



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Thèse présentée par

Christophe Profeta

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré
Spécialité : Mathématiques

Pénalisations, pseudo-inverses et peacocks dans
un cadre markovien

Composition du jury :

Michel Émery	Rapporteur	Directeur de Recherche CNRS, Strasbourg
Francis Hirsch	Examineur	Professeur émérite, Université d'Évry
Paavo Salminen	Rapporteur	Professeur, Université d'Åbo
Pierre Vallois	Directeur de thèse	Professeur, Université Nancy I
Marc Yor	Examineur	Professeur, Université Paris VI

Institut Élie Cartan Nancy

Remerciements

Mes premières pensées sont adressées à Bernard Roynette qui a accepté de m'encadrer depuis le DEA. Sa gentillesse, sa constante disponibilité et son inégalable enthousiasme mathématique m'ont guidé pendant ces trois années et je l'en remercie sincèrement.

Pierre Vallois a accepté d'être mon directeur de thèse, tâche qui n'est pas des plus aisées. Je n'ai pas vraiment pris le temps, en trois ans, de réfléchir à toutes les problématiques qu'il a pu me soumettre, mais il est grand temps que je m'y mette à présent, et j'espère que sa patience en sera récompensée !

Un grand merci à Michel Émery d'avoir accepté de rapporter cette thèse, malgré un emploi du temps très chargé. J'ai été également très flatté que Paavo Salminen accepte d'être rapporteur, malgré la barrière de la langue. Ses travaux ont eu beaucoup d'influence sur ce manuscrit, et je lui suis vraiment très reconnaissant d'avoir fait le déplacement pour la soutenance.

J'ai pu, au cours des ces trois années, côtoyer deux mathématiciens d'exception, que sont Francis Hirsch et Marc Yor. Leur rigueur mathématique et leur ouverture d'esprit sont pour moi des exemples, et je les remercie d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Il y a quelques années, alors jeune étudiant en école d'ingénieur, j'ai fait la connaissance de trois enseignants qui m'ont, au travers de leur passion pour ce métier, ouvert les yeux sur le monde de l'enseignement et de la recherche : Antoine Henrot, Samuel Herrmann et Céline Lacaux. C'est en partie grâce à eux que ce manuscrit existe, et ces trois années à enseigner à leurs côtés (de l'autre côté de la barrière !) m'ont convaincu que j'avais fait le bon choix.

Un grand merci également à tous les membres de notre coin-coin des doctorants : en particulier mon co-bureau et camaraaaaade Nicu, Juju le rouquin complexé du bureau d'à-côté, Aurélien notre pessimiste invétéré, Fernando, Bertrand, Pau, Jo et tous ceux qui sont arrivés par la suite. Cela aura été un véritable plaisir de passer ces 3 années à vos côtés !

Et finalement, une dernière pensée, mais non des moindres, pour mes deux boulets et mes parents, qui m'ont toujours supporté même s'ils "n'y comprennent rien à ces trucs de maths"...

Table des matières

Introduction	vii
Partie 1 : Pénalisations	vii
Partie 2 : Pseudo-inverses	xi
Partie 3 : Peacocks et martingales associées	xii
 I Pénalisations	 1
1 Pénalisation d'une diffusion récurrente nulle	3
1.1 Introduction	3
1.1.1 Cadre et notations	3
1.1.2 Généralités sur la théorie de Krein	4
1.1.3 Enoncé simplifié	6
1.1.4 Quelques exemples	7
1.2 La famille de probabilités $\left(\mathbb{P}_x^{(\lambda,a)}\right)_{x,\lambda,a \geq 0}$	8
1.2.1 Définition	8
1.2.2 Notations	10
1.2.3 Quelques lemmes	11
1.2.4 Représentation intégrale de $\mathbb{P}_x^{(\lambda,a)}$	14
1.3 La mesure $\mathcal{W}$	17
1.3.1 Définition de $\mathcal{W}$	17
1.3.2 Propriétés	18
1.3.3 Un générateur de martingales	19
1.4 Un théorème général de pénalisation	21
1.4.1 Estimation asymptotique	21
1.4.2 Un théorème de pénalisation	24
1.4.3 Retour sur quelques exemples	26
1.5 Extension à $\mathbb{R}$	26
1.5.1 Tableau comparatif	26
1.5.2 Pénalisation par $(\int_0^t 1_{\{X_u > 0\}} du, t \geq 0)$	29
 2 Pénalisation d'une diffusion récurrente positive	 39
2.1 Introduction	39
2.1.1 Motivations	39
2.1.2 Enoncé des principaux résultats	39
2.1.3 Plan	41
2.2 Etude asymptotique	42

2.3	Démonstrations des résultats annoncés	49
2.3.1	Une famille de martingales	49
2.3.2	Démonstration du théorème de pénalisation	52
2.3.3	Etude de la diffusion pénalisée	53
2.3.4	Quelques remarques à propos de la pénalisation par $(e^{-\alpha L_t}, t \geq 0)$	55
2.3.5	Rapide preuve de la pénalisation par $(e^{\alpha L_t}, t \geq 0)$	56
2.4	Le principe d'itération des pénalisations	57
2.4.1	Pénalisation de $\mathbb{P}_x^{(-\alpha)}$ par $(e^{-\beta L_t}, t \geq 0)$	58
2.4.2	Pénalisation de $\mathbb{P}_x^{(-\alpha)}$ par $(e^{\beta L_t}, t \geq 0)$	59
2.5	Application aux processus de Bessel de dimension $\delta \in]0, 2[$ réfléchis en 1	60
2.5.1	Cas général	60
2.5.2	Le mouvement brownien réfléchi sur $[0, 1]$	63

II Pseudo-inverses 67

3	Existence de pseudo-inverses pour des diffusions	69
3.1	Introduction	69
3.1.1	Ordre stochastique	69
3.1.2	Plan	72
3.2	Pseudo-inverses pour un mouvement brownien avec dérive	73
3.3	Etude d'une famille $(X^{(\alpha)})_{\alpha \geq 0}$ de diffusions à valeurs dans $\mathbb{R}^+$	78
3.3.1	Définitions	78
3.3.2	Une relation d'entrelacement	80
3.3.3	Existence d'un pseudo-inverse croissant lorsque $\alpha = 0$	84
3.4	Existence de pseudo-inverses pour une diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ issue de 0	87
3.4.1	Notations	87
3.4.2	La transformation de Biane	88
3.4.3	Existence de pseudo-inverses	91
3.4.4	Une seconde preuve de l'existence de pseudo-inverses	93
3.5	Quelques conséquences de l'existence de pseudo-inverses	94
3.5.1	Une nouvelle relation entre les processus X et $\bar{X}$ issus de 0	94
3.5.2	Une relation de retournement du temps	95
3.5.3	Retour sur la famille $(X^{(\alpha)})_{\alpha \geq 0}$	97

III Peacocks et martingales associées 99

4	Exemples de peacocks dans un contexte markovien	101
4.1	Introduction	101
4.1.1	Définitions	101
4.1.2	Quelques exemples simples	102
4.1.3	Motivations	105
4.2	L'hypothèse de monotonie conditionnelle	106
4.3	Exemples de processus conditionnellement monotones	109
4.3.1	Le processus $(\lambda X, \lambda \geq 0)$	109
4.3.2	Les processus à accroissements indépendants	109
4.3.3	Les diffusions "bien-réversibles" à temps fixe	117
4.4	Une autre famille de peacocks markoviens	122
4.5	Ordre convexe et ordre stochastique	125

5	Plongements de Skorokhod	131
5.1	Introduction	131
5.2	Le plongement de Hall-Breiman	132
5.2.1	Principe général	132
5.2.2	Application à la recherche de martingales	134
5.2.3	Cas particulier lorsque $A_t = \sqrt{t}$	135
5.3	Le plongement de Bass	137
5.3.1	Principe général	137
5.3.2	Une martingale associée à $(\varphi(B_t), t \geq 0)$ pour φ croissante et impaire	139
5.3.3	Martingales associées à $(\sqrt{t}X, t \geq 0)$	142
5.4	Le plongement d’Azéma-Yor	145
5.4.1	Principe général	145
5.4.2	Martingales associées à $(\phi(t, X), t \geq 0)$	146
5.4.3	Martingales associées à $(\sqrt{t}X, t \geq 0)$	148
5.4.4	La condition de Madan-Yor $(M \cdot Y)$	150
5.4.5	Cas d’une mesure à support dans $] - \infty, 1]$	155
5.4.6	Des conditions équivalentes à $(M \cdot Y)$	157
5.4.7	Quelques conditions suffisantes pour $(M \cdot Y)$	162
5.4.8	Exemples	167
	Références	171

Introduction

Cette thèse porte essentiellement sur l'étude de certaines propriétés des diffusions linéaires, et de fonctionnelles qui leur sont associées. Trois thèmes sont ici abordés :

- i) La pénalisation, qui consiste à étudier le comportement asymptotique de certaines fonctionnelles associées à une diffusion linéaire, typiquement : les temps locaux, les derniers temps de passage à des niveaux fixés, les intégrales de type Feynman-Kac...
- ii) La notion de pseudo-inverse, qui consiste à étudier la croissance stochastique de la diffusion.
- iii) La notion de peacock, qui traite de l'ordre convexe.

Cette thèse se décompose donc en trois parties largement indépendantes.

Partie 1 : Pénalisations

Les deux premiers chapitres concernent la pénalisation de diffusions linéaires récurrentes. Commençons par en donner une définition.

Définition 0.1. Soit $(\Gamma_t, t \geq 0)$ un processus mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, tel que $0 < \mathbb{E}_x[\Gamma_t] < \infty$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^+$. Le processus $(\Gamma_t, t \geq 0)$ satisfait le principe de pénalisation s'il existe une mesure de probabilité $\mathbb{Q}_x$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ telle que :

$$\forall s > 0, \forall \Lambda_s \in \mathcal{F}_s, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}_x[1_{\Lambda_s} \Gamma_t]}{\mathbb{E}_x[\Gamma_t]} = \mathbb{Q}_x(\Lambda_s).$$

Ce problème a été très largement étudié par B. Roynette, P. Vallois and M. Yor lorsque $\mathbb{P}_x$ est la mesure de Wiener (voir [RVY06] pour une synthèse et de plus amples références). En particulier, on dispose d'un théorème pour obtenir des résultats de pénalisation, lequel repose essentiellement sur le lemme de Scheffé :

Théorème 0.2. Soit $(\Gamma_t, t \geq 0)$ un processus stochastique positif satisfaisant $0 < \mathbb{E}[\Gamma_t] < +\infty$. Supposons que, pour tout $s \geq 0$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}[\Gamma_t | \mathcal{F}_s]}{\mathbb{E}[\Gamma_t]} =: M_s$$

existe p.s., et que,

$$\mathbb{E}[M_s] = 1.$$

Alors,

- i) pour tout $s \geq 0$ et $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}[1_{\Lambda_s} \Gamma_t]}{\mathbb{E}[\Gamma_t]} = \mathbb{E}[M_s 1_{\Lambda_s}].$$

ii) il existe une mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ telle que pour tout $s > 0$:

$$\mathbb{Q}(\Lambda_s) = \mathbb{E}[M_s 1_{\Lambda_s}].$$

Considérons une diffusion linéaire régulière récurrente $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, réfléchie en 0, et notons $(L_t, t \geq 0)$ son temps local en 0 et $(\tau_l, l \geq 0)$ l'inverse continu à droite de $(L_t, t \geq 0)$:

$$\tau_l := \inf\{t \geq 0; L_t > l\}.$$

$(\tau_l, l \geq 0)$ étant un subordonateur, on note ν sa mesure de Lévy. Récemment, P. Salminen et P. Vallois [SV09] ont prouvé que le principe de pénalisation était vérifié lorsque l'on choisissait pour fonctionnelle $(\Gamma_t = h(L_t), t \geq 0)$ avec h une fonction positive décroissante, sous l'hypothèse que la mesure de probabilité $\frac{1}{\nu([1, +\infty])} \nu|_{[1, +\infty[}$ soit sous-exponentielle. Rappelons qu'une mesure de probabilité μ est dite sous-exponentielle si, pour tout $t \geq 0$, $\mu([t, +\infty]) < \infty$ et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mu^{*2}([t, +\infty])}{\mu([t, +\infty])} = 2,$$

où μ^{*2} désigne le produit de convolution de μ avec elle-même. (Voir Sato [Sat99, Chapitre 5, p.164] pour d'autres caractérisations équivalentes lorsque ν est la mesure de Lévy d'un subordonateur). Typiquement, l'exemple principal de mesure sous-exponentielle est donné par $\mu([t, +\infty]) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\eta(t)}{t^\beta}$ où η est une fonction à variation lente et $\beta \in]0, 1[$.

Nous allons, au cours de ces deux premiers chapitres, généraliser ce résultat dans deux directions.

Chapitre 1

Dans un premier temps, nous nous plaçons dans un cadre très similaire à celui de Salminen-Vallois en considérant des diffusions récurrentes nulles, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, satisfaisant l'hypothèse suivante :

Hypothèse 0.3. *On suppose que la mesure de Lévy ν du subordonateur $(\tau_l, l \geq 0)$ vérifie :*

$$\nu([t, +\infty]) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\eta(t)}{t^\beta}$$

où $\beta \in]0, 1[$ et η est une fonction à variation lente, i.e. $\left(\forall x \in]0, +\infty[, \frac{\eta(tx)}{\eta(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1 \right)$.

Dans ce cadre, nous présentons une large classe de fonctionnelles pour lesquelles le principe de pénalisation est vérifié.

Théorème 0.4 (Énoncé simplifié). *Soit $a \geq 0$, $g_a^{(t)} := \sup\{u \leq t; X_u = a\}$ et $(F_t, t \geq 0)$ un processus positif et prévisible tel que :*

i) $(F_t, t \geq 0)$ est décroissant $\mathbb{P}$ -p.s.

ii) $0 < \mathbb{E}_0 \left[\int_0^{+\infty} F_u dL_u^a \right] < \infty$.

Alors,

1) On a l'équivalent :

$$\mathbb{E}_0 \left[F_{g_a^{(t)}} \right]_{t \rightarrow +\infty} \sim \mathbb{E}_0 \left[\int_0^{+\infty} F_u dL_u^a \right] \nu([t, +\infty[).$$

2) Le principe de pénalisation est satisfait pour la fonctionnelle $(F_{g_a^{(t)}}, t \geq 0)$:

$$\forall u > 0, \forall \Lambda_u \in \mathcal{F}_u, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}_0[1_{\Lambda_u} F_{g_a^{(t)}}]}{\mathbb{E}_0[F_{g_a^{(t)}}]} = \mathbb{E}_0 \left[\frac{M_u(F_{g_a})}{\mathbb{E}_0 \left[\int_0^{+\infty} F_u dL_u^a \right]} 1_{\Lambda_u} \right],$$

où la martingale $(M_u(F_{g_a}), u \geq 0)$ est donnée par :

$$M_u(F_{g_a}) = F_{g_a^{(u)}}(s(X_u) - s(a))^+ + \mathbb{E}_0 \left[\int_u^{+\infty} F_s dL_s^a | \mathcal{F}_u \right].$$

3) La relation de faible absolue continuité

$$\mathbb{P}_{0|\mathcal{F}_t}^{(F)} = \frac{M_t(F_{g_a})}{\mathbb{E}_0 \left[\int_0^{+\infty} F_u dL_u^a \right]} \cdot \mathbb{P}_{0|\mathcal{F}_t}$$

induit une probabilité $\mathbb{P}^{(F)}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ sous laquelle g_a est fini p.s. et le processus $(X_{g_a+u}, u \geq 0)$ est transient et tend vers $+\infty$.

Bien sûr, en choisissant $a = 0$ et $(F_t := h(L_t), t \geq 0)$ avec h une fonction positive décroissante, on retrouve les résultats de [SV09].

Ce théorème a été prouvé dans le cas du mouvement brownien sur $\mathbb{R}$ par J. Najnudel, B. Roynette et M. Yor [NRY09]. Nous adaptons ici leur démonstration au cadre des diffusions récurrentes nulles sur $\mathbb{R}^+$. La preuve se décompose en deux étapes :

- dans un premier temps, nous construisons une mesure σ -finie $\mathcal{W}$ associée à la diffusion, qui généralise celle présentée dans [NRY09] dans le cadre brownien. Notons qu'une telle construction de $\mathcal{W}$ à partir d'une diffusion est également proposée dans [NRY09, Chapitre 3], mais seulement de manière partielle.

- puis nous utilisons les propriétés de $\mathcal{W}$ pour prouver, à l'aide d'un théorème Taubérien, les résultats de pénalisation. Ce résultat donne ainsi tout son sens à la remarque de [NRY09, p.97] où les auteurs mentionnent l'existence de liens entre $\mathcal{W}$ et les résultats de Salminen-Vallois [SV09].

Nous donnons également, à la fin ce chapitre, l'équivalent de cette mesure $\mathcal{W}$ lorsque $(X_t, t \geq 0)$ est une diffusion récurrente nulle à valeurs dans $\mathbb{R}$. Comme application, nous étudions la pénalisation d'une telle diffusion par une fonction décroissante de $A_t := \int_0^t 1_{\{X_s > 0\}} ds$, généralisant ainsi les résultats obtenus par Roynette et Yor [RY10] dans le cas brownien.

Chapitre 2

Dans un deuxième temps, nous choisissons pour fonctionnelle $(\Gamma_t := e^{\alpha L_t}, t \geq 0)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), et nous pénalisons une diffusion récurrente positive, i.e., une diffusion dont la mesure de Lévy n'est pas sous-exponentielle. Présentons ici le cas $\alpha \geq 0$.

On considère une diffusion linéaire régulière récurrente positive $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs dans

$I = [0, b]$ ($b < \infty$), à échelle naturelle (c'est-à-dire $s(x) = x$), 0 et b étant des barrières instantanément réfléchissantes. Soit r^2 la plus petite solution en module de l'équation :

$$\alpha + \frac{1}{u_{-r^2}(0, 0)} = 0$$

et $-\omega_1^2$ le plus petit zéro en module du prolongement méromorphe de $z \mapsto u_z(0, 0)$. Nous verrons que r^2 et $-\omega_1^2$ sont bien définis, que r^2 est un réel positif et $-\omega_1^2$ un réel strictement négatif. On fait alors l'hypothèse suivante :

Hypothèse 0.5.

On suppose qu'il existe $\beta > 0$ et $c \in]r^2, \omega_1^2[$ tels que, pour $z \in \{z \in \mathbb{C}; -c \leq \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$:

$$u_z(0, 0) \Big|_{|z| \rightarrow +\infty} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^\beta}\right).$$

Théorème 0.6. *Supposons l'Hypothèse 0.5 satisfaite. Alors,*

i) *On a l'équivalent :*

$$\mathbb{E}_x [e^{-\alpha L_t}] \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{r^2} u_{-r^2}(0, x) \frac{1}{\frac{\partial}{\partial z} u_z(0, 0) \Big|_{z=-r^2}} \exp(-r^2 t).$$

ii) *Le principe de pénalisation est satisfait pour la fonctionnelle $(e^{-\alpha L_t}, t \geq 0)$:*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}_x [1_{\Lambda_s} e^{-\alpha L_t}]}{\mathbb{E}_x [e^{-\alpha L_t}]} = \mathbb{E}_x [1_{\Lambda_s} M_s^{(-\alpha)}].$$

où $(M_s^{(-\alpha)}, s \geq 0)$ est la martingale définie par :

$$\left(M_t^{(-\alpha)} := \exp(r^2 t - \alpha L_t) \frac{u_{-r^2}(0, X_t)}{u_{-r^2}(0, x)}, t \geq 0 \right)$$

iii) *La relation de faible absolue continuité :*

$$\mathbb{P}_{x|\mathcal{F}_t}^{(-\alpha)} = M_t^{(-\alpha)} \cdot \mathbb{P}_{x|\mathcal{F}_t}$$

induit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ sous laquelle le processus $(X_t, t \geq 0)$ reste une diffusion récurrente positive réfléchie sur $[0, b]$.

Remarquons que, contrairement au cas des diffusions récurrentes nulles, la pénalisation par $(e^{-\alpha L_t}, t \geq 0)$ ne suffit plus ici pour rendre le processus transient. Par contre, le processus $(X_t, t \geq 0)$ étant encore, sous $\mathbb{P}^{(-\alpha)}$, une diffusion récurrente positive réfléchie sur $[0, b]$, on peut à nouveau lui appliquer le théorème de pénalisation présenté ci-dessus. Nous verrons qu'apparaît alors un phénomène de transitivité des pénalisations, à savoir, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors : $\mathbb{P}^{(\alpha)(\beta)} = \mathbb{P}^{(\alpha+\beta)}$.

Ce chapitre a été accepté pour publication dans les Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences sous le titre "Penalization of a positively recurrent diffusion by an exponential function of its local time" [Pro10].

Partie 2 : Pseudo-inverses

On s'intéresse à présent à la notion de pseudo-inverse, une notion introduite récemment par D. Madan, B. Roynette et M. Yor [MRY08] afin d'exprimer le prix d'une option put, dans le cadre du modèle de Black-Scholes, comme la fonction de répartition d'un couple de variables aléatoires. On dit qu'un processus $(X_t, t \geq 0)$ admet un pseudo-inverse croissant si :

- i) pour tout $y > x$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_x(X_t \geq y) = 1$,
- ii) pour tout $y > x$, l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $[0, 1]$: $t \mapsto \mathbb{P}_x(X_t \geq y)$ est continue et croissante.

Si les 2 Points (i) et (ii) de cette définition sont satisfaits, alors, il existe une famille de variables aléatoires positives $(Y_{x,y}, x < y)$ telle que :

$$\mathbb{P}_x(X_t \geq y) = \mathbb{P}(Y_{x,y} \leq t).$$

Nous appelons *pseudo-inverse croissant* du processus $(X_t, t \geq 0)$ cette famille de variables aléatoires $(Y_{x,y}, x < y)$.

Si seul le Point (ii) de cette définition est satisfait, alors, puisque $t \mapsto \mathbb{P}_x(X_t \geq y)$ est bornée par 1, pour tout $y > x$ la limite :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_x(X_t \geq y) =: Z(x, y)$$

existe. Par conséquent, il existe une famille de v.a. positives $(Y_{x,y}, x < y)$ telles que :

$$\frac{1}{Z(x, y)} \mathbb{P}_x(X_t \geq y) = \mathbb{P}(Y_{x,y} \leq t)$$

que nous appelons *quasi pseudo-inverse croissant* du processus $(X_t, t \geq 0)$. Cette notion permet, en un sens, de caractériser la tendance à croître du processus X . Elle a été étudiée en détails par Roynette et Yor dans le cadre des processus de Bessel [RY08], et l'on a entrepris ici d'étendre ces résultats à des diffusions quelconques à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$.

Chapitre 3

1) On considère dans un premier temps une diffusion sur $\mathbb{R}$ qui est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$X_t = x + \beta_t + \int_0^t c(X_s) ds.$$

Nous montrons que si c est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ positive, décroissante et convexe, alors $(X_t, t \geq 0)$ admet un quasi pseudo-inverse croissant. L'existence d'un pseudo-inverse croissant nécessite une hypothèse supplémentaire, que l'on peut formuler par exemple en utilisant le critère de Feller.

2) Dans le reste du chapitre, nous nous concentrons plus particulièrement sur des diffusions à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Nous commençons par traiter un exemple en considérant la famille de diffusions $(X^{(\alpha)})_{\alpha \geq 0}$ définies comme les solutions des EDS :

$$X_t^{(\alpha)} = B_t + \int_0^t \left(c - \frac{\alpha e^{2C}}{1 + \alpha \int_0^{\cdot} e^{2C(y)} dy} \right) (X_s^{(\alpha)}) ds$$

où $c :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie $c(0) = +\infty$ et telle que $C(x) := \int_1^x c(y)dy$ vérifie $C(0) = -\infty$. Nous prouvons alors qu'il existe une diffusion transiente $(\bar{X}_t, t \geq 0)$ indépendante de α telle que :

$$\mathbb{P}_0^{(\alpha)}(X_t^{(\alpha)} \geq y) = \frac{1}{1 + \alpha \int_0^y e^{2C(z)} dz} \bar{\mathbb{P}}_0(\bar{G}_y \leq t).$$

où $\bar{G}_y := \sup\{t \geq 0; \bar{X}_t = y\}$. De cette formule, on déduit que :

- i) si $\alpha > 0$, $X^{(\alpha)}$ admet un quasi pseudo-inverse croissant,
- ii) si $\alpha = 0$, $X := X^{(0)}$ admet un pseudo-inverse croissant $(Y_{0,y}, y > 0)$, et l'on a les égalités en loi suivantes, pour t et y fixés :

$$X_t \stackrel{(\text{loi})}{=} \inf_{s \geq t} \bar{X}_s \quad \text{et} \quad Y_{0,y} \stackrel{(\text{loi})}{=} \bar{G}_y. \quad (1)$$

3) Nous étendons alors les résultats précédents au cas général d'une diffusion $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et issue de 0. Nous prouvons en particulier l'existence d'un processus transient $\bar{X}$, défini à partir de $(X_t, t \geq 0)$ par la transformation de Biane [Bia85], tel que :

$$\mathbb{P}_0(X_t \geq y) = \left(1 - \frac{m([0, y])}{m([0, +\infty[)}\right) \bar{\mathbb{P}}_0(\bar{G}_y \leq t).$$

En particulier, si $m([0, +\infty[) = +\infty$, $(X_t, t \geq 0)$ admet un pseudo-inverse croissant $(Y_{0,y}, y > 0)$ et les égalités en loi (1) sont à nouveau satisfaites. Ainsi, dans notre cadre, une diffusion issue de 0 admet un pseudo-inverse croissant si et seulement si elle est transiente ou récurrente nulle.

4) Finalement, dans la dernière section de ce chapitre, nous obtenons des relations supplémentaires entre les diffusions $(X_t, t \geq 0)$ et $(\bar{X}_t, t \geq 0)$. Nous introduisons alors trois nouveaux processus, liés à $(X_t, t \geq 0)$ via la notion de pseudo-inverse, qui nous permettent d'obtenir quelques identités de type Zolotarev (également appelées identités de Kendall [BB01]).

Ce chapitre correspond au chapitre 8 de la monographie "Option prices as probabilities", écrite en collaboration avec B. Roynette et M. Yor [PRY10].

Partie 3 : Peacocks et martingales associées

On s'intéresse à présent à la notion d'ordre convexe.

a) Un processus $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs réelles est dit croissant pour l'ordre convexe s'il est intégrable, i.e.

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{E}[|X_t|] < \infty$$

et si, pour toute fonction convexe $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{E}[\psi(X_t)] \in]-\infty, +\infty] \quad \text{est une fonction croissante.}$$

Nous appelons un tel processus un *peacock* pour Processus Croissant pour l'Ordre Convexe (en anglais, "peacock" signifie paon).

b) Un processus $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs réelles est une *1-martingale* s'il existe une martingale $(M_t, t \geq 0)$ (éventuellement définie sur un autre espace de probabilité) admettant les mêmes marginales unidimensionnelles que $(X_t, t \geq 0)$, c'est-à-dire que pour tout $t \geq 0$ fixé :

$$X_t \stackrel{(\text{loi})}{=} M_t.$$

Une telle martingale est dite associée au processus $(X_t, t \geq 0)$. D'après un résultat de Kellerer [Kel72], ces deux notions sont équivalentes. L'objectif de cette partie est donc, dans un premier temps, d'exhiber des familles de peacocks, puis de rechercher, pour certains d'entre eux, une martingale associée.

Chapitre 4

L'objet de ce chapitre est de présenter quelques exemples de peacocks, essentiellement dans un cadre markovien. Nous commençons par quelques résultats simples, en prouvant par exemple, que si $(X_t, t \geq 0)$ est une diffusion solution d'une EDS de la forme :

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s + \int_0^t b(s, X_s) ds$$

où pour tout $s \geq 0$, $x \mapsto b(s, x)$ est une fonction croissante, alors $(X_t - \mathbb{E}[X_t], t \geq 0)$ est un peacock. Puis nous généralisons le résultat de Carr, Ewald et Xiao [CEX08] :

$$\left(\frac{1}{t} \int_0^t \exp\left(B_s - \frac{s}{2}\right) ds, t \geq 0 \right) \text{ est un peacock,}$$

de la manière suivante : nous cherchons des processus (a priori markoviens) tels que, pour toute mesure positive finie μ sur $\mathbb{R}^+$, le processus

$$\left(A_t^{(\mu)} := \int_0^{+\infty} \frac{e^{tX_\lambda}}{\mathbb{E}[e^{tX}]} \mu(d\lambda), t \geq 0 \right) \text{ soit un peacock.}$$

Pour ce faire, nous introduisons la notion de monotonie conditionnelle :

Définition (Monotonie conditionnelle). *Un processus $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ est dit conditionnellement monotone si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $i \in \{1, \dots, n\}$, tout $0 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ et toute fonction borélienne bornée $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ croissante (resp. décroissante) en chacun de ses arguments :*

$$\mathbb{E}[\phi(X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}, \dots, X_{\lambda_n}) | X_{\lambda_i}] = \phi_i(X_{\lambda_i}), \quad (\text{CM})$$

où $\phi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée croissante (resp. décroissante).

Nous prouvons alors que si $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ est un processus à valeurs réelles, continu à droite, conditionnellement monotone et satisfaisant quelques conditions d'intégrabilité alors, pour toute mesure positive finie μ sur $\mathbb{R}^+$, le processus $(A_t^{(\mu)}, t \geq 0)$ est un peacock. Pour justifier l'intérêt d'une telle notion, nous exhibons de nombreux exemples de processus conditionnellement monotones, parmi lesquels les processus à accroissements indépendants de lois log-concaves et les diffusions "bien réversibles" à temps fixe.

Nous établissons également un lien entre l'ordre convexe et l'ordre stochastique au travers du résultat suivant :

Théorème 0.7. Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus continu à droite tel que, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^+$, $\sup_{t \in K} |X_t|$ soit intégrable. On suppose que $(X_t, t \geq 0)$ satisfait les deux conditions suivantes :

- i) Pour toute fonction croissante et bornée $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}[\phi(X_t)|\mathcal{F}_s]$ est une fonction croissante de X_s .
- ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $0 \leq t_1 < \dots < t_{n+1}$ et toute $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dans borélienne, bornée et croissante en chacun de ses arguments, on a :

$$\mathbb{E} [\phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})(X_{t_{n+1}} - X_{t_n})] \geq 0.$$

Soit μ et ν deux mesures de probabilités à support compact sur $\mathbb{R}^+$ telles que, pour tout $t \geq 0$, $\mu([t, +\infty[) \geq \nu([t, +\infty[)$. Alors :

$$A^{(\mu)} := \int_0^{+\infty} X_u \mu(du) \stackrel{(c)}{\geq} A^{(\nu)} := \int_0^{+\infty} X_u \nu(du).$$

A nouveau, nous présentons de nombreux exemples de processus satisfaisant les hypothèses de ce théorème, et nous retrouvons ainsi certains des peacocks exhibés précédemment.

Ce chapitre est extrait de l'article "Some examples of peacocks in a Markovian set-up", écrit en collaboration avec A.M. Bogso et B. Roynette [BPR11], qui a été accepté pour publication dans le Séminaire de Probabilités XLIII.

Chapitre 5

Dans ce chapitre, nous associons des martingales à certains des peacocks présentés au Chapitre 4, grâce à des plongements de Skorokhod. En effet, supposons que pour tout $t \geq 0$, il existe un temps d'arrêt τ_t satisfaisant :

- i) $B_{\tau_t} \stackrel{(\text{loi})}{=} X_t$
- ii) $(B_{u \wedge \tau_t}, u \geq 0)$ est une martingale uniformément intégrable.

Si la famille de temps d'arrêt $(\tau_t, t \geq 0)$ est p.s. croissante, alors le processus $(B_{\tau_t}, t \geq 0)$ est une martingale associée à $(X_t, t \geq 0)$. Nous étudions trois méthodes de plongements de Skorokhod pour lesquelles ce principe peut s'appliquer dans certains cas particuliers.

- Nous regardons tout d'abord le plongement de Hall-Breiman, grâce auquel nous associons une martingale à des peacocks de la forme $(A_t X, t \geq 0)$ où X est une v.a. centrée et $(A_t, t \geq 0)$ un processus stochastiquement croissant indépendant de X . Notons que ce plongement est randomisé, c'est-à-dire que le temps d'arrêt τ ainsi construit n'appartient pas à la filtration du mouvement brownien, mais à une filtration plus grosse.
- Puis nous nous intéressons au plongement de Bass, qui permet d'associer une martingale à un peacock de la forme $(\varphi(B_t), t \geq 0)$ pour φ une fonction croissante impaire. Contrairement au plongement de Hall-Breiman, ce plongement-ci n'est pas randomisé.
- Finalement, nous étudions le plongement d'Azéma-Yor, qui permet, par exemple, d'associer une martingale à des peacocks de la forme $(\phi(t, X), t \geq 0)$ lorsque X est une v.a. log-concave. Comme pour le plongement de Bass, il s'agit d'un plongement non randomisé.

Pour chacun de ces plongements, une attention particulière est portée à la recherche de

martingales $(M_t, t \geq 0)$ associées à $(\sqrt{t}X, t \geq 0)$ pour X une v.a. intégrable et centrée. Nous verrons que la méthode de Hall-Breiman permet d'associer une martingale à tout peacock de la forme $(\sqrt{t}X, t \geq 0)$, tandis que les deux méthodes non-randomisées nécessitent des hypothèses supplémentaires sur la loi de X .

Par ailleurs, il convient de noter que les martingales $(M_t, t \geq 0)$ associées à $(\sqrt{t}X, t \geq 0)$ obtenues par les plongements de Hall-Breiman et d'Azéma-Yor satisfont deux propriétés remarquables :

(a) $(M_t, t \geq 0)$ possède la propriété d'échelle brownienne :

$$\forall c > 0, \quad (M_{c^2 t}, t \geq 0) \stackrel{(\text{loi})}{=} (cM_t, t \geq 0)$$

(b) $(M_t, t \geq 0)$ est un processus markovien (inhomogène).

Les deux premières sections de ce chapitre concernant les plongements de Hall-Breiman et de Bass sont extraits de la monographie "Peacocks and associated martingales", écrite en collaboration avec F. Hirsch, B. Roynette et M. Yor [HPRY11b].

Les résultats concernant le plongement d'Azéma-Yor appliqué au peacock $(\sqrt{t}X, t \geq 0)$ sont eux extraits de l'article "Constructing self-similar martingales via two Skorokhod embeddings", écrit en collaboration avec ces mêmes auteurs, et qui a été accepté pour publication dans le Séminaire de Probabilités [HPRY11a].

Première partie

Pénalisations

Chapitre 1

Pénalisation d'une diffusion récurrente nulle

Dans le cadre des pénalisations browniennes, Najnudel, Roynette et Yor ont exhibé dans [NRY09] une mesure universelle σ -finie $\mathcal{W}$ qui permet de rendre compte de toute une classe de pénalisations, et de retrouver ainsi un grand nombre de résultats présentés dans [RVY06]. La construction d'une telle mesure a ensuite été généralisée dans plusieurs directions :

- aux processus de Lévy symétriques α -stables, dans [YYY09]. Les auteurs obtiennent alors également des résultats de pénalisation par le temps local et des intégrales de type Feynman-Kac.
- aux diffusions récurrentes nulles, dans [NRY09, Chapitre 3].
- aux chaînes de Markov, dans [NRY09, Chapitre 4].

Nous reprenons ici et étudions la construction de $\mathcal{W}$ dans le cadre des diffusions récurrentes nulles, dans un premier temps à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, puis dans $\mathbb{R}$. Nous obtenons alors des résultats de pénalisation, généralisant ainsi les travaux de Salminen et Vallois [SV09] et de Najnudel, Roynette et Yor [NRY09].

1.1 Introduction

1.1.1 Cadre et notations

On considère une diffusion linéaire régulière récurrente nulle $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, réfléchie en 0. On suppose $(X_t, t \geq 0)$ définie sur l'espace canonique $(\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), (\mathcal{F}_t, t \geq 0), \mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t, (\mathbb{P}_x, x \geq 0))$. On note s sa fonction d'échelle, supposée strictement croissante, de classe $\mathcal{C}^1$ et nulle en 0, et $m(dx) = \rho(x)dx$ sa mesure de vitesse, que l'on suppose absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. $(X_t, t \geq 0)$ admet une densité de transition $q(t, x, y)$ par rapport à m continue en ses 3 variables et symétrique en x et y . On introduit alors son noyau résolvant :

$$u_\lambda(x, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} q(t, x, y) dt. \quad (1.1)$$

On note également $(L_t^a, t \geq 0)$ son temps local en a , avec la renormalisation

$$L_t^a := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{m([a, a + \varepsilon])} \int_0^t 1_{[a, a + \varepsilon[}(X_s) ds$$

et $(\tau_l^{(a)}, l \geq 0)$ l'inverse continu à droite de $(L_t^a, t \geq 0)$:

$$\tau_l^{(a)} := \inf\{t \geq 0; L_t^a > l\}.$$

$(X_t, t \geq 0)$ étant un processus markovien, $(\tau_l^{(a)}, l \geq 0)$ est un subordonateur. On dispose ainsi des relations classiques suivantes :

$$\mathbb{E}_x [e^{-\lambda T_a}] = \frac{u_\lambda(a, x)}{u_\lambda(a, a)} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}_a [e^{-\lambda \tau_l^{(a)}}] = \exp(-l/u_\lambda(a, a)), \quad (1.2)$$

où $T_a := \inf\{u \geq 0; X_u = a\}$ correspond au premier temps d'atteinte du niveau a par $(X_t, t \geq 0)$. La propriété de Markov implique alors :

$$\mathbb{E}_x [e^{-\lambda \tau_l^{(a)}}] = \frac{u_\lambda(a, x)}{u_\lambda(a, a)} \exp(-l/u_\lambda(a, a)). \quad (1.3)$$

Pour un résumé des principaux résultats concernant les diffusions linéaires, on pourra se référer au Chapitre II de l'ouvrage de A.N. Borodin et P. Salminen [BS02].

1.1.2 Généralités sur la théorie de Krein

Nous rappelons ici quelques résultats généraux concernant la théorie de Krein, que l'on peut trouver par exemple dans [KW82].

On note $\mathcal{G}$ le générateur infinitésimal de $(X_t, t \geq 0)$, défini par $\mathcal{G} := \frac{\partial^2}{\partial m \partial s} = \frac{d^2}{\rho(x) dx s'(x) dx}$. Introduisons alors, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, les 2 fonctions propres Φ et Ψ solutions de :

$$\begin{cases} \mathcal{G}\Phi(\cdot, \lambda) = \lambda\Phi(\cdot, \lambda) \text{ sur } [0, +\infty[\\ \Phi(0, \lambda) = 1 \text{ et } \Phi'(0, \lambda) = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathcal{G}\Psi(\cdot, \lambda) = \lambda\Psi(\cdot, \lambda) \text{ sur } [0, +\infty[\\ \Psi(0, \lambda) = 0 \text{ et } \Psi'(0, \lambda) = 1. \end{cases} \quad (1.4)$$

(1.4) se réécrit, en appliquant le théorème de Fubini :

$$\begin{cases} \Phi(x, \lambda) = 1 + \lambda \int_0^x s'(y) dy \int_0^y \Phi(u, \lambda) \rho(u) du = 1 + \lambda \int_0^x (s(x) - s(u)) \Phi(u, \lambda) \rho(u) du \\ \Psi(x, \lambda) = s(x) + \lambda \int_0^x s'(y) dy \int_0^y \Psi(u, \lambda) \rho(u) du = s(x) + \lambda \int_0^x (s(x) - s(u)) \Psi(u, \lambda) \rho(u) du, \end{cases}$$

où $x \in [0, +\infty[$. Φ et Ψ sont des fonctions entières en la variable λ , et dérivables en x sur $[0, +\infty[$ du fait que m n'ait pas d'atomes. Le noyau résolvant s'exprime à l'aide de ces fonctions sous la forme :

$$u_\lambda(x, y) = \Phi(x, \lambda) (u_\lambda(0, 0) \Phi(y, \lambda) - \Psi(y, \lambda)) \quad \text{pour } x \leq y,$$

où $u_\lambda(0, 0)$ est donnée par la formule :

$$u_\lambda(0, 0) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\Phi^2(x, \lambda)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Psi'(x, \lambda)}{\Phi'(x, \lambda)},$$

les dérivées étant prises par rapport à la variable x . C'est le résultat majeur de la théorie de Krein, à savoir l'existence d'une correspondance bijective entre l'ensemble des mesures $x \mapsto m([0, x])$ croissante, continue à droite, et l'ensemble des fonctions $u_\lambda(0, 0)$ admettant

la représentation : $u_\lambda(0, 0) = c + \int_0^{+\infty} \frac{d\sigma(\xi)}{\lambda + \xi}$ où $c := \inf\{x > 0; m([0, x]) > 0\}$ et σ est une

mesure borélienne positive sur $[0, +\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} \frac{d\sigma(\xi)}{1 + \xi} < +\infty$.

Lemme 1.1. *On suppose que m est strictement positive sur un voisinage de 0, et soit ν la mesure de Lévy du subordonateur $(\tau_l, l \geq 0)$. Alors :*

$$\frac{1}{\lambda u_\lambda(0, 0)} = \int_0^\infty e^{-\lambda u} \nu([u, +\infty[) du.$$

Démonstration.

On note $m^{-1}(x) := \inf\{u \geq 0; m([0, u]) > x\}$ l'inverse continu à droite de m . D'après la correspondance de Krein (voir [DM76, Section 6.8]), si

$$m \longleftrightarrow u_\lambda(0, 0) = m^{-1}(0) + \int_{0-}^{+\infty} \frac{d\sigma(\xi)}{\lambda + \xi} \quad \text{avec} \quad \int_{0-}^{+\infty} \frac{d\sigma(\xi)}{1 + \xi} < \infty$$

alors

$$m^{-1} \longleftrightarrow \frac{1}{\lambda u_\lambda(0, 0)} = m(\{0\}) + \int_{0-}^{+\infty} \frac{d\mu(\xi)}{\lambda + \xi} \quad \text{avec} \quad \int_{0-}^{+\infty} \frac{d\mu(\xi)}{1 + \xi} < \infty.$$

Ici, comme m admet une densité strictement positive au voisinage de 0, $m(\{0\}) = m^{-1}(0) = 0$. Ecrivons alors, à l'aide de Fubini :

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_\lambda(0, 0)} &= \int_{0-}^{+\infty} \frac{\lambda}{\lambda + \xi} d\mu(\xi) = \mu(\{0\}) + \int_0^{+\infty} \xi \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\lambda + \xi} \right) d\mu(\xi) \\ &= \mu(\{0\}) + \int_0^{+\infty} \xi \int_0^{+\infty} \left(e^{-\xi u} - e^{-(\lambda + \xi)u} \right) du d\mu(\xi) \\ &= \mu(\{0\}) + \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) \int_0^{+\infty} \xi e^{-\xi u} d\mu(\xi) du \\ &= \mu(\{0\}) + \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x}) n(u) du. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Par ailleurs, comme $(X_t, t \geq 0)$ est récurrente, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} u_\lambda(0, 0) = +\infty$. Ainsi, laissant tendre λ vers 0 dans (1.5), on obtient, en appliquant le théorème de convergence monotone, $\mu(\{0\}) = 0$. D'après (1.2), et la formule de Lévy-Khinchine, $n(u) = \int_0^{+\infty} \xi e^{-\xi u} d\mu(\xi)$ est donc la densité de la mesure de Lévy ν . Remarquons que n s'écrit comme une transformée de Laplace ; ce résultat, dû à Knight [Kni78], reste vrai plus généralement dans le cadre des quasi-diffusions. Nous allons maintenant réécrire la relation (1.5) différemment. Soit $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^\infty (1 - e^{-\lambda u}) n(u) du &= [(e^{-\lambda u} - 1) \nu([u, +\infty[)]_\varepsilon]^{+\infty} + \int_\varepsilon^\infty \lambda e^{-\lambda u} \nu([u, +\infty[) du \\ &= (1 - e^{-\lambda \varepsilon}) \nu([\varepsilon, +\infty[) + \int_\varepsilon^\infty \lambda e^{-\lambda u} \nu([u, +\infty[) du \end{aligned}$$

Les deux termes étant positifs, on peut en déduire en laissant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{\lambda u_\lambda(0, 0)} = \int_0^\infty e^{-\lambda u} \nu([u, +\infty[) du + \ell, \tag{1.6}$$

où $\ell := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \nu([\varepsilon, +\infty[)$, et il reste à montrer que $\ell = 0$. Or, puisque ν est la mesure de Lévy d'un subordonateur, on a $\int_0^1 u \nu(du) < \infty$. Supposons alors $\ell \neq 0$. Dans ce cas,

$\nu([\varepsilon, +\infty[) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ell}{\varepsilon}$ et :

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 u \nu(du) &= [-u \nu([u, 1])]_{\varepsilon}^1 + \int_{\varepsilon}^1 \nu([u, 1]) du \\ &= \varepsilon \nu([\varepsilon, 1]) + \int_{\varepsilon}^1 \nu([u, 1]) du \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty, \end{aligned}$$

puisque $\varepsilon \mapsto \nu([\varepsilon, 1])$ n'est pas intégrable au voisinage de 0, ce qui contredit le fait que ν soit la mesure de Lévy d'un subordonateur. Par conséquent $\ell = 0$, ce qui achève la preuve du Lemme 1.1

□

Remarque 1.2. Plus généralement, puisque $(X_t, t \geq 0)$ est une diffusion récurrente dont la mesure de vitesse n'a pas d'atome, on déduit de (1.2) et de la formule de Lévy-Khinchine que pour tout $a \geq 0$:

$$\frac{1}{u_{\lambda}(a, a)} = \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda u}) \nu^{(a)}(du).$$

Ainsi, en reprenant les calculs précédents, on obtient :

$$\frac{1}{\lambda u_{\lambda}(a, a)} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} \nu^{(a)}([u, +\infty[) du.$$

Nous pouvons à présent énoncer une version simplifiée des Théorèmes de pénalisation 1.19 et 1.21 de la Section 1.4.

1.1.3 Enoncé simplifié

Hypothèse 1.3. On suppose que la mesure de Lévy ν du subordonateur $(\tau_l, l \geq 0)$ satisfait :

$$\nu([t, +\infty[) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\eta(t)}{t^{\beta}}$$

où $\beta \in]0, 1[$ et η est une fonction à variation lente, i.e. $\left(\forall x \in]0, +\infty[, \frac{\eta(tx)}{\eta(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1 \right)$.

L'intérêt d'une telle hypothèse apparaît clairement dans le théorème suivant, que nous utiliserons à plusieurs reprises par la suite (voir W. Feller [Fel71, Chapitre XIII.5, p.446], ou [BGT89, Section 1.7]) :

Théorème 1.4 (Théorème Taubérien). Soit $p \in]0, +\infty[$. Si f est monotone sur un intervalle de la forme $]x_0, +\infty[$, alors on a l'équivalence suivante :

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} f(x) dx \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\lambda^p} \eta\left(\frac{1}{\lambda}\right) \iff f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\Gamma(p)} x^{p-1} \eta(x), \quad (1.7)$$

où η est une fonction à variation lente.

Ainsi, l'hypothèse $\nu([t, +\infty[) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\eta(t)}{t^{\beta}}$ est équivalente à :

$$\frac{1}{\lambda u_{\lambda}(0, 0)} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \nu([t, +\infty[) dt \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \frac{\Gamma(\beta) \eta\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\lambda^{1-\beta}}.$$

Notons que l'on ne peut s'affranchir ici de la restriction $\beta \in]0, 1[$.

Théorème 1.5. *On suppose l'Hypothèse 1.3 satisfaite.*

Soit $a \geq 0$, $g_a^{(t)} := \sup\{u \leq t; X_u = a\}$ et $(F_t, t \geq 0)$ un processus prévisible et positif tel que :

i) $(F_t, t \geq 0)$ est décroissant $\mathbb{P}$ -p.s.

ii) $0 < \mathbb{E}_0 \left[\int_0^{+\infty} F_u dL_u^a \right] < \infty$.

Alors,

1) On a l'équivalent :

$$\mathbb{E}_0 \left[F_{g_a^{(t)}} \right]_{t \rightarrow +\infty} \sim \mathbb{E}_0 \left[\int_0^{+\infty} F_u dL_u^a \right] \nu([t, +\infty[).$$

2) Le principe de pénalisation est satisfait pour la fonctionnelle $(F_{g_a^{(t)}}, t \geq 0)$:

$$\forall u > 0, \forall \Lambda_u \in \mathcal{F}_u, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}_0 \left[1_{\Lambda_u} F_{g_a^{(t)}} \right]}{\mathbb{E}_0 \left[F_{g_a^{(t)}} \right]} = \mathbb{E}_0 \left[\frac{M_u(F_{g_a})}{\mathbb{E}_0 \left[\int_0^{+\infty} F_u dL_u^a \right]} 1_{\Lambda_u} \right],$$

où la martingale $(M_u(F_{g_a}), u \geq 0)$ est donnée par :

$$M_u(F_{g_a}) = F_{g_a^{(u)}}(s(X_u) - s(a))^+ + \mathbb{E}_0 \left[\int_u^{+\infty} F_s dL_s^a | \mathcal{F}_u \right].$$

3) La relation de faible absolue continuité

$$\mathbb{P}_{0|\mathcal{F}_t}^{(F)} = \frac{M_t(F_{g_a})}{\mathbb{E}_0 \left[\int_0^{+\infty} F_u dL_u^a \right]} \cdot \mathbb{P}_{0|\mathcal{F}_t}$$

induit une probabilité $\mathbb{P}_0^{(F)}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ sous laquelle g_a est fini p.s. et le processus $(X_{g_a+u}, u \geq 0)$ est transient et tend vers $+\infty$.

1.1.4 Quelques exemples

Soit h une fonction positive, décroissante et à support compact sur $\mathbb{R}^+$.

- On prend $(F_t, t \geq 0) = (h(L_t^a), t \geq 0)$.

Alors $\mathbb{E}_0 \left[\int_0^{+\infty} h(L_s^a) dL_s^a \right] = \int_0^{+\infty} h(u) du < \infty$ et par conséquent, comme $L_{g_a^{(t)}}^a = L_t^a$:

$$\mathbb{E}_0 [h(L_t^a)]_{t \rightarrow +\infty} \sim \nu([t, +\infty[) \int_0^{+\infty} h(u) du,$$

et

$$M_u(L_{g_a}^a) = h(L_u^a)(s(X_u) - s(a))^+ + \int_{L_u^a}^{+\infty} h(l) dl.$$

- On prend $(F_t, t \geq 0) = (h(t), t \geq 0)$.

Alors $\mathbb{E}_0 \left[\int_0^{+\infty} h(u) dL_u^a \right] = \int_0^{+\infty} h(u) \mathbb{E}_0 [dL_u^a] = \int_0^{+\infty} h(u) q(u, 0, a) du < \infty$ et par conséquent :

$$\mathbb{E}_0 [h(g_a^{(t)})]_{t \rightarrow +\infty} \sim \nu([t, +\infty[) \int_0^{+\infty} h(u) q(u, 0, a) du,$$

et

$$M_u(g_a) = h(g_a^{(u)})(s(X_u) - s(a))^+ + \int_0^{+\infty} h(v+u)q(v, X_u, a)dv.$$

- On prend $(F_t, t \geq 0) = (h(S_t), t \geq 0)$ où $S_t := \sup_{s \leq t} X_s$:

$$\mathbb{E}_0 \left[h(S_{g_a^{(t)}}) \right]_{t \rightarrow +\infty} \sim \nu([t, +\infty[) \mathbb{E}_0 \left[\int_0^{+\infty} h(S_u) dL_u^a \right].$$

- On prend $(F_t, t \geq 0) = h \left(\int_0^t f(X_s) ds \right)$ où $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction borélienne :

$$\mathbb{E}_0 \left[h \left(\int_0^{g_a^{(t)}} f(X_s) ds \right) \right]_{t \rightarrow +\infty} \sim \nu([t, +\infty[) \mathbb{E}_0 \left[\int_0^{+\infty} h \left(\int_0^u f(X_s) ds \right) dL_u^a \right].$$

Pour prouver ce théorème, nous allons nous appuyer sur la construction d'une mesure σ -finie universelle $\mathcal{W}$ similaire à [NRY09]. Le reste de ce chapitre, dédié à cette construction et à son application à notre problème de pénalisation, se décompose comme suit :

- Dans la Section 1.2, nous définissons (et étudions) une famille de probabilités $\left(\mathbb{P}_x^{(\lambda, a)} \right)_{x, \lambda, a \geq 0}$

qui va servir d'intermédiaire dans la définition de $\mathcal{W}$.

- Dans la Section 1.3, nous présentons la construction de la mesure $\mathcal{W}$ annoncée, ainsi que quelques-unes de ses propriétés.

- La Section 1.4 traite de la pénalisation à proprement parler, et donne en particulier la preuve du Théorème de pénalisation 1.5 présenté précédemment.

- Enfin, dans la Section 1.5, nous donnons l'équivalent de la mesure $\mathcal{W}$ dans le cas de diffusions à valeurs dans $\mathbb{R}$ tout entier, et étudions l'exemple de la pénalisation d'une telle diffusion par une fonction décroissante de $A_t := \int_0^t 1_{\{X_s > 0\}} ds$.

1.2 La famille de probabilités $\left(\mathbb{P}_x^{(\lambda, a)} \right)_{x, \lambda, a \geq 0}$

1.2.1 Définition

Considérons le processus $(N_t^{(a)} := (s(X_t) - s(a))^+ - L_t^a, t \geq 0)$. $(N_t^{(a)}, t \geq 0)$ est une martingale dans la filtration $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$. En effet, en appliquant la propriété de Markov à la diffusion $(X_t, t \geq 0)$, il vient :

$$\mathbb{E}_0 \left[N_{t+s}^{(a)} | \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E}_{X_s} \left[(s(X_t) - s(a))^+ \right] - L_s^a - \mathbb{E}_{X_s} [L_t^a].$$

Posons $x = X_s$ et montrons que :

$$(s(x) - s(a))^+ = \mathbb{E}_x \left[(s(X_t) - s(a))^+ \right] - \mathbb{E}_x [L_t^a], \quad (1.8)$$

relation que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\int_0^{+\infty} (s(y) - s(a))^+ q(t, x, y) m(dy) = \int_0^t q(u, x, a) du + (s(x) - s(a))^+.$$

Cette égalité est vérifiée en $t = 0$. Il suffit donc de montrer que les dérivées en t des deux membres sont égales. En utilisant le fait que, pour tout $y \geq 0$, $(t, x) \mapsto q(t, x, y)$ soit solution

de l'équation parabolique $\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \mathcal{G}u(t, x)$, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{+\infty} (s(y) - s(a))^+ q(t, x, y) \rho(y) dy \\ &= \int_a^{+\infty} \left(\int_a^y s'(z) dz \right) \frac{\partial^2 q}{\partial y \partial s(y)}(t, x, y) dy \\ &= \int_a^{+\infty} dz s'(z) \int_z^{+\infty} \frac{\partial^2 q}{\partial y \partial s(y)}(t, x, y) dy \\ &= \int_a^{+\infty} dz s'(z) \left[\frac{\partial q}{\partial s(y)}(t, x, y) \right]_z^{+\infty} \\ &= \int_a^{+\infty} \frac{\partial q}{\partial z}(t, x, z) dz \quad \left(\text{car } \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\partial q}{\partial s(y)}(t, x, y) = 0, \text{ cf. [BS02, p.19]} \right) \\ &= q(t, x, a). \end{aligned}$$

Par conséquent, $(N_t^{(a)}, t \geq 0)$ est une martingale, et l'on déduit, en appliquant la formule d'Itô, que le processus

$$M_t^{(\lambda,a)} := \left(1 + \frac{\lambda}{2}(s(X_t) - s(a))^+ \right) e^{-\frac{\lambda}{2}L_t^a}, \quad t \geq 0$$

est une $(\mathcal{F}_t)$ -martingale strictement positive qui converge vers 0 p.s.

Définition 1.6. On note $\mathbb{P}_x^{(\lambda,a)}$ la probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ induite par la relation :

$$\mathbb{P}_{x|\mathcal{F}_t}^{(\lambda,a)} := \frac{M_t^{(\lambda,a)}}{1 + \frac{\lambda}{2}(s(x) - s(a))^+} \cdot \mathbb{P}_{x|\mathcal{F}_t}.$$

Proposition 1.7. Sous $\mathbb{P}_x^{(\lambda,a)}$, la v.a. L_∞^a est finie p.s. et sa loi est donnée par :

$$\mathbb{P}_x^{(\lambda,a)}(L_\infty^a \in dl) = \frac{\lambda}{2 + \lambda(s(x) - s(a))^+} \left((s(x) - s(a))^+ \delta_0(dl) + e^{-\frac{\lambda}{2}l} dl \right)$$

En conséquence :

- Si $\alpha < \lambda$, $\mathbb{E}_x^{(\lambda,a)} \left[e^{\frac{\alpha}{2}L_\infty^a} \right] = \frac{\lambda}{2 + \lambda(s(x) - s(a))^+} \left((s(x) - s(a))^+ + \frac{2}{\lambda - \alpha} \right) < \infty$.
- Si $\alpha \geq \lambda$, $\mathbb{E}_x^{(\lambda,a)} \left[e^{\frac{\alpha}{2}L_\infty^a} \right] = \infty$.

Démonstration.

La preuve repose simplement sur le théorème d'arrêt de Doob. En effet :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\lambda}{2}(s(x) - s(a))^+ \right) \mathbb{P}_x^{(\lambda,a)}(L_t^a > l) &= \mathbb{E}_x \left[M_t^{(\lambda,a)} 1_{\{\tau_l^{(a)} < t\}} \right] = \mathbb{E}_x \left[M_{\tau_l^{(a)}}^{(\lambda,a)} 1_{\{\tau_l^{(a)} < t\}} \right] \\ &= e^{-\frac{\lambda}{2}l} \mathbb{P}_x(\tau_l^{(a)} < t) \\ &\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} e^{-\frac{\lambda}{2}l} \end{aligned}$$

puisque $(X_t, t \geq 0)$ est une diffusion récurrente sous $\mathbb{P}_x$. □

Nous donnons à présent une représentation intégrale de $\mathbb{P}_x^{(\lambda,a)}$. Pour ce faire, il nous faut introduire au préalable quelques notations.

1.2.2 Notations

- On définit $(\widehat{X}_t, t \geq 0)$ la diffusion $(X_t, t \geq 0)$ tuée en a :

$$\widehat{X}_t := \begin{cases} X_t & t < T_a, \\ \partial & t \geq T_a. \end{cases}$$

où ∂ désigne un point cimetière. On note $\widehat{q}(t, x, y)$ sa densité par rapport à m :

$$\widehat{\mathbb{P}}_x(\widehat{X}_t \in dy) = \widehat{q}(t, x, y)m(dy) = \mathbb{P}_x(X_t \in dy; t < T_a).$$

- On introduit également $(X_t^\uparrow, t \geq 0)$ la diffusion $(\widehat{X}_t, t \geq 0)$ conditionn e à ne pas toucher a , en suivant la construction de [SVY07]. Pour $x > a$ et F_t une v.a. positive, $\mathcal{F}_t$ -mesurable et bornée :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x^\uparrow[F_t] &= \lim_{b \nearrow +\infty} \mathbb{E}_x[F_t 1_{\{t < T_b\}} | T_b < T_a] \\ &= \lim_{b \nearrow +\infty} \frac{\mathbb{E}_x[F_t 1_{\{t < T_b < T_a\}}]}{\mathbb{P}_x(T_b < T_a)} \\ &= \lim_{b \nearrow +\infty} \frac{\mathbb{E}_x[F_t 1_{\{t < T_b \wedge T_a\}}] \mathbb{P}_x(T_b < T_a | \mathcal{F}_t)]}{\mathbb{P}_x(T_b < T_a)} \\ &= \lim_{b \nearrow +\infty} \frac{\mathbb{E}_x[F_t (s(X_t) - s(a)) 1_{\{t < T_b \wedge T_a\}}]}{s(x) - s(a)} \\ &= \frac{1}{s(x) - s(a)} \mathbb{E}_x[F_t (s(X_t) - s(a)) 1_{\{t < T_a\}}] \end{aligned}$$

en appliquant le théorème de convergence monotone. Ainsi, en prenant $F_t = f(X_t)$ avec f une fonction borélienne bornée, on obtient en particulier, pour $x, y > a$:

$$q^\uparrow(t, x, y) = \frac{\widehat{q}(t, x, y)}{(s(x) - s(a))(s(y) - s(a))} \quad \text{et} \quad m^\uparrow(dy) = (s(y) - s(a))^2 m(dy). \quad (1.9)$$

Laissant tendre x vers a , il vient :

$$q^\uparrow(t, a, y) = \frac{n_{y,a}(t)}{s(y) - s(a)} \quad \text{où} \quad \mathbb{P}_y(T_a \in dt) =: n_{y,a}(t)dt. \quad (1.10)$$

- On définit enfin $(X_t^{x,u,y}, t \geq 0)$ le pont de X de longueur u allant de x à y . Sa loi peut être vue comme une h -transformée, pour $v < u$:

$$\mathbb{E}^{x,u,y}[F_v] = \mathbb{E}_x \left[\frac{q(u-v, X_v, y)}{q(u, x, y)} F_v \right]. \quad (1.11)$$

Notons que qu'il ressort de cette égalité que sous $\mathbb{P}$ le processus $(M_v := q(u-v, X_v, y), v < u)$ est une martingale.

Remarque 1.8. On peut vérifier directement que $q^\uparrow(t, a, y)m^\uparrow(dy)$ est bien une densité sur $\{y > a\}$. En effet, on a :

$$\int_a^{+\infty} q^\uparrow(t, a, y)m^\uparrow(dy) = \int_a^{+\infty} n_{y,a}(t)(s(y) - s(a))m(dy).$$

Prenant la transformée de Laplace du membre de droite, il vient :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \int_a^{+\infty} n_{y,a}(t)(s(y) - s(a))m(dy)dt \\
&= \int_a^{+\infty} \mathbb{E}_y [e^{-\lambda T_a}] (s(y) - s(a))m(dy) \quad (\text{en appliquant Fubini}) \\
&= \int_a^{+\infty} \frac{u_\lambda(y,a)}{u_\lambda(a,a)} (s(y) - s(a))m(dy) \quad (\text{d'après (1.2)}) \\
&= \frac{1}{u_\lambda(a,a)} \int_a^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} q(u,y,a)du \right) (s(y) - s(a))m(dy) \\
&= \frac{1}{u_\lambda(a,a)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} \mathbb{E}_a [(s(X_u) - s(a))^+] du \quad (\text{en appliquant à nouveau Fubini}) \\
&= \frac{1}{u_\lambda(a,a)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} \mathbb{E}_a [L_u^a] du \quad (\text{d'après (1.8)}) \\
&= \frac{1}{u_\lambda(a,a)} \left(\left[-\frac{e^{-\lambda u}}{\lambda} \int_0^u q(v,a,a)dv \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda u}}{\lambda} q(u,a,a)du \right) \\
&= \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Par injectivité de la transformée de Laplace, il s'ensuit que $\int_a^{+\infty} q^\uparrow(t,a,y)m^\uparrow(dy) = 1$.

1.2.3 Quelques lemmes

Lemme 1.9. La loi de $g_a^{(t)} := \sup\{u \leq t; X_u = a\}$ est donnée par :

$$\mathbb{P}_x(g_a^{(t)} \in du) = \mathbb{P}_x(T_a > t)\delta_0(du) + q(u,a,x)\nu^{(a)}([t-u, +\infty[)du. \quad (1.12)$$

Par ailleurs, sur l'évènement $\{X_t > a\}$, la densité du couple $(g_a^{(t)}, X_t)$ s'écrit :

$$\mathbb{P}_x(g_a^{(t)} \in du, X_t \in dy) = \mathbb{P}_x(T_a > t, X_t \in dy)\delta_0(du) + \frac{q(u,a,x)}{s(y) - s(a)} \mathbb{P}_a^\uparrow(X_{t-u} \in dy)du \quad (y > a) \quad (1.13)$$

Démonstration.

Nous adaptons la preuve de [Sal97]. Pour $u \geq 0$, on écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(g_a^{(t)} > u, X_t \in dy) &= \mathbb{P}_x(g_a^{(t)} > u | X_t = y) q(t,x,y)m(dy) \\
&= \mathbb{P}^{x,t,y}(g_a^{(t)} > u) q(t,x,y)m(dy) \\
&= \mathbb{P}^{y,t,x}(T_a < t-u) q(t,x,y)m(dy) \quad (\text{par retournement du temps}) \\
&= \mathbb{E}_y \left[\frac{q(t-T_a,a,x)}{q(t,y,x)} 1_{\{T_a < t-u\}} \right] q(t,x,y)m(dy) \quad (\text{d'après (1.11)}) \\
&= \int_0^{t-u} q(t-v,a,x)n_{y,a}(v)dv m(dy).
\end{aligned}$$

On dérive alors cette relation par rapport à u :

$$\mathbb{P}_x(g_a^{(t)} \in du, X_t \in dy) = q(u,a,x)n_{y,a}(t-u)m(dy)1_{\{0 < u \leq t\}}du. \quad (1.14)$$

Ainsi, si $y > a$, (1.14) se réécrit d'après (1.10) :

$$\mathbb{P}_x \left(g_a^{(t)} \in du, X_t \in dy \right) = \mathbb{P}_x \left(g_a^{(t)} = 0, X_t \in dy \right) \delta_0(du) + \frac{q(u, a, x)}{s(y) - s(a)} \mathbb{P}_a^\uparrow (X_{t-u} \in dy) du \quad (y > a),$$

et l'on obtient (1.13) en remarquant que $\{g_a^{(t)} = 0\} = \{T_a > t\}$. A présent, en intégrant (1.14) par rapport à y , la loi de $g_a^{(t)}$ s'exprime :

$$\mathbb{P}_x \left(g_a^{(t)} \in du \right) = \mathbb{P}_x(T_a > t) \delta_0(du) + q(u, a, x) \left(\int_0^{+\infty} n_{y,a}(t-u) m(dy) \right) du$$

Pour simplifier l'expression $\int_0^{+\infty} n_{y,a}(t-u) m(dy)$, nous allons calculer sa transformée de Laplace en t :

$$\begin{aligned} \int_u^{+\infty} e^{-\lambda t} \int_0^{+\infty} n_{y,a}(t-u) m(dy) dt &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda v} n_{y,a}(v) dv m(dy) \\ &= e^{-\lambda u} \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_y [e^{-\lambda T_a}] m(dy) \\ &= \frac{e^{-\lambda u}}{\lambda u_\lambda(a, a)} \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(u+v)} \nu^{(a)}([v, +\infty[) dv \\ &= \int_u^{+\infty} e^{-\lambda t} \nu^{(a)}([t-u, +\infty[) dt, \end{aligned} \tag{1.15}$$

et le résultat s'en déduit par injectivité de la transformée de Laplace. $\square$

Remarque 1.10. On peut à nouveau vérifier directement que l'expression (1.12) fournit bien une densité. En effet, toujours en calculant la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} dt e^{-\lambda t} \int_0^t \left(\mathbb{P}_x(T_a > t) \delta_0(du) + q(u, a, x) \nu^{(a)}([t-u, +\infty[) du \right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{P}_x(T_a > t) dt + \int_0^{+\infty} du q(u, a, x) \int_u^{+\infty} e^{-\lambda t} \nu^{(a)}([t-u, +\infty[) dt \\ &= \frac{1}{\lambda} - \frac{\mathbb{E}_x[e^{-\lambda T_a}]}{\lambda} + \int_0^{+\infty} du q(u, a, x) \frac{e^{-\lambda u}}{\lambda u_\lambda(a, a)} \quad (d'après (1.15)) \\ &= \frac{1}{\lambda} - \frac{u_\lambda(a, x)}{\lambda u_\lambda(a, a)} + \frac{u_\lambda(a, x)}{\lambda u_\lambda(a, a)} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Exemple 1.11.

Si $(X_t, t \geq 0) = (|B_t|, t \geq 0)$ est un mouvement brownien réfléchi en 0, son noyau résolvant s'écrit :

$$u_\lambda(a, a) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} e^{-a\sqrt{2\lambda}} \cosh(a\sqrt{2\lambda}).$$

D'après [EMOT54, p.258, formule (34)] :

$$\frac{\sinh(a\sqrt{2\lambda})}{\sqrt{2\lambda} \cosh(a\sqrt{2\lambda})} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} \frac{a}{\sqrt{2\pi u}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{-\frac{2a^2}{u} n^2} du.$$

Ainsi, on utilisant la relation :

$$\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} \frac{du}{\sqrt{2\pi u}} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \frac{e^{a\sqrt{2\lambda}} + e^{-a\sqrt{2\lambda}}}{2 \cosh(a\sqrt{2\lambda})}$$

on obtient :

$$\mathbb{P}_0 \left(g_a^{(t)} \in du \right) = \mathbb{P}_0(T_a > t) \delta_0(du) + \frac{1}{\pi \sqrt{u(t-u)}} e^{-\frac{a^2}{2t}} \left(1 + a \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{-\frac{2a^2}{t-u} n^2} \right) du.$$

Notons que pour $a = 0$, on retrouve bien la loi de l'arc sinus.

On s'intéresse à présent aux pré et post $g_a^{(t)}$ -processus :

Lemme 1.12. *On se place sous $\mathbb{P}_x$. Alors :*

- i) *Conditionnellement à $g_a^{(t)}$, les processus $(X_s, s \leq g_a^{(t)})$ et $(X_{g_a^{(t)}+s}, s \leq t - g_a^{(t)})$ sont indépendants.*
- ii) *Conditionnellement à $g_a^{(t)} = u$,*

$$(X_s, s \leq u) \stackrel{(loi)}{=} (X_s^{x,u,a}, s \leq u).$$

- iii) *Conditionnellement à $g_a^{(t)} = u$ et $X_t = y > a$,*

$$(X_{u+s}, s \leq t - u) \stackrel{(loi)}{=} (X_s^{\uparrow a, t-u, y}, s \leq t - u).$$

Démonstration.

Le Point (i) résulte de la Proposition 5.5 de [Mil77] appliquée à la diffusion

$$X_s^{(t)} := \begin{cases} X_s & s < t \\ \partial & s \geq t \end{cases}$$

de sorte que $\xi := \inf\{s \geq 0; X_s^{(t)} \notin \mathbb{R}^+\} = t$.

Pour le Point (ii), on peut écrire pour $t_1 \leq \dots \leq t_n < t$, en suivant [Sal97] :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_x \left(X_{t_1} \in dx_1, \dots, X_{t_n} \in dx_n, t_n < g_a^{(t)} | X_t = y \right) \\ &= \mathbb{P}^{x,t,y} \left(X_{t_1} \in dx_1, \dots, X_{t_n} \in dx_n, t_n < g_a^{(t)} \right) \\ &= \mathbb{P}^{y,t,x} (X_{t-t_1} \in dx_1, \dots, X_{t-t_n} \in dx_n, T_a < t - t_n) \quad (\text{par retournement du temps}) \\ &= \mathbb{E}^{y,t,x} \left[\mathbb{P}_{a,T_a}^{y,t,x} (X_{t-T_a-t_1} \in dx_1, \dots, X_{t-T_a-t_n} \in dx_n, T_a < t - t_n) \right] \\ & \quad (\text{d'après la propriété de Markov}) \\ &= \int_0^{t-t_n} \mathbb{P}_{a,u}^{a,t,x} (X_{t-u-t_1} \in dx_1, \dots, X_{t-u-t_n} \in dx_n) \mathbb{P}^{y,t,x} (T_a \in du) \\ &= \int_0^{t-t_n} \mathbb{P}^{x,t-u,a} (X_{t_1} \in dx_1, \dots, X_{t_n} \in dx_n) \mathbb{P}^{x,t,y} \left(g_a^{(t)} \in du \right) \\ &= \int_{t_n}^t \mathbb{P}^{x,v,a} (X_{t_1} \in dx_1, \dots, X_{t_n} \in dx_n) \mathbb{P}^{x,t,y} \left(g_a^{(t)} \in dv \right). \end{aligned}$$

Enfin pour le Point (iii), d'après [Sal97], conditionnellement à $g_a^{(t)} = u$ et $X_t = y > a$, on a :

$$(X_{u+s}, s \geq t-u) \stackrel{(\text{loi})}{=} \left(\widehat{X}_s^{a, t-u, y}, s \geq t-u \right).$$

Mais, les ponts de $\widehat{X}$ et $X^\uparrow$ ont la même loi. En effet, pour $y, x > a$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{x, t, y} (X_{t_1} \in dx_1, \dots, X_{t_n} \in dx_n) &= \widehat{\mathbb{E}}_x \left[\frac{\widehat{p}(t-t_n, X_{t_n}, y)}{\widehat{p}(t, x, y)} 1_{\{X_{t_1} \in dx_1, \dots, X_{t_n} \in dx_n\}} \right] \quad (\text{d'après (1.11)}) \\ &= \mathbb{E}_x \left[\frac{(s(X_{t_n}) - s(a))p^\uparrow(t-t_n, X_{t_n}, y)}{(s(x) - s(a))p^\uparrow(t, x, y)} 1_{\{X_{t_1} \in dx_1, \dots, X_{t_n} \in dx_n\}} 1_{\{t_n < T_a\}} \right] \\ &= \mathbb{E}_x^\uparrow \left[\frac{p^\uparrow(t-t_n, X_{t_n}, y)}{p^\uparrow(t, x, y)} 1_{\{X_{t_1} \in dx_1, \dots, X_{t_n} \in dx_n\}} \right] \quad (\text{par définition de } \mathbb{P}_x^\uparrow) \\ &= \mathbb{P}^{\uparrow x, t, y} (X_{t_1} \in dx_1, \dots, X_{t_n} \in dx_n). \end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit alors en laissant tendre x vers a . □

1.2.4 Représentation intégrale de $\mathbb{P}_x^{(\lambda, a)}$

On adopte ici les notations de Biane-Yor [BY87]. On désigne par Ω_{loc} l'ensemble des fonctions continues ω à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ définies sur un intervalle $[0, \xi(\omega)] \subset [0, +\infty]$. Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux probabilités, telles que $\mathbb{P}(\xi = +\infty) = 0$. On note $\mathbb{P} \circ \mathbb{Q}$ la mesure image de $\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}$ par l'application de concaténation :

$$\begin{aligned} \circ : \Omega_{\text{loc}} \times \Omega_{\text{loc}} &\longrightarrow \Omega_{\text{loc}} \\ (\omega_1, \omega_2) &\longmapsto \omega_1 \circ \omega_2 \end{aligned}$$

définie par $\xi(\omega_1 \circ \omega_2) = \xi(\omega_1) + \xi(\omega_2)$, et

$$(\omega_1 \circ \omega_2)(t) = \begin{cases} \omega_1(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \xi(\omega_1) \\ \omega_1(\xi(\omega_1)) + \omega_2(t - \xi(\omega_1)) - \omega_2(0) & \text{si } \xi(\omega_1) \leq t \leq \xi(\omega_1) + \xi(\omega_2). \end{cases}$$

Théorème 1.13. $\mathbb{P}_x^{(\lambda, a)}$ admet la représentation intégrale suivante :

$$\mathbb{P}_x^{(\lambda, a)} = \frac{\lambda}{2 + \lambda(s(x) - s(a))^+} \left(\int_0^{+\infty} dt q(t, x, a) e^{-\frac{\lambda}{2} L_t^a} \mathbb{P}^{x, t, a} \circ \mathbb{P}_a^\uparrow + (s(x) - s(a))^+ \mathbb{P}_a^\uparrow \right).$$

En particulier, $\mathbb{P}_x^{(\lambda, a)}(g_a < +\infty) = 1$ et sous $\mathbb{P}_x^{(\lambda, a)}$:

- i) Conditionnellement à g_a , les deux processus $(X_t, t \leq g_a)$ et $(X_{g_a+t}, t \geq 0)$ sont indépendants,
- ii) Conditionnellement à $L_\infty^a = l$, le processus $(X_t, t \leq g_a)$ a même loi que $(X_t, t \leq \tau_l^{(a)})$ sous $\mathbb{P}_x$,
- iii) $(X_{g_a+t}, t \geq 0)$ a même loi que $(X_t, t \geq 0)$ sous $\mathbb{P}_a^\uparrow$.

