



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Nancy-Université

Faculté des Sciences et Technologies
Ecole doctorale IAEM Lorraine
Département de Formation Doctorale Automatique



THÈSE

Présentée et soutenue publiquement pour l'obtention du titre de

DOCTORAT de l'Université Henri Poincaré

Mention : Automatique, Traitement du Signal et Génie Informatique

par

Abdouramane MOUSSA ALI

Diagnostic sans modèle *a priori*

le 20 Avril 2011

Jury

Rapporteurs :	M. Michel KINNAERT	Professeur à l'Université Libre de Bruxelles
	M. Mamadou MBOUP	Professeur à l'Université de Reims Champagne-Ardenne
Examineurs :	M. Luc JAULIN	Professeur à l'ENSTA de Bretagne
	M. Jean-François LAFAY	Professeur à l'École Centrale de Nantes
	M. Frédéric HAMELIN	Professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy
	M. Cédric JOIN	Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré, Nancy

CENTRE DE RECHERCHE EN AUTOMATIQUE DE NANCY (CNRS UMR 7039)
FACULTÉ DES SCIENCES & TECHNOLOGIES - 54506 VANDŒUVRE-LÈS-NANCY

Table des matières

Résumé	vii
Abstract	viii
Introduction	1
1 Diagnostic des systèmes dynamiques	5
1 Qu'est-ce que le diagnostic	5
2 Approches classiques à base de modèle explicite	9
2.1 Introduction	9
2.2 Méthodes de génération de résidus.	12
2.3 Notes bibliographiques et historiques	19
2.4 Critique des approches basées sur des modèles analytiques	22
3 Notions d'approches intégrées	23
3.1 Commande adaptative	23
3.2 Approche par sous-espace	27
3.3 Commande sans modèle	33
4 Conclusion	34
2 Méthode algébrique de diagnostic de défauts	37
1 Introduction	37
2 Base algébrique de l'approche	39
2.1 Rappel sur les distributions (Schwartz (1966))	39
2.2 Signaux structurés et annihilateurs	43
2.3 Modèles de défauts	44
3 Principales étapes de la méthode	46
3.1 Préambule	46
3.2 Système avec défaut actionneur	47
3.3 Système avec défaut capteur	51
3.4 Système avec défaut actionneur et défaut capteur	55
3.5 Cas général	58

4	Prise en compte d'informations a priori	62
4.1	Un exemple simple	64
4.2	Application numérique	66
5	Étude d'un système MIMO	67
5.1	Introduction	67
5.2	Étude du cas de défaut actionneur	69
5.3	Étude de cas - défaut capteur	72
6	Conclusion	74
3	Mise en œuvre de la méthode (Analyses théoriques)	75
1	Étude de la robustesse par rapport à l'ordre du système	75
1.1	Sur-modélisation	76
1.2	Sous-modélisation	78
2	Robustesse par rapport aux bruits de mesure	81
2.1	Introduction	81
2.2	Analyse fréquentielle des générateurs des relations de redondance	82
2.3	ϵ -pseudospectre de faisceau de matrices $A - \lambda B$	87
2.4	Exemple d'illustration	90
3	Robustesse par rapport à la structure du défaut	91
3.1	Sur-estimation de l'ordre des défauts	92
3.2	Sous-estimation de l'ordre des défauts	94
4	Étude locale : Fenêtre glissante	95
4.1	Introduction	95
4.2	Application au diagnostic des systèmes linéaires à commutation	99
	Conclusion	107
	Bibliographie	109
	Annexe	119
A	Décompositions matricielles	119
A.1	Décomposition QR	119
A.2	Décomposition QZ	120
A.3	Décomposition en valeurs singulières (SVD)	120
B	Calcul du pseudospectre de faisceau de matrices	121
B.1	Cas carrée ($m = n$)	121
B.2	Cas rectangulaire, $m \geq 2n$	122
B.3	Cas rectangulaire, $m < 2n$	122

Table des figures

1.1	Structure générale d'un système de diagnostic	6
1.2	Schéma fonctionnel du filtre de Kalman	13
1.3	Schéma fonctionnel d'un observateur de diagnostic	16
1.4	Schémas de principe de la commande adaptative	25
1.5	Un exemple simple de commande adaptative indirect	26
1.6	Commande sans modèle	34
2.1	Évolution temporelle de différents types de défauts	46
2.2	Système avec défaut actionneur et défaut capteur.	47
2.3	Système du premier ordre simulé avec un biais actionneur	50
2.4	Système du premier ordre simulé avec un biais capteur	53
2.5	Système du premier ordre en présence de dérive capteur	55
2.6	Commande	57
2.7	Sortie	57
2.8	Évolution temporelle de τ_a et l_a	57
2.9	Évolution temporelle de $\tau_a + 2\tau_c$ et l_c	57
2.10	Schéma fonctionnel de l'approche algébrique	61
2.11	Résultats de simulation avec prise en compte de connaissance a priori	66
2.12	Système à une entrée et deux sorties avec un biais d'actionneur	72
2.13	Système à une entrée et deux sorties avec un biais de capteur	74
3.1	Système d'ordre 1 diagnostiqué par un modèle d'ordre 2	78
3.2	Résultats obtenus avec $0.3\ddot{y} + 4.2\dot{y} + 9y = 9u$	80
3.3	Résultats obtenus avec $4\ddot{y} + 4.2\dot{y} + 9y = 9u$	81
3.4	Générateur de $A_i(j, :)$	83
3.5	Diagrammes de bode avec $p = 2;3;4;5;6$	85
3.6	Diagrammes de bode avec $i = 1;2;3$	86
3.7	Diagrammes de bode correspondant à $w = 0.3$ et $p = 2, \dots, 6$	87
3.8	Système du 1 ^{er} ordre en présence d'un défaut actionneur et d'un bruit de mesure	91

3.9 Robustesse par rapport à la structure du défaut 95

3.10 Système du 2^{nd} ordre en présence d'un défaut actionneur intermittent 99

3.11 Évolution temporelle du paramètre θ 101

3.12 Système d'ordre 1 à deux modes de fonctionnement avec $|\tau_a - t_c| > \Delta t$ 104

3.13 Système d'ordre 1 à deux modes de fonctionnement avec $|\tau_a - t_c| < \Delta t$ 105

Résumé

Ce travail contribue à développer une nouvelle approche algébrique et déterministe de diagnostic qui ne nécessite pas la connaissance *a priori* d'un modèle explicite du système. Il présente un nouveau point de vue basé sur la théorie des distributions et l'analyse du pseudospectre de faisceaux de matrices. Notre démarche s'inspire de certains outils et développements de la théorie de l'estimation algébrique courants en automatique et traitement du signal. Le principal atout de cette approche est qu'il est possible, sous certaines hypothèses, de détecter, localiser et identifier les défauts à l'aide des seules mesures de la commande et de la sortie sans avoir à estimer les paramètres du modèle. Nous considérons que les défauts actionneur et capteur sont modélisés par des signaux structurés. La méthode exploite le fait qu'un signal structuré satisfait une équation différentielle. La prise de décision est entièrement fondée sur l'évolution temporelle des estimations de certaines caractéristiques constantes des défauts. L'efficacité de l'approche présentée est illustrée au travers d'exemples académiques.

Abstract

This work contributes to develop a new algebraic and deterministic approach of fault diagnosis, which is not based on an a priori explicit model of the process and presents a new perspective based on the theory of distributions and the pseudospectra analysis of matrix pencils. Our approach is based on certain tools and developments in the theory of algebraic estimation usual in automatic signal processing communities. The considered systems form a particular class of uncertain linear dynamical systems. The treated faults are actuator and sensor faults modeled through structured signals. The main advantage of this new approach is to realize fault diagnosis only from knowledge of input and output measurements and without identifying explicitly model parameters. The method exploits the fact that a structured signal satisfies a differential equation. The decision is entirely based on the temporal evolution of the estimates of some constant features of the fault. The effectiveness of the proposed approach is illustrated through academic examples.

Remerciements

Afin de contourner la difficulté de l'exercice de la page de remerciement qui tient dans le fait de n'oublier personne, je remercie par avance ceux dont le nom n'apparaît pas dans cette page et que j'ai eu le bonheur de croiser fréquemment et volontairement, durant ma vie d'apprenti chercheur. Ils se reconnaîtront.

La première personne que je tiens à remercier est le Pr. Frédéric Hamelin, mon directeur de thèse, qui a su me laisser la liberté nécessaire à l'accomplissement de mes travaux, tout en y gardant un œil critique et avisé. Nos continuelles oppositions, contradictions et confrontations ont sûrement été la clé de notre travail commun. Je tiens à exprimer ma chaleureuse gratitude à Cédric Join "mon chef", qui a co-encadré mon travail de recherche avec patience et disponibilité. Son aide précieuse a, de nombreuses fois, permis d'orienter efficacement mes efforts. Nonobstant, leurs relectures méticuleuses de chacun des chapitres m'a sans aucun doute permis de préciser mon propos. J'espère que cette thèse sera un remerciement suffisant au soutien et à la confiance sans cesse renouvelée dont ils ont fait preuve en mon égard. C'est un honneur pour moi d'avoir eu l'occasion de travailler et d'apprendre aux côtés de personnes ayant des qualités humaines exceptionnelles. J'espère que la fin de cette thèse n'est que le début d'une collaboration sans cesse grandissante.

Je remercie vivement les rapporteurs de ce mémoire de thèse, le Professeur Michel Kinnaert de l'université de Bruxelles et le Professeur Mamadou Mboup de l'université de Rennes. Je leur suis très reconnaissant pour avoir bien voulu consacrer de leur temps à l'étude de mes travaux. Merci pour leurs lectures, leurs attentions, leurs remarques et suggestions.

Un grand merci au Professeur Luc Jaulin de m'avoir fait l'honneur d'examiner mes travaux. Merci pour ses critiques et ses corrections minutieuses qui ont contribué à peaufiner ce mémoire. J'ai été très heureux de compter parmi mon jury le Professeur Jean-François Lafay. Je le remerci de m'avoir fait l'honneur d'examiner mes travaux et d'avoir accepté de présider ce jury.

Mes remerciements vont aussi à ma famille et mes amis qui, avec cette question récurrente, « quand est-ce que tu la soutiens cette thèse ? », bien qu'angoissante en période fréquente de doutes, m'ont permis de ne jamais dévier de mon objectif final.

Je remercie également en vrac tous ceux et toutes celles avec qui j'ai partagé une pause café, échangé quelques mots, quelques blagues ou juste un sourire dans le couloir ou sur les marches du bâtiment. Tout particulièrement le grand "Chef" Dominique, le "blagueur" Didier, Christophe, Jean-Christophe, Samir, Sébastien, Patrick, Marion, Hugues, Thierry, Jean-Marie, Joseph, Philippe, David, El Hadi, Eric, Cheick, Esma, Neila, Jérémy, etc.

Je n'oublie pas dans ces remerciements mes différents amis et voisins de bureau (passés et présents) qui ont rendu mon séjour de thèse très agréables : Christian Cuzzocréa, Junbo, Tushar, Adriana, Rim, Sinuhé, Briand, Kamel, Simona, Sonia, Zeinab, Hossein, Ahmed, Ghassane, Karim, Boumeydine, Vincent, Souleymen, etc.

Merci aux membres du Département GEII de l'IUT de Nancy-brabois pour leur accueil, leur soutien et leur confiance renouvelée lors mes années de monitorat. Merci à Franck Joly, Frédéric Sarry, Christian Saunal, Annie, Caroline Bardot, etc. J'ai eu l'honneur et la chance d'avoir comme tuteur le Pr. Taha Boukhobza, mon "Parrain". Je le remercie pour son accueil, son aide et ses conseils, sa patience et sa disponibilité infinie.

Enfin, je ne pourrais terminer ces remerciements sans mentionner la formidable secrétaire, Sabine Huraux. Merci pour ta disponibilité, ton investissement et par-dessus tout ta gaieté.

Nomenclature

A^T	: transposée de la matrice A
I_{mn}	: matrice $m \times n$ de coefficients égale à 1 sur la diagonale principale et 0 ailleurs
A^\perp	: matrice orthogonale à A (i.e $A^\perp A = 0$)
$A(1 : m, :)$: les m premières lignes de la matrice A
A^\dagger	: pseudoinverse de la matrice A
$\Lambda_\epsilon(A, B)$: pseudospectre de faisceaux de matrice $A - \lambda B$
$\mathbf{\Lambda}(A, B)$: ensemble des $\Lambda_\epsilon(A, B)$ non vides
$\sigma_{min}(A)$: plus petite valeur singulière de la matrice A
$f^{(m)}$: dérivée d'ordre m de l'application f
$f^{\star k}$: Convolution successive de l'application $f : f \star f \star \dots \star f$ (k fois)
H	: Fonction de Heaviside
δ	: Distribution de Dirac
δ_τ	: Distribution de Dirac retardé ($\delta(t - \tau)$)
$ordr(T)$: Ordre de la distribution T
$supp(T)$: Support de la distribution T

Introduction

Durant les vingt dernières années, le diagnostic des défauts affectant les systèmes linéaires invariants a été largement étudié. Un grand nombre de méthodes est disponible visant la conception de système de diagnostic pour un modèle donné du système.

Les méthodes de diagnostic à base de modèle utilisent les équations mathématiques explicites du processus. Le plus souvent, les systèmes traités sont des systèmes dynamiques caractérisés par une équation à temps continu. Leur description mathématique peut être une équation différentielle ou une représentation équivalente par transformation (Laplace). Toutefois, bien que la plupart des systèmes physiques soient non linéaires, leurs descriptions mathématiques reposent sur des approximations linéaires.

La majeure partie des méthodes à base de modèle repose souvent sur le concept de *redondance analytique*. Les relations de redondance analytique sont déduites d'un modèle analytique et admettent pour entrées uniquement les variables mesurées. L'idée peut être étendue à la comparaison de deux quantités générées analytiquement, obtenues à partir de différents ensembles de variables. Cette comparaison appelée *résidu*, indique l'occurrence de défauts sur le système. D'autres méthodes à base de modèle reposent directement sur *l'estimation* des paramètres du système.

Les synthèses modernes de résidus demandent une connaissance très fine du système à commander ou à diagnostiquer. L'écriture d'un modèle précis demande une compréhension détaillée des mécanismes tout en utilisant les lois de la physique. Les modèles obtenus de cette façon sont appelés modèles de connaissance. Ils font intervenir des paramètres physiques qui, par définition, sont mesurables à l'aide d'expériences pas nécessairement en rapport avec l'utilisation habituelle du système.

Cependant, dans certains cas pratiques, ces paramètres ne peuvent être évalués a priori. Par ailleurs, la fiabilité donnée par les modèles de connaissance est en général accompagnée par l'inconvénient d'une trop grande complexité. Ces modèles peuvent

ne pas être utilisables en pratique et on doit souvent en réduire la complexité.

C'est ainsi, qu'a été introduite la notion d'approches intégrées considérant simultanément la modélisation et le diagnostic. L'une des approches intégrées la plus étudiée et ayant des succès industrielles est l'approche de diagnostic par Analyse en Composantes Principales notée ACP. Une limitation importante de ces approches est que le modèle ACP, une fois élaboré à partir des données, est stationnaire (invariant dans le temps), alors que la plupart des systèmes réels présentent généralement des comportements variant avec le temps (dû au vieillissement par exemple). De plus l'identification, de manière implicite des matrices du système fournie par l'approche, comporte des incertitudes paramétriques rendant indispensable la condition de persistance d'excitation pour la génération de résidus robustes à ces incertitudes.

Le travail présenté dans ce mémoire contribue à développer une nouvelle approche algébrique et déterministe de diagnostic qui présente un nouveau point de vue basé sur la théorie des distributions et l'analyse du pseudospectre de faisceaux de matrices. Notre démarche s'inspire de certains outils et développements de la théorie de l'estimation algébrique (Fliess & Sira-Ramirez (2003), Belkoura & Richard (2006)) courants en automatique mais très peu usuels en traitement du signal.

Dans ce travail nous nous sommes intéressés au diagnostic basé sur le comportement dynamique continu du procédé. Cette approche repose uniquement sur la connaissance structurelle du système et des signaux défauts. Plus précisément nous avons focalisé notre recherche sur les défauts additifs dits "structurés" provenant des capteurs et des actionneurs du système supposé régis par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

L'une des propriétés importantes et hautement souhaitables pour un système de diagnostic est sa réactivité et sa précision. Or dans une approche stochastique, la connaissance *a priori* d'informations statistiques du bruit et/ou des signaux traités est très importante. De plus la performance de nature asymptotique avec les retards de traitement sont inhérents à une approche stochastique. Dans ce contexte une approche algébrique et déterministe dévient intéressante. Même si le cadre déterministe a souvent été déconsidéré essentiellement en raison de la sensibilité des méthodes aux bruits, une telle approche peut se révéler efficace lorsqu'elle est abordée dans un cadre théorique approprié.

La méthode proposée exploite les caractéristiques continues des signaux. La connaissance des signaux entrée et sortie traités en temps continu, permet le diagnostic de défauts sur une fenêtre de temps très courte. De plus, la propriété non

asymptotique de la méthode et la rapidité des estimations, liée aux formules explicites fournies par les techniques algébriques, peut être un atout majeur lors de l'accommodation des défauts.

En revanche, non seulement les méthodes déterministes ont besoin de la connaissance de l'ordre du système, mais en plus s'y montrent sensibles.

Le mémoire comporte trois chapitres. Une revue non exhaustive des méthodes classiques de détection et de localisation des défauts affectant les systèmes dynamiques est proposée dans le premier chapitre. La terminologie du domaine et l'analyse du terme diagnostic est donnée. Ensuite, nous rappelons la notion d'approches intégrées considérant simultanément l'identification, la conception de la commande et/ou le diagnostic. Le deuxième chapitre est dédié à la présentation de l'approche de diagnostic proposée. On adopte pour cela des formulations distributionnelles grâce auxquelles, d'une part, nous obtenons des expressions explicites dans le domaine temporel et d'autre part, nous pouvons transformer le problème de détection de défauts en un problème de recherche de valeurs propres généralisées. Ainsi ni la connaissance, ni l'estimation des paramètres du modèle sont nécessaires à la détection de défauts. Nous commençons tout d'abord par introduire les bases algébriques sur lesquelles repose notre approche. Ensuite nous développons, en nous basant sur un exemple académique simple, les différentes étapes de celle-ci. Le système considéré sera toujours modélisé par une équation différentielle linéaire, dans ce cas la connaissance, au moins approximative, de son ordre est importante. Le chapitre trois abordera quelques aspects de mise en œuvre de la méthode, en particulier la robustesse par rapport aux bruits de mesure, à l'ordre du système et à la structure des défauts.

Chapitre 1

Diagnostic des systèmes dynamiques

Ce chapitre introductif se veut être une revue non exhaustive des méthodes de détection et de localisation de défauts. On s'intéresse à la détection et au diagnostic de défauts sur les systèmes tels que les installations de production, les machines, les véhicules, les appareils électroménagers, etc. Dans cette section, on décrira ce qu'on entend par défaut et on spécifiera les tâches menant au diagnostic.

1 Qu'est-ce que le diagnostic

Le diagnostic est utilisé à l'origine dans le domaine médical. Ce terme signifie le raisonnement menant à l'identification de la cause (l'origine) d'une défaillance, d'un problème ou d'une maladie à partir des caractères ou symptômes relevés par des observations, des contrôles ou des tests (il s'agit donc d'acquérir des connaissances à travers les signes observables).

Comme dans son acception médicale, le diagnostic des systèmes automatiques consiste à remonter des symptômes perçus vers les causes. Les symptômes peuvent être des écarts constatés entre des valeurs mesurées ou estimées à partir d'un processus et des valeurs présumées. Les symptômes sont mis en évidence par des signaux indicateurs de défauts appelés résidus.

Le schéma général de diagnostic de système automatique peut être illustré comme sur la figure (1.1) où le module de diagnostic, alimenté par la connaissance disponible sur le système, produit une liste de défauts possibles apparus sur le système au cours du temps. Dans cette représentation, le contrôleur est supposé être toujours en fonctionnement normal et seuls les composants actionneur, système et/ou capteur

sont sujet à des défaillances imprévues.

La connaissance disponible inclut, non seulement, les sorties du contrôleur (qui a pour but d'améliorer les performances du systèmes), les mesures fournies par les capteurs mais aussi, le plus souvent, des informations sur la structure et/ou un modèle du système.

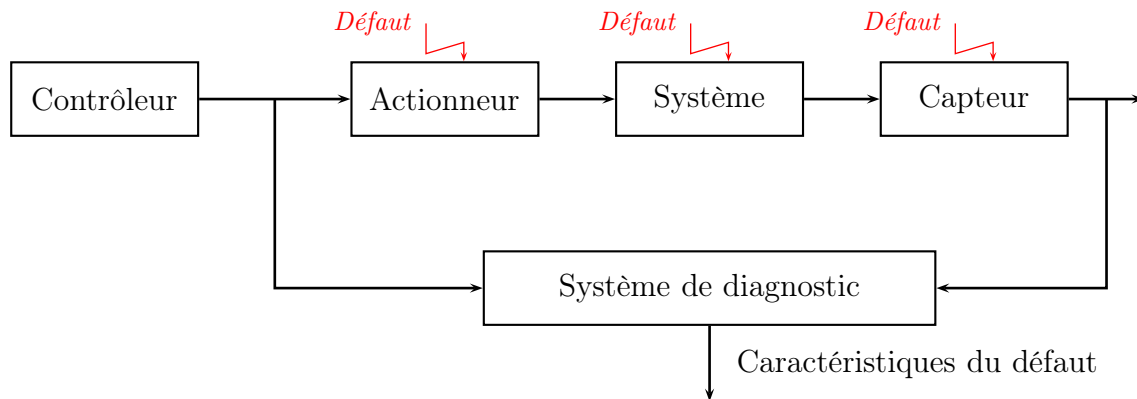


FIG. 1.1 – Structure générale d'un système de diagnostic

Un défaut peut affecté l'actionneur, le capteur ou le système lui-même. Le comité technique SAFEPROCESS de la fédération international de contrôle automatique (IFAC) a défini un défaut comme tout écart non permis d'au moins une propriété ou un paramètre caractéristique du système par rapport au comportement nominal, usuel ou acceptable (Isermann (1997)). Pour cette raison, le défaut peut conduire à un mauvais fonctionnement ou dans certains cas à une panne du système.

Un systèmes de diagnostic réalise les tâches suivantes :

1. **Détection de défaut** : indication que quelque chose est incorrect dans le système surveillé. La détection est une nécessité absolue dans tout système pratique.
2. **Localisation de défaut** : détermination de l'emplacement exact du défaut (le composant en défaut). Elle est presque aussi importante que la détection.
3. **Identification de défaut** : détermination de l'amplitude du défaut. L'identification (si utile) peut ne pas justifier l'effort supplémentaire qu'elle requiert.

Les tâches de localisation et d'identification constituent le diagnostic de défaut. La plupart des systèmes pratiques comportent seulement ces deux étapes (systèmes FDI). Aussi, dans beaucoup de cas, au terme de "diagnostic", on associe simplement celui de "localisation".

Généralement la détection et le diagnostic se font en ligne en temps réel. Ces tâches peuvent être réalisées en parallèle ou séquentiellement. Sur certains systèmes de diagnostic, la détection et la localisation sont accomplies simultanément par la même tâche. Sur d'autres systèmes, la tâche de détection est effectuée en permanence alors que la tâche de localisation est déclenchée uniquement après la détection de la présence d'un défaut.

La performance d'un système de diagnostic est généralement évaluée à travers un certain nombre de critères : *la performance de détection* et *la performance de la localisation*.

La performance de détection d'une technique de diagnostic est caractérisée par un nombre important et quantifiable de propriétés à savoir :

- la capacité de la technique à détecter des défauts de taille significativement petite (sensibilité aux défauts),
- la capacité de la technique à détecter des défauts avec un délai suffisamment petit par rapport à leurs occurrences (retard de détection),
- la capacité de la technique à fonctionner en présence de bruit, perturbation et erreur de modélisation, avec peu de fausses alarmes (robustesse).

Ces propriétés résultent d'une interaction entre les défauts d'une part, et le bruit, les perturbations et les erreurs de modélisation d'autre part, et sont liées à la conception de l'algorithme de détection. Dans la plupart des cas, il y a des compromis de conception entre les différentes propriétés.

La performance de la localisation qui est la capacité du système de diagnostic à distinguer les défauts dépend des propriétés physiques du processus, de l'importance des défauts, du bruit, des perturbations et des erreurs de modélisation, et de la conception de l'algorithme bien évidemment. Une des difficultés rencontrées avec les approches de diagnostic est la localisation des défauts multiples simultanés qui sont, en général, plus difficile à localiser que les défauts uniques. Aussi, l'interaction entre défauts et perturbations, bruit et erreurs de modélisation peuvent conduire à des localisations incertaines voire incorrectes. De plus, certains défauts peuvent être non localisables parce qu'ils agissent sur le système physique dans une région d'indistinguabilité.

La diagnosticabilité est la propriété d'un système à exhiber différentes observations pour un ensemble prédéfini d'hypothétiques défauts. Elle est exprimée en termes de signature des défauts sur le système sans aucune référence au système de diagnostic utilisé. Cette propriété joue un rôle important dans la conception de système de diagnostic de défauts, car elle indique la qualité de l'instrumentation

permettant d'observer le système à expliquer ce qui se passe sur ce dernier. Au début la diagnosticabilité a été souvent définie en terme de performance du système de diagnostic utilisé. Dans la plupart des publications récentes sur cette question, la diagnosticabilité est exprimée comme propriété structurelle du système considéré et aussi, la plupart des définitions existantes de la diagnosticabilité s'appuie sur les mêmes principes et peut être exprimée dans un cadre commun (Cordier et al. (2006)). L'analyse de la diagnosticabilité peut être réalisée à l'aide de l'analyse de la détectabilité et d'isolabilité dont on peut trouver les définitions dans (Blanke et al. (2003)).

- La détectabilité est une propriété structurelle du système considéré, qui décrit la manière dont le comportement du système est affecté par les défauts. Elle est indépendante du type et de l'amplitude du défaut considéré. Un défaut sera dit détectable lorsque son apparition, indépendamment de son amplitude et de son type, causerait un changement sur le comportement nominal de l'entrée et/ou de la sortie du système. Plus précisément, considérons un système modélisé par l'équation entrée-sortie suivante

$$y = f(u(d), d) \tag{1.1}$$

avec u , y respectivement l'entrée et la sortie du système considéré et d représentant un défaut. On dira que le défaut d_i est structurellement détectable lorsque

$$\frac{\partial y}{\partial d_i} \neq 0 \tag{1.2}$$

et/ou

$$\frac{\partial u}{\partial d_i} \neq 0 \tag{1.3}$$

- L'isolabilité : deux défauts détectables et distincts d_i et d_j sont isolables lorsque leurs influences sur les variables mesurées du système sont distinguables ou encore lorsque toute apparition simultanée de ces deux défauts engendre une déviation d'au moins une variable mesurée du système. Ceci peut se traduire mathématiquement, en considérant le système (1.1) par

$$f(u(d_i), d_i) \neq f(u(d_j), d_j) \tag{1.4}$$

et/ou

$$u(d_i) \neq u(d_j) \tag{1.5}$$

- L'identifiabilité : elle est comprise comme la caractérisation de la structure du système qui est essentielle pour la reconstruction du défaut à partir de l'entrée

et de la sortie. D'un point de vue mathématique, l'identifiabilité est caractérisée par l'inversibilité à gauche du transfert du défaut considéré vers l'entrée et de la sortie du système. Cette notion d'identifiabilité est ici équivalente à celle de l'inversibilité du modèle.

Les méthodes de diagnostic de systèmes automatiques étudiés dans la littérature sont très variées et peuvent être classées en deux groupes majeurs : celles qui n'utilisent pas de modèles mathématiques du processus (méthodes internes) et celles qui en utilisent (méthodes externes). Parmi les approches à base de modèle, on peut distinguer celle dont la mise en application est conditionnée par l'existence d'un modèle explicite du système et celles qui s'affranchissent de cette condition.

2 Approches classiques à base de modèle explicite

2.1 Introduction

Les méthodes de diagnostic à base de modèle sont principalement dérivées des techniques utilisées par les automaticiens et impliquent une connaissance approfondie du fonctionnement sous la forme de modèles mathématiques explicites du processus qui devront être obligatoirement validés expérimentalement avant toute utilisation pour le diagnostic.

Les systèmes traités dans ce mémoire sont des systèmes dynamiques caractérisés par une opération à temps continu. Leur description mathématique peut être sous la forme d'équations différentielles ou des représentations équivalentes par transformation (Laplace).

La plupart des méthodes à base de modèle repose sur le concept de *redondance analytique*. Les relations de redondance analytique sont des équations déduites du modèle analytique, qui admettent pour entrées uniquement les variables mesurées. L'idée peut être étendue à la comparaison de deux quantités idéalement égales et générées analytiquement, obtenues à partir de différents ensembles de variables. Dans chacun des cas, leurs différences, appelées *résidus*, indiquent la présence de défauts sur le système.

La génération de résidus doit être suivie de *l'évaluation de résidus*, afin de parvenir aux décisions de détection et de localisation. A cause de la présence de bruit et d'erreurs de modélisation, les résidus ne sont jamais nuls, même en fonctionnement normal. Ainsi, la prise de décision nécessite la comparaison des résidus à certains

seuils obtenus de manière empirique ou théorique.

Pour faciliter la localisation du défaut, les générateurs de résidus sont généralement conçus pour produire des *résidus de localisation*, comportant des propriétés structurelles et directionnelles. Les décisions de localisation peuvent alors être obtenues dans un cadre structurel (booléen) ou directionnel (géométrique), avec ou sans utilisation d'outils statistiques.

Une approche réaliste de diagnostic à base de modèle explicite suppose la connaissance de la nature des défauts réels pouvant affecter le système ainsi que leurs descriptions en termes de symptômes. Un défaut sur un système peut être d'origine diverse. il peut provenir par exemple de :

- conception et/ou assemblage incorrect
- fonctionnement incorrect
- manque d'entretien
- vieillissement ou usure en fonctionnement normal

Leur apparition peut être brusque avec une grande ampleur ou graduelle. Un aspect important d'un système de diagnostic à base de modèle est la nature du défaut que l'on cherche à détecter. On peut distinguer les défauts dits additifs de ceux dits multiplicatifs. La modélisation de l'effet de défauts réels sur le modèle du système permet de caractériser le défaut comme suit.

1. Défauts actionneurs

Divergences (incohérences) entre l'entrée de commande d'un actionneur et sa vraie sortie. Ces défauts sont généralement traités comme des défauts additifs, mais d'autres défauts actionneurs (blocage, perte de puissance ou échec) peuvent aussi être mieux caractérisés comme étant multiplicatifs.

2. Défaut système

Ce sont des défauts affectant directement le processus. Ils sont caractérisés comme additifs lorsqu'il s'agit d'entrées inconnues agissant sur le processus, qui sont normalement nulles et qui, lorsqu'elles sont présentes, causent un changement sur les sorties du système indépendamment des entrées connues (fuites, charges, etc.). Ces défauts aussi être caractérisés comme multiplicatifs dans le cas de changements (brusques ou évolutifs) dans certains paramètres du système provoquant de ce fait des changements sur les sorties du système qui dépendent aussi de l'amplitude des entrées connues (détérioration d'équipement, usure de pièce, etc.).

3. Défaut capteur

Divergence (incohérence) entre la valeur mesurée et la valeur réelle d'une variable du système. Ces défauts sont habituellement considérés comme additifs (indépendant de l'amplitude de la mesure), mais certains défauts capteur (blocage ou échec) sont mieux caractérisés comme multiplicatifs.

Dans le cadre du diagnostic à base de modèle, on adopte les conventions suivantes :

- i) On suppose que les défauts ne sont pas initialement présents sur le système mais apparaissent plus tard. Les défauts sont généralement décrits par des fonctions temporelles déterministes et inconnues. Par exemple, un défaut saut et un défaut dérive peuvent être modélisés respectivement à l'aide d'une fonction échelon et d'une fonction rampe dont l'instant d'occurrence et l'ampleur (magnitude) sont inconnus.
- ii) On peut aussi parler de perturbations additives, qui sont des entrées déterministes et inconnues au système. La différence entre perturbation additive et défaut additif est subjective : une perturbation est une nuisance qu'on désire ignorer alors qu'un défaut est une entrée inconnue occasionnant des divergences de comportement entre le modèle et le système et qu'on cherche à détecter et localiser.
- iii) Tout bruit provenant du système, de l'actionneur ou du capteur est considéré comme signal aléatoire centré (toute moyenne non nulle est gérée comme défaut ou perturbation).
- iv) Les erreurs de modélisation sont les écarts entre le modèle (paramètres du modèle) et le système réel. Elles peuvent être présentes depuis les origines du système et/ou peuvent apparaître lors des changements de point de fonctionnement et/ou simplement au cours du temps. Elles sont des nuisances qu'on cherche à supprimer. Elles peuvent être considérées comme perturbations multiplicatives, à l'opposé aux défauts multiplicatifs qui sont aussi des écarts entre le modèle et le vrai système, mais qu'on désire détecter.

Comme mentionné précédemment, les résidus générés pour détecter les défauts peuvent aussi réagir en présence du bruit, de perturbations ou d'erreurs de modélisation. Rendre les résidus insensibles à ces différentes sources est l'un des aspects

les plus importants dans la conception d'algorithme de détection et de diagnostic. En particulier :

- Pour traiter les effets du *bruit*, les résidus doivent être d'abord filtrés avant d'être évalués au moyen de techniques statistiques. L'évaluation peut toutefois être entravée par le manque d'informations suffisantes sur les propriétés statistiques du bruit et la manière dont le système réagit au bruit. Ceci est particulièrement le cas en boucle fermée.
- *Le découplage de perturbation* peut être pris en compte dans la conception du générateur de résidus. Cependant ceci peut aller à l'encontre de la performance de localisation avec le degré de liberté qu'on dispose pour la conception.
- *La robustesse par rapport aux erreurs de modélisation* est le problème fondamental en diagnostic à base de modèle. Il existe plusieurs méthodes qui reposent généralement sur des techniques d'optimisation. Malheureusement, ce problème n'admet pas de solution facile et les techniques de résolution connues ne sont efficaces que dans des circonstances limitées.

2.2 Méthodes de génération de résidus.

Comme mentionné plus haut, avant toute mise en application d'une méthode de diagnostic à base de modèle, on doit d'abord disposer d'une représentation mathématique du système qui permettra de générer des signaux résidus, indicateurs de défauts. Les méthodes de génération de résidus robustes peuvent être classées en quatre grandes familles qui sont plus ou moins équivalentes.

Filtre de Kalman

En 1960, Kalman publia son fameux article décrivant une solution récursive du problème de filtrage linéaire des mesures discrètes (Kalman (1960)). Depuis ce temps, le filtre de Kalman a fait l'objet de nombreuses recherches et applications.

Le filtre de Kalman traite du problème d'estimation d'état $x \in \mathbb{R}^n$ d'un système gouverné par les équations suivantes

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t) \quad (1.6)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t) \quad (1.7)$$

Les signaux w et v sont des bruits blancs gaussiens centrés et supposés indépendants.

L'équation du filtre de Kalman est donnée par

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= (A\tilde{x} + Bu) + F_k(y - \tilde{y}) \\ \tilde{y} &= C\tilde{x} - Du\end{aligned}\tag{1.8}$$

Dans l'équation (1.8), le modèle du système est exploité pour prédire l'évolution de l'état du système à partir de l'estimation courante \tilde{x} . Cette prédiction est recalée en fonction de l'erreur $e = y - \tilde{y}$ grâce au gain du filtre K_f . Afin d'obtenir un estimateur asymptotiquement non biaisé (l'espérance mathématique de l'erreur d'estimation tendant vers 0 à l'infini), le gain F_k doit être choisi tel que la matrice $A - F_k C$ soit stable. En effet soit $\epsilon = x - \tilde{x}$ l'erreur d'estimation associée au filtre (1.8), on a

$$\dot{\epsilon} = (A - F_k C)\epsilon + w - F_k v\tag{1.9}$$

Les bruits w et v étant gaussiens d'espérance mathématique nulle, alors, à l'infini, l'erreur ϵ est aussi gaussienne d'espérance mathématique nulle si et seulement si la matrice $A - F_k C$ est stable. Le schéma correspondant est représenté sur la figure (1.2).

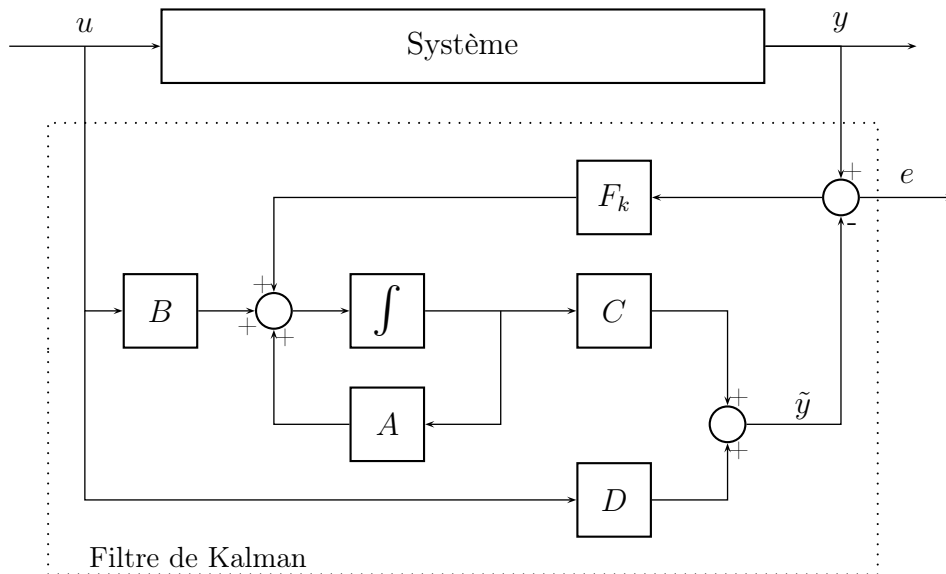


FIG. 1.2 – Schéma fonctionnel du filtre de Kalman

L'erreur de prédiction e du filtre de Kalman peut être utilisée comme résidu de détection de défaut ; sa moyenne est nulle en l'absence de défauts (et perturbations) et devient non nulle dans le cas contraire. Puisque la suite d'erreur est supposée blanche, les tests statistiques sont relativement faciles à construire.

Une méthode bien connue utilisant le filtre de Kalman est l'estimation à base de modèles multiples adaptative (Hanlon & Maybeck (2000)) où le système est représenté par un modèle stochastique linéaire avec des incertitudes paramétriques (qui représentent les défauts) dans la matrice d'état.

