

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact: ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm



UFR Sciences et Techniques de la Matière et des Procédés École Doctorale EMMA Département de Mécanique et d'Énergétique

La Méthode LS-STAG:

une nouvelle Approche de type Frontière Immergée/Level-Set pour la Simulation d'Écoulements Visqueux Incompressibles en Géométries Complexes.

Application aux Fluides Newtoniens et Viscoélastiques

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 2 juillet 2009 pour l'obtention du titre de

Docteur de l'université Henri Poincaré – Nancy 1

en Mécanique et Énergétique

par

Yoann CHENY

Composition du jury

Président : Jean-Robert CLERMONT Directeur de Recherche CNRS Université Joseph Fourier

Rapporteurs : Robert EYMARD Professeur Université Paris-Est

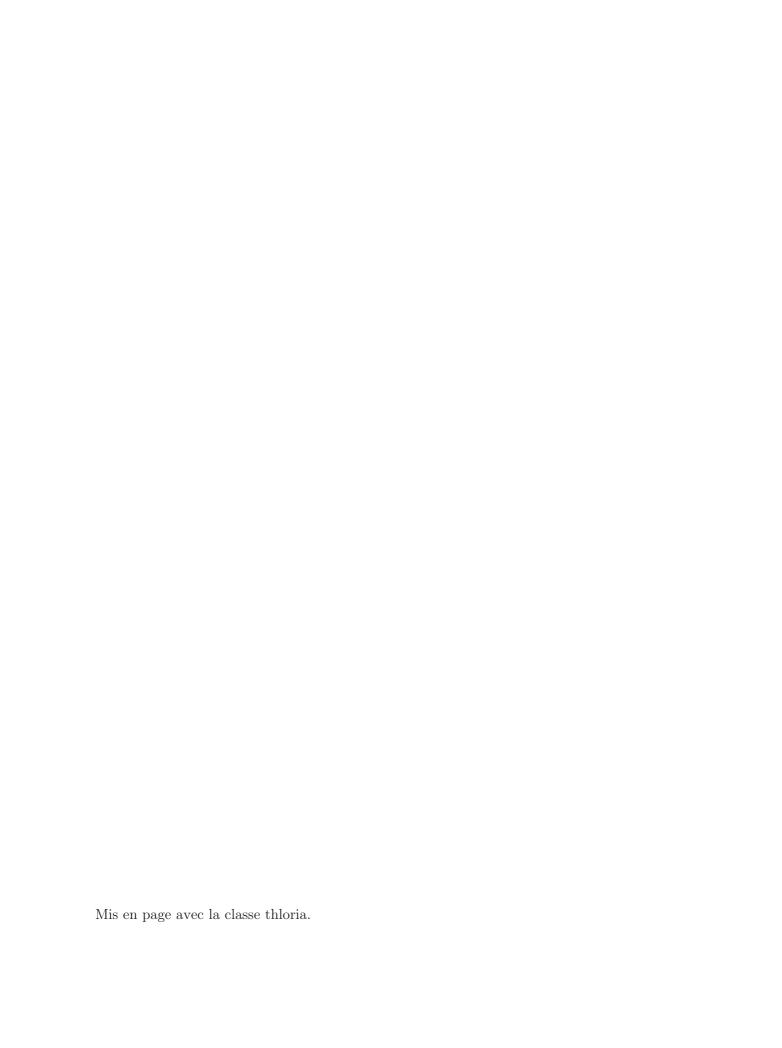
Patrice LAURE Directeur de Recherche CNRS Université de Nice

Examinateurs : Christophe BARAVIAN Professeur Université Henri-Poincaré

Eric LAMBALLAIS Professeur Université de Poitiers

Directeurs : Olivier BOTELLA Maître de Conférences Université Henri-Poincaré

Michel LEBOUCHE Professeur Université Henri-Poincaré



Remerciements

Dans un premier temps je tiens à remercier vivement Olivier Botella qui a encadré cette thèse. Sa disponibilité, son soutien sans faille ainsi que les nombreux conseils qu'il m'a prodigués m'ont indéniablement permis de mener à bien ces travaux. Je remercie aussi Michel Lebouché pour l'encadrement de cette thèse et pour le regard éclairé qu'il a porté sur mes résultats.

J'exprime ma gratitude à mes rapporteurs Robert Eymard et Patrice Laure ainsi qu'à l'ensemble de mon jury pour l'intérêt porté à l'égard de mes travaux, et plus particulièrement pour leur lecture attentive du présent manuscrit.

Je remercie mes amis pour les bons moments passés à leur côté durant l'ensemble de mes études à Nancy. Je ne chercherai pas ici à en dresser la liste exhaustive faute de place. Je tiens cependant à remercier en particulier Alexis Brice, Stéphane Merigon, Rémi Adam, Olivier Gerhardt, Cédric Chauvelot et Ludovic Tesson pour leur amitié infaillible. Je remercie également Camille et Roxanne Sidaner pour les agréables moments passés sous le soleil de Perpignan, loin de la grisaille de la Lorraine. J'exprime ma profonde gratitude à Emilie Sibottier pour son soutien permanent et sa gentillesse à mon égard.

Finalement je suis infiniment reconnaissant envers mes parents et mon frère pour m'avoir supporté (dans tous les sens du terme) depuis toujours.

Table des matières

Introd	ntroduction		
Chapit	tre 1 M	Iodélisation physique	5
1.1	Équat	ions fondamentales de la dynamique de l'écoulement	5
1.2	Généra	alités sur les lois de comportement rhéologiques	6
1.3	La mo	délisation de la viscoélasticité	8
	1.3.1	Description empirique	8
	1.3.2	Le modèle de Jeffrey	8
1.4	Équat	ions du mouvement pour le fluide d'Oldroyd-B	12
1.5	Conclu	asion	13
Chapit	tre 2 L	a méthode MAC pour fluides newtoniens incompressibles en géo-	-
métrie	s simp	les	15
2.1	La mé	thode MAC	16
	2.1.1	Forme intégrale des équations de Navier-Stokes	16
	2.1.2	Le maillage MAC de Harlow et Welch	16
	2.1.3	Expression matricielle des équations de Navier-Stokes semi-discrétisées $$	19
2.2	Discré	tisation de l'équation de continuité	21
2.3	Exame	en discret des lois de conservation	26
	2.3.1	Conservation des invariants linéaires de l'écoulement	26
	2.3.2	Conservation de l'énergie cinétique totale	32
2.4	Discré	tisation des flux de pression et convectifs	35
	2.4.1	Discrétisation du gradient de pression	35
	2.4.2	Discrétisation des flux convectifs	37
2.5	Discré	tisation des flux diffusifs basée sur la conservation totale de quantité de	
	mouve	ement	39
	2.5.1	Discrétisation des flux diffusifs normaux	40
	252	Discrétisation des flux de contrainte de cisaillement	41

	2.5.3	Conservation totale de la quantité de mouvement au niveau discret et calcul	
		des forces hydrodynamiques	43
2.6	Condi	tion aux limites et intégration en temps	49
	2.6.1	Intégration en temps	49
	2.6.2	Implémentation des conditions aux limites : le concept de $cellules$ $fantômes$	51
	2.6.3	Conditions aux limites de sortie	53
2.7	Concl	usions	56
Chapi	tre 3]	La méthode $LS ext{-}STAG$ pour écoulement de fluides newtoniens en	
- géomé	etries c	omplexes	59
3.1	Introd	luction	59
3.2	Le ma	aillage LS-STAG pour frontières immergées	62
3.3	Discré	étisation de l'équation de continuité et conservation de la masse	67
	3.3.1	Discrétisation de l'équation de continuité	67
	3.3.2	Conservation discrète de la masse totale	68
3.4	Discré	étisation des flux de pression et convectifs	70
	3.4.1	Discrétisation du gradient de pression	71
	3.4.2	Discrétisation des termes convectifs	71
3.5	Discré	étisation des flux diffusifs basée sur la conservation totale de quantité de	
	mouve	ement	73
	3.5.1	Discrétisation des contraintes normales	75
	3.5.2	Une première discrétisation des flux diffusifs de cisaillement $\dots \dots$	76
	3.5.3	Conservation de la quantité de mouvement totale au niveau discret et calcul	
		des forces hydrodynamiques	78
	3.5.4	Une discrétisation <i>complète</i> des contraintes de cisaillement basée sur la	
		stricte conservation de la quantité de mouvement	81
3.6	Intégr	ation en temps et résolution des systèmes linéaires	82
3.7	Concl	usions et extension de la méthode LS - $STAG$ au cas $3D$	83
	3.7.1	Implémentation informatique de la méthode LS - $STAG$	83
	3.7.2	Extension de la méthode LS - $STAG$ au cas tridimensionnel	84
Chapi	tre 4 V	Validation numérique de la méthode $LS ext{-}STAG$ et applications	89
4.1	Le po	st-traitement des données	90
	4.1.1	Traitement de la vitesse u	90
	4.1.2	Traitement de la contrainte tangentielle	91

	4.1.3	Traitement du champ de pression et des contraintes normales 92
	4.1.4	Calcul de la fonction de courant
4.2	Écoule	ement de Taylor-Couette
4.3	Écoule	ement en aval d'un cylindre de section circulaire
	4.3.1	Généralités sur le domaine physique et de calcul
	4.3.2	Étude de la convergence en maillage dans le cas stationnaire à Re= 40 99
	4.3.3	Évaluation des résultats numériques
4.4	Écoule	ement incident sur un cylindre à section circulaire en rotation oscillante
	forcée	
4.5	Exten	sion de la méthode au cas de géométries mobiles $\dots \dots \dots$
	4.5.1	Modification de la méthode pour la prise en compte de géométries mobiles 106
	4.5.2	Application : écoulement incident sur un cylindre en mouvement d'oscilla-
		tions transverses
4.6	Évalua	ation de l'efficacité calculatoire de la méthode LS-STAG
4.7	Valida	tion de la condition de sortie $CCBC$
	4.7.1	Écoulement libre autour d'un cylindre à section carrée à $\mathrm{Re}=100$ 113
	4.7.2	Écoulement confiné autour d'un cylindre à section carrée à $\mathrm{Re}=180$ 114
Chapit	tre 5 L	a méthode LS - $STAG$ pour écoulement de fluides viscoélastiques en
géomé	tries c	omplexes 123
5.1	Introd	luction
5.2	Le ma	illage $LS\text{-}STAG$ pour fluides viscoélastiques
	5.2.1	Arrangement décalé des contraintes élastiques : avantages et inconvénients 127
	5.2.2	Arrangement décalé des contraintes élastiques dans les cut-cells et discré-
		tisation de l'équation de quantité de mouvement
5.3	Discré	tisation de l'équation pour la contrainte élastique normale $\tau_{\rm e}^{xx}$ 132
5.4	Discré	tisation de l'équation pour la contrainte élastique de cisaillement $\tau_{\rm e}^{xy}$ 135
	5.4.1	Le volume de contrôle pour $\tau_{i,j}^{xy}$: définition et notations
	5.4.2	Propriétés globales de la discrétisation
	5.4.3	Discrétisation de l'équation de transport pour la contrainte élastique de
		cisaillement $\tau_{\rm e}^{xy}$
	5.4.4	Discrétisation de la contrainte tangentielle pariétale en géométrie simple . 143
5.5		
5.5 5.6	Algori	Discrétisation de la contrainte tangentielle pariétale en géométrie simple . 143
	Algori Exten	Discrétisation de la contrainte tangentielle pariétale en géométrie simple . 143 thme d'intégration en temps

5.7.2 Cas de la contraction plane à coins arrondis	. 157
Conclusions et perspectives	171
Annexe A Écriture matricielle de l'opérateur de divergence LS - $STAG$	175
Annexe B Compléments sur la discrétisation LS - $STAG$ des flux convectifs	177
Annexe C Compléments sur les forces de cisaillement agissant sur la frontiè immergée	ere 1 7 9
Annexe	181
Annexe D Résultats complémentaires sur la contraction plane abrupte	181
Annexe	187
Annexe E Résultats complémentaires sur la contraction plane à coin arrondi	187
Bibliographie	191

Table des figures

1	Représentation schématique du nombre de Reynolds attingible avec les capacités	
	informatiques actuelles, comme une fonction décroissante de la complexité géomé-	
	trique (figure tirée de [66])	2
2	Maillages de la géométrie du corps d'Ahmed [5]. À gauche : maillage non-structuré	
	à base de triangles. À droite : maillage non-conforme cartésien	3
3	Maillage cartésien à proximité d'une frontière immergée. En gris : cellules solides,	
	en bleu ciel : cellules cartésiennes et en bleu : cellules mi-fluide/solide, les $\it cut\text{-}\it cells$.	4
1.1	Représentation schématique de la dépendance de la viscosité du sang au taux de	
	cisaillement et lien avec sa structure interne.	7
1.2	Un fluide viscoélastique (savon d'aluminium) s'écoule depuis un récipient (a) puis	
	le filet de fluide est sectionné aux ciseaux (b). La filet de fluide situé au dessus des	
	lames remonte jusqu'au récipient (c). Figure tirée de l'ouvrage de Bird et al. [15].	7
1.3	Élément de Jeffrey	6
2.1	Maillage MAC d'un domaine Ω rectangulaire	17
2.2	Arrangement décalé des inconnues pour (a) : une cellule cartésienne $\Omega_{i,j}$, et représentation des volumes de contrôle pour (b) : $u_{i,j}$ et (c) : $v_{i,j}$. Les volumes de	
	contrôle $\Omega_{i,j}^u \in \Omega_{i,j} \cup \Omega_{i+1,j}$ et $\Omega_{i,j}^v \in \Omega_{i,j} \cup \Omega_{i,j+1}$ doivent être complétés par leur	10
	complémentaire dans $\Omega_{i+1,j}$ et $\Omega_{i,j+1}$ respectivement	18
2.3	Volume de contrôle $\Omega_{i,j}^u$ et décomposition de la frontière $\Gamma_{i,j}^u$	19
2.4	Volumes de contrôle $\Omega_{i,j}$ près des bords du domaine (a) : près de la frontière Nord,	
	(b) : près de la frontière Ouest et (c) : près du coin Nord-Ouest du domaine	23
2.5	Cellule Ω_{i,N_y} adjacente à la frontière $\Gamma^{\rm n}$ du domaine Ω de la figure 2.1	36
2.6	Emplacement des inconnues de pression et de contraintes visqueuses dans la cellule	
	cartésienne $\Omega_{i,j}$	40
2.7	Volumes de contrôle $\Omega^u_{i,j}$ près des bords du domaine (a) : près de la frontière Nord,	
	(b) : près de la frontière Ouest et (c) : près du coin Nord-Ouest du domaine. $$	43
2.8	Cellule Ω_{i,N_y} adjacente à la frontière $\Gamma^{\rm n}$ du domaine Ω de la figure 2.1	44

2.9	Volumes de contrôle Ω^v_{i,N_y-1} adjacents à la frontière $\Gamma^{\rm n}$ du domaine $\Omega.$ Dans ces	
	volumes de contrôle, le flux sur $\Gamma^{v,n}_{i,N_y-1}$ de contrainte normale sur de pression	
	intervient dans l'expression de la contribution $\widetilde{F}_y^{h,\mathrm{n}}$ au bilan de quantité de mou-	
	vement. Plus particulièrement ce flux correspond à la force de portance discrète	
		46
2.10	Volumes de contrôle Ω^u_{i,N_y} adjacents à la frontière $\Gamma^{\rm n}$ du domaine $\Omega.$ Dans ces	
	volumes de contrôle, le flux de cisaillement sur $\Gamma_{i,N_y}^{\text{n,e}} \cup \Gamma_{i+1,N_y}^{\text{n,w}}$ intervient dans	
	l'expression de la contribution $\widetilde{F}_x^{h,\mathrm{n}}$ au bilan de quantité de mouvement. Plus	
	particulièrement pour les deux volumes de contrôle consécutifs représenté sur la	
	figure, la contribution sur la frontière $\Gamma^{n,w}_{i,N_y} \cup \Gamma^{n,e}_{i,N_y}$ (en rouge) correspond à la force	
	de traînée discrète $F_x^{h,n}\Big _i$ (Eq. (2.110))	46
2.11	Représentation du maillage MAC près d'un coin saillant du domaine	48
2.12	Domaine de calcul et bande périphérique de <i>cellules fantômes</i>	51
2.13	Cellules fantôme $\Omega^u_{N_x+1,j}$ près de la frontière $\Gamma^{\rm e}$ du domaine	52
	Disposition des inconnues et des cellules fantômes (en rouge) près de la frontière	
	$\Gamma^{\rm e}$ du domaine	54
2.15	Cellule $\Omega_{i,j}$ coupée par une frontière immergée	56
3.1	Représentation d'un maillage cartésien incorporant une géométrie complexe. En	
	gris : cellules solides, en bleu ciel : cellules cartésiennes et en bleu : cut-cells	60
3.2	Géométrie immergée dans un domaine rectangulaire $\Omega.$ La frontière du domaine	
	fluide $\Omega^f=\Omega^{ib}$ est $\Gamma\cup\Gamma^{ib}$	62
3.3	Arrangement décalé des inconnues près de la $cut\text{-}cell$ trapézoïdale $\Omega_{i,j}$ sur le	
	maillage LS-STAG	63
3.4	Les différentes moitiés de volumes de contrôle pour $u_{i,j}$ dans la cut - $cell~\Omega_{i,j}$. Les	
	los anges (\spadesuit) correspondent à l'emplacement pour la discrétisation de la condition	
	aux limites de vitesse. Le coin rentrant dans un maillage cartésien est un cas	
	particulier de la cellule pentagonale (c) où $\phi_{i,j} = 0$, et la cellule (f) (telles que	
	$\phi_{i-1,j-1} = \phi_{i-1,j} = \phi_{i,j} = 0$ and $\phi_{i,j-1} < 0$) correspond au cas du coin saillant.	
	Seule la valeur du volume distingue cette cellule du cas triangulaire (e) dans la	65
0.5	150 - 1 - 50 - 7 - 1 - 50 - 1 - 50	65
3.5	Combinaisons envisageables pour former le volume de contrôle $\Omega_{i,j}^u$ à partir des moitiés de cellule de la figure 3.4. Le cas (h) n'est pas admissible car le quotient	
	$\partial v/\partial x _{i,j}$, placé au coin supérieur droit de $\Omega_{i,j}$, est alors bi-valent. Ce cas corres-	
	pond à une oscillation de la fonction level-set $(\phi_{i-1,j} < 0, \phi_{i,j} > 0 \text{ et } \phi_{i+1,j} > 0).$	
	Ce cas est aisément filtré en imposant $\phi_{i,j} = \frac{1}{2}(\phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j})$ et n'apparait que ra-	
	rement dans nos maillages puisqu'il correspond à une grille grossière relativement	
	au rayon de courbature local de la frontière immergée	66

3.6	Disposition des contraintes de cisaillement dans les 3 cut -cells génériques $\Omega_{i,j}$.	
	Leur emplacement dans les autres <i>cut-cells</i> de la figure 3.4 est aisément déduit	
	depuis cette figure	74
3.7	L'élément fini de Saramito [119]	75
3.8	Volumes de contrôle $\Omega^u_{i,j}$ adjacents à la frontière immergée $\Gamma^{\mathrm{ib}}.$ Dans ces volumes	
	de contrôle, le flux de cisaillement sur $\Gamma_{i,j}^{\mathrm{ib,w}} \cup \Gamma_{i,j}^{\mathrm{ib,w}} = \Gamma_{i,j}^{\mathrm{ib}}$ intervient dans l'expres-	
	sion de la contribution $\widetilde{F}_x^{h,\mathrm{n}}$ au bilan de quantité de mouvement. Elle correspond	
	au cisaillement visqueux dans la force de traînée discrète pour une $\operatorname{\it cut-cell}$ trapé-	
	zoïdale (Eq. (3.53a))	80
3.9	La $cut\text{-}cell$ générique $\Omega_{i,j,k}$ et les notations de la discrétisation $LS\text{-}STAG$ en 3D.	
	Les vitesses sont situées sur le barycentre des faces fluides	84
3.10	Nomenclature des $\it cut\text{-}\it cells$ élémentaires pour la discrétisation antisymétrique des	
	termes convectifs $u_{i,j,k}$. Dans la première colonne nous avons groupé les cut -	
	cells comportant 6 inconnues (le maximum en 3D), dans la suivante celles com-	
	portant 5 inconnues, puis 4, puis 3 (le minimum en 3D)	87
3.11	Types de <i>cut-cells</i> élémentaires pour la discrétisation des flux de cisaillement sur	
	la surface solide	88
4.1	Disposition des inconnues de vitesse et emplacement de $\widetilde{u}_{i,j}$. À gauche : dans le	
	cas où $\phi_{i,j} < 0$. À droite : dans le cas où $\phi_{i,j} > 0$ et $\phi_{i,j-1}\phi_{i,j+1} < 0$	91
4.2	Géometrie et domaine de calcul pour l'écoulement de Taylor-Couette. À gauche, le do-	
	maine fluide $\Omega_{\rm f}$ est confiné entre deux cylindre concentriques Γ_1 et Γ_2 de centre $(x_{\rm c}, y_{\rm c})$,	
	de rayons respectifs R_1 et $R_2=4R_1$, seul le cylindre Γ_1 est mobile de vitesse angulaire	
	ω . À droite : le maillage LS-STAG pour $R_1=1$ et $N=50$ cellules dans chaque direction.	93
4.3	Norme L_{∞} de l'erreur sur la composante de la vitesse u en fonction de la taille de la grille	
	$h=\frac{10R_1}{N}.$ À gauche : sur 90% du domaine fluide. À droite : sur tout le domaine fluide	95
4.4	Norme L_{∞} de l'erreur sur la pression p en fonction de la taille de la grille $h=\frac{10R_1}{N}$. À	
	gauche : sur 65% du domaine fluide. À droite : sur 90% du domaine fluide. $\ \ldots \ \ldots \ \ldots$	95
4.5	Profil de l'erreur le long de l'axe $y/R_1=0.023$ pour la composante de vitesse v à gauche,	
	et pour la pression p à droite	96
4.6	Domaine de calcul et maillage pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire. $\ . \ . \ .$	97
4.7	Maillages cartésiens utilisés pour l'étude de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire	
	sur la restriction $[-8D,8D]\times[-8D,8D]$ du domaine autour du solide immergé.	98
4.8	Coefficient de traînée et longueur du bulbe de recirculation pour l'écoulement stationnaire	
	à Re = 40 calculés à partir des différents maillages de le tableau 4.1	100
4.9	Evolution temporelle du coefficient de traînée à $\mathrm{Re}=200$ dans le cas des écou-	
	lements non-forcé ($\omega_0=0, S_{\rm e}=0$), forcé ($\omega_0=6.0, S_{\rm e}=0.74$) et l'écoulement	
	instable. Ces calculs sont réalisés avec la méthode LS - $STAG$ sur le maillage M4.	104
4.10	Champs de vorticité au voisinage du cylindre circulaire à Re = 1000, obtenu avec	
	la méthode LS - $STAG$ sur le maillage M5	105

4.11	Mouvement de la géométrie dans la cellule $\Omega_{i,j}$. La cellule est solide au temps $t=$	
	$(n-1)\Delta t$, triangluaire au temps $t=n\Delta t$ et pentagonale au temps $t=(n+1)\Delta t$.	
	Les inconnues de vitesse en rouge sont considérées comme des freshly cleared cells	
	aux temps correspondants, par exemple $u_{i,j}$ au temps $t=n\Delta t$	107
4.12	Lignes de courant et isocontours de vorticité pour l'écoulement autour d'un cylindre en	
	mouvement oscillant transverse pour la position extrémale du cylindre i.e. $y_c(t) = A$	110
4.13	Lignes de courant et isovaleurs de la vorticité dans le sillage du cylindre ascentionnel	
	pour la fréquence d'excitation $S_{\rm e}/S_0=1.2$, pour différentes valeurs de la position $y_{\rm c}(t)$.	
	À gauche : phase descendante du cylindre. À droite : phase ascendante du cylindre	118
4.14	Évolution temporelle des coefficients de force (— $C_{\rm D}$; $C_{\rm L}$) pour l'écoulement	
	autour d'un cylindre en mouvement oscillant transverse pour $S_{\rm e}/S_0$ égal à : (a)	
	0.8; (b) 0.9;(c) 1.0;(d) 1.1; (e) 1.12; (S) 1.2	119
4.15	Moyenne temporelle des coefficients de force pour l'écoulement autour d'un cy-	
	lindre en mouvement oscillant transverse : $\overline{C}_{\rm D}$ (trait plein), $\overline{C}_{\rm D}^{\rm rms}$ (trait pointillé	
	long-court) et $C_{\rm L}^{\rm rms}$ (trait pointillé). Les symboles \blacktriangleright et \bigcirc représente les données	
	obtenues par [138] et [49] respectivement	120
4.16	Domaine de calcul pour l'écoulement autour d'un cylindre carré	120
4.17	Maillage utilisé pour l'étude de l'écoulement libre autour d'un cylindre à section carrée.	
	À droite : $X_{\rm D}/D=4$. À gauche : $X_{\rm D}/D=30$	121
4.18	Évolution des coefficients de force en fonction de $X_{\rm D}/D$ pour l'écoulement libre autour	
	d'un cylindre à section carrée à Re = 100. À gauche : $\overline{C}_{\rm D}$. À droite : $C_{\rm L}^{\rm rms}$	121
4.19	Champ de vorticité pour l'écoulement confiné autour d'un cylindre à section carrée à	
	$Re = 180. \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots $	121
4.20	Évolution des coefficients de force en fonction de $X_{\rm D}/D$ pour l'écoulement confiné autour	
	d'un cylindre à section carrée à Re = 180. À gauche : $\overline{C}_{\rm D}$. À droite : $C_{\rm L}^{\rm max}$	122
5.1	Emplacement des contraintes viscoélastiques et newtoniennes dans une cellule car-	
	tésienne $\Omega_{i,j}$	127
5.2	Configuration du maillage décalé près d'un mur solide aligné avec la grille	129
5.3	Configuration du maillage décalé près d'un coin rentrant du domaine	129
5.4	Différents type de <i>cut-cells</i> et leur cas limites dans le cas de géométries simples. Les	
	losanges verts $((\spadesuit))$ désignent l'intersection des faces de la cellule avec la frontière	
	immergée $\Gamma^{ib}.$	131
5.5	Disposition des contraintes tangentielles dans les 3 cut-cells génériques $\Omega_{i,j}$. Leur	
	emplacement dans les autres cut -cells de la figure 3.4 est aisément déduit depuis	
	cette figure. Dans $cut\text{-}cell$ pentagonale Nord-Est $\tau_{i,j}^{xy}$ possède une valeur unique	132
5.6	Cellule cartésienne $\Omega_{i,j}$ décomposée en quartiles	135
5.7	Décomposition en quartiles des $\it cut\text{-}\it cells$ générique. Dans la cellule triangulaire	
	$\tau^{xy}_{i-1,j}$ n'est pas une inconnue du problème et $\widetilde{\Omega}^{\mathrm{nw}}_{i,j} = \emptyset$	
5.8	Volume de contrôle $\widetilde{\Omega}_{i,j}$ adjacent à quatre cellules cartésiennes	137

5.9	Frontière du quartile de volume $\widetilde{\Omega}_{i,j}^{\mathrm{ne}}$, lorsque $\tau_{i,j}^{xy}$ est une contrainte pariétale	
	(i.e. $\phi_{i,j} > 0$)	138
5.10	Les différents volumes de contrôle $\widetilde{\Omega}_{i,j}$ lorsque $\tau_{i,j}^{xy}$ est disposée sur la frontière immergée	139
5.11	Les différents volumes de contrôle $\widetilde{\Omega}_{i,j}$ pour la contrainte tangentielle élastique $\tau_{i,j}^{xy}$ située près de la frontière immergée	140
5.12	Quartiles de cellule composant le volume contrôle $\widetilde{\Omega}_{i,j}$ en géométrie simple. À gauche : sur un mur de normale sortante $n=e_y$, les cellules adjacentes sont : deux cellules solides et 2 cellules trapézoïdales alignées. À droite : sur une coin entrant du domaine, les cellules adjacentes sont : 2 cellules trapézoïdales alignées, 1 cellule pentagonale et une cellule solide	143
5.13	Disposition des inconnues et des cellules fantômes (en rouge) près de la frontière	
5.14	Géométrie de la contraction plane de rapport d'aspect $4:1.$ À gauche : contraction	145
5.15	abrupte 4: 1, à droite : contraction à coin arrondi	146
	sur la portion $[-4H, 4H] \times [0, 4H]$ du domaine. A droite : sur la portion $[-0.25H, 0.25]$ $[0.75H, 1.25H]$ du domaine	$H] \times 152$
5.16	Iso-valeurs de (a): $\tau^{xx}/\tau_{\rm w}$; (b): $\tau^{yy}/\tau_{\rm w}$; (c): $\tau^{xy}/\tau_{\rm w}$ obtenues dans le cas de la contraction abrupte à We = 3sur le maillage M4. À droite: sur la portion $[-4H, 4H] \times [0, 4H]$ du domaine, à gauche: sur la portion $[-0.25H, 0.25H] \times$	
5.17	[0.75H, 1.25H]	153
5.18	table 5.1	154
	le maillage M4	162
	gauche : sur la portion $[-4H, 4H] \times [0, 4H]$ du domaine. À droite : sur la portion $[-0.25H, 0.75H] \times [0.25H, 1.75H]$ du domaine	163
5.20	Valeurs de (a): τ^{xx}/τ_w ; (b): τ^{yy}/τ_w ; (c): τ^{xy}/τ_w le long de l'axe $y=1$ obtenues dans le cas de la contraction à coin arrondi à We = 2 pour les différents maillages	104
5.21	de la table 5.1	164
5.22	portion $[-0.25H, 0.75H] \times [0.5H, 1.5H]$	165
	m2	166
5.23	Lignes de courant pour l'écoulement rampant dans la contraction à coin arrondi.	169

5.24	$\label{lighted} \mbox{Lignes de courant pour l'écoulement rampant dans la contraction à coin arrondi.} (suite le contraction de coin arrondi.)$	2)170
D.1	Valeurs de (a) : τ^{xx}/τ_w ; (b) : τ^{yy}/τ_w ; (c) : τ^{xy}/τ_w le long de l'axe $y=1$ pour	
	$\mathrm{We} \in [0;3]$ obtenues avec le maillage M4 dans le cas de la contraction abrupte	182
D.2	Valeurs de (a) : τ^{xx}/τ_w ; (b) : τ^{yy}/τ_w ; (c) : τ^{xy}/τ_w le long de l'axe $y=1$ obtenues	
	dans le cas de la contraction abrupte à We = 1 pour les différents maillages de la	
	table 5.1	183
D.3	Iso-valeurs de $\tau^{xx}/\tau_{\rm w}$ obtenues dans le cas de la contraction abrupte sur le maillage	
	M4. À droite : sur la portion $[-4H, 4H] \times [0, 4H]$ du domaine, à gauche : sur la	
		184
D.4	Iso-valeurs de $\tau^{yy}/\tau_{\rm w}$ obtenues dans le cas de la contraction abrupte sur le maillage	
	M4. À droite : sur la portion $[-4H, 4H] \times [0, 4H]$ du domaine, à gauche : sur la	105
DF	portion $[-0.25H, 0.25H] \times [0.75H, 1.25H]$	185
D.5	Iso-valeurs de $\tau^{xy}/\tau_{\rm w}$ obtenues dans le cas de la contraction abrupte sur le maillage	
	M4. À droite : sur la portion $[-4H, 4H] \times [0, 4H]$ du domaine, à gauche : sur la	106
	portion $[-0.25H, 0.25H] \times [0.75H, 1.25H]$	100
E.1	Valeurs de (a) : τ^{xx}/τ_w ; (b) : τ^{yy}/τ_w ; (c) : τ^{xy}/τ_w le long de l'axe $y=1$ obtenues	
	dans le cas de la contraction à coin arrondi à We = 1 pour les différents maillages	
	de la table 5.6	188
E.2	Iso-valeurs de $\tau^{xx}/\tau_{\rm w}$ obtenues dans le cas de la contraction abrupte sur le maillage	
	M4. À droite : sur la portion $[-4H, 4H] \times [0, 4H]$ du domaine, à gauche : sur la	
	portion $[-0.25H, 0.75H] \times [0.5H, 1.5H]$	189
E.3	Iso-valeurs de $\tau^{yy}/\tau_{\rm w}$ obtenues dans le cas de la contraction abrupte sur le maillage	
	M4. À droite : sur la portion $[-4H, 4H] \times [0, 4H]$ du domaine, à gauche : sur la	
	portion $[-0.25H, 0.75H] \times [0.5H, 1.5H]$	190

Introduction

Les fluides "structurés" sont des matériaux susceptibles de se comporter sous cisaillement comme des solides (seuil d'écoulement, élasticité) et comme des liquides (viscosité, thixotropie). Ces caractéristiques, qui permettent d'allier des comportements a priori opposés, en font des matériaux extrêmement utilisés dans l'industrie, qu'elle soit pétrolière, agroalimentaire, BTP, cosmétique ou pharmaceutique. Par exemple, un produit alimentaire demande un seuil d'écoulement élevé pour garantir sa stabilité dans le temps (phase de stockage), mais également une rhéologie contrôlée pour que sa texture corresponde aux attentes des consommateurs (phase d'utilisation), et enfin une viscosité à fort cisaillement très petite pour favoriser les opérations de fabrication, de mélange, de stérilisation ou de transport (phase de procédé).

Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'un vaste projet mené au LEMTA¹ alliant modélisation rhéologique, expérimentation fine et simulations numériques qui devrait permettre de comprendre, à terme, l'influence de la microstructure des matériaux sur leur comportement macroscopique en écoulement, et de proposer des lois de comportement réalistes pour des écoulements de fluides complexes tels que que les émulsions, les gels faibles de polymères, les suspensions d'argiles, les fluides alimentaires ou pétroliers, etc . . .

Plus précisément, les travaux que nous présentons portent sur le développement d'un code de simulation numérique directe suffisamment "ouvert" pour permettre, à terme, de prendre en compte les différents comportements rhéologiques des matériaux et de simuler leur écoulement dans des configurations les plus générales possibles. L'originalité forte de la thèse a concerné le développement d'une méthode numérique de type "méthode de frontières immergées" dite méthode LS- $STAG^2$. Cette méthode très prometteuse permet de réaliser sur grille cartésienne des simulations en géométrie arbitraire à moindre coût CPU et taille mémoire. Afin de séparer la difficulté liée à la prise en compte des géométries complexes, de celle inhérente à la modélisation mathématique du comportement des fluides structurés (cf. chapitre 1) la méthode LS-STAG a été développée en étapes successives.

La première phase consiste à développer un code volumes finis en géométries cartésiennes pour fluides newtoniens incompressibles en géométries complexes, en s'assurant que les propriétés de symétrie des opérateurs continus soient conservées par leurs contreparties discrètes. Cette approche, dite "symmetry preserving" introduite par Verstappen et Veldman [134], consti-

¹Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée

²Level-Set/Staggered

tue une extension aux maillages cartésiens non uniformes de la méthode classique MAC^3 de Harlow et Welch [53]. Son originalité est de conserver les invariants principaux de l'écoulement tels que l'énergie cinétique ou la masse totales, ce qui se révèle crucial pour les simulations à haut nombre de Reynolds. Il est à noter que des discrétisations plus classiques, telles celles des logiciels commerciaux qui reposent sur des discrétisations de type "upwind" des termes inertiels, ou qui utilisent un arrangement colocalisé des variables ne peuvent respecter ces propriétés de conservation.

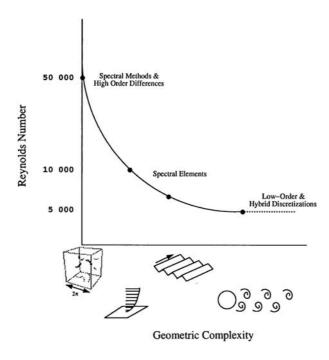


FIG. 1 – Représentation schématique du nombre de Reynolds attingible avec les capacités informatiques actuelles, comme une fonction décroissante de la complexité géométrique (figure tirée de [66]).

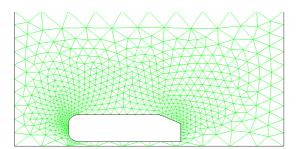
Dans les géométries simples (i.e., une boîte), les méthodes "symmetry preserving" ont permis de réaliser d'authentiques "expériences numériques", qui sont devenues de précieux outils pour l'étude des écoulements turbulents newtoniens. Et un autre facteur crucial dans le succès de ces études repose sur la simplicité du domaine de calcul, où la structure régulière (i.e. cartésienne) du maillage permet d'utiliser des algorithmes de résolution particulièrement efficaces. En revanche, la simulation numérique en géométries complexes n'a pas encore atteint le même niveau de maturité. Comme le souligne l'article de revue de Karniadakis [66], le régime d'écoulement atteignable en simulation numérique direct de la turbulence (DNS⁴) est fonction décroissante de la complexité géométrique considérée. Cet état de fait, représenté de manière schématique sur la figure 1, est lié à l'utilisation de maillages non-structurés dans la majorité des codes de calculs actuels. Ces maillages font partie de la classe des maillages dits conformes, qui sont construits

³Marker and Cell

⁴Direct Numerical Simulation

de manière à ce que la frontière du domaine de calcul épouse la surface mouillée de la géométrie complexe. La figure 2 (à gauche) représente un maillage non-structuré autour d'un modèle simplifié de véhicule automobile : le corps d'Ahmed [5]. La répartition irrégulière des mailles (ici triangulaires) introduit une complexité essentielle par rapport à un maillage cartésien. En effet, sur maillage cartésien, la localisation spatiale d'une maille ainsi que l'identification des mailles lui étant adjacentes sont immédiates. En revanche, sur maillages non-structurés ces deux tâches requièrent respectivement l'utilisation de tables de localisation et de connectivité, ce qui complexifie considérablement la structure des données informatiques utilisées. L'utilisation de tels maillages engendre un surcoût en termes de temps de calcul qui peut devenir prohibitif pour les simulations à haut nombre de Reynolds.

Dans la référence [84], Manhart et~al. comparent, en termes de précision et de temps de calcul, un solveur non-structuré $DeFT^5$ à un solveur cartésien MGLET, sur le cas test de l'écoulement turbulent dans un canal plan tridimensionnel. Le code de volumes finis cartésien MGLET est basé sur un arrangement décalé des variables, avec une discrétisation centrée des flux, et le code DeFT peut être quant à lui vu comme une généralisation de MGLET sur maillages non-structurés. Pour cette configuration d'écoulement simple le même maillage est utilisé pour les deux codes de calcul, si bien que le surcoût de temps de calcul engendré par l'utilisation de solveur non-structuré peut être évalué. Et pour une précision des résultats comparable, le solveur non-structuré engendre des temps de calculs 10 fois supérieurs à ceux du solveur cartésien.



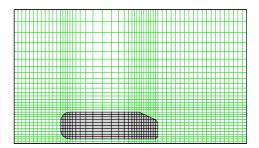


Fig. 2 – Maillages de la géométrie du corps d'Ahmed [5]. À gauche : maillage non-structuré à base de triangles. À droite : maillage non-conforme cartésien.

Pour prendre en compte les géométries complexes à moindre coût, les méthodes cartésiennes de type "frontière immergée" [109] (Immersed Boundary, IB), apparaissent comme une alternative très prometteuse aux méthodes non-structurées. Le principe de ces méthodes est de considérer une géométrie complexe comme un solide plongé dans un maillage cartésien (Fig. 2 à droite) permettant ainsi d'en préserver l'efficacité calculatoire. La difficulté introduite par la frontière immergée réside dans l'apparition de cellules mi-fluide mi-solide (appelées cut-cells dans la suite du manuscrit) qui nécessitent un traitement numérique spécial. Dans les cut-cells le traitement usuel consiste à modifier la discrétisation des équations du mouvement en ajoutant un terme source défini aux frontières du solide. Cependant avec ces approches la conservation au niveau discret des grandeurs globales de l'écoulement n'est en aucun cas garantie.

⁵Delft Flow and Transport

Nous proposons à la place d'employer l'approche "symmetry preserving" de Verstappen et Veldman [134] dans le contexte des méthodes IB. Cette approche est décrite dans le chapitre 2 dans le cas de géométries simples, et afin de vérifier au niveau discret les propriétés de conservation globales de l'écoulement, les opérateurs doivent satisfaire à des conditions que nous présentons. De la même manière l'imposition des conditions aux limites doit être menée de manière à ne pas dégrader les propriétés de conservation de la méthode, ce qui est relativement simple à assurer en géométries simples. Nous utilisons dans le chapitre 3 ces mêmes considérations pour construire la discrétisation LS-STAG des équations de Navier-Stokes dans les cut-cells, proposant ainsi une méthode qui se présente comme une généralisation de la méthode MAC au cas des géométries complexes.

Le développement de la méthode a été accompagné d'une phase de validation sur des configurations de référence dont les résultats sont donnés dans le chapitre 4. En outre ce chapitre contient un exemple d'application de la méthode au cas de géométries mobiles, et comme les méthodes IB notre méthode est affranchie de toute étape de remaillage, ce qui en fait une alternative avantageuse en terme de temps de calcul vis à vis d'un solveur structuré. Finalement nous concluons cette série d'applications en présentant un comparatif en termes de temps de calcul avec un solveur non-structuré industriel FLUENT.

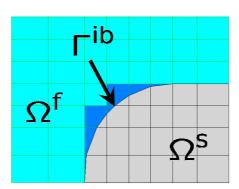


FIG. 3 – Maillage cartésien à proximité d'une frontière immergée. En gris : cellules solides, en bleu ciel : cellules cartésiennes et en bleu : cellules mi-fluide/solide, les *cut-cells*.

Nous présentons dans le chapitre 5 du manuscrit l'extension de la méthode LS-STAG au cas des fluides viscoélastiques, ce qui constitue à notre connaissance la première application d'une méthode IB pour la simulation d'écoulements de tels fluides. La difficulté majeure que nous avons rencontrée est la discrétisation de l'équation constitutive pour le tenseur des contraintes dans les cut-cells. Nous avons été amenés à apporter une attention particulière à la discrétisation des équations de Navier-Stokes dans les cut-cells. Forts de cet expertise nous avons pu lever ce dernier verrou et présentons l'application de la méthode LS-STAG à l'écoulement en contraction plane à coins saillants/arrondis d'un fluide d'Oldroyd-B.

Chapitre 1

Modélisation physique

Sommaire

1.1	Équations fondamentales de la dynamique de l'écoulement	5
1.2	Généralités sur les lois de comportement rhéologiques	6
1.3	La modélisation de la viscoélasticité	8
1.4	Équations du mouvement pour le fluide d'Oldroyd-B	12
1.5	Conclusion	13

Dans ce chapitre nous introduisons les équations générales du mouvement pour un fluide incompressible qui, pour conduire à un système fermé, requiert l'introduction d'une loi constitutive. Il n'existe pas de loi de comportement universelle, et parmi la multitude de modèles existants (voir l'ouvrage de Bird et al. [15]) il convient de choisir celui qui est le plus adapté pour appréhender le comportement exhibé par un matériau donné, dans une situation d'écoulement donnée. La motivation de ces travaux de thèse est la mise en œuvre d'une méthode de type frontières immergées incorporant le modèle rhéologique développé dans la thèse de Benbelkacem [12]. Ce modèle est conçu pour être suffisamment général afin de caractériser expérimentalement les comportements viscoélastiques et non-newtoniens d'une vaste gamme de matériaux. Dans cette thèse nous avons négligé les effets non-newtoniens et donc considéré une version simplifiée du modèle de [12] qui coïncide avec le modèle viscoélastique linéaire d'Oldroyd-B que nous présentons dans ce chapitre.

1.1 Équations fondamentales de la dynamique de l'écoulement

L'équation de conservation locale de quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \tag{1.1}$$

où v désigne le champ vectoriel de vitesse, p le champ de pression et τ le tenseur d'ordre 2 symétrique des contraintes visqueuses, ρ la masse volumique. Le fluide est supposé incompressible,

le champ de vitesse \boldsymbol{v} vérifie de ce fait la condition de continuité :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0. \tag{1.2}$$

Sous cette hypothèse, l'identité tensorielle :

$$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \nabla\cdot(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}\nabla\cdot\boldsymbol{v},$$

nous permet d'obtenir une forme alternative pour (1.1) :

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})\right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau},\tag{1.3}$$

qui est plus commode pour la simulation numérique par la méthode des volumes finis que nous présenterons dans la suite du manuscrit. Le système (1.2)-(1.3) comporte en 2D trois équations scalaires. Cependant elles font intervenir 6 inconnues :

- les 2 composantes de la vitesse v,
- la pression p,
- les 3 composantes du tenseur des contraintes visqueuses τ .

Le système (1.3)-(1.2) n'est pas fermé et requiert l'introduction d'une loi constitutive ou loi de comportement.

1.2 Généralités sur les lois de comportement rhéologiques

Une loi constitutive est une relation liant l'état de contrainte du matériau τ à la cinématique de l'écoulement en introduisant le tenseur d'ordre 2 des taux de déformations $D = \frac{1}{2} \left(\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v}^T \right)$. Pour les fluides simples comme le sont typiquement l'air ou l'eau, l'expérience montre qu'il existe un modèle prévoyant une relation de proportionnalité entre ces deux tenseurs, la loi de newton :

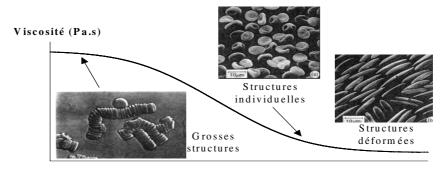
$$\tau = 2\eta \mathbf{D},\tag{1.4}$$

où η désigne la viscosité dynamique constante du fluide. Ce modèle est cependant incapable de prédire le comportement de fluides plus généraux comportant notamment une structure microscopique complexe. Ces fluides peuvent présenter une dépendance de la viscosité vis à vis du cisaillement, ce que nous appellerons un comportement non-newtonien. Suivant la nature de la dépendance de la viscosité nous distinguons 3 types de comportement non-newtonien :

Fluides rhéofluidifiants

Ces fluides ont une viscosité qui est une fonction décroissante du taux de cisaillement. De nombreuses solutions de polymères exhibent ce type de comportement ou encore le sang (Fig. 1.1), il peut être interprété par la présence de structures qui s'alignent dans le sens de l'écoulement au fur et à mesure que le taux de cisaillement augmente, ce qui a tendance à faire diminuer la viscosité.

Fluides rhéoépaississants



Vitesse de Cisaillement (s-1)

FIG. 1.1 – Représentation schématique de la dépendance de la viscosité du sang au taux de cisaillement et lien avec sa structure interne.

Ce sont des fluides dont la viscosité croît avec le taux de cisaillement. Le sable mouillé en est un exemple : à faible vitesse, les grains de sable sont lubrifiés par l'eau et glissent les uns par rapport aux autres, et, à forts taux de cisaillement l'absence de lubrification engendre des frottements donc une plus forte viscosité apparente qu'à faible vitesse.

Fluides à seuil

Ces fluides ne s'écoulent pas en dessous d'une certaine contrainte, et au delà s'écoule comme un fluide newtonien ou rhéofluidifiant. C'est le cas pour des suspensions concentrées de particules solides. Ce comportement peut être interprété par la présence d'agrégats dans le matériau qui subsistent jusqu'à ce que la contrainte atteigne une valeur critique, la contrainte seuil.

Par ailleurs le modèle de newton (1.4) est incapable de prédire le comportement d'un matériau viscoélastique. Ce dernier exhibe un comportement intermédiaire entre celui d'un fluide et celui d'un solide, qui peut s'avérer être contre intuitif (Fig. (1.2)). Dans la section suivante nous

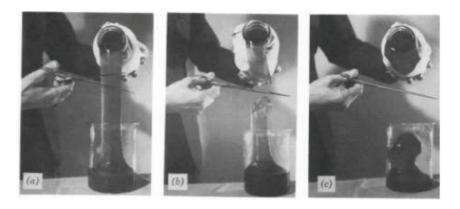


FIG. 1.2 – Un fluide viscoélastique (savon d'aluminium) s'écoule depuis un récipient (a) puis le filet de fluide est sectionné aux ciseaux (b). La filet de fluide situé au dessus des lames remonte jusqu'au récipient (c). Figure tirée de l'ouvrage de Bird *et al.* [15].

proposons une modélisation de ce comportement basée sur des raisonnements élémentaires.

1.3 La modélisation de la viscoélasticité

1.3.1 Description empirique

Il peut sembler naturel de distinguer catégoriquement les fluides des solides, dans le sens où les fluides s'écoulent mais pas les solides. Si nous appliquons une force à un matériau idéalement solide, celui-ci va alors se déformer et si nous arrêtons de le solliciter, il reviendra à sa configuration initiale. Le comportement de ce matériau est alors à rapprocher de celui d'un ressort. En effet, ce dernier stocke l'énergie que nous lui transmettons sous forme élastique et la libère sous forme mécanique dès qu'il n'est plus sollicité pour reprendre sa forme initiale. A contrario, le comportement d'un fluide idéalement visqueux est semblable à un amortisseur: en s'écoulant il dissipe sous forme de chaleur l'énergie que nous lui fournissons en le sollicitant. Finalement il ne revient jamais à sa position initiale qu'il a instantanément oubliée. Pour formaliser ces considérations, nous introduisons un temps λ intrinsèque au matériau au terme duquel celui-ci oublie sa configuration initiale, et nous pouvons conclure que pour un solide $\lambda = \infty$ et pour un fluide $\lambda = 0$. Cependant cette description est insuffisante, nous pourrions raisonnablement penser que l'eau est un "vrai" fluide tel que $\lambda = 0$ et pourtant sollicitée sur des temps très courts elle réagit comme un solide et n'oublie pas sa configuration initiale, ce qui peut être vérifié lors d'un plongeon manqué à la piscine. De même, si nous prenons l'exemple d'un glacier, et que nous l'observons quelques minutes voire quelques heures il est alors impossible de ne pas le placer dans la catégorie des solides. Pourtant une observation sur une période de l'ordre de l'année met en évidence son caractère visqueux. Pour poursuivre la description, il est donc nécessaire d'introduire un autre temps caractéristique T, lié à la durée de la sollicitation. Le rapport entre le temps caractéristique du matériau et de l'observation définit (Cf. [110]) le nombre de Deborah :

$$De = \frac{\lambda}{T}. ag{1.5}$$

Par ailleurs, si le temps caractéristique d'observation choisi est le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$, on parle plutôt de nombre de Weissenberg :

$$We = \lambda \dot{\gamma} . \tag{1.6}$$

Ce que nous appellons communément un solide est en fait un matériau sollicité dans des conditions telles que $De \to \infty$, et nous parlons de fluide quand $De \ll 1$. Si nous sollicitons un matériau dans des conditions intermédiaires telles que $De \approx 1$, il se comporte alors comme un *fluide visco-élastique*: le travail fourni est en partie stocké sous forme élastique et l'autre partie est dissipée, finalement l'énergie élastique est progressivement convertie en énergie cinétique et le matériau oublie partiellement sa configuration initiale.

1.3.2 Le modèle de Jeffrey

Nous allons construire une loi constitutive pour les fluides viscoélastiques en nous basant sur des raisonnements physiques élémentaires 1D. Cette approche est inspirée de celle adoptée par

Joseph [62], et le lecteur peut se référer à l'ouvrage de [23] pour une présentation plus formelle de la théorie générale de la viscoélasticité. Dans la discussion précédente nous avons modélisé le comportement d'un fluide visqueux par un amortisseur et celui d'un solide élastique par un ressort, un fluide viscoélastique peut quant à lui être modélisé par un montage composé de ressorts et d'amortisseurs. Le modèle d'Oldroyd-B ainsi que l'équation constitutive utilisée par [12] sont basés sur l'élément de Jeffrey (Fig. 1.3) comportant un amortisseur en série avec un ressort et amortisseur en parallèle. Dans un ressort, la force σ exercée est proportionnelle au déplacement γ suivant $\sigma = G\gamma$ où G désigne le module élastique. Dans un amortisseur la force est une fonction linéaire de la vitesse de cisaillement $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ telle que $\sigma = \eta \frac{\partial \gamma}{\partial t}$ où η est la viscosité dynamique.

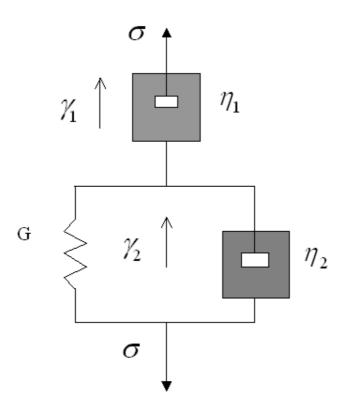


Fig. 1.3 – Élément de Jeffrey.

Dans un tel élément, le déplacement total γ est la somme du déplacement γ_1 dans l'amortisseur η_1 et de celui dans le montage ressort-amortisseur en parallèle γ_2 , cela s'écrit :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}.$$
 (1.7)

D'après le principe d'action-réaction, la force σ dans chacun des éléments en série est la même :

$$\sigma = \eta_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} = G\gamma_2 + \eta_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial t}.$$
 (1.8)

En combinant (1.7) et la dérivée en temps de (1.8), nous éliminons γ_1 et γ_2 pour obtenir :

$$\underbrace{\frac{\eta_1 + \eta_2}{G}}_{\lambda_1} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma = \eta_1 \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \underbrace{\frac{\eta_2}{G}}_{\lambda_2} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right), \tag{1.9}$$

où les coefficients λ_1 et λ_2 homogènes à des temps, sont appelés respectivement temps de relaxation et de retardement. Le coefficient λ_1 est assimilable au temps caractéristique évoqué dans la section précédente. Le temps λ_2 , dit temps de retardement, interdit au matériau modélisé ainsi d'être instantanément élastique, contrairement au cas du modèle de Maxwell ($\eta_2 = 0$) représenté par un ressort en série avec un amortisseur. Pour le modèle de Maxwell, si nous appliquons un déplacement constant, une contrainte apparait instantanément dans le ressort puis se relaxe avec l'amortisseur. Changeons notre interprétation en termes de forces et de déplacements pour raisonner en termes de contraintes et déformations, nous définissons la déformation telle que :

$$\gamma = \frac{\partial \xi}{\partial x},\tag{1.10}$$

et la vitesse,

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = u. \tag{1.11}$$

Ainsi, on a le taux de déformation :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x},\tag{1.12}$$

et l'équation (1.9) devient :

$$\frac{\eta_1 + \eta_2}{G} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma = \eta_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta_2}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right). \tag{1.13}$$

Nous étendons tensoriellement l'équation (1.9) :

$$\frac{\eta_1 + \eta_2}{G} \frac{D\tau}{Dt} + \tau = 2\eta_1 \left(D + \frac{\eta_2}{G} \frac{DD}{Dt} \right), \tag{1.14}$$

avec les notations de la section nous avons les correspondances suivantes :

$$\sigma \rightleftharpoons \tau,$$
 (1.15)

$$\frac{\partial u}{\partial x} \rightleftharpoons 2\mathbf{D},$$
 (1.16)

$$\begin{array}{ccc}
\sigma & \rightleftharpoons & \tau, & (1.15) \\
\frac{\partial u}{\partial x} & \rightleftharpoons & 2D, & (1.16) \\
\frac{\partial}{\partial t} & \rightleftharpoons & \frac{D}{Dt}. & (1.17)
\end{array}$$

L'opérateur $\frac{D}{Dt}$ est un opérateur de dérivée temporelle sur les tenseurs qu'il nous reste à définir. En effet, pour que la démarche suivie jusqu'ici nous mène finalement à une loi constitutive viable, la relation (1.14) se doit d'être invariante par changement de référentiel. En effet, si nous considérons un changement de référentiel tel que x' = c(t) + Q(t)x, où c représente une translation et Q une rotation (représentée par un tenseur orthogonal), nous devons avoir dans le nouveau référentiel $\tau' = Q(t)\tau Q^T(t)$. Ce principe d'invariance interdit d'obtenir une nouvelle loi constitutive en changeant de référentiel. Les opérateurs $\frac{D}{Dt}$ invariants par changement de référentiel,

sont appelées dérivées "objectives". Il existe une grande variété de ces dérivées objectives conduisant à autant de loi constitutives. Le modèle utilisé dans la thèse de Benbelkacem [12], comme le modèle d'Oldroyd-B, fait intervenir la dérivée surconvectée (notée ∇) définie par :

$$\mathbf{A} \stackrel{\nabla}{=} \frac{\partial A}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)A - \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{v}^{T} - \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}. \tag{1.18}$$

L'équation (1.14) s'écrit donc :

$$\frac{\eta_1 + \eta_2}{G} \stackrel{\nabla}{\tau} + \tau = 2\eta_1 \left(\mathbf{D} + \frac{\eta_2}{G} \stackrel{\nabla}{\mathbf{D}} \right). \tag{1.19}$$

Les travaux expérimentaux de [12] ont permis de caractériser rhéologiquement une large gamme de matériaux viscoélastiques et rhéofluidifiants (Xanthane, Carbopol, émulsions, ...) à partir du modèle (1.23) et ainsi d'en déterminer les paramètres η_1 , η_2 et G. Pour ces matériaux la dépendance au taux de cisaillement est contenue dans $\eta_1 = \eta_1(\dot{\gamma})$ qui peut être exprimée par un modèle du type Carreau-Yasuda [15], nous écrirons :

$$\frac{\eta_1(\dot{\gamma}) + \eta_2}{G} \stackrel{\nabla}{\tau} + \tau = 2\eta_1(\dot{\gamma}) \left(D + \frac{\eta_2}{G} \stackrel{\nabla}{D} \right), \tag{1.20}$$

Nous allons proposer une première forme alternative de ce modèle, en introduisant tout d'abord une viscosité dite du solvant :

$$\eta_{\rm s}(\dot{\gamma}) = \frac{\eta_1(\dot{\gamma})\eta_2}{\eta_1(\dot{\gamma}) + \eta_2},\tag{1.21}$$

où la dépendance au taux de cisaillement est négligeable puisque [12] a montré que $\eta_1 \gg \eta_2$, nous écrirons alors que $\eta_s(\dot{\gamma}) \simeq \eta_s$. Nous introduisons la viscosité dite élastique :

$$\eta_{\mathrm{e}}(\dot{\gamma}) = \eta_{1}(\dot{\gamma}) \frac{\eta_{1}(\dot{\gamma})}{\eta_{1}(\dot{\gamma}) + \eta_{2}},$$

telle que:

$$\eta_1(\dot{\gamma}) = \eta_e(\dot{\gamma}) + \eta_s, \tag{1.22}$$

ainsi que le temps dit élastique :

$$\lambda(\dot{\gamma}) = \frac{\eta_1(\dot{\gamma}) + \eta_2}{G}.$$
 (1.23)

Le modèle (1.20) peut être écrit :

$$\lambda(\dot{\gamma}) \stackrel{\nabla}{\tau} + \tau = 2(\eta_{e}(\dot{\gamma}) + \eta_{s}) D + 2\lambda(\dot{\gamma}) \eta_{s} \stackrel{\nabla}{D}, \tag{1.24}$$

qui comporte une certaine similarité avec le modèle de White-Metzner [15]. Par ailleurs si les effets non-newtoniens sont négligés (i.e. $\eta_e(\dot{\gamma}) = cste$ et $\lambda = cste$) alors ce modèle se réduit au modèle viscoélastique linéaire d'Oldroyd-B. Nous présentons à présent une deuxième forme alternative du modèle (1.24) qui repose sur une décomposition du tenseur des contraintes τ en une contribution newtonienne τ_s et une contribution viscoélastique τ_e , telles que :

$$\tau = \tau_s + \tau_e. \tag{1.25}$$

Nous obtenons alors une deuxième forme alternative pour (1.24):

$$\tau_{\rm s} = 2\eta_{\rm s} \mathbf{D},\tag{1.26a}$$

$$\lambda(\dot{\gamma}) \stackrel{\nabla}{\boldsymbol{\tau}_{e}} + \boldsymbol{\tau}_{e} = 2\eta_{e}(\dot{\gamma})\boldsymbol{D},$$
 (1.26b)

qui constitue la forme traditionnellement utilisée en mécanique numérique car elle permet notamment de s'affranchir du calcul fastidieux de D dans (1.24), cette décomposition est valide tant que η_s est constante. Dans la suite du manuscrit nous ne considèrerons pas la dépendance des divers paramètres au cisaillement, et traitons le modèle d'Oldroyd-B seulement. L'implémentation de cette dépendance, laissée pour un travail futur, ne comporte néanmoins pas de difficulté majeure.

Une fois la loi constitutive (1.26) introduite dans les équations du mouvement (1.3)-(1.2), nous obtenons un système d'équations fermé que nous explicitons à présent.

1.4 Équations du mouvement pour le fluide d'Oldroyd-B

En injectant la loi constitutive (1.26) dans les équations du mouvement (1.2)-(1.3) nous obtenons le système d'équations gouvernant l'écoulement du fluide d'Oldroyd-B:

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v})\right) = -\nabla p + 2\eta_{s} \nabla \cdot (\boldsymbol{D}) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{e}, \tag{1.27a}$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{e}} + \lambda \stackrel{\nabla}{\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{e}}} = 2\eta_{\mathrm{e}}\boldsymbol{D},$$
 (1.27b)

$$\nabla \cdot v = 0. \tag{1.27c}$$

Sous l'hypothèse d'incompressibilité, l'identité tensorielle :

$$2\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{v} + \nabla^T \boldsymbol{v}) = \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{v}) + \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{v}),$$

nous permet de réécrire le terme correspondant aux contraintes newtoniennes du solvant, et nous obtenons :

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v})\right) = -\nabla p + \eta_{s} \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{e}, \tag{1.28a}$$

$$\tau_{\rm e} + \lambda \stackrel{\nabla}{\tau_{\rm e}} = 2\eta_{\rm e} D,$$
 (1.28b)

$$\nabla \cdot v = 0. \tag{1.28c}$$

L'adimensionnement de ces équations s'effectue en introduisant les variables réduites :

$$egin{array}{lll} oldsymbol{v}^* &=& rac{oldsymbol{v}}{U}, & P^* = rac{LP}{\eta_1 U}, & au_{
m e}^* = rac{L au_{
m e}}{\eta_1 U}, \ x^* &=& rac{x}{L}, & y^* = rac{y}{L}, & t^* = rac{tU}{L}, \end{array}$$

où L et U sont une longueur caractéristique et une vitesse caractéristique de l'écoulement. Ainsi, en effectuant ce changement de variables dans le système précédent (en omettant les *) nous avons :

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v})\right) = -\nabla p + \beta \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{e}, \tag{1.29a}$$

We
$$\left(\boldsymbol{\tau}_{e} + \lambda \ \boldsymbol{\tau}_{e}^{\nabla}\right) = 2(1 - \beta)\boldsymbol{D},$$
 (1.29b)

$$\nabla \cdot v = 0. \tag{1.29c}$$

Nous mettons ainsi en évidence le nombre adimensionné $\beta = \frac{\eta_s}{\eta}$ intrinsèque au matériau, et les deux nombres adimensionnés régissant le régime de l'écoulement :

$$Re = \frac{\rho UL}{\eta_1}$$
 , $We = \frac{\lambda U}{L}$. (1.30)

Le nombre de Reynolds Re évalue l'importance relative des termes convectifs par rapport aux contributions diffusives de quantité de mouvement; We désigne le nombre de Weissenberg qui mesure le niveau d'élasticité de l'écoulement.

Dans le cas limite où $\lambda = 0$ et $\beta = 1$, le système (1.28) se réduit aux équations de Navier-Stokes :

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v})\right) = -\nabla p + \eta \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{v}), \tag{1.31a}$$

$$\nabla \cdot v = 0. \tag{1.31b}$$

1.5 Conclusion

Nous avons introduit dans ce chapitre les équations qui seront résolues numériquement dans la suite du manuscrit. Nous présentons dans les chapitres 2 et 3 la méthode LS-STAG pour les équations de Navier-Stokes (1.31) en géométries complexes que nous étendrons aux cas des fluides viscoélastiques dans le chapitre 5, afin d'incorporer progressivement les difficultés relatives au traitement de la loi constitutive.

Chapitre 2

La méthode *MAC* pour fluides newtoniens incompressibles en géométries simples

Sommaire		
2.1	La méthode MAC	16
2.2	Discrétisation de l'équation de continuité	21
2.3	Examen discret des lois de conservation	26
2.4	Discrétisation des flux de pression et convectifs	35
2.5	Discrétisation des flux diffusifs basée sur la conservation totale de	
	quantité de mouvement	39

Dans ce chapitre nous présentons la méthode de volumes finis avec arrangement décalé des variables de [134]. Initialement conçue pour la simulation d'écoulements à surface libre, la méthode MAC^6 originale de Harlow et Welch [53] repose sur un arrangement décalé des variables de vitesse et de pression. Cet arrangement permet un couplage naturel vitesse-pression qui en a fait un maître choix pour la simulation des écoulements incompressibles. Sur maillage uniforme, la discrétisation centrée MAC est connue pour conserver au niveau discret les grandeurs globales de l'écoulement telles que la masse, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique totales et présente une précision spatiale d'ordre 2 [21]. Les travaux de Verstappen et Veldman [134] ont permis d'étendre ces propriétés dans le cas de maillages non-uniformes avec une formulation en volumes finis. La méthode LS-STAG, que nous proposons dans le chapitre 3, généralise cette méthode [134] au cas des géométries complexes dans le contexte des frontières immergées. Comme nous le verrons dans ce chapitre, l'examen discret des propriétés de conservation constitue une véritable démarche de construction sur laquelle reposera notre discrétisation des équations de

⁶Marker And Cell

Navier-Stokes dans tout le domaine de calcul. Nous appliquons dans ce chapitre la démarche de Verstappen et Veldman pour construire la discrétisation des équations de Navier-Stokes en géométries simples (typiquement la "boîte" de la figure 2.1). Une attention particulière sera ici portée sur l'implémentation des conditions aux limites et notamment sur leur influence au niveau des propriétés de conservation, ce qui est indispensable en vue de l'extension au cas des géométries complexes.

2.1 La méthode MAC

2.1.1 Forme intégrale des équations de Navier-Stokes

La forme intégrale des équations de Navier-Stokes est le point de départ de la formulation en volumes-finis, elle est obtenue en intégrant les équations locales (1.31) sur un volume de contrôle arbitraire Ω^{cv} , de frontière Γ^{cv} . En utilisant le théorème de flux-divergence l'équation de continuité (1.31b) s'écrit :

$$\int_{\Gamma^{cv}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, dS = 0. \tag{2.1}$$

où n désigne la normale extérieure sortante de la frontière Γ^{cv} . De manière analogue les équations de quantité de mouvement dans la direction x et y s'obtiennent en intégrant (1.31a) et s'écrivent respectivement :

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega^{\mathrm{cv}}} u \ \mathrm{d}V + \rho \int_{\Gamma^{\mathrm{cv}}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) u \ \mathrm{d}S + \int_{\Gamma^{\mathrm{cv}}} p \, \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{n} \ \mathrm{d}S - \eta \int_{\Gamma^{\mathrm{cv}}} \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{n} \ \mathrm{d}S = 0, \tag{2.2a}$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega^{\mathrm{cv}}} v \ \mathrm{d}V + \rho \int_{\Gamma^{\mathrm{cv}}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) v \ \mathrm{d}S + \int_{\Gamma^{\mathrm{cv}}} p \, \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{n} \ \mathrm{d}S - \eta \int_{\Gamma^{\mathrm{cv}}} \boldsymbol{\nabla} v \cdot \boldsymbol{n} \ \mathrm{d}S = 0.$$
 (2.2b)

Afin d'introduire la terminologie qui sera employée dans la suite du manuscrit, nous identifions par exemple dans l'équation (2.2a) suivant la direction horizontale x:

- le terme volumique instationnaire $\frac{d}{dt} \int_{\Omega^{cv}} u \ dV$, ainsi que les termes surfaciques :
 - le flux convectif $\int_{\Gamma^{cv}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) u \, dS$ sur la frontière Γ ,
 - le flux diffusif ou de contraintes $\int_{\Gamma^{cv}} \nabla u \cdot \mathbf{n} \, dS$,
 - le flux de pression $\int_{\Gamma^{cv}} p \, \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{n} \, dS$.

2.1.2 Le maillage MAC de Harlow et Welch

Le domaine de calcul rectangulaire $\Omega = [x_0, x_{N_x}] \times [y_0, y_{N_y}]$ (Fig. 2.1) est divisé en cellules cartésiennes :

$$\Omega_{i,j} =] x_{i-1}, x_i [\times] y_{j-1}, y_j [,$$

de volume $V_{i,j} = \Delta x_i \Delta y_j$ et de centre $\boldsymbol{x}_{ij}^c = (x_i^c, y_j^c)$. La surface de la cellule $\Omega_{i,j}$ est décomposée en quatre facettes élémentaires telles que

$$\Gamma_{i,j} = \Gamma_{i,j}^{e} \cup \Gamma_{i,j}^{w} \cup \Gamma_{i,j}^{n} \cup \Gamma_{i,j}^{s}, \tag{2.3}$$

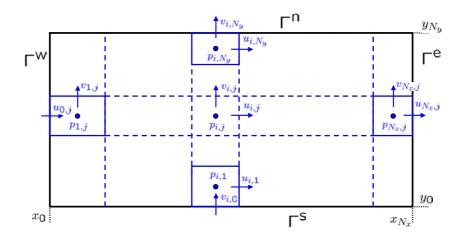


Fig. 2.1 – Maillage MAC d'un domaine Ω rectangulaire.

en utilisant les notations géographiques utilisées habituellement en volumes finis (e.g. [107, 38], w : Ouest,e : Est, s : Sud et n : Nord). Les inconnues de vitesse $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$ sont respectivement placées au centre des faces $\Gamma^{\rm e}_{i,j}$ et $\Gamma^{\rm n}_{i,j}$ de $\Omega_{i,j}$ et l'inconnue de pression $p_{i,j}$ au centre de la cellule. Cet arrangement décalé des inconnues pour une cellule cartésienne est représenté sur la figure 2.2. Le maillage est tel que l'ensemble des $\Omega_{i,j}$ pour $i=1,\ldots,N_x$ et $j=1,\ldots,N_y$ constitue une partition du domaine fluide :

$$\Omega = \bigcup_{i=1,\dots,N_x} \bigcup_{j=1,\dots,N_y} \Omega_{i,j}, \tag{2.4}$$

dont la frontière Γ est décomposée en quatre faces notées géographiquement $\Gamma = \Gamma^e \cup \Gamma^w \cup \Gamma^n \cup \Gamma^s$.

