

est une fonction de phase à déterminer.

Considérons les développements :

$$(10) \quad \underline{A}(\eta \underline{u}) = \underline{A}_0 + \eta \underline{A}_1 \underline{u} + O(\eta^2)$$

$$(11) \quad \underline{B}(\eta \underline{u}) = \underline{B}_0 + \eta \underline{B}_1 \underline{u} + \eta^2 (\underline{B}_2 \underline{u}) \underline{u} + O(\eta^3)$$

dans lesquels $\underline{B}_0, \underline{B}_1, \underline{B}_2$ sont des tenseurs constants d'ordre 2, 3, 4. La juxtaposition de deux tenseurs (par exemple $\underline{B}_2 \underline{u}$) représente leur produit contracté.

Les calculs qui suivent sont classiques (voir [1] pour le cas général, et Seymour [3] pour l'étude d'une onde de haute fréquence). On substitue (8), (10) et (11) dans (4) et l'on identifie les premières puissances de ε_1 . Il vient :

$$(12) \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \underline{I} + \frac{\partial \xi}{\partial x_0} \underline{A}_0 \right) \frac{\partial \underline{u}_0}{\partial \xi} = 0$$

$$(13) \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \underline{I} + \frac{\partial \xi}{\partial x_0} \underline{A}_0 \right) \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial \xi} = - \underline{A}_0 \frac{\partial \underline{u}_0}{\partial x_1} - \frac{\eta}{\varepsilon_1} (\underline{A}_1 \underline{u}_0) \frac{\partial \underline{u}_0}{\partial x_0} + \underline{B}_0 \underline{u}_0$$

L'équation (12) admet une solution $\frac{\partial \underline{u}_0}{\partial \xi}$ non triviale si et seulement si :

$$(14) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} / \frac{\partial \xi}{\partial x_0} = - \lambda_k$$

où λ_k est l'une des n valeurs propres réelles de la matrice $\underline{A}_0$. Nous la supposons positive. En choisissant convenablement la célérité Ω_0 dans le changement de

variable (3), on peut toujours admettre que :

$$(15) \quad \lambda_k = 1$$

Nous supposons que le noyau de $\underline{I} - \underline{A}_0$ est de dimension 1, et nous désignons par $\underline{R}$ et $\underline{L}$ des vecteurs non nuls du noyau de $\underline{I} - \underline{A}_0$ et de son adjointe :

$$(16) \quad (\underline{I} - \underline{A}_0) \underline{R} = 0$$

$$\underline{L} (\underline{I} - \underline{A}_0) = 0$$

La solution $\underline{u}_0$ de (12) est de la forme :

$$(17) \quad \underline{u}_0 (\xi, x_1) = f (\xi, x_1) \underline{R}$$

avec

$$(18) \quad \xi = t - x_0$$

La fonction f , pour le moment inconnue, se détermine en substituant (17) dans (13). L'équation ainsi obtenue :

$$(19) \quad (\underline{I} - \underline{A}_0) \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial \xi} = - \frac{\partial f}{\partial x_1} \underline{A}_0 \underline{R} + \frac{\eta}{\epsilon_1} f \frac{\partial f}{\partial \xi} (\underline{A}_1 \underline{R}) \underline{R} + f \underline{B}_0 \underline{R},$$

admet une solution non triviale $\underline{u}_1$ si et seulement si le produit scalaire du second membre par $\underline{L}$ est nul. D'où l'équation de transport qui gouverne l'évolution de f :

$$(20) \quad a \frac{\partial f}{\partial x_1} + b f \frac{\partial f}{\partial \xi} + c f = 0$$

avec

$$(21) \quad \begin{aligned} a &= - \underline{L} \underline{A}_0 \underline{R} \\ b &= \frac{\eta}{\epsilon_1} \underline{L} (\underline{A}_1 \underline{R}) \underline{R} \\ c &= \underline{L} \underline{B}_0 \underline{R} \end{aligned}$$

En résumé, la solution au premier ordre $\underline{u}_0$ est décrite par les équations (17), (18) et (20). Il convient de remarquer que nous n'avons calculé qu'une solution particulière, celle attachée à la valeur propre λ_k de la matrice $\underline{A}_0$. Cette solution particulière, que nous appelons k -onde progressive instantanée, peut valablement décrire une perturbation au voisinage du front dans certains problèmes où seule une composante du système est excitée.

b) La k-onde progressive différée

Petit paramètre et variables multiples sont ici :

$$(22) \quad \varepsilon_2 = \frac{T}{T^*} r$$

$$(23) \quad x_i = \varepsilon_2^i x,$$

et l'on cherche une solution $\underline{u}$ représentée par le développement :

$$(24) \quad \underline{u}(t, x, \varepsilon_2, \eta) = \sum_{i \geq 0} \varepsilon_2^i \underline{u}_i(\xi(t, x_0), x_1, \dots, \frac{\eta}{\varepsilon_2})$$

Après substitution dans (4) on obtient :

$$(25) \quad \underline{B}_0 \underline{u}_0 = 0$$

$$(26) \quad \underline{B}_0 \underline{u}_1 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \underline{I} + \frac{\partial \xi}{\partial x_0} \underline{A}_0 \right) \frac{\partial \underline{u}_0}{\partial \xi} - \frac{\eta}{\varepsilon_2} (\underline{B}_1 \underline{u}_0) \underline{u}_0$$

$$(27) \quad \begin{aligned} \underline{B}_0 \underline{u}_2 = & \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \underline{I} + \frac{\partial \xi}{\partial x_0} \underline{A}_0 \right) \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial \xi} + \underline{A}_0 \frac{\partial \underline{u}_0}{\partial x_1} + \frac{\eta}{\varepsilon_2} (\underline{A}_1 \underline{u}_0) \frac{\partial \underline{u}_0}{\partial x_0} \\ & - \frac{\eta}{\varepsilon_2} (\underline{B}_1 \underline{u}_0) \underline{u}_1 - \frac{\eta}{\varepsilon_2} (\underline{B}_1 \underline{u}_1) \underline{u}_0 - \left(\frac{\eta}{\varepsilon_2} \right)^2 ((\underline{B}_2 \underline{u}_0) \underline{u}_0) \underline{u}_0 \end{aligned}$$

A l'aide de ces trois équations, nous allons calculer le premier terme

$\underline{u}_0(\xi(t, x_0, x_1))$ du développement (24).

Soit, $\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_p$, une base du noyau de $\underline{B}_0$ et, $\underline{l}_1, \dots, \underline{l}_p$, une base du noyau de l'adjointe de $\underline{B}_0$. La solution $\underline{u}_0$ de (25) s'écrit :

$$(28) \quad \underline{u}_0 = \sum_{i=1}^p a_i(\xi, x_1) \underline{r}_i$$

Pour que l'équation (26) ait une solution $\underline{u}_1$ il faut et il suffit que les produits scalaires du second membre par $\underline{l}_i$ soient nuls, d'où :

$$(29) \quad \sum_{j=1}^p \left(\gamma_{ij} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \omega_{ij} \frac{\partial \xi}{\partial x_0} \right) \frac{\partial a_j}{\partial \xi} = \frac{\eta}{\varepsilon_2} \underline{l}_i (\underline{B}_1 \underline{u}_0) \underline{u}_0$$

avec

$$(30) \quad \gamma_{ij} = \underline{l}_i \underline{r}_j, \quad \omega_{ij} = \underline{l}_i \underline{A}_0 \underline{r}_j$$

Dans la suite nous supposons que l'identité

$$(31) \quad \underline{l}_i (\underline{B}_1 \underline{u}_0) \underline{u}_0 = 0$$

est vérifiée, ce qui est le cas dans les applications que nous traiterons. Il existe alors une solution $\underline{a}$ de (29) non triviale si

$$(32) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} / \frac{\partial \xi}{\partial x_0} = - V_k$$

où V_k est l'une des p solutions de l'équation

$$(33) \quad \text{dét} (V_k \underline{\gamma} - \underline{\omega}) = 0$$

La vitesse V_k , que nous prenons positive, est la célérité différée de l'onde en théorie linéaire.

Soit $\underline{R}$ un vecteur non nul du noyau de $V \underline{\gamma} - \underline{\omega}$ supposé de dimension 1, et $\underline{L}$ un vecteur non nul du noyau de l'adjointe de $V \underline{\gamma} - \underline{\omega}$. La solution $\underline{a}$ de (29) s'écrit alors :

$$(34) \quad \underline{a} (\xi, x_1) = f (\xi, x_1) \underline{R}$$

avec

$$(35) \quad \xi = V_k t - x_0$$

Après substitution de (34) dans (28), on obtient :

$$(36) \quad \underline{u}_0 = f \underline{N}$$

avec

$$(37) \quad \underline{N} = \sum_{i=1}^p R_i \underline{r}_i$$

Puis on obtient la solution générale de l'équation (26) :

$$(38) \quad \underline{u}_1 = \sum_{j=1}^p b_j (\xi, x_1) \underline{r}_j + \frac{\partial f}{\partial \xi} \hat{\underline{u}}_1 + f^2 \tilde{\underline{u}}_1$$

où $\hat{\underline{u}}_1$ et $\tilde{\underline{u}}_1$ sont des vecteurs constants.

La solution $\underline{u}_2$ de (27) existe si et seulement si le produit scalaire du deuxième membre par $\underline{l}_i$ est nul pour $i = 1, \dots, p$.

Si l'on suppose en outre que les identités suivantes (réalisées dans les applications pratiques) sont vérifiées :

$$(39) \quad \begin{aligned} \underline{l}_i (\underline{B}_1 \underline{u}_0) \underline{u}_1 &= 0 \\ \underline{l}_i ((\underline{B}_2 \underline{u}_0) \underline{u}_0) \underline{u}_0 &= 0 \end{aligned}$$

on obtient :

$$(40) \quad (V_k \gamma - \omega) \frac{\partial b}{\partial \xi} = K_1 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + K_2 f \frac{\partial f}{\partial \xi} + K_3 \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

Les vecteurs K_1 , K_2 et K_3 ont pour composantes :

$$(41) \quad \begin{aligned} K_{1i} &= l_i (A_0 \hat{u}_1 - v_k \hat{u}_1) \\ K_{2i} &= l_i (2 A_0 \tilde{u}_1 - 2 v_k \tilde{u}_1 + \frac{n}{\epsilon_2} A_1 \underline{N} \underline{N}) \\ K_{3i} &= - l_i A_0 \underline{N} \end{aligned}$$

L'équation de compatibilité associée au système (40) est de la forme

$$(42) \quad l K_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} + l K_2 f \frac{\partial f}{\partial \xi} + l K_1 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = 0$$

Cette équation de transport, qui gouverne l'évolution du facteur d'amplitude f , est, comme on pouvait s'y attendre, une équation de Burgers.

La solution $\underline{u}_0$ du problème est en définitive donnée par (36), (35) et (42).

Ainsi une onde gouvernée par un système d'équation du type (1) est régie loin du bord par l'équation de Burgers (42) si la matrice $\underline{B}$ vérifie les conditions restrictives (31) et (39) qui n'excluent pas la non-linéarité du second membre de (1), [cf. (26) et (27)]. Il est à noter que ces conditions ne sont pas artificielles car elles sont remplies dans toutes les applications que nous traiterons (thermo-élasticité et visco-élasticité non linéaires ...).

S'il est souvent plus simple dans certains problèmes particuliers de combiner directement les équations (sans utiliser la méthode matricielle exposée ici), il n'en demeure pas moins que le formalisme présenté est général, et complète la méthode classique par laquelle on étudie l'onde près du front.

On notera que, comme Whitham [5] l'avait déjà remarqué dans un contexte différent, c'est l'opérateur de moindre degré B qui gouverne le comportement asymptotique de l'onde loin du bord.

6.3 APPLICATIONS

Nous étudions ici trois exemples. Le premier, relatif à la thermoélasticité dynamique non linéaire, est traité avec la méthode matricielle exposée dans la section précédente.

Il est souvent plus commode, au lieu d'utiliser la méthode générale, d'appréhender directement les équations du problème. Nous procédons de la sorte dans les deux autres exemples, qui sont relatifs à la viscoélasticité non linéaire.

a) Thermoélasticité non linéaire

Nous utilisons, comme en 5.6, une théorie dans laquelle le comportement du matériau est décrit par des développements au second ordre. Toutes les équations de la section 5.6 sont utilisées tel quel dans ce paragraphe, à l'exception de la loi de Fourier (5.6.6) que nous prenons ici sous sa forme généralisées :

$$(1) \quad T_r \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{q} = - [k + \tilde{k}_1 \tilde{e} + \tilde{k}_2 (\tilde{S} - \tilde{S}_0)] \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tilde{x}}$$

où T_r est un temps de relaxation.

A la place du changement de fonction (5.6.10)₆ nous posons ici :

$$(2) \quad \tilde{q} = n (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) k q / \beta \bar{\Omega} \bar{T}_c$$

et l'équation (1) prend alors la forme réduite :

$$(3) \quad \frac{T_r}{\bar{T}_c} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{T}{\bar{T}_c} q = - (1 + n k_1 e + n k_2 S) \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

En introduisant la vitesse

$$(4) \quad v = \frac{\partial u}{\partial t}$$

on voit facilement que le problème est gouverné par le système fondamental d'équations suivant :

$$(5) \quad \frac{\partial e}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{équation de compatibilité})$$

$$(6) \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \quad (\text{conservation de la quantité de mouvement})$$

$$(7) \quad \left(1 + \eta \frac{(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})}{\beta \tilde{\theta}_0} \theta\right) \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\bar{T}_c}{T} \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (\text{conservation de l'énergie})$$

$$(8) \quad \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\bar{T}_c}{T_r} (1 + \eta k_1 e + \eta k_2 S) \frac{\partial \theta}{\partial x} = - \frac{T}{T_r} q \quad (\text{loi de la conduction de la chaleur})$$

On pose

$$(9) \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} e \\ v \\ S \\ q \end{bmatrix}$$

On peut alors écrire, à l'ordre 0 (η^2) près, les équations (5)-(8) sous la forme synthétique suivante :

$$(10) \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{A}(\underline{u}) \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} = \frac{T}{\bar{T}_c} \underline{B} \underline{u}$$

avec :

$$(11) \quad \underline{A}(\underline{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 - \eta \left(3 + \frac{v}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}\right) e - \eta c_1 S & 0 & 1 - \eta c_1 e - \eta c_2 S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \eta \frac{(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})}{\beta \tilde{\theta}_0} (S - \bar{\epsilon} e) \\ -\bar{\epsilon} \frac{\bar{T}_c}{T_r} + \eta a(\underline{u}) & 0 & \frac{\bar{T}_c}{T_r} + \eta b(\underline{u}) & 0 \end{bmatrix}$$

(où $a(\underline{u})$ et $b(\underline{u})$ sont des fonctions scalaires de $\underline{u}$ qui n'interviendront pas dans le résultat final)

$$(12) \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\bar{T}_c}{T_r} \end{bmatrix}$$

En utilisant les notations de la section 6.2, il vient :

$$(13) \quad \underline{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\bar{\epsilon} \frac{\bar{T}_c}{T_r} & 0 & \frac{\bar{T}_c}{T_r} & 0 \end{bmatrix}$$

$$(14) \quad \underline{A}_1 \underline{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\left(3 + \frac{\nu}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}\right) \underline{e}_0 - C_1 S_0 & 0 & -C_1 \underline{e}_0 - C_2 S_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})}{\beta \hat{\theta}_0} (S_0 - \bar{\epsilon} \underline{e}_0) \\ a(\underline{u}_0) & 0 & b(\underline{u}_0) & 0 \end{bmatrix}$$

$$(15) \quad \underline{B}_0 = \underline{B}$$

$$(16) \quad \underline{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \text{ base du noyau de } \underline{B}_0$$

$$(17) \quad \underline{l}_1 = (1, 0, 0, 0) \quad ; \quad \underline{l}_2 = (0, 1, 0, 0) \quad ; \quad \underline{l}_3 = (0, 0, 1, 0) \quad ; \text{ base du noyau de l'adjointe de } \underline{B}_0$$

$$(18) \quad \gamma_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

$$(19) \quad \underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Limitons-nous à l'étude de l'onde différée. Remarquons d'abord que les identités (6.2.31) et (6.2.39) sont trivialement vérifiées.

L'équation (6.2.33), qui détermine les célérités différées du problème linéarisé, s'écrit :

$$(20) \quad \nu (\nu^2 - 1) = 0$$

La solution $V = 0$ est relative à l'onde quasi-thermique. Celle-ci dégénère dans sa phase différée. Elle ne se propage plus, elle diffuse.

Nous supposons dorénavant que $V = 1$. Cette valeur est attachée à l'onde quasi-mécanique.

Pour $\underline{R}$ et $\underline{L}$, vecteurs non nuls du noyau de $V \underline{\gamma} - \underline{\omega}$ et de son adjointe, nous prenons :

$$(21) \quad \underline{R} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{L} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Il vient alors :

$$(22) \quad \underline{N} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \underline{\tilde{u}}_1 = \underline{0} ; \quad \underline{\hat{u}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\bar{\epsilon} \end{bmatrix}$$

$$(23) \quad \underline{K}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{\epsilon} \end{bmatrix} \quad \underline{K}_2 = -\frac{\eta}{\epsilon} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 + \frac{\nu}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \underline{K}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'équation de transport (6.2.42), qui s'écrit ici

$$(24) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\eta}{\epsilon_2} \left(3 + \frac{\nu}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right) f \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\bar{\epsilon}}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2},$$

redonne le résultat (5.6.24).

b) Un matériau de type viscoélastique

Considérons un matériau dont la loi de comportement est du type :

$$(25) \quad \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{t}} = \phi(\tilde{\sigma}, \tilde{\epsilon}) \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial \tilde{t}} + \psi(\tilde{\sigma}, \tilde{\epsilon})$$

De nombreux problèmes (en viscoélasticité, voire en plasticité, Criterescu [6]) peuvent être décrit à l'aide d'une telle relation.

Avant de passer à l'étude du problème dynamique, nous avons besoin d'examiner les comportements instantané et différé d'un matériau obéissant à la loi (25).

Quelques considérations relatives à la loi de
comportement (25)

En déformation instantanée (brusque variation de $\tilde{e}$) les dérivées $\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{e}}$ et $\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{t}}$ sont très grandes, et le terme ψ dans le second membre de (25) devient négligeable. On en déduit la loi de comportement du matériau en régime instantané :

$$(26) \quad \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{e}} = \phi(\tilde{\sigma}, \tilde{e})$$

Au voisinage de $\tilde{e} = 0$, considérons le développement

$$(27) \quad \tilde{\sigma} = \hat{E}_1 \tilde{e} + \frac{\hat{E}_2}{2} \tilde{e}^2 + \dots$$

où $\hat{E}_1$ et $\hat{E}_2$ sont des coefficients d'élasticité instantanée du premier et du deuxième ordre. (On suppose $\hat{E}_1 > 0$). La substitution de (27) dans (26) donne :

$$(28) \quad \hat{E}_1 = \phi_0, \quad \hat{E}_2 = \phi_0 \phi_1 + \phi_2$$

où l'on a posé :

$$(29) \quad \phi_0 = \phi(0, 0), \quad \phi_1 = \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\sigma}}(0, 0), \quad \phi_2 = \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{e}}(0, 0)$$

En régime différé, $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{e}$ varient lentement en fonction du temps, et l'on peut négliger les dérivées dans (25). La loi de comportement du matériau est alors de la forme :

$$(30) \quad \psi(\tilde{\sigma}, \tilde{e}) = 0$$

Dans le plan $(\tilde{\sigma}, \tilde{e})$, la courbe d'équation implicite (30) passe par l'origine (car $(\tilde{\sigma}, \tilde{e}) = (0, 0)$ est solution de (25)) et sépare les domaines $\psi > 0$ et $\psi < 0$. (figure 1).

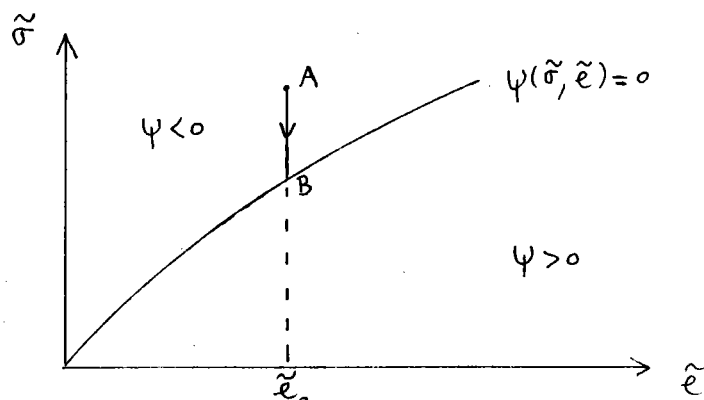


FIG. 1

Considérons une expérience de relaxation dans laquelle, après avoir imposé au matériau un échelon de déformation $\tilde{e}(\tilde{t}) = H(\tilde{t}) \tilde{e}_0$, on laisse se relaxer la contrainte :

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{t}} < 0$$

D'après (25), on a donc $\psi(\tilde{\sigma}(\tilde{t}), \tilde{e}_0) < 0$. Dans le plan $(\tilde{\sigma}, \tilde{e})$, on parcourt le segment AB (figure 1), de A vers l'état d'équilibre B (la contrainte décroît). La région $\psi < 0$ est donc située au dessus de la courbe $\psi(\tilde{\sigma}, \tilde{e}) = 0$.

Soit :

$$(31) \quad \tilde{\sigma} = E_1 \tilde{e} + \frac{1}{2} E_2 \tilde{e}^2 + \dots$$

la représentation, sous forme d'un développement de Taylor, de la courbe $\psi(\tilde{\sigma}, \tilde{e}) = 0$ au voisinage de l'origine. Les coefficients E_1 et E_2 sont des coefficients d'élasticité différée du premier et du second ordre.