La localisation de défaut est plus difficile avec le Filtre de Kalman ; il est nécessaire de construire un banc de filtres de détection, dédié à chaque défaut suspecté, et de vérifier la cohérence des filtres avec les observations réelles, ce qui pourrait entraîner des coûts élevés de calcul.

Observateurs de diagnostic

La première approche de génération de résidu à base d'observateurs a été proposée par Beard (Beard (1971)). L'approche de diagnostic par observateurs est l'une des plus utilisée et étudiée parmi les méthodes de génération de résidus à base de modèle.

Considérons le système d'ordre n gouverné par la représentation d'état suivante

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.10)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.11)$$

La base des méthodes de génération de résidus par observateurs se fonde sur l'observateur de Luenberger communément donné par

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Gz + Hu + Ly \\ \tilde{y} &= Qz + Vu + Wy \end{aligned} \quad (1.12)$$

où $z \in \mathbb{R}^s$, s dénote l'ordre de l'observateur et peut être soit égal, soit plus petit, soit plus grand que n . Cet observateur estime une combinaison linéaire des éléments du vecteur d'état x représentée par Tx avec $T \in \mathbb{R}^{n \times s}$. Les matrices G, H, L, Q, V, W et T doivent remplir les conditions dites de Luenberger (Frank & Ding (1997)) données par

- i) G stable
- ii) $TA - GT = LC, TB - LD = H$
- iii) $C = QT + WC, V = -WD + D$

On vérifie facilement que ces conditions permettent d'obtenir, à l'aide du système (1.12), une estimation asymptotiquement non biaisée de la sortie y , c'est-à-dire, en moyenne

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y - \tilde{y}) = 0, \forall u, \forall \text{ la condition initiale } x(0) \quad (1.13)$$

La différence entre la sortie de l'observateur et celle observée peut alors constituer le résidu pour le diagnostic. Le vecteur résidu correspondant aura la forme

$$r = R(y - \tilde{y}) = 0, \quad R \neq 0 \quad (1.14)$$

Soit encore

$$r = (R - RW)y - RVu - RQz \quad (1.15)$$

En (1.15), lors de la conception de résidus, la condition (iii) ci-dessus doit être remplacée par

$$R(C - WC - QT) = 0 \quad (1.16a)$$

$$R(D - WD - V) = 0 \quad (1.16b)$$

Ainsi le problème de génération de résidus par observateurs apparaît comme un problème de recherche des matrices G , H , L , Q , V , W et R satisfaisant les conditions de Luenberger (i)-(ii) et (1.15). On trouvera dans (Chen et al. (1996)) une procédure systématique de choix de ces matrices dans le cas d'observateur d'ordre plein ($s = n$). Des conditions nécessaires et suffisantes d'un tel observateur sont également fournies. L'avantage d'un observateur d'ordre plein, est qu'il fournit un degré de liberté dans la conception du générateur de résidus pouvant être utilisé afin d'améliorer la localisation de défaut.

L'un des objectifs principaux des approches à base d'observateurs est la génération des signaux résidus sensibles aux défauts et découplés d'un certain nombre de perturbations reflétées par des *entrées inconnues*. Le problème de découplage d'entrées inconnues est un problème classique et peut être résolu à l'aide d'une technique de placement de structure propre (Patton & Chen (2000), Siah et al. (2009)). Lorsque les conditions d'un découplage complet ne sont pas satisfaites, le problème de génération de résidus robuste peut être formulé comme un problème d'optimisation qui consiste à minimiser la sensibilité des résidus par rapport aux entrées inconnues et maximiser cette sensibilité par rapports aux défauts. C'est ainsi que des techniques d'optimisation H_∞ (Ding et al. (2000)) et celles basées sur des techniques LMI (Wang et al. (2007)) ont été proposées et sont devenues des thèmes actifs. Le schéma fonctionnel correspondant est représenté sur la figure (1.3).

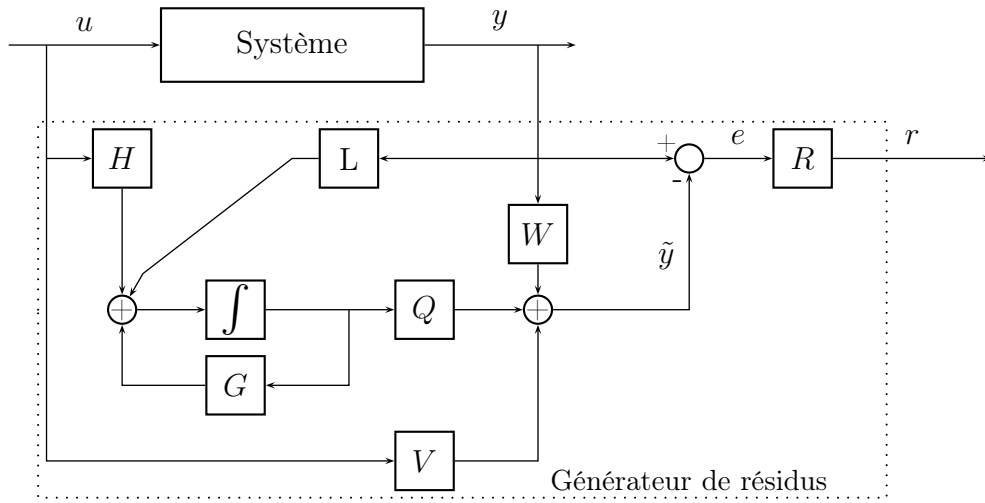


FIG. 1.3 – Schéma fonctionnel d'un observateur de diagnostic

Relations de parité (consistance)

Ce sont des équations du modèle direct entrée-sortie réarrangées, sujettes à des transformations dynamiques linéaires. Les résidus issus de cette transformation mènent au diagnostic. Les méthodes de génération de résidus par relations de parité a été initiée par Chow et Willsky dans les années 80. Par la suite, de nombreuses formes différentes de relations de parité ont été introduites. On expose ici la méthode qui suppose une représentation d'état linéaire du système donnée par

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.17a)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.17b)$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{m \times p}$. On suppose aussi que la paire (C, A) est observable.

En posant

$$y_k = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(k-1)} \end{bmatrix} u_k = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ u^{(k-1)} \end{bmatrix} \mathcal{O}_k = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} \mathcal{C}_k = \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ CA^{k-2}B & \cdots & CB & D \end{bmatrix}$$

on obtient à partir du système (1.17) la forme étendue

$$y_k(t) = \mathcal{O}_k x(t) + \mathcal{C}_k u_k(t) \quad (1.18)$$

Dans l'égalité (1.18), appelée *relation de parité*, seul le vecteur x est inconnu. L'idée sous-jacente des méthodes à base de relation de parité réside dans le résultat, bien connu en théorie de contrôle linéaire, précisant que pour tout $k \geq n$ où n est la dimension de l'espace d'état, on a

$$\text{rang}(\mathcal{O}_k) = n$$

Cette condition assure, pour tout $k > n$, l'existence d'au moins un vecteur non nul, p_k tel que

$$p_k \mathcal{O}_k = 0 \tag{1.19}$$

Enfin, un générateur de résidus est donné par la variable

$$r = p_k(y_k - \mathcal{C}_k u_k) \tag{1.20}$$

dont la dynamique est gouvernée, dans le cas sans défaut par

$$r(t) = p_k \mathcal{O}_k x(t) = 0 \tag{1.21}$$

Le vecteur p_k satisfaisant (1.19) est appelé *vecteur de parité* et l'ensemble

$$P_k = \{p_k \neq 0 : p_k \mathcal{O}_k = 0\} \tag{1.22}$$

est appelé *espace de parité* d'ordre k dont l'existence repose uniquement sur l'existence d'une solution de (1.19).

Le degré de liberté, fourni par le choix des vecteurs de parité, peut être utilisé pour le découplage des perturbations et l'amélioration de la localisation. Aussi, la dynamique de réponse au défaut peut être contrôlée, dans certaines limites fixées par les exigences de causalité et de stabilité.

En présence de perturbations dans le modèle (1.17), la détermination du vecteur de parité sous certaines contraintes d'optimisation est nécessaire afin de rendre le générateur de résidus robuste par rapport à ces perturbations. Comme il l'a été prouvé depuis (Ding et al. (1999)), le choix de l'ordre de l'espace de parité demeure un compromis dans la conception de ce générateur de résidus : un espace de parité d'ordre inférieur signifie une implémentation en ligne facile mais aussi une moins bonne performance (en terme de robustesse par rapport au rejet de perturbation), tandis qu'un espace de parité d'ordre élevé engendre de meilleures performances mais conduit à des lourdeurs de calcul. Des études ont été faites afin d'assurer de meilleures performances avec un espace de parité d'ordre inférieur (Zhang et al. (2006)). Dans (Ye et al. (2004)), une approche robuste, utilisant un espace de parité d'ordre inférieur a été proposée dans le domaine fréquentiel; des transformations

en ondelettes ont été utilisées pour la détermination d'un vecteur de parité optimal d'ordre inférieur et garantissant de bonnes performances.

Il a été réalisé une équivalence fondamentale entre les méthodes par espace de parité et celles à base d'observateurs (voir la sous-section 2.3). En effet, ces deux techniques produisent des résidus identiques si les générateurs ont été conçus avec les mêmes spécifications.

Estimation paramétrique

Cette approche suppose la connaissance de la structure du processus en fonctionnement normal. Dans la plupart des cas pratiques, les paramètres du système sont partiellement connus. Le principe est alors d'identifier continuellement en ligne les paramètres qui minimisent l'écart entre les grandeurs mesurées et celles calculées avec les paramètres estimés. Les écarts couramment considérés sont l'erreur d'équation et l'erreur de sortie. L'approche par estimation paramétrique se fonde sur l'hypothèse que les défauts traduisent un changement dans les paramètres du système physique. C'est l'approche naturelle de diagnostic de défauts paramétriques (multiplicatifs).

Les méthodes d'estimation paramétrique pour les systèmes dynamiques ont d'abord été développées pour les systèmes à temps discret. Toutefois, pour certaines applications, par exemple la validation des modèles théoriques ou pour le diagnostic, des méthodes d'estimation des paramètres utilisant des signaux à temps continu sont nécessaires.

Considérons le système stable admettant pour représentation entrée - sortie, l'équation

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + b_0u \quad (1.23)$$

avec conditions initiales nulles (sinon considérer $y(t) - y(0)$ et $u(t) + u(0)$ à la place de y et u respectivement). L'objectif ici est d'estimer les paramètres inconnus a_i et b_j à partir des signaux d'entrée u et de sortie y sur une fenêtre d'observation $[0, T]$, ($T > 0$).

Notons respectivement

$$P_k = \begin{bmatrix} -y^{(n)} & \dots & -y^{(1)} & u^{(m+1)} & \dots & u^{(1)} \\ -y^{(n+1)} & \dots & -y^{(2)} & u^{(m+2)} & \dots & u^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y^{(n+k-1)} & \dots & -y^{(k)} & u^{(m+k)} & \dots & u^{(k)} \end{bmatrix} \quad \text{et } \theta = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{n-1} \\ \vdots \\ \tilde{a}_0 \\ \tilde{b}_m \\ \vdots \\ \tilde{b}_0 \end{bmatrix}$$

le vecteur de données et celui des estimées des paramètres à l'instant $t \in [0, T]$. Alors, en posant

$$Y_k = \begin{bmatrix} y^{(n+1)} \\ y^{(n+2)} \\ \vdots \\ y^{(n+k)} \end{bmatrix}$$

l'erreur d'équation donnée par

$$e_k(t) = Y_k - P_k \theta \tag{1.24}$$

peut servir comme base de diagnostic. Rappelons que le vecteur θ_k minimisant la norme quadratique de l'erreur (1.24) au sens des moindres carrés est donné par

$$\theta_k = [P_k^T P_k]^{-1} P_k^T Y_k \tag{1.25}$$

Cette solution existe si et seulement si la matrice $P_k^T P_k$, de dimension $(m+n+1) \times (m+n+1)$ est définie positive ou encore

$$\det[P_k^T P_k] > 0 \tag{1.26}$$

Cette condition signifie également que l'entrée u excite de manière permanente le système (Isermann (2006)). L'estimation paramétrique peut être plus efficace que les méthodes à base de redondance analytique, mais elle demande aussi plus de ressources de calcul en ligne et des exigences d'excitation en entrée.

Un lien quoique faible, a été établi entre l'espace de parité et l'estimation paramétrique, car ces approches peuvent être développées avec le même ensemble de résidus pour le diagnostic de défaut paramétrique (voir la sous-section 2.3).

2.3 Notes bibliographiques et historiques

L'approche à base de modèle prend une de ses origines à partir du contrôle de procédé chimique, où les calculs de bilan d'énergie se sont développés à la réconciliation de données systématique et à la détection des erreurs grossières. Quelques-uns

des pionniers de cet effort ont été : David Himmelblau de l'Université du Texas (Himmelblau (1978)), Richard Mah de l'Université du Northwestern (Mah et al. (1976)), George Stephanopoulos de l'Université du Minnesota (Romagnoli & Stephanopoulos (1981)) et Vladimir Vaclavek de l'Institut de Technologie Chimique de Prague (Vaclavek (1974)).

D'autres sources peuvent être retrouvée dans la recherche en aérospatial, premièrement sponsorisée par la NASA au cour des années 70. Cela a été mené par Willsky et ses collègues à MIT (Willsky & Jones (1976), Deckert et al. (1977)). Cet effort a conduit à la formulation fondamentale du concepts de relations de parité (Chow & Willsky (1984), Lou et al. (1986)). Une étude approfondie de la génération de résidus par espace de parité peut être trouvée dans (Gertler (1997, 1998)). L'idée utilisée pour développer les relations de parité dans le domaine temporel a été étendue au domaine fréquentiel (Viswanadham et al. (1987)).

Une activité indépendante, avec des résultats étonnamment similaires, a été réalisée par L.A. Mironovskii de Leningrad (1979). D'autres contributeurs au domaine des relations de parité incluent Yacov Ben-Haim (1980) de Technion, Israel, Asok Ray de Penn State, M. A. Massoumia et W. E. Van der Velde de MIT (Massoumia & Van Der Velde (1988)), N. Viswanadham de Bangalore, Inde, en collaboration avec des ingénieurs de GE Corporate R&D (Viswanadham et al. (1987)), Ron Patton d'Angleterre (Patton & Chen (1991)) et Marcel Staroswiecki de Lille, France (Staroswiecki et al. (1993)). Gertler et ses collègues ont aussi été actifs dans ce domaine de recherche (Gertler & Singer (1990), Gertler & DiPierro (1997), Gertler & Kunwer (1995)).

En parallèle, et partiellement proche aux apports ci-dessus, plusieurs chercheurs ont étudié la possibilité d'appliquer des filtres de Kalman et des observateurs aux problèmes de diagnostic de défaut. L'idée du filtre de Kalman peut être attribuée à R.K. Mehra et J. Peschon de Scientific Systems Inc (Mehra & Peschon (1971)). Alan Willsky (Willsky (1976)) a aussi apporté des contributions importantes à ce niveau. D'autres contributeurs de la première heure comprennent Bernard Friedland (Friedland (1979)) et Garry Leininger (Leininger (1981)) rejoints par la suite par Michelle Basseville (Basseville & Benveniste (1985)) entre autres.

L'idée originale de diagnostic par observateurs provient probablement de R.V. Beard (Beard (1971)) et Robert Clark de l'Université de Washington (Clark et al. (1975)). Ils ont été rejoints par une longue lignée de chercheurs, comprenant Paul Frank d'Allemagne (Frank & Keller (1980), M.A. Massoumia (Massoumia (1986), Massoumia et al. (1989)), N. Viswanadham (Viswanadham & Srichander (1987)),

Ron Patton (Patton et al. (1989)) et Jason Speyer (White & Speyer (1987)). On trouveras dans (Patton et al. (2000)) les développements récents sur ce thème ainsi qu'une liste assez exhaustive de références.

Dans le domaine de diagnostic par estimation paramétrique, de considérables travaux ont été réalisés par Rolf Isermann et collègues (Isermann (1984), Isermann & Freyermuth (1991)). D'autres contributeurs comprenant entre autre M. Basseville, A. Benveniste et leurs collègues (Basseville et al. (1987)) ont apporté une importante contribution, dans ce domaine, concernant le diagnostic de petits défauts paramétriques par l'analyse statistique des résidus obtenus à partir de séries élargies d'observations. (Isermann (2006)) fournit un aperçu assez complet des approches récentes sur l'estimation paramétrique pour le diagnostic des processus.

L'équivalence fondamentale entre relation de parité et observateur a été établie et démontrée dans (Gertler (1991)). D'autres résultats, certains partiels, d'autres complémentaires, ont été obtenues par N. Viswanadham (Viswanadham et al. (1987)), Paul Frank (Frank (1990)), J.F. Magni, P. Mouyon (Magni & Mouyon (1992)), S. X. Ding (Ding (2008)) et autres. Le lien évident entre relation de parité et estimation paramétrique a été souligné dans (Gertler (1995)) et (Gertler & DiPierro (1997)), également confirmé par d'autres chercheurs, comprenant T. Hofling, R. Isermann (Hofling & Isermann (1995)) et sous une forme peu limitée, G. Delmaire et co-auteurs (Delmaire et al. (1994)).

Remarque 2.1 *Techniques de la communauté DX*

Une classe notable de technique de diagnostic à base de modèle utilisant des outils d'informatique et d'intelligence artificielle fait l'objet de recherche active au sein de la communauté d'intelligence artificielle (communauté DX). Ces techniques reposent aussi sur la détection d'écart entre les observations et les comportements prédits par un modèle. Cependant à l'opposé des techniques présentées dans la section précédente (communauté FDI), ces techniques utilisent des modèles qualitatifs et des approches logiques, tels que la logique floue (Isermann (1998)), les réseaux de neurones artificiels (Koivo (1994)), les modèles de causalité et la reconnaissance des formes (Denoeux et al. (1998)). Plusieurs travaux ont mis l'accent sur le développement d'approche de diagnostic en combinant les concepts de relations de redondance avec les outils de raisonnement logique développés dans le domaine de l'intelligence artificielle (Gentil et al. (2004)).

2.4 Critique des approches basées sur des modèles analytiques

Les approches basées sur des modèles s'appuient sur l'évaluation d'un ensemble de résidus. L'un des principaux avantages de ces approches est qu'on a un certain contrôle sur le comportement des résidus.

Cependant ces approches quantitatives se limitent généralement à l'exploitation de modèles linéaires et à certaines classes de modèles non linéaires. Pour les utiliser, il est donc souvent nécessaire de procéder à la linéarisation des modèles complexes autour du point de fonctionnement, ce qui n'est pas toujours ni satisfaisant ni même possible.

Pour certaines catégories de processus, la structure du modèle et au moins certains paramètres sont relativement bien connus, c'est le cas des procédés électriques, mécaniques ou hydrauliques. Pour les autres catégories, seuls les modèles bruts (sans aucune simplification) sont disponibles. C'est le cas par exemple de nombreux processus industriels (traitement du ciment, des produits chimiques, minéraux, métaux et biochimiques). En outre, en raison de différents points de fonctionnement, de l'usure et du vieillissement, de nombreux processus changent de comportement en permanence de telle sorte que toutes les méthodes avec des modèles constants sont problématiques.

De plus, du fait de la structure des modèles utilisés et de la non interprétabilité des paramètres, les déviations observées ne sont pas toujours explicables. Un autre inconvénient est que si un défaut n'est pas spécifiquement modélisé, il n'y a aucune garantie que les résidus soient en mesure de le détecter (identifiabilité de nouveauté). Cela limite, bien sûr, l'utilité de ces approches sur des procédés industriels réels.

D'autre part, dans un contexte bruité et où les valeurs réelles des paramètres sont inconnues ou vides de sens, l'évaluation du résidu est difficile.

Remarque 2.2 *Approches classiques sans modèle.*

Le diagnostic sans modèle est étudié depuis les années 50. Il est utilisé dans le cas de certains systèmes dont on ne dispose pas de modèles mathématiques (ou que ceux-ci sont difficiles à obtenir). Il exploite des données acquises (entrées et sorties) sur le système ainsi que des informations reposant sur l'expertise humaine confortée par un solide retour d'expérience.

Les méthodes qui ne s'appuient pas sur des descriptions mathématiques ou qualitatives du processus s'étendent de la redondance physique ou matérielle (installation de multiple capteurs mesurant la même quantité physique) au contrôle de seuillage (Isermann (2006)) et au traitement direct de signal tel que l'analyse spectrale (Gertler (1998)).

Rappelons que la mise en œuvre des approches à base de modèle explicite requiert un modèle le plus précis du système. De nos jours, bien peu de méthodes de diagnostic à base de modèles sont appliquées dans l'industrie et que l'une des causes est la nécessité de ce modèle. La section suivante est consacrée à l'étude de certaines approches de commande et diagnostic d'un système automatique qui ne requièrent pas la connaissance d'un modèle de ce dernier pour être mises en œuvre.

3 Notions d'approches intégrées

Les synthèses modernes de lois de commande performantes et de générateur de résidus demandent une connaissance très fine du système à commander ou à diagnostiquer. Cette connaissance est rassemblée dans un modèle. L'écriture d'un modèle précis demande une compréhension détaillée des mécanismes en utilisant les lois de la physique. Cependant, il est souvent difficile, voire impossible de développer un tel modèle physique dans la pratique industrielle. C'est ainsi, qu'a été introduite la notion d'approches intégrées considérant simultanément la modélisation, la conception de la commande et/ou le diagnostic. Ce sont de telles approches qui seront abordées dans cette partie.

3.1 Commande adaptative

Les termes "système adaptatif" et "commande adaptative" ont été utilisés dès 1950 (Aseltine et al. (1958), Caldwell (1950)). La conception de pilotes automatiques à haute performance pour les avions a été l'une des principales motivations des recherches sur la commande adaptative dans les années 1950. La commande adaptative a une riche littérature complète avec différentes techniques de conception, d'analyse, de performance et d'applications (Ossman (1989), Fradkov (1992), Ioannou & Fidan (2006)).

L'ultime motivation du concept de commande adaptative a été de maintenir

les performances requises quand la dynamique du comportement d'entrée-sortie du système à commander n'est pas totalement connue au cours du temps.

Un correcteur est dit adaptatif lorsqu'il s'adapte en ligne au système mal connu. Généralement, les mesures des entrées et des sorties du procédé sont utilisées pour calculer les paramètres du correcteur. Ainsi, un correcteur adaptatif est formé de la combinaison d'un estimateur en-ligne de paramètres, qui fournit les estimées des paramètres inconnus à chaque instant, et d'une loi de commande appropriée. La manière dont l'estimateur paramétrique est associé à la loi de commande donne lieu à deux approches distinctes :

- commande adaptative indirecte (explicite), dans laquelle les paramètres inconnus d'un modèle du système, estimés en-ligne, sont utilisés pour calculer les paramètres du contrôleur.
- commande adaptative directe (implicite), dans laquelle les paramètres du contrôleur sont directement calculés à partir des signaux entrée et sortie du système.

En **commande adaptative indirecte**, le modèle du système est paramétré avec un vecteur de paramètres inconnu θ^* , on notera ce modèle $M(\theta^*)$.

Exemple 3.1 *Considérons un système linéaire invariant du premier ordre, de commande u et de sortie y . Soient T et k respectivement la constante de temps et le gain statique du système, tous deux supposés inconnus. Alors ce système peut être représenté par le modèle suivant*

$$M(\theta^*) : T\dot{y} + y = ku, \quad \text{avec } \theta^* = \begin{pmatrix} T \\ k \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

A partir de $u(t)$ et $y(t)$, une estimée $\theta(t)$ de θ^* est déterminée, en-ligne, à chaque instant t . Cette estimée définit à son tour un modèle $M(\theta(t))$ qui sera considéré pour le calcul du vecteur des paramètres du contrôleur $\theta_c(t)$ à travers la résolution d'une certaine équation algébrique $\theta_c(t) = F(\theta(t))$ à chaque instant t . L'équation algébrique $\theta_c = F(\theta)$ et la loi de commande $C(\theta_c)$ sont choisies de telles sortes que les équations $\theta_c^* = F(\theta^*)$ et $C_c(\theta^*)$ puissent être utilisées pour atteindre les performances désirées pour le modèle $M(\theta^*)$, lorsque θ^* est connu. Ainsi, la principale difficulté lors de l'utilisation d'une commande adaptative indirecte réside en les choix de la classe de loi de commande $C(\theta_c)$, de la classe d'estimateurs de $\theta(t)$ et enfin de l'équation algébrique $\theta_c(t) = F(\theta(t))$ tel que $C(\theta_c(t))$ permette d'obtenir les performances désirées pour le modèle $M(\theta^*)$, avec θ^* non connu.

En **commande adaptative directe**, à la différence de la commande adaptative indirecte, le modèle du système est paramétré par le vecteur inconnu θ_c^* pour lequel $C(\theta_c^*)$ fournit les performances désirées. L'estimateur paramétrique en-ligne est conçu à l'aide du modèle $M(\theta_c^*)$.

Les figures (1.4(a)) et (1.4(b)) illustrent les schémas de principe de la commande adaptative directe et indirecte.

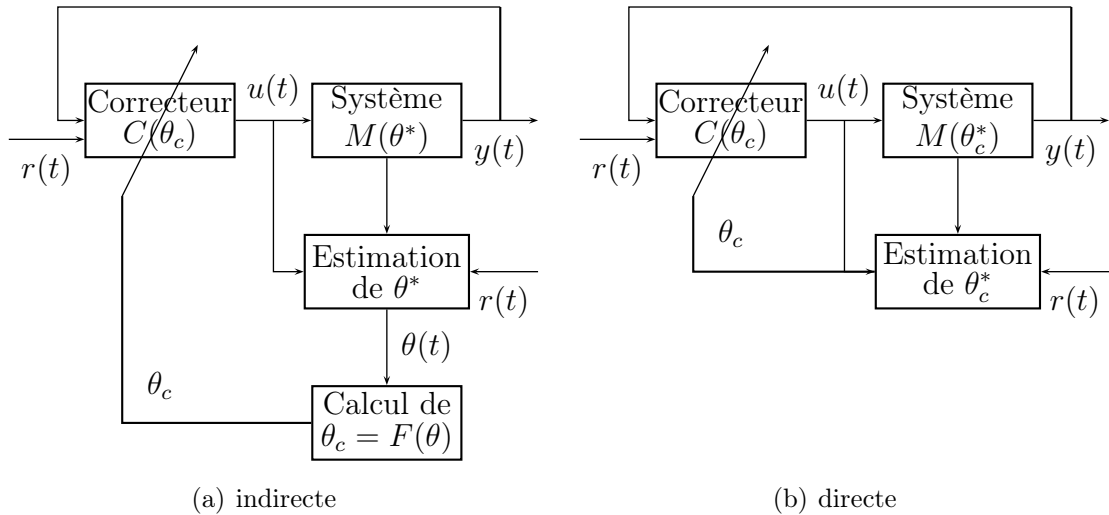


FIG. 1.4 – Schémas de principe de la commande adaptative
 $r(t)$: signal de référence ; $u(t)$ signal de commande ; $y(t)$ signal de sortie.

Des résultats théoriques relativement importants sont disponibles dans la littérature (Landau et al. (1998), Astrom & Wittenmark (1994), Sastry & Bodson (1989)).

Les résultats théoriques disponibles sur la convergence, la stabilité et la robustesse des algorithmes de commande adaptative ne permettent pas de répondre d'une manière définitive au maintien des performances requises. En effet, un système de commande adaptative est composé de deux boucles à contre-réaction :

1. le système de commande sous-jacent, soit la boucle à contre-réaction ordinaire formée par le système à commander en contre-réaction avec le régulateur,
2. une boucle d'adaptation des paramètres du régulateur constituée d'un algorithme d'adaptation paramétrique et d'une méthode de synthèse dans le cas d'une commande adaptative indirecte.

Les performances requises sont ainsi réalisées pour le modèle de commande en

temps réel engendré par l'algorithme d'adaptation paramétrique. Elles ne sont pas nécessairement satisfaites pour le système à commander.

Un exemple simple de commande adaptative indirecte

L'exemple ci-dessous est issu de (Sastry & Bodson (1989)) et illustre de manière simple l'idée de commande adaptative indirecte.

Considérons un système de premier ordre, linéaire, temps invariant de fonction de transfert

$$P(s) = \frac{k_p}{s + a} \quad (1.28)$$

avec $a > 0$ supposé connu. Seul le signe du gain du système k_p est supposé connu (et non sa valeur), soit $k_p > 0$. L'objectif du contrôleur est de permettre d'obtenir une sortie du système identique à la sortie d'un modèle dont la fonction de transfert est donnée par

$$M(s) = \frac{1}{s + a} \quad (1.29)$$

La figure (1.5) illustre un type de système de commande adaptative indirect. $\theta(t)$ est un estimateur de l'inverse de k_p que l'on cherche à ajuster pour assurer la poursuite de y_M (ou encore $y_P = y_M$ lorsque $\theta(t)k_p = 1$).

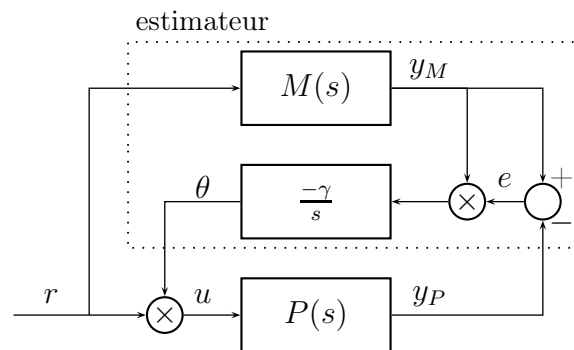


FIG. 1.5 – Un exemple simple de commande adaptative indirect

La loi d'adaptation est basée sur l'erreur de modélisation

$$e = y_P - y_M = P(s)\theta r - M(s)r = \frac{1}{s + a}[k_p\theta - 1]r \quad (1.30)$$

où r représente le signal de référence. L'objectif principal est de concevoir un mécanisme d'ajustement du paramètre θ garantissant la convergence de l'erreur vers zéro. Une technique initiée durant les années 60 au MIT (Massachusetts Institute of Technology) pour les applications aérospatiales consiste à ajuster θ progressivement dans la direction opposée au gradient du critère quadratique

$$J(\theta) = \frac{1}{2}e^2 \quad (1.31)$$

soit, pour un certain $\gamma' > 0$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma' \frac{dJ}{d\theta} = -\gamma' e \frac{\partial e}{\partial \theta} = -\gamma e y_M \quad (1.32)$$

avec $\gamma = k_p \gamma'$ une valeur choisie par l'observateur. Dans ce cas, l'erreur de modélisation e converge progressivement vers zéro. La quantité

$$\frac{\partial e}{\partial \theta}$$

appelée dérivée de sensibilité est évaluée sous l'hypothèse d'une variation lente de θ .

Notons qu'il existe des techniques de commande adaptative en lien avec le diagnostic. Dans (Chen et al. (2002)), une technique de contrôle adaptative direct en présence de défaut actionneur modélisé comme entrée inconnue a été proposée. D'autres chercheurs ont développé des contrôleurs adaptatifs directs en présence de défauts actionneurs et d'incertitudes paramétriques en utilisant la théorie de Lyapunov (Tao et al. (2001)).

3.2 Approche par sous-espace

Introduction à l'ACP

Les méthodes par analyse en composantes principales (ACP) sont des méthodes basées sur les données (data driven en anglais) et consistent à réduire la dimensionnalité d'un ensemble de données composé d'un grand nombre de variables interdépendantes, tout en conservant autant que possible la variabilité et la dispersion existantes dans l'ensemble de données. Ce résultat est obtenu par la transformation en un nouvel ensemble de variables, les composantes principales, qui ne sont pas corrélées, et qui sont classées de sorte que les premières contiennent le plus d'information sur la variabilité et la dispersion présentes dans l'ensemble des variables d'origine.

L'origine des approches ACP est très difficile à retracer. Les auteurs de (Preisendorfer & Mobley (1988)) notent que (Beltrami (1873)) et (Jordan (1874)) ont élaboré, indépendamment, une technique de décomposition en valeur singulière (SVD) dans une forme qui a donné naissance à l'ACP. Toutefois, il est généralement admis que les premières descriptions de la technique désormais connue sous le nom de l'ACP ont été données par (Pearson (1901)) et (Hotelling (1933)).

Pour une matrice de données (réduites et centrées) $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ qui rassemble les n mesures effectuées sur les p variables d'un système, la factorisation ACP consiste à décomposer cette dernière en la somme d'un produit de matrices représentant le modèle de composantes principales et d'une matrice de résidus, c'est-à-dire :

$$X = PT^T + E \quad (1.33)$$

avec

- $P \in \mathbb{R}^{n \times p}$ la matrice des composantes principales (scores en anglais), est un concentré des données d'origine contenues dans X qui décrit la manière dont les lignes de X dépendent les une des autres.
- $T \in \mathbb{R}^{m \times p}$ la matrice des poids (loadings en anglais) représente l'influence des données contenues dans X sur les composantes principales P .
- $E \in \mathbb{R}^{n \times m}$ la matrice résidus associée à la factorisation ACP.

La décomposition en composantes principales d'une matrice peut facilement être effectuée à l'aide de la décomposition en valeurs singulières. En effet, soit

$$X = USV^T \quad (1.34)$$

la décomposition *svd* de la matrices X , avec S une matrice diagonale de même dimension que X ($n \times p$) dont les éléments de la diagonale sont tous positifs et en ordre décroissant, U et V deux matrices orthonormées. Soit

$$Y = XV \quad (1.35)$$

$$= US \in \mathbb{R}^{m \times p} \quad (1.36)$$

Pour obtenir la décomposition en composantes principales de la matrice X , il suffit d'écrire

$$Y = [P \tilde{P}] \quad (1.37)$$

$$V = [T \tilde{T}] \quad (1.38)$$

$$E = \tilde{P}\tilde{T}^T \quad (1.39)$$

ce qui permet d'écrire

$$X = YV^T = PT^T + E \quad (1.40)$$

Le succès des techniques par ACP sur les processus industriels a motivé le développement des approches de diagnostic par sous-espace. L'objectif principale de l'approche est de démontrer que des schémas de génération de résidus à base d'observateur peuvent être établis à l'aide uniquement des mesures sur le système. Le succès des approches de diagnostic à base d'ACP a été largement rapporté dans la littérature. On peut retrouver dans (Kresta et al. (1991)), (Wise & Gallagher (1996)) et (Ding (2008)) des vues d'ensemble des approches de commande et diagnostic des processus utilisant l'ACP. Une modélisation du système est intégrée dans la procédure de conception du système de diagnostic. Ainsi le diagnostic par sous-espace peut être vu comme une procédure d'identification orientée vers le diagnostic. Identiquement à la technique ACP, la première étape est une décomposition en valeurs singulières.

Formulation du problème

Considérons le système multivariables à p entrées, n états et m sorties ayant pour représentation d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, x(0) = x_0 \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (1.41)$$

avec les paramètres n , A , B , C et D pas nécessairement connus.

A partir du système (1.41), on obtient la forme compacte suivante

$$Y_k = \mathcal{O}_k X + \mathcal{C}_k U_k \quad (1.42)$$

avec $Y_k \in \mathbb{R}^{km \times N}$, $U_k \in \mathbb{R}^{kp \times N}$ des matrices de Hankel donnés par

$$Y_k = \begin{bmatrix} y & \dot{y} & \dots & y^{(N-1)} \\ \dot{y} & \ddot{y} & \dots & y^{(N)} \\ \ddot{y} & y^{(3)} & \dots & y^{(N+1)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y^{(k-1)} & y^{(k)} & \dots & y^{(k+N-2)} \end{bmatrix}, U_k = \begin{bmatrix} u & \dot{u} & \dots & u^{(N-1)} \\ \dot{u} & \ddot{u} & \dots & u^{(N)} \\ \ddot{u} & u^{(3)} & \dots & u^{(N+1)} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ u^{(k-1)} & u^{(k)} & \dots & u^{(k+N-2)} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x & \dot{x} & \dots & x^{(N-1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times N}$$

et $\mathcal{O}_k \in \mathbb{R}^{km \times n}$, $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{km \times kp}$ données par

$$\mathcal{O}_k = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix}, \mathcal{C}_k = \begin{bmatrix} D & 0 & & & \\ CB & D & 0 & & \\ CAB & CB & D & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ CA^{k-2}B & \dots & & CB & D \end{bmatrix}$$

k et N sont des entiers positifs avec $k > n$.

L'approche de diagnostic des systèmes dynamiques par espace de parité (Chow & Willsky (1984), Lou et al. (1986)) est une méthode théoriquement bien établie dans le cadre de la génération de résidus à base de modèle. A partir de la connaissance des matrices A , B , C et D , comme vu plus haut, il s'agit de déterminer une matrice de vecteurs de parité P_k vérifiant

$$P_k \mathcal{O}_k = 0 \quad (1.43)$$

La matrice des vecteurs résidus est alors donnée par

$$R_k = P_k[Y_k - \mathcal{C}_k U_k] = P_k[I - \mathcal{C}_k]Z_k \quad (1.44)$$

avec $Z_k = \begin{bmatrix} Y_k \\ U_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(km+kp) \times N}$.

La matrice R_k est nulle (dans le cas déterministe) en absence de défauts et diffère de cette valeur lorsqu'un défaut survient, sous l'hypothèse que la matrice P_k est de plein rang colonne. Le choix de P_k permet de s'affranchir de l'état du système et permet de concevoir des résidus de différentes directions. La condition d'existence de P_k (solution de 1.43) est toujours satisfaite lorsque la matrice \mathcal{O}_k possède plus de lignes que de colonnes.

L'approche de diagnostic par ACP consiste à la résolution de l'équation

$$WZ_k = 0 \quad (1.45)$$

Il s'en suit la construction du générateur de résidus donné par

$$R = WZ_k \quad (1.46)$$

A partir de l'analyse par composantes principales, et sous certaines hypothèses énumérées dans la suite, la résolution de l'équation (1.45) peut être effectuée en considérant uniquement l'ensemble des données Z_k , lorsque la dynamique du système (A , B , C , D) ainsi que l'ordre n de ce dernier sont supposés non connus.

