

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

➤ Contact SCD Nancy 1 : theses.sciences@scd.uhp-nancy.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Faculté des Sciences et Technologies

École Doctorale EMMA (Énergétique, Mécanique, MAériaux) - ED 409

Département de Formation Doctorale : Mécanique Énergétique

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 21 octobre 2011

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré – Nancy Université

en Mécanique et Énergétique

par

Lionel TROVALET

**Résolution numérique des transferts par rayonnement et conduction
au sein d'un milieu semi-transparent pour une géométrie 3D de
forme complexe**

Composition du jury

<i>Président :</i>	Daniel ROUSSE	Professeur, Ecole de Technologie Supérieure, Montreal
<i>Rapporteurs :</i>	Véronique FELDHEIM Denis LEMONNIER	Professeur, Faculté Polytechnique de Mons, Belgique Directeur de recherche CNRS, Institut P', Poitiers
<i>Examineurs :</i>	Jean-Pierre CHABRIAT Pedro J.M. COELHO Stephane GLOCKNER	Professeur, Université de la Réunion, LE2P Saint Denis Professeur, Instituto Superior Técnico, Lisbon Ingénieur de recherche, TREFLE Bordeaux
<i>Directeurs de thèse :</i>	Gérard JEANDEL Fatmir ASLLANAJ	Professeur, Université Henri Poincaré, LEMTA Nancy Chargé de recherche CNRS, HDR, LEMTA Nancy

Bonne lecture.

*La simplicité est la
sophistication suprême.
« Leonard de Vinci »*

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire d’Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMTA) dirigé par Monsieur Fabrice LEMOINE, merci de m’avoir accueilli.

Nombreuses sont les personnes qui m’ont accompagné durant mon parcours scolaire et qui m’ont permis de m’inscrire en thèse. Merci d’avoir contribué à mon apprentissage.

Je vais à présent remercier les personnes qui ont participé de près ou de loin au bon déroulement de mes années de doctorat.

Je tiens tous d’abord à remercier très chaleureusement, mes encadrants, Messieurs Gérard JEANDEL (directeur de thèse) et Fatmir ASLLANAJ (co-directeur de thèse) de m’avoir permis de travailler sur un sujet passionnant. Merci Gérard de m’avoir permis de faire partie de ta petite famille de l’équipe transfert radiatif. Durant ces trois ans, j’ai toujours eu beaucoup de plaisir à venir travailler au laboratoire (surtout parce qu’il y avait le chauffage en hiver). Ton soutien dans les moments difficiles m’a été d’une grande aide, je n’oublierai pas la force que dégagent les grands (je n’oublierai pas également la St Catherine). Merci Fatmir de m’avoir donné toute ma liberté pour travailler sur un sujet aussi intéressant. Ce travail de thèse était taillé pour moi, il m’a permis de grandir, de m’améliorer sur beaucoup de plans et de me rendre plus fort. Je tiens à ajouter une petite phrase qui me tient à coeur : « la valeur des gens ne se mesurent pas mais s’apprécie tous simplement ».

Je remercie également tous les membres de mon jury pour leur disponibilité et leurs conseils sur mes travaux de recherche. Je remercie Véronique FELDHEIM et Denis LEMONNIER d’avoir accepté d’être les rapporteurs de ce travail et d’avoir contribué à améliorer mon manuscrit de thèse. Merci à Jean Pierre CHABRIAT, Pedro COELHO et Stéphane GLOCKNER d’avoir examiné mon travail et de m’avoir fait profiter de leurs expériences. Toute ma gratitude à Daniel ROUSSE qui a bien voulu présider le jury de ma thèse et qui a su apporter une dimension particulière à ce moment fort de ma vie. Ma soutenance a été pour moi un grand moment d’émotion, merci de votre attention à ce travail.

Je tiens à remercier les membres de l’équipe transfert radiatif du LEMTA. Bien que Nancy ait un climat réputé froid (qui ne me convient pas), elle compte beaucoup de gens qui ont le coeur chaud (c’est peut être pour ça qu’il y a un réchauffement climatique). Merci à Pascal BOULET et David LACROIX de m’avoir initié aux joies du marathon, des semi marathons et des séances d’entraînements qui vont avec ce package. Ces quelques sorties m’ont permis de sortir un peu de la thèse et ont contribué à me forger un mental encore plus fort. Quelque part une thèse c’est un peu un marathon, où l’on rencontre des bons et des moins bons moments, mais le plus important est de parvenir au bout de soi même. Merci d’avoir été là quand il le fallait. Merci à Gilles PARENT, Bernard MONOD, Sébastien FUMERON, la sympathie qui vous anime m’ont bien souvent réchauffé le coeur, même dans mes moments difficiles.

Je vais à présent remercier mes frères de thèse, avec qui j'ai partagé mes trois années de doctorat, pour les bons moments passés et la bonne ambiance. Merci Zoubir d'avoir été notre grand frère (ne dis pas partout que c'est toi qui nous as formé). Tu m'as apporté beaucoup sur le plan humain, toi qui pratiques le don de soi. La bonne humeur dans la vie est une chose très importante, et toi tu l'as toujours, merci d'être toi même. Sullivan, le cadet, ton parcours nous a guidé et permis de prendre confiance sur ce qui nous attendait (tu nous as montré la route de la thèse). Issiaka (tu sais ce que c'est que d'être loin de chez soi), merci de m'avoir supporté (et à moi de t'avoir supporté), Julien (j'apprécie ta constance dans la vie), à nous trois nous formions le trio infernal et je peux dire que nous avons su construire la chance. Merci de m'avoir accompagné durant ces innombrables week end à faire avancer nos thèses. Jérôme toujours calme et posé, tu restes impressionnant de nature et tu m'auras souvent impressionné. Jonathan, Simon, merci pour toutes les petites soirées crêpes entre potes, vous êtes de bons vivants, on peut toujours compter sur vous. Jean Baptiste, tes conseils avisés et ton travail m'ont été d'une aide précieuse, merci d'avoir participé à ce travail. Benjamin, Valentin, vous êtes la relève vous avez encore du chemin et vous êtes bien partis. Merci à vous tous d'être vous-même, grâce à vous mes trois années loin de chez moi sont passées très vite.

Merci à mes amis, Alexandre, Lionel, Mathieu, Remi, Lilian, Cooper, ... avec qui j'ai participé aux courses d'endurance moto (24 heures) chez moi à l'île de la Réunion durant le mois d'août de mes vacances de première et seconde années de thèse. Cette expérience m'a appris à ne rien lâcher même si on croit que c'est fini. La vie est souvent pleine de surprises.

Je vais à présent remercier ma famille qui compte énormément pour moi. Un immense merci à Tati Monique, ma seconde maman, tu es une personne exceptionnelle qui a un très grand coeur, toujours présente quand il le faut, tu as une place de choix dans mon coeur. Merci Sylvain, tu es comme mon second frère, on a fait les quatre cents coups ensemble et tu me connais bien, heureusement que tu étais là. Merci Tonton Ariste, tu es une personne chère à mon coeur, j'ai beaucoup d'estime pour toi. Merci parrain Yannick d'avoir toujours cru en moi. Je remercie également toute ma famille. Mémé ton petit fils est docteur, je pense que tu aurais été fière de moi.

Merci Remi, mon petit frère, tu n'as pas besoin de faire grand-chose pour me remonter le moral, ta joie de vivre en inspire plus d'un, je suis fier d'être ton frère. Je te souhaite beaucoup de réussites dans ta vie.

Enfin, je remercie mes parents, merci Maman, si je suis parvenu à aller aussi loin dans mes études c'est bien grâce à toi, toi qui n'a jamais douté de moi et qui ma toujours encouragé, tu as toujours su trouver les mots pour me donner l'envie de me battre. Merci Papa, tu es un modèle pour moi, ta force de caractère, ton savoir faire et ta passion pour ton métier m'ont toujours inspiré. Le milieu dans lequel on vit est important, et vous mes parents, vous m'avez toujours choyé et donné le meilleur de vous-même, merci infiniment.

La thèse lé bel kan lé fini. Té dur surtout kan la fré i pouak et k'ou lé loin de chez ou.

Table des matières

Nomenclature	8
Introduction	11
I Modèle physique et méthode numérique	15
1 Modèle thermique	17
1.1 Transfert radiatif dans les milieux semi-transparents	17
1.2 Équation du Transfert Radiatif pour un milieu non-diffusant	21
1.3 Équation de conservation de l'énergie	21
1.4 Conditions aux limites	22
1.4.1 Conditions aux limites radiatives	22
1.4.2 Conditions aux limites de conduction thermique	23
1.5 État de l'art sur les différentes méthodes numériques pour la résolution de l'ETR en géométrie 3D	24
2 Résolution de l'ETR par la MVF dans un milieu semi-transparent gris représenté par une géométrie 3D de forme quelconque	31
2.1 Discrétisation angulaire	32
2.1.1 Discrétisation angulaire à pas constant	32
2.1.2 Quadratures angulaires S_N et T_N	33
2.2 Discrétisation spatiale	36
2.3 ETR pour un milieu gris avec des surfaces noires	39
2.4 Application de la MVF à l'ETR	39
2.5 Relations de fermeture	41
2.5.1 Forme intégrale de l'ETR	41
2.5.2 Construction des points i_f , u_f et les interpolations linéaires	42
2.6 Renumerotation des noeuds du maillage	51

2.7	Identification des noeuds de la frontière dite "réceptrice"	52
2.8	Expression de la luminance calculée au noeud P et dans la direction $\vec{\Delta}^k$	53
2.9	Résolution itérative noeud par noeud et résolution matricielle	54
2.9.1	Résolution itérative noeud par noeud	55
2.9.2	Résolution matricielle	55

II Résultats des simulations numériques 59

3 Rayonnement d'un milieu gris isotherme 61

3.1	Surfaces noires	61
3.1.1	Cas test n°1 : enceinte cubique	61
3.1.2	Cas test n°2 : forme en "L"	62
3.1.3	Cas test n°3 : cylindre de hauteur $3m$ et $0.5m$ de rayon	63
3.1.4	Cas test n°4 : cylindre de hauteur $2m$ et $1m$ de rayon	64
3.2	Étude de sensibilité angulaire et spatiale	66
3.2.1	Cas test n°1	66
3.2.2	Cas test n°2	73
3.2.3	Cas test n°3	78
3.2.4	Cas test n°4	84
3.2.5	Conclusion sur l'étude de sensibilité	88
3.3	Étude de la diffusion numérique	89
3.3.1	Schémas de fermeture	89
3.3.2	Résultats des simulations	91
3.4	Surfaces opaques à réflexion diffuse	95
3.4.1	Algorithme	95
3.4.2	Cas test	95

4 Transfert de chaleur couplé par conduction et rayonnement 99

4.1	Différentes approximations de l'évolution de la température le long du chemin optique	99
4.2	Problème radiatif avec source de chaleur	101
4.2.1	Méthodologie	101
4.2.2	Problème en équilibre radiatif dans un milieu bordé par des surfaces noires	102
4.2.3	Problème radiatif avec source de chaleur dans un milieu bordé par des surfaces opaques à réflexion diffuse	106

4.3	Couplage rayonnement-conduction	109
4.3.1	Adimensionnement des équations	109
4.3.2	Régime stationnaire	110
4.3.3	Régime instationnaire	112
4.4	Milieu non-gris	115
Conclusion et perspectives		119
A Annexe : calcul de la quantité Δ_f^k		I
A.1	Calcul exact	I
A.2	Calcul numérique	I
B Annexe : exemple de résolution sur une géométrie 2D		III
B.1	Éxpression de la luminance sur un exemple de géométrie 2D	III
B.1.1	Différents ensembles	III
B.1.2	Éxpression de la luminance au noeud de calcul P et dans la direction $\vec{\Delta}^k$	V
B.2	Résolution itérative noeud par noeud et résolution matricielle sur un exemple 2D	VI
B.2.1	Résolution itérative noeud par noeud	VII
B.2.2	Résolution matricielle	VIII
C Annexe : Étude complémentaire sur la sensibilité angulaire		IX
C.1	Étude de sensibilité angulaire sur l'enceinte cubique de la section 3.2.1	IX
C.1.1	Étude de sensibilité angulaire sur l'enceinte cylindrique de la section 3.2.4	XVI
Bibliographie		XXI

Nomenclature

Lettres

L	luminance, $W.m^{-2}.sr^{-1}$
L^o	luminance du corps noir, $W.m^{-2}.sr^{-1}$
T	température, K
$\vec{Q}_{rad}$	flux radiatif, $W.m^{-2}$
S_{rad}	terme source radiatif, $W.m^{-3}$
G	luminance intégrée sur toutes les directions de l'espace, $W.m^{-2}$
V	volume, m^3
S	surface, m^2
P	noeud P du maillage spatial
A_f	aire du panneau f , m^2
s	abscisse curviligne, m
t	temps, s
c	célérité dans le vide, $m.s^{-1}$
n	indice de réfraction du milieu
$\vec{n}$	normale unitaire
c_p	chaleur massique, $J.kg^{-1}.K^{-1}$
k_{cond}	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
f	panneau f
i_f	point d'intégration au centre du panneau f , m
u_f	projection en amont du point i_f , m
S_N	quadrature S_N
T_N	quadrature T_N

Symboles

$\vec{\Delta}$	direction de propagation du rayonnement
$\vec{\nabla}$	opérateur gradient
$d\Omega$	angle solide, sr
$\Delta\Omega$	angle solide de contrôle, sr
$\vec{V}$	vecteur vitesse de déformation, $m.s^{-1}$
$<=$	en amont

Lettres grecques

λ	longueur d'onde, μm
φ	angle polaire, rad
θ	angle azimutal, rad
Φ	fonction de phase

σ_B	constante de Stefan Boltzman, $W.m^{-2}.K^{-4}$
κ	coefficient d'absorption, m^{-1}
σ_s	coefficient de diffusion, m^{-1}
ω^k	poids directionnel associé à la direction $\vec{\Delta}^k$
ρ_ν	masse volumique, $kg.m^{-3}$
ϵ	émissivité de la paroi
Γ	frontière, m^2
α	coefficient d'interpolation
ξ	coefficient directeur suivant x
η	coefficient directeur suivant y
μ	coefficient directeur suivant z

Lettres calligraphiques

$\mathcal{T}$	tétraèdre
$\mathcal{J}$	triangle

Indices et exposants

f	panneau f
P	point nodal P
inc	incident
ext	extérieur
int	intérieur
k	direction angulaire discrète

Les nombres

N_f	Nombre de panneaux f associé à un volume de contrôle
-------	--

Introduction

Les verrous technologiques, où l'influence de la thermique est essentielle, se retrouvent dans de nombreux procédés, en particulier les procédés à haute température (moulage, formage, etc...). De plus, le transfert radiatif est important et complexe dès lors que le milieu est semi-transparent. Différentes approximations sont couramment utilisées pour modéliser le transfert radiatif tels que les modèles de Rosseland, P_1 , ou deux-flux (etc ...). La faiblesse des modèles approchés en situation réelle (rarement 1D) apparaît fatalement : les comportements spectraux de matériaux présentant généralement des variations brusques, ou encore la diffusion s'avérant généralement loin d'être isotrope. Les hypothèses de base de ces modèles sont rapidement mises en défaut et conduisent à des erreurs parfois conséquentes sur l'évaluation des flux et des températures. On notera que les méthodes P_N (d'ordre supérieur à deux) présentent également leurs limites lorsque le transfert radiatif est prépondérant, à cause des problèmes posés par la réflexion aux parois. Malgré cela, on constate que certains modèles radiatifs approchés sont encore couramment utilisés dans l'industrie. Le transfert radiatif est parfois même négligé dans les codes de calcul faute de pouvoir l'appréhender de façon simple et efficace. Mais aujourd'hui, les performances accrues des calculateurs permettent l'amélioration de la simulation des transferts radiatifs, au travers de méthodes numériques plus précises. Aussi, une bonne estimation des transferts radiatifs permet une meilleure optimisation des procédés. Pour traiter des configurations réalistes, il apparaît nécessaire de modéliser le rayonnement en géométrie 3D. En effet, la modélisation du transfert de chaleur en géométrie mono ou bidimensionnelle limite les applications.

Les transferts radiatifs tridimensionnels doivent généralement être déterminés dans des milieux ou systèmes de géométrie complexe, caractérisés par des milieux hétérogènes, avec des parois réfléchissantes, des particules ou des milieux diffusants, ce qui conduit à des calculs répétitifs, nécessitant des itérations ou des inversions numériques. Les calculs doivent être menés pour quatre niveaux de discrétisations (temporelle, spectrale, spatiale et directionnelle) mettant en oeuvre sept dimensions. En pratique, le transfert radiatif est souvent couplé aux autres modes de transfert. La technique habituelle consiste alors à introduire une résolution itérative en temps (ou pseudo-itérative en régime stationnaire) du transfert radiatif et de l'équation de conservation de l'énergie jusqu'à convergence (parfois très longue), à la fois sur le champ de températures et sur les flux échangés.

Parmi les méthodes numériques possibles pour traiter le rayonnement en géométrie complexe, il existe l'approche statistique de type Monte Carlo (MMC) et les méthodes déterministes telles que les transferts discrets (MTD), les ordonnées discrètes ou les volumes finis. Les deux dernières méthodes reposent en particulier sur une discrétisation spectrale, directionnelle et spatiale de l'équation du transfert radiatif (ETR) où il faut également ajouter la discrétisation temporelle si l'on considère l'ETR instationnaire. Bien

que la MMC soit populaire car très précise et simple à mettre en oeuvre, elle présente un inconvénient majeur lié à la durée des simulations. La MTD présente également cet inconvénient. Il est alors très difficile d'utiliser la MMC (ou la MTD) pour simuler le transfert radiatif instationnaire ou pour des transferts couplés, en géométrie 3D. Pour ces raisons, on a plutôt recours aux méthodes numériques déterministes qui seront décrites par la suite.

Contexte de l'étude

Le Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMTA) a développé des compétences pointues dans le domaine du rayonnement, aussi bien d'un point de vue expérimental que numérique. De nombreux projets portant sur les transferts radiatifs et multiphysiques y ont été réalisés. Différentes méthodes numériques ont été étudiées : Monte Carlo 3D (A. Collin, 2006 [2]), Volumes finis 2D (Nacer Berour, 2005 [1], Asllanaj et al. [2, 3, 4, 5]) et P_N (Hoang Quan, 2009 [6]). Fort de ces expériences et dans le but de traiter diverses applications, le LEMTA s'est orienté vers le développement d'un code de rayonnement thermique général en géométrie 3D complexe. La méthode de résolution choisie est celle des volumes finis (MVF). Cette méthode connaît ces dernières années un essor considérable et elle paraît très prometteuse. D'une part, elle donne un bon compromis en termes de précision et temps de calcul, notamment pour traiter les problèmes instationnaires et couplés. De plus, à condition d'y associer un schéma de fermeture suffisamment précis, cette méthode conservative limite les problèmes de diffusion numérique. D'autre part la MVF s'applique aisément aux maillages tétraédriques non-structurés (pour traiter des géométries complexes), classiquement utilisés en CFD, en mécanique du solide ou autres (ABAQUS, COMSOL, FLUENT, ...).

Exemple d'application visée : la mise en forme du verre. Ce procédé est basé sur la ductilité du verre à haute température (le rayonnement est le mode de transfert prédominant). Il fait intervenir deux mécanismes physiques : la mécanique pour la déformation de la pièce et la thermique qui est l'une des causes de la déformation. Ce couplage thermomécanique s'effectue par la forte thermo dépendance des propriétés du verre, notamment sa viscosité, et par l'évolution de la géométrie de la pièce de verre au cours du formage. La simulation numérique de cette application nécessite une bonne prédiction du champ de températures et la prise en compte d'un maillage 3D se déformant au cours du temps.

Objectifs de la thèse

Il porte sur le développement d'un code de calcul permettant de simuler finement le transfert radiatif au sein d'un milieu semi-transparent pour une géométrie 3D de forme complexe. Notons que c'est un sujet qui fait l'objet de nombreux travaux et il constitue un axe de recherche prioritaire dans le domaine du rayonnement [7, 8, 9, 10, 11]. Notre choix s'est donc porté sur la résolution spatiale de l'équation du transfert radiatif (ETR) par une MVF avec une formulation « cell-vertex ». Le couplage avec d'autres modes de transfert devient dès lors immédiat, sans changement de maillage, ni schéma d'interpolation préalable, si on utilise dans les deux cas la même formulation à savoir « cell-vertex ». Cette formulation consiste à calculer les grandeurs discrètes aux noeuds du maillage, elle est très répandue dans les logiciels tels que ABAQUS, COMSOL. Dans la littérature, on

retrouve ce type de formulation uniquement pour des géométries 2D [12, 2, 13]. Dans ce travail, nous l'avons généralisé aux géométries 3D en employant un maillage tétraédrique. Aussi, ce schéma numérique complexe constitue une originalité de par sa formulation. La particularité de cette formulation est liée à la forme des volumes de contrôle, comportant plus de faces, ce qui devrait nous permettre d'être plus précis que les autres schémas de type « cell-center » où les inconnues sont stockées aux centres des mailles formant le domaine [7] (ne nécessitant pas de reconstruction des volumes de contrôle). De plus, nous utilisons un ordre de parcours (« marching order map ») introduit par [12] pour résoudre l'ETR où la difficulté de mise en oeuvre est liée ici à l'utilisation d'un maillage tétraédrique non structuré en géométrie 3D. Dans le but de simuler le transfert de chaleur par conduction et rayonnement pour un milieu semi-transparent, gris et non diffusant, nous avons couplé notre code de rayonnement par volumes finis à un code de conduction par éléments finis sur un même maillage tétraédrique. Dans une dernière étude le code de rayonnement a été généralisé à un milieu non-gris.

Plan de la thèse

Le mémoire, dont le plan est présenté à la suite, s'articule autour de deux parties. Chacune de ces deux parties comporte deux chapitres.

Partie 1 : Modèle physique et méthode numérique

- Le chapitre 1 détaille l'équation du transfert radiatif (ETR) et rappelle les notions de base du transfert radiatif dans les milieux semi-transparentes. Il présente également l'équation de conservation de l'énergie, dans le cadre d'un couplage conduction rayonnement et les conditions aux limites radiatives et de conduction thermique. De plus, il présente l'état de l'art pour différentes méthodes numériques employées pour résoudre l'ETR en géométrie 3D ;
- Le chapitre 2 décrit en détail la méthode des volumes finis appliquée à l'ETR, avec une formulation « cell vertex » en considérant un maillage tétraédrique. Dans ce chapitre, les discrétisations angulaire et spatiale sont détaillées, tout comme les relations de fermeture de type exponentielle. Pour résoudre l'ETR, nous présentons la résolution itérative noeud à noeud ainsi qu'une nouvelle résolution matricielle développée durant ce travail de thèse.

Partie 2 : Résultats numériques et cas tests

- Le chapitre 3 propose une série de résultats pour un milieu isotherme, gris, semi-transparent (non diffusant) avec des limites radiatives noires ou opaques à réflexion diffuse. Différentes géométries sont traitées et une étude de sensibilité au maillage spatial et angulaire est effectuée. Le problème de la diffusion numérique est abordé dans ce chapitre et trois schémas de fermeture sont employés pour mesurer leurs effets ;
- Le chapitre 4 aborde des problèmes d'équilibre radiatif, le couplage conduction-rayonnement en régime stationnaire et instationnaire, ainsi que l'étude d'un milieu non-gris.

Nous clôturons ce mémoire par une conclusion générale. Elle résume en particulier l'état d'avancement du code de rayonnement 3D et dégage les perspectives envisagées en terme d'amélioration des performances du code et des applications visées.

Première partie

Modèle physique et méthode numérique

Chapitre 1

Modèle thermique

Nous allons nous intéresser aux matériaux semi-transparents non gris, émettant, absorbant et considérés comme non diffusant. Aussi, avant de présenter le modèle thermique pour le couplage rayonnement-conduction, nous détaillons dans un premier temps le transfert de chaleur par rayonnement dans les milieux semi-transparents. De plus, nous présentons brièvement les méthodes numériques les plus utilisées pour résoudre numériquement le transfert radiatif en géométrie 3D.

1.1 Transfert radiatif dans les milieux semi-transparents

Les termes « transfert radiatif » et « rayonnement thermique » sont communément utilisés pour décrire le transfert de chaleur par ondes électromagnétiques. Aussi, tout corps dont la température est supérieure à 0 Kelvin émet des ondes électromagnétiques, à plusieurs longueurs d'onde λ , et peut également les absorber et éventuellement les diffuser. Ce phénomène se traduit par une perte ou gain d'énergie cinétique des molécules, atomes ou électrons libres du corps considéré. Ceci implique que le rayonnement se propage même en l'absence de support matériel ; c'est le cas des ondes électromagnétiques dans le vide. Notons que le rayonnement thermique n'occupe pas tout le spectre des longueurs d'onde, seuls l'ultraviolet, le visible et l'infrarouge sont concernés, ce qui correspond à une bande de longueurs d'onde allant de 0,1 à 100 μm . Cette gamme de longueur d'onde est en général réduite car elle dépend de la température et des propriétés du matériau.

Dans cette partie, nous abordons uniquement le transfert radiatif dans les milieux semi-transparents, où la propagation d'une onde électromagnétique se fait en présence de phénomènes, d'absorption, d'émission propre et de diffusion. En effet, dans une gamme de longueurs d'onde (ou de fréquences) donnée, les ondes électromagnétiques sont partiellement transmises, le milieu n'étant ni transparent, ni opaque. La relation qui décrit le transfert radiatif dans les milieux semi-transparents est l'Equation du Transfert Radiatif (ETR). Elle permet de déterminer la luminance qui est la grandeur énergétique la plus représentative du rayonnement. Elle correspond à la puissance rayonnée dQ par unité d'angle solide $d\Omega$ autour d'une direction $\vec{\Delta}$ et par unité de surface projetée dS , pour un intervalle spectral $d\lambda$ donné (figure 1.1). On définit alors la luminance monochromatique L_λ par :

$$L_\lambda(s, \vec{\Delta}) = \frac{dQ}{dS \cos\varphi d\Omega d\lambda} \quad (1.1)$$

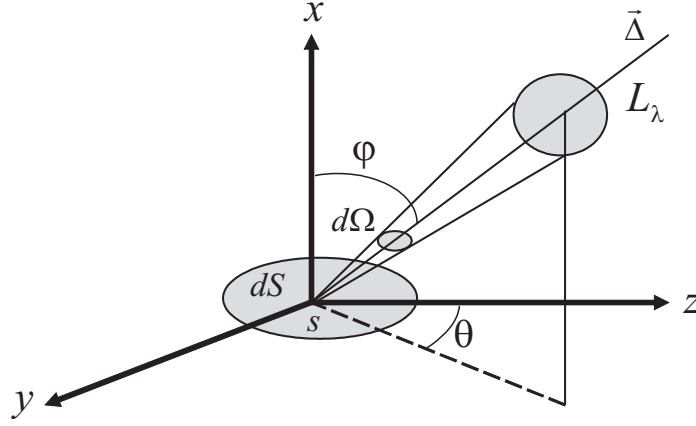


FIGURE 1.1 – Luminance monochromatique

La direction $\vec{\Delta}$ est repérée par l'angle polaire φ (variant de 0 à π) et l'angle azimutal θ (variant de 0 à 2π). L'angle solide élémentaire $d\Omega$ est défini par la relation : $d\Omega = \sin\varphi d\varphi d\theta$ ou encore $d\Omega = -d\mu d\theta$ en posant $\mu = \cos\varphi$.

Un corps noir absorbe tout le rayonnement qu'il reçoit, il ne réfléchit pas, ne transmet rien et il émet un rayonnement dont la luminance monochromatique L_λ^o est donnée par la loi de Planck :

$$L_\lambda^o(T) = \frac{C_1}{\lambda^5 [\exp(\frac{C_2}{\lambda T}) - 1]} \quad (1.2)$$

Les constantes C_1 et C_2 ont pour valeurs : $C_1 = 1.19 \cdot 10^{-16} \text{ W m}^{-2}$; $C_2 = 1.4388 \cdot 10^{-2} \text{ m K}$. Le rayonnement émis par le corps noir est isotrope. La luminance totale émise par le corps noir est obtenue en intégrant, sur tout le spectre de longueurs d'onde, la luminance monochromatique donnée par la relation (1.2). L'expression obtenue est la loi de Stefan-Boltzman :

$$\int_0^\infty L_\lambda^o(T) d\lambda = \frac{\sigma_B T^4}{\pi} \quad (1.3)$$

où σ_B est la constante de Stefan-Boltzmann : $\sigma_B = 5.6698 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$.

Pour l'établissement de l'ETR, nous abordons l'approche énergétique qui passe par un bilan d'énergie radiative. Ce bilan des mécanismes d'interactions rayonnement/milieu dans le cas général d'un milieu semi-transparent qui transmet, émet, absorbe et diffuse s'effectue sur un volume de contrôle de longueur ds , comme présenté sur la figure 1.2, en considérant une longueur d'onde donnée λ et un faisceau se propageant dans la direction $\vec{\Delta}$.

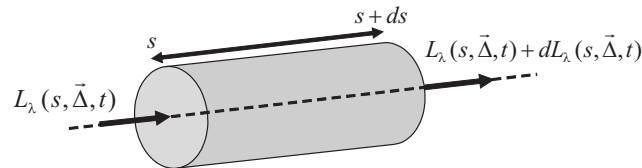


FIGURE 1.2 – Volume de contrôle d'un milieu semi-transparent

La propagation du rayonnement pour le parcours ds au travers du volume de contrôle entraîne un changement de l'intensité du rayonnement et la luminance passe de la valeur $L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t)$ à $L_\lambda(s + ds, \vec{\Delta}, t + dt)$. $L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t)$ représente la luminance monochromatique à la longueur d'onde λ , au point d'abscisse curviligne s , dans la direction $\vec{\Delta}$ et à l'instant t . Cette variation de la luminance est due au phénomène d'atténuation et de renforcement du rayonnement et comporte quatre termes :

- **Perte par absorption**, une partie du rayonnement est absorbée par le milieu et l'atténuation par absorption dans le volume est donnée par :

$$\kappa_\lambda L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t) ds$$

où κ_λ est le coefficient monochromatique d'absorption.

- **Perte par diffusion**, une partie du rayonnement provenant de la direction $\vec{\Delta}$ est diffusée par le milieu dans toutes les autres directions. L'atténuation due à la diffusion s'exprime :

$$\sigma_{s\lambda} L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t) ds$$

où $\sigma_{s\lambda}$ est le coefficient monochromatique de diffusion.

- **Gain par émission propre**, ce renforcement du rayonnement est lié à la température du milieu. Son expression est donnée par :

$$n_\lambda^2 \kappa_\lambda L_\lambda^o(T(s, t)) ds$$

où $T(s, t)$ est la température du milieu à la position s et à l'instant t , n_λ est l'indice de réfraction optique monochromatique du milieu.

- **Gain par diffusion**, il a pour expression :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \sigma_{s\lambda} \Phi_\lambda(\vec{\Delta}' \rightarrow \vec{\Delta}) L_\lambda(s, \vec{\Delta}', t) d\Omega' ds$$

Il représente le rayonnement issu de toutes les autres directions de l'espace, redirigé vers $\vec{\Delta}$ par diffusion. $\Phi_\lambda(\vec{\Delta}' \rightarrow \vec{\Delta})$ est la fonction de phase de diffusion monochromatique. Elle définit la probabilité pour que la diffusion du rayonnement provenant de la direction $\vec{\Delta}'$ se fasse dans la direction $\vec{\Delta}$.

L'ETR s'obtient à partir d'un bilan d'énergie pour ces différentes contributions. Aussi, la variation de la luminance est exprimée par la relation :

$$L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t) + dL_\lambda(s, \vec{\Delta}, t) = L_\lambda(s + ds, \vec{\Delta}, t + dt) \quad (1.4)$$

En introduisant les contributions par émission, absorption et diffusion, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} dL_\lambda(s, \vec{\Delta}, t) = & -\kappa_\lambda L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t) ds - \sigma_{s\lambda} L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t) ds + n_\lambda^2 \kappa_\lambda L_\lambda^o(T(s, t)) ds \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \sigma_{s\lambda} \Phi_\lambda(\vec{\Delta}' \rightarrow \vec{\Delta}) L_\lambda(s, \vec{\Delta}', t) d\Omega' ds \end{aligned} \quad (1.5)$$

La luminance spectrale dans la direction $\vec{\Delta}$ est fonction de la position et du temps. Aussi, la différentielle totale de la luminance s'exprime par :

$$dL_\lambda(s, \vec{\Delta}, t) = \frac{\partial L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t)}{\partial s} ds + \frac{\partial L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t)}{\partial t} dt \quad (1.6)$$

Or, entre ds et dt nous avons la relation suivante, $ds = c dt$, car le rayonnement allant de s à $s + ds$ traverse la distance curviligne ds à la vitesse c ($2.997930 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$ dans le vide). D'où, il vient :

$$\frac{dL_\lambda(s, \vec{\Delta}, t)}{ds} = \frac{\partial L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t)}{\partial s} + \frac{1}{c} \frac{\partial L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t)}{\partial t} \quad (1.7)$$

En divisant l'expression (1.5) par ds et en l'introduisant dans l'expression (1.7) nous obtenons l'équation du transfert radiatif qui s'exprime ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t)}{\partial t} + \frac{\partial L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t)}{\partial s} = & -\kappa_\lambda L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t) - \sigma_{s\lambda} L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t) + n_\lambda^2 \kappa_\lambda L_\lambda^o(T(s, t)) \\ & + \frac{\sigma_{s\lambda}}{4\pi} \int_{4\pi} \Phi_\lambda(\vec{\Delta}' \rightarrow \vec{\Delta}) L_\lambda(s, \vec{\Delta}', t) d\Omega' \end{aligned} \quad (1.8)$$

L'équation qui régit le transfert radiatif, dans le cas d'un milieu semi-transparent absorbant, diffusant et émettant, est donc une équation intégral différentielle, puisque la luminance apparaît dans le terme intégral et la dérivée directionnelle. La luminance est elle-même fonction de sept variables indépendantes : trois coordonnées de position, deux coordonnées angulaires pour la direction de propagation du rayonnement, une variable temporelle et une variable spectrale (la longueur d'onde λ) traduisant la dépendance spectrale des propriétés radiatives. De plus, l'ETR comporte deux inconnues la luminance $L(s, \vec{\Delta}, t)$ et la température $T(s, t)$. Aussi, la résolution de l'ETR passe nécessairement par la connaissance du champ de températures. Il faut donc prendre en compte le couplage avec l'équation de conservation de l'énergie dont nous parlerons plus loin.

Le vecteur densité de flux radiatif en un point s et à l'instant t a pour expression :

$$\vec{Q}_{rad}(s, t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{4\pi} L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t) \vec{\Delta} d\Omega d\lambda \quad (1.9)$$

1.2 Équation du Transfert Radiatif pour un milieu non-diffusant

Nous considérons l'ETR en régime quasi stationnaire compte tenu de la vitesse de propagation du rayonnement qui est très grande devant la variation temporelle de la luminance pour une majorité d'applications. Le terme temporel de l'ETR est alors négligeable, pour nos applications, devant le terme spatial. Ainsi, on néglige l'évolution temporelle de la luminance dans l'ETR (1.8) :

$$\frac{dL_\lambda(s, \vec{\Delta}, t)}{ds} \approx \frac{\partial L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t)}{\partial s} \quad (1.10)$$

L'ETR à résoudre dans le cas d'un milieu non-diffusant est alors la suivante :

$$\frac{\partial L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t)}{\partial s} = \vec{\Delta} \cdot \vec{\nabla} L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t) = \kappa_\lambda \left[n_\lambda^2 L_\lambda^o(T(s, t)) - L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t) \right] \quad s \in V \quad (1.11)$$

où V représente le volume du milieu. Notons que le temps interviendra dans l'équation uniquement à travers le terme d'émission propre, par l'intermédiaire du champ thermique. L'évolution en régime transitoire de ce champ est décrite par l'équation de conservation de l'énergie.

Le terme source radiatif correspond à la divergence du vecteur densité de flux radiatif, ainsi $S_{rad}(s, t) = -div \vec{Q}_{rad}(s, t)$. Pour un milieu non-diffusant, le terme source radiatif peut être exprimé par :

$$S_{rad}(s, t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} \kappa_\lambda [G_\lambda(s, t) - 4\pi L_\lambda^o(T(s, t))] d\lambda \quad (1.12)$$

où $G_\lambda(s, t)$ est l'intégration de la luminance monochromatique sur toutes les directions de l'espace :

$$G_\lambda(s, t) = \int_{4\pi} L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t) d\Omega \quad (1.13)$$

1.3 Équation de conservation de l'énergie

Dans les milieux semi-transparentes, les transferts de chaleur et la distribution de la température sont la conséquence de deux mécanismes : la conduction et le rayonnement lorsque la convection est négligée. En régime instationnaire, et sans source volumique, la température est régie par l'équation de conservation de l'énergie suivante :

$$\rho_\nu(T) c_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} - div(k_{cond}(T) \vec{\nabla} T) = S_{rad} \quad (1.14)$$

où ρ_ν , c_p et k_{cond} représentent respectivement la masse volumique, la chaleur massique et la conductivité thermique du milieu à pression constante. Ces coefficients varient en outre avec la température. Le couplage de l'ETR et de l'équation de conservation de l'énergie se fait à l'aide du terme source radiatif donné par la relation (1.12).

La résolution de l'ETR nécessite la connaissance du champ de températures pour le terme d'émission propre du milieu. Réciproquement, le terme source radiatif S_{rad} de l'équation de conservation de l'énergie découle du champ de luminance, résultat de l'ETR. Le champ de températures dépend du temps et implicitement la luminance aussi.

1.4 Conditions aux limites

Pour fermer le problème, il reste à définir les propriétés de surface du milieu et à introduire les conditions aux limites pour le transfert radiatif et celles relatives à la conduction. Nous présentons dans ce mémoire les surfaces opaques et semi-transparentes pour la partie radiative et des conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann pour la conduction.

1.4.1 Conditions aux limites radiatives

Frontière opaque à réflexion spéculaire ou diffuse (ou éventuellement noire)

Pour des surfaces opaques, la luminance à la frontière est la somme de deux contributions :

- la luminance émise par la frontière ;
- la luminance incidente en provenance du milieu réfléchi en partie par la paroi.

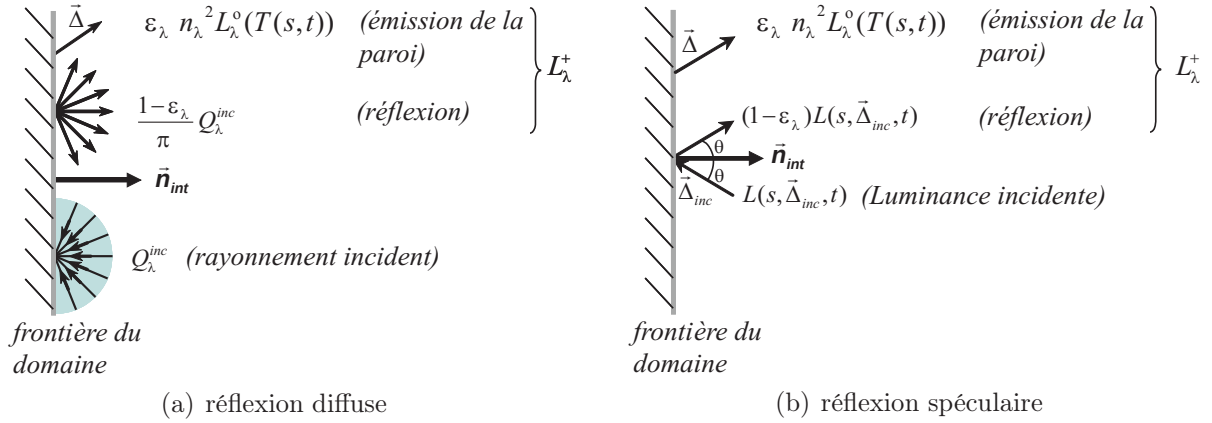


FIGURE 1.3 – Surface opaque

Pour une surface opaque à réflexion diffuse (figure 1.3(a)), la luminance s'exprime par :

$$L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t) = \epsilon_\lambda n_\lambda^2 L_\lambda^o(T(s, t)) + \frac{(1 - \epsilon_\lambda)}{\pi} Q_\lambda^{inc}(s, t) \quad s \in \Gamma \quad (1.15)$$

où Γ représente la frontière du milieu, ϵ_λ correspond à l'émissivité monochromatique de la surface et Q_λ^{inc} est le flux radiatif spectral incident à la frontière. Il est donné par :

$$Q_\lambda^{inc}(s, t) = \int_{\vec{n}_{int} \cdot \vec{\Delta}' < 0} L_\lambda(s, \vec{\Delta}', t) |\vec{n}_{int} \cdot \vec{\Delta}'| d\Omega' \quad s \in \Gamma \quad (1.16)$$

avec $\vec{n}_{int}$ le vecteur unitaire normal à la frontière et dirigé vers l'intérieur du milieu.

Si la réflexion est spéculaire (figure 1.3(b)), la luminance vaut :

$$L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t) = \epsilon_\lambda n_\lambda^2 L_\lambda^o(T(s, t)) + (1 - \epsilon_\lambda) L_\lambda(s, \vec{\Delta}_{inc}, t) \quad s \in \Gamma \quad (1.17)$$

Les directions $\vec{\Delta}$ et $\vec{\Delta}_{inc}$ vérifient la condition de specularité (égalité des angles) dans cette étude. Dans le cas de la paroi noire, $\epsilon_\lambda = 1$ dans la relation (1.15) ou (1.17).

Frontière semi-transparente

La luminance pour une frontière semi-transparente est la somme de deux contributions :

- la luminance transmise par le milieu extérieur ;
- la luminance incidente provenant du milieu intérieur réfléchie au niveau de l'interface.

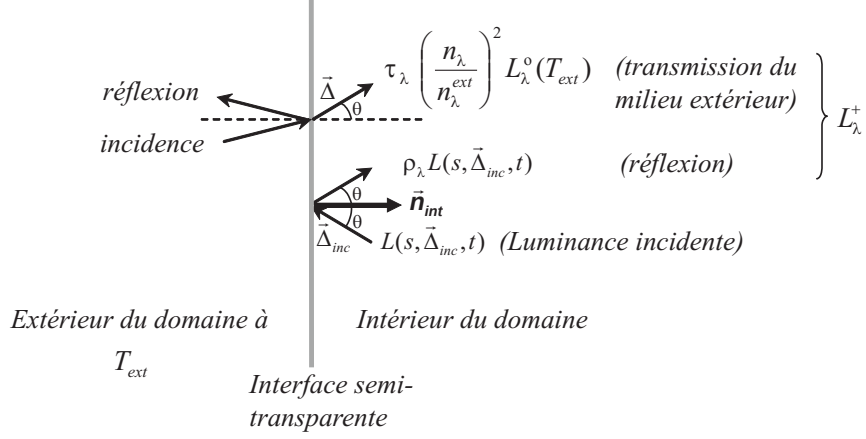


FIGURE 1.4 – Surface semi-transparente

Pour une surface semi-transparente, la luminance émise s'écrit :

$$L_\lambda(s, \vec{\Delta}, t) = \tau_\lambda(\vec{\Delta}) \left(\frac{n_\lambda}{n_\lambda^{ext}} \right)^2 L_\lambda^o(T_{ext}) + \rho_\lambda(\vec{\Delta}) L_\lambda(s, \vec{\Delta}_{inc}, t) \quad s \in \Gamma \quad (1.18)$$

où n_λ^{ext} est l'indice spectral de réfraction du milieu extérieur, $\tau_\lambda(\vec{\Delta})$ et $\rho_\lambda(\vec{\Delta})$ sont les coefficients de réflexion et de transmission monochromatiques directionnels. Leurs expressions sont données par la théorie électromagnétique. Pour plus de détail, le lecteur peut se référer à l'ouvrage de Modest [14]. Dans le cadre de ses travaux de thèse, Nacer Berour [1] a exprimé les coefficients $\tau_\lambda(\vec{\Delta})$ et $\rho_\lambda(\vec{\Delta})$ pour une interface séparant l'air du verre.

1.4.2 Conditions aux limites de conduction thermique

Conditions de type Dirichlet

Les conditions aux limites de type Dirichlet imposent la température aux noeuds de la face appartenant à une frontière du domaine, soit :

$$T(s, t) = T_e(s, t) \quad s \in \Gamma \quad (1.19)$$

Conditions de type Neumann

Les conditions aux limites de type Neumann imposent un flux de chaleur aux noeuds de la face appartenant à une frontière du domaine, soit :

$$-k_{cond} \frac{\partial T(s, t)}{\partial n_{ext}} = g_e(s, t) \quad s \in \Gamma \quad (1.20)$$

1.5 État de l'art sur les différentes méthodes numériques pour la résolution de l'ETR en géométrie 3D

Comme cela a été présenté auparavant, l'ETR est une équation intégral-différentielle complexe dont la résolution en géométrie 3D nécessite l'utilisation de méthodes numériques, mis à part dans des cas simples où on dispose d'une solution analytique ou semi-analytique [15, 16, 17]. La résolution numérique de l'ETR constitue un axe de recherche important dans le domaine du rayonnement et a fait l'objet de nombreux travaux ces dernières années, notamment pour son application aux géométries complexes 3D. Aussi, avant de décrire la méthode des volumes finis appliquée à l'ETR que nous avons choisi d'utiliser dans le cadre de cette étude, nous allons présenter les différentes méthodes existantes issues de la littérature qui ont été développées pour prédire le transfert radiatif dans un milieu semi-transparent (absorbant, émettant et diffusant) appliquées essentiellement aux géométries 3D de forme quelconque.

Plusieurs auteurs se sont penchés sur la résolution du problème radiatif et beaucoup de méthodes ont émergé. Ici, nous présentons brièvement les différentes méthodes, à savoir Monte Carlo, tracé de rayons, transferts discrets, harmoniques sphériques, ordonnées discrètes, volumes finis, interpolation des ordonnées discrètes, éléments finis, ainsi que d'autres méthodes plus récentes. La plupart de ces méthodes sont classiques. Aussi, pour plus de détails le lecteur intéressé peut se référer à l'ouvrage de Modest [14].

La méthode de Monte Carlo

Pour simuler le transfert radiatif, il est bien connu que **la méthode de référence est celle de Monte Carlo** [14, 18, 19]. Elle se distingue des autres méthodes par le fait qu'elle ne passe pas par la résolution de l'ETR. Elle est basée sur une approche statistique pour résoudre le transfert radiatif en utilisant une description probabiliste des processus d'échanges radiatifs, où le rayonnement est défini par des paquets d'énergie ou quanta. Le principe de cette méthode repose sur le suivi de quanta émis aléatoirement et dans des directions aléatoires. L'évolution des quanta dans le milieu semi-transparent est conditionnée par les phénomènes d'absorption et de diffusion, modifiant leurs caractéristiques (énergie, direction). L'inconvénient majeur de la méthode de Monte Carlo vient du fait qu'elle est **très onéreuse en terme d'espace mémoire et temps de calcul (Modest [14])**. Aussi, il est très difficile de l'utiliser, par exemple, pour des problèmes couplés instationnaires en géométrie complexe 3D. C'est pourquoi d'autres méthodes numériques ont été développées.

La méthode des transferts discrets et tracés de rayons

La méthode des transferts discrets (DTM), telle que définie par Lockwood et Shah [20], est basée sur la résolution directe de l'ETR à partir de sa forme intégrale. Cette méthode utilise une procédure de tracés de rayons. Elle s'appuie sur le calcul de la luminance le long d'un rayon, émis par des parois émettrices, traversant le domaine jusqu'à rencontrer une paroi réceptrice. Les directions des rayons sont définies par une discrétisation angulaire

de l'hémisphère d'émission et le domaine d'étude est défini par des volumes. De plus, cette méthode s'applique à tout type de géométrie (même complexe) et ne présente pas de formalisme mathématique lourd. Néanmoins, elle privilégie la discrétisation angulaire nécessitant beaucoup de directions et comporte une difficulté de mise en oeuvre pour la procédure de tracé de rayons, notamment lorsque le maillage est non structuré. De nombreux auteurs ont employé cette méthode [21, 22, 23, 24, 25], parmi eux Malalasekera et al. [21, 22] l'ont appliqué à des maillages 3D non structurés constitués d'hexaèdres et ont présenté leurs résultats sur une enceinte 3D en forme de « L ». Feldheim et Lybaert [25] ont appliqué la DTM aux maillages 2D non structurés constitués de triangles.

La méthode des harmoniques sphériques ou P_N

La méthode des harmoniques sphériques ou méthode P_N consiste à exprimer la luminance à partir de séries de Fourier généralisées faisant intervenir les harmoniques sphériques. La série est alors tronquée à N termes, d'où le nom de méthode P_N . Ainsi, l'ETR se décompose en un système d'équations aux dérivées partielles sans dépendance directionnelle, ce qui constitue l'avantage de cette méthode. L'ordre de la troncature N définit le nombre d'inconnues d'harmoniques sphériques $(N + 1)^2$ et le nombre d'équations. Aussi, plus l'ordre est élevé et plus la précision augmente, toutefois seules les troncatures d'ordre impair sont utilisées, en raison du manque de précision qu'engendre l'utilisation d'une troncature paire. De plus, dans la littérature les méthodes P_1 et P_3 sont les plus utilisées pour des raisons de simplicité [14, 26, 27]. En effet, l'utilisation d'ordres plus élevés entraîne une complexité mathématique n'impliquant pas une amélioration significative de la précision. La méthode P_1 est une méthode intéressante mais manque de précision notamment pour les milieux optiquement fins. Pour améliorer la précision, il existe également des méthodes dérivées telles que la MDA (Modified Differential Approximation) [14, 28, 29, 30] et l'IDA (Improved Differential Approximation) [14].

La méthode des ordonnées discrètes

La méthode des ordonnées discrètes (DOM) introduit une quadrature angulaire, permettant d'obtenir un système d'équations intégral-différentielle, dont la taille dépend du nombre de directions discrètes de propagation du rayonnement. L'utilisation d'une quadrature angulaire implique l'emploi d'un poids directionnel ω^k associé à chaque direction discrète $\vec{\Delta}^k$ correspondant à l'angle solide de rang k . De plus, la luminance est supposée constante sur chaque angle solide discret et le calcul de la luminance dans chaque direction discrète est effectué par chacune de ces équations. La DOM permet notamment d'approcher la luminance intégrée sur les 4π stéradian d'angle solide par une formule de quadrature. Cette méthode a été proposée pour la première fois par Chandrasekhar [31], où initialement la résolution spatiale des équations est faite par différences finies (utilisant une quadrature S_N où N est l'ordre de la quadrature). Depuis, la DOM a connu un certain succès et a été utilisée par plusieurs auteurs dans le cas d'une géométrie 3D [24, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49]. Ces auteurs ont notamment montré son efficacité en terme de précision et de temps de calcul. Koch et al. [41, 44] tout comme, Thurgood et al. [42], Li et al. [43] ont employé différentes quadratures angulaires, à savoir DCT , T_N , $SRAP_N$. Dans la littérature, on retrouve une extension de la DOM, où la formulation volumes finis est utilisée pour la résolution spatiale des équations aux dérivées partielles [7, 50, 51, 52, 53]. En effet, Sakami et al. [50] ont introduit

une nouvelle technique, basée sur la DOM « cell-center¹ », appliquée à des maillages tétraédriques. En outre, le schéma classique de fermeture spatial nommé « step » a été remplacé par un schéma de type « exponentiel » basé sur la forme intégrale de l'ETR. Joseph et al. [7] ont également utilisé une méthode similaire, appliquée à des maillages tétraédriques, et ont étudié trois schémas de fermeture en espace différents : exponentiel, step et flux moyenné. Ces résultats ont été comparés à la méthode de tracé de rayons sur une géométrie cylindrique et sphérique, pour un milieu semi-transparent non diffusant.

La méthode des ordonnées discrètes est l'une des méthodes les plus populaires, en raison de la précision obtenue pour un faible temps de calcul, la rendant intéressante pour traiter des problèmes instationnaires. Toutefois, pour résoudre l'ETR, l'utilisation d'une discrétisation angulaire associée à ce type de résolution spatiale comporte deux défauts :

- la diffusion numérique, due aux schémas de fermeture utilisés, peut engendrer des valeurs de luminance négatives ou supérieures à celles de la solution physique ;
- l'effet de rayon, lié à la discrétisation angulaire, peut générer des discontinuités dans le flux de chaleur conduisant à des solutions non physiques.

La méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis (FVM) est très largement utilisée dans tous les domaines de la physique du transfert de chaleur aux écoulements de fluides, notamment en rayonnement [2, 11, 12, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64]. Cette méthode consiste à intégrer une équation bilan sur un volume de contrôle. Dans le cas de l'ETR, il est nécessaire de tenir compte de la direction de propagation du rayonnement. Aussi, tout comme la DOM, la FVM décompose l'ETR en un système d'équations intégral-différentielles. Toutefois, la différence entre les deux méthodes se situe au niveau de la discrétisation angulaire. En effet, la discrétisation angulaire est définie par des angles de contrôle pour la FVM et non par des poids directionnels ω^k associés à une quadrature angulaire. De plus, avec la FVM le terme,

$$\int_{\Delta\Omega^k} \vec{\Delta}^k \cdot \vec{n}_f d\Omega \quad (1.21)$$

est calculé analytiquement (voir annexe A). Ici $\vec{n}_f$ représente la normale extérieure d'un volume de contrôle. Tandis qu'avec la DOM, le terme (1.21) est approché avec le poids directionnel,

$$\int_{\Delta\Omega^k} \vec{\Delta}^k \cdot \vec{n}_f d\Omega \approx (\vec{\Delta}^k \cdot \vec{n}_f) \omega^k \quad (1.22)$$

Ainsi, la FVM comporte des similitudes avec la DOM néanmoins, le formalisme est différent. Ce formalisme a été introduit par Raithby et Chui [54] avec une formulation « cell-center » appliquée à des maillages 2D non orthogonaux constitués de quadrilatères. Chui et Raithby [12] ont également travaillé sur le même type de maillage avec une formulation « cell-vertex² ». Ils ont, en particulier, introduit un ordre de parcours (« Marching order ») permettant de représenter numériquement la propagation du rayonnement pour la résolution de l'ETR. De nombreux auteurs ont utilisé la FVM, notamment avec la

1. cell-center : les noeuds de calcul sont situés à l'intérieur des cellules du maillage

2. cell-vertex : les noeuds de calcul sont les noeuds du maillage et les volumes de contrôle sont construits autour de chaque noeud du maillage. Cette technique est présentée dans le chapitre 2, partie 2.2.

formulation « cell-center ». Parmi eux, Chai et al. [55] ont proposé deux schémas de fermeture en espace différents de type step et exponentiel pour des enceintes 2D et 3D. Baek et al. [56] ont travaillé sur des maillages hexaédriques non orthogonaux avec un schéma step. Leurs résultats ont été présentés pour une enceinte hexaédrique et pour un secteur annulaire 3D. Liu et al. [60] ont utilisé des maillages à la fois structurés, non structurés et hybrides en 2D, axisymétriques et 3D. En revanche, peu de travaux ont été réalisés sur la FVM avec la formulation « cell-vertex ». Asllanaj et al. [2] ont utilisé cette technique pour des maillages 2D triangulaires non structurés, où un nouveau schéma de fermeture exponentiel modifié a été mis en place. En outre, la température a été approchée par interpolation linéaire.

Dans la littérature, certains auteurs ont effectué des comparaisons entre la DOM et la FVM [58, 62, 11]. Notamment, Kim et al. [62] ont utilisé la DOM, la FVM, une MDOM et une MFVM avec une formulation « cell-center » en coordonnée cylindrique axisymétrique, pour résoudre l'ETR sur des géométries cylindriques. Capdevila et al. [11] ont travaillé sur quatre schémas de fermeture en espace, basés sur la DOM et la FVM « cell-center ». Ils ont été appliqués à des maillages 3D structurés et non structurés, afin de réduire la diffusion numérique.

La méthode d'interpolation des ordonnées discrètes

La méthode d'interpolation des ordonnées discrètes (DOIM) [65, 66, 67, 68, 9] est une méthode dérivée de la DOM avec une formulation qui n'utilise, ni l'intégration volumique, ni les différences finies, mais la forme intégrale de l'ETR ainsi qu'une interpolation pour résoudre l'ETR. Cette méthode est proche des transferts discrets. Néanmoins, la luminance est déterminée à partir des noeuds proches et en amont du noeud de calcul. Elle a été introduite par Cheong et Song [65] qui l'ont appliquée à des géométries 2D. Seo et al. [66], ainsi que Cha et Song [67], ont étendu la DOIM aux géométries 3D utilisant un maillage non structuré. Kim et al. [9] ont amélioré la DOIM avec une interpolation géométrique différente.

La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (FEM) est une des méthodes numériques les plus populaires pour résoudre les équations aux dérivées partielles. Elle est à la base de nombreux logiciels de calcul scientifique (COMSOL, ABAQUS, ...). Toutefois, en rayonnement, peu d'auteurs ont employé cette méthode en raison de sa complexité de mise en oeuvre pour résoudre l'ETR [69, 70, 71, 72, 73]. Le principe de cette méthode est le même que la DOM dans la description en plusieurs équations aux dérivées partielles de l'ETR. Néanmoins, la résolution spatiale diffère puisqu'elle utilise une méthode de Galerkin [71, 73]. Dans la littérature, on trouve essentiellement des travaux portant sur des géométries 2D, notamment An et al. [71] qui ont utilisé la FEM sur des maillages triangulaires non structurés. En revanche, peu de travaux existent pour des géométries 3D. Kang et al. [73] ont développé deux méthodes FEM basées sur le premier et le second³ ordre de la DOM. Coehlo [72] a travaillé sur une méthode hybride faisant intervenir à la fois la FEM et la FVM.

3. formulation en flux pair

D'autres méthodes plus récentes

Parmi les méthodes les plus récentes, dédiées à la résolution de l'ETR en géométrie complexe 3D, on peut citer :

- la DOREM (Discrete Ordinate Radiation Element Method) introduite par Maruyama et al. [74] qui est basée sur la DOM et la REM [75, 76, 77] (Radiation Element Method⁴). Elle a été appliquée aux maillages constitués de polyèdres. Dans leurs travaux, Maruyama et al. ont effectué des comparaisons avec différentes méthodes : FVM, REM et Monte Carlo.
- la CVFEM (Control Volume Finite Element Method) employée par Grissa et al. [8, 78] a été appliquée à des maillages 3D non structurés à base de triangles. Cette méthode est nouvelle et elle utilise une résolution matricielle basée sur la méthode du double gradients conjugués pré-conditionnés pour résoudre l'ETR. Dans la littérature, la CFVEM a déjà été utilisée par Rousse et al. pour des géométries 2D [13] (avec un maillage triangulaire non structuré) et pour des géométries 3D [79] (avec un maillage tétraédrique non structuré). Notons toutefois que la CVFEM de Rousse [79] est très proche de la FVM avec la formulation « cell-vertex », puisqu'elle est basée sur les mêmes volumes de contrôle.
- la méthode MESHLESS, proposée par Wang et al. [80], utilise pour résoudre l'ETR uniquement un nuage de points décrivant le domaine d'étude. Aussi, afin d'éviter les oscillations numériques, la méthode emploie la DOM dans sa formulation en variables paires avec une méthode de collocation basée sur l'approximation glissante aux moindres carrés.
- la MOL (Method Of Lines) a été développée par Selçuk et al. [81, 82, 83, 84] et a été appliquée à des milieux gazeux non gris en géométrie 3D [84].
- la méthode dite « subtraction of singularity » utilisée par Altaç et Tekkalmaz [85] a été appliquée à différents cas tests portant sur un milieu absorbant et diffusant de forme cubique.