Dans le domaine de calcul nous recensons N_xN_y inconnues de pression $p_{i,j}$ qui sont situées au centre des cellules $\Omega_{i,j}$. Les cellules situées près des bords comportent des vitesses qui ne sont pas des inconnues du problème, comme par exemple la vitesse v_{i,N_y} qui est située sur $\Omega_{i,N_y} \cap \Gamma^n = \Gamma^n_{i,N_y}$, elle servira à imposer les conditions aux limites. Il y a donc $(N_x - 1)N_y$ inconnues $v_{i,j}$ pour la vitesse selon la direction y, et $N_x(N_y - 1)$ inconnues $u_{i,j}$ selon la direction x. Au total le domaine de calcul comporte :

$$\underbrace{N_x N_y}_{p} + \underbrace{(N_x - 1)N_y}_{u} + \underbrace{N_x (N_y - 1)}_{v} \quad \text{inconnues.}$$

La discrétisation en volumes finis des équations de Navier-Stokes doit permettre d'obtenir autant d'équations afin de fermer le problème. Pour la méthode des volumes finis la forme intégrale (2.2)-(2.1) des équations du mouvement est écrite dans des volumes de contrôle puis discrétisée. Le volume de contrôle naturel pour l'équation de continuité (2.1) coïncide avec la cellule $\Omega_{i,j}$, et la discrétisation de :

$$\int_{\Gamma_{i,j}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, dS, \tag{2.5}$$

dans chaque $\{\Omega_{i,j}, i=1,\ldots,N_x, j=1,\ldots,N_y\}$ fournit N_xN_y équations. Nous verrons dans la section 2.2 que l'arrangement décalé des variables permet de discrétiser cette équation sans faire

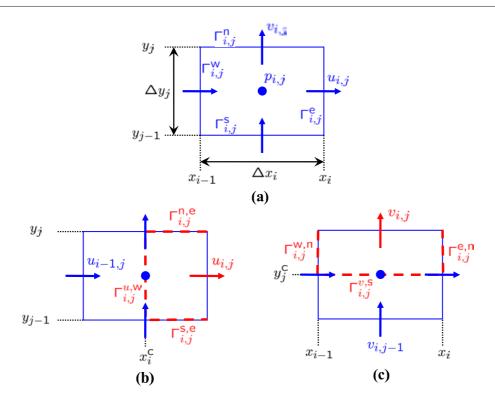


FIG. 2.2 – Arrangement décalé des inconnues pour (a): une cellule cartésienne $\Omega_{i,j}$, et représentation des volumes de contrôle pour (b): $u_{i,j}$ et (c): $v_{i,j}$. Les volumes de contrôle $\Omega^u_{i,j} \in \Omega_{i,j} \cup \Omega_{i+1,j}$ et $\Omega^v_{i,j} \in \Omega_{i,j} \cup \Omega_{i,j+1}$ doivent être complétés par leur complémentaire dans $\Omega_{i+1,j}$ et $\Omega_{i,j+1}$ respectivement.

intervenir de formules d'interpolations, ce qui présente un avantage notable par rapport à un arrangement colocalisé des variables.

Nous devons introduire les volumes de contrôle où seront discrétisées les équations du mouvement (2.2). Le volume décalé $\Omega^u_{i,j} = \big] \, x^{\rm c}_i \,,\, x^{\rm c}_{i+1} \, \big[\, \times \, \big] \, y_{j-1} \,,\, y_j \, \big[$ est utilisé comme volume de contrôle pour l'équation de quantité de mouvement horizontale (2.2a). Afin de subdiviser la frontière $\Gamma^u_{i,j}$ de ce volume de contrôle, les faces Nord et Sud de $\Omega_{i,j}$ sont décomposées telles que $\Gamma^{\rm n}_{i,j} = \Gamma^{\rm n,w}_{i,j} \cup \Gamma^{\rm n,e}_{i,j}$ et $\Gamma^{\rm s}_{i,j} = \Gamma^{\rm s,w}_{i,j} \cup \Gamma^{\rm s,e}_{i,j}$ respectivement, nous poserons alors :

$$\Gamma_{i,j}^{u} = \Gamma_{i,j}^{u,w} \cup \Gamma_{i,j}^{u,e} \cup \left(\Gamma_{i,j}^{s,e} \cup \Gamma_{i+1,j}^{s,w}\right) \cup \left(\Gamma_{i,j}^{n,e} \cup \Gamma_{i+1,j}^{n,w}\right), \tag{2.6}$$

et cette décomposition est représentée sur la figure 2.3. Une subdivision analogue est utilisée pour le volume de contrôle $\Omega_{i,j}^v =]x_{i-1}$, $x_i [\times] y_j^c$, $y_{j+1}^c [$ dans lequel est discrétisée l'équation de quantité de mouvement verticale (2.8b) :

$$\Gamma_{i,j}^{v} = \Gamma_{i,j}^{v,s} \cup \Gamma_{i,j}^{v,n} \cup \left(\Gamma_{i,j}^{w,n} \cup \Gamma_{i,j+1}^{w,s}\right) \cup \left(\Gamma_{i,j}^{e,n} \cup \Gamma_{i,j+1}^{e,s}\right). \tag{2.7}$$

Si les décompositions (2.6) et (2.7) semblent a priori peu naturelles et presque inutiles pour décrire la méthode MAC, elles se révèleront très commodes pour les discussions concernant les propriétés de conservation au niveau discret et plus particulièrement dans le cas d'écoulement en présence de géométries complexes.

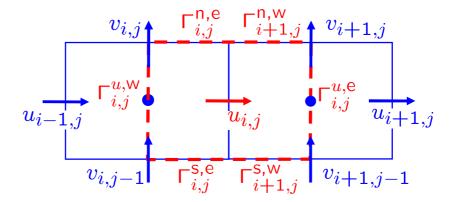


Fig. 2.3 – Volume de contrôle $\Omega^u_{i,j}$ et décomposition de la frontière $\Gamma^u_{i,j}$

Finalement l'équation du mouvement selon la direction x s'écrit dans les volumes de contrôle $\left\{\Omega_{i,j}^u,\ i=1,\ldots,N_x-1,\ j=1,\ldots,N_y\right\}$:

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_{i,j}^{u}} u \, \mathrm{d}V + \rho \int_{\Gamma_{i,j}^{u}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, u \, \mathrm{d}S + \int_{\Gamma_{i,j}^{u}} p \, \boldsymbol{e}_{x} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S - \int_{\Gamma_{i,j}^{u}} \eta \, \boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = 0, \qquad (2.8a)$$

et dans la direction y dans $\left\{\Omega_{i,j}^v,\ i=1,\ldots,N_x,\ j=1,\ldots,N_y-1\right\}$:

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_{i,j}^{v}} v \, \mathrm{d}V + \rho \int_{\Gamma_{i,j}^{v}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, v \, \mathrm{d}S + \int_{\Gamma_{i,j}^{v}} p \, \boldsymbol{e}_{y} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S - \int_{\Gamma_{i,j}^{v}} \eta \, \boldsymbol{\nabla}v \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = 0, \qquad (2.8b)$$

ce qui fournit les équations manquantes pour clôre le système discret dont nous allons à présent introduire l'écriture matricielle.

2.1.3 Expression matricielle des équations de Navier-Stokes semi-discrétisées

La forme matricielle que nous introduisons ici est indépendante de la discrétisation des équations du mouvement. Nous verrons dans la suite du chapitre que l'examen discret des propriétés de conservation globale de l'écoulement impose des conditions sur la forme des matrices intervenant dans le système.

Tout d'abord les $N_x \times N_y$ équations correspondant à la discrétisation de l'équation de continuité (2.5) s'écrivent :

$$\mathcal{D}U + \overline{U}^{\,\mathrm{b}} = 0, \tag{2.9}$$

où $U = (\mathcal{U} \mathcal{V})^{\mathrm{T}}$ est le vecteur colonne dans lequel sont rangées les inconnues de vitesses. Les $(N_x - 1) \times N_y$ inconnues de vitesse horizontales $u_{i,j}$ sont rangées par convention ligne par ligne puis colonne par colonne dans le vecteur \mathcal{U} . De la même manière, les inconnues $v_{i,j}$ sont contenues

dans le vecteur colonne V qui comporte $N_x \times (N_y - 1)$ éléments. Ces deux vecteurs s'écrivent :

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix}
u_{1,1} \\
\vdots \\
u_{N_{x}-1,1} \\
\vdots \\
u_{1,j} \\
\vdots \\
u_{N_{x}-1,j} \\
\vdots \\
u_{1,N_{y}} \\
\vdots \\
u_{1,N_{y}} \\
\vdots \\
u_{N_{x}-1,N_{y}}
\end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix}
v_{1,1} \\
\vdots \\
v_{N_{x},1} \\
\vdots \\
v_{N_{x},j} \\
\vdots \\
v_{1,N_{y}-1} \\
\vdots \\
v_{N_{x},N_{y}-1}
\end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Dans l'équation (2.9) la matrice \mathcal{D} de taille $N_x N_y \times (2N_x N_y - N_x - N_y)$ représente l'opérateur discret de divergence et le vecteur colonne $\overline{U}^{\,\mathrm{b}}$ comprend les contributions des vitesses situées sur les bords du domaine.

L'expression exacte de \mathcal{D} ainsi que celle des opérateurs intervenant dans l'équation de quantité de mouvement sera donnée dans la section dédiée à la discrétisation MAC des équations.

De manière analogue le système obtenu en discrétisant les $(N_x - 1)N_y$ équations (2.8a) de quantité de mouvement dans la direction x peut être mis sous la forme matricielle suivante :

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathcal{M}^x \mathcal{U}) + \rho \mathcal{C}^x [\overline{\mathcal{U}}] \mathcal{U} + \mathcal{G}^x P - \eta \mathcal{K}^x \mathcal{U} + \rho S_x^{\mathrm{b,c}} - \eta S_x^{\mathrm{b,v}} = 0.$$
 (2.11)

Puisque la dérivée en temps n'est pas évaluée numériquement, nous parlerons de système semidiscrétisé, son expression fait intervenir :

- le vecteur P contenant les $N_x N_y$ inconnues de pression rangées ligne par ligne et colonne par colonne,
- la matrice de masse \mathcal{M}^x qui est carrée de taille $(N_x 1)N_y$,
- la matrice carrée $C^x[\overline{U}]$ de dimension $(N_x 1)N_y$ résultant de la discrétisation des flux convectifs (la notation \overline{U} témoigne que la discrétisation des flux de masse intervient dans cette matrice),
- le gradient de pression discret \mathcal{G}^x dont la matrice rectangulaire représentative est de taille $(N_x 1)N_y \times N_x N_y$,
- la matrice carrée \mathcal{K}^x qui correspond à la discrétisation des termes diffusifs,
- les vecteurs $S_x^{\text{b,c}}$ et $S_x^{\text{b,v}}$ de taille $(N_x 1)N_y$ contiennent les contributions issues de l'imposition des conditions aux limites sur les bords du domaine, dans la discrétisation des flux convectifs et diffusifs respectivement.

La discrétisation des termes diffusifs est donnée par $[\eta \mathcal{K}^x U + \eta S_x^{b,v}](i,j)$. Comme nous le verrons dans la suite du manuscrit le calcul des flux diffusifs est réalisé par un schéma à cinq points et dès lors \mathcal{K}^x est une matrice pentadiagonale. Dans un volume de contrôle $\Omega_{i,j}^u$ situé loin

des bords du domaine, la contribution dans le vecteur comportant les conditions aux limites est nul i.e. $[S_x^{b,v}](i,j) = 0$ et la discrétisation des flux diffusifs s'écrira :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u}} \nabla u \cdot \boldsymbol{n} \, dS \cong [\mathcal{K}^{x} \mathcal{U}](i,j) = \mathcal{K}_{W}^{x}(i,j) u_{i-1,j} + \mathcal{K}_{E}^{x}(i,j) u_{i+1,j} + \mathcal{K}_{P}^{x}(i,j) u_{i,j}
+ \mathcal{K}_{S}^{x}(i,j) u_{i,j-1} + \mathcal{K}_{N}^{x}(i,j) u_{i,j+1},$$
(2.12)

où $\mathcal{K}_{\mathrm{W}}^{x}(i,j)$, $\mathcal{K}_{\mathrm{E}}^{x}(i,j)$, $\mathcal{K}_{\mathrm{E}}^{x}(i,j)$, $\mathcal{K}_{\mathrm{S}}^{x}(i,j)$ et $\mathcal{K}_{\mathrm{N}}^{x}(i,j)$ sont les coefficients non-nuls de \mathcal{K}^{x} situés sur une même ligne et en particulier, $\mathcal{K}_{\mathrm{P}}^{x}(i,j)$ est l'élément diagonal de \mathcal{K}^{x} .

Les $(N_x - 1)N_y$ équations de quantité de mouvement (2.8b) constituent un système matriciel analogue :

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathcal{M}^{y} \mathcal{V}) + \rho \mathcal{C}^{y} [\overline{U}] \mathcal{V} + \mathcal{G}^{y} P - \eta \mathcal{K}^{y} \mathcal{V} + \rho S_{y}^{\mathrm{b,c}} - \eta S_{y}^{\mathrm{b,v}} = 0.$$
 (2.13)

En groupant ce système avec (2.11) nous obtenons le système matriciel correspondant à la semidiscrétisation des équations de Navier-Stokes dans les directions x et y:

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{M}U) + \rho \mathcal{C}[\overline{U}]U + \mathcal{G}P - \eta \mathcal{K}U + \rho S^{\mathrm{b,c}} - \eta S^{\mathrm{b,v}} = 0. \tag{2.14}$$

Chaque matrice de ce système est définie par bloc à partir des matrices dans les systèmes (2.11) et (2.13), et par exemple pour la matrice carrée \mathcal{K} de taille $2N_xN_y - N_x - N_y$ nous avons :

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}^x & 0\\ 0 & \mathcal{K}^y \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Les contreparties discrètes des bilans globaux de masse, quantité de mouvement et énergie cinétique (cf. 2.3.1) seront construites en manipulant algébriquement les systèmes semi-discrets (2.9) et (2.14). Par exemple nous montrerons que l'équivalent discret du bilan de masse (2.29) dans le domaine fluide Ω s'écrit :

$$\dot{m} \cong \dot{m}^h = \mathbb{1}^{\mathrm{T}} \mathcal{D} U + \mathbb{1}^{\mathrm{T}} \overline{U}^{\mathrm{b}}, \tag{2.16}$$

où $\mathbbm{1}$ est le vecteur dont chaque composante est égale à 1. Dans la section suivante nous présenterons la discrétisation usuelle de l'équation de continuité (2.5) sur le maillage MAC et définirons les éléments de \mathcal{D} . Ensuite nous vérifierons a posteriori que le bilan discret de masse (2.16) est bien nul, comme dans le cas continu. Nous verrons par ailleurs que l'examen discret de la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique implique des conditions sur les opérateurs du système discret (2.14). Nous bâtirons finalement des formules de discrétisation pour chacun des termes dans (2.14) qui auront la vocation de satisfaire ces conditions.

2.2 Discrétisation de l'équation de continuité

Le point de départ de la méthode MAC est la discrétisation de l'équation de continuité (2.5) dans la cellule cartésienne $\Omega_{i,j}$ de la figure 2.2 (a). En utilisant la décomposition (2.3) de $\Gamma_{i,j}$,

nous écrivons le flux de masse $\dot{m}_{i,j}$ comme la somme des contributions sur chaque face :

$$\dot{m}_{i,j} \equiv \int_{\Gamma_{i,j}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \int_{\Gamma_{i,j}^{e}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{x} \, dS - \int_{\Gamma_{i,j}^{w}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{x} \, dS + \int_{\Gamma_{i,j}^{n}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{y} \, dS - \int_{\Gamma_{i,j}^{s}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{y} \, dS,$$

$$(2.17)$$

que nous écrivons sous la forme plus compacte :

$$\dot{m}_{i,j} \equiv \overline{u}_{i,j} - \overline{u}_{i-1,j} + \overline{v}_{i,j} - \overline{v}_{i,j-1} = 0, \tag{2.18}$$

en notant $\overline{u}_{i,j}$ le débit à travers la face $\Gamma_{i,j}^{\mathrm{e}}$:

$$\overline{u}_{i,j} \equiv \int_{\Gamma_{i,j}^e} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x \, dS = \int_{y_{j-1}}^{y_j} u(x_i, y) \, dy.$$
 (2.19)

Puisque $u_{i,j}$ est placée au milieu de la face $\Gamma_{i,j}^{e}$ sur le maillage MAC, nous discrétisons l'intégrale (2.19) en utilisant la quadrature du point milieu :

$$\overline{u}_{i,j} \cong \Delta y_j u(x_i, y_{j-1} + \frac{1}{2} \Delta y_j) = \Delta y_j u_{i,j}, \tag{2.20}$$

ce qui a le mérite de ne pas introduire d'interpolation sur la vitesse contrairement au cas des maillages à arrangement collocalisé des variables. En utilisant le même type de formule pour le flux de masse sur chaque facette de $\Omega_{i,j}$ nous obtenons la discrétisation complète de (2.17) qui a pour expression :

$$\dot{m}_{i,j} \cong \Delta y_j (u_{i,j} - u_{i-1,j}) + \Delta x_i (v_{i,j} - v_{i,j-1}) = 0,$$
 (2.21)

cette formule de discrétisation est valable pour toutes les cellules $\Omega_{i,j}$ du domaine de calcul, qu'elles soient situées loin des bords ou près des bords du domaine.

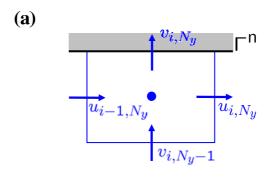
Puisque chaque ligne (i, j) du système (2.9) correspond à l'équation de continuité discrète (2.21) écrite dans la cellule $\Omega_{i,j}$, nous pouvons à présent identifier l'expression des éléments de l'opérateur de divergence \mathcal{D} et du vecteur \overline{U}^{b} . Tout d'abord nous récrivons ce système comme :

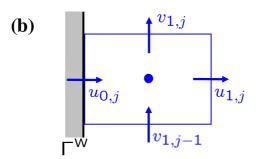
$$\left(\mathcal{D}^x \quad \mathcal{D}^y \right) \begin{pmatrix} \mathcal{U} \\ \mathcal{V} \end{pmatrix} + \overline{U}^{\,\mathrm{b}} = 0,$$
 (2.22)

afin d'isoler les blocs \mathcal{D}^x et \mathcal{D}^y de \mathcal{D} qui agissent respectivement sur les vecteurs \mathcal{U} et \mathcal{V} définis par (2.10). Le vecteur $\overline{\mathcal{U}}^b$ contient les flux de masse sur la frontière Γ du domaine. Nous considérons par exemple l'équation de continuité discrète (2.21) écrite dans le volume de contrôle Ω_{1,N_y} de la figure 2.4 (c), qui s'écrit :

$$\Delta y_{N_y} \left(u_{1,N_y} - \underline{u_{0,N_y}} \right) + \Delta x_i \left(\underline{v_{1,N_y}} - v_{1,N_y-1} \right) = 0. \tag{2.23}$$

Les termes soulignés correspondent à des flux de masse sur les frontières $\Gamma^{\rm w}$ et $\Gamma^{\rm n}$ du domaine qui font intervenir respectivement les vitesses u_{0,N_y} et v_{1,N_y} qui ne sont pas des inconnues





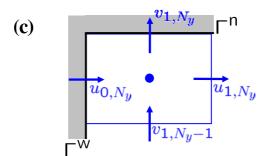


FIG. 2.4 – Volumes de contrôle $\Omega_{i,j}$ près des bords du domaine (a) : près de la frontière Nord, (b) : près de la frontière Ouest et (c) : près du coin Nord-Ouest du domaine.

du problème. Ces termes de bords constituent la composante $[\overline{U}^{\,\mathrm{b}}](1,N_y)$ du vecteur $\overline{U}^{\,\mathrm{b}}$ dont

l'expression complète est :

$$\begin{pmatrix}
-\Delta y_{1}u_{0,1} - \Delta x_{1}v_{1,0} \\
-\Delta x_{2}v_{2,0} \\
\vdots \\
-\Delta x_{N_{x}-1}v_{N_{x}-1,0} \\
\Delta y_{1}u_{N_{x},1} - \Delta x_{N_{x}}v_{N_{x},0} \\
\vdots \\
-\Delta y_{j}u_{0,j} \\
0 \\
\vdots \\
-\Delta y_{j}u_{N_{x},j} \\
\vdots \\
-\Delta y_{N_{y}}u_{0,N_{y}} + \Delta x_{1}v_{1,N_{y}} \\
\Delta x_{2}v_{2,N_{y}} \\
\vdots \\
\Delta x_{i}v_{i,N_{y}} \\
\vdots \\
\Delta x_{N_{x}-1}v_{N_{x}-1,N_{y}} \\
\Delta y_{N_{y}}u_{N_{x},N_{y}} + \Delta x_{N_{x}}v_{N_{x},N_{y}}
\end{pmatrix}$$
(2.24)

où nous avons souligné la composante $(1, N_y)$.

La matrice \mathcal{D}^x de taille $N_x N_y \times (N_x - 1) N_y$ qui opère sur les inconnues $u_{i,j}$ a pour expression :

$$\mathcal{D}^{x} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{1}^{x} & 0 & & & & \\ 0 & \mathcal{A}_{2}^{x} & 0 & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & 0 & \mathcal{A}_{j}^{x} & 0 & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & 0 & \mathcal{A}_{N_{y}-1}^{x} & 0 \\ & & & & 0 & \mathcal{A}_{N_{y}}^{x} \end{pmatrix},$$

$$(2.25)$$

où les blocs \mathcal{A}_{i}^{x} sont carrés de dimension $(N_{x}-1)$ et pour $j=1,\ldots,N_{y}$:

$$\mathcal{A}_{j}^{x} = \begin{pmatrix}
\Delta y_{j} & 0 & & & & \\
-\Delta y_{j} & \Delta y_{j} & 0 & & & & \\
0 & -\Delta y_{j} & \Delta y_{j} & 0 & & & \\
& \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
& 0 & -\Delta y_{j} & \Delta y_{j} & 0 & \\
& & 0 & -\Delta y_{j} & \Delta y_{j} & \\
& & 0 & -\Delta y_{j} & \Delta y_{j}
\end{pmatrix}$$
(2.26)

De même, la matrice \mathcal{D}^y rectangulaire de taille $N_x N_y \times N_x (N_y - 1)$ s'exprime :

$$\mathcal{D}^{y} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{y} & 0 & & & & & \\ -\mathcal{A}^{y} & \mathcal{A}^{y} & 0 & & & & \\ 0 & -\mathcal{A}^{y} & \mathcal{A}^{y} & 0 & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & 0 & -\mathcal{A}^{y} & \mathcal{A}^{y} & 0 & & \\ & & & 0 & -\mathcal{A}^{y} & \mathcal{A}^{y} & \\ & & & 0 & -\mathcal{A}^{y} \end{pmatrix},$$
(2.27)

avec le bloc carré \mathcal{A}^y de taille N_x :

$$\mathcal{A}^{y} = \begin{pmatrix} \Delta x_{1} & 0 & & & \\ 0 & \Delta x_{2} & 0 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & 0 & \Delta x_{N_{x}-1} & 0 \\ & & & 0 & \Delta x_{N_{x}} \end{pmatrix}.$$
 (2.28)

Dans cette section nous avons déterminé l'opérateur \mathcal{D} de divergence ainsi que le vecteur $\overline{U}^{\,\mathrm{b}}$, qui contient les flux de masse sur la frontière du domaine, en identifiant leur éléments à partir de l'expression de l'équation de continuité discrète (2.21). Dans la section suivante du manuscrit, nous vérifierons a posteriori que ces opérateurs sont tels que la masse totale est discrètement conservée dans le domaine de calcul, comme c'est le cas au niveau continu (cf. section 2.3.1).

2.3 Examen discret des lois de conservation

L'intérêt des méthodes numériques qui préservent au sens discret les invariants des systèmes dynamiques qu'elles résolvent a été reconnu dès la fin des années 50. Portant sur l'équation de la dynamique des tourbillons, les travaux d'Akio Arakawa [7, 76] ont montré que de telles méthodes permettaient d'effectuer une intégration du système plus longue dans le temps que les méthodes traditionnelles. Bien que n'étant pas conçue à ce dessein, la méthode MAC de Harlow et Welch [53] se présente comme la première méthode pour les équations de Navier-Stokes conservant la masse, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique pour les fluides visqueux incompressibles à l'ordre 2 sur maillage uniforme. Depuis la fin des années 70 avec l'équipe de recherche du CTR⁷ de Stanford [85], un effort est porté sur le développement de telles méthodes dans le cadre de la simulation de turbulence par LES⁸ et DNS⁹ [93, 133, 95] pour des maillages non-uniformes et des méthodes d'ordre élevé.

Dans le domaine fluide Ω de la figure 2.1 les invariants de l'écoulement sont la masse $\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{v} \, dV$, la quantité de mouvement $\mathbf{P}(t) = \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{v} \, dV$ et dans le cas limite d'un fluide non-visqueux, l'énergie cinétique $\mathbf{E}_{\mathbf{c}}(t) = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} |\boldsymbol{v}|^2 \, dV$. Nous verrons que la conservation au niveau discret des invariants linéaires de l'écoulement comme la masse et la quantité de mouvement est assurée pourvu que la méthode numérique utilisée vérifie la propriété de conservation locale des flux que nous présentons dans la section suivante. Par contre, il se révèlera être plus délicat de construire une méthode numérique préservant un invariant quadratique comme l'énergie cinétique. Pour ce faire nous suivrons la démarche de Verstappen et Veldman [134].

Dans la suite du manuscrit, nous porterons exclusivement notre attention sur les propriétés de conservation semi-discrètes, c'est à dire que nous ignorerons les problèmes relatifs à la violation de ces propriétés par les schémas d'intégration en temps, tout comme le font par ailleurs les travaux cités dans cette section. Néanmoins nous mentionnons que les invariants quadratiques (comme l'énergie cinétique) peuvent être conservés au niveau temporel, dans le cadre des équations aux dérivées ordinaires, si des schémas de Runge et Kutta implicites aux points de collocation de Gauss sont utilisés [8]. Le prototype de cette classe de schéma est le schéma du point milieu. Cependant, plusieurs problèmes sont liés à l'utilisation de tels schémas comme la prise en compte implicite des termes convectifs, la perte de précision sur le champs de pression calculé ou encore la perte de stabilité dans le cas de problème raide.

2.3.1 Conservation des invariants linéaires de l'écoulement

En utilisant la terminologie utilisée dans le domaine des EDO¹⁰ [8], la masse et la quantité de mouvement totale sont des invariants linéaires de l'écoulement : leurs équations de bilan sont obtenues par intégration directe du système de Navier-Stokes (1.31) sur le domaine Ω .

⁷Center for Turbulence Research

⁸Large Eddy Simulation : Simulation aux grandes échelles

⁹Direct Numerical Simulation : simulation numérique directe

¹⁰Equations aux Dérivées Ordinaires

Conservation de la masse totale

Dans le domaine Ω fixe de la figure 2.1, la variation temporelle \dot{m} de la masse est nulle pour un fluide incompressible, ce que nous pouvons reformuler ainsi : à chaque instant la quantité de fluide rentrant dans le domaine Ω est égale à la quantité de fluide en sortant. Le bilan s'écrit :

$$\dot{m} = \int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{v} \, dV = \int_{\Gamma} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, dS = 0.$$
 (2.29)

où n désigne la normale extérieure sortante de la frontière Γ .

Conservation de la quantité de mouvement totale

En intégrant l'équation locale du mouvement (1.31a) sur le domaine Ω nous obtenons le bilan macroscopique de quantité de mouvement :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = -\int_{\Gamma} \boldsymbol{v} \, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S - \mathbf{F},\tag{2.30}$$

cette équation d'évolution fait intervenir la résultante des forces hydrodynamiques $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ agissant sur la frontière Γ du domaine fluide. L'expression de chacune de ses composantes est donnée par :

$$F_{x} = -\int_{\Gamma} (-p + \eta \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{x}) \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \int_{\Gamma} \left[p - \eta \frac{\partial u}{\partial x} \right] \boldsymbol{e}_{x} \cdot \boldsymbol{n} \, dS - \int_{\Gamma} \eta \frac{\partial u}{\partial y} \boldsymbol{e}_{y} \cdot \boldsymbol{n} \, dS, \qquad (2.31a)$$

$$F_{y} = -\int_{\Gamma} (-p + \eta \nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{y}) \cdot \boldsymbol{n} \, dS = -\int_{\Gamma} \eta \frac{\partial v}{\partial x} \boldsymbol{e}_{x} \cdot \boldsymbol{n} \, dS + \int_{\Gamma} \left[p - \eta \frac{\partial v}{\partial y} \right] \boldsymbol{e}_{y} \cdot \boldsymbol{n} \, dS. \quad (2.31b)$$

Dans la suite, nous appellerons force de traînée la force suivant la direction x et force de portance celle dans la direction verticale y.

Propriété de conservation locale des flux

Les bilans de masse (2.29) et de quantité de mouvement (2.30) ne font intervenir que des termes surfaciques sur la frontière du domaine Γ en raison du fait qu'ils sont obtenus à partir des équations de Navier-Stokes écrites sous forme conservative. Afin que les contreparties discrètes de ces bilans soient elles-mêmes constituées exclusivement de termes de bords, une méthode numérique doit vérifier la propriété locale de conservation des flux, ce que nous illustrons à présent pour un champ scalaire ϕ transporté par un champ de vitesse \boldsymbol{v} incompressible dans le domaine Ω . La forme conservative de l'équation de transport pour ϕ s'écrit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) = 0. \tag{2.32}$$

Nous obtenons l'équation de bilan pour la grandeur globale :

$$\Phi = \int_{\Omega} \phi \ dV, \tag{2.33}$$

de la même manière qui nous a permis d'obtenir les bilans de masse et de quantité de mouvement, i.e. par intégration directe de (2.32) sur le domaine fluide Ω :

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\int_{\Gamma} \phi(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, \mathrm{d}S, \tag{2.34}$$

où, seuls les termes de bords sur Γ contribuent à l'évolution de Φ . Dans le cas où ces termes de bords sont nuls la quantité Φ est constante au cours du temps, d'où le qualificatif de forme conservative pour l'équation (2.32). Afin que le bilan (2.34) ait une contrepartie discrète consistante, et de la même manière le bilan de quantité de mouvement, un schéma numérique doit vérifier la propriété de conservation locale des flux (par exemple [115]), ce que nous précisons à présent.

Supposons que ϕ soit discrétisé au centre des cellules $\Omega_{i,j}$ sur le maillage MAC par $\phi_{i,j}$. Pour la discrétisation en volumes finis, l'équation (2.32) est intégrée sur le volume de contrôle $\Omega_{i,j}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_{i,j}} \phi \,\mathrm{d}V + \int_{\Gamma_{i,j}} \phi(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \,\mathrm{d}S = 0. \tag{2.35}$$

En calculant le terme instationnaire par la quadrature du point milieu et en évaluant le flux convectif sur chaque face de $\Omega_{i,j}$ la discrétisation complète de (2.35) s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_{i,j}V_{i,j} - F_{i,j}^{\mathrm{w}} + F_{i,j}^{\mathrm{e}} - F_{i,j}^{\mathrm{s}} + F_{i,j}^{\mathrm{n}} = 0, \tag{2.36}$$

où par exemple $F_{i,j}^{\rm e} \cong \int_{\Gamma_{i,j}^{\rm e}} \phi \, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_x \, \mathrm{d}S$ est le flux discret sur la face Est de la cellule. La quantité globale Φ est discrétisée dans chaque volume de contrôle $\Omega_{i,j}$ par la quadrature du point milieu et ensuite par sommation nous obtenons :

$$\Phi \cong \Phi^h = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \phi_{i,j} V_{i,j}.$$
 (2.37)

L'équation d'évolution de Φ^h est alors obtenue par sommation des équations (2.36) dans le domaine de calcul, et a pour expression :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \phi_{i,j} V_{i,j} + \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \left[-F_{i,j}^{\mathrm{w}} + F_{i,j}^{\mathrm{e}} - F_{i,j}^{\mathrm{s}} + F_{i,j}^{\mathrm{n}} \right] = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi^h + \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \left[-F_{i,j}^{\mathrm{w}} + F_{i,j}^{\mathrm{e}} - F_{i,j}^{\mathrm{s}} + F_{i,j}^{\mathrm{n}} \right] = 0.$$
(2.38)

Pour que dans ce bilan discret les seules contributions correspondent aux termes bords du domaine, comme dans le cas continu (2.34), le schéma utilisé pour discrétiser les flux convectifs doit vérifier la propriété de conservation locale des flux, i.e. pour $i = 1, ..., N_x - 1$, et $j = 1, ..., N_y$:

$$F_{i,j}^{e} = F_{i+1,j}^{w},$$
 (2.39a)

et pour $i = 1, ..., N_x$, et $j = 1, ..., N_y - 1$:

$$F_{i,j}^{\rm n} = F_{i,j+1}^{\rm s}.$$
 (2.39b)

Nous pouvons dès lors réécrire le bilan discret (2.38) comme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi^{h} = \sum_{j=1}^{N_{y}} F_{1,j}^{\mathrm{w}} - \sum_{j=1}^{N_{y}} F_{N_{x},j}^{\mathrm{e}} + \sum_{i=1}^{N_{x}} F_{i,1}^{\mathrm{s}} - \sum_{i=1}^{N_{x}} F_{i,N_{y}}^{\mathrm{n}}, \tag{2.40}$$

où comme dans le cas continu (2.34) seuls les termes de bords contribuent à l'évolution de Φ^h . Il faut encore s'assurer que les termes de bords dans le bilan discret sont consistants avec leur contrepartie dans le bilan continu. Par exemple sur la frontière Γ^e du domaine, nous devons avoir :

$$\sum_{j=1}^{N_y} F_{N_x,j}^{e} \cong \int_{\Gamma^{e}} \phi(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, dS, \tag{2.41}$$

mais aussi sur les autres faces du domaine.

La conservation locale des flux est une propriété bien connue des méthodes de volumes finis, pour les équation hyperboliques on parle de méthodes "conservatives" [75]. Cependant l'examen des termes de bord est rarement fait, mis à part dans les travaux récents de Jameson [61], dans le cadre de la dynamique des gaz.

Dans la section suivante nous verrons que la masse est globalement conservée par la méthode MAC. Cette propriété est en partie assurée par une discrétisation conservative des flux de masse, mais aussi parce que l'arrangement décalé des variables permet une imposition des conditions aux limites naturelle, et de fait une discrétisation consistante des termes de bords. A contrario, sur les maillages collocalisés, nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que la contrepartie discrète de la conservation de la masse (2.29) n'est pas vérifiée, et la dissipation de masse reste un problème ouvert sur ce type de maillage [124, 137]. Nous montrerons que l'imposition de la conservation de quantité de mouvement requiert de porter une attention particulière sur la discrétisation des termes de bords, notamment pour les flux diffusifs.

Conservation discrète de la masse totale

Dans le cas du domaine Ω rectangulaire de la figure 2.1, le bilan de masse (2.29) s'écrit :

$$\dot{m} = -\int_{\Gamma_{\mathbf{w}}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x \, dS + \int_{\Gamma_{\mathbf{e}}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x \, dS - \int_{\Gamma_{\mathbf{s}}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y \, dS + \int_{\Gamma_{\mathbf{n}}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y \, dS = 0, \qquad (2.42)$$

ce que nous récrivons :

$$\dot{m} = -\dot{m}_{\rm w} + \dot{m}_{\rm e} - \dot{m}_{\rm s} + \dot{m}_{\rm n} = 0,$$
 (2.43)

avec:

$$\dot{m}_{e} = \int_{\Gamma^{e}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{x} \, dS, \qquad \dot{m}_{w} = \int_{\Gamma^{w}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{x} \, dS,$$

$$\dot{m}_{n} = \int_{\Gamma^{n}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{y} \, dS, \text{ et } \dot{m}_{s} = \int_{\Gamma^{s}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{y} \, dS.$$
(2.44)

La contrepartie discrète du bilan (2.43) est obtenue en sommant chacune des équations de continuité (2.21) écrites dans les cellules $\Omega_{i,j}$:

$$\dot{m}^h = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \left[\Delta y_j \left(u_{i,j} - u_{i-1,j} \right) + \Delta x_i \left(v_{i,j} - v_{i,j-1} \right) \right]. \tag{2.45}$$

Puisque la discrétisation des flux de masse vérifie la propriété de conservation locale de flux (2.39), nous aurons :

$$\dot{m}^h = -\dot{m}_{\rm w}^h + \dot{m}_{\rm e}^h - \dot{m}_{\rm s}^h + \dot{m}_{\rm n}^h, \tag{2.46}$$

où chacun des termes correspond à une discrétisation consistante des contributions surfaciques dans (2.44) :

$$\dot{m}_{e}^{h} = \sum_{i=1,\dots,N_{y}} \Delta y_{j} \, u_{N_{x},j}, \qquad \dot{m}_{w}^{h} = \sum_{i=1,\dots,N_{y}} \Delta y_{j} \, u_{0,j},$$

$$\dot{m}_{n}^{h} = \sum_{i=1,\dots,N_{x}} \Delta x_{i} \, v_{i,N_{y}}, \text{ et } \quad \dot{m}_{s}^{h} = \sum_{i=1,\dots,N_{x}} \Delta x_{i} \, v_{i,0}.$$
(2.47)

La forme discrète du bilan de masse que nous venons d'établir a donc une forme très semblable au bilan continu (2.43). Nous verrons dans la suite de ce chapitre (section 2.6.1) que la conservation totale de la masse au niveau discret ($\dot{m}^h=0$) est une condition essentielle à la solvabilité du système. En outre nous montrerons que cette condition peut être vérifiée quelque soit le type de conditions aux limites imposé sur les faces de Ω , et nous aurons :

$$\dot{m}^h = \mathbb{1}^{\mathrm{T}} \mathcal{D} U + \mathbb{1}^{\mathrm{T}} \overline{U}^{\mathrm{b}} = 0. \tag{2.48}$$

Conservation discrète de la quantité de mouvement totale

Nous établissons ici la version discrète du bilan (2.30) de quantité de mouvement. La quantité de mouvement $\mathbf{P}^h(t)$ est calculée dans chaque cellule $\Omega_{i,j}$ par la quadrature du trapèze :

$$\mathbf{P}(t) = \begin{cases} \int_{\Omega} \rho u \, dV \\ \int_{\Omega} \rho v \, dV \end{cases}$$

$$\cong \mathbf{P}^{h}(t) = \begin{cases} \rho \sum_{i=1}^{N_{x}} \sum_{j=1}^{N_{y}} \left[\frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{2} u_{i-1,j} \right] V_{i,j} \\ \rho \sum_{i=1}^{N_{x}} \sum_{j=1}^{N_{y}} \left[\frac{1}{2} v_{i,j} + \frac{1}{2} v_{i,j-1} \right] V_{i,j} \end{cases}, \tag{2.49}$$

À présent examinons la composante de $\mathbf{P}^h(t)$ suivant la direction x, en changeant l'indice muet sous le signe somme nous obtenons :

$$\mathbf{P}^{h}(t) \cdot \boldsymbol{e}_{x} = \rho \sum_{i=1}^{N_{x}-1} \sum_{j=1}^{N_{y}} \left[\frac{1}{2} V_{i,j} + \frac{1}{2} V_{i+1,j} \right] u_{i,j} + \rho \sum_{j=1}^{N_{y}} \frac{1}{2} V_{1,j} u_{0,j} + \rho \sum_{j=1}^{N_{y}} \frac{1}{2} V_{N_{x},j} u_{N_{x},j}, \quad (2.50)$$

que nous mettons sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{P}^{h}(t) \cdot \mathbf{e}_{x} = \rho \left(\mathbb{1}_{x}^{\mathrm{T}} \mathcal{M}^{x} \mathcal{U} + \mathbb{1}_{x}^{\mathrm{T}} \mathcal{M}_{x}^{\mathrm{b}} \mathcal{U}^{\mathrm{b}} \right), \tag{2.51}$$

en faisant apparaître la matrice de masse \mathcal{M}^x qui intervient dans le système discret (2.11), $\mathbb{1}_x$ le vecteur de taille $(N_x - 1)N_y$ dont chaque composante vaut 1 et $\mathbb{1}_x^T \mathcal{M}_x^b \mathcal{U}^b$ la contribution des termes de bords que nous supposerons indépendante du temps dans la suite. Ainsi, pour chaque ligne (i, j) du système système discret (2.11), les coefficients de la quadrature du trapèze donnent la valeur du coefficient diagonal de \mathcal{M}^x :

$$\mathcal{M}_{P}^{x}(i,j) = \frac{1}{2}V_{i,j} + \frac{1}{2}V_{i+1,j} = \left(\frac{1}{2}\Delta x_{i+1} + \frac{1}{2}\Delta x_{i}\right)\Delta y_{j}.$$
 (2.52)

De manière analogue pour la composante de $\mathbf{P}^h(t)$ selon la direction y, nous obtenons la définition des coefficients de la matrice diagonale \mathcal{M}^y :

$$\mathcal{M}_{P}^{y}(i,j) = \frac{1}{2}V_{i,j} + \frac{1}{2}V_{i,j+1} = \Delta x_i \left(\frac{1}{2}\Delta y_j + \frac{1}{2}\Delta y_{j+1}\right). \tag{2.53}$$

Sans surprise, la matrice \mathcal{M} correspond à l'aire des volumes de contrôle $\Omega^u_{i,j}$ et $\Omega^v_{i,j}$. Ce type d'argument sera très précieux pour déterminer la matrice de masse pour la méthode LS-STAG en géométries complexes.

La quantité de mouvement totale discrète $\mathbf{P}^h(t)$ s'écrit :

$$\mathbf{P}^{h}(t) = \rho \left(\mathbb{1}^{\mathrm{T}} \mathcal{M} U + \mathbb{1}^{\mathrm{T}} \mathcal{M}^{\mathrm{b}} U^{\mathrm{b}} \right), \tag{2.54}$$

en introduisant la matrice $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_x & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_y, \end{pmatrix}$. La contrepartie discrète du bilan de quantité de mouvement (2.30) est obtenue en multipliant le système (2.14) à gauche par la transposée de $\mathbb{1}$, ce qui s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}^{h}(t)}{\mathrm{d}t} = -\left[\rho \,\mathbb{1}^{\mathrm{T}}\mathcal{C}[\overline{U}]U + \rho \,\mathbb{1}^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{b,c}}\right] - \left[\mathbb{1}^{\mathrm{T}}\mathcal{G}P - \mathbb{1}^{\mathrm{T}}\eta(\mathcal{K}U + S^{\mathrm{b,v}})\right]. \tag{2.55}$$

Au niveau continu le bilan fait seulement intervenir des termes de bords. Comme nous l'avons vu précédemment il en est de même au niveau discret dès que la propriété de conservation locale des flux est assurée. Dès lors, les termes de bords subsistants dans le bilan discret doivent être consistants avec leurs équivalents continus. Cela implique notamment que dans la contribution des termes de pression et de contrainte :

$$\left[\mathbb{1}^{\mathrm{T}}\mathcal{G}P - \mathbb{1}^{\mathrm{T}}\eta(\mathcal{K}U + S^{\mathrm{b,v}})\right] = \begin{cases} \left[\mathbb{1}_{x}^{\mathrm{T}}\mathcal{G}^{x}P - \mathbb{1}_{x}^{\mathrm{T}}\eta(\mathcal{K}^{x}\mathcal{U} + S_{x}^{\mathrm{b,v}})\right] = \widetilde{F}_{x}^{h} \\ \left[\mathbb{1}_{y}^{\mathrm{T}}\mathcal{G}^{y}P - \mathbb{1}_{y}^{\mathrm{T}}\eta(\mathcal{K}^{y}\mathcal{V} + S_{y}^{\mathrm{b,v}})\right] = \widetilde{F}_{y}^{h} \end{cases}, \tag{2.56}$$

chacune des composantes \widetilde{F}_x^h et \widetilde{F}_y^h doit correspondre respectivement à une discrétisation des composantes de traînée (2.31a) et de portance (2.31b) de la force hydrodynamique agissant sur la frontière Γ du domaine. Cet examen apportera dans la section 2.5.3 une justification rigoureuse des formules de quadrature pour le calcul des flux diffusifs, et se révèlera être indispensable pour bâtir la discrétisation LS-STAG en géométries complexes. La propriété équivalente pour les flux convectifs $\left[\rho \mathbbm{1}^T \mathcal{C}[\overline{U}]U + \rho \mathbbm{1}^T S^{b,c}\right]$ est une conséquence de la discrétisation anti-symétrique de Verstappen et Veldman [134] que nous présentons dans la suite et qui permet de préserver l'énergie cinétique totale dans le cas d'un fluide non-visqueux.

2.3.2 Conservation de l'énergie cinétique totale

Au niveau continu

Le bilan d'énergie cinétique $E_c = \int_{\Omega} \frac{\rho v^2}{2} dV$ est obtenu par manipulation algébrique des équations de Navier-Stokes : tout d'abord multiplions (1.31a) scalairement par v :

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) + \mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right) = \mathbf{v}\cdot(-\nabla p + \eta\nabla\cdot\nabla\mathbf{v}). \tag{2.57}$$

Ensuite, en utilisant les identités tensorielles :

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right),$$
 (2.58a)

$$\boldsymbol{v} \cdot (\nabla \cdot \nabla \boldsymbol{v}) = \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}) - \nabla \boldsymbol{v} : \boldsymbol{v}, \tag{2.58b}$$

$$\boldsymbol{v} \cdot \nabla p = \nabla \cdot (p \, \boldsymbol{v}) - p \nabla \cdot \boldsymbol{v}, \tag{2.58c}$$

nous pouvons réécrire (2.57) sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} \right) = (-\mathbf{v} \cdot \nabla) \left(\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + p \right) + \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \eta \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v}.$$
 (2.59)

Le dernier effort consiste à appliquer l'identité tensorielle :

$$\nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + p \right) \mathbf{v} \right] = \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + p \right) + \left(\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + p \right) \nabla \cdot \mathbf{v}$$
 (2.60)

pour obtenir l'expression locale du bilan d'énergie cinétique :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} \right) = \left(\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + p \right) \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + p \right) \mathbf{v} \right] + \nabla \cdot (\eta \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - \eta \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v}.$$
 (2.61)

En intégrant cette dernière expression sur le domaine Ω et en appliquant le théorème de flux-divergence, nous avons finalement le bilan global d'énergie cinétique E_c :

$$\frac{\mathrm{dE_{c}}}{\mathrm{d}t} = -\int_{\Gamma} \left(\frac{\rho \mathbf{v}^{2}}{2}\right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S
-\int_{\Gamma} p \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S + \int_{\Gamma} (\eta \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S
+\int_{\Omega} \left(\frac{\rho \mathbf{v}^{2}}{2}\right) \nabla \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}V + \int_{\Omega} p \, \nabla \cdot \mathbf{v} \, \mathrm{d}V
-\int_{\Omega} \eta \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} \, \mathrm{d}V.$$
(2.62)

Les différents termes intervenant le bilan d'énergie cinétique peuvent être interprétés, comme par exemple dans [51], de la manière suivante :

– le premier terme correspond au flux global d'énergie cinétique par unité de volume $\frac{\rho v^2}{2}$ transporté par le fluide à travers la surface Γ ,

- le second et le troisième terme représentent le travail des forces de pression et visqueuses exercées normalement à Γ ,
- le quatrième et cinquième terme correspondent à des contributions liées à une variation de volume fluide, on reconnaitra le travail de la pression dans le cinquième terme.
- le sixième et dernier terme constitue la dissipation visqueuse par unité de volume qui est toujours négatif, ou nul dans le cas d'un fluide parfait (i.e. $\eta = 0$).

Grâce à l'équation de continuité (1.31b), le seul terme volumique intervenant dans ce bilan est celui dû aux termes visqueux, et exprime la perte d'énergie par frottements visqueux :

$$\frac{\mathrm{dE_c}}{\mathrm{d}t} = -\int_{\Gamma} \left(\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2}\right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S
-\int_{\Gamma} p \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S + \int_{\Gamma} (\eta \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S
-\int_{\Omega} \eta \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} \, \mathrm{d}V.$$
(2.63)

Finalement dans le cas d'un fluide parfait :

$$\frac{dE_{c}}{dt} = -\int_{\Gamma} \left(\frac{\rho v^{2}}{2} \right) \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \ dS - \int_{\Gamma} p \, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \ dS, \tag{2.64}$$

il ne reste que les termes de bords dus à la pression et au terme convectifs dans le bilan d'énergie cinétique.

Sur les maillages cartésiens uniformes, la méthode MAC avec une discrétisation centrée des flux convectifs est connue pour être " energy preserving", c'est-à-dire que le bilan discret d'énergie cinétique imite (2.63). Cependant, pour des maillages plus généraux, la construction de méthodes conservant l'énergie cinétique demeure non-triviale. Dans la référence [93], Morinishi et co-auteurs ont construit des discrétisations d'ordre élevé de type différences finies sur grilles cartésiennes uniformes vérifiant cette propriété. Leur méthode a été appliquée pour le calcul LES d'un canal turbulent et Vasilyev [133] a étendu ces travaux au cas des maillages non-uniformes. Plus récemment, Verstappen et Veldman [134] ont construit une méthode de volumes finis préservant l'énergie cinétique sur grilles non-uniformes, et ont formalisé les conditions que devaient satisfaire les opérateurs du système discret de Navier-Stokes. Pour assurer un bilan discret d'énergie cinétique semblable à (2.63), les termes convectifs et diffusifs doivent être discrétisés par des opérateurs antisymétriques et symétriques défini positif respectivement, ce que nous présentons à présent.

Au niveau discret

L'énergie cinétique est discrétisée dans chaque cellule $\Omega_{i,j}$, comme nous l'avons fait pour la quantité de mouvement, en utilisant la quadrature du trapèze :

$$E_{c}(t) = \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{N_{x}} \sum_{j=1}^{N_{y}} \int_{\Omega_{i,j}} \mathbf{v}^{2} dV$$

$$\cong E_{c}^{h}(t) = \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{N_{x}} \sum_{j=1}^{N_{y}} \left[\left(\frac{1}{2} u_{i,j}^{2} + \frac{1}{2} u_{i-1,j}^{2} \right) + \left(\frac{1}{2} v_{i,j}^{2} + \frac{1}{2} v_{i,j-1}^{2} \right) \right] V_{i,j},$$
(2.65)

ce que nous écrivons matriciellement :

$$E_c^h(t) = \rho \left(\frac{1}{2} U^T \mathcal{M} U + \frac{1}{2} U^{b,T} \mathcal{M}^b U^b \right), \tag{2.66}$$

en utilisant la définition (2.52)-(2.53) de la matrice de masse \mathcal{M} établie dans la section précédente. L'équation d'évolution de $E_c^h(t)$ s'obtient en multipliant à gauche le système (2.14) par U^T d'une part, et en multipliant à droite la transposée de (2.14) par U, il en résulte deux relations scalaires dont la demi-somme constitue le bilan global d'énergie cinétique :

$$\frac{\mathrm{dE_{c}^{h}}}{\mathrm{d}t} = -\rho U^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{b,c}}
+ \eta U^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{b,v}}
- \rho U^{\mathrm{T}} \frac{\mathcal{C}[\overline{U}]^{\mathrm{T}} + \mathcal{C}[\overline{U}]}{2} U - P^{\mathrm{T}} \mathcal{G}^{\mathrm{T}} U
- U^{\mathrm{T}} \frac{\eta(\mathcal{K}^{\mathrm{T}} + \mathcal{K})}{2} U.$$
(2.67)

Puisque nous considérons le cas des fluides incompressibles, les termes de (2.62) correspondant à des travaux liés à une variation volume du fluide sont nuls, et leurs contreparties discrètes ne doivent pas intervenir dans (2.67), ce qui est assuré par une discrétisation des termes convectifs telle que $C[\overline{U}]$ soit antisymétrique :

$$C[\overline{U}] = -C[\overline{U}]^{\mathrm{T}}, \qquad (2.68)$$

et que le gradient de pression soit le dual de l'opérateur de divergence :

$$\mathcal{G} = -\mathcal{D}^{\mathrm{T}},\tag{2.69}$$

ce qui est un résultat connu pour les méthodes utilisant une formulation de Galerkin comme les éléments finis [65]. D'après le bilan de masse (2.48) nous avons $P^{\mathrm{T}}\mathcal{G}^{\mathrm{T}}U = P^{\mathrm{T}}\overline{U}^{\mathrm{b}}$, si bien que le bilan discret (2.67) se réduit à :

$$\frac{dE_{c}^{h}}{dt} = -\rho U^{T} S^{b,c}
-P^{T} \overline{U}^{b} + \eta U^{T} S^{b,v}
-U^{T} \frac{\eta(\mathcal{K}^{T} + \mathcal{K})}{2} U.$$
(2.70)

Afin d'obtenir une expression similaire à l'équation (2.63), le terme visqueux $-U^{T}(\mathcal{K}^{T} + \mathcal{K})U$ doit imiter la dissipation visqueuse du bilan d'énergie cinétique, et donc doit toujours être de signe négatif. Cette propriété est vérifiée dès lors que la matrice $\mathcal{K}^{T} + \mathcal{K}$ est définie positive, ce qui est assuré par une discrétisation en volumes finis des flux diffusifs stable et consistante [32]. Remarquons que la symétrie de \mathcal{K} n'est pas une condition nécessaire. Dans la limite d'un fluide parfait où $\eta = 0$, comme dans le cas continu (2.64) seules les contributions de pression et des termes convectifs sur les bords du domaine subsistent dans le bilan :

$$\frac{dE_{c}^{h}}{dt} = -\rho U^{T} S^{b,c} - P^{T} \overline{U}^{b}. \tag{2.71}$$

Nous présentons dans la section 2.4.2 la discrétisation anti-symétrique des flux convectifs de Verstappen et Veldman [134] qui vérifie (2.68) et près des bords du domaine nous vérifierons notamment que les conditions aux limites sont prises en compte de telle sorte que :

$$U^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{b,c}} \cong \int_{\Gamma} \left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right) \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S,$$
 (2.72)

c'est à dire que les contributions des termes convectifs sur le bord du domaine dans le bilan discret sont consistantes à celles du cas continu. Comme nous le verrons dans le chapitre prochain cet examen est essentiel pour bâtir la discrétisation "energy preserving" des flux convectifs près d'une géométrie complexe. À notre connaissance, ces termes de bord ont toujours été négligés mis à part dans les travaux récents de Jameson [61].

L'opérateur de divergence a été déterminé dans la section 2.2, si bien que la condition (2.69) donne explicitement l'opérateur de gradient de pression, ce que nous exploitons dans la section suivante. Nous vérifierons aussi que l'expression $P^{\rm T}\overline{U}^{\rm b}$ des contributions surfaciques de la pression dans le bilan d'énergie cinétique discret (2.63) que nous comparons avec la discrétisation a priori du terme $\int_{\Gamma} p \, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, dS$.

2.4 Discrétisation des flux de pression et convectifs

Dans cette section du chapitre, nous présentons la discrétisation des flux de pression basée sur la conservation de l'énergie cinétique au niveau discret.

2.4.1 Discrétisation du gradient de pression

Dans la méthode des volumes finis, le terme de pression $\int_{\Gamma_{i,j}^u} p \, \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S$ dans la direction horizontale est traditionnellement calculé comme la différence des flux sur les faces $\Gamma_{i,j}^{u,\mathrm{e}}$ et $\Gamma_{i,j}^{u,\mathrm{w}}$ et s'écrit :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u}} p \, \boldsymbol{e}_{x} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S \cong \int_{\Gamma_{i,j}^{u,e}} p \, \mathrm{d}y - \int_{\Gamma_{i,j}^{u,w}} p \, \mathrm{d}y, \tag{2.73}$$

et ensuite chacun des flux est évalué par la quadrature du point milieu :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u}} p \, \boldsymbol{e}_{x} \cdot \boldsymbol{n} \, dS \cong \Delta y_{j} p_{i+1,j} - \Delta y_{j} p_{i,j}. \tag{2.74}$$

Remarquons que cette approche permet de satisfaire la condition de dualité (2.69), et la propriété de conservation locale des flux (2.39). Pour s'en convaincre il faut revenir à la définition par blocs de l'opérateur de divergence \mathcal{D} (cf. Eq. (2.22)), le terme $[-\mathcal{D}^{x\,\mathrm{T}}P](i,j)$ donne la discrétisation des flux de pression dans $\Omega^u_{i,j}$ qui s'écrit :

$$[-\mathcal{D}^{x} \, ^{\mathrm{T}}P](i,j) = \Delta y_i \, (p_{i+1,j} - p_{i,j}) \,, \tag{2.75}$$

ce qui est effectivement identique à (2.74). Dans le chapitre suivant dédié à l'extension de la méthode au cas des géométries complexes, nous utiliserons la condition (2.69) de dualité entre l'opérateur de divergence et de gradient de pression pour obtenir la discrétisation du gradient de pression dans les volumes de contrôles $\Omega^u_{i,j}$, abandonnant l'approche "classique" qui repose sur l'utilisation de la quadrature du point milieu et donc sur l'emplacement précis de l'inconnue de pression $p_{i,j}$.

De manière analogue la discrétisation du gradient de pression dans le volume de contrôle $\Gamma_{i,j}^v$ s'obtient en évaluant le terme $[-\mathcal{D}^{y}^T P](i,j)$ et s'écrit :

$$[-\mathcal{D}^{y} {}^{\mathrm{T}}P](i,j) = \Delta x_i (p_{i,j+1} - p_{i,j}). \tag{2.76}$$

Nous allons montrer à présent que la contribution $P^{\mathrm{T}}\overline{U}^{\mathrm{b}}$ des termes de pression dans le bilan

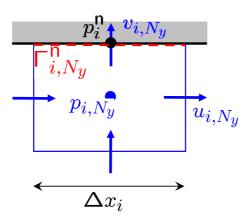


Fig. 2.5 – Cellule Ω_{i,N_y} adjacente à la frontière $\Gamma^{\rm n}$ du domaine Ω de la figure 2.1.

d'énergie cinétique discret (2.71) est consistante avec le terme $\int_{\Gamma} p \, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, dS$. Par exemple, sur la frontière $\Gamma^{\rm n}$ du domaine, le travail de la pression est discrétisé sur chacune des portions $\Gamma^{\rm n}_{i,j}$ (Fig. 2.5) par la quadrature du trapèze, si bien que :

$$\int_{\Gamma^{\mathbf{n}}} p \, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, dS \cong \sum_{i=1}^{N_x} p_i^{\mathbf{n}} \, \Delta x_i v_{i,N_y}, \tag{2.77}$$

où $p_i^{\rm n}$ désigne la pression au centre de la face $\Gamma_{i,N_y}^{\rm n}$. Pour déterminer $p_i^{\rm n}$, nous faisons maintenant une hypothèse forte en l'évaluant par une extrapolation constante :

$$p_i^{\rm n} \cong p_{i,N_u}. \tag{2.78}$$

Nous supposons donc que la pression est constante dans chaque cellule, ce qui est consistant avec la démarche utilisée pour construire le gradient de pression. En effet, en le calculant comme le dual de l'opérateur de divergence, nous nous sommes affranchis de connaître son emplacement sur le maillage. Cette hypothèse peut se justifier en se basant sur la méthode des éléments finis. La discrétisation sur le maillage décalé MAC peut être interprétée en éléments finis [19, 64] comme une approximation du champ de vitesse par des éléments finis de degré 1, avec les degrés de libertés aux sommets des éléments. La pression est quant à elle discrétisée par des éléments finis d'ordre 0 discontinus avec le degré de liberté placé au centre de l'élément. L'arrangement décalé des variables de la méthode MAC permet un couplage vitesse-pression qui empêche l'apparition de modes parasites sur la pression. Dans la méthode des éléments finis, ce couplage est assuré pourvu que les approximants pour la vitesse et la pression satisfassent la condition de compatibilité inf-sup [65, 31]. Pour assurer cette condition la démarche usuelle consiste à choisir un approximant pour la pression de degré inférieur à celui de la vitesse . En utilisant des formules similaires à (2.77)-(2.78) pour discrétiser le travail de pression sur les autres frontières du domaine Ω , nous obtenons :

$$\int_{\Gamma} p \, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, dS \cong -\sum_{j=1}^{N_y} p_{1,j} \, \Delta y_j u_{0,j} + \sum_{j=1}^{N_y} p_{N_x,j} \, \Delta y_j u_{N_x,j} - \sum_{i=1}^{N_x} p_{i,1} \, \Delta x_i v_{i,0} + \sum_{i=1}^{N_x} p_{i,N_y} \, \Delta x_i v_{i,N_y},$$
(2.79)

où chacun des termes du membre de droite correspond respectivement au travail discret de pression sur les frontières $\Gamma^{\rm w}$, $\Gamma^{\rm e}$, $\Gamma^{\rm s}$ et $\Gamma^{\rm n}$. Dans le membre de droite de cette expression nous identifions la contribution de la pression $P^{\rm T}\overline{U}^{\rm b}$ qui intervient dans le bilan (2.70) d'énergie cinétique.

2.4.2 Discrétisation des flux convectifs

Dans cette partie nous construisons la discrétisation des flux convectifs de l'équation de quantité de mouvement horizontale (2.8a). L'opérateur correspondant $C^x[\overline{U}]$ doit être antisymétrique d'après la condition (2.68) pour assurer dans le cas non-visqueux la conservation de l'énergie cinétique. Loin des bords du domaine, nous cherchons cette discrétisation sous la forme d'un schéma à 5 points :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) u \, dS \cong [\mathcal{C}^{x}[\overline{U}]\mathcal{U}](i,j) = \mathcal{C}^{x}[\overline{U}]_{W}(i,j)u_{i-1,j} + \mathcal{C}^{x}[\overline{U}]_{E}(i,j)u_{i+1,j} + \mathcal{C}^{x}[\overline{U}]_{P}(i,j)u_{i,j} + \mathcal{C}^{x}[\overline{U}]_{S}(i,j)u_{i,j-1} + \mathcal{C}^{x}[\overline{U}]_{N}(i,j)u_{i,j+1}.$$
(2.80)

Afin de vérifier la propriété d'antisymétrie (2.68) de la matrice $C^x[\overline{U}]$, ces coefficients doivent satisfaire les conditions suivantes :

$$C^{x}[\overline{U}]_{P}(i,j) = 0, \qquad (2.81a)$$

$$C^{x}[\overline{U}]_{E}(i,j) = -C^{x}[\overline{U}]_{W}(i+1,j), \qquad (2.81b)$$

$$C^{x}[\overline{U}]_{N}(i,j) = -C^{x}[\overline{U}]_{S}(i,j+1). \tag{2.81c}$$

La discrétisation centrée à l'ordre 2 de la méthode MAC vérifie trivialement ces conditions sur maillage uniforme. La discrétisation antisymétrique de Verstappen et Veldman [134] que nous présentons a pour vocation de satisfaire la condition (2.81) pour des maillages non-uniformes. Pour un volume de contrôle $\Omega^u_{i,j}$, la discrétisation antisymétrique consiste à écrire le terme convectif comme la somme de flux au travers de ses quatre facettes :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) u \, dS = -\int_{\Gamma_{i,j}^{u,w}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{x}) u \, dy + \int_{\Gamma_{i,j}^{u,e}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{x}) u \, dy
-\int_{\Gamma_{i,j}^{u,sw} \cup \Gamma_{i,j}^{u,se}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{y}) u \, dx + \int_{\Gamma_{i,j}^{u,nw} \cup \Gamma_{i,j}^{u,ne}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{y}) u \, dx,$$
(2.82)

où chaque terme est discrétisé à l'aide de l'expression (2.20) des débits massiques, par exemple pour la facette Est cela conduit à :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u,e}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_x) \, u \, \mathrm{d}y \cong \frac{\overline{u}_{i,j} + \overline{u}_{i+1,j}}{2} \, u_e, \tag{2.83}$$

avec $u_{\rm e}$ une valeur caractéristique de la vitesse u sur $\Gamma^{u,{\rm e}}_{i,j}$. Comme l'ont observé Verstappen & Veldman, la seule possibilité de vérifier les conditions d'antisymétrie (2.81) consiste à utiliser l'interpolation centrée à coefficients égaux :

$$u_{\rm e} = \frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2}. (2.84)$$

Des interpolations analogues sont obtenues sur les autres facettes, par exemple sur la facette Sud :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{\mathbf{s},\mathbf{e}} \cup \Gamma_{i+1,j}^{\mathbf{s},\mathbf{w}}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_y) u \, \mathrm{d}x \cong \frac{\overline{v}_{i,j-1}}{2} u_{\mathbf{s}} + \frac{\overline{v}_{i+1,j-1}}{2} u_{\mathbf{s}}, \tag{2.85}$$

avec $u_s = (u_{i,j-1} + u_{i,j})/2$.

En utilisant la propriété de conservation locale des flux :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u,\mathrm{w}}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{x}) u \, \mathrm{d}y = \int_{\Gamma_{i-1,j}^{u,\mathrm{e}}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{x}) u \, \mathrm{d}y,$$

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u,\mathrm{nw}} \cup \Gamma_{i,j}^{u,\mathrm{ne}}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{y}) u \, \mathrm{d}x = \int_{\Gamma_{i,j+1}^{u,\mathrm{sw}} \cup \Gamma_{i,j+1}^{u,\mathrm{se}}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{y}) u \, \mathrm{d}x,$$
(2.86)

nous obtenons, après identification avec (2.80), les coefficients de la discrétisation suivants :

$$C^{x}[\overline{U}]_{P}(i,j) = \frac{1}{4}\dot{m}_{i,j} + \frac{1}{4}\dot{m}_{i+1,j}, \tag{2.87a}$$

$$C^{x}[\overline{U}]_{W}(i,j) = -\frac{1}{4}\overline{u}_{i-1,j} - \frac{1}{4}\overline{u}_{i,j}, \quad C^{x}[\overline{U}]_{E}(i,j) = \frac{1}{4}\overline{u}_{i,j} + \frac{1}{4}\overline{u}_{i+1,j},$$
(2.87b)

$$C^{x}[\overline{U}]_{S}(i,j) = -\frac{1}{4}\overline{v}_{i,j-1} - \frac{1}{4}\overline{v}_{i+1,j-1}, \quad C^{x}[\overline{U}]_{N}(i,j) = \frac{1}{4}\overline{v}_{i,j} + \frac{1}{4}\overline{v}_{i+1,j}, \quad (2.87c)$$

qui vérifient les conditions d'antisymétrie (2.81) dès que l'équation de continuité discrète (2.21) est vérifiée dans $\Omega_{i,j}$ et $\Omega_{i+1,j}$. Tout type d'interpolation autre que (2.84), par exemple une interpolation décentrée, conduirait à des matrices dont le terme diagonal ne serait pas nul. Près des bords du domaine, par exemple dans le volume de contrôle $\Omega_{N_x-1,j}^u$ de la figure 2.7 (b), $u_{N_x,j}$ n'est pas une inconnue du problème et l'expression (2.80) des flux convectifs doit être modifiée :

$$\int_{\Gamma_{N_{x}-1,j}^{u}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) u \, dS \cong \mathcal{C}^{x}[\overline{U}]_{W}(N_{x}-1,j) u_{i-1,j} + \mathcal{C}^{x}[\overline{U}]_{P}(N_{x}-1,j) u_{i,j}
+ \mathcal{C}^{x}[\overline{U}]_{S}(N_{x}-1,j) u_{i,j-1} + \mathcal{C}^{x}[\overline{U}]_{N}(N_{x}-1,j) u_{i,j+1} + S_{x}^{b,c}(N_{x}-1,j).$$
(2.88)

Dans ce cas, la condition d'antisymétrie (2.81) s'écrit :

$$C^x[\overline{U}]_P(N_x - 1, j) = 0, (2.89a)$$

$$C^{x}[\overline{U}]_{N}(N_{x}-1,j) = -C^{x}[\overline{U}]_{S}(N_{x}-1,j+1). \tag{2.89b}$$

et la condition (2.72) implique que $S_x^{\mathrm{b,c}}(N_x-1,j)u_{N_x-1,j}$ doit être une discrétisation consistante de $\int_{\Gamma_{N_x,j}^{\mathrm{e}}} |\boldsymbol{v}|^2 \, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}/2 \, \mathrm{d}S$. Ces deux conditions sont vérifiées en utilisant la formule centrée (2.83) :

$$\int_{\Gamma_{N_x-1,j}^{u,e}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_x) \, u \, \mathrm{d}y \cong \left(\frac{\overline{u}_{N_x-1,j} + \overline{u}_{N_x,j}}{2}\right) \left(\frac{1}{2} \underline{u}_{N_x-1,j} + \frac{1}{2} \underline{u}_{N_x,j}\right). \tag{2.90}$$

En effet, le terme souligné une fois permet d'obtenir un terme diagonal $\mathcal{C}^x[\overline{U}]_P(i,j)$ vérifiant (2.87a), et le terme souligné deux fois constitue le terme de bord $S_x^{\mathrm{b,c}}(N_x-1,j)$ contenu dans le vecteur $S_x^{\mathrm{b,c}}$. Finalement pour $i=N_x-1$ l'expression générale (2.87) des coefficients de $\mathcal{C}^x[\overline{U}]$ est inchangée mis à part que :

$$C^{x}[\overline{U}]_{E}(N_{x}-1,j) = 0, \quad S_{x}^{b,c}(N_{x}-1,j) = \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{u}_{N_{x}-1,j}}{2} + \frac{\overline{u}_{N_{x},j}}{2} \right) u_{N_{x},j}.$$
 (2.91)

Un raisonnement analogue sur les autres frontières du domaine mène à la même conclusion : assurer les conditions (2.68) et (2.72) impose l'utilisation de formules d'interpolation centrées (2.84). Si les travaux de Verstappen et Veldman parviennent à cette conclusion dans [134], la vérification de la condition (2.72) n'est cependant pas examinée dans leur article. Comme nous venons de le voir cette condition est vérifiée a posteriori par la discrétisation antisymétrique des flux convectifs dans le cas de géométries simples. Pour préserver cette propriété dans le cas des géométries complexes, nous devrons adapter les formules centrées pour les volumes de contrôles situés à proximité de la géométrie complexe, ce qui sera abordé dans le prochain chapitre.

2.5 Discrétisation des flux diffusifs basée sur la conservation totale de quantité de mouvement

Pour l'équation de mouvement horizontale (2.8a), les termes visqueux dans le volume de contrôle $\Omega^u_{i,j}$ s'écrivent :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u}} \nabla u \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \int_{\Gamma_{i,j}^{u}} \frac{\partial u}{\partial x} \, \boldsymbol{e}_{x} \cdot \boldsymbol{n} \, dS + \int_{\Gamma_{i,j}^{u}} \frac{\partial u}{\partial y} \, \boldsymbol{e}_{y} \cdot \boldsymbol{n} \, dS.$$
 (2.92)

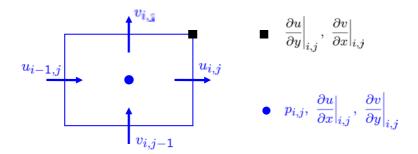


Fig. 2.6 – Emplacement des inconnues de pression et de contraintes visqueuses dans la cellule cartésienne $\Omega_{i,j}$.