Démonstration.

Soient F, G et φ trois fonctionnelles boréliennes bornées. En s'appuyant sur les deux Lemmes 1.9 et 1.12 précédents, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x^{(\lambda,a)} \left[F(X_s, s \leq g_a^{(t)}) \varphi(g_a^{(t)}) G(X_{g_a^{(t)}+s}, s \leq t - g_a^{(t)}) \right] &= \mathbb{E}_x \left[F(X_s, s \leq g_a^{(t)}) \varphi(g_a^{(t)}) G(X_{g_a^{(t)}+s}, s \leq t - g_a^{(t)}) \frac{1 + \frac{\lambda}{2}(s(X_t) - s(a))^+}{1 + \frac{\lambda}{2}(s(x) - s(a))^+} e^{-\frac{\lambda}{2} L_t^a} \right] \\ &= \frac{I_1 + I_2}{1 + \frac{\lambda}{2}(s(x) - s(a))^+}.\end{aligned}$$

D'une part : $I_1 = \mathbb{E}_x \left[F(X_s, s \leq g_a^{(t)}) \varphi(g_a^{(t)}) G(X_{g_a^{(t)}+s}, s \leq t - g_a^{(t)}) e^{-\frac{\lambda}{2} L_t^a} \right] \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ par convergence dominée, car $(X_t, t \geq 0)$ est une diffusion récurrente sous $\mathbb{P}_x$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}I_2 &= \frac{\lambda}{2} \int_0^t \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_x \left(g_a^{(t)} \in du, X_t \in dy \right) \mathbb{E}_x \left[F(X_s, s \leq g_a^{(t)}) \varphi(g_a^{(t)}) G(X_{g_a^{(t)}+s}, s \leq t - g_a^{(t)}) (s(X_t) - s(a))^+ e^{-\frac{\lambda}{2} L_u^a} | g_a^{(t)} = u, X_t = y \right] \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_0^t \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_x \left(g_a^{(t)} \in du, X_t \in dy \right) \mathbb{P}^{x,u,a} \left(F(X_s, s \leq u) e^{-\frac{\lambda}{2} L_u^a} \right) \varphi(u) (s(y) - s(a))^+ \mathbb{E}_x \left[G(X_{u+s}, s \leq t - u) | g_a^{(t)} = u, X_t = y \right] \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_0^t \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_x \left(g_a^{(t)} \in du, X_t \in dy \right) \mathbb{P}^{x,u,a} \left(F(X_s, s \leq u) e^{-\frac{\lambda}{2} L_u^a} \right) \varphi(u) (s(y) - s(a)) \mathbb{E}_x \left[G(X_{u+s}, s \leq t - u) | g_a^{(t)} = u, X_t = y \right]\end{aligned}$$

15

On sépare alors les deux cas $g_a^{(t)} = 0$ et $g_a^{(t)} > 0$ à partir de l'expression (1.13). (Notons que l'on intègre bien sur l'ensemble $\{y > a\}$).
Tout d'abord, lorsque $g_a^{(t)} = 0$:

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda}{2} \int_0^t \int_0^{+\infty} \delta_0(du) \mathbb{P}_x (T_a > t, X_t \in dy) \mathbb{P}^{x,u,a} \left(F(X_s, s \leq u) e^{-\frac{\lambda}{2} L_u^a} \right) \varphi(u) (s(y) - s(a)) \mathbb{E}_x \left[G(X_s, s \leq t - u) | g_a^{(t)} = u, X_t = y \right] \\ &= \frac{\lambda}{2} \int_a^{+\infty} \mathbb{P}_x (T_a > t, X_t \in dy) F(x) \varphi(0) (s(y) - s(a)) \mathbb{E}_x [G(X_s, s \leq t) | T_a > t, X_t = y] \\ &= \frac{\lambda}{2} F(x) \varphi(0) \mathbb{E}_x [(s(X_t) - s(a))^+ G(X_s, s \leq t) 1_{\{T_a > t\}}] \\ &= \frac{\lambda}{2} F(x) \varphi(0) (s(x) - s(a))^+ \mathbb{E}_a^\uparrow [G(X_s, s \leq t)] \\ &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{2} F(x) \varphi(0) (s(x) - s(a))^+ \mathbb{E}_a^\uparrow [G(X_s, s \geq 0)].\end{aligned}$$

□

Ensuite, lorsque $g_a^{(t)} > 0$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\lambda}{2} \int_0^t \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_x \left(g_a^{(t)} \in du, X_t \in dy \right) \mathbb{P}^{x,u,a} \left(F(X_s, s \leq u) e^{-\frac{\lambda}{2} L_u^a} \right) \varphi(u)(s(y) - s(a))^+ \mathbb{E}_x \left[G(X_{u+s}, s \leq t-u) | g_a^{(t)} = u, X_t = y \right] \\
 &= \frac{\lambda}{2} \int_0^t \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_x \left(g_a^{(t)} \in du, X_t \in dy \right) \mathbb{P}^{x,u,a} \left(F(X_s, s \leq u) e^{-\frac{\lambda}{2} L_u^a} \right) \varphi(u)(s(y) - s(a)) \mathbb{E}_a^\uparrow [G(X_s, s \leq t-u) | X_{t-u} = y] \\
 &= \frac{\lambda}{2} \int_0^t \int_0^{+\infty} du q(u, x, a) \mathbb{P}_a^\uparrow (X_{t-u} \in dy) \mathbb{P}^{x,u,a} \left(F(X_s, s \leq u) e^{-\frac{\lambda}{2} L_u^a} \right) \varphi(u) \mathbb{E}_a^\uparrow [G(X_s, s \leq t-u) | X_{t-u} = y] \\
 &= \frac{\lambda}{2} \int_0^t du q(u, x, a) \mathbb{P}^{x,u,a} \left(F(X_s, s \leq u) e^{-\frac{\lambda}{2} L_u^a} \right) \varphi(u) \mathbb{E}_a^\uparrow [G(X_s, s \leq t-u)] \\
 &\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\lambda} \frac{\lambda}{2} \int_0^{+\infty} du q(u, x, a) \mathbb{P}^{x,u,a} \left(F(X_s, s \leq u) e^{-\frac{\lambda}{2} L_u^a} \right) \varphi(u) \mathbb{E}_a^\uparrow [G(X_s, s \geq 0)].
 \end{aligned}$$

1.3 La mesure $\mathcal{W}$

Les théorèmes et preuves de cette section concernant la construction de la mesure $\mathcal{W}$ sont tous des adaptations directes de [NRY09], auquel on pourra se référer pour d'autres résultats plus spécifiques au cas brownien.

1.3.1 Définition de $\mathcal{W}$

On définit :

$$\mathcal{W}_x^{(\lambda,a)} := \left(\frac{2}{\lambda} + (s(x) - s(a))^+ \right) e^{\frac{\lambda}{2} L_\infty^a} \cdot \mathbb{P}_x^{(\lambda,a)}.$$

Alors,

Théorème 1.14.

La mesure $\mathcal{W}_x^{(\lambda,a)}$ ne dépend ni de λ , ni de a . On la note désormais $\mathcal{W}_x$.

C'est une mesure σ -finie de masse infinie, admettant la représentation intégrale :

$$\mathcal{W}_x = \int_0^{+\infty} dt q(t, x, a) \mathbb{P}^{x,t,a} \circ \mathbb{P}_a^\uparrow + (s(x) - s(a))^+ \mathbb{P}_a^\uparrow.$$

Démonstration.

1) On suppose $x = 0$ pour alléger les notations. Soient $\lambda, \mu, a, b \geq 0$. Pour toute v.a. Λ_t positive, $\mathcal{F}_t$ -mesurable et bornée, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0^{(\lambda,a)} \left[\Lambda_t e^{\frac{\lambda}{2} L_t^a} \right] &= \mathbb{E}_0 \left[\Lambda_t \left(1 + \frac{\lambda}{2} (s(X_t) - s(a))^+ \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_0 \left[\Lambda_t \frac{(1 + \frac{\lambda}{2} (s(X_t) - s(a))^+)}{(1 + \frac{\mu}{2} (s(X_t) - s(b))^+)} \left(1 + \frac{\mu}{2} (s(X_t) - s(b))^+ \right) \right] \\ &= \mathbb{E}_0^{(\mu,b)} \left[\Lambda_t \frac{(1 + \frac{\lambda}{2} (s(X_t) - s(a))^+)}{(1 + \frac{\mu}{2} (s(X_t) - s(b))^+)} e^{\frac{\mu}{2} L_t^b} \right]. \end{aligned}$$

Pour des raisons d'intégrabilité, on remplace alors Λ_t par $\Lambda_t e^{-\varepsilon(L_t^a + L_t^b)}$, avec $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{E}_0^{(\lambda,a)} \left[\Lambda_t e^{(\frac{\lambda}{2} - \varepsilon) L_t^a} e^{-\varepsilon L_t^b} \right] = \mathbb{E}_0^{(\mu,b)} \left[\Lambda_t \frac{(1 + \frac{\lambda}{2} (s(X_t) - s(a))^+)}{(1 + \frac{\mu}{2} (s(X_t) - s(b))^+)} e^{(\frac{\mu}{2} - \varepsilon) L_t^b} e^{-\varepsilon L_t^a} \right].$$

Or, sous $\mathbb{P}_0^{(\mu,b)}$, le processus des coordonnées $(X_t, t \geq 0)$ est transient et tend vers $+\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Par conséquent, le théorème de convergence dominée, que l'on peut appliquer grâce à la Proposition 1.7, implique :

$$\mathbb{E}_0^{(\lambda,a)} \left[\Lambda_t e^{(\frac{\lambda}{2} - \varepsilon) L_\infty^a} e^{-\varepsilon L_\infty^b} \right] = \mathbb{E}_0^{(\mu,b)} \left[\Lambda_t \frac{\lambda}{\mu} e^{(\frac{\mu}{2} - \varepsilon) L_\infty^b} e^{-\varepsilon L_\infty^a} \right]. \quad (1.16)$$

La relation (1.16) étant vérifiée pour toute v.a. Λ_t positive, $\mathcal{F}_t$ -mesurable et bornée, le théorème de la classe monotone implique que l'on peut remplacer Λ_t par Λ où Λ est une v.a. positive, $\mathcal{F}_\infty$ -mesurable et bornée. Finalement, laissant tendre ε vers 0, on obtient :

$$\frac{2}{\lambda} \mathbb{E}_0^{(\lambda,a)} \left[\Lambda e^{\frac{\lambda}{2} L_\infty^a} \right] = \frac{2}{\mu} \mathbb{E}_0^{(\mu,b)} \left[\Lambda e^{\frac{\mu}{2} L_\infty^b} \right],$$

ce qui prouve la non-dépendance en λ et a de la mesure $\mathcal{W}_0^{(\lambda,a)}$.

2) Montrons à présent que $\mathcal{W}_0$ est σ -finie. Tout d'abord, il est clair d'après la Proposition 1.7 que :

$$\mathcal{W}_0(1) = \frac{2}{\lambda} \mathbb{E}_0^{(\lambda,a)} \left[e^{\frac{\lambda}{2} L_\infty^a} \right] = \infty.$$

Ensuite, puisque L_∞^a est fini $\mathbb{P}_0^{(\lambda,a)}$ -p.s., on a :

$$1_{\{L_\infty < n\}} \nearrow_{n \rightarrow \infty} 1_\Omega \quad \mathbb{P}_0^{(\lambda,a)}\text{-p.s.}$$

D'où :

$$\mathcal{W}_0(L_\infty^a < n) = \frac{2}{\lambda} \mathbb{E}_0^{(\lambda,a)} \left[e^{\frac{\lambda}{2} L_\infty^a} 1_{\{L_\infty^a < n\}} \right] \leq \frac{2}{\lambda} e^{\frac{\lambda n}{2}},$$

ce qui prouve que $\mathcal{W}$ est σ -finie sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$.

Finalement, la représentation intégrale de $\mathcal{W}_0$ est une conséquence directe de celle de $\mathbb{P}_0^{(\lambda,a)}$. $\square$

1.3.2 Propriétés

Théorème 1.15. *Voici quelques propriétés de la mesure $\mathcal{W}$.*

i) Pour toute v.a. F_t positive et $\mathcal{F}_t$ -mesurable, on a :

$$\mathbb{E}_x \left[F_t (s(X_t) - s(a))^+ \right] = \mathcal{W}_x \left(F_t 1_{\{g_a \leq t\}} \right). \quad (1.17)$$

ii) Pour tout processus $(F_t, t \geq 0)$ positif et prévisible, on a :

$$\mathcal{W}_x(F_{g_a}) = (s(x) - s(a))^+ \mathbb{E}_x[F_0] + \mathbb{E}_x \left[\int_0^{+\infty} F_u dL_u^a \right]. \quad (1.18)$$

Démonstration.

On écrit pour le Point (i) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[\Gamma_t \left(\frac{2}{\lambda} + (s(X_t) - s(a))^+ \right) \right] &= \left(\frac{2}{\lambda} + (s(x) - s(a))^+ \right) \mathbb{E}_x^{(\lambda,a)} \left[\Gamma_t e^{\frac{\lambda}{2} L_t^a} \right] \\ &= \mathcal{W}_x \left(\Gamma_t e^{-\frac{\lambda}{2} (L_\infty^a - L_t^a)} \right) \\ &= \mathcal{W}_x \left(\Gamma_t 1_{\{g_a \leq t\}} \right) + \mathcal{W}_x \left(\Gamma_t e^{-\frac{\lambda}{2} (L_\infty^a - L_t^a)} 1_{\{g_a > t\}} \right). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à laisser tendre λ vers $+\infty$ et à utiliser le théorème de convergence monotone pour obtenir, puisque $L_\infty^a - L_t^a > 0$ sur l'évènement $\{g_a > t\}$:

$$\mathbb{E}_x[\Gamma_t(s(X_t) - s(a))^+] = \mathcal{W}_x(\Gamma_t 1_{\{g_a \leq t\}}).$$

Pour le Point (ii), nous allons appliquer la formule de balayage à la semi-martingale $((s(X_t) - s(a))^+, t \geq 0)$. Soit $(F_t, t \geq 0)$ un processus positif et prévisible, on a :

$$\begin{aligned} F_{g_a^{(t)}}(s(X_t) - s(a))^+ &= F_0(s(x) - s(a))^+ + \int_0^t F_{g_a^{(u)}} d(s(X_u) - s(a))^+ \\ &= F_0(s(x) - s(a))^+ + \int_0^t F_{g_a^{(u)}} dN_u^{(a)} + \int_0^t F_{g_a^{(u)}} dL_u^a. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x \left[F_{g_a^{(t)}} (s(X_t) - s(a))^+ \right] &= (s(x) - s(a))^+ \mathbb{E}_x[F_0] + \mathbb{E}_x \left[\int_0^t F_{g_a^{(u)}} dL_u^a \right] \\ &= (s(x) - s(a))^+ \mathbb{E}_x[F_0] + \mathbb{E}_x \left[\int_0^t F_u dL_u^a \right],\end{aligned}$$

car dL^a ne charge que $\{u \geq 0; X_u = a\}$. Or,

$$\mathbb{E}_x \left[F_{g_a^{(t)}} (s(X_t) - s(a))^+ \right] = \mathcal{W}_x \left(F_{g_a^{(t)}} 1_{\{g_a < t\}} \right) = \mathcal{W}_x \left(F_{g_a} 1_{\{g_a < t\}} \right).$$

Laissant tendre t vers $+\infty$, il vient finalement :

$$\mathcal{W}_x(F_{g_a}) = (s(x) - s(a))^+ \mathbb{E}_x[F_0] + \mathbb{E}_x \left[\int_0^{+\infty} F_u dL_u^a \right].$$

□

1.3.3 Un générateur de martingales

Théorème 1.16. Soit F une v.a. positive et $\mathcal{F}_\infty$ mesurable telle que $\mathcal{W}_x(F) < \infty$.

Alors, il existe une $((\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P}_x)$ -martingale strictement positive $(M_t^{(x)}(F), t \geq 0)$ telle que :

i) pour tout $t \geq 0$ et toute v.a. Λ_t positive, $\mathcal{F}_t$ -mesurable et bornée :

$$\mathcal{W}_x(\Lambda_t F) = \mathbb{E}_x[\Lambda_t M_t^{(x)}(F)].$$

ii) $(M_t^{(x)}(F), t \geq 0)$ converge $\mathbb{P}_x$ -p.s. vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

On dispose par ailleurs de la représentation, pour tout couple $(\lambda, a) \in]0, +\infty[^2$:

$$M_t^{(x)}(F) = \frac{2}{\lambda} M_t^{(\lambda, a)} \mathbb{E}_x^{(\lambda, a)} \left[F e^{\frac{\lambda}{2} L_\infty^a} | \mathcal{F}_t \right]. \quad (1.19)$$

Démonstration.

La preuve est identique à celle de [NRY09]. On note $\mathcal{W}_x^{(F)}$ la mesure positive et finie définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ par :

$$\mathcal{W}_x^{(F)}(G) = \mathcal{W}_x(FG).$$

Soit Λ_t une v.a. positive, $\mathcal{F}_t$ -mesurable et bornée telle que $\mathbb{E}_x[\Lambda_t] = 0$.

D'après la définition de $\mathbb{P}_x^{(\lambda, a)}$, on a pour tout $\lambda, a > 0$, $\mathbb{E}_x^{(\lambda, a)}[\Lambda_t] = 0$. Ainsi,

$$\mathcal{W}_x^{(F)}(\Lambda_t) = \mathcal{W}_x(F\Lambda_t) = \left(\frac{2}{\lambda} + (s(x) - s(a))^+ \right) \mathbb{E}_x^{(\lambda, a)} \left[F e^{\frac{\lambda}{2} L_\infty^a} \Lambda_t \right] = 0.$$

Par conséquent $\mathcal{W}_{x|\mathcal{F}_t}^{(F)}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}_{x|\mathcal{F}_t}^{(\lambda, a)}$. Par ailleurs, par définition, $\mathbb{P}_{x|\mathcal{F}_t}^{(\lambda, a)}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}_{x|\mathcal{F}_t}$, de sorte que :

$$\mathcal{W}_{x|\mathcal{F}_t}^{(F)} \ll \mathbb{P}_{x|\mathcal{F}_t}^{(\lambda, a)} \ll \mathbb{P}_{x|\mathcal{F}_t}$$

et d'après le théorème de Radon-Nikodym, il existe une v.a. positive $M_t^{(x)}(F)$, $\mathbb{P}_x$ -intégrable telle que :

$$\mathcal{W}_{x|\mathcal{F}_t}^F = M_t^{(x)}(F) \cdot \mathbb{P}_{x|\mathcal{F}_t}.$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_x(\Lambda_t F) &= \mathbb{E}_x \left[\Lambda_t M_t^{(x)}(F) \right] \\
 &= \left(\frac{2}{\lambda} + (s(x) - s(a))^+ \right) \mathbb{E}_x^{(\lambda, a)} \left[\Lambda_t F e^{\frac{\lambda}{2} L_\infty^a} \right] \\
 &= \left(\frac{2}{\lambda} + (s(x) - s(a))^+ \right) \mathbb{E}_x^{(\lambda, a)} \left[\Lambda_t \mathbb{E}_x^{(\lambda, a)} \left[F e^{\frac{\lambda}{2} L_\infty^a} | \mathcal{F}_t \right] \right] \\
 &= \frac{2}{\lambda} \mathbb{E}_x \left[\Lambda_t M_t^{(\lambda, a)} \mathbb{E}_x^{(\lambda, a)} \left[F e^{\frac{\lambda}{2} L_\infty^a} | \mathcal{F}_t \right] \right].
 \end{aligned}$$

Pour prouver le Point (ii), on écrit, pour $s \leq t$:

$$\mathbb{E}_x \left[M_t^{(x)}(F) \Lambda_s \right] = \mathcal{W}_x(F \Lambda_s).$$

Or, puisque $(M_t^{(x)}(F), t \geq 0)$ est une martingale positive, elle converge p.s. vers une v.a. $M_\infty^{(x)}(F)$. En appliquant le lemme de Fatou, on obtient :

$$\mathbb{E}_x \left[M_\infty^{(x)}(F) \Lambda_s \right] \leq \mathcal{W}_x(F \Lambda_s).$$

On choisit alors $\Lambda_s = 1_{\{g_a^{(s)} \geq n\}}$, de sorte que : $\mathbb{E}_x \left[M_\infty^{(x)}(F) 1_{\{g_a^{(s)} \geq n\}} \right] \leq \mathcal{W}_x \left(F 1_{\{g_a^{(s)} \geq n\}} \right)$. A présent, laissant tendre s vers $+\infty$, il vient :

$$\begin{cases} 1_{\{g_a^{(s)} \geq n\}} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 1 & \mathbb{P}_x\text{-p.s. puisque la diffusion est récurrente,} \\ 1_{\{g_a^{(s)} \geq n\}} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 1_{\{g_a \geq n\}} & \text{puisque } g_a \text{ est fini sous } \mathcal{W}_x. \end{cases}$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}_x \left[M_\infty^{(x)}(F) \right] \leq \mathcal{W}_x(F 1_{\{g_a \geq n\}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

d'après le Théorème 1.14. Par conséquent $M_\infty^{(x)}(F) = 0$ $\mathbb{P}_x$ -p.s. □

Proposition 1.17. *Soit $(F_t, t \geq 0)$ un processus positif et prévisible. Alors :*

$$M_u(F_{g_a}) = F_{g_a^{(u)}}(s(X_u) - s(a))^+ + \mathbb{E}_x \left[\int_u^{+\infty} F_s dL_s^a | \mathcal{F}_u \right].$$

Démonstration.

Soit $u \geq 0$ fixé, $(F_t, t \geq 0)$ un processus positif et prévisible et Λ_u une v.a. positive $\mathcal{F}_u$ -mesurable et bornée. On écrit :

$$\mathcal{W}_x(\Lambda_u F_{g_a}) = \mathcal{W}_x(\Lambda_u F_{g_a} 1_{\{g_a \leq u\}}) + \mathcal{W}_x(\Lambda_u F_{g_a} 1_{\{g_a > u\}}),$$

et l'on traite ces deux quantités séparément. Tout d'abord, d'après (1.17) :

$$\mathcal{W}_x(\Lambda_u F_{g_a} 1_{\{g_a \leq u\}}) = \mathcal{W}_x(\Lambda_u F_{g_a^{(u)}} 1_{\{g_a \leq u\}}) = \mathbb{E}_x \left[\Lambda_u F_{g_a^{(u)}}(s(X_u) - s(a))^+ \right]$$

Ensuite, en posant $(\tilde{\Lambda}_t = \Lambda_u 1_{\{t > u\}}, t \geq 0)$ qui est un processus positif et prévisible, on a d'après (1.18) :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_x(\Lambda_u F_{g_a} 1_{\{g_a > u\}}) &= \mathcal{W}_x(F_{g_a} \tilde{\Lambda}_{g_a}) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^{+\infty} F_s \tilde{\Lambda}_s dL_s^a \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\Lambda_u \int_u^{+\infty} F_s dL_s^a \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\Lambda_u \mathbb{E}_x \left[\int_u^{+\infty} F_s dL_s^a | \mathcal{F}_u \right] \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\mathcal{W}_x(\Lambda_u F_{g_a}) = \mathbb{E}_x \left[\Lambda_u \left(F_{g_a(u)}(s(X_u) - s(a))^+ + \mathbb{E}_x \left[\int_u^{+\infty} F_s dL_s^a | \mathcal{F}_u \right] \right) \right]$$

ce qui achève la preuve de la Proposition 1.17 par définition de $(M_u^{(x)}(F_{g_a}), u \geq 0)$. $\square$

1.4 Un théorème général de pénalisation

Définition 1.18. On note $\mathcal{C}_a^{(x)}$ l'ensemble des processus positifs et $(\mathcal{F}_t)$ -adaptés $(F_t, t \geq 0)$ qui vérifient :

- i) $(F_t, t \geq 0)$ est décroissant. En conséquence, pour tout $t \geq 0$, $F_t \leq F_0$, et l'on suppose que F_0 est majoré p.s. par une constante K .
- ii) $(F_t, t \geq 0)$ est constant après g_a sous $\mathcal{W}_x$:

$$\forall u \geq 0, \quad F_{g_a+u} = F_{g_a} = F_\infty.$$

- iii) $0 < \mathcal{W}_x(F_{g_a}) < \infty$.

1.4.1 Estimation asymptotique

Théorème 1.19. On suppose l'Hypothèse 1.3 satisfaite et soit $(F_t, t \geq 0)$ un processus de la classe $\mathcal{C}_a^{(x)}$. Alors :

$$\mathbb{E}_x[F_t]_{t \rightarrow +\infty} \sim \mathcal{W}_x(F_{g_a}) \nu([t, +\infty[).$$

Démonstration.

Nous allons appliquer le Théorème Taubérien 1.4.

- On se place tout d'abord sur l'évènement $\{X_t > a\}$:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x [F_t 1_{\{X_t > a\}}] dt &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x \left[F_t \frac{(s(X_t) - s(a))^+}{(s(X_t) - s(a))^+} 1_{\{X_t > a\}} \right] dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathcal{W}_x \left(\frac{F_t}{(s(X_t) - s(a))^+} 1_{\{X_t > a\}} 1_{\{g_a \leq t\}} \right) dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathcal{W}_x \left(\frac{F_{g_a}}{(s(X_t) - s(a))^+} 1_{\{g_a < t\}} \right) dt \quad (\text{car } F \in \mathcal{C}_a^{(x)}) \\
 &= \mathcal{W}_x \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda g_a} F_{g_a} \frac{e^{-\lambda u} du}{(s(X_{g_a+u}) - s(a))^+} \right) \\
 &= \mathcal{W}_x (e^{-\lambda g_a} F_{g_a}) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} \mathbb{E}_a^\uparrow \left[\frac{1}{(s(X_u) - s(a))^+} \right] du.
 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} \mathbb{E}_a^\uparrow \left[\frac{1}{(s(X_u) - s(a))^+} \right] du &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} \int_a^{+\infty} \frac{n_{y,a}(u)}{(s(y) - s(a))^2} (s(y) - s(a))^2 m(dy) du \\
 &= \int_a^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} n_{y,a}(u) du m(dy) \\
 &= \int_a^{+\infty} \mathbb{E}_y [e^{-\lambda T_a}] m(dy) \tag{1.20} \\
 &= \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_y [e^{-\lambda T_a}] m(dy) - \int_0^a \mathbb{E}_y [e^{-\lambda T_a}] m(dy) \\
 &= \frac{1}{\lambda u_\lambda(a, a)} - \int_0^a \mathbb{E}_y [e^{-\lambda T_a}] m(dy) \\
 &\stackrel{\sim}{\sim}_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda u_\lambda(a, a)}.
 \end{aligned}$$

Remarquons alors que cet équivalent ne dépend pas de a . En effet, par construction, $u_\lambda(x, y)$ s'écrit, pour $x \leq y$:

$$u_\lambda(x, y) = \Phi(x, \lambda) (u_\lambda(0, 0) \Phi(y, \lambda) - \Psi(y, \lambda))$$

où les fonctions propres Φ et Ψ sont solutions de :

$$\begin{cases} \Phi(x, \lambda) = 1 + \lambda \int_0^x s'(y) dy \int_0^y \Phi(z, \lambda) \rho(z) dz, \\ \Psi(x, \lambda) = s(x) + \lambda \int_0^x s'(y) dy \int_0^y \Psi(z, \lambda) \rho(z) dz, \end{cases}$$

d'où

$$\frac{u_\lambda(a, a)}{u_\lambda(0, 0)} = \Phi(a, \lambda)^2 - \frac{\Phi(a, \lambda) \Psi(a, \lambda)}{u_\lambda(0, 0)} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 1.$$

Notons que cette observation est également une conséquence du résultat suivant, dû à Salminen [Sal93] : si $(X_t, t \geq 0)$ est une diffusion régulière récurrente définie sur un intervalle I , alors, pour tout $a \in I$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda u_\lambda(a, a) = \frac{1}{m(I)}.$$

Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x [F_t 1_{\{X_t > a\}}] dt \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \frac{\mathcal{W}_x(F_{g_a})}{\lambda u_\lambda(0, 0)}.$$

• On se place à présent sur l'évènement $\{X_t \leq a\}$.

L'application $t \mapsto F_t$ étant décroissante, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x [F_t 1_{\{X_t \leq a\}}] dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x [F_{g_a^{(t)}} 1_{\{X_t \leq a\}}] dt$$

Evaluons alors le membre de droite en appliquant le Lemme 1.9 :

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x [F_{g_a^{(t)}} 1_{\{X_t \leq a\}}] dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \int_0^t \mathbb{E}_x [F_{g_a^{(t)}} 1_{\{X_t \leq a\}} | g_a^{(t)} = u] \mathbb{P}_x(g_a^{(t)} \in du) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x [F_0 1_{\{X_t \leq a\}} | g_a^{(t)} = 0] \mathbb{P}_x(T_a > t) dt \\ & \quad + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \int_0^t \int_0^a \mathbb{E}_x [F_u | g_a^{(t)} = u, X_t = y] q(u, a, x) n_{y,a}(t-u) m(dy) du dt \\ &= (1) + (2). \end{aligned}$$

On étudie chacun des deux termes séparément. Tout d'abord :

$$(1) \leq K \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{P}_x(T_a > t) dt = \frac{K}{\lambda} (1 - \mathbb{E}_x [e^{-\lambda T_a}]).$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} (2) &= \int_0^{+\infty} q(u, x, a) \mathbb{E}_x [F_u | X_u = a] \int_u^{+\infty} e^{-\lambda t} \int_0^a n_{y,a}(t-u) m(dy) dt du \\ &= \int_0^{+\infty} q(u, x, a) \mathbb{E}^{x,u,a} [F_u] e^{-\lambda u} \int_0^a \mathbb{E}_y [e^{-\lambda T_a}] m(dy) du \\ &= (\mathcal{W}_x(e^{-\lambda g_a} F_{g_a}) - (s(x) - s(a))^+ \mathbb{E}_a^\uparrow[F_0]) \int_0^a \mathbb{E}_y [e^{-\lambda T_a}] m(dy). \end{aligned}$$

En laissant tendre λ vers 0, et en appliquant le théorème de convergence monotone, on obtient alors :

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{E}_x [F_{g_a^{(t)}} 1_{\{X_t \leq a\}}] dt \leq K \mathbb{E}_x [T_a] + (\mathcal{W}_x(F_{g_a}) - (s(x) - s(a))^+ \mathbb{E}_a^\uparrow[F_0]) m([0, a]) < +\infty.$$

Par conséquent :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x [F_t] dt \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \frac{\mathcal{W}_x(F_{g_a})}{\lambda u_\lambda(0, 0)},$$

et, d'après le théorème Taubérien :

$$\mathbb{E}_x [F_t] \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \mathcal{W}_x(F_{g_a}) \nu([t, +\infty[).$$

□

Remarque 1.20. Choisissons par exemple $(F_t = 1_{\{g_a^{(t)}=0\}}, t \geq 0)$. $(F_t, t \geq 0)$ est un processus décroissant, constant après g_a sous $\mathcal{W}$ et, d'après le Théorème 1.15, $\mathcal{W}_x(F_{g_a}) = (s(x) - s(a))^+$. Ainsi, pour $x > a$, le Théorème 1.19 s'écrit :

$$\mathbb{P}_x(g_a^{(t)} = 0) = \mathbb{P}_x(T_a > t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} (s(x) - s(a))\nu([t, +\infty[).$$

En particulier, pour $a = 0$, on retrouve le résultat de Salminen-Vallois [SV09, Proposition 4.2].

1.4.2 Un théorème de pénalisation

Théorème 1.21. Soit $(F_t, t \geq 0) \in \mathcal{C}_a^{(x)}$.

i) Soit $u > 0$. Pour tout $\Lambda_u \in \mathcal{F}_u$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}_x[1_{\Lambda_u} F_t]}{\mathbb{E}_x[F_t]} = \mathbb{E}_x \left[1_{\Lambda_u} \frac{M_u^{(x)}(F_\infty)}{\mathcal{W}_x(F_\infty)} \right].$$

ii) Il existe une probabilité $\mathbb{P}_x^{(F)}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ telle que :

$$\mathbb{P}_x^{(F)}(\Lambda_u) = \mathbb{E}_x \left[1_{\Lambda_u} \frac{M_u^{(x)}(F_\infty)}{\mathcal{W}_x(F_\infty)} \right] \quad \text{pour tout } u \geq 0 \text{ et tout } \Lambda_u \in \mathcal{F}_u.$$

iii) $\mathbb{P}_x^{(F)}$ admet la représentation :

$$\mathbb{P}_x^{(F)} = \frac{1}{\mathcal{W}_x(F_{g_a})} \left(\int_0^{+\infty} du q(u, x, a) F_u \mathbb{P}^{x,u,a} \circ \mathbb{P}_a^\uparrow + (s(x) - s(a))^+ F_0 \mathbb{P}_a^\uparrow \right)$$

En conséquence, $\mathbb{P}_x^{(F)}(g_a < +\infty) = 1$ et

- Conditionnellement à g_a , les processus $(X_t, t \leq g_a)$ et $(X_{g_a+t}, t \geq 0)$ sont indépendants.
- Le processus $(X_{g_a+t}, t \geq 0)$ sous $\mathbb{P}_x^{(F)}$ a même loi que $(X_t, t \geq 0)$ sous $\mathbb{P}_a^\uparrow$.

Démonstration.

On reprend les notations de Biane-Yor [BY87]. Pour $u \leq t$, on a :

$$(X_s, s \leq t) = (X_s, s \leq u) \circ (X_{s+u}, 0 \leq s \leq t - u)$$

et donc, d'après la propriété de Markov, en notant $F_t = F(X_s, s \leq t)$:

$$\mathbb{E}_x[F(X_s, s \leq t) | \mathcal{F}_u] = \widehat{\mathbb{E}}_{X_u} \left[F((X_s, s \leq u) \circ (\widehat{X}_s, 0 \leq s \leq t - u)) \right].$$

Si $\omega \in \mathcal{C}([0, u], \mathbb{R}^+)$, on pose pour simplifier

$$F((\omega(s), s \leq u) \circ (X_s, 0 \leq s \leq t - u)) = F^{\omega(0 \rightarrow u)}(X_s, 0 \leq s \leq t - u).$$

A présent, ω étant une fonction de $\mathcal{C}([0, u], \mathbb{R}^+)$ fixée, prouvons que le processus $(F^{\omega(0 \rightarrow u)}(X_s, 0 \leq s \leq t - u), t \geq 0)$ appartient à $\mathcal{C}_a^{(\omega(u))}$. La décroissance de $(F^{\omega(0 \rightarrow u)}(X_s, 0 \leq s \leq t - u), t \geq 0)$ est claire. Posons alors $g_a := \sup\{v \geq 0; X_v = a\}$ et

$$g_a^{\omega(0 \rightarrow u)} := \sup\{v \geq 0; (\omega(s), s \leq u) \circ (X_s, 0 \leq s \leq v - u) = a\}.$$

Sous $\mathcal{W}_{\omega(u)}$, $g_a^{\omega(0 \rightarrow u)} \leq u + g_a$ (avec égalité dès que $g_a > 0$) de sorte que, comme $(F_t, t \geq 0) \in \mathcal{C}_a^{(x)}$, pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} F^{\omega(0 \rightarrow u)}(X_s, s \geq 0) &= F^{\omega(0 \rightarrow u)}(X_s, 0 \leq s \leq g_a^{\omega(0 \rightarrow u)} + t - u) \\ &= F^{\omega(0 \rightarrow u)}(X_s, 0 \leq s \leq g_a + t) \end{aligned}$$

et il reste à vérifier que, $\mathcal{W}_{\omega(u)}(F^{\omega(0 \rightarrow u)}(X_s, s \geq 0)) < \infty$. On a :

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}_{\omega(u)}(F^{\omega(0 \rightarrow u)}(X_s, s \geq 0)) \\ &= \left(\frac{2}{\lambda} + (s(\omega(u)) - s(a))^+ \right) \mathbb{E}_{\omega(u)}^{(\lambda, a)} \left[e^{\frac{\lambda}{2} L_\infty^a} F^{\omega(0 \rightarrow u)}(X_s, s \geq 0) \right] \\ &= \left(\frac{2}{\lambda} + (s(\omega(u)) - s(a))^+ \right) \mathbb{E}_x^{(\lambda, a)} \left[e^{\frac{\lambda}{2} (L_\infty^a - L_u^a)} F^{\omega(0 \rightarrow u)}(X_s, s \geq 0) | \mathcal{F}_u \right] (\omega(s), 0 \leq s \leq u) \\ &= M_u^{(x)}(F_\infty)(\omega(s), 0 \leq s \leq u) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\widehat{\mathbb{E}}_x \left[\mathcal{W}_{\widehat{\omega}(u)}(F^{\widehat{\omega}(0 \rightarrow u)}(X_s, s \geq 0)) \right] = \mathbb{E}_x \left[M_u^{(x)}(F_\infty) \right] = \mathcal{W}_x(F_\infty) < \infty$$

et donc $\mathcal{W}_{\omega(u)}(F^{\omega(0 \rightarrow u)}(X_s, s \geq 0)) < \infty$ $\mathbb{P}_{\omega(u)}$ -p.s. D'après le Théorème 1.19, on déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[F(X_s, s \leq t) | \mathcal{F}_u] &\underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \widehat{\mathcal{W}}_{X_u} \left(F((X_s, s \leq u) \circ (\widehat{X}_s, s \geq 0)) \right) \nu([t, +\infty[) \\ &\underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} M_u^{(x)}(F_\infty) \nu([t, +\infty[) \end{aligned}$$

et, comme $(M_u^{(x)}(F_\infty), u \geq 0)$ est une martingale, d'après le Théorème 0.2,

$$\mathbb{E}_x \left[\frac{F_t}{\mathbb{E}_x[F_t]} 1_{\Lambda u} \right] \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_x \left[\frac{M_u^{(x)}(F_\infty)}{\mathcal{W}_x(F_\infty)} 1_{\Lambda u} \right],$$

ce qui prouve les Points (i) et (ii). Enfin, d'après l'expression (1.19) de $(M_t^{(x)}(F_\infty), t \geq 0)$:

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}_x(F_\infty) \mathbb{P}_x^{(F_{g_a})} \left(G(X_s, s \leq g_a^{(t)}) \varphi(g_a^{(t)}) H(X_{g_a^{(t)}+s}, s \leq t) \right) \\ &= \mathbb{E}_x \left[G(X_s, s \leq g_a^{(t)}) \varphi(g_a^{(t)}) H(X_{g_a^{(t)}+s}, s \leq t) M_t^{(x)}(F_{g_a}) \right] \\ &= \frac{2}{\lambda} \mathbb{E}_x \left[G(X_s, s \leq g_a^{(t)}) \varphi(g_a^{(t)}) H(X_{g_a^{(t)}+s}, s \leq t) M_t^{(\lambda, a)} \mathbb{E}_x^{(\lambda, a)} \left[F_{g_a} e^{\frac{\lambda}{2} L_{g_a}^a} | \mathcal{F}_t \right] \right] \\ &= \left(\frac{2}{\lambda} + (s(x) - s(a))^+ \right) \mathbb{E}_x^{(\lambda, a)} \left[G(X_s, s \leq g_a^{(t)}) \varphi(g_a^{(t)}) H(X_{g_a^{(t)}+s}, s \leq t) F_{g_a} e^{\frac{\lambda}{2} L_{g_a}^a} \right] \\ &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\lambda} + (s(x) - s(a))^+ \right) \mathbb{E}_x^{(\lambda, a)} \left[G(X_s, s \leq g_a) \varphi(g_a) H(X_{g_a+s}, s \geq 0) F_{g_a} e^{\frac{\lambda}{2} L_{g_a}^a} \right] \\ &= \int_0^{+\infty} q(u, x, a) \varphi(u) \mathbb{P}^{x, u, a}(G(X_s, s \leq u) F_u) \mathbb{P}_a^\uparrow(H(X_s, s \geq 0)) du \\ &\quad + (s(x) - s(a))^+ G(x) \varphi(0) \mathbb{P}_a^\uparrow(H(X_s, s \geq 0) F_0) \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du Théorème 1.21. □

1.4.3 Retour sur quelques exemples

Soit h une fonction positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

- On prend $(F_t, t \geq 0) = (h(L_t^a), t \geq 0)$ et on suppose $\int_0^{+\infty} h(l)dl = 1$:

$$\mathbb{P}_0^{(h(L_\infty^a))} = \int_0^{+\infty} du q(u, 0, a) h(L_u^a) \mathbb{P}^{0,u,a} \circ \mathbb{P}_a^\uparrow.$$

Ainsi, sous $\mathbb{P}_0^{(h(L_\infty^a))}$ la variable aléatoire L_∞^a admet pour densité la fonction $l \mapsto h(l)$ et, conditionnellement à $L_\infty^a = l$ le processus $(X_t, t \leq g_a)$ a même loi que $(X_t, t \leq \tau_l^{(a)})$ sous $\mathbb{P}_0$. Remarquons que pour $h(l) = e^{-\frac{\lambda}{2}l}$ on retrouve la martingale $M(e^{-\frac{\lambda}{2}L_\infty^a}) = M^{(\lambda,a)}$ et la probabilité $\mathbb{P}_0^{(e^{-\frac{\lambda}{2}L_\infty^a})} = \mathbb{P}_0^{(\lambda,a)}$.

- On prend $(F_t, t \geq 0) = (h(t), t \geq 0)$ et on suppose $\int_0^{+\infty} h(u)q(u, 0, a)du = 1$:

$$\mathbb{P}_0^{(h(g_a))} = \int_0^{+\infty} du q(u, 0, a) h(u) \mathbb{P}^{0,u,a} \circ \mathbb{P}_a^\uparrow.$$

Ainsi, sous $\mathbb{P}_0^{(h(g_a))}$, la variable aléatoire g_a admet pour densité la fonction $u \mapsto h(u)q(u, 0, a)$ et, conditionnellement à $g_a = u$ le processus $(X_t, t \leq g_a)$ a même loi que $(X_t, t \leq u)$ sous $\mathbb{P}_0$.

- On prend $(F_t, t \geq 0) = h\left(\int_0^t f(X_s)ds\right)$ où $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ est une fonction borélienne à support compact inclus dans $[0, a]$. Alors :

$$\mathbb{E}_0 \left[h \left(\int_0^t f(X_s)ds \right) \right] \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \nu([t, +\infty[) \mathcal{W}_0 \left(h \left(\int_0^{g_a} f(X_s)ds \right) \right).$$

1.5 Extension à $\mathbb{R}$

La construction de $\mathcal{W}$ précédente s'étend sans difficultés à des diffusions linéaires régulières récurrentes nulles sur $\mathbb{R}$ tout entier. On suppose s de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et telle que $s(0) = 0$. On note $\sigma_a := \sup\{t \geq 0, |X_t| = a\}$, et pour $x \in \mathbb{R}$, $x^+ := \max(x, 0)$ et $x^- := -\min(x, 0)$.

1.5.1 Tableau comparatif

Nous présentons, page suivante, un tableau qui reprend les principales quantités intervenant dans la construction de $\mathcal{W}$.

Quelques remarques concernant le cas brownien

Lorsque $(X_u, u \geq 0)$ est un mouvement brownien issu de 0, la mesure $\mathcal{W}$ s'écrit :

$$\mathcal{W}_0 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}u} e^{-\frac{a^2}{2u}} \left(\mathbb{P}^{0,u,a} \circ \mathbb{P}_a^\uparrow + \mathbb{P}^{0,u,-a} \circ \mathbb{P}_{-a}^\downarrow \right) du$$

où, sous $\mathbb{P}_a^\uparrow$, $(X_t^\uparrow, t \geq 0)$ est une diffusion issue de a de mesure de vitesse $m(dy) = 2(y-a)^2 dy$ et de fonction d'échelle $s(y) = -\frac{1}{y-a}$, i.e. $(X_t^\uparrow = a + R_t, t \geq 0)$ où $(R_t, t \geq 0)$ est un

processus de Bessel de dimension 3 issu de 0. De même, sous $\mathbb{P}_a^\downarrow$, la diffusion $(X_t^\downarrow, t \geq 0)$ a même loi que $(-a - R_t, t \geq 0)$ où $(R_t, t \geq 0)$ est un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0. On retrouve ainsi la construction de [NRY09].

Signalons néanmoins que, toujours en prenant $(X_u = B_u, u \geq 0)$ un mouvement brownien issu de 0, certaines des formules du tableau comparatif ci-après diffèrent légèrement, dans leur écriture, de celles de [NRY09]. Cela est dû au fait que l'on travaille ici avec le temps local $(L_t^a, t \geq 0)$ de $(B_u, u \geq 0)$ vu comme une *diffusion*, et non pas le temps local $(l_t^a, t \geq 0)$ de la *martingale* $(B_u, u \geq 0)$. Ces deux quantités sont proportionnelles : $2L_t^a = l_t^a$, de sorte que l'on passe de l'une à l'autre des expressions par un facteur 2.

	Diffusion sur $\mathbb{R}^+$	Diffusion sur $\mathbb{R}$
$(N_t^{(a)}, t \geq 0)$	$(s(X_t) - s(a))^+ - L_t^a$	$(s(X_t^+) - s(a))^+ + (s(-X_t^-) - s(-a))^- - L_t^a - L_t^{-a}$
$(M_t^{(\lambda,a)}, t \geq 0)$	$\left(1 + \frac{\lambda}{2}(s(X_t) - s(a))^+\right) e^{-\frac{\lambda}{2}L_t^a}$	$\left(1 + \frac{\lambda}{2}(s(X_t^+) - s(a))^+ + (s(-X_t^-) - s(-a))^- \right) e^{-\frac{\lambda}{2}(L_t^a + L_t^{-a})}$
$\mathbb{P}_0^{(\lambda,a)}$	$\mathbb{P}_{0 \mathcal{F}_t}^{(\lambda,a)} = M_t^{(\lambda,a)} \cdot \mathbb{P}_{0 \mathcal{F}_t}$	$\mathbb{P}_{0 \mathcal{F}_t}^{(\lambda,a)} = M_t^{(\lambda,a)} \cdot \mathbb{P}_{0 \mathcal{F}_t}$
$\mathcal{W}_0$	$\mathcal{W}_0 = \frac{2}{\lambda} e^{-\frac{\lambda}{2}L_t^a} \mathbb{P}_0^{(\lambda,a)}$	$\mathcal{W}_0 = \frac{2}{\lambda} e^{-\frac{\lambda}{2}(L_t^a + L_t^{-a})} \mathbb{P}_0^{(\lambda,a)}$
$\mathcal{W}_0(F_t 1_{\{\sigma_a \leq t\}})$	$\mathcal{W}_0(F_t 1_{\{\sigma_a \leq t\}}) = \mathbb{E}_0[F_t(s(X_t) - s(a))^+]$	$\mathcal{W}_0(F_t 1_{\{\sigma_a \leq t\}}) = \mathbb{E}_0[F_t\{(s(X_t^+) - s(a))^+ + (s(-X_t^-) - s(-a))^- \}]$
$(\hat{X}_t, t \geq 0)$	$\hat{X} := X \text{ tué en } T_a$	$\begin{cases} \hat{X}^+ := X \text{ tué en } T_a \\ \hat{X}^- := X \text{ tué en } T_{-a} \end{cases}$
$(X_t^\uparrow, t \geq 0)$	$X^\uparrow := \hat{X} \text{ conditionné à ne pas toucher } a$	$\begin{cases} X^\uparrow := \hat{X}^+ \text{ conditionné à ne pas toucher } a \\ X^\downarrow := \hat{X}^- \text{ conditionné à ne pas toucher } -a \end{cases}$
$q^\uparrow(t, a, y)$	$q^\uparrow(t, a, y) = \frac{n_{y,a}(t)}{(s(y) - s(a))} \quad (y > a)$	$\begin{cases} q^\uparrow(t, a, y) = \frac{n_{y,a}(t)}{(s(y) - s(a))} & (y > a) \\ q^\downarrow(t, -a, y) = \frac{n_{y,-a}(t)}{(s(-a) - s(y))} & (y < -a) \end{cases}$
$\mathbb{P}_0(\sigma_a^{(t)} \in du, X_t \in y)$	$\frac{q(u, a, 0)}{s(y) - s(a)} \mathbb{P}_a^\uparrow(X_{t-u} \in dy) du \quad (y > a)$	$\begin{cases} \frac{q(u, a, 0)}{s(y) - s(a)} \mathbb{P}_a^\uparrow(X_{t-u} \in dy) du & (y > a) \\ \frac{q(u, -a, 0)}{s(-a) - s(y)} \mathbb{P}_{-a}^\downarrow(X_{t-u} \in dy) du & (y < -a) \end{cases}$
$\mathcal{W}_0$	$\mathcal{W}_0 = \int_0^{+\infty} du q(u, 0, a) \mathbb{P}_0^{0,u,a} \circ \mathbb{P}_a^\uparrow$	$\mathcal{W}_0 = \int_0^{+\infty} \left(q(u, 0, a) \mathbb{P}_0^{0,u,a} \circ \mathbb{P}_a^\uparrow + q(u, 0, -a) \mathbb{P}_0^{0,u,-a} \circ \mathbb{P}_{-a}^\downarrow \right) du$
$\mathcal{W}_0(F_{\sigma_a})$	$\mathbb{E}_0 \left[\int_0^{+\infty} F_u dL_u^a \right]$	$\mathbb{E}_0 \left[\int_0^{+\infty} F_u (dL_u^a + dL_u^{-a}) \right]$

1.5.2 Pénalisation par $(\int_0^t 1_{\{X_u > 0\}} du, t \geq 0)$

On considère une diffusion $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de mesure de vitesse $m(dx) = \rho(x)dx$ et de fonction d'échelle s de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et telle que $s(0) = 0$. On définit :

$$A_t := \int_0^t 1_{\{X_s \geq 0\}} ds, \quad t \geq 0.$$

Soit $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante et sous-exponentielle, i.e. il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que, pour tout $x \geq 0$

$$h(x) \leq \alpha e^{-\beta x}. \quad (1.21)$$

Nous allons étudier la pénalisation par $(h(A_t), t \geq 0)$.

Pour ce faire, on introduit les diffusions $(X_t^{(+)}, t \geq 0)$ et $(X_t^{(-)}, t \geq 0)$ définies respectivement par :

- $(X_t^{(+)}, t \geq 0)$ est une diffusion sur $\mathbb{R}^+$, réfléchie en 0, de mesure de vitesse $m^{(+)}(dx) = \rho(x)dx$ ($x \geq 0$) et de fonction d'échelle $s^{(+)}(x) = s(x)$ ($x \geq 0$). On note $q^{(+)}(t, x, y)$ sa densité de transition et $u_\lambda^{(+)}(x, y) := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} q^{(+)}(t, x, y) dt$ son noyau résolvant.
- $(X_t^{(-)} = -\check{X}_t, t \geq 0)$ où $(\check{X}_t, t \geq 0)$ est une diffusion sur $\mathbb{R}^+$, réfléchie en 0, de mesure de vitesse $\check{m}([0, x]) = m([-x, 0])$ ($x \geq 0$) et de fonction d'échelle $\check{s}(x) = -s(-x)$ ($x \geq 0$). De même, on note $q^{(-)}(t, x, y)$ sa densité de transition et $u_\lambda^{(-)}(x, y) := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} q^{(-)}(t, x, y) dt$ son noyau résolvant.

Théorème 1.22. *Supposons que la mesure de Lévy $\nu^{(-)}$ du subordonateur $(\tau_l^{(-)}, l \geq 0)$ satisfasse l'Hypothèse 1.3. Alors :*

$$\mathbb{E}_0[h(A_t)] \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \mathcal{W}(h(A_{g_0})) \nu^{(-)}([t, +\infty[).$$

Démonstration. :

On écrit :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_0[h(A_t)] dt = \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_0[h(A_t) 1_{\{X_t < 0\}}] dt}_{I^-} + \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_0[h(A_t) 1_{\{X_t > 0\}}] dt}_{I^+}.$$

Regardons I^- :

$$\begin{aligned} I^- &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathcal{W}\left(\frac{h(A_t)}{s(X_t)} 1_{\{X_t < 0\}} 1_{\{g_0 \leq t\}}\right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathcal{W}\left(\frac{h(A_{g_0})}{s(X_t)} 1_{\{X_t < 0\}} 1_{\{g_0 < t\}}\right) dt \\ &= \mathcal{W}\left(\int_{g_0}^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{h(A_{g_0})}{s(X_t)} 1_{\{X_t < 0\}} dt\right) \\ &= \mathcal{W}\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(u+g_0)} \frac{h(A_{g_0})}{s(X_{g_0+u})} 1_{\{X_{g_0+u} < 0\}} du\right) \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{W}(e^{-\lambda g_0} h(A_{g_0})) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} \mathbb{E}_0^\downarrow\left[\frac{1}{s(X_u)}\right] du. \end{aligned}$$

Le calcul se poursuit alors comme pour (1.20) et l'on obtient : $I^- = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{W}(e^{-\lambda g_0} h(A_{g_0}))}{\lambda u_{\lambda}^{(-)}(0, 0)}$.

On procède de même pour I^+ :

$$\begin{aligned} I^+ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathcal{W} \left(\frac{h(A_t)}{s(X_t)} 1_{\{X_t > 0\}} 1_{\{g_0 \leq t\}} \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathcal{W} \left(\frac{h(A_{g_0} + t - g_0)}{s(X_t)} 1_{\{X_t > 0\}} 1_{\{g_0 < t\}} \right) dt \\ &= \mathcal{W} \left(\int_{g_0}^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{h(A_{g_0} + t - g_0)}{s(X_t)} 1_{\{X_t > 0\}} dt \right) \\ &= \mathcal{W} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(u+g_0)} \frac{h(A_{g_0} + u)}{s(X_{g_0+u})} 1_{\{X_{g_0+u} > 0\}} du \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} \mathcal{W}(e^{-\lambda g_0} h(A_{g_0} + u)) \mathbb{E}_0^\uparrow \left[\frac{1}{s(X_u)} \right] du \end{aligned}$$

Or, h étant sous-exponentielle, on a, d'après (1.21) :

$$\begin{aligned} I^+ &\leq \frac{\alpha}{2} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\beta)u} \mathcal{W}(e^{-\lambda g_0 - \beta A_{g_0}}) \mathbb{E}_0^\uparrow \left[\frac{1}{s(X_u)} \right] du \\ &= \frac{\alpha}{2} \frac{\mathcal{W}(e^{-\lambda g_0 - \beta A_{g_0}})}{(\lambda + \beta) u_{\lambda+\beta}^{(+)}(0, 0)} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \frac{\alpha}{2} \frac{\mathcal{W}(e^{-\beta A_{g_0}})}{\beta u_{\beta}^{(+)}(0, 0)} < \infty. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_0[h(A_t)] dt \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} \frac{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))}{\lambda u_{\lambda}^{(-)}(0, 0)}$$

et il ne reste plus qu'à appliquer le Théorème Taubérien 1.4 pour conclure. □

Remarque 1.23. En utilisant la dernière ligne du tableau comparatif, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(e^{-\lambda g_0} h(A_{g_0})) &= 2 \mathbb{E}_0 \left[\int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} h(A_u) dL_u \right] \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_0[e^{-\lambda \tau_l} h(A_{\tau_l})] dl \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_0 \left[e^{-\lambda \int_0^{\tau_l} 1_{\{X_s \leq 0\}} ds - \lambda \int_0^{\tau_l} 1_{\{X_s > 0\}} ds} h \left(\int_0^{\tau_l} 1_{\{X_s > 0\}} ds \right) \right] dl. \end{aligned}$$

Or, d'après Watanabe [Wat95], $\left(\int_0^{\tau_l} 1_{\{X_s > 0\}} ds, l \geq 0 \right)$ et $\left(\int_0^{\tau_l} 1_{\{X_s \leq 0\}} ds, l \geq 0 \right)$ sont deux subordonateurs indépendants ayant même loi que, respectivement, $(\tau_l^{(+)}, l \geq 0)$ et $(\tau_l^{(-)}, l \geq 0)$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(e^{-\lambda g_0} h(A_{g_0})) &= 2 \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_0[e^{-\lambda \tau_l^{(-)}}] \mathbb{E}_0[e^{-\lambda \tau_l^{(+)}} h(\tau_l^{(+)})] dl \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_0[e^{-\lambda \tau_l^{(+)}} h(\tau_l^{(+)})] e^{-l/u_{\lambda}^{(-)}(0, 0)} dl. \end{aligned}$$

En particulier, si $h(x) = e^{-\beta x}$, il vient :

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(e^{-\lambda g_0 - \beta A_{g_0}}) &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-l/u_{\lambda+\beta}^{(+)}(0,0) - l/u_{\lambda}^{(-)}(0,0)} dl \\ &= \frac{2}{\frac{1}{u_{\lambda+\beta}^{(+)}(0,0)} + \frac{1}{u_{\lambda}^{(-)}(0,0)}},\end{aligned}$$

de sorte que l'on retrouve le résultat de Barlow-Pitman-Yor [BPY89] :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_0 [e^{-\beta A_t}] dt = \frac{\frac{u_{\lambda+\beta}^{(+)}(0,0)}{\lambda} + \frac{u_{\lambda}^{(-)}(0,0)}{\lambda+\beta}}{u_{\lambda+\beta}^{(+)}(0,0) + u_{\lambda}^{(-)}(0,0)}.$$

L'équivalent du Théorème 1.22 s'écrit alors dans ce cas :

$$\mathbb{E}_0 [e^{-\beta A_t}] \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} u_{\beta}^{(+)}(0,0) \nu^{(-)}([t, +\infty[).$$

On pénalise à présent la diffusion $(X_t, t \geq 0)$ par $(h(A_t), t \geq 0)$.

Théorème 1.24.

Supposons que la diffusion $(X_t, t \geq 0)$ soit solution de l'EDS : $dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt$. Alors :

i) Le processus

$$\begin{aligned}M_t^{(h)} &:= \frac{1}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} \left(\widehat{\mathbb{E}}_{X_t^+} \left[\mathcal{W}(h(a + \widehat{T}_0 + A_{g_0})) \right]_{|a=A_t} - 2h(A_t)s(-X_t^-) \right), \quad t \geq 0 \\ &= \frac{2}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} \left(\int_0^{+\infty} h(A_t + u)q^{(+)}(u, X_t^+, 0)du - h(A_t)s(-X_t^-) \right), \quad t \geq 0\end{aligned}$$

est une martingale continue strictement positive qui converge p.s. vers 0.

ii) Soit $u > 0$. Pour tout $\Lambda_u \in \mathcal{F}_u$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}_0 [1_{\Lambda_u} h(A_t)]}{\mathbb{E}_0 [h(A_t)]} = \mathbb{E}_0 [1_{\Lambda_u} M_u^{(h)}].$$

iii) Il existe une probabilité $\mathbb{P}_0^{(h)}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_{\infty})$ telle que :

$$\mathbb{P}_0^{(h)}(\Lambda_u) = \mathbb{E}_0 [1_{\Lambda_u} M_u^{(h)}] \quad \text{pour tout } u \geq 0 \text{ et tout } \Lambda_u \in \mathcal{F}_u.$$

iv) Sous $\mathbb{P}_0^{(h)}$, A_{∞} est fini p.s. et admet pour densité :

$$\mathbb{P}_0^{(h)}(A_{\infty} \in dl) = \frac{h(l)q^{(+)}(l, 0, 0)}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} dl.$$

v) Soit $g_+ := \sup\{t \geq 0; X_t \geq 0\}$. On a $\mathbb{P}_0^{(h)}(g_+ < +\infty) = 1$ et $\mathbb{P}_0^{(h)}$ admet la décomposition :

$$\mathbb{P}_0^{(h)} = \frac{2}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} \int_0^{+\infty} du q(u, 0, 0) h(A_u) \mathbb{P}^{0,u,0} \circ \mathbb{P}_0^{\downarrow}.$$

En conséquence, le processus $(X_{g_++u}, u \geq 0)$ sous $\mathbb{P}_0^{(h)}$ a même loi que le processus des coordonnées sous $\mathbb{P}_0^{\downarrow}$.

Démonstration.

1) Déterminons dans un premier temps l'asymptotique de $t \mapsto \mathbb{E}_x [h(A_t)]$.

- si $x > 0$, $A_{T_0} = T_0$ et :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x [h(A_t)] &= \mathbb{E}_x [h(A_t)1_{\{t \leq T_0\}}] + \mathbb{E}_x [h(A_t)1_{\{t > T_0\}}] \\ &= \mathbb{E}_x [h(t)1_{\{t \leq T_0\}}] + \mathbb{E}_x [h(A_{T_0} + A_{t-T_0} \circ \theta_{T_0})1_{\{t > T_0\}}] \\ &= h(t)\mathbb{P}_x(T_0 > t) + \widehat{\mathbb{E}}_x \left[\mathbb{E}_0 [h(\widehat{T}_0 + A_{t-\widehat{T}_0})] 1_{\{t > \widehat{T}_0\}} \right]. \end{aligned}$$

Or, d'après la Remarque 1.20, pour une diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ dont la mesure de Lévy satisfait l'Hypothèse 1.3, on a :

$$\mathbb{P}_x(T_0 > t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} s(x)\nu([t, +\infty[).$$

Ainsi, pour $x \geq 0$, en appliquant le Théorème 1.22, on obtient l'équivalent :

$$\mathbb{E}_x [h(A_t)] \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \widehat{\mathbb{E}}_x \left[\mathcal{W}(h(\widehat{T}_0 + A_{g_0})) \right] \nu^{(-)}([t, +\infty[)$$

puisque $\frac{h(t)}{\nu^{(-)}([t, +\infty[)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$.

- si $x < 0$, $A_{T_0} = 0$; le raisonnement est le même, et l'on obtient :

$$\mathbb{E}_x [h(A_t)] \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \left(-h(0)s(x) + \frac{1}{2} \mathcal{W}(h(A_{g_0})) \right) \nu^{(-)}([t, +\infty[).$$

2) Effectuons alors la pénalisation :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}_0 [h(A_{t+u}) | \mathcal{F}_u]}{\mathbb{E}_0 [h(A_t)]} &= \frac{\mathbb{E}_{X_u} [h(A_u + A_t)]}{\mathbb{E}_0 [h(A_t)]} \\ &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1_{\{X_u > 0\}} \frac{\widehat{\mathbb{E}}_{X_u} \left[\mathcal{W}(h(a + \widehat{T}_0 + A_{g_0})) \right]_{|a=A_u}}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} \\ &\quad + 1_{\{X_u \leq 0\}} \frac{-2h(A_u)s(X_u) + \mathcal{W}(h(A_u + A_{g_0}))}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} \\ &= \frac{1}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} \left(\widehat{\mathbb{E}}_{X_u^+} \left[\mathcal{W}(h(a + \widehat{T}_0 + A_{g_0})) \right]_{|a=A_u} - 2h(A_u)s(-X_u^-) \right). \end{aligned}$$

Simplifions à présent cette expression, en utilisant la dernière ligne du Tableau comparatif :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(h(a + \widehat{T}_0 + A_{g_0})) &= 2\mathbb{E}_0 \left[\int_0^{+\infty} h(a + \widehat{T}_0 + A_s) dL_s \right] \\ &= 2\mathbb{E}_0 \left[\int_0^{+\infty} h(a + \widehat{T}_0 + A_{\tau_l}) dl \right] \\ &= 2\mathbb{E}_0 \left[\int_0^{+\infty} h(a + \widehat{T}_0 + \tau_l^{(+)}) dl \right] \quad (\text{d'après la Remarque 1.23}). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{E}}_x \left[\mathcal{W}(h(a + \widehat{T}_0 + A_{g_0})) \right] &= 2 \widehat{\mathbb{E}}_x \left[\mathbb{E}_0 \left[\int_0^{+\infty} h(a + \widehat{T}_0 + \tau_l^{(+)}) dl \right] \right] \\
&= 2 \int_0^{+\infty} \widehat{\mathbb{E}}_x \left[\mathbb{E}_0 \left[h(a + \widehat{T}_0 + \tau_l^{(+)}) \right] \right] dl \\
&= 2 \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_x \left[h(a + \tau_l^{(+)}) \right] \quad (\text{d'après la propriété de Markov}) \\
&= 2 \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_x \left[h(a + s) dL_s^{(+)} \right] \\
&= 2 \int_0^{+\infty} h(a + s) q^{(+)}(s, x, 0) du. \tag{1.22}
\end{aligned}$$

En remplaçant alors a par A_u et x par X_u^+ , on obtient bien l'expression du Point (i).

3) Montrons à présent que $(M_t^{(h)}, t \geq 0)$ est une martingale, afin de pouvoir appliquer le Théorème 0.2, ce qui prouvera directement les Points (i), (ii) et (iii). Rappelons que $(X_t, t \geq 0)$ est une semi-martingale solution de l'EDS :

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt$$

de sorte que son générateur s'écrit : $\mathcal{G} := \frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial}{\partial x}$. Appliquons la formule d'Itô :

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(h(A_{g_0}))dM_t &= 2 \int_0^{+\infty} h(A_t + u) \frac{\partial q^{(+)}}{\partial x}(u, X_t^+, 0) du dX_t^+ \\
&\quad + \int_0^{+\infty} h(A_t + u) \frac{\partial^2 q^{(+)}}{\partial x^2}(u, X_t^+, 0) du d\langle X^+ \rangle_t \\
&\quad + 2h(A_u) \frac{\partial s}{\partial x}(-X_t^-)dX_t^- - h(A_u) \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}(-X_t^-)d\langle X^- \rangle_t \\
&\quad + 2 \mathbf{1}_{\{X_t > 0\}} \int_0^{+\infty} h'(A_t + u) q^{(+)}(u, X_t^+, 0) du dt - 2 \mathbf{1}_{\{X_t > 0\}} h'(A_t) s(-X_t^-) dt.
\end{aligned}$$

Comme $s(0) = 0$, le dernier terme est nul. Par ailleurs, $(X_t^+, t \geq 0)$ et $(X_t^-, t \geq 0)$ étant des semi-martingales, on peut utiliser la formule d'Itô-Tanaka :

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}(h(A_{g_0}))dM_t &= 2 \int_0^{+\infty} h(A_t + u) \frac{\partial q^{(+)}}{\partial x}(u, X_t^+, 0) du \left(\mathbf{1}_{\{X_t > 0\}} (\sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt) + \frac{1}{2}dL_t \right) \\
&\quad + \int_0^{+\infty} h(A_t + u) \frac{\partial^2 q^{(+)}}{\partial x^2}(u, X_t^+, 0) du \mathbf{1}_{\{X_t > 0\}} \sigma^2(X_t)dt \\
&\quad + 2h(A_t) \frac{\partial s}{\partial x}(-X_t^-) \left(-\mathbf{1}_{\{X_t \leq 0\}} (\sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt) + \frac{1}{2}dL_t \right) \\
&\quad - h(A_t) \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}(-X_t^-) \mathbf{1}_{\{X_t \leq 0\}} \sigma^2(X_t)dt \\
&\quad + 2 \mathbf{1}_{\{X_t > 0\}} \int_0^{+\infty} h'(A_t + u) q^{(+)}(u, X_t^+, 0) du dt.
\end{aligned}$$

Regroupons à présent les différents termes :

- Termes en temps local dL_t :

$$\left(\int_0^{+\infty} h(A_t + u) \frac{\partial q^{(+)}(u, X_t^+, 0)}{\partial x} \Big|_{X_t^+ = 0} du + h(A_t) s'(0) \right) dL_t. \quad (1.23)$$

Pour prouver que ce terme est nul, introduisons la diffusion $(\tilde{X}_t, t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, réfléchie en 0, dont la mesure de vitesse et la fonction d'échelle sont données par :

$$\begin{cases} \tilde{s}(x) = m([0, x]) \\ \tilde{m}(dx) = s'(x)dx. \end{cases}$$

Nous verrons au Chapitre 3, Proposition 3.37, que les diffusions $(X_t^{(+)}, t \geq 0)$ et $(\tilde{X}_t, t \geq 0)$ sont liées par la relation suivante :

$$\frac{\partial q^{(+)}(u, 0, x)}{\partial x} = -\tilde{n}_{x,0}(u) s'(x),$$

où $\tilde{n}_{x,0}$ désigne la densité du temps d'atteinte du niveau 0 par la diffusion $(\tilde{X}_t, t \geq 0)$ issue de x . Ainsi,

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{+\infty} h(A_t + u) \frac{\partial q^{(+)}(u, 0, x)}{\partial x} du &= -2 \int_0^{+\infty} h(A_t + u) \tilde{n}_{x,0}(u) s'(x) du \\ &= -2s'(x) \tilde{\mathbb{E}}_x \left[h(A_t + \tilde{T}_0) \right] \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} -2s'(0) h(A_t) \end{aligned}$$

ce qui prouve que (1.23) est nulle.

- Termes en dt contenant la fonction d'échelle :

$$-2h(A_t) 1_{\{X_t \leq 0\}} \left(\frac{1}{2} \sigma^2(X_t) \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}(X_t) + b(X_t) \frac{\partial s}{\partial x}(X_t) \right) = -h(A_t) 1_{\{X_t \leq 0\}} \mathcal{G}s(X_t) = 0$$

car s est une fonction d'échelle de la diffusion $(X_t, t \geq 0)$.

- Termes en dt restants :

$$\begin{aligned} 21_{\{X_t \geq 0\}} b(X_t) \int_0^{+\infty} h(A_t + u) \frac{\partial q^{(+)}(u, X_t^+, 0)}{\partial x} du \\ + 1_{\{X_t \geq 0\}} \sigma^2(X_t) \int_0^{+\infty} h(A_t + u) \frac{\partial^2 q^{(+)}(u, X_t^+, 0)}{\partial x^2} du \\ + 21_{\{X_t \geq 0\}} \int_0^{+\infty} h'(A_t + u) q^{(+)}(u, X_t^+, 0) du \end{aligned}$$

que l'on réécrit, en intégrant le dernier terme par partie et en factorisant, sous la forme :

$$21_{\{X_t \geq 0\}} \int_0^{+\infty} h(A_t + u) \left(\frac{1}{2} \sigma^2(X_t) \frac{\partial^2 q^{(+)}(u, X_t^+, 0)}{\partial x^2} + b(X_t) \frac{\partial q^{(+)}(u, X_t^+, 0)}{\partial x} - \frac{\partial q^{(+)}(u, X_t^+, 0)}{\partial u} \right) du.$$

Or, $(x, u) \mapsto q^{(+)}(u, x, 0)$ est justement solution de l'équation différentielle parabolique $\frac{\partial q^{(+)}(u, x, 0)}{\partial u} = \mathcal{G}q^{(+)}(u, x, 0)$, de sorte que ce dernier terme est nul également.

Ainsi $(M_t^{(h)}, t \geq 0)$ est une martingale locale, clairement positive.

