



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

B1776A

1ex

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ DE METZ

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

Spécialité: Equations différentielles et contrôle optimal

Mention: Mathématiques Appliquées

par

Serge BALTZ

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19790105
Cote	S/M ₃ 79/5
Loc	Magasin

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS GUIDABLES A RETARDS :
CONTROLABILITÉ ET OBSERVABILITÉ DANS L'ESPACE
EUCLIDIEN R^n - PROBLÈME DE LA RÉALISATION

Président: M^{me} A. SEC

Membres: M. P. CHARRIER

M. B. SCHMITT

Année Universitaire 1978-79



Je remercie vivement Madame SEC d'avoir bien voulu diriger ce travail et d'avoir également accepté de présider le Jury. Je l'ai souvent consultée et ses critiques me furent très utiles pour l'élaboration de ce travail.

Je suis reconnaissant à Monsieur SCHMITT de s'être intéressé à mes recherches et d'avoir accepté d'être membre du Jury.

Lors d'un voyage fructueux à Bordeaux, Monsieur CHARRIER m'a permis par ses conseils d'améliorer le manuscrit de cette thèse. Il a également accepté d'être présent dans le Jury. Je l'en remercie sincèrement.

Madame DAUTRICHE a dactylographié ce texte avec compétence. Je lui en suis reconnaissant.

TABLE DES MATIERES

	Page
<u>INTRODUCTION</u>	7
 <u>CHAPITRE 0 : Préliminaires</u>	 11
0.1. Le système différentiel guidable avec retards Notations.	11
0.2. Le système différentiel ordinaire associé ...	15
 <u>CHAPITRE I : Ensembles d'états accessibles dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$</u>	 25
I.1. Dégénérescence	25
I.2. Ensembles d'accessibilité du système diffé- rentiel à retards	27
 <u>CHAPITRE II : $\mathbb{R}^n$-contrôlabilité</u>	 39
II.1. Complète $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité	40
II.2. La nulle $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité	57
 <u>CHAPITRE III : $\mathbb{R}^n$-observabilité</u>	 62
III.1. Critères de $\mathbb{R}^n$ -observabilité	63
III.2. Le système différentiel dual et les relations de dualité	75
 <u>CHAPITRE IV : Réalisation</u>	 82
IV.1. Matrice impulsionnelle et matrice de transfert	83
IV.2. Existence et problème de la minimalité d'une réalisation	86
 <u>BIBLIOGRAPHIE</u>	 100

INTRODUCTION

La théorie du contrôle optimal pour des systèmes guidables à retards a été l'objet de nombreuses recherches durant les quinze dernières années et plusieurs ouvrages et articles récapitulatifs ont été publiés. Signalons principalement l'article de Manitius [1976] et l'ouvrage de Gabasov et Kirillova [1971].

Ces systèmes guidables sont régis par des équations différentielles à retards, c'est-à-dire dont l'évolution dépend du passé :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-1), \dots, x(t-m))$$

On peut trouver les principaux résultats de la théorie générale de ces équations dans les livres de Bellman et Cooke [1963], Halanay [1966] et Hale [1971].

L'intérêt qu'ont suscité les systèmes à retards est lié à leur utilisation fréquente dans certaines disciplines scientifiques comme l'économie, la technologie et surtout la biologie où les applications sont nombreuses (Voir par exemple Manitius [1976], Yorke [1971]).

Contrairement aux systèmes ordinaires, les systèmes différentiels linéaires à retards, de dimension n possèdent la propriété suivante : l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ accessibles à un instant t par les solutions de tels systèmes peut ne pas être l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier. Ce phénomène appelé dégénérescence, mis en évidence par Weiss [1967] et étendu au cas autonome par Popov [1972] et Zverkin [1973], a été largement étudié et a suscité l'utilisation de techniques intéressantes, notamment l'introduction d'un système différentiel ordinaire associé de façon biunivoque moyennant une condition de continuité (voir Popov [1972], Charrier et Haugazeau [1975]).

Ce travail est consacré à l'étude des systèmes différentiels guidables à retards, qui sont linéaires et autonomes.

* Une des idées directrices dans cette étude vient de la constatation suivante : pour les systèmes guidables linéaires ordinaires, un certain nombre de résultats intéressants (décomposition canonique des systèmes incontrôlables, entre autres) reposent sur la caractérisation algébrique du domaine de contrôlabilité. Or, dans le cas des systèmes guidables à retards considérés, les propriétés d'accessibilité dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, dont on dispose actuellement, sont formellement peu maniables et permettent difficilement l'obtention d'autres résultats, par exemple pour l'étude de la structure des systèmes non $\mathbb{R}^n$ -contrôlables.

Dans ce but, de façon analogue au cas des systèmes différentiels linéaires à retards, on associe aux systèmes guidables à retards, un système ordinaire guidable. Dans un premier temps on caractérise l'ensemble des états accessibles par les solutions de ce système associé et qui vérifient la condition de continuité - (Proposition I.2.3.). Sur cette formulation quoique très simple, un certain nombre de résultats peuvent être lus aisément, qui permettent notamment la caractérisation algébrique du domaine de $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité (Théorème I.2.9.). On en tire dans une seconde étape plusieurs résultats : en particulier un critère de $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité, dans une forme algébrique simple qui rend ainsi son utilisation aisée (Théorème II.1.3.). Une décomposition canonique des systèmes guidables à retards considérés, qui sont $\mathbb{R}^n$ -incontrôlables (question qui ne semble pas avoir été abordée jusqu'ici dans la littérature) est également rendue possible grâce aux propriétés d'accessibilité ainsi mises en évidence - (Théorème II.1.17.).

* Pour les systèmes guidables linéaires ordinaires, les problèmes d'observabilité et de réalisation sont complètement résolus; ce qui n'est pas le cas pour les systèmes guidables à retards considérés. Il est donc intéressant d'étudier la $\mathbb{R}^n$ -observabilité de ces derniers systèmes, et ceci particulièrement par une approche analogue à celle utilisée jusqu'à présent dans ce travail.

En effet, on obtient aisément un critère de $\mathbb{R}^n$ -observabilité (Théorème III.1.6.) qui permet la détermination algébrique d'un ensemble d'états $\mathbb{R}^n$ -inobservables. Afin de rendre possible l'extension des résultats obtenus pour la $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité à l'étude de la $\mathbb{R}^n$ -observabilité (III.2.8.), on étudie un système dual en lui associant un système ordinaire, de telle façon que la dualité se retrouve également au niveau des deux systèmes ordinaires ainsi introduits.

Par ailleurs, les résultats ainsi obtenus pour la $\mathbb{R}^n$ -observabilité et la $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité permettent d'aborder le problème de la réalisation, et en particulier la question de la minimalité d'une réalisation. Une condition nécessaire de minimalité est donnée (Théorème IV.2.6.). Comme il semble difficile de répondre complètement à cette question, on considère une classe particulière de réalisations, les réalisations scalaires, pour lesquelles on obtient un critère complet de minimalité. Dans le cas des réalisations non scalaires, un problème (parmi d'autres) reste donc ouvert : l'obtention d'une condition nécessaire et suffisante de minimalité.

Le plan de ce travail est le suivant :

Dans le chapitre 0 est présenté le système guidable à retards considéré ainsi que le système ordinaire qui lui est associé.

Au chapitre I on caractérise algébriquement les ensembles d'accessibilité dans $\mathbb{R}^n$.

Les résultats précédents sont exploités dans le chapitre II pour l'étude de la $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité, et notamment de la structure des systèmes guidables à retards considérés, qui sont $\mathbb{R}^n$ -incontrôlables. On effectue un rapprochement avec une forme de contrôlabilité purement algébrique, introduite par Morse [1976]. Une contrôlabilité particulière est également étudiée : la nulle $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité. Le souci de simplifier l'exposé de ce travail m'a incité à ne pas faire apparaître de retards dans le contrôle. Cette restric-

tion n'est pas fondamentale : les remarques I.2.12.(2) et II.2.7.(4) rendent possible l'extension des résultats précédents à des systèmes avec contrôles retardés.

Le chapitre III est consacré à l'étude de la $\mathbb{R}^n$ -observabilité. Des critères de $\mathbb{R}^n$ -observabilité sont donnés; on obtient d'autres propriétés (III.3.8.), par dualité, en étudiant un système différentiel dual.

Dans le chapitre IV on aborde le problème de la réalisation et en particulier la question de la minimalité d'une réalisation.-

CHAPITRE 0 - Préliminaires

Dans cette partie, nous introduirons le type d'équation différentielle qui sera considérée dans cette étude ainsi que les différentes hypothèses que nous y ajouterons.

Dans un premier temps sera donnée une représentation des solutions de l'équation différentielle à retards étudiée. Si nous ne rappelons pas l'existence et l'unicité de telles solutions, nous pouvons toutefois indiquer au lecteur que c'est un problème qui a été longuement abordé, dans de nombreux ouvrages ou articles consacrés aux équations différentielles à retards (Banks [1968], Charrier [1972], par exemple).

Le second paragraphe sera consacré à l'introduction d'un système particulier, dû à l'origine à Popov [1972], et mis en forme de façon intéressante par Charrier et Haugazeau [1975]; nous nommerons ce système, système ordinaire associé. Comme son nom l'indique, il aura pour but essentiel de simplifier le problème; nous donnerons en particulier une expression de la solution fondamentale qui, à l'origine, était d'une manipulation peu aisée.

0.1. Le système différentiel guidable avec retards. Notations

0.1.1. Le système qui fera l'objet de notre étude sera un système régi par une équation différentielle linéaire autonome à plusieurs retards

$$(1) \quad x(t) = \sum_{i=0}^m B_i x(t-i) + Cu(t) \quad \text{pour } t \in [0, T]$$

$$(3) \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ x(t) = \varphi(t) \text{ pour } t \in [-m, 0[\end{cases}$$

Nous y ajouterons la relation de sortie suivante :

$$(4) \quad y(t) = \sum_{i=0}^m H_i x(t-i)$$

Nous noterons (2) le système différentiel (1) avec un contrôle u nul. Un système de ce type sera dit système libre.

Dans ce qui précède :

- $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ sont respectivement des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^r$
- B_i ($i=0, \dots, m$), H_i ($i=0, \dots, m$) et C sont des matrices réelles constantes respectivement d'ordre n , de type $(p \times n)$ et $(n \times r)$.
- $u(\cdot)$ est un élément de l'espace des fonctions de carré intégrable L^2 sur un intervalle fini à valeurs dans $\mathbb{R}^r$. Une telle fonction sera dite contrôle admissible.
- x_0 est dans $\mathbb{R}^n$ et φ appartient à l'espace $L^1((-m, 0); \mathbb{R}^n)$ des fonctions intégrables sur $(-m, 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Le couple (x_0, φ) représente la condition initiale du système.

O.1.2. Notations

- (i) Si V est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ et A un opérateur linéaire de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, alors :

$$AV = \left\{ y \in \mathbb{R}^n / \exists x \in V, y = Ax \right\}$$

$$\mathcal{R} = \text{Im}A = A\mathbb{R}^n$$

- (ii) Si $V_1, V_2, \dots, V_p$ est une suite finie de sous-espaces de $\mathbb{R}^n$, alors

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / \exists x_i \in V_i (1 \leq i \leq p), x = \sum_{i=1}^p x_i \right\}$$

est noté $\sum_{i=1}^p V_i$

- (iii) Soient deux opérateurs linéaires A et B de $\mathbb{R}^n$ à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^r$, l'espace vectoriel

$$\mathcal{B} + A\mathcal{B} + \dots + A^{n-1}\mathcal{B} \quad \text{où } \mathcal{B} = \text{Im}B$$

sera noté $\langle A | \mathcal{B} \rangle$

O.1.3. Théorème

Avec les hypothèses données en O.1.1., et pour tout contrôle admissible $u(t)$, $t \in [0, T]$, il existe une solution unique du système (1), (3), où la solution est intégrable sur $(-m, 0)$ et absolument continue sur l'intervalle $[0, T]$.

D'autre part, la solution à l'instant T est donnée par :

$$(5) \quad x(T, x_0, \varphi, u) = x(T, x_0, \varphi) + \int_0^T X(T-s) Cu(s) \, ds$$

où

$$(6) \quad x(T, x_0, \varphi) = X(T)x_0 + \sum_{i=1}^m \int_0^i X(T-s) B_i \varphi(s-i) \, ds$$

et où $X(t)$ est une solution matricielle unique de dimension $n \times n$, définie sur l'intervalle $[-m, T]$ par la relation :

$$(7) \quad \begin{cases} \dot{X}(t) = \sum_{i=0}^m B_i X(t-i) & \text{pour } t \in [0, T] \\ X(0) = I & \text{(matrice identité d'ordre } n) \\ X(t) = 0 & \text{pour } t \in [-m, 0) \end{cases}$$

La démonstration de l'existence de la solution du système (1), (3) peut se trouver dans de nombreux articles, entre autres Charrier [1972]. Quant à la forme de cette solution, le lecteur pourra se rapporter à l'article de Banks [1969], qui a introduit notamment le système aux variations (7).

La fonction matricielle $X(t)$, solution de ce système est appelée matrice fondamentale de l'équation différentielle (1).

Note. Si nous notons la solution du système différentiel (1), (3), $x(t, x_0, \varphi, u)$ nous utiliserons parfois pour simplifier certains calculs, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté la notation abrégée $x(t)$.

Donnons à présent quelques propriétés particulières aux équations différentielles à retards.

0.1.4. Propriétés

1) La matrice fondamentale, définie ci-dessus, joue un rôle important dans l'étude des équations différentielles à retards, et a, contrairement au cas des équations différentielles ordinaires, la propriété de ne pas toujours être inversible, propriété étroitement liée avec le phénomène de dégénérescence que nous aborderons plus loin. Notons que, sur l'intervalle $[0, 1]$, cette matrice est donnée par

$$X(t) = e^{At}$$

et est donc non singulière sur cet intervalle.

2) La matrice fondamentale $X(t)$ est analytique par morceaux.

3) L'équation caractéristique d'une équation différentielle de la forme (2) est donnée par

$$(8) \quad \det \Delta(\lambda) = 0$$

$$\text{où} \quad \Delta(\lambda) = \lambda I - B_0 - e^{-\lambda} B_1 - \dots - e^{-m\lambda} B_m$$

Notons que la matrice caractéristique $\Delta(\lambda)$ peut être obtenue en prenant l'inverse de la transformée de Laplace de la solution fondamentale, ce qui s'écrit :

$$\Delta(\lambda) = [\tilde{X}(\lambda)]^{-1}$$

$$\text{où} \quad \tilde{X}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} X(t) dt$$

Rappelons, en outre, que l'équation caractéristique (8) admet une infinité dénombrable de solutions; tous les résultats pour les équations différentielles ordinaires linéaires et autonomes, faisant intervenir des propriétés sur les valeurs propres ne sont donc pas directement applicables au cas d'équations du type (2).

0.1.5. Remarques

1) Si nous avons défini l'état du système (1), (3) comme étant un élément de $\mathbb{R}^n$, remarquons qu'un certain nombre d'auteurs ont considéré un espace fonctionnel, par exemple, l'espace $AC([-m, 0]; \mathbb{R}^n)$ des fonctions absolument continues sur $[-m, 0]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Notons, en effet, que, pour que la solution $x(t, x_0, \varphi, u)$ soit identiquement nulle $\forall t \geq T$, il ne suffit pas qu'elle s'annule à l'instant T , mais il faut qu'elle le reste sur l'intervalle $[T, T+m]$. Aussi est-il naturel d'introduire, comme l'a fait Hale [1971], un état défini par

$$X_t(\theta) = X(t + \theta) \quad \theta \in [-m, 0]$$

et, à partir de cette donnée, de se placer dans un cadre fonctionnel. Notre travail se limitera cependant à une étude qu'on pourrait nommer ponctuelle ou instantanée dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

2) Par ailleurs, bien que l'aspect de la solution du système (1), (3) soit relativement proche d'une solution d'un système différentiel ordinaire, des difficultés naissent de la complexité de la matrice fondamentale $X(t)$. La manipulation des solutions étant peu aisée, il est souvent difficile de pouvoir en tirer des critères algébriques simples. C'est dans cet esprit que Popov [1972], et d'autres après lui, en particulier Charrier et Haugazeau [1975], qui en ont donné une mise en forme très efficace, ont introduit un système différentiel ordinaire associé au système différentiel à retards, que nous allons présenter dans le paragraphe suivant.

O.2. Le système différentiel ordinaire associé

O.2.1. L'utilisation par ces auteurs de ce type de système associé s'est limité jusqu'ici à l'étude des systèmes non guidables; nous présenterons ici une extension des transformations précédentes, au cas d'un système de la forme (1), (3).

Transformons donc le système initial de la façon suivante :

Soit un entier $k \geq m$, et $x(\cdot)$ une solution du système (1), (3)

Définissons le changement de fonction :

$$(9a) \quad y_i(t) = x(t+i-1) \quad \text{pour } t \in [0,1] \quad i = 1, 2, \dots, k$$

et notons $Y_k(t)$ le vecteur de $\mathbb{R}^{nk}$:

$$Y_k(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{bmatrix}$$

En outre, si nous introduisons les vecteurs $\phi(t)$ et $V(t)$ suivants, appartenant respectivement à $\mathbb{R}^{nm}$ et $\mathbb{R}^{rk}$:

$$(9b) \quad \phi(t) = \begin{bmatrix} \phi(t-1) \\ \vdots \\ \phi(t-m) \end{bmatrix}$$

$$(9c) \quad V(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ \vdots \\ u(t+k-1) \end{bmatrix}$$

où $\phi \in L^1((0,1); \mathbb{R}^{nm})$ et $V \in L^2((0,1); \mathbb{R}^{rk})$

il est immédiat que $Y_k(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(10) \quad \dot{Y}_k(t) = A_k Y_k(t) + C_k \Phi(t) + D_k V(t)$$

où les matrices A_k ($n_k \times n_k$), C_k ($n_k \times nm$) et D_k ($n_k \times rk$),
écrites par blocs de dimension n , sont définies par :

$$A_k = \begin{bmatrix} B_0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & B_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & B_m \\ O & & & & \\ & \ddots & & & \\ O & & O & B_m & B_1 & B_0 \end{bmatrix}$$

$$D_k = \begin{bmatrix} c & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & c \end{bmatrix}$$

En outre, étant donnée la continuité des solutions d'une équation différentielle à retards, nous avons encore :

$$y_i(0) = y_{i-1}(1) \quad i = 2, 3, \dots, k$$

Cette condition peut encore s'exprimer en fonction du système (10) par la relation suivante :

$$(11) \quad Y_k(0) - J_k Y_k(1) = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

où J_k est la matrice carrée d'ordre n_k :

$$J_k = \begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ I & \ddots & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

Réciproquement, soit $y_k(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{bmatrix}$ une solution du système différentiel (10)

satisfaisant la condition (11). Les fonctions $\phi(t)$ et $v(t)$ appartiennent respectivement à $L^1((0,1); \mathbb{R}^{nm})$ et $L^2((0,1); \mathbb{R}^{rk})$ et seront notées :

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \vdots \\ \phi_m(t) \end{bmatrix} \quad v(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_k(t) \end{bmatrix}$$

Introduisons les fonctions $\varphi(t)$ et $u(t)$ suivantes, appartenant respectivement à $L^1((-m,0); \mathbb{R}^n)$ et $L^2((0,k); \mathbb{R}^r)$

$$(12b) \quad \varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t+1) & \text{pour } t \in [-1, 0[\\ \varphi_2(t+2) & \text{pour } t \in [-2, -1[\\ \vdots & \vdots \\ \varphi_m(t+m) & \text{pour } t \in [-m, -m+1[\end{cases}$$

$$(12c) \quad u(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{pour } t \in [0,1[\\ u_2(t-1) & \text{pour } t \in [1,2[\\ \vdots & \vdots \\ u_k(t-k+1) & \text{pour } t \in [k-1,k] \end{cases}$$

Alors, si nous définissons $x(t)$ telle que :

$$(12a) \quad x(t) = \begin{cases} y_1(t) & \text{pour } t \in [0,1[\\ y_2(t-1) & \text{pour } t \in [1,2[\\ \vdots & \vdots \\ y_k(t-k+1) & \text{pour } t \in [k-1,k] \end{cases}$$

il vient que la fonction $x(t)$ est solution du système différentiel à retards (1), (3), où la fonction initiale $\varphi(t)$ et le contrôle admissible $u(t)$ sont respectivement définis par les relations (12b) et (12c).

A partir de ces quelques constatations, il est possible de formuler la proposition suivante :

0.2.2. Proposition : Soit k un entier non nul.

(i) A toute solution $x(t)$, $t \in [0, k]$, du système différentiel défini par (1), (3) correspond une solution

$$Y_k(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{bmatrix} \quad t \in [0, 1]$$

du système (10), telle que y_i vérifie les relations (9a), $v_i=1, \dots, k$ et les fonctions $\phi(t)$ et $V(t)$ soient données respectivement par (9b) et (9c). En outre, la fonction $Y_k(t)$ vérifie la condition aux frontières (11).

- (ii) Réciproquement, étant données deux fonctions $\phi(t)$ et $V(t)$ appartenant respectivement à $L^1((0,1); \mathbb{R}^{nm})$ et $L^2((0,1); \mathbb{R}^{rk})$, soit une solution

$$Y_k(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_k(t) \end{bmatrix}$$

du système différentiel (10), satisfaisant la condition (11). La fonction $x(t)$, $t \in [0,k]$, définie à partir de la relation (12a), est alors solution du système différentiel à retards (1), (3) où la fonction initiale $\phi(t)$ et le contrôle admissible $u(t)$ sont respectivement donnés par les relations (12b) et (12c).