Tout d'abord, nous devons faire une distinction entre la discrétisation des contraintes normales $\int_{\Gamma_{i,j}^u} \partial u/\partial x \ e_x \cdot n \, dS$, et les contraintes tangentielles $\int_{\Gamma_{i,j}^u} \partial u/\partial y \ e_y \cdot n \, dS$. Cette distinction est induite par l'arrangement décalé des inconnues de vitesse dans la méthode MAC, en différences finies les contraintes normales s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x_i}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{i,j} = \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\Delta y_j}, \tag{2.93}$$

et sont naturellement placées au centre de la cellule $\Omega_{i,j}$, tandis que les contraintes tangentielles :

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\frac{1}{2}\Delta y_{j+1} + \frac{1}{2}\Delta y_j}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{i,j} = \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\frac{1}{2}\Delta x_{i+1} + \frac{1}{2}\Delta x_i}, \tag{2.94}$$

apparaissent sur son coin supérieur droit. Cet arrangement des contraintes est représenté sur la figure 2.6.

2.5.1 Discrétisation des flux diffusifs normaux

Le terme de contrainte normale $\int_{\Gamma_{i,j}^u} \partial u/\partial x \ e_x \cdot n \, dS$ est calculé comme la différence des flux sur les faces $\Gamma_{i,j}^{u,e}$ et $\Gamma_{i,j}^{u,w}$ du volume de contrôle $\Omega_{i,j}$ et s'écrit :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u}} \frac{\partial u}{\partial x} \, \boldsymbol{e}_{x} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = \int_{\Gamma_{i,j}^{u,e}} \frac{\partial u}{\partial x} \, \mathrm{d}y - \int_{\Gamma_{i,j}^{u,w}} \frac{\partial u}{\partial x} \, \mathrm{d}y, \tag{2.95}$$

et chacun des flux est discrétisé par la quadrature du point milieu :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u}} \frac{\partial u}{\partial x} \, \boldsymbol{e}_{x} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S \cong \Delta y_{j} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i+1,j} - \Delta y_{j} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \Delta y_{j} \left. \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x_{i+1,j}} - \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x_{i}} \right) \right. \tag{2.96}$$

Nous pouvons remarquer que cette formule est semblable à celle obtenue pour la pression (2.75) en remplaçant $\frac{\partial u}{\partial x}|_{i,j}$ par $p_{i,j}$ dans la formule précédente. Dans la méthode LS-STAG que nous présentons dans le chapitre suivant, nous verrons que les flux de contrainte normale doivent être traitées de la même manière que les flux de pression pour assurer la consistance de la méthode. De manière analogue la discrétisation des termes diffusifs normaux dans $\Omega_{i,j}^v$ a pour expression :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{v}} \frac{\partial v}{\partial y} \, \boldsymbol{e}_{y} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S \cong \Delta x_{i} \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta y_{j+1}} - \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\Delta y_{j}} \right). \tag{2.97}$$

2.5.2 Discrétisation des flux de contrainte de cisaillement

Les contributions au système dues au cisaillement $\int_{\Gamma_{i,j}^u} \partial u/\partial y \ e_y \cdot n \, dS$ peuvent s'écrire comme la différence de flux entre les faces Sud et Nord, par exemple pour $i = 1, \dots, N_x - 1, j = 1, \dots, N_y$:

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u}} \frac{\partial u}{\partial y} \, \boldsymbol{e}_{y} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = \int_{\Gamma_{i,j}^{\mathrm{n,e}} \cup \Gamma_{i+1,j}^{\mathrm{n,w}}} \frac{\partial u}{\partial y} \, \mathrm{d}x - \int_{\Gamma_{i,j}^{\mathrm{s,e}} \cup \Gamma_{i+1,j}^{\mathrm{s,w}}} \frac{\partial u}{\partial y} \, \mathrm{d}x.$$
 (2.98)

Pour la face Nord, par exemple, nous utilisons la formule de quadrature suivante :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{\text{n,e}} \cup \Gamma_{i+1,j}^{\text{n,w}}} \frac{\partial u}{\partial y} \, \mathrm{d}x \cong \left(\Delta x_{i,j}^{\text{n,e}} + \Delta x_{i+1,j}^{\text{n,w}} \right) \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j}, \tag{2.99}$$

où les frontières d'intégration $\Delta x_{i,j}^{\rm n,e}$ et $\Delta x_{i+1,j}^{\rm n,w}$ s'expriment comme :

$$\Delta x_{i,j}^{\text{n,e}} = \frac{1}{2} \Delta x_i, \qquad \Delta x_{i+1,j}^{\text{n,w}} = \frac{1}{2} \Delta x_{i+1}.$$
 (2.100)

Cette formule ne correspond pas à une quadrature du point milieu puisque $\partial u/\partial y|_{i,j}$ n'est pas disposée au milieu de $\Gamma^{n,e}_{i,j} \cup \Gamma^{n,w}_{i+1,j}$ sur maillage non-uniforme et n'est donc pas du deuxième ordre. Une justification de la quadrature (2.99) est proposée dans la section suivante et est basée sur l'examen de la conservation de la quantité de mouvement au niveau discret.

Le quotient $\partial u/\partial y|_{i,j}$, localisé au coin supérieur droit de $\Omega_{i,j}$ est calculé par la formule de différence finie (2.94), nous avons finalement :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{\text{n,e}} \cup \Gamma_{i+1,j}^{\text{n,w}}} \frac{\partial u}{\partial y} \, \mathrm{d}x \cong \left(\Delta x_{i,j}^{\text{n,e}} + \Delta x_{i+1,j}^{\text{n,w}} \right) \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\frac{1}{2} \Delta y_{j+1} + \frac{1}{2} \Delta y_{j}}.$$
 (2.101)

Afin que la discrétisation vérifie la propriété de conservation locale des flux (2.39) le flux diffusif sur la face Sud de $\Gamma_{i,j}^u$ s'écrit nécessairement :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{\text{s,e}} \cup \Gamma_{i+1,j}^{\text{s,w}}} \frac{\partial u}{\partial y} \, \mathrm{d}x \cong \left(\Delta x_{i,j}^{\text{s,e}} + \Delta x_{i+1,j}^{\text{s,w}} \right) \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\frac{1}{2} \Delta y_j + \frac{1}{2} \Delta y_{j-1}}, \tag{2.102}$$

avec

$$\Delta x_{i,j}^{\text{s,e}} = \frac{1}{2} \Delta x_i, \qquad \Delta x_{i,j}^{\text{s,e}} = \frac{1}{2} \Delta x_{i+1}.$$
 (2.103)

La formule (2.94) pour le quotient $\partial u/\partial y|_{i,j}$ doit être modifiée près des bords du domaine afin de prendre en compte les conditions aux limites. Par exemple si une condition d'adhérence est imposée sur la frontière $\Gamma^{\rm n}$ du domaine (i.e. pour $\boldsymbol{x} \in \Gamma^{\rm n}$ $u=u^{\rm n}_i$), alors $\partial u/\partial y|_{i,N_y}$ est calculé par une formule décentrée :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,N_y} = \frac{u_i^{\rm n} - u_{i,N_y}}{\frac{1}{2} \Delta y_{N_y}}.$$
(2.104)

Dans le volume de contrôle Ω^u_{i,N_y} (figure 2.7 (a)) adjacent à la frontière bord Γ^n la formule (2.99) de quadrature est toujours valable et nous aurons :

$$\int_{\Gamma_{i,N_y}^{\text{n,e}} \cup \Gamma_{i+1,N_y}^{\text{n,w}}} \frac{\partial u}{\partial y} \, \mathrm{d}x \cong \left(\Delta x_{i,N_y}^{\text{n,e}} + \Delta x_{i+1,N_y}^{\text{n,w}} \right) \frac{u_i^{\text{n}} - u_{i,N_y}}{\frac{1}{2} \Delta y_{N_y}}. \tag{2.105}$$

En résumé la discrétisation des flux de contraintes normale et de cisaillement se met sous la forme d'un schéma à 5 points et pour un volume de contrôle $\Omega^u_{i,j}$ situé loin des bords du domaine s'écrit :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u}} \nabla u \cdot \boldsymbol{n} \, dS \cong [\mathcal{K}^{x} \mathcal{U}](i,j) = \mathcal{K}_{W}^{x}(i,j) u_{i-1,j} + \mathcal{K}_{E}^{x}(i,j) u_{i+1,j} + \mathcal{K}_{P}^{x}(i,j) u_{i,j}
+ \mathcal{K}_{S}^{x}(i,j) u_{i,j-1} + \mathcal{K}_{N}^{x}(i,j) u_{i,j+1},$$
(2.106)

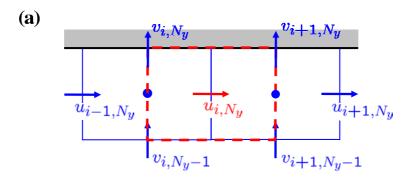
avec :

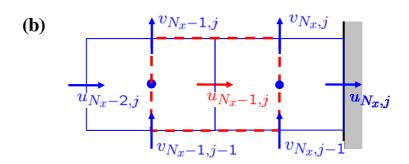
$$\mathcal{K}_{W}(i,j) = \frac{\Delta y_{j}}{\Delta x_{i}}, \qquad \mathcal{K}_{E}(i,j) = \frac{\Delta y_{j}}{\Delta x_{i+1}}, \qquad (2.107a)$$

$$\mathcal{K}_{S}(i,j) = \frac{\Delta x_{i} + \Delta x_{i+1}}{\Delta y_{j} + \Delta y_{j-1}}, \qquad \mathcal{K}_{N}(i,j) = \frac{\Delta x_{i} + \Delta x_{i+1}}{\Delta y_{j} + \Delta y_{j+1}}$$
(2.107b)

$$\mathcal{K}_{S}(i,j) = \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{\Delta y_i + \Delta y_{i-1}}, \qquad \mathcal{K}_{N}(i,j) = \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}}{\Delta y_i + \Delta y_{i+1}}$$
(2.107b)

$$\mathcal{K}_{P}(i,j) = -\mathcal{K}_{W}(i,j) - \mathcal{K}_{E}(i,j) - \mathcal{K}_{S}(i,j) - \mathcal{K}_{N}(i,j). \tag{2.107c}$$





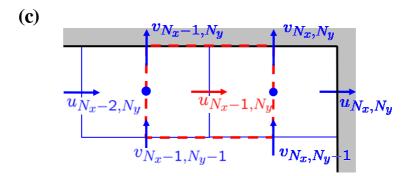


Fig. 2.7 – Volumes de contrôle $\Omega_{i,j}^u$ près des bords du domaine (a): près de la frontière Nord, (b): près de la frontière Ouest et (c): près du coin Nord-Ouest du domaine.

2.5.3 Conservation totale de la quantité de mouvement au niveau discret et calcul des forces hydrodynamiques

Nous isolons dans le bilan de quantité de mouvement (2.55) les contributions sur la frontière Γ^n des flux de pression et de contraintes, que nous écrivons à la manière de (2.56) comme :

$$\left[\mathbb{1}^{\mathrm{T}}\mathcal{G}P - \mathbb{1}^{\mathrm{T}}\eta(\mathcal{K}U + S^{\mathrm{b,v}})\right]^{\mathrm{n}} = \begin{cases} \widetilde{F}_{x}^{h,\mathrm{n}} \\ \widetilde{F}_{y}^{h,\mathrm{n}} \end{cases} . \tag{2.108}$$

Comme nous l'avons évoqué précédemment les composantes $\widetilde{F}_x^{h,n}$ et $\widetilde{F}_y^{h,n}$ de cette contribution doivent correspondre respectivement à la discrétisation des composantes de traînée et de portance

de la force hydrodynamique \mathbf{F}^n exercée sur sur la paroi Γ^n du domaine (Fig. 2.1). Cet examen va permettre notamment de justifier les quadratures employées pour les flux de contraintes tangentielles (2.102), et sera nécessaire pour construire ces mêmes flux dans la méthode LS-STAG dans le chapitre suivant. Les composantes de \mathbf{F}^n s'écrivent :

$$F_x^{\rm n} = -\int_{\Gamma^{\rm n}} \eta \, \frac{\partial u}{\partial y} \, \mathrm{d}x,\tag{2.109a}$$

$$F_y^{\rm n} = \int_{\Gamma^{\rm n}} \left[p - \eta \, \frac{\partial v}{\partial y} \right] \, \mathrm{d}x, \tag{2.109b}$$

ce qui est déduit de (2.31) en remarquant que $n = e_y$ sur Γ^n . La traînée est exclusivement due aux contraintes de cisaillement et la portance due aux contraintes normales visqueuses et à la pression. Nous allons à présent discrétiser chacune de ces composantes de manière indépendante.

Discrétisation des forces hydrodynamiques

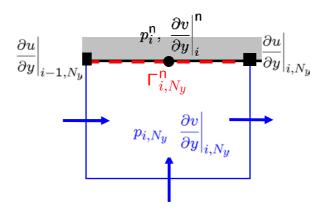


Fig. 2.8 – Cellule Ω_{i,N_y} adjacente à la frontière $\Gamma^{\rm n}$ du domaine Ω de la figure 2.1.

Sur chaque portion $\Gamma^{\rm n}_{i,N_y}$ de la frontière $\Gamma^{\rm n}$ (Fig. 2.8) la traînée discrète $F_x^{h,{\rm n}}\Big|_i$ est calculée par la quadrature du trapèze :

$$F_x^{h,n}\Big|_i = -\eta \Delta x_i \left(\frac{1}{2} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i-1,N_y} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,N_y} \right), \tag{2.110}$$

et la portance $F_y^{h,n}\Big|_i$ par une quadrature du point milieu :

$$F_y^{h,n}\Big|_i = \Delta x_i \left(p_i^n - \eta \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_i^n \right),$$
 (2.111)

où $p_i^{\rm n}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_i^{\rm n}$ désignent respectivement la valeur de la pression et de la contrainte normale au centre de la frontière $\Gamma_{i,N_y}^{\rm n}$. Dans la section précédente nous avons fait l'hypothèse forte que $p_{i,j}$ est constante dans chaque cellule du domaine, ainsi nous écrirons :

$$p_i^{\rm n} \cong p_{i,N_u},\tag{2.112}$$

et nous utilisons la même extrapolation constante pour évaluer $\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_i^n$:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i}^{n} \cong \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i,N_{y}}.$$
 (2.113)

La similarité entre le traitement des contraintes normales et la pression a déjà été évoquée dans la section 2.5.1, et nous la retrouvons ici pour le calcul des forces. Nous serons amenés à exploiter cette similitude dans le chapitre suivant pour construire la discrétisation LS-STAG des flux de contraintes normales. La portance s'écrit alors :

$$F_y^{h,n}\Big|_i = \Delta x_i \left(\left. p_{i,N_y} - \eta \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i,N_y} \right).$$
 (2.114)

Finalement les composantes de la force hydrodynamique discrète $\mathbf{F}^{h,n}$ exercée sur la frontière Γ^n s'obtiennent par sommation :

$$F_x^{h,n} = \sum_{i=1}^{N_x} F_x^{h,n} \Big|_i = -\sum_{i=1}^{N_x} \eta \Delta x_i \left(\frac{1}{2} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i-1,N_y} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,N_y} \right)$$
(2.115a)

$$F_y^{h,n} = \sum_{i=1}^{N_x} F_y^{h,n} \Big|_i = \sum_{i=1}^{N_x} \Delta x_i \left(p_{i,N_y} - \eta \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i,N_y} \right). \tag{2.115b}$$

Cette force discrète est maintenant comparée à la contribution (2.108) intervenant dans le bilan discret de quantité de mouvement.

Conservation de la quantité de mouvement totale

Montrer que la contribution $\widetilde{F}_y^{h,\mathrm{n}}$ dans le bilan de quantité de mouvement est égale à la force discrète de portance (2.115b) est immédiat. En effet, $\widetilde{F}_y^{h,\mathrm{n}}$ correspond à la somme des flux discrets de pression et de contrainte normale écrits sur la face $\Gamma_{i,N_y-1}^{v,\mathrm{n}}$ des volumes de contrôle $\left\{\Omega_{i,N_y-1}^v,\ i=1,\ldots,N_x\right\}$ (Fig. 2.9) :

$$\widetilde{F}_{y}^{h,n} = \sum_{i=1}^{N_x} \Delta x_i \left(p_{i,N_y} - \eta \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i,N_y} \right), \tag{2.116}$$

si bien que nous avons :

$$\widetilde{F}_y^{h,n} = F_y^{h,n},\tag{2.117}$$

assurant que la force de portance (2.115b) est retrouvée dans le bilan discret de quantité de mouvement, comme c'est le cas au niveau continu.

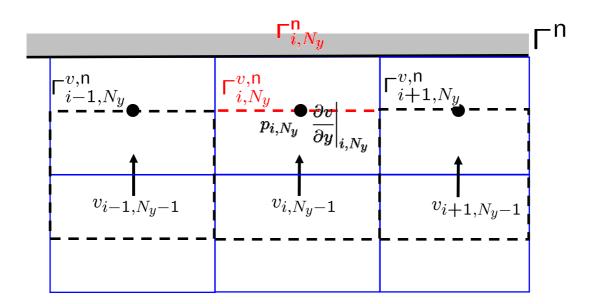


FIG. 2.9 – Volumes de contrôle Ω^{v}_{i,N_y-1} adjacents à la frontière $\Gamma^{\rm n}$ du domaine Ω . Dans ces volumes de contrôle, le flux sur $\Gamma^{v,{\rm n}}_{i,N_y-1}$ de contrainte normale sur de pression intervient dans l'expression de la contribution $\widetilde{F}^{v,{\rm n}}_y$ au bilan de quantité de mouvement. Plus particulièrement ce flux correspond à la force de portance discrète $F^{h,{\rm n}}_y|_i$ (Eq. (2.114)).

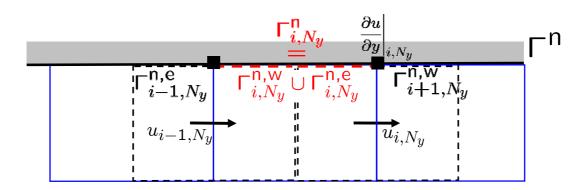


FIG. 2.10 – Volumes de contrôle Ω^u_{i,N_y} adjacents à la frontière $\Gamma^{\rm n}$ du domaine Ω . Dans ces volumes de contrôle, le flux de cisaillement sur $\Gamma^{\rm n,e}_{i,N_y} \cup \Gamma^{\rm n,w}_{i+1,N_y}$ intervient dans l'expression de la contribution $\widetilde{F}^{h,{\rm n}}_x$ au bilan de quantité de mouvement. Plus particulièrement pour les deux volumes de contrôle consécutifs représenté sur la figure, la contribution sur la frontière $\Gamma^{\rm n,w}_{i,N_y} \cup \Gamma^{\rm n,e}_{i,N_y}$ (en rouge) correspond à la force de traînée discrète $\left.F^{h,{\rm n}}_x\right|_i$ (Eq. (2.110)).

Le résultat est plus difficile à obtenir pour la force traînée. Dans la direction x, la contribution $\widetilde{F}_y^{h,\mathrm{n}}$ dans le bilan de quantité de mouvement correspond à la somme des flux de cisaillement (2.102) écrit sur les frontières $\Gamma_{i,N_y}^{\mathrm{n,e}} \cup \Gamma_{i+1,N_y}^{\mathrm{n,w}}$ dans les volumes de contrôle $\left\{\Omega_{i,N_y}^u,\ i=1,\ldots,N_x-1\right\}$

(Fig. 2.10), ce qui s'écrit :

$$\widetilde{F}_{y}^{h,n} = -\eta \sum_{i=1}^{N_{x}-1} \left(\Delta x_{i,N_{y}}^{n,e} + \Delta x_{i+1,N_{y}}^{n,w} \right) \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,N_{y}}, \tag{2.118}$$

ce que nous récrivons par changement d'indice :

$$\widetilde{F}_{y}^{h,n} = -\eta \frac{1}{2} \Delta x_{1} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{1,N_{y}} - \eta \sum_{i=1}^{N_{x}-1} \left[\Delta x_{i,N_{y}}^{n,w} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i-1,N_{y}} + \Delta x_{i,N_{y}}^{n,e} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,N_{y}} \right] - \eta \frac{1}{2} \Delta x_{N_{x}} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{N_{x}-1,N_{y}}.$$
(2.119)

Le terme sous le signe somme correspond à la contribution du cisaillement sur la face $\Gamma^{\rm n}_{i,N_y} = \Gamma^{\rm n,e}_{i,N_y} \cup \Gamma^{\rm n,w}_{i,N_y}$ (Fig. 2.10). Afin que cette contribution soit égale à la traînée $F^{h,\rm n}_x$ (2.110), i.e. :

$$\widetilde{F}_y^{h,n} = \left. F_x^{h,n} \right|_i, \tag{2.120}$$

les frontières d'intégration ont nécessairement pour expression :

$$\Delta x_{i,N_y}^{\text{n,e}} = \Delta x_{i,N_y}^{\text{n,w}} = \frac{1}{2} \Delta x_i,$$
 (2.121)

ce qui justifie la formule de quadrature (2.99)-(2.100).

Dans le bilan discret de quantité de mouvement suivant la direction horizontale, la contribution sur la frontière Γ^n s'écrit :

$$\widetilde{F}_{x}^{h,n} = -\eta \frac{1}{2} \Delta x_{1} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{1,N_{y}} - \sum_{i=2}^{N_{x}-1} \left. F_{x}^{h,n} \right|_{i} - \eta \frac{1}{2} \Delta x_{N_{x}} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{N_{x}-1,N_{y}}, \tag{2.122}$$

et nous pouvons alors remarquer que cette expression ne correspond pas exactement à la force de traînée discrète (2.115a). En effet, dans la cellule $\Omega^{\rm n}_{1,N_y}$ de la figure 2.4 (c), la force de traînée $F_x^{h,{\rm n}}|_{1}$ sur $\Gamma^{\rm n}_{1,N_y}$ s'écrit :

$$\left. F_x^n \right|_1 = -\eta \Delta x_1 \left(\frac{1}{2} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{0, N_y} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{1, N_y} \right), \tag{2.123}$$

où le terme souligné n'apparait pas dans la contribution (2.122). Ceci est une conséquence de l'arrangement décalé des variables sur le maillage MAC. En effet l'équation de quantité de mouvement pour la composante u n'est pas discrétisée dans Ω^u_{0,N_y} puisque u_{0,N_y} n'est pas une inconnue du problème. Pour la même raison le terme $-\eta \Delta x_{N_x} \frac{1}{2} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{N_x,N_y}$ est absent du bilan de quantité de mouvement bien qu'il contribue à la force de traînée discrète sur $\Gamma^{\rm n}_{N_x,N_y}$.

Calcul du flux de cisaillement sur un coin saillant

L'examen de la conservation de la quantité de mouvement a permis de justifier l'expression (2.100) des frontières d'intégration utilisées pour le calcul du flux de cisaillement. Nous allons ici utiliser cette démarche pour déterminer l'expression de ces frontières dans le cas où $\Omega^u_{i,j}$ est situé au niveau d'un coin saillant du domaine (Fig. 2.11).

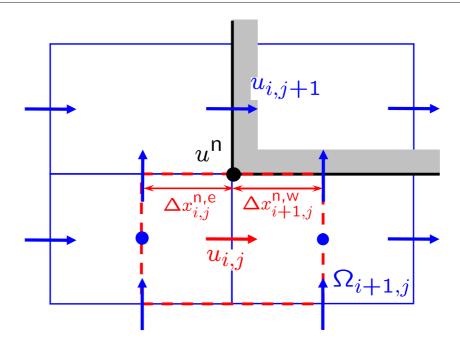


Fig. 2.11 – Représentation du maillage MAC près d'un coin saillant du domaine.

Dans ce cas, la formule de discrétisation (2.105) donne la contrainte de cisaillement sur $\Gamma_{i,j}^{n,e} \cup \Gamma_{i+1,j}^{n,w}$ et s'écrit :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{\mathbf{n},\mathbf{e}} \cup \Gamma_{i+1,j}^{\mathbf{n},\mathbf{w}}} \frac{\partial u}{\partial y} \, \mathrm{d}x \cong \left(\Delta x_{i,j}^{\mathbf{n},\mathbf{e}} + \Delta x_{i+1,j}^{\mathbf{n},\mathbf{w}}\right) \frac{u_i^{\mathbf{n}} - u_{i,j}}{\frac{1}{2}\Delta y_j},\tag{2.124}$$

où il reste à déterminer les valeurs des frontières d'intégration $\Delta x_{i,j}^{\mathrm{n,e}}$ et $\Delta x_{i+1,j}^{\mathrm{n,w}}$. Le terme (2.124) constitue une contribution dans le bilan discret de quantité de mouvement. Cette contribution doit permettre (en partie) de retrouver la force de trainée sur $\Gamma_{i+1,j}^{\mathrm{n}}$ dont l'expression est donnée par (2.110), et d'autre part ne doit pas introduire de contribution sur $\Gamma_{i,j}^{\mathrm{n}}$ puisque cette frontière est dans le domaine fluide, ce qui sera vérifié si les frontières d'intégration sont définies comme :

$$\Delta x_{i,j}^{\text{n,e}} = 0, \text{ et } \Delta x_{i+1,j}^{\text{n,w}} = \frac{1}{2} \Delta x_{i+1}.$$
 (2.125)

Tout autre type de quadrature du type de (2.124) avec $\Delta x_{i,j}^{\rm n,e} \neq 0$ conduirait à violer la conservation de la quantité de mouvement.

Conclusions partielles

Pour calculer les forces hydrodynamiques nous avons été amenés a considérer que les contraintes normales étaient constantes dans les cellules du domaine, comme nous l'avons fait pour la pression. Nous verrons que cette hypothèse forte sera utilisée dans la section suivante dans le cas des géométries complexes, ce qui nous a permis d'améliorer la consistance de la méthode *LS-STAG*.

Sur maillage uniforme, la formule de quadrature (2.99)-(2.100) utilisée pour la discrétisation des flux de cisaillement correspond à la quadrature du point milieu qui est d'ordre 2. Par contre

sur maillage non-uniforme la formule perd cette ordre de précision et se justifie au regard de l'examen de la conservation de quantité de mouvement total que nous avons mené.

2.6 Condition aux limites et intégration en temps

2.6.1 Intégration en temps

L'intégration du système algébrique constitué par (2.9) et (2.14) est réalisée une méthode à pas fractionnaires [22, 127] et basée sur le schéma semi-implicite d'Adams-Bashforth/Euler Retardé du 2^{ème} ordre (AB/ER2). Ce schéma est défini par les deux étapes suivantes :

$$\rho \mathcal{M} \frac{3\widetilde{U} - 4U^n + U^{n-1}}{2\Delta t} + 2\rho \mathcal{C}[\overline{U}^n]U^n - \mathcal{C}[\overline{U}^{n-1}]U^{n-1} - \mathcal{D}^{\mathrm{T}}P^n - \eta \mathcal{K}\widetilde{U} = 0, \tag{2.126}$$

où \widetilde{U} constitue une prédiction du champ de vitesse à $t_{n+1}=(n+1)\Delta t$, et :

$$\frac{3}{2}\rho \mathcal{M} \frac{U^{n+1} - \tilde{U}}{\Delta t} - \mathcal{D}^{T} (P^{n+1} - P^{n}) = 0, \qquad (2.127a)$$

$$\mathcal{D}U^{n+1} + \overline{U}^{b,n+1} = 0. \tag{2.127b}$$

Les tests numériques réalisés par [16] montre que ce schéma de prédiction projection est précis en $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ pour la vitesse et la pression. L'étape de projection (2.127) nécessite la résolution d'une équation de Poisson pour obtenir le potentiel de pression $\Phi = 2\Delta t (P^{n+1} - P^n)/3\rho$:

$$\mathcal{A}\Phi = \mathcal{D}\widetilde{U} + \overline{U}^{b,n+1}, \qquad \mathcal{A} \equiv -\mathcal{D}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{D}^{\mathrm{T}}.$$
 (2.128)

L'étape de projection (2.127a) s'écrit, en enlevant les indices de niveaux de temps , pour $i=1,\ldots,N_x-1,j=1,\ldots,N_y$:

$$u_{i,j} = \widetilde{u}_{i,j} - \Delta y_j \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\frac{1}{2}V_{i+1,j} + \frac{1}{2}V_{i,j}} = \widetilde{u}_{i,j} - \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\frac{1}{2}\Delta x_{i+1} + \frac{1}{2}\Delta x_i} = \widetilde{u}_{i,j} - \delta_x^+ \Phi_{i,j}, \tag{2.129a}$$

pour $i = 1, ..., N_x, j = 1, ..., N_y - 1$:

$$v_{i,j} = \widetilde{v}_{i,j} - \Delta x_i \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}}{\frac{1}{2}V_{i,j+1} + \frac{1}{2}V_{i,j}} = \widetilde{v}_{i,j} - \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}}{\frac{1}{2}\Delta y_j + \frac{1}{2}\Delta y_{j+1}} = \widetilde{v}_{i,j} - \delta_y^+ \Phi_{i,j},$$
(2.129b)

où δ_x^+ et δ_y^+ désignent les opérateurs de gradient de différences finies définis par :

$$\delta_x^+ \Phi_{i,j} = \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\frac{1}{2} \Delta x_{i+1} + \frac{1}{2} \Delta x_i},$$
(2.130a)

$$\delta_y^+ \Phi_{i,j} = \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}}{\frac{1}{2} \Delta y_{j+1} + \frac{1}{2} \Delta y_j}.$$
 (2.130b)

En injectant les relations (2.129a) et (2.129b) dans (2.21) nous obtenons l'équation de pression :

$$\Delta y_j(\delta_x^+ \Phi_{i,j} - \delta_x^+ \Phi_{i-1,j}) + \Delta x_i(\delta_y^+ \Phi_{i,j} - \delta_y^+ \Phi_{i,j-1}) = \Delta y_j(\widetilde{u}_{i-1,j} - \widetilde{u}_{i,j}) + \Delta x_i(\widetilde{v}_{i,j} - \widetilde{v}_{i,j-1}), \quad (2.131)$$

et sur chacune des ses lignes les coefficients de $\mathcal A$ sont identifiés comme :

$$A_{\rm E}(i,j) = \frac{\Delta y_j^2}{\frac{1}{2}V_{i,j} + \frac{1}{2}V_{i+1,j}}, \qquad A_{\rm W}(i,j) = \frac{\Delta y_j^2}{\frac{1}{2}V_{i,j} + \frac{1}{2}V_{i-1,j}}, \qquad (2.132a)$$

$$A_{\rm N}(i,j) = \frac{\Delta x_i^2}{\frac{1}{2}V_{i,j} + \frac{1}{2}V_{i,j+1}}, \qquad A_{\rm S}(i,j) = \frac{\Delta x_i^2}{\frac{1}{2}V_{i,j} + \frac{1}{2}V_{i,j-1}}, \qquad (2.132b)$$

$$A_{\rm N}(i,j) = \frac{\Delta x_i^2}{\frac{1}{2}V_{i,j} + \frac{1}{2}V_{i,j+1}}, \qquad A_{\rm S}(i,j) = \frac{\Delta x_i^2}{\frac{1}{2}V_{i,j} + \frac{1}{2}V_{i,j-1}}, \tag{2.132b}$$

$$A_{\rm P}(i,j) = -A_{\rm E}(i,j) - A_{\rm W}(i,j) - A_{\rm N}(i,j) - A_{\rm S}(i,j), \tag{2.132c}$$

La matrice \mathcal{A} est pentadiagonale et symétrique, les système linéaires définis par l'étape de prédiction (2.128) peut alors être résolu efficacement par des méthodes de type multigrille [132]. Cependant il est nécessaire de s'assurer que ce système comporte des solutions, c'est à dire qu'il est solvable. Pour le vérifier nous nous en remettons à un théorème fondamental de l'algèbre linéaire, connu sous le nom d'alternative de Fredholm qui énonce pour un système de la forme AX = B les conditions sur le second membre B pour que le système linéaire possède une solution (solution particulière + les éléments du noyau de A). Il faut que B soit orthogonal à tous les éléments du noyau de \mathcal{A}^{T} . Sur maillage à arrangement décalé des variables, le seul élément du noyau de \mathcal{A}^{T} est le vecteur 1 dont chaque composante vaut 1 (nous retrouvons discrètement le fait que la pression est définie à une constante près), la condition de solvabilité de (2.128) s'écrit:

$$(\mathcal{D}\widetilde{U} + \overline{U}^{b})^{\mathrm{T}} \mathbb{1} = 0, \tag{2.133}$$

où l'indice temporel a été omis pour plus de lisibilité. Dans le cas d'un écoulement confiné, une cavité entrainée [17] pour fixer les idées, cette condition (2.133) est satisfaite. Nous considérons à présent le cas d'un un canal avec un profil de vitesse imposé en entrée sur Γ^{w} , une condition de sortie de Neumann sur la frontière Est $\Gamma^{\rm e}$ de Ω et des conditions de non pénétration sur les autres frontière du domaine Γ^n et Γ^s . Puisque le champ de vitesse intermédiaire \widetilde{U} ne vérifie pas la contrainte d'incompressibilité, la condition de compatibilité n'est pas satisfaite, i.e. :

$$(\mathcal{D}\widetilde{U} + \overline{U}^{b})^{T} \mathbb{1} = \dot{\widetilde{m}} = -\dot{\widetilde{m}}_{w} + \dot{\widetilde{m}}_{e} \neq 0,$$
(2.134)

où la notation tilde indique qu'il s'agit du flux de masse calculé à partir de la vitesse intermédiaire \widetilde{U} . Pour remédier à ce problème nous allons chercher une correction sur la vitesse $u_{N_x,j}$ sous la forme:

$$u_{N_x,j} = \widetilde{u}_{N_x,j} - u_{\text{corr}},\tag{2.135}$$

où $u_{\rm corr}$ désigne la correction de vitesse que nous supposerons uniformément répartie sur $\Gamma^{\rm e}$. Cette correction doit être telle que le champ de vitesse projeté vérifie la conservation de la masse :

$$-\dot{m}_{\rm w} + \dot{m}_{\rm e} = 0. \tag{2.136}$$

Puisque nous imposons une condition de Dirichlet sur la vitesse en entrée nous avons $\dot{\tilde{m}}_{\rm w} = \dot{m}_{\rm w}$, et pouvons réécrire cette dernière expression comme :

$$-\dot{\tilde{m}}_{\rm w} + \dot{m}_{\rm e} = 0. \tag{2.137}$$

À présent en retranchant (2.137) à (2.134) nous obtenons l'expression du défaut de masse dans le domaine :

$$\dot{\tilde{m}} = \dot{\tilde{m}}_e - \dot{m}_e, \tag{2.138}$$

que nous devons corriger. En multipliant (2.135) par Δy_j et après sommation sur l'indice j il vient :

$$\dot{\tilde{m}} = \dot{\tilde{m}}_{e} - \dot{m}_{e} = \sum_{1,\dots,N_{y}} \Delta y_{j} u_{corr}, \qquad (2.139)$$

d'où nous déduisons l'expression de la correction de vitesse :

$$u_{\text{corr}} = \frac{\dot{\tilde{m}}}{L_y}, \quad \text{avec } L_y = \sum_{1,\dots,N_y} \Delta y_j.$$
 (2.140)

Au niveau du code de calcul, cette correction est réalisée en ajoutant à chacune des lignes (N_x, j) du système linéaire (2.131) le débit corrigé $-\Delta y_j u_{\rm corr}$ au second membre. Ainsi, la condition de compatibilité s'écrit :

$$(\mathcal{D}\widetilde{U} + \overline{U}^{b})^{\mathrm{T}} \mathbb{1} - \sum_{1,\dots,N_{y}} \Delta y_{j} u_{\mathrm{corr}} = \dot{\widetilde{m}} - L_{y} \frac{\dot{\widetilde{m}}}{L_{y}} = 0, \tag{2.141}$$

et est satisfaite.

2.6.2 Implémentation des conditions aux limites : le concept de cellules fan-tômes

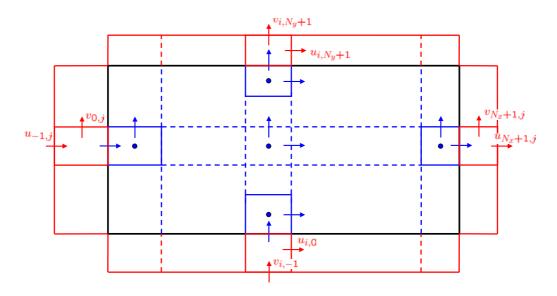


Fig. 2.12 – Domaine de calcul et bande périphérique de cellules fantômes.

Pour implémenter les conditions aux limites près des bords du domaine une approche consiste à modifier les formules de discrétisation utilisées loin des bords, cependant ces modifications ad hoc

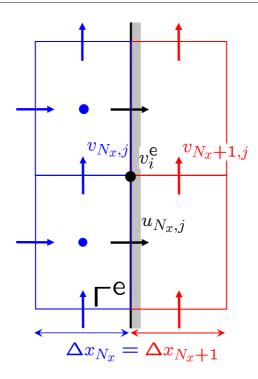


Fig. 2.13 – Cellules fantôme $\Omega^u_{N_x+1,j}$ près de la frontière Γ^e du domaine.

dépendent du schéma numérique employé ainsi que du type de condition aux limites considéré. Dans un code de calcul nous introduisons une bande de cellules supplémentaires, les cellules fantômes¹¹, à la périphérie du domaine de calcul ce qui est représenté sur la figure 2.12. Plus précisément sur la figure 2.13, la cellule fantôme $\Omega^u_{N_x+1,j}$ est construite comme le symétrique de $\Gamma^u_{N_x,j}$ par l'axe défini par Ω^e et par conséquent en partage les caractéristiques géométriques. Nous devons alors déterminer les valeurs de $u_{N_x,j}$ et $v_{N_x+1,j}$ en discrétisant les conditions aux limites du problème continu, remarquons que ces vitesses sont respectivement sur la frontière Γ^e et hors du domaine de calcul. Nous allons traiter le cas des conditions de Dirichlet et de Neumann imposée sur le champ de vitesse sur Γ^e , et nous en déduisons les autres types de condition aux limites qui en sont des combinaisons. La section 2.6.3 du manuscrit est dédiée au cas des conditions de sortie qui sont les plus délicates à mettre en place. L'introduction de cellules fantômes se révèle être un moyen commode pour implémenter les conditions aux limites. De plus nous avons construit une nouvelle condition de sortie "transparente" reposant sur l'utilisation de ces "Ghost Cells". En y extrapolant les champs de vitesse et de pression nous proposons de résoudre les équations de Navier-Stokes jusque sur le bord du domaine, ce qui sera l'objet de la section 2.6.3.

Conditions de Dirichlet

A titre d'exemple nous imposons sur Γ^e des conditions aux limites de Dirichlet (une condition d'adhérence à la paroi ou un profil de vitesse imposé) :

$$\boldsymbol{v}(y) = (u^{\mathrm{e}}(y), v^{\mathrm{e}}(y)).$$

¹¹Ghost Cells en anglais

La valeur de la vitesse normale à la paroi est immédiatement identifiée comme :

$$u_{N_x,j} = u^{e}(y_j^{c}).$$
 (2.142)

Nous déterminons la composante de vitesse $v_{N_x+1,j}$ tangentielle à la frontière par extrapolation linéaire à partir de v^e et de $v_{N_x,j}$:

$$v_{N_x+1,j} = 2v^{e}(y_j^{c}) - v_{N_x,j}. (2.143)$$

Conditions de Neumann

La condition de Neumann sur Γ^{e} s'écrit,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = 0$$
, pour $\boldsymbol{x} \in \Gamma^{\mathrm{e}}$,

et traduit un gradient de vitesse nul dans la direction normale à la frontière. Il s'agit d'une condition de sortie simple à mettre en œuvre et discrètement elle implique que :

$$v_{N_x+1,j} = v_{N_x,j}$$
, et $u_{N_x,j} = u_{N_x-1,j}$. (2.144)

Conditions de symétrie ou de glissement La condition de symétrie sur Γ^e s'écrit :

$$\frac{\partial v}{\partial y}(\boldsymbol{x}) = 0, \ u(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{pour} \quad \boldsymbol{x} \in \Gamma^{\text{e}},$$

ce qui revient à écrire une condition de Neumann pour v et de non pénétration du fluide (Dirichlet) sur u:

$$u_{N_x,j} = 0$$
 , et $v_{N_x+1,j} = v_{N_x,j}$. (2.145)

2.6.3 Conditions aux limites de sortie

La formulation de condition de sortie sur des parois telles que $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} > 0$ demeure un problème délicat puisque, indépendamment de leur légitimité mathématique ces conditions n'existent pas dans la nature. Elle sont introduites artificiellement pour obtenir un domaine de calcul tronqué. Afin de fixer les idées, considérons que la condition de sortie soit imposée sur la frontière $\Gamma^{\rm e}$ du domaine de calcul. En premier lieu, les conditions de sortie doivent être le plus "transparentes" possible, de façon à laisser sortir le fluide sans provoquer de phénomènes de réflexion parasites qui influeraient sur l'écoulement amont, et ce pour une troncature du domaine de calcul la plus petite possible. Un grand nombre de conditions furent et sont toujours proposées (voir l'article de revue de [44]). L'imposition de profil de vitesse en sortie, *i.e.* une condition de Dirichlet, conduit à un problème instable numériquement. Une condition de sortie populaire consiste à utiliser une condition de Neumann pour la vitesse, supposant un écoulement totalement développé en sortie. Une autre classe de conditions de sortie populaire en éléments finis [44] suppose que la frontière de sortie est placée à l'interface d'un écoulement externe dont on connait *a priori* le tenseur des contraintes de Cauchy :

$$\sigma \cdot n = \sigma^{\infty} \cdot n, \quad \text{sur } \Gamma^{e},$$
 (2.146)

généralement l'écoulement extérieur est supposé libre, i.e. $\sigma^{\infty} = -p^{\infty}\mathbb{1}$. Dans la plupart des études numériques d'écoulements turbulents une condition de sortie dite convective est imposée. Pour ce type de condition introduit par Orlanski [99], une équation de transport pour chacune des composante de vitesse est à résoudre sur Γ^{e} :

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega} u \, \mathrm{d}V + \rho U_{c} \int_{\Gamma} u \, \boldsymbol{e}_{x} \, \mathrm{d}S = 0, \qquad (2.147a)$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega} v \, \mathrm{d}V + \rho U_{c} \int_{\Gamma} v \, \boldsymbol{e}_{x} \, \mathrm{d}S = 0, \qquad (2.147b)$$

à la place des équations de Navier-Stokes (2.8). Dans les équations (2.147) les composantes de vitesse u et v sont transportées par une vitesse U_c caractéristique de l'écoulement. Elle peut être choisie comme la vitesse moyenne de l'écoulement [86], la vitesse maximale sur Γ^e [106] ou encore la vitesse locale [81, 77], ce choix reposant une connaissance a priori de l'écoulement. Les équations (2.147) développées initialement pour les problèmes hyperboliques ne contiennent pas de terme de diffusion, et l'étude de Fournier et al. [39] montre l'importance de ces termes lorsque l'écoulement est confiné par des parois solide (par exemple si une condition d'adhérence est imposée sur Γ^n et Γ^s).

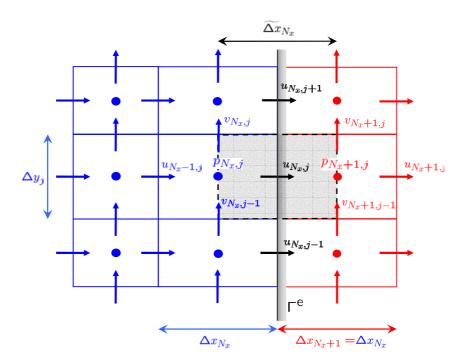


Fig. 2.14 – Disposition des inconnues et des cellules fantômes (en rouge) près de la frontière Γ^{e} du domaine.

En résumé, les différentes stratégies présentées pour imposer les conditions de sortie reposent sur des simplifications ad hoc des équations du mouvement ou encore sur des hypothèses restrictives sur les champs hydrodynamiques. Nous proposons une alternative à ces différentes conditions de sortie qui ne nécessite aucune connaissance a priori de l'écoulement. Cette condition, désignée par l'acronyme $CCBC^{12}$, est une extension des conditions transparentes pour les équations d'advection-diffusion 1D évoquées dans l'ouvrage de Wesseling [115], aux équations de Navier-Stokes. Nous tirons profit du maillage décalé pour lequel les inconnues de vitesse $u_{N_x,j}$ sont disposées sur la frontière Γ^e (Fig. 2.14), et proposons une discrétisation effective de l'équation du mouvement suivant x (2.8a) reposant sur l'utilisation des cellules fantômes dans les volumes de contrôles $\Omega^u_{N_x,j}$. L'équation pour v (2.8b) est quant à elle résolue jusque dans le volume de contrôle $\Omega^v_{N_x,j}$.

Dans l'équation de quantité de mouvement horizontale (2.8a) écrite dans $\Omega_{N_x,j}^u$, les formules de discrétisation des termes de pression, convection et de diffusion normale, respectivement (2.75), (2.80) et (2.96), font intervenir les inconnues $p_{N_x+1,j}$, $u_{N_x+1,j}$ et $v_{N_x+1,j}$ qui sont situées en dehors du domaine de calcul dans la cellule fantôme $\Omega_{N_x+1,j}$. Ces valeurs sont extrapolées à partir des champs de vitesse et de pression à l'intérieur du domaine fluide. Tout d'abord la valeur $u_{N_x+1,j}$ de la vitesse est déterminée par extrapolation linéaire :

$$u_{N_x+1,j} = 2u_{N_x,j} - u_{N_x-1,j}. (2.148)$$

La valeur de $v_{N_x+1,j}$ est calculée de manière à ce que l'équation de continuité (2.21) est vérifiée dans la cellule fantôme $\Omega_{N_x+1,j}$. Compte tenu de l'expression (2.148) de $u_{N_x+1,j}$, cela revient à écrire l'extrapolation constante :

$$v_{N_x+1,j} = v_{N_x,j}. (2.149)$$

La difficulté majeure réside dans le calcul de la pression extrapolée $p_{N_x+1,j}$ dans la cellule fantôme $\Omega_{N_x+1,j}$. Dans la section précédente nous avons introduit l'étape de projection modifiée $u_{N_x,j} = \widetilde{u}_{N_x,j} - u_{\rm corr}$ qui assure la solvabilité de l'équation de Poisson (2.128). En identifiant cette expression avec l'étape de projection "standard" (2.129a) écrite en $i = N_x$, nous obtenons $\delta_x^+ \Phi_{N_x,j} = u_{\rm corr}$. À partir de ce gradient nous extrapolons linéairement la valeur du potentiel Φ dans la cellule fantôme $\Omega_{N_x+1,j}$:

$$\Phi_{N_x+1,j} = \Phi_{N_x,j} + (\frac{1}{2}\Delta x_{i+1} + \frac{1}{2}\Delta x_i)u_{\text{corr}}.$$
(2.150)

La pression $p_{N_x+1,j}$ peut être calculée finalement à partir de la valeur du potentiel Φ dans $\Omega_{N_x+1,j}$. Une fois les valeurs de vitesses et de pressions extrapolées dans les cellules fantômes, nous pouvons alors discrétiser l'équation du mouvement selon la direction x (2.8a) dans le volume de contrôle $\Omega_{N_x,j}^u$ comme nous le ferions dans un volume de contrôle loin des bords du domaine, ce qui constitue une différence essentielle avec les conditions aux limites classiques que nous avons évoquées auparavant. Nous comparerons dans la section 4.7 l'efficacité de cette condition de sortie à celle des conditions convective (2.147) et de Neumann, et proposons dans le chapitre 5 une extension de cette condition de sortie au cas des fluides viscoélastiques.

¹²Consistent Convective Boundary Condition

2.7 Conclusions

Ce chapitre a illustré que l'examen strict des propriétés de conservation au niveau discret constitue une véritable méthodologie pour construire une méthode numérique. Cette méthodologie a été appliquée dans le cadre de la discrétisation sur maillage cartésien non-uniforme avec arrangement décalé des variables et peut être résumée de la manière suivante :

- La discrétisation de l'équation de continuité est le point de départ de la méthode. Elle permet notamment de définir l'opérateur discret de divergence D. La conservation totale de la masse au niveau discret est une conséquence directe de l'arrangement décalé des variables.
- 2. La construction des bilans globaux discrets permet de déterminer la matrice de masse \mathcal{M} , c'est à dire l'aire des volumes de contrôle pour les vitesses u et v.
- 3. La conservation de l'énergie cinétique dans le cas d'un fluide non-visqueux permet d'obtenir la forme explicite du gradient de pression comme le dual de \mathcal{D} . De plus comme l'ont souligné Verstappen et Veldman [134] la discrétisation des flux convectifs doit être antisymétrique afin que dans le bilan discret seules subsistent leurs contributions sur les bords du domaine, comme dans le cas continu.
- 4. La conservation de la quantité de mouvement au niveau discret est assurée si la discrétisation vérifie la propriété de conservation locale des flux d'une part, et d'autre part si les termes de bords restants dans le bilan discret sont consistants avec ceux du cas continus. Plus particulièrement la contribution provenant de la discrétisation des flux diffusifs doit correspondre avec les forces hydrodynamiques agissant sur les bords du domaine. Cet examen permet de déterminer sans ambiguïté la discrétisation des flux diffusifs de cisaillement.

Nous proposons dans le chapitre suivant une méthode de type frontières immergées, que nous appellerons méthode LS-STAGqui généralise la méthode MAC au cas des géométries complexes. Dans ce type de méthode la géométrie n'est pas alignée avec le maillage, ce qui introduit des cellules mi-fluide mi-solide qui seront appelées cut-cells (Fig. 2.15).

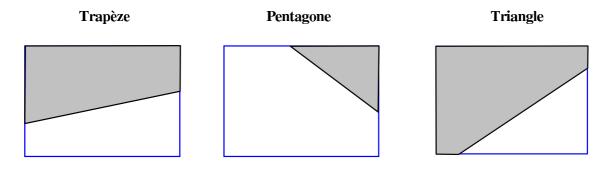


Fig. 2.15 – Cellule $\Omega_{i,j}$ coupée par une frontière immergée.

Dans un premier temps nous présenterons le maillage LS-STAG où la géométrie est représentée par une fonction de distance signée, la fonction level-set [101] et qui généralise l'arrangement

décalé des variables dans les cut-cells. Nous proposons dans les cut-cells une discrétisation des équations de Navier-Stokes qui repose sur la méthodologie évoquée précédemment et telle que la méthode LS-STAG hérite de la méthode MAC ses bonnes propriétés de conservation. Nous avons été amenés à considérer que la pression est constante dans chaque cellule du domaine. Cette hypothèse forte sera utilisée dans la construction de la méthode LS-STAG. Nous avons par ailleurs constaté que le traitement des contraintes normales comporte une analogie avec celui de la pression, tant au niveau de la discrétisation des flux dans les volumes de contrôle pour les vitesses que pour la discrétisation de la force hydrodynamique. Nous verrons que dans la méthode LS-STAG nous serons amenés à considérer que les contraintes normales sont, comme la pression, constantes dans chaque cellule du domaine.

Chapitre 3

La méthode *LS-STAG* pour écoulement de fluides newtoniens en géométries complexes

Sommaire		
3.1	Introduction	59
3.2	Le maillage LS-STAG pour frontières immergées	62
3.3	Discrétisation de l'équation de continuité et conservation de la masse	67
3.4	Discrétisation des flux de pression et convectifs	70
3.5	Discrétisation des flux diffusifs basée sur la conservation totale de	
	quantité de mouvement	73
3.6	Intégration en temps et résolution des systèmes linéaires	82
3.7	Conclusions et extension de la méthode LS - $STAG$ au cas $3D$	83

3.1 Introduction

Historiquement la méthode des frontières immergées (Immersed boundary methods ou méthodes IB) a été introduite par Peskin [109] pour simuler l'écoulement du sang au niveau du coeur. La caractéristique principale de cette méthode réside dans le fait que la simulation est menée sur un maillage cartésien qui n'épouse pas la géométrie, et l'interface coeur/sang évolue librement dans le maillage, ce qui permet de s'affranchir des étapes coûteuses de remaillage. L'approche de [109] consiste à ajouter dans les équations de Navier-Stokes une force fictive pour prendre en compte l'interface. Depuis, afin de tirer profit de l'efficacité calculatoire des solveurs cartésiens un grand intérêt a été porté sur leur extension pour les écoulements en géométries complexes mobiles ou fixes par la méthode des frontières immergées (cf. [60, 90] pour de récents articles de revue). Dans les méthodes IB, la frontière irrégulière de la géométrie n'est pas alignée avec la grille de calcul (figure 3.1), et le traitement numérique des cut-cells, cellules fluides qui

sont coupées par la frontière irrégulière, est un point crucial dans le développement de ces méthodes. En effet, la discrétisation dans les *cut-cells* doit être effectuée telle que : (a) la précision globale de la méthode ne soit pas sévèrement diminuée et (b) la grande efficacité algorithmique des solveurs structurés soit préservée, sur le plan du temps de calcul et de la facilité de programmation. Les méthodes *IB* peuvent être divisées en deux classes, qui diffèrent essentiellement

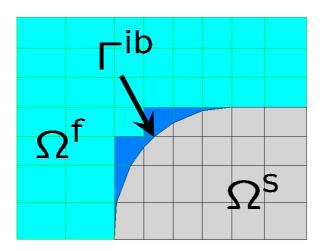


FIG. 3.1 – Représentation d'un maillage cartésien incorporant une géométrie complexe. En gris : cellules solides, en bleu ciel : cellules cartésiennes et en bleu : *cut-cells*.

selon leur traitement des cut-cells. Dans les méthodes IB classiques, de type forçage direct qui ont été introduites par [92, 33], les équations de Navier-Stokes sont discrétisées avec un solveur structuré de type volumes finis / différences finies dans les cellules cartésiennes éloignées de la frontière immergée, mais ne sont pas résolues dans les cut-cells. À la place, la valeur du champ de vitesse dans les cut-cells est imposée à l'aide d'interpolations spéciales, de façon à satisfaire les conditions aux limites sur la frontière irrégulière. Par conséquence, ces méthodes ne conservent pas les grandeurs globales de l'écoulement telles que la masse, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique totale près de la frontière immergée. Les manifestations les plus néfastes de cet écueil résident dans l'apparition de champs de vitesses violant la condition d'incompressibilité ou d'oscillations du champ de pression à proximité de la frontière immergée [94, 63]. De nombreuses variantes de ces interpolations sont encore proposées pour améliorer la précision et la consistance de cette première grande classe de méthode IB [63, 10, 108, 94].

Une seconde grande classe de méthodes *IB* propose une discrétisation effective des équations dans les *cut-cells*. Pour cette raison, elles sont appelées méthodes de *cut-cells* ou plus simplement méthodes cartésiennes (voir par exemple [139, 129, 130, 71, 28, 24, 89]). Néanmoins, le calcul des flux numériques à l'intérieur des *cut-cells* repose sur des techniques utilisées traditionnellement pour des maillages non structurés. Une méthode notable est la méthode de fusion de cellules (*cell merging method*) utilisée par Ye *et al.* [139] et Chung [24] où les *cut-cells* sont fusionnées aux

cellules cartésiennes voisines pour former une nouvelle cellule polygonale qui a plus de quatre cellules voisines. La discrétisation dans ces cellules nouvellement formées perd alors la structure en 5 points (en 2D) de la méthode cartésienne, et l'influence sur le coût en temps de calcul de la méthode est difficile à évaluer.

Ce chapitre a pour objet de présenter une nouvelle méthode IB pour les fluides visqueux incompressibles qui réunit les meilleurs aspects de ces deux grandes classes de méthodes. La méthode LS-STAG est basée sur la discrétisation volumes finis «antisymétrique » de Verstappen et Veldman [134] sur grilles cartésiennes décalées en géométrie simple. En particulier, la méthode LS-STAG possède les propriétés suivantes :

- La frontière Γ^{ib} du domaine est représentée implicitement par une fonction de distance signée (i.e. la fonction level-set [100, 101]) qui assure une représentation précise de la frontière. Les méthodes level-set ont été introduites par Osher and Sethian [102] pour résoudre numériquement des problèmes physiques avec des interfaces dynamiques. Et pour les fluides incompressibles son application majeure réside dans le calcul d'écoulements diphasiques [125]. La fonction level-set nous sert à calculer de manière très efficace les paramètres géométriques dans les cellules du domaine, et notamment dans les cut-cells.
- À la différence des méthodes IB classiques, les variables discrètes sont vraiment calculées près de la frontière immmergée, et pas seulement interpolées. De plus la méthode LS-STAG unifie la discrétisation dans les cellules cartésiennes et les cut-cells et de ce fait la discrétisation dans les cut-cells ne nécessite pas de traitement ad hoc, ce qui serait totalement déconnecté de la méthode MAC de départ.
- Nous avons construit notre discrétisation de manière à ce que les propriétés de conservation globales soient satisfaites au niveau discret dans tout le domaine fluide, ce qui est un point crucial pour obtenir des solutions numériques physiquement réalistes [7, 93, 134]. Afin d'assurer l'examen discret de ces quantités jusque dans les cut-cells, nous avons pris en compte précisément les termes agissant sur la frontière immergée dans les équations de conservation globales au niveau discret, et continu. En étendant les considérations de la section 2.3 au cas des géométries complexes nous avons pu déterminer sans ambiguïté les flux convectifs, de pression et diffusifs, et y incorporer les conditions aux limites sur la frontière immergée de manière consistante.
- D'un point de vue algorithmique, une des principales conséquences de la discrétisation LS-STAG est qu'elle préserve la structure en 5 points du schéma cartésien original. Cette propriété a permis l'utilisation en "boîte noire" d'un solveur de type multigrille pour maillages structurés [132], et aucune modification n'a été apportée afin de prendre en compte la frontière immergée.

Nous mentionnons que la première tentative visant la construction d'une méthode de type *IB* basée sur les idées de Verstappen et Veldman se trouve dans la référence [28]. Cependant cet article ne comporte que peu de détails concernant la méthode numérique employée près de la frontière immergée, et il semble que le calcul : des paramètres géométriques des *cut-cells*, l'implémentation des conditions aux limites et encore la discrétisation des flux diffusifs, n'est pas

le même que dans la méthode LS-STAG.

3.2 Le maillage LS-STAG pour frontières immergées

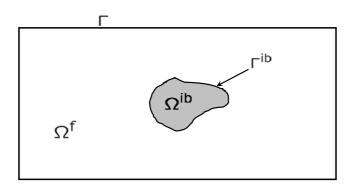


Fig. 3.2 – Géométrie immergée dans un domaine rectangulaire Ω . La frontière du domaine fluide $\Omega^f = \Omega^{ib}$ est $\Gamma \cup \Gamma^{ib}$

Tout d'abord, nous allons étendre l'arrangement décalé de la méthode MAC au cas des géométries complexes, et ainsi introduire le maillage LS-STAG. Nous considérons maintenant un domaine solide irrégulier Ω^{ib} qui est immergé dans le domaine de calcul Ω représenté figure 3.2, tel que $\Omega^{\mathrm{f}} = \Omega \setminus \Omega^{\mathrm{ib}}$ représente le domaine fluide dans lequel les équations de Navier-Stokes sont discrétisées. Pour représenter la frontière immergée Γ^{ib} , nous utilisons une fonction de distance signée $\phi(\boldsymbol{x})$ (la fonction level set [100, 101]), avec la convention que $\phi(\boldsymbol{x})$ est négative dans la région fluide Ω^{f} , $\phi(\boldsymbol{x})$ est positive dans le solide Ω^{ib} , et qui est telle que Γ^{ib} correspond à l'iso-valeur zéro de cette fonction, i.e. :

$$\phi(\boldsymbol{x}) \equiv \begin{cases} -\Delta, & \boldsymbol{x} \in \Omega^{f}, \\ 0, & \boldsymbol{x} \in \Gamma^{ib}, \\ +\Delta, & \boldsymbol{x} \in \Omega^{ib}, \end{cases}$$
(3.1)

où Δ représente la distance entre x et le point le plus proche de la frontière immergée.

Cela nous amène à l'extension du maillage MAC qui est représentée sur la figure 3.3, et qui sera appelée dans la suite le maillage LS-STAG. Dans chaque cut-cell $\Omega_{i,j}$, la frontière immergée est représentée par des segments de droite dont les extrémités sont définies par interpolation linéaire de la variable $\phi_{i,j}$, qui représente la valeur de la fonction level-set $\phi(x_i, y_j)$ au coin supérieur droit de la cellule. Les notations introduites dans la section 2.1.2 pour la méthode cartésienne sont utilisées pour les faces des cut-cells. Par exemple dans la figure 3.3, les faces composant la frontière de la cut-cell trapézoïdale $\Omega_{i,j}$ sont notées :

$$\Gamma_{i,j} = \Gamma_{i,j}^{w} \cup \Gamma_{i,j}^{e} \cup \Gamma_{i,j}^{s} \cup \Gamma_{i,j}^{ib}, \tag{3.2}$$

où $\Gamma_{i,j}^{ib}$ représente la face solide de la *cut-cell*. Comme nous le justifions plus loin dans ce manuscrit, les inconnues de vitesse sont placées au milieu de la partie fluide des faces d'une cellule. La

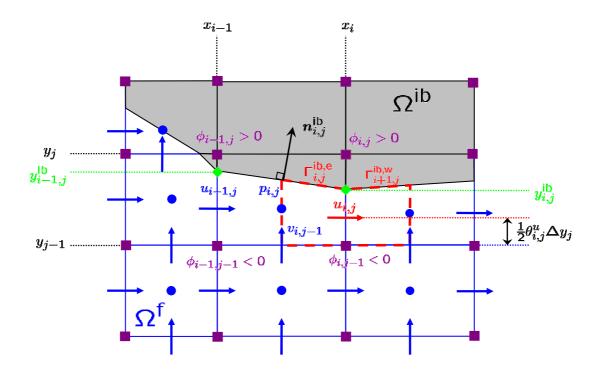


FIG. 3.3 – Arrangement décalé des inconnues près de la cut-cell trapézoïdale $\Omega_{i,j}$ sur le maillage LS-STAG.

pression discrète $p_{i,j}$ est quant à elle placée à l'intersection des inconnues de vitesse dans cette figure. Cet emplacement est en fait uniquement utilisé pour des raisons de visualisation, et ne sera jamais utilisé dans la discrétisation. En effet, l'inconnue de pression de la méthode LS-STAG est constante par morceaux dans chaque cellule, et la discrétisation de son gradient est obtenue par dualité avec la divergence discrète et non par l'utilisation d'une formule de différences finies basée sur les caractéristiques géométriques des cellules (cf. section 2.4.1). La figure 3.3 comporte les trois grands types de cut-cells rencontrées sur le maillage LS-STAG: les cellules trapézoïdales telles que $\Omega_{i,j}$ ou $\Omega_{i+1,j}$, les cellules triangulaires comme $\Omega_{i-1,j+1}$, et les cellules pentagonales comme $\Omega_{i-1,j}$. La discrétisation des équations de quantité de mouvement s'effectue dans des volumes de contrôle décalés $\Omega_{i,j}^u$ et $\Omega_{i,j}^v$, qui doivent être adaptés à chaque type de cut-cell. Par exemple dans la figure 3.3, les faces du volume de contrôle $\Omega_{i,j}^u$ sont telles que :

$$\Gamma_{i,j}^{u} = \Gamma_{i,j}^{u,w} \cup \Gamma_{i,j}^{u,e} \cup \left(\Gamma_{i,j}^{s,e} \cup \Gamma_{i+1,j}^{s,w}\right) \cup \left(\Gamma_{i,j}^{ib,e} \cup \Gamma_{i+1,j}^{ib,w}\right), \tag{3.3}$$

où les faces solides $\Gamma^{\mathrm{ib,e}}_{i,j} \cup \Gamma^{\mathrm{ib,w}}_{i+1,j}$ sont constituées des deux moitiés des frontières solides des cut-cells voisines $\Gamma^{\mathrm{ib,e}}_{i,j} \subset \Gamma^{\mathrm{ib}}_{i,j}$ et $\Gamma^{\mathrm{ib,w}}_{i+1,j} \subset \Gamma^{\mathrm{ib}}_{i+1,j}$. Pour les autres types de cut-cells, les volumes de contrôle sont construits à partir des six moitiés de volumes de contrôles génériques représentés sur la figure 3.4.

Nous voulons aussi ajouter que la forme des volumes de contrôle décalés de la figure 3.4 est donnée à titre illustratif, et certaines données géométriques comme leur volume ou la forme exacte des faces verticales $\Gamma^{u,w}_{i,j}$ et $\Gamma^{u,e}_{i,j}$ de $\Omega^u_{i,j}$ ne sont jamais utilisées par la discrétisation LS-STAG: à la

place nous utiliserons les arguments développés dans le chapitre 2. La discrétisation dans les cutcells sera basée sur la conservation de quantités globales de l'écoulement : la masse, la quantité de mouvement et l'énergie cinétique. Nous présentons dans la figure 3.5 la liste exhaustive des volumes de contrôle $\Omega_{i,j}^u$ obtenus à partir de combinaisons des demi-volumes de la figure 3.4. Il est important de préciser que la discrétisation LS-STAG ne nécessite pas de traitement indépendant pour chacun des cas présentés dans cette figure. En effet, la discrétisation est construite à partir des demi-volumes de la figure 3.4, de manière à ce que chaque appareillement admissible conduise à une discrétisation consistante de l'équation de conservation de quantité de mouvement vérifiant les propriétés de conservation mentionnées précédemment. Par contre, la méthode LS-STAG repose sur une représentation précise des caractéristiques géométriques des cut-cells $\Omega_{i,j}$, et la variable level-set $\phi_{i,j}$ sert à calculer efficacement les données géométriques telles le volume, la surface des faces et les composantes de leurs vecteurs normaux, etc... Une quantité extrêmement importante pour calculer ces données, et pour la discrétisation LS-STAG en général, est la fraction fluide de chaque face d'une cellule $\Omega_{i,j}$. Par exemple dans la figure 3.3, nous calculons la longueur $y_{i,j}^{ib} - y_{j-1}$ de la face $\Gamma_{i,j}^{e}$ contenue dans le domaine fluide en utilisant une interpolation linéaire de $\phi(x_i, y)$ pour $y \in [y_{j-1}, y_j]$, ce qui s'écrit :

$$y_{i,j}^{\text{ib}} - y_{j-1} = \theta_{i,j}^u \ \Delta y_j, \quad \text{avec } \theta_{i,j}^u = \frac{\phi_{i,j-1}}{\phi_{i,j-1} - \phi_{i,j}} \quad \text{puisque } \phi(x_i, y_{i,j}^{\text{ib}}) = 0.$$

Les scalaires $\theta_{i,j}^u$ et $\theta_{i,j}^v$, qui sont compris dans [0,1], représentent la portion fluide des faces verticales et horizontales respectivement. Les fractions fluides des faces apparaissent aussi dans l'expression du volume $V_{i,j}$ de la cut-cell $\Omega_{i,j}$, qui est donnée dans la table 3.1 pour chaque type de cut-cell. Ces volumes ont été calculés analytiquement par intégration de la fonction caractéristique d'une cut-cell. Notons aussi que $V_{i,j}$ correspond à la fonction VOF utilisé pour la simulation d'écoulements polyphasiques, e.g. [120].

Type de cut-cell	Volume
(c) Cellule pentagonale Nord-Est	$V_{i,j} = \left[\theta_{i,j}^v + \frac{1}{2}(1 + \theta_{i,j}^u)(1 - \theta_{i,j}^v)\right] \Delta x_i \Delta y_j$
(d) Cellule triangulaire Nord	$V_{i,j} = \left[\theta_{i,j}^v + \frac{1}{2}(1 + \theta_{i,j}^u)(1 - \theta_{i,j}^v)\right] \Delta x_i \Delta y_j$ $V_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\theta_{i,j}^u + \theta_{i-1,j}^u\right) \Delta x_i \Delta y_j$
(e) Cellule triangulaire Nord-Ouest	$V_{i,j} = \frac{1}{2} \theta_{i,j}^u \theta_{i,j-1}^v \Delta x_i \Delta y_j$
(f) Coin saillant Nord-Ouest	$V_{i,j} = \tilde{\Delta}x_i \Delta y_j$

TAB. 3.1 – Formules analytiques des volumes des *cut-cells* élémentaires de la figure 3.4. Pour les autres *cut-cells* présentées leur volume est déduit aisément à partir de ces formules.

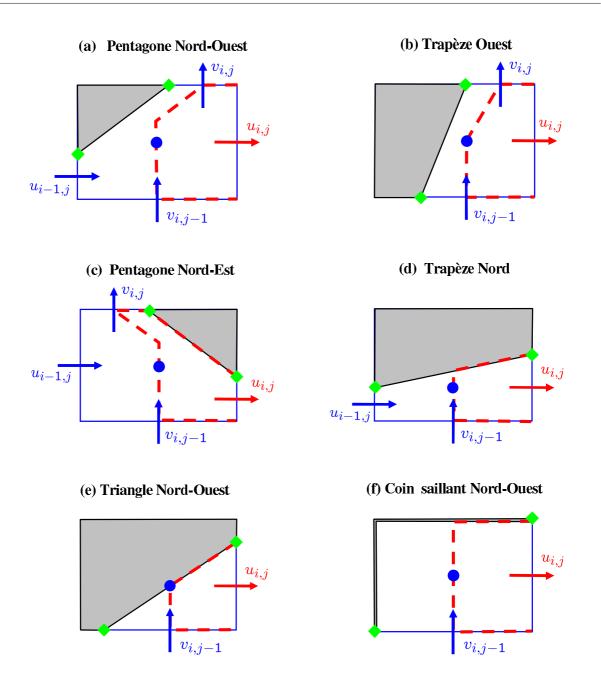


FIG. 3.4 – Les différentes moitiés de volumes de contrôle pour $u_{i,j}$ dans la cut- $cell~\Omega_{i,j}$. Les losanges (\blacklozenge) correspondent à l'emplacement pour la discrétisation de la condition aux limites de vitesse. Le coin rentrant dans un maillage cartésien est un cas particulier de la cellule pentagonale (c) où $\phi_{i,j} = 0$, et la cellule (f) (telles que $\phi_{i-1,j-1} = \phi_{i-1,j} = \phi_{i,j} = 0$ and $\phi_{i,j-1} < 0$) correspond au cas du coin saillant. Seule la valeur du volume distingue cette cellule du cas triangulaire (e) dans la limite où $\phi_{i-1,j-1} = \phi_{i,j} = 0$, $\phi_{i-1,j} > 0$ et $\phi_{i,j-1} < 0$.