Après substitution de (31) dans (30), on obtient

$$(32) \quad E_1 = -\frac{\psi_2}{\psi_1} ; \quad E_2 = -\frac{\psi_2^2 \psi_3}{\psi_1^3} - \frac{\psi_4}{\psi_1} + 2 \frac{\psi_2 \psi_5}{\psi_1^2}$$

On a posé à l'origine $(\tilde{\sigma}, \tilde{e}) = (0, 0)$:

$$(33) \quad \psi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{\sigma}} ; \quad \psi_2 = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{e}} ; \quad \psi_3 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{\sigma}^2} ; \quad \psi_4 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{e}^2} ; \quad \psi_5 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{e} \partial \tilde{\sigma}}$$

En observant la figure 1, on voit immédiatement que :

$$(34) \quad \psi_1 < 0 , \quad \psi_2 > 0$$

Par suite on vérifie, comme il se doit, que :

$$(35) \quad E_1 > 0$$

Les équations fondamentales du problème

Le système fondamental d'équations qui gouverne l'évolution du problème dynamique est de la forme :

$$(36) \quad \begin{bmatrix} \tilde{\sigma} \\ \tilde{v} \\ \tilde{e} \end{bmatrix}_{,\tilde{t}} - \begin{bmatrix} 0 & \phi & 0 \\ 1/\rho_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\sigma} \\ \tilde{v} \\ \tilde{e} \end{bmatrix}_{,\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \psi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Effectuons dans (36) les changements de variables et de fonctions suivants :

$$(37) \quad \begin{aligned} \tilde{t} &= T^* t, & \tilde{x} &= \Omega T^* x \\ \tilde{v} &= \eta \Omega v, & \tilde{\sigma} &= \eta \phi_0 \sigma, & \tilde{e} &= \eta e \end{aligned}$$

où η est un petit paramètre sans dimension qui caractérise la faible non linéarité du problème. Pour fixer les idées, donnons à la célérité Ω la valeur :

$$(38) \quad \Omega = (\phi_0 / \rho_0)^{1/2}$$

Après avoir substitué (37) dans (36) et développé ϕ et ψ relativement à η , il vient, à l'ordre $O(\eta^2)$ près :

$$(39) \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial \tilde{t}} + \underline{A}(\eta \underline{u}) \frac{\partial \underline{u}}{\partial \tilde{x}} = \frac{T^*}{T_r} \underline{B}(\eta \underline{u}) \underline{u}$$

où nous avons posé

$$(40) \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} \sigma \\ v \\ e \end{bmatrix} \quad \underline{A}(\eta \underline{u}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 - \eta \phi_1 \sigma - \eta \frac{\phi_2}{\phi_0} e & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(41) \quad \underline{B}(\eta \underline{u}) = \begin{bmatrix} -1 - \frac{\eta}{2} c e - \eta b \sigma & 0 & a - \frac{\eta}{2} c \sigma - \eta d e \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(42) \quad a = -\frac{\psi_2}{\psi_1 \phi_0} > 0 \quad ; \quad b = \frac{\phi_0}{2} \frac{\psi_3}{\psi_1} \quad ; \quad c = \frac{\psi_5}{\psi_1} \quad ; \quad d = \frac{\psi_4}{2\psi_1 \phi_0}$$

Le temps de relaxation T_r , défini par :

$$(43) \quad T_r = -\frac{1}{\psi_1}$$

est bien positif d'après (34).

Etude de l'onde instantanée
(méthode matricielle)

Avant de procéder à une étude directe des équations, nous allons calculer l'onde instantanée puis l'onde différée à l'aide de la méthode matricielle générale.

Avec les notations de la section 6.2 nous avons :

$$4) \quad \epsilon_1 = \frac{\underline{I}^*}{\underline{I}_r}$$

$$5) \quad \underline{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$6) \quad \underline{A}_1 \underline{u} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_1 \sigma - \frac{\phi_2}{\phi_0} e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$7) \quad \underline{B}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$8) \quad \underline{B}_1 \underline{u} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{2} \lambda - b \sigma & 0 & -\frac{c\sigma}{2} - de \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On se propose de calculer l'onde associée à la solution $\lambda = 1$ de l'équation $\det(\lambda \underline{I} - \underline{A}_0) = 0$ (les autres solutions $\lambda = 0$, et $\lambda = -1$ sont sans intérêt dans le présent problème).

Les vecteurs suivants définissent des bases pour les noyaux de $\underline{B}_0$, de l'adjointe de $\underline{B}_0$, de $\underline{I} - \underline{A}_0$ et de l'adjointe de $\underline{I} - \underline{A}_0$:

$$(9) \quad \underline{r}_1 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \underline{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(50) \quad \underline{l}_1 = (0, 1, 0) \quad ; \quad \underline{l}_2 = (0, 0, 1)$$

$$(51) \quad \underline{R} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(52) \quad \underline{L} = (1, -1, 0)$$

La solution de (39) est donnée au premier ordre par :

$$(53) \quad \underline{u}_0(t, x) = f(\xi, x_1) \underline{R}$$

avec

$$(54) \quad x_1 = \varepsilon_1 x, \quad \xi = t - x_0$$

Compte tenu de (28), l'équation de transport (6.2.20) s'écrit :

$$(55) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{n}{\varepsilon_1} \frac{\hat{E}_2}{2E_1} f \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{2} (1 - a) f = 0$$

On trouve un résultat semblable à 5.3.15, au coefficient $(1 - a)$ près.

Pour que la solution soit stable, il faut que :

$$(56) \quad a \leq 1$$

d'où la condition restrictive portant sur ϕ et ψ :

$$(57) \quad \psi_2 + \psi_1 \phi_0 \leq 1$$

Etude de l'onde différée

(méthode matricielle)

Toujours avec les notations de la section 6.2, on pose :

$$(58) \quad \varepsilon_2 = \frac{T_r}{T^*}$$

$$(59) \quad \underline{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\omega} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Des deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ de l'équation $\det(V\underline{\gamma} - \underline{\omega}) = 0$, on retient celle qui est positive.

On définit alors :

$$(60) \quad \underline{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{a} \end{pmatrix} ; \quad \underline{L} = (1, -\sqrt{a}) ; \quad \underline{N} = \begin{bmatrix} a \\ -\sqrt{a} \\ 1 \end{bmatrix}$$

On vérifie facilement que les identités (6.2.31) et (6.2.39) sont réalisées, et que l'on a :

$$(61) \quad \hat{\underline{u}}_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{a} (a - 1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \tilde{\underline{u}}_1 = -\frac{\eta}{\epsilon_2} \begin{bmatrix} ac + d + b a^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution différée de (39) est donnée au premier ordre par :

$$(62) \quad \underline{u}_0(t, x) = f(\xi, x_1) \underline{N}$$

avec :

$$(63) \quad x_1 = \epsilon_2 x, \quad \xi = \sqrt{a} t - x$$

L'équation de transport (6.2.42) s'écrit, compte tenu de l'identité $c + \frac{d}{a} + b a = -\frac{E_2}{E_1}$:

$$(64) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{(1-a)}{\sqrt{a}} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \frac{\eta}{\epsilon_2} \frac{E_2}{E_1} f \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0$$

Pour assurer la stabilité de la solution de (64), il n'y a pas d'autre restriction à poser que celle déjà introduite en (56).

Calcul de l'onde différée par une méthode directe

Lorsque la dimension du système étudié n'est pas trop grande, il est souvent avantageux, plutôt que d'utiliser la méthode matricielle générale, de procéder par une étude directe sur les équations. A titre illustratif, nous allons retrouver ceux des résultats précédents qui sont relatifs à l'onde différée.

Les équations fondamentales (39) s'écrivent en posant $\epsilon_2 = \frac{T_r}{T^*}$:

$$(65) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} - (1 + \eta \phi_1 \sigma + \eta \frac{\phi_2}{\phi_0} e) \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_2} (-1 - \frac{\eta}{2} c e - \eta b \sigma) \sigma + (a - \frac{\eta}{2} c \sigma - \eta d e) e$$

$$(66) \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$$

$$(67) \quad \frac{\partial e}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

On en cherche une solution (σ, v, e) sous la forme de développements tels que :

$$(68) \quad e(t, x, \epsilon_2, \eta) = \sum_{i \geq 0} \epsilon_2^i e_i(t, x_0, x_1, \dots, \frac{\eta}{\epsilon_2})$$

Après substitution de ces développements dans (65)-(66)-(67), il vient :

$$(69) \quad \sigma_0 = a e_0$$

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_0}{\partial t} - \frac{\partial e_0}{\partial t} = -\sigma_1 + a e_1 - \frac{\eta}{\epsilon_2} b \sigma_0^2 - \frac{\eta}{\epsilon_2} c \sigma_0 e_0 - \frac{\eta}{\epsilon_2} d e_0^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_0} \\ \frac{\partial e_0}{\partial t} = \frac{\partial v_0}{\partial x_0} \end{array} \right.$$

$$(71) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_0} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_1} \\ \frac{\partial e_1}{\partial t} = \frac{\partial v_1}{\partial x_0} + \frac{\partial v_0}{\partial x_1} \end{array} \right.$$

On utilise dans (70) le résultat (69) pour obtenir :

(72)

$$\left\{ \begin{array}{l} (a-1) \frac{\partial e_0}{\partial t} = -\sigma_1 + a e_1 - \frac{n}{\varepsilon_2} b a^2 e_0^2 - \frac{n}{\varepsilon_2} c a e_0^2 \\ - \frac{n}{\varepsilon_2} d e_0^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} = a \frac{\partial e_0}{\partial x_0} \\ \frac{\partial e_0}{\partial t} = \frac{\partial v_0}{\partial x_0} \end{array} \right.$$

Si l'on élimine v_0 entre $(72)_2$ et $(72)_3$, on obtient :

(73)

$$\frac{\partial^2 e_0}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 e_0}{\partial x_0^2} = 0$$

d'où le résultat :

(74)

$$e_0(t, x_0, x_1) = e_0(\xi, x_1) \quad (\xi = \sqrt{a} t - x_0)$$

De $(72)_2$ on tire la formule :

(75)

$$v_0 = -\sqrt{a} e_0$$

On élimine v_1 entre $(71)_1$ et $(71)_2$:

(76)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial e_1}{\partial t} - \frac{\partial v_0}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x_0 \partial x_1}$$

Puis avec $(72)_1$ on calcule σ_1 et l'on substitue le résultat ainsi obtenu dans (76). On obtient :

(77)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 e_1}{\partial t^2} - a \frac{\partial^2 e_1}{\partial x_0^2} = & -2a \frac{\partial^2 e_0}{\partial \xi \partial x_1} - \sqrt{a} (a-1) \frac{\partial^3 e_0}{\partial \xi^3} \\ & - \frac{n}{\varepsilon_2} (a^2 b + ca + d) \frac{\partial^2 (e_0)^2}{\partial \xi^2} \end{aligned}$$

Pour éviter l'apparition d'un terme séculaire dans la solution e_1 de (77), on pose que le deuxième membre est nul, soit :

$$(78) \quad \frac{\partial e_0}{\partial x_1} - \frac{1}{2} (1 - a) a^{-1/2} \frac{\partial^2 e_0}{\partial \xi^2} - \frac{\eta}{\epsilon_2} \frac{E_2}{E_1} e_0 \frac{\partial e_0}{\partial \xi} = 0$$

C'est le résultat que nous avons en (64).

c) Matériau viscoélastique à paramètres cachés

Considérons un matériau viscoélastique dont la loi de comportement est donnée par (Weber [7]).

$$(79) \quad \tilde{\sigma} = \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{e}} (\tilde{e}, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n)$$

$$(80) \quad \dot{\tilde{p}}_i = -g_{ij} (\tilde{p}) \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{p}_j} (\tilde{e}, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

où ϕ est un potentiel qui dépend de la déformation $\tilde{e}$ et des paramètres cachés $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n$. Les équations (80), dans lesquelles figurent au premier membre les dérivées des $\tilde{p}_i$ par rapport au temps, gouvernent l'évolution des paramètres cachés $\tilde{p}_i$.

Nous supposons la matrice g_{ij} inversible.

Quelques propriétés relatives à la loi de comportement

Calculons les modules d'élasticité instantanée et différée du matériau au voisinage de l'état naturel de repos.

Au repos nous supposons que :

$$(81) \quad \tilde{p}_i = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{e}} (0) = 0 \quad (\text{car le potentiel est stationnaire à l'équilibre})$$

Donnons au matériau une déformation soudaine :

$$(82) \quad \tilde{e}(t) = H(t) \tilde{e}_0$$

où H est la fonction échelon unité, et $\tilde{e}_0$ une constante. Les $\tilde{p}_i$ ne subissent

pas de saut, car d'après (80) les dérivées $\dot{\tilde{p}}_i$ sont finies. Par contre, la contrainte $\tilde{\sigma}$ donnée par (79) subit un saut égal à :

$$(83) \quad \tilde{\sigma}_0 = \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{e}} (\tilde{e}_0, 0, \dots)$$

Si $\tilde{e}_0$ est suffisamment petit, on développe (83)

$$(84) \quad \tilde{\sigma}_0 = \tilde{e}_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{e}^2} (0) + \dots$$

et l'on obtient le module d'élasticité instantanée au premier ordre :

$$(85) \quad \hat{E}_1 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{e}^2} (0)$$

Le module d'élasticité différée se calcule en observant le comportement à long terme du matériau lorsqu'il est soumis à la sollicitation (82).

Les paramètres cachés $\tilde{p}_i(t)$ sont donnés par (80). Si l'on pose

$$(86) \quad \lim_{\tilde{t} \rightarrow \infty} \tilde{p}_i(\tilde{t}) = \tilde{p}_i^{(d)}(\tilde{e}_0)$$

et si l'on passe à la limite dans (79), on obtient la contrainte $\tilde{\sigma}^{(d)}(\tilde{e}_0)$ à l'équilibre, soit :

$$\tilde{\sigma}^{(d)}(\tilde{e}_0) = \lim_{\tilde{t} \rightarrow \infty} \tilde{\sigma}(\tilde{t}) = \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{e}_0} (\tilde{e}_0, \tilde{p}^{(d)}(\tilde{e}_0))$$

Le coefficient d'élasticité différée E_1 au voisinage du repos est donné, compte tenu de $\tilde{p}_i^{(d)}(0) = 0$, par la formule :

$$(88) \quad E_1 = \left. \frac{d\tilde{\sigma}^{(d)}}{d\tilde{e}_0} \right|_{\tilde{e}_0=0} = \hat{E}_1 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{e} \partial \tilde{p}_i} (0) \frac{d\tilde{p}_i^{(d)}}{d\tilde{e}_0} (0)$$

Dérivons par rapport à $\tilde{e}_0$ l'expression

$$(89) \quad \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{p}_j} (\tilde{e}_0, \tilde{p}^{(d)}(\tilde{e}_0)) = 0$$

obtenue en écrivant la formule (80) à l'équilibre, et en utilisant l'inversibilité de la matrice g_{ij} . Si l'on pose $\tilde{e}_0 = 0$ dans le résultat, et si l'on

multiplie par $\frac{d\tilde{p}_j^{(d)}}{d\tilde{e}_0}(o)$ tout en sommant par rapport à j , il vient :

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{e} \partial \tilde{p}_j}(o) \frac{d\tilde{p}_j^{(d)}}{d\tilde{e}_0}(o) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{p}_i \partial \tilde{p}_j}(o) \frac{d\tilde{p}_i^{(d)}}{d\tilde{e}_0}(o) \frac{d\tilde{p}_j^{(d)}}{d\tilde{e}_0}(o)$$

En substituant dans (88), on obtient alors :

$$(90) \quad E_1 = \hat{E}_1 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{p}_i \partial \tilde{p}_j}(o) \frac{d\tilde{p}_i^{(d)}}{d\tilde{e}_0}(o) \frac{d\tilde{p}_j^{(d)}}{d\tilde{e}_0}(o)$$

Par conséquent, si $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{p}_i \partial \tilde{p}_j}$ est, comme nous le supposons, une matrice définie positive, on a :

$$(91) \quad E_1 < \hat{E}_1$$

Nous supposons E_1 et $\hat{E}_1$ positifs.

Le problème dynamique

On se limite pour simplifier l'exposé au cas d'un matériau décrit par un seul paramètre caché $\tilde{p}$, et l'on se limite également à l'étude de l'onde différée.

Développons les formules (79) et (80) au deuxième ordre en $\tilde{p}$ et $\tilde{e}$:

$$(92) \quad \tilde{\sigma} = \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{e}}(\tilde{e}, \tilde{p}) = \phi_{ee} \tilde{e} + \phi_{ep} \tilde{p} + \frac{1}{2} \phi_{eee} \tilde{e}^2 + \frac{1}{2} \phi_{epp} \tilde{p}^2 + \phi_{eep} \tilde{e} \tilde{p} + \dots$$

$$(93) \quad - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = g(o) \phi_{ep} \tilde{e} + g(o) \phi_{pp} \tilde{p} + \tilde{p}^2 (g(o) \phi_{pp} + \frac{1}{2} g(o) \phi_{ppp}) + \tilde{e} \tilde{p} (g(o) \phi_{ep} + g(o) \phi_{epp}) + \frac{1}{2} \tilde{e}^2 g(o) \phi_{eep}$$

Les termes tels que ϕ_{ep} , ont pour signification :

$$(94) \quad \phi_{ep} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tilde{e} \partial \tilde{p}}(o)$$

On substitue (92) dans l'équation du mouvement $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{x}}$ puis on

opère le changement de variables et de fonctions

$$(95) \quad \tilde{t} = T^* t ; \quad \tilde{x} = \Omega T^* x ; \quad (\Omega = \sqrt{\frac{\hat{E}_1}{\rho_o}})$$

$$96) \quad \tilde{v} = \eta \Omega v ; \quad \tilde{e} = \eta e ; \quad \tilde{\sigma} = \eta \hat{E}_1 \sigma ; \quad \tilde{p} = \eta p$$

On pose en plus :

$$97) \quad \epsilon_2 = \frac{\phi_{ee}}{T^* g(0) \phi_{ep} \phi_{ep}}$$

Il vient alors :

$$98) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{\phi_{ep}}{\phi_{ee}} \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\phi_{eee}}{\phi_{ee}} e \frac{\partial e}{\partial x} + \eta \frac{\phi_{epp}}{\phi_{ee}} p \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\phi_{eep}}{\phi_{ee}} \frac{\partial (ep)}{\partial x}$$

En procédant de même dans (93), on obtient :

$$99) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{1}{\epsilon_2} \left[\frac{\phi_{ee}}{\phi_{ep}} e + \frac{\phi_{ee} \phi_{pp}}{\phi_{ep} \phi_{ep}} p + \eta A p^2 + \eta B e p + \frac{1}{2} \eta C e^2 \right]$$

avec

$$A = \frac{\dot{g}(0)}{g(0)} \frac{\phi_{ee} \phi_{pp}}{\phi_{ep} \phi_{ep}} + \frac{1}{2} \frac{\phi_{ppp} \phi_{ee}}{\phi_{ep} \phi_{ep}}$$

$$B = \frac{\dot{g}(0)}{g(0)} \frac{\phi_{ee}}{\phi_{ep}} + \frac{\phi_{ee} \phi_{epp}}{\phi_{ep} \phi_{ep}}$$

$$C = \frac{\phi_{eep} \phi_{ee}}{\phi_{ep} \phi_{ep}}$$

Les deux équations (98), (99) jointe à celle de compatibilité :

$$100) \quad \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

forment le système fondamental d'équations qui gouverne le problème.

On pose $\eta = \epsilon_2 \left(\frac{\eta}{\epsilon_2} \right)$, $x_i = \epsilon_2^i x$ et l'on substitue dans (98) (99) et (100) des développements (pour e , v et p) du type :

$$101) \quad e(x, t, \epsilon_2, \eta) = \sum_{i \geq 0} \epsilon_2^i e_i(t, x_0, x_1, \dots, \frac{\eta}{\epsilon_2})$$

On obtient en raisonnant directement sur les équations :

$$102) \quad e_0 = e_0(\xi, x_1) \quad \left(\xi = \sqrt{\frac{E_1}{\hat{E}_1}} t - x_0 \right)$$

$$(103) \quad v_o = -\sqrt{\frac{E_1}{\hat{E}_1}} e_o$$

$$(104) \quad p_o = -\frac{\phi_{ep}}{\phi_{pp}} e_o$$

La dépendance de e_o relativement à x_1 est gouvernée par l'équation de Burgers :

$$(105) \quad \frac{E_1}{\hat{E}_1} \frac{\partial e_o}{\partial x_1} - \frac{\phi_{ep}^4}{2\phi_{ee}^2 \phi_{pp}^2} \sqrt{\frac{E_1}{\hat{E}_1}} \frac{\partial^2 e_o}{\partial \xi^2} + G \frac{\eta}{\epsilon_2} e_o \frac{\partial e_o}{\partial \xi} = 0$$

où l'on a posé :

$$(106) \quad G = \frac{1}{2} \frac{\phi_{ep}^3 \phi_{ppp}}{\phi_{ee}^3 \phi_{pp}} - \frac{3}{2} \frac{\phi_{ep}^2 \phi_{epp}}{\phi_{pp}^2 \phi_{ee}} + \frac{3}{2} \frac{\phi_{ep} \phi_{eep}}{\phi_{ee} \phi_{pp}} - \frac{1}{2} \frac{\phi_{eee}}{\phi_{ee}}$$

6.4 L'ONDE DE FORTE AMPLITUDE

On étudie les ondes gouvernées par le système (6.1.1) sans supposer qu'elles sont de faible amplitude.

Avec un changement de variable du type

$$(1) \quad \tilde{t} = T^* t, \quad \tilde{x} = \Omega T^* x$$

et des changements de fonction adéquats, il est possible en général d'écrire le système (6.1.1) sous la forme

$$(2) \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial \tilde{t}} + \underline{A}(\underline{u}) \frac{\partial \underline{u}}{\partial \tilde{x}} = \frac{T^*}{T_r} \underline{C}(\underline{u})$$

où T_r est un temps de relaxation du matériau.

a) La k-onde progressive instantanée

On introduit le petit paramètre

$$(3) \quad \varepsilon_1 = \frac{T^*}{T_r}$$

S'il est nul, le système (2) devient homogène

$$(4) \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial \tilde{t}} + \underline{A}(\underline{u}) \frac{\partial \underline{u}}{\partial \tilde{x}} = 0$$

Avant de passer à l'étude du cas général ($\varepsilon_1 \neq 0$), rappelons quelques résultats relatifs à la résolution du système (4). (La plupart de ceux-ci sont extraits de l'article de Lax [8]).

Onde simple

Définition 1 : Une solution $\underline{u}$ de l'équation (4) est une onde simple s'il existe une fonction $\phi(x, t)$ telle que :

$$(5) \quad \underline{u} = \underline{u}(\phi(x, t))$$

En substituant (5) dans (4), on obtient :

$$(6) \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \underline{I} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \underline{A}(\underline{u}) \right) \frac{d\underline{u}}{d\phi} = 0$$

Par conséquent, si $\underline{u}$ est une solution non triviale, on doit nécessairement avoir :

$$\det \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \underline{I} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \underline{A}(\underline{u}) \right) = 0$$

Il existe donc une valeur propre $\lambda_k(\underline{u})$ de la matrice $\underline{A}(\underline{u})$ telle que :

$$(7) \quad - \frac{\partial \phi}{\partial t} / \frac{\partial \phi}{\partial x} = \lambda_k$$

Les courbes $\phi(x, t) = \text{Const}$ sont des courbes caractéristiques.

Soit $\underline{r}_k(\underline{u})$ un vecteur non nul du noyau de $\lambda_k \underline{I} - \underline{A}$, supposé de dimension unité.

$$(8) \quad (\lambda_k \underline{I} - \underline{A}) \underline{r}_k = 0$$

D'après (6) nous avons :

$$(9) \quad \frac{d\underline{u}}{d\phi} = \alpha(\phi) \underline{r}_k(\underline{u})$$

où $\alpha(\phi)$ est une fonction à déterminer à l'aide des conditions à la limite.

Définition 2 : Une onde simple $\underline{u}$, solution de (4), qui vérifie (9) s'appelle une k-onde simple.