L'équation (1.42) peut être réécrite pour donner

$$[I \quad -\mathcal{C}_k]Z_k = \mathcal{O}_k X \quad (1.47)$$

ou encore

$$(\mathcal{O}_k^\perp)^T [I \quad -\mathcal{C}_k]Z_k = 0 \quad (1.48)$$

Cette dernière égalité permet d'affirmer que la matrice Z_k admet des valeurs singulières nulles, plus précisément si le système est observable et la matrice $\begin{bmatrix} X \\ U_k \end{bmatrix}$ est de rang plein (excitation persistante), alors Z_k admet $km - n$ valeurs singulières nulles. Pour la démonstration, il suffit de poser

$$Z_k = \begin{bmatrix} \mathcal{O}_k & \mathcal{C}_k \\ 0 & I_{kp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ U_k \end{bmatrix} \quad (1.49)$$

Ainsi, il existe $W \in \mathbb{R}^{(km-n) \times (km+kp)}$ tel que

$$WZ_k = 0 \quad (1.50)$$

Soit

$$Z_k = PT^T + E \quad (1.51)$$

la décomposition en ACP de la matrice Z_k obtenue comme en (1.40). Le choix approprié du nombre de composantes principales permet d'écrire

$$WP = 0 \quad (1.52)$$

En effet lorsque le nombre de colonnes de la matrice P est supérieur ou égale à $kp + n$ (rang de Z_k), on aura, d'après (1.37 - 1.39) l'égalité $E = 0$. Il existe dans la littérature, de nombreuses méthodes disponibles, la plupart issues de méthodes heuristiques, pour déterminer le nombre de composantes principales (Qin & Dunia (2000)).

Il en résulte que

$$WZ_k = WPT^T = 0 \quad (1.53)$$

Pour obtenir (1.52), il suffit de multiplier l'égalité ci-dessus par la matrice orthogonale T .

Théorème 3.1 *Sous l'hypothèse de dimensions appropriées, la matrice W de l'égalité (1.52) peut être définie à une multiplication près par une matrice inversible*

$$W = \begin{bmatrix} \mathcal{O}_k^\perp & -\mathcal{O}_k^\perp \mathcal{C}_k \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

En effet, soit $W = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \end{bmatrix}$ avec $W_1 \in \mathbb{R}^{(km-n) \times km}$ et $W_2 \in \mathbb{R}^{(km-n) \times kp}$. Alors on obtient d'après l'égalité (1.49)

$$\begin{bmatrix} W_1 \mathcal{O}_k & W_1 \mathcal{C}_k + W_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ U_k \end{bmatrix} = 0 \quad (1.55)$$

qui permet d'écrire, lorsque $\begin{bmatrix} X \\ U_k \end{bmatrix}$ est de rang plein ($kp + n$)

$$\begin{bmatrix} W_1 \mathcal{O}_k & W_1 \mathcal{C}_k + W_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (1.56)$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} W_1 = \mathcal{O}_k^\perp \\ W_2 = -\mathcal{O}_k^\perp \mathcal{C}_k \end{cases} \quad (1.57)$$

Dans une approche d'identification par l'ACP, les matrices du système sont estimées à partir de du système d'équations (1.57).

Rappelons que pour l'application de la technique décrite dans cette partie, les conditions fondamentales à satisfaire peuvent être résumées à :

1. $k > \frac{n}{m}$ et $N > k(m + p)$ (ordres de dérivation)
2. $\text{rang}(\mathcal{O}_k) = n$ (système observable)
3. $\text{rang}\left(\begin{bmatrix} X \\ U_k \end{bmatrix}\right) = kp + n$ (excitation persistante)

L'équivalence entre l'approche de diagnostic par espace de parité et celle par ACP a été démontrée, sous certaines conditions portant sur la nature des bruits de mesures, dans (Gertler & McAvoy (1997)). Traditionnellement, l'ACP a été utilisée pour la détection et l'isolation de défauts capteur. On trouvera des exemples de diagnostic de défauts par ACP dans (Gertler & Cao (2004)).

Malgré son succès dans les applications industrielles, les approches classiques par ACP possèdent des limites. Une limitation importante de ces approches est que le modèle ACP, une fois élaboré à partir des données, est stationnaire (invariant dans le temps), alors que la plupart des processus réels présentent généralement des comportements variant légèrement avec le temps (dû au vieillissement par exemple). L'ACP adaptative proposées dans la littérature (Qin (1998), Li et al. (2000)) permet d'ajuster le modèle aux nouvelles conditions sur chaque fenêtre glissante.

3.3 Commande sans modèle

Le concept de commande sans modèle dont il est question ici est celui développé par C. Join et M. Fliess (Join et al. (2008)). Ce concept est à contre-courant des idées et développements qu'a connu l'automatique ces dernières années où le modèle considéré est de plus en plus complexe, de plus en plus près de la physique des systèmes manipulés. L'idée sous-jacente de cette notion est que le signal porte en lui les informations sur le système qui l'a produit. La commande sans modèle repose sur une modélisation locale, sans cesse réactualisée, à partir de la seule connaissance du comportement entrée-sortie. Cette modélisation obtenue par des estimations algébriques (de même nature que celles utilisées dans ce mémoire) permet ensuite de commander efficacement à base de contrôleurs *PID* classiques.

Illustrons la notion de commande sans modèle introduite ci-dessus par un exemple simple. Considérons un système monovariante, linéaire ou non dont l'entrée u et la sortie y satisfont l'équation différentielle inconnue, suivante

$$\Phi(y, \dot{y}, \dots, y^{(\nu)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(\mu)}) = 0 \quad (1.58)$$

avec Φ une fonction régulière. On substitue au modèle (1.58), le modèle "phénoménologique", valable durant un court laps de temps,

$$y^{(n)} = F + \beta u \quad (1.59)$$

où n et β sont des paramètres de synthèse, choisis par le praticien alors que F est un paramètre estimé à chaque instant grâce à la connaissance de u et y . Les paramètres β et F n'ont a priori aucune signification physique. Une fois l'estimée de F obtenue, notée \tilde{F} , on synthétise, comme l'indique la figure (1.6), une commande PI-intelligent qui poursuit une trajectoire de référence $r(t)$ à la manière de la platitude (Fliess et al. (1995)) comme suit

$$\begin{cases} u(t) &= \frac{1}{\beta}(r^{(n)}(t) - \tilde{F}) + C(e(t)) \\ C(e) &= k_0 \int_0^t e(\tau) d\tau + k_1 e(t) + k_2 \dot{e}(t) + k_3 \ddot{e}(t) + \dots + k_n e^{(n-1)}(t) \end{cases} \quad (1.60)$$

avec $e = (r - y)$ l'erreur de poursuite, k_i , ($i = 0, \dots, n$) sont les paramètres du correcteur réglés de manière à réaliser un objectif de commande donné qui sera dans ce cas la stabilisation du transfert entre e et $\xi = F - \tilde{F}$. A partir de (1.59) et (1.60), ce transfert peut être représenté par la fonction de transfert

$$G(s) = \frac{s}{s^{n+1} - k_n s^n - \dots - k_1 s - k_0} \quad (1.61)$$

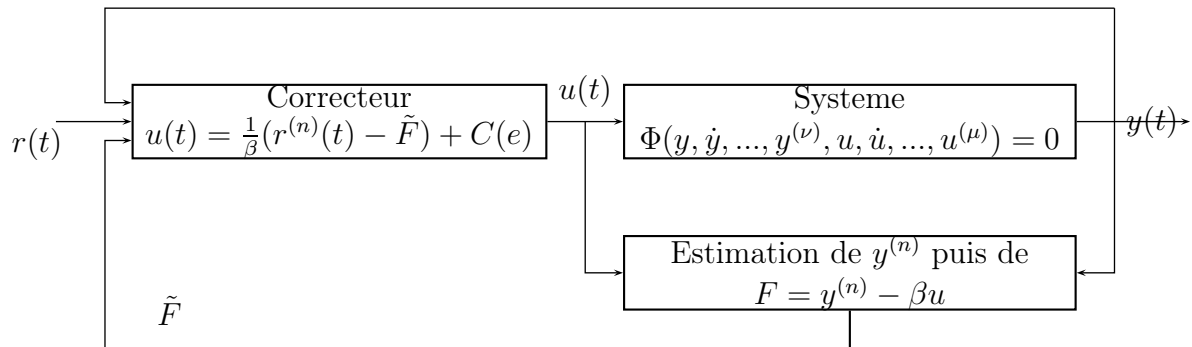


FIG. 1.6 – Commande sans modèle

dont les paramètres peuvent être facilement réglés afin de garantir sa stabilité, sans se soucier du modèle du système. En pratique, le plus souvent on se limite à $n = 1$ ou 2 (conservant ainsi la simplicité du correcteur *PID*).

La commande sans modèle possède certains avantages, d'un point de vue réglage :

- le nombre de paramètres de synthèse est très réduit. Le correcteur est synthétisé une seule fois,
- dans F , on rassemble les erreurs de modèle, perturbations, défauts sans chercher à les distinguer.

Enfin, la commande sans modèle est une solution simple au problème de la commande des systèmes complexes incertain ou non.

4 Conclusion

Une étude des méthodes de diagnostic à base de modèle est réalisée dans ce chapitre. Cette étude commence par une présentation des méthodes à base de modèle explicite qui reposent non seulement sur une connaissance structurelle du système, mais requièrent également une connaissance de ses paramètres qui peut être plus ou moins précise. Or, on sait que la modélisation explicite est un problème complexe et difficile qui nécessite une bonne connaissance de la physique du système que l'on cherche à modéliser. Ensuite, nous avons présenté, dans le domaine de la commande et du diagnostic, les approches dites intégrées qui sont basées sur la connaissance des signaux entrée et sortie. On a vu également que si l'approche de diagnostic par ACP ne suppose pas connues les matrices du système, elle les identifie de manière implicite (Wang & Qin (2002)), ce qui entraîne des incertitudes paramétriques et rend indispensable la condition de persistance d'excitation pour la génération des

résidus robustes à ces incertitudes.

Pour faire face aux difficultés rencontrées dans les approches de diagnostic par ACP et celles à base de modèles explicites en général, une nouvelle méthode algébrique de diagnostic de système en présence de défaut actionneur et/ou capteur et qui s'affranchit des problèmes induits par les incertitudes paramétriques, est proposée dans la suite de ce mémoire. Cette nouvelle approche prend sa source dans les mêmes techniques d'estimation algébriques qui ont servi au développement de la technique de la commande sans modèle et qui ont également déjà été utilisée dans le cadre du diagnostic des systèmes linéaires (Fliess & Join (2003)). Ces techniques permettent d'obtenir des estimateurs explicites et linéaires d'un paramètre dont l'identification n'est pas initialement évidente. Elles permettent aussi de contourner le problème de l'estimation des dérivées des signaux mesurés.

Chapitre 2

Méthode algébrique de diagnostic de défauts

Dans cette partie, nous proposons une méthode de diagnostic de défauts actionneur et capteur pouvant être modélisés comme signaux dits structurés additifs agissant sur une classe de systèmes dynamiques linéaires incertains. Le principal atout de cette approche est qu'il est possible, sous certaines hypothèses, de détecter, localiser et identifier les défauts à l'aide des seules mesures de la commande et de la sortie sans avoir à identifier les paramètres du modèle. La méthode est fondée sur la génération et l'analyse de relations de redondance analytiques et exploite le fait qu'un signal structuré satisfait une équation différentielle. Cette caractérisation des signaux structurés nous permet de transformer le problème de diagnostic en un problème d'analyse de pseudo-spectres de faisceaux de matrices. La prise de décision est entièrement fondée sur l'évolution temporelle des estimations de certaines caractéristiques des défauts. Des exemples numériques sont fournis et commentés afin d'illustrer l'approche proposée.

1 Introduction

Comme vu dans le chapitre précédent, parmi les méthodes de diagnostic robuste existant dans la littérature qui assurent une insensibilité aux entrées inconnues et aux incertitudes paramétriques, nous trouvons les méthodes à base d'informations analytiques qui sont théoriquement bien établies (Frank (1990), Basseville & Nikiforov (1993), Patton et al. (2000), Isermann (2006)). Ces méthodes reposent non seulement sur une connaissance structurelle du système, mais requièrent également

une connaissance plus ou moins précise de ses paramètres. A partir des mesures de la commande u et de la sortie y , les méthodes analytiques assurent la génération de signaux indicateurs de défauts grâce aux modèles mathématiques détaillés. Les signaux indicateurs couramment utilisés sont les résidus, les estimations des paramètres et les estimations d'état. La tâche de diagnostic est accomplie en comparant les signaux indicateurs observés avec ceux correspondant à un fonctionnement normal du système, directement ou après certaines transformations mathématiques.

Ce chapitre porte sur une nouvelle approche algébrique et déterministe de diagnostic qui présente un nouveau point de vue basé sur la théorie des distributions et l'analyse du pseudospectre de faisceaux de matrices. Notre démarche s'inspire de certains outils et développements de la théorie de l'estimation algébrique (Fliess & Sira-Ramirez (2003)) courants en automatique mais très peu usuels en traitement du signal. Cette approche repose uniquement sur la connaissance structurelle du système ainsi que des signaux défauts. Plus précisément on considérera les systèmes régis par une équation différentielle linéaire à coefficients constants et des défauts actionneur et capteur additifs dits structurés. On adopte pour le développement de notre approche des formulations distributionnelles (également utilisées dans Belkoura & Richard (2006)) qui nous permettent d'obtenir des expressions explicites dans le domaine temporel. Nous transformons le problème de détection de défauts en un problème de recherche de valeurs propres généralisées, à partir duquel ni la connaissance, ni l'estimation des paramètres du modèle ne sont nécessaires à la détection de défauts.

L'une des propriétés importantes et hautement souhaitables pour un système de diagnostic est la précocité de détection et la précision de l'information fournie. Ces propriétés sont couramment mesurées et évaluées en tant que retard de détection. Or la performance de nature asymptotique avec les retards de traitement sont inhérents à une approche stochastique. Dans ce contexte une approche algébrique et déterministe devient intéressante. Même si le cadre déterministe a souvent été déconsidéré essentiellement en raison de la sensibilité des méthodes aux bruits, une telle approche peut se révéler efficace lorsqu'elle est abordée dans un cadre théorique approprié. De plus, elle présente l'avantage de s'affranchir des hypothèses classiques de connaissance a priori d'informations statistiques du bruit ou des signaux traités. La méthode exploite les caractéristiques des signaux en continu. Comme nous le verrons, la connaissance des signaux entrée et sortie traités en temps continu, permet le diagnostic de défaut sur une fenêtre de temps très courte. De plus, la rapidité des estimations, due aux formules explicites fournies par les techniques algébriques, peut être un atout majeur pour l'accommodation des défauts (Staroswiecki & Gehin

(2000)). En revanche, comme nous le verrons par la suite, les méthodes déterministes ont besoin de la connaissance de l'ordre du système et elles peuvent se montrer très sensibles à une mauvaise estimation de ce dernier. Le problème de la robustesse de l'approche proposée par rapport à l'ordre du système sera abordé dans le prochain chapitre de cette thèse.

2 Base algébrique de l'approche

2.1 Rappel sur les distributions (Schwartz (1966))

Définition 2.1 On note $D(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact. Pour Ω ouvert de \mathbb{R} , on note $D(\Omega)$ ou $D_\Omega(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact (fermé et borné) inclus dans Ω .

Exemple 2.1 Fonction de $D(\mathbb{R})$

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.1)$$

est une fonction indéfiniment dérivable et à support compact dans \mathbb{R} .

Définition 2.2 Une distribution T sur \mathbb{R} est un opérateur linéaire et continu sur $D(\mathbb{R})$. On note $D'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions sur \mathbb{R} .

Exemple 2.2 La distribution de Dirac δ est définie par

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0), \forall \phi \in D(\mathbb{R}) \quad (2.2)$$

La distribution de Heaviside H est définie par

$$\langle H, \phi \rangle = \int_0^\infty \phi(\tau) d\tau, \forall \phi \in D(\mathbb{R}) \quad (2.3)$$

Proposition 2.1 Un opérateur T linéaire sur $D(\mathbb{R})$ est une distribution si et seulement si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, il existe des constantes $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ telles que :

$$|T(\phi)| \leq \sup_{0 \leq i \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi^{(i)}(x)|, \forall \phi \in D(\mathbb{R}) \text{ avec } \text{Supp}(\phi) \subset K \quad (2.4)$$

Cette condition assure la continuité de T sur $D(\mathbb{R})$ et, réciproquement, la continuité de T sur $D(\mathbb{R})$ implique la condition. Le formalisme des distributions offre une grande souplesse et un cadre unifié dans l'énoncé et le traitement des différents problèmes de modélisation des systèmes linéaires et stationnaires. Dans ce mémoire, une formulation distributionnelle sera adoptée et quelques notions fondamentales pour l'approche de diagnostic proposée seront rappelées.

Distributions régulières

Beaucoup de distributions peuvent être définies à partir de fonctions, au quel cas on parle de distributions régulières : ainsi la théorie des distributions apparaît comme une extension de la notion de fonctions.

Une distribution qui n'est pas régulière est dite singulière : c'est le cas de la distribution δ .

Proposition 2.2 *Toute fonction f localement intégrable (i.e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$) définit une distribution notée T_f dont les valeurs sont données par*

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)\phi(\tau)d\tau, \quad \forall \phi \in D(\mathbb{R}) \quad (2.5)$$

et l'application $f \mapsto T_f$ est injective, ce qui permet d'assimiler $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ à une partie de $D'(\mathbb{R})$. Lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté, on conservera la notation f pour désigner la distribution T_f .

Propriétés

1. Translatée d'une distribution

Soit $T \in D'(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}^+$. On définit la translatée de T de paramètre a , la distribution noté $\tau_a T$ par

$$\langle \tau_a T, \phi \rangle = \langle T, \tau_{-a}\phi \rangle, \quad \forall \phi \in D(\mathbb{R}), \quad \text{avec } \tau_{-a}\phi(t) = \phi(t+a) \quad (2.6)$$

2. Produit avec une fonction régulière

Soit g une fonction C^∞ et T un élément de $D'(\mathbb{R})$. On définit le produit gT par

$$\langle gT, \phi \rangle = \langle T, g\phi \rangle, \quad \forall \phi \in D(\mathbb{R}) \quad (2.7)$$

3. Dérivation

Soit T une distribution. on définit sa dérivée comme la distribution notée $T^{(1)}$ donnée par la formule

$$\langle T^{(1)}, \phi \rangle = - \langle T, \phi^{(1)} \rangle, \quad \forall \phi \in D(\mathbb{R}) \quad (2.8)$$

Ainsi de proche en proche, toute distribution est indéfiniment dérivable avec

$$\langle T^{(n)}, \phi \rangle = (-1)^n \langle T, \phi^{(n)} \rangle, \quad \forall \phi \in D(\mathbb{R}) \quad (2.9)$$

Inversement T est aussi appelée primitive de T' .

Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} excepté sur une suite finie de points distincts (a_1, \dots, a_n) où f et ses différentes dérivées présentent des sauts finis. Alors

$$T_f^{(m)} = \{f^{(m)}\} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{m-1} s_i^j \delta_{a_i}^{(m-j-1)} \quad (2.10)$$

avec $\{f^{(j)}\}$ la dérivée usuelle (au sens des fonctions) d'ordre j de f définie pour $x \neq a_i$, s_i^j le saut de la fonction $\{f^{(m-j-1)}\}$ au point a_i et δ_{a_i} la distribution définie par $\langle \delta_{a_i}, \phi \rangle = \phi(a_i)$

Exemple 2.3 *La distribution H admet δ pour dérivée.*

La formule de Leibniz pour la dérivation de produits de fonctions est aussi valable pour le produit d'une distribution et d'une fonction. Ainsi pour tout $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $T \in D'(\mathbb{R})$, on a :

$$(g.T)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_k^n g^{(k)}.T^{(n-k)} \quad (2.11)$$

4. Ordre

On dit que la distribution T de $D'(\mathbb{R})$ est d'ordre fini s'il existe un entier n tel que, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, il existe une constante C_K positive telle que, pour toute fonction ϕ de $D(\mathbb{R})$ à support contenu dans K , on ait

$$|T(\phi)| \leq C_K \sup_{0 \leq i \leq n} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi^{(i)}(x)|, \quad \forall \phi \in D(\mathbb{R}) \quad (2.12)$$

L'entier n ne dépend pas de K contrairement à celui de la proposition (2.4). Le plus petit entier n vérifiant (2.12) est appelé ordre de la distribution T et noté $ordr(T)$.

Exemple 2.4 *La distribution $\delta^{(m)}$ est d'ordre m , H est d'ordre 0. Pour toute fonction f localement intégrable, sa distribution associé T_f est d'ordre 0.*

5. Support

On dit qu'une distribution T est nulle sur un ouvert Ω de \mathbb{R} si pour tout $\phi \in D(\Omega)$, on a $\langle T, \phi \rangle = 0$. Le complément du plus grand ouvert sur lequel T s'annule est le support de la distribution T , noté $\text{supp}(T)$.

Exemple 2.5 $\text{supp}(\delta^{(n)}) = \{0\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; $\text{supp}(\delta_a) = \{a\}$; $\text{supp}(H) = [0, +\infty[$

On note $D_+(\mathbb{R})$ (respectivement $D_-(\mathbb{R})$) l'espace des distributions à support limité à gauche (respectivement à droite). En théorie du signal, les éléments de $D_+(\mathbb{R})$ sont appelés signaux causaux. L'ensemble des distributions à support compact est noté $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$. Cet ensemble est également le dual topologique de $C^\infty(\mathbb{R})$ (espace des formes linéaires).

Théorème 2.1 *Toute distribution à support compact est d'ordre fini.*

Théorème 2.2 *Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et soit p son ordre. Alors l'égalité $\langle T, \phi \rangle = 0$ est vérifiée pour tout $\phi \in D(\mathbb{R})$ s'annulant, ainsi que toutes ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à p , sur $\text{supp}(T)$.*

Corollaire 2.1 *Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et soit p son ordre. Pour toute fonction $\phi \in D(\mathbb{R})$ nulle sur $\text{supp}(T)$ ainsi que toutes ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à p , on a $\phi T = 0$.*

Une conséquence de ce corollaire est que

$$t^k \delta^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \delta^{(n-k)} & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.13)$$

6. Convolution

Définition 2.3 *Soient S et T deux éléments de $D'(\mathbb{R})$. On appelle produit tensoriel de T et S , la distribution de $D'(\mathbb{R}^2)$ notée $T \times S$ et définie par*

$$\langle T \times S, \Phi(\cdot, \cdot) \rangle = \langle T, \langle S, \Phi(x, \cdot) \rangle \rangle = \langle S, \langle T, \Phi(\cdot, y) \rangle \rangle, \quad \forall \Phi \in D(\mathbb{R}^2) \quad (2.14)$$

Définition 2.4 *Deux ensembles fermés F_1 et F_2 de \mathbb{R} sont dits convolutifs, si et seulement si, pour tout compact K de \mathbb{R} , l'ensemble $F_1 \times F_2 \cap K^\Delta$ est compact dans \mathbb{R} où*

$$K^\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x + y \in K\}$$

Le produit de convolution de deux distributions S et T de $D'(\mathbb{R})$ n'a de sens que si $\text{supp}(S)$ et $\text{supp}(T)$ sont convolutifs et dans ce cas, $S \star T$ est la distribution

de $D'(\mathbb{R})$ définie par

$$\langle S \star T, \phi \rangle = \langle S \times T, \phi(x+y) \rangle, \quad \forall \phi \in D(\mathbb{R}) \quad (2.15)$$

Les principaux cas où la distribution $S \star T$ est définie sont

- $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et $T \in D'(\mathbb{R})$
- S et $T \in D'_+(\mathbb{R})$
- S et $T \in D'_-(\mathbb{R})$

Le produit de convolution sur les distributions possède les propriétés suivantes

- Commutativité : $S \star T = T \star S$
- Associativité : $R \star [S \star T] = [R \star S] \star T$
- Dérivabilité : $(S \star T)^{(k)} = (S^{(k)} \star T) = (S^{(k-1)} \star T^{(1)}) = \dots = (S \star T^{(k)})$

Notons enfin que les opérations d'intégration, de dérivation et de translation sur les fonctions peuvent être représentées par le produit de convolution. En effet, pour toute fonction ϕ , on a :

- $\phi^{(k)}(t) = [\delta^{(k)} \star \phi](t)$
- $\underbrace{\int_0^t \int_0^\tau \dots \int_0^\tau}_{k \text{ fois}} \phi(\tau) (d\tau)^k = [H^{\star k} \star \phi]$ où $H^{\star k} = \underbrace{H \star H \star \dots \star H}_{k \text{ fois}}$
- $\phi(t-a) = [\delta_a \star \phi](t)$

Grâce à la formule de Leibniz, on obtient pour deux distributions S et T à support convolutif le résultat suivant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N} \text{ on a } t^k(S \star T) = \sum_{j=0}^k C_j^k(t^j S) \star (t^{k-j} T) \quad (2.16)$$

Une conséquence du résultat ci-dessus est que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{at}(S \star T) = (e^{at}S) \star (e^{at}T) \quad (2.17)$$

2.2 Signaux structurés et annihilateurs

Les signaux structurés ont été définis pour faire référence aux signaux pouvant être annulés au moyen de simples multiplications et dérivations. C'est le cas par exemple des signaux solutions d'une équation différentielle. Un exemple simple est un biais actionneur modélisé par le signal échelon $f(t) = lH(t - \tau_a)$. En effet, on vérifie que

$$(t - \tau_a)f^{(1)} = 0 \quad \forall t \quad (2.18)$$

Dans ce contexte, l'opérateur différentiel

$$D = t \frac{\partial}{\partial t} - \tau_a \frac{\partial}{\partial t} = (t - \tau_a) \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.19)$$

est appelé annihilateur ou annulateur de f .

Définition 2.5 *D'une manière formelle, on dira qu'un signal $f(t)$ est structuré, s'il existe un polynôme différentiel $P \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ tel que le produit de convolution de ce dernier par f résulte en une distribution Q de support discret et fini contenu dans \mathbb{R}^+ (c-à-d $Q \in D'_+(\mathbb{R})$ et $P \star f = Q$).*

Un annulateur associé au signal f (lorsqu'il est structuré) est donné par

$$D(t) = \alpha(t)Q \quad (2.20)$$

avec $\alpha(t)$ une fonction qui satisfait avec la distribution (d'ordre fini et à support compact) Q les conditions du théorème (2.2). Cette écriture permet un large spectre de choix d'annulateur. On peut bien parler du plus petit annulateur donné par le polynôme α de plus petit degré et la distribution Q de plus petit ordre.

La fonction α dépend seulement de la structure de la distribution Q . Lorsque Q admet une décomposition du type $Q = \sum Q_i$ avec Q_i des distributions de supports disjoints, alors la fonction α consiste au produit $\prod \alpha_i$ avec α_i vérifiant l'égalité $\alpha_i Q_i = 0$.

L'annulation d'un terme structuré n'implique pas nécessairement la perte de toute information sur ce terme et l'annulateur peut être choisi afin de conserver une information particulière sur le signal considéré. Par exemple, en (2.18) l'annulateur comporte l'instant de saut τ_a du signal considéré.

2.3 Modèles de défauts

Une modélisation convenable (appropriée) des défauts est importante pour le bon fonctionnement des méthodes de détection de défauts. Une approche réaliste présuppose la connaissance du lien entre les défauts physiques et leur effet sur les modèles mathématiques du processus. Ceci peut habituellement être fourni par l'inspection du système, la connaissance de sa physique et une analyse de l'arbre de symptômes de chaque défaut. Les défauts peuvent être de diverses sources. Ils peuvent être issus, par exemple

1. d'erreur de conception, erreur d'assemblage, . . .

2. d'un fonctionnement erroné, manque de maintenance, . . .
3. d'un vieillissement, dégradation, usure pendant le fonctionnement normal.

En considérant la phase de fonctionnement, ils peuvent être déjà présents ou peuvent apparaître soudainement avec une petite ou une grande amplitude, par étape, ou graduellement comme une dérive. Un défaut est défini comme déviation non permise d'au moins une des propriétés caractéristiques d'une condition (nominale, usuelle). Les caractéristiques les plus couramment utilisées sont l'entrée $u(t)$ et la sortie $y(t)$ du système. Ainsi, l'apparition d'un défaut peut se traduire comme la modification d'une variable $x_r(t)$ par addition de défaut $f(t)$:

$$x(t) = x_r(t) + f(t) \tag{2.21}$$

L'évolution temporelle de tels défauts (figure 2.1) peut apparaître comme un

1. **défaut brusque** (biais d'actionneur)
2. **défaut naissant** (dérive de capteur)
3. **défaut intermittent** (avec interruptions)

que l'on peut modéliser à l'aide de signaux structurés.

Exemple 2.6 *Défauts de capteurs*

Les capteurs sont des éléments dynamiques de transfert pour lesquels seule la sortie $y(t)$, la variable de mesure, est accessible. La vraie entrée physique $y_r(t)$ est le plus souvent inconnue.

La caractérisation du type de défaut (additif ou multiplicatif) dépend plus de la méthode de diagnostic utilisée que de la nature physique réelle du défaut. Plusieurs défauts de capteurs peuvent être modélisés comme des défauts additifs. On en distingue principalement deux types :

1. *décalage constant, par exemple $y(t) = y_r(t) + \Delta y H(t - \tau_c)$*
2. *décalage évolutif, par exemple $y(t) = y_r(t) + \Delta y (t - \tau_c) H(t - \tau_c)$.*

où y est la sortie du capteur, y_r la sortie réelle fournie par le système, τ_c l'instant d'apparition du défaut et Δy l'amplitude du défaut.

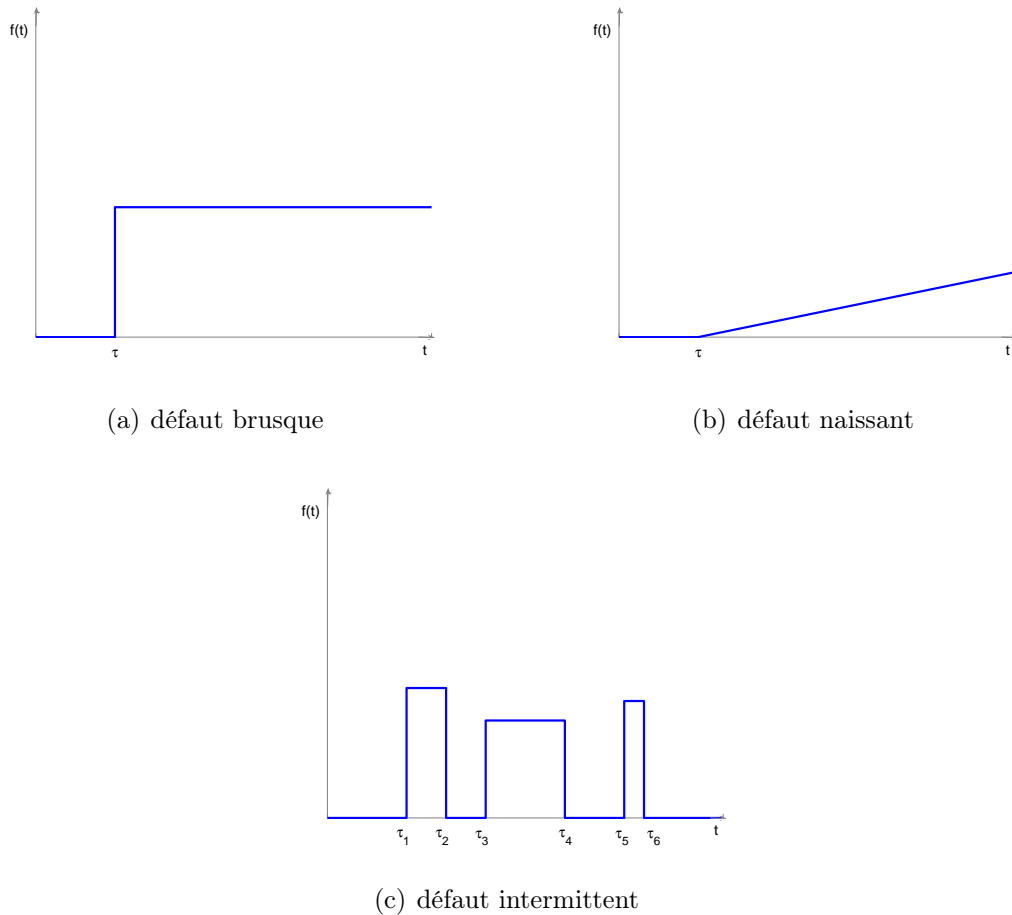


FIG. 2.1 – Évolution temporelle de différents types de défauts

3 Principales étapes de la méthode

3.1 Préambule

Le système étudié est le système (Σ) représenté sur la figure 2.2. Le but est de détecter, localiser et identifier les défauts f_a et f_c , modélisés comme signaux structurés (Fliess & Sira-Ramirez (2003)), à l'aide de la connaissance des signaux d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$. Dans un premier temps, nous ne considérons pas l'addition de bruits. Ces types de signaux recouvrent une grande plage de signaux défauts que l'on retrouve dans la littérature (rupture, défaut naissant ou intermittent) (Isermann (2006)).

Pour diagnostiquer les défauts sur le système, on fixe les mêmes hypothèses utilisées dans (Moussa Ali et al. (2009)). C'est-à-dire on va supposer que la commande u_r (reçue en entrée par le système) et la sortie y_r (délivrée en sortie par le système)

satisfont l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\begin{cases} a_n y_r^{(n)} + a_{n-1} y_r^{(n-1)} + \dots + a_0 y_r = b u_r \\ y_r^{(i)}(0), \quad i = 0, \dots, n-1 \end{cases} \quad (2.22)$$

où l'ordre n est supposé connu et les paramètres a_i , b ainsi que les conditions initiales sont supposés constants mais pas nécessairement connus.

En présence d'un défaut actionneur noté f_a et d'un défaut capteur noté f_c , les mesures u et y seront explicitées en fonction des grandeurs vraies et des défauts comme suit : $u = u_r - f_a$ et $y = y_r + f_c$ (figure 2.2).

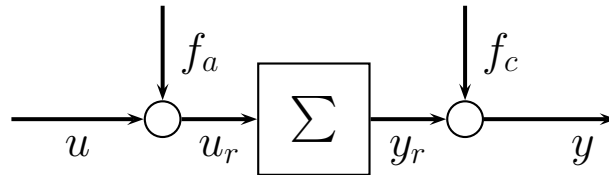


FIG. 2.2 – Système avec défaut actionneur et défaut capteur.

3.2 Système avec défaut actionneur

Considérons le cas très simple où $n = 1$ et avec uniquement l'hypothèse d'un défaut actionneur $f_a = l_a H(t - \tau_a)$ pour présenter les principes de base de la méthode. Ainsi, dans le domaine fonctionnel (en gardant les mêmes notations pour les signaux et les distributions associées), le système en défaut satisfait l'équation suivante :

$$a_1 y^{(1)} + a_0 y = a_1 y(0) \delta + b u + b l_a H(t - \tau_a) \quad (2.23)$$

L'algorithme de diagnostic proposé se compose de deux étapes. La première étape consiste à générer des relations de redondance et la seconde à analyser ces relations. Pour la génération des relations de redondance, l'équation du système en défaut (2.23) est dérivée dans un premier temps, ce qui donne :

$$a_1 y^{(2)} + a_0 y^{(1)} - b u^{(1)} = \phi_0 + b l_a \delta_{\tau_a} \quad (2.24)$$

avec

$$\phi_0 = a_1 y(0) \dot{\delta} + (a_1 \dot{y}(0) + a_0 y(0) - b u(0)) \delta \quad (2.25)$$

On a

1. $Supp(\phi_0) = \{0\}$ et $Ordre(\phi_0) = 1$. Ainsi $t^{k_1}\phi_0 = 0, \forall k_1 \geq 2$
2. $Supp(\delta_{\tau_a}) = \{\tau_a\}$ et $Ordre(\delta_{\tau_a}) = 0$. Ainsi $(t - \tau_a)^{k_2}\delta_{\tau_a} = 0, \forall k_2 \geq 1$

Ainsi, pour éliminer les singularités du second membre de l'équation ci-dessus (ϕ_0 et δ_{τ_a}), il suffit, d'après le théorème (2.2), de multiplier l'égalité (2.24) par une fonction régulière α_1 vérifiant

$$\alpha_1(0) = \dot{\alpha}_1(0) = \alpha_1(\tau_a) = 0 \quad (2.26)$$

soit par exemple, en choisissant ci-dessus $k_1 = 2$ et $k_2 = 1$

$$\alpha_1(t) = t^2(t - \tau_a)$$

On obtient alors l'égalité

$$[t^3(a_1y^{(2)} + a_0y^{(1)} - bu^{(1)})] - \tau_a[t^2(a_1y^{(2)} + a_0y^{(1)} - bu^{(1)})] = 0 \quad (2.27)$$

ou encore

$$\left[\sum_{j=0}^1 a_j W_{2,j} - bV_2 \right] - \tau_a \left[\sum_{j=0}^1 a_j W_{1,j} - bV_1 \right] = 0 \quad (2.28)$$

avec

$$\text{pour } i = 1, 2 \text{ et } j = 0, 1, \begin{cases} W_{i,j} & = t^{1+i}y^{(j+1)} \\ V_i & = t^{1+i}u^{(1)} \end{cases} \quad (2.29)$$

Pour $t < \tau_a$, l'égalité (2.28) est vérifiée indépendamment de τ_a (τ_a n'est pas identifiable avant l'apparition du défaut). En effet pour $t < \tau_a$, on montre que

$$\left[\sum_{j=0}^1 a_j W_{2,j} - bV_2 \right] = \left[\sum_{j=0}^1 a_j W_{1,j} - bV_1 \right] = 0 \quad (2.30)$$

Cependant pour $t \geq \tau_a$, l'application d'intégrations successives permet d'obtenir des relations de redondance que l'on peut arranger afin d'obtenir la formulation spectrale suivante

$$[A_2 - \tau_a A_1]X = 0 \quad (2.31)$$

où les matrices A_i de dimension $m \times 3$ (m est un paramètre à choisir en fonction de contraintes explicitées ultérieurement) sont parfaitement connues en fonction des mesures u et y . Quant au vecteur X , il regroupe tous les paramètres (a_1, a_0 et b). Plus précisément la j^e ligne de la matrice A_i ($j = 1, \dots, m$) est donnée par

$$\left(\underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t \tau^{i+1} \ddot{y}(\tau) d\tau^{p+j}}_{p+j \text{ fois}} \quad \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t \tau^{i+1} \dot{y}(\tau) d\tau^{p+j}}_{p+j \text{ fois}} \quad - \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t \tau^{i+1} \dot{u}(\tau) d\tau^{p+j}}_{p+j \text{ fois}} \right)$$

ou encore en fonction de produits de convolution

$$A_i(j, :) = \begin{pmatrix} H^{*p+j} \star W_{i,1} & H^{*p+j} \star W_{i,0} & -H^{*p+j} \star V_i \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

et $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \\ b \end{pmatrix}$

Afin d'éliminer dans A_i toutes les dérivations et de faire apparaître que des intégrations qui sont plus robustes numériquement, il suffit de prendre $p \geq 1$. En effet, d'après le théorème (2.2) et l'égalité (2.16), $W_{i,j}$ et V_i peuvent être exprimés en fonction des dérivées (d'ordre maximal 2) des termes $t^k y$ et $t^k u$ respectivement, par exemple

$$W_{2,1} = t^3 y^{(2)} = t^3 [\delta^{(2)} \star y] = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \frac{2!}{(2-i)!} (t^{3-i} y)^{(2-i)} \quad (2.33)$$

A partir de l'égalité (2.31), τ_a peut être considéré comme une valeur propre généralisée sans qu'il ne soit nécessaire d'estimer le vecteur X (Wright & Trefethen (2002), Boutry et al. (2005)).