Pour montrer que $(M_t^{(h)}, t \geq 0)$ est une vraie martingale, nous allons montrer que la famille $(M_T, T \text{ temps d'arrêt borné par } K)$ est uniformément intégrable. En effet :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{W}(h(A_{g_0})) \mathbb{E}_0 \left[M_T^{(h)} 1_{\{M_T^{(h)} \geq n\}} \right] \\
&= \mathbb{E}_0 \left[\left(\widehat{\mathbb{E}}_{X_T^+} \left[\mathcal{W} \left(h(\widehat{T}_0 + A_{g_0} + a) \right) \right] \right)_{|a=A_T} - 1_{\{X_T < 0\}} 2h(A_T) s(X_T) \right] 1_{\{M_T^{(h)} \geq n\}} \\
&\leq \mathbb{E}_0 \left[\left(\mathcal{W}(h(A_{g_0})) - 2h(A_T) 1_{\{X_T < 0\}} (N_T^{(0)} - 2L_T) \right) 1_{\{M_T^{(h)} \geq n\}} \right] \quad (\text{car } h \text{ est décroissante}) \\
&\leq \mathcal{W}(h(A_{g_0})) \mathbb{P} \left(M_T^{(h)} \geq n \right) + 4\alpha \mathbb{E}_0 \left[L_K 1_{\{M_T^{(h)} \geq n\}} \right] - 2\mathbb{E}_0 \left[1_{\{X_T < 0\}} h(A_T) N_K^{(0)} 1_{\{M_T^{(h)} \geq n\}} \right] \\
&\leq \mathcal{W}(h(A_{g_0})) \mathbb{P} \left(\sup_{t \leq K} M_t^{(h)} \geq n \right) + 4\alpha \mathbb{E}_0 \left[L_K 1_{\{\sup_{t \leq K} M_t^{(h)} \geq n\}} \right] + 2\alpha \mathbb{E}_0 \left[|N_K^{(0)}| 1_{\{\sup_{t \leq K} M_t^{(h)} \geq n\}} \right] \\
&\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{uniformément en } T.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la famille $(M_T, T \text{ temps d'arrêt borné par } K)$ est uniformément intégrable et $(M_t^{(h)}, t \geq 0)$ est une $\mathbb{P}$ -martingale positive. En conséquence, $M^{(h)}$ converge $\mathbb{P}$ -p.s. et, en introduisant la famille de temps d'arrêt $(C_l := \inf\{t \geq 0; A_t > l\}, l \geq 0)$, on constate, puisque $X_{C_l} \geq 0$, que

$$M_{C_l}^{(h)} = \frac{1}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} \left(\widehat{\mathbb{E}}_{X_{C_l}^+} \left[\mathcal{W} \left(h(\widehat{T}_0 + A_{g_0} + l) \right) \right] \right) \leq \frac{\mathcal{W}(h(A_{g_0} + l))}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 0.$$

4) Pour déterminer la loi de A_∞ , on applique le théorème d'arrêt de Doob :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^{(h)}(A_t > l) &= \mathbb{E}_0 \left[1_{\{C_l < t\}} M_t^{(h)} \right] \\
&= \mathbb{E}_0 \left[1_{\{C_l < t\}} \frac{1}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} \int_0^{+\infty} h(l+u) q^{(+)}(u, X_{C_l}^+, 0) du \right] \\
&\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} \int_0^{+\infty} h(l+u) \mathbb{E}_0 \left[q^{(+)}(u, X_{C_l}^+, 0) \right] du.
\end{aligned}$$

Or, d'après [Wat95], $(X_{C_l}, l \geq 0) \stackrel{(\text{loi})}{=} (X_l^{(+)}, l \geq 0)$, et d'après la relation (1.11), le processus $(q^{(+)}(v-l, X_l^{(+)}, 0), l < v)$ est une martingale, de sorte que :

$$\mathbb{E}_0 \left[q^{(+)}(u, X_{C_l}^+, 0) \right] = \mathbb{E}_0 \left[q^{(+)}(u, X_l^{(+)}, 0) \right] = \mathbb{E}_0 \left[q^{(+)}(u+l-l, X_l^{(+)}, 0) \right] = q^{(+)}(u+l, 0, 0)$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^{(h)}(A_\infty > l) &= \frac{1}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} \int_0^{+\infty} h(l+u) q^{(+)}(u+l, 0, 0) du \\
&= \frac{1}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} \int_l^{+\infty} h(v) q^{(+)}(v, 0, 0) dv.
\end{aligned}$$

5) Décrivons finalement le processus des coordonnées sous $\mathbb{P}^{(h)}$.

On introduit $g_+^{(t)} := \sup\{s \leq t; X_s \geq 0\}$. Soient F, G, φ trois fonctionnelles boréliennes bornées. Nous allons procéder comme pour la preuve du Théorème 1.13 de représentation intégrale de $\mathbb{P}^{(\lambda, a)}$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_0^{(h)} \left[F(X_s, s \leq g_+^{(t)}) \varphi(g_+^{(t)}) G(X_{g_+^{(t)}+s}, s \leq t - g_+^{(t)}) \right] \\ &= \mathbb{E}_0 \left[F(X_s, s \leq g_+^{(t)}) \varphi(g_+^{(t)}) G(X_{g_+^{(t)}+s}, s \leq t - g_+^{(t)}) M_t^{(h)} \left(1_{\{g_+^{(t)}=t\}} + 1_{\{g_+^{(t)}<t\}} \right) \right] \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Tout d'abord, $\{g_+^{(t)} = t\} = \{X_t \geq 0\}$, donc :

$$I_1 = \mathbb{E}_0 \left[F(X_s, s \leq t) \varphi(t) G(X_t) \frac{\widehat{\mathbb{E}}_{X_t^+} \left[\mathcal{W}(h(a + \widehat{T}_0 + A_{g_0})) \right]_{|a=A_t}}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} 1_{\{g_+^{(t)}=t\}} \right] \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

par convergence dominée, car $(X_t, t \geq 0)$ est récurrente sous $\mathbb{P}$ et donc $A_t \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ $\mathbb{P}$ -p.s.

Ensuite $\{g_+^{(t)} < t\} = \{X_t < 0\}$, et, sur l'évènement $\{g_+^{(t)} < t\}$, $g_+^{(t)} = g_0^{(t)}$, d'où :

$$\begin{aligned} I_2 &= \mathbb{E}_0 \left[F(X_s, s \leq g_0^{(t)}) \varphi(g_0^{(t)}) G(X_{g_0^{(t)}+s}, s \leq t - g_0^{(t)}) \left(\frac{\mathcal{W}(h(a + A_{g_0}))_{|a=A_t}}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} - \frac{h(A_t)s(X_t)}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} \right) 1_{\{X_t < 0\}} \right] \\ &= I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Par convergence dominée, il vient à nouveau :

$$I_3 = \mathbb{E}_0 \left[F(X_s, s \leq g_0^{(t)}) \varphi(g_0^{(t)}) G(X_{g_0^{(t)}+s}, s \leq t - g_0^{(t)}) \frac{\mathcal{W}(h(a + A_{g_0}))_{|a=A_t}}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} 1_{\{X_t < 0\}} \right] \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0,$$

et il ne reste plus qu'à évaluer I_4 .

A l'aide du Lemme 1.9, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
I_4 &= -2\mathbb{E}_0 \left[F(X_s, s \leq g_0^{(t)}) \varphi(g_0^{(t)}) G(X_{g_0^{(t)}} + s, s \leq t - g_0^{(t)}) \frac{h(A_t)s(X_t)}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} 1_{\{X_t < 0\}} \right] \\
&= -2 \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t \mathbb{P}_0 \left(g_0^{(t)} \in du, X_t \in dy \right) \mathbb{E}_0 \left[F(X_s, s \leq g_0^{(t)}) \varphi(g_0^{(t)}) G(X_{u+s}, s \leq t - u) \frac{h(A_t)s(X_t)}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} 1_{\{X_t < 0\}} | g_0^{(t)} = u, X_t = y \right] \\
&= -2 \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t \mathbb{P}_0 \left(g_0^{(t)} \in du, X_t \in dy \right) \varphi(u) \mathbb{P}^{0,u,0}(F(X_s, s \leq u)h(A_u)) \frac{s(y)}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} \mathbb{E}_0 \left[G(X_{u+s}, s \leq t - u) | g_0^{(t)} = u, X_t = y \right] \\
&= \frac{2}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^t du q(u, 0) \mathbb{P}_0^\perp(X_{t-u} \in dy) \varphi(u) \mathbb{P}^{0,u,0}(F(X_s, s \leq u)h(A_u)) \mathbb{E}_0^\perp[G(X_{u+s}, s \leq t - u) | X_{t-u} = y] \\
&= \frac{2}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} \int_0^t du q(u, 0) \varphi(u) \mathbb{P}^{0,u,0}(F(X_s, s \leq u)h(A_u)) \mathbb{E}_0^\perp[G(X_{u+s}, s \leq t - u)] \\
&\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{\mathcal{W}(h(A_{g_0}))} \int_0^{+\infty} du q(u, 0) \varphi(u) \mathbb{P}^{0,u,0}(F(X_s, s \leq u)h(A_u)) \mathbb{E}_0^\perp[G(X_{u+s}, s \geq 0)].
\end{aligned}$$

En conséquence, $g_+ = g_0$ $\mathbb{P}^{(h)}$ -p.s. et donc $\mathbb{P}_0^{(h)}(g_+ < \infty) = 1$. □

Exemple 1.25. Prenons l'exemple le plus simple : $(X_t, t \geq 0) = (B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien issu de 0. Dans ce cas, $(X_t^{(+)}, t \geq 0) \stackrel{(\text{loi})}{=} (|B_t|, t \geq 0)$ et $(X_t^{(-)}, t \geq 0) \stackrel{(\text{loi})}{=} (-|B_t|, t \geq 0)$. On obtient alors l'équivalent :

$$\mathbb{E}_0[h(A_t)] \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{\sqrt{2\pi u}} du$$

et la martingale :

$$M_t^{(h)} := \frac{1}{\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{\sqrt{u}} du} \left(\int_0^{+\infty} du h(A_t + u) \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-\frac{x_t^+}{2u}} - \sqrt{2\pi} h(A_t) X_t^- \right).$$

Ainsi, sous $\mathbb{P}_0^{(h)}$, A_∞ est une v.a. de densité $l \mapsto \frac{1}{\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{\sqrt{u}} du} \frac{h(l)}{\sqrt{l}}$, et le processus $(X_{g_+ + t}, t \geq 0)$ a même loi que l'opposé d'un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0. Ces résultats coïncident bien avec ceux de [RY10, Theorem 3.1].

Chapitre 2

Pénalisation d'une diffusion récurrente positive

2.1 Introduction

2.1.1 Motivations

Nous allons traiter ici un cas qui ne rentre pas dans le cadre précédent des diffusions linéaires récurrentes nulles. Soit $b \in]0, +\infty[$. On considère une diffusion linéaire régulière récurrente $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs dans $I = [0, b]$, à échelle naturelle (c'est-à-dire $s(x) = x$), 0 et b étant des barrières instantanément réfléchissantes. On suppose toujours $(X_t, t \geq 0)$ définie sur l'espace canonique $\Omega := \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ et l'on note $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ sa filtration naturelle, et $\mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$. On suppose par ailleurs que sa mesure de vitesse $m(dx) = m(x)dx$ est

absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Notre objectif ici est pénaliser cette diffusion récurrente positive par $(e^{\alpha L_t}, t \geq 0)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(L_t, t \geq 0)$ désigne le temps local en 0 de $(X_t, t \geq 0)$. Comme précédemment, notre approche de cette pénalisation consiste dans un premier temps à déterminer un équivalent de $t \mapsto \mathbb{E}_x [e^{\alpha L_t}]$ lorsque t tend vers $+\infty$.

2.1.2 Énoncé des principaux résultats

Soit $\alpha > 0$. Comme $b + m([0, b]) < \infty$, l'équation :

$$\alpha + \frac{1}{u_{-r^2}(0, 0)} = 0 \tag{2.1}$$

admet un nombre dénombrable de solutions, lesquelles sont toutes réelles, et l'on note r^2 celle de plus petit module (voir Lemme 2.10). De même, on note ρ^2 l'unique solution dans $\mathbb{R}^+$ de l'équation :

$$-\alpha + \frac{1}{u_{\rho^2}(0, 0)} = 0. \tag{2.2}$$

Nous pouvons alors énoncer un premier résultat :

Théorème 2.1. *Soient $\alpha > 0$ et r^2, ρ^2 définis par les équations (2.1) et (2.2).*

i) Sous l'Hypothèse 2.12 (voir Section 2.2), on a :

$$\mathbb{E}_x [e^{-\alpha L_t}] \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{r^2} u_{-r^2}(0, x) \frac{1}{\frac{\partial}{\partial z} u_z(0, 0)|_{z=-r^2}} \exp(-r^2 t). \quad (2.3)$$

ii) Sous l'Hypothèse 2.16 (voir Sous-section 2.3.5), on a :

$$\mathbb{E}_x [e^{\alpha L_t}] \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{\rho^2} u_{\rho^2}(0, x) \frac{1}{\frac{\partial}{\partial z} u_z(0, 0)|_{z=\rho^2}} \exp(\rho^2 t) \quad (2.4)$$

Ce résultat permet alors d'obtenir notre principe de pénalisation :

Théorème 2.2.

Soient $\alpha > 0$ et r^2, ρ^2 définis par les équations (2.1) et (2.2). Pour $x \in [0, b]$, les processus

$$\left(M_t^{(-\alpha)} := \exp(r^2 t - \alpha L_t) \frac{u_{-r^2}(0, X_t)}{u_{-r^2}(0, x)}, t \geq 0 \right)$$

et,

$$\left(M_t^{(+\alpha)} := \exp(-\rho^2 t + \alpha L_t) \frac{u_{\rho^2}(0, X_t)}{u_{\rho^2}(0, x)}, t \geq 0 \right)$$

sont des $\mathbb{P}$ -martingales continues, strictement positives, qui convergent vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$. De plus, sous les Hypothèses 2.12 et 2.16, le principe de pénalisation est satisfait :

i) Soit $s > 0$ et $x \in [0, b]$. Pour tout $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}_x [1_{\Lambda_s} e^{\pm \alpha L_t}]}{\mathbb{E}_x [e^{\pm \alpha L_t}]} = \mathbb{E}_x [1_{\Lambda_s} M_s^{(\pm \alpha)}].$$

ii) Il existe $(\mathbb{P}_x^{(\pm \alpha)})_{x \in [0, b]}$ une famille de probabilités définies sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ telle que :

$$\mathbb{P}_x^{(\pm \alpha)}(\Lambda_u) = \mathbb{E}_x [1_{\Lambda_u} M_u^{(\pm \alpha)}] \quad \text{pour tout } u \geq 0 \text{ et tout } \Lambda_u \in \mathcal{F}_u.$$

On étudie à présent la loi du processus des coordonnées sous $\mathbb{P}^{(\pm \alpha)}$:

Théorème 2.3.

Soient $\alpha > 0$ et r^2, ρ^2 définis par les équations (2.1) et (2.2). On suppose que les Hypothèses 2.12 et 2.16 sont vérifiées. Alors :

i) Sous $\mathbb{P}^{(\pm \alpha)}$, le processus des coordonnées $(X_t, t \geq 0)$ est une diffusion dont le générateur infinitésimal s'écrit :

$$\begin{cases} \mathcal{G}^{(-\alpha)} f(x) &:= \frac{1}{m(x)} f''(x) + \frac{2}{m(x) u_{-r^2}(0, x)} \frac{\partial u_{-r^2}(0, x)}{\partial x} f'(x), \\ \mathcal{G}^{(+\alpha)} f(x) &:= \frac{1}{m(x)} f''(x) + \frac{2}{m(x) u_{\rho^2}(0, x)} \frac{\partial u_{\rho^2}(0, x)}{\partial x} f'(x), \end{cases} \quad (2.5)$$

sur le domaine : $\mathcal{D}(\mathcal{G}^{(\pm \alpha)}) := \left\{ f : \mathcal{G}^{(\pm \alpha)} f \in \mathcal{C}_b([0, b]), f'(0^+) = f'(b^-) = 0 \right\}$.

ii) Sous $\mathbb{P}^{(\pm \alpha)}$, la densité de la mesure de Lévy du subordonateur $(\tau_l, l \geq 0)$ est donnée par :

$$\begin{cases} n^{(-\alpha)}(u) &= e^{r^2 u} n(u), \\ n^{(+\alpha)}(u) &= e^{-\rho^2 u} n(u), \end{cases}$$

où n est la densité de la mesure de Lévy de $(\tau_l, l \geq 0)$ sous $\mathbb{P}$.

iii) $L_\infty = \infty$ $\mathbb{P}^{(\pm\alpha)}$ -p.s.

D'autres caractéristiques, telles que la mesure de vitesse et la fonction d'échelle de la diffusion pénalisée seront également calculées au cours de la preuve, voir Section 2.3. Remarquons que les expressions dans les deux cas sont très similaires, et que l'on peut formellement déduire l'une de l'autre en remplaçant α par $-\alpha$ (resp. $-\alpha$ par α) et ρ par $i\rho$ (resp. r par $i\rho$). Une idée naturelle est alors de considérer une double pénalisation, c'est-à-dire de pénaliser dans un premier temps $\mathbb{P}$ par $(e^{\alpha L_t}, t \geq 0)$, puis, dans un second temps, $\mathbb{P}^{(\alpha)}$ par $(e^{\beta L_t}, t \geq 0)$. Le résultat de ces deux opérations est très simple et peut être résumé dans un diagramme commutatif, comme présenté ci-dessous :

Théorème 2.4. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On suppose que les Hypothèses 2.12 et 2.16 sont vérifiées. Alors, le diagramme de pénalisation suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P} & \xrightarrow{(e^{\alpha L_t}, t \geq 0)} & \mathbb{P}^{(\alpha)} \\ & \searrow (e^{(\alpha+\beta)L_t}, t \geq 0) & \downarrow (e^{\beta L_t}, t \geq 0) \\ & & \mathbb{P}^{(\alpha+\beta)} = \mathbb{P}^{(\alpha)(\beta)} \end{array}$$

En particulier, $\mathbb{P}^{(\alpha)(-\alpha)} = \mathbb{P}$.

Notons que ce théorème ressemble beaucoup à la Proposition 3.2 de [PY81] concernant les diffusions conditionnées.

Remarque 2.5. *Si $(X_t, t \geq 0)$ est une diffusion linéaire dont la fonction d'échelle s est une fonction $\mathcal{C}^1$ strictement croissante telle que $s(0) = 0$, on a, d'après la formule des temps d'occupation $L_t^0(X) = L_t^0(s(X))$. Il s'ensuit que :*

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-\alpha L_t^0(X)} \right] = \mathbb{E}_{s(x)} \left[e^{-\alpha L_t^0(s(X))} \right] \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{r^2} u_{-r^2}(0, s(x)) \frac{1}{\frac{\partial}{\partial z} u_z(0, 0) \big|_{z=-r^2}} e^{-r^2 t}$$

et, pour $\Lambda_u \in \mathcal{F}_u$:

$$\mathbb{P}_x^{(\alpha, X)}(\Lambda_u) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}_x \left[1_{\Lambda_u} e^{-\alpha L_t^0(X)} \right]}{\mathbb{E}_x \left[e^{-\alpha L_t^0(X)} \right]} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}_{s(x)} \left[1_{\Lambda_u} e^{-\alpha L_t^0(s(X))} \right]}{\mathbb{E}_{s(x)} \left[e^{-\alpha L_t^0(s(X))} \right]} = \mathbb{P}_{s(x)}^{(\alpha, s(X))}(\Lambda_u).$$

Par conséquent, nous ne considérerons par la suite que la probabilité équivalente sous laquelle $(X_t, t \geq 0)$ est une diffusion linéaire à échelle naturelle.

2.1.3 Plan

Le reste de ce chapitre se décompose en cinq parties :

- Dans la Section 2.2, nous prouvons le Théorème 2.1, en ne traitant que le cas de l'asymptotique de $t \mapsto \mathbb{E} \left[e^{-\alpha L_t} \right]$ ($\alpha > 0$). L'idée générale de la preuve repose sur le prolongement analytique de la transformée de Laplace de $t \mapsto \mathbb{E} \left[e^{-\alpha L_t} \right]$, ainsi qu'une application du théorème des résidus.

- Dans la Section 2.3, nous prouvons les Théorèmes 2.2 et 2.3, toujours dans le cas de la pénalisation par $(e^{-\alpha L_t}, t \geq 0)$. La pénalisation par $(e^{\alpha L_t}, t \geq 0)$ étant très similaire, nous n'en donnons que quelques éléments dans la Sous-section 2.3.5

- Dans la Section 2.4, nous prouvons le Théorème 2.4, i.e. le principe d'itération des pénalisations.

- Finalement, dans la Section 2.5, nous obtenons des formules explicites lorsque $(X_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien réfléchi en 0 et en 1, et même plus généralement lorsque $(X_t, t \geq 0)$ est un processus de Bessel de dimension $\delta \in]0, 2[$ réfléchi en 1.

2.2 Etude asymptotique

Soit $\alpha > 0$. Nous allons dans cette section déterminer un équivalent de $t \mapsto \mathbb{E}_x [e^{-\alpha L_t}]$ lorsque t tend vers $+\infty$. Rappelons que dans ce chapitre $(X_t, t \geq 0)$ est une diffusion récurrente positive réfléchie sur $[0, b]$ et telle que $b + m([0, b]) < \infty$. Comme précédemment, notre approche est basée sur l'étude de la transformée de Laplace de $t \mapsto \mathbb{E}_x [e^{-\alpha L_t}]$. En effet, cette quantité peut être exprimé explicitement à l'aide de la résolvante de $(X_t, t \geq 0)$, comme indiqué dans le lemme suivant.

Lemme 2.6. *On a :*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x [e^{-\alpha L_t}] dt = \frac{1}{\lambda} - \frac{u_\lambda(0, x)}{\lambda u_\lambda(0, 0)} \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha u_\lambda(0, 0)}}. \quad (2.6)$$

Démonstration.

Soit $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x [e^{-\alpha L_t}] dt &= \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\alpha L_t} dt \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{\alpha}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\alpha L_t} dL_t \right] \quad (\text{en intégrant par parties}) \\ &= \frac{1}{\lambda} - \frac{\alpha}{\lambda} \int_0^\infty \mathbb{E}_x [e^{-\lambda \tau_l}] e^{-\alpha l} dl \quad (\text{en posant } L_t = l). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Par conséquent, en utilisant (2.7) et (1.3), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x [e^{-\alpha L_t}] dt &= \frac{1}{\lambda} - \frac{\alpha}{\lambda} \frac{u_\lambda(0, x)}{u_\lambda(0, 0)} \int_0^\infty \exp(-l/u_\lambda(0, 0) - \alpha l) dl \\ &= \frac{1}{\lambda} - \frac{\alpha}{\lambda} \frac{u_\lambda(0, x)}{u_\lambda(0, 0)} \frac{1}{\alpha + \frac{1}{u_\lambda(0, 0)}} \\ &= \frac{1}{\lambda} - \frac{u_\lambda(0, x)}{\lambda u_\lambda(0, 0)} \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha u_\lambda(0, 0)}}. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.7. *Ce calcul peut se faire de manière plus générale, pour toute fonction f bornée, de classe C^1 et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On obtient alors :*

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x [f(L_t)] dt = \frac{f(0)}{\lambda} + \frac{u_\lambda(0, x)}{\lambda u_\lambda(0, 0)} \left(-f(0) + \frac{1}{u_\lambda(0, 0)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{l}{u_\lambda(0, 0)}} f(l) dl \right).$$

Déterminons à présent la limite de $\int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x [e^{-\alpha L_t}] dt$ lorsque $\lambda \rightarrow 0$. Il s'agit donc, d'après (2.6), de déterminer les comportements asymptotiques de $\lambda \rightarrow u_\lambda(0, 0)$ et de $\lambda \rightarrow u_\lambda(0, x)$.

Nous allons pour cela nous appuyer à nouveau sur la théorie de Krein ([DM76, Chapter V p.162]) au travers de la représentation du noyau résolvant u_λ :

$$u_\lambda(x, y) = \Phi(x, \lambda) (u_\lambda(0, 0)\Phi(y, \lambda) - \Psi(y, \lambda)) \quad \text{pour } x \leq y \quad (2.8)$$

avec Φ et Ψ solutions, pour $x \in [0, b]$, de :

$$\begin{cases} \Phi(x, \lambda) = 1 + \lambda \int_0^x dy \int_0^y \Phi(s, \lambda) m(ds) = 1 + \lambda \int_0^x (x-s) \Phi(s, \lambda) m(ds) \\ \Psi(x, \lambda) = x + \lambda \int_0^x dy \int_0^y \Psi(s, \lambda) m(ds) = x + \lambda \int_0^x (x-s) \Psi(s, \lambda) m(ds), \end{cases} \quad (2.9)$$

Lemme 2.8. *On dispose des estimations asymptotiques suivantes :*

$$u_\lambda(0, 0) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\lambda m([0, b])}$$

et

$$\frac{u_\lambda(0, x)}{u_\lambda(0, 0)} \underset{\lambda \rightarrow 0}{=} 1 + \lambda \left(\int_0^x (x-s) m(ds) - x m([0, b]) \right) + o(\lambda).$$

En conséquence,

$$\int_0^\infty \mathbb{E}_x [e^{-\alpha L_t}] dt = m([0, b]) \left(x + \frac{1}{\alpha} \right) - \int_0^x (x-s) m(ds).$$

Démonstration.

Puisque $b + m([0, b]) < \infty$ et que b est une barrière réfléchissante, le noyau résolvant s'exprime d'après [KK74, p.34] :

$$u_\lambda(0, 0) = \frac{\Psi'(b, \lambda)}{\Phi'(b, \lambda)}. \quad (2.10)$$

En dérivant (2.9) par rapport à x , il vient :

$$u_\lambda(0, 0) = \frac{1 + \lambda \int_0^b \Psi(s, \lambda) m(ds)}{\lambda \int_0^b \Phi(s, \lambda) m(ds)} = \frac{1}{\lambda m([0, b])} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (\lambda \rightarrow 0). \quad (2.11)$$

Ainsi, la définition (2.8) implique :

$$\begin{aligned} \frac{u_\lambda(0, x)}{u_\lambda(0, 0)} &= \Phi(x, \lambda) - \frac{\Psi(x, \lambda)}{u_\lambda(0, 0)} \\ &= \Phi(x, \lambda) - \frac{x + \lambda \int_0^x (x-s) \Psi(s, \lambda) m(ds)}{\frac{1}{\lambda m([0, b])} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)} \\ &= \Phi(x, \lambda) - \lambda m([0, b]) \left(x + \lambda \int_0^x (x-s) \Psi(s, \lambda) m(ds) \right) (1 + o(1)) \\ &\underset{\lambda \rightarrow 0}{=} 1 + \lambda \left(\int_0^x (x-s) m(ds) - x m([0, b]) \right) + o(\lambda). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Il s'ensuit alors, en utilisant (2.11), (2.12) et (2.6) que :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x [e^{-\alpha L_t}] dt \\
 & \stackrel{=}{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left(1 - \left(1 + \lambda \left(\int_0^x (x-s)m(ds) - xm([0, b]) \right) + o(\lambda) \right) \frac{1}{1 + \frac{\lambda m([0, b])}{\alpha} + o(\lambda)} \right) \\
 & \stackrel{=}{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left(1 - \left(1 + \lambda \left(\int_0^x (x-s)m(ds) - xm([0, b]) \right) + o(\lambda) \right) \left(1 - \frac{\lambda m([0, b])}{\alpha} + o(\lambda) \right) \right) \\
 & \stackrel{\sim}{\lambda \rightarrow 0} m([0, b]) \left(x + \frac{1}{\alpha} \right) - \int_0^x (x-s)m(ds),
 \end{aligned}$$

et l'on obtient le résultat par convergence monotone. $\square$

Remarque 2.9. Notons que le Lemme 2.8 implique que l'on ne peut pas appliquer le Théorème Taubérien 1.4 puisque le taux de décroissance de $\lambda \mapsto \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x [e^{-\alpha L_t}] dt$ n'est pas polynomial.

Notre approche consiste à présent à étendre la relation (2.6) pour λ dans le plan complexe, afin d'appliquer la formule de la transformée de Fourier inverse. On définit :

$$\mathcal{L}_1(z) := \int_0^\infty e^{-zt} \mathbb{E}_x [e^{-\alpha L_t}] dt. \quad (2.13)$$

D'après le Lemme 2.8, $\mathcal{L}_1$ est bien définie sur $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$, et holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Introduisons alors :

$$f(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq -1 \\ s + 1 & \text{si } -1 \leq s \leq 0 \\ \mathbb{E}_x [e^{-\alpha L_s}] & \text{si } s \geq 0, \end{cases}$$

et

$$\mathcal{L}_2(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{-zt} f(t) dt. \quad (2.14)$$

Il est clair que :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_2(z) &= \int_{-1}^0 e^{-zt} (1+t) dt + \int_0^\infty e^{-zt} \mathbb{E}_x [e^{-\alpha L_t}] dt \\
 &= -\frac{1}{z} - \frac{1-e^z}{z^2} + \mathcal{L}_1(z).
 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Par conséquent, $\mathcal{L}_2$ est à nouveau bien définie sur $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ et holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}$. D'après le Lemme 2.8, f appartient à $L^1(\mathbb{R})$, et admet donc une transformée de Fourier :

$$\widehat{f}(v) := \int_{\mathbb{R}} e^{ivt} f(t) dt = \mathcal{L}_2(-iv), \quad v \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Notre but à présent est de prouver que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ afin de pouvoir inverser cette transformée. Commençons par réécrire $\mathcal{L}_2$ à l'aide de (2.6). Faisant $z = \lambda > 0$ dans (2.15), il vient :

$$\mathcal{L}_2(\lambda) = -\frac{1-e^\lambda}{\lambda^2} - \frac{u_\lambda(0, x)}{\lambda u_\lambda(0, 0)} \frac{\alpha}{\alpha + \frac{1}{u_\lambda(0, 0)}}.$$

Définissons :

$$H_2(z) := -\frac{1-e^z}{z^2} - \frac{u_z(0,x)}{zu_z(0,0)} \frac{\alpha}{\alpha + \frac{1}{u_z(0,0)}}. \quad (2.17)$$

Lemme 2.10. *H_2 est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, dont les pôles appartiennent tous à l'axe des réels négatifs $\mathbb{R}_-$. On note r^2 celui de plus petit module, lequel est solution de l'équation : $\frac{1}{u_{-r^2}(0,0)} + \alpha = 0$.*

Démonstration.

Rappelons ([KK74, Lemma 2.3 p.35 et Point 11.8 p.77]) que $\lambda \mapsto u_\lambda(0,0)$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, dont les pôles $(-\gamma_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et les zéros $(-\omega_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont tous négatifs. Ainsi, d'après (2.8), puisque $\Phi(x, \lambda)$ et $\Psi(x, \lambda)$ sont des fonctions entières en la variable λ , $\lambda \mapsto u_\lambda(0, x)$ admet également un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, dont les pôles sont $(-\gamma_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$. De plus, de l'identité ([KK74, Lemma 2.2, p. 34]) :

$$Im(\lambda) \int_0^b \left| \Phi(x, \lambda) - \frac{\Psi(x, \lambda)}{u_\lambda(0,0)} \right|^2 m(dx) = Im(u_\lambda(0,0))$$

on déduit que $u_\lambda(0,0)$ est réel si et seulement si λ est réel. Mais, lorsque $\lambda > 0$, il est clair d'après (1.1) que $u_\lambda(0,0) > 0$. Par conséquent, l'équation $\frac{1}{u_z(0,0)} + \alpha = 0$ ne peut admettre de

solutions que dans $\mathbb{R}^-$. Or, d'après ([DM76, Chapter V.6, p.182]), puisque $\int_0^b xm(dx) < +\infty$, on a :

- i) $\gamma_0 = 0$,
- ii) les zéros $(-\omega_n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et les pôles $(-\gamma_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ sont entrelacés,
- iii) pour $\lambda \in \mathbb{R}$, le graphe de $\lambda \mapsto \frac{1}{u_{-\lambda^2}(0,0)}$ est tel que représenté Figure 2.1.

En particulier, l'équation $\frac{1}{u_\lambda(0,0)} + \alpha = 0$ admet une unique solution $\lambda = -r^2$ dont le module est strictement plus petit que ω_1^2 . Ainsi, la fonction $z \mapsto \frac{\alpha}{\alpha + \frac{1}{u_z(0,0)}}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et tous ses pôles appartiennent à l'axe des réels négatifs. Finalement, il est clair que la partie $z \mapsto -\frac{1-e^z}{z^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et que 0 n'est pas un pôle de H_2 (d'après le Lemme 2.8) ; on peut donc en conclure que H_2 est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont l'unique pôle dans $\{z \in \mathbb{C}; Re(z) > -\omega_1^2\}$ est $-r^2$. □

Remarque 2.11. *Un argument de prolongement analytique permet de prouver que l'égalité $\mathcal{L}_2(z) = H_2(z)$ a lieu pour $z \in \{z \in \mathbb{C}; Re(z) \geq 0\}$. En particulier, d'après (2.16), on a*

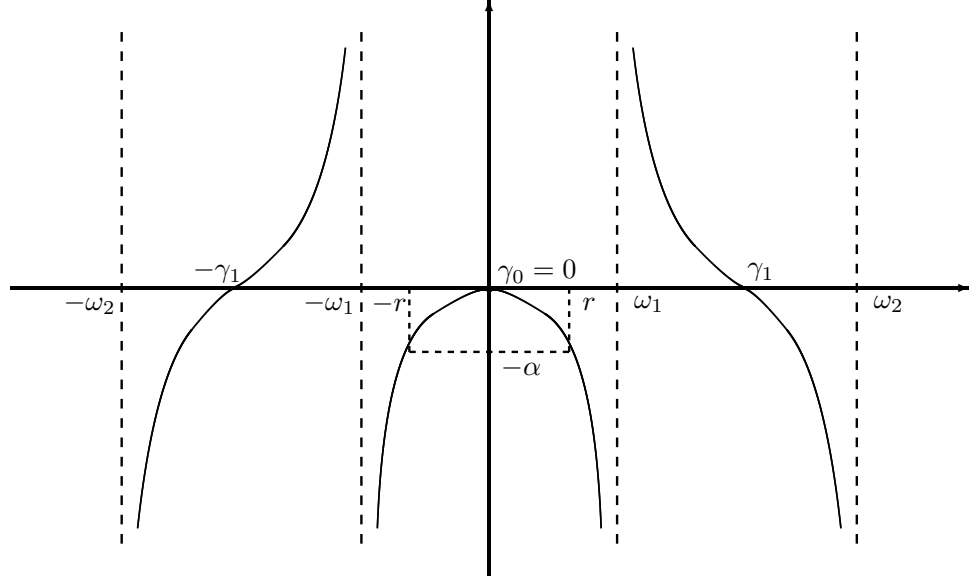
$$\widehat{f}(v) = \mathcal{L}_2(-iv) = H_2(-iv) \quad (v \in \mathbb{R}).$$

On ajoute à présent l'hypothèse technique suivante, qui nous assure que $\widehat{f}$ soit dans $L^1(\mathbb{R})$:

Hypothèse 2.12.

On suppose qu'il existe $\beta > 0$ et $c \in]r^2, \omega_1^2[$ tels que, pour $z \in \{z \in \mathbb{C}; -c \leq Re(z) \leq 0\}$:

$$u_z(0,0) \Big|_{|z| \rightarrow +\infty} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^\beta}\right).$$


 FIGURE 2.1 – Graphe de $\lambda \mapsto 1/u_{-\lambda^2}(0, 0)$.

Cette hypothèse est par exemple satisfaite par le mouvement brownien réfléchi sur $[0, b]$, et plus généralement par les processus de Bessel de dimension $\delta \in]0, 2[$ réfléchis en b , voir Section 2.5. Son intérêt apparaît dans le lemme suivant :

Lemme 2.13. *Supposons que l'Hypothèse 2.12 soit satisfaite. Alors,*

- i) *Pour tout $a \in [0, c] \setminus r^2$, la fonction $v \mapsto H_2(-a + iv)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et tend vers 0 quand $v \rightarrow \pm\infty$.*
- ii) *H_2 est bornée sur les domaines $\{z \in \mathbb{C}, -c \leq \operatorname{Re}(z) \leq 0, \operatorname{Im}(z) \geq 1\}$ et $\{z \in \mathbb{C}, -c \leq \operatorname{Re}(z) \leq 0, \operatorname{Im}(z) \leq -1\}$.*

Démonstration.

i) Tout d'abord, il est clair d'après le Lemme 2.10 que, dans le domaine $\{z \in \mathbb{C}; -c \leq \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$, H_2 est une fonction méromorphe dont le seul pôle est $-r^2$. Par conséquent, pour $a \in [0, c] \setminus r^2$, la fonction $v \mapsto H_2(-a + iv)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et il suffit de vérifier son intégrabilité aux voisinages de $\pm\infty$.

$$H_2(-a + iv) = -\frac{u_{-a+iv}(0, x)}{u_{-a+iv}(0, 0)} \frac{\alpha}{(-a + iv) \left(\alpha + \frac{1}{u_{-a+iv}(0, 0)} \right)} - \underbrace{\frac{1 - e^{-a+iv}}{(-a + iv)^2}}_{\text{intégrable en } \pm\infty}. \quad (2.18)$$

D'un coté on a, en utilisant (1.3) :

$$\left| \frac{u_{-a+iv}(0, x)}{u_{-a+iv}(0, 0)} \right| = \left| \mathbb{E}_x \left[e^{(a-iv)T_0} \right] \right| \leq \mathbb{E}_b \left[e^{cT_0} \right] < \infty, \quad (2.19)$$

et de l'autre, grâce à l'Hypothèse 2.12,

$$\frac{\alpha}{(-a + iv) \left(\alpha + \frac{1}{u_{-a+iv}(0, 0)} \right)} = \frac{u_{-a+iv}(0, 0)}{(-a + iv)} \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha u_{-a+iv}(0, 0)} \right) \underset{v \rightarrow \pm\infty}{=} \mathcal{O} \left(\frac{1}{|v|^{1+\beta}} \right). \quad (2.20)$$

Ainsi, en rassemblant (2.19) et (2.20), il vient :

$$\frac{u_{-a+iv}(0, x)}{u_{-a+iv}(0, 0)} \frac{\alpha}{(-a + iv) \left(\alpha + \frac{1}{u_{-a+iv}(0, 0)} \right)} \underset{v \rightarrow \pm\infty}{=} \mathcal{O} \left(\frac{1}{|v|^{1+\beta}} \right). \quad (2.21)$$

Par conséquent, (2.18) et (2.21) impliquent que $v \mapsto H_2(-a + iv)$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$.

ii) Plus généralement, (2.21) peut s'écrire, pour $z \in \{z \in \mathbb{C}, -c \leq \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$:

$$\frac{u_z(0, x)}{u_z(0, 0)} \frac{\alpha}{z \left(\alpha + \frac{1}{u_z(0, 0)} \right)} \underset{|z| \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O} \left(\frac{1}{|z|^{1+\beta}} \right). \quad (2.22)$$

On ne prouve la bornitude de H_2 que sur $\{z \in \mathbb{C}, -c \leq \operatorname{Re}(z) \leq 0, \operatorname{Im}(z) \geq 1\}$. Le même raisonnement s'applique pour l'autre cas. Soit $\varepsilon > 0$. D'après (2.22), il existe $M > 0$ tel que, pour tout $z \in \{z \in \mathbb{C}, -c \leq \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$ satisfaisant $|z| \geq \operatorname{Im}(z) \geq M$, on ait :

$$|H_2(z)| < \varepsilon.$$

Par conséquent H_2 est bornée sur le domaine $\{z \in \mathbb{C}, -c \leq \operatorname{Re}(z) \leq 0, M \leq \operatorname{Im}(z)\}$. Mais, puisque H_2 est continue, elle est également bornée sur le domaine compact $\{z \in \mathbb{C}, -c \leq \operatorname{Re}(z) \leq 0, 1 \leq \operatorname{Im}(z) \leq M\}$. Ceci achève la preuve du Lemme 2.13. $\square$

En particulier, pour $a = 0$, on obtient que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. On peut donc appliquer la transformée de Fourier inverse :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ivt} \hat{f}(v) dv = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ivt} H_2(-iv) dv. \quad (2.23)$$

Pour obtenir un équivalent de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$, on considère le contour d'intégration $\Delta_R = \Delta_R^1 \cup \Delta_R^2 \cup \Delta_R^3 \cup \Delta_R^4$ de la Figure 2.2, sur lequel nous allons appliquer le théorème des résidus à la fonction méromorphe $z \mapsto e^{tz} H_2(z)$.

Lemme 2.14. Soient $t > 0$ fixé et $r^2 < c < \omega_1^2$.

i) Lorsque $R \rightarrow +\infty$:

$$\oint_{\Delta_R} e^{tz} H_2(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 2i\pi f(t) + \int_{\Delta_\infty^3} e^{tz} H_2(z) dz, \quad (2.24)$$

où Δ_∞^3 correspond à l'axe $-c + i\mathbb{R}$.

ii) Il existe une constante $K(x)$ indépendante de t telle que :

$$\left| \int_{\Delta_\infty^3} e^{tz} H_2(z) dz \right| \leq K(x) e^{-ct}. \quad (2.25)$$

Démonstration.

On étudie chaque côté du rectangle séparément :

1) On paramétrise Δ_R^1 par $z = iv$; $-R \leq v \leq R$. D'après (2.23) :

$$\int_{\Delta_R^1} e^{tz} H_2(z) dz = i \int_{-R}^R e^{itv} H_2(iv) dv = i \int_{-R}^R e^{-itv} H_2(-iv) dv \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 2i\pi f(t). \quad (2.26)$$

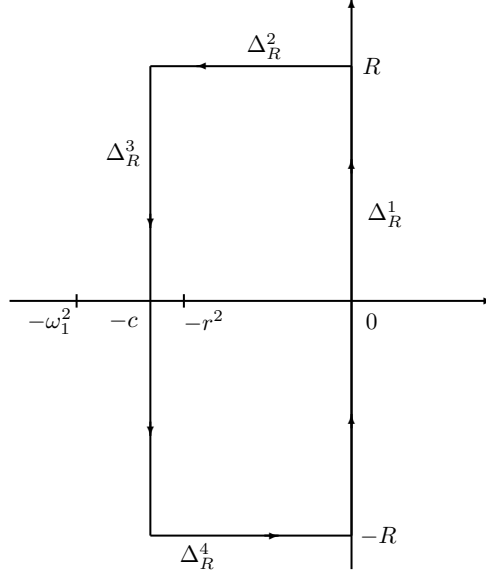


FIGURE 2.2 – Contour d'intégration : $\Delta_R = \Delta_R^1 \cup \Delta_R^2 \cup \Delta_R^3 \cup \Delta_R^4$

2) Soit $\{z = -a + iR; 0 \leq a \leq c\}$ une paramétrisation de Δ_R^2 . Alors :

$$\int_{\Delta_R^2} e^{tz} H_2(z) dz = \int_0^c e^{t(-a+iR)} H_2(-a+iR) da.$$

D'après le Lemme 2.13, la fonction $z \mapsto H_2(z)$ est bornée sur $\{z \in \mathbb{C}, -c \leq \operatorname{Re}(z) \leq 0, \operatorname{Im}(z) \geq 1\}$, et $\lim_{R \rightarrow +\infty} H_2(-a+iR) = 0$. Ainsi, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Delta_R^2} e^{tz} H_2(z) dz = 0. \quad (2.27)$$

3) On paramétrise Δ_R^4 par $z = -a - iR; 0 \leq a \leq c$.

La preuve sur ce segment est la même que sur Δ_R^2 , et l'on obtient donc :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Delta_R^4} e^{tz} H_2(z) dz = 0. \quad (2.28)$$

4) Finalement, sur Δ_R^3 , on choisit comme paramétrisation $z = -c - iv; -R \leq v \leq R$.

$$\left| \int_{\Delta_R^3} e^{tz} H_2(z) dz \right| = \left| \int_R^{-R} e^{-ct-ivt} H_2(-c-iv) i dv \right| \leq e^{-ct} K(x),$$

où $K(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |H_2(-c+iv)| dv$. D'après le Lemme 2.13, $K(x)$ est finie, ce qui prouve (2.25). Par ailleurs :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Delta_R^3} e^{tz} H_2(z) dz = \int_{\Delta_\infty^3} e^{tz} H_2(z) dz. \quad (2.29)$$

Il est alors clair que (2.24) est une conséquence directe de (2.26), (2.27), (2.28) et (2.29). $\square$

Démonstration du Théorème 2.1

D'après (2.17), on a :

$$e^{tz} H_2(z) = -e^{tz} \frac{u_z(0, x)}{zu_z(0, 0)} \frac{\alpha}{\alpha + \frac{1}{u_z(0, 0)}} - e^{tz} \frac{1 - e^z}{z^2}.$$

Le seul pôle de la fonction $z \mapsto e^{tz} H_2(z)$ à l'intérieur du contour Δ_R est $-r^2$, et c'est un pôle simple. La partie $e^{tz} \frac{1 - e^z}{z^2}$ n'apporte aucune contribution puisque qu'elle est holomorphe en $-r^2$. En conséquence, le résidu de $e^{tz} H_2(z)$ en $-r^2$ se réduit à :

$$\begin{aligned} \text{Res}(e^{tz} H_2(z), -r^2) &= \frac{u_{-r^2}(0, x)}{r^2 u_{-r^2}(0, 0)} \frac{\alpha}{\frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha + \frac{1}{u_z(0, 0)} \right) \Big|_{z=-r^2}} \exp(-r^2 t) \\ &= \frac{1}{r^2} u_{-r^2}(0, x) \frac{1}{\frac{\partial}{\partial z} u_z(0, 0) \Big|_{z=-r^2}} \exp(-r^2 t). \end{aligned}$$

En appliquant le théorème des résidus et (2.24), il vient alors :

$$2i\pi f(t) + \int_{\Delta_\infty^3} e^{tz} H_2(z) dz = \frac{2i\pi}{r^2} u_{-r^2}(0, x) \frac{1}{\frac{\partial}{\partial z} u_z(0, 0) \Big|_{z=-r^2}} \exp(-r^2 t),$$

et puisque $c > r$, en utilisant (2.25), on obtient finalement :

$$f(t) = \mathbb{E}_x [e^{-\alpha L_t}] \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{r^2} u_{-r^2}(0, x) \frac{1}{\frac{\partial}{\partial z} u_z(0, 0) \Big|_{z=-r^2}} \exp(-r^2 t),$$

ce qui achève la preuve du Théorème 2.1. $\square$

2.3 Démonstrations des résultats annoncés

De même que dans la section précédente, nous ne traitons ici que le cas de la pénalisation par $(e^{-\alpha L_t}, t \geq 0)$. Quelques remarques à propos du cas $(e^{\alpha L_t}, t \geq 0)$ sont données dans la Sous-section 2.3.5.

2.3.1 Une famille de martingales

Lemme 2.15.

Soient $\alpha > 0$, et r^2 l'unique solution dans $]0, \omega_1^2[$ de l'équation $\alpha + \frac{1}{u_{-r^2}(0, 0)} = 0$. Pour $x \in [0, b]$, le processus

$$\left(M_t^{(-\alpha)} := \exp(r^2 t - \alpha L_t) \frac{u_{-r^2}(0, X_t)}{u_{-r^2}(0, x)}, t \geq 0 \right)$$

est une $\mathbb{P}$ -martingale continue, strictement positive qui converge vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Démonstration.

1) La relation (2.8) implique :

$$\frac{u_\lambda(0, x)}{u_\lambda(0, 0)} = \Phi(x, \lambda) - \frac{\Psi(x, \lambda)}{u_\lambda(0, 0)}.$$

Nous avons noté lors de la preuve du Lemme 2.10 que $z \mapsto \frac{1}{u_z(0, 0)}$ était holomorphe sur le domaine $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > -\omega_1^2\}$. Un argument de prolongement analytique appliqué à la première identité de (1.2) conduit à :

$$\mathbb{E}_x \left[e^{r^2 T_0} \right] = \frac{u_{-r^2}(0, x)}{u_{-r^2}(0, 0)} < \infty, \quad (2.30)$$

ce qui implique en particulier que $(M_t^{(-\alpha)}, t \geq 0)$ est continue et strictement positive. On suppose désormais $x = 0$ pour simplifier les notations. D'après ([RW00, Chapitre V, Théorème 47.1 p.277], voir également [Mél86]), il existe un mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$ réfléchi en 0 et en b tel que :

$$X_t = B_{\gamma_t}, \quad t \geq 0$$

où :

- $(L_t^z(B), z \in [0, b], t \geq 0)$ désigne le temps local en z du processus $(B_t, t \geq 0)$,
- $A_t = \int_0^b L_t^z(B) m(dz)$ est une fonctionnelle additive continue,
- $\gamma_t = \inf\{u \geq 0; A_u > t\}$ est l'inverse continu à droite de $(A_u, u \geq 0)$.

Notons que $L_t^z = L_{\gamma_t}^z(B)$. Ici, puisque nous avons supposé que m admettait une densité, nous avons, d'après la formule des temps d'occupation :

$$A_t = \int_0^b L_t^z(B) m(z) dz = \frac{1}{2} \int_0^t m(B_s) ds. \quad (2.31)$$

En conséquence, A est continue et strictement croissante, de sorte que γ est également continue, strictement croissante, et $A_{\gamma_t} = \gamma_{A_t} = t$.

2) Appliquons la formule d'Itô. Toutes les dérivées dans les calculs qui suivent sont prises

par rapport à la première variable. Par exemple : $\Phi'(x, \lambda) := \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, \lambda)$.

$$\begin{aligned} & e^{r^2 A_t - \alpha L_t(B)} \left(\Phi(B_t, -r^2) - \frac{\Psi(B_t, -r^2)}{u_{-r^2}(0, 0)} \right) \\ &= 1 + \int_0^t e^{r^2 A_s - \alpha L_s(B)} \left(\Phi'(B_s, -r^2) - \frac{\Psi'(B_s, -r^2)}{u_{-r^2}(0, 0)} \right) dB_s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t e^{r^2 A_s - \alpha L_s(B)} \left(\Phi''(B_s, -r^2) - \frac{\Psi''(B_s, -r^2)}{u_{-r^2}(0, 0)} \right) ds \\ &+ r^2 \int_0^t e^{r^2 A_s - \alpha L_s(B)} \left(\Phi(B_s, -r^2) - \frac{\Psi(B_s, -r^2)}{u_{-r^2}(0, 0)} \right) dA_s \\ &- \alpha \int_0^t e^{r^2 A_s - \alpha L_s(B)} dL_s(B). \end{aligned}$$

On remplace alors t par γ_t et l'on effectue le changement de temps $s = \gamma_u$, en suivant la Proposition 1.5, p.181, de Revuz-Yor [RY99]. On obtient :

$$M_t^{(-\alpha)} = 1 + \int_0^t e^{r^2 u - \alpha L_u(X)} \left(\Phi'(X_u, -r^2) - \frac{\Psi'(X_u, -r^2)}{u_{-r^2}(0, 0)} \right) dX_u \quad (2.32)$$

$$- \frac{r^2}{2} \int_0^t e^{r^2 u - \alpha L_u(X)} \left(\Phi(X_u, -r^2) - \frac{\Psi(X_u, -r^2)}{u_{-r^2}(0, 0)} \right) m(X_u) d\gamma_u \quad (2.33)$$

$$+ r^2 \int_0^t e^{r^2 u - \alpha L_u(X)} \left(\Phi(X_u, -r^2) - \frac{\Psi(X_u, -r^2)}{u_{-r^2}(0, 0)} \right) du \quad (2.34)$$

$$- \alpha \int_0^t e^{r^2 u - \alpha L_u(X)} dL_u(X), \quad (2.35)$$

où, dans (2.33), on a utilisé le fait que Φ et Ψ sont des fonctions propres de $\mathcal{G}$ (cf. (2.9)). Or, dérivant l'égalité $A_{\gamma_t} = t$, il vient $\gamma'_t A'_{\gamma_t} = 1$, ce qui implique, d'après (2.31) :

$$d\gamma_u = \frac{2}{m(X_u)} du.$$

On constate alors que les termes en du (2.33) et (2.34) s'annulent.

Examinons à présent les coefficients devant $dL_t(X)$ et $dL_t^b(X)$. Puisque B peut s'écrire $B = \beta + L^0(B) - L^b(B)$ où β est un mouvement brownien standard, on a, par changement de temps :

$$X = \beta_\gamma + L^0(X) - L^b(X),$$

où β_γ est une $(\mathcal{F}_{\gamma_t})$ -martingale locale.

i) D'après (2.9), $\Phi'(0, -r^2) = 0$ et $\Psi'(0, -r^2) = 1$. Ainsi les termes en $dL(X)$ de (2.32) et (2.35) se simplifient :

$$- \left(\frac{1}{u_{-r^2}(0, 0)} + \alpha \right) dL_s^0(X) = 0 \quad \text{par définition de } r \text{ (cf. (2.1)).}$$

ii) De même, le terme en $dL^b(X)$ de (2.32) est nul :

$$\left(\Phi'(b, -r^2) - \frac{\Psi'(b, -r^2)}{u_{-r^2}(0, 0)} \right) dL_s^b(X) = 0 \quad \text{par définition de } u_{-r^2}(0, 0) \text{ (cf. (2.10)).}$$

Finalement, (2.32) se réduit à :

$$M_t^{(-\alpha)} = 1 + \int_0^t e^{r^2 u - \alpha L_u} \left(\Phi'(X_u, -r^2) - \frac{\Psi'(X_u, -r^2)}{u_{-r^2}(0, 0)} \right) d\beta_{\gamma_u},$$

ce qui signifie que $(M_t^{(-\alpha)}, t \geq 0)$ est une martingale locale continue. Mais, d'après (2.30), on a :

$$\begin{aligned} M_t^{(-\alpha)} &= e^{r^2 t - \alpha L_t} \frac{u_{-r^2}(0, X_t)}{u_{-r^2}(0, 0)} \\ &\leq e^{r^2 t} \mathbb{E}_{X_t} \left[e^{r^2 T_0} \right] \\ &\leq e^{r^2 t} \mathbb{E}_b \left[e^{r^2 T_0} \right] \quad \text{puisque } x \mapsto \mathbb{E}_x \left[e^{r^2 T_0} \right] \text{ est clairement croissante.} \end{aligned}$$

Ainsi, $(M_t^{(-\alpha)}, t \geq 0)$ est une $\mathbb{P}$ -martingale positive, et converge par conséquent p.s.

3) En utilisant (2.30), écrivons :

$$\begin{aligned} M_t^{(-\alpha)} &= e^{r^2 t - \alpha L_t} \frac{u_{-r^2}(0, X_t)}{u_{-r^2}(0, 0)} \\ &\leq \exp\left(-\alpha L_t \left(1 - \frac{r^2 t}{\alpha L_t}\right)\right) \mathbb{E}_b \left[e^{r^2 T_0} \right]. \end{aligned} \quad (2.36)$$

D'après le théorème ergodique pour les diffusions (voir [IM74, Chapitre 6, p. 229]), nous savons que :

$$\frac{L_t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{m([0, b])} \quad \text{p.s.} \quad (2.37)$$

Appliquons l'inégalité de Jensen avec les fonctions convexes $x \mapsto x^k$ ($k \in \mathbb{N}$) :

$$\frac{(r^2 \mathbb{E}_0[\tau_l])^k}{k!} \leq \frac{\mathbb{E}_0[(r^2 \tau_l)^k]}{k!} \quad (l > 0). \quad (2.38)$$

Pour $k = 2$, il est clair d'après le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz que :

$$(r^2 \mathbb{E}_0[\tau_l])^2 < \mathbb{E}_0[(r^2 \tau_l)^2].$$

Par conséquent, en sommant (2.38) par rapport à k , on obtient :

$$\exp(\mathbb{E}_0[r^2 \tau_l]) < \mathbb{E}_0[\exp(r^2 \tau_l)], \quad (2.39)$$

et cette inégalité est stricte. Or, d'après ([BS02, p.22]) :

$$\mathbb{E}_0[\tau_l] = m([0, b])l \quad (2.40)$$

D'où, en injectant (2.40) et (1.2) (avec $\lambda = -r^2$) dans (2.39), on obtient :

$$e^{r^2 m([0, b])l} < e^{-l/u_{-r^2}(0, 0)} \iff -r^2 u_{-r^2}(0, 0) m([0, b]) < 1,$$

puisque $u_{-r^2}(0, 0) = -1/\alpha < 0$. Par conséquent, d'après (2.37) :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - \frac{r^2 t}{\alpha L_t} = 1 - \frac{r^2 m([0, b])}{\alpha} = 1 + r^2 u_{-r^2}(0, 0) m([0, b]) > 0 \quad \text{p.s.} \quad (2.41)$$

Finalement, la preuve du Lemme 2.15 s'achève en laissant t tendre vers $+\infty$ dans (2.36) et en utilisant (2.41). □

2.3.2 Démonstration du théorème de pénalisation

Pour $s < t$, on a, en utilisant la propriété de Markov et le Théorème 2.1 :

$$\frac{\mathbb{E}_x[e^{-\alpha L_t} | \mathcal{F}_s]}{\mathbb{E}_x[e^{-\alpha L_t}]} = \frac{e^{-\alpha L_s} \mathbb{E}_{X_s}[e^{-\alpha L_{t-s}}]}{\mathbb{E}_x[e^{-\alpha L_t}]} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \exp(r^2 s - \alpha L_s) \frac{u_{-r^2}(0, X_s)}{u_{-r^2}(0, x)} = M_s^{(-\alpha)}.$$

Il suffit alors d'appliquer le Théorème 0.2 puisque, d'après le Lemme 2.15, $(M_t^{(-\alpha)}, t \geq 0)$ est une martingale telle que $\mathbb{E}_x[M_s^{(-\alpha)}] = 1$. Ceci achève la preuve du Théorème 2.2. □

2.3.3 Etude de la diffusion pénalisée

Preuve du point (i) du Théorème 2.3

1) On commence par prouver que le processus des coordonnées $(X_t, t \geq 0)$ reste markovien sous $\mathbb{P}_x^{(-\alpha)}$. Soit $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$, et f une fonction borélienne à support compact. On a, pour $s \leq t$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_x^{(-\alpha)} [f(X_{t+s}) 1_{\Lambda_s}] &= \mathbb{E}_x \left[M_{t+s}^{(-\alpha)} f(X_{t+s}) 1_{\Lambda_s} \right] \\
 &= \mathbb{E}_x \left[\exp(r^2(t+s) - \alpha L_{t+s}) \frac{u_{-r^2}(0, X_{t+s})}{u_{-r^2}(0, x)} f(X_{t+s}) 1_{\Lambda_s} \right] \\
 &= \mathbb{E}_x \left[\frac{e^{r^2(t+s)}}{u_{-r^2}(0, x)} \mathbb{E}_x [e^{-\alpha L_{t+s}} u_{-r^2}(0, X_{t+s}) f(X_{t+s}) | \mathcal{F}_s] 1_{\Lambda_s} \right] \\
 &= \mathbb{E}_x \left[\frac{e^{r^2(t+s) - \alpha L_s}}{u_{-r^2}(0, x)} \mathbb{E}_x [e^{-\alpha L_t \circ \theta_s} u_{-r^2}(0, X_t \circ \theta_s) f(X_t \circ \theta_s) | \mathcal{F}_s] 1_{\Lambda_s} \right] \\
 &= \mathbb{E}_x \left[\frac{e^{r^2(t+s) - \alpha L_s}}{u_{-r^2}(0, x)} \mathbb{E}_{X_s} [e^{-\alpha L_t} u_{-r^2}(0, X_t) f(X_t)] 1_{\Lambda_s} \right] \\
 &= \mathbb{E}_x \left[e^{r^2 s - \alpha L_s} \frac{u_{-r^2}(0, X_s)}{u_{-r^2}(0, x)} \mathbb{E}_{X_s}^{(-\alpha)} [f(X_t)] 1_{\Lambda_s} \right] \\
 &= \mathbb{E}_x^{(-\alpha)} [\mathbb{E}_{X_s}^{(-\alpha)} [f(X_t)] 1_{\Lambda_s}].
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\mathbb{E}_x^{(-\alpha)} [f(X_{t+s}) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_{X_s}^{(-\alpha)} [f(X_t)],$$

ce qui prouve que $(X_t, t \geq 0)$ est encore un processus markovien sous $\mathbb{P}_x^{(-\alpha)}$.

2) Calculons alors son générateur infinitésimal. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ bornée sur $\mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{t} \mathbb{E}_x^{(-\alpha)} [f(X_t) - f(x)] \\
 &= \frac{1}{t} \mathbb{E}_x \left[(f(X_t) - f(x)) \frac{u_{-r^2}(0, X_t)}{u_{-r^2}(0, x)} e^{r^2 t - \alpha L_t} \right] \\
 &= \frac{1}{t} \frac{1}{u_{-r^2}(0, x)} \left(\mathbb{E}_x \left[(f(X_t) u_{-r^2}(0, X_t) - f(x) u_{-r^2}(0, x)) e^{r^2 t - \alpha L_t} \right] \right. \\
 &\quad \left. - f(x) \mathbb{E}_x \left[(u_{-r^2}(0, X_t) - u_{-r^2}(0, x)) e^{r^2 t - \alpha L_t} \right] \right) \\
 &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{-r^2}(0, x)} (\mathcal{G}(u_{-r^2}(0, \cdot) f)(x) - f(x) \mathcal{G}(u_{-r^2}(0, \cdot))) \\
 &= \frac{1}{u_{-r^2}(0, x)} \mathcal{G}(u_{-r^2}(0, \cdot) f)(x) + r^2 f(x),
 \end{aligned}$$

puisque $x \mapsto u_{-r^2}(0, x)$ est une fonction propre de l'opérateur $\mathcal{G}$ associée à la valeur propre $-r^2$. En utilisant la définition de $\mathcal{G}$, on obtient finalement :

$$\mathcal{G}^{(-\alpha)} f(x) = \frac{1}{m(x)} f''(x) + \frac{2}{m(x) u_{-r^2}(0, x)} \frac{\partial u_{-r^2}(0, x)}{\partial x} f'(x). \quad (2.42)$$

3) Déterminons le domaine de $\mathcal{G}^{(-\alpha)}$. En appliquant ([RY99, Exercice 3.20, p.311]) à l'expression (2.42), il est clair que la fonction d'échelle de $(X_t, t \geq 0)$ sous $\mathbb{P}^{(-\alpha)}$ vaut :

$$s^{(-\alpha)}(x) = \int_0^x \left(\frac{u_{-r^2}(0,0)}{u_{-r^2}(0,y)} \right)^2 dy = \int_0^x \frac{dy}{(\mathbb{E}_y [e^{r^2 T_0}])^2}, \quad (2.43)$$

et sa mesure de vitesse $m^{(-\alpha)}$:

$$m^{(-\alpha)}(x) = \left(\frac{u_{-r^2}(0,x)}{u_{-r^2}(0,0)} \right)^2 m(x) = \left(\mathbb{E}_x [e^{r^2 T_0}] \right)^2 m(x). \quad (2.44)$$

D'où, pour $z \in]0, b[$, puisque $1 \leq \mathbb{E}_x [e^{r^2 T_0}] \leq \mathbb{E}_b [e^{r^2 T_0}]$:

$$\begin{cases} \int_0^z \left(\int_y^z (\mathbb{E}_x [e^{r^2 T_0}])^2 m(x) dx \right) \frac{dy}{(\mathbb{E}_y [e^{r^2 T_0}])^2} \leq bm([0, b]) (\mathbb{E}_b [e^{r^2 T_0}])^2 < \infty \\ \int_0^z \left(\int_y^z \frac{dx}{(\mathbb{E}_x [e^{r^2 T_0}])^2} \right) \mathbb{E}_y ([e^{r^2 T_0}])^2 m(y) dy \leq bm([0, b]) (\mathbb{E}_b [e^{r^2 T_0}])^2 < \infty \end{cases}$$

ce qui signifie que 0 est une barrière non singulière (voir [BS02, p.14]). Puisque $m^{(-\alpha)}$ admet une densité, on a $m^{(-\alpha)}(\{0\}) = 0$ et 0 est une barrière réfléchissante. Il en est de même du point b , et :

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}^{(-\alpha)}) := \left\{ f : \mathcal{G}^{(-\alpha)} f \in \mathcal{C}_b([0, b]), f'(0^+) = f'(b^-) = 0 \right\}.$$

Preuve du Point (ii) du Théorème 2.3

Introduisons n la densité de la mesure de Lévy de $(\tau_l, l \geq 0)$ sous $\mathbb{P}$. Puisque $(\tau_l, l \geq 0)$ est un subordonateur, on sait d'après (1.2) et la formule de Lévy-Khinchine que :

$$\frac{1}{u_\lambda(0,0)} = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda u}) n(u) du. \quad (2.45)$$

Ainsi, pour obtenir la mesure de Lévy de $(\tau_l, l \geq 0)$ sous $\mathbb{P}^{(-\alpha)}$, nous allons commencer par calculer la transformée de Laplace de τ_l . Puisque sous $\mathbb{P}_x$, $M_{\tau_l}^{(-\alpha)} = \frac{u_{-r^2}(0,0)}{u_{-r^2}(0,x)} \exp(r^2 \tau_l - \alpha l)$, le théorème d'arrêt de Doob donne pour $\lambda \geq 0$:

$$\mathbb{E}_x^{(-\alpha)} [e^{-\lambda \tau_l} 1_{\{\tau_l \leq t\}}] = e^{-\alpha l} \frac{u_{-r^2}(0,0)}{u_{-r^2}(0,x)} \mathbb{E}_x [e^{-(\lambda - r^2) \tau_l} 1_{\{\tau_l \leq t\}}]. \quad (2.46)$$

Alors, en laissant tendre t vers $+\infty$ dans (2.46) et en appliquant le théorème de convergence monotone, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x^{(-\alpha)} [e^{-\lambda \tau_l}] &= \frac{u_{-r^2}(0,0)}{u_{-r^2}(0,x)} e^{-\alpha l} \mathbb{E}_x [e^{-(\lambda - r^2) \tau_l}] \\ &= \frac{u_{-r^2}(0,0)}{u_{-r^2}(0,x)} \frac{u_{\lambda - r^2}(0,x)}{u_{\lambda - r^2}(0,0)} e^{-l \left(\alpha + \frac{1}{u_{\lambda - r^2}(0,0)} \right)} \quad (\text{d'après (1.3)}). \end{aligned} \quad (2.47)$$

A présent, pour $x = 0$, la formule (2.45) se réécrit :

$$\begin{aligned}
 \alpha + \frac{1}{u_{\lambda-r^2}(0,0)} &= \alpha + \int_0^\infty (1 - e^{-(\lambda-r^2)u}) n(u) du \\
 &= \alpha + \int_0^\infty (1 - e^{r^2u}) n(u) du + \int_0^\infty (e^{r^2u} - e^{-(\lambda-r^2)u}) n(u) du \\
 &= \alpha + \frac{1}{u_{-r^2}(0,0)} + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda u}) e^{r^2u} n(u) du \\
 &= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda u}) e^{r^2u} n(u) du \quad \text{puisque } \alpha + \frac{1}{u_{-r^2}(0,0)} = 0,
 \end{aligned}$$

ce qui prouve le Point (ii).

Preuve du Point (iii) du Théorème 2.3

Pour évaluer $\mathbb{P}_x^{(-\alpha)}(L_t \geq l)$, on réécrit (2.47) avec $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_x^{(-\alpha)}(L_t \geq l) &= \mathbb{P}_x^{(-\alpha)}(\tau_l \leq t) \\
 &= e^{-\alpha l} \frac{u_{-r^2}(0,0)}{u_{-r^2}(0,x)} \mathbb{E}_x \left[e^{r^2 \tau_l} 1_{\{\tau_l \leq t\}} \right] \\
 &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{u_{-r^2}(0,0)}{u_{-r^2}(0,x)} \frac{u_{-r^2}(0,x)}{u_{-r^2}(0,0)} \exp \left(-l \left(\alpha + \frac{1}{u_{-r^2}(0,0)} \right) \right) \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

d'après (1.3). Ainsi, on a $\mathbb{P}_x^{(-\alpha)}(L_\infty = \infty) = 1$, et la diffusion $(X_t, t \geq 0)$ reste récurrente positive sous $\mathbb{P}^{(-\alpha)}$. □

2.3.4 Quelques remarques à propos de la pénalisation par $(e^{-\alpha L_t}, t \geq 0)$

1) Pour comprendre de quelle manière le temps local en 0 a été réduit, remarquons que, puisque $(X_t, t \geq 0)$ est une diffusion récurrente positive sur $[0, b]$, $(X_t, t \geq 0)$ converge en loi vers une variable aléatoire X_∞ dont la densité est donnée par $x \mapsto \frac{m(x)}{m([0, b])} 1_{[0, b]}(x)$ (voir [BS02, p.35]). Il en est de même pour $(X_t^{(-\alpha)}, t \geq 0)$: $(X_t^{(-\alpha)}, t \geq 0)$ converge en loi vers

une variable aléatoire $X_\infty^{(-\alpha)}$ dont la densité est donnée par $x \mapsto \frac{\left(\mathbb{E}_x \left[e^{r^2 T_0} \right] \right)^2 m(x)}{m^{(-\alpha)}([0, b])} 1_{[0, b]}(x)$.

D'où, puisque $x \mapsto \mathbb{E}_x \left[e^{r^2 T_0} \right]$ est une fonction croissante, pour $\varepsilon \leq b$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P} \left(X_\infty^{(-\alpha)} < \varepsilon \right) &= \frac{1}{m^{(-\alpha)}([0, b])} \int_0^\varepsilon \left(\mathbb{E}_x \left[e^{r^2 T_0} \right] \right)^2 m(x) dx \\
 &\leq \frac{1}{m^{(-\alpha)}([0, b])} \left(\mathbb{E}_\varepsilon \left[e^{r^2 T_0} \right] \right)^2 m([0, \varepsilon]).
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Mais, d'après la première égalité de la moyenne, il existe $\delta \in]0, b[$ tel que :

$$\int_0^b \left(\mathbb{E}_x \left[e^{r^2 T_0} \right] \right)^2 m(x) dx = \left(\mathbb{E}_\delta \left[e^{r^2 T_0} \right] \right)^2 \int_0^b m(x) dx,$$

ce qui implique :

$$m^{(-\alpha)}([0, b]) = \left(\mathbb{E}_\delta \left[e^{r^2 T_0} \right] \right)^2 m([0, b]). \quad (2.49)$$

Par conséquent, en injectant (2.49) dans (2.48), il s'ensuit que, pour $\varepsilon < \delta$:

$$\mathbb{P} \left(X_\infty^{(-\alpha)} < \varepsilon \right) \leq \frac{\left(\mathbb{E}_\varepsilon \left[e^{r^2 T_0} \right] \right)^2}{\left(\mathbb{E}_\delta \left[e^{r^2 T_0} \right] \right)^2} \frac{m([0, \varepsilon])}{m([0, b])} = \left(\frac{\mathbb{E}_\varepsilon \left[e^{r^2 T_0} \right]}{\mathbb{E}_\delta \left[e^{r^2 T_0} \right]} \right)^2 \mathbb{P} (X_\infty < \varepsilon) < \mathbb{P} (X_\infty < \varepsilon).$$

Heuristiquement, cela signifie que la diffusion pénalisée passe, sur l'ensemble de sa trajectoire, moins de temps au voisinage de 0 que la diffusion originelle.

2) Contrairement aux diffusions récurrentes nulles, pour cette classe de diffusions, la pénalisation par une fonction exponentielle décroissante n'est pas suffisante pour rendre le temps local en 0 fini. Une idée naturelle consiste alors à laisser tendre r vers ω_1 (i.e. α vers $+\infty$). Dans ce cas, pour $x \neq 0$, l'identité (2.3) devient :

$$\mathbb{P}_x(L_t = 0) = \mathbb{P}_x(T_0 > t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{\omega_1^2} \Psi(x, -\omega_1^2) \frac{1}{\frac{\partial}{\partial z} u_z(0, 0)|_{z=-\omega_1^2}} \exp(-\omega_1^2 t).$$

La pénalisation par $(1_{\{T_0 > t\}}, t \geq 0)$ fournit alors la martingale :

$$M_s^{(-\infty)} = \exp(-\omega_1^2 s) \frac{\Psi(X_s, -\omega_1^2)}{\Psi(x, -\omega_1^2)} 1_{\{T_0 > s\}}, \quad s \geq 0$$

et l'on a : $\mathbb{P}_x^{(-\infty)}(L_\infty = 0) = 1$. Cette fois, la pénalisation est trop forte. Un cas intermédiaire serait probablement donné par une pénalisation par $(1_{\{L_t < l\}}, t \geq 0)$ pour $l \in]0, +\infty[$, mais nous ne sommes pas capable de la réaliser pour le moment.

2.3.5 Rapide preuve de la pénalisation par $(e^{\alpha L_t}, t \geq 0)$

Rappelons tout d'abord que, formellement, les formules de pénalisation par $(e^{\alpha L_t}, t \geq 0)$ peuvent être déduites de celles par $(e^{-\alpha L_t}, t \geq 0)$ en remplaçant $-\alpha$ par α et r par $i\rho$. Dans ce cas, l'Hypothèse 2.12 doit être remplacée par :

Hypothèse 2.16. *On suppose que pour tout $d > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que, pour $z \in \{z \in \mathbb{C}, 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq d\}$:*

$$u_z(0, 0) \underset{|z| \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O} \left(\frac{1}{|z|^\beta} \right).$$

Le schéma de la preuve dans ce cas est très proche de celui donné dans les sections précédentes. Cependant, il convient de faire attention aux problèmes éventuels d'intégrabilité. En premier lieu, pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \mapsto u_\lambda(0, 0) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, 0, 0) dt$ est une fonction continue et strictement décroissante, qui tend vers $+\infty$ en 0 d'après le Lemme 2.8, et vers 0 en $+\infty$ d'après le théorème de convergence monotone. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et l'équation $\frac{1}{u_{\lambda^2}(0, 0)} = \alpha$ admet une unique solution positive, que l'on note ρ .

Ensuite, en appliquant l'inégalité de Jensen's :

$$\frac{(-\rho^2 \mathbb{E}_0[\tau_l])^k}{k!} \leq \frac{\mathbb{E}_0[(-\rho^2 \tau_l)^k]}{k!} \quad (l > 0, k \in \mathbb{N}),$$

et en suivant la même série de calculs (2.38)-(2.41) que précédemment, on obtient :

$$\rho^2 u_{\rho^2}(0, 0) m([0, b]) > 1,$$

puisque $u_{\rho^2}(0, 0) = 1/\alpha > 0$ cette fois et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} 1 - \frac{\rho^2 t}{\alpha L_t} = 1 - \frac{\rho^2 m([0, b])}{\alpha} = 1 - \rho^2 u_{\rho^2}(0, 0) m([0, b]) < 0 \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \quad (2.50)$$

Ainsi, pour $\lambda > \rho^2$:

$$\alpha L_t \left(1 - \frac{\lambda t}{\alpha L_t} \right) \underset{+\infty}{\sim} \alpha L_t (1 - \lambda u_{\rho^2}(0, 0) m([0, b])) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} -\infty. \quad (2.51)$$

Soit donc $\lambda > \rho^2$ fixé. D'après (2.51) :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{\alpha L_t} dt &= -\frac{1}{\lambda} [e^{-\lambda t} e^{\alpha L_t}]_0^{+\infty} + \frac{\alpha}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{\alpha L_t} dL_t \\ &= \frac{1}{\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda \tau_l} e^{\alpha l} dl. \end{aligned}$$

En intégrant cette identité contre $d\mathbb{P}_x$ sur Ω , et en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x [e^{\alpha L_t}] dt &= \frac{1}{\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda} \int_0^\infty \mathbb{E}_x [e^{-\lambda \tau_l}] e^{\alpha l} dl \\ &= \frac{1}{\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda} \frac{u_\lambda(0, x)}{u_\lambda(0, 0)} \int_0^\infty e^{\left(-\frac{1}{u_\lambda(0, 0)} + \alpha\right)l} dl \quad (< \infty) \\ &= \frac{1}{\lambda} + \frac{u_\lambda(0, x)}{\lambda u_\lambda(0, 0)} \frac{\alpha}{\frac{1}{u_\lambda(0, 0)} - \alpha}. \end{aligned}$$

On en déduit en particulier que $\forall t \geq 0$, $\mathbb{E}_x [e^{\alpha L_t}] < \infty$ p.s. A présent, pour imiter la preuve du Théorème 2.1, il nous faut surmonter le problème d'intégrabilité de $t \mapsto \mathbb{E} [e^{\alpha L_t}]$ (qui n'est plus intégrable sur $\mathbb{R}^+$). Pour ce faire, on choisit un réel $d > \rho$, et on étudie le comportement asymptotique de la fonction $t \mapsto e^{-d^2 t} \mathbb{E} [e^{\alpha L_t}]$ (qui désormais appartient à $L^1(\mathbb{R}^+)$). Cela revient à translater la transformée de Laplace vers les réels négatifs :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-d^2 t} \mathbb{E}_x [e^{\alpha L_t}] dt = \frac{1}{\lambda + d^2} + \frac{u_{\lambda+d^2}(0, x)}{(\lambda + d^2) u_{\lambda+d^2}(0, 0)} \frac{\alpha}{\frac{1}{u_{\lambda+d^2}(0, 0)} - \alpha}.$$

Il reste alors à appliquer le théorème des résidus autour du pôle $\lambda = -(d^2 - \rho^2) < 0$ et à constater que le poids artificiel $e^{-d^2 t}$ se simplifie dans l'équivalent final. $\square$

2.4 Le principe d'itération des pénalisations

Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$, et r^2 définis par (2.1). Dans cette section, nous ne présentons la preuve de la pénalisation de la mesure $\mathbb{P}_x^{(-\alpha)}$ par $(e^{\pm \beta L_t}, t \geq 0)$, les autres cas se traitant à l'identique. D'après le Théorème 2.3, sous $\mathbb{P}_x^{(-\alpha)}$, le processus des coordonnées $(X_t, t \geq 0)$ est toujours une diffusion récurrente positive réfléchie sur $[0, b]$. Nous gardons, suivant la Remarque 2.5, la notation $\mathbb{P}_x^{(-\alpha)}$ pour la probabilité équivalente sous laquelle $(X_t, t \geq 0)$ est à échelle naturelle. Ainsi, le Théorème 2.2 s'applique, et nous pouvons effectuer la pénalisation de $\mathbb{P}_x^{(-\alpha)}$ par $(e^{\pm \beta L_t}, t \geq 0)$.