Soit $S(\underline{u})$ une fonction scalaire de la variable vectorielle $\underline{u}$. Nous noterons $\underline{\text{grad}} S(\underline{u})$ le vecteur de composante $\frac{\partial S}{\partial u_1}, \frac{\partial S}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial u_n}$.

Introduisons maintenant l'importante notion d'invariant de Riemann.

Définition 3 : Une fonction $S(\underline{u})$ est un k-invariant de Riemann du système (4) si l'on a quelque soit $\underline{u}$:

$$(10) \quad \underline{r}_k(\underline{u}) \cdot \underline{\text{grad}} S(\underline{u}) = 0$$

Nous donnons sans démonstration les résultats suivants (voir [8] [9]).

Théorème 1 : Il existe précisément (*) $n - 1$ invariants de Riemann $S_1 \dots S_{n-1}$ indépendants (i.e. tels que les vecteurs $\text{grad } S_1, \dots, \text{grad } S_{n-1}$ soient linéairement indépendants).

Théorème 2 : Soit $\underline{u}$ une solution continue du système (4). Si $\underline{u}$ est constante dans un domaine $\mathcal{D}$ du plan (x, t) , alors $\mathcal{D}$ a pour frontière une caractéristique ([8] Corollaire du théorème 8.2).

Théorème 3 : Si $\mathcal{C}$ est une k -caractéristique bordant un état constant, alors de l'autre côté de $\mathcal{C}$ les k -invariants de Riemann sont constants ([8] théorème 8.3).

Théorème 4 : Soit $\underline{u}$ une solution de (4). Considérons un domaine du plan (x, t) dans lequel les k -invariants de Riemann sont constants. Alors les k -caractéristiques de cette onde sont des droites le long desquelles la solution $\underline{u}$ est constante ([8] théorème 8.4).

Démontrons à présent le résultat suivant :

Théorème 5 : Une onde $\underline{u}$ est une k -onde simple si et seulement si les k -invariants de Riemann sont constants. (i.e. si S est un k -invariant de Riemann, alors $S(\underline{u}(x, t))$ est indépendant de (x, t)).

Démonstration : Soit $\underline{u} = \underline{u}(\phi(x, t))$ une k -onde simple. Considérons un invariant de Riemann $S(\underline{u})$. En dérivant par rapport à ϕ , il vient :

$$\frac{dS}{d\phi}(\underline{u}(\phi)) = \text{grad } S \cdot \frac{d\underline{u}}{d\phi}$$

(*) Le fait qu'il n'y ait pas plus de $(n - 1)$ k -invariants de Riemann indépendants est évident, car les vecteurs $\text{grad } S_i$ sont orthogonaux au vecteur $\underline{r}_k(\underline{u})$.

Ceci est nul compte tenu de (9) et de (10), et par suite le k -invariant de Riemann S est constant.

Réciproquement considérons une onde dont les k -invariants de Riemann sont constants. Alors d'après le théorème 4, il existe visiblement une fonction $\phi(x, t)$ telle que

$$\underline{u} = \underline{u}(\phi(x, t))$$

$\phi = \text{const}$ définit une k -caractéristique, et $\underline{u}$ est donc une k -onde simple.

Dans un problème où il y a repos initial, la perturbation engendrée par une excitation au bord $x = 0$, se propage dans un domaine au repos. Si la solution u est continue, la zone perturbée est séparée de la zone au repos par une caractéristique (Théorème 2). Supposons qu'il s'agisse d'une k -caractéristique. Alors d'après les théorèmes 3 et 5, u est une k -onde simple.

Suivant (9), une k -onde est représentée dans l'espace $(u_1, \dots, u_n)$ par une courbe intégrale $\mathcal{J}$ du champ de vecteurs $\underline{r}_k(\underline{u})$. Notons $\underline{r}_k$ le vecteur associé à $\hat{\underline{u}} = \underline{u}(x = 0, t = 0)$

$$\hat{\underline{r}}_k = \underline{r}_k(\hat{\underline{u}})$$

Soient $\underline{e}_1 = (1, 0 \dots 0)$, $\underline{e}_2 = (0, 1, 0 \dots)$, $\underline{e}_n = (0, \dots 0, 1)$, une base de l'espace $E_n = \{ \underline{u} = (u_1, \dots u_n) \}$.

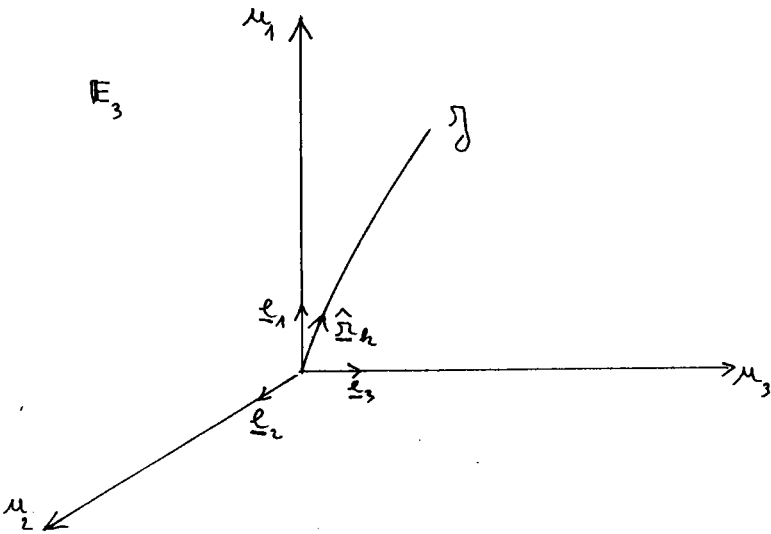


FIG. 2

Si l'angle $(\underline{e}_j, \hat{\underline{r}}_k)$ est petit, c'est la composante $\underline{u}_j$ du vecteur $\underline{u}$ qui est pour l'essentiel excitée. Dans ce cas l'onde simple vérifie sensiblement (pour des valeurs de $\underline{u}_1$ pas trop grandes) une condition à la limite du type $\underline{u}_j = 0$ pour $j \neq i$, et $\underline{u}_i(0, t) = f(t)$ où f est une fonction donnée. Cette remarque justifie l'utilisation de la notion d'onde simple dans la résolution de certains problèmes aux limites non linéaire. L'une des composantes de la solution est essentiellement excitée au bord, les autres restant nulles. On cherche alors une solution "de type onde simple" qui vérifie sensiblement la condition aux limites.

Nous supposons dorénavant, pour fixer les idées, que l'angle $(\underline{e}_1, \hat{\underline{r}}_k)$ est petit. Et nous posons

$$(11) \quad F = u_1 .$$

Nous supposons également que l'application $\underline{W}$:

$$(12) \quad \underline{W} : \underline{u} \rightarrow (F, S_1(\underline{u}), \dots, S_{n-1}(\underline{u})) = (F, \underline{S})$$

est inversible. Soit $\underline{V}$ l'application inverse de $\underline{W}$:

$$(13) \quad \underline{V} : (F, \underline{S}) \rightarrow \underline{u} = \underline{V}(F, \underline{S})$$

Dans l'espace E_n , on peut paramétrer la courbe $\mathcal{J}$ par F

$$(14) \quad \mathcal{J} : F \rightarrow \underline{u} = \underline{V}(F, \underline{S})$$

Puisque $\underline{r}_k(\underline{u})$ est tangent à $\mathcal{J}$ en $\underline{u}$, et puisque $\underline{S}$ est constant sur $\mathcal{J}$, on a donc, si l'on normalise $\underline{r}_k(\underline{u})$ de façon que sa première composante soit égale à l'unité :

$$(15) \quad \frac{\partial \underline{V}}{\partial F} = \underline{r}_k(\underline{u})$$

La k-onde progressive instantanée

Réolvons maintenant le cas général où ϵ_1 est non nul. Nous allons prendre, à l'exemple de Seymour et Mortell [2], les fonctions $F, S_1, \dots, S_{n-1}$, définies précédemment, comme nouvelles fonctions inconnues.

Alors que pour une onde simple les invariants de Riemann S_i étaient constants, ils seront ici légèrement modulés par les effets dissipatifs (*).

A la place des variables (x, t) nous utilisons les variables (α, X) où α est définie au moyen des k -caractéristique de la façon suivante :

Nous supposons que c'est la $k^{\text{ième}}$ valeur propre de la matrice A qui est excitée.

Notons $\mathcal{C}_\alpha^{(k)}(\underline{u})$ la k -caractéristique associée à une solution $\underline{u}$ du système homogène (4) dont l'équation dans le plan (x, t) est de la forme :

$$(16) \quad \mathcal{C}_\alpha^{(k)}(\underline{u}) : x \rightarrow T^{(k)}(\alpha, x)$$

$T^{(k)}(\alpha, x)$ étant la fonction définie par :

$$(17) \quad T^{(k)}(\alpha, 0) = \alpha$$

$$(18) \quad \frac{\partial T^{(k)}}{\partial x} = \frac{1}{\lambda_k(\underline{u})} \quad (\lambda_k \text{ est la } k^{\text{ième}} \text{ valeur propre de la matrice } A)$$

Dans un domaine $\mathcal{D}$ du quart de plan $(t > 0, x > 0)$ où les caractéristiques $\mathcal{C}_\alpha^{(k)}$ ne se coupent pas, à tout point de coordonnées (x, t) nous associons l'unique nombre α tel que $\mathcal{C}_\alpha^{(k)}$ passe par ce point. Le changement de variable

$$(19) \quad (t, x) \longleftrightarrow (\alpha, X)$$

tel que $X(t, x) = x$, est bien défini dans $\mathcal{D}$.

Nous noterons $\underline{u}$ la fonction $\underline{u}(x, t)$ exprimée avec les variables (α, X) :

$$(20) \quad \underline{u}(\alpha, X) = \underline{u}(x, t)$$

En effectuant les changements de fonctions et de variables (13) et (19), le système

$$(21) \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{A}(\underline{u}) \frac{\partial \underline{u}}{\partial x} = \epsilon_1 \underline{C}(\underline{u})$$

s'écrit (la démonstration se trouve en annexe 6.A) :

$$(22) \quad F_{,X} = \frac{1}{\lambda \frac{1}{r}} \frac{1}{r} \left[\epsilon_1 \underline{C} - \lambda \underline{V}_{,S} \underline{S}_{,X} \right]$$

(*) Les S_i varient lentement, d'où la notation S comme Slow. F varie rapidement d'où la notation F comme fast

$$(23) \quad \frac{1}{p} ((\underline{I} - \underline{A}/\lambda) \underline{V}, \underline{S}) \underline{S},_{\alpha} = \epsilon_1 \underline{C} - \epsilon_1 \underline{r} \frac{(\underline{I} \underline{C})}{\underline{I} \underline{r}} \\ + \lambda \underline{r} (\underline{I} \underline{V}, \underline{S} \underline{S},_{\chi}) / (\underline{I} \underline{r}) - \underline{A} \underline{V}, \underline{S} \underline{S},_{\chi}$$

Pour alléger l'écriture, nous omettons dorénavant l'indice k. Ainsi dans (22) et (23) λ et $\underline{r}$ représentent λ_k et $\underline{r}_k$. Le vecteur $\underline{I}$ est un vecteur non nul du noyau de l'adjointe de $(\lambda \underline{I} - \underline{A})$

$$(24) \quad \underline{I} (\lambda \underline{I} - \underline{A}) = 0$$

On a noté :

$$(25) \quad p = T,_{\alpha} = - \frac{1}{\lambda \alpha,_{\chi}}$$

Cherchons les solutions $F(\alpha, X, \epsilon_1)$, $\underline{S}(\alpha, X, \epsilon_1)$, $T(\alpha, X, \epsilon_1)$ de (22), (23) et (25)₁ sous la forme d'une onde progressive :

$$(26) \quad F = F_0(\alpha, X_1, X_2 \dots) + \epsilon_1 F_1(\alpha, X_1, X_2 \dots) + \dots \\ \underline{S} = \underline{S}_0(X_1, X_2 \dots) + \epsilon_1 \underline{S}_1(\alpha, X_1, X_2 \dots) + \dots \\ T = T_0(\alpha, X_0, X_1, \dots) + \epsilon_1 T_1(\alpha, X_0, X_1, \dots)$$

expressions dans lesquelles apparaissent les variables lentes :

$$(27) \quad X_i = \epsilon_1^i X$$

Lorsque ϵ_1 est nul (cas non dissipatif) $\underline{S}$ est constant ; c'est pourquoi nous supposons $\underline{S}_0$ indépendant de α . De plus, étant donné que $\underline{S}(\underline{u})$ est une fonction constante le long de la frontière séparant la zone au repos de la zone perturbée, nous pouvons supposer que $\underline{S}_0$ est indépendante des variables X_i .

Nous posons dorénavant :

$$(28) \quad \underline{S}_0 = \underline{K}_0$$

et nous notons $\underline{l}_0$ et $\underline{r}_0$ les valeurs de $\underline{l}(F, \underline{S})$ et $\underline{r}(F, \underline{S})$ pour $\underline{S} = \underline{K}_0$ et $F = F_0$:

$$(29) \quad \underline{l}_0 = \underline{l}(F_0, \underline{K}_0) \\ \underline{r}_0 = \underline{r}(F_0, \underline{K}_0)$$

De même on pose :

$$\begin{aligned}
 \lambda_0 &= \lambda (F_0, K_0) \\
 p_0 &= T_{0,\alpha} \\
 A_0 &= A (F_0, K_0) \quad ; \quad C_0 = C (F_0, K_0) \\
 V_{S_1} &= V_{S_1} (F_0, K_0)
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Substituons (26) dans (17) et (18). On obtient au premier ordre :

$$T_{0,X_0} = \frac{1}{\lambda_0} \quad ; \quad T_0 (\alpha, 0) = \alpha
 \tag{31}$$

De façon identique les équations (22) et (23) donnent :

$$F_{0,X_1} = \lambda_0 \frac{C_0}{T_0 r_0}
 \tag{32}$$

$$\frac{1}{p_0} \left(\left(I - \frac{A_0}{\lambda_0} \right) V_{S_1} \right) S_{1,\alpha} = C_0 - r_0 \frac{(C_0 - r_0)}{T_0 r_0}
 \tag{33}$$

L'équation (32) est du même type que (4.3.35) :

$$F_{0,X_1} = \psi (F_0)$$

Elle gouverne l'évolution de F_0 le long des caractéristiques données par (31). Ces résultats ont été obtenus par Seymour et Mortell [2] dans le cas d'une onde de haute fréquence.

b) L'onde progressive différée

On se contente ici de traiter un exemple qui pourra servir de référence dans d'autres applications pratiques. La méthode que nous utilisons a déjà été présentée au chapitre IV.

On considère un matériau viscoélastique dont la loi de comportement est du type (6.3.25) et l'on utilise les notations du paragraphe 6.3.b.

Le système fondamental d'équations

$$\begin{aligned}
 (34) \quad \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{t}} &= \phi(\tilde{\sigma}, \tilde{e}) \frac{\partial \tilde{e}}{\partial \tilde{t}} + \psi(\tilde{\sigma}, \tilde{e}) \\
 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{x}} \\
 \frac{\partial \tilde{e}}{\partial \tilde{t}} &= \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{x}}
 \end{aligned}$$

dans lequel on opère le changement de variable et de fonctions :

$$\begin{aligned}
 (35) \quad \tilde{t} &= T^* t, \quad \tilde{x} = \Omega T^* x, \quad \Omega = (\phi_0 / \rho_0)^{1/2} \\
 \tilde{v} &= \Omega v, \quad \tilde{\sigma} = \phi_0 \sigma, \quad \tilde{e} = e
 \end{aligned}$$

s'écrit :

$$\begin{aligned}
 (36) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= \hat{\phi}(\sigma, e) \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon_2} \hat{\psi}(\sigma, e) \\
 \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \\
 \frac{\partial e}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial x}
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 (37) \quad \hat{\phi}(\sigma, e) &= \frac{\phi(\phi_0 \sigma, e)}{\phi_0} \\
 \hat{\psi}(\sigma, e) &= \frac{\psi(\phi_0 \sigma, e)}{-\psi_1 \phi_0}
 \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{L}_\alpha$ la ligne de propagation d'équation implicite :

$$(38) \quad \alpha(x, t) = \text{Const}$$

Dans le plan (x, t) la courbe $\mathcal{L}_\alpha$ est donnée par l'application :

$$(39) \quad x \rightarrow T(\alpha, x) \quad \text{avec } T(\alpha, 0) = \alpha$$

On fait dans les équations (36) le changement de variable

$$(\alpha, x) \longleftrightarrow (t, x)$$

et l'on notera avec une majuscule les fonctions de (α, x) :

$$\sigma(x, t) = \Sigma(\alpha, x), \quad e(x, t) = E(\alpha, x), \quad v(x, t) = V(\alpha, x).$$

En se servant des identités :

$$(40) \quad \alpha_{,x} = -\frac{T_{,x}}{T_{,\alpha}}, \quad \alpha_{,t} = \frac{1}{T_{,\alpha}}$$

on obtient :

$$(41) \quad \begin{aligned} \frac{\Sigma_{,\alpha}}{T_{,\alpha}} &= \hat{\phi}(\Sigma, E) \frac{E_{,\alpha}}{T_{,\alpha}} + \frac{1}{\epsilon_2} \hat{\psi}(\Sigma, E) \\ V_{,\alpha} &= -T_{,x} \Sigma_{,\alpha} + \Sigma_{,x} T_{,\alpha} \end{aligned}$$

$$E_{,\alpha} = -T_{,x} V_{,\alpha} + V_{,x} T_{,\alpha}$$

On pose $x_i = \epsilon_2^i x$, et l'on introduit dans (41) l'onde progressive définie par les développements :

$$(42) \quad \begin{aligned} V &= V_0(\alpha, x_1, \dots) + \epsilon_2 V_1(\alpha, x_1, \dots) \\ E &= E_0(\alpha, x_1, \dots) + \epsilon_2 E_1(\alpha, x_1, \dots) \\ \Sigma &= \Sigma_0(\alpha, x_1, \dots) + \epsilon_2 \Sigma_1(\alpha, x_1, \dots) \end{aligned}$$

$$(43) \quad T = T_0(\alpha, x_0, x_1, \dots) + \epsilon_2 T_1(\alpha, x_0, x_1, \dots)$$

Il vient au premier ordre :

$$\hat{\psi}(\Sigma_0, E_0) = 0$$

$$(44) \quad V_{0,\alpha} = -T_{0,x_0} \Sigma_{0,\alpha}$$

$$E_{0,\alpha} = -T_{0,x_0} V_{0,\alpha}$$

puis à l'ordre suivant :

$$\frac{\Sigma_{0,\alpha}}{T_{0,\alpha}} = \hat{\phi}(\Sigma_0, E_0) \frac{E_{0,\alpha}}{T_{0,\alpha}} + \Sigma_1 \hat{\psi}_{,\Sigma}(\Sigma_0, E_0) + E_1 \hat{\psi}_{,E}(\Sigma_0, E_0)$$

(45)

$$V_{1,\alpha} = - (T_{0,x_1} + T_{1,x_0}) \Sigma_{0,\alpha} - T_{0,x_0} \Sigma_{1,\alpha} + \Sigma_{0,x_1} T_{0,\alpha}$$

$$E_{1,\alpha} = - (T_{0,x_1} + T_{1,x_0}) V_{0,\alpha} - T_{0,x_0} V_{1,\alpha} + V_{0,x_1} T_{0,\alpha}$$

Supposons que la formule (44)₁ puisse se résoudre sous la forme :

(46)

$$\Sigma_0 = f(E_0),$$

et substituons cette expression dans (44)₂ et (44)₃, puis éliminons $V_{0,\alpha}$; on obtient :

(47)

$$T_{0,x_0} = (f'(E_0))^{-1/2}$$

et

(48)

$$V_{0,\alpha} + (f'(E_0))^{1/2} E_{0,\alpha} = 0$$

En intégrant (48) par rapport à α , on peut écrire :

$$V_0 + g(E_0) = K_0$$

où K_0 est une constante indépendante de α et où $g(E_0)$ est une fonction définie par :

(49)

$$g(E_0) = \int_0^{E_0} (f'(\xi))^{1/2} d\xi$$

Compte tenu du fait que devant le front d'onde, le matériau est au repos, on a $K_0 = 0$, d'où :

(50)

$$V_0 + g(E_0) = 0$$

Puisque E_0 ne dépend pas de x_0 , l'équation (47) nous donne :

(51)

$$T_0 = (f'(E_0))^{-1/2} x_0 + \alpha$$

d'où

$$(52) \quad T_{0,\alpha} = 1 + x_0 (f'(E_0))^{-1/2}_{,E_0} E_{0,\alpha}$$

En utilisant les équations (46) (45)₁ et (52), on obtient alors :

$$(53) \quad \Sigma_1 = \theta(E_0) \frac{E_{0,\alpha}}{1 + x_0 (f'(E_0))^{-1/2}_{,E_0} E_{0,\alpha}} - B(E_0) E_1$$

où l'on a posé :

$$(54) \quad \theta(E_0) = \frac{f'(E_0) - \hat{\phi}(f(E_0), E_0)}{\hat{\psi}_{,\Sigma}(\Sigma_0, E_0)}$$

$$(55) \quad B(E_0) = \frac{\hat{\psi}_{,E}(\Sigma_0, E_0)}{\hat{\psi}_{,\Sigma}(\Sigma_0, E_0)}$$

La substitution de (53) dans (45)₂ donne, compte tenu de (46) (51) et (52) :

$$(56) \quad \begin{aligned} V_{1,\alpha} = & - (x_0 (f'(E_0))^{-1/2}_{,E_0} E_{0,x_1} + T_{1,x_0}) f'(E_0) E_{0,\alpha} \\ & - (f'(E_0))^{-1/2} (\theta(E_0) \frac{E_{0,\alpha}}{1 + x_0 (f'(E_0))^{-1/2}_{,E_0} E_{0,\alpha}})_{,\alpha} \\ & + (f'(E_0))^{-1/2} B'(E_0) E_{0,\alpha} E_1 + (f'(E_0))^{-1/2} B(E_0) E_{1,\alpha} \\ & + f'(E_0) E_{0,x_1} (1 + x_0 (f'(E_0))^{-1/2}_{,E_0} E_{0,\alpha}) \end{aligned}$$

Ce résultat reporté dans (45)₃ conduit finalement à l'équation :

$$\begin{aligned} E_{1,\alpha} - 2 T_{1,x_0} (f'(E_0))^{1/2} E_{0,\alpha} + (f'(E_0))^{-1} B'(E_0) E_{0,\alpha} E_1 \\ + (f'(E_0))^{-1} B(E_0) E_{1,\alpha} = - 2 (f'(E_0))^{1/2} E_{0,x_1} \\ + (f'(E_0))^{-1} (\theta(E_0) \frac{E_{0,\alpha}}{1 + x_0 (f'(E_0))^{-1/2}_{,E_0} E_{0,\alpha}})_{,\alpha} \end{aligned}$$

Dans le premier membre ont été regroupés tous les termes affectés d'un indice 1. En posant que chacun des membres est nul, on obtient l'équation de la chaleur non linéaire qui gouverne l'évolution de E_0 :

$$(57) \quad E_{0,x_1} - \frac{1}{2} (f'(E_0))^{-3/2} \left(\theta(E_0) \frac{E_{0,\alpha}}{1 + x_0 (f'(E_0))^{-1/2} E_{0,\alpha}} \right)_{,E_0} = 0$$

En définitive, la solution au premier ordre est donnée par les équations (57), (46), (49) et (50). Les lignes de propagation sont décrites en première approximation par la formule (51).

