UFR MIAE
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

Thèse présentée par

Fernando DE OLIVEIRA DA COSTA

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré (Nancy)

Spécialité Mathématiques

Quelques aspects géométriques et analytiques des domaines bornés symétriques réels

Soutenue publiquement le 19 octobre 2011.

Rapporteurs :

Michaël PEVZNER	Professeur, Reims
Harald UPMEIER	Professeur, Marburg (Allemagne)

Examinateurs :

Khalid KOUFANY	Maître de conférences HDR, Nancy (Directeur de thèse)
Wolfgang BERTRAM	Professeur, Nancy
Jean-Louis CLERC	Professeur, Nancy
Jacques FARAUT	Professeur, Paris

Institut Élie Cartan Nancy, Laboratoire de Mathématiques
B.P. 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex

Remerciements

J'adresse tout d'abord un grand merci à Khalid Koufany, qui m'a encadré durant ces quatre années de thèse. Il m'a laissé beaucoup de liberté pour mener à bien mes recherches, ce qui rendit très agréable mon travail avec lui.

Je souhaite aussi dire merci à Wolfgang Bertram qui m'a suivi du M1 au doctorat. C'est Wolfgang qui m'a donné envie de poursuivre le M1 par un M2 recherche, à l'issue duquel il me présenta Khalid.

Je voudrais adresser mes remerciements les plus sincères à Harald Upmeier et à Michaël Pevzner qui ont rapporté cette thèse. J'ai été flatté de les avoir intéressés.

Je suis extrêmement reconnaissant à Jean-Louis Clerc d'avoir volontiers accepté de faire partie de mon jury de thèse. Ce fut une chance et un honneur pour moi de le compter parmi les membres du jury, dans la mesure où l'essentiel de mes recherches fut basé sur certains de ses travaux.

Enfin et surtout, je tiens à remercier chaleureusement Jacques Faraut d'avoir accepté de présider le jury. C'était un immense honneur pour moi de rencontrer ce mathématicien d'exception qui, au travers de l'un de ses livres, m'a initié à la théorie des algèbres de Jordan. Je ne l'en remercierais jamais assez.

Ce fut très appréciable de trouver à l'IECN des conditions de travail exceptionnelles, à tout point de vue. Je tiens en conséquence à remercier tout le personnel, aussi bien scientifique qu'administratif. Je souhaite de plus saluer tous les camarades doctorants, actuels et anciens. En particulier Juju qui a fédéré l'union sacrée de la pause café. Mais aussi Christophe, Cyril, Aurélien, Pauline, Bertrand, Ghislain, Arnaud, Julie, Michael, Lucas, Li, Antoine, et bien d'autres.

Merci à ma famille, pour m'avoir soutenu depuis déjà de nombreuses années. Je ne peux oublier mes amis, toujours fidèles. Je les remercie également. Mais surtout je dois remercier Clara, ma compagne de vie et maman de mon fils Diego. C'est elle qui me suit depuis bientôt dix ans, et qui m'a toujours poussé et encouragé à aller plus loin. *Obrigado meu amor.*

J'ai enfin une dernière pensée pour Gilles Tissier, mon beau-père, qui nous a quitté trop tôt, et à qui je dédie ce mémoire. *Gilles, ce fut un privilège de vous avoir connu.*

Table des matières

INTRODUCTION

Motivations. Dans cette thèse, nous étudions certains aspects des *domaines bornés symétriques réels*. Ces espaces sont obtenus à partir de domaines bornés hermitiens symétriques comme suit : soit $\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ un domaine hermitien symétrique dans un espace vectoriel complexe $V^{\mathbb{C}}$ de dimension finie et V une forme réelle de $V^{\mathbb{C}}$; la forme réelle $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \cap V$ de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ est appelée domaine borné symétrique réel (DBSR) si et seulement si la conjugaison de $V^{\mathbb{C}}$ relative à V stabilise $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ et dans ce cas, $\mathcal{D}$ est un espace riemannien symétrique $\mathcal{D} = G/K$ pour la métrique induite par celle de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ ([Loo77]).

Les aspects géométriques développés dans ce manuscrit font suite aux articles [CK07] et [CØ01]. Dans le premier, les auteurs étudient, entre autre, l'action du groupe $G_{\mathbb{C}}$ d'un domaine hermitien symétrique de *type tube* $\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ sur l'ensemble $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$, où $\mathcal{S}$ désigne *la frontière de Shilov* du domaine $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$. Cette action possède alors un nombre fini d'orbites, parmi lesquelles nous trouvons *l'espace symétrique de type Cayley* $\mathcal{S}^2_{\top}$ (cf [Kou94]), correspondant à l'unique $G_{\mathbb{C}}$-orbite ouverte dans $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$, formée des couples d'éléments *transverses* de $\mathcal{S}$. Dans le second, les auteurs définissent *l'indice de Maslov* d'un élément de $\mathcal{S}^3_{\top}$ (l'ensemble des triplets d'éléments de $\mathcal{S}$ deux à deux transverses) après avoir caractérisé les $G_{\mathbb{C}}$-orbites dans $\mathcal{S}^3_{\top}$. La question posée était alors la suivante : existe-t-il des résultats analogues pour les DBSR ?

Le problème analytique abordé dans ce mémoire porte sur des *équations de Hua*. Dans [JK80], il est question de caractériser la *transformée de Poisson* des fonctions continues sur $\mathcal{S}$ (toujours dans le cas tube). Les auteurs prouvent qu'une fonction f sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ est transformée de Poisson d'une fonction continue sur $\mathcal{S}$ si et seulement si $\mathcal{H}f = 0$, $\mathcal{H}$ désignant l'*opérateur de Hua* du second ordre. La condition nécessaire repose sur le fait que $\mathcal{H}\mathcal{P}(z,u) = 0$, où $\mathcal{P} : \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \times \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ est le *noyau de Poisson* sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$. Une généralisation de ce résultat est donnée dans [Shi96], article dans lequel sont définis les noyaux de Poisson généralisés $\mathcal{P}_\sigma$, qui donnent lieu à de nouvelles équations de Hua à paramètre $\sigma \in \mathbb{C}$. Dans le cas des domaines réels, il n'existe pas de littérature abordant ce genre de problèmes.

En somme, le but de ce travail était de «généraliser» aux DBSR (de type tube) certains résultats géométriques et analytiques connus pour les domaines hermitiens symétriques de type tube.

Voici maintenant un bref résumé du contenu de ce mémoire.

Systèmes triples de Jordan positifs. Les DBSR sont en correspondance bijective avec les *systèmes triples de Jordan réels positifs* (STJP). L'étude locale des DBSR consiste alors en l'étude des STJP. Le manque de littérature inhérente aux DBSR (la référence principale étant le livre [Loo77] de O. Loos) nous a poussé à établir un état des lieu des connaissances sur les STJP.

Dans un premier temps, nous faisons une étude systématique des STJP, étude qui met en exergue un certain nombre d'invariants (dont le *rang réel* noté r) qui caractérisent complètement le STJP (Proposition 1.3.21). Dans cette partie du travail, nous mettons en évidence certains caractères du STJP qui nous permettront de distinguer cinq classes de STJP simples (et donc de DBSR irréductibles) notées dans la suite A_r, B_r, C_r, BC_r et D_r. Parmi elles, figurent les classes dites *type tube réduit* (types A_r et D_r) et *type tube non réduit* (type C_r). Les domaines de *type tube* correspondent aux cas où le STJP V possède des éléments inversibles. Chaque tripotent inversible confère alors à V une deuxième structure algébrique, celle *d'algèbre de Jordan semi-simple réelle involutive.*

Un autre fait remarquable concernant les STJP simples est la décomposition en *strates*, une strate $V(\ell)$ $(0 \leq \ell \leq r)$ correspondant à l'ensemble des éléments de *rang* ℓ ([Kan98]). Dans le cas tube, la strate $V(r)$ des éléments de plus haut rang est constituée des éléments inversibles de V (Corollaire 1.3.27). La stratification sera très utilisée dans la résolution des problèmes posés.

Enfin, nous parlerons de *compactification projective* des STJP, notion qui fait le lien entre DBSR et *R-espace symétrique* (cf [Nag65], [Loo71, Loo77, Loo85], [BN04, BN05]), et nous donnerons la classification des STJP simples (cf [Loo77] et [Neh80, Neh81]).

Domaines bornés symétriques. Nous commencerons par une brève synthèse des définitions et résultats portant sur les domaines hermitiens symétriques (DHS). Les principales références utilisées sont [Helg62, Helg78], [Loo77], [Sat80] et [FK94]. Précisons que le point de vue que nous avons adopté est cependant celui de O. Loos, qui utilise dans [Loo77] le langage des *systèmes triples de Jordan hermitiens positifs* (STJHP).

Nous abordons ensuite les *transformations de Cayley partielles* qui donnent lieu à des réalisations non bornées des DHS considérés, appelées *domaines de Siegel*. Les domaines de Siegel sont très utiles en particulier dans le cas tube (une très jolie présentation est donnée dans [FK94]). Nous avons fait le choix de traiter les transformations de Cayley ainsi que les domaines de Siegel dans le langage de Jordan, qui était selon nous le mieux adapté au contexte.

Pour finir, nous définissons les DBSR $\mathcal{D} = G/K$ et en donnons la classification. Cette dernière repose sur la classification des STJP simples et sur celle des espaces symétriques non compacts de M. Berger ([Berg57]).

Principaux résultats obtenus. Nous nous intéresserons ensuite plus particulièrement aux DBSR de type tube et c'est dans ce cadre qu'apparaîtra la «généralisation» attendue, et donc l'essentiel de notre contribution.

Dans la suite, $\mathcal{D} = G/K$ désigne un DBSR irréductible de type C_r ou D_r dans un espace vectoriel réel V de dimension finie (donc $V \cong T_0\mathcal{D}$ est muni d'une structure de STJP simple notée $(V, \{\})$). Fixons-nous un *tripotent maximal* e dans $(V, \{\})$, c'est-à-dire vérifiant $\{e, e, e\} = e$ et tel que $V^{(e)}$ ($= V$ muni du produit $xy = \{x, e, y\}$) soit une algèbre de Jordan semi-simple réelle avec élément neutre e. Considérons de plus l'*involution de Cartan* $x^\star = Q(e)x = \{e, x, e\}$ sur V et $V^\pm$ ses espaces propres. Alors $V^\pm$ sont deux sous-STJP et la sous-algèbre de Jordan de $V^{(e)}$ dont l'espace vectoriel sous-jacent est V^+ est une algèbre de Jordan euclidienne. De plus, nous avons nécessairement $V^- \neq \{0\}$.

Frontière de Shilov — L'objet géométrique auquel nous allons nous intéresser maintenant est la K-orbite $\mathcal{S} := \mathcal{S}_e := K \cdot e$. C'est un espace riemannien symétrique compact et V^- est l'espace tangent à $\mathcal{S}$ en e (Proposition 3.4.3). Aussi, $\mathcal{S}$ est la composante connexe de e dans l'ensemble Σ des tripotents maximaux de $(V, \{\})$. Par opposition au cas hermitien, Σ n'est pas nécessairement connexe (Théorème 3.2.8) :

- Σ est connexe si $\mathcal{D}$ est C_r ;
- Σ possède deux composantes connexes si $\mathcal{D}$ est D_r.

Comme $\mathcal{S}$ est dans la frontière topologique du domaine $\mathcal{D}$, nous l'appellerons *une frontière de Shilov* de $\mathcal{D}$, par analogie au cas complexe. Enfin, nous prouvons que $\mathcal{S}$ est une G-orbite G/P, avec P un sous-groupe parabolique maximal, et par conséquent $\mathcal{S}$ est un R-espace symétrique. Plus précisément, $\mathcal{S}$ est isomorphe à la compactification projective du STJP V^- (Proposition 3.4.6).

Domaine tube dans V — Considérons maintenant la transformation de Cayley partielle γ_e définie sur $\{x \in V^{(e)} | e - x \text{ est inversible}\}$ par

$$\gamma_e(x) = (e + x)(e - x)^{-1}$$

et

$$\gamma_e(\mathcal{D}) = \Omega \oplus V^-$$

le domaine de Siegel associé à $\mathcal{D}$ et e, où l'on a noté Ω le cône symétrique des carrés inversibles de l'algèbre de Jordan euclidienne V^+. Le groupe de Lie $L := \gamma_e \circ G \circ \gamma_e^{-1}$ opère transitivement sur le «tube» $\gamma_e(\mathcal{D})$. Nous montrons que L est engendré par $G(\Omega)$, $\jmath$ et T (Théorème 3.3.6) où $\jmath : x \mapsto x^{-1}$ est l'application inversion de $V^{(e)}$ et

$$G(\Omega) = \{g \in GL(V) | g\Omega = \Omega, gQ(e) = Q(e)g\},$$

$$T = \{x \mapsto x + v | v \in V^-\}.$$

Indice de transversalité — Pour $x, y \in V$, on définit l'entier

$$\mu(x, y) = \mathrm{rg}(x - y) \in \{0, 1, \ldots, r\}$$

où $\mathrm{rg}(u)$ désigne le rang de l'élément $u \in V$, c'est-à-dire le nombre de valeurs propres non nulles dans sa décomposition spectrale. Nous montrons (Proposition 3.5.1) que si x et y sont deux éléments dans V^-, et si g est un élément du groupe L défini en x et y, alors

$$\mu(gx, gy) = \mu(x, y).$$

De plus, pour x, y dans $\mathcal{S}$, l'information suivante (Proposition 3.2.10)

$$\gamma_e^{-1}(V^-) = \{z \in \Sigma | \mu(z, e) = r\} \subset \mathcal{S}_{-e} = K \cdot (-e)$$

nous permet d'assurer l'existence d'un élément k dans K vérifiant $\mu(-kx, e) = \mu(-ky, e) = r$ (Corollaire 3.2.12). Ceci entraîne que $\gamma_e(-kx)$ et $\gamma_e(-ky)$ sont dans V^- et

$$\mu(x, y) = \mu(\gamma_e(-kx), \gamma_e(-ky)).$$

L'identité $G = \gamma_e^{-1} \circ L \circ \gamma_e$ fournit alors

$$\mu(gx, gy) = \mu(x, y) \quad \forall x, y \in \mathcal{S},\ \forall g \in G.$$

Pour $(x, y) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$, le nombre $\mu(x, y)$ est appelé *l'indice de transversalité* du couple (x, y). L'indice de transversalité est donc un invariant pour l'action de G sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ (Proposition 3.5.3).

G-orbites dans $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ — Si u_1, v_1, u_2, v_2 sont dans V^- et satisfont à l'égalité $\mu(u_1, u_2) = \mu(v_1, v_2)$, alors il existe $h \in L$ tel que

$$u_j = hv_j$$

(Corollaire 3.5.5).

Nous obtenons le résultat suivant (Théorème 3.5.6) :

Théorème. *Soit $\mathcal{D} = G/K$ un domaine borné symétrique réel irréductible de type C_r ou D_r et soit $\mathcal{S} = K \cdot e$ la frontière de Shilov de $\mathcal{D}$ associée au tripotent maximal e du STJP $V = T_0\mathcal{D}$. L'indice de transversalité caractérise les orbites de l'action de G sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$: si (x, x') et (y, y') sont deux éléments de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$, alors $\mu(x, x') = \mu(y, y')$ si et seulement si il existe $g \in G$ tel que $gx = y$ et $gx' = y'$. En particulier, ces orbites sont au nombre de $s + 1$, où s est le rang réel du STJP V^-.*

G-orbites dans $\mathcal{S}^3_\top$ — Considérons l'ensemble

$$\mathcal{S}^3_\top := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \mathcal{S} | x_i \top x_j \ \forall i \neq j\}.$$

Nous allons nous intéresser aux G-orbites dans $\mathcal{S}^3_\top$. Nous distinguons deux cas :

(i) $\mathcal{D}$ est de type D_r avec r impair : alors $\mathcal{S}^3_\top$ est vide (cf 3.5.2) ;

(ii) $\mathcal{D}$ est C_r ou D_{2s} : dans ce cas, $\mathcal{S}^3_\top \neq \emptyset$ et donc nous pouvons regarder les G-orbites dans $\mathcal{S}^3_\top$.

Supposons désormais que $\mathcal{D}$ est un DBSR irréductible de type C_s ou D_{2s}. Alors nécessairement le STJP est de type A_s ou bien C_s ou bien D_s (Propositions 3.4.8 et 3.4.13). De nouveau, le STJP V^- joue un rôle essentiel dans notre étude, comme l'indique le résultat suivant (Théorème 3.5.11) :

Théorème. *(i) Si V^- est de type A_s alors il existe exactement $s + 1$ orbites de $\mathcal{S}^3_\top$ sous l'action de G.*

(ii) Si V^- est de type D_s, il y a deux orbites de $\mathcal{S}^3_\top$ sous G.

(iii) Si V^- est de type C_s alors $\mathcal{S}^3_\top$ est homogène sous G.

Transformations de Poisson et opérateur de Hua — La définition que nous allons donner est basée sur la définition originale (cf. [JK80]). L'*opérateur de Hua* $\mathcal{H}$ *sur* $\mathcal{D}$ est défini formellement sur $C^\infty(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ par

$$\mathcal{H}f(x) := \left(B(x,x)\frac{\partial}{\partial x}\right) \square \frac{\partial}{\partial x} \cdot f(x) \quad (f \in C^\infty(\mathcal{D}, \mathbb{R}),\ x \in \mathcal{D})$$

où l'on identifie $\frac{\partial}{\partial x}$ au gradient. Si $\{e_\mu\}$ est une base orthonormée de V alors $\mathcal{H}$ s'écrit sous la forme

$$\mathcal{H}f(x) = \sum_{\mu,\nu}(B(x,x)e_\mu \square e_\nu)\partial_\mu\partial_\nu f(x),$$

où l'on a posé $\partial_\mu := \partial_{e_\mu}$. Cette écriture ne dépend pas de la base (cf. [JK80]). On définit de plus le *noyau de Poisson* de $\mathcal{D}$ comme la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{P} :\ \mathcal{D} \times \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,u) &\longmapsto \left(\tfrac{\mathrm{h}(x,x)}{\mathrm{h}(x,u)^2}\right)^{\frac{n^-}{r_{\mathbb{C}}}} \end{aligned}$$

où n^- est la dimension de V^-, $r_{\mathbb{C}}$ le rang réel de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ et h est la *norme générique* de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ (ou $V^{\mathbb{C}}$) (voir par exemple [FK+00]). On définit enfin la *transformée de Poisson* (de paramètre σ) d'une fonction continue $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ comme la fonction $\mathcal{P}_\sigma\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\mathcal{P}_\sigma\varphi(x) = \int_{\mathcal{S}} \mathcal{P}(x,u)^\sigma \varphi(u)du.$$

Alors (Théorème 4.2.4) :

Théorème. *Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$ et pour toute fonction continue $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, nous avons*

$$\mathcal{H}\mathcal{P}_\sigma\varphi(x) = \left(\frac{2n^-}{r}\right)^2 \sigma(\sigma-1)\mathcal{P}_\sigma\varphi(x)\mathrm{Id}.$$

Chapitre 1

Systèmes triples de Jordan réels positifs

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre seront supposés de dimension finie, même si certains faits ne requièrent pas cette hypothèse. On se restreint de même au corps $\mathbb{R}$ des nombres réels puisque ce qui nous intéresse dans la suite ce sont les domaines bornés symétriques réels.

1.1 Généralités

1.1.1 Définitions

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une application

$$\begin{aligned} V \times V \times V &\to V \ . \\ (x, y, z) &\mapsto \{x, y, z\} \end{aligned}$$

Le couple $(V, \{\})$ (ou plus simplement V) est un *système triple de Jordan réel* si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) $\{\}$ est $\mathbb{R}$-trilinéaire ;

ii) $\{\}$ est symétrique en (x, z) : $\{x, y, z\} = \{z, y, x\}$ $\quad (JT1)$;

ii) $\{\}$ satisfait à l'*identité de Jordan*

$$\{u, v, \{x, y, z\}\} = \{\{u, v, x\}, y, z\} - \{x, \{v, u, y\}, z\} + \{x, y, \{u, v, z\}\} \quad (JT2).$$

Dans tout ce chapitre, nous considèrerons un système triple de Jordan (STJ) $(V, \{\})$ sur $\mathbb{R}$.

Opérateurs particuliers. Pour x, y dans V, on définit deux applications $\mathbb{R}$-linéaires sur V :

$$x \,\square\, y : z \mapsto \{x, y, z\}, \qquad Q(x, z) : y \mapsto \{x, y, z\}$$

de sorte que

$$x \,\square\, y(z) = Q(x, z)y = \{x, y, z\}.$$

L'application $Q : (x, z) \mapsto Q(x, z)$ est $\mathbb{R}$-bilinéaire donc Q donne lieu à une application quadratique (encore notée Q) telle que $Q(x) = Q(x, x)$. Alors

$$Q(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)).$$

Il existe une multitude d'identités liant $x \,\square\, y$ et $Q(z, w)$ (voir par exemple [Loo77]). Citons quelques unes d'entre elles :

$$[x \,\square\, y, u \,\square\, v] = (x \,\square\, y(u)) \,\square\, v - u \,\square (y \,\square\, x(v)) \tag{1.1}$$
$$Q(x, Q(z)y) = 2(x \,\square\, y)Q(x, z) - Q(z)(y \,\square\, x) \tag{1.2}$$
$$(x \,\square\, y)Q(x) = Q(x, Q(x)y) = Q(x)(y \,\square\, x) \tag{1.3}$$
$$(Q(x)y) \,\square\, y = 2(x \,\square\, y)^2 - Q(x)Q(y) = x \,\square (Q(y)x) \tag{1.4}$$

où le crochet est le crochet usuel de l'algèbre associative $End(V)$. Sans oublier la formule dite «fondamentale»

$$Q(Q(x)y) = Q(x)Q(y)Q(x) \tag{1.5}$$

qui par linéarisation fournit

$$Q(Q(x)y, Q(x)z) = Q(x)Q(y, z)Q(x). \tag{1.6}$$

Pour $x, y \in V$, on définit enfin l'*opérateur de Bergman* $B(x, y)$ par

$$B(x, y) := \mathrm{Id}_V - 2x \,\square\, y + Q(x)Q(y).$$

Les $B(x, y)$ sont des endomorphismes de V qui satisfont un certain nombre d'identités (cf. [Loo75, Loo77]), dont voici quelques exemples :

$$B(x, y)Q(x) = Q(x - Q(x)y) = Q(x)B(y, x) \tag{1.7}$$
$$B(Q(x)y, y) = 2B(x, y)B(x, -y) = B(x, Q(y)x) \tag{1.8}$$
$$Q(B(x, y)z) = B(x, y)Q(z)B(y, x). \tag{1.9}$$

Les opérateurs de Bergman sont très étroitement liés à la métrique de Bergman d'un domaine borné symétrique.

Complexification. Soit V est un STJ sur $\mathbb{R}$. On note $V^{\mathbb{C}}$ l'espace vectoriel complexifié de V : $V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V \cong V \oplus iV$. En prolongeant de manière $\mathbb{C}$-anti-linéaire à $V^{\mathbb{C}}$ les opérateurs $Q(x, y)$, on définit un produit triple sur $V^{\mathbb{C}}$ par

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} := \mathbf{x} \,\square\, \mathbf{y}(\mathbf{z}) := \mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{z})\mathbf{y} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V^{\mathbb{C}})$$

où $\mathbf{Q}$ désigne alors la représentation quadratique sur $V^{\mathbb{C}}$, donnée par

$$\mathbf{Q}(x + iy) := Q(x) + 2iQ(x, y) - Q(y) \quad (x, y \in V).$$

Les $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ sont donc $\mathbb{C}$-anti-linéaires. De plus, un calcul simple mais fastidieux prouve que les opérateurs $\mathbf{x} \,\square\, \mathbf{y}$ satisfont la formule (1.1) et donc le produit triple ainsi défini sur $V^{\mathbb{C}}$ vérifie l'identité de Jordan.

En conclusion, si V est un STJ réel alors $V^{\mathbb{C}}$ est naturellement muni d'une structure de STJ hermitien, c'est-à-dire que l'espace vectoriel complexe $V^{\mathbb{C}}$ est muni d'un produit triple $\{\}$: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \mapsto \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ $\mathbb{C}$-linéaire en les variables extrêmes $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, $\mathbb{C}$-anti-linéaire en la variable $\mathbf{y}$, et vérifiant $(JT1)$ et $(JT2)$.

1.1.2 STJ et algèbres de Jordan

Soit $(V, \{\})$ un STJ réel. Pour $a \in V$, notons $V^{(a)}$ l'espace vectoriel V muni du produit $\circ_a$ défini par

$$x \circ_a y := Q(x, y)a.$$

Alors $V^{(a)}$ est une algèbre commutative et si l'on note $L_a(x) := x \,\square\, a$ les opérateurs de multiplication dans $V^{(a)}$ par $x \in V$, et $x^2 = L_a(x)x = Q(x)a$, on a facilement

$$[L_a(x), L_a(x^2)] = 0,$$

ce qui veut dire que $V^{(a)}$ est une algèbre de Jordan réelle. La représentation quadratique P_a de $V^{(a)}$ est donnée par

$$P_a : x \mapsto (P_a(x) := 2L_a(x)^2 - L_a(x^2)).$$

On vérifie aisément à l'aide de (1.4) que l'on a la relation

$$P_a(x) = Q(x)Q(a)$$

et posant

$$P_a(x, y) := \frac{1}{2}(P_a(x + y) - P_a(x) - P_a(y))$$

on obtient

$$Q(x, y)Q(a) = P_a(x, y) = L_a(x)L_a(y) + L_a(y)L_a(x) - L_a(x \circ_a y)$$

et

$$x \,\square\,(Q(a)z) = L_a(x \circ_a z) + [L_a(x), L_a(z)].$$

Remarquons que la formule fondamentale de $(V, \{\})$ se traduit dans $V^{(a)}$ par

$$P_a(P_a(x)y) = P_a(x)P_a(y)P_a(x),$$

ce qui n'est autre que l'identité fondamentale caractérisant la représentation quadratique d'une algèbre de Jordan (voir par exemple [FK94, II.3.3]).

On définit enfin les opérateurs de Bergman $B_a(x)$ sur $V^{(a)}$ par

$$B_a(x) := B(x, a) = \mathrm{Id} - 2L_a(x) + P_a(x).$$

Inversement, étant donnée une algèbre de Jordan J sur $\mathbb{R}$, on peut toujours munir J d'une structure de STJ réel, comme suit. Soit $\star$ un automorphisme linéaire et involutif de J, i.e.

$$(xy)^\star = x^\star y^\star,\ (x^\star)^\star = x, \qquad (x, y \in J)$$

et pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda x)^\star = \lambda x^\star,$$

où xy désigne le produit de x et y dans J. Munissons J du produit triple

$$\{x, y, z\} = (xy^\star)z + (zy^\star)x - (xz)y^\star\ .$$

Le produit triple ainsi défini est $\mathbb{R}$-trilinéaire et symétrique en x et z, et un simple calcul montre qu'il vérifie l'identité de Jordan. Donc $(J, \{\})$ est un STJ réel. La représentation quadratique Q du STJ $(J, \{\})$ s'exprime à l'aide de la représentation quadratique P de l'algèbre de Jordan J, comme suit :

$$Q(x) : z \mapsto P(x)z^\star.$$

On a de plus

$$x \mathbin{\square} y = L(xy^\star) + [L(x), L(y^\star)]\ .$$

1.1.3 Décompositions de Peirce

On considère toujours un STJ réel V.

Décomposition de Peirce associée à un tripotent. Pour $x \in V$, on définit les *puissances impaires* de x dans V par

$$\begin{aligned} x^{(1)} &:= x \\ x^{(2p+1)} &:= Q(x)x^{(2p-1)} = Q(x)^p x \ (p \geq 1 \text{ entier}). \end{aligned}$$

Les puissances impaires de x dans V sont précisément les puissances de x dans l'algèbre de Jordan $V^{(x)}$, i.e.

$$x^{(2p+1)} = x^{(p+1,x)} := (x \mathbin{\square} x)^p x \quad (p \in \mathbb{N}).$$

Soit $x \in V$ tel que $x^{(3)} = \lambda x$ ($\lambda \in \mathbb{R}$). L'identité (1.4) implique

$$\lambda x \,\Box\, x = 2(x \,\Box\, x)^2 - Q(x)^2 \tag{1.10}$$

et donc

$$\lambda(x \,\Box\, x)^2 = 2(x \,\Box\, x)^3 - (x \,\Box\, x)Q(x)^2.$$

D'après (1.3), on a $(x \,\Box\, x)Q(x) = Q(x, Q(x)x) = \lambda Q(x)$ et par suite

$$\lambda(x \,\Box\, x)^2 = 2(x \,\Box\, x)^3 - \lambda Q(x)^2.$$

On en déduit que l'on a

$$\lambda^2 x \,\Box\, x - 3\lambda(x \,\Box\, x)^2 + 2(x \,\Box\, x)^3 = 0.$$

D'où

Lemme 1.1.1. *Si un élément x de V vérifie $x^{(3)} = \lambda x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, alors le polynôme minimal de l'opérateur $x \,\Box\, x$ a pour racines $0, \frac{\lambda}{2}$ et λ.*

Definition 1.1.2.
On appelle *tripotent* de V tout élément e de V tel que $e^{(3)} = e$.

Si e est un tripotent de V alors l'endomorphisme $e \,\Box\, e$ de V est diagonalisable et ses valeurs propres sont $0, \frac{1}{2}$ et 1. Pour $\alpha = 0, 1, 2$, on pose

$$V_\alpha(e) := \{x \in V | e \,\Box\, e(x) = \frac{\alpha}{2}x\}.$$

Definition 1.1.3.
Soit e un tripotent de V. La décomposition spectrale

$$V = V_0(e) \oplus V_1(e) \oplus V_2(e)$$

est appelée *décomposition de Peirce* de V associée à e.

Proposition 1.1.4 ([Loo75, Loo77]). *Si $V = V_0(e) \oplus V_1(e) \oplus V_2(e)$ est la décomposition de Peirce associée au tripotent e alors :*

(i) les opérateurs $B(e,e), 2(e \,\square\, e - Q(e)^2)$ et $Q(e)^2$ sont les projecteurs spectraux de V sur $V_0(e), V_1(e)$ et $V_2(e)$ respectivement ;

(ii) pour $i,j,k \in \{0,1,2\}$, on a $\{V_i(e), V_j(e), V_k(e)\} \subset V_{i-j+k}(e)$ donc, en particulier, $V_0(e), V_1(e)$ et $V_2(e)$ sont des sous-systèmes triples de Jordan de V ;

(iii) on a $\{V_0(e), V_2(e), V\} = \{V_2(e), V_0(e), V\} = \{0\}$.

Remarque 1.1.5: Si e est un tripotent de V alors le sous-système triple $V_2(e)$ muni du produit

$$xy := x \circ_e y = \{x, e, y\}$$

est une algèbre de Jordan réelle unitaire, dont le neutre est e. De plus, la restriction à $V_2(e)$ de $Q(e)$ (que l'on note encore $Q(e)$) est une involution linéaire de $V_2(e)$. Aussi, pour $x \in V_2(e)$, on a

$$(Q(e)x)^2 = Q(Q(e)x)e = Q(e)Q(x)Q(e)e = Q(e)x^2$$

et donc $Q(e)$ est un automorphisme de l'algèbre de Jordan $V_2(e)$. Par conséquent, si l'on pose

$$V^{\pm}(e) := \{x \in V_2(e) | Q(e)x = \pm x\},$$

alors

$$V^{\pm}(e) \circ_e V^{\pm}(e) \subset V^{+}(e), \quad V^{+}(e) \circ_e V^{-}(e) = V^{-}(e) \circ_e V^{+}(e) \subset V^{-}(e).$$

En particulier, $V^{+}(e)$ est une sous-algèbre de Jordan unitaire de $V_2(e)$, d'élément neutre e.

Tripotents orthogonaux et décomposition de Peirce simultanée. Deux tripotents e et f de V sont dits *orthogonaux* s'ils satisfont à l'une des conditions équivalentes suivantes :

(i) $e \,\square\, f = 0$

(ii) $f \,\square\, e = 0$

(iii) $\{e, e, f\} = 0$

(iv) $\{f, f, e\} = 0$

(voir par exemple [Loo77, 3.9]). Si e et f sont deux tripotents orthogonaux alors $e \,\square\, e$ et $f \,\square\, f$ commutent et $e + f$ est encore un tripotent.

Soient e, f deux tripotents de V. On dit que e est plus grand que f et on note $f \preceq e$ s'il existe un tripotent c orthogonal à f tel que $e = f + c$; e est dit strictement plus grand que f et on note $f \prec e$ si $f \preceq e$ et $e \neq f$; $\preceq$ définit alors une relation d'ordre sur l'ensemble des tripotents de V.

Definition 1.1.6.
Un tripotent non nul e est dit *primitif* s'il est minimal pour l'ordre $\preceq$ et e est dit *maximal* s'il est maximal pour cet ordre.

Considérons maintenant une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de tripotents deux à deux orthogonaux. Alors $(e_i \,\square\, e_i)_{i=1,\ldots,n}$ est une famille d'opérateurs diagonalisables qui commutent deux à deux et on peut donc les diagonaliser simultanément. De plus, si $e = e_1 + \ldots + e_n$, alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille d'*idempotents* orthogonaux deux à deux de l'algèbre de Jordan $V^{(e)}$, i.e. $e_i^2 = e_i$ et si $i \neq j$, $e_i e_j = 0$ dans $V^{(e)}$. De plus, les opérateurs de multiplication par e_i dans $V^{(e)}$ sont les $L(e_i) = e_i \,\square\, e = e_i \,\square\, e_i$. Un théorème de Loos s'applique :

Théorème 1.1.7 ([Loo75], 5.14). *Soient $e_1, \ldots, e_n$ des tripotents orthogonaux deux à deux de V et $e = e_1 + \ldots + e_n$. Alors*

$$V = \bigoplus_{0 \leq i \leq j \leq n} V_{ij}(e)$$

où

$$\begin{cases} V_{ii}(e) := V_2(e_i), & i = 1, \ldots, n \\ V_{ij}(e) := V_{ji} := V_1(e_i) \cap V_1(e_j), & 1 \leq i < j \leq n \\ V_{i0}(e) := V_{0i} := V_1(e_i) \cap \bigcap_{j \neq i} V_0(e_j), & i = 1, \ldots, n \\ V_{00}(e) := \bigcap_{i=1}^n V_0(e_i) \end{cases}.$$

Les sous espaces $V_{ij} := V_{ij}(e)$ sont appelés les sous-espaces de Peirce de V relativement à $e = e_1 + \ldots + e_n$. *Si $I \subset \{1, \ldots, n\}$ et si $e_I = \sum_{i \in I} e_i$ alors les sous-espaces de Peirce de e_I sont donnés par*

$$V_2(e_I) = \bigoplus_{i,j \in I} V_{ij}, \quad V_1(e_I) = \bigoplus_{i \in I, j \notin I} V_{ij}, \quad V_0(e_I) = \bigoplus_{i,j \notin I} V_{ij}.$$

En particulier,

$$V_2(e) = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq n} V_{ij}, \quad V_1(e) = \bigoplus_{i=1}^{n} V_{i0}, \quad V_0(e) = V_{00}.$$

On a en outre les règles de calculs («règles de Peirce») suivantes

$$\{V_{ij}, V_{jk}, V_{kl}\} \subset V_{il}$$

et les autres produits sont nuls.

Comme conséquence de 1.1.4 et 1.1.7 nous avons le

Corollaire 1.1.8. *Si $1 \leq i \leq j \leq n$ et si $x \in V_{kl}$ avec $k \leq l$, alors*

$$Q(e_i, e_j)x = 0 \text{ sauf si } (k,l) = (i,j).$$

De plus, $Q(e_i)^2$ et $4Q(e_i, e_j)^2$ (avec $i \neq j$) sont les projecteurs spectraux de V sur V_{ii} et V_{ij} respectivement.

Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ un système de tripotents orthogonaux deux à deux de V et $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. L'orthogonalité des e_i donne

$$x \,\square\, x = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j e_i \,\square\, e_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 e_i \,\square\, e_i \ ,$$

et

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 Q(e_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j Q(e_i, e_j) \ ,$$

donc pour $y_{ij} \in V_{ij}$ $(0 \leq i \leq j \leq n)$, on a

$$x \,\square\, x(y_{ij}) = \frac{1}{2}(\lambda_i^2 + \lambda_j^2) y_{ij}$$

et

$$Q(x) y_{ij} = 2\lambda_i \lambda_j Q(e_i, e_j) y_{ij} = \lambda_i \lambda_j Q(e) y_{ij}$$

où l'on a noté $e = e_1 + \ldots + e_n$ et $\lambda_0 := 0$. On obtient de plus

$$Q(x)^2 y_{ij} = (\lambda_i \lambda_j)^2 y_{ij}$$

et puisque $B(x,x) = \mathrm{Id} - 2x \,\square\, x + Q(x)^2$, on a aussi

$$B(x,x) y_{ij} = (1 - \lambda_i^2)(1 - \lambda_j^2) y_{ij}.$$

Corollaire 1.1.9. *Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ un système de tripotents orthogonaux deux à deux de V et $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Si $0 \leq i \leq j \leq n$ et si $y_{ij} \in V_{ij}$ alors*

(i) $x \,\square\, x(y_{ij}) = \frac{1}{2}(\lambda_i^2 + \lambda_j^2) y_{ij}$;

(ii) $Q(x) y_{ij} = 2\lambda_i \lambda_j Q(e_i, e_j) y_{ij} = \lambda_i \lambda_j Q(e) y_{ij}$ *où* $e = e_1 + \ldots + e_n$;

(iii) $Q(x)^2 y_{ij} = (\lambda_i \lambda_j)^2 y_{ij}$;

(iv) $B(x,x) y_{ij} = (1 - \lambda_i^2)(1 - \lambda_j^2) y_{ij}$;

où $\lambda_0 := 0$.

1.2 STJ positifs et théorie spectrale

1.2.1 STJP et produits associatifs

Soit V un STJ réel. On considère la forme bilinéaire

$$\begin{array}{rccl} \beta: & V \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \mathrm{Tr}(x \,\square\, y) \end{array}.$$

Definition 1.2.1.
On dit que le STJ V est *positif* si pour tout $x \neq 0$, $\beta(x,x) > 0$. On abrègera en notant STJP.

Un produit scalaire euclidien $(\cdot|\cdot)$ sur V est dit *associatif* s'il satisfait à la condition

$$(\{x,y,u\}|v) = (u|\{y,x,v\}) \quad (x,y,z,u,v \in V).$$

Remarque 1.2.2: Les sous-espaces de Peirce V_{ij}, associés à une famille $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ de tripotents deux à deux orthogonaux, sont orthogonaux par rapport à tout produit scalaire associatif sur V.

Si V est positif alors β est une forme non-dégénérée et si l'on prend la trace dans l'identité de Jordan

$$[x \,\square\, y, u \,\square\, v] = (x \,\square\, y(u)) \,\square\, v - u \,\square (y \,\square\, x(v))$$

alors

$$\beta((x \,\square\, y)u, v) = \beta(u, (y \,\square\, x)v).$$

On en déduit que si V est positif, la forme β est un produit scalaire associatif sur V et

$$(x \,\square\, y)^* = y \,\square\, x \quad (x,y \in V)$$

où A^* désigne l'adjoint d'un endomorphisme A de V par rapport à β. Un calcul simple utilisant l'associativité de β et la symétrie en les variables extrémales du produit triple donne

$$(Q(x)Q(y))^* = Q(y)Q(x) \quad (x,y \in V)$$

et par conséquent

$$B(x,y)^* = B(y,x) \quad (x,y \in V).$$

Pour $x \in V$, les opérateurs $x \,\square\, x$, $Q(x)^2$ et $B(x,x)$ sont donc auto-adjoints par rapport à β.

1.2.2 Sous-espaces plats et décomposition spectrale

Definition 1.2.3.
Un sous-espace W de V est appelé *sous-espace plat* si

$$\{W,W,W\} \subset W \text{ et } \{x,y,z\} = \{y,x,z\} \ (x,y,z \in W).$$

Pour tout x dans V, notons $\langle x\rangle$ le sous-espace vectoriel réel de V engendré par les $x^{(2p+1)} = Q(x)^p x$ $(p \geq 0)$, i.e.

$$\langle x\rangle = \sum_{p\geq 0} \mathbb{R}x^{(2p+1)}.$$

C'est un sous-espace plat de V. Cela est une conséquence du fait que la formule fondamentale fournit, pour tous $m,n,p \in \mathbb{N}$,

$$\{Q(x)^m x, Q(x)^n x, Q(x)^p x\} = Q(x)^{m+n+p} x$$

(cf. [Loo77, 3.3]) ; $\langle x\rangle$ est alors le plus petit sous-espace plat de V contenant x, on l'appelle le sous-espace plat *engendré* par x.

Un autre exemple de sous-espace plat est le sous-espace $W = \bigoplus_{1\leq i\leq n} \mathbb{R}e_i$ où $(e_1,\ldots,e_n)$ désigne une famille de tripotents orthogonaux deux à deux de V. Si $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$ et $z = \sum z_i e_i$ alors, par orthogonalité des e_i, on a

$$\{x,y,z\} = \sum x_i y_i z_i e_i$$

et W est bien sous-espace plat de V.

Nous allons voir que tout sous-espace plat de V est de cette forme, si V est positif.

Lemme 1.2.4. *Soit V un STJ positif. Si x est un élément non nul de V tel que $x^{(3)} = \lambda x$ alors $\lambda > 0$.*

Démonstration. En vertu de 1.1.1, $x \,\square\, x$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont 0, $\frac{\lambda}{2}$ et λ. Donc

$$\beta(x,x) = \lambda\Big(\frac{1}{2}\dim V_{\frac{\lambda}{2}}(x) + \dim V_\lambda(x)\Big)$$

où $V_\alpha(x)$ désigne l'espace propre de $2x \square x$ pour la valeur propre α. Comme $x \in V_\lambda(x)$, $\beta(x, x)$ est un multiple strictement positif de λ, et la positivité de β donne $\lambda > 0$. $\square$

REMARQUE 1.2.5: On dit qu'un élément x de V est *nilpotent* si $x^{(2p+1)} = 0$ pour un certain p entier. Une conséquence de la positivité d'un STJP V est alors la non existence d'éléments nilpotents non nuls.

Soit V un STJ qui satisfait à la propriété

$$\forall x \in V\backslash\{0\}, (x^{(3)} = \lambda x \Longrightarrow \lambda > 0) \tag{1.11}$$

et soit W un sous-espace plat de V. Il existe un produit scalaire euclidien sur V tel que les $x \square x$ $(x \in V)$ soient autoadjoints ([Loo77, 3.4]), donc diagonalisables. Notons S le sous-espace de $End_{\mathbb{R}}(W)$ engendré par les $x \square x$, $x \in W$. Remarquons que pour $x, y, z \in W$,

$$x \square y(z) = \frac{1}{2}((x + y) \square (x + y) - x \square x - y \square y)(z)$$

donc les restrictions à W de $x \square y$ sont dans S. De plus, S est une famille commutative puisque

$$[x \square x, y \square y] = (x \square x(y)) \square y - y \square (x \square x(y)) = 0$$

donc les éléments de S sont simultanément diagonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de W telle que

$$\forall i = 1, \ldots, n, \forall A \in S, \exists \mu_i(A) \in \mathbb{R}, Ae_i = \mu_i(A)e_i.$$

En particulier $e_i \square e_i(e_i) = \mu_i(e_i \square e_i)e_i$ et la propriété (1.11) donne $\lambda_i := \mu_i(e_i \square e_i) > 0$. En remplaçant chaque e_i par $\lambda_i^{-\frac{1}{2}} e_i$, on obtient une base de tripotents de W. Ils sont deux à deux orthogonaux car $e_i \square e_i(e_j) = e_j \square e_i(e_i) \in \mathbb{R}e_i \cap \mathbb{R}e_j = \{0\}$. Si $c = \sum \mu_i e_i$ est un tripotent de W, alors $c^{(3)} = \sum \mu_i^3 e_i$ et par conséquent $\mu_i \in \{0, -1, 1\}$. Soient $c = \sum \mu_i e_i$ et $c' = \sum \mu'_i e_i$ deux tripotents de W. Comme

$$\{c, c, c'\} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 \mu'_i e_i,$$

c et c' sont orthogonaux si et seulement si $\mu_i^2 \mu'_i = 0$ pour tout i. Ceci entraîne que les tripotents $e_1, \ldots, e_n$ sont uniques à l'ordre et au signe près. On a obtenu les résultats suivants :

Théorème 1.2.6. *Soient V un STJ réel satisfaisant la propriété (1.11) et W un sous-espace plat de V. Alors il existe des tripotents $e_1, \ldots, e_n$ orthogonaux deux à deux, uniquement déterminés à l'ordre et au signe près, tels que*

$$W = \mathbb{R}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}e_n.$$

Inversement, tout sous-espace de cette forme est plat.

Corollaire 1.2.7. *Soient V un STJ réel satisfaisant la propriété (1.11) et soit $x \in V$. Il existe une unique famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de tripotents orthogonaux deux à deux telle que*

$$\langle x \rangle = \mathbb{R}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}e_n$$

et

$$x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \tag{1.12}$$

avec $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$. L'écriture (1.12) de x s'appelle la décomposition spectrale *de x et les λ_i sont ses* valeurs propres.

Corollaire 1.2.8. *(i) Un STJ V est positif si et seulement si il vérifie la propriété (1.11).*

(ii) Si $V \neq \{0\}$ est positif alors il existe des tripotents non nuls dans V.

Démonstration. (i) Supposons que V satisfasse à la condition (1.11) et soit $x \neq 0$. Alors 1.2.7 donne $x = \sum \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i > 0$ pour tout i et par conséquent

$$\mathrm{Tr}(x \,\square\, x) = \sum \lambda_i^2 \mathrm{Tr}(e_i \,\square\, e_i) > 0.$$

La réciproque a été vue en 1.2.4.

(ii) Le sous-espace plat $\langle x \rangle$ pour $x \neq 0$ dans V (supposé positif) possède des générateurs tripotents d'après 1.2.7. $\square$

Definition 1.2.9.
On appelle *repère de Jordan* tout système maximal de tripotents primitifs et orthogonaux deux à deux.

Au vu de ce qui précède, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 1.2.10. *Soit $(e_1, \dots, e_r)$ un système de tripotents orthogonaux deux à deux. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(e_1, \dots, e_r)$ *est un repère de Jordan ;*

(ii) Chaque e_j est primitif et $e = e_1 + \dots + e_r$ est maximal ;

(iii) $\mathbb{R}e_1 + \dots + \mathbb{R}e_r$ *est un sous-espace plat maximal de V.*

1.2.3 Décomposition de Cartan

Considérons encore un STJP V et soit e un tripotent non nul de V. Rappelons que le sous-espace de Peirce $V_2(e)$ est muni d'une structure d'algèbre de Jordan réelle unitaire (de neutre e) et involutive :

$$V_2(e) = V^+(e) \oplus V^-(e) \tag{1.13}$$

où

$$V^{\pm}(e) := \{x \in V_2(e) | Q(e)x = \pm x\}.$$

Rappelons aussi que les opérateurs quadratiques $P_e(x)$ dans $V_2(e)$ sont donnés par

$$P_e(x) = Q(x)Q(e)$$

et que l'on a

$$x \,\square\, y = L_e(xy^\star) + [L_e(x), L_e(y^\star)] \quad (x, y \in V_2(e)), \tag{1.14}$$

où les $L_e(z)$ désignent les opérateurs de multiplications par z dans $V_2(e)$, et où $y^\star := Q(e)y$. La forme bilinéaire symétrique

$$\begin{array}{llll} \delta_e : & V_2(e) \times V_2(e) & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \mathrm{Tr} L_e(xy) \end{array}$$

est associative ([FK94, II.4.3]), i.e.

$$\delta_e(L_e(x)y, z) = \delta_e(y, L_e(x)z) \quad (x, y, z \in V_2(e))$$

et est non-dégénérée puisque l'on a

$$\beta(x, y) = \delta_e(x, y^\star) \quad (x, y \in V_2(e)).$$

On en déduit que $V_2(e)$ est une algèbre de Jordan semi-simple et que δ_e est définie positive sur $V^+(e)$ et définie négative sur $V^-(e)$. En particulier, $V^+(e)$ est une algèbre de Jordan euclidienne ([FK94, III.1.5]). La décomposition (1.13) est appelée *décomposition de Cartan* de l'algèbre de Jordan semi-simple $V_2(e)$.

Proposition 1.2.11. *Un tripotent e d'un STJP V est primitif si et seulement si $V^+(e) = \mathbb{R}e$; e est un tripotent maximal si et seulement si $V_0(e) = \{0\}$.*

Démonstration. Supposons e primitif. Si c est un idempotent de $V^+(e)$ alors c est un tripotent de V et donc c et $e-c$ sont deux tripotents orthogonaux dont la somme vaut e. Nécessairement $c=0$ ou $e-c=0$. On en déduit que l'unique idempotent non nul de $V^+(e)$ est e et le théorème spectral dans $V^+(e)$ ([FK94, III.1.2]) fournit alors $V^+(e)=\mathbb{R}e$. Réciproquement, si $e=c+d$ avec c et d deux tripotents orthogonaux alors

$$Q(e)c = Q(c+d)c = Q(c)c + 2\{c,c,d\} + Q(d)c = Q(c)c = c$$

et de même $Q(e)d = d$. Donc c et d sont dans $V^+(e)$, qui ne peut alors pas être de dimension 1.