2.4.1 Pénalisation de $\mathbb{P}_x^{(-\alpha)}$ par $(e^{-\beta L_t}, t \geq 0)$

En notant $M^{(-\alpha)(-\beta)}$ la $\mathbb{P}_x^{(-\alpha)}$ -martingale donnée par :

$$M_t^{(-\alpha)(-\beta)} := \exp(\sigma^2 t - \beta L_t) \frac{u_{-\sigma^2}^{(-\alpha)}(0, X_t)}{u_{-\sigma^2}^{(-\alpha)}(0, x)}, \quad t \geq 0$$

où $u^{(-\alpha)}$ est le noyau résolvant de $(X_t, t \geq 0)$ sous $\mathbb{P}^{(-\alpha)}$ et σ^2 la solution de plus petit module de l'équation

$$\beta + \frac{1}{u_{-\sigma^2}^{(-\alpha)}(0, 0)} = 0, \quad (2.52)$$

il existe une famille de probabilités $(\mathbb{P}_x^{(-\alpha)(-\beta)})_{x \in [0, b]}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ telles que :

$$\mathbb{P}_x^{(-\alpha)(-\beta)}(\Lambda_s) = \mathbb{E}_x^{(-\alpha)} \left[1_{\Lambda_s} M_s^{(-\alpha)(-\beta)} \right] \quad \text{pour tout } s \geq 0 \text{ et tout } \Lambda_s \in \mathcal{F}_s.$$

Mais, pour $\lambda \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x^{(-\alpha)} [e^{-\lambda T_0} 1_{\{T_0 \leq t\}}] &= \mathbb{E}_x [e^{-\lambda T_0} 1_{\{T_0 \leq t\}} M_t^{(-\alpha)}] \\ &= \mathbb{E}_x [e^{-\lambda T_0} 1_{\{T_0 \leq t\}} M_{T_0}^{(-\alpha)}] \\ &= \frac{u_{-r^2}(0, 0)}{u_{-r^2}(0, x)} \mathbb{E}_x [e^{-(\lambda - r^2)T_0} 1_{\{T_0 \leq t\}}] \end{aligned}$$

d'après le théorème d'arrêt de Doob. Ainsi, en laissant tendre t vers $+\infty$ des deux côtés de l'égalité, et en appliquant le théorème de convergence monotone, on obtient, d'après (1.3) :

$$\frac{u_\lambda^{(-\alpha)}(0, x)}{u_\lambda^{(-\alpha)}(0, 0)} = \frac{u_{-r^2}(0, 0)}{u_{-r^2}(0, x)} \frac{u_{\lambda - r^2}(0, x)}{u_{\lambda - r^2}(0, 0)}. \quad (2.53)$$

Par conséquent,

$$M_t^{(-\alpha)(-\beta)} := \exp(\sigma^2 t - \beta L_t) \frac{u_{-r^2}(0, x)}{u_{-(\sigma^2 + r^2)}(0, x)} \frac{u_{-(\sigma^2 + r^2)}(0, X_t)}{u_{-r^2}(0, X_t)}, \quad t \geq 0,$$

et, pour $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x^{(-\alpha)(-\beta)}(\Lambda_s) &= \mathbb{E}_x^{(-\alpha)} \left[1_{\Lambda_s} \exp(\sigma^2 s - \beta L_s) \frac{u_{-r^2}(0, x)}{u_{-(\sigma^2 + r^2)}(0, x)} \frac{u_{-(\sigma^2 + r^2)}(0, X_s)}{u_{-r^2}(0, X_s)} \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[1_{\Lambda_s} \exp((\sigma^2 + r^2)s + (-\beta - \alpha)L_s) \frac{u_{-(\sigma^2 + r^2)}(0, X_s)}{u_{-(\sigma^2 + r^2)}(0, x)} \right]. \end{aligned} \quad (2.54)$$

A présent, la comparaison de (1.3) et (2.47) donne :

$$\mathbb{E}_0^{(-\alpha)} [e^{-\lambda \tau_l}] = \exp \left(-l / u_\lambda^{(-\alpha)}(0, 0) \right) = \exp \left(-l \left(\alpha + \frac{1}{u_{\lambda - r^2}(0, 0)} \right) \right),$$

ce qui conduit à la relation :

$$\frac{1}{u_\lambda^{(-\alpha)}(0, 0)} = \alpha + \frac{1}{u_{\lambda - r^2}(0, 0)}. \quad (2.55)$$

Par conséquent, en posant $\xi^2 := \sigma^2 + r^2$, l'équation (2.52) satisfaite par σ^2 se réécrit :

$$\beta + \alpha + \frac{1}{u_{-\xi^2}(0, 0)} = 0, \quad (2.56)$$

et ξ^2 est la plus petite solution de l'équation (2.56). En effet, sinon, il existerait v^2 tel que $v^2 < \sigma^2 + r^2$ et $\beta + \alpha + \frac{1}{u_{-v^2}(0, 0)} = 0$. Mais, d'après (2.55), ceci impliquerait que : $\beta + \frac{1}{u_{-(v^2-r^2)}^{(-\alpha)}(0, 0)} = 0$ ce qui contredit le fait que σ^2 soit la plus petite solution de cette équation (i.e. (2.52)). (Notons que $v^2 - r^2$ doit être positif, puisque $\lambda \mapsto u_\lambda(0, 0)$ prend des valeurs positives sur $[0, +\infty[$). Finalement, d'après (2.54) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x^{(-\alpha)(-\beta)}(\Lambda_s) &= \mathbb{E}_x \left[1_{\Lambda_s} \exp(\xi^2 s + (-\beta - \alpha)L_s) \frac{u_{-\xi^2}(0, X_s)}{u_{-\xi^2}(0, x)} \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[1_{\Lambda_s} M_s^{(-\alpha-\beta)} \right] \\ &= \mathbb{P}_x^{(-\alpha-\beta)}(\Lambda_s). \end{aligned}$$

2.4.2 Pénalisation de $\mathbb{P}_x^{(-\alpha)}$ par $(e^{\beta L_t}, t \geq 0)$

A présent, si l'on pénalise $\mathbb{P}_x^{(-\alpha)}$ par $(e^{\beta L_t}, t \geq 0)$, on obtient la famille de probabilités $(\mathbb{P}_x^{(-\alpha)(\beta)})_{x \in [0, b]}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ par :

$$\mathbb{P}_x^{(-\alpha)(\beta)}(\Lambda_s) = \mathbb{E}_x^{(-\alpha)} \left[1_{\Lambda_s} M_s^{(-\alpha)(\beta)} \right] \quad \text{pour tout } s \geq 0 \text{ et tout } \Lambda_s \in \mathcal{F}_s,$$

où $M^{(-\alpha)(\beta)}$ est la $\mathbb{P}_x^{(-\alpha)}$ -martingale donnée par :

$$M_t^{(-\alpha)(\beta)} := \exp(-\eta^2 t + \beta L_t) \frac{u_{\eta^2}^{(-\alpha)}(0, X_t)}{u_{\eta^2}^{(-\alpha)}(0, x)}, \quad t \geq 0,$$

et η^2 l'unique solution de l'équation $\frac{1}{u_{\eta^2}^{(-\alpha)}(0, 0)} = \beta$. D'après (2.53), $M^{(-\alpha)(\beta)}$ peut se réécrire :

$$M_t^{(-\alpha)(\beta)} = \exp(-\eta^2 t + \beta L_t) \frac{u_{-r^2}(0, x)}{u_{\eta^2-r^2}(0, x)} \frac{u_{\eta^2-r^2}(0, X_t)}{u_{-r^2}(0, X_t)}, \quad t \geq 0,$$

et, pour $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x^{(-\alpha)(\beta)}(\Lambda_s) &= \mathbb{E}_x^{(-\alpha)} \left[1_{\Lambda_s} \exp(-\eta^2 s + \beta L_s) \frac{u_{-r^2}(0, x)}{u_{\eta^2-r^2}(0, x)} \frac{u_{\eta^2-r^2}(0, X_s)}{u_{-r^2}(0, X_s)} \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[1_{\Lambda_s} \exp((\eta^2 - r^2)s + (\beta - \alpha)L_s) \frac{u_{\eta^2-r^2}(0, X_s)}{u_{\eta^2-r^2}(0, x)} \right]. \end{aligned}$$

D'après (2.56), $\eta^2 - r^2$ est solution de l'équation :

$$\alpha - \beta + \frac{1}{u_{\eta^2-r^2}(0, 0)} = 0.$$

Donc, si $\beta \geq \alpha$, alors $\eta^2 - r^2 = \zeta^2 \geq 0$ est l'unique solution de $\alpha - \beta + \frac{1}{u_{\zeta^2}(0,0)} = 0$, et

$$\mathbb{P}_x^{(-\alpha)(\beta)}(\Lambda_s) = \mathbb{E}_x \left[1_{\Lambda_s} \exp(\zeta^2 s + (\beta - \alpha)L_s) \frac{u_{\zeta^2}(0, X_s)}{u_{\zeta^2}(0, x)} \right] = \mathbb{P}_x^{(\beta-\alpha)}(\Lambda_s).$$

Sinon $\beta \leq \alpha$, et le même raisonnement montre que $\eta^2 - r^2 = -\zeta^2 \leq 0$ est la plus petite solution de l'équation $\alpha - \beta + \frac{1}{u_{-\zeta^2}(0,0)} = 0$ de sorte qu'à nouveau :

$$\mathbb{P}_x^{(-\alpha)(\beta)}(\Lambda_s) = \mathbb{E}_x \left[1_{\Lambda_s} \exp(-\zeta^2 s + (\beta - \alpha)L_s) \frac{u_{-\zeta^2}(0, X_s)}{u_{-\zeta^2}(0, x)} \right] = \mathbb{P}_x^{(\beta-\alpha)}(\Lambda_s).$$

Les autres cas se traitent de la même manière. □

2.5 Application aux processus de Bessel de dimension $\delta \in]0, 2[$ réfléchis en 1

2.5.1 Cas général

Soit $R^{(\nu)}$ un processus de Bessel d'indice $\nu = \frac{\delta}{2} - 1 \in]-1, 0[$ réfléchi en 1. $R^{(\nu)}$ est une diffusion récurrente positive, de générateur infinitésimal :

$$\mathcal{G}^{(\nu)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2\nu + 1}{2y} \frac{\partial}{\partial y},$$

défini sur le domaine :

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}^{(\nu)}) := \left\{ f : \mathcal{G}^{(\nu)} f \in \mathcal{C}_b([0, 1]), \lim_{y \rightarrow 0^+} y^{2\nu} (f(y) - f(0)) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(1) - f(1-y)}{1 - (1-y)^{-2\nu}} = 0 \right\}.$$

Sa mesure de vitesse et sa fonction d'échelle sont données par :

$$m^{(\nu)}(dy) = \frac{y^{2\nu+1}}{|\nu|} dy \quad \text{et} \quad s^{(\nu)}(y) = y^{-2\nu}.$$

On définit alors $(X_t := s^{(\nu)}(R_t^{(\nu)}), t \geq 0)$. $(X_t, t \geq 0)$ est une diffusion à échelle naturelle. Son générateur infinitésimal $\mathcal{G}$ est donné par :

$$\mathcal{G} = 2\nu^2 x^{2+\frac{1}{\nu}} \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

sur le domaine

$$\mathcal{D}(\mathcal{G}) := \left\{ f : \mathcal{G}^{(\nu)} f \in \mathcal{C}_b([0, 1]), f'(0^+) = f'(1^-) = 0 \right\}.$$

Ainsi, sa mesure de vitesse vaut $m(dx) = \frac{1}{2\nu^2} x^{-2-1/\nu} dx$. Nous déterminons à présent les deux fonctions propres Φ et Ψ solutions de (2.9). Introduisons :

$$I_\nu(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \quad z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0[, \quad (2.57)$$

la première fonction de Bessel modifiée, et

$$K_\nu(z) := \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)} \quad z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0[, \nu \notin \mathbb{Z}, \quad (2.58)$$

la fonction de McDonald. Il est bien connu (voir Lebedev [Leb72, Chapitre 5.7, p. 110]) que ces deux fonctions engendrent l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire :

$$u'' + \frac{1}{x}u' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0.$$

Il est alors aisé de vérifier que

$$x \mapsto \sqrt{x}I_\nu\left(\sqrt{2\lambda}x^{-1/2\nu}\right) \quad \text{et} \quad x \mapsto \sqrt{x}K_\nu\left(\sqrt{2\lambda}x^{-1/2\nu}\right)$$

engendrent l'ensemble des fonctions propres de $\mathcal{G}$ associées à la valeur propre λ . Les conditions aux frontières (2.9) impliquent que :

$$\Phi(x, \lambda) = \left(\frac{2}{\sqrt{2\lambda}}\right)^\nu \Gamma(1+\nu)\sqrt{x}I_\nu\left(\sqrt{2\lambda}x^{-1/2\nu}\right), \quad (2.59)$$

et

$$\Psi(x, \lambda) = \left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}\right)^\nu \Gamma(1-\nu)\sqrt{x}I_\nu\left(\sqrt{2\lambda}x^{-1/2\nu}\right) + \frac{2\nu}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}\right)^\nu \sqrt{x}K_\nu\left(\sqrt{2\lambda}x^{-1/2\nu}\right), \quad (2.60)$$

d'où l'on déduit, d'après (2.10) appliqué avec $b = 1$:

$$\begin{aligned} u_\lambda(0, 0) &:= \frac{\Psi'(1, \lambda)}{\Phi'(1, \lambda)} = \frac{-\nu}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}\right)^{2\nu} \left(\Gamma(-\nu) + \frac{2}{\Gamma(1+\nu)} \frac{K_{\nu+1}(\sqrt{2\lambda})}{I_{\nu+1}(\sqrt{2\lambda})}\right) \\ &= \frac{-\nu\Gamma(-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{2}\right)^{2\nu} \frac{I_{-(\nu+1)}(\sqrt{2\lambda})}{I_{\nu+1}(\sqrt{2\lambda})}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

où l'on a utilisé, pour obtenir cette dernière expression, (2.58) ainsi que la formule des compléments $\Gamma(-\nu)\Gamma(1+\nu) = \frac{\pi}{\sin(\pi(1+\nu))}$. Introduisons également, pour $\nu \in]-1, 0[$, la première fonction de Bessel, définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$J_\nu(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}.$$

Cette fonction est liée à la fonction I_ν au travers de la relation :

$$J_\nu(z) := e^{-\nu\pi i/2} I_\nu(iz) \quad \text{pour } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } -\pi/2 < \arg(z) < \pi.$$

(Voir Lebedev [Leb72, p.109 et p.113]).

On peut à présent énoncer la version suivante du Théorème 2.1 :

Théorème 2.17.

Soit $R^{(\nu)}$ un processus de Bessel d'indice $\nu \in]-1, 0[$ réfléchi en 1, $(X_t := (R_t^{(\nu)})^{-2\nu}, t \geq 0)$ et $\alpha > 0$.

i) Soit r^2 la solution de plus petit module de l'équation $\alpha + \frac{1}{u_{-r^2}(0,0)} = 0$. Alors :

$$\mathbb{E}_x \left[e^{-\alpha L_t(X)} \right] \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \exp(-r^2 t) \left(\frac{\Phi(x, -r^2)}{\alpha} + \Psi(x, -r^2) \right) c_-(\alpha, \nu, r)$$

$$\text{où } c_-(\alpha, \nu, r) = \frac{1}{-\frac{\nu}{\alpha} - \frac{\nu}{(\Gamma(1+\nu))^2} \left(\frac{r^2}{2}\right)^\nu \frac{1}{J_{\nu+1}^2(r\sqrt{2})}}.$$

ii) Soit ρ^2 l'unique solution dans $\mathbb{R}^+$ de $-\alpha + \frac{1}{u_{\rho^2}(0,0)} = 0$. Alors :

$$\mathbb{E}_x \left[e^{\alpha L_t(X)} \right] \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \exp(\rho^2 t) \left(\frac{\Phi(x, \rho^2)}{\alpha} - \Psi(x, \rho^2) \right) c_+(\alpha, \nu, r)$$

$$\text{où } c_+(\alpha, \nu, r) = \frac{1}{-\frac{\nu}{\alpha} - \frac{\nu}{(\Gamma(1+\nu))^2} \left(\frac{\rho^2}{2}\right)^\nu \frac{1}{I_{\nu+1}^2(\rho\sqrt{2})}}.$$

Notons que pour simplifier la présentation dans les formules ci-dessus, on a utilisé l'identité (2.8) : $u_\lambda(x, y) = \Phi(x, \lambda)(u_\lambda(0, 0)\Phi(y, \lambda) - \Psi(y, \lambda))$ ainsi que la formule, pour le Wronskien de I_ν et K_ν :

$$W(I_\nu(z), K_\nu(z)) := K'_\nu(z)I_\nu(z) - I'_\nu(z)K_\nu(z) = -\frac{1}{z}.$$

Démonstration.

Il suffit de vérifier que les Hypothèses 2.12 et 2.16 sont satisfaites dans ce cadre, afin de pouvoir appliquer le Théorème 2.1.

On note $(\omega_n)_{n \geq 1}$ les zéros de $u_{-\lambda^2}(0, 0)$, et soient $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $[c, d] \subset]\omega_1^2, +\infty[$, et $z \in \{z \in \mathbb{C}; z = a + iv, c \leq a \leq d\}$. On cherche $w \in \mathbb{C}$ tel que $w^2 = 2z = 2(a + iv)$. Sous forme trigonométrique, w peut s'écrire :

$$w = \sqrt{2}(a^2 + v^2)^{1/4} \exp\left(\frac{i}{2} \arg(2(a + iv))\right). \quad (2.62)$$

A présent, puisque $|z| = \sqrt{a^2 + v^2}$ et que a est borné dans $[c, d]$, le fait que $|z|$ tende vers $+\infty$ implique que v tende vers $\pm\infty$.

Supposons tout d'abord que v tende vers $+\infty$. Alors, $\arg(2(a + iv)) \xrightarrow{v \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$, donc d'après (2.62) :

$$w \underset{v \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{v} + i\sqrt{v}.$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} u_z(0, 0) &= \frac{-\nu}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{w}{2}\right)^{2\nu} \left(\Gamma(-\nu) + \frac{2}{\Gamma(1+\nu)} \frac{K_{\nu+1}(w)}{I_{\nu+1}(w)} \right) \\ &\underset{v \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-\nu\Gamma(-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{\sqrt{v} + i\sqrt{v}}{2} \right)^{2\nu} = \mathcal{O}(v^\nu) \end{aligned}$$

puisque $\frac{K_{\nu+1}(w)}{I_{\nu+1}(w)} \xrightarrow{|u| \rightarrow +\infty} 0$ pour $|\arg(w)| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, d'après [Leb72, p.123].

De même, lorsque $v \rightarrow -\infty$, on prouve que $u_z(0, 0) = \mathcal{O}(|v|^\nu)$. Par conséquent, les Hypothèses

2.12 et 2.16 sont vérifiées. □

Bien sûr, la preuve ci-dessus montre que les Théorèmes de pénalisation 2.2 et 2.3 sont également vérifiés pour les processus de Bessel d'indice $\nu \in]-1, 0[$ réfléchis en 1. Nous ne les énoncerons pas une fois de plus étant donné que tous les termes ont déjà été calculés précédemment. A la place, nous allons particulariser ce cadre à l'exemple fondamental du mouvement brownien réfléchi sur $[0, 1]$.

2.5.2 Le mouvement brownien réfléchi sur $[0, 1]$

Le noyau résolvant (2.61) et les fonctions propres (2.59) et (2.60) du générateur infinitésimal $\mathcal{G}$ se réduisent significativement lorsque $\nu = -1/2$, (i.e. le cas du mouvement brownien). En effet, comme le montrent les formules suivantes :

$$I_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cosh(z), \quad I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh(z) \quad \text{et} \quad K_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z},$$

on obtient en substituant dans (2.59), (2.60) et (2.61) :

$$\Phi(x, \lambda) = \cosh(\sqrt{2\lambda}x), \quad \Psi(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \sinh(\sqrt{2\lambda}x),$$

et

$$u_\lambda(0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda} \tanh(\sqrt{2\lambda})} = \frac{\sum_{n \geq 0} \frac{(2\lambda)^n}{(2n)!}}{\sum_{n \geq 0} \frac{(2\lambda)^{n+1}}{(2n+1)!}}.$$

Dans ce cadre particulier, les Théorèmes 2.1, 2.2 et 2.3 se réécrivent :

Théorème 2.18.

Soit $(X_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien réfléchi sur $[0, 1]$ et $\alpha > 0$.

i) Soit r l'unique solution dans $]0, \frac{\pi}{2\sqrt{2}}[$ de l'équation $\alpha = \sqrt{2}r \tan(\sqrt{2}r)$. Alors :

$$\mathbb{E}_x [e^{-\alpha L_t}] \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \exp(-r^2 t) \frac{\cos(\sqrt{2}r(1-x))}{\cos(\sqrt{2}r)} \frac{2\alpha}{2r^2 + \alpha + \alpha^2}.$$

ii) Soit ρ l'unique solution dans $]0, +\infty[$ de l'équation $\alpha = \sqrt{2}\rho \tanh(\sqrt{2}\rho)$. Alors :

$$\mathbb{E}_x [e^{\alpha L_t}] \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \exp(\rho^2 t) \frac{\cosh(\sqrt{2}\rho(1-x))}{\cosh(\sqrt{2}\rho)} \frac{2\alpha}{2\rho^2 + \alpha - \alpha^2}.$$

Théorème 2.19.

Soit $(X_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien réfléchi sur $[0, 1]$ et $\alpha > 0$.

i) Les processus

$$\left(M_t^{(-\alpha)} := \exp(r^2 t - \alpha L_t) \frac{\cos(\sqrt{2}r(1-X_t))}{\cos(\sqrt{2}r(1-x))}, t \geq 0 \right)$$

et

$$\left(M_t^{(\alpha)} := \exp(-\rho^2 t + \alpha L_t) \frac{\cosh(\sqrt{2}\rho(1-X_t))}{\cosh(\sqrt{2}\rho(1-x))}, t \geq 0 \right)$$

sont des $\mathbb{P}$ -martingales continues, strictement positives qui convergent vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.

ii) Soient $s > 0$ et $x \in [0, 1]$. Pour tout $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}_x [1_{\Lambda_s} e^{\pm \alpha L_t}]}{\mathbb{E}_x [e^{\pm \alpha L_t}]} = \mathbb{E}_x [1_{\Lambda_s} M_s^{(\pm \alpha)}],$$

iii) Soit $(\mathbb{P}_x^{(\pm \alpha)})_{x \in [0, 1]}$ la famille de probabilités définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ par :

$$\mathbb{P}_x^{(\pm \alpha)}(\Lambda_s) = \mathbb{E}_x [1_{\Lambda_s} M_s^{(\pm \alpha)}] \quad \text{pour tout } s \geq 0 \text{ et tout } \Lambda_s \in \mathcal{F}_s.$$

Alors, sous $\mathbb{P}_x^{(\pm \alpha)}$, le processus des coordonnées $(X_t, t \geq 0)$ est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$X_t = x + \tilde{B}_t + L_t^0(X) - L_t^1(X) + \int_0^t b^{(\pm \alpha)}(X_s) ds$$

où $(\tilde{B}_t, t \geq 0)$ est un $\mathbb{P}_x^{(\pm \alpha)}$ -mouvement brownien issu de 0 et :

$$\begin{cases} b^{(-\alpha)}(x) &= \sqrt{2}r \tan(\sqrt{2}r(1-x)), \\ b^{(+\alpha)}(x) &= -\sqrt{2}\rho \tanh(\sqrt{2}\rho(1-x)). \end{cases}$$

iv) Sous $\mathbb{P}^{(\pm \alpha)}$, la densité de la mesure de Lévy du subordonateur $(\tau_l, l \geq 0)$ est donnée par :

$$\begin{cases} n^{(-\alpha)}(u) = 2 \sum_{n \geq 1} a_n^2 e^{-(a_n^2 - r^2)u} \\ n^{(+\alpha)}(u) = 2 \sum_{n \geq 1} a_n^2 e^{-(a_n^2 + \rho^2)u} \end{cases}$$

$$\text{où } a_n := \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(2n-1).$$

Démonstration.

La preuve du Point (iii) est une conséquence directe de (2.5) et repose simplement sur une application du théorème de Girsanov. Pour prouver (iv), il nous faut déterminer la mesure de Lévy de $(\tau_l, l \geq 0)$ sous $\mathbb{P}$. On utilise le développement en série de $\sqrt{2\lambda} \tanh(\sqrt{2\lambda})$ suivant :

$$\sqrt{2\lambda} \tanh(\sqrt{2\lambda}) = \sum_{n \geq 1} \frac{2\lambda}{a_n^2 + \lambda} \quad \text{où } a_n = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(2n-1),$$

(voir par exemple Cartan [Car61, p.155]). On écrit alors, d'après (1.3) :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_0 [e^{-\lambda \tau_l}] &= \exp \left(-\frac{l}{u_{\lambda(0,0)}} \right) \\
 &= \exp \left(-l\sqrt{2\lambda} \tanh(\sqrt{2\lambda}) \right) \\
 &= \exp \left(-2l \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda}{a_n^2 + \lambda} \right) \\
 &= \exp \left(-2l \sum_{n \geq 1} a_n^2 \left(\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_n^2 + \lambda} \right) \right) \\
 &= \exp \left(-2l \sum_{n \geq 1} a_n^2 \int_0^\infty \left(e^{-a_n^2 u} - e^{-(a_n^2 + \lambda)u} \right) du \right) \\
 &= \exp \left(-2l \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda u}) \sum_{n \geq 1} a_n^2 e^{-a_n^2 u} du \right).
 \end{aligned}$$

Ainsi, la densité de la mesure de Lévy de $(\tau_l, l \geq 0)$ est donnée sous $\mathbb{P}$ par :

$$n(u) = 2 \sum_{n \geq 1} a_n^2 e^{-a_n^2 u},$$

et la preuve du Point (iii) du Théorème 2.19 est une conséquence directe du Point (ii) du Théorème 2.3. □

Remarque 2.20. Mentionnons au passage que, lorsque $(X_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien réfléchi sur $[0, 1]$, de nombreuses égalités en loi sont connues pour le subordonateur $(\tau_l, l \geq 0)$. Par exemple, d'après F.B. Knight ([Kni78, Lemme 2.1, p.436]), on a :

$$\begin{aligned}
 \tau_l(X) &\stackrel{(loi)}{=} \int_0^{\tau_l(|B|)} 1_{]0,1[}(|B_t|) dt \\
 &\stackrel{(loi)}{=} 2 \int_0^1 L_{\tau_l(|B|)}^a(|B|) da \quad (\text{en appliquant la formule des temps d'occupation}) \\
 &\stackrel{(loi)}{=} 2 \int_0^1 Z_a da \quad (\text{en appliquant le Théorème de Ray-Knight}),
 \end{aligned}$$

où B est un mouvement brownien standard et Z un carré de Bessel de dimension 0 issu de l . Par ailleurs, d'après P. Carmona, F. Petit et M. Yor [CPY01], on a l'égalité en loi :

$$(\gamma_{\frac{\pi^2}{4}\tau_l}, l \geq 0) \stackrel{(d)}{=} (\xi_{\frac{\pi}{2}l}, l \geq 0),$$

où γ est un mouvement brownien indépendant de τ et ξ est le processus de Lévy associé par la relation de Lamperti à la valeur absolue d'un processus de Cauchy. Son générateur s'écrit :

$$L^\xi f(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cosh(\eta)}{(\sinh(\eta))^2} (f(\xi + \eta) - f(\xi) - \eta f'(\xi) 1_{|\eta| \leq 1}) d\eta.$$

En fait, une meilleure connaissance de la loi de τ_l (en particulier le comportement asymptotique de sa densité) nous permettrait de pénaliser le mouvement brownien réfléchi sur $[0, 1]$ par $(1_{\{L_t \leq l\}}, t \geq 0)$.

Deuxième partie

Pseudo-inverses

Chapitre 3

Existence de pseudo-inverses pour des diffusions

3.1 Introduction

Nous étudions dans ce chapitre la notion de croissance stochastique pour des diffusions. Commençons par quelques définitions.

3.1.1 Ordre stochastique

Définition 3.1. Soient μ et ν deux mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^+$. μ est dite stochastiquement plus grande que ν :

$$\mu \stackrel{(st)}{\geq} \nu$$

si pour tout $y \geq 0$,

$$\mu([y, +\infty[) \geq \nu([y, +\infty[).$$

Définition 3.2. Un processus $(X_t, t \geq 0)$ est dit stochastiquement croissant si, pour tout $y > x$, l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $[0, 1]$: $t \mapsto \mathbb{P}_x(X_t \geq y)$ est croissante et continue à droite.

Citons tout de suite un résultat dû à Kamae-Krengel qui permet de caractériser en un sens les processus stochastiquement croissants :

Théorème 3.3 (Kamae-Krengel, [KK78]). Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus stochastiquement croissant. Alors il existe un processus $(A_t, t \geq 0)$ croissant p.s. admettant les mêmes marginales unidimensionnelles que $(X_t, t \geq 0)$, i.e. tel que, pour tout $t \geq 0$ fixé, $X_t \stackrel{(loi)}{=} A_t$. Deux tels processus sont dits associés, et nous écrivons :

$$X_t \stackrel{(1.d)}{=} A_t.$$

Dans ce chapitre, nous étudions la croissance stochastique de certaines diffusions au travers de la notion suivante :

Définition 3.4. Un processus $(X_t, t \geq 0)$ admet un pseudo-inverse croissant si :

- i) $(X_t, t \geq 0)$ est un processus stochastiquement croissant,
- ii) pour tout $y > x$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_x(X_t \geq y) = 1$.

Définition 3.5. Si les Points (i) et (ii) de la Définition 3.4 sont satisfaits, alors, il existe une famille de variables aléatoires positives $(Y_{x,y}, x < y)$ telle que :

$$\mathbb{P}_x(X_t \geq y) = \mathbb{P}(Y_{x,y} \leq t). \quad (3.1)$$

On appelle cette famille de v.a. positives $(Y_{x,y}, x < y)$ le pseudo-inverse croissant du processus $(X_t, t \geq 0)$.

Cette définition a été introduite pour la première fois par Madan, Roynette et Yor dans [MRY08] pour exprimer le prix d'une option put dans le modèle de Black-Scholes comme une fonction de répartition.

Remarque 3.6. Si $(X_t, t \geq 0)$ est un processus stochastiquement croissant, alors, puisque $t \mapsto \mathbb{P}_x(X_t \geq y)$ est bornée par 1, pour tout $y > x$ la limite :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_x(X_t \geq y) =: Z(x, y)$$

existe. Par conséquent, il existe une famille de v.a. positives $(Y_{x,y}, x < y)$ telles que :

$$\frac{1}{Z(x, y)} \mathbb{P}_x(X_t \geq y) = \mathbb{P}(Y_{x,y} \leq t). \quad (3.2)$$

Dans ce cas, nous appelons la famille de v.a. positives $(Y_{x,y}, x < y)$ le quasi pseudo-inverse croissant du processus $(X_t, t \geq 0)$.

Notons que dans les deux cas, a priori, la famille $(Y_{x,y}, x < y)$ est seulement une famille de v.a., et ne constitue pas un processus.

Nous donnons, dans ce chapitre, des conditions suffisantes pour qu'une diffusion $(X_t, t \geq 0)$ admette un pseudo-inverse croissant (ou au-moins un quasi pseudo-inverse croissant). Nous exhibons également, dans certains cas, un processus croissant associé. Commençons par examiner un exemple simple :

Exemple 3.7. Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien issu de 0, et $a > 0$. On définit la sous-martingale : $(X_t = e^{B_t + at}, t \geq 0)$. Alors, $(X_t, t \geq 0)$ admet un pseudo-inverse croissant. En effet, pour tout $y > 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_1(X_t \geq y) &= \mathbb{P}(B_t + at \geq \log(y)) = \mathbb{P}(\sqrt{t}B_1 \geq \log(y) - at) \\ &= \mathbb{P}\left(B_1 \geq \frac{\log(y)}{\sqrt{t}} - a\sqrt{t}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log(y)}{\sqrt{t}} - a\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Il est alors clair que $\mathbb{P}_1(X_0 \geq y) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_1(X_t \geq y) = 1$. De plus :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{P}_1(X_t \geq y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\log(y)}{\sqrt{2\pi t^3}} + \frac{a}{\sqrt{2\pi t}} \right) e^{-\frac{1}{2t}(\log(y) - at)^2} \geq 0.$$

Par conséquent, il existe une famille de v.a $(Y_{1,y}, 1 < y)$ telle que :

$$\mathbb{P}_1(X_t \geq y) = \mathbb{P}(Y_{1,y} \leq t).$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_{1,y} \in dt) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\log(y)}{\sqrt{2\pi t^3}} + \frac{a}{\sqrt{2\pi t}} \right) \exp \left(-\frac{1}{2t} (\log(y) - at)^2 \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbb{P}(T_{\log(y)}^{(a)} \in dt) + \mathbb{P}(G_{\log(y)}^{(a)} \in dt) \right)\end{aligned}$$

avec :

$$T_{\log(y)}^{(a)} := \inf\{t \geq 0; B_t + at = \log(y)\} \quad \text{et} \quad G_{\log(y)}^{(a)} := \sup\{t \geq 0; B_t + at = \log(y)\}.$$

En effet :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{\log(y)}^{(a)} \in dt) &= \frac{\log(y)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp \left(-\frac{1}{2t} (\log(y) - at)^2 \right) dt, \\ \mathbb{P}(G_{\log(y)}^{(a)} \in dt) &= \frac{a}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left(-\frac{1}{2t} (\log(y) - at)^2 \right) dt.\end{aligned}$$

Ainsi, on constate que, dans ce cas, la famille $(Y_{1,y}, y > 1)$ peut en fait être réalisée comme un processus, dont la loi est obtenue en lançant une pièce non truquée donnant d'un côté le processus $(T_{\log(y)}^{(a)}, y > 1)$ et de l'autre le processus $(G_{\log(y)}^{(a)}, y > 1)$.

Dans [RY08], Roynette et Yor ont étudié l'existence de pseudo-inverses pour les processus de Bessel. Voici un de leurs résultats, que nous généralisons au cours de ce chapitre :

Théorème 3.8 (Roynette-Yor, [RY08]). *Soit $(R_t, t \geq 0; \mathbb{P}_x^{(\nu)}, x \in \mathbb{R}^+)$ un processus de Bessel d'indice $\nu > -1$.*

i) Si $\nu \geq -\frac{1}{2}$, alors $(R_t, t \geq 0)$ admet un pseudo-inverse croissant $(Y_{x,y}^{(\nu)}, x < y)$ et l'on a :

$$Y_{0,y}^{(\nu)} \stackrel{(1,d)}{=} G_y^{(\nu+1)},$$

où $G_y^{(\nu+1)} := \sup\{t \geq 0; R_t = y\}$ sous $\mathbb{P}_0^{(\nu+1)}$.

ii) Soit $\nu \in]-1, -\frac{1}{2}[$. Alors, $(R_t, t \geq 0)$ admet un pseudo-inverse croissant si et seulement si $x = 0$.

La preuve de ce théorème repose sur les identités en loi suivantes, entre les processus de Bessel d'indices ν et $\nu + 1$:

Proposition 3.9 (Formule de Hirsch-Song [HS99]).

Soit $\nu > -\frac{1}{2}$ et notons $p^{(\nu)}(t, x, y)$ la densité de transition (par rapport à la mesure de Lebesgue) du processus de Bessel d'indice ν , et par $(P_t^{(\nu)}, t \geq 0)$ son semi-groupe, de sorte que $P_t^{(\nu)} f(x) = \int p^{(\nu)}(t, x, y) f(y) dy$. Alors :

$$i) \quad \frac{\partial}{\partial x} p^{(\nu)}(t, x, y) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{y} p^{(\nu+1)}(t, x, y) \right),$$

ii) Soit $\tilde{D}$ l'opérateur défini sur l'espace des fonctions de classe C^1 , dont la dérivée vaut 0 en 0, et qui sont bornées de même que leur dérivée première :

$$\tilde{D}f(x) = \frac{1}{x} f'(x).$$

Alors,

$$\tilde{D}P_t^{(\nu)} = P_t^{(\nu+1)} \tilde{D}.$$

iii) Soit $(Q_t^{(\nu)}, t \geq 0)$ le semi-groupe du carré de Bessel d'indice ν . Alors :

$$DQ_t^{(\nu)} = Q_t^{(\nu+1)} D$$

où D représente l'opérateur de dérivation : $Df(x) = f'(x)$ défini sur l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ bornées de même que leur dérivée première.

3.1.2 Plan

Nous donnons à présent le plan et les principaux résultats de ce chapitre.

- On considère tout d'abord, dans la Section 3.2, le cas d'une diffusion sur $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle stochastique :

$$X_t = x + \beta_t + \int_0^t c(X_s) ds.$$

Nous montrons que si c est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ positive, décroissante et convexe, alors $(X_t, t \geq 0)$ admet un quasi pseudo-inverse croissant. L'existence d'un pseudo-inverse croissant nécessite une hypothèse supplémentaire, que l'on peut formuler par exemple en utilisant le critère de Feller.

Dans le reste du chapitre, nous nous concentrons plus particulièrement sur des diffusions à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

- Nous commençons, dans la Section 3.3, par traiter un exemple en considérant la famille de diffusions $(X^{(\alpha)})_{\alpha \geq 0}$ définies comme les solutions des EDS :

$$X_t^{(\alpha)} = B_t + \int_0^t \left(c - \frac{\alpha e^{2C}}{1 + \alpha \int_0^{\cdot} e^{2C(y)} dy} \right) (X_s^{(\alpha)}) ds$$

où $c :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie $c(0) = +\infty$ et telle que $C(x) := \int_1^x c(y) dy$ vérifie $C(0) = -\infty$. Nous prouvons alors qu'il existe une diffusion transiente $(\bar{X}_t, t \geq 0)$ indépendante de α telle que :

$$\mathbb{P}_0^{(\alpha)}(X_t^{(\alpha)} \geq y) = \frac{1}{1 + \alpha \int_0^y e^{2C(z)} dz} \bar{\mathbb{P}}_0(\bar{G}_y \leq t),$$

où $\bar{G}_y := \sup\{t \geq 0; \bar{X}_t = y\}$. De cette formule, on déduit que :

- i) si $\alpha > 0$, $(X_t^{(\alpha)}, t \geq 0)$ admet un quasi pseudo-inverse croissant,
- ii) si $\alpha = 0$, $(X_t := X_t^{(0)}, t \geq 0)$ admet un pseudo-inverse croissant $(Y_{0,y}, y > 0)$, et les égalités en loi suivantes sont satisfaites :

$$X_t \stackrel{(1,d)}{=} \inf_{s \geq t} \bar{X}_s \quad \text{et} \quad Y_{0,y} \stackrel{(1,d)}{=} \bar{G}_y. \quad (3.4)$$

- Dans la Section 3.4, nous étendons les résultats précédents au cas général d'une diffusion $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et issue de 0. En notant m la mesure de vitesse de $(X_t, t \geq 0)$,

nous prouvons l'existence d'un processus transient $(\bar{X}_t, t \geq 0)$, défini à partir de $(X_t, t \geq 0)$ par la transformation de Biane [Bia85], tel que :

$$\mathbb{P}_0(X_t \geq y) = \left(1 - \frac{m([0, y])}{m([0, +\infty[))}\right) \bar{\mathbb{P}}_0(\bar{G}_y \leq t).$$

En particulier, si $m([0, +\infty[) = +\infty$, $(X_t, t \geq 0)$ admet un pseudo-inverse croissant $(Y_{0,y}, y > 0)$ et les égalités en loi (3.4) sont à nouveau satisfaites. Ainsi, dans notre cadre, une diffusion issue de 0 admet un pseudo-inverse croissant si et seulement si elle est transiente ou récurrente nulle.

- Finalement, dans la Section 3.5, nous obtenons des relations supplémentaires entre les diffusions $(X_t, t \geq 0)$ et $(\bar{X}_t, t \geq 0)$. Nous introduisons alors trois nouveaux processus, liés à $(X_t, t \geq 0)$ via la notion de pseudo-inverse, qui nous permettent d'obtenir quelques identités de type Zolotarev, (également appelées identités de Kendall [BB01]).

3.2 Existence de pseudo-inverses pour un mouvement brownien avec une dérive positive, décroissante et convexe

Dans cette section, nous nous intéressons à l'existence de pseudo-inverses pour des diffusions à valeurs réelles $(X_t, t \geq 0; \mathbb{P}_x, x \in \mathbb{R})$ solutions de :

$$X_t = x + \beta_t + \int_0^t c(X_s) ds \quad (3.5)$$

où $(\beta_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard issu de 0.

Théorème 3.10. *Soit $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ décroissante et convexe. Alors :*

- i) *L'équation (3.5) admet une unique solution, laquelle est forte,*
- ii) *pour tout $y > x$, la fonction $t \mapsto \mathbb{P}_x(X_t \geq y)$ est croissante et continue.*

En conséquence, le processus $(X_t, t \geq 0; \mathbb{P}_x, x \in \mathbb{R})$ admet un quasi pseudo-inverse croissant. En d'autres termes, pour tout $y > x$, il existe une v.a. positive $Y_{x,y}$ telle que, pour tout $t \geq 0$, (3.2) soit satisfaite.

Remarque 3.11. *Bien sûr, il serait préférable de donner quelques conditions qui assurent l'existence d'un pseudo-inverse. C'est par exemple le cas lorsque $c(x) > \frac{k}{x}$, pour $x \geq A$ pour un certain $A > 0$ et $k > 1/2$. En effet, on a alors :*

$$C(y) := \int_A^y c(x) dx \geq \int_A^y \frac{k}{x} dx \geq k \log(y/A),$$

donc :

$$\int_A^\infty e^{-2C(y)} dy \leq \int_A^\infty \left(\frac{A}{y}\right)^{2k} dy < \infty,$$

et $\mathbb{P}_x(X_t \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty) = 1$ d'après le critère de Feller, (voir [Kas76, p.345]), ce qui implique que $\mathbb{P}_x(X_t > y) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 1$ pour tout $y > x$.

Démonstration.

1) L'existence et l'unicité d'une solution forte de l'équation (3.5) est classique. Elle provient du fait que c est localement lipschitzienne, et de l'absence d'explosion puisque :

- $xc(x) \leq 0$ si $x \leq 0$,
- c est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

2) On introduit quelques notations :

- $p(t, x, y)$ désigne la densité par rapport à la mesure de Lebesgue de la v.a. X_t sous $\mathbb{P}_x$.

- $h(t, x, y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$ désigne la densité du semi-groupe de la chaleur,
- pour toute fonction borélienne $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on pose :

$$E_{x,y}^{(g)} := \mathbb{E}_x \left[\exp \int_0^t g(X_s) ds | X_t = y \right],$$

- si $\gamma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de t, x et y , on écrit $\frac{\partial \gamma}{\partial a}$ (resp. $\frac{\partial \gamma}{\partial b}$) pour la dérivée de γ par rapport à sa seconde variable x (resp. par rapport à sa troisième variable y). Cela s'avérera utile par la suite car nous rencontrerons des quantités de la forme :

$$\frac{\partial p}{\partial a}(t, y, x) = \frac{\partial p}{\partial a}(t, a, b)|_{a=y, b=x}$$

- On note C la primitive de c , telle que $C(0) = 0$:

$$C(x) := \int_0^x c(y) dy.$$

L'idée de la preuve (très classique) consiste à se ramener à la mesure de Wiener grâce au théorème de Girsanov. On pourra consulter pour des calculs similaires R. Carmona [Car79], où l'auteur construit un processus de diffusion gouverné par un opérateur auto-adjoint positif, en utilisant une méthode de changement de probabilités.

Lemme 3.12.

- i) La fonction $t \rightarrow \mathbb{P}_x(X_t \geq y)$ est croissante pour tout $y > x$ si et seulement si $\frac{\partial p}{\partial a}(t, x, y) \leq 0$ pour tout $x > y$.
- ii) On a la formule générale de Hirsch-Song :

$$\frac{\partial p}{\partial a}(t, x, y) = -\frac{\partial}{\partial b} \left(p(t, x, y) E_{x,y}^{(c')} \right). \quad (3.6)$$

Démonstration.

a) On écrit, pour $x < y$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{P}_x(X_t \geq y) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_y^{+\infty} p(t, x, z) dz \\ &= \int_y^{+\infty} \frac{\partial p}{\partial t}(t, x, z) dz \\ &= \int_y^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial b^2}(t, x, z) - \frac{\partial}{\partial b} (c(z)p(t, x, z)) \right] dz \quad (\text{d'après Fokker-Planck}) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial b}(t, x, y) + c(y)p(t, x, y). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Par ailleurs, on sait que la densité de transition $q(t, x, y)$ par rapport à la mesure de vitesse est symétrique en x et y . Ici, puisque $m(dz) = 2e^{2C(z)}dz$ est la mesure de vitesse de la diffusion $(X_t, t \geq 0)$, cela signifie que pour tout x, y :

$$e^{2C(x)}p(t, x, y) = e^{2C(y)}p(t, y, x). \quad (3.8)$$

Nous allons alors utiliser (3.8) afin d'obtenir une autre expression de la relation (3.7). Dérivant (3.8) par rapport à y , il vient :

$$e^{2C(x)}\frac{\partial p}{\partial b}(t, x, y) = 2c(y)e^{2C(y)}p(t, y, x) + e^{2C(y)}\frac{\partial p}{\partial a}(t, y, x). \quad (3.9)$$

On injecte alors (3.9) dans (3.7) et l'on obtient, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{P}_x(X_t \geq y) &= -\frac{1}{2}\left[2c(y)e^{2C(y)-2C(x)}p(t, y, x) + e^{2C(y)-2C(x)}\frac{\partial p}{\partial a}(t, y, x)\right] \\ &\quad + c(y)e^{2C(y)-2C(x)}p(t, y, x) \\ &= -\frac{1}{2}e^{2C(y)-2C(x)}\frac{\partial p}{\partial a}(t, y, x). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ceci achève la preuve du Point (i) du Lemme 3.12, après avoir échangé les rôles de x et y .

b) Prouvons à présent la formule générale de Hirsch-Song (3.6).

Pour toute fonction f régulière, à support compact, on a, d'une part :

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{E}_x[f(X_t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p}{\partial a}(t, x, y)f(y)dy \quad (3.11)$$

tandis que, de l'autre, avec des notations évidentes :

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{E}_x[f(X_t)] = \frac{\partial}{\partial x}\mathbb{E}\left[f(X_t^{(x)})\right] = \mathbb{E}\left[f'(X_t^{(x)})\frac{\partial X_t^{(x)}}{\partial x}\right]. \quad (3.12)$$

On déduit alors de (3.5) que :

$$\frac{\partial X_t^{(x)}}{\partial x} = 1 + \int_0^t c'(X_s^{(x)})\frac{\partial X_s^{(x)}}{\partial x}ds. \quad (3.13)$$

En intégrant l'équation linéaire (3.13), on obtient :

$$\frac{\partial X_t^{(x)}}{\partial x} = \exp\left(\int_0^t c'(X_s^{(x)})ds\right). \quad (3.14)$$

Puis, en substituant (3.14) dans (3.12) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\mathbb{E}_x[f(X_t)] &= \mathbb{E}_x\left[f'(X_t)\exp\left(\int_0^t c'(X_s)ds\right)\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}_x\left[\exp\left(\int_0^t c'(X_s)ds\right) | X_t = y\right] f'(y)p(t, x, y)dy \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial b}\left(E_{x,y}^{(c')}p(t, x, y)\right) f(y)dy \end{aligned} \quad (3.15)$$

après une intégration par parties. La comparaison de (3.11) et (3.15) achève alors la preuve du Point (ii) du Lemme 3.12.

□

Le Lemme 3.12 implique que la fonction $t \rightarrow \mathbb{P}_x(X_t \geq y)$ est croissante pour tout $y > x$ si et seulement si $\frac{\partial}{\partial b} \left(p(t, x, y) E_{x,y}^{(c')} \right) \geq 0$ pour tout $x > y$. Pour évaluer cette quantité, notre approche consiste à présent à exprimer $E_{x,y}^{(c')} p(t, x, y)$ à l'aide du mouvement brownien β .

Lemme 3.13. *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et toute fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne, on a :*

$$E_{x,y}^{(g)} p(t, x, y) = h(t, x, y) e^{C(y)-C(x)} W_x \left[\exp \int_0^t \left(g - \frac{1}{2}(c' + c^2) \right) (\beta_s) ds \middle| \beta_t = y \right],$$

où $(W_x, x \in \mathbb{R})$ désigne la famille des mesures de Wiener. En particulier, pour $g = c'$:

$$E_{x,y}^{(c')} p(t, x, y) = h(t, x, y) e^{C(y)-C(x)} W_x \left[\exp \frac{1}{2} \int_0^t (c' - c^2) (\beta_s) ds \middle| \beta_t = y \right].$$

Démonstration.

Pour toute fonction borélienne et positive f , le théorème de Girsanov implique que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[f(X_t) \exp \left(\int_0^t g(X_s) ds \right) \right] \\ = W_x \left[f(\beta_t) \exp \left(\int_0^t g(\beta_s) ds + \int_0^t c(\beta_s) d\beta_s - \frac{1}{2} \int_0^t c^2(\beta_s) ds \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

En fait, un peu de prudence est nécessaire dans l'application du théorème de Girsanov ici puisque c n'est pas bornée. Cependant, d'après l'extension de McKean (voir [McK69]) impliquant le temps d'explosion, et puisque le temps d'explosion dans ce cadre est infini p.s., la formule (3.16) est vérifiée. D'après la formule d'Itô :

$$C(\beta_t) = C(x) + \int_0^t c(\beta_s) d\beta_s + \frac{1}{2} \int_0^t c'(\beta_s) ds, \quad (3.17)$$

on déduit, en injectant (3.17) dans (3.16) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[f(X_t) \exp \left(\int_0^t g(X_s) ds \right) \right] \\ = W_x \left[f(\beta_t) \exp \left(C(\beta_t) - C(x) + \int_0^t \left(g - \frac{1}{2}(c' + c^2) \right) (\beta_s) ds \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Cependant, (3.18) peut se réécrire, en conditionnant par $X_t = y$ et $\beta_t = y$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}_x \left[\exp \left(\int_0^t g(X_s) ds \right) \middle| X_t = y \right] f(y) p(t, x, y) dy \\ = \int_{-\infty}^{\infty} W_x \left[\exp \int_0^t \left(g - \frac{1}{2}(c' + c^2) \right) (\beta_s) ds \middle| \beta_t = y \right] e^{C(y)-C(x)} f(y) h(t, x, y) dy. \end{aligned} \quad (3.19)$$

f étant quelconque dans (3.19), le Point (ii) du Lemme 3.13 est ainsi prouvé. $\square$

3) Nous pouvons à présent achever la preuve du Point (ii) du Théorème 3.10.

D'après les Lemmes 3.12 et 3.13, il suffit de voir que, pour $x > y$, la quantité :

$$\frac{\partial}{\partial b} \left(E_{x,y}^{(c')} p(t, x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial b} \left(e^{C(y)-C(x)} h(t, x, y) W_x \left[\exp \frac{1}{2} \int_0^t (c' - c^2) (\beta_s) ds \middle| \beta_t = y \right] \right) \quad (3.20)$$

est positive. Mais, en posant $\widetilde{W}_{x,y}^{(c)} = W_x \left[\exp \frac{1}{2} \int_0^t (c' - c^2)(\beta_s) ds | \beta_t = y \right]$, on a d'après (3.20) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b} \left(E_{x,y}^{(c')} p(t, x, y) \right) &= E_{x,y}^{(c')} p(t, x, y) \left(c(y) + \frac{1}{h(t, x, y)} \frac{\partial h}{\partial b}(t, x, y) + \frac{1}{\widetilde{W}_{x,y}^{(c)}} \frac{\partial}{\partial b} \widetilde{W}_{x,y}^{(c)} \right) \\ &= E_{x,y}^{(c')} p(t, x, y) \left(c(y) + \frac{x-y}{t} + \frac{1}{\widetilde{W}_{x,y}^{(c)}} \frac{\partial}{\partial b} \widetilde{W}_{x,y}^{(c)} \right). \end{aligned}$$

D'où,

$$\frac{\frac{\partial}{\partial b} \left(E_{x,y}^{(c')} p(t, x, y) \right)}{E_{x,y}^{(c')} p(t, x, y)} = c(y) + \frac{x-y}{t} + \frac{\frac{\partial}{\partial b} \widetilde{W}_{x,y}^{(c)}}{\widetilde{W}_{x,y}^{(c)}}.$$

Par conséquent, puisque $c(y) \geq 0$ et $\frac{x-y}{t} \geq 0$ pour $x \geq y$, nous aurons prouvé la croissance de l'application $t \rightarrow \mathbb{P}_x(X_t \geq y)$ une fois que nous aurons montré que :

$$\frac{\partial}{\partial b} \widetilde{W}_{x,y}^{(c)} \geq 0. \quad (3.21)$$

Prouvons donc (3.21). Le pont brownien de longueur t , $(\beta_s^{x,t,y}, s \leq t)$, allant de x à y , satisfait :

$$\beta_s^{x,t,y} = x + (y-x) \frac{s}{t} + \beta_s^{0,t,0}. \quad (3.22)$$

D'où :

$$\frac{\partial}{\partial b} \beta_s^{x,t,y} = \frac{s}{t},$$

et en conséquence,

$$\frac{\partial}{\partial b} \widetilde{W}_{x,y}^{(c)} = W_x \left[\left(\frac{1}{2} \int_0^t \frac{s}{t} (c'' - 2cc')(\beta_s) ds \right) \exp \frac{1}{2} \int_0^t (c' - c^2)(\beta_s) ds | \beta_t = y \right] \geq 0$$

puisque, par hypothèse : $c'' \geq 0, c' \leq 0$ et $c \geq 0$. Ceci achève la preuve du Théorème 3.10. Notons que, pour la preuve du Point (ii) de ce théorème, nous avons seulement eu besoin que la fonction c soit positive, ainsi que de la relation :

$$c'' - 2cc' \geq 0.$$

□

Remarque 3.14. L'existence d'un (quasi) pseudo-inverse croissant pour le processus de Bessel d'indice $\nu \geq -\frac{1}{2}$ (i.e. le Point (i) du Théorème 3.8) peut se déduire du Théorème 3.10. En effet, définissons, pour $\varepsilon > 0$, la fonction $c^{(\varepsilon)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ par :

$$c^{(\varepsilon)}(x) = \begin{cases} \frac{2\nu+1}{2x} & \text{si } x \geq \varepsilon \\ \frac{2\nu+1}{2\varepsilon} - 3\frac{2\nu+1}{2\varepsilon^2}(x-\varepsilon) + \frac{2\nu+1}{2\varepsilon^3}(x^2-\varepsilon^2) & \text{si } x \leq \varepsilon \end{cases}$$

Soit $(X_t^{(\varepsilon)}, t \geq 0)$ la solution de :

$$X_t^{(\varepsilon)} = x + \beta_t + \int_0^t c^{(\varepsilon)}(X_s^{(\varepsilon)}) ds.$$

D'après le Théorème 3.10, la fonction $t \mapsto \mathbb{P}_x(X_t^{(\varepsilon)} \geq y)$ est croissante pour tout $y > x$, puisque $c^{(\varepsilon)}$ satisfait les hypothèses de ce théorème. Il reste alors à faire tendre $\varepsilon \rightarrow 0$ pour obtenir que $t \mapsto \mathbb{P}_x^{(\nu)}(R_t > y)$ est une fonction croissante de t , pour tout $y > x$.

Voici à présent quelques propriétés des v.a. $(Y_{x,y}, x < y)$:

Proposition 3.15.

i) La densité de la v.a. $Y_{x,y}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} f_{Y_{x,y}}(t) &= -\frac{1}{2Z(x,y)} e^{2C(y)-2C(x)} \frac{\partial}{\partial a} p(t, y, x) \\ &= \frac{1}{Z(x,y)} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial b} p(t, x, y) + c(y)p(t, x, y) \right). \end{aligned}$$

ii) La transformée de Laplace de $Y_{x,y}$ vaut :

$$\mathbb{E} [e^{-\lambda Y_{x,y}}] = \frac{\lambda}{Z(x,y)} \int_y^\infty u_\lambda(x, z) dz$$

où $u_\lambda(x, z) := \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} p(t, x, z) dt$ désigne la densité du noyau potentiel du processus $(X_t, t \geq 0)$.

Démonstration.

Le Point (i) est une conséquence immédiate du Lemme 3.12, et des identités (3.7) et (3.10). Pour le Point (ii), on écrit, pour $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [e^{-\lambda Y_{x,y}}] &= \lambda \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y_{x,y} \leq t) e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{\lambda}{Z(x,y)} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_x(X_t \geq y) e^{-\lambda t} dt \quad (\text{d'après la définition de } Y_{x,y}) \\ &= \frac{\lambda}{Z(x,y)} \int_0^{+\infty} \left(\int_y^\infty p(t, x, z) dz \right) e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{\lambda}{Z(x,y)} \int_y^\infty u_\lambda(x, z) dz \quad (\text{en appliquant Fubini}). \end{aligned}$$

□

3.3 Etude d'une famille $(X^{(\alpha)})_{\alpha \geq 0}$ de diffusions à valeurs dans $\mathbb{R}^+$

3.3.1 Définitions

L'opérateur T

Introduisons les espace fonctionnels suivants :

$$\mathcal{H} = \left\{ F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, F \text{ de classe } \mathcal{C}^1, \int_{0^+} e^{2F(y)} dy < \infty \right\} \quad (3.23)$$

$$\mathcal{H}^\infty = \left\{ F \in \mathcal{H}, \int_0^{+\infty} e^{2F(y)} dy = \infty \right\}. \quad (3.24)$$

Sur $\mathcal{H}$, on définit l'opérateur non-linéaire T de la manière suivante :

$$TF(x) = \frac{e^{2F(x)}}{\int_0^x e^{2F(y)} dy} - F'(x) \quad x > 0, F \in \mathcal{H}. \quad (3.25)$$

Cet opérateur a été introduit pour la première fois par Matsumoto et Yor dans [MY01] et [MY02] lors d'une discussion au sujet des extensions du théorème de Pitman sur les processus de Bessel de dimension 3. Il a été repris par Roynette, Vallois et Yor dans [RVY06] pour trouver une classe de max-diffusions (i.e. de processus X tels que le processus bidimensionnel $(X_t, S_t^X, t \geq 0)$ où $S_t^X := \sup_{s \leq t} X_s$, est markovien) qui satisfont la propriété de Pitman (i.e. $(2S_t^X - X_t, t \geq 0)$ est markovien). Nous rassemblons ici quelques-uns de leurs résultats. Soit $F \in \mathcal{H}$. On étudie la diffusion $(\bar{X}_t, t \geq 0)$ solution de :

$$\bar{X}_t = x + B_t + \int_0^t TF(\bar{X}_s) ds \quad (t, x > 0)$$

où $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard issu de 0.

Proposition 3.16 ([RVY06]).

- i) Le processus $(\bar{X}_t, t \geq 0)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, 0 n'étant pas un point de sortie, et $\bar{X}_t$ diverge vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$;
 - ii) La variable aléatoire $\bar{J}_0 = \inf_{t \geq 0} \bar{X}_t$ est finie.
- (a) Si $F \in \mathcal{H}^\infty$, alors, la densité de $\bar{J}_0$ sous $\mathbb{P}_x$ est donnée par :

$$\frac{1}{\int_0^x e^{2F(y)} dy} e^{2F(y)} 1_{[0,x]}(y). \quad (3.26)$$

- (b) Si F n'appartient pas à $\mathcal{H}^\infty$, alors $\mathbb{P}_x(\bar{J}_0 < a) = h(a)/h(x)$ pour tout $a \in]0, x[$ où :

$$h(a) = \frac{\int_0^a e^{2F(y)} dy}{\int_a^\infty e^{2F(y)} dy}, \quad (0 < a \leq x).$$

Nous donnons à présent quelques détails concernant la non-injectivité de l'opérateur T . En effet, soit $U_\alpha(F)$ la fonction :

$$U_\alpha(F)(x) := F(x) - \log \left(1 + \alpha \int_0^x e^{2F(y)} dy \right)$$

où $F \in \mathcal{H}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ sont tels que :

$$\alpha \geq -\frac{1}{\int_0^{+\infty} e^{2F(y)} dy}. \quad (3.27)$$

La proposition suivante exprime précisément en quoi T n'est pas bijectif :

Proposition 3.17 ([RVY06]).

Supposons que $F \in \mathcal{H}$.

- i) Soit α satisfaisant (3.27), alors $U_\alpha(F) \in \mathcal{H}$.
- ii) Soit $G \in \mathcal{H}$. Alors $TG = TF$ si et seulement si $G = z + U_\alpha(F)$ pour un certain $z \in \mathbb{R}$ et α satisfaisant (3.27).

La famille $(X^{(\alpha)})_{\alpha \geq 0}$

Soit $c :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $c(0) = +\infty$. On note :

$$C(x) := \int_1^x c(y) dy,$$

et on suppose que $C(0) = -\infty$. Puisque c est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, $C \in \mathcal{H}^\infty$.

Pour $\alpha \geq 0$, introduisons la famille de diffusions :

$$X_t^{(\alpha)} = B_t + \int_0^t \left(c - \frac{\alpha e^{2C}}{1 + \alpha \int_0^x e^{2C(y)} dy} \right) (X_s^{(\alpha)}) ds. \quad (3.28)$$

Lorsque $\alpha = 0$, on obtient :

$$X_t = B_t + \int_0^t c(X_s) ds.$$

On définit :

$$c^{(\alpha)}(x) := c(x) - \frac{\alpha e^{2C(x)}}{1 + \alpha \int_0^x e^{2C(y)} dy},$$

et

$$C^{(\alpha)}(x) := \int_1^x c^{(\alpha)}(y) dy = C(x) - \log \left(1 + \alpha \int_0^x e^{2C(y)} dy \right) + \log \left(1 + \alpha \int_0^1 e^{2C(y)} dy \right).$$

D'après la Proposition 3.17, on a : $TC = TC^{(\alpha)}$ où T est l'opérateur défini par (3.25). Par conséquent, le processus $\overline{X}^{(\alpha)}$ solution de :

$$\overline{X}_t^{(\alpha)} = x + B_t + \int_0^t TC^{(\alpha)}(\overline{X}_s^{(\alpha)}) ds, \quad (3.29)$$

ne dépend pas de α . On le note désormais simplement $(\overline{X}_t, t \geq 0)$. Sa mesure de vitesse $\overline{m}(dx)$ et sa fonction d'échelle $\overline{s}$ sont données par :

$$\begin{cases} \overline{s}(x) = -\frac{1}{2 \int_0^x e^{2C(u)} du} \\ \overline{m}(dx) = \left(\int_0^x 2e^{2C(u)} du \right)^2 e^{-2C(x)} dx. \end{cases} \quad (3.30)$$

Remarque 3.18. Notons que, puisque c est positive, C est une fonction croissante, et 0 est toujours un point d'entrée de la diffusion $(\overline{X}_t, t \geq 0)$. En effet, pour tout $z > 0$ (voir [BS02, p.14]) :

$$\int_0^z e^{-2C(x)} \left(\int_0^x e^{2C(y)} dy \right) dx \leq \int_0^z e^{-2C(x)} x e^{2C(x)} dx \leq z^2 < \infty.$$

3.3.2 Une relation d'entrelacement.

Soit $(P_t^\alpha, t \geq 0)$ le semi-groupe associé à $X^{(\alpha)}$, et H_α défini par :

$$H_\alpha f(x) = \frac{1}{\int_0^x e^{2C^{(\alpha)}(y)} dy} \int_0^x f(y) e^{2C^{(\alpha)}(y)} dy.$$

Proposition 3.19. *La relation d'entrelacement suivante est satisfaite :*

$$H_\alpha P_t^\alpha = \bar{P}_t H_\alpha \quad (3.31)$$

Démonstration.

Il est suffisant de vérifier cette identité sur les générateurs infinitésimaux. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$. D'un côté, on a :

$$(H_\alpha f)'(x) = -\frac{e^{2C^{(\alpha)}(x)}}{\left(\int_0^x e^{2C^{(\alpha)}(y)} dy\right)^2} \int_0^x f(y) e^{2C^{(\alpha)}(y)} dy + \frac{e^{2C^{(\alpha)}(x)}}{\int_0^x e^{2C^{(\alpha)}(y)} dy} f(x), \quad (3.32)$$

et,

$$\begin{aligned} (H_\alpha f)''(x) &= -\frac{2c^{(\alpha)}(x)e^{2C^{(\alpha)}(x)}}{\left(\int_0^x e^{2C^{(\alpha)}(y)} dy\right)^2} \int_0^x f(y) e^{2C^{(\alpha)}(y)} dy + \frac{2e^{4C^{(\alpha)}(x)}}{\left(\int_0^x e^{2C^{(\alpha)}(y)} dy\right)^3} \int_0^x f(y) e^{2C^{(\alpha)}(y)} dy \\ &\quad - \frac{2e^{4C^{(\alpha)}(x)}}{\left(\int_0^x e^{2C^{(\alpha)}(y)} dy\right)^2} f(x) + \frac{2c^{(\alpha)}(x)e^{2C^{(\alpha)}(x)}}{\int_0^x e^{2C^{(\alpha)}(y)} dy} f(x) + \frac{e^{2C^{(\alpha)}(x)}}{\int_0^x e^{2C^{(\alpha)}(y)} dy} f'(x). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Rassemblant (3.32) et (3.33), on obtient après simplifications :

$$\begin{aligned} \bar{L}H_\alpha f(x) &= \frac{1}{2}(H_\alpha f)''(x) + \left(\frac{e^{2C(x)}}{\int_0^x e^{2C(u)} du} - c(x)\right) (H_\alpha f)'(x) \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{2C^{(\alpha)}(x)}}{\int_0^x e^{2C^{(\alpha)}(y)} dy} f'(x) \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{2C(x)}}{\left(\int_0^x e^{2C(y)} dy\right) \left(1 + \alpha \int_0^x e^{2C(y)} dy\right)} f'(x). \end{aligned} \quad (3.34)$$

De l'autre côté :

$$\begin{aligned} H_\alpha L^\alpha f(x) &= \frac{1}{\int_0^x e^{2C^{(\alpha)}(y)} dy} \int_0^x \left(\frac{1}{2}f''(y) + c^{(\alpha)}(y)f'(y)\right) e^{2C^{(\alpha)}(y)} dy \\ &= \frac{1}{\int_0^x e^{2C^{(\alpha)}(y)} dy} \left(\int_0^x c^{(\alpha)}(y)f'(y)e^{2C^{(\alpha)}(y)} dy + \frac{1}{2} \left[e^{2C^{(\alpha)}(y)}f'(y)\right]_0^x\right. \\ &\quad \left.- \frac{1}{2} \int_0^x f'(y)2c^{(\alpha)}(y)e^{2C^{(\alpha)}(y)} dy\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{2C^{(\alpha)}(x)}}{\int_0^x e^{2C^{(\alpha)}(y)} dy} f'(x) \quad \left(\text{puisque } e^{2C^{(\alpha)}(0)} = 0\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{e^{2C(x)}}{\left(\int_0^x e^{2C(y)} dy\right) \left(1 + \alpha \int_0^x e^{2C(y)} dy\right)} f'(x). \end{aligned} \quad (3.35)$$

La comparaison de (3.34) et (3.35) achève ainsi la preuve de la Proposition 3.19. $\square$

Cette notion d'entrelacement va nous permettre d'établir un lien entre les diffusions $(X_t, t \geq 0)$ et $(X_t^{(\alpha)}, t \geq 0)$.

Proposition 3.20. *On a :*

$$\mathbb{P}_0^{(\alpha)}(X_t^{(\alpha)} \geq z) = \frac{1}{1 + \alpha \int_0^z e^{2C(y)} dy} \mathbb{P}_0(X_t \geq z). \quad (3.36)$$

Remarque 3.21. La Proposition 3.20 montre que $(X_t^{(\alpha)}, t \geq 0)$ peut admettre un pseudo-inverse uniquement si $\alpha = 0$ puisque, pour $\alpha > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_0^{(\alpha)} \left(X_t^{(\alpha)} \geq z \right) \leq \frac{1}{1 + \alpha \int_0^z e^{2C(y)} dy} < 1.$$

Démonstration.

D'après la Proposition 3.19, on a, en faisant $\alpha = 0$ dans (3.31) :

$$HP_t = \bar{P}_t H.$$

D'où,

$$P_t^\alpha = H_\alpha^{-1} HP_t H^{-1} H_\alpha.$$

Evaluons ces opérateurs. Pour f tel que $f(0) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} H_\alpha^{-1} f(x) &= f(x) + e^{-2C(x)} f'(x) \left(\int_0^x e^{2C(y)} dy \right) \left(1 + \alpha \int_0^x e^{2C(y)} dy \right), \\ H^{-1} f(x) &= f(x) + e^{-2C(x)} f'(x) \left(\int_0^x e^{2C(y)} dy \right), \\ H_\alpha^{-1} H f(x) &= -\alpha \int_0^x f(y) e^{2C(y)} dy + \left(1 + \alpha \int_0^x e^{2C(y)} dy \right) f(x), \\ H^{-1} H_\alpha f(x) &= \frac{f(x)}{1 + \alpha \int_0^x e^{2C(y)} dy} + \int_0^x \frac{\alpha e^{2C(y)} f(y)}{(1 + \alpha \int_0^y e^{2C(z)} dz)^2} dy = \int_0^x \frac{f'(y)}{1 + \alpha \int_0^y e^{2C(z)} dz} dy. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient :

$$P_t H^{-1} H_\alpha f(x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^{X_t} \frac{f'(y)}{1 + \alpha \int_0^y e^{2C(z)} dz} dy \right],$$

et :

$$\begin{aligned} H_\alpha^{-1} HP_t H^{-1} H_\alpha f(x) &= -\alpha \int_0^x e^{2C(y)} \mathbb{E}_y \left[\int_0^{X_t} \frac{f'(u)}{1 + \alpha \int_0^u e^{2C(z)} dz} du \right] dy \\ &\quad + \left(1 + \alpha \int_0^x e^{2C(y)} dy \right) \mathbb{E}_x \left[\int_0^{X_t} \frac{f'(y)}{1 + \alpha \int_0^y e^{2C(z)} dz} dy \right]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Laissant tendre x vers 0 dans (3.37), il vient :

$$P_t^\alpha f(0) = \mathbb{E}_0 \left[\int_0^{X_t} \frac{f'(y)}{1 + \alpha \int_0^y e^{2C(z)} dz} dy \right]. \quad (3.38)$$

Prenons $f(x) = \int_0^x h(y) dy$ avec h positive. Dans ce cas (3.38) devient :

$$P_t^\alpha f(0) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^y h(z) dz \right) p^{(\alpha)}(t, 0, y) dy \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}_0 \left[\int_0^{X_t} \frac{h(y)}{1 + \alpha \int_0^y e^{2C(z)} dz} dy \right] \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^y \frac{h(z)}{1 + \alpha \int_0^z e^{2C(u)} du} dz \right) p(t, 0, y) dy. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Finalement, en appliquant Fubini dans (3.39) et (3.40), on obtient :

$$\int_0^{+\infty} h(z) \left(\int_z^\infty p^{(\alpha)}(t, 0, y) dy \right) dz = \int_0^{+\infty} \frac{h(z) dz}{1 + \alpha \int_0^z e^{2C(u)} du} \int_z^\infty p(t, 0, y) dy,$$

ce qui achève la preuve de la Proposition 3.20. $\square$

Remarque 3.22. Introduisons la $(\mathbb{P}_x^{(\alpha)}, (\mathcal{F}_t, t \geq 0))$ martingale :

$$M_t^{(\alpha)} := \left(\frac{e^{-2C(X_t)}}{e^{-2C(x)}} \frac{\int_0^{X_t} e^{2C(u)} du}{\int_0^x e^{2C(u)} du} \right) \left(\frac{1 + \alpha \int_0^{X_t} e^{2C(u)} du}{1 + \alpha \int_0^x e^{2C(u)} du} \right) \exp \left(\int_0^t (c^{(\alpha)})'(X_u) du \right).$$

La formule de Girsanov donne :

$$\bar{\mathbb{P}}_{x|\mathcal{F}_t} = M_t^{(\alpha)} \cdot \mathbb{P}_{x|\mathcal{F}_t}^{(\alpha)},$$

ce qui conduit à la relation :

$$\frac{\bar{p}(t, x, y)}{p^{(\alpha)}(t, x, y)} = \left(\frac{e^{-2C(y)}}{e^{-2C(x)}} \frac{\int_0^y e^{2C(u)} du}{\int_0^x e^{2C(u)} du} \right) \left(\frac{1 + \alpha \int_0^y e^{2C(u)} du}{1 + \alpha \int_0^x e^{2C(u)} du} \right) \mathbb{E}_x^{(\alpha)} \left[e^{\int_0^t (c^{(\alpha)})'(X_s) ds} | X_t = y \right]. \quad (3.41)$$

Par conséquent, en injectant (3.41) dans la formule générale de Hirsch-Song (3.6), on obtient dans ce cas :

$$\frac{e^{2C(x)}}{(\int_0^x e^{2C(u)} du) (1 + \alpha \int_0^x e^{2C(u)} du)} \frac{\partial p^{(\alpha)}(t, x, y)}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{2C(y)} \bar{p}(t, x, y)}{(\int_0^y e^{2C(u)} du) (1 + \alpha \int_0^y e^{2C(u)} du)} \right). \quad (3.42)$$

Puis, en introduisant l'opérateur différentiel :

$$D_\alpha f(x) = \frac{e^{2C(x)}}{(\int_0^x e^{2C(u)} du) (1 + \alpha \int_0^x e^{2C(u)} du)} f'(x),$$

il découle aisément de (3.42) que :

$$D_\alpha P_t^\alpha = \bar{P}_t D_\alpha$$

ce qui fournit une contrepartie différentielle à la relation d'entrelacement de la Proposition 3.19.

