AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale I A E +M
Université Henri Poincaré, Nancy-I
D.F.D. Mathématiques

Nancy-Université
Université Henri Poincaré

Analyse mathématique des mouvements des rigides dans un fluide parfait.

Thèse

présentée et soutenue publiquement le 27 Juin 2008

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré - Nancy I

(**Spécialité Mathématiques appliquées**)

par

Jean Gabriel Houot

Composition du jury

- Éric Bonnetier, Professeur, Université Joseph Fourier Grenoble,
- Dorin Bucur, Professeur, Laboratoire de Mathématiques CNRS Université de Savoie,
- Alexandre Munnier, Maitre de conférences, Institut Élie Cartan Université Henri Poincaré Nancy 1,
- Lionel Rosier, Professeur, Institut Élie Cartan Université Henri Poincaré Nancy 1,
- Marius Tucsnak (Directeur de thèse), Professeur, Institut Élie Cartan Université Henri Poincaré Nancy 1,

Rapporteurs

- Jean-Michel Coron, Professeur, Université Pierre et Marie Curie Paris VI
- Jean-Paul Zolésio, Directeur de recherche C.N.R.S., INRIA Sophia Antipolis

Institut Élie Cartan Nancy

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à mon directeur de thèse Marius Tucsnak. Le connaissant depuis le début de ma formation à l'Université Henri Poincaré, ce fut pour moi une immense joie de travailler sous sa direction. Je le remercie tout d'abord pour tout le temps qu'il m'a consacré et pour avoir partager avec moi son immense expérience scientifique. Je dois aussi souligner son enthousiasme, sa patience et son optimisme. Je lui suis extrêmement reconnaissant de m'avoir fait découvrir différents domaines des mathématiques et de m'avoir fait rencontrer autant de personnes prestigieuses dans le monde des mathématiques appliquées. De simple remerciements ne suffiraient pas à montrer ma gratitude envers cet homme que je respect et admire. J'espère pouvoir encore travailler avec lui dans le futur.

Jean-Michel Coron et Jean-Paul Zolésio m'ont fait l'immense honneur de rapporter cette thèse. Je remercie ces personnes d'exception pour le temps qu'ils ont consacré à ma thèse et pour leurs soutiens et leurs encouragements qu'ils m'ont témoignés.

Je remercie infiniment Éric Bonnetier, Dorin Bucur, Alexandre Munnier et Lionnel Rosier qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury de thèse. Je remercie particulièrement Alexandre Munnier avec qui j'ai publié mes premiers résultats et qui reste un ami sincère pour moi.

Je remercie l'ensemble du personnel de l'Institut Élie Cartan pour leur soutien. Mes pensées se tournent particulièrement vers les membres de l'équipe EDP avec qui j'ai partagé mes premières expériences dans le monde de la recherche.

Mes derniers remerciements vont aux thésards au laboratoire qui ont partagé mon quotidien.

Table des matières

Introduction **vii**

1 Modélisation et notation. **1**
1.1 Notations . . . 1
1.2 Modélisation . . . 3
1.2.1 Les équations des rigides . . . 3
1.2.2 Les milieux déformables . . . 7
1.2.3 Le système fluide structure . . . 10
1.2.4 Le cas des fluides potentiels . . . 13

2 Mouvement du disque dans un demi-plan **19**
2.1 Quelques rappels sur les transformations conformes . . . 20
2.2 Étude du Lagrangien du système . . . 27
2.3 Influence de la paroi sur le mouvement . . . 33
2.4 Étude du choc . . . 37

3 Espaces fonctionnels et problèmes de Neumann **47**
3.1 Définitions de espaces de Sobolev . . . 47
3.2 Une classe de difféomorphismes . . . 49
3.3 Produit et composition . . . 53
3.4 Problème de Neumann non homogènes . . . 55
3.4.1 Le cas des domaines bornés . . . 55
3.4.2 Le cas des domaines non bornés . . . 56

4 Problème de Neumann dépendant d'un paramètre **59**
4.1 Le cas des domaines bornés . . . 59
4.2 Le cas des domaines non bornés . . . 67

5 Cas potentiel **71**
5.1 Existence et unicité locale des solutions . . . 71
5.2 Lien entre les différentes descriptions . . . 76

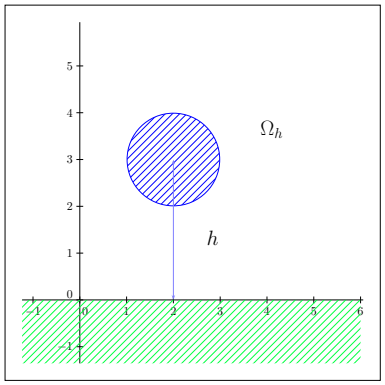
6 Cas général **85**
6.1 Le résultat principal . . . 85
6.2 Préliminaires . . . 86
6.3 Décomposition de la pression . . . 89
6.4 Une forme équivalente du système . . . 94
6.5 $\mathcal{L}_S$, $\mathcal{L}_F$ sont localement Lipschitz . . . 98
6.6 Preuve du résultat principal . . . 106

Conclusions et perspectives **113**

Introduction

Durant ces dix dernières années, de nombreux travaux ont été consacré à l'étude des systèmes fluide-structure. En aérodynamique, l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion a été largement étudié. En biologie, ce type de problèmes permet de décrire le mouvement d'êtres vivants dans l'océan, par exemple la nage du dauphin ou le déplacement d'organismes aquatiques. En médecine, la circulation sanguine se décrit par l'écoulement d'un fluide dans un tube dont la paroi est élastique. Cette thèse est consacrée à l'analyse mathématique des équations modélisant le mouvement des solides rigides à l'intérieur d'un fluide parfait.

Pour donner une idée de la problématique de cette thèse, nous considérons le problème modèle décrivant le mouvement vertical d'un disque dans un fluide potentiel contenu dans un demi-plan.



La vitesse du fluide $\mathbf{u}$ est supposée être le gradient d'une fonction $\nabla\Phi$. Compte tenu de la condition d'incompressibilité du fluide et de la continuité de la vitesse normale à l'interface, Φ satisfait le problème de Neumann suivant :

$$\begin{aligned} -\Delta\Phi(\mathbf{x}) &= 0 \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_h, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x}) &= 0 \qquad \text{pour } y = 0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x}) &= [\dot{\mathbf{h}}(t) + \dot{\theta}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{h}(t))^{\perp}] \cdot \mathbf{n}(t, \mathbf{x}) \qquad \text{pour } x^2 + (y-h)^2 = 1, \end{aligned}$$

où $\mathbf{h} = (h(t), 0)$ est la position du centre de gravité du disque, θ est l'angle de rotation et $(x, y)^{\perp} = (-y, x)$. Dans ce cas, il faut remarquer que le vecteur normale $\mathbf{n}$ sur le cercle est proportionnel à $\mathbf{x} - \mathbf{h}(t)$. Ainsi la fonction Φ ne dépend que de h et $\dot{h}$. Compte tenu du fait que la dépendance par rapport à $\dot{h}$ est linéaire, la vitesse du fluide se réduit à $\mathbf{u} = \dot{h}\nabla\Phi_h$ où Φ_h est solution du problème de Neumann

$$\begin{aligned} -\Delta\Phi_h(\mathbf{x}) &= 0 \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_h, \\ \frac{\partial\Phi_h}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x}) &= 0 \qquad \text{pour } y = 0, \\ \frac{\partial\Phi_h}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x}) &= h - y \qquad \text{pour } x^2 + (y-h)^2 = 1. \end{aligned}$$

Dans ce cas l'unique degré de liberté du système est la distance h du centre du disque à la paroi. Les équations du mouvement se réduisent à la conservation de l'énergie cinétique E_0 du système fluide-structure

$$E_S + E_F = \frac{1}{2}\, m_S \dot{h}^2 + \frac{1}{2}\, K(h)\dot{h}^2 = E_0,$$

où $E_S = 1/2 m_S \dot{h}^2$ est l'énergie cinétique du solide et

$$E_F = \frac{1}{2} K(h)\dot{h}^2, \qquad \text{avec} \qquad K(h) = \rho_F \int_{\Omega_h} |\nabla \Phi_h(\mathbf{x})|^2 \, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Ainsi nous obtenons l'équation différentielle ordinaire du système

$$\dot{h} = -\sqrt{\frac{2E_0}{m_S + K(h)}}.$$

Une grande partie de cette thèse consiste à étudier la fonction K.

Une analyse rigoureuse de l'équation différentielle ordinaire ci-dessus passe par l'étude de la fonction K. Cette étude nécessite des techniques de dérivation par rapport au domaine. Dans le cas général cet exemple est lié à l'étude du choc entre un disque et la paroi d'un demi plan qui contient un fluide potentiel. Plus précisément l'existence de contact à vitesse non nulle entre le disque et la paroi est conditionnée par la propriété

$$\limsup_{h \to 1} K(h) < +\infty.$$

Cette propriété sera prouvée dans la suite. Notons que dans le cas des systèmes fluide-structure pour des fluides visqueux les travaux de San Martín, Starovoitov et Tucsnak [41], Hesla [29], Hillairet [30] et Vázquez et Zuazua [43] conduisent à la non existence de véritable choc. Cet exemple simple et les généralisations à des cas plus complexes, nous ont conduit vers différents domaines des mathématiques : la dérivation par rapport au domaine, l'étude des problèmes de Neumann pour des domaines extérieurs, le lien entre les fonctions holomorphes et les problèmes de Laplace et bien d'autres encore.

Dans un premier temps nous généraliserons le cas simple du disque ci-dessus au mouvement quelconque des solides dans un fluide dont le champ de vitesse est un gradient (fluide potentiel). Dans ce cas le système est modélisé par des équations différentielles ordinaires, ce fait étant remarqué par Kelvin et Kirchhoff où ils ont considéré le cas de solides rigides dans un fluide remplissant tout l'espace. Dans ce cas les équations du système se réduisent à une équation différentielle ordinaire sur une variété de dimension finie. Nous pouvons consulter les livres de Lamb [34] et Milne et Thomson [37] pour plus de détails sur cette théorie. Plus récemment Kanso, Marsden, Rowley and Melli-Huber [33] ont appliqué cette théorie à l'autopropulsion des solides dans un fluide parfait.

Dans un deuxième temps nous regardons le fluide comme un fluide parfait, incompressible et homogène dont le mouvement est décrit par l'équation d'Euler et nous détaillerons le mouvement de solides rigides dans un tel fluide. À notre connaissance Rosier, Takahashi et Ortega, dans [39] et [40], sont les seuls à proposer des résultats sur ce type de système fluide-structure. Ils étudient le cas d'un unique solide qui est contenu dans un fluide remplissant tout l'espace.

Le cas des fluides visqueux, que nous ne traitons pas ici, a été étudié par de nombreux auteurs. Pour le cas des solides rigides nous pouvons citer les travaux de Desjardins et Esteban

[16], San Martín, Starovoitov et Tucsnak [41], Conca, San Martín, et Tucsnak [11], Feireisl [20] ou de Gunnzburger, Lee et Seregin [24]. Nous pouvons aussi souligner les travaux de Galdi [21] pour l'étude de l'autopropulsion de solides dans un fluide visqueux. Dans le cas des solides déformables, il y a de récent travaux qui ont été entrepris par Coutand et Shkoller [15] et [14] , Chambolle, Desjardins, Esteban et Grandmont [10], Desjardins, Esteban, Grandmont et Le Tallec [17], Boulakia [6]. Enfin nous pouvons souligner une approche originale développée dans le livre de Moubachir et Zolésio [38] où ils étudient des problèmes de surfaces libres, de fractures, de contacts ou de contrôle pour les systèmes fluide-structure.

Enfin une étude particulière que nous abordons ici est l'étude des chocs. Nous rappelons que les travaux de San Martín, Starovoitov et Tucsnak [41], Hesla [29], Hillairet [30] et Vázquez et Zuazua [43] montrent, dans le cas des fluides visqueux, le manque de collisions entre les solides ou entre un solide et la paroi. Cependant dans notre exemple nous obtenons plusieurs configurations de choc où les vitesses de chocs sont non nulles et où le temps de choc est borné. Nous pouvons donner une estimation assez précise de l'instant du choc et calculer exactement la vitesse de choc à cet instant. Enfin nous regarderons aussi la continuité du problème de Neumann quand le disque touche la paroi.

Dans le cas des fluides potentiels nous utilisons des modèles inspirés par le livre de Lamb. L'analyse mathématique de ces modèles requiert l'étude des familles de problèmes de Neumann pour le Laplacien qui dépendent des positions des solides. Nous obtenons donc un système d'équations différentielles ordinaires sur une variété de dimension finie dont les coefficients s'expriment en fonctions des solutions de certains problèmes de Neumann. En utilisant la théorie de la dérivation par rapport au domaine, nous pouvons appliquer le théorème de Cauchy Lipschitz pour montrer l'existence et l'unicité locale de la solution. La forme des résultats obtenus permet de traiter le cas de plusieurs solides contenus dans fluide dont le domaine est un domaine borné, un domaine extérieur ou un demi-plan.

Dans le cas général, nous adaptons les méthodes de Bourguignon et Brézis [8] et Ebin et Marsden [19] au cas du mouvement de solides rigides. Nous montrons ici l'existence et l'unicité locale d'une solution forte pour un ensemble de conditions initiales bien choisi. Avec une étude fine de la pression du fluide, nous montrons que le système d'équations est équivalent à un système d'équations différentielles ordinaires sur une variété de dimension infinie. Nous obtenons ainsi le comportement de la solution en fonction des données initiales. Nous remarquons ici que les outils développés pour l'étude du cas potentiel sont encore utilisés. Grâce à l'utilisation du problème de Neumann et de la théorie de l'optimisation de forme, nous pouvons réduire notre étude à un unique solide et généraliser ce cas pour un nombre quelconque de rigides comme dans le cas potentiel. Cela permet entre autre de traiter simplement le cas de plusieurs solides dans un domaine de fluide borné.

Concernant les chocs, nous étudions le mouvement d'un disque dans un fluide potentiel contenu dans un demi-plan. Cette étude est liée à l'étude des problèmes de Neumann dans $\mathbb{R}^2$. Grâce à la théorie des fonctions holomorphes, nous décrivons le mouvement du disque et nous obtenons précisément les conditions de chocs et ainsi qu'une expression exacte de l'instant du choc via une formule intégrale. Enfin nous étudions le mouvement vertical du disque où nous montrons la continuité du problème de Neumann associé au mouvement du disque.

Chapitre 1

Modélisation et notation.

1.1 Notations

Nous introduisons ici les principales notations utilisées dans cet ouvrage. Fixons $n \geq 2$ un entier. Les vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$ seront noté en gras, $\mathbf{v} = (v_i)_{(i=1,\ldots,n)}$. Le produit scalaire entre deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^n$ est noté :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \, b_i.$$

Pour $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dans $\mathbb{R}^3$, nous définissons le produit vectoriel par

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Enfin la norme euclidienne d'un vecteur est notée par $|\mathbf{a}| = (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{1/2}$. De plus pour un nombre complexe $\mathbf{z}$, sa norme euclidienne se confond avec son module $|\mathbf{z}| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ où $\mathbf{z} = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

Nous notons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$. Les matrices seront généralement notées entre crochets comme ceci :

$$[A] = (a_{i,j})_{(i,j=1,\ldots,n)},$$

pour les différencier des vecteurs. Cependant pour alléger certaines notations nous noterons quelques matrices sans crochets. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous notons $A^* = ((a_{j,i})_{(i,j=1,\ldots,n)})$ sa matrice transposée, $\det(\mathrm{A})$ son déterminant et $\mathrm{coff}(\mathrm{A})$ sa matrice des cofacteurs. Si $\det(\mathrm{A}) \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})} \mathrm{coff}(\mathrm{A})^*$$

est la matrice inverse de A. Le sous-groupe des matrices inversibles sera noté $\mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ et la matrice identité de $\mathbb{R}^n$ sera noté Id_n. Pour $k = 2, 3$, le sous-groupe de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales et de déterminant 1 :

$$\mathrm{SO_k} = \left\{ \mathrm{A} \in \mathcal{M}_\mathrm{k}(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{AA}^* = \mathrm{Id_k} \text{ et } \det(\mathrm{A}) = 1 \right\},$$

définit l'ensemble des rotations préservant l'orientation sur $\mathbb{R}^k$.

Soient $k \geq 1$ un entier et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et toute fonction $p : \Omega \to \mathbb{R}$, suffisamment régulière ,nous posons :

$$\mathbf{x}^\alpha \partial^\alpha p(\mathbf{x}) = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \frac{\partial^{|\alpha|} p(\mathbf{x})}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

où $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Pour toutes fonctions $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^k$ et $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, suffisamment régulières, nous posons les opérateurs :

$$\begin{aligned}
[D_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})] = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x})\right)_{1\le i\le n, 1\le j\le m}, \\
\operatorname{div}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \\
\Delta\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i^2}(\mathbf{x})\right)_{j=1,\dots,k}, \\
((\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{f})\,(\mathbf{x}) &= \left(\sum_{i=1}^{n} u_i(\mathbf{x})\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x})\right)_{j=1,\dots,k},
\end{aligned}$$

pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$.

Nous rappelons la définition de quelques espaces classiques de fonctions. Pour un ouvert Ω, nous notons

$$D(\Omega) = \{\phi \mid \phi \text{ indéfiniment différentiable sur } \Omega \text{ et à support compact dans } \Omega\}.$$

Son dual est l'espace des distributions sur Ω noté $D'(\Omega)$.

Pour $n = 2$, nous identifierons le plan complexe $\mathbb{C}$ à l'espace $\mathbb{R}^2$. Ainsi tout ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ sera un ouvert de $\mathbb{R}$. De plus toute fonction holomorphe $\mathbf{F} = F_1 + iF_2$ sur $\mathcal{O}$ sera aussi vue comme une fonction de deux variables réelles et pour tout $\mathbf{z} = x+iy$ dans $\mathcal{O}$, $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = F_1(x,y)+iF_2(x,y)$. Nous rappelons les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Pour tout $\mathbf{z} \in \mathcal{O}$, $\mathbf{F}'(\mathbf{z})$ sera la dérivée de la fonction $\mathbf{F}$ au point $\mathbf{z}$ et cette dérivée est défini par l'opérateur :

$$\mathbf{F}'(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}(x,y)\right).$$

De plus en appliquant les équations de Cauchy-Riemann, nous avons les relations suivantes :

$$\mathbf{F}'(\mathbf{z}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}(x,y) = i\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}(x,y).$$

Nous introduisons quelques notations pour l'étude des équations différentielles ordinaires. Soient $T > 0$ et E_1 E_2 deux espaces de Banach. Pour toutes applications $q : [0,T] \to E_2$ et $\eta : [0,T] \times E_1 \to E_2$, nous notons par :

$$\begin{aligned}
\dot{q}(t) = \frac{dq}{dt}(t) \quad , \qquad \ddot{q}(t) = \frac{d^2q}{dt^2}(t), \\
\dot{\eta}(t,y) = \frac{\partial \eta}{\partial t}(t,y) \quad , \qquad \ddot{\eta}(t,y) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}(t,y)
\end{aligned}$$

pour tout $(t,y) \in [0,T] \times E_1$. Enfin pour terminer cette section nous donnons la définition des

ouverts Ω de classe $\mathcal{C}^k$. Nous commençons par introduire les ensembles :

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 < 1 \text{ et } |x_n| < 1 \right\}, \\
\mathbf{Q}_+ &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 < 1 \text{ et } 0 < x_n < 1 \right\}, \\
\mathbf{Q}_0 &= \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leq 1 \text{ et } x_n = 0 \right\}.
\end{aligned}$$

L'ouvert borné Ω est dit de classe $\mathcal{C}^k$ si pour tout $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ il existe un voisinage V de $\mathbf{x}$ dans $\mathbb{R}^n$ et une application $\phi : \mathbf{Q} \to V$ bijective telle que

$$\phi \in \mathcal{C}^k(\overline{\mathbf{Q}}), \quad \phi^{-1} \in \mathcal{C}^k(\overline{V}), \quad \phi(\mathbf{Q}_+) = V \cap \Omega \text{ et } \phi(\mathbf{Q}_0) = V \cap \partial\Omega.$$

1.2 Modélisation

Le but de cette partie est de rappeler les équations classiques d'un fluide parfait et du mouvement des solides rigides contenus dans ce dernier. D'une part le mouvement du fluide parfait sera décrit par les équations d'Euler alors que le mouvement des solides est régi par les équations classiques de Newton et de la conservation du moment cinétique. Dans le cas particulier où la vitesse du fluide est un gradient, les équations du systèmes se simplifient à un système dynamique de dimension finie. Ce système peut être obtenu directement à partir des équations de la mécanique des fluides ou par une approche de type mécanique analytique.

1.2.1 Les équations des rigides

Dans cette partie nous présentons une description du mouvement d'un solide rigide. Nous fixons un entier $n \in \{2, 3\}$ et Ω est un domaine de $\mathbb{R}^n$. À l'instant $t = 0$ le domaine occupé par le solide est S. La trajectoire du solide est déterminée par les fonctions $\mathbf{h} \in \mathcal{C}^2([0,T];\mathbb{R}^n)$, et $R \in \mathcal{C}^2([0,T]; SO_n(\mathbb{R}))$, représentant la trajectoire du centre de masse et respectivement la variation en temps de la matrice de rotation du solide. Ainsi la position du point $\mathbf{y} \in S$ à l'instant $t \in [0,T]$ est définit comme

$$\mathbf{x} = \mathbf{h}(t) + R(t)(\mathbf{y} - \mathbf{h}_0),$$

où $\mathbf{h}_0$ est le centre de gravité du solide à l'instant $t = 0$ définie par

$$\mathbf{h}_0 = \frac{1}{\text{vol(S)}} \int_S \mathbf{x} \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

En définissant la famille de domaine $(S(t))_{t\in[0,T]}$ par

$$S(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \mathbf{h}(t) + R(t)(\mathbf{y} - \mathbf{h}_0) \qquad \forall \mathbf{y} \in S\},$$

Nous remarquons que $\mathbf{h}(t)$ est la position du centre de gravité du solide $S(t)$

$$\mathbf{h}(t) = \frac{1}{\text{vol(S(t))}} \int_{S(t)} \mathbf{x} \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Dans la suite des calculs nous aurons besoin de paramétrer les variétés $SO_n(\mathbb{R})$ pour $n = 2$ et $n = 3$. Nous commençons par décrire le cas $n = 3$ car le cas $n = 2$ peut être vu comme un

cas particulier. Une paramétrisation locale des élément de $SO_3(\mathbb{R})$ est donnée par les angles d'Euler (voir par exemple le livre de Goldstein [23, page 603]). Nous introduisons la base des matrices antisymétriques :

$$[A_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad [A_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad [A_3] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En remarquant que pour tout $t \in \mathbb{R}$ les matrices $\exp(tA_i)$ sont les rotations d'axes e_i et d'angle t, pour $i = 1, 2, 3$.

$$\exp(t[A_1]) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}, \qquad \exp(t[A_2]) = \begin{pmatrix} \cos(t) & 0 & \sin(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(t) & 0 & \cos(t) \end{pmatrix},$$

$$\exp(t[A_3]) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

nous définitions l'application $\mathcal{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R} : \mathbb{R}^3 & \to & SO_3(\mathbb{R}), \\ \theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3) & \mapsto & [\mathcal{R}(\theta)] = \exp(\theta_1[A_1]) \exp(\theta_2[A_2]) \exp(\theta_3[A_3]). \end{array} \tag{1.1}$$

Pour $U =]-\pi, \pi[\times]-\pi/2, \pi/2[\times]-\pi, \pi[$, il existe un voisinage V de Id_3 dans $SO_3(\mathbb{R})$ tel que $(U, V, \mathcal{R})$ forme une carte locale de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de Id_3. De même pour tout $[R] \in SO_3(\mathbb{R})$, il existe un voisinage $V_{[R]}$ de $[R]$ dans $SO_3(\mathbb{R})$ tel que l'application

$$\theta \in U \to \mathcal{R}(\theta)[R]$$

forme une carte locale de $SO_3(\mathbb{R})$ au voisinage de $[R]$. Les coordonnées $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ sont les angles d'Euler. Pour tout $\theta \in U$ la différentielle de $\mathcal{R}$ au point θ est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta_1}(\theta) & = & [B_1(\theta)][\mathcal{R}(\theta)], \qquad \dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta_2}(\theta) = [B_2(\theta)][\mathcal{R}(\theta)], \\ \dfrac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta_3}(\theta) & = & [B_3(\theta)][\mathcal{R}(\theta)], \end{array}$$

où les matrices antisymétriques $[B_1(\theta)]$, $[B_2(\theta)]$ et $[B_3(\theta)]$ sont définies par

$$[B_1(\theta)] = [A_1], \tag{1.2a}$$
$$[B_2(\theta)] = \exp(\theta_1[A_1])[A_2] \exp(-\theta_1[A_1]), \tag{1.2b}$$
$$[B_3(\theta)] = \exp(\theta_1[A_1]) \exp(\theta_2[A_2])[A_3] \exp(-\theta_1[A_1]) \exp(-\theta_2[A_2]). \tag{1.2c}$$

Ainsi pour tout vecteur $\Phi \in \mathbb{R}^3$, la différentielle de $\mathcal{R}$ en θ appliquée à un vecteur Φ devient

$$[D\mathcal{R}(\theta)](\Phi) = [A(\mathbf{w}(\Phi))][\mathcal{R}(\theta)], \tag{1.3}$$

où la matrice est définie comme

$$[A(\mathbf{w})] = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} = w_1[A_1] + w_2[A_2] + w_3[A_3], \quad \text{pour tout } \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3. \tag{1.4}$$

et le vecteur $\mathbf{w}(\Phi)$ est donnée par la formule :

$$\mathbf{w}(\Phi) = \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{w}(\Phi)_1 & = & \Phi_1 + \Phi_3 \sin(\theta_2), \\ \mathbf{w}(\Phi)_2 & = & \Phi_2 \cos(\theta_1) - \Phi_3 \sin(\theta_1)\cos(\theta_2), \\ \mathbf{w}(\Phi)_3 & = & \Phi_2 \sin(\theta_1) + \Phi_3 \cos(\theta_1)\cos(\theta_2), \end{array} \right.$$

Ainsi pour tout $R \in \mathcal{C}^2([0,T]; SO_3(\mathbb{R}))$ il existe une unique fonction $\mathbf{w} \in \mathcal{C}^2([0,T];\mathbb{R}^3)$ telle que

$$[\dot{R}(t)]\mathbf{x} = [A(\mathbf{w}(t))][R(t)]\mathbf{x} = \mathbf{w}(t) \wedge [R(t)]\mathbf{x} \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \tag{1.5}$$

Le vecteur $\mathbf{w}$ est la vitesse angulaire de $[R]$. Dans certain cas il est plus agréable de ne pas passer par les angles d'Euler car l'équation matricielle (1.5) suffit à déterminer la matrice $[R]$ si l'on connaît le vecteur $\mathbf{w}$.