Pour déterminer une estimation de l'amplitude l_a , on multiplie dans un premier temps l'équation (2.24) par une fonction régulière α_2 vérifiant $\alpha_2(0) = \dot{\alpha}_2(0) = 0$ et $\alpha_2(\tau_a) \neq 0$ (par exemple $\alpha_2 = t^2$) pour avoir

$$a_1 \alpha_2 y^{(2)} + a_0 \alpha_2 y^{(1)} - b \alpha_2 u^{(1)} = b l_a \alpha_2(\tau_a) \delta_{\tau_a} \quad (2.34)$$

A partir de l'égalité ci-dessus, l'estimation de l'amplitude l_a peut être obtenue en fonction de celle de τ_a . En considérant par exemple la fonction $\alpha_2 = t^2$, cette estimation est donnée par

$$l_a = p! \frac{A_i(1, :) \theta}{\tau_a^{i+1} (t - \tau_a)^p} \quad (2.35)$$

θ est le vecteur propre généralisé de (A_2, A_1) associé à τ_a , avec $\theta_1 = 1$.

Dans l'égalité (2.35) ainsi que dans la suite de ce mémoire, à condition que cela ne prête pas à confusion, on utilise les mêmes notations pour les valeurs exactes (l_a , τ_a , ...) et leurs estimées. La logique de décision se base sur l'étude de la stationnarité des estimées. Plus précisément, on peut conclure de l'apparition d'un défaut actionneur $f_a = l_a H(t - \tau_a)$ lorsque les estimées de τ_a et l_a deviennent simultanément stationnaires à partir de $t \geq \tau_a$. Les figures (2.3(a))-(2.3(d)) illustrent des résultats de simulation dans le cas sans bruit. Le système est commandé à l'aide d'un correcteur PI . L'entrée et la sortie obtenues sans défaut (U_{sd} et Y_{sd} respectivement) et avec défaut (U et Y respectivement) sont présentées sur les figures (2.3(a)) et (2.3(b)). Le

défaut actionneur d'amplitude constante $l_a = 1$ apparaît à l'instant $\tau_a = 1,5$. Pour cet exemple, les matrices A_2 et A_1 sont de dimension $m \times 3$ ($m > 3$), donc à chaque instant t , le couple de matrices (A_2, A_1) possède 3 valeurs propres généralisées (distinctes ou non). Lorsque le défaut apparaît, l'une de ces valeurs devient stationnaire comme illustré sur la figure (2.3(c)) où l'on a représenté l'évolution temporelle des trois valeurs propres généralisées. Le défaut simulé est bien détecté et identifié à travers l'évolution temporelle des estimées de τ_a et l_a (figure 2.3(d)). Lorsque les quantités estimées sont des valeurs aberrantes, c'est-à-dire déviant nettement du comportement de stationnarité (fluctuations par exemple), nous considérons que le défaut n'est pas apparu et fixons les valeurs estimées à zéro.

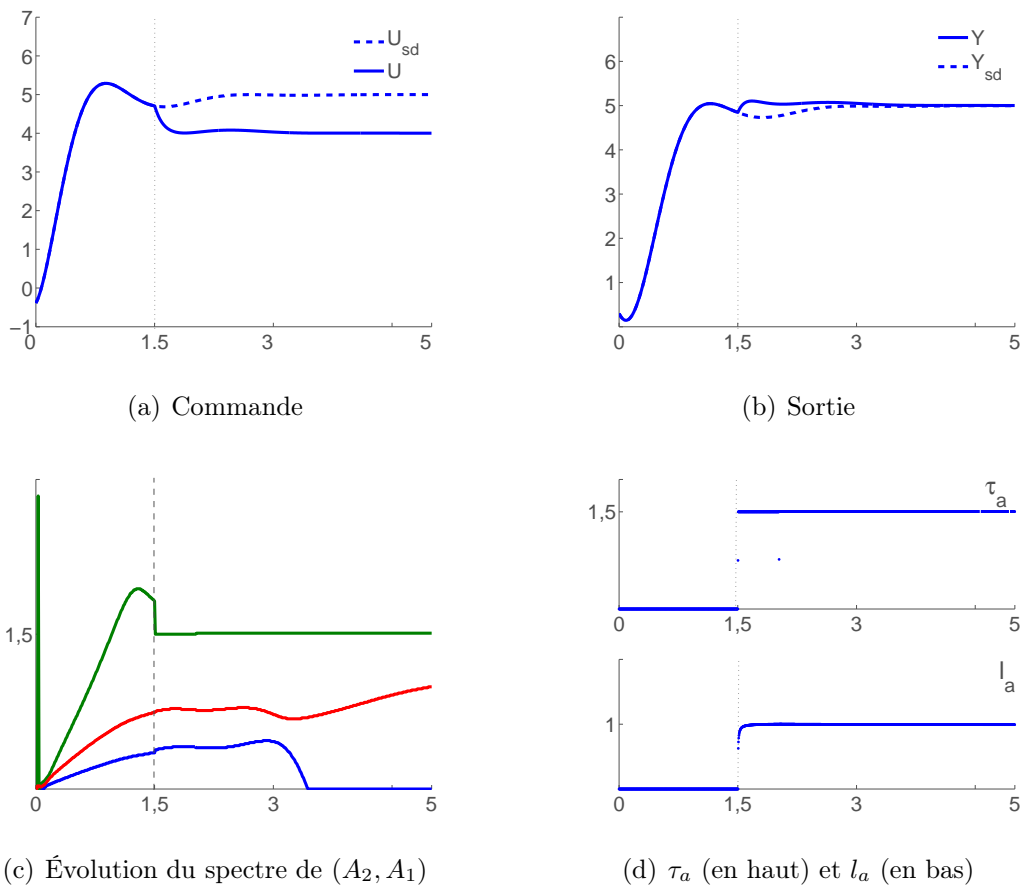


FIG. 2.3 – Système du premier ordre simulé avec un biais actionneur

3.3 Système avec défaut capteur

Défaut de type biais (échelon)

Nous reprenons l'étude faite dans la section précédente en considérant cette fois le système en présence non pas d'un défaut d'actionneur, mais d'un défaut de capteur abrupt apparu à l'instant τ_c avec une amplitude l_c . Un tel système est représenté par

$$a_1 y^{(1)} + a_0 y = a_1 y(0)\delta + bu + l_c(a_1 \delta_{\tau_c} + a_0 H(t - \tau_c)) \quad (2.36)$$

L'application de la dérivation donne

$$a_1 y^{(2)} + a_0 y^{(1)} - bu^{(1)} = \phi_0 + l_c(a_1 \delta_{\tau_c}^{(1)} + a_0 \delta_{\tau_c}) \quad (2.37)$$

avec ϕ_0 donnée par (2.25).

Pour éliminer les singularités apparues au second membre de l'équation ci-dessus, il suffit de multiplier cette dernière par la fonction polynômiale (donc régulière)

$$\alpha_3(t) = t^2(t - \tau_c)^2 = t^4 - 2\tau_c t^3 + \tau_c^2 t^2 \quad (2.38)$$

Cette fonction vérifie bien $\alpha_3(0) = \dot{\alpha}_3(0) = \alpha_3(\tau_c) = \dot{\alpha}_3(\tau_c) = 0$ et comme

1. $Supp(\phi_0) = \{0\}$ et $Ordre(\phi_0) = 1$. Ainsi $t^{k_1} \phi_0 = 0, \forall k_1 \geq 2$
2. $Supp(\delta_{\tau_c}^{(1)}) = \{\tau_c\}$ et $Ordre(\delta_{\tau_c}^{(1)}) = 1$. Ainsi $(t - \tau_c)^{k_3} \delta_{\tau_c} = 0, \forall k_3 \geq 2$

alors d'après le théorème (2.2), on a

$$\alpha_3[a_1 y^{(2)} + a_0 y^{(1)} - bu^{(1)}] = 0 \quad (2.39)$$

ou encore, après développement

$$\left[\sum_{j=0}^1 a_j W_{3,j} - bV_3 \right] - 2\tau_c \left[\sum_{j=0}^1 a_j W_{2,j} - bV_2 \right] + \tau_c^2 \left[\sum_{j=0}^1 a_j W_{1,j} - bV_1 \right] = 0 \quad (2.40)$$

Pour $t < \tau_c$, comme précédemment, on montre que l'égalité ci-dessus est satisfaite $\forall \tau_c$ et pour $t \geq \tau_c$, l'application d'intégrations successives permet d'obtenir l'égalité algébrique suivante :

$$[A_3 - 2\tau_c A_2 + \tau_c^2 A_1]X = 0 \quad (2.41)$$

avec A_i , pour $i = 0, 1, 2$, défini par (2.32) et X contenant les paramètres du système. Afin d'estimer τ_c comme valeur propre généralisée d'un couple de matrices, une

formulation de type (2.31) est recherchée. Elle est obtenue en multipliant l'équation (2.41) par une matrice B non nulle vérifiant $BA_3 \neq 0$ et

$$\begin{cases} BA_1 = 0 \\ BA_2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} BA_2 = 0 \\ BA_1 \neq 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

puisque l'on a, selon le cas

$$\{[BA_3 - 2\tau_c BA_2]X = 0 \quad \text{ou} \quad [BA_3 + \tau_c^2 BA_1]X = 0 \quad (2.43)$$

Rappelons qu'une condition suffisante de l'existence de la matrice B est que les matrices A_i soient rectangulaires verticales ($m > 3$).

A partir des égalités en (2.43), τ_c peut être estimée soit directement (comme valeur propre généralisée de $(BA_3, 2BA_2)$) soit en estimant d'abord τ_c^2 (valeur propre généralisée de (BA_3, BA_1)). Par la suite, l'amplitude l_c peut être estimée en multipliant d'abord l'équation (2.37) par une fonction régulière α_4 vérifiant

$$\begin{cases} \alpha_4(0) = \dot{\alpha}_4(0) = \alpha_4(\tau_c) = 0 \\ \dot{\alpha}_4(\tau_c) \neq 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

ce qui conduit à l'égalité

$$\alpha_4[a_1 y^{(2)} + a_0 y^{(1)} - bu^{(1)}] = l_c a_1 \alpha_4 \delta_{\tau_c}^{(1)} \quad (2.45)$$

Or $\alpha_4 \delta_{\tau_c}^{(1)} = -\dot{\alpha}_4(\tau_c) \delta_{\tau_c}$ d'où

$$\alpha_4[a_1 y^{(2)} + a_0 y^{(1)} - bu^{(1)}] = -l_c a_1 \dot{\alpha}_4(\tau_c) \delta_{\tau_c} \quad (2.46)$$

Ainsi, en considérant la fonction $\alpha_4 = t^2(t - \tau_c)$, on obtient l'estimation de l'amplitude l_c par

$$l_c = -\frac{H^{*p} \star [q_3 \alpha_4 y^{(2)} + q_2 \alpha_4 y^{(1)} + q_1 \alpha_4 u^{(1)}]}{q_3 H^{*p} \star [\dot{\alpha}_4(\tau_c) \delta_{\tau_c}]} \quad (2.47)$$

$p \geq 2$, $q = (q_3, q_2, q_1)^T$ est le vecteur propre généralisé de $(BA_2, 2BA_1)$ associé à τ_c .

La logique de décision est la même que pour le défaut actionneur. Le défaut capteur est détecté au moyen des estimées de τ_c et l_c qui deviennent stationnaires après l'apparition du défaut.

Les signaux entrée et sortie des figures (2.4(a))-(2.4(b)) ont été obtenus avec un système simulé dans les mêmes conditions que sur les figures (2.3(a))-(2.3(b)). Le défaut capteur d'amplitude constante $l_c = 0.3$ apparaît à l'instant $\tau_c = 2$. Le défaut simulé est bien détecté à travers l'évolution temporelle des estimées de τ_c et l_c représentées graphiquement sur la figure (2.4(c)).

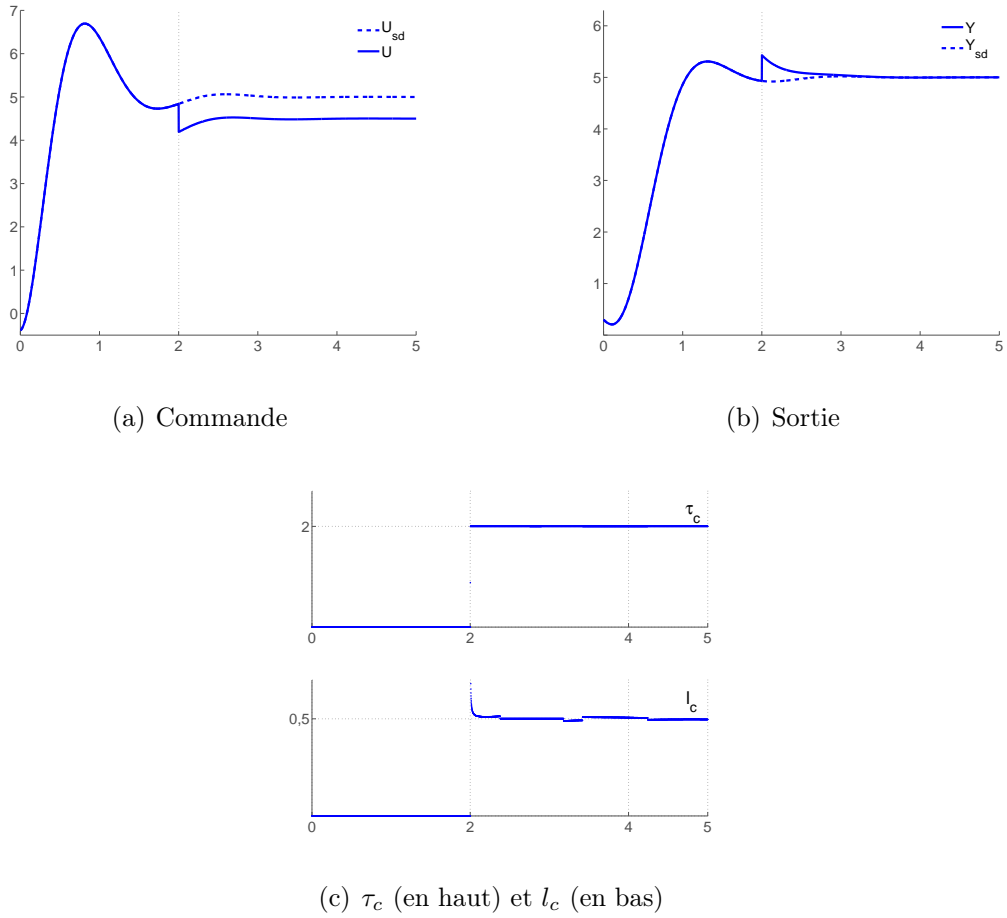


FIG. 2.4 – Système du premier ordre simulé avec un biais capteur

Défaut de type dérive (rampe)

Supposons le système du premier ordre étudié en présence cette fois-ci d'une dérive capteur apparue à l'instant τ_c et de pente l_c . Un tel défaut est modélisé à l'aide d'une fonction rampe comme suit

$$f_c(t) = l_c(t - \tau_c)H(t - \tau_c)$$

et le système en défaut peut être représenté par

$$a_1 y^{(1)} + a_0 y = \phi_0 + bu + l_c(a_1 H(t - \tau_c) + a_0(t - \tau_c)H(t - \tau_c)) \quad (2.48)$$

L'application de deux dérivations donne

$$a_1 y^{(3)} + a_0 y^{(2)} - bu^{(2)} = \psi_0 + l_c(a_1 \dot{\delta}_{\tau_c} + a_0 \delta_{\tau_c}) \quad (2.49)$$

Pour éliminer les singularités apparues au second membre de l'équation ci-dessus, il suffit de multiplier cette dernière par la fonction polynomiale (donc régulière)

$$\alpha_3(t) = t^3(t - \tau_c)^2 = t^5 - 2\tau_c t^4 + \tau_c^2 t^3 \quad (2.50)$$

Cette fonction vérifie bien $\alpha_3(0) = \dot{\alpha}_3(0) = \ddot{\alpha}_3(0) = \alpha_3(\tau_c) = \dot{\alpha}_3(\tau_c) = 0$ et comme

1. $Supp(\psi_0) = \{0\}$ et $Ordre(\psi_0) = 2$
2. $Supp(\delta_{\tau_c}^{(1)}) = \{\tau_c\}$ et $Ordre(\delta_{\tau_c}^{(1)}) = 1$

alors, on obtient

$$\left[\sum_{j=0}^1 a_j W_{3,j} - bV_3 \right] - 2\tau_c \left[\sum_{j=0}^1 a_j W_{2,j} - bV_2 \right] + \tau_c^2 \left[\sum_{j=0}^1 a_j W_{1,j} - bV_1 \right] = 0 \quad (2.51)$$

avec $W_{i,j} = t^{2+i}y^{(2+j)}$ et $V_i = t^{2+i}u^{(2)}$ pour $i = 1, 2, 3$ et $j = 0, 1$.

Pour $t < \tau_c$, comme précédemment, on montre que l'égalité ci-dessus est indépendante de τ_c et pour $t \geq \tau_c$, l'application d'intégrations successives permet d'obtenir l'égalité algébrique suivante :

$$[A_4 - 2\tau_c A_3 + \tau_c^2 A_2]X = 0 \quad (2.52)$$

avec A_i donnée par (2.32). L'instant d'apparition τ_c peut être estimé comme précédemment, soit directement soit en estimant d'abord τ_c^2 . Pour estimer la pente l_c on multiplie cette fois-ci l'équation (2.49) par une fonction régulière α_4 vérifiant

$$\begin{cases} \alpha_4(0) = \dot{\alpha}_4(0) = \ddot{\alpha}_4(0) = \alpha_4(\tau_c) = 0 \\ \dot{\alpha}_4(\tau_c) \neq 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

Ainsi, en considérant la fonction $\alpha_4 = t^3(t - \tau_c)$, on obtient l'estimation de l'amplitude l_c par

$$l_c = p! \frac{(A_3(1, :) - \tau_c A_2(1, :))\theta}{\theta_1 \tau_c^3 (t - \tau_c)^p} \quad (2.54)$$

θ est le vecteur propre de (A_2, A_1) associé à τ_a , avec $\theta_1 = 1$.

La détection du défaut est accomplie lorsque les estimations de τ_c et l_c deviennent stationnaires simultanément après l'apparition du défaut. L'efficacité de l'approche de diagnostic présentée lors d'une dérive capteur est illustrée sur les figures (2.5). Le système est commandé à l'aide d'un correcteur *PI*. L'entrée et la sortie obtenues sans défaut (U_{sd} et Y_{sd} respectivement) et avec défaut (U et Y respectivement) sont présentées sur les figures (2.5(a)) et (2.5(b)). Le défaut capteur de pente $l_c = -0,3$

apparaît à l'instant $\tau_c = 1,5$. Le défaut simulé est bien détecté à travers l'évolution temporelle des estimées de τ_c et l_c . Comme on peut le constater sur la figure (2.5(c)), la technique utilisée offre une grande sensibilité pour la détection précoce du défaut de type rampe avec une faible pente.

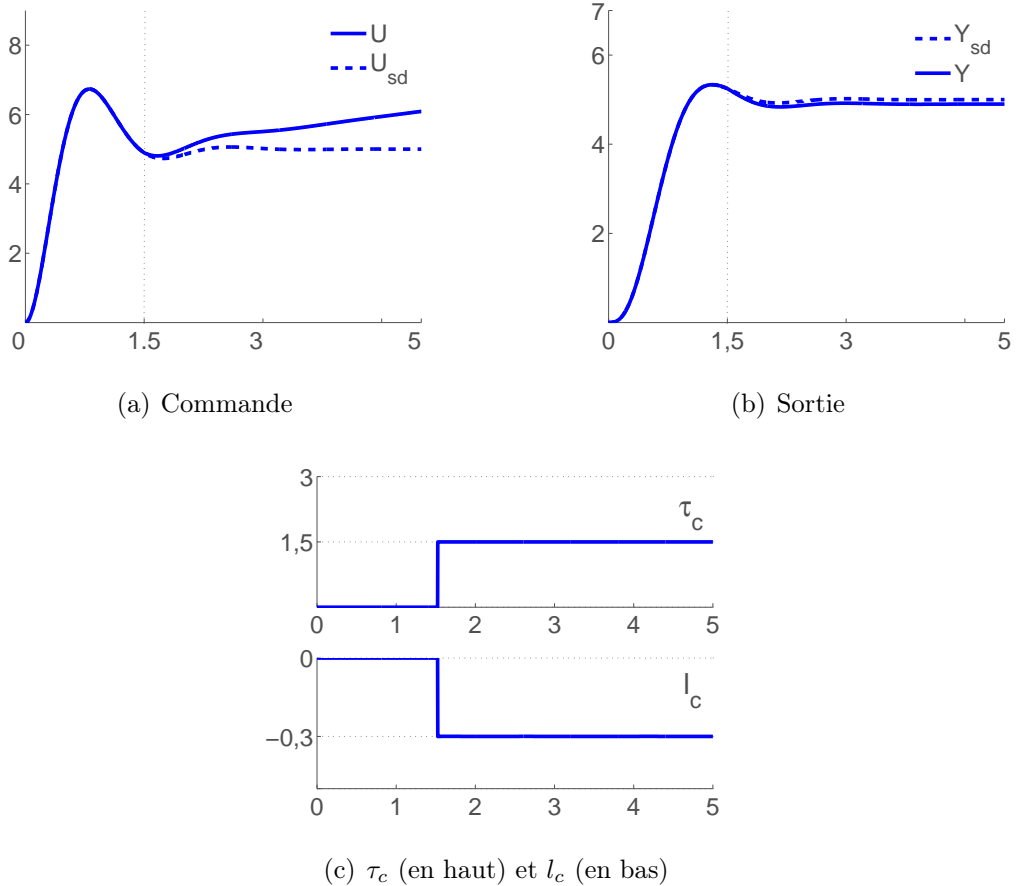


FIG. 2.5 – Système du premier ordre en présence de dérive capteur

3.4 Système avec défaut actionneur et défaut capteur

Dans le cas de défauts multiples (actionneur et capteur), la seule application des démarches précédentes n'assure pas la détection et la localisation des défauts. Considérons le cas simple d'un système du premier ordre en présence d'un biais actionneur et d'un biais capteur modélisés respectivement par

$$f_a = l_a H(t - \tau_a) \text{ et } f_c = l_c H(t - \tau_c)$$

Le modèle du système en défaut est donné par

$$a_1 y^{(1)} + a_0 y = \phi_0 + bu + bl_a H(t - \tau_a) + l_c (a_1 \delta_{\tau_c} + a_0 H(t - \tau_c)) \quad (2.55)$$

l'application de la dérivation donne

$$a_1 y^{(2)} + a_0 y^{(1)} - bu^{(1)} = \phi_0^{(1)} + bl_a \delta_{\tau_a} + l_c (a_1 \delta_{\tau_c}^{(1)} + a_0 \delta_{\tau_c}) \quad (2.56)$$

et la multiplication par $\alpha_1 = t^2(t - \tau_a)$ ou $\alpha_3 = t^2(t - \tau_c)^2$ de l'équation (2.56) n'annule pas toutes les singularités apparues. Pour y parvenir, il suffit de considérer une fonction régulière α_5 satisfaisant

$$\alpha_5(0) = \alpha_5(\tau_a) = \alpha_5(\tau_c) = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_5^{(1)}(0) = \alpha_5^{(1)}(\tau_c) = 0 \quad (2.57)$$

Le choix de $\alpha_5(t) = t^2(t - \tau_a)(t - \tau_c)^2$ permet d'obtenir la formulation spectrale

$$[A_4 - (\tau_a + 2\tau_c)A_3 + (2\tau_a\tau_c + \tau_c^2)A_2 - (\tau_a\tau_c^2)A_1]X = 0 \quad (2.58)$$

Pour la détection et la localisation des différents défauts dans ce cas, le système de diagnostic que nous proposons est composé de trois cellules. La première consiste en la détection du défaut actionneur uniquement (section 3.2), la seconde en la détection du défaut capteur uniquement (section 3.3) et la troisième obtenue avec α_5 consiste à détecter les défauts multiples.

Ainsi le premier défaut peut être détecté à l'aide de la cellule qui lui est associée et ceci avant l'apparition du second défaut. Ce dernier ne peut pas être détecté au moyen de la cellule qui lui est associée à cause du premier défaut apparu. En revanche, la troisième cellule permet cette détection. En effet, considérons la matrice C non nulle vérifiant

$$C[A_2 \ A_1] = 0 \quad (2.59)$$

à partir de l'équation (2.58), on obtient l'égalité

$$[CA_4 - (\tau_a + 2\tau_c)CA_3]X = 0 \quad (2.60)$$

qui assure une estimation de la combinaison $\tau_a + 2\tau_c$ à l'aide des valeurs propres généralisées de (CA_4, CA_3) . Cette estimation devient stationnaire à partir de l'instant $t \geq \max(\tau_a, \tau_c)$. Notons enfin que l'amplitude du second défaut peut être estimée en fonction des estimations de τ_a et τ_c . La logique de décision est la même que dans le cas de défaut unique, c'est-à-dire le second défaut est détecté au moyen de la stationnarité simultanée des estimées de $\tau_a + 2\tau_c$ et l_c .

Les résultats de simulation sont représentés graphiquement sur les figures (2.6)-(2.9). Le système est commandé à l'aide d'un correcteur PI . Les défauts actionneur et capteur d'amplitudes respectives $l_a = 1$ et $l_c = 0,5$ apparaissent aux instants $\tau_a = 1$ et $\tau_c = 2$. Comme il l'a été mentionné ci-dessus, le défaut actionneur, apparu en premier, peut être détecté à partir des estimations de τ_a et l_a (figure 2.8). A

partir de l'instant $t > 2$, l'estimation de τ_a fluctue à cause de l'apparition du défaut capteur à cet instant. Notons que le défaut capteur ne peut pas être détecté à partir des estimations de τ_c et l_c (car lors de son apparition, le système présente déjà un défaut actionneur). En revanche ce dernier peut être détecté à partir des estimations de $\tau_a + 2\tau_c$ et l_c (obtenue en fonction des estimations de $\tau_a + 2\tau_c$) représentées sur la figure (2.9).

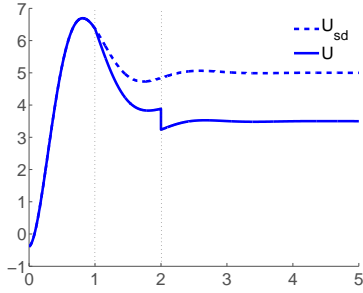


FIG. 2.6 – Commande

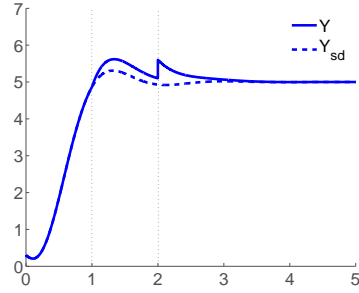


FIG. 2.7 – Sortie

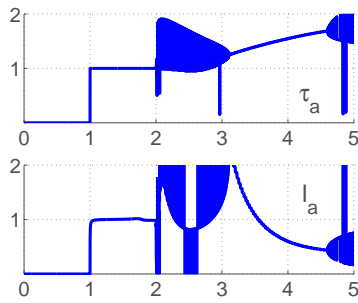


FIG. 2.8 – Estimations de τ_a et l_a obtenues avec la cellule de détection de défaut actionneur

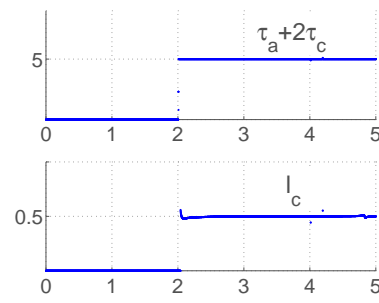


FIG. 2.9 – Estimations de $\tau_a + 2\tau_c$ et l_c obtenues avec la cellule de détection de défauts multiples

Remarque 3.1 (*Défauts non localisables*)

L'algorithme de diagnostic présenté permet toujours la détection de défaut. Cependant, pour des structures de défaut particulières, la localisation n'est pas toujours possible. En effet, si l'on considère l'exemple du premier ordre précédent, les défauts actionneur

$$f_a(t) = l_a[H(t - \tau_{a_1}) - H(t - \tau_{a_2})] \quad (2.61)$$

et capteur $f_c(t)$ solution de l'équation

$$a_1 f_c^{(1)} + a_0 f_c = -b l_c H(t - \tau_c) \quad (2.62)$$

auront les même signatures sur u et y qu'un défaut actionneur unique

$$f_a(t) = l_a[H(t - \tau_{a_1}) - H(t - \tau_{a_2})] - l_c H(t - \tau_c) \quad (2.63)$$

Dans ce cas, il est impossible de distinguer la situation de défauts multiples de celle d'un défaut unique.

Précisons que cette remarque n'est pas spécifique à la méthode proposée et que la méthode proposée, hormis le cas précédent, assure le diagnostic de plusieurs défauts dans le cas monovarié (SISO).

3.5 Cas général

On se situe dans le formalisme des distributions avec des descriptions entrées / sorties en supposant que la commande u_r et la sortie y_r du système étudié vérifient une équation de la forme

$$a_n y_r^{(n)} + a_{n-1} y_r^{(n-1)} + \dots + a_0 y_r = \phi_0 + b_z u_r^{(z)} + b_{z-1} u_r^{(z-1)} + \dots + b_0 u_r \quad (2.64)$$

où n et z ($n \geq z$) sont supposés connus et les paramètres a_i et b_j sont supposés constants mais pas nécessairement connus. Sans perte de généralité, nous considérons le plus souvent le cas $z = 0$. La distribution ϕ_0 est une combinaison linéaire des dérivées d'ordre inférieur ou égal à $n - 1$ de la distribution de Dirac (δ) et contient les conditions initiales (pas nécessairement connues).

En présence d'un défaut actionneur noté f_a et/ou d'un défaut capteur noté f_c , l'équation du système en défaut s'écrit

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y - b_z u^{(z)} - \dots - b_0 u = \phi_0 + b_z f_a^{(z)} + \dots + b_0 f_a + a_n f_c^{(n)} + \dots + a_0 f_c \quad (2.65)$$

La tâche de diagnostic de défaut est basée sur l'idée que des termes inconnus (caractérisant les défauts) peuvent être estimés à partir de la seule connaissance de la structure du système et des signaux. Lorsque les signaux défauts f_a et/ou f_c sont structurés et après avoir choisi et appliqué sur le modèle du système en défaut les annulateurs des termes structurés (conditions initiales, défauts)

$$\Gamma = \Gamma_k - \beta_{k-1} \Gamma_{k-1} - \dots - \beta_1 \Gamma_1 \quad (2.66)$$

on obtient une égalité fonctionnelle à partir de laquelle l'application d'intégrations successives permet de se ramener à un problème du type

$$[A_k - \beta_{k-1}A_{k-1} - \dots - \beta_1A_1]X = 0 \quad (2.67)$$

où

- les matrices A_i de dimension $m \times (n + z + 2)$ sont totalement définies à partir des mesures u et y et données par :

$$A_i(j, \mu) = \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{p+j \text{ fois}} \Gamma_i y^{(n-\mu+1)} d\tau^{p+j}, \quad \mu = 1, \dots, n+1 \quad (2.68)$$

$$A_i(j, n+1+\nu) = - \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{p+j \text{ fois}} \Gamma_i u^{(z-\nu+1)} d\tau^{p+j}, \quad \nu = 1, \dots, z+1 \quad (2.69)$$

Le polynôme différentiel (2.66) est écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de monômes différentiels élémentaires donnés par

$$\Gamma_j = t^{n_j} \frac{d^{\gamma_j}}{dt^{\gamma_j}}, \quad n_j, \gamma_j \in \mathbb{N} \quad (2.70)$$

Le nombre des redondances m est choisi en fonction de certaines contraintes liées à la structure du système et celle des défauts.

En choisissant le paramètre $p \geq n + \bar{\gamma}$, où $\bar{\gamma}$ est l'ordre de dérivation le plus élevé apparaissant dans Γ , les intégrations successives initiales assurent l'élimination de toutes les dérivées dans l'écriture des matrices A_i .

- les paramètres β_j contiennent les informations sur les défauts.
- X contient les paramètres du système que l'on ne souhaite pas estimer, où encore

$$X = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ b_z \\ b_{z-1} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+z+2} \quad (2.71)$$

Estimer β_j ($j = 1, \dots, k-1$) revient alors à déterminer la valeur propre généralisée du couple de produits de matrices (BA_k, BA_j) où B est une matrice non nulle vérifiant :

$$BA_i = 0, \quad \forall i \neq j \quad (2.72)$$

Les matrices A_i ne sont pas stationnaires mais varient avec le temps, par conséquent les valeurs propres généralisées de (BA_k, BA_j) évoluent aussi avec le temps. Parmi toutes les valeurs propres généralisées possibles de (BA_k, BA_j) , on choisit celle ayant un comportement stationnaire sur un horizon de temps et satisfaisant un critère de cohérence par rapport à l'instant d'estimation courant (par exemple un défaut ne peut pas être détecté avant son apparition sur le système).

Remarque 3.2 *Existence de la matrice B.*

1. La matrice B peut facilement être obtenue à l'aide de la décomposition QR .
2. Les paramètres β_j étant au nombre de $k - 1$ et les matrices A_i de dimension $m \times (n + z + 2)$, le paramètre m doit être choisi tel que $m > (k - 2)(n + z + 2)$.

Les composantes du vecteur β sont liés aux paramètres des défauts recherchés (amplitude, pente, ...). Ces paramètres peuvent être estimés en fonction des estimées des β_j . Comme on l'a vu dans les exemples traités dans les sous-sections précédentes, l'estimation du seul élément β_j qui est linéaire par rapport aux paramètres recherchés suffit à estimer ces derniers.

A l'instar de bon nombre d'algorithmes de diagnostic, la prise de décision est fondée sur l'évolution temporelle d'estimations paramétriques. Un défaut est détecté et localisé lorsque celles-ci deviennent simultanément stationnaires.

La méthode algébrique de diagnostic de défauts présentée dans cette section ne requiert que la seule connaissance de l'ordre du système et de la structure des signaux pour être mise en œuvre. Le développement de la démarche par la technique d'identification algèbro-différentielle est simple puisque les mesures de la commande et de la sortie du système suffisent à obtenir des résultats utiles au diagnostic.

Le schéma fonctionnel révélant chacune des étapes de l'algorithme est représenté à la figure (2.10).

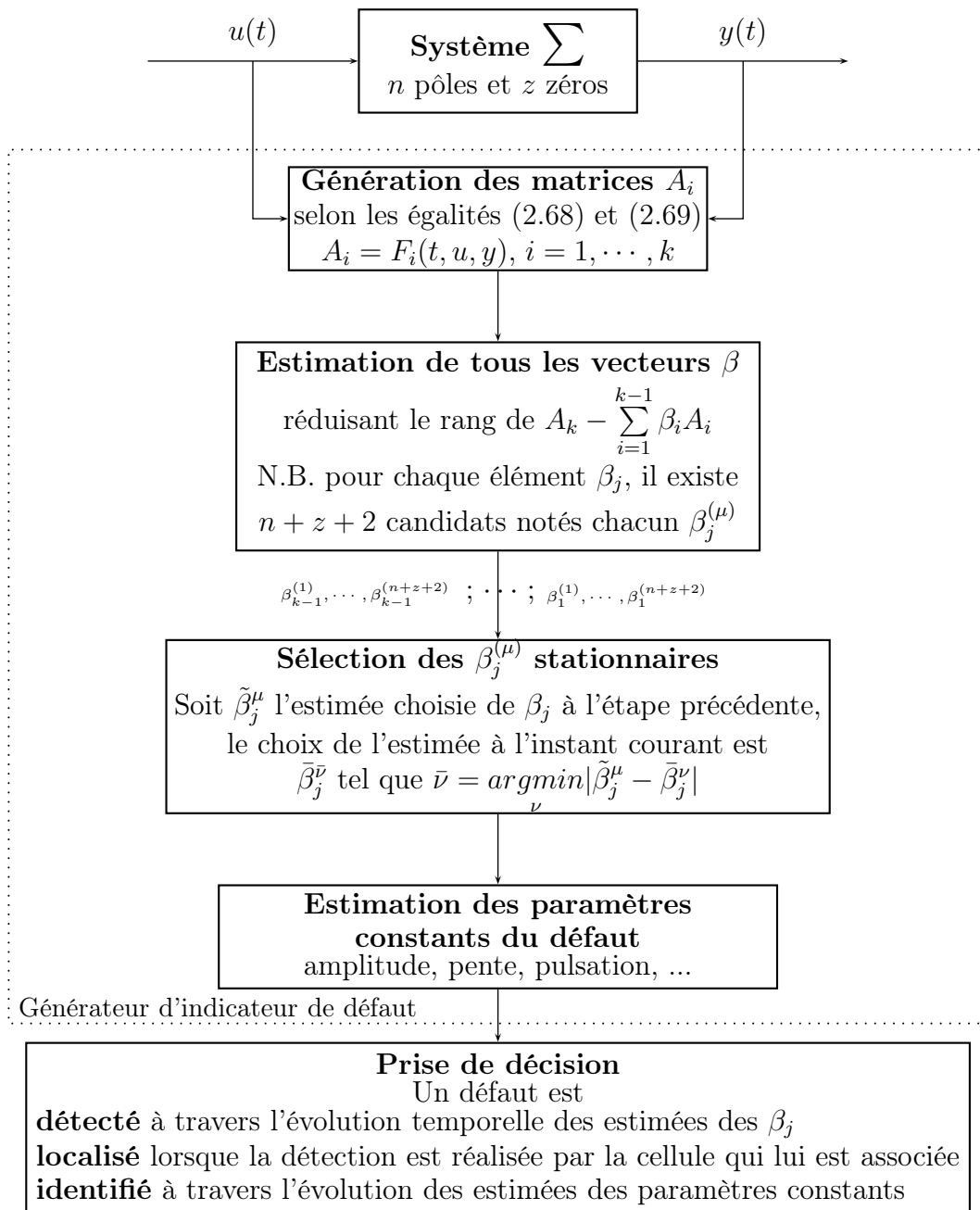


FIG. 2.10 – Schéma fonctionnel de l'approche algébrique

Le système de diagnostic est composé de trois cellules avec des schémas fonctionnels identiques : la première consiste au diagnostic d'un défaut actionneur, la seconde au diagnostic d'un défaut capteur et la troisième au diagnostic de défauts multiples.