Nous pouvons également remarquer que, en tant que diffusion transiente dont la frontière 0 est point d'entrée mais pas de sortie, $(\bar{X}_t, t \geq 0)$ n'est pas "trop loin" d'un processus de Bessel de dimension 3. En effet, définissons le changement de temps $(\bar{A}_t := \int_0^t 4e^{4C(\bar{X}_s)} ds, t \geq 0)$ ainsi que $(\bar{\tau}_u, u \geq 0)$ son inverse continu à droite. Alors :

Proposition 3.23. $(m([0, \bar{X}_{\bar{\tau}_u}]), u \geq 0)$ est un processus de Bessel de dimension 3 issu de $m([0, x])$.

Démonstration.

Appliquons la formule d'Itô à $m([0, \bar{X}_t])$, en utilisant (3.29) :

$$m([0, \bar{X}_t]) = m([0, x]) + \int_0^t 2e^{2C(\bar{X}_s)} dB_s + \int_0^t 2 \frac{e^{4C(\bar{X}_s)}}{\int_0^{\bar{X}_s} e^{2C(y)} dy} ds.$$

En notant β le Dambis, Dubins-Schwarz mouvement brownien associé à la martingale locale $(N_t := \int_0^t 2e^{2C(\bar{X}_s)} dB_s, t \geq 0)$, on obtient $N_t = \beta_{\bar{A}_t}$ et :

$$m([0, \bar{X}_t]) = m([0, x]) + \beta_{\bar{A}_t} + \int_0^t \frac{d\bar{A}_s}{m([0, \bar{X}_s])}.$$

Finalement, le changement de temps $(\bar{\tau}_u, u \geq 0)$ nous donne :

$$m([0, \bar{X}_{\bar{\tau}_u}]) = m([0, x]) + \beta_u + \int_0^u \frac{ds}{m([0, \bar{X}_{\bar{\tau}_s}])},$$

et nous reconnaissons l'EDS satisfaite par le processus de Bessel de dimension 3 issu de $m([0, x])$. □

3.3.3 Existence d'un pseudo-inverse croissant lorsque $\alpha = 0$

Nous énonçons à présent le résultat principal de cette section.

Théorème 3.24. *Soient $\alpha \geq 0$ et $(X_t^{(\alpha)}, t \geq 0)$ la diffusion solution de (3.28). Alors :*

i) *La fonction $t \mapsto \mathbb{P}_0^{(\alpha)}(X_t^{(\alpha)} \geq y)$ est croissante et peut s'écrire :*

$$\mathbb{P}_0^{(\alpha)}(X_t^{(\alpha)} \geq y) = \frac{1}{1 + \alpha \int_0^y e^{2C(z)} dz} \bar{\mathbb{P}}_0(\bar{G}_y \leq t) \quad (3.43)$$

où $\bar{G}_y := \sup\{t \geq 0; \bar{X}_t = y\}$.

ii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_0^{(\alpha)}(X_t^{(\alpha)} \geq y) = \frac{1}{1 + \alpha \int_0^y e^{2C(z)} dz}.$

iii) *Par conséquent :*

1) *si $\alpha = 0$, $(X_t, t \geq 0)$ admet un pseudo-inverse croissant $(Y_{0,y}, y > 0)$ et l'on a les égalités en loi suivantes :*

(a) $X_t \stackrel{(1.d)}{=} \inf_{s \geq t} \bar{X}_s,$

(b) $Y_{0,y} \stackrel{(1.d)}{=} \bar{G}_y.$

2) *si $\alpha > 0$, $(X_t^{(\alpha)}, t \geq 0)$ admet un quasi pseudo-inverse croissant $(Y_{0,y}^{(\alpha)}, y > 0)$.*

Démonstration.

1) Notons $u(t, y)$ la densité de $\inf_{s \geq t} \bar{X}_s$ sous $\bar{\mathbb{P}}_0$. On a :

Lemme 3.25.

$$u(t, y) = e^{2C(y)} \int_y^\infty \frac{\bar{p}(t, 0, z)}{\int_0^z e^{2C(u)} du} dz. \quad (3.44)$$

Démonstration.

En utilisant (3.26) (puisque $C \in \mathcal{H}^\infty$) et la propriété de Markov pour la diffusion $(\bar{X}_t, t \geq 0)$

on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_0 \left(\inf_{s \geq t} \bar{X}_s > y \right) &= \int_y^\infty \mathbb{P}_0 \left(\inf_{s \geq t} \bar{X}_s > y \mid \bar{X}_t = z \right) \bar{p}(t, 0, z) dz \\
 &= \int_y^\infty \mathbb{P}_z \left(\inf_{s \geq 0} \bar{X}_s > y \right) \bar{p}(t, 0, z) dz \\
 &= \int_y^\infty \frac{\int_y^z e^{2C(u)} du}{\int_0^z e^{2C(u)} du} \bar{p}(t, 0, z) dz. \\
 &= \int_y^\infty du e^{2C(u)} \int_u^\infty \frac{\bar{p}(t, 0, z)}{\int_0^z e^{2C(a)} da} dz \quad (\text{par Fubini}). \tag{3.45}
 \end{aligned}$$

Il reste alors à dériver (3.45) par rapport à y pour achever la preuve du Lemme 3.25. $\square$

2) Revenons à la preuve du Théorème 3.24.

On commence par le Point (iii) item (a). Il s'agit de montrer que $u(t, y) = p(t, 0, y)$. Nous allons en fait prouver que u satisfait la même équation parabolique que p , à savoir :

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t, 0, y) = L^* p(t, 0, y) \tag{3.46}$$

où

$$L^* f = \frac{1}{2} f'' - (cf)'. \tag{3.47}$$

Tout d'abord, calculons $\frac{\partial u}{\partial t}$ en utilisant (3.44) :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t}(t, y) &= e^{2C(y)} \int_y^\infty \frac{\partial \bar{p}}{\partial t}(t, 0, z) \frac{dz}{\int_0^z e^{2C(u)} du} \\
 &= -2e^{2C(y)} \int_y^\infty \bar{L}^* \bar{p}(t, 0, z) \bar{s}(z) dz \tag{3.48}
 \end{aligned}$$

d'après Fokker-Planck et (3.30). Intégrons (3.48) par parties. $\bar{s}$ étant une fonction d'échelle pour le processus $(\bar{X}_t, t \geq 0)$, on a pour tout z , $\bar{L}\bar{s}(z) = 0$. En conséquence, seuls les termes de bord provenant de l'intégration par parties ne sont pas nuls. On obtient, en notant par des "primes" les dérivées par rapport à la variable d'espace :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t}(t, y) &= -2e^{2C(y)} \int_y^\infty \left(\frac{1}{2} \bar{p}''(t, 0, z) - \left(\left(\frac{e^{2C(z)}}{\int_0^z e^{2C(u)} du} - c(z) \right) \bar{p}(t, 0, z) \right)' \right) \bar{s}(z) dz \\
 &= e^{2C(y)} \left(-\frac{1}{2} \frac{\bar{p}'(t, 0, y)}{\int_0^y e^{2C(u)} du} + \left(\frac{e^{2C(y)}}{\int_0^y e^{2C(u)} du} - c(y) \right) \frac{\bar{p}(t, 0, y)}{\int_0^y e^{2C(u)} du} - \frac{1}{2} \frac{e^{2C(y)} \bar{p}(t, 0, y)}{(\int_0^y e^{2C(u)} du)^2} \right) \\
 &= e^{2C(y)} \left(-\frac{1}{2} \frac{\bar{p}'(t, 0, y)}{\int_0^y e^{2C(u)} du} - c(y) \frac{\bar{p}(t, 0, y)}{\int_0^y e^{2C(u)} du} + \frac{1}{2} \frac{e^{2C(y)} \bar{p}(t, 0, y)}{(\int_0^y e^{2C(u)} du)^2} \right). \tag{3.49}
 \end{aligned}$$

De l'autre côté, calculons $L^* u$ toujours en utilisant (3.44). On a :

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t, y) = 2c(y)u(t, y) - e^{2C(y)} \frac{\bar{p}(t, 0, y)}{\int_0^y e^{2C(u)} du}, \tag{3.50}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, y) = & 2c'(y)u(t, y) + 2c(y) \left(2c(y)u(t, y) - e^{2C(y)} \frac{\bar{p}(t, 0, y)}{\int_0^y e^{2C(u)} du} \right) \\ & - 2c(y)e^{2C(y)} \frac{\bar{p}(t, 0, y)}{\int_0^y e^{2C(u)} du} - e^{2C(y)} \frac{\bar{p}'(t, 0, y)}{\int_0^y e^{2C(u)} du} + \frac{e^{4C(y)} \bar{p}(t, 0, y)}{\left(\int_0^y e^{2C(u)} du \right)^2}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Ainsi, en rassemblant (3.50) et (3.51), on obtient :

$$L^*u(\cdot, t)(y) = e^{2C(y)} \left(-\frac{1}{2} \frac{\bar{p}'(t, 0, y)}{\int_0^y e^{2C(u)} du} - c(y) \frac{\bar{p}(t, 0, y)}{\int_0^y e^{2C(u)} du} + \frac{1}{2} \frac{e^{2C(y)} \bar{p}(t, 0, y)}{\left(\int_0^y e^{2C(u)} du \right)^2} \right). \quad (3.52)$$

Comparant (3.49) et (3.52), on constate alors que l'on a bien :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, y) = L^*u(\cdot, t)(y).$$

Il reste à présent à vérifier que les deux fonctions $(t, y) \mapsto p(t, 0, y)$ et $(t, y) \mapsto u(t, y)$ satisfont les mêmes conditions initiales. Tout d'abord, il est clair que $p(t, 0, \cdot)$ et $u(t, \cdot)$ sont deux densités sur $\mathbb{R}^+$ satisfaisant : $u(0, \cdot) = p(0, \cdot) = \delta_0$.

Par ailleurs, pour tout $t > 0$, $u(t, 0) = 0$, puisque $(\bar{X}_t, t \geq 0)$ est une diffusion transiente dont la frontière 0 est point d'entrée mais pas de sortie (et par conséquent 0 n'appartient pas à l'espace d'état de $(\bar{X}_t, t \geq 0)$). Il en est de même pour $(X_t, t \geq 0)$: si 0 est point d'entrée mais pas de sortie pour la diffusion $(X_t, t \geq 0)$, alors pour tout $t > 0$, $p(t, 0, 0) = 0$. Sinon, 0 est une barrière réfléchissante. Dans ce cas, introduisons $q(t, x, y)$ la densité de transition de X par rapport à sa mesure de vitesse $m(dy) = 2e^{2C(y)} dy$. q est bien définie sur $[0, +\infty[^3$ et on a $p(t, x, y) = q(t, x, y)m(dy)$. Donc, pour $x = y = 0$, on obtient $p(t, 0, 0) = q(t, 0, 0)2e^{2C(0)} = 0$ puisque $C(0) = -\infty$.

En conséquence, par unicité de la solution de l'équation (3.46) (lorsque des conditions initiales adéquates ont été données, voir [LSU68, p.145]), on obtient que :

$$\forall t \geq 0, \forall y \geq 0, \quad u(t, y) = p(t, 0, y). \quad (3.53)$$

Ceci achève la preuve du Point (iii) item (a).

3) Terminons à présent la preuve du Théorème 3.24.

D'après le Lemme 3.25, on a :

$$\mathbb{P}_0(X_t \geq y) = \bar{\mathbb{P}}_0 \left(\inf_{s \geq t} \bar{X}_s \geq y \right) = \bar{\mathbb{P}}_0(\bar{G}_y \leq t). \quad (3.54)$$

En substituant (3.54) dans (3.36) on obtient (3.43) (i.e. le Point (i)).

Le Point (ii) provient du fait que $\bar{X}$ est transient d'après la Proposition 3.16. Par conséquent, si $\alpha = 0$, $(X_t, t \geq 0)$ admet un pseudo-inverse croissant, et l'on a :

$$\bar{\mathbb{P}}_0(\bar{G}_y \leq t) = \mathbb{P}(Y_{0,y} \leq t).$$

Ceci achève la preuve du Théorème 3.24. □

Remarque 3.26. Si c est une fonction décroissante, alors, pour tout $x \geq 0$, $TC(x) \geq c(x)$. En effet :

$$\begin{aligned}
 & \frac{e^{2C(x)}}{\int_0^x e^{2C(y)} dy} - c(x) \geq c(x) \\
 \iff & e^{2C(x)} - 2c(x) \int_0^x e^{2C(y)} dy \geq 0 \\
 \iff & e^{2C(x)} - c(x) \left(\left[\frac{e^{2C(y)}}{c(y)} \right]_0^x + \int_0^x \frac{e^{2C(y)} c'(y)}{c^2(y)} dy \right) \geq 0 \\
 \iff & -c(x) \int_0^x \frac{e^{2C(y)} c'(y)}{c^2(y)} dy \geq 0.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, en appliquant le théorème de comparaison stochastique, si l'on peut réaliser ces deux processus X et $\bar{X}$ sur le même espace (par rapport au même mouvement brownien), alors,

$$\mathbb{P}(\bar{X}_t \geq X_t \text{ pour tout } t \geq 0) = 1.$$

3.4 Existence de pseudo-inverses pour une diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ issue de 0

3.4.1 Notations

Notre but est à présent d'étendre le résultat obtenu précédemment pour la famille $(X^{(\alpha)})_{\alpha \geq 0}$ au cadre général des diffusions linéaires régulières X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Rappelons la classification suivante des points frontières, pour le point à gauche 0 (voir [BS02, p.14]) :

i) 0 est dit point de sortie si, pour $z > 0$:

$$\int_0^z m([a, z]) s'(a) da < \infty, \quad (3.55)$$

ii) 0 est dit point d'entrée si, pour $z > 0$:

$$\int_0^z (s(z) - s(a)) m(da) < \infty. \quad (3.56)$$

Notons qu'une intégration par parties fournit une condition équivalente à (3.56) :

$$\lim_{a \rightarrow 0} (s(a) m([0, a])) + \int_0^z m([0, a]) s'(a) da < \infty. \quad (3.57)$$

Dans cette étude, on suppose toujours que la diffusion est issue de 0. Par conséquent, l'inégalité (3.56) (ou de manière équivalente (3.57)) doit être satisfaite, et 0 est un point d'entrée. De plus :

- si 0 est également un point de sortie, il est dit frontière non singulière. Une diffusion atteint ses frontières non singulières avec une probabilité positive. Dans ce cas, il est nécessaire, afin de décrire le processus de diffusion, d'ajouter une condition supplémentaire. Ici, puisque m est supposée être absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, on a

$m(\{0\}) = 0$, et 0 est une barrière réfléchissante.

• si 0 n'est pas point de sortie (i.e. l'égalité (3.55) n'est pas satisfaite), alors, la diffusion ne peut atteindre ce point depuis l'intérieur de son espace d'état. Par conséquent, puisque la diffusion est supposée régulière, 0 n'appartient pas à l'espace d'état. Mais, en tant que point d'entrée, il est néanmoins possible de faire débiter la diffusion en 0.

Nous supposons également que $+\infty$ est une frontière naturelle (i.e. ni entrée, ni sortie).

3.4.2 La transformation de Biane

Définition 3.27. *A la diffusion $(X_t, t \geq 0)$, nous associons à présent une autre diffusion, $(\bar{X}_t, t \geq 0)$, dont la mesure de vitesse $\bar{m}(dx) = \bar{\rho}(x)dx$ et la fonction d'échelle $\bar{s}$ sont définies par :*

$$\begin{cases} \bar{\rho}(x) = (m([0, x]))^2 s'(x) \\ \bar{s}(x) = \frac{1}{m([0, +\infty[)} - \frac{1}{m([0, x])}. \end{cases} \quad (3.58)$$

$(\bar{X}_t, t \geq 0)$ est une diffusion transiente, puisque s est croissante et :

$$\bar{s}(0) = -\infty \quad \text{et} \quad \bar{s}(+\infty) = 0.$$

On suppose de plus que $\lim_{a \rightarrow 0} m([0, a])s(a) > -\infty$. D'après (3.57), cela implique que la fonction $a \mapsto m([0, a])s'(a)$ est intégrable au voisinage de 0. Par conséquent, d'après (3.58), la frontière 0 est point d'entrée mais pas de sortie pour la diffusion $(\bar{X}_t, t \geq 0)$.

Par exemple, si X est un processus de Bessel d'indice ν , alors $\bar{X}$ est un processus de Bessel d'indice $\nu + 1$. Cette transformation fut introduite par Biane [Bia85] afin de généraliser une identité de Ciesielski et Taylor [CT62], obtenue à l'origine pour les processus de Bessel.

Remarque 3.28. *Il convient de souligner que cette transformation n'est pas injective. Par exemple, comme pour l'opérateur T , si $X^{(\alpha)}$ est solution de (3.28), alors $\bar{X}^{(\alpha)}$ définie par la transformation de Biane ne dépend pas de α . En effet, d'après (3.28) :*

$$s^{(\alpha)}(x) = \int_0^x \frac{(1 + \alpha \int_0^y e^{2C(u)} du)^2}{e^{2C(y)}} dy, \quad (3.59)$$

et

$$m^{(\alpha)}(dx) = \frac{2e^{2C(x)}}{(1 + \alpha \int_0^x e^{2C(u)} du)^2} dx. \quad (3.60)$$

Intégrant (3.60), on obtient :

$$\begin{aligned} m^{(\alpha)}([0, x]) &= 2 \int_0^x \frac{e^{2C(y)}}{(1 + \alpha \int_0^y e^{2C(u)} du)^2} dy \\ &= 2 \left[-\frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 + \alpha \int_0^y e^{2C(u)} du} \right]_0^x \\ &= 2 \frac{\int_0^x e^{2C(u)} du}{1 + \alpha \int_0^x e^{2C(u)} du}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Par conséquent :

$$\bar{s}^{(\alpha)}(x) := \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{m^{(\alpha)}([0, x])} = -\frac{1}{2 \int_0^x e^{2C(u)} du},$$

et

$$\bar{\rho}^{(\alpha)}(x) := (m^{(\alpha)}([0, x]))^2 \left(s^{(\alpha)} \right)'(x) = \left(2 \int_0^x e^{2C(u)} du \right)^2 e^{-2C(x)}.$$

On constate donc que les caractéristiques de la diffusion $\bar{X}^{(\alpha)}$ ne dépendent pas de α . En fait, $\bar{X}^{(\alpha)} = \bar{X}$ où $\bar{X}$ est la diffusion définie par (3.30).

Nous étudions à présent quelques liens entre X et $\bar{X}$.

Soit H la fonctionnelle :

$$Hf(x) := \frac{1}{m([0, x])} \int_0^x f(y) m(dy) \quad (3.62)$$

définie sur l'espace des fonctions continues à support compact dans $]0, +\infty[$.

Lemme 3.29. *La relation d'entrelacement suivante est satisfaite :*

$$HP_t = \bar{P}_t H.$$

Démonstration.

Il suffit de vérifier cette identité sur les générateurs infinitésimaux.

Soit f une fonction $\mathcal{C}^2$ à support compact dans $]0, +\infty[$. D'un côté, on a :

$$\begin{aligned} HLf(x) &= \frac{1}{m([0, x])} \int_0^x Lf(y) m(dy) \\ &= \frac{1}{m([0, x])} \int_0^x \frac{\partial}{\partial m} \frac{\partial}{\partial s} f(y) m(dy) \\ &= \frac{1}{m([0, x])} \int_0^x \frac{1}{\rho(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f'(y)}{s'(y)} \right) \rho(y) dy \\ &= \frac{1}{m([0, x])} \left(\frac{f'(x)}{s'(x)} - \frac{f'(0)}{s'(0)} \right) \\ &= \frac{f'(x)}{m([0, x])s'(x)} \quad (\text{car } f \text{ est à support compact dans }]0, +\infty[). \end{aligned} \quad (3.63)$$

De l'autre côté, puisque d'après (3.58), $\bar{s}'(x) = \frac{\rho(x)}{(m([0, x]))^2}$:

$$\begin{aligned} \bar{L}Hf(x) &= \frac{\partial^2}{\bar{\rho}(x) \partial x \bar{s}'(x) \partial x} \left(\frac{1}{m([0, x])} \int_0^x f(y) m(dy) \right) \\ &= \frac{\partial}{\bar{\rho}(x) \partial x} \frac{(m([0, x]))^2}{\rho(x)} \left(-\frac{\rho(x)}{(m([0, x]))^2} \int_0^x f(y) m(dy) + \frac{\rho(x)}{(m([0, x]))} f(x) \right) \\ &= \frac{\partial}{\bar{\rho}(x) \partial x} \left(-\int_0^x f(y) m(dy) + m([0, x]) f(x) \right) \\ &= \frac{m([0, x])}{\bar{\rho}(x)} f'(x) \\ &= \frac{f'(x)}{m([0, x])s'(x)}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

La comparaison de (3.63) et (3.64) achève alors la preuve du Lemme 3.29. $\square$

Le Lemme 3.29 nous permet de déduire la relation suivante entre les densités de transition de $(X_t, t \geq 0)$ et $(\bar{X}_t, t \geq 0)$:

Lemme 3.30.

$$\frac{1}{m([0, x])} \int_0^x q(t, y, z) m(dy) = \int_z^\infty \bar{q}(t, x, y) m([0, y]) s'(y) dy.$$

En particulier, laissant tendre x vers 0, on obtient :

$$q(t, 0, z) = \int_z^\infty \bar{q}(t, 0, y) m([0, y]) s'(y) dy. \quad (3.65)$$

Démonstration.

On utilise la relation d'entrelacement entre les semi-groupes de X et $\bar{X}$. Soit f une fonction borélienne sur $]0, +\infty[$ à support compact. D'un côté, on a, en appliquant Fubini :

$$\begin{aligned} HP_t f(x) &= \frac{1}{m([0, x])} \int_0^x \left(\int_0^{+\infty} f(z) q(t, y, z) m(dz) \right) m(dy) \\ &= \int_0^{+\infty} f(z) \left(\frac{1}{m([0, x])} \int_0^x q(t, y, z) m(dy) \right) m(dz). \end{aligned} \quad (3.66)$$

De l'autre, d'après (3.58) :

$$\begin{aligned} \bar{P}_t H f(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{m([0, y])} \int_0^y f(z) m(dz) \right) \bar{q}(t, x, y) \bar{m}(dy) \\ &= \int_0^{+\infty} f(z) \left(\int_z^\infty \frac{1}{m([0, y])} \bar{q}(t, x, y) \bar{m}(dy) \right) m(dz) \\ &= \int_0^{+\infty} f(z) \left(\int_z^\infty \bar{q}(t, x, y) m([0, y]) s'(y) dy \right) m(dz). \end{aligned} \quad (3.67)$$

La comparaison de (3.66) et (3.67) achève alors la preuve du Lemme 3.30. $\square$

Remarque 3.31. Les Lemmes 3.29 et 3.30 ont des contreparties différentielles. En effet, si l'on définit :

$$\tilde{D}f(x) = \frac{1}{m([0, x]) s'(x)} f'(x),$$

sur l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, dont la dérivée vaut 0 en 0, et qui sont bornées de même que leur dérivée première, on obtient en suivant le même schéma de preuve que pour le Lemme 3.29 :

$$\tilde{D}P_t = \bar{P}_t \tilde{D}, \quad (3.68)$$

ce qui implique alors la formule de Hirsch-Song :

$$\frac{1}{m([0, x]) s'(x)} \frac{\partial p}{\partial x}(t, x, y) = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{p}(t, x, y)}{m([0, y]) s'(y)} \right)$$

où p (resp. $\bar{p}$) est la densité de transition de X (resp. $\bar{X}$) par rapport à la mesure de Lebesgue. De plus, en notant Z le processus de Markov :

$$Z_t := \int_0^{X_t} m([0, a]) s'(a) da, \quad t \geq 0$$

et $(Q_t, t \geq 0)$ son semi-groupe, on a :

$$DQ_t = \overline{Q}_t D$$

où D désigne l'opérateur de dérivation : $Df(x) = f'(x)$ défini sur l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ bornées, de même que leurs dérivées premières.

3.4.3 Existence de pseudo-inverses

Nous énonçons à présent le principal résultat de cette section :

Théorème 3.32. *Soit X une diffusion linéaire régulière sur $\mathbb{R}^+$ de mesure de vitesse $m(dx) = \rho(x)dx$ et de fonction d'échelle s . On suppose que s est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ strictement croissante telle que $\lim_{a \rightarrow 0} m([0, a])s(a) > -\infty$, que 0 est un point d'entrée et $+\infty$ une frontière naturelle.*

Soit $y > 0$. Alors :

i) *La fonction $t \mapsto \mathbb{P}_0(X_t \geq y)$ est croissante et satisfait :*

$$\mathbb{P}_0(X_t \geq y) = \left(1 - \frac{m([0, y])}{m([0, +\infty[)}\right) \overline{\mathbb{P}}_0(\overline{G}_y \leq t), \quad (3.69)$$

où $\overline{G}_y := \sup\{s \geq 0; \overline{X}_s = y\}$.

$$ii) \lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_0(X_t \geq y) = 1 - \frac{m([0, y])}{m([0, +\infty[)}.$$

iii) *Par conséquent :*

1) *Si $m([0, +\infty[) = +\infty$, X admet un pseudo-inverse croissant $(Y_{0,y}, y > 0)$ et l'on a les égalités en loi suivantes :*

$$(a) X_t \stackrel{(1.d)}{=} \inf_{s \geq t} \overline{X}_s,$$

$$(b) Y_{0,y} \stackrel{(1.d)}{=} \overline{G}_y.$$

2) *Si $m([0, +\infty[) < +\infty$, X admet un quasi pseudo-inverse croissant $(Y_{0,y}, y > 0)$.*

Ainsi, dans notre cadre, une diffusion admet un pseudo-inverse croissant si et seulement si elle est transiente ou récurrente nulle.

Remarque 3.33.

a) *Il est clair qu'une diffusion récurrente positive ne peut admettre de pseudo-inverse croissant puisque, en notant $\pi(dz) := \frac{\rho(z)}{m([0, +\infty[)} dz$ la probabilité stationnaire de X , on a, pour $y > 0$ (voir [BS02, p.35]) :*

$$\mathbb{P}_0(X_t \geq y) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} 1_{\{z \geq y\}} \pi(dz) = \frac{m([y, +\infty[)}{m([0, +\infty[)} < 1.$$

b) *Supposons $m([0, +\infty[) < \infty$, et soit $U^{(m)}$ une v.a. de loi π . Alors, d'après (3.69),*

$$X_t \stackrel{(1.d)}{=} U^{(m)} \wedge \inf_{s \geq t} \overline{X}_s.$$

Remarque 3.34. *Etudions, à l'aide de ce théorème, le cas des diffusions $X^{(\alpha)}$ qui sont solutions de (3.28). D'après (3.59), on voit que $s^{(\alpha)}$ est strictement croissante et :*

$$\begin{aligned} |m^{(\alpha)}([0, a])s^{(\alpha)}(a)| &= \frac{2 \int_0^a e^{2C(u)} du}{1 + \alpha \int_0^a e^{2C(u)} du} \int_a^1 \left(1 + \alpha \int_0^x e^{2C(u)} du\right)^2 e^{-2C(x)} dx \\ &\leq (1 - a) \left(1 + \alpha \int_0^1 e^{2C(u)} du\right)^2 e^{-2C(a)} 2a e^{2C(a)} \\ &\leq 2a(1 - a) \left(1 + \alpha \int_0^1 e^{2C(u)} du\right)^2 \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Ainsi le Théorème 3.32 s'applique, et la fonction $t \mapsto \mathbb{P}_0^{(\alpha)}(X_t^{(\alpha)} \geq y)$ est croissante. De plus, puisque $C \in \mathcal{H}^\infty$ (cf. (3.24)), on obtient, en laissant tendre x vers $+\infty$ dans (3.61) :

$$m^{(\alpha)}([0, +\infty[) = \frac{2}{\alpha}.$$

D'où, d'après le Point (ii) du Théorème 3.32,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_0^{(\alpha)}(X_t^{(\alpha)} \geq y) = 1 - \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\int_0^y 2e^{2C(u)} du}{1 + \alpha \int_0^y e^{2C(u)} du} \right) = \frac{1}{1 + \alpha \int_0^y e^{2C(u)} du}.$$

C'est précisément le Point (ii) du Théorème 3.24.

Démonstration.

1) On sait d'après [IM74, p.149] que $(t, z) \mapsto q(t, 0, z)$ est solution de l'équation parabolique :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, z) = Lu(t, z).$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{P}_0(X_t \geq y) &= \int_y^\infty \frac{\partial q}{\partial t}(t, 0, z) m(dz) \\ &= \int_y^\infty Lq(t, 0, z) m(dz) \\ &= \int_y^\infty \frac{\partial}{\partial m} \frac{\partial q}{\partial s}(t, 0, z) m(dz) \\ &= -\frac{\partial q}{\partial s}(t, 0, y). \end{aligned} \tag{3.70}$$

A présent, (3.70) peut être réécrit, grâce à (3.65) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{P}_0(X_t \geq y) &= -\frac{1}{s'(y)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_y^\infty \bar{q}(t, 0, z) m([0, z]) s'(z) dz \right) \\ &= \bar{q}(t, 0, y) m([0, y]) \\ &= -\left(1 - \frac{m([0, y])}{m([0, +\infty[)}\right) \frac{1}{\bar{s}(y)} \bar{q}(t, 0, y) \quad (\text{d'après (3.58)}). \end{aligned} \tag{3.71}$$

Mais, la diffusion $(\bar{X}_t, t \geq 0)$ étant transiente, d'après [PY81], $t \mapsto -\frac{1}{\bar{s}(y)} \bar{q}(t, 0, y)$ est en fait la densité du dernier temps de passage de la diffusion $(\bar{X}_t, t \geq 0)$ au niveau y , lorsqu'elle est issue de 0 :

$$\bar{\mathbb{P}}_0(\bar{G}_y \in dt) = -\frac{1}{\bar{s}(y)} \bar{q}(t, 0, y) dt. \tag{3.72}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer (3.71) par rapport à t pour achever la preuve du Point (i) du Théorème 3.32.

2) Le Point (ii) est immédiat puisque la diffusion $(\bar{X}_t, t \geq 0)$ est transiente, et finalement, les items (a) et (b) découlent aisément de (3.69) et de l'identité :

$$\mathbb{P}_0 \left(\inf_{s \geq t} \bar{X}_s \geq y \right) = \mathbb{P}_0 (\bar{G}_y \leq t) = \mathbb{P}_0 (X_t \geq y).$$

Ceci achève la preuve du Théorème 3.32. $\square$

3.4.4 Une seconde preuve de l'existence de pseudo-inverses

Nous donnons également une autre preuve du Théorème 3.32, en montrant que les transformées de Laplace des deux membres de (3.69) coïncident. Soit $\bar{X}$ le processus associé à X par la transformation de Biane. D'après (3.72), on a pour $\lambda \geq 0$:

$$\mathbb{E}_0 \left[e^{-\lambda \bar{G}_y} \right] = - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{\bar{q}(t, 0, y)}{\bar{s}(y)} dt = \frac{\bar{u}_\lambda(0, y)}{-\bar{s}(y)}. \quad (3.73)$$

Remarquons que $y \mapsto \bar{u}_\lambda(0, y)$ est l'unique (à une constante multiplicative près) fonction propre de l'opérateur $\bar{L} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{m} \partial \bar{s}}$, associée à la valeur propre λ , qui est décroissante et satisfait $\bar{u}_\lambda(0, +\infty) = 0$ (voir [BS02, p.18]). Soit ϕ la fonction définie par :

$$\phi(y, \lambda) := \frac{\lambda}{m([0, y])} \int_y^{+\infty} u_\lambda(0, x) m(dx).$$

Nous allons montrer que $y \mapsto \phi(y, \lambda)$ satisfait les mêmes conditions que $y \mapsto \bar{u}_\lambda(0, y)$. Tout d'abord, il est clair que $\phi(\cdot, \lambda)$ est une fonction décroissante telle que $\phi(+\infty, \lambda) = 0$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} \bar{L}\phi(y, \lambda) &= \frac{\partial^2}{\partial \bar{m} \partial \bar{s}} \phi(y, \lambda) \\ &= \lambda \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}(y) \partial y} \frac{(m([0, y]))^2}{\rho(y)} \left(-\frac{\rho(y)}{(m([0, y]))^2} \int_y^\infty u_\lambda(0, x) m(dx) - \frac{1}{m([0, y])} u_\lambda(0, y) \rho(y) \right) \\ &= \lambda \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}(y) \partial y} \left(-\int_y^\infty u_\lambda(0, x) m(dx) - m([0, y]) u_\lambda(0, y) \right) \\ &= \frac{\lambda}{(m([0, y]))^2 s'(y)} \left(u_\lambda(0, y) \rho(y) - \rho(y) u_\lambda(0, y) - m([0, y]) \frac{\partial u_\lambda}{\partial y}(0, y) \right) \\ &= -\frac{\lambda}{(m([0, y])) s'(y)} \frac{\partial u_\lambda}{\partial y}(0, y). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Mais, puisque $y \mapsto u_\lambda(0, y)$ est une fonction propre de l'opérateur $L = \frac{\partial^2}{\partial m \partial s}$ associée à la valeur propre λ , on a :

$$\frac{\partial^2 u_\lambda}{\partial \rho(y) \partial y s'(y) \partial y}(0, y) = \lambda u_\lambda(0, y). \quad (3.75)$$

Intégrant (3.75), on obtient :

$$\frac{1}{s'(+\infty)} \frac{\partial u_\lambda}{\partial y}(0, +\infty) - \frac{1}{s'(y)} \frac{\partial u_\lambda}{\partial y}(0, y) = \lambda \int_y^\infty u_\lambda(0, x) \rho(x) dx. \quad (3.76)$$

Ainsi, comme le point $+\infty$ est supposé naturel, d'après ([BS02, p.19]) :

$$\frac{1}{s'(+\infty)} \frac{\partial u_\lambda}{\partial y}(0, +\infty) = \frac{\partial u_\lambda}{\partial s}(0, +\infty) = 0.$$

En substituant (3.76) dans (3.74), on obtient alors :

$$\bar{L}\phi(y, \lambda) = \lambda \left(\lambda \frac{1}{m([0, y])} \int_y^\infty u_\lambda(0, x) m(dx) \right) = \lambda \phi(y, \lambda),$$

ce qui signifie que ϕ est une fonction propre de l'opérateur $\bar{L}$ associée à la valeur propre λ . Par conséquent, il existe une constante $\gamma > 0$ telle que :

$$\bar{u}_\lambda(0, y) = \gamma \frac{\lambda}{m([0, y])} \int_y^\infty u_\lambda(0, x) m(dx). \quad (3.77)$$

Remplaçant (3.77) dans (3.73) on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 \left[e^{-\lambda \bar{G}_y} \right] &= -\frac{\gamma \lambda}{\bar{s}(y) m([0, y])} \int_y^\infty u_\lambda(0, x) m(dx) \\ &= \frac{\gamma \lambda}{1 - \frac{m([0, y])}{m([0, +\infty])}} \int_y^\infty \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} q(t, 0, x) dt \right) \rho(x) dx \quad (\text{d'après (3.58)}) \\ &= \frac{\gamma \lambda}{1 - \frac{m([0, y])}{m([0, +\infty])}} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{P}_0(X_t \geq y) dt \quad (\text{en appliquant Fubini}) \\ &= \frac{\gamma}{1 - \frac{m([0, y])}{m([0, +\infty])}} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{P}_0(X_t \geq y) \right) dt \end{aligned}$$

après une intégration par parties. Par conséquent, d'après l'injectivité de la transformée de Laplace, on en déduit que $t \mapsto \frac{\gamma}{1 - \frac{m([0, y])}{m([0, +\infty])}} \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{P}_0(X_t \geq y)$ est la densité d'une v.a. $Y_{0,y}$

(ayant même loi que $\bar{G}_y$ sous $\bar{\mathbb{P}}_0$) qui satisfait :

$$\mathbb{P}(Y_{0,y} \leq t) = \bar{\mathbb{P}}_0(\bar{G}_y \leq t) = \int_0^t \frac{\gamma}{1 - \frac{m([0, y])}{m([0, +\infty])}} \left(\frac{\partial}{\partial s} \mathbb{P}_0(X_s \geq y) \right) ds = \frac{\gamma}{1 - \frac{m([0, y])}{m([0, +\infty])}} \mathbb{P}_0(X_t \geq y).$$

Ainsi, laissant tendre y vers 0 dans cette dernière identité, on obtient :

$$\bar{\mathbb{P}}_0(\bar{G}_0 \leq t) = \gamma \mathbb{P}_0(X_t \geq 0) = \gamma \quad (\text{X étant une diffusion à valeurs positives}). \quad (3.78)$$

Mais, puisque 0 est un point d'entrée, mais pas de sortie pour la diffusion $(\bar{X}_t, t \geq 0)$, on a $\bar{\mathbb{P}}_0(\bar{G}_0 = 0) = 1$, de sorte que, d'après (3.78), $\gamma = 1$. □

3.5 Quelques conséquences de l'existence de pseudo-inverses

3.5.1 Une nouvelle relation entre les processus X et $\bar{X}$ issus de 0

Proposition 3.35. *Soient $t \geq 0$ et U une v.a. uniforme sur $[0, 1]$ indépendante de $\bar{X}_t$. Alors, sous les hypothèses du Théorème 3.32, les processus $(m([0, X_t]), t \geq 0)$ sous $\mathbb{P}_0$ et $(m([0, \bar{X}_t])U, t \geq 0)$ sous $\bar{\mathbb{P}}_0$ sont associés :*

$$m([0, X_t]) \stackrel{(1.d)}{=} m([0, \bar{X}_t])U.$$

Nous présentons deux preuves.

Démonstration analytique.

On écrit pour toute fonction f borélienne positive :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_0 [f(m([0, X_t]))] &= \int_0^{+\infty} f(m([0, y])) q(t, 0, y) \rho(y) dy \\
 &= \int_0^{+\infty} f(m([0, y])) \left(\int_y^\infty \bar{q}(t, 0, z) m([0, z]) s'(z) dz \right) \rho(y) dy \quad (\text{d'après (3.65)}) \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{m([0, z])} \int_0^z f(m([0, y])) \rho(y) dy \right) \bar{q}(t, 0, z) \bar{\rho}(z) dz \\
 &\quad (\text{en appliquant Fubini et (3.58)}) \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{m([0, z])} \int_0^{m([0, z])} f(u) du \right) \bar{q}(t, 0, z) \bar{\rho}(z) dz \\
 &\quad (\text{suite au changement de variable } u = m([0, y])) \\
 &= \mathbb{E}_0 \left[\frac{1}{m([0, \bar{X}_t])} \int_0^{m([0, \bar{X}_t])} f(u) du \right] \\
 &= \mathbb{E}_0 [f(m([0, \bar{X}_t])U)] \quad (\text{après le changement de variable } u = m([0, \bar{X}_t])v).
 \end{aligned}$$

□

Démonstration plus probabiliste dans le cas $m([0, +\infty]) = +\infty$.

Puisque $\bar{s}(x) = -\frac{1}{m([0, x])}$ est une fonction d'échelle pour la diffusion $(\bar{X}_t, t \geq 0)$, le processus $\left(\frac{1}{m([0, \bar{X}_{t+s}])}, s < \bar{T}_0^{(t)} \right)$ où $\bar{T}_0^{(t)} := \inf\{s \geq 0; \bar{X}_{t+s} = 0\}$, est une $(\bar{\mathcal{F}}_{t+s}, s \geq 0)$ -martingale locale continue et positive. Mais, 0 étant un point d'entrée mais pas de sortie pour la diffusion $(\bar{X}_t, t \geq 0)$, on a $\bar{T}_0^{(t)} = +\infty$ $\mathbb{P}_0$ -p.s., et $\bar{X}$ étant transient, $\left(\frac{1}{m([0, \bar{X}_{t+s}])}, s \geq 0 \right)$ est en fait une martingale locale continue et positive qui converge p.s. vers 0. On peut alors appliquer l'identité maximale de Doob :

$$\sup_{s \geq t} \frac{1}{m([0, \bar{X}_s])} \stackrel{(\text{loi})}{=} \frac{1}{m([0, \bar{X}_t])U}.$$

Ainsi, puisque $x \mapsto m([0, x])$ est croissante, en appliquant le Point (iii) du Théorème 3.32, on obtient :

$$\frac{1}{m([0, \bar{X}_t])U} \stackrel{(\text{loi})}{=} \sup_{s \geq t} \frac{1}{m([0, \bar{X}_s])} = \frac{1}{\inf_{s \geq t} m([0, \bar{X}_s])} = \frac{1}{m([0, \inf_{s \geq t} \bar{X}_s])} \stackrel{(\text{loi})}{=} \frac{1}{m([0, X_t])}.$$

□

3.5.2 Une relation de retournement du temps

Supposons que X soit une diffusion satisfaisant les hypothèses du Théorème 3.32. Alors le processus $\hat{X} := (\bar{X}_{\bar{G}_y - t}, t < \bar{G}_y)$ est une diffusion issue de y dont le semi-groupe (voir [RY99,

Exercice 4.18, p.322]) s'écrit :

$$\widehat{P}_t f(x) := \frac{1}{\widehat{s}(x)} \overline{P}_t(f\widehat{s})(x).$$

D'après (3.58), sa mesure de vitesse $\widehat{m}(dx) = \widehat{\rho}(x)dx$ et sa fonction d'échelle $\widehat{s}(x)$ sont données par :

$$\begin{cases} \widehat{s}(x) = -\frac{1}{\widehat{s}(x)} = \frac{m([0, x])m([0, +\infty[)}{m([0, +\infty[) - m([0, x])}, \\ \widehat{\rho}(x) = \widehat{s}^2(x)\overline{\rho}(x) = \left(1 - \frac{m([0, x])}{m([0, +\infty[)}\right)^2 s'(x). \end{cases} \quad (3.79)$$

En conséquence, la loi de $\overline{G}_y$ sous $\overline{\mathbb{P}}_0$ est la même que la loi de $\widehat{T}_0$ pour le processus $\widehat{X}$. Ceci conduit à une nouvelle formulation de l'identité (3.69) :

Proposition 3.36. *Soit X une diffusion satisfaisant les hypothèses du Théorème 3.32, et $\widehat{X}$ définie par (3.79). Alors :*

$$\mathbb{P}_0(X_t \geq y) = \left(1 - \frac{m([0, y])}{m([0, +\infty[)}\right) \widehat{\mathbb{P}}_y(\widehat{T}_0 \leq t). \quad (3.80)$$

En fait, (voir [SVY07, Section 2.2]), la diffusion $(\overline{X}_t, t \geq 0)$ peut également être obtenue en conditionnant $\widehat{X}$ à ne pas atteindre 0, et l'on a :

$$\overline{q}(t, x, y) = \frac{\widehat{q}(t, x, y)}{\widehat{s}(x)\widehat{s}(y)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\widehat{n}_{y0}(t)}{\widehat{s}(y)} = \left(\frac{1}{m([0, y])} - \frac{1}{m([0, +\infty[)}\right) \widehat{n}_{y0}(t), \quad (3.81)$$

où $\widehat{n}_{y0}$ est la densité du premier temps de passage en 0 de $\widehat{X}$ sous $\widehat{\mathbb{P}}_y$:

$$\widehat{\mathbb{P}}_y(\widehat{T}_0 \in dt) = \widehat{n}_{y0}(t)dt.$$

Par conséquent, injectant (3.81) dans (3.65), on obtient :

Proposition 3.37.

$$q(t, 0, y) = \int_y^\infty \widehat{n}_{z0}(t) \left(1 - \frac{m([0, z])}{m([0, +\infty[)}\right) s'(z)dz.$$

Notons que (3.79) se réduit de manière significative lorsque $m([0, +\infty[) = +\infty$. En effet, dans ce cas :

$$\begin{cases} \widehat{s}(x) = m([0, x]) \\ \widehat{\rho}(x) = s'(x) \end{cases}$$

et, en dérivant la relation (3.80) par rapport à y et à t :

Proposition 3.38 (Identité de type Zolotarev ou Kendall, [BB01]).

Si $m([0, +\infty[) = +\infty$:

$$-\frac{\partial q}{\partial t}(t, 0, y)\rho(y) = \frac{\partial \widehat{n}_{y,0}}{\partial y}(t).$$

Remarque 3.39.

a) La Proposition 3.38 peut également se prouver en utilisant la théorie de représentation spectrale de Krein de $q(t, 0, y)$ et $\widehat{n}_{y0}(t)$, voir [SV09] et [KW82].

b) Si X est une diffusion telle que $m([0, +\infty[) = +\infty$ et $s(x) = m([0, x])$, alors, X est une diffusion récurrente nulle, et, avec nos notations, les deux processus $(X_t, t < T_0)$ et $(\hat{X}_t, t < \hat{T}_0)$ issus de y ont la même loi. La Proposition 3.37 implique alors :

$$\mathbb{P}_y(T_0 \in dt) = -\frac{1}{s'(y)} \frac{\partial q}{\partial y}(t, 0, y) dt.$$

Notons que cette formule est très similaire à (3.72) pour les diffusions transientes :

$$\bar{\mathbb{P}}_0(\bar{G}_y \in dt) = -\frac{1}{\bar{s}(y)} \bar{q}(t, 0, y) dt.$$

Exemple 3.40. Si X est un mouvement brownien réfléchi en 0, alors $\bar{X}$ est un processus de Bessel de dimension 3, et $\hat{X}$ est un mouvement brownien tué en 0. D'après (3.80), on obtient la célèbre formule :

$$W_0(X_t \geq y) = W_y(T_0 \leq t).$$

3.5.3 Retour sur la famille $(X^{(\alpha)})_{\alpha \geq 0}$

Tous les résultats de la Section 3.4 s'applique à la famille $(X^{(\alpha)})_{\alpha \geq 0}$ définie par (3.28). En particulier, on peut définir la diffusion $(\hat{X}_t, t < \hat{T}_0)$ sur $\mathbb{R}^+$ comme la solution de :

$$X_t = y + B_t - \int_0^t c(X_s) ds.$$

Notons que :

$$\begin{cases} \hat{s}(x) = 2 \int_0^x e^{2C(u)} du, \\ \hat{\rho}(x) = e^{-2C(x)}. \end{cases}$$

Par ailleurs, puisque $\bar{X}$ ne dépend pas de α , $\hat{X}$ non plus. Introduisons alors la max-diffusion :

$$Z_t = B_t + \int_0^t c(2S_u^Z - Z_u) du \quad \text{où } S_u^Z := \sup_{s \leq u} Z_s. \quad (3.82)$$

On sait d'après ([RVY07, Theorem 5.4]) que le processus $(2S_t^Z - Z_t, t \geq 0)$ a même loi que $(\bar{X}_t, t \geq 0)$ sous $\bar{\mathbb{P}}_0$. D'où, puisque $2S_t^Z - Z_t \geq S_t$:

$$\bar{G}_y \stackrel{(\text{loi})}{=} T_y^Z \quad \text{où } T_y^Z := \inf\{t \geq 0, Z_t > y\},$$

et la formule (3.69) peut se réécrire comme suit :

$$\mathbb{P}_0(X_t \geq y) = \left(1 - \frac{m([0, y])}{m([0, +\infty[)}\right) \mathbb{P}_0^Z(T_y^Z \leq t).$$

Notons que l'on peut également construire, dans le cas général, le processus $(Z_t, t \leq T_y^Z)$ à partir de $(\bar{X}_t, t \leq \bar{G}_y)$ par la relation :

$$Z_t = 2J_t^{\bar{X}} - \bar{X}_t \quad \text{où } J_t^{\bar{X}} := \inf_{\bar{G}_y \geq s \geq t} \bar{X}_s. \quad (3.83)$$

A présent, introduisons le processus :

$$\hat{Z}_t = 2I_t^{\hat{X}} - \hat{X}_t \quad \text{où } I_t^{\hat{X}} := \inf_{s \leq t} \hat{X}_s. \quad (3.84)$$

$\hat{Z}$ est a priori non markovien, mais, puisque $\hat{Z}_t \leq \hat{X}_t$, on a $G_0^{\hat{Z}} = \hat{T}_0$ $\hat{\mathbb{P}}_y$ -p.s.

Proposition 3.41. *La relation de retournement du temps suivante est satisfaite :*

$$\left(Z_{T_y^Z - t}, t \leq T_y^Z \right) \stackrel{(loi)}{=} \left(\hat{Z}_t, t \leq G_0^{\hat{Z}} \right).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \left(Z_{T_y^Z - t}, t \leq T_y^Z \right) &\stackrel{(loi)}{=} \left(2J_{\bar{G}_y - t}^{\bar{X}} - \bar{X}_{\bar{G}_y - t}, t \leq \bar{G}_y \right) \quad (\text{d'après (3.83)}) \\ &\stackrel{(loi)}{=} \left(2 \inf_{\bar{G}_y \geq s \geq \bar{G}_y - t} \bar{X}_s - \bar{X}_{\bar{G}_y - t}, t \leq \bar{G}_y \right) \\ &\stackrel{(loi)}{=} \left(2 \inf_{s \leq t} \bar{X}_{\bar{G}_y - s} - \bar{X}_{\bar{G}_y - t}, t \leq \bar{G}_y \right) \\ &\stackrel{(loi)}{=} \left(2 \inf_{s \leq t} \hat{X}_s - \hat{X}_t, t \leq \hat{T}_0 \right) \\ &\stackrel{(loi)}{=} \left(\hat{Z}_t, t \leq G_0^{\hat{Z}} \right) \quad (\text{d'après (3.84)}). \end{aligned}$$

□

Les liens entre ces 5 processus peuvent être résumés dans le diagramme suivant :

$$X \xrightarrow{\text{Biane}} \bar{X}$$

et,

$$\begin{array}{ccc} (Z_t, t \leq T_y^Z) & \xleftarrow{\text{Retournement}} & (\hat{Z}_t, t \leq G_0^{\hat{Z}}) \\ \uparrow 2J^{\bar{X}} - \bar{X} & & \uparrow 2I^{\hat{X}} - \hat{X} \\ 2S^Z - Z & & 2V^{\hat{Z}} - \hat{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\bar{X}_t, t \leq \bar{G}_y) & \xleftarrow{\text{Retournement}} & (\hat{X}_t, t \leq \hat{T}_0) \end{array} \quad (3.85)$$

où, dans ce diagramme commutatif, $V_t^{\hat{Z}} := \sup_{s \geq t} \hat{Z}_s$. En particulier, on a :

$$\mathbb{P}_0(\bar{G}_y \leq t) = \hat{\mathbb{P}}_y(\hat{T}_0 \leq t) = \mathbb{P}_y^{\hat{Z}}(G_0^{\hat{Z}} \leq t) = \mathbb{P}_0^Z(T_y^Z \leq t).$$

Exemple 3.42. Si X est un processus de Bessel d'indice $\nu > -1$, $\nu \neq 0$, alors :

- $\bar{X}$ est un processus de Bessel d'indice $\nu + 1$ issu de 0.
- $\hat{X}$ est un processus de Bessel d'indice $-(\nu + 1)$ issu de y et tué quand il atteint le niveau 0. Dans le cas $-(\nu + 1) < -1$, $\hat{X}$ peut être obtenu comme la racine d'un carré de Bessel de dimension négative tué en 0, voir [RY99, Exercice 1.33, p. 453].

Troisième partie

Peacocks et martingales associées

Chapitre 4

Exemples de peacocks dans un contexte markovien

4.1 Introduction

Nous définissons et étudions dans ce chapitre la notion d'ordre convexe pour des processus. Cette notion joue un rôle important dans de nombreux domaines de probabilités, voir par exemple Shaked-Shanthikumar [SS94, SS07].

4.1.1 Définitions

Définition 4.1 (Peacock). *Un processus $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs réelles est dit croissant pour l'ordre convexe s'il est intégrable, i.e.*

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{E}[|X_t|] < \infty,$$

et si, pour toute fonction convexe $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$t \in \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{E}[\psi(X_t)] \in]-\infty, +\infty] \quad \text{est une fonction croissante.} \quad (4.1)$$

Nous appelons un tel processus un *peacock* pour *Processus Croissant pour l'Ordre Convexe* (en anglais, “peacock” signifie paon).

Remarque 4.2.

1) Pour prouver qu'un processus donné est un peacock, on peut se restreindre à la classe de fonctions :

$$\mathbf{C} := \{\psi \text{ est une fonction convexe de classe } C^2 \text{ telle que } \psi'' \text{ est à support compact}\}.$$

En effet, toute fonction convexe peut s'écrire comme l'enveloppe convexe des fonctions affines qui lui sont inférieures, i.e. peut s'écrire comme une limite croissante de fonctions de $\mathbf{C}$, et on obtient le résultat en passant à la limite.

Remarquons que si $\psi \in \mathbf{C}$, alors ψ' est bornée.

2) Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus intégrable tel que $\mathbb{E}[X_t]$ ne dépende pas de t . Alors, pour prouver que $(X_t, t \geq 0)$ est un peacock, on peut se limiter à la classe de fonctions :

$$\mathbf{C}^{\uparrow} := \left\{ \begin{array}{l} \theta \in \mathbf{C}; \theta(0) = \theta'(0) = 0, \\ \theta \text{ est décroissante sur }]-\infty, 0[, \text{ et croissante sur }]0, +\infty[\end{array} \right\}.$$

En effet, si $\psi \in \mathcal{C}$, il suffit de poser $\theta(x) := \int_0^x (x-u)\psi''(u)du$ et de remarquer que θ satisfait les hypothèses précédemment citées, ainsi que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) - \psi(y) = \psi'(0)(x - y) + \theta(x) - \theta(y).$$

Définition 4.3 (1-martingale). *Un processus $(X_t, t \geq 0)$ à valeurs réelles est une 1-martingale s'il existe une martingale $(M_t, t \geq 0)$ (éventuellement définie sur un autre espace de probabilité) admettant les mêmes marginales unidimensionnelles que $(X_t, t \geq 0)$, c'est-à-dire que pour tout $t \geq 0$ fixé : $X_t \stackrel{(loi)}{=} M_t$. Une telle martingale est dite associée au processus $(X_t, t \geq 0)$ et nous écrivons :*

$$X_t \stackrel{(1.d)}{=} M_t.$$

Ces deux notions (peacocks et 1-martingales) sont liées par le résultat suivant, dans le même esprit que le Théorème 3.3 de Kamae-Krengel.

Théorème 4.4 (Kellerer [Kel72]). *Un processus $(X_t, t \geq 0)$ est un peacock si et seulement si c'est une 1-martingale.*

D'après l'inégalité de Jensen, il est clair qu'une martingale est un peacock. Par contre, la réciproque est un résultat nettement plus difficile à établir, et qui a été obtenu grâce aux travaux successifs de Strassen [Str65], Doob [Doo68], puis Kellerer [Kel72]. Malheureusement, les preuves présentées dans son article ne sont pas constructives, et il est en général relativement difficile d'exhiber une telle martingale. Nous présenterons quelques exemples de construction dans le Chapitre 5, à partir de méthodes pour le plongement de Skorokhod.

4.1.2 Quelques exemples simples

Proposition 4.5. *Soient $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions boréliennes telles que les applications $\sigma_s : x \mapsto \sigma(s, x)$ et $b_s : x \mapsto b(s, x)$ soient localement lipschitziennes en x , uniformément sur les compacts en s . Soit $(X_t, t \geq 0)$ l'unique solution forte de l'EDS :*

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds.$$

- i) *Si pour tout $s \geq 0$, b_s est croissante, alors $(X_t - \mathbb{E}[X_t], t \geq 0)$ est un peacock.*
- ii) *Si $x = 0$ et pour tout $s \geq 0$,*
 - σ_s *est paire ou impaire*
 - b_s *est impaire et $\text{sgn}(b_s(x)) = \text{sgn}(x)$**alors le processus $(X_t, t \geq 0)$ est un peacock.*

Démonstration.

- i) Soit $\psi \in \mathcal{C}$. Posons $h(t) = \mathbb{E}[X_t] = x + \int_0^t \mathbb{E}[b(s, X_s)]ds$ et appliquons la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\psi(X_t - h(t))] &= \psi(x) + \mathbb{E} \left[\int_0^t \psi'(X_s - h(s))(b(s, X_s) - h'(s))ds \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E} \left[\int_0^t \psi''(X_s - h(s))\sigma^2(s, X_s)ds \right]. \end{aligned}$$

En dérivant, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[\psi(X_t - h(t))] = \mathbb{E}[\psi'(X_t - h(t))(b(t, X_t) - h'(t))] + \frac{1}{2} \mathbb{E}[\psi''(X_t - h(t))\sigma^2(t, X_t)]. \quad (4.2)$$

ψ étant convexe, le second terme du membre de droite est positif, et nous allons montrer que le premier l'est également. En effet, en notant b_s^{-1} l'inverse continu à droite de b_s , on a :

$$\mathbb{E}[\psi'(X_t - h(t))(b(t, X_t) - h'(t))] \geq \psi'(b_t^{-1}(h'(t)) - h(t))\mathbb{E}[(b(t, X_t) - h'(t))] = 0,$$

ce qui achève la preuve du Point (i).

ii) Traitons le cas σ_s paire. On peut remarquer tout d'abord que pour tout $t \geq 0$, la loi de X_t est symétrique. En effet :

$$\begin{aligned} -X_t &= -\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds \\ &= \int_0^t \sigma(s, -X_s)d(-B_s) + \int_0^t b(s, -X_s)ds \end{aligned}$$

et puisque $(-B_s, s \geq 0)$ est un mouvement brownien standard issu de 0, par unicité trajectorielle de la solution de cette EDS, $(X_t, t \geq 0) \stackrel{(\text{loi})}{=} (-X_t, t \geq 0)$. En particulier, pour tout $t \geq 0$, $h(t) = \mathbb{E}[X_t] = 0$ ne dépend pas de t . Soit donc $\theta \in \mathcal{C}^{\downarrow\uparrow}$. (4.2) se réécrit alors :

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}[\theta(X_t)] = \mathbb{E}[\theta'(X_t)(b(t, X_t))] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[\theta''(X_t)\sigma^2(t, X_t)],$$

et il ne reste plus qu'à remarquer que pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\theta'(x)b(t, x) \geq 0$.

Le cas σ impaire se traite de la même manière. $\square$

Exemple 4.6.

- Si $(X_t, t \geq 0)$ est un carré de Bessel de dimension $\delta \geq 0$, alors $b(s, x) = \delta$ est une fonction "croissante", et donc $(X_t - \mathbb{E}[X_t], t \geq 0)$ est un peacock.
- Si $(X_t, t \geq 0)$ est un processus de Ornstein-Uhlenbeck de paramètre $c \leq 0$:

$$X_t = B_t - c \int_0^t X_s ds$$

alors $(X_t, t \geq 0)$ est un peacock. Observons que $(X_t, t \geq 0)$ reste un peacock pour $c \geq 0$, puisque

$$X_t \stackrel{(1.d)}{=} B_{\frac{1-e^{-2ct}}{2c}}$$

et pour tout $c \in \mathbb{R}^*$, $t \mapsto \frac{1-e^{-2ct}}{2c}$ est une fonction croissante.

Proposition 4.7.

- i) Soit X une v.a., $(A_t, t \geq 0)$ un processus positif stochastiquement croissant indépendant de X et φ une fonction croissante telle que, pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[\varphi(A_t X)]$ ne dépende pas de t . Alors, $(\varphi(A_t X), t \geq 0)$ est un peacock.
- ii) Soit $(X_t, t \geq 0)$ un peacock et soit φ une fonction croissante, convexe sur $[0, +\infty[$, concave sur $]-\infty, 0]$, et telle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[\varphi(X_t)]$ ne dépende pas de t . Alors $(\varphi(X_t), t \geq 0)$ est un peacock.

Démonstration.

i) Quitte à remplacer φ par $\varphi - \varphi(0)$, on suppose, sans perte de généralité, que $\varphi(0) = 0$. Soit $\theta \in \mathcal{C}^{\downarrow\uparrow}$ et $s \leq t$. Par composition, $\theta \circ \varphi$ est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $]0, +\infty[$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\theta(\varphi(A_t X))] &= \mathbb{E}[\theta(\varphi(A_t X))1_{\{X \geq 0\}}] + \mathbb{E}[\theta(\varphi(A_t X))1_{\{X < 0\}}] \\ &\geq \mathbb{E}[\theta(\varphi(A_s X))1_{\{X \geq 0\}}] + \mathbb{E}[\theta(\varphi(A_s X))1_{\{X < 0\}}] = \mathbb{E}[\theta(\varphi(A_s X))] \end{aligned}$$

par indépendance et croissance stochastique.

ii) Soit $\theta \in \mathcal{C}^{\uparrow}$. Nous allons montrer que $\theta \circ \varphi$ est encore une fonction convexe. Soient $x, y \in \mathbb{R}$:

- Si $0 \leq x \leq y$, comme φ est convexe sur $[0, +\infty[$:

$$0 \leq \varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y) \quad (\lambda \in [0, 1])$$

et, θ étant croissante et convexe sur $[0, +\infty[$:

$$\theta \circ \varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \theta(\lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y)) \leq \lambda\theta \circ \varphi(x) + (1 - \lambda)\theta \circ \varphi(y).$$

- Si $x \leq 0 \leq y$ et $\lambda x + (1 - \lambda)y \geq 0$, alors, comme φ est croissante :

$$0 \leq \varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \varphi((1 - \lambda)y) \leq (1 - \lambda)\varphi(y) + \lambda\varphi(0)$$

et

$$\begin{aligned} \theta \circ \varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) &\leq \theta((1 - \lambda)\varphi(y) + \lambda\varphi(0)) \\ &\leq (1 - \lambda)\theta(\varphi(y)) + \lambda\theta(\varphi(0)) \leq (1 - \lambda)\theta \circ \varphi(y) + \lambda\theta \circ \varphi(x). \end{aligned}$$

Les autres cas se traitent de manière symétrique. □

Exemple 4.8.

- Si X est une variable aléatoire centrée, en prenant $\varphi(x) = x$, on obtient que $(A_t X, t \geq 0)$ est un peacock. Nous généralisons ce résultat dans la Proposition 4.9.

- Si $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien et φ une fonction impaire telle que, pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[|\varphi(B_t)|] < \infty$, alors $(\varphi(B_t), t \geq 0)$ est un peacock. Ce résultat découle du Point (i) appliqué avec $A_t = \sqrt{t}$ et $X = G$ une v.a. gaussienne centrée réduite, en remarquant que $\varphi(B_t) \stackrel{(1.d)}{=} \varphi(\sqrt{t}G)$.

Notons par ailleurs que si φ est une fonction telle que, pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[|\varphi(B_t)|] < \infty$ et $\mathbb{E}[\varphi(B_t)] = 0$, alors $\varphi(x) = -\varphi(-x)$ p.p. En effet, puisque $\mathbb{E}[\varphi(B_0)] = 0$, $\varphi(0) = 0$, et comme φ est croissante, φ est positive pour $x \geq 0$ et négative pour $x \leq 0$. De plus, on a, pour tout $t \geq 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = 0,$$

d'où, pour tout $\lambda > 0$, en intégrant par rapport à t :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{dt}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t - \frac{x^2}{2t}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi t}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-|x|\sqrt{2\lambda}} dx \quad (\text{cf. Lebedev [Leb72, p.118]}) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{2\lambda}} \varphi(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{2\lambda}} (-\varphi(-x)) dx.$$

Il suffit alors d'observer que $x \mapsto \varphi(x)$ et $x \mapsto -\varphi(-x)$ sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$, positives, et ayant la même transformée de Laplace. Elles sont donc égales presque partout : $\varphi(x) = -\varphi(-x)$ p.p.

Proposition 4.9. *Soit $(X_t, t \geq 0)$ un peacock centré, et soit $(A_t, t \geq 0)$ un processus positif stochastiquement croissant et indépendant de $(X_t, t \geq 0)$. Alors :*

- i) $(A_t X_t, t \geq 0)$ est un peacock.*
- ii) $(X_{A_t}, t \geq 0)$ est un peacock.*

Démonstration.

i) Puisque $(X_t, t \geq 0)$ est centré, $(A_t X_t, t \geq 0)$ l'est aussi. Soit donc $\theta \in \mathcal{C}^{\downarrow\uparrow}$ et $s \leq t$. Comme $(X_t, t \geq 0)$ est un peacock indépendant de $(A_t, t \geq 0)$, on a :

$$\mathbb{E}[\theta(A_t X_t)] \geq \mathbb{E}[\theta(A_t X_s)].$$

Puis en appliquant le Point (i) de la Proposition 4.7 avec $X = X_s$ et $\varphi(x) = x$, il vient :

$$\mathbb{E}[\theta(A_t X_s)] \geq \mathbb{E}[\theta(A_s X_s)].$$

ii) Soit $\psi \in \mathcal{C}$. Posons $\varphi(u) := \mathbb{E}[\psi(X_u)]$. $(X_t, t \geq 0)$ étant un peacock, φ est une fonction croissante. Or, par indépendance, on a :

$$\mathbb{E}[\psi(X_{A_t})] = \mathbb{E}[\varphi(A_t)]$$

qui est bien une fonction croissante de t , puisque A_t est un processus stochastiquement croissant. □

4.1.3 Motivations

Soit $(B_s, s \geq 0)$ un mouvement brownien standard. Carr, Ewald et Xiao ont prouvé dans [CEX08] que le processus

$$\left(A_t := \frac{1}{t} \int_0^t \exp\left(B_s - \frac{s}{2}\right) ds = \int_0^1 \exp\left(B_{t\lambda} - \frac{t\lambda}{2}\right) d\lambda, t \geq 0 \right) \quad (4.3)$$

était un peacock. Peu après, Baker-Yor [BY09] ont exhibé une martingale associée à ce peacock, construite à partir du drap brownien. Cet exemple fût le point de départ de nombreux développements récents (voir [HPRY11b]). En particulier, considérons, pour tout $t \geq 0$, un processus mesurable à valeurs réelles :

$$Z_{\cdot, t} := (Z_{\lambda, t}, \lambda \geq 0)$$

tel que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{E}[e^{Z_{\lambda, t}}] < \infty,$$

et définissons, pour toute mesure positive finie μ sur $\mathbb{R}^+$ le processus :

$$\left(A_t^{(\mu)} := \int_0^{+\infty} \frac{e^{Z_{\lambda, t}}}{\mathbb{E}[e^{Z_{\lambda, t}}]} \mu(d\lambda), t \geq 0 \right). \quad (4.4)$$

(En prenant $Z_{\lambda, t} = B_{\lambda t}$ et $\mu(ds) = 1_{[0,1]}(ds)$, on retrouve (4.3)).

On peut alors naturellement se demander :

Sous quelles conditions le processus $(A_t^{(\mu)}, t \geq 0)$ est-il un peacock ?

Nous savons déjà que $(A_t^{(\mu)}, t \geq 0)$ est un peacock dans les différents cas suivants :

- $Z_{\lambda,t} = \lambda t X$ où X est une v.a., voir ([HPRY11b, Chapter 1]),
- $Z_{\lambda,t} = t L_\lambda$ où $(L_\lambda, \lambda \geq 0)$ est un processus de Lévy tel que $\mathbb{E}[e^{L_1}] < \infty$, (voir [HRY10b]).
- $Z_{\lambda,t} = G_{\lambda,t}$ où, pour tout $t \geq 0$, $(G_{\lambda,t}, \lambda \geq 0)$ est un processus gaussien tel que la fonction $t \longrightarrow \mathbb{E}[G_{\lambda_1,t} G_{\lambda_2,t}]$ soit croissante pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, (voir [HRY10c]).

Nous présentons dans ce chapitre d'autres peacocks de la forme $(A_t^{(\mu)}, t \geq 0)$, essentiellement dans un cadre markovien.

- Dans la Section 4.2, nous introduisons la notion de monotonie conditionnelle, et nous prouvons que si $Z_{\lambda,t} = t X_\lambda$ où $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ est un processus conditionnellement monotone satisfaisant quelques hypothèses d'intégrabilité, alors $(A_t^{(\mu)}, t \geq 0)$ est un peacock.

- La Section 4.3 donne des exemples de processus conditionnellement monotones, parmi lesquels les processus à accroissements indépendants log-concaves, et les diffusions "bien réversibles" à temps fixe.

- Dans la Section 4.4, nous présentons un autre jeu d'hypothèses, reposant cette fois sur des transformées de Laplace, qui permet d'obtenir une nouvelle famille de peacocks de la forme $(A_t^{(\mu)}, t \geq 0)$.

- Finalement, la Section 4.5 présente un lien entre l'ordre stochastique et l'ordre convexe ; nous y retrouvons alors certains des peacocks présentés dans les sections précédentes.

4.2 L'hypothèse de monotonie conditionnelle

Dans cette section, nous introduisons et étudions la notion de monotonie conditionnelle, notion qui apparaît sous une forme légèrement différente dans [SS94, Chapter 4.B, p.114-126].

Définition 4.10 (Monotonie conditionnelle). *Un processus $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ est dit conditionnellement monotone si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $i \in \{1, \dots, n\}$, tout $0 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ et toute fonction borélienne bornée $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante (resp. décroissante) en chacun de ses arguments :*

$$\mathbb{E}[\phi(X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}, \dots, X_{\lambda_n}) | X_{\lambda_i}] = \phi_i(X_{\lambda_i}), \quad (\text{CM})$$

où $\phi_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée croissante (resp. décroissante).

Remarque 4.11.

- 1) S'il existe un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que, pour tout $\lambda \geq 0$, $X_\lambda \in I$, nous supposons dans la Définition 4.10 que ϕ est simplement définie sur I^n , et ϕ_i sur I .
- 2) Observons que $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ est conditionnellement monotone si et seulement si $(-X_\lambda, \lambda \geq 0)$ est conditionnellement monotone.
- 3) Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Il n'est alors pas difficile de se rendre compte que si le processus $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ est conditionnellement monotone, alors le processus $(\varphi(X_\lambda), \lambda \geq 0)$ l'est également.

Pour prouver qu'un processus est conditionnellement monotone, nous nous restreindrons aux fonctions ϕ boréliennes, bornées, et croissantes en chacun de leurs arguments. En effet, en remplaçant ϕ par $-\phi$ dans (CM), le résultat est alors également vérifié pour les fonctions boréliennes bornées décroissantes en chacun de leurs arguments.

Définition 4.12. On note $\mathcal{I}_n$ l'ensemble des fonctions boréliennes bornées $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont croissantes en chacun de leurs arguments.

Théorème 4.13. Soit $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ un processus à valeurs réelles, continu à droite, conditionnellement monotone et satisfaisant les conditions d'intégrabilité suivantes :

Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^+$ et tout $t \geq 0$:

$$\Theta_{K,t} := \sup_{\lambda \in K} \exp(tX_\lambda) = \exp\left(t \sup_{\lambda \in K} X_\lambda\right) \text{ est intégrable,} \quad (\text{INT1})$$

et

$$k_{K,t} := \inf_{\lambda \in K} \mathbb{E}[\exp(tX_\lambda)] > 0. \quad (\text{INT2})$$

Posons $h_\lambda(t) = \log \mathbb{E}[\exp(tX_\lambda)]$. Alors, pour toute mesure positive finie μ sur $\mathbb{R}^+$, le processus :

$$\left(A_t^{(\mu)} := \int_0^\infty e^{tX_\lambda - h_\lambda(t)} \mu(d\lambda), t \geq 0 \right)$$

est un peacock.

Démonstration.

1) D'après (INT1), pour tout $\lambda \geq 0$ et tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[\exp(tX_\lambda)] < \infty$. Le théorème de convergence dominée implique alors que h_λ est continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $]0, +\infty[$, et

$$h'_\lambda(t) e^{h_\lambda(t)} = \mathbb{E}[X_\lambda e^{tX_\lambda}]. \quad (4.5)$$

Puisque $\mathbb{E}[e^{tX_\lambda - h_\lambda(t)}] = 1$, on obtient d'après (4.5) :

$$\mathbb{E}[(X_\lambda - h'_\lambda(t)) e^{tX_\lambda - h_\lambda(t)}] = 0. \quad (4.6)$$

De plus, on déduit également de (INT1) que, pour tout $t \geq 0$, la fonction $\lambda (\geq 0) \mapsto h_\lambda(t)$ est continue à droite.