Sur ce tour d'horizon des différentes méthodes de résolution de l'ETR. Peu de méthodes s'appliquent aux maillages tétraédriques. On peut citer la DOM de Sakami et al. [51] et Joseph et al. [7], la CVFEM de Rousse [79] ainsi que la MESHLESS de Wang et al. [80]. Toutefois, de ces quatre méthodes, seules celle de Rousse [79] et Wang et al. [80] peuvent être couplées à d'autres codes ayant leurs valeurs calculées aux sommets des tétraèdres (de type éléments finis). Ce qui montre la difficulté de traiter des géométries complexes en 3D comportant un maillage tétraédrique.

4. pour plus de détail le lecteur pourra se référer aux articles [75, 77]

Résumé du chapitre 1

Dans l'objectif de résoudre numériquement les transferts thermiques couplés par conduction et rayonnement, nous avons présenté les équations qui gouvernent ces deux modes de transfert de chaleur, à savoir l'équation du transfert radiatif et l'équation de conservation de l'énergie. Dans ce travail de thèse, nous nous sommes limités à l'étude d'un milieu semi-transparent non diffusant et nous avons présenté les conditions limites radiatives pour une frontière semi-transparente et opaque à réflexion diffuse ou spéculaire, ainsi que les conditions aux limites de conduction thermique (Dirichlet et Neumann). Nous avons ensuite réalisé un état de l'art sur les différentes méthodes numériques pour la résolution de l'ETR en géométrie 3D.

Dans le prochain chapitre, nous présentons en détail la MVF avec une formulation « cell-vertex » appliquée à l'ETR sur une géométrie 3D de forme quelconque. Cette présentation constitue la partie centrale de ce travail de thèse.

Chapitre 2

Résolution de l'ETR par la MVF dans un milieu semi-transparent gris représenté par une géométrie 3D de forme quelconque

Comme cela a été présenté auparavant, l'ETR est une équation complexe dont la résolution nécessite généralement l'utilisation de méthodes numériques. Aussi, les méthodes présentées précédemment reposent, pour la plupart, sur une discrétisation spatiale et directionnelle de l'ETR en raison d'un avantage certain que présente celle-ci, pour le couplage avec d'autres modes de transfert. Elles permettent notamment, d'obtenir une bonne précision pour un temps de calcul raisonnable (en comparaison à la méthode de Monte Carlo qui reste la référence en terme de précision). Dans cette catégorie de méthodes numériques, celles qui apparaissent comme les plus populaires, sont la DOM et la FVM. Notre choix s'est orienté vers la **FVM avec une formulation cell-vertex** qui nous offre la possibilité de coupler notre code avec un autre code de type éléments finis, ayant leurs valeurs aux noeuds du maillage. De plus, cette méthode s'applique aisément à des maillages non-structurés, donc à des problèmes en géométries complexes.

Dans le cadre de ses travaux de recherche, Asllanaj et al. [2, 5] ont développé un code de calcul de type volumes finis pour résoudre le transfert radiatif (RAD2D). Ce code est applicable aux géométries complexes 2D, basé sur un maillage non structuré constitué de triangles. Nous allons développer et présenter la méthode permettant d'étendre ces travaux pour une géométrie tridimensionnelle constituée d'un maillage non structuré tétraédrique. Avant de présenter le schéma numérique pour la résolution de l'ETR, nous allons décrire la discrétisation de l'espace angulaire. Ensuite, nous détaillerons le maillage en espace et la construction des volumes de contrôle. Nous présenterons l'ETR pour un milieu gris. Puis nous détaillerons la discrétisation de l'ETR par la MVF, ainsi que les relations de fermeture originales utilisées. Pour terminer, nous présentons une nouvelle formulation de la résolution de l'ETR permettant d'utiliser une résolution matricielle, mise en place dans cette étude.

2.1 Discrétisation angulaire

L'ETR présente la particularité d'être dépendante de la direction de propagation du rayonnement. La luminance doit donc être obtenue dans tout l'espace pour chaque direction considérée, nécessitant de discrétiser l'espace angulaire. Aussi, nous allons décrire la discrétisation angulaire à pas constant, ainsi que deux quadratures angulaires S_N et T_N , afin de pouvoir comparer ces différentes discrétisations angulaires.

2.1.1 Discrétisation angulaire à pas constant

Le vecteur directeur caractérisant la direction $\vec{\Delta}$ est défini dans un repère cartésien par les angles polaire φ ($0 < \varphi < \pi$) et azimutal θ ($0 < \theta < 2\pi$). On peut définir la direction $\vec{\Delta}$ en la projetant sur les trois directions de l'espace :

$$\vec{\Delta} = \sin \varphi \cos \theta \vec{e}_x + \sin \varphi \sin \theta \vec{e}_y + \cos \varphi \vec{e}_z \quad (2.1)$$

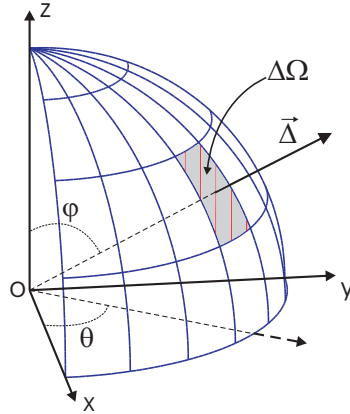


FIGURE 2.1 – Discrétisation angulaire à pas constant

Nous fixons les nombres d'angles polaires N_θ et azimutaux N_φ . Soit le nombre fini $N_d = N_\theta \times N_\varphi$ de directions discrètes $\vec{\Delta}^k$, où k représente la direction considérée avec $k = 1, \dots, N_d$. Dans cette partie, on s'affranchira de cet exposant pour présenter les grandeurs angulaires discrètes. L'espace angulaire de 4π (sr) est subdivisé en N_d angles solides notés $\Delta\Omega$. La figure (2.1) montre une discrétisation angulaire uniforme avec un pas constant $(\Delta\varphi, \Delta\theta)$. Nous pouvons aussi utiliser une discrétisation angulaire à pas variables, mais dans le cadre de ce travail, nous nous limitons à un pas angulaire toujours constant. Les angles discrets s'expriment par :

$$\begin{aligned} \theta^m &= (m - 1/2)\Delta\theta, & \Delta\theta &= 2\pi/N_\theta, & \forall m \in \{1, \dots, N_\theta\} \\ \varphi^n &= (n - 1/2)\Delta\varphi, & \Delta\varphi &= \pi/N_\varphi, & \forall n \in \{1, \dots, N_\varphi\} \end{aligned}$$

L'angle solide de contrôle est défini par :

$$\Delta\Omega = \int_{\Delta\Omega} d\Omega = \int_{\theta^-}^{\theta^+} d\theta \int_{\varphi^-}^{\varphi^+} \sin \varphi d\varphi = \Delta\theta (\cos \varphi^- - \cos \varphi^+) \quad (2.2)$$

$$\text{avec} \quad \theta^- = \theta - \frac{\Delta\theta}{2}; \quad \theta^+ = \theta + \frac{\Delta\theta}{2}; \quad \varphi^- = \varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}; \quad \varphi^+ = \varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}$$

2.1.2 Quadratures angulaires S_N et T_N

L'utilisation d'une quadrature angulaire permet de discrétiser une intégrale sur l'espace angulaire, par une somme discrète, sur N_d directions discrètes, faisant intervenir des poids directionnels. Ainsi, l'approximation d'une intégrale pour une fonction quelconque $f(\vec{\Delta})$ s'écrit :

$$\int_{4\pi} f(\vec{\Delta}) d\Omega \approx \sum_{k=1}^{N_d} f(\vec{\Delta}^k) \omega_k \quad (2.3)$$

où $\vec{\Delta}^k$ sont les directions discrètes et ω_k les poids directionnels définis par la quadrature utilisée. L'ensemble des vecteurs directeurs $\vec{\Delta}^k$ et des poids directionnels ω_k constituent ce qu'on appelle un ensemble de quadrature. Chaque direction discrète $\vec{\Delta}^k$ est définie dans le repère cartésien par :

$$\vec{\Delta}^k = \xi_k \vec{e}_x + \eta_k \vec{e}_y + \mu_k \vec{e}_z \quad (2.4)$$

où, $\vec{\Delta}^k$ est un vecteur unitaire avec,

$$\xi_k^2 + \eta_k^2 + \mu_k^2 = 1 \quad (2.5)$$

Le poids directionnel ω_k correspond à un angle solide défini autour de la direction $\vec{\Delta}^k$. Aussi, ces poids sont positifs, non nuls et doivent satisfaire, en particulier, les moments d'ordre zéro et un :

- moment d'ordre 0 :

$$\int_{4\pi} d\Omega = 4\pi = \sum_{k=1}^{N_d} \omega_k \quad (2.6)$$

- moment d'ordre 1 :

$$\int_{4\pi} \vec{\Delta} d\Omega = 0 = \sum_{k=1}^{N_d} \vec{\Delta}^k \omega_k \quad (2.7)$$

- moment d'ordre 1 sur un hémisphère avec $\vec{n}$ la normale extérieure d'une face (pour certaines quadratures) :

$$\int_{\vec{n} \cdot \vec{\Delta} < 0} |\vec{n} \cdot \vec{\Delta}| d\Omega = \int_{\vec{n} \cdot \vec{\Delta} > 0} \vec{n} \cdot \vec{\Delta} d\Omega = \pi = \sum_{\vec{n} \cdot \vec{\Delta}^k > 0} \vec{n} \cdot \vec{\Delta}^k \omega_k \quad (2.8)$$

Les quadratures S_N

L'une des quadratures angulaires les plus utilisées est la quadrature S_N , Modest [14]. La quadrature est défini par N_d directions discrètes où $N_d = N(N+2)$ (N l'ordre de la quadrature). La construction de cette quadrature est définie par des règles de symétries strictes, établies par Lathrop et Carlson [86, 87], Fiveland [88] et Truelove [89], répondant à une invariance en rotation (pour toute rotation de 90°), afin de ne privilégier aucun sens de propagation du rayonnement. En effet, les directions discrètes sont construites dans un octant. Ensuite, ces directions discrètes, ainsi que les poids, sont généralisés aux sept autres octants. Ainsi, le rayonnement provenant d'un octant sera traité de la même manière que celui provenant d'un autre octant. De plus, la quadrature doit également satisfaire, lorsque c'est possible, le moment d'ordre deux :

$$\int_{4\pi} \vec{\Delta} \vec{\Delta} d\Omega = \frac{4\pi}{3} = \sum_{k=1}^{N_d} \vec{\Delta}^k \vec{\Delta}^k \omega_k \quad (\text{moment d'ordre 2}) \quad (2.9)$$

Les directions $\vec{\Delta}^k$ de cette quadrature sont situées sur des niveaux de latitudes différentes de la sphère unitaire, comme illustré sur la figure 2.2. Elles sont construites à partir de la relation (même relation pour η_k et μ_k) :

$$\xi_k^2 = \xi_1^2 + 2(1 - 3\xi_1^2) \frac{k-1}{N-2} \quad (2.10)$$

avec ξ_1 la première latitude fixée, dont vont dépendre les autres ξ_k .

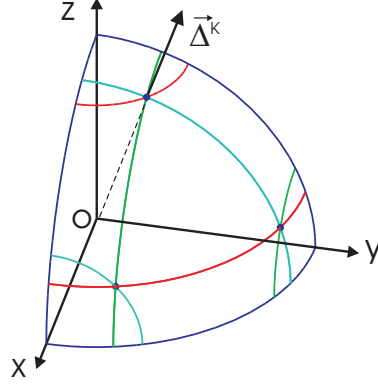


FIGURE 2.2 – Octant avec la quadrature S_4

Nous avons repris dans le tableau ci-dessous, les quadratures S_N telles que présentées dans Modest [14] :

Ordre de quadrature	Coordonnées			Poids ω
	ξ	η	μ	
S_2	0.5773503	0.5773503	0.5773503	1.5707963
S_4	0.2958759	0.2958759	0.9082483	0.5235987
	0.2958759	0.9082483	0.2958759	0.5235987
	0.9082483	0.2958759	0.2958759	0.5235987
S_6	0.1838670	0.1838670	0.9656013	0.1609517
	0.1838670	0.6950514	0.6950514	0.3626469
	0.1838670	0.9656013	0.1838670	0.1609517
	0.6950514	0.1838670	0.6950514	0.3626469
	0.6950514	0.6950514	0.1838670	0.3626469
	0.9656013	0.1838670	0.1838670	0.1609517
S_8	0.1422555	0.1422555	0.9795543	0.1712359
	0.1422555	0.5773503	0.8040087	0.0992284
	0.1422555	0.8040087	0.5773503	0.0992284
	0.1422555	0.9795543	0.1422555	0.1712359
	0.5773503	0.1422555	0.8040087	0.0992284
	0.5773503	0.5773503	0.5773503	0.4617179
	0.5773503	0.8040087	0.1422555	0.0992284
	0.8040087	0.1422555	0.5773503	0.0992284
	0.8040087	0.5773503	0.1422555	0.0992284
	0.9795543	0.1422555	0.1422555	0.1712359

TABLE 2.1 – Les quatre premiers ordres de la quadrature S_N

Les quadratures T_N

La quadrature T_N , introduite par Thurgood et al. [42], est définie par une construction géométrique qui respecte la même règle de symétrie que la quadrature S_N . Aussi, la construction des directions discrètes est également définie dans un octant. La quadrature est composée de N_d directions où $N_d = 8N^2$ avec N l'ordre de la quadrature. Il est construit à partir d'un triangle équilatéral $\mathcal{J}$, comme illustré sur la figure 2.3(a), de côté $\sqrt{2}$ et passant par le plan d'équation :

$$x + y + z = 1 \quad (2.11)$$

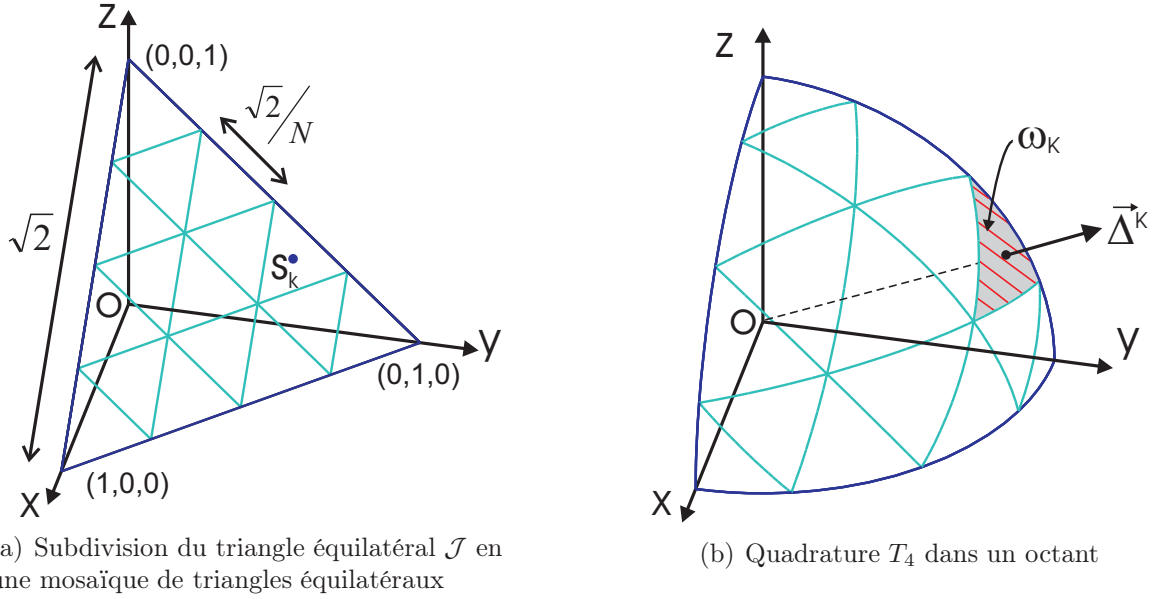


FIGURE 2.3 – Quadrature T_4

Les directions $\vec{\Delta}^k$ dans un octant, pour une quadrature d'ordre N , sont définies par une subdivision du triangle $\mathcal{J}$ en N^2 triangles équilatéraux de côté $\sqrt{2}/N$, décrivant une mosaïque de triangles (figure 2.3(a)). Dans chacun des triangles équilatéraux, on définit le centre S_k et les directions $\vec{\Delta}^k$ correspondent à la projection de S_k sur la sphère unitaire (figure 2.3(b)) avec,

$$S_k = x_k \vec{e}_x + y_k \vec{e}_y + z_k \vec{e}_z \quad (2.12)$$

Ces projections sont la normalisation des vecteurs $\vec{OS}_k$. Ainsi, les composantes du vecteur $\vec{\Delta}^k$ sont définies par les relations suivantes :

$$\xi_k = \frac{x_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}} \quad (2.13)$$

$$\eta_k = \frac{y_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}} \quad (2.14)$$

$$\mu_k = \frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2}} \quad (2.15)$$

Le poids directionnel ω_k correspond à la surface du triangle sphérique associé à la direction $\vec{\Delta}^k$. Sa construction est définie par la projection des sommets du triangle équilatéral sur la sphère unitaire, comme illustré sur la figure 2.3(b).

2.2 Discrétisation spatiale

Dans le but d'appliquer la MVF à des géométries tridimensionnelles de forme quelconque, on discrétise le domaine spatial à l'aide d'un maillage non structuré composé de tétraèdres. Pour obtenir une solution approchée en chaque noeud du maillage, on utilisera un schéma dit "**Cell-vertex**" (à opposer à "Cell-center"). Rappelons qu'avec un schéma de type "Cell-vertex", **les inconnues sont stockées aux noeuds du maillage**, tandis qu'avec un schéma de type "Cell-center", les inconnues sont stockées aux centres des mailles formant le domaine (les mailles correspondent directement aux volumes de contrôle). Le schéma "Cell-vertex" consiste à construire les volumes de contrôle autour de chaque noeud du maillage. De plus, cette technique nous permettra de coupler aisément notre code à n'importe quel autre code (même commercial) utilisant le même type de maillage (exemple : couplage rayonnement et conduction, thermique et mécanique). Les valeurs approchées de la solution seront obtenues en intégrant l'ETR sur des volumes de contrôle associés aux noeuds. Ceux-ci sont des polyèdres à faces quadrilatérales formés de plusieurs volumes partiels comme illustré sur la figure 2.4.

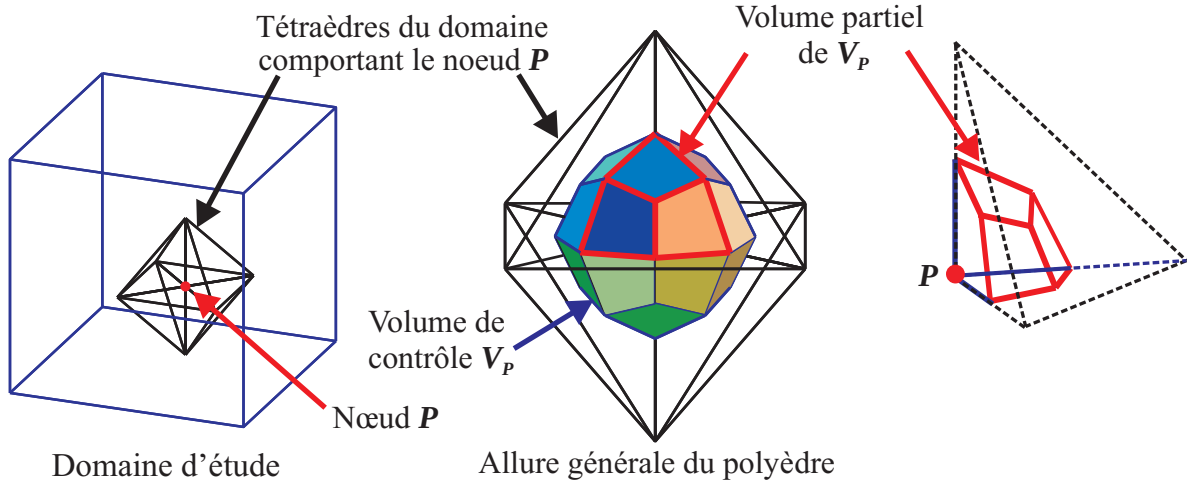
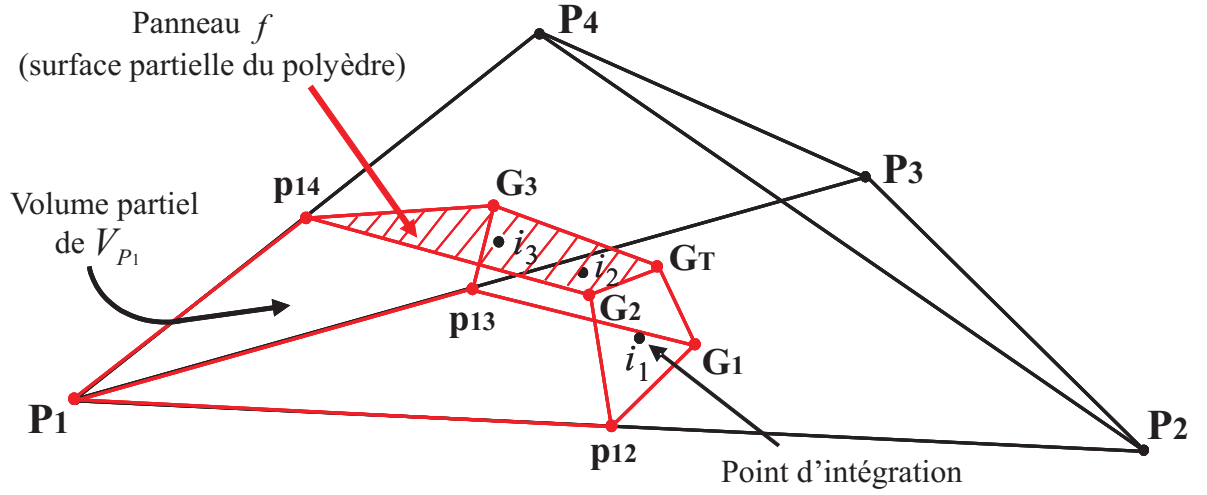


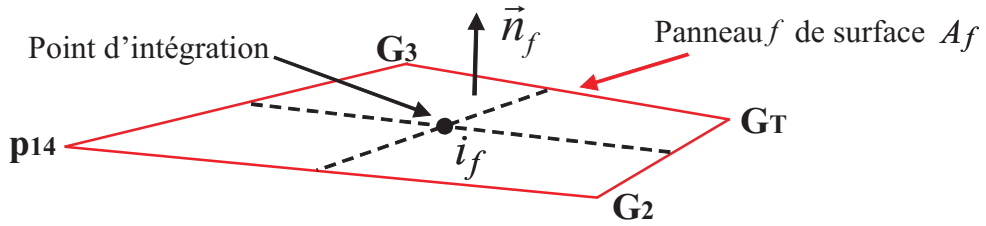
FIGURE 2.4 – Volume de contrôle V_P en géométrie 3D

Le volume de contrôle noté V_P associé au noeud P est construit à partir de chaque tétraèdre qui compte comme sommet le noeud P . On note Γ_P la frontière du volume de contrôle V_P (Γ_P représente donc une surface). Pour chacun de ces tétraèdres (qui ont en commun le sommet P), on décrit un volume partiel qui est une partie du volume de contrôle V_P . Nous détaillons la construction du volume partiel à partir d'un tétraèdre, afin d'expliciter la construction du polyèdre. Considérons, par exemple, un tétraèdre noté $\mathcal{T} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ dans lequel on construit le volume partiel associé au noeud P_1 noté V_{P_1} (cf. figure 2.5). V_{P_1} est un hexaèdre (à six faces quadrilatérales) constitué de douze arêtes et de huit sommets. Sa construction est définie par :

- le noeud principal P_1 ;
- l'isobarycentre du tétraèdre $\mathcal{T}$ noté G_T ;
- les trois points milieux, p_{12}, p_{13}, p_{14} respectivement des côtés $[P_1 P_2], [P_1 P_3], [P_1 P_4]$;
- les trois isobarycentres, G_1, G_2, G_3 respectivement des triangles $(P_1, P_2, P_3), (P_1, P_2, P_4), (P_1, P_3, P_4)$.

FIGURE 2.5 – Volume partiel V_{P_1} associé au noeud P_1

Ainsi, chaque volume de contrôle V_P est décrit par le volume de plusieurs hexaèdres, leur construction passe par une généralisation de cette méthode à tous les tétraèdres comportant le sommet P . Notons qu'un volume de contrôle compte autant d'hexaèdres qu'il y a de tétraèdres comportant le noeud P . Pour chaque hexaèdre (volume partiel) appartenant au volume de contrôle V_P , il y a trois faces qui appartiennent à la frontière Γ_P (du volume de contrôle V_P). Sur l'hexaèdre représenté à la figure 2.5, ces trois faces correspondent aux trois quadrilatères (G_T, G_1, p_{12}, G_2) , (G_T, G_1, p_{13}, G_3) et (G_T, G_2, p_{14}, G_3) . Chacun de ces **quadrilatères** est une surface partielle de Γ_P qu'on définira par le terme **panneau** et sera noté f . La surface Γ_P est subdivisée en N_f panneaux de surface et au centre de ceux-ci sont définis les points d'intégration comme illustré sur la figure 2.6 : nous verrons par la suite l'utilité des points d'intégration.

FIGURE 2.6 – Panneau f

Rappelons que les deux médianes d'un quadrilatère quelconque, sont les droites qui passent par les milieux de deux côtés opposés. Nous définissons alors l'intersection de ces deux médianes par le point d'intégration i_f . Notons que le nombre de panneaux de surface varie d'un volume de contrôle à l'autre. Pour le panneau f , i_f est le point d'intégration qui se trouve en son centre de gravité, A_f est son aire et $\vec{n}_f$ est la normale extérieure unitaire (figure 2.6). Cette construction présente l'avantage de définir parfaitement la position des points d'intégration, puisque leur construction découle directement des noeuds du maillage. De plus, les volumes de contrôle, une fois réunis, reconstituent bien sûr parfaitement le volume initial du domaine.

Pour les noeuds à la frontière, les volumes de contrôle sont construits de la même manière. Cependant, une partie de la frontière Γ_P du volume de contrôle V_P (associé à un noeud P de la frontière) appartient à la frontière du domaine. En effet, Γ_P s'exprime par $\Gamma_P = \Gamma_P^{int} \cup \Gamma_P^{ext}$, où Γ_P^{int} correspond aux panneaux situés à l'intérieur du domaine (construction classique) et Γ_P^{ext} est la surface appartenant à la frontière du domaine comme illustré sur la figure 2.7. Aussi, pour définir tout le volume de contrôle ayant une partie de sa surface appartenant à la frontière du domaine, nous devons définir la surface Γ_P^{ext} .

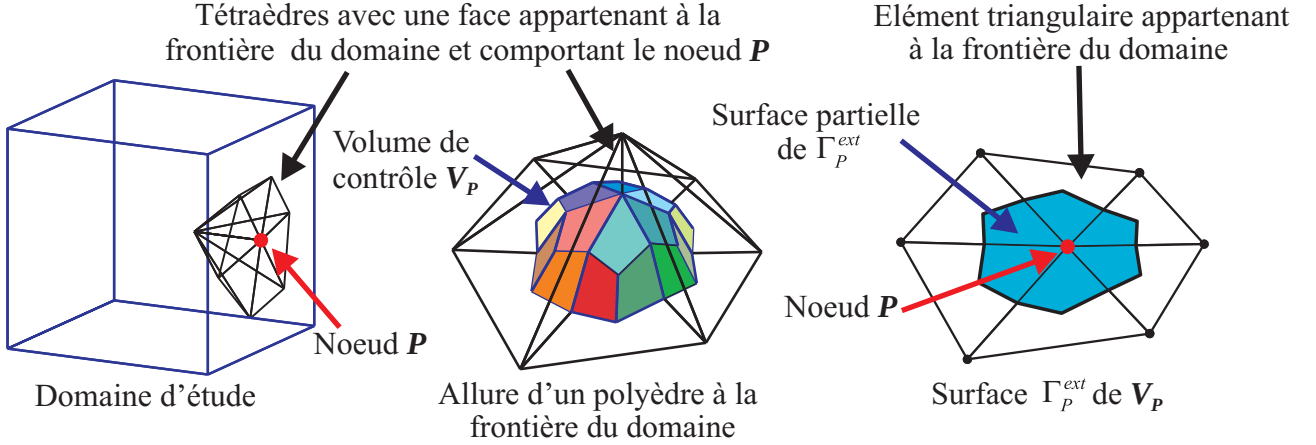


FIGURE 2.7 – Volume de contrôle avec une partie de sa surface appartenant à la frontière du domaine

La surface Γ_P^{ext} est un polygone construit à partir de plusieurs surfaces partielles. En effet, la surface Γ_P^{ext} est construite à partir de chaque élément triangulaire de la frontière du domaine qui compte parmi ses sommets le noeud P . Pour expliciter la construction, du polygone, nous détaillons celle d'une surface partielle.

Remarque : les surfaces partielles correspondent aux panneaux f , mais sont construites de manières différentes.

Considérons un triangle $\mathcal{J} = (P_1, P_2, P_3)$, tel que représenté par la figure 2.8, dans lequel nous définissons la surface partielle associée au noeud P_1 . Cette surface partielle est un quadrilatère défini par :

- le noeud principal P_1 ;
- l'isobarycentre du triangle $\mathcal{J}$ noté G_1 ;
- les points milieux p_{12}, p_{13} respectivement des côtés $[P_1P_2], [P_1P_3]$.

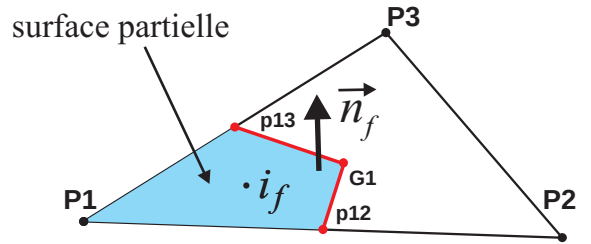


FIGURE 2.8 – Surface partielle du polygone

Pour construire les volumes de contrôle du domaine, nous avons identifié pour chaque noeud P , tous les tétraèdres qui comptent parmi leurs sommets le noeud P . De même, pour les surfaces Γ_P^{ext} à la frontière, nous définissons les éléments de la frontière qui comportent le noeud P parmi leurs sommets. A partir de ces identifications, nous pouvons calculer les volumes, les surfaces,... de ces volumes de contrôle.

2.3 ETR pour un milieu gris avec des surfaces noires

L'application que l'on vise porte sur le verre et les isolants. Toutefois, nous allons dans un premier temps simplifier notre étude en considérant un milieu gris avec un indice de réfraction égal à un (la généralisation se fera sans trop de difficulté). Ainsi, les propriétés radiatives du milieu sont indépendantes de la longueur d'onde. D'autre part, nous prenons en compte la dépendance spatiale du coefficient d'absorption. Ainsi, dans notre cas, l'ETR à résoudre est la suivante :

$$\vec{\Delta} \cdot \vec{\nabla} L(s, \vec{\Delta}) = \kappa(s) \left[L^o(T(s)) - L(s, \vec{\Delta}) \right] \quad s \in V \quad (2.16)$$

où V représente le volume du milieu.

Nous allons considérer, des parois noires ou diffuses associées à des températures imposées aux frontières. Ces conditions aux limites sont de type Dirichlet.

1. Nous désignons les frontières noires comme étant des surfaces uniquement émissives (i.e pas de réflexion, ni de transmission à la frontière), ainsi :

$$L(s, \vec{\Delta}) = L^o(T(s)) \quad s \in \Gamma_g \quad (2.17)$$

avec Γ_g représentant une frontière du milieu (g numéro de la face).

2. Les frontières opaques à réflexion diffuse, avec les hypothèses décrites ci-dessus, se simplifient ainsi :

$$L(s, \vec{\Delta}) = \epsilon L^o(T(s)) + \frac{(1 - \epsilon)}{\pi} Q^{inc}(s) \quad s \in \Gamma_g \quad (2.18)$$

2.4 Application de la MVF à l'ETR

Pour appliquer la MVF à l'ETR (2.16), nous intégrons l'équation sur un volume de contrôle V_P , dans la direction $\vec{\Delta}^k$ autour d'un angle solide de contrôle $\Delta\Omega^k$ avec k le numéro de la direction considérée. Il vient alors :

$$\int_{V_P} \int_{\Delta\Omega^k} \vec{\Delta} \cdot \vec{\nabla} L(s, \vec{\Delta}) d\Omega dV = \int_{V_P} \int_{\Delta\Omega^k} \kappa(s) \left[L^o(T(s)) - L(s, \vec{\Delta}) \right] d\Omega dV \quad (2.19)$$

Afin d'exprimer l'équation sous sa forme conservative, on applique le théorème de Green-Ostrograsky au premier membre de l'équation (2.19), ce qui permet de transformer l'intégrale de volume en intégrale de surface. On obtient ainsi l'expression suivante :

$$\int_{\Gamma_P} \int_{\Delta\Omega^k} L(s, \vec{\Delta}) (\vec{\Delta} \cdot \vec{n}_{ext}) d\Omega dS = \int_{V_P} \int_{\Delta\Omega^k} \kappa(s) \left[L^o(T(s)) - L(s, \vec{\Delta}) \right] d\Omega dV \quad (2.20)$$

où Γ_P représente la frontière du volume V_P et $\vec{n}_{ext}$ est la normale unitaire extérieure à cette surface. Cette équation traduit un état d'équilibre pour l'intensité du rayonnement. Elle exprime que l'énergie radiative nette quittant la surface Γ_P à travers l'angle solide discret $\Delta\Omega^k$ autour de la direction $\vec{\Delta}^k$ est égale à la génération d'énergie radiative nette par absorption et émission à l'intérieur du volume V_P à travers l'angle solide discret $\Delta\Omega^k$

autour de la direction $\vec{\Delta}^k$. A partir de cette expression, nous allons pouvoir déterminer la luminance en tout noeud du maillage et dans chaque direction discrète $\vec{\Delta}^k$.

La MVF consiste à déterminer une approximation de la luminance à partir de la loi de bilan d'énergie radiative décrite par l'équation (2.20). Aussi, nous évoquerons les hypothèses nécessaires à la discrétisation de l'équation.

L'énergie radiative dans un cône d'angle solide discret $\Delta\Omega^k$ autour de la direction $\vec{\Delta}^k$ à l'intérieur du volume de contrôle V_P sera supposée constante. Ainsi, le coefficient d'absorption $\kappa(s)$ et les luminances $L^o(T(s))$ et $L(s, \vec{\Delta})$, sont constants dans le volume de contrôle et prennent une valeur moyenne au noeud P . Cette hypothèse sera vérifiée si l'angle solide de contrôle est assez fin et si le volume de contrôle V_P , est suffisamment petit relativement aux dimensions du domaine et au gradient des valeurs concernées. On notera, pour la suite, L_P^k une approximation de la luminance au noeud P et dans la direction discrète $\vec{\Delta}^k$. Il vient alors :

$$\int_{\Gamma_P} \int_{\Delta\Omega^k} L(s, \vec{\Delta}) (\vec{\Delta} \cdot \vec{n}_{ext}) d\Omega dS \cong \kappa_P [L^o(T_P) - L_P^k] \Delta\Omega^k V_P \quad (2.21)$$

La frontière Γ_P du volume de contrôle V_P est définie par les N_f panneaux de surface. La luminance dans un angle de contrôle $\Delta\Omega^k$ autour de la direction $\vec{\Delta}^k$ sur chacun de ces panneaux sera également considérée constante. On définit la luminance dans la direction $\vec{\Delta}^k$ sur le panneau f par la luminance au point d'intégration i_f . Bien entendu cette approximation aura des répercussions sur la précision du calcul, pour réduire son influence, il faudra discrétiser finement l'espace angulaire et spatial de telle sorte que l'hypothèse soit vérifiée. La luminance calculée au point d'intégration i_f et dans la direction $\vec{\Delta}^k$ sera notée $L_{i_f}^k$. Il vient alors l'expression discrétisée de l'ETR :

$$\sum_{f=1}^{N_f} L_{i_f}^k A_f \Delta_f^k = \kappa_P [L^o(T_P) - L_P^k] \Delta\Omega^k V_P \quad (2.22)$$

où,

$$\Delta_f^k = \int_{\Delta\Omega^k} \vec{\Delta} \cdot \vec{n}_f d\Omega \quad (2.23)$$

Rappelons que A_f et $\vec{n}_f$ sont respectivement la surface et la normale extérieure unitaire du panneau f .

Notons que Δ_f^k est une intégrale qui ne dépend que de l'orientation du panneau f pour la direction considérée. Cette intégrale est calculée de manière exacte (cf. annexe A).

Bien que nous ayons décrit la discrétisation de l'ETR par la MVF et les hypothèses utilisées, nous n'avons pas résolu complètement notre problème. En effet, le membre de droite de l'équation (2.22) est bien exprimé en fonction de la valeur des luminances au noeud P . Cependant le membre de gauche dépend des valeurs de la luminance aux points d'intégration i_f , or aucune valeur n'est affectée en ces points puisqu'il ne s'agit pas de noeuds du maillage. Il nous faut donc exprimer les valeurs de la luminance aux points d'intégration i_f en fonction des valeurs aux noeuds du maillage. Nous pouvons le faire à partir des relations de fermeture que nous présentons à la suite.

2.5 Relations de fermeture

En géométrie 3D, il existe quelques schémas de fermeture pour des maillages structurés composés de parallélépipèdes et, a contrario, **très peu de schémas existent pour des maillages non-structurés composés de tétraèdres**. Parmi eux, nous pouvons faire référence à Rousse (1994) [90], Joseph et al. (2004, 2005) [7, 53]. Dans les articles de Asllanaj et al. (2007, 2008)[2, 91], des relations de fermeture originales ont été développées pour la résolution de l'ETR en géométrie 2D de forme quelconque utilisant un maillage non-structuré composé de triangles. Les résultats numériques obtenus ont permis de valider la méthode et de montrer l'efficacité de ces relations de fermeture notamment dans le cas d'un verre ayant des épaisseurs optiques élevées [91]. **Nous proposons ici de généraliser ces relations de fermeture au cas d'un maillage non-structuré composé de tétraèdres.**

Les relations de fermeture permettent d'établir l'adéquation entre le problème numérique et la physique du problème. En effet, le rayonnement se propage suivant une direction. Aussi, pour définir la luminance au point i_f , associé au volume de contrôle V_P , on ne peut considérer que les noeuds voisins et situés en amont du noeud P , ainsi que le noeud P , puisque les valeurs aux noeuds en aval ne sont pas connues. Pour relier la luminance au point i_f à celles des noeuds qui conviennent, nous utilisons l'expression intégrale de l'ETR. Puis, nous modifions l'équation (2.22) afin de l'exprimer à partir des noeuds du maillage.

2.5.1 Forme intégrale de l'ETR

Pour un milieu gris semi-transparent, considéré comme non diffusant, la forme intégrale de l'ETR est la suivante (Modest [14]) :

$$L(i_f, \vec{\Delta}) = L(u_f, \vec{\Delta}) e^{-\int_{u_f}^{i_f} \kappa(s) ds} + \int_{u_f}^{i_f} \kappa(s) L^o(T(s)) e^{-\int_s^{i_f} \kappa(u) du} ds \quad (2.24)$$

Cette relation exprime la luminance au point i_f à partir de la luminance au point u_f , où u_f est situé en amont de i_f et sur le même chemin optique porté par la direction $\vec{\Delta}$ (figure 2.9). La luminance au point u_f est ensuite approximée à partir des luminances, du noeud P et/ou des noeuds situés en amont et voisins du noeud P . Ces approximations seront définies par la suite par des interpolations linéaires avec différents cas de figure.

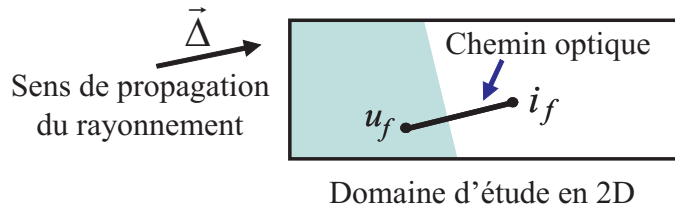


FIGURE 2.9 – Chemin optique porté par la direction $\vec{\Delta}$

Afin d'introduire la forme intégrale de l'ETR dans l'équation discrétisée (2.22), nous définissons au préalable les grandeurs D_f^k et C_f^k .

$$D_f^k = A_f \Delta_f^k e^{-\int_{u_f}^{i_f} \kappa(s) ds} \quad (2.25)$$

$$C_f^k = A_f \Delta_f^k \left[\int_{u_f}^{i_f} \kappa(s) L^o(T(s)) e^{-\int_s^{i_f} \kappa(u) du} ds \right] \quad (2.26)$$

Ainsi, le membre de gauche de l'équation (2.22) s'exprime par :

$$\sum_{f=1}^{N_f} L_{i_f}^k A_f \Delta_f^k = \sum_{f=1}^{N_f} L_{u_f}^k D_f^k + C_f^k \quad (2.27)$$

Pour une température et un coefficient d'absorption constant dans le milieu (ce qui est le cas dans cette première étude), les grandeurs D_f^k et C_f^k s'expriment comme suit,

$$D_f^k = A_f \Delta_f^k e^{-\kappa \Delta S_f} \quad (2.28)$$

$$C_f^k = A_f \Delta_f^k L^o(T) (1 - e^{-\kappa \Delta S_f}) \quad (2.29)$$

avec $\Delta S_f = |i_f - u_f|$ représentant la distance entre u_f et i_f . L'équation discrétisée (2.22) avec la forme intégrale de l'ETR s'écrit,

$$\sum_{f=1}^{N_f} L_{u_f}^k D_f^k = \kappa_P [L^o(T_P) - L_P^k] \Delta \Omega^k V_P - \sum_{f=1}^{N_f} C_f^k \quad (2.30)$$

A présent, il reste à exprimer les luminances aux points u_f à partir des luminances définies aux noeuds situés en amont et voisins de P et/ou du noeud P . Pour cela, nous devons définir au préalable la construction des points u_f et les interpolations nécessaires en fonction des différents cas qui peuvent se présenter.

2.5.2 Construction des points i_f , u_f et les interpolations linéaires

Les points u_f correspondent à la projection dans le sens inverse de la direction $\vec{\Delta}$ (de propagation du rayonnement) des points d'intégration i_f appartenant aux panneaux du volume de contrôle V_P . La construction des points u_f dépend de la forme des tétraèdres et de la direction $\vec{\Delta}$. Aussi, il existe différents cas de figure que nous traitons en considérant une direction spécifique $\vec{\Delta}$ et un **tétraèdre de référence** noté $\mathcal{T}_{\mathcal{R}} = (P_1, P_2, P_3, P_4)$. Pour simplifier les écritures qui vont suivre, nous introduisons les symboles suivants :

- $A <= (B, C, ..)$ signifie, A est en amont de $B, C, ..$;

Pour $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ nous supposons $P_1 <= P_2 <= P_3 <= P_4$.

Les points d'intégration i_f

Dans ce tétraèdre, on définit les points d'intégration i_f des panneaux f ($f = 1, \dots, 6$) comme illustré sur la figure (2.10). D'une part, notons que dans un tétraèdre, il y a exactement 6 points d'intégration. La construction de ces points est définie par les coordonnées des sommets du tétraèdre $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$, tels que :

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{4} \left(\frac{17}{12}P_1 + \frac{17}{12}P_2 + \frac{7}{12}P_3 + \frac{7}{12}P_4 \right) \\ i_2 &= \frac{1}{4} \left(\frac{17}{12}P_1 + \frac{7}{12}P_2 + \frac{17}{12}P_3 + \frac{7}{12}P_4 \right) \\ i_3 &= \frac{1}{4} \left(\frac{17}{12}P_1 + \frac{7}{12}P_2 + \frac{7}{12}P_3 + \frac{17}{12}P_4 \right) \\ i_4 &= \frac{1}{4} \left(\frac{7}{12}P_1 + \frac{17}{12}P_2 + \frac{17}{12}P_3 + \frac{7}{12}P_4 \right) \\ i_5 &= \frac{1}{4} \left(\frac{7}{12}P_1 + \frac{17}{12}P_2 + \frac{7}{12}P_3 + \frac{17}{12}P_4 \right) \\ i_6 &= \frac{1}{4} \left(\frac{7}{12}P_1 + \frac{7}{12}P_2 + \frac{17}{12}P_3 + \frac{17}{12}P_4 \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ces formules sont bien indépendantes de la direction considérée et ne dépendent que des coordonnées des sommets du tétraèdre. D'autre part, tout tétraèdre du maillage peut se ramener, en choisissant un ordre judicieux de renumérotation de ses sommets, à ce tétraèdre de référence. Un tétraèdre quelconque peut donc toujours s'exprimer par rapport au tétraèdre de référence par une homothétie et/ou une rotation, de fait, on peut appliquer les formules présentées dans ce paragraphe.

D'autre part, notons que les six points d'intégration appartiennent aux frontières des quatre volumes partiels V_{P_1} , V_{P_2} , V_{P_3} et V_{P_4} du tétraèdre $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$. En effet,

- $(i_1, i_2, i_3) \in V_{P_1}$
- $(i_1, i_4, i_5) \in V_{P_2}$
- $(i_2, i_4, i_6) \in V_{P_3}$
- $(i_3, i_5, i_6) \in V_{P_4}$

Remarque : un panneau f appartient à la frontière de deux volumes partiels et donc le point d'intégration i_f également.

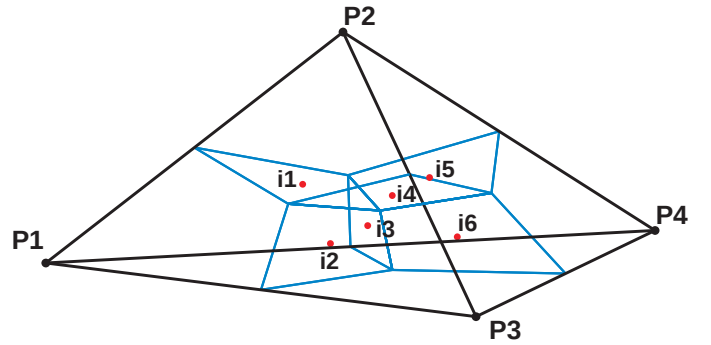


FIGURE 2.10 – Les points d'intégration dans un tétraèdre de référence

La construction des points u_f et les interpolations linéaires utilisées

Le point u_f est la projection du point d'intégration i_f sur un plan orthogonal à la direction $\vec{\Delta}$ et passant par un point se trouvant nécessairement en amont du point i_f . Ce point peut correspondre, comme nous le verrons plus loin, soit à un des sommets du tétraèdre, soit au milieu de deux sommets du tétraèdre, ou soit encore à l'isobarycentre d'une face du tétraèdre. Pour illustrer la construction du point u_f , on considère toujours le tétraèdre de référence $\mathcal{T}_R = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ de la figure 2.10 et une direction $\vec{\Delta}$ quelconque.

Pour approximer la luminance au point u_f , nous utilisons une interpolation linéaire faisant intervenir jusqu'à trois noeuds (trois sommets du tétraèdre $\mathcal{T}_R$). Le noeud P_4 est par définition le noeud situé le plus en aval (en particulier il est situé en aval de tout point i_f). Aussi, nous ne pouvons utiliser ce noeud pour l'interpolation, puisque la luminance en ce noeud n'est pas connue. De plus, en fonction des différents cas de figures que nous verrons à la suite, nous pouvons être amené à utiliser qu'un seul, deux voire trois noeuds. Ainsi, $L_{u_f}^k$ peut s'exprimer par la relation générale :

$$L_{u_f}^k \cong \alpha_{f,1}^k L_{P_1}^k + \alpha_{f,2}^k L_{P_2}^k + \alpha_{f,3}^k L_{P_3}^k \quad (2.32)$$

avec,

$$\sum_{na=1}^3 \alpha_{f,na}^k = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \alpha_{f,na}^k \leq 1 \quad \forall \quad na = 1, 2, 3 \quad (2.33)$$

Nous pouvons également exprimer la relation (2.32) de la façon suivante :

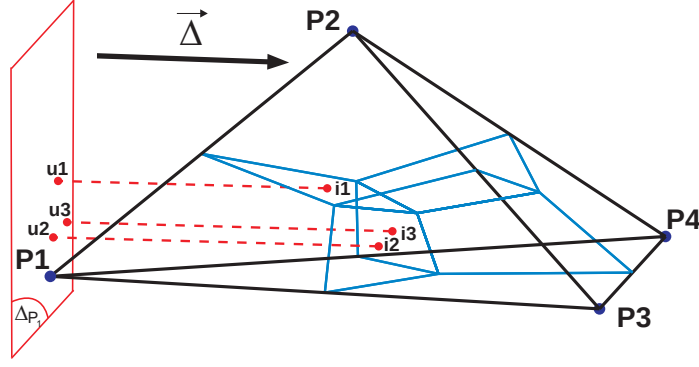
$$L_{u_f}^k \cong \sum_{\{na \in \mathcal{E}_{f,P}^k\}} \alpha_{f,na}^k L_{na}^k \quad (2.34)$$

où $\mathcal{E}_{f,P}^k$ est l'ensemble des sommets du tétraèdre $\mathcal{T}_R$ situés en amont de i_f (utilisés pour exprimer $L_{u_f}^k$).

Nous allons à présent définir les projections et les interpolations à réaliser pour les différents cas possibles. Pour les interpolations, il s'agira simplement de donner des valeurs aux coefficients $\alpha_{f,j}^k$ ($j = 1, 2, 3$). Pour la suite, on note ΔP_j ($j = 1, 2, 3$), ΔP_{12} et ΔP_{123} les plans orthogonaux à la direction $\vec{\Delta}$ et passant respectivement par les sommets P_j , l'isobarycentre des sommets (P_1, P_2) et (P_1, P_2, P_3) . Pour la construction des points u_f , nous distinguons deux cas de figures relatifs aux points u_t et aux points u_s :

- u_t est l'un des points u_1, u_2, u_3 et on note i_t (le point d'intégration associé à u_t) l'un des points i_1, i_2, i_3 . Rappelons que le point i_t appartient toujours à la frontière du volume partiel V_{P_1} . On notera qu'il est toujours en aval du sommet P_1 . Alors, le point u_t est la projection du point d'intégration i_t dans la direction $\vec{\Delta}$ sur le plan ΔP_1 (cf. figure 2.11). Le point u_t est toujours construit de la même façon et la luminance en ce point est toujours (sauf cas particuliers) interpolée en posant :

$$\alpha_{t,1}^k = 1, \quad \text{et} \quad \alpha_{t,2}^k = \alpha_{t,3}^k = 0 \quad \text{avec} \quad t = 1, 2, 3 \quad (2.35)$$


 FIGURE 2.11 – Les projections des points d'intégrations i_t ($t = 1, 2, 3$)

- u_s est l'un des points u_4, u_5, u_6 et on note i_s (le point d'intégration associé à u_s) l'un des points i_4, i_5, i_6 . Le point u_s est la projection du point d'intégration i_s dans la direction $\vec{\Delta}$ sur un plan situé nécessairement en amont de i_s . Plus précisément, les points i_4 et i_5 seront projetés sur le plan Δ_{P_1} ou $\Delta_{P_{12}}$ et i_6 sur les plans Δ_{P_1} , $\Delta_{P_{12}}$ ou $\Delta_{P_{123}}$, hormis dans certains cas particuliers. Ces choix de plan de projection sont conditionnés par l'appartenance du point i_s au volume partiel, ainsi que par la position du point i_s par rapport aux sommets P_2 et P_3 (sauf cas particuliers). En effet, rappelons que i_4 et i_5 appartiennent à V_{P_2} et i_6 appartient à V_{P_3} . Les points i_5 et i_6 appartiennent également à V_{P_4} , néanmoins les points i_5 et i_6 ne peuvent être projetés sur Δ_{P_4} , puisque le sommet P_4 est toujours situé en aval des points d'intégration.

1^{er} cas (figure 2.12), il correspond à, $P_2 \leq (i_4, i_5)$ et $P_3 \leq i_6$. Alors, les points u_4 et u_5 se trouvent sur le plan $\Delta_{P_{12}}$ et u_6 appartient au plan $\Delta_{P_{123}}$. Les luminances aux points u_4, u_5 , et u_6 sont interpolées en prenant :

$$\alpha_{s,1}^k = \alpha_{s,2}^k = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_{s,3}^k = 0 \quad \text{avec } s = 4, 5$$

$$\alpha_{6,1}^k = \alpha_{6,2}^k = \alpha_{6,3}^k = \frac{1}{3} \quad (2.36)$$

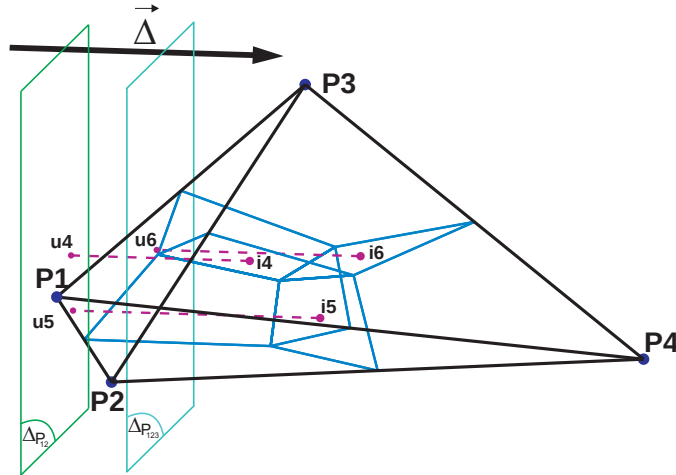


FIGURE 2.12 – Cas n°1

2nd cas (figure 2.13), il correspond à, $P_2 \leq (i_4, i_5)$ et $P_2 \leq i_6 \leq P_3$. Alors, les points u_4 , u_5 et u_6 appartiennent au plan $\Delta_{P_{12}}$. Les luminances aux points u_4 , u_5 , et u_6 sont interpolées en prenant :

$$\alpha_{s,1}^k = \alpha_{s,2}^k = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_{s,3}^k = 0 \quad \text{avec } s = 4, 5, 6 \quad (2.37)$$

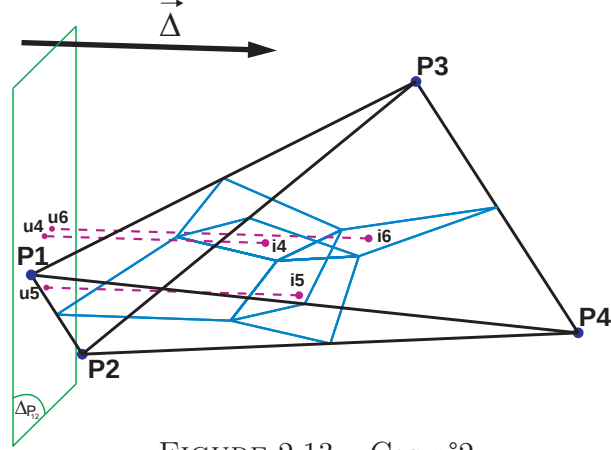


FIGURE 2.13 – Cas n°2

3^{ème} cas (figure 2.14), il correspond à, $i_4 \leq P_2 \leq i_5$ et $P_3 \leq i_6$. Alors, le point u_4 est sur le plan Δ_{P_1} , u_5 se trouve sur le plan $\Delta_{P_{12}}$ et u_6 appartient au plan $\Delta_{P_{123}}$. Les luminances aux points u_4 , u_5 , et u_6 sont interpolées en prenant :

$$\begin{aligned} \alpha_{4,1}^k &= 1 \quad \text{et} \quad \alpha_{4,2}^k = \alpha_{4,3}^k = 0 \\ \alpha_{5,1}^k &= \alpha_{5,2}^k = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_{5,3}^k = 0 \\ \alpha_{6,1}^k &= \alpha_{6,2}^k = \alpha_{6,3}^k = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (2.38)$$

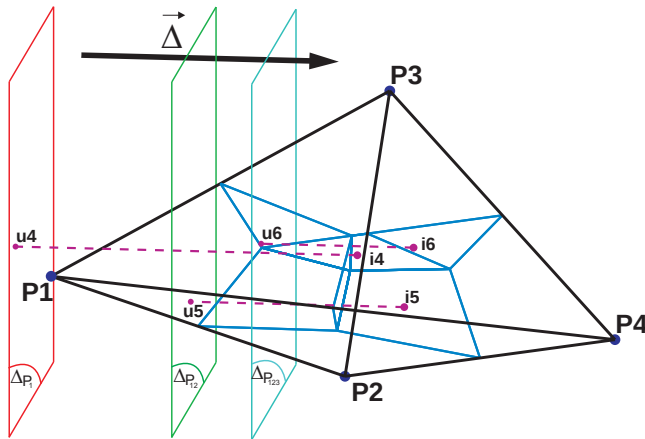


FIGURE 2.14 – Cas n°3

4^{ème} cas (figure 2.15), il correspond à, $i_4 \leq P_2 \leq i_5$ et $P_2 \leq i_6 \leq P_3$. Alors, le point u_4 est sur le plan Δ_{P_1} , u_5 et u_6 se trouvent sur le plan $\Delta_{P_{12}}$. Les luminances aux points u_4 , u_5 , et u_6 sont interpolées en prenant :

$$\begin{aligned} \alpha_{4,1}^k &= 1 \quad \text{et} \quad \alpha_{4,2}^k = \alpha_{4,3}^k = 0 \\ \alpha_{s,1}^k &= \alpha_{s,2}^k = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_{s,3}^k = 0 \quad \text{avec } s = 5, 6 \end{aligned} \quad (2.39)$$

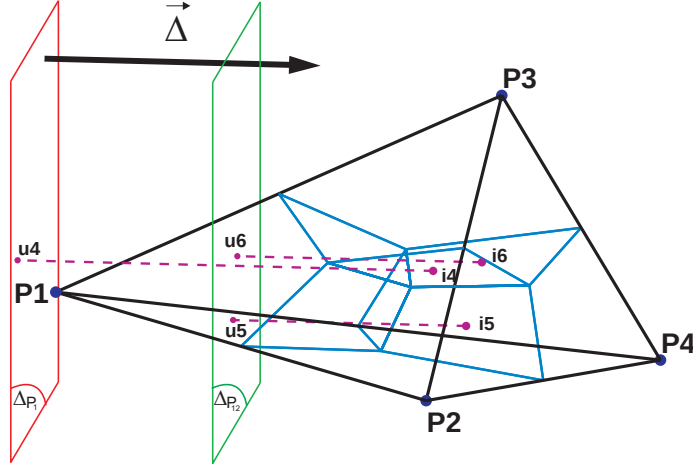


FIGURE 2.15 – Cas n°4

5^{ème} cas (figure 2.16), il correspond à, $(i_4, i_5, i_6) \leq P_2$. Alors, les points u_4 , u_5 et u_6 appartiennent au plan Δ_{P_1} . Les luminances aux points u_4 , u_5 , et u_6 sont interpolées en prenant :

$$\alpha_{s,1}^k = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_{s,2}^k = \alpha_{s,3}^k = 0 \quad \text{avec } s = 4, 5, 6 \quad (2.40)$$

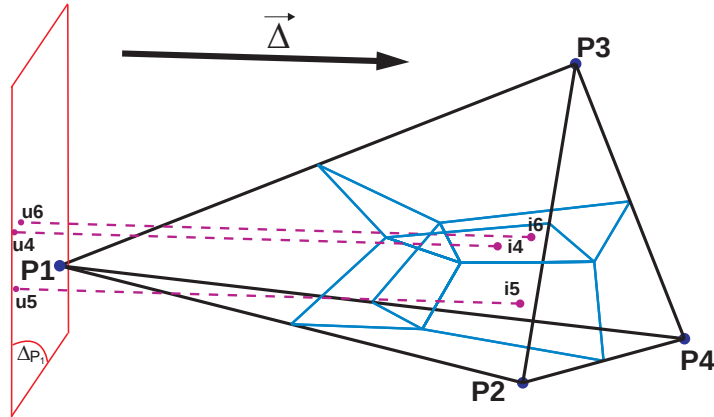


FIGURE 2.16 – Cas n°5

6^{ème} cas, il correspond à, $(i_4, i_5) \leq P_2$ et $P_3 \leq i_6$ (c'est un cas peu probable, aussi nous n'avons pas d'exemple de figure). Les points u_4, u_5 appartiennent au plan Δ_{P_1} et u_6 se trouve sur le plan $\Delta_{P_{123}}$. Les luminances aux points u_4, u_5 , et u_6 sont interpolées en prenant :

$$\alpha_{s,1}^k = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_{s,2}^k = \alpha_{s,3}^k = 0 \quad \text{avec } s = 4, 5$$

$$\alpha_{6,1}^k = \alpha_{6,2}^k = \alpha_{6,3}^k = \frac{1}{3} \quad (2.41)$$

7^{ème} cas, il correspond à, $(i_4, i_5) \leq P_2$ et $P_2 \leq i_6 \leq P_3$ (c'est également un cas peu probable, aussi nous n'avons pas d'exemple de figure). Les points u_4, u_5 appartiennent au plan Δ_{P_1} et u_6 se trouve sur le plan $\Delta_{P_{12}}$. Les luminances aux points u_4, u_5 , et u_6 sont interpolées en prenant :

$$\alpha_{s,1}^k = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_{s,2}^k = \alpha_{s,3}^k = 0 \quad \text{avec } s = 4, 5$$

$$\alpha_{6,1}^k = \alpha_{6,2}^k = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_{6,3}^k = 0 \quad (2.42)$$

Remarque : le cas éventuel où $P_2 \leq i_4$ et $P_2 \Rightarrow i_5$ n'est pas considéré puisque par construction i_4 est situé en amont de i_5 .