Le cas $n = 2$ peut être vu comme un cas particulier de la dimension 3. En effet si nous supposons que le mouvement reste dans le plan (xOy), les matrices de rotations s'écrivent donc :

$$[\mathcal{R}(\theta)] = \exp(\theta[A_3]) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus pour toutes fonctions $\theta \in \mathcal{C}^1([0,T];\mathbb{R})$, la dérivée de la matrice $t \to [\mathcal{R}(\theta(t))]$ se réduit à

$$\frac{d[\mathcal{R}(\theta(t))]}{dt} = \dot{\theta(t)}[A_3][R(\theta(t))].$$

En prenant la restriction du mouvement au plan (xOy), la matrice de rotation devient :

$$[\mathcal{R}(\theta)] = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

de plus sa dérivée se simplifie par

$$\frac{d[\mathcal{R}(\theta(t))]}{dt} = \dot{\theta(t)}[A_0][R(\theta(t))]$$

où la matrice antisymétrique A_0 est défini par :

$$[A_0] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Ainsi nous pouvons définir deux sortes de vitesse. La vitesse Lagrangienne du solide $S(t)$ est un champ de vecteur sur $S(0)$ défini par :

$$\mathbf{v}(t,\mathbf{y}) = \left\{ \begin{array}{ll} \dot{\mathbf{h}}(t) + [A(\mathbf{w}(t))][R(t)](\mathbf{y}-\mathbf{h}_0) = \dot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{w}(t) \wedge [R(t)](\mathbf{y}-\mathbf{h}_0) & \text{pour n=3,} \\ \dot{\mathbf{h}}(t) + \dot{\theta(t)}[A_0][R(\theta(t))](\mathbf{y}-\mathbf{h}_0) & \text{pour n=2,} \end{array} \right.$$

pour tout $\mathbf{y} \in S$, alors que la vitesse Eulérienne du solide est définie par :

$$\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} \dot{\mathbf{h}}(t) + [A(\mathbf{w}(t))](\mathbf{x}-\mathbf{h}(t)) = \dot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{w}(t) \wedge (\mathbf{x}-\mathbf{h}(t)) & \text{pour n=3,} \\ \dot{\mathbf{h}}(t) + \dot{\theta(t)}[A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}(t)) & \text{pour n=2,} \end{array} \right.$$

pour tout $\mathbf{x} \in S(t)$.

Pour connaître le mouvement des solides, nous appliquons les lois fondamentales de la dynamique. Nous commençons par définir certaines quantités qui caractérisent les solides, sa

masse et sa matrice d'inertie. Nous notons par ρ_S la densité du solide qui est supposée constante et m_S est la masse du solide S qui s'exprime grâce à la formule

$$m_S = \int_S \rho_S \mathrm{d}\mathbf{x} = \rho_S \mathrm{Vol(S)}.$$

La matrice d'inertie $[J(t)]$ du solide $S(t)$ se définit par rapport à un point fixé de l'espace. Cette matrice se simplifie si nous la calculons par rapport au centre de gravité du solide et nous distinguons les cas $n = 2$ et $n = 3$. Dans le cas $n = 3$, $[J(t)]$ s'exprime avec la formule :

$$[J(t)]\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \int_{S(t)} \rho_S \left[\mathbf{a}\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{h}(t))\right]\cdot\left[\mathbf{b}\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{h}(t))\right]\mathrm{d}\mathbf{x} \qquad \text{pour tout } \mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3. \tag{1.7}$$

De plus si nous posons

$$[J_0]\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \int_{S(0)} \rho_S \left[\mathbf{a}\wedge(\mathbf{y}-\mathbf{h}_0)\right]\cdot\left[\mathbf{b}\wedge(\mathbf{y}-\mathbf{h}_0)\right]\mathrm{d}\mathbf{y} \tag{1.8}$$

les matrices $[J(t)]$ et $[J_0]$ sont unis par la relation :

$$[J(t)] = [R(t)][J_0][R(t)]^*.$$

En effet pour tout $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3$, $[J(t)]\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ se simplifie par

$$\begin{aligned}
[J(t)]\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= \int_{S(t)} \rho_S \left[\mathbf{a}\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{h}(t))\right]\cdot\left[\mathbf{b}\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{h}(t))\right]\mathrm{d}\mathbf{x},\\
&= \int_{S_0} \rho_S \left[\mathbf{a}\wedge R(t)(\mathbf{y}-\mathbf{h}_0)\right]\cdot\left[\mathbf{b}\wedge R(t)(\mathbf{y}-\mathbf{h}_0)\right]\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&= \int_{S_0} \rho_S \left[[R(t)]^*\mathbf{a}\wedge(\mathbf{y}-\mathbf{h}_0)\right]\cdot\left[[R(t)]^*\mathbf{b}\wedge(\mathbf{y}-\mathbf{h}_0)\right]\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&= [J_0]([R(t)]^*\mathbf{a})\cdot([R(t)]^*\mathbf{b}),\\
&= ([R(t)]\,[J_0]\,[R(t)]^*\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}.
\end{aligned}$$

La matrice $[J(t)]$ est symétrique définie positive si le solide n'est pas une tige d'épaisseur nulle. De plus grâce à la formule (1.5) la dérivée de la matrice $[J(t)]$ est donnée par la formule :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[J(t)] &= \frac{d}{dt}\left([R(t)][J_0][R^*(t)]\right), &(1.9)\\
&= [A(\mathbf{w}(t))][R(t)][J_0][R^*(t)] + [R(t)][J_0]([A(\mathbf{w}(t))][R(t)])^*, &(1.10)\\
&= [A(\mathbf{w}(t))][R(t)][J_0][R^*(t)] + [R(t)][J_0]([R^*(t)][-A(\mathbf{w}(t))]), &(1.11)
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}[J(t)] = [A(\mathbf{w}(t))][J(t)] - [J(t)][A(\mathbf{w}(t))]. \tag{1.12}$$

Pour le cas $n = 2$ la matrice $[J(t)]$ se réduit à un scalaire défini par l'intégrale

$$J(t) = \int_{S(t)} \rho_S \|\mathbf{x}-\mathbf{h}(t)\|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_S \rho_S \|\mathbf{y}-\mathbf{h}_0\|^2 \mathrm{d}\mathbf{y}. \tag{1.13}$$

Pour cela nous prenons $\mathbf{a} = (0,0,a)$ et $\mathbf{b} = (0,0,b)$ dans la formule (1.7). De plus dans ce $[J(t)]$ ne dépend pas du temps.

Pour énoncer les lois de la dynamique nous devons faire le bilan des forces extérieurs qui s'appliquent sur le solide S. Dans cette ouvrage nous supposerons qu'il existe deux types de forces. Nous notons par $(t,\mathbf{x}) \to \mathbf{g}(t,\mathbf{x})$ les forces volumiques qui agissent sur $S(t)$ alors que

$(t, \mathbf{x}) \to \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ correspond aux forces de surface agissant sur le bord du solide $S(t)$. Nous énonçons les lois de la dynamique pour le solide S sous la forme :

$$m_S \ddot{\mathbf{h}}(t) = \int_{S(t)} \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial S(t)} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} \qquad \text{pour tout } t \in [0, T], \tag{1.14}$$

$$\frac{d}{dt}\left([J(t)]\mathbf{w}(t)\right) = \int_{S(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{h}(t)) \wedge \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial S(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{h}(t)) \wedge \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}, \text{ pour } n = 3.$$

$$[J(t)]\ddot{\theta}(t) = \int_{S(t)} [A_0(\mathbf{x} - \mathbf{h}(t))] \cdot \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial S(t)} [A_0](\mathbf{x} - \mathbf{h}(t)) \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}, \text{ pour } n = 2, \tag{1.15}$$

De plus la dérivée $[J(t)]\mathbf{w}(t)$ peut s'écrire

$$\frac{d}{dt}\left([J(t)]\mathbf{w}(t)\right) = [J(t)]\dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{w}(t) \wedge [J(t)]\mathbf{w}(t).$$

Ainsi le cas $n = 3$ devient

$$[J(t)]\dot{\mathbf{w}}(t) = [J(t)]\mathbf{w}(t) \wedge \mathbf{w}(t) + \int_{S(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{h}(t)) \wedge \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial S(t)} (\mathbf{x} - \mathbf{h}(t)) \wedge \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{1.16}$$

Nous ajoutons les conditions initiales suivantes

$$\begin{aligned} &\mathbf{h}(0) = \mathbf{h}_0,\ \dot{\mathbf{h}}(0) = \mathbf{k}_0, \qquad R(0) = Id_3,\ \mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0, \text{ pour } n = 3 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \theta(0) = 0\, \dot{\theta}(0) = \alpha, \text{ pour } n = 2 \end{aligned} \tag{1.17}$$

où $\mathbf{k}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{w}_0 \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Une autre méthode pour obtenir les équations du mouvement des rigides est l'utilisation de la mécanique analytique (voir le livre d'Arnold [5]).

1.2.2 Les milieux déformables

Nous rappelons ici quelques principes de la mécanique des milieux déformables qui permettront de décrire le mouvement d'un fluide. Ces propriétés sur les milieux déformables vont nous conduire aux équations d'Euler pour un fluide parfait. Soient $T > 0$ et $(F(t))_{t\in[0,T]}$ une famille de domaines dans $\mathbb{R}^n$. Le mouvement du milieu continu $F(0)$ est connu si nous connaissons l'ensemble des bijections entre $F(0)$ et $F(s)$ pour tout $s \in [0, T]$. De plus pour décrire le mouvement nous pouvons utiliser soit un repère fixé ou soit un repère lié à la trajectoire des particules du milieu déformable. Nous notons par $(\mathbf{X}(t, \cdot))_{t\in[0,T]}$ l'ensemble des bijections de $F(0)$ sur $F(t)$ pour tout $s \in [0, T]$. L'ensemble des applications inverses est noté par $(\mathbf{Y}(t, \cdot))_{t\in[0,T]}$. Ainsi pour tout $\mathbf{x} \in F(t)$, il existe $\mathbf{y} \in F(0)$ tel que $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t, \mathbf{y})$ et de même pour tout $\mathbf{y} \in F(0)$, il existe $\mathbf{x} \in F(t)$ tel que $\mathbf{y} = \mathbf{Y}(t, \mathbf{x})$.

Nous pouvons définir deux types de vitesse de particules. Le champ des vitesses lagrangiennes est

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{X}(t, \mathbf{y}) \text{ pour tout } \mathbf{y} \in F(0),$$

alors que le champ de vitesse Eulériennes est

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{v}(t,\mathbf{Y}(t,\mathbf{x})) \text{ pour tout } \mathbf{x} \in F(t).$$

Dans la plupart des problèmes concernant les fluides, la vitesse Eulérienne est beaucoup plus employée que la vitesse Lagrangienne. Cette considération provient surtout de la physique car il est plus facile de déterminer la vitesse en un point fixe de l'espace alors que suivre un point dans son mouvement est beaucoup plus délicat.

Nous rappelons certaines propriétés sur les applications définies sur $F(t)$ et nous en déduirons les équations du mouvement pour un fluide parfait incompressible. Pour toute application $k \in \mathcal{C}^1([0,T]\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, nous définissons la dérivée particulaire de k par l'opérateur :

$$D_t k(t,\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial t}k(t,\mathbf{x}) + (\mathbf{u}\cdot\nabla)k(t,\mathbf{x}), \qquad t \in [0,T] \text{ et } \mathbf{x} \in F(t)$$

où $\mathbf{u}$ est la vitesse Eulérienne du domaine $F(t)$. En définissant la quantité $K(t)$ par

$$K(t) = \int_{F(t)} k(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x},$$

la dérivée par rapport à t de $K(t)$ est fournie par la formule de transport de Reynolds (voir par exemple Gurtin [25, page 78]) :

$$\begin{aligned} K'(t) &= \int_{F(t)} \left[\frac{\partial k}{\partial t}(t,\mathbf{x}) + \mathrm{div}(\mathrm{k(t,\mathbf{x})\mathbf{u}(t,\mathbf{x})})\right]\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \int_{F(t)} \frac{\partial k}{\partial t}(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial F(t)} k(t,\mathbf{x})(\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

où $\mathbf{u}$ est la vitesse Eulérienne du domaine $F(t)$. Nous donnerons dans la suite une justification de cette formule qui est résumée dans le Corollaire [28, 5.2.5 page 173]. Toutes ces propriétés vont nous permettre de rappeler les lois de conservation pour un corps déformable. Dans la suite nous considérons Ω_0 un corps déformable et $(\Omega(t))_{t\in[0,T]}$ une description de son mouvement. Nous regardons le déplacement d'une partie $F_0 \in \Omega_0$ et nous notons par $F(t)_{t\in[0,T]}$ le mouvement de cette partie dans $\Omega(t)$.

Conservation de la masse : Pour la famille de domaine $(F(t))_{t\in[0,T]}$, nous notons $\rho(t,\mathbf{x})$ la densité particulaire au point $\mathbf{x} \in F(t)$ pour tout $t \in [0,T]$. La masse de associée au domaine $F(t)$ est donnée par :

$$m(F(t)) = \int_{F(t)} \rho(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

La conservation de la masse s'écrit sous la forme :

$$\frac{d}{dt}m(F(t)) = 0,$$

et en appliquant la formule de Reynolds (1.18), nous obtenons la relation :

$$\int_{F(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}(t,\mathbf{x}) + \mathrm{div}(\rho\mathbf{u})(\mathrm{t},\mathbf{x})\right]\mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

Comme cette intégrale est nulle pour toute partie $F(t)$, la loi de la conservation de la masse se réduit à l'équation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t,\mathbf{x}) + \mathrm{div}(\rho\mathbf{u})(\mathrm{t},\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \Omega(\mathrm{t}) \text{ et } \mathrm{t} \in [0,\mathrm{T}]. \tag{1.19}$$

L'équation ci-dessus est appelée **équation de continuité**.

Conservation de la quantité de mouvement : La quantité de mouvement d'une partie $F(t)$ s'écrit comme :

$$\mathbf{p}(t) = \int_{F(t)} \rho(t,\mathbf{x})\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Les forces agissant sur la partie $F(t)$ se restreignent aux forces de densité volumique donnée par le champ de vecteur $\mathbf{f}(t,\mathbf{x})$ (par exemple la gravité) et par la densité des forces de surface $s(t,\mathbf{x})$, définie sur $\partial F(t)$. Le théorème de Cauchy (voir [25, page 98-102]) assure l'existence d'une application $\sigma(t,\cdot) : F(t) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, appelé le tenseur de Cauchy telle que :

$$s(t,\mathbf{x}) = \sigma(t,\mathbf{x})\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) \text{ et } \sigma^*(t,\mathbf{x}) = \sigma(t,\mathbf{x}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \partial F(t) \text{ et } t \in [0,T],$$

où $\mathbf{n}(t,\mathbf{x})$ est le vecteur normal sur $\partial F(t)$ au point $\mathbf{x}$ diriger vers l'extérieur du domaine $F(t)$. Ainsi la conservation de la quantité de mouvement devient

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{F(t)} \rho(t,\mathbf{x})\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\right] = \int_{F(t)} \mathbf{f}(t\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial F(t)} \sigma(t,\mathbf{x})\mathbf{n}(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{x}}.$$

De plus en combinant la formule de Reynolds (1.18) et la conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement se réduit à

$$\int_{F(t)} \left(\rho(t,\mathbf{x})D_t(\mathbf{u}(t,\mathbf{x})) - \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) - \mathrm{div}(\sigma(\mathrm{t},\mathbf{x}))\right)\mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

Ainsi la dernière loi de conservation est équivalente à

$$\rho(t,\mathbf{x})\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\right] = \mathrm{div}(\sigma(\mathrm{t},\mathbf{x})) + \mathbf{f}(\mathrm{t},\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Omega(\mathrm{t}),\ \mathrm{t} \in [0,\mathrm{T}]. \quad (1.20)$$

Les équations (1.19) et (1.20) sont valables pour tout corps déformable.

Nous allons maintenant considérer le cas d'un fluide parfait incompressible. L'incompressibilité du fluide se traduit par l'équation de conservation du volume de toute partie du fluide $F(t)$, donc $Vol(F(t)) = Vol(F(0))$ pour tout $t \in [0,T]$. En calculant la dérivée par rapport au temps t de la dernière égalité et en appliquant la formule de Reynolds (1.18), nous obtenons

$$\frac{d}{dt}(Vol(F(t))) = \int_{F(t)} \mathrm{div}(\mathbf{u}(\mathrm{t},\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{x} = 0$$

La forme locale de la conservation du volume s'écrit donc

$$\mathrm{div}(\mathbf{u}(\mathrm{t},\mathbf{x})) = 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \Omega(\mathrm{t}) \text{ et } \mathrm{t} \in [0,\mathrm{T}]. \quad (1.21)$$

L'équation de conservation de la masse (1.19), s'écrit dans ce cas sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\mathbf{x}) + \mathbf{u}(t,\mathbf{x})\cdot\nabla\rho(t,\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \Omega(t) \text{ et } t \in [0,T],$$

où $\mathbf{u}$ est le champs des vitesses Eulériennes du fluide. De plus si nous introduisons les lignes de courant du fluide définies par :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t,\mathbf{y}) &= \mathbf{u}(t,\mathbf{z}(t,\mathbf{y})), \\ \mathbf{z}(0,\mathbf{y}) &= \mathbf{y}, \end{cases}$$

pour tout $\mathbf{y} \in \Omega_0$ et $t \in [0,T]$ et nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho(t,\mathbf{z}(t,\mathbf{y}))] = \frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\mathbf{z}(t,\mathbf{y})) + \mathbf{u}(t,\mathbf{z}(t,\mathbf{y}))\cdot\nabla\rho(t,\mathbf{z}(t,\mathbf{y})) = 0 \qquad t \in [0,t],\ \mathbf{y} \in \Omega_0.$$

Ainsi la densité du fluide est constante le long des lignes de courant. Donc si la fonction $\rho(0,\mathbf{y}) = \rho_f$ est constante sur $\Omega(0)$ alors $\rho(t,\mathbf{x}) = \rho_f$ pour tout $\mathbf{x} \in \Omega(t)$. Donc en supposant que la densité initiale du fluide est constante, les équations qui décrivent la loi de conservation de la masse se réduise en une unique équation :

$$\mathrm{div}(\mathbf{u}(\mathrm{t},\mathbf{x})) = 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \Omega(\mathrm{t}) \text{ et } \mathrm{t} \in [0,\mathrm{T}].$$

Les fluides parfaits sont caractérisés par la loi de comportement (voir [25])

$$\sigma(t,\mathbf{x}) = -p(t,\mathbf{x})Id_{\mathbb{R}^n} \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in F(t) \text{ et } t \in [O,T].$$

Grâce à cette expression, (1.20) devient :

$$\rho_f \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t,\mathbf{x}) + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\right] + \nabla p(t,\mathbf{x}) = \mathbf{g}(t,\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Omega(t),\ t \in [0,T], \tag{1.22}$$

où ρ_f est la densité du fluide. Les équations du fluide se réduisent au système suivant :

$$\rho_f \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t,\mathbf{x}) + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\right] + \nabla p(t,\mathbf{x}) = \mathbf{g}(t,\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Omega(t),\ t \in [0,T], \tag{1.23a}$$

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{u})(\mathrm{t},\mathbf{x}) = 0 \qquad \mathbf{x} \in \Omega(t),\ t \in [0,T], \tag{1.23b}$$

$$\mathbf{u}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Omega(0), \tag{1.23c}$$

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{v}(t,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Omega(t),\ t \in [0,T], \tag{1.23d}$$

où $\mathbf{v}$ est la vitesse eulérienne de la déformation qui envoie $\Omega(0)$ sur $\Omega(t)$.

1.2.3 Le système fluide structure

Dans cette partie nous décrivons le mouvement de solides rigides dans un fluide parfait incompressible. Soient $n = 2, 3$, $m \geq 1$ un entier, Ω un domaine dans $\mathbb{R}^n$ et $T > 0$. Nous considérons le mouvement de m solides, S^i pour $i = 1, \ldots, m$, dans un fluide contenu dans Ω. Le mouvement du i-ème solide est repéré grâce à la position de son centre de gravité $\mathbf{h}^i$ et sa matrice de rotation $[R^i]$, pour $(\mathbf{h}^i, [R^i]) \in \mathcal{C}^2([0,T];\mathbb{R}^3 \times SO_n(\mathbb{R}))$. Nous notons par S^i la position du i-ème solide à l'instant $t = 0$, alors que

$$S^i(t) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \mathbf{x} = \mathbf{h}^i(t) + [R^i(t)](\mathbf{y} - \mathbf{h}^i(0)) \quad \forall \mathbf{y} \in S^i\right\}$$

désigne la position du solide à l'instant $t \in [0,T]$. De plus ρ_i sera la densité du i-ème solide et nous notons par m_i la masse du i-ème solide. Dans la suite nous notons aussi par $\mathbf{w}^i(t)$ la vitesse angulaire associée à la matrice de rotation $[R^i(t)]$ définie par la formule (1.5) pour le cas $n = 3$ alors que $\theta^i(t)$ désigne l'angle de rotation de la matrice $[R^i(t)]$ dans le cas $n = 2$. Enfin nous introduisons les différentes notations :

$$\begin{array}{ll} S(t) = \cup_{i=1}^m S^i(t), & F(t) = \Omega \setminus \overline{S(t)} \\ \Gamma_i(t) = \partial S^i(t), & \Gamma(t) = \cup_{i=1}^m \Gamma_i(t). \end{array}$$

Le domaine $F(t)$ représente le domaine occupé par le fluide à l'instant $t \in [0,T]$. Nous décrivons le mouvement du fluide par sa vitesse Eulérienne notée $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$, avec $\mathbf{x} \in F(t)$ et $t \in [0,T]$.

Les inconnues du systèmes sont les fonctions $(\mathbf{h}^i, [R^i(t)])_{i=1,\ldots,m}$ qui définissent le mouvement des solides, la vitesse Eulérienne du fluide notée $\mathbf{u}$ et la pression p du fluide. Cependant avant de donner les équations du système, nous commençons par énoncer les hypothèses sur les fluides et les solides.

- La densité ρ_f du fluide est supposée constante à l'instant $t = 0$.

- Les forces volumiques agissant sur le fluide et les solides sont supposées potentielles. Ainsi nous supposons que pour toute force volumique $\mathbf{g}$, il existe une fonction $\mathbf{G}$ telle que

$$\mathbf{g} = \nabla \mathbf{G}.$$

  Nous remarquons que la force de gravité entre dans cette description des forces volumiques.
- Nous supposerons que l'unique force de surface agissant sur les solides est la pression du fluide. Ainsi la force de surface agissant sur les solides se réduit à l'expression

$$\mathbf{f}(t,\mathbf{x}) = -p(t,\mathbf{x}) Id_n \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \text{ sur } \partial S(t),$$

  où $p(t,\cdot)$ est la pression du fluide.
- Aux interfaces, nous utilisons les conditions aux bords classiques des fluides parfaits. Sur $\partial\Omega$ nous supposons que la composante normale de la vitesse du fluide est nulle. Ceci traduit donc le fait que le fluide ne peut pas traverser la paroi. De même sur le bord $\partial S^i(t)$ du i-ème solide, nous supposons que la composante normale de la vitesse du fluide est égale à la composante normale de la vitesse du i-ème solide.