2) Considérons tout d'abord le cas

$$\mu = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{\lambda_i} \quad (4.7)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$, et $0 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_n$. Soit $\psi \in \mathcal{C}$. Pour $t > 0$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}[\psi(A_t^{(\mu)})] = \mathbb{E}\left[\psi'(A_t^{(\mu)}) \sum_{i=1}^n a_i (X_{\lambda_i} - h'_{\lambda_i}(t)) \exp(tX_{\lambda_i} - h_{\lambda_i}(t))\right].$$

En posant pour $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\Delta_i = \mathbb{E}\left[\psi'(A_t^{(\mu)}) (X_{\lambda_i} - h'_{\lambda_i}(t)) \exp(tX_{\lambda_i} - h_{\lambda_i}(t))\right],$$

nous allons montrer que $\Delta_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Observons que la fonction

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \psi' \left(\sum_{j=1}^n a_j \exp(tx_j - h_{\lambda_j}(t)) \right)$$

est bornée et croissante en chacun de ses arguments, i.e. appartient à $\mathcal{I}_n$. Donc, d'après la propriété de monotonie conditionnelle de $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$:

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\psi'(A_t^{(\mu)}) (X_{\lambda_i} - h'_{\lambda_i}(t)) e^{tX_{\lambda_i} - h_{\lambda_i}(t)} | X_{\lambda_i}\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[(X_{\lambda_i} - h'_{\lambda_i}(t)) e^{tX_{\lambda_i} - h_{\lambda_i}(t)} \phi_i(X_{\lambda_i})\right] \end{aligned}$$

où ϕ_i est une fonction croissante et bornée. Par ailleurs, on a,

$$(X_{\lambda_i} - h'_{\lambda_i}(t)) (\phi_i(X_{\lambda_i}) - \phi_i(h'_{\lambda_i}(t))) \geq 0,$$

et par conséquent,

$$\Delta_i \geq \phi_i(h'_{\lambda_i}(t)) \mathbb{E} \left[(X_{\lambda_i} - h'_{\lambda_i}(t)) e^{tX_{\lambda_i} - h_{\lambda_i}(t)} \right] = 0 \quad \text{d'après (4.6).}$$

3) Nous supposons à présent que μ est une mesure à support compact, contenu dans un intervalle K . Puisque la fonction $\lambda \mapsto \exp(tX_\lambda - h_\lambda(t))$ est continue à droite et bornée supérieurement par la v.a. $k_{K,t}^{-1} \Theta_{K,t}$ qui est finie p.s., il existe une suite de mesures $(\mu_n, n \geq 0)$ de la forme (4.7), avec $\text{supp}(\mu_n) \subset K$, $\int \mu_n(d\lambda) = \int \mu(d\lambda)$ et pour tout $t \geq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_t^{(\mu_n)} = A_t^{(\mu)}$ p.s. De plus, d'après (INT1) et (INT2) :

$$|A_t^{(\mu_n)}| \leq \frac{\theta_{K,t}}{k_{K,t}} \int \mu(d\lambda),$$

et d'après le Point 2), pour $0 \leq s \leq t$:

$$\mathbb{E}[\psi(A_s^{(\mu_n)})] \leq \mathbb{E}[\psi(A_t^{(\mu_n)})].$$

Par conséquent, puisque la fonction ψ est sous-linéaire, il ne nous reste plus qu'à appliquer le théorème de convergence dominée et à passer à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ dans cette dernière égalité pour obtenir que $(A_t^{(\mu)}, t \geq 0)$ est un peacock.

4) Dans le cas général, on pose $\mu_n(d\lambda) = 1_{[0,n]}(\lambda) \mu(d\lambda)$ et on observe que $(A^{(\mu_n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de processus. Soit $\theta \in \mathcal{C}^{\uparrow}$. D'après le Point 3),

$$\mathbb{E} \left[\theta \left(A_s^{(\mu_n)} \right) \right] \leq \mathbb{E} \left[\theta \left(A_t^{(\mu_n)} \right) \right],$$

et comme θ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, le résultat découle du théorème de convergence monotone. □

Remarque 4.14. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone, et μ une mesure positive finie. D'après la Remarque 4.11, sous l'hypothèse que $(\varphi(X_\lambda), \lambda \geq 0)$ satisfasse toujours les conditions (INT1) et (INT2), on obtient, en notant $h_{\lambda,\varphi}(t) = \log \mathbb{E}[\exp(t\varphi(X_\lambda))]$, que le processus

$$\left(A_t^{(\mu,\varphi)} := \int_0^\infty e^{t\varphi(X_\lambda) - h_{\lambda,\varphi}(t)} \mu(d\lambda), t \geq 0 \right)$$

est un peacock. Observons que φ a seulement besoin d'être continue et strictement monotone sur un intervalle contenant l'image de X_λ pour tout $\lambda \geq 0$.

Bien sûr, le Théorème 4.13 n'a d'intérêt pratique que si l'on est capable d'exhiber suffisamment d'exemples de processus possédant la propriété de monotonie conditionnelle (CM). C'est l'objet de la section suivante.

4.3 Exemples de processus conditionnellement monotones

4.3.1 Le processus $(\lambda X, \lambda \geq 0)$

Soit X une v.a. telle que, pour tout $\lambda \geq 0$, $\mathbb{E}[e^{\lambda X}] < \infty$. Le processus $(\lambda X, \lambda \geq 0)$ vérifie alors les hypothèses du Théorème 4.13, et pour toute mesure positive finie μ :

$$\left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{t\lambda X}}{\mathbb{E}[e^{t\lambda X}]} \mu(d\lambda), t \geq 0 \right) \text{ est un peacock.}$$

On retrouve ainsi l'exemple mentionné dans la Sous-section 4.1.3.

4.3.2 Les processus à accroissements indépendants

Commençons par énoncer une assertion équivalente à (CM) dans le cadre des processus à accroissements indépendants (mais non nécessairement stationnaires).

Proposition 4.15. *Soit $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ un processus à accroissements indépendants. Alors, la propriété de monotonie conditionnelle (CM) est équivalente à la condition suivante : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $0 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ et toute fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ appartenant à $\mathcal{I}_n$, on a :*

$$\mathbb{E}[\phi(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}) | X_{\lambda_n}] = \phi_n(X_{\lambda_n}) \quad (\widetilde{\text{CM}})$$

où ϕ_n est une fonction croissante et bornée.

Démonstration.

La preuve est immédiate. En effet, soit $\phi \in \mathcal{I}_n$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, l'hypothèse d'accroissements indépendants implique :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}) | X_{\lambda_i}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\phi(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}) | \mathcal{F}_{\lambda_i}] | X_{\lambda_i}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\phi(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_i}, X_{\lambda_{i+1}} - X_{\lambda_i} + X_{\lambda_i}, \dots, X_{\lambda_n} - X_{\lambda_i} + X_{\lambda_i}) | \mathcal{F}_{\lambda_i}] | X_{\lambda_i}] \\ &= \mathbb{E}[\tilde{\phi}(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_i}) | X_{\lambda_i}] \end{aligned}$$

où

$$\tilde{\phi}(x_1, \dots, x_i) = \mathbb{E}[\phi(x_1, \dots, x_i, X_{\lambda_{i+1}} - X_{\lambda_i} + x_i, \dots, X_{\lambda_n} - X_{\lambda_i} + x_i)]$$

appartient à $\mathcal{I}_i$. □

Exemple 4.16 (Mouvement brownien avec dérive).

Soit $(B_\lambda^{(\nu)} := B_\lambda + \nu\lambda, t \geq 0)$ un mouvement brownien avec dérive ν . On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\phi\left(B_{\lambda_1}^{(\nu)}, \dots, B_{\lambda_n}^{(\nu)}\right) | B_{\lambda_n}^{(\nu)} = x\right] &= \mathbb{E}[\phi(B_{\lambda_1} + \nu\lambda_1, \dots, B_{\lambda_n} + \nu\lambda_n) | B_{\lambda_n} = x - \nu\lambda_n] \\ &= \mathbb{E}\left[\phi\left(\beta_{\lambda_1}^{0, \lambda_n, x - \nu\lambda_n} + \nu\lambda_1, \dots, \beta_{\lambda_n}^{0, \lambda_n, x - \nu\lambda_n} + \nu\lambda_n\right)\right] \end{aligned}$$

où $(\beta_s^{x, t, y}, s \leq t)$ désigne le pont brownien de longueur t allant de x à y . D'après (3.22), ce processus vérifie :

$$\beta_s^{0, t, y} = y \frac{s}{t} + \beta_s^{0, t, 0},$$

de sorte que,

$$\mathbb{E}\left[\phi\left(B_{\lambda_1}^{(\nu)}, \dots, B_{\lambda_n}^{(\nu)}\right) | B_{\lambda_n}^{(\nu)} = x\right] = \mathbb{E}\left[\phi\left(\beta_{\lambda_1}^{0, \lambda_n, 0} + \frac{x\lambda_1}{\lambda_n}, \dots, \beta_{\lambda_n}^{0, \lambda_n, 0} + \frac{x\lambda_n}{\lambda_n}\right)\right]$$

qui est une fonction croissante de x puisque ϕ est croissante en chacun de ses arguments. Remarquons que bien sûr cette quantité ne dépend pas de ν puisque la loi d'un pont brownien avec dérive ν est indépendante de ν .

Exemple 4.17 (Le subordonateur gamma).

Le subordonateur gamma $(\gamma_\lambda, \lambda \geq 0)$ est caractérisé par :

$$\mathbb{E}[e^{-t\gamma_\lambda}] = \frac{1}{(1+t)^\lambda} = \exp\left(-\lambda \int_0^\infty (1-e^{-tx}) \frac{e^{-x}}{x} dx\right).$$

En particulier, γ_λ est une v.a. gamma de paramètre λ . D'après $(\widetilde{\text{CM}})$, il nous faut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $0 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ et toute fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dans $\mathcal{I}_n$:

$$\mathbb{E}[\phi(\gamma_{\lambda_1}, \dots, \gamma_{\lambda_n}) | \gamma_{\lambda_n}] = \phi_n(\gamma_{\lambda_n}), \quad (4.8)$$

où ϕ_n est une fonction croissante. Or, sachant $\{\gamma_{\lambda_n} = x\}$, le vecteur $(\gamma_{\lambda_1}, \gamma_{\lambda_2} - \gamma_{\lambda_1}, \dots, \gamma_{\lambda_n} - \gamma_{\lambda_{n-1}})$ suit une loi de Dirichlet de paramètres $(\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1, \dots, \lambda_n - \lambda_{n-1})$ sur $[0, x]$. En d'autres termes, la densité f_n^x de $(\gamma_{\lambda_1}, \gamma_{\lambda_2}, \dots, \gamma_{\lambda_{n-1}})$ conditionnellement à $\{\gamma_{\lambda_n} = x\}$ vaut :

$$f_n^x(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{C}{x^{\lambda_{n-1}}} x_1^{\lambda_1-1} (x_2 - x_1)^{\lambda_2-\lambda_1-1} \dots (x - x_{n-1})^{\lambda_n-\lambda_{n-1}-1} 1_{\mathbb{S}^{n,x}},$$

où $C := C(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une constante positive et

$$\mathbb{S}^{n,x} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x\}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\phi(\gamma_{\lambda_1}, \dots, \gamma_{\lambda_n}) | \gamma_{\lambda_n} = x] &= \int_{\mathbb{S}^{n,x}} \phi(x_1, \dots, x_{n-1}, x) f_n^x(x_1, \dots, x_{n-1}) dx_1 \dots dx_{n-1} \\ &= C \int_{\mathbb{S}^{n,1}} \phi(xy_1, \dots, xy_{n-1}, x) y_1^{\lambda_1-1} (y_2 - y_1)^{\lambda_2-\lambda_1-1} \dots \\ &\quad (y_{n-1} - y_{n-2})^{\lambda_{n-1}-\lambda_{n-2}-1} (1 - y_{n-1})^{\lambda_n-\lambda_{n-1}-1} dy_1 \dots dy_{n-1} \end{aligned}$$

après le changement de variables : $x_i = xy_i$, $i = 1, \dots, n-1$. Il est alors clair que, puisque ϕ est une fonction croissante en chacun de ses arguments, cette dernière expression est une fonction croissante de x .

On peut reformuler ces calculs plus rapidement de la manière suivante : d'après [ÉY04], le pont gamma $\left(\Pi_u := \frac{\gamma_u}{\gamma_{\lambda_n}}, u \leq \lambda_n\right)$ est indépendant de γ_{λ_n} . Ainsi :

$$\mathbb{E}[\phi(\gamma_{\lambda_1}, \dots, \gamma_{\lambda_n}) | \gamma_{\lambda_n} = x] = \mathbb{E}[\phi(x\Pi_{\lambda_1}, \dots, x\Pi_{\lambda_{n-1}}, x)]$$

est une fonction croissante de x .

Corollaire 4.18. Soit $(\gamma_\lambda, \lambda \geq 0)$ le subordonateur gamma. Pour toute mesure positive finie μ sur $\mathbb{R}^+$, et pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et strictement croissante, le processus :

$$\left(A_t^{(\mu, \varphi)} := \int_0^\infty \frac{e^{-t\varphi(\gamma_\lambda)}}{\mathbb{E}[e^{-t\varphi(\gamma_\lambda)}]} \mu(d\lambda), t \geq 0 \right) \text{ est un peacock.} \quad (4.9)$$

Démonstration.

D'après la Remarque 4.14 avec $x \mapsto -\varphi(x)$ pour $x \geq 0$, le processus $(X_\lambda := -\varphi(\gamma_\lambda), \lambda \geq 0)$ est conditionnellement monotone. Comme il s'agit d'un processus négatif, (INT1) est évidemment satisfaite. Par ailleurs, puisque le processus $(\gamma_\lambda, \lambda \geq 0)$ est croissant, (INT2) est également vérifiée. Finalement, le Théorème 4.13 s'applique. $\square$

Remarque 4.19. Lorsque $\varphi(x) = x$, le Corollaire 4.18 est vérifié plus généralement avec μ une mesure signée, voir [HRY10b].

Exemple 4.20 (La marche aléatoire simple). Soit $(\varepsilon_i, i \in \mathbb{N}^*)$ une suite de v.a. i.i.d telles que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = p, \quad \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1) = q \quad \text{avec } p, q > 0 \text{ et } p + q = 1.$$

Soit $(S_n, n \in \mathbb{N})$ la marche aléatoire définie par $S_0 = 0$ et

$$S_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Nous allons prouver que $(S_n, n \in \mathbb{N})$ est conditionnellement monotone, i.e : pour tout $r \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$, tout $0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_r < +\infty$ et toute fonction $\phi : \mathbb{R}^{r-1} \rightarrow \mathbb{R}$ dans $\mathcal{I}_{r-1}$,

$$k \in I_{n_r} \mapsto \mathbb{E}[\phi(S_{n_1}, S_{n_2}, \dots, S_{n_{r-1}}) | S_{n_r} = k] \text{ est une fonction croissante sur } I_{n_r} \quad (4.10)$$

où $I_x \subset \llbracket -x, x \rrbracket$ représente l'ensemble des valeurs que peut prendre la v.a. S_x . Il n'est pas difficile de voir que (4.10) est vérifiée si et seulement si : pour tout $N \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$ et toute fonction $\phi : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ dans $\mathcal{I}_{N-1}$:

$$k \in I_N \mapsto \mathbb{E}[\phi(S_1, \dots, S_{N-1}) | S_N = k] \text{ est une fonction croissante sur } I_N. \quad (4.11)$$

Il nous faut alors distinguer deux cas :

1) Si N et k sont pairs, on pose $N = 2n$ ($n \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket$) et $k = 2x$ ($x \in \llbracket -n, n \rrbracket$). Pour tout $n \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket$ et tout $x \in \llbracket -n, n \rrbracket$, notons $\mathcal{P}_{2n}^{2x}$, l'ensemble des lignes polygonales $\omega := (\omega_i, i \in \llbracket 0, 2n \rrbracket)$ telles que $\omega_0 = 0$, $\omega_{p+1} = \omega_p \pm 1$, ($p \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$) et $\omega_{2n} = 2x$. Observons que tout $\omega \in \mathcal{P}_{2n}^{2x}$ possède $n+x$ pentes positives et $n-x$ pentes négatives. En conséquence :

$$|\mathcal{P}_{2n}^{2x}| = C_{2n}^{n+x},$$

où $|\cdot|$ représente le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}_{2n}^{2x}$. Par ailleurs, conditionnellement à $\{S_{2n} = 2x\}$, la loi du vecteur aléatoire $(S_0, S_1, \dots, S_{2n})$ est la loi uniforme sur $\mathcal{P}_{2n}^{2x}$.

Soient $n \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket$, $x \in \llbracket -n, n \rrbracket$ fixé, et considérons, pour tout $i \in \llbracket 1, n+x+1 \rrbracket$, l'application :

$$\Pi_i : \mathcal{P}_{2n}^{2x+2} \rightarrow \mathcal{P}_{2n}^{2x}$$

définie par : pour tout $\omega \in \mathcal{P}_{2n}^{2x+2}$, $\Pi_i(\omega)$ a les mêmes pentes négatives et les mêmes pentes positives que ω excepté la i^{th} pente positive qui est remplacée par une pente négative. Pour tout $\omega \in \mathcal{P}_{2n}^{2x+2}$ et toute fonction $\phi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ dans $\mathcal{I}_{2n}$,

$$\phi(\omega) \geq \phi(\Pi_i(\omega)).$$

En sommant cette relation, on obtient :

$$\begin{aligned}
 (n+x+1) \sum_{\omega \in \mathcal{P}_{2n}^{2x+2}} \phi(\omega) &\geq \sum_{\omega \in \mathcal{P}_{2n}^{2x+2}} \sum_{i=1}^{n+x+1} \phi(\Pi_i(\omega)) \\
 &= \sum_{\omega \in \mathcal{P}_{2n}^{2x}} \sum_{i=1}^{n+x+1} |\Pi_i^{-1}(\omega)| \phi(\omega) \\
 &= (n-x) \sum_{\omega \in \mathcal{P}_{2n}^{2x}} \phi(\omega).
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a donc prouvé :

Lemme 4.21. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute fonction $\phi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ dans $\mathcal{I}_{2n}$,*

$$\frac{1}{|\mathcal{P}_{2n}^{2x+2}|} \sum_{\omega \in \mathcal{P}_{2n}^{2x+2}} \phi(\omega) \geq \frac{1}{|\mathcal{P}_{2n}^{2x}|} \sum_{\omega \in \mathcal{P}_{2n}^{2x}} \phi(\omega), \quad (4.12)$$

ce qui signifie que $(S_{2n}, n \in \mathbb{N})$ est conditionnellement monotone.

2) En procédant de même, il n'est pas difficile d'établir un résultat similaire lorsque k et N sont impairs.

Corollaire 4.22. *Pour tout entier impair p , et toute mesure positive finie $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \delta_n$ sur $\mathbb{N}$:*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{e^{-t(S_n)^p}}{\mathbb{E}[e^{-t(S_n)^p}]}, t \geq 0 \right) \quad \text{est un peacock.}$$

Les processus à accroissements indépendants et log-concaves sont conditionnellement monotones

Commençons par introduire les notions de v.a. PF₂ et log-concaves (voir Schoenberg [Sch51] ou Daduna-Szekli [DS96]).

Définition 4.23 (V.a. PF₂ réelle).

Une v.a. réelle X est dite PF₂ si :

- 1) X admet une densité de probabilité f ,
- 2) pour tout $x_2 \geq x_1, y_2 \geq y_1$,

$$\det \begin{pmatrix} f(x_1 - y_1) & f(x_1 - y_2) \\ f(x_2 - y_1) & f(x_2 - y_2) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Définition 4.24 (V.a. PF₂ discrète).

Une v.a. discrète X est dite PF₂ si, en posant $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in \mathbb{Z}$, on a : pour tout $x_2 \geq x_1, y_2 \geq y_1$,

$$\det \begin{pmatrix} f(x_1 - y_1) & f(x_1 - y_2) \\ f(x_2 - y_1) & f(x_2 - y_2) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Définition 4.25 (V.a. log-concave réelle).

Une v.a. réelle X est dite log-concave si :

- 1) X admet une densité de probabilité f ,
- 2) f est une fonction log-concave sur $\mathbb{R}$, i.e. pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $\theta \in]0, 1[$,

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \geq (f(x))^\theta (f(y))^{1-\theta}.$$

Évidemment f est une fonction log-concave sur $\mathbb{R}$ si et seulement si l'ensemble $S_f := \{f > 0\}$ est un intervalle et $\log f$ est concave sur S_f .

Définition 4.26 (V.a. log-concave à valeurs dans $\mathbb{Z}$).

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est dite log-concave, si pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$(\mathbb{P}(X = n))^2 \geq \mathbb{P}(X = n + 1)\mathbb{P}(X = n - 1).$$

Ici aussi, f est une fonction log-concave sur $\mathbb{Z}$ si l'ensemble $S_f := \{f > 0\}$ est un intervalle de $\mathbb{Z}$, et $\log f$ est une fonction concave sur S_f .

Rappelons l'équivalence suivante :

Théorème 4.27 ([An97] ou [DS96]). Une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ est PF_2 si et seulement si elle est log-concave.

Exemple 4.28. La plupart des lois usuelles sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{Z}$) sont PF_2 . En effet, la loi normale, la loi uniforme, la loi exponentielle, la loi binomiale négative, la loi de Poisson ou encore la loi géométrique sont PF_2 . Nous référons à [An97] pour d'autres exemples. Notons cependant que :

- a) Une v.a. gamma de paramètre $a > 0$ (de densité $f_a(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-x} 1_{[0, +\infty[}(x)$) n'est pas PF_2 si $a < 1$,
- b) Une v.a. de Bernoulli X telle que $\mathbb{P}(X = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X = -1)$ n'est pas PF_2 .

Le résultat suivant est dû à Efron [Efr65] (voir également [Sha87]).

Théorème 4.29 ([Efr65]). Soient $n \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires PF_2 réelles (ou discrètes) indépendantes, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, et $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ appartenant à $\mathcal{I}_n$. Alors

$$\mathbb{E}[\phi(X_1, X_2, \dots, X_n) | S_n = x] \quad \text{est une fonction croissante de } x.$$

Grâce au Théorème 4.29, on obtient donc le résultat suivant :

Théorème 4.30. Soit $(Z_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}^+ \text{ ou } \lambda \in \mathbb{N})$ un processus à valeurs réelles (ou discrètes), issu de 0, satisfaisant (INT1) et (INT2), et ayant des accroissements indépendants (non nécessairement homogènes en temps) dont la loi est PF_2 . Alors, $(Z_\lambda, \lambda \geq 0)$ est conditionnellement monotone, et pour toute mesure positive μ sur $\mathbb{R}^+$ (ou $\mathbb{N}$) de masse totale finie,

$$\left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{tZ_\lambda}}{\mathbb{E}[e^{tZ_\lambda}]} \mu(d\lambda), t \geq 0 \right) \quad \text{est un peacock.}$$

Démonstration.

Il suffit de montrer que $(Z_\lambda, \lambda \geq 0)$ satisfait la condition $(\widetilde{CM})$. Soit $n \in \llbracket 1, +\infty \rrbracket$ et $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ appartenant à $\mathcal{I}_n$. Pour tout $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ et $k \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{Z}$),

$$\mathbb{E}[\phi(Z_{\lambda_1}, Z_{\lambda_2}, \dots, Z_{\lambda_n}) | Z_{\lambda_n} = k] = \mathbb{E}[\widehat{\phi}(Z_{\lambda_1}, Z_{\lambda_2} - Z_{\lambda_1}, \dots, Z_{\lambda_n} - Z_{\lambda_{n-1}}) | Z_{\lambda_n} = k],$$

où la fonction $\hat{\phi}$ est donnée par :

$$\hat{\phi}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi(x_1, x_2 + x_1, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n).$$

Comme $\hat{\phi}$ appartient à $\mathcal{I}_n$, il ne reste qu'à appliquer le Théorème 4.29 avec : $X_1 = Z_{\lambda_1}$ et $X_{i+1} = Z_{\lambda_{i+1}} - Z_{\lambda_i}$ $i = 1, \dots, n-1$ pour conclure. $\square$

Remarque 4.31.

1) Le résultat d'Efron est en fait plus fort que la simple notion de monotonie conditionnelle telle qu'énoncée Proposition 4.15. En particulier, soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus de Lévy. On suppose que pour tout $t > 0$, X_t admet une densité f_t strictement positive sur $]a, b[$ et nulle en dehors. Alors, en reprenant la preuve de [Efr65], on constate que le processus $(X_t, t \geq 0)$ est conditionnellement monotone si et seulement si, pour tout $s < t$ et tout $z \in]a, b[$, la fonction :

$$x \mapsto \frac{\int_z^{+\infty} f_s(u) f_{t-s}(x-u) du}{f_t(x)} \quad \text{est croissante sur }]a, b[.$$

Cette relation est bien sûr satisfaite par les processus de Lévy dont la densité f_t est log-concave pour tout $t > 0$ (en particulier le mouvement brownien avec dérive). On peut vérifier que le processus gamma la satisfait également. En effet, pour $z \geq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(s)\Gamma(t-s)x^{t-1}e^{-x}} \int_z^{+\infty} u^{s-1}e^{-u}(x-u)^{t-s-1}e^{-(x-u)}1_{\{0 \leq u \leq x\}} du \\ = \frac{\Gamma(t)}{\Gamma(s)\Gamma(t-s)} \int_{z/x}^{+\infty} v^{s-1}(1-v)^{t-s-1}1_{\{0 \leq v \leq 1\}} dv \end{aligned}$$

est une fonction croissante de x .

2) On déduit du Corollaire 4.30 qu'en particulier le processus de Poisson et la marche aléatoire à accroissements géométriques sont conditionnellement monotones. Nous en donnons ci-dessous une preuve directe, c'est-à-dire sans utiliser le résultat d'Efron.

Exemple 4.32 (Le processus de Poisson). Soit $(N_\lambda, \lambda \geq 0)$ un processus de Poisson de paramètre 1 et soit $(T_n, n \geq 1)$ la suite de ses temps de sauts. Alors

$$N_\lambda = \#\{i \geq 1 : T_i \leq \lambda\}.$$

Afin de prouver que $(N_\lambda, \lambda \geq 0)$ est conditionnellement monotone, nous allons montrer que, pour tout $0 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ et toute fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dans $\mathcal{I}_n$, on a :

$$\mathbb{E}[\phi(N_{\lambda_1}, \dots, N_{\lambda_n}) | N_{\lambda_n}] = \phi_n(N_{\lambda_n}), \quad (4.13)$$

où $\phi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante. Mais conditionnellement à $\{N_{\lambda_n} = k\}$, le vecteur aléatoire $(T_1, \dots, T_k)$ est distribué comme $(U_1, \dots, U_k)$, $U_1, \dots, U_k$ étant des v.a. uniformes sur $[0, \lambda_n]$ ré-ordonnées par ordre croissant. Nous allons effectuer un couplage à partir de cette construction : les k v.a. uniformes $U_1, \dots, U_k$ étant fixées, on considère le pont de Poisson $(N_\lambda^{(k)}, \lambda \leq \lambda_n)$ sur $[0, \lambda_n]$ se terminant en k associé à $(U_1, \dots, U_k)$. Le passage de k à $k+1$ s'effectue en ajoutant un saut : soit V une v.a. uniforme sur $[0, \lambda_n]$, et $(N_\lambda^{(k+1)}, \lambda \leq \lambda_n)$ le pont de Poisson sur $[0, \lambda_n]$ se terminant en $k+1$ associé au réarrangement croissant de $U_1, \dots, U_k, V$. On a clairement, pour tout $\lambda \in [0, \lambda_n]$, $N_\lambda^{(k+1)} \geq N_\lambda^{(k)}$, et la propriété de monotonie conditionnelle s'ensuit.

Corollaire 4.33. Soit $(N_\lambda, \lambda \geq 0)$ un processus de Poisson et soit μ une mesure positive finie sur $\mathbb{R}^+$. Alors, pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et strictement croissante, le processus :

$$\left(A_t^{(\mu, \varphi)} := \int_0^\infty \frac{e^{-t\varphi(N_\lambda)}}{\mathbb{E}[e^{-t\varphi(N_\lambda)}]} \mu(d\lambda), t \geq 0 \right) \quad \text{est un peacock.} \quad (4.14)$$

Exemple 4.34 (La marche aléatoire à pas géométriques).

Soit $(\varepsilon_i, i \in \mathbb{N})$ une suite de v.a. mutuellement indépendantes de loi géométrique de paramètre p ;

$$\mathbb{P}(\varepsilon_i = k) = p^{k-1}(1-p) \quad (k \geq 1, 0 < p < 1).$$

On considère la marche aléatoire $(S_n, n \in \mathbb{N})$ définie par : $S_0 = 0$ et

$$S_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on prouve facilement par récurrence que la loi de S_n est donnée par

$$\mathbb{P}(S_n = k) = C_{k-1}^{n-1} p^{k-n} (1-p)^n, \text{ pour tout } k \geq n.$$

Pour montrer la monotonie conditionnelle de $(S_n, n \geq 0)$, il suffit donc d'obtenir que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dans $\mathcal{I}_n$:

$$k \mapsto \mathbb{E}[\phi(S_1, \dots, S_n) | S_{n+1} = k] \quad \text{est une fonction croissante sur } \llbracket n+1, +\infty \rrbracket. \quad (4.15)$$

Soit $\mathbf{J}_n^k$ l'ensemble :

$$\mathbf{J}_n^k := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n : 0 < x_1 < \dots < x_n < k\}. \quad (4.16)$$

Pour tout $k \geq 1$ et $n \geq 1$, il est clair que $|\mathbf{J}_n^k| = C_{k-1}^n$. Écrivons :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\phi(S_1, \dots, S_n) | S_{n+1} = k] \\ &= \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_n^k} \phi(l_1, \dots, l_n) \frac{\mathbb{P}(S_1 = l_1, \dots, S_n = l_n, S_{n+1} = k)}{\mathbb{P}(S_{n+1} = k)} \\ &= \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_n^k} \phi(l_1, \dots, l_n) \frac{\mathbb{P}(S_1 = l_1, S_2 - S_1 = l_2 - l_1, \dots, S_{n+1} - S_n = k - l_n)}{\mathbb{P}(S_{n+1} = k)} \\ &= \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_n^k} \phi(l_1, \dots, l_n) \frac{\mathbb{P}(S_1 = l_1) \mathbb{P}(S_2 - S_1 = l_2 - l_1) \dots \mathbb{P}(S_{n+1} - S_n = k - l_n)}{\mathbb{P}(S_{n+1} = k)} \\ &= \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_n^k} \phi(l_1, \dots, l_n) \frac{p^{l_1-1}(1-p) p^{l_2-l_1-1}(1-p) \dots p^{k-l_n-1}(1-p)}{C_{k-1}^n p^{k-n-1} (1-p)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{C_{k-1}^n} \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_n^k} \phi(l_1, \dots, l_n) \end{aligned}$$

Par conséquent, conditionnellement à $\{S_{n+1} = k\}$, la loi du vecteur aléatoire $(S_1, \dots, S_n)$ est la loi uniforme sur l'ensemble $\mathbf{J}_n^k$. Il nous faut donc prouver pour obtenir (4.15), que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé,

$$k \geq n+1 \mapsto \frac{\sum_{0 < l_1 < \dots < l_n < k} \phi(l_1, \dots, l_n)}{\sum_{0 < l_1 < \dots < l_n < k} 1}$$

est une fonction croissante. Nous allons raisonner par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

• Initialisation : $n = 1$. Posons

$$f(k) := \frac{\sum_{0 < l_1 < k} \phi(l_1)}{\sum_{0 < l_1 < k} 1} = \frac{\phi(1) + \dots + \phi(k-1)}{k-1}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} f(k+1) &= \frac{\phi(1) + \dots + \phi(k-1) + \phi(k)}{k} \\ &= \frac{k-1}{k} f(k) + \frac{\phi(k)}{k} \\ &= f(k) + \frac{1}{k} \left(\phi(k) - \frac{\phi(1) + \dots + \phi(k-1)}{k-1} \right) \geq f(k) \end{aligned}$$

car ϕ est une fonction croissante.

• Héritéité.

Nous devons vérifier que :

$$\frac{\sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_{n+1}^{k+1}} \phi(l_1, \dots, l_{n+1})}{\sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_{n+1}^{k+1}} 1} \geq \frac{\sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_{n+1}^k} \phi(l_1, \dots, l_{n+1})}{\sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_{n+1}^k} 1}$$

ce que l'on réécrit de manière équivalente :

$$\begin{aligned} &\sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_{n+1}^{k+1}} \phi(l_1, \dots, l_{n+1}) \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_{n+1}^k} 1 \geq \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_{n+1}^k} \phi(l_1, \dots, l_{n+1}) \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_{n+1}^{k+1}} 1 \\ \iff &\sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_n^k} \phi(l_1, \dots, k) \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_{n+1}^k} 1 \geq \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_{n+1}^k} \phi(l_1, \dots, l_{n+1}) \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_n^k} 1 \\ &\text{en simplifiant de chaque coté le terme } \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_{n+1}^k} \phi(l_1, \dots, l_{n+1}) \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_{n+1}^k} 1 \\ \iff &\left(\sum_{i=n+1}^{k-1} \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_n^i} 1 \right) \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_n^k} \phi(l_1, \dots, k) \geq \left(\sum_{i=n+1}^{k-1} \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_n^i} \phi(l_1, \dots, i) \right) \sum_{(l_1, \dots, l_n) \in \mathbf{J}_n^k} 1 \end{aligned}$$

et il suffit donc de prouver que pour tout $i \in \llbracket n+1, k-1 \rrbracket$:

$$\sum_{0 < l_1 < \dots < l_n < k} \phi(l_1, \dots, k) \sum_{0 < l_1 < \dots < l_n < i} 1 \geq \sum_{0 < l_1 < \dots < l_n < i} \phi(l_1, \dots, i) \sum_{0 < l_1 < \dots < l_n < k} 1.$$

Or :

$$\frac{\sum_{0 < l_1 < \dots < l_n < k} \phi(l_1, \dots, k)}{\sum_{0 < l_1 < \dots < l_n < k} 1} \geq \frac{\sum_{0 < l_1 < \dots < l_n < k} \phi(l_1, \dots, i)}{\sum_{0 < l_1 < \dots < l_n < k} 1} \geq \frac{\sum_{0 < l_1 < \dots < l_n < i} \phi(l_1, \dots, i)}{\sum_{0 < l_1 < \dots < l_n < i} 1}$$

car ϕ est croissante en chacune de ses variables, et en appliquant l'hypothèse de récurrence. $\square$

Corollaire 4.35. *Pour toute mesure positive finie $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \delta_n$ sur $\mathbb{N}$ et toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue et strictement croissante :*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{e^{-t\varphi(S_n)}}{\mathbb{E}[e^{-t\varphi(S_n)}]}, t \geq 0 \right) \quad \text{est un peacock.}$$

Remarque 4.36. *On peut effectuer un calcul similaire lorsque les v.a. géométriques $(\varepsilon_i)_{i \geq 0}$ peuvent prendre la valeur 0, voir [BPR11].*

4.3.3 Les diffusions “bien-réversibles” à temps fixe

Nous présentons à présent une classe importante d'exemples de processus conditionnellement monotones : les diffusions “bien-réversibles” à temps fixe.

Notations

Soient $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables et soit $(B_u, u \geq 0)$ un mouvement brownien standard issu de 0. Considérons l'EDS suivante :

$$X_\lambda = x + \int_0^\lambda \sigma(s, X_s) dB_s + \int_0^\lambda b(s, X_s) ds, \quad \lambda \geq 0. \quad (4.17)$$

Nous supposons :

(A1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, cette EDS admet une unique solution trajectorielle $(X_\lambda^{(x)}, \lambda \geq 0)$, et l'application $x \longmapsto (X_\lambda^{(x)}, \lambda \geq 0)$ peut être choisie mesurable.

En conséquence, d'après le théorème de Yamada-Watanabe, $(X_\lambda^{(x)}, \lambda \geq 0)$ est une solution forte de l'équation (4.17), et jouit donc de la propriété de Markov forte ; de plus le noyau de transition $P_\lambda(x, dy) = \mathbb{P}(X_\lambda^{(x)} \in dy)$ est mesurable.

Remarquons que, pour $x \leq y$, le processus $(X_\lambda^{(y)}, \lambda \geq 0)$ est stochastiquement plus grand que $(X_\lambda^{(x)}, \lambda \geq 0)$ au sens suivant : pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $\lambda \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X_\lambda^{(y)} \geq a) \geq \mathbb{P}(X_\lambda^{(x)} \geq a). \quad (4.18)$$

En effet, en supposant $(X_\lambda^{(x)}, \lambda \geq 0)$ et $(X_\lambda^{(y)}, \lambda \geq 0)$ tous deux définis sur le même espace de probabilités, et en notant T le temps de couplage défini par :

$$T = \inf\{\lambda \geq 0; X_\lambda^{(x)} = X_\lambda^{(y)}\} \\ (= +\infty \text{ si } \{\lambda \geq 0; X_\lambda^{(x)} = X_\lambda^{(y)}\} = \emptyset),$$

il est alors clair que, sur $\{T = +\infty\}$,

$$X_\lambda^{(y)} \geq X_\lambda^{(x)} \quad (\text{puisque } y \geq x)$$

tandis que sur $\{T < +\infty\}$, on a :

$$X_\lambda^{(y)} > X_\lambda^{(x)} \quad \text{pour tout } \lambda \in [0, T[$$

et

$$X_\lambda^{(y)} = X_\lambda^{(x)} \quad \text{pour tout } \lambda \in [T, +\infty[$$

puisque, d'après notre hypothèse (A1), (4.17) admet une unique solution qui est fortement markovienne.

Par ailleurs, (4.18) est équivalente à : pour toute fonction croissante (resp. décroissante) bornée, et pour tout $\lambda \geq 0$:

$$x \rightarrow \mathbb{E}_x[\phi(X_\lambda)] = \int_{\mathbb{R}} P_\lambda(x, dy) \phi(y) \text{ est croissante (resp. décroissante).} \quad (4.19)$$

Lemme 4.37. *Soit $((X_\lambda)_{\lambda \geq 0}, (\mathcal{F}_\lambda)_{\lambda \geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{R}})$ un processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui satisfait à (4.18). Alors, pour tout $n \geq 1$, tout $0 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_n$, tout $i \in \{1, \dots, n\}$, toute fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dans $\mathcal{I}_n$, et tout $x \geq 0$,*

$$\mathbb{E}_x[\phi(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}) | \mathcal{F}_{\lambda_i}] = \tilde{\phi}_i(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_i}), \quad (4.20)$$

où $\tilde{\phi}_i : \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $\mathcal{I}_i$. En particulier,

$$x \rightarrow \mathbb{E}_x[\phi(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n})] \text{ est croissante.} \quad (4.21)$$

Démonstration.

Si $i = n$, (4.20) est clairement satisfaite. Si $i = n - 1$, alors (4.20) est aussi satisfaite puisque :

$$\mathbb{E}_x[\phi(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_{n-1}}, X_{\lambda_n}) | \mathcal{F}_{\lambda_{n-1}}] = \int_{\mathbb{R}} \phi(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_{n-1}}, y) P_{\lambda_n - \lambda_{n-1}}(X_{\lambda_{n-1}}, dy)$$

et ainsi, pour $i = n - 1$, (4.20) découle directement de (4.19). On achève alors la preuve par itération descendante. $\square$

Observons qu'en conséquence, la propriété de monotonie conditionnelle (CM) pour ces diffusions est équivalente à $(\widetilde{\text{CM}})$.

Retournement à temps fixe

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Nous supposons :

(A2) Pour tout $\lambda > 0$, $\sigma(\lambda, \cdot)$ est une fonction dérivable et X_λ admet une densité p de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.

En posant

$$a(\lambda, y) := \sigma^2(\lambda, y) \quad \text{pour tout } \lambda \geq 0 \text{ et } y \in \mathbb{R},$$

on définit successivement, pour tout $\lambda_0 > 0$ fixé et pour $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \bar{a}^{\lambda_0}(\lambda, y) = a(\lambda_0 - \lambda, y), & (0 \leq \lambda \leq \lambda_0) \\ \bar{b}^{\lambda_0}(\lambda, y) = -b(\lambda_0 - \lambda, y) + \frac{1}{p(\lambda_0 - \lambda, y)} \frac{\partial}{\partial y} (a(\lambda_0 - \lambda, y) p(\lambda_0 - \lambda, y)), & (0 \leq \lambda < \lambda_0) \end{cases} \quad (4.22)$$

Sous de “bonnes conditions” sur les fonctions a et b , Haussmann et Pardoux [HP86] (voir également Meyer [Mey94]) ont prouvé que :

(A3) Le processus $(\bar{X}_\lambda^{\lambda_0}, 0 \leq \lambda < \lambda_0)$ obtenu en retournant $(X_\lambda, 0 < \lambda \leq \lambda_0)$ au temps λ_0 :

$$(\bar{X}_\lambda^{\lambda_0}, 0 \leq \lambda < \lambda_0) := (X_{\lambda_0 - \lambda}, 0 \leq \lambda < \lambda_0)$$

est une diffusion et il existe un mouvement brownien $(\bar{B}_u, 0 \leq u \leq \lambda_0)$, indépendant de X_{λ_0} , tel que $(\bar{X}_\lambda^{\lambda_0}, 0 \leq \lambda < \lambda_0)$ soit solution forte de l'EDS :

$$\begin{cases} dY_\lambda &= \bar{\sigma}^{\lambda_0}(\lambda, Y_\lambda) d\bar{B}_\lambda + \bar{b}^{\lambda_0}(\lambda, Y_\lambda) d\lambda & (0 \leq \lambda < \lambda_0) \\ Y_0 &= X_{\lambda_0} & (\text{avec } \bar{\sigma}^{\lambda_0}(\lambda, y) = \sigma(\lambda_0 - \lambda, y)). \end{cases} \quad (4.23)$$

Notons que les coefficients $\bar{b}^{\lambda_0}$ et $\bar{\sigma}^{\lambda_0}$ dépendent de x .

Résultat principal

Notre objectif ici n'est pas de donner des conditions optimales sous lesquelles les assertions (A1)-(A3) sont satisfaites. Nous renvoyons pour une telle étude à [HP86] ou [MNS89]. Nous présentons néanmoins deux jeux d'hypothèses, (H1) et (H2), chacun d'entre eux impliquant les assertions (A1)-(A3)

(H1) On suppose que :

- i) les fonctions $(\lambda, y) \mapsto \sigma(\lambda, y)$ et $(\lambda, y) \mapsto b(\lambda, y)$ sont de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, localement Lipschitziennes en y uniformément en λ , et la solution de (4.17) n'explose pas sur $[0, \lambda_0]$,
- ii) il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$a(\lambda, y) \equiv \sigma^2(\lambda, y) \geq \alpha \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R} \text{ et } 0 \leq \lambda \leq \lambda_0,$$

et

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} \in L^\infty([0, \lambda_0] \times \mathbb{R}^+).$$

(H2) On suppose que :

- i) les fonctions σ et b sont de classe $\mathcal{C}^{1,2}$, localement Lipschitziennes en y uniformément en λ , et la solution de (4.17) n'explose pas sur $[0, \lambda_0]$,
- ii) les fonctions a et b sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ en (λ, y) et l'opérateur différentiel

$$\bar{L} = \frac{\partial}{\partial \lambda} + L_\lambda$$

est hypo-elliptique (voir Ikeda-Watanabe [IW89, p.411] pour la définition et les propriétés des opérateurs hypo-elliptiques), où $(L_\lambda, \lambda \geq 0)$ est le générateur de la diffusion (4.17) :

$$L_\lambda = \frac{1}{2} a(\lambda, \cdot) \frac{d}{dy^2} + b(\lambda, \cdot) \frac{d}{dy}. \quad (4.24)$$

Alors, sous chacune des conditions (H1) et (H2), les assertions $(A_i)_{i=1\dots 3}$ précédentes sont satisfaites. Nous pouvons à présent énoncer le résultat principal de cette section :

Théorème 4.38. *Sous l'une ou l'autre des hypothèses (H1) ou (H2), et pour tout $x \in \mathbb{R}$, le processus $(X_\lambda, \lambda > 0)$ est conditionnellement monotone sous $\mathbb{P}_x$.*

Démonstration.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ appartenant à $\mathcal{I}_n$. Pour tout $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ et tout

$i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}_x [\phi(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}) | X_{\lambda_i} = z] \\
 &= \mathbb{E}_x [\mathbb{E}_x [\phi(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}) | \mathcal{F}_{\lambda_i}] | X_{\lambda_i} = z] \\
 &= \mathbb{E}_x [\tilde{\phi}_i(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_i}) | X_{\lambda_i} = z] \\
 & \quad (\text{d'après le Lemme 4.37, où } \tilde{\phi}_i : \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R} \text{ appartient à } \mathcal{I}_i) \\
 &= \mathbb{E}_x [\tilde{\phi}_i(\bar{X}_{\lambda_i - \lambda_1}^{\lambda_i}, \dots, \bar{X}_0^{\lambda_i}) | \bar{X}_0^{\lambda_i} = z] \quad (\text{par retournement du temps à l'instant } \lambda_i) \\
 &= \mathbb{E}_z [\tilde{\phi}_i(\bar{X}_{\lambda_i - \lambda_1}^{\lambda_i}, \dots, \bar{X}_{\lambda_i - \lambda_{i-1}}^{\lambda_i}, z)]
 \end{aligned}$$

et, en appliquant (4.21) au processus retourné $(\bar{X}_\lambda^{\lambda_i}, 0 \leq \lambda < \lambda_i)$, cette dernière expression est une fonction bornée croissante en la variable z . $\square$

Remarque 4.39. Observons que nous avons délibérément exclu le point $\lambda_1 = 0$ dans le Théorème 4.38, puisque les diffusions “bien-réversibles” peuvent être retournée a priori uniquement sur $]0, \lambda_0]$: $(\bar{X}_\lambda^{\lambda_0}, 0 \leq \lambda < \lambda_0) := (X_{\lambda_0 - \lambda}, 0 \leq \lambda < \lambda_0)$.

Corollaire 4.40. Soit $(X_\lambda, \lambda > 0)$ l'unique solution forte de (4.17), à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, où b et σ satisfont soit (H1), soit (H2). Alors, pour toute mesure positive μ sur $]0, +\infty[$ et pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et strictement croissante, le processus :

$$\left(A_t^{(\mu, \varphi)} := \int_0^\infty \frac{e^{-t\varphi(X_\lambda)}}{\mathbb{E}[e^{-t\varphi(X_\lambda)}]} \mu(d\lambda), t \geq 0 \right) \quad \text{est un peacock.} \quad (4.25)$$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$ et notons $\mu^{(\varepsilon)}$ la restriction de μ à l'intervalle $[\varepsilon, +\infty[$: $\mu^{(\varepsilon)} := \mu|_{[\varepsilon, +\infty[}$. Comme $(-\varphi(X_\lambda), \lambda \geq \varepsilon)$ est un processus continu et négatif, les conditions (INT1) et (INT2) sont satisfaites, et on peut appliquer les Théorèmes 4.38 et 4.13 pour obtenir que, pour tout $\theta \in \mathcal{C}^{\uparrow}$ et tout $0 \leq s \leq t$:

$$\mathbb{E} [\theta(A_s^{(\mu^{(\varepsilon)}, \varphi)})] \leq \mathbb{E} [\theta(A_t^{(\mu^{(\varepsilon)}, \varphi)})].$$

Ainsi, en procédant comme dans le Point 4) de la preuve du Théorème 4.13, le résultat s'ensuit en laissant ε tendre vers 0. $\square$

Quelques exemples de diffusions “bien-réversibles” à temps fixe

Exemple 4.41 (Mouvement brownien avec dérive ν).

On prend $\sigma \equiv 1, b(s, y) = \nu$ et $X_\lambda = x + B_\lambda + \nu\lambda$. Alors,

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y - (x + \nu t))^2}{2t}\right),$$

et $(\bar{X}_\lambda^{\lambda_0}, 0 \leq \lambda < \lambda_0)$ est la solution de :

$$Y_\lambda = \bar{X}_0^{\lambda_0} + \bar{B}_\lambda + \int_0^\lambda \frac{x - Y_u}{\lambda_0 - u} du$$

où $(\bar{B}_\lambda, 0 \leq \lambda < \lambda_0)$ est indépendant de $\bar{X}_0^{\lambda_0} = X_{\lambda_0}^{(x)}$.

Nous référons à Jeulin-Yor [JY79] pour des calculs similaires.

Exemple 4.42 (Processus de Bessel de dimension $\delta \geq 2$).

On prend $\sigma \equiv 1$ et $b(s, y) = \frac{\delta - 1}{2y}$, avec $\delta = 2(\nu + 1)$, $\delta \geq 2$. Alors,

i) pour $x > 0$:

$$p(t, x, y) = \frac{1}{t} \frac{y^{\nu+1}}{x^\nu} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right),$$

où I_ν désigne la fonction de Bessel modifiée d'index ν (voir (2.57)), et $(\bar{X}_\lambda^{\lambda_0}, 0 \leq \lambda < \lambda_0)$ est la solution de :

$$Y_\lambda = \bar{X}_0^{\lambda_0} + \bar{B}_\lambda + \int_0^\lambda \left(\frac{1}{2Y_u} - \frac{Y_u}{\lambda_0 - u} + \frac{x}{\lambda_0 - u} \frac{I'_\nu}{I_\nu} \left(\frac{xY_u}{\lambda_0 - u} \right) \right) du.$$

ii) pour $x = 0$:

$$p(t, 0, y) = \frac{1}{2^\nu t^{\nu+1} \Gamma(\nu + 1)} y^{2\nu+1} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right),$$

et $(\bar{X}_\lambda^{\lambda_0}, 0 \leq \lambda < \lambda_0)$ est la solution de :

$$Y_\lambda = \bar{X}_0^{\lambda_0} + \bar{B}_\lambda + \int_0^\lambda \left(\frac{2\nu + 1}{2Y_u} - \frac{Y_u}{\lambda_0 - u} \right) du$$

Exemple 4.43 (Carrés de Bessel de dimension $\delta > 0$).

On prend $\sigma(s, y) = 2\sqrt{y}$ et $b \equiv \delta$. Alors :

i) pour $x > 0$:

$$p(t, x, y) = \frac{1}{2t} \left(\frac{y}{x} \right)^{\nu/2} \exp\left(-\frac{x+y}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{\sqrt{xy}}{t}\right),$$

et $(\bar{X}_\lambda^{\lambda_0}, 0 \leq \lambda < \lambda_0)$ est la solution de :

$$Y_\lambda = \bar{X}_0^{\lambda_0} + 2 \int_0^\lambda \sqrt{Y_u} dB_u + 2\lambda - 2 \int_0^\lambda \left(\frac{Y_u}{\lambda - u} - \frac{\sqrt{xY_u}}{\lambda_0 - u} \frac{I'_\nu}{I_\nu} \left(\frac{\sqrt{xY_u}}{\lambda_0 - u} \right) \right) du.$$

ii) pour $x = 0$:

$$p(t, 0, y) = \left(\frac{1}{2t} \right)^{\delta/2} \frac{1}{\Gamma(\delta/2)} y^{\frac{\delta}{2}-1} \exp\left(-\frac{y}{2t}\right),$$

et $(\bar{X}_\lambda^{\lambda_0}, 0 \leq \lambda < \lambda_0)$ est la solution de :

$$Y_\lambda = \bar{X}_0^{\lambda_0} + 2 \int_0^\lambda \sqrt{Y_u} dB_u + \delta\lambda - \int_0^\lambda \frac{2Y_u}{\lambda - u} du.$$

Notons que l'on aurait aussi pu obtenir cet exemple en élevant au carré les résultats sur les processus de Bessel.

Remarque 4.44. *Tous les exemples précédents sont liés à la notion de grossissement initial d'une filtration (par la valeur terminale). Nous renvoyons à Mansuy-Yor [MY02] pour de plus amples détails.*

4.4 Une autre famille de peacocks markoviens

Nous présentons dans cette section un autre jeu d'hypothèses sur le processus de Markov $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ qui assure que :

$$\left(A_t^{(\mu)} := \int_0^\infty \frac{e^{-tX_\lambda}}{\mathbb{E}[e^{-tX_\lambda}]} \mu(d\lambda), t \geq 0 \right) \quad \text{est un peacock.}$$

Définition 4.45. *Un processus $(X_\lambda, \lambda \geq 0; \mathbb{P}_x, x \in \mathbb{R}^+)$ markovien continu à droite, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, satisfait la condition (L) si les deux Points (i) et (ii) ci-dessous sont vérifiés :*

- i) *Ce processus est croissant pour l'ordre stochastique par rapport à son point de départ x ; en d'autres termes, pour tout $a \geq 0$ et $\lambda \geq 0$, et pour tout $0 \leq x \leq y$:*

$$\mathbb{P}_y(X_\lambda \geq a) \geq \mathbb{P}_x(X_\lambda \geq a). \quad (4.26)$$

- ii) *La transformée de Laplace $\mathbb{E}_x[e^{-tX_\lambda}]$ est de la forme :*

$$\mathbb{E}_x[e^{-tX_\lambda}] = C_1(t, \lambda) \exp(-x C_2(t, \lambda)), \quad (4.27)$$

où C_1 et C_2 sont deux fonctions positives telles que :

- Pour tout $t > 0$ et $\lambda \geq 0$,

$$\frac{\partial}{\partial t} C_2(t, \lambda) > 0. \quad (4.28)$$

- Pour tout $t \geq 0$ et tout compact K , il existe deux constantes $k_K(t) > 0$ et $\tilde{k}_K(t) < +\infty$ telles que :

$$k_K(t) \leq \inf_{\lambda \in K} C_1(t, \lambda); \quad \sup_{\lambda \in K} C_2(t, \lambda) \leq \tilde{k}_K(t). \quad (4.29)$$

En prenant $x = 0$ dans (4.27), on observe que $C_1(\cdot, \lambda)$ est complètement monotone (et donc $\mathcal{C}^\infty$) sur $]0, +\infty[$ et continue en 0. En conséquence, $C_2(\cdot, \lambda)$ est également $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et continue en 0. De plus, on a pour $t > 0$ et $\lambda \geq 0$:

$$\mathbb{E}_x[X_\lambda e^{-tX_\lambda}] = \left(-\frac{\partial}{\partial t} C_1(t, \lambda) + x C_1(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial t} C_2(t, \lambda) \right) \exp(-x C_2(t, \lambda))$$

et on définit, pour $t > 0$, $\lambda \geq 0$ et $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \alpha(t, \lambda, y) &:= -\frac{\partial}{\partial t} C_1(t, \lambda) + y C_1(t, \lambda), \\ \beta(t, \lambda) &:= C_1(t, \lambda) \frac{\partial}{\partial t} C_2(t, \lambda) > 0. \end{cases} \quad (4.30)$$

Nous pouvons à présent énoncer le principal théorème de cette section :

Théorème 4.46. *Soit $(X_\lambda, \lambda \geq 0; \mathbb{P}_x, x \in \mathbb{R}^+)$ un processus de Markov satisfaisant la condition (L). Alors, pour tout $x \geq 0$ et toute mesure positive finie μ sur $\mathbb{R}^+$,*

$$\left(A_t^{(\mu)} := \int_0^\infty e^{-tX_\lambda - h_\lambda(t)} \mu(d\lambda), t \geq 0 \right)$$

est un peacock sous $\mathbb{P}_x$, où la fonction h_λ est définie par :

$$h_\lambda(t) = \log(\mathbb{E}_x[e^{-tX_\lambda}]).$$

Avant de prouver le Théorème 4.46, donnons deux exemples de processus $(X_\lambda, \lambda \geq 0; \mathbb{P}_x, x \in \mathbb{R}^+)$ satisfaisant la condition (L).

Exemple 4.47. Soit $(X_\lambda, \lambda \geq 0; \mathbb{Q}_x, x \in \mathbb{R}^+)$ un carré de Bessel de dimension δ (que nous noterons BESQ^δ , $\delta \geq 0$, voir [RY99, Chapter XI]). Ce processus satisfait la condition (L) puisque :

- Il est stochastiquement croissant par rapport à x ; en effet, il est solution d'une EDS possédant une unique solution forte, donc possède la propriété de Markov forte.
- Pour tout $t > 0$, on a :

$$\mathbb{Q}_x [e^{-tX_\lambda}] = \frac{1}{(1 + 2t\lambda)^{\frac{\delta}{2}}} \exp \left(-\frac{tx}{1 + 2t\lambda} \right),$$

ce qui fournit le Point (ii) de la Définition 4.45.

En particulier, pour $(X_t, t \geq 0)$ un carré de Bessel de dimension 0, $(A_t^{(\mu)}, t \geq 0)$ est un peacock. Ce cas ne rentrait pas dans le cadre de l'Exemple 4.43.

Exemple 4.48 (Généralisation de l'exemple précédent pour $\delta = 0$).

Soit $(X_\lambda, \lambda \geq 0; \mathbb{P}_x, x \in \mathbb{R}^+)$ un processus de branchement à espace d'états continu (que nous abrègerons CSBP suivant la terminologie anglo-saxonne, voir [LG99]). Nous notons $P_\lambda(x, dy)$ la loi de X_λ sous $\mathbb{P}_x$, et $*$ le produit de convolution. Alors (P_λ) satisfait :

$$P_\lambda(x, \cdot) * P_\lambda(x', \cdot) = P_\lambda(x + x', \cdot) \quad \text{pour tout } \lambda \geq 0, x \geq 0 \text{ et } x' \geq 0$$

ce qui implique (4.26) (voir [LG99, p.21-23]). Par ailleurs, on a :

$$\mathbb{E}_x [e^{-tX_\lambda}] = \exp(-x C(t, \lambda)), \quad (4.31)$$

où la fonction $C : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait :

- pour tout $\lambda \geq 0$, la fonction $C(\cdot, \lambda)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $]0, +\infty[$, et

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t, \lambda) > 0 \quad \text{pour tout } t > 0,$$

- pour tout $t \geq 0$ et tout compact K , il existe une constante $k_K(t) < \infty$ telle que :

$$\sup_{\lambda \in K} C(t, \lambda) \leq k_K(t). \quad (4.32)$$

Donc, $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ satisfait (4.27).

Remarque 4.49. Cet exemple généralise le précédent dans le sens suivant. Soit $(Y_t, t \geq 0)$ un processus de Lévy d'exposant caractéristique $\psi(\lambda) = c\lambda^\alpha$, ($c > 0, \alpha \in]1, 2]$) :

$$\mathbb{E} [e^{-\lambda Y_t}] = \exp(-ct\lambda^\alpha).$$

On note $(H_t, t \geq 0)$ le processus des hauteurs associé à $(Y_t, t \geq 0)$. Ce processus admet une famille de temps locaux $(L_t^a(H), t \geq 0, a \geq 0)$ et, en notant $\tau_r(H) := \inf\{s \geq 0; L_s^0(H) > r\}$ son inverse continu à droite, le processus $(L_{\tau_r(H)}^a, a \geq 0)$ est un CSBP stable d'index α (voir [LG99]). Observons alors que, pour $\alpha = 2$ et $c = \frac{1}{2}$, $(Y_t := B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard issu de 0, $(H_t, t \geq 0) \stackrel{(loi)}{=} (|B_t|, t \geq 0)$ a même loi qu'un mouvement brownien réfléchi en 0, et, d'après le théorème de Ray-Knight, $(L_{\tau_r(H)}^a, a \geq 0)$ est un carré de Bessel de dimension 0 issu de r .

On pourra consulter [HPRY11b, Chapter 4] pour une description d'autres peacocks construits à partir de CSBP, ainsi que quelques martingales associées.

Démonstration.

Soit $(X_\lambda, \lambda \geq 0)$ un processus satisfaisant la condition (L).

1) $(-X_\lambda, \lambda \geq 0)$ étant un processus négatif, la condition (INT1) est clairement satisfaite. De plus, d'après (4.29), (INT2) est aussi vérifiée. Ainsi, en suivant la preuve du Théorème 4.13, il suffit de montrer que $(A_t^{(\mu)}, t \geq 0)$ est un peacock lorsque μ est une combinaison linéaire finie de mesures de Dirac avec des coefficients positifs.

2) Pour $t \geq 0, a_1 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$ et $0 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_n$, posons :

$$A_t := \sum_{i=1}^n a_i e^{-tX_{\lambda_i} - h_{\lambda_i}(t)}.$$

Soit $\psi \in \mathcal{C}$. On a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}_x[\psi(A_t)] = -\mathbb{E}_x \left[\psi'(A_t) \sum_{i=1}^n a_i e^{-tX_{\lambda_i} - h_{\lambda_i}(t)} (h'_{\lambda_i}(t) + X_{\lambda_i}) \right]$$

et, nous allons montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\Delta_i \leq 0$, avec :

$$\Delta_i := \mathbb{E}_x \left[\psi'(A_t) e^{-tX_{\lambda_i} - h_{\lambda_i}(t)} (h'_{\lambda_i}(t) + X_{\lambda_i}) \right] = \mathbb{E}_x [\psi'(A_t) e_{\lambda_i}(X_{\lambda_i})],$$

et où l'on a posé :

$$e_{\lambda_i}(z) := e^{-tz - h_{\lambda_i}(t)} (h'_{\lambda_i}(t) + z).$$

Observons que, puisque $\mathbb{E} [e^{-tX_{\lambda_i} - h_{\lambda_i}(t)}] = 1$, il vient par dérivation :

$$\mathbb{E}_x [e_{\lambda_i}(X_{\lambda_i})] = 0. \quad (4.33)$$

Comme la fonction

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \psi' \left(\sum_{j=0}^n a_j e^{-tx_j - h_{\lambda_j}(t)} \right)$$

est bornée et décroissante par rapport à chacun de ses arguments, il suffit de montrer que : pour toute fonction borélienne bornée $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ décroissante en chacun de ses arguments, et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{E}_x [\phi(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}) e_{\lambda_i}(X_{\lambda_i})] \leq 0. \quad (4.34)$$

3) Prouvons (4.34).

a) On peut supposer $i = n$. En effet, grâce à (4.26) et au Lemme 4.37, on a, pour $i < n$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x [\phi(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}) e_{\lambda_i}(X_{\lambda_i})] &= \mathbb{E}_x [\mathbb{E}_x [\phi(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}) | \mathcal{F}_{\lambda_i}] e_{\lambda_i}(X_{\lambda_i})] \\ &= \mathbb{E}_x [\tilde{\phi}_i(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_i}) e_{\lambda_i}(X_{\lambda_i})], \end{aligned}$$

où $\tilde{\phi}_i : \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction borélienne bornée décroissante en chacun de ses arguments.

b) Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x [\tilde{\phi}_i(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_i}) e_{\lambda_i}(X_{\lambda_i})] &= \mathbb{E}_x [\tilde{\phi}_i(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_i}) e^{-tX_{\lambda_i} - h_{\lambda_i}(t)} (h'_{\lambda_i}(t) + X_{\lambda_i})] \\ &\leq \mathbb{E}_x [\tilde{\phi}_i(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_{i-1}}, -h'_{\lambda_i}(t)) e_{\lambda_i}(X_{\lambda_i})] \\ &\quad (\text{puisque } \tilde{\phi}_i(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_i})(h'_{\lambda_i}(t) + X_{\lambda_i}) \leq \tilde{\phi}_i(X_{\lambda_1}, \dots, -h'_{\lambda_i}(t))(h'_{\lambda_i}(t) + X_{\lambda_i})) \\ &= \mathbb{E}_x \left[\tilde{\tilde{\phi}}_i(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_{i-1}}) e_{\lambda_i}(X_{\lambda_i}) \right], \end{aligned}$$

où $\tilde{\phi}_i : \mathbb{R}^{i-1} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction borélienne bornée décroissante en chacun de ses arguments définie par :

$$\tilde{\phi}_i(z_1, \dots, z_{i-1}) := \tilde{\phi}_i(z_1, \dots, z_{i-1}, -h'_{\lambda_i}(t)). \quad (4.35)$$

4) Achéons à présent la preuve du Théorème 4.46 en montrant le lemme suivant.

Lemme 4.50. *Soient $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{0, 1, \dots, i-1\}$, et soit $\phi : \mathbb{R}^j \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée décroissante en chacun de ses arguments. Alors,*

$$\mathbb{E}_x[\phi(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_j})e_{\lambda_i}(X_{\lambda_i})] \leq 0. \quad (4.36)$$

En particulier,

$$\mathbb{E}_x[\phi(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_{i-1}})e_{\lambda_i}(X_{\lambda_i})] \leq 0. \quad (4.37)$$

Démonstration. Nous prouvons ce lemme par récurrence sur j .

- Initialisation : pour $j = 0$, ϕ est constante et on a :

$$\mathbb{E}_x[\phi e_{\lambda_i}(X_{\lambda_i})] = \phi \mathbb{E}_x[e_{\lambda_i}(X_{\lambda_i})] = 0 \quad (\text{d'après (4.33)})$$

- Hérité : si on suppose (4.36) vérifiée pour $j \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket$ fixé, alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x[\phi(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_j}, X_{\lambda_{j+1}})e_{\lambda_i}(X_{\lambda_i})] \\ &= \mathbb{E}_x[\phi(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_j}, X_{\lambda_{j+1}})P_{\lambda_i - \lambda_{j+1}}e_{\lambda_i}(X_{\lambda_{j+1}})] \quad (\text{d'après la propriété de Markov}) \\ &= \mathbb{E}_x[\phi(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_j}, X_{\lambda_{j+1}})e^{-X_{\lambda_{j+1}}C_2(t, \lambda_i - \lambda_{j+1}) - h_{\lambda_i}(t)} \cdot \\ & \quad (\alpha(t, \lambda_i - \lambda_{j+1}, h'_{\lambda_i}(t)) + X_{\lambda_{j+1}}\beta(t, \lambda_i - \lambda_{j+1}))] \\ & \quad (\text{d'après (4.27) et (4.30), où } \beta > 0) \\ &\leq \mathbb{E}_x \left[\phi \left(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_j}, -\frac{\alpha(t, \lambda_i - \lambda_{j+1}, h'_{\lambda_i}(t))}{\beta(t, \lambda_i - \lambda_{j+1})} \right) P_{\lambda_i - \lambda_{j+1}}e_{\lambda_i}(X_{\lambda_{j+1}}) \right] \\ &= \mathbb{E}_x [\tilde{\phi}(X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_j})e_{\lambda_i}(X_{\lambda_i})] \leq 0 \quad (\text{par hypothèse de récurrence}), \end{aligned}$$

où $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^j \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\tilde{\phi}(z_1, \dots, z_j) := \phi \left(z_1, \dots, z_j, -\frac{\alpha(t, \lambda_i - \lambda_{j+1}, h'_{\lambda_i}(t))}{\beta(t, \lambda_i - \lambda_{j+1})} \right).$$

□

4.5 Ordre convexe et ordre stochastique

Définition 4.51. *Soient X et Y deux v.a. intégrables. X est dite plus grande que Y pour l'ordre convexe si, pour toute fonction convexe $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[\psi(X)] \geq \mathbb{E}[\psi(Y)]$. Nous notons cette relation d'ordre :*

$$X \stackrel{(c)}{\geq} Y.$$

Dans [HPRY11b], les auteurs prouvent que si $(M_t, t \geq 0)$ est une martingale dans H_{loc}^1 (donc, un peacock), et $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue et croissante telle que $\alpha(0) = 0$, alors le processus

$$\left(\frac{1}{\alpha(t)} \int_0^t M_u d\alpha(u), u \geq 0 \right)$$

est un peacock. En d'autres termes, pour tout $0 \leq s \leq t$:

$$\int_0^{+\infty} M_u \left(\frac{1}{\alpha(t)} 1_{[0,t]}(u) \right) d\alpha(u) \stackrel{(c)}{\geq} \int_0^{+\infty} M_u \left(\frac{1}{\alpha(s)} 1_{[0,s]}(u) \right) d\alpha(u).$$

A présent, il est clair que :

$$\left(\frac{1}{\alpha(t)} 1_{[0,t]}(u) \right) d\alpha(u) \stackrel{(st)}{\geq} \left(\frac{1}{\alpha(s)} 1_{[0,s]}(u) \right) d\alpha(u),$$

et cela nous amène à la question suivante : quels processus $(X_t, t \geq 0)$ satisfont, pour tout couple de probabilités (μ, ν) tel que $\mu \stackrel{(st)}{\geq} \nu$, la propriété :

$$A^{(\mu)} := \int_0^{+\infty} X_u \mu(du) \stackrel{(c)}{\geq} A^{(\nu)} := \int_0^{+\infty} X_u \nu(du) \quad ? \quad (4.38)$$

Observons tout de suite qu'un tel processus $(X_t, t \geq 0)$ doit être un peacock. En effet, en prenant, pour $0 \leq s \leq t$, $\mu = \delta_t$ et $\nu = \delta_s$, on obtient d'après (4.38) $X_t \stackrel{(c)}{\geq} X_s$, i.e. $(X_t, t \geq 0)$ est un peacock.

Voici donc une réponse partielle à cette question, concernant les processus markoviens :

Théorème 4.52. *Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus continu à droite et intégrable satisfaisant les deux conditions suivantes :*

- i) *Pour toute fonction croissante et bornée $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}[\phi(X_t) | \mathcal{F}_s]$ est une fonction croissante de X_s .*
- ii) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $0 \leq t_1 < \dots < t_{n+1}$ et toute fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dans $\mathcal{I}_n$, on a :*

$$\mathbb{E} [\phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})(X_{t_{n+1}} - X_{t_n})] \geq 0.$$

Soient μ et ν deux mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^+$ telles que $\mu \stackrel{(st)}{\geq} \nu$. Supposons de plus que, soit :

μ et ν sont à support compact, et pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^+$, $\sup_{t \in K} |X_t|$ est intégrable,

ou bien :

$$\sup_{t \geq 0} |X_t| \text{ est intégrable.}$$

Alors :

$$A^{(\mu)} := \int_0^{+\infty} X_u \mu(du) \stackrel{(c)}{\geq} A^{(\nu)} := \int_0^{+\infty} X_u \nu(du).$$

Remarque 4.53.

Observons que la condition (ii) implique que le processus $(X_t, t \geq 0)$ est un peacock. En effet, si ψ est une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$, alors, pour $0 \leq s \leq t$:

$$\mathbb{E}[\psi(X_t)] - \mathbb{E}[\psi(X_s)] \geq \mathbb{E}[\psi'(X_s)(X_t - X_s)] \geq 0.$$

En particulier, $\mathbb{E}[X_t]$ ne dépend pas de t .

Avant de prouver le Théorème 4.52, nous présentons des exemples de processus satisfaisant les deux conditions (i) et (ii).

Exemple 4.54. Soit X une v.a. admettant des moments exponentiels de tout ordre. On définit $(\xi_t^X = \exp(tX - h_X(t)), t \geq 0)$ où $h_X(t) = \log \mathbb{E}[e^{tX}]$. Alors, $(\xi_t^X, t \geq 0)$ satisfait les conditions du Théorème 4.52. En effet, la condition (i) est évidente, et la condition (ii) découle de :

$$\mathbb{E} \left[\phi(\xi_{t_1}^X, \dots, \xi_{t_n}^X) (\xi_{t_{n+1}}^X - \xi_{t_n}^X) \right] \geq \phi(e^{t_1 \beta_n - h_X(t_1)}, \dots, e^{t_n \beta_n - h_X(t_n)}) \mathbb{E} \left[\xi_{t_{n+1}}^X - \xi_{t_n}^X \right] = 0,$$

où $\beta_n = \frac{h_X(t_{n+1}) - h_X(t_n)}{t_{n+1} - t_n}$. En particulier, on retrouve que, si $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue et strictement croissante telle que $\alpha(0) = 0$, alors le processus

$$\left(\frac{1}{\alpha(t)} \int_0^t e^{uX - h_X(u)} d\alpha(u), t \geq 0 \right)$$

est un peacock.

Exemple 4.55 (Martingales).

Les martingales satisfont clairement la condition (ii). Voici quelques exemples de martingales satisfaisant également la condition (i) :

- a) Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus intégrable à accroissements indépendants et centrés. Alors

$$\mathbb{E}[\phi(X_t) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\phi(X_s + X_t - X_s) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\phi(x + Z)]_{|x=X_s},$$

où $Z \stackrel{(\text{loi})}{=} X_t - X_s$, est une fonction croissante de X_s .

- b) Soit $(L_t, t \geq 0)$ un processus intégrable, continu à droite, à accroissements indépendants, et tel que, pour tout $\lambda, t \geq 0$, $\mathbb{E}[e^{\lambda L_t}] < \infty$. Alors, le processus

$$\left(X_t := e^{\lambda L_t - h_{L_t}(\lambda)}, t \geq 0 \right) \quad \text{où } h_{L_t}(\lambda) = \log \mathbb{E}[e^{\lambda L_t}]$$

est une martingale qui, tout comme dans l'item (a), satisfait la condition (i).

- c) Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus de diffusion satisfaisant une équation du type

$$X_t^{(x)} = x + \int_0^t \sigma(X_s^{(x)}) dB_s.$$

Alors, la condition (i) découle du théorème de comparaison stochastique (voir Point (A1)).

Exemple 4.56 (Diffusions “bien-réversibles”).