Les cas particuliers se présentent lorsque deux ou trois noeuds appartiennent au même plan. Aussi, pour certains d'entre eux, nous sommes amenés à réexprimer la luminance aux points u_1, u_2 et u_4 .

- Pour le cas particulier (a), on suppose que les plans Δ_{P_1} et Δ_{P_2} sont confondus (figure 2.17). Aussi, lorsque la résolution concerne le noeud P_2 , la relation (2.35) est modifiée et la luminance au point u_1 s'exprime en intervertissant $\alpha_{1,1}^k$ avec $\alpha_{1,2}^k$, soit :

$$\alpha_{1,1}^k = 0; \quad \alpha_{1,2}^k = 1; \quad \alpha_{1,3}^k = 0 \quad (2.43)$$

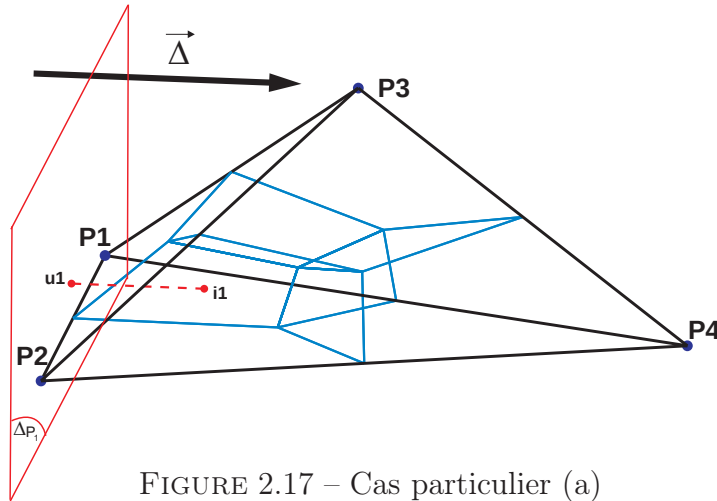


FIGURE 2.17 – Cas particulier (a)

- Pour le cas particulier (b), on suppose que les plans Δ_{P_2} et Δ_{P_3} sont confondus et que $P_3 \leq i_4$ (figure 2.18). Aussi, lorsque la résolution concerne le noeud P_3 , la valeur de la luminance au point u_4 sera donnée en intervertissant $\alpha_{4,2}^k$ avec $\alpha_{4,3}^k$, dans les relations (2.36 et 2.37) :

$$\alpha_{4,1}^k = \frac{1}{2}; \quad \alpha_{4,2}^k = 0; \quad \alpha_{4,3}^k = \frac{1}{2} \quad (2.44)$$

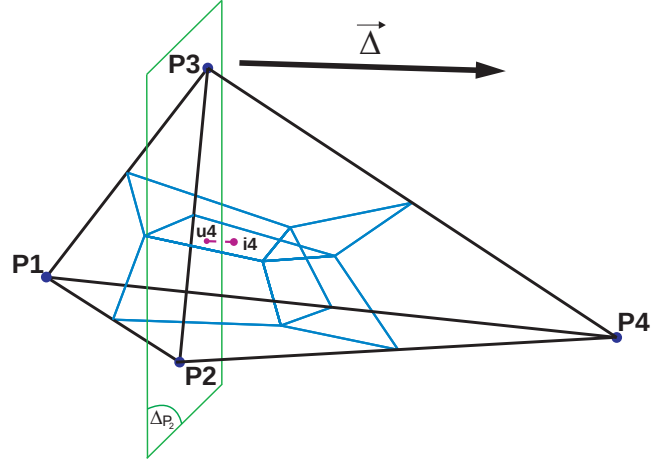


FIGURE 2.18 – Cas particulier (b)

- Pour le cas particulier (c), on suppose que les plans Δ_{P_1} , Δ_{P_2} et Δ_{P_3} sont confondus (figure 2.19). Lorsque la résolution concerne le noeud P_2 , on intervertit $\alpha_{1,1}^k$ avec $\alpha_{1,2}^k$ dans la relation (2.35) :

$$\alpha_{1,1}^k = 0; \quad \alpha_{1,2}^k = 1; \quad \alpha_{1,3}^k = 0 \quad (2.45)$$

Lorsque la résolution concerne le noeud P_3 , on intervertit $\alpha_{2,2}^k$ avec $\alpha_{2,3}^k$ dans la relation (2.35) et on modifie la relation (2.36) :

$$\alpha_{2,1}^k = \alpha_{2,2}^k = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_{2,3}^k = 1 \quad (2.46)$$

$$\alpha_{4,1}^k = \alpha_{4,2}^k = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_{4,3}^k = 1 \quad (2.47)$$

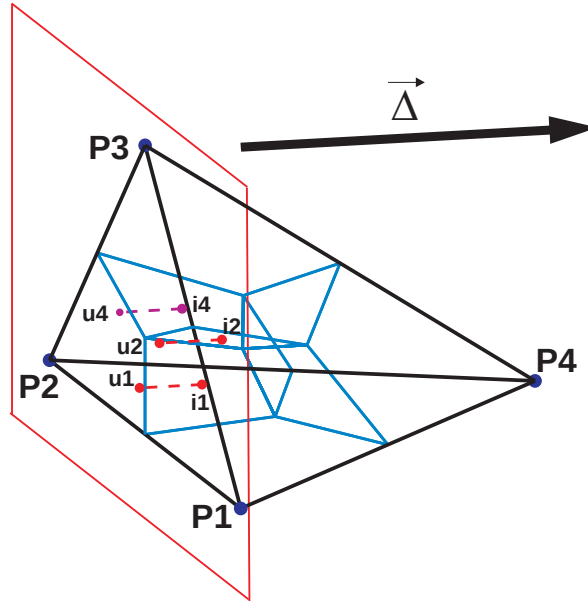


FIGURE 2.19 – cas particulier (c)

Les points d'intégration i_f appartenant à la frontière du domaine

A présent, nous allons nous intéresser aux points d'intégrations i_f appartenant à la frontière du domaine Γ . Notons qu'ils appartiennent aux volumes de contrôle dont une partie de leurs surfaces appartient à Γ . Nous allons définir les coordonnées de ces points d'intégration i_f , leurs projections u_f ainsi que les interpolations utilisées. Tout comme les panneaux se trouvant à l'intérieur du domaine, la construction de ces points u_f dépend de la forme du tétraèdre et de la direction $\vec{\Delta}$. Pour définir i_f , nous considérons un **triangle de référence** noté $\mathcal{J}_R = (P_a, P_b, P_c)$ avec $P_a \leq P_b \leq P_c$ (ce triangle appartient nécessairement à une face d'un tétraèdre). Dans ce triangle, on définit les points d'intégration i_f des panneaux f ($f = 1, \dots, 3$) comme illustré sur la figure 2.20. Notons que dans un triangle, il y a exactement trois points d'intégration. La construction des points d'intégration est définie par les coordonnées des sommets du triangle $\mathcal{J}_R$, tel que :

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{4} \left(\frac{14}{6} P_a + \frac{5}{6} P_b + \frac{5}{6} P_c \right) \\ i_2 &= \frac{1}{4} \left(\frac{5}{6} P_a + \frac{14}{6} P_b + \frac{5}{6} P_c \right) \\ i_3 &= \frac{1}{4} \left(\frac{5}{6} P_a + \frac{5}{6} P_b + \frac{14}{6} P_c \right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Les points d'intégration des trois surfaces partielles A_f du triangle $\mathcal{J}_R$ appartiennent aux différents volumes partiels :

- $i_1 \in V_{P_a}$;
- $i_2 \in V_{P_b}$;
- $i_3 \in V_{P_c}$.

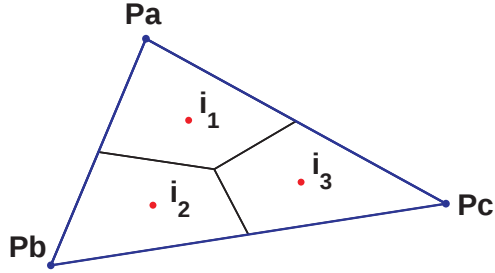


FIGURE 2.20 – Triangle de référence $\mathcal{J}_R$

Pour les points i_f appartenant à la frontière, nous ne projetons pas, nous supposons $u_f = i_f$ et les interpolations utilisées sont les suivantes :

$$L_{i_1}^k = L_{P_a}^k; \quad L_{i_2}^k = L_{P_b}^k; \quad L_{i_3}^k = L_{P_c}^k \quad (2.49)$$

2.6 Renumerotation des noeuds du maillage

Actuellement, nous utilisons le mailleur 3D du logiciel commercial COMSOL. Celui-ci génère 3 fichiers standards donnant :

- 1) la numérotation et les coordonnées des noeuds du maillage ;
- 2) la numérotation des tétraèdres et de leurs sommets ;
- 3) la numérotation des éléments triangulaires de la frontière, de leurs sommets et du numéro de la frontière.

Remarque : Nous pouvons utiliser tout autre type de mailleur 3D (maillage tétraédrique) du moment que celui-ci génère les trois fichiers standards précisés ci-dessus. C'est aussi l'un des avantages du code de rayonnement que nous développons.

Afin de respecter la propagation du rayonnement à travers le domaine, nous devons établir un ordre de résolution de l'ETR en chaque noeud du maillage et pour chaque direction discrète $\vec{\Delta}^k$. Il s'agit ici de représenter numériquement la propagation du rayonnement en renumérotant les noeuds du maillage. Pour cela, nous définissons un ordre de parcours pour chaque direction comme illustré sur la figure (2.21).

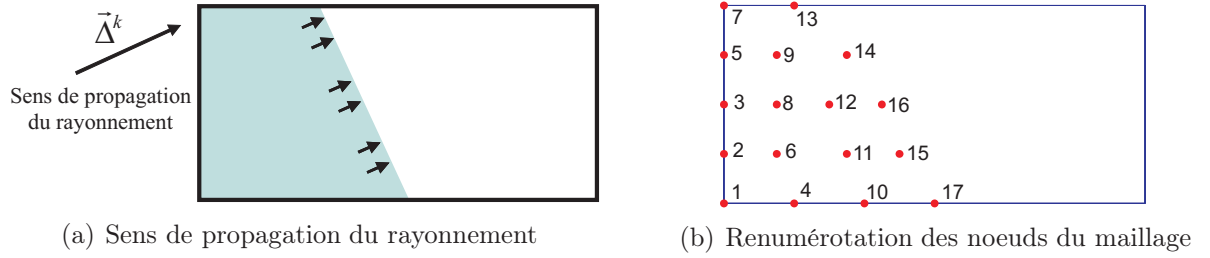


FIGURE 2.21 – Représentation 2D de la propagation du rayonnement suivant la direction $\vec{\Delta}^k$

Pour obtenir cet ordre de parcours, on s'appuie sur les coordonnées du vecteur direction $\vec{\Delta}^k$. En effet, la direction est définie dans une sphère unitaire, aussi nous associons chaque quart d'hémisphère à un coin de notre domaine (cf. figure 2.22(a)). Nous définissons alors un point de départ, noté P_i , de la propagation du rayonnement dans la direction $\vec{\Delta}^k$. En notant que le point P_i coïncide toujours avec un coin.

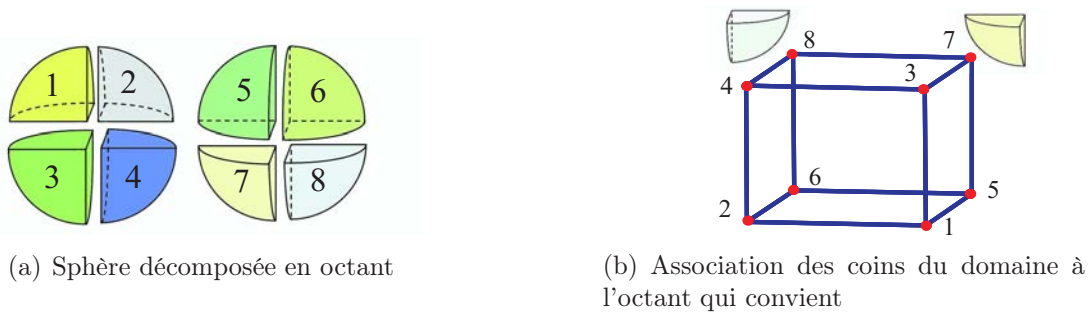


FIGURE 2.22 – Point de départ de la propagation du rayonnement en fonction de $\vec{\Delta}^k$

L'attribution d'un point P_i est l'étape préalable pour définir la renumérotation des noeuds du maillage. Après avoir défini P_i , nous déterminons un plan $\mathcal{P}$ orthogonal à la direction

$\vec{\Delta}^k$ passant par P_i . Puis, nous traçons les droites de direction $\vec{\Delta}^k$ passant par chaque noeud P du maillage. Pour chaque droite, on détermine le point d'intersection Ip_{inter} avec le plan $\mathcal{P}$. A partir des distances entre chaque noeud P et l'intersection Ip_{inter} , on établit la renumérotation des noeuds du maillage suivant l'ordre croissant des distances (comme illustré par la figure 2.23). Notons que dans le cas où deux noeuds du maillage ont la même distance avec leurs points d'intersections, alors un ordre doit être choisi arbitrairement. On aura donc autant d'ordres de parcours que de directions discrètes $\vec{\Delta}^k$ considérées pour la résolution de l'ETR. La figure (2.23) donne un exemple de renumérotation des noeuds du maillage 3D.

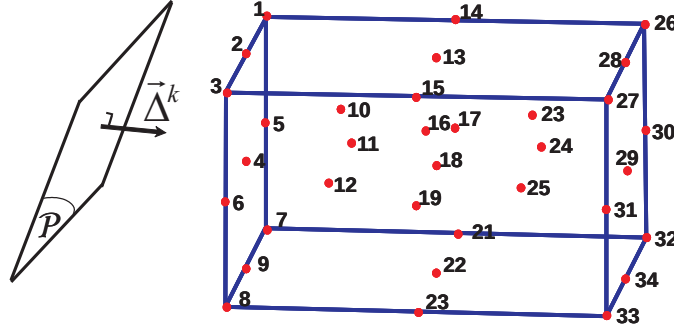


FIGURE 2.23 – Renumérotation des noeuds du maillage 3D suivant la direction $\vec{\Delta}^k$

2.7 Identification des noeuds de la frontière dite "réceptrice"

Il est à noter que l'ETR doit être résolue en certains noeuds de la frontière du domaine dite "réceptrice" (cf. figure 2.24(a)). Rappelons que la luminance à la frontière dans une direction discrète $\vec{\Delta}^k$, est imposée par les conditions aux limites radiatives, et que nous devons tenir compte de la luminance incidente pour les conditions aux limites prenant en compte la réflexion du rayonnement incident (cf. chapitre 1). Pour définir les noeuds de la frontière dite "réceptrice", on calcule le produit scalaire entre le vecteur normal unitaire intérieur à la frontière et la direction discrète $\vec{\Delta}^k$. Si ce produit scalaire est négatif en un noeud donné, alors on aura à calculer la luminance (incidente) en ce noeud (cf. figure 2.24(b)).

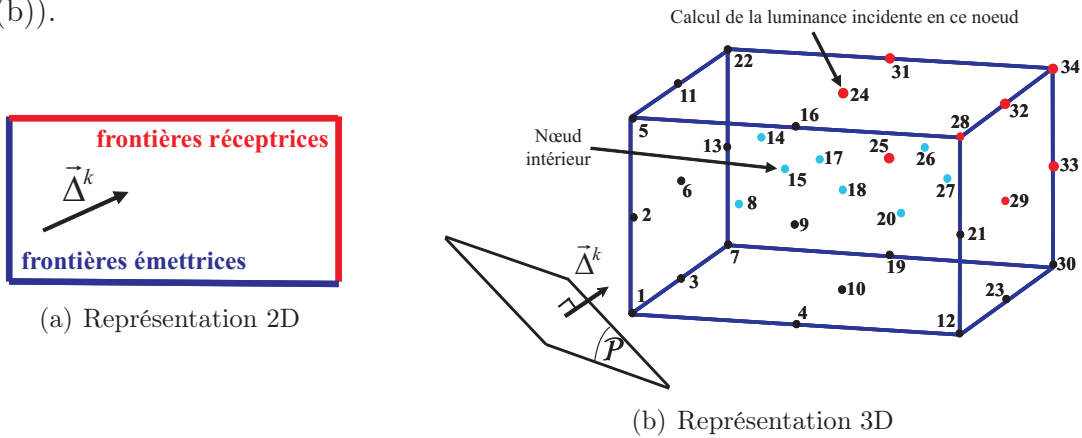


FIGURE 2.24 – Frontières dites émettrices et réceptrices suivant une direction $\vec{\Delta}^k$

Remarque : si la frontière n'est pas réceptrice, elle est dite par opposition "émettrice" (cf. figure 2.24(a)).

2.8 Expression de la luminance calculée au noeud P et dans la direction $\vec{\Delta}^k$

Afin d'établir l'expression de la luminance calculée au noeud P et dans la direction discrète $\vec{\Delta}^k$ en fonction des noeuds amonts et voisins à P , nous décomposons en deux la somme du membre de gauche de l'équation (2.30). Au préalable, nous définissons différents ensembles :

Λ_P est l'ensemble des panneaux de V_P (volume de contrôle associé au noeud P), soit :

$$\Lambda_P = \bigcup_{f=1}^{N_f} \{f\} \quad (2.50)$$

Aussi, $\Lambda_P = \Psi_P^k \cup \Upsilon_P^k$ tel que,

$$\Psi_P^k = \bigcup_{f=1}^{N_f} \{f, \text{ tel que } \mathcal{E}_{f,P}^k \neq \{P\}\} \quad (2.51)$$

$$\Upsilon_P^k = \bigcup_{f=1}^{N_f} \{f, \text{ tel que } P \in \mathcal{E}_{f,P}^k\} \quad (2.52)$$

Rappelons que $\mathcal{E}_{f,P}^k$ est l'ensemble des sommets du tétraèdre $\mathcal{T}$ situés en amont de i_f , tel que $i_f \in \Gamma_P$ et $i_f \in \mathcal{T}$.

Enfin, $(E_a)_P^k$ est l'ensemble des noeuds situés en amont et voisins du noeud P .

Ainsi, nous pouvons écrire :

$$\bigcup_{f=1}^{N_f} \{\mathcal{E}_{f,P}^k\} = (E_a)_P^k \cup P \quad (2.53)$$

De plus, nous décomposons l'ensemble Ψ_P^k en sous-ensembles $\psi_{na,P}^k$ afin d'identifier les panneaux $f \in \Psi_P^k$ et les noeuds $na \in (E_a)_P^k$ tels que $L_{u_f}^k$ s'exprime en fonction de L_{na}^k par les relations de fermeture vues précédemment. Soit,

$$\Psi_P^k = \bigcup_{\{na \in (E_a)_P^k\}} \psi_{na,P}^k \quad (2.54)$$

Notons que $\psi_{na,P}^k$ peut se définir également à partir de $\mathcal{E}_{f,P}^k$ et $(E_a)_P^k$. En effet, si $f \in \Psi_P^k$ alors $f \in \psi_{na,P}^k$ si $na \in \mathcal{E}_{f,P}^k$.

A partir de la définition des ensembles et sous ensembles, nous allons ré-exprimer le membre de gauche de l'équation (2.30). Aussi, en introduisant la relation (2.34) nous obtenons,

$$\sum_{f=1}^{N_f} L_{u_f}^k D_f^k = \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{\{na \in \mathcal{E}_{f,P}^k\}} \alpha_{f,na}^k L_{na}^k D_f^k \quad (2.55)$$

En utilisant les ensembles et sous ensembles définis en (2.52), (2.53), (2.54) et la relation (2.55) nous pouvons écrire :

$$\sum_{f=1}^{N_f} L_{u_f}^k D_f^k = \sum_{\{na \in (E_a)_P^k\}} \sum_{\{f \in \psi_{na,P}^k\}} \alpha_{f,na}^k L_{na}^k D_f^k + \sum_{\{f \in \Upsilon_P^k\}} \alpha_{f,P}^k L_P^k D_f^k \quad (2.56)$$

En posant,

$$B_{na,P}^k = \sum_{\{f \in \psi_{na,P}^k\}} \alpha_{f,na}^k D_f^k \quad \text{et} \quad H_P^k = \sum_{\{f \in \Upsilon_P^k\}} \alpha_{f,P}^k D_f^k \quad (2.57)$$

nous pouvons exprimer le membre de gauche de l'équation (2.30) ainsi,

$$\sum_{f=1}^{N_f} L_{u_f}^k D_f^k = \sum_{\{na \in (E_a)_P^k\}} L_{na}^k B_{na,P}^k + L_P^k H_P^k \quad (2.58)$$

Remarque :

$$\sum_{f=1}^{N_f} D_f^k = \sum_{\{na \in (E_a)_P^k\}} B_{na,P}^k + H_P^k \quad (2.59)$$

En combinant les relations (2.30) et (2.58) nous pouvons finalement exprimer la luminance au noeud P et dans la direction discrète $\vec{\Delta}^k$, par l'expression suivante :

$$L_P^k a_P^k = b_P^k + c_P^k \quad (2.60)$$

avec,

$$\begin{aligned} a_P^k &= \kappa_P \Delta \Omega^k V_P + H_P^k \\ b_P^k &= - \sum_{\{na \in (E_a)_P^k\}} L_{na}^k B_{na,P}^k \\ c_P^k &= \kappa_P L^o(T_P) \Delta \Omega^k V_P - \sum_{f=1}^{N_f} C_f^k \end{aligned} \quad (2.61)$$

Pour aider le lecteur, les différents ensembles que nous venons de définir et le membre de gauche de l'équation (2.30) sont illustrés dans l'annexe B.1 sur un exemple 2D (dans un souci de lisibilité).

2.9 Résolution itérative noeud par noeud et résolution matricielle

Pour résoudre l'équation (2.60), nous avons mis en place une résolution itérative noeud par noeud ainsi qu'une résolution matricielle, que nous décrivons à la suite. Mais auparavant, nous avons besoin d'introduire quelques notations.

Rappelons que N désigne le nombre de noeuds du maillage. Pour une direction discrète $\vec{\Delta}^k$ donnée, on désigne par :

- N_c^k le nombre de noeuds nécessaires au calcul de la luminance (en tenant compte des noeuds aux frontières réceptrices) ;
- N_e^k le nombre de noeuds appartenant aux frontières émettrices ;
- N_r^k le nombre de noeuds appartenant aux frontières réceptrices ;
- N_i le nombre de noeuds appartenant strictement à l'intérieur du domaine.

Ainsi, N se décompose comme suit,

$$N = N_c^k + N_e^k \quad (2.62)$$

avec,

$$N_c^k = N_r^k + N_i \quad (2.63)$$

De plus, nous désignons par E_c^k (de taille N_c^k) l'ensemble ordonné des noeuds de calcul.

De nouveau, pour aider le lecteur, l'ensemble E_c^k est illustré à l'aide d'un exemple 2D dans l'annexe B.2.

2.9.1 Résolution itérative noeud par noeud

La résolution itérative noeud par noeud découle directement de l'équation (2.60) qui s'écrit encore,

$$L_P^k = \frac{b_P^k + c_P^k}{a_P^k} \quad \forall P \in E_c^k \quad (2.64)$$

Cette résolution est appliquée sur un exemple 2D dans l'annexe B.2.1.

2.9.2 Résolution matricielle

L'équation (2.60) peut également se mettre sous la forme d'un système linéaire qui s'écrit :

$$A^k X^k = S^k \quad (2.65)$$

où X^k représente le vecteur luminance (de taille N_c^k), A^k la matrice du système linéaire (de taille $N_c^k \times N_c^k$) et S^k le second membre (de taille N_c^k). Cette écriture a d'une part, l'avantage de permettre la résolution, des luminances en chaque noeud de calcul en une seule fois, et d'autre part, elle permettrait d'exploiter les techniques actuelles les plus performantes pour résoudre les systèmes linéaires, notamment les solveurs parallélisés de type MUMPS⁵.

Nous obtenons la matrice A^k et le second membre S^k à partir de l'équation (2.60) qui s'écrit encore :

$$L_P^k a_P^k = - \sum_{na \in (E_a)_P^k} L_{na}^k B_{na,P}^k + c_P^k \quad \forall P \in E_c^k \quad (2.66)$$

Afin de distinguer les noeuds de l'ensemble $(E_a)_P^k$ appartenant à la frontière, nous posons :

$$(E_a)_P^k = (E_{ai})_P^k \cup (E_{af})_P^k \quad (2.67)$$

avec,

- $(E_{ai})_P^k$: l'ensemble des noeuds situés en amont et voisins du noeud P appartenant à l'intérieur du domaine et éventuellement à la frontière réceptrice du domaine. Cet ensemble est de taille $(N_{ai})_P^k$;
- $(E_{af})_P^k$: l'ensemble des noeuds situés en amont et voisins du noeud P appartenant à la frontière émettrice du domaine. Cet ensemble est de taille $(N_{af})_P^k$.

5. <http://graal.ens-lyon.fr/MUMPS/>

Ainsi, nous pouvons écrire,

$$L_P^k a_P^k + \sum_{na \in (E_{ai})_P^k} L_{na}^k B_{na,P}^k = - \sum_{na \in (E_{af})_P^k} L_{na}^k B_{na,P}^k + c_P^k \quad \forall P \in E_c^k \quad (2.68)$$

– Le vecteur X^k est alors défini par :

$$X_i^k = L_{E_c^k(i)}^k \quad \forall \quad 1 \leq i \leq N_c^k \quad (2.69)$$

– Les coefficients de la matrice A^k sont donnés par :

$$A_{i,i}^k = a_{E_c^k(i)}^k \quad \forall \quad 1 \leq i \leq N_c^k \quad (\text{coefficients de la diagonale}) \quad (2.70)$$

Pour les coefficients situés hors de la diagonale, on les définit de la façon suivante :
Pour $l = 1, \dots, (N_{ai})_{E_c^k(i)}^k$, si $((E_{ai})_{E_c^k(i)}^k)(l) = E_c^k(j)$ alors,

$$A_{i,j}^k = B_{((E_{ai})_{E_c^k(i)}^k)(l), E_c^k(i)}^k \quad \forall \quad 1 \leq i, j \leq N_c^k, \quad \text{avec } i \neq j \quad (2.71)$$

– Le vecteur S^k est défini par :

$$S_i^k = - \sum_{na \in (E_{af})_{E_c^k(i)}^k} L_{na}^k B_{na, E_c^k(i)}^k + c_{E_c^k(i)}^k \quad \forall \quad 1 \leq i \leq N_c^k \quad (2.72)$$

Il est intéressant de noter que A^k est une matrice triangulaire inférieure. Ceci vient du fait que nous utilisons uniquement les noeuds situés en amont et voisins du noeud P pour le calcul de L_P^k . Notons de plus, qu'il sera judicieux d'utiliser un solveur adapté à cette structure de la matrice A^k .

L'expression de X^k , S^k et A^k sur un exemple 2D est donnée dans l'annexe B.2.2.

Résumé du chapitre 2

Le travail présenté dans ce second chapitre, a porté sur la mise en place d'une méthode numérique pour la résolution de l'ETR au sein d'un milieu gris, semi-transparent (non diffusant). La méthode développée est de type **"volumes finis" modifiée** avec une formulation **"cell-vertex"** à partir d'un **maillage non-structuré composé de tétraèdres** (issu du logiciel Femlab).

La complexité de mise en oeuvre de la méthode numérique réside essentiellement dans la prise en compte d'une **géométrie 3D de forme quelconque**.

Nous avons en particulier abordé les points essentiels suivants :

- i) la discrétisation angulaire (à pas constant, S_N et T_N) ;
- ii) la construction des volumes de contrôle présentés sous forme de polyèdres, où nous avons vérifié que l'ensemble de ces volumes forme bien le domaine d'étude ;
- iii) la construction et la projection des points d'intégration i_f dans le but de suivre la propagation du rayonnement (construction des points u_f pour différents cas de figures) ;
- iv) l'approximation de la luminance aux points u_f en fonction des valeurs aux noeuds du maillage par des interpolations linéaires utilisant jusqu'à trois noeuds, similaire à la méthode DOIM [65, 66, 67, 68, 9] ;
- v) le calcul des quantités $C_{u_f}^k$ et $D_{u_f}^k$ où nous avons considéré un coefficient d'absorption et une température constante dans le milieu ;
- vi) la renumérotation des noeuds du maillage pour représenter numériquement la propagation du rayonnement dans le milieu ;
- vii) la résolution itérative noeud par noeud et la résolution matricielle.

Les relations de fermeture constituent une des parties les plus délicates de la méthode. De plus, la mise en place d'une résolution matricielle (résolution d'un système linéaire de type $AX = B$) pour résoudre l'ETR sur des maillages tétraédriques non-structurés, constitue une nouveauté (en particulier par rapport aux travaux de Asllanaj et al. [2]) et un rapprochement avec les méthodes de résolution employées en mécanique des fluides.

Dans le prochain chapitre, nous mettons en application et validons la méthode sur des milieux gris, où différents cas tests issus de la littérature sont traités.

Deuxième partie

Résultats des simulations numériques

Chapitre 3

Rayonnement d'un milieu gris isotherme

Dans ce chapitre, nous allons présenter les résultats des différentes simulations numériques réalisées avec le code de rayonnement que nous avons développé dans le cadre de cette thèse. Les simulations ont été effectuées pour un milieu gris, semi-transparent (non diffusant) et isotherme. Les cas de référence présentés ici sont tous issus de la littérature et portent sur différentes géométries, simples ou complexes. De plus, différentes grandeurs (S_{rad} , Q_{inc} , ...) sont définies pour les comparaisons avec notre code. Dans un premier temps, nous traitons différentes géométries portant sur un milieu bordé par des parois noires. Puis, nous effectuons une étude de sensibilité aux maillages angulaires et en espace de la solution obtenue par notre code de rayonnement, sur ces différentes géométries. Ensuite, nous présentons un cas d'étude permettant d'observer la diffusion numérique. Enfin pour terminer, nous étudions un milieu avec des surfaces opaques à réflexion diffuse sur une géométrie parallélépipédique. Nos calculs ont été réalisés sur une machine Intel(R) Xeon(R) CPU 5160 @ 3.00GHz avec 1.6 Go de RAM.

3.1 Surfaces noires

Nous présentons quelques cas d'étude issus de la littérature portant sur trois types de géométrie, un cube, une forme en "L" et un cylindre. Nous comparons à chaque fois nos résultats, soit à la solution exacte, soit à ceux d'autres auteurs ayant utilisé des techniques numériques différentes pour résoudre l'ETR.

3.1.1 Cas test n°1 : enceinte cubique

Le premier cas d'étude repris de Sakami et al. et Kim et al. [50, 9], est celui d'une enceinte cubique (figure 3.1) dont les dimensions sont ($1m \times 1m \times 1m$). La température du milieu notée T_m est constante à $100 K$ et la température des faces est à $0 K$. Nos simulations ont été effectuées avec une quadrature angulaire S_4 composée de 24 directions et avec une discrétisation spatiale composée de 6434 tétraèdres (maillage 1, 1332 noeuds) et 12288 tétraèdres (maillage 2, 2457 noeuds).

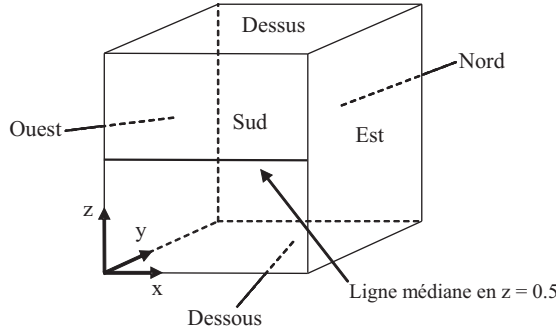


FIGURE 3.1 – Enceinte cubique

La figure 3.2 montre le flux radiatif adimensionné $Q_{rad}/\sigma_B T_m^4$ le long de la ligne médiane de la face Sud (figure 3.1) pour trois valeurs du coefficient d'absorption ($\kappa = 0.1, 1$ et 10 m^{-1}). Les résultats de Sakami et al. et Kim et al. [50, 9] ont été réalisés en utilisant une quadrature S_4 . Sakami et al. [50] ont utilisé un maillage spatial composé de 6655 tétraèdres et Kim et al. [9] ont utilisé un maillage spatial constitué de 1331 hexaèdres. Nos résultats montrent un très bon accord avec la solution exacte donnée dans Sakami et al. [50] et avec les solutions numériques obtenues avec la DOM (Discrete Ordinates Method) de Sakami et al. [50] et la DOIM (Discrete Ordinates Interpolation Method) de Kim et al. [9]. Nous observons une stratification des résultats pour les différentes valeurs de κ . Lorsque le milieu est plus absorbant ($\kappa = 10 \text{ m}^{-1}$), le flux est plus important et tend vers la luminance du corps noir à la température du milieu. Lorsque κ diminue, le flux tend vers zéro compte tenu des températures froides des faces.

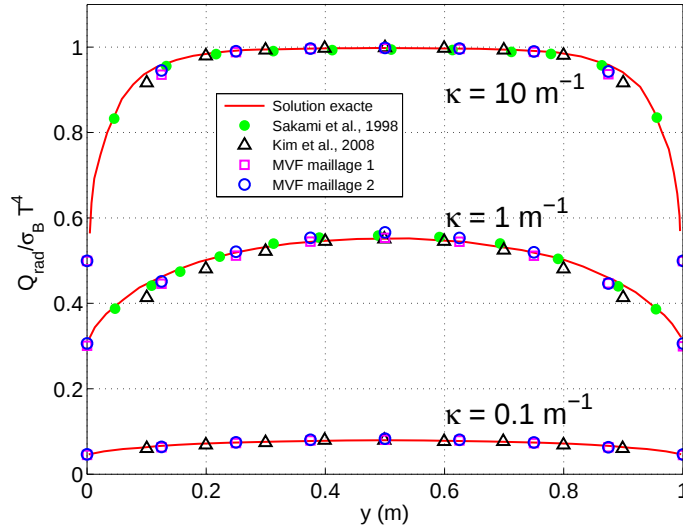


FIGURE 3.2 – Flux radiatif adimensionné le long de la ligne médiane de la face Sud de l'enceinte cubique

3.1.2 Cas test n°2 : forme en "L"

Le second cas d'étude, repris de Malasekera et al., Sakami et al. et Grissa et al. [22, 50, 8], porte sur une géométrie en forme de "L" dont les dimensions sont précisées sur la figure 3.3. La température du milieu est constante à 1000 K et la température des faces est à 500 K . Nos résultats ont été obtenus pour une discrétisation spatiale composée de 10536 tétraèdres (maillage 1, 2292 noeuds) et 34180 tétraèdres (maillage 2, 6860 noeuds) avec une quadrature angulaire S_4 .

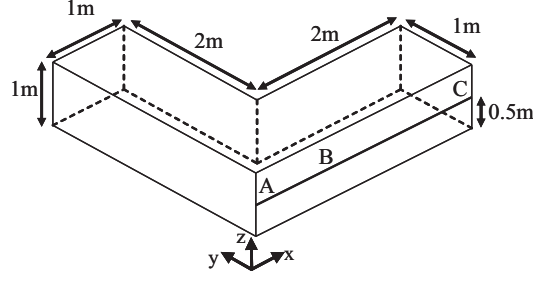


FIGURE 3.3 – Forme en "L"

La figure 3.4 présente le flux radiatif incident le long de l'axe A-C, pour trois valeurs du coefficient d'absorption ($\kappa = 1, 2$ et 10 m^{-1}). Les résultats de Sakami et al. [50] ont été obtenus avec la DOM utilisant une quadrature S_4 et un maillage spatial composé de 2000 tétraèdres. Ceux de Grissa et al. [8] ont été obtenus avec la CVFEM (Control Volume Finite Element Method) utilisant une discrétisation angulaire à pas constants composée de (14×8) directions et un maillage spatial composé de 687 volumes de contrôle (géométrie 3D à base de triangles). Comme on peut le voir, nos résultats (obtenus avec les maillages 1 et 2) sont proches des solutions issues de la littérature. Lorsque $\kappa = 10 \text{ m}^{-1}$, le flux tend vers $\sigma_B(T_{milieu}^4 - T_{face}^4)$. Pour les faibles valeurs de κ , le flux présente une dissymétrie qui est attribuée à l'effet d'ombrage.

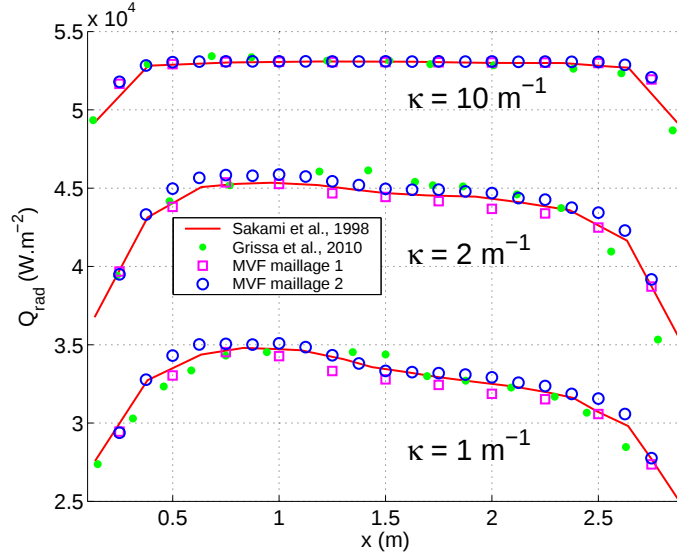
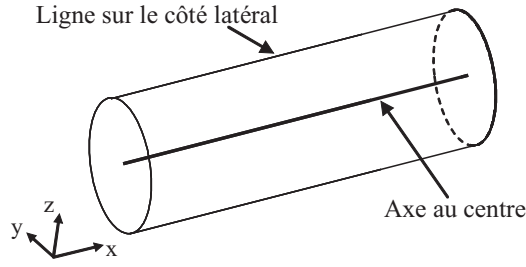


FIGURE 3.4 – Flux radiatif le long de l'axe A-C

3.1.3 Cas test n°3 : cylindre de hauteur 3 m et 0.5 m de rayon

Le troisième cas d'étude porte sur une géométrie cylindrique (figure 3.5) repris de Joseph et al. [7], dont les dimensions sont 0.5 m de rayon et 3 m de hauteur. La température du milieu est constante à 1200 K et la température à la frontière est à 300 K . Nos résultats ont été obtenus pour une discrétisation spatiale composée de 7168 tétraèdres (maillage 1, 1577 noeuds) et 57344 tétraèdres (maillage 2, 11025 noeuds).

FIGURE 3.5 – Cylindre de hauteur 3 m et 0.5 m de rayon

La figure 3.6 montre l'évolution du flux radiatif incident le long de la ligne latérale du cylindre, pour trois valeurs du coefficient d'absorption ($\kappa = 0.1, 1$ et 10 m^{-1}). La solution de référence a été obtenue par une méthode de tracé de rayon avec 320 000 rayons. Les résultats obtenus avec la MVF utilisant une formulation « cell-center » ont été réalisés avec une quadrature S_8 (80 directions) et 18920 tétraèdres [7]. Pour permettre la comparaison, nous avons également utilisé la quadrature S_8 . Comme on peut le voir, nos résultats sont plus proches des solutions de référence lorsqu'on utilise un maillage spatial plus fin (maillage 2). Tout comme le premier cas test, nous observons une stratification des résultats.

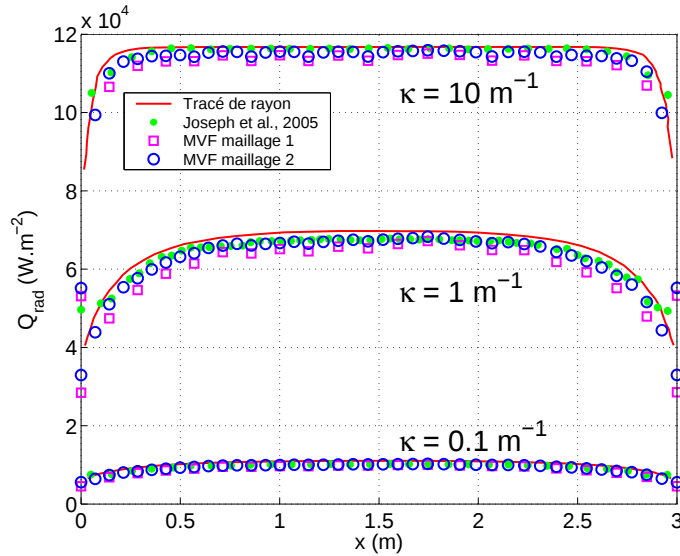
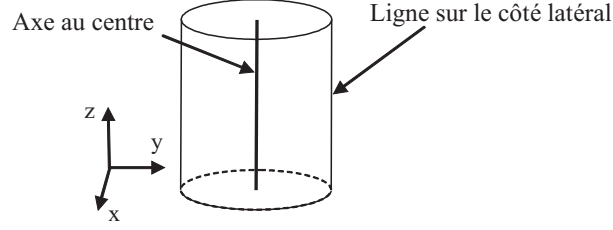


FIGURE 3.6 – Flux radiatif le long du coté latéral du cylindre

3.1.4 Cas test n°4 : cylindre de hauteur 2 m et 1 m de rayon

Le quatrième cas d'étude repris de Kim et al. [62] porte également sur une géométrie cylindrique (figure 3.7), dont les dimensions sont 1 m de rayon et 2 m de hauteur. La température du milieu est constante et égale à 100 K , la température à la frontière est froide (0 K). Nous comparons nos résultats à la solution exacte donnée dans [15] ainsi qu'aux solutions numériques de [62]. Dans cette étude Kim et al. [62] ont utilisé quatre méthodes différentes, la DOM, la MDOM (Modified Discrete Ordinates Method), la FVM (Finite Volume Method) et enfin la MFVM (Modified Finite Volume Method) en coordonnées cylindrique et axisymétrique. Leurs résultats ont été réalisés en utilisant une quadrature S_8 (80 directions) et un maillage spatial composé de $N_R = 15$, $N_Z = 35$ volumes de contrôle. Pour permettre la comparaison, nous avons également utilisé la quadrature S_8 et une discrétisation spatiale composée de 24576 tétraèdres (4913 noeuds).

FIGURE 3.7 – Cylindre de hauteur 2 m et 1 m de rayon

La figure 3.8 montre le flux radiatif adimensionné $Q_{\text{rad}}/\sigma_B T_m^4$ le long du côté latéral (figure 3.7) pour trois valeurs du coefficient d'absorption ($\kappa = 0.1, 1$ et 5 m^{-1}). Nos résultats montrent un bon accord avec la solution exacte et les solutions numériques de [62], notamment lorsque le milieu est plus absorbant ($\kappa = 5\text{ m}^{-1}$). Pour les faibles valeurs du coefficient d'absorption ($\kappa = 0.1$ et 1 m^{-1}), nos résultats sont en accord avec les solutions numériques obtenues avec la MDOM, la FVM et la MFVM, mais présentent un léger écart avec la solution exacte. On notera que la DOM S_8 donne de meilleurs résultats. Pour les trois valeurs du coefficient d'absorption, nos résultats sont légèrement en dessous de la solution exacte. Comme pour le premier cas test, nous observons une stratification des résultats pour les différentes valeurs de κ . Lorsque le milieu est plus absorbant ($\kappa = 5\text{ m}^{-1}$), le flux est plus important et tend vers la luminance du corps noir à la température du milieu. Lorsque κ diminue, le flux tend vers zéro compte tenu des températures froides des faces.

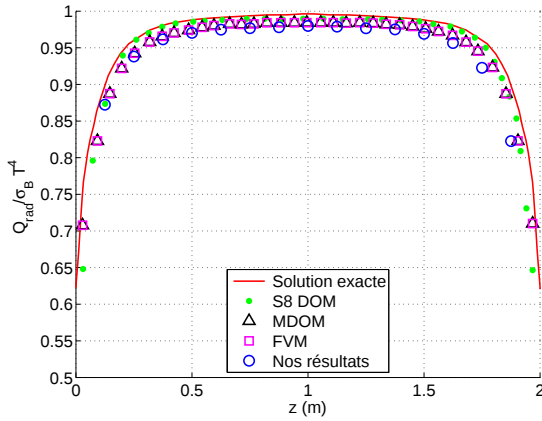
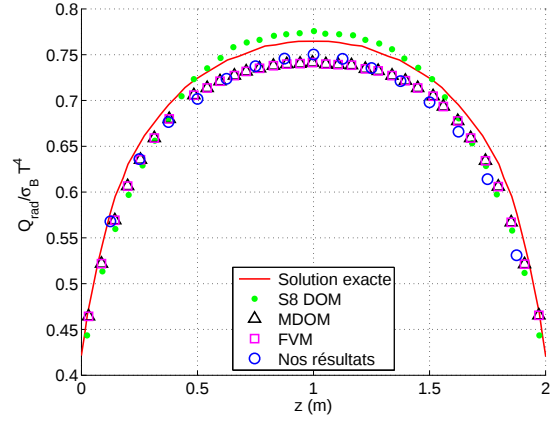
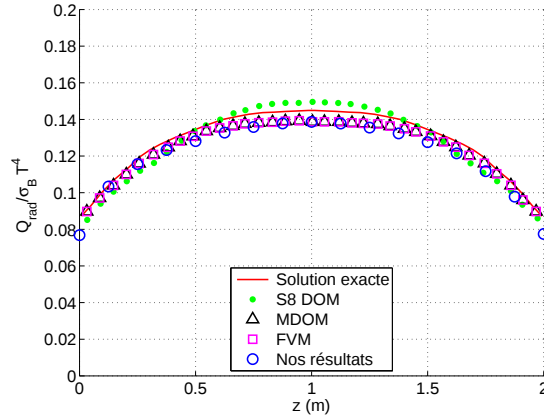
(a) $\kappa = 5\text{ m}^{-1}$ (b) $\kappa = 1\text{ m}^{-1}$ (c) $\kappa = 0.1\text{ m}^{-1}$

FIGURE 3.8 – Flux radiatif adimensionné le long du coté latéral du cylindre

3.2 Étude de sensibilité angulaire et spatiale

Afin de tester la convergence de la solution donnée par notre code de calcul, nous avons réalisé une étude de sensibilité aux maillages angulaire et spatial pour les quatre cas tests vus précédemment. Chaque maillage en espace est défini par :

- N_p : nombre de noeuds ;
- N_t : nombre de tétraèdres ;
- N_e : nombre de triangles à la frontière.

Nous présentons les résultats pour différentes valeurs du coefficient d'absorption, sur différents types de maillages en espace, en considérant à chaque fois trois quadratures angulaires, à savoir S_4 , S_6 et S_8 avec respectivement 24, 48 et 80 directions. De plus, pour le premier cas test nous réalisons une étude de sensibilité angulaire sur un maillage spatial avec les différentes discrétisations angulaires. Nous nous intéressons aux flux radiatifs aux parois, ainsi qu'au terme source radiatif le long d'un axe.

3.2.1 Cas test n°1

Pour le premier cas test, nous définissons quatre types de maillage en espace donnés par le tableau 3.1. Nous réalisons deux études, l'une sur la sensibilité angulaire, avec les différentes discrétisations angulaires, et l'autre sur la sensibilité spatiale avec la quadrature S_N . Pour ces deux études, nous représentons le flux adimensionné le long d'une ligne médiane sur une face du domaine, comme illustré sur la figure 3.9, ainsi que le terme source radiatif sur les axes I et H de la figure 3.10. Nous comparons nos résultats à la solution exacte. Notons toutefois que, pour le terme source radiatif, il n'existe pas de solution de référence.

	N_p	N_t	N_e
maillage 1 (structuré grossier)	1332	6434	650
maillage 2 (structuré moyen)	3994	19254	1348
maillage 3 (structuré fin)	11819	62436	2648
maillage 4 (structuré très fin)	17969	98304	6144

TABLE 3.1 – Caractéristiques des maillages en espace

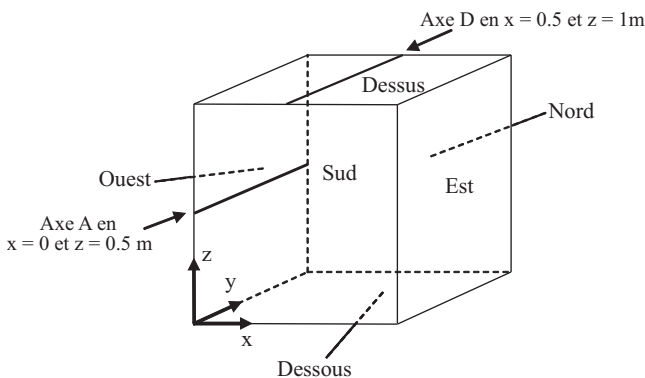


FIGURE 3.9 – Deux axes pour visualiser le flux radiatif adimensionné

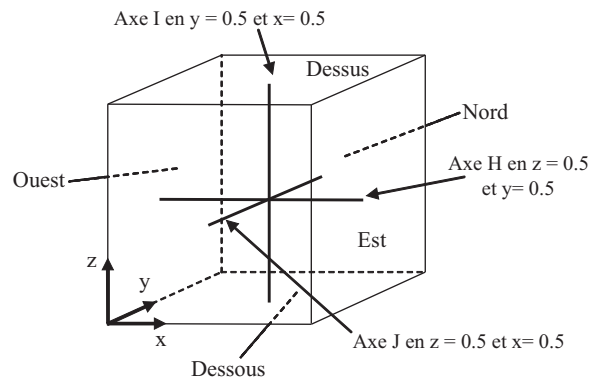


FIGURE 3.10 – Trois axes pour visualiser le terme source radiatif

Sensibilité angulaire

La première étude que nous réalisons sur ce cas test, concerne la sensibilité angulaire sur le maillage 3. Nous avons utilisé les deux quadratures S_N et T_N , ainsi que la discrétisation angulaire à pas constant, avec les ordres et le nombre de directions suivants :

- S_N : S_4 , S_6 , S_8 et S_{12}
- T_N : T_2 , T_3 , T_4 , T_6 et T_8
- pas constant ($N_\theta \times N_\phi$) : 8×4 , 16×8 , 18×9 et 24×12

Nos simulations ont été réalisées avec ces différentes discrétisations angulaires pour un coefficient d'absorption $\kappa = 10 \text{ m}^{-1}$ (autres simulations en annexe C). Nous représentons le flux radiatif adimensionné le long de l'axe A et D (figure 3.9), ainsi que le terme source radiatif sur les axes I et H (figure 3.10), afin de vérifier la symétrie de nos résultats.

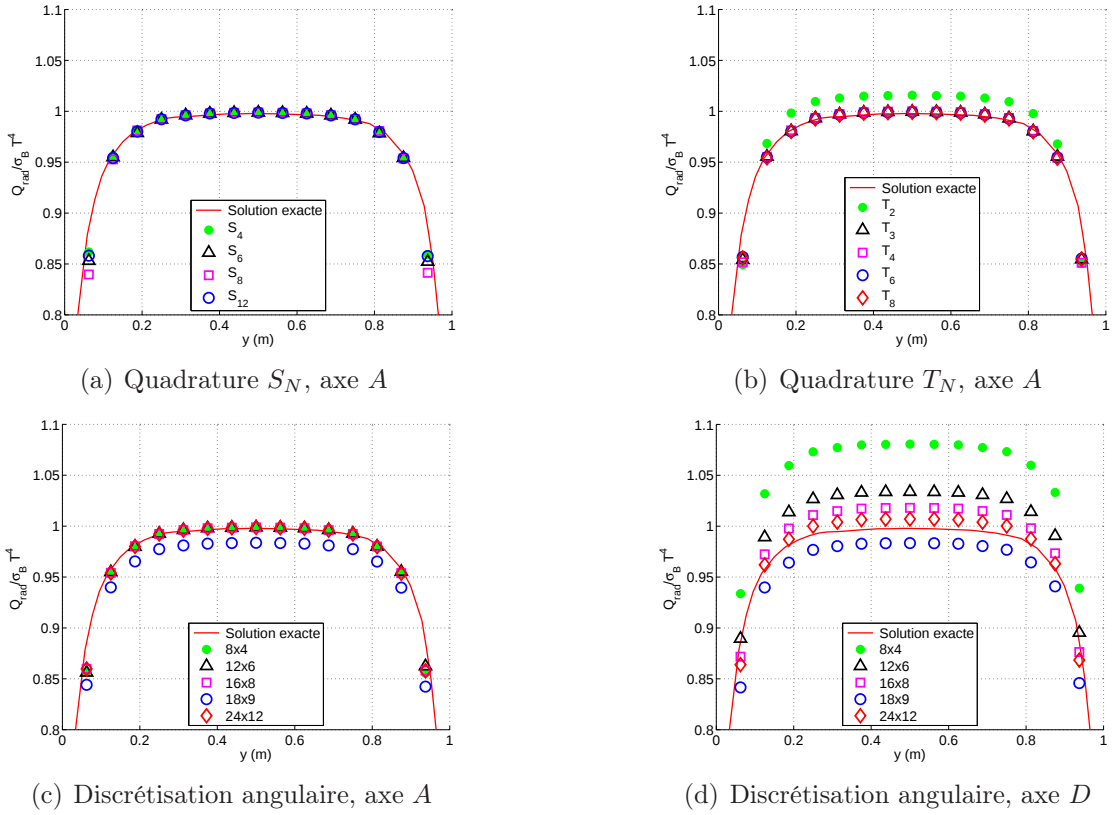
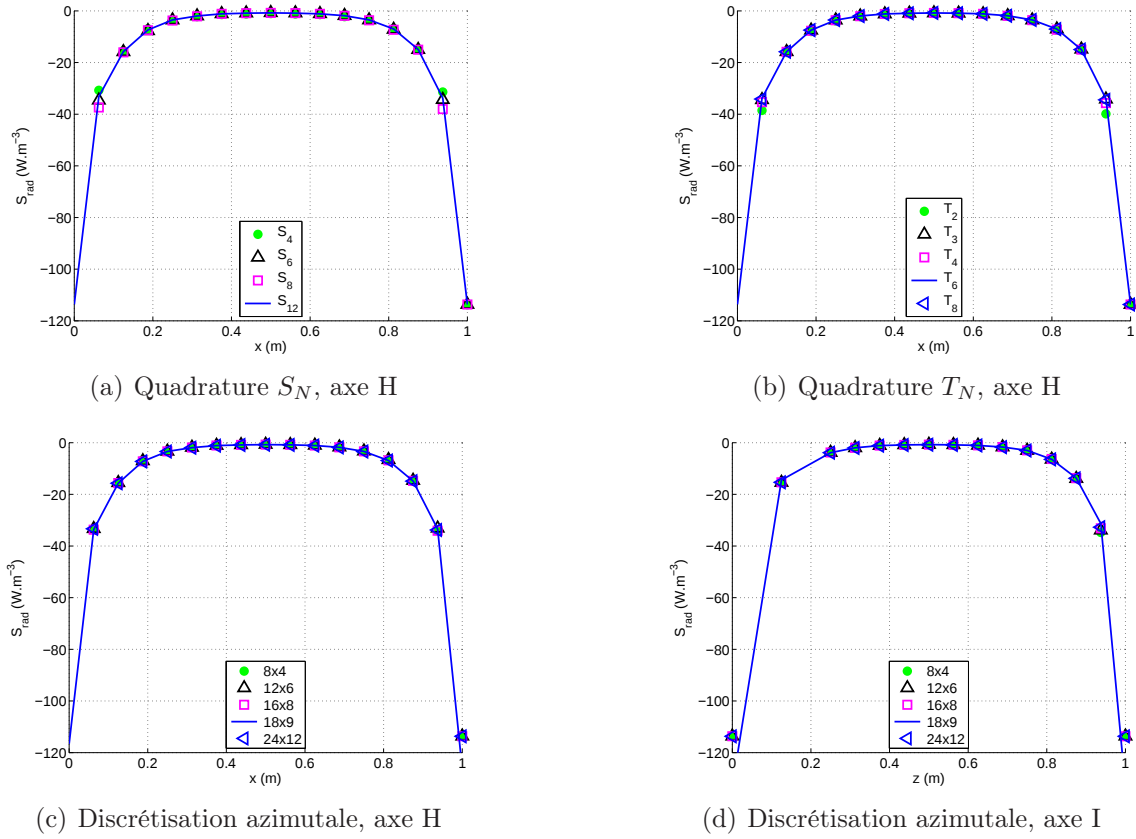


FIGURE 3.11 – Flux radiatif adimensionné pour $\kappa = 10 \text{ m}^{-1}$ sur les axes A et D

Pour ce cas de simulation, nos résultats donnant le flux radiatif sur l'axe A (figures 3.11(a), 3.11(b) et 3.11(c)), montrent que les flux calculés pour chaque quadrature convergent vers la solution exacte (figure 3.11(b)). En effet, nos valeurs calculées se trouvent au dessus de la solution exacte, en raison des poids associés à chaque direction. La figure 3.11(d) montre le flux radiatif sur l'axe D et indique un problème de symétrie de nos résultats (entre les axes A et D) uniquement pour la discrétisation angulaire à pas constant avec peu de directions. En effet, lorsque l'on raffine la discrétisation angulaire les courbes deviennent symétriques tout comme pour les quadratures S_N et T_N (les résultats sur l'axe D avec les quadratures S_N et T_N sont en annexe C), excepté pour la discrétisation 18×9 (asymétrie sur les faces latérales également). Ces différences sont dues à la discrétisation angulaire qui n'affecte pas le même angle de contrôle pour chaque direction polaire (ϕ proche de 0 ou de π) et/ou lorsque les nombres de directions polaires et azimutales sont impairs.