Ainsi sous ces hypothèses, nous pouvons établir les équations du système fluide-structure. Nous distinguons différent type d'équations. Les équations qui décrivent le mouvement du fluide se réduisent à :

$$\rho_f \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t,\mathbf{x}) + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\right] + \nabla p(t,\mathbf{x}) = \mathbf{g}(t,\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}\in F(t),\ t\in[0,T], \tag{1.24a}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u})(\mathrm{t},\mathbf{x}) = 0 \qquad \mathbf{x}\in F(t),\ t\in[0,T], \tag{1.24b}$$

$$\mathbf{u}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}\in F(0). \tag{1.24c}$$

Pour les équations des solide nous devons séparer les cas $n=3$ et $n=2$. Ainsi pour le cas $n=3$ les équations du i-ème solide s'écrivent

$$m_i \ddot{\mathbf{h}^i} = \int_{\Gamma_i(t)} p(t,\mathbf{x})\mathbf{n}(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{S(t)} \mathbf{g}(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{1.25a}$$

$$\begin{aligned}[J^i(t)]\dot{\mathbf{w}^i}(t) = [J^i(t)](\mathbf{w}^i(t)) \wedge \mathbf{w}^i(t) + \int_{\Gamma_i(t)} (\mathbf{x}-\mathbf{h}^i(t)) \wedge [p\mathbf{n}]\,(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{x}} \\ + \int_{S^i(t)} (\mathbf{x}-\mathbf{h}^i(t)) \wedge \mathbf{g}(t,\mathbf{x}),\end{aligned} \tag{1.25b}$$

$$[\dot{R}^i(t)] = [A(\mathbf{w}^i(t))][R^i(t)], \tag{1.25c}$$

$$\mathbf{h}^i(0) = \mathbf{h}_0^i,\ \dot{\mathbf{h}}^i(0) = \mathbf{k}_0^i,\ [R^i(0)] = Id_3,\ \mathbf{w}^i(0) = \mathbf{w}_0^i, \tag{1.25d}$$

où $\mathbf{h}_0^i$, $\mathbf{k}_0^i$, $\mathbf{w}_0^i$ sont dans $\mathbb{R}^3$ et la matrice $[J^i(t)]$ est la matrice d'inertie du i-ème solide définie par (1.7). Pour le cas $n=2$, l'équation (1.25b) se réduit à une équation scalaire et la conservation du moment cinétique devient :

$$\begin{aligned}[J^i]\ddot{\theta}^i(t) = \int_{\partial S^i(t)} ([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}^i(t))) \cdot [p\mathbf{n}]\,(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{x}} \\ + \int_{S^i(t)} ([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}^i(t))) \cdot \mathbf{g}(t,\mathbf{x}),\end{aligned} \tag{1.26a}$$

$$[\dot{R}^i(\theta(t))] = \dot{\theta}(t)[A_0][R^i(\theta(t))], \tag{1.26b}$$

$$\mathbf{h}^i(0) = \mathbf{h}_0^i,\ \dot{\mathbf{h}}(0) = \mathbf{k}_0^i,\ [R^i(0)] = Id_2,\ \dot{\theta}^i(0) = \alpha^i, \tag{1.26c}$$

où $\mathbf{h}_0^i$, $\mathbf{k}_0^i$ est dans $\mathbb{R}^2$, α^i est dans $\mathbb{R}$ et $[J^i]$ le moment cinétique du i-ème solide défini par la formule (1.13). Nous ajoutons à ces équations des conditions de bord qui permettent de faire le lien entre le fluide et le solide. Sur le bord du domaine, nous imposons la condition

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) = 0 \qquad \mathbf{x}\in\partial\Omega. \tag{1.27}$$

Cette équation traduit le fait que le fluide ne peut pas traverser la paroi. Aux interfaces nous imposons les conditions aux limites suivantes

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) = (\dot{\mathbf{h}^i}(t)+\omega\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{h}^i(t)))\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}\in\partial S^i(t) \text{ pour n=3,} \tag{1.28a}$$

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) = (\dot{\mathbf{h}^i}(t)+\dot\theta(t)([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}^i(t))))\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}\in\partial S^i(t) \text{ pour n=2,.} \tag{1.28b}$$

Pour simplifier les notations pour $n=3$, nous notons par

$$\mathbf{q}^i(t) = (\mathbf{h}^i(t),[R^i(t)]) \text{ pour tout } i=1,\dots,m \text{ et par } \mathbf{q}=(\mathbf{q}^1,\dots,\mathbf{q}^m). \tag{1.29}$$

Nous voyons donc le vecteur $\mathbf{q}$ comme une paramétrisation du mouvement des solide. De plus, nous pouvons substituer la matrice de rotation $[R^i(t)]$ par les angles d'Euler correspondants. Ces derniers seront notés par le vecteur $\Theta^i=(\theta_1^i,\theta_2^i,\theta_3^i)$ et dans ce cas le vecteur $\mathbf{q}$ sera composé des éléments

$$\mathbf{q}^i = (\mathbf{h}^i,\Theta^i) \text{ pour tout } i=1,\dots,m \text{ et } \mathbf{q}=(\mathbf{q}^1,\dots,\mathbf{q}^m). \tag{1.30}$$

Pour le cas $n=2$ le vecteur $\mathbf{q}(t)$ se réduit à :

$$\mathbf{q}^i(t) = (\mathbf{h}^i(t),\theta^i(t)) \text{ pour tout } i=1,\dots,m \text{ et par } \mathbf{q}=(\mathbf{q}^1,\dots,\mathbf{q}^m) \tag{1.31}$$

où $\theta^i(t)$ représente l'angle de rotation de la matrice $[R(\theta^i(t))]$. Dans la suite nous préciserons les différentes paramétrisations. Les équations du système deviennent :

$$\rho_f\left[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}(t,\mathbf{x})+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\right]+\nabla p(t,\mathbf{x}) = \mathbf{g}(t,\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}\in F(t),\ t\in[0,T], \tag{1.32a}$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{u})(t,\mathbf{x}) = 0 \qquad \mathbf{x}\in F(t),\ t\in[0,T], \tag{1.32b}$$

$$\mathbf{u}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}\in F(0), \tag{1.32c}$$

$$m_i\ddot{\mathbf{h}^i} = \int_{\Gamma_i(t)} p(t,\mathbf{x})\mathbf{n}(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}+\int_{S^i(t)}\mathbf{g}(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{1.32d}$$

$$\tag{1.32e}$$

pour le cas n=3 nous avons les conditions

$$[J^i(t)]\dot{\mathbf{w}^i}(t) = [J^i(t)](\mathbf{w}^i(t))\wedge\mathbf{w}^i(t)+\int_{\Gamma_i(t)}(\mathbf{x}-\mathbf{h}^i(t))\wedge[p(t,\mathbf{x})\mathbf{n}(t,\mathbf{x})]\,\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{x}} + \int_{S^i(t)}(\mathbf{x}-\mathbf{h}^i(t))\wedge\mathbf{g}(t,\mathbf{x}), \tag{1.33a}$$

$$[\dot{R}^i(t)] = A(\mathbf{w}^i(t))[R^i(t)], \tag{1.33b}$$

$$\mathbf{h}^i(0)=\mathbf{h}_0^i,\ \dot{\mathbf{h}}(0)=\mathbf{k}_0^i,\ [R^i(0)]=Id_3,\ \mathbf{w}^i(0)=\mathbf{w}_0^i, \tag{1.33c}$$

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) = (\dot{\mathbf{h}^i}(t)+\mathbf{w}\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{h}^i(t)))\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}\in\partial S^i(t), \tag{1.33d}$$

$$\tag{1.33e}$$

pour le cas n=2 nous avons les conditions

$$[J^i]\ddot{\theta}^i(t) = \int_{\Gamma_i(t)} ([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}^i(t)))\cdot[p\mathbf{n}]\,(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{x}} + \int_{S^i(t)} ([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}^i(t)))\cdot\mathbf{g}(t,\mathbf{x}), \tag{1.34a}$$

$$\frac{d}{dt}[R^i(\theta(t))] = \dot{\theta}(t)[A_0][R^i(\theta(t))], \tag{1.34b}$$

$$\mathbf{h}^i(0)=\mathbf{h}_0^i,\ \dot{\mathbf{h}}(0)=\mathbf{k}_0^i,\ [R^i(0)]=Id_2,\ \dot{\theta}^i(0)=\alpha^i, \tag{1.34c}$$

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) = (\dot{\mathbf{h}}^i(t)+\dot{\theta}(t)([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}^i(t))))\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}\in\partial\Gamma_i(t) \text{ pour n=2}, \tag{1.34d}$$

où $[A(\mathbf{w})]$ est défini par (1.4), les matrice $[J^i]$ sont définies par (1.7) pour $n=3$ et (1.13) pour $n=2$ et $[A_0]$ est défini par (1.6).

1.2.4 Le cas des fluides potentiels

Nous conservons les notations introduites dans la section précédente. $F(t)$ est le domaine occupé par le fluide, $S^i(t)$ le domaine occupé par le i-ème solide pour tout $t\in[0,T]$. Nous rappelons les notations :

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^i &= (\mathbf{h}^i,\Theta^i) \text{ pour tout } i=1,\dots,m \text{ et } \mathbf{q}=(\mathbf{q}^1,\dots,\mathbf{q}^m) \text{ si } n=3,\\ \mathbf{q}^i &= (\mathbf{h}^i,\theta^i) \text{ pour tout } i=1,\dots,m \text{ et } \mathbf{q}=(\mathbf{q}^1,\dots,\mathbf{q}^m) \text{ si } n=2.\end{aligned}$$

où $\mathbf{h}^i$ est la position du centre de gravité du i-ème solide et Θ^i sont les angles d'Euler du i-ème solide alors que θ^i est l'angle de rotation dans le cas $n=2$. Pour simplifier les notations, nous donnons une nouvelle indexation du vecteur $\mathbf{q}$ par

$$\mathbf{q}=(q_1,\dots,q_{6m}) \text{ pour } n=3 \quad \text{ou } \mathbf{q}=(q_1,\dots,q_{3m}) \text{ pour } n=2.$$

Dans ce paragraphe nous considérons le cas d'un fluide parfait potentiel. Nous supposons que la vitesse du fluide est le gradient d'une fonction. Il existe donc une application Ψ tel que

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = \nabla\Psi(t,\mathbf{x}) \text{ pour tout } \mathbf{x}\in F(t) \text{ et } t\in[0,T].$$

Ainsi l'équation d'Euler se traduit par l'équation de Bernoulli :

$$p(t,\mathbf{x}) = G(t,\mathbf{x}) - \rho_F\left[\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t,\mathbf{x})+\frac{1}{2}|\nabla\Psi(t,\mathbf{x})|^2\right], \quad \text{pour tout } \mathbf{x}\in F_{\mathbf{q}(t)} \text{ et } t\in[0,T], \tag{1.35}$$

où $G(t,\mathbf{x})$ représente une fonction qui définissent les forces potentiel $\mathbf{g}(t,\mathbf{x})=\nabla G(t,\mathbf{x})$ agissant sur le système. Nous soulignons ici que la fonction $G(t,\mathbf{x})$ n'est pas unique, elle est définie à un fonction $k(t)$ près. La condition d'incompressibilité du fluide et les conditions aux interfaces conduisent au problème de Neumann suivant pour Ψ :

$$\begin{aligned}-\Delta\Psi(t,\mathbf{x}) &= 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{x}\in F(t)\\ \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) &= 0 \qquad \text{pour } \mathbf{x}\in\partial\Omega,\\ \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) &= \left[\dot{\mathbf{h}}^i(t)+\mathbf{w}(\dot{\Theta}^i(t))(\mathbf{x}-\mathbf{h}^i(t))\right]\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) \text{ pour } \mathbf{x}\in\partial S^i(t), \text{ pour } n=3,\\ \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) &= \left[\dot{\mathbf{h}}^i(t)+\dot{\theta}^i(t)[A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}^i(t))\right]\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) \text{ pour } \mathbf{x}\in\partial S^i(t), \text{ pour } n=2,\end{aligned}$$

où le vecteur $\mathbf{w}(\dot{\Theta}^i(t))$ est défini par

$$\mathbf{w}(\dot{\Theta}^i(t)) = \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{w}(\dot{\Theta}^i(t))_1 & = & \dot{\Theta}^i_1(t) + \dot{\Theta}^i_3(t)\sin(\Theta^i_2(t)), \\ \mathbf{w}(\dot{\Theta}^i(t))_2 & = & \dot{\Theta}^i_2(t)\cos(\Theta^i_1(t)) - \dot{\Theta}^i_3(t)\sin(\Theta^i_1(t))\cos(\Theta^i_2(t)), \\ \mathbf{w}(\dot{\Theta}^i(t))_3 & = & \dot{\Theta}^i_2(t)\sin(\Theta^i_1(t)) + \dot{\Theta}^i_3(t)\cos(\Theta^i_1(t))\cos(\Theta^i_2(t)), \end{array} \right.$$

et la matrice $[A_0]$ est définie par la formule (1.6). Nous observons que la fonction Ψ est une application linéaire en $\dot{\mathbf{q}}^i$ $i = 1, \ldots, m$. Nous introduisons les ensembles

$$S^i_{\mathbf{q}^i} = \left\{ \begin{array}{ll} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \mathbf{x} = \mathbf{h}^i + [\mathcal{R}(\Theta^i)](\mathbf{y} - \mathbf{h}^i_0) \text{ pour } \mathbf{y} \in S^i\} & \text{pour} \quad n = 3, \\ \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \mathbf{x} = \mathbf{h}^i + [R(\theta^i)](\mathbf{y} - \mathbf{h}^i_0) \text{ pour } \mathbf{y} \in S^i\} & \text{pour} \quad n = 2. \end{array} \right.$$

Les positions et les vitesses des solides vont déterminer le domaine du fluide ainsi que le champ de vitesses du fluide à chaque instant t. Pour montrer cette dépendance nous notons

$$S_{\mathbf{q}} = \cup_{i=1}^m S^i_{\mathbf{q}^i}, \quad F_{\mathbf{q}} = \Omega \setminus S_{\mathbf{q}}.$$

La dépendance par rapport au temps de ces ensembles se lit au travers de $\mathbf{q}$. Ceci permet de découper la fonction Ψ en une somme de fonctions :

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \dot{\mathbf{q}}^i(t) \cdot \Phi^i(t, \mathbf{x}), \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in F(t) \text{ et } t \in [0, T],$$

où les fonctions $\Phi^i = (\Phi^i_1, \ldots, \Phi^i_N)$, pour $N = n(n+1)/2$, sont solutions des problèmes de Neumann suivants :

$$\begin{array}{rcl} -\Delta\Phi^i_j(t, \mathbf{x}) & = & 0 \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in F_{\mathbf{q}(t)} \\ \dfrac{\partial \Phi^i_j}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) & = & 0 \text{ pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega \cup_{k \neq i} \partial S^k_{\mathbf{q}^k(t)}, \\ \dfrac{\partial \Phi^i_j}{\partial \mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) & = & \mathbf{K}^i_j(t, \mathbf{x}) \text{ pour } \mathbf{x} \in \partial S^i_{\mathbf{q}^i(t)}, \end{array}$$

pour tout $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, N$. Pour définir les fonctions $\mathbf{K}^i_j$ nous distinguons les cas $n = 3$ et $n = 2$. Pour le cas $n = 3$, les fonction $\mathbf{K}^i_j$ sont données par

$$\mathbf{K}^i(t, \mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{K}^i_j(t, \mathbf{x}) = \mathbf{n}_j(t, \mathbf{x}) & \text{pour } j = 1, 2, 3, \\ \mathbf{K}^i_j(t, \mathbf{x}) = \mathbf{n}(t, \mathbf{x}) \cdot ([B_{j-3}(\Theta^i)](\mathbf{x} - \mathbf{h}^i)) & \text{pour } j = 4, 5, 6, \end{array} \right. \tag{1.36}$$

où les matrices $[B_1(\Theta^i)]$, $[B_2(\Theta^i)]$ et $[B_3(\Theta^i)]$ sont définies par les formules (1.2) et le vecteur $\mathbf{n}$ est le vecteur normale à la surface $\partial S^i_{\mathbf{q}^i(t)}$ dirigée vers l'intérieur du solide $S^i_{\mathbf{q}^i}$. Pour le cas $n = 2$, les $\mathbf{K}^i$ deviennent

$$\mathbf{K}^i(t, \mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{K}^i_j(t, \mathbf{x}) = \mathbf{n}_j(t, \mathbf{x}) & \text{pour } j = 1, 2, \\ \mathbf{K}^i_j(t, \mathbf{x}) = [A_0](\mathbf{x} - \mathbf{h}^i)) \cdot \mathbf{n}(t, \mathbf{x}) & \text{pour } j = 3, \end{array} \right. \tag{1.37}$$

où la matrice $[A_0]$ est définie par la formule (1.6). Nous remarquons que ces applications ne sont définies que sur le bord des rigides. Or dans la suite nous aurons besoin de prolonger les fonctions $\mathbf{K}^i$ sur un voisinage de $\Gamma^i_{\mathbf{q}^i}$. Pour cela nous observons qu'il suffit de prolonger le vecteur normale $\mathbf{n}$ sur un voisinage de $\partial S^i_{\mathbf{q}^i}$. En utilisant le mouvement des rigides le vecteur normale $\mathbf{n}$ sur $\partial S^i_{\mathbf{q}^i(t)}$ s'écrit

$$\mathbf{n}(t, \mathbf{x}) = [R^i(t)]\overline{\mathbf{n}}(\mathbf{h}^i_0 + [R^i(t)]^*(\mathbf{x} - \mathbf{h}^i(t)))$$

où $\overline{\mathbf{n}}$ est le vecteur normale sur ∂S^i, $\mathbf{h}^i$ est la position du centre de gravité du solide $S^i_{\mathbf{q}_i(t)}$ et $[R^i(t)]$ est la matrice de rotation du solide $S^i_{\mathbf{q}_i(t)}$. Il est important de remarquer que le vecteur $\overline{\mathbf{n}}$ ne dépend pas du temps t. Ainsi pour prolonger $\mathbf{K}^i$, il suffit de prolonger le vecteur $\overline{\mathbf{n}}$ sur un voisinage de ∂S^i. Pour simplifier les calcules nous introduisons une nouvelle indexation du vecteur Φ :

$$\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_{6m}) \text{ pour } n = 3, \quad \Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_{3m}) \text{ pour } n = 2.$$

Nous remarquons que les fonctions Φ^i sont déterminées par les trajectoires des solides. Ainsi cette modélisation du fluide permet d'appliquer le principe de moindre action aux paramètres $\mathbf{q}$ des solides et obtenir un système d'équations différentielles ordinaires du second ordre dont les coefficients dépendent des fonctions $\Phi = (\Phi^1, \ldots, \Phi^m)$.

Nous commençons par rappeler un principe fondamental de la mécanique analytique : les équations de Lagrange. Ces équations modélisent des systèmes avec un nombre fini de degré de liberté sous l'action de forces potentielles. Soit $m \geq 1$ un entier. Nous notons par $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m)$ les coordonnées généralisées du système et par $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q_1}, \ldots, \dot{q_m})$ les vitesses généralisées du système. Le Lagrangien du système est défini comme

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) = \mathbf{T}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t) - \mathbf{U}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t),$$

où $\mathbf{T}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$ est l'énergie cinétique du système et $\mathbf{U}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t)$ est l'énergie potentiel du système. Les équations de Lagrange sont

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0.$$

Le livre d'Arnold, V. [5, page 53] et celui de Goldstein, H. [23] contiennent de plus vastes explications sur le Lagrangien et ses applications.

Nous allons appliquer cette théorie au mouvement de rigides dans un fluide parfait incompressible et potentiel. Dans la suite les coordonnées généralisées du système seront

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^i &= (\mathbf{h}^i, \Theta^i) \text{ pour tout } i = 1, \ldots, m \text{ et } \mathbf{q} = (\mathbf{q}^1, \ldots, \mathbf{q}^m) \text{ si } n = 3, \\ \mathbf{q}^i &= (\mathbf{h}^i, \theta^i) \text{ pour tout } i = 1, \ldots, m \text{ et } \mathbf{q} = (\mathbf{q}^1, \ldots, \mathbf{q}^m) \text{ si } n = 2. \end{aligned}$$

où $\mathbf{h}^i$ est la position du centre de gravité du i-ème solide et Θ^i sont les angles d'Euler du i-ème solide alors que θ^i est l'angle de rotation dans le cas $n = 2$. Pour simplifier les notations, nous donnons une nouvelle indexation du vecteur $\mathbf{q}$ par

$$\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_{Nm}), \qquad \text{avec } N = n(n+1)/2.$$

Pour compléter le système, il faut ajouter des contraintes sur les coordonnées généralisées. Nous supposerons que les solides ne peuvent pas s'assembler ou ne peuvent pas sortir du domaine Ω. Ainsi les mouvements des solides sont contenus dans une sous-variété de $\mathbb{R}^{Nm}$, ou $N = n(n+1)/2$. Pour $\epsilon > 0$ et $\mathcal{U} =]-\pi, \pi[\times]-\pi/2, \pi/2[\times]-\pi, \pi[$, nous introduisons les variétés suivantes :

$$P^\epsilon(\Omega, S) = \Big\{ \mathbf{q} = (\mathbf{h}^i, \Theta^i)_{i=1,\ldots,m} \in \left[\mathbb{R}^3 \times \mathcal{U}\right]^m \;\Big|\; \mathrm{dist}(\mathrm{S}^{\mathrm{i}}_{\mathbf{q_i}}, \mathrm{S}^{\mathrm{j}}_{\mathbf{q_j}}) > \epsilon \text{ et } \mathrm{dist}(\mathrm{S}^{\mathrm{i}}_{\mathbf{q_i}}, \partial\Omega) > \epsilon \text{ pour tout } i, j = 1, \ldots, m \Big\} \text{ pour } n = 3. \quad (1.38)$$

$$P^\epsilon(\Omega, S) \Big\{ \mathbf{q} = (\mathbf{h}^i, \theta^i)_{i=1,\ldots,m} \in \mathbb{R}^{3m} \;\Big|\; \mathrm{dist}(\mathrm{S}^{\mathrm{i}}_{\mathbf{q_i}}, \mathrm{S}^{\mathrm{j}}_{\mathbf{q_j}}) > \epsilon \text{ et } \mathrm{dist}(\mathrm{S}^{\mathrm{i}}_{\mathbf{q_i}}, \partial\Omega) > \epsilon \text{ pour tout } i, j = 1, \ldots, m \Big\} \text{ pour } n = 2. \quad (1.39)$$

L'ensemble des positions admissibles pour les solides S^i est défini par la variété

$$P(\Omega, S) = \bigcup_{\epsilon>0} P^\epsilon(\Omega, S). \tag{1.40}$$

Cet ensemble représente les différentes positions possibles pour les solides dans le domaine Ω. De plus pour un élément $\mathbf{q} \in P(\Omega, S)$, nous observons que les solides $S^i_{\mathbf{q}^i}$ ne se touchent pas et qu'ils ne sont pas en contacts avec le bord du domaine $\partial\Omega$. Ainsi les trajectoires $\mathbf{q} = (\mathbf{h}^i, R^i)_i = 1, \ldots, m$ des solides vivent dans l'espace fonctionnel

$$\mathcal{C}^2([0,T]; P(\Omega, S)).$$

Pour former le Lagrangien du système, nous devons exprimer les énergies en fonction des coordonnées généralisées. Dans notre cas nous regarderons uniquement l'énergie cinétique du système. Pour $n = 3$ l'énergie cinétique du i-ème solide est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^i &= \int_{S^i_{\mathbf{q}^i}} \frac{\rho_i}{2} |\dot{\mathbf{h}^i}(t) + [\mathbf{w}(\Theta(t))] \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{h}^i(t))|^2 \mathrm{d}\mathbf{x}, \\ &= \frac{m_i}{2} |\mathbf{h}^i(t)|^2 + \frac{1}{2} [\mathcal{J}^i(\Theta^i(t))](\dot{\Theta}^i(t), \dot{\Theta}^i(t)), \end{aligned}$$

où la matrice $[\mathcal{J}^i(t)]$ est définie par

$$[\mathcal{J}^i(\Theta^i(t))] = [\mathbf{w}(\Theta^i(t))]^* \, [\mathcal{R}(\Theta^i(t))] \, [J^i_0] \, [\mathcal{R}(\Theta^i(t))] \, [\mathbf{w}(\Theta^i(t))],$$

où la matrice $[J^i_0]$ est définie par (1.8), les matrices $[\mathcal{R}(\Theta^i(t))]$ sont données par (1.1) et les matrices $[\mathbf{w}(\Theta^i(t))]$ sont

$$[\mathbf{w}(\Theta^i(t))] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sin(\theta^i_2) \\ 0 & \cos(\theta^i_1) & -\sin(\theta^i_1)\cos(\theta^i_2) \\ 0 & \sin(\theta^i_1) & \cos(\theta^i_1)\cos(\theta^i_2) \end{pmatrix}. \tag{1.41}$$

Ainsi la somme des énergie cinétiques est une forme quadratique en $(\dot{\mathbf{h}^i}, \dot{\Theta}^i)_{i=1,\ldots,m}$ donc les coefficients de sa matrice associée dépendent de la position $\mathbf{q}(t)$. Nous notons par $[\mathcal{K}_S(\mathbf{q}(t))]$ la matrice définie comme

$$[\mathcal{K}_S(\mathbf{q}(t))] = \mathrm{diag}\left[\begin{pmatrix} m_1 Id_3 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}^1(\Theta^1) \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} m_m Id_3 & 0 \\ 0 & \mathcal{J}^m(\Theta^m) \end{pmatrix} \right].$$

Il est facile de vérifier que cette matrice est symétrique et définie positive. Pour n=2 la matrice $[\mathcal{K}_S(\mathbf{q}(t))]$ devient

$$[\mathcal{K}_S(\mathbf{q}(t))] = [\mathcal{K}_S] = \mathrm{diag}\left[\begin{pmatrix} m_1 Id_2 & 0 \\ 0 & I^1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} m_m Id_2 & 0 \\ 0 & I^m \end{pmatrix} \right],$$

où les scalaires I_j pour $j = 1, \ldots, m$ sont définies par les intégrales :

$$I^j = \int_{S^j(0)} \|\mathbf{y} - \mathbf{h}^j_0\| \mathrm{d}\mathbf{y}.$$

De même cette matrice est symétrique et définie positive. Dans les deux cas, la somme des énergies cinétiques des solides se réduisent à

$$\mathbf{T}_S = \frac{1}{2} \, [\mathcal{K}_S(\mathbf{q}(t))] \, (\dot{\mathbf{q}(t)}, \dot{\mathbf{q}(t)}).$$

Grâce à la décomposition de la vitesse du fluide en somme de potentiel, l'expression de son énergie cinétique est aussi une forme quadratique des vitesses généralisées :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_F &= \frac{\rho_f}{2}\int_{F_{\mathbf{q}(t)}} |\nabla\Psi(t,\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x},\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}\left[\int_{F_{\mathbf{q}(t)}} \rho_f \nabla\Phi_i(t,\mathbf{x})\cdot\nabla\Phi_j(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\right]\dot{\mathbf{q}}_i(t)\dot{\mathbf{q}}_j(t).\end{aligned}$$

Nous notons par $[\mathcal{K}_f(\mathbf{q}(t))]$ la matrice associée à cette forme quadratique qui est définie par

$$[\mathcal{K}_F(\mathbf{q}(t))]_{i,j} = \int_{F_{\mathbf{q}(t)}} \rho_f \nabla\Phi_i(t,\mathbf{x})\cdot\nabla\Phi_j(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}, \qquad \text{pour } i,j=1,\ldots,m.$$

Il est facile de vérifier que cette matrice est symétrique et positive. Ainsi l'énergie cinétique du système est une forme quadratique des vitesses généralisées dont sa matrice associée est

$$[\mathcal{K}(\mathbf{q})] = [\mathcal{K}_S(\mathbf{q})] + [\mathcal{K}_F(\mathbf{q})], \tag{1.42}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_S + \mathbf{T}_F = \frac{1}{2}([\mathcal{K}(\mathbf{q})]\dot{\mathbf{q}})\cdot\dot{\mathbf{q}}. \tag{1.43}$$

La matrice $[\mathcal{K}(\mathbf{q})]$ est la matrice de masse du système ou la matrice de masse virtuelle du système. Cette terminologie provient de l'analogie avec l'énergie cinétique d'un système de points.