Le tripotent c est orthogonal à e si et seulement si $\{e,e,c\}=0$, donc si et seulement si $c \in V_0(e)$. Ainsi, les tripotents orthogonaux à e sont exactement les tripotents du sous-système triple positif $(V_0(e), \{\})$. Utilisant 1.2.8, on obtient $V_0(e)=\{0\}$. □

Remarque 1.2.12: Dans l'algèbre de Jordan $V_2(e)$, pour un tripotent non nul $e = e_1 + \ldots + e_n$ de V, les opérateurs $L_e(e_i) = e_i \,\square\, e$ $(i=1,\ldots,n)$ commutent entre eux et sont donc simultanément diagonalisables. On obtient ainsi la décomposition

$$V_2(e) = \bigoplus_{1\le i\le j\le n} V_{ij}(e)$$

où

$$\begin{cases} V_{ii} := V_{ii}(e) = V_2(e_i, 2), & i=1,\ldots,n \\ V_{ij} := V_{ij}(e) = V_{ji}(e) = V_2(e_i,1)\cap V_2(e_j,1), & 1\le i<j\le n \end{cases}$$

avec $V_2(e_k,\alpha) = \{x \in V_2(e) \,|\, L_e(e_k)x = \frac{\alpha}{2}x\}$. Les sous-espaces $V_{ij}(e)$ $(1\le i\le j\le n))$ coïncident avec ceux définis en 1.1.7. On obtient les règles de calculs suivantes :

$$\begin{cases} V_{ij}\cdot V_{ij} \subset V_{ii} + V_{jj}\ ; \\ V_{ij}\cdot V_{jk} \subset V_{ik}\ \forall i \ne k\ ; \\ \{i,j\}\cap\{kl\} = \emptyset \Longrightarrow V_{ij}\cdot V_{kl} = \{0\}. \end{cases}$$

Soit $V_2(e) = V^+(e)\oplus V^-(e)$ la décomposition de Cartan $V_2(e)$ relative à $Q(e)$ comme vu précédemment. Pour $1\le i\le j\le n$ on pose

$$V_{ij}^+ := V_{ij}^+(e) := V_{ij}(e)\cap V^+(e), \quad V_{ij}^- := V_{ij}^-(e) := V_{ij}(e)\cap V^-(e).$$

Alors

$$V_{ij} = V_{ij}^+ \oplus V_{ij}^-$$

est la décomposition de Cartan de V_{ij} associée à $Q(e)$ et

$$V^+(e) = \bigoplus_{1\le i\le j\le n} V_{ij}^+, \quad V^-(e) = \bigoplus_{1\le i\le j\le n} V_{ij}^-.$$

Pour $1\le i\le n$,

$$V_{ii} = V_{ii}^+ \oplus V_{ii}^- = \mathbb{R}e_i \oplus V_{ii}^-.$$

1.2.4 Automorphismes et dérivations

Definition 1.2.13.
Un *automorphisme* $g : V \to V$ d'un STJ V est un isomorphisme linéaire de V qui vérifie

$$g\{x, y, z\} = \{gx, gy, gz\} \quad (x, y, z \in V).$$

Les automorphismes de V forment un sous-groupe fermé de $GL(V)$ noté $\mathrm{Aut}(V)$. En particulier, $\mathrm{Aut}(V)$ est un groupe de Lie. On notera K la composante connexe neutre de $\mathrm{Aut}(V)$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de $\mathrm{Aut}(V)$ et de K est l'algèbre $\mathrm{Der}(V)$ des *dérivations* de V :

$$\mathrm{Der}(V) = \{f \in End(V) | f\{x, y, z\} = \{fx, y, z\} + \{x, fy, z\} + \{x, y, fz\} \ \forall x, y, z \in V\}.$$

Comme l'identité de Jordan peut s'écrire

$$x \,\square\, y(\{u, v, w\}) = \{x \,\square\, y(u), v, w\} - \{u, y \,\square\, x(v), w\} + \{u, v, x \,\square\, y(w)\} \ ,$$

les $x \,\square\, y - y \,\square\, x$ sont dans $\mathrm{Der}(V)$, $x, y \in V$. Ces dérivations sont dites *intérieures.*

On peut réécrire $\mathrm{Aut}(V)$ sous la forme

$$\mathrm{Aut}(V) = \{g \in GL(V) | Q(gx) = gQ(x)g^{-1} \ \forall x \in V\},$$

de sorte que $\mathrm{Aut}(V)$ opère sur l'ensemble des tripotents de V. De plus, si c est un tripotent de V et si $g \in \mathrm{Aut}(V)$ alors, pour $\alpha = 0, 1, 2$, on a

$$V_\alpha(gc) = gV_\alpha(c).$$

et $V^{\pm}(gc) = gV^{\pm}(c)$. On déduit de 1.2.11 que si V est positif, alors $\mathrm{Aut}(V)$ opère sur l'ensemble des tripotents primitifs et sur l'ensemble des tripotents maximaux.

Aussi, nous pouvons décrire $\mathrm{Aut}(V)$ comme suit :

$$\mathrm{Aut}(V) = \{g \in GL(V) | (gx) \,\square\, (gy) = g(x \,\square\, y)g^{-1} \ \forall x, y \in V\}.$$

Si V est un STJP alors $\mathrm{Aut}(V)$ est un groupe de Lie compact, comme sous-groupe fermé de $O(V, \beta)$, groupe orthogonal de V par rapport à β. En effet, si $g \in \mathrm{Aut}(V)$ et si $x, y \in V$,

$$\beta(gx, gy) = \mathrm{Tr}((gx) \,\square\, (gy)) = \mathrm{Tr}(g(x \,\square\, y)g^{-1}) = \beta(x, y).$$

1.2.5 Norme spectrale

Soit V un STJP et

$$x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$$

la décomposition spectrale d'un élément $x \neq 0$ de V, avec $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$. On pose $|x| := \lambda_n$. D'après 1.1.9, on a

$$|x| = ||x \,\square\, x||^{\frac{1}{2}}$$

où $||\cdot||$ désigne la norme d'opérateur induite par le produit scalaire β de V.

Proposition 1.2.14 ([Loo77], 3.17)**.** *L'application $x \mapsto |x|$ est une norme* $\mathrm{Aut}(V)$*-invariante sur V appelée* norme spectrale. *Cette norme possède les propriétés suivantes :*

(i) pour tout $x \in V$, $|x| = ||Q(x)||^{\frac{1}{2}}$;

(ii) pour tous $x, y \in V$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|x^{(2p+1)}| = |x|^{2p+1}$ et $|Q(x)y| \leq |x|^2|y|$;

(iii) si W est un sous-système triple positif de V alors, pour x dans W, les normes spectrales de x dans V et dans W sont les mêmes.

À tout STJP V est alors associé le domaine

$$\mathcal{D} := \{x \in V | \, |x| < 1\},$$

c'est-à-dire la boule unité ouverte pour la norme spectrale de V. On a facilement :

Proposition 1.2.15 ([FK+00], VI.4)**.** *Le domaine $\mathcal{D}$ coïncide avec chacun des ensemble suivants :*

(i) l'ensemble des x dont les valeurs propres sont strictement plus petites que 1 ;

(ii) l'ensemble des x tels que $||x \,\square\, x|| < 1$;

(iii) la composante connexe de 0 dans l'ensemble des x tels que $B(x, x)$ soit défini positif.

1.2.6 Rang réel d'un STJP

Théorème 1.2.16. *Si V est un STJP, alors $K = \mathrm{Aut}(V)_o$ opère transitivement sur l'ensemble des sous-espaces plats maximaux de V. En particulier, si W est un sous-espace plat maximal de V alors*

$$V = \bigcup_{k \in K} kW.$$

Démonstration. Soient et W, W' deux sous-espaces plats maximaux de V. Notons $W = \mathbb{R}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{R}e_r$ comme dans 1.2.6. D'après 1.2.10, les tripotents e_i sont primitifs et $e = e_1 + \ldots + e_r$ est maximal. Soit x un élément de W tel que $W = \langle x \rangle$. Écrivons $x = \lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_r e_r$ avec $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_r$. Soit enfin x' dans W' tel que $W' = \langle x' \rangle$ et soit

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & K & \to & \mathbb{R} \\ & k & \mapsto & \beta(kx', x) \end{array} .$$

Puisque φ est continue et que K est compact, φ atteint son maximum, disons en g. Nous allons montrer que $y := gx'$ est dans W. Cela entraînera que $gW' \subset W$ et par maximalité, que $gW' = W$.

Par définition de g, pour toute dérivation $\Delta \in \operatorname{Der}(V) = \operatorname{Lie}(K)$, la fonction $\varphi_\Delta(t) := \beta(\exp(t\Delta)gx', x)$ est définie et dérivable sur tout intervalle ouvert contenant 0, et atteint son maximum en $t = 0$ donc $\varphi'_\Delta(0) = 0$, i.e.

$$0 = \frac{d}{dt}_{|t=0} \beta(\exp(t\Delta)gx', x) = \beta(\Delta y, x).$$

Pour $\Delta = u \square v - v \square u$, on a donc en particulier

$$\beta(u \square v(y), x) = \beta(v \square u(y), x) = \beta(y, u \square v(x)),$$

d'où l'on tire

$$\beta(u, x \square y(v)) = \beta(u, y \square x(v)) \quad \forall u, v \in V.$$

Il vient $x \square y = y \square x$. Soit $y = \sum y_{ij}$ l'écriture de y dans la décomposition de Peirce de $V = \bigoplus V_{ij}$ associée au repère de Jordan $(e_1, \ldots, e_r)$. D'après 1.2.11, comme $e := e_1 + \ldots + e_r$ est maximal, $V_{00} = V_0(e) = \{0\}$ et $V_{ii}^+ = \mathbb{R}e_i$ pour tout $i = 1, \ldots, r$. Maintenant,

$$Q(x)y = x \square y(x) = y \square x(x) = x \square x(y) \ ,$$

donc en vertu de 1.1.9, on trouve, pour tous $0 \leq i \leq j \leq r$ $(\lambda_0 := 0)$,

$$\lambda_i \lambda_j Q(e) y_{ij} = \frac{1}{2}(\lambda_i^2 + \lambda_j^2) y_{ij}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_i^2 y_{0i} && \text{si } 1 \leq i \leq r, \\ Q(e) y_{ii} &= y_{ii} && \text{si } 1 \leq i \leq r, \\ 2\lambda_i \lambda_j Q(e) y_{ij} &= (\lambda_i^2 + \lambda_j^2) y_{ij} && \text{si } 1 \leq i < j \leq r. \end{aligned}$$

Il vient déjà $y_{0i} = 0$ et $y_{ii} \in V_{ii}^+ = \mathbb{R}e_i$ pour $1 \leq i \leq r$. Si l'on écrit $y_{ij} = y_{ij}^+ + y_{ij}^- \in V_2(e) = V^+(e) \oplus V^-(e)$, la dernière égalité donne

$$\begin{aligned} 2\lambda_i \lambda_j Q(e) y_{ij}^+ &= (\lambda_i^2 + \lambda_j^2) y_{ij}^+ \\ -2\lambda_i \lambda_j Q(e) y_{ij}^+ &= (\lambda_i^2 + \lambda_j^2) y_{ij}^- \end{aligned}$$

ce qui prouve que $y_{ij}^+ = y_{ij}^- = 0$ pour $1 \leq i < j \leq r$ (car $\lambda_i \neq \pm\lambda_j$). D'où

$$y = \sum_{i=1}^{r} y_{ii} \in \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{R}e_i = W.$$

$\square$

Definition 1.2.17.
On définit le *rang réel* r d'un STJP V comme étant la dimension commune des sous-espaces plats maximaux de V. Si $x \in V$, on définit son *rang* $\mathrm{rg}(x)$ comme étant le nombre de valeurs propres de x, i.e. $\mathrm{rg}(x) = \dim\langle x \rangle$.

Exemple 1.2.18: Si $e_1, \ldots, e_n$ sont des tripotents primitifs orthogonaux deux à deux alors $\sum_{i=1}^n e_i$ est de rang n. En particulier, un tripotent de V est primitif si et seulement si il est de rang 1 et est maximal si et seulement si il est de rang r.

Corollaire 1.2.19. *Soient $(e_1, \ldots, e_r)$ et $(e'_1, \ldots, e'_r)$ deux repères de Jordan d'un STJP V. Alors il existe $k \in K = \mathrm{Aut}(V)_o$, une permutation σ de $\{1, \ldots, r\}$ et $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ tels que pour tout $i = 1, \ldots, r$, $ke'_i = \epsilon_i e_{\sigma(i)}$.*

Démonstration. Conséquence immédiate de 1.2.6 et 1.2.16. $\square$

Corollaire 1.2.20. *Si e et f sont deux tripotents maximaux d'un STJP V alors il existe $k \in K = \mathrm{Aut}(V)_o$ tel que $f \,\square\, f = k(e \,\square\, e)k^{-1}$. En particulier, pour $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ on a $V_\alpha(f) = kV_\alpha(e)$.*

Démonstration. D'après 1.2.10 et 1.2.19, il existe $k \in K = \mathrm{Aut}(V)_o$, une permutation σ de $\{1, \ldots, r\}$ et $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ tels que $f = k \sum_{i=1}^r \epsilon_i e_{\sigma(i)}$. Ainsi

$$f \,\square\, f = k(\sum_{i=1}^{r} \epsilon_i e_{\sigma(i)} \,\square\, \sum_{j=1}^{r} \epsilon_j e_{\sigma(j)})k^{-1} = k(\sum_{i=1}^{r} e_{\sigma(i)} \,\square\, e_{\sigma(i)})k^{-1} = k(e \,\square\, e)k^{-1}.$$

$\square$

1.3 Systèmes triples de Jordan simples

1.3.1 STJ semi-simples

Soit V un STJ réel. Un *idéal* I de V est un sous-espace vectoriel de V tel que

$$\{I, V, V\} \subset I, \qquad \{V, I, V\} \subset I.$$

Un idéal est donc en particulier un sous-système triple. Par exemple, $\{0\}$ et V sont des idéaux de V. Un idéal de V est dit *propre* s'il est non nul et différent de V.

Definition 1.3.1.
Un STJ V est dit *simple* si $V \neq \{0\}$ et si V ne contient pas d'idéal propre. On dit que V est *semi-simple* si V se décompose sous la forme

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$$

où chaque V_j est un idéal simple de V.

Remarque 1.3.2 ([FK+00], VI.1)**:** Si V est semi-simple et si $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$, où chaque V_j est un idéal simple de V, alors le produit triple dans V est donné par

$$\{x, y, z\} = \sum_{j=1}^{n} \{x_j, y_j, z_j\} \quad (x_j, y_j, z_j \in V_j, j = 1, \ldots, n).$$

Si l'on suppose V positif, la définition d'idéal et l'associativité de β entraînent ([FK+00, VI.1]) que l'orthogonal $I^\perp$ (par rapport au produit scalaire β) d'un idéal I de V est encore un idéal de V. De proche en proche, on obtient alors une décomposition de V en somme directe d'idéaux simples.

Proposition 1.3.3 ([FK+00], VI.1)**.** *Si V est un STJP alors V se décompose sous la forme*

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$$

où chaque V_j est un idéal simple de V (dans le sens défini plus haut). Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près. Autrement dit, tout STJP est semi-simple.

REMARQUE 1.3.4: Cette notion de semi-simplicité coïncide avec la notion usuelle, cette dernière étant la suivante : un STJ V est semi-simple si son radical nilpotent $Nil(V)$ est nul, où

$$Nil(V) = \{x \in V | x \text{ est nilpotent dans chaque algèbre de Jordan } V^{(y)}, y \in V\}.$$

Utilisant la formule

$$y^{(n+1,x)} = Q(y)x^{(n,y)}$$

(cf [Loo75, 3.8]), on obtient

$$Nil(V) = \{x \in V | \text{ l'algèbre de Jordan } V^{(x)} \text{ est nilpotente}\}.$$

Si V est positif alors la condition $x^{(p+1,x)} = x^{(2p+1)} = 0$ entraîne $x = 0$ et donc $Nil(V) = \{0\}$.

1.3.2 STJP simples

On se donne ici un STJP V.

PROPOSITION 1.3.5. *Supposons V simple et soit e un tripotent maximal. Alors l'algèbre de Jordan réelle $V_2(e)$ est simple et $V^+(e)$ est, ou bien simple, ou bien somme de deux idéaux simples. Dans ce dernier cas, il existe f dans $V^+(e)$ tel que :*

(i) $f^2 = e$, *et donc il existe un idempotent c de $V^+(e)$ tel que $f = 2c - e$;*

(ii) $Q(e) = P_e(f) \neq \mathrm{Id}$ *et*

$$V^+(e) = V_2(c, 0) \oplus V_2(c, 2), \qquad V^-(e) = V_2(c, 1)$$

où $V_2(c, \alpha) = \{x \in V_2(e) \,|\, L_e(c)x = \frac{\alpha}{2}x\}$;

(iii) Les sous-espaces de Peirce de f et e coïncident et f est un tripotent maximal ;

(iv) L'algèbre de Jordan $V_2(f)$ est euclidienne.

Démonstration. La simplicité de $V_2(e)$ est montrée dans [Loo75, 10.14]. L'existence d'un f vérifiant les points *(i), (ii)* découlent de [Hel69, Satz 2.3]. Puisque

$$f^\star := Q(e)f = P_e(f)f = f^3 = f = f^{-1},$$

on a

$$f \,\square\, f = L_e(ff^\star) = L_e(e) = e \,\square\, e\ .$$

En particulier, $f \,\square\, f(f) = e \,\square\, e(f) = f$ et $V_0(f) = \{0\}$. Aussi,

$$Q(f) = P_e(f)Q(e) = Q(e)^2 = \mathrm{Id}$$

et donc $V_2(f) = V^+(f)$ est euclidienne. □

REMARQUE 1.3.6: Si V est un STJP simple de rang réel 1 alors $V^+(e) = \mathbb{R}e$ est simple pour tout tripotent maximal e.

LEMME 1.3.7. *Soient V un JTSP de rang réel $r \geq 1$ et $(e_1, \ldots, e_r)$ un repère de Jordan. Alors :*

(i) pour tous $1 \leq i < j \leq r$ et pour tout $a \in V_{ij}^{\pm} \backslash \{0\}$, il existe $\lambda > 0$ tel que

$$a^2 = \pm\lambda(e_i + e_j);$$

(ii) pour tout $1 \leq i \leq r$ et pour tout $a \in V_{ii}^{-} \backslash \{0\}$ il existe $\lambda < 0$ tel que

$$a^2 = \lambda e_i;$$

les produits étant pris dans $V_2(e)$, $e = e_1 + \ldots + e_r$.

Démonstration. Soit $a \in V_{ij}^{\pm} \backslash \{0\}$. Alors $a^2 \in V_{ii}^{+} \oplus V_{jj}^{+} = \mathbb{R}e_i \oplus \mathbb{R}e_j$ et donc il existe $\lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$. Mais injectant $v = e_i - e_j$ dans l'identité $a^2(av) = a(a^2 v)$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 = (\lambda_i e_i + \lambda_j e_j)(ae_i - ae_j) &= a\left((\lambda_i e_i + \lambda_j e_j)(e_i - e_j)\right) \\ &= a(\lambda_i e_i - \lambda_j e_j) = \frac{1}{2}(\lambda_i - \lambda_j)a. \end{aligned}$$

Il suit que $\lambda_i = \lambda_j$ et par suite , $a^2 = \lambda(e_i + e_j)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Maintenant,

$$\delta_e(a, a) = \delta_e(e, a^2) = \lambda \mathrm{Tr} L_e(e_i + e_j)$$

et comme $\mathrm{Tr}L_e(e_i + e_j) = \beta(e_i + e_j, e_i + e_j) > 0$, on déduit que λ et $\delta_e(a, a)$ sont de même signe.

Si $a \in V_{ii}^{-} \backslash \{0\}$ alors $a^2 \in V_{ii}^{+} = \mathbb{R}e_i$ et donc $a^2 = \lambda e_i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On obtient

$$\delta_e(a, a) = \delta_e(e, a^2) = \lambda \mathrm{Tr} L_e(e_i) = \lambda \beta(e_i, e_i)$$

et $\lambda = \frac{\delta_e(a,a)}{\mathrm{Tr}L_e(e_i)} < 0$. □

PROPOSITION 1.3.8. *Supposons V simple et soit $(e_1, \ldots, e_r)$ un repère de Jordan de V. Alors pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, r\}$, il existe $k \in K := \mathrm{Aut}(V)_o$ tel que $ke_i = e_{\sigma(i)}$ pour tout i. En particulier, si $(e'_1, \ldots, e'_r)$ est un autre repère de Jordan, il existe $g \in K$ tel que $ge'_i = \pm e_i$, pour tout $i = 1, \ldots, r$.*

Démonstration. Le résultat est évident si $r = 1$. Supposons alors $r \geq 2$ et soient $e = e_1 + \ldots + e_r$ et $V_2(e) = V^+(e) \oplus V^-(e)$. D'après 1.3.5 on peut supposer $V^+(e)$ simple (sinon on remplace e par f et $V_2(f)$ est euclidienne simple). Ainsi, les $V^+_{ij}(e)$ sont tous non nuls (cf [FK94, IV.2.4(i)]) et donc d'après 1.3.7 il existe $a \in V^+_{ij}(e)$ avec $i \neq j$ tel que $a^2 = e_i + e_j$. Soit

$$\Delta = a \,\square\, e_i - e_i \,\square\, a \in \mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K).$$

Comme $e_i, a \in V^+(e)$, (1.14) donne

$$\Delta = 2[L_e(a), L_e(e_i)]$$

et donc

$$\Delta(e_i) = \frac{1}{2}a, \quad \Delta(e_j) = -\frac{1}{2}a, \quad \Delta(a) = e_j - e_i, \quad \Delta(e_k) = 0 \text{ pour } i \neq k \neq j.$$

Pour $\ell \geq 0$ entier on a

$$\Delta^{2\ell+1}(e_i) = (-1)^\ell \Delta(e_i)$$

et pour $\ell \geq 1$,

$$\Delta^{2\ell}(e_i) = (-1)^{\ell-1}\Delta^2(e_i).$$

Il vient

$$\exp(\pi\Delta)e_i = e_i - (\cos\pi - 1)\Delta^2(e_i) + (\sin\pi)\Delta(e_i) = e_j.$$

On prouve de même que $\exp(\pi\Delta)e_j = e_i$ et $\exp(\pi\Delta)e_k = e_k$ pour $i \neq k \neq j$, d'où le résultat. La deuxième assertion découle de la première et de 1.2.19. $\square$

1.3.3 STJP réduits et STJP de type tube

On considère toujours un STJP V. Soit c un tripotent primitif de V. On sait que $V^+(c) = \mathbb{R}c$ et par conséquent,

$$V_2(c) = \mathbb{R}c \oplus V^-(c).$$

Les produits considérés dans la suite sont pris dans $V_2(c)$. Supposons $V^-(c) \neq \{0\}$. Comme $Q(c)$ est un automorphisme de l'algèbre de Jordan $V_2(c)$, on a

$$Q(c)(uv) = (Q(c)u)(Q(c)v) = uv \;\forall u, v \in V^-(c)$$

et par suite, pour tous u, v dans $V^-(c)$, il existe $\alpha(u,v) \in \mathbb{R}$ tel que $uv = \alpha(u,v)c$. L'application $\alpha : (u,v) \mapsto \alpha(u,v)$ est clairement bilinéaire et symétrique. De plus, $\alpha(u,u) = 0$ entraîne que u est nilpotent donc, par semi-simplicité de $V_2(c)$, on a nécessairement $u = 0$. Alors $V_2(c)$ est isomorphe à l'algèbre de Jordan (de rang 2) $\mathbb{R} \times V^-(c)$, $V^-(c)$ muni de la forme α. En effet,

$$\varphi : V_2(c) \to \mathbb{R} \times V^-(c), \quad (\lambda c + u) \mapsto (\lambda, u)$$

est un isomorphisme d'algèbres puisque

$$\begin{aligned}(\lambda c+u)(\mu c+v) &= \lambda\mu c+uv+\lambda v+\mu u\\ &= (\lambda\mu+\alpha(u,v))c+(\lambda v+\mu u)\end{aligned}$$

entraîne que

$$\begin{aligned}\varphi((\lambda c+u)(\mu c+v)) &= (\lambda\mu+\alpha(u,v),\lambda v+\mu u)\\ &= (\lambda,u)\cdot(\mu,v)\\ &= \varphi(\lambda c+u)\cdot\varphi(\mu c+v).\end{aligned}$$

Pour $x=\lambda c+u$, on a

$$x^2=(\lambda^2+\alpha(u,u))c+2\lambda u=2\lambda x-(\lambda^2-\alpha(u,u))c$$

donc

$$\mathrm{tr}x=2\lambda,\qquad \det x=\lambda^2-\alpha(u,u)$$

et si $\det x\neq 0$,

$$x^{-1}=-\frac{x-\mathrm{tr}x}{\det x}=\frac{\lambda c-u}{\det x}=\frac{Q(c)x}{\det x}$$

(pour les définitions de la trace tr et du déterminent det dans une algèbre de Jordan, nous renvoyons par exemple à [FK94]). Comme la forme $(x,y)\mapsto \mathrm{Tr}L_c(xy)$ est définie négative sur $V^-(c)$, pour $u\in V^-(c)\backslash\{0\}$, il vient

$$0>\mathrm{Tr}L_c(u^2)=\alpha(u,u)\mathrm{Tr}L_c(c)$$

et donc $\alpha(u,u)<0$ pour tout $u\in V^-(c)\backslash\{0\}$. On déduit que $\det x=0$ si et seulement si $x=0$, ce qui veut dire que tout élément non nul de l'algèbre de Jordan $V_2(c)$ est inversible.

Pour $x=\lambda c+u$ et $y=\mu c+v$, posons

$$\sigma(x,y)=\lambda\mu-\alpha(u,v).$$

Alors σ est bilinéaire symétrique, est définie positive et

$$xy=\sigma(c,x)y+\sigma(c,y)x-\sigma(x,y)c.$$

Puisque

$$x^2-2\sigma(c,x)+\sigma(x,x)c=0$$

on retrouve que $V_2(c)$ est une algèbre de Jordan de rang 2, que $\mathrm{tr}x=2\sigma(c,x)$, $\det x=\sigma(x,x)$ et donc que tout élément non nul est inversible. On a prouvé le résultat suivant :

Proposition 1.3.9. *Si c est un tripotent primitif d'un STJP V alors l'algèbre de Jordan $V_2(c)=\mathbb{R}c\oplus V^-(c)$ est une algèbre à divisions et il n'y a que deux possibilités :*

(i) ou bien $V^-(c)=\{0\}$, et donc $V_2(c)=\mathbb{R}c$ est de rang 1,

(ii) ou bien $V^-(c) \neq \{0\}$, entraînant que $V_2(c)$ est de rang 2 et isomorphe à $\mathbb{R} \times V^-(c)$, $V^-(c)$ muni de la forme bilinéaire symétrique définie négative α.

En vertu de 1.3.8, si V est simple alors la classe d'isomorphismes de l'algèbre $V_2(c)$ est indépendante du choix de c, elle est en fait déterminée par la dimension de $V_2(c)$.

Definition 1.3.10.
On dit qu'un JTSP V est *réduit* si $V_2(c) = \mathbb{R}c$ (i.e. si $V^-(c) = \{0\}$) pour tout tripotent primitif c de V.

Remarque 1.3.11: Soient V un STJP simple de rang réel $r \geq 2$ et

$$V = \bigoplus_{0 \leq i \leq j \leq r} V_{ij}$$

la décomposition de Peirce associée à un repère de Jordan $(e_1, \ldots, e_r)$. Pour tous $1 \leq i, j \leq r$, il existe d'après 1.3.8 un élément k de $K = \mathrm{Aut}(V)_o$ tel que $e_j = ke_i$. On en déduit que $V_\alpha(e_j) = kV_\alpha(e_i)$ ($\alpha \in \{0, 1, 2\}$) et $V^\pm(e_j) = kV^\pm(e_i)$. Alors

$$\dim V_{ii} = \dim V_{11} \ (i = 1, \ldots, r) \ , \tag{1.15}$$
$$\dim V_{ii}^- = \dim V_{11}^- \ (i = 1, \ldots, r) \tag{1.16}$$
$$\dim V_{ij} = \dim V_{12} \ (i \neq j) \ , \tag{1.17}$$
$$\dim V_{ij}^+ = \dim V_{12}^+ \ (i \neq j) \ , \tag{1.18}$$
$$\dim V_{ij}^- = \dim V_{12}^- \ (i \neq j) \ , \tag{1.19}$$
$$\dim V_{0i} = \dim V_{01} \ (i = 1, \ldots, r) \ , \ . \tag{1.20}$$

On pose alors

$$b := \dim V_{01}, \quad c := \dim V_{11}.$$

Ainsi, V est réduit si et seulement si $c = 1$. Si V n'est pas réduit alors $V_{ii}^- \neq \{0\}$ pour tout i. Aussi, d'après 1.1.7, si $b = 0$ alors $V = V_2(e)$ possède une structure d'algèbre de Jordan unitaire semi-simple réelle, et si on a de plus $V^-(e) = \{0\}$, alors V est muni d'une structure d'algèbre de Jordan euclidienne unitaire semi-simple.

Definition 1.3.12.
On dit qu'un STJP V est de *type tube* si $V = V_2(e)$ pour un certain tripotent e (nécessairement maximal). On dit qu'un STJP V est de type *euclidien* si $V = V^+(e)$ pour un certain tripotent e.

Remarque 1.3.13: (i) Soit V un STJP simple de type tube. Si V est non euclidien, alors 1.3.5 nous permet d'affirmer que pour tout tripotent maximal e de V, $V^+(e)$ est simple.

(ii) Un STJP V de type tube réduit et de rang réel 1 est nécessairement isomorphe à l'algèbre de Jordan euclidienne $\mathbb{R}$, V est donc de type euclidien. En effet, par hypothèse on a $V = V^+(e) \oplus V^-(e)$ pour un tripotent maximal e de V, et puisque V est réduit et de rang réel 1, e est minimal et $V^-(e) = \{0\}$, i.e. $V = V^+(e) = \mathbb{R}e$.

Proposition 1.3.14. *Soit V un STJP simple. Si V n'est pas réduit ou si V n'est pas de type tube, alors pour tout repère de Jordan $(e_1, \ldots, e_r)$ de V et pour tout $i = 0, \ldots, r$, il existe $k_i \in K = \mathrm{Aut}(V)_o$ tel que $k_i e_i = -e_i$ et $k_i e_j = e_j$ pour $j \neq i$.*

Démonstration. Supposons d'abord V non réduit. Alors pour tout i, $V_{ii} = \mathbb{R}e_i \oplus V_{ii}^-$ est la décomposition de Cartan de V_{ii} relativement à $Q(e)$ et $V_{ii}^- \neq \{0\}$. On peut alors trouver $x \in V_{ii}^-$ tel que $x^2 = -e_i$ (1.3.7). Posons $e = e_1 + \ldots + e_r$. L'application $\Delta = x \,\square\, e - e \,\square\, x$ est dans $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K)$ et d'après (1.14),

$$x \,\square\, e - e \,\square\, x = L_e(x) - L_e(x^\star) = 2L_e(x)$$

donc $\Delta = 2x \,\square\, e$. Maintenant,

$$\Delta(e_i) = 2x \,\square\, e(e_i) = 2x \,\square\, e_i(e_i) = 2e_i \,\square\, e_i(x) = 2x,$$

$$\Delta(x) = 2x \,\square\, e(x) = 2x^2 = -2e_i \ , \qquad \Delta(e_j) = 0 \ \forall j \neq i.$$

Pour $\ell \geq 0$ entier, on a

$$\Delta^{2\ell}(e_i) = (-1)^\ell 2^{2\ell} e_i, \quad \Delta^{2\ell+1}(e_i) = (-1)^\ell 2^{2\ell+1} x.$$

Ainsi, $k_i := \exp(\frac{\pi}{2}\Delta) \in K$ vérifie $k_i e_j = e_j$ si $j \neq i$ et

$$k_i(e_i) = (\cos \pi) e_i + (\sin \pi) x = -e_i.$$

Supposons maintenant que V ne soit pas de type tube. Alors $V_{i0} \neq \{0\}$ est un système triple de Jordan positif pour tout $i = 1, \ldots, r$. Il existe donc un tripotent non nul c_i dans V_{i0}, et l'on a nécessairement $\{c_i, c_i, e_i\} \neq 0$ puisque $\{e_i, e_i, c_i\} = \frac{1}{2} c_i \neq 0$. D'après les règles de calcul sur les espaces de Peirce, on a $\{c_i, c_i, e_i\} \in V_{ii}$ et puisque $Q(e)\{c_i, c_i, e_i\} = Q(e_i)\{c_i, c_i, e_i\} = \{c_i, c_i, e_i\}$, on obtient $\{c_i, c_i, e_i\} \in V^+(e) \cap V_{ii} = \mathbb{R}e_i$. Utilisant le fait que $Q(c_i)e_i \in V_{00} = \{0\}$ et que pour tout tripotent c on a $Q(c)^2 = 2(c \,\square\, c)^2 - c \,\square\, c$ (cf (1.10)), on obtient $\{c_i, c_i, e_i\} = \frac{1}{2} e_i$. Choisissons alors $x = \sqrt{2} c_i$ dans V_{i0}, x vérifiant $\{x, x, e_i\} = e_i$, et soit

$$\Delta = x \,\square\, e - e \,\square\, x \in \mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K).$$

De nouveau, les règles de Peirce fournissent

$$\Delta(e_i) = \frac{1}{2}x, \quad \Delta(x) = -e_i \text{ et } \Delta(e_j) = 0 \text{ pour } j \neq i$$

et pour $\ell \geq 0$ entier,

$$\Delta^{2\ell}(e_i) = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell} e_i, \quad \Delta^{2\ell+1}(e_i) = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell}\frac{x}{2}.$$

En posant $k_i := \exp(\sqrt{2}\pi\Delta)$, on obtient

$$k_i e_i = (\cos\pi)e_i + \frac{\sin\pi}{\sqrt{2}}x = -e_i$$

et pour $j \neq i$, $k_i e_j = e_j$. □

Corollaire 1.3.15. *Soit V un STJP simple. Si V n'est pas réduit ou si V n'est pas de type tube, alors K opère transitivement sur les repères de Jordan et l'ensemble des tripotents maximaux de V est connexe.*

Démonstration. Conséquence directe de 1.3.8 et de 1.3.14. □

1.3.4 Invariants numériques dans les STJP

Lemme 1.3.16. *Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ un repère de Jordan d'un STJ V et pour $1 \leq i < j \leq r$, soit $y_{ij} \in V_{ij}$. Alors*

$$\forall (k,l) \neq (i,i),(j,j),(i,j), \ \forall z_{kl} \in V_{kl}, \ P_e(y_{ij})z_{kl} = 0$$

où $e := e_1 + \ldots + e_r$.

Démonstration. Cela résulte du fait que $V_2(e) = \bigoplus_{1\leq i\leq j\leq r} V_{ij}$ et que $V_2(e_i+e_j) = P_e(e_i+e_j)V_2(e) = V_{ii} \oplus V_{jj} \oplus V_{ij}$. En effet, il existe $y \in V_2(e)$ tel que $y_{ij} = P_e(e_i+e_j)y$ et donc

$$P_e(y_{ij})z_{kl} = P_e(e_i+e_j)P_e(y)P_e(e_i+e_j)z_{kl} = 0.$$

□

Proposition 1.3.17. *Soient V un JTSP simple de rang réel $r \geq 2$, $e = e_1 + \ldots + e_r$ un tripotent maximal de V et $\bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq n} V_{ij}$ la décomposition de Peirce de $V_2(e)$ associée à e.*

(i) Si V est non réduit ou si V n'est pas de type tube, alors $V^+(e)$ est simple et $\dim V_{ij}^+ = \dim V_{ij}^- \geq 1$ ($i \neq j$);

(ii) Si $V = V_2(e) = V^+(e) \oplus V^-(e)$ est de type tube réduit non euclidien (i.e. $V^-(e) \neq \{0\}$) avec $r \geq 3$, alors $V^+(e)$ est simple et $\dim V_{ij}^+ = \dim V_{ij}^- \geq 1$ ($i \neq j$).

Démonstration. (i) D'abord, si V est non réduit ou si V n'est pas de type tube, alors tout tripotent maximal est de la forme ke avec $k \in K$ (1.3.15) et ainsi $V^{\pm}(ke) = kV^{\pm}(e)$. On déduit de 1.3.5 que, ou bien $V^+(e) = V_2(e)$ est simple, ou bien $V^-(e') \neq \{0\}$ pour tout tripotent maximal e' et $V^+(e)$ est simple. La simplicité de $V^+(e)$ entraîne que l'on a $V_{ij}^+ \neq \{0\}$ pour tous $i \neq j$ ([FK94, IV.2.4(i)]). Soit maintenant $k_i \in K$ tel que $k_i e_i = -e_i$ et $k_i e_j = e_j$ pour $j \neq i$ (1.3.14). L'élément k_i vérifie $k_i V_{ij} = V_{ij}$ pour $j \neq i$. On a de plus

$$Q(f) = Q(e) - 4 \sum_{j \neq i} Q(e_i, e_j)$$

où l'on a noté $f := k_i e = e - 2e_i$. On en déduit que $k_i Q(e) k_i^{-1} y_{ij} = Q(f) y_{ij} = -Q(e) y_{ij}$ pour tout $y_{ij} \in V_{ij}$ avec $j \neq i$ (1.1.9(ii)) et $k_i V_{ij}^+ = V_{ij}^-$. D'où l'égalité $\dim V_{ij}^+ = \dim V_{ij}^-$.

(ii) Supposons maintenant $V = V_2(e)$ de type tube réduit non euclidien avec $r \geq 3$. D'après 1.3.13, $V^+(e)$ est simple, ce qui entraine que $V_{ij}^+ \neq \{0\}$ pour tous $i \neq j$. De plus, V réduit et $V^+(e) \neq V$ donnent $V_{ii} = \mathbb{R} e_i$ pour tout $i = 1, \ldots, r$ et $V_{kl}^- \neq \{0\}$ pour tous $k \neq l$. En vertu de 1.3.7 on peut trouver $x_{ij} \in V_{ij}^-$ tel que $x_{ij}^2 = -(e_i + e_j)$ et donc, pour $i < k < j$, l'application

$$V_{ik}^+ \to V_{kj}^-, \; y \mapsto L_e(x_{ij}) y$$

est bijective. En effet, 1.3.16 donne $P_e(x_{ij}) y = 0$, i.e.

$$2L_e(x_{ij})^2 y = L_e(x_{ij}^2) y = -(e_i + e_j) y = -\frac{1}{2} y.$$

D'où $\dim V_{ik}^+ = \dim V_{kj}^- = \dim V_{ik}^-$. □

Remarque 1.3.18: Si V est de type tube réduit non euclidien, la condition $r \geq 3$ est nécessaire pour obtenir les égalités $\dim V_{ij}^+ = \dim V_{ij}^- \geq 1$. En effet, pour $2 \leq p \leq \left[\frac{p+q}{2}\right]$, l'espace $\mathbb{R}^{p+q}$ muni de la forme bilinéaire non dégénérée standard de signature (p, q) est un STJP simple de type tube réduit non euclidien, de rang réel 2, et $\dim V_{12}^+ = \dim V_{12}^-$ si et seulement si $p = q$. Néanmoins, la simplicité de $V^+ \cong \mathbb{R}^{1,q}$ persiste. La classification des STJP simples (présentée plus loin) montre cependant que cet exemple est la seule exception à la proposition précédente.

Proposition 1.3.19. *Soient V un JTSP simple de rang réel $r \geq 1$, ρ le rang de l'algèbre de Jordan simple $V_2(e)$, pour un tripotent maximal e. Il n' y a que quatre possibilités :*

(i) $V = V^+(e)$ est une algèbre de Jordan euclidienne simple (i.e. V de type euclidien) : alors V est réduit et $\rho = r$;

(ii) $V \neq V^+(e)$ (i.e. $V^-(e) \neq \{0\}$) :

(a) si $V^+(e)$ n'est pas simple alors V est une mutation d'algèbre de Jordan euclidienne, i.e. V est de type euclidien (donc réduit) ;

(b) si V est réduit et $V^+(e)$ simple alors $\rho = r$;

(c) si V n'est pas réduit alors $V^+(e)$ est simple et $\rho = 2r$.

Démonstration. Le point (i) est évident, (a) est une conséquence de 1.3.5, (b) résulte de (a) et 1.3.9, et (c) découle 1.3.9 et 1.3.17. □

Remarque 1.3.20: D'après ce qui précède, V est réduit si et seulement si le rang réel r de V coïncide avec le rang (absolu) $\mathrm{Rg}V_2(e)$ de $V_2(e)$ pour tout tripotent maximal e, et n'est pas réduit si et seulement si $\mathrm{Rg}V_2(e) = 2r$. Notant $r_{\mathbb{C}}$ le rang du STJHP $V^{\mathbb{C}} = V \oplus iV$, cela revient à écrire :

$$(V \text{ est réduit}) \Longleftrightarrow r_{\mathbb{C}} = r \ ;$$
$$(V \text{ est non réduit}) \Longleftrightarrow r_{\mathbb{C}} = 2r \ .$$

Proposition 1.3.21. *Soit V un JTSP simple de rang réel $r \geq 1$ et $e = e_1 + \ldots + e_r$ un tripotent maximal de V. Si $r = 1$, on pose $a = 0$, $b = \dim V_1(e_1)$ et $c = \dim V_2(e_1)$. Si $r \geq 2$, posons*

$$a = \dim V_{ij}^+ \ (i \neq j), \quad b = \dim V_{i0} \ (i = 1, \ldots, r), \quad c = \dim V_{ii} \ (i = 1, \ldots, r)$$

où les V_{ij} $(0 \leq i \leq j \leq r)$ sont les espaces de Peirce associés au repère de Jordan $(e_1, \ldots, e_r)$.

(i) Si $V = V^+(e)$ alors

$$\dim V = r + \frac{1}{2}r(r-1)a \ ;$$

(ii) si V est non réduit ou si V n'est pas de type tube, ou bien si $V = V_2(e) = V^+(e) \oplus V^-(e)$ est de type tube réduit non euclidien (i.e. $V^-(e) \neq \{0\}$) avec $r \geq 3$, alors

$$\dim V = r(r-1)a + rb + rc \ ,$$

$$\dim V_2(e) = r(r-1)a + rc, \quad \dim V_1(e) = rb \ ,$$

$$\dim V^+(e) = r + \frac{1}{2}r(r-1)a, \quad \dim V^-(e) = r(c-1) + \frac{1}{2}r(r-1)a.$$

Démonstration. Conséquence de 1.1.7, 1.2.12 et 1.3.17. □

Remarque 1.3.22: (i) On déduit de la proposition précédente que le rang réel de V coïncide avec le rang de l'algèbre de Jordan euclidienne simple $V^+(e)$.

(ii) V est de type tube si et seulement si $b = 0$.

(iii) V est réduit si et seulement si $c = 1$. Sous les hypothèses de 1.3.21(ii), V est réduit si et seulement si
$$\frac{\dim V^+(e) - \dim V^-(e)}{r} = 1.$$
Les systèmes triples de Jordan hermitiens positifs simples (considérés comme réels) sont alors des exemples de systèmes triples de Jordan positifs simples non réduits puisque ce sont les cas particuliers où $V^-(e) = iV^+(e)$, $Q(e)$ apparaissant comme la conjugaison de $V_2(e) = V^+(e) \oplus iV^+(e)$ par rapport à la forme réelle $V^+(e)$ de $V_2(e)$.

1.3.5 Stratifications

Lemme 1.3.23. *Soit V un STJ réel.*

(i) Si x est un tripotent de V alors
$$Q(x)^2 = 2(x \,\square\, x)^2 - x \,\square\, x.$$

(ii) Si $e_1, \ldots, e_n$ sont des tripotents primitifs orthogonaux deux à deux alors
$$Q(\sum_{i=1}^{n} e_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Id}_{V_{ii}} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Id}_{V_{ij}}$$
où les V_{ij} $(1 \leq i \leq j \leq n)$ sont les sous-espaces de Peirce de V associé à $e_1, \ldots, e_n$.

Démonstration. Le premier point est une conséquence de (1.10). Maintenant, on peut écrire
$$Q(\sum_{i=1}^{n} e_i)^2 = 2(\sum_{i=1}^{n} e_i \,\square \sum_{j=1}^{n} e_j)^2 - \sum_{i=1}^{n} e_i \,\square \sum_{j=1}^{n} e_j = 2(\sum_{i=1}^{n} e_i \,\square\, e_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} e_i \,\square\, e_i$$

et puisque les $e_i \,\square\, e_i$ et $e_j \,\square\, e_j$ commutent, il vient

$$(\sum_{i=1}^{n} e_i \,\square\, e_i)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} e_i \,\square\, e_i \circ e_j \,\square\, e_j = \sum_{i=1}^{n} (e_i \,\square\, e_i)^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} e_i \,\square\, e_i \circ e_j \,\square\, e_j.$$

On obtient

$$\begin{aligned} Q(\sum_{i=1}^{n} e_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} (2(e_i \,\square\, e_i)^2 - e_i \,\square\, e_i) + 4 \sum_{1\leq i<j\leq n} e_i \,\square\, e_i \circ e_j \,\square\, e_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} Q(e_i)^2 + 4 \sum_{1\leq i<j\leq n} e_i \,\square\, e_i \circ e_j \,\square\, e_j. \end{aligned}$$

Finalement, les opérateurs $Q(e_i)^2$ et $4 e_i \,\square\, e_i \circ e_j \,\square\, e_j$ sont les projecteurs respectifs sur V_{ii} et V_{ij} $(i < j)$, d'où le résultat. □

Proposition 1.3.24. *Si V est un STJP simple et si $e_1, \ldots, e_n$ sont des tripotents primitifs orthogonaux deux à deux, alors*

$$\mathrm{Rg} Q(\sum_{i=1}^{n} e_i) = n \dim V_{11} + \frac{n(n-1)}{2} \dim V_{12}.$$

On a en particulier

$$\mathrm{Rg} Q(\sum_{i=1}^{n} e_i) = \mathrm{Rg} Q(\sum_{i=1}^{m} e_i) \Longleftrightarrow n = m.$$

Démonstration. Conséquence de 1.3.23, (1.15) et (1.17). □

Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ un système de tripotents primitifs orthogonaux deux à deux de V et $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$, $1 \leq i \leq n$. Ce qui précède donne

$$\begin{aligned} Q(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i e_i)^2 &= 2(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i e_i \,\square \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j e_j)^2 - \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i e_i \,\square \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j e_j \\ &= 2(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 e_i \,\square\, e_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 e_i \,\square\, e_i \\ &= Q(\sum_{i=1}^{n} e_i)^2. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\mathrm{Rg}Q(\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i e_i) = \mathrm{Rg}Q(\sum_{i=1}^{n} e_i).$$

Dans la suite, on notera $e_{p,q}$ $(p, q \geq 0, p+q \leq n)$ les tripotents définis par

$$e_{p,q} := \sum_{i=1}^{p} e_i - \sum_{j=p+1}^{p+q} e_j.$$

En vertu de ce qui précède,

$$\mathrm{Rg}Q(e_{p,q}) = \mathrm{Rg}Q(e_{p+q,0}). \tag{1.21}$$

Soit V un STJP. Notons $O(V) := O(V, \beta)$ le groupe β-orthogonal de V, i.e.

$$O(V) = \{g \in GL(V) | g^{-1} = g^*\}\ ,$$

et $\mathrm{Str}(V)$ le *groupe de structure* du système triple $(V, \{\})$, défini par

$$\begin{aligned}\mathrm{Str}(V) &= \{g \in GL(V) | Q(gx) = gQ(x)g^*\ \forall x \in V\}\\ &= \{g \in GL(V)\,|\,(gx)\,\square(g^{*-1}y) = g(x\,\square\,y)g^{-1}\ \forall x \in V\}.\end{aligned}$$

où g^* désigne l'adjoint de g relativement à β. On remarque que

$$\mathrm{Aut}(V) = \mathrm{Str}(V) \cap O(V).$$

Notons $\mathfrak{str}(V)$ l'algèbre de Lie de $\mathrm{Str}(V)$; d'après [Sat80, 7.3, p.29],

$$\mathfrak{str}(V) = V \,\square\, V$$

où $V \,\square\, V$ est le sous-espace de $End(V)$ engendré par les $x \,\square\, y$ avec $x, y \in V$.

Proposition 1.3.25. *Soit V un STJP simple de rang réel $r \geq 1$ et $(e_1, \ldots, e_r)$ un repère de Jordan de V. Notons $V(0) := \{0\}$ et pour $1 \leq \ell \leq r$,*

$$V(\ell) = \bigcup_{p+q=\ell} \mathrm{Str}(V)_o \cdot e_{p,q}$$

où $\mathrm{Str}(V)_o$ désigne la composante neutre du groupe de structure de V. Alors

$$V = \bigsqcup_{\ell=0}^{r} V(\ell).$$

En particulier, $V(\ell)$ est l'ensemble des éléments de rang ℓ.

Démonstration. Soit $x \in V$. D'après 1.2.16, x est conjugué sous $K = \mathrm{Aut}(V)_o \subset \mathrm{Str}(V)_o$ à un élément de la forme $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i e_i$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour tout i. Notons p (respectivement q) le nombre de λ_i positifs (respectivement négatifs). En vertu de 1.3.8, on peut supposer que $\lambda_i > 0$ pour $i = 1, \ldots, p$ et $\lambda_j < 0$ pour $j = p+1, \ldots, p+q$, de sorte que

$$\sum_{l=1}^{\ell} \lambda_l e_l = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i - \sum_{j=p+1}^{p+q} |\lambda_j| e_j.$$

Le groupe $\exp(\sum_{i=1}^{r} \mathbb{R}e_i \,\square\, e_i) \subset \mathrm{Str}(V)_o$ opère diagonalement sur $V = \bigoplus V_{ij}$ avec valeurs propres strictement positives. Grâce à cette action, on voit que $x \in K \exp(\sum_{i=1}^{r} \mathbb{R}e_i \,\square\, e_i) e_{p,q}$. En particulier,

$$\mathrm{Rg}Q(x) = \mathrm{Rg}Q(e_{p,q}).$$

Si $x \in V(\ell)$ et $x' \in V(\ell')$ avec $\ell \neq \ell'$, alors $\mathrm{Rg}Q(x) = \mathrm{Rg}Q(e_{\ell,0})$ et $\mathrm{Rg}Q(x') = \mathrm{Rg}Q(e_{\ell',0})$ et donc $V(\ell) \cap V(\ell') = \emptyset$. $\square$

Il existe en fait un résultat plus précis dû à S. Kaneyuki :

Proposition 1.3.26 ([Kan98]). *Soit V un STJP simple de rang réel $r \geq 1$ et $(e_1, \ldots, e_r)$ un repère de Jordan de V. Voici des représentants des orbites de V sous l'action de* $\mathrm{Str}(V)_o$ *:*

(i) si V est de type euclidien :

$$\{e_{p,q} | p, q \geq 0, p+q \leq r\};$$

en particulier,

$$V(r) = \bigsqcup_{\ell=0}^{r} \mathrm{Str}(V)_o \cdot e_{r-\ell,\ell};$$

(ii) si V est de type tube non euclidien :

$$\{e_{\ell,0} | 0 \leq \ell \leq r-1\} \sqcup \{e_{r,0}, e_{r-1,1}\};$$

en particulier

$$V(r) = \mathrm{Str}(V)_o \cdot e_{r,0} \sqcup \mathrm{Str}(V)_o \cdot e_{r-1,1};$$

(iii) si V est non réduit ou si V n'est pas de type tube :

$$\{e_{\ell,0} | 0 \leq \ell \leq r\};$$

en particulier,

$$V(r) = \mathrm{Str}(V)_o \cdot e_{r,0}.$$

Corollaire 1.3.27. *Soit V un STJP simple de rang réel $r \geq 1$ et $e = e_1 + \ldots + e_r$ un tripotent maximal de V. Pour tout $\ell \geq 0$,*

$$V(\ell) = \{x \in V | \mathrm{Rg}Q(x) = \mathrm{Rg}Q(e_{\ell,0})\} \ .$$

Si V est de type tube alors

$$V(\ell) = \{x \in V | \mathrm{Rg}P_e(x) = \mathrm{Rg}P_e(e_{\ell,0})\}$$

et en particulier,

$$V(r) = \{x \in V_2(e) | \mathrm{Det}P_e(x) \neq 0\} = V_2^{\times}(e)$$

où $V_2^{\times}(e)$ désigne l'ensemble des éléments inversibles de $V_2(e)$.

Démonstration. Le premier point est une conséquence de 1.3.25 et (1.21). Si V est de type tube alors $Q(e)$ est inversible et $P_e(e) = \mathrm{Id}_V$. Le second point découle alors de l'égalité $P_e(x) = Q(x)Q(e)$. □

D'après ce qui précède, un élément x d'un STJP simple V est de rang ℓ si et seulement si

$$\mathrm{Rg}Q(x) = \ell \dim V_{11} + \frac{\ell(\ell-1)}{2} \dim V_{12}.$$

Exemple 1.3.28: Si x et y sont deux tripotents de V tels que $x \,\square\, x = y \,\square\, y$ alors $\mathrm{rg}(x) = \mathrm{rg}(y)$ (c'est une conséquence de 1.3.23 et 1.3.27).