 FIGURE 3.12 – Terme source radiatif pour $\kappa = 10 \text{ m}^{-1}$

Les résultats de ce cas de simulation, donnant le terme source radiatif sur les axes I et H (figure 3.12), ne montrent aucune sensibilité à la discrétisation angulaire, ainsi qu'une bonne symétrie de nos résultats (des résultats complémentaires à cette étude sont en annexe C).

En raison des résultats sur cette étude de sensibilité angulaire, nous choisissons d'utiliser une quadrature S_N , pour la suite de nos simulations.

Sensibilité spatiale avec la quadrature S_N

Dans une seconde étude, les simulations ont été réalisées avec les quatre maillages en espace, pour trois quadratures angulaires (S_4 , S_6 et S_8) et pour trois valeurs différentes du coefficient d'absorption ($\kappa = 0.1$, 1 et 10 m^{-1}). Le flux radiatif adimensionné le long de l'axe A (figure 3.9) ainsi que, le terme source radiatif sur l'axe I (figure 3.10) sont présentés. Le tableau 3.2 indique le temps de calcul pour chaque simulation.

	quadrature angulaire		
	S_4 (24 dir.)	S_6 (48 dir.)	S_8 (80 dir.)
maillage 1 (structuré grossier)	6 s	11 s	20s
maillage 2 (structuré moyen)	20 s	40 s	2 min 48 s
maillage 3 (structuré fin)	1 min 26 s	2 min 48 s	4 min 37 s
maillage 4 (structuré très fin)	2 min 27 s	4 min 45 s	7 min 50 s

TABLE 3.2 – Temps de calcul pour l'enceinte cubique

Flux radiatif adimensionné et terme source radiatif : étude de sensibilité aux maillages spatial et angulaire

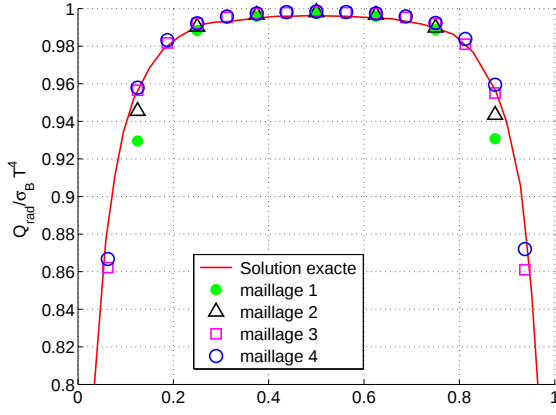
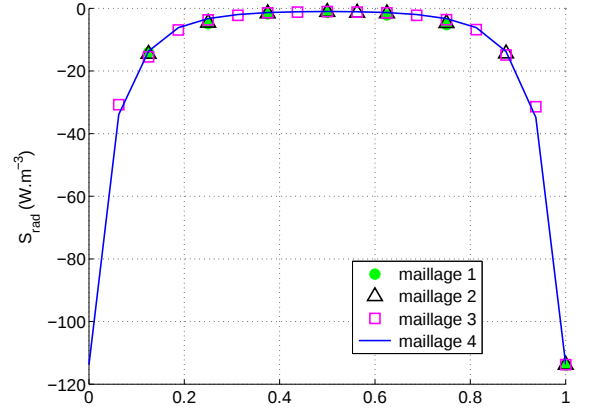
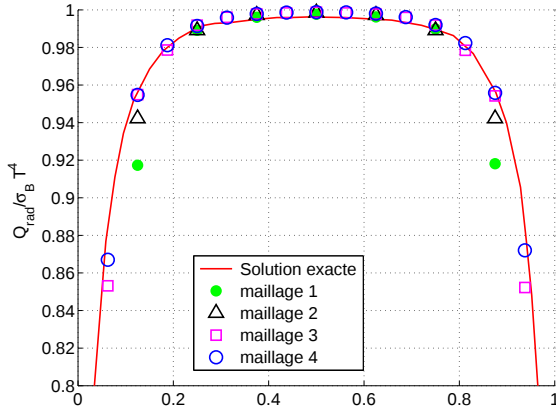
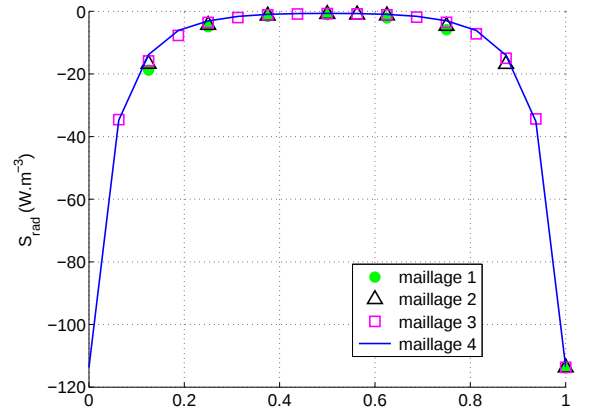
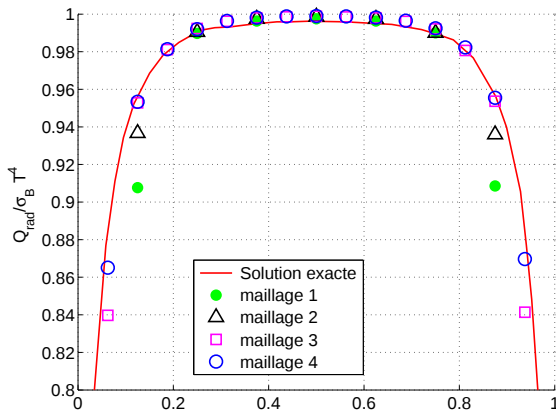
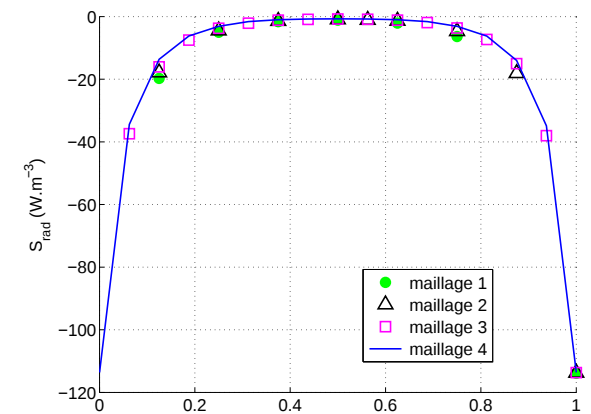
(a) Axe A, quadrature S_4 (b) Axe I, quadrature S_4 (c) Axe A, quadrature S_6 (d) Axe I, quadrature S_6 (e) Axe A, quadrature S_8 (f) Axe I, quadrature S_8

FIGURE 3.13 – Flux radiatif adimensionné (axe A) et terme source radiatif (axe I) pour $\kappa = 10 \text{ m}^{-1}$

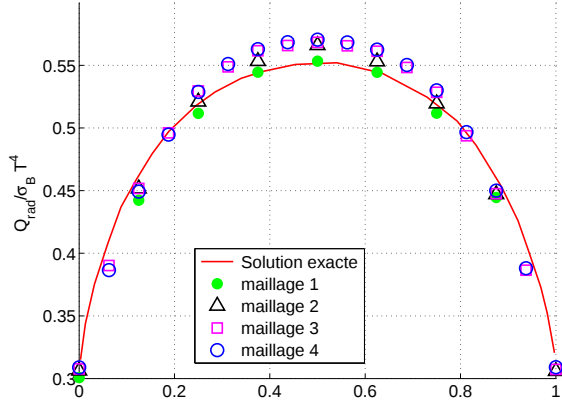
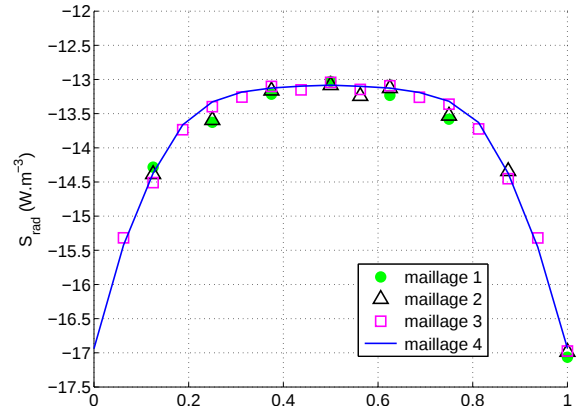
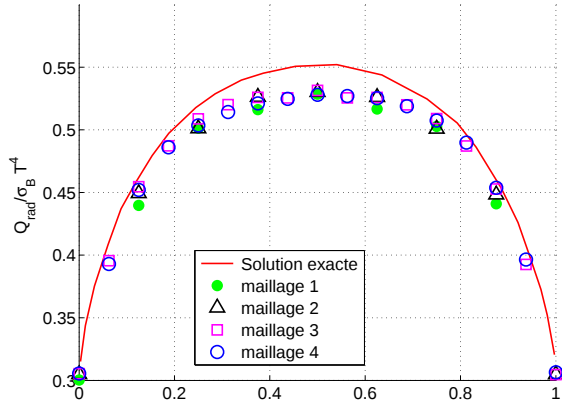
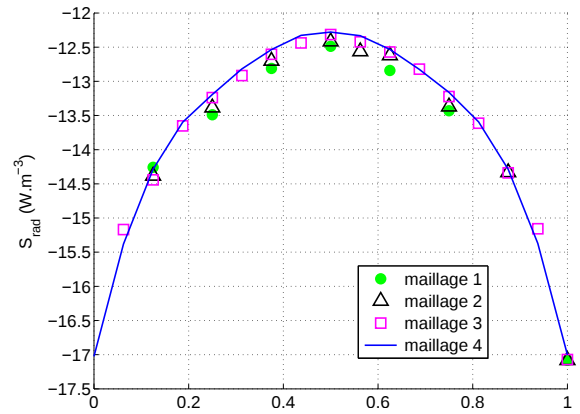
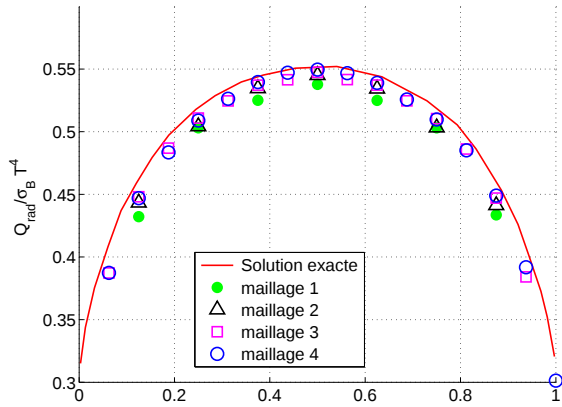
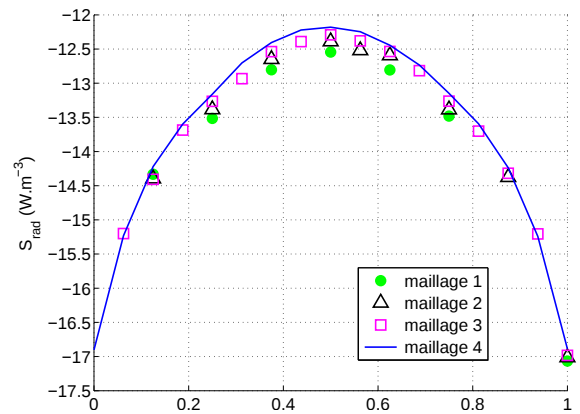

 (a) Axe A, quadrature S_4

 (b) Axe I, quadrature S_4

 (c) Axe A, quadrature S_6

 (d) Axe I, quadrature S_6

 (e) Axe A, quadrature S_8

 (f) Axe I, quadrature S_8

 FIGURE 3.14 – Flux radiatif adimensionné (Axe A) et terme source radiatif (axe I) pour $\kappa = 1 \text{ m}^{-1}$

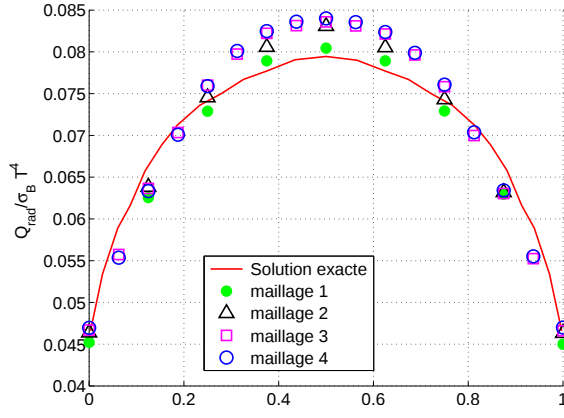
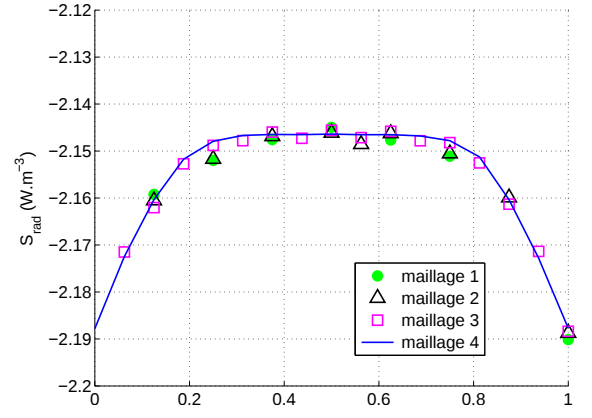
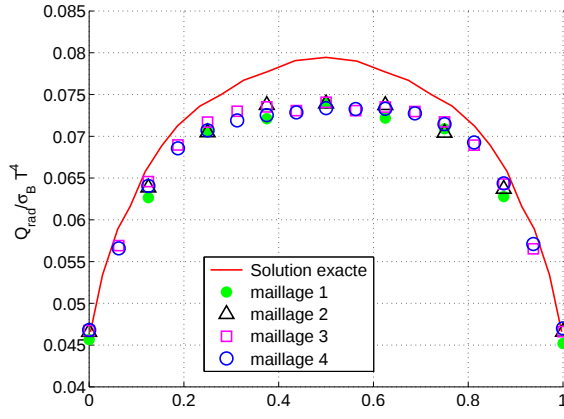
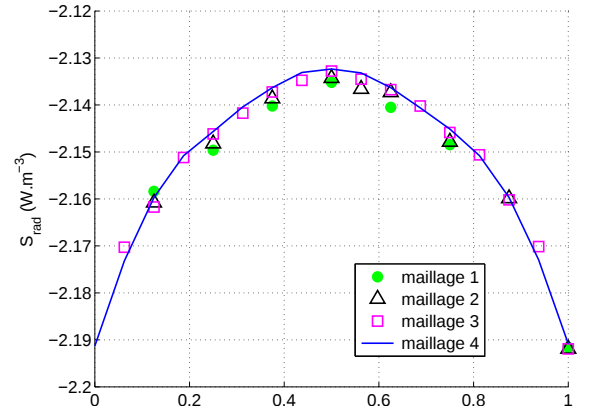
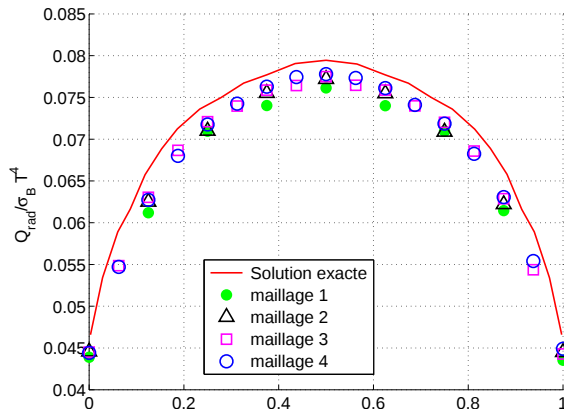
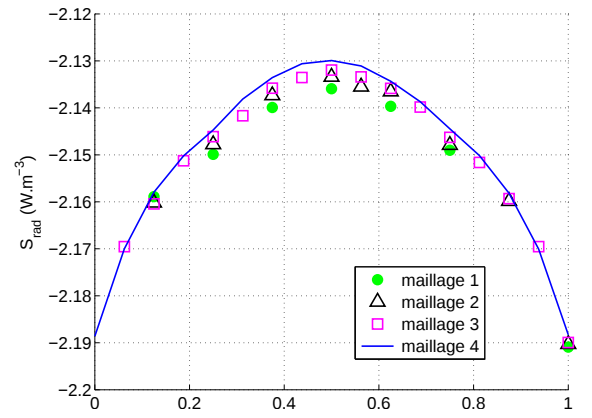

 (a) Axe A, quadrature S_4

 (b) Axe I, quadrature S_4

 (c) Axe A, quadrature S_6

 (d) Axe I, quadrature S_6

 (e) Axe A, quadrature S_8

 (f) Axe I, quadrature S_8

 FIGURE 3.15 – Flux radiatif adimensionné (Axe A) et terme source radiatif (axe I) pour $\kappa = 0.1 \text{ m}^{-1}$

Commentaires sur les résultats

Pour ce premier cas test, nous observons une bonne convergence spatiale et angulaire de la solution donnant le flux radiatif adimensionné. On notera que :

- pour $\kappa = 10\,m^{-1}$, lorsque l'on raffine le maillage spatial, ainsi que la quadrature angulaire, nos résultats ne montrent quasiment aucun changement, indiquant ainsi que la convergence est atteinte ;
- pour $\kappa = 1\,m^{-1}$, nous observons une différence du flux avec les quadratures S_4 et S_6 , par rapport à la solution exacte. Avec la quadrature S_4 (figure 3.14(a)), le flux se situe au dessus de la solution exacte, tandis qu'avec la quadrature S_6 (figure 3.14(c)), le flux se situe en dessous de la solution exacte. Lorsque l'on raffine le maillage en espace, on note que les flux pour ces deux quadratures sont proches de la solution exacte mais ne tendent pas vers elle. Lorsque la quadrature angulaire est plus fine (S_8) et lorsqu'on raffine le maillage spatial, nos résultats convergent vers la solution exacte (figure 3.14(e)) ;
- pour $\kappa = 0.1\,m^{-1}$, les observations sont les mêmes que pour $\kappa = 1\,m^{-1}$. On notera toutefois que pour les quadratures angulaires S_4 et S_6 , l'écart avec la solution exacte est plus important.

Tout comme pour le flux radiatif, nous avons une bonne convergence spatiale et angulaire de la solution donnant le terme source radiatif :

- pour $\kappa = 10\,m^{-1}$, les observations sont les mêmes que pour le flux radiatif ;
- pour $\kappa = 1$ et $0.1\,m^{-1}$, lorsque l'on raffine à la fois le maillage spatial et la quadrature angulaire les valeurs numériques convergent vers la solution du maillage spatial et angulaire le plus fin, excepté pour la quadrature S_4 . En effet, on observe une différence au niveau de l'allure de la solution avec la quadrature S_4 par rapport aux quadratures S_6 et S_8 . Cette différence est plus marquée pour $\kappa = 0.1\,m^{-1}$.

Les écarts observés pour les quadratures S_4 et S_6 , notamment pour $\kappa = 1$ et $0.1\,m^{-1}$, peuvent être attribués au faible nombre de directions, ou encore au poids associé à chaque direction qui n'est pas le même dans chaque direction pour la quadrature S_6 . Toutefois, la quadrature S_8 n'a également pas le même poids dans chaque direction et donne de bons résultats.

3.2.2 Cas test n°2

Pour le second cas test, nous définissons quatre types de maillage en espace donnés par le tableau suivant :

	N_p	N_t	N_e
maillage 1 (structuré grossier)	848	3606	700
maillage 2 (structuré moyen)	2292	10536	1388
maillage 3 (structuré fin)	6860	34180	2824
maillage 4 (structuré très fin)	19927	100557	2824

TABLE 3.3 – Caractéristiques des maillages en espace

Nos simulations ont été réalisées avec ces quatre différents maillages en espace et pour trois valeurs du coefficient d'absorption ($\kappa = 0.5, 1$ et 10 m^{-1}). Nous représentons le flux radiatif le long de l'axe AC comme illustré sur la figure 3.16 ainsi que, le terme source sur l'axe H de la figure 3.17. Nous comparons nos résultats à la solution numérique de Sakami et al. [50] qui, rappelons le, a été obtenue avec la quadrature S_4 . Notons toutefois que, pour le terme source radiatif, nous n'avons pas de solution de référence.

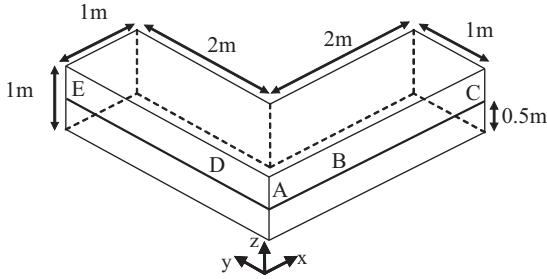


FIGURE 3.16 – Deux axes pour visualiser le flux radiatif adimensionné

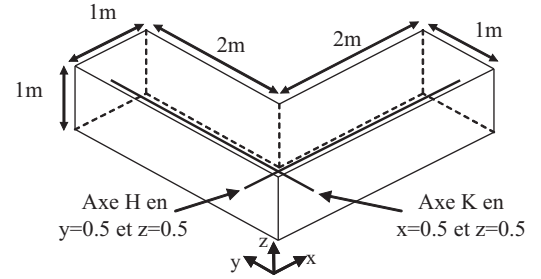


FIGURE 3.17 – Deux axes pour visualiser le terme source radiatif

Le tableau suivant indique le temps de calcul pour chaque simulation.

	discrétisation angulaire		
	S_4 (24 dir.)	S_6 (48 dir.)	S_8 (80 dir.)
maillage 1 (structuré grossier)	3 s	6 s	10 s
maillage 2 (structuré moyen)	10 s	19 s	31 s
maillage 3 (structuré fin)	39 s	1 min 17 s	2 min 07 s
maillage 4 (structuré très fin)	2 min 56 s	5 min 42 s	9 min 25 s

TABLE 3.4 – Temps de calcul pour la forme en "L"

Flux radiatif et terme source radiatif : étude de sensibilité aux maillages spatial et angulaire

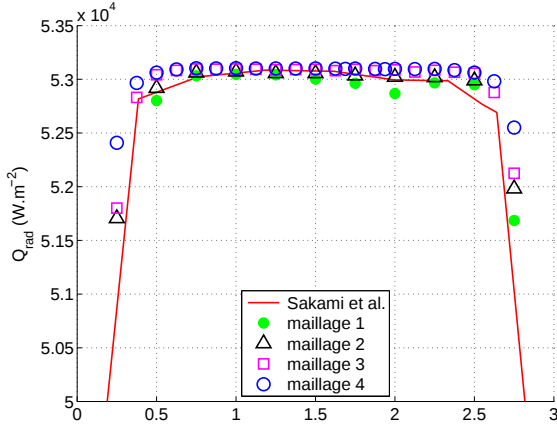
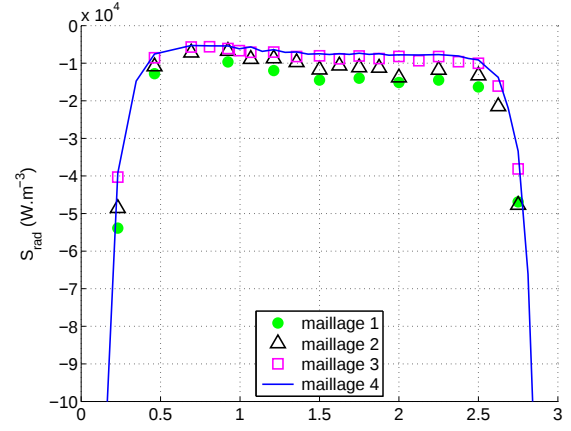
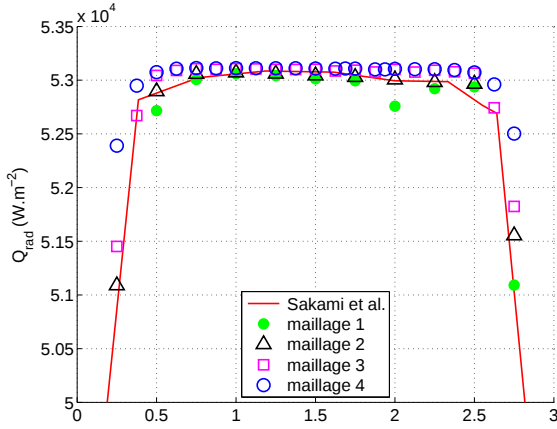
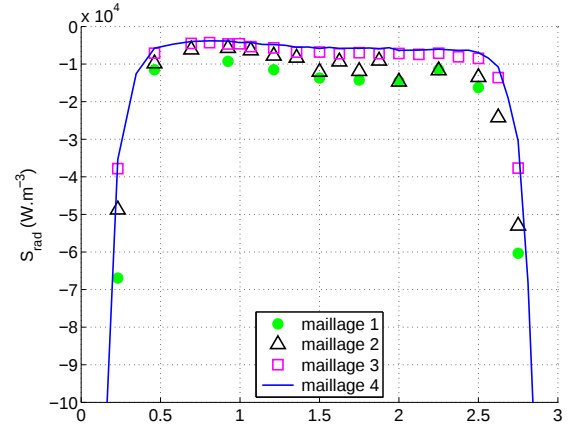
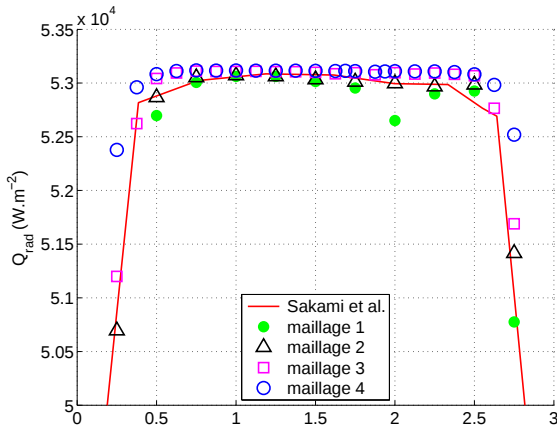
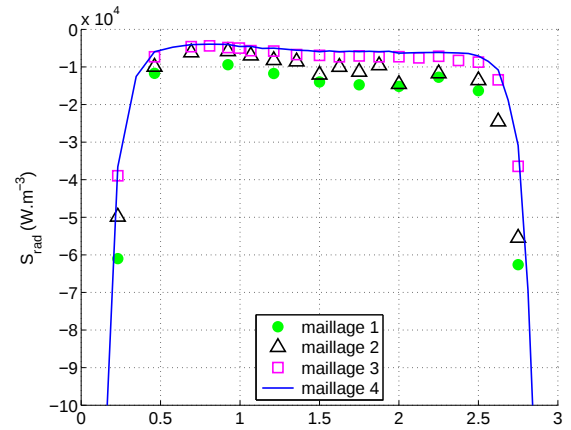

 (a) Axe AC, quadrature S_4

 (b) Axe H, quadrature S_4

 (c) Axe AC, quadrature S_6

 (d) Axe H, quadrature S_6

 (e) Axe AC, quadrature S_8

 (f) Axe H, quadrature S_8

 FIGURE 3.18 – Flux radiatif (axe AC) et terme source radiatif (axe H) pour $\kappa = 10 \text{ m}^{-1}$

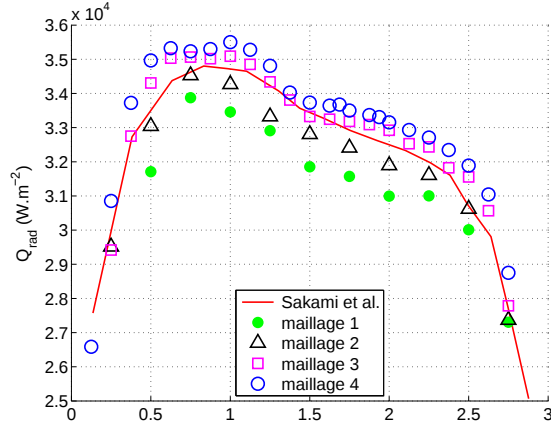
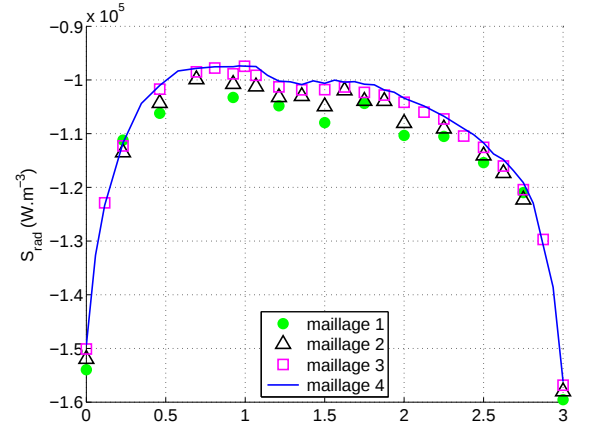
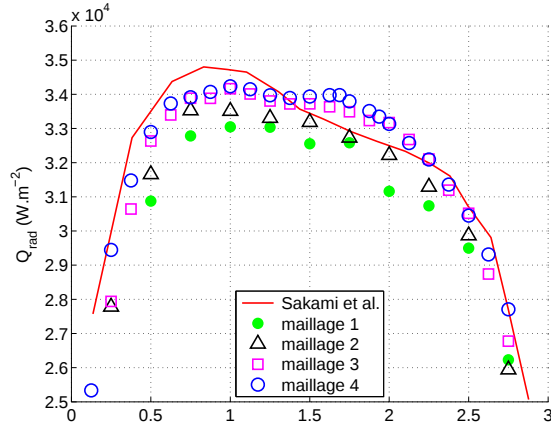
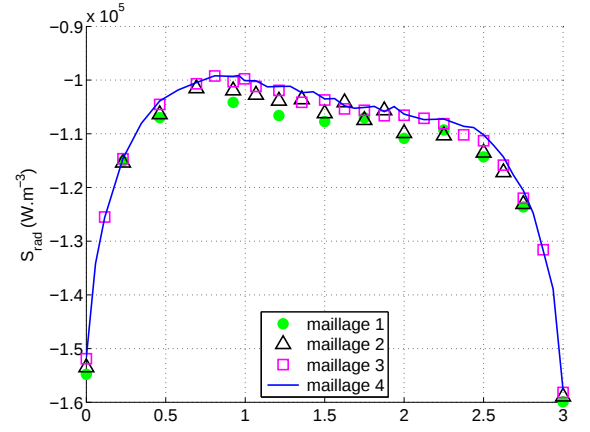
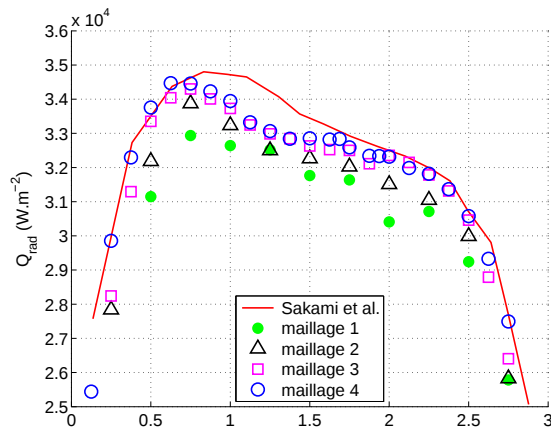
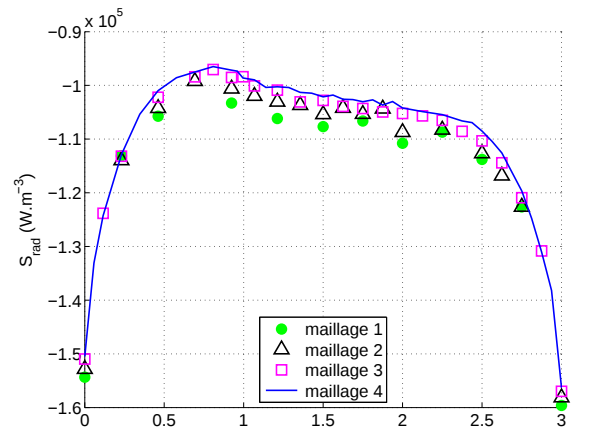
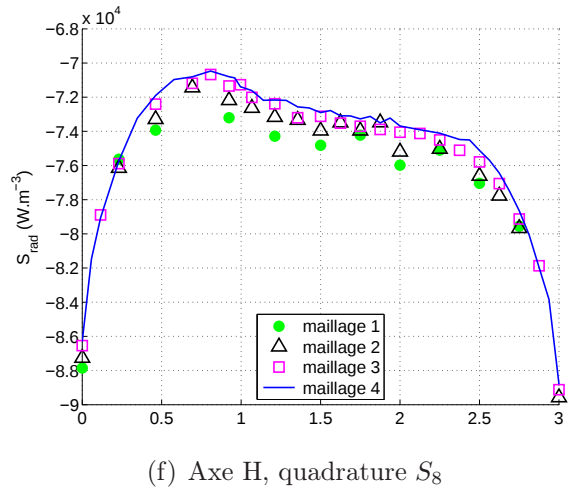
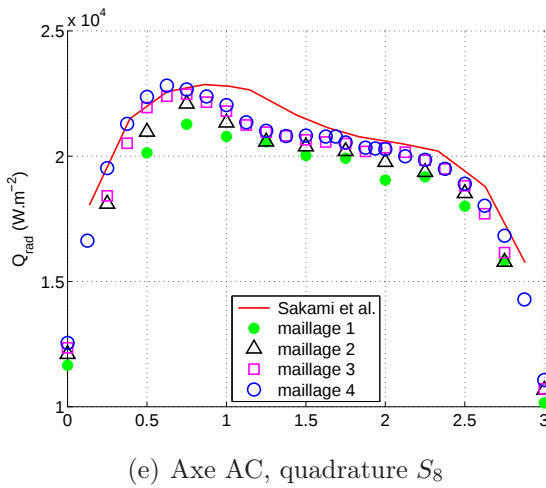
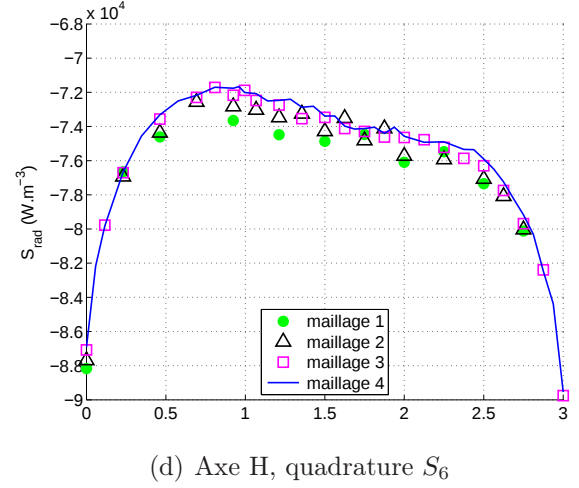
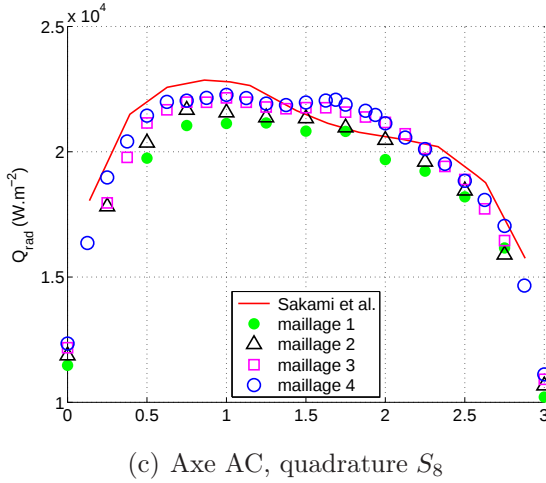
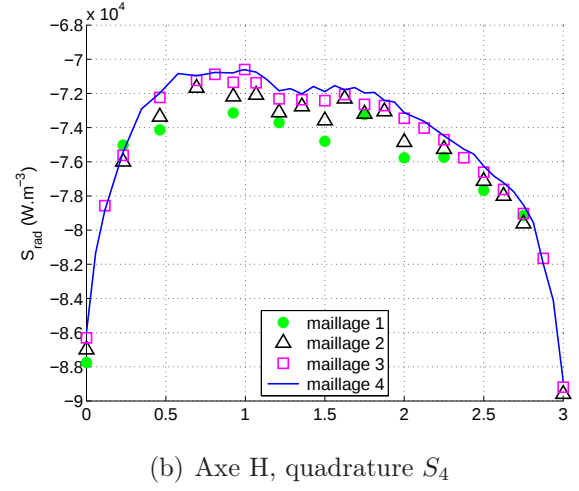
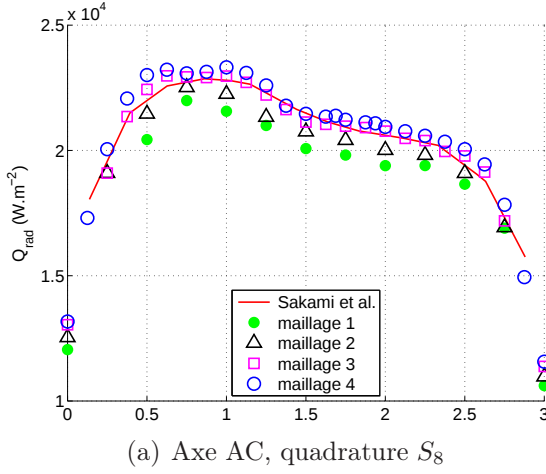

 (a) Axe AC, quadrature S_4

 (b) Axe H, quadrature S_4

 (c) Axe AC, quadrature S_6

 (d) Axe H, quadrature S_6

 (e) Axe AC, quadrature S_8

 (f) Axe H, quadrature S_8

 FIGURE 3.19 – Flux radiatif (axe AC) et terme source radiatif (axe H) pour $\kappa = 1 \text{ m}^{-1}$


 FIGURE 3.20 – Flux radiatif (axe AC) et terme source radiatif (axe H) pour $\kappa = 0.5 \text{ m}^{-1}$

Commentaires sur les résultats

Comme pour le premier cas test, nous observons une convergence spatiale et angulaire de la solution donnant le flux radiatif. On notera que :

- pour $\kappa = 10 \text{ m}^{-1}$, lorsque l'on raffine le maillage spatial, ainsi que la quadrature angulaire, nos résultats montrent peu de changement et tendent vers la même solution ;
- pour $\kappa = 1 \text{ m}^{-1}$ et S_4 (figure 3.19(a)), nos résultats sont proches de la solution numérique de [50]. Néanmoins, lorsque l'on raffine le maillage spatial, le flux converge vers une solution se trouvant au dessus de la solution numérique de [50], tout en gardant la même allure. Par ailleurs, nous observons une différence du flux avec les trois quadratures angulaires. En effet, pour S_6 (figure 3.19(c)), le flux converge vers une solution dont l'allure est légèrement différente de celles obtenues avec les quadratures S_4 et S_8 (le flux reste presque constant entre 1.5 et 2 sur l'axe AC alors qu'il devrait diminuer). Avec S_8 (figure 3.19(e)), la solution du maillage 4 est plus proche de la solution de référence que celle obtenue avec S_4 , toutefois, un écart subsiste entre ces deux quadratures ;
- pour $\kappa = 0.1 \text{ m}^{-1}$, les observations sont les mêmes que pour $\kappa = 1 \text{ m}^{-1}$. On notera toutefois, que les résultats sont plus proches de la solution numérique de [50] avec S_4 .

Tout comme le flux radiatif, nous avons une bonne convergence spatiale et angulaire de la solution donnant le terme source radiatif. De plus, pour chacun des coefficients d'absorption, nous observons la même allure au niveau de la solution avec les trois quadratures angulaires. Toutefois, les valeurs sont légèrement différentes.

Pour les mêmes raisons que le premier cas test, concernant les quadratures S_4 et S_6 , nous observons des écarts pour de faibles valeurs du coefficient d'absorption $\kappa = 1$ et 0.1 m^{-1} .

3.2.3 Cas test n°3

Pour le troisième cas test, nous définissons quatre types de maillage en espace donnés par le tableau suivant :

	N_p	N_t	N_e
maillage 1 (structuré grossier)	1577	7168	1408
maillage 2 (non structuré moyen)	3746	18044	1716
maillage 3 (structuré fin)	11025	57344	5632
maillage 4 (non structuré très fin)	23862	121692	6198

TABLE 3.5 – Caractéristiques des maillages en espace

Les simulations ont été réalisées avec ces quatre différents maillages en espace et pour trois valeurs du coefficient d'absorption ($\kappa = 0.1, 1$ et 10 m^{-1}). Nous représentons le flux radiatif le long de l'axe A comme illustré sur la figure 3.21 ainsi que le terme source sur l'axe I. Nous comparons nos résultats à la solution de référence (tracé de rayon) et à ceux de Joseph et al. [7]. Ces derniers auteurs ont utilisé une MVF basée sur une formulation « cell-center » avec une relation de fermeture de type exponentielle. Leurs résultats sont présentés pour un maillage en espace constitué de 140010 tétraèdres et une quadrature S_8 . Pour permettre la comparaison, nous présentons nos résultats obtenus avec le maillage 4 (121692 tétraèdres) et une quadrature S_8 .

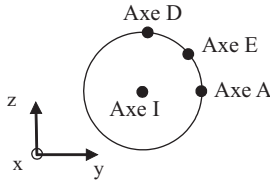


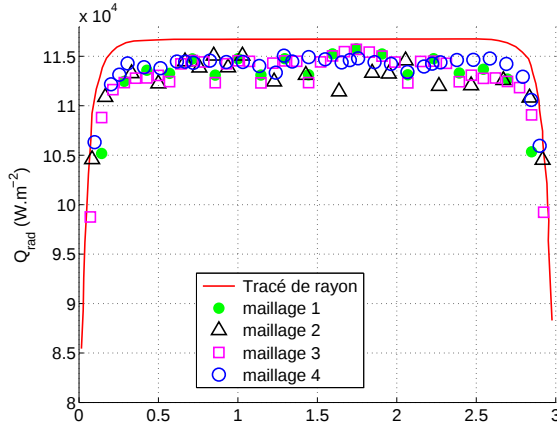
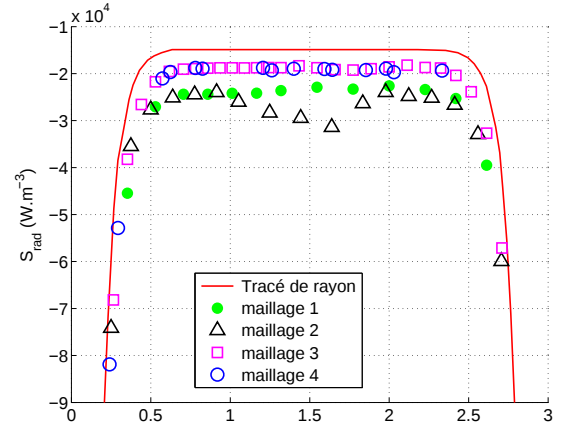
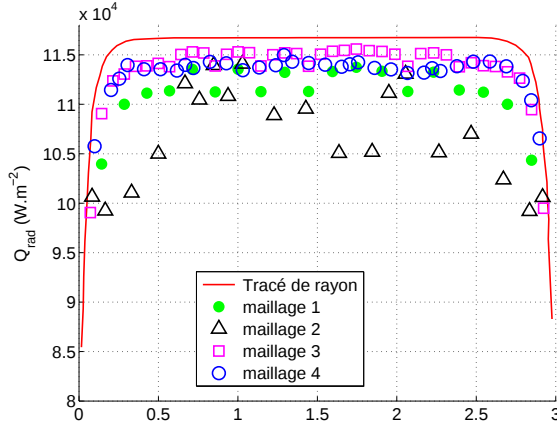
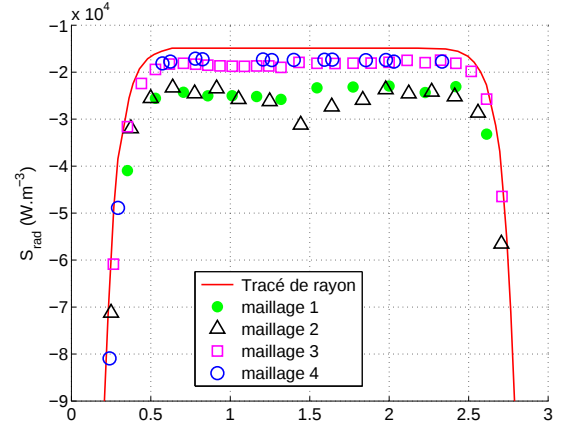
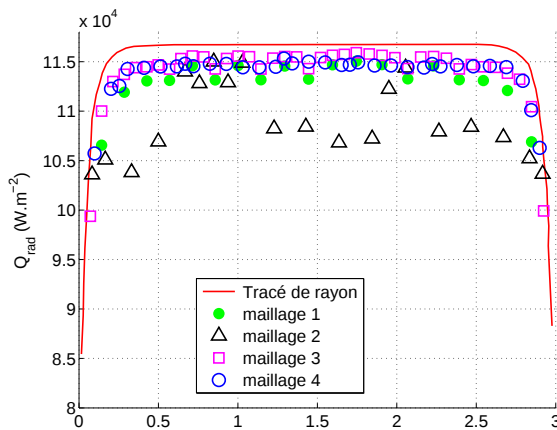
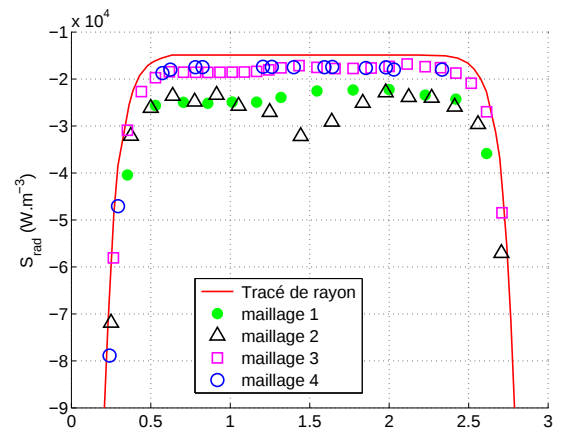
FIGURE 3.21 – Les axes de visualisation pour le cylindre

Le tableau suivant indique le temps de calcul pour chaque simulation.

	discrétisation angulaire		
	S_4 (24 dir.)	S_6 (48 dir.)	S_8 (80 dir.)
maillage 1 (structuré grossier)	6 s	11 s	18 s
maillage 2 (non structuré moyen)	18 s	36 s	58 s
maillage 3 (structuré fin)	1 min 11 s	2 min 15 s	3 min 42 s
maillage 4 (non structuré très fin)	1 min 23 s	2 min 39 s	4 min 22 s

TABLE 3.6 – Temps de calcul pour le cylindre du cas test n°3

Flux radiatif et terme source radiatif : étude de sensibilité aux maillages spatial et angulaire

(a) Axe A, quadrature S_4 (b) Axe I, quadrature S_4 (c) Axe A, quadrature S_6 (d) Axe I, quadrature S_6 (e) Axe A, quadrature S_8 (f) Axe I, quadrature S_8 FIGURE 3.22 – Flux radiatif (axe A) et terme source radiatif (axe I) pour $\kappa = 10 \text{ m}^{-1}$

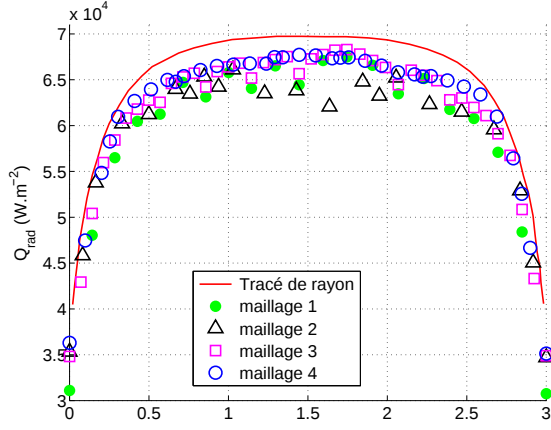
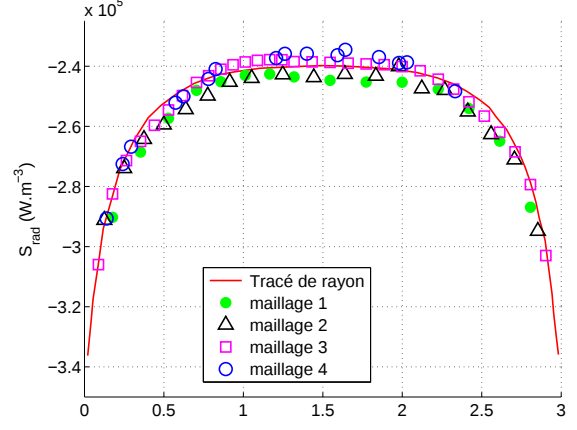
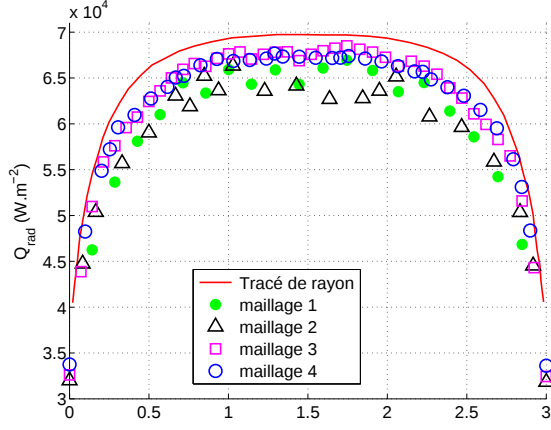
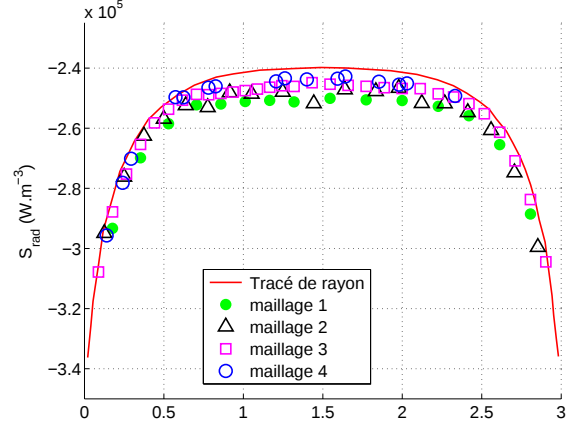
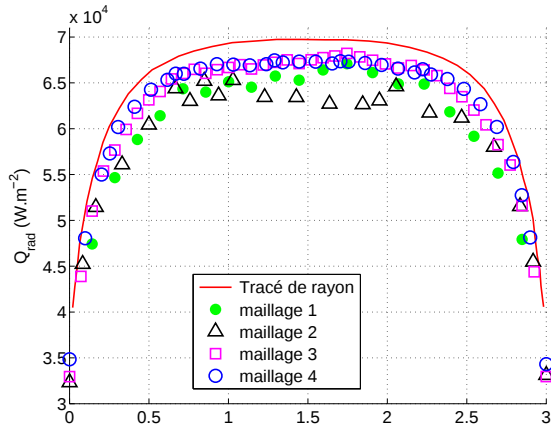
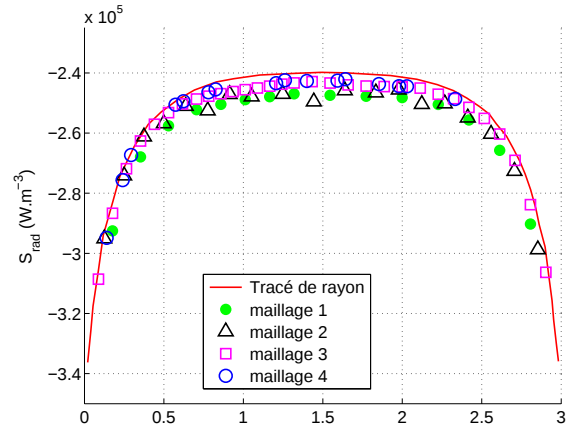
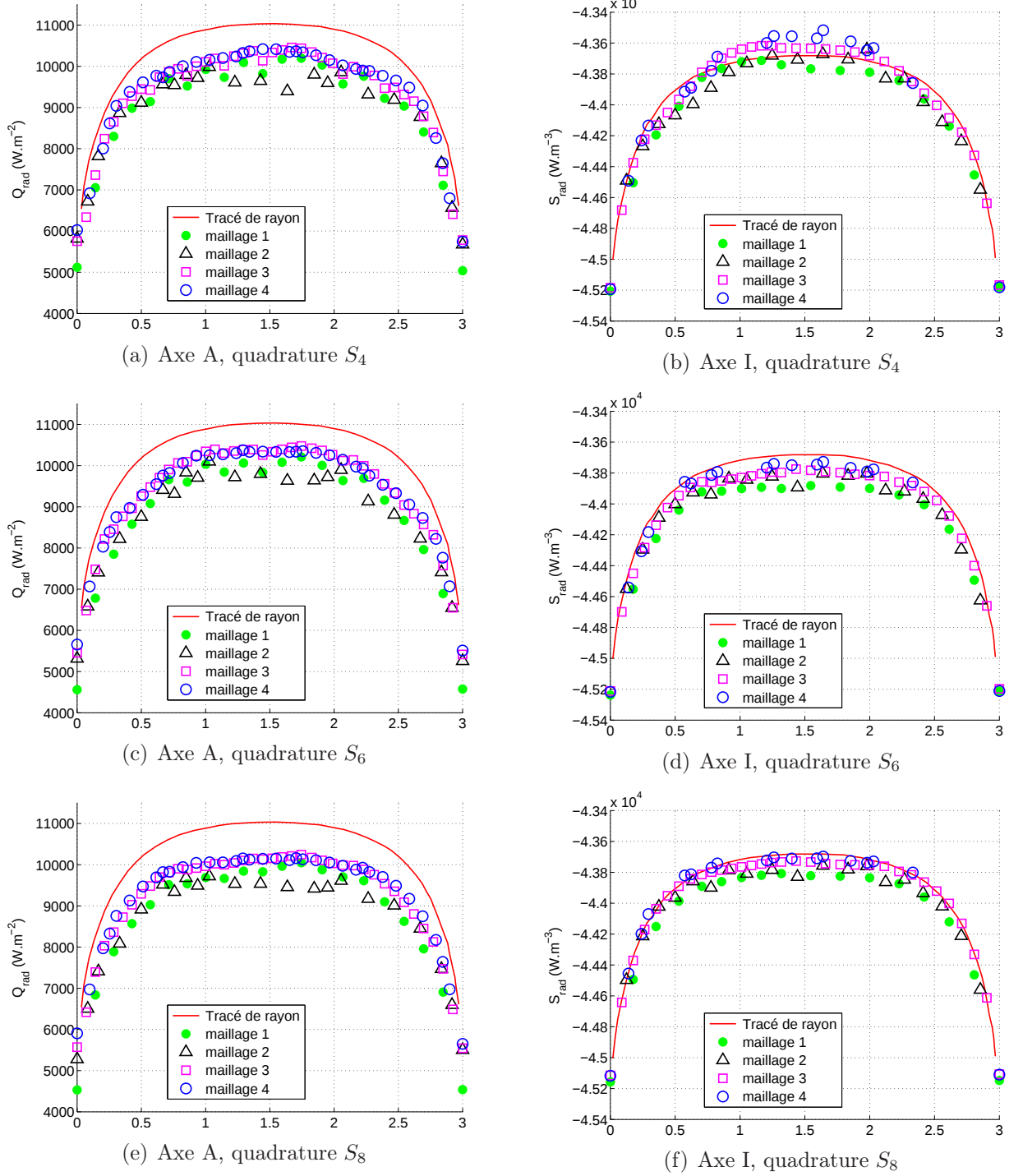
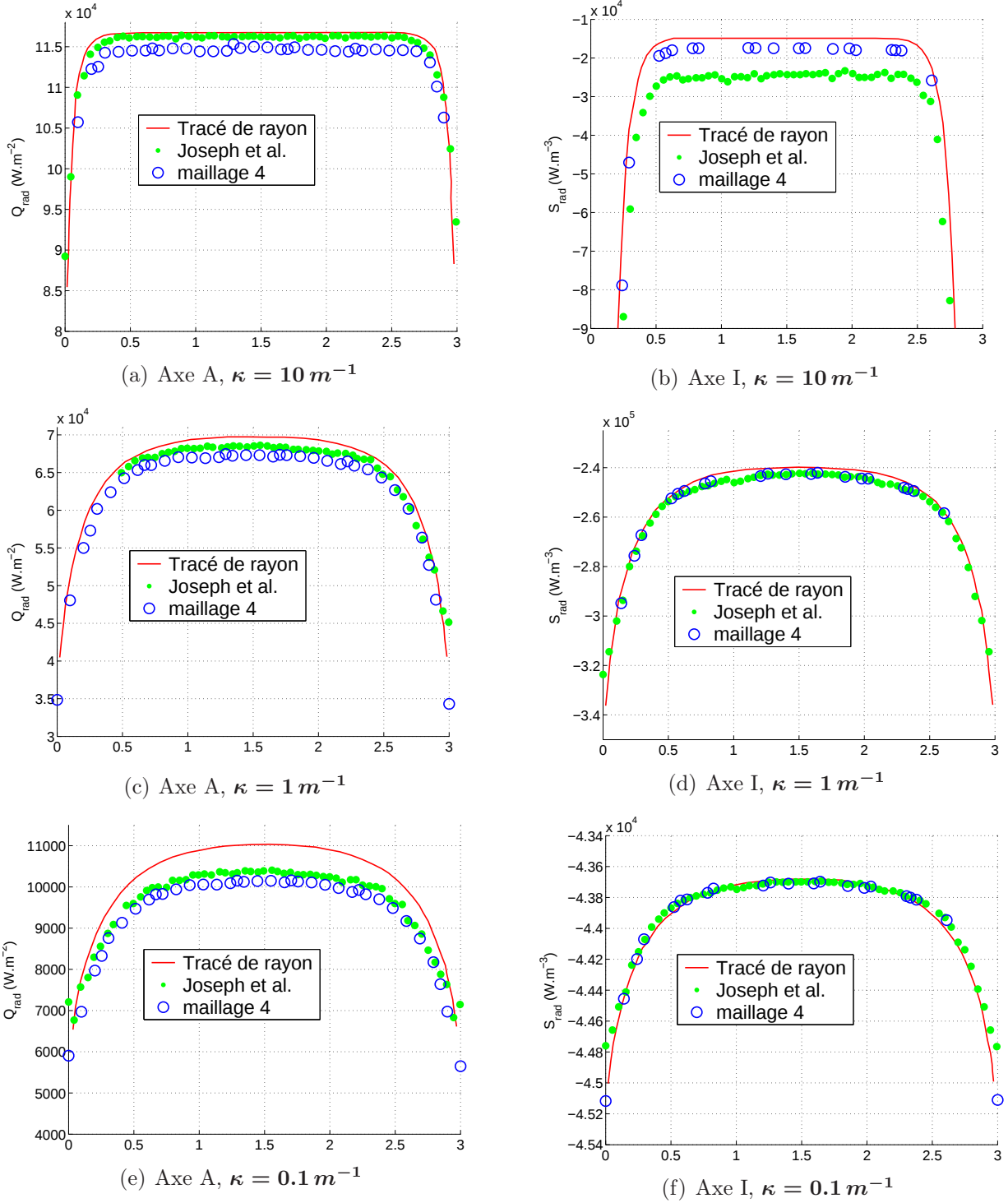

 (a) Axe A, quadrature S_4

 (b) Axe I, quadrature S_4

 (c) Axe A, quadrature S_6

 (d) Axe I, quadrature S_6

 (e) Axe A, quadrature S_8

 (f) Axe I, quadrature S_8

 FIGURE 3.23 – Flux radiatif (axe A) et terme source radiatif (axe I) pour $\kappa = 1 \text{ m}^{-1}$


 FIGURE 3.24 – Flux radiatif (axe A) et terme source radiatif (axe I) pour $\kappa = 0.1 \text{ m}^{-1}$

Flux radiatif et terme source radiatif : comparaison entre les formulations "cell-vertex" et "cell-center"


 FIGURE 3.25 – Flux radiatif (axe A) et terme source radiatif (axe I) avec S_8

Commentaires sur les résultats

Pour le troisième cas test, nous observons une convergence spatiale et angulaire de la solution donnant le flux radiatif mais présentant cependant un écart avec la solution de référence, ceci pour les trois coefficients d'absorption même avec le maillage spatial le plus fin et pour les différentes discrétisations angulaires. On notera en particulier que la solution se dégrade avec le maillage 2 (car le maillage grossier est non structuré).