Chapitre 2

Mouvement d'un disque dans un fluide remplissant un demi-plan

Dans ce chapitre nous étudierons en détail un exemple simple de mouvement d'un rigide à l'intérieur d'un fluide. Il s'agit du mouvement d'un disque de rayon 1 dans un fluide potentiel contenu dans un demi-plan. Nous préciserons ici des résultats classiques de Thomson et Tait (voir par exemple le livre de Lamb [34, Chapitre VI page 187]). Un des intérêts de cet exemple est qu'il permet d'introduire dans un cadre simple les principales méthodes de notre approche. Dans ce cas nous pouvons observer l'influence de la paroi sur le mouvement du disque et nous pouvons donner une estimation de l'instant du contact entre le disque et la paroi.

À l'instant $t \geq 0$ la position du disque $S(t)$ est donnée par les coordonnées de son centre de gravité $\mathbf{h}(t) = (h_1(t), h_2(t))$. Nous notons $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R} \,|\quad y > 0\}$, et $F(t) = \Omega \setminus \overline{S(t)}$ le domaine occupé par le fluide.

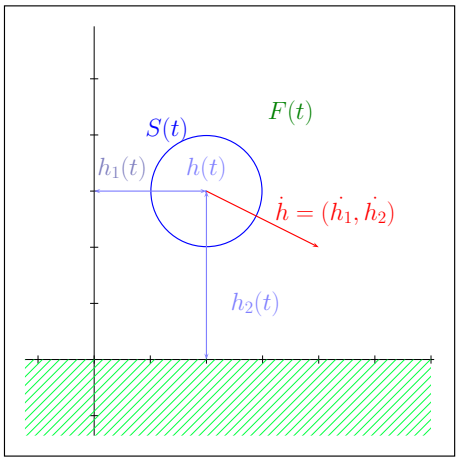


FIG. 2.1 – Disque dans un demi-plan

Nous supposons que la vitesse du fluide s'écrit comme le gradient d'une fonction. Il existe donc une application ϕ telle que la vitesse du fluide est définie comme

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \nabla\phi(t, \mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in F(t).$$

Ainsi l'équation de continuité du fluide et les conditions aux interfaces conduisent au problème de Neumann suivant pour la fonction ϕ :

$$\begin{aligned}
\Delta\phi(t, \mathbf{x}) &= 0 \qquad \mathbf{x} \in F(t), t \in [0, T] \\
\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) &= 0 \qquad x_2 = 0,\ t \in [0, T] \\
\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) &= [\dot{\mathbf{h}}(t) + \dot{\theta}(t)[A_0](\mathbf{x} - \mathbf{h}(t))] \cdot \mathbf{n}(t, \mathbf{x}) \qquad , |\mathbf{x} - \mathbf{h}(t)| = 1,\ t \in [0, T].
\end{aligned}$$

où $\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) = (n_1(t,\mathbf{x}), n_2(t,\mathbf{x}))$ est le vecteur normale orienté vers l'extérieur du fluide. En remarquant que la normale sur le bord du disque est $\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{h}(t) - \mathbf{x}$, la condition sur le bord du disque devient

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{h}}(t)\cdot(\mathbf{h}(t)-\mathbf{x}), \qquad |\mathbf{x}-\mathbf{h}(t)| = 1,\ t\in[0,T].$$

Nous supposerons aussi que le fluide est au repos à l'infini et donc ceci est traduit par la condition suivante

$$\nabla\phi(\mathbf{x}) \to 0 \qquad \text{si } |\mathbf{x}| \to \infty.$$

En suivant les idées développées dans le livre de Lamb, nous décomposons la vitesse du fluide en somme de fonctions potentielles comme ceci :

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = \dot{h_1}(t)\nabla\phi_1(t,\mathbf{x}) + \dot{h_2}(t)\nabla\phi_2(t,\mathbf{x}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x}\in F(t) \text{ et } t\geq 0,$$

où les fonctions ϕ_k sont solutions des problèmes de Neumann suivants : nous introduisons les fonctions :

$$-\Delta\phi_k(t,\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{x}\in F(t), t\geq 0, \tag{2.1a}$$

$$\frac{\partial\phi_k}{\partial\mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{x}\in\partial\Omega, t\geq 0, \tag{2.1b}$$

$$\frac{\partial\phi_k}{\partial\mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) = h_k(t) - x_k \qquad \text{pour tout } \mathbf{x}\in\partial S(t), t\geq 0. \tag{2.1c}$$

Nous ajoutons aussi la condition à l'infini sur le gradient de ϕ_k

$$\nabla\phi_k(\mathbf{x}) \to 0 \qquad \text{si } |\mathbf{x}| \to \infty$$

Cette décomposition est due à Thomson et Tait(voir le livre de Lamb [34]). Le Lagrangien du système se réduit à la somme de l'énergie cinétique du fluide et de l'énergie cinétique du solide. L'énergie cinétique du fluide est

$$E_F = \frac{1}{2}\rho_F\int_{F(t)}|\mathbf{u}(t,\mathbf{x})|^2\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{2}\rho_\mathrm{F}\sum_{\mathrm{i,j}=1,2}\dot{\mathrm{h}}_\mathrm{i}\dot{\mathrm{h}}_\mathrm{j}\int_{\mathrm{F(t)}}\nabla\phi_\mathrm{i}(\mathrm{t},\mathbf{x})\cdot\nabla\phi_\mathrm{j}(\mathrm{t},\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x},$$

et de l'énergie cinétique du solide est

$$E_S = \frac{1}{2}m_s(\dot{h_1}^2(t) + \dot{h_2}^2(t)).$$

Donc le Lagrangien du système est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_s(\dot{h_1}^2 + \dot{h_2}^2) + \rho_F\sum_{i,j=1,2}\dot{h_i}\dot{h_j}\int_{F(t)}\nabla\phi_i(t,\mathbf{x})\cdot\nabla\phi_j(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{2.2}$$

Grâce à la géométrie particulière, nous pouvons calculer sous formes de série les fonctions ϕ_k, pour $k = 1, 2$, en utilisant une transformation conforme.

2.1 Quelques rappels sur les transformations conformes

Dans cette partie nous rappelons plusieurs résultats connus sur les transformations conformes (voir par exemple le livre de Henrici [27]).

Définition 2.1.1 *Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ deux ouverts de $\mathbb{C}$. Une fonction $\mathbf{f} : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ est une transformation conforme si $\mathbf{f}$ est une bijection de $\mathcal{O}_1$ sur $\mathcal{O}_2$ avec $\mathbf{f}$ et $\mathbf{f}^{-1}$ holomorphes.*

Voici quelques propriétés des transformations conformes :

Lemme 2.1.1 *Soit $\mathcal{O}$ et $\widetilde{\mathcal{O}}$ deux ouverts de $\mathbb{C}$ et $\mathbf{P} = P_1 + iP_2 : \mathcal{O} \to \widetilde{\mathcal{O}}$ une transformation conforme, avec $P_1, P_2 : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$.*

1. *Soit une fonction $\mathbf{f} \in C^2(\widetilde{\mathcal{O}})$, on note $\mathbf{F} = \mathbf{f} \circ \mathbf{P}$, alors $\mathbf{F} \in C^2(\mathcal{O})$ et nous avons la relation*
$$\Delta\mathbf{F}(w_1, w_2) = \left[\left(\frac{\partial P_1}{\partial w_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial P_2}{\partial w_1}\right)^2\right] \Delta\mathbf{f}(\mathbf{P}(\mathbf{w})), \tag{2.3}$$
pour tout $\mathbf{w} = w_1 + iw_2 \in \mathcal{O}$.
2. *Soit Γ une courbe de classe C^1, $\Gamma \subset \overline{\mathcal{O}}$ et $\mathbf{n}$ le vecteur normale à Γ. Nous posons $\widetilde{\Gamma} = \mathbf{P}(\Gamma) \subset \overline{\widetilde{\mathcal{O}}}$ et $\widetilde{\mathbf{n}}$ le vecteur normale à $\widetilde{\Gamma}$,alors on a :*
$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{n}}(w_1, w_2) = |\mathbf{P}'(\mathbf{w})| \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \widetilde{\mathbf{n}}}(\mathbf{P}(w_1, w_2)), \tag{2.4}$$
où $\mathbf{P}'$ est la dérivée de la fonction holomorphe $\mathbf{P}$.

Preuve : Nous calculons le laplacien de $\mathbf{F}(\mathbf{w})$.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial w_1^2}(\mathbf{w}) = \frac{\partial^2 P_1}{\partial w_1^2}(\mathbf{w})\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}(\mathbf{P}(\mathbf{w})) + (\frac{\partial P_1}{\partial w_1})^2(\mathbf{w})\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_1^2}(\mathbf{P}(\mathbf{w})) + 2\frac{\partial P_1}{\partial w_1}(\mathbf{w})\frac{\partial P_2}{\partial w_1}(\mathbf{w})\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{P}(\mathbf{w})) + \frac{\partial^2 P_2}{\partial w_1^2}(\mathbf{w})\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2}(\mathbf{P}(\mathbf{w}))$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial w_2^2}(\mathbf{w}) = \frac{\partial^2 P_1}{\partial w_2^2}(\mathbf{w})\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1}(\mathbf{P}(\mathbf{w})) + (\frac{\partial P_1}{\partial w_2})^2(\mathbf{w})\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_1^2}(\mathbf{P}(\mathbf{w})) + 2\frac{\partial P_1}{\partial w_2}(\mathbf{w})\frac{\partial P_2}{\partial w_2}(\mathbf{w})\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{P}(\mathbf{w})) + \frac{\partial^2 P_2}{\partial w_2^2}(\mathbf{w})\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_2}(\mathbf{P}(\mathbf{w}))$$

En appliquant les équations de Cauchy-Riemann pour les fonctions holomorphes, nous obtenons la formule
$$\Delta\mathbf{F}(\mathbf{w}) = |\mathbf{P}'(\mathbf{w})|^2 \Delta\mathbf{f}(\mathbf{P}(\mathbf{w})).$$
La matrice Jacobienne de $\mathbf{P}$ se met sous la forme suivante :
$$\mathrm{D}(\mathbf{P})\mathbf{w}) = |\mathbf{P}'(\mathbf{w})| \mathbf{Q}(\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2),$$
où $\mathbf{Q}$ est une matrice orthogonale. Le vecteur normale sur Γ peut être exprimé en fonction de celui sur $\tilde{\Gamma}$:
$$\mathbf{n}(\mathbf{w}) = \mathbf{Q}(\mathbf{w})\tilde{\mathbf{n}}(\mathbf{P}(\mathbf{w})).$$
L'orthogonalité de la matrice $\mathbf{Q}$ donne la formule (2.4) ■

En remarquant que le domaine $F(t)$ peut être définit si on connaît le vecteur $\mathbf{h}(t)$, il suffit de résoudre le problème de Neumann (2.1) pour une position quelconque du disque. Ainsi pour tout $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$, avec $h_2 > 1$, nous introduisons le domaine :
$$\Omega_{\mathbf{h}} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_2 > 0 \text{ et } (x_1 - h_1)^2 + (x_2 - h_2)^2 > 1\right\}$$

Grâce au Lemme 2.1.1, nous transformons le problème (2.1) en un nouveau problème de Neumann sur une couronne. Nous introduisons d'abord la transformation conforme construite dans Henrici voir le Théorème 5.4.e [27, page 321] et l'exemple qui suit.

Proposition 2.1.1 *Soient* $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ *avec* $h_2 > 1$, *on pose* $a = \sqrt{h_2^2 - 1}$ *et* $\sigma = h_2 - a$. *Pour tout* $\mathbf{z} \in \Omega_{\mathbf{h}}$ *on pose*

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{z} - (h_1 + ia)}{\mathbf{z} - (h_1 - ia)} = 1 - \frac{2ia}{\mathbf{z} - (h_1 - ia)}. \tag{2.5}$$

$\mathbf{G}$ *est une transformation conforme de* $\Omega_{\mathbf{h}}$ *sur* $A_\sigma = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 \, | \sigma^2 < w_1^2 + w_2^2 < 1\}$. *Pour tout* $\mathbf{w} \in A_\sigma$, *l'inverse* $\mathbf{g}$ *de* $\mathbf{G}$ *est donnée par :*

$$\mathbf{g}(\mathbf{w}) = h_1 - ia + \frac{2ia}{1 - \mathbf{w}}. \tag{2.6}$$

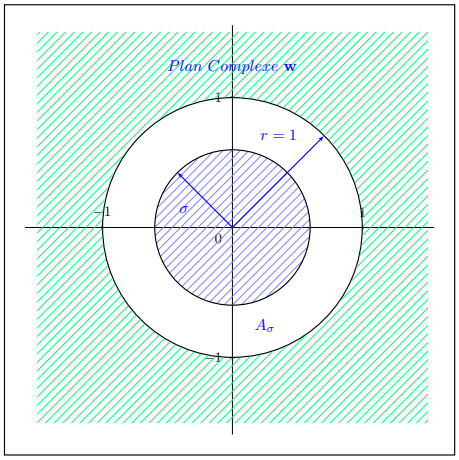


FIG. 2.2 – La couronne A_σ

Preuve : Nous pouvons trouver une construction détaillée de ces fonctions dans le livre de Henrici [27]. Il est facile de voir que les fonctions $\mathbf{G}$ et $\mathbf{g}$ sont holomorphes sur $\Omega_{\mathbf{h}}$ et A_σ. De plus nous remarquons que $\mathbf{g}$ est bien l'inverse de $\mathbf{G}$. Il suffit donc de montrer que l'image du bord de $\Omega_{\mathbf{h}}$ est envoyé sur le bord de A_σ. Pour $\mathbf{z} = t \in \mathbb{R}$ on montre que $|\mathbf{G}(\mathbf{z})| = 1$.

$$\mathbf{G}(t) = \frac{t - h_1 - ia}{t - h_1 + ia} = \frac{[t - h_1 - ia]^2}{(t - h_1)^2 + a^2)} = \frac{(t - h_1)^2 - a^2 - 2ia(t - h_1)}{(t - h_1)^2 + a^2}.$$

Ceci prouve que $|\mathbf{G}(t)| = 1$. Pour $\theta \in [0, 2\pi]$, nous posons $\mathbf{z}_\theta = \mathbf{h} + e^{i\theta}$. En remarquant que $1/\sigma = h_2 + a$, nous calculons $|\mathbf{G}(\mathbf{z}_\theta)|$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{G}(\mathbf{z}_\theta)| &= \left| \frac{\cos(\theta) + i(h_2 - a + \sin(\theta)}{\cos(\theta) + i(h_2 + a + \sin(\theta))} \right| \\ &= \sigma \left| \frac{\cos(\theta) + i(\sigma + \sin(\theta))}{\sigma\cos(\theta) + i(1 + \sigma\sin(\theta))} \right| \\ &= \sigma. \end{aligned}$$

■

Nous appliquons le Lemme 2.1.1 pour obtenir de nouveaux problèmes de Neumann sur la couronne A_σ. Nous introduisons les fonctions $\psi_k(w_1, w_2) = \phi_k(\mathbf{g}(w_1, w_2))$ pour tout $\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in A_\sigma$ et $k = 1, 2$. Les fonctions ψ_k sont solutions des problèmes de Neumann suivant :

$$-\Delta\psi_k(w_1,w_2)=0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{w}\in A_\sigma, \tag{2.7a}$$
$$\frac{\partial\psi_k}{\partial\mathbf{n}}(w_1,w_2)=0 \qquad \text{pour } |\mathbf{w}|=1, \tag{2.7b}$$
$$\frac{\partial\psi_k}{\partial\mathbf{n}}(w_1,w_2)=|\mathbf{g}'(\mathbf{w})|(h_k-\mathbf{g}_k(\mathbf{w})) \qquad \text{pour } |\mathbf{w}|=\sigma, \tag{2.7c}$$

Nous calculons la dérivée normale de ψ pour $|\mathbf{w}|=\sigma=h_2-\sqrt{h_2^2-1}$:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{g}'(\mathbf{w})| &= \frac{2a}{1+\sigma^2-2w_1},\\
\mathbf{g}_1(\mathbf{w}) &= h_1-\frac{2aw_2}{1+\sigma^2-2w_1},\\
\mathbf{g}_1(\mathbf{w}) &= -a+\frac{2a(1-w_1)}{1+\sigma^2-2w_1}.
\end{aligned}$$

En écrivant h_2 et a en fonction σ et pour $|\mathbf{w}|=\sigma$, nous obtenons les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi_1}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{w}) &= \frac{4a^2w_2}{(1+\sigma^2-2w_1)^2},\\
\frac{\partial\psi_2}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{w}) &= \frac{2a}{\sigma}\frac{2\sigma^2-(1+\sigma^2)w_1}{(1+\sigma^2-2w_1)^2}.
\end{aligned}$$

Pour résoudre des problèmes de Neumann sur une couronne nous allons adapter la démonstration de la formule de Villat tirée du livre de Caïus Jacob [32, page 47]. La formule de Villat utilise les fonctions elliptiques or pour la suite des calculs cette forme de solution n'est pas très adapter. Nous donnerons les solutions sous forme de série entière définie dans la couronne. Soient $0<r_1<r_2$, nous notons

$$C(r_1,r_2)=\{\mathbf{w}\in\mathbb{C}\,|r_1<|\mathbf{w}|<r_2\},$$

la couronne de centre 0 et de rayons r_1 et r_2. Nous considérons le problème de Neumann suivant :

$$\begin{aligned}
-\Delta\Phi(w_1,w_2) &= 0 \qquad \text{pour } \mathbf{w}\in C(r_1,r_2),\\
\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}(w_1,w_2) &= \gamma_1(w_1,w_2) \text{ pour } |\mathbf{w}|=r_1,\\
\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}(w_1,w_2) &= \gamma_2(w_1,w_2) \text{ pour } |\mathbf{w}|=r_2.
\end{aligned}$$

où $(\gamma_1,\gamma_2)\in H^{1/2}(D(r_1,r_2)$ avec

$$D(r_1,r_2)=\{\mathbf{w}\in\mathbb{C}\;|\;|w|=r_1 \text{ et } |w|=r_2\}.$$

Nous construisons une fonction holomorphe $\mathbf{F}$ sur $C(r_1,r_2)$ dont la partie réelle soit Φ. Une telle fonction $\mathbf{F}$ se décompose en série de Laurent :

$$\mathbf{F}(\mathbf{w})=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\alpha_k+i\beta_k)\mathbf{w}^k. \tag{2.8}$$

En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, la dérivée normale de Φ s'exprime en fonction de $\mathbf{F}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{w}) &= \frac{\partial \Phi}{\partial w_1} n_1(w_1,w_2) + \frac{\partial \Phi}{\partial w_2} n_2(w_1,w_2), \\
&= \frac{\partial F_1}{\partial w_1} n_1(w_1,w_2) + \frac{\partial F_1}{\partial w_2} n_2(w_1,w_2), \\
&= \frac{\partial F_1}{\partial w_1} n_1(w_1,w_2) - \frac{\partial F_2}{\partial w_1} n_2(w_1,w_2), \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathrm{w}_1}(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{w}) \right), \\
&= \mathrm{Re}\left(\mathbf{F}'(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{w}) \right).
\end{aligned}$$

En identifiant le vecteur normal sur les contours,

$$\mathbf{n}(\mathbf{w}) = \begin{cases} -\mathbf{w}/r_1 & \text{pour } |\mathbf{w}| = r_1, \\ \mathbf{w}/r_2 & \text{pour } |\mathbf{w}| = r_2, \end{cases}$$

nous pouvons en déduire des conditions de bord sur $\mathbf{F}$:

$$\mathrm{Re}\left[\mathbf{w}\mathbf{F}'(\mathbf{w})\right] = -r_1 \gamma_1(w_1,w_2) \qquad \text{pour } |\mathbf{w}| = r_1, \tag{2.9a}$$

$$\mathrm{Re}\left[\mathbf{w}\mathbf{F}'(\mathbf{w})\right] = r_2 \gamma_2(w_1,w_2) \qquad \text{pour } |\mathbf{w}| = r_2. \tag{2.9b}$$

Ces relations permettent d'écrire les coefficients α_k et β_k en fonction de γ_1 et γ_2.

Proposition 2.1.2 *Soient $(\gamma_1,\gamma_2) \in H^{1/2}(D(r_1,r_2))$ telles que*

$$\int_0^{2\pi} \gamma_i(r_i\cos(\theta), r_i\sin(\theta))\mathrm{d}\theta = 0, \quad \mathrm{i} = \{1,2\}$$

alors pour tout $\mathbf{w} \in C(r_1,r_2)$ et pour tout $\alpha_0 + i\beta_0 \in \mathbb{C}$ les fonctions :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{w}) = \alpha_0 + i\beta_0 + \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{2}{k(r_1^{2k} - r_2^{2k})} \Bigg\{ & \frac{r_2^{k+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_2(r_2\cos(\theta), r_2\sin(\theta)) e^{-ik\theta} \mathrm{d}\theta \\
& + \frac{r_1^{k+1}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_1(r_1\cos(\theta), r_1\sin(\theta)) e^{-ik\theta} \mathrm{d}\theta \Bigg\} \mathbf{w}^k,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

sont holomorphes sur $C(r_1,r_2)$ et vérifient les équations (2.9).

Preuve : Nous remplaçons $\mathbf{w} = \rho e^{i\theta}$ pour $r_1 \le \rho \le r_2$ et $\theta \in [0, 2\pi]$ dans (2.9), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left[\mathbf{w}\mathbf{F}'(\mathbf{w})\right] &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} (\alpha_k \cos(k\theta) - \beta_k \sin(k\theta)) k\rho^k, \\
&= \sum_{k\ge 1} k(\rho^k\alpha_k - \rho^{-k}\alpha_{-k})\cos(k\theta) - k(\rho^k\beta_k + \rho^{-k}\beta_{-k})\sin(k\theta).
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de Fourier pour $\rho = r_1$ et $\rho = r_2$, nous obtenons ces relations sur les coefficients α_k et β_k :

$$\begin{aligned}
k(r_1^k\alpha_k - r_1^{-k}\alpha_{-k}) &= \frac{-r_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_1(r_1\cos(\theta), r_1\sin(\theta))\cos(k\theta)\mathrm{d}\theta, \\
k(r_2^k\alpha_k - r_2^{-k}\alpha_{-k}) &= \frac{r_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_2(r_2\cos(\theta), r_2\sin(\theta))\cos(k\theta)\mathrm{d}\theta, \\
-k(r_1^k\beta_k + r_1^{-k}\beta_{-k}) &= \frac{-r_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_i(r_1\cos(\theta), r_1\sin(\theta))\sin(k\theta)\mathrm{d}\theta, \\
-k(r_2^k\beta_k + r_2^{-k}\beta_{-k}) &= \frac{r_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_2(r_2\cos(\theta), r_2\sin(\theta))\sin(k\theta)\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}$$

pour $k \geq 1$ et $i = 1, 2$. Nous remarquons ici que les conditions $\int_{\mathbf{w}=r_i} \gamma_i(w_1, w_2)\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{w}} = 0$ sont nécessaires car le coefficient pour $k = 0$ est nul dans le développement en série de

$$\mathrm{Re}\left[\mathbf{w}\mathbf{F}'(\mathbf{w})\right]_{|_{\mathbf{w}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}}.$$

De plus ces conditions impliquent les conditions de compatibilité pour le problème de Neumann (2.7), ceci justifie donc l'existence de solution du problème (2.7). En combinant ces relations, nous retrouvons les expressions des coefficients α_k et β_k :

$$\alpha_k = \frac{2}{k(r_2^{2k} - r_1^{2k})}\left\{\frac{r_2^{k+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_2(r_2\cos(\theta), r_2\sin\theta)\cos(k\theta)\mathrm{d}\theta \right. \\ \left. + \frac{r_1^{k+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_1(r_1\cos(\theta), r_1\sin(\theta))\cos(k\theta)\mathrm{d}\theta\right\},$$

$$\alpha_{-k} = \frac{2}{-k(r_2^{-2k} - r_1^{2-k})}\left\{\frac{r_2^{-k+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_2(r_2\cos(\theta), r_2\sin(\theta))\cos(k\theta)\mathrm{d}\theta \right. \\ \left. + \frac{r_1^{-k+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_1(r_1\cos(\theta), r_1\sin(\theta))\cos(k\theta)\mathrm{d}\theta\right\},$$

$$\beta_k = \frac{-2}{k(r_2^{2k} - r_1^{2k})}\left\{\frac{r_2^{k+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_2(r_2\cos(\theta), r_2\sin(\theta))\sin k\theta\mathrm{d}\theta \right. \\ \left. + \frac{r_1^{k+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_1(r_1\cos(\theta), r_1\sin(\theta))\sin(k\theta)\mathrm{d}\theta\right\},$$

$$\beta_{-k} = \frac{-2}{-k(r_2^{-2k} - r_1^{-2k})}\left\{\frac{r_2^{-k+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_2(r_2\cos(\theta), r_2\sin(\theta))\sin(k\theta)\mathrm{d}\theta \right. \\ \left. + \frac{r_1^{-k+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_1(r_1\cos(\theta), r_1\sin(\theta))\sin(k\theta)\mathrm{d}\theta\right\}.$$

Nous en déduisons les expressions des coefficients de la série $\mathbf{F}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$:

$$\alpha_k + i\beta_k = \frac{2}{k(r_2^{2k} - r_1^{2k})}\left\{\frac{r_2^{k+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_2(r_2\cos(\theta), r_2\sin(\theta))e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta \right. \\ \left. + \frac{r_1^{k+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_1(r_1\cos(\theta), r_1\sin(\theta))e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta\right\}.$$

Les coefficients α_0 et β_0 ne peuvent pas être déterminé car les problèmes de Neumann (2.7) sont définis à une constante près. Nous vérifions maintenant que cette série est bien convergente. Pour cela il faut utiliser le fait que

$$(\gamma_1, \gamma_2) \in H^{1/2}(C(r_1, r_2)) \subset L^2(C(r_1, r_2)).$$

Ainsi si nous notons par $c_k(\gamma_i)$ le k-ème coefficient de Fourier de la fonction γ_i pour $i \in \{1, 2\}$ la formule de Parseval implique

$$\int_0^{2\pi} |\gamma_i(r_i\cos(\theta), r_i\sin(\theta))|^2\mathrm{d}\theta = 2\pi\sum_{\mathrm{k}\in\mathbb{Z}^*} |\mathrm{c_k}(\gamma_\mathrm{i})|^2 < +\infty.$$