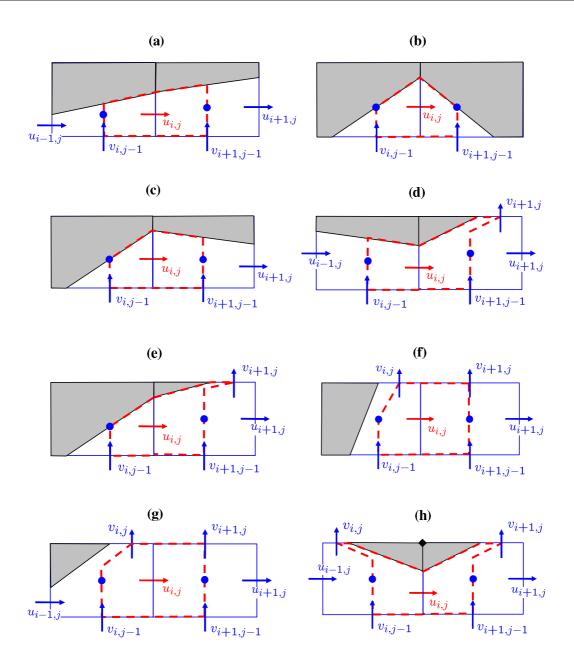


FIG. 3.5 – Combinaisons envisageables pour former le volume de contrôle $\Omega^u_{i,j}$ à partir des moitiés de cellule de la figure 3.4. Le cas (h) n'est pas admissible car le quotient $\partial v/\partial x|_{i,j}$, placé au coin supérieur droit de $\Omega_{i,j}$, est alors bi-valent. Ce cas correspond à une oscillation de la fonction level-set $(\phi_{i-1,j} < 0, \phi_{i,j} > 0)$ et $\phi_{i+1,j} > 0$. Ce cas est aisément filtré en imposant $\phi_{i,j} = \frac{1}{2}(\phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j})$ et n'apparait que rarement dans nos maillages puisqu'il correspond à une grille grossière relativement au rayon de courbature local de la frontière immergée.

3.3 Discrétisation de l'équation de continuité et conservation de la masse

3.3.1 Discrétisation de l'équation de continuité

Comme pour la méthode cartésienne de Verstappen & Veldman [134], le point de départ de la méthode LS-STAG est la discrétisation de l'équation de continuité dans la cellule $\Omega_{i,j}$:

$$\dot{m}_{i,j} \equiv \int_{\Gamma_{i,j}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, dS.$$
 (3.4)

Pour une cellule fluide générique (cut-cell ou cartésienne), nous notons ses faces $\Gamma_{i,j} = \Gamma^{\rm w}_{i,j} \cup \Gamma^{\rm e}_{i,j} \cup \Gamma^{\rm i}_{i,j} \cup \Gamma^{\rm ib}_{i,j}$, et décomposons le flux de masse sur chacune d'entre elle :

$$\dot{m}_{i,j} \equiv -\overline{u}_{i-1,j} + \overline{u}_{i,j} - \overline{v}_{i,j-1} + \overline{v}_{i,j} + \overline{U}_{i,j}^{ib} = 0.$$

$$(3.5)$$

Dans cette équation, $\overline{U}_{i,j}^{ib} \equiv \int_{\Gamma_{i,j}^{ib}} \boldsymbol{v}^{ib} \cdot \boldsymbol{n}^{ib} dS$ désigne le flux de masse au travers de la partie solide de la *cut-cell*, qui est non nul uniquement pour des conditions aux limites non homogènes. Pour la cellule $\Omega_{i,j}$ de la figure 3.3 le flux de masse sur la face Est $\Gamma_{i,j}^{e}$ s'écrit :

$$\overline{u}_{i,j} \equiv \int_{\Gamma_{i,j}^{e}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{x} \, dS = \int_{y_{j-1}}^{y_{i,j}^{ib}} u(x_{i}, y) \, dy.$$
(3.6)

De manière à discrétiser aisément cette intégrale, nous plaçons l'inconnue de vitesse $u_{i,j}$ au centre de la face, ce qui revient à écrire :

$$u_{i,j} \equiv u(x_i, y_{j-1} + \frac{1}{2} \theta_{i,j}^u \Delta y_j).$$
 (3.7)

Ainsi, le flux de masse (3.6) sur la face Est est discrétisé par la quadrature du point milieu :

$$\overline{u}_{i,j} \cong \theta_{i,j}^u \Delta y_j u_{i,j}, \tag{3.8}$$

et en utilisant des discrétisations analogues pour les autres faces de la cellule, l'équation de continuité discrète s'écrit :

$$\dot{m}_{i,j} \equiv \Delta y_j \left(\theta_{i,j}^u u_{i,j} - \theta_{i-1,j}^u u_{i-1,j} \right) + \Delta x_i \left(\theta_{i,j}^v v_{i,j} - \theta_{i,j-1}^v v_{i,j-1} \right) + \overline{U}_{i,j}^{ib} = 0.$$
 (3.9)

Il reste maintenant à discrétiser le terme de bord suivant :

$$\overline{U}_{i,j}^{\text{ib}} \cong u_{i,j}^{\text{ib}} \left[n_x \Delta S \right]_{i,j}^{\text{ib}} + v_{i,j}^{\text{ib}} \left[n_y \Delta S \right]_{i,j}^{\text{ib}}, \tag{3.10}$$

où $[n_x \Delta S]_{i,j}^{\text{ib}}$ et $[n_y \Delta S]_{i,j}^{\text{ib}}$ désignent les maîtres-couples dans la direction horizontale et verticale respectivement, et la vitesse $\boldsymbol{v}_{i,j}^{\text{ib}} = (u_{i,j}^{\text{ib}}, v_{i,j}^{\text{ib}})$ représente une approximation de la vitesse sur la paroi solide $\Gamma_{i,j}^{\text{ib}}$ de la *cut-cell*. Cette vitesse est calculée à l'aide de la formule du trapèze, par exemple pour la figure 3.3 nous écrivons :

$$\mathbf{v}_{i,j}^{\text{ib}} = \frac{1}{2} \mathbf{v}(x_i, y_{i,j}^{\text{ib}}) + \frac{1}{2} \mathbf{v}(x_{i-1}, y_{i-1,j}^{\text{ib}}),$$

où la valeur de la vitesse aux points d'intersection entre la frontière solide et les *cut-cells* est définie par les conditions aux limites du problème continu. Les maîtres-couples sont directement obtenus à partir des fractions fluides des faces de la cellule comme :

$$[n_x \Delta S]_{i,j}^{ib} = (\theta_{i-1,j}^u - \theta_{i,j}^u) \Delta y_j, \qquad [n_y \Delta S]_{i,j}^{ib} = (\theta_{i,j-1}^v - \theta_{i,j}^v) \Delta x_i. \tag{3.11}$$

Il est à noter que cette discrétisation de l'équation de continuité est valable pour tous les types de cut-cells, et que dans le cas particulier d'une cellule fluide cartésienne (telle que la fraction fluide des faces vaut 0 ou 1 uniquement), l'équation (3.9) correspond à la discrétisation de la continuité de la méthode MAC originale (2.21).

Nous introduisons le système matriciel dont chaque ligne (i, j) correspond à l'équation de continuité (3.9) écrite dans chaque cellule $\Omega_{i,j}$:

$$\mathcal{D}U + \overline{U}^{b} + \overline{U}^{ib} = 0, \tag{3.12}$$

où \mathcal{D} désigne l'opérateur de divergence LS-STAG dont les composantes sont données dans l'annexe A, le vecteur $\overline{\mathcal{U}}^{ib}$ comporte la contribution des flux de masse sur Γ^{ib} et $\overline{\mathcal{U}}^{b}$ comporte les contributions des flux de masse sur la frontière Γ alignée avec le maillage (Fig. 3.2) dont l'expression a été donnée dans le chapitre précédent (Eq. (2.24)). Dans les discussions à venir concernant les propriétés discrètes de conservation de la méthode LS-STAG, nous ne traiterons pas des contributions sur la frontière Γ et de leurs contreparties au niveau continu, puisqu'elles ont déjà été traitées dans le chapitre précédent. De ce fait pour alléger les notations, nous écrirons plus simplement le système (3.12) comme :

$$\mathcal{D}U + \overline{U}^{ib} = 0. \tag{3.13}$$

3.3.2 Conservation discrète de la masse totale

Nous allons à présent vérifier que la discrétisation LS-STAG de l'équation de continuité est telle que la masse totale est conservée dans le domaine fluide $\Omega^{\rm f}$. Puisque la discrétisation LS-STAG de la continuité (3.9) vérifie la propriété de conservation locale des flux (2.39), cela revient à montrer que la contribution des flux de masse (3.10) sur la frontière $\Gamma^{\rm ib}$ est nulle, *i.e.* :

$$\mathbb{1}^{\mathrm{T}}\overline{U}^{\mathrm{ib}} = 0. \tag{3.14}$$

La démonstration de ce résultat est donnée dans le cas le plus général où la frontière immergée possède un mouvement de solide indéformable dépendant du temps :

$$v^{\text{ib}}(\boldsymbol{x},t) = V^{\text{ib}}(t) + \Omega^{\text{ib}}(t) \times \boldsymbol{x},$$
 (3.15)

où O est un point de référence de la géométrie immergée Ω^{ib} et $V^{ib}(t)$ et $\Omega^{ib}(t)$ correspondent respectivement à la vitesse de translation du solide et au vecteur rotation qui seront considérés comme des données du problèmes. Nous devons préalablement faire deux hypothèses sur le

domaine de calcul. La première exprime le fait que Γ^{ib} est une surface fermée, i.e. :

$$\int_{\Gamma^{ib}} \boldsymbol{n}^{ib} \, dS = \sum_{\text{Cut-cells } \Omega_{i,j}} \int_{\Gamma_{i,j}^{ib}} \boldsymbol{n}_{i,j}^{ib} \, dS = \mathbf{0}, \tag{3.16a}$$

et la seconde que le domaine n'est pas dilatable :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega^{\mathrm{f}}} \mathrm{d}V = \sum_{\text{Cut-cells } \Omega_{i,j}} \int_{\Gamma_{i,j}^{\mathrm{ib}}} \mathbf{v}^{\mathrm{ib}}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{n}_{i,j}^{\mathrm{ib}} \, \mathrm{d}S = 0, \tag{3.16b}$$

où la notation $\sum_{\text{Cut-cells }\Omega_{i,j}}$ désigne la sommation sur les *cut-cells* $\Omega_{i,j}$ du domaine. Dans ces équations, les termes sous le signe intégral sont linéaires en espace puisque $v^{\text{ib}}(x,t)$ est donné par (3.15), de ce fait les quadratures du point milieu et du trapèze sont exactes :

$$\sum_{\text{Cut-cells }\Omega_{i,j}} [\mathbf{n} \Delta \mathbf{S}]_{i,j}^{\text{ib}} = \mathbf{0}, \tag{3.17a}$$

$$\sum_{\text{Cut-cells }\Omega_{i,j}} \mathbf{\Omega}^{\text{ib}}(t) \times \frac{\mathbf{O}\boldsymbol{a}_{i,j}^{\text{ib}} + \mathbf{O}\boldsymbol{b}_{i,j}^{\text{ib}}}{2} \cdot [\boldsymbol{n}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{S}]_{i,j}^{\text{ib}} = 0, \tag{3.17b}$$

et $\boldsymbol{a}_{i,j}^{\text{ib}}$ désignent les extrémités du segment $\Gamma_{i,j}^{\text{ib}}$ d'une *cut-cell*. Finalement, par intégration du champs de vitesse (3.15) avec la quadrature du trapèze sur chacune des portions $\Gamma_{i,j}^{\text{ib}}$ des *cut-cells* $\Omega_{i,j}$, nous obtenons :

$$egin{aligned} \mathbb{1}^{\mathrm{T}}\overline{U}^{\mathrm{ib}} &= \sum_{\mathrm{Cut-cells}} oldsymbol{V}^{\mathrm{ib}}(t) \cdot [oldsymbol{n}oldsymbol{\Delta}oldsymbol{S}]^{\mathrm{ib}}_{i,j} + oldsymbol{\Omega}^{\mathrm{ib}}(t) imes rac{\mathbf{O}oldsymbol{a}^{\mathrm{ib}}_{i,j} + \mathbf{O}oldsymbol{b}^{\mathrm{ib}}_{i,j}}{2} \cdot [oldsymbol{n}oldsymbol{\Delta}oldsymbol{S}]^{\mathrm{ib}}_{i,j}, \ &= 0, \end{aligned}$$

grâce aux identités (3.17a) et (3.17b).

Ainsi la méthode LS-STAG hérite de la méthode MAC originale la propriété globale de conservation de masse. Dans la suite du manuscrit nous verrons que les autres propriétés de conservation de la section 2.3 ne sont pas satisfaites aussi simplement et leur examen est assuré en introduisant des contraintes sur les formules de discrétisation. Dans cette première étape de la construction de la méthode LS-STAG, nous avons défini sans ambiguïté l'emplacement des inconnues de vitesse comme le centre des faces fluides des cellules, généralisant ainsi l'arrangement décalé de la méthode MAC originale dans les cut-cells. Par ailleurs la contribution $\mathbbm{1}^T\overline{U}^{ib}$ sur la frontière immergée Γ^{ib} est nulle, ce que nous avons pu vérifier lors de nos expériences numériques au $z\acute{e}ro$ machine près. Si bien que dans le cas d'un domaine de calcul comportant une condition de sortie, le calcul de la correction de vitesse (2.140) assurant la condition de solvabilité de l'équation de Poisson (2.131) n'a pas à être modifiée par la présence du solide immergé.

3.4 La discrétisation des flux de pression et convectifs basée sur la conservation de l'énergie cinétique

La discrétisation LS-STAG des flux convectifs et de pression est construite de telle sorte que, dans le cas d'un fluide non-visqueux, le bilan d'énergie cinétique $E_c = \int_{\Omega} \frac{\rho \boldsymbol{v}^2}{2} \ dV$:

$$\frac{dE_{c}}{dt} = -\int_{\Gamma^{ib}} \left(\frac{\rho \mathbf{v}^{2}}{2}\right) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \ dS - \int_{\Gamma^{ib}} p \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \ dS, \tag{3.18}$$

est vérifié au niveau discret. Ce bilan discret est obtenu à partir du système correspondant à la discrétisation des équations de quantité de mouvement (2.8) qui s'écrit :

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{M}U) + \rho \mathcal{C}[\overline{U}]U + \mathcal{G}P - \eta \mathcal{K}U + \rho S^{\mathrm{ib,c}} - \eta S^{\mathrm{ib,v}} = 0, \tag{3.19}$$

où $S^{\mathrm{ib,c}}$ et $S^{\mathrm{ib,v}}$ désignent les termes de bords provenant de la discrétisation des flux convectifs et diffusifs respectivement sur la frontière Γ^{ib} . Si le bilan d'énergie cinétique discret est obtenu de la même manière que dans la section 2.3.2, il est cependant nécessaire de détailler la première étape de ce calcul puisqu'elle nous permet de construire la matrice de masse \mathcal{M} . L'énergie cinétique E_{c} est discrétisée dans chaque cellule $\Omega_{i,j}$, y compris dans les *cut-cells*, par la quadrature du trapèze :

$$E_{c}^{h}(t) = \rho \left(\frac{1}{2}U^{T}\mathcal{M}U + \frac{1}{2}U^{ib,T}\mathcal{M}^{ib}U^{ib}\right), \tag{3.20}$$

où le terme $U^{ib,T}\mathcal{M}^{ib}U^{ib}$ représente la contribution issue des termes de bords sur Γ^{ib} , que nous supposerons indépendantes du temps. La formule du trapèze permet d'obtenir le coefficient diagonal de la matrice de masse dans les directions horizontales et verticales :

$$\mathcal{M}_{P}^{x}(i,j) = \frac{1}{2}V_{i,j} + \frac{1}{2}V_{i+1,j}, \quad \mathcal{M}_{P}^{y}(i,j) = \frac{1}{2}V_{i,j} + \frac{1}{2}V_{i,j+1},$$
(3.21)

ces expressions montrent que les matrices de masses pour u et v sont construites indépendamment de la forme des volumes de contrôles $\Omega^u_{i,j}$ et $\Omega^v_{i,j}$ représentés par la figure 3.5. Finalement dans le cas d'un fluide non-visqueux le bilan discret d'énergie cinétique à une forme similaire à (3.18):

$$\frac{\mathrm{dE}_{\mathrm{c}}^{h}}{\mathrm{d}t} = -\rho U^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{ib,c}} - P^{\mathrm{T}} \overline{U}^{\mathrm{ib}}, \tag{3.22}$$

si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$C[\overline{U}] = -C[\overline{U}]^{\mathrm{T}}, \tag{3.23}$$

et le gradient de pression doit être le dual de l'opérateur de divergence :

$$\mathcal{G} = -\mathcal{D}^{\mathrm{T}}.\tag{3.24}$$

Ces deux relations vont respectivement conditionner la discrétisation LS-STAG des flux convectifs et de pression.

Dans la prochaine section, nous allons simplement expliciter la condition (3.24) et ainsi obtenir la discrétisation du flux de pression. La discrétisation des flux convectifs se révèle être une étape plus délicate dans la construction de la méthode LS-STAG. En effet nous devons étendre la discrétisation antisymétrique de Verstappen et Veldman [134] dans les cut-cells afin de satisfaire la condition (3.23) d'une part, et d'assurer que le terme $\rho U^T S^{\mathrm{ib},c}$ corresponde à une discrétisation consistante de $\int_{\Gamma^{\mathrm{ib}}} \left(\frac{\rho v^2}{2}\right) v \cdot n$ dS dans le bilan continu (3.18).

3.4.1 Discrétisation du gradient de pression

La condition (3.24) donne l'expression du gradient de pression à partir de l'opérateur de divergence LS-STAG défini par les relations de (A.1) à (A.4). La discrétisation du gradient de pression dans les volumes de contrôles $\Omega^u_{i,j}$ et $\Omega^v_{i,j}$ est obtenue en évaluant respectivement les termes $[-\mathcal{D}^{x\,\mathrm{T}}P](i,j)$ et $[-\mathcal{D}^{y\,\mathrm{T}}P](i,j)$:

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u}} p \, \boldsymbol{e}_{x} \cdot \boldsymbol{n} \, dS \cong [-\mathcal{D}^{x \, \mathrm{T}} P](i,j) = \theta_{i,j}^{u} \, \Delta y_{j} \left(p_{i+1,j} - p_{i,j} \right), \tag{3.25a}$$

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{v}} p \, \boldsymbol{e}_{y} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S \cong [-\mathcal{D}^{y \,\mathrm{T}} P](i,j) = \theta_{i,j}^{\,v} \, \Delta x_{i} \left(p_{i,j+1} - p_{i,j} \right). \tag{3.25b}$$

Ces formules sont valables pour tous les types de cellules fluides, et nous retrouvons la discrétisation de la méthode MAC pour un volume de contrôle $\Omega^u_{i,j}$ situé loin de la frontière immergée :

$$[\mathcal{G}^x P]_{i,j} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\frac{1}{2} \Delta x_{i+1} + \frac{1}{2} \Delta x_i} [\mathcal{M}^x](i,j) = \delta_x^+ p_{i,j} \mathcal{M}_P^x(i,j),$$
(3.26)

avec $\mathcal{M}_{\mathrm{P}}^{x}(i,j) = \left(\frac{1}{2}\Delta x_{i+1} + \frac{1}{2}\Delta x_{i}\right)\Delta y_{j}$. Dans les *cut-cells* cependant, il n'est pas possible d'interpréter les formules (3.25) comme des opérateurs de différences finies appliqué à $p_{i,j}$, situé au barycentre des *cut-cells*. Comme nous l'avions déjà évoqué dans le chapitre précédent la discrétisation *LS-STAG* est à rapprocher des méthodes d'éléments finis non conformes, où la pression est approchée par des polynômes constants par morceaux avec les degrés de liberté placés aux barycentres des éléments. De ce fait, $p_{i,j}$ est une approximation valide de la pression à l'intérieur des *cut-cells* et en particulier sur les faces solide et nous vérifions que dans le bilan d'énergie cinétique discret (3.22) la contribution de la pression :

$$\sum_{\text{Cut-cells }\Omega_{i,j}} p_{i,j} \,\overline{U}_{i,j}^{\text{ib}} = P^{\text{T}} \overline{U}^{\text{ib}}, \tag{3.27}$$

correspond à la discrétisation de travail de pression $\int_{\Gamma^{\text{ib}}} p \, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, dS$ sur la frontière immergée.

3.4.2 Discrétisation des termes convectifs

Dans la section 2.4.2 nous avons vu que la condition d'antisymétrie (3.23) portant sur $C[\overline{U}]$ est satisfaite dans le cas des géométries simples pourvu que soient utilisées la discrétisation centrée

de Verstappen et Veldman [134] qui s'écrit pour le volume de contrôle $\Omega_{i,j}^u$:

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) u \, dS \cong \left[\mathcal{C}^{x}[\overline{U}] \mathcal{U} \right] (i,j) = \mathcal{C}^{x}[\overline{U}]_{W}(i,j) u_{i-1,j} + \mathcal{C}^{x}[\overline{U}]_{E}(i,j) u_{i+1,j} + \mathcal{C}^{x}[\overline{U}]_{P}(i,j) u_{i,j} + \mathcal{C}^{x}[\overline{U}]_{S}(i,j) u_{i,j-1} + \mathcal{C}^{x}[\overline{U}]_{N}(i,j) u_{i,j+1},$$
(3.28)

avec:

$$C^x[\overline{U}]_P(i,j) = \frac{1}{4}\dot{m}_{i,j} + \frac{1}{4}\dot{m}^{i+1,j},$$
 (3.29a)

$$C^{x}[\overline{U}]_{W}(i,j) = -\frac{1}{4}\overline{u}_{i-1,j} - \frac{1}{4}\overline{u}_{i,j}, \quad C^{x}[\overline{U}]_{E}(i,j) = \frac{1}{4}\overline{u}_{i,j} + \frac{1}{4}\overline{u}_{i+1,j}, \tag{3.29b}$$

$$C^{x}[\overline{U}]_{S}(i,j) = -\frac{1}{4}\overline{v}_{i,j-1} - \frac{1}{4}\overline{v}_{i+1,j-1}, \quad C^{x}[\overline{U}]_{N}(i,j) = \frac{1}{4}\overline{v}_{i,j} + \frac{1}{4}\overline{v}_{i+1,j}.$$
(3.29c)

Dans les cut-cells, la discrétisation antisymétrique donnée par (3.28) et (3.29) doit être modifiée pour prendre en compte les conditions aux limites sur la paroi immergée. Cette discrétisation s'avère être plus difficile à construire que pour le gradient de pression car nous ne pouvons obtenir une formule unique qui soit valable pour tous les types de cut-cells: la discrétisation antisymétrique doit être construite dans chaque moitié de cut-cell générique de la figure 3.4 de façon à ce que la condition (3.23) soit vérifiée. Prenons comme exemple le volume de contrôle $\Omega^u_{i,j}$ de la figure 3.3, dont la paroi supérieure solide $\Gamma^{\mathrm{ib,e}}_{i,j} \cup \Gamma^{\mathrm{ib,w}}_{i+1,j}$ est constituée de deux moitiés de cellules trapèzoïdales, et dans lequel la discrétisation du terme convectif doit prendre la forme :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) u \, dS \cong [\mathcal{C}^{x}[\overline{U}]\mathcal{U}](i,j) = \mathcal{C}^{x}[\overline{U}]_{W}(i,j)u_{i-1,j} + \mathcal{C}^{x}[\overline{U}]_{E}(i,j)u_{i+1,j} + \mathcal{C}^{x}[\overline{U}]_{P}(i,j)u_{i,j} + \mathcal{C}^{x}[\overline{U}]_{S}(i,j)u_{i,j-1} + [S_{x}^{ib,c}](i,j).$$
(3.30)

Dans cette équation, le coefficient $C[\overline{U}]_N(i,j)$ n'existe pas car l'inconnue $u_{i,j+1}$ ne fait pas partie du maillage fluide. La condition d'antisymétrie (3.23) s'écrit pour ce volume de contrôle :

$$C^{x}[\overline{U}]_{P}(i,j) = 0, \qquad C^{x}[\overline{U}]_{E}(i,j) = -C^{x}[\overline{U}]_{W}(i+1,j). \tag{3.31}$$

La discrétisation du terme convectif qui vérifie ces conditions s'obtient en écrivant ce terme sous la forme de flux au travers de chaque face :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) u \, dS = -\int_{\Gamma_{i,j}^{u,w}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{x}) u \, dy + \int_{\Gamma_{i,j}^{u,e}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{x}) u \, dy
-\int_{\Gamma_{i,j}^{s,e} \cup \Gamma_{i+1,j}^{s,w}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{y}) u \, dx + \int_{\Gamma_{i,j}^{ib,e} \cup \Gamma_{i+1,j}^{ib,w}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}^{ib}) u \, dS.$$
(3.32)

Les flux au travers des trois surfaces fluides sont calculés par les formules (2.83), (2.84) et (2.85) qui font intervenir la discrétisation LS-STAG (3.8) des flux de masse. Les flux aux travers de

chaque moitié de face solide $\Gamma^{\rm ib,e}_{i,j}$ et $\Gamma^{\rm ib,w}_{i+1,j}$ sont quant à eux discrétisés séparément :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{\text{ib,e}}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_{i,j}^{\text{ib}}) u \, dS \cong \frac{\overline{U}_{i,j}^{\text{ib}}}{2} \left(\frac{1}{2} \underline{u_{i,j}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{u}(x_i, y_{i,j}^{\text{ib}})} \right), \tag{3.33a}$$

$$\int_{\Gamma_{i+1,j}^{\mathrm{ib,w}}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}_{i+1,j}^{\mathrm{ib}}) u \, \mathrm{d}S \cong \frac{\overline{U}_{i+1,j}^{\mathrm{ib}}}{2} \left(\frac{1}{2} \underline{u_{i,j}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{u}(x_i, y_{i,j}^{\mathrm{ib}})} \right). \tag{3.33b}$$

Dans ces expressions, les termes soulignés une seule fois interviennent dans le terme diagonal $C^x[\overline{U}]_P(i,j)u_{i,j}$ de façon à retrouver l'expression de la continuité discrète dans $\Omega_{i,j}$ et $\Omega_{i+1,j}$, tandis que les termes soulignés deux fois se retrouvent dans le terme source $[S_x^{ib,c}](i,j)$. Ainsi, la discrétisation des termes convectifs dans ce volume de contrôle est donnée de manière équivalente par (3.29), mis à part que :

$$C^{x}[\overline{U}]_{N}(i,j) = 0, \quad [S_{x}^{ib,c}](i,j) = \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{U}_{i,j}^{ib}}{2} + \frac{\overline{U}_{i+1,j}^{ib}}{2} \right) u(x_{i}, y_{i,j}^{ib}). \tag{3.34}$$

La condition d'antisymétrie (3.31) est alors vérifiée, et nous considérons que le terme source $[S_x^{\mathrm{ib,c}}](i,j)u_{i,j}$ qui apparait dans le bilan d'énergie cinétique est la contrepartie discrète du terme $\int_{\Gamma^{\mathrm{ib}}} |\boldsymbol{v}|^2 \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}/2 \, \mathrm{d}S$ sur la frontière solide $\Gamma_{i,j}^{\mathrm{ib,e}} \cup \Gamma_{i+1,j}^{\mathrm{ib,w}}$ du volume de contrôle.

Pour les autres combinaisons de *cut-cells* représentées dans la figure 3.4, l'expression du flux convectif sur les faces solides est donnée dans l'annexe B. Cette discrétisation est construite de manière à vérifier la condition d'antisymétrie (3.23) pour chaque combinaison possible de *cut-cells*.

3.5 Discrétisation des flux diffusifs basée sur la conservation totale de quantité de mouvement

Pour l'équation de mouvement horizontale (2.8a), les termes visqueux dans le volume de contrôle $\Omega^u_{i,j}$ s'écrivent :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u}} \nabla u \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \int_{\Gamma_{i,j}^{u}} \frac{\partial u}{\partial x} \, \boldsymbol{e}_{x} \cdot \boldsymbol{n} \, dS + \int_{\Gamma_{i,j}^{u}} \frac{\partial u}{\partial y} \, \boldsymbol{e}_{y} \cdot \boldsymbol{n} \, dS.$$
 (3.35)

La discrétisation de ces termes a été menée dans le but de préserver la simplicité du schéma à 5 points de la méthode MAC (cf. section 2.5). Cette discrétisation s'est avérée être plus complexe à obtenir que pour les flux convectifs, si bien que nous avons été amenés à la construire en nous basant sur l'examen discret de la conservation de quantité de mouvement totale (cf. section 2.3.1). C'est à dire que la discrétisation des flux diffusifs (3.35) dans les cut-cells doit vérifier la propriété de conservation locale des flux d'une part, et leurs contributions sur les frontières solides doivent correspondre à la force hydrodynamique $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ agissant sur la frontière

immergée Γ^{ib} :

$$F_{x} = \int_{\text{Pib}} \left[p - \eta \frac{\partial u}{\partial x} \right] \mathbf{e}_{x} \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_{\text{Pib}} \eta \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_{y} \cdot \mathbf{n} \, dS, \tag{3.36a}$$

$$F_{y} = -\int_{\Gamma^{\text{ib}}} \eta \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{e}_{x} \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_{\Gamma^{\text{ib}}} \left[p - \eta \frac{\partial v}{\partial y} \right] \mathbf{e}_{y} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$
 (3.36b)

Pour vérifier le deuxième de ces points nous utiliserons les mêmes arguments que ceux déjà utilisés dans la section 2.5.3 dans le cas des géométries simples. Comme nous l'avons fait dans la section 2.5 nous distinguons la discrétisation des contraintes normales $\int_{\Gamma_{i,j}^u} \partial u/\partial x \ e_x \cdot n \, dS$, de celle des contraintes de cisaillement $\int_{\Gamma_{i,j}^u} \partial u/\partial y \ e_y \cdot n \, dS$. Sur le maillage LS-STAG il est naturel de placer

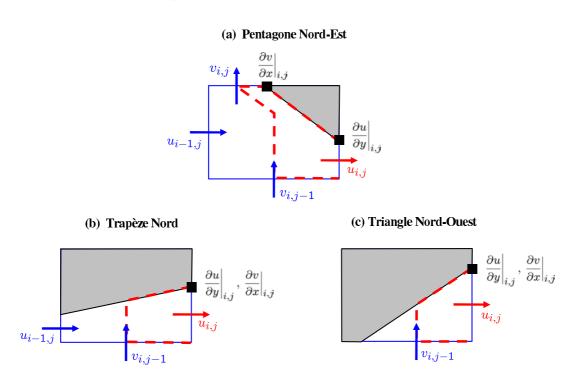


Fig. 3.6 – Disposition des contraintes de cisaillement dans les 3 cut-cells génériques $\Omega_{i,j}$. Leur emplacement dans les autres cut-cells de la figure 3.4 est aisément déduit depuis cette figure.

dans les cut-cells les contraintes de cisaillement aux extrémités de la frontière solide tel que nous l'illustrons dans la figure 3.6. Remarquons que dans le cas d'une cellule de type pentagone, $\partial u/\partial y|_{i,j}$ et $\partial v/\partial x|_{i,j}$ sont calculées en deux points distincts. Pour les contraintes normales, nous considérons que ces termes ont une origine physique (partie diagonale du tenseur de contraintes de Cauchy) ainsi qu'une régularité mathématique similaire à celle de la pression. De ce fait, leur discrétisation doit être consistante avec celle de la pression traitée dans la section 3.4.1. Nous supposons que les contraintes normales $\partial u/\partial x|_{i,j}$ et $\partial v/\partial y|_{i,j}$ sont à valeur constante dans chaque cut-cell $\Omega_{i,j}$ et, de ce fait, il n'est pas nécessaire de déterminer précisément leur emplacement dans le maillage LS-STAG. Le traitement des flux de contraintes normales et de cisaillement que nous proposons comporte une forte analogie avec la méthode d'éléments finis de Saramito

[119] pour les fluides viscoélastiques où les contraintes sont des inconnues du problème. Saramito propose une combinaison de l'élément mixte de Raviart et Thomas pour les vitesses-pressions, d'une approximation de degré 0 discontinue (comme la pression) pour les contraintes normales τ^{xx} et τ^{yy} , et d'une approximation linéaire pour les contraintes τ^{xy} de cisaillement (voir Fig. 3.7).

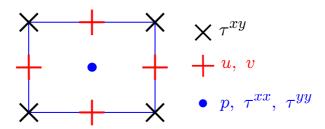


Fig. 3.7 – L'élément fini de Saramito [119].

3.5.1 Discrétisation des contraintes normales

Nous nous intéressons à présent à la discrétisation du flux diffusif normal $\int_{\Gamma_{i,j}^u} \partial u/\partial x \ e_x \cdot n \, dS$ dans les *cut-cells*. Pour ce terme, une approche naïve consisterait à l'écrire comme la somme des flux sur chacune des faces est $\Gamma_{i,j}^{u,e}$ et ouest $\Gamma_{i,j}^{u,w}$ à la manière de 2.5.1, et ensuite à discrétiser chacun des termes par un quotient semblable aux différences finies, par exemple, dans le cas de la figure 3.6 (a) et (b):

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u,w}} \frac{\partial u}{\partial x} \, \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S \cong \Delta y_{i,j}^{u,w} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x_i},\tag{3.37}$$

où il reste à définir la surface $\Delta y_{i,j}^{u,w}$. Toutes nos tentatives menées dans cette direction se sont avérées infructueuses en terme de précision spatiale. La raison est que, au niveau des *cut-cells*, le maillage *LS-STAG* n'est pas admissible (ou Δ - adapté, au sens donné dans [32]) pour la contrainte normale : la droite joignant les points de discrétisation de $u_{i,j}$ et $u_{i+1,j}$ n'est pas orthogonale à la face $\Gamma^{u,w}$ dans la cellule trapézoïdale de la figure (3.6) (b) ou encore pour la cellule pentagonale (3.6) (a). De ce fait l'approximation (3.37) n'est pas consistante et génère de larges erreurs numériques. De manière à améliorer la consistance de l'approximation de ce terme, nous utilisons le fait que le traitement des contraintes normales discrètes doit être analogue à celui de la pression, comme nous l'avons fait remarquer précédemment. Ainsi, le flux de contrainte normale doit être discrétisé avec une expression similaire à celle du gradient de pression (3.25a) :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u}} \frac{\partial u}{\partial x} \, \boldsymbol{e}_{x} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S \cong \left. \theta_{i,j}^{u} \, \Delta y_{j} \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i+1,j} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} \right). \tag{3.38}$$

La discrétisation doit être complétée avec un quotient aux différences pour $\partial u/\partial x|_{i,j}$, qui peut être interprété comme une valeur caractéristique de $\partial u/\partial x$ dans la cellule $\Omega_{i,j}$. Ce quotient

différentiel est construit en assurant que le théorème de flux divergence :

$$\int_{\Omega_{i,j}} \nabla \cdot \boldsymbol{v} \, dV = \int_{\Omega_{i,j}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \, dV = \int_{\Gamma_{i,j}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, dS, \tag{3.39}$$

soit vérifié au niveau discret dans une cut-cell, puisque ce résultat est immédiat dans une cellule cartésienne avec la méthode MAC. L'intégrale volumique est discrétisée par la quadrature de la moyenne :

$$\int_{\Omega_{i,j}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV \cong \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{i,j} \right) V_{i,j}, \tag{3.40}$$

et ensuite identifiée avec l'équation de continuité discrète (3.9). Nous obtenons ainsi :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{i,j} \cong \frac{\theta_{i,j}^{u} u_{i,j} - \theta_{i-1,j}^{u} u_{i-1,j} + (\theta_{i-1,j}^{u} - \theta_{i,j}^{u}) u_{i,j}^{ib}}{V_{i,j}/\Delta y_{j}}, \tag{3.41a}$$

et une expression analogue pour $\partial v/\partial y|_{i,j}$:

$$\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{i,j} \cong \frac{\theta_{i,j}^{v} v_{i,j} - \theta_{i,j-1}^{v} v_{i,j-1} + (\theta_{i,j-1}^{v} - \theta_{i,j}^{v}) v_{i,j}^{ib}}{V_{i,j}/\Delta x_{i}}.$$
(3.41b)

Ces expressions sont valables pour toutes les *cut-cells*, et les conditions aux limites y sont incluses naturellement. Dans les cellules fluides cartésiennes ces formules se réduisent aux formules de différences finies habituelles (2.93).

3.5.2 Une première discrétisation des flux diffusifs de cisaillement

La discrétisation des flux diffusifs tangentiels $\int_{\Gamma_{i,j}^u} \partial u/\partial y \ e_y \cdot n \, dS$ peut sembler à première vue aisée, dans le sens où pour ces termes le maillage LS-STAG est admissible (voir figure 3.3). Ainsi, les contributions au système dues au cisaillement peuvent s'écrire comme la différence de flux entre les faces sud et nord, par exemple loin de la frontière immergée :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u}} \frac{\partial u}{\partial y} \, \boldsymbol{e}_{y} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = \int_{\Gamma_{i,j}^{\mathrm{n,e}} \cup \Gamma_{i+1,j}^{\mathrm{n,w}}} \frac{\partial u}{\partial y} \, \mathrm{d}x - \int_{\Gamma_{i,j}^{\mathrm{s,e}} \cup \Gamma_{i+1,j}^{\mathrm{s,w}}} \frac{\partial u}{\partial y} \, \mathrm{d}x.$$
 (3.42)

L'application de la formule du trapèze donne pour la face nord :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{\text{n,e}} \cup \Gamma_{i+1,j}^{\text{n,w}}} \frac{\partial u}{\partial y} \, \mathrm{d}x \cong \left(\Delta x_{i,j}^{\text{n,e}} + \Delta x_{i+1,j}^{\text{n,w}} \right) \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j},\tag{3.43}$$

où, dans le but d'assurer la propriété de conservation locale des flux, les frontières d'intégration $\Delta x_{i,j}^{\mathrm{n,e}}$ et $\Delta x_{i+1,j}^{\mathrm{n,w}}$ représentent uniquement la partie fluide des faces, *i.e.*:

$$\Delta x_{i,j}^{\text{n,e}} = \frac{1}{2} \theta_{i,j}^{v} \Delta x_{i}, \qquad \Delta x_{i+1,j}^{\text{n,w}} = \frac{1}{2} \theta_{i+1,j}^{v} \Delta x_{i+1}.$$
 (3.44)

Le quotient $\partial u/\partial y|_{i,j}$, localisé au coin supérieur droit de $\Omega_{i,j}$ (voir figure 2.6), est calculé par différenciation du polynôme d'interpolation de $u(x_i,\cdot)$ suivant la direction verticale :

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\frac{1}{2}\theta_{i,j+1}^u \Delta y_{j+1} + \frac{1}{2}\theta_{i,j}^u \Delta y_j}.$$
(3.45)

Le quotient aux différences est très similaire au quotient usuel (Eq. (2.94)) Les formules (3.43)-(3.45) sont valides tant que $u_{i,j+1}$ est contenu dans le domaine fluide, i.e. si $\theta_{i,j+1}^u > 0$: c'est le cas de la cellule cartésienne de la figure 2.4 (b), ainsi que dans les *cut-cells* de la figure 3.4 (a) et (b).

Dans le cas où la face Nord est solide, et par conséquent $u_{i,j+1}$ n'est pas une inconnue du problème (cas où $\theta^u_{i,j+1} = 0$, pour les *cut-cells* de la figure 3.4 (c)-(f)), ces formules doivent être modifiées afin d'implémenter les conditions aux limites à la manière de la *ghost fluid method* pour problèmes elliptiques [42]. Par exemple sur la face Nord:

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{\mathrm{ib,e}} \cup \Gamma_{i+1,j}^{\mathrm{ib,w}}} \frac{\partial u}{\partial y} \, \mathrm{d}x \cong \left(\Delta x_{i,j}^{\mathrm{ib,e}} + \Delta x_{i+1,j}^{\mathrm{ib,w}} \right) \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j}, \tag{3.46}$$

avec:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{i,j} = \frac{u(x_i, y_{i,j}^{\text{ib}}) - u_{i,j}}{\frac{1}{2} \theta_{i,j}^u \Delta y_j}.$$
(3.47)

Remarquons que dans (3.46) les surfaces d'intégration $\Delta x_{i,j}^{\mathrm{ib,e}}$ et $\Delta x_{i+1,j}^{\mathrm{ib,w}}$ restent encore à définir. Nous précisons que la discrétisation des termes visqueux conserve le schéma à 5 points de la méthode MAC, et dans le cas où $\theta_{i,j+1}^u > 0$, elle s'écrit de manière analogue à (2.106) :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u}} \nabla u \cdot \boldsymbol{n} \, dS \cong \mathcal{K}_{W}(i,j)u_{i-1,j} + \mathcal{K}_{E}(i,j)u_{i+1,j} + \mathcal{K}_{P}(i,j)u_{i,j} + \mathcal{K}_{S}(i,j)u_{i,j-1} + S_{i,j}^{ib,v}, \quad (3.48)$$

avec:

$$\mathcal{K}_{\mathbf{W}}(i,j) = \frac{\theta_{i,j}^{u} \Delta y_{j} \theta_{i-1,j}^{u}}{V_{i,j} / \Delta y_{j}}, \qquad \mathcal{K}_{\mathbf{E}}(i,j) = \frac{\theta_{i,j}^{u} \Delta y_{j} \theta_{i+1,j}^{u}}{V_{i+1,j} / \Delta y_{j}}, \tag{3.49a}$$

$$\mathcal{K}_{S}(i,j) = \frac{\theta_{i,j}^{v} \Delta x_i + \theta_{i+1,j}^{v} \Delta x_{i+1}}{\theta_{i,j}^{u} \Delta y_j + \theta_{i,j-1}^{u} \Delta y_{j-1}},$$
(3.49b)

$$\mathcal{K}_{P}(i,j) = -\frac{(\theta_{i,j}^{u})^{2} \Delta y_{j}}{V_{i,j}/\Delta y_{j}} - \frac{(\theta_{i,j}^{u})^{2} \Delta y_{j}}{V_{i+1,j}/\Delta y_{j}} - \mathcal{K}_{S}(i,j) - \frac{\Delta x_{i,j}^{\text{ib,e}} + \Delta x_{i+1,j}^{\text{ib,w}}}{\frac{1}{2} \theta_{i,j}^{u} \Delta y_{j}},$$
(3.49c)

$$S_{i,j}^{\text{ib,v}} = \theta_{i,j}^u \Delta y_j \left[\frac{(\theta_{i,j}^u - \theta_{i+1,j}^u)}{V_{i+1,j}/\Delta y_j} u_{i+1,j}^{\text{ib}} - \frac{(\theta_{i-1,j}^u - \theta_{i,j}^u)}{V_{i,j}/\Delta y_j} u_{i,j}^{\text{ib}} \right]$$
(3.49d)

$$+ \frac{\Delta x_{i,j}^{\text{ib,e}} + \Delta x_{i+1,j}^{\text{ib,w}}}{\frac{1}{2}\theta_{i,j}^{u}\Delta y_{j}} u(x_{i}, y_{i,j}^{\text{ib}}). \tag{3.49e}$$

Comme dans la méthode MAC, cette discrétisation est symétrique (i.e., $\mathcal{K}_{W}(i+1,j) = \mathcal{K}_{E}(i,j)$).

Afin de décrire complètement la discrétisation des termes diffusifs, nous devons définir les valeurs des surfaces d'intégration $\Delta x_{i,j}^{\mathrm{ib,e}}$ et $\Delta x_{i+1,j}^{\mathrm{ib,w}}$ intervenant dans l'expression des flux diffusifs de cisaillement sur les bords (3.46). Ces valeurs sont déterminées indépendamment pour chaque type de cut-cell dans la figure 3.6, leurs expressions sont calculées de telle sorte que les flux diffusifs de cisaillement soient consistants avec les contributions en cisaillement des forces hydrodynamique (3.36), ce qui revient à assurer la conservation totale de quantité de mouvement.

3.5.3 Conservation de la quantité de mouvement totale au niveau discret et calcul des forces hydrodynamiques

Le bilan discret de quantité de mouvement s'écrit à la manière de (2.55) comme :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}^{h}(t)}{\mathrm{d}t} = -\left[\mathbb{1}^{\mathrm{T}}\mathcal{C}[\overline{U}]U + \mathbb{1}^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{ib,c}}\right] - \left[\mathbb{1}^{\mathrm{T}}\mathcal{G}P - \mathbb{1}^{\mathrm{T}}\eta(\mathcal{K}U + S^{\mathrm{ib,v}})\right]. \tag{3.50}$$

Afin de compléter la discrétisation LS-STAG, nous allons déterminer $\Delta x_{i,j}^{\mathrm{ib,e}}$ et $\Delta x_{i+1,j}^{\mathrm{ib,w}}$ intervenant dans l'expression des flux diffusifs de cisaillement de telle sorte que, dans le bilan (3.50) la contribution des flux de pression et diffusifs :

$$\left[\mathbb{1}^{\mathrm{T}}\mathcal{G}P - \mathbb{1}^{\mathrm{T}}\eta(\mathcal{K}U + S^{\mathrm{ib,v}})\right] = \begin{cases} \left[\mathbb{1}_{x}^{\mathrm{T}}\mathcal{G}^{x}P - \mathbb{1}_{x}^{\mathrm{T}}\eta(\mathcal{K}^{x}\mathcal{U} + S_{x}^{\mathrm{ib,v}})\right] = \widetilde{F}_{x}^{h} \\ \left[\mathbb{1}_{y}^{\mathrm{T}}\mathcal{G}^{y}P - \mathbb{1}_{y}^{\mathrm{T}}\eta(\mathcal{K}^{y}\mathcal{V} + S_{y}^{\mathrm{ib,v}})\right] = \widetilde{F}_{y}^{h} \end{cases},$$
(3.51)

corresponde à la discrétisation de la force hydrodynamique (3.36) agissant sur Γ^{ib} . Ceci assurera la conservation discrète de la quantité de mouvement (cf. 2.3.1).

Discrétisation de la force hydrodynamique

La discrétisation de la force hydrodynamique est obtenue en approchant les intégrales de surface dans (3.36a) et (3.36b) respectivement comme :

$$F_x^h = \sum_{\text{Cut-cells }\Omega_{i,j}} [n_x \Delta S]_{i,j}^{\text{ib}} \left(p_{i,j} - \eta \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} \right) - \eta \text{Quad}_{i,j}^{\text{ib}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \, \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{n} \right), \tag{3.52a}$$

$$F_y^h = \sum_{\text{Cut-cells }\Omega_{i,j}} -\eta \text{Quad}_{i,j}^{\text{ib}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \, \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{n} \right) + \left[n_y \Delta S \right]_{i,j}^{\text{ib}} \left(p_{i,j} - \eta \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i,j} \right). \tag{3.52b}$$

Dans ces expressions, la formule de quadrature pour les termes de pression et de contraintes visqueuses normales est déterminée par la formule du point milieu en remarquant que ces termes sont constants dans les cut-cells; de ce fait la même formule est valide dans chaque cut-cell. Par contre, la formule de quadrature utilisée pour les contraintes tangentielles (notée $\operatorname{Quad}_{i,j}^{\mathrm{ib}}$) doit être adaptée pour chaque type de cut-cell. Cette quadrature qui dépend de la localisation de la contrainte de cisaillement sur la figure 3.6 et basée sur la formule du trapèze, est totalement décrite dans l'Annexe C.

Les composantes de trainée et de portance agissant sur la surface solide de la cut-cell trapézoïdale représentée sur la figure 3.6 (b) s'écrivent respectivement :

$$F_x^h\Big|_{i,j} = \left(\theta_{i-1,j}^u - \theta_{i,j}^u\right) \Delta y_j \left[p_{i,j} - \eta \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j}\right] - \frac{\eta \Delta x_i}{2} \left[\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i-1,j} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j}\right], \tag{3.53a}$$

$$F_y^h\Big|_{i,j} = -\frac{\eta(\theta_{i-1,j}^u - \theta_{i,j}^u)\Delta y_j}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i-1,j} + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j} \right] + \Delta x_i \left[p_{i,j} - \eta \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{i,j} \right]. \tag{3.53b}$$

Conservation de la quantité de mouvement totale

À présent, nous examinons dans le bilan de quantité de mouvement (3.50), la contribution \widetilde{F}_x^h dans la direction des x qui s'écrit :

$$\widetilde{F}_{x}^{h} = \sum_{\text{CVs }\Omega_{i,j}^{u}} \int_{\Gamma_{i,j}^{u}} \left[p - \eta \frac{\partial u}{\partial x} \right] \boldsymbol{e}_{x} \cdot \boldsymbol{n} \, dS - \sum_{\text{CVs }\Omega_{i,j}^{u}} \int_{\Gamma_{i,j}^{u}} \eta \frac{\partial u}{\partial y} \, \boldsymbol{e}_{y} \cdot \boldsymbol{n} \, dS$$

$$= \widetilde{F}_{x,\text{norm}}^{h} + \widetilde{F}_{x,\text{cis}}^{h}.$$
(3.54)

où $\sum_{\text{CVs }\Omega_{i,j}^u}$ désigne la sommation sur les volumes de contrôle $\Omega_{i,j}^u$. Cette contribution doit cor-

respondre à la force de trainée F_x^h donnée par (3.52a). La partie la plus simple à étudier est la contribution $\widetilde{F}_{x,\text{norm}}^h$ due aux contraintes normales, puisque la formule de discrétisation (équations (3.25) et (3.41)) est valide dans toutes les cellules du maillage :

$$\widetilde{F}_{x,\text{norm}}^{h} = \sum_{\text{CVs }\Omega_{i,j}^{u}} \theta_{i,j}^{u} \Delta y_{j} \left(p_{i+1,j} - p_{i,j} - \eta \left[\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i+1,j} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} \right] \right).$$

Après changement d'indice de manière à sommer sur les volumes de contrôle $\Omega_{i,j}$, nous remarquons que les termes de la somme sont nuls dans les cellules telles que $\theta_{i,j}^u = \theta_{i-1,j}^u = 1$ (i.e., les cellules fluides cartésiennes). Finalement, seuls les termes dans les *cut-cells* subsistent :

$$\widetilde{F}_{x,\text{norm}}^{h} = \sum_{\text{Cut-cells }\Omega_{i,j}} (\theta_{i-1,j}^{u} - \theta_{i,j}^{u}) \Delta y_{j} \left(p_{i,j} - \eta \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} \right).$$

Cette somme correspond exactement aux contraintes normales dans la force de trainée discrète (3.52a). Le même raisonnement appliqué à la composante de portance (3.52b) nous permet de conclure que les forces normales sont retrouvées dans bilan de quantité de mouvement.

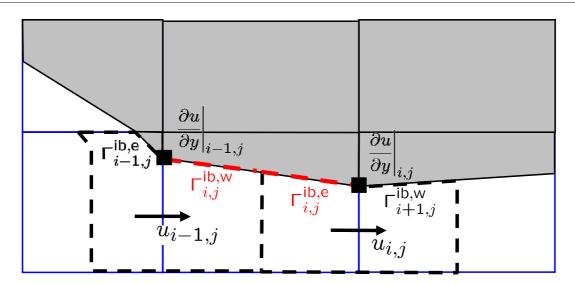


FIG. 3.8 – Volumes de contrôle $\Omega^u_{i,j}$ adjacents à la frontière immergée Γ^{ib} . Dans ces volumes de contrôle, le flux de cisaillement sur $\Gamma^{\text{ib,w}}_{i,j} \cup \Gamma^{\text{ib,w}}_{i,j} = \Gamma^{\text{ib}}_{i,j}$ intervient dans l'expression de la contribution $\widetilde{F}^{h,\text{n}}_x$ au bilan de quantité de mouvement. Elle correspond au cisaillement visqueux dans la force de traînée discrète pour une cut-cell trapézoïdale (Eq. (3.53a)).

Dans la contribution en cisaillement $\widetilde{F}^h_{x,\mathrm{cis}}$ de \widetilde{F}^h_x , les termes non-nuls proviennent de la discrétisation des flux de cisaillement dans les volumes de contrôles $\Omega^u_{i,j}$ adjacents à la frontière immergée, i.e. tels que $\Gamma^u_{i,j} \cap \Gamma^{\mathrm{ib}} \neq \emptyset$. Ceci est une conséquence de la propriété de conservation locale des flux. Par exemple pour les volumes de contrôle $\Omega^u_{i-1,j}$ et $\Omega^u_{i,j}$ de la figure 3.8, le flux de cisaillement est donnée par la formule (3.46) et intervient dans $\widetilde{F}^h_{x,\mathrm{cis}}$ comme :

$$\widetilde{F}_{x,\text{cis}}^{h} = \dots - \eta \left(\Delta x_{i-1,j}^{\text{ib,e}} + \Delta x_{i,j}^{\text{ib,w}} \right) \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i-1,j} - \eta \left(\Delta x_{i,j}^{\text{ib,e}} + \Delta x_{i+1,j}^{\text{ib,w}} \right) \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} + \dots$$
(3.55)

Nous pouvons dès lors isoler la contribution sur la face solide $\Gamma^{ib}_{i,j} = \Gamma^{ib,w}_{i,j} \cup \Gamma^{ib,e}_{i,j}$ de la cellule trapézoïdale de la figure 3.8 :

$$\widetilde{F}_{x,\text{cis}}^{h} = \dots - \eta \left[\Delta x_{i,j}^{\text{ib,w}} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i-1,j} + \Delta x_{i,j}^{\text{ib,e}} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} \right] + \dots$$
(3.56)

Afin que ce terme corresponde au cisaillement dans la force $F_x^h|_{i,j}$ (Eq. (3.53a)), ce qui revient à écrire :

$$-\eta \left[\Delta x_{i,j}^{\mathrm{ib,w}} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i-1,j} + \Delta x_{i,j}^{\mathrm{ib,e}} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} \right] = -\frac{\eta \Delta x_i}{2} \left[\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i-1,j} + \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} \right],$$

alors nous devons nécessairement avoir :

$$\Delta x_{i,j}^{\text{ib,w}} = \Delta x_{i,j}^{\text{ib,e}} = \frac{1}{2} \Delta x_i. \tag{3.57}$$

En inspectant de la même manière chaque type de *cut-cell* nous déterminons les valeurs reportées dans la table 3.2 pour le flux diffusif de cisaillement $\int_{\Gamma_{i,j}^{\text{lib},e} \cup \Gamma_{i+1,j}^{\text{lib},w}} \partial u/\partial y \, dx$. De la même

manière nous pouvons déterminer des expressions similaires pour les contraintes visqueuses de cisaillement intervenant dans l'équation de quantité de mouvement suivant $\int_{\Gamma_{i,j}^{\text{ib},n} \cup \Gamma_{i,j+1}^{\text{ib},s}} \partial v / \partial x \, dy$. Ceci conclut la description de ce qui sera appelé la discrétisation LS-STAG originale des termes visqueux.

Type of cut-cell	$\Delta x_{i,j}^{\mathrm{ib,w}}$	$\Delta x_{i,j}^{\mathrm{ib,e}}$
(a) Pentagone Nord-Est	0	$(1-\theta_{i,j}^{v})\Delta x_i$
(b) Trapèze Nord	$\frac{1}{2}\Delta x_i$	$\frac{1}{2}\Delta x_i$
(c) Triangle Nord-Ouest	$\frac{1}{2} \theta_{i,j-1}^{v} \Delta x_i$	$\frac{1}{2}\theta_{i,j-1}^{v}\Delta x_i$

TAB. 3.2 – Frontières d'intégration pour le flux diffusif tangentiel (3.46) sur la partie solide des *cut*cells de la figure 3.6 dont sont aisément déduites celles pour les autres *cut-cells* de la figure 3.4.

3.5.4 Une discrétisation *complète* des contraintes de cisaillement basée sur la stricte conservation de la quantité de mouvement

Si nous examinons plus en détails la correspondance entre les termes visqueux de cisaillement sur la frontière immergée intervenant dans l'équation de quantité de mouvement, et la force y agissant au niveau discret (3.52), nous mettons en évidence des différences notables. Par exemple, dans le cas de la cellule trapézoïdale de la figure 3.6 (b), les flux diffusifs de cisaillement sur la frontière immergée qui interviennent dans l'équation de quantité de mouvement pour $u_{i,j}$ et $v_{i,j-1}$ s'écrivent respectivement :

$$-\frac{\eta \Delta x_i}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i-1,j} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} \right], \quad \text{et} \quad 0.$$
 (3.58)

Si nous comparons ces termes avec les contributions en cisaillement de la force hydrodynamique dans (3.53a) et (3.53b), nous observons que le terme suivant est manquant dans l'équation pour $v_{i,j-1}$:

$$-\frac{\eta(\theta_{i-1,j}^{u} - \theta_{i,j}^{u})\Delta y_{j}}{2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \bigg|_{i-1,j} + \frac{\partial v}{\partial x} \bigg|_{i,j} \right]. \tag{3.59}$$

Remarquons que la contribution de ce terme dans la force de portance globale doit être faible, puisqu'elle devient nulle quand la face solide est horizontale ($\theta^u_{i-1,j} = \theta^u_{i,j}$). Néanmoins, nous venons d'établir le fait que la méthode LS-STAG originale ne vérifie pas strictement le bilan de quantité de mouvement. La raison est que nous avons choisi de bâtir une discrétisation conduisant à un schéma à 5 points, et de ce fait la contribution des termes $\partial v/\partial x|_{i-1,j}$ et $\partial v/\partial x|_{i,j}$ a été délibérément ignorée pour $v_{i,j-1}$.

Une version alternative de la méthode LS-STAG consiste à rajouter les termes tels que (3.59) dans la discrétisation. La difficulté est maintenant de calculer les nouveaux termes apparaissant dans l'équation de quantité de mouvement discrète. Par exemple, le terme $\partial v/\partial x|_{i,j}$ dans la figure 3.6 (b) peut être calculé seulement si nous connaissons le type de la cellule voisine $\Omega_{i+1,j}$.

S'il s'agit d'un pentagone, comme dans la figure $3.5\ (d)$, alors le cisaillement est calculé avec la formule :

$$\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{i,j} = \frac{v_{i+1,j} - v(x_{i,j}^{ib}, y_j)}{\frac{1}{2}\theta_{i+1,j}^v \Delta x_{i+1}}.$$
(3.60)

La seule autre possibilité est que $\Omega_{i+1,j}$ soit une cellule de type trapèze, comme dans la figure 3.5 (a). Dans ce cas, nous ne pouvons pas utiliser une formule semblable à (3.60). À la place, nous posons simplement $\partial v/\partial x|_{i,j}=0$, comme c'est le cas lorsque la surface solide est horizontale.

Cette version alternative, qui sera appelée méthode LS-STAG complète, présente la propriété de vérifier strictement la quantité de mouvement. Cependant, comparée à la méthode LS-STAG originale, la présence de ces termes supplémentaires sur la paroi solide complique considérablement l'implémentation informatique de la méthode, et étend le schéma au-delà de 5 points. Dans les calculs présentés dans la section suivante, ces termes extra-stencil seront évalués avec une avancée en temps explicite. Ces simulations mettront en évidence le fait que la variante complète de la méthode présente une amélioration seulement marginale par rapport à la méthode dite originale.

3.6 Intégration en temps et résolution des systèmes linéaires

L'intégration en temps des équation de Navier-Stokes est réalisée par le schéma à pas fractionnaire présenté dans la section 2.6.1. L'étape de projection (2.127) conduit à la résolution de l'équation de Poisson (2.128) où $\mathcal{A} \equiv -\mathcal{D}\mathcal{M}^{-1}\mathcal{D}^{\mathrm{T}}$ est encore une matrice pentadiagonale symétrique, dont les coefficients ont l'expression suivante :

$$A_{\rm E}(i,j) = \frac{\left(\theta_{i,j}^u \Delta y_j\right)^2}{\frac{1}{2}V_{i,j} + \frac{1}{2}V_{i+1,j}}, \qquad A_{\rm W}(i,j) = A_{\rm E}(i-1,j), \tag{3.61a}$$

$$A_{N}(i,j) = \frac{\left(\theta_{i,j}^{v} \Delta x_{i}\right)^{2}}{\frac{1}{2}V_{i,j} + \frac{1}{2}V_{i,j+1}}, \qquad A_{S}(i,j) = A_{N}(i,j-1), \tag{3.61b}$$

$$A_{\rm P}(i,j) = -A_{\rm E}(i,j) - A_{\rm W}(i,j) - A_{\rm N}(i,j) - A_{\rm S}(i,j). \tag{3.61c}$$

Dans le cas d'une cellule cartésienne fluide nous retrouvons les coefficients (2.132) de la méthode MAC originale. Nous mentionnons que (2.128) est valide dans tout le domaine de calcul y compris dans les *cut-cells* et les cellules solides, et dans ces dernières le système s'écrit :

$$0 \times \Phi_{i,j} = 0, \tag{3.62}$$

ce qui est une conséquence du fait que la pression est définie à une constante près. Pour lever cette indétermination dans nos calculs, nous ajoutons au coefficient diagonal $A_{\rm P}(i,j)$ une constante réelle δ dont la valeur absolue est de l'ordre du zéro machine, et résolvons (2.128) dans tout le domaine de calcul avec un solveur standard pour problèmes elliptiques sur grille cartésienne. Dans les exemples d'application de la méthode LS-STAG présentés dans le chapitre suivant,

nous utilisons le solveur générique multigrille /BiCGSTAB de van Kan et al. [132]. Aucune modification n'est apportée à ce solveur pour prendre en compte le solide immergé et ne dégradons pas son efficacité sur grille cartésienne standard. Pour les simulations que nous allons présenter dans le chapitre suivant, l'équation pour la pression est typiquement résolue en 2 à 3 itérations. Finalement l'étape de prédiction (2.126) nécessite la résolution d'une équation d'Helmoltz pour \widetilde{U} qui est réalisée avec le même solveur. Ce système linéaire est plus facile à résoudre que l'équation de Poisson pour la pression, son terme diagonal étant une fonction croissante du nombre de Reynolds.

3.7 Conclusions et extension de la méthode LS-STAG au cas 3D

Dans ce chapitre nous avons présenté la méthode LS-STAG pour les écoulements 2D de fluides newtoniens incompressibles en géométries complexes. Cette méthode se présente comme une véritable généralisation de la méthode MAC au cas des géométries complexes dont elle hérite les bonnes propriétés de conservation, et constitue, à notre connaissance, la première méthode de type frontières immergées conservant les invariants de l'écoulement au niveau discret. Dans le chapitre suivant du manuscrit nous validerons et éprouverons la méthode LS-STAG sur une série de cas tests de références. De plus nous illustrerons la versatilité de cet outil numérique par une application au cas des géométries complexes mobiles. Ce type d'applications a initialement motivé l'introduction des méthodes IB [109], et elles présentent l'avantage considérable en termes de temps de calcul, par rapport à une méthode conforme, de ne pas nécessiter d'étape de remaillage du domaine. Par ailleurs, l'attention particulière qui a été portée sur la discrétisation des contraintes normales et de cisaillements a été déterminante pour étendre la méthode au cas des fluides viscoélastiques, ce que nous présentons dans le chapitre 5.

3.7.1 Implémentation informatique de la méthode LS-STAG

L'extension d'une méthode IB au cas tridimensionnel n'est pas triviale, et plus particulièrement pour les méthodes de type cut-cells [90]. Il est donc important de montrer la faisabilité de l'extension au 3D de la méthode LS-STAG, qui repose sur la méthodologie employée dans le cas bidimensionnel, à savoir : énumérer les différents type de cut-cells et discrétiser les flux dans ces cut-cells de telle sorte que les propriétés de conservation soient satisfaites au niveau discret.

Afin d'évaluer la complexité de la méthode LS-STAG en 3D, nous devons auparavant présenter l'implémentation informatique dans le cas 2D, et plus particulièrement la construction du système correspondant à la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement pour u. Nous ne traiterons que la variante originale de la méthode. Le système discret pour l'équation de quantité de mouvement suivant x est construit en réalisant une boucle sur les volumes de contrôles pour $u_{i,j}$ pour lesquels nous déterminons tout d'abord le type des moitiés de cellule $\Omega^u_{i,j} \subset \Omega_{i,j}$ et $\Omega^u_{i,j} \subset \Omega_{i+1,j}$ la composant. Suivant leur type, les paramètres géométriques des cut-cells sont calculés (le volume $V_{i,j}$, la fraction de face fluide $\theta^u_{i,j}$, les données de vitesse à la paroi \mathbf{v}^{ib} , les

surfaces d'intégration $\Delta x_{i,j}^{\rm ib,w}$ et $\Delta x_{i,j}^{\rm ib,e})$ sont calculés. Dans un programme FORTRAN, cette étape est réalisée efficacement dans un environnement case, et nous pouvons ensuite calculer les différents flux dans l'équation de quantité de mouvement. Les flux de pression et de contrainte normale sont les plus faciles à calculer puisque les formules (3.25) et (3.41a) sont valables pour n'importe quel type de cellule fluide ou cut-cell. Les flux de cisaillement sont construits suivant un test booléen sur la fraction de face fluide dont le résultat conduit à utiliser la formule (3.45) ou (3.47). Par contre les flux convectifs de l'annexe B doivent être construits dans l'environnement case, puisqu'ils sont discrétisés de manière indépendante dans chaque cut-cell de la figure 3.4 afin que leur combinaison conduise à une discrétisation antisymétrique. Pour construire l'environnement case, nous devons dénombrer le nombre de cut-cells admissibles suivant le signe que peut prendre la level-set $\phi_{i,j}$ sur chacun des coins d'une cellule 2D : $2^4 = 16$ possibilités auxquelles nous devons retrancher 2 cellules non-admissibles correspondant à une oscillation de la fonction level-set. De ces 14 cut-cells admissibles, nous dégageons 6 cut-cells génériques pour chacune desquelles une discrétisation antisymétrique disctincte doit être formulée, elles correspondent aux 6 cut-cells représentées dans la figure 3.4. De plus, nous rappelons que la figure 3.6 comporte les 3 cut-cells nécessitant une définition distincte de la frontière d'intégration.

3.7.2 Extension de la méthode LS-STAG au cas tridimensionnel

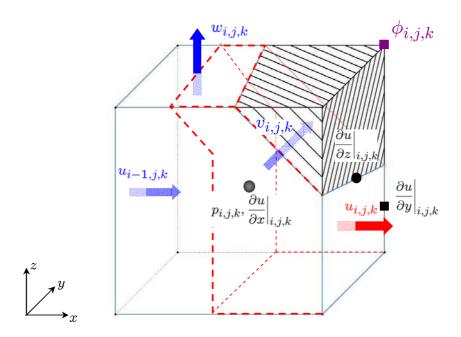


FIG. 3.9 – La *cut-cell* générique $\Omega_{i,j,k}$ et les notations de la discrétisation *LS-STAG* en 3D. Les vitesses sont situées sur le barycentre des faces fluides.

En 3D, il y a au maximum 2⁸ cut-cells différentes parmi lesquelles nous avons dégagé 108 cut-cells admissibles. Pour construire la discrétisation antisymétrique des flux convectifs, 16 cas (au lieu de 6 en 2D) doivent être considérés indépendamment, ils sont représentés Fig. 3.10. Afin de

construire la discrétisation LS-STAG en 3D, nous considérons la cut-cell et les notations étendues de la figure 3.9. Avec ces notations l'équation de continuité discrète s'écrit pour n'importe quelle cellule $\Omega_{i,j,k}$:

$$\dot{m}^{i,j} \equiv -\overline{u}_{i-1,j,k} + \overline{u}_{i,j,k} - \overline{v}_{i,j-1,k} + \overline{v}_{i,j,k} - \overline{w}_{i,j,k-1} + \overline{w}_{i,j,k} + \overline{U}_{i,j,k}^{ib} = 0, \tag{3.63}$$

où le flux de masse à travers la face $\Gamma_{i,i,k}^{e}$ est :

$$\overline{u}_{i,j,k} \cong \theta^{u}_{i,j,k} \Delta y_j \Delta z_k u_{i,j,k}, \tag{3.64}$$

et $S_{i,j,k}^u = \theta_{i,j,k}^u \Delta y_j \Delta z_k$ est la surface fluides de la face. Nous remarquerons que $\theta_{i,j,k}^u$ correspond effectivement à une fraction de surface en 3D qui peut être calculée à partir des volumes $V_{i,j}$ du cas 2D. Le flux de masse sur la surface solide est une extension directe du cas 2D:

$$\overline{U}_{i,j,k}^{ib} \cong u_{i,j,k}^{ib} [n_x \Delta S]_{i,j,k}^{ib} + v_{i,j,k}^{ib} [n_y \Delta S]_{i,j,k}^{ib} + w_{i,j,k}^{ib} [n_z \Delta S]_{i,j,k}^{ib},$$
(3.65)

où les vitesses du solide sont discrétisées au centre de la face $\Gamma^{ib}_{i,j,k}$. Les maîtres-couples sont quant à eux donnés par :

$$[n_x \Delta S]_{i,j,k}^{\text{ib}} = (\theta_{i-1,j,k}^u - \theta_{i,j,k}^u) \Delta y_j \Delta z_k. \tag{3.66}$$

Les formules de discrétisation pour le flux de pression et de contrainte normale peuvent être déduites de ces formules, de la même manière que dans le cas 2D (voir Eqs. (3.25) et (3.41a)). Comme nous l'avons mentionné auparavant, la discrétisation antisymétrique doit être réalisée dans la moitié de volumes de contrôle $\Omega^u_{i,j,k} \cap \Omega_{i,j,k}$ Fig. 3.10. Cette discrétisation n'est pas détaillée ici, mais aucune difficulté supplémentaire n'est rencontrée pour l'obtenir par rapport au cas 2D. L'équivalent en 3D de la figure 3.6 pour la discrétisation des flux de cisaillement est donné Fig. 3.11. La conservation de la quantité de mouvement doit être examinée sur 7 cas distincts au lieu de 3 en 3D. Afin d'illustrer la similarité, ainsi que l'ajout d'une complexité, nous calculons la force hydrodynamique discrète agissant sur la portion de frontière immergée de la figure 3.9, dont la composante dans la direction x s'écrit :

$$F_x = \left[n_x \Delta S\right]_{i,j,k}^{\text{ib}} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j,k} + \left[n_y \Delta S\right]_{i,j,k}^{\text{ib}} \left[\frac{1}{2} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j-1,k} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j,k} \right] + \left[n_z \Delta S\right]_{i,j,k}^{\text{ib}} \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{i,j,k}.$$
(3.67)

La formule pour la contrainte normale a été discuté au paravant. Une complexité qui n'était pas présente dans le cas 2D réside dans le fait que le mail lage LS-STAG n'est pas toujours admissible pour les termes de cisaillement. De ce fait pour évaluer ce quotient différentiel de s'inspirer de ce qui a été fait au paravant pour la contrainte normale :

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{i,j,k} = \frac{\alpha_{i,j,k}^z \Delta z_k}{\frac{1}{2}(S_{i,j+1,k}^u + S_{i,j,k}^u)} (u_{i,j+1,k} - u_{i,j,k}), \tag{3.68}$$

où $\alpha_{i,j,k}^z$ désigne la fraction d'arrête fluide :

$$\alpha_{i,j,k}^z = \frac{\phi_{i,j,k-1}}{\phi_{i,j,k-1} - \phi_{i,j,k}}.$$
(3.69)

La formule (3.68) est valable pour toutes les cellules envisageables et se réduit à la formule de différences finis usuelle lorsque le maillage est admissible. Finalement, pour le cisaillement $\partial u/\partial z|_{i,j,k}$ qui est localisé sur la frontière nous utilisons une formule similaire à (3.46) :

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{i,j,k} = \frac{u^{ib}(x_i, \frac{1}{2}y_{j-1} + \frac{1}{2}y_j, z_{i,j,k}^{ib}) - u_{i,j,k}}{\frac{1}{2}(\alpha_{i,j-1,k}^z + \alpha_{i,j,k}^z)\Delta z_k}.$$
(3.70)

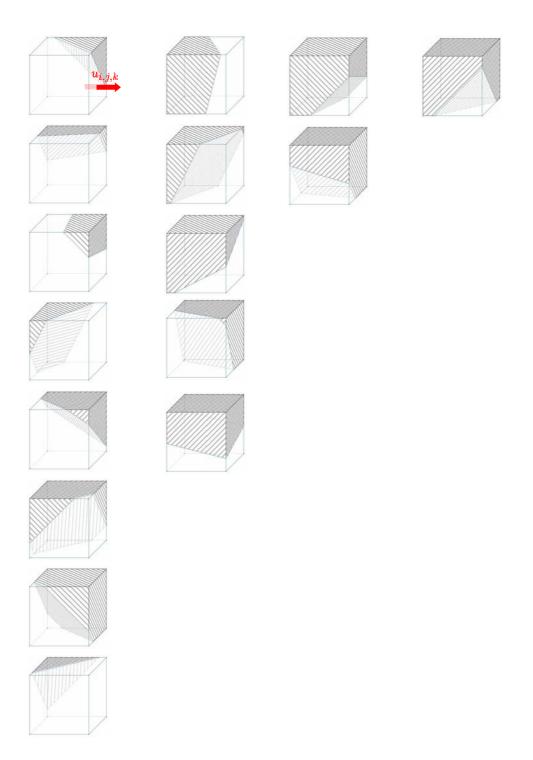


Fig. 3.10 – Nomenclature des *cut-cells* élémentaires pour la discrétisation antisymétrique des termes convectifs $u_{i,j,k}$. Dans la première colonne nous avons groupé les *cut-cells* comportant 6 inconnues (le maximum en 3D), dans la suivante celles comportant 5 inconnues, puis 4, puis 3 (le minimum en 3D).