0.2.3. Remarques :

- 1) Si $k < m$, le système ordinaire associé est encore défini : la matrice A_k , par exemple, ne comportera plus que des matrices B_i , pour $i = 0, \dots, k$.
- 2) Dans le cas de systèmes non guidables ($u=0$), nous retrouvons le système ordinaire associé, mis en forme par Charrier et Haugazeau :

$$(13) \quad \dot{Y}_k(t) = A_k Y_k(t) + C_k \phi(t)$$

L'introduction de ce système nous permet de voir que la fonction initiale interviendra comme un contrôle ou une perturbation dans le système initial, suivant que l'on peut agir sur elle ou non. Il conviendra donc d'étudier le système (13) comme un système différentiel guidable de contrôle $\phi(t)$, afin de caractériser, par projection sur une des composantes de $Y_k(t)$, l'ensemble des états accessibles à partir de x_0 du système (2), (3).

0.2.4. Expression des solutions du système différentiel à retards.

Un système différentiel, dont la forme est donnée par (10), étant bien connu, ses solutions auront pour expression, pour $t \in [0,1]$

$$(14) \quad Y_k(t) = e^{A_k t} Y_k(0) + \int_0^t e^{(t-s)A_k} [C_k \phi(s) + D_k V(s)] ds$$

à quoi il faudra ajouter la condition (11), pour pouvoir établir, d'après la proposition 0.2.2., une correspondance avec le système différentiel à retards.

Par projection sur la $k^{\text{ième}}$ composante, nous en déduisons immédiatement une caractérisation différente de la solution $x(T)$ du système (1), (3) pour $T \in [k-1, k]$.

Si nous notons E_k la matrice de dimension $n \times nk$ suivante

$E_k = [0 \dots 0 I]$ avec I la matrice identité ($n \times n$) il vient que

$$(15) \quad x(T, x_0, \phi, u) = E_k Y_k(T-k+1) \text{ pour } T \in [k-1, k]$$

où $Y_k(t)$ vérifie la relation (14) et la condition aux frontières (11).

Bien que limitée à un intervalle fini, cette expression va nous permettre, outre la simplification dans un certain nombre de calculs, de donner, dans la proposition qui suit, une caractérisation personnelle simple de la matrice fondamentale $X(t)$, sur un intervalle fini du même type.

0.2.5. Une expression de la matrice fondamentale.

Proposition : La solution fondamentale $X(t)$ de l'équation différentielle (1) a pour expression sur l'intervalle $[k-1, k]$

$$(16) \quad X(t) = E_k e^{A_k(t-k+1)} G_k F_k$$

où G_k , I_k et F_k sont les matrices respectivement de dimension $(nk \times nk)$, $(nk \times nk)$ et $(nk \times n)$:

$$G_k = [I_k - J_k e^{A_k}]^{-1} \quad I_k = \begin{bmatrix} I & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & I \end{bmatrix} \quad F_k = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Démonstration

Notons que les deux conditions initiales x_0 et φ , et le contrôle u sont des termes indépendants entre eux. Comme, par ailleurs, la solution fondamentale $X(t)$ ne dépend pas de ces quantités, il est possible de supposer la fonction initiale φ et le contrôle u nuls.

Pour un système (1) possédant une fonction initiale et un contrôle nuls, nous avons deux expressions de la solution, pour $T \in [k-1, k]$: d'une part :

$$x(T, x_0, 0, 0) = X(T) x_0 \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad T \in [k-1, k]$$

d'autre part, en utilisant la relation (15) et la condition (11), elle devra vérifier :

$$\begin{cases} x(T, x_0, 0, 0) = E_k e^{A_k(T-k+1)} Y_k(0) \\ Y_k(0) - J_k Y_k(1) = F_k x_0 \end{cases}$$

Comme la fonction initiale φ est nulle, nous avons :

$$Y_k(1) = e^{A_k} Y_k(0)$$

et la condition (11) pourra donc s'exprimer :

$$[I_k - J_k e^{A_k}] Y_k(0) = F_k x_0$$

La matrice e^{A_k} étant une matrice triangulaire inférieure, il est possible de voir que la matrice $[I_k - J_k e^{A_k}]$ est triangulaire inférieure avec k matrices identités d'ordre n sur la diagonale. Cette matrice est donc inversible et nous noterons G_k son inverse. On en déduit immédiatement, en égalant les deux formes obtenues pour $x(T, x_0, 0, 0)$ que :

$$X(T) x_0 = E_k e^{A_k(T-k+1)} G_k F_k x_0 \quad T \in [k-1, k]$$

et ceci quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. D'où le résultat.

0.2.6. Propriétés relatives à la matrice G_k

Il apparaît dans cette expression de la solution fondamentale la

matrice $G_k = [I_k - J_k e^{A_k}]^{-1}$, dont il convient, étant donnée sa rencontre fréquente dans notre travail, de donner ici quelques propriétés. Afin de faciliter la lecture de la suite de notre travail, nous mettrons également en évidence quelques particularités de la matrice A_k .

1) Dans un premier temps, remarquons que la matrice A_k s'exprime encore de deux façons différentes :

$$A_k = \left[\begin{array}{c|cccccc} B_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline B_1 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ B_m & & A_{k-1} & & & \\ \hline 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccccc|c} & & & & & & 0 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & B_m & \dots & B_1 & \vdots \\ \hline & & & & & & 0 \\ & & & & & & B_0 \end{array} \right]$$

2) Considérons $(k-1)$ matrices carrées d'ordre n , que l'on notera $\tilde{T}_i$, $i=1, \dots, k-1$. La première propriété ci-dessus nous permet d'établir les relations suivantes :

$$(17a) \quad \left[\begin{array}{c} \tilde{T}_1 \dots \tilde{T}_{k-1} \end{array} \right] A_k = \left[\begin{array}{c} (\tilde{T}_1 \dots \tilde{T}_{k-1}) A_{k-1} \end{array} \right] \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}$$

où 0 représente la matrice carrée nulle d'ordre n .

$$(18a) \quad A_k \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ \tilde{T}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{T}_{k-1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ \tilde{T}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{T}_{k-1} \end{array} \right] A_{k-1}$$

Des deux relations précédentes, on déduit que :

$$(17b) \quad [\tilde{T}_1 \dots \tilde{T}_{k-1} \ 0] e^{A_k} = [(\tilde{T}_1 \dots \tilde{T}_{k-1}) e^{A_{k-1}} \ 0]$$

$$(13b) \quad e^{A_k} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{T}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{T}_{k-1} \end{bmatrix} = e^{A_{k-1}} \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{T}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{T}_{k-1} \end{bmatrix}$$

Une première conséquence est que J_k et e^{A_k} commutent.

3) Quant à la matrice G_k , outre le fait que c'est une matrice triangulaire inversible, d'ordre nk , signalons qu'elle commute avec A_k et donc avec e^{A_k} . En effet, comme A_k commute avec e^{A_k} et avec J_k , la relation suivante peut être établie :

$$(I_k - J_k e^{A_k}) A_k = A_k (I_k - J_k e^{A_k})$$

et par suite, la commutativité des matrices G_k et A_k .

4) La matrice $E_k G_k$ est une matrice $[S_1 \dots S_k]$ où S_i , $i=1, \dots, k$ sont des blocs carrés d'ordre n , telle que :

$$(19) \quad \begin{aligned} [S_1 \dots S_{k-1}] &= [(S_2 \dots S_k) e^{A_{k-1}}] \\ S_k &= I \end{aligned}$$

Démonstration : L'écriture

$$E_k [I_k - J_k e^{A_k}]^{-1} = [s_1 \dots s_k]$$

est équivalente à :

$$[0 \dots 0 \ I] = [s_1 \dots s_k] - [s_1 \dots s_k] J_k e^{A_k}$$

Or

$$[s_1 \dots s_k] J_k = [s_2 \dots s_k \ 0]$$

En utilisant cette dernière égalité, la relation (17b) nous permet d'écrire :

$$[0 \dots 0 \ I] = [s_1 \dots s_k] - [(s_2 \dots s_k) e^{A_{k-1}} \ 0]$$

Pour identification des deux membres, nous obtenons directement les relations (19).

CHAPITRE I - Ensembles d'états accessibles ----- dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à l'accessibilité des systèmes différentiels à retards libres et contrôlés dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Nous serons donc amenés à présenter brièvement dans un premier paragraphe le phénomène de dégénérescence.

Puis dans un second paragraphe, nous donnerons une caractérisation personnelle de l'ensemble des états accessibles pour le système ordinaire associé (10), muni de la condition aux frontières (11) (Proposition I.2.3.) Cette formulation, bien que simple, n'est cependant pas négligeable, puisque la lecture d'un certain nombre de résultats y est aisément possible. C'est ainsi que nous en déduisons une formulation nouvelle de certains ensembles d'accessibilité (Théorème I.2.9.) pour le système différentiel à retards (1), (3), qui nous permettra par la suite d'aborder différemment quelques questions relatives à ces systèmes. Nous donnerons en outre une traduction algébrique d'un résultat intéressant de Charrier et Haugazeau [1975, Proposition 2].

I.1. Dégénérescence -----

L'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$, accessibles au temps t par les solutions d'une équation différentielle linéaire ordinaire est l'espace tout entier. Après avoir montré que cette propriété n'était plus valable pour tous les systèmes différentiels non autonomes à retards, L. Weiss [1967] conjecture qu'elle reste cependant vraie pour les systèmes autonomes. V.M. Popov [1972] et A.M. Zverkin [1973] en présentant indépendamment des contre-exemples, ont donc apporté une réponse négative à l'affirmation de L. Weiss. Rappelons ici l'exemple donné par Popov :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 2y(t) \\ \dot{y}(t) &= -z(t) + x(t-1) \\ \dot{z}(t) &= 2y(t-1)\end{aligned}$$

On peut vérifier aisément que pour $t \geq 2$, toutes les solutions de ce système sont contenues dans un plan de $\mathbb{R}^3$.

Ainsi nous pouvons définir la notion de systèmes différentiels autonomes dégénérés.

I.1.1. Définition

Etant donné un vecteur q non nul de $\mathbb{R}^n$, l'équation différentielle à retards (2) est dégénérée au temps t_1 , pour le vecteur q si et seulement si, pour toute condition initiale (3), la solution correspondante $x(t, x_0, \varphi)$ vérifie :

$${}^t_q x(t_1, x_0, \varphi) = 0$$

Quand nous parlerons de façon générale de système dégénéré sans spécifier le vecteur q ou le temps t_1 , nous induirons par là l'existence d'un tel vecteur ou d'un tel temps.

I.1.2. Rappelons quelques-unes des propriétés obtenues sur les systèmes dégénérés :

- 1) Si le système différentiel considéré est dégénéré pour le vecteur q , à l'instant $t=t_1$, il est dégénéré à tout instant $t \geq t_1$
- 2) Si le système différentiel (2) est dégénéré à $t=t_1$ pour le vecteur q , la matrice fondamentale $X(t)$ est orthogonale à q , quel que soit $t \geq t_1$, et est donc singulière.
- 3) Si le système différentiel (2) est dégénéré, le premier instant de dégénérescence est un entier k appartenant à $]m', \infty)$, où m' est le plus petit entier tel que $B_{m'} \neq 0$.

Cette liste de propriétés n'est évidemment pas exhaustive; pour les résultats cités ci-dessus, nous renvoyons plus particulièrement le lecteur à l'article de Charrier et Haugazeau [1975], ainsi qu'au travail de Charrier [1972]. Rappelons qu'il existe de nombreuses conditions nécessaires et suffisantes de dégénérescence; mis à part les articles déjà cités ci-dessus nous pouvons encore indiquer les articles de F. Kappel [1976, 1977].

Donnons encore un résultat intéressant de Charrier et Haugazeau [1975], que nous exprimerons algébriquement plus loin.

I.1.3. Proposition

Le système (2) est dégénéré pour le vecteur q au temps $t=k$ si et seulement si toute solution correspondant à la condition initiale $(x_0, 0)$ satisfait :

$${}^t_q x(t) = 0 \quad t \in [k, k+m]$$

I.2. Ensembles d'accessibilité du système différentiel à retards

I.2.1. Nous étudierons dans ce paragraphe l'accessibilité d'un système différentiel guidable à retards (1), (3). Toutefois, d'après ce qui a été vu précédemment sur la dégénérescence, nous pouvons définir des ensembles d'états accessibles pour des systèmes non guidables.

Introduisons donc, en agissant indépendamment sur certaines "entrées" possibles du système, trois types d'ensembles d'accessibilité du système différentiel à retards à un instant T :

$$\mathcal{X}(T) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n / y = x(T, x_0, 0, 0), x_0 \in \mathbb{R}^n \right\}$$

$$\mathcal{P}(T) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n / y = x(T, x_0, \varphi, 0), x_0 \in \mathbb{R}^n, \varphi \in L^1((-m, 0); \mathbb{R}^n) \right\}$$

$$\mathcal{R}_0(T) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n / y = x(T, 0, 0, u), u \in L^2((0, T); \mathbb{R}^r) \right\}$$

Nous noterons $\mathcal{P}_0(T)$ l'ensemble $\mathcal{P}(T)$ où nous supposons x_0 nul.

Nous considérons encore l'ensemble $\tilde{\mathcal{X}}(i) = \bigcup_{1 \leq t < i+1} \mathcal{X}(t)$, où i est un entier.

I.2.2. Propriétés

1) Il est clair que les ensembles $\mathcal{X}(T)$, $\mathcal{P}(T)$ et $\mathcal{R}_0(T)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

2) Pour $T_2 > T_1$ nous avons l'inclusion suivante

$$\mathcal{P}(T_2) \subset \mathcal{P}(T_1)$$

En effet, si $x(t)$ est une solution du système différentiel (2), (3), définie sur $[-m, T_2]$, la fonction $z(t) = x(t+T_2-T_1)$ définie sur l'intervalle $[-m, T_1]$, avec $T_1 < T_2$, sera solution de cette même équation différentielle.

3) En utilisant un résultat de Banks, Jacobs et Langenhop [1975, Corollaire 5.1], nous voyons que l'ensemble d'accessibilité $\mathcal{R}_0(t)$ croît avec t et reste constant pour $t \geq n$, où n est la dimension du système (1).

Notre but est de donner une expression algébrique des ensembles que nous avons introduits; pour cela, dans un premier temps, considérons le système différentiel ordinaire associé (10) muni de la condition aux frontières (11).

Notons $\mathcal{M}_k(1, o, \Phi, V)$ l'ensemble d'accessibilité de ce système, à $t=1$, à partir de $x_0 = o$, et où Φ et V décrivent respectivement les espaces $L^1((o, 1); \mathbb{R}^{n \times m})$ et $L^2((o, 1); \mathbb{R}^{r \times k})$. Donnons une formulation explicite personnelle de cet ensemble.

I.2.3. Proposition

(i) L'ensemble $\mathcal{M}_k(1, o, \Phi, o)$ des états accessibles du système différentiel (10), (11), à $t=1$, à partir de $x_0 = o$, et où nous supposons le contrôle V nul, est donné par :

$$\mathcal{M}_k(1, o, \Phi, o) = G_k \langle A_k | \mathcal{C}_k \rangle$$

(ii) L'ensemble $\mathcal{M}_k(1, o, o, V)$ des états accessibles du système différentiel (10), (11), à $t=1$, à partir de $x_0 = o$ et $\Phi = o$, est déterminé par

$$\mathcal{M}_k(1, o, o, V) = G_k \langle A_k | \mathcal{D}_k \rangle$$

Démonstration

Nous nous contenterons de donner la démonstration de l'une de ces relations, par exemple (i), la seconde s'effectuant de façon identique. Une solution du système différentiel ordinaire (13) vérifie (cf. Wonham [1974]) :

$$(20) \quad Y_k(t) = e^{A_k t} Y_k(0) + Z_k(t)$$

où $Z_k(t)$ appartient à l'espace vectoriel $\langle A_k | \mathcal{C}_k \rangle =$

$$\mathcal{C}_k + A_k \mathcal{C}_k \dots + A_k^{nk-1} \mathcal{C}_k$$

Par ailleurs, comme $x_0 = 0$, la condition aux frontières (11) s'écrit :

$$Y_k(0) = J_k Y_k(1)$$

La solution (20), vérifiant la condition aux frontières ci-dessus, s'exprimera donc pour $t=1$:

$$[I_k - e^{A_k} J_k] Y_k(1) = Z_k(1)$$

et donc

$$Y_k(1) = G_k Z_k(1)$$

Comme $Z_k(1)$ décrit l'espace vectoriel $\langle A_k | \mathcal{C}_k \rangle$, il est clair que

$$\mathcal{M}_k(1, 0, \Phi, 0) = G_k \langle A_k | \mathcal{C}_k \rangle$$

I.2.4. Remarque

Cette caractérisation algébrique, obtenue de façon simple, n'en est pas moins très intéressante. Un certain nombre de résultats peuvent y être lus aisément. N'oublions pas, en effet, que les ensembles $\mathcal{P}_0(k)$ et $\mathcal{R}_0(k)$ sont donnés par :

$$\mathcal{P}_0(k) = E_k \mathcal{M}_k(1, 0, \Phi, 0)$$

$$\mathcal{R}_0(k) = E_k \mathcal{M}_k(1, 0, 0, V)$$

En outre, si nous notons L_j la matrice réelle $(n \times n_k)$, qui correspond à la projection sur la $j^{\text{ème}}$ composante :

$$L_j = [0 \dots 0 \text{ I } \dots 0] = [E_j \ 0 \dots 0] \quad 1 \leq j \leq k$$

nous avons également les relations :

$$\mathcal{P}_o(j) = L_j \mathcal{M}_k(1, o, \emptyset, o)$$

$$\mathcal{R}_o(j) = L_j \mathcal{M}_k(1, o, o, v)$$

La proposition I.2.3., ci-dessus, nous permet d'explicitier directement tous ces résultats, dans les lemmes suivants :

I.2.5. Lemme : Soit k un entier non nul. Nous avons les assertions suivantes :

$$(i) \quad \mathcal{P}_o(k) = E_k G_k \langle A_k | \mathcal{C}_A \rangle$$

$$(ii) \quad \mathcal{R}_o(k) = E_k G_k \langle A_k | \mathcal{D}_A \rangle$$

I.2.6. Lemme : Soit k un entier non nul et j un entier tel que $1 \leq j \leq k$. Les relations suivantes sont vérifiées :

$$(i) \quad \mathcal{P}_o(j) = L_j G_k \langle A_k | \mathcal{C}_A \rangle$$

$$(ii) \quad \mathcal{R}_o(j) = L_j G_k \langle A_k | \mathcal{D}_A \rangle$$

Note : Si nous essayons de vérifier directement les résultats du lemme I.2.6., algébriquement étonnants, nous constatons, en fait, qu'ils sont dûs aux particularités des matrices G_k et A_k ; en effet il est possible de voir, par exemple, que :

$$[0 \dots 0 \text{ I } 0] G_k A_k^i D_k = [(E_{k-1} G_{k-1} A_{k-1}^i D_{k-1}) \ 0]$$

I.2.7. Lemme : Soit k un entier non nul.

L'ensemble $\mathcal{P}(k)$ est caractérisé par :

$$\mathcal{P}(k) = E_k G_k e^{A_k} \mathcal{F}_A + E_k G_k \langle A_k | \mathcal{C}_A \rangle$$

Démonstration

Il est clair d'après la forme (6) des solutions, qu'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ appartient à $\mathcal{P}(T)$ si et seulement si $x - X(T)x_0$ appartient à $\mathcal{P}_0(T)$.

Par ailleurs, pour $T=k$, nous voyons que l'ensemble

$$\left\{ z \in \mathbb{R}^n / z = X(k)x_0, x_0 \in \mathbb{R}^n \right\} = E_k G_k e^{A_k} \mathcal{F}_k$$

Ces remarques ajoutées au lemme I.2.5.(i) nous donnent donc l'expression de $\mathcal{P}(k)$ annoncée.

La proposition I.2.3., que nous avons établie plus haut, nous permet également d'aborder un problème soulevé par Charrier [1972] : Soit k un entier quelconque donné et soient x_j , $j=0,1,\dots,k$, $(k+1)$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Existe-t-il une solution $x(\cdot)$ du système (1) sur $[0, +\infty)$, qui vérifie les conditions :

$$x(j) = x_j \quad j = 0, 1, \dots, k$$

Charrier et Haugazeau [1975] ont répondu à cette question en donnant une condition nécessaire et suffisante d'existence, pour des systèmes de la forme (2). En nous restreignant au cas où $x_0 = 0$, nous nous proposons de déterminer l'ensemble des vecteurs

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

pour lesquels le problème admet toujours une solution. Comme dans notre étude, nous considérons deux types d'ensembles d'accessibilité $\mathcal{P}(T)$ et $\mathcal{R}_0(T)$, nous distinguerons également, pour ce problème, deux formes de solutions. Le cas général, que nous nous étions proposé d'examiner, s'en déduit immédiatement.

I.2.8. Lemme

- (i) Le système (1), (3) admet au moins une solution, issue de $(x_0, \varphi) = (0, 0)$ vérifiant :

$$(21) \quad x(j) = x_j \quad j = 1, \dots, k$$

pour une famille de k vecteurs x_j donnés si et seulement si le vecteur de $\mathbb{R}^{n \cdot k}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

appartient à l'ensemble $G_k < A_k | \mathcal{D}_k >$

(ii) Le système (2), (3) admet au moins une solution, issue de $x_0 = 0$ vérifiant les relations (21), pour une famille de k vecteurs x_j donnés si et seulement si le vecteur de $\mathbb{R}^{n \cdot k}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

appartient à l'ensemble $G_k < A_k | \mathcal{C}_k >$

Démonstration

Nous ne prouverons qu'un de ces résultats, par exemple (ii), le premier étant obtenu de façon identique.