1.4 Compactification

1.4.1 Quasi-inverses

Quasi-inversibilité dans une algèbre de Jordan réelle. Soit J une algèbre de Jordan sur $\mathbb{R}$, avec élément neutre e. Rappelons qu'on définit les puissances x^k de $x \in J$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$: $x^0 := e$ et pour $k \geq 1$, $x^k := xx^{k-1} = x^{k-1}x$. L'algèbre J est alors *à puissance associative* ([FK94, II.1.2]), i.e.

$$x^p x^q = x^{p+q} \quad (x \in J, p, q \in \mathbb{N}^*).$$

Notons $\mathbb{R}[T]$ l'algèbre des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{R}$ et soit $p(T) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k T^k \in \mathbb{R}[T]$. Pour $x \in J$, l'élément

$$p(x) := \alpha_0 e + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_m x^m$$

est bien défini. Posons alors

$$\mathbb{R}[x] = \{p(x) | p \in \mathbb{R}[T]\}.$$

C'est la sous-algèbre de J engendrée par x et e, elle est associative et commutative. Un élément x dans J est dit *inversible* s'il existe $y \in \mathbb{R}[x]$ tel que $xy = e$. Dans ce cas, un tel y dans $\mathbb{R}[x]$ est unique (c'est l'associativité de l'algèbre de $\mathbb{R}[x]$ qui donne l'unicité), on l'appelle l'*inverse* de x et on le note x^{-1}. Il est connu qu'un élément x de J est inversible si et seulement si $P(x)$ l'est ([FK94, II.3.1]) et dans ce cas

$$x^{-1} = P(x)^{-1} x \ ,$$

P désignant la représentation quadratique de J. Supposons maintenant que J ne possède pas d'élément neutre et notons $\widetilde{J}$ l'algèbre J étendue par adjonction d'un élément neutre, i.e. l'espace

$$\widetilde{J} = \mathbb{R} \oplus J = \left\{ \lambda \oplus x = \begin{pmatrix} \lambda \\ x \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}, x \in J \right\}$$

muni du produit

$$(\lambda \oplus x)(\mu \oplus y) = \lambda\mu \oplus (\lambda y + \mu x + xy).$$

L'algèbre $\widetilde{J}$ est commutative et possède un élément neutre $e = 1 \oplus 0$. De plus, J s'identifie à la sous-algèbre $0 \oplus J$ de $\widetilde{J}$, qui est en fait un idéal de $\widetilde{J}$. Notons $\widetilde{L}(\lambda \oplus x)$ les opérateurs de multiplication dans $\widetilde{J}$. Écrivons les opérateurs $\widetilde{L}(\lambda \oplus x)$ sous forme matricielle dans la base de $\widetilde{J}$ relative à la décomposition $\widetilde{J} = \mathbb{R} \oplus J$. On a

$$\widetilde{L}(\lambda \oplus x) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ x & \lambda \mathrm{Id}_J + L(x) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{L}(\lambda \oplus x)^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 2\lambda x + x^2 & \lambda^2 \mathrm{Id}_J + 2\lambda L(x) + L(x)^2 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{L}((\lambda \oplus x)^2) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 2\lambda x + x^2 & \lambda^2 \mathrm{Id}_J + 2\lambda L(x) + L(x^2) \end{pmatrix},$$

$$[\widetilde{L}(\lambda \oplus x), \widetilde{L}((\lambda \oplus x)^2)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [L(x), L(x^2)] \end{pmatrix}.$$

La dernière expression montre que $\widetilde{J}$ est une algèbre de Jordan. Si $\widetilde{P}$ désigne la représentation quadratique de $\widetilde{J}$, alors

$$\widetilde{P}(\lambda \oplus x) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 2\lambda x + x^2 & \lambda^2 \mathrm{Id}_J + 2\lambda L(x) + P(x) \end{pmatrix}$$

et en particulier,

$$\widetilde{P}(1 \oplus -x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2x + x^2 & B(x) \end{pmatrix}.$$

où $B(x) = \mathrm{Id}_J - 2L(x) + P(x)$. L'élément $1 \oplus -x$ est donc inversible dans $\widetilde{J}$ si et seulement si l'opérateur de Bergman $B(x)$ de J est inversible. Comme

$$\widetilde{P}(\lambda \oplus -x)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B(x)^{-1}(2x - x^2) & B(x)^{-1} \end{pmatrix},$$

l'inverse de $1 \oplus -x$ dans $\widetilde{J}$ est $\widetilde{P}(\lambda \oplus -x)^{-1}(\lambda \oplus -x) = 1 \oplus z$ avec

$$z = B(x)^{-1}(x - x^2) = (\mathrm{Id}_J - 2L(x) + P(x))^{-1}(x - x^2).$$

Definition 1.4.1.
Un élément x de J est dit *quasi-inversible* si $1 \oplus -x$ est inversible dans $\widetilde{J}$. Dans ce cas, l'élément z de J tel que $1 \oplus z$ soit l'inverse de $1 \oplus -x$ dans $\widetilde{J}$ est appelé le *quasi-inverse* de x dans J. D'après ce qui précède, $x \in J$ est quasi-inversible si et seulement si l'opérateur de Bergman $B(x)$ est inversible et son quasi-inverse est alors

$$z = B(x)^{-1}(x - x^2).$$

Remarque 1.4.2: (i) Si J possède un élément neutre e, on définit de même la quasi-inversibilité sur J : $x \in J$ est quasi-inversible si $e - x$ est inversible et le quasi-inverse de x est l'unique élément z de J vérifiant l'égalité $(e - x)^{-1} = e + z$ et on vérifie de plus que x est quasi-inversible si et seulement si $B(x)$ est inversible et dans ce cas $z = B(x)^{-1}(x - x^2)$.

(ii) Puisque l'application $x \mapsto \mathrm{Det}B(x)$ est polynomiale en les coordonnées de x, l'ensemble des éléments quasi-inverses dans J est un Zariski ouvert dense dans J.

Quasi-inversibilité dans un STJ. Reprenons les notations introduites dans la section 1.1.2.

Definition 1.4.3.
Un couple (x, y) d'éléments du STJ V est dit quasi-inversible si et seulement si x est quasi-inversible dans l'algèbre de Jordan $V^{(y)}$. Le quasi-inverse de x dans $V^{(y)}$ est noté x^y.

En reprenant ce qui a été fait dans le paragraphe précédent avec $J = V^{(y)}$, on obtient :

Proposition 1.4.4 ([Loo75], 3.2). *Un couple (x, y) d'éléments du STJ V est quasi-inversible si et seulement si l'opérateur de Bergman $B(x, y)$ est inversible et dans ce cas,*

$$x^y = B(x, y)^{-1}(x - Q(x)y).$$

Remarque 1.4.5: (i) Là encore, l'ensemble des couples (x, y) quasi-inversibles est un Zariski ouvert dense dans $V \times V$.

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda x, y)$ est quasi-inversible si et seulement si $(x, \lambda y)$ l'est et dans ce cas

$$(\lambda x)^y = \lambda(x^{\lambda y}). \tag{1.22}$$

Retenons de plus le résultat suivant, qui lie la quasi-inversibilité des couples (x, y) et (y, x).

Proposition 1.4.6 ([Loo75], 3.3). *Un couple $(x, y) \in V \times V$ est quasi-inversible si et seulement si (y, x) est quasi-inversible et dans ce cas, les quasi-inverses x^y et y^x sont liés par la relation*

$$y^x = y + Q(y)x^y.$$

Il existe enfin plusieurs identités pour les quasi-inverses (cf. [Loo75, Loo77]), en voici quelques-unes :

$$B(x, y)Q(x^y) = Q(x) = Q(x^y)B(y, x) \ ; \tag{1.23}$$
$$B(x^y, -y) = B(x, y)^{-1} = B(-x, y^x) \ ; \tag{1.24}$$
$$x^y \,\square\, (y - Q(y)x) = x \,\square\, y = (x - Q(x)y) \,\square\, y^x \ ; \tag{1.25}$$
$$x^y \,\square\, y = x \,\square\, y^x \ ; \tag{1.26}$$
$$B(x, y)(x^y \,\square\, z) = x \,\square\, z - Q(x)Q(y, z) \ ; \tag{1.27}$$
$$(z \,\square\, x^y)B(y, x) = z \,\square\, x - Q(y, z)Q(x) \ . \tag{1.28}$$

Ou encore, si (x, y) est quasi-inversible alors $(x, y + z)$ est quasi-inversible si et seulement si (x^y, z) l'est et dans ce cas

$$x^{y+z} = (x^y)^z \tag{1.29}$$

et $(x + z, y)$ est quasi-inversible si et seulement si (z, y^x) l'est et alors

$$(x + z)^y = x^y + B(x, y)^{-1}z^{(y^x)}. \tag{1.30}$$

1.4.2 Compactification projective

La description qui suit est basée sur [Loo77, 7.6]. Soit V un STJP. On définit une relation binaire $\sim$ sur $V \times V$ par

$$(x,y) \sim (x',y') \iff ((x, y-y') \text{ est quasi-inversible et } x' = x^{y-y'}).$$

Cette relation est clairement réflexive puisque $(x,0)$ est quasi-inversible pour tout x dans V, de quasi-inverse $x^0 = x$. De plus, en utilisant (1.29), on obtient $(x,y) \sim (x',y')$ si et seulement si (x,y) et (x',y') sont quasi-inversibles et

$$x'^{y'} = \left(x^{y-y'}\right)^{y'} = \left((x^y)^{-y'}\right)^{y'} = (x^y)^0 = x^y.$$

Donc $\sim$ est symétrique. Maintenant, si $(x,y) \sim (x',y') \sim (x'',y'')$ alors $(x' = x^{y-y'}, y'-y'')$ est quasi-inversible, $(x, y-y'')$ aussi et

$$x^{y-y''} = \left(x^{y-y'}\right)^{y'-y''} = x'^{y'-y''} = x'',$$

ce qui veut dire que $(x,y) \sim (x'',y'')$. Donc $\sim$ est transitive. On a montré que la relation $\sim$ définissait une relation d'équivalence sur $V \times V$. On pose

$$\mathcal{X} := \mathcal{X}(V) := V \times V / \sim$$

et on notera $(x:y)$ la classe d'équivalence du couple (x,y). Pour $v \in V$ fixé, on pose $\mathcal{X}_v := \{(x:v) | x \in V\} \subset \mathcal{X}$ et on définit

$$\begin{array}{rccc} \phi_v : & \mathcal{X}_v & \longrightarrow & V \\ & (x:v) & \longmapsto & x \end{array}.$$

Alors les ϕ_v sont des bijections. Elles sont clairement surjectives et l'injectivité découle du fait que si $(x':v) = (x:v)$ alors par définition de $\sim$, on a $x' = x^{v-v} = x^0 = x$.

Théorème 1.4.7 ([Loo77], 7.7). *Il existe une unique structure de variété (algébrique) projective sur $\mathcal{X}$ telle que pour tout $v \in V$, $\mathcal{X}_v$ en soit une sous-variété affine, isomorphe à V. En particulier, $\mathcal{X}$ est compacte, $(\mathcal{X}_v, \phi_v)_{v \in V}$ est un atlas de cartes de $\mathcal{X}$ et $V = \mathcal{X}_0$ est un Zariski ouvert dense de $\mathcal{X}$.*

Definition 1.4.8.
On appelle $\mathcal{X}$ la *compactification projective* de V.

Notons $\mathrm{Aut}(\mathcal{X})$ le groupe des automorphismes de la variété $\mathcal{X}$; c'est un groupe de Lie réel dont l'algèbre de Lie s'identifie aux champs de vecteurs complets sur $\mathcal{X}$ ([Loo77, 8.3]). Comme V est ouvert et dense dans $\mathcal{X}$, on peut identifier $\mathrm{Aut}(\mathcal{X})$ à un sous-groupe du groupe des transformations birationnelles de V. Par restriction à V, l'algèbre de Lie de $\mathrm{Aut}(\mathcal{X})$ apparaît comme algèbre de Lie de champs de vecteurs sur V.

Rappelons que $\mathrm{Str}(V)$ désigne le groupe de structure du système triple de Jordan $(V, \{\})$, qui est défini par

$$\begin{aligned}\mathrm{Str}(V) &= \{g \in GL(V) | Q(gx) = gQ(x)g^* \ \forall x \in V\} \\ &= \{g \in GL(V) \,|\, (gx) \,\square (g^{*-1}y) = g(x \,\square\, y)g^{-1} \ \forall x \in V\}.\end{aligned}$$

où g^* désigne l'adjoint de g relativement au produit scalaire β.

Lemme 1.4.9. *Le groupe de structure opère sur l'ensemble des couples (x, y) quasi-inverses de $V \times V$ par*

$$g \cdot (x, y) = (gx, g^{*-1}y)$$

et l'on a $(gx)^{(g^{*-1}y)} = g(x^y)$.

Démonstration. Soient $(x, y) \in V \times V$ un élément quasi-inversible et $g \in \mathrm{Str}(V)$. Comme $B(gx, g^{*-1}y) = gB(x, y)g^{-1}$, $(gx, g^{*-1}y)$ est quasi-inversible si et seulement si (x, y) l'est et dans ce cas,

$$\begin{aligned}(gx)^{(g^{*-1}y)} &= B(gx, g^{*-1}y)^{-1}(gx - Q(gx)(g^{*-1}y)) \\ &= gB(x, y)^{-1}g^{-1}(gx - gQ(x)g^*g^{*-1}y) \\ &= g(x^y).\end{aligned}$$

Aussi, la formule $g \cdot (x, y) = (gx, g^{*-1}y)$ définit bien une action de $\mathrm{Str}(V)$ sur l'ensemble des couples (x, y) quasi-inverses de $V \times V$. □

On déduit du lemme précédent que $\mathrm{Str}(V)$ opère sur $\mathcal{X}$ par

$$g \cdot (x : y) = (gx : g^{*-1}y).$$

De plus, puisque $(gx : g^{*-1}y) \sim (x, y)$ si et seulement si $g(x^y) = (gx)^{(g^{*-1}y)} = x^y$, on déduit que cette action est effective. On identifie alors $\mathrm{Str}(V)$ à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathcal{X})$.

Pour $v \in V$, on définit les transformations t_v et $\widetilde{t}_v$ sur $\mathcal{X}$ par

$$\begin{aligned}t_v(x : y) &:= (x + v : y), \\ \widetilde{t}_v(x : y) &:= (x : y + v).\end{aligned}$$

On voit que t_v agit sur $V = \mathcal{X}_0$ par translation puisque

$$t_v(x : 0) = (x + v : 0)$$

et que $\widetilde{t}_v(x:0) \in V = \mathcal{X}_0$ si et seulement si (x,v) est quasi-inversible et dans ce cas, $\widetilde{t}_v(x:0) = (x^v : 0)$. Posons

$$U^- := \{\widetilde{t}_v | v \in V\}, \quad U^+ := \{t_v | v \in V\}.$$

Alors U^+ et U^- opèrent de manière effective sur $\mathcal{X}$. C'est en effet évident pour U^+ et pour U^-, cela découle du fait que si $\widetilde{t}_v = \mathrm{Id}_{\mathcal{X}}$, alors on a en particulier $(v:0) = (v:v)$. Ceci entraîne que $v = v^v$ et donc que $Q(v)v = 0$. Par positivité de V, on trouve $v = 0$. Les groupes U^+ et U^- s'identifient donc à des sous-groupes de la composante connexe neutre $G(\mathcal{X})$ de $\mathrm{Aut}(\mathcal{X})$, et sont tous les deux isomorphes au groupe de Lie additif V.

Lemme 1.4.10. *La variété $\mathcal{X}$ est homogène sous l'action de $G(\mathcal{X})$.*

Démonstration. En effet, pour tout $(x:y) \in \mathcal{X}$, on a $(x:y) = \widetilde{t}_y(x:0) = \widetilde{t}_y \circ t_x(0:0)$. □

Notons H la composante connexe neutre de $\mathrm{Str}(V)$ dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{X})$ et $\mathfrak{u}^\pm, \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}(\mathcal{X})$ les algèbres de Lie respectives de $U^\pm, H$ et $G(\mathcal{X})$, vues comme algèbres de Lie de champs de vecteurs sur V. Pour $v \in V$, $g_t(x) = x + tv$ définit un sous-groupe à un paramètre d'automorphismes de U^+ dont le champ de vecteurs associé est constant égal à v. Aussi, $f_t(x) = x^{tv}$ définit un sous-groupe à un paramètre de U^- et puisque d'après (1.4.6) et (1.22) on a

$$x^{tv} = x + Q(x)(tv)^x = x + tQ(x)v^{tx},$$

le champ de vecteurs noté $\widetilde{v}$, associé à f_t, est quadratique et est donné par $\widetilde{v}(x) = Q(x)v$. Finalement,

$$\mathfrak{u}^+ = \{v | v \in V\}, \quad \mathfrak{h} = V \square V, \quad \mathfrak{u}^- = \{\widetilde{v} | v \in V\}$$

sont des algèbres de Lie de champs polynômiaux de degré $0, 1, 2$ respectivement.

Un calcul direct montre que H normalise $U^\pm$. Plus précisément, pour $h \in H$ et $v \in V$,

$$h \circ t_v \circ h^{-1} = t_{hv}, \quad h \circ \widetilde{t}_v \circ h^{-1} = \widetilde{t}_{h^{*-1}v}.$$

Ceci entraîne que pour $h \in \mathfrak{h}$ et $v \in V$, nous avons

$$[h, v] = hv, \qquad [h, \widetilde{v}] = \widetilde{h^{*-1}v},$$

ce qui prouve que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{u}^\pm] \subset \mathfrak{u}^\pm$. Maintenant, si u et v sont dans V, on a

$$[u, \widetilde{v}](x) = D_{\widetilde{v}(x)}u(x) - D_u\widetilde{v}(x) = -2Q(x,u)v = -2u \square v(x)$$

donc $[\mathfrak{u}^+, \mathfrak{u}^-] \subset \mathfrak{h}$ et vu que $\mathfrak{h} = V \square V$, nous avons même l'égalité $[\mathfrak{u}^+, \mathfrak{u}^-] = \mathfrak{h}$. Ainsi, l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{u}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u}^-$$

est 3-graduée.

Proposition 1.4.11 ([Loo77], 8.7). *Le groupe $G(\mathcal{X})$ est un groupe de Lie semi-simple réel de centre trivial, il est engendré par U^+ et U^-, et l'on a $\mathfrak{g}(\mathcal{X}) = \mathfrak{u}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u}^-$.*

Notons $G(\mathcal{X})^0$ le stabilisateur de $0 \in V \subset \mathcal{X}$ sous l'action de $G(\mathcal{X})$. Notons de plus $P^- := HU^-$ et $\mathfrak{p}^-$ son algèbre de Lie. Comme $\mathfrak{p}^- = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u}^-$ et puisque les champs de vecteurs de $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u}^-$ s'annulent en 0, on a $P^- = G(\mathcal{X})^0$ et

$$\mathcal{X} \cong G(\mathcal{X})/P^-.$$

Le plongement de V dans $\mathcal{X}$ comme ouvert dense est alors donné par $\xi : v \mapsto t_v P^-$ (cf [BN04, 1.12]).

On définit deux automorphismes involutifs σ et θ de $G(\mathcal{X})$ comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma(h) = h^{*-1} = \theta(h) \quad (h \in H), \\ \sigma(\exp u) = \exp(-\widetilde{u}) \quad (u \in \mathfrak{u}^+), \\ \theta(\exp u) = \exp(\widetilde{u}) \quad (u \in \mathfrak{u}^+); \end{aligned}$$

ces involutions commutent et $\sigma\theta = \theta\sigma$ n'est autre que la conjugaison par $-\mathrm{Id}$. On peut remarquer que les points fixes de σ et θ dans H sont les éléments de $K = \mathrm{Aut}(V)_o$. Notons respectivement $G(\mathcal{X})^\sigma$ et $G(\mathcal{X})^\theta$ les composantes neutres des sous-groupes des points fixes de σ et θ dans $G(\mathcal{X})$, $\mathfrak{g}(\mathcal{X})^\sigma$ et $\mathfrak{g}(\mathcal{X})^\theta$ leurs algèbres de Lie respectives. On a

$$\mathfrak{g}(\mathcal{X})^\sigma = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{g}(\mathcal{X})^\theta = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$$

où $\mathfrak{k} = \mathrm{Der}(V) = \mathrm{Lie}(K)$ et

$$\mathfrak{p} = \{u - \widetilde{u} | u \in \mathfrak{u}^+\}, \quad \mathfrak{m} = \{u + \widetilde{u} | u \in \mathfrak{u}^+\}$$

([Loo77, 11.15]). En particulier, $\mathfrak{u}^+ \oplus \mathfrak{u}^- = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{m}$. De plus, $G(\mathcal{X})^\theta$ est compact, agit transitivement sur $\mathcal{X}$ et le stabilisateur de 0 dans $G(\mathcal{X})^\theta$ est K ([Loo77, 9.9]). On en déduit que

$$\mathcal{X} \cong G(\mathcal{X})/P^- \cong G(\mathcal{X})^\theta / K$$

est un R-espace symétrique. Rappelons qu'un R-espace symétrique M est un espace compact qui est à la fois une variété de drapeaux (réelle) et un espace riemannien symétrique. On sait qu'il y a une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de systèmes triples de Jordan réels positifs et l'ensemble des R-espaces symétriques (voir par exemple [Loo71]). Cette correspondance fait appel à l'algèbre de Kantor-Koecher-Tits (KKT) du système triple (cf. annexe A), qui apparaît comme étant l'algèbre de Lie du «gros» groupe de transformations du R-espace. Le gros groupe de transformations de M est celui qui munit M d'une structure de variété de drapeaux. Ici, $KKT(V) = \mathfrak{g}(\mathcal{X})$. Le quotient

$$\mathcal{X}^* := G(\mathcal{X})^\sigma / K$$

est alors le dual non-compact du R-espace $\mathcal{X}$, qui se réalise comme domaine borné symétrique réel dans $\mathfrak{p} \cong V$ via le plongement

$$\xi : \mathfrak{p} \to \mathcal{X}, \; v \mapsto (\exp v) P^- \; ,$$

c'est-à-dire que $\mathcal{D} := \xi^{-1}(\mathcal{X}^*)$ est un domaine borné symétrique réel (voir [Nag65, Tak65, Loo71]).

1.5 Classification des STJP simples

La classification des STJP est bien connue. Nous la trouvons par exemple dans [Loo77] ou [Neh80, Neh81]. Pour les systèmes triples exceptionnels, on se réfère principalement à [Roo92]. Les notations employées ci-dessous sont néanmoins celles de Loos.

On suppose ici que $(V, \{\})$ est un JTSP simple. On distingue alors deux cas : notant $V^{\mathbb{C}}$ le STJ hermitien positif (STJHP) hermitifié de V, ou bien $V^{\mathbb{C}}$ est simple, ou bien $V^{\mathbb{C}}$ n'est pas simple. Le deuxième cas est celui où V est un JTS complexe, considéré comme réel.

Rappelons la liste des STJ hermitiens simples. On distingue d'abord quatre séries classiques :

$$\textit{Type} \quad \mathbf{I_{r,s}}: \qquad V^{\mathbb{C}} = \mathcal{M}(r, s, \mathbb{C})$$

$$\textit{Type} \quad \mathbf{II_n}: \qquad V^{\mathbb{C}} = \mathcal{A}sym(n, \mathbb{C})$$

$$\textit{Type} \quad \mathbf{III_r}: \qquad V^{\mathbb{C}} = \mathcal{S}ym(r, \mathbb{C})$$

pour ces types, la structure triple est donnée par

$$\{x, y, z\} = \frac{1}{2}(x\,{}^t\overline{y}z + z\,{}^t\overline{y}x) \ ,$$

où ${}^t\overline{y}$ est la transposée-conjuguée de y, relativement à la conjugaison standard de $\mathbb{C}$;

$$\textit{Type} \quad \mathbf{IV_n}: \qquad V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n$$

avec structure triple

$$\{x, y, z\} = q(x, \overline{y})z + q(z, \overline{y})x - q(x, z)\overline{y} \ ,$$

où $q(u, v) = \sum u_i v_i$ et où $^-$ désigne la conjugaison usuelle de $\mathbb{C}^n$. Notons que $\mathbf{IV_2} \cong \mathbf{IV_1} \times \mathbf{IV_1}$ n'est pas simple.

Poursuivons avec les deux cas exceptionnels :

$$\textit{Type} \quad \mathbf{VI}: \qquad V^{\mathbb{C}} = \mathcal{H}erm(3, \mathbb{O}_{\mathbb{C}}),$$

où $\mathbb{O}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{O} \cong \mathbb{O} \oplus i\mathbb{O}$ est l'algèbre de dimension complexe 8 des octonions complexes de Cayley, $\mathbb{O}$ étant l'algèbre de Cayley des octonions réels. Rappelons que $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ est munit de la forme $\mathbb{C}$-bilinéaire symétrique non-dégénérée

$$q(\lambda, \mu) = \frac{1}{2}(\lambda\widetilde{\mu} + \mu\widetilde{\lambda}),$$

et que la forme quadratique associée $q(\lambda) := q(\lambda, \lambda)$ vérifie $q(\lambda\mu) = q(\lambda)q(\mu)$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$, $\widetilde{\ }$ désignant la conjugaison ($\mathbb{C}$-linéaire) canonique de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$. Tout élément x de $V^{\mathbb{C}}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & x_3 & \widetilde{x}_2 \\ \widetilde{x}_3 & \alpha_2 & x_1 \\ x_2 & \widetilde{x}_1 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_j \in \mathbb{C}$ et $x_j \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$. On écrira

$$x = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j e_j + \sum_{j=1}^{3} f_j(x_j).$$

On définit une deuxième involution sur $V^{\mathbb{C}}$ comme suit :

$$x \mapsto \overline{x} := \sum_{j=1}^{3} \overline{\alpha_j} e_j + \sum_{j=1}^{3} f_j(\overline{x_j})$$

où l'on a noté $\overline{\alpha_j}$ le nombre complexe conjugué de α_j, et $\overline{x_j}$ le conjugué de $x_j \in \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ par rapport à la forme réelle $\mathbb{O}$ de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$. La conjugaison $\bar{\ }$ de $\mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ est $\mathbb{C}$-anti-linéaire et commute à $\widetilde{\ }$. On définit de plus une application quadratique sur $V^{\mathbb{C}}$ par

$$x \mapsto x^{\sharp} := \sum (\alpha_{j+1}\alpha_{j+2} - q(x_j)) e_j + \sum \widetilde{f}_j(x_{j+1}x_{j+2} - \alpha_j \widetilde{x}_j)$$

où $j+1$ et $j+2$ sont pris modulo 3 dans $\{1, 2, 3\}$ et $\widetilde{f}_j(x) := f_j(\widetilde{x})$ (la matrice $x^{\sharp}$ joue le même rôle que la comatrice dans $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$). Cette application donne lieu à un produit bilinéaire symétrique noté $\times$, défini comme suit :

$$x \times y := (x + y)^{\sharp} - x^{\sharp} - y^{\sharp}.$$

On munit finalement $V^{\mathbb{C}}$ du produit non-dégénéré

$$(x|y) := \sum \alpha_j \beta_j + 2 \sum q(x_j, y_j)$$

avec $x = \sum \alpha_j e_j + \sum f_j(x_j)$ et $y = \sum \beta_j e_j + \sum f_j(y_j)$. La structure triple est alors donnée par

$$\{x, y, z\} := \frac{1}{2}\left((x|\overline{y})z + (z|\overline{y})x - (x \times z) \times \overline{y}\right).$$

([Roo92, p.61].)

$$Type \quad \mathbf{V}: \qquad V^{\mathbb{C}} = \mathcal{M}(2,1,\mathbb{O}_{\mathbb{C}}).$$

L'espace $V^{\mathbb{C}}$ peut être vu comme le sous-espace de $\mathcal{H}erm(3,\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ constitué des matrices $x = f_2(x_2) + f_3(x_3)$, i.e. des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & x_3 & \widetilde{x}_2 \\ \widetilde{x}_3 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que l'on munit de la même structure triple que sur $\mathcal{H}erm(3,\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$.

L'isomorphisme linéaire $x \mapsto {}^t x$ de $\mathcal{M}(r,s,\mathbb{C})$ sur $\mathcal{M}(s,r,\mathbb{C})$ induit un isomorphisme entre les classes $\mathbf{I_{r,s}}$ et $\mathbf{I_{s,r}}$. Aussi, on observe les isomorphismes suivants en petite dimension :

$$\begin{aligned} \mathbf{I_{1,1}} &\cong \mathbf{II_2} \cong \mathbf{III_1} \cong \mathbf{IV_1} \cong \mathbb{C} \ , \\ \mathbf{I_{1,3}} &\cong \mathbf{II_3} \ , \\ \mathbf{III_2} &\cong \mathbf{IV_3} \ , \\ \mathbf{I_{2,2}} &\cong \mathbf{IV_4} \ , \\ \mathbf{II_4} &\cong \mathbf{IV_6} \ . \end{aligned}$$

Notons que tous les STJHP (vus comme STJP) sont non réduits et les STJHP de type tube sont

$$\mathbf{I_{r,r}}, \quad \mathbf{II_{2r}}, \quad \mathbf{III_r}, \quad \mathbf{IV_n}, \quad \mathbf{VI} \ .$$

Dans le cas où $V^{\mathbb{C}}$ est simple, on dira que V est *absolument simple*. Voici maintenant la liste des STJP absolument simples.

$$\begin{aligned} &Type \quad \mathbf{I^{\mathbb{R}}_{r,s}}: && V = \mathcal{M}(r,s,\mathbb{R}) \\ &Type \quad \mathbf{I^{\mathbb{C}}_{r,r}}: && V = \mathcal{H}erm(r,\mathbb{C}) \\ &Type \quad \mathbf{I^{\mathbb{H}}_{2r,2s}}: && V = \mathcal{M}(r,s,\mathbb{H}) \\ &Type \quad \mathbf{II^{\mathbb{R}}_{n}}: && V = \mathcal{A}sym(n,\mathbb{R}) \\ &Type \quad \mathbf{II^{\mathbb{H}}_{2r}}: && V = \mathcal{H}erm(r,\mathbb{H}) \\ &Type \quad \mathbf{III^{\mathbb{R}}_{r}}: && V = \mathcal{S}ym(r,\mathbb{R}) \\ &Type \quad \mathbf{III^{\mathbb{H}}_{2r}}: && V = \mathcal{A}herm(r,\mathbb{H}) \end{aligned}$$

Pour ces types, la structure triple est donnée par

$$\{x, y, z\} = \frac{1}{2}(x^t\overline{y}z + z^t\overline{y}x) \ ,$$

où ${}^t\overline{y}$ est la transposée-conjuguée de y, relativement à la conjugaison standard des algèbres scalaires $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

$$\textit{Type} \quad \mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{p}}_{\mathbf{p+q}} : \qquad V = \mathbb{R}^{p,q} := \mathbb{R}^{p+q}$$

avec structure triple

$$\{x, y, z\} = (x, y)z + (z, y)x - (x, I_{pq}z)I_{pq}y \ ,$$

où $(.,.)$ désigne le produit scalaire euclidien usuel de $\mathbb{R}^{p+q}$ et

$$I_{pq} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_q \end{pmatrix} \ .$$

Remarquons ici que $\mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{2}}_{\mathbf{2}}$ n'est pas absolument simple et que $\mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{1}}_{\mathbf{2}} \cong \mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{1}}_{\mathbf{1}} \times \mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{1}}_{\mathbf{1}}$ n'est pas simple.

$$\textit{Type} \quad \mathbf{VI}^{\mathbb{O}} : \qquad V = \mathcal{H}erm(3, \mathbb{O})$$

$$\textit{Type} \quad \mathbf{VI}^{\mathbb{O}_\mathbf{s}} : \qquad V = \mathcal{H}erm(3, \mathbb{O}_s)$$

Ici, $\mathbb{O}$ est l'algèbre réelle des octonions de Cayley et $\mathbb{O}_s$ l'algèbre réelle de Cayley déployée. L'espace $V = \mathcal{H}erm(3, \mathbb{O})$ est une forme réelle euclidienne de $V^{\mathbb{C}} = \mathcal{H}erm(3, \mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ et par conséquent, en reprenant les notations introduites plus haut, le produit triple de Jordan de $\mathcal{H}erm(3, \mathbb{O})$ est

$$\{x, y, z\} = \frac{1}{2}\left((x|y)z + (z|y)x - (x \times z) \times y\right).$$

L'algèbre réelle des octonions de Cayley déployée $\mathbb{O}_s \subset \mathbb{O}_{\mathbb{C}}$ est isomorphe à $\mathbb{H} \oplus i\mathbb{H}$ et si l'on pose $(u_1 + iu_2)^\star := u_1 - iu_2$ $(u_1, u_2 \in \mathbb{H})$, alors le produit triple de Jordan de la forme réelle (non euclidienne) $\mathcal{H}erm(3, \mathbb{O}_s)$ de $\mathcal{H}erm(3, \mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ est donné par

$$\{x, y, z\} = \frac{1}{2}\left((x|y^\star)z + (z|y^\star)x - (x \times z) \times y^\star\right)$$

où l'on a (si on note $y = \sum \alpha_j e_j + \sum f_j(y_j)$ avec $\alpha_j \in \mathbb{R}$ et $y_j \in \mathbb{O}_s$),

$$y^\star = \sum \alpha_j e_j + \sum f_j(y_j^\star) \ .$$

$$\textit{Type} \quad \mathbf{V}^{\mathbb{O}} : \qquad V = \mathcal{M}(1, 2, \mathbb{O})$$

$$\textit{Type} \quad \mathbf{V}^{\mathbb{O}_\mathbf{s}} : \qquad V = \mathcal{M}(1, 2, \mathbb{O}_s)$$

Les types $\mathbf{V}^{\mathbb{O}}$ et $\mathbf{V}^{\mathbb{O}_s}$ «s'injectent» dans $\mathbf{VI}^{\mathbb{O}}$ et $\mathbf{VI}^{\mathbb{O}_s}$ respectivement (comme $\mathbf{V}$ dans $\mathbf{VI}$) et par suite le produit triple est induit par celui de $\mathbf{VI}^{\mathbb{O}}$ et de $\mathbf{VI}^{\mathbb{O}_s}$ respectivement.

Les STJP de type tube sont

$$\mathbf{I}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{r},\mathbf{r}},\quad \mathbf{I}^{\mathbb{C}}_{\mathbf{r},\mathbf{r}},\quad \mathbf{I}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2r},\mathbf{2r}},\quad \mathbf{II}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{2r}},\quad \mathbf{II}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2r}},\quad \mathbf{III}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{r}},\quad \mathbf{III}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2r}},\quad \mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{p}}_{\mathbf{p+q}},\quad \mathbf{VI}^{\mathbb{O}},\quad \mathbf{VI}^{\mathbb{O}_s}\ ;$$

les types non réduits sont

$$\mathbf{I}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2r},\mathbf{2s}},\quad \mathbf{III}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2r}},\quad \mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{n}}_{\mathbf{n}},\quad \mathbf{V}^{\mathbb{O}}$$

et la dimension de $V_2(e)$ pour tout tripotent primitif e est respectivement $4, 3, n, 8$.

En outre, il y a des isomorphismes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{r},\mathbf{s}} &\cong \mathbf{I}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{s},\mathbf{r}}\\
\mathbf{I}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2r},\mathbf{2s}} &\cong \mathbf{I}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2s},\mathbf{2r}}\\
\mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{p}}_{\mathbf{p+q}} &\cong \mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{q}}_{\mathbf{p+q}}
\end{aligned}$$

et d'autres en petites dimensions :

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{1},\mathbf{1}} &\cong \mathbf{II}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{2}} \cong \mathbf{III}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{1}} \cong \mathbf{I}^{\mathbb{C}}_{\mathbf{1},\mathbf{1}} \cong \mathbf{II}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2}} \cong \mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{1}}_{\mathbf{1}} \cong \mathbb{R}\\
\mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{2}}_{\mathbf{2}} &\cong \mathbb{C} \cong \mathbf{IV}_{\mathbf{1}}\\
\mathbf{I}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{1},\mathbf{3}} &\cong \mathbf{II}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{3}}\\
\mathbf{III}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2}} &\cong \mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{3}}_{\mathbf{3}}\\
\mathbf{III}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{2}} &\cong \mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{1}}_{\mathbf{3}}\\
\mathbf{I}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2},\mathbf{2}} &\cong \mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{4}}_{\mathbf{4}}\\
\mathbf{I}^{\mathbb{C}}_{\mathbf{2},\mathbf{2}} &\cong \mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{1}}_{\mathbf{4}}\\
\mathbf{I}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{2},\mathbf{2}} &\cong \mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{2}}_{\mathbf{4}}\\
\mathbf{II}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{4}} &\cong \mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{3}}_{\mathbf{6}}\\
\mathbf{II}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{4}} &\cong \mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{1}}_{\mathbf{6}}
\end{aligned}$$

Remarque 1.5.1: Le type $\mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{p}}_{\mathbf{p+q}}$ avec $2 \leq p \leq \left[\frac{p+q}{2}\right]$ est la seule exception à la proposition 1.3.21. Dans ce cas, $V = \mathbb{R}^{p,q}$ est de type tube réduit, non euclidien et de rang 2. Si l'on pose

$$e_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} \quad , \quad e_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\-1\end{pmatrix} \quad , \quad e = e_1 + e_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix} \quad ,$$

alors $V = V^+(e) \oplus V^-(e) = V_{11} \oplus V_{22} \oplus V_{12}^+ \oplus V_{12}^-$ avec

$$V^+(e) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \ , \quad V^-(e) \cong \mathbb{R}^{p-1} \ , \quad V_{ii} = \mathbb{R}e_i \ , \quad V_{12}^+ \cong \mathbb{R}^{q-1} \ , \quad V_{12}^- = V^-(e) \cong \mathbb{R}^{p-1} \ .$$

On voit que $V^+(e)$ est simple. De plus, $\dim V_{12}^+ = \dim V_{12}^-$ si et seulement si $p = q$.

Dans le tableau qui suit, nous avons rassemblé les différents STJP simples (absolument simples et STJHP) avec le quadruplet (r, a, b, c). La notation n/d signifie *«non défini»*, elle ne concerne que le type décrit à l'instant.

Type (notation de O. Loos)	V	(r,a,b,c)	$\dim_{\mathbb{R}} V$
$\mathbf{I}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{1,s}}$ $(1 \leq s)$	$\mathcal{M}(1,s,\mathbb{R})$	$(1,0,s-1,1)$	s
$\mathbf{I}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{r,s}}$ $(2 \leq r \leq s)$	$\mathcal{M}(r,s,\mathbb{R})$	$(r,1,s-r,1)$	rs
$\mathbf{I}^{\mathbb{C}}_{\mathbf{r,r}}$ $(r \geq 2)$	$\mathcal{H}erm(r,\mathbb{C})$	$(r,2,0,1)$	r^2
$\mathbf{I}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2,2s}}$ $(2 \leq s)$	$\mathcal{M}(1,s,\mathbb{H})$	$(1,0,4(s-1),4)$	$4s$
$\mathbf{I}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2r,2s}}$ $(2 \leq r \leq s)$	$\mathcal{M}(r,s,\mathbb{H})$	$(r,4,4(s-r),4)$	$4rs$
$\mathbf{II}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{2r+\epsilon}}$ $(r \geq 2, \epsilon \in \{0,1\})$	$\mathcal{A}sym(2r+\epsilon,\mathbb{R})$	$(r,2,2\epsilon,1)$	$r(2(r+\epsilon)-1)$
$\mathbf{II}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2r}}$ $(r \geq 3)$	$\mathcal{H}erm(r,\mathbb{H})$	$(r,4,0,1)$	$r(2r-1)$
$\mathbf{III}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{r}}$ $(r \geq 2)$	$\mathcal{S}ym(r,\mathbb{R})$	$(r,1,0,1)$	$\frac{1}{2}r(r+1)$
$\mathbf{III}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2r}}$ $(r \geq 2)$	$\mathcal{A}herm(r,\mathbb{H})$	$(r,2,0,3)$	$r(2r+1)$
$\mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{n}}_{\mathbf{n}}$ $(n \geq 3)$	$\mathbb{R}^n$	$(1,0,0,n)$	n
$\mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{1}}_{\mathbf{n}}$ $(n \geq 5)$	$\mathbb{R}^{1,n-1}$	$(2,n-2,0,1)$	n
$\mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{p}}_{\mathbf{p+q}}$ $(2 \leq p \leq \left[\frac{p+q}{2}\right])$	$\mathbb{R}^{p,q}$	$(2,n/d,0,1)$	$p+q$
$\mathbf{V}^{\mathbb{O}}$	$\mathcal{M}(1,2,\mathbb{O})$	$(1,0,8,8)$	16
$\mathbf{V}^{\mathbb{O}_\mathbf{s}}$	$\mathcal{M}(1,2,\mathbb{O}_s)$	$(2,3,4,1)$	16
$\mathbf{VI}^{\mathbb{O}}$	$\mathcal{H}erm(3,\mathbb{O})$	$(3,8,0,1)$	27
$\mathbf{VI}^{\mathbb{O}_\mathbf{s}}$	$\mathcal{H}erm(3,\mathbb{O}_s)$	$(3,4,0,1)$	27
$\mathbf{I}_{\mathbf{1,s}}$ $(1 \leq s)$	$\mathcal{M}(1,s,\mathbb{C})$	$(1,0,2(s-1),2)$	$2s$
$\mathbf{I}_{\mathbf{r,s}}$ $(2 \leq r \leq s)$	$\mathcal{M}(r,s,\mathbb{C})$	$(r,2,2(s-r),2)$	$2rs$
$\mathbf{II}_{\mathbf{2r+\epsilon}}$ $(r \geq 3-\epsilon, \epsilon \in \{0,1\})$	$\mathcal{A}sym(2r+\epsilon,\mathbb{C})$	$(r,4,4\epsilon,2)$	$2r(2(r+\epsilon)-1)$
$\mathbf{III}_{\mathbf{r}}$ $(r \geq 2)$	$\mathcal{S}ym(r,\mathbb{C})$	$(r,1,0,2)$	$r(r+1)$
$\mathbf{IV}_{\mathbf{n}}$ $(n \geq 5)$	$\mathbb{C}^n$	$(2,n-2,0,2)$	$2n$
$\mathbf{V}$	$\mathcal{M}(1,2,\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$	$(2,6,8,2)$	32
$\mathbf{VI}$	$\mathcal{H}erm(3,\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$	$(3,8,0,2)$	57

TABLE 1.1 – JTSP simples

Chapitre 2

Domaines bornés symétriques

2.1 Domaines bornés hermitiens symétriques

Considérons un domaine (i.e. ouvert connexe) borné $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $V^{\mathbb{C}}$ de dimension finie n. Notons μ la mesure de Lebesgue sur $V^{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{H}^2(\mathcal{D}_{\mathbb{C}})$ l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ de carré μ-intégrable. Alors $\mathcal{H}^2(\mathcal{D}_{\mathbb{C}})$ est fermé dans $L^2(\mathcal{D}_{\mathbb{C}})$ et par conséquent, c'est un espace de Hilbert ([Helg62, VIII 3.2]).

2.1.1 Noyau de Bergman, métrique de Bergman

Puisque l'évaluation au point $z \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}^2(\mathcal{D}_{\mathbb{C}})$, il existe $\kappa_z \in \mathcal{H}^2(\mathcal{D}_{\mathbb{C}})$ vérifiant

$$f(z) = \int_{\mathcal{D}_{\mathbb{C}}} f(w)\overline{\kappa_z(w)}d\mu(w).$$

Pour $z, w \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$, on pose $\kappa(z,w) = \overline{\kappa_z(w)}$ de sorte que

$$f(z) = \int_{\mathcal{D}_{\mathbb{C}}} f(w)\kappa(z,w)d\mu(w);$$

$\kappa(z,w)$ est un noyau reproduisant sur $\mathcal{H}^2(\mathcal{D}_{\mathbb{C}})$ vérifiant $\overline{\kappa(z,w)} = \kappa(w,z)$, on l'appelle le *noyau de Bergman* ([Helg62, VIII 3.3]). Si φ est un difféomorphisme holomorphe de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ alors

$$\kappa(z,w) = J(\varphi,z)\kappa(\varphi(z),\varphi(w))\overline{J(\varphi,w)} \tag{2.1}$$

où $J(\varphi,z)$ désigne le déterminant de la matrice jacobienne de φ en z ([Loo77, 1.1]). Pour tout $z \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$, on a $\kappa(z,z) > 0$ et la formule

$$h_z(u,v) := \sum_{1\le i,j\le n} \partial_i\overline{\partial}_j \log \kappa(z,z) u_i \overline{v}_j$$

définit une métrique hermitienne sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ appelée *métrique de Bergman* ([Helg62, VIII 3.4]). L'identité (2.1) entraîne que tout difféomorphisme holomorphe de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ est une isométrie pour la métrique de Bergman. Autrement dit, si l'on note $\mathcal{H}ol(\mathcal{D}_{\mathbb{C}})$ le groupe des difféomorphismes holomorphes de $\mathcal{D}_\mathbb{C}$, $\mathcal{H}ol(\mathcal{D}_\mathbb{C})$ est un sous-groupe fermé du groupe des isométries de $(\mathcal{D}_\mathbb{C}, h)$, donc c'est est un groupe de Lie.

2.1.2 Définition et premières propriétés

Le domaine $\mathcal{D}_\mathbb{C}$ est dit *symétrique* si en tout point z, il existe un difféomorphisme holomorphe s_z de $\mathcal{D}_\mathbb{C}$ vérifiant $s_z^2 = \mathrm{Id}$ et dont z est un point fixe isolé. D'après (2.1), on voit que s_z laisse invariante la métrique de Bergman en z. Ceci entraîne que s_z est la symétrie géodésique en z pour la métrique de Bergman et donc $(\mathcal{D}_\mathbb{C}, h)$ est un espace hermitien symétrique non compact ([Helg62, VIII 7.1(i)]). En particulier, $\mathcal{D}_\mathbb{C}$ est simplement connexe.

La métrique de Bergman est complète puisque toute géodésique peut se prolonger indéfiniment par une suite d'arcs géodésiques définis par des symétries s_z. Deux points de $\mathcal{D}_\mathbb{C}$ peuvent donc être joints par un segment de courbe géodésique et la symétrie géodésique en le milieu de ces deux points permet alors d'envoyer l'un sur l'autre. Par suite, $\mathcal{D}_\mathbb{C}$ est homogène sous $\mathcal{H}ol(\mathcal{D}_\mathbb{C})$.

Un domaine est dit *cerclé* s'il contient l'origine et s'il est stable par multiplication par les nombres complexes de module 1. On montre (voir par exemple [Helg62, VIII 6.1 et 7.1(ii)]) que tout domaine borné symétrique est biholomorphiquement équivalant à un domaine borné cerclé. Aussi, ce dernier est unique à isomorphisme linéaire près de $V^\mathbb{C}$ ([Loo77, 1.5]). Dans la suite on considère le domaine $\mathcal{D}_\mathbb{C}$ dans sa réalisation cerclée.

Notons $\mathcal{H}ol(\mathcal{D}_\mathbb{C})^0$ le stabilisateur de 0 dans $\mathcal{H}ol(\mathcal{D}_\mathbb{C})$. Tout élément de $\mathcal{H}ol(\mathcal{D}_\mathbb{C})^0$ est linéaire ([Loo77, 1.5]) donc $\mathcal{H}ol(\mathcal{D}_\mathbb{C})^0$ est un sous-groupe du groupe des isométries linéaires de $V^\mathbb{C}$ munit la métrique de Bergman en 0 et par conséquent, $\mathcal{H}ol(\mathcal{D}_\mathbb{C})^0$ est un sous-groupe compact de $GL(V^\mathbb{C})$. Soient $G_\mathbb{C}$ la composante neutre de $\mathcal{H}ol(\mathcal{D}_\mathbb{C})$ et $K_\mathbb{C}$ le stabilisateur de 0 dans $G_\mathbb{C}$. Le groupe $K_\mathbb{C}$ contient le groupe des $e^{i\theta}\mathrm{Id}$ donc en particulier $s_0 = e^{i\pi}\mathrm{Id} \in K_\mathbb{C}$. Le centralisateur de s_0 dans $G_\mathbb{C}$ est clairement $K_\mathbb{C}$ et donc le centre de $G_\mathbb{C}$ est contenu dans $K_\mathbb{C}$. De plus, l'action de $G_\mathbb{C}$ est effective et ainsi, le centre de $G_\mathbb{C}$ est trivial.

Pour tout $z \in \mathcal{D}_\mathbb{C}$ et tout $g \in \mathcal{H}ol(\mathcal{D}_\mathbb{C})$ tels que $g.0 = z$, on a $s_z = g s_0 g^{-1}$. Or les automorphismes intérieurs préservent la composante neutre donc $s_z \in G_\mathbb{C}$ et $\mathcal{D}_\mathbb{C}$ est homogène sous $G_\mathbb{C}$. Alors $\mathcal{D}_\mathbb{C}$ est difféomorphe à $G_\mathbb{C}/K_\mathbb{C}$ (au sens des variétés analytiques réelles).

2.1.3 Construction d'un STJHP

Pour $g \in G_\mathbb{C}$, on pose $\tau(g) = s_0 g s_0$; τ est un automorphisme involutif de $G_\mathbb{C}$ dont les points fixes sont les éléments de $K_\mathbb{C}$. Notons encore τ sa différentielle en $\mathrm{Id} \in G_\mathbb{C}$ et $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathrm{Lie}(G_\mathbb{C})$. Alors $\tau^2 = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{k}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{p}_\mathbb{C}$ où $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$ et $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$ sont respectivement les sous-espaces propres de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ pour les valeurs propres $+1$ et -1 de τ. Aussi, $\mathfrak{k}_\mathbb{C} = \mathrm{Lie}(K_\mathbb{C})$

et

$$[\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}] \subset \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \qquad [\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}] \subset \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, \qquad [\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}] \subset \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ s'identifie aux champs de vecteurs complets sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$: pour $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, on définit le champ de vecteurs $\widetilde{X}$ sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ en un point z par

$$\widetilde{X}(z) = \frac{d}{dt}(\exp tX)z_{|t=0}.$$

L'application ainsi définie est surjective car tout champ de vecteurs complet s'intègre par définition en un sous-groupe à un paramètre d'automorphismes de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$, et l'élément de l'algèbre de Lie correspondant est l'antécédent. C'est de plus un anti-homomorphisme d'algèbres de Lie.

Considérons alors l'application

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \longrightarrow T_0\mathcal{D}_{\mathbb{C}}, \qquad X \longmapsto \widetilde{X}(0).$$

Son noyau est $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ donc elle induit un isomorphisme de $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ sur $V^{\mathbb{C}}$ ($T_0\mathcal{D}_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$). Pour $v \in V^{\mathbb{C}}$, il existe alors un unique champ de vecteurs complet ξ_v sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ (induit par un élément de $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$) tel que $\xi_v(0) = v$.