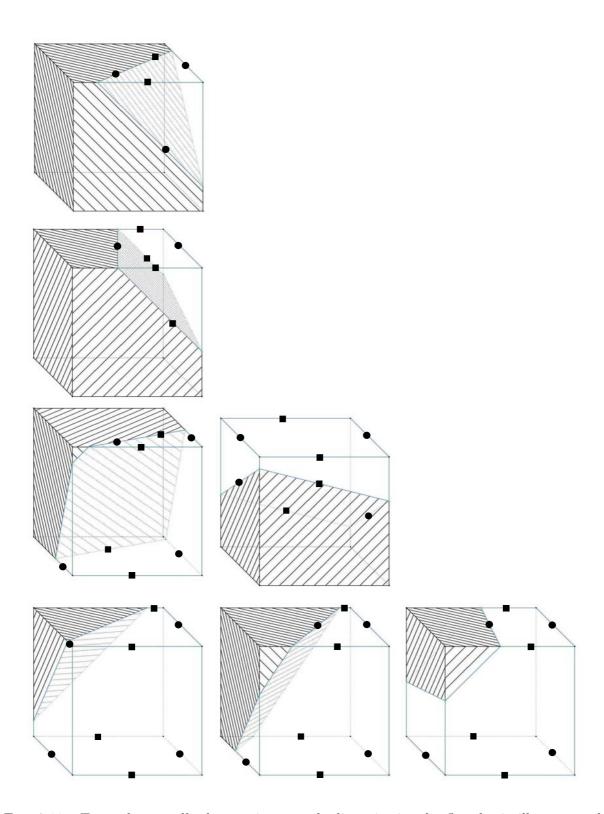


Fig. 3.11 – Types de cut-cells élémentaires pour la discrétisation des flux de cisaillement sur la surface solide.

Chapitre 4

Validation numérique de la méthode LS-STAG et applications

Sommaire

4.1	Le post-traitement des données
4.2	Écoulement de Taylor-Couette
4.3	Écoulement en aval d'un cylindre de section circulaire 97
4.4	Écoulement incident sur un cylindre à section circulaire en rotation
	oscillante forcée
4.5	Extension de la méthode au cas de géométries mobiles 106
4.6	Évaluation de l'efficacité calculatoire de la méthode LS-STAG $ \ldots 111$
4.7	Validation de la condition de sortie CCBC

Dans ce chapitre nous présentons les résultats relatifs à la phase de validation de l'outil numérique que nous présentons dans cette thèse, la méthode LS-STAG.

Tout d'abord, nous réalisons la simulation de l'écoulement stationnaire de Taylor-Couette, pour lequel il existe une solution analytique bidimensionnelle pour la vitesse et la pression. Ainsi nous comptons mesurer l'impact du traitement numérique des géométries complexes que nous proposons, sur la précision spatiale de la méthode MAC originale. Cette étape permet notamment de montrer que la variante de la méthode LS-STAG dite complète n'apporte qu'une amélioration marginale sur la précision de la méthode LS-STAG dite complète n'apporte qu'une amélioration

Nous réalisons ensuite la simulation de l'écoulement libre autour d'un cylindre circulaire immobile en régime stationnaire et instationnaire. Ce cas test, pour lequel existent de nombreuses études systématiques numériques et expérimentales, nous permet d'éprouver la robustesse de la méthode LS-STAG. De plus nous évaluerons l'impact du traitement numérique que nous réalisons dans les cut-cells sur la stabilité de la méthode lorsque le cylindre est en rotation.

Nous présentons les modifications apportées sur la méthode LS-STAG pour prendre en compte le cas des géométries mobiles. Pour ce type d'écoulements les méthodes de type IB sont avantageuses en termes de temps de calcul vis-à-vis des méthodes non-structurées, puisq'elles sont affranchies

de toute étape de remaillage. La méthode LS-STAG est appliquée sur le cas test de l'écoulement libre autour d'un cylindre en translation verticale oscillante, et les résultats sont notamment comparés avec ceux d'une méthode conforme.

Une comparaison avec un solveur non-structuré est donnée concernant les temps de calcul. Le cas test choisi est l'écoulement autour d'un cylindre à section carrée pour lequel nous pouvons utiliser deux maillages similaire pour les deux codes. Sur ce même cas test nous comparons l'efficacité de notre condition de sortie CCBC à celle de conditions classiques.

4.1 Le post-traitement des données

Le post-traitement des données (u, v, p) et les composantes de τ_e constitue la dernière étape d'une simulation numérique. À partir de cette étape les champs scalaires d'intérêt en mécanique des fluides (vitesse, pression, vorticité, fonction de courant, ...) peuvent être visualisés sous forme de ligne de niveau ou de profils. Un mauvais traitement de ces données peut conduire à des résultats visuellement aberrants (ligne de courant pénétrant dans une paroi immobile, violation de la condition d'adhérance, ...), ce qui rend délicate toute interprétation physique des résultats. L'attention à apporter au post-traitement des données n'est donc pas marginale. Nous utilisons le logiciel TECPLOT[©] pour les tâches de visualisation. Dans un premier temps ce logiciel permet de visualiser le maillage LS-STAG à partir des coordonnées (x_i, y_j) . Ensuite, étant données les valeurs $X_{i,j}$ d'un champ scalaire X en chacun des points (x_i, y_j) , TECPLOT[©] permet d'en visualiser les iso-contours dans chaque cellule $\Omega_{i,j}$ au moyen de polynômes d'interpolation bilinéaire. Pour fournir les valeurs $\widetilde{X}_{i,j}$ à TECPLOT $^{\textcircled{C}}$, deux difficultés se présentent à nous : la première est liée à l'arrangement décalé des variables, qui ne sont pas (à l'exception de τ^{xy}) situées en (x_i, y_i) , et les champs calculés doivent y être interpolés. Ensuite du fait de la présence de la frontière immergée, le point (x_i, y_j) peut être situé à l'intérieur du domaine solide (i.e. si $\phi_{i,j} > 0$) et la valeur $X_{i,j}$ est alors extrapolée à partir des éventuelles conditions aux limites et du champ correspondant dans le domaine fluide.

4.1.1 Traitement de la vitesse u

Le calcul des valeurs de $\widetilde{u}_{i,j}$ qui seront exportées vers TECPLOT[©] se déroule en deux étapes successives. La première étape consiste à interpoler les vitesses $\widetilde{u}_{i,j}$ à partir des vitesses $u_{i,j}$ pour les points (x_i, y_j) situés dans le domaine fluide (figure 4.1 de gauche), cela est réalisé par interpolation linéaire :

$$\widetilde{u}_{i,j} = \frac{\frac{1}{2}(y_j - y_j^c)u_{i,j+1} + \frac{1}{2}\theta_{i,j+1}^u \Delta y_{j+1}u_{i,j}}{\frac{1}{2}(y_j - y_j^c + \theta_{i,j+1}^y \Delta y_{j+1})},$$
(4.1)

Cette formule a une précision en $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ consistante avec la précision de la méthode LS-STAG sur le champ de vitesse (cf. section 4.2). Ensuite dans le cas où (x_i, y_j) est dans le domaine solide (figure 4.1 de droite) la vitesse $\widetilde{u}_{i,j}$ est extrapolée à partir de la condition aux limites $u^{ib}(x_i, y_{i,j}^{ib})$

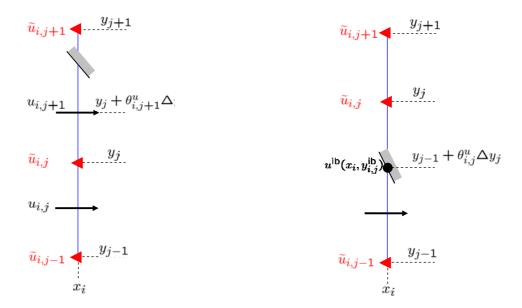


FIG. 4.1 – Disposition des inconnues de vitesse et emplacement de $\widetilde{u}_{i,j}$. À gauche : dans le cas où $\phi_{i,j} < 0$. À droite : dans le cas où $\phi_{i,j} > 0$ et $\phi_{i,j-1}\phi_{i,j+1} < 0$.

sur Γ^{ib} et de la vitesse $\widetilde{u}_{i,j-1}$ calculée pendant l'étape précédente. La condition d'adhérence conduit à écrire que :

$$u^{ib}(x_i, y_{i,j}^{ib}) = \theta_{i,j}^u \widetilde{u}_{i,j} + (1 - \theta_{i,j}^u) \widetilde{u}_{i,j-1}, \tag{4.2}$$

d'où nous déduisons la valeur extrapolée de la vitesse en (x_i, y_i) :

$$\widetilde{u}_{i,j} = \frac{u^{ib}(x_i, y_{i,j}^{ib}) - (1 - \theta_{i,j}^u)\widetilde{u}_{i,j-1}}{\theta_{i,j}^u}.$$
(4.3)

Finalement dans le domaine solide (i.e. $\phi_{i,j} > 0$, $\phi_{i+1,j} > 0$ et $\phi_{i-1,j} > 0$) nous évaluons $\widetilde{u}_{i,j}$ comme la vitesse du solide en (x_i, y_j) , qui est une donnée du problème.

4.1.2 Traitement de la contrainte tangentielle

Il s'agit du cas le plus facile à traiter, en effet dans le cas où le point (x_i, y_j) est à l'intérieur du domaine fluide (i.e. $\phi_{i,j} < 0$) il coïncide avec l'emplacement des contraintes tangentielles, si bien que :

$$\widetilde{\tau^{xy}}_{i,j} = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j} \right).$$
(4.4)

Par contre dans le cas où $\phi_{i,j} > 0$ l'emplacement de la contrainte tangentielle n'est pas le point (x_i, y_j) . Par exemple dans le cas de la cellule trapézoïdale de la figure 3.6 (b)), la contrainte est définie en $(x_i, y_{j-1} + \theta_{i,j}^u \Delta y_j)$ et nous introduisons une extrapolation d'ordre 0 en écrivant (4.5). Finalement dans le cas de la cellule triangulaire (figure 3.6 (c)), $\partial u/\partial y|_{i-1,j}$ et $\partial v/\partial x|_{i-1,j}$ ne sont pas définis sur le maillage LS-STAG. Cependant la valeur $\widetilde{\tau^{xy}}_{i,j}$ est requise par TECPLOT©

et nous l'évaluons comme la moyenne des contraintes voisines :

$$\widetilde{\tau^{xy}}_{i-1,j} = \frac{1}{3}\widetilde{\tau^{xy}}_{i,j} + \frac{1}{3}\widetilde{\tau^{xy}}_{i,j-1} + \frac{1}{3}\widetilde{\tau^{xy}}_{i-1,j-1}.$$
 (4.5)

Puisqu'il fait intervenir les mêmes termes le champ de vorticité $\omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ est traité exactement de la même manière et nous aurons :

$$\widetilde{\omega}_{i,j} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j} - \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j} \right). \tag{4.6}$$

4.1.3 Traitement du champ de pression et des contraintes normales

Puisque la pression p et les contraintes normales $\tilde{\tau}^{xx,yy}$ sont considérées comme constantes dans chaque cellule $\Omega_{i,j}$ du maillage LS-STAG, nous évaluons leurs valeurs respectives $\tilde{p}_{i,j}$ et $\tilde{\tau}^{xx,yy}_{i,j}$ en (x_i,y_j) par une formule de moyenne, qui s'écrit par exemple pour la pression :

$$\widetilde{p}_{i,j} = \frac{\alpha_{i,j} V_{i,j} \, p_{i,j} + \alpha_{i+1,j} V_{i+1,j} \, p_{i+1,j} + \alpha_{i+1,j+1} p_{i+1,j+1} \, p_{i+1,j+1} + \alpha_{i,j+1} V_{i,j+1} \, p_{i,j+1}}{\widetilde{V}_{i,j}}, \quad (4.7)$$

où la valeur des coefficients $\alpha_{i,j}$ dépend du type de la cellule :

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } \Omega_{i,j} \text{ solide,} \\ 1/3 & \text{si } \Omega_{i,j} \text{ triangulaire,} \\ 1/4 & \text{sinon.} \end{cases}$$
(4.8)

Cette formule, que nous justifierons dans la section 5.4, donne en fait la valeur de p sur le lieu de discrétisation des contraintes de cisaillement, et le calcul de $\widetilde{p}_{i,j}$ dans les cut-cells de la figure 3.6 se rapporte à la section précédente.

4.1.4 Calcul de la fonction de courant

Les iso-valeurs de la fonction de courant ψ constituent un indicateur visuel pour les motifs caractéristiques de l'écoulement comme les zones de recirculation par exemple. La fonction de courant est la fonction scalaire définie à une constante près dans le domaine fluide et telle que :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v.$$
 (4.9)

Dans le cas où (x_i, y_j) est à l'intérieur du domaine fluide (Fig. 4.1 à gauche) nous obtenons par intégration de (4.9):

$$\psi(x_i, y_j) - \psi(x_i, y_{j-1}) = \int_{y_{j-1}}^{y_j} u \, dy, \tag{4.10}$$

où le terme de droite est calculé à la manière des flux de masse (3.7) par la quadrature du trapèze :

$$\psi(x_i, y_j) \cong \widetilde{\psi}_{i,j} = \widetilde{\psi}_{i,j-1} + u_{i,j} \Delta y_j. \tag{4.11}$$

Dans le cas où où (x_i, y_i) est à l'intérieur du solide (Fig. 4.1 à droite), nous avons :

$$\psi(x_i, y_{j-1} + \theta_{i,j}^u \Delta y_j) - \psi(x_i, y_{j-1}) = \int_{y_{j-1}}^{y_{j-1} + \theta_{i,j}^u \Delta y_j} u \, \mathrm{d}y, \tag{4.12}$$

ce qui nous permet d'obtenir la valeur ψ^{ib} de ψ sur la frontière du domaine par la quadrature du trapèze :

$$\psi(x_i, y_{j-1} + \theta_{i,j}^u \Delta y_j) \cong \psi^{ib} = \widetilde{\psi}_{i,j-1} + \theta_{i,j}^u u_{i,j} \Delta y_j. \tag{4.13}$$

À partir de cette étape, nous devons extrapoler la valeur de $\widetilde{\psi}_{i,j}$ à partir de ψ^{ib} et $\widetilde{\psi}_{i,j-1}$, ce qui est réaliser en utilisant une formule semblable à 4.3. Le calcul de la fonction de courant repose sur un processus récursif (4.11) qui nécessite une étape initialisation. Par exemple dans le cas où la frontière inférieure Γ^s du domaine correspond à une ligne de courant il suffira d'imposer $\widetilde{\psi}_{i,0} = C$, où C est une constante arbitrairement choisie par l'utilisateur.

4.2 Écoulement de Taylor-Couette

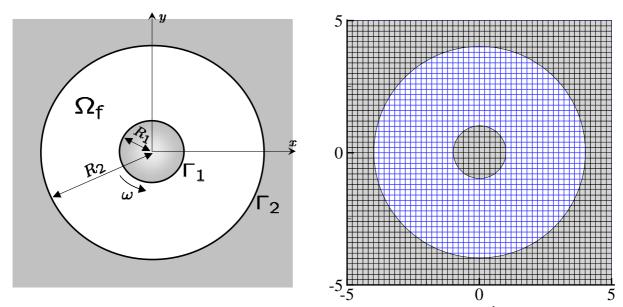


FIG. 4.2 – Géometrie et domaine de calcul pour l'écoulement de Taylor-Couette. À gauche, le domaine fluide $\Omega_{\rm f}$ est confiné entre deux cylindre concentriques Γ_1 et Γ_2 de centre $(x_{\rm c}, y_{\rm c})$, de rayons respectifs R_1 et $R_2 = 4R_1$, seul le cylindre Γ_1 est mobile de vitesse angulaire ω . À droite : le maillage LS-STAG pour $R_1 = 1$ et N = 50 cellules dans chaque direction.

Dans un premier temps, nous allons évaluer la précision spatiale de la méthode *LS-STAG* sur l'écoulement de Taylor-Couette entre deux cylindres cylindres coaxiaux, dont la configuration est décrite par la figure 4.2 à gauche. La dynamique de l'écoulement est gouvernée par le nombre de Taylor Ta, qui mesure le rapport de la force d'inertie centrifuge sur la force visqueuse :

$$Ta = \frac{\omega^2 \left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right) (R_2 - R_1)^3}{\nu^2}.$$
 (4.14)

En dessous du seuil d'instabilité de l'écoulement $Ta_c = 1712$ [50], la solution stationnaire stable est purement orthoradiale, telle que ses composantes cartésiennes s'écrivent dans le domaine fluide, pour $r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} \in [R_1, R_2]$:

$$u_{\rm ex}(x,y) = -K\left(\frac{R_2^2}{r^2} - 1\right)(y - y_{\rm c}),$$
 (4.15a)

$$v_{\rm ex}(x,y) = K\left(\frac{R_2^2}{r^2} - 1\right)(x - x_{\rm c}),$$
 (4.15b)

$$p_{\rm ex}(x,y) = K^2 \left(\frac{r^2}{2} - \frac{R_2^4}{2r^2} - R_2^2 \log r^2\right),$$
 (4.15c)

où
$$K = \frac{\omega R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}$$
.

Pour construire la fonction level-set $\phi(x,y)$ qui représente le domaine fluide $\Omega^{\rm f}$, nous utilisons la méthode CSG (Constructive Solid Geometry) permettant de bâtir des solides complexes à partir de formes géométriques de base comme des cercles, hyperplans, sphères, etc..., qui sont suffisamment simples pour posséder une fonction level-set dont l'expression analytique est connue [54, 101]. Les opérations booléennes de la méthode CSG sur les géométries de base, comme l'intersection, la réunion ou la partie complémentaire, peuvent être exprimées comme des opérations algébriques sur leur fonction level-set [101]. Par exemple, soient Ω_1 et Ω_2 les domaines intérieurs au cercle Γ_1 et respectivement Γ_2 , dont les fonctions level-set ont pour expressions respectives :

$$\phi_1(x,y) = R_1 - r, (4.16a)$$

$$\phi_2(x,y) = R_2 - r. (4.16b)$$

Alors le domaine fluide de la géométrie de Taylor-Couette est $\Omega_f = \Omega_2 \setminus \Omega_1$ et sa fonction level-set a simplement pour expression $\phi(x,y) = \max(\phi_2(x,y), -\phi_1(x,y))$.

Le domaine de calcul (cf. figure 4.2 (droite)) est constitué d'un carré de côté $10R_1$, que l'on maille uniformément par N cellules carrées dans chaque direction. Le centre des cylindres est légèrement décalé par rapport au centre du maillage tel que $x_c = 0.013$, $y_c = 0.023$. Ainsi, le centre des cylindres ne coïncide jamais avec le centre d'une cellule ou avec un coin de cellule. De ce fait, les mesures d'erreur ne peuvent bénéficier d'effets de superconvergence, puisque la symétrie entre la géométrie et le domaine de calcul est brisée. Pour l'écoulement à Ta = 1000, nous avons comparé la précision des deux variantes de la méthode LS-STAG (originale et complète) et de la méthode staircase, qui est telle que la géométrie complexe est grossièrement représentée en escalier par des cellules cartésiennes totalement fluide ou solide. Cette méthode est facilement obtenue par notre code en imposant la valeur 1 à la fraction fluide des facettes des cut-cells ce qui a pour effet de transformer toute cut-cell en cellule solide, tandis que le traitement des cellules cartésiennes est inchangé. Bien que le nombre de cut-cells représente une faible fraction du total des cellules du domaine, leur traitement influe significativement sur la précision dans tout le domaine fluide.

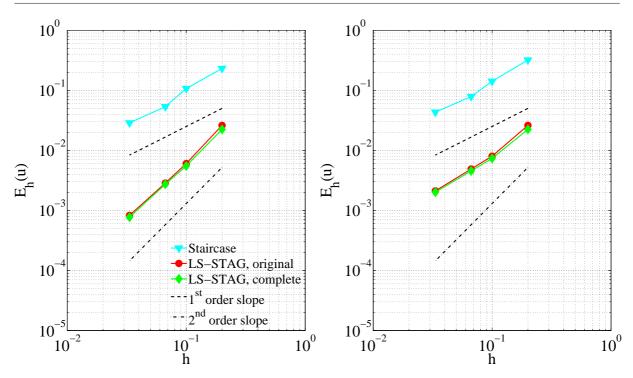


FIG. 4.3 – Norme L_{∞} de l'erreur sur la composante de la vitesse u en fonction de la taille de la grille $h = \frac{10R_1}{N}$. À gauche : sur 90% du domaine fluide. À droite : sur tout le domaine fluide.

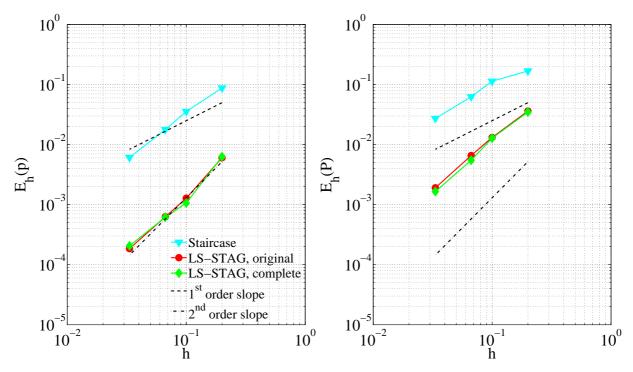


FIG. 4.4 – Norme L_{∞} de l'erreur sur la pression p en fonction de la taille de la grille $h = \frac{10R_1}{N}$. À gauche : sur 65% du domaine fluide. À droite : sur 90% du domaine fluide.

Pour la composante de vitesse u suivant la direction x, nous avons mesuré la norme L_{∞} de

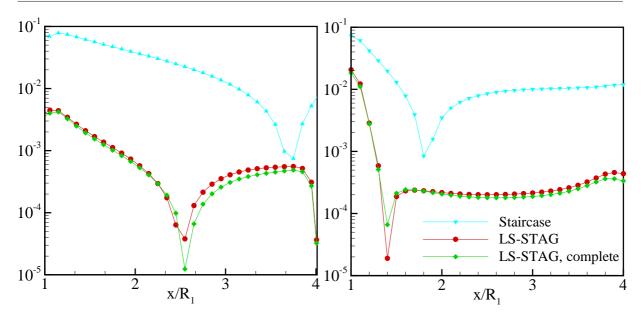


FIG. 4.5 – Profil de l'erreur le long de l'axe $y/R_1 = 0.023$ pour la composante de vitesse v à gauche, et pour la pression p à droite.

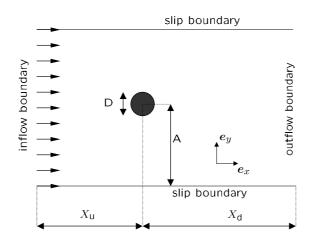
l'erreur jusque dans les cut-cells, i.e. :

$$E_h(u) = \max_{\text{CVs }\Omega_{i,j}^u} |u_{i,j} - u_{\text{ex}}(x_i, y_j + \frac{1}{2}\theta_{i,j}^u \Delta y_j)|, \tag{4.17}$$

cependant, pour la pression, comme son emplacement est indéfini dans les cut-cells, nous avons mesuré la norme L_{∞} de l'erreur seulement dans les cellules cartésiennes. La figure 4.3 (gauche) rapporte l'erreur commise sur la vitesse u sur 90% des cellules cartésiennes fluides du domaine. Les deux variantes de la méthode LS-STAG exhibent une précision spatiale d'ordre 2, contre simplement un ordre 1 pour la méthode staircase. Lorsque l'erreur est mesurée sur tout le domaine fluide, y compris dans les cut-cells, voir figure 4.3 à droite, la norme de l'erreur est sensiblement supérieure, ce qui montre que les extrema d'erreur sont atteints au voisinage des cut-cells, et l'ordre de convergence des variantes de la méthode LS-STAG est seulement superlinéaire (la pente mesurée est 1.4). Cet effets sont certainement dus à l'approximation constante par morceaux des contraintes normales et de la pression dans les cut-cells. Nous observons une tendance similaire concernant l'erreur L_{∞} commise sur la pression, voir figure 4.4. La figure 4.5 montre l'erreur commise sur les points de calcul le long d'un rayon horizontal, pour $x \in [R_1, R_2]$. Nous remarquons, dans un premier temps, que le traitement grossier de la frontière immergée par la méthode staircase engendre des erreurs dans tout le domaine fluide, tandis que pour les deux variantes de la méthode LS-STAG, les erreurs les plus grandes restent confinées à la périphérie des frontières immergées, et plus particulièrement près du cylindre intérieur mobile Γ_1 , où les conditions aux limites sont non-homogènes. Par ailleurs, nous remarquons que la méthode LS-STAG complète, qui, rappelons-le conserve strictement la quantité de mouvement, apporte une amélioration marginale en terme d'erreur locale.

4.3 Écoulement en aval d'un cylindre de section circulaire

4.3.1 Généralités sur le domaine physique et de calcul



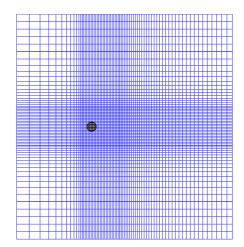


Fig. 4.6 – Domaine de calcul et maillage pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire.

Nous éprouvons à présent la robustesse de la méthode LS-STAG ainsi que sa capacité à calculer des écoulements instationnaires en simulant l'écoulement autour d'un cylindre circulaire (voir la figure. 4.6 (gauche) pour la représentation du domaine de calcul). Le nombre de Reynolds est basé sur la vitesse d'entrée U_{∞} et le diamètre D du cylindre. Dans toutes nos simulations, la frontière d'entrée est placée à la distance $X_u = 8D$ de l'obstacle, la condition de sortie à $X_{\rm d}=15D$, et le rapport de confinement D/A est égal à 1/12. Nos études préliminaires ont montrées que cette configuration du domaine de calcul était suffisante pour obtenir des résultats qui ne dépendent plus de la taille du domaine. Afin de réaliser une étude de raffinement de maillage, nous utilisons des maillages non-uniformes par blocs représentés sur la figure 4.7, dont les propriétés sont répertoriées dans le tableau 4.1. Tous les maillages comportent un bloc uniforme composé de cellules de côté h/D dans lequel repose le cylindre, comme le montre la figure 4.6 (droite). Les simulations réalisées avec le maillage M4 ont fourni des résultats précis sur la gamme de nombres de Reynolds [40-1000] que nous avons considérée. La gamme de maillages utilisée comporte des maillages grossiers (le maillage M1 comporte 12 cut-cells autour du cylindre, qui est utilisé pour le calcul stationnaire à Re = 40) ainsi que des maillages extrêmement fins (la frontière du cylindre est représentée par plus de 400 cut-cells dans le maillage M5). Le maillage M5 est essentiellement utilisé pour valider les résultats obtenus sur les maillages plus grossiers. Le tableau 4.1 comporte aussi les proportions de chaque type de cellules (solides, cartésiennes ou cut-cells) présentes dans les maillages. Nous observons que la proportion de cellules solides est très faible et diminue avec la taille du maillage. De ce fait, le temps de calcul et la taille mémoire supplémentaire que leur traitement nécessite est négligeable par rapport à un maillage conforme. Dans les maillages utilisés pour l'écoulement de Taylor-Couette, la proportion de cut-cells est similaire, mais la proportion de cellules solides reste environ égale à 50%, et ce, quel que soit la

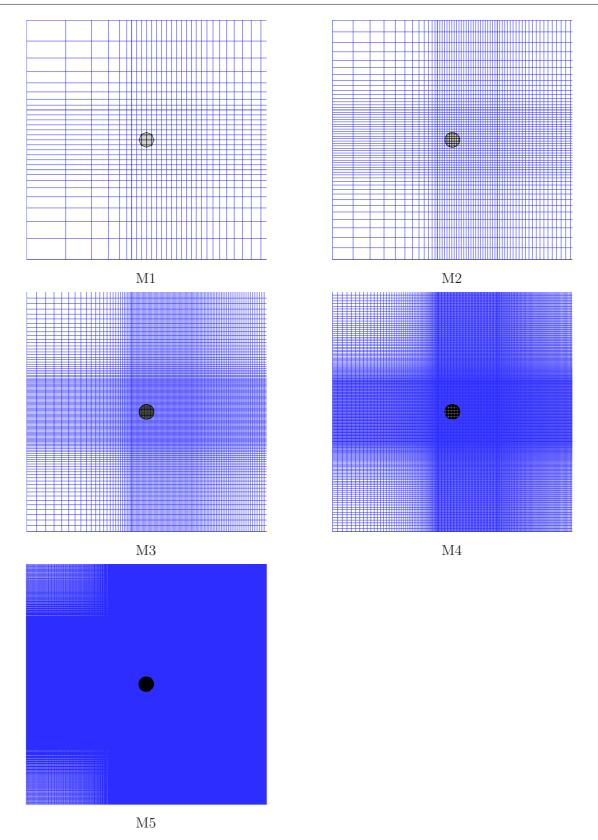


FIG. 4.7 – Maillages cartésiens utilisés pour l'étude de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire sur la restriction $[-8D,8D] \times [-8D,8D]$ du domaine autour du solide immergé.

taille du maillage. Finalement, le tableau 4.2 montre que la proportion de chaque type de *cut*cells (triangle, pentagone, trapèze) est sensiblement égale sur les différents maillages, de ce fait une discrétisation précise doit être faite dans toutes les cellules de la figure 3.4.

				Type de cellules			
Mesh	$N_x \times N_y$	h/D	$\Delta t U_{\infty}/D$	Nombre de cellules	Cartésiennes	Solides	Cut-cells
M1	36×34	0.32	10^{-2}	1224	1208 (98.7%)	4~(0.3%)	$12\ (1.0\%)$
M2	74×65	0.16	10^{-2}	4810	4767 (99.1%)	19~(0.4%)	24~(0.5%)
M3	150×130	0.08	10^{-2}	19500	$19350 \ (99.2\%)$	100~(0.5%)	$50 \ (0.3\%)$
M4	300×260	0.04	$10^{-2^{\dagger}}$	78000	$77460 \ (99.3\%)$	440~(0.6%)	100~(0.1%)
M5	550×350	0.01	$2 \times 10^{-3^{\ddagger}}$	192500	$184452 \ (95.8\%)$	7644~(4.0%)	404~(0.2%)

TAB. 4.1 – Propriétés des maillages utilisés dans les simulations de l'écoulement autour d'un cylindre à section circulaire. Entre parenthèses, la proportion de chacun des types de cellule est rapportée au nombre total de cellules. Les valeurs du pas de temps données dans ce tableau sont valables pour chaque simulation des sections 4.3 et 4.4, à l'exception de † : $\Delta t = 5 \times 10^{-3} D/U_{\infty}$ pour les calculs à Re = 1000, et ‡ : $\Delta t = 10^{-3} D/U_{\infty}$ pendant le régime transitoire de démarrage $(tU_{\infty}/D \in [0,1])$ pour les calculs à Re = 1000.

		Type de cut-cells			
Simulation Nombre total de		Cellules	Cellules	Cellules	
	cut-cells	triangulaires	trapézoïdales	pentagonales	
T-C, $N = 100$	400	116 (29.0%)	168 (42.0%)	116 (29.0%)	
T-C, $N = 300$	1192	344 (28.9%)	504 (42.3%)	344 (28.9%)	
C-C, M2	24	4 (16.7%)	12 (50.0%)	8 (33.3%)	
C-C, M4	100	28 (28.0%)	40 (40.0%)	32 (32.0%)	

TAB. 4.2 – Rescensement des 3 types de cut-cells au sein du maillage pour géométrie de Taylor-Couette (T-C) et pour le cylindre cylindrique (C-C), leur proportion respective en fonction du nombre total de cut-cells est donnée en pourcents.

4.3.2 Étude de la convergence en maillage dans le cas stationnaire à Re= 40

Dans un premier temps, nous avons étudié la convergence des deux variantes de la méthode LS-STAG, et pour la méthode staircase sur l'écoulement stationnaire autour du cylindre à Re= 40. Pour les deux variantes de la méthode LS-STAG les forces sont calculées par la même formule de quadrature donnée par Eq. (3.52). La figure 4.8 représente la convergence en espace pour le coefficient de traînée $C_D = F_x/\frac{1}{2}\rho U_\infty^2$ et la taille de la zone de recirculation $L_{\rm w}/D$. La méthode staircase donne des résultats très peu satisfaisants sur les maillages grossiers contrairement à la méthode LS-STAG. Comme le montre le tableau 4.3, les résultats obtenus avec les deux variantes de la méthode LS-STAG sont en bon accord avec ceux de la littérature (typiquement

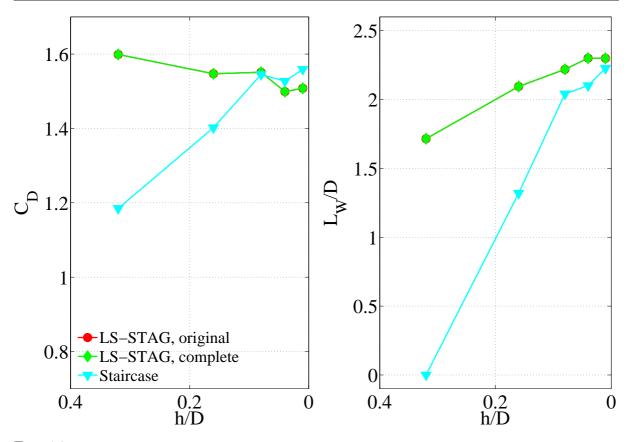


FIG. 4.8 – Coefficient de traînée et longueur du bulbe de recirculation pour l'écoulement stationnaire à Re = 40 calculés à partir des différents maillages de le tableau 4.1.

dans l'intervalle [1.50 - 1.54]) et les valeurs numériques sont identiques. De ce fait, à partir de maintenant, et dans la suite du manuscrit de thèse, nous présentons seulement les résultats de la méthode LS-STAG originale.

4.3.3 Évaluation des résultats numériques

Pour comparer nos résultats sur le cas test de l'écoulement incident sur un cylindre à section circulaire, nous avons sélectionné dans la littérature des études numériques systématiques impliquant des méthodes sur maillage conforme [58, 13, 57], une méthode de type IB [78] et de type cut-cell [89]. Les résultats expérimentaux sont extraits de l'ouvrage de Zdravkovich [141]. Basé sur l'expression du nombre CFL établi dans [11] pour les maillages non-structurés, la condition CFL dans les cut-cells s'écrit :

$$CFL_{ij} = \left[(\overline{u}_{ij})^{+} + (-\overline{u}_{i-1,j})^{+} + (\overline{v}_{ij})^{+} + (-\overline{v}_{i,j-1})^{+} + (\overline{U}_{i,j}^{ib})^{+} \right] \frac{\Delta t}{V_{ij}}, \tag{4.18}$$

où $(\cdot)^+ = \max(\cdot, 0)$, qui se réduit à la condition CFL usuelle dans les cellules fluides cartésiennes :

$$CFL_{ij} = \left[\frac{u_{i,j}}{\Delta x_i} + \frac{v_{i,j}}{\Delta y_i}\right] \Delta t. \tag{4.19}$$

Les valeurs du pas de temps reportées dans le tableau 4.1 sont telles que le nombre de CFL demeure invariablement égal à 0.5. La valeur locale maximale du nombre de CFL n'est pas atteinte dans les *cut-cells*, mais plutôt dans les cellules cartésiennes éloignées du sillage. Cette constatation prouve que la présence de *cut-cells*, et le traitement numérique qui y est mené ne dégrade pas la stabilité du schéma semi-implicite.

	$L_{\rm w}/D$	$C_{ m D}$
M4, original	2.300	1.500
M4, complete	2.300	1.500
M4, staircase	2.101	1.527
M5, original	2.299	1.508
M5, complete	2.299	1.508
M5, staircase	2.226	1.559
Expériences [141]	_	1.48 - 1.70
Bergmann et al.[13]	2.26	1.682
Henderson [58]	_	1.545
He $et \ al.[57]$	_	1.505
Linnick and Fasel [78]	2.23	1.54
Mittal et al.[89]	_	1.53

TAB. 4.3 – Résultats pour l'écoulement à Re = 40 obtenus sur les deux maillages les plus fins et comparaison avec les résultats issus de la littérature.

Les écoulements instationnaires à Re = 100, 200, et 1000 ont été calculés sur nos deux maillages les plus fins M4 et M5. Pour briser la symétrie de l'écoulement et déclencher l'instabilité caractérisée par un lâché tourbillonnaire, nous avons utilisé un profil de vitesse discontinu comme condition initiale tel que $u=U_{\infty}$ dans la moitié supérieure du canal et u=0 ailleurs. Le régime quasi-périodique est atteint pour $t=50D/U_{\infty}$, temps à partir duquel nous démarrons l'acquisition des données relatives aux coefficients de force jusqu'à $t=350D/U_{\infty}$. Le nombre de Strouhal St est calculé comme le premier harmonique du spectre de puissance du coefficient de portance. La résolution fréquentielle, donc la précision portant sur la mesure de St, est $\pm 1.67 \times 10^{-3}$ puisque le signal dure sur 300 unités de temps. Les tableaux 4.4 et 4.5 reportent les résultats caractéristiques obtenus avec la méthode LS-STAG et avec la méthode staircase. Sur le maillage M4, pour Re = 100 et 200 la méthode LS-STAG donne des résultats en excellent accord avec ceux de la littérature, et sur le maillage M5 pour Re = 1000. Il est assez remarquable de voir que la méthode Staircase fournit des résultats acceptables, même pour Re = 1000. Ceci est certainement dû au fait que la méthode Staircase hérite des propriétés de conservation et de stabilité de la méthode STAG et seul le traitement de la frontière immergée est différent.

Re	100	200	1000
M4	1.322 ± 0.009	1.332 ± 0.044	1.493 ± 0.227
M5	1.317 ± 0.009	1.327 ± 0.045	1.530 ± 0.229
$M4 \ staircase$	1.323 ± 0.009	1.346 ± 0.044	1.610 ± 0.198
Experiments [141]	1.21 - 1.41	_	_
Bergmann $et al.[13]$	1.410	1.390	1.505
Henderson [58]	1.350	1.341	1.509
He $et \ al.[57]$	1.353	1.356	1.519
Linnick & Fasel [78]	1.34 ± 0.009	1.34 ± 0.044	_
Mittal et al.[89]	1.35	_	1.45

TAB. 4.4 – Comparaison de la moyenne temporelle du coefficient de traînée \overline{C}_D et des fluctuations correspondantes $\pm \Delta C_D$ avec les résultats établis dans la littérature.

Re	100	200	1000
M4	0.170	0.200	0.247
M5	0.170	0.200	0.241
M4, staircase	0.177	0.207	0.251
Expérience [141]	0.16 - 0.17	_	_
Bergmann $et \ al.[13]$	0.166	0.199	0.235
Henderson [58]	0.164	0.197	0.237
He <i>et al.</i> [57]	0.167	0.198	0.239

Tab. 4.5 – Comparaison du nombre de Strouhal St avec les résultats établis dans la littérature.

4.4 Écoulement incident sur un cylindre à section circulaire en rotation oscillante forcée

Afin de s'assurer de la validité de notre traitement des conditions non-homogènes sur la frontière immergée, nous calculons l'écoulement incident sur un cylindre à section circulaire animé d'une vitesse angulaire oscillante dont l'expression est donnée par :

$$\omega(t) = \omega_0 \sin(2\pi S_{\rm e} t \frac{U_\infty}{D}),\tag{4.20}$$

où les deux paramètres de ce forçage de l'écoulement sont l'amplitude ω_0 de la vitesse angulaire et la fréquence de ces oscillations, $S_{\rm e}$. Ce type de forçage a été introduit par Tokumaru et Dimotakis [128] qui ont observé expérimentalement à Re = 15000 une diminution de la traînée pouvant atteindre 80% pour des valeurs optimales des paramètres de forçage. Cet effet peut être attribué à la réduction de la traînée de forme. Dans les études numériques de [57, 13], ces deux paramètres ont été utilisés comme paramètre de contrôle pour minimiser la traînée en régime laminaire 2D. Pour les écoulements à Re = 200 et Re = 1000 les valeurs optimales de ces paramètres issues de l'étude numérique de He et al. [57] conduisent respectivement à une réduction de 30% et 60% de la traînée par rapport au cas non-forcé ($\omega_0 = 0, S_{\rm e} = 0$). Plus récemment, Bergmann

et al. [13] ont réalisé cette même étude de contrôle en utilisant une réduction de modèle des équations de Navier-Stokes par POD^{13} . A Re = 200 ils ont mis aussi en évidence une réduction de 30% de la traînée pour des valeurs optimales des paramètres de contrôle légèrement différentes $(\omega_0=8.50,S_{\rm e}=0.74)$ à la place de $(\omega_0=6.0,S_{\rm e}=0.74)$ trouvés par He et al. [57]. Nous avons réalisé le calcul de l'écoulement forcé à Re = 200 et Re = 1000 pour ces différents jeux de paramètres optimaux avec les méthodes LS-STAG et staircase. Les caractéristiques des maillages et du domaine de calcul sont les mêmes que ceux de la section précédente. Dans un premier temps pour Re = 200, la figure 4.9 représente l'évolution temporelle du coefficient de traînée des écoulements non-forcé et forcé (avec les paramètres optimaux de [57]), et de l'écoulement stationnaire symétrique de base instable jusque Re > 46, obtenu en imposant une condition de symétrie sur l'axe y=0 du domaine. Cet écoulement instable présente le coefficient de traînée moyen le plus faible ($C_{\rm D}^{\rm basic}=0.864$). Comme dans les études [57, 13], nous observons un régime d'écoulement avec verrouillage fréquentiel tel que la fréquence d'excitation correspond à celle du lâché tourbillonnaire, entraînant une diminution considérable de la traînée. Le tableau 4.6 répertorie les valeurs de la traînée obtenues à différentes valeurs des paramètres de forçage. Cette table de valeurs montre que la traînée minimale est obtenue avec la méthode LS-STAG pour les paramètres optimaux issus de [57], et un excellent accord entre nos résultats et ceux de ces auteurs est constaté que ce soit dans le cas forcé (table 4.4) ou non. A titre de référence nous reportons dans le tableau 4.7 les valeurs extrêmales obtenues pour la portance lors de nos différentes simulations.

Finalement, la figure 4.10 montre la structure de l'écoulement de base, forcé et non-forcé pour Re = 1000. Le lâché caractéristique du cas non-forcé est considérablement modifié lorsqu'est appliquée sur le cylindre le champ de vitesse rotatif optimal, conduisant à un sillage quasi-symétrique qui est très différent de celui pour la solution stationnaire instable. Cette dernière figure montre aussi que la production de vorticité reste confinée près du voisinage du cylindre. Par ailleurs la méthode staircase donne des résultats imprécis concernant l'amplitude des coefficients de force (voir tableaux 4.6 et 4.7), permettant d'émettre de sérieux doutes quant à son application à des problèmes de contrôle d'écoulements.

¹³Proper Orthogonal Decomposition

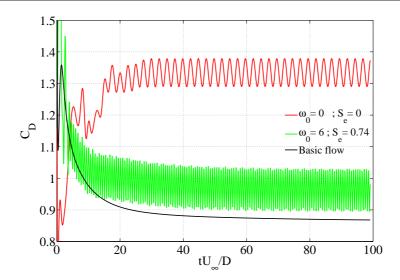


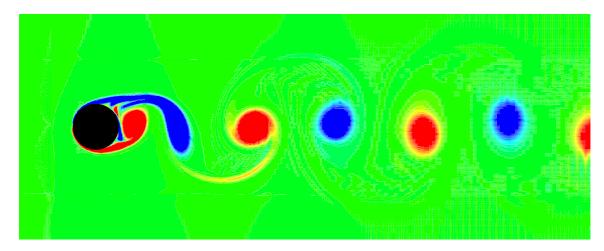
FIG. 4.9 – Evolution temporelle du coefficient de traînée à Re = 200 dans le cas des écoulements non-forcé ($\omega_0 = 0, S_{\rm e} = 0$), forcé ($\omega_0 = 6.0, S_{\rm e} = 0.74$) et l'écoulement instable. Ces calculs sont réalisés avec la méthode LS-STAG sur le maillage M4.

Re	20	00	1000	
$(\omega_0;S_e)$	(6.00; 0.74)	(8.50; 0.74)	(5.5; 0.625)	
M4	$0.967 \pm 0.068 \; (27\%)$	$0.995 \pm 0.132 \; (25\%)$	$0.707 \pm 0.101 \ (53\%)$	
M5	$0.926 \pm 0.048 \; (30\%)$	$0.944 \pm 0.079 \ (58\%)$	$0.647 \pm 0.052 \ (58\%)$	
M4, staircase	$0.974 \pm 0.099 \; (27\%)$	$1.007 \pm 0.278 \; (24\%)$	$0.692 \pm 0.572 \ (57\%)$	
Bergmann et al.[13]	1.045 (25%)	0.99 (30%)	_	
He et al.[57]	0.949 (30%)	_	0.608 (60%)	

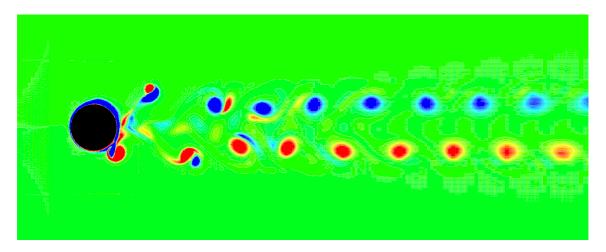
Tab. 4.6 – Coefficient de traînée $\overline{C}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{forc}} \pm \Delta C_{\mathrm{D}}^{\mathrm{forc}}$ et diminution relative de la traînée $(\overline{C}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{forc}} - \overline{C}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{unforc}})/\overline{C}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{unforc}}$ (entre parenthèses) pour l'écoulement forcé à Re = 200 et 1000. Les valeurs correspondantes du coefficient de traînée dans le cas non-forcé $\overline{C}_{\mathrm{D}}^{\mathrm{unforc}}$ sont extraites du tableau 4.4.

Re	100	200			1000		
$(\omega_0;S_e)$	(0;0)	(0;0)	(6.0; 0.74)	(8.50; 0.74)	(0;0)	(5.50; 0.625)	
M4	0.348	0690	0.358	0.510	1.305	0.054	
M5	0.349	0.710	0.337	0.491	1.482	0.103	
M4, staircase	0.332	0.669	0.330	0.537	1.332	1.037	
Norberg [97]	0.28 - 0.41	0.56 - 0.85	_	_	_	_	
Linnick & Fasel [78]	0.333	0.70	_	_	_	_	

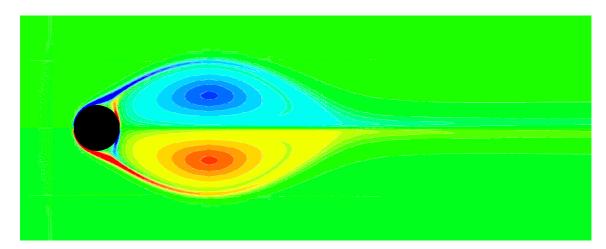
Tab. 4.7 – Valeur extrémale $C_{\rm L}^{\rm max}$ dans les cas forcé et non-forcé à différents régimes d'écoulements.



(a) Ecoulement non-forcé ($\omega_0=0,\,S_{\rm e}=0$).



(b) Ecoulement forcé ($\omega_0=5.5,\,S_{\mathrm{e}}=0.625$).



(c) Ecoulement de base.

Fig. 4.10 – Champs de vorticité au voisinage du cylindre circulaire à Re = 1000, obtenu avec la méthode LS-STAG sur le maillage M5 .

4.5 Extension de la méthode au cas de géométries mobiles

Pour illustrer la versatilité de la méthode LS-STAG, nous présentons son extension au cas des géométries en mouvement dans le domaine de calcul. Le calcul de tels écoulements sur grilles cartésiennes fixes est une alternative prometteuse, sur le plan du temps de calcul et de la précision, aux méthodes impliquant l'utilisation de maillages conformes qui nécessitent de fréquentes mises à jour du maillage et de la solution au cours de l'avancée en temps (voir les articles de revue [27, 126] pour références). Tout d'abord nous décrivons les modifications principales apportées sur notre méthode pour prendre en compte les géométries mobiles et présentons les résultats obtenus dans le cas de l'écoulement incident sur un cylindre circulaire qui est animé d'un mouvement de translation oscillante verticale [46, 49].

4.5.1 Modification de la méthode pour la prise en compte de géométries mobiles

Comme l'illustre la figure 4.11 la géométrie se déplace dans les cut-cells avec un mouvement propre, si bien que la description eulérienne du mouvement n'y est plus valable. La méthode LS-STAG pour géométries mobiles est basée sur la formulation Arbitraire Lagrangienne Eulérienne (ALE) des équations de Navier-Stokes qui est largement répandue en volumes finis sur maillages conformes [27]. La méthode ALE considère un domaine de calcul qui suit le mouvement de la géométrie mobile à la manière de la description Lagrangienne du mouvement. Suffisamment loin de la géométrie mobile le domaine reste fixe et permet une description eulérienne du mouvement. Les équations en formulation ALE du mouvement sont identiques aux équations de Navier-Stokes en description eulérienne à l'exception des termes convectifs et s'écrivent :

$$\rho \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}S + \rho \int_{\Gamma(t)} \left([\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{g}}] \cdot \boldsymbol{n} \right) \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}S + \int_{\Gamma(t)} p \, \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S - \eta \int_{\Gamma(t)} \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = 0,$$

où v^g est la vitesse locale de grille, relative au mouvement des noeuds du maillage.

Dans une série d'articles [74, 48, 35, 34], Farhat et co-auteurs ont montré que le schéma numérique ALE se comporte, en terme de précision et de stabilité, comme sa contrepartie sur domaine fixe pourvu que soit satisfaite la loi de conservation géométrique (GCL^{14}) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega(t)} \mathrm{d}V = \int_{\Gamma(t)} \boldsymbol{v}^{\mathrm{g}} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S, \tag{4.21}$$

au niveau discret. Cette relation est obtenue en vérifiant qu'un champ de vitesse uniforme est nécessairement solution des équations ALE du mouvement, cela implique que la variation en volume d'une cellule durant un intervalle de temps quelconque, doit être identiquement égale au volume balayé par sa surface mobile pendant ce même laps de temps. Cette condition GCL est difficile à satisfaire lorsque le domaine est déformé dans son intégralité. Pour la méthode LS-STAG cette relation est assez simple à satisfaire car seuls les nœuds du maillage situés sur

¹⁴ geometric conservation law

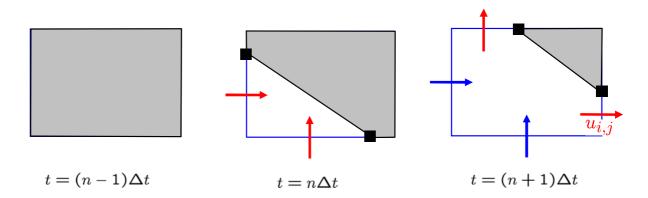


FIG. 4.11 – Mouvement de la géométrie dans la cellule $\Omega_{i,j}$. La cellule est solide au temps $t = (n-1)\Delta t$, triangluaire au temps $t = n\Delta t$ et pentagonale au temps $t = (n+1)\Delta t$. Les inconnues de vitesse en rouge sont considérées comme des freshly cleared cells aux temps correspondants, par exemple $u_{i,j}$ au temps $t = n\Delta t$

la frontière solide $\Gamma^{\text{ib}}_{i,j}(t)$ d'une *cut-cell* sont en mouvement. Ainsi, les flux convectifs ALE au travers des frontières solides d'un volume de contrôle $\Omega^u_{i,j}(t)$ s'écrivent :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{\mathrm{ib},e}(t) \cup \Gamma_{i+1,j}^{\mathrm{ib},w}(t)} \left(\left[\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{g}} \right] \cdot \boldsymbol{n}_{i,j}^{\mathrm{ib}} \right) u \, \mathrm{d}S, \tag{4.22}$$

alors que leur expression sur les autres faces de la cellule est inchangée puisque la composante normale de la vitesse de déplacement des faces fluides est nulle. La discrétisation de (4.22) repose sur la discrétisation antisymétrique des flux convectifs présentée dans la section 3.4 et dans l'annexe B. Par exemple, l'équivalent de l'équation (3.33a) pour la moitié $\Gamma_{i,j}^{\text{ib,e}}(t)$ de la surface solide de la cellule $\Omega_{i,j}^u(t)$ de la figure 3.3 est :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{\mathrm{ib},e}(t)} \left(\left[\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^{\mathrm{g}} \right] \cdot \boldsymbol{n}_{i,j}^{\mathrm{ib}} \right) u \, \mathrm{d}S \cong \frac{\overline{U}_{i,j}^{\mathrm{ib}} - \overline{U}_{i,j}^{\mathrm{g}}}{2} \, \left(\frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{2} u(x_i, y_{i,j}^{\mathrm{ib}}) \right), \tag{4.23}$$

où $\overline{U}_{i,j}^{g}$ est le flux de masse de grille de la *cut-cell* $\Omega_{i,j}(t)$ qui doit maintenant être défini de telle sorte que la condition GCL soit vérifiée.

Un problème important lié à la discrétisation sur maillage cartésien fixe est l'apparition de cellules nouvellement formées dites "freshly cleared cells" (Fig. 4.11) qui étaient à l'intérieur du solide au temps précédent. Dans ces cellules une procédure d'avancée en temps standard est inutilisable car ces cellules ne possèdent pas d'histoire dans le domaine de calcul. Pour réaliser nos simulations avec géométries mobiles, nous avons donc considéré une variante au premier ordre du schéma de projection (2.126)-(2.127), dont l'étape de prédiction s'écrit :

$$\rho \frac{\mathcal{M}^{n+1}\widetilde{U} - \mathcal{M}^n U^n}{\Delta t} + \rho \mathcal{C}[\overline{U}^n - \overline{U}^{g,n}] U^n - \eta \mathcal{K}^{n+1} \widetilde{U} = 0, \tag{4.24}$$

où les coefficients du schéma dépendent à présent du temps et doivent être calculés à partir de la fonction level-set de la géométrie au niveau de temps correspondant. Le flux discret de grille $\overline{U}^{g,n}$

est à présent calculé de telle sorte que le champ constant U = 1 soit solution du schéma (4.24), comme dans le cas d'un domaine fixe. Dans les *cut-cells*, cette condition implique que :

$$\frac{[\mathcal{M}^x]_{P}^{n+1}(i,j) - [\mathcal{M}^x]_{P}^{n}(i,j)}{\Delta t} - \frac{\overline{U}_{i,j}^{g,n} + \overline{U}_{i+1,j}^{g,n}}{2} = 0,$$
(4.25)

et, en utilisant la définition (3.21) de la matrice de masse nous identifions complètement le débit de grille discret dans une *cut-cell* comme :

$$\overline{U}_{i,j}^{g,n} = \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n}{\Delta t}.$$
(4.26)

Cette relation est version discrète de la condition GCL (4.21) pour le schéma d'Euler implicite (4.24) qui dans notre étude facile a imposer puisque le mouvement du solide est imposé; l'étape (2.127) de projection n'altère pas cette condition. À chaque pas de temps, le flux discret de grille $\overline{U}_{i,j}^{g,n}$ peut être aisément calculé à partir de la condition GCL discrète et être incorporé aux formules de discrétisation de l'annexe B à la manière de (4.23).

Plusieurs approches $ad\ hoc$ ont été proposés dans [131, 130, 10, 24] pour traiter numériquement le problème causé par les "freshly cleared cells". Dans la présente méthode, si la cellule $\Omega_{i,j}^{u,n+1}$ est nouvellement formée (i.e., $\theta_{i,j}^{u,n}=0$ et $\theta_{i,j}^{u,n+1}>0$), nous évaluons simplement la vitesse provisionnelle $\widetilde{u}_{i,j}$ comme la vitesse de la frontière mobile, ignorant l'étape standard de prédiction (4.24), tandis que l'étape de projection demeure inchangée. Nous attirons l'attention du lecteur que la procédure d'avancée en temps ne garantit pas la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique au niveau discret. La construction d'un schéma temporel remédiant à cet écueil, laissée pour un travail futur, traiterait le cas des cellules nouvellement formées par un schéma implicite semi-lagrangien [113].

4.5.2 Application : écoulement incident sur un cylindre en mouvement d'oscillations transverses

Pour valider notre méthode nous avons réalisé la simulation d'un écoulement incident sur un cylindre sur lequel est imposé un mouvement oscillant transverse. Cet écoulement a tout d'abord été étudié expérimentalement par Gu et al. [46], puis numériquement par Lu et Dalton [80] et Guilmineau et Queutey [49] avec des méthodes conformes dans le référentiel inertiel lié au cylindre. Cet écoulement est devenu un cas test populaire pour les méthodes IB [138, 68] et pour les méthodes de type cut-cell [130, 24].

Les paramètres géométriques du domaine de calcul ainsi les maillages utilisés sont les mêmes que pour l'étude du cylindre fixe présentée dans la section 4.3. Les paramètres de l'écoulement coïncident avec ceux des références précédemment citées. Le mouvement transverse du centre du cylindre est donné par :

$$y_{\rm c}(t) = A, \quad t < 10 \frac{D}{U_{\infty}}$$
 (4.27a)

$$y_{c}(t) = A\cos\left(2\pi S_{e}\left[t\frac{U_{\infty}}{D} - 10\right]\right), \quad t \ge 10\frac{D}{U_{\infty}},\tag{4.27b}$$

dont l'amplitude est A=0.2D, et $S_{\rm e}$ désigne le nombre de Strouhal d'excitation $S_{\rm e}$. Nous considérons une série de calcul réalisée sur le maillage M4 (Tab. 4.1) à Re = 185, pour A=0.2D et $S_{\rm e}/S_0 \in [0.8, 1.2]$ où $S_0=0.201$ est la fréquence adimensionnée du lâché tourbillonaire à Re = 185, qui a été calculée numériquement avec le schéma d'Euler implicite. La valeur du pas de temps est de $\Delta t=5\times 10^{-3}D/U_{\infty}$.

Dans le cas des géométries mobiles, la définition du nombre de CFL (4.18) doit être modifiée afin de tenir compte de la vitesse de grille, à la manière de la correction (4.23) dans l'expression discrète des termes convectifs en formulation ALE:

$$CFL_{i,j} = \left[(\overline{u}_{i,j})^{+} + (-\overline{u}_{i-1,j})^{+} + (\overline{v}_{i,j})^{+} + (-\overline{v}_{i,j-1})^{+} + (\overline{U}_{i,j}^{ib} - \overline{U}_{i,j}^{g})^{+} \right] \frac{\Delta t}{V_{i,j}}.$$
 (4.28)

De plus, nous mentionnons le fait que les vitesses dans les *cut-cells* ont des valeurs très proches de celle de la frontière mobile. Ainsi afin d'éliminer les instabilités numériques causées par le mouvement de la frontière, il est nécessaire de construire un nombre CFL supplémentaire basé sur la cinématique [43] du solide :

$$CFL_{i,j}^{ib} = \frac{|u_{i,j}^{ib}|\Delta t}{\Delta x_i} + \frac{|v_{i,j}^{ib}|\Delta t}{\Delta y_j}.$$
(4.29)

La condition $\max_{i,j} \operatorname{CFL}_{i,j}^{\operatorname{ib}} < 1$ assure le fait que la frontière ne traverse jamais entièrement une cellule du domaine pendant un pas de temps. Puisque le mouvement du solide est imposé dans la présente étude, cette condition peut être vérifiée avant de réaliser les simulations. Nous avons vérifié que la condition (4.29) basée sur le mouvement de la frontière est toujours moins restrictive que la condition (4.28) reposant sur le champ de vitesse dans le domaine fluide. Par exemple dans le cas où $S_{\mathrm{e}}/S_0 = 1.2$ nous avons observé que $\max_{i,j} \operatorname{CFL}_{i,j}^{\mathrm{ib}} \simeq 0.04$ tandis que $\max_{i,j} \operatorname{CFL}_{i,j}^{\mathrm{ib}} \simeq 0.3$.

Pour les différentes valeurs de $S_{\rm e}$ considérées, la morphologie du sillage est représentée par la figure 4.12 lorsque le cylindre atteint la position extrémale de sa phase ascendante. Pour $0.8 \leq S_{\rm e}/S_0 < 1$ le sillage possède une forme très semblable, et la taille du tourbillon supérieur diminue légèrement avec l'augmentation de $S_{\rm e}/S_0$. Conformément aux observations de [49] la topologie des lignes de courant change significativement à partir de $S_{\rm e}/S_0 > 1$, avec notamment l'apparition de 2 points de rebroussement dans l'écoulement en aval du cylindre. De plus, l'intensité du tourbillon supérieur est dans ce cas plus faible en valeur absolue que celle du tourbillon inférieur. Ce phénomène est attribué à l'apparition d'une zone de cisaillement sur l'aval du cylindre dont l'intensité augmente avec la vitesse du cylindre (donc avec la valeur du paramètre $S_{\rm e}/S_0$). Au fur et à mesure de l'ascension du mobile (représentée figure 4.13 pour $S_{\rm e}/S_0 = 1.2$) cette zone de vorticité interagit avec le tourbillon supérieur et tend à diminuer son intensité. La figure 4.14 représente l'évolution temporelle des coefficients de force pour des valeurs croissante de la fréquences d'excitation. En particulier nous observons un phénomène de verrouillage de fréquence pour toutes les fréquences d'excitation et l'apparition d'un harmonique plus haut lorsque $S_{\rm e}/S_0 \geq 1$.

Ces résultats sont en très bon accord avec ceux issus des études antérieures [80, 49, 138]. Une comparaison qualitative des coefficients de force est donnée figure 4.15 et nous constatons un bon accord de nos résultats avec ceux issus d'une méthode conforme (dans le référentiel du cylindre) [49], et d'un méthode IBM [138]. Finalement pour le cas $S_e/S_0 = 1.2$ qui exhibe la dynamique la plus complexe, nous effectuons une étude de la sensibilité au maillage des résultats concernant les coefficients de force, reportée dans le tableau 4.8. Afin de garder une erreur temporelle (qui est du premier ordre dans le cas des frontières mobiles) comparable sur chacun des maillages utilisés, nous fixons le nombre CFL à la valeur de 0.3 dans chacune des simulations. Nous observons que sur les 2 maillages les plus fins les résultats varient de 4% pour la variance de la traînée et de moins de 3% pour la traînée moyennée en temps. Ce niveau de sensibilité au maillage est comparable à celle observée dans la méthode de [49].

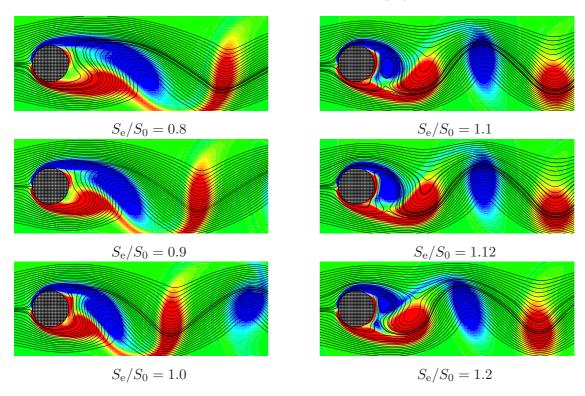


FIG. 4.12 – Lignes de courant et isocontours de vorticité pour l'écoulement autour d'un cylindre en mouvement oscillant transverse pour la position extrémale du cylindre i.e. $y_c(t) = A$.

	$\overline{C}_{\mathrm{D}}$	$C_{\mathrm{D}}^{\mathrm{rms}}$	$C_{\rm L}^{ m rms}$
M1	1.309	0.366	0.884
M2	1.202	0.101	0.754
M3	1.386	0.124	0.889
M4	1.422	0.142	0.941
M5	1.387	0.132	0.975
IBM, 800×640 cells, $h = 0.005D$ [138]	1.426	0.128	0.964
O-type curvilinear grid, 180×120 cells, $h = 0.001D$ [49]	1.35	0.129	0.931

TAB. 4.8 – Coefficients de force pour le cas $S_e/S_0 = 1.2$ obtenus pour la série de maillages décrite dans le tableau 4.1.

4.6 Évaluation de l'efficacité calculatoire de la méthode LS-STAG

Il y a essentiellement deux caractéristiques qui peuvent rendre les méthodes de frontières immergées potentiellement plus attractives que les méthodes standards sur maillage conforme : la conception rapide de maillages de qualité pour des géométries très complexes [79] et le temps de calcul plus faibles pour la simulation de l'écoulement. Ce dernier point est illustré dans le cas de géométries simples par Manhart et al. [83], où 3 codes de calculs structurés et non-structurés sont évalués en termes de précision et de temps de calcul sur le cas test du canal turbulent. Deux de ces codes utilisent un arrangement décalé des variables : le code MGLET est adapté aux géométries cartésiennes et $DeFT^{15}$ est une généralisation de MGLET pour les maillages non-structurés. Le troisième de ces codes HORUS utilise un arrangement colocalisé des variables sur maillage curviligne. Une des conclusions notable de cet article est qu'un solveur cartésien engendre un temps de calcul qui correspond à une fraction du temps pris par un solveur nonstructuré. Une même étude comparative n'existe pas dans le cas de géométries complexes, il est cependant pertinent d'évaluer le temps de calcul d'une méthode IB avec un solveur cartésien. La complexité informatique supplémentaire pour traiter les géométries complexes peut prendre une part non négligeable du temps de calcul, ce temps dépend évidemment du type de la méthode IB considérée mais aussi de la qualité de l'implémentation de la méthode. Pour la méthode LS-STAG, ces tâches informatiques supplémentaires sont associées principalement au calcul des paramètres géométriques des cellules fluides lors de la construction du système discret, et de la raideur accrue des systèmes linéaires à résoudre due à la présence de petites cut-cells.

Cette partie est dédiée à l'évaluation des performances du code LS-STAG utilisé pour les simulations présentées dans ce manuscrit de thèse vis à vis d'un code commercial très répandu FLUENT. Nous avons choisi un cas test très référencé [98, 26, 123, 118] : l'écoulement

¹⁵Delft Flow and Transport

instationnaire autour d'un cylindre à section carrée à Re = 100. Pour cet écoulement, les deux codes peuvent utiliser des domaines de calcul identiques et les mêmes maillages qui épousent la géométrie (remarquons que les cellules adjacentes au cylindre carré sont traitées informatiquement comme des *cut-cells* dans la méthode LS-STAG).

Les paramètres géométriques du domaine de calcul ainsi que les conditions aux limites et initiale sont les mêmes que celle utilisées dans la section 4.3 pour l'écoulement autour du cylindre circulaire, avec $X_{\rm u}=8.5D,~X_{\rm d}=20D$ et D/A=1/20. La grille de calcul comporte 390×170 cellules et le raffinement de maillage utilisé près de l'obstacle est basé sur les recommandations de Sohankar et al. [123], avec en particulier $h/D=3.9\times10^{-3}$ au niveau de la frontière solide du cylindre. Le pas de temps est $\Delta t=5\times10^{-3}D/U_{\infty}.$ Les calculs ont été menés sur un ordinateur équipé d'1 GB de RAM et muni d'un processeur Pentium IV cadencé à 3 GHz, le système d'exploitation utilisé est WINDOWS XP. Le code de calcul LS-STAG est écrit avec le langage de programmation FORTRAN~90/95 et le fichier exécutable est généré par le compilateur INTEL FORTRAN~9.1 en précision double. Un paramètre de calcul important est la tolérance imposée sur les résidus des systèmes linéaires, fixée à $\epsilon=10^{-8}$. Une fois passé le régime transitoire, le système linéaire correspondant aux étapes de prédiction et projection est résolu en une itération environ.

Le logiciel commercial FLUENT est un code de calcul en volumes finis sur maillage nonstructuré avec un arrangement collocalisé des variables. Nous utilisons la version 6.0 en 2D simple précision pour effectuer le comparatif. Nous avons utilisé les paramètres recommandés pour les écoulements laminaires instationnaires : une avancée en temps du second ordre avec une résolution du système couplé vitesse-pression assuré par la méthode PISO, le schéma QUICKest employé pour la discrétisation des termes convectifs, et l'interpolation de la pression sur les faces des cellules est obtenue par la méthode PRESTO!.

Tous les paramètres de calcul correspondant gardent leur valeur par défaut, à l'exception de la tolérance sur les résidus fixée à $\epsilon=10^{-4}$ seulement. Pour cette valeur l'algorithme itératif converge en une itération mais nous n'avons pu obtenir la converge du solveur pour une tolérance aussi petit que celle utilisée dans pour le code LS-STAG.