D'après la relation biunivoque donnée en 0.2.2., une solution du système (2), (3) issue de $x_0 = 0$, vérifie les relations (21) si et seulement s'il existe une solution $Y_k(t)$ du système ordinaire (13) telle que :

$$(22) \quad Y_k(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{bmatrix} \quad Y_k(1) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

Or l'existence d'une solution $Y_k(t)$ du système (13), vérifiant la double condition (22) implique que le vecteur

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

appartient à $\mathcal{M}_k(1,0,\emptyset,0)$ autrement dit, d'après I.2.3.(i), à l'ensemble $G_k < A_k | \mathcal{C}_k >$

Réciproquement si un vecteur

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \text{ de } \mathbb{R}^{n \times k}$$

appartient à $G_k < A_k | \mathcal{C}_k >$, la proposition I.2.3.(i) nous dit que c'est un élément de l'ensemble d'accessibilité $\mathcal{M}_k(1,0,\emptyset,0)$ du système (13), (11). Il existe donc une solution $Y_k(t)$ du système, définie pour $t \in [0,1]$, vérifiant :

$$Y_k(1) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \end{bmatrix} \quad Y_k(0) = J_k Y_k(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{k-1} \end{bmatrix}$$

et par conséquent une solution du système (2), (3), telle que $x_0 = 0$ et $x(j) = x_j \quad j = 1, \dots, k$.

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié les ensembles d'états accessibles qu'à des instants t entiers. Explicitons maintenant les deux ensembles $\mathcal{P}(T)$ et $\mathcal{R}_0(T)$, où T est réel, ainsi que l'ensemble $\tilde{\mathcal{X}}(k)$.

I.2.9. Théorème

- 1) Soit k un entier non nul. L'ensemble $\tilde{\mathcal{X}}(k-1)$ est déterminé par la relation :

$$\tilde{\mathcal{X}}(k-1) = E_k G_k < A_k | \mathcal{F}_k >$$

- 2) Soit k un entier quelconque. Pour $T \in [k, k+1)$, nous avons la caractérisation suivante :

$$\mathcal{P}(T) = E_k G_k e^{A_k(T-k)} \mathcal{F}_k + E_k G_k < A_k | \mathcal{C}_k >$$

3) Soit k un entier non nul. Pour $T \in (k-1, k]$, l'ensemble d'accessibilité $\mathcal{R}_0(T)$ est donné par :

$$\mathcal{R}_0(T) = E_k G_k < A_k | \mathcal{D}_k >$$

Démonstration

1) Pour prouver la première égalité, nous montrerons que :

$$[\tilde{\mathcal{X}}(k-1)]^\perp = [E_k G_k < A_k | \mathcal{F}_k >]^\perp$$

Soit q un élément de $[\tilde{\mathcal{X}}(k-1)]^\perp$. Pour tout élément $x(T)$ de $\mathcal{X}(T)$, on a :

$${}^t_q x(T) = 0 \quad \forall T \in [k-1, k)$$

D'après la forme (16) de la solution fondamentale $X(T)$, cette égalité se traduit encore par :

$${}^t_q E_k G_k e^{A_k(T-k+1)} F_k x_0 = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ et } \forall T \in [k-1, k)$$

Cette fonction étant analytique sur l'intervalle $[k-1, k)$ et identiquement nulle sur cet intervalle, il s'ensuit que ses dérivées s'annulent pour $T = k-1$. Nous obtenons donc :

$${}^t_q E_k G_k A_k^{i-1} F_k = 0 \quad i = 1, 2, \dots, nk.$$

Par conséquent, q appartient à $[E_k G_k < A_k | \mathcal{F}_k >]^\perp$

Réciproquement, soit un élément q de $[E_k G_k < A_k | \mathcal{F}_k >]^\perp$. Nous aurons

$${}^t_q E_k G_k A_k^{i-1} F_k = 0 \quad i = 1, 2, \dots, nk.$$

Le théorème de Cayley-Hamilton nous permet de conclure que :

$${}^t_q E_k G_k e^{A_k(T-k+1)} F_k = 0 \quad \forall T \in [k-1, k)$$

et donc q appartient à $[\tilde{\mathcal{X}}(k-1)]^\perp$

2) De même, pour la seconde relation, nous démontrerons que :

$$[\mathcal{P}(T)]^\perp = [\mathcal{P}(k)]^\perp$$

Le lemme I.2.7. nous permettra de conclure.

Moyennant la seconde propriété I.2.2., comme $T \in [k, k+1)$, il est clair que :

$$[\mathcal{P}(k)]^\perp \subset [\mathcal{P}(T)]^\perp$$

Par ailleurs, nous avons vu dans I.1.2. (propriété 3) que le premier instant de dégénérescence est un entier. Par conséquent, pour une solution $x(t, x_0, \varphi)$ du système (2), (3), tout vecteur orthogonal à $x(T, x_0, \varphi)$, pour $T \in [k, k+1)$, l'est également à $x(k, x_0, \varphi)$. Il en ressort l'inclusion :

$$[\mathcal{P}(T)]^\perp \subset [\mathcal{P}(k)]^\perp$$

et finalement l'égalité des deux ensembles.

3) Cette troisième partie s'effectue de façon identique : nous montrerons que :

$$[\mathcal{R}_0(T)]^\perp = [E_k G_k < A_k | \mathcal{D}_R >]^\perp$$

D'après la troisième propriété I.2.2., pour $T \in (k-1, k]$, nous avons l'inclusion :

$$[\mathcal{R}_0(k)]^\perp \subset [\mathcal{R}_0(T)]^\perp$$

Comme d'après le lemme I.2.5.(ii), $\mathcal{R}_0(k) = E_k G_k < A_k | \mathcal{D}_R >$, il nous reste à établir l'inclusion réciproque.

Soit donc un élément q non nul de $[\mathcal{R}_0(T)]^\perp$. Pour tout contrôle admissible $u(\cdot)$, nous avons

$${}^t_q \int_0^T x(T-s) C u(s) ds = 0$$

Cette relation est en particulier vérifiée pour $u(s) = {}^t C {}^t x(T-s) q$

En substituant ce contrôle dans l'égalité ci-dessus, nous obtenons

$$\int_0^T |{}^t_q x(T-s) C|^2 ds = 0$$

et par conséquent, ${}^t_q X(T-s) C = 0$ pour $s \in [0, T]$

ce qui peut encore s'écrire :

$${}^t_q X(k-s) C = 0 \quad \text{pour } s \in [k-T, k]$$

Cette égalité est vraie, en particulier pour $s \in [k-T, 1]$. D'où, d'après l'expression (16) de la solution fondamentale $X(k-s)$, pour $s \in [0, 1]$, nous avons :

$${}^t_q X(k-s) C = {}^t_q E_k G_k e^{A_k(1-s)} F_k C$$

qui est une fonction analytique sur $[0, 1]$.

Nous en déduisons que :

$${}^t_q X(k-s) C = 0 \quad \forall s \in [0, k].$$

Et par suite,

$${}^t_q \int_0^k X(k-s) C \tilde{u}(s) ds = 0 \quad \forall \tilde{u} \in L^2((0, k); \mathbb{R}^r)$$

et par conséquent, q appartient à $[\mathcal{R}_0(k)]^\perp$

Ce qui achève la démonstration de notre théorème.

Ce théorème nous permet d'obtenir aisément un certain nombre de résultats, par exemple sur la dégénérescence. Nous avons vu qu'un système différentiel (2), (3) est dégénéré à $t=T$ si et seulement si $\mathcal{P}(T) \neq \mathbb{R}^n$. En utilisant l'expression de $\mathcal{P}(T)$ obtenue, nous retrouvons le critère de Charrier et Haugazeau [1975] :

I.2.10. Proposition :

Le système différentiel (2) est dégénéré au temps $T=k$ si et seulement si :

$$E_k G_k e^{A_k} \mathcal{F}_k + E_k G_k < A_k | \mathcal{G}_k > \neq \mathbb{R}^n$$

Il nous est également possible de traduire algébriquement le résultat de Charrier et Haugazeau [1975], que nous avons rappelé dans la proposition I.1.3., obtenant ainsi une nouvelle condition nécessaire et suffisante de dégénérescence.

I.2.11. Corollaire

Le système différentiel (2) est dégénéré à $T = k-1$ pour le vecteur non nul q de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si :

$$t_q \left[\bigcup_{i=k-1}^{k+m-1} E_i \mid G_i < A_i \mid \mathcal{F}_i > \right] = 0$$

Démonstration

La proposition I.1.3. s'exprime encore en termes d'ensembles : le système (2) est dégénéré pour le vecteur q au temps $T = k-1$ si et seulement si

$$t_q \left[\bigcup_{k-1 \leq t < k+m} \mathcal{X}(t) \right] = 0$$

ou encore, en considérant l'ensemble $\tilde{\mathcal{X}}(i)$

$$t_q \left[\bigcup_{i=k-1}^{k+m-1} \tilde{\mathcal{X}}(i) \right] = 0$$

La première partie du théorème I.2.9. nous donne immédiatement le résultat.

I.2.12. Remarques

- 1) Si nous essayons de comparer ce dernier critère à celui obtenu en I.2.10., nous voyons qu'il évite le calcul de e^{A_k} , qui peut s'avérer long; par contre, quand m devient grand, il est moins maniable pratiquement.
- 2) Comme nous l'avons noté dans l'introduction de notre travail, le fait que nous n'avons pas considéré de retards dans le contrôle n'est pas fondamental. Une extension de nos résultats est relativement facile à obtenir. En effet, si nous considérons un contrôle de la forme

$$\sum_{i=1}^m C_i u(t-i),$$

l'introduction d'un contrôle initial défini sur $[-m, 0]$ est nécessaire. Pour de tels systèmes, l'ensemble d'accessibilité à partir de $(x_0, \varphi) = (0, 0)$, est donné par :

$$\tilde{\mathcal{R}}_0(T) = E_k G_k < A_k | \tilde{\mathcal{D}}_k^1 > + E_k G_k < A_k | \tilde{\mathcal{D}}_k^2 >$$

où $\tilde{\mathcal{D}}_k^1$ et $\tilde{\mathcal{D}}_k^2$ sont les deux matrices de dimensions respectives $(n \times m)$ et $(n \times r)$ suivantes :

$$\tilde{\mathcal{D}}_k^1 = \begin{bmatrix} c_1 & \cdot & \cdot & \cdot & c_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_m & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathcal{D}}_k^2 = \begin{bmatrix} c_0 & & & & & & & 0 \\ c_1 & \cdot & & & & & & \\ \cdot & \cdot & & & & & & \\ c_m & \cdot & \cdot & & & & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ 0 & \dots & 0 & c_m & \dots & c_1 & c_0 \end{bmatrix}$$

- 3) Il est étonnant que l'on ait rarement cherché à expliciter les ensembles d'états accessibles de façon à les rendre maniables; c'est une approche pourtant qui heuristiquement peut s'avérer fructueuse. Ainsi, la mise en forme nouvelle que nous avons donnée de $\mathcal{M}_k(1, 0, 0, V)$ et $\mathcal{R}_0(T)$ nous permettra d'ajouter quelques résultats sur la $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité des systèmes différentiels à retards, comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

CHAPITRE II - $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité

Ce chapitre sera consacré au problème de la contrôlabilité du système (1), (3) dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Dans l'étude de la contrôlabilité des systèmes ordinaires, la cible généralement considérée est un point ou un ensemble de points de $\mathbb{R}^n$. Dans le cas de processus à retards, comme nous l'avons remarqué dans 0.1.5., on peut considérer comme cible une fonction continue sur un intervalle de longueur m . Un certain nombre d'auteurs ont donc envisagé le problème dans un espace fonctionnel; signalons, entre autres, à titre documentaire les articles de Delfour et Mitter [1972], de Manitius et Triggiani [1978] et le survey de Manitius [1976], ainsi que les bibliographies jointes. Mais parallèlement se sont développés des travaux sur une contrôlabilité, où la cible considérée est un point de $\mathbb{R}^n$. Remarquons que ces travaux sont justifiés par le fait que cette $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité est une condition nécessaire de contrôlabilité fonctionnelle. Un certain nombre de critères de $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité ont ainsi été obtenus, entre autres par Kirillova et Churakova [1967], Weiss [1967], Manitius et Olbrot [1972] et Zmood [1974].

Nous allons exploiter les résultats du chapitre précédent, et en particulier l'expression algébrique que nous avons obtenue pour l'ensemble d'accessibilité $\mathcal{R}_0(T)$. Nous donnerons quelques critères nouveaux de complète $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité (notamment II.1.8.), et étudierons la structure des systèmes (1), (3) non complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlables, problème qui n'a pas encore été abordé jusqu'à présent dans la littérature. Nous établirons ainsi un théorème de décomposition pour de tels systèmes (Théorème II.1.17.). Nous effectuerons un rapprochement avec une forme de contrôlabilité purement algébrique, introduite par Morse [1976].

Puis, dans une seconde partie, nous étudierons une contrôlabilité particulière : la nulle $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité.

II.1. Complète $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité

Enonçons pour commencer la définition de la complète contrôlabilité en un point de $\mathbb{R}^n$.

II.1.1. Définition

Le système guidable à retards (1), (3) est complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement si, pour toute condition initiale (x_0, φ) appartenant à $\mathbb{R}^n \times L^1((-m, 0); \mathbb{R}^n)$ et pour tout point x_1 de $\mathbb{R}^n$, il existe un contrôle admissible $u(t)$, $t \in [0, T]$ tel que $x(T, x_0, \varphi, u) = x_1$

A l'aide de la caractérisation algébrique de l'ensemble $\mathcal{R}_0(t)$ des états accessibles du système (1), (3) à partir de la double condition initiale nulle, nous nous proposons de donner une condition nécessaire et suffisante simple de complète $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité. Avant de formuler ce théorème, énonçons une proposition connue (Manitius et Olbrot [1972]) nécessaire à sa démonstration.

II.1.2. Proposition

Le système guidable à retards (1), (3) est complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement si

$$\mathcal{R}_0(T) = \mathbb{R}^n$$

Démonstration. 1) Supposons le système (1), (3) complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable à $t=T$ et considérons x_1 appartenant à $\mathbb{R}^n$

Pour toute condition initiale (x_0, φ) appartenant à $\mathbb{R}^n \times L^1((-m, 0), \mathbb{R}^n)$ il existe un contrôle admissible u tel que :

$$x_1 - x(T, x_0, \varphi) = \int_0^T X(T-s) C u(s) ds$$

et ceci, en particulier pour $x_0 = 0$ et la fonction initiale φ identiquement nulle. Il vient donc que :

$$x_1 \in \mathcal{R}_0(T)$$

2) Supposons réciproquement que $\mathcal{R}_0(T) = \mathbb{R}^n$.

Remarquons que, pour tout vecteur x_1 de $\mathbb{R}^n$, et toute condition initiale (x_0, φ) appartenant à $\mathbb{R}^n \times L^1((-m, 0); \mathbb{R}^n)$, on a :

$$x_1 - x(T, x_0, \varphi) \in \mathbb{R}^n.$$

Moyennant notre hypothèse, on peut affirmer qu'il existe un contrôle admissible u tel que :

$$x_1 - x(T, x_0, \varphi) = \int_0^T X(T-s) C u(s) ds$$

et donc le système (1), (3) est complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable.

Comme nous avons déterminé l'ensemble $\mathcal{R}_0(T)$ dans le théorème I.2.9. la proposition que nous venons d'établir peut se traduire algébriquement :

II.1.3. Théorème

Le système guidable à retards (1), (3) est complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable à $T \in (k-1, k]$ si et seulement si :

$$E_k G_k < A_k | \mathcal{D}_k > = \mathbb{R}^n$$

Comme pour $T \in (k-1, k]$, $\mathcal{R}_0(T) = \mathcal{R}_0(k)$, nous avons le corollaire suivant :

II.1.4. Corollaire

Le système (1), (3) est complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable à $T \in (k-1, k]$ si et seulement il l'est à $T=k$.

II.1.5. Remarques

1) Comme nous l'avons noté précédemment (Propriété I.2.2.(3)), l'ensemble $\mathcal{R}_0(t)$ croît avec t . Par conséquent, l'ensemble $E_k G_k < A_k | \mathcal{D}_k >$ contient les ensembles $E_i G_i < A_i | \mathcal{D}_i >$ $i=1, \dots, k-1$. Ceci peut d'ailleurs être vu facilement en utilisant les propriétés particulières de A_k et G_k données dans 0.2.6. Il contient donc $E_1 G_1 < A_1 | \mathcal{D}_1 > = < B_0 | \mathcal{C} >$, ensemble qui nous est familier puisqu'il représente l'ensemble d'accessibilité d'un

système différentiel ordinaire (B_0, C) . Ceci nous indique, d'une part que la $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité du système (1), (3) est équivalente pour $t \leq 1$, à la contrôlabilité du système ordinaire (B_0, C) , d'autre part que la $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité d'un système à retards est plus facilement réalisée que pour ce système ordinaire.

2) Comme par ailleurs $\bigcup_{t>0} \mathcal{R}_0(t) = \mathcal{R}_0(n)$, les notions de complète $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité à $T > n$ et $T = n$ sont équivalentes.

3) La complète $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité des systèmes à retards dépend de l'instant T considéré; donc, contrairement au cas des systèmes différentiels ordinaires, on ne peut atteindre un point de $\mathbb{R}^n$ en un temps arbitrairement court. Cependant, sur les intervalles de nombres entiers consécutifs, de la forme $(k-1, k]$, l'ensemble d'accessibilité $\mathcal{R}_0(T)$ étant le même, le système à retards se comporte comme un système ordinaire, et donc un élément de $\mathcal{R}_0(k) = \{E_k G_k < A_k \mid \mathcal{D}_k >\}$ peut être atteint à un instant T arbitrairement proche de $t = k-1$.

4) Rappelons qu'il existe déjà des critères algébriques de $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité : celui de Kirillova et Churakova [1967], dont la nécessité a en fait été démontrée par Manitius et Olbrot [1972], et celui de Zmood [1974]. En développant notre ensemble $\mathcal{R}_0(k)$ nous retrouvons la matrice $\tilde{\mathcal{Q}}_n(T)$, introduite par Kirillova et Churakova. Voyons plus précisément le lien existant entre le résultat de Zmood et notre critère II.1.3. En utilisant nos notations, la condition de Zmood s'écrit :

$$\text{rang } [E_1 Z_1 C \dots E_1 A_1^{n-1} Z_1 C \dots E_k Z_k C, \dots E_k A_k^{nk-1} Z_k C] = n$$

$$\text{où } Z_i = \begin{bmatrix} I \\ \dots \\ A_{i-1}^{i-1} Z_i \\ e^{A_{i-1}^{i-1} Z_i} \end{bmatrix} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, k.$$

A l'aide des propriétés données dans 0.2.6., il est possible de voir que :

$$E_i G_i A_i^j F_i C = E_i A_i^j Z_i C \quad i = 1, \dots, k$$

et que

$$E_i G_i A_i^j \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} C = E_{i-1} G_{i-1} A_{i-1}^j F_{i-1} C \quad i = 2, \dots, k$$

Nous en déduisons que :

$$E_i G_i A_i^j D_i = [E_i A_i^j Z_i C \quad E_{i-1} A_{i-1}^j Z_{i-1} C \dots E_1 A_1^j Z_1 C]$$

Par conséquent, la matrice de Zmood est la matrice obtenue en développant notre ensemble $E_k G_k < A_k | \mathcal{D}_k >$. D'où l'équivalence des deux résultats. Remarquons cependant que Zmood arrive à la construction des matrices A_k sans pour cela introduire le système ordinaire associé. Ce dernier nous a permis d'obtenir de façon aisée, un critère formellement plus simple et plus "parlant", ce qui n'est pas sans conséquence, puisque nous pourrons ainsi établir quelques résultats nouveaux sur la $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité.

II.1.6. Exemple :

Considérons le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Supposons T appartenant à l'intervalle (0,1]; calculons

$E_1 G_1 < A_1 | \mathcal{D}_1 >$:

$$E_1 G_1 < A_1 | \mathcal{D}_1 > = E_1 G_1 \mathcal{D}_1 + E_1 G_1 A_1 \mathcal{D}_1$$

$$= \text{Im} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \text{Im} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il est clair que $E_1 G_1 < A_1 | \mathcal{D}_1 > \neq \mathbb{R}^2$; et donc le système considéré n'est pas complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable pour $T \in (0,1]$.

Supposons à présent $T \in (1,2]$ et déterminons l'ensemble

$E_2 G_2 < A_2 | \mathcal{D}_2 >$

Un rapide calcul nous permet d'établir que :

$$e^{A_2} = \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} & 0 \\ e^{-1} & 0 & 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \quad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ e^{-1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rappelons que :

$$E_2 G_2 < A_2 | \mathcal{D}_2 > = E_2 G_2 \mathcal{D}_2 + E_2 G_2 A_2 \mathcal{D}_2 + E_2 G_2 A_2^2 \mathcal{D}_2 + E_2 G_2 A_2^3 \mathcal{D}_2$$

Nous avons :

$$E_2 G_2 \mathcal{D}_2 = \text{Im} \begin{bmatrix} e^{-1} & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_2 G_2 A_2 \mathcal{D}_2 = \text{Im} \begin{bmatrix} -e^{-1} & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il apparaît donc au regard de ces deux premiers termes que $E_2 G_2 < A_2 | \mathcal{D}_2 > = \mathbb{R}^2$ et le système que nous avons considéré est complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable pour $T \in (1, 2]$.