Proposition 2.1.1 ([Loo77], 2.3)**.** *L'application $(v, z) \mapsto v - \xi_v(z)$ est quadratique en z et $\mathbb{C}$-anti-linéaire en v.*

Pour tout $z \in V^{\mathbb{C}}$, il existe ainsi un endomorphisme $Q(z) : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ $\mathbb{C}$-anti-linéaire tel que pour tout $v \in V^{\mathbb{C}}$, $\xi_v(z) = v - Q(z)v$, et l'application

$$Q : V^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\overline{V^{\mathbb{C}}}, V^{\mathbb{C}})$$

est quadratique, où $\overline{V^{\mathbb{C}}}$ désigne l'espace conjugué de $V^{\mathbb{C}}$. On pose

$$Q(z, w) = \frac{1}{2}(Q(z+w) - Q(z) - Q(w))\ ;$$

l'application $(z, w) \mapsto Q(z, w)$ est $\mathbb{C}$-bilinéaire symétrique sur $V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}}$ et vérifie $Q(z, z) = Q(z)$. On définit alors un produit triple sur $V^{\mathbb{C}}$ par

$$\{z, v, w\} := Q(z, w)v.$$

Le produit triple $\{\cdot, \cdot, \cdot\}$ est $\mathbb{C}$-linéaire en z, w, et $\mathbb{C}$-anti-linéaire en v. On définit enfin l'endomorphisme $z \,\square\, v$ par

$$z \,\square\, v(w) := Q(z, w)v = \{z, v, w\}.$$

Proposition 2.1.2 ([Loo77], 2.6)**.** *Nous avons les formules suivantes :*

(i) $[\xi_u, \xi_v] = 2(u \square v - v \square u)$ *;*

(ii) $[[\xi_u, \xi_v], \xi_w] = \xi_{2\{u,v,w\}-2\{v,u,w\}}$ *;*

(iii) $\{u, v, \{x, y, z\}\} = \{\{u, v, x\}, y, z\} - \{x, \{v, u, y\}, z\} + \{x, y, \{u, v, z\}\}$ *;*

(iii)' $[u \square v, x \square y] = (u \square v)x \square y - x \square (v \square u)y$ *;*

(iv) $h_0(\{u, v, w\}, z) = h_0(w, \{v, u, z\})$ *;*

(iv)' $(u \square v)^* = v \square u$ *où* $*$ *désigne l'adjoint par rapport à* h_0*.*

Le produit triple $\{\cdot, \cdot, \cdot\}$ satisfait aux conditions :

$\{u, \lambda v, w\} = \overline{\lambda}\{u, v, w\}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$

(JT1) $\{u, v, w\} = \{w, v, u\}$

(JT2) $\{u, v, \{x, y, z\}\} = \{\{u, v, x\}, y, z\} - \{x, \{v, u, y\}, z\} + \{x, y, \{u, v, z\}\}$

ce qui signifie que $(V^{\mathbb{C}}, \{\})$ est un système triple de Jordan hermitien.

On munit $V^{\mathbb{C}}$ du produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induit par la métrique de Bergman en 0. Le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est associatif d'après *(iv)*. De plus, le groupe $K_{\mathbb{C}}$ est un sous-groupe du groupe unitaire associé à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et les éléments de $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ se réalisent alors comme des applications linéaires antihermitiennes.

Finalement, si $v \in V^{\mathbb{C}}$ est non nul et si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors l'égalité $\{v, v, v\} = \lambda v$ entraîne $\lambda > 0$ ([Loo77, 2.7]). En conséquence, $(V^{\mathbb{C}}, \{\})$ est un *système triple de Jordan hermitien positif* (STJHP).

2.1.4 Correspondance

Faisons maintenant le lien entre la structure géométrique du domaine borné $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ et la structure triple de Jordan de $V^{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$.

Théorème 2.1.3 ([Loo77], 2.10). *(i) Le groupe* $K_{\mathbb{C}}$ *opère par automorphismes de la structure triple, i.e.*

$$\{kx, ky, kz\} = k\{x, y, z\} \quad (k \in K_{\mathbb{C}}, x, y, z \in V^{\mathbb{C}}) \ ;$$

(ii) Pour $x, y \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ *et* $g \in G_{\mathbb{C}}$*, on a*

$$B(g \cdot x, g \cdot y) = (D_x g) \circ B(x, y) \circ (D_y g)^*$$

où les $B(x, y)$ *désignent les opérateurs de Bergman ;*

(iii) Le noyau de Bergman de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ *est*

$$\kappa(x, y) = \frac{1}{\mu(\mathcal{D}_{\mathbb{C}})} \mathrm{Det} B(x, y)^{-1} \ ;$$

(iv) La métrique de Bergman en 0 *est*

$$h_0(u,v) = \mathrm{Tr}(u \,\square\, v)$$

et en tout point $x \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$*, on a*

$$h_x(u,v) = h_0(B(x,x)^{-1}u, v) \ ;$$

(v) Le produit triple est donné par la dérivée logarithmique quatrième de $\kappa(z,z)$ *en* 0 *:*

$$h_0(\{u,v,w\},x) = \partial_u \overline{\partial}_v \partial_w \overline{\partial}_x \log \kappa(z,z)_{|z=0} \ ;$$

(vi) Le tenseur de courbure de la métrique de Bergman en 0 *est*

$$R_0(u,v)w = -\{u,v,w\} + \{v,u,w\}.$$

Le résultat qui suit fait la correspondance entre domaines bornés symétriques (cerclés) et systèmes triples de Jordan hermitiens positifs.

Théorème 2.1.4 ([Loo77], 4.1). *Si* $(V^{\mathbb{C}}, \{\})$ *est le STJHP associé à un domaine borné symétrique cerclé* $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ *alors* $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ *est la boule unité pour la norme spectrale de* $(V^{\mathbb{C}}, \{\})$*. Inversement, si* $(V^{\mathbb{C}}, \{\})$ *est un STJHP, alors la boule unité pour la norme spectrale est un domaine borné symétrique dont le système triple associé est* $(V^{\mathbb{C}}, \{\})$*. En particulier, tout domaine borné symétrique cerclé est convexe.*

Corollaire 2.1.5 ([Loo77], 4.9). *Le groupe* $\mathrm{Aut}(V^{\mathbb{C}})$ *des automorphismes du STJHP* $V^{\mathbb{C}}$ *est le stabilisateur de* 0 *dans* $\mathcal{H}ol(\mathcal{D}_{\mathbb{C}})$ *et* $K_{\mathbb{C}}$ *est la composante connexe neutre de* $\mathrm{Aut}(V^{\mathbb{C}})$*, i.e.*

$$\mathcal{H}ol(\mathcal{D}_{\mathbb{C}})^0 = \mathrm{Aut}(V^{\mathbb{C}}), \qquad K_{\mathbb{C}} = \mathrm{Aut}(V^{\mathbb{C}})_o, \qquad \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \mathrm{Der}(V^{\mathbb{C}}).$$

Posons enfin

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}_{\mathbb{C}}) = \{\text{fonctions continues sur } \overline{\mathcal{D}_{\mathbb{C}}} \text{ et holomorphes sur } \mathcal{D}_{\mathbb{C}}\}.$$

On définit alors la *frontière de Shilov* de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$, que l'on note $\mathcal{S}$, comme le plus petit sous-ensemble fermé de $\partial\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ sur lequel le principe du maximum s'applique, i.e. vérifiant

$$\forall\ f \in \mathcal{A}(\mathcal{D}_{\mathbb{C}}),\ \max_{z \in \overline{\mathcal{D}_{\mathbb{C}}}} |f(z)| = \max_{z \in \mathcal{S}} |f(z)|.$$

Théorème 2.1.6 ([Loo77], 6.5). *La frontière de Shilov $\mathcal{S}$ de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ coïncide avec chacun des ensembles suivants :*

(i) l'ensemble des tripotents maximaux de $V^{\mathbb{C}}$;

(ii) l'ensemble des éléments extrémaux du convexe $\overline{\mathcal{D}_{\mathbb{C}}}$;

(iii) l'ensemble des points de $\overline{\mathcal{D}_{\mathbb{C}}}$ de norme euclidienne maximale.

En particulier, $\mathcal{S}$ est une sous-variété compacte et connexe de $V^{\mathbb{C}}$ sur laquelle $K_{\mathbb{C}}$ agit transitivement.

2.2 Réalisations non bornées : domaines de Siegel

Considérons un domaine borné symétrique $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ dans un espace vectoriel complexe $V^{\mathbb{C}}$ de dimension finie. Nous reprenons ici les notations des sections précédentes. En particulier, $\mathcal{X} \cong G(\mathcal{X})/P^-$ désigne la compactification projective de $V^{\mathbb{C}}$, $G(\mathcal{X}) := \mathrm{Aut}(\mathcal{X})_o$ est engendré par $U^+ = \exp \mathfrak{u}_+$ et $U^- = \exp \mathfrak{u}_-$, où

$$\mathfrak{u}^+ = \{v | v \in V^{\mathbb{C}}\}, \quad \mathfrak{u}^- = \{\widetilde{v} | v \in V^{\mathbb{C}}\}$$

et

$$\mathfrak{g}(\mathcal{X}) := \mathrm{Lie}(G(\mathcal{X})) = \mathfrak{u}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u}_-$$

avec $\mathfrak{h} = V^{\mathbb{C}} \,\square\, V^{\mathbb{C}} = \mathrm{Lie}(\mathrm{Str}(V^{\mathbb{C}}))$.

2.2.1 Transformations de Cayley

Soit e un tripotent de $V^{\mathbb{C}}$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$B(e, (1-\lambda)e) = \mathrm{Id} - 2(1-\overline{\lambda}) e \,\square\, e + (1-\overline{\lambda})^2 Q(e)^2$$

donc pour $v_j \in V_j^{\mathbb{C}}(e)$, $j = 0, 1, 2$, on obtient

$$B(e, (1-\lambda)e) v_j = \overline{\lambda}^j v_j.$$

On en déduit que si $\lambda \neq 0$ alors $B(e, (1-\lambda)e)$ est inversible et $B(e, (1-\lambda)e) \in \mathrm{Str}(V^{\mathbb{C}})$. De plus, si $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ alors $B(e, (1-\lambda)e) = B((1-\lambda)e, e) \in \mathrm{Aut}(V^{\mathbb{C}})$.

Lemme 2.2.1 ([Loo77], 9.7). *Soit e un tripotent de $V^{\mathbb{C}}$. Alors il existe un unique mor-*

phisme de groupe $\Phi_e : SL(2,\mathbb{C}) \to G(\mathcal{X})$ *tel que*

$$\Phi_e \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = t_{\lambda e} \quad (\lambda \in \mathbb{C}),$$
$$\Phi_e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} = \widetilde{t}_{\lambda e} \quad (\lambda \in \mathbb{C}),$$
$$\Phi_e \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} = B(e,(1-\lambda)e) \quad (\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}).$$

Ce morphisme induit le morphisme d'algèbre de Lie $\phi_e : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{g}(\mathcal{X})$ *donné par*

$$\phi_e \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e,$$
$$\phi_e \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \widetilde{e},$$
$$\phi_e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = e \,\square\, e.$$

Identifions e à un élément de $\mathfrak{u}_+$. L'application

$$\gamma_e := \exp(\frac{\pi}{4}(e+\widetilde{e})) \in G(\mathcal{X})$$

est appelée *transformation de Cayley partielle* associée à e. On déduit du lemme précédent que l'on a

$$\gamma_e = \Phi_e\left(\exp\frac{\pi}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \Phi_e\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Du fait que

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient que la transformation γ_e est donnée explicitement par

$$\gamma_e = t_e \circ B(e,(1-\sqrt{2})e) \circ \widetilde{t}_e.$$

Utilisant Φ_e, on a facilement :

Proposition 2.2.2. *(i)* $\gamma_e^2 = t_e \circ \widetilde{t}_e \circ t_e = \widetilde{t}_e \circ t_e \circ \widetilde{t}_e$ *;*

(ii) $\gamma_e^4 = B(e,2e)$ *;*

(iii) $\gamma_e^8 = \mathrm{Id}$ *;*

Puisque $B(e,2e) = (-1)^j$ *sur* $V_j(e)$ *(*$j=0,1,2$*), on déduit que* $\gamma_e^4 = \mathrm{Id}$ *si et seulement si* $V_1(e) = \{0\}$.

(iv) $\gamma_e^{-1} = \gamma_{-e} = -\mathrm{Id} \circ \gamma_e \circ (-\mathrm{Id})$ *;*

(v) pour tout $k \in \mathrm{Aut}(V^{\mathbb{C}})$, $\gamma_{ke} = k \circ \gamma_e \circ k^{-1}$ *;*

(vi) si e *et* f *sont deux tripotents orthogonaux alors* $\gamma_e \circ \gamma_f = \gamma_{e+f}$.

Soit $x = x_2 + x_1 + x_0 \in V^{\mathbb{C}} = V_2^{\mathbb{C}}(e) \oplus V_1^{\mathbb{C}}(e) \oplus V_0^{\mathbb{C}}(e)$. Alors $\gamma_e(x) \in V^{\mathbb{C}}$ si et seulement si (x, e) est quasi-inversible, si et seulement si (x_2, e) l'est d'après (1.30), et

$$\widetilde{t}_e(x_2 + x_1 + x_0) = x_2^e + B(x_2, e)^{-1}(x_1 + x_0)^{e^{x_2}}.$$

Or, (x_2, e) est quasi-inversible si et seulement si $e - x_2$ est inversible et dans ce cas

$$x_2^e = (e - x_2)^{-1} - e \in V_2^{\mathbb{C}}(e) \ ,$$

où l'inverse est pris dans l'algèbre de Jordan semi-simple $V_2(e)$. Aussi, en vertu de 1.4.6, on a

$$e^{x_2} = e + Q(e)x_2^e = (e - Q(e)x_2)^{-1} \in V_2^{\mathbb{C}}(e).$$

Maintenant, observons que $x_1 + x_0$ est un élément nilpotent de l'algèbre de Jordan $(V^{\mathbb{C}})^{(e^{x_2})}$. En effet,

$$(x_1 + x_0)^{(1, e^{x_2})} = x_1 + x_0$$

et les règles de Peirce donnent

$$(x_1 + x_0)^{(2, e^{x_2})} = Q(x_1 + x_0)e^{x_2} = Q(x_1)e^{x_2}$$

et

$$(x_1 + x_0)^{(3, e^{x_2})} = \{x_1 + x_0, e^{x_2}, Q(x_1)e^{x_2}\} = 0.$$

On déduit de [Loo75, 3.8] que

$$\begin{aligned}(x_1 + x_0)^{e^{x_2}} &= \sum_{n \geq 1} (x_1 + x_0)^{(n, e^{x_2})} \\ &= x_1 + x_0 + Q(x_1)e^{x_2} \\ &= x_1 + x_0 + Q(x_1)(e - Q(e)x_2)^{-1} \in V_1^{\mathbb{C}}(e) \oplus V_0^{\mathbb{C}}(e).\end{aligned}$$

Enfin, utilisant (1.24), on a

$$\begin{aligned}B(x_2, e)^{-1} &= B(x_2^e, -e) = B((e - x_2)^{-1} - e, -e) \\ &= \mathrm{Id} + 2(e - x_2)^{-1} \,\square\, e - 2e \,\square\, e + Q(x_2^e)Q(e)\end{aligned}$$

et donc $B(x_2, e)^{-1}$ opère sur $V_0^{\mathbb{C}}(e)$ par l'identité et par $2(e - x_2)^{-1} \,\square\, e$ sur $V_1^{\mathbb{C}}(e)$. Il vient

$$B(x_2, e)^{-1}(x_1 + x_0)^{e^{x_2}} = 2\{(e - x_2)^{-1}, e, x_1\} + x_0 + Q(x_1)(e - Q(e)x_2)^{-1}.$$

D'où

Lemme 2.2.3. *Si e est un tripotent de $V^{\mathbb{C}}$, alors pour $x = x_2 + x_1 + x_0 \in V^{\mathbb{C}} = V_2^{\mathbb{C}}(e) \oplus V_1^{\mathbb{C}}(e) \oplus V_0^{\mathbb{C}}(e)$ tel que (x, e) soit quasi-inversible, on a*

$$\widetilde{t}_e(x) = (e - x_2)^{-1} - e \oplus 2L_e(x_1)(e - x_2)^{-1} \oplus x_0 + P_e(x_1)(e - x_2)^{-1}.$$

Proposition 2.2.4. *Soit $x = x_2 + x_1 + x_0 \in V^{\mathbb{C}} = V_2^{\mathbb{C}}(e) \oplus V_1^{\mathbb{C}}(e) \oplus V_0^{\mathbb{C}}(e)$. Alors $\gamma_e(x)$ est dans $V^{\mathbb{C}}$ si et seulement si $e - x_2$ est inversible dans $V_2^{\mathbb{C}}(e)$ et dans ce cas*

$$\gamma_e(x) = (e + x_2)(e - x_2)^{-1} \oplus 2\sqrt{2}L_e(x_1)(e - x_2)^{-1} \oplus (x_0 + P_e(x_1)(e - x_2)^{-1}).$$

En particulier, $Q(e)^2\gamma_e(x) \in V_2^{\mathbb{C}}(e)$ est inversible. Dans le cas tube, $\gamma_e(x) \in V^{\mathbb{C}}$ si et seulement si $e - x$ est inversible, et dans ce cas

$$\gamma_e(x) = (e + x)(e - x)^{-1} = e + 2x(e - x)^{-1} = -e + 2(e - x)^{-1}.$$

Démonstration. Nous avons vu plus haut que $B(e, (1-\sqrt{2})e) = \sqrt{2}^j$ sur $V_j^{\mathbb{C}}(e)$ $(j = 0, 1, 2)$ donc le lemme précédent donne

$$B(e, (1-\sqrt{2})e) \circ \widetilde{t}_e(x) = 2(e-x_2)^{-1} - 2e \oplus 2\sqrt{2}\{(e-x_2)^{-1}, e, x_1\} \oplus x_0 + Q(x_1)(e-Q(e)x_2)^{-1}$$

et

$$\gamma_e(x) = 2(e - x_2)^{-1} - e \oplus 2\sqrt{2}\{(e - x_2)^{-1}, e, x_1\} \oplus x_0 + Q(x_1)(e - Q(e)x_2)^{-1}.$$

Finalement, un simple calcul fournit

$$2(e - x_2)^{-1} - e = (e + x)(e - x)^{-1} = e + 2x(e - x)^{-1}.$$

□

2.2.2 Domaines de Siegel

On considère toujours le STJHP $(V^{\mathbb{C}}, \{\})$ associé à $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ et $V^{\mathbb{C}} = V_0^{\mathbb{C}}(e) \oplus V_1^{\mathbb{C}}(e) \oplus V_2^{\mathbb{C}}(e)$ la décomposition de Peirce associée à un tripotent e. On rappelle que $V_2^{\mathbb{C}}(e)$ est une algèbre de Jordan semi-simple complexe et que la restriction de $Q(e)$ à $V_2^{\mathbb{C}}(e)$ définit une conjugaison notée * et $V^+(e)$ désigne la forme réelle euclidienne de $V_2^{\mathbb{C}}(e)$ par rapport à *. On note enfin $\Omega(e)$ le cône symétrique des carrés inversibles de l'algèbre de Jordan euclidienne $V^+(e)$.

Rappelons que $\Omega(e)$ coïncide avec les ensembles suivants ([FK94, III.2.1]) :

(i) l'ensemble des $x \in V^+(e)$ tels que $L_e(x)$ est défini positif ;

(ii) l'ensemble des $x \in V^+(e)$ dont toutes les valeurs propres sont strictement positives ;

(iii) la composante connexe de e dans l'ensemble des éléments inversibles de $V^+(e)$;

(iv) l'image de $V^+(e)$ par l'application exponentielle $\exp_e$ de l'algèbre de Jordan unitaire $V_2^{\mathbb{C}}(e)$: $\Omega(e) = \exp_e V^+(e)$.

Considérons l'application

$$F_e : \begin{array}{ccc} V_1^{\mathbb{C}}(e) \times V_1^{\mathbb{C}}(e) & \longrightarrow & V_2^{\mathbb{C}}(e) \\ (u,v) & \longmapsto & \{u,v,e\} \end{array} .$$

Alors (1.2) avec $z = y = e$ et $x = v$ donne $Q(e)(e \,\square\, v) = (2e \,\square\, e - \mathrm{Id})Q(v,e)$ et par conséquent,

$$F_e(u,v)^\star = F_e(v,u).$$

En particulier, pour tout $u \in V_1^{\mathbb{C}}(e)$, $F_e(u,u) \in V^+(e)$. Pour $a \in \Omega(e)$,

$$\delta_e(F_e(u,u),a) = \beta(F_e(u,u),a) = \beta(\{e,u,u\},a) = \beta(u,\{u,e,a\}) = \beta(u, L_e(a)u)$$

donc, comme $L_e(a)$ est un opérateur défini positif et comme $\Omega(e)$ est auto-adjoint, on a nécessairement $\delta_e(F_e(u,u),a) \geq 0$ i.e. $F_e(u,u) \in \overline{\Omega(e)}$, et si $F_e(u,u) = 0$ alors $u = 0$. On en déduit que $F_e(u,u) \in \Omega(e)$ si et seulement si $u \neq 0$.

Pour $z \in V_0^{\mathbb{C}}(e)$, on définit un endomorphisme $\mathbb{C}$-antilinéaire $\varphi_e(z)$ de $V_1^{\mathbb{C}}(e)$ par

$$\varphi_e(z) : v \longmapsto 2\{e,v,z\} = Q(e+z)v \ .$$

Notons $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(e)$ le domaine borné symétrique associé à $V_0^{\mathbb{C}}(e)$:

$$\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(e) = V_0^{\mathbb{C}}(e) \cap \mathcal{D}_{\mathbb{C}} = V_0^{\mathbb{C}}(e) \cap \{x \in V^{\mathbb{C}} \| x| < 1\} = \{x \in V_0^{\mathbb{C}}(e) \| x| < 1\}.$$

Pour $x_0 \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(e)$, l'opérateur $\mathbb{R}$-linéaire

$$\psi_e(x_0) := (\mathrm{Id}_{V_1^{\mathbb{C}}(e)} + \varphi_e(x_0))$$

de $V_1^{\mathbb{C}}(e)$ est inversible ([Loo77, 6.7]).

Definition 2.2.5.
Le quintuplet $(V^+(e), \Omega(e), F_e, \varphi_e, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(e))$ définit un *domaine de Siegel de type III* dans $V^{\mathbb{C}}$ donné par

$$\mathcal{S}_e = \left\{(x_2,x_1,x_0) \in V_2^{\mathbb{C}}(e) \times V_1^{\mathbb{C}}(e) \times \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(e) \,|\, p_{V^+(e)}\left(x_2 - F_e(x_1, \psi_e(x_0)x_1)\right) \in \Omega(e)\right\},$$

où $p_{V^+(e)}(z) = \dfrac{z+z^\star}{2}$.

Si $V_0^{\mathbb{C}}(e)=\{0\}$, i.e. si e est un tripotent maximal alors

$$\mathcal{S}_e=\big\{x_2+x_1\in V_2^{\mathbb{C}}(e)\oplus V_1^{\mathbb{C}}(e)\mid p_{V^+(e)}(x_2)-F_e(x_1,x_1)\in\Omega(e)\big\}$$

est appelé *domaine de Siegel de type II.* Si de plus $V_1^{\mathbb{C}}(e)=\{0\}$, i.e. si $(V^{\mathbb{C}},\{\})$ est de type tube, alors

$$\mathcal{S}_e=\big\{x\in V^{\mathbb{C}}=V_2^{\mathbb{C}}(e)\mid p_{V^+(e)}(x)\in\Omega(e)\big\}=\Omega(e)\oplus iV^+(e)$$

est le *domaine tube* associé à $\Omega(e)$, appelé *domaine de Siegel de type I.* En particulier, tout élément $\gamma_e(x)$ de $\mathcal{S}_e$ $(x\in\mathcal{D}_{\mathbb{C}})$ est inversible et

$$\gamma_e(x)^{-1}=\gamma_e(-x).$$

Théorème 2.2.6 ([Loo77], 10.8, 10.12)**.** *Le domaine de Siegel $\mathcal{S}_e$ est une réalisation non bornée de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$:*

$$\gamma_e(\mathcal{D}_{\mathbb{C}})=\mathcal{S}_e.$$

De plus, la symétrie géodésique s_e en $e=\gamma_e(0)$ dans $\mathcal{S}_e$ est donnée par

$$s_e=\gamma_e\circ(-\mathrm{Id})\circ\gamma_e^{-1}=\gamma_e^2\circ(-\mathrm{Id}).$$

Plus précisément, pour $x=x_2+x_1+x_0\in\mathcal{S}_e$ $(x_j\in V_j^{\mathbb{C}}(e)\cap\mathcal{S}_e, j=0,1,2)$,

$$s_e(x_2+x_1+x_0)=x_2^{-1}\oplus 2L_e(x_1)x_2^{-1}\oplus P_e(x_1)x_2^{-1}-x_0\ .$$

En particulier, si $V^{\mathbb{C}}$ est de type tube et si e est maximal, alors s_e est simplement l'inversion dans l'algèbre de Jordan $V_2^{\mathbb{C}}(e)$.

2.3 Domaines bornés symétriques réels

2.3.1 Définition

Les domaines bornés symétriques réels, définis en [Loo77, 11], sont les espaces riemanniens symétriques $\mathcal{D}$, de type non-compact, qui apparaissent comme formes réelles des domaines bornés hermitiens symétriques $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}=G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ définis précédemment. Considérons le STJHP $(V^{\mathbb{C}},\{\})$ associé à $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ et soit V une forme réelle de l'espace vectoriel $V^{\mathbb{C}}$. Si η désigne la conjugaison de $V^{\mathbb{C}}$ relative à V, alors $\eta(\mathcal{D}_{\mathbb{C}})=\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ si et seulement si V est un sous-système triple de $V^{\mathbb{C}}$ ([Loo77, 11.1]). Dans ce cas, $(V,\{\})$ est un STJP et

$$\mathcal{D}:=V\cap\mathcal{D}_{\mathbb{C}}=\{z\in\mathcal{D}_{\mathbb{C}}|\eta(z)=z\}=\{z\in V||z|<1\}.$$

De plus, η définit une involution de $G_{\mathbb{C}}$ par $g \mapsto \eta \circ g \circ \eta$ donc si l'on pose

$$G(\mathcal{D}) := \{g \in G_{\mathbb{C}} | \eta(gz) = g\eta(z) \ \forall z \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}}\} = \{g \in G_{\mathbb{C}} | g\mathcal{D} = \mathcal{D}\},$$

alors $\mathcal{D} \cong G/K$ est un espace riemannien symétrique non-compact homogène sous l'action du groupe de Lie connexe $G := G(\mathcal{D})_o$, où

$$K := G^0 = G \cap K_{\mathbb{C}} = \mathrm{Aut}(V)_o \ .$$

Remarquons que le stabilisateur de 0 dans $G(\mathcal{D})$ est

$$G(\mathcal{D})^0 := G(\mathcal{D}) \cap K_{\mathbb{C}} = \mathrm{Aut}(V).$$

La métrique riemannienne de $\mathcal{D}$ est induite par la métrique de Bergman de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$. Les domaines bornés symétriques réels sont donc en correspondance bijective avec les systèmes triples de Jordan réels positifs et se réalisent en particulier comme boules unités pour la norme spectrale (cf. 2.1.4 et 1.2.15).

2.3.2 Domaines de Siegel

Notons que les domaines bornés symétriques réels admettent aussi des réalisations non bornées. Les transformations de Cayley partielles se définissent de la même façon que dans le cas complexe et les domaines de Siegel correspondant s'écrivent de manière identique, il faut néanmoins remplacer $iV^+(e)$ par $V^-(e)$ (toutes les démonstrations de O. Loos dans [Loo77] utilisant la théorie des STJHP se réécrivent quasi mot pour mot dans le cas des STJP).

Nous nous intéresserons dans la suite au cas particulier des *domaines de type tube* $\mathcal{D}$, i.e. lorsque V est de type tube. La terminologie provient du fait que, comme dans le cas des domaines hermitiens symétriques, lorsque le STJP V possède une structure d'algèbre de Jordan semi-simple $V_2(e)$ pour un certain tripotent maximal e de V, alors la transformation de Cayley partielle γ_e envoie $\mathcal{D}$ sur le «domaine tube»

$$T_\Omega := \Omega \oplus V^-$$

où $V^- := V^-(e)$ et où Ω désigne le cône symétrique des carrés inversibles de l'algèbre de Jordan euclidienne $V^+ := V^+(e)$.

2.3.3 Systèmes de racines et classification

Étudions maintenant le système de racines associé au domaine borné réel. L'involution $\tau : g \mapsto (-\mathrm{Id}) \circ g \circ (-\mathrm{Id})$ de $G_{\mathbb{C}}$ restreinte à G définit une involution de G dont les points fixes sont les éléments de K. La différentielle de τ (encore notée τ) en $\mathrm{Id} \in G$ donne la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ où $\mathfrak{k} := \mathrm{Lie}(K) = \mathrm{Der}(V)$. Comme dans le cas complexe, les espaces vectoriels V et $\mathfrak{p}$ sont isomorphes via l'application

$$V \ni v \mapsto \xi_v \in \mathfrak{p} \ ,$$

où ξ_v est le champ de vecteur complet sur $\mathcal{D}$ qui à z associe $v - Q(z)v$. Considérons un sous-espace abélien maximal $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{p}$, Λ le système de racines (restreintes) de $\mathfrak{g}$ associé à $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{g}^\alpha$ les espaces radiciels correspondant, $\alpha \in \mathfrak{s}^* \backslash \{0\}$:

$$\mathfrak{g}^\alpha = \{X \in \mathfrak{g} \,|\, [H, X] = \alpha(H)X \ \forall\ H \in \mathfrak{s}\}.$$

Notons finalement $\mathfrak{m}$ le centralisateur de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{k}$: $\mathfrak{m} = \{X \in \mathfrak{k} \,|\, [X, \mathfrak{s}] = \{0\}\}$. Alors

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{s} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} \mathfrak{g}^\alpha$$

et

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{s} \oplus \sum_{\alpha \in \Lambda} \mathfrak{p}^\alpha$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}^\alpha &:= \{X - \tau(X) \,|\, X \in \mathfrak{g}^\alpha\} \\ &= \{Y \in \mathfrak{p} \,|\, [[Y, H], H] = \alpha(H)^2 Y \ \forall\ H \in \mathfrak{s}\}. \end{aligned}$$

Remarquons que l'on a $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}^\alpha = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{p}^\alpha$ et comme $\tau(\mathfrak{g}^\alpha) = \mathfrak{g}^{-\alpha}$, il vient $\mathfrak{p}^\alpha = \mathfrak{p}^{-\alpha}$. L'application trilinéaire de $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ dans $\mathfrak{p}$ définie par

$$[XYZ] := [[X, Y], Z]$$

confère à $\mathfrak{p}$ une structure de *système triple de Lie*. Maintenant, l'espace vectoriel V muni du produit triple

$$[xyz] := 2\{x, y, z\} - 2\{y, x, z\}$$

est aussi un système triple de Lie et l'application

$$V \to \mathfrak{p} \quad , v \mapsto \xi_v \ ,$$

est alors un isomorphisme de systèmes triples de Lie. Ceci est une conséquence de la formule

$$[[\xi_u, \xi_v], \xi_w] = \xi_{2\{u,v,w\} - 2\{v,u,w\}}$$

(2.1.2). Il en résulte que tout sous-espace abélien de $\mathfrak{p}$ correspond dans V à un sous-espace plat et par conséquent que sous l'isomorphisme ci-dessus, nous avons

$$\mathfrak{s} \cong \sum_{i=1}^{r} \mathbb{R} e_i \ ,$$

pour un certain repère de Jordan $(e_1, \ldots, e_r)$ de V.

Pour $1 \leq j \leq r$, notons ω_j la forme linéaire sur $\mathfrak{s} = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{R}\xi_{e_i}$ définie par $\omega_j(\xi_{e_i}) = \delta_{ij}$. La forme linéaire correspondante sur $W := \sum_{i=1}^r \mathbb{R} e_i$ étant la j-ième coordonnée.

PROPOSITION 2.3.1. *Soient de plus $V_2(e) = V^+(e) \oplus V^-(e)$ et $V_{ij} = V_{ij}^+ \oplus V_{ij}^-$ les décompositions de Cartan de $V_2(e)$ et V_{ij} respectivement, relatives à $Q(e)$, où $e := e_1 + \ldots + e_r$. Alors*

$$\Lambda \subset \{\pm\omega_i, \pm 2\omega_i, \pm\omega_i \pm \omega_j\}_{1\leq i<j\leq r}$$

et sous l'isomorphisme vu plus haut, on a

$$\mathfrak{p}^{\omega_i} \cong V_{i0}, \quad \mathfrak{p}^{2\omega_i} \cong V_{ii}^-, \quad \mathfrak{p}^{\omega_i+\omega_j} \cong V_{ij}^-, \quad \mathfrak{p}^{\omega_i-\omega_j} \cong V_{ij}^+.$$

Démonstration. Soient $x = \sum_{i=1}^r \lambda_i e_i \in W = \sum_{i=1}^r \mathbb{R}e_i$, $\lambda_0 := 0$ et $y_{ij} \in V_{ij}$. Alors

$$[y_{ij}xx] = 2(\{y_{ij}, x, x\} - \{x, y_{ij}, x\}) = 2(x \,\square\, x(y_{ij}) - Q(x)y_{ij}).$$

Or d'après 1.1.9, on a

$$x \,\square\, x(y_{ij}) = \frac{1}{2}(\lambda_i^2 + \lambda_j^2)y_{ij}$$

et

$$Q(x)y_{ij} = 2\lambda_i\lambda_j Q(e_i, e_j)y_{ij} = \lambda_i\lambda_j Q(e)y_{ij}.$$

On en déduit que

$$[y_{ij}xx] = 2(\frac{1}{2}(\lambda_i^2 + \lambda_j^2)y_{ij} - Q(e)y_{ij}) = (\lambda_i^2 + \lambda_j^2)y_{ij} - 2\lambda_i\lambda_j Q(e)y_{ij}$$

et

$$\begin{aligned}
&[y_{ij}xx] = (\lambda_i - \lambda_j)^2 y_{ij} \ , y_{ij} \in V_{ij}^+ \ (1 \leq i \leq j \leq r) \ ; \\
&[y_{ij}xx] = (\lambda_i + \lambda_j)^2 y_{ij} \ , y_{ij} \in V_{ij}^- \ (1 \leq i \leq j \leq r) \ ; \\
&[y_{i0}xx] = \lambda_i^2 y_{i0} \ , y_{i0} \in V_{i0}.
\end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 2.3.2. *Soient V un STJP simple de rang réel r, $\mathcal{D} = G/K$ le domaine borné symétrique irréductible associé à V et $\Lambda = \Lambda(\mathfrak{g}, V)$ le système de racines restreintes associé à la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus V$, où $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$ et $\mathfrak{k} := \mathrm{Lie}(K)$. Il n'y a que cinq possibilités :*

(A) $\Lambda = \{\pm(\omega_i - \omega_j)\}_{1\leq i<j\leq r}$ *est de type* A_r *;*
(B) $\Lambda = \{\pm\omega_i, \pm\omega_i \pm \omega_j\}_{1\leq i<j\leq r}$ *est de type* B_r *;*
(C) $\Lambda = \{\pm 2\omega_i, \pm\omega_i \pm \omega_j\}_{1\leq i<j\leq r}$ *est de type* C_r *;*
(BC) $\Lambda = \{\pm\omega_i, \pm 2\omega_i, \pm\omega_i \pm \omega_j\}_{1\leq i<j\leq r}$ *est de type* BC_r *;*
(D) $\Lambda = \{\pm\omega_i \pm \omega_j\}_{1\leq i<j\leq r}$ *est de type* D_r.

Démonstration. On distingue exactement cinq cas :

(i) type euclidien (donc tube réduit) (A) ;

(ii) types non euclidiens : non tube réduit (B) ($b > 0, c = 1$), tube non réduit (C) ($b = 0, c > 1$), non tube non réduit (BC) ($b > 0, c > 1$) et tube réduit (D) ($b = 0, c = 1$).

Le résultat découle alors de la proposition précédente et de 1.3.11. □

Remarque 2.3.3: En vertu de 1.3.13, les STJP simples de type tube réduit et de rang réel 1 sont nécessairement euclidiens. On en déduit que le système de racines (D_r) n'existe que pour $r \geq 2$.

Type (notation de O. Loos)	G/K	Λ	V	(r,a,b,c)	$\dim_{\mathbb{R}} V$
$\mathbf{I}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{1,s}}$ $(2 \leq s)$	$SO_o(1,s)/SO(s)$	B_1	$\mathcal{M}(1,s,\mathbb{R})$	$(1,0,s-1,1)$	s
$\mathbf{I}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{r,s}}$ $(2 \leq r < s)$	$SO_o(r,s)/SO(r) \times SO(s)$	B_r	$\mathcal{M}(r,s,\mathbb{R})$	$(r,1,s-r,1)$	rs
$\mathbf{I}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{r,r}}$ $(r \geq 2)$	$SO_o(r,r)/SO(r) \times SO(r)$	D_r	$\mathcal{M}(r,r,\mathbb{R})$	$(r,1,0,1)$	r^2
$\mathbf{I}^{\mathbb{C}}_{\mathbf{r,r}}$ $(r \geq 2)$	$GL(r,\mathbb{C})/U(r)$	A_r	$\mathcal{H}erm(r,\mathbb{C})$	$(r,2,0,1)$	r^2
$\mathbf{I}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2,2s}}$ $(2 \leq s)$	$Sp(1,s)/Sp(1) \times Sp(s)$	BC_1	$\mathcal{M}(1,s,\mathbb{H})$	$(1,0,4(s-1),4)$	$4s$
$\mathbf{I}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2r,2s}}$ $(2 \leq r < s)$	$Sp(r,s)/Sp(r) \times Sp(s)$	BC_r	$\mathcal{M}(r,s,\mathbb{H})$	$(r,4,4(s-r),4)$	$4rs$
$\mathbf{I}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2r,2r}}$ $(r \geq 2)$	$Sp(r,r)/Sp(r) \times Sp(r)$	C_r	$\mathcal{M}(r,r,\mathbb{H})$	$(r,4,0,4)$	$4r^2$
$\mathbf{II}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{2r}}$ $(r \geq 2)$	$SO(2r,\mathbb{C})/SO(2r)$	D_r	$\mathcal{A}sym(2r,\mathbb{R})$	$(r,2,0,1)$	$r(2r-1)$
$\mathbf{II}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{2r+1}}$ $(r \geq 2)$	$SO(2r+1,\mathbb{C})/SO(2r+1)$	B_r	$\mathcal{A}sym(2r+1,\mathbb{R})$	$(r,2,2,1)$	$r(2r+1)$
$\mathbf{II}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2r}}$ $(r \geq 2)$	$GL(r,\mathbb{H})/Sp(r)$	A_r	$\mathcal{H}erm(r,\mathbb{H})$	$(r,4,0,1)$	$r(2r-1)$
$\mathbf{III}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{r}}$ $(r \geq 2)$	$GL^+(r,\mathbb{R})/SO(r)$	A_r	$\mathcal{S}ym(r,\mathbb{R})$	$(r,1,0,1)$	$\frac{1}{2}r(r+1)$
$\mathbf{III}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2r}}$ $(r \geq 2)$	$Sp(2r,\mathbb{C})/Sp(r)$	C_r	$\mathcal{A}herm(r,\mathbb{H})$	$(r,2,0,3)$	$r(2r+1)$
$\mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{1}}_{\mathbf{1}}$	$SO_o(1,1)$	A_1	$\mathbb{R}$	$(1,0,0,1)$	1
$\mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{n}}_{\mathbf{n}}$ $(n \geq 3)$	$SO_o(1,n)/SO(n)$	C_1	$\mathbb{R}^n$	$(1,0,0,n)$	n
$\mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{1}}_{\mathbf{n}}$ $(n \geq 4)$	$SO_o(1,1) \times SO_o(1,n-1)/SO(n-1)$	A_2	$\mathbb{R}^{1,n-1}$	$(2,n-2,0,1)$	n
$\mathbf{IV}^{\mathbb{R},\mathbf{p}}_{\mathbf{p+q}}$ $\left(2 \leq p \leq \left[\frac{p+q}{2}\right]\right)$	$SO_o(p,1) \times SO_o(1,q)/SO(p) \times SO(q)$	D_2	$\mathbb{R}^{p,q}$	$(2,n/d,0,1)$	$p+q$
$\mathbf{V}^{\mathbb{O}}$	$F_{4(-20)}/SO(9)$	BC_1	$\mathcal{M}(1,2,\mathbb{O})$	$(1,0,8,8)$	16
$\mathbf{V}^{\mathbb{O}_\mathbf{s}}$	$Sp(2,2)/Sp(2) \times Sp(2)$	B_2	$\mathcal{M}(1,2,\mathbb{O}_s)$	$(2,3,4,1)$	16
$\mathbf{VI}^{\mathbb{O}}$	$E_{6(-26)} \times SO(2)/F_4$	A_3	$\mathcal{H}erm(3,\mathbb{O})$	$(3,8,0,1)$	27
$\mathbf{VI}^{\mathbb{O}_\mathbf{s}}$	$GL(4,\mathbb{H})/Sp(4)$	D_3	$\mathcal{H}erm(3,\mathbb{O}_s)$	$(3,4,0,1)$	27
$\mathbf{I_{1,s}}$ $(2 \leq s)$	$SU(1,s)/SU(s)$	BC_1	$\mathcal{M}(1,s,\mathbb{C})$	$(1,0,2(s-1),2)$	$2s$
$\mathbf{I_{r,s}}$ $(2 \leq r < s)$	$SU(r,s)/SU(r) \times SU(s)$	BC_r	$\mathcal{M}(r,s,\mathbb{C})$	$(r,2,2(s-r),2)$	$2rs$
$\mathbf{I_{r,r}}$ $(r \geq 2)$	$SU(r,r)/SU(r) \times SU(r)$	C_r	$\mathcal{M}(r,r,\mathbb{C})$	$(r,2,0,2)$	$2r^2$
$\mathbf{II_{2r}}$ $(r \geq 2)$	$SO^*(4r)/U(2r)$	C_r	$\mathcal{A}sym(2r,\mathbb{C})$	$(r,4,0,2)$	$2r(2r-1)$
$\mathbf{II_{2r+1}}$ $(r \geq 2)$	$SO^*(4r+2)/U(2r+1)$	BC_r	$\mathcal{A}sym(2r+1,\mathbb{C})$	$(r,4,4,2)$	$2r(2r+1)$
$\mathbf{III_r}$ $(r \geq 2)$	$Sp(r,\mathbb{R})/U(r)$	C_r	$\mathcal{S}ym(r,\mathbb{C})$	$(r,1,0,2)$	$r(r+1)$
$\mathbf{IV_1}$	$SO_o(1,2)/SO(2)$	C_1	$\mathbb{C}$	$(1,0,0,2)$	2
$\mathbf{IV_n}$ $(n \geq 3)$	$SO_o(n,2)/SO(n) \times SO(2)$	C_2	$\mathbb{C}^n$	$(2,n-2,0,2)$	$2n$
$\mathbf{V}$	$E_{6(-14)}/SO(10) \times \mathbb{T}$	BC_2	$\mathcal{M}(1,2,\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$	$(2,6,8,2)$	32
$\mathbf{VI}$	$E_{7(-25)}/E_6 \times \mathbb{T}$	C_3	$\mathcal{H}erm(3,\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$	$(3,8,0,2)$	54

TABLE 2.1 – Domaines bornés symétriques réels irréductibles

Chapitre 3

Domaines bornés réels de type tube

Dans tout ce chapitre, nous considèrerons un domaine borné symétrique réel de type tube $\mathcal{D} \cong G/K$ dans un espace vectoriel réel V de dimension finie. Rappelons que $V \cong T_0\mathcal{D}$ est muni d'une structure de STJP notée $(V, \{\})$ et qu'il existe un tripotent maximal e dans V (dorénavant fixé) tel que $V = V_2(e)$ soit une algèbre de Jordan unitaire réelle semi-simple. Pour distinguer les structures, on notera V_2 la structure d'algèbre de Jordan de V relative à e. Tous les produits, inverses, opérateurs de multiplication $(L(x))$ ou quadratiques $(P(x) = Q(x)Q(e))$ seront considérés dans l'algèbre de Jordan $V_2 = V_2(e)$.

Rappelons également la décomposition de Cartan

$$V_2 = V^+ \oplus V^- \quad (V^\pm := V^\pm(e))$$

relative à l'involution $x \mapsto x^\star := Q(e)x$ de V_2, et que pour x et y dans $V = V_2$ on a

$$x \,\square\, y = L(xy^\star) + [L(x), L(y^\star)]. \tag{3.1}$$

Remarquons que la formule fondamentale prouve que $Q(e)$ est un automorphisme de la structure triple de V, et comme $Q(e)e = e$, $Q(e)$ est aussi un automorphisme pour la structure d'algèbre de Jordan V_2. Les espaces $V^\pm$ sont donc des sous-systèmes triples de Jordan positifs de V et l'involution $Q(e)$ est un opérateur orthogonal par rapport à $\beta : (x, y) \mapsto \mathrm{Tr}(x \,\square\, y)$ et à $\delta_e : (x, y) \mapsto \mathrm{Tr}L(xy) = \beta(x, y^\star)$:

$$\beta(x^\star, y^\star) = \beta(x, y), \quad \delta_e(x^\star, y^\star) = \delta_e(x, y) \quad (x, y \in V).$$

Enfin, γ_e envoie bijectivement $\mathcal{D}$ sur l'espace symétrique tube $T_\Omega := \Omega \oplus V^-$, homogène sous $G(T_\Omega) := \gamma_e \circ G(\mathcal{D}) \circ \gamma_e^{-1}$, où Ω est le cône symétrique des carrés inversibles de l'algèbre de Jordan euclidienne V^+. Pour $x \in \mathcal{D}$, $e - x$ et $e + x$ sont inversibles dans V_2,

$$\gamma_e(x) = (e + x)(e - x)^{-1} \tag{3.2}$$

est inversible et $\gamma_e(x)^{-1} = \gamma_e(-x)$, i.e.

$$\jmath \circ \gamma_e = \gamma_e \circ (-\mathrm{Id}). \tag{3.3}$$

où $\jmath : x \mapsto x^{-1} = P(x)^{-1}x$ est l'inversion dans V_2. L'application $\jmath$ est alors un automorphisme involutif de T_Ω ayant pour seul point fixe e, c'est la symétrie géodésique autour de e (2.2.6).

L'objectif de ce chapitre est d'étendre aux domaines bornés symétriques réels de type tube certains résultats géométriques connus pour les domaines hermitiens symétriques de type tube. L'objet géométrique considéré est une frontière distinguée $\mathcal{S}$ du domaine (appelée plus tard *«une» frontière de Shilov*) sur laquelle G agit transitivement. S'ensuivra l'étude de l'action de G sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ et l'étude de l'action de G sur les triplets d'éléments de $\mathcal{S}$ deux à deux *transverses.*

3.1 Préliminaires

3.1.1 Conjugaison de Cartan

Dans cette section, nous rassemblons quelques propriétés élémentaires liées à l'involution

$$\begin{aligned} End(V) &\to End(V) \ . \\ g &\mapsto g^\star := Q(e) \circ g \circ Q(e) \end{aligned}$$

que l'on appelle *conjugaison de Cartan.*

Lemme 3.1.1. *(i) Pour g et h deux endomorphismes de V,*

$$(gh)^\star = g^\star h^\star.$$

(ii) Si $g \in GL(V)$,

$$(g^{-1})^\star = (g^\star)^{-1}.$$

(iii) Pour $x, y \in V$,

(a) $(x \,\square\, y)^\star = x^\star \,\square\, y^\star$

(b) $L(x)^\star = L(x^\star)$

(c) $Q(x)^\star = Q(x^\star)$

(d) $P(x)^\star = P(x^\star)$

(iv) Si x est inversible alors $x^\star$ l'est aussi et

$$(x^{-1})^\star = (x^\star)^{-1}$$

(v) sur l'ensemble $\{x \in V_2 | e - x \text{ inversible}\}$, on a $\gamma_e^\star := Q(e) \circ \gamma_e \circ Q(e) = \gamma_e$.

Démonstration. Les points (i),(ii) et (iii) sont évidents au vu des définitions. Soit x inversible. Alors $P(x)$ est inversible et d'après (iii),

$$P(x)^\star = P(x^\star)$$

donc $x^\star$ est inversible. Il vient, utilisant (ii),

$$(x^\star)^{-1} = P(x^\star)^{-1}x^\star = P(x^{-1})^\star x^\star = (P(x^{-1})x)^\star = (x^{-1})^\star.$$

Le dernier point est une conséquence de (3.2), de (iv) et du fait que $Q(e)$ soit un automorphisme de l'algèbre de Jordan V_2. $\square$

La forme bilinéaire symétrique $\delta_e(x,y) = \beta(x,y^\star)$ sur V_2 est non dégénérée. Notons alors ${}^Tf$ l'adjoint d'un endomorphisme f de V relativement à δ_e. Alors $({}^Tf)^\star$ est l'adjoint de f par rapport à β.

Lemme 3.1.2. *(i) Pour un endomorphisme f de V on a*

$${}^T(f^\star) = ({}^Tf)^\star.$$

(ii) Pour $x, y \in V$,

(a) ${}^TL(x) = L(x)$

(b) ${}^T(x \,\square\, y) = y^\star \,\square\, x^\star = (y \,\square\, x)^\star$

(c) $x \,\square\, e = e \,\square\, x^\star$ *donc en particulier,*

$$a \,\square\, e - e \,\square\, a = 0, \quad 2L(b) = b \,\square\, e - e \,\square\, b \in \mathrm{Der}(V) \quad (a \in V^+, b \in V^-).$$

Démonstration. Soit $f \in End(V)$. On a

$$\delta_e(f^\star x, y) = \delta_e((fx^\star)^\star, y) = \delta_e(fx^\star, y^\star) = \delta_e(x^\star, {}^Tfy^\star) = \delta_e(x, ({}^Tf)^\star y).$$

L'égalité ${}^TL(x) = L(x)$ est une conséquence de l'associativité de δ_e et

$${}^T(x \,\square\, y) = {}^T(L(xy^\star) + [L(x), L(y^\star)]) = L(xy^\star) + [L(y^\star), L(x)] = y^\star \,\square\, x^\star.$$

Maintenant,

$$x \,\square\, e = {}^T(x \,\square\, e) = e^\star \,\square\, x^\star = e \,\square\, x^\star.$$

$\square$

3.1.2 Groupe de structure et algèbre de structure

Soit $\mathrm{Str}(V_2)$ le groupe de structure de l'algèbre de Jordan V_2 :

$$\mathrm{Str}(V_2) = \{g \in GL(V) \,|\, P(gx) = gP(x)\,{}^T\!g \ \forall x \in V\}.$$

Pour $g \in \mathrm{Str}(V_2)$, on a en particulier

$${}^T\!g = g^{-1}P(ge).$$

Lemme 3.1.3. *On a l'égalité*

$$\mathrm{Str}(V_2) = \mathrm{Str}(V).$$

Démonstration. Les identités $P(gx) = Q(gx)Q(e)$ et $gP(x)\,{}^T\!g = gQ(x)Q(e)\,{}^T\!g$ donnent

$$\mathrm{Str}(V_2) = \{g \in GL(V) \,|\, Q(gx) = gQ(x)\,{}^T\!g^\star \ \forall x \in V\} = \mathrm{Str}(V).$$

$\square$

Nous présentons dans la suite des propriétés générales de $\mathrm{Str}(V_2)$ et d'autres plus particulières au cadre qui nous intéresse, c'est-à-dire à la double structure de notre espace vectoriel V.

Lemme 3.1.4. *Le groupe de structure est stable par* ^{T} *et par* *.

Démonstration. Soit $g \in \mathrm{Str}(V)$; $g^\star \in \mathrm{Str}(V)$ car

$$Q(g^\star x) = Q((gx^\star)^\star) = Q(gx^\star)^\star = (gQ(x^\star)\,{}^T\!g^\star)^\star = g^\star Q(x^\star)^\star\,{}^T\!g = g^\star Q(x)\,{}^T\!g.$$

Comme

$${}^T(x \,\square\, y) = y^\star \,\square\, x^\star,$$

on tire

$${}^T((g^{-1}x) \,\square\, ({}^T\!g^\star y)) = {}^T(g^{-1}(x \,\square\, y)g)$$

i.e.

$$({}^T\!g y^\star) \,\square\, (g^{\star -1} x^\star) = {}^T\!g(y^\star \,\square\, x^\star)\,{}^T\!g^{-1}.$$

Donc finalement, pour x, y quelconques, on trouve

$$({}^T\!g x) \,\square\, (g^{\star -1} y) = {}^T\!g(x \,\square\, y)\,{}^T\!g^{-1}$$

i.e. ${}^T\!g \in \mathrm{Str}(V)$. $\square$

On continue par des faits généraux (voir par exemple [FK94, Chapter VIII]).