4 Prise en compte d'informations a priori

Comme souvent en ingénierie des systèmes, les seules connaissances a priori disponibles sur le procédé sont sous forme de descriptions qualitatives du comportement de celui-ci. Ici, les connaissances que nous souhaitons prendre en compte sont les bornes des intervalles contenant les paramètres du système réel. L'introduction d'une telle information a priori permet de donner une extension de la méthode développée ci-dessus au système dont les paramètres sont incertains et contenus dans des intervalles dont les bornes sont connues.

Pour développer cette extension, considérons l'équation d'un système en présence de défaut actionneur et/ou capteur :

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y - bu = \phi_0 + b f_a + a_n f_c^{(n)} + \dots + a_0 f_c \quad (2.73)$$

avec le vecteur des paramètres, constants mais non connus

$$\theta = \begin{pmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_0 \\ b \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

appartenant au polytope décrit par

$$\Theta = \{X \in \mathbb{R}^{n+2} : X_{n+2} \in [\underline{a}_n, \overline{a}_n], \dots, X_2 \in [\underline{a}_0, \overline{a}_0], X_1 \in [\underline{b}, \overline{b}]\}$$

Dans le contexte de notre approche, comme on va le montrer, on peut concevoir une estimation des bornes de l'intervalle contenant l'instant d'apparition τ_a et/ou τ_c ou des fonctions des deux, en considérant uniquement connu l'ordre et les bornes des intervalles d'appartenance des paramètres du système.

En effet, après la multiplication de l'équation (2.73) par un annulateur approprié des termes structurés (conditions initiales, signaux défauts) donné par

$$\Gamma = \Gamma_k - \beta_{k-1} \Gamma_{k-1} - \dots - \beta_1 \Gamma_1 \quad (2.75)$$

on obtient une égalité fonctionnelle qui nous permet d'établir l'égalité

$$[A_k - \beta_{k-1} A_{k-1} - \dots - \beta_1 A_1] \theta = 0 \quad (2.76)$$

La ligne j de la matrice A_i est donnée par

$$\left[\underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t \Gamma_i y^{(n)} d\tau^{p+j}}_{p+j \text{ fois}} \dots \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t \Gamma_i y d\tau^{p+j}}_{p+j \text{ fois}} - \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t \Gamma_i u d\tau^{p+j}}_{p+j \text{ fois}} \right] \quad (2.77)$$

A partir de l'égalité (2.76), chacune des composantes β_j ($j = 1, \dots, k-1$) peut être donnée par

$$\beta_j = f_\mu(\theta) = \frac{N(\mu, :)\theta}{D(\mu, :)\theta}, \quad \mu = 1, \dots, m \quad (2.78)$$

où $N = BA_k$, $D = BA_j$ et B une matrice non nulle vérifiant

$$BA_i = 0, \quad \forall i \neq j \quad (2.79)$$

Pour être à mesure de détecter le défaut f_a et/ou f_c , on doit définir une borne inférieure $\underline{\beta}_j$ et une borne supérieure $\overline{\beta}_j$ de l'intervalle d'appartenance de β_j . Pour la tâche de détection, l'estimation de l'instant β_j est substituée par l'estimation des extrema $\underline{\beta}_j$ et $\overline{\beta}_j$. Les estimations de ces bornes, comme l'estimation de β_j , évoluent avec le temps et seront déterminées en fonction des extrema de l'ensemble Θ ci-dessus. Afin de mieux percevoir la démarche, considérons la fonction associée

$$f_\mu(\theta) = \frac{N(\mu, :)\theta}{D(\mu, :)\theta} \quad (2.80)$$

Cette fonction dégénère pour $t \leq \tau$ où τ est l'instant d'apparition du défaut (τ_a ou τ_c), car dans ce cas, on a $N(\mu, :)\theta = D(\mu, :)\theta = 0$. Par contre lorsque $t > \tau$, la fonction $f_\mu(\theta)$ donne une estimation de β_j .

Pour tout $(n+2)$ -uplet d'entiers deux à deux distincts $(\nu_1, \dots, \nu_{n+2})$ dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, n+2\}$, on a, lorsque les paramètres $\theta_{\nu_2}, \dots, \theta_{\nu_{n+2}}$ sont fixés, la relation

$$\theta_{\nu_1} \mapsto f_\mu(\theta) \quad (2.81)$$

définit une application monotone. En effet on vérifie facilement que la dérivée partielle

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial \theta_{\nu_1}} = \frac{[N(\mu, \nu_1)D(\mu, :) - D(\mu, \nu_1)N(\mu, :)]\theta}{(D(\mu, :)\theta)^2} \quad (2.82)$$

est de signe constant. Ainsi, à la condition que la fonction en (2.81) est définie sur tout l'ensemble Θ , on peut écrire

$$\begin{cases} \underline{\beta}_j = \min_{\theta \in \Theta} f_\mu(\theta) = f_\mu(\underline{\theta}) \\ \overline{\beta}_j = \max_{\theta \in \Theta} f_\mu(\theta) = f_\mu(\overline{\theta}) \end{cases}$$

avec $\underline{\theta}$ et $\bar{\theta}$ deux éléments de l'ensemble Θ .

Grâce à la monotonie de la fonction f_μ par rapport à chacun des éléments du vecteur θ , on a

$$\begin{cases} \underline{\theta}_{n+2}, \bar{\theta}_{n+2} & \in \{\underline{a}_n, \bar{a}_n\} \\ \dots & \in \dots \\ \underline{\theta}_2, \bar{\theta}_2 & \in \{\underline{a}_0, \bar{a}_0\} \\ \underline{\theta}_1, \bar{\theta}_1 & \in \{\underline{b}, \bar{b}\} \end{cases}$$

Une fois, les extrema de l'estimation de β_j déterminés, on estime en se basant sur ces derniers, les bornes d'autres paramètres caractérisant le défaut recherché (amplitude, pente,...) en procédant dans un premier temps comme dans le cas de système certain.

On conclue de la présence d'un défaut lorsque que les différentes bornes estimées deviennent stationnaires (ou évoluent lentement) à partir d'un certain instant $t > 0$.

4.1 Un exemple simple

Donnons à présent une illustration de ce qui a été dit ci-dessus à travers un simple exemple. Soit un système de premier ordre en présence d'un défaut actionneur de type échelon. Ce dernier peut être représenté à l'aide de l'équation

$$a_1 \dot{y} + a_0 y - bu = a_1 y(0) \delta + bl_a H(t - \tau_a) \quad (2.83)$$

avec le vecteur des paramètres

$$\theta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \\ b \end{pmatrix}$$

appartenant au polytope décrit par

$$\Theta = \{X \in \mathbb{R}^3 : X_1 \in [\underline{a}_1, \bar{a}_1], X_2 \in [\underline{a}_0, \bar{a}_0], X_3 \in [\underline{b}, \bar{b}]\}$$

La multiplication de l'équation (2.83) par l'annulateur $[t^2(t - \tau_a)] \frac{d}{dt}$ permet d'écrire

$$a_1 t^3 \ddot{y} + a_0 t^3 \dot{y} - bt^3 \dot{u} = \tau_a [a_1 t^2 \ddot{y} + a_0 t^2 \dot{y} - bt^2 \dot{u}] \quad (2.84)$$

soit encore

$$\tau_a = f(\theta) = \frac{\alpha^T \theta}{\beta^T \theta} \quad (2.85)$$

avec

$$\alpha = \begin{pmatrix} \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t \tau^3 \ddot{y}(\tau) d\tau^p}_{p \text{ fois}} \\ \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t \tau^3 \dot{y}(\tau) d\tau^p}_{p \text{ fois}} \\ - \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t \tau^3 \dot{u}(\tau) d\tau^p}_{p \text{ fois}} \end{pmatrix} \text{ et } \beta = \begin{pmatrix} \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t \tau^2 \ddot{y}(\tau) d\tau^p}_{p \text{ fois}} \\ \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t \tau^2 \dot{y}(\tau) d\tau^p}_{p \text{ fois}} \\ - \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t \tau^2 \dot{u}(\tau) d\tau^p}_{p \text{ fois}} \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

p est choisi de sorte à ne plus avoir de dérivées dans le calcul de α et β , autrement dit $p \geq 2$.

Grâce à la monotonie de la fonction f , on montre que les extrema de cette dernière sont donnés par deux sommets du polytope Θ . Ainsi on obtient un encadrement de τ_a donné par

$$f(\underline{\theta}) \leq \tau_a \leq f(\bar{\theta})$$

avec

$$\begin{cases} \underline{\theta}_1, \bar{\theta}_1 \in \{\underline{a}_1, \bar{a}_1\} \\ \underline{\theta}_2, \bar{\theta}_2 \in \{\underline{a}_0, \bar{a}_0\} \\ \underline{\theta}_3, \bar{\theta}_3 \in \{\underline{b}, \bar{b}\} \end{cases}$$

Pour cet exemple, notons que le polytope Θ possède 8 sommet. Les valeurs retenues pour $\underline{\theta}$ et $\bar{\theta}$ sont celles dont les images par f tendent à se stationnariser le plus.

Un fois, les extrema de l'estimation de τ_a déterminés, on estime ceux de l'estimation de l_a en procédant dans un premier temps comme dans le cas de système certain. Ce qui conduit à

$$l_a = p! \frac{\beta^T \theta}{\theta_3 \tau_a^2 (t - \tau_a)^p} \quad (2.87)$$

On obtient une enveloppe de l'estimation de l'amplitude l_a en posant

$$\begin{cases} \underline{l}_a = \min(p! \frac{\beta^T \underline{\theta}}{\underline{\theta}_3 \underline{\tau}^2 (t - \underline{\tau})^p}, p! \frac{\beta^T \bar{\theta}}{\bar{\theta}_3 \bar{\tau}^2 (t - \bar{\tau})^p}) \\ \bar{l}_a = \max(p! \frac{\beta^T \underline{\theta}}{\underline{\theta}_3 \underline{\tau}^2 (t - \underline{\tau})^p}, p! \frac{\beta^T \bar{\theta}}{\bar{\theta}_3 \bar{\tau}^2 (t - \bar{\tau})^p}) \end{cases} \quad (2.88)$$

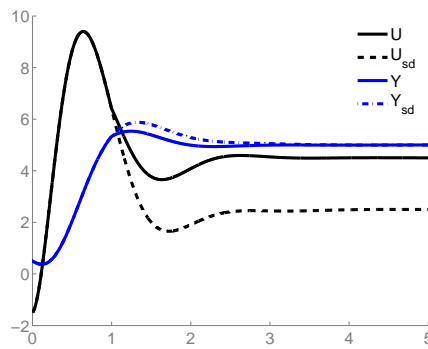
L'un des grands avantages de la méthode est qu'on peut définir un seuil de détection de manière naturelle par l'intermédiaire des bornes des intervalles contenant les paramètres du système.

4.2 Application numérique

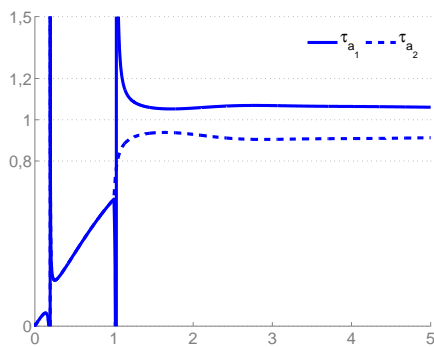
Les paramètres a_1 , a_0 et k sont constants et caractérisés par

$$\begin{cases} a_1 \in [2.5; 3.5] \\ a_0 \in [1; 2] \\ k \in [2.5; 3.5] \end{cases} \quad (2.89)$$

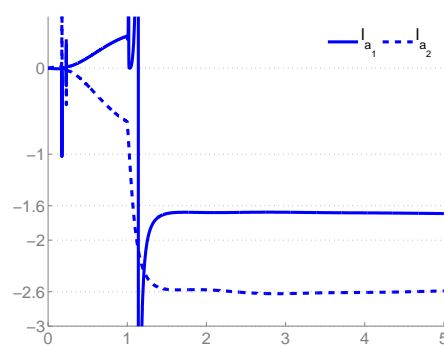
L'entrée et la sortie avec défauts (u, y) et sans défauts (u_{sd}, y_{sd}) sont représentées sur la figure (2.11(a)). Le défaut simulé est donné par $f_a(t) = -2H(t - 1)$. Les figures (2.11(b))-(2.11(c)) indiquent les évolutions des enveloppes des estimations du temps d'apparition τ_a donnée par (τ_{a_1}, τ_{a_2}) et de l'amplitude l_a donnée par (l_{a_1}, l_{a_2}) . Le comportement temporel de ces enveloppes peuvent bien servir au diagnostic du défaut simulé.



(a) Entrée et sortie



(b) Enveloppe de τ_a



(c) Enveloppe de l_a

FIG. 2.11 – Résultats de simulation avec prise en compte de connaissance a priori

Notons qu'aucun calcul de valeur propre n'a été effectué dans l'algorithme d'estimation des différentes enveloppes et que ces dernières sont estimées en-ligne.

En diagnostic à base de modèle, les modèles sont généralement construits sur la base d'hypothèses stochastiques fondées sur une description probabiliste des erreurs (bruits de mesure, perturbations, erreurs de modèle), difficiles à vérifier pour certaines conditions de fonctionnement. Lorsque les paramètres du système sont incertains et bornés et que l'on dispose de connaissance a priori sur ces bornes, le contexte déterministe illustré dans cette section peut être utilisé comme une alternative.

5 Étude d'un système MIMO

5.1 Introduction

La méthode de diagnostic présentée ici peut être étendue au cas de diagnostic d'un système à plusieurs entrées et plusieurs sorties (MIMO en anglais). Cette extension est fondée sur le fait que la représentation 'entrées - sorties' d'un tel système peut être décomposée en plusieurs (nombre de ses sorties) systèmes à plusieurs entrées et une sortie (MISO en anglais). Les défauts considérés sont toujours des défauts actionneur f_a et capteur f_c modélisés comme signaux structurés.

La commande u_r (reçue en entrée par le système) et la sortie y_r (délivrée en sortie par le système) satisfont la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_r(t), & x(t_0) = x_0 \\ y_r(t) = Cx(t) + Du_r(t) \end{cases} \quad (2.90)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u_r \in \mathbb{R}^{n_u}$ et $y_r \in \mathbb{R}^{n_y}$ désignent respectivement le vecteur d'état, le vecteur de commande et le vecteur sortie réelle fourni par le système. Les paramètres A , B , C , D ainsi que la condition initiale x_0 sont supposés constants mais pas nécessairement connus. Le système (2.90) peut encore s'écrire sous la forme

$$Y_r(s) = H(s)U_r(s) + C(sI - A)^{-1}x_0 \quad (2.91)$$

où

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u} \quad (2.92)$$

est la fonction de transfert du système (2.90). Les éléments de la matrice $H(s)$ sont des fractions rationnelles dont les numérateurs et dénominateurs sont de degré égal à n (l'ordre du système). En présence d'un défaut actionneur noté f_a et d'un défaut

capteur noté f_c , les mesures u et y seront explicitées en fonction des grandeurs vraies et des défauts comme suit (figure 2.2) :

$$u_{r_i} = u_i + f_{a_i}(t - \tau_{a_i}), \quad i = 1, \dots, n_u \quad (2.93)$$

$$y_{r_j} = y_j - f_{c_j}(t - \tau_{c_j}), \quad j = 1, \dots, n_y \quad (2.94)$$

et le système en défaut peut être écrit dans le domaine fonctionnel, pour chaque $j = 1, \dots, n_y$, sous la forme

$$P \star y_j - h_1 \star u_1 - \dots - h_{n_u} \star u_{n_u} = P \star f_{a_j} + h_1 \star f_{c_1} - \dots - h_{n_u} \star f_{c_{n_u}} + \phi_j \quad (2.95)$$

où P et h_i sont des polynômes différentiels donnés, dans le domaine fonctionnel, par

$$P = a_n \delta^{(n)} + a_{n-1} \delta^{(n-1)} + \dots + a_0 \delta \quad (2.96a)$$

$$h_i = b_{i,n} \delta^{(n)} + b_{i,n-1} \delta^{(n-1)} + \dots + b_{i,0} \delta \quad (2.96b)$$

avec a_j, b_{ij} des scalaires contenant les paramètres du système et qu'on suppose pas nécessairement connus dans la suite, ϕ_j contient les conditions initiales et est une combinaison linéaire de la distribution de Dirac δ et de ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à $n - 1$.

La multiplication de l'équation (2.95) par un annulateur approprié des termes structurés, écrit sous la forme de combinaison linéaire de monômes différentiels

$$\Gamma = \Gamma_k - \beta_{k-1} \Gamma_{k-1} - \dots - \beta_1 \Gamma_1 \quad (2.97)$$

permet d'obtenir l'égalité spectrale sur laquelle sera basée la tâche de diagnostic

$$[A_k - \beta_{k-1} A_{k-1} - \dots - \beta_1 A_1] X = 0 \quad (2.98)$$

la ligne μ de la matrice $A_\nu \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)(n_u+1)}$ et le vecteur X étant donnés respectivement par

$$\begin{bmatrix} H^{*p+\mu} \star [\Gamma_\nu y_j^{(n)}] \\ \vdots \\ H^{*p+\mu} \star [\Gamma_\nu y_j] \\ -H^{*p+\mu} \star [\Gamma_\nu u_{n_u}^{(n)}] \\ \vdots \\ -H^{*p+\mu} \star [\Gamma_\nu u_{n_u}] \\ \vdots \\ -H^{*p+\mu} \star [\Gamma_\nu u_1^{(n)}] \\ \vdots \\ -H^{*p+\mu} \star [\Gamma_\nu u_1] \end{bmatrix}^T \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} a_n \\ \vdots \\ a_0 \\ b_{n_u,n} \\ \vdots \\ b_{n_u,0} \\ \vdots \\ b_{1,n} \\ \vdots \\ b_{1,0} \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

A partir de l'équation (2.98), on estime les coefficients β_j ($j = 1, \dots, k - 1$) identiquement au cas monovarié. Rappelons que la prise de décision est basée sur l'évolution temporelle des estimées déterminées, sans utiliser une connaissance des paramètres du système considéré.

Dans les deux prochaines sections, on va illustrer l'efficacité de l'extension de l'approche au cas multi-variables en considérant un exemple simple de système d'ordre 2 avec une entrée et deux sorties en présence, dans un premier temps, d'un défaut actionneur de type échelon, puis on étudiera le cas d'un défaut capteur du même type (biais).

5.2 Étude du cas de défaut actionneur

Considérons un cas très simple de système d'ordre $n = 2$ à une entrée ($n_u = 1$) et deux sorties ($n_y = 2$) avec un défaut actionneur de type échelon modélisé par

$$f_a(t - \tau_a) = l_a H(t - \tau_a) \quad (2.100)$$

en posant u et $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ respectivement l'entrée et la sortie du système, on obtient, dans le domaine fonctionnel (en gardant les mêmes notations pour les signaux et les distributions associées), le système en défaut donné par :

$$\begin{aligned} a_2 y_1^{(2)} + a_1 y_1^{(1)} + a_0 y_1 - b_{1,2} u^{(2)} - b_{1,1} u^{(1)} - b_{1,0} u = \\ \phi_1 + l_a [b_{1,2} \delta_{\tau_a}^{(1)} - b_{1,1} \delta_{\tau_a} - b_{1,0} H(t - \tau_a)] \end{aligned} \quad (2.101a)$$

$$\begin{aligned} a_2 y_2^{(2)} + a_1 y_2^{(1)} + a_0 y_2 - b_{2,2} u^{(2)} - b_{2,1} u^{(1)} - b_{2,0} u = \\ \phi_2 + l_a [b_{2,2} \delta_{\tau_a}^{(1)} - b_{2,1} \delta_{\tau_a} - b_{2,0} H(t - \tau_a)] \end{aligned} \quad (2.101b)$$

Dans les équations ci-dessus, on a

- i) $\text{supp}(\phi_1) = \text{supp}(\phi_2) = \{0\}$ et $\text{ordr}(\phi_1) = \text{ordr}(\phi_2) = n - 1$
- ii) $\text{supp}(\delta_{\tau_a}^{(1)}) = \{\tau_a\}$ et $\text{ordr}(\delta_{\tau_a}^{(1)}) = 1$

Ainsi, à partir des équations en (2.101), on obtient

$$[t^3(t - \tau_a)^3 \frac{d}{dt}] [a_2 y_1^{(2)} + a_1 y_1^{(1)} + a_0 y_1 - b_{1,2} u^{(2)} - b_{1,1} u^{(1)} - b_{1,0} u] = 0 \quad (2.102a)$$

$$[t^3(t - \tau_a)^3 \frac{d}{dt}] [a_2 y_2^{(2)} + a_1 y_2^{(1)} + a_0 y_2 - b_{2,2} u^{(2)} - b_{2,1} u^{(1)} - b_{2,0} u] = 0 \quad (2.102b)$$

Pour $t \leq \tau_a$, ces égalités sont vérifiées indépendamment de τ_a (τ_a n'est pas identifiable avant l'apparition du défaut). Cependant pour $t > \tau_a$, l'application d'intégrations successives permet d'obtenir des relations de redondance que l'on peut arranger afin d'obtenir les formulations spectrales suivantes

$$[A_{1,4} - 3\tau_a A_{1,3} + 3\tau_a^2 A_{1,2} - \tau_a^3 A_{1,1}]X_1 = 0 \quad (2.103a)$$

$$[A_{2,4} - 3\tau_a A_{2,3} + 3\tau_a^2 A_{2,2} - \tau_a^3 A_{2,1}]X_2 = 0 \quad (2.103b)$$

qui peuvent aussi se mettre sous la forme

$$\left[\begin{bmatrix} A_{1,4} & -3A_{1,3} \end{bmatrix} - \tau_a^2 \begin{bmatrix} -3A_{1,2} & A_{1,1} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} X_1 \\ \tau_a X_1 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.104a)$$

$$\left[\begin{bmatrix} A_{2,4} & -3A_{2,3} \end{bmatrix} - \tau_a^2 \begin{bmatrix} -3A_{2,2} & A_{2,1} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} X_2 \\ \tau_a X_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.104b)$$

où les matrices $A_{i,k}$ ($i = 1, 2$ et $k = 1, 2, 3, 4$) de dimension $M \times 6$ (M paramètres à choisir en fonction de contraintes explicitées ultérieurement) sont parfaitement connues en fonction des mesures u , y_1 et y_2 . Quant aux vecteurs X_1 et X_2 , ils regroupent tous les paramètres que l'on ne souhaite pas estimer (a_i , b_{ij}). Plus précisément, la ligne j de la matrice $A_{i,k}$ ($k = 1, \dots, M$) est donnée par

$$\begin{bmatrix} \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t \tau^{k+2} y_i^{(3)}(\tau) d\tau^{p+j}}_{p+j \text{ fois}} \\ \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t \tau^{k+2} \ddot{y}_i(\tau) d\tau^{p+j}}_{p+j \text{ fois}} \\ \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t \tau^{k+2} \dot{y}_i(\tau) d\tau^{p+j}}_{p+j \text{ fois}} \\ \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t \tau^{k+2} u^{(3)}(\tau) d\tau^{p+j}}_{p+j \text{ fois}} \\ \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t \tau^{k+2} \ddot{u}(\tau) d\tau^{p+j}}_{p+j \text{ fois}} \\ \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t \tau^{k+2} \dot{u}(\tau) d\tau^{p+j}}_{p+j \text{ fois}} \end{bmatrix}^T \quad (2.105)$$

Afin de remplacer toutes les dérivations dans $A_{i,k}$ par des intégrations, il suffit de prendre $p \geq 4$. A partir des égalités (2.103a) et (2.103b), τ_a^2 peut être considéré comme une valeur propre généralisée des couples de matrices

$$([\ A_{1,4} \ -3A_{1,3} \], [\ -3A_{1,2} \ A_{1,1} \]) \text{ et } ([\ A_{2,4} \ -3A_{2,3} \], [\ -3A_{2,2} \ A_{2,1} \]) \quad (2.106)$$

L'estimation de l'amplitude l_a peut être réalisée en dérivant puis en multipliant l'une des égalités (2.101a) ou (2.101b) par une application régulière α vérifiant $\alpha \dot{\phi}_1 = \alpha \dot{\phi}_2 = 0$ et $\alpha \delta_{\tau_a}^{(2)} \neq 0$. En considérant la fonction $\alpha(t) = t^3(t - \tau_a)^2$, on obtient les expressions donnant l'estimation de l_a :

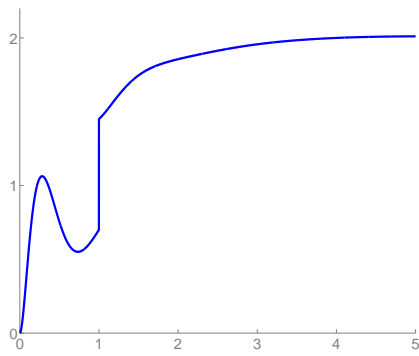
$$l_a = -\frac{(p+j-1)! [A_3(j, :) - 2\tau_a A_2(j, :) + \tau_a^2 A_1(j, :)] \theta}{2\tau_a^3 (t - \tau_a)^{p+j-1}} \quad (2.107)$$

$i = 1$ ou 2 , $1 \leq j \leq M$ et θ est le vecteur propre (normalisé : $\theta_4 = 1$) du couple de matrices $([\ A_{i,4} \ -3A_{i,3} \], [\ -3A_{i,2} \ A_{i,1} \])$ associé à la valeur propre généralisée τ_a .

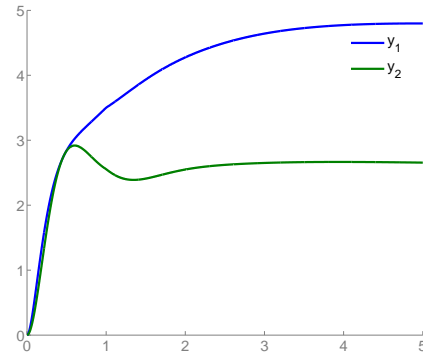
Comme dans le cas monovariante, on conclut à l'apparition d'un défaut actionneur $f_a = l_a H(t - \tau_a)$ lorsque les estimées de τ_a et l_a deviennent simultanément stationnaires à partir de $t \geq \tau_a$.

La figure (2.12) illustre des résultats de simulation dans le cas sans bruit.

Le système est commandé en boucle fermée à l'aide d'un correcteur *PID*. L'entrée (u) et les sorties (y_1 et y_2) obtenues sont présentées sur les figures (2.12(a)) et (2.12(b)). Le défaut actionneur d'amplitude constante $l_a = -0.75$ apparaît à l'instant $\tau_a = 1$. L'évolution temporelle des estimées de ces paramètres, obtenues différemment avec y_1 et y_2 , sont représentées graphiquement sur les figures (2.12(c)) et (2.12(d)). Le défaut simulé est bien détecté et identifié à travers l'évolution temporelle des estimées de τ_a et l_a .



(a) Commande



(b) Sorties

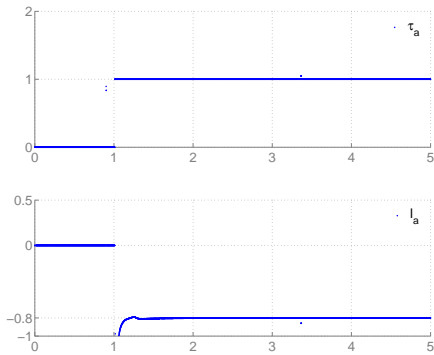
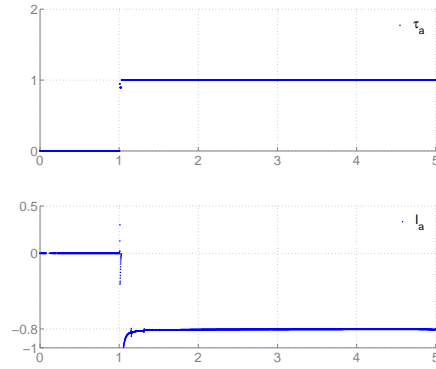
(c) Évolution temporelle de τ_a (en haut) et l_a (en bas) obtenues avec y_1 (d) Évolution temporelle de τ_a (en haut) et l_a (en bas) obtenues avec y_2

FIG. 2.12 – Système à une entrée et deux sorties avec un biais d'actionneur

5.3 Étude de cas - défaut capteur

Considérons toujours un système d'ordre $n = 2$ à une entrée et deux sorties avec cette fois-ci deux défauts capteurs, l'un sur y_1 d'amplitude constante l_{c1} apparu à l'instant τ_{c1} et le second sur y_2 d'amplitude constante l_{c2} apparu à l'instant τ_{c2} . Ces défauts peuvent être modélisés par

$$f_c = \begin{bmatrix} f_{c1}(t - \tau_{c1}) \\ f_{c2}(t - \tau_{c2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1}H(t - \tau_{c1}) \\ l_{c2}H(t - \tau_{c2}) \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

Sous les hypothèses précédentes, le système en défaut peut être représenté par

$$\begin{aligned} a_2 y_1^{(2)} + a_1 y_1^{(1)} + a_0 y_1 - b_{1,2} u^{(2)} - b_{1,1} u^{(1)} - b_{1,0} u = \\ \phi_1 + l_{c_1} [a_2 \delta_{\tau_{c_1}}^{(1)} + a_1 \delta_{\tau_{c_1}} + a_0 H(t - \tau_{c_1})] \end{aligned} \quad (2.109a)$$

$$\begin{aligned} a_2 y_2^{(2)} + a_1 y_2^{(1)} + a_0 y_2 - b_{2,2} u^{(2)} - b_{2,1} u^{(1)} - b_{2,0} u = \\ \phi_2 + l_{c_2} [a_2 \delta_{\tau_{c_2}}^{(1)} + a_1 \delta_{\tau_{c_2}} + a_0 H(t - \tau_{c_2})] \end{aligned} \quad (2.109b)$$

Un raisonnement identique au cas d'un défaut actionneur étudié dans la section précédente permet de caractériser $\tau_{c_1}^2$ et $\tau_{c_1}^2$ comme valeurs propres généralisées respectivement des couples de matrices

$$([A_{1,4} \quad -3A_{1,3}], [-3A_{1,2} \quad A_{1,1}]) \text{ et } ([A_{2,4} \quad -3A_{2,3}], [-3A_{2,2} \quad A_{2,1}]) \quad (2.110)$$

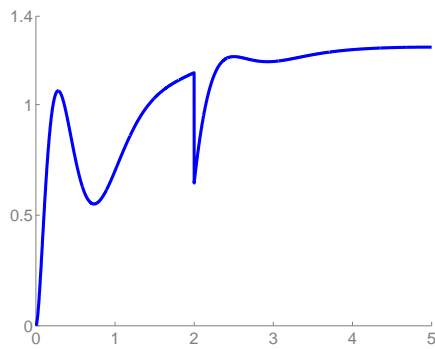
avec les matrices $A_{i,k}$ données par (2.105). Ici, pour tout $i \in \{1; 2\}$, à la différence du cas de défauts actionneur, la détection du défaut capteur f_{c_i} est accomplie à partir de y_i uniquement, ce qui facilite la localisation du capteur en défaut. Enfin, l'amplitude l_{c_i} peut être estimée par

$$l_{c_i} = - \frac{(p+j-1)! [A_3(j, :) - 2\tau_{c_i} A_2(j, :) + \tau_{c_i}^2 A_1(j, :)] * \theta}{2\tau_{c_i}^3 (t - \tau_{c_i})^{p+j-1}} \quad (2.111)$$

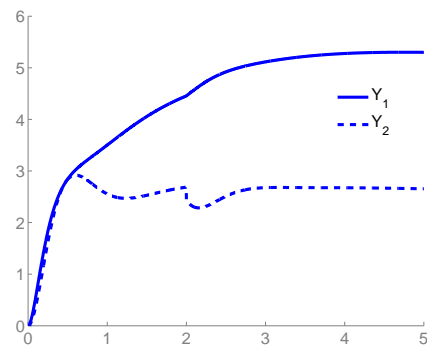
où le vecteur θ est le vecteur propre généralisé (normalisé : $\theta_4 = 1$) du couple de matrices $([A_{i,4} \quad -3A_{i,3}], [-3A_{i,2} \quad A_{i,1}])$ associé à la valeur propre généralisée τ_{c_i} .

La figure (2.13) illustre les résultats de simulation avec $f_{c_1}(t) = 0.5H(t - 2)$ et $f_{c_2}(t) = 0$. Le système est toujours commandé en boucle fermée à l'aide d'un correcteur PID. L'entrée et les sorties obtenues sont présentées sur les figures (2.13(a)) et (2.13(b)). Les résultats graphiques permettent de détecter, localiser et identifier le défaut simulé. La détection et l'identification sont réalisées au travers des estimées des paramètres τ_{c_1} et l_{c_1} . La localisation (détermination du capteur en défaut) quant à elle, peut être établie en analysant simultanément les estimées des paramètres τ_{c_1} (figure 2.13(c)) et τ_{c_2} (figure 2.13(d)).

Le traitement de défauts multiples peut être effectué identiquement au cas monovariante soit en considérant plusieurs modules de détections soit en utilisant une fenêtre glissante (voir chapitre prochain).



(a) Commande



(b) Sorties

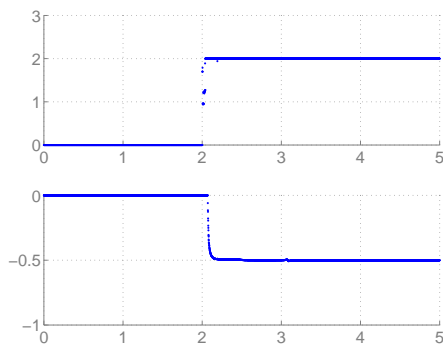
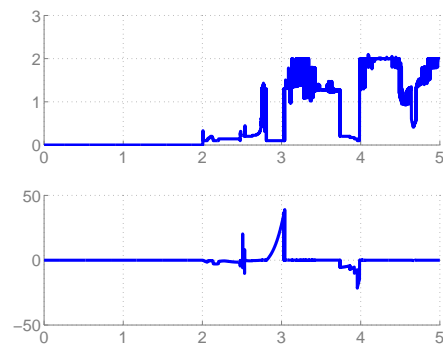
(c) Évolution temporelle de τ_{c_1} (en haut) et l_{c_1} (en bas)(d) Évolution temporelle de τ_{c_2} (en haut) et l_{c_2} (en bas)

FIG. 2.13 – Système à une entrée et deux sorties avec un biais de capteur

6 Conclusion

Le diagnostic des systèmes dynamiques linéaires sur la base d'une approche algébrique et déterministe constitue la thématique de ce chapitre. Deux types de défauts ont été considérés : les défauts actionneur et capteur modélisés au travers de signaux structurés.

Nous avons montré que la connaissance de l'ordre du système et de la structure des signaux défauts, on parvient à obtenir des informations utiles au diagnostic. L'approche proposée ne nécessite pas de valeurs numériques des paramètres du système. En plus, ces paramètres ne sont pas explicitement estimés, aspect que l'on retrouve dans la formulation spectrale, compte tenu qu'un vecteur propre ne traduit qu'une direction. Comme on l'a illustré à travers des exemples, la commande en boucle fermée n'altère pas la qualité de l'approche proposée.

Chapitre 3

Mise en œuvre de la méthode (Analyses théoriques)

Ce chapitre est consacré à l'étude de quelques aspects liés à la mise en œuvre de la méthode. Tout d'abord, on commence par l'étude de la robustesse de l'approche proposée par rapport à l'ordre du système, ensuite l'étude de la robustesse par rapport aux structures des défauts est abordée pour finir avec l'analyse de l'influence des bruits de mesure. Une version locale de l'approche est proposée par utilisation d'une fenêtre glissante. Les principaux résultats de cette partie peuvent être retrouvés dans (Moussa Ali et al. (2011)).

1 Étude de la robustesse par rapport à l'ordre du système

Le paramètre le plus important à connaître *a priori* pour appliquer l'algorithme développé est l'ordre du système. Il est donc primordial d'examiner le comportement des algorithmes de diagnostic du système lors d'une sur-modélisation ou sous-modélisation du système. Notons qu'il existe de nombreuses méthodes dans le domaine de l'identification des systèmes pour estimer l'ordre d'un système (Ljung (1999)).

Pour examiner l'influence de l'ordre du système sur l'approche proposée, considérons un système d'ordre N en le supposant égal à n le pré-requis. En présence d'un défaut d'actionneur noté f_a et d'un défaut de capteur noté f_c , on obtient pour le système (Σ) et le modèle (M) en défaut les représentations suivantes :

$$(\Sigma) : \tilde{a}_N y^{(N)} + \dots + \tilde{a}_0 y = \tilde{b}u + \psi_0 + \tilde{b}f_a + \tilde{a}_N f_c^{(N)} + \dots + \tilde{a}_0 f_c \quad (3.1)$$

$$(M) : a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = bu + \phi_0 + bf_a + a_n f_c^{(n)} + \dots + a_0 f_c + \mathfrak{E} \quad (3.2)$$

Les conditions initiales ψ_0 et ϕ_0 de support commun $\{0\}$ et d'ordre respectif $N - 1$ et $n - 1$ peuvent être écrites comme :

$$\psi_0 = \sum_{k=1}^N \tilde{a}_k \sum_{i=0}^{k-1} y^{(i)}(0) \delta^{(k-i-1)} \quad (3.3)$$

$$\phi_0 = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{i=0}^{k-1} y^{(i)}(0) \delta^{(k-i-1)} \quad (3.4)$$

Dans \mathfrak{E} , on regroupe tous les termes liés aux erreurs de modélisation afin que les équations (3.1) et (3.2) soient cohérentes.

1.1 Sur-modélisation

Dans les sections précédentes, on a toujours considéré des situations de modélisation exacte, c'est-à-dire que l'ordre n du modèle est égal à celui du système étudié N avec $\mathfrak{E} = 0$. Cette hypothèse nous a permis d'obtenir un algorithme performant de diagnostic du système en présence de défauts actionneurs et/ou capteurs.