II.1.7. Nous avons noté, dans la remarque I.2.4., que, pour $T \in (k-1, k]$

$$\mathcal{R}_o(T) = E_k \mathcal{K}_k(1, 0, 0, V)$$

Or, l'ensemble $\mathcal{K}_k(1, 0, 0, V) = G_k < A_k | \mathcal{D}_k >$, déterminé dans la proposition I.2.3., est A_k -invariant. Introduisons donc l'espace quotient $\tilde{\mathbb{R}}^{nk} = \mathbb{R}^{nk} / \mathcal{K}_k(1, 0, 0, V)$ et la projection $Q_k : \mathbb{R}^{nk} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}^{nk}$

Il existe donc une matrice unique $\tilde{A}_k$, induite par A_k dans $\tilde{\mathbb{R}}^{nk}$, telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{nk} & \xrightarrow{A_k} & \mathbb{R}^{nk} \\ \downarrow Q_k & & \downarrow Q_k \\ \tilde{\mathbb{R}}^{nk} & \xrightarrow{\tilde{A}_k} & \tilde{\mathbb{R}}^{nk} \end{array}$$

c'est-à-dire telle que :

$$Q_k A_k = \tilde{A}_k Q_k.$$

Ces remarques nous permettent d'énoncer un critère nouveau de complète $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité.

II.1.8. Proposition

Le système différentiel (1), (3) est complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable à $T \in (k-1, k]$, où $k \in \mathbb{N}^*$, si et seulement si une des conditions suivantes est réalisée :

- (i) $Q_k = 0$
- (ii) Pour tout vecteur non nul q de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\text{Ker } Q_k \not\subset \text{Ker}({}^t q E_k)$$

Démonstration

1) Condition nécessaire

Supposons que la projection Q_k soit non nulle et qu'il existe un vecteur non nul q de $\mathbb{R}^n$ tel que : $\text{Ker } Q_k \subset \text{Ker}({}^t q E_k)$

$$\text{Or, } \text{Ker } Q_k = \mathcal{J}_k(1, 0, 0, V)$$

Pour le vecteur q donné, nous avons donc :

$${}^t q E_k G_k < A_k | \mathcal{D}_k > = 0$$

D'après le théorème II.1.3., le système (1), (3) n'est donc pas complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable à l'instant $T \in (k-1, k]$.

2) Condition suffisante

- + Supposons la condition (i) vérifiée. L'ensemble $\text{Ker } Q_k = \mathcal{J}_k(1, 0, 0, V)$ est $\mathbb{R}^{nk}$ tout entier. Et par conséquent $\mathcal{R}_0(k) = \mathbb{R}^n$, d'où la complète $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité à $T \in (k-1, k]$
- + Supposons à présent la condition (ii) vérifiée. Pour tout vecteur q non nul de $\mathbb{R}^n$, on a donc la relation :

$${}^t q E_k \mathcal{J}_k(1, 0, 0, V) \neq 0$$

Par conséquent, d'après la remarque I.2.4., $\mathcal{R}_0(k) = \mathbb{R}^n$. Et par suite, le système (1), (3) est complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable à $T \in (k-1, k]$.

Utilisons une fois de plus l'expression de $\mathcal{R}_0(T)$ que nous avons établie, pour prouver que la complète $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité est conservée par des automorphismes de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^r$.

II.1.9. Proposition

Soient deux automorphismes quelconques :

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$S : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$$

Supposons que le système (1) (3) est complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable à $T \in (k-1, k]$. Alors l'équation donnée par :

$$(23) \quad \dot{\bar{x}}(t) = \sum_{i=0}^m \tilde{B}_i \bar{x}(t-i) + \tilde{C} \bar{u}(t)$$

$$\text{avec } \tilde{B}_i = T^{-1} B_i T, \tilde{C} = T^{-1} C S$$

est également complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable à $T \in (k-1, k]$.

Démonstration

D'après le théorème II.1.3., pour montrer la complète $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité du système (23), il faut et il suffit qu'on prouve que :

$$E_k \tilde{G}_k < \tilde{A}_k | \tilde{\mathcal{D}}_k > = \mathbb{R}^n$$

où $\tilde{A}_k$ et $\tilde{D}_k$ sont les matrices du système ordinaire associé à l'équation (23) et $\tilde{G}_k = [I_k - J_k e^{\tilde{A}_k}]^{-1}$

Or, l'ensemble $E_k \tilde{G}_k < \tilde{A}_k | \tilde{\mathcal{D}}_k >$ s'écrit encore :

$$E_k \tilde{G}_k < \tilde{A}_k | \tilde{\mathcal{D}}_k > = \sum_{i=1}^{nk} E_k \left[I_k - J_k e^{T_k^{-1} A_k T_k} \right]^{-1} (T_k^{-1} A_k T_k)^{i-1} \text{Im}(T_k^{-1} D_k S_k)$$

où nous avons noté T_k et S_k les matrices respectivement d'ordre nk et rk suivantes :

$$T_k = \begin{bmatrix} T & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T \end{bmatrix}$$

$$S_k = \begin{bmatrix} S & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S \end{bmatrix}$$

Après simplification, l'expression devient :

$$E_k \tilde{G}_k < \tilde{A}_k | \tilde{\mathcal{D}}_R > = \sum_{i=1}^{nk} E_k T_k^{-1} A_k^{i-1} [I_k - T_k J_k T_k^{-1} e^{A_k}]^{-1} \text{Im}(D_k S_k)$$

Par ailleurs, il est aisé de vérifier que :

$$E_k T_k^{-1} = T_k^{-1} E_k.$$

$$\text{et } T_k J_k T_k^{-1} = J_k$$

En s'appuyant sur ces remarques et sur le fait que $\text{Im}(D_k S_k) = \text{Im } D_k$, nous pouvons conclure; en effet :

$$\begin{aligned} E_k \tilde{G}_k < \tilde{A}_k | \tilde{\mathcal{D}}_R > &= T^{-1} E_k G_k < A_k | \mathcal{D}_R > \\ &= T^{-1} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Récemment, Manitius et Triggiani [1978] ont établi un certain nombre de résultats algébriques intéressants, portant sur l'équation caractéristique (8) du système. Ces résultats dérivent d'études plus générales sur les systèmes linéaires abstraits contrôlés, régis par des équations différentielles dans un espace de Banach. Présentons un de leurs critères de $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité, qui nous intéresse plus particulièrement. Notons $B(\mu)$ la matrice :

$$B(\mu) = B_0 + \mu B_1 + \dots + \mu^m B_m$$

II.1.10. Théorème : (Manitius et Triggiani [1978]).

Le système différentiel (1) est complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable si et seulement si, pour tout vecteur q de $\mathbb{R}^n$ (indépendant de μ), la relation

$${}^t q [C \ B(\mu) \ C \ \dots \ B(\mu) \ C] = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C}$$

implique $q = 0$.

II.1.11. Remarque

Assez récemment, la contrôlabilité des systèmes à retards a été

l'objet d'études utilisant des méthodes purement algébriques (Kamen [1975], Morse [1976], Sontag [1976]). En effet, en considérant μ comme un opérateur de retard, et en définissant

$B(\mu) = \sum_{i=0}^m B_i \mu^i$, comme une matrice sur l'anneau $\mathbb{R}[\mu]$ des polynômes en μ à coefficients dans $\mathbb{R}$, le système (1) peut encore être représenté par :

$$(24) \quad \dot{x}(t) = B(\mu) x(t) + C u(t)$$

Ce système sera appelé "faiblement contrôlable" si :

$$(25) \quad \text{rang}_{\mathbb{C}} [C \ B(\mu) \ C \ \dots \ B(\mu)^{n-1} C] = n$$

c'est à dire qu'il existe $\mu_0 \in \mathbb{C}$ tel que la matrice numérique :

$$[C \ B(\mu_0) \ C \ \dots \ B(\mu_0)^{n-1} C]$$

soit de rang n .

Nous voyons que si le système (1), (3) n'est pas complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable il n'est pas faiblement contrôlable. Cependant, les deux notions ne sont pas équivalentes, puisque la faible contrôlabilité n'est pas réalisée si et seulement s'il existe un vecteur polynomial non nul $d(\mu)$ tel que :

$${}^t d(\mu) M(\mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C}$$

où nous avons noté $M(\mu)$ la matrice $[C \ B(\mu) \ C \ \dots \ B(\mu)^{n-1} C]$.

Donnons un exemple dû à Morse [1976] de système complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable, mais faiblement incontrôlable :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_3(t-1) \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = u(t) \end{cases}$$

Pour ce système, la matrice $B(\mu)$ est :

$$B(\mu) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculons la matrice $M(\mu)$:

$$M(\mu) = \begin{bmatrix} 0 & \mu & \mu \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Considérons un vecteur $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$; nous voyons que :

$$[q_1 \ q_2 \ q_3] M(\mu) = [q_3 \ q_1\mu + q_2 \ q_1\mu + q_2] = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C}$$

entraîne que le vecteur est nul. D'après le théorème II.1.10., le système donné est donc complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable. D'autre part, il est aisé de vérifier que :

$$(1 \ \mu \ 0) M(\mu) = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C}$$

Et ce système est par conséquent faiblement incontrôlable.

II.1.12. Problème

Il existe une décomposition canonique des systèmes différentiels ordinaires incontrôlables due à Kalman [1963]. Est-il possible d'établir un tel résultat pour les systèmes à retards non complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlables ? Le théorème II.1.17. donné dans la suite répond complètement à cette question, qui n'avait jamais été abordée, et précise la structure de tels systèmes.

Dans une première approche, on peut penser à utiliser le théorème II.1.10. et la remarque II.1.11. pour essayer d'aborder ce problème. En effet, nous y avons noté que, si le système (1) n'est pas complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable, alors $\text{rang}_{\mathbb{C}} M(\mu) \neq n$. Une première difficulté apparaît cependant : le fait d'avoir à notre disposition des matrices polynomiales nous amène à raisonner sur des modules. Or, contrairement à la théorie des espaces vectoriels, pour un module donné Y de $\mathbb{R}^n[\mu]$ (i.e. $\mathbb{R}[\mu] \times \dots \times \mathbb{R}[\mu]$), il n'est pas possible de trouver un autre module Z tel que $\mathbb{R}^n[\mu] = Y \oplus Z$.

Par ailleurs, si, en utilisant cette méthode, nous obtenons, pour une classe de systèmes différentiels (1), une décomposition, celle-ci ne sera pas spécifique des systèmes non complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlables, mais des systèmes faiblement incontrôlables.

Cependant donnons ici un résultat personnel sur la décomposition des systèmes différentiels (1) scalaires ($r = 1$), qui sont faiblement incontrôlables. Ce résultat, outre la présentation d'une méthode d'investigation différente de celle utilisée jusqu'à présent dans notre travail, comporte un autre intérêt : il nous permettra d'aborder dans le chapitre IV le problème de la minimalité d'une réalisation scalaire.

Pour établir ce résultat, nous rappelons ici deux lemmes algébriques que l'on peut trouver dans Lang [1965], dans des notations dûes à Kappel [1977]. Nous noterons $\mathbb{R}_{k,\ell}[\mu]$, le $\mathbb{R}[\mu]$ -module des matrices $k \times \ell$ dont les éléments appartiennent à $\mathbb{R}[\mu]$. Le sous-module de $\mathbb{R}^n[\mu]$ engendré par des vecteurs $a_1, \dots, a_k$ donnés, sera représenté par : $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$

II.1.13. Lemme

Tout sous-module de $\mathbb{R}^n[\mu]$ est un module libre (i.e. ce sous-module possède une base).

II.1.14. Lemme

Soit A appartenant à $\mathbb{R}_{n,n}[\mu]$. Soit $x_1, \dots, x_k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n[\mu]$ tels que $Ax_1, \dots, Ax_k$ forment une base de $\text{Im } A$. Alors

$$\mathbb{R}^n[\mu] = \text{Ker } A \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^k \langle x_j \rangle \right)$$

II.1.15. Proposition

Considérons un système (1) scalaire ($r = 1$) faiblement incontrôlable. Il existe alors une matrice $S \in \mathbb{R}_{n,n}[\mu]$, vérifiant $\det S \neq 0$, telle que

$$\tilde{B}(\mu) = S^{-1} B(\mu) S = \begin{bmatrix} B_{11}(\mu) & B_{12}(\mu) \\ 0 & B_{22}(\mu) \end{bmatrix} \quad \tilde{C}(\mu) = S^{-1}(\mu) C = \begin{bmatrix} C_1(\mu) \\ 0 \end{bmatrix}$$

où $B_{11}(\mu)$, $B_{12}(\mu)$ et $B_{22}(\mu)$ sont des matrices polynomiales respectivement de dimensions $r \times r$, $r \times (n-r)$, $(n-r) \times (n-r)$. La matrice $C_1(\mu)$ appartient à $\mathbb{R}_{r,1}[\mu]$.

Démonstration

Si le système scalaire n'est pas faiblement contrôlable, nous avons :

$$\text{Im } M(\mu) \neq \mathbb{R}^n[\mu]$$

et par conséquent,

$$\text{Ker } {}^tM(\mu) \neq \left\{ 0_{\mathbb{R}^n[\mu]} \right\}$$

$\text{Ker } {}^tM(\mu)$ étant un sous-module de $\mathbb{R}^n[\mu]$, il est libre d'après le lemme II.1.13. Il existe donc une base $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_r$ de $\text{Ker } {}^tM(\mu)$ avec $0 < r < n$.

Considérons $(n-r)$ vecteurs $\tilde{e}_{r+1}, \dots, \tilde{e}_n$ tel que les vecteurs ${}^tM(\mu)\tilde{e}_{r+1}, \dots, {}^tM(\mu)\tilde{e}_n$ forment une base de $\text{Im } {}^tM(\mu)$.

D'après le lemme II.1.14., nous avons la décomposition suivante :

$$\mathbb{R}^n[\mu] = \left(\bigoplus_{j=r+1}^n \langle e_j \rangle \right) \oplus \text{Ker } {}^tM(\mu)$$

Soit $\tilde{S}$ la matrice de passage, appartenant à $\mathbb{R}_{n,n}[\mu]$, de la base canonique $e_1, \dots, e_n$ à la base $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n$. Puisque $\text{Ker } {}^tM(\mu)$ est ${}^tB(\mu)$ -invariant, la matrice ${}^tB(\mu)$ s'écrit dans la nouvelle base :

$${}^tB(\mu) = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11}(\mu) & 0 \\ \tilde{B}_{12}(\mu) & \tilde{B}_{22}(\mu) \end{bmatrix}$$

où les matrices $\tilde{B}_{11}(\mu)$, $\tilde{B}_{12}(\mu)$ et $\tilde{B}_{22}(\mu)$ appartiennent respectivement à $\mathbb{R}_{r,r}[\mu]$, $\mathbb{R}_{(n-r),r}[\mu]$ et $\mathbb{R}_{(n-r),(n-r)}[\mu]$

De même que dans le cas ordinaire, comme $\text{Ker } {}^tM(\mu) \subset \text{Ker } {}^tC$, dans la nouvelle base le vecteur ${}^tC(\mu)$ est :

$$[\tilde{C}_1(\mu) \quad 0]$$

où $\tilde{C}_1(\mu)$ appartient à $\mathbb{R}_{1,r}[\mu]$.

Finalement, en posant $B_{11}(\mu) = {}^t\tilde{B}_{11}(\mu)$

$$B_{12}(\mu) = {}^t\tilde{B}_{12}(\mu)$$

$$B_{22}(\mu) = {}^t\tilde{B}_{22}(\mu)$$

$$C_1(\mu) = {}^t\tilde{C}_1(\mu)$$

nous obtenons pour la matrice de passage $S = {}^t\tilde{S}$, la décomposition annoncée.

Cette méthode ne nous permettant de répondre qu'incomplètement à notre problème II.1.12., on peut essayer d'exploiter la caractérisation algébrique que nous avons obtenue du domaine de complète $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité $\mathcal{R}_0(T)$. Pour cela, il nous a fallu établir, comme dans le cas des systèmes différentiels ordinaires, une propriété d'invariance :

II.1.16. Proposition

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

L'inclusion suivante est vérifiée :

$$B_0 \mathcal{R}_0(k) + B_1 \mathcal{R}_0(k-1) + \dots + B_j \mathcal{R}_0(k-j) \subset \mathcal{R}_0(k).$$

où $j = \inf(k-1, m)$.

Démonstration : Afin de faciliter la lecture de la démonstration, nous supposons $k > m$, le cas $k < m$ s'effectuant de façon identique. Soit $(m+1)$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ $x_{k-m}, \dots, x_k$ appartenant respectivement à $\mathcal{R}_0(k-m), \dots, \mathcal{R}_0(k)$. Ajoutons-y $(k-m-1)$ vecteurs $x_1, \dots, x_{k-m-1}$ appartenant respectivement à $\mathcal{R}_0(1), \dots, \mathcal{R}_0(k-m-1)$, et introduisons le vecteur y_k de $\mathbb{R}^{nk}$ suivant :

$$Y_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

D'après le lemme I.2.6., nous voyons que :

$$(26) \begin{cases} x_1 \in \mathcal{R}_0(1) = L_1 G_k < A_k | \mathcal{D}_k > \\ x_2 \in \mathcal{R}_0(2) = L_2 G_k < A_k | \mathcal{D}_k > \\ x_k \in \mathcal{R}_0(k) = L_k G_k < A_k | \mathcal{D}_k > \end{cases}$$

Par conséquent, Y_k appartient à l'ensemble $G_k < A_k | \mathcal{D}_k >$

Considérons à présent le vecteur $B_0 x_k + B_1 x_{k-1} + \dots + B_m x_{k-m}$; il s'écrit encore :

$$[0 \dots 0 B_m \dots B_0] Y_k = E_k A_k Y_k$$

Y_k appartenant à $G_k < A_k | \mathcal{D}_k >$, qui est A_k -invariant, nous en déduisons que :

$$A_k Y_k \in G_k < A_k | \mathcal{D}_k >$$

Et donc finalement, $B_0 x_k + B_1 x_{k-1} + \dots + B_m x_{k-m} = E_k A_k Y_k$ appartient à $E_k G_k < A_k | \mathcal{D}_k >$, qui, d'après le lemme I.2.5., est l'ensemble $\mathcal{R}_0(k)$. L'inclusion annoncée plus haut est donc vérifiée.

Nous sommes à présent en mesure de répondre dans le théorème suivant au problème II.1.12., en précisant effectivement la structure des systèmes différentiels (1), qui ne sont pas complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlables.

II.1.17. Théorème

L'espace $\mathbb{R}^n$ des états d'un système différentiel à retards du type (1), qui est non complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable, peut être décomposé en somme directe :

$$\mathbb{R}^n = X_1 \oplus X_2$$

en induisant une décomposition du système différentiel sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_o^{11} & B_o^{12} \\ 0 & B_o^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} B_m^{11} & B_m^{12} \\ 0 & B_m^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t-m) \\ \bar{x}_2(t-m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Démonstration :

1) Considérons l'ensemble des états accessibles à partir de $(x_o, \varphi) = (o, o)$, que nous noterons :

$$X_1 = \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{R}_o(t)$$

D'après la propriété I.2.2.(3), nous avons $X_1 = \mathcal{R}_o(n)$, où n est la dimension du système. X_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Comme le système n'est pas complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable, sa dimension n_1 est strictement inférieure à n .

Il est clair que l'espace $\mathbb{R}^n$ peut être scindé en "partie atteignable" et en "partie non atteignable". Soit p^1 et p^2 les projections respectivement sur X_1 et $X_2 = X_1^\perp$, et introduisons le changement de variables :

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} p^1 \\ p^2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$$

A partir de ces nouvelles variables, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_o^{11} & B_o^{12} \\ B_o^{21} & B_o^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} B_m^{11} & B_m^{12} \\ B_m^{21} & B_m^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t-m) \\ \bar{x}_2(t-m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} u(t)$$

Remarquons que dans la nouvelle base, si $\bar{x}$ appartient à X_1 , $\bar{x}$ est de la forme :

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nous savons, d'après le lemme I.2.8., que pour k vecteurs donnés de $\mathbb{R}^n$, il existe une solution de (1) issue de la condition initiale $(x_0, \varphi) = (0, 0)$, si et seulement si le vecteur de $\mathbb{R}^{nk}$, formé à partir de ces k vecteurs appartient à $G_k \langle A_k | \mathcal{D}_k \rangle$. Moyennant le lemme I.2.6. (ii), nous en déduisons que nous pouvons considérer $\bar{x}(t), \dots, \bar{x}(t-m)$ décrivant respectivement $\mathcal{R}_0(m+m), \dots, \mathcal{R}_0(n)$. La propriété d'invariance II.1.16. nous permet d'affirmer alors que :

$$\sum_{i=0}^m \begin{bmatrix} B_i^{11} & B_i^{12} \\ B_i^{21} & B_i^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t-m) \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}_0(n+m) = X_1$$

La composante suivant X_2 de cette quantité est donc nulle, d'où la relation :

$$B_0^{21} x_1^{(0)} + B_1^{21} x_1^{(1)} + \dots + B_m^{21} x_1^{(m)} = 0 \quad \begin{cases} \forall x_1^{(m)} \in \mathcal{R}_0(n) \\ \vdots \\ \forall x_1^{(1)} \in \mathcal{R}_0(n+m-1) \\ \forall x_1^{(0)} \in \mathcal{R}_0(n+m) \end{cases}$$

En posant $\begin{cases} x_1^i = 0 & i \neq j \\ x_1^j \neq 0 \end{cases}$ successivement pour $j = 0, 1, \dots, m$

nous obtenons :

$$B_j^{21} x_1^{(j)} = 0 \quad \forall x_1^{(j)} \in \mathcal{R}_0(n+m-j) = X_1$$

Il en ressort que :

$$B_j^{21} = 0 \quad j = 0, 1, \dots, m$$

2) Pour terminer la démonstration de ce théorème, il reste à montrer que $C_2 = 0$. Dans ce but, précisons dans un premier temps la quantité $E_k G_k \mathcal{D}_k$.