Nos résultats, donnant le terme source radiatif sur l'axe I, montrent des écarts plus marqués avec la solution de référence lorsque $\kappa = 10 \text{ m}^{-1}$.

Au vue de ces constatations, il nous a paru utile de comparer nos résultats à ceux de Joseph et al. [7]. En effet, rappelons que ces auteurs ont utilisé une méthode numérique proche de la nôtre pour résoudre l'ETR (MVF avec une relation de fermeture de type exponentielle). La différence étant que la MVF de [7] est basée sur une formulation « cell-center » et la nôtre sur une formulation « cell-vertex ». Pour permettre la comparaison, nous présentons les résultats uniquement pour la quadrature S_8 . On s'aperçoit alors que nos résultats sont très proches de ceux de [7]. Leurs résultats (obtenus avec 140010 tétraèdres) sont toutefois un peu plus précis que les nôtres (obtenus avec 121692 tétraèdres) pour le flux radiatif. Les écarts observés pour le flux radiatif peuvent être attribués aux schémas de fermeture. En effet, pour les volumes de contrôle ayant des faces appartenant à la frontière, le schéma de fermeture mis en place est relativement simple (expression 2.49), ce qui peut être la raison du manque de précision pour le flux aux parois, par rapport au calcul des sources radiatives. Cet aspect pourrait constituer un point d'amélioration de notre méthode.

Pour la comparaison des deux formulations (« cell-vertex » et « cell-center »), à l'heure actuelle on ne peut réellement conclure. Toutefois, avec notre formulation on s'attendait à être plus précis que le « cell-center », nous parvenons juste à faire aussi bien. De plus, pour comparer objectivement les deux formulations, il serait judicieux de travailler sur le même maillage et de prendre en considération le rapport temps de calcul / précision.

3.2.4 Cas test n°4

Pour le quatrième cas test, nous définissons quatre types de maillage en espace donnés par le tableau suivant :

	N_p	N_t	N_e
maillage 1 (structuré grossier)	729	3072	768
maillage 2 (structuré moyen)	4913	24576	3072
maillage 3 (non structuré fin)	10333	52661	3196
maillage 4 (non structuré très fin)	19741	102615	4584

TABLE 3.7 – Caractéristiques des maillages en espace

Nos simulations ont été réalisées avec ces quatre différents maillages en espace et pour trois valeurs du coefficient d'absorption ($\kappa = 0.1, 1$ et $5 m^{-1}$). Nous représentons le flux radiatif adimensionné le long de l'axe A comme illustré sur la figure (3.26) ainsi que, le terme source sur l'axe I. Nous comparons nos résultats à la solution exacte. Notons toutefois que, pour le terme source radiatif, nous n'avons pas de solution de référence.

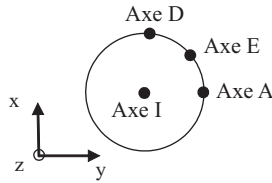


FIGURE 3.26 – Les axes de visualisation pour le cylindre

Le tableau suivant donne le temps de calcul pour chaque simulation.

	discrétisation angulaire		
	S_4 (24 dir.)	S_6 (48 dir.)	S_8 (80 dir.)
maillage 1 (structuré grossier)	6 s	11 s	18 s
maillage 2 (non structuré moyen)	18 s	36 s	58 s
maillage 3 (structuré fin)	1 min 11 s	2 min 15 s	3 min 42 s
maillage 4 (non structuré très fin)	1 min 23 s	2 min 39 s	4 min 22 s

TABLE 3.8 – Temps de calcul pour le cylindre du cas test n°4

Flux radiatif adimensionné et terme source radiatif : étude de sensibilité aux maillages spatial et angulaire

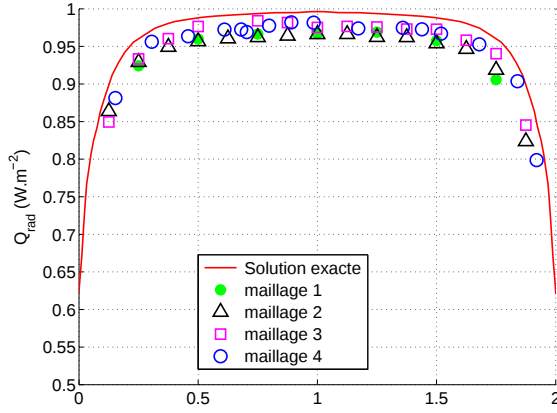
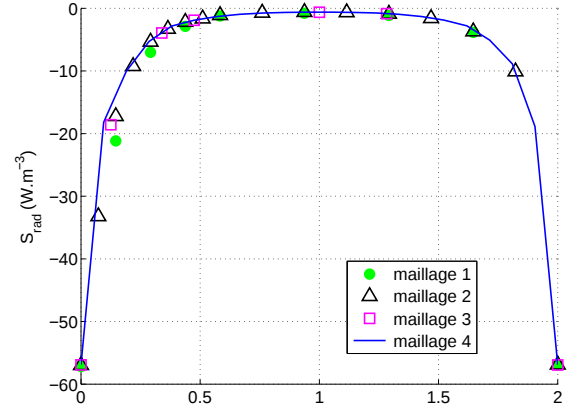
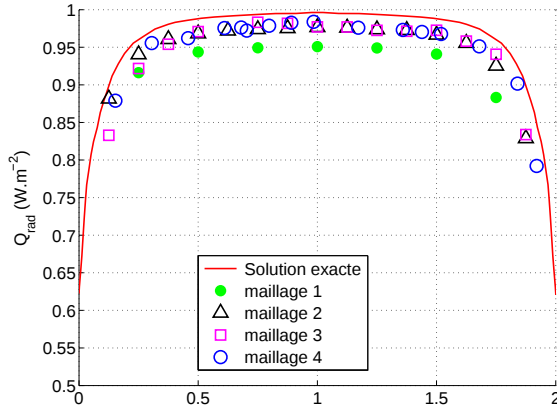
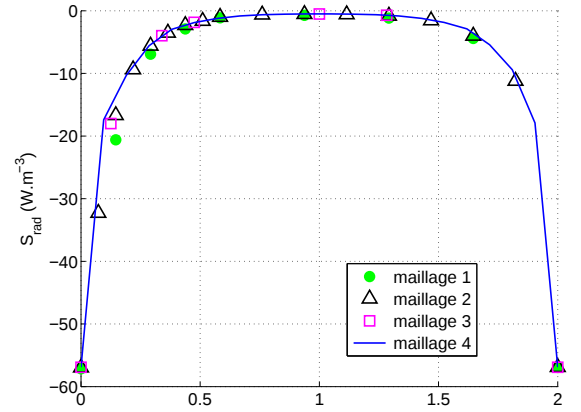
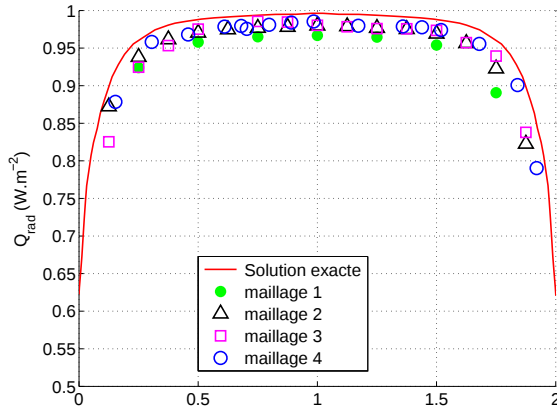
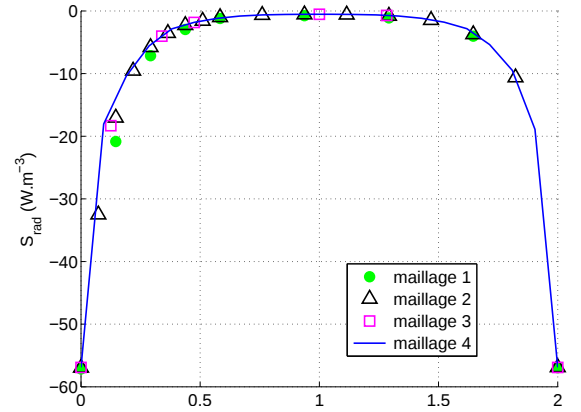
(a) Axe A, quadrature S_4 (b) Axe I, quadrature S_4 (c) Axe A, quadrature S_6 (d) Axe I, quadrature S_6 (e) Axe A, quadrature S_8 (f) Axe I, quadrature S_8

FIGURE 3.27 – Flux radiatif adimensionné (axe A) et terme source radiatif (axe I) pour $\kappa = 5 \text{ m}^{-1}$

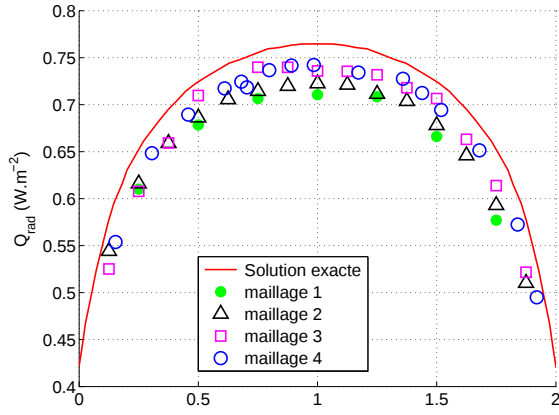
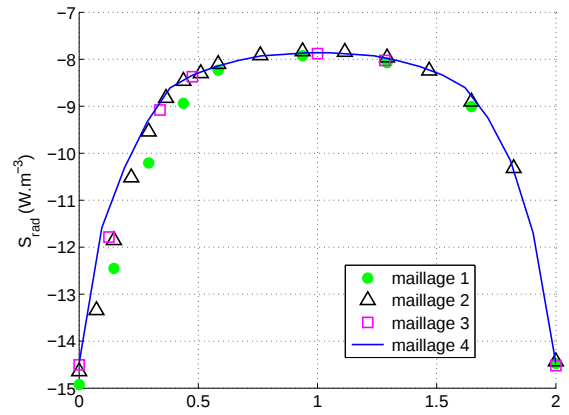
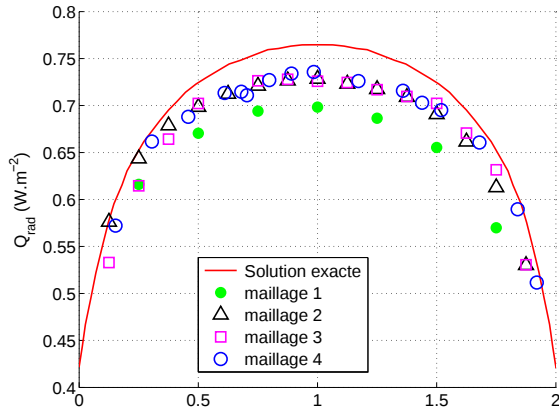
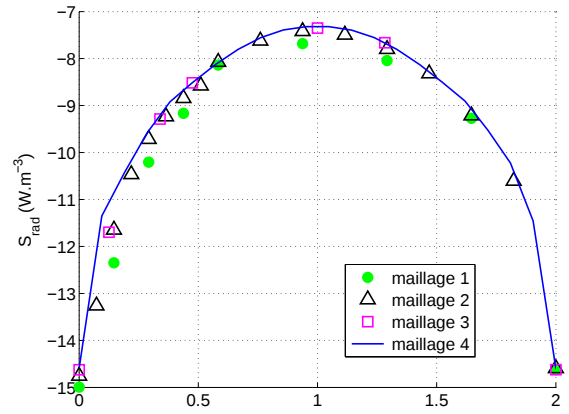
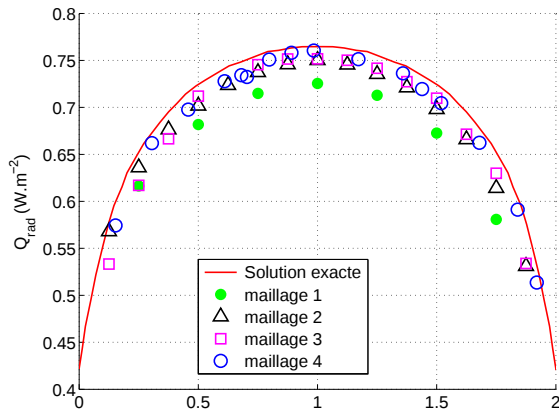
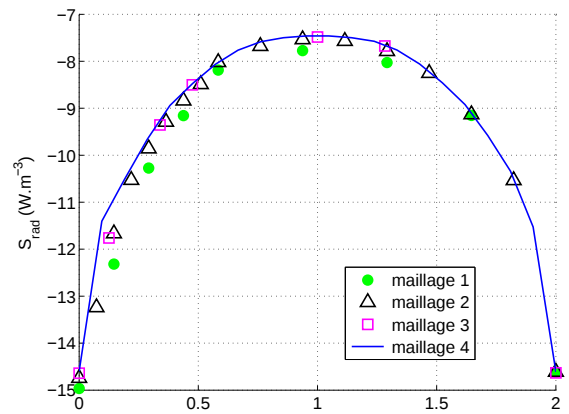

 (a) Axe A, quadrature S_4

 (b) Axe I, quadrature S_4

 (c) Axe A, quadrature S_6

 (d) Axe I, quadrature S_6

 (e) Axe A, quadrature S_8

 (f) Axe I, quadrature S_8

 FIGURE 3.28 – Flux radiatif adimensionné (axe 1) et terme source radiatif (axe I) pour $\kappa = 1 \text{ m}^{-1}$

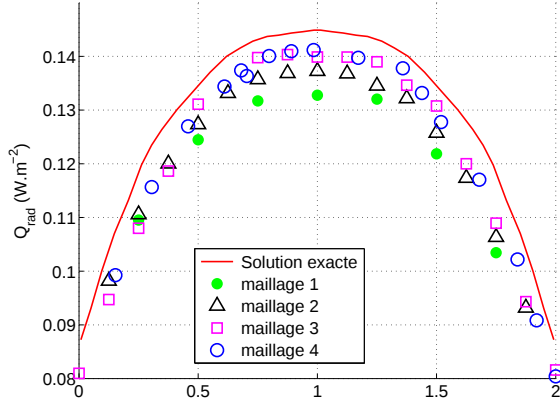
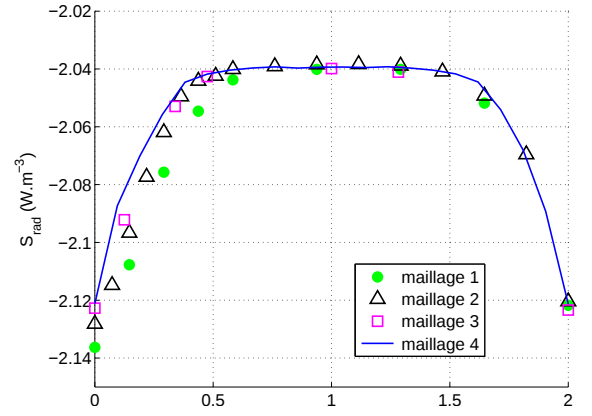
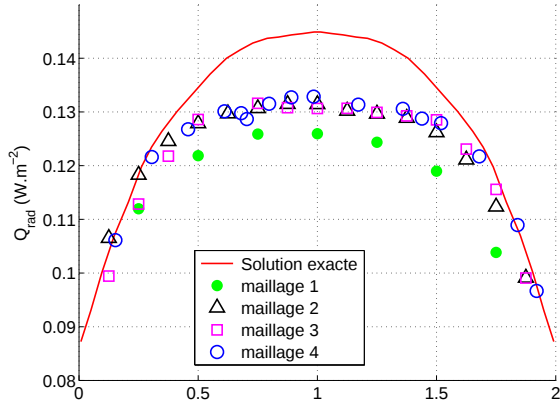
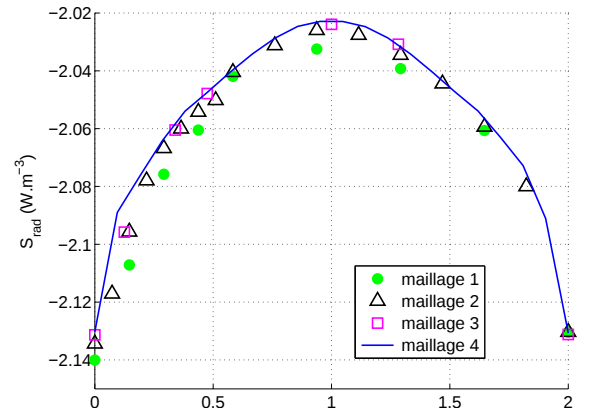
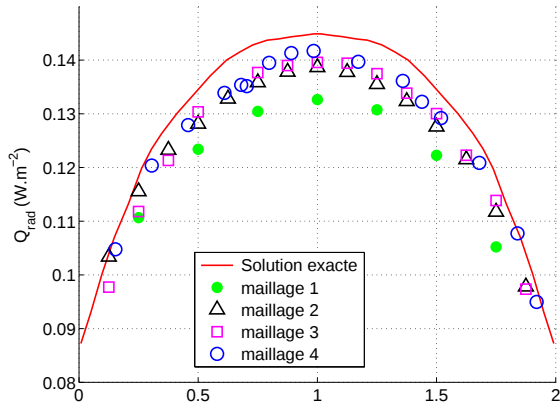
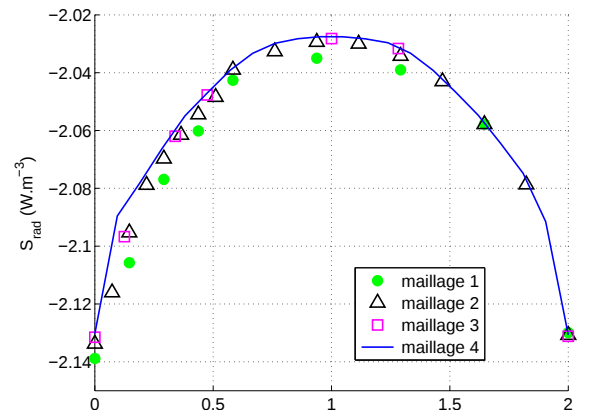

 (a) Axe A, quadrature S_4

 (b) Axe I, quadrature S_4

 (c) Axe A, quadrature S_6

 (d) Axe I, quadrature S_6

 (e) Axe A, quadrature S_8

 (f) Axe I, quadrature S_8

 FIGURE 3.29 – Flux radiatif adimensionné (axe A) et terme source radiatif (axe I) pour $\kappa = 0.1 \text{ m}^{-1}$

Pour ce quatrième cas test, nous observons pour $\kappa = 5$ et 1 m^{-1} une convergence spatiale et angulaire de la solution (donnant le flux radiatif adimensionné) vers la solution exacte. Pour $\kappa = 0.1\text{ m}^{-1}$, nous observons encore quelques différences même avec la quadrature S_8 et le maillage 4.

Tout comme le flux radiatif, nous avons une convergence spatiale et angulaire de la solution donnant le terme source radiatif. On notera que :

- pour $\kappa = 5\text{ m}^{-1}$, lorsque l'on raffine le maillage spatial, ainsi que la quadrature angulaire nos résultats ne montrent quasiment aucun changement et tendent vers la même solution ;
- pour $\kappa = 1\text{ m}^{-1}$ et $\kappa = 0.1\text{ m}^{-1}$, lorsque l'on raffine à la fois le maillage spatial et la quadrature angulaire les valeurs numériques convergent vers la solution du maillage spatial et angulaire le plus fin, excepté pour la quadrature S_4 . En effet, on observe une différence au niveau de l'allure de la solution avec la quadrature S_4 par rapport aux quadratures S_6 et S_8 . Cette différence est notamment plus marquée pour $\kappa = 0.1\text{ m}^{-1}$.

3.2.5 Conclusion sur l'étude de sensibilité

L'étude de sensibilité portant sur les différents cas tests montre l'influence de la discrétisation angulaire et présente une différence des résultats avec les solutions de référence. Notamment, avec les quadratures S_4 et S_6 pour les faibles valeurs du coefficient d'absorption ($\kappa = 1$ et $\kappa = 0.1$) des cas un, deux et quatre, où nous notons une différence d'allure. Cette différence peut être due à la quadrature employée (nombre de directions différent et poids directionnel qui n'est pas le même dans chaque direction). Le troisième cas test nous montre des écarts de précision avec la solution de référence, particulièrement pour le flux radiatif. Toutefois, nos résultats donnant le terme source radiatif sont plus précis que les résultats numériques de Joseph et al. [7], ce qui constitue un avantage pour le couplage avec d'autres modes de transfert. Néanmoins, la précision sur le flux radiatif aux parois est importante pour la prise en compte des conditions aux limites plus complexes nécessitant de connaître le rayonnement incident aux faces.

Les écarts observés pour les différents cas tests, peuvent être attribués au schéma de fermeture. Ces écarts sont plus marqués pour le troisième cas compte tenu du fait que les faces émettent du rayonnement ($T_f \neq 0\text{ K}$). Pour améliorer la précision de notre méthode il serait nécessaire d'approfondir le travail sur la mise en place de relations de fermeture.

Ces quatre cas tests nous donnent un aperçu des résultats issus de notre première version du code de rayonnement que nous développons, où nous pouvons mettre en évidence des problèmes de précision, ainsi qu'une certaine sensibilité à la discrétisation angulaire et spatiale. Néanmoins, ces erreurs relatives de précision sont inférieures à 6%.

3.3 Étude de la diffusion numérique

Afin de mettre en évidence la diffusion numérique, nous traitons la résolution de l'ETR suivant une seule direction. Ce type d'étude a déjà été menée par Chai et al. [55], ainsi que par Liu et al. [46] en raison de l'intérêt qu'elle présente pour la mise en place des schémas de fermeture. En effet, les schémas de fermeture conditionnent la précision de la méthode. Toutefois, en raison des approximations qui sont faites, ils introduisent de la diffusion numérique. Aussi, la mise en place d'un "bon" schéma de fermeture permet de minimiser la diffusion numérique. Le cas d'étude que nous présentons ici concerne les géométries 2D et 3D. Il nous permet de visualiser la propagation dans le milieu d'un rayonnement collimaté. La géométrie considérée est celle d'un parallélépipède de dimension $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 0.3\text{ m}$ avec une représentation des résultats suivant le plan médian en $z = 0.15\text{ m}$ (figure 3.30).

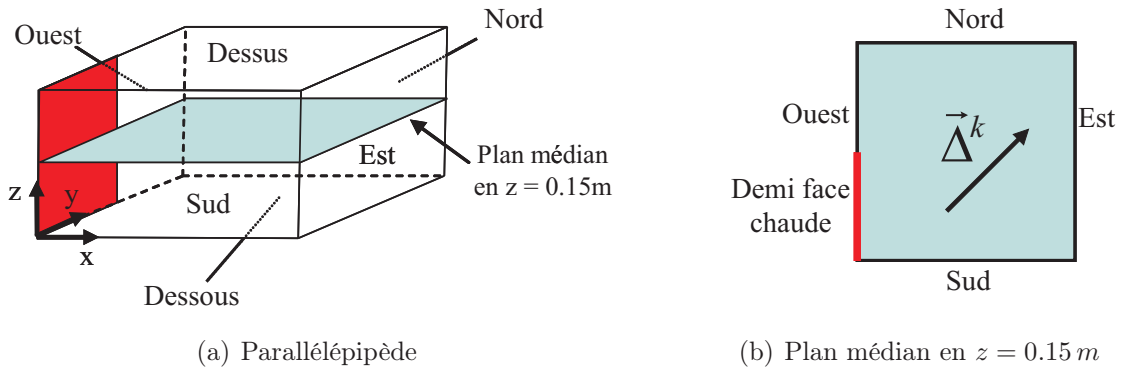


FIGURE 3.30 – Parallélépipède $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 0.3\text{ m}$

Le milieu est bordé par des surfaces noires. Une demi face côté ouest est chaude et les autres faces restantes sont froides, comme illustré sur la figure 3.30(a). Sur la demi face chaude, on fixe la luminance à $L_{chaud}^k = 1\text{ W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}$. Soit encore, $L_{chaud}^k = \sigma T_{chaud}^4 / \pi = 1\text{ W.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}$, ce qui correspond à $T_{chaud} = 86.277\text{ K}$. La direction $\vec{\Delta}^k$ est choisie telle que, $\varphi = 90^\circ$ et $\theta = 45^\circ$ correspondent à une direction appartenant à l'hémisphère d'émission de la demi face chaude. Nos simulations ont été réalisées pour un milieu transparent ($\kappa = 0\text{ m}^{-1}$) avec deux maillages en espace composés de 2601 noeuds (12288 tétraèdres) et de 18513 noeuds (98304 tétraèdres). De plus, nous avons utilisé trois schémas de fermeture différents, afin d'observer leurs influences sur ce cas d'étude. Avant de présenter nos résultats, nous décrivons les schémas de fermeture utilisés.

3.3.1 Schémas de fermeture

Schéma noeud à noeud

Le premier schéma considéré est celui que nous avons présenté dans la partie 2.5 de ce mémoire et les deux autres sont présentés ci-dessous. Nous rappelons que le premier schéma de fermeture utilise uniquement des noeuds en amont et voisin du noeud de calcul, permettant d'utiliser une résolution noeud à noeud, ainsi qu'une résolution matricielle (la matrice du système linéaire est triangulaire inférieure). Les deux autres schémas, "à trois noeuds" et "Step", utilisent à la fois des noeuds en amont et en aval du noeud de calcul. Ils se basent sur une résolution matricielle (dans ces deux cas la matrice du système linéaire n'est pas triangulaire inférieure).

Schéma à trois noeuds

Ce schéma de fermeture s'appuie également sur la forme intégrale de l'ETR et tout comme le premier schéma il utilise des projections. Toutefois, il est plus simple à mettre en place car il ne considère pas de cas particuliers. En effet, le point u_f (projection du point i_f) est toujours construit de la même manière. Il est la projection en amont du point i_f sur une des faces du tétraèdre, comme illustré sur la figure 3.31.

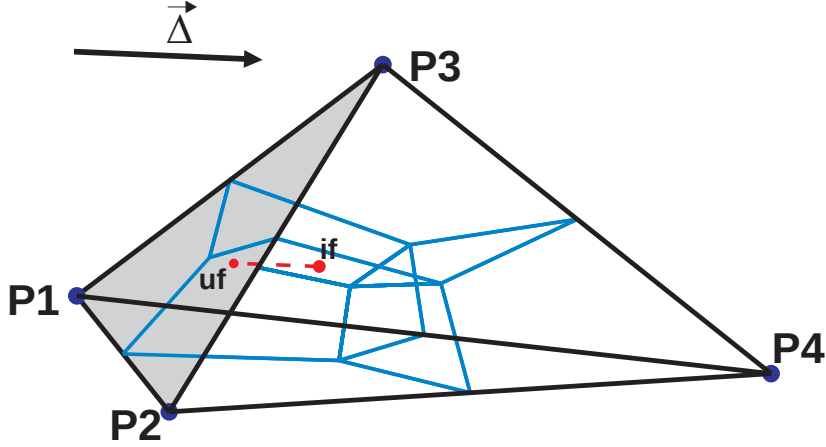


FIGURE 3.31 – Projection pour le schéma à trois noeuds

La luminance au point u_f est toujours interpolée avec la relation ci-dessous, qui est similaire à la relation 2.32. On notera qu'avec cette relation les noeuds en amont et/ou en aval peuvent être utilisés, contrairement à la relation 2.32.

$$L_{u_f}^k \cong \alpha_{f,1}^k L_{P_1}^k + \alpha_{f,2}^k L_{P_2}^k + \alpha_{f,3}^k L_{P_3}^k + \alpha_{f,4}^k L_{P_4}^k \quad (3.1)$$

avec,

$$\sum_{na=1}^4 \alpha_{f,na}^k = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \alpha_{f,na}^k \leq 1 \quad \forall \quad na = 1, 2, 3, 4 \quad (3.2)$$

Les coefficients $\alpha_{f,na}^k$ sont définis par les coordonnées barycentriques des sommets de la face sur laquelle le point u_f se projette.

Schéma Step

Le schéma "Step", Modest [14], est conditionné par le type de face du volume de contrôle. En effet, la luminance au point i_f prend la valeur de la luminance au noeud P , si pour le volume de contrôle associé au noeud P la face (contenant i_f) est réceptrice. Ainsi, la luminance peut prendre deux valeurs en fonction du type de face, puisqu'une face appartient à deux sous volumes de contrôle. Pour illustrer ce schéma, nous représentons sur la figure 3.32 les deux cas possibles (sur une géométrie 2D pour une meilleure compréhension).

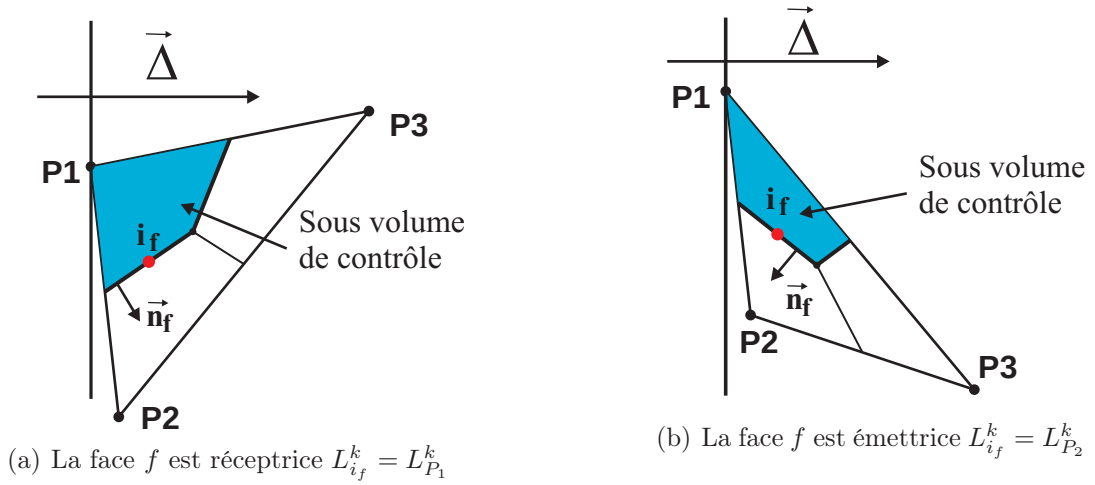


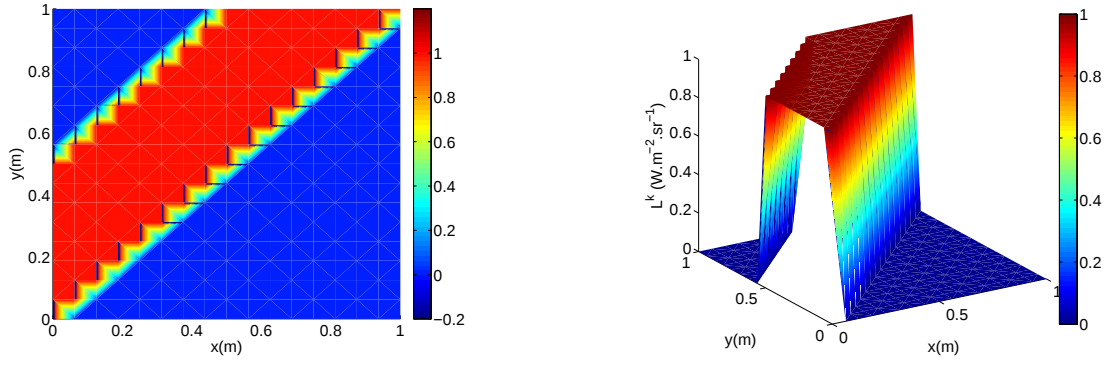
FIGURE 3.32 – Représentation 2D des deux types de face pour fixer $L_{i_f}^k$ (ici f est associé au sous volume V_{P_1} pour définir le type de face)

De manière générale, le schéma "Step" utilise une résolution noeud à noeud, nécessitant de connaître la valeur des noeuds en amont. Aussi, il s'applique très bien à une formulation « cell-center » pour un maillage structuré ou non structuré. Par contre, avec la formulation « cell-vertex » le schéma "Step" ne peut s'appliquer que pour des maillages structurés. En effet, la figure 3.32(b) nous montre bien son incompatibilité avec la formulation « cell-vertex ». Puisque, la luminance $L_{i_f}^k$ s'exprime avec $L_{P_2}^k$ et pour le calcul de la luminance au noeud P_1 , la luminance $L_{P_2}^k$ est inconnue car elle est située en aval de P_1 . Ainsi, ce schéma ne peut être utilisé qu'avec la résolution matricielle.

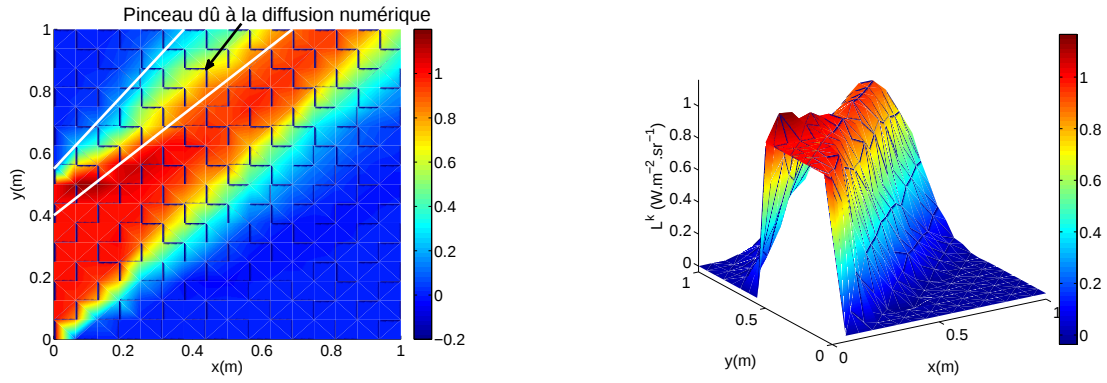
3.3.2 Résultats des simulations

Les figures⁶ 3.33 et 3.34 représentent la luminance sur le plan médian en $z = 0.15\text{ m}$ (figure 3.30) suivant la direction $\vec{\Delta}^k$. Nos résultats sont comparés à la solution exacte. On observe la diffusion numérique introduite par les différents schémas de fermeture. Sur la figure 3.33(b) nous distinguons clairement un pinceau au lieu d'une droite comme sur la figure 3.33(a) (pas exactement une droite en raison du maillage). Pour le schéma à trois noeuds, figure 3.33(b), le pinceau de diffusion numérique est moins large. Alors que, pour le schéma step la diffusion numérique est plus importante et s'étend bien plus que les deux autres schémas. Cependant, avec le schéma step, les valeurs de la luminance sont bien comprises entre les valeurs minimales et maximales de la solution physique, entre zéro et un. Tandis que, pour les deux autres schémas (figures 3.33(b) et 3.33(c)), la luminance comporte des valeurs négatives et supérieures à la solution physique. Ces valeurs sont dues à la mise en place du schéma qui ne distingue pas le type de face émettrice et réceptrice.

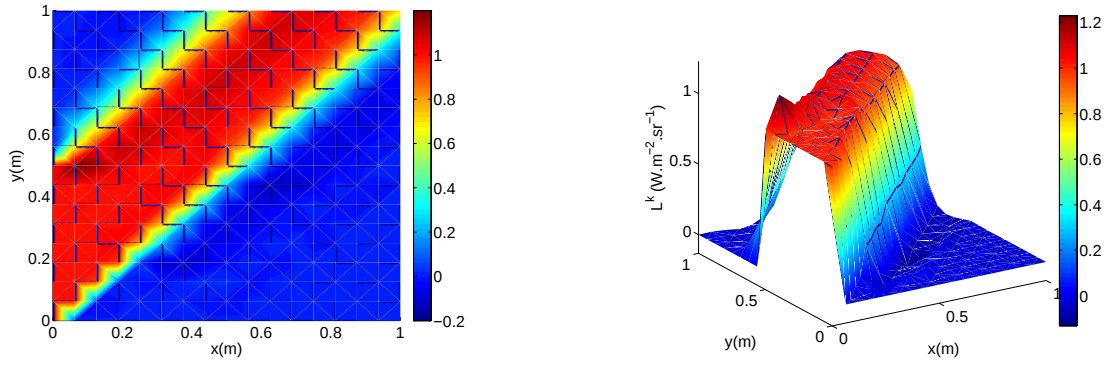
6. Sur ces figures les courbes de gauche ont la même échelle et les figures de droites ont chacune leur propre échelle



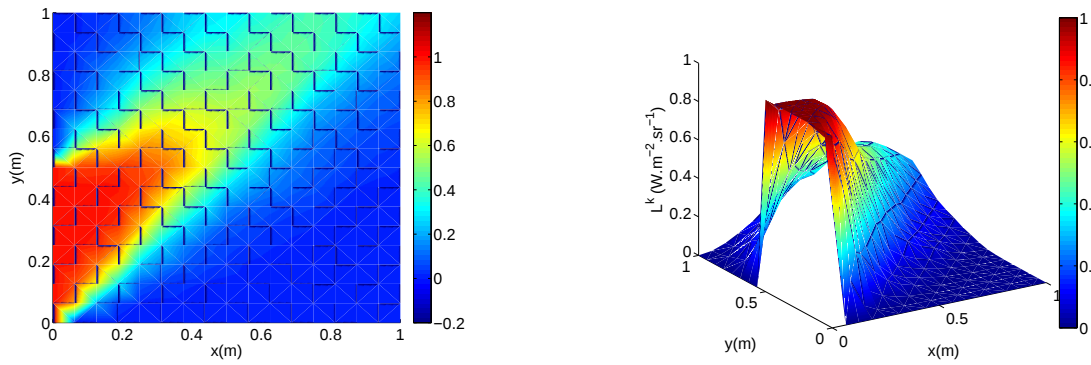
(a) solution exacte



(b) résolution matricielle basée sur le schéma noeud à noeud

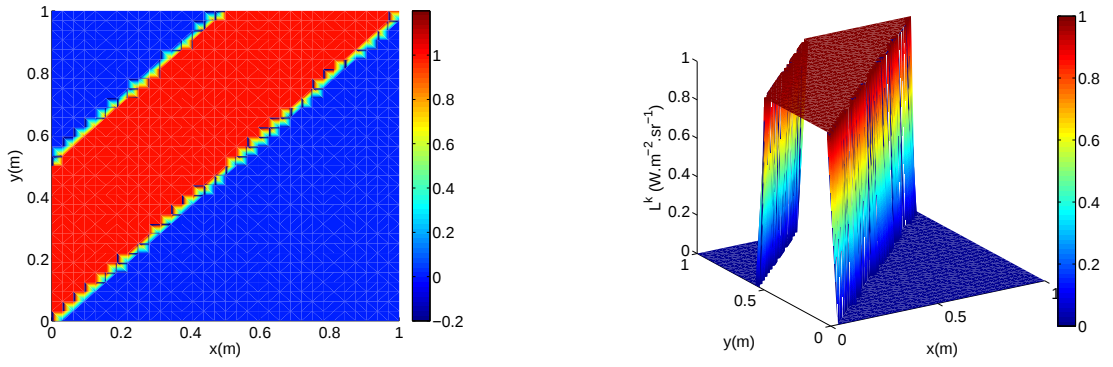


(c) résolution matricielle basée sur le schéma à trois noeuds

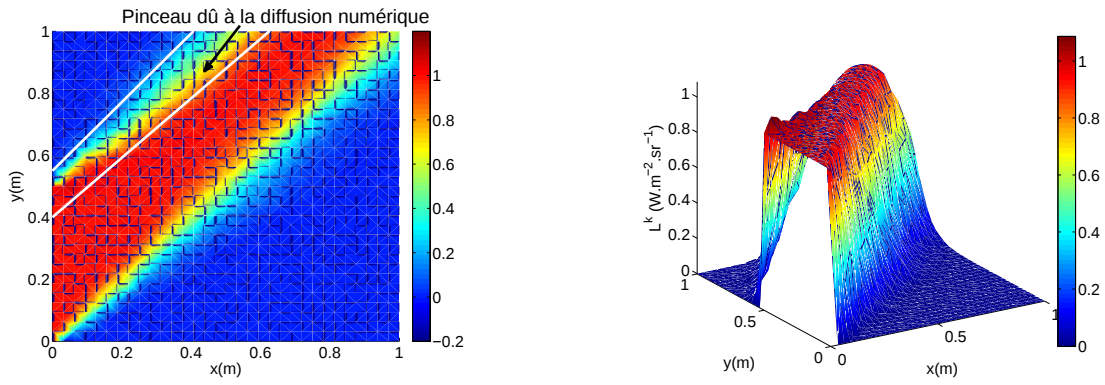


(d) résolution matricielle basée sur le schéma step

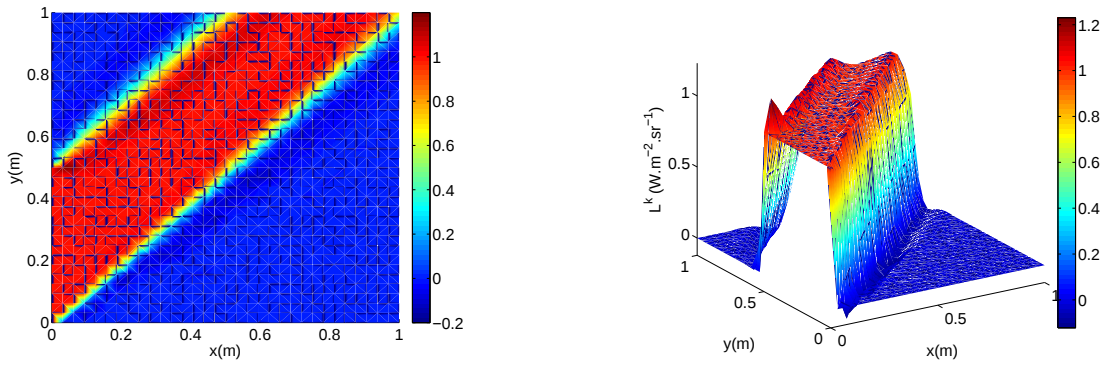
FIGURE 3.33 – Luminance sur le plan médian avec le maillage 1 (289 noeuds sur le plan)



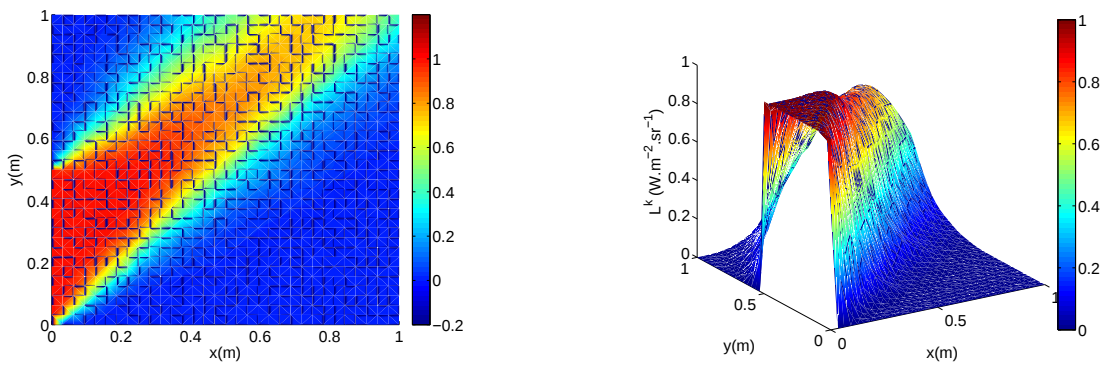
(a) solution exacte



(b) résolution matricielle basée sur le schéma noeud à noeud



(c) résolution matricielle basée sur le schéma à trois noeuds



(d) résolution matricielle basée sur le schéma step

FIGURE 3.34 – Luminance sur le plan médian avec le maillage 2 (1089 noeuds sur le plan)

Les schémas de fermeture utilisant plus d'un noeud d'interpolation conduisent à une meilleure précision. Toutefois, ils peuvent introduire des valeurs de luminance erronées. De plus, lorsque l'on raffine le maillage en espace (figure 3.34), on observe une diminution de la diffusion numérique montrant ainsi la dépendance de la diffusion numérique au maillage en espace.

La figure 3.35 montre la luminance reçue sur l'axe de la face Nord du plan médian en $z = 0.15\text{ m}$ pour les deux maillages en espace. Cette figure nous permet de mieux observer les différences entre les différents schémas. De plus, elle nous montre bien une diminution de la diffusion numérique lorsque le maillage est plus fin. En particulier, proche de la discontinuité, on observe pour le schéma à trois noeuds des valeurs négatives (lorsque $x < 0.5\text{ m}$) et supérieures à un (lorsque $x > 0.5\text{ m}$). Sur la figure 3.35(b), la solution donnée par le schéma noeud à noeud est plus proche de la solution exacte.

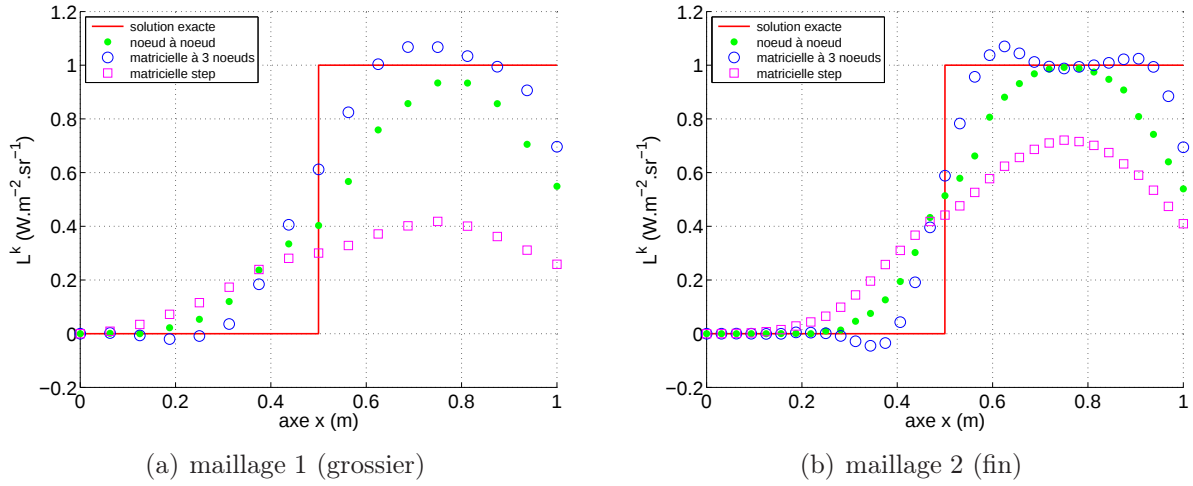


FIGURE 3.35 – Luminance suivant x , en $y = 1$ et $z = 0.15\text{ m}$

3.4 Surfaces opaques à réflexion diffuse

3.4.1 Algorithme

Pour traiter des surfaces opaques à réflexion diffuse il est nécessaire de connaître les flux incidents pour ces surfaces. En effet, la luminance émise par ce type de surface (relation 1.15) est dépendante du flux radiatif (relation 1.16) provenant du milieu et des autres faces. Aussi, pour traiter à la frontière du maillage ces conditions aux limites, il nous faut procéder à un calcul itératif permettant d'établir le bon flux incident. A la première itération, il faut déterminer la luminance en chaque noeud et pour chaque direction, avec des conditions aux limites ne prenant pas en compte le flux incident (ou avec une valeur fixée). A partir de ce nouveau champ de luminances, on calcule le flux incident aux parois. Puis, à la seconde itération on détermine le champ de luminances avec les conditions aux limites incluant le flux incident calculé à l'itération précédente. On effectue cette procédure itérative, jusqu'à ce que le flux incident soit suffisamment proche de celui de l'itération précédente, selon le critère d'arrêt⁷ donné par l'expression suivante :

$$\text{Crit}(Q_{inc}) = \max_{P \in \text{noeuds de la frontière}} \left| \frac{(Q_{inc})_P^n - (Q_{inc})_P^{n-1}}{(Q_{inc})_P^n} \right| < \eta_{Q_{inc}} \quad (3.3)$$

3.4.2 Cas test

Le cas d'étude, repris de la thèse de Joseph 2004 [53], porte sur un parallélépipède de dimension $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 3\text{ m}$ (figure 3.36). Le milieu est absorbant, émettant et bordé par des surfaces opaques à réflexion diffuse. Il est homogène avec un coefficient d'absorption $\kappa = 0.1\text{ m}^{-1}$ et il est en équilibre thermique à la température $T_m = 1500^\circ\text{C}$. Les parois ont toutes la même émissivité ϵ_w et sont à la même température $T_w = 1000^\circ\text{C}$.

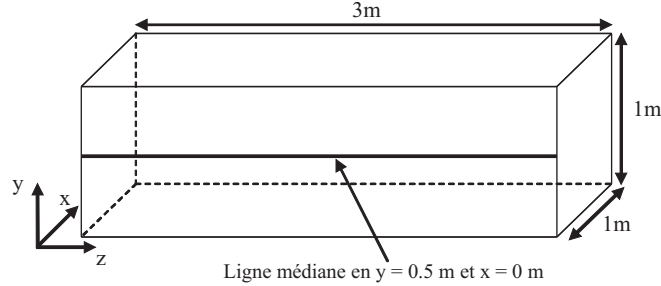


FIGURE 3.36 – Parallélépipède $1\text{ m} \times 1\text{ m} \times 3\text{ m}$

La figure 3.37 montre le flux incident le long de la ligne médiane en $y = 0.5\text{ m}$ et $x = 0\text{ m}$ pour trois valeurs d'émissivité $\epsilon_w = 1, 0.8$ et 0.5 . Nos résultats sont comparés à ceux présentés dans la thèse de Joseph 2004 [53]. Ces derniers ont été obtenus avec une méthode de tracé de rayon sur un maillage cartésien composé de $20 \times 20 \times 60$ volumes de contrôle et de 80000 rayons pour $\epsilon_w = 1$ et avec la méthode de Monte Carlo pour $\epsilon_w = 0.8$ et 0.5 . Nous comparons également nos résultats à ceux de la DOM de Joseph qui a utilisé les quadratures S_4 et S_{12} (respectivement 24 et 168 directions) appliquées à un maillage non structuré constitué de 20425 tétraèdres. Aussi, pour permettre la comparaison, nous nous plaçons dans la même configuration : nous utilisons les mêmes quadratures angulaires

7. Le critère d'arrêt correspond au calcul d'erreur relatif entre la solution à l'itération n et celle de l'itération précédente. Dans la pratique on pose souvent $\eta_{Q_{inc}} = 10^{-5}$.

et un maillage non structuré constitué de 20688 tétraèdres (5893 noeuds). Toutefois, le maillage est raffiné aux bords pour améliorer les résultats. Le critère d'arrêt est fixé ici à $\eta_{Q_{inc}} = 10^{-5}$.

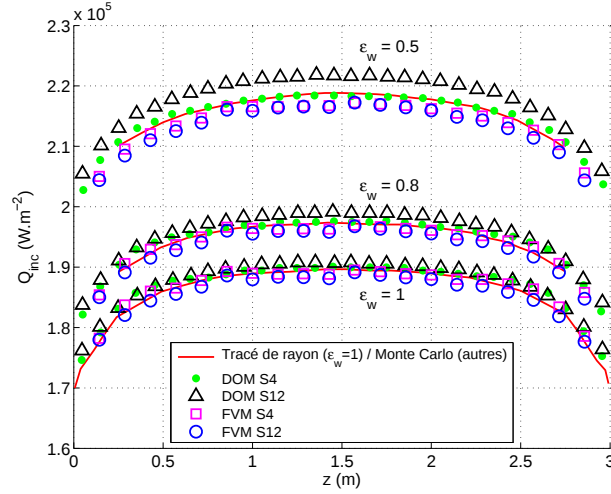


FIGURE 3.37 – Flux incident sur la ligne médiane en $y = 0.5\text{ m}$ et $x = 0\text{ m}$

Les résultats de la figure 3.37 montrent une augmentation du flux incident lorsque l'émissivité des faces diminue. Cette augmentation est essentiellement due au fait que la température du milieu est supérieure à celle des faces. En effet, le flux incident provient de l'émission des faces et du milieu. Dans notre cas, pour une émissivité $\epsilon = 1$, le flux incident est plus important que l'émission propre des faces. Aussi, lorsque l'émissivité diminue le flux issu (émis et réfléchi) des faces devient plus important et contribue à une augmentation du flux incident. Pour ce cas test, nos résultats montrent un bon accord avec les solutions de référence et indiquent une bonne convergence angulaire de la solution donnant le flux incident. Toutefois, nous observons un très léger écart avec la solution de référence (obtenue par tracé de rayon ou par Monte Carlo) pour les trois valeurs de l'émissivité. Cet écart peut être attribué au choix du critère de convergence $\eta_{Q_{inc}}$ (notons que le critère pour la solution de référence n'est pas précisé) ou au choix du maillage spatial. Pour répondre à cette interrogation, nous avons effectué une étude de sensibilité au maillage spatial pour observer la convergence.

Sensibilité au maillage en espace

Pour cette étude de sensibilité nous avons considéré le cas où $\epsilon_w = 0.5$. Nous avons utilisé une quadrature S_{12} et quatre maillages en espace, dont deux structurés et deux non structurés raffinés aux bords, comme indiqué dans le tableau 3.9 (nous rappelons que les résultats précédents ont été obtenus avec le maillage 3).

	Nom	N_p	N_t	N_e
Fin, structuré	maillage 1	3988	19512	1794
Très fin, structuré	maillage 2	12151	61212	3690
Fin, non structuré (raffiné aux bords)	maillage 3	5893	20688	9122
Très fin, non structuré (raffiné aux bords)	maillage 4	13318	47706	20086

TABLE 3.9 – Maillages en espace

La figure 3.38 montre la convergence de la solution pour les maillages en espace, avec le même critère d'arrêt que précédemment. Ces résultats indiquent que pour les deux maillages non structurés raffinés aux bords (maillage 3 et 4), les solutions ont quasiment convergé vers la solution de référence. Tandis que, pour les deux maillages structurés (maillage 1 et 2) les solutions obtenues s'écartent encore de la solution de référence. Ces résultats nous montrent l'importance de raffiner le maillage spatial près des frontières (là où la variation est rapide) pour traiter les surfaces opaques à réflexion diffuse.

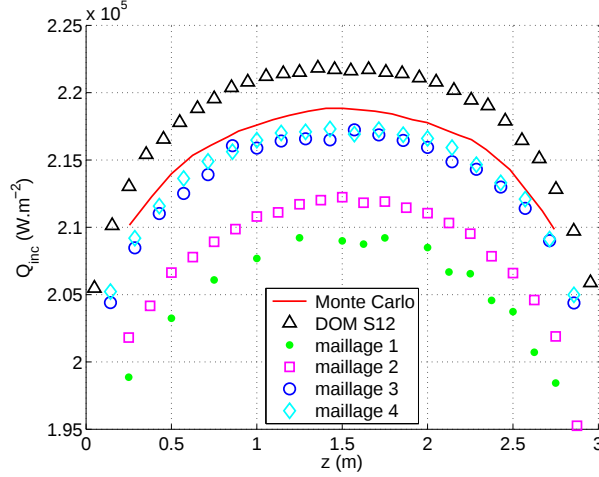


FIGURE 3.38 – Flux incident sur la ligne médiane en $y = 0.5 m$ et $x = 0 m$ avec $\epsilon_w = 0.5$

Pour compléter cette étude, nous nous sommes intéressés à l'évolution du flux incident au cours des itérations (figure 3.39) en indiquant à chaque itération la valeur de $Crit(Q_{inc})$.