La même performance peut être attendue lorsque l'ordre du modèle n est supérieur à celui du système N (sur-estimation). En effet, dans une telle situation, on vérifie facilement que

- l'erreur de modélisation \mathfrak{E} est nulle,
- L'opérateur annulateur de ϕ_0 , f_a et $f_c^{(n)}$ (dans (3.2)) annule également les termes ψ_0 , f_a et $f_c^{(N)}$ (dans (3.1)).

Ainsi, à travers les différentes étapes de l'approche proposée, on obtient un problème du type (2.67), autrement dit, on obtient des informations utiles au diagnostic. Afin de bien percevoir ceci, considérons un système entrée-sortie d'ordre 1. Un modèle d'ordre 2 est utilisé pour détecter et identifier un défaut actionneur modélisé par

$$f_a(t) = H(t - 1)$$

Le système (Σ) et le modèle (M) en défaut peuvent être représentés par

$$(\Sigma) : \tilde{a}_1 y^{(1)} + \tilde{a}_0 y = \tilde{b}u + \psi_0 + \tilde{b}f_a \quad (3.5a)$$

$$(M) : a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y = bu + \phi_0 + bf_a + \mathfrak{E} \quad (3.5b)$$

où

$$\psi_0 = \tilde{a}_1 y(0)\delta \quad (3.6a)$$

$$\phi_0 = a_2 y(0)\dot{\delta} + (a_2 \dot{y}(0) + a_1 y(0))\delta \quad (3.6b)$$

et

1. $Supp(\psi_0) = \{0\}$ et $Ordre(\psi_0) = 0$.

2. $Supp(\phi_0) = \{0\}$ et $Ordre(\phi_0) = 1$.

Identiquement aux sections précédentes, pour déterminer une estimation de τ_a , on multiplie d'abord l'égalité (3.5b) avec un annulateur commun de ϕ_0 et f_a noté $\Gamma = \Gamma_2 - \tau_a \Gamma_1$ pour avoir l'égalité

$$\Gamma[a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y - bu] = 0 \quad (3.7)$$

puis on applique des intégrations successives afin d'obtenir l'équation

$$[A_2 - \tau_a A_1]X = 0 \quad (3.8)$$

où les matrices A_i , de dimension $m \times 4$ ont leur j^{me} ligne donnée par

$$A_i(j, :) = \left(\begin{array}{cccc} H^{*p+j} \star [\Gamma_i y^{(2)}] & H^{*p+j} \star [\Gamma_i y^{(1)}] & H^{*p+j} \star [\Gamma_i y] & -H^{*p+j} \star [\Gamma_i u] \end{array} \right) \quad (3.9)$$

et X le vecteur propre généralisé associé à la valeur propre généralisée τ_a de (A_2, A_1) .

En considérant les signaux réels u et y , on aboutirait à

$$[\tilde{A}_2 - \tau_a \tilde{A}_1]\tilde{X} = 0 \quad (3.10)$$

avec cette fois-ci les matrices \tilde{A}_i de dimension $m \times 3$, dont la ligne j est donnée par

$$\tilde{A}_i(j, :) = \left(\begin{array}{ccc} H^{*p+j} \star [\Gamma_i y^{(1)}] & H^{*p+j} \star [\Gamma_i y] & -H^{*p+j} \star [\Gamma_i u] \end{array} \right) \quad (3.11)$$

et \tilde{X} le vecteur propre généralisé associé à la valeur propre généralisée τ_a de $(\tilde{A}_2, \tilde{A}_1)$.

On vérifie facilement que l'estimation de τ_a (éventuellement de f_a) qu'on obtiendrait à partir de l'équation (3.10) sera la même que celle fournie par l'équation (3.8). En effet, on a

$$A_i = [x_i \tilde{A}_i] \quad (3.12)$$

où les vecteur x_i de dimension m ont leur j^{me} élément donné par

$$x_{i,j} = H^{*p+j} \star [\Gamma_i y^{(2)}] \quad (3.13)$$

Ainsi, on a l'inclusion

$$(\tilde{A}_2 - \tau_a \tilde{A}_1) \tilde{X} = 0 \Rightarrow ([x_2 \ \tilde{A}_2] - \tau_a [x_1 \ \tilde{A}_1]) \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{X} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.14)$$

autrement dit, le spectre de $(\tilde{A}_2, \tilde{A}_1)$ est inclus dans celui de (A_2, A_1) et ceci est vrai pour tout $N < n$.

L'exemple de simulations ci-dessous illustre ces résultats. On utilise un modèle de second ordre pour diagnostiquer un système du premier ordre. Le système est simulé en boucle fermée à l'aide d'un correcteur PI . Le défaut simulé est un défaut actionneur apparu à l'instant $\tau_a = 1$ et d'amplitude constante $l_a = 0,8$. Les résultats obtenus permettent de bien détecter et identifier le défaut simulé ($f_a = 0,8H(t-1)$) et sont identiques au cas où l'on considère un modèle du premier ordre.

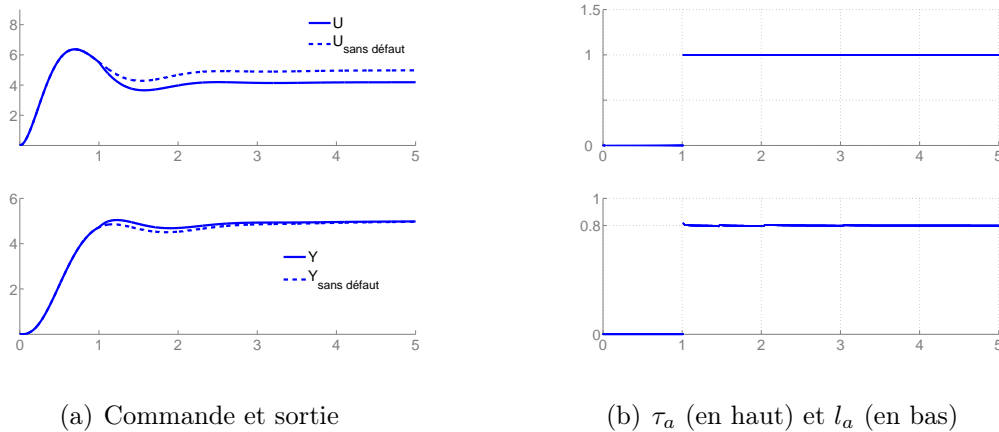


FIG. 3.1 – Système d'ordre 1 diagnostiqué par un modèle d'ordre 2

Notons qu'une sur-modélisation importante (n largement plus grand que N) peut introduire des artefacts d'estimation du paramètre τ_a , donc conduire à une mauvaise détection.

1.2 Sous-modélisation

Lorsque l'ordre du système étudié est sous estimé, c'est-à-dire $N > n$, alors l'égalité du type (2.67) n'est plus vérifiée. A la place on aura

$$[A_k - \beta_{k-1}A_{k-1} - \dots - \beta_1A_1]X = R \neq 0 \quad (3.15)$$

L'élément j ($j = 1, \dots, m$) du vecteur des résidus R est donné par

$$R(j) = \sum_{k=n+1}^N \tilde{a}_k \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{p+j \text{ fois}} \Gamma \left((-y + f_c)^{(k)} + \sum_{i=0}^{k-(n+1)} y^{(i)}(0) \delta^{(k-1-i)} \right) d\tau^{p+j} \quad (3.16)$$

En effet, l'annulateur Γ des termes ϕ_0 , f_a et $f_c^{(n)}$ apparaissant dans (3.2) vérifie

$$\begin{aligned} \Gamma f_c^{(i)} &= 0, \quad \forall i \leq n \\ \Gamma \psi_0 &= \sum_{k=n+1}^N \sum_{i=0}^{k-(n+1)} y^{(i)}(0) \delta^{(k-1-i)} \end{aligned}$$

Le vecteur résidu est une fonction de certaines conditions initiales et des dérivées d'ordre supérieur de y et f_c (dans le cas d'un défaut capteur). Lorsque la différence d'ordre est importante ou que les paramètres d'indices supérieurs dans l'équation (3.1) ne sont pas négligeables, comparés à ceux d'indices inférieurs, alors l'approche proposée peut ne pas identifier le défaut apparu sur le système.

Pour illustrer ce cas de sous-modélisation, considérons, en guise d'exemple, la détection d'un défaut actionneur f_a de type échelon sur un système d'ordre 2 à travers un modèle d'ordre 1. En considérant $\Gamma = [t^3 - \tau_a t^2] \frac{d}{dt}$, avec τ_a l'instant d'apparition du défaut recherché, on obtient

$$(\Sigma) : \Gamma[\tilde{a}_2 y^{(2)} + \tilde{a}_1 y^{(1)} + \tilde{a}_0 y - \tilde{b}u] = \tilde{a}_2 y(0) \Gamma \dot{\delta} \quad (3.17a)$$

$$(M) : \Gamma[a_1 y^{(1)} + a_0 y - bu] = 0 \quad (3.17b)$$

car Γ est un annulateur de ϕ_0 et f_a . Ainsi, avec la commande u et la sortie y du système et en considérant un modèle du premier ordre, on aura

$$[A_2 - \tau_a A_1]X = R \neq 0 \quad (3.18)$$

A_2 et A_1 données par (2.32), et

$$R(j) = x_4 \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{p+j \text{ fois}} [\Gamma y^{(2)} - y(0) \Gamma \dot{\delta}] d\tau^{p+j} \quad (3.19)$$

x_4 et X sont respectivement des estimations du paramètre \tilde{a}_2 et du vecteur des paramètres restant $\begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_0 \\ -\tilde{b} \end{pmatrix}$. Les résultats de simulation ci-dessous illustrent l'influence du paramètre \tilde{a}_2 sur les estimations du temps d'apparition et de l'amplitude (l_a) du défaut simulé. Les signaux entrées et sorties représentés sur les figures (3.2(a)) et (3.3(a)) sont obtenus respectivement avec les systèmes

$$0.3\ddot{y} + 4.2\dot{y} + 9y = 9u$$

et

$$4\ddot{y} + 4.2\dot{y} + 9y = 9u$$

Ces deux systèmes de même gain statique et de pôles $(-2.64; -11.35)$ et $(-0.52 + 1.4i; -0.52 - 1.4i)$ respectivement ont été simulés en boucle fermée (*PI*) avec un défaut actionneur modélisé par

$$f_a(t) = -H(t - 1.5)$$

Les estimations sont obtenues à l'aide d'un modèle d'ordre 1.

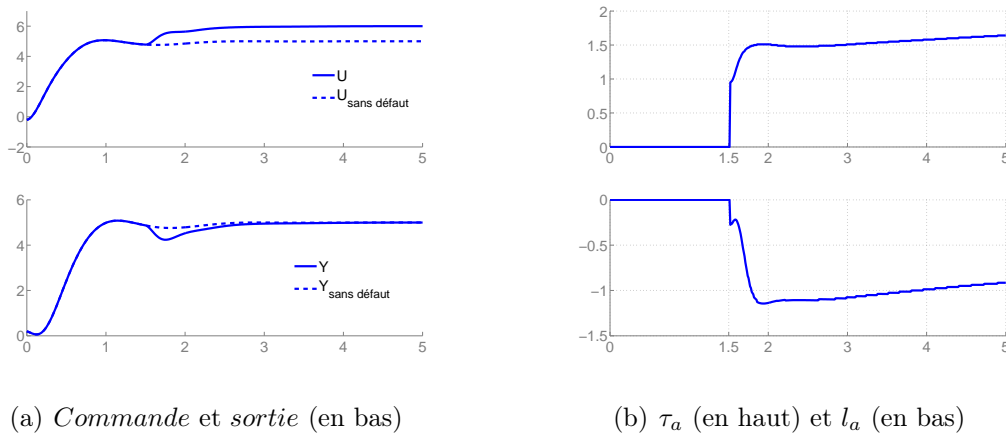
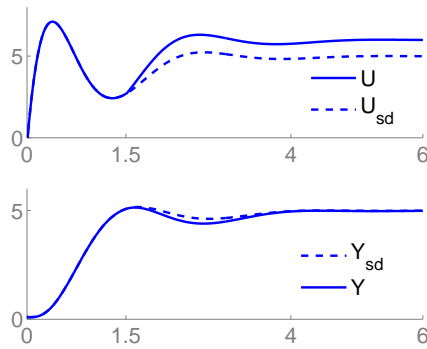


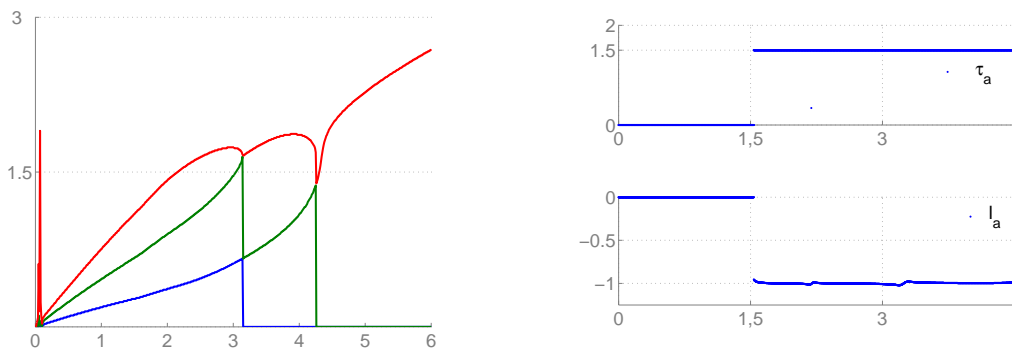
FIG. 3.2 – Résultats obtenus avec $0.3\ddot{y} + 4.2\dot{y} + 9y = 9u$

Sur la figure (3.2), contrairement au cas de sur-modélisation, nous remarquons que les valeurs des estimations ne se stationnarisent pas après l'apparition du défaut ($t = 1.5$) mais fluctuent autour des vraies valeurs. Malgré tout, du fait de leur faible fluctuation, on peut conclure à l'apparition d'un défaut actionneur d'amplitude (constante) $l_a \simeq -1$ à l'instant $t \simeq 1.5$.

Par contre, comme on peut le voir sur la figure (3.3(b)), les estimées de toutes les valeurs propres généralisées obtenues avec un modèle d'ordre 1 fluctuent considérablement avec le temps, ce qui ne permet pas de conclure à l'apparition ou non d'un



(a) *Commande et sortie (en bas)*



(b) Évolution temporelle du spectre de (A_2, A_1) en situation de sous modélisation

(c) Estimation de τ_a et l_a avec un modèle d'ordre 2 (modélisation exacte)

FIG. 3.3 – Résultats obtenus avec $4\ddot{y} + 4.2\dot{y} + 9y = 9u$

défaut. En guise de comparaison, on représente sur la figure (3.3(c)) les résultats graphiques qu'on obtiendrait avec un modèle d'ordre 2.

Compte tenu des résultats de l'étude dans cette section, il est d'intérêt d'envisager un ordre plus élevé (mais pas trop au risque d'obtenir des matrices creuses) pour générer des signaux sur lesquels le diagnostic des défauts est basée.

2 Robustesse par rapport aux bruits de mesure

2.1 Introduction

On aborde dans cette partie la robustesse de l'approche par rapport aux bruits de mesure.

Soit un système dont les mesures sont explicitées comme suit au moyen de données réelles et de défauts :

$$u = u_r - f_a(t - \tau_a), \quad y = y_r + f_c(t - \tau_c) \quad (3.20)$$

avec f_a et f_c structurés et u_r et y_r satisfaisant une équation du type (2.64) rappelée ci-dessous :

$$a_n y_r^{(n)} + a_{n-1} y_r^{(n-1)} + \dots + a_0 y_r = \phi_0 + b_z u_r^{(z)} + b_{z-1} u_r^{(z-1)} + \dots + b_0 u_r \quad (3.21)$$

En plus des défauts f_a et f_c , ajoutons à la sortie y une perturbation, notée π , non structurée (c'est le cas par exemple d'un signal à fluctuation rapide). L'équation du système en défaut devient

$$a_n (y + \pi - f_c)^{(n)} + \dots + a_0 (y + \pi - f_c) = \phi_0 + b_z (u + f_a)^{(z)} + \dots + b_0 (u + f_a) \quad (3.22)$$

Après la multiplication de cette équation par l'annulateur Γ approprié des termes structurés (conditions initiales, défauts) et la génération des relations de redondance par intégrations successives, on obtient

$$[(A_k - \Delta A_k) - \beta_{k-1}(A_{k-1} - \Delta A_{k-1}) - \dots - \beta_1(A_1 - \Delta A_1)]X = 0 \quad (3.23)$$

Les A_i s'expriment en fonction des signaux connus u et y tandis que les matrices ΔA_i sont liées au bruit π .

L'analyse de la robustesse s'appuie sur

- l'analyse des filtres générateurs des éléments des matrices A_i ,
- les propriétés du ϵ -pseudospectre du faisceau de matrices.

Ces deux points font l'objet des sections suivantes.

2.2 Analyse fréquentielle des générateurs des relations de redondance

Supposons que l'annulateur puisse s'écrire comme

$$\Gamma = t^{n_k} \frac{d^{d_k}}{dt^{d_k}} - \beta_{k-1} t^{n_{k-1}} \frac{d^{d_{k-1}}}{dt^{d_{k-1}}} - \dots - \beta_1 t^{n_1} \frac{d^{d_1}}{dt^{d_1}}, \quad n_j, d_j \in \mathbb{N} \quad (3.24)$$

En considérant les propriétés énumérées ci-dessous :

1. (Formule de Cauchy) : $\underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{p \text{ fois}} f(\tau) d\tau^p = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!} f(\tau) d\tau$

$$2. t^k y^{(n)} = \sum_{j=0}^{inf(k,n)} C_j^k (-1)^j \frac{n!}{(n-j)!} [t^{k-j} y]^{(n-j)}$$

$$3. \text{ (Formule de Newton) : } (t - \tau)^k = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_j^k t^{k-j} \tau^j$$

les expressions des matrices peuvent être réduites à

$$A_i(j, \mu) = \int_0^t f_{i,j,\mu}(t - \tau) y(\tau) d\tau, \quad \mu = 1, \dots, n + 1 \quad (3.25)$$

$$A_i(j, n + 1 + \nu) = \int_0^t g_{i,j,\nu}(t - \tau) u(\tau) d\tau, \quad \nu = 1, \dots, z + 1 \quad (3.26)$$

où $f_{i,j,\mu}$ et $g_{i,j,\nu}$ sont des polynômes de degrés $p + j + \mu + n_i - n - d_i - 2$ et $p + j + \nu + n_i - z - d_i - 2$ respectivement.

La matrice de transfert \mathcal{H} entre

$$e = \begin{bmatrix} u \\ y \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

et $A_i(j, :)$, considérée comme un filtre linéaire (figure 3.4), admet pour réponse impulsionnelle matricielle

$$h(t) = \begin{bmatrix} 0 & f_{i,j,1}(t) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & f_{i,j,n+1}(t) \\ g_{i,j,1}(t) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ g_{i,j,z+1}(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

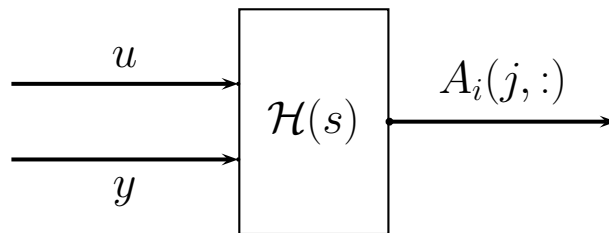


FIG. 3.4 – Générateur de $A_i(j, :)$.

Il s'agit d'un filtre causal passe-bas, c'est-à-dire qui ne "laisse passer" que les basses fréquences, les hautes fréquences¹ étant fortement atténuées. On peut trouver

¹En ingénierie des systèmes, le bruit est en général haute fréquence

une analyse des performances de ce filtre dans le domaine discret dans (García Colado et al. (2009)), où les auteurs utilisent une approximation de l'intégrale basée sur une discrétisation trapézoïdale régulièrement espacée.

Afin d'évaluer la performance dans le domaine continu, considérons l'exemple simple de la section (3.2) où

$$\Gamma = [t^3 \frac{d}{dt}] - \tau_a [t^2 \frac{d}{dt}]$$

La réponse impulsionnelle correspondante est caractérisée par :

$$\begin{aligned} f_{i,j,1}(\tau) &= \frac{\tau^{p+j-3}(t-\tau)^{i+1}}{(p+j-3)!} - \frac{2(i+1)\tau^{p+j-2}(t-\tau)^i}{(p+j-2)!} + \frac{i(i+1)\tau^{p+j-1}(t-\tau)^{i-1}}{(p+j-1)!} \\ f_{i,j,2}(\tau) &= \frac{\tau^{p+j-2}(t-\tau)^{i+1}}{(p+j-2)!} - \frac{(i+1)\tau^{p+j-1}(t-\tau)^i}{(p+j-1)!} \\ g_{i,j,1}(\tau) &= f_{i,j,2}(\tau) \end{aligned} \quad (3.29)$$

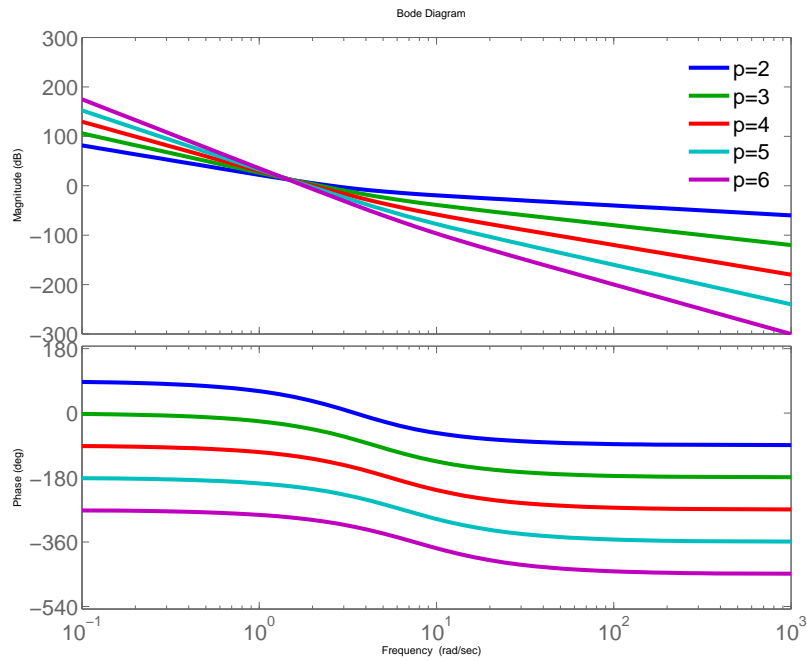
Les diagrammes de Bode obtenus avec différentes valeurs de i et p sont schématisés sur les figures (3.5) et (3.6). On constate que le degré d'atténuation des hautes fréquences croît avec le paramètre p qui correspond au nombre d'intégrations successives initiales dans la génération des relations de redondance. Cependant notons que les matrices A_i sont susceptibles d'être creuses pour p très grand, occasionnant ainsi des pertes d'informations utiles au diagnostic. Notons également l'influence quasi nulle du paramètre i , caractérisant les degrés des éléments de la réponse impulsionnelle $h(t)$, par rapport aux hautes fréquences (figures 3.6(a) et 3.6(b)).

Si on considère cette fois-ci l'opérateur

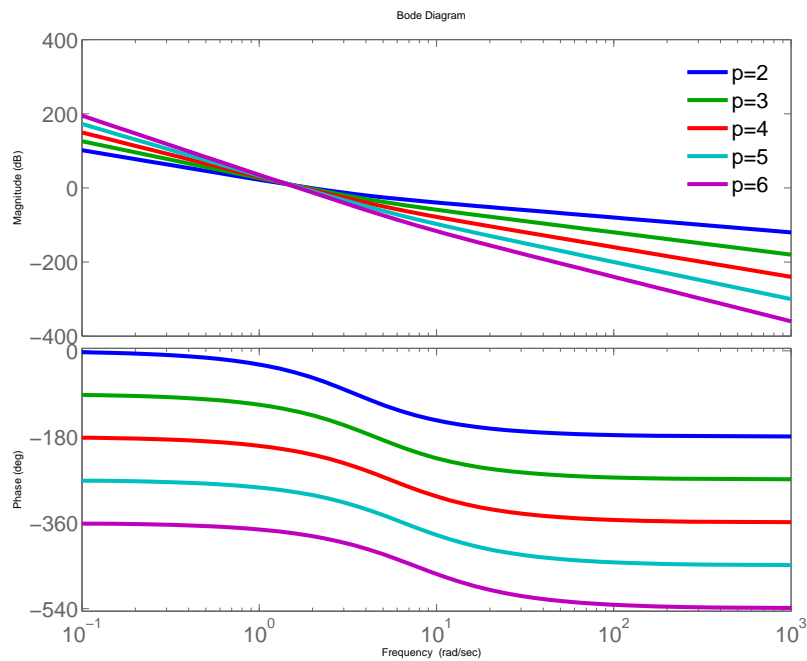
$$\Gamma_{exp} = [e^{-wt}t^3 \frac{d}{dt}] - \tau_a [e^{-wt}t^2 \frac{d}{dt}], \quad w \geq 0$$

à la place du polynôme différentiel utilisé, on obtient toujours un filtre de même nature que le précédent, mais caractérisé cette fois-ci par

$$\begin{aligned} f_{i,j,1}(\tau) &= e^{-w(t-\tau)} \left[\frac{\tau^{p+j-3}(t-\tau)^{i+1}}{(p+j-3)!} + \frac{\tau^{p+j-2}}{(p+j-2)!} (2w(t-\tau)^{i+1} - 2(i+1)(t-\tau)^i) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau^{p+j-1}}{(p+j-1)!} (w^2(t-\tau)^{i+1} - 2(i+1)w(t-\tau)^i + i(i+1)(t-\tau)^{i-1}) \right] \\ f_{i,j,2}(\tau) &= e^{-w(t-\tau)} \left[\frac{\tau^{p+j-2}(t-\tau)^{i+1}}{(p+j-2)!} + \frac{\tau^{p+j-1}}{(p+j-1)!} (w(t-\tau)^{i+1} - (i+1)(t-\tau)^i) \right] \\ g_{i,j,1}(\tau) &= f_{i,j,2}(\tau) \end{aligned} \quad (3.30)$$

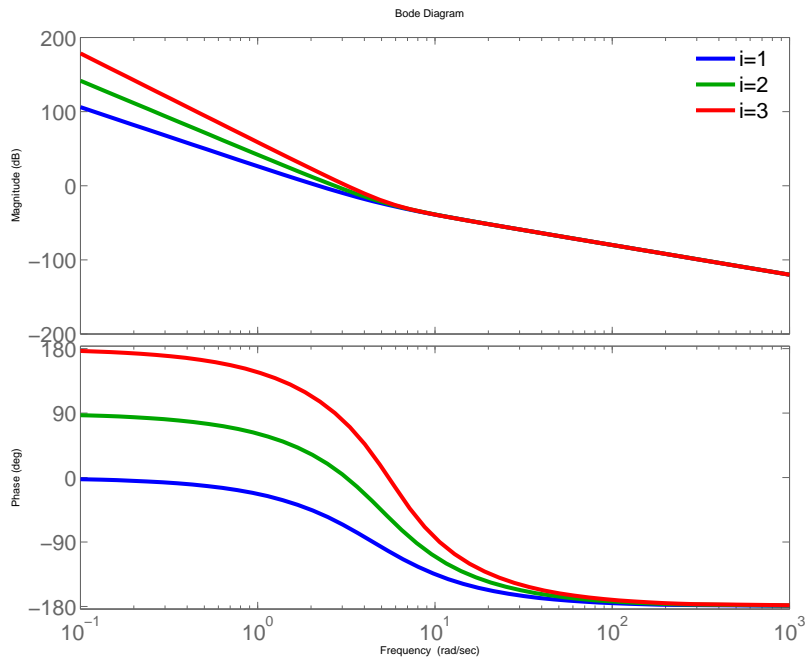


(a) Diagrammes de Bode de $F(s)$

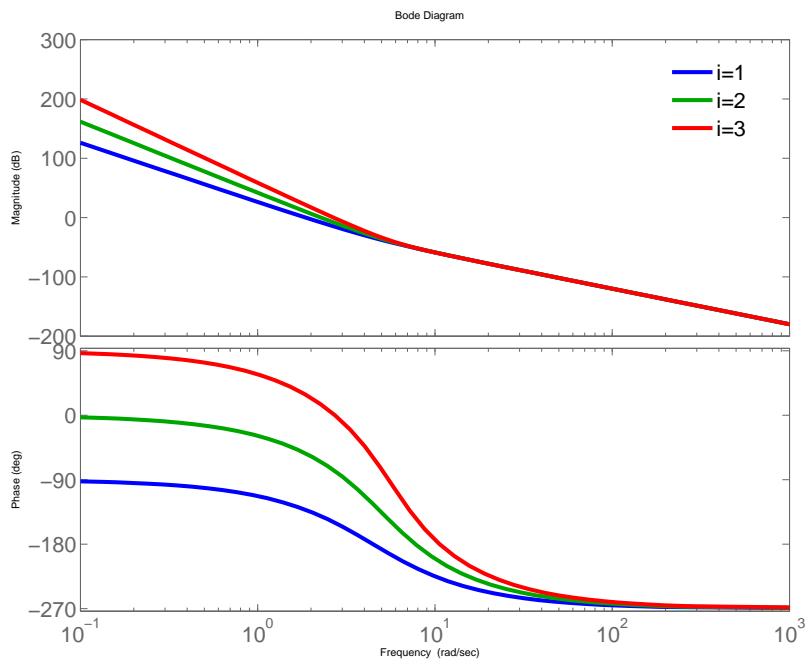


(b) Diagrammes de Bode de $G(s)$

FIG. 3.5 – Diagrammes de bode avec $p = 2; 3; 4; 5; 6$



(a) Diagrammes de Bode de $F(s)$



(b) Diagrammes de Bode de $G(s)$

FIG. 3.6 – Diagrammes de bode avec $i = 1; 2; 3$

Les diagrammes de Bode correspondant, obtenus avec $w = 0.3$, sont représentés sur la figure (3.7). En comparant les courbes de gain de ces diagrammes à celles des diagrammes obtenus avec le polynôme différentiel, on peut conclure que les hautes fréquences sont mieux atténuées par le filtre obtenu avec Γ_{exp} que par celui obtenu avec Γ .

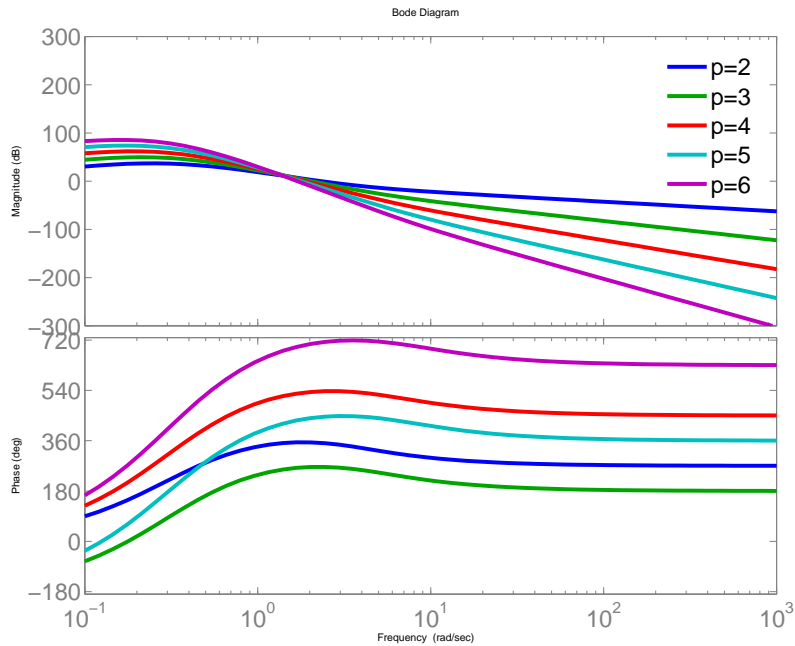


FIG. 3.7 – Diagrammes de bode correspondant à $w = 0.3$ et $p = 2, \dots, 6$

Le développement de notre approche algébrique ne s’appuie pas sur les propriétés statistiques des bruits. Lorsque l’on dispose d’une connaissance *a priori* de ces propriétés, ces dernières peuvent être intégrées dans le choix des paramètres du filtre (w, p, \dots).

2.3 ϵ -pseudospectre de faisceau de matrices $A - \lambda B$

L’analyse spectrale est un outil standard des sciences mathématiques. Depuis l’arrivée des ordinateurs, elle est aussi devenue un outil standard du calcul scientifique et est à la base de l’obtention d’intéressants résultats dans ces domaines.

Cependant, il est prouvé que, pour certains problèmes des sciences de l’ingénieur, les renseignements fournis par l’analyse spectrale ne sont pas en conformité avec l’expérience. Ce sont des problèmes comportant des matrices ou opérateurs qui ne

sont pas normaux et, souvent, sont dans un sens, loin de la normalité (Reichel & Trefethen (1992), Trefethen et al. (1993)). Une matrice normale est une matrice dont les vecteurs propres forment une base orthogonale de l'espace. Notons que les vecteurs propres d'une matrice non normale, peuvent former aussi une base de l'espace, mais non orthogonale.

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, la méthode de diagnostic que nous développons nous conduit à la recherche de valeurs propres généralisées d'un couple de matrices (A, B) . Dans les applications, on est souvent face à des matrices dont les éléments sont obtenus par mesures, donc entachés d'erreur ($A = \tilde{A} + \epsilon\Delta A$, $B = \tilde{B} + \epsilon\Delta B$) et le degré de non normalité peut augmenter indéfiniment quand l'erreur approche une certaine limite. Dans de telles situations, l'information quantitative obtenue à partir de l'analyse spectrale peut s'avérer fautive. Aussi, notons que les méthodes traditionnelles de recherche de valeurs propres généralisées ne donnent pas souvent de solution. Un des principaux outils pour traiter la non normalité a été le ϵ -pseudospectre de matrices ou plus généralement le ϵ -pseudospectre de faisceaux de matrices. Le mot "faisceau" utilisé en algèbre linéaire fait référence à l'expression $A - \lambda B$, où A et B sont des matrices carrées et λ un scalaire.

Définition 2.1 Soient A et B deux matrices de $\mathbb{R}^{m \times n}$. On dit que λ est une ϵ -pseudo valeur propre du couple de matrices (A, B) , s'il existe un vecteur ν non nul (le pseudo vecteur propre correspondant) tel que

$$\|(A - \lambda B)\nu\| \leq \epsilon \quad (3.31)$$

L'ensemble des ϵ -pseudo valeurs propres de (A, B) est appelé ϵ -pseudospectre de (A, B) et est noté $\Lambda_\epsilon(A, B)$.

Notons que si la norme $\|\bullet\|$ considérée est la norme quadratique $\|\bullet\|_2$, alors on a la définition équivalente suivante :

$$\Lambda_\epsilon(A, B) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \sigma_{\min}(A - \lambda B) \leq \epsilon\} \quad (3.32)$$

où $\sigma_{\min}(M)$ désigne la plus petite valeur singulière de la matrice M .

Et plus généralement, pour k matrices $A_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, on définit l'ensemble

$$\Lambda_\epsilon(A_k, \dots, A_1) = \{\beta \in \mathbb{R}^{k-1} : \sigma_{\min}(A_k - \beta_{k-1}A_{k-1} - \dots - \beta_1A_1) \leq \epsilon\} \quad (3.33)$$

Les ensembles $\Lambda_\epsilon(A_k, \dots, A_1)$ sont susceptibles d'être vides pour de petites valeurs de ϵ . En revanche, en faisant croître la valeur de ϵ , on obtient une famille, qu'on

note $\Lambda(A_k, \dots, A_1)$, d'ensembles $\Lambda_\epsilon(A_k, \dots, A_1) \neq \{\emptyset\}$. Ainsi, l'estimation de $\tilde{\beta}$, solution du problème

$$(\tilde{A}_k - \tilde{\beta}_{k-1}\tilde{A}_{k-1} - \tilde{\beta}_{k-2}\tilde{A}_{k-2} - \dots - \tilde{\beta}_1\tilde{A}_1)\tilde{X} = 0 \quad (3.34)$$

avec \tilde{A}_i les matrices engendrant les matrices A_i par addition de perturbations (i.e $A_i = \tilde{A}_i + \epsilon\Delta A_i$, avec $\|\Delta A_i\| \leq 1$), peut être obtenue par l'estimation des minima locaux de Λ .

Le cas $k = 2$ a déjà fait l'objet de quelques études dans la littérature (Boutry et al. (2005) et Wright & Trefethen (2002)) et est connu sous le nom de pseudospectre de faisceaux de matrices. Pour $k > 2$, on va montrer que sous certaines conditions sur les dimensions m et n , on peut toujours se ramener au cas $k = 1$.

Théorème 2.1 *Pour toute matrice M de dimension $m \times n$ avec $m > n$, il existe une matrice orthogonale de dimension $(m-n) \times m$ notée $coker(M)$ telle que $coker(M)M = 0$.*

Les lignes de la matrices $coker(M)$ sont des vecteurs appartenant au sous-espace noyau à gauche de la matrice M .

Une preuve du théorème (2.1) peut être facilement obtenue à l'aide de la factorisation QR d'une matrice de $\mathbb{R}^{m \times n}$ avec $m > n$.

Donnons à présent la démarche qui permet de se ramener au cas $k = 2$. Soit $N_1 = coker(A_1)$ (obtenu à partir de la factorisation QR), alors on peut écrire

$$\begin{aligned} & \underset{\beta_{k-1}}{\operatorname{argmin}} \sigma_{\min}(A_k - \beta_{k-1}A_{k-1} - \dots - \beta_1A_1) = \\ & \underset{\beta_{k-1}}{\operatorname{argmin}} \sigma_{\min}(N_1A_k - \beta_{k-1}N_1A_{k-1} - \dots - \beta_2N_1A_2) \end{aligned}$$

car σ_{\min} est invariable par transformation orthogonale.