Les résultats de ces simulations sont reportés dans le tableau 4.9 et les deux codes fournissent des résultats en bon accord avec ceux de la littérature. En moyenne la simulation menée par FLUENT requiert un temps CPU de 1.19 seconde, tandis que la simulation LS-STAG ne nécessite que 0.28 secondes, ce qui montre que cette dernière est quatre fois plus rapide. Nous pouvons raisonnablement espérer un gain de temps plus net dans le cas tridimensionnel, en remarquant que dans [83] le code cartésien MGLET est 10 fois plus rapide que le code non-structuré DeFT pour le cas test 3D de l'écoulement dans le canal turbulent.

	St	$\overline{C}_{\mathrm{D}}$	$C_{ m L}^{ m rms}$	temps CPU
$FLUENT, \epsilon = 10^{-4}$	$0.145 \pm 2.5 \times 10^{-3}$	1.510	0.185	199 min
LS-STAG, $\epsilon = 10^{-6}$	$0.150 \pm 2.5 \times 10^{-3}$	1.497	0.196	48 min
Okajima [98]	0.141 - 0.145	-	-	-
Davis <i>et al.</i> [26]	0.154	1.55	_	-
Sohankar et al. [123]	0.144	1.44	0.141	_
Saha <i>et al.</i> [118]	0.159	1.51	_	-

TAB. 4.9 – Résultats pour l'écoulement autour d'un cylindre à section carrée à Re = 100 et comparaison avec ceux de la littérature. Le temps de calcul est mesuré sur l'intervalle de temps $tD/U_{\infty} \in [0, 50]$.

4.7 Validation de la condition de sortie CCBC

Dans cette partie du manuscrit nous évaluons l'efficacité de la condition de sortie CCBC que nous avons présentée dans le chapitre précédent. Le cas test considéré est l'écoulement instationnaire autour d'un cylindre à section carrée H (figure 4.16) et nous considérons deux variantes de cet écoulement, considéré dans un premier temps libre, puis confiné. Ces configurations sont obtenues respectivement en imposant une condition de glissement et d'adhérence sur les parois inférieure et supérieure du domaine. L'influence des termes de cisaillement sur le comportement des conditions de sortie est évaluée avec l'étude de l'écoulement confiné. Nous rappelons que ces termes ne pas pris en compte par la condition CBC (2.147) alors que dans la condition CCBCque nous proposons les équations de Navier-Stokes sont discrétisées sur la section de sortie. Pour les deux cas test le repère orthonormé a pour origine le centre du cylindre à section carrée. Nous comparons l'efficacité de notre condition CCBC à celle des conditions de Neumann (NBC) et de la condition convective (CBC) présentées dans la section 2.6.3. Le protocole utilisé pour évaluer les différentes conditions de sortie est le suivant : la condition de sortie est imposée à une distance $X_{\rm D}/D$ de la face aval du carré et plusieurs simulations sont réalisées pour lesquelles la distance $X_{\rm D}/D$ est progressivement diminuée de 30 à 4 unités. Une condition de sortie est "efficace" si elle influe peu sur les caractéristiques de l'écoulement en amont. Pour le cas test que nous avons choisi ces caractéristiques ont été définies en 4.3 et sont les coefficients de force et la fréquence adimensionnée du lâché tourbillonnaire, le nombre de Strouhal.

4.7.1 Écoulement libre autour d'un cylindre à section carrée à Re = 100

Dans un premier temps nous étudions l'écoulement libre autour d'un cylindre à section carrée à Re = 100. Comme dans le cas étudié dans la section précédente, la taille du domaine et la taille du maillage près de l'obstacle est basée sur les recommandations de Sohankar et al. [123]. Les maillage tels que $X_{\rm D}/D=6$, 10, 15, 20 et 30 sont obtenus en ajoutant des blocs uniformes de taille $\Delta x/D=0.067$ au maillage de base tel que $X_{\rm D}/D=2.5$ (Fig. 4.17 à gauche).

Pour x>2.5H le maillage comporte un bloc uniforme dans la direction des x avec $\Delta x/D=0.067$, si bien que les maillages utilisés pour les cas où $X_{\rm D}/D=20$, 15, 10, 6, 4 sont obtenus par troncature stricte du domaine de calcul le plus grand, où $X_{\rm D}/D=30$ (figure 4.17). Pour la condition convective (2.147) la vitesse de convection est choisie telle que $U_{\rm c}=U_{\infty}$ où U_{∞} est la vitesse du profil uniforme d'entrée.

La figure 4.18 représente l'évolution des coefficients de force \overline{C}_D et C_L^{rms} en fonction de la distance X_D/D , le tableau 4.10 comporte les valeurs numériques correspondantes. Les valeurs de St obtenues sont reportées table 4.11. Tout d'abord, pour $X_D/D=30$ les différentes conditions de sortie donnent les mêmes résultats, qui sont en accord avec ceux des études numériques [26, 123, 118, 55] et expérimentales [98] menées précédemment.

$X_{ m D}/D$	$\overline{C}_{ m D}$			$C_{ m L}^{ m rms}$		
	NBC	CBC	CCBC	NBC	CBC	CCBC
4	1.625	1.482	1.490	0.338	0.191	0.157
6	1.432	1.489	1.490	0.192	0.215	0.211
10	1.518	1.497	1.496	0.086	0.193	0.190
15	1.510	1.497	1.497	0.218	0.195	0.194
20	1.499	1.497	1.497	0.225	0.196	0.196
30	1.497	1.497	1.497	0.193	0.196	0.196
Davis et al. [26]		1.55			_	
Sohankar et al. [123]		1.44		0.141		
Saha <i>et al.</i> [118]		1.51			_	
Hasan et al. [55]		1.4			_	

TAB. 4.10 – Coefficients de force pour l'écoulement libre autour d'un cylindre à section carrée à Re = 100 et comparaison avec ceux de la littérature, pour différentes valeurs de X_D/D .

Sans surprise la condition de sortie de Neumann est celle affectant le plus l'écoulement amont et pour laquelle les résultats dévient de manière significative dès $X_{\rm D}/D < 20$ (figure 4.18). En ce qui concerne la variance de la portance $C_{\rm L}^{\rm rms}$, cette déviation atteint 75% pour $X_{\rm D}/D = 4$ par rapport au cas de référence $X_{\rm D}/D = 30$. Les conditions CBC et CCBC sont bien plus satisfaisantes : la variation de la traînée $\overline{C}_{\rm D}$, pour $X_{\rm D}/D$ diminuant de 30 à 4, est respectivement de 1% et 0.5%, et de 3% et 20% concernant $C_{\rm L}^{\rm rms}$. La valeur de St est quant à elle très peu affectée par la proximité des conditions de sortie CBC et CCBC et varie de 3% seulement (table 4.11). L'étude de l'écoulement libre autour d'un cylindre à section carrée à Re = 0 révèle une efficacité comparable entre les conditions CBC et CCBC hormis pour la variance de la portance $C_{\rm L}^{\rm rms}$.

4.7.2 Écoulement confiné autour d'un cylindre à section carrée à Re = 180

Dans cette étude nous considérons encore l'écoulement autour d'un cylindre à section carrée mais dans un domaine confiné où sont imposées des conditions d'adhérence en $y=\pm A$. Le

$X_{ m D}/D$		St	
	NBC	CBC	CCBC
4	0.150	0.145	0.145
6	0.125	0.150	0.150
10	0.150	0.150	0.150
15	0.150	0.150	0.150
20	0.150	0.150	0.150
30	0.150	0.150	0.150
Okajima [98]	C	0.141 - 0	0.145
Davis <i>et al.</i> [26]	0.154		
Sohankar et al. [123]	0.144		
Saha <i>et al.</i> [118]	0.159		
Hasan et al. [55]		0.1438	38

TAB. 4.11 – Nombre de Strouhal St pour l'écoulement libre autour d'un cylindre à section carrée à Re = 100 et comparaison avec ceux de la littérature, pour différentes valeurs de X_D/D .

maillage est essentiellement le même que celui utilisé dans la section précédente, la grille est cependant raffinée dans la direction des y près des parois supérieures et inférieures, où se développent des couches limites représentées figure 4.19. La taille du domaine est basée sur l'étude numérique de Breuer $et\ al.\ [18]$ avec le rapport de confinement D/2A de 1/8. La condition d'entrée est un profil de vitesse parabolique de Poiseuille :

$$u(y) = u_{\infty} \left(1 - \frac{y^2}{A^2} \right), \tag{4.30}$$

où u_{∞} désigne la vitesse maximale dans le profil d'entrée sur laquelle repose l'adimensionnement du problème. Nous avons considéré deux variantes de la condition CBC (2.147) pour lesquelles la vitesse de convection $U_{\rm C}$ est égale à u_{∞} ou à la vitesse débitante dans la section de sortie. Les résultats obtenus se sont avérés être quasiment identiques, nous présenterons dans la suite uniquement la condition CBC avec $U_{\rm C}=u_{\infty}$. Comme dans la section précédente nous réalisons une série de simulations pour lesquelles la distance $X_{\rm D}/D$ est diminuée progressivement. Nous évaluons l'influence de la proximité des différentes conditions de sortie sur l'écoulement amont, et notamment sur les coefficients de force $\overline{C}_{\rm D}$ et $C_{\rm L}^{\rm max}$ (tableau 4.12 et figure 4.20) et sur le nombre de Strouhal (tableau 4.13). Pour $X_{\rm D}/D=30$ les différentes conditions de sortie donnent les mêmes résultats, qui sont en très bon accord avec ceux des études numériques [88, 18, 14] menées précédemment.

Concernant la conditions NBC les conclusions sont les mêmes que pour le cas de l'écoulement libre, à savoir qu'elle influe significativement sur l'écoulement amont. La déviation des résultats pour cette condition est néanmoins moins élevée que dans le cas de l'écoulement libre, en effet $C_{\rm L}^{\rm max}$ varie de 21% lorsque $X_{\rm D}/D$ diminue de 30 à 4 unités. Les résultats obtenus avec la condition

$X_{ m D}/D$	$\overline{C}_{ m D}$			$C_{ m L}^{ m max}$		<u> </u>
	NBC	CBC	CCBC	NBC	CBC	CCBC
4	1.388	1.339	1.344	0.714	0.926	0.903
6	1.320	1.332	1.335	1.158	0.940	0.889
10	1.339	1.335	1.336	0.838	0.898	0.900
15	1.336	1.335	1.335	0.890	0.901	0.901
20	1.335	1.335	1.335	0.898	0.899	0.899
30	1.335	1.335	1.335	0.901	0.901	0.901
Buffoni et al. [88]	1.3803				0.942	3
Breuer et al. [18]		1.3250)		0.9090	0

Tab. 4.12 – Coefficients de force pour l'écoulement confiné autour d'un cylindre à section carrée à Re = 180 et comparaison avec ceux de la littérature, pour différentes valeurs de X_D/D .

CCBC sont satisfaisant, en effet la déviation des résultats est de 7% et 0.2% pour $\overline{C}_{\rm D}$ et $C_{\rm L}^{\rm max}$ respectivement. Les résultats correspondants avec la condition CBC sont 3% pour $C_{\rm L}^{\rm max}$ et 3% pour $\overline{C}_{\rm D}$. Finalement la valeur du nombre de Strouhal reportée dans le tableau 4.13 est insensible à la proximité des conditions CBC et CCBC.

$X_{ m D}/D$	St		
	NBC	CBC	CCBC
4	0.155	0.145	0.145
6	0.135	0.145	0.145
10	0.145	0.145	0.145
15	0.145	0.145	0.145
20	0.145	0.145	0.145
30	0.145	0.145	0.145
Buffoni et al. [88]	0.1388		
Galletti et al. [14]	0.1370		
Breuer et al. [18]	0.1440		

Tab. 4.13 – Nombre de Strouhal St pour l'écoulement confiné autour d'un cylindre à section carrée à Re = 100 et comparaison avec ceux de la littérature, pour différentes valeurs de X_D/D .

Plusieurs conclusions se dégagent de cette étude de l'écoulement libre/confiné autour d'un cylindre à section carrée, visant à évaluer et comparer l'efficacité de la la condition CCBC vis à vis de conditions de sortie utilisées couramment :

– La condition de sortie de Neumann donne des résultats acceptables pour des domaines de calcul relativement longs. L'étude de l'écoulement libre autour du cylindre à section carrée à Re = 100 montre que pour $X_D/D < 20$ les résultats obtenus ne sont plus fiables (voir

- figure 4.18) tandis que pour une condition de sortie plus sophistiquée (CBC ou CCBC) les résultats le demeurent jusque $X_{\rm D}/D=10$, ce qui permet d'économiser 24140 volumes de contrôle.
- Cette étude valide la condition de sortie CCBC que nous avons présentée dans la section 2.6.3. Nous avons montré que son efficacité est comparable aux conditions de type CBC sans avoir à introduire de paramètre choisi empiriquement. Dans une étude future, un comparatif entre ces conditions de sortie sera mené dans le cas d'un écoulement de type couche limite de Blasius pour lequel, comme l'ont remarqué Fournier et al. [39], la prise en compte des termes diffusifs est essentielle pour obtenir des profils de sortie valides.

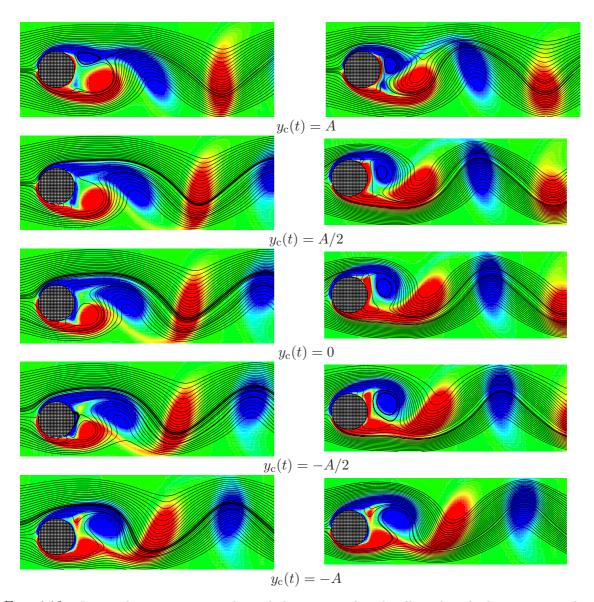


FIG. 4.13 – Lignes de courant et isovaleurs de la vorticité dans le sillage du cylindre ascentionnel pour la fréquence d'excitation $S_{\rm e}/S_0=1.2$, pour différentes valeurs de la position $y_{\rm c}(t)$. À gauche : phase descendante du cylindre. À droite : phase ascendante du cylindre.

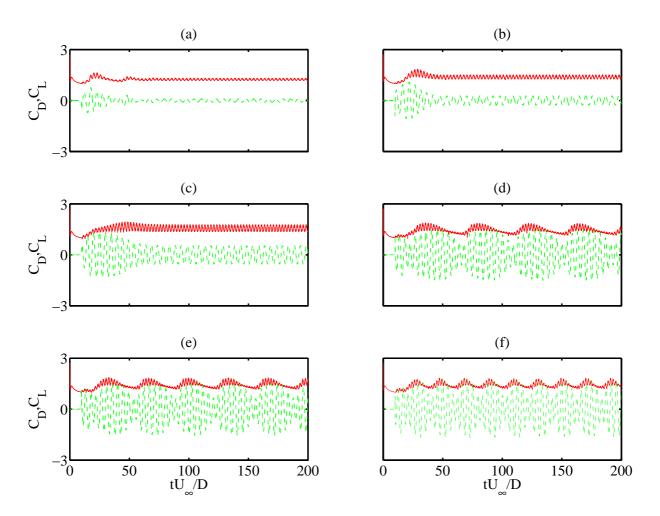


FIG. 4.14 – Évolution temporelle des coefficients de force (— $C_{\rm D}$; - - - $C_{\rm L}$) pour l'écoulement autour d'un cylindre en mouvement oscillant transverse pour $S_{\rm e}/S_0$ égal à : (a) 0.8; (b) 0.9;(c) 1.0;(d) 1.1; (e) 1.12; (S) 1.2.

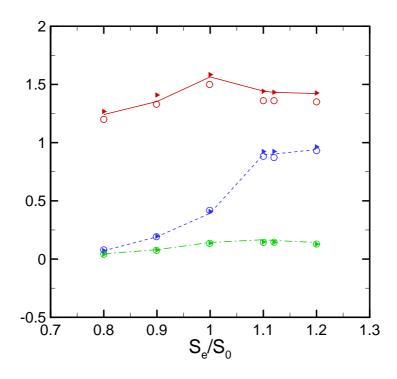


FIG. 4.15 – Moyenne temporelle des coefficients de force pour l'écoulement autour d'un cylindre en mouvement oscillant transverse : $\overline{C}_{\rm D}$ (trait plein), $\overline{C}_{\rm D}^{\rm rms}$ (trait pointillé long-court) et $C_{\rm L}^{\rm rms}$ (trait pointillé). Les symboles \blacktriangleright et \bigcirc représente les données obtenues par [138] et [49] respectivement.

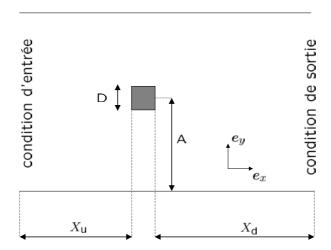


Fig. 4.16 – Domaine de calcul pour l'écoulement autour d'un cylindre carré.

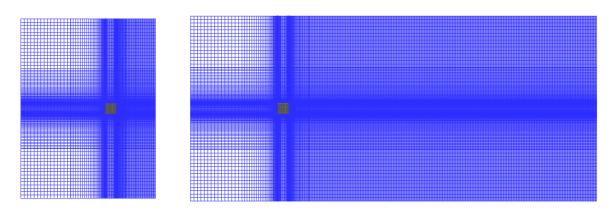


FIG. 4.17 – Maillage utilisé pour l'étude de l'écoulement libre autour d'un cylindre à section carrée. À droite : $X_D/D=4$. À gauche : $X_D/D=30$.

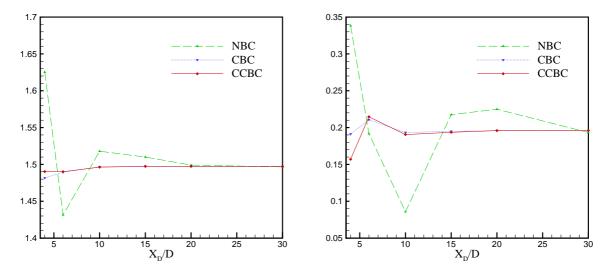


FIG. 4.18 – Évolution des coefficients de force en fonction de $X_{\rm D}/D$ pour l'écoulement libre autour d'un cylindre à section carrée à Re = 100. À gauche : $\overline{C}_{\rm D}$. À droite : $C_{\rm L}^{\rm rms}$.

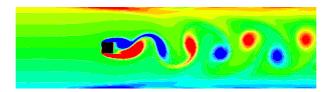


Fig. 4.19 – Champ de vorticité pour l'écoulement confiné autour d'un cylindre à section carrée à Re = 180.

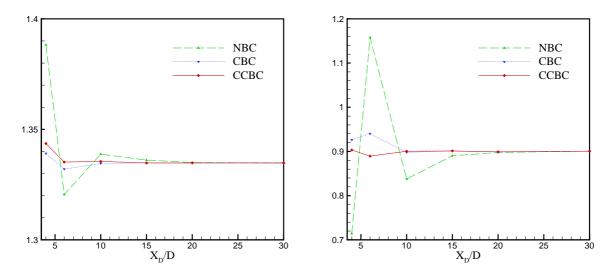


FIG. 4.20 – Évolution des coefficients de force en fonction de $X_{\rm D}/D$ pour l'écoulement confiné autour d'un cylindre à section carrée à Re = 180. À gauche : $\overline{C}_{\rm D}$. À droite : $C_{\rm L}^{\rm max}$.

Chapitre 5

La méthode LS-STAG pour écoulement de fluides viscoélastiques en géométries complexes

Sommaire	
5.1	Introduction
5.2	Le maillage $LS\text{-}STAG$ pour fluides viscoélastiques $\dots \dots 127$
5.3	Discrétisation de l'équation pour la contrainte élastique normale $ au_{\mathrm{e}}^{xx}$ 132
5.4	Discrétisation de l'équation pour la contrainte élastique de cisaillement $\tau_{\rm e}^{xy}$
5.5	Algorithme d'intégration en temps
5.6	Extension de la condition de sortie CCBC au cas des fluides visco- élatiques
5.7	Écoulement en contraction 4 :1 plane d'un fluide d'Oldroyd-B 146

5.1 Introduction

Nous avons introduit dans le chapitre 1 les équations gouvernant l'écoulement d'un fluide viscoélatique d'Oldroyd-B (1.28) constitué par les équations de conservation de quantité de mouvement (1.28a), de la loi de comportement d'Oldroyd-B (1.28b) et de l'équation de continuité (1.28c). Nous allons à présent les écrire sous la forme intégrale, ce qui constitue la première étape de la formulation en volumes finis que nous utilisons. Les équations de conservation de quantité de mouvement (1.28a) s'écrivent respectivement suivant la direction x et des y:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega} u \, \mathrm{d}V + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) u \, \mathrm{d}S + \int_{\Gamma} p \, \boldsymbol{e}_{x} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S - \int_{\Gamma} (\eta_{\mathrm{s}}, \boldsymbol{\nabla}u + \underline{\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{e}_{x}}) \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = 0, \quad \text{et} \quad (5.1a)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega} v \, \mathrm{d}V + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) v \, \mathrm{d}S + \int_{\Gamma} p \, \boldsymbol{e}_{y} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S - \int_{\Gamma} (\eta_{\mathrm{s}} \, \boldsymbol{\nabla}v + \underline{\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{e}} \cdot \boldsymbol{e}_{y}}) \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = 0, \quad (5.1b)$$

où les termes soulignés correspondent aux termes de couplage avec l'équation constitutive d'Oldroyd-B (1.28). Le tenseur τ_e des contraintes élastiques s'écrit :

$$\boldsymbol{\tau}_{e} = \begin{pmatrix} \tau_{e}^{xx} & \tau_{e}^{xy} \\ \tau_{e}^{xy} & \tau_{e}^{xy} \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

et l'équation de transport pour chacune des composantes s'écrit, pour $\tau_{\rm e}^{xx}$:

$$\lambda \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega} \tau_{\mathrm{e}}^{xx} \, \mathrm{d}V + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, \tau_{\mathrm{e}}^{xx} \, \mathrm{d}S \right) = S_{xx}$$

$$\text{avec} \quad S_{xx} = \int_{\Omega} \left[-\tau_{\mathrm{e}}^{xx} + 2\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} \tau_{\mathrm{e}}^{xx} + \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{\mathrm{e}}^{xy} \right) + 2\eta_{\mathrm{e}} \frac{\partial u}{\partial x} \right] \, \mathrm{d}V,$$

$$(5.3)$$

pour $\tau_{\rm e}^{yy}$:

$$\lambda \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega} \tau_{\mathrm{e}}^{yy} \, \mathrm{d}V + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, \tau_{\mathrm{e}}^{yy} \, \mathrm{d}S \right) = S_{yy}$$

$$\text{avec} \quad S_{yy} = \int_{\Omega} \left[-\tau_{\mathrm{e}}^{yy} + 2\lambda \left(\frac{\partial v}{\partial y} \tau_{\mathrm{e}}^{yy} + \frac{\partial v}{\partial x} \tau^{xy} \right) + 2\eta_{\mathrm{e}} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \, \mathrm{d}V,$$

$$(5.4)$$

et pour la contrainte de cisaillement $\tau_{\rm e}^{xy}$:

$$\lambda \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega} \tau_{\mathrm{e}}^{xy} \, \mathrm{d}V + \int_{\Gamma} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, \tau_{\mathrm{e}}^{xy} \, \mathrm{d}S \right) = S_{xy}$$

$$\text{avec} \quad S_{xy} = \int_{\Omega} \left[-\tau_{\mathrm{e}}^{xy} + \eta_{\mathrm{e}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \lambda \frac{\partial v}{\partial x} \tau_{\mathrm{e}}^{xx} + \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{\mathrm{e}}^{yy} \right] \, \mathrm{d}V.$$
(5.5)

Pour clôre ce système d'équation, nous écrivons l'équation de continuité :

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, dS = 0. \tag{5.6}$$

La résolution numérique du système résultant du couplage des 6 équations (5.1a), (5.1b) (5.3), (5.4), (5.5) et (5.6) est de toute évidence numériquement intensive et nécessite l'utilisation de méthodes performantes en terme de temps de calcul, notamment pour prendre en compte les géométries complexes. Pour les fluides newtoniens les méthodes de type IB se positionnent comme une alternative avantageuse, notamment en terme de temps de calcul, vis-à-vis des solveurs non-structurés classiques, ce que nous avons illustré avec la méthode LS-STAG dans la section 4.6. L'efficacité calculatoire des méthodes de type IB permet d'envisager des solutions numériques pour des problèmes qui restent encore inaccessibles avec des solveurs non-structurés, comme le calcul DNS de Smith $et\ al.\ [122]\ de\ l'écoulement\ autour\ d'une\ balle de golf ou encore pour les problèmes d'interaction fluide/structure [70]. Et finalement, si les méthodes IB étendent$

leur domaine d'application hors des thématiques traditionnelles de la mécanique des fluides numérique [45], leur efficacité n'a pas été mise à profit, à notre connaissance, dans le cas de fluides viscoélastiques.

Les différentes loi constitutives existantes (modèles de Maxwell, d'Oldroyd-B , de Phan-Thien/Tanner, etc..., voir [15]) pour modéliser le comportement viscoélastique des fluides comportent les mêmes caractéristiques mathématiques, à savoir : un jeu d'équations hyperboliques non-linéaires pour le transport des composantes élastiques du tenseur des contraintes, couplé aux équations du mouvement. La résolution numérique de ces systèmes se heurte depuis le début des années 70 au problème de haut nombre de Weissenberg (HWNP)¹⁶. Typiquement, ce phénomène numérique conduit à la perte de stabilité des méthodes numériques employées, pour un taux d'élasticité critique We_{cri} d'autant plus faible que le maillage utilisé est fin. Parmi les nombreuses origines numériques connues de ce problème (se référer à l'article de revue de Walters et Webster [135], ou encore le chapitre 7 de l'ouvrage de Owens et Phillips [103]), trois sont essentielles pour repousser la limite du We atteignable, elles concernent respectivement la discrétisation spatiale et temporelle des équations gouvernant l'écoulement :

- Comme pour le cas du couplage entre la pression et la vitesse pour les écoulements de fluides newtoniens, la discrétisation de la vitesse et des contraintes doit être menée de manière compatible afin d'empêcher l'apparition d'oscillations parasites dans l'écoulement, conduisant à la destruction de la solution. Dans une formulation de type éléments finis cela conduit à une condition de compatibilité sur le choix des espaces d'approximation pour la vitesse et les contraintes, semblable à la condition inf-sup pour la pression et la vitesse dans le cas newtonien [65]. Pour une méthode de volumes finis, cette condition est remplie en introduisant un arrangement décalé adéquat des contraintes élastiques normales et de cisaillements sur la grille de calcul [25, 41]. L'arrangement colocalisé de toutes les variables requiert l'introduction d'interpolations spéciales pour la contribution des contraintes élastiques dans l'équation du mouvement afin d'empêcher l'apparition d'oscillations parasites [114], en sus des traditionnelles interpolations de Rhie-Chow [116] pour la pression.
- Les équations de transport (5.3), (5.4) et (5.5) des composantes du tenseur des contraintes élastiques sont de nature hyperbolique et un soin particulier doit être apporté à la discrétisation des flux convectifs. L'utilisation de formules de discrétisation centrées est connue pour introduire des oscillations parasites dans la solution, et nuire à la stabilité des calculs, le remède consiste à utiliser des formules de discrétisation décentrées. Par exemple le schéma upwind précis en $\mathcal{O}(\Delta x)$ conserve la monotonicité de la solution [75], mais introduit une forte dissipation numérique dans tout le domaine. L'utilisation de schémas à limiteurs de flux (cf. chapitre 7 de [75] ou chapitre 8 de [72]) permet de conserver globalement la précision en $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ des schémas centrés en introduisant de la dissipation numérique localement au niveau des oscillations. De tels schémas sont notamment utilisés dans Alves $et\ al.$ [6] pour étudier l'écoulement du fluide de Maxwell. Ce type de problème est aussi ren-

¹⁶high Weissenberg number problem

- contré avec la méthode de Galerkin en éléments finis, et les méthodes de stabilisation SU¹⁷ et SUPG¹⁸ sont les palliatifs les plus répandus, reposant sur l'introduction de diffusion artificielle dans la formulation faible des équations [9].

Dans ce chapitre nous proposons une extension du maillage à arrangement décalé des inconnues de Darwish et~al.~[25] dans les cut-cells, ce qui apporte une réponse au premier de ces trois points. Pour construire notre méthode IB, un bon traitement de la loi constitutive dans les cut-cells est nécessaire, là où les effets visqueux sont dominants. Prenant pour point de départ la discrétisation des contraintes newtoniennes dans les cut-cells (cf. section3.5), nous y proposons une discrétisation des équations de transport (5.3), (5.4) et (5.5) pour le modèle d'Oldroyd-B assurant la compatibilité de la discrétisation pression-vitesse-contrainte dans tout le domaine fluide Ω^f . Concernant le deuxième des trois problèmes évoqués précédemment, nous utilisons dans cette thèse le schéma upwind pour traiter les termes convectifs des équations constitutives (5.3)-(5.5). L'extension à des schémas plus performants comme les schémas à limiteurs de flux n'introduit pas de difficultés supplémentaires mais est laissée pour un travail futur. L'avancée en temps est une extension du schéma à pas fractionnaires présenté dans la section 2.6, nous précisons que ce schéma n'a pas pour vocation de préserver la positivité de τ_A , la construction d'un tel schéma est laissée pour un travail futur.

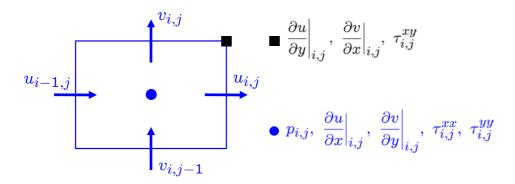


Fig. 5.1 – Emplacement des contraintes viscoélastiques et newtoniennes dans une cellule cartésienne $\Omega_{i,j}$.

5.2 Le maillage LS-STAG pour fluides viscoélastiques

5.2.1 Arrangement décalé des contraintes élastiques : avantages et inconvénients

L'équation tensorielle d'Oldroyd-B introduit en deux dimensions, trois nouvelles inconnues : $\tau_{\rm e}^{xx}$, $\tau_{\rm e}^{yy}$ et $\tau_{\rm e}^{xy}$. Le maillage LS-STAG est basé sur le maillage à arrangement totalement décalé des variables introduit par Darwish et~al.~[25] pour géométries simples. Sur la cellule cartésienne $\Omega_{i,j}$ de la figure 5.1, les inconnues de contraintes normales $\tau_{i,j}^{xx}$ et $\tau_{i,j}^{yy}$ sont disposées en son centre tandis que l'inconnue de contrainte tangentielle $\tau_{i,j}^{xy}$ est placée sur son coin supérieur droit. Cet arrangement est le même que celui de leur contrepartie newtoniennes. Les variables hydrodynamiques de vitesse et de pression gardent le même emplacement que dans la méthode MAC (cf. section 2.1.2). L'intérêt majeur de cet arrangement réside dans le fait que la discrétisation des contraintes élastiques de cisaillements et normales ne fait intervenir aucune formule d'interpolation spéciale dans les équations de quantité de mouvement (5.1), ce qui serait le cas avec un arrangement collocalisé des variables [114]. Par exemple l'équation de quantité de mouvement pour u (5.1a) écrite dans le volume de contrôle $\Omega_{i,j}^u$ de la figure 5.1 fait intervenir le terme de couplage $\int_{\Gamma_{i,j}^u} \tau_{\rm e} \cdot e_x \cdot n {\rm d}S$ dont nous allons distinguer, comme nous l'avons fait pour les contraintes newtoniennes (2.92), les contributions tangentielles et normales :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u}} (\boldsymbol{\tau}_{e} \cdot \boldsymbol{e}_{x}) \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \int_{\Gamma_{i,j}^{u}} \tau_{e}^{xx} \, \boldsymbol{e}_{x} \cdot \boldsymbol{n} \, dS + \int_{\Gamma_{i,j}^{u}} \tau_{e}^{xy} \, \boldsymbol{e}_{y} \cdot \boldsymbol{n} \, dS.$$
 (5.7)

Puisque la contrainte élastique normale $\tau_{i,j}^{xx}$ partage le même emplacement que sa contrepartie newtonienne $\frac{\partial u}{\partial x}|_{i,j}$, le premier terme du membre de droite de (5.7) est calculé par la même quadrature que (2.96) et a pour expression :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u}} \tau_{\mathbf{e}}^{xx} \, \boldsymbol{e}_{x} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S \cong \Delta y_{j} \left(\tau_{i+1,j}^{xx} - \tau_{i,j}^{xx} \right), \tag{5.8}$$

 $^{^{17}}$ streamline-upwind

¹⁸streamline-upwind/Petrov-Galerkin

où l'indice e est omis dans les variables discrètes et le sera dans la suite du manuscrit, afin d'alléger les notations. Le terme de cisaillement est quant à lui décomposé à la manière de (2.98) comme la différence entre le flux sur la face Nord et la face Sud de $\Omega^u_{i,j}$. Sur la face $\Gamma^{\mathrm{n,e}}_{i,j} \cup \Gamma^{\mathrm{n,w}}_{i+1,j}$, puisque $\tau^{xy}_{i,j}$ partage le même emplacement que $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{i,j}$, nous pouvons écrire le flux de contrainte tangentiel à la manière de (2.99) :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{\mathbf{n},\mathbf{e}} \cup \Gamma_{i+1,j}^{\mathbf{n},\mathbf{w}}} \tau_{\mathbf{e}}^{xy} \, \boldsymbol{e}_{y} \cdot \boldsymbol{n} \cong \left(\frac{1}{2} \Delta x_{i,j} + \frac{1}{2} \Delta x_{i+1,j}\right) \tau_{i,j}^{xy}. \tag{5.9}$$

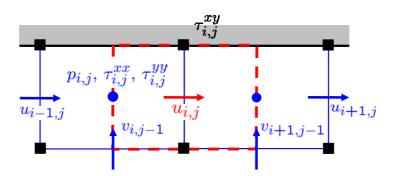
Cet exemple illustre l'intérêt d'utiliser un arrangement des contraintes élastiques consistant avec celui des contraintes newtoniennes.

L'utilisation de cet arrangement décalé des contraintes élastiques introduit essentiellement deux difficultés. La première est mineure, et elle est liée à la nécessité de définir un volume de contrôle supplémentaire pour discrétiser l'équation de transport (5.5) pour $\tau_{\rm e}^{xy}$. La difficulté majeure réside dans le fait que la contrainte élastique de cisaillement $\tau_{\rm e}^{xy}$ apparait sur les frontières solides du domaine, par exemple dans le cas de la figure 5.2. Plus particulièrement pour des écoulements en contraction abrupte, l'inconnue de cisaillement est placée sur les coins du domaine solide (Fig. (5.3)) où $\tau_{\rm e}^{xy}$ est mathématiquement singulier. Pour cette raison, certains auteurs comme Yoo et Na [140] ont introduit un arrangement semi-décalé des variables où les contraintes élastiques sont toutes placées au centre de la cellule ce qui renvoie aux problèmes liés au couplage vitesse-contrainte des maillage colocalisés.

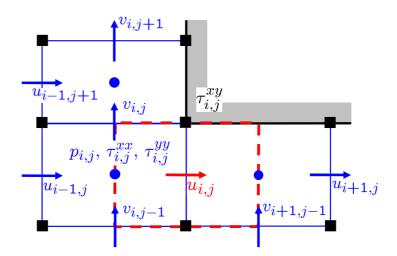
De par la nature hyperbolique de la loi constitutive, il n'existe pas de condition aux limites naturelle sur $\tau_{\rm e}^{xy}$ sur les bords du domaine, qui doit alors être évaluée numériquement. Il existe essentiellement deux approches dans la littérature pour calculer cette contrainte pariétale. La première repose sur des raisonnements analytiques, Darwish et al. [25] proposent dans le cas stationnaire une simplification ad hoc de l'équation de transport pour τ^{xy} . Dans la configuration représentée par la figure 5.2, la condition d'adhérence sur un mur indéformable et fixe implique que $u=0,\ v=0,\ \partial u/\partial x=0$ et $\partial v/\partial x=0$, et d'après l'équation de continuité $\partial v/\partial y=0$. En introduisant ces relations dans l'équation de transport pour $\tau_{\rm e}^{xy}$, elle se réduit à :

$$\tau_{\rm e}^{xy} = \eta_{\rm e} \frac{\partial u}{\partial y},\tag{5.10}$$

et $\tau^{xy}_{i,j}$ peut alors être explicitement évalué à partir des inconnues de vitesse. Un raisonnement analogue permet d'obtenir une valeur de $\tau^{xy}_{i,j}$ sur le coin saillant de la figure 5.3. Cette démarche a été ensuite étendue par [41] au cas instationnaire. Une deuxième approche consiste à interpoler les valeurs de $\tau^{xy}_{i,j}$ placées sur les bords du domaine depuis celles du domaine fluide [56, 112, 91]. Nous n'adopterons ni l'une ni l'autre de ces approches dans nos travaux. Si la première est pertinente dans le cas de géométries alignées, elle n'est pas adaptée au cas des géométries plus générales. Par ailleurs aucune de ces deux approches ne garantit une discrétisation compatible contrainte-vitesse près des bords du domaine, dans le sens où le traitement des contraintes pariétales est totalement déconnectée du traitement à l'intérieur du fluide. De plus si l' équation de transport (5.5) n'est pas résolue pour chaque inconnue $\tau^{xy}_{i,j}$ pour du domaine de calcul alors



 ${\rm Fig.}~5.2$ – Configuration du maillage décalé près d'un mur solide aligné avec la grille.



 ${\rm Fig.~5.3-Configuration~du~maillage~d\'ecal\'e~pr\`es~d'un~coin~rentrant~du~domaine.}$

la propriété de conservation locale des flux n'est pas assurée par la méthode. À la place nous proposons une extension de l'arrangement décalé des contraintes élastiques dans les *cut-cells*, dans lesquelles nous discrétisons de manière l'équation d'Oldroyd-B, assurant une discrétisation pression-vitesse-contrainte compatible dans tout le domaine fluide. Nous serons notamment amenés à discrétiser l'équation de transport pour la contrainte élastique de cisaillement sur les parois du domaine.

En géométries simples, les cellules cartésiennes adjacentes aux parois solides du domaine correspondent à des cas particuliers de *cut-cells*, ce qui est illustré par la figure 5.4. Si bien que l'approche proposée dans ces travaux conduira à une méthode originale pour le traitement des contraintes pariétales en géométries simples sur maillage décalé, que nous évaluerons numériquement (*cf.* 5.7) sur la configuration de la contraction plane abrupte.

5.2.2 Arrangement décalé des contraintes élastiques dans les *cut-cells* et discrétisation de l'équation de quantité de mouvement

Dans un premier temps, nous allons définir l'arrangement des inconnues de contraintes élastiques dans les trois cut-cells $\Omega_{i,j}$ génériques du maillage LS-STAG. Pour assurer un couplage vitesse-pression ces inconnues doivent avoir le même emplacement que leurs contreparties newtoniennes respectives. Pour les contraintes de cisaillement cette configuration est représentée figure 5.5. Et comme pour les contraintes normales newtoniennes et la pression, les contraintes élastiques discrètes $\tau_{i,j}^{xx}$ et $\tau_{i,j}^{yy}$ ne possèdent pas de localisation précise dans les cut-cells $\Omega_{i,j}$, mais y sont supposées constantes. Le traitement que nous proposons pour les contraintes élastiques comporte une analogie notable avec l'élément de Saramito [119] (Fig. 3.7), qui a été introduit pour les écoulements de fluides viscoélastiques.

L'emplacement des contraintes élastiques étant le même que celui des contraintes la discrétisation du terme de couplage dans l'équation de quantité de mouvement (5.1a) pour u est immédiate. Pour le flux de contrainte normale élastique, il suffit d'appliquer la formule de discrétisation (3.38) pour la contrainte normale newtonienne en remplaçant $\frac{\partial u}{\partial x}$ par $\tau_{\rm e}^{xx}$ nous obtenons :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u}} \tau_{\mathbf{e}}^{xx} \mathbf{e}_{x} \cdot \mathbf{n} \, dS \cong \theta_{i,j}^{u} \, \Delta y_{j} \left(\tau_{i+1,j}^{xx} - \tau_{i,j}^{xx} \right). \tag{5.11}$$

De la même manière, pour obtenir le flux de cisaillement élastique il suffit de remplacer $\frac{\partial u}{\partial y}$ par τ_e^{xy} dans les formules établies dans la section 3.5.2. Par exemple sur la face Nord des volumes de contrôle des figures 3.5 (c)-(f), le flux de cisaillement élastique s'écrit d'une manière analogue à (3.46):

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{\mathrm{ib,e}} \cup \Gamma_{i+1,j}^{\mathrm{ib,w}}} \frac{\partial u}{\partial y} \, \mathrm{d}x \cong \left(\Delta x_{i,j}^{\mathrm{ib,e}} + \Delta x_{i+1,j}^{\mathrm{ib,w}} \right) \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j}. \tag{5.12}$$

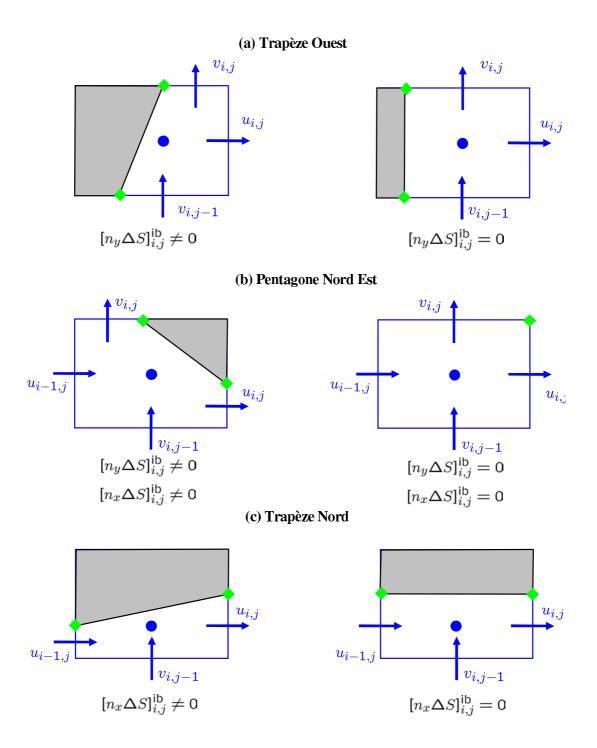


Fig. 5.4 – Différents type de *cut-cells* et leur cas limites dans le cas de géométries simples. Les losanges verts $((\spadesuit))$ désignent l'intersection des faces de la cellule avec la frontière immergée Γ^{ib} .

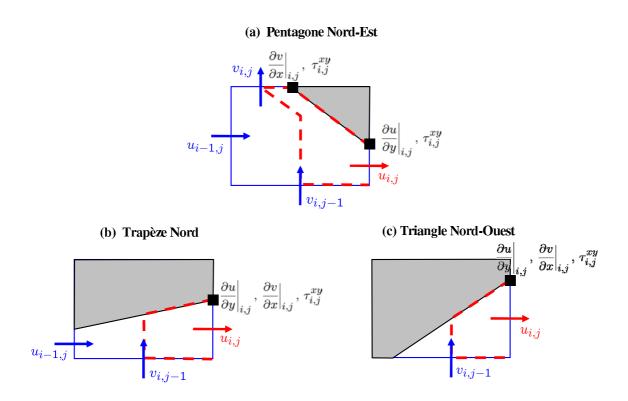


Fig. 5.5 – Disposition des contraintes tangentielles dans les 3 cut-cells génériques $\Omega_{i,j}$. Leur emplacement dans les autres cut-cells de la figure 3.4 est aisément déduit depuis cette figure. Dans cut-cell pentagonale Nord-Est $\tau_{i,j}^{xy}$ possède une valeur unique.

5.3 Discrétisation de l'équation pour la contrainte élastique normale $\tau_{\rm e}^{xx}$

Le volume de contrôle naturel pour discrétiser l'équation de transport (5.3) pour $\tau_{\rm e}^{xx}$ est $\Omega_{i,j}$, dans lequel nous avons déjà discrétisé l'équation de continuité (cf. section 3.3). Nous rappelons que nous considérons $\tau_{\rm e}^{xx}$ comme constante dans les cut-cells. Dans cette thèse nous considérons des conditions homogènes pour la vitesse sur la frontière immergée $\Gamma^{\rm ib}$, i.e. $\boldsymbol{v}_{i,j}^{\rm ib} = 0$. Pour discrétiser l'équation de transport pour $\tau_{\rm e}^{xx}$ (5.3), nous allons distinguer deux types de termes :

- l'intégrale surfacique qui correspond au flux convectif. Pour ce terme nous allons adapter ce qui a été fait dans le cas des fluides newtoniens (cf. chapitre3),
- les intégrales volumiques introduites par la dérivée surconvectée (1.18), qui nécessitent l'introduction d'une discrétisation originale.

Discrétisation des flux convectifs

Quelque soit la nature de la cellule $\Omega_{i,j}$, les flux convectifs sont décomposés, comme nous l'avons fait dans le cas newtonien, sur chacune des faces de $\Gamma_{i,j}$:

$$\int_{\Gamma_{i,j}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, \tau_{e}^{xx} \, dS = \int_{\Gamma_{i,j}^{w}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, \tau_{e}^{xx} \, dS + \int_{\Gamma_{i,j}^{e}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, \tau_{e}^{xx} \, dS
+ \int_{\Gamma_{i,j}^{s}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, \tau_{e}^{xx} \, dS + \int_{\Gamma_{i,j}^{n}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, \tau_{e}^{xx} \, dS
+ \int_{\Gamma_{i,j}^{ib}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, \tau_{e}^{xx} \, dS,$$

où le terme de bord $\int_{\Gamma_{i,j}^{\text{ib}}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, \tau^{xx} \, \mathrm{d}S$ est identiquement nul, puisque nous supposons que $\boldsymbol{v}_{i,j}^{\text{ib}} = 0$. Par exemple sur $\Gamma_{i,j}^{\text{e}}$, le flux convectif est calculé par la formule de quadrature suivante :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{e}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, \tau^{xx} \, dS \cong (\tau^{xx})_{e} \int_{\Gamma_{i,j}^{e}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, dS = (\tau^{xx})_{e} \overline{u}_{i,j}, \tag{5.13}$$

où nous faisons apparaître le flux massique $\overline{u}_{i,j}$ défini par (3.7) et $(\tau^{xx})_e$ est la valeur de τ^{xx} au centre de la frontière $\Gamma^e_{i,j}$ que nous devons à présent interpoler. Comme nous l'avons évoqué dans la partie introductive 5.1 de ce chapitre, l'utilisation de formule d'interpolation centrée :

$$(\tau^{xx})_{e} = \frac{\tau_{i,j}^{xx} + \tau_{i+1,j}^{xx}}{2}, \tag{5.14}$$

est à éviter pour les équations de type hyperbolique comme (5.3). Le remède consiste à utiliser des schémas TVD^{19} , cette classe de schémas est connue pour préserver la monotonicité de la solution [75]. Nous utilisons dans cette étude le schéma upwind qui est le prototype de cette classe de schéma, précis en $\mathcal{O}(\Delta x)$. La valeur $(\tau^{xx})_e$ est déterminée suivant le signe du débit $\overline{u}_{i,j}$:

$$(\tau^{xx})_{\mathbf{e}} = \begin{cases} \tau_{i,j}^{xx} & \text{si } \overline{u}_{i,j} > 0, \\ \tau_{i+1,j}^{xx} & \text{si } \overline{u}_{i,j} < 0. \end{cases}$$

$$(5.15)$$

et finalement l'expression du flux discret sur $\Gamma_{i,j}^{e}$ est :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{e}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, \tau^{xx} \, \mathrm{d}S \cong (\overline{u}_{i,j})^{+} \tau_{i,j}^{xx} + (\overline{u}_{i,j})^{-} \tau_{i+1,j}^{xx}, \tag{5.16}$$

avec $(\cdot)^+ = \max(\cdot, 0)$ et $(\cdot)^- = \min(\cdot, 0)$. Un raisonnement analogue sur chacune des faces de $\Gamma_{i,j}$ conduit à l'expression du terme convectif suivante :

$$\int_{\Gamma_{i,j}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, \tau^{xx} \, \mathrm{d}S = - \left[(\overline{u}_{i-1,j})^+ \tau_{i-1,j}^{xx} + (\overline{u}_{i-1,j})^- \tau_{i,j}^{xx} \right]
+ \left[(\overline{u}_{i,j})^+ \tau_{i,j}^{xx} + (\overline{u}_{i,j})^- \tau_{i+1,j}^{xx} \right]
- \left[(\overline{v}_{i,j-1})^+ \tau_{i,j-1}^{xx} + (\overline{v}_{i,j-1})^- \tau_{i,j}^{xx} \right]
+ \left[(\overline{v}_{i,j})^+ \tau_{i,j}^{xx} + (\overline{v}_{i,j})^- \tau_{i,j+1}^{xx} \right],$$

¹⁹Total Variation Diminishing

qui est valable pour toutes les cellules $\Omega_{i,j}$, et vérifie la condition de conservation locale des flux sur les face fluides.

Discrétisation des termes volumiques

Les intégrales volumiques dans l'équation pour $\tau_{\rm e}^{xx}$ que nous allons à présent discrétiser comportent :

$$S_{xx} = -\underbrace{\int_{\Omega} \tau_{e}^{xx} dV}_{\underline{0}} + 2\lambda \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \tau_{e}^{xx} dV}_{\underline{0}} + 2\lambda \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{e}^{xy} dV}_{\underline{0}} + 2\eta_{e} \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} dV}_{\underline{0}}, \tag{5.17}$$

en sus du terme instationnaire $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_{i,j}} \tau_e^{xx} dV$. Pour ce dernier terme ainsi que pour les termes ①, ② et ④ de (5.17), la discrétisation est immédiatement obtenue par la quadrature de la moyenne, puisqu'ils font intervenir des quantités constantes dans chaque cellule $\Omega_{i,j}$. Par exemple, pour le terme instationnaire nous écrivons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\Omega_{i,j}} \tau_{\mathrm{e}}^{xx} \,\mathrm{d}V \cong \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tau_{i,j}^{xx} \,V_{i,j}. \tag{5.18}$$

En revanche la discrétisation du terme ③ est plus difficile à obtenir, car sous le signe intégral les termes du produit sont placés à des endroits différents sur le maillage. Par exemple pour le terme ③ nous procédons en deux étapes. La première étape consiste à écrire la quadrature de la moyenne :

$$\int_{\Omega_{i,j}} \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{\mathbf{e}}^{xy} \, dV \cong \left[\frac{\partial u}{\partial y} \tau_{\mathbf{e}}^{xy} \right]_{i,j}^{\mathbf{c}} V_{i,j}, \tag{5.19}$$

où $\left[(\partial u/\partial y) \tau_{\rm e}^{xy} \right]_{i,j}^{c}$ désigne la valeur de $(\partial u/\partial y) \tau_{\rm e}^{xy}$ au centre de la cellule $\Omega_{i,j}$. Cette valeur est déterminée par une formule d'interpolation qui dépendra du type de la cellule. Pour la cellule cartésienne $\Omega_{i,j}$ de la figure 5.1 et les *cut-cells* pentagonales et trapézoïdales figure 5.5 (a) et (b) nous écrivons :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y}\tau_{e}^{xy}\right]_{i,j}^{c} = \frac{1}{4}\tau_{i,j}^{xy}\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{i,j} + \frac{1}{4}\tau_{i-1,j}^{xy}\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{i-1,j} + \frac{1}{4}\tau_{i-1,j-1}^{xy}\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{i-1,j-1} + \frac{1}{4}\tau_{i,j-1}^{xy}\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{i,j-1}. \quad (5.20)$$

Cette formule n'est pas utilisée pour la cellule triangulaire de la figure 5.5 (c), en effet $\tau^{xy}_{i-1,j}$ et $\partial u/\partial y|_{i-1,j}$ ne sont pas définis. À la place, nous utilisons la moyenne à trois points suivante :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y}\tau_{\mathrm{e}}^{xy}\right]_{i,j}^{\mathrm{c}} = \frac{1}{3}\tau_{i,j}^{xy}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{i,j} + \left.\frac{1}{3}\tau_{i-1,j-1}^{xy}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{i-1,j-1} + \left.\frac{1}{3}\tau_{i,j-1}^{xy}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{i,j-1}.$$
 (5.21)

La discrétisation de l'équation de transport (5.4) pour la contrainte élastique normale $\tau_{\rm e}^{yy}$ s'obtient en reprenant les formules que nous venons d'établir dans cette section. Finalement, sur le maillage LS-STAG la discrétisation des équations de transport pour les contraintes normales élastiques est relativement simple même dans les cut-cells. Pour la contrainte élastique $\tau_{\rm e}^{xy}$, la tâche s'avère plus complexe.

5.4 Discrétisation de l'équation pour la contrainte élastique de cisaillement $\tau_{\rm e}^{xy}$

L'équation (5.5) de transport pour $\tau_{\rm e}^{xy}$ est discrétisée dans un volume de contrôle que nous n'avons pas encore défini, et qui est décalé par rapport à tous les autres volumes de contrôles introduits jusqu'à présent.

5.4.1 Le volume de contrôle pour $\tau_{i,j}^{xy}$: définition et notations

L'emplacement de la contrainte tangentielle $\tau_{\mathbf{e}}^{xy}$ sur le maillage LS-STAG (figures 5.1 et 5.5) nécessite l'introduction d'un nouveau volume de contrôle $\widetilde{\Omega}_{i,j}$ où sera discrétisée l'équation de transport (5.5). Ce volume de contrôle possède a priori une intersection non nulle avec les quatre cellules qui lui sont adjacentes :

$$\widetilde{\Omega}_{i,j} \subset \Omega_{i,j} \cup \Omega_{i+1,j} \cup \Omega_{i+1,j+1} \cup \Omega_{i,j+1}$$
.

Ainsi chacune des 4 cellules $\Omega_{i,j}$ qui le compose peut être soit une cellule cartésienne, soit une cut-cell ou encore une cellule solide.

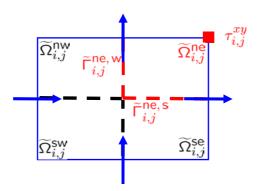


Fig. 5.6 – Cellule cartésienne $\Omega_{i,j}$ décomposée en quartiles.

Nous ne discrétisons pas l'équation de transport (5.5) de manière indépendante pour chacune des combinaisons de cellules envisageables pour former $\widetilde{\Omega}_{i,j}$ (Figs.5.10 et 5.11). À la place nous reprenons la démarche utilisée pour l'équation du mouvement (5.1a) pour u qui est discrétisée dans des moitiés de cellules $\Omega^u_{i,j} \cap \Omega_{i,j}$ ce qui évite de considérer tous les cas de la figure 3.4. Tout d'abord chaque cellule $\Omega_{i,j}$ est décomposée en quatre quartiles tels que :

$$\Omega_{i,j} = \widetilde{\Omega}_{i,j}^{\text{ne}} \cup \widetilde{\Omega}_{i,j}^{\text{nw}} \cup \widetilde{\Omega}_{i,j}^{\text{sw}} \cup \widetilde{\Omega}_{i,j}^{\text{se}}.$$

$$(5.22)$$

Cette décomposition est représenté dans le cas d'une cellule cartésienne par la figure 5.6, et pour les trois *cut-cells* génériques par la figure 5.7 où la forme irrégulière des quartiles est donnée uniquement à titre illustratif car elle ne servira pas pour la discrétisation. Finalement, le volume

$\widehat{\Omega}_{i,j}^{\text{nw}} \qquad \widehat{\Omega}_{i,j}^{\text{ne}}$ (c) Triangle Nord-Ouest $\widehat{\Omega}_{i,j}^{\text{nw}} = \emptyset$ $\widehat{\Omega}_{i,j}^{\text{nw}} \qquad \widehat{\Omega}_{i,j}^{\text{ne}}$

Fig. 5.7 – Décomposition en quartiles des *cut-cells* générique. Dans la cellule triangulaire $\tau_{i-1,j}^{xy}$ n'est pas une inconnue du problème et $\widetilde{\Omega}_{i,j}^{\text{nw}} = \emptyset$.

de contrôle pour $\tau_{i,j}^{xy}$ s'écrit comme la réunion des quatre quartiles adjacents contenus dans $\Omega_{i,j}$, $\Omega_{i+1,j}$, $\Omega_{i+1,j+1}$ et $\Omega_{i,j+1}$:

$$\widetilde{\Omega}_{i,j} = \widetilde{\Omega}_{i,j}^{\text{ne}} \cup \widetilde{\Omega}_{i+1,j}^{\text{nw}} \cup \widetilde{\Omega}_{i+1,j+1}^{\text{sw}} \cup \widetilde{\Omega}_{i,j+1}^{\text{se}}, \tag{5.23}$$

et les combinaisons possibles de ces quartiles sont représentées par les figures 5.10 et 5.11. Dans le cas où $\tau_{i,j}^{xy}$ est située à l'intérieur du domaine fluide $\Omega^{\rm f}$, la frontière $\widetilde{\Gamma}_{i,j}$ de $\widetilde{\Omega}_{i,j}$ est décomposée de la manière suivante :

$$\widetilde{\Gamma}_{i,j} = \left(\widetilde{\Gamma}_{i,j}^{\text{ne,w}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i,j+1}^{\text{se,w}}\right) \cup \left(\widetilde{\Gamma}_{i+1,j}^{\text{nw,e}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i+1,j+1}^{\text{sw,e}}\right) \cup \left(\widetilde{\Gamma}_{i,j}^{\text{ne,s}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i+1,j}^{\text{se,s}}\right) \cup \left(\widetilde{\Gamma}_{i,j+1}^{\text{se,n}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i+1,j+1}^{\text{sw,n}}\right).$$
(5.24)

À titre illustratif ces notations sont reportées sur la figure (5.8), où $\Omega_{i,j}$ est adjacent à quatre cellules cartésiennes, ce qui correspond au volume de contrôle utilisé dans la méthode originale de Darwish et al. [25]. Lorsque $\tau_{i,j}^{xy}$ apparait comme une contrainte de cisaillement pariétale (i.e. lorsque $\phi_{i,j} > 0$, figure 5.7), la définition de la frontière du quartile doit être modifiée pour incorporer la portion de surface solide $\widetilde{\Omega}_{i,j}^{\text{ne}} \cap \Gamma^{\text{ib}}$, ce qui est donné dans la figure 5.9. Par exemple, pour le volume de contrôle de la figure 5.10 (c), cela conduit à écrire la frontière $\widetilde{\Gamma}_{i,j}$ comme :

$$\widetilde{\Gamma}_{i,j} = \widetilde{\Gamma}_{i,j}^{\text{ne,w}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i+1,j}^{\text{nw,e}} \cup \left(\widetilde{\Gamma}_{i,j}^{\text{ne,s}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i+1,j}^{\text{se,s}}\right) \cup \left(\widetilde{\Gamma}_{i,j}^{\text{ne,ib}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i+1,j+1}^{\text{nw,ib}}\right)$$
(5.25)

Nous avons simplement introduit les notations nécessaires pour entreprendre la discrétisation de l'équation de transport pour τ_e^{xy} , et pour l'instant nous n'avons pas encore défini la valeur

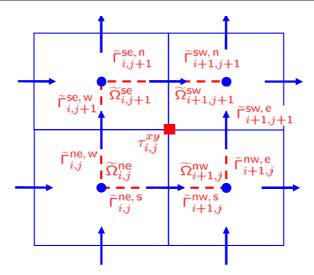


Fig. 5.8 – Volume de contrôle $\widetilde{\Omega}_{i,j}$ adjacent à quatre cellules cartésiennes.

du volume $\widetilde{V}_{i,j}$ de $\widetilde{\Omega}_{i,j}$. Comme nous l'avons fait pour u cette valeur sera déduite des propriétés globales de la discrétisation.

5.4.2 Propriétés globales de la discrétisation

Bien que ce soit dépourvu de signification physique nous pouvons toujours, en intégrant l'équation de transport (5.5) dans tout le domaine fluide $\Omega^{\rm f}$, obtenir une équation d'évolution pour la quantité globale $\Upsilon = \int_{\Omega^{\rm f}} \tau_{\rm e}^{xy} \, {\rm d}V$:

$$\lambda \frac{\mathrm{d}\Upsilon}{\mathrm{d}t} = -\lambda \int_{\Gamma^{\mathrm{ib}}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, \tau_{\mathrm{e}}^{xy} \, \mathrm{d}S + \int_{\Omega^{\mathrm{f}}} S_{xy} \, \mathrm{d}V, \tag{5.26}$$

où S_{xy} contient les termes volumiques de (5.5).

Nous proposons d'examiner ensuite la contrepartie discrète de ce bilan et en déduire des conditions sur les opérateurs résultant de la discrétisation de (5.5) dans chaque $\widetilde{\Omega}_{i,j}$:

$$\lambda \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \widetilde{\mathcal{M}} T + \lambda \left[\mathcal{C}[\overline{U}]^{\tau} T + S^{\mathrm{ib,c}} \right] = S^{\tau}, \tag{5.27}$$

où T est le vecteur qui contient les inconnues $\tau_{i,j}^{xy}$, S^{τ} correspond à la discrétisation des termes volumiques contenus dans S_{xy} , et $\widetilde{\mathcal{M}}$ la matrice de masse diagonale dont les termes correspondent aux volumes $\widetilde{V}_{i,j}$ des $\widetilde{\Omega}_{i,j}$.

De la même manière que nous avons calculé les termes volumiques dans l'équation de transport pour $\tau_{\rm e}^{xx}$, la quantité $\Upsilon = \int_{\Omega^{\rm f}} \tau_{\rm e}^{xy} \, {\rm d}V$ est calculée dans chaque cellule $\Omega_{i,j}$ par la formule de quadrature de la moyenne :

$$\Upsilon \cong \Upsilon^h = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} [\tau_e^{xy}]_{i,j}^c V_{i,j} = \mathbb{1}^T \widetilde{\mathcal{M}} T,$$
(5.28)

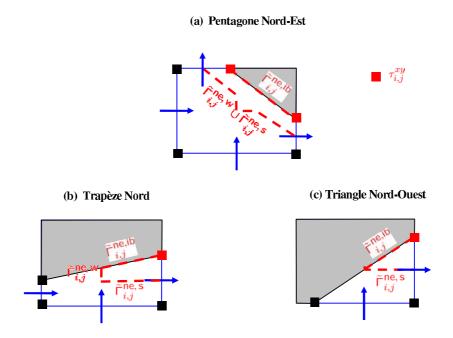


FIG. 5.9 – Frontière du quartile de volume $\widetilde{\Omega}_{i,j}^{\text{ne}}$, lorsque $\tau_{i,j}^{xy}$ est une contrainte pariétale (i.e. $\phi_{i,j} > 0$).

où $[\tau_{\mathbf{e}}^{xy}]_{i,j}^{\mathbf{c}}$ désigne la valeur discrète de $\tau_{\mathbf{e}}^{xy}$ au centre des $\Omega_{i,j}$. Comme $\tau_{\mathbf{e}}^{xy}$ est discrétisée aux coins de la cellule $\Omega_{i,j}$, la formule d'interpolation utilisée pour calculer $[\tau_{\mathbf{e}}^{xy}]_{i,j}^{\mathbf{c}}$ dépend du type de $\Omega_{i,j}$. Si $\Omega_{i,j}$ est une cellule cartésienne, trapézoïdale ou pentagonale $[\tau_{\mathbf{e}}^{xy}]_{i,j}^{\mathbf{c}}$ est obtenu à partir de la formule d'interpolation (5.20) et à partir de la formule (5.21) s'il s'agit d'un *cut-cell* triangulaire. Pour chaque ligne (i,j) du système discret (5.27) le coefficient diagonal de la matrice de masse s'écrit sous la forme générale :

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{P}(i,j) = \widetilde{V}_{i,j} = \alpha_{i,j}V_{i,j} + \alpha_{i+1,j}V_{i+1,j} + \alpha_{i,j+1}V_{i,j+1} + \alpha_{i+1,j+1}V_{i+1,j+1}.$$
(5.29)

Dans cette expression $\alpha_{i,j}V_{i,j}$ est le volume du quartile $\widetilde{\Omega}_{i,j}^{\text{SW}}$ et les coefficients dans les formules d'interpolation (5.20) et (5.21) déterminent la valeur du poids $\alpha_{i,j}$ suivant le type de la cellule $\Omega_{i,j}$:

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } \Omega_{i,j} \text{ solide,} \\ 1/3 & \text{si } \Omega_{i,j} \text{ triangulaire,} \\ 1/4 & \text{sinon.} \end{cases}$$
 (5.30)

De la même manière que nous avons construit les bilans discret de masse et de quantité de mouvement dans la section 2.3, l'équivalent discret de l'équation bilan (5.26) est obtenu en sommant chacune des lignes de (5.27), ce qui s'écrit matriciellement :

$$\lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Upsilon_h = -\lambda \left[\mathbb{1}^{\mathrm{T}} \mathcal{C}[\overline{U}] T + \mathbb{1}^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{ib,c}} \right] + \mathbb{1}^{\mathrm{T}} S^{\tau}. \tag{5.31}$$

Dans le cas où $v_{i,j}^{\rm ib}=0$ la contribution des termes convectifs sur la frontière immergée $\Gamma^{\rm ib}$ est nulle dans le bilan (5.26), pour retrouver ce résultat dans le bilan discret nous devons avoir

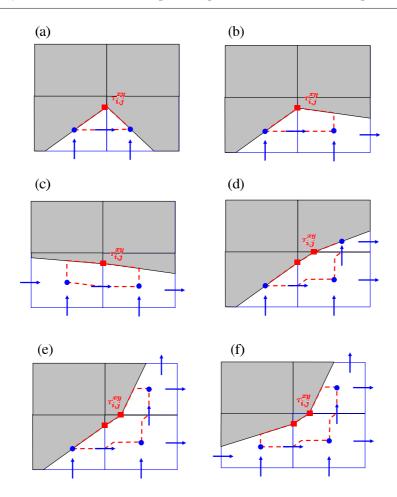


Fig. 5.10 – Les différents volumes de contrôle $\widetilde{\Omega}_{i,j}$ lorsque $\tau_{i,j}^{xy}$ est disposée sur la frontière immergée.

 $\left[\mathbbm{1}^{\mathrm{T}}\mathcal{C}[\overline{U}]T + \mathbbm{1}^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{ib,c}}\right] = 0$. Si la discrétisation des termes convectifs vérifie la propriété de conservation locale des flux sur les faces fluides des $\widetilde{\Omega}_{i,j}$ nous aurons $\mathbbm{1}^{\mathrm{T}}\mathcal{C}[\overline{U}]T = 0$ d'une part, et d'autre part nous aurons $\mathbbm{1}^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{ib,c}} = 0$ en annulant le flux convectif sur les frontières solide des $\widetilde{\Omega}_{i,j}$. Finalement le terme $\mathbbm{1}^{\mathrm{T}}S^{\tau}$ doit correspondre à une discrétisation consistante de $\int_{\Omega^{\mathrm{f}}} S_{xy} \, \mathrm{d}V$.

5.4.3 Discrétisation de l'équation de transport pour la contrainte élastique de cisaillement τ_e^{xy}

La quadrature de la moyenne est utilisée pour évaluer le terme instationnaire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\widetilde{\Omega}_{i,j}} \tau_{\mathrm{e}}^{xy} \,\mathrm{d}V \cong \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \tau_{i,j}^{xy} \,\widetilde{V}_{i,j},\tag{5.32}$$

où $\widetilde{V}_{i,j}$ donné par (5.29) et (5.30) quelque soit le type de $\widetilde{\Omega}_{i,j}$.