On peut vérifier que, dans le cas linéaire, l'équation (57) n'est rien d'autre que l'équation de la chaleur :

$$(58) \quad \frac{\partial e_0}{\partial x_1} - \frac{1}{2} (1 - a) a^{-3/2} \frac{\partial^2 e_0}{\partial \alpha^2} = 0$$

Cela est en accord avec le résultat (6.3.78) dans lequel on pose $\eta = 0$ (remarquer également que $\frac{\partial}{\partial \xi} = a^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \alpha}$).

En effet, si le problème est linéaire, on a $f(E_0) = a E_0$, et $\theta(E_0) = 1 - a$, d'où le passage de (57) à (58). On peut également remarquer que les lignes de propagation sont des droites d'équation :

$$t = a^{-1/2} x + \alpha$$

REFERENCES DU CHAPITRE VI

- [1] GERMAIN P., Progressive waves, 14th Ludwig Prandtl Memorial Lecture, D.G.R.L., Mannheim, 11-30, 1971.
- [2] MOLINARI A., Sur la propagation par ondes planes d'une perturbation de faible amplitude dans un demi-espace dissipatif, C.R. Acad. Sc., t. 287, Série A, 79-82, 1978.
- [3] SEYMOUR B.R. et MORTELL M.P., Nonlinear geometrical acoustics, Mech. Today, Vol. 2, Pergamon Press, 251-313, 1975.
- [4] SEYMOUR B.R., Weak shocks in dissipatives systems, J. Appl. Math. Phys., 27, 49-59, 1976.
- [5] WHITHAM G.B., Linear and nonlinear waves, John Wiley Publ., 1974.
- [6] CRITESCU N., Dynamic Plasticity, North Holland Comp., Amsterdam, 1967.
- [7] WEBER J.D., Thèse, Strasbourg, 1970.
- [8] LAX P.D., Hyperbolic systems of conservation laws, Comm. Pure Appl. Math., 537-566, 1957.
- [9] COURANT R. et HILBERT D., Methods of mathematical physics, Vol. II : partial differential equations, Interscience Publ., 1962.

CHAPITRE VII

PERSPECTIVES

7.1 PERSPECTIVES

Nous avons eu un aperçu, au travers de l'étude de quelques problèmes physiques, de la grande fécondité des méthodes de perturbations appliquées à la résolution de problèmes dynamiques (*).

En restant dans l'esprit de cette thèse, qui est d'étudier la propagation d'ondes en milieux solides dissipatifs, de nombreuses directions de recherches restent à explorer.

Il est possible, et cela ne présente pas en général de difficultés, de transposer les résultats de ce travail à l'étude de tout corps dissipatif, tel par exemple un corps thermoviscoélastique, magnéto-thermoélastique ou piézo-thermoélastique. L'étude des ondes dans les milieux viscoplastiques (voir par ex. M. Piau [4]) présente également un grand intérêt.

Une autre voie de recherche consiste à lever certaines restrictions d'ordre géométrique, à approfondir l'étude des problèmes multidimensionnels, à s'intéresser aux problèmes de réflexion et réfraction.

L'étude des ondes de forte amplitude doit également être approfondie. Il y a beaucoup de progrès à accomplir dans ce domaine.

Enfin nous comptons orienter une partie de nos efforts vers l'étude d'applications pratiques, notamment dans le domaine des ondes sismiques et dans celui des semi-conducteurs.

Afin de donner un début de concrétisation à ces perspectives, nous allons aborder l'étude de problèmes tridimensionnels.

Dans la section 7.2, nous généralisons aux ondes non planes les résultats du paragraphe 6.2 relatifs aux ondes planes de faible amplitude gouvernées par un système quasi-linéaire d'équations. Nous présentons une théorie des rayons différés en vue d'étudier la perturbation loin de la source (onde différée). Tous les résultats de la théorie classique des rayons se généralisent de façon immédiate et nous déterminons l'équation de transport qui gouverne l'évolution de l'amplitude de l'onde le long d'un rayon différé.

Dans la section 7.3 nous étudions l'onde sphérique viscoélastique avec applications à la description de certaines ondes sismiques. L'approche que

(*) Dans [5], on pourra trouver un aperçu de récents progrès accomplis en mécanique des fluides grâce également aux méthodes asymptotiques.

nous présentons a un caractère plutôt élémentaire au regard des problèmes plus complexes traités précédemment. On notera d'ailleurs la simplicité du raisonnement par rapport à la méthode de point selle utilisée par Blake [1] dans un autre problème relatif aux ondes sphériques. Le paragraphe 7.3 n'a pas d'autres prétentions que d'éclairer certaines considérations des géophysiciens. A cet égard, le point de vue du mécanicien est souvent fort utile car, par une vision globale, il peut apporter une contribution importante à la bonne compréhension des phénomènes.

7.2 UNE THEORIE DES RAYONS DIFFERES

Tout comme dans le chapitre VI, nous supposons le problème gouverné par un système d'équations quasi-linéaire de type dissipatif, mais dans lequel interviennent cette fois trois coordonnées d'espaces x_1, x_2, x_3 :

$$(1) \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{A}^k(\underline{u}) \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_k} = \underline{B}(\underline{u}) \underline{u}$$

Les n composantes du vecteur $\underline{u}$ sont des paramètres qui caractérisent l'évolution du système. Le temps est représenté par t .

Le problème est faiblement non linéaire par hypothèse. La dissipation résulte ici de deux causes qui se combinent (*) :

- dégradation de l'énergie mécanique (par viscoélasticité, conduction thermique ... etc) ;
- dispersion de nature géométrique.

Au chapitre V, nous avons vu comment s'introduisent de façon naturelle dans les équations du problème deux petits paramètres, l'un représentatif de l'amortissement dû à la dégradation de l'énergie mécanique, l'autre de la faible non-linéarité du problème. Ici, l'on introduit directement dans le système (1), et de façon un peu artificielle (mais l'artifice est justifié par tout ce que nous avons vu auparavant), les deux paramètres en question. On les prendra d'ailleurs égaux, car les effets engendrés par les mécanismes dissipatifs sont supposés du même ordre que ceux produits par la non-linéarité.

Pour l'étude de l'onde près du front nous faisons apparaître un paramètre ϵ dans (1) de la manière suivante :

$$(2) \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{A}^k(\epsilon \underline{u}) \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_k} = \epsilon \underline{B}(\epsilon \underline{u}) \underline{u}$$

alors que pour l'étude loin de la source on prendra :

$$(3) \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{A}^k(\epsilon \underline{u}) \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_k} = \frac{1}{\epsilon} \underline{B}(\epsilon \underline{u}) \underline{u}$$

On utilise le concept d'onde progressive pour calculer deux solutions approchées en utilisant (2) et (3). Chacune d'elle est représentée par un déve-

(*) Sans autres difficultés on pourrait tenir compte des effets dissipatifs dus à la non homogénéité du matériau (matrices $\underline{A}^k$ et $\underline{B}$ dépendant explicitement de x_1, x_2, x_3).

l'opement de la forme :

$$(4) \quad \underline{u} = \sum_{i \geq 0} \varepsilon^i \underline{u}_i (\xi, t, x_1, x_2, x_3)$$

où la phase ξ est une fonction de (t, x_1, x_2, x_3) à déterminer. Les termes $\underline{u}_i$ vérifient les conditions :

$$(5) \quad \frac{\partial \underline{u}_i}{\partial \xi} = 0 \quad (1) \qquad \frac{\partial \underline{u}_i}{\partial x_\nu} = \varepsilon 0 \quad (1)$$

qui caractérisent analytiquement l'aspect fondamental selon lequel l'onde progressive est une onde simple légèrement modulée.

a) Notations

Nous conviendrons qu'un indice latin tel que i court de 1 à 3, alors qu'un indice grec tel que ν court de 0 à 3. Ainsi, avec la convention de sommation sur l'indice répété, a-t-on : $a_\nu b_\nu = \sum_{\nu=0}^3 a_\nu b_\nu$, $a_i b_i = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$.

En posant $t = x_0$ et $\underline{A}^0 = \underline{I}$ (matrice identité d'ordre n), le système (1) peut s'écrire :

$$\underline{A}^\nu(\underline{u}) \frac{\partial \underline{u}}{\partial x_\nu} = \underline{B}(\underline{u}) \underline{u}$$

la fonction vectorielle $\underline{u}$ dépend des variables (t, x_0, x_1, x_2) ou (t, x_i) ou (x_α) ($i = 1, 2, 3$; $\alpha = 0, 1, 2, 3$). On utilisera également dans la suite les notations :

$$b_{,\nu} = \frac{\partial b}{\partial x_\nu} \quad ; \quad \underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad ; \quad \underline{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

b) L'onde progressive instantanée

Rappelons succinctement les grandes lignes de la théorie classique des rayons fournissant la solution au voisinage du front (onde progressive instantanée) [2]. On considère les développements :

$$(6) \quad \underline{B}(\varepsilon \underline{u}) = \underline{B}_0 + \varepsilon \underline{B}_1 \underline{u} + \varepsilon^2 (\underline{B}_2 \underline{u}) \underline{u} + 0(\varepsilon^3)$$

$$(7) \quad \underline{A}^k(\varepsilon \underline{u}) = \underline{A}_0^k + \varepsilon \underline{A}_1^k \underline{u} + \varepsilon^2 (\underline{A}_2^k \underline{u}) \underline{u} + 0(\varepsilon^3)$$

dans lesquels $\underline{B}_0, \underline{B}_1, \underline{B}_2 \dots$ sont des tenseurs constants d'ordre 2, 3, 4. La juxtaposition de deux tenseurs (par ex. $\underline{B}_2 \underline{u}$) représente leur produit contracté.

Compte tenu de (5) (6) et (7), la substitution du développement (4) dans (2) fournit, en identifiant les termes d'ordre 1 et ϵ :

$$(8) \quad \xi_{,v} \underline{A}_0^v \frac{\partial \underline{u}_0}{\partial \xi} = 0$$

$$(9) \quad (\xi_{,v} \underline{A}_0^v) \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial \xi} = - \frac{1}{\epsilon} \underline{A}_0^v \frac{\partial \underline{u}_0}{\partial x_v} - \xi_{,k} (\underline{A}_1^k \underline{u}_0) \frac{\partial \underline{u}_0}{\partial \xi} + \underline{B}_0 \underline{u}.$$

L'équation (8) admet une solution $\underline{u}_0$ non nulle si et seulement si :

$$(10) \quad \det (\xi_{,v} \underline{A}_0^v) = 0$$

Les surfaces $\xi = \text{const}$ sont alors des surfaces caractéristiques du système linéarisé associé à (1).

Soit $\underline{R}(\underline{x})$ et $\underline{L}(\underline{x})$ des vecteurs non nuls du noyau de $\xi_{,v} \underline{A}_0^v$ et de son adjointe (noyaux supposés de dimension 1) normalisés par :

$$(11) \quad \underline{L} \underline{R} = 1$$

Nous avons d'après (8) :

$$(12) \quad \underline{u}_0 = f(\xi, \underline{x}) \underline{R}(\underline{x})$$

La fonction f est déterminée par l'équation de transport obtenue en multipliant scalairement chaque membre de (9) par $\underline{L}$:

$$(13) \quad V_0^v \frac{\partial f}{\partial x_v} + \Gamma f \frac{\partial f}{\partial \xi} + Kf = 0$$

où

$$(14) \quad V_0^v = \underline{L} \underline{A}_0^v \underline{R}$$

représente la "célérité d'un rayon". On a également noté :

$$(15) \quad \Gamma = \xi_{,k} \underline{L} (\underline{A}_1^k \underline{R}) \underline{R}$$

$$(16) \quad K = \underline{L} \underline{A}_0^v \frac{\partial \underline{R}}{\partial x_v}$$

Le terme $V_0^v \frac{\partial f}{\partial x_v}$ représente la dérivée de f le long d'un rayon.

N.B. : Dans le résultat final (13) on a posé $\epsilon = 1$. Ceci est loisible car le paramètre ϵ ne joue qu'un rôle de support dans le déroulement des calculs.

c) L'onde progressive différée

On substitue (4) dans (3), et l'on identifie les termes d'ordre $\frac{1}{\varepsilon}$, 1, ε en tenant compte de (5) (6) et (7). Il vient :

$$(17) \quad \underline{B}_0 \underline{u}_0 = 0$$

$$(18) \quad \underline{B}_0 \underline{u}_1 = \varepsilon_{,\nu} \underline{A}_0^\nu \frac{\partial \underline{u}_0}{\partial \xi} - (\underline{B}_1 \underline{u}_0) \underline{u}_0$$

$$(19) \quad \begin{aligned} \underline{B}_0 \underline{u}_2 = & \varepsilon_{,\nu} \underline{A}_0^\nu \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial \xi} + \frac{1}{\varepsilon} \underline{A}_0^\nu \frac{\partial \underline{u}_0}{\partial x_\nu} + \varepsilon_{,k} (\underline{A}_1^k \underline{u}_0) \frac{\partial \underline{u}_0}{\partial \xi} \\ & - (\underline{B}_1 \underline{u}_0) \underline{u}_1 - (\underline{B}_1 \underline{u}_1) \underline{u}_0 - (\underline{B}_2 \underline{u}_0) \underline{u}_0 \underline{u}_0 \end{aligned}$$

Soit $(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_p)$ une base du noyau de $\underline{B}_0$, et $(\underline{l}_1, \dots, \underline{l}_p)$ une base de l'adjointe de $\underline{B}_0$. La solution $\underline{u}_0$ de (17) est de la forme :

$$(20) \quad \underline{u}_0 = \sum_{i=1}^p a_i(\xi, \underline{x}) \underline{r}_i$$

La solution $\underline{u}_1$ de (19) existe si et seulement si le produit scalaire du second membre par $\underline{l}_i$ est nul ($i = 1 \dots p$). En supposant que l'identité :

$$(21) \quad \underline{l}_i (\underline{B}_1 \underline{u}_0) \underline{u}_0 = 0$$

soit vérifiée, ce qui est le cas en pratique (viscoélasticité, thermoélasticité, ...), les p équations de comptabilité s'écrivent :

$$(22) \quad \sum_{j=1}^p \left(\sum_{\nu=0}^3 \varepsilon_{,\nu} \underline{C}_{ij}^\nu \right) \frac{\partial a_j}{\partial \xi} = 0$$

où l'on a posé :

$$(23) \quad \underline{C}_{ij}^\nu = \underline{l}_i \underline{A}_0^\nu \underline{r}_j.$$

L'équation (22), écrite sous forme plus synthétique :

$$(24) \quad \varepsilon_{,\nu} \underline{C}^\nu \frac{\partial \underline{a}}{\partial \xi} = 0$$

admet une solution $\underline{a}$ non nulle si et seulement si :

$$(25) \quad \det(\varepsilon_{,\nu} \underline{C}^\nu) = 0$$

Cette équation aux dérivées partielles détermine l'évolution de la phase ξ .

Supposons que l'on puisse résoudre (25) par rapport à $\xi_{,0}$ (*) :

$$(26) \quad \xi_{,0} + \Omega(\xi_{,i}) = \hat{\Omega}(\xi_{,v}) = 0$$

$\hat{\Omega}$ est une fonction homogène de degré 1 par rapport aux $\xi_{,v}$. Les rayons différenciés sont par définition les bicharactéristiques de (26).

Soit $t \rightarrow x_v(t)$ l'équation paramétrique d'un rayon. On introduit alors la définition :

Définition : Le vecteur $\vec{V}$ de composante

$$(27) \quad V_v = \frac{dx_v}{dt} \quad (v = 0, 1, 2, 3)$$

est la vitesse d'un rayon.

Les théorèmes qui suivent généralisent de façon immédiate certains résultats de la théorie classique des rayons. On rappelle que, par hypothèse, $\underline{A}^k$ et $\underline{B}$ ne dépendent pas explicitement de (x_v) .

Théorème 1 :

a) le long d'un rayon les $\xi_{,v}$ sont constants.

b) les rayons sont des droites dont l'équation paramétrique est donnée par

$$(28) \quad \frac{dx_v}{dt} = V_v = \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial \xi_{,v}} \quad (v = 0, 1, 2, 3)$$

Preuve : on écrit les équations de Charpit de l'équation aux dérivées partielles (26)

Théorème 2 :

La phase ξ est constante le long d'un rayon.

Preuve : Soit $t \rightarrow x_v(t)$ l'équation paramétrique d'un rayon. En utilisant (27) et le fait que $\hat{\Omega}$ est une fonction homogène de degré 1, il vient :

$$\frac{d\xi}{dt}(x_v(t)) = \xi_{,v} \hat{\Omega}_{,\xi_{,v}} = \hat{\Omega} = 0$$

(*) Il y a en principe p façon de résoudre (25) par rapport à $\xi_{,0}$. Il y a donc p-modes de propagation différents pour l'onde différée et n-modes de propagation pour l'onde instantanée.

Théorème 3 :

La vitesse $\vec{V}$ d'un rayon est telle que :

$$(29) \quad V_v = \frac{LC^v R}{LC^0 R} \quad (v = 0, 1, 2, 3)$$

où C^v est définie par la formule (23).

Preuve :

Partons de l'équation $C R = 0$ dans laquelle $C = \xi, v C^v$ et R sont des fonctions de ξ, i . Compte tenu de (26) nous considérons dorénavant C et R comme fonctions de ξ, i ($i = 1, 2, 3$). Dérivons $C R = 0$ par rapport à ξ, i :

$$\frac{\partial}{\partial \xi, i} (C R) = \left(- \frac{\partial C}{\partial \xi, 0} \frac{\partial R}{\partial \xi, i} + \frac{\partial C}{\partial \xi, i} R \right) + C \frac{\partial R}{\partial \xi, i} = 0$$

En multipliant scalairement cette égalité par L , on obtient $V_i = \frac{LC_i R}{LC_0 R}$. Cette relation est aussi vérifiée pour $i = 0$ ~~///~~

Soit $R(\underline{x})$ (resp $L(\underline{x})$) un vecteur non nul du noyau de $\xi, \alpha C^\alpha$ (resp. de l'adjointe de $\xi, \alpha C^\alpha$) supposé de dimension 1. D'après (24) on a :

$$(30) \quad \underline{a} = f(\xi, \underline{x}) R(\underline{x})$$

En substituant (30) dans (20), il vient :

$$(31) \quad \underline{u}_0 = f(\xi, \underline{x}) \underline{N}(\underline{x})$$

où $\underline{N}$ est le vecteur :

$$(32) \quad \underline{N} = \sum_{j=1}^p R_j \underline{r}_j$$

La solution générale $\underline{u}_1$ de (18) s'écrit alors :

$$(33) \quad \underline{u}_1 = \sum_{j=1}^p b_j(\xi, \underline{x}) \underline{r}_j + \frac{\partial f}{\partial \xi} \underline{u}_1(\underline{x}) + f^2 \tilde{\underline{u}}_1(\underline{x})$$

On substitue ensuite (31) et (33) dans le second membre de (19). Les équations de compatibilité obtenues en multipliant scalairement (19) par $\underline{l}_i$ ($i = 1, \dots, p$) s'écrivent :

$$(34) \quad \xi, v C^v \frac{\partial b}{\partial \xi} = - \frac{1}{\varepsilon} p_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} K_1 + f \frac{\partial f}{\partial \xi} K_2 + f K_3$$

Pour obtenir ce résultat, on a admis que les identités suivantes (réalisées dans la pratique) sont vérifiées :

$$(35) \quad \underline{l}_i (\underline{B}_1 \underline{u}_0) \underline{u}_1 = 0 \quad (*)$$

$$\underline{l}_i (\underline{B}_2 \underline{u}_0) \underline{u}_0 = 0$$

Les ièmes composantes des vecteurs $\underline{P}_\alpha$, $\underline{K}_1$, $\underline{K}_2$ et $\underline{K}_3$ sont données par :

$$(36) \quad \begin{aligned} P_{\alpha i} &= -\frac{1}{\epsilon} \underline{l}_i \underline{A}_0^\alpha \underline{N} ; \quad K_{1i} = -\underline{l}_i \epsilon_{,v} \underline{A}_0^v \underline{u}_1 ; \\ K_{2i} &= -2 \underline{l}_i \epsilon_{,v} \underline{A}_0^v \underline{u}_1 - \underline{l}_i \epsilon_{,k} (\underline{A}_1^k \underline{N}) \underline{N} ; \quad K_{3i} = -\frac{1}{\epsilon} \underline{l}_i \underline{A}_0^v \frac{\partial \underline{N}}{\partial x_v} \end{aligned}$$

Multiplions (34) scalairement par $\underline{L}$, en remarquant que, d'après (23) (29) et (32) :

$$(37) \quad \underline{L}_i P_{\alpha i} = -\frac{1}{\epsilon} \underline{L} \underline{C}_0 \underline{R} V_\alpha$$

On obtient :

$$(38) \quad -\frac{1}{\epsilon} V_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\theta} \underline{L} \underline{K}_1 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\theta} \underline{L} \underline{K}_2 f \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{1}{\theta} \underline{L} \underline{K}_3 f = 0,$$

où l'on a posé :

$$(39) \quad \theta = \underline{L} \underline{C}_0 \underline{R}$$

Si l'on note :

$$(40) \quad \frac{Df}{Dt} = V_v \frac{\partial f}{\partial x_v}$$

La dérivée de f le long d'un rayon, l'équation de transport (38) s'écrit, en posant $\epsilon = 1$ dans (41).

$$(41) \quad \frac{Df}{Dt} - \frac{1}{\theta} \underline{L} \underline{K}_1 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\theta} \underline{L} \underline{K}_2 f \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{1}{\theta} \underline{L} \underline{K}_3 f = 0$$

C'est une équation de Burgers généralisée. Puisqu'en définitive on a posé $\epsilon = 1$ dans (38), il convient de faire de même dans (36). On a donc :

$$(42) \quad K_{3i} = -\underline{l}_i \underline{A}_0^v \frac{\partial \underline{N}}{\partial x_v}$$

(*) On a aussi $\underline{l}_i (\underline{B}_1 \underline{u}_1) \underline{u}_0 = 0$

7.3 ONDES SISMIQUES

Les séismogrammes sur lesquels sont enregistrés les déplacements de l'écorce terrestre ont l'aspect suivant :

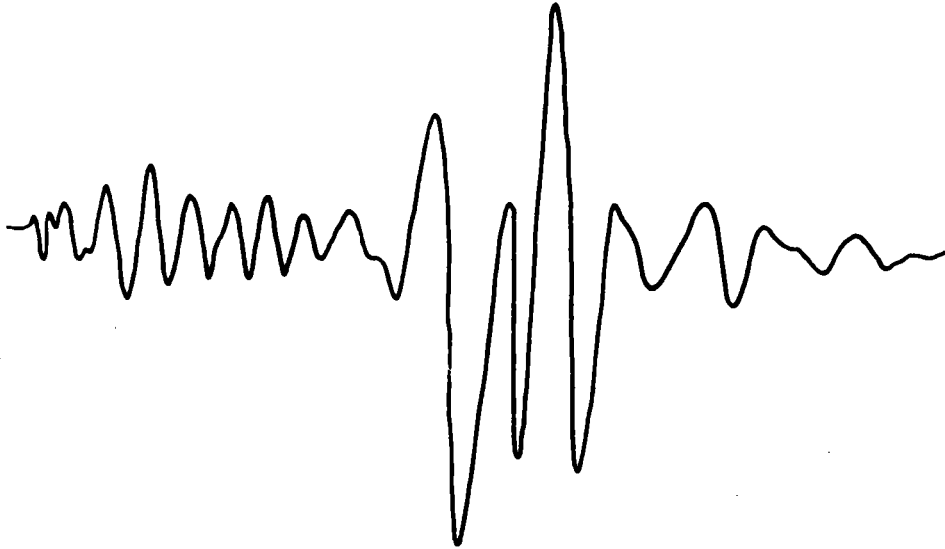
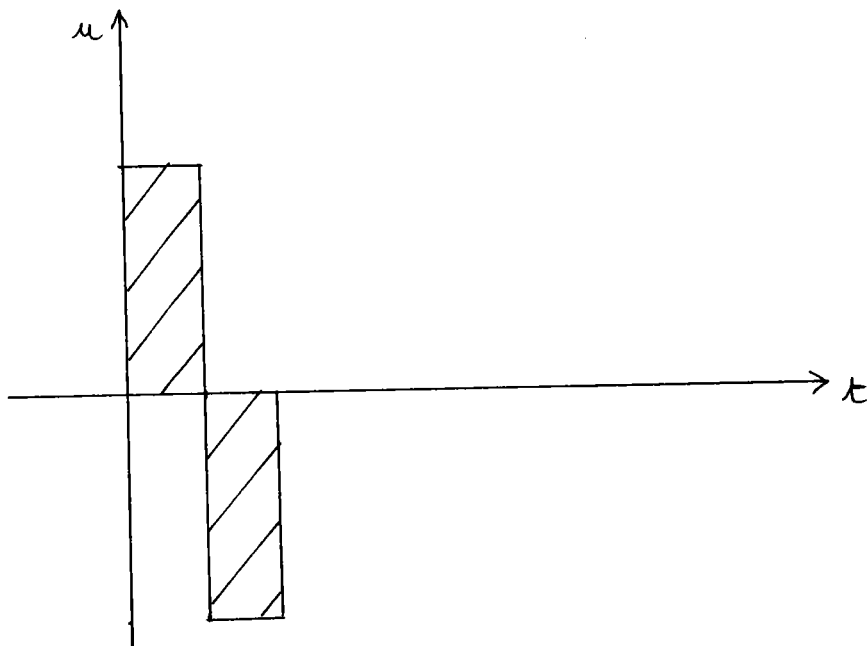


FIG. 1

L'expérience montre que, quand la distance r de l'onde par rapport à la source de l'ébranlement devient suffisamment grande, l'amplitude des oscillations s'amortit comme $\frac{1}{r^2}$, Ricker [3]. Afin d'expliquer ce phénomène les géophysiciens admettent que l'onde est gouvernée par une équation de Stokes de la forme (3).