Lemme 3.1.5. *Si pour $g \in GL(V)$ il existe $h \in GL(V)$ tel que pour tout $x \in V$ on ait*

$$P(gx) = gP(x)h$$

alors $g \in \mathrm{Str}(V)$ et $h = {}^T g$.

Démonstration. La condition $P(gx) = gP(x)h$ est équivalente à

$$g^{-1}(gx \,\square\, y)g = x \,\square (h^\star y) = x \,\square (hy^\star)^\star \quad (x, y \in V).$$

Donc

$$\beta(gx, z^\star) = \beta(x, (hz)^\star) \quad \forall x, z \in V$$

et

$$\delta_e(gx, z) = \delta_e(x, hz).$$

Par conséquent $h = {}^T g$ et $g \in \mathrm{Str}(V)$. □

Proposition 3.1.6. *(i) Si x est inversible alors $P(x)$ et $Q(x)$ sont dans $\mathrm{Str}(V)$ et*

$${}^T P(x) = P(x), \qquad {}^T Q(x)^\star = Q(x).$$

(ii) Soit $\mathrm{Aut}(V_2)$ le groupe des automorphismes de l'algèbre de Jordan V_2. Alors $\mathrm{Aut}(V_2)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Str}(V)$ et $g \in \mathrm{Str}(V)$ est dans $\mathrm{Aut}(V_2)$ si et seulement si $ge = e$. En particulier, si $g \in \mathrm{Aut}(V_2)$ alors ${}^T g = g^{-1}$.

Démonstration. Soit $x \in V$ inversible. Alors $P(x)$ et $Q(x) = P(x)Q(e)$ sont dans $GL(V)$ et pour tout $y \in V$ on a

$$P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x), \quad Q(Q(x)y) = Q(x)Q(y)Q(x).$$

Le lemme précédent donne que $P(x), Q(x) \in \mathrm{Str}(V)$ et ${}^T P(x) = P(x)$, ${}^T Q(x)^\star = Q(x)$.

Si $g \in \mathrm{Aut}(V_2)$ alors

$$P(gy) = gP(y)g^{-1}$$

donc d'après le lemme qui précède, $g \in \mathrm{Str}(V)$ et ${}^T g = g^{-1}$.

Soit $g \in \mathrm{Str}(V)$. Si $ge = e$ alors $P(gy)e = gP(y)e$ donc $g \in \mathrm{Aut}(V_2)$. Réciproquement, si $g \in \mathrm{Aut}(V_2)$ on a $gy = g(ye) = (gy)(ge)$ et donc $ge = e$. □

Proposition 3.1.7. *Soit $g \in \mathrm{Str}(V)$. Si x est inversible alors gx aussi et*

$$(gx)^{-1} = {}^{T}g^{-1}x^{-1}.$$

Réciproquement, si $g \in GL(V)$ est tel qu'il existe $h \in GL(V)$ vérifiant

$$(gx)^{-1} = hx^{-1}$$

pour tout x inversible alors $g \in \mathrm{Str}(V)$ et $h = {}^{T}g^{-1}$. Autrement dit,

$$\mathrm{Str}(V) = \{g \in GL(V) \,|\, \jmath \circ g \circ \jmath \in GL(V)\} \ .$$

Démonstration. Soit $g \in \mathrm{Str}(V)$. Si x est inversible, $P(gx) = gP(x)^{T}g$ l'est aussi. Par suite gx est inversible et

$$(gx)^{-1} = P(gx)^{-1}gx = (gP(x)^{T}g)^{-1}gx = {}^{T}g^{-1}P(x)^{-1}g^{-1}gx = {}^{T}g^{-1}x^{-1}.$$

Supposons maintenant

$$(gx)^{-1} = hx^{-1}.$$

En différentiant cette égalité par rapport à x, on obtient

$$-P(gx)^{-1}gy = -hP(x)^{-1}y,$$

c'est-à-dire

$$P(gx)h = gP(x).$$

Cette égalité est alors vraie pour x inversible. Par densité, cette identité reste vraie pour tout $x \in V$. Appliquant le lemme 3.1.5, on obtient que $g \in \mathrm{Str}(V)$ et $h^{-1} = {}^{T}g$. □

Poursuivons maintenant par des résultats qui font le lien entre le groupe de structure, le groupe des automorphismes de la structure triple et le groupe des automorphismes de la structure d'algèbre.

Lemme 3.1.8. *Supposons V simple. Si $x \in V$ est tel que $P(x) = \mathrm{Id}$ alors $x = \pm e$.*

Démonstration. Soit x tel que $P(x) = \mathrm{Id}$. Alors $x^2 = e$ et $L(x)^2 = \mathrm{Id}$. Différentiant l'identité $[L(y), L(y^2)] = 0$ dans la direction de z, on obtient

$$[L(z), L(y^2)] + 2[L(y), L(yz)] = 0.$$

On en déduit que $[L(x), L(xz)] = 0$ pour tout z. Ainsi, pour tous $y, z \in V$, on a

$$x((xz)y) = (xz)(xy) \Longleftrightarrow L(x)L(y)L(x)z = L(xy)L(x)z$$

et comme $L(x)$ est inversible, on obtient $L(x)L(y) = L(xy)$. L'identité

$$[L(x), L(xy)] = 0$$

donne de plus

$$L(xy) = L(x)L(xy)L(x) = L(y)L(x)$$

donc $L(x)L(y)z = L(y)L(x)$. Notons maintenant $L(x)^{\pm}$ les sous-espaces propres de $L(x)$ pour les valeurs propres ± 1. Pour $z \in L(x)^{\pm}$ et $y \in V$, ce qui précède fournit

$$L(x)L(y)z = L(y)L(x)z = \pm L(y)z$$

ce qui prouve que $L(x)^{\pm}$ sont deux idéaux de V_2. Par simplicité de V (et donc de V_2), on a nécessairement $L(x)^{+} = \{0\}$ ou bien $L(x)^{-} = \{0\}$, c'est-à-dire $x = \pm e$. □

Proposition 3.1.9. *Si V est simple alors*

$$\{g \in \mathrm{Str}(V) | \, {}^{T}g = g^{-1}\} = \pm \mathrm{Aut}(V_2),$$

c'est-à-dire que le sous-groupe de $\mathrm{Str}(V)$ *formé des éléments orthogonaux par rapport à δ_e est* $\pm \mathrm{Aut}(V_2)$.

Démonstration. En vertu de 3.1.6, il suffit de prouver que si un élément g de $\mathrm{Str}(V)$ vérifie ${}^{T}g = g^{-1}$ alors $ge = \pm e$. Soit $g \in \mathrm{Str}(V)$ un tel élément. Alors $P(ge) = \mathrm{Id}$ et le lemme précédent donne $ge = \pm e$. □

Rappelons que $O(V)$ désigne le groupe β-orthogonal de V :

$$O(V) := O(V, \beta) = \{g \in GL(V) \,|\, g^{-1} = {}^{T}g^{\star}\} \; ;$$

et que

$$\mathrm{Str}(V) \cap O(V) = \{g \in GL(V) \,|\, Q(gx) = gQ(x)g^{-1} \; \forall x \in V\} = \mathrm{Aut}(V).$$

Utilisant 3.1.6, on a

$$\mathrm{Aut}(V)^{e} = \mathrm{Aut}(V_2) \cap O(V) = \{g \in \mathrm{Aut}(V_2) | g^{\star} = g\},$$

c'est-à-dire

$$\{g \in \mathrm{Aut}(V_2) | g^{\star} = g\} = \mathrm{Aut}(V) \cap \mathrm{Aut}(V_2) = \mathrm{Aut}(V)^{e}. \tag{3.4}$$

Corollaire 3.1.10. *Si V est simple alors*

$$\{g \in \mathrm{Aut}(V) | \, g^{\star} = g\} = \pm \mathrm{Aut}(V)^{e}.$$

Démonstration. En effet, 3.1.9 fournit alors

$$\begin{aligned}\{g \in \mathrm{Aut}(V) |\, g^\star = g\} &= \{g \in \mathrm{Str}(V) |\, {}^T\!g = g^{-1}, g^\star = g\}\\ &= \pm\{g \in \mathrm{Aut}(V_2) |\, g^\star = g\}\\ &= \pm \mathrm{Aut}(V)^e.\end{aligned}$$

□

Intéressons-nous finalement à l'algèbre de Lie de $\mathrm{Str}(V)$. L'application

$$\theta : g \mapsto {}^T\!g^{\star^{-1}} = Q(e)gP(g^{-1}e)Q(e)$$

est une involution de $\mathrm{Str}(V)$ dont les points fixes sont les éléments de $\mathrm{Aut}(V)$. Notant ϑ la différentielle de θ en l'identité, on a

$$\vartheta : \mathfrak{str}(V) \ni X \mapsto X^\star - 2L(Xe)^\star = X^\star - 2L(X^\star e)$$

où $\mathfrak{str}(V) := \mathrm{Lie}(\mathrm{Str}(V)) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Str}(V_2)) =: \mathfrak{str}(V_2)$. On sait (voir par exemple [FK94, Proposition VIII.2.6]) qu'une transformation linéaire X est dans $\mathfrak{str}(V_2)$ si et seulement si

$$2P(Xx, x) = XP(x) + P(x)^T\!X \quad (x \in V_2). \tag{3.5}$$

Aussi,

$$\mathfrak{str}(V_2) = \mathrm{Der}(V_2) \oplus L(V_2)$$

où $\mathrm{Der}(V_2) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(V_2))$ est l'algèbre des dérivations de l'algèbre de Jordan V_2, et les assertions suivantes sont équivalentes

(i) $X \in \mathrm{Der}(V_2)$;
(ii) ${}^T\!X = -X$;
(iii) $Xe = 0$.

Le crochet de Lie y est défini comme suit, pour $D, D' \in \mathrm{Der}(V_2)$, $v, v' \in V_2$,

$$[D + L(v), D' + L(v')] = ([D, D'] + [L(v), L(v')]) + L(Dv' - D'v).$$

Les points fixes de ϑ sont les éléments de $\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(V)) = \mathrm{Lie}(K) = \mathfrak{k}$. Posant $X = D_X + L(v_X) \in \mathfrak{str}(V_2)$, on obtient

$$\vartheta(X) = X \iff \begin{cases} D_X^\star = D_X \\ v_X^\star = -v_X \end{cases}$$

et

$$\vartheta(X) = -X \iff \begin{cases} D_X^\star = -D_X \\ v_X^\star = v_X \end{cases} .$$

Donc, si $\mathfrak{q}$ désigne l'espace propre de $\mathfrak{str}(V_2)$ pour la valeur propre -1 de ϑ, on trouve

$$\mathfrak{k} = \{D \in \mathrm{Der}(V_2) \mid D^\star = D\} \oplus L(V^-), \tag{3.6}$$
$$\mathfrak{q} = \{D \in \mathrm{Der}(V_2) \mid D^\star = -D\} \oplus L(V^+). \tag{3.7}$$

3.1.3 Description de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$

Rappelons que τ désigne l'automorphisme involutif de $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ donnant la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, et que le sous-espace $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ est isomorphe à V via l'application

$$V \to \mathfrak{p}, \ v \mapsto \xi_v$$

où $\xi_v : z \mapsto v - Q(z)v$ est l'unique champ de vecteurs quadratique sur $\mathcal{D}$ vérifiant $\xi_v(0) = v$. Rappelons également que pour $u, v \in V$, $X \in \mathfrak{k} = \mathrm{Der}(V)$, on a

$$[\xi_u, \xi_v] = 2(u \,\square\, v - v \,\square\, u), \quad [X, \xi_v] = \xi_{Xv}$$

et que par conséquent,

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}\ .$$

En utilisant (3.6), on a

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus (V^+ \oplus V^-) = (\mathfrak{k}^e \oplus L(V^-)) \oplus (V^+ \oplus V^-)$$

avec

$$\mathfrak{k}^e := \{D \in \mathrm{Der}(V_2) \,|\, D^\star = D\} = \{X \in \mathfrak{k} | X^\star = X\}.$$

Si σ désigne l'automorphisme involutif de $\mathfrak{g}$ donné par

$$X \mapsto X^\star, \quad \xi_v \mapsto \xi_{v^\star} \quad (X \in \mathfrak{k}, v \in V)\ ,$$

alors σ commute clairement à τ et la décomposition de $\mathfrak{g}$ sous σ est

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{k}^e \oplus V^+) \oplus (L(V^-) \oplus V^-).$$

Considérons l'élément $Z = \frac{1}{2}\xi_e$ de $V^+ \subset \mathfrak{p}$. Pour $v \in V^-$, nous avons

$$[Z, \xi_v] = e \,\square\, v - v \,\square\, e = -2v \,\square\, e = -2L(v)$$

et

$$[Z, [Z, \xi_v]] = -[\xi_e, L(v)] = \xi_v.$$

Par conséquent, nous avons $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} Z_{|V^-})^2 = \mathrm{Id}_{V^-}$, $L(V^-) = [Z, V^-]$ et

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{k}^e \oplus V^+) \oplus (V^- \oplus [Z, V^-]).$$

Lemme 3.1.11. *On a*

(i) $[\mathfrak{k}^e, \mathfrak{k}^e] \subset \mathfrak{k}^e$ *;*

(ii) $[V^+, V^+] \subset \mathfrak{k}^e$ *;*

(iii) $[V^-, V^-] \subset \mathfrak{k}^e$ *;*

(iv) $[[Z, V^-], [Z, V^-]] \subset \mathfrak{k}^e$ *;*

(v) $[\mathfrak{k}^e, V^+] \subset V^+$ *;*

(vi) $[\mathfrak{k}^e, V^-] \subset V^-$ *;*

(vii) $[\mathfrak{k}^e, [Z, V^-]] \subset [Z, V^-]$ *;*

(viii) $[V^+, [Z, V^-]] \subset V^-$ *;*

(ix) $[V^-, [Z, V^-]] \subset V^+$ *;*

(x) $[V^+, V^-] \subset [Z, V^-]$.

Démonstration. Les six premières inclusions ainsi que les inclusions $(viii)$ et (ix) découlent de la définition du crochet, du fait que les éléments de $\mathfrak{k}^e$ stabilisent V^+ et V^- (vus dans V), de 3.1.1 et de l'égalité $L(V^-) = [Z, V^-]$. Pour $D \in \mathfrak{k}^e$, on a $[D, Z] = 0$ donc l'identité de Jacobi nous donne

$$[D, [Z, \xi_b]] = [Z, [D, \xi_b]] = [Z, \xi_{Db}] \in [Z, V^-], \ (b \in V^-)$$

d'où (vii). Utilisant l'identité (3.1), pour $a \in V^+$ et $b \in V^-$, on a

$$[\xi_a, \xi_b] = 2(a \,\square\, b - b \,\square\, a) = -4L(ab) = 2[Z, \xi_{ab}] \in [Z, V^-],$$

d'où (x). $\square$

Posons pour la suite

$$\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{k}^e \oplus V^+, \quad \mathfrak{g}_{\pm 1} := \{\xi_v \pm [Z, \xi_v] | v \in V^-\}.$$

Remarquons que d'après (3.6) et (3.7), on a

$$\mathfrak{g}_0 \cong \{X \in \mathfrak{str}(V) | X^\star = X\}.$$

Lemme 3.1.12. *(i)* $\mathfrak{g}_0$ *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$ *: c'est le centralisateur de* Z *dans* $\mathfrak{g}$ *; de plus,*

$$\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{str}(V^+) \oplus \mathfrak{str}(V^-)$$

où $\mathfrak{str}(V^\pm)$ *désigne l'algèbre de Lie du groupe de structure du sous-STJP* $V^\pm$ *;*

(ii) $\mathfrak{g}_{-1}$ *et* $\mathfrak{g}_1$ *sont deux sous-algèbres abéliennes de* $\mathfrak{g}$ *qui vérifient* $\dim \mathfrak{g}_{\pm 1} = \dim V^-$ *et* $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_{-1} = \{0\}$.

Démonstration. Par définition, $\mathfrak{g}_0$ est la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ formée des points fixes de l'automorphisme involutif σ. De plus, on a bien $[Z, \mathfrak{g}_0] = \{0\}$ et on vérifie facilement que l'égalité $[Z, X] = 0$ pour $X \in V^- \oplus [Z, V^-]$ entraîne $X = 0$. Comme

$$\{X \in \mathfrak{str}(V) | X^\star = X\} \subset End(V^+) \oplus End(V^-)$$

et puisque les restrictions à $V^{\pm}$ des éléments de $\{X \in \mathfrak{str}(V) | X^\star = X\}$ apparaissent comme éléments de $\mathfrak{str}(V^{\pm})$, on obtient l'inclusion

$$\{X \in \mathfrak{str}(V) | X^\star = X\} \subset \mathfrak{str}(V^+) \oplus \mathfrak{str}(V^-).$$

Les égalités $\mathfrak{str}(V^{\pm}) = V^{\pm} \mathbin{\square} V^{\pm}$ et $u \mathbin{\square} v = \pm(L(uv) + [L(u), L(v)])$ pour $u, v \in V^{\pm}$ donnent

$$\mathfrak{str}(V^{\pm}) \subset L(V^+) \oplus \mathfrak{k}^e = \{X \in \mathfrak{str}(V) | X^\star = X\},$$

d'où l'égalité

$$\{X \in \mathfrak{str}(V) | X^\star = X\} = \mathfrak{str}(V^+) \oplus \mathfrak{str}(V^-).$$

Pour $u, v \in V^-$, on a

$$[\xi_u \pm [Z, \xi_u], \xi_v \pm [Z, \xi_v]] = [\xi_u, \xi_v] \pm ([\xi_u, [Z, \xi_v]] + [[Z, \xi_u], \xi_v]) + [[Z, \xi_u], [Z, \xi_v]].$$

L'identité de Jacobi fournit

$$[\xi_u, [Z, \xi_v]] + [[Z, \xi_u], \xi_v] = [Z, [\xi_u, \xi_v]]$$

et puisque $[\xi_u, \xi_v] \in \mathfrak{k}^e$, on trouve $[Z, [\xi_u, \xi_v]] = 0$. De plus,

$$[[Z, \xi_u], [Z, \xi_v]] = 4[L(u), L(v)]$$

et l'identité (3.1) nous donne

$$2[L(u), L(v)] = v \mathbin{\square} u - u \mathbin{\square} v.$$

Par suite,

$$[[Z, \xi_u], [Z, \xi_v]] = 2(v \mathbin{\square} u - u \mathbin{\square} v) = [\xi_v, \xi_u],$$

d'où l'on tire

$$[\xi_u \pm [Z, \xi_u], \xi_v \pm [Z, \xi_v]] = 0.$$

Soit $v_1, v_2, \ldots, v_m$ une base de V^-. Alors $\xi_{v_1} \pm [Z, \xi_{v_1}], \xi_{v_2} \pm [Z, \xi_{v_2}], \ldots, \xi_{v_m} \pm [Z, \xi_{v_m}]$ est une base de $\mathfrak{g}_{\pm 1}$, donc $\dim \mathfrak{g}_{\pm 1} = \dim V^-$.

Soit enfin $X \in \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_{-1}$. On peut écrire $X = \xi_u + [Z, \xi_u] = \xi_v - [Z, \xi_v]$ avec u et v dans V^-. Alors

$$\xi_{v-u} = [Z, \xi_{u+v}] \in V^- \cap L(V^-) = \{0\}$$

donc $v - u = u + v = 0$, i.e. $u = v = 0$. D'où $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_{-1} = \{0\}$. □

Proposition 3.1.13. *(i)* $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1} = V^- \oplus [Z, V^-]$ *et* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ *;*

(ii) $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} Z)_{|\mathfrak{g}_j} = j \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}_j} \quad (j = -1, 0, 1)$ *;*

(iii) $[\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1}] \subset \mathfrak{g}_0$ *;*

(iv) $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_{\pm 1}] \subset \mathfrak{g}_{\pm 1}$ *;*

(v) $\tau(\mathfrak{g}_j) = \mathfrak{g}_{-j} \quad (j = -1, 0, 1)$.

Démonstration. Comme $\mathfrak{g}_{\pm 1} \subset V^- \oplus [Z, V^-]$, on a $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1} \subset V^- \oplus [Z, V^-]$. Mais

$$\dim(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1}) = 2 \dim V^- = \dim(V^- \oplus [Z, V^-])$$

donc $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1} = V^- \oplus [Z, V^-]$. Le deuxième point est une conséquence du fait que $\mathfrak{g}_0$ soit le centralisateur de Z dans $\mathfrak{g}$, des définitions de $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ et de l'égalité $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} Z_{|V^-})^2 = \mathrm{Id}_{V^-}$.

Montrons que $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_{\pm 1}] \subset \mathfrak{g}_{\pm 1}$. Soit $X \in \mathfrak{g}_0$ et soit $Y \in \mathfrak{g}_{\pm 1}$. L'identité de Jacobi donne

$$[Z, [X, Y]] = [X, [Z, Y]] + [[Z, X], Y]$$

et comme $[Z, Y] = \pm Y$ et $[Z, X] = 0$, on obtient $[Z, [X, Y]] = \pm [X, Y] \in \mathfrak{g}_{\pm 1}$. L'inclusion $[\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1}] \subset \mathfrak{g}_0$ est une conséquence de l'égalité $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_{-1} = V^- \oplus [Z, V^-]$ et de 3.1.11. On en déduit que l'on a $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$ pour tous $i, j \in \{-1, 0, 1\}$, où $\mathfrak{g}_{\pm 2} := \{0\}$.

Montrons enfin le dernier point. L'automorphisme τ de $\mathfrak{g}$ envoie tout élément $X + Y$ de $\mathfrak{k}^e \oplus V^+ = \mathfrak{g}_0$ sur $X - Y$, donc $\tau_{|\mathfrak{g}_0}$ est une bijection de $\mathfrak{g}_0$, i.e. $\tau(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0$. Maintenant, pour tout $X \in V^-$, on a

$$\tau(X + [Z, X]) = \tau(X) + \tau([Z, X]) = -X + [Z, X].$$

Il suit que $\tau(\mathfrak{g}_1) \subset \mathfrak{g}_{-1}$. De plus, $\tau(X + [Z, X]) = 0$ si et seulement si $X = 0$, donc τ induit une bijection de $\mathfrak{g}_1$ sur $\mathfrak{g}_{-1}$, i.e. $\tau(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_{-1}$. On obtient de plus que $\mathfrak{g}_1 = \tau^2(\mathfrak{g}_1) = \tau(\mathfrak{g}_{-1})$. □

Lemme 3.1.14. *Si $V^- \neq \{0\}$ alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$ munie du produit triple*

$$\{X, Y, Z\} := -\frac{1}{8}[[X, \tau(Y)], Z] = -\frac{1}{8}[X, [\tau(Y), Z]] \quad (X, Y, Z \in \mathfrak{g}_1) \tag{3.8}$$

est un STJP isomorphe au STJP $(V^-, \{\})$.

Démonstration. Pour $u, v, w \in V^-$, nous avons

$$[\xi_v, \xi_u] = 4[L(u), L(v)], \quad [\xi_u, [Z, \xi_v]] = 2\xi_{uv}, \quad [\xi_{uv}, \xi_w] = 2[Z, \xi_{(uv)w}]$$

donc

$$[\xi_u + [Z, \xi_u], -\xi_v + [Z, \xi_v]] = 2[\xi_v, \xi_u] + 2[\xi_u, [Z, \xi_v]] = 8[L(u), L(v)] + 4\xi_{uv}.$$

Soient $X = \xi_u + [Z, \xi_u], Y = \xi_v + [Z, \xi_v]$ et $Z = \xi_w + [Z, \xi_w]$ dans $\mathfrak{g}_1$. Comme

$$[\xi_{uv}, [Z, \xi_w]] = 2\xi_{L(uv)w}, \quad [\xi_{uv}, \xi_w] = 2[Z, \xi_{L(uv)w}],$$

on obtient

$$\begin{aligned}
-8[[X,\tau(Y)],Z] &= [8[L(u),L(v)]+4\xi_{uv},\xi_w+[Z,\xi_w]]\\
&= 8(\xi_{[L(u),L(v)]w}+[Z,\xi_{[L(u),L(v)]w}])+4[\xi_{uv},\xi_w]+4[\xi_{uv},[Z,\xi_w]]\\
&= 8(\xi_{[L(u),L(v)]w}+[Z,\xi_{[L(u),L(v)]w}]+\xi_{L(uv)w}+[Z,\xi_{L(uv)w}]).
\end{aligned}$$

Puisque d'après (3.1) on a l'égalité $u\,\Box\,v=-L(uv)-[L(u),L(v)]$, on trouve

$$[[X,\tau(Y)],Z]=\xi_{\{u,v,w\}}+[Z,\xi_{\{u,v,w\}}]\ ,$$

ce qui veut dire que $(\mathfrak{g}_1,\{\})$ est un STJ. L'application

$$V^-\to\mathfrak{g}_1,\ v\mapsto\xi_v+[Z,\xi_v]$$

devient un isomorphisme de systèmes triples de Jordan et par conséquent, le STJ $\mathfrak{g}_1$ est positif. □

Remarque 3.1.15: Durant la preuve précédente, on a obtenu le fait suivant : si l'on identifie $V^+\subset\mathfrak{p}$ à $L(V^+)$ via l'application $\xi_a\mapsto 2L(a)$, alors

$$[\mathfrak{g}_{-1},\mathfrak{g}_1]=V^-\,\Box\,V^-=\mathfrak{str}(V^-).$$

En effet, cela découle du fait que pour $u,v\in V^-$, on a

$$\begin{aligned}
[\xi_v-[Z,\xi_v],\xi_u+[Z,\xi_u]] &= 8[L(u),L(v)]+4\xi_{uv}\\
&= 8([L(u),L(v)]+L(uv))\\
&= 8u\,\Box\,v.
\end{aligned}$$

Supposons que $V^-\neq\{0\}$ et notons $B_{\mathfrak{g}}$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Si $X,X'\in\mathfrak{g}_1$, l'identité (3.8) donne

$$-8X\,\Box\,X'=\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X\circ\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\tau(X')$$

et ainsi,

$$B_{\mathfrak{g}}(X,\tau(X'))=-8\mathrm{Tr}(X\,\Box\,X').$$

Comme $\mathfrak{g}_1$ est un STJP, on a en particulier

$$B_{\mathfrak{g}}(X,\tau(X))<0.$$

En utilisant les règles de graduation de $\mathfrak{g}$, on montre facilement que pour $X_1,X_1'\in\mathfrak{g}_1$ et $X_0\in\mathfrak{g}_0$, les opérateurs

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X_1\circ\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X_1',\quad \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\tau(X_1)\circ\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\tau(X_1'),\quad \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X_1\circ\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X_0,\quad \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\tau(X_1)\circ\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X_0$$

sont tous nilpotents. On en déduit que pour $X = X_{-1} + X_0 + X_1, X' = X'_{-1} + X'_0 + X'_1$ dans $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, on a

$$B_{\mathfrak{g}}(X, X') = B_{\mathfrak{g}}(X_0, X'_0) + B_{\mathfrak{g}}(X_1, X'_{-1}) + B_{\mathfrak{g}}(X_{-1}, X'_1).$$

En identifiant $\mathfrak{g}_{\pm 1}$ à V^- via $\xi_v \pm [Z, \xi_v] \mapsto v$, on s'aperçoit que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X_0$ opère par X_0 sur $\mathfrak{g}_1$ et par $-{}^T X_0$ sur $\mathfrak{g}_{-1}$. On en déduit que $\tau(X_0) = -{}^T X_0$ et que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X_0 \circ \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X'_0$ opère par restriction à $\mathfrak{g}_{-1}$ par ${}^T(X'_0 X_0)$, et par restriction à $\mathfrak{g}_1$ par $X_0 X'_0$. Il vient

$$B_{\mathfrak{g}}(X_0, X'_0) = 2\mathrm{Tr}(X_0 X'_0) + B_{\mathfrak{g}_0}(X_0, X'_0)$$

et

$$B_{\mathfrak{g}}(X, X') = 2\mathrm{Tr}(X_0 X'_0) + B_{\mathfrak{g}_0}(X_0, X'_0) + B_{\mathfrak{g}}(X_1, X'_{-1}) + B_{\mathfrak{g}}(X_{-1}, X'_1),$$

où $B_{\mathfrak{g}_0}$ désigne la forme de Killing de $\mathfrak{g}_0$. En vertu de ce qui précède, pour tout élément non nul $X = X_{-1} + X_0 + X_1$ dans $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$, on obtient

$$B_{\mathfrak{g}}(X, \tau(X)) = -2\mathrm{Tr}(X_0 {}^T X_0) - B_{\mathfrak{g}_0}(X_0, {}^T X_0) - 8\mathrm{Tr}(X_1 \square X_1) - 8\mathrm{Tr}(X_{-1} \square X_{-1}) < 0.$$

Nous avons obtenu le résultat suivant :

Proposition 3.1.16. *(i) Si $V^- = \{0\}$ alors*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{str}(V^+)$$

est une algèbre de Lie réductive.

(ii) Si $V^- \neq \{0\}$ alors

- *(a) $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple 3-graduée ;*
- *(b) $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ est une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$;*
- *(c) $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{str}(V^+) \oplus KKT(V^-)$ où $KKT(V^-) = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{str}(V^-) \oplus \mathfrak{g}_1$ est l'algèbre de Lie de Kantor-Koecher-Tits du STJP V^- (cf. annexe A).*

3.2 L'ensemble des tripotents maximaux

Dans cette section, nous étudions l'ensemble des tripotents maximaux de V. Plus exactement, nous nous intéressons à ses composantes connexes, car contrairement au cas des domaines bornés hermitiens symétriques, cet ensemble n'est en général pas connexe.

3.2.1 Caractérisation des tripotents maximaux

En vertu de 1.2.20, pour tout tripotent maximal f, il existe $k \in K = \mathrm{Aut}(V)_o$ tel que $V_2(f) = kV_2(e)$. On en déduit que $V = V_2(f)$ pour tout tripotent maximal f de V. En particulier, $Q(f)^2 = \mathrm{Id}_V$ et $Q(f) \in GL(V)$. L'égalité $P(f) = Q(f)Q(e)$ prouve alors qu'un tripotent est maximal si et seulement si il est inversible (dans V_2). Notons $V_2^\times$ l'ensemble des éléments inversibles de V_2 et soit

$$\Sigma := \{x \in V_2^\times \,|\, x^\star = x^{-1}\}.$$

Proposition 3.2.1. *Σ est l'ensemble des tripotents maximaux de V, c'est une sous-variété compacte de V et $T_e\Sigma = V^-$.*

Démonstration. Un élément x de V est un tripotent si et seulement si $x = Q(x)x = P(x)x^\star$ et est inversible si et seulement si $P(x)$ l'est et dans ce cas $x^{-1} = P(x)^{-1}x$. Par conséquent, Σ est l'ensemble des tripotents inversibles de V, et donc des tripotents maximaux.

Aussi, $\Sigma = \psi^{-1}(\{0\})$ où $\psi : V_2^\times \to V_2,\ x \mapsto x^\star - x^{-1}$. En tout $x \in \Sigma$, ψ est une submersion puisque $D_x\psi = Q(e) - P(x)^{-1} = Q(e)(\mathrm{Id}_V - Q(x))$. Donc Σ est une sous-variété de $V_2 = V$. De plus, on a $|x|^3 = |x|$ pour tout $x \in \Sigma$, donc $|x| \leq 1$ et Σ est borné, d'où la compacité.

Maintenant, l'application $\phi : x \mapsto x^{(3)} - x$ est identiquement nulle sur Σ donc $T_e\phi : T_e\Sigma \to \{0\}$, où $T_e\Sigma$ désigne l'espace tangent de Σ en e. Pour tout $x \in \Sigma$, la différentielle $D_x\phi$ de ϕ en x est donnée par

$$D_x\phi = Q(x) + 2x \,\square\, x - \mathrm{Id}_V.$$

Il vient, pour $v \in V = V_2$,

$$D_e\phi(v) = Q(e)v + v.$$

Comme $Q(e)v + v = 0$ si et seulement si $v \in V^-$, on déduit que

$$T_e\Sigma \subset V^-.$$

Réciproquement, soit $v \in V^-$ et $\Delta = 2(u \,\square\, e - e \,\square\, u) \in \mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(V))$, où l'on a posé $u = \frac{1}{4}v$. Alors $\gamma(t) := \exp(t\Delta) \cdot e$ est une courbe dans Σ telle que $\gamma(0) = e$ et $\gamma'(0) = \Delta e = 2(e \,\square\, e(u) - Q(e)u) = v$ et donc $V^- \subset T_e\Sigma$. □

Remarque 3.2.2: Notons det la fonction déterminant de l'algèbre de Jordan V_2. Comme $Q(e) \in \mathrm{Aut}(V_2)$, on a $\det(x^\star) = \det x$ et par conséquent,

$$\Sigma \subset \{x \in V_2^\times \,|\, \det x = \pm 1\}.$$

Proposition 3.2.3. *Pour $x = a + b$ dans V avec $a \in V^+$ et $b \in V^-$, sont équivalents :*

(i) $x \in \Sigma$;

(ii) $[L(x), L(x^\star)] = 0$ *et* $xx^\star = e$;

(iii) $[L(a), L(b)] = 0$ *et* $a^2 - b^2 = e$;

(iv) $x \,\square\, x = \mathrm{Id}_V$.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$: $x^{-1} = x^\star$ entraîne que $x^\star \in \mathbb{R}[x]$ et $xx^\star = e$. Mais V_2 est une algèbre de puissance associative donc $x^\star \in \mathbb{R}[x]$ implique $[L(x), L(x^\star)] = 0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: découle des égalités $a^2 - b^2 = xx^\star$ et $[L(x), L(x^\star)] = 2[L(b), L(a)]$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: on utilise l'identité $(a + b) \,\square (a + b) = L(a^2 - b^2) - 2[L(a), L(b)]$

$(iv) \Rightarrow (i)$: si $x \,\square\, x = \mathrm{Id}$ alors x est un tripotent tel que $V_0(x) = \{0\}$, donc x est maximal et par le lemme précédent, $x \in \Sigma$. □

3.2.2 Composantes connexes de Σ

Soit exp l'application exponentielle de l'algèbre de Jordan $V_2(e)$. Puisque l'involution $Q(e)$ est un automorphisme de l'algèbre de Jordan de $V_2(e)$, on a clairement $Q(e) \circ \exp = \exp \circ\, Q(e)$. Cette application de $V_2(e)$ permet de caractériser la composante connexe de e dans l'ensemble des tripotents maximaux de V, comme l'indique le résultat suivant :

Proposition 3.2.4. *On a*

$$\exp V^- = \{x^2 \,|\, x \in \Sigma\}.$$

En particulier, $\mathcal{S} := \exp V^-$ est la composante connexe de e dans Σ, c'est une variété compacte et $T_e\mathcal{S} = V^-$.

Démonstration. Soit $v \in V^-$. Alors $(\exp v)^\star = \exp(v^\star) = \exp(-v) = (\exp v)^{-1}$ donc $\exp V^- \subset \Sigma$. De plus, $\exp v = (\exp \frac{v}{2})^2$ donc $\exp V^- \subset \{x^2 \,|\, x \in \Sigma\}$.

Soit $x \in \Sigma$. L'algèbre de Jordan réelle unitaire et associative $\mathbb{R}[x]$ engendrée par e et x est stable par $Q(e)$ et il existe un système complet d'idempotents orthogonaux $(c_1, \ldots, c_\ell)$ de $\mathbb{R}[x]$ tel que

$$\mathbb{R}[x] = \bigoplus_{j=1}^{\ell} \mathbb{R}c_j.$$

Par conséquent, $x = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j c_j$ avec $\lambda_j \in \mathbb{R}$ pour tout j et comme x est inversible, les λ_j sont tous non nuls. Ainsi

$$x^2 = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j^2 c_j = \exp(\sum_{j=1}^{\ell} \mu_j c_j)$$

avec $\mu_j = \log \lambda_j^2$, et l'égalité $x^\star = x^{-1}$ entraîne alors que $\sum_{j=1}^{\ell} \mu_j c_j \in V^-$. □

Nous allons maintenant voir que la notion d'inverse est indépendante du choix du tripotent maximal fixé.

Soit $f \in \Sigma$; c'est un tripotent maximal de V donc $Q(f)$ est un automorphisme involutif de l'algèbre de Jordan $V_2(f)$ et

$$V = V_2(f) = V^+(f) \oplus V^-(f).$$

Notons P_f la représentation quadratique de $V_2(f)$, $\exp_f$ l'application exponentielle de l'algèbre de Jordan $V_2(f)$ et

$$\Sigma_f := \{x \in V | Q(f)x = P_f(x)^{-1}x\}.$$

Lemme 3.2.5. *Soit $f \in \Sigma$. Un élément x de V est inversible dans $V_2(f)$ si et seulement si il l'est dans V_2. En particulier, on a $\Sigma_f = \Sigma$.*

Démonstration. Pour tout $x \in V$,

$$P_f(x) = Q(x)Q(f) = P(x)Q(e)P(f)Q(e) = P(x)P(f)^\star = P(x)P(f)^{-1}$$

et

$$\begin{aligned} Q(e)x = P(x)^{-1}x &\iff P(f)Q(e)x = P(f)P(x)^{-1}x = (P(x)P(f)^{-1})^{-1}x \\ &\iff Q(f)x = P_f(x)^{-1}x. \end{aligned}$$

□

Remarque 3.2.6: (i) Si l'on note $\jmath_f$ la fonction inverse de l'algèbre de Jordan $V_e(f)$ alors

$$\jmath_f = P(f) \circ \jmath.$$

(ii) $S_f := \exp_f V^-(f)$ est la composante connexe de Σ contenant f, c'est une variété compacte et $T_f\Sigma = T_f\mathcal{S}_f = V^-(f)$.

Pour $v \in V^-$, on a

$$P(\exp v) = e^{2v \,\square\, e}$$

et 3.1.2(iv)(c) donne

$$2v \,\square\, e = v \,\square\, e - e \,\square\, v \in \mathrm{Der}(V) = \mathfrak{k}$$

donc pour x dans $\exp V^-$, $P(x)$ est dans K. Pour tout $f \in \Sigma$, on a de même

$$\{P_f(x) | x \in \exp_f V^-(f)\} \subset K.$$

Proposition 3.2.7. *La variété $\mathcal{S} = \exp V^-$ est homogène sous K. Ainsi, le groupe K opère transitivement sur chaque composante connexe de Σ.*

Démonstration. Soit $x = \exp v$ avec $v \in V^-$. Alors $x = (\exp \frac{v}{2})^2 = P(\exp \frac{v}{2})e$ et donc $\mathcal{S} \subset Ke$. Comme $\mathcal{S}$ et Ke sont connexes on obtient l'égalité. Puisque chaque composante connexe de Σ est de la forme $\mathcal{S}_f = \exp_f V^-(f)$ pour $f \in \Sigma$, un raisonnement analogue au précédent montre que K opère de manière transitive sur chacune d'entre-elles. $\square$

Nous avons vu en 1.3.15 que si V (simple) n'est pas de type tube ou si V n'est pas réduit (types B_r, C_r et BC_r), alors Σ est connexe et homogène sous K. Si V est de type C_r (i.e. tube non réduit) on appelle Σ la *frontière de Shilov* de $\mathcal{D}$ (par analogie aux domaines hermitiens symétriques de type tube). Nous allons voir que dans le cas tube réduit (types A_r et D_r), Σ n'est pas connexe. Toutefois, on est capable de déterminer le nombre de composante connexes de Σ.

Théorème 3.2.8. *Soit V un STJP simple de type tube réduit, et soit r son rang réel.*

- *(i) Si V est de type A_r (i.e. $V = V^+(e)$ pour un certain tripotent maximal e de V), alors l'ensemble des tripotents maximaux de V est $\{x \in V \,|\, x = \jmath_e(x)\}$ et possède $r+1$ composantes connexes, toutes homogènes sous K.*

- *(ii) Si V est de type D_r (i.e. $V = V_2(e) = V^+(e) \oplus V^-(e)$ pour un certain tripotent maximal $e = e_1 + \ldots + e_r$ avec $V^+(e)$ simple et $V^-(e) \neq \{0\}$) alors Σ possède deux composantes connexes sur lesquelles K est transitif. Plus précisément,*
  - *(a) si r est pair alors la composante connexe différente de $\mathcal{S}$ est $\mathcal{S}_f$ où $f = e - 2e_r$;*
  - *(b) si r est impair alors la composante connexe différente de $\mathcal{S}$ est $-\mathcal{S} = \mathcal{S}_{-e}$.*

Dans ces cas, on appelle $\mathcal{S}$ la frontière de Shilov associée au tripotent maximal *e.*

Démonstration. Si $V = V^+(e)$ pour un certain tripotent maximal e, alors $x \mapsto \frac{1}{2}(x+e)$ est une bijection continue de Σ sur l'ensemble des idempotents de $V^+(e)$. Le résultat provient alors du fait que l'ensemble des idempotents d'une algèbre de Jordan euclidienne de rang r possède $r+1$ composantes connexes (voir par exemple [FK94, Proposition IV.3.1]).

Le second point est dû à Helwig (cf [Hel70, Satz 5.3, (B_1), (B_2)]). $\square$

Exemples 3.2.9: $\mathcal{D} = SO_o(r,r)/SO(r) \times SO(r)$ est de type D_r ($V = \mathcal{M}(r,\mathbb{R})$) et $\Sigma = O(r)$. Si $e = \mathbb{1}_r$ alors $\mathcal{S}_e = SO(r)$.

3.2.3 Transversalité

Achevons cette section en donnant le lien qui existe entre V^- et $\mathcal{S}_{-e}$, et exhibons la notion de *transversalité* qui en découle.

Proposition 3.2.10. *On a*

$$\gamma_e^{-1}(V^-) = \{x \in \Sigma \,|\, \det(e-x) \neq 0\} \subset \mathcal{S}_{-e}.$$

En particulier, $\gamma_e^{-1}(V^-)$ est un ouvert connexe non vide et dense de $\mathcal{S}_{-e}$.

Démonstration. Soit $x \in \gamma_e^{-1}(V^-)$, $x = e - 2(v+e)^{-1} = (v-e)(v+e)^{-1}$ pour un certain $v \in V^-$. Alors x et $e-x$ sont inversibles et

$$\begin{aligned} x^{-1} = (v+e)(v-e)^{-1} &= -(v+e)(e-v)^{-1} \\ &= (v-e)^\star[(v+e)^{-1}]^\star = x^\star. \end{aligned}$$

Soit $x \in \Sigma$ tel que $e-x$ soit inversible. Alors

$$\begin{aligned} \gamma_e(x)^\star &= \gamma_e(x^\star) = -e + 2(e-x^\star)^{-1} \\ &= -e + 2(e-x^{-1})^{-1} = -e - 2x(e-x)^{-1} \\ &= -\gamma_e(x) \end{aligned}$$

et donc $\gamma_e(x) \in V^-$. D'où

$$\gamma_e^{-1}(V^-) = \{x \in \Sigma \,|\, \det(e-x) \neq 0\}.$$

En particulier, $\gamma_e^{-1}(V^-)$ est ouvert dans Σ, et est connexe comme image continue d'un connexe. Finalement, $\gamma_e^{-1}(V^-)$ contient $-e$, d'où le résultat. $\square$

Definition 3.2.11.
Pour $x, y \in V_2$, on on dit que x et y sont *transverses* et on note $x \top y$ si

$$\det(x-y) \neq 0.$$

Pour $z \in \Sigma$, notons $z_\top := \{y \in \Sigma \,|\, z \top y\}$. D'après 3.2.10, $e_\top = \gamma_e^{-1}(V^-) \subset \mathcal{S}_{-e}$. Soit $x \in \mathcal{S}$; de 3.2.7, on tire l'existence d'un $k \in K$ tel que $x = ke$ et donc, pour $y \in \Sigma$,

$$\det(x-y) \neq 0 \Longleftrightarrow \det(e - k^{-1}y) \neq 0 \Longleftrightarrow k^{-1}y \in \gamma_e^{-1}(V^-).$$

On en déduit que

$$x_\top = k\gamma_e^{-1}(V^-) \subset \mathcal{S}_{-x} = \mathcal{S}_{-e}$$

est un ouvert non vide et dense de $\mathcal{S}_{-e}$. Par conséquent, pour tous $x, y \in \mathcal{S}$ on a $x_\top \cap y_\top \neq \emptyset$.

Corollaire 3.2.12. *Pour tout $x, y \in \mathcal{S}$, on peut trouver $k \in K$ tel que $-k(x) \top e$ et $-k(y) \top e$.*

Démonstration. Soient $x, y \in \mathcal{S}$. D'après ce qui précède, il existe $z \in \mathcal{S}_{-e}$ tel que $x \top z$ et $y \top z$. Par homogénéité de $\mathcal{S}_{-e}$ sous K, il existe $k \in K$ vérifiant $k(z) = -e$. Les deux éléments $-k(x)$ et $-k(y)$ sont alors transverses à e. □

3.3 Groupe des automorphismes du domaine tube et son algèbre de Lie

Nous nous intéresserons dans cette section au groupe $G(T_\Omega)$. Les résultats énoncés ici sont une généralisation de ceux obtenus dans [FK94, X.5]. Précisons tout de même que les preuves sont inspirées pour une grande part de [FK94, X.5].

Rappelons que $G(T_\Omega)$ est le groupe des automorphismes du domaine symétrique $T_\Omega = \Omega \oplus V^- = \gamma_e(\mathcal{D})$ et que par conséquent,

$$G(T_\Omega) = \gamma_e^{-1} \circ G(\mathcal{D}) \circ \gamma_e.$$

3.3.1 Factorisation

Soit
$$G(\Omega) := \{g \in GL(V) | g\Omega = \Omega, g^\star = g\}.$$
Le cône Ω est homogène sous $G(\Omega)$. En effet, pour tout élément x de V^+, on a $P(x)^\star = P(x)$ et donc, si x est inversible, la restriction de $P(x)$ à V^+ est un élément de $GL(V^+)$. Aussi, $P(x)e = x^2 \in \Omega$ donc $P(x)\Omega$ est la composante connexe de x^2 dans l'ensemble $(V^+)^\times$ des éléments inversibles de V^+, qui n'est autre que Ω. D'où
$$\Omega = \{x^2 | x \in (V^+)^\times\} = \{P(x)e | x \in (V^+)^\times\} \subset G(\Omega)e \subset \Omega.$$

Lemme 3.3.1. *Pour tout $g \in G(\Omega)$, il existe $y \in (V^+)^\times$ et $k \in G(\Omega)^e$ tels que $g = P(y)k$, où $G(\Omega)^e$ désigne le stabilisateur de e dans $G(\Omega)$.*

Démonstration. Il existe $y \in (V^+)^\times$ tel que $ge = P(y)e$ et donc $P(y)^{-1}g \in G(\Omega)^e$. □

Le groupe $G(\Omega)$ opère naturellement sur T_Ω par $x \mapsto gx$ donc $G(\Omega)$ s'identifie à un sous-groupe de $G(T_\Omega)$. On note $t_v : x \mapsto x+v$ les translations de vecteur $v \in V$. L'ensemble $N^+ := \{t_v | v \in V^-\}$ est alors un sous-groupe abélien de $G(T_\Omega)$, isomorphe à V^-.

Lemme 3.3.2. *On a*
$$G(T_\Omega) = N^+ G(\Omega) G(T_\Omega)^e,$$
où $G(T_\Omega)^e$ désigne le stabilisateur de e dans $G(T_\Omega)$.

Démonstration. Soient $g \in G(T_\Omega)$ et $ge := x + y \in \Omega \oplus V^-$. Alors il existe $h \in G(\Omega)$ tel que $x = he$ et donc
$$ge = t_y \circ h(e).$$
L'élément $g' := h^{-1} \circ t_y^{-1} \circ g$ de $G(T_\Omega)$ vérifie $g'e = e$ donc $g' \in G(T_\Omega)^e$ et
$$g = t_y \circ h \circ g'.$$
□

3.3.2 Transformations affines

Nous allons maintenant nous intéresser aux applications affines de V qui préservent T_Ω.

D'après (3.3), tout élément de T_Ω est inversible donc $\jmath \in G(T_\Omega)^e$, et on sait que

$$G(T_\Omega)^e = \gamma_e \circ G(\mathcal{D})^0 \circ \gamma_e^{-1} = \gamma_e \circ \mathrm{Aut}(V) \circ \gamma_e^{-1}.$$

Soient $g \in G(T_\Omega)^e$ et $h \in \mathrm{Aut}(V)$ tels que $g = \gamma_e \circ h \circ \gamma_e^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned} \jmath \circ g \circ \jmath &= \jmath \circ \gamma_e \circ h \circ \gamma_e^{-1} \circ \jmath \\ &= \gamma_e \circ (-\mathrm{Id}) \circ h \circ (-\mathrm{Id}) \circ \gamma_e^{-1} \\ &= \gamma_e \circ h \circ \gamma_e^{-1} = g. \end{aligned}$$

Aussi, un élément g dans $G(T_\Omega)$ vérifiant $\jmath \circ g = g \circ \jmath$ est dans $G(T_\Omega)^e$. En effet, un tel élément satisfait à l'égalité $(ge)^{-1} = ge$ et comme e est l'unique point fixe de $\jmath$ dans T_Ω, on déduit que $ge = e$. D'où

$$G(T_\Omega)^e = \{g \in G(T_\Omega) | \jmath \circ g \circ \jmath = g\}.$$

En vertu de 3.1.7 et de 3.1.6, on obtient

$$G(T_\Omega)^e \cap GL(V) \subset \mathrm{Str}(V)^e = \mathrm{Aut}(V_2).$$

Soit maintenant $g \in G(T_\Omega)^e \cap GL(V)$ et soit $h := \gamma_e^{-1} \circ g \circ \gamma_e \in \mathrm{Aut}(V)$. Comme $\gamma_e^\star = \gamma_e$, on a

$$\begin{aligned} g^\star = (\gamma_e \circ h \circ \gamma_e^{-1})^\star &= \gamma_e^\star \circ h^\star \circ \gamma_e^{\star -1} \\ &= \gamma_e \circ {}^T\! h^{-1} \circ \gamma_e^{-1} \\ &= \gamma_e \circ h \circ P(h^{-1}e) \circ \gamma_e^{-1}. \end{aligned}$$

La linéarité de g fournit

$$0 = g(0) = \gamma_e h \gamma_e^{-1}(0)$$

donc

$$\gamma_e^{-1}(0) = h\gamma_e^{-1}(0).$$

Puisque $\gamma_e^{-1}(0) = -e$, on obtient $h(e) = e$ et $g^\star = g$. En utilisant (3.4), on trouve

$$G(T_\Omega)^e \cap GL(V) \subset \{M \in \mathrm{Aut}(V_2) | M^\star = M\} = \mathrm{Aut}(V)^e.$$

Réciproquement, on a $\mathrm{Aut}(V)^e \subset \mathrm{Aut}(V_2)$ donc tout élément g de $\mathrm{Aut}(V)^e$ satisfait $\gamma_e \circ g \circ \gamma_e^{-1} = g$, ce qui veut dire que

$$\mathrm{Aut}(V)^e = \gamma_e \circ \mathrm{Aut}(V)^e \circ \gamma_e^{-1} \subset G(T_\Omega)^e.$$

Il vient

$$G(T_\Omega)^e \cap GL(V) = \mathrm{Aut}(V)^e.$$

Enfin, nous avons l'égalité $\mathrm{Aut}(V)^e = G(\Omega)^e$. En effet, $G(\Omega)^e \subset G(T_\Omega)^e \cap GL(V) = \mathrm{Aut}(V)^e$. Réciproquement, soient $g \in \mathrm{Aut}(V)^e = \{M \in \mathrm{Aut}(V_2) | M^\star = M\}$ et $x \in \Omega$. Alors $x = y^2$ pour un certain $y \in (V^+)^\times$ et

$$gx = (gy)^2 \in \Omega$$

donc $\mathrm{Aut}(V)^e \subset G(\Omega)^e$. On a obtenu le résultat suivant :

Lemme 3.3.3. *Nous avons la suite d'égalités suivante :*

$$G(T_\Omega)^e \cap GL(V) = \mathrm{Aut}(V)^e = G(\Omega)^e.$$

Corollaire 3.3.4. *Soit $M \in GL(V)$ et $v \in V$. La transformation affine*

$$x \mapsto Mx + v$$

est dans $G(T_\Omega)$ si et seulement si $M \in G(\Omega)$ et $v \in V^-$. Autrement dit, le groupe des transformations affines de T_Ω est le produit semi-direct $G(\Omega) \ltimes N^+$.