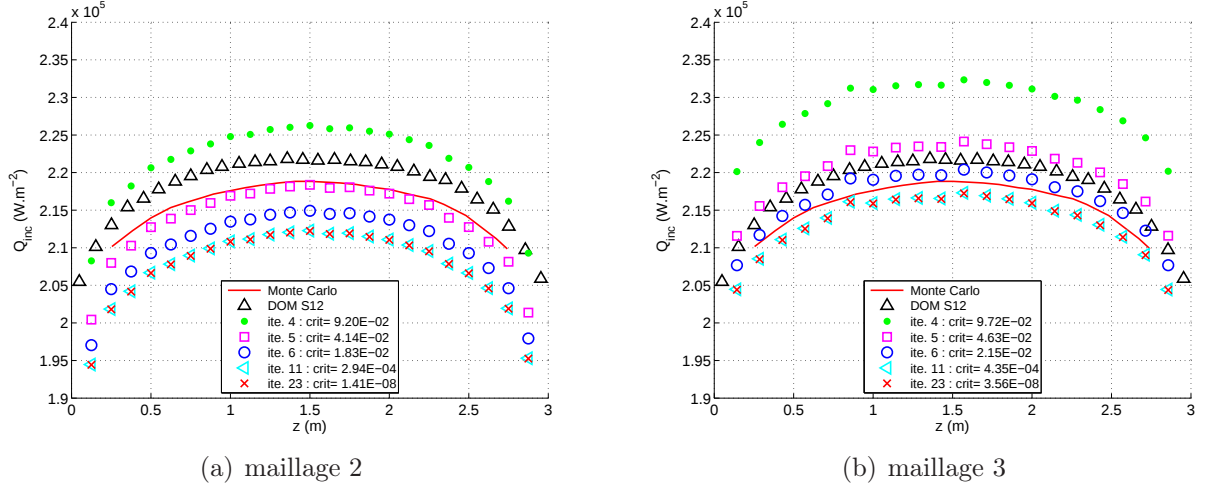


FIGURE 3.39 – Flux incident avec $\epsilon_w = 0.5$ et S_{12} maillages structurés

Dans les deux cas (figures 3.39(a) et 3.39(b)), l'évolution du flux incident au cours des itérations montre que la solution a presque convergé pour $Crit(Q_{inc}) = 10^{-4}$. En particulier, la figure 3.39(a) confirme l'importance de raffiner le maillage spatial près des frontières pour traiter les surfaces opaques à réflexion diffuse. On notera que la solution de Joseph avec la DOM, dont on ne connaît pas le critère d'arrêt, s'écarte de la solution obtenue avec la méthode de Monte Carlo. Ces constats montrent l'importance du choix du critère d'arrêt qui conditionne la solution. En pratique, le critère d'arrêt est souvent pris égal à 10^{-5} .

Résumé du chapitre 3

Nos résultats portant sur un milieu en équilibre thermique, ont été obtenus sur plusieurs cas tests issus de la littérature. Nous avons traité des milieux bordés par des surfaces noires pour différentes géométries sur lesquelles nous avons réalisé une étude de sensibilité angulaire et spatiale. Dans certains cas, nous avons un écart relatif de l'ordre de 6% (par rapport à la solution de référence), ce qui est acceptable. Nous avons étudié la diffusion numérique en simulant une seule direction et trois schémas de fermeture ont été comparés. Dans une dernière étude, les surfaces opaques à réflexion diffuse ont été traitées, où nous avons montré l'importance du raffinement spatial près de la frontière pour traiter ce type de problème.

Cette étude nous a donné un bon aperçu des capacités de notre code, en terme de précision mais également de temps de calcul. Aussi, nous allons maintenant nous intéresser à l'étude des transferts de chaleurs couplés par conduction et rayonnement. Nous allons coupler sur un même maillage tétraédrique notre code de rayonnement par volumes finis avec un code de conduction par éléments finis⁸.

8. code initialement écrit en langage C++, traduit en fortran 90 par notre ingénieur de laboratoire J. B. Harry

Chapitre 4

Transfert de chaleur couplé par conduction et rayonnement

Dans un milieu semi-transparent, le rayonnement thermique n'est pas le seul mode de transfert de chaleur. Aussi, dans ce chapitre, nous nous intéressons au transfert couplé conduction-rayonnement. Dans un premier temps, nous présentons pour le schéma de fermeture différentes approximations de l'évolution de la température le long du chemin optique qui sont employées dans différentes études de ce chapitre. Dans un second temps, nous traitons un cas purement radiatif avec une source de chaleur imposée. Nous étudions d'une part le cube unitaire en équilibre radiatif avec des parois noires, d'autre part, nous considérons un parallélépipède avec une source de chaleur et des surfaces opaques à réflexion diffuse. Dans un troisième temps, nous abordons le couplage du rayonnement avec la conduction, où le cas d'étude porte sur un cube unitaire en régime stationnaire et ensuite instationnaire. Puis, pour terminer, nous présentons l'étude d'un milieu non-gris.

4.1 Différentes approximations de l'évolution de la température le long du chemin optique

Pour calculer l'intégrale de (2.24), il est nécessaire de poser quelques hypothèses, sur le coefficient d'absorption et sur l'évolution de la température (ou du corps noir) le long du chemin optique (u_f, i_f) (comme illustré sur la figure 4.1). Si l'on suppose que le coefficient d'absorption est constant le long du chemin optique, l'expression (2.24) se simplifie pour donner :

$$L(i_f, \vec{\Delta}) = L(u_f, \vec{\Delta}) e^{-\kappa \Delta S_f} + \int_{u_f}^{i_f} \kappa L^o(T(s)) e^{-\kappa(i_f-s)} ds \quad (4.1)$$

où ΔS_f représente la distance entre les points i_f et u_f .

L'intégrale de (4.1) peut se calculer, soit numériquement, soit analytiquement, suivant les hypothèses que l'on se donne sur la variation de la température ou du corps noir le long du chemin optique (u_f, i_f) . Pour simplifier les écritures qui vont suivre, posons :

$$J = \int_{u_f}^{i_f} f(s) ds \quad (4.2)$$

$$\text{avec} \quad f(s) = \kappa L^o(T(s)) e^{-\kappa(i_f-s)} \quad (4.3)$$

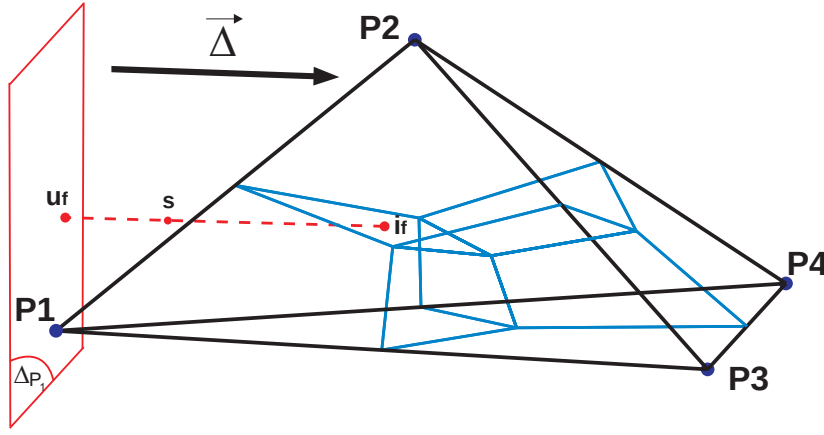


FIGURE 4.1 – Chemin optique dans un tétraèdre

Aussi, pour calculer J , nous présentons quatre cas différents :

Cas 1 : on suppose que la **température est constante** le long du chemin optique (u_f, i_f) (cas utilisé jusqu'à présent), nous obtenons une expression analytique pour J , soit :

$$J = L^o(T)(1 - e^{-\kappa \Delta S_f}) \quad (4.4)$$

Cas 2 : on suppose que la **température évolue linéairement** le long du chemin optique (u_f, i_f) , et qu'elle est calculée à partir des températures des quatre sommets du tétraèdre et des coordonnées barycentriques α_i ($i = 1, 2, 3, 4$) de la position du point s , alors on peut écrire :

$$T(s) \cong \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \alpha_3 T_3 + \alpha_4 T_4 \quad s \in (u_f, i_f) \quad (4.5)$$

Cette interpolation de la température permet ensuite de calculer numériquement l'intégrale J .

Cas 3 : on suppose cette fois-ci que la **luminance du corps noir**, le long du chemin optique, est calculée à partir de la **luminance du corps noir des quatre sommets** du tétraèdre et des coordonnées barycentriques α_i ($i = 1, 2, 3, 4$) de la position du point s , alors on peut écrire :

$$L^o(T(s)) \cong \alpha_1 L^o(T_1) + \alpha_2 L^o(T_2) + \alpha_3 L^o(T_3) + \alpha_4 L^o(T_4) \quad s \in (u_f, i_f) \quad (4.6)$$

Cette interpolation nous conduit également à calculer numériquement l'intégrale J .

Cas 4 : on suppose que la **luminance du corps noir évolue linéairement** le long du chemin optique (u_f, i_f) , et qu'elle est calculée à partir de la luminance des corps noirs des températures des points i_f et u_f et de la position du point s sur le chemin optique, alors

$$L^o(T(s)) \cong \left(\frac{L^o(T_{i_f}) - L^o(T_{u_f})}{|i_f - u_f|} s + L^o(T_{u_f}) \right) \quad s \in (u_f, i_f) \quad (4.7)$$

Cette expression a l'avantage de permettre le calcul analytique de l'intégrale J :

$$J = L^o(T_{i_f}) - L^o(T_{u_f}) + \left(L^o(T_{u_f}) - \frac{L^o(T_{i_f}) - L^o(T_{u_f})}{\kappa|i_f - u_f|} \right) (1 - e^{-\kappa(i_f - u_f)}) \quad (4.8)$$

4.2 Problème radiatif avec source de chaleur

4.2.1 Méthodologie

Pour traiter un problème purement radiatif pour des conditions aux limites imposées et dans un milieu soumis à une source de chaleur, il est nécessaire de déterminer le champ de températures pour lequel on obtient le terme source imposé. En effet, dans ce type de problème, la source de chaleur est égale au rayonnement émis moins le rayonnement absorbé par le milieu. Aussi, il faut calculer la solution de l'équation de conservation de l'énergie en régime stationnaire avec uniquement du rayonnement et un terme source imposé. L'équation est donnée par :

$$-div \vec{Q}_{rad} = S \quad (4.9)$$

On détermine le champ de températures à partir de la divergence du flux radiatif, dont nous rappelons l'expression,

$$-div \vec{Q}_{rad}(s) = \kappa [G(s) - 4\pi L^o(T(s))] = S(s) \quad (4.10)$$

En rappelant que, pour milieu gris $L^o(T) = \frac{\sigma_B T^4}{\pi}$, il vient :

$$T(s) = \left(\frac{G(s) - \frac{S(s)}{\kappa}}{4\sigma_B} \right)^{1/4} \quad (4.11)$$

La solution de ce problème est obtenue de manière itérative, en procédant de la façon suivante. On se donne un champ de températures initial. Ensuite, on résout l'ETR pour déterminer la luminance moyenne $G(s)$ et on calcule le champ de températures dans le milieu avec la relation (4.11). Puis, on itère les calculs jusqu'à convergence de la solution, avec le critère de convergence décrit ci-dessous.

$$\text{Crit}(T) = \max_{P \in \text{noeuds à l'intérieur du domaine}} \left| \frac{T_P^n - T_P^{n-1}}{T_P^n} \right| < \eta_T \quad (4.12)$$

Ce critère de convergence correspond au calcul d'erreur relative entre la solution donnée à l'itération n et celle donnée à l'itération précédente. Le critère d'arrêt η_T ⁹ est un réel strictement positif, fixé au départ par l'utilisateur.

9. Pour nos simulations nous avons fixé $\eta_T = 10^{-6}$

4.2.2 Problème en équilibre radiatif dans un milieu bordé par des surfaces noires

Le cas d'étude porte sur un cube unitaire repris de [34, 36, 63, 92]. Le milieu est absorbant, émettant et en équilibre radiatif (dans ce cas $S = 0 \text{ W.m}^{-3}$ dans la relation (4.11)). Le milieu est limité par des surfaces noires, avec trois faces chaudes et trois faces froides ($T_f = 0 \text{ K}$). Les faces chaudes sont les faces en $x = 1$, $y = 0$ et $z = 0$. Elles correspondent respectivement aux faces Est, Sud et Dessous de la figure 4.2. Pour ces faces, la densité de puissance émissive est égale à $\sigma_B T_c^4 = 1 \text{ W.m}^{-2}$ (soit $T_c = 64.8049 \text{ K}$). Le milieu est homogène et le coefficient d'absorption κ est égal à 1 m^{-1} .

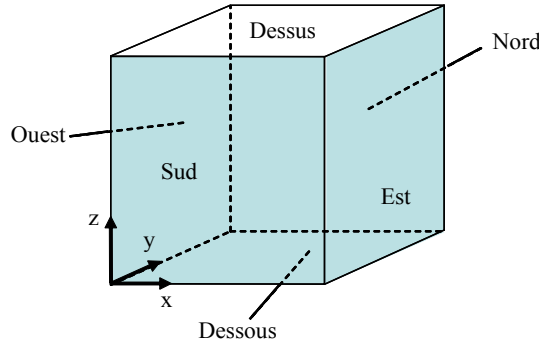


FIGURE 4.2 – Cube unitaire avec trois faces chaudes et trois faces froides

Les travaux les plus récents sur ce cas test sont donnés dans Godoy et al. (2010) [92] qui ont utilisé la DOM appliquée à un maillage structuré constitué d'hexaèdres de $(16 \times 16 \times 16)$ volumes de contrôle, avec une méthode itérative de type GMRES¹⁰ et une quadrature S_{10} . Les solutions numériques prises pour comparaison sont celles de Fiveland [34], qui ont été obtenues avec un maillage structuré constitué d'hexaèdres de $(11 \times 11 \times 11)$ volumes de contrôle en utilisant la DOM et une quadrature S_8 , ainsi que la méthode des zones issus des travaux de Larsen (1983) [93]. De plus, pour ce cas test, Crosbie et Schrenker [16] ont donné une solution exacte.

Pour ce cas test, nous avons réalisé une étude de sensibilité au maillage en espace. Nous avons également testé suivant les différents cas l'évolution de la température le long du chemin optique pour le calcul des relations de fermeture. Pour les différentes études, nos simulations ont été réalisées avec trois maillages en espace, dont deux structurés et un non structuré raffiné aux bords, comme indiqué dans le tableau 4.1.

Nom	N_p	N_t	N_e
maillage 1 (structuré)	3994	19254	1348
maillage 2 (structuré)	11819	62436	2648
maillage 3 (non structuré, raffiné aux bords)	5710	20210	8758

TABLE 4.1 – Maillages en espace

10. Généralisation de la méthode de minimisation du résidu

Sensibilité au maillage en espace

Nos résultats ont été obtenus avec la quadrature S_8 et pour les trois maillages en espace définis précédemment, en utilisant le cas 1 pour le calcul de l'intégrale de J . Nous représentons sur la figure 4.3, la puissance émissive $\sigma_B T^4$ sur trois axes du plan médian en $z = 0.5 m$. Sur la figure 4.4, nous représentons le flux net sur trois axes de la paroi du dessus en $z = 1 m$.

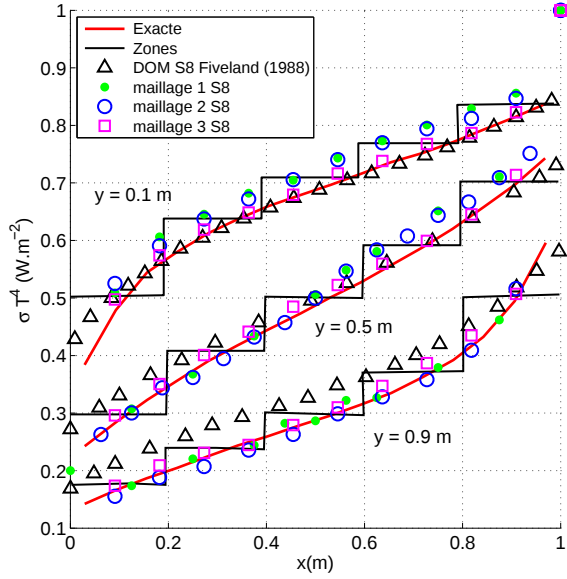


FIGURE 4.3 – Puissance émissive sur trois axes du plan médian en $z = 0.5 m$

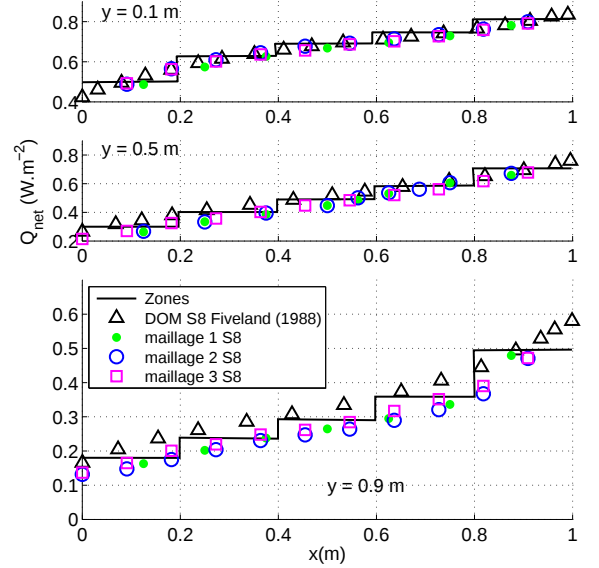


FIGURE 4.4 – Flux radiatif net sur différents axes de la paroi du dessus en $z = 1 m$

Ces résultats montrent un bon accord avec les solutions de référence, notamment pour la puissance émissive avec le maillage 3 dont les résultats sont très proches de la solution exacte. Pour le flux net à la paroi, nos résultats obtenus avec les différents maillages ne montrent quasiment aucun changement, indiquant ainsi que la solution a atteint la convergence.

Afin de mieux observer l'effet du maillage spatial sur la solution calculée et vérifier la symétrie du problème, nous représentons à la figure 4.5 la puissance émissive suivant le plan en $z = 0.5 m$ et le flux net suivant le plan en $z = 1 m$. Les résultats obtenus indiquent bien une symétrie. Ils montrent l'importance du raffinement des mailles près des bords du domaine. En effet, les résultats s'améliorent avec le maillage 3. Ceci est important lorsqu'il existe des discontinuités au niveau des conditions aux limites (radiative ou thermique).

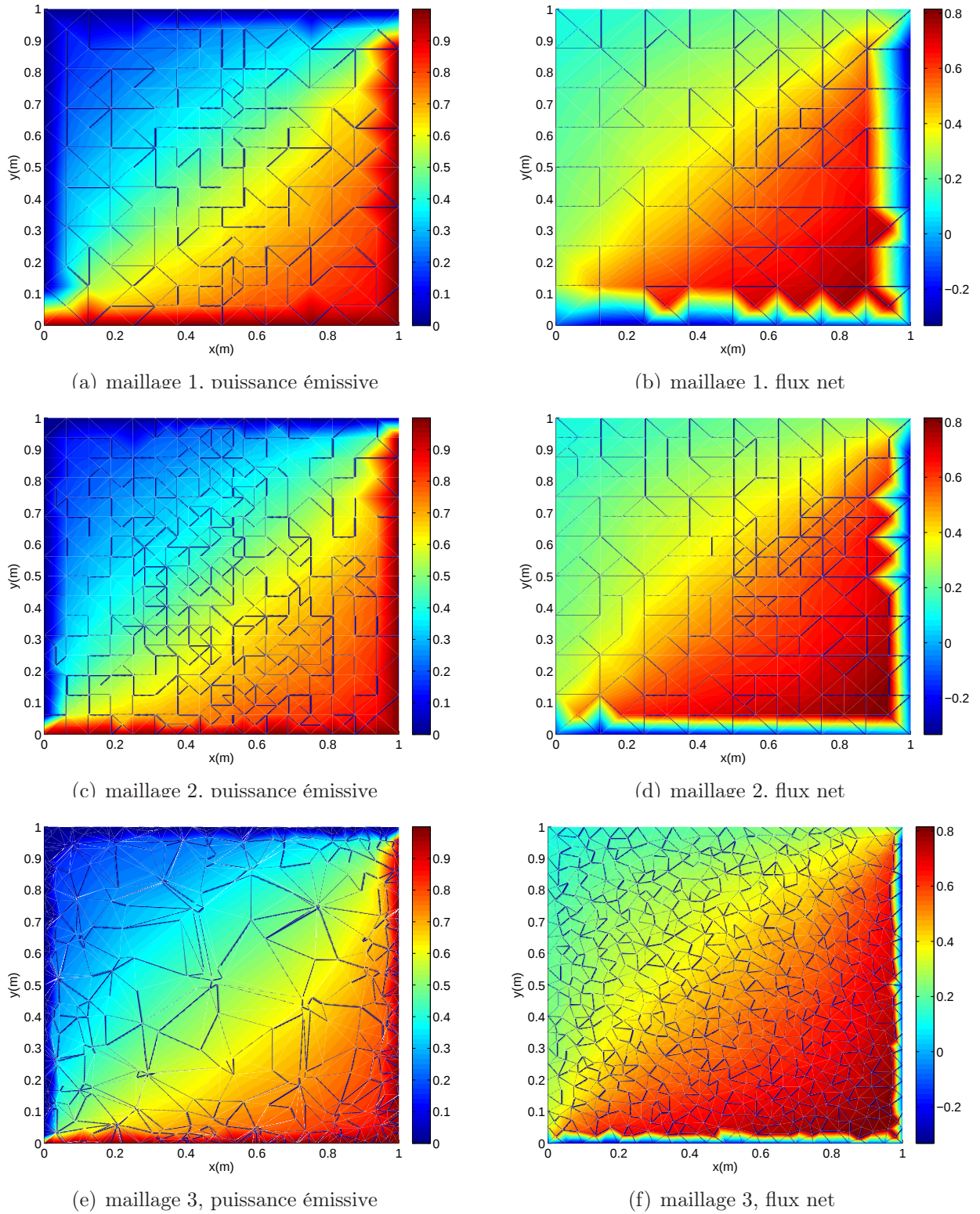


FIGURE 4.5 – Puissance émissive en $z = 0.5 m$ et flux net en $z = 1 m$

Remarque : sur les figures de droite, on note des valeurs négatives de flux, près des arêtes et des coins en $x = 0 m$ et $y = 1 m$. On attribue ces valeurs négatives à la gestion des noeuds aux arêtes et aux coins qui appartiennent aux faces chaudes et froides.

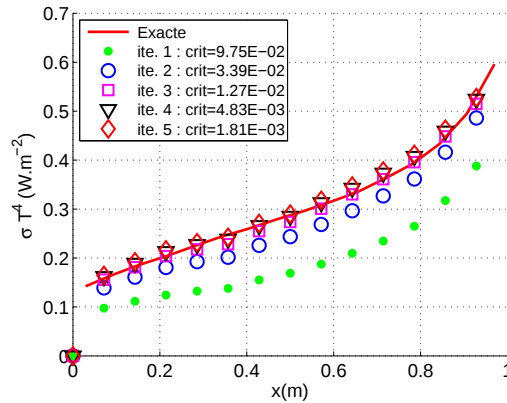
Étude des différentes évolutions de la température le long du chemin optique

Pour chaque calcul de l'intégrale J , nous avons réalisé des simulations (toujours avec le même cas test) avec le maillage 3 et la quadrature S_8 . Les solutions obtenus, pour chacune de ces approximations, donnent le même résultat, seuls les temps de calcul changent comme indiqué au tableau suivant :

	Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4
Nombre d'itérations	12	11	11	11
Temps de calcul	7 min 48 s	14 min 55 s	15 min 7 s	7 min 50 s

TABLE 4.2 – Temps de calcul

Le cas 1 est le plus rapide bien qu'il effectue une itération supplémentaire. On notera que le calcul numérique de l'intégrale J (cas 2 et 3) conduit à une augmentation double du temps de calcul. Pour observer l'évolution de la température au cours des pseudos itérations, nous avons tracé sur la figure 4.6 la température en $y = 0.9 m$ du plan médian en $z = 0.5 m$. En particulier, pour chaque pseudo-itération, nous indiquons la valeur de $\text{Crit}(T)$.

FIGURE 4.6 – Température sur l'axe en $y = 0.9 m$ du plan médian en $z = 0.5 m$

L'évolution de la température pour chaque cas est quasiment la même. Toutefois, seules les valeurs de $\text{Crit}(T)$ changent, ainsi que les temps de calcul.

4.2.3 Problème radiatif avec source de chaleur dans un milieu bordé par des surfaces opaques à réflexion diffuse

Le cas d'étude, repris de [34, 36, 78, 11], porte sur un parallélépipède de dimension $2\text{ m} \times 2\text{ m} \times 4\text{ m}$. Le milieu est bordé par des surfaces opaques à réflexion diffuse. Le milieu comporte une face chaude à $T_c = 1200\text{ K}$, avec une émissivité $\epsilon_c = 0.85$ en $z = 0\text{ m}$, une face froide à $T_f = 400\text{ K}$ avec $\epsilon_f = 0.7$ en $z = 4\text{ m}$ et les autres faces sont à $T_w = 900\text{ K}$ avec $\epsilon_w = 0.7$. Une source de chaleur constante avec $S = 5\text{ kW.m}^{-3}$ est imposée dans le milieu.

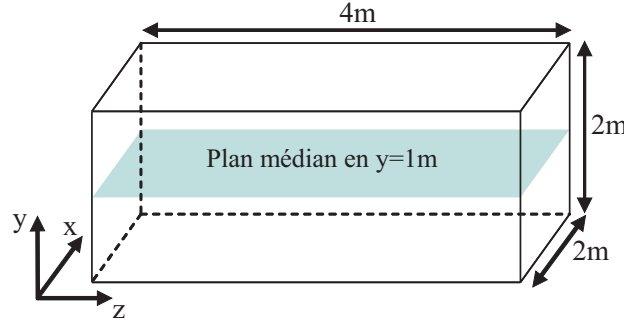


FIGURE 4.7 – Parallélépipède de dimension $2\text{ m} \times 2\text{ m} \times 4\text{ m}$

Nos résultats sont comparés aux solutions numériques de Truelove [36] qui ont été obtenues avec la DOM pour un maillage structuré constitué d'hexaèdres avec $(8 \times 8 \times 15)$ volumes de contrôle et une quadrature S_4 , ainsi que la méthode des zones Hottel (1967) [94]. Nos simulations ont été réalisées suivant trois maillages en espace non structurés (voir tableau 4.3), avec une quadrature S_4 et pour deux valeurs du coefficient d'absorption ($\kappa = 0.5$ et 1 m^{-1}). Pour cette étude, nous avons utilisé les cas 1 et 2 pour approcher l'évolution de la température le long du chemin optique. Pour ces différentes simulations, nous affichons les temps de calcul dans le tableau (4.3).

Nom	N_p	N_t	N_e	Cas 1	Cas 2
maillage 1	6041	21286	9316	15 min 8 s	31 min 37 s
maillage 2	9490	33892	14364	24 min 39 s	52 min 19 s
maillage 3	20045	96290	11318	76 min 59 s	170 min 11 s

TABLE 4.3 – Maillages en espace (non structurés) et temps de calcul

Les temps de calcul affichés peuvent paraître assez longs. Cela s'explique par le fait que le problème traité nécessite une résolution doublement itérative pour considérer à la fois les surfaces opaques à réflexion diffuse et pour le calcul du champ de températures (présenté à la section 4.2).

Les figures¹¹ 4.8 et 4.9 présentent les résultats dans le cas 1 (calcul de l'intégrale J) pour les deux valeurs du coefficient d'absorption. L'évolution de la température suivant les trois axes en $z = 0.4, 2$ et 3.6 m du plan médian en $y = 1\text{ m}$ est donnée sur la figure 4.8. Ces courbes ont une allure parabolique. La température est plus importante en $z = 0.4\text{ m}$ (proche de la face chaude) et moins importante en $z = 3.6\text{ m}$ (proche de la face froide).

11. Sur ces figures les valeurs des courbes sont interpolées, c'est pourquoi il y a le même nombre de points pour chaque maillage, en raison des maillages non structurés

Pour ces trois courbes, en $x = 0$ et $x = 2\text{ m}$, on observe un saut de température (température des faces latérales). Lorsque le coefficient d'absorption diminue ($\kappa = 0.5\text{ m}^{-1}$), la température proche de la face chaude en $z = 0.4\text{ m}$ ne varie quasiment pas. Tandis qu'au centre et en $z = 3.6\text{ m}$, la température augmente du fait que le milieu est moins absorbant. En effet, lorsque le milieu est plus absorbant ($\kappa = 1\text{ m}^{-1}$), le rayonnement provenant des faces est plus absorbé par le milieu, entraînant une diminution de la température proche de la face froide. Nos résultats indiquent un bon accord avec les solutions de la littérature. En particulier, lorsque l'on raffine le maillage en espace, nos valeurs tendent vers les solutions de référence, notamment pour les températures proches des bords chaud et froid en $z = 0.4$ et 3.6 m .

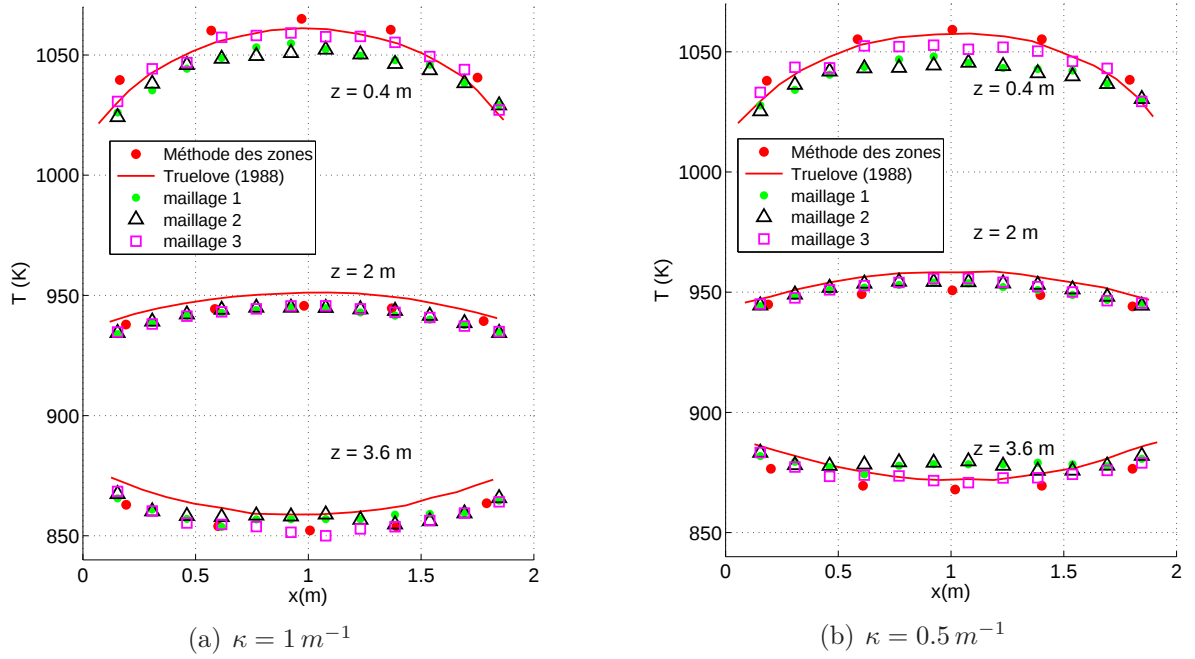
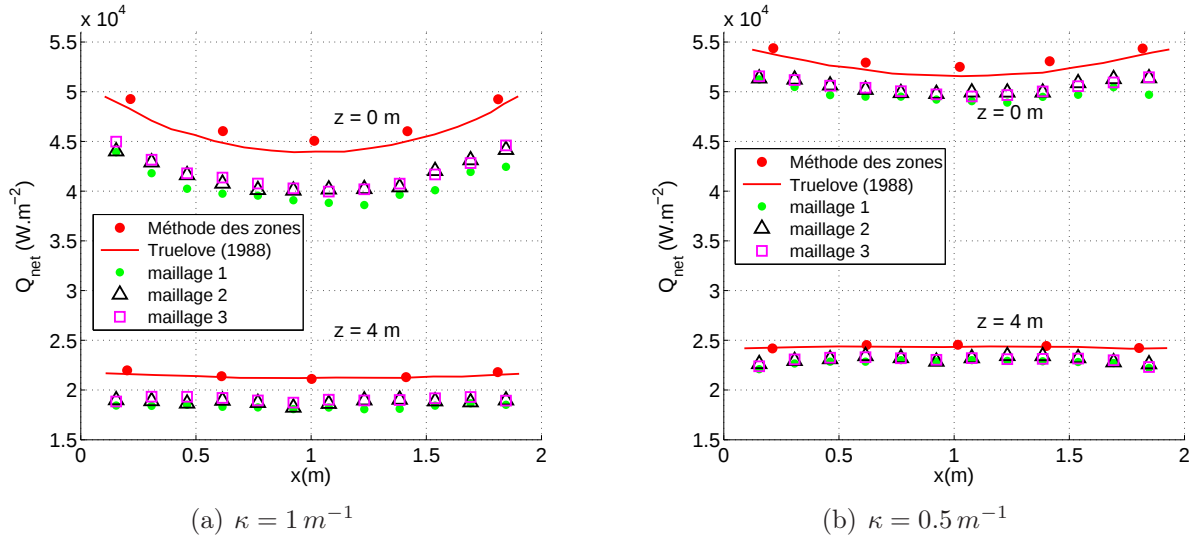
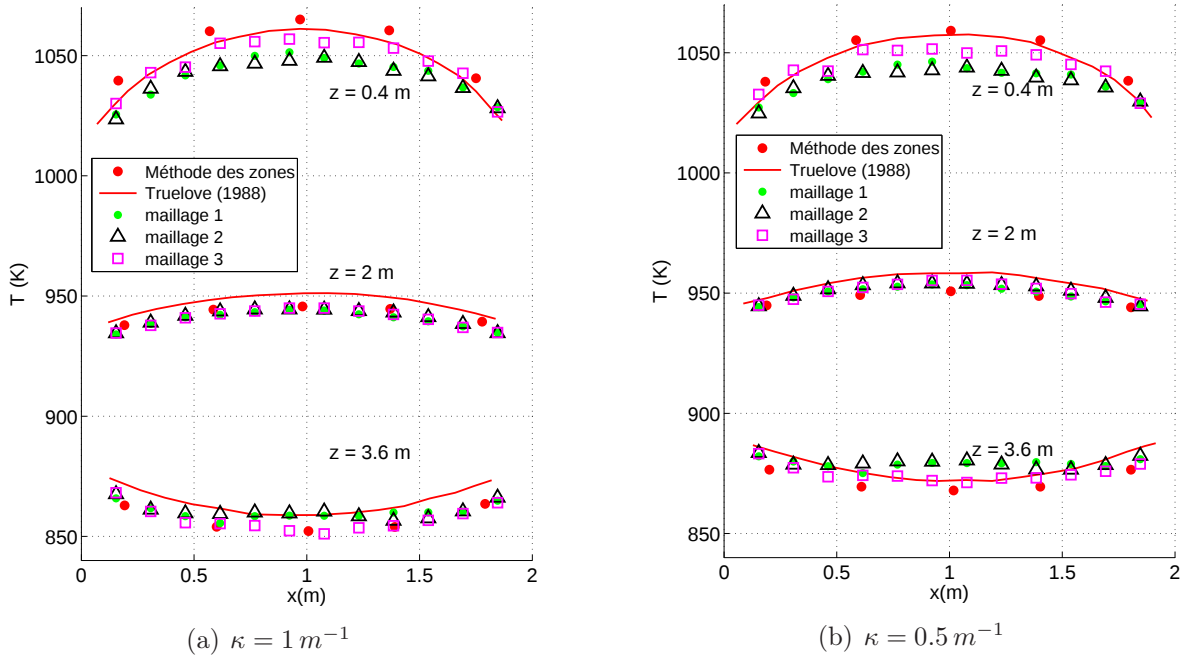


FIGURE 4.8 – Température sur trois axes du plan médian en $y = 1\text{ m}$ (cas 1)

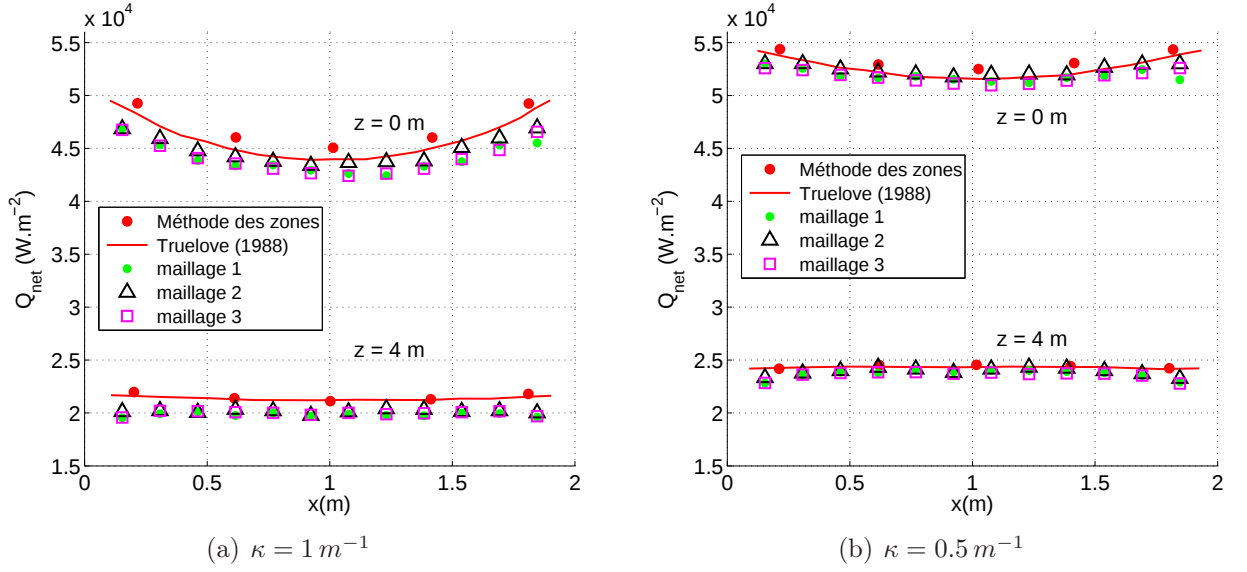
La figure 4.9 montre le flux radiatif sur deux axes en $z = 0$ et $z = 4\text{ m}$ aux extrémités du plan médian en $y = 1\text{ m}$. Le flux radiatif est plus important côté face chaude. La courbe a également une allure parabolique, où le flux est plus important proche des arêtes du parallélépipède indiquant que le flux incident est plus fort au centre. En revanche, côté face froide, le flux radiatif est quasiment constant, indiquant que le flux incident l'est aussi. Lorsque le coefficient d'absorption diminue, le flux radiatif près des faces chaudes et froides augmente. Nos résultats donnent la bonne allure, toutefois ils présentent des écarts avec les solutions de la littérature, même pour le maillage le plus fin. Ces écarts sont toutefois moins importants pour $\kappa = 0.5\text{ m}^{-1}$.


 FIGURE 4.9 – Flux radiatif sur deux axes du plan médian en $y = 1 \text{ m}$ (cas 1)

Dans un second temps, nous avons utilisé l'approximation donnée par le cas 2 (figures 4.10 et 4.11). On obtient les mêmes résultats pour la température que dans le cas 1.


 FIGURE 4.10 – Température sur trois axes du plan médian en $y = 1 \text{ m}$ (cas 2)

Par contre, pour le flux radiatif les résultats sont, cette fois-ci, plus proches des solutions de la littérature (figure 4.11). Ceci montre l'intérêt de prendre en compte l'évolution de la température le long du chemin optique pour pouvoir bien déterminer le flux radiatif aux frontières du domaine. En effet, dans ce cas d'étude, le milieu est soumis à un gradient de températures près des bords. Aussi, pour le schéma de fermeture avec la température constante le long du chemin optique (figure 4.9) les écarts observés sont de l'ordre de 9 %.

FIGURE 4.11 – Flux radiatif sur deux axes du plan médian en $y = 1 \text{ m}$ (cas 2)

4.3 Couplage rayonnement-conduction

Nous présentons ici le couplage entre le rayonnement et la conduction. Dans cette étude, l'équation de conservation de l'énergie est résolue par un code d'éléments finis¹² avec des fonctions de base P_1 : il est adapté à des géométries complexes 3D. En particulier, le code utilise le même maillage tétraédrique que le code de rayonnement que nous avons développé. Nous rappelons que le couplage entre ces deux équations s'effectue au travers du champ de températures (émission propre du milieu présente dans l'ETR) et du terme source radiatif présent dans l'équation de conservation de l'énergie.

Notons que dans la littérature, peu d'auteurs [95, 96, 97, 98] ont travaillé sur le couplage conduction rayonnement en géométrie 3D. Guedri et al. [96] et Talukdar et al. [97] ont travaillé sur différentes géométries en considérant uniquement le régime stationnaire. Mondal et al. [98] ont traité le cube unitaire abordé par Talukdar et al. [97] en régime instationnaire. Ces auteurs ont traité le couplage conduction rayonnement au travers des équations adimensionnées. Aussi, dans un premier temps, nous allons présenter l'adimensionnement des équations. Dans un second temps, nous présentons nos résultats en régime stationnaire et instationnaire portant sur la même géométrie du cube unitaire. Pour les différentes simulations effectuées dans cette partie, nous avons utilisé uniquement le cas 1, pour l'évolution de la température le long du chemin optique.

4.3.1 Adimensionnement des équations

L'équation de conservation de l'énergie en régime instationnaire incluant un terme source radiatif s'écrit :

$$\rho_\nu c_p \frac{\partial T}{\partial t} - k_{cond} \Delta T = -div \vec{Q}_{rad} \quad (4.13)$$

12. Code écrit en Fortran 90 par J. B. Harry (ingénieur de calcul scientifique au laboratoire) en s'inspirant de la version C++ du code en régime stationnaire d'Alain Peronnet (www.ann.jussieu.fr/peronnet/). Le code a été complété par l'ajout de la partie instationnaire.

en supposant que la conductivité thermique k_{cond} soit isotrope et indépendante de la température et que la masse volumique ρ_ν , la chaleur massique c_p soit également indépendante de la température. Nous rappelons que la divergence du flux radiatif s'exprime ainsi :

$$-div \vec{Q}_{rad}(s, t) = S_{rad}(s, t) = \kappa [G(s, t) - 4\pi L^o(T(s, t))] \quad (4.14)$$

Nous introduisons des variables adimensionnées¹³, ainsi que le nombre de Stark (sans dimension) N_{Stark} qui représentent la contribution de la conduction par rapport à celle du rayonnement.

$$x^* = \frac{x}{L}; \quad y^* = \frac{y}{L}; \quad z^* = \frac{z}{L}; \quad T^* = \frac{T}{T_{ref}}; \quad (4.15)$$

$$S_{rad}^* = \frac{S_{rad}}{4\sigma_B T_{ref}^4}; \quad \zeta = \frac{\alpha_d t}{L^2} \quad \text{avec} \quad \alpha_d = \frac{k_{cond}}{\rho_\nu c_p}; \quad N_{Stark} = \frac{k_{cond} \kappa}{4\sigma_B T_{ref}^3} \quad (4.16)$$

avec L la longueur caractéristique, T_{ref} la température de référence (correspondant ici à la température chaude du cas test) et α_d la diffusivité thermique. Ainsi, l'équation adimensionnée s'écrit :

$$\frac{L^2}{\alpha_d} \frac{\partial T^*}{\partial t} - \Delta T^* = \frac{\kappa L}{N_{Stark}} S_{rad}^* \quad (4.17)$$

En introduisant le temps adimensionné et l'épaisseur optique $\tau = \kappa L$, on obtient finalement :

$$\frac{\partial T^*}{\partial \zeta} - \Delta T^* = \frac{\tau}{N_{Stark}} S_{rad}^* \quad (4.18)$$

En régime stationnaire, l'équation est la suivante :

$$-\Delta T^* = \frac{\tau}{N_{Stark}} S_{rad}^* \quad (4.19)$$

4.3.2 Régime stationnaire

Le cas d'étude, repris de Talukdar et al. et Guedri et al. [97, 96], porte sur un cube unitaire. Le milieu est bordé par des surfaces noires avec des faces froides à $T_f = 0.5 K$ et une face chaude à $T_c = 1 K$.

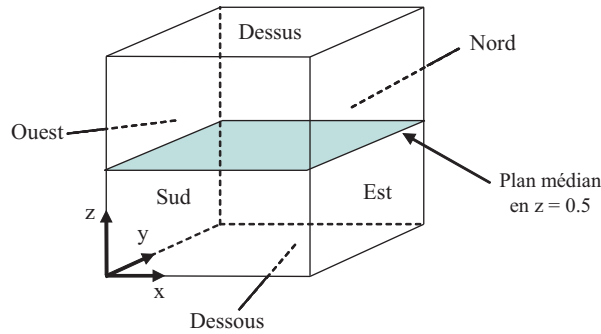


FIGURE 4.12 – Cube unitaire

Nos résultats sont comparés aux solutions numériques de Talukdar et al. [97] qui ont été obtenues avec une méthode aux volumes finis, pour les deux modes de transferts de

13. notation * excepté pour le temps

chaleur, appliquée à un maillage hexaédrique structuré constitué de $32 \times 32 \times 32$ volumes de contrôle et une discrétisation angulaire (azimutale, polaire) 10×8 . Nos simulations ont été réalisées avec une quadrature S_8 sur deux maillages en espace, constitués respectivement de 3924 noeuds (19254 tétraèdres) et 21801 noeuds (97184 tétraèdres). Le coefficient d'absorption a été fixé respectivement à $\kappa = 1 \text{ m}^{-1}$. Dans une première étude, nous avons réalisé des simulations pour trois valeurs du nombre de Stark ($N_{\text{Stark}} = 1, 0.1, 0.01$) et un cas purement radiatif correspondant à l'équilibre radiatif (soit $N_{\text{Stark}} = 0$).

La figure 4.13 montre la température sur l'axe central du plan médian en $z = 0.5 \text{ m}$ pour différentes valeurs du nombre de Stark. Les courbes indiquent une évolution du champ de températures en accord avec la physique du problème. En effet, lorsque $N_{\text{Stark}} = 1$, la conduction est prédominante et le rayonnement est négligeable, on retrouve bien la solution de la conduction pure. Quand le nombre de Stark diminue, la température au sein du milieu augmente et reste inférieure au cas du transfert radiatif pur. Nos résultats montrent un bon accord avec les solutions de Talukdar et al. [97]. Les solutions données par les deux maillages sont quasiment identiques, montrant ainsi que la solution a convergé, excepté pour l'équilibre radiatif où l'on distingue un saut de température près des bords pour le second maillage. On notera que pour traiter le cas où $N_{\text{Stark}} = 0.01$, il a été nécessaire d'introduire un coefficient de sous relaxation α_R dans le terme source radiatif, car le rayonnement introduit de fort gradient de température. Ainsi, le terme source radiatif adimensionné avec la sous relaxation est donnée par la relation suivante :

$$S_{\text{rad}}^* = \alpha_R S_{\text{rad}}^{*n-1} + (1 - \alpha_R) S_{\text{rad}}^{*n} \quad (4.20)$$

Pour la simulation avec $N_{\text{Stark}} = 0.01$, nous avons pris $\alpha_R = 0.7$.

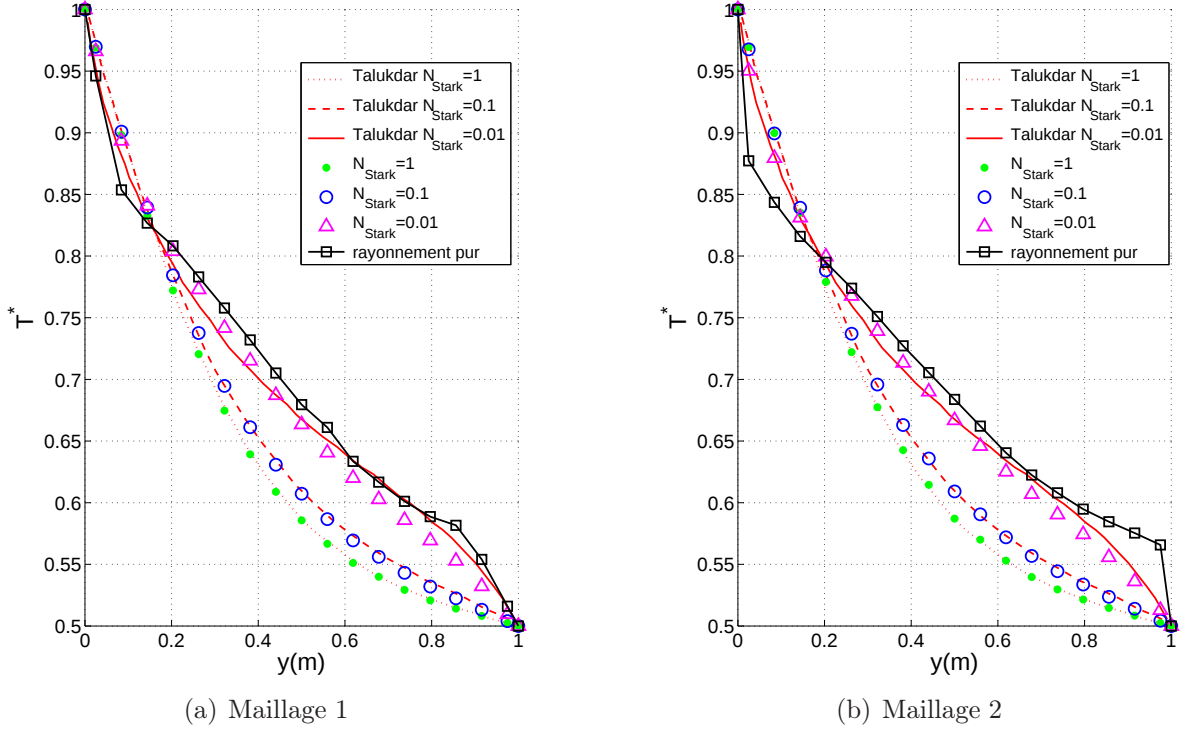


FIGURE 4.13 – Température sur l'axe central du plan médian en $z = 0.5 \text{ m}$

Dans une seconde étude, nous avons considéré une seule valeur du nombre de Stark ($N_{Stark} = 0.01$) et la face chaude est, cette fois ci, une surface opaque à réflexion diffuse pour laquelle on a fait varier l'émissivité $\epsilon = 1, 0.5, 0.1$ et 0 . Par contre, nous avons gardé les mêmes valeurs du coefficient d'absorption et de la conductivité thermique.

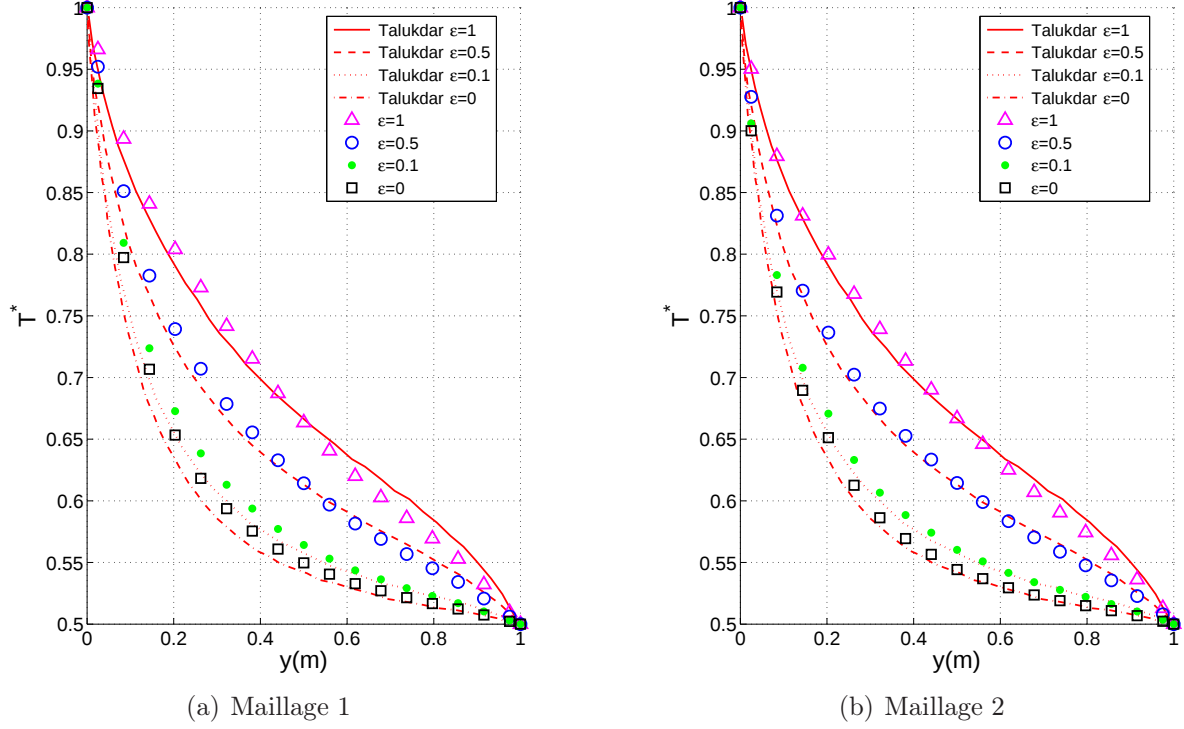


FIGURE 4.14 – Température sur l'axe central du plan médian en $z = 0.5 m$

La figure 4.14 présente toujours la température sur l'axe central du plan médian en $z = 0.5 m$. Lorsque l'émissivité tend vers zéro, la température diminue, puisque l'énergie radiative émise par la face est moins importante. Nos résultats indiquent la bonne tendance et son accord avec les solutions de Talukdar et al. [97]. Toutefois, on observe des écarts pour $\epsilon = 0$, qui peuvent être dus au flux incident qui n'est pas bien évalué en raison du gradient de températures proche de la face chaude.

4.3.3 Régime instationnaire

Le cas étudié par Mondal et al. [98] porte sur le cube unitaire. Il est repris de Talukdar et al. [97], dans les mêmes configurations mais en régime instationnaire. Mondal et al. ont utilisé une méthode de Lattice-Boltzman associée à une méthode volumes finis pour traiter le couplage conduction-rayonnement en régime transitoire appliqué à un maillage cartésien. La méthode de Lattice-Boltzman a été employée pour traiter la conduction et la méthode des volumes finis a été utilisée pour calculer le rayonnement. Les résultats de Mondal et al. ont été obtenus avec un maillage constitué de $31 \times 31 \times 31$ volumes de contrôle, d'une discrétisation angulaire de 10×8 angles de contrôle et d'un pas de temps adimensionné $\Delta\zeta = 10^{-4}$. Le critère de convergence sur la température a été fixé à $\eta_T = 10^{-6}$.

Nos simulations ont été réalisées avec une quadrature S_8 , sur un maillage spatial constitué de 3924 noeuds (19254 tétraèdres), le pas adimensionné est égal à $\Delta\zeta = 10^{-3}$ ou $\Delta\zeta = 10^{-4}$ en fonction du cas étudié. Les résultats présentés sur la figure 4.15 donnent l'évolution de la température (à différents instants) sur l'axe central du plan médian en $z = 0.5m$, où le régime stationnaire est indiqué par la lettre S. Ces résultats traitent différentes configurations des paramètres radiatifs, dont le coefficient d'absorption κ , le nombre de Stark N_{Stark} et l'émissivité de la face chaude ϵ_c .

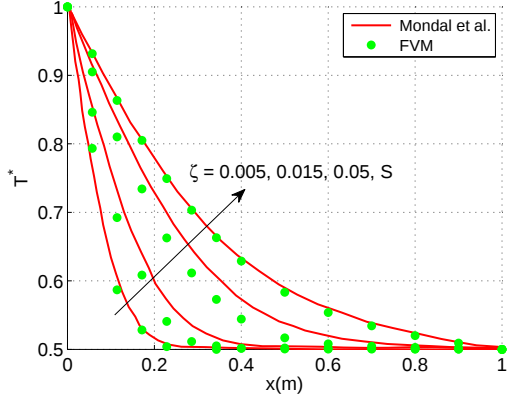
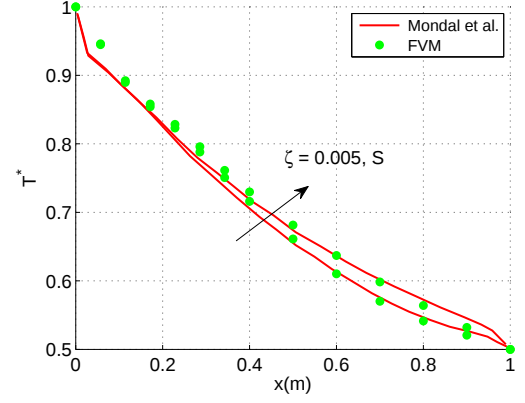
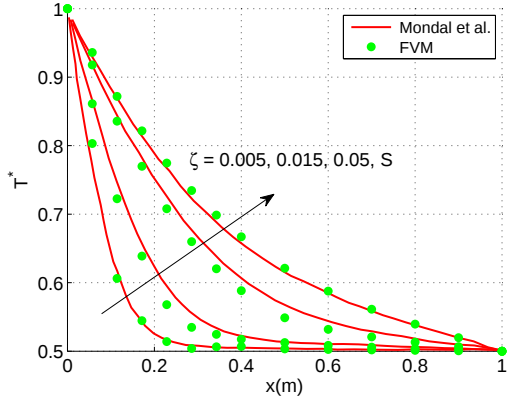
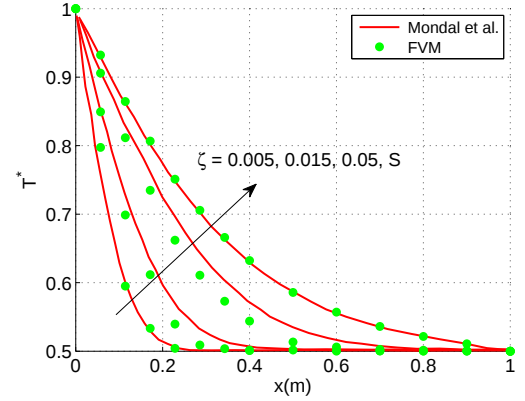
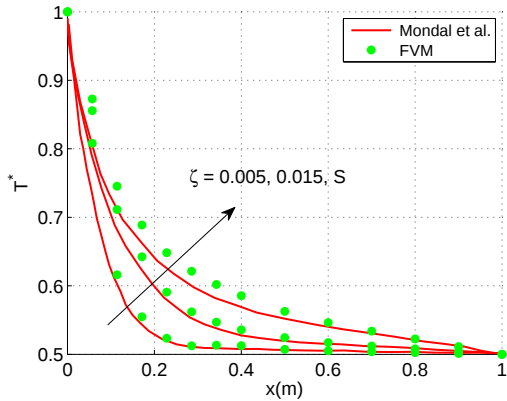
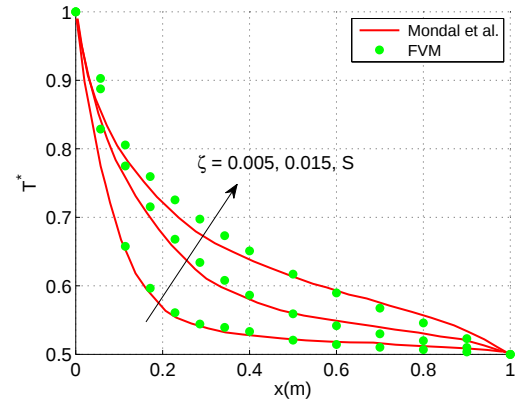

 (a) $\kappa = 0.1$, $N_{Stark} = 0.01$, $\epsilon_c = 1$

 (b) $\kappa = 5$, $N_{Stark} = 0.01$, $\epsilon_c = 1$

 (c) $\kappa = 1$, $N_{Stark} = 0.1$, $\epsilon_c = 1$

 (d) $\kappa = 1$, $N_{Stark} = 1$, $\epsilon_c = 1$

 (e) $\kappa = 1$, $N_{Stark} = 0.01$, $\epsilon_c = 0.1$

 (f) $\kappa = 1$, $N_{Stark} = 0.01$, $\epsilon_c = 0.5$

 FIGURE 4.15 – Température sur l'axe central du plan médian en $z = 0.5m$

Les figures 4.15(a) et 4.15(b) présentent les résultats pour deux valeurs du coefficient d'absorption ($\kappa = 0.1$ et 5 m^{-1}). Le nombre de Stark ainsi que l'émissivité de la face chaude ont été considérés constants ($N_{Stark} = 0.01$ et $\epsilon_c = 1$). Pour $\kappa = 0.1 \text{ m}^{-1}$ nous avons pris un pas de temps $\Delta\zeta = 10^{-3}$. Lorsque $\kappa = 5 \text{ m}^{-1}$, nous avons considéré un pas de temps plus petit, soit $\Delta\zeta = 10^{-4}$, en raison du rayonnement qui est plus important (avec $\Delta\zeta = 10^{-3}$ la solution diverge). Les nombres d'itérations (de pas de temps) pour atteindre le régime stationnaire (avec $\eta_T = 10^{-4}$) pour $\kappa = 0.1$ et 5 m^{-1} sont respectivement de 247 et 125.