Pour montrer que la série $\mathbf{F}$ est convergente nous commençons par appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la fonction $\mathbf{F}$. Pour simplifier les calculs nous prenons $\alpha_0 = \beta_0 = 0$.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{F}(\mathbf{w})| &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{2}{k(r_1^{2k} - r_2^{2k})} \left[r_2^{k+1} c_k(\gamma_2) + r_1^{k+1} c_k(\gamma_1)\right] \mathbf{w}^k \\
&\leq \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{4r_2^{2k+2}}{k^2(r_1^{2k} - r_2^{2k})^2} |\mathbf{w}|^{2k}\right]^{1/2} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |c_k(\gamma_2)|\right)^{1/2} \\
&+ \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \frac{4r_1^{2k+2}}{k^2(r_1^{2k} - r_2^{2k})^2} |\mathbf{w}|^{2k}\right]^{1/2} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^*} |c_k(\gamma_1)|\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Les sommes sur les $c_k(\gamma_i)$ sont finies car γ_i sont dans L^2. Il suffit donc de chercher les valeurs de $\mathbf{w}$ pour lesquelles ces séries convergent. Nous considérons les séries définies par les suites suivantes :

$$\begin{aligned}
A_k &= \frac{4r_2^{2k+2}}{k^2(r_1^{2k} - r_2^{2k})^2} |\mathbf{w}|^{2k}, \\
B_k &= \frac{4r_2^{-2k+2}}{k^2(r_1^{-2k} - r_2^{-2k})^2} |\mathbf{w}|^{-2k}, \\
C_k &= \frac{4r_1^{2k+2}}{k^2(r_1^{2k} - r_2^{2k})^2} |\mathbf{w}|^{2k}, \\
D_k &= \frac{4r_1^{-2k+2}}{k^2(r_1^{-2k} - r_2^{-2k})^2} |\mathbf{w}|^{-2k}.
\end{aligned}$$

Pour tout $r_1 \leq |\mathbf{w}| \leq r_2$ nous avons

$$\begin{aligned}
A_k &\leq \frac{4r_2^{4k+2}}{k^2(r_1^{2k} - r_2^{2k})^2} \leq \frac{4r_2^2}{k^2\left(1 - (\frac{r_1}{r_2})^{2k}\right)^2} \leq \frac{4r_2^2}{k^2}, \\
B_k &\leq \frac{4r_2^{-2k+2} r_1^{-2k}}{k^2(r_1^{-2k} - r_2^{-2k})^2} \leq \frac{4r_2^2(\frac{r_1}{r_2})^{2k}}{k^2\left(1 - (\frac{r_1}{r_2})^{2k}\right)^2} \leq \frac{4r_2^2}{k^2}, \\
C_k &\leq \frac{4r_1^{2k+2} r_2^{2k}}{k^2(r_1^{2k} - r_2^{2k})^2} \leq \frac{4r_1^2(\frac{r_1}{r_2})^{2k}}{k^2\left(1 - (\frac{r_1}{r_2})^{2k}\right)^2} \leq \frac{4r_1^2}{k^2}, \\
D_k &\leq \frac{4r_1^{-2k+2} r_1^{-2k}}{k^2(r_1^{-2k} - r_2^{-2k})^2} \leq \frac{4r_1^2}{k^2\left(1 - (\frac{r_1}{r_2})^{2k}\right)^2} \leq \frac{4r_1^2}{k^2}.
\end{aligned}$$

Grâce à ces inégalités nous obtenons la majoration suivante sur $\mathbf{F}$

$$\begin{aligned}
|\mathbf{F}(\mathbf{w})| &\leq \left(\sum_{k\geq 1} \frac{8r_2^2}{k^2}\right)^{1/2} \|\gamma_2\|_{L^2} + \left(\sum_{k\geq 1} \frac{8r_1^2}{k^2}\right)^{1/2} \|\gamma_1\|_{L^2}, \\
&\leq \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(r_2\|\gamma_2\|_{L^2} + r_1\|\gamma_1\|_{L^2}\right),
\end{aligned}$$

pour tout $r_1 \leq |\mathbf{w}| \leq r_2$. Nous obtenons donc une majoration uniforme pour $\mathbf{F}$. Ceci implique que $\mathbf{F}$ est holomorphe sur $C(r_1, r_2)$ et continue sur $D(r_1, r_2)$. Donc les conditions de bord sont vérifiées. ■

Nous ne fixons pas les constantes α_0 et β_0 car elles vont jouer un rôle important dans la convergence du problème de Neumann lors des chocs. En prenant une valeur particulière de ces constantes nous montrerons que la suite de problème de Neumann converge vers un solution du problème limite.

2.2 Étude du Lagrangien du système

Nous appliquons d'abord la Proposition 2.1.2 aux problèmes (2.7). Pour $k = 1, 2$, nous notons $\mathbf{F}^k$ les fonctions holomorphes dont ψ_k est la partie réelle. Nous rappelons que la fonction ψ_k est solution du problème de Neumann (2.7). Nous soulignons ici qu'il n'y a pas unicité des $\mathbf{F}^k$ qui sont définies à une constante près. Nous allons calculer les coefficients du développement en série de Laurent des fonctions $\mathbf{F}^k$.

Lemme 2.2.1 *Pour tout $\mathbf{w} \in A_\sigma$, les fonctions $\mathbf{F}^1$ et $\mathbf{F}^2$ s'écrivent :*

$$\mathbf{F}^1(\mathbf{w}) = \alpha_0^1 + i\beta_0^1 + \sum_{k\geq 1} \frac{-2ia\sigma^{2k}}{1-\sigma^{2k}} \left[\mathbf{w}^k - \mathbf{w}^{-k}\right], \tag{2.11a}$$

$$\mathbf{F}^2(\mathbf{w}) = \alpha_0^2 + i\beta_0^2 + \sum_{k\geq 1} \frac{-2a\sigma^{2k}}{1-\sigma^{2k}} \left[\mathbf{w}^k + \mathbf{w}^{-k}\right]. \tag{2.11b}$$

De plus ces séries de Laurent convergent sur la couronne $\sigma^2 < |\mathbf{w}| < \sigma^{-2}$.

Preuve : Nous remarquons que les conditions de la proposition 2.1.2 sont vérifiées. En effet il suffit de montrer que :

$$\int_{|\mathbf{w}|=\sigma} \frac{4a^2 w_2}{(1+\sigma^2-2w_1)^2} \mathrm{d}\Gamma_{\mathbf{w}} = \int_{|\mathbf{w}|=\sigma} \frac{2\mathrm{a}}{\sigma} \frac{2\sigma^2-(1+\sigma^2)\mathrm{w}_1}{(1+\sigma^2-2\mathrm{w}_1)^2} \mathrm{d}\Gamma_{\mathbf{w}} = 0.$$

Nous remplaçons $\mathbf{w}$ par $\sigma e^{i\theta}$ puis en posant $e^{i\theta} = \xi$ dans les expressions de (2.8) et (2.8), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{n}}(\sigma\xi) &= \frac{-2ia^2\xi(\xi^2-1)}{\left[\sigma(\xi^2+1)-(1+\sigma^2)\xi\right]^2}, \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{n}}(\sigma\xi) &= \frac{a\xi\left[4\sigma\xi-(1+\sigma^2)(\xi^2+1)\right]}{\left[\sigma(\xi^2+1)-(1+\sigma^2)\xi\right]^2}. \end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples des fractions rationnelles $\dfrac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{n}}(\sigma\xi)$ et $\dfrac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{n}}(\sigma\xi)$ va permettre de calculer les coefficients des séries $\mathbf{F}^1$ et $\mathbf{F}^2$. Nous vérifions facilement les formules suivantes :

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{n}}(\sigma\xi) = ai\xi \left[\frac{1}{(\xi-\sigma)^2} - \frac{1}{(\sigma\xi-1)^2}\right], \tag{2.12a}$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{n}}(\sigma\xi) = -a\xi \left[\frac{1}{(\xi-\sigma)^2} + \frac{1}{(\sigma\xi-1)^2}\right]. \tag{2.12b}$$

En remarquant que les fonctions méromorphes (2.12a) et (2.12b) ne possèdent pas de résidus sur $|\xi| \leq 1$, implique :

$$\begin{aligned}\int_{|\mathbf{w}|=\sigma} \frac{4a^2 w_2}{(1+\sigma^2-2w_1)^2} \mathrm{d}\Gamma_{\mathbf{w}} &= \int_{|\xi|=1} a\left[\frac{1}{(\xi-\sigma)^2} - \frac{1}{(\sigma\xi-1)^2}\right] \mathrm{d}\xi = 0,\\ \int_{|\mathbf{w}|=\sigma} \frac{2a}{\sigma}\frac{2\sigma^2-(1+\sigma^2)w_1}{(1+\sigma^2-2w_1)^2} \mathrm{d}\Gamma_{\mathbf{w}} &= \int_{|\xi|=1} ai\left[\frac{1}{(\xi-\sigma)^2} + \frac{1}{(\sigma\xi-1)^2}\right] \mathrm{d}\xi = 0.\end{aligned}$$

Grâce à la formule $x/(1-x)^2 = \sum_{k\geq 1} kx^k$ pour tout $|x| < 1$, le développement en série des fractions (2.12a) et (2.12b) conduit à :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{n}}(\sigma\xi) &= \frac{ai}{\sigma}\sum_{k\geq 1} k\sigma^k\xi^{-k} - k\sigma^k\xi^k\\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{n}}(\sigma\xi) &= \frac{-a}{\sigma}\sum_{k\geq 1} k\sigma^k\xi^{-k} + k\sigma^k\xi^k\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons les formules suivantes :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|\xi|=1}\frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{n}}(\sigma\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^{k+1}} = \begin{cases} -iak\sigma^{k-1} & \text{pour } k \geq 1\\ -iak\sigma^{-k-1} & \text{pour } k \leq -1\end{cases}$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|\xi|=1}\frac{\partial \psi_2}{\partial \mathbf{n}}(\sigma\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^{k+1}} = \begin{cases} -ak\sigma^{k-1} & \text{pour } k \geq 1\\ ak\sigma^{-k-1} & \text{pour } k \leq -1\end{cases}$$

Finalement les fonctions $\mathbf{F}^1$ et $\mathbf{F}^2$ deviennent :

$$\begin{aligned}\mathbf{F^1}(\mathbf{w}) &= \alpha_0^1 + i\beta_0^1 + \sum_{k\geq 1}\frac{-2ia\sigma^{2k}}{1-\sigma^{2k}}\mathbf{w}^k + \sum_{k\leq -1}\frac{-2ia}{1-\sigma^{2k}}\mathbf{w}^k\\ &= \alpha_0^1 + i\beta_0^1 + \sum_{k\geq 1}\frac{-2ia\sigma^{2k}}{1-\sigma^{2k}}\left[\mathbf{w}^k - \mathbf{w}^{-k}\right],\\ \mathbf{F^2}(\mathbf{w}) &= \alpha_0^2 + i\beta_0^2 + \sum_{k\geq 1}\frac{-2a\sigma^{2k}}{1-\sigma^{2k}}\mathbf{w}^k + \sum_{k\leq -1}\frac{2a}{1-\sigma^{2k}}\mathbf{w}^k\\ &= \alpha_0^2 + i\beta_0^2 + \sum_{k\geq 1}\frac{-2a\sigma^{2k}}{1-\sigma^{2k}}\left[\mathbf{w}^k + \mathbf{w}^{-k}\right],\end{aligned}$$

où $\alpha_0^1 + i\beta_0^1$ et $\alpha_0^2 + i\beta_0^2$ sont des nombres complexes quelconques et $\mathbf{w} \in A_\sigma$. En appliquant le critère de d'Alembert pour la convergence de série, nous obtenons les conditions $|\sigma^2\mathbf{w}| < 1$ et $|\sigma^2/\mathbf{w}| < 1$. ■

Grâce à ces formules nous pouvons exprimer le Lagrangien du système sous la forme d'une série convergente. En effet l'énergie du fluide peut se calculer en fonction des coefficients du développement en série de Laurent des fonctions $\mathbf{F}^1$ et $\mathbf{F}^2$.

Proposition 2.2.1 *La matrice de masse du système fluide solide dans le cas d'un disque se déplaçant dans un demi-plan est une matrice diagonale de la forme :*

$$[\mathbf{K}] = (m_s + \rho_f T(h_2))Id_{\mathbb{R}^2}, \tag{2.13}$$

où la fonction T, pour $x > 1$, est donnée par :

$$T(x) = \pi + 2\pi\sum_{n\geq 2}\frac{x^2-1}{[(x+\sqrt{x^2-1})^n - (x-\sqrt{x^2-1})^n]^2}. \tag{2.14}$$

Nous rappelons que la matrice de masse d'un système est la matrice de la forme quadratique associée à l'énergie cinétique du système.

Preuve : Les quantités qui nous intéressent ici sont les intégrales du type

$$\int_{\Omega_{\mathbf{h}}} \nabla\phi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla\phi_j(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} \qquad , \text{ pour } i,j = 1,2.$$

En utilisant les transformations conformes $\mathbf{g}$ et $\mathbf{G}$, données par les formules (2.6) et(2.5), nous effectuons un changement de variable dans ce type d'intégrale et nous introduisons les fonctions

$$\psi_i(\mathbf{G}(x_1,x_2)) = \phi_i(x_1,x_2), \qquad \text{pour } i = 1,2.$$

En rappelant que la matrice jacobienne de $\mathbf{G}$ est une matrice de la forme

$$D\mathbf{G}(x_1,x_2) = |\mathbf{G}'(x_1+ix_2)|Q(x_1,x_2),$$

où $Q(x_1,x_2)$ est une matrice orthogonale, nous obtenons la formule suivante :

$$\begin{aligned} T_{i,j} &= \int_{\Omega_{\mathbf{h}}} \nabla\phi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla\phi_j(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}, \\ &= \int_{A_\sigma} |\mathbf{G}'(\mathbf{g}(\mathbf{w}))|^2 \nabla\psi_i(w_1,w_2) \cdot \nabla\psi_j(w_1,w_2) |\mathbf{g}'(\mathbf{w})|^2 \mathrm{d}\mathbf{w}, \\ &= \int_{A_\sigma} \nabla\psi_i(w_1,w_2) \cdot \nabla\psi_j(w_1,w_2) \mathrm{d}\mathbf{w}. \end{aligned}$$

De plus en utilisant les équations de Cauchy-Riemann et les fonctions $\mathbf{F}^1$ et $\mathbf{F}^2$, les expressions $T_{i,j}$ deviennent :

$$\begin{aligned} T_{i,j} &= \int_{A_\sigma} \nabla\psi_i(w_1,w_2) \cdot \nabla\psi_i(w_1,w_2) \mathrm{d}\mathbf{w}, \\ &= \int_{A_\sigma} \frac{\partial\psi_i}{\partial w_1}\frac{\partial\psi_j}{\partial w_1} + \frac{\partial\psi_i}{\partial w_2}\frac{\partial\psi_j}{\partial w_2} \mathrm{d}\mathbf{w}, \\ &= \int_{A_\sigma} \frac{\partial F_1^i}{\partial w_1}\frac{\partial F_1^j}{\partial w_1} + \frac{\partial F_1^i}{\partial w_2}\frac{\partial F_1^j}{\partial w_2} \mathrm{d}\mathbf{w}, \\ &= \mathrm{Re}\left[\int_{\mathrm{A}_\sigma} \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}^{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}\mathbf{w}} \overline{\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}^{\mathrm{j}}}{\mathrm{d}\mathbf{w}}}\right] \mathrm{dw_1 dw_2}. \end{aligned}$$

Pour simplifier les calcules nous notons le développement en série de Laurent des fonctions $\mathbf{F}^i$ par $\mathbf{F}^i(\mathbf{w}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k^i \mathbf{w}^k$. En remplaçant $\mathbf{w}$ par $\rho e^{i\theta}$, avec $\sigma < \rho < 1$ et $\theta \in [0,2\pi]$, le développement en série des fonctions $(\mathbf{F}^i)'$ devient :

$$(\mathbf{F}^i)'(\rho e^{i\theta}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} k\gamma_k^i \rho^{k-1} e^{i(k-1)\theta}. \tag{2.15}$$

Pour $\sigma < \rho < 1$ fixé, ceci est un développement en série de Fourier et nous pouvons appliquer l'égalité de Parseval à ρ fixé car la fonction $\theta \to (\mathbf{F}^i)'(\rho e^{i\theta})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty[0,2\pi]$ donc elle est dans $L^2(0,2\pi)$. Les quantités $T_{i,j}$ deviennent :

$$\begin{aligned} T_{i,j} &= \mathrm{Re}\left[\int_\sigma^1 \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}^{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}\mathbf{w}}(\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \overline{\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}^{\mathrm{j}}}{\mathrm{d}\mathbf{w}}}(\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \mathrm{d}\theta\rho\mathrm{d}\rho\right], \\ &= \mathrm{Re}\left[\int_\sigma^1 2\pi \sum_{\mathrm{k}\in\mathbb{Z}} \mathrm{k}^2 \gamma_{\mathrm{k}}^{\mathrm{i}} \overline{\gamma_{\mathrm{k}}^{\mathrm{j}}} \rho^{2\mathrm{k}-1} \mathrm{d}\rho\right], \\ &= \mathrm{Re}\left[\pi \sum_{\mathrm{k}\in\mathbb{Z}} \mathrm{k}\gamma_{\mathrm{k}}^{\mathrm{i}} \overline{\gamma_{\mathrm{k}}^{\mathrm{j}}} (1-\sigma^{2\mathrm{k}})\right]. \end{aligned}$$

En remarquant que les termes $\gamma_k^1\overline{\gamma_k^2}$ et $\gamma_k^2\overline{\gamma_k^1}$ sont imaginaires pures, la matrice $\mathbf{K}$ est diagonale. Grâce aux développement (2.11a) et (2.11b), les termes diagonaux de la matrice $\mathbf{K}$ deviennent :

$$\begin{aligned}
T_{1,1} &= \pi\sum_{k\geq 1} k\left|\frac{-2ia\sigma^{2k}}{1-\sigma^{2k}}\right|^2(1-\sigma^{2k}) - k\left|\frac{2ia\sigma^{2k}}{1-\sigma^{2k}}\right|^2(1-\sigma^{-2k}) \\
&= 4a^2\pi\sum_{k\geq 1} k\sigma^{2k}\frac{1+\sigma^{2k}}{1-\sigma^{2k}}, \\
T_{2,2} &= \pi\sum_{k\geq 1} k\left|\frac{-2a\sigma^{2k}}{1-\sigma^{2k}}\right|^2(1-\sigma^{2k}) - k\left|\frac{-2a\sigma^{2k}}{1-\sigma^{2k}}\right|^2(1-\sigma^{-2k}) \\
&= 4a^2\pi\sum_{k\geq 1} k\sigma^{2k}\frac{1+\sigma^{2k}}{1-\sigma^{2k}} \\
T_{1,1} &= T_{2,2} = 4a^2\pi\sum_{k\geq 1} k\sigma^{2k}\frac{1+\sigma^{2k}}{1-\sigma^{2k}}.
\end{aligned}$$

Nous introduisons la fonction

$$\mathcal{E}(\sigma) = 4a^2\pi\sum_{k\geq 1} k\sigma^{2k}\frac{1+\sigma^{2k}}{1-\sigma^{2k}}. \tag{2.16}$$

En appliquant les formules $1/(1-x) = \sum_{k\geq 0} x^k$ et $x/(1-x)^2 = \sum_{k\geq 0} kx^k$, pour $|x|<1$, $\mathcal{E}(\sigma)$ devient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\sigma) &= 4a^2\pi\sum_{k\geq 1,n\geq 1} k\sigma^{2kn}1+\sigma^{2k}, \\
&= 4a^2\pi\sum_{k\geq 1,n\geq 1} k\sigma^{2kn}\sigma^{2k(n+1)}, \\
&= 4a^2\pi\sum_{k\geq 1,n\geq 1} k\sigma^{2kn}\sigma^{2k(n+1)}, \\
&= 4a^2\pi\left[\sum_{n\geq 1}\frac{\sigma^{2n}}{1-\sigma^{2n}} + \sum_{n\geq 2}\frac{\sigma^{2n}}{1-\sigma^{2n}}\right], \\
&= \pi + 2\pi\sum_{n\geq 2}\frac{(\sigma^{-1}-\sigma)^2}{(\sigma^{-n}-\sigma^n)^2}.
\end{aligned}$$

Nous rappelons que $a = 1/2(\sigma^1-\sigma)$, $\sigma = h_2 - \sqrt{h_2^2-1}$ et $\sigma^{-1} = h_2 + \sqrt{h_2^2-1}$, alors nous obtenons :

$$T(h_2) = \pi + 2\pi\sum_{n\geq 2}\frac{h_2^2-1}{[(h_2+\sqrt{h_2^2-1})^n - (h_2-\sqrt{h_2^2-1})^n]^2}.$$

La matrice de masse du lagrangien devient :

$$[\mathbf{K}] = (m_s + T(h_2))Id_{\mathbb{R}^2}.$$

■

L'étude de la fonction T sera la clef qui permettra de décrire le mouvement du disque dans le demi-plan.

Proposition 2.2.2 *L'application T définie par (2.14) est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[$. De plus elle est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$ avec $T'(x)<0$ et T se prolonge par continuité en 1 :*

$$T_1 = \lim_{x\to 1} T(x) = \frac{\pi^3}{12} + \frac{\pi}{2},$$

et elle admet une limite finie en $+\infty$,

$$T_\infty = \lim_{x\to+\infty} T(x) = \pi.$$

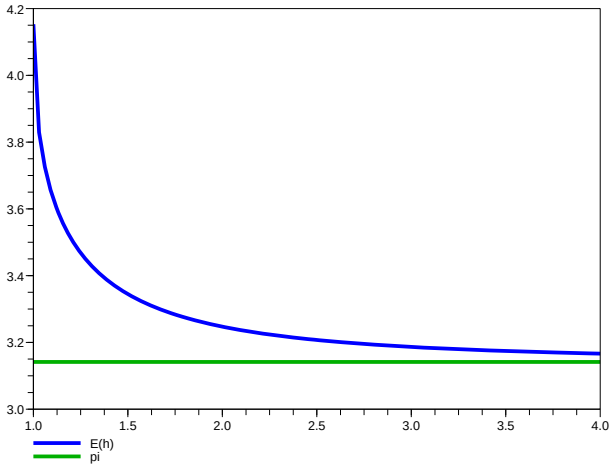


FIG. 2.3 – Tracé de la fonction E

Preuve : Nous commençons par montrer que $T \in \mathcal{C}^2(]1,+\infty[)$. Pour cela nous effectuons le changement de variable $x = \mathrm{ch(y)}$ ainsi T devient

$$T(x) = \tilde{T}(y) = \pi + \frac{\pi}{2}\sum_{n\geq 2}\left[\frac{\mathrm{sh(y)}}{\mathrm{sh(ny)}}\right]^2.$$

Pour la suite, nous posons

$$f_n(y) = \left[\frac{\mathrm{sh(y)}}{\mathrm{sh(ny)}}\right]^2.$$

Le but est de montrer que $\tilde{T}$ est une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. Pour cela nous fixons $0<a<b$ deux réels et $y\in[a,b]$. Le calcul de la première et seconde dérivée de $\tilde{T}$ donne les expressions suivantes

$$\begin{aligned}
\tilde{T}' &= \pi\sum_{n\geq 2}\frac{\mathrm{ch(y)sh(y)}}{[\mathrm{sh(ny)}]^2} - n\frac{(\mathrm{sh(y)})^2\mathrm{ch(ny)}}{[\mathrm{sh(ny)}]^3},\\
\tilde{T}'' &= \pi\sum_{n\geq 2}\frac{2(1+n^2)(\mathrm{sh(y)})^2+1}{[\mathrm{sh(ny)}]^2} - \frac{2n\mathrm{ch(y)sh(2y)}}{[\mathrm{sh(ny)}]^3} + \frac{3n^2(\mathrm{sh(y)})^2}{[\mathrm{sh(ny)}]^4}.
\end{aligned}$$

Pour simplifier les notations, nous notons par

$$\begin{aligned}
g_n(y) &= \frac{\mathrm{ch(y)sh(y)}}{[\mathrm{sh(ny)}]^2} - n\frac{(\mathrm{sh(y)})^2\mathrm{ch(ny)}}{[\mathrm{sh(ny)}]^3},\\
h_n(y) &= \frac{2(1+n^2)(\mathrm{sh(y)})^2+1}{[\mathrm{sh(ny)}]^2} - \frac{2n\mathrm{ch(ny)sh(2y)}}{[\mathrm{sh(ny)}]^3} + \frac{3n^2(\mathrm{sh(y)})^2}{[\mathrm{sh(ny)}]^4}.
\end{aligned}$$

Nous allons montrer que les séries $(f_n(y))_{n\geq 2}$, $(g_n(y))_{n\geq 2}$ et $(h_n(y))_{n\geq 2}$ sont uniformément convergentes sur $[a,b]$. Nous commençons par remarquer que pour $y\in[a,b]$, il existe un $n_0\geq 2$ tel que pour tout $n\geq n_0$ nous ayons

$$\mathrm{sh(ny)}=\frac{1}{2}\mathrm{e^{ny}}(1-\mathrm{e^{2ny}})\geq\frac{1}{4}\mathrm{e^{na}}. \tag{2.17}$$

Pour tout $y\in[a,b]$ et pour tout $n\geq n_0$, nous avons la majoration

$$|f_n(y)|\leq 16e^{-2na}(\mathrm{ch(b)})^2.$$

Or comme $y\mapsto f_n(y)$ est continue sur $[a,b]$, nous en déduisons que la série $\tilde{T}$ est continue sur $[a,b]$. De même pour tout $y\in[a,b]$ et pour tout $n\geq n_0$, nous avons

$$\begin{aligned}
|g_n(y)| &\leq \frac{\mathrm{ch(y)|sh(y)|}}{[|\mathrm{sh(ny)}|]^2}+n\frac{(|\mathrm{sh(y)}|)^2\mathrm{ch(ny)}}{[\mathrm{sh(ny)}]^3},\\
&\leq 16(\mathrm{ch(b)})^2\mathrm{e^{-2na}}+16\mathrm{n}(\mathrm{ch(b)})^2\mathrm{e^{-2na}}\frac{\mathrm{ch(ny)}}{\mathrm{sh(ny)}},\\
&\leq 16(n+1)(\mathrm{ch(b)})^2\mathrm{e^{-2na}}.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que la série $\tilde{T}'$ est continue sur $[a,b]$ car les fonctions g_n sont aussi continues sur $[a,b]$. Enfin pour les fonctions h_n, nous avons pour tout $y\in[a,b]$ et pour tout $n\geq n_0$

$$\begin{aligned}
|h_n(y)| &\leq \frac{2(1+n^2)(|\mathrm{sh(y)}|)^2+1}{[|\mathrm{sh(ny)}|]^2}+\frac{2n\mathrm{ch(ny)|sh(2y)|}}{[|\mathrm{sh(ny)}|]^3}+\frac{3n^2(|\mathrm{sh(y)}|)^2}{[|\mathrm{sh(ny)}|]^4},\\
&\leq [2(1+n^2)(\mathrm{ch(b)})^2+1]16\mathrm{e^{-2na}}+32\mathrm{nch(2b)e^{-2na}}\frac{\mathrm{ch(ny)}}{\mathrm{sh(ny)}}+768\mathrm{n^2}(\mathrm{ch(b)})^2\mathrm{e^{-2na}},\\
&\leq [2(1+n+n^2)(\mathrm{ch(b)})^2+1]16\mathrm{e^{-2na}}+768\mathrm{n^2}(\mathrm{ch(b)})^2\mathrm{e^{-2na}}.
\end{aligned}$$

Finalement nous en déduisons que la série $\tilde{T}''$ est aussi continue sur $[a,b]$ car h_n est continue sur $[a,b]$. Ainsi la fonction $\tilde{T}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. Pour montrer la continuité en 0, il faut remarquer que pour tout $y\in[0,b]$ nous avons

$$ny\leq n\,\mathrm{ch(n0)y}\leq\mathrm{sh(ny)}=\int_0^{\mathrm{y}}\mathrm{nch(nx)dx}\leq\mathrm{n\,ch(n\beta)y}.$$

Donc pour tout $y\in[0,b]$ nous avons

$$f_n(y)\leq\left[\frac{\mathrm{sh(y)}}{ny}\right]^2\leq\frac{(\mathrm{ch(b)})^2}{n^2}.$$

Donc $\tilde{T}$ est continue sur $[0,+\infty[$. La fonction T est donc continue sur $[1,+\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[$. Pour calculer les limites en 1 et $+\infty$, nous utilisons l'expression de $\tilde{T}$. Donc en faisant tendre y vers 0, nous obtenons la limite de T en 1 :

$$\lim_{x\to 1}T(x)=\frac{\pi^3}{12}+\frac{\pi}{2}.$$

Pour la limite en $+\infty$, nous remarquons que

$$[\mathrm{sh(t)/sh(nt)}]^2=\mathrm{e^{2t(1-n)}}[(1-\mathrm{e^{-2t}})/(1-\mathrm{e^{-2nt}})]^2.$$

Le passage à la limite en $+\infty$ donne :

$$\lim_{x\to+\infty} T(x) = \pi.$$

Pour finir cette preuve nous montrons que T' est strictement négative sur $]1,+\infty[$ et donc que T est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$. Nous introduisons le suite de fonctions $(T_n)_{n\geq 2}$:

$$T_n(x) = \frac{x^2-1}{[(x+\sqrt{x^2-1})^n - (x-\sqrt{x^2-1})^n]}. \tag{2.18}$$

Nous montrons que pour tout $n \geq 2$, la fonction T_n' est strictement négative sur $]1,+\infty[$. Pour cela nous donnons quelques propriétés sur certaines fonctions.