Démonstration. Si $M \in G(\Omega)$ et $v \in V^-$ alors $x \mapsto Mx + v$ est dans $G(T_\Omega)$. Abordons la réciproque. Pour cela, considérons les projections $v_\pm$ de v sur $V^\pm$. Puisque t_{v_-} est dans $G(T_\Omega)$, l'application $x \mapsto Mx + v$ est un élément de $G(T_\Omega)$ si et seulement si $t_{v_+} \circ M$ l'est. D'après 3.3.2, il existe $w \in V^-$, $h \in G(\Omega)$ et $g \in G(T_\Omega)^e$ tels que $t_{v_+} \circ M = t_w \circ h \circ g$. Ainsi,

$$M = h \circ t_{h^{-1}(w - v_+)} \circ g$$

et la linéarité de $h^{-1} \circ M$ entraîne celle de $t_{h^{-1}(w-v_+)} \circ g$. Par suite, g est l'application affine $z \mapsto g'z + u$ avec $g' = h^{-1} \circ M \in GL(V)$ et $u = h^{-1}(v_+ - w) \in V$. Maintenant, sachant que $g = \jmath g \jmath$, pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\varepsilon g'e + u = g(\varepsilon e) = \jmath g \jmath(\varepsilon e) = \varepsilon(g'e + \varepsilon u)^{-1}.$$

Par continuité, on obtient $u = 0$. Ainsi $w = v_+ = 0$ et $g \in GL(V)$. Le résultat découle alors de 3.3.3. $\square$

Ce résultat est essentiel pour la suite car il va nous permettre d'exhiber des générateurs du groupe $G(T_\Omega)$.

3.3.3 Générateurs

Proposition 3.3.5. *Soit $g \in G(T_\Omega)^e$ et $h := \gamma_e^{-1} g \gamma_e \in \mathrm{Aut}(V)$. Si $h^{-1}e \top e$ alors $g \in N^+ G(\Omega) \jmath N^+$.*

Démonstration. D'après 3.2.10, la condition $\det(e - h^{-1}e) \neq 0$ assure l'existence d'un élément $v \in V^-$ tel que $h^{-1}e = \gamma_e^{-1}(v)$. Soit $x \in T_\Omega$. Alors

$$\begin{aligned} g(x) = \gamma_e(h\gamma_e^{-1}(x)) &= -e + 2(e - h\gamma_e^{-1}(x))^{-1} \\ &= -e + 2(h(\gamma_e^{-1}(v) - \gamma_e^{-1}(x)))^{-1}. \end{aligned}$$

Mais $h \in \mathrm{Aut}(V) = \mathrm{Str}(V) \cap O(V)$ donc

$$\begin{aligned} (h(\gamma_e^{-1}(v) - \gamma_e^{-1}(x)))^{-1} &= {}^T h^{-1}(\gamma_e^{-1}(v) - \gamma_e^{-1}(x))^{-1} \\ &= h^\star(\gamma_e^{-1}(v) - \gamma_e^{-1}(x))^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g(x) &= -e + 2h^\star(\gamma_e^{-1}(v) - \gamma_e^{-1}(x))^{-1} \\ &= -e - h^\star((e+v)^{-1} - (e+x)^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

Utilisant l'identité de Hua suivante (cf [McC78, p.618])

$$a^{-1} - (a+b)^{-1} = (a + P(a)b^{-1})^{-1}$$

avec $a = e + v$ et $b = x - v$, on obtient

$$\begin{aligned} g(x) &= -e - h^\star(e + v + P(e+v)(x-v)^{-1}) \\ &= -e - h^\star(e+v) - h^\star P(e+v)(x-v)^{-1} \\ &= -h^\star P(e+v)(\jmath \circ t_{-v}(x)) - e - h^\star(e+v). \end{aligned}$$

La proposition 3.3.4 donne que $g \circ t_v \circ \jmath \in N^+ G(\Omega)$ et donc $g \in N^+ G(\Omega) \jmath N^+$. □

Théorème 3.3.6. *La composante neutre L de $G(T_\Omega)$ est engendrée par N^+, $G(\Omega)$ et par l'inversion $\jmath$.*

Démonstration. En vertu de 3.3.2 et de 3.3.5, il suffit de montrer que tout élément g dans $L^e := L \cap G(T_\Omega)^e$ vérifiant $\det(e - h^{-1}e) = 0$ est engendré par $N^+, G(\Omega)$ et $\jmath$, où

$h := \gamma_e^{-1} g \gamma_e$ est un élément de $\gamma_e^{-1} L^e \gamma_e = G^0 = K$. Soit g un tel élément. D'après 3.2.12, il existe $k \in K$ tel que

$$\det(e + k^{-1}h^{-1}e) \neq 0 \quad \text{et} \quad \det(e + k^{-1}e) \neq 0.$$

Utilisant 3.3.5, il vient déjà

$$\widetilde{g} := \gamma_e \circ (-k) \circ \gamma_e^{-1} \in N^+ G(\Omega) \jmath N^+.$$

De plus, il existe $v \in V^-$ vérifiant $(-hk)^{-1}e = \gamma_e^{-1}(v)$. Soit maintenant $x \in T_\Omega$. On a

$$\begin{aligned} g(x) = \gamma_e(h\gamma_e^{-1}(x)) &= -e + 2(e - h\gamma_e^{-1}(x))^{-1} \\ &= -e + 2(-hk\gamma_e^{-1}(v) - h\gamma_e^{-1}(x))^{-1} \\ &= -e + 2(-hk(\gamma_e^{-1}(v) + k^{-1}\gamma_e^{-1}(x)))^{-1} \\ &= -e - 2h^\star k^\star(\gamma_e^{-1}(v) + k^{-1}\gamma_e^{-1}(x))^{-1} \\ &= -e - 2h^\star k^\star(\gamma_e^{-1}(v) - \gamma_e^{-1}\widetilde{g}^{-1}(x))^{-1}. \end{aligned}$$

Reprenant les calculs effectués dans la démonstration de 3.3.5, on obtient que $g \circ \widetilde{g}$ est dans $N^+G(\Omega)\jmath N^+$ et donc g est bien dans le groupe engendré par N^+, $G(\Omega)$ et par $\jmath$. □

3.3.4 Relation entre les groupes $G(\Omega)$ et $\mathrm{Str}(V)$

Faisons finalement le lien entre les groupes $\mathrm{Str}(V)$ et $G(\Omega)$, dans le cas où V est simple.

Lemme 3.3.7. *Si V^+ est simple alors un élément x de V^+ est dans $\Omega \cup (-\Omega)$ si et seulement si $P(x) \gg 0$.*

Démonstration. Soit $x \in \Omega \cup (-\Omega)$; $x = \pm y^2$ avec $y \in (V^+)^\times$ et donc

$$P(x) = P(\pm P(y)e) = P(y)^2 \gg 0.$$

Abordons la réciproque. D'abord, pour $x \in V^+$, $P(x)^\star = P(x)$ donc $P(x)_{|V^+} \in GL(V^+)$. De plus, il existe un repère de Jordan $\{c_j\}$ de V^+ et des nombres réels $\{\lambda_j\}$ tels que $x = \sum_j \lambda_j c_j$. Si $V^+ = \bigoplus_{i,j} V_{ij}^+$ désigne la décomposition de Peirce de V^+ relative à $\{c_j\}$, alors la simplicité de V^+ donne $V_{ij}^+ \neq \{0\}$ pour $i \neq j$ ([FK94, IV.1.2 et IV.2.3]). Si $P(x) \gg 0$ alors $P(x)_{|V^+} \gg 0$ et puisque $P(x)_{|V^+}$ vaut $\lambda_i\lambda_j$ sur V_{ij}^+, on a nécessairement $\lambda_i\lambda_j > 0$ pour tous i, j. Il vient $\lambda_i > 0$ ou bien $\lambda_i < 0$ pour tout i et par conséquent $x \in \Omega \cup (-\Omega)$. □

La proposition qui suit généralise un résultat connu pour les algèbres de Jordan euclidiennes (voir par exemple [FK94, VIII.2.8]).

Proposition 3.3.8. *Supposons V simple. Si $V = V^+(e)$ est de type A_r, ou bien si V est C_r ou D_r, alors*

$$\{g \in \mathrm{Str}(V) | g^\star = g\} = \pm G(\Omega).$$

En particulier, $G(\Omega)$ est stable par conjugaison par $\jmath$, i.e.

$$\jmath G(\Omega) \jmath = G(\Omega).$$

Démonstration. On déduit de 1.3.5 et 1.3.13 que dans les cas considérés, $V^+ = V^+(e)$ est une algèbre de Jordan euclidienne simple. Soit $g \in \mathrm{Str}(V)$ tel que $g^\star = g$ et soit $x \in \Omega$. Alors $gx \in V^+$ et

$$P(gx) = gP(x)^T g \gg 0$$

donc 3.3.7 donne $gx \in \Omega \cup (-\Omega)$. Comme Ω est connexe, on obtient $g\Omega \subset \Omega$ ou bien $g\Omega \subset -\Omega$. Il en est de même pour g^{-1} donc $g\Omega = \Omega$ ou bien $g\Omega = -\Omega$. Par conséquent,

$$\{g \in \mathrm{Str}(V) | g^\star = g\} \subset \pm G(\Omega).$$

Soit maintenant $g \in G(\Omega)$. On écrit $g = P(y)k$ avec $y \in (V^+)^\times$ et $k \in G(\Omega)^e$ (3.3.1). Comme $P(y) \in \mathrm{Str}(V)$ est tel que $P(y)^\star = P(y)$, et comme d'après 3.3.3 et 3.1.10 on a

$$\pm G(\Omega)^e = \pm \mathrm{Aut}(V)^e = \{g \in \mathrm{Aut}(V) | g^\star = g\}$$

on trouve que $\pm G(\Omega) \subset \{g \in \mathrm{Str}(V) | g^\star = g\}$. La deuxième assertion résulte de 3.1.7 et du fait que $Q(e) \circ \jmath \circ Q(e) = \jmath$ sur $V_2^\times$ d'après 3.1.1(iv). □

3.3.5 L'algèbre de Lie de $G(T_\Omega)$

Notons $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ l'algèbre de Lie de $G(T_\Omega)$ et $\mathfrak{g}(\Omega)$ celle de $G(\Omega)$. Soit K^e le sous-groupe d'isotropie de e dans K. Alors d'après (3.4), on a

$$K^e = K \cap \mathrm{Aut}(V)^e = K \cap \mathrm{Aut}(V_2)$$

et 3.3.3 donne

$$K^e = K \cap G(\Omega)^e.$$

Utilisant (3.6), il vient

$$\mathrm{Lie}(K^e) = \{D \in \mathrm{Der}(V_2) | D^\star = D\} = \mathfrak{k}^e.$$

Au vu de 3.3.1, (3.6) et (3.7), on obtient

$$\mathfrak{g}(\Omega) = \mathfrak{k}^e \oplus L(V^+) = \{X \in \mathfrak{str}(V) | X^\star = X\} = \mathfrak{str}(V^+) \oplus \mathfrak{str}(V^-).$$

Si $X \in \mathfrak{g}(T_\Omega)$, on note $\widetilde{X}$ le champ de vecteurs complet sur T_Ω correspondant à X, qui est défini par

$$\widetilde{X}(z) := \frac{d}{dt}_{|t=0}(\exp(tX)z) \ .$$

où $g_t := \exp(tX)$ est le sous-groupe à un paramètre associé à X.

Pour $u \in V^-$, $g_t(z) = z + tu$ définit un sous-groupe à un paramètre de N^+ dont le champ de vecteurs sur T_Ω associé est le champ de vecteurs constant

$$\widetilde{X}(z) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(z + tu) = u \ .$$

Notons $N^- := jN^+j$; N^- est un groupe de Lie abélien isomorphe à V^-. Pour $v \in V^-$,

$$g_t(z) = (z^{-1} + tv)^{-1}$$

définit un sous-groupe à un paramètre de N^- dont le champ de vecteurs associé est quadratique, donné par

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(z) &= \frac{d}{dt}_{|t=0}(z^{-1} + tv)^{-1} \\ &= -P(z)v \ .\end{aligned}$$

On notera dans la suite p_v le champ $z \mapsto P(z)v$. Avec cette notation, pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $p_{\lambda v} = \lambda p_v$.

Pour $A \in \mathfrak{g}(\Omega)$,

$$g_t(z) = \exp(tA)z$$

définit un sous-groupe à un paramètre de $G(\Omega)$ dont le champ associé est linéaire :

$$\widetilde{X}(z) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(\exp(tA)z) = Az \ .$$

Notons $\mathfrak{l}$ l'ensemble des champs de vecteurs $\widetilde{X}$ sur T_Ω de la forme

$$\widetilde{X}(z) = u + Az - p_v(z)$$

avec $u, v \in V^-$ et $A \in \mathfrak{g}(\Omega)$; $\mathfrak{l}$ est une algèbre de Lie de dimension finie pour le crochet usuel

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}](z) = D_{\widetilde{Y}(z)}\widetilde{X}(z) - D_{\widetilde{X}(z)}\widetilde{Y}(z) \ .$$

Notons $\mathfrak{l}_{-1}$ (respectivement $\mathfrak{l}_1$) la sous-algèbre de Lie abélienne de $\mathfrak{l}$ correspondant aux champs de vecteurs constants $u \in V^-$ sur T_Ω (respectivement quadratiques p_v avec $v \in V^-$), et posons $\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{g}(\Omega)$.

Lemme 3.3.9. *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{-1} \oplus \mathfrak{l}_0 \oplus \mathfrak{l}_1$ *est* 3*-graduée, i.e. pour* $i, j \in \{-1, 0, 1\}$ *on a*

$$[\mathfrak{l}_i, \mathfrak{l}_j] \subset \mathfrak{l}_{i+j}$$

où l'on pose $\mathfrak{l}_{-2} = \mathfrak{l}_2 = \{0\}$.

Démonstration. D'abord, $\mathfrak{l}_{-1} = \mathrm{Lie}(N^+)$ et $\mathfrak{l}_1 = \mathrm{Lie}(N^-)$ sont deux sous-algèbres abéliennes de $\mathfrak{l}$ donc

$$[\mathfrak{l}_{-1}, \mathfrak{l}_{-1}] = [\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_1] = \{0\}.$$

Aussi, $\mathfrak{l}_0 = \mathrm{Lie}(G(\Omega))$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{l}$ donc $[\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_0] \subset \mathfrak{l}_0$. On distingue ensuite trois cas :

(i) si $\widetilde{X}(z) = u$, $\widetilde{Y}(z) = Az$ alors

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}](z) = -D_{\widetilde{X}(z)}\widetilde{Y}(z) = -Au$$

donc $[\mathfrak{l}_{-1}, \mathfrak{l}_0] \subset \mathfrak{l}_{-1}$;

(ii) si $\widetilde{X}(z) = u$, $\widetilde{Y}(z) = p_v(z) = P(z)v$ alors

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}](z) = -D_{\widetilde{X}(z)}\widetilde{Y}(z) = -2P(z, u)v = 2Q(z, u)v = 2(u \,\square\, v)(z)$$

donc $[\mathfrak{l}_{-1}, \mathfrak{l}_1] \subset \mathfrak{l}_0$;

(iii) si $\widetilde{X}(z) = Az$, $\widetilde{Y}(z) = p_v(z) = P(z)v$ alors

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}](z) = AP(z)v - 2P(z, Az)v\ .$$

Utilisant le fait que $A \in \mathfrak{str}(V) = \mathfrak{str}(V_2)$, on a d'après (3.5) l'identité

$$2P(x, Ax) = AP(x) + P(x)^T A \ (\forall x \in V_2),$$

ce qui fournit

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}](z) = -P(z)^T Av = p_{-{}^T\! Av}(z).$$

D'où $[\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1] \subset \mathfrak{l}_1$.

□

Le but de ce qui suit est de montrer que l'on a l'égalité $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}(T_\Omega)$.

Si $D \in \mathfrak{k}^e = \mathfrak{k} \cap \mathrm{Der}(V_2)$, $\exp(tD) \in \mathrm{Aut}(V_2)$ donc $\gamma_e \circ \exp(tD) \circ \gamma_e^{-1} = \exp(tD)$ définit un sous-groupe à un paramètre de $U := L^e = \gamma_e \circ K \circ \gamma_e^{-1}$. Si $v \in V^-$, l'application

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}(z) &= \frac{d}{dt}_{|t=0}(\gamma_e \exp(tL(v))\gamma_e^{-1}(z)) \\
&= D_{\exp(tL(v))\gamma_e^{-1}(z)}\gamma_e \circ D_z(\exp(tL(v))\gamma_e^{-1})_{|t=0} \\
&= D_{\gamma_e^{-1}(z)}\gamma_e(L(v)\gamma_e^{-1}(z))
\end{aligned}$$

définit un champ de vecteurs sur T_Ω. Mais écrivant $\gamma_e(x) = -e + 2\jmath(e-x)$, on obtient $D_w\gamma_e = 2P(e-w)^{-1}$ et par suite

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(z) &= 2P(e-\gamma_e^{-1}(z))^{-1}L(v)\gamma_e^{-1}(z)\\ &= \frac{1}{2}P(e+z)L(v)\gamma_e^{-1}(z)\\ &= \frac{1}{2}P(e+z)L(\gamma_e^{-1}(z))(v).\end{aligned}$$

Utilisant l'identité [FK94, II.1.1, (iii)], pour x, y dans $\mathbb{R}[z]$ on obtient

$$P(x)L(y) = P(xy, x)\ .$$

Puisque $e+z$ et $\gamma_e^{-1}(z)$ sont dans l'algèbre de Jordan associative $\mathbb{R}[z]$, il vient

$$\begin{aligned}P(e+z)L(\gamma_e^{-1}(z)) &= P((e+z)\gamma_e^{-1}(z), e+z)\\ &= P(z-e, e+z)\\ &= P(z) - \mathrm{Id}.\end{aligned}$$

Le champ de vecteurs associé au sous-groupe à un paramètre $\gamma_e \circ \exp(tL(v)) \circ \gamma_e^{-1}$ de U est alors

$$\widetilde{X}(z) = \frac{1}{2}(P(z) - \mathrm{Id})(v).$$

On en déduit que le champ de vecteurs $\widetilde{X}$ associé au sous-groupe à un paramètre $\gamma_e \circ \exp(t(D + L(v))) \circ \gamma_e^{-1}$ de U, avec $D + L(v) \in \mathfrak{k}$, s'écrit

$$\widetilde{X}(z) = -\frac{1}{2}v + Dz + \frac{1}{2}P(z)v.$$

D'où :

Proposition 3.3.10. *Soit $k_t(z) = \exp(tA)z$ un sous-groupe à un paramètre de K, avec $A = D + L(v) \in \mathfrak{k} = \mathfrak{k}^e \oplus L(V^-)$. Alors $g_t = \gamma_e \circ k_t \circ \gamma_e^{-1}$ est un sous-groupe à un paramètre de U et le champ de vecteurs sur T_Ω associé est donné par*

$$\widetilde{X}(z) = -\frac{1}{2}v + Dz - p_{-\frac{1}{2}v}(z).$$

En particulier,

$$\mathfrak{u} := \mathrm{Lie}(U) = \{v + D - p_v | v \in V^-, D \in \mathfrak{k}^e\}.$$

Corollaire 3.3.11. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ de $G(T_\Omega)$ s'identifie à l'ensemble des champs de vecteurs sur T_Ω de la forme*

$$\widetilde{X}(z) = u + Az - p_v(z) \quad (u, v \in V^-, A \in \mathfrak{g}(\Omega)),$$

i.e. $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}(T_\Omega)$.

Démonstration. On a clairement $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}(T_\Omega)$. Reste à prouver l'inclusion inverse. Soit ξ_t un sous-groupe à un paramètre de L. D'après 3.3.2, on peut écrire

$$\xi_t = n_t \circ h_t \circ g_t$$

avec $n_t \in N^+$, $h_t \in G(\Omega)_o$ et $g_t \in U$, dans le sens où l'application $\mathbb{R} \to N^+ \times G(\Omega)_o \times U$ est lisse. La dérivée en 0 de $t \mapsto n_t$ (respectivement $t \mapsto h_t$, $t \mapsto g_t$) est un champ de vecteurs $\widetilde{X}_1$ (respectivement $\widetilde{X}_2$, $\widetilde{X}_3$) dans l'algèbre de Lie de N^+ (respectivement $G(\Omega)$, U), et le champ de vecteurs associé à ξ_t est $\widetilde{X} = \widetilde{X}_1 + \widetilde{X}_2 + \widetilde{X}_3 \in \mathfrak{l}$. □

Soit τ l'automorphisme involutif de $\mathfrak{l}$ définie comme suit :

$$\tau : \begin{cases} \mathfrak{l}_{-1} \ni u & \mapsto p_u \\ \mathfrak{l}_0 \ni A & \mapsto -{}^T\!A \\ \mathfrak{l}_1 \ni p_v & \mapsto v \end{cases} .$$

On note

$$\mathfrak{l}^{\pm\tau} := \{X \in \mathfrak{l} | \tau X = \pm X\}$$

les sous-espaces propres de τ pour les valeurs propres ± 1. On vérifie que

$$\mathfrak{l}^{+\tau} = \{u + D - p_u \in \mathfrak{l} | u \in V^-, D \in \mathfrak{k}^e\} = \mathfrak{u}$$

et

$$\mathfrak{l}^{-\tau} = \{v + L(a) + p_v \in \mathfrak{l} | v \in V^-, a \in V^+\} =: \mathfrak{m} .$$

Aussi, τ renverse la graduation, i.e.

$$\tau(\mathfrak{l}_j) = \mathfrak{l}_{-j} \ (j = -1, 0, 1)$$

et pour $x, y, z \in V^-$, on a la relation

$$\{x, y, z\} = \frac{1}{2}[[x, \tau(y)], z] = \frac{1}{2}[x, [\tau(y), z]], \tag{3.9}$$

la dernière égalité découlant de l'identité de Jacobi. En particulier, $\mathfrak{l}_{-1}$ possède une structure de STJP. Soient maintenant $B_\mathfrak{l}$ la forme de Killing de $\mathfrak{l}$ et $\mathrm{ad}_\mathfrak{l}$ la représentation adjointe de $\mathfrak{l}$. L'identité (3.9) se réécrit

$$x \,\square\, y = \frac{1}{2} \mathrm{ad}_\mathfrak{l} x \circ \mathrm{ad}_\mathfrak{l}(\tau(y)),$$

ce qui fournit légalité

$$B_\mathfrak{l}(x, p_y) = 2\beta(x, y) \quad (x, y \in V^-).$$

Si l'on identifie $\mathfrak{l}_1$ à V^- via l'isomorphisme $p_v \mapsto v$, on voit que $\mathrm{ad}_\mathfrak{l} A$ opère sur V^- par $-{}^T\!A$. Ainsi, $\mathrm{ad}_\mathfrak{l} A \circ \mathrm{ad}_\mathfrak{l} A'$ opère par restriction à $\mathfrak{l}_{-1}$ par AA', et par restriction à $\mathfrak{l}_1$ par

${}^T(A'A)$. On montre ainsi (comme dans 3.1.16) que si $X = u + A - p_v$ est un élément non nul de $\mathfrak{l}$, alors

$$\begin{aligned} B_{\mathfrak{l}}(X, \tau X) &= -B_{\mathfrak{l}_0}(A, {}^T A) - 2\mathrm{Tr}(A^T A) - B_{\mathfrak{l}}(u, p_u) - B_{\mathfrak{l}}(v, p_v) \\ &= -B_{\mathfrak{l}_0}(A, {}^T A) - 2\mathrm{Tr}(A^T A) - 2\beta(u, u) - 2\beta(v, v) < 0 \end{aligned}$$

où $B_{\mathfrak{l}_0}$ désigne la forme de Killing de $\mathfrak{l}_0$. Par conséquent, $\mathfrak{l}$ est une algèbre de Lie semi-simple et τ est une involution de Cartan de $\mathfrak{l}$. En particulier, $\mathfrak{u}$ est une sous-algèbre de Lie compacte maximale de $\mathfrak{l}$ et donc U est un sous-groupe de Lie compact maximal de L.

Enfin, on vérifie facilement que $[\mathfrak{l}_{-1}, \mathfrak{l}_1] = V^- \square V^- = \mathfrak{str}(V^-)$ et l'égalité $\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{str}(V^+) \oplus \mathfrak{str}(V^-)$ donne alors

$$\mathfrak{g}(T_\Omega) = \mathfrak{str}(V^+) \oplus \mathfrak{l}_{-1} \oplus \mathfrak{str}(V^-) \oplus \mathfrak{l}_1 \cong \mathfrak{str}(V^+) \oplus KKT(V^-).$$

3.4 La frontière de Shilov $\mathcal{S}$

3.4.1 Type A_r

Supposons dans un premier temps que $V = V^+(e)$ est un STJP simple de type A_r. Alors $Q(e) = \mathrm{Id}_V$ et d'après 3.1.10

$$\mathrm{Aut}(V) = \pm\mathrm{Aut}(V)^e = \pm\mathrm{Aut}(V_2), \qquad K = \mathrm{Aut}(V)_o = \mathrm{Aut}(V_2)_o.$$

Aussi,

$$G(\Omega) = \{g \in GL(V) | g\Omega = \Omega\}$$

et 3.3.8 donne

$$\mathrm{Str}(V) = \pm G(\Omega).$$

Le théorème 3.2.8 fournit

$$\Sigma = \bigsqcup_{\ell=0}^{r} K \cdot e_{\ell, r-\ell}.$$

En effet, K est transitif sur l'ensemble des idempotents de rang ℓ de $V_2 = V^+(e)$ pour tout $\ell = 0, \ldots, r$ ([FK94, IV.2.7]), et notant $\varepsilon_0 = 0$ et $\varepsilon_\ell = e_1 + \ldots + e_\ell$ pour $\ell \geq 1$, les ε_ℓ sont des représentants des orbites de l'action de K sur l'ensemble I des idempotents de V_2. Mais puisque chaque ε_ℓ est en correspondance avec $e_{\ell, r-\ell}$ via la bijection

$$I \to \Sigma, \; c \mapsto 2c - e \;,$$

les $e_{\ell,r-\ell}$ forment un système de représentants des orbites de K sur Σ. En particulier,

$$\mathcal{S} = \{e\}, \qquad \mathcal{S}_{-e} = \{-e\}.$$

3.4.2 Types C_r ou D_r : compactification projective du STJP V^-

Nous supposerons maintenant que V est un STJP simple de type C_r ou D_r. Ce qui nous intéresse ici c'est le R-espace symétrique correspondant au STJP $(V^-, \{\})$.

L'élément $E := -L(e) \in \mathfrak{l}_0$ vérifie $\mathrm{ad}_{\mathfrak{l}}(E) = j\mathrm{Id}_{\mathfrak{l}_j}$ pour $j = -1, 0, 1$ et $\tau(E) = -E$, ce qui veut dire que E est l'*opérateur d'Euler* de l'algèbre de Lie semi-simple réelle 3-graduée $\mathfrak{l}$.

Lemme 3.4.1. *La sous-algèbre $\mathfrak{l}_0 \oplus \mathfrak{l}_1$ de $\mathfrak{l}$ est parabolique maximale. En particulier, $P := G(\Omega)N^-$ est un sous-groupe parabolique maximal de L.*

Démonstration. On se donne un sous-espace abélien maximal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{m}$ qui contient E, $\mathfrak{l}^\alpha$ les sous-espaces radiciels associés et Δ le système de racines restreintes associé. Soit de plus $\mathfrak{c}(\mathfrak{a})$ le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{l}$. Alors d'après[KA88, Lemme 1.1], on a $\Delta = \Delta_{-1} \sqcup \Delta_0 \sqcup \Delta_1$ avec $\Delta_j = \{\alpha \in \Delta | \alpha(E) = j\}$ et

$$\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{c}(\mathfrak{a}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_0} \mathfrak{l}^\alpha,$$

$$\mathfrak{l}_{\pm 1} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{\pm 1}} \mathfrak{l}^\alpha.$$

D'où le résultat. $\square$

L'application qui vaut 1 sur $\mathfrak{l}_0$ et -1 sur $\mathfrak{l}_{-1} \oplus \mathfrak{l}_1$ définit un automorphisme involutif σ de $\mathfrak{l}$ qui commute à τ et $\mathfrak{k}^e = \mathrm{Lie}(K^e)$ est la sous-algèbre des points fixes de la restriction à $\mathfrak{u}$ de σ, de sorte que $(\mathfrak{u}, \sigma_{|\mathfrak{u}})$ est une paire orthogonale symétrique. L'automorphisme σ n'est rien d'autre que l'application $X \mapsto X^\star$.

Proposition 3.4.2. *L'espace $M := L/P \cong U/K^e$ est un R-espace symétrique, c'est la compactification projective du STJ positif V^-. En conséquence, V^- se plonge dans M via l'application $v \mapsto t_v P$, et son image est un ouvert dense.*

Démonstration. Cela résulte de ce qui précède et du fait que $P \cap U = G(\Omega) \cap U = K^e$ (cf. annexe A). □

Rappelons maintenant que l'on a

$$K^e \subset \mathrm{Aut}(V)^e = \{g \in \mathrm{Aut}(V_2) | g^\star = g\}.$$

Ainsi, K^e est contenu dans le sous-groupe de K formé des points fixes de l'involution $g \mapsto g^\star$. D'où

Proposition 3.4.3. *L' espace homogène*

$$\mathcal{S} = \exp V^- \cong K/K^e$$

est un espace riemannien symétrique compact dont l'espace tangent au point e est V^-.

Corollaire 3.4.4. *Soit K^e_o la composante neutre de K^e ; K^e_o opère transitivement sur l'ensemble des sous-espaces plats maximaux du système triple de Jordan positif $(V^-, \{\})$.*

Démonstration. Comme V^- est l'espace tangent au point e de l'espace symétrique compact K/K^e, [Loo69, Part II, VI.1.2 (b)] donne que K^e_o est transitif sur l'ensemble des sous-espaces abéliens maximaux de V^- (vu dans $\mathfrak{k}$). Aussi, tout sous-espace abélien maximal de V^- est isomorphe à un sous-espace plat maximal de $(V^-, \{\})$ (cf 2.3.3). □

En prolongeant par continuité l'action de L à V^-, on peut définir le stabilisateur L^0 de $0 \in V^-$ sous L. On obtient immédiatement que

$$L^0 = P.$$

Ensuite, on définit une action de G sur $\gamma_e^{-1}(V^-) \subset \mathcal{S}_{-e}$ via l'action de L sur V^- et via la transformation de Cayley partielle γ_e. Puis, utilisant 3.2.10, on étend par continuité cette action à $\mathcal{S}_{-e}$ tout entier. Comme $K \subset G$, l'action de G sur $\mathcal{S}_{-e}$ est transitive. On montre de la même manière que G opère transitivement sur chaque composante connexe de Σ.

Proposition 3.4.5. *Les stabilisateurs de $-e$ et e sous G sont respectivement $G^{-e} = \gamma_e^{-1} P \gamma_e$ et $G^e = \gamma_e^{-1} G(\Omega) N^+ \gamma_e$.*

Démonstration. Puisque $\gamma_e(-e) = 0$, le stabilisateur de $-e$ dans G est $\gamma_e^{-1} L^0 \gamma_e$. Maintenant, le stabilisateur de e est

$$G^e = (-\mathrm{Id}) \circ G^{-e} \circ (-\mathrm{Id}) = (-\mathrm{Id}) \circ \gamma_e^{-1} G(\Omega) N^- \gamma_e \circ (-\mathrm{Id})$$

et utilisant les identités $\gamma_e \circ (-\mathrm{Id}) = \jmath \circ \gamma_e$ et $N^- = \jmath N^+ \jmath$, on obtient

$$G^e = \gamma_e^{-1} \jmath G(\Omega) \jmath N^+ \gamma_e = \gamma_e^{-1} G(\Omega) N^+ \gamma_e.$$

$\square$

Proposition 3.4.6. *$\mathcal{S}$ est un R-espace symétrique :*

$$\mathcal{S} \cong G/G^e \cong K/K^e.$$

De plus, $\mathcal{S}$ s'identifie à la compactification projective du STJP V^-.

Démonstration. On montre comme dans 3.4.1 que $G(\Omega)N^+$ est un sous-groupe parabolique maximal de L. Les égalités $G^e = \gamma_e^{-1} G(\Omega) N^+ \gamma_e$ et $K = \gamma_e^{-1} U \gamma_e$ donnent

$$G^e \cap K = \gamma_e^{-1} (G(\Omega) N^+ \cap U) \gamma_e = \gamma_e^{-1} K^e \gamma_e = K^e$$

et puisque la paire (K, K^e) est symétrique, $\mathcal{S}$ est alors un R-espace symétrique. Finalement $\mathcal{S}$ s'identifie via la transformation de Cayley partielle γ_e au R-espace $L/P \cong U/K^e$, d'où la deuxième assertion. $\square$

Exemple 3.4.7: (i) $V = \mathcal{M}(r, \mathbb{H})$ avec $e = \mathbb{1}_r$: alors $x^\star = {}^t\overline{x}$, $V^+ = \mathcal{H}erm(r, \mathbb{H})$, $V^- = \mathcal{A}herm(r, \mathbb{H})$ et $\mathcal{S} = Sp(r)$;

(ii) $V = \mathcal{M}(r, \mathbb{R})$ avec $e = \mathbb{1}_r$: alors $x^\star = {}^t x$, $V^+ = \mathcal{S}ym(r, \mathbb{R})$, $V^- = \mathcal{A}sym(r, \mathbb{R})$ et $\mathcal{S} = SO(r)$.

(iii) $V = \mathcal{M}(r, \mathbb{C})$ avec $e = \mathbb{1}_r$: alors $x^\star = {}^t\overline{x}$, $V^+ = \mathcal{H}erm(r, \mathbb{C})$, $V^- = iV^+$ et $\mathcal{S} = U(r)$.

3.4.3 Le STJP V^-

Cas non réduit. Supposons que V soit simple et de type C_r. Alors $V_{ii}^- \neq \{0\}$ pour tout $i = 1, \ldots, r$. Soit $v_i \in V_{ii}^-$ tel que $v_i^2 = -e_i$ comme dans 1.3.7. Alors

$$v_i \,\square\, v_i = L(e_i) = e_i \,\square\, e_i$$

et v_i est un tripotent de V. De plus, 1.3.28 entraîne que v_i est un tripotent primitif de V, et donc aussi de $(V^-, \{\})$. Maintenant, pour tout $j \neq i$, on a

$$\{v_i, v_i, v_j\} = e_i \,\square\, e_i(v_j) = 0$$

donc v_i et v_j sont orthogonaux. On en déduit que $(v_1, \ldots, v_r)$ est un repère de Jordan de $(V, \{\})$ et de $(V^-, \{\})$. On a prouvé le résultat suivant :

Proposition 3.4.8. *Si V est simple et de type C_r, alors le sous-système triple réel positif $(V^-, \{\})$ est de même rang réel r que $(V, \{\})$. En particulier, $\mathcal{S}$ est un espace symétrique de rang r. De plus, $(V^-, \{\})$ est de type tube (i.e. A_r ou C_r ou D_r) et si Σ^- désigne l'ensemble des tripotents maximaux de $(V^-, \{\})$, alors $\Sigma^- = V^- \cap \Sigma$.*

Remarque 3.4.9: En utilisant la classification des STJP V de type C_r, on constate que V^- est A_r si et seulement si V est un STJHP considéré comme réel, et V^- est C_r si et seulement si V est absolument simple. Par conséquent,

$$(V \text{ est } C_r) \Longrightarrow (V^- \text{ est } A_r \text{ ou } C_r).$$

Exemple 3.4.10: (i) $V = \mathcal{M}(r, \mathbb{C})$ avec $e = \mathbb{1}_r$: V est C_r et $V^- = i\mathcal{H}erm(r, \mathbb{C})$ est A_r ;

(ii) $V = \mathcal{M}(r, \mathbb{H})$ avec $e = \mathbb{1}_r$: V est C_r et $V^- = \mathcal{A}herm(r, \mathbb{H})$ est C_r.

Corollaire 3.4.11. *Si V est simple et de type C_r alors pour tout $v \in \Sigma^- = V^- \cap \Sigma$, on a $\frac{1}{\sqrt{2}}(e \pm v) \in \Sigma$ et $\gamma_e(v) = v$.*

Démonstration. On a

$$(e \pm v) \,\square\, (e \pm v) = e \,\square\, e \pm (e \,\square\, v + v \,\square\, e) + v \,\square\, v$$

et utilisant 3.2.3 et 3.1.2 on trouve

$$(e \pm v) \,\square\, (e \pm v) = 2\mathrm{Id}$$

et de nouveau 3.2.3 donne $\frac{1}{\sqrt{2}}(e \pm v) \in \Sigma$. On obtient en particulier $(e \pm v)^\star = 2(e \pm v)^{-1}$ et donc

$$\gamma_e(v) = -e + 2(e - v)^{-1} = -e + (e - v)^\star = v.$$

□

Cas réduit non euclidien. Nous supposerons ici que V est simple et de type D_r (donc $V^- \neq \{0\}$). Alors $r \geq 2$. En effet, tout STJP simple de rang réel 1 et de type tube réduit est nécessairement isomorphe à l'algèbre de Jordan euclidienne $\mathbb{R}$ (cf. 1.3.13).

Si $r = 2$ alors $V \cong \mathbb{R}^{p,q}$ avec $2 \leq p \leq \left[\frac{p+q}{2}\right]$ (cf section 1.5). De plus, $V_{12}^- = V^- \cong \mathbb{R}^{p-1}$ et $V^+ \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q$ est simple. Si $r \geq 3$ alors 1.3.17 entraîne que V^+ est simple et $\dim V_{ij}^- = \dim V_{ij}^+ \geq 1$. Dans tous les cas, $V_{ij}^- \neq \{0\}$ pour tous $i \neq j$.

En vertu de 1.3.7, pour tous $i \neq j$, il existe $v_{ij} \in V_{ij}^-$ vérifiant $v_{ij}^2 = -(e_i + e_j)$. On a ainsi

$$v_{ij} \,\square\, v_{ij} = L(e_i + e_j) = e_i \,\square\, e_i + e_j \,\square\, e_j$$

donc v_{ij} est un tripotent et

$$V_2(v_{ij}) = V_2(e_i + e_j) = V_{ii} \oplus V_{ij} \oplus V_{jj}.$$

Soit $x \in V_2(v_{ij}) \cap V^- = V_{ij}^-$. On a

$$Q(v_{ij})x = P(v_{ij})x^\star = -P(v_{ij})x = -(2L(v_{ij})^2 x + L(e_i + e_j)x)$$

et comme $v_{ij}x \in V_{ii}^+ \oplus V_{ij}^+ = \mathbb{R}e_i \oplus \mathbb{R}e_j$, on obtient $v_{ij}x = \lambda e_i + \mu e_j$ et

$$Q(v_{ij})x = -((\lambda + \mu)v_{ij} + x).$$

D'où, $(V^-)^+(v_{ij}) = V^+(v_{ij}) \cap V^- = \mathbb{R}v_{ij}$ et v_{ij} est un tripotent primitif de $(V^-, \{\})$. Soient maintenant $k \neq l$ tels que $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$. Alors v_{ij} et v_{kl} sont orthogonaux puisque les règles de Peirce donnent

$$\{v_{ij}, v_{ij}, v_{kl}\} = e_i \,\square\, e_i(v_{kl}) + e_j \,\square\, e_j(v_{kl}) = 0.$$

Finalement :

1) Si r est pair : pour $i = 1, \ldots, \frac{r}{2}$, on se donne v_i un élément de $V_{2i-1,2i}^-$ vérifiant $v_i^2 = -(e_{2i-1} + e_{2i})$. On obtient $\frac{r}{2}$ tripotents primitifs $v_1, \ldots, v_{\frac{r}{2}}$ de $V^-(e)$, orthogonaux deux à deux, et l'élément $v = \sum_{i=1}^{\frac{r}{2}} v_i$ vérifie

$$\begin{aligned}
v \,\square\, v &= \sum_{i,j=1}^{\frac{r}{2}} v_i \,\square\, v_j = \sum_{i=1}^{\frac{r}{2}} v_i \,\square\, v_i \\
&= \sum_{i=1}^{\frac{r}{2}} L(e_{2i-1} + e_{2i}) = \sum_{i=1}^{\frac{r}{2}} (e_{2i-1} \,\square\, e_{2i-1} + e_{2i} \,\square\, e_{2i}) \\
&= \sum_{i=1}^{r} e_i \,\square\, e_i = e \,\square\, e \\
&= \mathrm{Id}_V.
\end{aligned}$$

En vertu de 3.2.3, v est un tripotent maximal de $(V, \{\})$ et de $(V^-, \{\})$. On en déduit que le système triple de Jordan réel positif $(V^-, \{\})$ est de type tube et de rang réel $\frac{r}{2}$.

2) Si r est impair : comme pour le cas pair, on choisit $\frac{r-1}{2}$ tripotents primitifs $v_1, \ldots, v_{\frac{r-1}{2}}$ orthogonaux deux à deux de $V^-(e)$ tels que $v_i \in V^-_{2i-1,2i}$ et $v_i^2 = -(e_{2i-1}+e_{2i})$; le tripotent $v = \sum_{i=1}^{\frac{r-1}{2}} v_i$ vérifie alors

$$\begin{aligned} v \,\square\, v &= \sum_{i=1}^{\frac{r-1}{2}} (e_{2i-1} \,\square\, e_{2i-1} + e_{2i} \,\square\, e_{2i}) \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} e_i \,\square\, e_i \\ &= e \,\square\, e - e_r \,\square\, e_r \\ &= \mathrm{Id}_V - e_r \,\square\, e_r. \end{aligned}$$

Soit $x \in V^-$; l'égalité $v \,\square\, v = \mathrm{Id}_V - e_r \,\square\, e_r$ donne

$$v \,\square\, v(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in V_2(e_r) \cap V^- = V^-_{rr} = \{0\}.$$

On en déduit que $(V^-)_0(v) = \{0\}$, c'est-à-dire que v est un tripotent maximal de $(V^-, \{\})$ (cf 1.2.11). Donc $(V^-, \{\})$ est un système triple de Jordan réel positif de rang réel $\frac{r-1}{2}$. De plus, V^- n'est pas de type tube. En effet, si V^- était de type tube alors l'égalité $v \,\square\, v = \mathrm{Id}_V - e_r \,\square\, e_r$ entraînerait $e_r \,\square\, e_r(x) = 0$ pour tout élément x de V^-, i.e. $V^- \subset V_0(e_r)$. Puisque pour tout j on peut construire comme précédemment un tripotent maximal $v(j)$ de V^- vérifiant $v(j) \,\square\, v(j) = \mathrm{Id}_V - e_j \,\square\, e_j$, on obtiendrait $V^- \subset V_0(e_j)$ pour tout $j = 1, \ldots, r$, et par conséquent on aurait

$$V^- \subset \bigcap_{j=1}^{r} V_0(e_j) = V_0(e) = \{0\},$$

d'où la contradiction.

Remarque 3.4.12: L'élément $v + e_r$ est un tripotent maximal de V puisque les règles de Peirce donne $v \,\square\, e_r = e_r \,\square\, v = 0$ et donc

$$(v + e_r) \,\square\,(v + e_r) = v \,\square\, v + e_r \,\square\, e_r = \mathrm{Id}_V.$$

On a prouvé le résultat suivant :

Proposition 3.4.13. *Si V est un STJP simple de type D_r alors $r \geq 2$ et le sous-STJP $(V^-, \{\})$ est de rang réel $s = [\frac{r}{2}]$. En particulier, $\mathcal{S}$ est un espace symétrique de rang s. De plus, V^- est de type tube (i.e. A_s ou bien C_s ou bien D_s) si et seulement si r est pair et dans ce cas, l'ensemble des tripotents maximaux de V^- est $\Sigma^- = \Sigma \cap V^-$.*

EXEMPLE 3.4.14: (i) $V = \mathcal{M}(2s, \mathbb{R})$, $e = \mathbb{1}_{2s}$: V est D_{2s} et $V^- = \mathcal{A}sym(2s, \mathbb{R})$ est D_s ;

(ii) $V = \mathbb{R}^{p,q}$ avec $2 \leq p \leq [\frac{p+q}{2}]$: V est D_2 et $V^- \cong \mathbb{R}^{p-1}$ est A_1 si $p = 2$ ou C_1 si $p \geq 3$.

COROLLAIRE 3.4.15. *Supposons V simple et de type D_r.*

(i) Si $u \in V^-$ alors $\mathrm{rg}(u)$ est pair.

(ii) Si r est pair alors pour tout $v \in \Sigma^-$, on a $\frac{1}{\sqrt{2}}(e \pm v) \in \Sigma$ et $\gamma_e(v) = v$.

Démonstration. Un élément u de V^- est conjugué sous K_o^e à $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i v_i$ pour certains réels non nuls λ_i, où les v_i désignent les tripotents primitifs de $(V^-, \{\})$ construits plus haut. Donc

$$\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i v_i) = \mathrm{rg}(\sum_{i=1}^{\ell} v_i).$$

Puisque l'on a $\sum_{i=1}^{\ell} v_i \,\square\, v_i = \sum_{i=1}^{2\ell} e_i \,\square\, e_i$, on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^{\ell} v_i\right) \square \left(\sum_{i=1}^{\ell} v_i\right) = \sum_{i=1}^{\ell} v_i \,\square\, v_i = \sum_{i=1}^{2\ell} e_i \,\square\, e_i = \left(\sum_{i=1}^{2\ell} e_i\right) \square \left(\sum_{i=1}^{2\ell} e_i\right)$$

et 1.3.28 donne finalement $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(\sum_{i=1}^{2\ell} e_i) = 2\ell$.

La preuve du second point est identique à celle de 3.4.11. □

PROPOSITION 3.4.16. *Supposons encore V simple et de type D_r et considérons de nouveau $\Sigma^- := \Sigma \cap V^-$. Sont équivalents :*

(i) $\Sigma^- \neq \emptyset$;

(ii) $V^- \cap V(r) \neq \emptyset$;

(iii) r est pair ;

(iv) $-e \in \mathcal{S}$.

Sous l'une de ces conditions, on a $\Sigma^- \subset (\pm e)_{\mathsf{T}} \subset \mathcal{S}$.

Démonstration. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* : Évident car $V(r)$ est l'ensemble des éléments inversibles de V (cf 1.3.27).

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* : S'il existe $v \in V^-$ tel que $\det v \neq 0$ alors nécessairement r est pair puisque

$$\det v = \det(v^\star) = \det(-v) = (-1)^r \det v.$$

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Les règles de Peirce font que le tripotent maximal $v = \sum_{i=1}^{\frac{r}{2}} v_i$ construit plus haut vérifie $v^2 = -e$ et donc $-e \in \mathcal{S}$ d'après 3.2.4.

$(iv) \Rightarrow (i)$: D'après 3.2.4, il existe $x \in \Sigma$ tel que $x^2 = -e$. Par unicité de l'inverse, on trouve $-x = x^{-1} = x^\star$.

Soit $v \in \Sigma^-$; d'après 3.4.15, $e \pm v$ est inversible d'inverse $\frac{1}{2}(e \pm v)^\star$, et donc $v \in (\mp e)_\intercal \subset \mathcal{S}_{\mp e} = \mathcal{S}$. □

3.5 Actions de G

Dans cette section, V est supposé simple et de type C_r ou D_r. On va s'intéresser à l'action diagonale de G sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ et sur les triplets d'éléments de $\mathcal{S}$ transverses deux à deux. Dans [CK07], les auteurs utilisent de manière cruciale la théorie des algèbres de Jordan euclidiennes. Le travail qui suit développe des idées fortement inspirées de [CK07] mais adaptées au cadre plus général des STJP.

3.5.1 Indice de transversalité

Pour $u, v \in V$, on pose

$$\mu(u, v) = rg(u - v).$$

En vertu de 1.3.27,

$$\mu(u, v) = \mu(u', v') \Longleftrightarrow \mathrm{rg}P(u - v) = \mathrm{rg}P(u' - v') \tag{3.10}$$

donc le nombre $\mu(u, v)$ est invariant sous l'action de $\mathrm{Str}(V)$, i.e.

$$\mu(gu, gv) = \mu(u, v) \quad (u, v \in V, g \in \mathrm{Str}(V)).$$

Proposition 3.5.1. *Soient $u, v \in V^-$ et $g \in L$ tels que gu et gv soient définis. Alors*

$$\mu(gu, gv) = \mu(u, v).$$

Démonstration. On utilise la décomposition $L = N^+ G(\Omega) U$. Clairement, la restriction à $V^- \times V^-$ de μ est invariante sous N^+ et $G(\Omega) \subset \mathrm{Str}(V)$. Soit $g \in U$ définie en u et v dans V^- et soit $k \in K$ tel que $g = \gamma_e k \gamma_e^{-1}$. On a

$$gu - gv = \gamma_e(k\gamma_e^{-1}(x)) - \gamma_e(k\gamma_e^{-1}(y)) = 2((e - k\gamma_e^{-1}(x))^{-1} - (e - k\gamma_e^{-1}(y))^{-1})$$

donc
$$\mu(gu, gv) = \mu((e - k\gamma_e^{-1}(x))^{-1}, (e - k\gamma_e^{-1}(y))^{-1}).$$
Utilisant la formule
$$P(x^{-1} - y^{-1}) = P(x)^{-1}P(x - y)P(y)^{-1}$$
pour x et y inversibles [FK94, X.4.4.], et 1.3.27, on obtient
$$\mu((e - k\gamma_e^{-1}(x))^{-1}, (e - k\gamma_e^{-1}(y))^{-1}) = \mu(k\gamma_e^{-1}(x), k\gamma_e^{-1}(y))$$
et puisque $k \in K \subset \mathrm{Str}(V)$, il vient finalement
$$\mu(gu, gv) = \mu(\gamma_e^{-1}(x), \gamma_e^{-1}(y)) = \mu((e + x)^{-1}, (e + y)^{-1}) = \mu(u, v).$$
□

Pour $x, y \in \mathcal{S}$, il existe $k \in K$ tel que $-kx, -ky \in \gamma_e^{-1}(V^-) = e_{\top}$. Alors $\gamma_e(-kx), \gamma_e(-ky)$ sont dans V^- et
$$\mu(\gamma_e(-kx), \gamma_e(-ky)) = \mu(x, y).$$
En effet,
$$\gamma_e(-kx) - \gamma_e(-ky) = 2((e + kx)^{-1} - (e + ky)^{-1})$$
et les calculs effectués dans la preuve de 3.5.1 montrent que l'on a
$$\mu((e + kx)^{-1}, (e + ky)^{-1}) = \mu(kx, ky) = \mu(x, y).$$
Le nombre $\mu(\gamma_e(-kx), \gamma_e(-ky))$ est alors indépendant de l'élément k choisi.