Loin de la source, une approche asymptotique s'appuyant sur les équations générales de la viscoélasticité linéaire permet d'introduire de manière naturelle cette équation de Stokes tout en fournissant de façon immédiate une solution approchée du problème.

Avant de passer à l'étude de l'onde sphérique, examinons rapidement le cas de l'onde plane pour laquelle nous allons établir une propriété d'amortissement en $\frac{1}{r}$. Afin de simplifier, nous allons schématiser l'ébranlement à la source en supposant qu'il a la forme de la figure (2).



Bien sûr en toute rigueur cela n'a pas de sens de supposer que le déplacement u est discontinu. Toutefois on conçoit que cette schématisation soit suffisante pour obtenir des résultats qualitatifs en ce qui concerne l'onde différée (loin de la source).

a) L'onde plane différée

L'équation qui gouverne l'évolution d'une onde plane dans un corps viscoélastique linéaire est de la forme :

$$(1) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\tilde{t}} G(\tilde{t} - \tau) \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(\tau) d\tau$$

où $\tilde{u}$ représente le déplacement et G une fonction de relaxation.

En introduisant le coefficient d'élasticité différée E et la viscosité μ :

$$(2) \quad E = G(\infty) \quad , \quad \mu = \int_0^\infty (G(\xi) - E) d\xi$$

et en raisonnant comme au paragraphe 5.2, on montre qu'au premier ordre l'onde différée est gouvernée par l'équation de Stokes :

$$(3) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial t \partial x^2}$$

Cette équation, utilisée par Stokes en 1845, joue un rôle très important dans nombre de problèmes dynamiques où intervient une dissipation de type visqueux.

Avec les changements de variables et de fonctions :

$$(4) \quad \tilde{u} = u L \quad ; \quad \tilde{x} = x L \quad ; \quad \tilde{t} = t \frac{L}{\Omega}$$

où $\Omega = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$ est la célérité différée du son et L une échelle de longueur arbitraire, l'équation (3) prend la forme réduite :

$$(5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon_2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}$$

où

$$(6) \quad \varepsilon_2 = \frac{\mu \Omega}{EL}$$

La solution approchée au premier ordre de (5) s'écrit, en posant $x_0 = x$, $x_1 = \varepsilon_2 x$:

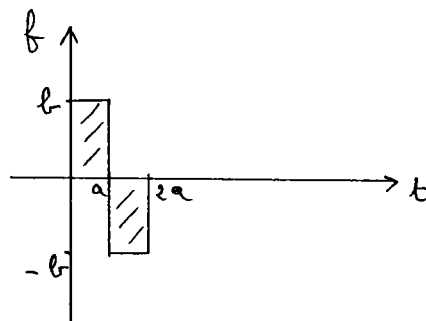
$$(7) \quad u_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi x_1}} \int_0^\infty f(v) \exp\left(-\frac{(t - x_0 - v)^2}{2 x_1}\right) dv$$

La fonction f représente la sollicitation à l'origine $x = 0$:

$$(8) \quad u(t, 0) = f(t)$$

Dans le cas qui nous préoccupe, f est de la forme :

$$(9) \quad f(t) = b H(t) - 2b H(t - a) + b H(t - 2a)$$



En posant :

$$(10) \quad \xi = t - x - a$$

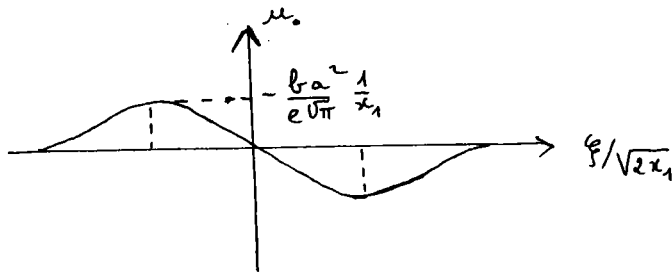
la solution u_0 donnée par (7) s'écrit :

$$(11) \quad u_0 = -b \operatorname{erf} \frac{\xi}{\sqrt{2x_1}} + \frac{b}{2} \operatorname{erf} \frac{\xi + a}{\sqrt{2x_1}} + \frac{b}{2} \operatorname{erf} \frac{\xi - a}{\sqrt{2x_1}}$$

Loin du bord, lorsque le terme $\frac{a}{\sqrt{2x_1}}$ est suffisamment petit, on obtient en développant la fonction erf :

$$12) \quad u_0 = -\frac{b a^2}{x_1 \sqrt{\pi}} \left(\frac{\xi}{\sqrt{2x_1}} e^{-\frac{\xi^2}{2x_1}} \right)$$

Il ressort de cette expression que l'amortissement est en $\frac{1}{x}$



Remarque : Sortons un instant du contexte des ondes sismiques pour examiner le cas d'une sollicitation en forme de créneau :

$$f(t) = f(H(t) - H(t - a))$$

On a, suffisamment loin du bord :

$$(13) \quad u_0 = \frac{b}{2} \operatorname{erf} \frac{t-x}{\sqrt{2x_1}} - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \frac{t-x-a}{\sqrt{2x_1}} \sim \frac{a}{\sqrt{2\pi x_1}} e^{-\frac{(t-x)^2}{2x_1}}$$

L'amortissement est alors en $\frac{1}{\sqrt{x}}$, comme pour le pic de contrainte thermique dont nous avons étudié l'évolution au paragraphe 3.2.

b) L'onde sphérique différée

Il est bien connu que l'équation fondamentale gouvernant l'évolution de la composante radiale d'une onde sphérique dans un corps viscoélastique est de la forme :

$$(14) \quad \rho_0 \frac{\partial^2 (\tilde{r} \tilde{\phi})}{\partial \tilde{t}^2} = \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \int_0^{\tilde{t}} \{K(\tilde{t} - \tau) + \frac{4}{3} G(\tilde{t} - \tau)\} \frac{\partial^2 (\tilde{r} \tilde{\phi})}{\partial \tilde{r}^2} d\tau$$

Dans cette équation $\phi(\tilde{r}, \tilde{t})$ représente le "potentiel" à partir duquel se calcule la composante radiale $\tilde{u}$ du déplacement :

$$(15) \quad \tilde{u} = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \tilde{r}}$$

Les fonctions $K(\tilde{t})$ et $G(\tilde{t})$ représentent le module d'élasticité volumique et le module de cisaillement. Posons :

$$(16) \quad G_1(\tilde{t}) = K(\tilde{t}) + \frac{4}{3} G(\tilde{t}),$$

et introduisons comme auparavant un coefficient d'élasticité différé E_1 et une viscosité μ :

$$(17) \quad E_1 = G_1(\infty), \quad \mu = \int_0^\infty (G_1(\xi) - G_1(\infty)) d\xi$$

Le raisonnement habituel montre que l'onde est gouvernée loin de la source et au premier ordre par l'équation de Stokes.

$$(18) \quad \rho_0 \frac{\partial^2(\tilde{r}\tilde{\phi})}{\partial \tilde{t}^2} = E_1 \frac{\partial^2(\tilde{r}\tilde{\phi})}{\partial \tilde{r}^2} + \mu \frac{\partial^3}{\partial \tilde{t} \partial \tilde{r}^2} |\tilde{r}\tilde{\phi}(\tilde{t}, \tilde{r})|$$

Un changement de variables et de fonctions du type

$$(19) \quad \tilde{u} = u L, \quad \tilde{\phi} = L^2 \phi, \quad \tilde{t} = \frac{L}{\Omega} t, \quad \tilde{r} = L r$$

(où L est une longueur et $\Omega = (E_1/\rho_0)^{1/2}$ la vitesse différée du son) conduit aux expressions réduites :

$$(20) \quad \frac{\partial^2(r\phi)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) + \varepsilon_2 \frac{\partial^3}{\partial t \partial r^2}(r\phi)$$

avec

$$(21) \quad \varepsilon_2 = \frac{\mu \Omega}{E_1 L}$$

$$(22) \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

Sur une sphère centrée à l'origine, de rayon réduit R , on se donne le déplacement :

$$(23) \quad u(t, R) = f(t)$$

En introduisant les notations :

$$(24) \quad \hat{r} = r - R, \quad \hat{r}_1 = \varepsilon_2 \hat{r}, \quad \hat{\phi}(t, \hat{r}) = \phi(t, r)$$

une solution approchée au premier ordre ϕ_0 de (20) s'écrit :

$$(25) \quad (\hat{r}_0 + R) \hat{\phi}_0(t, \hat{r}_0, \hat{r}_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{r}_1}} \int_0^\infty g(v) \exp\left(-\frac{(t - v - \hat{r}_0)^2}{2\hat{r}_1}\right) dv$$

Compte tenu de (22), l'approximation u_0 de u au premier ordre s'écrit alors :

$$(26) \quad u_0 = \frac{\partial \hat{\phi}_0}{\partial \hat{r}_0} = - \frac{(2\pi \hat{r}_1)^{-1/2}}{(\hat{r}_0 + R)^2} \int_0^\infty g(v) \exp \left(- \frac{(t - v - \hat{r}_0)^2}{2 \hat{r}_1} \right) dv$$

$$- \frac{(2\pi \hat{r}_1)^{-1/2}}{\hat{r}_0 + R} \int_0^\infty g'(v) \exp \left(- \frac{(t - v - \hat{r}_0)^2}{2 \hat{r}_1} \right) dv$$

Lorsque les effets dissipatifs tendent vers zéro, $\hat{r}_1$ tend vers zéro, et les formules (25) et (26) fournissent comme cas limite les résultats de la théorie de l'élasticité :

$$(27) \quad \hat{\phi}_0(t, \hat{r}) = \frac{1}{\hat{r} + R} g(t - \hat{r})$$

$$(28) \quad u_0(t, r) = \hat{u}_0(t, \hat{r}) = - \frac{1}{(\hat{r} + R)^2} g(t - \hat{r}) - \frac{1}{\hat{r} + R} g'(t - \hat{r})$$

On a nécessairement

$$(29) \quad g(0) = 0$$

sinon la formule (28) qui donne le déplacement u_0 ferait apparaître une distribution de Dirac au front, ce qui serait aberrant. Par contre, conformément à la schématisation adoptée pour décrire la sollicitation à la source, (fig.), nous ne supposons pas le déplacement continu au front, d'où $g'(0) \neq 0$. La fonction $g(t)$ se détermine à partir de la condition à la limite sur la sphère de rayon R . On fait tendre $\hat{r}_0$ et $\hat{r}_1$ vers zéro dans (26), et l'on obtient, compte tenu de (23) :

$$(30) \quad \hat{u}_0(t, 0) = - \frac{1}{R^2} g(t) - \frac{1}{R} g'(t) = f(t)$$

Cette équation différentielle est à résoudre sous la condition (29) (*). Le second membre étant par hypothèse de la forme (9) :

$$(31) \quad f(t) = b H(t) - 2b H(t - a) + b H(t - 2a),$$

(*) Car on doit retrouver les résultats de la théorie de l'élasticité quand $\varepsilon_2 \rightarrow 0$.

on obtient la solution :

$$(32) \quad g(t) = -b R^2 H(t) (1 - e^{-t/R}) + 2b R^2 H(t-a) (1 - e^{-\frac{t-a}{R}}) - b R^2 H(t-2a) (1 - e^{-\frac{t-2a}{R}})$$

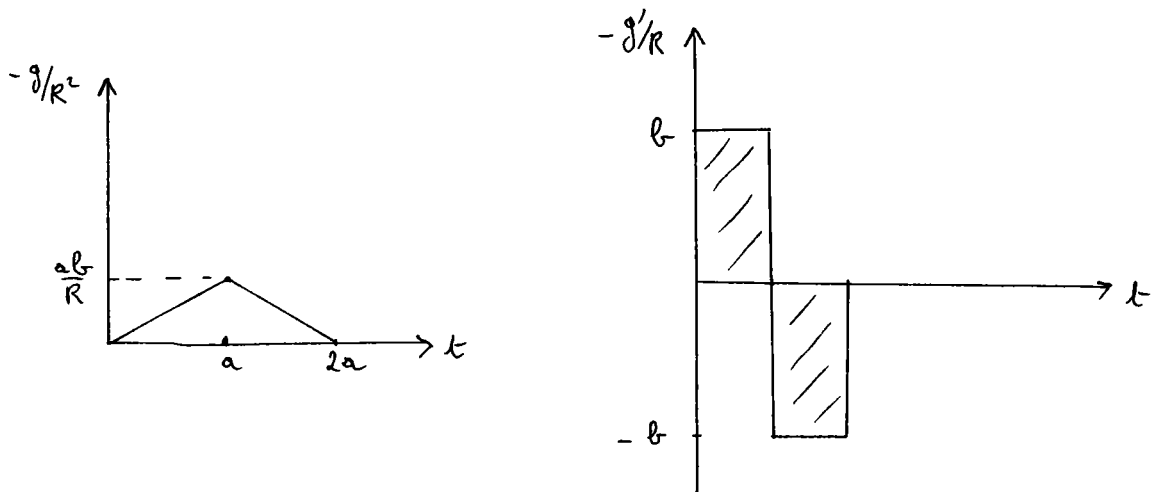
Supposons dorénavant que :

$$(33) \quad a \ll R$$

On peut alors approximer g et g' en développant les exponentielles dans (32) :

$$(34) \quad g(t) = -b R t H(t) + 2b R (t-a) H(t-a) - b R (t-2a) H(t-2a)$$

$$(35) \quad g'(t) = -b R H(t) + 2b R H(t-a) - b R H(t-2a)$$



Sans l'hypothèse (33), on voit donc que dans l'équation (30) le terme $\frac{g}{R^2}$ est négligeable devant $\frac{g'}{R}$.

Dans l'équation (26), on est donc également conduit à négliger le terme en g , et l'on obtient, compte tenu de (35) et en posant $\xi = t - \hat{r} - a$

$$(36) \quad \hat{u}_0(t, \hat{r}_0, \hat{r}_1) = \frac{b R}{\hat{r} + R} \left(\frac{1}{2} \operatorname{erf} \frac{t - \hat{r}_0}{\sqrt{2} \hat{r}_1} - \operatorname{erf} \frac{t - \hat{r}_0 - a}{\sqrt{2} \hat{r}_1} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \frac{t - \hat{r}_0 - 2a}{\sqrt{2} \hat{r}_1} \right)$$

37)

$$u_0 = \frac{b R}{\hat{r} + R} \left(-\operatorname{erf} \frac{\xi}{\sqrt{2} \hat{r}_1} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \frac{\xi + a}{\sqrt{2} \hat{r}_1} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \frac{\xi - a}{\sqrt{2} \hat{r}_1} \right),$$

expression que l'on peut approximer pour $\frac{a}{\sqrt{2} \hat{r}_1}$ suffisamment petit (i.e suffisamment loin de la source) par :

38)

$$u_0 \approx -\frac{b R}{\hat{r} + R} \frac{a^2}{\hat{r}_1 \sqrt{\pi}} \left(\frac{\xi}{\sqrt{2} \hat{r}_1} e^{-\frac{\xi^2}{2 \hat{r}_1^2}} \right)$$

Il en résulte que l'amortissement de l'onde différée est en $\frac{1}{r^2}$, et ceci est en accord avec les observations expérimentales.

La compréhension des phénomènes différés est le résultat d'un long cheminement dans la pensée scientifique. C'est ainsi que de nombreuses erreurs ont été commises à propos des ondes sismiques. Souvent l'on a cru que l'amortissement de la perturbation loin de la source était de type exponentiel alors que ce type d'amortissement n'a lieu qu'au voisinage du front.

Il convient de noter par ailleurs que les géophysiciens ne se rendent pas toujours bien compte du fait que l'équation de Stokes (20) ne constitue qu'une approximation au premier ordre de l'équation générale du mouvement dans un processus de perturbation. Ainsi cherchent-ils souvent à calculer la solution exacte (sous forme de série) de l'équation de Stokes. Mais la solution exacte d'une équation approchée n'est elle-même qu'une solution approchée. Dès lors, par souci de simplicité, autant se limiter, comme nous l'avons fait, au calcul d'une solution approchée de l'équation de Stokes.

REFERENCES DU CHAPITRE VII

- |1| BLAKE T.R., The decay of spherical waves in a linear viscoelastic solid, J. appl. math. and Phys., 25, 783-789, 1974.
- |2| GERMAIN P. Progressive waves, Ludwig Prandtl memorial lecture, Mannheim, April 16, 1971.
- |3| RICKER N.H., Transient waves in visco-elastic media, Elsevier scientific publ. comp., Amsterdam, 1977.
- |4| PIAU M., Lois de comportement et ondes dans les milieux élastoplastiques viscoplastiques en déformation finie, Thèse, Paris VI, 1975.
- |5| BOIS P.A., Techniques asymptotiques pour des problèmes de gaz pesants avec application aux ondes atmosphériques, Thèse, PARIS VI, 1979.

CONCLUSION

Les méthodes de perturbation ont permis d'éclairer le problème de la propagation d'une onde transitoire dans des solides dissipatifs sous différents aspects. Nous avons porté notre attention sur les propriétés thermiques du matériau (Chap. II et III), ainsi que sur les effets de mémoire (V) et de non-linéarité (IV, V, VI, VII). Enfin nous avons présenté une étude générale des systèmes dissipatifs (VI, VII).

Les résultats obtenus dans le cadre de la thermoélasticité ont mis clairement en évidence les effets du couplage et de la conduction, alors qu'il est très difficile d'en rendre compte à partir de la solution exacte calculée dans la section 2.2. A cet égard l'étude de la contrainte thermique transitoire engendrée par un dépôt d'énergie s'est révélée très instructive. Nous avons pu, quelque soit la longueur de pénétration, obtenir des résultats qualitatifs et quantitatifs en combinant deux méthodes de perturbation bien différentes, l'une directe (*) (relativement à la constante de couplage thermomécanique), l'autre singulière (calcul de l'onde différée avec la méthode de l'échelle variable). Dans un cas particulier (grande longueur de pénétration) nous avons montré que les solutions approchées obtenues à l'aide de ces méthodes se raccordent.

La viscoélasticité dynamique est un champ d'application où la méthode de l'échelle variable peut jouer pleinement (V). Si dans un corps thermoélastique le calcul de l'onde instantanée ne présente qu'un caractère académique, il n'en est pas de même en viscoélasticité car les temps de relaxation instantanés sont d'un tout autre ordre de grandeur. Ondes viscoélastiques instantanées et différées se calculent avec la M.E.V. sans difficultés, y compris dans le cas faiblement non linéaire.

L'étude des systèmes dissipatifs nous a conduit, pour décrire la perturbation loin de la source, à élaborer une théorie des rayons différés (VI) que nous étendons au chapitre VII au cas des ondes non planes. La méthode est générale et elle peut s'appliquer à l'étude de cas particuliers tels que thermoélasticité et viscoélasticité.

On notera l'usage abondant que l'on a fait de la méthode de l'échelle variable dont on a dégagé la philosophie au chapitre I. Elle a été appliquée à l'étude de problèmes gouvernés par :

- un système d'équations aux dérivées partielles linéaire et homogène (demi-

(*) Dans le cas où il n'y a pas de dépôt d'énergie en volume, on a donné à cette méthode le caractère d'un algorithme.

espace thermoélastique soumis à un dépôt d'énergie de type surfacique), linéaire non homogène (dépôt de type volumique), quasi-linéaire (systèmes dissipatifs généraux)

- une équation intégrodifférentielle non linéaire (onde viscoélastique faiblement non linéaire).

En outre, nous avons utilisé la M.E.V. et la notion d'onde progressive dans l'étude de problèmes fortement non linéaires (IV, VI). Pour décrire l'onde instantanée de forte amplitude, nous nous sommes largement inspiré des travaux de Varley et de son école. Pour l'onde différée, nous avons esquissé une méthode, qui pour le moment n'a qu'un caractère formel, et dont nous ne pouvons pas encore dire si elle s'avèrera fructueuse.