- La fonction $x \to x+\sqrt{x^2-1}$ est croissante et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$, de plus pour tout $x>1$, $x+\sqrt{x^2-1}>1$.
- La fonction $x \to x-\sqrt{x^2-1}$ est décroissante et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$, de plus pour tout $x>1$, $1>x+\sqrt{x^2-1}>0$.

Pour tout $x \in [a,b] \subset]1,+\infty[$, nous avons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
\delta(x) &= (x+\sqrt{x^2-1})^n - (x-\sqrt{x^2-1})^n, \\
&= (x+\sqrt{x^2-1})^n[1-(x-\sqrt{x^2-1})^{2n}], \\
&\geq (a+\sqrt{a^2-1})^n[1-(b-\sqrt{b^2-1})^{2n}] > 0.
\end{aligned}$$

Le calcul de la dérivée de T_n donne

$$\begin{aligned}
T_n'(x) &= \frac{2f(x)}{\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n - (x-\sqrt{x^2-1})^n\right]^3}, \\
f(x) &= (x-n\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})^n - (x+n\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})^n.
\end{aligned}$$

Comme $\delta(x)>0$, le signe de T_n' est donc donnée par le signe f. Le calcul de la dérivée de f donne :

$$f'(x) = (1-n^2)[(x+\sqrt{x^2-1})^n - (x-\sqrt{x^2-1})^n] < 0.$$

Ainsi f est décroissante pour $x \in]1,+\infty[$. De plus elle se prolonge par continuité en 1 par 0, donc pour tout $x>1$ les fonctions T_n' sont strictement négative sur $]1,+\infty[$ donc $T'(x)$ est strictement négatif sur $]1,+\infty[$. Ainsi T est décroissantes sur $]1,+\infty[$. ■

2.3 Influence de la paroi sur le mouvement

Dans cette section nous allons étudier en détail le mouvement du disque dans le demi-plan. Nous montrerons que le mur à un effet attractif sur le disque. Nous donnerons aussi une estimation de la vitesse du disque à l'instant du choc et ainsi qu'une estimation du moment du choc. Nous rappelons la formule du Lagrangien du système :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_s + \rho_f T(h_2))(\dot{h_1}^2 + \dot{h_1}^2). \tag{2.19}$$

Nous calculons maintenant les termes des équations d'Euler- Lagrange :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h_1}} &= \dot{h_1}(m_s + \rho_f T(h_2)), \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h_2}} &= \dot{h_2}(m_s + \rho_f T(h_2)) \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_1} &= 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_2} &= h_2 \frac{\rho_f}{2} T'(h_2)(\dot{h_1}^2 + \dot{h_1}^2)
\end{aligned}$$

Nous obtenons le système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\frac{d}{dt}[\dot{h_1}(m_s + \rho_f T(h_2))] = 0, \tag{2.20a}$$

$$\ddot{h_2}(m_s + \rho_f T(h_2)) = \frac{\rho_f}{2}(\dot{h_1}^2 - \dot{h_2}^2)T'(h_2), \tag{2.20b}$$

$$h_1(0) = q_1,\ h_2(0) = q_2,\ \dot{h_1}(0) = p_1,\ \dot{h_2}(0) = p_2. \tag{2.20c}$$

Pour simplifier l'étude du mouvement nous supposons que la vitesse initiale $p_1 \geq 0$. Pour le cas $p_1 \leq 0$, nous observerons que l'étude est identique. La fonction T joue un rôle très important ici. En effet la Proposition 2.2.2 sera l'outil principale permettant de résoudre ce problème. Nous rappelons que la fonction T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$, qu'elle est décroissante sur cette intervalle que pour tout $x \geq 1$ $\pi \leq T(x) \leq \pi^3/12 + \pi/2$. Pour simplifier les calculs nous introduisons la fonction :

$$K(x) = m_s + \rho_f T(x).$$

Nous posons $K(q_2) = K_0$ et nous remarquons que $\rho_f T'(x) = K'(x)$ pour $x > 1$. Ainsi l'équation (2.20a) devient :

$$\dot{h_1} = p_1 \frac{K_0}{K(h_2)}. \tag{2.21}$$

Nous soulignons ici que si $p_1 = 0$, alors h_1 reste constant, c'est à dire que si le disque est lancé de façon verticale alors sa position restera verticale. De plus nous remarquons ici que si p_1 est strictement positif alors $\dot{h_1}$ reste strictement positif. En remplaçant $\dot{h_1}$ par la formule (2.21) dans l'expression (2.20b) et en multipliant le tout par $\dot{h_2}$, nous arrivons à :

$$\begin{aligned}
\ddot{h_2}K(h_2) &= \frac{p_1^2}{2}\frac{K_0^2}{K(h_2)^2}K'(h_2) - \frac{\dot{h_2}^2}{2}K'(h_2), \\
\ddot{h_2}\dot{h_2}K(h_2) + \frac{1}{2}\dot{h_2}^3 K'(h_2) &= \frac{1}{2}p_1^2 K_0^2 \frac{\dot{h_2}K'(h_2)}{K(h_2)^2}, \\
\frac{d}{dt}\left[\dot{h_2}^2 K(h_2)\right] &= -\frac{d}{dt}\left[p_1^2 \frac{K_0^2}{K(h_2)}\right].
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\dot{h_2}^2 = \frac{K_0}{K(h_2)^2}\left[(p_1{}^2 + p_2^2)K(h_2) - p_1^2 K_0\right]. \tag{2.22}$$

Pour t dans un petit intervalle l'équation (2.22) reste bien définie, en effet pour h_2 proche de q_2, l'expression $(p_1^2 + p_2^2)K(h_2) - p_1^2 K_0$ reste strictement positive. Il suffit de donner le signe de $\dot{h_2}$ pour décrire le mouvement.

Proposition 2.3.1 *Soient $q_1 \in \mathbb{R}$, $q_2 > 1$, $p_1 \geq 0$ et $p_2 \in \mathbb{R}$ tel que $p_1^2 + p_2^2 \neq 0$. Nous notons par*

$$K_0 = K(q_2), \quad K_\infty = \lim_{x\to\infty} K(x), \quad K_1 = \lim_{x\to 1} K(x).$$

Nous avons alors les deux cas suivants :

i) si $p_2 \geq p_1\sqrt{K_0/K_\infty - 1}$ alors il n'y a pas de choc et du disque s'éloigne vers l'infinie

ii) si $p_2 < p_1\sqrt{K_0/K_\infty - 1}$, il existe $T_0 < +\infty$ tel que le disque touche la paroi $y = 0$ au temps T_0 avec une vitesse non nulle $\mathbf{v}_c = (p_1^2 + p_2^2)K_0/K_1 > 0$.

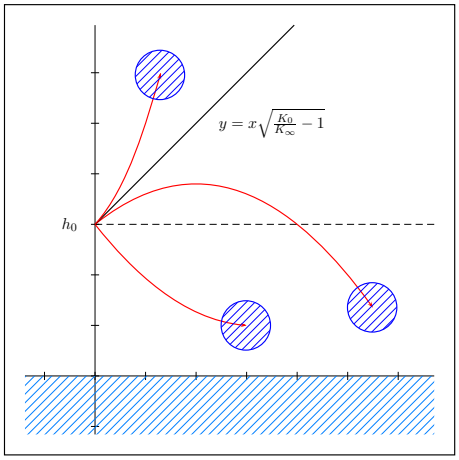


FIG. 2.4 – Trajectoires possibles pour le disque

Preuve : La preuve de cette proposition est séparée en trois parties : $p_2 < 0$, $p_2 = 0$ et $p_2 > 0$.

Cas 1 : $\mathbf{p_2 < 0}$ A l'instant $t = 0$, $\dot{h_2}(0) = p_2 < 0$, il existe donc $\epsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [0, \epsilon]$ nous ayons $\dot{h_2}(t) < 0$. Sur cet intervalle nous en déduisons une formule pour $\dot{h_2}$:

$$\dot{h_2} = -\frac{\sqrt{K_0}}{K(h_2)}\sqrt{(p_1^2 + p_2^2)K(h_2) - p_1^2K_0}. \tag{2.23}$$

Ainsi sur l'intervalle $[0, \epsilon]$, h_2 est décroissante et nous obtenons l'encadrement suivant pour $\dot{h_2}$:

$$-\sqrt{(p_1^2 + p_2^2)\frac{K_1}{K_0} - p_1^2} < \dot{h_2} < p_2\frac{K_0}{K_1} < 0.$$

Cette encadrement montre que $\dot{h_2}$ reste bornée et conduit à l'inégalité $h_2(t) < q_0 + p_2K_0/K_1t$. Lorsque t vers $+\infty$, h_2 tend vers $-\infty$, mais comme $h_2 > 1$, le disque ne pouvant pas traverser la paroi, nous obtenons donc une estimation de l'instant T_c du choc,

$$T_c < (q_0 - 1)K_1/(p_2K_0) < +\infty.$$

Ainsi le disque touche la paroi en un temps fini. Grâce à la formule (2.23) le temps de choc est donné par la formule :

$$T_c = \int_1^{q_2} \frac{K(x)\mathrm{dx}}{\sqrt{K_0[(p_1^2 + p_2^2)K(x) - p_1^2K_0]}}.$$

Nous remarquons que l'application $x \to K(x)/\sqrt{K_0[(p_1^2 + p_2^2)K(x) - p_1^2K_0]}$ est continue sur $[1, q_2]$ car

$$\sqrt{(p_1^2 + p_2^2)K(h_2) - p_1^2K_0} > \sqrt{(p_1^2 + p_2^2)K_1 - p_1^2K_0} > 0,$$

et donc nous retrouvons ici le fait que $T_c < +\infty$.

Cas 2 : $\mathbf{p_2 = 0}$ Dans ce cas nous ne pouvons pas déterminer directement le signe de $\dot{h_2}$. Pour cela nous déterminons le signe de $\ddot{h_2}$ à l'instant $t = 0$. Nous rappelons

$$\ddot{h_2}K(h_2) = \frac{p_1^2}{2}\frac{K_0^2}{K(h_2)^2}K'(h_2) - \frac{\dot{h_2}^2}{2}K'(h_2).$$

En prenant $t = 0$ dans cette équation, $\ddot{h_2}(0) = p_1^2 K'(q_2)/(2K_0) < 0$ car pour tout $x > 1$ $K'(x) < 0$ d'après la proposition 2.2.2. Il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [0, \epsilon]$, $\ddot{h_2}(t) < 0$, donc $\dot{h_2}$ est décroissante sur cet intervalle. Ainsi pour tout $t \in [0, \epsilon]$, $\dot{h_2}(t) < p_2(0) = 0$ et $h_2(t) < q_2$ et nous obtenons la formule suivante pour $\dot{h_2}$:

$$\dot{h_2} = \frac{-p_1}{K(h_2)}\sqrt{K_0(K(h_2) - K_0)}. \tag{2.24}$$

Ainsi il existe $t^* \in [0, \epsilon]$ tel que $\dot{h_2}(t^*) < 0$ et nous obtenons un problème similaire au cas 1 et nous pouvons en déduire que le disque va toucher la paroi en temps fini. De la même manière le temps de choc T_c est donné par la formule :

$$T_c = \int_1^{q_2} \frac{K(x)\mathrm{dx}}{p_1\sqrt{K_0(K(x) - K_0)}}.$$

L'application $x \to K(x)/\left[p_1\sqrt{K_0(K(x) - K_0)}\right]$ est continue sur $[1, q_2[$ et comme

$$K(x) = K_0 + K'(q_2)(x - q_2) + O((x - q_2)^2) \quad \text{quand } x \to q_2, \text{ avec } K'(q_2) < 0$$

pour tout $q_2 > 1$, nous obtenons l'équivalence lorsque $x \to q_2$:

$$\frac{K(x)}{p_1\sqrt{K_0(K(x) - K_0)}} \approx \frac{K_0}{p_1\sqrt{K_0|K'(q_2)|(q_2 - x)}}.$$

Comme $(q_2 - x)^{-1/2}$ est intégrable sur $[1, q_2[$, l'intégrale qui définit T_c est finie donc le temps $T_c < +\infty$.

Cas 3 : $\mathbf{p_2 > 0}$ A l'instant $t = 0$, $\dot{h_2}(0) = p_2 > 0$, il existe donc $\epsilon > 0$ telle que pour tout $t \in [0, \epsilon]$, $\dot{h_2}(t) > 0$. Sur cet intervalle nous en déduisons une formule pour $\dot{h_2}$:

$$\dot{h_2} = \frac{\sqrt{K_0}}{K(h_2)}\sqrt{(p_1^2 + p_2^2)K(h_2) - p_1^2 K_0}. \tag{2.25}$$

Ainsi sur l'intervalle $[0, \epsilon]$, h_2 est croissante, donc $h_2 > q_2$. Or sur $]q_2, \infty[$ K est strictement décroissant, donc K est une bijection de $]q_2, \infty[$ sur $]K_0, K_\infty[$. Nous distinguons ici deux cas sur les conditions initiales.

Si $p_2 > p_1\sqrt{K_0/K_\infty - 1}$, alors $(p_1^2 + p_2^2)K_\infty - p_1^2 K_0 > 0$ et il existe une constante $C > 0$ telle que $\dot{h_2} > C$ ce qui implique $h_2(t) > q_2 + Ct$ pour $t > 0$. Nous pouvons en déduire que la formule (2.25) reste vraie pour tout $t \in [0, \infty[$ et que le disque se dirige vers l'infini lorsque t tend vers $+\infty$.

Si $p_2 < p_1\sqrt{K_0/K_\infty - 1}$, il existe $x_0 \in [q_2, +\infty[$ tel que $(p_1^2 + p_2^2)K(x_0) - p_1^2 K_0 = 0$. Nous montrons qu'il existe $T_0 < +\infty$ tel que $h_2(T_0) = x_0$. En effet T_0 est donné par la formule :

$$T_0 = \int_{q_2}^{x_0} \frac{K(x)\mathrm{dx}}{\sqrt{K_0((p_1^2 + p_2^2)K(h_2) - p_1^2 K_0)}},$$

où x_0 est l'unique solution de l'équation :

$$K(x_0) = \frac{p_1^2}{(p_1^2+p_2^2)} K_0. \tag{2.26}$$

Nous remarquons que l'application $x \to K(x)/\sqrt{K_0((p_1^2+p_2^2)K(h_2) - p_1^2 K_0)}$ est continue sur $[q_2, x_0[$ et quand x tend vers x_0 elle est équivalente à :

$$\frac{K(x)}{\sqrt{K_0((p_1^2+p_2^2)K(h_2) - p_1^2 K_0)}} \approx \frac{K(x_0)}{\sqrt{K_0(p_1^2+p_2^2)|K'(x_0)|(x_0-x)}}.$$

Or $x \to (x_0 - x)^{-1/2}$ est une fonction intégrable sur $[x_0 - \alpha, x_0[$, donc l'intégrale qui définit T_0 est convergente. Nous obtenons finalement que $T_0 < +\infty$. Ainsi à l'instant $t = T_0$ nous pouvons fixer les nouvelles conditions initiales $h_2(T_0) = x_0$, $\dot{h_2}(T_0) = 0$. En utilisant la formule (2.21) et la définition de x_0, nous obtenons $\dot{h_1}(T_0) = (p_1^2+p_2^2)/p_1$. Nous remarquons ici que nous pouvons appliquer les résultats du cas 2. Pour $t \geq T_0$ $\dot{h_2}$ est donné par la formule :

$$\dot{h_2} = -\frac{\dot{h_1}(T_0)}{K(h_2)} \sqrt{K(x_0)(K(h_2) - K(x_0))}.$$

En remplaçant $K(x_0)$ par la formule (2.26) et en utilisant l'égalité $\dot{h_1}(T_0) = (p_1^2+p_2^2)/p_1$, pour $t \geq T_0$ $\dot{h_2}$ devient :

$$\dot{h_2} = -\frac{\sqrt{K_0}}{K(h_2)} \sqrt{(p_1^2+p_2^2)K(h_2) - p_1^2 K_0}.$$

Grâce à une analyse similaire au cas 2, nous pouvons en déduire que le disque touche la paroi en temps fini T_c donné par la formule :

$$T_c = \int_1^{x_0} \frac{K(x)\mathrm{dx}}{\sqrt{K_0((p_1^2+p_2^2)K(h_2) - p_1^2 K_0)}}.$$

Pour terminer cette preuve nous remarquons la conservation de l'énergie cinétique permet de récupérer la norme de la vitesse du disque à l'instant du choc :

$$\dot{h_1}^2 + \dot{h_2}^2 = (p_1^2+p_2^2)\frac{K_0}{K_1}.$$

Dans ce cas la norme de la vitesse de choc reste strictement positive. Il y a donc toujours un véritable choc. ■

2.4 Étude du choc

Cette section est consacrée à l'étude du problème de Neumann lorsque que le disque touche la paroi. Pour simplifier les calculs nous discutons le cas du mouvement vertical du disque. Nous étudierons en détail la convergence de la suite de problèmes de Neumann vers la solution limite à l'instant du choc. Nous rappelons que si la vitesse initiale du disque est verticale alors le mouvement du disque est aussi vertical. Nous rappelons que dans ce cas le système possède un seul degré de liberté, la hauteur h. Ainsi la vitesse du fluide est donnée par $\mathbf{u} = \dot{h}\nabla\Phi_h$ ou Φ_h est solution du problème de Neumann suivant :

$$-\Delta\Phi_h(\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_h, \tag{2.27a}$$

$$\frac{\partial\Phi_h}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{pour } x_2 = 0, \tag{2.27b}$$

$$\frac{\partial\Phi_h}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = h - x_2 \qquad \text{pour } x_1^2 + (x_2-h)^2 = 1. \tag{2.27c}$$

Nous allons montrer que la solution Φ_h de ce problème va tendre vers la fonction Ψ solution du problème :

$$-\Delta\Psi(\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_1, \tag{2.28a}$$
$$\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{pour } x_2 = 0, \tag{2.28b}$$
$$\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = 1 - x_2 \qquad \text{pour } x_1^2 + (x_2-1)^2 = 1. \tag{2.28c}$$

Lemme 2.4.1 *La solution Φ_h est la partie réelle de la fonction holomorphe :*

$$\mathbf{F_h}(\mathbf{z}) = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{2a}{1-\sigma^{2n}}\right)^3 \frac{(1+\sigma^{2n})\sigma^{2n}}{\mathbf{z}^2 + \left(a\dfrac{1+\sigma^{2n}}{1-\sigma^{2n}}\right)^2} \tag{2.29}$$

De plus il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout pour tout compact $K \subset \bigcap_{h\in[1,1+\epsilon]} \Omega_h$ la suite de fonctions F_h converge vers :

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \sum_{n\geq 1} \frac{2}{n(1+n^2\mathbf{z}^2)}. \tag{2.30}$$

Preuve : Nous utilisons les transformations conformes $\mathbf{g}$ et $\mathbf{G}$ définies par (2.6) et (2.6) :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{w}) &= -ia + \frac{2ia}{1-\mathbf{w}}, \\ \mathbf{G}(\mathbf{z}) &= \frac{\mathbf{z}-ia}{\mathbf{z}+ia}, \end{aligned}$$

avec $\mathbf{z} \in \mathbb{C}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{C}$, $a = \sqrt{h^2-1}$ et $\sigma = h - \sqrt{h^2-1}$. Le problème de Neumann (2.27) se transforme en un nouveau problème de Neumann :

$$\begin{aligned} -\Delta\tilde{\Phi}_h(w_1,w_2) &= 0 \qquad \text{pour } \sigma < |\mathbf{w}| < 1, \\ \frac{\partial\tilde{\Phi}_h}{\partial\mathbf{n}}(w_1,w_2) &= 0 \qquad \text{pour } |\mathbf{w}| = 1, \\ \frac{\partial\tilde{\Phi}_h}{\partial\mathbf{n}}(w_1,w_2) &= \frac{2a}{\sigma}\frac{2\sigma^2 - (1+\sigma^2)w_1}{(1+\sigma^2-2w_1)^2} \qquad \text{pour } |\mathbf{w}| = \sigma, \end{aligned}$$

où $\tilde{\Phi}_h(w_1,w_2) = \Phi_h(\mathbf{g}(w_1,w_2))$. En appliquant le lemme 2.2.1, $\tilde{\Phi}_h$ est la partie réelle de la fonction holomorphe :

$$\tilde{\mathbf{F}}_h(\mathbf{w}) = \gamma_h + \sum_{k\geq 1} \frac{-2a\sigma^{2k}}{1-\sigma^{2k}}\left[\mathbf{w}^k + \mathbf{w}^{-k}\right]$$

où γ_h est une constante. En développant l'expression $\sigma^{2k}/(1-\sigma^{2k})$ sous forme de série et en remarquant que pour $\mathbf{w} \in C_\sigma$, $|\sigma^{2n}\mathbf{w}| < 1$ et $|\sigma^{2n}/\mathbf{w}| < 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_h(\mathbf{w}) &= \sum_{k,n\geq 1} -2a\sigma^{2kn}\left[\mathbf{w}^k + \mathbf{w}^{-k}\right], \\ &= -2a\sum_{n\geq 1}\frac{\sigma^{2n}\mathbf{w}}{1-\sigma^{2n}\mathbf{w}} + \frac{\sigma^{2n}}{\mathbf{w}-\sigma^{2n}}. \end{aligned}$$

En remplaçant $\mathbf{w} = \mathbf{G}(\mathbf{z})$, nous obtenons la fonction holomorphe :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_h(\mathbf{z}) &= \gamma_h - 2a\sum_{n\geq 1}\frac{\sigma^{2n}(\mathbf{z}-ia)}{\mathbf{z}+ia-\sigma^{2n}(\mathbf{z}-ia)} + \frac{\sigma^{2n}(\mathbf{z}+ia)}{\mathbf{z}-ia-\sigma^{2n}(\mathbf{z}+ia)},\\
&= \gamma_h - 2\sum_{n\geq 1}\frac{a\sigma^{2n}}{1-\sigma^{2n}}\left[\frac{(\mathbf{z}-ia)}{\mathbf{z}+ia\dfrac{1+\sigma^{2n}}{1-\sigma^{2n}}} + \frac{(\mathbf{z}+ia)}{\mathbf{z}-ia\dfrac{1+\sigma^{2n}}{1-\sigma^{2n}}}\right],\\
&= \gamma_h - 4\sum_{n\geq 1}\frac{a\sigma^{2n}}{1-\sigma^{2n}} + i\frac{a^2\sigma^{2n}}{(1-\sigma^{2n})^2}\left[\frac{-1}{\mathbf{z}+ia\dfrac{1+\sigma^{2n}}{1-\sigma^{2n}}} + \frac{1}{\mathbf{z}-ia\dfrac{1+\sigma^{2n}}{1-\sigma^{2n}}}\right],\\
&= \gamma_h + \sum_{n\geq 1}\frac{-4a\sigma^{2n}}{1-\sigma^{2n}} + \left(\frac{2a}{1-\sigma^{2n}}\right)^3\frac{(1+\sigma^{2n})\sigma^{2n}}{\mathbf{z}^2+\left(a\dfrac{1+\sigma^{2n}}{1-\sigma^{2n}}\right)^2}.
\end{aligned}$$