Pour la discrétisation des termes convectifs nous distinguons le cas où $\tau_{i,j}^{xy}$ est à l'intérieur du domaine fluide du cas où la contrainte tangentielle est située sur la frontière Γ^{ib} . Dans le premier

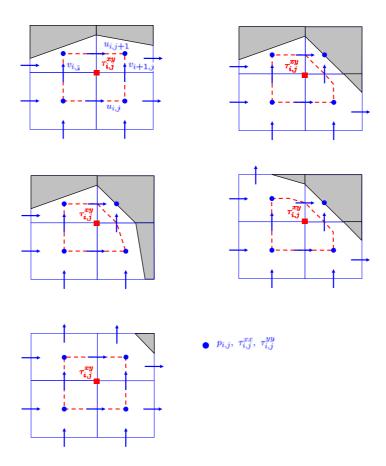


FIG. 5.11 – Les différents volumes de contrôle $\widetilde{\Omega}_{i,j}$ pour la contrainte tangentielle élastique $\tau_{i,j}^{xy}$ située près de la frontière immergée.

cas (cf. figure 5.11), les flux convectifs sont décomposés sur les faces fluides de $\widetilde{\Omega}_{i,j}$:

$$\int_{\widetilde{\Gamma}_{i,j}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, \tau_{e}^{xy} \, dS = -\int_{\left(\widetilde{\Gamma}_{i,j}^{\text{ne,w}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i,j+1}^{\text{se,w}}\right)} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{x}) \, \tau_{e}^{xy} \, dy + \int_{\left(\widetilde{\Gamma}_{i+1,j}^{\text{nw,e}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i+1,j+1}^{\text{sw,e}}\right)} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{x}) \, \tau_{e}^{xy} \, dy \\
-\int_{\left(\widetilde{\Gamma}_{i,j}^{\text{ne,s}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i+1,j}^{\text{se,s}}\right)} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{y}) \, \tau_{e}^{xy} \, dx + \int_{\left(\widetilde{\Gamma}_{i,j+1}^{\text{se,n}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i+1,j+1}^{\text{sw,n}}\right)} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{y}) \, \tau_{e}^{xy} \, dx. \tag{5.33}$$

Par exemple sur la face Est de $\widetilde{\Omega}_{i,j}$ le flux s'écrit :

$$\int_{\left(\widetilde{\Gamma}_{i+1,j}^{\text{nw,e}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i+1,j+1}^{\text{sw,e}}\right)} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_x) \, \tau_{e}^{xy} \, \mathrm{d}y \cong (\tau_{e}^{xy})_{e} \int_{\left(\widetilde{\Gamma}_{i+1,j}^{\text{nw,e}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i+1,j+1}^{\text{sw,e}}\right)} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_x) \, \mathrm{d}y, \tag{5.34}$$

où $(\tau_{\mathbf{e}}^{xy})_{\mathbf{e}}$ désigne la valeur discrète de $\tau_{\mathbf{e}}^{xy}$ au centre de $(\widetilde{\Gamma}_{i+1,j}^{\mathrm{nw,e}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i+1,j+1}^{\mathrm{sw,e}})$, et sur cette face fluide le flux massique a pour expression :

$$\int_{\left(\widetilde{\Gamma}_{i+1,j}^{\text{nw,e}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i+1,j+1}^{\text{sw,e}}\right)} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_x) \, \mathrm{d}y \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{u}_{i,j} + \overline{u}_{i+1,j}}{2} + \frac{\overline{u}_{i+1,j+1} + \overline{u}_{i,j+1}}{2} \right). \tag{5.35}$$

Finalement le flux convectif sur la face Est de $\widetilde{\Omega}_{i,j}$ a pour expression :

$$\int_{\left(\widetilde{\Gamma}_{i+1,j}^{\text{nw,e}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i+1,j+1}^{\text{sw,e}}\right)} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_x) \, \tau_{\text{e}}^{xy} \, \mathrm{d}y \cong (\tau_{\text{e}}^{xy})_{\text{e}} \, \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{u}_{i,j} + \overline{u}_{i+1,j}}{2} + \frac{\overline{u}_{i+1,j+1} + \overline{u}_{i,j+1}}{2} \right), \tag{5.36}$$

dans laquelle la valeur de $(\tau_{\rm e}^{xy})_{\rm e}$ reste à interpoler. D'une manière analogue nous obtenons le flux convectif sur la face Nord de $\widetilde{\Omega}_{i,j}$:

$$\int_{\left(\widetilde{\Gamma}_{i,j+1}^{\text{se},n} \cup \widetilde{\Gamma}_{i+1,j+1}^{\text{sw},n}\right)} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{y}) \, \tau_{e}^{xy} \, \mathrm{d}x \cong \left(\tau_{e}^{xy}\right)_{n} \, \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{v}_{i,j} + \overline{v}_{i,j+1}}{2} + \frac{\overline{v}_{i+1,j+1} + \overline{v}_{i,j+1}}{2}\right), \tag{5.37}$$

et la discrétisation est ensuite complétée en imposant la conservation locale des flux sur les faces fluides de $\widetilde{\Omega}_{i,j}$:

$$\int_{\left(\widetilde{\Gamma}_{i,j}^{\text{ne,s}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i+1,j}^{\text{nw,s}}\right)} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{y}) \, \tau_{e}^{xy} \, \mathrm{d}x = \int_{\left(\widetilde{\Gamma}_{i,j}^{\text{se,n}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i+1,j}^{\text{sw,n}}\right)} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{y}) \, \tau_{e}^{xy} \, \mathrm{d}x,$$

$$\int_{\left(\widetilde{\Gamma}_{i,j}^{\text{ne,w}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i,j+1}^{\text{se,w}}\right)} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{x}) \, \tau_{e}^{xy} \, \mathrm{d}y = \int_{\left(\widetilde{\Gamma}_{i,j}^{\text{nw,e}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i,j+1}^{\text{sw,e}}\right)} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_{x}) \, \tau_{e}^{xy} \, \mathrm{d}y. \tag{5.38}$$

La valeur $(\tau_{\rm e}^{xy})_{\rm e}$ est ensuite calculée par une interpolation décentrée upwind:

$$(\tau^{xy})_{e} = \begin{cases} \tau_{i,j}^{xy} & \text{si } \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{u}_{i,j} + \overline{u}_{i+1,j}}{2} + \frac{\overline{u}_{i+1,j+1} + \overline{u}_{i,j+1}}{2} \right) > 0, \\ \tau_{i+1,j}^{xy} & \text{si } \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{u}_{i,j} + \overline{u}_{i+1,j}}{2} + \frac{\overline{u}_{i+1,j+1} + \overline{u}_{i,j+1}}{2} \right) < 0. \end{cases}$$
(5.39)

Nous nous intéressons à présent au cas où $\tau_{i,j}^{xy}$ correspond à une contrainte de cisaillement pariétale. Nous calculons les flux dans chacun des quartiles représentés sur la figure 5.9, de manière à assurer la propriété de conservation locale des flux sur les faces fluides et à évaluer le flux sur la frontière immergée Γ^{ib} de manière consistante. Par exemple dans la cellule trapézoïdale Nord (cf. figure 5.9 (b)), la frontière $\widetilde{\Omega}_{i,j}^{\text{ne}} \cap \widetilde{\Gamma}_{i,j}$ du quartile $\widetilde{\Omega}_{i,j}^{\text{ne}}$ s'écrit :

$$\widetilde{\Omega}_{i,j}^{\mathrm{ne}} \cap \widetilde{\Gamma}_{i,j} = \widetilde{\Gamma}_{i,j}^{\mathrm{ne,w}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i,j}^{\mathrm{ne,s}} \cup \widetilde{\Gamma}_{i,j}^{\mathrm{ne,ib}}, \tag{5.40}$$

le flux convectif sur la portion solide $\widetilde{\Gamma}_{i,j}^{\mathrm{ne,ib}}$ est nul puisque nous faisons l'hypothèse que $\boldsymbol{v}_{i,j}^{\mathrm{ib}} = 0$. Sur les faces fluides du quartile nous assurons la conservation locale des flux convectifs, par exemple sur $\widetilde{\Gamma}_{i,j}^{\mathrm{ne,w}}$:

$$\int_{\widetilde{\Gamma}_{i,j}^{\text{ne,w}}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_x) \, \tau_{\text{e}}^{xy} \, dy = \int_{\widetilde{\Gamma}_{i,j}^{\text{nw,e}}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_x) \, \tau_{\text{e}}^{xy} \, d, y$$
 (5.41)

ce qui conduit à écrire :

$$\int_{\widetilde{\Gamma}_{i,j}^{\text{ne,w}}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_x) \, \tau_{e}^{xy} \, dy \cong (\tau_{e}^{xy})_{w} \, \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{u}_{i,j} + \overline{u}_{i-1,j}}{2} \right), \tag{5.42}$$

et $(\tau_{\rm e}^{xy})_{\rm w}$ est interpolé par la formule décentrée :

$$(\tau^{xy})_{e} = \begin{cases} \tau_{i-1,j}^{xy} & \text{si } \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{u}_{i,j} + \overline{u}_{i-1,j}}{2} \right) > 0, \\ \tau_{i,j}^{xy} & \text{si } \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{u}_{i,j} + \overline{u}_{i-1,j}}{2} \right) < 0. \end{cases}$$

$$(5.43)$$

Nous allons à présent discrétiser les termes volumiques dans le membre de droite de (5.5) dont nous rappelons ici l'expression :

$$S_{xy} = -\int_{\Omega} \tau_{e}^{xy} dV + \eta_{e} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \lambda \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} \tau_{e}^{xx} dV + \lambda \frac{\partial u}{\partial y} \tau_{e}^{yy} dV, \tag{5.44}$$

qui sont traités de manière distincte suivant leur emplacement sur le maillage LS-STAG. Tout d'abord, le terme de cisaillement $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ est discrétisé au même endroit que $\tau_{\rm e}^{xy}$, son intégrale sur $\widetilde{\Omega}_{i,j}$ est naturellement calculée par la quadrature de la moyenne :

$$\int_{\widetilde{\Omega}_{i,j}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dV \cong \left(\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{i,j} + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i,j} \right) \widetilde{V}_{i,j}, \tag{5.45}$$

quelque soit la combinaison de quartile formant $\widetilde{\Omega}_{i,j}$. Pour calculer l'intégrale volumique de $\partial v/\partial x \tau_{\rm e}^{xx}$ la difficulté réside dans le fait que le cisaillement et la contrainte élastique normale n'ont pas le même emplacement sur le maillage LS-STAG, le calcul est réalisé en deux étapes. Tout d'abord nous écrivons en première approximation :

$$\int_{\widetilde{\Omega}_{i,j}} \frac{\partial v}{\partial x} \tau_{\mathbf{e}}^{xx} \, dV \cong \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,j} \int_{\widetilde{\Omega}_{i,j}} \tau^{xx} \, dV, \tag{5.46}$$

qui donne une première approximation de l'intégrale volumique. Ensuite pour compléter la discrétisation $\int_{\widetilde{\Omega}_{i,j}} \tau^{xx} \, \mathrm{d}V$ est décomposée sur chacun des quartiles composant $\widetilde{\Omega}_{i,j}$:

$$\int_{\widetilde{\Omega}_{i,j}} \tau_{\mathbf{e}}^{xx} \, dV = \int_{\widetilde{\Omega}_{i,j}^{\mathrm{ne}}} \tau_{\mathbf{e}}^{xx} \, dV + \int_{\widetilde{\Omega}_{i+1,j}^{\mathrm{nw}}} \tau_{\mathbf{e}}^{xx} \, dV
+ \int_{\widetilde{\Omega}_{i+1,j+1}^{\mathrm{sw}}} \tau_{\mathbf{e}}^{xx} \, dV + \int_{\widetilde{\Omega}_{i,j+1}^{\mathrm{se}}} \tau_{\mathbf{e}}^{xx} \, dV,$$
(5.47)

et par exemple dans le quartile $\widetilde{\Omega}_{i,j}^{\mathrm{ne}} \subset \Omega_{i,j}$ dont le volume est $\alpha_{i,j} V_{i,j}$ nous avons :

$$\int_{\widetilde{\Omega}_{i,j}^{\text{ne}}} \tau_{\text{e}}^{xx} \, dV \cong \alpha_{i,j} V_{i,j} \, \tau_{i,j}^{xx}, \tag{5.48}$$

puisque la contrainte élastique normale $\tau_{\rm e}^{xx}$ est supposée constante dans chacune des cellules $\Omega_{i,j}$ donc en particulier dans chacun des quartile la composant. La valeur de $\alpha_{i,j}$ est donnée par (5.30) en fonction du type de la cellule considérée. Finalement en menant le même raisonnement sur chaque quartile composant $\widetilde{\Omega}_{i,j}$ nous obtenons la discrétisation complète du terme volumique qui s'écrit :

$$\int_{\widetilde{\Omega}_{i,j}} \frac{\partial v}{\partial x} \tau_{\mathbf{e}}^{xx} dV \cong \frac{\partial v}{\partial x} \bigg|_{i,j} \left[\alpha_{i,j} V_{i,j} \tau_{i,j}^{xx} + \alpha_{i+1,j} V_{i+1,j} \tau_{i+1,j}^{xx} + \alpha_{i,j+1} V_{i,j+1} \tau_{i,j+1}^{xx} + \alpha_{i,j+1} V_{i,j+1} \tau_{i,j+1}^{xx} \right] .$$
(5.49)

L'intégrale du terme $\partial u/\partial y \tau_{\rm e}^{yy}$ est calculée de manière analogue.

La valeur $[\widetilde{\tau_{\rm e}^{xx}}]_{i,j}$ de $\tau_{\rm e}^{xx}$ sur le lieu de discrétisation de $\tau_{i,j}^{xy}$ peut être évaluée par la moyenne $\frac{1}{\widetilde{V}_{i,j}}\int_{\widetilde{\Omega}_{i,j}}\tau^{xx}\,\mathrm{d}V$, qui est calculée de la même manière que (5.49):

$$\widetilde{[\tau_{e}^{xx}]_{i,j}} = \frac{\alpha_{i,j}V_{i,j}\,\tau_{i,j}^{xx} + \alpha_{i+1,j}V_{i+1,j}\,\tau_{i+1,j}^{xx} + \alpha_{i+1,j+1}V_{i+1,j+1}\,\tau_{i+1,j+1}^{xx} + \alpha_{i,j+1}V_{i,j+1}\,\tau_{i,j+1}^{xx}}{\widetilde{V}_{i,j}}.$$
(5.50)

Cette formule n'est cependant jamais utilisée pour la discrétisation des équations du mouvement mais sert pour le post-traitement des données (cf. section 4.1).

La démarche utilisée pour construire la matrice de masse, et par conséquent définir les coefficients $\alpha_{i,j}$ (5.30), assure que la contribution $\mathbb{1}^T S^{\tau}$ des termes volumiques dans le bilan global (5.31) est consistante avec le terme volumique $\int_{\Omega^f} S_{xy} \, dV$.

5.4.4 Discrétisation de la contrainte tangentielle pariétale en géométrie simple

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction du chapitre 5.1, les différents auteurs utilisant un arrangement décalé des variables ne résolvent pas l'équation de transport (5.5) lorsque $\tau_{i,j}^{xy}$ est sur un mur du domaine ou sur un coin rentrant du domaine (Fig. 5.12). À la place la contrainte pariétale est interpolée ou une simplification des équations est utilisée. Dans la méthode LS-STAG ces cas de figures ne nécessitent pas de traitement $ad\ hoc$ et correspondent à des cas particuliers de cut-cells pour lesquelles la discrétisation présentée précédemment est encore valable.

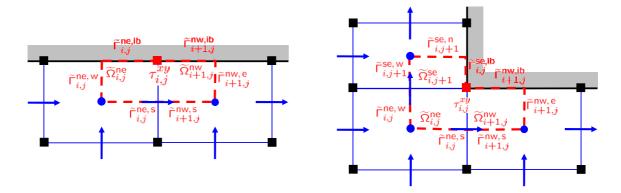


FIG. 5.12 – Quartiles de cellule composant le volume contrôle $\Omega_{i,j}$ en géométrie simple. À gauche : sur un mur de normale sortante $n=e_y$, les cellules adjacentes sont : deux cellules solides et 2 cellules trapézoïdales alignées. À droite : sur une coin entrant du domaine, les cellules adjacentes sont : 2 cellules trapézoïdales alignées, 1 cellule pentagonale et une cellule solide.

5.5 Algorithme d'intégration en temps

L'intégration du système d'équations (5.1)-(5.6) gouvernant l'écoulement repose sur un schéma en deux étapes. La première, permet d'obtenir l'avancée en temps des champs de vitesse et de pression. La deuxième correspond à l'intégration de l'équation transport du tenseur des contraintes élastiques. Tout d'abord l'avancée en temps des équations de conservation de quantité de mouvement est basée sur le schéma à pas fractionnaires présenté dans la section 2.6.1 mis à part que l'étape de prédiction (2.126) est réalisée par le schéma semi-implicite EP1/ER1 en $\mathcal{O}(\Delta t)$ et avec une prise en compte explicite des termes de couplage avec la loi constitutive. La semi-discrétisation des équations de transport (5.1)-(5.6) pour les composantes de τ_e prend la forme matricielle suivante :

 $\lambda \mathcal{M}_{h}^{\tau} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \lambda \mathcal{C}_{h}^{\tau}(\overline{U})T = S[T, U], \tag{5.51}$

où le vecteur S[T, U] désigne la discrétisation des termes volumiques et les matrices \mathcal{M}_h^{τ} et $\mathcal{C}_h^{\tau}(\overline{U})$ correspondent respectivement à la matrice de masse et à la discrétisation des flux convectifs pour chacune des composantes de τ_e . L'avancée en temps de ce système est basée sur un schéma d'Euler Progressif (EP1) en $\mathcal{O}(\Delta t)$:

$$\lambda \mathcal{M}_h^{\tau} \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} + \mathcal{C}_h^{\tau}(U^{n+1})T^n + \lambda \mathcal{C}_h^{\tau}(\overline{U}^{n+1})T^n = S[T^n, U^{n+1}], \tag{5.52}$$

qui est explicite puisque U^{n+1} est connu. Ce schéma est globalement précis en $\mathcal{O}(\Delta t)$. Sa stabilité est conditionnée d'une part par la condition CFL standard (Eq. (4.18)) basée sur la vitesse du fluide, et par une deuxième condition du type suivant [73] :

$$\max_{ij} \left[|u_{i,j}| + \sqrt{2\left(\tau_{i,j}^{xx} + \frac{\eta_e}{\lambda}\right)} \right] \Delta t < \Delta x$$
 (5.53a)

$$\max_{ij} \left[|v_{i,j}| + \sqrt{2\left(\tau_{i,j}^{yy} + \frac{\eta_{e}}{\lambda}\right)} \right] \Delta t < \Delta y, \tag{5.53b}$$

basée sur la vitesse des ondes viscoélastiques. Nous précisons que même si ces conditions sont satisfaites, elles ne garantissent pas que le tenseur τ_A reste défini positif, ce problème n'étant pas lié au couplage, et donc que le calcul ne diverge pas.

5.6 Extension de la condition de sortie CCBC au cas des fluides viscoélatiques

Dans le cas de fluides viscoélastiques il n'existe pas une aussi grande variété de conditions de sortie que dans le cas des fluides newtoniens. Par exemple les études numériques des écoulements rampants en contraction utilisent essentiellement des conditions de Dirichlet [82, 2] ou de Neumann [112, 69]. Des conditions de sortie plus sophistiquées comme (2.146), populaires en éléments finis, ont été essentiellement utilisées pour l'étude de phénomènes d'extrusion [104], et sont peu utilisées pour les écoulements confinés [105]. Pour les fluides newtoniens l'étude de la section 4.7 a montré que la condition de sortie de Neumann nécessite de grands domaines de calculs afin de limiter son influence sur l'écoulement amont. Il est raisonnable de penser que cette mauvaise propriété s'étend au cas des fluides viscoélastiques. Dans l'étude de la contraction plane 4:1 de Alves et al. [82], l'utilisation de condition de Dirichlet en sortie conduit les auteurs

à considérer un canal de sortie dont le rapport d'aspect est de 100 pour 1, taille démesurée vis à vis de la zone d'intérêt pour cet écoulement. Nous pensons que l'utilisation de condition de sortie plus performante est nécessaire et proposons dans cette section une extension de la condition de sortie CCBC (section 2.6.3) au cas des fluides viscoélastiques. Son efficacité a été éprouvée dans le cas de fluides newtoniens (cf. 2.6.3) et l'arrangement décalé des contraintes élastiques permet de l'étendre naturellement au cas des fluides viscoélastiques.

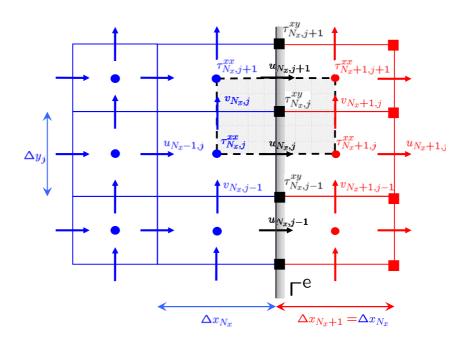


Fig. 5.13 – Disposition des inconnues et des cellules fantômes (en rouge) près de la frontière Γ^{e} du domaine.

Cette condition de sortie peut être qualifiée de "transparente" puisque l'équation du mouvement pour u (2.8a) est effectivement discrétisée sur la frontière Γ^{e} (figure 5.13), ce qui nécessite l'extrapolation des champs hydrodynamiques dans les cellules fantômes $\Omega_{N_x+1,j}$. Pour les fluides viscoélastiques la discrétisation du terme de couplage dans l'équation du mouvement pour u(5.1a) fait intervenir les composantes $\tau_{N_x,j}^{xy}$ et $\tau_{N_x+1,j}^{xx}$ du tenseur des contraintes élastiques. Du fait de l'arrangement décalé des variables ces composantes sont situées respectivement sur la frontière Γ^{e} , et en dehors du domaine, elles doivent alors être évaluées. Nous utilisons une extrapolation constante pour les contraintes élastiques normales :

$$\tau_{N_x+1,j}^{xx} = \tau_{N_x,j}^{xx}. (5.54)$$

La contrainte élastique de cisaillement $\tau^{xy}_{N_x,j}$ est située sur $\Gamma^{\rm e}$ et nous discrétisons l'équation de transport correspondante dans le volume de contrôle $\widetilde{\Omega}_{N_x,j}$. Les formules de discrétisation présentées dans la section 5.4 font évidemment intervenir des inconnues discrètes situées hors du domaine de calcul (i.e. dans les cellules fantômes $\Omega_{N_x+1,j}$) dont la valeur a déjà été donnée précédemment, mis à part pour $\tau^{yy}_{N_x+1,j}$ calculée par extrapolation constante comme $\tau^{xx}_{N_x+1,j}$.

5.7 Écoulement en contraction 4:1 plane d'un fluide d'Oldroyd-B

Nous appliquons notre méthode à l'écoulement rampant d'un fluide viscoélastique d'Oldroyd-B dans une contraction plane de rapport d'aspect 4 : 1. Cet écoulement est un cas test populaire pour les méthodes numériques, non-seulement pour son aspect fondamental, mais aussi pour la difficulté numérique introduite par les forts taux de déformation dus au changement brusque de la géométrie. Dans un premier temps nous étudions le cas de la contraction abrupte, cette géométrie présente une un coin saillant S au niveau du changement de section (Fig. 5.14), dont le traitement met à rude épreuve les méthodes numériques. Cette configuration permet de valider notre discrétisation originale de la contrainte de cisaillement sur les frontières du domaine, et plus particulièrement sur la singularité S. Nous étudions ensuite une version lissée de la contraction abrupte où la singularité S est remplacée par un arc de cercle ce qui conduit à un domaine cette fois *complexe*. Nous éprouvons ainsi notre discrétisation dans les *cut-cells* et notamment la viabilité de l'arrangement totalement décalé présenté précédemment.

Description physique du problème de la contraction plane

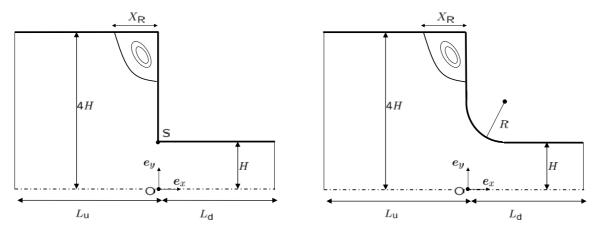


FIG. 5.14 – Géométrie de la contraction plane de rapport d'aspect 4:1. À gauche : contraction abrupte 4:1, à droite : contraction à coin arrondi.

La figure 5.14 représente la géométrie de la contraction abrupte, et à coin arrondi. Seule la partie supérieure du domaine est utilisée et nous imposons une condition de symétrie en y=0. La contraction à coin arrondi comporte un changement de section lissé puisque la singularité géométrique S de la contraction abrupte est remplacée par un arc de cercle, dont le rayon a pour valeur R=0.75H d'après les recommandations de [67]. Les nombres adimensionnels de l'écoulement sont construits à partir de la demi-hauteur H et de la vitesse débitante U dans le canal de sortie. La pression est adimensionnée par $\tau_{\rm w}/3$ et les contraintes par $\tau_{\rm w}$, où $\tau_{\rm w}$ correspond à la contrainte de cisaillement (incluant la contribution du solvant et la contribution élastique) sur la paroi supérieure du demi-canal de sortie en y=H évaluée par $\tau_{\rm w}=3\eta U/H$. Le régime

d'écoulement est gouverné par le nombre de Weissenberg :

$$We = \lambda \frac{U}{L},\tag{5.55}$$

et le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho UH}{\eta}.$$
 (5.56)

Le fluide utilisé dans cette expérience numérique est caractérisé par le rapport de viscosité $\beta = 1/9$. Basées sur les recommandations de [112], les longueurs $L_{\rm u}$ et $L_{\rm d}$ des canaux d'entrée et de sortie sont de 16H. Dans la section d'entrée $x = -L_{\rm u}$, nous imposons une condition aux limites de Dirichlet. Un profil de Poiseuille établi est imposé pour la vitesse :

$$u = \frac{3U}{128}(16 - \frac{y^2}{H^2}), \quad v = 0, \tag{5.57}$$

et les expressions des contraintes élastiques correspondantes s'écrivent :

$$\tau_{\rm e}^{xx} = 2\eta\lambda(1-\beta)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$
(5.58a)

$$\tau_{\rm e}^{yy} = 0 \tag{5.58b}$$

$$\tau_{\rm e}^{xy} = \eta (1 - \beta) \frac{\partial u}{\partial y}.$$
(5.58c)

La condition de sortie CCBC est imposée en $x=L_{\rm d}$, et un départ impulsif est utilisé comme condition initiale. Pour chacune des simulations, l'état stationnaire est atteint lorsque le critère d'arrêt est vérifié, c'est-à-dire si :

$$\frac{||\boldsymbol{X}^{n+1} - \boldsymbol{X}^n||_{\max}}{||\boldsymbol{X}^n||_{\max}} < \epsilon, \tag{5.59}$$

Le vecteur colonne X est défini par : $X = (u, v, \tau^{xx}, \tau^{yy}, \tau^{xy})^{\mathrm{T}}$, et où ϵ constitue le paramètre d'arrêt. La valeur $\epsilon = 10^{-6}$ a été retenue pour toutes nos simulations.

5.7.1 Cas de la contraction abrupte

État de l'art

L'étude de la contraction plane abrupte est un cas test populaire pour éprouver la robustesse des méthodes numériques et étudier les modèles rhéologiques. Si la littérature comporte de nombreuses études de ces écoulements en contraction [140, 87, 40, 112, 3, 2, 1, 121, 82, 30, 69, 20], nous avons choisi d'en extraire les références les plus récentes et les plus complètes en vue de comparaison quantitatives de nos résultats sur une gamme raisonnablement large de nombre de Weissenberg. Les éléments distinctifs des méthodes numériques utilisées par les auteurs choisis comme références sont synthétisés dans le tableau 5.3. Toutes ces études se sont heurtées au problème de haut nombre de Weissenberg. En effet il existe pour chacune de ces études une certaine valeur critique We_{cri} du taux d'élasticité au delà de laquelle le calcul devient instable

quelque soit le pas de temps utilisé. De plus cette valeur de We_{cri} décroît avec la finesse de la grille utilisée. De ce fait pour évaluer la robustesse de la méthode LS-STAG nous choisirons des grilles dont la finesse est comparable à celles utilisées dans les études antérieures.

La méthode de volumes finis de Phillips et Williams a été appliquée à l'étude de la contraction plane et axisymétrique dans une série d'articles [112, 111], les auteurs utilisent un arrangement totalement décalé des inconnues mais l'inconnue de cisaillement placée sur la singularité S est traitée par interpolation à partir des inconnues proches de S. Une des originalités de leur méthode réside dans le traitement lagrangien des termes convectifs (dans l'équation du mouvement et dans la loi constitutive) qui permet de s'affranchir de l'utilisation de schéma décentré et de la condition CFL.

Alves et al. [82] proposent une série de résultats de référence sur l'écoulement de la contraction abrupte pour We \in [0; 3]. Le maillage le plus fin utilisé dans leur étude est tel que $\Delta x = \Delta y = 3.5 \, 10^{-3} H$ au voisinage de S et nous précisons que les auteurs ont pu, avec ce maillage, obtenir une solution convergée jusque We = 2.5, les résultats présentés pour We = 3 sont obtenus avec leur deuxième maillage le plus fin qui est comparable dans la présente étude au maillage qui sera appelé M4. La méthode numérique mise en œuvre est la même que celle précédemment employée par les mêmes auteurs [6], elle comporte notamment l'utilisation de méthodes dites à limiteurs de flux [72] pour l'interpolation des termes convectifs dans leur méthode volumes finis sur maillage collocalisé. Ces méthodes en $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ diffusent peu et interdisent l'apparition d'oscillations numériques. À notre connaissance il s'agit de l'étude la plus complète en terme de résultats quantitatifs pour la contraction abrupte.

Plus récemment, Kim et al. [69] ont réalisé la simulation de la contraction abrupte avec une méthode d'éléments finis dont l'avancée en temps repose sur un schéma à pas fractionnaire, les auteurs prétendent ainsi s'affranchir de la contrainte inf-sup imposée sur le choix des espaces d'approximation pour les différentes variables, ce qui n'est en fait pas garanti [47]. Les auteurs utilisent la méthode de stabilisation DEVSS-G où les gradients de vitesse sont considérés comme des inconnues supplémentaires. Leur méthode permet d'atteindre le taux d'élasticité critique $We_{cri} = 2.5$ sur leur maillage le plus fin dont et la taille des éléments près de la singularité est 0.005H, ce qui est comparable à M4 dans la présente étude. Leurs résultats sont très semblables à ceux reportés dans [82].

Quantités caractéristiques de l'écoulement

L'écoulement dans la contraction plane est caractérisé par la présence d'une zone de recirculation en son coin rentrant qui est représentée schématiquement sur la figure 5.14. Cette zone de recirculation est spécifiée notamment par sa taille $X_{\rm R}$ et son intensité $\Delta\psi_{\rm R}$, quantités variant suivant le taux d'élasticité du fluide. La taille caractéristique de la recirculation est définie comme l'abscisse $x_{\rm R}=-X_{\rm R}$ pour laquelle la ligne de séparation intercepte la paroi supérieure du canal entrant, en ce point le cisaillement est nul, i.e. $\tau^{xy}(x_{\rm R},4H)=0$. L'évaluation numérique de $x_{\rm R}$ est effectuée en deux étapes, nous localisons tout d'abord la cellule $\Omega_{i_{\rm R},N_y}$ telle que le cisaillement

change de signe i.e. $au^{xy}_{i_{\mathrm{R}},N_y} au^{xy}_{i_{\mathrm{R}}-1,N_y}<0$, puis déterminons x_{R} par interpolation linéaire :

$$x_{\rm R} = x_{i_{\rm R}} - \frac{\tau_{i_{\rm R}-1,N_y}^{xy}}{\tau_{i_{\rm R}-1,N_y}^{xy} - \tau_{i_{\rm R},N_y}^{xy}} \Delta x_{i_{\rm R}}, \tag{5.60}$$

qui introduit une erreur sur la mesure de $X_{\rm R}$ proportionnelle à Δx^2 en sus de l'erreur numérique commise sur les contraintes de cisaillement qui n'a pas été évaluée dans cette étude.

L'intensité du tourbillon $\Delta\psi_{\rm R}$ correspond à la différence entre la valeur maximale de ψ dans le domaine de calcul atteinte au centre de la zone de recirculation et $\psi(0,4H)$. Le calcul numérique de ψ est détaillé dans la section 4.1.

Les effets du comportement rhéologique du fluide sur le champ de pression, et sur les pertes de charge régulières et singulières (dues au changement brusque de la section) sont mesurés indépendamment de la taille du domaine par le coefficient de correction de Couette [117] :

$$C = (\Delta P - \Delta P_{\rm fd})/2\tau_{\rm w}. \tag{5.61}$$

La perte totale de charge ΔP est calculée à partir du champ discret de pression comme $p_{1,1}-p_{N_x,1}$, à laquelle nous retranchons la perte de charge régulière $\Delta P_{\rm fd}$. Cette dernière quantité est obtenue analytiquement comme la somme de la perte de charge $\Delta P_{\rm u} = \frac{3U\eta}{64H^2}L_{\rm u}$ qu'engendrerait un écoulement établi dans le canal d'entrée, et de son équivalent dans le canal de sortie $\Delta P_{\rm u} = \frac{3U\eta}{H^2}L_{\rm d}$. Les études numériques menées sur l'écoulement de fluide d'Oldroyd-B en contraction plane ([82, 69, 87, 2]) prévoient une diminution de C avec l'augmentation de We. Ces conclusions sont en contradiction avec les observations expérimentales de Nigen et Walters [96] pour un fluide de Boger (fluide viscoélastique à viscosité constante). La cause de ces conclusions opposées a fait l'objet d'une étude récente de Walters et~al.~[136] et les auteurs mettent en évidence une limitation du modèle d'Oldroyd-B .

Finalement nous reportons la valeur maximale u_{max}/U atteinte par le fluide sur l'axe de symétrie en y=0, ainsi que la valeur de la contrainte normale $\tau_{\text{max}}^{xx}/\tau_{\text{w}}$ sur ce même axe. Ces deux valeurs tendent à croître avec le taux d'élasticité et sont autant d'éléments de comparaison supplémentaires vis à vis de l'étude exhaustive menée par [82] de la contraction abrupte.

Écoulement en contraction plane abrupte : résultats et discussions

	$N_x \times N_y$	h/H	Nombre de cellules fluides
M1	75×33	0.04	1565
M2	150×66	0.02	6260
М3	300×132	0.01	25040
M4	450×192	0.005	54900

TAB. 5.1 – Propriétés des maillages utilisés dans les simulations de l'écoulement dans une contraction plane 4:1

Pour évaluer la sensibilité des résultats au maillage nous utilisons une série de 4 maillages M1, M2, M3 et M4 représentés dans la figure 5.15, dont les caractéristiques sont reportées dans la table 5.1. Ces maillages non-uniformes ont la même structure par blocs, avec un raffinement en série géométrique près des murs du domaine. La taille des mailles est égale à h dans la direction normale aux parois et les cellules adjacentes à la singularité sont carrées. La construction de ces maillages est inspirée des travaux de [82] qui utilisent des cellules rectangulaires avec des tailles de maille près de la singularité S comparables aux nôtres.

		$X_{\rm R}/H$	$\Delta \psi_{\rm R}/(UH) \times 10^3$	$u_{\rm max}/U$	$ au_{ m max}^{xx}/ au_{ m w}$	$3\Delta P/\tau_{\rm w}$	C
We=0	M1	1.476	1.134	1.463	0.344	47.202	-0.258
	M2	1.493	1.159	1.492	0.356	49.362	0.102
	М3	1.497	1.166	1.498	0.359	50.245	0.249
	M4	1.498	1.172	1.499	0.359	50.464	0.286
$\overline{ ext{We}=1}$	M1	1.436	1.019	1.492	0.542	41.993	-1.126
	M2	1.410	0.918	1.521	0.545	44.219	-0.755
	М3	1.397	0.868	1.528	0.550	45.111	-0.607
	$M4^{\dagger}$	1.394	0.856	1.527	0.551	45.313	-0.573
We=2	M1	1.301	0.680	1.542	0.690	37.198	-1.925
	M2	1.295	0.673	1.606	0.672	39.520	-1.538
	$M3^{\dagger}$	1.291	0.666	1.593	0.685	39.968	-1.463
	$M4^{\ddagger}$	1.263	0.597	1.566	0.655	39.880	-1.478
We=2.5	M1	1.165	0.427	1.612	0.834	36.260	-2.081
	$M2^{\dagger}$	1.270	0.645	1.676	0.834	37.912	-1.806
	$M3^{\ddagger}$	1.253	0.631	1.628	0.747	37.634	-1.853
	$M4^{\ddagger}$	1.199	0.507	1.585	0.696	37.318	-1.905
We=3	$\mathrm{M}1^\dagger$	0.981	0.218	1.741	1.100	38.228	-1.754
	$M2^{\dagger}$	1.278	0.709	1.748	0.926	36.847	-1.984
	$M3^{\ddagger}$	1.223	0.625	1.659	0.768	35.538	-2.202
	$M4^{\ddagger}$	1.137	0.437	1.602	0.699	34.978	-2.295

TAB. 5.2 – Synthèse des résultats numériques obtenus sur les maillages de la table 5.1 pour la gamme de We étudiée. Les simulations sont réalisées avec le pas de temps standard $\Delta t = 5 \times 10^{-3} H/U$ à l'exception de † : $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3} H/U$, et ‡ : $\Delta t = 1 \times 10^{-3} H/U$.

Afin de vérifier l'indépendance de nos résultats vis à vis de la taille de la contraction dans la direction des x, nous avons réalisé une extension du maillage M3 (non mentionné dans les tables de résultats) telle que $L_{\rm u}=L_{\rm d}=30H$. À We=1, nous avons observé une variation de 3% du coefficient de correction de Couette entre M3 et son extension tandis que les autres grandeurs caractéristiques de l'écoulement ne varient pas, ce qui conforte le choix fait quant à la taille du domaine.

Le tableau 5.2 regroupe les résultats obtenus avec la méthode LS-STAG relatifs aux quantités définies dans la section précédente. La convergence n'a pas été obtenue pour We = 4 quelque soit le maillage utilisé, si bien que pour la présente étude We_{cri} \approx 3, ce qui est une valeur comparable avec les travaux antérieurs. Nous avons observé que cette perte de stabilité du calcul est invariablement précédée de la perte de positivité de tenseur de conformation $\tau_A = \tau_e + (\eta_e) \mathbb{1}/\lambda$ dans les cellules adjacentes à la singularité géométrique S, ce qui est en accord avec l'observation de Phillips et Williams [112].

Pour toutes nos simulations, les champs de contraintes obtenus à We = 3 (figures 5.16) sont réguliers et dépourvus d'oscillations numériques comme le montrent aussi les profils correspondants sur l'axe y = H (figures 5.17) passant notamment par la singularité S où les contraintes atteignent leur valeur extrémale. La même observation peut être faite sur la gamme de We étudiée au regard des figures de l'annexe D.

Dans le tableau 5.2 nous considérons le maillage le plus fin M4 comme référence et une excellente convergence des résultats est atteinte sur M3 pour We = 0 et 1. En effet, l'erreur relative sur l'intensité de la recirculation $\Delta\psi_{\rm R}/(UH)\times 10^3$ est la plus élevée et demeure inférieure à 1.5%. Pour des taux d'élasticité supérieurs We ≥ 2 nous allons encore distinguer l'erreur relative commise sur $\Delta\psi_{\rm R}/(UH)\times 10^3$ des autres grandeurs, qui peut atteindre 43% pour We = 3. La sensibilité de l'intensité du tourbillon de coin est aussi observée par [82, 69], mais dans des proportions moindres. Concernant les autres grandeurs, les erreurs commises pour We = 3 sur $X_{\rm R}/H$, $u_{\rm max}/U$, $\tau_{\rm max}^{xx}/\tau_{\rm w}$ et C sont acceptables et valent respectivement 7.5%, 3.6%, 9.9% et 4.0%. Si la convergence en maillage est satisfaisante, elle n'est pas complète notamment pour We = 3 au regard de $\Delta\psi_{\rm R}/(UH)\times 10^3$, ce résultat n'est cependant pas surprenant puisque : (i) le comportement asymptotique des contraintes est en $r^{-2/3}$ [82] au niveau de la singularité géométrique S, ce qui implique une forte sensibilité des contraintes à la taille du maillage (Fig. 5.17), (ii) nous sommes proche du nombre de Weissenberg critique We \simeq We_{cri}, (iii) le traitement au premier ordre des flux convectifs a nécessairement un impact négatif sur la convergence spatiale de la méthode.

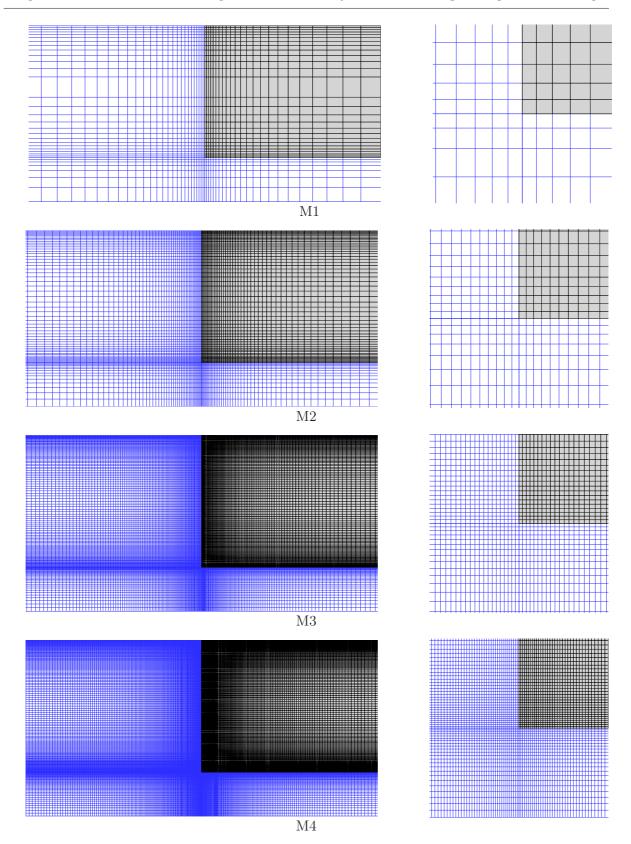


FIG. 5.15 – Maillages cartésiens utilisés pour l'étude de la contraction plane abrupte. À gauche : sur la portion $[-4H, 4H] \times [0, 4H]$ du domaine. À droite : sur la portion $[-0.25H, 0.25H] \times [0.75H, 1.25H]$ du domaine.

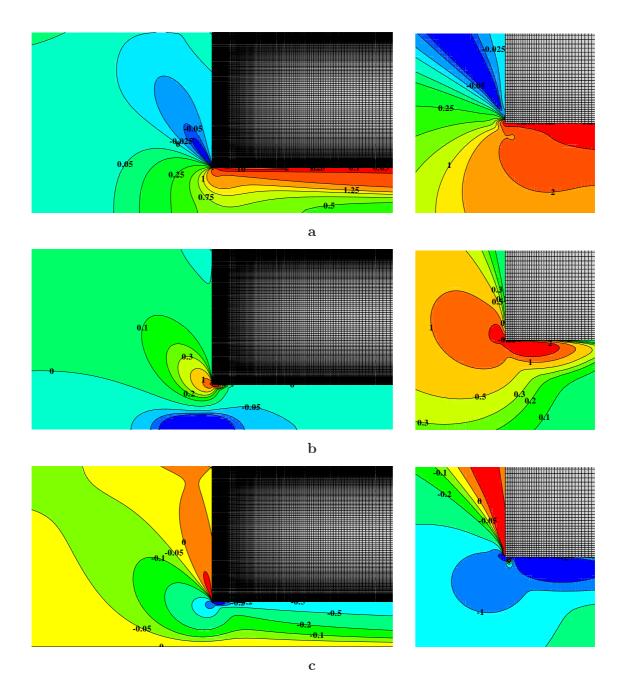


FIG. 5.16 – Iso-valeurs de (a) : τ^{xx}/τ_w ; (b) : τ^{yy}/τ_w ; (c) : τ^{xy}/τ_w obtenues dans le cas de la contraction abrupte à We = 3sur le maillage M4. À droite : sur la portion $[-4H, 4H] \times [0, 4H]$ du domaine, à gauche : sur la portion $[-0.25H, 0.25H] \times [0.75H, 1.25H]$.

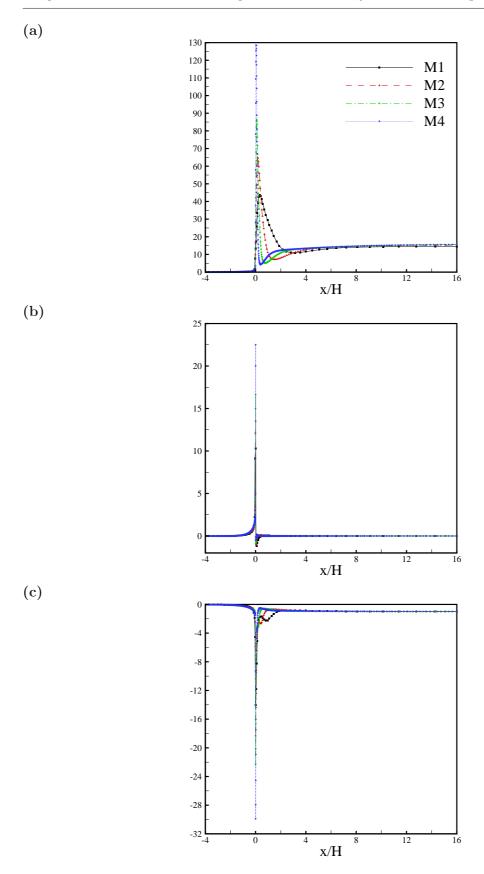


FIG. 5.17 – Valeurs de (a) : τ^{xx}/τ_w ; (b) : τ^{yy}/τ_w ; (c) : τ^{xy}/τ_w le long de l'axe y=1 obtenues dans le cas de la contraction abrupte à We = 3 pour les différents maillages de la table 5.1.

Auteurs	Type de méthode	Traitement du terme convectif	Type de maillage	Paramètres numériques
		de la loi constitutive		
Matallah et al. [87]	Éléments finis	SUPG	Maillage non-structuré	$We_{cri} = 8$
	Schéma de récupération		Éléments triangulaires	
	Prédiction-Correction			$\Delta x_{\rm min} = 2 \times 10^{-2}$
Phillips et Williams [112]	Volumes finis	Schéma semi-lagrangien	Maillage cartésien	$We_{cri} = 8$
	Arrangement décalé			
	SIMPLER			$\Delta x_{\rm min} = 2 \times 10^{-2}$
Alves et al. [82]	Volumes finis	Schéma TVD	Maillage cartésien	$We_{cri} = 3$
	Arrangement collocalisé		$\Delta x_{\rm min} = 3.5 \times 10^{-3}$	
	SIMPLEC			
Kim <i>et al.</i> [69]	Éléments finis	Galerkin discontinu	Maillage non-structuré	$We_{cri} = 3$
	Méthode à pas fractionnaire		(quadrangles)	
	DEVSS-G		$\Delta x_{\rm min} = 5 \times 10^{-3}$	
Edussuriya et al. [30]	Volumes finis	Schéma QUICK	Maillage cartésien	
	Arrangement collocalisé			
	SIMPLEC		$\Delta x_{\rm min} = 5.7 \times 10^{-3}$	

 $Tab.\ 5.3-Principales\ caractéristiques\ des\ méthodes\ numériques\ utilisées\ par\ les\ références\ du\ tableau\ 5.4.$

Le tableau 5.4 est un comparatif des résultats obtenus par la méthode LS-STAG sur le maillage M4 avec les études de la littérature pour We $\in [0,3]$. La figure 5.18 représente les iso-lignes de courant avec l'augmentation du nombre de Weissenberg. Nous observons que l'augmentation du taux d'élasticité est accompagnée une diminution de l'intensité et de la taille de la zone de recirculation, ce comportement est aussi observé par [3, 82, 69] tandis que les études [87, 112, 30] prévoient un tourbillon dont la taille est peu influencée par la valeur de We. Par ailleurs, nous n'observons pas de tourbillon labial ²⁰ (tourbillon situé près de la singularité S sur l'axe x=0) comme dans les études nous servant de références. Dans l'étude de Aboubacar et Webster [3] et de Matallah et al. [87] ce vortex labial croît avec We, et pour un niveau d'élasticité fixé l'évolution de son intensité en fonction de la taille du maillage n'est pas monotone. Les résultats de Alves et al. [82] concernant le vortex labial exhibent le même comportement avec l'augmentation de We, mais pour We fixé sa taille décroit de manière monotone avec la taille du maillage, et par extrapolation son intensité reste finie pour une maille de taille nulle. Cependant Aboubacar et Webster ont remarqué que l'emplacement du tourbillon labial coïncidait avec une zone où le tenseur de conformation τ_A perdait sa propriété de positivité ce qui nous incite à penser que ce vortex labial comme un artéfact numérique, ce qui est conforté par les observations expérimentales de [96] pour des fluides de Boger.

La taille $X_{\rm R}$ et l'intensité $\Delta\psi_{\rm R}$ de la zone de recirculation est dans notre étude la même que celle observée par Alves et~al.~[82] pour We = 0. Cependant cet excellent accord se détériore avec l'augmentation de We si bien que pour We = 3 nous obtenons un vortex 17% plus grand en taille et 2 fois plus intense que celui observé par ces auteurs. Cet écart peut être en partie attribué à l'absence de tourbillon labial dans notre étude qui, de fait, n'influe pas sur l'intensité de la recirculation principale. Cependant nos résultats concernant les propriétés de la recirculation de coin demeure dans la plage de résultats de la littérature dont les bornes supérieures et inférieures sont respectivement les valeurs issues de Phillips et Williams [112] et de Kim et~al.~[69]. Par ailleurs, nos valeurs concernant le coefficient de correction de Couette C sont en bon accord avec ceux de Alves et~al.~[82] pour toute la gamme de nombre de Weissenberg étudiée ainsi que pour les valeurs maximales de u et de τ^{xx} le long de l'axe de symétrie.

Nous avons aussi réalisé une série de simulations en incluant les effets inertiels avec Re = 1 et We = 1 et les résultats correspondant sont reportés dans le tableau 5.5. Nous n'avons constaté aucune restriction supplémentaire sur le choix du pas de temps par rapport au cas de l'écoulement rampant et l'inclusion des termes inertiels n'influe pas sur la bonne convergence en maillage observée dans le cas de l'écoulement rampant à We = 1. Comme Phillips et Williams [112] nous observons une diminution de l'activité de la zone de recirculation tant en taille X_R qu'en intensité $\Delta \psi_R$ qui diminuent respectivement de 28% et de 75% pour le maillage M4, ce qui est comparable aux diminutions de 25% et de 65% observées dans [112]. Le coefficient de Couette C, la survitesse u_{\max} et la valeur maximale de τ^{xx} le long de l'axe de symétrie sont quant à eux peu affectés par la présence des termes inertiels.

²⁰ lip-vortex

L'étude de la contraction plane abrupte a permis de valider partiellement notre méthode numérique dans le cas des géométries simples, notre méthode exhibe dans l'ensemble des résultats qualitatifs et quantitatifs en bon accord avec ceux de la littérature. Plus particulièrement, la discrétisation effective de l'équation de transport pour la contrainte tangentielle (5.5) sur la frontière du domaine et sur la singularité S de la contraction que nous proposons offre une stabilité satisfaisante. Ce traitement nous permet d'obtenir des solutions convergées jusqu'à un taux d'élasticité critique raisonnablement élevé $We_{cri} \approx 3$ en comparaison des études antérieures. De plus les solutions obtenues sont dépourvues d'oscillations parasites dans les champs hydrodynamique et de contraintes (voir annexe D), ce qui conforte le choix d'un arrangement totalement décalé des variables. Nous évaluons à présent la qualité du traitement numérique proposé dans les cut-cells, en considérant le cas test de la contraction à $coin\ arrondi$.

5.7.2 Cas de la contraction plane à coins arrondis

Le domaine de calcul utilisé dans cette section est le même que celui utilisé dans le cas de la contraction plane abrupte. Afin de contrôler le nombre N_{cc} de cut-cells utilisées pour représenter l'arc de cercle (figure 5.14), ce dernier est plongé dans un bloc uniforme composé de mailles dont la taille est h/H conduisant à une nouvelle série de maillage m1, m2, m3 et m4 (Fig. 5.19). Pour évaluer la finesse des maillages que nous utilisons près de l'arc de cercle, nous empruntons une technique courante pour les maillages non-structurés (en 2D) en évaluant la taille caractéristique d'une cut-cell par $\Delta x_{\rm cc} = \sqrt{V_{\rm cc}}$, où $V_{\rm cc}$ désigne le volume de la cellule. Le tableau 5.6 comporte : les caractéristiques des maillages utilisés et $\overline{\Delta x}_{\rm cc}/H$, qui désigne la moyenne de $\Delta x_{\rm cc}$ sur les $N_{\rm cc}$ cut-cells représentant l'arc de cercle. Nous avons pu ainsi construire des maillages dont la finesse est comparable avec ceux utilisés dans les précédentes études de la contraction plane à coins arrondis [87, 2, 1]. Dans les références [87, 2, 1] est utilisée une méthode hybride où la vitesse et la pression sont approchées par éléments finis, et la discrétisation de l'équation constitutive repose sur une formulation en volumes finis. Le maillage le plus fin utilisé dans l'étude de [87] comporte des éléments triangulaires dont la taille caractéristique près de l'arc de cercle est de $10^{-2}H$, ce dernier est représenté par une dizaine de triangles (ce que nous avons déterminé graphiquement à partir de la figure 1 (a) de [87]), ce maillage est semblable au maillage m1 qui est le plus grossier utilisé dans cette étude. Dans les études de Aboubacar et co-auteurs [2, 1], le maillage de référence comporte 28 triangles sur l'arc de cercle dont la taille caractéristique vaut $9.7 \cdot 10^{-3} H$, et est donc d'une finesse intermédiaire entre m1 et m2 de la présente étude. Nous avons réussi à obtenir une solution convergée sur tous les maillages jusqu'à We = 2, audelà de cette limite la convergence de la solution est perdue pour les maillages m3 et m4. Nous attribuons ce résultat à l'extrême finesse du maillage près de l'arc de cercle, en effet pour m4 la taille locale caractéristique des cut-cells peut atteindre $\Delta x_{\rm cc} = 7.3 \, 10^{-4}$. Pour We > 8 aucune solution convergée n'est obtenue quelque soit le maillage utilisé, nous avons donc dans notre étude We_{cri} ≈ 8 .

Le tableau 5.7 synthétise l'ensemble des résultats obtenus avec les maillages m1 à m4 pour $We \in [0,8]$. En prenant le maillage m4 comme référence à We = 2, les résultats obtenus sur m2 présentent une erreur de moins de 1% pour X_R/H , et sur les autres grandeurs reste inférieure à 8%. La convergence en maillage est plus aisée à obtenir que dans le cas de la contraction abrupte du fait de l'absence de singularité géométrique. En effet, dans le cas d'une géométrie lissée les valeurs extrémales des composantes de τ convergent avec le maillage (cf. Fig. 5.20) ce qui n'est pas le cas dans la configuration de la contraction abrupte (Fig. 5.17). Nous choisissons à partir de maintenant m2 comme maillage de référence.

Les iso-valeurs de $\tau^{xy}/\tau_{\rm w}$ obtenues pour différentes valeurs de We sont représentées sur la figure 5.21 et elles ne présentent pas d'oscillations. Cette régularité est observée pour des taux d'élasticité élevés, bien que la valeur des contraintes visqueuses au voisinage du changement de section augmentent considérablement avec We (figure 5.22). La régularité des contours illustre la qualité de notre traitement numérique et plus particulièrement dans les cut-cells près des bords de l'arc de cercle. Les mêmes observations peuvent être faites pour les composantes normales du tenseur des contraintes visqueuses au vu des résultats complémentaires reportés dans l'annexes E (figures E.2 et E.3).

En observant les lignes de courant de la figure 5.24 nous retrouvons qualitativement la même évolution de la zone de recirculation avec l'augmentation du niveau d'élasticité que dans les études précédentes [87, 1, 2], la taille $X_{\rm R}$ du tourbillon décroît de manière monotone avec l'augmentation de We. Pour Aboubacar et al. [1] cette taille passe de 1.2H pour We = 0.1 à 0.8H pour We = 4.4. Nous attirons l'attention sur le fait que ces valeurs sont obtenues graphiquement à partir de la figure 16 (a) de la référence [1]. Bien que peu précises, ces données chiffrées sont les seuls éléments de comparaison disponibles dans la littérature. Dans notre étude, la taille $X_{\rm R}$ de la zone de recirculation décroit de 1.261H à 0.602H pour We = 0 et 8 respectivement (Fig. 5.7).

Nos résultats quantitatifs sont reportés dans le tableau 5.8 pour We $\in [0,8]$ et comparés avec les données disponibles dans la littérature, et notamment pour We = 8 nous n'avons pas trouvé de référence pour comparaison. Nos résultats sont dans l'ensemble en bon accord avec ceux de la littérature, et qu'il s'agisse de l'intensité de la zone de recirculation $\Delta \psi_R$ ou du coefficient de correction de Couette C nos résultats sont minorés par ceux de Aboubacar et co-auteurs [2, 1] et majorés par ceux de Matallah et al. [87]. Nous attirons l'attention sur le fait que nous recalculons C avec (5.61) à partir de la donnée Δp trouvée dans la littérature, nous adaptons évidemment le calcul de $\Delta P_{\rm u}$ et $\Delta P_{\rm d}$ à la taille du domaine utilisé.

Cette étude de la contraction plane à coin arrondi permet de valider notre méthode pour fluides viscoélastiques en présence de géométries complexes. En effet, le traitement de la loi constitutive dans les cut-cells présente de bonnes propriétés de stabilité puisque nous atteignons $We_{cri} \approx 8$ sans qu'aucune oscillation ne soit détectée pour les profils et contours présentés (contraintes, lignes de courant, . . .) quelque soit le niveau d'élasticité. Le tableau comparatif 5.8 exhibe un bon accord qualitatif avec les résultats issus de la littérature. Nous mentionnons le manque de résultats de référence concernant la contraction à coin arrondi par rapport au cas très

documenté de la contraction abrupte, et le tableau 5.7 tente de combler ce manque. Cependant, conscients de la relativement faible précision du schéma upwind $(\mathcal{O}(\Delta x))$ utilisé dans cette étude, nous laissons pour un travail futur l'étude systématique de cet écoulement une fois implémenté un schéma monotone en $(\mathcal{O}(\Delta x^2))$ pour le traitement des termes convectifs dans la loi constitutive.

We=0		1	2 44				
Présente étude, M4		$X_{\rm R}/H$	$\Delta\Psi \times 10^{-3}/(UH)$	$u_{\rm max}/U$	$ au_{ m max}^{xx}/ au_{ m w}$	$3\Delta P/\tau_{\rm w}$	C
Alves et al. [82]	We=0						
Kim et al. [69] 1.4481 1.1500	Présente étude, M4	1.498	1.172	1.499	0.359	50.464	0.286
Phillips et Williams [112] 1.417 1.18	Alves et al. [82]	1.500	1.178	1.501	0.360	_	0.3741
Edussuriya et al. [30] 1.391 1.1	Kim <i>et al.</i> [69]	1.4481	1.1500	_	_	_	_
We=1	Phillips et Williams [112]	1.417	1.18	_	_	_	_
Présente étude, M4 1.394 0.856 1.527 0.551 45.313 -0.57 . Alves et al. [82] 1.373 0.780 1.525 0.544 $ -0.50$. Kim et al. [69] 1.3392 0.7780 $ -$ Phillips et Williams [112] 1.384 1.10 $ -$ Aboubacar et Webster [3] 1.358 0.811 $ -$ Edussuriya et al. [30] 1.408 1.1 $ -$ We=2 Présente étude, M4 1.263 0.597 1.566 0.655 39.880 $-$ 1.47. Alves et al. [82] 1.181 0.422 1.546 0.612 $ -$ 1.49. Kim et al. [69] 1.1245 0.4230 $ -$ Phillips et Williams [112] 1.377 1.18 $ -$ Aboubacar et Webster [3] 1.203 0.489 $ -$ 0.90 $ -$ 0.07 Edussuriya et al. [30] 1.304 0.7 $ -$ Présente étude, M4 1.199 0.631 1.628 0.747 37.634 $-$ 1.85 Alves et al. [82] 1.0187 0.3020 $ -$ Phillips et Williams [112] 1.401 1.38 $ -$ Phillips et Williams [112] 1.401 1.38 $ -$ Phillips et Williams [112] 1.401 1.38 $ -$ Phillips et Williams [112] 1.401 1.38 $ -$ Phillips et Williams [112] 1.401 1.38 $ -$ Phillips et Williams [112] 1.401 1.38 $ -$ Phillips et Williams [112] 1.401 1.38 $ -$ Phillips et Williams [112] 1.401 1.38 $ -$	Edussuriya et al. [30]	1.391	1.1	_	_	_	_
Alves et al. [82] 1.373 0.780 1.525 0.544 — -0.50 . Kim et al. [69] 1.3392 0.7780 — $-$ — $-$ — $-$ — Phillips et Williams [112] 1.384 1.10 — $-$ — $-$ — $-$ — Aboubacar et Webster [3] 1.358 0.811 — $-$ — $-$ — $-$ — $-$ — $-$ — We=2 Présente étude, M4 1.263 0.597 1.566 0.655 39.880 — 1.478 Alves et al. [82] 1.181 0.422 1.546 0.612 — $-$ 1.499 Kim et al. [69] 1.1245 0.4230 — $-$ — $-$ — $-$ — Phillips et Williams [112] 1.377 1.18 — $-$ — $-$ — $-$ — Aboubacar et Webster [3] 1.203 0.489 — $-$ — $-$ — $-$ — Matallah et al. [87] — $-$ 0.90 — $-$ — $-$ — $-$ — We=2.5 Présente étude, M4 1.199 0.631 1.628 0.747 37.634 — 1.856 Alves et al. [69] 1.0187 0.3020 — $-$ — $-$ — $-$ — Phillips et Williams [112] 1.401 1.38 — $-$	We=1						
Kim et al. [69] 1.3392 0.7780	Présente étude, M4	1.394	0.856	1.527	0.551	45.313	-0.573
Phillips et Williams [112] 1.384 1.10	Alves et al. [82]	1.373	0.780	1.525	0.544	_	-0.505
Aboubacar et Webster [3] 1.358 0.811	Kim <i>et al.</i> [69]	1.3392	0.7780	_	_	_	_
Aboubacar et Webster [3] 1.358 0.811	Phillips et Williams [112]	1.384	1.10	_	_	_	_
Edussuriya et al. [30] 1.408 1.1	Aboubacar et Webster [3]	1.358	0.811	_	_	_	_
Présente étude, M4 1.263 0.597 1.566 0.655 39.880 -1.479 Alves et al. [82] 1.181 0.422 1.546 0.6121.499 Kim et al. [69] 1.1245 0.4230 Phillips et Williams [112] 1.377 1.18 Aboubacar et Webster [3] 1.203 0.489 Matallah et al. [87] - 0.900 Edussuriya et al. [30] 1.304 0.7 We=2.5 Présente étude, M4 1.199 0.631 1.628 0.747 37.634 -1.859 Alves et al. [82] 1.077 0.297 1.554 0.623 1.999 Kim et al. [69] 1.0187 0.3020 Phillips et Williams [112] 1.401 1.38 Aboubacar et Webster [3] - 0.377 Edussuriya et al. [30] 1.269 0.7 We=3 Présente étude, M4 1.137 0.437 1.602 0.699 34.978 -2.299 Alves et al. [82] 0.973 0.207 1.562 0.638 2.500 Kim et al. [69] 0.9001 0.2120	Edussuriya et al. [30]	1.408	1.1	_	_	_	_
Alves et al. [82] 1.181 0.422 1.546 0.612 — — — — — — — — — — — — — — — — — — —	$\overline{ ext{We}=2}$						
Kim et al. [69] 1.1245 0.4230	Présente étude, M4	1.263	0.597	1.566	0.655	39.880	-1.478
Phillips et Williams [112] 1.377 1.18 — — — — — — — — — — — — — — — — — — —	Alves et al. [82]	1.181	0.422	1.546	0.612	_	-1.492
Aboubacar et Webster [3] 1.203 0.489 — — — — — — — — — — — — — — — — — — —	Kim <i>et al.</i> [69]	1.1245	0.4230	_	_	_	_
Matallah et al. [87] $-$ 0.90 $ -$ 0.07 Edussuriya et al. [30] 1.304 0.7 $ -$ 0.07 We=2.5 Présente étude, M4 1.199 0.631 1.628 0.747 37.634 -1.85 Alves et al. [82] 1.077 0.297 1.554 0.623 $-$ -1.990 Kim et al. [69] 1.0187 0.3020 $ -$ Phillips et Williams [112] 1.401 1.38 $ -$ Aboubacar et Webster [3] $-$ 0.377 $ -$ Edussuriya et al. [30] 1.269 0.7 $ -$ We=3 Présente étude, M4 1.137 0.437 1.602 0.699 34.978 $-$ 2.290 Kim et al. [82] 0.973 0.207 1.562 0.638 $ -$ 2.50 Kim et al. [69] 0.9001 0.2120 $ -$	Phillips et Williams [112]	1.377	1.18	_	_	_	_
Edussuriya et al. [30] 1.304 0.7	Aboubacar et Webster [3]	1.203	0.489	_	_	_	_
We=2.5 Présente étude, M4 1.199 0.631 1.628 0.747 37.634 -1.85 Alves et al. [82] 1.077 0.297 1.554 0.623 - -1.996 Kim et al. [69] 1.0187 0.3020 - - - - Phillips et Williams [112] 1.401 1.38 - - - - Aboubacar et Webster [3] - 0.377 - - - - - Edussuriya et al. [30] 1.269 0.7 - - - - - We=3 Présente étude, M4 1.137 0.437 1.602 0.699 34.978 -2.290 Alves et al. [82] 0.973 0.207 1.562 0.638 - -2.50 Kim et al. [69] 0.9001 0.2120 - - - - -	Matallah et al. [87]	_	0.90	_	_	_	-0.077
Présente étude, M4 1.199 0.631 1.628 0.747 37.634 -1.856 Alves et al. [82] 1.077 0.297 1.554 0.6231.996 Kim et al. [69] 1.0187 0.3020 Phillips et Williams [112] 1.401 1.38 Aboubacar et Webster [3] - 0.377 Edussuriya et al. [30] 1.269 0.7 We=3 Présente étude, M4 1.137 0.437 1.602 0.699 34.978 -2.296 Alves et al. [82] 0.973 0.207 1.562 0.6382.50 Kim et al. [69] 0.9001 0.2120	Edussuriya et al. [30]	1.304	0.7	_	_	_	_
Alves et al. [82] 1.077 0.297 1.554 0.623 — — — — — — — — — — — — — — — — — — —	$\overline{ ext{We=2.5}}$						
Alves et al. [82] 1.077 0.297 1.554 0.623 — — — — — — — — — — — — — — — — — — —	Présente étude, M4	1.199	0.631	1.628	0.747	37.634	-1.853
Phillips et Williams [112] 1.401 1.38 Aboubacar et Webster [3] - 0.377	Alves et al. [82]	1.077	0.297	1.554	0.623	_	-1.996
Phillips et Williams [112] 1.401 1.38 Aboubacar et Webster [3] - 0.377	Kim <i>et al.</i> [69]	1.0187	0.3020	_	_	_	_
Aboubacar et Webster [3] $-$ 0.377 $ -$ Edussuriya et al. [30] 1.269 0.7 $ -$ We=3 Présente étude, M4 1.137 0.437 1.602 0.699 34.978 $-$ 2.29. Alves et al. [82] 0.973 0.207 1.562 0.638 $ -$ 2.50 Kim et al. [69] 0.9001 0.2120 $ -$				_	_	_	_
Edussuriya et al. [30] 1.269 0.7 $ -$ We=3 Présente étude, M4 1.137 0.437 1.602 0.699 34.978 $-$ 2.294 Alves et al. [82] 0.973 0.207 1.562 0.638 $ -$ 2.50 Kim et al. [69] 0.9001 0.2120 $ -$				_	_	_	_
We=3 Présente étude, M4 1.137 0.437 1.602 0.699 34.978 -2.290 Alves et al. [82] 0.973 0.207 1.562 0.6382.50 Kim et al. [69] 0.9001 0.2120	Edussuriya et al. [30]	1.269		_	_	_	_
Présente étude, M4 1.137 0.437 1.602 0.699 34.978 -2.290 Alves et al. [82] 0.973 0.207 1.562 0.6382.50 Kim et al. [69] 0.9001 0.2120	$\overline{ ext{We=3}}$						
Alves et al. [82] 0.973 0.207 1.562 0.6382.50 Kim et al. [69] 0.9001 0.2120		1.137	0.437	1.602	0.699	34.978	-2.295
Kim et al. [69] 0.9001 0.2120						_	
					_	_	_
	Edussuriya et al. [30]	1.217	0.7	_	_	_	_

TAB. 5.4 – Comparaison des résultats obtenus avec le maillage M4 avec les résultats obtenus par les auteurs de la table 5.3 dans le cas de de l'écoulement rampant dans une contraction abrupte plane. (†) : évalué par la formule (5.61) depuis la valeur brute de Δp donnée dans [87].

	$X_{\rm R}/H$	$\Delta\Psi \times 10^{-3}/(UH)$	$u_{\rm max}/U$	$ au_{ m max}^{xx}/ au_{ m w}$	$3\Delta P/\tau_{\rm w}$	C
M1	1.045	0.261	1.499	0.631	42.768	-0.997
M2	1.025	0.234	1.531	0.651	44.999	-0.625
M3	1.014	0.219	1.540	0.663	45.884	-0.459
M4	1.000	0.215	1.539	0.664	46.074	-0.446
Phillips et Williams [112]	1.048	0.35	_	_	_	_

Tab. 5.5 – Résultats obtenus avec le maillage M4 dans le cas de la contraction plane abrupte à Re=1 et We=1.

			Nombre de	$N_{\rm cc}$	$\overline{\Delta x}_{\rm cc}/H$
Mesh	$N_x \times N_y$	h/H	cellules fluides		
$\overline{m1}$	64×33	0.075	1285	21	1.210^{-2}
m2	96×50	0.05	2952	31	6.510^{-3}
m3	150×71	0.03	6820	51	3.010^{-3}
m4	450×192	0.01875	17552	81	1.510^{-3}

Tab. 5.6 – Propriétés des maillages utilisés dans les simulations de l'écoulement dans une contraction plane 4:1.

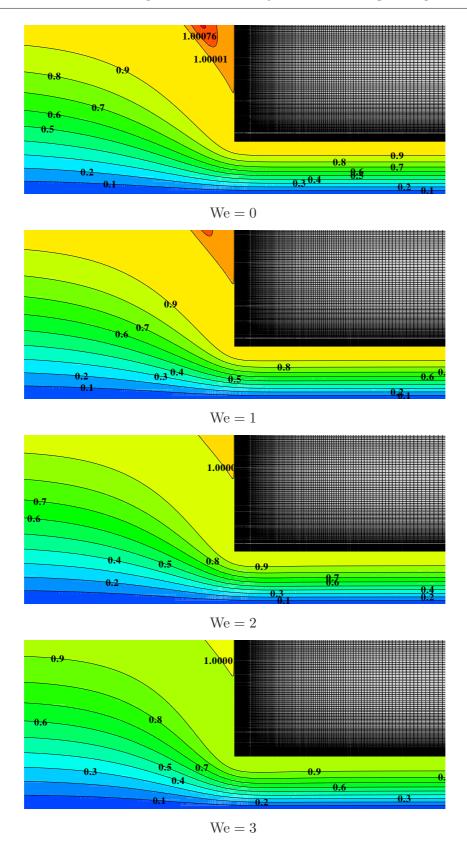


Fig. 5.18 – Lignes de courant pour l'écoulement rampant dans la contraction abrupte obtenues avec le maillage M4.

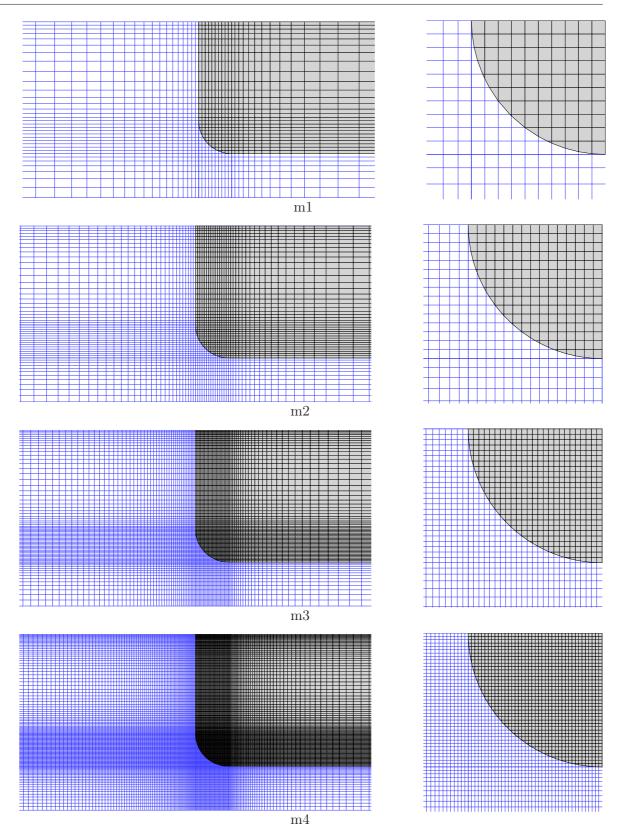


FIG. 5.19 – Maillages cartésiens utilisés pour l'étude de la contraction plane à coin arrondi. À gauche : sur la portion $[-4H, 4H] \times [0, 4H]$ du domaine. À droite : sur la portion $[-0.25H, 0.75H] \times [0.25H, 1.75H]$ du domaine.