Rappelons (O.2.6. Propriété 4) que $E_k G_k$ est une matrice $[S_1, \dots, S_k]$ où S_i , $i=1, \dots, k$ sont des blocs carrés d'ordre n , vérifiant :

$$(19) \begin{cases} [S_1, \dots, S_{k-1}] = [(S_2 \dots S_{k-1}) e^{A_k}] \\ S_k = I \end{cases}$$

La matrice $E_k \ G_k \ D_k$ a donc pour expression :

$$E_k \ G_k \ D_k = \begin{bmatrix} S_1 C & S_2 C \dots S_{k-1} C & C \end{bmatrix}$$

Nous constatons que $\text{Im} C$ est inclus dans $\text{Im}(E_k \ G_k \ D_k)$; comme par ailleurs il est clair que :

$$\text{im}(E_k \ G_k \ D_k) \subset E_k \ G_k \langle A_k | \mathcal{D}_k \rangle = \mathcal{R}_0(k)$$

nous en déduisons que

$$\text{im} C \subset X_1$$

Par conséquent, le vecteur $\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} u(t) = \begin{bmatrix} C_1 u(t) \\ C_2 u(t) \end{bmatrix}$ appartient à

l'ensemble X_1 , quel que soit $u(t)$. Finalement, nous avons également $C_2 = 0$. Ce qui achève la démonstration du théorème.

II.1.18. Remarques

1) Dans les deux décompositions établies dans II.1.15. et II.1.17., nous voyons réapparaître les différences spécifiques entre les deux formes de contrôlabilité envisagées, puisque dans la première, la matrice de passage appartient à $\mathbb{R}_{n,n}[\mu]$, alors que la seconde décomposition est obtenue par une simple transformation linéaire.

Signalons également qu'une matrice de passage polynomiale

$S(\mu) = S_0 + \mu S_1 + \dots + \mu^\ell S_\ell$ induit une transformation du type :

$$\bar{x}(t) = S_0 x(t) + S_1 x(t-1) + \dots + S_\ell x(t-\ell)$$

2) Dans l'étude de la contrôlabilité fonctionnelle des processus à retards, il a déjà été obtenu une décomposition du système (1) comme condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble d'accessibilité dans l'espace fonctionnel de Sobolev soit fermé (Kurcyusz et Olbrot [1977]). Certaines conditions supplémentaires, particulières à la contrôlabilité fonctionnelle, y étaient cependant nécessaires. Aucun rapprochement avec notre résultat ne semble apparemment possible.

II.2. La nulle $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité

Jusqu'à l'apparition du phénomène de dégénérescence, les principales études sur la contrôlabilité dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ portaient en fait sur la nulle $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité. Un certain nombre de résultats (et en particulier ceux de Kirillova et Churakova [1967]) supposaient implicitement que le système différentiel à retards étudié était en fait non dégénéré. Comme la dégénérescence d'un tel système implique que la nulle $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité n'entraîne pas la complète $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité, il a fallu distinguer ces deux notions.

II.2.1. Définition

Le système guidable (1), (3) est dit nul $\mathbb{R}^n$ -contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement si, pour toute condition initiale (x_0, φ) appartenant à $\mathbb{R}^n \times L^1((-m, 0); \mathbb{R}^n)$, il existe un contrôle admissible $u(t)$, $t \in [0, T]$ tel que $x(T, x_0, \varphi, u) = 0$.

II.2.2. Remarques

1) La forme (5) des solutions du système implique que la nulle $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité de ce système à un instant $T > 0$, s'exprime par :

$$-x(T, x_0, \varphi) = \int_0^T X(T-s) Cu(s) ds.$$

2) Il est immédiat, d'après les définitions respectives, qu'un système complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable est également nul $\mathbb{R}^n$ -contrôlable. La réciproque, comme nous l'avons signalé plus haut, n'est pas vérifiée. Dans le cas des équations différentielles ordinaires linéaires et autonomes, la véracité de cette réciproque est due essentiellement au fait qu'un tel système est symétrique; autrement dit, si le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ est accessible à partir d'un vecteur x_1 de $\mathbb{R}^n$, ce dernier peut être atteint par le système à partir du vecteur nul. Cela n'est plus le cas des équations différentielles du type (1), (3), car, lorsqu'il y a dégénérescence la matrice fondamentale est singulière.

La première de ces remarque nous donne immédiatement un critère connu de nulle $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité, qu'on peut trouver entre autres dans Zmood [1974].

II.2.3. Lemme

Le système différentiel (1), (3) est nul $\mathbb{R}^n$ -contrôlable au temps $T > 0$, si et seulement si on a l'inclusion :

$$\mathcal{P}(T) \subset \mathcal{R}_0(T)$$

Notre caractérisation des ensembles $\mathcal{P}(T)$ et $\mathcal{R}_0(T)$ (Théorème I.2.9.) nous donne donc une traduction algébrique du lemme précédent. Nous obtenons ainsi un résultat équivalent à celui de Zmood [1974], mais dans une forme légèrement moins complexe et plus précise.

II.2.4. Proposition

Soit k un entier non nul.

1) Le système différentiel (1), (3) est nul $\mathbb{R}^n$ -contrôlable au temps $T \in]k, k+1[$ si et seulement si

$$E_k G_k e^{A_k} \widetilde{\mathcal{F}}_k + E_k G_k \langle A_k | \mathcal{E}_k \rangle \subset E_{k+1} G_{k+1} \langle A_{k+1} | \mathcal{D}_{k+1} \rangle$$

2) Le système différentiel (1), (3) est nul $\mathbb{R}^n$ -contrôlable au temps $T = k$ si et seulement si :

$$E_k G_k e^{A_k} \widetilde{\mathcal{F}}_k + E_k G_k \langle A_k | \mathcal{E}_k \rangle \subset E_k G_k \langle A_k | \mathcal{D}_k \rangle$$

La démonstration est une déduction immédiate du lemme II.2.3. et du théorème I.2.9.

A partir de ce premier résultat, nous pouvons faire quelques remarques.

II.2.5. Remarques

1) Il est immédiat, d'après le lemme II.2.3., que si le système (1) n'est ni dégénéré, ni $\mathbb{R}^n$ -contrôlable, il ne peut être nul $\mathbb{R}^n$ -contrôlable.

2) De cette première remarque peuvent être déduits un certain nombre de critères de nulle $\mathbb{R}^n$ -incontrôlabilité. En particulier, si le

système n'est pas complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable, il ne peut être nul $\mathbb{R}^n$ -contrôlable à $T < m'+1$, où m' est le plus petit entier tel que $B_{m'} \neq 0$ (3e propriété I.1.2.).

3) Si l'étude de la dégénérescence et de la complète $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité peut se limiter à des instants T entiers, il est clair, d'après la proposition II.2.4., que ce n'est pas le cas pour la nulle $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité.

4) Supposons le système (1) nul $\mathbb{R}^n$ -contrôlable à un instant T_1 , il le sera également pour $T_2 \geq T_1$. En effet, nous avons les inclusions :

$$\mathcal{P}(T_2) \subset \mathcal{P}(T_1) \subset \mathcal{R}_0(T_1) \subset \mathcal{R}_0(T_2).$$

En utilisant ce qui a été vu sur la complète $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité et la dégénérescence, nous pouvons établir une série de conditions nouvelles de nulle $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité, qui n'apparaissent pas jusqu'ici dans la littérature. Nous n'en donnerons que quelques unes; le lecteur comprendra les combinaisons possibles pour l'obtention des autres.

II.2.6. Théorème

Les propositions suivantes sont équivalentes

(i) Le système (1), (3) est nul $\mathbb{R}^n$ -contrôlable

$$(ii) [\mathcal{R}_0(n)]^\perp \subset \bigcup_{t>0}^{\infty} [\mathcal{P}(t)]^\perp$$

(iii) Tout vecteur q de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$${}^t_q [C B(\mu)C \dots B^{n-1}(\mu)C] = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C}$$

est un vecteur de dégénérescence pour le système

(iv) Pour tout vecteur q de $\mathbb{R}^n$, la relation :

$${}^t_q \Delta^{-1}(\lambda)C = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } \det \Delta(\lambda) \neq 0$$

implique que ${}^t_q \Delta^{-1}(\lambda)C$ est une fonction entière.

Démonstration

La condition (i) signifie qu'il existe T_1 tel que :

$$\mathcal{P}(t) \subset \mathcal{R}_0(t) \quad \forall t \geq T_1$$

Ce qui s'écrit encore :

$$[\mathcal{R}_0(t)]^\perp \subset [\mathcal{P}(t)]^\perp \quad \forall t \geq T_1$$

Pour qu'il y ait nulle $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité, il faut et il suffit donc que les vecteurs orthogonaux au domaine de contrôlabilité $\mathcal{R}_0(n)$ appartiennent à l'ensemble des vecteurs de dégénérescence. Pour établir la suite annoncée d'équivalences, il suffit de noter, en se reportant à l'article de Manitius et Triggiani [1978], que les assertions :

- " $q \in [\mathcal{R}_0(n)]^\perp$ "
- " ${}^t q [C B(\mu) C \dots B^{n-1}(\mu) C] = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C}$ "
- " ${}^t q \Delta^{-1}(\lambda) C = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{tel que } \det \Delta(\lambda) \neq 0$ "

sont équivalentes.

De même, les assertions :

- " q est un vecteur de dégénérescence "
- " $q \in \bigcup_{t>0} [\mathcal{P}(t)]^\perp$ "
- " ${}^t q \Delta^{-1}(\lambda)$ est une fonction entière "

sont équivalentes (voir l'article de Kappel [1976] pour la dernière assertion.)

La théorème se déduit immédiatement de ces remarques.

II.2.7. Remarques

1) Notons au passage que, si le système (1) est complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable, l'ensemble $[\mathcal{R}_0(n)]^\perp$ se réduit à l'élément nul, et donc les propositions (ii), (iii), (iv) du théorème II.2.6. sont toujours vérifiées.

2) Il n'existe pas dans la littérature d'exemple illustrant la nulle $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité. Pour cela, il faudrait construire un système à retards (1) dégénéré, non complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable et tel que l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\mathcal{R}_0(n)$ soit inclus dans l'en-

semble des vecteurs de dégénérescence. Le nombre de contraintes explique la difficulté d'obtenir un tel exemple. Mais une question vient alors à l'esprit : existe-t-il des systèmes non complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlables et nul $\mathbb{R}^n$ -contrôlables ?

3) Si nous connaissons la fonction initiale $\varphi(t)$ pour $t \in [-m; 0[$, nous pouvons lui faire jouer le rôle d'un contrôle. Aussi est-il possible d'envisager l'étude de la $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité d'un système à retards libre du type (2), (3), étude qui n'était pas envisageable dans le cas ordinaire. Notons que cette question a déjà été soulevée par quelques auteurs (Manitius [1976]), mais à notre connaissance il n'existe pas de critères algébriques simples. Pour cela, il suffit, en utilisant l'expression algébrique que nous avons obtenue de $\mathcal{P}_0(k)$, de procéder comme nous l'avons fait dans ce chapitre pour la $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité du système (1), (3). Il est ainsi possible d'obtenir plusieurs conditions nécessaires et suffisantes (que nous ne rapporterons pas ici) de $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité pour le système (2), (3).

4) En utilisant la remarque I.2.12.(2), il est possible de voir que la condition de complète $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité pour des systèmes différentiels possédant également des retards dans le contrôle, s'exprime :

$$E_k G_k < A_k | \mathcal{D}_A^2 > = \mathbb{R}^n$$

où D_k^2 est la matrice $(nk \times rk)$ définie en I.2.12.(2).

Moyennant ce résultat, toute l'étude qui vient d'être effectuée dans ce chapitre sur la $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité s'étend aisément à des systèmes possédant des retards dans le contrôle.

CHAPITRE III - $\mathbb{R}^n$ -observabilité

Parallèlement à l'étude sur la contrôlabilité, pour aborder le problème de l'observabilité des systèmes à retards (1), (4), il convient de distinguer deux formes d'observabilité : d'une part, une observabilité "fonctionnelle" qui consiste à observer la solution $x(t)$ sur un certain intervalle, en ne connaissant que la sortie $y(t)$ et le contrôle $u(t)$ sur ce même intervalle; d'autre part, une $\mathbb{R}^n$ -observabilité où on cherche à déterminer le vecteur initial x_0 de $\mathbb{R}^n$ en connaissant la sortie $y(t)$ et le contrôle $u(t)$ sur un certain intervalle ainsi que la fonction initiale γ .

Signalons que ces deux problèmes ont été abordés entre autres par Delfour et Mitter [1972], Kopeikina et Mulyarchik [1974], Olbrot [1975] et Manitius [1976.a]. Nous nous intéresserons dans ce chapitre à l'étude de la $\mathbb{R}^n$ -observabilité; en utilisant le système ordinaire associé, nous établirons dans un premier paragraphe un critère de $\mathbb{R}^n$ -observabilité (Théorème III.1.6.) qui nous permettra de définir un ensemble d'états $\mathbb{R}^n$ -inobservables.

Le second paragraphe sera consacré à l'étude d'un système différentiel dual introduit par Delfour et Mitter [1972], afin de préciser algébriquement les propriétés de dualité obtenues par ces derniers. Dans ce but, nous lui associerons un système différentiel ordinaire de telle façon que la dualité se retrouve également au niveau des deux systèmes ordinaires associés.

Nous considérerons dans le premier paragraphe une sortie comprenant plusieurs retards (choix qui nous permettra dans le prochain chapitre une construction plus facile d'une réalisation). Comme par souci de simplifier l'exposé de notre travail nous n'avons pas introduit de retards dans le contrôle, nous sommes amenés pour l'étude de la dualité dans le second paragraphe à considérer une sortie sans retards. Il faut cependant noter que moyennant la remarque II.2.7. (4) les résultats présentés dans ce paragraphe s'étendent aisément au cas général avec retards dans le contrôle et la sortie.

III.1. $\mathbb{R}^n$ -observabilité : conditions nécessaires et suffisantes

Nous noterons $y(t, x_0, \varphi, u)$ et $y(t, x_0, \varphi)$ les sorties (4) relatives respectivement aux solutions $x(t, x_0, \varphi, u)$ du système (1), (3) et $x(t, x_0, \varphi)$ du système (2), (3).

III.1.1. Définitions

Considérons le système guidable (1), (4) défini en 0.1.1.

- (i) On dit que deux états x_1 et x_2 sont indiscernables sur l'intervalle $[0, T]$ si, pour toute fonction initiale donnée $\varphi \in L^1((-m, 0); \mathbb{R}^n)$ et pour tout contrôle admissible u ,

$$y(t, x_1, \varphi, u) \equiv y(t, x_2, \varphi, u) \quad t \in [0, T]$$

- (ii) Le système guidable considéré sera dit $\mathbb{R}^n$ -observable sur $[0, T]$ si et seulement si il n'existe pas de paire de points indiscernables sur $[0, T]$

III.1.2. Remarques

1) Comme la fonction initiale φ peut agir sur l'évolution du système comme un contrôle, il est possible de définir l'indiscernabilité et la $\mathbb{R}^n$ -observabilité du système libre (2), (3), (4) : pour cela, il suffit de reprendre les définitions précédentes pour un contrôle u identiquement nul.

2) Le fait d'avoir introduit le même nombre de retards dans l'équation de sortie (4) que dans l'équation (1), peut paraître particulariser notre étude. En fait, si nous considérons une équation de sortie, contenant p retards, avec $p < m$, il suffira dans notre étude de supposer $H_i = 0$, $i = p+1, \dots, m$. De même, si $p > m$, en appliquant nos résultats pour un système différentiel possédant également p retards, il suffira de poser $B_i = 0$, $i = m+1, \dots, p$.

3) Si, dans cette étude, nous considérons la fonction initiale dans l'espace $C([-m, 0]; \mathbb{R}^n)$, le problème de la $\mathbb{R}^n$ -observabilité n'aurait plus de signification physique : en effet, comme il y aurait continuité en 0, la connaissance de la fonction φ impliquerait immédiatement celle de x_0 .

III.1.3. Propriétés

1) Nous pouvons remarquer que l'indiscernabilité définie ci-dessus est une relation d'équivalence qui ne dépend que des matrices B_i et H_i où $i = 0, \dots, m$. En effet, cette propriété découle de l'égalité :

$$y(t, x_1, \varphi, u) - y(t, x_2, \varphi, u) = \sum_{i=0}^m H_i X(t-i) (x_1 - x_2)$$

et du fait que la matrice fondamentale $X(t)$ ne dépend que des matrices $B_i, i = 0, \dots, m$ (cf. proposition 0.2.5.).

2) Par conséquent, comme la notion d'indiscernabilité ne dépend pas du contrôle u , il devient immédiat que les notions de $\mathbb{R}^n$ -observabilité pour le système guidable (1), (4) et le système libre (2), (4) sont équivalentes. Donc, contrairement à ce qu'on pouvait peut-être croire, l'étude de la $\mathbb{R}^n$ -observabilité d'un système à retards ne se scinde pas en deux problèmes distincts selon qu'il apparaît un contrôle ou non.

III.1.4. Note

Exploitions cette dernière propriété dans le but de simplifier les notations : afin de ne pas faire réapparaître sans cesse un contrôle u qui n'influe pas sur les résultats donnés, nous nous limiterons dans ce chapitre à l'étude de la $\mathbb{R}^n$ -observabilité du système libre (2), (4).

Comme dans les chapitres précédents, utilisons le système différentiel ordinaire associé au système différentiel (2), (3) :

$$(13) \quad \dot{Y}_k(t) = A_k Y_k(t) + C_k \phi(t)$$

$$(10) \quad Y_k(0) - J_k Y_k(1) = F_k x_0$$

L'équation de sortie (4) se traduit par :

$$(27) \quad Z_k(t) = \hat{H}_k Y_k(t) + \hat{C}_k \phi(t)$$

Le vecteur $Z_k(t)$ de $\mathbb{R}^{p^k}$ est donné par :

$$Z_k(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_k(t) \end{bmatrix} \quad \text{où } z_i(t) = y(t+i-1) \text{ pour } t \in [0,1] \\ \text{et } i = 1, 2, \dots, k$$

Les matrices $\hat{H}_k$ et $\hat{C}_k$, respectivement de dimensions $(pk \times nk)$ et $(pk \times mn)$ sont pour $k > m$:

$$\hat{H}_k = \begin{bmatrix} H_0 & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \\ H_m & & & & \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 \dots 0 & H_m & \dots & H_0 \end{bmatrix} \quad \hat{C}_k = \begin{bmatrix} H_1 & \cdot & \cdot & \cdot & H_m \\ \vdots & & & & \\ H_m & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

Pour $k < m$, les matrices $\hat{H}_k$ et $\hat{C}_k$ sont encore définies : on ne considérera que les pk premières lignes des matrices données ci-dessus.

Notons $Y_k(t, x_0, \phi)$ la solution du système ordinaire associé (13), (11), dont la première composante de $Y_k(0)$ est x_0 . Moyennant ce dernier système, formulons le problème différemment, en donnant dans le lemme suivant, une suite d'équivalences, qui sont en fait autant de nouvelles définitions de $\mathbb{R}^n$ -observabilité.

III.1.5. Lemme

Pour $T \in (k-1, k]$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour toute fonction initiale $\phi \in L^1((-m, 0); \mathbb{R}^n)$, on a :

$$y(t, x_0, \phi) \equiv y(t, \bar{x}_0, \phi) \text{ pour } t \in [0, T] \Rightarrow x_0 = \bar{x}_0$$

(ii) Pour toute fonction $\phi \in L^1((0, 1); \mathbb{R}^{nm})$, on a

$$\hat{H}_k Y_k(t', x_0, \phi) \equiv \hat{H}_k Y_k(t', \bar{x}_0, \phi) \text{ pour } t' \in [0, T-k+1] \Rightarrow x_0 = \bar{x}_0$$

(iii) Pour une fonction ϕ nulle, on a :

$$\hat{H}_k Y_k(t', x_0, 0) \equiv 0 \text{ pour } t' \in [0, T-k+1] \Rightarrow x_0 = 0$$

D'après la propriété III.1.3.(2), il est clair que la proposition (i) est équivalente à la définition de la $\mathbb{R}^n$ -observabilité. La démonstration de l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) est immédiate et l'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) est une conséquence directe de la linéarité du système.

Utilisons ce lemme pour établir un critère nouveau de $\mathbb{R}^n$ -observabilité.

III.1.6. Théorème

Le système différentiel (2), (4) est $\mathbb{R}^n$ -observable sur l'intervalle $[0, T]$ où $T \in (k-1, k]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, si et seulement si :

$$(28) \quad \bigcap_{i=1}^{nk} \text{Ker}(\tilde{H}_k A_k^{i-1} G_k F_k) = 0$$

Démonstration :

1) Condition suffisante

Supposons le système non $\mathbb{R}^n$ -observable sur $[0, T]$, où $T \in (k-1, k]$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

D'après le lemme III.1.5.(iii), il existe un vecteur x_0 de $\mathbb{R}^n$ non nul tel que :

$$\tilde{H}_k Y_k(t, x_0, 0) \equiv 0 \quad \text{pour } t \in [0, T-k+1]$$

Or, nous avons établi dans la démonstration de 0.2.5., que la solution $Y_k(t, x_0, 0)$ du système ordinaire (13), (11) a pour expression :

$$Y_k(t, x_0, 0) = e^{A_k t} G_k F_k x_0$$

Il ressort de ces deux constatations qu'il existe x_0 non nul tel que :

$$\tilde{H}_k e^{A_k t} G_k F_k x_0 \equiv 0 \quad \text{pour } t \in [0, T-k+1]$$

En différentiant successivement et en donnant à t la valeur 0, nous obtenons que la relation (28) n'est pas vérifiée.

2) Condition nécessaire

Supposons la relation (28) non vérifiée. Il existe donc un vecteur x_0 non nul de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\tilde{H}_k A_k^{i-1} G_k F_k x_0 = 0 \quad i = 1, \dots, nk$$

et donc, d'après le théorème de Cayley-Hamilton :

$$\tilde{H}_k e^{A_k t} G_k F_k x_0 = 0 \quad \text{pour } t \in [0, T-k+1]$$

En utilisant l'expression de $Y_k(t, x_0, 0)$ rappelée ci-dessus, nous voyons que la proposition (iii) du lemme III.1.5. n'est pas vérifiée. Le système n'est par conséquent pas $\mathbb{R}^n$ -observable sur $[0, T]$.