Aucune méthode utilisée n'a permis à elle seule de décrire toute l'évolution d'une perturbation. Chacune d'elles donne une solution approchée ayant un certain domaine de validité. Lorsque nous avons représenté un tel domaine dans l'espace abscisse-temps, encore ne s'agissait-il que d'une esquisse très grossière et d'une hypothèse de travail dont l'utilité principale était de fixer les idées et de guider le raisonnement.

Dans le chapitre VII, nous avons dégagé certaines perspectives de recherche. Nous avons notamment trouvé dans le domaine de la sismique, une vérification expérimentale du bien fondé de l'approche asymptotique de l'onde sphérique viscoélastique.

Pour terminer, il n'est pas inutile de souligner quels sont les avantages et les inconvénients de l'approche asymptotique d'un problème dynamique. L'intérêt des méthodes de perturbations est de fournir en général des solutions approchées explicites, simples et concises, qui par construction même mettent en valeur les aspects physiques du phénomène étudié (*). Le fait que ces solutions ne soient valables que localement, apparait comme la contrepartie de leur relative simplicité.

(*) C'est pourquoi l'ordinateur ne supplantera jamais entièrement les méthodes analytiques. Un résultat purement numérique n'a pas le pouvoir de suggestion d'une formule littérale. De plus pour tester un programme, il est souvent fort utile de connaître une solution analytique du problème, fut-elle approchée.

ANNEXE

2.A.1 THERMOELASTICITE GENERALISEE

Classiquement on admet que la conduction de la chaleur est régie, en théorie linéaire, par la loi de Fourier selon laquelle le flux de chaleur est proportionnel au gradient de température :

$$(1) \quad q = -k \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

Dans un corps rigide, l'évolution de la température est alors gouvernée par l'équation classique de la chaleur. Mais il apparaît le paradoxe suivant : une perturbation de la température en un point du corps est ressentie instantanément à l'infini. La loi de Fourier n'est en effet qu'un modèle, et ce modèle ne permet pas de décrire tous les aspects de la réalité. Toutefois, on montre que l'approximation obtenue en faisant usage de la loi de Fourier est largement suffisante dans la quasi-totalité des problèmes rencontrés.

Pour lever le paradoxe de la propagation instantanée de la chaleur, à la suite de Maxwell [21] une nouvelle loi de conduction a été adoptée par de nombreux chercheurs travaillant en thermoélasticité dynamique (par exemple [22][23][24]).

$$(2) \quad q + T_r \frac{\partial q}{\partial t} = -k \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

formule dans laquelle apparaît un temps de relaxation T_r .

Selon ce modèle, la chaleur se propage à vitesse finie, si T_r est non nul.

En thermoélasticité généralisée, la loi (2) est très souvent introduite de manière arbitraire, sans prendre soin de vérifier qu'elle est compatible avec le second principe de la thermodynamique. Or on sait qu'en thermoélasticité classique, le second principe exige que q et $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ soient de signes opposés (la chaleur s'écoule dans le sens des températures décroissantes).

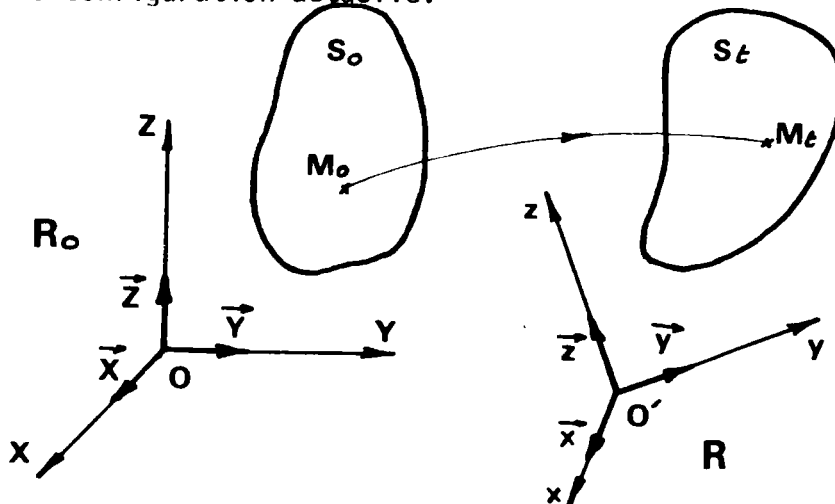
La loi (1) est en accord avec ce fait.

Par contre, si la loi (2) de la conduction de la chaleur est vraie, q et $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ peuvent avoir le même signe. La question se pose donc de savoir s'il est possible de construire une théorie cohérente, compatible notamment avec le second principe, dans laquelle la loi de conduction généralisée pourrait être de la forme (2).

Nous allons d'abord exposer une théorie générale, puis nous regarderons ce qu'elle donne dans le cas de problèmes unidimensionnels et linéaires.

La théorie exposée s'inspire d'un travail de Lebon et Lambermont [25]. Ces auteurs partent d'une forme à priori de l'équation de Gibbs. Nous préférons ici travailler à partir de la donnée de l'énergie libre ψ .

Considérons un corps S . Sa position S_0 à l'instant t_0 , sera prise comme configuration de référence, sa position S_t à l'instant t sera appelée la configuration actuelle.



Un point matériel M , appartenant au solide S , occupe la position M_0 dans la configuration de référence, et la position M_t dans la configuration actuelle. On repère les positions de M_0 et M_t par leurs coordonnées dans les repères R_0 et R .

$$\vec{OM}_0 = X\vec{X} + Y\vec{Y} + Z\vec{Z}$$

$$\vec{OM}_t = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$$

Les coordonnées $\underline{X} = (X, Y, Z)$ sont appelées les coordonnées de Lagrange du point M : $\underline{x} = (x, y, z)$ sont les coordonnées d'Euler.

Le mouvement de S est décrit par une famille à un paramètre $\mathcal{M}_t$ d'applications :

$$\mathcal{M}_t : \underline{X} \rightarrow \underline{x}(t, \underline{X}).$$

On définit classiquement le tenseur des gradients de déformation $\underline{F} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}}$, le tenseur de Cauchy-Green soit $\underline{C} = \underline{F}^T \underline{F}$, le tenseur des déformations de Green $\underline{E} = \frac{1}{2} (\underline{C} - \underline{1})$.

Un corps thermoélastique classique, est caractérisé par son énergie libre qui dépend de la température θ et du tenseur des gradients de déformation :

$$(3) \quad \psi = \psi(\theta, \underline{F})$$

Le principe d'objectivité, selon lequel l'énergie libre ne doit pas dépendre du choix du référentiel R , permet de montrer que ψ dépend en fait de $\underline{E}$:

$$(4) \quad \psi = \psi(\theta, \underline{E}).$$

Cette expression de l'énergie libre ne décrit pas tous les aspects du comportement du matériau. Pour décrire la propagation de la chaleur, on admet très souvent que le vecteur flux de chaleur dépend linéairement du gradient de la température. Dans la configuration de référence, cela s'exprime par la relation (Loi de Fourier) :

$$(5) \quad \underline{q}_0 = - \underline{K} \underline{\text{grad}}_0 \theta,$$

où $\underline{q}_0$ est le vecteur flux de chaleur dans la configuration de référence, et $\underline{\text{grad}}_0 \theta = \frac{\partial \theta}{\partial X} \vec{X} + \frac{\partial \theta}{\partial Y} \vec{Y} + \frac{\partial \theta}{\partial Z} \vec{Z}$.

La matrice $\underline{K}$ est supposée semi-définie positive ; la loi (5) est alors compatible avec le deuxième principe de la thermodynamique qui exige que :

$$(6) \quad \underline{q}_0 \cdot \underline{\text{grad}}_0 \theta \leq 0$$

La théorie classique de la thermoélasticité, dont nous venons de donner un bref aperçu, ne permet pas de décrire le fait que la chaleur se propage à vitesse finie.

Meixner, puis Lebon et Lambermont, ont proposé pour lever ce paradoxe de considérer le vecteur flux de chaleur comme une variable, au même titre que θ et $\underline{F}$ (ou $\underline{E}$). Comme eux nous allons faire usage du tenseur symétrique (*) :

$$(7) \quad \underline{h} = \underline{q}_0 \otimes \underline{q}_0,$$

obtenu en faisant le produit tensoriel du vecteur flux de chaleur $\underline{q}_0$ par lui-même.

On suppose que l'énergie libre s'exprime par :

$$(8) \quad \psi = \psi(\theta, \underline{E}, \underline{h})$$

de sorte que $\underline{h}$ apparait dans ψ comme une variable tensorielle.

On peut vérifier que cette variable obéit à certaines propriétés, dont

(*) On pourrait construire une théorie équivalente en prenant le tenseur symétrique $\hat{\underline{h}} = \underline{q} \otimes \underline{q}$, où $\underline{q}$ est le vecteur flux de chaleur dans la configuration actuelle.

Sidoroff fait mention dans son étude générale sur les variables tensorielles [26], à savoir que :

$$\begin{aligned}\underline{h}' &= \underline{h} \\ \underline{h}^* &= \underline{p} \underline{h} \underline{p}^T,\end{aligned}$$

où $\underline{h}'$ est l'expression de la variable tensorielle dans un nouveau référentiel R' , alors que $\underline{h}^*$ est l'expression obtenue si l'on fait un changement de configuration de référence (à la place du repère R_0 , on prend un repère R_0^*) :

$$\underline{X}^* = \underline{p} \underline{X}.$$

L'expression locale du deuxième principe de la thermodynamique prend la forme :

$$(9) \quad -\rho_0 (\dot{\psi} + S\dot{\theta}) + \hat{\underline{S}} : \dot{\underline{E}} - \frac{1}{\theta} \underline{q}_0 \cdot \underline{\text{grad}}_0 \theta \geq 0.$$

Dans cette inégalité, connue comme étant celle de Clausius-Duhem, S désigne l'entropie spécifique et $\hat{\underline{S}} = \rho_0/\rho \underline{F}^{-1} \underline{\sigma} \underline{F}^{-1T}$ le deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff, si $\underline{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy. On a noté $\underline{A} : \underline{B} = \text{tr } \underline{A} \underline{B}$, la trace du produit matricielle $\underline{A} \underline{B}$.

Dérivons la formule (8) par rapport au temps :

$$(10) \quad \dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{E}} : \dot{\underline{E}} + \frac{\partial \psi}{\partial \underline{h}} : \dot{\underline{h}}$$

Si $\frac{\partial \psi}{\partial \underline{h}}$ est un tenseur symétrique, on montre que :

$$(11) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \underline{h}} : \dot{\underline{h}} = 2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \underline{h}} \dot{\underline{q}}_0 \right) \cdot \underline{q}_0$$

Il vient alors, en substituant (10) et (11) dans (9) :

$$(12) \quad \begin{aligned} & -\rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + S \right) \dot{\theta} + \left(\hat{\underline{S}} - \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{E}} \right) : \dot{\underline{E}} \\ & - \underline{q}_0 \cdot \left(\frac{1}{\theta} \underline{\text{grad}}_0 \theta + 2 \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{h}} \dot{\underline{q}}_0 \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Si l'on admet qu'en l'absence de déformations ($\underline{E}$ constant) et de flux de chaleur ($\underline{q}_0 = 0$), il n'y a pas de dissipation, on obtient un premier résultat :

$$(13) \quad S = - \frac{\partial \psi}{\partial \theta}.$$

Ensuite, $\underline{E}$ étant indépendant de $\underline{q}_0$, donc aussi de $\underline{h}$, on peut tout en fixant $\underline{E}$, $\underline{h}$ et $\underline{q}_0$, se donner des valeurs arbitraires de $\dot{\underline{E}}$, si du moins, comme on le suppose, le corps est doué d'élasticité instantanée. Pour que (12) soit toujours vérifié il faut donc admettre que :

$$(14) \quad \hat{\underline{S}} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{E}},$$

et l'inégalité de Clausius-Duhem se réduit alors à l'inégalité de la dissipation :

$$(15) \quad -\underline{q}_0 \cdot \left(\frac{1}{\theta} \underline{\text{grad}}_0 \theta + 2 \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{h}} \dot{\underline{q}}_0 \right) \geq 0$$

Les classiques relations de Onsager prennent ici la forme très simple :

$$(15) \quad \underline{q}_0 = -\underline{L} \left(\frac{1}{\theta} \underline{\text{grad}}_0 \theta + 2 \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{h}} \dot{\underline{q}}_0 \right),$$

où $\underline{L}$ est une matrice semi-définie positive, de sorte que l'inégalité (15) est bien vérifiée.

Les équations (13), (14) et (16) caractérisent le comportement du matériau.

La loi de conduction (16) généralise la relation classique de Fourier (5), que l'on retrouve d'ailleurs si l'on suppose que ψ ne dépend pas de $\underline{h}$. Cette théorie plus générale prend en compte le fait que la chaleur se propage à vitesse finie.

2.A.2 EXISTENCE ET UNICITE DE LA DECOMPOSITION DANS LE CAS TRIDIMENSIONNEL

Une solution ϕ de :

$$(1) \quad 0 \phi = 0,$$

peut se décomposer de façon unique en :

$$(2) \quad \phi = \hat{\phi} + \bar{\phi},$$

où $\hat{\phi}$ et $\bar{\phi}$ sont solutions de :

$$(3) \quad \hat{0} \hat{\phi} = 0, \quad \bar{0} \bar{\phi} = 0.$$

Les opérateurs 0 , $\hat{0}$ et $\bar{0}$ sont ceux du paragraphe 2.2, dans lesquels

on substitue à $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ le Laplacien $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Soit ϕ solution de (1). Posons :

$$(4) \quad \bar{\phi} = h * \hat{0} \phi,$$

où h est une fonction du temps, pour le moment arbitraire. Compte tenu de la commutativité des opérateurs mis en jeu, il est évident que :

$$(5) \quad \bar{0} \bar{\phi} = 0$$

Introduisons maintenant la fonction :

$$(6) \quad \hat{\phi} = \phi - \bar{\phi}$$

On a, compte tenu de (5) :

$$(7) \quad \begin{aligned} \hat{0} \hat{\phi} &= \hat{0} \phi - \hat{0} \bar{\phi} \\ &= \hat{0} \phi - (\hat{0} - \bar{0}) \bar{\phi} \\ &= \hat{0} \phi - (\hat{0} - 0) * h * \hat{0} \phi \end{aligned}$$

D'après (2.2.23) et (2.2.24), $\hat{0} - \bar{0}$ est une distribution temporelle. Calculons la fonction h telle que :

$$(8) \quad (\hat{0} - 0) * h = \delta, \quad (\delta : \text{distribution de Dirac})$$

Elle est donnée par :

$$(9) \quad h(t) = \frac{1}{a} H(t) * e^{-bt} J_0\left(\frac{2\sqrt{\epsilon} t}{a^2}\right)$$

On voit alors que $\hat{0} \hat{\phi} = 0$, et l'existence de la décomposition est ainsi démontrée.

L'unicité de la décomposition est facile à prouver. Soit $\bar{\phi}$ et $\hat{\phi}$ solutions de (3) telles que :

$$\bar{\phi} + \hat{\phi} = 0$$

On a alors :

$$\hat{0} (\bar{\phi} + \hat{\phi}) = \hat{0} \bar{\phi} = (\hat{0} - \bar{0}) \bar{\phi} = 0,$$

d'où d'après (8) :

$$h * (\hat{0} - \bar{0}) \bar{\phi} = \bar{\phi} = 0$$

2.A.3 DEMONSTRATION DE : $\bar{j} = \bar{B}/2\bar{c}$.

Les quantités $\bar{j}$ et $\bar{B}$ étant données par (2.3.22) et (2.3.56), il suffit de montrer que :

$$(1) \quad \frac{\bar{c}^2 - 1 - \epsilon}{2 \bar{c}^2 (m \bar{c} - \frac{1}{\bar{c}^3})} = \frac{\bar{c}}{4} (\epsilon + 1 - ab)$$

Rappelons les définitions suivantes :

$$(2) \quad a = (1 + m (1 + \epsilon)^2 - 4 m)^{1/2}$$

$$(3) \quad b = \frac{m (1 + \epsilon)^2 + \epsilon - 1}{a^2}$$

$$(4) \quad \bar{c}^2 = \frac{1 + m (1 + \epsilon) + a}{2m}$$

$$(5) \quad \frac{1}{\bar{c}^2} = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2} + \frac{m}{2} (1 + \epsilon)$$

En utilisant (4) et (5) on voit que l'égalité (1) est équivalente à :

$$(6) \quad A = B,$$

où

$$A = 2 (1 - m (1 + \epsilon) + a)$$

$$B = [a + m (1 + \epsilon) + a^2] (\epsilon + 1 - ab)$$

L'égalité (6) se démontre en développant l'expression B et en donnant à a^2 et $a^2 b$ les valeurs fournies par (2) et (3).

2.A.4 DEMONSTRATION DU LEMME

Supposons la propriété vraie jusqu'à l'ordre $n - 1$:

$$L \cdot^n (x^{n-1} f) = 0.$$

Examinons l'ordre n :

$$L^{(n+1)}(x^n f) = L \cdot^n \left[L(x^n f) = x^n L_t f - x^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - n(n-1) x^{n-2} f - 2n x^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x} \right].$$

Mais :

$$x^n L_t f - x^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = x^n L(f) = 0.$$

Il vient alors :

$$L \cdot (n+1) (x^n f) = -n(n-1)L \cdot (x^{n-2} f) - 2nL \cdot (x^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x}).$$

Le premier terme du second membre est nul par hypothèse de récurrence, le deuxième est également nul comme on le voit en dérivant par rapport à x l'expression :

$$L \cdot (x^{n-1} f) = 0.$$

2.A.5 FORMULES DE DERIVATION DE $\bar{\Delta}_k$ et $\hat{\Delta}_k$

On rappelle la notation :

$$Q = (m D^2 + D)^{1/2}.$$

Les formules de dérivation portant sur Δ_k sont les suivantes :

$$\frac{\partial \bar{\Delta}_k}{\partial x} = \bar{\Delta}_{k-1} - Q \bar{\Delta}_k$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\Delta}_k}{\partial x^2} = \bar{\Delta}_{k-2} - 2Q \bar{\Delta}_{k-1} + (m D^2 + D) \bar{\Delta}_k$$

$$\bar{H} \bar{\Delta}_k = 2Q \bar{\Delta}_{k-1} - \bar{\Delta}_{k-2}$$

$$\hat{H} \bar{\Delta}_k = (D^2 (1-m) - D) \bar{\Delta}_k + 2Q \bar{\Delta}_{k-1} - \bar{\Delta}_{k-2}$$

$$\begin{aligned} \hat{H} \bar{H} \bar{\Delta}_k &= 2Q (D^2 (1-m) - D) \bar{\Delta}_{k-1} + ((5m-1) D^2 + 5D) \bar{\Delta}_{k-2} \\ &\quad - 4Q \bar{\Delta}_{k-3} + \bar{\Delta}_{k-4} \end{aligned}$$

(1)

On sera attentif au fait que dans les seconds membres de ces formules n'interviennent que des opérateurs de la variable temps.

Pour démontrer la formule (1)₁, on remarque que la transformée de

Laplace de $\bar{\Delta}_0$ est :

$$\mathcal{L}\bar{\Delta}_0(s) = e^{- (m s^2 + s)^{1/2} x}$$

Par dérivation relativement à x , on obtient immédiatement le résultat :

$$\frac{\partial \bar{\Delta}_0}{\partial x} = - Q \bar{\Delta}_0.$$

Les autres formules s'en déduisent facilement.

Les formules de dérivation des $\hat{\Delta}_k$ s'obtiennent en remarquant que $\frac{\partial \hat{\Delta}_0}{\partial x} = - \frac{\partial \bar{\Delta}_0}{\partial x}$. Elles s'écrivent :

$$\frac{\partial \hat{\Delta}_k}{\partial x} = \hat{\Delta}_{k-1} - D \hat{\Delta}_k$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\Delta}_k}{\partial x^2} = D^2 \hat{\Delta}_k - 2D \hat{\Delta}_{k-1} + \hat{\Delta}_{k-2}$$

$$\hat{H} \hat{\Delta}_k = 2D \hat{\Delta}_{k-1} - \hat{\Delta}_{k-2}$$

$$\bar{H} \hat{\Delta}_k = (D + D^2 (m-1)) \hat{\Delta}_k + 2D \hat{\Delta}_{k-1} - \hat{\Delta}_{k-2}$$

$$\hat{H} \bar{H} \hat{\Delta}_k = 2D (D + D^2 (m-1)) \hat{\Delta}_{k-1}$$

$$+ (D^2(5-m) - D) \hat{\Delta}_{k-2} - 4D \hat{\Delta}_{k-3} + \hat{\Delta}_{k-4}$$

(2)

2.A.6 FORMULES OBTENUES APRES IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS DE $\bar{\Delta}_k$ et $\hat{\Delta}_k$.