Sur les figures 4.15(c) et 4.15(d) nous représentons les résultats pour deux valeurs du nombre de Stark ($N_{Stark} = 0.1$ et $N_{Stark} = 1$). Le coefficient d'absorption, l'émissivité de la surface chaude ainsi que le pas de temps sont pris constants ($\kappa = 1$, $\epsilon_c = 1$, et $\Delta\zeta = 10^{-3}$). Le régime permanent est atteint après 317 et 250 itérations, pour $N_{Stark} = 0.1$ et $N_{Stark} = 1$.

Les figures 4.15(e) et 4.15(f) montrent les résultats pour deux valeurs d'émissivité de la face chaude ($\epsilon_c = 0.1$ et $\epsilon_c = 0.5$), avec un coefficient d'absorption, un nombre de Stark et un pas de temps constants ($\kappa = 1$, $\epsilon_c = 1$, et $\Delta\zeta = 10^{-3}$). Pour $\epsilon_c = 0.1$ et $\epsilon_c = 0.5$, la température tend vers celle du régime stationnaire après 82 et 79 itérations.

Nos résultats présentent une bonne évolution du champ de températures et sont en adéquation avec les solutions de Mondal et al. [98] : elles tendent bien vers le régime stationnaire. Néanmoins, il existe un léger écart au cours des itérations. Il est plus marqué pour les émissivités différentes de un et peut être attribué à la précision du code de rayonnement ou de conduction. Toutefois, les comparaisons sont effectuées entre deux résultats numériques et non à une solution exacte. En ce qui concerne l'évolution du champ de températures, nous observons une linéarisation de celui-ci, lorsque le rayonnement est plus important (figure 4.15(b)) montrant l'influence du rayonnement. Pour les autres simulations, les courbes ont plus ou moins la même allure.

Pour les différentes simulations portant sur le couplage conducto-radiatif dans un milieu gris en régime stationnaire et instationnaire, nous affichons les temps de calcul dans les tableaux ci-dessous.

	$N_{Stark} = 1$	$N_{Stark} = 0.1$	$N_{Stark} = 0.01$	Equilibre radiatif
maillage 1	8 min 3 s	18 min	35 min 38 s	8 min
maillage 2	33 min 22 s	68 min 50 s	132 min 50 s	38 min 51 s

 TABLE 4.4 – Temps de calcul, différentes valeurs de N_{Stark} (régime stationnaire)

	$\epsilon = 1$	$\epsilon = 0.5$	$\epsilon = 0.1$	$\epsilon = 0$
maillage 1	35 min 56 s	51 min 36 s	56 min 28 s	57 min 18 s
maillage 2	132 min 56 s	224 min 47 s	244 min 13 s	247 min 20 s

 TABLE 4.5 – Temps de calcul, différentes valeurs de ϵ avec $N_{Stark} = 0.01$ (régime stationnaire)

Cas test	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
maillage 1	464 min	236 min	609 min	479 min	261 min	343 min

TABLE 4.6 – Temps de calcul, les différents cas tests (régime instationnaire)

4.4 Milieu non-gris

Dans cette dernière étude, nous nous sommes intéressés au transfert par conduction et rayonnement dans un milieu non gris à haute température, en régime stationnaire. Pour la résolution de L'ETR en milieu non-gris, nous avons utilisé une méthode « gris par bande », Modest [14]. Le milieu étudié correspond au verre clair (verre à vitrage) dont les caractéristiques sont reprises de la thèse de Berour [1]. Les propriétés spectrales du verre sont illustrées sur la figure 4.16. Le coefficient κ_λ du verre est relativement faible dans le visible. Il augmente dans le proche infrarouge et au-delà de la longueur d'onde λ_{lim} (dite longueur d'onde limite) il est considéré comme opaque en raison des fortes valeurs de κ_λ . Ici, pour le verre clair étudié, λ_{lim} est de l'ordre $5\mu m$. Dans notre étude, la gamme spectrale considérée est comprise dans l'intervalle $[0.5\mu m, 20\mu m]$ avec onze bandes. La largeur des dix premières bandes est égale à $0.5\mu m$. Les propriétés de ces dix bandes, définies par les courbes de la figure 4.16, sont illustrées dans le tableau 4.7 avec λ_c la longueur d'onde centrale de chaque bande. La dernière bande spectrale, comprise entre $5.25\mu m$ et $20\mu m$ correspond à un milieu opaque. De plus, l'indice optique complexe du verre, ainsi que la conductivité thermique sont considérés indépendantes de la température.

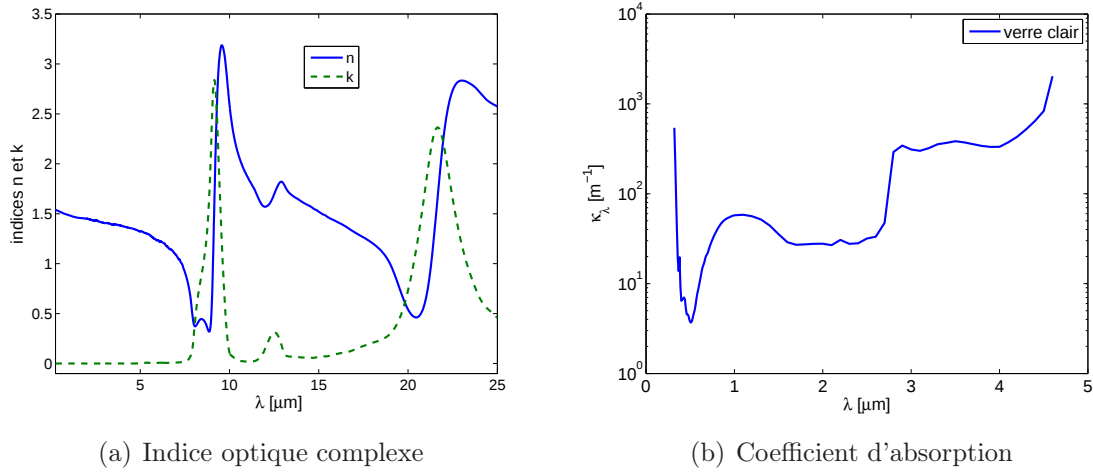


FIGURE 4.16 – Propriétés spectrales du verre clair (Berour [1])

λ_c (μm)	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
n_{λ_c}	1.52	1.485	1.463	1.447	1.428	1.41	1.395	1.375	1.352	1.324
κ_{λ_c} (m^{-1})	3.5	60	33	26	30	300	380	310	800	7500

TABLE 4.7 – Indice de réfraction et coefficient d'absorption du verre clair

Le cas test étudié ici n'est pas référencé dans la littérature. La géométrie considérée est celle d'un parallélépipède de dimension $0.2m \times 0.2m \times 0.4m$ (figure 4.17). Cette géométrie comporte une dimension en z plus grande que les deux autres afin d'effectuer des comparaisons qualitatives avec le code 2D de Berour (les résultats 2D et 3D pour la conduction seule sont identiques). Le milieu est bordé par des faces froides à $T_f = 273 K$ et une face chaude à $T_c = 1000 K$ (en $x = 0 m$). Pour ce cas test, deux types de conditions aux limites, sur chaque face, ont été appliqués. La première correspond à des surfaces noires et la seconde à des surfaces opaques à réflexion diffuse comportant une faible émissivité

($\epsilon = 0.1$). De plus, pour évaluer l'influence du rayonnement dans du verre, nous avons simulé un cas de transfert de chaleur par conduction uniquement.

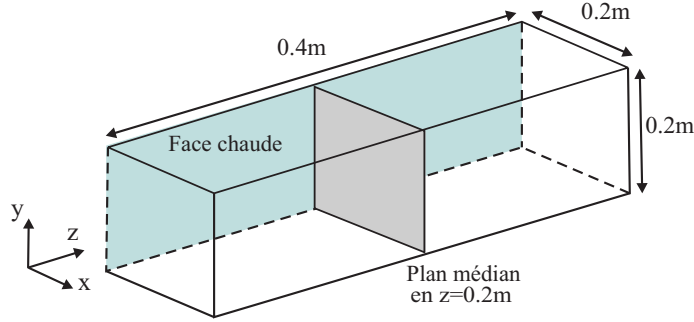


FIGURE 4.17 – Parallélépipède de dimension $0.2m \times 0.2m \times 0.4m$

Pour la conductivité thermique du verre nous avons pris $k_{cond} = 1.14 W.m^{-1}.K^{-1}$ (travaux de Berour [1] sans la dépendance thermique). Nos simulations ont été réalisées avec une quadrature S_8 appliquée à un maillage en espace constitué de 4390 noeuds (20179 tétraèdres) et, pour la sous relaxation (équation 4.20), nous avons pris $\alpha_R = 0.9$. Pour ces différentes simulations, nous affichons les temps de calcul dans le tableau 4.8.

	Conduction pure	Couplage conducto-radiatif	
		$\epsilon = 1$	$\epsilon = 0.1$
temps de simulation	32 s	9 heures	40 heures

TABLE 4.8 – Temps de calcul, pour les simulations en milieu non-gris

La figure 4.18 présente la température sur le plan médian en $z = 0.2m$ (figure 4.17), pour le cas de la conduction pure et le couplage conduction-rayonnement lorsque le milieu est bordé par des surfaces noires. Ces résultats montrent l'influence du rayonnement sur le champ de températures pour un milieu semi-transparent tel que le verre.

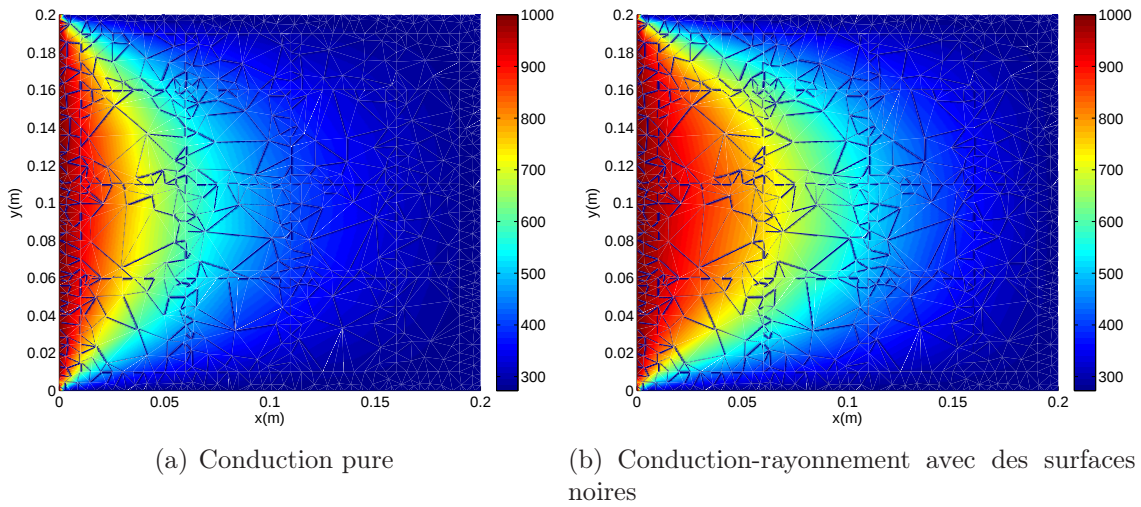


FIGURE 4.18 – Température sur le plan médian en $z = 0.2m$

Nous visualisons sur la figure 4.19 la température le long de l'axe central en $y = 0.1\text{ m}$ du plan médian en $z = 0.2\text{ m}$ (simulations 2D et 3D). Pour le code 2D, nous avons utilisé les mêmes configurations appliquées à un carré de $0.2\text{ m} \times 0.2\text{ m}$ (correspondant au plan médian du parallélépipède en $z = 0.2\text{ m}$) avec un schéma Step.

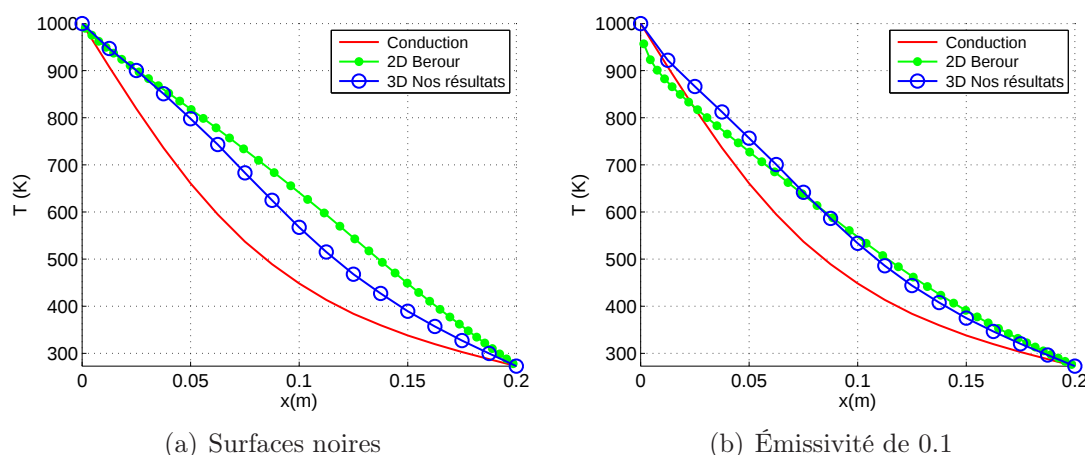


FIGURE 4.19 – Température sur l'axe central du plan médian en $z = 0.2\text{ m}$

Nos résultats montrent une bonne tendance et un ordre de grandeur similaire. Néanmoins, on distingue une différence entre les résultats 2D et 3D. L'écart que l'on observe, pour les deux types de conditions aux limites, est marqué entre les deux codes et peut être attribué au manque de précision d'un ou des deux codes. La géométrie 3D n'est pas la cause de cette différence, puisque nous avons simulé le même cas sur un parallélépipède plus grand (six fois plus suivant z , $0.2\text{ m} \times 0.2\text{ m} \times 1.2\text{ m}$) et les résultats sont les mêmes.

Résumé du chapitre 4

Ce dernier chapitre a porté sur la simulation numérique des transferts de chaleur couplés par conduction et rayonnement. Dans ce cas, le code radiatif 3D par volumes finis a été couplé sur un même maillage tétraédrique avec un code de conduction par éléments finis. En particulier, aucune interpolation n'a été nécessaire pour le couplage des deux codes. Par ailleurs, dans le but d'améliorer le schéma de fermeture pour traiter les milieux anisothermes nous avons proposé quatre approximations de la température le long du chemin optique. Avec ces différentes approximations, nous avons mené une étude sur l'équilibre radiatif dans un milieu bordé par des surfaces noires. Les résultats obtenus n'ont montré quasiment aucune influence sur le champ de températures. Toutefois, pour le problème radiatif avec une source de chaleur dans le milieu bordé par des surfaces opaques à réflexion diffuse, nos résultats proches de la frontière sont meilleurs lorsque l'on considère une évolution linéaire de la température (cas 2 dans la section 4.1). Les simulations portant sur le couplage à partir des équations adimensionnées ont été effectuées en régimes stationnaire et instationnaire. Ils ont montré un bon accord avec les solutions de la littérature.

La dernière étude a porté sur le transfert thermique dans un milieu non-gris caractérisé par un verre clair, où seuls la conduction et le rayonnement ont été considérés comme mode de transfert de chaleur. Cette étude nous a donné un aperçu de l'importance du transfert radiatif dans ce type de milieu et montre les capacités du code, en terme de temps de calcul, pour traiter un cas un peu plus réaliste (bien que les conditions aux limites de type semi-transparente n'ont pas encore été mises en place). Toutefois, elle ne nous permet pas de valider les résultats obtenus, puisque ce cas test n'est pas référencé dans la littérature et que les comparaisons ont été réalisées entre deux codes numériques 2D et 3D.

Conclusion et perspectives

Comme nous l'avons vu au premier chapitre de ce mémoire, la difficulté liée à la simulation du transfert radiatif dans les milieux semi-transparents, tient au fait des dépendances spectrale, spatiale, temporelle et directionnelle de la luminance. De plus, la température intervient dans le terme d'émission propre, ce qui nécessite un couplage de l'ETR avec l'équation de conservation de l'énergie. Ainsi, la luminance dépend des trois variables de position, de deux variables angulaires, du temps et de la longueur d'onde, soit sept variables au total. Cette multiplicité de paramètres rend effectivement difficile la résolution numérique de l'ETR. Mais aujourd'hui, la puissance de calcul des ordinateurs nous permet de lever en partie cette difficulté.

Le travail présenté dans ce mémoire porte ainsi sur la résolution numérique du transfert radiatif à travers un milieu semi-transparent (non diffusant) gris ou non-gris, bordé par des surfaces opaques à réflexion diffuse ou noires, ainsi que sur le couplage conduction-rayonnement. La méthode développée ici pour la résolution de l'ETR est de type « **volumes finis** » avec une formulation « **cell-vertex** » appliquée à un maillage tétraédrique non-structuré (géométrie 3D). La plus grande difficulté de mise en oeuvre de ce travail s'est située au niveau de la prise en compte de la formulation « cell-vertex » et du schéma de fermeture incluant la forme intégrale de l'ETR. Ce schéma de fermeture a nécessité des projections dans l'espace et la gestion de plusieurs cas de figures liés au positionnement des tétraèdres par rapport à la direction de propagation du rayonnement. L'établissement de ce schéma de fermeture a néanmoins introduit une approche physique complémentaire et une amélioration des résultats. Finalement, pour résoudre l'ETR deux méthodes de résolution ont été développées. La première est la méthode classique itérative noeud à noeud et la seconde est une nouvelle méthode de résolution matricielle pour l'ETR.

Nos résultats portant sur un milieu gris isotherme, illustré dans le chapitre trois, sont axés sur trois aspects :

- a) **L'étude de différentes géométries** bordées par des surfaces noires, où les sensibilités angulaire et spatiale ont été discutées. Les différentes discrétisations angulaires employées ont notamment montré, pour la discrétisation à pas constant, un léger problème de symétrie de nos résultats. Ce problème, dû aux angles de contrôle près des pôles de l'axe z , se corrige lorsque l'on augmente le nombre de directions ou en employant une quadrature angulaire de type S_N ou T_N . La sensibilité à la discrétisation spatiale de la solution montre globalement la convergence de nos résultats pour l'ensemble des cas tests traités.
- b) **L'étude mettant en évidence la diffusion numérique** liée à l'utilisation d'une méthode de type volumes finis. Ce cas test a porté sur la résolution de l'ETR dans un

milieu transparent suivant une seule direction de propagation. Trois schémas de fermeture ont été utilisés et ont montré la possibilité de minimiser cet effet en introduisant un schéma de fermeture relativement précis ;

- c) **L'étude des surfaces opaques à réflexion diffuse** qui a nécessité l'introduction d'un calcul pseudo-itératif pour prendre en compte le flux incident aux parois. Les résultats obtenus sur ce cas test ont montré l'importance de raffiner le maillage là où les variations de la solution sont fortes, en l'occurrence ici proche des frontières.

Dans le dernier chapitre, nous nous sommes intéressés aux simulations des transferts de chaleur par conduction et rayonnement, nécessitant la détermination du terme source radiatif ainsi que du champ de températures dans le milieu. Dans cet objectif, notre travail s'est organisé en deux parties :

- a) **L'étude de problèmes purement radiatifs** avec une température non uniforme dans le milieu. Cette partie a constitué une étape intermédiaire entre les simulations sur un milieu isotherme et celle du couplage conduction-rayonnement ;
- b) **L'étude du couplage conduction-rayonnement** en régime stationnaire et instationnaire avec la prise en compte des équations adimensionnées ;
- c) **L'étude d'un milieu non-gris** portant sur du verre clair en considérant la conduction et le rayonnement en régime stationnaire.

Sur l'ensemble des simulations traitées dans ce mémoire, nos résultats ont été comparés à ceux de la littérature où de nombreuses études ont été explorées. Toutefois, certains points sont à revoir pour améliorer encore la précision. Pour cela, nous présentons, à la suite les forces et faiblesses de la méthode mise en place durant ce travail de thèse, les voies qui seraient judicieuses d'approfondir.

Concernant les forces de notre méthode numérique pour le rayonnement :

- il s'agit d'une méthode conservative avec une formulation « cell-vertex », calculant les grandeurs discrètes aux noeuds du maillage (luminances, flux radiatifs, sources radiatives) ;
- elle est basée sur un maillage tétraédrique non-structuré couramment utilisé dans les codes de CFD ou autres logiciels (ABAQUS, COMSOL, FLUENT, ...) ;
- le couplage est immédiat avec des méthodes numériques différentes (pour cette thèse, en l'occurrence volumes finis rayonnement et éléments finis conduction) sur un même maillage sans utiliser d'interpolation pour le couplage ;
- schéma de fermeture de type exponentiel (connu pour être relativement précis mais plus coûteux en temps de calcul) fait appel à différents types de projections numériques, d'interpolations entre points discrets ;
- la formulation matricielle pour la résolution en bloc de tout le champ de luminance (à direction fixe), ce qui faciliterait la parallélisation de l'algorithme ;
- la précision bonne dans l'ensemble pour un temps de calcul raisonnable ;
- le code¹⁴ de rayonnement 3D écrit en Fortran 90 est modulaire et organisé sous forme de bibliothèques facilitant son utilisation, notamment pour le couplage avec d'autres codes. De plus, le code utilise les bibliothèques mathématiques LAPACK et SLATEC (www.netlib.org).

14. programmé entièrement par l'auteur de cette thèse qui avait à sa disposition le code RAD2D, néanmoins aucune partie de programme RAD2D n'a été implémentée dans le code 3D

Concernant les faiblesses de notre méthode numérique :

- il subsiste dans certains cas des écarts notables avec les solutions de la littérature ;
- elle n’est certainement pas encore assez précise par rapport au coût de développement de la méthode (coût plus important que pour une formulation cell-center) ;
- la méthode est adaptée actuellement à un milieu non-diffusant qui ne prend pas en compte les frontières semi-transparentes, mais elle peut être généralisée.

Perspectives d’améliorations de notre méthode numérique pour le rayonnement

Dans un premier temps, il s’agira d’apporter des solutions aux deux premiers points de la liste des faiblesses énoncées juste avant. Il faudra donc pousser l’étude sur l’amélioration des schémas de fermeture. Nous pouvons évoquer l’étude de la partie (b) qui est très intéressante pour l’établissement de schéma de fermeture. Néanmoins, elle est incomplète puisqu’il aurait été avantageux de poursuivre cette étude sur un milieu semi-transparent et de chercher à mettre en place un schéma de fermeture encore plus précis. Pour minimiser davantage la diffusion numérique, il serait intéressant de faire une comparaison avec les schémas d’ordre élevé, bornés, à limiteurs de flux. De plus, nous songeons à faire des analyses comparatives pertinentes entre différentes formulations pour les relations de fermetures telles que step, diamond, flux moyen ou encore d’autres formulations traitant du même sujet. On pourra aussi essayer de faire une analyse sur le lien qui peut exister entre les finesses des discrétisations angulaire et spatiale.

Nous devons également tester la précision et les temps de calcul, des différentes approximations relatives à l’évolution de la température le long du chemin optique (u_f, i_f) présentées dans le mémoire. Par ailleurs, nous pourrions réaliser une étude de convergence de notre méthode par rapport au temps de calcul et définir ainsi quelle est la précision pour le schéma mis en place. Il s’agira alors de représenter l’évolution de la solution en fonction de la taille des mailles pour voir l’ordre du schéma.

Dans ce mémoire, la résolution matricielle a été utilisée uniquement dans la partie 3.3, aussi cette méthode de résolution n’a pas encore montré tout son potentiel et constituerait un développement intéressant. Elle permettrait notamment de mettre en place des schémas de fermeture plus simples, en allégeant les différents cas de figures illustrés dans la partie 2.5.2.

Pour évaluer de façon objective les performances de notre code, par rapport aux codes de rayonnement du même type, il serait intéressant d’effectuer des comparaisons sur des cas tests dans les mêmes configurations (maillage spatial et angulaire).

Perspectives d’extension du code de rayonnement

La version actuelle du code, nous donne un bon aperçu de ses capacités, notamment en termes de précision et temps de calcul. Aussi, dans l’optique de rendre le code encore plus performant, il est envisageable de le paralléliser suivant les directions, les longueurs d’onde et faire de la décomposition de domaine. Pour traiter des applications réalistes, il faudrait étendre ce travail au milieu diffusant ou/et à frontière semi-transparente.

Futures applications

Au laboratoire, deux applications de ce code sont actuellement en cours d'étude. La première porte sur la mise en forme du verre en 3D et l'autre, plus récente, concerne la tomographie infrarouge 3D des tissus biologiques. Ces deux applications nécessitent un code de calcul radiatif adapté à des géométries 3D de formes irrégulières. En particulier, le code devra être à la fois précis, rapide et facile à coupler avec d'autres modes de transfert.

- l'application liée à la mise en forme du verre en 3D présente l'originalité de traiter un problème multi physique comportant un couplage thermomécanique fort. Aussi, le code de rayonnement 3D pourra être couplé au logiciel commercial ABAQUS qui traite la déformation mécanique avec une méthode éléments finis sur un maillage tétraédrique ;
- la thématique portant sur la tomographie infrarouge 3D pour le diagnostic médical des cellules cancéreuses est très prometteuse. La technique consiste à simuler le transfert radiatif aux courtes échelles de temps dans les tissus biologiques, en considérant le milieu à la fois absorbant, diffusant de façon anisotrope, avec des propriétés optiques non uniformes. RAD3D (avec des développements supplémentaires) sera utilisé comme modèle direct pour l'application visée.

Annexe A

Annexe : calcul de la quantité Δ_f^k

On exprime la normale $\vec{n}_f$ dans la base cartésienne par :

$$\vec{n}_f = n_f^x \vec{e}_x + n_f^y \vec{e}_y + n_f^z \vec{e}_z \quad (\text{A.1})$$

A.1 Calcul exact

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \Delta_f^k &= \int_{\Delta\Omega^k} \vec{\Delta} \cdot \vec{n}_f d\Omega \\ &= \int_{\theta^-}^{\theta^+} \int_{\varphi^-}^{\varphi^+} \vec{\Delta} \cdot \vec{n}_f \sin \varphi d\varphi d\theta \\ &= n_f^x \int_{\theta^-}^{\theta^+} \cos \theta d\theta \int_{\varphi^-}^{\varphi^+} \sin^2 \varphi d\varphi + n_f^y \int_{\theta^-}^{\theta^+} \sin \theta d\theta \int_{\varphi^-}^{\varphi^+} \sin^2 \varphi d\varphi \\ &\quad + n_f^z \int_{\theta^-}^{\theta^+} d\theta \int_{\varphi^-}^{\varphi^+} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &= \left(\frac{\Delta_\varphi}{2} - \left[\frac{\sin 2\varphi^+ - \sin 2\varphi^-}{4} \right] \right) (n_f^x [\sin \theta^+ - \sin \theta^-] + n_f^y [\cos \theta^- - \cos \theta^+]) \\ &\quad + \left(n_f^z \Delta_\theta \left[\frac{\cos 2\varphi^- - \cos 2\varphi^+}{4} \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

avec, $\theta^- = \theta - \frac{\Delta\theta}{2}$; $\theta^+ = \theta + \frac{\Delta\theta}{2}$; $\varphi^- = \varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}$; $\varphi^+ = \varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}$;

et, $\Delta\theta = \frac{2\pi}{N_\theta}$; $\Delta\varphi = \frac{\pi}{N_\phi}$;

où, N_θ , N_ϕ représentent respectivement le nombre de directions azimutale et polaire.

A.2 Calcul numérique

$$\text{Alors : } \Delta_f^k = \int_{\Delta\Omega^k} \vec{\Delta} \cdot \vec{n}_f d\Omega = \vec{\Delta}^k \cdot \Delta\Omega^k \quad \text{où, } \Delta\Omega^k \text{ est assimilable à un poids} \quad (\text{A.3})$$

Annexe : exemple de résolution sur une géométrie 2D

B.1 Expression de la luminance sur un exemple de géométrie 2D

B.1.1 Différents ensembles

Nous représentons à la figure (B.1), un volume de contrôle V_P ainsi que les points i_f et u_f qui lui sont associés.

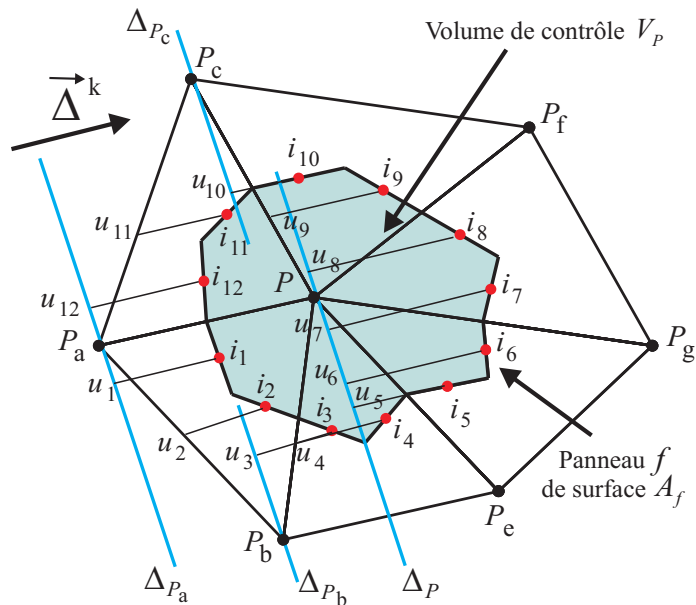


FIGURE B.1 – Représentation des points i_f et u_f pour un volume de contrôle en 2D

Ici, la construction des points u_f est définie par l'intermédiaire d'un triangle de référence noté $\mathcal{J}=(P_1,P_2,P_3)$ avec $P_1 \leq P_2 \leq P_3$ (figure B.2) où nous distinguons deux cas de figures relatifs aux points u_t ($t = 1, 2$) et au point u_3 (hormis les cas particuliers) :

- u_t est l'un des points u_1, u_2 et on note i_t (le point d'intégration associé à u_t) l'un des points i_1, i_2 . Rappelons que le point i_t appartient toujours au volume partiel V_{P_1} . On notera qu'il est toujours en aval du sommet P_1 . Alors, le point u_t est la projection du point d'intégration i_t dans la direction $\vec{\Delta}$ sur le plan ΔP_1 orthogonal à la direction $\vec{\Delta}$ (cf. figure B.2). Aussi, la luminance $L_{u_t}^k = L_{P_1}^k$.
- Le point u_3 est la projection du point d'intégration i_3 dans la direction $\vec{\Delta}$ sur une des faces du triangle situé nécessairement en amont de i_3 . La luminance au point i_3 est interpolée par $L_{u_3}^k = \alpha_{f,P_1}^k L_{P_1}^k + \alpha_{f,P_2}^k L_{P_2}^k$.

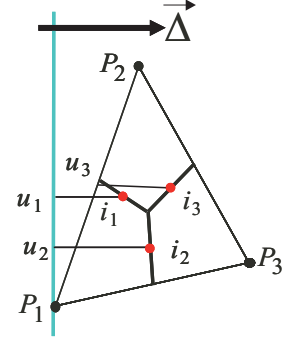


FIGURE B.2 – Représentation 2D, triangle de référence

Sur la figure B.1, les plans $\Delta_P, \Delta_{P_a}, \Delta_{P_b}$ et Δ_{P_c} sont orthogonaux à la direction discrète $\vec{\Delta}^k$ et passent respectivement par les sommets P, P_a, P_b et P_c . La luminance $L_{u_f}^k$ est alors approchée en utilisant un ou deux noeuds d'interpolation par les luminances $L_P^k, L_{P_a}^k, L_{P_b}^k$ et $L_{P_c}^k$.

Pour l'exemple de la figure B.1, nous avons :

- $\mathcal{E}_{1,P}^k = \mathcal{E}_{12,P}^k = \{P_a\}$; $\mathcal{E}_{2,P}^k = \{P_a, P_b\}$; $\mathcal{E}_{3,P}^k = \{P_b\}$; $\mathcal{E}_{4,P}^k = \{P_b, P\}$;
 $\mathcal{E}_{9,P}^k = \{P_c, P\}$; $\mathcal{E}_{10,P}^k = \{P_c\}$; $\mathcal{E}_{11,P}^k = \{P_a, P_c\}$;
- $\mathcal{E}_{f,P}^k = \{P\}$ avec $f=5,6,7,8$
- $\Lambda_P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$;
- $\Psi_P^k = \{1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12\}$;
- $\Upsilon_P^k = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
- $(E_a)_P^k = \{P_a, P_b, P_c\}$.

De plus,

$$\Psi_P^k = \psi_{P_a,P}^k \cup \psi_{P_b,P}^k \cup \psi_{P_c,P}^k \quad (\text{B.1})$$

avec,

$$\psi_{P_a,P}^k = \{1, 2, 11, 12\} \quad (\text{B.2})$$

$$\psi_{P_b,P}^k = \{2, 3, 4\} \quad (\text{B.3})$$

$$\psi_{P_c,P}^k = \{9, 10, 11\} \quad (\text{B.4})$$

B.1.2 Expression de la luminance au noeud de calcul P et dans la direction $\vec{\Delta}^k$

Nous reprenons l'exemple de la figure B.1. Alors le membre de gauche de l'équation (2.30) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\sum_{f=1}^{N_f} L_{u_f}^k D_f^k &= L_{P_a}^k \alpha_{1,P_a}^k D_1^k + L_{P_a}^k \alpha_{2,P_a}^k D_2^k + L_{P_b}^k \alpha_{2,P_b}^k D_2^k + L_{P_b}^k \alpha_{3,P_b}^k D_3^k + L_{P_b}^k \alpha_{4,P_b}^k D_4^k \\
&\quad + L_{P_a}^k \alpha_{4,P_a}^k D_4^k + L_{P_a}^k \alpha_{5,P_a}^k D_5^k + L_{P_a}^k \alpha_{6,P_a}^k D_6^k + L_{P_a}^k \alpha_{7,P_a}^k D_7^k + L_{P_a}^k \alpha_{8,P_a}^k D_8^k \\
&\quad + L_{P_a}^k \alpha_{9,P_a}^k D_9^k + L_{P_c}^k \alpha_{9,P_c}^k D_9^k + L_{P_c}^k \alpha_{10,P_c}^k D_{17}^k + L_{P_c}^k \alpha_{11,P_c}^k D_{11}^k + L_{P_a}^k \alpha_{11,P_a}^k D_{11}^k \\
&\quad + L_{P_a}^k \alpha_{12,P_a}^k D_{12}^k \\
&= L_{P_a}^k (\alpha_{1,P_a}^k D_1^k + \alpha_{2,P_a}^k D_2^k + \alpha_{11,P_a}^k D_{11}^k + \alpha_{12,P_a}^k D_{12}^k) \\
&\quad + L_{P_b}^k (\alpha_{2,P_b}^k D_2^k + \alpha_{3,P_b}^k D_3^k + \alpha_{4,P_b}^k D_4^k) \\
&\quad + L_{P_c}^k (\alpha_{9,P_c}^k D_9^k + \alpha_{10,P_c}^k D_{17}^k + \alpha_{11,P_c}^k D_{11}^k) \\
&\quad + L_P^k (\alpha_{4,P}^k D_4^k + \alpha_{5,P}^k D_5^k + \alpha_{6,P}^k D_6^k + \alpha_{7,P}^k D_7^k + \alpha_{8,P}^k D_8^k + \alpha_{9,P}^k D_9^k)
\end{aligned}$$

Nous pouvons faire apparaître les coefficients $B_{na,p}^k$ et H_P^k :

$$\begin{aligned}
B_{P_a,P}^k &= \sum_{\{f \in \psi_{P_a,20}\}} \alpha_{f,12}^k D_f^k = \alpha_{1,P_a}^k D_1^k + \alpha_{2,P_a}^k D_2^k + \alpha_{11,P_a}^k D_{11}^k + \alpha_{12,P_a}^k D_{12}^k \\
B_{P_b,P}^k &= \sum_{\{f \in \psi_{P_b,20}\}} \alpha_{f,15}^k D_f^k = \alpha_{2,P_b}^k D_2^k + \alpha_{3,P_b}^k D_3^k + \alpha_{4,P_b}^k D_4^k \\
B_{P_c,P}^k &= \sum_{\{f \in \psi_{P_c,20}\}} \alpha_{f,17}^k D_f^k = \alpha_{9,P_c}^k D_9^k + \alpha_{10,P_c}^k D_{10}^k + \alpha_{11,P_c}^k D_{11}^k \\
H_P^k &= \sum_{\{f \in \Upsilon_P\}} \alpha_{f,20}^k D_f^k = \alpha_{4,P}^k D_4^k + \alpha_{5,P}^k D_5^k + \alpha_{6,P}^k D_6^k + \alpha_{7,P}^k D_7^k + \alpha_{8,P}^k D_8^k + \alpha_{9,P}^k D_9^k
\end{aligned}$$

Ainsi, à partir de ces coefficients on peut définir l'expression de L_P^k :

$$L_P^k \underbrace{[\kappa_P \Delta \Omega^k V_p + H_P^k]}_{a_P^k} = - \underbrace{[L_{P_a}^k B_{P_a,P}^k + L_{P_b}^k B_{P_b,P}^k + L_{P_c}^k B_{P_c,P}^k]}_{b_P^k} + \underbrace{\kappa_P L^o(T_p) \Delta \Omega^k V_p - \sum_{f=1}^{N_f} C_{f,P}^k}_{c_P^k}$$

B.2 Résolution itérative noeud par noeud et résolution matricielle sur un exemple 2D

Pour illustrer l'ensemble E_c^k sur un exemple, nous considérons un maillage 2D (renuméroté suivant la direction $\vec{\Delta}^k$) donné par la figure B.3. Alors, nous avons :

$$E_c^k = \{6, 7, 8, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\} \quad (\text{B.5})$$

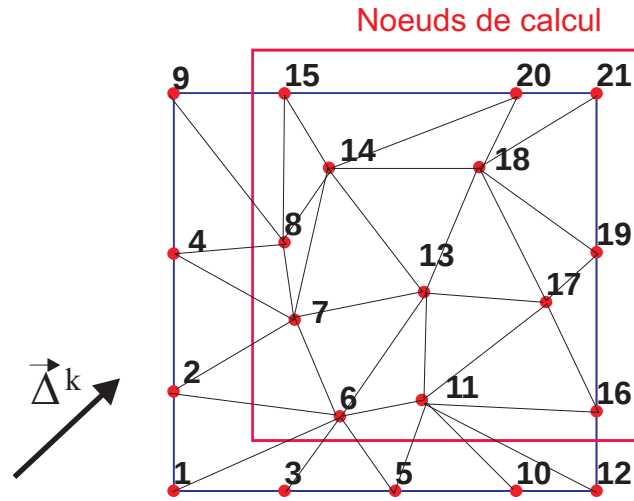


FIGURE B.3 – Maillage 2D, renumérotation et noeuds de calcul suivant la direction $\vec{\Delta}^k$

B.2.1 Résolution itérative noeud par noeud

Il vient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
L_6^k &= \frac{1}{a_6^k} (-L_1^k B_{1,6}^k - L_2^k B_{2,6}^k - L_3^k B_{3,6}^k - L_5^k B_{5,6}^k + c_6^k) \\
L_7^k &= \frac{1}{a_7^k} (-L_2^k B_{2,7}^k - L_4^k B_{4,7}^k - L_6^k B_{6,7}^k + c_7^k) \\
L_8^k &= \frac{1}{a_8^k} (-L_4^k B_{4,8}^k - L_7^k B_{7,8}^k + c_8^k) \\
L_{11}^k &= \frac{1}{a_{11}^k} (-L_5^k B_{5,11}^k - L_6^k B_{6,11}^k - L_{10}^k B_{10,11}^k + c_{11}^k) \\
L_{13}^k &= \frac{1}{a_{13}^k} (-L_6^k B_{6,13}^k - L_7^k B_{7,13}^k - L_{11}^k B_{11,13}^k + c_{13}^k) \\
L_{14}^k &= \frac{1}{a_{14}^k} (-L_7^k B_{7,14}^k - L_8^k B_{8,14}^k - L_{13}^k B_{13,14}^k + c_{14}^k) \\
L_{15}^k &= \frac{1}{a_{15}^k} (-L_8^k B_{8,15}^k - L_9^k B_{9,15}^k - L_{14}^k B_{14,15}^k + c_{15}^k) \\
L_{16}^k &= \frac{1}{a_{16}^k} (-L_{11}^k B_{11,16}^k - L_{12}^k B_{12,16}^k + c_{16}^k) \\
L_{17}^k &= \frac{1}{a_{17}^k} (-L_{11}^k B_{11,17}^k - L_{13}^k B_{13,17}^k - L_{16}^k B_{16,17}^k + c_{17}^k) \\
L_{18}^k &= \frac{1}{a_{18}^k} (-L_{13}^k B_{13,18}^k - L_{14}^k B_{14,18}^k - L_{17}^k B_{17,18}^k + c_{18}^k) \\
L_{19}^k &= \frac{1}{a_{19}^k} (-L_{16}^k B_{16,19}^k - L_{17}^k B_{17,19}^k - L_{18}^k B_{18,19}^k + c_{19}^k) \\
L_{20}^k &= \frac{1}{a_{20}^k} (-L_{14}^k B_{14,20}^k - L_{15}^k B_{15,20}^k - L_{18}^k B_{18,20}^k + c_{20}^k) \\
L_{21}^k &= \frac{1}{a_{21}^k} (-L_{18}^k B_{18,21}^k - L_{19}^k B_{19,21}^k - L_{20}^k B_{20,21}^k + c_{21}^k)
\end{aligned}$$

B.2.2 Résolution matricielle

Il vient les expressions suivantes :

$(E_a)_6^k = \{1, 2, 3, 5\}$	$(E_{ai})_6^k = \emptyset$	$(E_{af})_6^k = \{1, 2, 3, 5\}$
$(E_a)_7^k = \{2, 4, 6\}$	$(E_{ai})_7^k = \{6\}$	$(E_{af})_7^k = \{2, 4\}$
$(E_a)_8^k = \{4, 7\}$	$(E_{ai})_8^k = \{7\}$	$(E_{af})_8^k = \{4\}$
$(E_a)_{11}^k = \{5, 6, 10\}$	$(E_{ai})_{11}^k = \{6\}$	$(E_{af})_{11}^k = \{5, 10\}$
$(E_a)_{13}^k = \{6, 7, 11\}$	$(E_{ai})_{13}^k = \{6, 7, 11\}$	$(E_{af})_{13}^k = \emptyset$
$(E_a)_{14}^k = \{7, 8, 13\}$	$(E_{ai})_{14}^k = \{7, 8, 13\}$	$(E_{af})_{14}^k = \emptyset$
$(E_a)_{15}^k = \{8, 9, 14\}$	$(E_{ai})_{15}^k = \{8, 14\}$	$(E_{af})_{15}^k = \{9\}$
$(E_a)_{16}^k = \{11, 12\}$	$(E_{ai})_{16}^k = \{11\}$	$(E_{af})_{16}^k = \{12\}$
$(E_a)_{17}^k = \{11, 13, 16\}$	$(E_{ai})_{17}^k = \{11, 13, 16\}$	$(E_{af})_{17}^k = \emptyset$
$(E_a)_{18}^k = \{13, 14, 17\}$	$(E_{ai})_{18}^k = \{13, 14, 17\}$	$(E_{af})_{18}^k = \emptyset$
$(E_a)_{19}^k = \{16, 17, 18\}$	$(E_{ai})_{19}^k = \{16, 17, 18\}$	$(E_{af})_{19}^k = \emptyset$
$(E_a)_{20}^k = \{14, 15, 18\}$	$(E_{ai})_{20}^k = \{14, 15, 18\}$	$(E_{af})_{20}^k = \emptyset$
$(E_a)_{21}^k = \{18, 19, 20\}$	$(E_{ai})_{21}^k = \{18, 19, 20\}$	$(E_{af})_{21}^k = \emptyset$

$$X^k = \begin{pmatrix} L_6^k \\ L_7^k \\ L_8^k \\ L_{11}^k \\ L_{13}^k \\ L_{14}^k \\ L_{15}^k \\ L_{16}^k \\ L_{17}^k \\ L_{18}^k \\ L_{19}^k \\ L_{20}^k \\ L_{21}^k \end{pmatrix} \quad S^k = \begin{pmatrix} -L_1^k B_{1,6}^k - L_2^k B_{2,6}^k - L_3^k B_{3,6}^k - L_5^k B_{5,6}^k + c_6^k \\ -L_2^k B_{2,7}^k - L_4^k B_{4,7}^k + c_7^k \\ -L_4^k B_{4,8}^k + c_8^k \\ -L_5^k B_{5,11}^k - L_{10}^k B_{10,11}^k + c_{11}^k \\ c_{13}^k \\ c_{14}^k \\ -L_9^k B_{9,15}^k + c_{15}^k \\ -L_{12}^k B_{12,16}^k + c_{16}^k \\ c_{17}^k \\ c_{18}^k \\ c_{19}^k \\ c_{20}^k \\ c_{21}^k \end{pmatrix}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} a_6^k & & & & & & & & & & \\ B_{6,7}^k & a_7^k & & & & & & & & & \\ 0 & B_{7,8}^k & a_8^k & & & & & & & & \\ B_{6,11}^k & 0 & 0 & a_{11}^k & & & & & & & \\ B_{6,13}^k & B_{7,13}^k & 0 & B_{11,13}^k & a_{13}^k & & & & & & \\ 0 & B_{7,14}^k & B_{8,14}^k & 0 & B_{13,14}^k & a_{14}^k & & & & & \\ 0 & 0 & B_{8,15}^k & 0 & 0 & B_{14,15}^k & a_{15}^k & & & & \\ 0 & 0 & 0 & B_{11,16}^k & 0 & 0 & 0 & a_{16}^k & & & \\ 0 & 0 & 0 & B_{11,17}^k & B_{13,17}^k & 0 & 0 & B_{16,17}^k & a_{17}^k & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{13,18}^k & B_{14,18}^k & 0 & 0 & B_{17,18}^k & a_{18}^k & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{16,19}^k & B_{17,19}^k & B_{18,19}^k & a_{19}^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{14,20}^k & B_{15,20}^k & 0 & 0 & B_{18,20}^k & 0 & a_{20}^k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{18,21}^k & B_{19,21}^k & B_{20,21}^k & a_{21}^k \end{pmatrix}$$

Annexe C

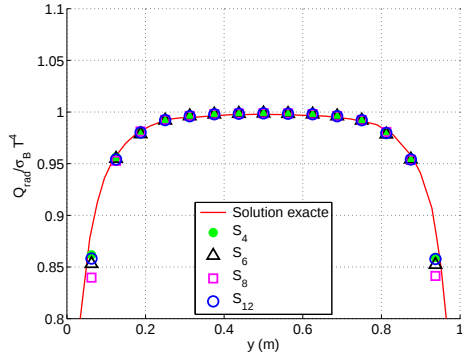
Annexe : Étude complémentaire sur la sensibilité angulaire

Nous reprenons ici deux cas d'études qui ont été présentés dans la section 3.2. De plus, nous présentons des résultats pour une discrétisation angulaire à pas constant en calculant la quantité Δ_f^k de manière numérique (annexe A.2, assimilable à un poids).

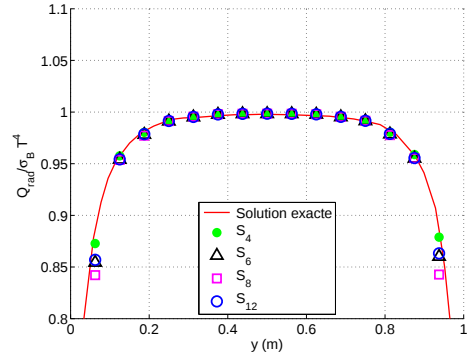
C.1 Étude de sensibilité angulaire sur l'enceinte cubique de la section 3.2.1

Nos simulations ont été effectuées sur le maillage 3 de la partie 3.2.1 (11819 noeuds et 62436 tétraèdres) et pour trois valeurs du coefficient d'absorption ($\kappa = 0.1, 1$ et $10 m^{-1}$). Les figures C.1, C.2 et C.3 représentent le flux radiatif adimensionné le long des axes A et D, comme illustré sur la figure 3.9. Les figures C.4, C.5 et C.6 montrent le terme source radiatif le long de l'axe centrale en H et I de la figure 3.9. Ces résultats montrent l'influence de la discrétisation angulaire ainsi que les problèmes de symétrie (résultats différents entre A et D).

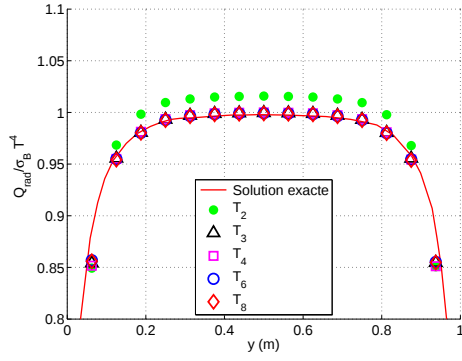
Pour $\kappa = 10 m^{-1}$, les différentes discrétisations angulaires sont en accord avec la solution exacte, à l'exception de l'axe D, où nous observons un problème de symétrie détaillé dans la section 3.2.1. Lorsque κ diminue, nous distinguons de très légers écarts avec la solution de référence. De plus, pour un faible nombre de directions, nous constatons de petites différences entre la discrétisation à pas constant calculée analytiquement et numériquement (figures C.2(e), C.2(f), C.2(g), C.2(h), C.3(e), C.3(f), C.3(g) et C.3(h)). Pour les résultats donnant le terme source radiatif, nous observons le même effet. Toutefois, il n'y a pas de problème de symétrie.