III.1.7. Corollaire

Le système (2), (4) est $\mathbb{R}^n$ -observable sur l'intervalle $[0, T]$, où $T \in (k-1, k]$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, si et seulement si il l'est sur $[0, k]$.

III.1.8. Exemple

Donnons un exemple de système $\mathbb{R}^n$ -observable sur $[0, T]$ où $T \in (1, 2]$. Considérons le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Supposons $T \in (0, 1]$ et calculons :

$$\bigcap_{i=1}^2 \text{Ker}(\hat{H}_1 A_1^{i-1} G_1 F_1) = \text{Ker}([1 \ 1]) \cap \text{Ker}([1 \ 1]).$$

Il est clair que $\bigcap_{i=1}^2 \text{Ker}(\hat{H}_1 A_1^{i-1} G_1 F_1) \neq 0$; et donc le système considéré n'est pas $\mathbb{R}^n$ -observable sur $[0, 1]$.

Supposons à présent $T \in (1, 2]$ et déterminons $\bigcap_{i=1}^4 \text{Ker}(\hat{H}_2 A_2^{i-1} G_2 F_2)$; nous pouvons établir que :

$$e A_2 = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ e & 0 & e & 0 \\ 0 & e & 0 & e \end{bmatrix} \quad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ e & 0 & 1 & 0 \\ 0 & e & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous en déduisons que :

$$\text{Ker}(\hat{H}_2 \ G_2 \ F_2) = \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e & e \end{bmatrix}$$

$$\text{Ker}(\hat{H}_2 \ A_2 \ G_2 \ F_2) = \text{Ker} \begin{bmatrix} 1 & e \\ 1+e & e \end{bmatrix}$$

Ces deux termes suffisent pour voir que :

$$\bigcap_{i=1}^4 \text{Ker}(\hat{H}_2 \ A_2^{i-1} \ G_2 \ F_2) = 0$$

et donc le système est $\mathbb{R}^n$ -observable sur $[0, T]$, avec $T \in (1, 2]$.

III.1.9. Propriétés

1) Le théorème III.1.6. nous permet de définir le sous-espace O_k de $\mathbb{R}^n$ des états $\mathbb{R}^n$ -inobservables du système (2), (4) pour $T \in (k-1, k]$:

$$O_k = \bigcap_{i=1}^{nk} \text{Ker}(\hat{H}_k \ A_k^{i-1} \ G_k \ F_k).$$

2) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Nous avons l'inclusion suivante

$$O_{k+1} \subset O_k$$

En effet, s'il existe un élément non nul x_0 de O_{k+1} , d'après le lemme III.1.5.(iii), on a :

$$\hat{H}_{k+1} \ Y_{k+1}(t, x_0, 0) \equiv 0 \text{ pour } t \in [0, 1].$$

En particulier, l'égalité $\hat{H}_k \ Y_k(t, x_0, 0) \equiv 0$ pour $t \in [0, 1]$ sera vérifiée et donc x_0 appartient également à O_k .

3) La $\mathbb{R}^n$ -observabilité est conservée par des automorphismes de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. En effet, dans un raisonnement identique à celui utilisé dans la démonstration de II.1.9., il est possible d'établir que l'ensemble d'états inobservables $\tilde{O}_k$ obtenu par les automorphismes T et S respectivement de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, est donné par :

$$\tilde{O}_k = \bigcap_{i=1}^{nk} \text{Ker}(\hat{H}_k \ G_k \ A_k^{i-1} \ F_k \ T)$$

ce qui nous permet de conclure.

Comme nous l'avons signalé à plusieurs reprises, au lieu d'utiliser le système ordinaire associé, nous pouvons obtenir d'autres résultats portant sur l'équation caractéristique (8) du système, en nous plaçant dans l'espace des transformées de Laplace. C'est ainsi que nous présenterons en particulier un second critère intéressant de $\mathbb{R}^n$ -observabilité. (Théorème III.1.13.).

III.1.10.

La définition de la $\mathbb{R}^n$ -observabilité nous amène à ne considérer que des sorties $y(t, x_0, 0)$, c'est à dire où la fonction initiale est nulle :

$$y(t, x_0, 0) = \sum_{i=0}^m H_i X(t-i) x_0$$

La transformée de Laplace d'une telle sortie est la matrice polynomiale suivante :

$$H(e^{-\lambda}) \Delta^{-1}(\lambda) x_0$$

où $\Delta(\lambda)$ est la matrice caractéristique du système et $H(e^{-\lambda})$ la matrice polynomiale suivante :

$$H(e^{-\lambda}) = H_0 + e^{-\lambda} H_1 + \dots + e^{-m\lambda} H_m$$

Notons $\Delta(\lambda, \mu)$ et $H(\mu)$ les deux matrices polynomiales :

$$\begin{cases} \Delta(\lambda, \mu) = \lambda I - B(\mu) \\ H(\mu) = H_0 + \mu H_1 + \dots + \mu^m H_m \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{où } B(\mu) = B_0 + \mu B_1 + \dots \\ &\dots + \mu^m B_m \text{ et } \mu \text{ un élément quelconque de } \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Considérons la matrice :

$$H(\mu) \Delta^{-1}(\lambda, \mu) = \frac{H(\mu) \text{ adj } \Delta(\lambda, \mu)}{\det \Delta(\lambda, \mu)}$$

Comme $\text{adj } \Delta(\lambda, \mu) = \sum_{j=0}^{m(n-1)} Q_j(\lambda) \mu^j$, où $Q_j(\lambda)$ appartient à

$\mathbb{R}_{n,n}[\lambda]$ de degré au plus égal à $n-1$, la quantité $H(\mu) \text{Adj } \Delta(\lambda, \mu)$ s'écrit :

$$H(\mu) \text{adj } \Delta(\lambda, \mu) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^{m(n-1)} H_i Q_j(\lambda) \mu^{i+j}$$

En introduisant la matrice de $\mathbb{R}_{p,n}[\lambda]$ suivante :

$$P_\ell[\lambda] = \sum_{\substack{i+j = \ell \\ 0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq m(n-1)}} H_i Q_j(\lambda) \quad \ell = 0, 1, \dots, mn$$

la quantité $H(\mu) \text{adj } \Delta(\lambda, \mu)$ s'exprime encore :

$$H(\mu) \text{adj } \Delta(\lambda, \mu) = \sum_{\ell=0}^{mn} P_\ell(\lambda) \mu^\ell$$

Définissons à présent les matrices polynomiales $P(\lambda)$ et $v(\mu)$ respectivement de dimension $(p \times (mn + 1)n)$ et $((mn + 1)n \times p)$ suivantes :

$$P(\lambda) = [P_0(\lambda) \dots P_{mn}(\lambda)] \quad v(\mu) = \begin{bmatrix} I \\ I\mu \\ \vdots \\ I\mu^{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mu \\ \vdots \\ \mu^{mn} \end{bmatrix} \otimes I$$

où I est la matrice identité d'ordre n .

La matrice $H(\mu) \Delta^{-1}(\lambda, \mu)$ aura finalement pour expression :

$$(29) \quad H(\mu) \Delta^{-1}(\lambda, \mu) = \frac{P(\lambda) v(\mu)}{\det \Delta(\lambda, \mu)}$$

Cette expression étant obtenue, nous nous proposons d'établir, parallèlement aux résultats de Manitius et Triggiani [1978] sur la complète $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité, des critères de $\mathbb{R}^n$ -observabilité.

III.1.11. Proposition

Chacune des conditions suivantes est équivalente à la $\mathbb{R}^n$ -observabilité du système (2), (4) :

(i) Pour un vecteur q de $\mathbb{R}^n$, la relation :

$$H(e^{-\lambda}) \Delta^{-1}(\lambda) q \equiv 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } \det \Delta(\lambda) \neq 0$$

implique $q = 0$

(ii) Pour un vecteur q de $\mathbb{R}^n$, la relation :

$$P(\lambda) v(e^{-\lambda}) q \equiv 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

implique $q = 0$

(iii) Pour un vecteur q de $\mathbb{R}^n$, la relation :

$$P(\lambda) v(\mu) q \equiv 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

implique $q = 0$

(iv) Pour un vecteur q de $\mathbb{R}^n$, la relation :

$$H(\mu) \Delta^{-1}(\lambda, \mu) q \equiv 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ tels que } \det \Delta(\lambda, \mu) \neq 0$$

implique $q = 0$

(v) Pour un vecteur q de $\mathbb{R}^n$, la relation :

$$P_{\ell}(\lambda) q \equiv 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \ell = 0, \dots, m n$$

implique $q = 0$

Preuve

Notons, dans un premier temps, que la $\mathbb{R}^n$ -observabilité du système (2), (4) n'est pas vérifiée si et seulement si il existe un vecteur x_0 non nul de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$y(t, x_0, 0) \equiv 0 \quad \forall t \geq 0$$

ou encore d'après III.1.10., tel que :

$$H(e^{-\lambda}) \Delta^{-1}(\lambda) x_0 \equiv 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } \det \Delta(\lambda) \neq 0.$$

La condition (i) est donc équivalente à la $\mathbb{R}^n$ -observabilité du système; reste à prouver l'équivalence des conditions.

L'ensemble des racines de l'équation caractéristique (8), ainsi que l'ensemble des couples $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\det \Delta(\lambda, \mu) = 0$, sont tous deux dénombrables. Moyennant l'expression (29), nous en déduisons les équivalences (i) $\Leftrightarrow$ (ii) et (iii) $\Leftrightarrow$ (iv).

L'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) vient de la remarque suivante, due à Manitius et Triggiani [1978, remarque 4.1.]: pour un polynôme quelconque $p(\lambda, \mu)$, la relation

$$p(\lambda, e^{-\lambda}) = 0 \quad \text{pour } \lambda \text{ tel que } \Re \lambda \geq \alpha \text{ (avec } \alpha \text{ arbitraire)}$$

implique que

$$p(\lambda, \mu) = 0 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

L'implication (iii) $\Rightarrow$ (v) étant immédiate, la démonstration de (v) $\Rightarrow$ (iii) achèvera également la démonstration de notre proposition. Supposons la condition (iii) non vérifiée. Si nous considérons en particulier $(mn+1)$ valeurs distinctes $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{mn}$, alors, pour un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, l'expression suivante sera nulle :

$$P(\lambda) [v(\mu_0)q \dots v(\mu_{mn})q] = [P_0(\lambda)q \dots P_{mn}(\lambda)q] \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \mu_0 & \dots & \mu_{mn} \\ \vdots & & \vdots \\ \mu_0^{mn} & \dots & \mu_{mn}^{mn} \end{bmatrix} \otimes I$$

Comme la matrice de Vandermonde est régulière par $\mu_0, \dots, \mu_{mn}$ distincts et que le produit de Kronecker de deux matrices régulières est une matrice régulière, nous voyons que :

$$[P_0(\lambda)q \dots P_{mn}(\lambda)q] \equiv 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

et donc la condition (v) n'est pas vérifiée.

La proposition précédente nous permet d'obtenir un autre critère intéressant de $\mathbb{R}^n$ -observabilité. Mais établissons d'abord dans le lemme suivant une décomposition de la matrice polynomiale

$\Delta^{-1}(\lambda, \mu)$ qui nous sera nécessaire pour sa démonstration.

III.1.12. Lemme

La matrice polynomiale $\Delta^{-1}(\lambda, \mu)$ peut s'écrire :

$$\Delta^{-1}(\lambda, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k(\mu)}{\lambda^{k+1}}$$

Démonstration

Pour $\lambda \neq 0$, posons $\tilde{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$. Nous aurons dans ce cas $\Delta^{-1}(\lambda, \mu) = \tilde{\lambda} [I - \tilde{\lambda} B(\mu)]^{-1}$. Notons $\tilde{\Delta}(\tilde{\lambda}, \mu) = [I - \tilde{\lambda} B(\mu)]$. Quel que soit μ_1 , on a $\det \tilde{\Delta}(0, \mu_1) \neq 0$. Fixons μ ; pour $\Re \lambda$ suffisamment grand, nous aurons :

$$\tilde{\Delta}^{-1}(\tilde{\lambda}, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}^k}{k!} \left(\frac{d^k}{d\tilde{\lambda}^k} \tilde{\Delta}^{-1}(\tilde{\lambda}, \mu) \right) \Bigg|_{\tilde{\lambda}=0}$$

$$\text{Calculons } \frac{d}{d\tilde{\lambda}} \tilde{\Delta}^{-1}(\tilde{\lambda}, \mu) \Bigg|_{\tilde{\lambda}=0} = - \left(\tilde{\Delta}^{-1}(\tilde{\lambda}, \mu) \times \frac{d\tilde{\Delta}(\tilde{\lambda}, \mu)}{d\tilde{\lambda}} \times \tilde{\Delta}^{-1}(\tilde{\lambda}, \mu) \right) \Bigg|_{\tilde{\lambda}=0}$$

$$\text{Or, } \tilde{\Delta}(\tilde{\lambda}, \mu) = I - \tilde{\lambda} B_0 - \tilde{\lambda} \mu B_1 - \dots - \tilde{\lambda} \mu^m B_m$$

Ce qui nous permet d'obtenir :

$$\tilde{\Delta}^{-1}(\tilde{\lambda}, \mu) \Bigg|_{\tilde{\lambda}=0} = I, \quad \frac{d\tilde{\Delta}(\tilde{\lambda}, \mu)}{d\tilde{\lambda}} \Bigg|_{\tilde{\lambda}=0} = -[B(\mu)]$$

et par conséquent, il en résulte que, pour μ fixé :

$$\frac{d}{d\tilde{\lambda}} \tilde{\Delta}^{-1}(\tilde{\lambda}, \mu) \Bigg|_{\tilde{\lambda}=0} = B(\mu)$$

En raisonnant de même, par induction, on peut établir que :

$$\frac{d^k}{d\tilde{\lambda}^k} \tilde{\Delta}^{-1}(\tilde{\lambda}, \mu) \Bigg|_{\tilde{\lambda}=0} = k! B^k(\mu)$$

Donc,

$$\tilde{\Delta}^{-1}(\tilde{\lambda}, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\lambda}^k B^k(\mu)$$

Finalement en tenant compte du fait que $\Delta^{-1}(\lambda, \mu) = \tilde{\lambda} \tilde{\Delta}^{-1}(\tilde{\lambda}, \mu)$, nous obtenons la décomposition annoncée.

III.1.13. Théorème

Le système (2), (4) est $\mathbb{R}^n$ -observable si et seulement si, pour tout vecteur q de $\mathbb{R}^n$, la relation :

$$H(\mu) B^k(\mu) q \equiv 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C}, \quad k=0, \dots, n-1$$

implique $q = 0$.

Démonstration

Supposons le système (2), (4) non $\mathbb{R}^n$ -observable. Il existe donc un vecteur q non nul de $\mathbb{R}^n$ tel que la condition (iv) de III.1.11. n'est pas vérifiée, et donc moyennant le lemme III.1.12., tel que :

$$H(\mu) B^k(\mu) q \equiv 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad k = 0, 1, \dots$$

La condition de notre théorème n'est par conséquent pas vérifiée.

Réciproquement, supposons l'existence d'un vecteur q non nul de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$H(\mu) B^k(\mu) q \equiv 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{C}$$

Le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme III.1.12. nous permettent d'affirmer que la condition (iv) de III.1.11. n'est pas vérifiée, et par conséquent que le système (2), (4) n'est pas $\mathbb{R}^n$ -observable.

III.1.14. Exemple

Vérifions à l'aide de ce théorème que le système donné en III.1.8. est $\mathbb{R}^n$ -observable. Nous aurons :

$$B(\mu) = \begin{bmatrix} 1 + \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H(\mu) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Soit un vecteur $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\begin{cases} H(\mu) q \equiv 0 \\ H(\mu) B(\mu) q \equiv 0 \end{cases} \quad \forall \mu \in \mathbb{C}$$

Ce qui s'exprime encore :

$$\begin{cases} q_1 + q_2 \equiv 0 \\ q_1 + \mu q_1 + q_2 \equiv 0 \end{cases} \quad \forall \mu \in \mathbb{C}$$

Il est clair que le vecteur q doit être nul, et donc le système considéré est $\mathbb{R}^n$ -observable.

III.1.15. Remarques

1) Au lieu de développer $\text{adj } \Delta(\lambda, \mu)$ par rapport à la variable μ , comme nous l'avons fait dans III.1.10., on peut obtenir un développement par rapport à λ et ainsi établir d'autres critères de $\mathbb{R}^n$ -observabilité que nous ne donnerons pas ici.

2) Parallèlement à l'étude sur la contrôlabilité, il est possible d'introduire la notion purement algébrique de "faible observabilité": le système (2), (4) est "faiblement observable" si :

$$\text{rang}_{\mathbb{C}} {}^t N(\mu) = n$$

où $N(\mu)$ est la matrice polynomiale $[{}^t H(\mu) \ {}^t B(\mu) {}^t H(\mu) \dots {}^t B(\mu)^{n-1} {}^t H(\mu)]$

III.2. Le système différentiel dual et les relations de dualité

III.2.1.

Pour des raisons de commodités que nous avons déjà signalées dans l'introduction de ce chapitre, nous considérerons dans ce paragraphe une sortie ne comprenant pas de retards (i.e. $H_1 = 0$ $i = 1, \dots, m$.)

Pour leurs études sur la dualité, Delfour et Mitter [1972] ont considéré des équations différentielles héréditaires. Moyennant quelques substitutions appropriées dans leurs formules, nous pré-

senterons ici le système dual "contrôlé et observé" qu'ils ont introduit. Ce système différentiel que nous nommerons dual, est défini sur un certain intervalle $[0, k]$, où nous supposerons, pour simplifier l'exposé de ce paragraphe, k entier, et ceci sans que cela ne restreigne les résultats obtenus. Ce système est donné par les relations suivantes :

$$\begin{cases} (30) & z'(t) = - \sum_{i=0}^m {}^tB_i z(t+i) + {}^tH_0 \tilde{u}(t) & \text{pour } t \in [0, k] \\ & & \text{tel que } t+i \leq k \\ (31) & \tilde{y}(t) = {}^tC z(t) \end{cases}$$

avec

$$(32) \quad \begin{cases} z(t+i) = 0 & \text{pour } t \in [0, k] \text{ tel que } t+i > k \\ z(k) = z_k \end{cases}$$

Dans ce qui précède, $z(t)$, $\tilde{u}(t)$ et $\tilde{y}(t)$ sont respectivement des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^r$. Les matrices B_i ($i=0, \dots, m$), H_0 et C ont été définies dans le chapitre 0. La fonction $\tilde{u}(\cdot)$ est dite contrôle admissible, si elle appartient à l'espace des fonctions de carré intégrable L^2 sur un intervalle fini à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

Pour tout contrôle admissible $\tilde{u}(t)$, $t \in [T, k]$, le système différentiel (30), (32) a une solution unique absolument continue sur $[T, k]$. La solution $z(T, k, z_k, \tilde{u})$ de ce système à un instant T , pour la condition initiale (32) et le contrôle admissible $\tilde{u}$, est donnée par :

$$(33) \quad z(T, k, z_k, \tilde{u}) = Z(k-T) z_k + \int_T^k Z(s-T) {}^tH_0 \tilde{u}(s) ds$$

où la matrice fondamentale $Z(t) = {}^tX(t)$.

III.2.2. Note

Le système dual est régi par une équation différentielle linéaire à arguments avancés. Si nous avons considéré une sortie comportant des retards, il apparaîtrait dans l'équation duale (30) des contrôles à arguments avancés. Signalons que les résultats que nous allons établir, s'étendent aisément à de tels systèmes, et que c'est

pour ne pas trop en alourdir la présentation que nous avons fait la restriction signalée plus haut.

III.2.3.

Comme pour les solutions du système (1), nous nous retrouvons devant un problème de manipulation des solutions (33). Nous procéderons donc comme dans le chapitre 0 et introduirons un système différentiel ordinaire associé à ce système dual. Mais nous le choisirons de telle façon que la dualité se retrouve également au niveau des systèmes ordinaires associés.

Pour une solution $z(t)$ du système (30), (32) et un contrôle admissible $\tilde{u}(t)$, introduisons les transformations suivantes :

$$(34) \quad \tilde{z}_i(t) = z(t-i+1) \quad \text{pour } t \in [k-1, k] \quad i=1, \dots, k$$

$$(35) \quad \tilde{u}_i(t) = \tilde{u}(t-i+1)$$

Notons $\tilde{z}_k(t)$ et $\tilde{v}(t)$ les vecteurs respectivement de $\mathbb{R}^{nk}$ et $\mathbb{R}^{pk}$:

$$\tilde{z}_k(t) = \begin{bmatrix} \tilde{z}_k(t) \\ \vdots \\ \tilde{z}_1(t) \end{bmatrix} \quad \tilde{v}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{u}_k(t) \\ \vdots \\ \tilde{u}_1(t) \end{bmatrix}$$

Pour $t \in [k-1, k]$, $\tilde{z}_k(t)$ vérifie le système :

$$(36) \quad \frac{d \tilde{z}_k(t)}{dt} = - {}^t A_k \tilde{z}_k(t) + {}^t \hat{H}_k \tilde{v}(t)$$

où les matrices A_k et $\hat{H}_k$ sont celles données dans les chapitres précédents, avec pourtant $H_i = 0$, $i = 1, \dots, m$.