Après avoir substitué dans (2.4.17) à $\bar{\tau}^{(2i)}$ et $\bar{\tau}^{(2i-2)}$ leurs développements (2.4.22), et après identification des coefficients de $\bar{\Delta}_k$ à 0, on obtient :

$$2 Q (D^2 (1-m) - D) \bar{\tau}_i^{(2i)} = (D + m D^2)^2 \bar{\tau}_{i-1}^{(2i-2)} \quad (i \geq 1)$$

$$2 Q (D^2 (1-m) - D) \bar{\tau}_{i-1}^{(2i)} + ((5m-1) D^2 + 5D) \bar{\tau}_i^{(2i)}$$

$$= (D + m D^2)^2 \bar{\tau}_{i-2}^{(2i-2)} - 2 (D + m D^2)^{3/2} \bar{\tau}_{i-1}^{(2i-2)} \quad (i \geq 2)$$

$$\begin{aligned}
& 2 Q (D^2 (1 - m) - D) \bar{\tau}_{i-2}^{(2i)} + ((5m - 1) D^2 + 5D) \bar{\tau}_{i-1}^{(2i)} \\
& - 4 Q \bar{\tau}_i^{(2i)} = (D + m D^2)^2 \bar{\tau}_{i-3}^{(2i-2)} - 2 (D + m D^2)^{3/2} \bar{\tau}_{i-2}^{(2i-2)} \\
& + (D + m D^2) \bar{\tau}_{i-1}^{(2i-2)} \quad (i \geq 3) \\
& 2 Q (D^2 (1 - m) - D) \bar{\tau}_{k+1}^{(2i)} + ((5m - 1) D^2 + 5D) \bar{\tau}_{k+2}^{(2i)} \\
& - 4 Q \bar{\tau}_{k+3}^{(2i)} + \bar{\tau}_{k+4}^{(2i)} = (D + m D^2)^2 \bar{\tau}_k^{(2i-2)} \\
& - 2 (D + m D^2)^{3/2} \bar{\tau}_{k+2}^{(2i-2)} + (D + m D^2) \bar{\tau}_{k+2}^{(2i-2)} \\
(1) \quad & (0 \leq k \leq i - 4)
\end{aligned}$$

De même, on substitue dans (2.4.16) à $\bar{\tau}^{(2i)}$ et $\bar{u}^{(2i)}$ leurs développements (2.4.22) et (2.4.24), et après identification il vient :

$$\begin{aligned}
& (D^2 (1 - m) - D) \bar{u}_i^{(2i)} - Q \bar{\tau}_i^{(2i)} = 0 \\
& (D^2 (1 - m) - D) \bar{u}_{i-1}^{(2i)} + 2 Q \bar{u}_i^{(2i)} + \bar{\tau}_i^{(2i)} - Q \bar{\tau}_{i-1}^{(2i)} = 0 \\
& (D^2 (1 - m) - D) \bar{u}_k^{(2i)} + 2 Q \bar{u}_{k+1}^{(2i)} - \bar{u}_{k+2}^{(2i)} + \bar{\tau}_{k+1}^{(2i)} \\
(2) \quad & - Q \bar{\tau}_k^{(2i)} = 0 \quad (0 \leq k \leq i - 2)
\end{aligned}$$

La substitution dans (2.4.38) à $\hat{u}^{(2i)}$ et $\hat{u}^{(2i-2)}$ de leurs développements (2.4.41) et l'identification à zéro des coefficients de $\hat{A}_k$ donnent :

$$\begin{aligned}
& 2D (D + D^2 (m - 1)) \hat{u}_i^{(2i)} = D^2 (D + m D^2) \hat{u}_{i-1}^{(2i-2)} \\
& 2D (D + D^2 (m - 1)) \hat{u}_{i-1}^{(2i)} + (D^2 (5 - m) - D) \hat{u}_i^{(2i)} \\
& = D^2 (D + m D^2) \hat{u}_{i-2}^{(2i-2)} - 2D (D + m D^2) \hat{u}_{i-1}^{(2i-2)} \\
& 2D (D + D^2 (m - 1)) \hat{u}_{i-2}^{(2i)} + (D^2 (5 - m) - D) \hat{u}_{i-1}^{(2i)} \\
& - 4D \hat{u}_i^{(2i)} = D^2 (D + m D^2) \hat{u}_{i-3}^{(2i-2)} - 2D (D + m D^2) \hat{u}_{i-2}^{(2i-2)}
\end{aligned}$$

$$+ (D + m D^2) \hat{u}_{i-1}^{(2i-2)}$$

$$2D (D + D^2 (m-1)) \hat{u}_{k+1}^{(2i)} + (D^2 (5-m) - D) \hat{u}_{k+2}^{(2i)}$$

$$- 4D \hat{u}_{k+3}^{(2i)} + \hat{u}_{k+4}^{(2i)} = D^2 (D + m D^2) \hat{u}_k^{(2i-2)}$$

$$- 2D (D + m D^2) \hat{u}_{k+1}^{(2i-2)} + (D + m D^2) \hat{u}_{k+2}^{(2i-2)}$$

$$(3) \quad (0 \leq k \leq i-4)$$

Enfin, ces mêmes opérations effectuées dans les équations (2.4.39) et sur $\hat{\tau}^{(2i)}$ et $\hat{u}^{(2i)}$ donnent pour résultat :

$$(D + D^2 (m-1)) \hat{\tau}_i^{(2i)} - D (D + m D^2) \hat{u}_i^{(2i)} = 0$$

$$(D + D^2 (m-1)) \hat{\tau}_{i-1}^{(2i)} + 2D \hat{\tau}_i^{(2i)}$$

$$- D (D + m D^2) \hat{u}_{i-1}^{(2i)} + (D + m D^2) \hat{u}_i^{(2i)} = 0$$

$$(D + D^2 (m-1)) \hat{\tau}_k^{(2i)} + 2D \hat{\tau}_{k+1}^{(2i)} - \hat{\tau}_{k+2}^{(2i)}$$

$$- D (D + m D^2) \hat{u}_k^{(2i)} + (D + m D^2) \hat{u}_{k+1}^{(2i)} = 0$$

$$(4) \quad (0 \leq k \leq i-2)$$

2.A.7 DEFINITIONS DES $\hat{C}_i$ et $\hat{D}_i$

On introduit les opérateurs :

$$\hat{A}_0 = 2 D^2 (1 + D (m-1)), \hat{A}_1 = A_0^{-1} D^2 (D + m D^2), \hat{A}_2 = \hat{A}_0^{-1} [D^2 (5-m) - D],$$

$$(1) \quad \hat{A}_3 = 2 \hat{A}_0^{-1} D (D + m D^2), \hat{A}_4 = -4 \hat{A}_0^{-1} D, \hat{A}_5 = \hat{A}_0^{-1} (D + m D^2), \hat{A}_6 = \hat{A}_0^{-1},$$

$$\hat{B}_0 = D + D^2 (m-1), \hat{B}_1 = \hat{B}_0^{-1} D (D + m D^2), \hat{B}_2 = -\hat{B}_0^{-1} 2D, \hat{B}_3 = -\hat{B}_0^{-1} (D + m D^2),$$

$$(2) \quad \hat{B}_4 = \hat{B}_0^{-1}$$

et l'on définit les opérateurs $\hat{C}_i$ et $\hat{D}_i$ par :

$$\hat{C}_1 = \hat{A}_1$$

$$\hat{C}_2 = -\hat{A}_2 \hat{A}_1 + \hat{A}_3$$

$$\hat{C}_3 = -\hat{A}_2 \hat{C}_2 - \hat{A}_4 \hat{A}_1 + \hat{A}_5$$

$$(3) \quad \hat{C}_i = -\hat{A}_2 \hat{C}_{i-1} - \hat{A}_4 \hat{C}_{i-2} - \hat{A}_6 \hat{C}_{i-3}.$$

$$\hat{D}_1 = \hat{B}_1$$

$$\hat{D}_2 = \hat{B}_2 \hat{B}_1 + \hat{B}_3$$

$$\hat{D}_3 = \hat{B}_2 \hat{D}_2 + \hat{B}_4 \hat{D}_1$$

$$(4) \quad \hat{D}_i = \hat{B}_2 \hat{D}_{i-1} + \hat{B}_4 \hat{D}_{i-2}.$$

2.A.8 DEFINITIONS DES MATRICES $\hat{P}_i, \hat{N}_i, \hat{P}_i$

Les formules (2.4.25) et (2.4.33) donnent tout d'abord les coefficients $\bar{C}_i$ et $\bar{D}_i$:

$$\bar{C}_1 = \frac{1}{2} \frac{D^{1/2} (1 + m D)^{3/2}}{D (1 - m) - 1}$$

$$\bar{C}_2 = - (1 + m D) \frac{(m + 3) D + 1}{4 (D (1 - m) - 1)^2}$$

.....

$$\bar{D}_1 = (1 + m D)^{1/2} D^{-1/2} (D (1 - m) - 1)^{-1}$$

$$\bar{D}_2 = - \frac{D (1 + m) + 1}{D (D (1 - m) - 1)^2}$$

De façon duale, on obtient pour l'onde E.M., avec les formules (2.A.7.3-4) :

$$\hat{C}_1 = \frac{1}{2} \frac{D (1 + m D)}{1 + D (m - 1)} \quad , \quad \hat{C}_2 = - \frac{(1 + m D) [D (1 + 3 m) + 3]}{4 [1 + D (m - 1)]^2}$$

$$\hat{D}_1 = \frac{D (1 + m D)}{1 + (m - 1) D}$$

$$\hat{D}_2 = - \frac{(1 + m D) (D (1 + m) + 1)}{(1 + (m - 1) D)^2}$$

Les formules (2.4.28) et (2.4.34) permettent le calcul des matrices $\hat{P}_i$ et $\hat{N}_i$, ou $\hat{P}_i$ et $\hat{N}_i$. On note par δ l'opérateur unité

$$\hat{P}_0 = \delta ; \quad \hat{P}_1 = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} ; \quad \hat{P}_2 = \begin{bmatrix} \hat{C}_1^2 & 0 & 0 \\ \hat{C}_1 \hat{C}_2 & \hat{C}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{bmatrix}$$

$$\hat{N}_0 \hat{P}_0 = \hat{D}_1 ; \quad \hat{N}_1 \hat{P}_1 = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{D}_1 & 0 \\ \hat{C}_1 & \hat{D}_2 & \hat{D}_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{N}_2 \hat{P}_2 = \begin{bmatrix} \hat{C}_1^2 & \hat{D}_1 & 0 \\ \hat{C}_1^2 & \hat{D}_2 & 0 \\ \hat{C}_1^2 & \hat{D}_3 & \hat{D}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{D}_1 \hat{C}_1 \hat{C}_2 & \hat{C}_1 \hat{D}_1 & 0 \\ \hat{C}_1 \hat{C}_2 \hat{D}_2 & \hat{C}_1 \hat{D}_2 & \hat{D}_1 \end{bmatrix}$$

2.A.9 LES MATRICES $\hat{P}_i$, $\hat{N}_i$ EN THERMOELASTICITE CLASSIQUE

Dans le cas où $m = 0$, on a :

$$\hat{P}_0 = \delta \hat{P}_1 = \begin{bmatrix} D^{1/2} & 0 \\ 2 (D - 1) & \delta \end{bmatrix}$$

$$\hat{P}_2 = \begin{bmatrix} \frac{D}{4 (D - 1)^2} & 0 & 0 \\ - \frac{D^{1/2} (3 D + 1)}{8 (D - 1)^3} & \frac{D^{1/2}}{2 (D - 1)} & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{bmatrix}$$

$$\hat{\bar{P}}_0 = \delta \quad \hat{\bar{P}}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{D}{2(D-1)} & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$$

$$\hat{\bar{P}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{D^2}{4(D-1)^2} & 0 & 0 \\ \frac{D(D+3)}{8(D-1)^3} & -\frac{D}{2(D-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{bmatrix}$$

$$\bar{N}_0 \bar{P}_0 = \frac{D^{-1/2}}{D-1} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2(D-1)^2} & 0 \\ \frac{D^{-1/2}(D+1)}{2(D-1)^3} & \frac{D^{-1/2}}{D-1} \end{bmatrix}$$

$$\bar{N}_2 \bar{P}_2 = \begin{bmatrix} \frac{D^{1/2}}{4(D-1)^3} & 0 & 0 \\ -\frac{(5D+3)}{8(D-1)^4} & \frac{1}{2(D-1)^2} & 0 \\ \frac{D^{-1/2}(3D+1)(D+3)}{8(D-1)^5} & -\frac{D^{-1/2}(D+1)}{2(D-1)^3} & \frac{D^{-1/2}}{D-1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\bar{N}}_0 \hat{\bar{P}}_0 = -\frac{D}{D-1} \quad \hat{\bar{N}}_1 \hat{\bar{P}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{D^2}{2(D-1)^2} & 0 \\ \frac{D(D+1)}{2(D-1)^3} & -\frac{D}{D-1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{N}_{-2} \hat{P}_{-2} = \begin{bmatrix} -\frac{D^3}{4(D-1)^3} & 0 & 0 \\ -\frac{D^2(3D+5)}{8(D-1)^4} & \frac{D^2}{2(D-1)^2} & 0 \\ -\frac{D(D+3)(3D+1)}{8(D-1)^5} & \frac{D(D+1)}{2(D-1)^3} & -\frac{D}{D-1} \end{bmatrix}$$

2.A.10 CALCUL DES ORIGINAUX DES $E_m^n = \frac{Q^n}{(D-a)^m} e^{-Qx}$

On calcule d'abord l'originale de

$$(1) \quad E_1^0 = \frac{1}{D-a} e^{-Qx} \quad (Q = D^{1/2} (1+mD)^{1/2})$$

Nous notons $\bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ la transformée de Laplace d'une fonction f par rapport au temps.

On se propose de déterminer f telle que :

$$(2) \quad \bar{f}(s) = \frac{1}{s-a} e^{-x s^{1/2} (1+m s)^{1/2}}$$

La transformée de Laplace de la fonction :

$$(3) \quad h(t, x) = H(t - \sqrt{m} x) e^{-(a + \frac{1}{2m})t} I_0 \left[\frac{1}{2m} (t^2 - m x^2)^{1/2} \right]$$

est donnée dans [27], p. 191 :

$$(4) \quad \bar{h}(s) = \frac{1}{(s+a)^{1/2} (s+a+\frac{1}{m})^{1/2}} \exp \left[-m^{1/2} x (s+a)^{1/2} (s+a+\frac{1}{m})^{1/2} \right]$$

Soit $g(t)$ la fonction telle que :

$$(5) \quad \bar{g}(s) = -\frac{1}{\sqrt{m}} \frac{1}{s} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x}$$

Les formules (2) (4) et (5) nous montre que :

$$(6) \quad \bar{g}(s) = \bar{f}(s+a)$$

soit d'après une propriété connue de la transformation de Laplace :

$$(7) \quad g(t) = H(t) e^{-at} f(t).$$

D'après (5), on a :

$$(8) \quad g(t) = -\frac{1}{\sqrt{m}} H(t) * \frac{\partial h}{\partial x}(t, x),$$

et h étant connue, (3), on en déduit g puis f avec (7). D'où la correspondance entre image et originale :

$$\begin{aligned} \bar{f}(s, x) &= \frac{1}{s-a} e^{-x} s^{1/2} (1+m s)^{1/2} \\ f(t, x) &= H(t - \sqrt{m} x) \left\{ e^{at - a\sqrt{m}x - \frac{x}{2\sqrt{m}}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{x}{4m^{3/2}} e^{at} \int_{\sqrt{mx}}^t \exp \left[-\frac{\tau}{2} \left(2a + \frac{1}{m} \right) \right] \frac{I_1(\xi(\tau, x))}{\xi(\tau, x)} d\tau \right\} \end{aligned}$$

On a noté, et l'on pose pour la suite :

$$(10) \quad \xi(\tau, x) = \frac{1}{2m} (\tau^2 - m x^2)^{1/2}$$

$$(11) \quad F(\tau, x) = \frac{I_1(\xi(\tau, x))}{4 m^2 \xi^3(\tau, x)} (\tau^2 + m x^2) - \frac{x^2}{4 m \xi^2(\tau, x)} I_0(\xi(\tau, x))$$

En dérivant par rapport à x ou a , on peut obtenir, à partir de (9), les originaux des E_m^n , dont nous donnons quelques exemples.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} &= -\frac{s^{1/2} (1+m s)^{1/2}}{s-a} e^{-s^{1/2} x (1+m s)^{1/2}} \\ &\quad - \frac{x}{2\sqrt{m}} \delta(t - \sqrt{m} x) \\ (12) \quad \frac{\partial f}{\partial x} &= -\sqrt{m} e^{at - a\sqrt{m}x - \frac{x}{2\sqrt{m}}} \\ &\quad - \left(a\sqrt{m} + \frac{1}{2\sqrt{m}} + \frac{x}{8m} \right) e^{at - a\sqrt{m}x - \frac{x}{2\sqrt{m}}} \\ &\quad + \frac{e^{at}}{4 m^{3/2}} \int_{\sqrt{mx}}^t e^{-(2a + \frac{1}{m}) \frac{\tau}{2}} F(\tau, x) d\tau \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial a} = \frac{1}{(s-a)^2} e^{-xs^{1/2}} (1+ms)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} 13) \quad \frac{\partial f}{\partial a} = & H(t - \sqrt{m}x) \left\{ e^{(at - a\sqrt{m}x - \frac{x}{2\sqrt{m}})} (t - \sqrt{m}x) \right. \\ & \left. + \frac{x}{4m^{3/2}} e^{at} \int_{\sqrt{m}x}^t (t - \tau) e^{-(2a + \frac{1}{m})\frac{\tau}{2}} \frac{I_1(\xi(\tau, x))}{\xi(\tau, x)} d\tau \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial a \partial x} = - \frac{s^{1/2} (1+ms)^{1/2}}{(s-a)^2} e^{-xs^{1/2}} (1+ms)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} 14) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial x} = & - e^{(at - a\sqrt{m}x - \frac{x}{2\sqrt{m}})} \left[(t - \sqrt{m}x) (a\sqrt{m} + \frac{1}{2\sqrt{m}} + \frac{x}{8m}) + \sqrt{m} \right] \\ & + \frac{e^{at}}{4m^{3/2}} \int_{\sqrt{m}x}^t (t - \tau) e^{-(2a + \frac{1}{m})\frac{\tau}{2}} F(\tau, x) d\tau \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial a^2} = \frac{2}{(s-a)^3} e^{-xs^{1/2}} (1+ms)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} 15) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = & H(t - \sqrt{m}x) \left\{ e^{(at - a\sqrt{m}x - \frac{x}{2\sqrt{m}})} (t - \sqrt{m}x)^2 \right. \\ & \left. + \frac{x}{4m^{3/2}} e^{at} \int_{\sqrt{m}x}^t (t - \tau)^2 e^{-(2a + \frac{1}{m})\frac{\tau}{2}} \frac{I_1(\xi(\tau, x))}{\xi(\tau, x)} d\tau \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 \bar{f}}{\partial^2 a \partial x} = - \frac{2s^{1/2}}{(s-a)^3} (1 + m s)^{1/2} e^{-x s^{1/2}} (1 + m s)^{1/2}$$

(16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial^2 a \partial x} = & - e^{at} - a\sqrt{m} x - \frac{x}{2\sqrt{m}} \left[(t - \sqrt{m} x)^2 (a\sqrt{m} + \frac{1}{2\sqrt{m}} + \frac{x}{8m}) \right. \\ & \left. + 2\sqrt{m} (t - \sqrt{m} x) \right] + \frac{e^{at}}{4m^{3/2}} \int_{\sqrt{m} x}^t (t - \tau)^2 e^{-(2a + \frac{1}{m}) \frac{\tau}{2}} F(\tau, x) d\tau \end{aligned}$$

3.A.1 Calcul de l'originale de $\frac{D^{-1/2}}{D-1} * \bar{\Delta}_0$

Pour calculer l'originale de $\frac{D^{-1/2}}{D-1} * \bar{\Delta}_0$, utilisons les notations de Hetnarski [7]. On a déjà introduit $T(a, x, t)$ en (3.1.39). Définissons S par :

$$S(a, x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-x} s^{1/2}}{s-a} \right\}$$

$$= \frac{e^{at}}{2} \left[e^{-x} a^{1/2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} - \sqrt{at} \right) + e^{x} a^{1/2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \sqrt{at} \right) \right]$$

On a :

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -a T - \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp \left(-\frac{x^2}{4t} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -S$$

Par suite, il vient :

$$\frac{s^{-1/2}}{s-a} * \bar{\Delta}_0 = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{s(s-a)} * \bar{\Delta}_0 \right) = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s} \right) * \bar{\Delta}_0 \right\}$$

$$= -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ S(a, x, t) - S(0, x, t) \right\} = T(a, x, t)$$

3.A.2 Dépôt d'énergie de type surfacique : Relaxation de la contrainte en un point

En écrivant :

$$(1) \quad \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t} \right) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{t} - \frac{x}{2\sqrt{t}} \right),$$

on montre facilement avec (3.1.40) que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma^{(1)}(x, t) = 0$$

Si l'on utilise la transformation (1) dans (3.1.41), il apparaît un terme

$$A = \left(\frac{x^2}{2} + t^2 - \frac{3}{2} tx + \frac{x}{4} + \frac{5}{8} \right) e^{t-x}$$

qui se combine avec le terme B de $\hat{\sigma}^{(3)}$:

$$B = \frac{1}{2} e^{t-x} (t-x) (-t+x-2) - \frac{1}{2} e^{t-x} \operatorname{erf} \sqrt{t-x} (t^2 - tx - 2t + \frac{5}{2}x + \frac{5}{4})$$

pour donner :

$$A + B = \frac{1}{2} e^{t-x} \operatorname{erfc} \sqrt{t-x} (t^2 - tx + \frac{5}{2}x - 2t + \frac{5}{4})$$

Dans (3.1.41) les seuls termes autres que A qui ne tendent pas vers zéro quand $t \rightarrow \infty$ sont :

$$C = -\frac{1}{2} e^{t-x} (t^2 - \frac{3}{2} tx) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{t} - \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \\ + \frac{1}{2} e^{t+x} \left(-\frac{tx}{2} + 2t \right) \operatorname{erfc} \left(\sqrt{t} + \frac{x}{2\sqrt{t}} \right)$$

et

$$D = \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4} - \frac{5}{4} \right) \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Posons dans (3.1.42)

$$E = - \left(\frac{t}{2} - \frac{5}{4} \right) \sqrt{\frac{t-x}{\pi}} .$$

Le développement asymptotique de $\operatorname{erfc} X$ pour les grandes valeurs de l'argument X montre que :

$$A + B = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{3/2} \left[1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{5}{2} \right) \frac{1}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right]$$

$$C + D = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{3/2} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

De plus on a :

$$E = - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{3/2} \left[1 - \left(\frac{5}{2} + \frac{x}{2} \right) \frac{1}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \right] ,$$

d'où finalement :

$$\sigma^{(3)} = 0 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right),$$

quand t tend vers l'infini à x fixé.

3.A.3 Dépôt d'énergie de type volumique : Calcul de la contrainte au second ordre σ_1 .