Definition 3.5.2.
Le nombre $\mu(x, y)$ est appelé *indice de transversalité* de la paire $(x, y) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$.

Proposition 3.5.3. *Pour $x, y \in \mathcal{S}$, l'indice $\mu(x, y)$ est invariant sous l'action de G, i.e.*
$$\mu(gx, gy) = \mu(x, y) \quad \forall g \in G.$$

Démonstration. Soient $k, k' \in K$ tels que $-k'gx \top e$, $-k'gy \top e$, $-kx \top e$ et $-ky \top e$. Alors
$$-k'gx = h(-kx), \quad -k'gy = h(-ky)$$
avec $h := k' \circ (-\mathrm{Id}) \circ g \circ (-\mathrm{Id}) \circ k^{-1} \in G$. Il vient
$$\mu(gx, gy) = \mu(\gamma_e h(-kx), \gamma_e h(-ky)) = \mu((\gamma_e h\gamma_e^{-1})\gamma_e(-kx), (\gamma_e h\gamma_e^{-1})\gamma_e(-ky))$$
et puisque $\gamma_e h\gamma_e^{-1} \in \gamma_e G\gamma_e^{-1} = L$, le résultat découle alors de 3.5.1. □

On va voir dans la suite que l'indice de transversalité est un invariant numérique qui permet de caractériser les orbites de l'action de G sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$.

3.5.2 G-orbites dans $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$

On notera dans la suite s le rang réel du STJP V^-. Rappelons que l'on a

$$s = \begin{cases} r & \text{si V est } C_r \\ [\frac{r}{2}] & \text{si V est } D_r \end{cases}.$$

Proposition 3.5.4. *Soient $v, v' \in V^-$ tels que* $\operatorname{rg} v = \operatorname{rg} v'$. *Alors il existe $h \in P = G(\Omega)N^-$ tel que $v = h(v')$.*

Démonstration. Supposons d'abord V de type C_r et notons ℓ le rang commun à v et v'. Il existe deux tripotents maximaux $c = \sum_{i=1}^s c_i$ et $c' = \sum_{i=1}^s c'_i$ de V^- (et de V !) et des réels non nuls $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$, $\lambda'_1, \dots, \lambda'_\ell$ tels que

$$v = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i c_i, \quad v' = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda'_i c'_i.$$

Soient $\varepsilon > 0$ fixé et

$$v_\varepsilon := v + \varepsilon \sum_{i=\ell+1}^{s} c_i.$$

Posons enfin

$$u_v := \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\lambda_i - 1}{\lambda_i} c_i \in V^- \cap V^+(c).$$

Alors v_ε est inversible dans $V_2(c)$ (et donc aussi dans $V_2(e)$, 3.2.5) d'inverse

$$\jmath_c(v_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{\lambda_i} c_i + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=\ell+1}^{s} c_i \ ,$$

$\jmath_c = P(c)\jmath$ étant l'application inverse de l'algèbre de Jordan $V_2(c)$. De plus,

$$\jmath_c \circ t_{u_v} \circ \jmath_c(v_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\ell} c_i + \varepsilon \sum_{i=\ell+1}^{s} c_i.$$

Par continuité, on obtient

$$\jmath_c \circ t_{u_v} \circ \jmath_c(v) = \sum_{i=1}^{\ell} c_i.$$

Puisque $P(c)\jmath = \jmath P(c)^{-1}$ et

$$P(c)^{-1}u_v = P(c)^\star u_v = Q(e)Q(c)u_v = -u_v,$$

il vient

$$\begin{aligned} \jmath_c \circ t_{u_v} \circ \jmath_c &= P(c) \circ \jmath \circ t_{u_v} \circ P(c) \circ \jmath \\ &= \jmath \circ P(c)^{-1} \circ t_{u_v} \circ P(c) \circ \jmath \\ &= \jmath \circ t_{P(c)^{-1}u_v} \circ \jmath \\ &= \jmath \circ t_{-u_v} \circ \jmath \in N^-. \end{aligned}$$

Donc on peut envoyer v sur le tripotent $\sum_{i=1}^{\ell} c_i \in V^-$ à l'aide d'un élément de N^-. De plus, en vertu de 3.4.4, il existe $k \in K_o^e \subset G(\Omega)$ et $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_\ell \in \{\pm 1\}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{s} c_i = k \sum_{i=1}^{s} \epsilon_i c_i'.$$

En outre, si l'on pose

$$u_{v'} := \sum_{i=1}^{\ell} \frac{\epsilon_i \lambda_i' - 1}{\lambda_i'} c_i' \in V^-$$

et

$$v'_\varepsilon := v' + \varepsilon \sum_{i=\ell+1}^{s} c_i' \ ,$$

les calculs précédemment effectués donnent

$$\jmath \circ t_{-u_{v'}} \circ \jmath(v'_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\ell} \epsilon_i c_i' + \varepsilon \sum_{i=\ell+1}^{s} c_i'$$

et de nouveau par continuité,

$$\jmath \circ t_{-u_{v'}} \circ \jmath(v') = \sum_{i=1}^{\ell} \epsilon_i c_i'.$$

Finalement,

$$v = \jmath \circ t_{u_v} \circ \jmath \circ k \circ \jmath \circ t_{-u_{v'}} \circ \jmath(v').$$

L'élément $h = \jmath \circ t_{u_v} \circ \jmath \circ k \circ \jmath \circ t_{-u_{v'}} \circ \jmath$ convient.

Supposons maintenant V de type D_r et donnons-nous u et u' deux éléments de V^- de même rang 2ℓ (cf. 3.4.15). Il existe encore deux tripotents maximaux $c = \sum_{i=1}^{s} c_i, c' = \sum_{i=1}^{s} c_i'$ de V^- et des réels non nuls $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$, $\lambda_1', \ldots, \lambda_\ell'$ tels que

$$u = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i c_i, \quad u' = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i' c_i'.$$

Quitte à remplacer c et c' par des tripotents maximaux de V (cf. 3.4.12), on peut supposer r pair. On obtient le résultat en reprenant la preuve du cas non réduit. $\square$

Corollaire 3.5.5. *Soient $u_1, u_2, v_1, v_2 \in V^-$. Si $\mu(u_1, v_1) = \mu(u_2, v_2)$ alors il existe $g \in N^+P$ tel que*

$$u_2 = g(u_1), \qquad v_2 = g(v_1).$$

Démonstration. La condition $\mu(u_1, u_2) = \mu(v_1, v_2)$ est équivalente à $\mathrm{rg}(u_1 - v_1) = \mathrm{rg}(u_2 - v_2)$. D'après 3.5.4, on peut trouver $h \in P$ tel que

$$u_2 - v_2 = h(u_1 - v_1).$$

Alors l'élément $g = t_{v_2} \circ h \circ t_{-v_1}$ de $N^+G(\Omega)N^-$ vérifie les conditions désirées puisque $h \in P = L^0$. □

Théorème 3.5.6. *Soit $\mathcal{D} = G/K$ un domaine borné symétrique réel irréductible de type C_r ou D_r et soit $\mathcal{S} = K \cdot e$ la frontière de Shilov de $\mathcal{D}$ associée au tripotent maximal e du STJP $V = T_0\mathcal{D}$. L'indice de transversalité caractérise les orbites de G sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$: si (x, x') et (y, y') sont deux éléments de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$, alors $\mu(x, x') = \mu(y, y')$ si et seulement si il existe $g \in G$ tel que $gx = y$ et $gx' = y'$. En particulier, ces orbites sont au nombre de $s + 1$, où s est le rang réel du STJP $V^-(e)$.*

Démonstration. Comme l'indice de transversalité est invariant sous l'action de G, on peut supposer que $x' = y' = e$. Reste à prouver l'existence d'un $g \in G$ vérifiant $gx = y$ et $ge = e$. En vertu de 3.2.12, il existe $z \in \mathcal{S}_{-e}$ tel que $z \top x$, $z \top y$ et $z \top e$. Il existe de plus un élément k dans K tel que $e = -kz$, donc tel que $-kx, -ky$ et $-ke$ soient dans $e_\top = \gamma_e^{-1}(V^-)$. Ainsi, posant $u = \gamma_e(-kx)$, $v = \gamma_e(-ky)$ et $w = \gamma_e(-ke)$, la condition $\mu(x, e) = \mu(y, e)$ s'écrit $\mu(u, z) = \mu(v, w)$. Le corollaire 3.5.5 donne l'existence d'un h dans $N^+G(\Omega)N^-$ tel que $v = hu$ et $w = hw$. L'élément

$$g := (-k)^{-1} \circ \gamma_e^{-1} \circ h \circ \gamma_e \circ (-k) = k^{-1} \circ \gamma_e^{-1} \circ \jmath \circ h \circ \jmath \circ \gamma_e \circ k \in G$$

satisfait alors $gx = y$ et $ge = e$. □

Attachons-nous maintenant à décrire les orbites de l'action de G sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$. Il faut distinguer les cas réduit et non réduit.

Type C_r. Notons $\varepsilon_\ell := e_{r-\ell,\ell}$ pour $\ell = 0, \dots, r$. Alors $\mathrm{rg}(e - \varepsilon_\ell) = \ell$ et donc les couples (e, ε_ℓ) forment un système complet de représentants des orbites de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ sous G :

$$\mathcal{S} \times \mathcal{S} = \bigsqcup_{\ell=0}^{r} G \cdot (e, \varepsilon_\ell).$$

Considérons l'unique orbite ouverte

$$\mathcal{S}^2_{\top} := \{(x,y) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} | x \top y\} = G \cdot (e, \varepsilon_r) = G \cdot (e, -e).$$

Si $G^{(e,-e)}$ désigne le stabilisateur de $(e,-e)$ sous G, alors

$$G^{(e,-e)} = G^e \cap G^{-e} = \gamma_e^{-1} \circ G(\Omega) \circ \gamma_e.$$

En effet, si $\gamma_e^{-1} g_1 \jmath t_{v_1} \jmath \gamma_e = \gamma_e^{-1} g_2 t_{v_2} \gamma_e$ avec $g_1, g_2 \in G(\Omega), v_1, v_2 \in V^-$, alors $g_2 t_{v_2}$ fixe 0 et par suite $v_2 = 0$; puis nécessairement $t_{v_1} = \jmath g_1^{-1} g_2 \jmath \in G(\Omega)$ et donc $v_1 = 0$. Maintenant, $G^{(e,-e)}$ est contenu dans le sous-groupe des points fixes de G pour l'involution $g \mapsto g^\star$ donc

$$\mathcal{S}^2_{\top} \cong G/G^{(e,-e)} \cong L/G(\Omega)$$

est un espace symétrique connexe. De tels espaces sont des espaces para-hermitiens symétriques introduits par S. Kaneyuki ([KanK85, Kan85, Kan00]).

Exemple 3.5.7: $\mathcal{D} = Sp(r,r)/Sp(r) \times Sp(r)$, $V = \mathcal{M}(r, \mathbb{H})$, $e_i := E_{ii}$, $\mathcal{S} = Sp(r)$ et

$$\mathcal{S}^2_{\top} \cong Sp(r,r)/GL(r, \mathbb{H}).$$

Type D_r. Soit $\ell \in \{1, \ldots, s\}$ fixé. Pour tout $j = 0, \ldots, s-1$, il existe $b_j \in V^-_{r-2j-1, r-2j}$ tel que

$$b_j^2 = -(e_{r-2j-1} + e_{r-2j})$$

et pour $j = 0, \ldots, s-\ell$, il existe $a_j \in V^+_{r-2(\ell+j)-1, r-2(\ell+j)}$ tel que

$$a_j^2 = e_{r-2(\ell+j)-1} + e_{r-2(\ell+j)}.$$

Alors les a_j et b_j ainsi définis sont des tripotents de V orthogonaux deux à deux et

$$x := \sum_{j=0}^{s-\ell} a_j + \sum_{j=0}^{\ell-1} b_j + (r-2s) e_1$$

est un tripotent maximal de V. En effet, les des règles de Peirce donnent

$$\begin{aligned} x \,\square\, x &= \sum_{j=0}^{s-\ell} a_j \,\square\, a_j + \sum_{j=0}^{\ell-1} b_j \,\square\, b_j + (r-2s)^2 e_1 \,\square\, e_1 \\ &= \sum_{j=0}^{s-\ell} \big(e_{r-2(\ell+j)-1} \,\square\, e_{r-2(\ell+j)-1} + e_{r-2(\ell+j)} \,\square\, e_{r-2(\ell+j)}\big) \\ &\quad + \sum_{j=0}^{\ell-1} (e_{r-2j-1} \,\square\, e_{r-2j-1} + e_{r-2j} \,\square\, e_{r-2j}) \\ &\quad + (r-2s) e_1 \,\square\, e_1 \\ &= \sum_{j=1}^{r} e_j \,\square\, e_j = \mathrm{Id}. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} x^2 &= (r-2s)e_1 + \sum_{j=0}^{s-\ell} a_j^2 + \sum_{j=0}^{\ell-1} b_j^2 \\ &= (r-2s)e_1 + \sum_{j=0}^{s-\ell}(e_{r-2(\ell+j)-1} + e_{r-2(\ell+j)}) - \sum_{j=0}^{\ell-1}(e_{r-2j-1} + e_{r-2j}) \\ &= \sum_{j=1}^{r-2\ell} e_j - \sum_{j=r-2\ell+1}^{r} e_j. \end{aligned}$$

On déduit alors de 3.2.4 que pour tout $\ell = 0, 1, \ldots, s$, le tripotent maximal $\varepsilon_\ell := e_{r-2\ell,2\ell}$ est dans $\mathcal{S}$. Comme $\mathrm{rg}(e - \varepsilon_\ell) = 2\ell$, on obtient donc

$$\mathcal{S} \times \mathcal{S} = \bigsqcup_{\ell=0}^{s} G \cdot (e, \varepsilon_\ell).$$

On sait d'après 3.4.16 que $-e$ est dans $\mathcal{S}$ si et seulement si r est pair. Ceci entraîne que que si r est impair, deux éléments de $\mathcal{S}$ sont toujours non transverses, i.e.

$$\mathcal{S}^2_\top = \{(x, y) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} | x \top y\} = \emptyset.$$

Si r pair, alors $-e \in \mathcal{S}$ et

$$\mathcal{S}^2_\top = G \cdot (e, -e) \cong L/G(\Omega)$$

est un espace para-hermitien symétrique connexe.

Exemple 3.5.8: $\mathcal{D} = SO_o(2s, 2s)/SO(2s) \times SO(2s)$, $V = \mathcal{M}(2s, \mathbb{R})$, $e_i := E_{ii}$, $e = \mathbb{1}_{2s}$, $\mathcal{S} = SO(2s)$ et

$$\mathcal{S}^2_\top \cong SO_o(2s, 2s)/GL(2s, \mathbb{R}).$$

3.5.3 G-orbites dans $\mathcal{S}^3_\top$

Posons

$$\mathcal{S}^3_\top := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \mathcal{S} | x_i \top x_j \ \forall i \neq j\}.$$

Au vu de ce qui a été dit précédemment sur $\mathcal{S}^2_\top$, $\mathcal{S}^3_\top$ est vide si V est de type D_r avec r impair. Si V est C_r, ou bien si V est D_r avec r pair, alors le groupe G opère diagonalement sur $\mathcal{S}^3_\top$. Pour étudier les orbites de cette action, nous allons utiliser la classification des STJP V de type C_s et D_{2s}. Nous aurons aussi besoin des groupes de structure des STJP non exceptionnels (nous nous référerons à [Neh80] et [Ber00b]).

Décomposition de Cartan des STJP simples de type tube. On distingue trois catégories :

(1) les types (D_r) :

V	V^+	V^-
$\mathcal{M}(r,\mathbb{R})$ $(r \geq 2)$	$\mathcal{S}ym(r,\mathbb{R})$	$\mathcal{A}sym(r,\mathbb{R})$
$\mathcal{A}sym(2r,\mathbb{R})$ $(r \geq 2)$	$\mathcal{H}erm(r,\mathbb{C})$	$\mathcal{A}sym(r,\mathbb{C})$
$\mathbb{R}^{p,q}$ $(2 \leq p \leq \left[\frac{p+q}{2}\right], r = 2)$	$\mathbb{R}^{1,q}$	$\mathbb{R}^{p-1}$
$\mathcal{H}erm(3,\mathbb{O}_s)$ $(r = 3)$	$\mathcal{H}erm(3,\mathbb{H})$	$\mathcal{M}(1,3,\mathbb{H})$

(2) les types (C_r) absolument simples :

V	V^+	V^-
$\mathcal{M}(r,\mathbb{H})$ $(r \geq 1)$	$\mathcal{H}erm(r,\mathbb{H})$	$\mathcal{A}herm(r,\mathbb{H})$
$\mathcal{A}herm(r,\mathbb{H})$ $(r \geq 1)$	$\mathcal{H}erm(r,\mathbb{C})$	$\mathcal{S}ym(r,\mathbb{C})$
$\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3, r = 1)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{n-1}$

(3) les STJHP de type tube :

V	V^+	V^-
$\mathcal{M}(r,\mathbb{C})$ $(r \geq 1)$	$\mathcal{H}erm(r,\mathbb{C})$	$i\mathcal{H}erm(r,\mathbb{C})$
$\mathcal{A}sym(2r,\mathbb{C})$ $(r \geq 1)$	$\mathcal{H}erm(r,\mathbb{H})$	$i\mathcal{H}erm(r,\mathbb{H})$
$\mathcal{S}ym(r,\mathbb{C})$ $(r \geq 1)$	$\mathcal{S}ym(r,\mathbb{R})$	$i\mathcal{S}ym(r,\mathbb{R})$
$\mathbb{C}^n$ $(n \neq 2, r = 2)$	$\mathbb{R}^{1,n-1}$	$i\mathbb{R}^{1,n-1}$
$\mathcal{H}erm(3,\mathbb{O}_{\mathbb{C}})$ $(r = 3)$	$\mathcal{H}erm(3,\mathbb{O})$	$i\mathcal{H}erm(3,\mathbb{O})$

Remarque 3.5.9: On constate que si V est simple alors V^- est simple. Il serait agréable d'avoir une preuve abstraite.

$\mathbf{G(\Omega)_o}$**-orbites dans V^-.** Nous allons maintenant nous intéresser aux orbites de l'action de $G(\Omega)_o$ sur V^-. Nous procédons au cas par cas. Cependant, nous ne traiterons pas le cas exceptionnel $\mathcal{H}erm(3,\mathbb{O}_s)$ de rang trois (puisque dans ce cas l'ensemble $\mathcal{S}^3_{\mathsf{T}}$ est vide).

(i) **Le cas** $\mathbf{V} = \mathcal{M}(\mathbf{r},\mathbb{R})$. L'élément $e := \mathbb{1}_r$ vérifie $e \square e = \mathrm{Id}_V$ donc c'est un tripotent maximal de V. L'involution $Q(e)$ est donnée par $Q(e)x = {}^t x$. Ainsi

$$V^+ = \mathcal{S}ym(r,\mathbb{R}), \qquad V^- = \mathcal{A}sym(r,\mathbb{R}).$$

Pour $a,d \in GL(r,\mathbb{R})$, notons $[a,d]$ l'application $V \to V$, $x \mapsto axd^{-1}$. Ainsi, le groupe $GL(r,\mathbb{R}) \times GL(r,\mathbb{R})$ agit sur V mais comme $[a,d] = [-a,-d]$, cette action n'est pas effective. On notera $[GL(r,\mathbb{R}) \times GL(r,\mathbb{R})]$ le groupe effectif pour cette action et, par abus de notation, $[a,d]$ les éléments de ce groupe. Alors $\mathrm{Str}(V)$ est engendré par $[GL(r,\mathbb{R}) \times GL(r,\mathbb{R})]$ et par la transposition :

$$\mathrm{Str}(V) = \langle [GL(r,\mathbb{R}) \times GL(r,\mathbb{R})], Q(e)\rangle\,.$$

Pour $[a,d] \in \mathrm{Str}(V)$, on a

$$[a,d]^\star = [{}^t d^{-1}, {}^t a^{-1}]$$

et donc $\{g \in \mathrm{Str}(V) | g^\star = g\}$ est essentiellement

$$\left\{\pm[a, {}^t a^{-1}] \in [GL(r,\mathbb{R}) \times GL(r,\mathbb{R})]\right\}.$$

Ainsi,

$$G(\Omega) = \{[a, {}^t a^{-1}] | a \in GL(r,\mathbb{R})\} \cong GL(r,\mathbb{R})$$

et donc $G(\Omega)$ opère par restriction à V^+ (respectivement V^-) par $GL(r,\mathbb{R}) = \mathrm{Str}(V^+)$ (respectivement $GL(r,\mathbb{R}) = \mathrm{Str}(V^-)$).

Des calculs quasi identiques donnent que dans le cas $V = \mathcal{M}(r,\mathbb{H})$, on a

$$G(\Omega)_o \cong GL(r,\mathbb{H}),$$

ce qui permet de dire que $G(\Omega)$ opère sur $V^- = \mathcal{A}herm(r,\mathbb{H})$ par $GL(r,\mathbb{H}) = \mathrm{Str}(V^-)_o$.

(ii) **Le cas** $\mathbf{V} = \mathcal{A}sym(\mathbf{2r},\mathbb{R})$. Tout élément x de V s'écrira

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ -{}^t b & d \end{pmatrix}$$

avec $a,d \in \mathcal{A}sym(r,\mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{M}(r,\mathbb{R})$.

Soit $e = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_r \\ -\mathbb{1}_r & 0 \end{pmatrix}$; c'est un tripotent qui vérifie l'égalité $e \square e(z) = z$ pour tout $z \in V$, donc e est maximal. La représentation quadratique est donnée par

$$Q(x)y = -xyx.$$

En particulier, pour $x = \begin{pmatrix} a & b \\ -{}^t b & d \end{pmatrix}$,

$$x^\star := Q(e)x = -exe = \begin{pmatrix} d & {}^t b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} V^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathcal{A}sym(r,\mathbb{R}), b \in \mathcal{S}ym(r,\mathbb{R}) \right\} \\ &\cong \mathcal{A}sym(r,\mathbb{R}) \oplus i\mathcal{S}ym(r,\mathbb{R}) \\ &\cong \mathcal{H}erm(r,\mathbb{C}) \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V^- &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathcal{A}sym(r,\mathbb{R}) \right\} \\ &\cong \mathcal{A}sym(r,\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}sym(r,\mathbb{R}) \\ &\cong \mathcal{A}sym(r,\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Pour $u \in GL(2r,\mathbb{R})/\{\pm 1\}$, notons $[u]$ l'application $\mathcal{M}(2r,\mathbb{R}) \to \mathcal{M}(2r,\mathbb{R})$, $x \mapsto ux{}^t u$ et $[GL(2r,\mathbb{R})]$ le groupe formé de ces $[u]$. Alors $[GL(2r,\mathbb{R})]$ opère sur V et

$$\mathrm{Str}(V) = \pm[GL(2r,\mathbb{R})].$$

Soient $[u] \in [GL(2r,\mathbb{R})]$ et $x \in V$. On a

$$[u]^\star x = e(u(exe){}^t u)e = (eue)x{}^t(eue) = [eue]x$$

donc

$$[u]^\star = [eue].$$

Il vient

$$\{g \in \mathrm{Str}(V) | g^\star = g\} = \pm \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \in GL(2r,\mathbb{R}) \right\} \cong \pm GL(r,\mathbb{C})$$

et par suite

$$G(\Omega)_o \cong GL(r,\mathbb{C}).$$

Dans ce cas encore, $G(\Omega)_o$ opère sur $V^- = \mathcal{A}sym(r,\mathbb{C})$ par $GL(r,\mathbb{C}) = \mathrm{Str}(V^-)_o$.

Nous pouvons traiter de la même manière le cas $V = \mathcal{A}herm(r,\mathbb{H})$ pour obtenir une fois de plus que $G(\Omega)_o \cong GL(r,\mathbb{C})$ opère sur $V^- = \mathcal{S}ym(r,C)$ par $\mathrm{Str}(V^-)_o$.

(iii) **Le cas $\mathbf{V} = \mathbb{R}^{\mathbf{p,q}}$.** Soit $V = \mathbb{R}^{p,q} := \mathbb{R}^{p+q}$ avec structure triple

$$\{x, y, z\} = \langle x, y\rangle z + \langle z, y\rangle x - \langle x, I_{pq} z\rangle I_{pq} y \ ,$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^{p+q}$ et

$$I_{pq} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_p & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_q \end{pmatrix} .$$

Soit e le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{p+q}$. Puisque l'on a $e \,\square\, e(z) = z$ pour tout $z \in V$, e est un tripotent maximal de V. La représentation quadratique de V est donnée par

$$Q(x)y = 2\langle x, y\rangle x - \langle x, I_{pq}x\rangle I_{pq}y$$

et donc

$$Q(e)y = 2\langle e, y\rangle e - I_{pq}y.$$

Les égalités

$$Q(e) = I_{pq}I_{1,p+q-1} = I_{1,p+q-1}I_{pq} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_q \end{pmatrix}.$$

donnent alors

$$V^+ \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q, \qquad V^- \cong \mathbb{R}^{p-1}.$$

Considérons le groupe de structure de V

$$\mathrm{Str}(V) = O(p,q) \times \mathbb{R}^*$$

opérant par $(f, \lambda) \cdot x = \lambda f x$, et soit $f \in O(p,q)$ tel que $f^\star = f$. Comme

$$f^\star = I_{1,p+q-1}I_{pq}fI_{pq}I_{1,p+q-1} = I_{1,p+q-1}{}^t f^{-1}I_{1,p+q-1},$$

on a $f^\star = f$ si et seulement si $f \in O(1, p+q-1)$. On en déduit que

$$\{f \in \mathrm{Str}(V) | f^\star = f\} = (O(p,q) \cap O(1, p+q-1)) \times \mathbb{R}^* = O(1,q) \times O(p-1) \times \mathbb{R}^*$$

et

$$G(\Omega)_o = (SO_o(1,q) \times SO(p-1)) \times \mathbb{R}^*_+.$$

Ainsi le groupe $G(\Omega)_o$ opère sur V^- par $SO(p-1) \times \mathbb{R}^*_+ = \mathrm{Str}(V^-)_o$. C'est le cas de $\mathbb{R}^{p,q}$ avec $2 \leq p \leq \left[\frac{p+q}{2}\right]$ (type D_2) et de $\mathbb{R}^n$ $(p = n, q = 0)$ avec $n \geq 3$ (type C_1).

(iv) **Les STJHP de type tube.** C'est le cas où $V = V^+ \oplus iV^+$ $(V^- = iV^+)$. Alors on a

$$\{g \in \mathrm{Str}(V) | g^\star = g\} \cong \mathrm{Str}(V^+),$$

ce qui donne l'égalité $G(\Omega)_o = \mathrm{Str}(V^+)_o$. De nouveau, $G(\Omega)_o$ opère sur V^- par $\mathrm{Str}(V^-) \cong \mathrm{Str}(V^+)$.

Énonçons le résultat obtenu :

Lemme 3.5.10. *Si V est un STJP absolument simple non exceptionnel de type C_r ou D_r, ou bien si V est un STJHP considéré comme réel, alors le groupe $G(\Omega)_o$ opère sur V^- par* $\mathrm{Str}(V^-)_o$.

G-orbites dans $\mathcal{S}^3_{\mathsf{T}}$. Rappelons que si V est de type C_s ou D_{2s}, alors V^- est de type tube (i.e. A_s ou bien C_s ou bien D_s) et si l'on note Σ^- l'ensemble des tripotents maximaux de V^-, on a $\Sigma^- = \Sigma \cap V^- \subset \mathcal{S}$ (3.4.8 et 3.4.13). Rappelons également que $V(r)$ désigne l'ensemble des éléments de rang maximum r dans V, c'est-à-dire l'ensemble des éléments inversibles dans V. De même, $V^-(s)$ est l'ensemble des éléments inversibles dans V^-.

Soit $v = \sum_{j=1}^{s} v_j$ un tripotent maximal de V^- et $v_{p,q} = \sum_{j=1}^{p} v_j - \sum_{j=p+1}^{p+q} v_j$. En vertu de 1.3.26, de 3.4.15 et du lemme précédent, si V est de type C_r (donc V^- est C_s avec $s = r$) ou D_r avec $r = 2s$, alors

$$V^- \cap V(r) = V^-(s) = \bigcup_{p+q=s} \mathrm{Str}(V^-)_o \cdot v_{p,q} = \bigcup_{p+q=s} G(\Omega)_o \cdot v_{p,q}.$$

Pour $\ell = 0, \ldots, s$, posons

$$w_\ell := v_{s-\ell,\ell}.$$

Théorème 3.5.11. *Soit $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{S}^3_{\mathsf{T}}$. Il existe un entier $\ell \in \{0, \ldots, s\}$ tel que (x_1, x_2, x_3) soit conjugué à $(e, -e, w_\ell)$ sous l'action de G. Plus précisément :*

(i) Si V^- est de type A_s alors il existe exactement $s+1$ orbites de $\mathcal{S}^3_{\mathsf{T}}$ sous l'action de G dont les $(e, -e, w_\ell)$, $\ell = 0, \ldots, s$, forment un système complet de représentants.

(ii) Si V^- est de type D_s, il y a deux orbites de $\mathcal{S}^3_{\mathsf{T}}$ sous G, et $(e, -e, w_0)$, $(e, -e, w_1)$ en sont des représentants.

(iii) Si V^- est de type C_s alors $\mathcal{S}^3_{\mathsf{T}}$ est homogène sous G et

$$\mathcal{S}^3_{\mathsf{T}} = G \cdot (e, -e, w_0).$$

Démonstration. Comme G est transitif sur $\mathcal{S}^2_{\mathsf{T}}$, on peut supposer que $x_1 = e$ et $x_2 = -e$. Ainsi, x_3 est un élément de $e_{\mathsf{T}} = \gamma_e^{-1}(V^-)$ et on obtient $\gamma_e(x_3) \in V^- \cap V(r)$. Il existe alors un entier $\ell \in \{0, \ldots, s\}$ tel que $\gamma_e(x_3) \in G(\Omega)_o \cdot w_\ell$ et l'égalité $\gamma_e^{-1}(w_\ell) = w_\ell$ (cf. 3.4.11 et 3.4.15) prouve finalement que l'on peut envoyer x_3 sur w_ℓ au moyen d'un élément de $\gamma_e^{-1} \circ G(\Omega) \circ \gamma_e = G^{(e,-e)}$. Enfin, le résultat 1.3.26 dû à Kaneyuki nous force à distinguer le type de V^- et nous permet en outre de caractériser précisément les orbites, comme énoncé. □

Remarque 3.5.12: Utilisant de nouveau la classification des STJP V de type C_s et D_{2s}, on constate les faits suivants :

- V^- est A_s si et seulement si V est un STJHP considéré comme réel ou bien $V = \mathbb{R}^{2,q}$ avec $q \geq 2$,
- V^- est D_s si et seulement si $V = \mathcal{M}(2s, \mathbb{R})$,
- V^- est C_s dans tous les autres cas.

Chapitre 4

Transformations de Poisson et équations de Hua

Nous allons nous intéresser au système de Hua d'un domaine borné symétrique réel de type tube. Le point de vue adopté reste celui des systèmes triples de Jordan (voir [FK94]).

Dans la suite, on se donne $\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$ un domaine hermitien symétrique irréductible dans un espace vectoriel complexe $V^{\mathbb{C}}$ de dimension finie n. On considère de plus un domaine borné symétrique réel irréductible $\mathcal{D} = G/K$ dans un espace vectoriel réel V, construit à partir de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ (comme défini au paragraphe 2.3.1). En particulier, les domaines complexes vus comme réels ne seront pas considérés. Nous conserverons les notations introduites et utilisées jusque maintenant.

4.1 Préliminaires

4.1.1 Genres de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ et $\mathcal{D}$

En vertu de 1.3.8, pour tous tripotents primitifs c, d dans le STJP simple V, il existe $k \in K$ tel que $d \,\square\, d = k(c \,\square\, c)k^{-1}$ et par conséquent $\mathrm{Tr}(c \,\square\, c) = \mathrm{Tr}(d \,\square\, d)$. Si $e = e_1 + \ldots + e_r$ est un tripotent maximal de V alors

$$\dim_{\mathbb{R}} V_2(e) + \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} V_1(e) = \mathrm{Tr}(e \,\square\, e) = r\mathrm{Tr}(e_1 \,\square\, e_1).$$

Notons respectivement n_2 et n_1 les dimensions (sur $\mathbb{R}$) de $V_2(e)$ et $V_1(e)$. Le nombre

$$\mathrm{g} := \frac{2n_2 + n_1}{2r}$$

est appelé le *genre* de $\mathcal{D}$ (ou encore le genre de $(V, \{\})$). Ainsi, pour tout tripotent primitif c dans V, on a

$$\beta(c, c) = \mathrm{g}.$$

On définit de même le genre $\mathrm{g}_{\mathbb{C}}$ du domaine $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ (ou de $V^{\mathbb{C}}$) par

$$\mathrm{g}_{\mathbb{C}} := \frac{2n_2 + n_1}{2r_{\mathbb{C}}}.$$

Nous obtenons en particulier

$$\frac{\mathrm{g}_{\mathbb{C}}}{\mathrm{g}} = \frac{r}{r_{\mathbb{C}}}.$$

Utilisant la remarque 1.3.20, il vient

$$\mathrm{g}_{\mathbb{C}} = \begin{cases} \mathrm{g} & \text{si } \mathcal{D} \text{ est de type } A_r \text{ ou bien } B_r \text{ ou bien } D_r \\ \frac{1}{2}\mathrm{g} & \text{si } \mathcal{D} \text{ est de type } BC_r \text{ ou bien } C_r \end{cases}.$$

Remarque 4.1.1: Le genre d'un domaine hermitien symétrique irréductible (ou d'un STJHP simple) est habituellement défini comme étant le nombre $2\mathrm{g}_{\mathbb{C}}$ (voir par exemple [FK+00]). Ce facteur 2 est conséquence d'une normalisation différente du produit triple de Jordan. La représentation quadratique est la même mais les opérateurs $Q(x, y)$ diffèrent d'un facteur 2 (cf. [Loo77]).

Pour $x, y \in V$, on pose

$$\langle x, y\rangle := \frac{1}{\mathrm{g}}\mathrm{Tr}(x \,\square\, y) = \frac{1}{\mathrm{g}}\beta(x, y).$$

Nous définissons ainsi un produit scalaire euclidien sur V tel que chaque tripotent primitif soit de norme 1. Les notions d'orthogonalité et de dualité utilisées dans la suite seront relatives à ce produit scalaire.

4.1.2 Norme générique

Soit $\mathrm{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ la *norme générique* du STJHP $V^{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire l'unique polynôme irréductible défini sur $V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}}$ qui est $K_{\mathbb{C}}$-invariant, i.e.

$$\mathrm{h}(k\mathbf{x}, k\mathbf{y}) = \mathrm{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V^{\mathbb{C}},\ \forall k \in K_{\mathbb{C}},$$

et qui est uniquement déterminé par l'égalité

$$\mathrm{h}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{r_{\mathbb{C}}}(1 - \lambda_j^2)$$

pour $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{r_{\mathbb{C}}} \lambda_j \mathbf{e}_j$ dans le sous-espace plat $\bigoplus_{j=1}^{r_{\mathbb{C}}} \mathbb{R}\mathbf{e}_j$ de $V^{\mathbb{C}}$, où $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{r_{\mathbb{C}}})$ est un repère de Jordan de $V^{\mathbb{C}}$. La fonction h est holomorphe en $\mathbf{x}$, anti-holomorphe en $\mathbf{y}$ et satisfait l'égalité

$$\mathrm{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{\mathrm{h}(\mathbf{y}, \mathbf{x})}.$$

De plus, h est reliée aux opérateurs de Bergman $\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathrm{Id} - \mathbf{2x}\,\square\,\mathbf{y} + \mathbf{Q}(\mathbf{x})\mathbf{Q}(\mathbf{y})$ sur $V^{\mathbb{C}}$ par l'égalité

$$\mathrm{Det}_{\mathbb{C}}\mathbf{B}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathrm{h}(\mathbf{x},\mathbf{y})^{2\mathrm{g}_{\mathbb{C}}} \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in V^{\mathbb{C}}.$$

En particulier, nous avons $\mathrm{h}(\mathbf{0},\mathbf{y}) = 1$ pour tout $\mathbf{y} \in V^{\mathbb{C}}$. Enfin, pour tous $(\mathbf{z},\mathbf{w}) \in \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \times \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ et tout $g \in G_{\mathbb{C}}$, nous avons la relation

$$\mathrm{h}(g\cdot\mathbf{z}, g\cdot\mathbf{w}) = J_g(\mathbf{z})^{\frac{1}{2\mathrm{g}_{\mathbb{C}}}}\mathrm{h}(\mathbf{z},\mathbf{w})\overline{J_g(\mathbf{w})^{\frac{1}{2\mathrm{g}_{\mathbb{C}}}}}, \tag{4.1}$$

où $J_g(\mathbf{x})$ désigne le jacobien de g au point $\mathbf{x}$. Par conséquent, la fonction h ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}} \times \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$. Pour plus amples détails relatifs à la fonction h, nous renvoyons par exemple à [FK+00].

Si $x, y \in V$, la restriction à V de l'opérateur de Bergman $\mathbf{B}(x,y)$ est simplement l'opérateur de Bergman $B(x,y) = \mathrm{Id} - 2x\,\square\,y + Q(x)Q(y)$ sur V. On en déduit les égalités

$$\mathrm{Det}_{\mathbb{C}}\mathbf{B}(x,y) = \mathrm{Det}_{\mathbb{R}}B(x,y) \quad \forall x,y \in V$$

et

$$\mathrm{h}(x,y)^{2\mathrm{g}_{\mathbb{C}}} = \mathrm{Det}_{\mathbb{R}}B(x,y) \quad \forall x,y \in V. \tag{4.2}$$

Donc la restriction à $V \times V$ de la fonction h est une fonction à valeurs réelles. En vertu de ce qui précède, la restriction de h à $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ qui vérifie $\mathrm{h}(0,y) = 1$. Par continuité de h, nous obtenons

$$\mathrm{h}(x,y) > 0 \quad \forall x,y \in \mathcal{D}.$$

Il s'ensuit que pour tous $x, y \in \mathcal{D}$ et pour tout nombre complexe σ, la quantité $\mathrm{h}(x,y)^{\sigma}$ est bien définie. Si de plus $\mathcal{D}$ est de type tube, alors la restriction de h à $\mathcal{D} \times \Sigma$ est une fonction strictement positive. En effet, pour $u \in \Sigma$ et $x \in V$, $B(x,u)$ est inversible si et seulement si $u - x$ est inversible dans $V_2(u)$ (1.4.4) et puisque $u - x$ est inversible pour tout $u \in \Sigma$ et tout $x \in \mathcal{D}$, nous obtenons

$$\mathrm{Det}_{\mathbb{R}}B(x,u) \neq 0 \quad \forall (x,u) \in \mathcal{D} \times \Sigma$$

et

$$\mathrm{h}(x,u) \neq 0 \quad \forall (x,u) \in \mathcal{D} \times \Sigma.$$

Enfin, l'égalité $\mathrm{h}(0,u) = 1$ et la continuité de h sur chaque composante connexe de $\mathcal{D} \times \Sigma$ fournissent

$$\mathrm{h}(x,u) > 0 \quad \forall (x,u) \in \mathcal{D} \times \Sigma.$$

Ainsi, pour tout $\sigma \in \mathbb{C}$ et tout $(x,u) \in \mathcal{D} \times \Sigma$, la quantité $\mathrm{h}(x,u)^{\sigma}$ est bien définie.

4.2 Opérateurs de Hua et équations de Hua dans le cas tube

Supposons $\mathcal{D}$ de type tube (i.e. A_r, C_r ou D_r), et fixons-nous un tripotent maximal e de V. Soit $\mathcal{S} := K \cdot e$ la frontière de Shilov de $\mathcal{D}$ associée à $e = e_1 + \ldots + e_r$ et $V = V_2(e) = V^+ \oplus V^-$ la décomposition de Cartan de V relative à $Q(e)$. De nouveau, les produits, les opérateurs de multiplication ($L(x)$) ou quadratiques ($P(x) = Q(x)Q(e)$) seront considérés dans l'algèbre de Jordan $V_2 = V_2(e)$. Notons enfin $n^\pm$ les dimensions de $V^\pm$, de sorte que

$$\mathrm{g} = \frac{\dim V}{r} = \frac{n^+ + n^-}{r}.$$

4.2.1 Opérateur de Hua

On définit formellement sur $C^\infty(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ *l'opérateur de Hua sur $\mathcal{D}$* par

$$\mathcal{H}f(x) := \left(B(x,x)\frac{\partial}{\partial x}\right) \square \frac{\partial}{\partial x} \cdot f(x) \quad (f \in C^\infty(\mathcal{D}, \mathbb{R}),\ x \in \mathcal{D})$$

où l'on identifie $\frac{\partial}{\partial x}$ au gradient, i.e.

$$D_x f(u) := \left\langle \frac{\partial}{\partial x} f(x), u \right\rangle.$$

Cette définition est similaire à celle de l'opérateur de Hua d'un domaine hermitien symétrique de type tube donnée dans [JK80]. Remarquons que si g est une application différentiable de V dans V, alors en posant $y = gx$ on trouve

$$\frac{\partial}{\partial x} = (D_x g)^* \frac{\partial}{\partial y},$$

où $(D_x g)^*$ est l'adjoint de $D_x g$ relativement à $\beta = \mathrm{g}\,\langle \cdot, \cdot \rangle$. Cela provient de la règle de dérivation des fonctions composées suivante

$$D_x(f \circ g) = D_{gx} f \circ D_x g.$$

Si $\{e_\mu\}$ est une base orthonormée de V alors $\mathcal{H}$ s'écrit sous la forme

$$\mathcal{H}f(x) = \sum_{\mu,\nu} (B(x,x)e_\mu \square e_\nu)\partial_\mu \partial_\nu f(x),$$

où l'on a posé $\partial_\mu := \partial_{e_\mu}$. Cette écriture ne dépend pas de la base (cf. [JK80]). L'opérateur de Hua possède la propriété d'invariance suivante :

Proposition 4.2.1. *Pour $f \in C^\infty(\mathcal{D}, \mathbb{R})$, $g \in G$ et $x \in \mathcal{D}$, nous avons*

$$\mathcal{H}(f \circ g)(x) = (D_x g)^{-1} \circ \mathcal{H}f(gx) \circ (D_x g).$$

Démonstration. D'abord, pour g dans G il existe $h \in L = \gamma_e \circ G \circ \gamma_e^{-1}$ tel que $g = \gamma_e^{-1} \circ h \circ \gamma_e \in G$ donc

$$D_x g = D_{h\circ\gamma_e(x)}\gamma_e^{-1} \circ D_{\gamma_e(x)}h \circ D_x\gamma_e.$$

Maintenant, pour $x \in \mathcal{D}$ et $z \in T_\Omega = \Omega \oplus V^- = \gamma_e(\mathcal{D})$, on a

$$D_x\gamma_e = 2P(e-x)^{-1} \in \mathrm{Str}(V), \quad D_z\gamma_e^{-1} = 2P(e+z)^{-1} \in \mathrm{Str}(V).$$

De plus, comme L est engendré par $G(\Omega) \subset \mathrm{Str}(V)$, N^+ et $\jmath$, et puisque

$$D_z t_v = \mathrm{Id}\ (v \in V^-), \quad D_z A = A\ (A \in G(\Omega)), \quad D_z\jmath = -P(z)^{-1},$$

on déduit que $D_z h \in \mathrm{Str}(V)$ pour tout $h \in L$. Par conséquent, $D_x g$ est un élément de $\mathrm{Str}(V)$. Finalement, en posant $y = gx$ et en utilisant l'égalité $B(gx,gx) = (D_x g)B(x,x)(D_x g)^*$ (cf 2.1.3) on trouve

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(f\circ g)(x) &= \left(B(x,x)\frac{\partial}{\partial x}\right) \square \frac{\partial}{\partial x} f(gx) \\
&= \left(B(x,x)(D_x g)^*\frac{\partial}{\partial y}\right) \square \left((D_x g)^*\frac{\partial}{\partial y}\right) f(y) \\
&= \left((D_x g)^{-1}B(y,y)\frac{\partial}{\partial y}\right) \square \left((D_x g)^*\frac{\partial}{\partial y}\right) f(y) \\
&= (D_x g)^{-1}\left((B(y,y)\frac{\partial}{\partial y}) \square \frac{\partial}{\partial y} f(y)\right)(D_x g) \\
&= (D_x g)^{-1} \circ \mathcal{H}f(y) \circ (D_x g).
\end{aligned}$$

□

Nous allons dans la suite nous intéresser à certaines solutions $f \in C^\infty(\mathcal{D},\mathbb{R})$ d'un système différentiel du type

$$\mathcal{H}f(x) = \lambda f(x)\mathrm{Id}, \tag{4.3}$$

où l'on a noté Id l'opérateur identité. Ces systèmes différentiels seront appelés *équations de Hua*.

4.2.2 Transformations de Poisson et équations de Hua

On définit le *noyau de Poisson* de $\mathcal{D}$ comme la fonction

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{P}:\ \mathcal{D}\times\mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{R}\ . \\
(x,u) & \longmapsto & \left(\frac{\mathrm{h}(x,x)}{\mathrm{h}(x,u)\mathrm{h}(u,x)}\right)^{\frac{n^-}{r_{\mathbb{C}}}} = \left(\frac{\mathrm{h}(x,x)}{\mathrm{h}(x,u)^2}\right)^{\frac{n^-}{r_{\mathbb{C}}}}
\end{array}$$

Le noyau de Poisson satisfait à la propriété de covariance suivante :

Lemme 4.2.2. *Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, tout $(x,u) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}$ et tout $g \in G$, nous avons l'égalité*

$$\mathcal{P}(gx,gu)^\sigma = |J_g(u)|^{-\frac{\sigma n^-}{n}} \mathcal{P}(x,u)^\sigma.$$

Démonstration. Il suffit de montrer l'égalité avec $\sigma = 1$. Utilisant l'identité (4.1), on trouve

$$\begin{aligned}
\mathrm{h}(gx,gu)^{\frac{2n^-}{r_{\mathbb{C}}}} &= \left(|J_g(x)|^{\frac{1}{2g_{\mathbb{C}}}} \mathrm{h}(x,u) |J_g(u)|^{\frac{1}{2g_{\mathbb{C}}}}\right)^{\frac{2n^-}{r_{\mathbb{C}}}} \\
&= |J_g(x)|^{\frac{n^-}{g_{\mathbb{C}} r_{\mathbb{C}}}} \mathrm{h}(x,u)^{\frac{2n^-}{r_{\mathbb{C}}}} |J_g(u)|^{\frac{n^-}{g_{\mathbb{C}} r_{\mathbb{C}}}} \\
&= |J_g(x)|^{\frac{n^-}{n}} \mathrm{h}(x,u)^{\frac{2n^-}{r_{\mathbb{C}}}} |J_g(u)|^{\frac{n^-}{n}}.
\end{aligned}$$

On trouve de même

$$\mathrm{h}(gx,gx)^{\frac{n^-}{r_{\mathbb{C}}}} = |J_g(x)|^{\frac{n^-}{n}} \mathrm{h}(x,x)^{\frac{n^-}{r_{\mathbb{C}}}},$$

d'où le résultat. □

Remarque 4.2.3: Puisque K est un sous-groupe du groupe β-orthogonal de V, chaque élément k de K vérifie $|J_k(x)| = |\mathrm{Det}k| = 1$ pour tout $x \in V$. Par conséquent, pour $(x,u) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}$, il existe $k \in K$ tel que

$$\mathcal{P}(x,u) = \mathcal{P}(k^{-1}x, e).$$

Pour $\sigma \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{D})$ l'ensemble des solutions lisses $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ de l'équation de Hua

$$\mathcal{H}f(x) = \left(\frac{2n^-}{r}\right)^2 \sigma(\sigma-1) f(x)\mathrm{Id}.$$

Au vu des travaux effectués dans le cadre des domaines bornés hermitiens symétriques de type tube (cf. [Shi96]), nous pouvons penser que, sous certaines hypothèses sur le nombre σ, nous avons

$$\mathcal{E}_\sigma(\mathcal{D}) = \{\mathcal{P}_\sigma\varphi | \varphi \in C^0(\mathcal{S}, \mathbb{R})\}$$

où $\mathcal{P}_\sigma\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ désigne la *transformée de Poisson de paramètre* σ de φ, définie par

$$\mathcal{P}_\sigma\varphi(x) = \int_{\mathcal{S}} \mathcal{P}(x,u)^\sigma \varphi(u) du.$$

Dans la suite, nous allons nous attacher à établir l'inclusion

$$\{\mathcal{P}_\sigma\varphi | \varphi \in C^0(\mathcal{S}, \mathbb{R})\} \subset \mathcal{E}_\sigma(\mathcal{D}),$$

pour tout σ, que nous pouvons énoncer ainsi :

Théorème 4.2.4. *Pour toute fonction continue $\varphi : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, la transformée de Poisson de paramètre σ de φ est solution de l'équation de Hua (4.3) avec $\lambda = (\frac{2n^-}{r})^2\sigma(\sigma-1)$, i.e.*

$$\mathcal{H}\mathcal{P}_\sigma\varphi(x) = \left(\frac{2n^-}{r}\right)^2 \sigma(\sigma-1)\mathcal{P}_\sigma\varphi(x)\mathrm{Id}.$$

4.2.3 Preuve du théorème 4.2.4

Pour démontrer le théorème 4.2.4, il suffit de prouver que pour $\sigma \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathcal{S}$ fixés, la fonction

$$\begin{array}{rlll} \mathcal{P}_{\sigma,u} : & \mathcal{D} & \to \mathbb{R} & . \\ & x & \mapsto \mathcal{P}(x,u)^\sigma & \end{array}$$

vérifie

$$\mathcal{H}\mathcal{P}_{\sigma,u}(x) = \left(\frac{2n^-}{r}\right)^2 \sigma(\sigma-1)\mathcal{P}_{\sigma,u}(x)\mathrm{Id}. \tag{4.4}$$

Choix d'une bonne base. On sait d'après 1.3.7 que :

(i) pour tout $x \in V^\pm$, on a $x \,\square\, x = \pm L(x^2)$,

(ii) si $x \in V_{ii}^-$ alors $x^2 = -\rho e_i$ avec $\rho > 0$,

(iii) si $x \in V_{ij}^\pm$ alors $x^2 = \pm\rho(e_i + e_j)$ avec $\rho > 0$,

donc

(1) si $x = \rho e_i \in \mathbb{R}e_i$ alors $x \,\square\, x = L(x^2) = \rho^2 L(e_i) = \rho^2 e_i \,\square\, e_i$,

(2) si $x \in V_{ii}^-$ alors il existe $\rho > 0$ tel que $x \,\square\, x = \rho L(e_i) = \rho e_i \,\square\, e_i$,

(3) si $x \in V_{ij}^\pm$ alors il existe $\rho > 0$ tel que $x \,\square\, x = \rho L(e_i + e_j) = \rho(e_i \,\square\, e_i + e_j \,\square\, e_j)$.

On peut alors choisir une base orthonormée $\{e_\mu\}$ de V telle que

- $e_\mu \,\square\, e_\mu = e_i \,\square\, e_i$ pour tout μ tel que $e_\mu \in V_{ii}^\pm$,
- $e_\mu \,\square\, e_\mu = \frac{1}{2}(e_i \,\square\, e_i + e_j \,\square\, e_j)$ pour tout μ tel que $e_\mu \in V_{ij}^\pm$.