Par ailleurs, la continuité des solutions (33) nous donne :

$$\tilde{z}_{i+1}(k) = \tilde{z}_i(k-1) \quad i = 1, \dots, k-1$$

Cette condition peut s'exprimer en fonction du système (36) par

$$(37) \quad \tilde{z}_k(k) - {}^t J_k \tilde{z}_k(k-1) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_k \end{bmatrix}$$

III.2.4. Remarques

- 1) On peut vérifier aisément qu'il y a une correspondance biunivoque entre les solutions du système (30), (32) et celles du système (36), (37).
- 2) Grâce aux changements de fonctions (34) et (35) un peu particuliers, nous avons obtenu comme système ordinaire associé au système dual (30), le système dual du système ordinaire associé au système de départ (1), (3), où nous supposons la fonction initiale φ nulle.

Un certain nombre de questions, par exemple la $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité et la $\mathbb{R}^n$ -observabilité du système dual (30), (31), peuvent être étudiées facilement à l'aide du système associé (36), (37) que nous avons introduit. Nous présenterons rapidement dans la suite quelques résultats concernant ces questions, sans toutefois en donner les démonstrations; les raisonnements utilisés ici sont en effet en tout point identiques à ceux employés précédemment dans l'étude du système à retards (1), (4).

III.2.5. Ensemble d'accessibilité du système différentiel dual

- 1) Les solutions du système (36) sont pour $t \in [k-1, k]$:

$$\tilde{z}_k(t) = e^{t_{A_k}(k-t)} \tilde{z}_k(k) + \int_k^t e^{t_{A_k}(s-t)} t_{H_k} \tilde{V}(s) ds$$

Nous en déduisons une expression de la solution $z(T, k, z_k, \tilde{u})$, par projection sur la $j^{\text{ème}}$ composante :

$$z(T, k, z_k, \tilde{u}) = L_j \tilde{z}_k(T+k-j) \quad \text{pour } t \in [j-1, j] \text{ avec } 0 < j \leq k$$

où $\tilde{z}_k(t)$ doit vérifier la condition aux frontières (37).

- 2) La matrice fondamentale $Z(t)$ a pour expression, pour $t \in [j-1, j]$ où $0 < j \leq k$:

$$Z(t) = L_{k-j+1} e^{t_{A_k}(t-j+1)} t_{G_k} t_{E_k}$$

On peut vérifier directement avec l'expression de $X(t)$ obtenue dans 0.2.5., que

$$Z(t) = {}^tX(t)$$

3) Introduisons l'ensemble d'états accessibles :

$$\tilde{\mathcal{R}}_0(T) = \left\{ z \in \mathbb{R}^n \mid z = z(T, k, 0, \tilde{u}), \tilde{u} \in L^2((T, k); \mathbb{R}^p) \right\}$$

Dans une démarche similaire à celle du paragraphe I.2., nous pouvons obtenir une caractérisation algébrique de cet ensemble : pour $T \in [j-1, j)$, où j est un entier appartenant à $]0, k]$, on a :

$$(40) \quad \tilde{\mathcal{R}}_0(T) = L_j \quad {}^tG_k < {}^tA_k \mid {}^t\hat{\mathcal{H}}_k >$$

III.2.6. Complète $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité du système dual

Pour un système à arguments avancés de la forme (30), on peut également distinguer la contrôlabilité fonctionnelle et la $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité. On voit de façon immédiate que le système (30) est complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable à $t = T$ si et seulement si $\tilde{\mathcal{R}}_0(T) = \mathbb{R}^n$. Moyennant l'expression (40), la complète $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité à l'instant $T \in [j-1, j)$ où $0 < j \leq k$, est équivalente à l'égalité :

$$L_j \quad {}^tG_k < {}^tA_k \mid {}^t\hat{\mathcal{H}}_k > = \mathbb{R}^n$$

III.2.7. $\mathbb{R}^n$ -observabilité du système dual

Soit $T \in [k-j, k-j+1)$ avec j un entier tel que $0 < j \leq k$. Pour l'étude de la $\mathbb{R}^n$ -observabilité sur l'intervalle $[T, k]$, considérons le système

$$\frac{d \tilde{z}_j(t)}{dt} = - {}^tA_j \tilde{z}_j(t) + {}^t\hat{H}_j \tilde{v}(t) \quad t \in [k-1, k]$$

$$\tilde{z}_j(k) - {}^tJ_j \tilde{z}_j(k-1) = {}^tE_j z_k$$

Nous y ajouterons l'équation de sortie suivante :

$$\tilde{Y}_j(t) = {}^tD_j \tilde{Z}_j(t)$$

$$\text{où } \tilde{Y}_j(t) \text{ est le vecteur de } \mathbb{R}^{r_j} \begin{bmatrix} \tilde{y}_j(t) \\ \vdots \\ \tilde{y}_1(t) \end{bmatrix}$$

avec $\tilde{y}_i(t) = \tilde{y}(t-i+1)$,

pour $t \in [k-1, k]$ et $i = 1, \dots, j$

En raisonnant comme nous l'avons fait dans le paragraphe III.1., il est possible d'établir que le système différentiel (30), (31) est $\mathbb{R}^n$ -observable sur l'intervalle $[T, k]$, où $T \in [k-j, k-j+1)$ avec j entier tel que $0 < j \leq k$, si et seulement si :

$$\bigcap_{i=1}^{nj} \text{Ker} \begin{pmatrix} {}^tD_j & {}^tA_j^{i-1} & {}^tG_j & {}^tE_j \end{pmatrix} = 0$$

III.2.8. Conséquences

1) On retrouve la dualité établie par Delfour et Mitter [1972], à savoir : le système (1), (4) est $\mathbb{R}^n$ -contrôlable à l'instant T (respectivement $\mathbb{R}^n$ -observable sur $[0, T]$) si et seulement si le système (30), (31) est $\mathbb{R}^n$ -observable sur $[0, T]$ (respectivement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable à $T=0$). En effet, cette propriété se déduit des constatations suivantes :

$$* \quad \left[E_k \ G_k < A_k | \mathcal{D}_k > \right]^\perp = \bigcap_{i=1}^{nk} \text{Ker} \begin{pmatrix} {}^tD_k & {}^tA_k^{i-1} & {}^tG_k & {}^tE_k \end{pmatrix}$$

$$* \quad \left[\bigcap_{i=1}^{nk} \text{Ker} (\hat{H}_k \ A_k^{i-1} \ G_k \ F_k) \right]^\perp = {}^tF_k \ {}^tG_k < {}^tA_k | {}^t\hat{\mathcal{H}}_k >$$

2) Notons que, en utilisant les résultats de III.2.6., on peut obtenir de façon identique au théorème II.1.17., une décomposition canonique pour les systèmes de la forme (30) non complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlables.

Par conséquent, en raison de la dualité signalée ci-dessus, nous en déduisons que les systèmes à retards (1), (4), non $\mathbb{R}^n$ -observables sont également décomposables en une "composante $\mathbb{R}^n$ -observable" et une "composante non $\mathbb{R}^n$ -observable".

3) Par dualité, on peut de même établir une décomposition des systèmes scalaires à retards (1), (4) faiblement inobservables, dont la définition a été donnée en III.1.15.(2).

CHAPITRE IV - Réalisation

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons au problème de la réalisation d'une relation "entrée-sortie" : cela consiste à trouver, à partir du comportement d'un système physique connu par ses "causes" et ses "effets" et par le fait qu'il est régi par des équations à retards (1), (4), un système d'équations (1), (4) de dimension minimale se comportant de façon identique du point de vue des entrées et des sorties que ce système physique.

Nous avons vu au chapitre II qu'en introduisant un opérateur de retard, le système différentiel à retards (1), (4) se comporte comme un système défini sur l'anneau $\mathbb{R}[\mu]$ des polynômes en μ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Un certain nombre d'auteurs ont ainsi étudié récemment le problème de la réalisation pour une classe plus large de systèmes différentiels définis sur un anneau commutatif (par exemple sur l'anneau des polynômes à plusieurs indéterminées), incluant entre autres les systèmes différentiels à retards. Citons particulièrement les travaux de Kamen [1975], Morse [1976] et Sontag ([1976], [1977], [1978]).

Dans notre étude nous utiliserons une approche plus directe du problème de la réalisation; c'est ainsi que dans un premier paragraphe nous examinerons quelques questions spécifiques des systèmes à retards, non encore abordées jusqu'à présent : nous déterminerons en particulier la matrice impulsionnelle de tels systèmes (Proposition IV.1.2.).

Dans le second paragraphe, nous nous intéresserons à la construction d'une réalisation et au problème de la minimalité. Cliff et Burns [1978] dans un papier récent ayant obtenu une construction analogue à la nôtre, nous nous contenterons de présenter rapidement cette construction. Nous donnerons ensuite une condition nécessaire de minimalité (Théorème IV.2.6.) ainsi qu'un critère de minimalité pour la classe des réalisations scalaires (i.e. $p=r=1$) (Théorème IV.2.11.).

IV.1. Matrice impulsionnelle et matrice de transfert

La problème de la réalisation, que nous définissons dans le paragraphe suivant, nécessite la donnée d'une relation "entrée-sortie". Parallèlement au cas des équations différentielles ordinaires, nous considérerons la commande u comme variable d'entrée et la fonction d'observation y comme variable de sortie. Pour une double condition initiale (x_0, φ) nulle, la sortie $y(t)$ du système à retards (1), (4) défini en 0.1.1., est donnée par :

$$(41) \quad y(t) = \sum_{i=0}^m \int_0^{t-i} H_i X(t-i-s) C u(s) ds.$$

IV.1.1. Définitions

1) Considérons la commande suivante :

$$u_j^\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} e_j & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & \varepsilon < t \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{où } e_j \text{ est le } j^{\text{ème}} \text{ vecteur} \\ \text{de base de } \mathbb{R}^r \end{array}$$

Nous appellerons $j^{\text{ème}}$ impulsion unitaire à l'origine la limite $u_j^0(t)$ de $u_j^\varepsilon(t)$ quand ε tend vers 0.

2) Nous nommerons matrice impulsionnelle l'application $W(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$ déterminée expérimentalement en appliquant successivement les r impulsions unitaires à l'origine et en observant les sorties (41) correspondantes.

Utilisons cette "définition" pour établir explicitement la matrice impulsionnelle :

IV.1.2. Proposition

La matrice impulsionnelle $W(.)$ est l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$ définie, pour $T \in [k-1, k)$ où $k \in \mathbb{N}^*$, par

$$W(T) = \sum_{i=0}^{j(k)} H_i X(T-i) C$$

où $j(k) = \inf(k, m)$.

Preuve

Nous examinerons le cas où $k \gg m$; le cas où $k < m$ s'effectuera de façon identique. Considérons les r commandes $u_j^\varepsilon(.)$ ($j=1, \dots, r$) définies ci-dessus. Comme nous faisons tendre ε vers 0, nous pouvons supposer que :

$$0 \leq \varepsilon \leq T-k+1$$

La sortie $y_j^\varepsilon(T)$ relative à la commande $u_j^\varepsilon(T)$ aura pour expression :

$$y_j^\varepsilon(T) = \sum_{i=0}^m \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon H_i X(T-i-s) C e_j ds$$

Notons que $T-s \in [T-\varepsilon, T]$. Comme par ailleurs nous avons supposé $\varepsilon \leq T-k+1$, il est clair que : $T-s \in [k-1, k]$. En utilisant l'expression (16) de la matrice fondamentale (cf. 0.2.5.), la sortie $y_j^\varepsilon(T)$ s'écrit encore :

$$y_j^\varepsilon(T) = \sum_{i=0}^m \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon H_i E_{k-i} G_{k-i} e^{A_{k-i}(T-i-s-k+1)} F_{k-i} C e_j ds$$

La sortie $y_j(T)$ correspondant à l'impulsion unitaire est donc :

$$\begin{aligned} y_j(T) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_j^\varepsilon(T) \\ &= \sum_{i=0}^m H_i E_{k-i} G_{k-i} e^{A_{k-i}(T-i-k+1)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon e^{-s A_{k-i}} F_{k-i} C e_j ds \end{aligned}$$

Finalement la sortie $y_j(T)$ s'exprime :

$$y_j(T) = \sum_{i=0}^m H_i E_{k-i} G_{k-i} e^{A_{k-i}(T-i-k+1)} F_{k-i} C e_j$$

C'est-à-dire, en utilisant la formule (16) une seconde fois :

$$y_j(T) = \sum_{i=0}^m H_i X(T-i) C e_j$$

La sortie $y_j(T)$ nous donne la $j^{\text{ème}}$ colonne de $W(T)$; en appliquant ainsi les r impulsions de base, nous obtenons bien l'expression donnée dans la proposition.

IV.1.3. Remarque

La matrice $W(t)$ détermine totalement la relation d' "entrée-sortie" considérée du système, pour une condition initiale (x_0, φ) nulle. Pour une commande donnée $u(t)$, en utilisant le fait que $X(t) = 0$ pour $t < 0$, la sortie $y(t)$ donnée par (41) s'écrit :

$$y(t) = \int_0^t W(t-s) C u(s) ds$$

Etant donné le produit de convolution rencontré dans la remarque précédente, on est amené à travailler dans l'espace des transformées de Laplace. Nous noterons :

$$\mathcal{L}[f](z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$$

IV.1.4. Proposition

La relation d' "entrée-sortie" (41) s'écrit dans l'espace des transformées de Laplace :

$$\mathcal{L}[y](\lambda) = \mathcal{L}[W](\lambda) \times \mathcal{L}[u](\lambda)$$

Démonstration

La transformée de Laplace de la sortie (41) s'écrit :

$$\mathcal{L}[y](\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\sum_{i=0}^m \int_0^{t-i} H_i X(t-i-s) C u(s) ds \right) dt$$

Comme $X(t-i-s) = 0$ pour $t-i < s$, elle s'exprime encore :

$$\mathcal{L}[y](\lambda) = \sum_{i=0}^m \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_0^\infty H_i X(t-i-s) C u(s) ds \right) dt \right)$$

En utilisant une nouvelle fois le fait que $X(t-i-s) = 0$ pour $t < s+i$ mais cette fois-ci dans la première intégrale, il vient que :

$$\mathcal{L}[y](\lambda) = \sum_{i=0}^m \left(\int_{s+i}^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_0^\infty H_i X(t-i-s) C u(s) ds \right) dt \right)$$

Effectuons à présent le changement de variable suivant : $T = t - i - s$.
Nous obtenons :

$$\mathcal{L}[Y](\lambda) = \left[\sum_{i=0}^m e^{-\lambda i} \left(\int_0^{\infty} e^{-\lambda T} H_i X(T) C dT \right) \right] \times \left[\int_0^{\infty} e^{-\lambda s} u(s) ds \right]$$

D'après IV.1.2., nous avons $\mathcal{L}[W](\lambda) = \sum_{i=0}^m e^{-\lambda i} H_i \mathcal{L}[X](\lambda) \cdot C$

Par conséquent, l'égalité ci-dessus devient :

$$\mathcal{L}[Y](\lambda) = \mathcal{L}[W](\lambda) \times \mathcal{L}[u](\lambda).$$

La nouvelle relation "entrée-sortie" obtenue dans cette proposition possède un avantage d'ordre pratique par rapport à la relation (41) : en effet, si on considère une commande $u(t)$ définie sur $\mathbb{R}_+$, la transformée de Laplace de l'observation correspondante est obtenue aisément par la multiplication de la transformée de Laplace de la commande par la transformée de Laplace de $W(t)$. Parallèlement à la terminologie des systèmes ordinaires, la transformée de Laplace de la matrice impulsionnelle est appelée fonction de transfert. Nous venons de voir que :

$$\mathcal{L}[W](\lambda) = \sum_{i=0}^m e^{-\lambda i} H_i \mathcal{L}[X](\lambda) \times C$$

Or, nous avons vu dans 0.1.4. que :

$$\mathcal{L}[X](\lambda) = \Delta^{-1}(\lambda).$$

La fonction de transfert que nous noterons $G(\lambda)$, a donc pour expression :

$$(42) \quad G(\lambda) = H(e^{-\lambda}) [\lambda I - B(e^{-\lambda})]^{-1} C$$

IV.1.5. Remarques

1) L'expression (42) de la fonction de transfert semble proche formellement de la fonction de transfert obtenue dans l'étude de la réalisation des systèmes ordinaires. Mais en utilisant la propriété algébrique signalée par Manitius et Triggiani [1978], que nous avons

rappelée dans la démonstration III.1.11. nous voyons en fait que notre matrice de transfert $G(\lambda)$ se comporte pratiquement comme la matrice polynomiale en deux indéterminées $G(\lambda, \mu)$ suivante :

$$(43) \quad G(\lambda, \mu) = H(\mu) [\lambda I - B(\mu)]^{-1} C$$

où les variables λ et μ sont indépendantes, et $B(\mu) = B_0 + \mu B_1 + \dots + \mu^m B_m$. L'approche de telles matrices est relativement peu aisée : il n'est que de noter, par exemple, que les résultats d'équivalence pour de telles matrices ne semblent pas pouvoir être obtenus à l'aide de la théorie des diviseurs élémentaires comme dans le cas de matrices à une indéterminée. Cependant, la théorie des modules, malgré le problème de l'existence des bases, permet une approche intéressante.

2) Notons qu'une transformation linéaire de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\bar{x} = Tx$ laisse la matrice de transfert $G(\lambda)$ invariante.

IV.2. Existence et problème de la minimalité d'une réalisation

Considérons un système physique à r grandeurs d'entrée et p grandeurs de sortie, régi par un système à retards (1), (4) défini en 0.1.1. Comme nous l'avons vu précédemment, nous pouvons obtenir sur lui un certain nombre de renseignements en nous livrant à l'expérience suivante : si nous appliquons successivement les r commandes définies par :

$$u_i(t) = \begin{cases} e_i & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, r$$

la matrice impulsionnelle $W(t)$ pourra être déterminée. Il est également possible en se plaçant dans l'espace des transformées de Laplace d'établir directement la matrice de transfert $G(\lambda)$.

Une relation "entrée-sortie" étant ainsi donnée, le problème de la réalisation consiste à construire un système à retards de la forme (1), (4) qui la réalise de telle façon que l'espace d'état $\mathbb{R}^n$ soit de dimension minimale.

L'utilisation de la matrice impulsionnelle comme relation "entrée-sortie" semblant moins facile, nous lui préférons la matrice de transfert dans la suite de notre travail.

Intéressons-nous au problème de l'existence d'une réalisation : pour l'étude de cette question, nous avons construit explicitement une réalisation. Une publication très récente de Cliff et Burns [1978], parue lors de la rédaction de notre travail donne une construction analogue à celle que nous avons obtenue; nous ne développerons par conséquent pas longuement cette question et nous nous contenterons de présenter rapidement cette construction.

Nous considérerons une matrice de transfert de la forme :

$$(44) \quad G(\lambda) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} T_{ij} \lambda^{n-j-1} \right) e^{-i\lambda}}{\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=1}^n b_{ij} \lambda^{n-j} \right) e^{-i\lambda}} = \frac{T(\lambda)}{Q(\lambda)}$$

où T_{ij} sont des matrices réelles de dimension $p \times r$,

et b_{ij} sont des scalaires réels avec $b_{00} = 1$

Cette matrice de transfert est celle d'un système différentiel ne comportant pas de retard ni dans le contrôle, ni dans la sortie, et un seul retard dans la variable d'état. (i.e. $B_i = 0$ $i=2, \dots, m$ et $H_i = 0$, $i=1, \dots, m$). Elle peut être obtenue au moyen d'une généralisation de l'algorithme de Fadeev (voir Gantmacher [1957]).

Formulons à présent le problème de l'existence d'une réalisation, que nous considérons.

IV.2.1. Problème

Etant donné une matrice de transfert $G(\lambda)$ de la forme (44), trouver des matrices ($p \times n$) H_i ($i=0, \dots, m$), des matrices ($n \times n$) B_i ($i=0, \dots, m$) et une matrice ($n \times r$) C telles que la matrice de transfert du système correspondant (1), (4) soit la matrice $G(\lambda)$.

Examinons dans un premier temps le cas où la matrice de transfert est scalaire (i.e. $p=r=1$); nous étendrons ensuite les résultats obtenus au cas général où p et r sont des entiers quelconques.

Soit une matrice de transfert $G(\lambda)$ scalaire : les matrices T_{ij} seront réduites à des scalaires que nous noterons pour l'occasion t_{ij} . Définissons les matrices $\tilde{B}_i$, $\tilde{H}_i$ et $\tilde{C}$ suivantes :

Les matrices $\tilde{B}_i$ de dimension $(n \times n)$ sont données par :

$$\tilde{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -b_{0n} & -b_{0n-1} & \dots & -b_{01} \end{bmatrix} \quad \tilde{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -b_{in} & \dots & -b_{ii} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$

Les matrices $\tilde{H}_i$ ($i=0, 1, \dots, n-1$) de dimension $(1 \times n)$ sont :

$$\tilde{H}_i = \begin{bmatrix} t_{in-1} & t_{in-2} & \dots & t_{ii} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

et la matrice colonne $\tilde{C}$ de dimension $(n \times 1)$ est définie par

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

IV.2.2. Proposition (Cliff et Burns [1978]).

Pour une matrice de transfert scalaire $G(\lambda)$ de la forme (44) et pour les matrices $(\tilde{B}_0, \tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n, \tilde{C}, \tilde{H}_0, \tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_{n-1})$ définies ci-dessus le système différentiel de la forme (1), (4), obtenu à partir de ces matrices, en supposant $m=n$ et $\tilde{H}_n=0$, est une réalisation de $G(\lambda)$.

IV.2.3. Remarques

1) La réalisation scalaire que nous avons présentée est de dimension n , où n est le degré du dénominateur $Q(\lambda)$ de la matrice de transfert. Rappelons à ce propos que pour un polynôme de la forme

$$T(\lambda, z) = \sum_{i=0}^n T_i(\lambda) e^{iz}$$

le degré de $T(\lambda, z)$ est défini par :

$$\deg T(\lambda, z) = \max \{i + \deg T_i\}$$

2) Cette réalisation est complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable pour tout T positif (voir par exemple Manitius [1976]).