En posant $\gamma_h = \sum_{n\geq 1}\dfrac{4a\sigma^{2n}}{1-\sigma^{2n}}$, nous montrerons que la fonction $\mathbf{F}_h$ est holomorphe sur tout compact $K \subset \bigcap\limits_{h\in[1,1+\epsilon]}\Omega_h$ avec $1/2 > \epsilon > 0$ et qu'elle converge vers la fonction holomorphe :

$$\mathbf{F} = \sum_{n\geq 1}\frac{2}{n(1+n^2\mathbf{z}^2)},$$

sur tout compact $K \subset \bigcap\limits_{h\in[1,1+\epsilon]}\Omega_h$. Nous notons la série de fonction $\left(f_n(\mathbf{z},h)\right)_{n\geq 1}$:

$$f_n(\mathbf{z},h) = \left(\frac{2a}{1-\sigma^{2n}}\right)^3\frac{(1+\sigma^{2n})\sigma^{2n}}{\mathbf{z}^2+\left(a\dfrac{1+\sigma^{2n}}{1-\sigma^{2n}}\right)^2}.$$

Pour montrer que la série $\left(f_n(\mathbf{z},h)\right)_{n\geq 1}$ est normalement convergente sur les compacts K. Nous commençons par prouver certaines estimations sur l'expression $2a/(1-\sigma^{2n})$. Fixons $1 > \delta > 0$ et pour tout $\delta < \sigma < 1$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{2a}{1-\sigma^{2n}} &= \frac{(1-\sigma^2)}{\sigma(1-\sigma^{2n})},\\
&= \frac{(1-\sigma)(1+\sigma)}{\sigma(1-\sigma^n)(1+\sigma^n)},\\
&= \frac{(1-\sqrt{\sigma})(1+\sqrt{\sigma})(1+\sigma)}{\sigma(1-\sqrt{\sigma}^n)(1+\sqrt{\sigma}^n)(1+\sigma^n)},\\
&= \frac{(1+\sqrt{\sigma})(1+\sigma)}{\sigma(\sum_{p=0}^{n-1}\sqrt{\sigma}^p)(1+\sqrt{\sigma}^n)(1+\sigma^n)}.
\end{aligned}$$

En remarquant que $1 > \sigma^p > \sigma^n$ pour tout $1 > \sigma > 0$ et tout $p = \{0,\ldots,n-1\}$, nous obtenons les encadrements :

$$\begin{array}{rcl}
1 < & (1+\sqrt{\sigma})(1+\sigma) & < 2,\\
1 < & (1+\sqrt{\sigma}^n)(1+\sigma^n) & < 2,\\
\dfrac{1}{n} & \leq \dfrac{1}{\sum_{p=0}^{n-1}\sqrt{\sigma}^p} & \leq \dfrac{1}{n\sqrt{\sigma}^n}.
\end{array}$$

Finalement pour tout $\delta < \sigma < 1$ nous obtenons :

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{2a}{1-\sigma^{2n}} \leq \frac{2}{\delta n \sqrt{\sigma}^n}. \tag{2.31}$$

Nous commençons par discuter le choix de la constante

$$\gamma_h = \sum_{n\geq 1} \frac{4a\sigma^{2n}}{1-\sigma^{2n}}. \tag{2.32}$$

En appliquant le critère de d'Alembert la série (2.32) converge si $\sigma^2 < 1$ et de plus lorsque σ tend vers 1, γ_h tend vers $+\infty$. En utilisant la formule (2.31) avec $\delta < \sigma < 1$ nous avons :

$$\gamma_h \geq \sum_{n\geq 1} \frac{\delta^{2n}}{n} = -\ln(1-\delta^2).$$

Donc en faisant tendre δ vers 1, $-\ln(1-\delta^2)$ tend vers $+\infty$. Nous soulignons ici que le choix de la constante γ_h n'est pas unique car nous pouvons choisir une autre constante de sorte que si σ tend vers 1 alors cette constante tend vers $+\infty$ de manière équivalente à γ_h. Nous fixons $R > r > 0$ et nous notons les compacts :

$$K(R,r) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} | R \geq |\mathbf{z}| \geq r \text{ et } z_2 \geq 0\} \bigcap_{h\in[1,1+\epsilon]} \Omega_h$$

Soit $\mathbf{z} \in K(R,r)$, en utilisant l'encadrement (2.31) nous avons :

$$\left|\mathbf{z} + ia\frac{1+\sigma^{2n}}{1-\sigma^{2n}}\right|^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2z_2 a\frac{1+\sigma^{2n}}{1-\sigma^{2n}} + \left(a\frac{1+\sigma^{2n}}{1-\sigma^{2n}}\right)^2 \geq r^2 + \frac{1}{4n^2}.$$

En remarquant que pour tout $1 > r > 0$, tout $1 \leq h \leq 3/2 + \epsilon$ et tout $n \geq 1$ les nombres complexes : $ia(1+\sigma^{2n})/(1-\sigma^{2n})$ sont contenus dans l'ensemble :

$$\Delta(\epsilon, r) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} \,\big|\, |\mathbf{z}| \geq r \text{ et } r^2 \geq z_1 \geq -r^2,\, 3/2+\epsilon \geq z_2 \geq 0\}.$$

Si nous remplaçons h et a par leurs expressions en fonction de σ, nous obtenons :

$$\begin{aligned} h - a\frac{1+\sigma^{2n}}{1+\sigma^{2n}} &= \frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma} + \sigma) - \frac{1}{2}(\frac{1}{\sigma} - \sigma)\frac{1+\sigma^{2n}}{1+\sigma^{2n}}, \\ &= \frac{1}{\sigma}\frac{1}{1-\sigma^{2n}} - \frac{\sigma^{2n+1}}{1-\sigma^{2n}}, \\ &= \frac{1-\sigma^{2n+2}}{\sigma(1-\sigma^{2n})} \geq 0. \end{aligned}$$

Donc pour $\mathbf{z} \in K(R,r)$, nous obtenons les minoration suivantes :

- si $z_2 < 3/2 + \epsilon$ alors $z_1 > r^2$ donc $|\mathbf{z} - ia(1+\sigma^{2n})/(1-\sigma^{2n})| > r^2$,
- si $z_2 > 3/2 + \epsilon$ alors $z_1 > r^2$ donc $|\mathbf{z} - ia(1+\sigma^{2n})/(1-\sigma^{2n})| > 1/2$.

Toutes ces inégalités conduisent à la majoration uniforme

$$|f_n(\mathbf{z}, h)| \leq \left(\frac{2}{\delta n\sqrt{\sigma^n}}\right)^3 \frac{4n\sigma^{2n}}{\min(\mathrm{r}^2, 1/2)\sqrt{1+4\mathrm{n}^2\mathrm{r}^2}}, \tag{2.33a}$$

$$\leq \frac{32\delta^{n/2-1}}{n^2 \min(\mathrm{r}^2, 1/2)}, \tag{2.33b}$$

$$\leq \frac{64}{n^2 \min(2\mathrm{r}^2, 1)}. \tag{2.33c}$$

Grâce à cette majoration (2.33c), la série $f_n(\mathbf{z},h)$ est donc normalement convergente sur $K(R,r)$ et pour tout $h\in[1,1+\epsilon]$ cette majoration est uniforme. Comme $\mathbf{z}\to f_n(\mathbf{z},h)$ est holomorphe sur $K(R,r)$, la fonction $\mathbf{F}_h$ est holomorphe sur $K(R,r)$. De plus en remarque que pour tout $\mathbf{z}\in K(R,r)$ les applications $h\to f_n(\mathbf{z},h)$ sont continues sur $]1,1+\epsilon]$ et se prolongent par continuité en 1

$$\lim_{h\to 1} f_n(\mathbf{z},h)=\frac{2}{n(1+n^2\mathbf{z}^2)}.$$

Ainsi la fonction $\mathbf{F}_h$ converge vers $\mathbf{F}$ qui est holomorphe :

$$\mathbf{F}(\mathbf{z})=\sum_{n\geq 1}\frac{2}{n(1+n^2\mathbf{z}^2)}.$$

■

Pour terminer cette section nous allons montrer que la partie réelle de la fonction $\mathbf{F}$ (2.30) est solution du problème de Neumann (2.28). Pour cela nous introduisons la fonction holomorphe suivante :

$$\mathbf{J}(\mathbf{z})=\int_0^{+\infty}\frac{2(1-\mathrm{ch}(\frac{\mathrm{ix}}{\mathbf{z}}))}{e^x-1}\mathrm{dx}. \tag{2.34}$$

Proposition 2.4.1 *La fonction* $\mathbf{J}$*, définie par* (2.34)*, est holomorphe sur* $D_{\mathbf{J}}$ *:*

$$D_{\mathbf{J}}=\left\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}\,\middle|\,\left|\mathbf{z}-\frac{i}{2}\right|>\frac{1}{2}\ et\ \left|\mathbf{z}+\frac{i}{2}\right|>\frac{1}{2}\right\}. \tag{2.35}$$

De plus sur $\Omega_1=\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}\,|z_2>0\ et\ |\mathbf{z}-i|>1\}$ *les fonctions* $\mathbf{F}$ *et* $\mathbf{J}$ *sont égales et la partie réelle de* $\mathbf{J}$ *est solution du problème de Neumann* (2.28)*.*

Preuve : Nous fixons $R>2\delta>1>2r$ et notons le compact $K(R,r,\delta)\subset D_{\mathbf{J}}$:

$$K=\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}\,|r\leq|\mathbf{z}|\leq R,\quad |\mathbf{z}-i\delta|\geq\delta,\ \text{et}\ |\mathbf{z}+i\delta|\geq\delta\}.$$

Montrons que $\mathbf{J}$ est holomorphe sur le compact $K(R,r,\delta)$ en appliquant le théorème de Lebesgue d'holomorphie sous le signe intégrale. Pour tout $\mathbf{z}=a+ib\in K(R,r,\delta)$ et tout $x\in[0,+\infty[$, nous introduisons la fonction

$$j(\mathbf{z},x)=\frac{2(1-\mathrm{ch}(\frac{\mathrm{ix}}{\mathbf{z}}))}{e^x-1}. \tag{2.36}$$

Pour tout $x>0$, l'application $\mathbf{z}\to j(\mathbf{z},x)$ est holomorphe sur $K(R,r,\delta)$ car $\mathbf{z}\to\mathrm{ch}(\mathrm{ix}/\mathbf{z})$ est holomorphe pour tout $\mathbf{z}\neq 0$. De plus pour tout $\mathbf{z}\in K(R,r,\delta)$, l'application $x\to j(\mathbf{z},x)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et elle peut se prolonger par continuité en 0,

$$j(\mathbf{z},x)=\frac{2(1-\mathrm{ch}(\frac{\mathrm{ix}}{\mathbf{z}}))}{e^x-1}\approx\frac{-2}{\mathbf{z}^2}x\qquad\text{quand } x\to 0.$$

Ainsi la fonction $j(\mathbf{z},\cdot)$ est mesurable sur $[0,+\infty[$ pour tout $\mathbf{z}\in K(R,r,\delta)$. Soit $\mathbf{z}=a+ib\in K(R,r,\delta)$ et $x\in[0,+\infty[$, un simple calcul conduit à :

$$\mathrm{ch}(\frac{\mathrm{ix}}{\mathbf{z}})=\mathrm{ch}(\frac{\mathrm{bx}}{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2})\cos(\frac{\mathrm{ax}}{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2})+\mathrm{i}\,\mathrm{sh}(\frac{\mathrm{bx}}{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2})\sin(\frac{\mathrm{ax}}{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}). \tag{2.37}$$

Pour simplifier les calculs nous notons

$$\alpha = a/(a^2+b^2) \text{ et } \beta = b/(a^2+b^2).$$

Nous majorons maintenant l'application $x \to j(\mathbf{z},x)$ avec $x \in [0,\infty[$ et $\mathbf{z} \in K(R,r,\delta)$:

$$\begin{aligned} |j(\mathbf{z},x)| &\leq \left|\frac{2(1-\mathrm{ch}(\beta \mathrm{x})\cos(\alpha \mathrm{x}))}{e^x-1}\right| + \left|\frac{2\mathrm{sh}(\beta \mathrm{x})\sin(\alpha \mathrm{x})}{e^x-1}\right|, \\ &\leq 2\mathrm{ch}(\beta \mathrm{x})\left|\frac{(1-\cos(\alpha \mathrm{x}))}{\mathrm{e^x}-1}\right| + 2\left|\frac{(1-\mathrm{ch}(\beta \mathrm{x}))}{\mathrm{e^x}-1}\right| + 2\mathrm{ch}(\beta \mathrm{x})\left|\frac{\sin(\alpha \mathrm{x})}{\mathrm{e^x}-1}\right|. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité des accroissement finis sur l'intervalle $[0,x]$, nous obtenons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} |1-\cos(\alpha \mathrm{x})| &\leq \alpha x \leq \frac{R}{r^2}x, \\ |\sin(\alpha \mathrm{x})| &\leq \alpha x \leq \frac{R}{r^2}x, \\ |1-\mathrm{ch}(\beta \mathrm{x})| &\leq |\mathrm{sh}(\beta \mathrm{x})|\, x \leq \frac{R}{r^2}x\mathrm{ch}(\beta \mathrm{x}). \end{aligned}$$

Ces inégalités conduisent à la majoration :

$$|j(\mathbf{z},x)| \leq \frac{3Rx(e^{(\beta-1)x}+e^{-(\beta+1)x})}{r^2(1-e^{-x})}.$$

Montrons que pour tout $a+ib \in K(R,r,\delta)$, il existe deux constantes $C_1<0$ et $C_2<0$ tel que $\beta-1 \leq C_1 < 0$ et $-\beta-1 \leq C_2 < 0$. Nous introduisons les fonctions de deux variable $f_1 : K(R,r,\delta) \mapsto \mathbb{R}$ et $f_2 : K(R,r,\delta) \mapsto \mathbb{R}$:

$$f_1(a,b) = \frac{b-(a^2+b^2)}{a^2+b^2} \text{ et } f_1(a,b) = \frac{-b-(a^2+b^2)}{a^2+b^2}.$$

Comme $(0,0) \notin K(R,r,\delta)$, f_1 et f_2 sont des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $K(R,r,\delta)$. L'unique point critique des fonctions f_1 et f_2 serait le point $(0,0)$, or ce point n'est pas dans $K(R,r,\delta)$. Comme $K(R,r,\delta)$ est compact, les fonctions f_1 et f_2 sont bornés sur $K(R,r,\delta)$. En remarquant que pour tout $(a,b) \in D_{\mathbf{J}}$, défini par (2.35), nous avons :

$$\begin{aligned} a^2+(b-\frac{1}{2})^2 > \frac{1}{4} &\Rightarrow a^2+b^2-b>0 \\ a^2+(b+\frac{1}{2})^2 > \frac{1}{4} &\Rightarrow a^2+b^2+b>0 \end{aligned}$$

Comme $K(R,r,\delta) \subset D_{\mathbf{J}}$, il existe deux constantes $C_1(R,r,\delta)<0$ et $C_2(R,r,\delta)<0$ tel que pour tout $(a,b) \in K(R,r,\delta)$, $f_1(a,b) < C_1(R,r,\delta)$ et $f_2(a,b) < C_2(R,r,\delta)$. Ainsi pour tout $\mathbf{z} \in K(R,r,\delta)$ nous obtenons la majoration suivante pour la fonction $j(\mathbf{z},\cdot)$:

$$|j(\mathbf{z},x)| \leq \frac{3Rx(e^{C_1(R,r,\delta)x}+e^{C_2(R,r,\delta)x})}{r^2(1-e^{-x})}.$$

En remarquant que la fonction

$$x \to 3Rx\frac{\left[e^{C_1(R,r,\delta)x}+e^{C_2(R,r,\delta)x}\right]}{(r^2\left[1-e^{-x}\right])}$$

est continue sur $]0,+\infty[$ et se prolonge par continuité en 0 par $6R/r^2$. Lorsque x tend vers $+\infty$ cette fonction est équivalente à :

$$\frac{3Rx(e^{C_1(R,r,\delta)x}+e^{C_2(R,r,\delta)x})}{r^2(1-e^{-x})} \approx \frac{3Rx}{r^2}(e^{C_1(R,r,\delta)x}+e^{C_2(R,r,\delta)x}).$$

Nous en déduisons donc que cette fonction est intégrable sur $[0,+\infty[$. Le théorème de Lebesgue d'holomorphie sous le signe intégrale permet de conclure que la fonction $\mathbf{J}$, définie par la formule (2.34), est holomorphe sur $K(R,r,\delta)$ avec $R>2\delta>1>2r$. En faisant tendre R vers $+\infty$, r vers 0 et δ vers $1/2$, la fonction $\mathbf{J}$ est holomorphe sur $D_{\mathbf{J}}$. Nous terminons la preuve en montrant que la fonction $\mathbf{J}$, définie par (2.34), coïncide avec la fonction $\mathbf{F}$, définie par (2.30), sur le domaine $\Omega_1=\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}\,|z_2>0 \text{ et } |\mathbf{z}-i|>1\}$ en appliquant le principe des zéros isolés. Les fonctions $\mathbf{F}$ et $\mathbf{J}$ sont holomorphes sur Ω_1. Pour $\mathbf{z}=i/t$ avec $t<1/2$, nous avons $\mathbf{F}(i/t)=\mathbf{J}(i/t)$. En effet en utilisant la définition de $\mathbf{J}$ (2.34), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(\frac{i}{t}) &= \int_0^{+\infty}\frac{2(1-\mathrm{ch(tx)})}{e^x-1}\mathrm{dx},\\
&= \int_0^{+\infty}\frac{2(1-\mathrm{ch(tx)})\mathrm{e^{-x}}}{1-e^{-x}}\mathrm{dx},\\
&= \int_0^{+\infty}2(1-\mathrm{ch(tx)})\sum_{\mathrm{n\geq 1}}\mathrm{e^{-nx}}\mathrm{dx}.
\end{aligned}$$

En remarquant que la fonction $x\to 2(1-\mathrm{ch(tx)})\mathrm{e^{-nx}}$ est négative pour tout $[0,+\infty[$ et $n\geq 1$, le théorème de Fubini permet d'intervertir la somme et l'intégrale.

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(\frac{i}{t}) &= \sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty}2(1-\mathrm{ch(tx)})\mathrm{e^{-nx}}\mathrm{dx},\\
&= \sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty}2e^{-nx}-e^{(t-n)x}-e^{-(t+n)x}\mathrm{dx},\\
&= \sum_{n\geq 1}\left[\frac{2e^{-nx}}{-n}-\frac{e^{(t-n)x}}{t-n}+\frac{e^{-(t+n)x}}{t+n}\right]_0^{+\infty},\\
&= \sum_{n\geq 1}\frac{2}{n}+\frac{1}{t-n}-\frac{1}{t+n},\\
&= \sum_{n\geq 1}\frac{2t^2}{n(t^2-n^2)},\\
&= \sum_{n\geq 1}\frac{2}{n(1+n^2(\frac{i}{t})^2)}=\mathbf{F}(\frac{i}{t}).
\end{aligned}$$

Les deux fonctions holomorphes $\mathbf{F}$ et $\mathbf{J}$ sont égales sur l'ensemble

$$\{\mathbf{z}\in\mathbb{C}\,|\quad \mathbf{z}=i/t,\ \text{avec } t<1/2\}\subset\Omega_1$$

qui admet un point d'accumulation dans Ω_1. Ainsi les deux fonctions $\mathbf{F}$ et $\mathbf{J}$ sont égales sur l'ensemble Ω_1. Pour terminer cette preuve, nous allons montrer que la partie réelle de $\mathbf{F}$ est bien solution du problème (2.28). Pour cela, il suffit de vérifier que les conditions de bord sont satisfaites car il est bien connu que la partie réelle (ou imaginaire) d'une fonction holomorphe est harmonique. Posons $\mathbf{F}(x+iy)=f_1(x,y)+if_2(x,y)$ et montrons que f_1 vérifient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{n}}(x,y) &= 0 \qquad \text{pour } y=0,\\
\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{n}}(x,y) &= 1-y \qquad \text{pour } x^2+(y-1)^2=1.
\end{aligned}$$

Nous commençons par écrire $\partial f_1/\partial \mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{F}$. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{n}}(x+iy) &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)n_1(x,y) + \frac{\partial f_1}{\partial y}n_2(x,y), \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)n_1(x,y) - \frac{\partial f_2}{\partial x}n_2(x,y), \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}+\mathrm{iy})\cdot\mathbf{n}(\mathrm{x},\mathrm{y})\right), \\
&= \mathrm{Re}\left(\mathbf{F}'(\mathrm{x}+\mathrm{iy})\cdot\mathbf{n}(\mathrm{x},\mathrm{y})\right).
\end{aligned}$$

L'égalité entre les fonctions $\mathbf{F}$ et $\mathbf{J}$ permet d'obtenir une nouvelle expression de $\mathbf{F}'(\mathbf{z})$:

$$\mathbf{F}'(\mathbf{z}) = \frac{2i}{\mathbf{z}^2}\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x-1}\mathrm{sh}(\frac{\mathrm{ix}}{\mathbf{z}})\mathrm{dx}, \text{ pour tout } \mathbf{z}\in\Omega_1.$$

La première condition de bord peut se prouver en posant $\mathbf{z} = t \in \mathbb{R}^*$. Le vecteur normal est $\mathbf{n}(t,0) = -i$ et $\mathbf{F}'(t)\cdot\mathbf{n}(t)$ se simplifie de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}'(t)\cdot\mathbf{n}(t) &= \frac{2i}{t^2}\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x-1}\mathrm{sh}(\frac{\mathrm{ix}}{\mathrm{t}})\mathrm{dx}\cdot(-\mathrm{i}), \\
&= \frac{2i}{t^2}\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x-1}\sin(\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{t}})\mathrm{dx}.
\end{aligned}$$

Cette quantité est imaginaire pure donc sa partie réelle est nulle.

Pour prouver la seconde condition de bord, nous utilisons la paramétrisation du cercle suivante, $\mathbf{z}_\theta = i + ie^{i\theta}$ avec $\theta\in[-\pi,\pi]$. Le vecteur normale du cercle au point $\mathbf{z}_\theta$ est donné par $\mathbf{n}(\mathbf{z}_\theta) = -ie^{i\theta}$. Pour calculer l'expression $\mathbf{F}'(\mathbf{z}_\theta)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{z}_\theta)$, nous devons simplifier $\mathrm{sh}(\mathrm{x}/(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}))$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(\frac{\mathrm{x}}{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}) &= \mathrm{sh}(\frac{\mathrm{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta/2}}{2\cos(\theta/2)}), \\
&= \mathrm{sh}(\frac{\mathrm{x}}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{x}}{2}\mathrm{tg}(\theta/2)), \\
&= \mathrm{sh}(\frac{\mathrm{x}}{2})\cos(\frac{\mathrm{x}}{2}\mathrm{tg}(\theta/2)) - \mathrm{i}\,\mathrm{ch}(\frac{\mathrm{x}}{2})\sin(\frac{\mathrm{x}}{2}\mathrm{tg}(\theta/2)).
\end{aligned}$$

Nous pouvons donc séparer partie réelle et partie imaginaire, nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(\mathbf{F}'(\mathbf{z}_\theta)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{z}_\theta)) &= \mathrm{Re}\left(\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{(\mathrm{i}+\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}-1}\Big[\mathrm{sh}(\frac{\mathrm{x}}{2})\cos(\frac{\mathrm{x}}{2}\mathrm{tg}(\theta/2))\right. \\
&- \left. i\mathrm{ch}(\frac{\mathrm{x}}{2})\sin(\frac{\mathrm{x}}{2}\mathrm{tg}(\theta/2))\Big]\,\mathrm{dx}\right), \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{-1}{2\cos^2(\theta/2)}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}}-1}\Big[\mathrm{sh}(\frac{\mathrm{x}}{2})\cos(\frac{\mathrm{x}}{2}\mathrm{tg}(\theta/2))\right. \\
&- \left. i\mathrm{ch}(\frac{\mathrm{x}}{2})\sin(\frac{\mathrm{x}}{2}\mathrm{tg}(\theta/2))\Big]\,\mathrm{dx}\right), \\
&= \frac{-1}{4\cos^2(\theta/2)}\int_0^{+\infty} xe^{-x/2}\cos(\frac{\mathrm{x}}{2}\mathrm{tg}(\theta/2))\mathrm{dx}, \\
&= \frac{-1}{\cos^2(\theta/2)}\mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{x}\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i}\mathrm{tg}(\theta/2))\mathrm{x}}\mathrm{dx}\right), \\
&= \frac{-1}{\cos^2(\theta/2)}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{(1-\mathrm{i}\mathrm{tg}(\theta/2))^2}\right), \\
&= \frac{-1}{\cos^2(\theta/2)}\mathrm{Re}\left(\cos^2(\theta/2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right), \\
&= -\cos(\theta).
\end{aligned}$$

En remarquant que pour $\mathbf{z}_\theta = x + iy = i + ie^{i\theta}$, $1 - y = -\cos(\theta)$. Ainsi la partie réelle de la fonction $\mathbf{F}$, définie par (2.30), est bien solution du problème de Neumann (2.28). ■

Chapitre 3

Espaces fonctionnels et problèmes de Neumann

Dans ce chapitre nous introduisons tous les espaces fonctionnels nécessaires pour donner un sens aux solutions des équations aux dérivées partielles que nous allons étudier. Dans une première section, nous rappelons les définitions et les propriétés des espaces de Sobolev. Nous donnerons aussi les définitions et certaines propriétés sur quelques espaces moins classiques : les espaces de Sobolev à poids et certain sous-espaces de difféomorphisme. La seconde section est dédiée aux problèmes de Neumann non homogènes où nous exposerons les résultats classiques d'existence et d'unicité des solutions pour des domaines bornés et non bornés. Enfin dans la dernière section nous étudierons la dépendance par rapport à un paramètre d'un problème de Neumann.