Il s'agit de calculer le terme σ_1 du développement :

$$\sigma = \sigma_0 + \epsilon \sigma_1 + \dots$$

Donnons les étapes du calcul. Le système d'équations vérifiées par θ_1 et e_1 est :

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} = - \frac{\partial e_0}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 e_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 e_1}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2}$$

En passant par l'intermédiaire de la transformation de Laplace, on obtient les solutions θ_1 et e_1 vérifiant les conditions à la limite :

$$\theta_1|_{x=0} = 0, \quad e_1|_{x=0} = 0$$

soit :

$$\mathcal{L}_{\theta_1}(x, s) = (-C - D + Bx) e^{-s^{1/2}x} + C e^{-xs} + D e^{-\gamma x}$$

avec :

$$B = - \frac{1}{2 s^{1/2} (s-1)(s-\gamma^2)}$$

$$C = \frac{1}{s(s-\gamma^2)(s-1)} \left(-\frac{\gamma^2}{s^2 - \gamma^2} - \frac{1}{s-1} \right)$$

$$D = \frac{\gamma^2}{(s - \gamma^2)^2 (s^2 - \gamma^2)}$$

$$\mathcal{L}e_1 = (-E - I + Hx) e^{-xs} + (E + Fx) e^{-s^{1/2}x} + I e^{-\gamma x}$$

avec

$$E = \frac{2s^{1/2}B}{(s-1)^2} + \frac{C+D}{s-1}$$

$$F = -\frac{B}{s-1}$$

$$H = -\frac{s}{2} C$$

$$I = -\frac{\gamma^2}{s^2 - \gamma^2} D$$

En réduisant les fractions rationnelles en s sous forme canonique, on obtient :

(1)

$$\begin{aligned} \sigma_1 = e_1 - \theta_1 = e^{-xs} & \left\{ \left(\frac{2(1+\gamma^2)}{(1-\gamma^2)^3} \frac{1}{s-1} - \frac{2+\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2} \frac{1}{(s-1)^2} \right. \right. \\ & + \frac{2}{1-\gamma^2} \frac{1}{(s-1)^3} - \frac{1+\gamma}{4\gamma(1-\gamma)^3} \frac{1}{s-\gamma} + \frac{1}{4(1-\gamma)^2} \frac{1}{(s-\gamma)^2} \\ & + \frac{1-\gamma}{4\gamma(1+\gamma)^3} \frac{1}{s+\gamma} + \frac{1}{4(1+\gamma)^2} \frac{1}{(s+\gamma)^2} \left. \right) + x \left(-\frac{1+\gamma^2}{2(1-\gamma^2)^2} \frac{1}{s-1} \right. \\ & + \frac{1}{2(1-\gamma^2)(s-1)^2} + \frac{1}{4(1-\gamma)^2(s-\gamma)} + \frac{1}{4(1+\gamma)^2(s+\gamma)} \left. \right) \Big\} \\ & + e^{-s^{1/2}x} \left\{ \left(-\frac{2(1+\gamma^2)}{(1-\gamma^2)^3} \frac{1}{s-1} + \frac{2+\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2} \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{2}{1-\gamma^2} \frac{1}{(s-1)^3} \right. \right. \\ & + \frac{2(1+\gamma^2)}{(1-\gamma^2)^3} \frac{1}{s-\gamma^2} + \frac{\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2} \frac{1}{(s-\gamma^2)^2} \left. \right) + x s^{1/2} \left(\frac{1}{2(1-\gamma^2)^2(s-\gamma^2)} \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2(1-\gamma^2)^2(s-1)} + \frac{1}{2(1-\gamma^2)(s-1)^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$+ e^{-\gamma x} \left(-\frac{2(1+\gamma^2)}{(1-\gamma^2)^3} \frac{1}{s-\gamma^2} - \frac{\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2} \frac{1}{(s-\gamma^2)^2} + \frac{1+\gamma}{4\gamma(1-\gamma)^3} \frac{1}{s-\gamma} \right. \\ \left. - \frac{1}{4(1-\gamma)^2} \frac{1}{(s-\gamma)^2} + \frac{\gamma-1}{4\gamma(1+\gamma)^3} \frac{1}{s+\gamma} - \frac{1}{4(1+\gamma)^2} \frac{1}{(s+\gamma)^2} \right)$$

On calcule l'originale de cette expression en utilisant le formulaire qui se trouve dans [7].

3.A.4 Dépôt d'énergie de type volumique : Relaxation de la contrainte en un point donné

Il s'agit de montrer que la solution approchée σ_c rend compte de la relaxation de la contrainte en un point, c'est à dire que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_c = \lim_{t \rightarrow \infty} (\sigma_0 + \epsilon \sigma_1) = 0$$

Il est facile de voir que $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_0 = 0$.

Dans l'expression de σ_1 on utilise la transformation :

$$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t} \right) = 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{t} - \frac{x}{2\sqrt{t}} \right)$$

On fait la même opération sur l'expression $\operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} - \gamma\sqrt{t} \right)$, et l'on remarque alors que beaucoup de termes, ne tendant pas vers zéro quand $t \rightarrow \infty$, se combinent entre eux de façon à disparaître.

Regroupons les termes restants qui ne tendent pas vers zéro.

$$E = A(x, t) - A(-x, t) + B(x, t) - B(-x, t) + \frac{x}{1-\gamma^2} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

avec

$$A = -\frac{1}{2} e^{t-x} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{t} - \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \left[\frac{2+\gamma^2}{(1-\gamma^2)^2} t + \frac{3}{2(1-\gamma^2)} tx - \frac{1}{1-\gamma^2} t^2 \right] \\ B = -\frac{1}{2} e^{\gamma^2 t - \gamma x} \frac{t \gamma^2}{(1-\gamma^2)^2} \operatorname{erfc} \left(\gamma\sqrt{t} - \frac{x}{2\sqrt{t}} \right)$$

Le développement asymptotique de la fonction erfc pour les grandes valeurs de l'argument montre finalement que $E = 0 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)$ quand t tend vers l'infini.

3.A.5 Résolution de l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial t_0^2} - \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x^2} = \bar{\epsilon} \frac{\partial^3 \sigma_0}{\partial t_0 \partial x^2} - (1 - \bar{\epsilon}) e^{-x} H(t)$$

Limitons-nous à la recherche d'une solution de l'équation (1), vérifiant la condition à la limite :

$$\sigma_1(x=0, t_0) = 0,$$

ainsi que la condition de régularité à l'infini et le repos initial.

Réolvons d'abord l'équation (1) dans laquelle le second membre serait réduit à $-(1 - \bar{\epsilon}) e^{-x} H(t)$. En employant la transformation de Laplace, on montre que :

$$\mathcal{L}_{\sigma_1}(x, s) = (1 - \bar{\epsilon}) \frac{1}{s(s^2 - 1)} (e^{-sx} - e^{-x})$$

et par retour à l'originale :

$$(2) \quad \begin{aligned} \sigma_1(x, t_0) &= (1 - \bar{\epsilon}) \left(-1 + \frac{1}{2} e^{t_0 - x} + \frac{1}{2} e^{-(t_0 - x)} \right) H(t_0 - x) \\ &- (1 - \bar{\epsilon}) \left(-1 + \frac{1}{2} e^{t_0} + \frac{1}{2} e^{-t_0} \right) e^{-x}. \end{aligned}$$

Cette expression ne contient pas de terme séculaire ; elle est bornée sur le quart de plan $x \geq 0, t_0 \geq 0$.

Voyons maintenant le cas où le second membre est réduit à $\bar{\epsilon} \frac{\partial^3 \sigma_0}{\partial t_0 \partial x^2}$.

En se limitant à la recherche de la solution dans le secteur de plan S,

$x \geq t_0, t_0 \geq 0$, on montre que :

$$\sigma_1 = -\bar{\epsilon} \frac{t_0}{4} (e^{t_0 - x} - e^{-(t_0 - x)})$$

est la solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial t_0^2} - \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x^2} = -\frac{\bar{\epsilon}}{2} (e^{t_0 - x} + e^{-(t_0 - x)})$$

La valeur $\sigma_1|_{t_0=x}$ est non bornée quand $x \rightarrow \infty$.

Pour éviter l'apparition d'un tel terme séculaire dans la résolution de (3.2.62) on pose l'équation (3.2.63).

3.A.6 Résolution de l'équation $\frac{\partial \sigma_0}{\partial t_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x^2} = 0$, sous les conditions (3.2.64) et (3.2.65)

Posons :

$$1) \quad f(x) = \sigma_0(x, t_0, t_1 = 0),$$

expression dans laquelle σ_0 est donnée par (3.2.57). La solution recherchée s'écrit cf. [11] :

$$2) \quad \sigma_0(x, t_0, t_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon t_1}} (A(x, t_1) - A(-x, t_1)),$$

où l'on a posé :

$$3) \quad A(x, t_1) = \int_0^\infty f(x') e^{-(x-x')^2/2\epsilon t_1} dx'.$$

Introduisons la notation :

$$J(a, b, c, d) = \int_a^b e^{cx - dx^2} dx.$$

Pour calculer A, il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned} J(a, b, c, d) &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{d}} e^{c^2/4d} \left[\operatorname{erf}\left(-\sqrt{d}\left(b - \frac{c}{2d}\right)\right) - \operatorname{erf}\left(-\sqrt{d}\left(a - \frac{c}{2d}\right)\right) \right] \\ A &= -\frac{1}{2} e^{-t_0 - \frac{x^2}{2\epsilon t_1}} J\left(0, t_0, 1 + \frac{x}{\epsilon t_1}, \frac{1}{2\epsilon t_1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-t_0 - \frac{x^2}{2\epsilon t_1}} J\left(0, t_0, -1 + \frac{x}{\epsilon t_1}, \frac{1}{2\epsilon t_1}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{t_0 - \frac{x^2}{2\epsilon t_1}} J\left(t_0, \infty, -1 + \frac{x}{\epsilon t_1}, \frac{1}{2\epsilon t_1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-t_0 - \frac{x^2}{2\epsilon t_1}} J\left(t_0, \infty, -1 + \frac{x}{\epsilon t_1}, \frac{1}{2\epsilon t_1}\right) \end{aligned}$$

Le résultat final (3.2.66) s'obtient alors facilement.

6.A.1

Démontrons les formules (6.4.22) et (6.4.23). Il est facile de voir que

$$(1) \quad \underline{u}_{,t} = \underline{u}_{,\alpha}/p$$

$$(2) \quad \underline{u}_{,\chi} = -\frac{1}{\lambda p} \underline{u}_{,\alpha} + \underline{u}_{,\chi}$$

Puis, en introduisant les fonctions F et $\underline{S}$ définies par (6.4.13), on obtient :

$$(3) \quad \underline{u}_{,\alpha} = \underline{v}_{,F} F_{,\alpha} + \underline{v}_{,\underline{S}} \underline{S}_{,\alpha}$$

$$(4) \quad \underline{u}_{,\chi} = \underline{v}_{,F} F_{,\chi} + \underline{v}_{,\underline{S}} \underline{S}_{,\chi}$$

On substitue (1) et (2) dans

$$(5) \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{A}(\underline{u}) \frac{\partial \underline{u}}{\partial \chi} = \varepsilon_1 \underline{B}(\underline{u}).$$

Il vient :

$$(6) \quad \frac{1}{p} \left(\underline{I} - \frac{1}{\lambda} \underline{A} \right) \underline{u}_{,\alpha} + \underline{A} \underline{u}_{,\chi} = \varepsilon_1 \underline{B}$$

soit, compte tenu de $\underline{I} \left(\underline{I} - \frac{1}{\lambda} \underline{A} \right) = 0$, de la formule (4) et de (6.4.15) :

$$(7) \quad F_{,\chi} = \frac{1}{\lambda \underline{I} \underline{r}} \underline{I} \left(\varepsilon_1 \underline{B} - \lambda \underline{v}_{,\underline{S}} \underline{S}_{,\chi} \right)$$

La formule (6) dans laquelle on utilise (3) et (4) nous donne l'expression

$$(8) \quad \frac{1}{p} \left(\underline{I} - \frac{1}{\lambda} \underline{A} \right) (\underline{r} F_{,\alpha} + \underline{v}_{,\underline{S}} \underline{S}_{,\alpha}) + \underline{A} (\underline{r} F_{,\chi} + \underline{v}_{,\underline{S}} \underline{S}_{,\chi}) = \varepsilon_1 \underline{B}$$

qui conduit immédiatement à (6.4.23) si l'on y substitue le résultat (7).

BIBLIOGRAPHIE

- ACHENBACH J.D. (1968).
The influence of heat conduction on propagating stress jumps.
J. Mech. Phys. Solids, 16, 273-282.
- BLAKE T.R. (1973).
Plane longitudinal waves of small amplitude in a nonlinear visco-elastic material. Acta mechanica, 17, 211-226.
- BLAKE T.R. (1974).
The decay of spherical waves in a linear viscoelastic solid.
J. appl. math. and Phys., 25, 783-789.
- BLAND D.R. (1965).
On shock structure in a solid.
J. Inst. Math. Applic., 1, 56-75.
- BOIS P.A. (1979).
Techniques asymptotiques pour des problèmes de gaz pesants avec application aux ondes atmosphériques, Thèse, Paris VI.
- BOLEY B.A. et TOLLINS J.S. (1962).
Transient coupled thermoelastic Boundary Value Problems in the Half-Space. J. Appl. Mech., 637-646.
- BRILLOUIN L. (1960).
Wave propagation and group velocity, Academic Press, New-York.
- BRULL M.A. (1965).
cf. Soler A.I..
- BRUN L. (1974).
L'onde simple viscoélastique linéaire. J. de Mécanique, 13, 449-498.
- BRUN L. (1975).
L'onde simple thermoélastique linéaire. J. de Mécanique, 863-885.
- BRUN L. et MOLINARI A. (1977).
Un algorithme de calcul en thermoélasticité dynamique.
J. de Mathématiques et de Physique appliquées (ZAMP), 123-139.

- BRUN L. et MOLINARI A. (à paraître).
Progressive waves in generalised thermoelasticity.
J. of thermal stresses.
- CARSLAW H.S. et JAEGER J.C. (1959).
Conduction of Heat in Solids. Oxford University Press.
- CHADWICK P. (1960).
Dynamical Thermoelasticity. Dans Progress in Solid Mechanics
Isaacs Sneddon et R. Hill, ed., Vol. 1, North Holland, Amsterdam,
265-328.
- CHADWICK P. et SEET L.T.C..
Trends in Elasticity and Thermoelasticity.
(R.E. Czarnota - Bojarski, M. Sokolowski, H. Zorski éditeurs),
p. 31, Walters-Noordhoff, Groningen.
- CHAKRAVORTY J.G. (1959).
cf. Sternberg E..
- CHIKWENDU S.C. et KEVORKIAN J. (1972).
A perturbation method for hyperbolic equations with small non
linearities. SIAM J. Appl. Math., 22, 235-258.
- COLE J.D. (1968).
Perturbation methods in applied mathematics. Blaisdell Publ..
- COLEMAN B.D. et GURTIN M.E. (1965).
On the growth and decay of one dimensional acceleration waves.
Arch. Rat. Mech. Anal., 19, 239-265.
- COURANT R. et HILBERT D. (1962).
Methods of mathematical physics. Vol. II : partial différentiel
equations, Interscience Publ..
- CRITESCU N. (1967).
Dynamic Plasticity. North Holland Comp., Amsterdam.
- CUMBERBATCH E. (1970).
cf. Varley E..

DANILOVSKAIA V.I. (1950).

Contraintes thermiques résultant de l'échauffement subit de la surface d'un semi-espace élastique. (En russe). P.M.M., 14, 316-318.

ERDELYI (éditeur) (1954).

Tables of integral transforms. Bateman Manuscript Project, Vol. 1, Mc Graw Hill Book Co, New-York.

FRANCIS P.H. (1972).

Thermomechanical effects in elastic wave propagation : a survey. J. of Sound and Vibration, 21, 181-192.

FRESSENGEAS C. et MOLINARI A. (soumis pour publication).

Sur la contrainte transitoire engendrée par un choc thermique. J. of Thermal Stresses.

GERMAIN P. (1971).

Progressive waves. 14th Ludwig Prandtl Memorial Lecture, D.G.R.L., Mannheim, 11-30.

GERMAIN P. (1972).

Shock waves, jump relations and structure. Advance in applied Mech., 12.

GERMAIN P. (1973).

Méthodes asymptotiques en mécanique des fluides. Ecole d'Eté de physique théorique. Les Houches. Gordon and Breach Publ..

GRIMADO P.B. (1970).

On the thermal stress induced in a semi-infinite body as a result of a suddenly applied step heat input. J. of Appl. Mech., 1149-1150.

GURTIN M.E. et PIPKIN A.C. (1968).

A general theory of heat conduction with finite waves speeds. Arch. Rat. Mech. Anal., 113-126.

GURTIN M.E. et STERNBERG E. (1962).

On the linear theory of viscoelasticity. Arch. Rat. Mech. Anal., 11, 291-356.

GURTIN M.E. (1965).

cf. Coleman B.D..

HETNARSKI R.B. (1964).

Solution of the coupled problem of thermoelasticity in the form of series of functions. Arch. Mech. Stos., 919-941.

HETNARSKI R.B. (1964).

Coupled thermoelastic problem for the half space.

Bull. de l'Acad. polonaise des Sciences, série Sci. Techn., 49-57.

HETNARSKI R.B. (1975).

An algorithm for generating some inverse Laplace transforms of exponential form. J. of Appl. Math. Phys. (ZAMP), 249-253.

HILBERT D. (1962).

cf. Courant R..

HLADIK J. (1969).

La transformation de Laplace. Masson et C^{ie} Ed..

HUANG N.C. et LEE E.H. (1966).

Nonlinear viscoelasticity for short time ranges.

J. Appl. Mech., 33, 313-321.

JAEGER J.C. (1959).

cf. Carslaw H.S..

JOHNSON A.F. (1975).

Pulse propagation in heat-conducting elastic materials.

J. Mech. Phys. Solids, 23, 55-75.

KEVORKIAN J. (1972).

cf. Chikwendu S.C..

LAMBERMONT J. (1976).

cf. Lebon J..

LANDAU I.D. (1945).

On shock waves at large distances from the place of their origin.

Soviet J. of phys., 9, 496-500.

LAX P.D. (1957).

Hyperbolic systems of conservation laws. Comm. Pure Appl. Math., 537-566.

LEBON J. et LAMBERMONT J. (1976).

A consistent thermodynamic formulation of the field equations for elastic bodies removing the paradox of infinite speed of propagation of thermal signals. J. de Mécanique, 15, 579-594.

LEE E.H. (1966).

cf. Huang N.C..

LIGHTHILL M.J. (1965).

Viscosity effects in sound waves of finite amplitude.

Surveys in Mechanics, Cambridge University Press., 250-351.

LIN W.C. (1973).

cf. Nariboli G.A..

LORD H.W. et SHULMAN Y. (1967).

A generalised dynamical theory of thermoelasticity.

J. Mech. Phys. Solids, 15, 299-309.

LUBLINER J. (1967).

Short-time approximations in nonlinear viscoelasticity.

Int. J. Solids Structures, 3, 513-520.

MCCARTHY M.F. (1970).

Constitutive equations for thermomechanical material with memory.

Int. J. Engng. Sci., 467-474.

MAXWELL J.C. (1867).

On the dynamical theory of gases. Phil. Trans. Royal. Soc.,
157, 49-88.

MOLINARI A. (1978).

Sur la propagation par ondes planes d'une perturbation de faible amplitude dans un demi-espace dissipatif. C.R. Acad. Sc., t. 287, Série A, 79-82.

MOLINARI A. (1979).

Thermoélasticité dynamique : un demi-espace soumis à un échelon de flux thermique. J. de Mécanique, 18, 73-101.

MOLINARI A. (1979).

Réponse dynamique d'un demi-espace thermoélastique à un dépôt d'énergie. J. de Mécanique.

- MOLINARI A. (1979).
Onde viscoélastique non linéaire de faible amplitude.
Arch. Mech., n° 3.
- MOLINARI A. (1977).
cf. Brun L..
Un algorithme de calcul en thermoélasticité dynamique.
- MOLINARI A. (A paraître).
cf. Brun L.
Progressive waves in generalised thermoelasticity.
- MOLINARI A. (soumis pour publication).
cf. Fressengeas C.
Sur la contrainte transitoire engendrée par un choc thermique.
- MORAN J.P. et SHEN S.F. (1966).
On the formation of weak plane shock waves by impulsive motion of
a piston. J. of Fluid Mech., 25, 705-718.
- MORTELL M.P. et SEYMOUR B.R. (1972).
Pulse propagation in a nonlinear viscoelastic rod of finite length.
SIAM J. appl. Math., 22, 209-224.
- MORTELL M.P. (1970).
cf. Seymour B.R.
- NARIBOLI G.A., LIN W.C. (1973).
A new type of Burgers' equations. ZAMM, 53, 505-510.
- NARIBOLI G.A. (1971).
cf. Sedov A.
- NAYFEH A. (1973).
Perturbation methods. John Wiley Publ..
- NOORWOOD F.R. et WARREN W.E. (1969).
Wave propagation in the generalized dynamical theory of thermoelasticity.
Quart. J. Mech. Appl. Math., 22, 283-290.

NOWACKI W. (1965).

Certain dynamic problem of thermoelasticity III. Bull. de l'Acad. polonaise des Sciences, série Sci. Techn., 409-418.

NOWACKI W. (1975).

Dynamic problems of thermoelasticity. Noordhoff Intern. Publ..

NUNZIATO J.W. (1971).

On heat conduction in materials with memory. Quart. Appl. Math., 187-204.

PARKER D.F. (1972).

Propagation of a Rapid Pulse Through a Relaxing Gas. Phys. Fluids, 15, 256-262.

PIAU M. (1975).

Lois de comportement et ondes dans les milieux élastoplastiques viscoplastiques en déformation finie. Thèse, Paris VI.

PIPKIN A.C. (1968).

cf. Gurtin M.E.

RICKER N.H. (1977).

Transient waves in viscoelastic media. Elsevier scientific publ. comp., Amsterdam.

ROGERS T.G. (1967).

cf. Varley E.

ROSEAU M. (1976).

Asymptotic wave theory. North-Holland Publ..

SEDOV A., NARIBOLI G.A. (1971).

Viscoelastic wave by the use of wave-front theory.
Int. J. Nonlinear Mech., 6, 615-624.

SEET L.T.C.

cf. Chadwick P.

SEYMOUR B.R. et VARLEY E. (1970).

High Frequency Periodic Disturbances in Dissipative Systems :
I. Small Amplitude Finite Rate Theory. Proc. Roy. Soc. London,
A 314, 387-415.

- SEYMOUR B.R. et MORTELL M.P. (1975).
Nonlinear Geometrical Acoustics. *Mechanics Today*, Vol. 2,
251-313, Pergamon Press.
- SEYMOUR B.R. (1976).
Weak Shocks in dissipative systems. *J. Appl. Math. Phys.*, 27, 49-59.
- SEYMOUR B.R. (1972).
cf. Mortell M.P.
- SHEN S.F. (1966).
cf. Moran J.P.
- SHULMAN Y. (1967).
cf. Lord H.W.
- SIDOROFF F. (1975).
Variables internes en viscoélasticité. *J. de Mécanique*, 14, 546-566.
- SINGH D.V. (1967).
Thermal stresses in a semi-infinite medium due to constant heat flux
at the surface. *Arch. Budowy Maszyn*, 65-72.
- SNEDDON I.N. (1972).
The use of integral transforms. Mc Graw-Hill Publ..
- SOLER A.I. et BRULL M.A. (1965).
On the solution to transient coupled thermoelastic problems by
perturbation techniques. *J. Appl. Mech.*, 389-399.
- STERNBERG E. et CHAKRAVORTY J.G. (1959).
On inertia effect in a transient thermoelastic problem.
J. of Appl. Mech., 503-509.
- STERNBERG E. (1962).
cf. Gurtin M.E..
- TOLLINS J.S. (1962).
cf. Boley B.A..
- VARLEY E. (1965).
Acceleration fronts in viscoelastic materials.
Arch. Rat. Mech. Anal., 19, 215-225.

VARLEY E. et CUMBERBATCH E. (1970).

Large Amplitude Waves in Stratified Media : Acoustic Pulses.
J. Fluid Mech., 43, 513-537.

VARLEY E., ROGERS T.G. (1967).

The propagation of high frequency, finite acceleration pulses and
shocks in viscoelastic materials.
Proc. Roy. Soc., 296, 498-518.

VARLEY E. (1970).

cf. Seymour B.R..

WARREN W.E. (1969).

cf. Noorwood F.R..

WHITHAM G.B. (1959).

Some comments on wave propagation and shock wave structure with
application to magneto-hydrodynamics.
Com. Pure Appl. Math., 12, 113-158.

WHITHAM G.B. (1974).

Linear and nonlinear waves. John Wiley Publ..

WEBER J.D. (1970).

Thèse, Strasbourg.

ZAKER T.A. (1965).

Stress waves generated by heat addition in an elastic solid.
J. Appl. Mech., 143-150.