3) La méthode de construction d'une réalisation, exposée ci-dessus peut être étendue à une classe plus large de matrices de transfert de la forme :

$$\tilde{G}(\lambda) = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} t_{ij} \lambda^{n-j-1} \right) e^{-i\lambda}}{\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n b_{ij} \lambda^{n-j} \right) e^{-i\lambda}}$$

avec les mêmes hypothèses sur t_{ij} et b_{ij} que précédemment.

Il est également possible de construire des réalisations présentant des retards dans le contrôle et pas dans la sortie (voir Lee [1976]). D'autres problèmes de réalisation ont été considérés, par Kamen [1975] et Sontag [1976] par exemple, qui ont employé des méthodes purement algébriques basées sur la théorie des modules pour leur résolution.

4) Cliff et Burns [1978] ont également établi une réalisation ne comportant pas de retards dans le contrôle et la sortie, et un seul retard dans la variable d'état. C'est donc une construction intéressante bien que complexe et moins "économique" puisque sa dimension est $\frac{n(n+1)}{2}$

IV.2.4. Généralisation

Considérons à présent une matrice de transfert $G(\lambda)$ définie par (44) avec p et r entiers quelconques. Une réalisation sera donnée par les matrices suivantes :

$$B_i = \begin{bmatrix} B_i^{11} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & B_i^{1r} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & B_i^{p1} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & B_i^{pr} \end{bmatrix} \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$H_i = \begin{bmatrix} H_i^{11} \dots H_i^{1r} & 0 \dots 0 & \dots & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & H_i^{21} & H_i^{2r} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 \dots 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & \dots & H_i^{p1} \dots H_i^{pr} \end{bmatrix} \quad i : 0, 1, \dots, n-1$$

$$C = \begin{bmatrix} C^{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & C^{1r} \\ C^{21} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & C^{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C^{p1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & C^{pr} \end{bmatrix}$$

où les matrices $B_i^{k\ell}$ ($i=0, \dots, n$), $H_i^{k\ell}$ ($i=0, \dots, n-1$) et $C^{k\ell}$ sont celles que nous avons obtenues comme réalisation scalaire de l'élément $g_{k\ell}(\lambda)$ de la matrice $G(\lambda)$.

Dans le premier paragraphe nous avons associé à tout système $[H_i, B_i, C]$ ($i=0, \dots, m$), du type (1), (4) une matrice de transfert $G(\lambda)$. Nous venons de présenter la construction d'une réalisation de la forme (1), (4) à partir d'une matrice de transfert $G(\lambda)$ donnée par (44). Examinons à présent le problème de la minimalité d'une réalisation.

IV.2.5. Définitions

1) Considérons la réalisation $[H_i, B_i, C]$ ($i=0, \dots, m$) de la matrice de transfert $G(\lambda)$. La dimension de la réalisation est la dimension des matrices carrées B_i .

Une réalisation est minimale si elle est de dimension minimum.

2) Une réalisation est $\mathbb{R}^n$ -canonique si elle est complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable et $\mathbb{R}^n$ -observable.

Une réalisation est faiblement canonique si elle est faiblement contrôlable et faiblement observable (cf. II.1.11. et III.1.15.)

Les décompositions des systèmes différentiels $\mathbb{R}^n$ -incontrôlables et $\mathbb{R}^n$ -inobservables que nous avons établies dans les chapitres précédents, nous donnent une condition nécessaire de minimalité.

IV.2.6. Théorème

Si une réalisation est minimale, elle est $\mathbb{R}^n$ -canonique.

Démonstration

Considérons une réalisation $[H_i, B_i, C] (i=0, \dots, m)$ d'une matrice de transfert (42). Supposons qu'elle ne soit pas $\mathbb{R}^n$ -canonique. Supposons la par exemple $\mathbb{R}^n$ -incontrôlable; le cas où elle n'est pas $\mathbb{R}^n$ -observable se traite de façon analogue.

D'après le théorème II.1.17., il existe une matrice inversible P telle que pour $i=0, \dots, m$

$$\bar{B}_i = P B_i P^{-1} = \begin{bmatrix} B_i^{11} & B_i^{12} \\ 0 & B_i^{22} \end{bmatrix} \quad \bar{C} = P C = \begin{bmatrix} C^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \bar{H}_i = H_i P^{-1} = \begin{bmatrix} H_i^1 & H_i^2 \end{bmatrix}$$

où B_i^{11} , B_i^{12} , B_i^{22} sont des matrices de dimensions respectives $(n_1 \times n_1)$, $(n_1 \times (n-n_1))$, $((n-n_1) \times (n-n_1))$.

Les matrices C^1 , H_i^1 , H_i^2 sont respectivement de dimensions $(n_1 \times r)$, $(p \times n_1)$ et $(p \times (n-n_1))$. En outre, nous aurons : $n_1 < n$, où n est la dimension de la réalisation. D'après la remarque IV.1.5., la matrice de transfert $\bar{G}(\lambda)$ est égale à la matrice $G(\lambda)$.

$$\text{Or, } \bar{G}(\lambda) = H^1(e^{-\lambda}) [\lambda I - B^{11}(e^{-\lambda})]^{-1} C^1$$

où les matrices $H^1(e^{-\lambda})$ et $B^{11}(e^{-\lambda})$ sont définies par :

$$H^1(e^{-\lambda}) = H_0^1 + e^{-\lambda} H_1^1 + \dots + e^{-m\lambda} H_m^1$$

$$B^{11}(e^{-\lambda}) = B_0^{11} + e^{-\lambda} B_1^{11} + \dots + e^{-m\lambda} B_m^{11}$$

Par conséquent, le système $[H_i^1, B_i^{11}, C^1] (i=0, \dots, m)$ est une seconde réalisation de la matrice de transfert $G(\lambda)$, et est de di-

mension inférieure à la réalisation $[H_1, B_1, C]$ que nous avons considérée. Cette dernière n'est donc pas minimale, ce qui achève la démonstration du théorème.

IV.2.7. Propriétés - Rappels

1) La réciproque du théorème précédent n'est pas vraie : donnons en effet un exemple (emprunté à Cliff et Burns [1978]) de réalisation canonique et pourtant non minimale. Considérons la matrice de transfert :

$$G(\lambda) = \frac{1 + e^{-\lambda}}{\lambda^2 + 1 + 2e^{-\lambda} + e^{-2\lambda}}$$

Nous savons d'après le théorème IV.2.2. construire une réalisation de dimension 2. Par ailleurs, le système $[H_0, B_0, B_1, C]$ suivant constitue également une réalisation de la matrice $G(\lambda)$ ci-dessus.

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En utilisant les deux théorèmes II.1.10. et III.1.13., on vérifie aisément que ce système est complètement $\mathbb{R}^n$ -contrôlable et $\mathbb{R}^n$ -observable. La réalisation est cependant de dimension 3 et donc non minimale.

2) Remarquons également qu'une réalisation non minimale n'est pas unique.

3) L'approche purement algébrique basée sur la théorie des modules, employée par certains auteurs (Kamen [1975], Morse [1976], Sontag [1976] par exemple) a incité ces auteurs à introduire une contrôlabilité et une observabilité algébriques : Un système (1), (4) est contrôlable si $\langle B(u) | \mathcal{G} \rangle = \mathbb{R}^n[u]$ et observable si

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Ker} (H(\mu) B^{i-1}(\mu)) = 0; \text{ rappelons que nous avons noté } \mathbb{R}^n[\mu]$$

le module libre des $\mathbb{R}[\mu]$ -matrices de dimension $(n \times 1)$. Une réalisation contrôlable et observable est dite canonique. Morse [1976] a établi que les réalisations canoniques d'une même matrice de transfert $G(\lambda)$ sont isomorphes dans $\mathbb{R}^n[\mu]$ (i.e. par un isomorphisme de $\mathbb{R}^n[\mu]$), et que ce n'est pas le cas des réalisations minimales. En outre, les réalisations canoniques sont minimales, mais la minimalité n'entraîne pas que la réalisation soit canonique.

Dans son article, Morse a également introduit une notion de contrôlabilité plus faible que celle donnée ci-dessus : la "faible contrôlabilité" que nous avons définie en II.1.11., et dont la terminologie se trouve ainsi justifiée. Il a mis en évidence une autre condition suffisante de minimalité : une réalisation est minimale si elle est observable et "faiblement contrôlable".

IV.2.8. Remarque

Nous avons vu en II.1.11. que la "faible contrôlabilité" (respectivement la "faible observabilité") implique la $\mathbb{R}^n$ -contrôlabilité (respectivement la $\mathbb{R}^n$ -observabilité). Par contre il faut noter qu'aucun lien n'a été jusqu'à présent mis en évidence entre les notions algébriques présentées précédemment et les concepts de contrôlabilité fonctionnelle ou de L^2 -contrôlabilité (voir Mani-tius et Triggiani [1978]).

Nous avons rappelé une condition suffisante de minimalité (Propriétés IV.2.9.(3)) obtenue par Morse [1976]; le théorème IV.2.6. que nous avons établi fournit une condition nécessaire de minimalité. Devant la difficulté d'obtenir un critère complet de minimalité, intéressons-nous à une classe particulière de réalisations : les réalisations scalaires (i.e. $p = r = 1$), pour lesquelles nous établirons une condition nécessaire et suffisante de minimalité. Présentons dans un premier temps deux résultats utiles à sa démonstration.

IV.2.9. Lemme

Soient deux systèmes différentiels (1), (4) donnés par $[H_i, B_i, C]$ ($i=0, \dots, m$) et $[\tilde{H}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}]$ ($i=0, \dots, \tilde{m}$) tels que leur matrice de transfert vérifie

$$G(\lambda) = \tilde{G}(\lambda)$$

alors on a :

$$G(\lambda, \mu) = \tilde{G}(\lambda, \mu)$$

$$\text{où } G(\lambda, \mu) = H(\mu) [\lambda I - B(\mu)]^{-1} C \quad \text{avec } \mu \text{ indépendant de } \lambda$$

$$\tilde{G}(\lambda, \mu) = \tilde{H}(\mu) [\lambda I - \tilde{B}(\mu)]^{-1} \tilde{C}$$

Ce lemme se déduit immédiatement de la remarque IV.1.5.(1). Il est, ainsi que le résultat qui suit, valable pour des systèmes où p et r sont des entiers quelconques.

IV.2.10. Proposition

Soient deux réalisations $[H_i, B_i, C]$ ($i=0, \dots, m$) et $[\tilde{H}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}]$ ($i=0, \dots, \tilde{m}$) de dimensions respectives n et $\tilde{n}$ d'une même matrice de transfert (i.e. $G(\lambda) = \tilde{G}(\lambda)$). Si ces réalisations sont toutes deux "faiblement canoniques", alors on a :

$$n = \tilde{n}.$$

Démonstration

Considérons les deux réalisations données dans l'hypothèse. Le lemme IV.2.9. nous dit que : $G(\lambda, \mu) = \tilde{G}(\lambda, \mu)$. Par conséquent, les décompositions de $G(\lambda, \mu)$ et de $\tilde{G}(\lambda, \mu)$ obtenues dans le lemme III.1.12. sont égales; cela se traduit par

$$(45) \quad H(\mu) B^k(\mu) C = \tilde{H}(\mu) \tilde{B}^k(\mu) \tilde{C} \quad \forall \mu \in \mathbb{C}, \forall k = 0, 1, \dots$$

Rappelons que nous avons introduit dans les chapitres précédents les matrices :

$$M(\mu) = [C, B(\mu) C, \dots, B^{n-1}(\mu) C]$$

$$\text{et } N(\mu) = [{}^tH(\mu), {}^tB(\mu){}^tH(\mu), \dots, {}^tB^{n-1}(\mu){}^tH(\mu)]$$

Notons $\tilde{M}(\mu)$ et $\tilde{N}(\mu)$ ces matrices obtenues à partir de $\tilde{H}(\mu)$, $\tilde{B}(\mu)$ et $\tilde{C}$.

Formons également les matrices :

$$S(\mu) = {}^tN(\mu) M(\mu)$$

$$\text{et } \tilde{S}(\mu) = {}^t\tilde{N}(\mu) \tilde{M}(\mu)$$

Remarquons que les matrices $S(\mu)$ et $\tilde{S}(\mu)$ sont des matrices de Hankel; par exemple, la matrice $S(\mu)$ de dimension $(n p \times n r)$ est donnée par :

$$S(\mu) = \begin{bmatrix} H(\mu) C & H(\mu) B(\mu) C & \dots & H(\mu) B^{n-1}(\mu) C \\ H(\mu) B(\mu) C & H(\mu) B^2(\mu) C & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ H(\mu) B^{n-1}(\mu) C & H(\mu) B^n(\mu) C & \dots & H(\mu) B^{2n-2}(\mu) C \end{bmatrix}$$

Les deux réalisations considérées étant "faiblement contrôlables" (respectivement "faiblement observables"), nous avons :

$\text{rang}_{\mathbb{C}} M(\mu) = n$ et $\text{rang}_{\mathbb{C}} \tilde{M}(\mu) = \tilde{n}$ (respectivement $\text{rang}_{\mathbb{C}} {}^tN(\mu) = n$ et $\text{rang}_{\mathbb{C}} {}^t\tilde{N}(\mu) = \tilde{n}$). Par ailleurs, l'égalité $\text{rang}_{\mathbb{C}} M(\mu) = n$, par exemple, entraîne que le rang de la matrice numérique $M(\mu)$ est égal à n pour tout $\mu \in \mathbb{C}$, excepté un nombre fini de points (voir Mani-tius et Triggiani [1978]).

On peut donc appliquer l'inégalité de Sylvester :

$$\text{rang}_{\mathbb{C}} M(\mu) + \text{rang}_{\mathbb{C}} {}^tN(\mu) - n \leq \text{rang}_{\mathbb{C}} S(\mu) \leq \min(\text{rang}_{\mathbb{C}} M(\mu), \text{rang}_{\mathbb{C}} {}^tN(\mu)),$$

et par conséquent,

$$\text{rang}_{\mathbb{C}} S(\mu) = n$$

On montre de même que $\text{rang}_{\mathbb{C}} \tilde{S}(\mu) = \tilde{n}$.

Supposons $n > \tilde{n}$. On peut considérer les deux matrices suivantes :

$$\tilde{M}(\mu)^+ = [\tilde{M}(\mu), \tilde{B}^{\tilde{n}}(\mu) \tilde{C}, \dots, \tilde{B}^{n-1}(\mu) \tilde{C}]$$

$$\tilde{N}(\mu)^+ = [\tilde{N}(\mu), ({}^t\tilde{B}(\mu))^{\tilde{n}} {}^t\tilde{H}(\mu), \dots, ({}^t\tilde{B}(\mu))^{n-1} {}^t\tilde{H}(\mu)]$$

Notons $\tilde{S}(\mu)^+ = {}^t\tilde{N}(\mu)^+ \tilde{M}(\mu)^+$

Il est clair que $\text{rang}_{\mathbb{C}} \tilde{S}(\mu)^+ = \tilde{n}$. Par ailleurs, d'après les égalités (45), les matrices de Hankel $S(\mu)$ et $\tilde{S}(\mu)^+$ sont formées des mêmes éléments. Par conséquent, l'hypothèse $n > \tilde{n}$ est impossible; de même on peut montrer que $\tilde{n} > n$ est impossible. Nous avons donc finalement l'égalité :

$$n = \tilde{n}$$

Nous sommes à présent en mesure d'établir, pour la classe des réalisations scalaires, le critère de minimalité suivant :

IV.2.11. Théorème

Une réalisation scalaire (i.e. $p = r = 1$) est minimale si et seulement si elle est faiblement canonique.

Démonstration

1) Condition nécessaire

Considérons une réalisation scalaire non faiblement canonique; par exemple supposons la faiblement incontrôlable (le cas faiblement inobservable se traite de façon analogue). La proposition II.1.15. que nous avons établie, nous donne une décomposition des systèmes scalaires faiblement incontrôlables. En raisonnant comme pour le théorème IV.2.6., nous en déduisons qu'il existe un système de dimension inférieure ayant la même matrice de transfert. La réalisation que nous avons considérée, n'est donc pas minimale.

2) Condition suffisante

Considérons une réalisation $[H_i, B_i, C]$ ($i = 0, \dots, m$) de dimension n , faiblement canonique. Supposons la non minimale.

Il existe donc une autre réalisation $[\tilde{H}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}]$ ($i = 0, \dots, \tilde{m}$), minimale de dimension $\tilde{n} < n$, de la même matrice de transfert.

La condition nécessaire que nous venons d'établir affirme que la réalisation $[\tilde{H}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}]$ est faiblement canonique. Donc, en utilisant la proposition IV.2.10., nous voyons que $\tilde{n} = n$. Nous aboutissons à une contradiction, et par conséquent la réalisation initiale $[H_i, B_i, C]$ est minimale.

Ce qui achève la démonstration de notre théorème.-

BIBLIOGRAPHIE
des articles et ouvrages cités.

H.T. BANKS

- [1968] "Necessary conditions for control problems with variable time lags" - SIAM J. Control 6, p. 9-47
- [1969] "Representations for solutions of linear functional differential equations" - J. Differential Equations 5, p. 399-409

H.T. BANKS, M.Q. JACOBS et C.E. LANGENHOP

- [1975] "Characterization of the controlled states in $W_2^{(1)}$ of linear hereditary systems" - SIAM J. Control 13, p. 611-649

R. BELLMAN et K.L. COOKE

- [1963] "Differential difference equations", Academic Press N.Y.

P. CHARRIER

- [1972] "Equations différentielles avec retard : applications de la dégénérescence à la théorie de la commande" - Thèse de 3^{me} cycle, Université de Bordeaux I

P. CHARRIER et Y. HAUGAZEAU

- [1975] "On the degeneracy of linear time-invariant delay differential systems" - J. Math. Anal. Appl. 52, p. 42-55

E.M. CLIFF et J.A. BURNS

- [1978] "Euclidean controllable realizations of linear hereditary systems" - Math. Systems Theory 12, p. 133-149

M.C. DELFOUR et S.K. MITTER

- [1972] "Controllability, observability and optimal feedback control of affine hereditary differential systems" - SIAM J. Control 10, p. 298-328



R. GABASOV et M. KIRILLOVA

[1971] "Qualitative theory of optimal processes" - Nauka, Moscou
Traduction anglaise : Dekker N.Y. 1976

E.R. GANTMACHER

[1957] "Theory of matrices" - Vol. 1, Chelsea, N.Y.

A. HALANAY

[1966] "Differential equations, stability, oscillations time-lag"
Academic Press, N.Y.

J.K. HALE

[1971] "Functional differential equations" - Springer-Verlag, N.Y.

R.E. KALMAN

[1963] "Mathematical description of linear dynamical systems" -
SIAM J. Control 1, p. 152-192

E.W. KAMEN

[1975] "On an algebraic theory of systems defined by convolution
operators" - Math. Systems Theory 9, p. 57-74

F. KAPPEL

[1976] "On degeneracy of functional-differential equations" -
J. Differential Equations 22, p. 250-267

[1977] "Degenerate difference-differential equations : Algebraic
theory" - J. Differential Equations 24, p. 99-126

F.M. KIRILLOVA et S. CHURAKOVA

[1967] "The problem of controllability of linear systems with an
after-effect" - Differentsial'nye Uravneniya 3, p. 436-445

T.B. KOPEIKINA et V.V. MULYARCHIK

[1974] "Observability and identifiability of systems with delay" -
Differentsial'nye Uravneniya 10, 8, p. 933-936

S. KURCYUSZ et A.W. OLBROT

- [1977] "On the closure in W_1^q of the attainable subspace of linear time lag systems" - J. Differential Equations 24, p. 29-50

S. LANG

- [1965] "Algebra" Addison-Wesley

E.B. LEE

- [1976] "Linear hereditary control systems" in Calculus of Variations and Control Theory, Russel, Academic-Press, p. 47-72

A. MANITIUS

- [1976] "Optimal control of hereditary systems", Control Theory and Topics in Functional Analysis, Vol. III, International Atomic Energy Agency, Vienna, p. 43-178
- [1976 a] "Controllability, observability and stabilizability of retarded systems" - Proc. 1976 IEEE Conference on Decision and Control, p. 752-758

A. MANITIUS et A.W. OLBROT

- [1972] "Controllability conditions for linear systems with delayed state and control" - Arch. Automat. i Telemekh. 17, p. 119-131

A. MANITIUS et R. TRIGGIANI

- [1978] "Function space controllability of linear retarded systems : A derivation from abstract operator conditions" - SIAM J. Control 16, p. 599-645

A.S. MORSE

- [1976] "Ring models for delay-differential systems" - Automatica 12 p. 529-531

A.W. OLBROT

- [1975] "Observability tests for constant time-lag systems" - Control and Cybernetics 4, p. 71-84

V.M. POPOV

- [1972] "Point wise degeneracy of linear, time-invariant delay-differential equations" - J. Differential Equations 11, p. 541-561

E.D. SONTAG

- [1976] "Linear systems over commutative rings : a survey" - Ricerche di Automatica 7, p. 1-34
- [1977] "The lattice of minimal realizations of response maps over rings" - Math. Systems Theory 11, p. 169-175
- [1978] "On split realizations of response maps over rings" - Information and Control 37, p. 23-33

L. WEISS

- [1967] "On the controllability of delay-differential systems" - SIAM J. Control 5, p. 575-587

W.M. WONHAM

- [1974] "Linear multivariable control : A geometric approach" - Lecture Notes in Economics and Math. Systems n° 101.

J.A. YORKE

- [1971] "Selected topics in differential-delay equations" - Lecture Notes in Mathematics, n° 243, p. 16-28, Springer-Verlag N.Y.

R.B. ZMOOD

- [1974] "The euclidean space controllability of control systems with delay" - SIAM J. Control 12, p. 609-623

A.M. ZVERKIN

- [1973] "On the point wise completeness of systems with delay" - Differentsial'nye Uravneniya 9, p. 430-436