Nous fixons dorénavant une telle base. Rappelons maintenant que l'on a

$$V^+ = \bigoplus_{i=1}^r V_{ii}^+ \oplus \bigoplus_{1\le i<j\le r} V_{ij}^+ = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{R}e_i \oplus \bigoplus_{1\le i<j\le r} V_{ij}^+ ,$$

$$V^- = \bigoplus_{i=1}^r V_{ii}^- \oplus \bigoplus_{1\le i<j\le r} V_{ij}^- ,$$

$$\dim V_{ii} =: c, \qquad \dim V_{ii}^- = c-1, \qquad \dim V_{ij}^+ =: a ,$$

$$\dim V_{ij}^- = \begin{cases} 0 & \text{si } V \text{ est de type } A_r \\ a & \text{si } V \text{ est de type } C_r \text{ ou } D_r \text{ avec } r \ge 3 \\ p-1 & \text{si } V = \mathbb{R}^{p,q} \text{ avec } 2 \le p \le [\frac{p+q}{2}] \text{ (type } D_2, a = q-1) \end{cases} .$$

Lemme 4.2.5. *Nous avons les égalités suivantes :*

(i) $\sum_\mu e_\mu \,\square\, e_\mu = \mathrm{g}\mathrm{Id}_V$,

(ii) $\sum_\mu (Q(e)e_\mu) \,\square\, e_\mu = \frac{n^+ - n^-}{r}\mathrm{Id}_V$.

Démonstration. Montrons les égalités dans le cas C_r ou D_r avec $r \geq 3$ en utilisant 1.3.21 (les cas A_r et D_2 se traitent de manière identique). Dans ces cas, nous avons

$$n^+ = r + \frac{1}{2}r(r-1)a, \qquad n^- = r(c-1) + \frac{1}{2}r(r-1)a$$

et alors

$$\begin{aligned}
\sum_\mu e_\mu \,\square\, e_\mu &= \sum_{\mu : e_\mu \in V^+} e_\mu \,\square\, e_\mu + \sum_{\mu : e_\mu \in V^-} e_\mu \,\square\, e_\mu \\
&= \sum_{i=1}^r e_i \,\square\, e_i + \frac{1}{2}a \sum_{1 \leq i < j \leq r} (e_i \,\square\, e_i + e_j \,\square\, e_j) + \\
&\quad + (c-1)\sum_{i=1}^r e_i \,\square\, e_i + \frac{1}{2}a \sum_{1 \leq i < j \leq r} (e_i \,\square\, e_i + e_j \,\square\, e_j) \\
&= c\sum_{i=1}^r e_i \,\square\, e_i + a \sum_{1 \leq i < j \leq r} (e_i \,\square\, e_i + e_j \,\square\, e_j) \\
&= c\sum_{i=1}^r e_i \,\square\, e_i + a(r-1)\sum_{i=1}^r e_i \,\square\, e_i \\
&= (c + a(r-1))\mathrm{Id}_V \\
&= \frac{\dim V}{r}\mathrm{Id}_V
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_\mu (Q(e)e_\mu) \,\square\, e_\mu &= \sum_{\mu : e_\mu \in V^+} e_\mu \,\square\, e_\mu - \sum_{\mu : e_\mu \in V^-} e_\mu \,\square\, e_\mu \\
&= \sum_{i=1}^r e_i \,\square\, e_i + \frac{1}{2}a \sum_{1 \leq i < j \leq r} (e_i \,\square\, e_i + e_j \,\square\, e_j) + \\
&\quad - (c-1)\sum_{i=1}^r e_i \,\square\, e_i - \frac{1}{2}a \sum_{1 \leq i < j \leq r} (e_i \,\square\, e_i + e_j \,\square\, e_j) \\
&= (2-c)\mathrm{Id}_V = \frac{n^+ - n^-}{r}\mathrm{Id}_V.
\end{aligned}$$

$\square$

Norme générique et quasi-inverses. Soit $\sigma \in \mathbb{R}$. Par abus de notation, pour $x \in \mathcal{D}$, posons

$$\mathrm{h}^\sigma(x) := \mathrm{h}(x,x)^\sigma$$

et pour $u \in \mathcal{S}$ fixé, définissons la fonction $\mathrm{h}_u^\sigma : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ par

$$\mathrm{h}_u^\sigma(x) := \mathrm{h}(x,u)^\sigma.$$

Rappelons enfin qu'un élément $x \in V$ est quasi-inversible dans $V^{(y)}$ si et seulement si l'opérateur de Bergman $B(x,y)$ est inversible et dans ce cas le quasi-inverse de x dans $V^{(y)}$ est l'élément

$$x^y = B(x,y)^{-1}(x - Q(x)y).$$

Proposition 4.2.6. *Pour $(x,u) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}$, nous avons les égalités suivantes :*

(i)

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{h}^\sigma(x) = -\frac{2r_{\mathbb{C}}}{r}\sigma \mathrm{h}^\sigma(x) x^x = -\frac{2r_{\mathbb{C}}}{r}\sigma \mathrm{h}(x,x)^\sigma x^x \ ;$$

(ii)

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{h}_u^\sigma(x) = -\frac{r_{\mathbb{C}}}{r}\sigma \mathrm{h}_u^\sigma(x) u^x = -\frac{r_{\mathbb{C}}}{r}\sigma \mathrm{h}(x,u)^\sigma u^x \ ;$$

(iii)

$$D_x(u^x) = Q(u^x) \ ;$$

(iv)

$$D_x(x^x) = Q(x^x) + B(x,x)^{-1}.$$

Démonstration. Pour les deux premiers points, il suffit de faire les calculs avec $\sigma = 1$. Nous partons de l'identité (4.2) et nous allons utiliser la dérivée logarithmique. D'abord,

$$2\mathrm{g}_{\mathbb{C}} \log \mathrm{h}(x) = \log \mathrm{Det} B(x,x)$$

donc nous allons calculer dans un premier temps la dérivée logarithmique de $\mathrm{Det}B(x,x)$. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $v \in V$. On a

$$\begin{aligned} B(x+tv, x+tv) &= \mathrm{Id}_V - 2(x \,\square\, x + tx \,\square\, v + tv \,\square\, x + t^2 v \,\square\, v) + (Q(x) + 2tQ(x,y) + t^2 Q(v))^2 \\ &= B(x,x) - 2t(x \,\square\, v - Q(x)Q(x,v) + v \,\square\, x - Q(x,v)Q(x)) + o(t) \end{aligned}$$

et utilisant les identités (1.27) et (1.28), on obtient

$$\begin{aligned} B(x+tv, x+tv) &= B(x,x) - 2t(B(x,x)(x^x \,\square\, v) + (v \,\square\, x^x)B(x,x)) + o(t) \\ &= B(x,x)(\mathrm{Id}_V - 2t(x^x \,\square\, v + B(x,x)^{-1}(v \,\square\, x^x)B(x,x)) + o(t). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\log \mathrm{Det} B(x+tv,x+tv)-\log \mathrm{Det} B(x,x) = \log \mathrm{Det}(\mathrm{Id}_V-2t(x^x \square v+B(x,x)^{-1}(v \square x^x)B(x,x)+o(t))$$

et

$$\begin{aligned} D_x(\log \mathrm{Det} B(x,x))(v) &= \frac{d}{dt}\log \mathrm{Det} B(x+tv,x+tv)_{|t=0} \\ &= -2\mathrm{Tr}(x^x \square v + B(x,x)^{-1}(v \square x^x)B(x,x)) \\ &= -2\mathrm{Tr}(x^x \square v + v \square x^x) \\ &= -4\beta(x^x,v) \\ &= -4\mathrm{g}\left\langle x^x, v\right\rangle . \end{aligned}$$

On en déduit que l'on a

$$D_x(\log \mathrm{h}(x))(v) = -2\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{g}_{\mathbb{C}}}\left\langle x^x, v\right\rangle$$

et que par conséquent,

$$D_x\mathrm{h}(v) = -2\frac{r_{\mathbb{C}}}{r}\mathrm{h}(x)\left\langle x^x, v\right\rangle = \left\langle -2\frac{r_{\mathbb{C}}}{r}\mathrm{h}(x)x^x, v\right\rangle .$$

Le second point se montre de la même manière : on obtient les égalités

$$B(x+tv,u) = B(x,u)-2t(v \square u-Q(x,v)Q(u))+t^2Q(v)Q(u) = B(x,u)(\mathrm{Id}_V-2tv \square u^x+o(t))$$

qui donnent

$$\begin{aligned} D_x(\log \mathrm{Det} B(x,u))(v) &= \frac{d}{dt}\log \mathrm{Det} B(x+tv,u)_{|t=0} \\ &= -2\mathrm{Tr}(v \square u^x) \\ &= -2\mathrm{g}\left\langle u^x, v\right\rangle , \end{aligned}$$

d'où

$$D_x(\log \mathrm{h}_u(x))(v) = -\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{g}_{\mathbb{C}}}\left\langle u^x, v\right\rangle$$

et

$$D_x\mathrm{h}_u(v) = -\frac{r_{\mathbb{C}}}{r}\mathrm{h}_u(x)\left\langle u^x, v\right\rangle .$$

Montrons les deux derniers points. D'abord,

$$\begin{aligned} D_x(u^x) &= D_x(B(u,x)^{-1}(u-Q(u)x)) \\ &= -B(u,x)^{-1}(D_xB(u,x))B(u,x)^{-1}(u-Q(u)x) + B(u,x)^{-1}(D_x(u-Q(u)x)) \\ &= -B(u,x)^{-1}(D_xB(u,x))u^x + B(u,x)^{-1}(D_x(u-Q(u)x)) \end{aligned}$$

Or,

$$D_x(u-Q(u)x) = -Q(u)$$

et

$$\begin{aligned}\partial_v B(u,x) &= \partial_v(\mathrm{Id}_V - 2u \,\square\, x + Q(u)Q(x)) \\ &= -2u \,\square\, v + 2Q(u)Q(x,v) \\ &= -2B(u,x)(u^x \,\square\, v)\end{aligned}$$

donc

$$\partial_v(u^x) = 2u^x \,\square\, v(u^x) - B(u,x)^{-1}Q(u)v = 2Q(u^x) - B(u,x)^{-1}Q(u)v.$$

Finalement, l'identité (1.23) donne $B(u,x)^{-1}Q(u) = Q(u^x)$ et ainsi

$$D_x(u^x) = Q(u^x).$$

De même, nous avons

$$\begin{aligned}D_x(x^x) &= D_x(B(x,x)^{-1}(x - Q(x)x)) \\ &= -B(x,x)^{-1}(D_x B(x,x))B(x,x)^{-1}(x - Q(x)x) + B(x,x)^{-1}(D_x(x - Q(x)x)) \\ &= -B(x,x)^{-1}(D_x B(x,x))x^x + B(x,x)^{-1}(D_x(x - Q(x)x)).\end{aligned}$$

Aussi,

$$D_x(x - Q(x)x) = \mathrm{Id}_V - 2x \,\square\, x - Q(x) = B(x,x) - Q(x)^2 - Q(x)$$

donc

$$B(x,x)^{-1}(D_x(x - Q(x)x)) = \mathrm{Id}_V - B(x,x)^{-1}Q(x)^2 - B(x,x)^{-1}Q(x)$$

et de nouveau l'identité (1.23) fournit

$$B(x,x)^{-1}(D_x(x - Q(x)x)) = \mathrm{Id}_V - B(x,x)^{-1}Q(x)^2 - Q(x^x).$$

Maintenant

$$\begin{aligned}\partial_v B(x,x) &= \partial_v(\mathrm{Id}_V - 2x \,\square\, x + Q(x)^2) \\ &= -2(x \,\square\, v + v \,\square\, x - Q(x)Q(x,v) + Q(x,v)Q(x) \\ &= -2(B(x,x)(x^x \,\square\, v) + (v \,\square\, x^x)B(x,x))\end{aligned}$$

donc

$$-B(x,x)^{-1}(\partial_v B(x,x)) = 2x^x \,\square\, v + 2B(x,x)^{-1}(v \,\square\, x^x)B(x,x).$$

En observant que l'on a

$$(v \,\square\, x^x)B(x,x)x^x = v \,\square\, x^x(x - Q(x)x) = (x - Q(x)x) \,\square\, x^x(v) = x \,\square\, x(v),$$

la dernière égalité découlant de l'identité (1.25), on obtient

$$\begin{aligned}-B(x,x)^{-1}(D_x B(x,x))x^x &= 2Q(x^x) + B(x,x)^{-1}(2x \,\square\, x) \\ &= 2Q(x^x) + B(x,x)^{-1}(\mathrm{Id}_V + Q(x)^2 - B(x,x)) \\ &= 2Q(x^x) + B(x,x)^{-1} + B(x,x)^{-1}Q(x)^2 - \mathrm{Id}_V.\end{aligned}$$

En rassemblant tous les éléments obtenus, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}D_x(x^x) &= 2Q(x^x) + B(x,x)^{-1} + B(x,x)^{-1}Q(x)^2 - \mathrm{Id}_V + \mathrm{Id}_V - B(x,x)^{-1}Q(x)^2 - Q(x^x) \\ &= Q(x^x) + B(x,x)^{-1}.\end{aligned}$$

□

Démonstration de l'égalité (4.4). Commençons par calculer $\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{P}_{\sigma,u}(x)$. On obtient d'après 4.2.6

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{P}_{\sigma,u}(x) &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{h}^{\frac{\sigma n^-}{r_{\mathbb{C}}}}(x).\mathrm{h}_u^{-\frac{2\sigma n^-}{r_{\mathbb{C}}}}(x)) \\ &= -\frac{2r_{\mathbb{C}}}{r}\frac{\sigma n^-}{r_{\mathbb{C}}}\mathrm{h}^{\frac{\sigma n^-}{r_{\mathbb{C}}}}(x)x^x.\mathrm{h}_u^{-\frac{2\sigma n^-}{r_{\mathbb{C}}}}(x) - \frac{r_{\mathbb{C}}}{r}\left(-\frac{2\sigma n^-}{r_{\mathbb{C}}}\right)\mathrm{h}_u^{\frac{-2\sigma n^-}{r_{\mathbb{C}}}}(x)u^x.\mathrm{h}^{\frac{\sigma n^-}{r_{\mathbb{C}}}}(x) \\ &= \frac{2\sigma n^-}{r}\mathcal{P}_{\sigma,u}(x)(u^x - x^x).\end{aligned}$$

Ensuite,

$$D_x^2\mathcal{P}_{\sigma,u}(v,w) = \left(\frac{2\sigma n^-}{r}\right)^2\mathcal{P}_{\sigma,u}(x)[u^x-x^x]\otimes[u^x-x^x](v,w)+\frac{2\sigma n^-}{r}\mathcal{P}_{\sigma,u}(x)\left\langle D_x(u^x-x^x)v,w\right\rangle$$

où $[u^x - x^x]$ désigne la forme linéaire $y \mapsto \langle u^x - x^x, y\rangle$. Or, d'après 4.2.6, nous avons

$$D_x(u^x - x^x) = Q(u^x) - Q(x^x) - B(x,x)^{-1}$$

donc nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}D_x^2\mathcal{P}_{\sigma,u}(v,w) = \mathcal{P}_{\sigma,u}(x)\Bigg(&\left(\frac{2\sigma n^-}{r}\right)^2\langle u^x - x^x, v\rangle\langle u^x - x^x, w\rangle \\ &+\frac{2\sigma n^-}{r}\left\langle(Q(u^x) - Q(x^x) - B(x,x)^{-1})v,w\right\rangle\Bigg).\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\mathcal{P}_{\sigma,u}(x) &= \sum_{\mu,\nu}(B(x,x)e_\mu\,\square\,e_\nu)\partial_\mu\partial_\nu\mathcal{P}_{\sigma,u}(x) \\ &= \mathcal{P}_{\sigma,u}(x)\Bigg(\left(\frac{2\sigma n^-}{r}\right)^2\sum_{\mu,\nu}\langle u^x - x^x, e_\nu\rangle\langle u^x - x^x, e_\mu\rangle(B(x,x)e_\mu\,\square\,e_\nu) \\ &\quad+\frac{2\sigma n^-}{r}\sum_{\mu,\nu}\left\langle(Q(u^x) - Q(x^x) - B(x,x)^{-1})e_\nu, e_\mu\right\rangle(B(x,x)e_\mu\,\square\,e_\nu)\Bigg) \\ &= \mathcal{P}_{\sigma,u}(x)\Bigg(\left(\frac{2\sigma n^-}{r}\right)^2(B(x,x)(u^x - x^x))\,\square(u^x - x^x) \\ &\quad+\frac{2\sigma n^-}{r}\sum_{\mu,\nu}\left\langle(Q(u^x) - Q(x^x) - B(x,x)^{-1})e_\nu, e_\mu\right\rangle(B(x,x)e_\mu\,\square\,e_\nu)\Bigg) \\ &= \mathcal{P}_{\sigma,u}(x)\Bigg(\left(\frac{2\sigma n^-}{r}\right)^2(B(x,x)(u^x - x^x))\,\square(u^x - x^x) \\ &\quad+\frac{2\sigma n^-}{r}\sum_{\nu}(B(x,x)Q(u^x) - B(x,x)Q(x^x) - \mathrm{Id})e_\nu\,\square\,e_\nu\Bigg)\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\mathcal{P}_{\sigma,u}(x) = \mathcal{P}_{\sigma,u}(x) \Bigg(\left(\frac{2\sigma n^-}{r}\right)^2 & (B(x,x)(u^x - x^x)) \,\square\, (u^x - x^x) \\ & + \frac{2\sigma n^-}{r} \sum_\nu (B(x,x)Q(u^x) - Q(x) - \mathrm{Id}) e_\nu \,\square\, e_\nu \Bigg).\end{aligned}$$

L'invariance de $\mathcal{H}$ entraîne que pour montrer (4.4), il suffit de le prouver pour $x = 0$. En utilisant de nouveau les propriétés d'invariance de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{H}$, nous pouvons supposer que $u = e$. Alors

$$\mathcal{H}\mathcal{P}_{\sigma,e}(0) = \mathcal{P}_{\sigma,e}(0) \left(\left(\frac{2\sigma n^-}{r}\right)^2 e \,\square\, e + \frac{2\sigma n^-}{r} \sum_\mu (Q(e) - \mathrm{Id}) e_\mu \,\square\, e_\mu \right)$$

et 4.2.5 donne enfin

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\mathcal{P}_{\sigma,e}(0) &= \mathcal{P}_{\sigma,e}(0) \left(\left(\frac{2\sigma n^-}{r}\right)^2 \mathrm{Id} + \frac{n^+ - n^-}{r} . \frac{2\sigma n^-}{r} \mathrm{Id} - \frac{2\sigma n^-}{r} . \frac{n^+ + n^-}{r} \mathrm{Id} \right) \\ &= \frac{2n^-}{r}\sigma \left(\frac{2n^-}{r}\sigma + \frac{n^+ - n^-}{r} - \frac{n^+ + n^-}{r} \right) \mathcal{P}_{\sigma,e}(0)\mathrm{Id} \\ &= \left(\frac{2n^-}{r}\right)^2 \sigma(\sigma - 1)\mathcal{P}_{\sigma,e}(0)\mathrm{Id}.\end{aligned}$$

Annexe A

R-espaces symétriques

Nous reprenons ici les notations introduites au chapitre 1.

A.1 Algèbres de Kantor-Koecher-Tits

Soit V est un STJP, $\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(\mathrm{Str}(V)) = V \square V$ et $\widetilde{V} := \{\widetilde{v} | v \in V\}$. L'espace $\mathfrak{h}$ opère naturellement sur V et $\widetilde{V}$ par

$$X \cdot v = X(v), \quad X \cdot \widetilde{v} = -X^*(\widetilde{v}) \quad (X \in \mathfrak{h}, v \in V)$$

où X^* désigne l'adjoint de l'endomorphisme X de V par rapport au produit scalaire $\beta : (x, y) \mapsto \mathrm{Tr}(x \square y)$. On a le résultat suivant :

Théorème A.1.1 ([Loo71], Theorem 1). *(i) L'espace $\mathfrak{l} := V \oplus \mathfrak{h} \oplus \widetilde{V}$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie semi-simple réelle sans centre, comme suit :*

$$\begin{aligned} [X, Y] &= X \circ Y - Y \circ X & (X, Y \in \mathfrak{h}) \\ [X, u] &= -[u, X] = X \cdot u & (X \in \mathfrak{h}, u \in V \cup \widetilde{V}) \\ [\widetilde{v}, v'] &= -[v', \widetilde{v}] = 2v' \square v & (v, v' \in V) \end{aligned}$$

et

$$[V, V] = [\widetilde{V}, \widetilde{V}] = \{0\}.$$

(ii) Pour $X \in \mathfrak{h}$ et $v \in V$, l'application

$$\tau : \begin{cases} X & \mapsto -X^* \\ v & \mapsto \widetilde{v} \\ \widetilde{v} & \mapsto v \end{cases}$$

est une involution de Cartan de $\mathfrak{l}$.

(iii) $E := -\mathrm{Id}_V$ *est dans* $\mathfrak{h}$*, vérifie* $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{l}}E)^3 = \mathrm{ad}_{\mathfrak{l}}E$ *et les sous-espaces propres de* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{l}}Z$ *pour les valeurs propres* -1*,* 0 *et* 1 *sont respectivement* V*,* $\mathfrak{h}$ *et* $\widetilde{V}$*. L'élément* $E \in \mathfrak{h}$ *est appelé* opérateur d'Euler.

(iv) L'application qui vaut 1 *sur* $\mathfrak{h}$ *et* -1 *sur* $V \oplus \widetilde{V}$ *définit un automorphisme involutif* σ *de* $\mathfrak{l}$ *qui commute à* τ*.*

L'algèbre de Lie ainsi définie est appelée algèbre de Kantor-Koecher-Tits *du STJP V et est notée* $KKT(V)$*.*

On déduit de ce théorème que pour tout STJP $(V, \{\})$, il existe une algèbre de Lie semi-simple rélle $\mathfrak{l} := KKT(V)$ et un vecteur E dans $\mathfrak{l}$ vérifiant :

(i) On a la décomposition

$$\mathfrak{l} = V \oplus \mathfrak{h} \oplus \widetilde{V}$$

où V, $\mathfrak{h}$ et $\widetilde{V}$ sont les sous-espaces propres respectifs de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{l}}E$ pour les valeurs propres -1, 0 et 1 ;

(ii) On a

$$[V, V] = \left[\widetilde{V}, \widetilde{V}\right] = \{0\},\ [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h},\ \left[V, \widetilde{V}\right] \subset \mathfrak{h},\ [\mathfrak{h}, V] \subset V,\ \left[\mathfrak{h}, \widetilde{V}\right] \subset \widetilde{V}$$

ce qui veut dire que $\mathfrak{l}$ est 3-graduée ;

(iii) Il existe une involution de Cartan τ de $\mathfrak{l}$ telle que $\tau\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$, $\tau V = \widetilde{V}$ et

$$\{xyz\} = \frac{1}{2}\,[x, [\tau y, z]]\,;$$

(iv) Si σ désigne l'automorphisme involutif de $\mathfrak{l}$ qui vaut 1 sur $\mathfrak{h}$ et -1 sur $V \oplus \widetilde{V}$, alors $\tau\sigma = \sigma\tau$.

A.2 R-espaces symétriques

Soit L un groupe de Lie réel semi-simple connexe et P un sous-groupe parabolique de L. Alors L opère naturellement et de manière transitive sur la variété de drapeaux L/P. Il existe un sous-groupe compact maximal U de L tel que $L = UP$ donc le groupe $U \subset L$ opère aussi transitivement sur L/P, de sorte que

$$U/K \cong L/P$$

soit compact, où $K = P \cap U$.

Definition A.2.1.
On dit que $U/K = L/P$ est un *R-espace symétrique* si le couple (U, K) est une paire symétrique.

Par un résultat de Loos présenté dans [Loo71] et démontré dans [Loo85], les R-espaces symétriques sont, à isomorphisme près, en correspondance bijective avec les systèmes triples de Jordan réels positifs :

Théorème A.2.2 ([Loo71], Theorem 2). *Il existe une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de STJP et l'ensemble des R-espaces symétriques.*

Voici quelques éléments de preuve. Soient V un STJP et $\mathfrak{l} = KKT(V)$ (on reprend les notations de la section précédente).

Soit L le groupe de Lie réel connexe semi-simple et d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$, et $\mathfrak{l} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{m}$ la décomposition de Cartan de $\mathfrak{l}$ relative à τ, $\mathfrak{u}$ étant la sous-algèbre compacte maximale de $\mathfrak{l}$ correspondante. On note H le centralisateur de E dans L, U le sous-groupe compact maximal de L d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$, et $K = U \cap H$. On a

$$H = \{g \in L | \mathrm{Ad}_L(g)Z = Z\},$$

et $\mathfrak{h}$ est l'algèbre de Lie de H. Alors le couple (U, K) est une paire riemannienne symétrique associée à l'algèbre de Lie orthogonale symétrique $(\mathfrak{u}, \sigma_{|\mathfrak{u}})$. En effet, puisque τ et σ commutent, la décomposition

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u} \cap \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u} \cap (V \oplus \widetilde{V})$$

est la décomposition de Cartan de $\mathfrak{u}$ relative à $\sigma_{|\mathfrak{u}}$, involution de Cartan de $\mathfrak{u}$ dont l'ensemble des points fixes est $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{h}$. De plus, K est un sous-groupe compact de U d'algèbre de Lie $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{h}$, contenu dans H. Le L-normalisateur P de V est un sous-groupe parabolique de L et on a alors $U/K = L/P$. Ainsi, $M = U/K$ est un R-espace symétrique.

Réciproquement, reprenons l'argumentation de T. Nagano dans [Nag65]. Supposons que $M = U/K$ soit un espace riemannien symétrique compact, associé à une algèbre de Lie orthogonale symétrique $(\mathfrak{u}, \sigma)$, tel qu'il existe un groupe de Lie L semi-simple opérant transitivement sur M dont U est un sous-groupe de Lie de dimension strictement inférieure. Notons $\mathfrak{l}$ l'algèbre de Lie de L. Alors il existe une involution de Cartan τ de $\mathfrak{l}$ telle que :

(i) $\mathfrak{u}$ est une sous-algèbre compacte maximale de $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{m}$ est la décomposition de Cartan de $\mathfrak{l}$ relative à τ ;

(ii) Il existe un élément E non nul dans $\mathfrak{m}$ tel que $[E, \mathfrak{u}_1] = \{0\}$ et vérifiant $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{l}} Z)^2{}_{|\mathfrak{u}_{-1}} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{u}_{-1}}$, où $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{u}_{-1}$ est la décomposition de $\mathfrak{u}$ en sous-espaces propres de σ pour les valeurs propres ± 1.

On montre que σ se prolonge en un automorphisme involutif de $\mathfrak{l}$ (encore noté σ) tel que $\sigma\tau = \tau\sigma$ et tel que

$$\mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{l} | \sigma X = X\}, \quad \mathfrak{u}_{-1} \oplus [E, \mathfrak{u}_{-1}] = \{X \in \mathfrak{l} | \sigma X = -X\},$$

où $\mathfrak{q}$ désigne le complément orthogonal de $[E, \mathfrak{u}_{-1}]$ dans $\mathfrak{m}$ par rapport à la forme de Killing de $\mathfrak{l}$. En posant

$$\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{u}_1 \oplus \mathfrak{q}, \quad \mathfrak{l}_{\pm 1} = \{X \pm [E, X] \,|\, X \in \mathfrak{u}_{-1}\},$$

on obtient $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_{-1} \oplus \mathfrak{l}_0 \oplus \mathfrak{l}_1$ et

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{l}} E_{|\mathfrak{l}_j} = j \mathrm{Id}_{\mathfrak{l}}, \quad [\mathfrak{l}_j, \mathfrak{l}_k] \subset \mathfrak{l}_{j+k}, \quad \sigma_{|\mathfrak{l}_j} = (-1)^j \mathrm{Id}_{\mathfrak{l}_j}, \quad \tau(\mathfrak{l}_j) = \mathfrak{l}_{-j} \quad (j, k \in \{0, \pm 1\})$$

où $\mathfrak{l}_{\pm 2} := \{0\}$. Alors, l'application trilinéaire

$$\{xyz\} := \frac{1}{2} [x, [\tau y, z]] \quad (x, y, z \in \mathfrak{l}_{-1}),$$

munit $\mathfrak{l}_{-1}$ d'une structure de STJP.

Liste des notations

Notations générales

$[\lambda]$	partie entière du réel λ
$\mathcal{M}(n,m,\mathbb{K})$	espace des matrices de taille $n \times m$ à coefficients dans $\mathbb{K}$
$\mathcal{M}(n,\mathbb{K})$	$= \mathcal{M}(n,n,\mathbb{K})$
E_{ij}	les E_{ij} $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ forment la base canonique de $\mathcal{M}(n,m,\mathbb{K})$
$\mathbb{1}_n$	$:= \sum_{j=1}^{n} E_{jj}$, matrice identité de $\mathcal{M}(n,\mathbb{K})$
$\mathcal{S}ym(n,\mathbb{K})$	$:= \{A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K}) \mid {}^tA = A\}$
$\mathcal{A}sym(n,\mathbb{K})$	$:= \{A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K}) \mid {}^tA = -A\}$
$\overline{A}$	matrice conjuguée de A relativement à la conjugaison standard de $\mathbb{K}$
$\mathcal{H}erm(n,\mathbb{K})$	$:= \{A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K}) \mid {}^t\overline{A} = A\}$
$\mathcal{A}herm(n,\mathbb{K})$	$:= \{A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K}) \mid {}^t\overline{A} = -A\}$
$\mathrm{Rg}A$	rang de l'application linéaire A
$\mathrm{Det}A$	déterminant de l'endomorphisme linéaire A
$\mathrm{Tr}A$	trace de l'endomorphisme linéaire A
$A \gg 0$	signifie que l'endomorphisme linéaire A est défini positif
$End(V)$	espace des endomorphismes linéaires de l'espace vectoriel V
$GL(V)$	groupe linéaire de l'espace vectoriel V
$D_x f$	$u \mapsto \frac{d}{dt} f(x+tu)_{\mid t=0}$, différentielle de l'application f au point x
$D_x^2 f$	différentielle seconde de l'application f au point x
$\partial_v f$	$x \mapsto D_x f(v)$, dérivée partielle de f dans la direction de v
$J_f(x)$	$= \mathrm{Det}_{\mathbb{K}} D_x f$, jacobien de l'application f au point x
$T_x M$	espace tangent au point x de la variété différentiable M
G_o	composante connexe neutre du groupe topologique G
G^x	stabilisateur du point x sous l'action du groupe G
$\mathrm{Lie}(G)$	algèbre de Lie du groupe de Lie G
$[\cdot,\cdot]$	crochet de Lie
$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$	représentation adjointe de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$
$B_{\mathfrak{g}}$	forme de Killing de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$

Autres notations

V ou $(V,\{\})$	système triple de Jordan réel (STJ)	*p.7*
$V^{\mathbb{C}}$	$= V \oplus iV$, STJ hermitien complexifié de V	*p.9*
$x \square y$	opérateur $z \mapsto \{x,y,z\}$	*p.8*
$Q(x,z)$	opérateur $y \mapsto \{x,y,z\}$	*p.8*
$Q(x)$	$= Q(x,x)$	*p.8*
$B(x,y)$	$:= \mathrm{Id} - 2x \square y + Q(x)Q(y)$, opérateur de Bergman	*p.8*
$x \circ_a y$	$:= Q(x,y)a$, produit de Jordan défini par a	*p.9*
$V^{(a)}$	V muni du produit de Jordan $x \circ_a y$	*p.9*
$L_a(x)$	$:= x \square a$, opérateur de multiplication par x dans $V^{(a)}$	*p.9*
P_a	représentation quadratique de $V^{(a)}$, $x \mapsto P_a(x) = Q(x)Q(a)$	*p.9*
$P_a(x,y)$	$:= Q(x,y)Q(a)$	*p.9*
$B_a(x)$	$:= B(x,a)$, opérateur de Bergman dans $V^{(a)}$	*p.10*
$V_\alpha(e)$	$(\alpha = 0,1,2)$ sous-espaces de Peirce associés au tripotent e	*p.11*
$V_{ij}(e)$	$(0 \leq i \leq j \leq n)$ sous-espaces de Peirce associés à $e = e_1 + \ldots + e_n$	*p.13,20*
$x^\star$	$:= Q(e)x$, involution de Cartan de $V_2(e)$	*p.12,71*
$V^\pm(e)$	$:= \{x \in V_2(e) \vert x^\star = \pm x\}$	*p.12*
$V^\pm_{ij}(e)$	$:= V_{ij}(e) \cap V^\pm(e)\ (1 \leq i \leq j \leq n)$	*p.20*
$\langle x \rangle$	sous-espace plat engendré par x	*p.16*
$\vert x \vert$	norme spectrale de x	*p.22*
$\mathrm{rg}(x)$	rang de x	*p.24*
$V(\ell)$	ensemble des éléments de rang ℓ	*p.37*
$\beta(x,y)$	$:= \mathrm{Tr}(x \square y)$	*p.15*
$\delta_e(x,y)$	$:= \mathrm{Tr} L_e(x \circ_e y)$	*p.19*
$\mathrm{Aut}(V)$	groupe des automorphismes de $(V,\{\})$	*p.21*
$\mathfrak{k} := \mathrm{Der}(V)$	$\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(V))$, algèbre des dérivations de $(V,\{\})$	*p.21*
$\mathrm{Str}(V)$	groupe de structure de $(V,\{\})$	*p.37,74*
$\mathfrak{str}(V)$	$\mathrm{Lie}(\mathrm{Str}(V))$	*p.37,78*
$O(V,\beta)$	groupe β-orthogonal de V	*p.37,77*
$\mathrm{Aut}(V_2)$	groupe des automorphismes de l'algèbre de Jordan $V_2 := V_2(e)$	*p.75*
$\mathrm{Der}(V_2)$	$\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}(V_2)$, algèbre des dérivations de l'algèbre de Jordan V_2	*p.78*
x^y	quasi-inverse de x dans $V^{(y)}$	*p.41*
$\mathcal{X} := \mathcal{X}(V)$	compactification projective du STJP V	*p.43*
$KKT(V)$	algèbre de Lie de Kantor-Koecher-Tits associée à $(V,\{\})$	*p.138*
$\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$	domaine borné hermitien symétrique dans $V^{\mathbb{C}}$	*p.56*
$\mathcal{H}ol(\mathcal{D}_{\mathbb{C}})$	groupe des difféomorphismes holomorphes de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$	*p.56*
$G_{\mathbb{C}}$	composante connexe neutre du groupe de Lie réel $\mathcal{H}ol(\mathcal{D}_{\mathbb{C}})$	*p.56*
$K_{\mathbb{C}}$	$= \mathrm{Aut}(V^{\mathbb{C}})_o$, stabilisateur de 0 dans $G_{\mathbb{C}}$	*p.56*

$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$	$\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{C}})$	*p.56*
$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$	$\mathrm{Lie}(K_{\mathbb{C}})$	*p.56*
ξ_v	champ de vecteurs $z \mapsto v - Q(z)v$	*p.57,67*
$\mathcal{D}$	$= \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \cap V$, domaine borné symétrique réel dans V	*p.65*
$G(\mathcal{D})$	$:= \{g \in G_{\mathbb{C}} \vert g\mathcal{D} = \mathcal{D}\}$	*p.65*
G	composante connexe neutre de $G(\mathcal{D})$	*p.65*
K	$= \mathrm{Aut}(V)_o$, stabilisateur de 0 dans G	*p.21,65*
K^e	stabilisateur de e dans K	*p.96*
K^e_o	composante connexe neutre de K^e	*p.103*
$\mathfrak{g}$	$\mathrm{Lie}(G)$	*p.67*
$\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$	3-graduation de $\mathfrak{g}$	*p.80*
$\mathfrak{k}$	$\mathrm{Lie}(K)$	*p.21,67*
$\mathfrak{k}^e$	$\mathrm{Lie}(K^e)$	*p.79,96*
γ_e	transformation de Cayley partielle associé au tripotent e	*p.61*
$\jmath := \jmath_e$	inversion $x \mapsto x^{-1}$ dans l'algèbre de Jordan $V_2 := V_2(e)$	*p.71,87*
$V_2^{\times}$	ensemble des éléments inversibles dans V_2	*p.85*
Ω	cône symétrique des carrés inversibles de V^+	*p.66*
T_{Ω}	$= \Omega \oplus V^-$, domaine tube dans $V_2 = V^+ \oplus V^-$	*p.66,71*
$G(T_{\Omega})$	groupe des automorphismes du domaine symétrique T_{Ω}	*p.71*
L	composante connexe neutre de $G(T_{\Omega})$	*p.94*
$G(\Omega)$	$:= \{g \in GL(V) \vert g\Omega = \Omega, g^{\star} = g\}$	*p.91*
N^+	$:= \{x \mapsto x + v \vert v \in V^-\}$	*p.91*
N^-	$:= \jmath \circ N^+ \circ \jmath$	*p.97*
U	stabilisateur de e dans L	*p.98*
$\mathfrak{g}(T_{\Omega}) = \mathfrak{l}$	$\mathrm{Lie}(G(T_{\Omega}))$	*p.96,99*
$\mathfrak{l}_{-1} \oplus \mathfrak{l}_0 \oplus \mathfrak{l}_1$	3-graduation de $\mathfrak{l}$	*p.98*
$\mathfrak{g}(\Omega)$	$\mathrm{Lie}(G(\Omega))$	*p.96*
$\mathfrak{u}$	$\mathrm{Lie}(U)$	*p.99*
$g^{\star}$	$:= Q(e) \circ g \circ Q(e)$, conjugaison de Cartan dans $End(V)$	*p.72*
${}^T g$	adjoint de l'endomorphisme g relativement à δ_e	*p.73*
$\Sigma := \Sigma_e$	ensemble des tripotents maximaux de $V_2 := V_2(e)$	*p.85,87*
Σ^-	ensemble des tripotents maximaux de V^-	*p.105*
$\exp := \exp_e$	application exponentielle de l'algèbre de Jordan $V_2 := V_2(e)$	*p.86,87*
det	fonction déterminant de V_2	*p.85*
$\mathcal{S} := \mathcal{S}_e$	composante connexe de e dans Σ	*p.86,87*
T	relation de transversalité	*p.90*
$x_{\mathsf{T}} (x \in \Sigma)$	ensemble des éléments de Σ transverses à x	*p.90*
$\mu(x, y)$	rang de $x - y$	*p.109*
$e_{p,q}$	$:= \sum_{i=1}^{p} e_i - \sum_{j=p+1}^{p+q} e_j$	*p.37*
s	rang réel du STJ V^-	*p.111*
$\mathcal{S}^2_{\mathsf{T}}$	couples d'éléments transverses de $\mathcal{S}$	*p.114*
$\mathcal{S}^3_{\mathsf{T}}$	triplets d'éléments de $\mathcal{S}$ deux à deux transverses	*p.115*

n	$= \dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}}$	*p.123*
g	genre de $\mathcal{D}$	*p.123*
$\mathrm{g}_{\mathbb{C}}$	genre de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$	*p.123*
$r_{\mathbb{C}}$	rang réel de $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$	*p.123*
$\langle x, y\rangle$	$:= \frac{1}{\mathrm{g}}\mathrm{Tr}(x \,\square\, y)$	*p.124*
h	norme générique	*p.124*
h^{σ}	fonction $x \mapsto \mathrm{h}(x,x)^{\sigma}$, $\sigma \in \mathbb{R}$	*p.131*
h_u^{σ}	fonction $x \mapsto \mathrm{h}(x,u)^{\sigma}$, $\sigma \in \mathbb{R}$	*p.131*
$n^{\pm}$	$= \dim V^{\pm}$	*p.126*
$\mathcal{H}$	opérateur de Hua	*p.126*
$\frac{\partial}{\partial x}$	gradient	*p.126*
$\mathcal{P}$	noyau de Poisson	*p.127*
$\mathcal{P}_{\sigma,u}$	fonction $x \mapsto \mathcal{P}(x,u)^{\sigma}$, $\sigma \in \mathbb{R}$	*p.129*

Références

[AU02] J. Arazy and H. Upmeier, *Weyl calculus for complex and real symmetric domains*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. **13** (2002), no. 3-4, p.165–181, Harmonic analysis on complex homogeneous domains and Lie groups (Rome, 2001).

[Berg57] M. Berger, *Les espaces symétriques noncompacts*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Sér. 3 **74** (1957), no. 2, p.85–177.

[Ber96a] W. Bertram, *Un théorème de Liouville pour les algèbres de Jordan*, Bull. Soc. Math. France **124** (1996), p.299–327.

[Ber96b] ———, *On some Causal and Conformal Groups*, J. Lie Theory **6** (1996), p.215–244.

[Ber00a] ———, *Conformal group and fundamental theorem for a class of symmetric spaces*, Math. Z. **233** (2000), p.39–73.

[Ber00b] ———, *The Geometry of Jordan and Lie Structures*, Lectures Notes in Mathematics, vol. 1754, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2000.

[BN04] W. Bertram and K.-H. Neeb, *Projective completions of Jordan pairs. part I : The generalized projective geometry of a Lie algebra*, Journal of Algebra **227** (2004), p.474–519.

[BN05] ———, *Projective completions of Jordan pairs. part II : Manifold structures and symmetric spaces*, Geometriae Dedicata **112** (2005), p.73–113.

[BK66] H. Braun and M. Koecher, *Jordan-Algebren*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.

[Ch10] J. Chenal, *Structures géométriques liées aux algèbres de Lie graduées*, Ph.D. thesis, Université Henri Poincaré, Nancy 1, France, 2010.

[Cle04] J.-L. Clerc, *L'indice de Maslov généralisé*, J. Maths. Pures Appl. **83** (2004), p.99–114.

[Cle07] ———, *An invariant for triples in the Shilov boundary of a bounded symmetric domain*, Comm. in Anal. and Geom. **15** (2007), p.147–174.

[CK07] J.-L. Clerc and K. Koufany, *Primitive du cocycle de Maslov généralisé*, Math. Ann. **337** (2007), p.91–138.

[CN06] J.-L. Clerc and K.-H. Neeb, *Orbits of triples in the Shilov boundary of a bounded symmetric domain*, Transform. Groups **11** (2006), p.387–426.

[CØ01] J.-L. Clerc and B. Ørsted, *The Maslov index revisited*, Transform. Groups **6** (2001), p.303–320.

[EU09] M. Englis and H. Upmeier, *Toeplitz quantization and asymptotic expansions : geometric construction*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **5** (2009), Paper 021, 30.

[EU10] ———, *Toeplitz quantization and asymptotic expansions : Peter-Weyl decomposition*, Integral Equations Operator Theory **68** (2010), no. 3, p.427–449.

[FK94] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on symmetric cones*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[FK+00] J. Faraut, S. Kaneyuki, A. Korányi, Q.-k. Lu, and G. Roos, *Analysis and Geometry on Complex Homogeneous Domains*, Progress in Mathematics, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2000.

[Helg62] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, Inc. LTD, London, 1962.

[Helg78] ———, *Differential geometry, Lie groups, and Symmetric spaces*, Academic Press, 1978.

[Hel69] K.-H. Helwig, *Halbeinfache reelle Jordan-Algebren*, Math. Z. **109** (1969), p.1–28.

[Hel70] ———, *Jordan-Algebren und symmetrische Räume. I*, Math. Z. **115** (1970), p.315–349.

[JK80] K. Johnson and A. Korányi, *The Hua operators on bounded symmetric domains of tube type*, Ann. of Math. (2) **111** (1980), no. 3, p.589–608.

[KanK85] S. Kaneyuki and M. Kozai, *Paracomplex structures and affine symmetric spaces*, Tokyo J. Math. **8** (1985), p.81–98.

[Kan85] S. Kaneyuki, *On classification of parahermitian symmetric spaces*, Tokyo J. Math. **8** (1985), p.473–482.

[Kan88] ———, *The Sylvester's law of inertia for Jordan algebras*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **64** (1988), no. 8, p.311–313.

[Kan98] ———, *The Sylvester's law of inertia in simple graded Lie algebras*, J. Math. Soc. Japan **50** (1998), no. 3, p.593–614.

[Kan00] ———, *Compactification of Parahermitian Symmetric Spaces and its Applications, I : Tube-type Realizations*, Lie theory and its applications in physics, World Sci. Publ., River Edge, NJ (2000).

[Kan03] ———, *Compactification of Parahermitian Symmetric Spaces and its Applications, II : Stratifications and Automorphism Groups*, Jornal of Lie Theory **13** (2003), p.533–561.

[KA88] S. Kaneyuki and H. Asano, *Graded Lie algebras and generalized Jordan triple systems*, Nagoya Math. J. **112** (1988), p.81–115.

[KG98] S. Kaneyuki and S. Gindikin, *On the automorphism groups of the generalized conformal structure of a symmetric r-space*, Differential Geom. Appl. **8** (1998), p.21–33.

[Kou94] K. Koufany, *Réalisation des espaces symétriques de type Cayley*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **318** (1994), no. 5, p.425–428.

[Kou95] ———, *Semi-groupe de Lie associé à un cône symétrique*, Ann. Inst. Fourier, tome 45 (1995), no. 1, p.1–29.

[KZ06] K. Koufany and G. Zhang, *Hua operators and Poisson transform for bounded symmetric domains*, J. Funct. Anal. **236** (2006), no. 2, p.546–580.

[Las84] M. Lassalle, *Systèmes triples de Jordan, R-espaces symétriques et équations de Hua*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **298** (1984), no. 20, p.501–504.

[Loo69] O. Loos, *Symmetric Spaces (Parts I & II)*, W.A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

[Loo71] ———, *Jordan Triple Systems, R-spaces, and Bounded Symmetric Domains*, Bull. Amer. Math. Soc. **77** (1971), no. 4, p.558–561.

[Loo75] ———, *Jordan Pairs*, Lectures Notes in Mathematics, vol. 460, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[Loo77] ———, *Bounded symmetric domains and Jordan pairs*, Mathematical Lectures, University of California at Irvine, 1977.

[Loo85] ———, *Charakterisierung symmetrischer R-Räume durch ihre Einheitsgitter*, Mathematische Zeitschrift **189** (1985), no. 2, p.211–226.

[McC78] K. McCrimmon, *Jordan algebras and their applications*, Bull. Amer. Math. Soc. **84** (1978), no. 4, p.612–627.

[Nag65] T. Nagano, *Transformation Groups on Compact Symmetric Spaces*, Transactions of the American Mathematical Society **118** (1965), p.428–453.

[Neh79] E. Neher, *Cartan-Involution von halbeinfachen reellen Jordan-Tripelsystemen*, Math. Z. **169** (1979), p.271–292.

[Neh80] ———, *Klassifikation der einfachen reellen speziellen Jordan-Tripelsysteme*, Manuscripta Math. **31** (1980), p.197–215.

[Neh81] ———, *Klassifikation der einfachen reellen speziellen Ausnahme-Jordan-Tripelsysteme*, J. Reine Angew. Math. **322** (1981), p.145–169.

[Neh85] ———, *On the classification of Lie and Jordan triple systems*, Comm. Algebra **13** (1985), no. 12, p.2615–2667.

[Roo92] G. Roos, *Algèbres de composition, Systèmes Triples de Jordan Exceptionnels*, dans G. Roos, J.-P. Vigué, *Systèmes triples de Jordan et domaines bornés symétriques*, Travaux en cours, vol. 43, Hermann, Paris, 1992.

[Sat80] I. Satake, *Algebraic Structures of Symmetric Domains*, Iwanami Shoten, Publishers and Princeton University Press, 1980.

[Sat84] ———, *A formula in simple Jordan algebras*, Tôhoku Math. Journ. **36** (1984), p.611–622.

[Shi96] N. Shimeno, *Boundary Value Problems for the Shilov Boundary of a Bounded Symmetric Domain of Tube Type*, J. Funct. Anal. **140** (1996), p.124–141.

[Tak65] M. Takeuchi, *Cell decompositions and Morse equalities on certain symmetric spaces*, Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo, Section 1 **12** (1965), p.81–192.

Quelques aspects géométriques et analytiques des domaines bornés symétriques réels

Dans cette thèse, nous étudions quelques problèmes géométriques liés aux *domaines bornés symétriques réels*. Ces espaces sont des espaces $\mathcal{D} = G/K$ riemanniens symétriques non compacts, obtenus à partir de domaines bornés hermitiens symétriques.

Lorsque le domaine $\mathcal{D} = G/K$ est de type C_r ou D_r, G opère transitivement sur chaque composante connexe de l'ensemble Σ des *tripotents maximaux* du *système triple de Jordan réel positif* $T_0\mathcal{D}$. Dans le cas complexe, cet ensemble est connexe et est appelé *frontière de Shilov* du domaine. Dans le cas réel, Σ n'est en général pas connexe. Nous fixons donc une composante connexe $\mathcal{S}$ de Σ. Alors l'action de G sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ possède un nombre fini d'orbites et nous donnons un système explicite de représentants. Si le domaine est de type C_s ou D_{2s}, alors parmi ces orbites, il y a celle des couples d'éléments *transverses*. Sous ces hypothèses, nous pouvons alors définir l'ensemble des triplets d'éléments de $\mathcal{S}$ transverses deux à deux, sur lequel G opère. Là encore, nous déterminons les orbites de cette action.

Enfin, nous nous intéressons à un problème analytique concernant un système de Hua. Nous montrons que pour toute fonction continue φ sur $\mathcal{S}$, la transformée de poisson $f = \mathcal{P}_\sigma\varphi := \int_{\mathcal{S}} \mathcal{P}(\cdot, u)^\sigma \varphi(u)du$ est solution du système de Hua $\mathcal{H}f(x) = (\frac{2n^-}{r})^2\sigma(\sigma-1)f(x)\mathrm{Id}$, où $\mathcal{P}(\cdot,\cdot)$ est le noyau de Poisson sur $\mathcal{D} \times \mathcal{S}$ et où n^- désigne la dimension de V^-.

Some geometric and analytic aspects of real bounded symmetric domains

In this thesis, we are interested in geometric problems related with *real bounded symmetric domains.* These spaces are Riemannian symmetric spaces $\mathcal{D} = G/K$ of noncompact type, constructed from *hermitian bounded symmetric domains.*

When $\mathcal{D} = G/K$ is of type C_r or D_r, we prove that G acts transitively on each connected component of the set Σ of *maximal tripotents* in the *compact Jordan triple system* $T_0\mathcal{D}$. In the hermitian case, this set is connected and is called *the Shilov boundary.* In the real case, Σ is not necessarily connected, thus we choose a connected component $\mathcal{S}$ of Σ. Then the action of G in $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ as a finite number of orbits for wich we give representative elements. If $\mathcal{D}$ is of type C_s or D_{2s}, then the set of couples of transversal elements of $\mathcal{S}$ is a G-orbit in $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$. Under these assumptions, G acts on the set of transversal triples in $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ and we determine the orbits for this action.

Finally, we are interested in Hua differential systems. We prove that for any continuous function φ on $\mathcal{S}$, the Poisson transform $f = \mathcal{P}_\sigma\varphi := \int_{\mathcal{S}} \mathcal{P}(\cdot, u)^\sigma \varphi(u)du$ is a solution of the Hua system $\mathcal{H}f(x) = (\frac{2n^-}{r})^2\sigma(\sigma-1)f(x)\mathrm{Id}$, where $\mathcal{P}(\cdot,\cdot)$ is the Poisson kernel on $\mathcal{D} \times \mathcal{S}$ and n^- is the dimension of V^-.

Mots-clés : systèmes triples de Jordan, algèbres de Jordan, domaines bornés symétriques, R-espaces symétriques, frontière de Shilov, transformations de Cayley, domaines de Siegel, noyaux de Poisson, équations de Hua.