Soit $(Z_t, t \geq 0)$ une diffusion “bien-réversible” satisfaisant (4.17) et telle que b soit une fonction croissante. Alors $(X_t := Z_t - \mathbb{E}[Z_t], t \geq 0)$ satisfait les deux conditions (i) et (ii). En effet, la condition (i) est clairement satisfaite d'après le Lemme 4.37. Quant à la condition (ii), en posant $h(t) = \mathbb{E}[Z_t]$, on a, avec $0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$, par retournement du temps à l'instant

t_{n+1} :

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} [\phi(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})(X_{t_{n+1}} - X_{t_n})] \\
 &= \mathbb{E} \left[\phi \left(\bar{X}_{t_{n+1}-t_1}^{(t_{n+1})}, \dots, \bar{X}_{t_{n+1}-t_n}^{(t_{n+1})} \right) (\bar{X}_0^{(t_{n+1})} - \bar{X}_{t_{n+1}-t_n}^{(t_{n+1})}) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\phi \left(\bar{X}_{t_{n+1}-t_1}^{(t_{n+1})}, \dots, \bar{X}_{t_{n+1}-t_n}^{(t_{n+1})} \right) | \mathcal{F}_{t_{n+1}-t_n} \right] (\bar{X}_0^{(t_{n+1})} - \bar{X}_{t_{n+1}-t_n}^{(t_{n+1})}) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\tilde{\phi} \left(\bar{X}_{t_{n+1}-t_n}^{(t_{n+1})} \right) (\bar{X}_0^{(t_{n+1})} - \bar{X}_{t_{n+1}-t_n}^{(t_{n+1})}) \right] \\
 &\text{où } \tilde{\phi} \text{ est une fonction croissante,} \\
 &= \mathbb{E} \left[\tilde{\phi}(X_{t_n})(X_{t_{n+1}} - X_{t_n}) \right].
 \end{aligned}$$

A présent, d'après (4.17) :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[\tilde{\phi}(Z_{t_n} - h(t_n)) \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \sigma(s, Z_s) dB_s + \int_{t_n}^{t_{n+1}} b(s, Z_s) ds - h(t_{n+1}) + h(t_n) \right) \right] \\
 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{E} \left[\tilde{\phi}(Z_{t_n} - h(t_n)) (b(s, Z_s) - h'(s)) \right] ds \\
 = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbb{E} \left[\tilde{\phi}(Z_{t_n} - h(t_n)) (\tilde{b}(s, Z_{t_n}) - h'(s)) \right] ds
 \end{aligned}$$

où $x \mapsto \tilde{b}(s, x) := \mathbb{E}[b(s, Z_s) | Z_{t_n} = x]$ est une fonction croissante telle que $\mathbb{E}[\tilde{b}(s, Z_{t_n})] = \mathbb{E}[b(s, Z_s)] = h'(s)$. En notant $\tilde{b}_s^{-1}$ son inverse continu à droite, on obtient finalement :

$$\mathbb{E} \left[\tilde{\phi}(X_{t_n})(X_{t_{n+1}} - X_{t_n}) \right] \geq \int_{t_n}^{t_{n+1}} \tilde{\phi}(\tilde{b}_s^{-1}(h'(s)) - h(t_n)) \mathbb{E}[\tilde{b}(s, Z_{t_n}) - h'(s)] ds = 0.$$

Exemple 4.57. Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien issu de 0 et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, impaire, strictement croissante, et telle que φ' soit convexe. D'après la Proposition 4.7, le processus $(\varphi(B_t), t \geq 0)$ est un peacock. Comme conséquence de l'Exemple 4.56 et du Théorème 4.52 appliqué avec $\mu(du) = \frac{1}{\alpha(t)} 1_{[0,t]}(u) d\alpha(u)$ et $\nu(du) = \frac{1}{\alpha(s)} 1_{[0,s]}(u) d\alpha(u)$, où $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue et strictement croissante telle que $\alpha(0) = 0$, on déduit que le processus

$$\left(\frac{1}{\alpha(t)} \int_0^t \varphi(B_u) d\alpha(u), t \geq 0 \right)$$

est également un peacock. En effet, d'après la formule d'Itô, $(\varphi(B_u), u \geq 0)$ satisfait l'équation (4.17) avec $b = \frac{1}{2} \varphi'' \circ \varphi^{-1}$ croissante.

Démonstration.

1) Puisque

$$A^{(\mu)} := \int_0^\infty X_s d\mu(s) = \int_0^\infty X_s dF_\mu(s) = \int_0^1 X_{F_\mu^{-1}(u)} du,$$

il suffit à nouveau, par approximation de dF_μ par une combinaison linéaire finie de mesures de Dirac (voir la preuve du Théorème 4.13), de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ et pour tout $t_1 \geq s_1, \dots, t_n \geq s_n$,

$$\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i} \stackrel{(c)}{\geq} \sum_{i=1}^n a_i X_{s_i}. \quad (4.39)$$

2) Soit $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ appartenant à $\mathcal{C}$. Par convexité, on a :

$$\begin{aligned} \psi \left(\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i} \right) &= \psi \left(\sum_{i=1}^n a_i X_{s_i} + \sum_{i=1}^n a_i (X_{t_i} - X_{s_i}) \right) \\ &\geq \psi \left(\sum_{i=1}^n a_i X_{s_i} \right) + \psi' \left(\sum_{i=1}^n a_i X_{s_i} \right) \sum_{j=1}^n a_j (X_{t_j} - X_{s_j}). \end{aligned}$$

On prend alors l'espérance des deux membres :

$$\mathbb{E} \left[\psi \left(\sum_{i=1}^n a_i X_{t_i} \right) \right] \geq \mathbb{E} \left[\psi \left(\sum_{i=1}^n a_i X_{s_i} \right) \right] + \mathbb{E} \left[\psi' \left(\sum_{i=1}^n a_i X_{s_i} \right) \sum_{j=1}^n a_j (X_{t_j} - X_{s_j}) \right]. \quad (4.40)$$

Posons $\phi(x_1, \dots, x_n) := \psi' \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right)$, de sorte que $\phi \in \mathcal{I}_n$. Soit j fixé et supposons que :

$$0 \leq s_1 < \dots < s_j < \dots < s_{j+r} < t_j < s_{j+r+1} < \dots < s_n.$$

On écrit :

$$\begin{aligned} \phi(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})(X_{t_j} - X_{s_j}) \\ &= \phi(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})(X_{t_j} - X_{s_{j+r}} + X_{s_{j+r}} - \dots + X_{s_{j+1}} - X_{s_j}) \\ &= \phi(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})(X_{t_j} - X_{s_{j+r}}) + \sum_{k=0}^{r-1} \phi(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})(X_{s_{j+k+1}} - X_{s_{j+k}}) \end{aligned}$$

et on étudie l'espérance de chaque terme séparément. D'après la condition (i), on obtient par itération :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\phi(X_{s_1}, \dots, X_{s_n})(X_{t_j} - X_{s_{j+r}})] &= \mathbb{E} [\tilde{\phi}(X_{s_1}, \dots, X_{s_{j+r}}, X_{t_j})(X_{t_j} - X_{s_{j+r}})] \\ &\geq \mathbb{E} [\tilde{\phi}(X_{s_1}, \dots, X_{s_{j+r}}, X_{s_{j+r}})(X_{t_j} - X_{s_{j+r}})], \end{aligned}$$

et cette dernière quantité est positive d'après la condition (ii). Les autres termes se traitent de la même manière. $\square$

Remarque 4.58.

Il convient de remarquer que, dans le cas général, le processus $\left(\frac{1}{t} \int_0^t X_u du, t \geq 0 \right)$ peut être un peacock même si $(X_t, t \geq 0)$ n'en est pas un. C'est par exemple le cas pour le processus $(X_t = e^{-t}G, t \geq 0)$ où G est une v.a. gaussienne centrée. De même, $(X_u, u \geq 0)$ peut être un peacock bien que $\left(\frac{1}{t} \int_0^t X_u du, t \geq 0 \right)$ n'en soit pas un ; par exemple, le processus $(X_t = (1_{[0,1]}(t) - 1_{]1,+\infty[}(t))G, t \geq 0)$ où G est à nouveau une v.a. gaussienne centrée.

Chapitre 5

Plongements de Skorokhod

5.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est le suivant : nous allons associer à certains peacocks présentés au chapitre précédent des martingales, à l'aide de plongements de Skorokhod.

Nous rappelons tout d'abord le problème de Skorokhod :

• Considérons une v.a. X réelle, intégrable et centrée, et $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien issu de 0 muni de sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$. Réaliser un *plongement de Skorokhod* de X dans le mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$ consiste à construire un temps d'arrêt τ dans une filtration $(\mathcal{G}_t, t \geq 0)$ tel que :

$$(\mathbf{Sk1}) \quad B_\tau \stackrel{(\text{loi})}{=} X$$

(Sk2) $(B_{u \wedge \tau}, u \geq 0)$ est une $(\mathcal{G}_u, u \geq 0)$ -martingale uniformément intégrable.

Il existe de nombreuses manières de réaliser un tel plongement. J. Oblój ([Obl04]) en a dénombré vingt et une dispersées dans la littérature. Ces méthodes peuvent se regrouper sous deux groupes :

- soit le temps τ est un temps d'arrêt relatif à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ du mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$ (dans ce cas, $(\mathcal{G}_t, t \geq 0) = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$) ;
- soit le temps τ est un temps d'arrêt relatif à un grossissement $(\mathcal{G}_t, t \geq 0)$ de la filtration naturelle du mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$, grossissement dans lequel $(B_t, t \geq 0)$ reste une martingale.

Dans le second cas, le temps d'arrêt τ est appelé un temps d'arrêt "*randomisé*". Le plongement de Skorokhod correspondant est alors appelé un *plongement de Skorokhod randomisé*.

• Soit $(X_t, t \geq 0)$ un peacock fixé. Supposons qu'il existe une filtration $(\mathcal{G}_t, t \geq 0)$ dans laquelle $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien et une famille de temps d'arrêt $(\tau_t, t \geq 0)$ telles que, pour tout $t \geq 0$, le temps d'arrêt τ_t satisfasse **(Sk1)** et **(Sk2)** avec X_t remplaçant X . Si la famille de temps d'arrêt $(\tau_t, t \geq 0)$ est p.s. croissante, alors le processus $(B_{\tau_t}, t \geq 0)$ est une martingale associée à $(X_t, t \geq 0)$.

Nous allons illustrer ce principe à l'aide de trois plongements, l'un randomisé - le plongement de Hall-Breiman, dans la Section 5.2 - et les deux autres non - les plongements de Bass et d'Azéma-Yor, respectivement dans les Sections 5.3 et 5.4.

5.2 Le plongement de Hall-Breiman

5.2.1 Principe général

Soit X une v.a. de loi μ . On suppose que :

$$\mathbb{E}[|X|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \mu(dx) < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mu(dx) = 0. \quad (5.1)$$

Remarquons que, d'après (5.1) :

$$\int_0^{+\infty} x \mu(dx) = - \int_{-\infty}^0 x \mu(dx). \quad (5.2)$$

Soit (V, W) un couple de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_-^*$ dont la loi est donnée par :

$$\gamma(dv, dw) = \frac{v-w}{\int_0^{+\infty} x \mu(dx)} 1_{\{w < 0 \leq v\}} \mu(dv) \mu(dw). \quad (5.3)$$

On suppose que ce couple (V, W) est indépendant du mouvement brownien $(B_u, u \geq 0)$ issu de 0, et on définit :

$$\tau := \inf\{u \geq 0; B_u = V \text{ ou } B_u = W\}.$$

Théorème 5.1 (Hall-Breiman).

- 1) La loi de B_τ est μ .
- 2) $(B_{u \wedge \tau}, u \geq 0)$ est une martingale uniformément intégrable.

Démonstration.

1) Prouvons d'abord le Point 1)

On rappelle que, pour $w < 0 \leq v$, en définissant :

$$T_{w,v} := \inf\{u \geq 0; B_u = v \text{ ou } B_u = w\}, \quad (5.4)$$

on a :

$$\mathbb{P}(B_{T_{w,v}} = v) = \frac{-w}{v-w} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B_{T_{w,v}} = w) = \frac{v}{v-w}. \quad (5.5)$$

Ainsi, puisque le couple (V, W) est indépendant de $(B_t, t \geq 0)$:

$$\tau \equiv T_{W,V}.$$

A présent, soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée. D'après (5.5), en conditionnant par V et W , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(B_\tau)] &= \int \int d\gamma(dv, dw) \left(f(v) \frac{-w}{v-w} + f(w) \frac{v}{v-w} \right) \\ &= \int \int 1_{\{w < 0 \leq v\}} \left(f(v) \frac{-w}{v-w} + f(w) \frac{v}{v-w} \right) (v-w) \frac{\mu(dv) \mu(dw)}{\int_0^{+\infty} x \mu(dx)} \\ &= \frac{1}{\int_0^{+\infty} x \mu(dx)} \int \int 1_{\{w < 0 \leq v\}} (-wf(v) + vf(w)) \mu(dv) \mu(dw) \\ &= \frac{1}{\int_0^{+\infty} x \mu(dx)} \left(- \int 1_{\{w < 0\}} w \mu(dw) \int 1_{\{v \geq 0\}} f(v) \mu(dv) \right. \\ &\quad \left. + \int 1_{\{v \geq 0\}} v \mu(dv) \int 1_{\{w < 0\}} f(w) \mu(dw) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mu(dx) \quad (\text{d'après (5.2)}). \end{aligned} \quad (5.6)$$

2) Prouvons à présent que $(B_{u \wedge \tau}, u \geq 0)$ est uniformément intégrable

On note $\mathbb{E}_{V,W}$ l'espérance par rapport à la loi du couple (V, W) , et par $\mathbb{E}_B$ l'espérance par rapport à la loi du mouvement brownien B . On a, pour tout $\lambda \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 & \sup_{u \geq 0} \mathbb{E} [|B_{u \wedge \tau}| 1_{\{|B_{u \wedge \tau}| > \lambda\}}] \\
 &= \sup_{u \geq 0} \mathbb{E}_{V,W} \left[\mathbb{E}_B \left[|B_{u \wedge T_{W,V}}| 1_{\{|B_{u \wedge T_{W,V}}| > \lambda\}} \right] \right] \quad (\text{où } T_{W,V} \text{ est défini par (5.4)}) \\
 &\leq \mathbb{E}_{V,W} \left[\sup_{u \geq 0} \mathbb{E}_B \left[|B_{u \wedge T_{W,V}}| 1_{\{|B_{u \wedge T_{W,V}}| > \lambda\}} \right] \right] \\
 &= \mathbb{E}_{V,W} \left[1_{\{V \vee (-W) > \lambda\}} \sup_{u \geq 0} \mathbb{E}_B [|B_{u \wedge T_{W,V}}|] \right] \quad (\text{puisque } |B_{u \wedge T_{W,V}}| \leq V \vee (-W)) \\
 &= \mathbb{E}_{V,W} [1_{\{V \vee (-W) > \lambda\}} \mathbb{E}_B [|B_{T_{W,V}}|]] \\
 &\quad (\text{car, pour } V \text{ et } W \text{ fixés, } (B_{u \wedge T_{W,V}}, u \geq 0) \text{ est une martingale bornée}) \\
 &= \frac{2}{\int_0^{+\infty} x \mu(dx)} \int \int 1_{\{v \vee (-w) > \lambda\}} \frac{-vw}{v-w} \gamma(dv, dw) \\
 &= \frac{2}{\int_0^{+\infty} x \mu(dx)} \int \int 1_{\{v \vee (-w) > \lambda\}} 1_{\{w < 0 \leq v\}} (-vw) \mu(dv) \mu(dw) \\
 &\xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0
 \end{aligned}$$

par convergence dominée, comme

$$\int \int 1_{\{w \leq 0 \leq v\}} (-vw) \mu(dv) \mu(dw) = \left(\int_0^{+\infty} x \mu(dx) \right)^2 < \infty.$$

□

Théorème 5.2. Soit $p > 1$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $\mathbb{E}[(V \wedge (-W))(V^{p-1} + (-W)^{p-1})] < \infty$.
- ii) $\mathbb{E}[|X|^p] < \infty$.
- iii) $\mathbb{E}[\tau^{p/2}] < \infty$.
- iv) La martingale $(B_{t \wedge \tau}, t \geq 0)$ est dans H^p , c'est-à-dire $\mathbb{E} \left[\left(\sup_{t \leq \tau} |B_t| \right)^p \right] < \infty$.

Démonstration.

1) D'après (5.6), on a :

$$\mathbb{E}[|X|^p] = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^0 \frac{-vw}{v-w} (v^{p-1} + (-w)^{p-1}) \gamma(dv, dw) = \mathbb{E} \left[\frac{-VW}{V-W} (V^{p-1} + (-W)^{p-1}) \right]$$

et l'équivalence entre les Points (i) et (ii) découle de l'inégalité :

$$\frac{1}{2}(v \wedge w) \leq \frac{-vw}{v-w} \leq v \wedge w.$$

2) Pour prouver l'équivalence entre les Points (ii), (iii) et (iv), on applique les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy ; il existe donc deux constantes c_p et C_p ne dépendant que de p telles que :

$$c_p \mathbb{E}[\tau^{p/2}] \leq \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq \tau} |B_t|^p \right] \leq C_p \mathbb{E}[\tau^{p/2}].$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq \tau} |B_t|^p \right] &= \mathbb{E}_{V,W} \left[\mathbb{E}_B \left[\sup_{t \geq 0} |B_{t \wedge T_{V,W}}|^p \right] \right] \geq \mathbb{E}_{V,W} \left[\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}_B [|B_{t \wedge T_{V,W}}|^p] \right] \\ &= \mathbb{E}_{V,W} [\mathbb{E}_B [|B_{T_{V,W}}|^p]] \\ &= \mathbb{E} [|X|^p]\end{aligned}$$

et, d'après l'inégalité L^p de Doob :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \geq 0} |B_{t \wedge \tau}|^p \right] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \sup_{t \geq 0} \mathbb{E} [|B_{t \wedge \tau}|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E} [|X|^p]$$

de sorte que

$$\mathbb{E} [|X|^p] \leq \mathbb{E} \left[\sup_{t \leq \tau} |B_t|^p \right] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E} [|X|^p].$$

□

5.2.2 Application à la recherche de martingales

A présent, soient X une v.a. satisfaisant (5.1), $(Y_t, t \geq 0)$ un processus positif stochastiquement croissant et $(A_t, t \geq 0)$ un processus p.s. croissant associé à $(Y_t, t \geq 0)$ par le Théorème 3.3. Nous allons maintenant associer une martingale au peacock $(Y_t X, t \geq 0)$ en utilisant la méthode de Hall. Plus précisément, soit (V, W) défini par (5.3) et soit, pour tout $t \geq 0$:

$$\tau_t := \inf\{u \geq 0; B_u = V A_t \text{ ou } B_u = W A_t\}.$$

La famille $(\tau_t, t \geq 0)$ est clairement croissante, et on a, du fait que $Y_t \stackrel{(1.d)}{=} A_t$:

Théorème 5.3.

Le processus $(B_{\tau_t}, t \geq 0)$ est une martingale associée au peacock $(Y_t X, t \geq 0)$.

Exemple 5.4. Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien issu de 0, et soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, impaire, strictement croissante et telle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[\varphi(B_t)] < \infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$. Soit ε une v.a. de Bernoulli symétrique ($\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}$) indépendante de $(B_t, t \geq 0)$. Alors :

$$\varphi(B_t) \stackrel{(1.d)}{=} \varepsilon |\varphi(B_t)| = \varepsilon Y_t,$$

et $(Y_t := |\varphi(B_t)|, t \geq 0)$ satisfait les hypothèses du Théorème 3.32. En effet $(Y_t, t \geq 0)$ est une diffusion positive réfléchie en 0 telle que :

$$\begin{cases} s'_Y(x) = \exp \left(- \int_0^x \frac{\varphi'' \circ \varphi^{-1}}{(\varphi' \circ \varphi^{-1})^2}(z) dz \right) = \frac{\varphi'(0)}{\varphi' \circ \varphi^{-1}(x)} \\ m_Y(dx) = \frac{2}{s'(x)(\varphi' \circ \varphi^{-1})^2(x)} dx = \frac{2}{\varphi'(0)} \varphi' \circ \varphi^{-1}(x) dx \end{cases}$$

de sorte que $m_Y([0, +\infty[) = +\infty$ et $\lim_{a \rightarrow 0} m_Y([0, a]) s_Y(a) = 0$. Ainsi, $(Y_t, t \geq 0)$ est un processus stochastiquement croissant et

$$Y_t \stackrel{(1.d)}{=} \inf_{s \geq t} \bar{Y}_s$$

où $(\bar{Y}_s, s \geq 0)$ désigne la diffusion associée à $(Y_t, t \geq 0)$ par la transformation de Biane. Par conséquent, le Théorème 5.3 s'applique, et, en posant

$$\tau_t := \inf \left\{ u \geq 0; |B_u| = \inf_{s \geq t} \bar{Y}_s \right\},$$

le processus $(B_{\tau_t}, t \geq 0)$ est une martingale associée au peacock $(\varphi(B_t), t \geq 0)$. La diffusion $(\bar{Y}_s, s \geq 0)$ est caractérisée par :

$$\bar{L} = \frac{1}{2} (\varphi' \circ \varphi^{-1})^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\varphi' \circ \varphi^{-1}}{\varphi^{-1}} + \frac{\varphi'' \circ \varphi^{-1}}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x}.$$

En particulier,

– si $\varphi(x) = \sinh(x)$, on obtient :

$$\bar{L} = \frac{1}{2} (x^2 + 1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\operatorname{Argsh}(x)} + \frac{x}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x}$$

– si $\varphi(x) = x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\bar{L} = (2n+1) \left(\frac{1}{2} x^{\frac{4n}{2n+1}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (n+1) x^{\frac{2n-1}{2n+1}} \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Remarquons que, plus généralement, si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction impaire, strictement croissante, et telle que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[|\varphi(B_t)|] < \infty$, alors, en définissant le temps d'arrêt

$$T_t := \inf \{ u \geq 0; |B_u| = |\varphi(\sqrt{t}G)| \},$$

où G est une v.a. gaussienne centrée réduite, indépendante de $(B_u, u \geq 0)$, le processus $(B_{T_t}, t \geq 0)$ est une martingale associée à $(\varphi(B_t), t \geq 0)$.

5.2.3 Cas particulier lorsque $A_t = \sqrt{t}$

Généralités

Lorsque $A_t = \sqrt{t}$ la méthode précédente va nous permettre d'obtenir des martingales $(M_t, t \geq 0)$ satisfaisant les deux propriétés suivantes :

(a) $(M_t, t \geq 0)$ possède la propriété d'échelle brownienne :

$$\forall c > 0, \quad (M_{c^2 t}, t \geq 0) \stackrel{(\text{loi})}{=} (c M_t, t \geq 0)$$

(b) $(M_t, t \geq 0)$ est un processus markovien (inhomogène).

Les plus célèbres exemples de martingales satisfaisant (a) est (b) sont, sans aucun doute, le mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$ et la martingale d'Azéma $(\xi_t := \operatorname{sgn}(B_t) \sqrt{t - g_t}, t \geq 0)$ où $g_t := \sup\{s \leq t; B_s = 0\}$.

L'étude de cette dernière martingale $(\xi_t, t \geq 0)$, découverte à l'origine par Azéma [Azé85], a été ensuite développée par Émery [Éme89], Azéma-Yor [AY89], Meyer [Mey89a]. En particulier, M. Émery a prouvé que la martingale d'Azéma possédait la Propriété de Représentation Chaotique (PRC).

Cette découverte et les études qui ont suivies furent particulièrement étonnantes, puisque, jusqu'à l'époque, on croyait que les deux seules martingales à posséder la PRC étaient le mouvement brownien et le processus de Poisson compensé. En fait, il s'avère qu'un grand nombre d'autres martingales satisfaisant la PRC, ainsi que (a) et (b), peuvent être construites, et furent le sujet de plusieurs études par P.A Meyer [Mey89b], M. Émery [Éme96], M. Yor [Yor97, Chapter 15].

Application

Lorsque $A_t = \sqrt{t}$, le temps d'arrêt τ_t devient :

$$\tau_t = \inf\{u \geq 0 ; B_u = \sqrt{t}V \text{ ou } B_u = \sqrt{t}W\}$$

et l'on peut énoncer le résultat suivant :

Théorème 5.5.

i) $(B_{\tau_t}, t \geq 0)$ est une martingale possédant la propriété d'échelle brownienne : pour tout $c > 0$,

$$(B_{\tau_{c^2 t}}, t \geq 0) \stackrel{(loi)}{=} (c B_{\tau_t}, t \geq 0).$$

ii) $(B_{\tau_t}, t \geq 0)$ est un processus de Markov (inhomogène).

Démonstration.

i) Soit, pour $c > 0$, $(B_t^{(c)} := cB_{t/c^2}, t \geq 0)$, et notons $(\tau_t^{(c)}, t \geq 0)$ la famille de temps d'arrêt associée au mouvement brownien $(B_t^{(c)}, t \geq 0)$, c'est-à-dire :

$$\tau_t^{(c)} = \inf\{u \geq 0 ; B_u^{(c)} = \sqrt{t}V \text{ ou } B_u^{(c)} = \sqrt{t}W\}.$$

Par définition de $(B_t^{(c)}, t \geq 0)$, il est clair que, pour tout $t \geq 0$ fixé : $\tau_t^{(c)} = c^2 \tau_{c^{-2}t}$ et donc, $B_{\tau_{c^2 t}^{(c)}}^{(c)} = cB_{\tau_t}$, ce qui prouve le Point (i) puisque $(B_t^{(c)}, t \geq 0) \stackrel{(loi)}{=} (B_t, t \geq 0)$.

ii) Nous regardons à présent le mouvement brownien $(B_t, t \geq 0)$ comme un processus de Markov fort sur $\mathbb{R}$. On définit $\tilde{\tau}_t$ par :

$$\tilde{\tau}_t = \inf\{u \geq 0 ; B_u \notin]\sqrt{t}W, \sqrt{t}V[\}.$$

(Notons que $\tilde{\tau}_t = \tau_t$ sous $\mathbb{P}_0$, mais que, si $x \neq 0$, $\tilde{\tau}_t \neq \tau_t$ sous $\mathbb{P}_x$). Pour $s < t$, en notant $(\theta_u, u \geq 0)$ l'opérateur de translation, on a :

$$\tilde{\tau}_t = \tilde{\tau}_s + \tilde{\tau}_t \circ \theta_{\tilde{\tau}_s}$$

et par conséquent $B_{\tilde{\tau}_t} \circ \theta_{\tilde{\tau}_s} = B_{\tilde{\tau}_t}$. Ainsi, d'après la propriété de Markov forte, il vient, pour toute fonction borélienne bornée f :

$$\mathbb{E}_0[f(B_{\tau_t}) | \mathcal{F}_{\tau_s}] = \mathbb{E}_0[f(B_{\tilde{\tau}_t}) | \mathcal{F}_{\tilde{\tau}_s}] = \mathbb{E}_{B_{\tilde{\tau}_s}}[f(B_{\tilde{\tau}_t})] = \mathbb{E}_{B_{\tau_s}}[f(B_{\tilde{\tau}_t})],$$

ce qui prouve le Point (ii). Plus précisément le semi-groupe de transition $(P_{s,t}, 0 \leq s < t)$ de $(B_{\tau_t}, t \geq 0)$ est donné par :

$$\begin{aligned} P_{s,t}f(x) &= \mathbb{E} \left[\left(f(\sqrt{t}V) \frac{x - \sqrt{t}W}{\sqrt{t}(V - W)} + f(\sqrt{t}W) \frac{-x + \sqrt{t}V}{\sqrt{t}(V - W)} \right) 1_{] \sqrt{t}W, \sqrt{t}V[}(x) \right] \\ &\quad + f(x) \mathbb{P} \left(x \notin] \sqrt{t}W, \sqrt{t}V[\right). \end{aligned}$$

Remarquons que $(P_{s,t}, 0 \leq s < t)$ est un semi-groupe de transition très spécial, puisque $P_{s,t}$ ne dépend pas de $s \in [0, t[$.

□

5.3 Le plongement de Bass

5.3.1 Principe général

Notation

Dans toute cette section, G désigne une v.a. gaussienne centrée réduite. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \mu(dx) < \infty \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x \mu(dx) = 0. \quad (5.7)$$

Alors, il existe une fonction croissante $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la v.a. $\theta(G)$ ait pour loi μ . En effet, soient :

$$F(x) := \mu(]-\infty, x]), \quad F^{-1}(y) := \inf\{x; F(x) \geq y\}$$

et définissons

$$\mathcal{N}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Si l'on choisit θ de la manière suivante :

$$\theta(x) := F^{-1} \circ \mathcal{N}(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.8)$$

alors, la loi de $\theta(G)$ est μ . Si μ diffère de la mesure de Dirac en 0, θ n'est pas constante. De plus, d'après (5.7) :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\theta(x)| e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0. \quad (5.9)$$

Remarque 5.6. *Réciproquement, soit θ une fonction croissante, continue à gauche, satisfaisant (5.9). Soit μ la loi de $\theta(G)$ et $F(x) := \mu(]-\infty, x])$. Il n'est pas difficile de voir que μ satisfait (5.7) et (5.8). Par conséquent, il existe une correspondance bijective entre les mesures de probabilités μ satisfaisant (5.7) et les fonctions croissantes, continues à gauche satisfaisant (5.9). Cette bijection est donnée par :*

$$\begin{cases} \mu = \text{loi de } \theta(G) \\ \theta = F^{-1} \circ \mathcal{N}. \end{cases}$$

Si θ est seulement croissante, alors, en notant θ_g la régularisée continue à gauche de θ , $\theta(G) \stackrel{(loi)}{=} \theta_g(G)$ puisque G a une densité, et donc $\theta_g = F^{-1} \circ \mathcal{N}$ avec F la fonction de répartition de $\theta(G)$.

On suppose que μ diffère de la mesure de Dirac en 0, et on définit, pour $0 \leq s < 1$:

$$\begin{aligned} b(s, x) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x + y\sqrt{1-s}) e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= Q_{1-s}\theta(x) \end{aligned} \quad (5.10)$$

où $(Q_u, u \geq 0)$ désigne le semi-groupe de la chaleur. Observons que sous l'hypothèse (5.9), b est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1[\times \mathbb{R}$. Cela découle aisément de l'identité

$$b(s, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(z) e^{-\frac{(z-x)^2}{2(1-s)}} \frac{dz}{\sqrt{1-s}}$$

et de l'inégalité, pour z suffisamment grand,

$$\sup_{|x| \leq x_0} |z - x|^k e^{-\frac{(z-x)^2}{2(1-s)}} \leq e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

On définit également, pour $0 \leq s < 1$:

$$\begin{aligned} a(s, x) &:= \frac{\partial b}{\partial x}(s, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-s)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x + y\sqrt{1-s}) y e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta'(x + y\sqrt{1-s}) e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &\text{lorsque } \theta \text{ est dérivable.} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Par la suite, nous noterons par un prime les dérivées par rapport à la variable d'espace x , et nous écrirons (5.11) sous la forme :

$$\begin{aligned} a(s, x) &= b'(s, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta'(x + y\sqrt{1-s}) e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-s)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-x)^2}{2(1-s)}} d\theta(z) \end{aligned} \quad (5.12)$$

même lorsque θ n'est pas dérivable. Il s'agit d'une convention, puisque, dans ce cas, l'intégrale de Stieltjes est bien définie. On déduit de (5.12) que $b(s, \cdot)$, pour $s \in [0, 1[$, est continue et strictement croissante. Par conséquent, elle admet un inverse au sens de la composition des fonctions, que nous notons c :

$$b(s, c(s, x)) = c(s, b(s, x)) = x. \quad (5.13)$$

Il n'est alors pas difficile de voir que c est uniformément lipschitzienne en s , pour (s, x) variant dans un compact de son domaine de définition, et que a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1[\times \mathbb{R}$ et strictement positive.

La méthode de Bass

A présent, soit $(B_u, u \geq 0)$ un mouvement brownien issu de 0, et considérons l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \frac{dV_u}{du} = \frac{1}{a^2(V_u, c(V_u, B_u))}, & V_u < 1 \\ V_0 = 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

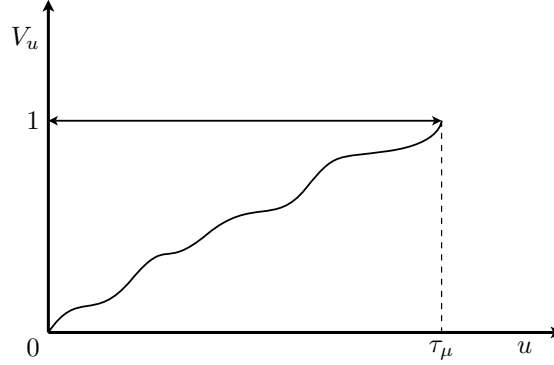
Bien sûr, puisque $a(s, x)$ n'est définie que pour $0 \leq s < 1$, cette équation est seulement définie pour $V_u < 1$. Elle admet, d'après ce qui précède, une unique solution, laquelle est croissante. Définissons τ_μ , le temps d'arrêt associé à μ , ou de manière équivalente à θ , par :

$$\tau_\mu := \sup\{u; V_u < 1\}.$$

Voici le résultat de Bass :

Théorème 5.7 (Bass [Bas83]).

- 1) La loi de B_{τ_μ} est μ .
- 2) $(B_{u \wedge \tau_\mu}, u \geq 0)$ est une martingale uniformément intégrable.


 FIGURE 5.1 – $\tau_\mu := \sup\{u; V_u < 1\}$

Corollaire 5.8. Soit $(\theta(t, \cdot), t \geq 0)$ une famille de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissantes en x , non identiquement constantes, et telles que, pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbb{E}[|\theta(t, G)|] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\theta(t, G)] = 0.$$

Soit, pour tout $t \geq 0$, τ_t le temps d'arrêt associé à $x \mapsto \theta(t, x)$ par la méthode de Bass. On suppose de plus que :

$(\tau_t, t \geq 0)$ est une famille croissante de temps d'arrêt.

Alors, $(B_{\tau_t}, t \geq 0)$ est une martingale telle que :

$$B_{\tau_t} \stackrel{(1.d)}{=} \theta(t, G).$$

5.3.2 Une martingale associée à $(\varphi(B_t), t \geq 0)$ pour φ croissante et impaire

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et impaire telle que, pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[|\varphi(B_t)|] < \infty$. Nous allons, φ étant donnée, exhiber une martingale associée au peacock $(\varphi(B_t), t \geq 0)$. Soit $\theta(t, x) := \varphi(\sqrt{t}x)$. Il est clair que :

$$\mathbb{E}[|\theta(t, G)|] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\theta(t, G)] = 0.$$

Par conséquent, d'après le Théorème 5.7, pour tout $t \geq 0$ fixé, on peut associer à la fonction $\theta(t, \cdot)$ un temps d'arrêt τ_t par la méthode de Bass.

Théorème 5.9. Sous les hypothèses précédentes, la famille de temps d'arrêt $(\tau_t, t \geq 0)$ est p.s. croissante. Par conséquent, $(B_{\tau_t}, t \geq 0)$ est une martingale associée à $(\varphi(B_t), t \geq 0)$, i.e.

$$B_{\tau_t} \stackrel{(1.d)}{=} \varphi(\sqrt{t}G) \stackrel{(1.d)}{=} \varphi(B_t).$$

Démonstration.

1) On adopte les notations suivantes. Pour $u > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\begin{aligned}\beta(u, x) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2u}\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + \sqrt{u}z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz,\end{aligned}$$

et

$$\alpha(u, x) := \beta'(u, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2u}\right) d\varphi(y).$$

Puisque φ n'est pas identiquement nulle (si $\varphi \equiv 0$, le Théorème 5.9 est trivial), $\alpha(u, x) > 0$. On note alors $\gamma(u, \cdot)$ l'inverse de la fonction $\beta(u, \cdot)$, i.e. $\beta(u, \gamma(u, x)) = x$.

Commençons par un lemme préliminaire :

Lemme 5.10. *Soit φ une fonction croissante et impaire telle que, pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[|\varphi(B_t)|] < \infty$. Alors, pour tout $u > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$(\alpha(u, x))^2 \geq u \left((\alpha'(u, x))^2 - \alpha(u, x) \alpha''(u, x) \right) \quad (5.15)$$

où les dérivées sont prises par rapport à la variable d'espace x .

Démonstration. Supposons tout d'abord que φ est de classe $\mathcal{C}^2$. La relation (5.15) est alors équivalente à :

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x + \sqrt{u}z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right)^2 &\geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x + \sqrt{u}z) z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right)^2 \\ &\quad - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + \sqrt{u}z) z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi''(x + \sqrt{u}z) z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right).\end{aligned} \quad (5.16)$$

On a, puisque $\varphi' \geq 0$:

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x + \sqrt{u}z) e^{-\frac{z^2}{2}} (\lambda z - 1)^2 dz \\ &= \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x + \sqrt{u}z) z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz - 2\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x + \sqrt{u}z) z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x + \sqrt{u}z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz.\end{aligned}$$

Comme cette dernière quantité est un polynôme du second degré en λ toujours positif, son discriminant est négatif :

$$\begin{aligned}&\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x + \sqrt{u}z) z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right)^2 \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x + \sqrt{u}z) z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x + \sqrt{u}z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x + \sqrt{u}z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi'(x + \sqrt{u}z) + \sqrt{u}z \varphi''(x + \sqrt{u}z)) e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right)\end{aligned}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x + \sqrt{u}z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right)^2 + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x + \sqrt{u}z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{u} \varphi''(x + \sqrt{u}z) z e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right).$$

Il ne reste plus qu'à remarquer, en intégrant par parties, que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x + \sqrt{u}z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{u}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + \sqrt{u}z) z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

pour obtenir (5.16). Il est alors facile d'enlever l'hypothèse φ de classe $\mathcal{C}^2$ en intégrant par partie (5.16), afin de supprimer les termes en φ' et φ'' , de sorte que seule φ apparaisse dans l'inégalité. $\square$

2) A présent, en reprenant les notations de la Sous-section 5.3.1, et en remplaçant θ par $\varphi(\sqrt{t}\cdot)$ dans (5.10) et (5.11), on a :

$$\begin{aligned} b(t, s, x) &:= \beta(t(1-s), \sqrt{t}x), \\ a(t, s, x) &:= \sqrt{t} \alpha(t(1-s), \sqrt{t}x), \\ c(t, s, x) &:= \frac{1}{\sqrt{t}} \gamma(t(1-s), x). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Soit $V^{(t)}$ la solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} \frac{dV_u^{(t)}}{du} = \frac{1}{a^2(t, V_u^{(t)}, c(t, V_u^{(t)}, B_u))}, & V_u^{(t)} < 1 \\ V_0^{(t)} = 0. \end{cases} \tag{5.18}$$

Si l'on prouve que pour tout $(s, x) \in [0, 1[\times \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{a^2(t, s, c(t, s, x))}$ est une fonction décroissante, alors le théorème de comparaison des EDO impliquera que, pour $t_1 \leq t_2$, $V_u^{(t_1)} \geq V_u^{(t_2)}$, donc $\tau_{t_1} \leq \tau_{t_2}$, ce qui est le résultat attendu.

3) Prouvons que $t \mapsto a^2(t, s, c(t, s, x))$ est croissante.

On a, d'après (5.17), en posant $v = t(s-1)$ et $z = \gamma(v, x)$:

$$2\sqrt{t} \frac{\partial}{\partial t} a(t, s, c(t, s, x)) = \alpha(v, z) + 2v \left(\frac{\partial}{\partial v} \alpha(v, z) + \alpha'(v, z) \frac{\partial}{\partial v} \gamma(v, x) \right).$$

Par ailleurs, quelques calculs élémentaires sur le semi-groupe de la chaleur fournissent :

$$\frac{\partial}{\partial v} \alpha(v, z) = \frac{1}{2} \alpha''(v, z) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial v} \gamma(v, z) = -\frac{1}{\alpha(v, z)} \frac{\partial}{\partial v} \beta(v, z) = -\frac{1}{2} \frac{\alpha'}{\alpha}(v, z).$$

Par conséquent,

$$2\sqrt{t} \frac{\partial}{\partial t} a(t, s, c(t, s, x)) = \frac{1}{\alpha(v, z)} \left(\alpha^2(v, z) - v \left((\alpha'(v, z))^2 - \alpha(v, z) \alpha''(v, z) \right) \right) \geq 0$$

d'après le Lemme 5.10. $\square$

Exemple 5.11. Si $\varphi(x) = \sinh(\lambda x)$ pour $\lambda \geq 0$, toutes les relations précédentes peuvent être écrites explicitement. En effet, avec les notations de la démonstration du Théorème 5.9, on a :

$$\begin{aligned} b(t, s, x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sinh(\lambda x \sqrt{t} + \lambda y \sqrt{t(1-s)}) e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \sinh(\lambda x \sqrt{t}) \exp\left(\frac{\lambda^2 t(1-s)}{2}\right), \\ c(t, s, x) &= \frac{1}{\lambda \sqrt{t}} \operatorname{Argsh}\left(x \exp\left(\frac{\lambda^2 t(s-1)}{2}\right)\right), \end{aligned}$$

d'où,

$$a^2(t, s, c(t, s, x)) = \lambda^2 t \left(e^{\lambda^2 t(1-s)} + x^2 \right).$$

Il est alors clair que, pour tout $s \in [0, 1[$ et tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto a^2(t, s, c(t, s, x))$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

5.3.3 Martingales associées à $(\sqrt{t}X, t \geq 0)$

Dans la section précédente, nous avons associé, grâce à la méthode de Hall-Breiman, une martingale au peacock $(\sqrt{t}X, t \geq 0)$, pour X une v.a. intégrable et centrée. Nous allons à présent montrer que le plongement de Bass permet également de réaliser une telle construction, moyennant une hypothèse supplémentaire sur la loi de X .

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ satisfaisant (5.7) et φ une fonction croissante telle que $\varphi(G)$ ait pour loi μ . On définit, pour tout $t \geq 0$, $\theta(t, x) := \sqrt{t}\varphi(x)$. Soit également, pour tout $s \in [0, 1]$:

$$b(s, x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + y\sqrt{1-s}) e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad a(s, x) := b'(s, x)$$

et $c(s, \cdot)$ l'inverse de $b(s, \cdot)$: $b(s, c(s, x)) = x$.

De même, on définit :

$$b(t, s, x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t, x + y\sqrt{1-s}) e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{t}b(s, x),$$

$a(t, s, x) := \sqrt{t}b'(s, x)$, et $c(t, s, \cdot)$ l'inverse de $b(t, s, \cdot)$, i.e. $b(t, s, c(t, s, x)) = x$. Clairement :

$$c(t, s, x) = c\left(s, \frac{x}{\sqrt{t}}\right). \quad (5.19)$$

Puisque $\mathbb{E}[|\theta(t, G)|] = \mathbb{E}[\sqrt{t}|\varphi(G)|] < \infty$ et $\mathbb{E}[\theta(t, G)] = \sqrt{t}\mathbb{E}[\varphi(G)] = 0$, on peut, pour tout $t \geq 0$, définir le temps d'arrêt τ_t associé à la fonction $\theta(t, \cdot)$ par la méthode de Bass.

Théorème 5.12. *Supposons que, pour tout $(s, x) \in]0, 1[\times \mathbb{R}$:*

$$b(s, x)b''(s, x) \leq (b'(s, x))^2. \quad (5.20)$$

Alors, la famille de temps d'arrêt $(\tau_t, t \geq 0)$ est croissante, et par conséquent $(B_{\tau_t}, t \geq 0)$ est une martingale associée à $(\sqrt{t}\varphi(G), t \geq 0)$.

Démonstration.

En appliquant le théorème de comparaison des EDO, il suffit de prouver que, pour tout $(s, x) \in [0, 1[\times \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{a^2(t, s, c(t, s, x))}$ est une fonction décroissante. A présent, puisque d'après (5.19),

$$\sqrt{t}b\left(s, c\left(s, \frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right) = x$$

et l'on obtient, en dérivant par rapport à x :

$$a(t, s, c(t, s, x)) = \frac{\sqrt{t}}{c'\left(s, \frac{x}{\sqrt{t}}\right)}.$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial}{\partial t}a(t, s, c(t, s, x)) = \frac{1}{2\sqrt{t}c'\left(s, \frac{x}{\sqrt{t}}\right)} + \frac{xc''\left(s, \frac{x}{\sqrt{t}}\right)}{2t\left(c'\left(s, \frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right)^2}.$$

Ainsi, en posant $y = \frac{x}{\sqrt{t}}$, puisque $c' \geq 0$, l'inégalité $\frac{\partial}{\partial t}a(t, s, c(t, s, x)) \geq 0$ est équivalente à :

$$\Delta := c'(s, y) + yc''(s, y) \geq 0. \quad (5.21)$$

Par ailleurs, en dérivant la relation $b(s, c(s, y)) = y$ par rapport à y , il vient successivement :

$$\begin{aligned} b'(s, c(s, y))c'(s, y) &= 1, \quad \text{et} \\ b''(s, c(s, y))(c'(s, y))^2 + b'(s, c(s, y))c''(s, y) &= 0. \end{aligned}$$

En injectant les valeurs de c' et c'' dans (5.21), on obtient :

$$\Delta = \frac{1}{b'(s, c(s, y))} - \frac{b(s, c(s, y))b''(s, c(s, y))}{(b'(s, c(s, y)))^3},$$

et, puisque $b' \geq 0$, la condition $\Delta \geq 0$ est équivalente, en posant $z = c(s, y)$, à

$$b(s, z)b''(s, z) \leq (b'(s, z))^2,$$

i.e. à (5.20). □

L'inconvénient du Théorème 5.12 est que la condition (5.20) fait intervenir $b(s, x)$, pour $s \in [0, 1]$, quantité qui n'est pas forcément facile à calculer. Il serait intéressant d'obtenir une condition reposant uniquement sur φ , et impliquant (5.20). C'est l'objet de la fin de cette section, due à F. Hirsch. Pour ce faire, nous allons utiliser un théorème dû à Prékopa [Pré73] dont une version peut être énoncée comme suit : soit $f :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction log-concave (i.e. $\forall x, y \in]0, +\infty[^2, \forall \lambda \in]0, 1[, f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq (f(x))^\lambda (f(y))^{1-\lambda}$) telle que, pour tout $x > 0$:

$$F(x) := \int_0^{+\infty} f(x, y)dy < \infty.$$

Alors, F est log-concave sur $]0, +\infty[$.

Lemme 5.13. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire, positive sur $]0, +\infty[$. Supposons que :

$$\varphi \text{ est log-concave sur }]0, +\infty[. \quad (5.22)$$

Alors, la condition (5.20) est satisfaite.

Démonstration.

Puisque φ est impaire, on a, d'après la définition de b :

$$b(s, x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi(1-s)}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2(1-s)}\right) \sinh\left(\frac{yx}{1-s}\right) \varphi(y) dy,$$

et il nous faut prouver (5.20), i.e. que $x \mapsto b(s, x)$ est log-concave. D'après le théorème de Prékopa appliqué à la fonction $f(x, y) = \varphi(y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2(1-s)}} \sinh\left(\frac{yx}{1-s}\right)$, il suffit de voir que la fonction $\phi :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\phi(x, y) = -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \log(\sinh(xy))$$

est concave. Mais,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, y) &= -1 - \frac{y^2}{\sinh^2(yx)}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x, y) = -1 - \frac{x^2}{\sinh^2(yx)} \\ \text{et } \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\cosh(yx)}{\sinh(yx)} - \frac{yx}{\sinh^2(yx)}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, y) < 0$ et $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x, y) < 0$, il suffit de prouver que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, y) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x, y) - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x, y) \right)^2 > 0,$$

ou encore,

$$\frac{x^2 + y^2}{\sinh^2(yx)} + 1 - \frac{\cosh^2(yx)}{\sinh^2(yx)} + \frac{2yx \cosh(yx)}{\sinh^3(yx)} > 0,$$

une relation qui est impliquée par l'inégalité $\sinh(u) \leq 2u \cosh(u)$ ($u \geq 0$). □

En rassemblant le Théorème 5.12 et le Lemme 5.13, nous avons donc obtenu le résultat suivant.

Théorème 5.14. Soit μ une mesure symétrique sur $\mathbb{R}$ satisfaisant (5.7), et soit φ une fonction croissante telle que la loi de $\varphi(G)$ soit μ . On suppose que

$$\varphi \text{ est log-concave sur }]0, +\infty[.$$

Soit $(\tau_t, t \geq 0)$ la famille de temps d'arrêt associée à $(\sqrt{t}\varphi(G), t \geq 0)$ par la méthode de Bass. Alors, $(\tau_t, t \geq 0)$ est p.s. croissante, et $(B_{\tau_t}, t \geq 0)$ est une martingale associée à $(\sqrt{t}\varphi(G), t \geq 0)$

Démonstration.

Il suffit d'observer que, comme μ est une mesure symétrique, φ est impaire. Mais, puisque φ est croissante, elle est positive sur $]0, +\infty[$, et l'on peut appliquer le Lemme 5.13 et le Théorème 5.12. □

Exemple 5.15. Voici quelques exemples de fonctions φ pour lequel le Théorème 5.14 s'applique :

- 1) $\varphi(x) = \lambda x$; dans ce cas $\tau_t = \lambda^2 t$ et $B_{\tau_t} = B_{\lambda^2 t} \stackrel{(1.d)}{=} \lambda \sqrt{t} B_1$.
- 2) $\varphi(x) = \operatorname{sgn}(x)|x|^\alpha$ ($\alpha > 0$)
- 3) $\varphi(x) = \sinh(\lambda x)$; le fait que φ soit log-concave est équivalent à : $\cosh^2(\lambda x) \geq \sinh^2(\lambda x)$.

5.4 Le plongement d'Azéma-Yor

5.4.1 Principe général

Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \mu(dx) < \infty \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x \mu(dx) = 0. \quad (5.23)$$

Nous définissons sa fonction de Hardy-Littlewood ψ_μ par :

$$\psi_\mu(x) = \frac{1}{\mu([x, +\infty[)} \int_{[x, +\infty[} y \mu(dy).$$

S'il existe $x \geq 0$ tel que $\mu([x, +\infty[) = 0$, nous posons $\alpha = \inf\{x \geq 0; \mu([x, +\infty[) = 0\}$ et $\psi_\mu(x) = \alpha$ pour $x \geq \alpha$. Soient $(B_u, u \geq 0)$ un mouvement brownien standard issu de 0, et T_μ le temps d'arrêt d'Azéma-Yor :

$$T_\mu := \inf\{u \geq 0; S_u \geq \psi_\mu(B_u)\}$$

où $S_u := \sup_{s \leq u} B_s$.

Théorème 5.16 (Azéma-Yor, [AY79]).

- 1) La loi de B_{T_μ} est $\mu : B_{T_\mu} \sim \mu$.
- 2) $(B_{u \wedge T_\mu}, t \geq 0)$ est une martingale uniformément intégrable.

La preuve originelle du Théorème 5.16 s'appuie sur les martingales d'Azéma-Yor définies par :

$$\left(M_u(\varphi(S_\infty)) := \varphi(S_u)(S_u - B_u) + \int_{S_u}^{+\infty} dx \varphi(x), t \geq 0 \right),$$

pour toute fonction $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^+, dx)$. Mentionnons que Rogers [Rog81] a montré comment retrouver ce théorème à partir de la théorie des excursions, et que Jeulin-Yor [JY81] ont étudié la loi $\int_0^{T_\mu} h(B_s) ds$ pour une fonction générique h .

A présent, si $(X_t, t \geq 0)$ est un peacock centré, en notant, pour $t \geq 0$, μ_t la loi de la v.a. X_t , l'algorithme d'Azéma-Yor permet de construire une famille de temps d'arrêt

$$T_t := \inf\{u \geq 0; S_u \geq \psi_{\mu_t}(B_u)\}$$

telle que $B_{T_t} \stackrel{(1.d)}{=} X_t$, et dans ce cadre, vérifier que la famille $(T_t, t \geq 0)$ est presque sûrement croissante revient à vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \psi_{\mu_t}(x)$ est croissante.

5.4.2 Martingales associées à $(\phi(t, X), t \geq 0)$

Théorème 5.17. Soit X une v.a. de densité f strictement positive sur $\mathbb{R}$ et $\phi(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que le processus $(\phi(t, X), t \geq 0)$ soit un peacock centré. On suppose que :

- i) La fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} f(u)du = \mathbb{P}(X \geq x)$ est log-concave.
- ii) Pour tout $t > 0$, les fonctions $x \mapsto \phi(t, x)$, $x \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x)$ et $x \mapsto \frac{\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x)}{\frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x)}$ sont strictement croissantes.
- iii) Pour tout $r \geq 0$, $\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, r]} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, X) \right| \right] < \infty$.

Soit ψ_t la fonction de Hardy-Littlewood associée à $\phi(t, X)$ et T_t le temps d'arrêt d'Azéma-Yor associé à ψ_t :

$$T_t := \inf\{u \geq 0; S_u \geq \psi_t(B_u)\}$$

Alors $(B_{T_t}, t \geq 0)$ est une martingale associée à $(\phi(t, X), t \geq 0)$.

Démonstration.

Nous allons appliquer l'algorithme d'Azéma-Yor à la v.a. centrée $\phi(t, X)$. On note $\phi^{-1}(t, x)$ l'inverse de la fonction $x \mapsto \phi(t, x)$, de sorte que $\phi(t, \phi^{-1}(t, x)) = x$. En dérivant cette relation par rapport à t , on obtient :

$$\frac{\partial \phi^{-1}}{\partial t}(t, x) = - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, a)}{\frac{\partial \phi}{\partial x}(t, a)} \Big|_{a = \phi^{-1}(t, x)}. \quad (5.24)$$

Calculons à présent la fonction de Hardy-Littlewood associée à $\phi(t, X)$:

$$\psi_t(x) = \frac{\mathbb{E}[\phi(t, X) 1_{\{\phi(t, X) \geq x\}}]}{\mathbb{P}(\phi(t, X) \geq x)} = \frac{\mathbb{E}[(\phi(t, X) - x)^+]}{\mathbb{P}(X \geq \phi^{-1}(t, x))} + x.$$

En dérivant cette expression (grâce à l'hypothèse (iii)), on obtient :

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}(X \geq \phi^{-1}(t, x)))^2 \frac{\partial \psi_t}{\partial t}(x) &= \int_{\phi^{-1}(t, x)}^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, u) f(u) du \int_{\phi^{-1}(t, x)}^{+\infty} f(u) du \\ &\quad + \frac{\partial \phi^{-1}}{\partial t}(t, x) f(\phi^{-1}(t, x)) \int_{\phi^{-1}(t, x)}^{+\infty} (\phi(t, u) - x) f(u) du \end{aligned}$$

que l'on réécrit, grâce à (5.24), en posant $a := \phi^{-1}(t, x)$:

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}(X \geq a))^2 \frac{\partial \psi_t}{\partial t}(x) &= \int_a^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, u) f(u) du \int_a^{+\infty} f(u) du \\ &\quad - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, a)}{\frac{\partial \phi}{\partial x}(t, a)} f(a) \int_a^{+\infty} (\phi(t, u) - \phi(t, a)) f(u) du. \end{aligned} \quad (5.25)$$

A présent, le dernier terme se réécrit, en appliquant Fubini :

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} (\phi(t, u) - \phi(t, a)) f(u) du &= \int_a^{+\infty} \left(\int_a^u \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, y) dy \right) f(u) du \\ &= \int_a^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, y) \mathbb{P}(X \geq y) dy. \end{aligned}$$

En remplaçant dans (5.25), il vient :

$$\begin{aligned}
 & (\mathbb{P}(X \geq a))^2 \frac{\partial \psi_t}{\partial t}(x) \\
 &= \int_a^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, u) f(u) \mathbb{P}(X \geq u) du - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, a)}{\frac{\partial \phi}{\partial x}(t, a)} f(a) \int_a^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, y) \mathbb{P}(X \geq y) dy \\
 &= \int_a^{+\infty} du f(u) f(a) \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, u) \left(\frac{\mathbb{P}(X \geq a)}{f(a)} - \frac{\mathbb{P}(X \geq u)}{f(u)} \right) \\
 &\quad + \int_a^{+\infty} du f(u) f(a) \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, u) - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, a)}{\frac{\partial \phi}{\partial x}(t, a)} \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, u) \right) \frac{\mathbb{P}(X \geq u)}{f(u)}.
 \end{aligned}$$

Le second terme est positif grâce à l'hypothèse (ii). Posons alors :

$$\theta_a(u) = 1_{\{u \geq a\}} \left(\frac{\mathbb{P}(X \geq a)}{f(a)} - \frac{\mathbb{P}(X \geq u)}{f(u)} \right)$$

D'après l'hypothèse (i), la fonction $u \mapsto \frac{\mathbb{P}(X \geq u)}{f(u)}$ est décroissante donc θ_a est croissante

et positive. Ainsi, en notant $\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^{-1}$ l'inverse, au sens de la composition, de la fonction

$$x \mapsto \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) :$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} du f(u) f(a) \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, u) \theta_a(u) &= f(a) \mathbb{E} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, X) \theta_a(X) \right] \\
 &= f(a) \mathbb{E} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, X) \theta_a \circ \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^{-1} \left(t, \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, X) \right) \right] \\
 &\geq f(a) \theta_a \circ \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^{-1}(t, 0) \mathbb{E} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, X) \right] = 0
 \end{aligned}$$

car $x \mapsto \theta_a \circ \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^{-1}(t, x)$ est croissante. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \psi_t(x)$ est une fonction croissante de t , i.e. la famille de temps d'arrêt $(T_t, t \geq 0)$ est p.s croissante. $\square$

Corollaire 5.18. *Soit X une v.a. aléatoire log-concave de densité f strictement positive sur $\mathbb{R}$. Alors, en gardant les notations et les hypothèses (ii) et (iii) du théorème précédent, $(B_{T_t}, t \geq 0)$ est une martingale associée à $(\phi(t, X), t \geq 0)$.*

Démonstration.

Il nous faut prouver que si f est log-concave, alors $x \mapsto \int_x^{+\infty} f(u) du$ l'est également.

D'après Prékopa [Pré73, Theorem 6], si $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction log-concave (c'est-à-dire $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in]0, 1[, g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq g(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}$) alors

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(x, y) dy$$

est log-concave sur $\mathbb{R}$.

Dans notre cadre, posons $g(x, y) = f(y) 1_{\{y \geq x\}}$ et soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in]0, 1[$. f

étant log-concave, on a :

$$f(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \geq f(y_1)^\lambda f(y_2)^{1-\lambda}.$$

Par ailleurs, il est clair que

$$1_{\{\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \geq \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\}} \geq 1_{\{y_1 \geq x_1\}} 1_{\{y_2 \geq x_2\}} = (1_{\{y_1 \geq x_1\}})^\lambda (1_{\{y_2 \geq x_2\}})^{1-\lambda}$$

de sorte que

$$g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \geq g(x_1, y_1)^\lambda g(x_2, y_2)^{1-\lambda}.$$

Le résultat découle ainsi du théorème de Prékopa. $\square$

Voici quelques exemples de peacocks satisfaisant les hypothèses du Théorème 5.17.

Exemple 5.19. Soit X une v.a. aléatoire de densité f strictement positive sur $\mathbb{R}$, et telle que $x \mapsto \int_x^{+\infty} f(u)du$ soit log-concave.

– On suppose que, pour tout $r \geq 0$, $\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, r]} |X| e^{tX} \right] < \infty$. Alors, le peacock

$$\left(\phi(t, X) := \frac{e^{tX}}{\mathbb{E}[e^{tX}]} - 1, t \geq 0 \right) \quad \text{satisfait les hypothèses du Théorème 5.17.}$$

– On suppose X centrée. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, impaire, strictement croissante, convexe sur $]0, +\infty[$, et telle que, pour tout $r \geq 0$, $\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, r]} |X| \varphi'(tX) \right] < \infty$. Alors, le peacock

$$(\phi(t, X) := \varphi(tX), t \geq 0) \quad \text{satisfait les hypothèses du Théorème 5.17.}$$

En particulier, le Théorème 5.17 permet d'associer (pour certaines v.a. X) une martingale au peacock $(\sqrt{t}X, t \geq 0)$. Nous allons étudier cet exemple plus en détails dans la fin de ce chapitre.

5.4.3 Martingales associées à $(\sqrt{t}X, t \geq 0)$

Comme dans la Sous-section 5.2.3, nous allons à présent chercher des martingales satisfaisant les deux propriétés suivantes :

(a) $(M_t, t \geq 0)$ possède la propriété d'échelle brownienne :

$$\forall c > 0, \quad (M_{c^2 t}, t \geq 0) \stackrel{(\text{loi})}{=} (cM_t, t \geq 0)$$

(b) $(M_t, t \geq 0)$ est un processus markovien (inhomogène).

Proposition 5.20.

Soit X une v.a. intégrable et centrée de loi μ . Soit, pour tout $t \geq 0$, μ_t la loi de $\sqrt{t}X$, ψ_t la fonction de Hardy-Littlewood attachée à μ_t :

$$\psi_t(x) = \frac{1}{\mu_t([x, +\infty[)} \int_{[x, +\infty[} y \mu_t(dy)$$

et T_t le temps d'arrêt d'Azéma-Yor (que nous noterons également T_{ψ_t}) :

$$T_t := \inf\{u \geq 0; S_u \geq \psi_t(B_u)\} \quad (5.26)$$

On suppose que la famille de temps d'arrêt $(T_t, t \geq 0)$ est croissante p.s. Alors :

- 1) $(B_{T_t}, t \geq 0)$ est une martingale, et un processus de Markov (inhomogène).
- 2) $(B_{T_t}, t \geq 0)$ possède la propriété d'échelle brownienne.

En particulier, $(B_{T_t}, t \geq 0)$ est une martingale associée à $(\sqrt{t}X, t \geq 0)$.

Démonstration.

Le Point 1) est clair. On peut se référer à [MY02] où le générateur infinitésimal de $(B_{T_t}, t \geq 0)$ est calculé. On se contente par conséquent de prouver le Point 2). Soit $c > 0$ fixé.

i) D'après la propriété d'échelle brownienne :

$$(S_{c^2t}, B_{c^2t}, t \geq 0) \stackrel{(\text{loi})}{=} (cS_t, cB_t, t \geq 0),$$

et la définition (5.26) de T_{ψ_t} , on déduit que :

$$(B_{T_{\psi_t}}, t \geq 0) \stackrel{(\text{loi})}{=} \left(cB_{T_{\psi_t^{(c)}}}, t \geq 0 \right) \quad (5.27)$$

avec $\psi_t^{(c)}(x) := \frac{1}{c}\psi_t(cx)$.

ii) Un calcul élémentaire fournit :

$$\psi_t(x) = \sqrt{t}\psi_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right). \quad (5.28)$$

On obtient alors d'après (5.28) :

$$\psi_{c^2t}^{(c)}(x) = \frac{1}{c}\psi_{c^2t}(cx) = \sqrt{t}\psi_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \psi_t(x). \quad (5.29)$$

Finalement, en rassemblant (i) et (ii), il vient :

$$\begin{aligned} \left(B_{T_{\psi_{c^2t}}}, t \geq 0 \right) &\stackrel{(\text{loi})}{=} \left(cB_{T_{\psi_{c^2t}^{(c)}}}, t \geq 0 \right) \quad (\text{d'après (5.27)}) \\ &\stackrel{(\text{loi})}{=} \left(cB_{T_{\psi_t}}, t \geq 0 \right) \quad (\text{d'après (5.29)}). \end{aligned}$$

□

Remarque 5.21 (Due à P. Vallois).

On peut prouver aisément (voir [AY79, Proposition 3.6]) que, pour tout $x \geq 0$:

$$\mathbb{P}(S_{T_\mu} \geq x) = \exp\left(-\int_0^x \frac{dy}{y - \psi_\mu^{-1}(y)}\right)$$

où ψ_μ^{-1} est l'inverse continu à droite de ψ_μ . En remplaçant μ par μ_t dans cette formule, et

en utilisant $\psi_{\mu_t}^{-1}(y) = \sqrt{t}\psi_{\mu}^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{T_{\mu_t}} \geq x) &= \exp\left(-\int_0^x \frac{dy}{y - \psi_{\mu_t}^{-1}(y)}\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^x \frac{dy}{y - \sqrt{t}\psi_{\mu}^{-1}\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)}\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} \frac{du}{u - \psi_{\mu}^{-1}(u)}\right) = \mathbb{P}(\sqrt{t}S_{T_{\mu}} \geq x).\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \geq 0$, la fonction $t \mapsto \mathbb{P}(S_{T_{\mu_t}} \geq x)$ est croissante, et en conséquence, même si la famille de temps d'arrêt $(T_t, t \geq 0)$ n'est pas p.s. croissante, le processus $(S_{T_{\mu_t}}, t \geq 0)$ est stochastiquement croissant.

Exemple 5.22. Dans l'article [MY09], les exemples suivants ont été étudiés en détails :

i) L'exemple du "barrage" :

$$\mu_t(dx) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{t}}(x + \sqrt{t})\right) 1_{[-\sqrt{t}, +\infty[}(x)dx$$

qui fournit le temps d'arrêt $T_t := \inf\{u \geq 0; S_u - B_u = \sqrt{t}\}$. Rappelons que d'après le théorème de Lévy, $(S_u - B_u, u \geq 0)$ est un mouvement brownien réfléchi en 0.

ii) L'exemple du "BES³ de Pitman" :

$$\mu_t(dx) = \frac{1}{2\sqrt{t}} 1_{[-\sqrt{t}, \sqrt{t}]}(x)dx$$

qui correspond au temps d'arrêt $T_t := \inf\{u \geq 0; 2S_u - B_u = \sqrt{t}\}$. Rappelons que d'après le théorème de Pitman, $(2S_u - B_u, u \geq 0)$ a même loi qu'un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0.

iii) "L'éventail" d'Azéma-Yor, qui est une généralisation des deux exemples précédents :

$$\mu_t^{(\alpha)}(dx) = \frac{\alpha}{\sqrt{t}} \left(\alpha - \frac{(1-\alpha)x}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} 1_{[-\sqrt{t}, \frac{\alpha\sqrt{t}}{1-\alpha}]}(x)dx, \quad (0 < \alpha < 1)$$

qui fournit le temps d'arrêt $T_t^{(\alpha)} := \inf\{u \geq 0; S_u = \alpha(B_u + \sqrt{t})\}$. L'exemple (i) est obtenu en laissant tendre α vers 1^- .

5.4.4 La condition de Madan-Yor ($M \cdot Y$)

Dans le reste de ce chapitre, nous présentons différentes conditions permettant d'assurer que la famille de temps d'arrêt $(T_t, t \geq 0)$ associée au peacock $(\sqrt{t}X, t \geq 0)$ soit croissante, i.e. que la fonction $t \mapsto \psi_t(x)$ soit croissante pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ fixé. Rappelons que d'après le Théorème 5.17, si X admet une densité telle que la fonction $x \mapsto \mathbb{P}(X \geq x)$ soit log-concave, alors la famille de temps d'arrêt $(T_t, t \geq 0)$ associée à $(\sqrt{t}X, t \geq 0)$ est croissante. Nous donnons ici d'autres conditions, en nous appuyant sur les résultats de Madan-Yor que l'on rappelle ci-dessous.

Lemme 5.23 (Madan-Yor [MY02], Lemma 3).

Soit $X \sim \mu$ satisfaisant (5.23). On définit :

$$D_\mu(x) := \frac{x\bar{\mu}(x)}{\int_{[x,+\infty[} y\mu(dy)} \quad \text{où } \bar{\mu}(x) := \mathbb{P}(X \geq x) = \int_{[x,+\infty[} \mu(dy).$$

Alors la famille de temps d'arrêt $(T_t, t \geq 0)$ associée au peacock $(\sqrt{t}X, t \geq 0)$ est croissante si et seulement si :

$$x \mapsto D_\mu(x) \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+. \quad (M \cdot Y)$$

Démonstration.

D'après (5.28), $\psi_t(x) = \sqrt{t}\psi_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$, donc, si $x \leq 0$, puisque ψ_1 est une fonction croissante et positive, $t \mapsto \psi_t(x)$ est croissante. Pour $x > 0$, on pose $a_t = \frac{x}{\sqrt{t}}$; ainsi :

$$\psi_t(x) = \sqrt{t}\psi_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = x \frac{\psi_1(a_t)}{a_t},$$

et, $t \mapsto a_t$ étant une fonction décroissante de t , la croissance de la fonction $t \mapsto \psi_t(x)$ est équivalente à la croissance de la fonction $a \mapsto \frac{a}{\psi_1(a)} = D_\mu(a)$.

□

Une caractéristique remarquable de ce résultat est que la Condition $(M \cdot Y)$ ne dépend que de la restriction de μ à $\mathbb{R}^+$. Cela provient du caractère asymétrique de la construction d'Azéma-Yor, dans laquelle $\mathbb{R}^+$, via $(S_u, u \geq 0)$, joue un rôle spécial. En conséquence, nous ne considérons plus, par la suite, que des mesures positives finies définies sur $\mathbb{R}^+$, que nous supposons absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, de densités h strictement positives. Notre but est à présent de donner des conditions suffisantes sur h qui assurent que $(M \cdot Y)$ soit satisfaite. Nous commençons par un lemme relativement général, qui reprend une des hypothèses de Madan-Yor telle qu'énoncée dans [MY02, Theorem 4] (il s'agit du Point (iii) ci-dessous).

Proposition 5.24. Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, l[$ ($0 < l \leq +\infty$), et strictement positive. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- i) Pour tout $c \in]0, 1[$, $a \mapsto \frac{h(a)}{h(ac)}$ est une fonction décroissante.
- ii) La fonction $\varepsilon(y) := -\frac{yh'(y)}{h(y)}$ est croissante.
- iii) $h(a) = e^{-V(a)}$ où $a \mapsto aV'(a)$ est une fonction croissante.

Nous appelons cette condition (S_0) .

Par ailleurs, pour tout $a, b \in]0, l[$:

$$V(a) - V(b) = \int_b^a \frac{\varepsilon(y)}{y} dy,$$

de sorte que :

$$h(a) = h(b) \exp\left(-\int_b^a \frac{\varepsilon(y)}{y} dy\right).$$

Remarque 5.25. Voici quelques observations générales à propos de la condition (S_0) :

- si deux fonctions h_1 et h_2 satisfont la condition (S_0) , alors le produit $h_1 h_2$ également.
- si h satisfait la condition (S_0) , alors, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ et $\gamma \geq 0$, la fonction $a \mapsto a^\beta h(a^\gamma)$ également.
- En guise d'exemple, observons que la transformée de Laplace $h(a) = \mathbb{E}[e^{-aX}]$ d'une v.a. auto-décomposable positive X satisfait la condition (i). En effet, par définition, pour tout $c \in]0, 1[$, il existe une v.a. positive $X^{(c)}$ indépendante de X telle que :

$$X \stackrel{(loi)}{=} cX + X^{(c)}.$$

En prenant la transformée de Laplace des deux membres, on obtient :

$$h(a) := \mathbb{E}[e^{-aX}] = \mathbb{E}[e^{-acX}] \mathbb{E}[e^{-aX^{(c)}}],$$

que l'on peut réécrire :

$$\frac{h(a)}{h(ac)} = \mathbb{E}[e^{-aX^{(c)}}].$$

Démonstration.

1) Prouvons $(i) \iff (ii)$

L'implication $(ii) \implies (i)$ est claire. En effet, pour $c \in]0, 1[$, on peut écrire :

$$\frac{h(a)}{h(ac)} = \exp\left(-\int_{ac}^a \frac{\varepsilon(y)}{y} dy\right) = \exp\left(-\int_c^1 \frac{\varepsilon(ax)}{x} dx\right) \quad (5.30)$$

qui est une fonction décroissante de a puisque ε est croissante et $0 < c < 1$.

Prouvons l'implication réciproque $(i) \implies (ii)$. D'après (5.30), on sait que pour tout $c \in]0, 1[$, $a \mapsto \int_{ac}^a \frac{\varepsilon(x)}{x} dx$ est une fonction croissante. Par conséquent, en dérivant :

$$\forall a \in]0, l[, \forall c \in]0, 1[, \quad \varepsilon(a) - \varepsilon(ac) \geq 0$$

ce qui prouve que ε est une fonction croissante.

2) Prouvons finalement que $(ii) \iff (iii)$

D'après les deux représentations de h , on déduit que $V(a) = \int_b^a \frac{\varepsilon(y)}{y} dy - \ln h(b)$, ce qui donne, en dérivant :

$$aV'(a) = \varepsilon(a), \quad (5.31)$$

et qui achève la preuve de la Proposition 5.24. □

Le théorème suivant donne une condition suffisante sur h pour que la fonction $a \mapsto D_\mu(a)$ soit croissante.

Théorème 5.26.

On suppose que μ admet une densité h sur $\mathbb{R}^+$ qui satisfait (S_0) (voir Proposition 5.24).

1) Alors, il existe $\rho > 2$ (éventuellement $+\infty$) tel que :

$$\forall c \in]0, 1[, \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{h(a)}{h(ac)} = c^\rho. \quad (5.32)$$

De plus :

$$\rho = \lim_{a \rightarrow +\infty} \varepsilon(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} aV'(a).$$

2) D_μ est une fonction croissante qui converge vers ℓ avec :

- si $\rho < +\infty$, alors $\ell = \frac{\rho - 2}{\rho - 1}$,
- si $\rho = +\infty$, alors $\ell = 1$.

En particulier, si $\rho = +\infty$, il existe une mesure de probabilité ν_μ telle que :

$$D_\mu(a) = \nu_\mu([0, a]), \quad a \geq 0.$$

Remarque 5.27.

- Le Point 1) du Théorème 5.26 permet de porter un nouveau regard sur la Proposition 5.24. En effet, d'après (5.32), on voit que h est une fonction à variations régulières au sens de Karamata, et la Proposition 5.24 ressemble à une version du théorème de représentation de Karamata (voir [BGT89, Chapter 1, Theorems 1.3.1 et 1.4.1]).

- Le fait que la fonction $a \mapsto \frac{h(a)}{h(ac)}$ soit décroissante n'est pas nécessaire pour obtenir l'existence d'une limite pour $D_\mu(a)$ lorsque $a \rightarrow +\infty$, voir [BGT89, Theorem 8.1.4].

Démonstration.

1) Prouvons tout d'abord le Point 1)

On suppose que h satisfait (S_0) sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent, la limite décroissante $\gamma_c := \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{h(a)}{h(ac)}$ existe et appartient à $[0, 1]$. Alors, pour tout $c, d \in]0, 1[$:

$$\gamma_{cd} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{h(a)}{h(acd)} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{h(a)}{h(ac)} \frac{h(ac)}{h(acd)} = \gamma_c \gamma_d.$$

Cela implique que $\gamma_c = c^\rho$ avec $\rho \in \mathbb{R}^+$. A présent, soit $\eta(a) = \int_a^{+\infty} y h(y) dy$. Pour $A > 1$, on a

$$\begin{aligned} \eta(a) &= \int_a^{+\infty} y h(y) dy = a^2 \int_1^{+\infty} z h(az) dz \geq a^2 \int_1^A z \frac{h(az)}{h(z)} h(z) dz \\ &\geq a^2 \frac{h(aA)}{h(A)} \int_1^A z h(z) dz \\ &\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} a^{2-\rho} \int_1^{+\infty} z h(z) dz. \end{aligned}$$

En laissant a tendre vers $+\infty$, on obtient, puisque $\eta(a) \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0$, que nécessairement $\rho > 2$. Ainsi, en passant à la limite dans (5.30), on obtient :

$$c^\rho = \exp \left(- \int_c^1 \frac{\varepsilon(+\infty)}{y} dy \right), \quad \text{i.e. } \varepsilon(+\infty) = \rho.$$

La dernière égalité est alors une conséquence directe de (5.31).