Soit maintenant $N_2 = coker(N_1A_2)$ (donc de dimension $m - 2n \times (m - n)$). On a

$$\begin{aligned} & \underset{\beta_{k-1}}{\operatorname{argmin}} \sigma_{\min}(N_1A_k - \beta_{k-1}N_1A_{k-1} - \dots - \beta_2N_1A_2) = \\ & \underset{\beta_{k-1}}{\operatorname{argmin}} \sigma_{\min}(N_2N_1A_k - \beta_{k-1}N_2N_1A_{k-1} - \dots - \beta_3N_2N_1A_3) \end{aligned}$$

Et ainsi de suite, on aboutit à l'égalité

$$\begin{aligned} & \underset{\beta_{k-1}}{\operatorname{argmin}} \sigma_{\min}(A_k - \beta_{k-1}A_{k-1} - \dots - \beta_1A_1) = \\ & \underset{\beta_{k-1}}{\operatorname{argmin}} \sigma_{\min}(P_{k-1}A_k - \beta_{k-1}P_{k-1}A_{k-1}) \end{aligned}$$

où $P_{k-1} = N_{k-2}N_{k-3}\cdots N_1$ et $N_j = \text{coker}(N_{j-1}N_{j-2}\cdots N_1A_{j-1})$ $j > 1$ sont des matrices de dimension $m - jn \times (m - (j - 1)n)$, $1 \leq j \leq k - 2$. Comme le nombre d'éléments du vecteur β est $k - 1$, le paramètres m (nombre de lignes) devrait être choisi tel que $m > (k - 2)n$. Ces opérations permettent la détermination de β_{k-1} à travers l'analyse de $\Lambda_\epsilon(P_{k-1}A_k, P_{k-1}A_{k-1})$ et des démarches identiques permettent d'estimer les autres composantes du vecteur β solution du problème.

Un algorithme évident de calcul de $\underset{\lambda}{\operatorname{argmin}} \sigma_{\min}(A - \lambda B)$ pour A et B des matrices de même dimension consiste à évaluer $\sigma_{\min}(A - \lambda_j B)$ pour des réels λ_j discrétisés et ensuite générer une courbe de niveau sur laquelle il est facile de relever les minima. Dans le cas de l'étude faite précédemment, pour chaque élément β_j cherché, le nombre de solutions distinctes varie entre 1 et $\inf(n, m - (k - 2)n)$. Des contraintes supplémentaires sur β permettent de chercher des estimations de solutions particulières au problème (3.34).

2.4 Exemple d'illustration

Considérons un système SISO d'entrée u et de sortie y du premier ordre. On suppose que ce système est altéré par un défaut actionneur de type échelon apparu à l'instant τ_a et que la sortie est entachée par un bruit additif, gaussien et centré, de variance 0.01 que l'on note π . Un tel système peut être représenté par l'équation

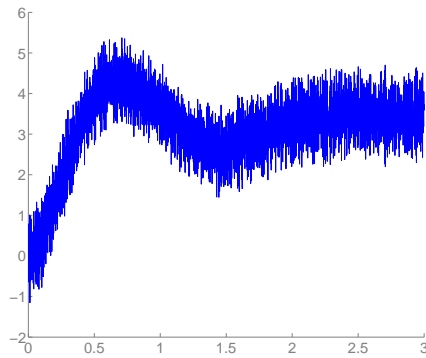
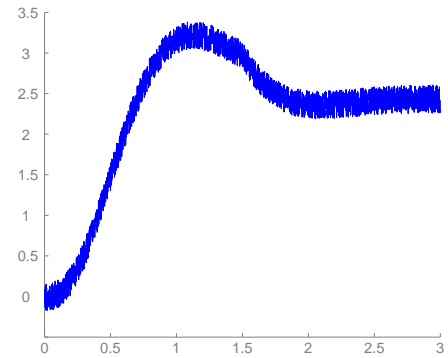
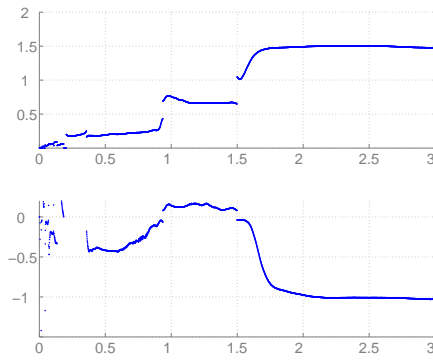
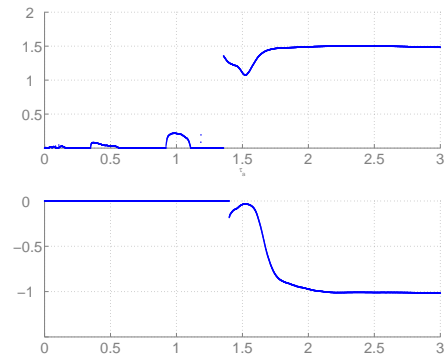
$$a_1 y^{(1)} + a_0 y = \varpi + bu + bl_a H(t - \tau_a) \quad (3.35)$$

avec $\varpi = a_1 \pi^{(1)} + a_0 \pi + a_1 y(0) \delta$.

La démarche détaillée au chapitre 2 conduit à une formulation du type

$$[(A_2 - \Delta A_2) - \tau_a(A_1 - \Delta A_1)]X = 0 \quad (3.36)$$

Les A_i s'expriment en fonction de u et y tandis que les matrices ΔA_i sont liées au bruit π . Les figures (3.8(c)) et (3.8(d)) représentent les résultats de simulation obtenus avec $\alpha = t^2(t - \tau_a)$ et $\alpha = e^{-0.3t}t^2(t - \tau_a)$ respectivement. L'entrée u (figure 3.8(a)) est aussi entachée de bruit car le système est simulé en boucle fermée avec un correcteur PI . A travers les résultats graphiques on peut conclure à l'apparition du défaut actionneur $f_a(t) = -H(t - 1.5)$ avec, cette fois-ci, un léger retard de détection. L'analyse de ces courbes confirme la robustesse de l'approche proposée par rapport aux bruits additifs à fluctuations rapides. Le bruit simulé ici dépasse amplement le bruit rencontré dans la majeure partie des manipulations de laboratoire ainsi qu'en général dans l'industrie haute technologie. On trouvera dans (Fliess (2006)) d'autres

(a) commande u (b) sortie y (c) Estimation avec $\alpha = t^2(t - \tau_a)$ (d) Estimation avec $\alpha = e^{-0.3t}t^2(t - \tau_a)$
 FIG. 3.8 – Système du 1^{er} ordre en présence d'un défaut actionneur et d'un bruit de mesure

raisons théoriques expliquant la robustesse à ces bruits se fondant sur l'analyse non standard. Notons également que plusieurs exemples et applications illustrant une bonne robustesse de la technique d'estimation algébrique peuvent être trouvés dans (Mboup (2009)).

3 Robustesse par rapport à la structure du défaut

Parmi l'ensemble des signaux structurés, nous allons considérer dans cette partie des défauts particuliers caractérisés par des polynômes du type

$$f(t) = l_f(t - \tau)^{n_f} H(t - \tau) \quad (3.37)$$

Ces signaux modélisent fidèlement un grand nombre de défauts, car toute fonction analytique peut être approximée par une série de polynômes. L'annulateur évident

de la fonction $f(t)$ en (3.37) est donné par

$$\Gamma(t) = [(t - \tau) \frac{d^{n_f}}{dt^{n_f}}] \quad (3.38)$$

Considérons un système d'ordre n , d'entrée u , de sortie y satisfaisant l'équation

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = bu + \phi_0 \quad (3.39)$$

ϕ_0 est une distribution d'ordre $n - 1$ et de support $\{0\}$.

En présence de défauts actionneur et capteur respectivement modélisés par

$$f_a(t) = l_a(t - \tau_a)^{n_a} H(t - \tau_a) \quad (3.40)$$

$$f_c(t) = l_c(t - \tau_c)^{n_c} H(t - \tau_c) \quad (3.41)$$

le système en défaut devient :

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y - bu &= \phi_0 + bl_a(t - \tau_a)^{n_a} H(t - \tau_a) \\ &+ l_c[a_n(t - \tau_c)^{n_c+n} + \dots + a_n(t - \tau_c)^{n_c}]H(t - \tau_c) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Similairement à la section 1, l'étude de la robustesse s'appuie ici sur l'analyse des cas de sous et sur-estimation des ordre n_a et n_c des défauts considérés.

3.1 Sur-estimation de l'ordre des défauts

Cas d'un défaut actionneur

Lorsque l'ordre du défaut recherché \tilde{n}_a est supérieur à l'ordre du défaut réel n_a , alors l'application de l'annulateur des termes structurés présumés

$$\Gamma_a = [t^{n+\tilde{n}_a+2} - \tau_a t^{n+\tilde{n}_a+1}] \frac{d^{\tilde{n}_a+1}}{dt^{\tilde{n}_a+1}} \quad (3.43)$$

donne lieu, d'après (2.7), (2.9) et (2.13), à :

$$\Gamma_a[a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y - bu] = -n_a! (\tilde{n}_a - n_a) bl_a \tau_a^{\tilde{n}_a+n+1} \delta_{\tau_a}^{(\tilde{n}_a-n_a-1)} \quad (3.44)$$

Ainsi la procédure de génération des relations de redondance permet d'obtenir

$$[A_2 - \tau_a A_1]X = -n_a! (\tilde{n}_a - n_a) bl_a \tau_a^{\tilde{n}_a+n+1} R \quad (3.45)$$

La ligne j de la matrice A_i ($i = 1, 2$) est donnée par

$$\left[\underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{p+j \text{ fois}} \tau^{n+\tilde{n}_a+i} y^{n+\tilde{n}_a+1} d\tau^{p+j} \quad \dots \quad \underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{p+j \text{ fois}} \tau^{n+\tilde{n}_a+i} u^{\tilde{n}_a+1} d\tau^{p+j} \right] \quad (3.46)$$

et l'élément j du vecteur résidu est donné par

$$R(j) = \begin{cases} \delta_{\tau_a}^{(\tilde{n}_a - n_a - 1 - (p+j))}, & \text{si } p + j \leq \tilde{n}_a - n_a - 1 \\ \frac{(t - \tau_a)^{p+j - (\tilde{n}_a - n_a)}}{(p+j - (\tilde{n}_a - n_a))!} H(t - \tau_a), & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.47)$$

Le remplacement des dérivées par les intégrations suppose $p \geq n + \tilde{n}_a$. Dans ce cas, $\forall j \geq 1, p + j > \tilde{n}_a - n_a - 1$. D'où

$$R(j) = \frac{(t - \tau_a)^{p+j - (\tilde{n}_a - n_a)}}{(p+j - (\tilde{n}_a - n_a))!} H(t - \tau_a) \quad (3.48)$$

Proposition 3.1 *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\Delta t > 0$ tel que*

$$t \in [\tau_a, \tau_a + \Delta t] \Rightarrow \tau_a \in \Lambda_\epsilon(A_2, A_1) \quad (3.49)$$

La preuve de cette proposition est immédiate, en constatant que

- i) la fonction $t \mapsto R(j)$ est de classe C^∞ sur $[\tau_a, +\infty]$, et
- ii) pour $t = \tau_a$, $R(j) = 0$

ceci permet d'écrire, en considérant l'égalité (3.45)

$$\forall \epsilon > 0, \exists \Delta t > 0 : t \in [\tau_a, \tau_a + \Delta t] \Rightarrow \|A_2 - \tau_a A_1\| < \epsilon \quad (3.50)$$

Ainsi, lorsque $\tilde{n}_a > n_a$, la tâche de diagnostic peut être accomplie en se basant sur l'estimée de τ_a qu'on peut obtenir à travers l'analyse du pseudospectre du couple de matrices (A_2, A_1) .

Cas d'un défaut capteur

Le cas du défaut capteur est traité similairement à celui du défaut actionneur. Lorsque l'ordre du défaut recherché \tilde{n}_c est supérieur à l'ordre du défaut réel, alors la démarche ci dessus permet d'obtenir

$$[A_{n+2} - \beta_{n+1}A_{n+1} + \dots + \beta_1 A_1]X = n_c! l_c \tau_c^{\tilde{n}_c + n + 1} R \quad (3.51)$$

La ligne j de la matrice A_i , ($i = 1, \dots, n + 1$) donnée par (3.46) et

$$R(j) = \sum_{i=n - (\tilde{n}_c - n_c) + 1}^n a_i \frac{(t - \tau_c)^{p+j - (i + \tilde{n}_c - n_c - n)}}{(p+j - (i + \tilde{n}_c - n_c - n))!} H(t - \tau_c) \quad (3.52)$$

Soit B une matrice vérifiant

$$BA_i = 0, \forall i = 1, \dots, n \text{ et } BA_{n+2}, BA_{n+1} \neq 0$$

alors τ_c est estimé à travers l'analyse de l'ensemble $\Lambda_\epsilon(BA_{n+2}, (n+1)BA_{n+1})$ sur un court intervalle de temps, de borne inférieure τ_c .

3.2 Sous-estimation de l'ordre des défauts

En situation de sous-évaluation de l'ordre du défaut apparu (n_a ou n_c), le développement fait précédemment permet de déterminer l'élément j du vecteur résidu donné par

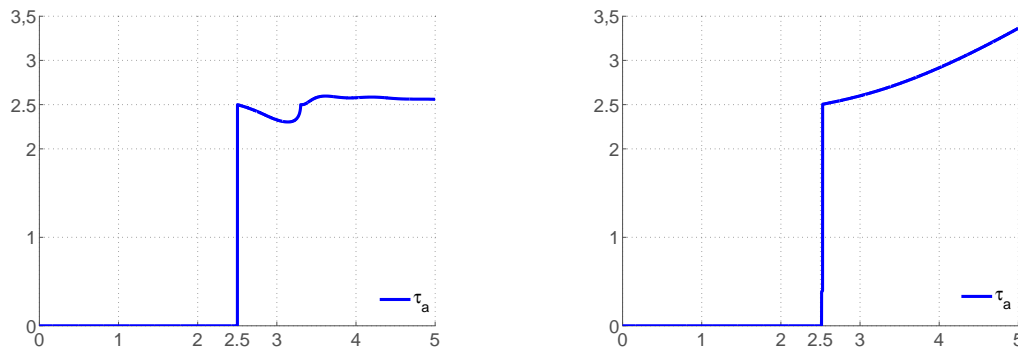
$$R(j) = bl_a \frac{n_a!}{(n_a - \tilde{n}_a - 1)!} \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{p+j \text{ fois}} \left[\tau^{n+\tilde{n}_a+1} (\tau - \tau_a)^{n_a - \tilde{n}_a} H(\tau - \tau_a) \right] d\tau^{p+j} \quad (3.53)$$

dans le cas de défaut actionneur et

$$R(j) = l_c n_c! \underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t}_{p+j \text{ fois}} \left[\sum_{i=0}^{n_c - \tilde{n}_c - 1} a_i \frac{\tau^{n+\tilde{n}_c+1} (\tau - \tau_c)^{(n_c - \tilde{n}_c + n - i)}}{(n_c - \tilde{n}_c - i - 1)!} H(\tau - \tau_c) \right] d\tau^{p+j} \quad (3.54)$$

lorsqu'il s'agit d'un défaut capteur. Les conditions de la preuve de la proposition (3.1) ne sont plus satisfaites ici. Ainsi, la méthode proposée traite ce cas avec plus d'ambiguïté qu'une situation de sur-estimation de l'ordre des défauts.

Les résultats de simulation représentés sur la figure (3.9) sont obtenus avec un système du premier ordre en boucle fermé (PI). Le défaut simulé est un défaut actionneur apparu à l'instant $\tau_a = 2.5$. La première figure (3.9(a)) illustre le résultat obtenu pour la détection d'une rampe lorsque le défaut simulé est un échelon tandis que la deuxième figure (3.9(b)) illustre le résultat de la simulation inverse, c'est-à-dire la détection d'un échelon lorsque le défaut simulé est une rampe. Comme on peut le voir, dans le premier cas, l'estimée évolue autour de la valeur exacte (ici égale à 2.5) alors que sur la deuxième figure l'estimée s'écarte de la valeur simulée. L'exploitation de ces informations peut servir à la détection du défaut simulé.



(a) Evolution temporelle de τ_a ; défaut simulé : $f_a(t) = l_a H(t - 2.5)$; défaut recherché $f_a(t) = l_a(t - 2, 5)H(t - 2.5)$
 (b) Evolution temporelle de τ_a ; défaut simulé : $f_a(t) = l_a(t - 2.5)H(t - 2.5)$; défaut recherché $f_a(t) = l_a H(t - 2.5)$

FIG. 3.9 – Robustesse par rapport à la structure du défaut

Dans une situation de sur-modélisation du défaut apparu, l'estimée évolue autour de la valeur exacte (ici égale à 2.5) alors que dans une situation de sous-modélisation, l'estimée s'écarte de la valeur simulée.

4 Étude locale : Fenêtre glissante

4.1 Introduction

L'approche présentée a été développée dans un contexte global. Grâce à la rapidité des calculs que permettent les différents estimateurs, l'algorithme proposé peut être implémenté en utilisant une fenêtre d'observation glissante. Ceci permettra également à l'approche d'être capable de suivre dans le temps l'évolution de certains paramètres du modèle (voir par exemple la section suivante qui traite des systèmes linéaires à commutation).

La tâche de détection d'un défaut a été réalisée jusqu'à présent en estimant l'instant d'apparition τ de celui-ci, ce qui correspond aussi à l'instant de commutation d'un signal $f(t - \tau)$. Dans cette partie, nous examinons le cas des signaux de défaut à plusieurs instants de commutation pouvant donc s'écrire sous la forme

$$\sum_{i=1}^k f_i(t - \tau_i)H(t - \tau_i) \quad (3.55)$$

avec $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k$. La détection d'un tel défaut n'est possible que pour $t > \tau_k$ alors que son instant d'apparition est $t = \tau_1$.

L'analyse locale présentée dans cette partie permet de contourner ce problème de

retard de détection en considérant, à chaque instant t , la commande et la sortie du système dans l'intervalle $[t - \Delta t; t]$. Rappelons que la technique proposée élimine les conditions initiales sans les estimer ; par conséquent, le fait de considérer les données sur l'intervalle $[t - \Delta t; t]$ n'affecte pas la décision de diagnostic.

Considérons un système d'ordre n , d'entrée u , de sortie y satisfaisant l'équation

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = bu + \phi_0 \quad (3.56)$$

On considère ici des défauts actionneur et capteur modélisés, respectivement, par

$$f_a(t) = \sum_{i=1}^{n_a} f_{a_i}(t - \tau_{a_i}) \quad (3.57)$$

$$f_c(t) = \sum_{j=1}^{n_c} f_{c_j}(t - \tau_{c_j}) \quad (3.58)$$

On fait les hypothèses suivantes

1. \mathcal{H}_1 : f_{a_i} ($i = 1, \dots, n_a$) sont des signaux structurés de structure identique
2. \mathcal{H}_2 : f_{c_j} ($j = 1, \dots, n_c$) sont des signaux structurés de structure identique
3. \mathcal{H}_3 : sur chaque intervalle $[t - \Delta t; t]$, on a au plus une commutation sur les signaux f_a et/ou f_c , c'est-à-dire

$$\begin{cases} \forall i = 1, \dots, n_a - 1, \tau_{a_{i+1}} - \tau_{a_i} > \Delta t \\ \forall j = 1, \dots, n_c - 1, \tau_{c_{j+1}} - \tau_{c_j} > \Delta t \end{cases} \quad (3.59)$$

Ainsi, sous l'hypothèse d'apparition de défauts, le système en défaut peut être représenté, sur chaque intervalle de temps $[t - \Delta t; t]$ contenant τ_{a_i} et/ou τ_{c_j} , par l'équation

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y - bu = \psi_0 + f_{a_i}(t - \tau_{a_i}) + a_n f_{c_j}^{(n)}(t - \tau_{c_j}) + \dots + a_0 f_{c_j}(t - \tau_{c_j}) \quad (3.60)$$

ψ_0 est une combinaison linéaire de $\delta_{t-\Delta t}$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ (conditions initiales sur l'intervalle considéré). Afin de générer des signaux indicateurs de défauts, on considère l'annulateur des termes ψ_0 , f_{a_i} et f_{c_j} donné par

$$\Gamma^{i,j} = \Gamma_k^{i,j} - \beta_{k-1}^{i,j} \Gamma_{k-1}^{i,j} - \dots - \beta_1^{i,j} \Gamma_1^{i,j} \quad (3.61)$$

et qui permet d'obtenir

$$[A_k^{i,j} - \beta_{k-1}^{i,j} A_{k-1}^{i,j} - \dots - \beta_1^{i,j} A_1] X = 0 \quad (3.62)$$

avec

- la ligne μ de la matrice $A_\nu^{i,j}$ obtenue à l'aide d'intégrations "locales" sur $[t - \Delta t; t]$ et donnée par

$$\left[\underbrace{\int_{t-\Delta t}^t \dots \int_{t-\Delta t}^t \Gamma_\nu^{i,j} y^{(n)} d\tau^{p+\mu}}_{p+\mu \text{ fois}} \dots \underbrace{\int_{t-\Delta t}^t \dots \int_{t-\Delta t}^t \Gamma_\nu y d\tau^{p+\mu}}_{p+\mu \text{ fois}} - \underbrace{\int_{t-\Delta t}^t \dots \int_{t-\Delta t}^t \Gamma_\nu u d\tau^{p+\mu}}_{p+\mu \text{ fois}} \right] \quad (3.63)$$

- les coefficients $\beta_\nu^{i,j}$ ($\nu = 1, \dots, k-1$) contenant les informations suffisantes pour la détection des défauts f_{a_i} et f_{c_j} .

Notons que la détection du défaut f_{a_i} ou f_{c_j} peut être accomplie uniquement pour $t \in [\tau_{a_i}; \tau_{a_i} + \Delta t]$ ou $t \in [\tau_{c_j}; \tau_{c_j} + \Delta t]$ respectivement.

Afin d'illustrer le raisonnement ci-dessus, considérons un cas très simple, d'un système du second ordre en présence d'un défaut actionneur constant par intervalle

$$f_a = \sum_{k=1}^3 l_{a_k} H(t - \tau_{a_k}) \quad (3.64)$$

Le système en défaut satisfait sur $[t - \Delta t; t]$ l'équation suivante :

$$a_2 y^{(2)} + a_1 y^{(1)} + a_0 y = \phi + bu + b \sum_{k=1}^3 l_{a_k} H(t - \tau_{a_k}) \quad (3.65)$$

avec ϕ , une distribution combinaison linéaire des dérivées d'ordre inférieur ou égal à 1 de la distribution de Dirac retardée $\delta_{t-\Delta t}$ (contenant les conditions initiales).

Sous l'hypothèse $|\tau_{a_j} - \tau_{a_k}| > \Delta, \forall j \neq k$, l'approche algébrique permet d'obtenir l'égalité

$$[A_2 - \tau_a A_1]X = N_2 - \tau_a N_1 \quad (3.66)$$

avec, pour $i = 1, 2$

$$A_i(j, 1) = \underbrace{\int_{t-\Delta t}^t \dots \int_{t-\Delta t}^t (\tau - \Delta t)^3 \tau^{i-1} y^{(3)}(\tau) d\tau^{p+j}}_{p+j \text{ fois}} \quad (3.67a)$$

$$A_i(j, 2) = \underbrace{\int_{t-\Delta t}^t \dots \int_{t-\Delta t}^t (\tau - \Delta t)^3 \tau^{i-1} y^{(2)}(\tau) d\tau^{p+j}}_{p+j \text{ fois}} \quad (3.67b)$$

$$A_i(j, 3) = \underbrace{\int_{t-\Delta t}^t \dots \int_{t-\Delta t}^t (\tau - \Delta t)^3 \tau^{i-1} y^{(1)}(\tau) d\tau^{p+j}}_{p+j \text{ fois}} \quad (3.67c)$$

$$A_i(j, 4) = \underbrace{\int_{t-\Delta t}^t \dots \int_{t-\Delta t}^t (\tau - \Delta t)^3 \tau^{i-1} u^{(1)}(\tau) d\tau^{p+j}}_{p+j \text{ fois}} \quad (3.67d)$$

et

$$N_i(j, :) = \underbrace{\int_{t-\Delta t}^t \cdots \int_{t-\Delta t}^t}_{p+j \text{ fois}} (\tau - \Delta t)^3 \tau^{i-1} \left[\sum_{k=1}^3 l_{a_k} \delta_{\tau_{a_k}}(\tau) \right] d\tau^{p+j} \quad (3.68)$$

Lorsque $\tau_{a_k} \in [t - \Delta t; t]$, alors τ_a dans l'égalité (3.66) donne une estimation de τ_{a_k} , uniquement valable sur $[\tau_{a_k}; \tau_{a_k} + \Delta t]$. En guise de démonstration, supposons par exemple que $\tau_{a_1} \in [t - \Delta t; t]$, alors d'après $|\tau_{a_i} - \tau_{a_j}| > \Delta t$ ($i \neq j$), on a :

$$\underbrace{\int_{t-\Delta t}^t \cdots \int_{t-\Delta t}^t}_{p+j \text{ fois}} (\tau - \Delta t)^3 \tau^{i-1} \delta_{\tau_{a_2}}(\tau) d\tau^{p+j} = \underbrace{\int_{t-\Delta t}^t \cdots \int_{t-\Delta t}^t}_{p+j \text{ fois}} (\tau - \Delta t)^3 \tau^{i-1} \delta_{\tau_{a_3}}(\tau) d\tau^{p+j} = 0$$

ce qui implique

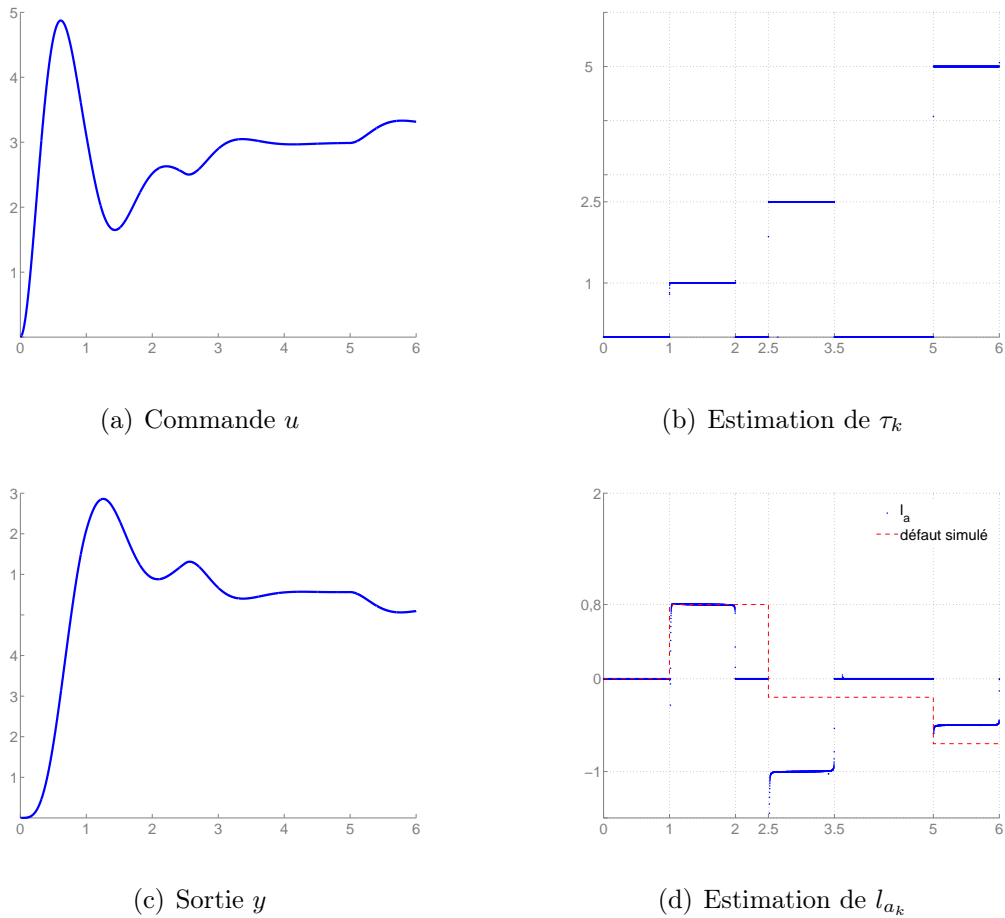
$$N_i(j, :) = l_{a_1} \underbrace{\int_{t-\Delta t}^t \cdots \int_{t-\Delta t}^t}_{p+j \text{ fois}} (\tau - \Delta t)^3 \tau^{i-1} \delta_{\tau_{a_1}}(\tau) d\tau^{p+j} \neq 0 \quad (3.69)$$

et

$$N_2 - \tau_{a_1} N_1 = 0 \Rightarrow [A_2 - \tau_{a_1} A_1] X = 0 \quad (3.70)$$

Ainsi, on obtient une estimation de τ_{a_1} , valable uniquement sur $[\tau_{a_1}; \tau_{a_1} + \Delta t]$, en déterminant les valeurs propres de A_2 et A_1 . Les paramètres τ_{a_2} , τ_{a_3} sont identifiés de la même façon. Comme dans le cas d'une seule commutation, les amplitudes l_{a_1} , l_{a_2} et l_{a_3} peuvent être déterminées en fonction des estimations de τ_{a_1} , τ_{a_2} et τ_{a_3} respectivement. Lorsque la condition $|\tau_{a_i} - \tau_{a_j}| > \Delta t$ ($i \neq j$) n'est pas vérifiée, le premier des défauts i et j apparus est détecté et identifié avant l'apparition du second. La détection de ce dernier est assurée à l'aide d'une deuxième cellule qui consiste à détecter les défauts multiples.

Les figures en (3.10) illustrent le diagnostic "local" avec un système de second ordre simulé en boucle fermée (par un PI) en présence d'un défaut de type escalier. On a considéré une largeur d'intervalle symbolique $\Delta t = 1$. Les estimations obtenues coïncident avec les valeurs réelles.


 FIG. 3.10 – Système du 2nd ordre en présence d'un défaut actionneur intermittent

4.2 Application au diagnostic des systèmes linéaires à commutation

Préambule

Les approches classiques de diagnostic sont sensibles aux variations paramétriques car elles sont généralement élaborées à partir d'un modèle nominal à temps stationnaire du système considéré. Dans ce cas, un changement normal dans la dynamique du système peut être mal interprété et déclencher une fausse alarme. Ce problème peut être entamé en mettant à jour, et ce de manière continue, le modèle à partir duquel l'approche de diagnostic est conçue. Le modèle représentant l'état nominal du système courant est estimé à l'aide d'une procédure d'identification. La tâche de diagnostic est ainsi basée sur ce modèle mis-à-jour.

Une caractéristique souhaitable d'un module de diagnostic adapté aux systèmes

à commutation est de savoir distinguer les changements normaux de modes des défauts dynamiques proprement dit. Cette partie porte sur une extension de l'approche développée à une classe de systèmes linéaires à commutation et incertains. Les systèmes à commutation constituent une classe particulière de systèmes hybrides.

La plupart des méthodes de diagnostic dédiées aux systèmes à commutation reposent sur des méthodes classiques de diagnostic des systèmes linéaires invariants (Narasimhan & Biswas (2007), Ragot et al. (2003), Cocquemot et al. (2004)). L'extension de l'approche proposée aux systèmes linéaires à commutation est particulièrement intéressante du fait que les processus non linéaires sont souvent modélisés à l'aide de systèmes linéaires dont les paramètres varient en fonction du point de fonctionnement du système et supposés mesurable en ligne. Il existe différentes techniques permettant d'obtenir un modèle à commutation pour un système non linéaire, parmi lesquelles on peut citer celle se basant sur des modèles linéaires locaux et comportant deux étapes (Murray-Smith & Johansen (1997)) :

1. le système considéré est identifié à chaque point d'équilibre par un modèle linéaire invariant, à l'aide de méthodes classiques,
2. les modèles obtenus à l'étape 1 sont ensuite interconnectés à l'aide d'une loi de commutation dont les valeurs changent en fonction du point de fonctionnement.

Formulation du problème

Considérons un système linéaire à paramètres variant, dont la commande réelle u_r et la sortie délivrée y_r satisfont à chaque instant t l'équation ci-dessous

$$a_n(t)y_r^{(n)} + a_{n-1}(t)y_r^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y_r = b(t)u_r(t) + \phi_0 \quad (3.71)$$

En présence de défauts actionneur $f_a(t)$ et capteur $f_c(t)$, la commande $u(t)$ calculée par le contrôleur et la sortie $y(t)$ fournie par le capteur vérifient l'équation

$$\begin{aligned} a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y - b(t)u = \phi_0 \\ + b(t)f_a + a_n(t)f_c^{(n)} + a_{n-1}(t)f_c^{(n-1)} + \dots + a_0(t)f_c \end{aligned} \quad (3.72)$$

On fait les hypothèses suivantes :

- H_1 : L'ordre n est supposé connu.

- H_2 : L'équation (3.71) modélise un système à commutation avec deux régimes de fonctionnement et dont les paramètres sont supposés constants par intervalles mais inconnus. On précise que la représentation peut être étendue à un nombre quelconque de régimes.
- H_3 : Les signaux défauts f_a et f_c sont supposés structurés et apparaissent respectivement aux instants τ_a et τ_c .

La distribution ϕ_0 contient les contributions des conditions initiales. Ainsi, elle est d'ordre n et de support égal à $\{0\}$. Soit t_c l'instant de commutation du système (supposé non connu), alors tout paramètre θ (représentant a_i ou b) peut être écrit comme

$$\theta(t) = \bar{\theta}H(t) + (\tilde{\theta} - \bar{\theta})H(t - t_c) \quad (3.73)$$

avec $\bar{\theta}$ et $\tilde{\theta}$ constants. La figure (3.11) représente l'évolution temporelle d'un tel paramètre.

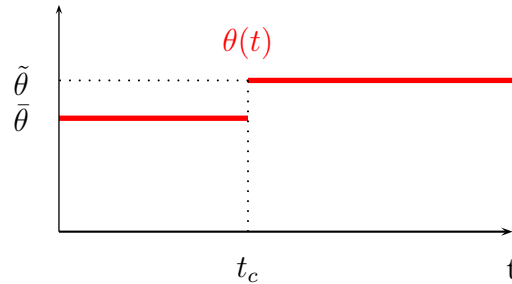


FIG. 3.11 – Évolution temporelle du paramètre θ

Ainsi, la dynamique du système à tout instant peut être décrite par le système à commutation suivant

$$\bar{a}_n y^{(n)} + \dots + \bar{a}_0 y - \bar{b}u = \bar{\phi}_0 + \bar{b}f_a + \bar{a}_n f_c^{(n)} + \dots + \bar{a}_0 f_c \quad \text{si } t < t_c \quad (3.74)$$

$$\tilde{a}_n y^{(n)} + \dots + \tilde{a}_0 y - \tilde{b}u = \tilde{\phi}_0 + \tilde{b}f_a + \tilde{a}_n f_c^{(n)} + \dots + \tilde{a}_0 f_c \quad \text{sinon} \quad (3.75)$$

L'objectif ici est de détecter l'apparition des défauts apparus (f_a et f_c) et également de distinguer l'effet de ces derniers malgré la commutation, à partir de u et y .

Diagnostic des systèmes à commutation

Désignons par

$$\Gamma = \Gamma_k - \beta_{k-1}\Gamma_{k-1} - \dots - \beta_1\Gamma_1, \quad \text{avec } \Gamma_j = t^{nj} \frac{d^{k_j}}{dt^{k_j}} \quad (3.76)$$

l'annulateur des termes structurés dans l'équation (3.72) représentés par ϕ_0 , f_a et $f_c^{(n)}$. Les β_j ($j = 1, \dots, k-1$) figurant dans l'écriture de cet annulateur sont des fonctions de τ_a et/ou τ_c et/ou t_c . On a pour tout signal f

$$\Gamma_j[\theta(t)f] = \theta(t)\Gamma_j[f] + t_c^{n_j} \sum_{i=1}^{k_j} \Delta\theta f^{(k_j-i)}(t_c) \delta_{t_c}^{(i-1)} \quad (3.77)$$

avec $\Delta\theta = \tilde{\theta} - \bar{\theta}$. Alors, on obtient, pour $i = 1, \dots, k$ l'égalité fonctionnelle

$$W_k - \beta_{k-1}W_{k-1} - \dots - \beta_1W_1 = \psi_k - \beta_{k-1}\psi_{k-1} - \dots - \beta_1\psi_1 \quad (3.78)$$

où pour $i = 1, \dots, k$, ψ_i désigne une fonctionnelle de support égal à $\{t_c\}$ et d'ordre inférieur ou égal à $k_i - 1$ et

$$W_i = a_n[\Gamma_i y^{(n)}] + \dots + a_0[\Gamma_i y] - b[\Gamma_i u] \quad (3.79)$$

Considérons la fenêtre d'intégration $\Delta t > 0$. Pour un instant donné $t > 0$, soient les matrices A_i ($i = 1, \dots, k$) de dimension $m \times (n+2)$ définies à partir de la connaissance des variables u et y sur l'intervalle de temps $[t - \Delta t; t]$ par :

$$A_i(j, \mu) = \underbrace{\int_{t-\Delta t}^t \dots \int_{t-\Delta t}^t}_{p+j \text{ fois}} \Gamma_i y^{(n-\mu+1)} d\tau^{p+j}, \quad \mu = 1, \dots, n+1 \quad (3.80)$$

$$A_i(j, n+2) = - \underbrace{\int_{t-\Delta t}^t \dots \int_{t-\Delta t}^t}_{p+j \text{ fois}} \Gamma_i u d\tau^{p+j} \quad (3.81)$$

et le vecteur X dont les éléments sont donnés par

$$X_i = \frac{\underbrace{\int_{t-\Delta t}^t \dots \int_{t-\Delta t}^t}_{p+1 \text{ fois}} a_i(\tau) \Gamma y^{(i)}(\tau) d\tau^{p+1}}{\underbrace{\int_{t-\Delta t}^t \dots \int_{t-\Delta t}^t}_{p+1 \text{ fois}} \Gamma y^{(i)}(\tau) d\tau^{p+1}}, \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (3.82)$$

$$X_{n+2} = \frac{\underbrace{\int_{t-\Delta t}^t \dots \int_{t-\Delta t}^t}_{p+1 \text{ fois}} b(\tau) \Gamma u(\tau) d\tau^{p+1}}{\underbrace{\int_{t-\Delta t}^t \dots \int_{t-\Delta t}^t}_{p+1 \text{ fois}} \Gamma u(\tau) d\tau^{p+1}} \quad (3.83)$$

Pour $t \leq \min(t_c, \tau_a, \tau_c)$, on a $W_i = \psi_i = 0$ ($\forall i = 1, \dots, k$) et l'égalité (3.78) est indépendante des β_j . Par contre, pour $t > \min(t_c, \tau_a, \tau_c)$, on distingue trois cas possibles caractérisant l'estimation des β_j .