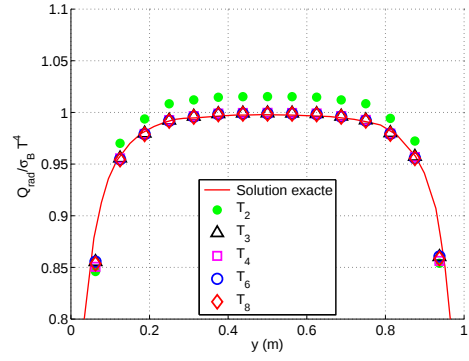
(a) Quadrature S_N , axe A



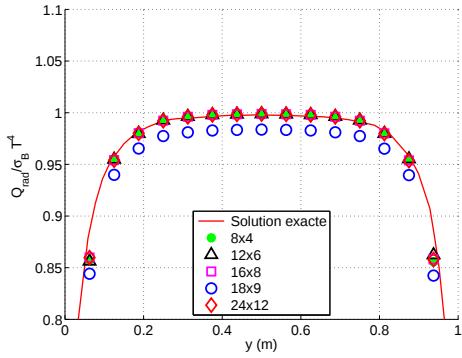
(b) Quadrature S_N axe D



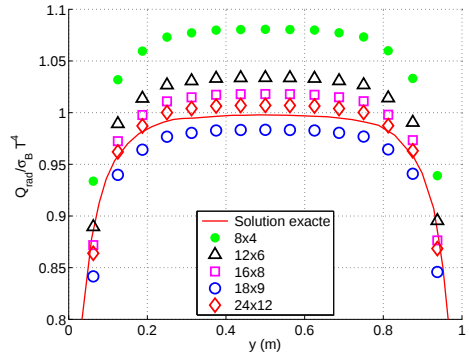
(c) Quadrature T_N , axe A



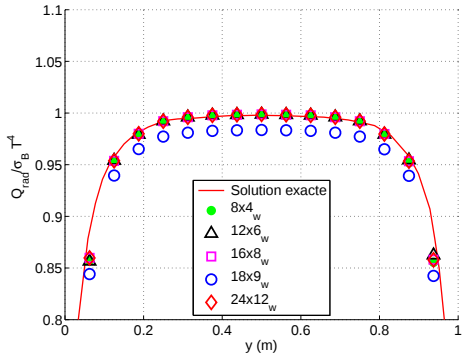
(d) Quadrature T_N , axe D



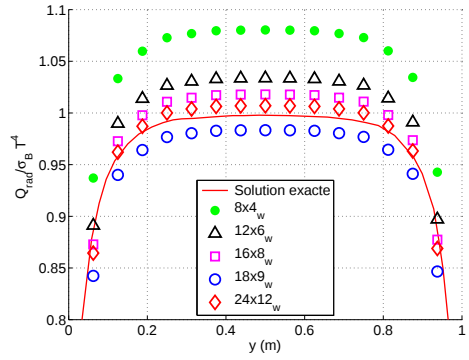
(e) Discrétisation à pas constant, axe A



(f) Discrétisation à pas constant, axe D

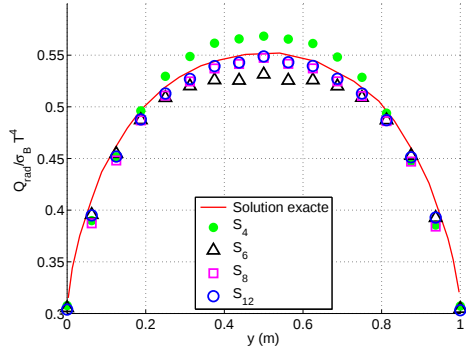


(g) Discrétisation à pas constant avec le poids, axe A

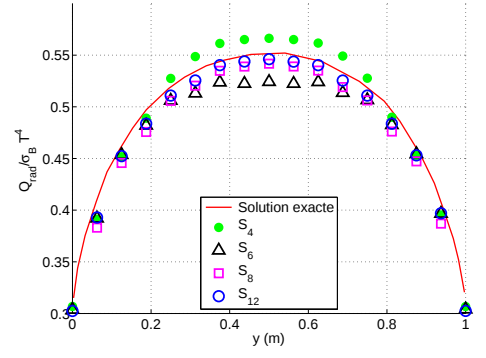


(h) Discrétisation à pas constant avec le poids, axe D

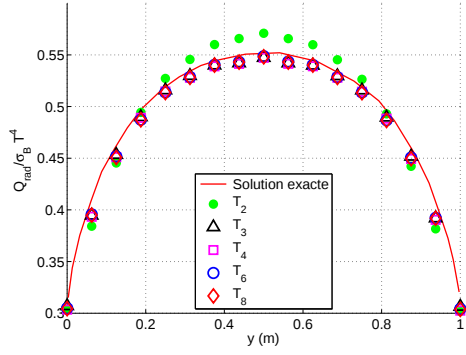
FIGURE C.1 – Flux radiatif adimensionné pour $\kappa = 10 m^{-1}$



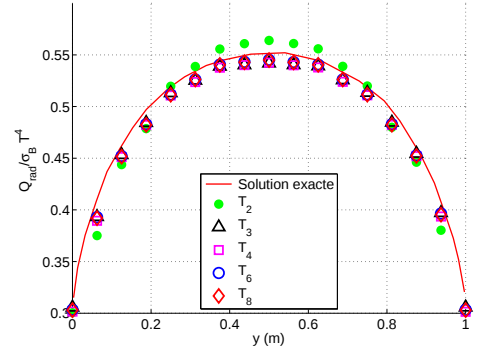
(a) Quadrature S_N , axe A



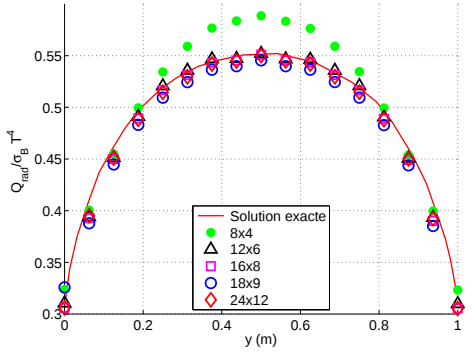
(b) Quadrature S_N axe D



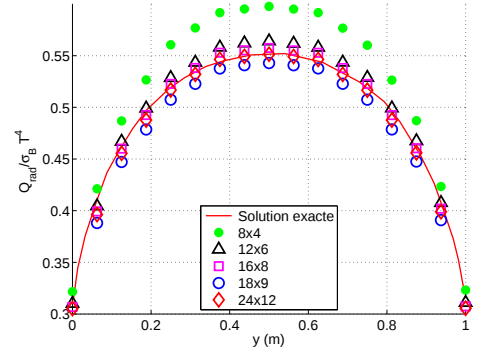
(c) Quadrature T_N , axe A



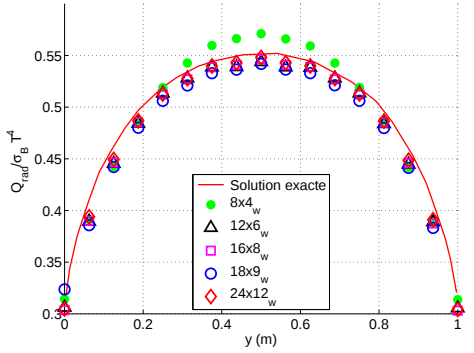
(d) Quadrature T_N , axe D



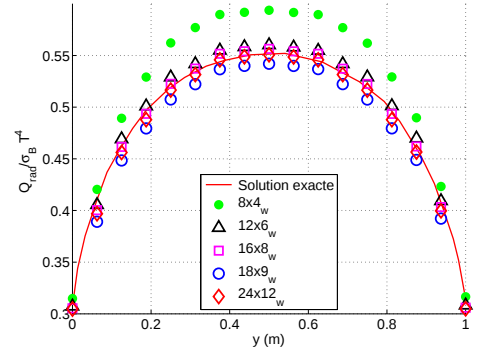
(e) Discrétisation à pas constant, axe A



(f) Discrétisation à pas constant, axe D

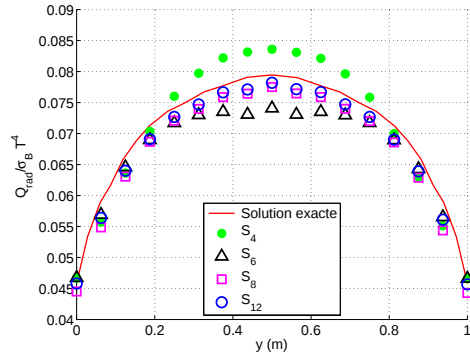


(g) Discrétisation à pas constant avec le poids, axe A

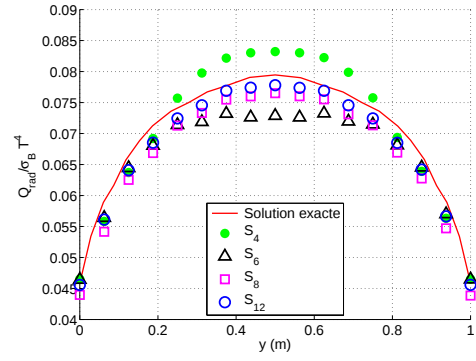


(h) Discrétisation à pas constant avec le poids, axe D

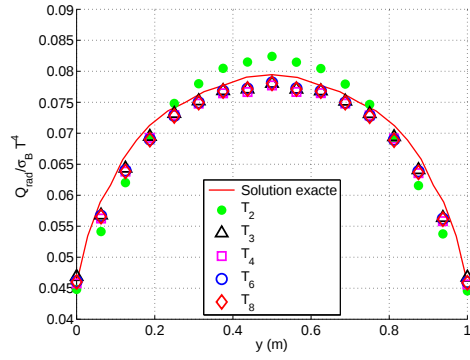
FIGURE C.2 – Flux radiatif adimensionné pour $\kappa = 1 \text{ m}^{-1}$



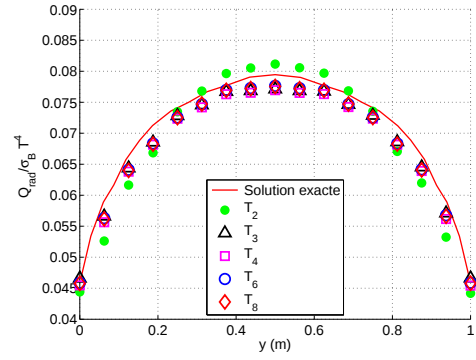
(a) Quadrature S_N , axe A



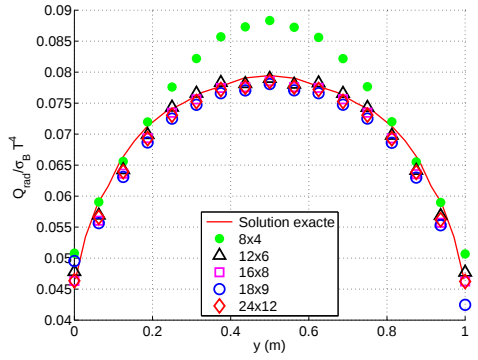
(b) Quadrature S_N axe D



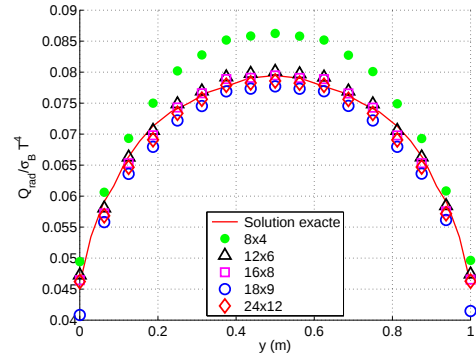
(c) Quadrature T_N , axe A



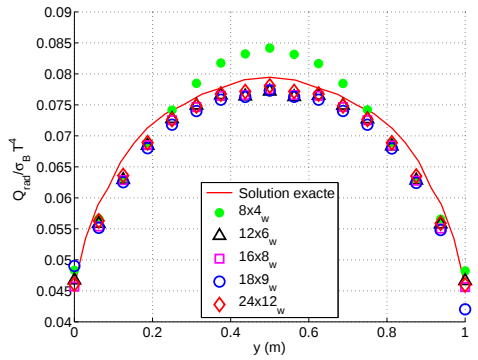
(d) Quadrature T_N , axe D



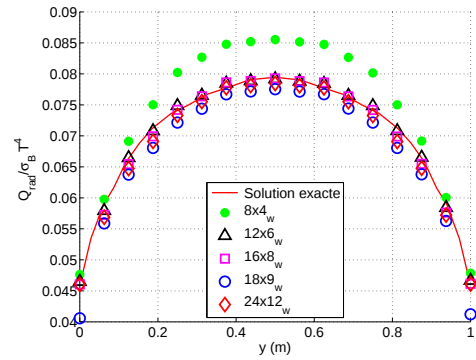
(e) Discrétisation à pas constant, axe A



(f) Discrétisation à pas constant, axe D

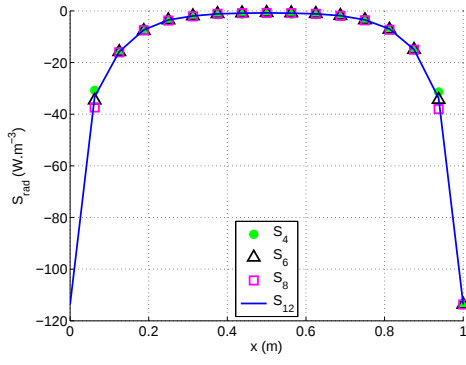


(g) Discrétisation à pas constant avec le poids, axe A

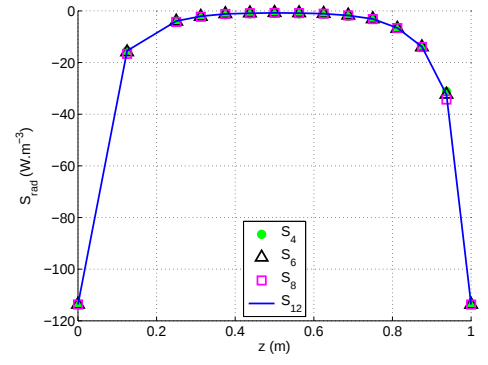


(h) Discrétisation à pas constant avec le poids, axe D

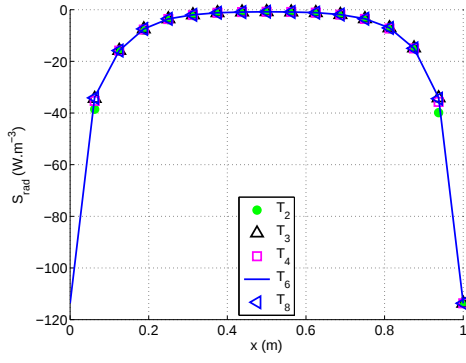
FIGURE C.3 – Flux radiatif adimensionné pour $\kappa = 0.1 \text{ m}^{-1}$



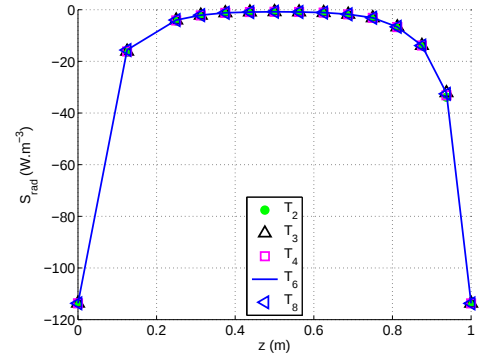
(a) Quadrature S_N , axe H



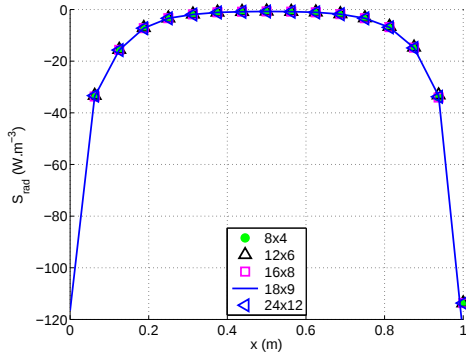
(b) Quadrature S_N axe I



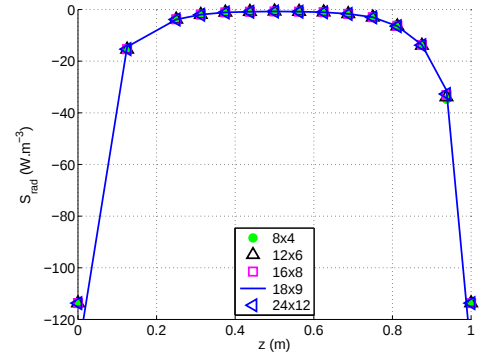
(c) Quadrature T_N , axe H



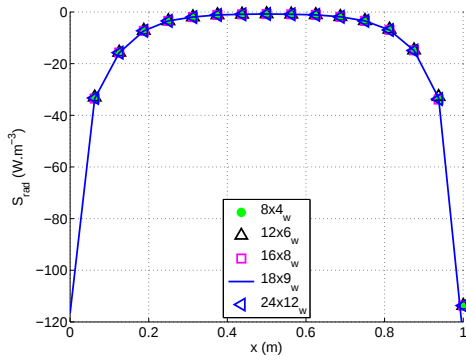
(d) Quadrature T_N , axe I



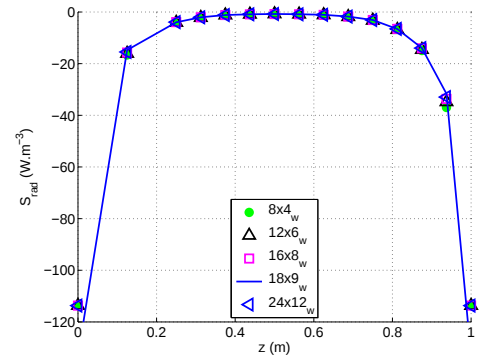
(e) Discrétisation à pas constant, axe H



(f) Discrétisation à pas constant, axe I

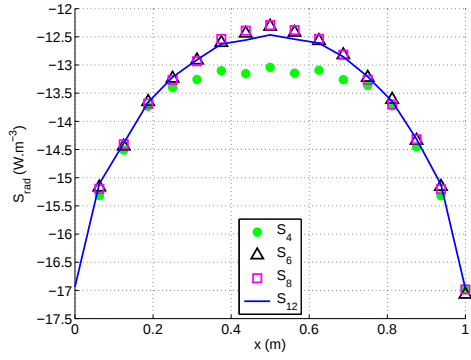


(g) Discrétisation à pas constant avec le poids, axe H

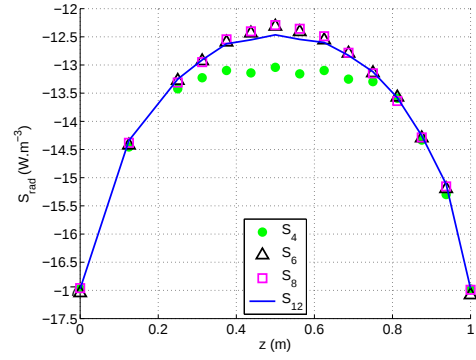


(h) Discrétisation à pas constant avec le poids, axe I

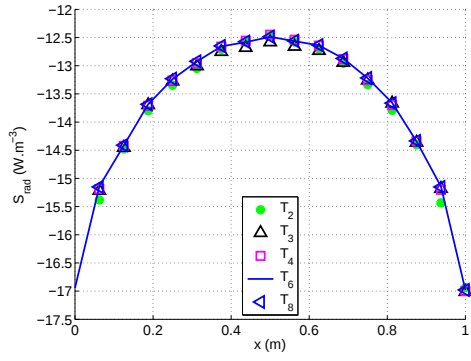
FIGURE C.4 – Terme source radiatif pour $\kappa = 10 m^{-1}$



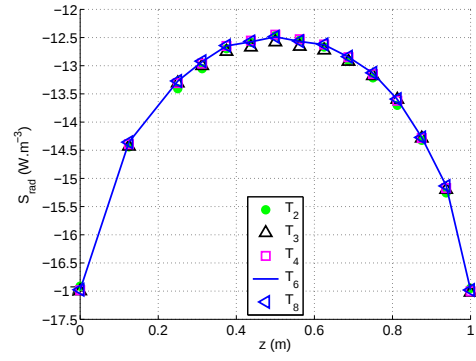
(a) Quadrature S_N , axe H



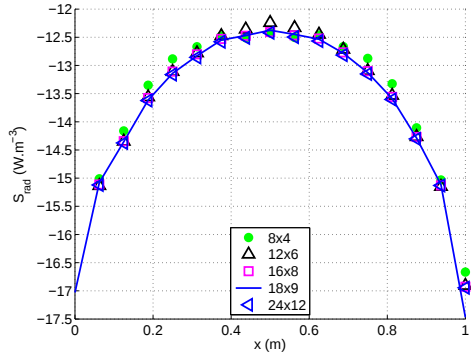
(b) Quadrature S_N axe I



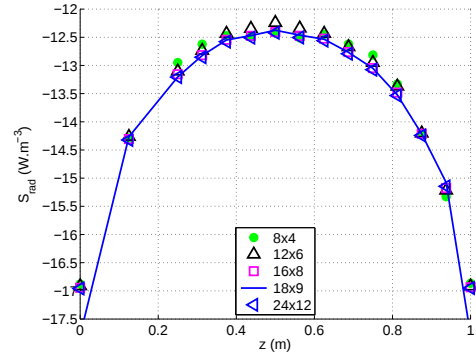
(c) Quadrature T_N , axe H



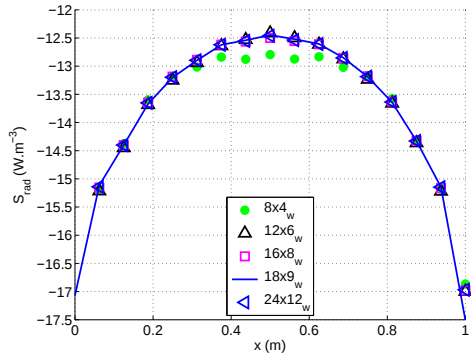
(d) Quadrature T_N , axe I



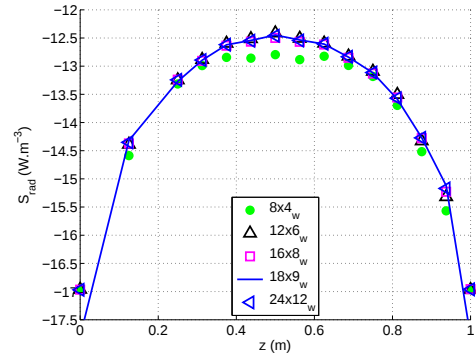
(e) Discrétisation à pas constant, axe H



(f) Discrétisation à pas constant, axe I

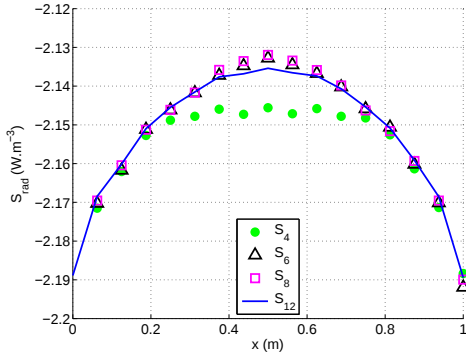


(g) Discrétisation à pas constant avec le poids, axe H

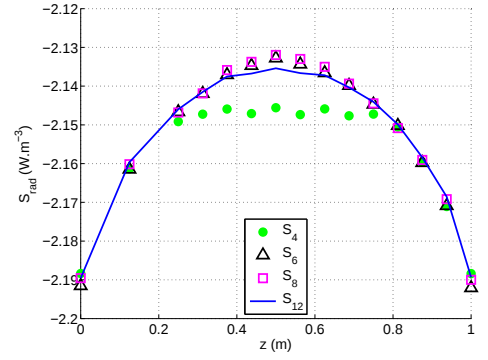


(h) Discrétisation à pas constant avec le poids, axe I

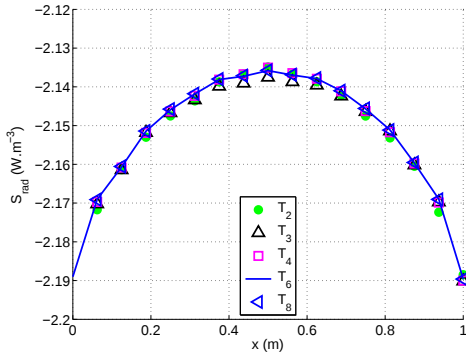
FIGURE C.5 – Terme source radiatif pour $\kappa = 1 \text{ m}^{-1}$



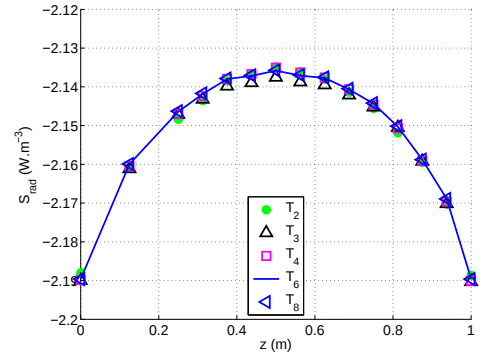
(a) Quadrature S_N , axe H



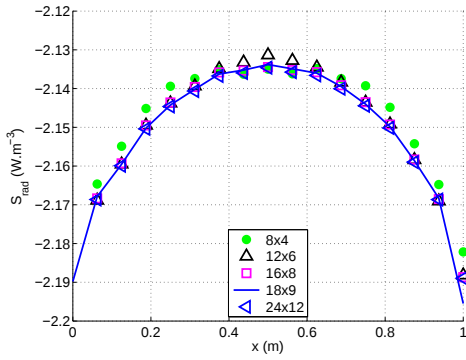
(b) Quadrature S_N axe I



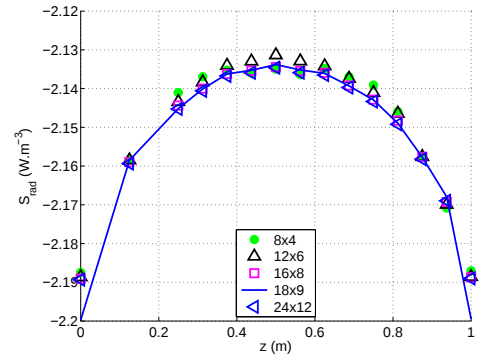
(c) Quadrature T_N , axe H



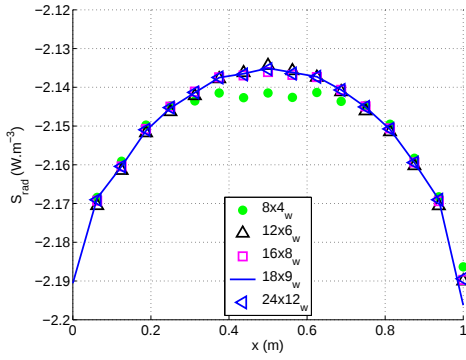
(d) Quadrature T_N , axe I



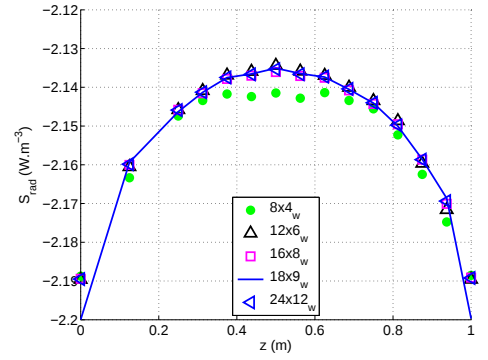
(e) Discrétisation à pas constant, axe H



(f) Discrétisation à pas constant, axe I



(g) Discrétisation à pas constant avec le poids, axe H



(h) Discrétisation à pas constant avec le poids, axe I

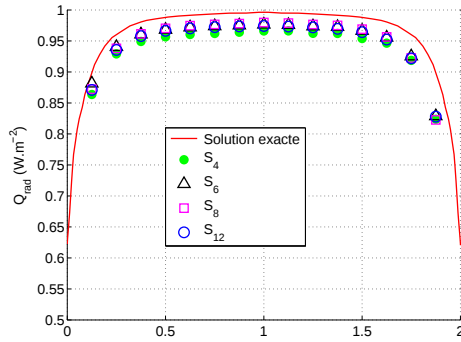
FIGURE C.6 – Terme source radiatif pour $\kappa = 0.1 \text{ m}^{-1}$

C.1.1 Étude de sensibilité angulaire sur l'enceinte cylindrique de la section 3.2.4

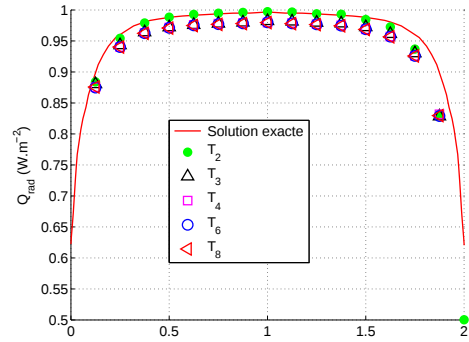
Nos simulations ont été effectuées sur un maillage en espace constitué de 4913 noeuds (24576 tétraèdres) et pour trois valeurs du coefficient d'absorption ($\kappa = 0.1, 1$ et 5 m^{-1}). Les figures C.7, C.8 et C.9 représentent le flux radiatif le long de l'axe A, comme illustré sur la figure 3.26. De plus, nous avons tracé le flux sur la circonférence du cylindre en $z = 1 \text{ m}$, figures C.10, C.11 et C.12.

Pour $\kappa = 5 \text{ m}^{-1}$, les résultats des différentes discrétisations angulaires sont très proches. En revanche, lorsque κ diminue on distingue de légers écarts, notamment entre la figure C.9(c) et C.9(d) marquant la différence entre une discrétisation angulaire à pas constant calculée analytiquement et numériquement (poids). Toutefois, ces effets sont visibles uniquement pour un faible nombre de directions.

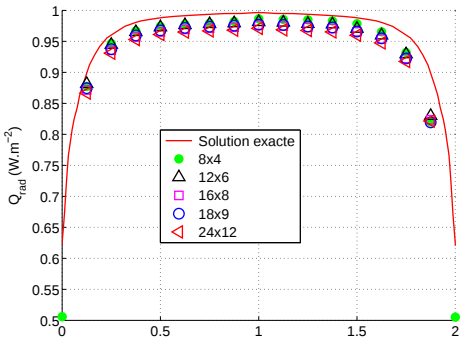
Dans le but de mieux visualiser le problème de symétrie, nous représentons le flux radiatif sur la circonférence du cylindre. Compte tenu de la symétrie axiale du problème nous devrions observer un flux constant. Or, pour toutes nos simulations nous observons une fluctuation du flux due à la discrétisation angulaire : figures C.10, C.11 et C.12. De manière générale, ces fluctuations sont moins marquées lorsque l'on raffine la discrétisation angulaire.



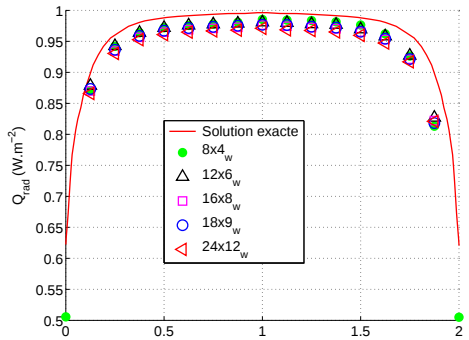
(a) Quadrature S_N



(b) Quadrature T_N

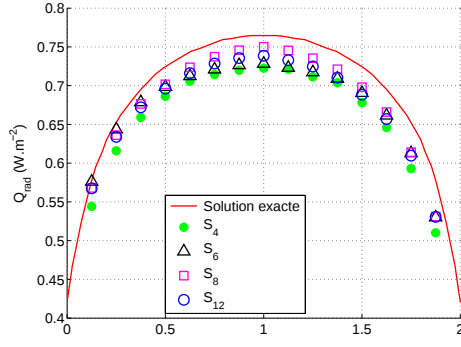


(c) Discrétisation à pas constant

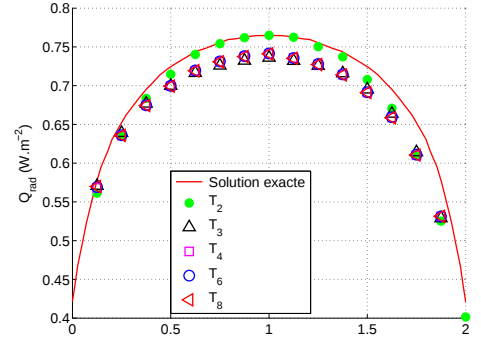


(d) Discrétisation à pas constant avec le poids

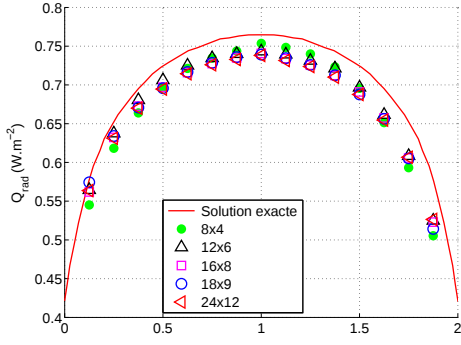
FIGURE C.7 – Flux radiatif sur l'axe A pour $\kappa = 5 \text{ m}^{-1}$



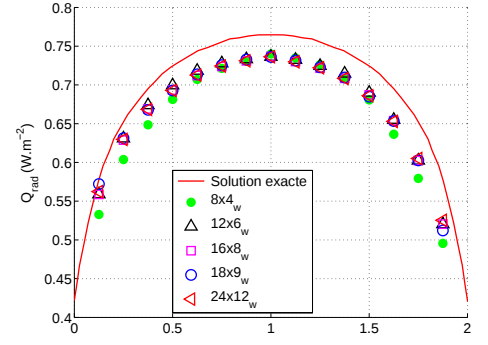
(a) Quadrature S_N



(b) Quadrature T_N

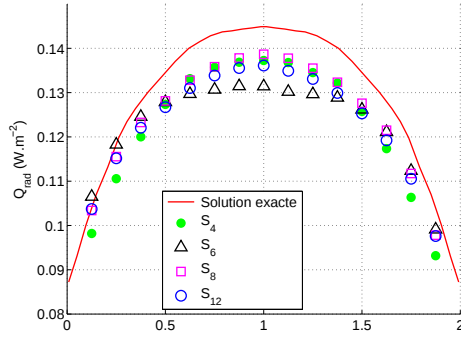


(c) Discrétisation à pas constant

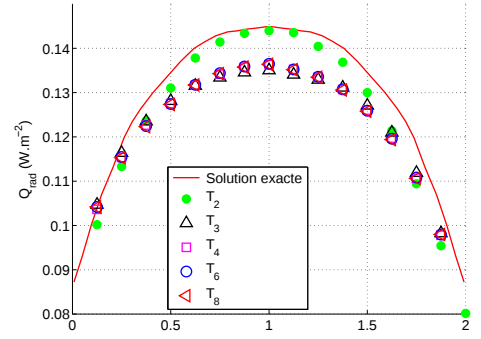


(d) Discrétisation à pas constant avec le poids

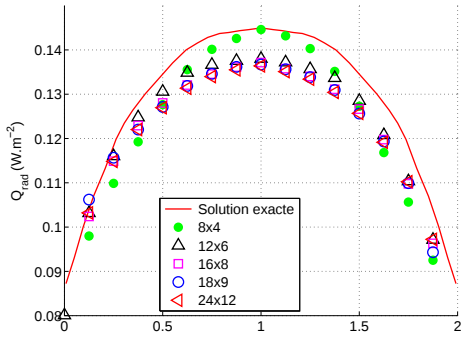
FIGURE C.8 – Flux radiatif sur l'axe A pour $\kappa = 1 m^{-1}$



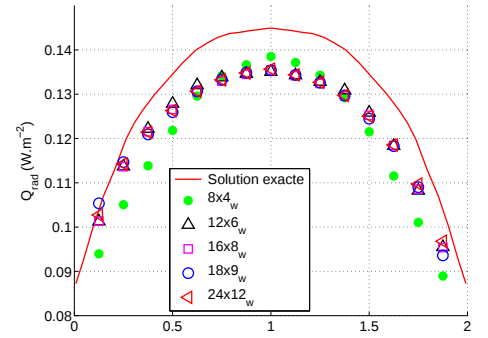
(a) Quadrature S_N



(b) Quadrature T_N

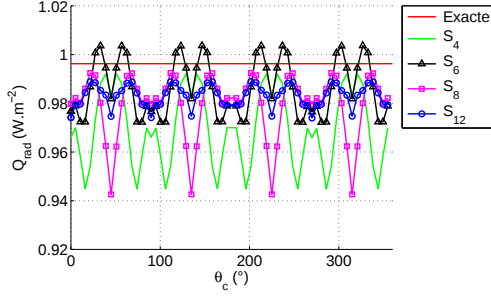


(c) Discrétisation à pas constant

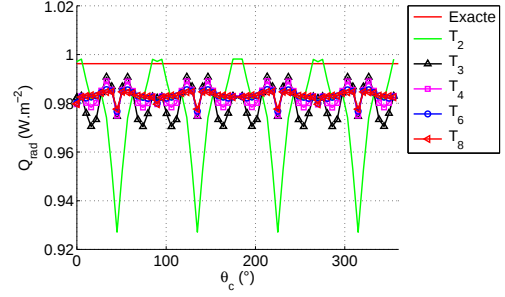


(d) Discrétisation à pas constant avec le poids

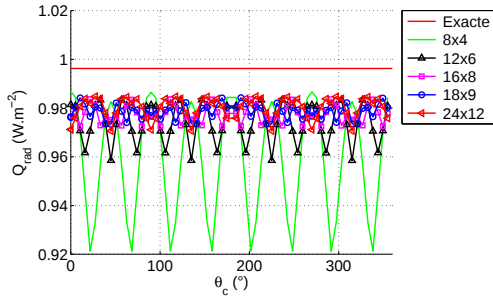
FIGURE C.9 – Flux radiatif sur l'axe A pour $\kappa = 0.1 m^{-1}$



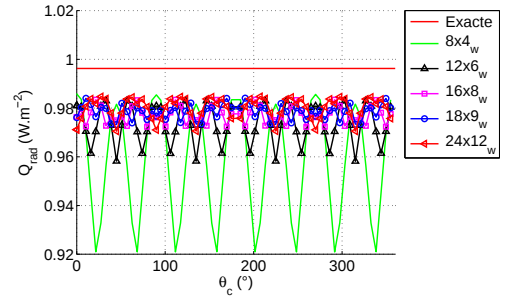
(a) Quadrature S_N



(b) Quadrature T_N

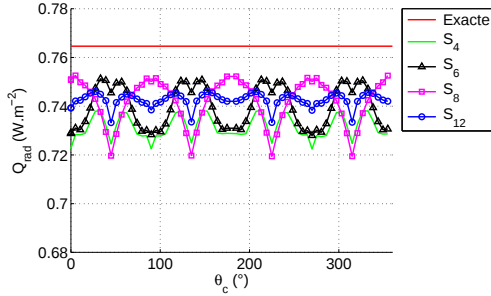


(c) Discretisation à pas constant

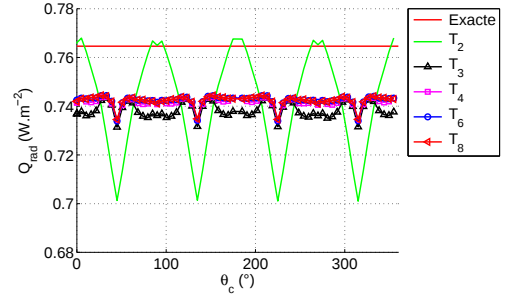


(d) Discretisation à pas constant avec le poids

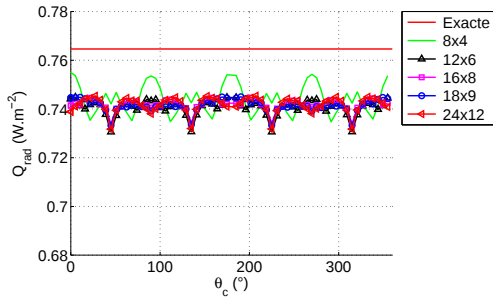
FIGURE C.10 – Flux radiatif sur la circonférence en $z = 1 \text{ m}$ pour $\kappa = 5 \text{ m}^{-1}$



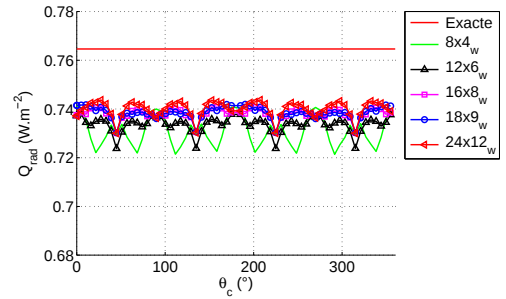
(a) Quadrature S_N



(b) Quadrature T_N

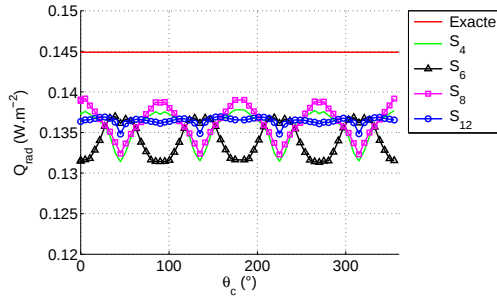


(c) Discretisation à pas constant

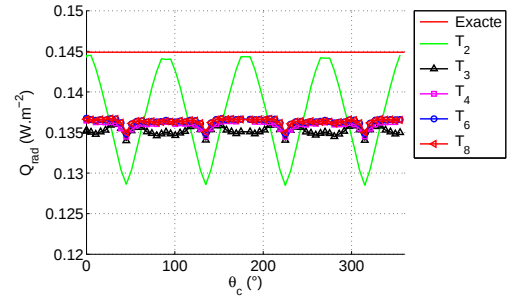


(d) Discretisation à pas constant avec le poids

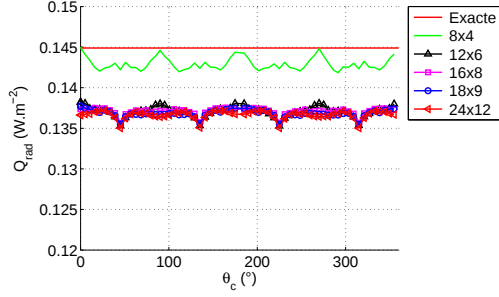
FIGURE C.11 – Flux radiatif sur la circonférence en $z = 1 \text{ m}$ pour $\kappa = 1 \text{ m}^{-1}$



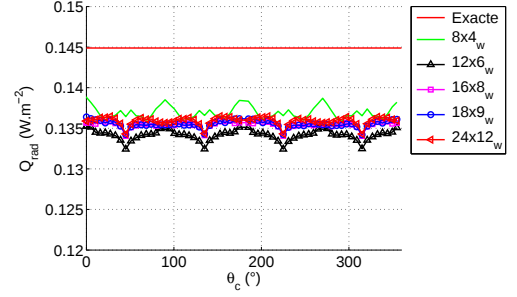
(a) Quadrature S_N



(b) Quadrature T_N



(c) Discrétisation à pas constant



(d) Discrétisation à pas constant avec le poids

FIGURE C.12 – Flux radiatif sur la circonférence en $z = 1 \text{ m}$ pour $\kappa = 0.1 \text{ m}^{-1}$

Bibliographie

- [1] N. Berour. *Modélisation du transfert de chaleur par rayonnement, conduction et convection. Application aux fours verriers*. PhD thesis, Université Henri Poincaré Nancy 1, France, 2005.
- [2] F. Asllanaj, V. Feldheim, and P. Lybaert. Solution of radiative heat transfer in 2-d geometries by a modified finite volume method based on a cell vertex scheme using unstructured triangular meshes. *Numer. Heat Transfer B*, 51(2) :97–119, 2007.
- [3] F. Asllanaj, G. Parent, and G. Jeandel. Transient radiation and conduction heat transfer in a gray absorbing-emitting medium applied on two-dimensional complex shaped domains. *Numer. Heat Transfer B*, 52(2) :179–200, 2007.
- [4] F. Asllanaj, L. Soudre, Y. Meshaka, and G. Jeandel. Computational model based on unstructured triangular grids for transient two-dimensional radiative and conductive heat exchanges in glass. *Numer. Heat Transfer A*, 2009.
- [5] F. Asllanaj. *Modélisation et simulation numérique du rayonnement et des transferts couplés dans les milieux semi-transparentes complexes. Application à l'isolation thermique et à la mise en forme du verre*. Mémoire d'HDR, Université Henri Poincaré, Nancy, 2009.
- [6] H.Q. Nguyen. *Modélisation et simulation du remplissage de moules verriers : Prise en compte du transfert radiatif*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 2009.
- [7] D. Joseph, M. El Hafi, R. Fournier, and B. Cuenot. Comparison of three spatial differencing schemes in discrete ordinates method using three-dimensional unstructured meshes. *Int. J. Thermal Sciences*, 44 :851–864, 2005.
- [8] H. Grissa, F. Askri, M. Ben Salah, and S. Ben Nasrallah. Prediction of radiative heat transfer in 3d complex geometries using the unstructured control volume finite element method. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 111(1) :144–154, 2010.
- [9] K. Kim, E. Lee, and T. H. Song. Discrete ordinates interpolation method for radiative heat transfer problems in three-dimensional enclosures filled with non-gray or scattering medium. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, (109-15) :2579–2589, 2008.
- [10] M. Sakami, A. Charette, and V. LeDez. Application of the discrete ordinates method to combined conductive and radiative heat transfer in a two-dimensional complex geometry. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 56 :517–533, 1996.
- [11] R. Capdevila, C. D. Pérez-Segarra, and A. Oliva. Development and comparison of different spatial numerical schemes for the radiative transfer equation resolution using three-dimensional unstructured meshes computation. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, (111-2) :264–273, 2010.

- [12] E. H. Chui and G. D. Raithby. Computation of radiant heat transfer on a nonorthogonal mesh using the finite volume method. *Numer. Heat Transfer B*, 23 :269–288, 1993.
- [13] D. R. Rousse. Numerical predictions of two-dimensional conduction, convection and radiation heat transfer. i. formulation. *Int. J. Thermal Sciences*, 39 :315–331, 2000.
- [14] M. F. Modest. *Radiative Heat Transfer (second edition)*. McGraw Hill International Editions, New York, 2003.
- [15] S. S. Dua and P. Cheng. Exact solutions for multi-dimensional radiative transfer in non-isothermal spherical media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 18 :245–259, 1975.
- [16] A. L. Crosbie and R. G. Schrenker. Exact expressions for radiative transfer in a three-dimensional rectangular geometry. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 28(6) :507–526, 1982.
- [17] N. Selcuk. Exact solutions for radiative heat transfer in box-shaped furnaces. *J. Heat Transfer*, 107(3) :648–655, 1985.
- [18] J. T. Farmer and J. R. Howell. Monte carlo solution of radiative heat transfer in a three-dimensional enclosure with an anisotropically scattering, spectrally dependent, inhomogeneous medium. In *American Society of Mechanical Engineers, Heat Transfer Division, (Publication) HTD 203*, pages 301–309, 1992.
- [19] J. R. Howell. The monte carlo method in radiative heat transfer. *J. Heat Transfer*, 120(3) :547–560, 1998.
- [20] F. Lockwood and N. Shah. A new radiation solution method for incorporation in general combustion prediction procedures. In *In Eighteenth International Symposium on Combustion. The Combustion Institute*, 1981.
- [21] W. M. G. Malalasekera and E. H. James. Calculation of radiative heat transfer in three-dimensional complex geometries. In *American Society of Mechanical Engineers, Heat Transfer Division, (Publication) HTD 315 (13)*, 1995.
- [22] W. M. G. Malalasekera and E. H. James. Radiative heat transfer calculations in three-dimensional complex geometries. *J. Heat Transfer*, 118(1) :225–228, 1996.
- [23] H. Farhat and M. S. Radhouani. Etude tridimensionnelle du transfert radiatif dans un milieu semi-transparent diffusant anisotrope par la méthode des transferts discrets modifiées. *Rev. Gén. Therm.*, 36(5) :330–344, 1997.
- [24] P. J. Coelho. Numerical simulation of radiative heat transfer from non-gray gases in three-dimensional enclosures. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 74(3) :307–328, 2002.
- [25] V. Feldheim and P. Lybaert. Solution of radiative heat transfer problems with the discrete transfer method applied to triangular meshes. *J. Comput. App. Math.*, 168 :179–190, 2004.
- [26] J. Yang and M. F. Modest. Elliptic pde formulation of general, three-dimensional high-order pn-approximations of radiative transfer. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 104(2) :217–227, 2007.
- [27] M. F. Modest and J. Yang. Elliptic pde formulation and boundary conditions of the spherical harmonics method of arbitrary order for general three-dimensional geometries. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 109(9) :1641–1666, 2008.

- [28] H. M. Park, R. K. Ahluwalia, and K. H. Im. Three-dimensional radiation in absorbing-emitting-scattering media using the modified differential approximation. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 36(5) :1181–1189, 1993.
- [29] M. F. Modest. Modified differential approximation for radiative transfer in general three-dimensional media. *J. Thermophys. Heat Transfer*, 3(3) :283–288, 1989.
- [30] M. Ravishankar, S. Mazumder, and M. Sankar. Application of the modified differential approximation for radiative transfer to arbitrary geometry. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 111(14) :2052–2069, 2010.
- [31] S. Chandrasekhar. *Radiative Transfer*. Oxford University Press, 1950.
- [32] W. Fiveland. Discrete ordinates solutions of the radiative transport equation for rectangular enclosures. *J. Heat Transfer*, 106 :699–706, 1984.
- [33] M. P. Menguc and R. Viskanta. Radiative transfer in three-dimensional rectangular enclosures containing inhomogeneous, anisotropically scattering media. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 33(6) :533–549, 1985.
- [34] W. Fiveland. Three-dimensional radiative heat transfer solutions by the discrete-ordinates method. *J. Thermophys.*, 2(4) :309–316, 1988.
- [35] A. S. Jamaluddin and P. J. Smith. Predicting radiative transfer in rectangular enclosures using the discrete ordinates method. *Compos. Sc. Tech.*, 59 :321–340, 1988.
- [36] J. S. Truelove. Three-dimensional radiation in absorbing-emitting-scattering media using the discrete-ordinates approximation. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 39(1) :27–31, 1988.
- [37] W. A. Fiveland and A. S. Jamaluddin. Three-dimensional spectral radiative heat transfer solutions by the discrete-ordinates method. *J. Thermophys. Heat Transfer*, 5(3) :335–339, 1991.
- [38] B. R. Adams and P. J. Smith. Three-dimensional discrete-ordinates modeling of radiative transfer in a geometrically complex furnace. *Compos. Sc. Tech.*, 88(5-6) :293–308, 1993.
- [39] N. Selcuk and N. Kayakol. Evaluation of discrete ordinates method for radiative transfer in rectangular furnaces. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 40(2) :213–222, 1997.
- [40] M. A. Ramankutty and A. L. Crosbie. Modified discrete-ordinates solution of radiative transfer in three-dimensional rectangular enclosures. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 60(1) :103–134, 1998.
- [41] R. Koch, W. Krebs, S. Wittig, and R. Viskanta. Discrete ordinates quadrature schemes for multidimensional radiative transfer. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 53(4) :353–372, 1995.
- [42] C. P. Thurgood, A. Pollard, and H. A. Becker. Tn quadrature set for the discrete ordinates method. *J. Heat Transfer*, 117(4) :1068–1070, 1995.
- [43] B. W. Li, Q. Yao, X. Y. Cao, and K. F. Cen. A new discrete ordinates quadrature scheme for three-dimensional radiative heat transfer. *J. Heat Transfer*, 120(2) :514–518, 1998.
- [44] R. Koch and R. Becker. Evaluation of quadrature schemes for the discrete ordinates method. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 84(4) :423–435, 2004.

- [45] J. C. Chai, H. S. Lee, and S. V. Patankar. Ray effect and false scattering in the discrete ordinates method. *Numer. Heat Transfer B*, 24(4) :373–389, 1993.
- [46] F. Liu, H. A. Becker, and A. Pollard. Spatial differencing schemes of the discrete-ordinates method. *Numer. Heat Transfer B*, 30(1) :23–43, 1996.
- [47] D. Balsara. Fast and accurate discrete ordinates methods for multidimensional radiative transfer. part i, basic methods. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 69(6) :671–707, 2001.
- [48] H. S. Li and G. Flamant. Reduction of false scattering of the discrete ordinates method. *J. Heat Transfer*, 124(5) :837–844, 2002.
- [49] P. J. Coelho. The role of ray effects and false scattering on the accuracy of the standard and modified discrete ordinates methods. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 73(2-5) :231–238, 2002.
- [50] M. Sakami, A. Charette, and V. LeDez. Radiative heat transfer in three-dimensional enclosures of complex geometry by using the discrete-ordinates method. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 59(1-2) :117–136, 1998.
- [51] M. Sakami and A. Charette. A new differencing scheme for the discrete-ordinates method in complex geometries. *Rev. Gén. Therm.*, 37(6) :440–449, 1998.
- [52] D. Joseph, P. J. Coelho, B. Cuenot, and M. El Hafi. Application of the discrete ordinates method to grey media in complex geometries using unstructured meshes. In *Computational Thermal Radiation in Participating Media*, Mons BELGIUM, 15-17 April 2003.
- [53] D. Joseph. *Modélisation des transferts radiatifs en combustion par méthode aux ordonnées discrètes sur des maillages non-structurés tridimensionnels*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, Albi, 2004.
- [54] G. D. Raithby and E. H. Chui. A finite volume method for predicting radiant heat transfer in enclosures with participating media. *J. Heat Transfer*, 112 :415–423, 1990.
- [55] J. C. Chai, H. S. Lee, and S. V. Patankar. Finite volume method for radiation heat transfer. *J. Thermophys. Heat Transfer*, 8(3) :419–425, 1994.
- [56] S. W. Baek, M. Y. Kim, and J. S. Kim. Nonorthogonal finite-volume solutions of radiative heat transfer in a three-dimensional enclosure. *Numer. Heat Transfer B*, 34(4) :419–437, 1998.
- [57] J. Y. Murthy and S. R. Mathur. Finite volume method for radiative heat transfer using unstructured meshes. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 12(3) :313–321, 1998.
- [58] G. D. Raithby. Discussion of the finite volume method for radiation and its application using 3d unstructured meshes. *Numer. Heat Transfer B*, 35 :289–405, 1999.
- [59] S. H. Kim and K. Y. Huh. Assessment of the finite-volume method and the discrete ordinate method for radiative heat transfer in a three-dimensional rectangular enclosure. *Numer. Heat Transfer B*, 35(1) :85–112, 1999.
- [60] J. Liu, H. M. Shang, and Y. S. Chen. Development of an unstructured radiation model applicable for two-dimensional planar, axisymmetric, and three-dimensional geometries. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 66(1) :17–33, 2000.
- [61] S. H. Kim and K. Y. Huh. A new angular discretization scheme of the finite volume method for 3-d radiative heat transfer in absorbing, emitting and anisotropically scattering media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 43(7) :1233–1242, 2000.

- [62] M. Y. Kim and S. W. Baek. Modeling of radiative heat transfer in an axisymmetric cylindrical enclosure with participating medium. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 90 :377–388, 2005.
- [63] P. Talukdar, M. Steven, F.V. Issendorff, and D. Trimis. Finite volume method in 3-d curvilinear coordinates with multiblocking procedure for radiative transport problems. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 48(21-22) :4657–4666, 2005.
- [64] X. Y. Zhang. Radiative transfer in 3-d enclosure with inhomogeneous participating medium with unstructured fvm. In *IEEE Aerospace Conference Proceedings*, 2010.
- [65] K. B. Cheong and T. H. Song. An alternative discrete ordinates method with interpolation and source differencing for two-dimensional radiative transfer problems. *Numer. Heat Transfer B*, 32(1) :107–125, 1997.
- [66] S. H. Seo and T. K. Kim. Study on interpolation schemes of the discrete ordinates interpolation method for three-dimensional radiative transfer with nonorthogonal grids. *J. Heat Transfer*, 120(4) :1091–1094, 1998.
- [67] H. Cha and T. H. Song. Discrete ordinates interpolation method applied to irregular three-dimensional geometries. *J. Heat Transfer*, 122(4) :823–827, 2000.
- [68] A. Sakurai, T. H. Song, S. Maruyama, and H. K. Kim. Comparison of radiation element method and discrete ordinates interpolation method applied to three dimensional radiative heat transfer. *JSME Int. J., Series B : Fluids and Ther. Eng.*, 48(2) :259–264, 2005.
- [69] M. M. Razzaque, J. R. Howell, and D. E. Klein. Coupled radiative and conductive heat transfer in a two-dimensional rectangular enclosure with gray participating media using finite elements. *J. Heat Transfer*, 106 :613–619, 1984.
- [70] W. Fiveland and J. P. Jessee. Finite element formulation of the discrete-ordinates method for multidimensional geometries. *J. Thermophys. Heat Transfer*, 8 :426–433, 1984.
- [71] W. An, L. M. Ruan, and L. H. Liu. Finite element method for radiative heat transfer in absorbing and anisotropic scattering media. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 96 :409–422, 2005.
- [72] P. J. Coelho. A hybrid finite volume/finite element discretization method for the solution of the radiative heat transfer equation. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 93(1-3 SPEC. ISS.) :89–101, 2005.
- [73] S. H. Kang and T. H. Song. Finite element formulation of the first- and second-order discrete ordinates equations for radiative heat transfer calculation in three-dimensional participating media. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 109 :2094–2107, 2008.
- [74] S. Maruyama, A. Sakuria, and A. Komiya. Discrete ordinates radiation element method for radiative heat transfer in three-dimensional participating media. *Numer. Heat Transfer B*, 51(2) :121–140, 2007.
- [75] S. Maruyama and T. Aihara. Radiation heat transfer of arbitrary three-dimensional absorbing, emitting and scattering media and specular and diffuse surfaces. *J. Heat Transfer*, 119(1) :129–136, 1997.

- [76] S. Maruyama and Z. Guo. Radiative heat transfer in inhomogeneous, nongray, and anisotropically scattering media. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 43(13) :2325–2336, 2000.
- [77] S. Maruyama, Y. Takeuchi, S. Sakai, and Z. Guo. Improvement of computational time in radiative heat transfer of three-dimensional participating media using the radiation element method. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 73(2-5) :239–248, 2002.
- [78] H. Grissa, F. Askri, M. Ben Salah, and S. Ben Nasrallah. Three-dimensional radiative transfer modeling using the control volume finite element method. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 105(3) :388–404, 2007.
- [79] D. R. Rousse. Numerical method for conduction-convection-radiation heat transfer in three-dimensional geometries. In *Proceedings of 2nd European Thermal Sciences and 14th UIT Conference*, Rome, 1996. pp 1425-1432.
- [80] C. A. Wang, H. Sadat, V. Ledez, and D. Lemonnier. Meshless method for solving radiative transfer problems in complex two-dimensional and three-dimensional geometries. *Int. J. Thermal Sciences*, 49(12) :2282–2288, 2010.
- [81] N. Selçuk and G. Kirbas. The method of lines solution of the discrete ordinates method for radiative heat transfer in enclosures. *Numer. Heat Transfer B*, 37(3) :379–392, 2000.
- [82] I. Ayranci and N. Selçuk. Mol solution of dom for transient radiative transfer in 3-d scattering media. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 84(4) :409–422, 2004.
- [83] G. Demirkaya, F. Arinç, N. Selçuk, and I. Ayranci. Comparison between performances of monte carlo method and method of lines solution of discrete ordinates method. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 93(1-3 SPEC. ISS.) :115–124, 2005.
- [84] N. Selçuk and N. Doner. A 3-d radiation model for non-grey gases. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 110(3) :184–191, 2009.
- [85] Z. Altac and M. Tekkalmaz. Benchmark solutions of radiative transfer equation for three-dimensional rectangular homogeneous media. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 109(4) :587–607, 2008.
- [86] K.D. Lathrop and B.G. Carlson. *Discrete-ordinates angular quadrature of the neutron transport equation*. Technical information Series Report LASL-3186, Los Alamos Scientific Laboratory, 1965.
- [87] B.G. Carlson. *Tables of equal weight quadrature over the unit sphere*. Technical information Series Report LASL-4737, Los Alamos Scientific Laboratory, 1971.
- [88] W. A. Fiveland. Discrete ordinate methods for radiative heat transfer in isotropically and anisotropically scattering media. *J. Heat Transfer*, 109(3) :809–812, 1982.
- [89] J. S. Truelove. Discrete-ordinate solutions of the radiation transport equation. *J. Heat Transfer*, 109(4) :1048–1051, 1987.
- [90] D. Rousse. *Numerical predictions of multidimensional conduction, convection and radiation heat transfer in participating media*. PhD thesis, McGill University, Montréal, Canada, 1994.
- [91] F. Asllanaj, L. Soudre, Y. Meshaka, and G. Jeandel. Simulation of transient two-dimensional radiative and conductive heat exchanges in hight-temperature glass. In

Proceedings of CHT-08, ICHMT International Symposium on Advances in Computational Heat Transfer, Marrakech, 2008.

- [92] W.F. Godoy and P.E. DesJardin. On the use of flux limiters in the discrete ordinates method for 3d radiation calculations in absorbing and scattering media. *J. Comput. Phys.*, 229(9) :3189–3213, 2010.
- [93] M.E. Larsen. *The exchange factor method : an alternative zonal formulation for analysis of radiating enclosures containing participating media*. PhD thesis, University of Texas, Austin, Texas, 1983.
- [94] H.C. Hottel and A.F. Sarofim. *Radiative Transfer*. McGraw-Hill, New York, 1967.
- [95] P. F. Hsu and Z. Tan. Radiative and combined-mode heat transfer within l-shaped nonhomogeneous and nongray participating media. *Numer. Heat Transfer A*, 31(8) :819–835, 1997.
- [96] K. Guedri, M.N. Borjini, and H. Farhat. Modelization of combined radiative and conductive heat transfer in three-dimensional complex enclosures. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 15(3) :257–276, 2004.
- [97] P. Talukdar, F.V. Issendorff, D. Trimis, and C.J. Simonson. Conduction-radiation interaction in 3d irregular enclosures using the finite volume method. *Heat Mass Transfer*, 44(6) :695–704, 2008.
- [98] B. Mondal and S. C. Mishra. Analysis of 3-d conduction-radiation heat transfer using the lattice boltzmann method. *J. Thermophys. Heat Transfer*, 23(1) :210–215, 2009. Technical Notes.

Résumé

Ce travail porte sur la résolution numérique des transferts couplés par rayonnement et conduction au sein d'un milieu semi-transparent pour une géométrie 3D de forme complexe. Le rayonnement thermique est simulé par un code de calcul développé durant cette thèse. Ce code résout l'équation du transfert radiatif (ETR) par une méthode aux volumes finis (MVF) avec une formulation " cell-vertex " s'appliquant à des maillages tétraédriques non structurés. Il utilise un schéma de fermeture de type exponentiel, un ordre de parcours ainsi qu'une résolution matricielle innovante pour la MVF appliquée à l'ETR. Le modèle mis en place traite des milieux absorbants, émettants, gris ou non-gris bordés par des surfaces noires ou opaques à réflexion diffuse. Le couplage rayonnement-conduction s'effectue sur le même maillage avec un code d'éléments finis pour la conduction. La validation du code de rayonnement et du couplage passe par de nombreux cas tests issus de la littérature. Il aborde les milieux gris, isotherme avec différentes géométries où les effets de la discrétisation spatiale et angulaire sont observés au travers d'une étude de sensibilité. Trois schémas de fermeture ont été étudiés sur un milieu transparent pour montrer leurs influences sur la précision et la diffusion numérique. Les études des transferts de chaleur couplés traitent le problème de l'équilibre radiatif et du couplage conduction-rayonnement en régime stationnaire ou instationnaire avec les équations adimensionnées. La dernière étude porte sur un milieu non-gris tel que le verre en considérant la conduction et le rayonnement en régime stationnaire avec une méthode spectrale par bande pour la partie radiative.

Mots-clés: transfert radiatif, milieu semi-transparent, géométrie complexe 3D, volumes finis, cell-vertex, maillage tétraédrique non structuré.

Abstract

This work deals with the numerical solution of coupled radiative and conductive heat transfer in participating media in complex 3D geometries. Thermal radiation is simulated by a numerical code developed during this thesis. This code solves the radiative transfer equation (RTE) by a modified finite volume method (FVM) with a cell-vertex formulation applied to unstructured tetrahedral meshes. It uses a closure relation based on an exponential scheme, a marching order map and an innovative matrix solution for the FVM applied to the RTE. The model is applied to absorbing-emitting, grey or non-grey media bounded by black or opaque walls with diffuse reflection. The mesh used for the radiation-conduction coupling is the one used by the finite element code for the conduction. The validation of the radiative code and the coupling are carried out through several test cases taken from the literature. Grey and isothermal media with different geometries are considered, and the effects of the spatial and angular discretizations are observed through a sensitivity study. Three closure schemes have been studied on a transparent medium in order to show their influence on the accuracy and false scattering. Studies of coupled heat transfer are carried out on radiative equilibrium problems and coupled radiation-conduction problems in steady or transient states with the dimensionless equations. Finally a non-grey medium such glass is also studied, considering conduction and radiation in steady state with a spectral band model for radiation.

Keywords: radiative transfer, participating medium, complex 3D geometries, finite volume method, cell-vertex, unstructured tetrahedral meshes.