2) On prouve à présent que D_μ est croissante et converge vers ℓ
L'inverse de D_μ peut s'écrire, en intégrant par parties :

$$\frac{1}{D_\mu(a)} = \frac{[-y\bar{\mu}(y)]_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} \bar{\mu}(y) dy}{a\bar{\mu}(a)} = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\bar{\mu}(ax)}{\bar{\mu}(a)} dx, \quad (5.33)$$

et $(M \cdot Y)$ est clairement impliquée par la propriété : pour tout $x > 1$, $a \mapsto \frac{\bar{\mu}(ax)}{\bar{\mu}(a)}$ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}^+$. En dérivant par rapport à a , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\bar{\mu}(ax)}{\bar{\mu}(a)} \right) = \frac{-xh(ax)\bar{\mu}(a) + h(a)\bar{\mu}(ax)}{(\bar{\mu}(a))^2}.$$

On réécrit alors le numérateur sous la forme :

$$\begin{aligned} h(a) \int_{ax}^{+\infty} h(y) dy - xh(ax) \int_a^{+\infty} h(u) du \\ = xh(a) \int_a^{+\infty} h(ux) du - xh(ax) \int_a^{+\infty} h(u) du \\ = xh(a) \int_a^{+\infty} h(u) \left(\frac{h(ux)}{h(u)} - \frac{h(ax)}{h(a)} \right) du \leq 0 \end{aligned}$$

d'après l'assertion (i) de la Proposition 5.24, puisque pour $x > 1$, la fonction $u \mapsto \frac{h(ux)}{h(u)} =$

$\frac{h(ux)}{h\left(ux\frac{1}{x}\right)}$ est décroissante.

Ainsi, D_μ étant bornée par 1, elle converge vers une limite ℓ , et il reste à identifier ℓ . On écrit, pour $x > 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\mu}(a)}{\bar{\mu}(ax)} &= \frac{\int_a^{+\infty} h(y) dy}{\int_{ax}^{+\infty} h(y) dy} = \frac{\int_1^{+\infty} h(au) du}{\int_x^{+\infty} h(au) du} \\ &= \frac{\int_1^x h(au) du}{\int_x^{+\infty} h(au) du} + 1 \\ &= \frac{\int_1^x \frac{h(ax\frac{u}{x})}{h(ax)} du}{\int_x^{+\infty} \frac{h(au)}{h(au\frac{x}{u})} du} + 1 \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left(\frac{x}{u}\right)^\rho du}{\int_x^{+\infty} \left(\frac{x}{u}\right)^\rho du} + 1 \end{aligned}$$

d'après (5.32). Il nous faut à présent discuter différents cas :

- si $\rho = +\infty$, alors $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\bar{\mu}(a)}{\bar{\mu}(ax)} = +\infty$, et en insérant cette limite dans (5.33), on obtient $\ell = 1$.
- si $\rho < +\infty$, il vient :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\bar{\mu}(a)}{\bar{\mu}(ax)} = \frac{1}{x^{1-\rho}}.$$

En insérant cette limite dans (5.33), on obtient :

$$\frac{1}{\ell} = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\rho-1}} = 1 - \frac{1}{2-\rho} = \frac{1-\rho}{2-\rho}.$$

□

Remarque 5.28.

Plus généralement, pour $p \geq 1$, on a l'équivalence :

$$\int_0^{+\infty} y^p h(y) dy < \infty \iff \rho > p + 1.$$

L'implication $\implies$ peut se prouver exactement de la même manière que le Point 1). Réciproquement, puisque $\varepsilon(y)$ tend vers ρ lorsque y tend vers $+\infty$, il existe $A > 0$ et $\theta > 0$ tels que : $\forall y \geq A$, $\varepsilon(y) \geq p + 1 + \theta$. Alors en appliquant la Proposition 5.24, on obtient :

$$\begin{aligned} h(a) &= h(A) \exp \left(- \int_A^a \frac{\varepsilon(y)}{y} dy \right) \leq h(A) \exp \left(-(p + 1 + \theta) \int_A^a \frac{dy}{y} \right) \\ &= h(A) \left(\frac{A}{a} \right)^{p+1+\theta}. \end{aligned}$$

Observons en particulier que μ admet des moments de tout ordre si et seulement si $\rho = +\infty$.

5.4.5 Cas d'une mesure à support dans $] - \infty, 1]$

Nous nous restreignons à présent au cas d'une v.a. X prenant ses valeurs dans $] - \infty, 1]$. Comme la Condition $(M \cdot Y)$ ne dépend que du comportement de X sur $\mathbb{R}^+$, nous ne considérons plus, désormais, que des mesures μ sur $[0, 1]$, en supposant que 1 appartient au support de μ . Les calculs qui suivent se généralisent sans difficultés au cas d'une v.a. à valeurs dans $] - \infty, k]$ pour $k \in \mathbb{R}^+$.

Notations

Soit μ une mesure positive sur $[0, 1]$, de masse totale finie, et dont le support contient 1. On note $\bar{\mu}$ et $\bar{\bar{\mu}}$, respectivement ses fonctions queue et double queue :

$$\bar{\mu}(x) = \int_{[x, 1]} \mu(dy) = \mu([x, 1]) \quad \text{et} \quad \bar{\bar{\mu}}(x) = \int_x^1 \bar{\mu}(y) dy.$$

Observons que $\bar{\mu}$ est continue à droite, $\bar{\bar{\mu}}$ est continue, et $\bar{\mu}$ et $\bar{\bar{\mu}}$ sont toutes deux des fonctions décroissantes. De plus, il n'est pas difficile de voir que la fonction $\Lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ est la fonction double queue d'une mesure positive finie sur $[0, 1]$ si et seulement si Λ est une fonction convexe sur $[0, 1]$, dérivable à gauche en 1, dérivable à droite en 0, et qui satisfait $\Lambda(1) = 0$. On définit également le quotient des queues u_μ attaché à μ :

$$u_\mu(x) = \bar{\mu}(x) / \bar{\bar{\mu}}(x), \quad x \in [0, 1[.$$

Voici maintenant un lemme général concernant les mesure positives :

Lemme 5.29 (Pierre [Pie80] ou Revuz-Yor [RY99], Chapter VI Lemma 5.1).

1) Pour tout $x \in [0, 1[$:

$$\bar{\mu}(x) = \bar{\bar{\mu}}(0) u_\mu(x) \exp \left(- \int_0^x u_\mu(y) dy \right) \quad (5.34)$$

et u_μ est continue à gauche.

2) Soit $v : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue à gauche et telle que, pour tout $x \in [0, 1[$:

$$\bar{\mu}(x) = \bar{\bar{\mu}}(0) v(x) \exp \left(- \int_0^x v(y) dy \right).$$

Alors, $v = u_\mu$.

Démonstration.

1) Pour $x \in [0, 1[$, on a :

$$-\int_0^x \frac{\bar{\mu}(y)}{\bar{\bar{\mu}}(y)} dy = \int_0^x \frac{d\bar{\mu}(y)}{\bar{\bar{\mu}}(y)} = [\log \bar{\mu}(y)]_0^x = \log \bar{\mu}(x) - \log \bar{\mu}(0),$$

d'où,

$$\bar{\mu}(0)u_\mu(x) \exp\left(-\int_0^x u_\mu(y)dy\right) = \bar{\mu}(0)\frac{\bar{\mu}(x)}{\bar{\bar{\mu}}(x)} \exp\left(\log \frac{\bar{\mu}(x)}{\bar{\mu}(0)}\right) = \bar{\mu}(x).$$

2) Soit $U_\mu(x) := \int_0^x u_\mu(y)dy$ et $V(x) := \int_0^x v(y)dy$. La relation (5.34) implique :

$$\begin{aligned} u_\mu(x) \exp(-U_\mu(x)) &= v(x) \exp(-V(x)), \quad \text{i.e.} \\ (\exp(-U_\mu(x)))' &= (\exp(-V(x)))', \quad \text{d'où} \\ \exp(-U_\mu(x)) &= \exp(-V(x)) + c. \end{aligned}$$

(Les dérivées ci-dessus sont en fait des dérivées à gauche). A présent, puisque $U_\mu(0) = V(0) = 0$, on obtient $c = 0$ et $U_\mu = V$. Puis, en dérivant, et en utilisant le fait que u_μ et v sont continues à gauche, on obtient $u_\mu = v$. □

Remarque 5.30.

1) $u_\mu^2 - u'_\mu$ est une mesure positive sur $]0, 1]$. Notons que si $\mu(dx) = h(x)dx$, alors :

$$u_\mu^2 - u'_\mu = (\bar{\mu}/\bar{\bar{\mu}})^2 - \left(\frac{\bar{\mu}^2 - h\bar{\bar{\mu}}}{\bar{\bar{\mu}}^2}\right) = h/\bar{\bar{\mu}} \geq 0.$$

2) Pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\int_0^x u_\mu(y)dy < \infty \quad \text{et} \quad \int^{1-} u_\mu(y)dy = +\infty. \quad (5.35)$$

Ces relations proviennent de (5.34) : pour tout $x \in [0, 1[$:

$$\bar{\bar{\mu}}(x) = \bar{\bar{\mu}}(0) \exp\left(-\int_0^x u_\mu(y)dy\right) \quad \text{et} \quad \bar{\bar{\mu}}(0) = \int_{[0,1]} y\mu(dy) > 0.$$

De même que précédemment, nous définissons la fonction de Hardy-Littlewood ψ_μ attachée à μ :

$$\begin{cases} \psi_\mu(a) = \frac{1}{\mu([a, 1])} \int_{[a,1]} y\mu(dy), & a \in [0, 1[\\ \psi_\mu(1) = 1 \end{cases}$$

et la fonction de Madan-Yor attachée à μ :

$$D_\mu(a) = \frac{a}{\psi_\mu(a)}, \quad a \in [0, 1].$$

En particulier, $D_\mu(1) = 1$ et $D_\mu(0) = 0$. Observons qu'en intégrant par parties :

$$\bar{\bar{\mu}}(a) = \int_a^1 (y - a)\mu(dy) = \bar{\mu}(a)(\psi_\mu(a) - a),$$

d'où, $u_\mu(a) = \frac{1}{\psi_\mu(a) - a}$ et donc :

$$D_\mu(a) = \frac{a}{\psi_\mu(a) - a + a} = \frac{a}{(1/u_\mu(a)) + a} = \frac{au_\mu(a)}{au_\mu(a) + 1}. \quad (5.36)$$

Nous résumons toutes ces notations sous forme d'un tableau :

$\mu(dx)$	Une mesure positive finie sur $[0, 1]$ dont le support contient 1.
$\bar{\mu}(a) = \mu([a, 1])$	Fonction queue attachée à μ
$\bar{\bar{\mu}}(a) = \int_a^1 \bar{\mu}(x) dx$	Fonction double queue attachée à μ
$u_\mu(a) = \bar{\mu}(a)/\bar{\bar{\mu}}(a) = \frac{1}{\psi_\mu(a) - a}$	Quotient des queues attachées à μ
$\psi_\mu(a) = \frac{1}{\bar{\mu}(a)} \int_{[a, 1]} x \mu(dx)$	Fonction de Hardy-Littlewood attachée à μ
$D_\mu(a) = \frac{a}{\psi_\mu(a)} = \frac{au_\mu(a)}{au_\mu(a) + 1}$	Fonction de Madan-Yor attachée à μ

5.4.6 Des conditions équivalentes à $(M \cdot Y)$

Soit μ une mesure positive sur $[0, 1]$, de masse totale finie et dont le support contient 1. Nous étudions à présent la condition $(M \cdot Y)$ plus en détails.

Quelques propriétés élémentaires de D_μ

i) On déduit des inégalités, pour $x \in [0, 1]$:

$$x\bar{\mu}(x) = x \int_{[x, 1]} \mu(dy) \leq \int_{[x, 1]} y \mu(dy) \leq \int_{[x, 1]} \mu(dy) = \bar{\mu}(x)$$

que ψ_μ et D_μ sont continues à gauche sur $]0, 1]$, et que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$x \leq \psi_\mu(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad x \leq D_\mu(x) \leq 1. \quad (5.37)$$

ii) On suppose à présent que μ admet une densité h :

- si h est continue en 0, alors : $D'_\mu(0^+) = \bar{\mu}(0)/\bar{\bar{\mu}}(0)$,

- si h est continue en 1, et $h(1) > 0$, alors : $D'_\mu(1^-) = \frac{1}{2}$,

- si h admet, au voisinage de 1, le développement :

$$h(1-x) = Cx^\alpha + o(x^\alpha), \text{ avec } C, \alpha > 0 \text{ alors : } D'_\mu(1^-) = \frac{1}{2+\alpha}.$$

Ces trois propriétés sont des conséquences de la formule suivante, valable en tout point de continuité de h :

$$\frac{D'_\mu(x)}{D_\mu(x)} = \frac{1}{x} - h(x) \frac{1 - D_\mu(x)}{\bar{\mu}(x)}. \quad (5.38)$$

Une condition équivalente à $(M \cdot Y)$

Théorème 5.31. *Soit μ une mesure positive finie sur $[0, 1]$ dont le support contient 1, et u_μ son quotient des queues. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) D_μ est croissante sur $[0, 1]$, i.e. $(M \cdot Y)$ est satisfaite.
- ii) Il existe une mesure de probabilité ν_μ sur $]0, 1[$ telle que :

$$\forall a \in [0, 1], \quad D_\mu(a) = \nu_\mu([0, a]). \quad (5.39)$$

- iii) $a \longrightarrow au_\mu(a)$ est une fonction croissante sur $[0, 1[$.

Démonstration.

Bien sûr, l'équivalence entre les Points (i) et (ii) est évidente, puisque $D_\mu(0) = 0$ et $D_\mu(1) = 1$. Quant à l'équivalence entre les Points (i) et (iii), elle découle de (5.36) :

$$D_\mu(a) = \frac{au_\mu(a)}{au_\mu(a) + 1}.$$

□

Remarque 5.32.

1) La mesure de probabilité ν_μ définie par (5.39) possède des propriétés particulières. En effet, d'après (5.39), elle satisfait

$$\frac{\nu_\mu([0, a])}{a} = \frac{D_\mu(a)}{a} = \frac{1}{\psi_\mu(a)}.$$

Donc, puisque la fonction ψ_μ est croissante sur $[0, 1]$, la fonction $a \longmapsto \frac{\nu_\mu([0, a])}{a}$ est décroissante sur $[0, 1]$, et $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\nu_\mu([0, a])}{a} = \frac{1}{\psi_\mu(0)}$.

2) D'après (5.36), on a $\nu_\mu([0, a]) = D_\mu(a) = \frac{au_\mu(a)}{au_\mu(a) + 1}$, donc, pour tout $a \in]0, 1[$:

$$u_\mu(a) = \frac{\nu_\mu([0, a])}{a\nu_\mu([a, 1])},$$

et, en particulier, $\nu_\mu([a, 1]) > 0$. Ainsi, avec l'aide de (5.35), ν_μ satisfait nécessairement la relation :

$$\int^{1^-} \frac{da}{\nu_\mu([a, 1])} = +\infty.$$

3) La fonction D_μ est caractérisée par ses valeurs sur $]0, 1[$ (puisque $D_\mu(0) = 0$ et $D_\mu(1) = 1$). Donc, D_μ ne dépend que des valeurs prises par ψ_μ sur $]0, 1[$, et par conséquent, D_μ ne dépend que de la restriction de μ à $]0, 1]$. La valeur de $\mu(\{0\})$ n'a pas d'influence sur la condition $(M \cdot Y)$.

Une caractérisation des mesures ν_μ

Le Théorème 5.31 invite à se poser la question suivante : étant donnée une mesure de probabilité ν sur $]0, 1[$, à quelles conditions sur ν existe-t-il une mesure positive μ sur $[0, 1]$ de masse totale finie¹ telle que μ satisfasse $(M \cdot Y)$?

1. Notons que puisque D_μ n'est pas modifiée si l'on remplace μ par un multiple de μ , μ peut toujours être choisie comme une probabilité.

En particulier, les conditions données dans les Points 1) et 2) de la Remarque précédente 5.32 sont-elle suffisantes ? Nous répondons à cette question par l'affirmative dans le Théorème suivant.

Notation. Nous adoptons les notations suivantes :

- $\mathcal{P}_1$ désigne l'ensemble des probabilités μ sur $[0, 1]$, dont le support contient 1, et qui satisfont $(M \cdot Y)$.
- $\mathcal{P}_1^0 = \{\mu \in \mathcal{P}_1; \mu(\{0\}) = 0\}$.
- $\mathcal{P}'_1$ désigne l'ensemble des probabilités ν sur $]0, 1[$ telles que :

- i) $\nu([a, 1]) > 0$ pour tout $a \in]0, 1[$,
- ii) $a \mapsto \frac{\nu(]0, a[)}{a}$ est une fonction décroissante sur $]0, 1[$ telle que

$$c_\nu := \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\nu(]0, a[)}{a} < \infty,$$
- iii) $\int^{1^-} \frac{da}{\nu([a, 1])} = +\infty$.

- On définit une application Γ sur $\mathcal{P}_1$ comme suit : si $\mu \in \mathcal{P}_1$, alors $\Gamma(\mu)$ est la mesure ν sur $]0, 1[$ telle que

$$D_\mu(a) = \nu(]0, a[), \quad a \in [0, 1].$$

En d'autres termes, $\Gamma(\mu) = \nu_\mu$ définie par (5.39).

A l'aide des notations ci-dessus, nous pouvons énoncer :

Théorème 5.33.

- 1) $\Gamma(\mathcal{P}_1^0) = \Gamma(\mathcal{P}_1) = \mathcal{P}'_1$.
- 2) Si $\mu \in \mathcal{P}_1$ et $\mu_0 \in \mathcal{P}_1^0$, alors

$$\Gamma(\mu) = \Gamma(\mu_0) \quad \text{si et seulement si} \quad \mu = \mu(\{0\})\delta_0 + (1 - \mu(\{0\}))\mu_0$$

(où δ_0 désigne la mesure de Dirac en 0).

On déduit de 1) et 2) que Γ induit une bijection entre $\mathcal{P}_1^0$ et $\mathcal{P}'_1$.

Démonstration.

a) La Remarque 5.32 implique que :

$$\Gamma(\mathcal{P}_1^0) \subset \Gamma(\mathcal{P}_1) \subset \mathcal{P}'_1.$$

b) On prouve à présent que $\mathcal{P}'_1 \subset \Gamma(\mathcal{P}_1^0)$. Soit $\nu \in \mathcal{P}'_1$. Nous définissons $u^{(\nu)}$ par :

$$\begin{cases} u^{(\nu)}(x) := \frac{\nu(]0, x[)}{x(1 - \nu(]0, x[))} & \text{pour } x \in]0, 1[, \\ u^{(\nu)}(0) := c_\nu = \lim_{x \rightarrow 0^+} u^{(\nu)}(x), \end{cases}$$

et on pose, pour $x \in [0, 1]$:

$$m(x) = \frac{1}{c_\nu} u^{(\nu)}(x) \exp \left(- \int_0^x u^{(\nu)}(y) dy \right). \quad (5.40)$$

Remarquons que m est continue à gauche sur $]0, 1[$, continue à droite en 0 et que $m(0) = 1$. Pour prouver que m est décroissante sur $[0, 1]$, il suffit de montrer que m est décroissante sur $]0, 1[$ ou, de manière équivalente (voir Remarque 5.30), que la distribution sur $]0, 1[$:

$(u^{(\nu)})^2 - (u^{(\nu)})'$, est une mesure positive.

D'après la définition de $u^{(\nu)}$, et en posant :

$$\nu(a) := \nu(]0, a[),$$

nous devons prouver que (sur $]0, 1[$) :

$$\begin{aligned} \nu^2(a)da &\geq a(1 - \nu(a))d\nu(a) - \nu(a)(1 - \nu(a))da + a\nu(a)d\nu(a) \\ \iff \nu^2(a)da &\geq ad\nu(a) - \nu(a)(1 - \nu(a))da \\ \iff 0 &\geq ad\nu(a) - \nu(a)da \\ \iff 0 &\geq d\left(\frac{\nu(a)}{a}\right). \end{aligned}$$

Cette dernière relation est assurée par la Propriété (ii) de la définition de $\mathcal{P}'_1$. Ainsi, il existe une mesure de probabilité μ sur $[0, 1]$ telle que

$$\bar{\mu}(x) = m(x), \quad x \in [0, 1[.$$

En particulier, puisque m est continue à droite en 0, $\mu(\{0\}) = 0$. En utilisant la Propriété (iii) de la définition de $\mathcal{P}'_1$, on obtient à partir de (5.40), par intégration :

$$\bar{\bar{\mu}}(0) = \frac{1}{c_\nu}.$$

Par conséquent, d'après le Lemme 5.29, $u^{(\nu)} = u_\mu$, ou encore :

$$u_\mu(a) = \frac{\nu(]0, a[)}{a(1 - \nu(]0, a[))}, \quad a \in]0, 1[.$$

Finalement,

$$D_\mu(a) = \frac{au_\mu(a)}{au_\mu(a) + 1} = \nu(]0, a[), \quad a \in]0, 1[,$$

et donc, $\mu \in \mathcal{P}_1^0$ et $\Gamma(\mu) = \nu$.

c) Nous prouvons à présent le Point 2). Supposons tout d'abord que $\mu \in \mathcal{P}_1$, $\mu_0 \in \mathcal{P}_1^0$ et $\Gamma(\mu) = \Gamma(\mu_0)$. On a alors :

$$u_\mu(a) = u_{\mu_0}(a), \quad a \in]0, 1[.$$

D'après le Lemme 5.29, cela implique qu'il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$\bar{\mu}(x) = \lambda\bar{\mu}_0(x), \quad x \in]0, 1[$$

et par conséquent, en dérivant, la restriction de μ à $]0, 1[$ est égale à $\lambda\mu_0$. En conséquence, $\mu = \mu(\{0\})\delta_0 + \lambda\mu_0$ et, puisque μ est une probabilité, $\lambda = 1 - \mu(\{0\})$.

A l'inverse, supposons que $\mu = \mu(\{0\})\delta_0 + (1 - \mu(\{0\}))\mu_0$. Puisque 1 appartient au support de μ , $\mu(\{0\}) < 1$. Il s'ensuit alors que $\psi_\mu(x) = \psi_{\mu_0}(x)$ pour $x \in]0, 1[$, et donc, $D_\mu(a) = D_{\mu_0}(a)$ pour $a \in]0, 1[$, ce qui entraîne $\Gamma(\mu) = \Gamma(\mu_0)$. □

Exemple 5.34. Si ν est une mesure qui admet une densité continue g décroissante sur $]0, 1[$, et strictement positive au voisinage de 1, alors $\nu \in \mathcal{P}'_1$. Par exemple, prenons pour

$\beta \geq 2\alpha > 0$, $g(x) = \frac{\beta - 2\alpha x}{\beta - \alpha} 1_{]0,1[}(x)$. Alors, $\nu(]0, x]) = \frac{\beta x - \alpha x^2}{\beta - \alpha}$, et après quelques calculs, on obtient :

$$\bar{\mu}(x) = \frac{\beta - \alpha x}{\beta} (1 - x)^{\frac{\alpha}{\beta - 2\alpha}} \left(1 - \frac{\alpha x}{\beta - \alpha}\right)^{-\frac{\beta - \alpha}{\beta - 2\alpha}}.$$

En particulier, en laissant tendre α vers 0, il vient : $\forall x \in [0, 1]$, $\bar{\mu}(x) = 1$, i.e. la correspondance :

$$\nu(dx) = 1_{]0,1[}(x)dx \longleftrightarrow \mu(dx) = \delta_1(dx)$$

où δ_1 désigne la mesure de Dirac en 1.

Exemple d'éléments de $\mathcal{P}'_1$

A une mesure positive ρ sur $]0, +\infty[$ telle que $\int_0^{+\infty} y\rho(dy) < \infty$, nous associons la mesure ν caractérisée par :

$$\nu(]0, a]) = \frac{1}{Z} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-ay})\rho(dy)$$

où la constante $Z := \int_0^{+\infty} (1 - e^{-y})\rho(dy)$ est telle que $\nu(]0, 1]) = 1$. Clairement, $a \mapsto \frac{\nu(]0, a])}{a} = \frac{1}{Z} \int_0^{+\infty} e^{-au}\bar{\rho}(u)du$, où $\bar{\rho}(u) = \rho(]u, +\infty[)$, est décroissante et $c_\nu = \frac{1}{Z} \int_0^{+\infty} y\rho(dy) < \infty$. De plus, $\lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{\nu([a, 1])}{1 - a} = \frac{1}{Z} \int_0^{+\infty} ye^{-y}\rho(dy) > 0$, donc $\int^{1^-} \frac{da}{\nu([a, 1])} = +\infty$, et le Théorème 5.33 s'applique.

Donnons quelques exemples :

i) Pour $\rho(dx) = e^{-\lambda x}dx$ ($\lambda > 0$), on obtient : $\nu(]0, a]) = \frac{(\lambda + 1)a}{\lambda + a}$ ($a \in [0, 1]$) et

$$\bar{\mu}(a) = \frac{1}{1 - a} \exp\left(-\int_0^a \frac{\lambda + 1}{\lambda} \frac{dx}{1 - x}\right) = (1 - a)^{1/\lambda}$$

ii) Pour $\rho(dx) = \mathbb{P}(\Gamma \in dx)$ où Γ est une v.a. positive d'espérance finie, on obtient

$$\nu(]0, a]) = \mathbb{P}\left(\frac{\mathfrak{e}}{\Gamma} \leq a \mid \frac{\mathfrak{e}}{\Gamma} \leq 1\right)$$

où $\mathfrak{e}$ est une v.a. exponentielle standard indépendante de Γ . Dans ce cas, on peut remarquer que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\psi_\mu(a)} &= \frac{\nu(]0, a])}{a} = K \int_0^{+\infty} e^{-ax} \mathbb{P}(\Gamma > x) dx \\ &= K \mathbb{E} \left[\int_0^\Gamma e^{-ax} dx \right] = \frac{K}{a} \mathbb{E} [1 - e^{-a\Gamma}] \end{aligned}$$

où $K = 1/\mathbb{E} [1 - e^{-\Gamma}]$. Par conséquent, la fonction de Madan-Yor

$$D_\mu(a) = \frac{a}{\psi_\mu(a)} = K \mathbb{E} [1 - e^{-a\Gamma}]$$

est l'exposant de Lévy d'un processus de Poisson composé.

5.4.7 Quelques conditions suffisantes pour $(M \cdot Y)$

Nous donnons à présent un premier jeu de conditions suffisantes (incluant (S_0)) qui englobent la plupart des exemples que nous traiterons dans la sous-section suivante.

Théorème 5.35. *On suppose que la densité h de μ est continue sur $]0, 1[$. Alors, les conditions suivantes impliquent $(M \cdot Y)$:*

(S_0) *h est strictement positive sur $]0, 1[$ et satisfait la condition (i) de la Proposition 5.24.*

(S_1) *pour tout $a \in]0, 1[$*

$$\bar{\mu}(a) := \int_a^1 h(x)dx \geq a(1-a)h(a).$$

(S'_1) *la fonction $a \mapsto a^2h(a)$ est croissante sur $]0, 1[$.*

(S_2) *la fonction $a \mapsto \log(a\bar{\mu}(a))$ est concave sur $]0, 1[$ et $\lim_{a \rightarrow 1^-} (1-a)h(a) = 0$.*

Démonstration.

1) Prouvons tout d'abord : $(S_0) \implies (M \cdot Y)$

La preuve est similaire à celle du Théorème 5.26, si ce n'est qu'il faille faire attention aux bornes d'intégration. On écrit à nouveau pour $a > 0$:

$$\frac{1}{D_\mu(a)} = \frac{\int_a^1 yh(y)dy}{a\bar{\mu}(a)} = \frac{[-y\bar{\mu}(y)]_a^1 + \int_a^1 \bar{\mu}(y)dy}{a\bar{\mu}(a)} = 1 + \int_1^{1/a} \frac{\bar{\mu}(ax)}{\bar{\mu}(a)} dx,$$

et $(M \cdot Y)$ est clairement impliquée par la propriété : pour tout $x > 1$, $a \mapsto \frac{\bar{\mu}(ax)}{\bar{\mu}(a)}$ est une fonction décroissante sur $]0, \frac{1}{x}[$. En dérivant par rapport à a , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\bar{\mu}(ax)}{\bar{\mu}(a)} \right) = \frac{-xh(ax)\bar{\mu}(a) + h(a)\bar{\mu}(ax)}{(\bar{\mu}(a))^2}.$$

On réécrit alors le numérateur sous la forme :

$$\begin{aligned} & h(a) \int_{ax}^1 h(y)dy - xh(ax) \int_a^1 h(u)du \\ &= xh(a) \int_a^{1/x} h(ux)du - xh(ax) \int_a^1 h(u)du \\ &= xh(a) \int_a^{1/x} h(u) \left(\frac{h(ux)}{h(u)} - \frac{h(ax)}{h(a)} \right) du - xh(ax) \int_{1/x}^1 h(u)du \leq 0 \end{aligned}$$

d'après l'assertion (i) de la Proposition 5.24, puisque pour $x > 1$, la fonction $u \mapsto \frac{h(ux)}{h(u)} =$

$\frac{h(ux)}{h(ux\frac{1}{x})}$ est décroissante sur $[0, \frac{1}{x}]$.

2) Prouvons à présent : $(S_1) \implies (M \cdot Y)$

D'après (S_1) et (5.37) :

$$0 \leq \frac{h(a)}{\bar{\mu}(a)}(1 - D_\mu(a)) \leq \frac{1}{a(1-a)}(1-a) = \frac{1}{a}.$$

D'où, d'après (5.38) :

$$\frac{D'_\mu(a)}{D_\mu(a)} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{a} = 0.$$

3) Prouvons que : $(S'_1) \implies (S_1)$, donc $(M \cdot Y)$ est satisfaite
On a, pour $a > 0$:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(a) &:= \int_a^1 h(x) dx = \int_a^1 \frac{x^2 h(x)}{x^2} dx \\ &\geq a^2 h(a) \int_a^1 \frac{1}{x^2} dx \quad (\text{puisque } x \mapsto x^2 h(x) \text{ est croissante}) \\ &= a^2 h(a) \left(\frac{1}{a} - 1 \right) = ah(a)(1 - a). \end{aligned}$$

4) Prouvons finalement : $(S_2) \implies (M \cdot Y)$
On pose $\theta(a) = \log(a\bar{\mu}(a))$. Puisque

$$\int_a^1 th(t) dt = a\bar{\mu}(a) + \int_a^1 \bar{\mu}(t) dt$$

en intégrant par parties, on a, pour $a \in]0, 1[$,

$$D_\mu(a) = \frac{e^{\theta(a)}}{e^{\theta(a)} + \int_a^1 \frac{1}{t} e^{\theta(t)} dt}.$$

Par conséquent, il nous faut prouver que la fonction $a \mapsto e^{-\theta(a)} \int_a^1 \frac{1}{t} e^{\theta(t)} dt$ est décroissante.

En dérivant cette fonction, nous devons montrer que :

$$\kappa(a) := \theta'(a) \int_a^1 \frac{1}{t} e^{\theta(t)} dt + \frac{1}{a} e^{\theta(a)} \geq 0.$$

Mais, puisque $\lim_{a \rightarrow 1^-} \theta(a) = -\infty$, une intégration par parties fournit :

$$\kappa(a) = \int_a^1 \frac{1}{t} e^{\theta(t)} (\theta'(a) - \theta'(t)) + \int_a^1 \frac{1}{t^2} e^{\theta(t)} dt,$$

et, θ' étant une fonction décroissante, cette dernière expression montre que κ est également une fonction décroissante. Par conséquent, il reste à vérifier que :

$$\lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{\bar{\mu}(a) - ah(a)}{\bar{\mu}(a)} \int_a^1 \bar{\mu}(t) dt \geq 0$$

ou encore

$$\lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{h(a)}{\bar{\mu}(a)} \int_a^1 \bar{\mu}(t) dt = 0.$$

Puisque $\int_a^1 \bar{\mu}(t) dt \leq (1 - a)\bar{\mu}(a)$, le résultat découle de l'hypothèse $\lim_{a \rightarrow 1^-} (1 - a)h(a) = 0$. □

Voici également quelques conditions alternatives assurant que $(M \cdot Y)$ est satisfaite :

Proposition 5.36. *On suppose que μ admet une densité h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ qui est strictement positive au voisinage de 1. Les conditions suivantes impliquent $(M \cdot Y)$:*

- (S_3) $a \mapsto a^3 h'(a)$ est croissante sur $]0, 1[$.
- (S_4) $a \mapsto a^3 h'(a)$ est décroissante sur $]0, 1[$.
- (S'_4) h est décroissante et concave. (Clairement, (S'_4) implique (S_4)).
- (S_5) h est une fonction décroissante et $a \mapsto \frac{ah(a)}{1-a}$ est croissante sur $]0, 1[$.
- (S'_5) $0 \geq h'(x) \geq -4h(x)$. (En particulier, h est décroissante)

Démonstration.

1) Prouvons tout d'abord : $(S_3) \implies (S'_1)$

On note $\ell := \lim_{a \rightarrow 0^+} a^3 h'(a) \geq -\infty$. Si $\ell < 0$, alors il existe $A > 0$ et $\varepsilon \in]0, 1[$ tels que pour

$x \in]0, \varepsilon[$, $h'(x) \leq -\frac{A}{x^3}$. On déduit alors que :

$$h(\varepsilon) - h(x) \leq \frac{A}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{x^2} \right) \quad \text{i.e.} \quad h(x) \geq C + \frac{A}{2x^2},$$

ce qui contredit le fait que $\int_0^1 h(x) dx < \infty$. Par conséquent $\ell \geq 0$, h est positive et croissante et $h(0^+) := \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$ existe. Ecrivons alors :

$$\begin{aligned} a^2 h(a) &= a^2 \left(h(0^+) + \int_0^a h'(x) dx \right) = a^2 h(0^+) + a^3 \int_0^1 h'(ay) dy \\ &= a^2 h(0^+) + \int_0^1 \frac{dy}{y^3} (ay)^3 h'(ay), \end{aligned}$$

ce qui implique que $a \mapsto a^2 h(a)$ est croissante comme somme de deux fonctions croissantes.

2) On prouve à présent : $(S_4) \implies (M \cdot Y)$

Posons $\hat{\mu}(a) := \int_{[a, 1]} x \mu(dx)$. Ainsi : $D_\mu(a) := \frac{a\bar{\mu}(a)}{\hat{\mu}(a)}$ et, en dérivant, on constate que l'assertion $D'_\mu(a) \geq 0$ est équivalente à :

$$\gamma(a) := \bar{\mu}(a)\hat{\mu}(a) + a^2 h(a)\bar{\mu}(a) - ah(a)\hat{\mu}(a) \geq 0, \quad a \in]0, 1]. \quad (5.41)$$

Nous allons montrer que, sous (S_4) , $\gamma(1^-) = 0$, $\gamma'(1^-) = 0$ et que γ est convexe, ce qui impliquera bien sûr que $\gamma \geq 0$ sur $]0, 1]$. On note $\ell := \lim_{a \rightarrow 1^-} a^3 h'(a) \geq -\infty$. Observons tout d'abord que $h(1^-)$ est finie. En effet, si ℓ est finie, alors $h'(1^-)$ existe, de même que $h(1^-)$, tandis que si $\ell = -\infty$, alors $\lim_{a \rightarrow 1^-} h'(a) = -\infty$, donc h est décroissante au voisinage de 1 et h étant positive, $h(1^-)$ existe également. Par conséquent, en laissant tendre $a \rightarrow 1$ dans (5.41), on obtient $\gamma(1^-) = 0$. A présent, en dérivant (5.41), il vient :

$$\gamma'(a) = -2h(a)\hat{\mu}(a) + ah(a)\bar{\mu}(a) + ah'(a)(a\bar{\mu}(a) - \hat{\mu}(a)),$$

et pour prouver que $\gamma'(1^-) = 0$, il nous faut montrer, puisque $\hat{\mu}(a) - a\bar{\mu}(a) = \bar{\bar{\mu}}(a)$, que :

$$\lim_{a \rightarrow 1^-} h'(a) \int_a^1 \bar{\mu}(t) dt = 0.$$

Si $h'(1^-)$ est finie, cette propriété est clairement satisfaite. Sinon $\lim_{a \rightarrow 1^-} h'(a) = -\infty$. Dans ce cas, on écrit, pour a dans un voisinage de 1 :

$$0 \leq -h'(a) \int_a^1 \bar{\mu}(t) dt \leq -h'(a)(1-a)\bar{\mu}(a),$$

et il suffit de voir que :

$$\lim_{a \rightarrow 1^-} (1-a)h'(a) = 0. \quad (5.42)$$

Or, puisque $x \mapsto x^3 h'(x)$ est décroissante :

$$h(1^-) - h(a) = \int_a^1 h'(x) dx \leq a^3 h'(a) \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_a^1 = \frac{a(1+a)}{2} h'(a)(1-a) \leq 0$$

et (5.42) s'ensuit en passant à la limite lorsque $a \rightarrow 1$.

Finalement, notons φ la fonction continue décroissante $\varphi : a \mapsto a^3 h'(a)$. Alors :

$$\gamma'(a) = -\varphi(a) \frac{\bar{\mu}(a)}{a^2} - h(a) (\bar{\mu}(a) + \hat{\mu}(a)).$$

Par conséquent, γ' est une fonction continue localement à variation finie, et on obtient en dérivant :

$$d\gamma'(a) = -\frac{\bar{\mu}(a)}{a^2} d\varphi(a) + h(a) (ah(a) + \bar{\mu}(a)) da.$$

Ainsi, $d\gamma'$ est une mesure positive sur $]0, 1[$, ce qui implique que γ est convexe sur $]0, 1[$.

3) On prouve à présent : $(S_5) \implies (M \cdot Y)$

D'après (5.41), pour prouver que D_μ est croissante, il nous faut montrer que :

$$\rho(a) := \frac{\bar{\mu}(a)\hat{\mu}(a)}{ah(a)} + a\bar{\mu}(a) - \hat{\mu}(a) \geq 0.$$

Sous (S_5) , h est décroissante et donc, pour tout $a \in]0, 1[$,

$$\bar{\mu}(a) \leq h(a)(1-a). \quad (5.43)$$

Par conséquent, $\lim_{a \rightarrow 1} \rho(a) = 0$, et il suffit maintenant de voir que $\rho'(a) \leq 0$ sur $]0, 1[$.

$$\rho'(a) = -\frac{\bar{\mu}(a)\hat{\mu}(a)}{a^2 h^2(a)} (h(a) + ah'(a)) - \frac{\hat{\mu}(a)}{a}$$

donc, l'assertion $\rho'(a) \leq 0$ sur $]0, 1[$ est équivalente à :

$$-\frac{1}{ah(a)} - \frac{h'(a)}{h^2(a)} \leq \frac{1}{\bar{\mu}(a)}. \quad (5.44)$$

Mais, sous (S_5) , $a \mapsto \frac{ah(a)}{1-a}$ est croissante, et ainsi, on a, pour $a \in]0, 1[$,

$$\frac{1}{a(1-a)} + \frac{h'(a)}{h(a)} \geq 0. \quad (5.45)$$

Alors, en utilisant (5.43) et (5.45), on obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{ah(a)} - \frac{h'(a)}{h^2(a)} &\leq -\frac{1}{ah(a)} + \frac{1}{a(1-a)h(a)} \\ &= \frac{1}{ah(a)} \left(\frac{1}{1-a} - 1 \right) = \frac{1}{h(a)(1-a)} \leq \frac{1}{\bar{\mu}(a)} \end{aligned}$$

ce qui nous donne (5.44).

4) Prouvons finalement que : $(S'_5) \implies (S_5)$

Il nous faut prouver que $a \mapsto \frac{ah(a)}{1-a}$ est croissante. En dérivant, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{ah(a)}{1-a} \right)' &= \frac{h(a)}{1-a} \left(\frac{1}{a(1-a)} + \frac{h'(a)}{h(a)} \right) = \frac{h(a)}{1-a} \left(\frac{1}{a(1-a)} - \left| \frac{h'(a)}{h(a)} \right| \right) \\ &\geq \frac{h(a)}{1-a} \left(\frac{1}{a(1-a)} - 4 \right) \geq 0 \end{aligned}$$

puisque, pour $a \in [0, 1]$, $a(1-a) \leq \frac{1}{4}$. □

Remarque 5.37. Observons qu'il existe des implications entre ces différentes conditions. En particulier :

- $(S'_1) \implies (S_2)$. En effet, on peut noter tout d'abord, puisque (S'_1) implique (S_1) , que la relation $\bar{\mu}(a) \geq a(1-a)h(a)$ est satisfaite, et implique $\lim_{a \rightarrow 1^-} (1-a)h(a) = 0$. Alors, pour $a \in]0, 1[$, la condition (S'_1) est équivalente à $2h(a) + ah'(a) \geq 0$ et on peut écrire :

$$\begin{aligned} -\left(\log \left(a \int_a^1 h(x) dx \right) \right)'' &= \frac{1}{a^2} + \frac{h'(a)\bar{\mu}(a) + h^2(a)}{\bar{\mu}^2(a)} \\ &= \frac{h(a)}{a\bar{\mu}(a)} \left(\frac{\bar{\mu}(a)}{ah(a)} + \frac{ah'(a)}{h(a)} + \frac{ah(a)}{\bar{\mu}(a)} \right) \\ &\geq \frac{h(a)}{a\bar{\mu}(a)} \left(\frac{ah'(a)}{h(a)} + 2 \right) \quad (\text{puisque pour } x \geq 0, x + \frac{1}{x} \geq 2) \\ &= \frac{1}{a\bar{\mu}(a)} (ah'(a) + 2h(a)) \geq 0. \end{aligned} \tag{5.46}$$

C'est la condition (S_2) , i.e. $a \mapsto \log(a\bar{\mu}(a))$ est une fonction concave.

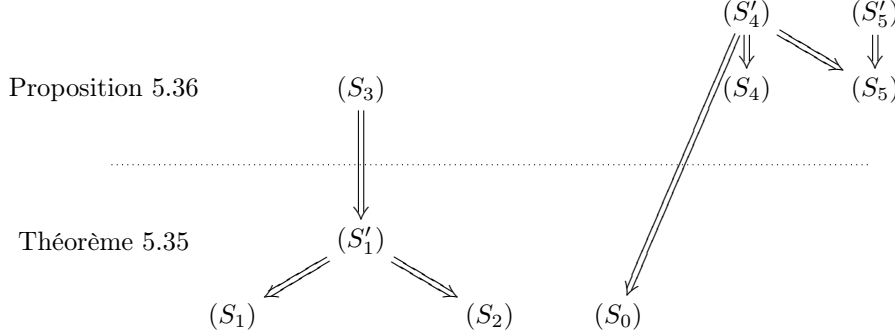
- (S'_4) implique les deux conditions (S_0) et (S_5) .
 - (S_0) est satisfaite puisque la fonction $y \mapsto \frac{yh'(y)}{h(y)}$ est clairement décroissante.
 - Pour prouver que (S_5) est satisfaite, on écrit :

$$h(1) - h(a) = \int_a^1 h'(x) dx = \int_a^1 \frac{x^2 h'(x)}{x^2} dx \leq a^2 h'(a) \int_a^1 \frac{dx}{x^2} = ah'(a)(1-a),$$

d'où :

$$\frac{h(a)}{1-a} + ah'(a) \geq \frac{h(1)}{1-a} \geq 0.$$

On résume les implications entre ces différentes conditions dans le diagramme suivant.



Remarque 5.38.

Soit h une fonction décroissante dont la dérivée h' est bornée. Alors, pour c assez grand, la mesure $\mu^{(c)}(dx) := (h(x) + c)dx$ satisfait la condition (S'_5) , donc $(M \cdot Y)$. En effet, pour $h^{(c)}(x) = h(x) + c$, on a :

$$\left| \frac{h^{(c)'}(x)}{h^{(c)}(x)} \right| = \frac{|h'(x)|}{h(x) + c} \xrightarrow{c \rightarrow +\infty} 0.$$

Cette convergence étant uniforme, pour c assez grand, on obtient :

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{h^{(c)'}(x)}{h^{(c)}(x)} \right| \leq 4.$$

5.4.8 Exemples

Nous donnons pour finir quelques exemples de mesures $\mu(dx) = h(x)dx$ pour lesquelles la propriété $(M \cdot Y)$ est satisfaite. Pour certains d'entre eux, nous dessinons les graphes de h , D_μ , u_μ et $a \mapsto \frac{\nu_\mu([0, a])}{a}$.

Les densités beta $h(x) = x^\alpha(1-x)^\beta 1_{]0,1[}(x)$ ($\alpha, \beta > -1$)

i) Pour $-1 < \beta \leq 0$ (et $\alpha > -1$), la fonction $x \mapsto x^2 h(x)$ est croissante, donc d'après (S'_1) , la condition $(M \cdot Y)$ est vérifiée.

ii) Pour $\beta \geq 0$:

$$\frac{h(a)}{h(ac)} = \frac{1}{c^\alpha} \left(1 - \frac{a(1-c)}{1-ac} \right)^\beta$$

qui est, pour $0 < c < 1$, une fonction décroissante de a , donc la condition (S_0) est satisfaite et $(M \cdot Y)$ est également vérifiée dans ce cas.

D'autres exemples similaires

– La fonction $h(x) = \frac{x^\alpha}{(1+x^2)^\beta} 1_{[0,1]}(x)$ ($\alpha > -1, \beta \in \mathbb{R}$) satisfait $(M \cdot Y)$. En effet, pour $\beta \leq 0$, $x \mapsto x^2 h(x)$ est une fonction croissante sur $[0, 1]$, donc la condition (S'_1) est vérifiée, tandis que, pour $\beta \geq 0$, la condition (S_0) est vérifiée.

– La fonction $h(x) = \frac{x^\alpha}{(1-x^2)^\beta} 1_{[0,1]}(x)$ ($\alpha > -1, \beta < 1$) satisfait $(M \cdot Y)$. Comme dans

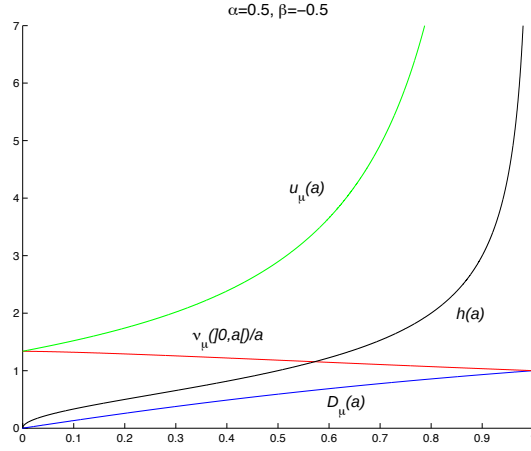


FIGURE 5.2 – Graphes pour $h(x) = \sqrt{\frac{x}{(1-x)}} 1_{[0,1[}(x)$

l'exemple, pour $0 \leq \beta \leq 1$, la fonction $x \mapsto x^2 h(x)$ est croissante sur $[0, 1]$, et pour $\beta \leq 0$, ce résultat découle de la condition (S_0) .

Les fonctions $h(x) = |\cos(\pi x)|^m 1_{[0,1]}(x)$ ($m \in \mathbb{R}^+$)

Cet exemple satisfait la condition (S_1) . En effet, pour $a \geq \frac{1}{2}$, $a \mapsto h(a)$ est croissante, donc:

$$\int_a^1 |\cos(\pi x)|^m dx \geq |\cos(\pi a)|^m (1-a) \geq a |\cos(\pi a)|^m (1-a).$$

Pour $a \leq \frac{1}{2}$ on écrit, par symétrie:

$$\begin{aligned} \int_a^1 |\cos(\pi x)|^m dx &= \int_0^{1-a} |\cos(\pi x)|^m dx \\ &\geq \int_0^a |\cos(\pi x)|^m dx \\ &\geq a |\cos(\pi a)|^m \geq a |\cos(\pi a)|^m (1-a). \end{aligned}$$

Remarque 5.39. Plus généralement, toute fonction qui est symétrique par rapport à l'axe $x = \frac{1}{2}$, d'abord décroissante, puis croissante, satisfait la condition (S_1) .

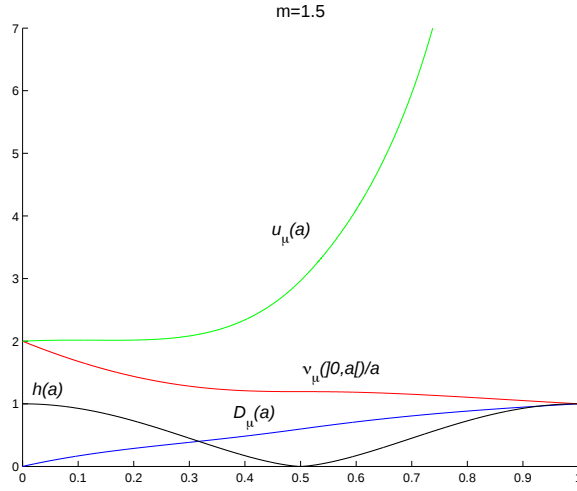
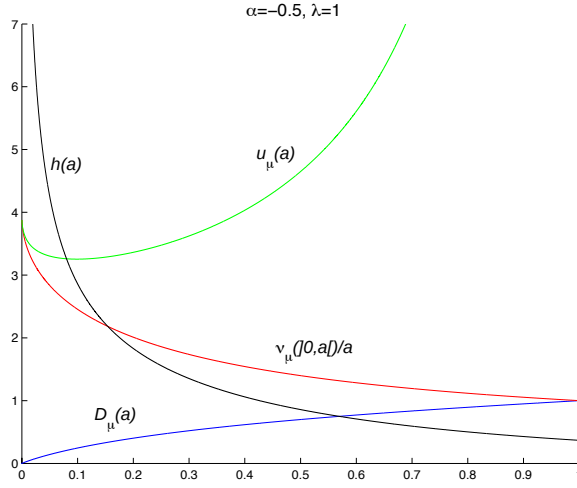
Les fonctions $h(x) = x^\alpha e^{-x^\lambda} 1_{]0,1]}(x)$ ($\alpha > -1, \lambda \in \mathbb{R}$)

Il s'agit d'une conséquence directe de (S_0) .

Un exemple où $(M \cdot Y)$ n'est pas satisfaite

Soit μ la mesure de densité h définie par:

$$h(x) = c 1_{[0,p[}(x) + e 1_{[p,1]}(x) \quad (c, e \geq 0, p \in]0, 1[).$$


 FIGURE 5.3 – Graphes pour $h(x) = |\cos(\pi x)|^{3/2} 1_{[0,1]}(x)$

 FIGURE 5.4 – Graphes pour $h(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} 1_{[0,1]}(x)$

Pour $a < p$, on a :

$$D_\mu(a) := \frac{2a(c(p-a) + e(1-p))}{c(p^2 - a^2) + e(1-p^2)}.$$

D_μ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, p[$, et, pour $a < p$, on a :

$$D'_\mu(a) = 2 \frac{c^2 p(p-a)^2 + e^2(1-p)^2(1+p) + ec(1-p)((p-a)^2 + p^2 + p - 2a)}{(c(p^2 - a^2) + e(1-p^2))^2}$$

et

$$D'_\mu(p^-) = 2 \frac{e^2(1-p)^2(1+p(1-\frac{c}{e}))}{e^2(1-p^2)^2} = 2 \frac{1+p(1-\frac{c}{e})}{(1+p)^2}.$$

Par conséquent, il est clair que pour $\frac{c}{e}$ assez grand, $D'_\mu(p^-) < 0$, donc D_μ n'est pas croissante sur $[0, 1]$. Notons que, si $e \geq c$ (h est croissante), alors $D'_\mu \geq 0$ (voir la condition (S'_1)), et que D_μ est croissante si et seulement si $D'_\mu(p^-) \geq 0$, i.e. $\frac{c}{e} \leq 1 + \frac{1}{p}$.

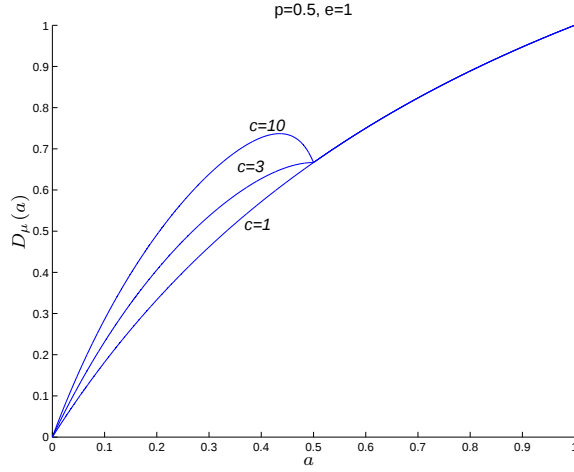


FIGURE 5.5 – Graphes de D_μ pour $h(x) = c1_{[0,1/2[}(x) + 1_{[1/2,1]}(x)$

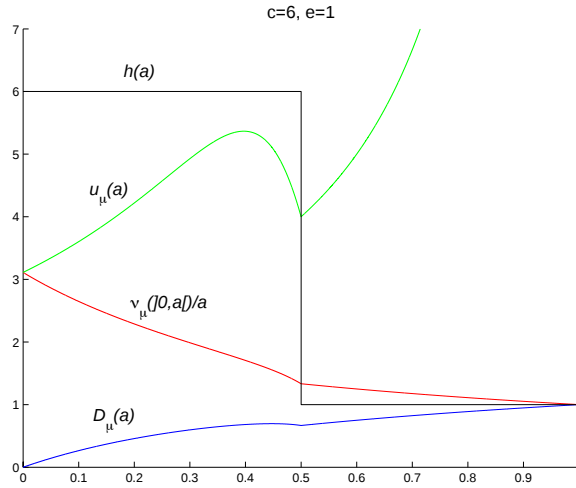


FIGURE 5.6 – Graphes pour $h(x) = 61_{[0,1/2[}(x) + 1_{[1/2,1]}(x)$

Bibliographie

- [AGY80] J. Azéma, R. F. Gundy, and M. Yor. Sur l'intégrabilité uniforme des martingales continues. In *Séminaire de Probabilités, XIV (Paris, 1978/1979) (French)*, volume 784 of *Lecture Notes in Math.*, pages 53–61. Springer, Berlin, 1980.
- [Alb08] J. M. P. Albin. A continuous non-Brownian motion martingale with Brownian motion marginal distributions. *Statist. Probab. Lett.*, 78(6):682–686, 2008.
- [An97] M.Y. An. Log-concave probability distributions: Theory and statistical testing. *SSRN*, pages i–29, May 1997.
- [AY79] J. Azéma and M. Yor. Une solution simple au problème de Skorokhod. In *Séminaire de Probabilités, XIII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/78)*, volume 721 of *Lecture Notes in Math.*, pages 90–115. Springer, Berlin, 1979.
- [AY89] J. Azéma and M. Yor. Étude d'une martingale remarquable. In *Séminaire de Probabilités, XXIII*, volume 1372 of *Lecture Notes in Math.*, pages 88–130. Springer, Berlin, 1989.
- [Azé85] J. Azéma. Sur les fermés aléatoires. In *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84*, volume 1123 of *Lecture Notes in Math.*, pages 397–495. Springer, Berlin, 1985.
- [Bas83] R. Bass. Skorokhod embedding via stochastic integrals. In *Séminaire de probabilités, XVII*, volume 986 of *Lecture Notes in Math.*, pages 221–224. Springer, Berlin, 1983.
- [BB01] K. Borovkov and Z. Burq. Kendall's identity for the first crossing time revisited. *Electron. Comm. Probab.*, 6:91–94 (electronic), 2001.
- [BDMY10] D. Baker, C. Donati-Martin, and M. Yor. A sequence of Albin type continuous martingales, with Brownian marginals and scaling. In *Séminaire de Probabilités, XLIII*, *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 2010.
- [BFRY06] J. Bertoin, T. Fujita, B. Roynette, and M. Yor. On a particular class of self-decomposable random variables: the durations of Bessel excursions straddling independent exponential times. *Probab. Math. Statist.*, 26(2):315–366, 2006.
- [BGT89] N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels. *Regular variation*, volume 27 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [Bia85] P. Biane. Comparaison entre temps d'atteinte et temps de séjour de certaines diffusions réelles. In *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84*, volume 1123 of *Lecture Notes in Math.*, pages 291–296. Springer, Berlin, 1985.
- [BPR11] A. Bogso, C. Profeta, and B. Roynette. Some examples of peacocks in a markovian set-up. In *Séminaire de Probabilités, XLIV*, *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, A paraître, 2011.

- [BPY89] M. Barlow, J. Pitman, and M. Yor. Une extension multidimensionnelle de la loi de l'arc sinus. In *Séminaire de Probabilités, XXIII*, volume 1372 of *Lecture Notes in Math.*, pages 294–314. Springer, Berlin, 1989.
- [Bre68] L. Breiman. *Probability*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass., 1968.
- [BS02] A. N. Borodin and P. Salminen. *Handbook of Brownian motion—facts and formulae*. Probability and its Applications. Birkhäuser Verlag, Basel, second edition, 2002.
- [BY87] P. Biane and M. Yor. Valeurs principales associées aux temps locaux browniens. *Bull. Sci. Math. (2)*, 111(1):23–101, 1987.
- [BY09] D. Baker and M. Yor. A Brownian sheet martingale with the same marginals as the arithmetic average of geometric Brownian motion. *Elect. J. Prob.*, 14(52):1532–1540, 2009.
- [Car61] H. Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Avec le concours de Reiji Takahashi. Enseignement des Sciences. Hermann, Paris, 1961.
- [Car79] R. Carmona. Processus de diffusion gouverné par la forme de Dirichlet de l'opérateur de Schrödinger. In *Séminaire de Probabilités, XIII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/78)*, volume 721 of *Lecture Notes in Math.*, pages 557–569. Springer, Berlin, 1979.
- [CEX08] P. Carr, C.-O. Ewald, and Y. Xiao. On the qualitative effect of volatility and duration on prices of Asian options. *Finance Research Letters*, 5(3):162–171, September 2008.
- [CPY01] P. Carmona, F. Petit, and M. Yor. Exponential functionals of Lévy processes. In *Lévy processes*, pages 41–55. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.
- [CT62] Z. Ciesielski and S. J. Taylor. First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 103:434–450, 1962.
- [CY03] L. Chaumont and M. Yor. *Exercises in probability*, volume 13 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003. A guided tour from measure theory to random processes, via conditioning.
- [DM76] H. Dym and H. P. McKean. *Gaussian processes, function theory, and the inverse spectral problem*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1976. Probability and Mathematical Statistics, Vol. 31.
- [Doo68] J. L. Doob. Generalized sweeping-out and probability. *J. Functional Analysis*, 2:207–225, 1968.
- [DS88] N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear operators. Part I*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1988. General theory, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1958 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [DS96] H. Daduna and R. Szekli. A queueing theoretical proof of increasing property of Pólya frequency functions. *Statist. Probab. Lett.*, 26(3):233–242, 1996.
- [Efr65] B. Efron. Increasing properties of Pólya frequency functions. *Ann. Math. Statist.*, 36:272–279, 1965.

-
- [Éme89] M. Émery. On the Azéma martingales. In *Séminaire de Probabilités, XXIII*, volume 1372 of *Lecture Notes in Math.*, pages 66–87. Springer, Berlin, 1989.
 - [Éme90] M. Émery. Sur les martingales d’Azéma (suite). In *Séminaire de Probabilités, XXIV, 1988/89*, volume 1426 of *Lecture Notes in Math.*, pages 442–447. Springer, Berlin, 1990.
 - [Éme96] M. Émery. On the chaotic representation property for martingales. In *Probability theory and mathematical statistics (St. Petersburg, 1993)*, pages 155–166. Gordon and Breach, Amsterdam, 1996.
 - [EMOT54] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, and F. G. Tricomi. *Tables of integral transforms. Vol. I*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1954. Based, in part, on notes left by Harry Bateman.
 - [ÉY04] M. Émery and M. Yor. A parallel between Brownian bridges and gamma bridges. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 40(3):669–688, 2004.
 - [Fel71] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II*. Second edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.
 - [Hal68] W. J. Hall. On the Skorokhod embedding theorem. In *Technical Report*, volume 33. Stanford Univ., Dept. of Stat., 1968.
 - [HK07] K. Hamza and F. C. Klebaner. A family of non-Gaussian martingales with Gaussian marginals. *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, pages Art. ID 92723, 19, 2007.
 - [HP86] U. G. Haussmann and É. Pardoux. Time reversal of diffusions. *Ann. Probab.*, 14(4):1188–1205, 1986.
 - [HPRY11a] F. Hirsch, C. Profeta, B. Roynette, and M. Yor. Constructing self-similar martingales via two Skorokhod embeddings. In *Séminaire de Probabilités, XLIII*, *Lecture Notes in Math.*, pages 451–501. Springer, Berlin, 2011.
 - [HPRY11b] F. Hirsch, C. Profeta, B. Roynette, and M. Yor. *Peacocks and associated martingales, with explicit constructions*. Bocconi & Springer, A paraître, 2011.
 - [HRY10a] F. Hirsch, B. Roynette, and M. Yor. Applying Itô’s motto: “look at the infinite dimensional picture” by constructing sheets to obtain processes increasing in the convex order. *Periodica Mathematica Hungarica*, 61:203–219, 2010.
 - [HRY10b] F. Hirsch, B. Roynette, and M. Yor. Unifying constructions of martingales associated with processes increasing in the convex order, via Lévy and Sato sheets. *Expositiones Mathematicae*, 28(4):299–324, 2010.
 - [HRY10c] F. Hirsch, B. Roynette, and M. Yor. From an Itô type formula for Gaussian processes to integrals of log-normal processes increasing in the convex order. *Prépublication Equipe d’Analyse et Probabilités, Université d’Evry*, 288, To appear in *J. Mat. Soc. Japan*, 2010.
 - [HS99] F. Hirsch and S. Song. Two-parameter Bessel processes. *Stochastic Process. Appl.*, 83(1):187–209, 1999.
 - [IM74] K. Itô and H. P. McKean. *Diffusion processes and their sample paths*. Springer-Verlag, Berlin, 1974. Second printing, corrected, *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 125*.
 - [IW89] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*, volume 24 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1989.

- [JY79] T. Jeulin and M. Yor. Inégalité de Hardy, semimartingales, et faux-amis. In *Séminaire de Probabilités, XIII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/78)*, volume 721 of *Lecture Notes in Math.*, pages 332–359. Springer, Berlin, 1979.
- [JY81] T. Jeulin and M. Yor. Sur les distributions de certaines fonctionnelles du mouvement brownien. In *Séminaire de Probabilités, XV (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1979/1980) (French)*, volume 850 of *Lecture Notes in Math.*, pages 210–226. Springer, Berlin, 1981.
- [Kas76] Y. Kasahara. Spectral theory of generalized second order differential operators and its applications to Markov processes. *Japan. J. Math. (N.S.)*, 1(1):67–84, 1975/76.
- [Kel72] H. G. Kellerer. Markov-Komposition und eine Anwendung auf Martingale. *Math. Ann.*, 198:99–122, 1972.
- [KK74] I.S. Kac and M.G. Krein. On the spectral functions of the string. *Am. Math. Soc., Translat., II. Ser.*, 103:19–102, 1974.
- [KK78] T. Kamae and U. Krengel. Stochastic partial ordering. *Ann. Probab.*, 6(6):1044–1049, 1978.
- [Kni78] F. B. Knight. On the sojourn times of killed Brownian motion. In *Séminaire de Probabilités, XII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1976/1977)*, volume 649 of *Lecture Notes in Math.*, pages 428–445. Springer, Berlin, 1978.
- [Kni81] F. B. Knight. Characterization of the Lévy measures of inverse local times of gap diffusion. In *Seminar on Stochastic Processes, 1981 (Evanston, Ill., 1981)*, volume 1 of *Progr. Prob. Statist.*, pages 53–78. Birkhäuser Boston, Mass., 1981.
- [KS91] I. Karatzas and S. E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.
- [KW82] S. Kotani and S. Watanabe. Krein’s spectral theory of strings and generalized diffusion processes. In *Functional analysis in Markov processes (Katata/Kyoto, 1981)*, volume 923 of *Lecture Notes in Math.*, pages 235–259. Springer, Berlin, 1982.
- [Leb72] N. N. Lebedev. *Special functions and their applications*. Dover Publications Inc., New York, 1972. Revised edition, translated from the Russian and edited by Richard A. Silverman, Unabridged and corrected republication.
- [LG99] J.-F. Le Gall. *Spatial branching processes, random snakes and partial differential equations*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.
- [LSU68] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Uralceva. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, volume 23. American Mathematical Society, 1968.
- [McK69] H. P. McKean, Jr. *Stochastic integrals*. Probability and Mathematical Statistics, No. 5. Academic Press, New York, 1969.
- [Mél86] S. Méléard. Application du calcul stochastique à l’étude de processus de Markov réguliers sur $[0, 1]$. *Stochastics*, 19(1-2):41–82, 1986.
- [Mey66] P.-A. Meyer. *Probabilités et potentiel*. Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg, No. XIV. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1318. Hermann, Paris, 1966.
- [Mey89a] P.-A. Meyer. Construction de solutions d’“équations de structure”. In *Séminaire de Probabilités, XXIII*, volume 1372 of *Lecture Notes in Math.*, pages 142–145. Springer, Berlin, 1989.

-
- [Mey89b] P.-A. Meyer. Équations de structure des martingales et probabilités quantiques. In *Séminaire de Probabilités, XXIII*, volume 1372 of *Lecture Notes in Math.*, pages 139–141. Springer, Berlin, 1989.
 - [Mey94] P.-A. Meyer. Sur une transformation du mouvement brownien due à Jeulin et Yor. In *Séminaire de Probabilités, XXVIII*, volume 1583 of *Lecture Notes in Math.*, pages 98–101. Springer, Berlin, 1994.
 - [Mil77] P. W. Millar. Random times and decomposition theorems. In *Probability (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXXI, Univ. Illinois, Urbana, Ill., 1976)*, pages 91–103. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1977.
 - [MNS89] A. Millet, D. Nualart, and M. Sanz. Integration by parts and time reversal for diffusion processes. *Ann. Probab.*, 17(1):208–238, 1989.
 - [MRY08] D. Madan, B. Roynette, and M. Yor. Put option prices as joint distribution functions in strike and maturity: the Black-Scholes case. *Prépublication de l'Institut Elie Cartan*, 41, 2008.
 - [MY01] H. Matsumoto and M. Yor. An analogue of Pitman's $2M - X$ theorem for exponential Wiener functionals. II. The role of the generalized inverse Gaussian laws. *Nagoya Math. J.*, 162:65–86, 2001.
 - [MY02] D. Madan and M. Yor. Making Markov martingales meet marginals: with explicit constructions. *Bernoulli*, 8(4):509–536, 2002.
 - [MY06] R. Mansuy and M. Yor. *Random times and enlargements of filtrations in a Brownian setting*, volume 1873 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
 - [MY09] K. Meziane, J.-Y. Yen, and M. Yor. Some examples of Skorokhod embeddings obtained from the Azéma-Yor algorithm. In preparation, 2009.
 - [NRY09] J. Najnudel, B. Roynette, and M. Yor. *A global view of Brownian penalizations*, volume 19 of *MSJ Memoirs*. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.
 - [Obl04] J. Oblój. The Skorokhod embedding problem and its offspring. *Probab. Surv.*, 1:321–390 (electronic), 2004.
 - [Ole08] K. Oleszkiewicz. On fake Brownian motions. *Statist. Probab. Lett.*, 78(11):1251–1254, 2008.
 - [Pie80] M. Pierre. Le problème de Skorokhod: une remarque sur la démonstration d'Azéma-Yor. In *Séminaire de Probabilités, XIV (Paris, 1978/1979) (French)*, volume 784 of *Lecture Notes in Math.*, pages 392–396. Springer, Berlin, 1980.
 - [Pré73] A. Prékopa. On logarithmic concave measures and functions. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 34:335–343, 1973.
 - [Pro10] C. Profeta. Penalization of a positively recurrent diffusion by an exponential function of its local time. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 46(4):681–718, 2010.
 - [PRY10] C. Profeta, B. Roynette, and M. Yor. *Option prices as probabilities*. Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2010. A new look at generalized Black-Scholes formulae.
 - [PY81] J. Pitman and M. Yor. Bessel processes and infinitely divisible laws. In *Stochastic integrals (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1980)*, volume 851 of *Lecture Notes in Math.*, pages 285–370. Springer, Berlin, 1981.
 - [Rog81] L. C. G. Rogers. Williams' characterisation of the Brownian excursion law: proof and applications. In *Séminaire de Probabilités, XV (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1979/1980) (French)*, volume 850 of *Lecture Notes in Math.*, pages 227–250. Springer, Berlin, 1981.

- [RVY06] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Some penalisations of the Wiener measure. *Jpn. J. Math.*, 1(1):263–290, 2006.
- [RVY07] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor. Some extensions of Pitman and Ray-Knight theorems for penalized Brownian motions and their local times. IV. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 44(4):469–516, 2007.
- [RW00] L. C. G. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 2.* Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Itô calculus, Reprint of the second (1994) edition.
- [RY99] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.
- [RY08] B. Roynette and M. Yor. Existence and properties of pseudo-inverses for Bessel and related processes. *Prépublication de l’Institut Elie Cartan*, 50, 2008.
- [RY10] B. Roynette and M. Yor. Local limit theorems for Brownian additive functionals and penalisation of Brownian paths, ix. *ESAIM*, 14:65–92, 2010.
- [Sal84] P. Salminen. One-dimensional diffusions and their exit spaces. *Math. Scand.*, 54(2):209–220, 1984.
- [Sal93] P. Salminen. On the distribution of supremum of diffusion local time. *Statist. Probab. Lett.*, 18(3):219–225, 1993.
- [Sal97] P. Salminen. On last exit decompositions of linear diffusions. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 33(1-3):251–262, 1997.
- [Sat99] K. Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, volume 68 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Translated from the 1990 Japanese original, Revised by the author.
- [Sch51] I. J. Schoenberg. On Pólya frequency functions. I. The totally positive functions and their Laplace transforms. *J. Analyse Math.*, 1:331–374, 1951.
- [Sha87] J. G. Shanthikumar. On stochastic comparison of random vectors. *J. Appl. Probab.*, 24(1):123–136, 1987.
- [SS94] M. Shaked and J.G. Shanthikumar. *Stochastic orders and their applications*. Probability and Mathematical Statistics. Academic Press, Boston, 1994.
- [SS07] M. Shaked and J.G. Shanthikumar. *Stochastic orders*. Springer Series in Statistics. Springer, New York, 2007.
- [Str65] V. Strassen. The existence of probability measures with given marginals. *Ann. Math. Statist.*, 36:423–439, 1965.
- [SV09] P. Salminen and P. Vallois. On subexponentiality of the Lévy measure of the diffusion inverse local time; with applications to penalizations. *Electron. J. Probab.*, 14:no. 67, 1963–1991, 2009.
- [SVY07] P. Salminen, P. Vallois, and M. Yor. On the excursion theory for linear diffusions. *Jpn. J. Math.*, 2(1):97–127, 2007.
- [SW73] T. Shiga and S. Watanabe. Bessel diffusions as a one-parameter family of diffusion processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 27:37–46, 1973.
- [Wat95] S. Watanabe. Generalized arc-sine laws for one-dimensional diffusion processes and random walks. In *Stochastic analysis (Ithaca, NY, 1993)*, volume 57 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 157–172. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

- [Wat75] S. Watanabe. On time inversion of one-dimensional diffusion processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 31:115–124, 1974/75.
- [Yor97] M. Yor. *Some aspects of Brownian motion. Part II: Some recent martingale problems*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.
- [YYY09] K. Yano, Y. Yano, and M. Yor. Penalising symmetric stable Lévy paths. *J. Math. Soc. Japan*, 61(3):757–798, 2009.

Pénalisations, pseudo-inverses et peacocks dans un cadre markovien

Comme son titre l'indique, cette thèse comporte 3 parties.

- La première partie est consacrée à la pénalisation de diffusions linéaires régulières récurrentes. Plus précisément, nous étudions, dans un premier temps, la pénalisation de diffusions récurrentes nulles, et nous présentons une large classe de fonctionnelles pour lesquelles le principe de pénalisation est satisfait, sous l'hypothèse que la mesure de Lévy de l'inverse du temps local de la diffusion soit à décroissance polynomiale en l'infini. Cette étude repose sur la construction d'une mesure σ -finie $\mathcal{W}$ similaire à celle de Najnudel-Roynette-Yor. Nous traitons également, dans un second temps, le cas de la pénalisation d'une diffusion récurrente positive réfléchie sur un intervalle par une fonction exponentielle de son temps local en 0. Les résultats obtenus dans ce cadre se démarquent nettement de ceux du cas récurrent nul, et l'on voit apparaître un phénomène nouveau de composition des pénalisations.

- Dans la deuxième partie, nous étendons la notion de pseudo-inverses (introduite à l'origine par Madan-Roynette-Yor dans le cadre des processus de Bessel) à des diffusions plus générales. Nous montrons en particulier que l'on peut réaliser la famille de pseudo-inverses associée à une diffusion à valeurs positives issue de 0 comme les derniers temps de passage d'une autre diffusion obtenue grâce à la transformation de Biane.

- La dernière partie de cette thèse traite de peacocks, i.e. de processus croissants pour l'ordre convexe. Un théorème dû à Kellerer affirme que l'on peut associer à tout peacock une martingale ayant les mêmes marginales unidimensionnelles. Guidé par ce théorème, nous exhibons, dans un premier temps, de larges familles de peacocks, construites essentiellement à partir de processus dit "conditionnellement monotones", puis nous associons à certains de ces peacocks des martingales via les plongements de Skorokhod de Hall-Breiman, Bass et Azéma-Yor.

Penalizations, pseudo-inverses and peacocks in a Markovian set-up

As suggested by the title, this thesis comprises three parts.

- The first part is dedicated to the penalization of regular recurrent linear diffusions. More precisely, we start by examining null recurrent diffusions, and we exhibit a large class of functionals for which the penalization principle is satisfied, under the hypothesis that the Lévy measure of the inverse of the local time of the diffusion has polynomial decay. This study relies on the construction of a σ -finite measure $\mathcal{W}$ similar to that of Najnudel-Roynette-Yor. We then deal with the case of the penalization of a positively recurrent diffusion (reflected on an interval) with an exponential function of its local time at 0. The results we obtain in this set-up are quite different from the null recurrent framework, and we see a new phenomena of composition of penalizations.

- In the second part, we extend the notion of pseudo-inverses (a notion recently introduced by Madan-Roynette-Yor in the framework of Bessel processes) to more general diffusions. We show in particular that we may realize the family of pseudo-inverses associated to a diffusion started from 0 and taking positive values as the last passage times of another diffusion, constructed thanks to Biane's transform.

- The last part of this thesis deals with peacocks, i.e. with processes which are increasing in the convex order. A theorem due to Kellerer states that to every peacock, one can associate a martingale which has the same one-dimensional marginals. Guided by this theorem, we first exhibit large families of peacocks, essentially constructed from "conditionally monotone" processes, and we then associate martingales to some of these peacocks thanks to the Skorokhod embeddings of Hall-Breiman, Bass and Azéma-Yor.