- i) Lorsque la commutation des paramètres intervient avant l'apparition des défauts, c'est-à-dire $t_c \leq \min(\tau_a, \tau_c)$ et en supposant que l'un des défauts recherchés est de même structure que l'évolution temporelle des paramètres du système, alors

$$\psi_k - \beta_{k-1}\psi_{k-1} - \dots - \beta_1\psi_1 = 0 \quad (3.84)$$

Ainsi, à chaque instant $t \in [t_c, \min(\tau_a, \tau_c, t_c + \Delta t)]$ on a l'égalité

$$(A_k - \beta_{k-1}A_{k-1} - \dots - \beta_1A_1)X = 0 \quad (3.85)$$

à partir de laquelle l'instant de commutation t_c peut être estimé à l'aide des estimées des β_j .

- ii) Dans le cas où l'un des défauts recherchés apparaît avant commutation (par exemple $\tau_a < t_c < \tau_c$), celui-ci peut être détecté à l'aide de la cellule qui lui est associée sur l'intervalle de temps $[\min(\tau_a, \tau_c), \min(\tau_a + \Delta t, \tau_c + \Delta t, t_c)]$.
Le détection du second défaut peut être réalisée aussi à l'aide de la cellule qui lui est associée sur l'intervalle de temps

$$[\max(\tau_a, \tau_c, t_c + \Delta t), \max(\tau_a, \tau_c) + \Delta t]$$

L'instant de commutation t_c peut être estimé à l'aide de l'équation (3.85) sur l'intervalle de temps

$$[\max(t_c, \min(\tau_a, \tau_c) + \Delta t), \min(t_c + \Delta t, \max(\tau_a, \tau_c))]$$

- iii) Enfin, lorsque la commutation a lieu après les deux défauts ($t_c \geq \max(\tau_a, \tau_c)$), on obtient toujours l'égalité du type (3.85) et le diagnostic des défauts peut être accompli sur l'intervalle de temps

$$[\min(\tau_a, \tau_c), \min(\tau_a + \Delta t, \tau_c + \Delta t, t_c)]$$

identiquement au cas sans commutation, à l'aide des estimées des β_j .

Afin d'illustrer les différents points énumérés ci-dessus, considérons un système d'ordre 1 à deux modes de fonctionnement représenté par le modèle

$$\begin{cases} \bar{a}_1 \dot{y} + \bar{a}_0 y - \bar{b}u = \bar{\phi}_0 & \text{si } t < 3 \\ \tilde{a}_1 \dot{y} + \tilde{a}_0 y - \tilde{b}u = \tilde{\phi}_0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.86)$$

Ce système est simulé avec un défaut actionneur f_a d'amplitude constante $l_a = -1.2$ apparu à l'instant $\tau_a = 1.5$. On considère une fenêtre d'observation de taille $\Delta t = 1$.

Les figures (3.12(a)) et (3.12(c)) indiquent l'évolution temporelle de u et y lorsque $\tau_a = 1.5$. La détection et l'identification du défaut simulé sont effectuées à l'aide des évolutions temporelles des estimées de τ_a et l_a sur l'intervalle de temps $[1.5; 2.5]$ (figures 3.12(b) et 3.12(d)). Le comportement de ces estimées sur l'intervalle $[3; 4]$ révélant une stationnarité de l'estimée τ_a et une fluctuation de celle de l_a permet de déduire l'apparition d'une commutation à l'instant $t_c = 3$ (rappelons que $\Delta t = 1$).

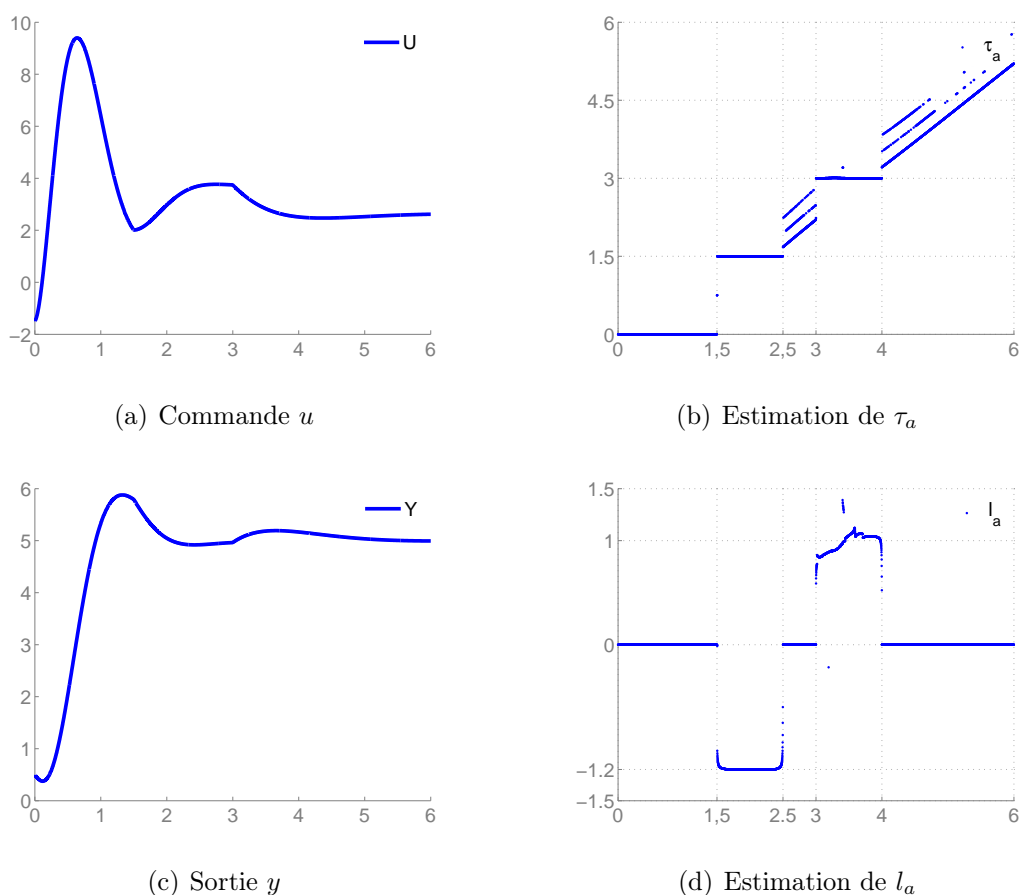
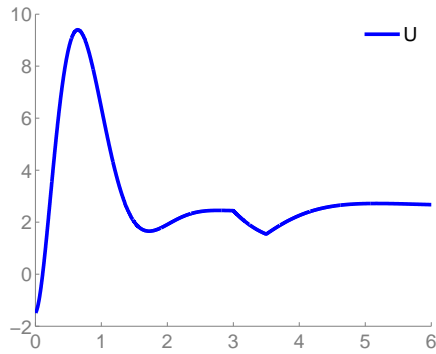


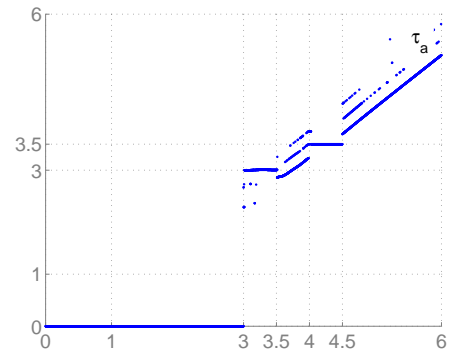
FIG. 3.12 – Système d'ordre 1 à deux modes de fonctionnement avec $|\tau_a - t_c| > \Delta t$

La commande u et la sortie y représentées sur les figures (3.13(a)) et (3.13(c)) sont obtenues avec $\tau_a = 3.5$. Cette fois-ci, la tâche de diagnostic est accomplie à

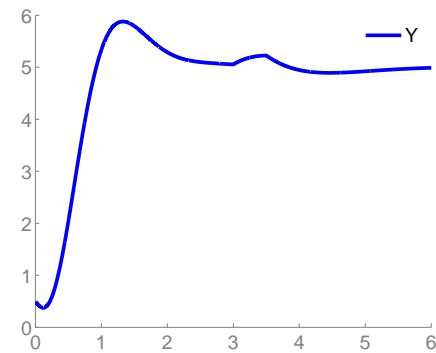
l'aide de l'évolution temporelle des estimées de τ_a et l_a sur l'intervalle de temps $[4; 4.5]$ (figures 3.13(b) et 3.13(d)). Ce retard de détection est dû à la commutation intervenue à l'instant $t_c = 3$ qui n'est pas prise en compte pour la conception des différents estimateurs. La valeur prise par l'estimée de τ_a sur l'intervalle $[3; 3.5]$ est relative à l'instant de commutation t_c .



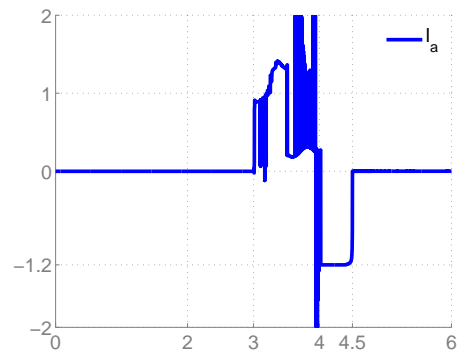
(a) Commande u



(b) Estimation de τ_a



(c) Sortie y



(d) Estimation de l_a

FIG. 3.13 – Système d'ordre 1 à deux modes de fonctionnement avec $|\tau_a - t_c| < \Delta t$

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons traité le problème de diagnostic des systèmes dynamiques linéaires, dans le cadre d'une nouvelle théorie déterministe de l'estimation, reposant sur le calcul fonctionnel. Cette théorie est à la base de la nouvelle méthode de diagnostic proposée qui consiste à estimer des paramètres caractéristiques de défauts par simple analyse spectrale.

Nous nous sommes focalisés sur l'étude des défauts additifs provenant d'actionneurs et/ou de capteurs. Des algorithmes de détection, de localisation et d'identification de défauts basés sur les propriétés structurelles du système et des défauts ont été développés. Cette tâche est accomplie en ne supposant connus que l'ordre et les signaux entrée et sortie. Les méthodes développées sont appliquées à des exemples académiques afin d'illustrer l'efficacité de nos propositions.

Les résultats que nous obtenons avec la technique proposée montrent que nous pouvons détecter, localiser et identifier un défaut à l'aide de la seule connaissance de l'ordre du système et de la structure du défaut. Le retard associé à l'algorithme de diagnostic est faible et l'estimation de la valeur du défaut précise. La méthode a été développée pour les systèmes mono-variables et nous avons vu que dans l'état actuel, elle peut s'appliquer à des systèmes multi-variables à conditions de les modéliser par un ensemble de modèles à plusieurs entrées et une sortie.

La méthode montre aussi une bonne robustesse aux bruits hautes fréquences car l'analyse fréquentielle des estimateurs confère à ces derniers des caractéristiques de filtres causaux passe-bas.

Une sur-estimation de l'ordre du système est sans effet sur la prise de décision de la méthode développée. En revanche lorsque cet ordre est sous-estimé, on montre qu'un diagnostic précis n'est plus possible. Toutefois, cette situation est facilement repérable en intégrant dans le développement de l'approche une phase d'estimation des paramètres du système. En effet dans le cas d'une sur-estimation de l'ordre du système, les estimations des paramètres de ce dernier fluctuent avec le temps.

Grâce à l'annulation des effets des conditions initiales et à la rapidité des calculs (due aux expressions explicites), un diagnostic local est rendu possible.

Il reste à faire une analyse rigoureuse de la robustesse de la méthode proposée plus particulièrement par rapport à l'ordre du système et la structure des entrées inconnues. Il serait intéressant d'y inclure une comparaison avec les méthodes dites intégrées de diagnostic de système dynamique, notamment l'approche par sous-espace. Par ailleurs, afin de valoriser cette nouvelle approche de diagnostic, il serait intéressant d'étendre les résultats à un processus réel.

Bibliographie

- Aseltine, J., Mancini, A. & Sartune, C. (1958), ‘A survey of adaptive control systems’, *IEEE Trans. on Automatic Control* **3**, 102–108.
- Astrom, K. J. & Wittenmark, B. (1994), *Adaptive Control*, Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA.
- Basseville, M. & Benveniste, A. (1985), *Detection of abrupt changes in signals and dynamical systems*, Vol. LNCIS-77, Springer Berlin.
- Basseville, M., Benveniste, A., Moustakides, G. & Rougée, A. (1987), ‘Detection and diagnosis of changes in the eigenstructure of nonstationary multivariable systems’, *Automatica* **23**(4), 479–489.
- Basseville, M. & Nikiforov, I. (1993), *Detection of abrupt changes : theory and application*, Prentice Hall.
- Beard, R. V. (1971), Failure accommodation in linear systems through self-reorganization, Technical Report MNT-71-1, Man Vehicle Laboratory, M.I.T., Cambridge.
- Belkoura, L. & Richard, J.P. (2006), A distribution framework for the fast identification of linear systems with delays, in ‘6th IFAC Workshop on Time Delay System’, L’Aquila, Italy.
- Beltrami, E. (1873), ‘Sulle funzioni bilineari.’, *Giornale di Matematiche di Battaglini* **11**, 98–106.
- Blanke, M., Kinnaert, M., Lunze, J. & Staroswiecki, J. (2003), *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*, Springer.
- Boutry, G., Elad, M., Golub, G. & Milanfar, P. (2005), ‘The generalized eigenvalue problem for non-square pencils using a minimal perturbation approach’, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* **27**, 582–601.

- Caldwell, W. (1950), Control system with automatic response adjustment, *in* ‘American patent 2, 517, 081’.
- Chen, J., Patton, R. J. & Zhang, H. Y. (1996), ‘Design of unknown input observers and robust fault-detection filters’, *Int. J. of Control*. **63**, 85–105.
- Chen, S., Tao, G. & Joshi, S. (2002), ‘On matching conditions for adaptive state tracking control of systems with actuator failures’, *IEEE Trans. on Automatic Control* **47**, 473–478.
- Chow, E. & Willsky, A. (1984), ‘Analytical redundancy and the design of robust failure detection systems’, *IEEE Trans. on Automatic Control* **29**, 603–614.
- Clark, R., Fosth, D. & Walton, V. (1975), ‘Detecting instrument malfunctions in control systems’, *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* **AES-11**(4), 465–473.
- Cocquemot, V., El Mezyani, T. & Staroswiecki, M. (2004), Fault detection and isolation for hybrid systems using structured parity residuals, *in* ‘Control Conference, 2004. 5th Asian’, Vol. 2, pp. 1204–1212.
- Cordier, M. O., Travé-Massuyés, L. & Pucel, X. (2006), Comparing diagnosability in continuous and discrete-event systems, *in* ‘In Proc. of the 17th Int. Workshop on Principles of Diagnosis’.
- Deckert, J., Desai, M., Deyst, J. & Willsky, A. (1977), ‘F-8 dfbw sensor failure detection using analytical redundancy’, *IEEE Trans. on Automatic Control* **22**, 795–803.
- Delmaire, G., Cassar, J. & Staroswiecki, M. (1994), ‘Comparison of identification and parity space approaches for failure detection in single input single output systems’, *Proc. of the 3rd IEEE Conference on Control Applications* **2**, 865–870.
- Denoeux, T., Masson, M.-H. & Dubuisson, B. (1998), ‘Advanced pattern recognition techniques for system monitoring and diagnosis : a survey’, *J. Euro. des Syst. Automatisés (JESA)* **31**, 1509–1539.
- Ding, S. X. (2008), *Model-Based Fault Diagnosis Techniques - Design Schemes Algorithms and tools*, Springer-Verlag.
- Ding, S. X., Guo, L. & Jeansch, T. (1999), ‘A characterization of parity space and its application to robust fault detection’, *IEEE Trans. on Automatic Control* **44**, 337–343.

-
- Ding, S. X., Jeinsch, T., Frank, P. M. & Ding, E. L. (2000), ‘A unified approach to the optimization of fault detection systems’, *Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing* **14**, 725–745.
- Fliess, M. (2006), ‘Analyse non standard du bruit’, *Comptes-Rendus de l’Académie des Sciences, Série 1, Mathématiques* **342**, 797–802.
- Fliess, M. & Join, C. (2003), An algebraic approach to fault diagnosis for linear systems, in ‘CESA Proceedings’, SEE.
- Fliess, M., Lévine, J. & Rouchon, P. (1995), ‘Flatness and defect of nonlinear systems : Introductory theory and examples’, *Int. J. of Control* **61**, 1327–1361.
- Fliess, M. & Sira-Ramirez, H. (2003), ‘An algebraic framework for linear identification’, *ESAIM Control, Optimization and Calculus of Variations* **9**, 151–168.
- Fradkov, A. (1992), Continuous-time model reference adaptive systems an east-west review, in ‘Proc. of the IFAC Symp. on Adaptive Control and Signal Processing’.
- Frank, P. (1990), ‘Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy - a survey and some new results’, *Automatica* **26**, 459–474.
- Frank, P. & Ding, X. (1997), ‘Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems’, *J. of Proc. Control* **7**, 403–424.
- Frank, P. & Keller, L. (1980), ‘Sensitivity discriminating observer design for instrument failure detection’, *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* **16**, 460–467.
- Friedland, B. (1979), ‘Maximum-likelihood estimation of a process with random transitions (failures)’, *IEEE Trans. on Automatic Control* **AC-24**, 932–937.
- García Collado, F. A., D’Andréa-Novel, B., Fliess, M. & Mounier, H. (2009), Analyse fréquentielle des dérivateurs algébriques, in ‘XXIIe Colloque GRETSI’, Dijon France.
- Gentil, S., Montmain, J. & Combastel, C. (2004), ‘Combining fdi and ai approaches within causal-model-based diagnosis’, *IEEE Trans. on Syst., Man and Cybern., Part B : Cybernetics* **34**, 2207–2221.
- Gertler, J. (1991), Analytical redundancy methods in fault detection and isolation - survey and synthesis, in ‘IFAC Safeprocess Conference’, Vol. 1, pp. 9–22.

- Gertler, J. (1995), 'Diagnosing parametric faults : from parameter estimation to parity relations', *Proc. of the American Control Conference* **3**, 1615–1620.
- Gertler, J. (1997), 'Fault detection and diagnosis using parity relations', *Control Engineering Practice* **5**, 653–670.
- Gertler, J. (1998), *Fault detection and diagnosis in engineering systems*, Marcel Dekker.
- Gertler, J. & Cao, J. (2004), 'Pca-based fault diagnosis in the presence of control and dynamics', *AIChE Journal* **50**, 388–402.
- Gertler, J. & DiPierro, G. (1997), On the link between parity relations and parameter estimation, in 'IFAC 3rd Safeprocess Symp.', Vol. 26, pp. 381–388.
- Gertler, J. & Kunwer, M. (1995), 'Optimal residual decoupling for structured diagnosis and disturbance insensitivity', *Int. J. of Control* **61**, 627–635.
- Gertler, J. & McAvoy, T. (1997), Principal component analysis and parity relations - a strong duality, in 'IFAC conference SAFEPROCESS'.
- Gertler, J. & Singer, D. (1990), 'A new structural framework for parity equation based failure detection and isolation', *Automatica* **26**, 381–388.
- Hanlon, P. D. & Maybeck, P. S. (2000), 'Characterization of kalman filter residuals in the presence of mismodeling', *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* **36**, 114 – 131.
- Himmelblau, D. M. (1978), *Fault detection and diagnosis in chemical and petrochemical processes*, Elsevier.
- Hoffing, T. & Isermann, R. (1995), 'Parameter estimation triggered by continuous-time parity equations', *Proc. of the American Control Conference* **2**, 1145 –1146.
- Hotelling, H. (1933), 'Analysis of a complex of statistical variables with principal components', *Journal of Educational Psychology* **24**, 498–520.
- Ioannou, P. A. & Fidan, B. (2006), *Adaptive control tutorial.*, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Isermann, R. (1984), 'Process fault detection based on modeling and estimation methods', *Automatica* **20**(4), 387 – 404.

-
- Isermann, R. (1997), 'Trends in the application of model-based fault detection and diagnosis of technical processes', *Control Engineering Practice* **5**, 709 – 719.
- Isermann, R. (1998), 'On fuzzy logic applications for automatic control, supervision, and fault diagnosis', *IEEE Trans. on Syst., Man and Cybern., Part A* **28**, 221–235.
- Isermann, R. (2006), *Fault-Diagnosis System*, Springer, Berlin.
- Isermann, R. & Freyermuth, B. (1991), 'Process fault diagnosis based on process model knowledge - part i : Principles for fault diagnosis with parameter estimation', *ASME J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **113**, 620 – 626.
- Join, C., Masse, J. & Fliess, M. (2008), 'Etude préliminaire d'une commande sans modèle pour papillon de moteur', *J. Euro. des Syst. Automatisés (JESA)* **42**, 337–354.
- Jordan, M. (1874), 'Memoire sur les formes bilineaires.', *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees* **19**, 35–54.
- Kalman, R. E. (1960), 'A new approach to linear filtering and prediction problems', *Transaction of the ASME - Journal of Basic Engineering* **1**, 35–45.
- Koivo, H. N. (1994), 'Artificial neural networks in fault diagnosis and control', *Control Engineering Practice* **1**, 89–101.
- Kresta, J. V., Macgregor, J. F. & Marlin, T. E. (1991), 'Multivariate statistical monitoring of process operating performance', *The Canadian Journal of Chemical Engineering* **69**, 35–47.
- Landau, I. D., Lozano, R. & M'Saad, M. (1998), *Adaptive Control*, Springer-Verlag New York, Inc.
- Leininger, G. G. (1981), Model degradation effects on sensor failure detection, *in* 'Proc. Joint American Control Conference', Vol. 3.
- Li, W., Yue, H. H., Valle-Cervantes, S. & Qin, S. J. (2000), 'Recursive pca for adaptive process monitoring', *J. of Proc. Control* **10**, 471–486.
- Ljung, L. (1999), *System identification (2nd ed.) : theory for the user*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, USA.
- Lou, X., Wilsky, A. & Verghese, G. (1986), 'Optimally robust redundance relations for failure detection in uncertain systems', *Automatica* **22**, 333–344.

- Magni, J. F. & Mouyon, P. (1992), 'On residual generation by observer and parity space approaches', *Proc. of the 31st IEEE Conference on Decision and Control* **1**, 185–190.
- Mah, R. S., Stanley, G. M. & Downing, D. (1976), 'Reconciliation and rectification of process flow and inventory data', *Ind. Eng. Chemistry, Process Design* **15**, 175–183.
- Massoumnia, M. (1986), 'A geometric approach to the synthesis of failure detection filters', *IEEE Trans. on Automatic Control* **31**(9), 839–846.
- Massoumnia, M. A. & Van Der Velde, W. E. (1988), 'Generating parity relations for detecting and identifying control system component failures', *Journal of Guidance, Control and Dynamics* **11**, No. 1, 60–65.
- Massoumnia, M., Verghese, G. & Willsky, A. (1989), 'Failure detection and identification', *IEEE Trans. on Automatic Control* **34**(3), 316–321.
- Mboup, M. (2009), 'Parameter estimation for signals described by differential equations', *Applicable Analysis : An International Journal* **88**, 29–52.
- Mehra, R. K. & Peschon, J. (1971), 'An innovations approach to fault detection and diagnosis in dynamic systems', *Automatica* **7**, 637–640.
- Moussa Ali, A., Join, C. & Hamelin, F. (2009), Fault diagnosis of uncertain linear system using structural knowledge, in '7th IFAC Safeprocess Conference'.
- Moussa Ali, A., Join, C. & Hamelin, F. (2011), 'Diagnostic des systèmes dynamiques linéaires sans modèle explicite', *Nouvelles tendances en automatique - JESA* .
- Murray-Smith, R. & Johansen, T. (1997), *Multiple Model Approaches to Modelling and Control*, Taylor and Francis.
- Narasimhan, S. & Biswas, G. (2007), 'Model-based diagnosis of hybrid systems', *IEEE Trans. on Syst., Man and Cybern., Part A : Systems and Humans* **37**(3), 348–361.
- Ossman, K. (1989), 'Indirect adaptive control for interconnected systems', *IEEE Trans. on Automatic Control* **34**, 908–911.
- Patton, R. & Chen, J. (1991), A review of parity space approaches to fault diagnosis, in 'IFAC Safeprocess Conference'.

-
- Patton, R., Clark, R. & Frank, P. M. (2000), *Issues of Fault Diagnosis for Dynamic Systems*, Springer-Verlag, London.
- Patton, R., Frank, P. M. & Clark, R. N. (1989), *Fault diagnosis in dynamic systems - theory and applications*, Prentice Hall International.
- Patton, R. J. & Chen, J. (2000), 'On eigenstructure assignment for robust fault diagnosis', *Int. J. Robust Nonlinear Control* **10**, 1193–1208.
- Pearson, K. (1901), 'Principal components analysis', *Philosophical Magazine and Journal* **6**, 566.
- Preisendorfer, R. & Mobley, C. (1988), *Principal Component Analysis in Meteorology and Oceanography*, Elsevier.
- Qin, S. & Dunia, R. (2000), 'Determining the number of principal components for best reconstruction', *J. of Proc. Control* **10**, 245–250.
- Qin, S. J. (1998), 'Recursive pls algorithms for adaptive data modeling', *Computers and Chem. Eng.* **22**, 503–514.
- Ragot, J., Maquin, D. & Domlan, E. A. (2003), Switching time estimation of piecewise linear systems. application to diagnosis, in '5th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes, Safeprocess'.
- Reichel, L. & Trefethen, L. (1992), 'Eigenvalues and pseudo-eigenvalues of toeplitz matrices', *Linear Algebra and its Applications* **162-164**, 153–185.
- Romagnoli, J. A. & Stephanopoulos, G. (1981), 'Rectification of process measurement data in the presence of gross errors', *Chemical Engineering Science* **36**(11), 1849 – 1863.
- Sastry, S. & Bodson, M. (1989), *Adaptive control : stability, convergence, and robustness*, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA.
- Schwartz, L. (1966), *Théorie des distributions*, 2nd edn, Hermann, Paris.
- Siahi, M., Sadrnia, M. A. & Darabi, A. (2009), 'A new method for observer design using eigenstructure assignment and its application on fault detection and isolation', *World Applied Sciences Journal* **6**, 100–101.
- Staroswiecki, M., Cessar, J. & Cocquempot, V. (1993), 'Generation of optimal structured residuals in the parity space', *Proc. IFAC 12th World Congress* **5**, 535–542.

- Staroswiecki, M. & Gehin, A. L. (2000), From control to supervision, *in* 'Proc. IFAC Safeprocess', pp. 312–323.
- Tao, G., Joshi, S. M. & Ma, X. L. (2001), 'Adaptive state feedback and tracking control of systems with actuator failures', *IEEE Trans. on Automatic Control* **46**, 78–95.
- Trefethen, L., Trefethen, A., Reddy, S. & Driscoll, T. (1993), 'Hydrodynamic stability without eigenvalues', *Science* **261**, 578–584.
- Vaclavek, V. (1974), Gross systematic errors or biases in the balance calculation, *in* 'Papers of the Prague Institute of Technologie'.
- Viswanadham, N. & Srichander, R. (1987), 'Fault detection using unknown-input observers', *Control Theory and Advanced Teehnology* **3**, 91–101.
- Viswanadham, N., Taylor, J. H. & Luce, E. C. (1987), 'A frequency domain approach to failure detection and isolation to ge-21 turbine engine control systems', *Control - Theory and Advanced Technology* **3**, 45–71.
- Wang, J. & Qin, S. J. (2002), 'A new subspace identification approach based on principal component analysis', *J. of Proc. Control* **12**, 841–855.
- Wang, J., Yang, G. & Liu, J. (2007), 'Brief paper : An lmi approach to h_2 index and mixed h_2/h_∞ fault detection observer design', *Automatica* **43**, 1656–1665.
- White, J. & Speyer, J. (1987), 'Detection filter design : Spectral theory and algorithms', *IEEE Trans. on Automatic Control* **32**(7), 593 – 603.
- Willsky, A. J. (1976), 'A survey of design methods for failure detection in dynamic systems', *Automatica* **12**, 601–611.
- Willsky, A. J. & Jones, H. (1976), 'A generalized likelihood ratio approach to detection and estimation of jumps in linear systems', *IEEE Trans. on Automatic Control* **21**, 108–112.
- Wise, B. M. & Gallagher, N. B. (1996), 'The process chemometrics approach to process monitoring and fault detection', *J. of Proc. Control* **6**, 329–348.
- Wright, T. G. & Trefethen, L. N. (2002), 'Pseudospectra of rectangular matrices', *IMA J. of Numer. Anal.* **22**, 501–519.

- Ye, H., Wang, G. Z. & Ding, S. X. (2004), 'A new parity space approach for fault detection based on stationary wavelet transform', *IEEE Trans. on Automatic Control* **49**, 281–287.
- Zhang, P., Ye, H., Ding, S. X., Wang, G. Z. & Zhou, D. H. (2006), 'On the relationship between parity space and h_2 approaches to fault detection', *Systems and Control Letters* **55**, 94 – 100.

Annexe

A Décompositions matricielles

A.1 Décomposition QR

Définition A.1 La décomposition QR d'une matrice de dimension $m \times n$ est définie par

$$A = QR \tag{1}$$

avec

- Q est une matrice unitaire de dimension $m \times m$
- R est une matrice de dimension $m \times n$ avec des zéros sous la principale diagonale.

Exemple A.1

$$\begin{pmatrix} -0.2357 & 0.0729 & -5.8002 \\ -0.9428 & -2.9743 & -3.0346 \\ -0.2357 & 3.3389 & 5.2105 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2357 & 0.1361 & -0.9623 \\ -0.9428 & -0.2722 & 0.1925 \\ -0.2357 & 0.9526 & 0.1925 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -0.2357 & -0.0632 \\ -0.9428 & -2.7021 \\ -0.2357 & 2.3863 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2357 & 0.1361 & -0.9623 \\ -0.9428 & -0.2722 & 0.1925 \\ -0.2357 & 0.9526 & 0.1925 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -0.1961 & -5.2951 & -6.4718 & -7.6485 \\ -0.9806 & -0.9806 & -1.7650 & -2.5495 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1961 & -0.9806 \\ -0.9806 & 0.1961 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Il y a trois principales techniques de décomposition QR d'une matrice.

1. La technique de Givens : elle consiste à appliquer des rotations de Givens afin d'annuler un à un les éléments de la partie triangulaire inférieure stricte de la matrice, construisant la matrice R , tandis que la matrice Q est engendrée

par la concaténation des différentes rotations. Coût de calcul de l'ordre de $2mn^2 - \frac{2}{3}n^3$.

2. La technique de Gram-Schmidt : elle consiste à construire une base orthonormée du sous espace engendré par les colonnes de la matrice considérée. La matrice Q est composée des vecteur de cette base tandis que dans la matrice R , on stocke les coordonnées des colonnes de la matrice d'origine dans la nouvelle base. Coût de calcul de l'ordre de mn^2 .
3. La technique de Householder : les multiplications successives par des matrices d'Householder permettent d'obtenir la matrice triangulaire supérieure R , tandis que la matrice Q est donnée par le produit de toutes ces matrices. Coût de calcul de l'ordre de $mn^2 - \frac{1}{3}n^3$.

A.2 Décomposition QZ

Définition A.2 La décomposition QZ d'un couple (A, B) de matrices de dimension $n \times n$ est définie par

$$\begin{cases} A = QTZ^* \\ B = QSZ^* \end{cases} \quad (2)$$

avec

- Q, Z sont des matrices unitaires de dimension $n \times n$
- S, T sont des matrices triangulaires supérieures de dimension $n \times n$.

La décomposition QZ est aussi appelée décomposition de Schur généralisée. Son coût de calcul est estimé en $\mathcal{O}(n^3)$

A.3 Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Définition A.3 La décomposition SVD d'une matrice A de dimension $m \times n$ est définie par

$$A = USV^* \quad (3)$$

avec

- U, V sont des matrices unitaires de dimension $m \times m$, et $n \times n$ respectivement,
- S est une matrice de dimension $m \times n$ comportant sur la diagonale principale les valeurs singulières de A et 0 ailleurs.

En notant $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$ ($p = \min(m, n)$) les éléments de la diagonale principale de S , u_i ($i = 1, \dots, m$) et v_j ($j = 1, \dots, n$) les vecteurs des matrices U et V respectivement, alors on peut écrire

$$A = \sum_{i=1}^p \sigma_i u_i v_i^* \quad (4)$$

La détermination des valeurs propres d'une matrice A comporte deux étapes.

1. Appliquer la réduction de Hessenberg : $AA^* = Q_1 T Q_1$, avec Q_1 une matrice unitaire et T une matrice tridiagonale (ayant des coefficients non nuls que sur sa diagonale principale, et immédiatement au-dessus et en dessous).
2. Diagonaliser la matrice de Hessenberg : $T = Q_2 \Lambda Q_2^*$, avec Q_2 une matrice unitaire et Λ une matrice diagonale.

Les valeurs singulières de la matrices A correspondent aux racines carrées des éléments de la diagonale de la matrice Λ . Le coût de la décomposition SVD est en $\mathcal{O}(mn^2)$.

B Calcul du pseudospectre de faisceau de matrices

Soit $(\lambda_i)_{i=1, \dots, N}$ une discrétisation d'une région bornée incluse dans \mathbb{C} , notée \mathcal{L} . Soit (A, B) une paire de matrices de $\mathbb{C}^{m \times n}$. On donne ci-dessous les algorithmes permettant, selon les cas le calcul du ϵ -pseudospectre du faisceau de matrices $\Lambda_\epsilon(A, B)$.

B.1 Cas carrée ($m = n$)

Considérons la factorisation QZ de la paire (A, B) :

$$A = QTZ^* \text{ et } B = QSZ^* \quad (5)$$

A chaque point $\lambda_i \in \mathcal{L}$, on a

$$\sigma_{\min}(A - \lambda_i B) = \sigma_{\min}(Q(S - \lambda_i T)Z^*) = \sigma_{\min}(S - \lambda_i T) \quad (6)$$

car les valeurs singulières sont invariantes par transformation orthogonale. Il suffit alors d'appliquer une décomposition SVD à la matrice $S - \lambda_i T$.

Coût de calcul estimé à $\mathcal{O}(n^2)$.

B.2 Cas rectangulaire, $m \geq 2n$

Considérons la factorisation QR de la matrice B : $B = Q_B R_B$. On réécrit la matrice $Q_B^* A$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \text{ avec } A_1 \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ et } A_2 \in \mathbb{C}^{(m-n) \times n}$$

Soit la décomposition QR de la matrice A_2 : $A_2 = Q_2 R_2$. On obtient

$$\sigma_{\min}(A - \lambda_i B) = \sigma_{\min}(T) \quad (7)$$

où

$$T = \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & Q_2^* \end{pmatrix} Q_B^* (A - \lambda_i B) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

L'élimination des $m - 2n$ derniers vecteurs ligne (nuls) permet d'obtenir une nouvelle matrice S de forme trapézoïdale et de mêmes valeurs singulières que la matrice T . On applique une fois de plus une décomposition QR : $S = Q_S R_S$. On se débarrasse des vecteurs ligne nuls apparaissant dans la matrice R_S pour obtenir une matrice triangulaire supérieure $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Enfin, on peut poser

$$\sigma_{\min}(A - \lambda_i B) = \sigma_{\min}(R) \quad (9)$$

Coût de calcul estimé à $\mathcal{O}(n^3)$.

B.3 Cas rectangulaire, $m < 2n$

On réécrit les matrices A et B respectivement sous la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \text{ avec } A_1, B_1 \in \mathbb{C}^{(m-n) \times n} \text{ et } A_2, B_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

Soit la décomposition QZ de la paire (A_2, B_2) :

$$A_2 = Q_2^* S_2 Z_2 \text{ et } B_2 = Q_2^* T_2 Z_2 \quad (10)$$

On obtient

$$\sigma_{\min}(A - \lambda_i B) = \sigma_{\min}(S - \lambda_i T) \quad (11)$$

où

$$S = \begin{pmatrix} A_1 Z_2 \\ S_2 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} B_1 Z_2 \\ T_2 \end{pmatrix} \text{ sont des matrices de formes trapézoïdales}$$

L'élimination des $m - 2n$ derniers vecteurs ligne (nuls) permet d'obtenir une nouvelle matrice S de forme trapézoïdale et de mêmes valeurs singulières que la matrice T . On applique une fois de plus une décomposition $QR : S = Q_S R_S$. On se débarrasse des vecteurs ligne nuls apparaissant dans la matrice R_S et obtient une matrice triangulaire supérieure $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Enfin, on peut poser

$$\sigma_{\min}(A - \lambda_i B) = \sigma_{\min}(R) \quad (12)$$

On retrouve une matrice triangulaire supérieure $n \times n$ (comme précédemment) après une décomposition QR et l'élimination des vecteurs ligne nuls apparaissant dans la matrice triangulaire.

Coût de calcul estimé à $\mathcal{O}((m - n)n^2)$.

RÉSUMÉ

Ce travail contribue à développer une nouvelle approche algébrique et déterministe de diagnostic qui ne nécessite pas la connaissance *a priori* d'un modèle explicite du système. Il présente un nouveau point de vue basé sur la théorie des distributions et l'analyse du pseudospectre de faisceaux de matrices. Notre démarche s'inspire de certains outils et développements de la théorie de l'estimation algébrique courants en automatique et traitement du signal. Le principal atout de cette approche est qu'il est possible, sous certaines hypothèses, de détecter, localiser et identifier les défauts à l'aide des seules mesures de la commande et de la sortie sans avoir à estimer les paramètres du modèle. Nous considérons que les défauts actionneur et capteur sont modélisés par des signaux structurés. La méthode exploite le fait qu'un signal structuré satisfait une équation différentielle. La prise de décision est entièrement fondée sur l'évolution temporelle des estimations de certaines caractéristiques constantes des défauts. L'efficacité de l'approche présentée est illustrée au travers d'exemples académiques.

TITLE

Diagnostic sans modèle *a priori*

ABSTRACT

This work contributes to develop a new algebraic and deterministic approach of fault diagnosis, which is not based on an *a priori* explicit model of the process and presents a new perspective based on the theory of distributions and the pseudospectra analysis of matrix pencils. Our approach is based on certain tools and developments in the theory of algebraic estimation usual in automatic signal processing communities. The considered systems form a particular class of uncertain linear dynamical systems. The treated faults are actuator and sensor faults modeled through structured signals. The main advantage of this new approach is to realize fault diagnosis only from knowledge of input and output measurements and without identifying explicitly model parameters. The method exploits the fact that a structured signal satisfies a differential equation. The decision is entirely based on the temporal evolution of the estimates of some constant features of the fault. The effectiveness of the proposed approach is illustrated through academic examples.

ISBN : 0000001