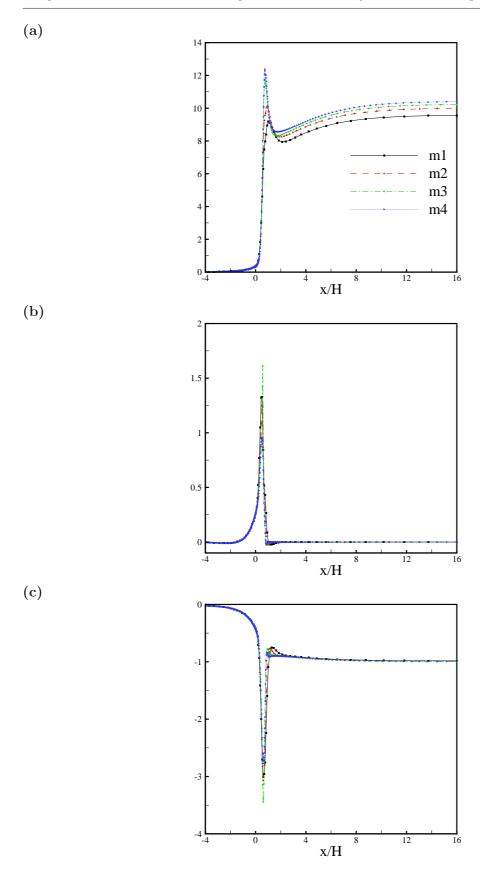


FIG. 5.20 – Valeurs de (a) : τ^{xx}/τ_w ; (b) : τ^{yy}/τ_w ; (c) : τ^{xy}/τ_w le long de l'axe y=1 obtenues dans le cas de la contraction à coin arrondi à We = 2 pour les différents maillages de la table 5.1. 164

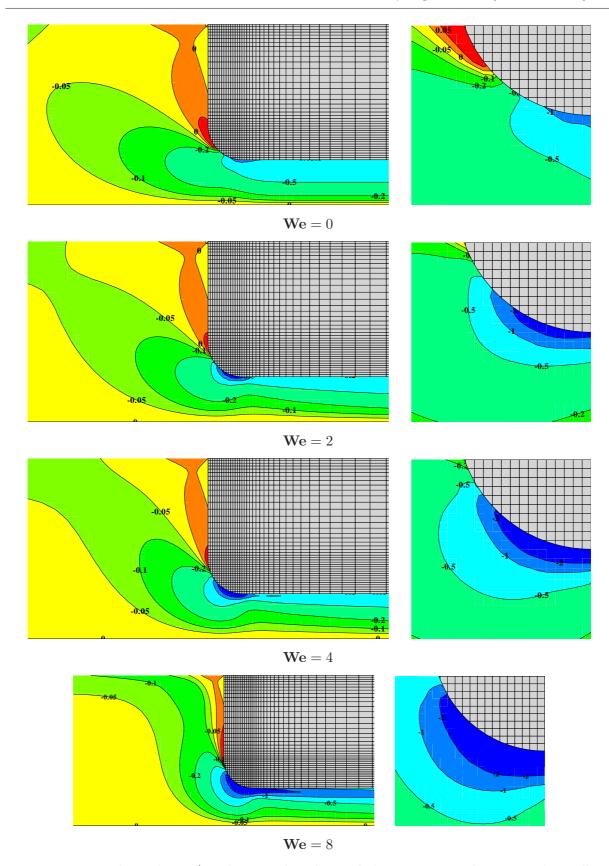


FIG. 5.21 – Iso-valeurs de $\tau^{xy}/\tau_{\rm w}$ obtenues dans le cas de la contraction abrupte sur le maillage M4. À droite : sur la portion $[-4H,4H]\times[0,4H]$ du domaine, à gauche : sur la portion $[-0.25H,0.75H]\times[0.5H,1.5H]$.

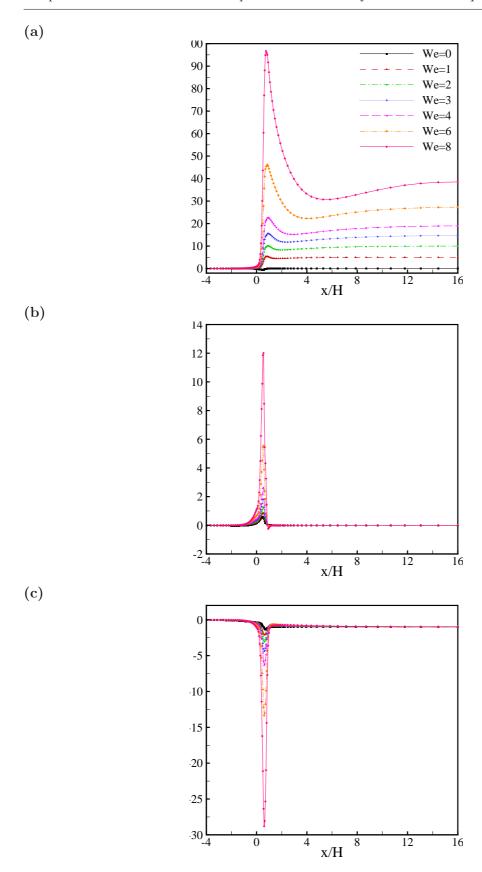


FIG. 5.22 – Valeurs de (a) : τ^{xx}/τ_w ; (b) : τ^{yy}/τ_w ; (c) : τ^{xy}/τ_w le long de l'axe y=1 pour We $\in [0;8]$ obtenues dans le cas de la contraction à coin arrondi avec le maillage m2.

		X_{R}/H	$\Delta \psi_{\rm R}/(UH) \times 10^3$	$u_{\rm max}/U$	$ au_{ m max}^{xx}/ au_{ m w}$	$3\Delta P/\tau_{\rm w}$	C
We=0	m1	1.253	0.602	1.479	0.305	45.515	-0.539
	m2	1.261	0.602	1.492	0.310	46.980	-0.295
	m3	1.265	0.593	1.494	0.311	47.483	-0.211
	m4	1.268	0.593	1.498	0.313	48.322	-0.080
We=1	m1	1.189	0.509	1.507	0.513	40.573	-1.363
	m2	1.195	0.500	1.518	0.506	41.980	-1.128
	m3	1.203	0.498	1.519	0.502	42.430	-1.053
	m4	1.206	0.492	1.522	0.499	43.242	-0.918
We=2	m1	1.113	0.432	1.534	0.662	35.701	-2.175
	m2	1.097	0.370	1.539	0.615	36.683	-1.994
	m3	1.095	0.357	1.535	0.578	37.021	-1.955
	m4	1.088	0.344	1.538	0.576	37.671	-1.846
We=3	m1	1.058	0.377	1.572	0.783	31.945	-2.801
	m2	1.007	0.297	1.564	0.685	32.440	-2.718
We=4	m1	0.998	0.341	1.617	0.907	29.748	-3.167
	m2	0.925	0.251	1.593	0.744	32.216	-2.942
We=6	m1	0.866	0.314	1.728	1.238	30.511	-3.040
	m2	0.777	0.216	1.667	0.885	27.607	-3.524
We=8	m1	0.648	0.336	1.887	1.840	40.032	-1.453
	m2	0.602	0.236	1.785	1.310	31.748	-2.834

TAB. 5.7 – Synthèse des résultats numériques obtenus sur les maillages de la table 5.6 pour la contraction plane à coin arrondi. Pour We ≤ 3 , les simulations sont réalisées avec $\Delta t = 5 \times 10^{-3} H/U$ et pour We = 4, 6 et 8 les pas de temps utilisés sont respectivement $\Delta t = 2.5 \times 10^{-3} H/U$, $1 \times 10^{-3} H/U$ et $5 \times 10^{-4} H/U$.

		$X_{ m R}$	$\Delta\Psi\times10^{-3}$	C^{\dagger}
We=1	Présente étude, m2	1.195	0.500	-1.128
	Aboubacar et al. [2]	_	0.452	-0.69
$\overline{ ext{We=2}}$	Présente étude, m2	1.095	0.368	-1.469
	Aboubacar et al. [2]	_	0.342	-1.72
	Matallah et al. [87]	_	0.48	-0.69
We=3	Présente étude, m2	1.007	0.297	-2.718
	Aboubacar et al. [2]	_	0.225	-2.67
$\overline{ ext{We=4}}$	Présente étude, m2	0.923	0.249	-2.843
	Aboubacar et al. [2]	_	0.225	-3.54
	Matallah et al. [87]	_	0.33	-1.44
We=6	Présente étude, m2	0.764	0.207	-3.154
	Matallah et al. [87]	_	0.26	-2.27

TAB. 5.8 – Comparaison des résultats obtenus sur la contraction plane à coin arrondi obtenu sur le maillage m2 avec ceux de la littérature. † : évalué par la formule (5.61) depuis la valeur de Δp donnée dans [2, 87].

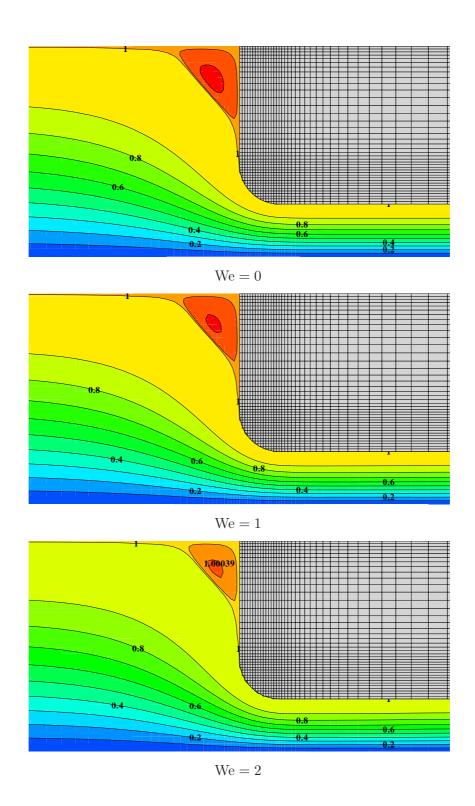


Fig. 5.23 – Lignes de courant pour l'écoulement rampant dans la contraction à coin arrondi.

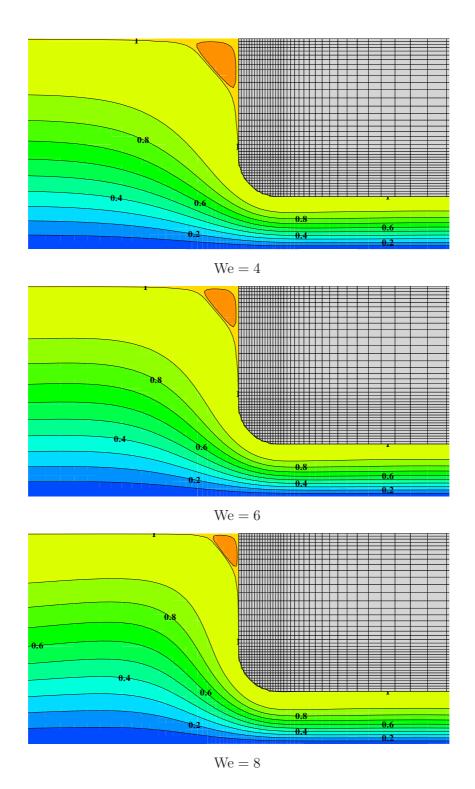


Fig. 5.24 — Lignes de courant pour l'écoulement rampant dans la contraction à coin arrondi. (suite)

Conclusions et perspectives

Nous proposons une conclusion qui résume de manière synthétique des principaux résultats issus de ces travaux de thèse :

- Construction d'une méthode originale pour fluides newtoniens de type IB étendant la méthode MAC au cas des géométries complexes. Cette méthode, appelée méthode LS-STAG, préserve les invariants de l'écoulement au niveau semi-discret et présente une précision spatiale proche de l'ordre 2, évaluée sur l'écoulement de Taylor-Couette.
- Phase de validation de la méthode sur divers cas tests incluant notamment : l'écoulements libre autour d'un cylindre circulaire en régime laminaire stationnaire et instationnaire, écoulement autour d'un cylindre en rotation oscillante.
- Comparaison de la vitesse de calcul du code avec le code industriel non-structuré FLUENT sur le cas test de l'écoulement autour d'un cylindre à section carrée. Les résultats montrent que les temps de calcul engendrés par la méthode LS-STAG sont 4 fois plus faibles pour une qualité de résultats équivalente.
- Extension de la méthode au cas de géométries mobiles, application au cas de l'écoulement incident sur un cylindre en oscillation transverse.
- Première application d'une méthode de type IB aux fluides viscoélastiques, application au fluide d'Oldroyd-B en écoulement dans une contraction plane 4 :1 à coins arrondis.
- Développement du code de calcul LS-STAG dans un environnement FORTRAN original, ce qui est motivé d'une part par les besoins spécifiques en terme de programmation inhérents à la méthode, et d'autre part par la volonté de construire un outil numérique évolutif, ce que ne permet pas l'utilisation en boîte noire de librairies pré-existantes. Le code développé inclut, outre le solveur à proprement parler, un mailleur cartésien et une interface pour le post-traitement des données par le logiciel TECPLOT. Conscient que ces travaux de thèse ne constitue pas une conclusion mais plutôt un point de départ du développement de la méthode LS-STAG, la versatilité du code produit est essentielle en vue des développements futurs que nous présentons à présent.

Nous présentons finalement les perspectives et prolongements envisageables de ces travaux de thèse :

La maturité de la méthode LS-STAG est à présent suffisante pour envisager des applications ambitieuses. Nous envisageons l'utilisation de la méthode pour le contrôle optimal d'écoulements autour d'objets profilés, dans le cadre d'un projet ANR blanc intitulé "Contrôle Optimal et Robuste par Modèles d'Ordre Réduit d'Écoulements Décollés" (CORMORED) porté par Laurent Cordier au Laboratoire d'Études Aérodynamiques de Poitiers. L'avantage certain de notre méthode sur le plan du temps de calcul, en comparaison à un solveur non-structuré, la positionne

comme un outil privilégié pour ce type d'application, gourmande en ressources informatiques.

Les différentes loi constitutives existantes (modèles de Maxwell, d'Oldroyd-B, de Phan-Thien/Tanner, etc...) utilisées pour modéliser le comportement viscoélastique des fluides comportent les mêmes caractéristiques mathématiques, à savoir : un jeu d'équations hyperboliques non-linéaires pour le transport des composantes élastiques du tenseur des contraintes, couplé aux équations du mouvement incompressible. La résolution numérique de ces problèmes couplés se heurte aux mêmes difficultés, dont la plus remarquable est l'invariante perte de stabilité des nombreuses méthodes envisagées pour des valeurs critiques du nombre de Weissenberg, problème connu sous le nom de problème de haut nombre de Weissenberg. Parmi les nombreuses origines numériques connues de ce problème nous avons déjà traité pendant les travaux de thèse celle relative au couplage spatial des inconnues, cependant il reste à traiter deux problèmes pour repousser la limite du niveau d'élasticité atteignable, ils concernent respectivement la discrétisation spatiale et temporelle des équations de l'écoulement :

- · La nature hyperbolique de la loi constitutive viscoélastique encourage l'utilisation de schémas TVD pour le traitement des flux convectifs, dont le prototype est le schéma décentré upwind, utilisé durant la thèse. Cependant ce schéma est connu pour introduire de la dissipation numérique dans tout le domaine et une amélioration notable de notre discrétisation spatiale consisterait à utiliser des schémas à limiteurs de flux qui localisent cette diffusion artificielle aux endroits où naissent les oscillations numériques.
- De plus, la perte de positivité du tenseur de conformation (qui est une combinaison linéaire du tenseur des contraintes et du tenseur identité) engendre la destruction de la solution numérique, ce qui encourage l'utilisation de schémas temporels préservant cette propriété au niveau discet. Nous pensons inspirer la construction d'un tel schéma des travaux concernant l'intégration des systèmes de Riccati. Ces équations différentielles, rencontrées en théorie du contrôle, sont en effet très semblables au système issu de la discrétisation des lois constitutives viscoélastiques.

Les travaux de thèse portant sur le solveur newtonien se sont concentrés essentiellement sur les propriétés de conservation semi-discrètes, c'est à dire que nous avons ignoré la violation de ces propriétés par le schéma d'avancée en temps. Dans les calculs instationnaires, les schémas de type Runge-Kutta implicites aux points de collocation de Gauss, dont le prototype est le schéma dit du point milieu, sont connus pour conserver les invariants quadratiques (comme l'énergie cinétique). Un prolongement naturel de ces travaux de thèse est l'implémentation d'un tel schéma, dont la difficulté technique mineure réside dans la prise en compte implicite des termes convectifs.

Une phase déterminante du développement de la méthode LS-STAG est son extension aux écoulements tridimensionnels qui sont omniprésents dans le monde industriel. Pour ce faire, nous proposons de suivre la même méthodologie qui a conduit à la construction de la méthode 2D, et si la difficulté majeure réside dans le nombre accru de type de cut-cells à considérer (par exemple pour la discrétisation des flux convectifs, 16 types de *cuts-cells* sont à distinguer contre 6 en

2D), aucun verrou théorique n'a été rencontré en vue de cette extension. L'avantage de ce type de méthode sur le plan du temps de calcul sera encore plus clair en 3D vis à vis d'un solveur non-structuré.

Annexe A

Écriture matricielle de l'opérateur de divergence LS-STAG

En identifiant chacune des lignes (i, j) du système (3.13) avec l'équation de continuité discrète (3.9) écrite dans la cellule $\Omega_{i,j}$ nous obtenons l'expression de l'opérateur de divergence $\mathcal{D} = (\mathcal{D}^x \mathcal{D}^y)^{\mathrm{T}}$ dont l'expression est utilisé pour construire l'opérateur de gradient de pression. La matrice \mathcal{D}^x de taille $N_x N_y \times (N_x - 1) N_y$ qui opère sur les inconnues $u_{i,j}$ a pour expression :

$$\mathcal{D}^{x} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{1}^{x} & 0 & & & & & \\ 0 & \mathcal{A}_{2}^{x} & 0 & & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & 0 & \mathcal{A}_{j}^{x} & 0 & & & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & & 0 & \mathcal{A}_{N_{y}-1}^{x} & 0 & & \\ & & & & 0 & \mathcal{A}_{N_{y}}^{x} \end{pmatrix}, \tag{A.1}$$

où les blocs \mathcal{A}_{j}^{x} sont carrés de dimension $(N_{x}-1)$ et pour $j=1,\ldots,N_{y}$:

$$\mathcal{A}_{j}^{x} = \begin{pmatrix}
\theta_{1,j}^{u} \Delta y_{j} & 0 \\
-\theta_{1,j}^{u} \Delta y_{j} & \theta_{2,j}^{u} \Delta y_{j} & 0 \\
0 & -\theta_{2,j}^{u} \Delta y_{j} & \theta_{3,j}^{u} \Delta y_{j} & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & -\theta_{N_{x}-2,j}^{u} \Delta y_{j} & \theta_{N_{x}-1,j}^{u} \Delta y_{j} \\
0 & -\theta_{N_{x}-1,j}^{u} \Delta y_{j}
\end{pmatrix} .$$
(A.2)

De même, la matrice \mathcal{D}^y rectangulaire de taille $N_x N_y \times N_x (N_y - 1)$ s'exprime :

$$\mathcal{D}^{y} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{1}^{y} & 0 & & & & & \\ -\mathcal{A}_{1}^{y} & \mathcal{A}_{2}^{y} & 0 & & & & & \\ 0 & -\mathcal{A}_{2}^{y} & \mathcal{A}_{3}^{y} & 0 & & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & \\ & & 0 & -\mathcal{A}_{N_{y}-2}^{y} & \mathcal{A}_{N_{y}-1}^{y} & 0 & & & \\ & & 0 & -\mathcal{A}_{N_{y}-1}^{y} & \mathcal{A}_{N_{y}}^{y} & & & \\ & & 0 & -\mathcal{A}_{N_{y}}^{y} & & & & \\ & & & 0 & -\mathcal{A}_{N_{y}}^{y} \end{pmatrix},$$
(A.3)

avec le bloc carré \mathcal{A}_{i}^{y} de taille N_{x} :

$$\mathcal{A}_{j}^{y} = \begin{pmatrix}
\theta_{1,j}^{v} \Delta x_{1} & 0 & & & \\
0 & \theta_{2,j}^{v} \Delta x_{2} & 0 & & & \\
& \cdot & \cdot & \cdot & & \\
& & 0 & \theta_{N_{x}-1,j}^{v} \Delta x_{N_{x}-1} & 0 \\
& & & 0 & \theta_{N_{x},j}^{v} \Delta x_{N_{x}}
\end{pmatrix}.$$
(A.4)

Annexe B

Compléments sur la discrétisation

LS-STAGdes flux convectifs

Dans cette annexe nous donnons des flux convectifs $\int_{\Gamma_{i,j}^u} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, u \, dS$ pour chaque moitié de volume de contrôle de la figure 3.4 de telle sorte que la condition d'antisymétrie (3.23) soit vérifiée quelque soit la combinaison de ces demi volumes de contrôle considérée. Dans le cas du pentagone Nord-Ouest représenté figure 3.4 (a), la frontière de ce volume de contrôle est décomposée comme $\Gamma_{i,j}^{u,w} \cup \Gamma_{i,j}^{s,e} \cup \Gamma_{i,j}^{ib,e} \cup \Gamma_{i,j}^{ib,e}$, et sur chacune de ces faces la discrétisation vérifiant (3.23) s'écrit :

$$\int_{\Gamma_{i,i}^{u,w}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) u \, dS = -\frac{\overline{u}_{i-1,j} + \overline{u}_{i,j}}{2} u_{w}, \tag{B.1a}$$

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{\mathrm{s},\mathrm{e}}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) u \, \mathrm{d}S = -\frac{1}{2} \, \overline{v}_{i,j-1} \, u_{\mathrm{s}}, \tag{B.1b}$$

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{\mathbf{n},\mathbf{e}}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) u \, dS = \frac{1}{2} \, \overline{v}_{i,j+1} \, u_{\mathbf{n}}, \tag{B.1c}$$

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{\mathrm{ib,e}}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) u \, \mathrm{d}S = \frac{1}{2} \, \overline{U}_{i,j}^{\mathrm{ib}} \left(\frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{2} u(x_{i,j}^{\mathrm{ib}}, y_j) \right), \tag{B.1d}$$

avec les interpolations centrées correspondantes

$$u_{\rm w} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j}}{2}, \quad u_{\rm s} = \frac{u_{i,j-1} + u_{i,j}}{2}, \quad u_{\rm n} = \frac{u_{i,j} + u_{i,j+1}}{2}.$$
 (B.2)

Dans le cas du trapèrze Ouest (b) la frontière s'écrit comme $\Gamma_{i,j}^{u,w} \cup \Gamma_{i,j}^{s,e} \cup \Gamma_{i,j}^{n,e}$ où la discrétisation sur les deux dernières facettes est donnée respectivement par (B.1b) et (B.1c), et :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u,w}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \, u \, dS = \frac{1}{2} \left(\overline{U}_{i,j}^{ib} - \overline{u}_{i,j} \right) \left(\frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{2} u_{i,j}^{ib} \right). \tag{B.3}$$

Dans le cas du pentagone Nord-Est (c), la frontière $\Gamma_{i,j}^{u,w} \cup \Gamma_{i,j}^{s,e} \cup \Gamma_{i,j}^{ib,e}$, où la discrétisation sur les deux premières facettes est donnée respectivement par (B.1a) et (B.1b), et :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{\text{ib,e}}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) u \, dS = \frac{1}{2} \left(\overline{U}_{i,j}^{\text{ib}} + \overline{v}_{i,j} \right) \left(\frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{2} u(x_i, y_{i,j}^{\text{ib}}) \right). \tag{B.4}$$

Pour le cas du trapèze Nord (d), la frontière s'écrit $\Gamma^{u,w}_{i,j} \cup \Gamma^{s,e}_{i,j} \cup \Gamma^{ib,e}_{i,j}$, où la discrétisation sur les deux premières facettes s'écrit respectivement $\Gamma^{u,w}_{i,j} \cup \Gamma^{s,e}_{i,j} \cup \Gamma^{ib,e}_{i,j}$, et : (B.1b) respectively, and :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{\mathrm{ib,e}}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) u \, \mathrm{d}S = \frac{1}{2} \overline{U}_{i,j}^{\mathrm{ib}} \left(\frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{2} u(x_i, y_{i,j}^{\mathrm{ib}}) \right). \tag{B.5}$$

Finalement, pour le cas du triangle Nord-Ouest (e) et le coin saillant (f), la frontière est $\Gamma^{u,w}_{i,j} \cup \Gamma^{ib,e}_{i,j}$, où la discrétisation sur $\Gamma^{s,e}_{i,j}$ est donnée par (B.1b), et sur les deux autres facettes nous avons :

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{u,w}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) u \, dS = \frac{1}{2} \left(u_{i,j}^{ib} [n_x \Delta S]_{i,j}^{ib} - \overline{u}_{i,j} \right) \left(\frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{2} u_{i,j}^{ib} \right), \tag{B.6a}$$

$$\int_{\Gamma_{i,j}^{\text{ib,e}}} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) u \, dS = \frac{1}{2} v_{i,j}^{\text{ib}} [n_y \Delta S]_{i,j}^{\text{ib}} \left(\frac{1}{2} u_{i,j} + \frac{1}{2} u(x_i, y_{i,j}^{\text{ib}}) \right).$$
 (B.6b)

Annexe C

Compléments sur les forces de cisaillement agissant sur la frontière immergée

Dans cette annexe, nous décrivons pour chaque *cut-cell* de la figure 3.6 la quadrature utilisée pour la discrétisation de la force de hydrodynamique (3.52) agissant sur la frontière immergée. Les formules de quadrature pour les *cut-cells* de la figure 3.4 se déduisent aisément des expressions que nous donnons maintenant.

Les quadratures utilisées pour les forces de traînée (3.52a) et de portance (3.52b) agiisant sur le pentagone Nord-Est (a) de la figure 3.6 sont respectivement :

$$\operatorname{Quad}_{i,j}^{\mathrm{ib}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \, \boldsymbol{e}_{y} \cdot \boldsymbol{n} \right) = \left[n_{y} \Delta S \right]_{i,j}^{\mathrm{ib}} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j}, \tag{C.1a}$$

$$\operatorname{Quad}_{i,j}^{\mathrm{ib}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \, \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{n} \right) = \left[n_x \Delta S \right]_{i,j}^{\mathrm{ib}} \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,j}, \tag{C.1b}$$

avec $\partial u/\partial y|_{i,j}$ donnée par la formule de différences finies (3.47) et de manière analogue :

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{v(x_{i,j}^{\text{ib}}, y_j) - v_{i,j}}{\frac{1}{2} \theta_{i,j}^v \Delta x_i}.$$
 (C.2)

Les surfaces projetées $[n_x \Delta S]_{i,j}^{\text{ib}}$ et $[n_y \Delta S]_{i,j}^{\text{ib}}$ sont définiespar (3.11), et pour la *cut-cell (a)* leur expression se réduit à :

$$[n_x \Delta S]_{i,j}^{\text{ib}} = (1 - \theta_{i,j}^u) \Delta y_j, \qquad [n_x \Delta S]_{i,j}^{\text{ib}} = (1 - \theta_{i,j}^v) \Delta x_i.$$

Pour la cellule de type trapèze Nord (b), il est plus naturel d'utiliser une formule de quadrature

du trapèze :

$$\operatorname{Quad}_{i,j}^{\mathrm{ib}}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\,\boldsymbol{e}_{y}\cdot\boldsymbol{n}\right) = \Delta x_{i}\left(\frac{1}{2}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{i-1,j} + \left.\frac{1}{2}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{i,j}\right),\tag{C.3a}$$

$$\operatorname{Quad}_{i,j}^{\mathrm{ib}}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,\boldsymbol{e}_{x}\cdot\boldsymbol{n}\right) = \left(\theta_{i-1,j}^{u} - \theta_{i,j}^{u}\right)\Delta y_{j}\left(\frac{1}{2}\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{i-1,j} + \left.\frac{1}{2}\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{i,j}\right). \tag{C.3b}$$

Pour le cas d'une cellule triangulaire Nord-Ouest (c), nous avons :

$$\operatorname{Quad}_{i,j}^{\mathrm{ib}}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\,\boldsymbol{e}_{y}\cdot\boldsymbol{n}\right) = \left.\theta_{i,j-1}^{\,v}\,\Delta x_{i}\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{i-1,j-1} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{i,j}\right),\tag{C.4a}$$

$$\operatorname{Quad}_{i,j}^{\mathrm{ib}}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{n}\right) = -\left.\theta_{i,j}^{\,u}\,\Delta y_j\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{i-1,j-1} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{i,j}\right). \tag{C.4b}$$

Annexe D

Résultats complémentaires sur la contraction plane abrupte

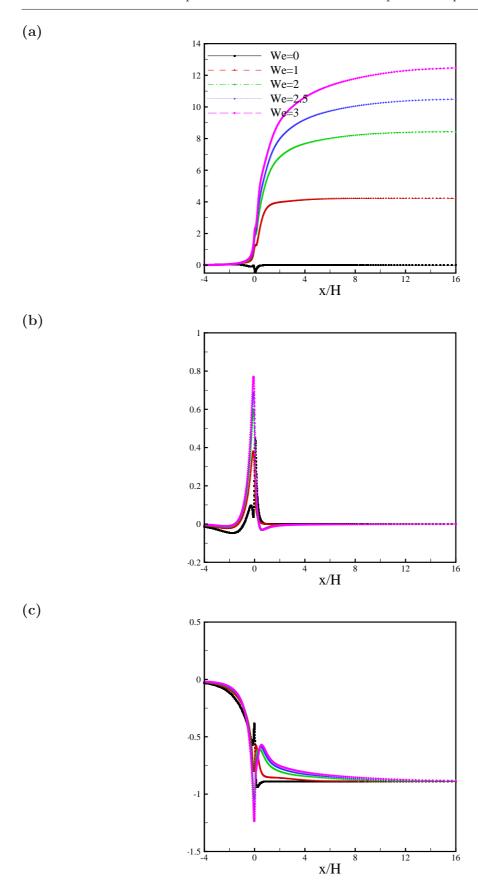


Fig. D.1 – Valeurs de (a) : τ^{xx}/τ_w ; (b) : τ^{yy}/τ_w ; (c) : τ^{xy}/τ_w le long de l'axe y=1 pour 182 We $\in [0;3]$ obtenues avec le maillage M4 dans le cas de la contraction abrupte.

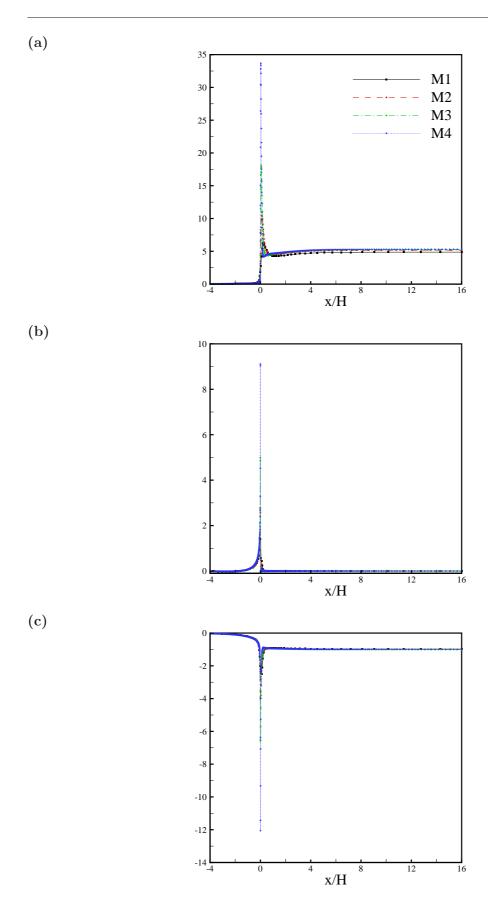


FIG. D.2 – Valeurs de (a) : $\tau^{xx}/\tau_{\rm w}$; (b) : $\tau^{yy}/\tau_{\rm w}$; (c) : $\tau^{xy}/\tau_{\rm w}$ le long de l'axe y=1 obtenues 183 dans le cas de la contraction abrupte à We = 1 pour les différents maillages de la table 5.1.

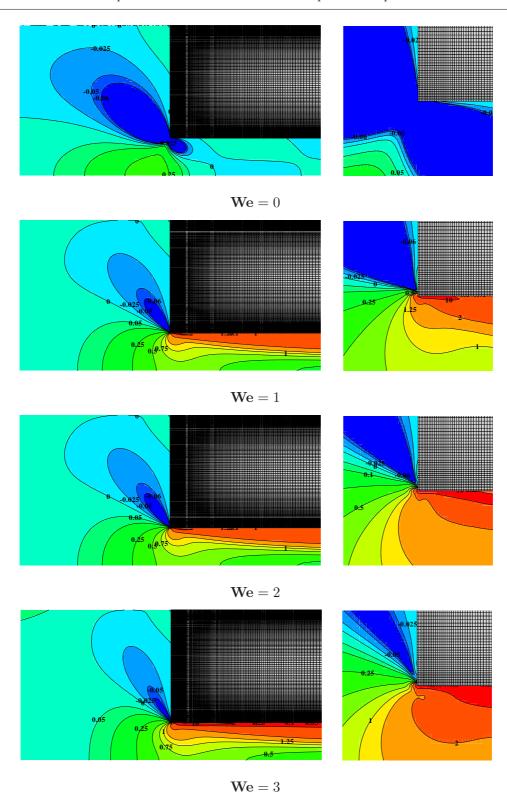


FIG. D.3 – Iso-valeurs de $\tau^{xx}/\tau_{\rm w}$ obtenues dans le cas de la contraction abrupte sur le maillage M4. À droite : sur la portion $[-4H,4H] \times [0,4H]$ du domaine, à gauche : sur la portion $[-0.25H,0.25H] \times [0.75H,1.25H]$.

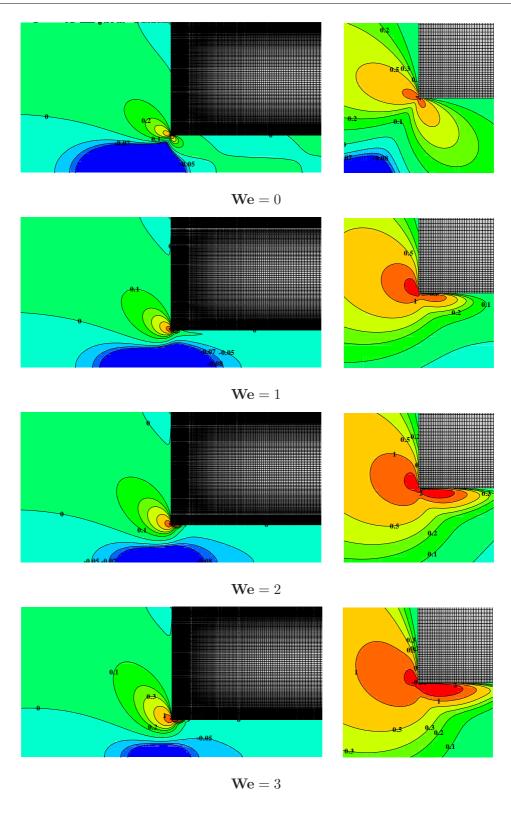


FIG. D.4 – Iso-valeurs de $\tau^{yy}/\tau_{\rm w}$ obtenues dans le cas de la contraction abrupte sur le maillage M4. À droite : sur la portion $[-4H,4H] \times [0,4H]$ du domaine, à gauche : sur la portion $[-0.25H,0.25H] \times [0.75H,1.25H]$.

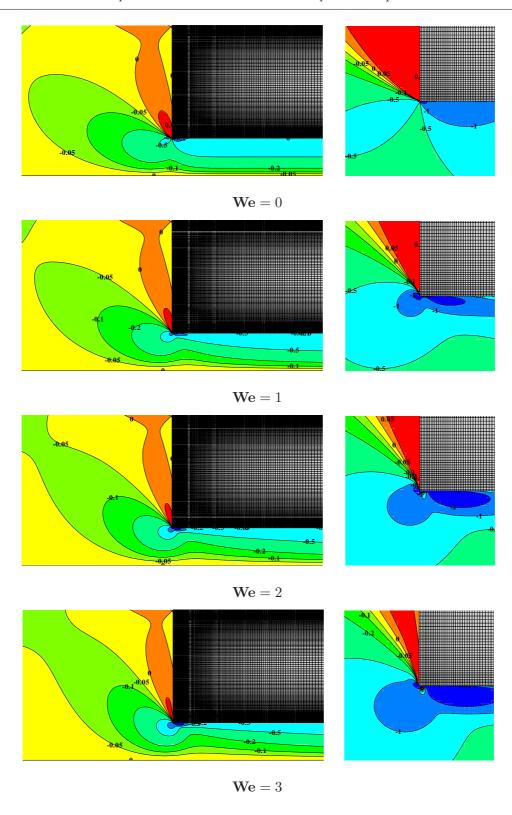


FIG. D.5 – Iso-valeurs de $\tau^{xy}/\tau_{\rm w}$ obtenues dans le cas de la contraction abrupte sur le maillage M4. À droite : sur la portion $[-4H,4H] \times [0,4H]$ du domaine, à gauche : sur la portion $[-0.25H,0.25H] \times [0.75H,1.25H]$.

Annexe E

Résultats complémentaires sur la contraction plane à coin arrondi

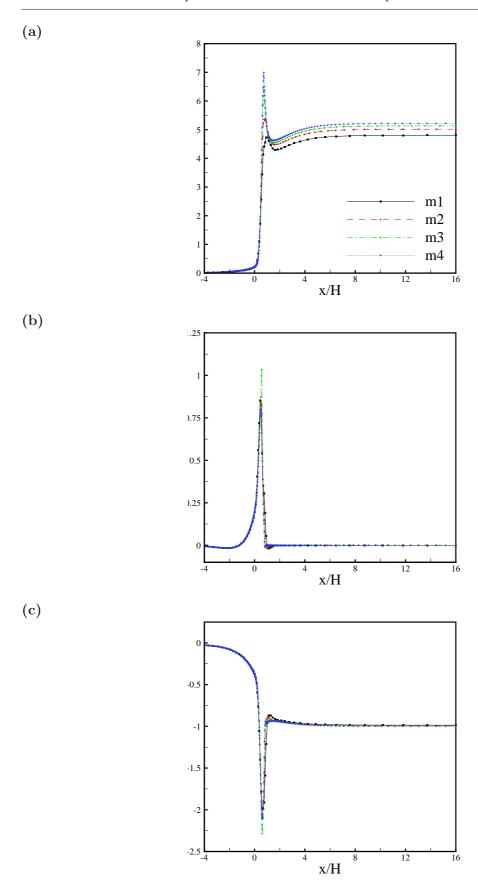


Fig. E.1 – Valeurs de (a) : τ^{xx}/τ_w ; (b) : τ^{yy}/τ_w ; (c) : τ^{xy}/τ_w le long de l'axe y=1 obtenues dans le cas de la contraction à coin arrondi à We = 1 pour les différents maillages de la table 5.6.

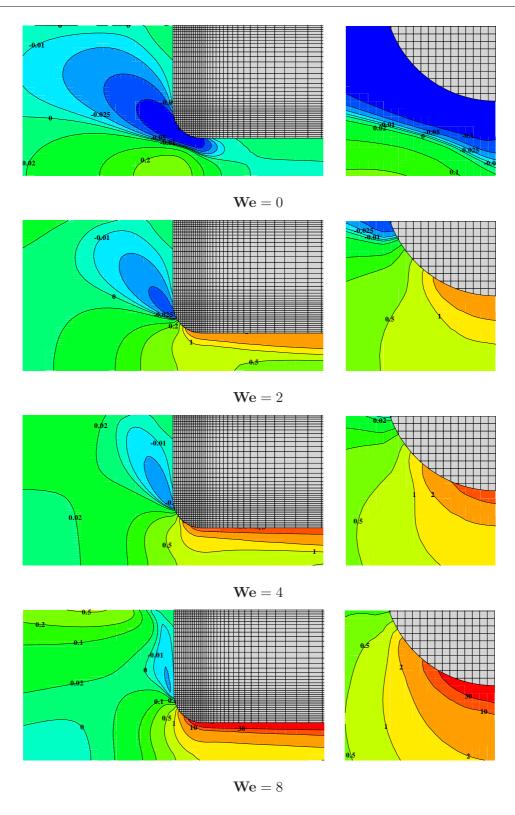


FIG. E.2 – Iso-valeurs de $\tau^{xx}/\tau_{\rm w}$ obtenues dans le cas de la contraction abrupte sur le maillage M4. À droite : sur la portion $[-4H,4H] \times [0,4H]$ du domaine, à gauche : sur la portion $[-0.25H,0.75H] \times [0.5H,1.5H]$.

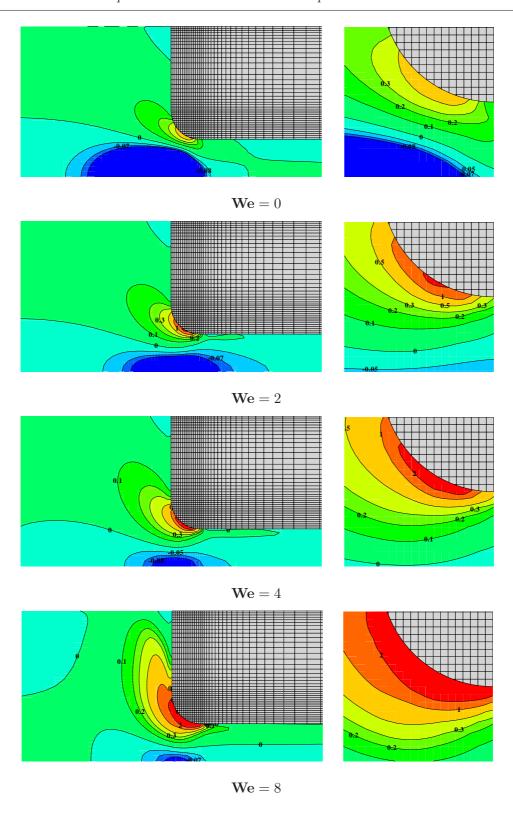


FIG. E.3 – Iso-valeurs de $\tau^{yy}/\tau_{\rm w}$ obtenues dans le cas de la contraction abrupte sur le maillage M4. À droite : sur la portion $[-4H,4H] \times [0,4H]$ du domaine, à gauche : sur la portion $[-0.25H,0.75H] \times [0.5H,1.5H]$.

Bibliographie

- [1] M. Aboubacar, H. Matallah, H. R. Tamaddon-Jahromi, and M. F. Webster. Development of an optimal hybrid finite volume/element method for viscoelastic flows. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **41**, 1147-1172, 2003.
- [2] M. Aboubacar, H. Matallah, and M.F. Webster. Highly elastic solutions for oldroyd-b and phan-thien/tanner fluids with a finite volume/element method: planar contraction flows. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 103, 65-103, 2002.
- [3] M. Aboubacar and M.F. Webster. A cell-vertex finite volume/element method on triangles for abrupt contraction viscoelastic flows. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 98, 83-106, 2001.
- [4] A. Afonso, P.J. Oliveira, F.T. Pinho, and M.A. Alves. The log-conformation tensor approach in the finite-volume method framework. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **157**, 55 65, 2009.
- [5] S.R. Ahmed. An experimental study of the wake structures of typical automobile shapes. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 9, 49 - 62, 1981.
- [6] M. A. Alves, F. T. Pinho, and P. J. Oliveira. The flow of viscoelastic fluids past a cylinder: finite-volume high-resolution methods. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 97, 207 - 232, 2001.
- [7] A. Arakawa. Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: two-dimensional incompressible flow, part I. J. Comput. Phys., 1, 119-143, 1966.
- [8] U. M. Ascher and L. R. Petzold. Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations. SIAM, Philadelphia, 1998.
- [9] Frank P.T. Baaijens. Mixed finite element methods for viscoelastic flow analysis: a review. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 79,361 - 385, 1998.
- [10] E. Balaras. Modeling complex boundaries using an external force field on fixed Cartesian grids in large-eddy simulations. *Computers Fluids*, **33**, 375-404, 2004.
- [11] T. J. Barth and D. C. Jespersen. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. *AIAA Paper*, **89-0366**, 1989.
- [12] G. Benbelkacem. Viscoélasticité et écoulements de fluides structurés. Thèse, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, 2009.

- [13] M. Bergmann, L. Cordier, and J. P. Brancher. Drag minimization of the cylinder wake by trust-region proper orthogonal decomposition. In R. King, editor, *Notes on Numerical Fluid Mechanics and Multidisciplinary Design*, pages 309–324, 2007.
- [14] B.Galletti, C.H.Bruneau, L.Zannetti, and A.Iollo. Low-order modelling of laminar flow regimes past a confined square cylinder. *J. Fluid Mech.*, **503**, 161-170, 2004.
- [15] R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager. Dynamics of Polymeric liquids. Wiley-Interscience, New-York, 1987.
- [16] O. Botella. On a collocation B-spline method for the solution of the Navier-Stokes equations. Computers & Fluids, 31, 397-420, 2002.
- [17] O. Botella and R. Peyret. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow. *Computers & Fluids*, **27**, 421 433, 1998.
- [18] M. Breuer, J. Bernsdorf, T. Zeiser, and F. Durst. Accurate computations of the laminar flow past a square cylinder based on two different methods: lattice-boltzmann and finitevolume. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 21, 186 - 196, 2000.
- [19] F. Bubois. Une formulation tourbillon-vitesse-pression pour le problème de stokes. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **314**, 277-280, 1992.
- [20] Z. Cai and C.R. Westphal. An adaptive mixed least-squares finite element method for viscoelastic fluids of oldroyd type. J. Non-Newtonian Fluid Mech., In Press, Corrected Proof, 2009.
- [21] E. Chénier, R. Eymard, R. Herbin, and O. Touazi. *Méthodes de volumes finis pour l'approximation des équations de Navier-Stokes*. Springer, Berlin, 2007.
- [22] A. J. Chorin. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of Computational Physics*, 2(1):12 26, 1967.
- [23] R. M. Christensen. Theory of viscoelasticity. Dover Publications, Mineola, New-York, 2003.
- [24] M.-H. Chung. Cartesian cut cell approach for simulating incompressible flows with rigid bodies of arbitrary shape. *Computers and Fluids*, **35**, 607-623, 2006.
- [25] M.S. Darwish and J.R. Whiteman. Numerical modeling of viscoelastic liquids using a finite-volume method. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **45**, 311-337, 1992.
- [26] R. W. Davis, E. F. Moore, and L. P. Purtell. A numerical-experimental study of confined flow around rectangular cylinders. *Physics of Fluids*, **27**, 46-59, 1984.
- [27] J. Donea, A. Huerta, J.-Ph. Ponthot, and A. Rodrìguez-Ferran. Arbitrary Lagrangian Eulerian methods. In E. Stein, R. de Borst, and T. J.R. Hughes, editors, *Encyclopedia of Computational Mechanics*, *Volume 1: Fundamentals*, 2004.
- [28] M. Dröge and R. Verstappen. A new symmetry-preserving Cartesian-grid method for computing flow past arbitrarily shaped objects. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 47, 979-985, 2005.

- [29] F. Dupret, J. M. Marchal, and M. J. Crochet. On the consequence of discretization errors in the numerical calculation of viscoelastic flow. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 18, 173 - 186, 1985.
- [30] S. S. Edussuriya, A. J. Williams, and C. Bailey. A cell-centred finite volume method for modelling viscoelastic flow. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 117, 47 - 61, 2004.
- [31] A. Ern and J.-L. Guermond. *Elements Finis : Théorie, Applications, Mise en œuvre.* Springer, Paris, 2002.
- [32] R. Eymard, T. Gallouet, and R. Herbin. Finite volume methods. In P. Ciarlet and J. L. Lions, editors, *Handbook for Numerical Analysis*, pages 715–1022, 2000.
- [33] E. A. Fadlun, R. Verzicco, P. Orlandi, and J. Mohd-Yusof. Combined immersed-boundary finite-difference methods for three dimensional complex flow simulations. *J. Comput. Phys.*, 161, 35-60, 2000.
- [34] C. Farhat and P. Geuzaine. Design and analysis of robust ALE time-integrators for the solution of unsteady flow problems on moving grids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(39-41):4073–4095, 2004.
- [35] C. Farhat, P. Geuzaine, and C. Grandmont. The discrete geometric conservation law and the nonlinear stability of ALE schemes for the solution of flow problems on moving grids. *Journal of Computational Physics*, 174(2):669–694, 2001.
- [36] Raanan Fattal and Raz Kupferman. Constitutive laws for the matrix-logarithm of the conformation tensor. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **123**, 281 285, 2004.
- [37] Raanan Fattal and Raz Kupferman. Time-dependent simulation of viscoelastic flows at high weissenberg number using the log-conformation representation. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 126, 23 - 37, 2005.
- [38] J. H. Ferziger and M. Peric. Computational Methods for Fluid Dynamics. Springer, Berlin, 1996.
- [39] G. Fournier, F. Golanski, and A. Pollard. A novel outflow boundary condition for incompressible laminar wall-bounded flows. *Journal of Computational Physics*, 227, 7077 7082, 2008.
- [40] M. Deville G. Mompean. Unsteady finite volume simulation of Oldroyd-B fluid through a three-dimensional planar contraction. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **872**, 253-279, 1997.
- [41] M. Gerritsma. Time dependant numerical simulations of a viscoelastic fluid on a staggered grid. PhD thesis, University of Groningen, The Netherlands, 1996.
- [42] F. Gibou, R. P. Fedkiw, Li-Tien Cheng, and M. Kang. A second-order-accurate symmetric discretization of the Poisson equation on irregular domains. J. Comput. Phys., 176, 205-227, 2002.
- [43] A. Gilmanov and F. Sotiropoulos. A hybrid Cartesian/immersed boundary method for simulating flows with 3D, geometrically complex, moving bodies. *Journal of Computational Physics*, 207, 457-492, 2005.

- [44] P. M. Gresho. Incompressible fluid dynamics: some fundamental formulation issues. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **23**, 413-453, 1991.
- [45] D.G.E. Grigoriadis, S.C. Kassinos, and E.V. Votyakov. Immersed boundary method for the mhd flows of liquid metals. *Journal of Computational Physics*, **228**, 903 920, 2009.
- [46] W. Gu, C. Chyu, and D. Rockwell. Timing of vortex formation from an oscillating cylinder. Physics of Fluids, 6(11):3677–3682, 1994.
- [47] J.L. Guermond, P. Minev, and Jie Shen. An overview of projection methods for incompressible flows. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195, 44-47, 2006.
- [48] H. Guillard and C. Farhat. On the significance of the geometric conservation law for flow computations on moving meshes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190(11-12):1467–1482, 2000.
- [49] E. Guilmineau and P. Queutey. A numerical simulation of vortex shedding from an oscillating circular cylinder. *J. of Fluids and Structures*, **16**, 773-794, 1991.
- [50] E. Guyon, J. P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique*. EDP Sciences, Les Ulis (France), 2001.
- [51] E. Guyon, J. P. Hulin, and L. Petit. Physical Hydrodynamics. Oxford University Press, Oxford, 2001.
- [52] Jian Hao, Tsorng-Whay Pan, Roland Glowinski, and Daniel D. Joseph. A fictitious do-main/distributed lagrange multiplier method for the particulate flow of oldroyd-b fluids: A positive definiteness preserving approach. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 156, 95 111, 2009.
- [53] F. H. Harlow and J. E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surfaces. *Phys. Fluids*, **8**, 2181-2189, 1965.
- [54] J. C. Hart. Sphere tracing: a geometric method for the antialiased ray tracing of implicit surfaces. *The Visual Computer*, **12**, 527-545, 1996.
- [55] N. Hasan, S. F. Anwer, and S. Sanghi. On the outflow boundary condition for external incompressible flows: A new approach. *Journal of Computational Physics*, 206, 661 - 683, 2005.
- [56] A. M. Hassan. Simulations numériques d'écoulements permanents de fluides non newtoniens par une méthode multigrille. PhD thesis, Université de Paris 11, Orsay, FRANCE, 1993.
- [57] J. W. He, R. Glowinski, R. Metcalfe, A. Nordlander, and J. Périaux. Active control and drag optimization for flow past a circular cylinder. part 1. oscillatory cylinder rotation. J. Comput. Phys., 163, 87-117, 2000.
- [58] R. D. Henderson. Nonlinear dynamics and pattern formation in turbulent wake transition. J. Fluid Mech., 352, 65-112, 1997.

- [59] Martien A. Hulsen, Raanan Fattal, and Raz Kupferman. Flow of viscoelastic fluids past a cylinder at high weissenberg number: Stabilized simulations using matrix logarithms. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 127, 27 - 39, 2005.
- [60] G. Iaccarino and R. Verzicco. Immersed boundary technique for turbulent flow simulations. *Appl. Mech. Rev.*, **56**, 331-347, 2003.
- [61] A. Jameson. The construction of discretely conservative finite volume schemes that also globally conserve energy or entropy. *Journal of Scientific Computing*, **34**, 152-187, 2008.
- [62] N. Joseph. Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquid. Springer Applied Math Series, 1990.
- [63] S. Kang, G. Iaccarino, and P. Moin. Accurate and efficient immersed-boundary interpolations for viscous flows. In *Center for Turbulence Research Briefs*, NASA Ames/Stanford University, pp. 31-43, 2004.
- [64] G. Kanschat. Divergence-free discontinuous galerkin schemes for the stokes equations and the mac scheme. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **56**, 941-950, 2008.
- [65] G. Karniadakis and S. Sherwin. Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics. Oxford University Press, New-York, 1999.
- [66] George Em Karniadakis. Simulating turbulence in complex geometries. Fluid Dynamics Research, 24, 343 362, 1999.
- [67] R. A. Keiller. Entry-flow calculations for the oldroyd-b and fene equations. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 46, 143-178, 1993.
- [68] D. Kim and H. Choi. Immersed boundary method for flow around an arbitrarily moving body. *Journal of Computational Physics*, 212, 662-680, 2006.
- [69] J. M. Kim, C. Kim, J. H. Kim, C. Chung, K. H. Ahn, and S. J. Lee. High-resolution finite element simulation of 4:1 planar contraction flow of viscoelastic fluid. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 129, 23-37, 2005.
- [70] Y. Kim and C. S. Peskin. 3-d parachute simulation by the immersed boundary method. Computers and Fluids, 38, 1080 - 1090, 2009.
- [71] M. P. Kirkpatrick, S. W. Armfield, and J. H. Kent. A representation of curved boundaries for the solution of the Navier-Stokes equations on a staggered three-dimensional Cartesian grid. *Journal of Computational Physics*, 184, 1-36, 2003.
- [72] D. D. Knight. *Elements of Numerical Methods for Compressible Flows*. Cambridge University Press, New-York, 2006.
- [73] R. Kupferman. Simulation of viscoelastic fluids: Couette-taylor flow. Journal of Computational Physics, 147, 22 59, 1998.
- [74] M. Lesoinne and C. Farhat. Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134(1-2):71–90, 1996.

- [75] R. J. Leveque. Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge University Press, New-York, 2002.
- [76] D. K. Lilly. Introduction to "Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: two-dimensional incompressible flow, part I". J. Comput. Phys., 135, 101-102, 1966.
- [77] Hee Chang Lim, T.G. Thomas, and Ian P. Castro. Flow around a cube in a turbulent boundary layer: Les and experiment. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aero-dynamics*, In Press, Corrected Proof:—, 2009.
- [78] M. N. Linnick and H. F. Fasel. A high order immersed interface method for simulating unsteady incompressible flows on irregular domains. J. Comput. Phys., 204, 157-192, 2005.
- [79] R. Löhner, S. Appanaboyina, and J. R. Cebral. Comparison of body-fitted, embedded and immersed solutions of low Reynolds-number 3-D incompressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 57, 13-30, 2008.
- [80] X. Lu and C. Dalton. Calculation of the timing of vortex formation from an oscillating cylinder. *Journal of Fluids and Structures*, 10(5):527–541, 1996.
- [81] Thomas S. Lund, Xiaohua Wu, and Kyle D. Squires. Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations. *Journal of Computational Physics*, 140, 233 - 258, 1998.
- [82] P.J. Oliveira M.A. Alves and F.T. Pinho. Benchmark solutions for the flow of Oldroyd-B and PTT fluids in planar contractions. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **110**, 45-75, 2003.
- [83] M. Manhart, G. B. Deng, T. J. Hüttl, F. Tremblay, A. Segal, R. Friedrich, J. Piquet, and P. Wesseling. The minimal turbulent flow unit as test case for three different computer codes. in *Numerical Flow Simulation I*, E. H. Hrischel ed., pp. 365-381, Vieweg, Braunschweig, 1998.
- [84] M. Manhart, G.B. Deng, F. Tremblay T.J. Huttl, A. Segal, R. Friedrich, J. Piquet, and P. Wesseling. The minimal flow unit as a test case for three different computer codes. Sonderforschungsbereich, 438, 1998.
- [85] N. N. Mansour, P. Moin, W. C. Reynolds, and J. H. Ferziger. Improved methods for largeeddy simulations of turbulence. Symposium on Turbulent Shear Flows, University Park, 1977.
- [86] Matthieu Marquillie and Uwe Ehrenstein. Numerical simulation of separating boundary-layer flow. *Computers and Fluids*, **31**, 683 693, 2002.
- [87] H. Matallah, P. Townsend, and M. F. Webster. Recovery and stress-splitting schemes for viscoelastic flows. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 75, 139-166, 1998.
- [88] M.Buffoni, S.Camarri, A.Iollo, and M.V.Salvetti. Low-dimensional modelling of a confined three-dimensional wake flow. J. Fluid Mech., 48, 141-150, 2006.

- [89] R. Mittal, H. Dong, M. Bozkurttas, F. M. Najjar, A. Vargas, and A. v. Loebbecke. A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries. J. Comput. Phys., 2008.
- [90] R. Mittal and G. Iaccarino. Immersed boundary methods. Annu. Rev. Fluid Mech., 37, 239-261, 2005.
- [91] H. Al Moatassime and D. Esselaoui. A finite volume approach for unsteady viscoelastic fluid flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **39**, 939-959, 2002.
- [92] J. Mohd-Yusof. Combined immersed boundaries / B-splines methods for simulations of flows in complex geometries. In Center for Turbulence Research Briefs, NASA Ames/Stanford University, 1997.
- [93] Y. Morinishi, T. S. Lund, O. V. Vasilyev, and P. Moin. Fully conservative higher order finite difference schemes for incompressible flow. J. Comput. Phys., 143, 90-124, 1998.
- [94] F. Muldoon and S. Acharya. A divergence-free interpolation scheme for the immersed boundary method. *Int. J. Numer. Meth. Fluids.*, **56**, 1845-1884, 2008.
- [95] F. Nicoud. Conservative high-order finite-difference schemes for low-mach number flows. Journal of Computational Physics, 158, 71 - 97, 2000.
- [96] S. Nigen and K. Walters. Viscoelastic contraction flows: comparison of axisymmetric and planar configurations. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **2**, 343-359, 2002.
- [97] C. Norberg. Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements. *J. Fluids and Structures*, **17**, 57-96, 2003.
- [98] A. Okajima. Strouhal numbers of rectangular cylinders. Journal of Fluid Mechanics, 123, 379-398, 1982.
- [99] I. Orlanski. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *Journal of Computational Physics*, 21, 251 269, 1976.
- [100] S. Osher and R. P. Fedkiw. Level set methods: An overview and some recent results. Journal of Computational Physics, 169:463–502, 2001.
- [101] S. Osher and R. P. Fedkiw. Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces. Springer, New-York, 2003.
- [102] S. Osher and J. A. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79:12–49, 1988.
- [103] R.G. Owens and T.N. Phillips. *Computational Rheology*. Imperial College Press, London, 2002.
- [104] 'T. C. Papanastasiou, N. Malamataris, and K. Ellwood. A new outflow boundary condition. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 14, 587-608, 1992.
- [105] Seung Joon Park and Seung Jong Lee. On the use of the open boundary condition method in the numerical simulation of nonisothermal viscoelastic flow. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 87, 97 214, 1999.

- [106] J. S. Paschkewitz, C. D. Dimitropoulos, Y. X. Hou, V. S. R. Somandepalli, M. G. Mungal, Eric S. G. Shaqfeh, and Parviz Moin. An experimental and numerical investigation of drag reduction in a turbulent boundary layer using a rigid rodlike polymer. *Physics of Fluids*, 17,, 2005.
- [107] S. V. Patankar. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. McGraw-Hill, New-York, 1980.
- [108] N. Peller, A. Le Duc, F. Tremblay, and M. Manhart. High-order stable interpolations for immersed boundary methods. Int. J. Numer. Meth. Fluids., 52,1175-1193, 2006.
- [109] C.S. Peskin. Flow patterns around heart valves: A numerical method. *Journal of Computational Physics*, **10**, 252-271; 252-271, 1972.
- [110] N. Phan-Thien. Understanding Viscoelasticity. Springer, Berlin, 2002.
- [111] T. N. Phillips and A. J. Williams. Comparison of creeping and inertial flow of an oldroyd b fluid through planar and axisymmetric contractions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **108**, 25 47, 2002.
- [112] T.N. Phillips and A.J. Williams. Viscoelastic flow through a planar contraction using a semi-lagrangian finite volume method. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 87, 215-246, 1999.
- [113] O. Pironneau. Finite Element Method for Fluids. Wiley, 1989.
- [114] F.T. Pinho P.J. Oliveira and G.A. Pinto. Numerical simulation of non-linear elastic flows with a general collocated finite-volume method. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **79**, 1-43, 1998.
- [115] P.Wesseling. Principles of Computational Fluid Dynamics. Springer, Berlin, 2001.
- [116] C. M. Rhie and W. L. Chow. Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation. AIAA Journal, 21, 1525-1532, 1983.
- [117] R.P.Chhabra and J.F. Richardson. *Non-Newtonian Flow in the Process Industries*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 1999.
- [118] A. K. Saha, K. Muralidhar, and G. Biswas. Transition and chaos in two-dimensional flow past a square cylinder. *Journal of Engineering Mechanics*, **126**, 523-532, 2000.
- [119] P. Saramito. Numerical simulation of viscoelastic fluid flows using incompressible finite element method and a θ -method. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 28, 1-35, 1994.
- [120] R. Scardovelli and S. Zaleski. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **31**, 567-603, 1999.
- [121] Xin Kai Li Sha Meng and Gwynne Evans. Numerical simulation of Oldroyd-B fluid in a contraction channel. *The Journal Supercomputing*, **22**, 29-43, 2002.
- [122] C. Smith, N. Beratlis, E. Balaras, K. Squires, and M. Tsunoda. Visualization of flow over a golf ball at re = 110,000. 2008.

- [123] A. Sohankar, C. Norberg, and L. Davidson. Low-Reynolds-number flow around a square cylinder at incidence: Study of blockage, onset of vortex shedding and outlet boundary condition. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **26**, 39-56, 1998.
- [124] F. Sotiropoulos and S. Abdallah. The discrete continuity equation in primitive variable solutions of incompressible flow. *Journal of Computational Physics*, **95**,212-227, 1991.
- [125] M. Sussman, S. Smereka, and S. Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 114:146–159, 1994.
- [126] T.E. Tezduyar. Finite element methods for fluid dynamics with moving boundaries and interfaces. In E. Stein, R. de Borst, and T. J.R. Hughes, editors, *Encyclopedia of Computational Mechanics*, *Volume 3: Fluids*, 2004.
- [127] R. Témam. Sur l'approximation de la solution des équations de navier-stokes par la méthode des pas fractionnaires (ii). Archive for Rational Mechanics and Analysis, 33:377 385, 1969.
- [128] P. T. Tokumaru and P. E. Dimotakis. Rotary oscillation control of a cylinder wake. J. Fluid. Mech., 1224, 77-90, 1991.
- [129] P. G. Tucker and Z. Pan. A Cartesian cut cell method for incompressible viscous flow. *Appl Math. Modelling*, **24**, 591-606, 2000.
- [130] H. S. Udaykumar, R. Mittal, P. Rampunggoon, and A. Khanna. A sharp interface Cartesian grid method for simulating flows with complex moving boundaries. *Journal of Computational Physics*, 174, 345-380, 2001.
- [131] H. S. Udaykumar, R. Mittel, and W. Shyy. Computation of solid-liquid phase fronts in the sharp interface limit on fixed grids. *Journal of Computational Physics*, **153**, 535-574, 1999.
- [132] J. van Kan, C. Vuik, and P. Wesseling. Fast pressure calculation for 2D and 3D time dependent incompressible flow. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 7, 429-447, 2000.
- [133] O. V. Vasilyev. High order finite difference schemes on non-uniform meshes with good conservation properties. *Journal of Computational Physics*, **157**,746-761, 2000.
- [134] R. W. C. P. Verstappen and A. E. P. Veldman. Symmetry-preserving discretization of turbulent flow. *J. Comput. Phys.*, **187**, 343-368, 2003.
- [135] K. Walters and M.F. Webster. The distinctive cfd challenges of computational rheology. International Journal For Numerical Methods in fluid, 43, 577-596, 2003.
- [136] K. Walters, M.F. Webster, and H.R. Tamaddon-Jahromi. The numerical simulation of some contraction flows of highly elastic liquids and their impact on the relevance of the couette correction in extensional rheology. *Chemical Engineering Science*, In Press, Corrected Proof, 2009.
- [137] M. C. Wendl and R. K. Agarwal. Mass conservation and the accuracy of non-staggered grid incompressible flow schemes. in *Numerical Simulations of Incompressible Flows*, M. M. Hafez ed., pp. 277-287, World Scientific, Singapore, 2003.

- [138] J. Yang and E. Balaras. An embedded-boundary formulation for large-eddy simulation of turbulent flows interacting with moving boundaries. *J. Comput. Phys.*, **215**, 12-40, 2006.
- [139] T. Ye, R. Mittal, H. S. Udaykumar, and W. Shyy. An accurate Cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries. J. Comput. Phys., 156, 209-240, 1999.
- [140] Jung Yul Yoo and Yang Na. A numerical study of the planar contraction flow of a viscoelastic fluid using the simpler algorithm. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **39**, 89 106, 1991.
- [141] M. M. Zdravkovich. Flow Around Circular Cylinders. Volume 1: Fundamentals. Oxford University Press, Oxford, 2003.

Abstract

This thesis concerns the development of a new Cartesian grid / immersed boundary (IB) method for the computation of incompressible viscous flows in two-dimensional irregular geometries. In IB methods, the computational grid is not aligned with the irregular boundary, and of upmost importance for accuracy and stability is the discretization in cells which are cut by the boundary, the so-called "cut-cells". In this thesis, we present a new IB method, called the LS-STAG method, which is based on the MAC method for staggered Cartesian grids and where the irregular boundary is sharply represented by its level-set function. This implicit representation of the immersed boundary enables us to calculate efficiently the geometry parameters of the cut-cells. We have achieved a novel discretization of the fluxes in the cut-cells by enforcing the strict conservation of total mass, momentum and kinetic energy at the discrete level. Our discretization in the cut-cells is consistent with the MAC discretization used in Cartesian fluid cells, and has the ability to preserve the 5-point Cartesian structure of the stencil, resulting in a highly computationally efficient method. The accuracy and robustness of our method is assessed on canonical flows at low to moderate Reynolds number: Taylor Couette flow, flows past a circular cylinder, including the case where the cylinder has forced oscillatory rotations. We extend the LS-STAG method to the handling of moving immersed boundaries and present some results for the transversely oscillating cylinder flow in a free-stream. Finally, we present the first IB method that handles flows of viscoelastic fluids. The discretization of the constitutive law equation is based on the LS-STAG method and on the use of a fully staggered arrangement of unknowns, which ensures a strong coupling between all flow variables in the whole domain. The resulting method is applied to the flow of an Oldroyd-B fluid in a 4:1 planar contraction with rounded corner.

Keywords: Incompressible Viscous Flows, Complex Geometries, Immersed Boundary Methods, Cut-Cell Methods, Finite Volume Methods, Oldroyd-B Model.

Résumé

Nous présentons une nouvelle méthode de type frontière immergée (immersed boundary method, ou méthode IB) pour le calcul d'écoulements visqueux incompressibles en géométries irrégulières. Dans les méthodes IB, la frontière irrégulière de la géométrie n'est pas alignée avec la grille de calcul, et le point crucial de leur développement demeure le traitement numérique des cellules fluides qui sont coupées par la frontière irrégulière, appelées cut-cells. La partie dédiée à la résolution des équations de Navier-Stokes de notre méthode IB, appelée méthode LS-STAG, repose sur la méthode MAC pour grilles cartésiennes décalées, et sur l'utilisation d'une fonction de distance signée (la fonction level-set) pour représenter précisément les frontières irrégulières du domaine. L'examen discret des lois globales de conservation de l'écoulement (masse, quantité de mouvement et énergie cinétique) a permis de bâtir une discrétisation unifiée des équations de Navier-Stokes dans les cellules cartésiennes et les cut-cells. Cette discrétisation a notamment la propriété de préserver la structure à 5 points du stencil original et conduit à une méthode extrêmement efficace sur le plan du temps de calcul en comparaison à un solveur non-structuré. La précision de la méthode est évaluée pour l'écoulement de Taylor-Couette et sa robustesse éprouvée par l'étude de divers écoulements instationnaires, notamment autour d'objets profilés. Le champ d'application de notre solveur Newtonien s'étend au cas d'écoulements en présence de géométries mobiles, et la méthode LS-STAG s'avère être un outil prometteur puisqu'affranchie des étapes systématiques (et coûteuses) de remaillage du domaine. Finalement, la première application d'une méthode IB au calcul d'écoulements de fluides viscoélastiques est présentée. La discrétisation de la loi constitutive est basée sur la méthode LS-STAG et sur l'utilisation d'un arrangement totalement décalé des variables dans tout le domaine assurant le couplage fort requis entre les variables hydrodynamiques et les composantes du tenseur des contraintes élastiques. La méthode est appliquée au fluide d'Oldroyd-B en écoulement dans une contraction plane 4:1 à coins arrondis.

Mots-clés: Fluides Visqueux Incompressibles, Géométries Complexes, Méthodes de Frontières Immergées, Méthodes de type Cut-Cell, Méthodes de Volumes Finis, Modèle d'Oldroyd-B.