3.1 Définitions de espaces de Sobolev

Dans cette section nous fixons $n \geq 1$ et $m \geq 1$ des entiers et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour $s \geq 1$ un entier, nous introduisons les espaces classiques de Sobolev :

$$L^2(\Omega, \mathbb{R}^m) = H^0(\Omega, \mathbb{R}^m) = \left\{ \mathbf{u} \,\middle|\, \sum_{p=1}^{m} \int_\Omega u_p^2(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} < +\infty \right\}, \tag{3.1a}$$

$$H^s(\Omega, \mathbb{R}^m) = \left\{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^m) \,\middle|\, \partial^\alpha \mathbf{u} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^m) \text{ pour tout } |\alpha| \leq s \right\}. \tag{3.1b}$$

Comme dans le livre de Lions et Magenes [35], nous munissons ces espaces des normes suivantes :

$$||\mathbf{u}||_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^m)} = \left(\sum_{p=1}^{m} \int_\Omega |u_p(\mathbf{x})|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} \right)^{1/2}, \tag{3.2a}$$

$$||\mathbf{u}||_{H^s(\Omega,\mathbb{R}^m)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} ||\partial^\alpha \mathbf{u}||_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^m)} \right)^{1/2}. \tag{3.2b}$$

Toujours d'après le livre de Lions et Magenes [35, Théorème 1.1 page 3], pour les normes (3.2) les espaces $L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ et $H^s(\Omega, \mathbf{R}^m)$ sont des espaces de Hilbert et le produit scalaire de deux

éléments $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ est donné par :

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^m)} = \sum_{p=1}^{m} \int_\Omega u_p(\mathbf{x})\overline{v_p(\mathbf{x})}\mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{3.3a}$$

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{H^s(\Omega,\mathbb{R}^m)} = \sum_{|\alpha|\leq s} (\partial_\alpha \mathbf{u}, \partial_\alpha \mathbf{v})_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^m)}\,. \tag{3.3b}$$

Pour simplifier les notations, nous noterons $H^s(\Omega,\mathbb{R}) = H^s(\Omega)$, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible. Pour $s > 0$, les espaces $H^s(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ sont définis par interpolation et les espaces $H^{-s}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ pour $s > 0$ sont définis par dualité (voir Lions-Magenes [35]). En passant par des cartes locales de $\Gamma = \partial\Omega$, nous pouvons définir, comme dans [35, Chapitre 1, page 38], les espaces $H^s(\Gamma,\mathbb{R}^m)$. Nous invitons le lecteur à consulter [35] pour une étude plus complète de ces espaces.

Nous terminons cette section en rappelant la définition de certains espaces de Sobolev à poids. Ceci permettra de donner un sens aux solutions des problèmes de Neumann pour des domaines extérieurs. Ces définitions et résultats provient du livre de Adams [1] et des articles de Amrouche, Girault et Giroire [2] et [3]. Nous devons introduire des espaces de Sobolev à poids qui imposent le comportement des solutions à l'infini. De plus nous restreignons l'étude à certains types de domaines non borné. Le domaine Ω sera le complémentaire d'un compact $K = \cup_{i\in I} K_i$ de $\mathbb{R}^n$ ou le complémentaire d'un compact dans un demi-espace :

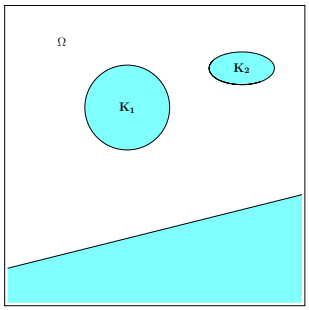


FIG. 3.1 – Exemple de domaine extérieur Ω

Nous commençons par définir les fonctions de poids :

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}) &= (1+|\mathbf{x}|^2)^{1/2} \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 \text{ si } n=3,\\ \rho(\mathbf{x}) &= \ln(2+|\mathbf{x}|) \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2 \text{ si } n=2. \end{aligned}$$

Pour un domaine Ω non borné de $\mathbb{R}^n$, nous introduisons les espaces à poids suivants :

$$\mathcal{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^m) = \left\{\mathbf{u}\in\mathcal{D}'(\Omega,\mathbb{R}^m) \;\middle|\; \rho\mathbf{u}\in L^2(\Omega,\mathbb{R}^m)\right\}, \tag{3.4a}$$

$$\mathcal{H}^1(\Omega,\mathbb{R}^m) = \left\{\mathbf{u}\in\mathcal{D}'(\Omega,\mathbb{R}^m) \;\middle|\; \frac{\mathbf{u}}{\rho}\in L^2(\Omega,\mathbb{R}^m) \text{ et } \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i}\in L^2(\Omega,\mathbb{R}^m)\, i=1,\ldots,n\right\}, \tag{3.4b}$$

$$\mathcal{H}^2(\Omega,\mathbb{R}^m) = \left\{\mathbf{u}\in\mathcal{H}^1(\Omega,\mathbb{R}^m) \;\middle|\; \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x_i\partial x_j}\in L^2(\Omega,\mathbb{R}^m) \text{ pour } i,j=1,\ldots,n\right\}. \tag{3.4c}$$

Pour ces espaces nous posons les produits scalaires :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathcal{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^m)} &= \sum_{k=1}^{m}\int_\Omega \mathbf{u}_k(\mathbf{x})\mathbf{v}_k(\mathbf{x})\rho^2(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x},\\
(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathcal{H}^1(\Omega,\mathbb{R}^m)} &= \sum_{k=1}^{m}\int_\Omega \nabla\mathbf{u}_k(\mathbf{x})\cdot\nabla\mathbf{v}_k(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x},\\
(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathcal{H}^2(\Omega,\mathbb{R}^m)} &= (\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathcal{H}^1(\Omega,\mathbb{R}^m)}\\
&+ \sum_{k=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\mathbf{u}_k(\mathbf{x})\right]\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\mathbf{v}_k(\mathbf{x})\right]\rho^2(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Pour plus de généralités sur ces espaces et pour vérifier que $\mathcal{L}^2(\Omega,\mathbb{R}^m)$, $\mathcal{H}^1(\Omega,\mathbb{R}^m)$ et $\mathcal{H}^2(\Omega,\mathbb{R}^m)$ sont des espaces de Hilbert, nous renvoyons le lecteur vers les travaux de Boulmezaoud [7], Amrouche, Girault, Giroire [3] et Amrouche, Nečasová [4].

3.2 Une classe de difféomorphismes

Dans cette section nous fixons $n \geq 1$, $m \geq 1$, $k \geq 0$ des entiers, $T > 0$ un scalaire et Ω et $\widetilde{\Omega}$ des domaines de $\mathbb{R}^n$. Le but de cette partie consiste à rappeler différents résultats sur les difféomorphismes et à introduire certains espaces qui donneront la régularité des solutions des problèmes fluide-structure. Les propriétés sur les ensembles des difféomorphismes sont adaptés des résultats de la section 2 de l'article d'Ebin et Marsden [19]. Une principale difficulté dans ce type de problème est la forme variable que peut prendre le domaine du fluide. Nous avons donc besoin de définir des espaces fonctionnels sur des domaines variables en temps pour donner une définition précise des solutions.

Nous distinguons le cas des domaines bornés du cas des domaines non bornés. Pour un domaine Ω borné, nous rappelons que l'espace $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach si nous le munissons de la norme suivante :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\leq k}\|D^\alpha\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^n)}, \qquad \text{pour tout } \mathbf{u}\in\mathcal{C}^k(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n).$$

Pour $1 > m > 0$, nous définissons le sous ensemble de $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{m}}(\overline{\Omega}) = \Big\{\mathbf{u}\in\mathcal{C}^{\mathrm{k}}(\overline{\Omega},\mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \;\Big|\; &\mathbf{u} \text{ est une bijection de } \overline{\Omega} \text{ sur } \overline{\mathbf{u}(\Omega)},\\
&\mathrm{m} < |\det[\mathrm{D}_{\mathbf{y}}\mathbf{u}(\mathbf{y})]| < \frac{1}{\mathrm{m}}, \text{ pour tout } \mathbf{y}\in\Omega, \text{ et } \mathbf{u}^{-1}\in\mathcal{C}^{\mathrm{k}}(\overline{\mathbf{u}(\Omega)},\mathbb{R}^{\mathrm{n}})\Big\}. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Cet ensemble est un ouvert de l'espace de Banach $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$. La preuve de ce résultat se trouve dans la section 2 de l'article d'Ebin et Marsden [19]. De plus si $0 < m' < m < 1$, alors nous avons l'inclusion

$$\mathrm{D}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{m}}(\overline{\Omega}) \subset \mathrm{D}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{m}'}(\overline{\Omega}).$$

Nous notons par

$$\mathrm{D}^{\mathrm{k}}(\overline{\Omega}) = \bigcap_{0<\mathrm{m}<1}\mathrm{D}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{m}}(\overline{\Omega}),$$

le sous-ensemble fermé des difféomorphismes qui préserve le volume, car si $\mathbf{u}\in\mathrm{D}^{\mathrm{k}}(\overline{\Omega})$ alors $|\det[\mathrm{D}_{\mathbf{y}}\mathbf{u}(\mathbf{y})]| = 1$ pour tout $\mathbf{y}\in\Omega$. L'ensemble de tous les difféomorphismes dans $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ sera noté par $\mathrm{D}^{\mathrm{k}}_0(\overline{\Omega})$.

Cependant pour l'étude du cas générale nous avons besoin d'une classe plus large des difféomorphismes que nous définissons ci-dessous. Plus précisément nous introduisons les sous-ensembles de $H^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$:

$$\mathrm{Diff}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{m}}(\Omega) = \Big\{ \mathbf{u} \in \mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\Omega, \mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \,\Big|\, \mathbf{u} \text{ est une bijection de } \overline{\Omega} \text{ sur } \overline{\mathbf{u}(\Omega)}, \\ \mathrm{m} < |\det[\mathrm{D}_{\mathbf{y}}\mathbf{u}(\mathbf{y})]| < \frac{1}{\mathrm{m}}, \text{ pour tout } \mathbf{y} \in \Omega, \text{ et } \mathbf{u}^{-1} \in \mathrm{H}^{\mathrm{k}}(\mathbf{u}(\Omega), \mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \Big\}. \quad (3.6)$$

De même cette ensemble est un ouvert de l'espace de Banach $H^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$. La preuve de cette propriété se trouve aussi dans la section 2 de [19]. Nous remarquons aussi que pour tout $0 < m' < m < 1$, nous avons aussi les inclusions

$$\mathrm{Diff}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{m}}(\Omega) \subset \mathrm{Diff}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{m}'}(\Omega).$$

Nous notons par

$$\mathrm{Diff}^{\mathrm{k}}(\Omega) = \bigcap_{0<\mathrm{m}\leq 1} \mathrm{Diff}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{m}}(\Omega)$$

le sous-ensemble fermé des difféomorphisme de $H^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ conservant le volume. Parmi tous ces espaces fonctionnels, l'ensemble $\mathrm{Diff}^{\mathrm{k}}(\Omega)$ joue un rôle important pour l'étude des fluides parfaits incompressibles, car le flot engendré par la vitesse du fluide vit dans $\mathrm{Diff}^{\mathrm{k}}(\Omega)$. De même l'ensemble de tous les difféomorphismes de $H^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ sera noté par $\mathrm{Diff}^{\mathrm{k}}_0(\Omega)$.

Concernant les domaines non bornés, nous regardons juste les sous-ensembles de $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Nous supposerons que l'espace $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ est muni de la convergence uniforme sur tout compact sur tout compact. Nous définissions la famille de semi-norme sur $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ par :

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{C}^k(K,\mathbb{R}^n)} = \sum_{\alpha \leq k} \|D^\alpha \mathbf{u}\|_{L^\infty(K,\mathbb{R}^n)}, \qquad \text{pour tout } \mathbf{u} \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

pour tout K compact de Ω. Grâce à cette famille nous pouvons définir une topologie sur $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Nous restreignons l'ensemble des difféomorphismes à une certaine classe qui n'a pas d'influence sur se qui se passe en dehors d'un certain compact. Ainsi pour tout difféomorphisme ϕ, il existe un compact $K \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\phi(\mathbf{y}) = \mathbf{y} \qquad \text{pour tout } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus K.$$

Nous définissons donc l'espace fonctionnel suivant pour $0 < m < 1$:

$$D^k_m(\Omega) = \big\{ \phi \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n) \,|\, \text{il existe } K \text{ compact tel que} \\ \mathrm{supp}(\phi - \mathrm{Id}_{\mathrm{n}}) \subset \mathrm{K}, \text{ et } \phi_{|\mathrm{K}} \in \mathrm{D}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{m}}(\mathrm{K}, \mathbb{R}^{\mathrm{n}}) \big\}.$$

Il faut remarquer que nous notons cet ensemble comme dans le cas borné et pour les différencier il faut tenir compte du domaine Ω. La condition $\mathrm{supp}(\phi - \mathrm{Id}_{\mathrm{n}}) \subset \mathrm{K}$ implique que ϕ est la fonction identité à l'extérieur de K et donc que sur $\Omega \setminus K$ ϕ est bijective et $\mathrm{supp}(\phi^{-1} - \mathrm{Id}_{\mathrm{n}}) \subset \mathrm{K}$. Comme pour le cas borné, l'ensemble des difféomorphismes sur Ω conservant le volume sera noté par

$$D^k(\Omega) = \bigcap_{0<m\leq 1} D^k_m(\Omega).$$

Grâce à ces espaces nous pouvons donner une définition des espaces de Sobolev sur des domaines variables. Pour cela nous commençons par introduire la famille d'applications $\Phi(t, \cdot)$ pour $t \in [0, T]$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- Pour tout $t \in [0,T]$, l'application $\Phi(t,\cdot) \in \mathrm{D}_0^\infty(\overline{\Omega})$ si Ω est borné et $\Phi(t,\cdot) \in \mathrm{D}_0^\infty(\Omega)$ si Ω est non borné.
- Pour Ω borné, l'application $t \to \Phi(t,\cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[0,T]$.
- Pour Ω non borné, il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $t \to \Phi(t,\cdot) \subset \mathrm{D}_0^\infty(\mathrm{K})$ soit de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[0,T]$.
- Nous définissons par $\Omega(t) = \Phi(t,\Omega)$ pour tout $t \in [0,T]$.

Ainsi pour $s \geq 0$ et $t \in [0,T]$, nous définissons les espaces de Sobolev suivants :

$$H^s(\Omega(t),\mathbb{R}^n)) = \{\mathbf{u} \,|\, \mathbf{u}(t,\Phi(t,\cdot)) \in H^s(\Omega,\mathbb{R}^n)\}. \tag{3.7}$$

Il faut remarquer que pour chaque fonction $\Phi(t,\cdot)$, nous définissons une norme différente associée à ces espaces. Cependant avec les hypothèses imposées sur les fonctions $\Phi(t,\cdot)$ il est facile de vérifier que ces normes sont équivalentes. Donc elles définissent la même topologie. Avec cette définition nous pouvons introduire les espaces fonctionnels :

$$\mathcal{C}^k([0,T];H^s(\Omega(\cdot),\mathbb{R}^n)) = \left\{\mathbf{u} \,\middle|\, t \mapsto \mathbf{u}(t,\Phi(t,\cdot)) \in \mathcal{C}^k([0,T];H^s(\Omega,\mathbb{R}^n))\right\}.$$

Avec les définitions ci-dessus, il est facile de vérifier que si $u \in \mathcal{C}^k([0,T];H^s(\Omega(\cdot),\mathbb{R}^n))$ alors l'application $x \mapsto u(t,x)$ est dans $H^s(\Omega(t))$ pour tout $t \in [0,T]$.

Enfin pour terminer cette section nous donnons un exemple de construction de difféomorphismes qui est inspiré de la construction de Takahashi [42] pour l'étude du mouvement des solides dans un fluide visqueux incompressible. Nous considérons le mouvement de $p \geq 1$ solides rigides dans le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Nous utilisons les notations introduites à la section 1.2 pour décrire le mouvement des solides. Nous rappelons que S^i est le domaine occupé par le i-ème solide à l'instant $t = 0$. Le mouvement du i-ème solide est donné par la position son centre de gravité $h^i(t)$ et sa matrice de rotation $[R^i(t)]$. Centre de gravité est en h_0^i à l'instant $t = 0$ alors que sa matrice de rotation est la matrice identité Id_n. La vitesse d'un point du i-ème solide est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^i(t,\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{h}^i}(t) + \mathbf{w}^i(t) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{h}^i(t)), \qquad \text{pour } n = 3, \\ \mathbf{v}^i(t,\mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{h}^i}(t) + \dot{\theta}(t)[A_0](\mathbf{x} - \mathbf{h}^i(t)), \qquad \text{pour } n = 2. \end{aligned}$$

De plus nous rappelons que $\mathbf{q}$ désigne les coordonnées généralisées $(\mathbf{h}^i, [R]^i)$ des solides. Pour $\epsilon > 0$ nous définissons la famille de domaines de $\mathbb{R}^n$:

$$S^{i,\epsilon} = \left\{\mathbf{x} \in \Omega \,|\, \mathrm{dist}(\mathbf{x},\mathrm{S^i}) \leq \epsilon\right\}, \qquad S^\epsilon = \bigcup_{i=1,\ldots,p} S^{i,\epsilon}, \qquad \Omega^\epsilon = \Omega \setminus S^\epsilon.$$

Nous rappelons aussi la définition des positions admissibles des solides :

$$P^\epsilon(\Omega,S) = \left\{\mathbf{q} = (\mathbf{h}^i,[R^i])_{i=1,\ldots,p} \in \left[\mathbb{R}^3 \times SO_n(\mathbb{R})\right]^p \,\middle|\, \mathrm{dist}(\mathrm{S^i_{q_i}},\mathrm{S^j_{q_j}}) > \epsilon \text{ et } \mathrm{dist}(\mathrm{S^i_{q_i}},\partial\Omega) > \epsilon \ \text{ pour tout i,j} = 1,\ldots,\mathrm{p}\right\},$$

où $S_{\mathbf{q}_i}$ est donné par :

$$S^i_{\mathbf{q}^i} = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \mathbf{x} = \mathbf{h}^i + [R^i](\mathbf{y} - \mathbf{h}_0^i) \text{ pour } \mathbf{y} \in S^i\right\}.$$

Le but est de construire une application χ qui vérifie le lemme suivant :

Proposition 3.2.1 *Soit $d = 4\epsilon > 0$ tel que $\mathrm{dist}(\partial\Omega,\mathrm{S^i}) > \mathrm{d}$ et $(S^{i,d} \cap S^{j,d}) = \emptyset$ pour $i \neq j$, et soit $\mathbf{q} \in C^1([0,T],P^\epsilon(\Omega,S))$. Alors il existe une fonction $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times C^1([0,T],P(\Omega^\epsilon,S_0)),\mathbb{R}^3)$ vérifiant :*

- $\chi(\mathbf{x},\mathbf{q}) = 0$ *pour tout* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus (\overline{\Omega} \cap K)$ *et pour tout* $\mathbf{q} \in C^1([0,T], P^\epsilon(\Omega,S))$, *où* K *est un compact qui contient* S^ϵ ;
- *Pour tout* $i = 1,\dots,p$, *pour tout* $\mathbf{y} \in \bigcup_i S^i$ *et* $\mathbf{q} = (\mathbf{h}^i, [R^i])_{i=1,\dots,p} \in C^1([0,T], \mathcal{P}^\epsilon(\Omega,S)), \mathbb{R}^3)$, *nous avons*
$$\chi(\mathbf{x},\mathbf{q}) = \dot{\mathbf{h}^i}(t) + [\dot{R}^i(t)](\mathbf{y} - \mathbf{h}_0^i) \qquad (t \geq 0),$$
où $\mathbf{x} = \mathbf{h}^i(t) + [R^i(t)](\mathbf{y} - \mathbf{h}_0^i)$;
- $\mathrm{div}(\chi(\mathbf{x},\mathbf{q})) = 0$ *pour tout* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ *et pour tout* $\mathbf{q} \in C^1([0,T], P^\epsilon(\Omega,S))$

Preuve : Nous notons par

$$d_1 = \min(\mathrm{dist}(\partial\Omega, \mathrm{S^i}),\ \mathrm{i} = 1,\dots,\mathrm{p}), \quad \mathrm{d_2} = \min(\mathrm{dist}(\mathrm{S^j}, \mathrm{S^i}),\ \mathrm{i,j} = 1,\dots,\mathrm{p}), \quad ,\mathrm{d} = \min(\mathrm{d_1}, \mathrm{d_2}).$$

d_1, d_2 et d sont bien définis car les domaines S^i, pour $i = 1,\dots,p$ sont compacts. Nous posons ainsi $4\epsilon = d$ et nous construisons la famille de fonctions plateaux $\xi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- $0 \leq \xi_i(\mathbf{x}) \leq 1$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$;
- $\xi_i(\mathbf{x}) = 1$ pour tout $\mathbf{x} \in S^{i,\epsilon}$;
- $\xi_i(\mathbf{x}) = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus S^{i,2\epsilon}$.

Pour $\mathbf{q} \in C^1([0,T], \mathcal{P}(\Omega^\epsilon, S))$, nous introduisons les fonctions $\alpha^i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et $\beta^i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que

$$\mathrm{rot}(\alpha^{\mathrm{i}}(\mathrm{t},\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\alpha_3}{x_2} - \dfrac{\partial\alpha_2}{x_3} \\ \dfrac{\partial\alpha_1}{x_3} - \dfrac{\partial\alpha_3}{x_1} \\ \dfrac{\partial\alpha_2}{x_1} - \dfrac{\partial\alpha_1}{x_2} \end{pmatrix} = \mathbf{v}^{\mathrm{i}}(\mathrm{t},\mathbf{x}),$$

où $\mathbf{v}^i(t,\cdot)$ est la vitesse du i-ème solide $S^i(t)$ pour $n = 3$,

$$\mathrm{curl}(\beta^{\mathrm{i}}) = \left(\frac{\partial\beta^{\mathrm{i}}}{\partial \mathrm{x_2}}, -\frac{\partial\beta^{\mathrm{i}}}{\partial \mathrm{x_1}}\right) = \mathbf{v}^{\mathrm{i}}(\mathrm{t},\mathbf{x})$$

pour $n = 2$. Il est facile de vérifier que les fonctions α^i sont définies par :

$$\begin{aligned}
\alpha_1^i(t,\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{h}}_2^i(t)x_3 - \dot{\mathbf{h}}_3^i(t)x_2 - w_1^i(t)\left[(x_2 - \mathbf{h}_2^i(t))^2 + (x_3 - \mathbf{h}_3(t))^2\right]\right), \\
\alpha_2^i(t,\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{h}}_3^i(t)x_1 - \dot{\mathbf{h}}_1^i(t)x_3 - w_2^i(t)\left[(x_1 - \mathbf{h}_1^i(t))^2 + (x_2 - \mathbf{h}_2(t))^2\right]\right), \\
\alpha_3^i(t,\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{h}}_1^i(t)x_2 - \dot{\mathbf{h}}_2^i(t)x_1 - w_3^i(t)\left[(x_1 - \mathbf{h}_1^i(t))^2 + (x_2 - \mathbf{h}_2(t))^2\right]\right),
\end{aligned}$$

où $\mathbf{w}^i$ est la vitesse angulaire du i-ème solide. Les fonctions β^i sont données par :

$$\beta^i(t,\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{h}}_1^i x_2 - \dot{\mathbf{h}}_2^i x_1 + \frac{1}{2}\dot{\theta}(t)\left[(x_1 + \mathbf{h}_1^i(t))^2 + (x_2 + \mathbf{h}_2^i(t))^2\right].$$

où θ^i est l'angle de rotation du i-ème solide. Grâce à ces fonctions nous définissons la fonction χ par :

$$\chi(\mathbf{x},t) = \begin{cases} \mathrm{rot}(\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{p}} \xi_{\mathrm{i}}(\mathbf{x})\alpha^{\mathrm{i}}(\mathrm{t},\mathbf{x})) & \text{pour } n = 3, \\ \mathrm{curl}(\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{p}} \xi_{\mathrm{i}}(\mathbf{x})\beta^{\mathrm{i}}(\mathrm{t},\mathbf{x})) & \text{pour } n = 2. \end{cases}$$

La fonction χ que nous construite vérifie les propriétés du Lemme 3.2.1. Enfin pour terminer la preuve du lemme, nous vérifions que $\mathbf{x} \to \chi(\mathbf{x},\mathbf{q})$ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ car ξ_i, α^i

et β^i sont aussi des applications de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour tout $i = 1, \ldots, p$. De plus les applications $\mathbf{q} \to \alpha^i$ et $\mathbf{q} \to \beta^i$ sont polynomiales en $\mathbf{q}$ donc $\mathbf{q} \to \chi(\cdot, \mathbf{q})$ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi χ est dans $C^\infty(\mathbb{R}^3 \times C^1([0,T], P(\Omega^\epsilon, S_0)), \mathbb{R}^3)$. ■

Grâce à χ nous construisons le problème de Cauchy suivant :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, \mathbf{y}) = \chi(\Psi(t, \mathbf{y}), \mathbf{q}(t)), \tag{3.8}$$

$$\Psi(0, \mathbf{y}) = \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \tag{3.9}$$

Ainsi la fonction Φ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 3.2.2 *Il existe $T \geq T_0 > 0$ tel que Ψ est de classe C^1 par rapport à t et pour tout $T_0 \geq t \geq 0$, les applications $\mathbf{y} \mapsto \Psi(t, \mathbf{y})$ et $\mathbf{y} \mapsto \dfrac{\partial \Psi}{\partial t}(t, \mathbf{y})$ sont dans $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. De plus l'application Ψ conserve le volume des partie bornées de $\mathbb{R}^n$, car Ψ vérifie*

$$|\det[\mathrm{D}_{\mathbf{y}}(\Psi(\mathrm{t}, \mathbf{y}))]| = 1 \qquad (\mathrm{t} \geq 0,\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3), \tag{3.10}$$

et l'application $y \mapsto \Psi(t, .)$ un difféomorphisme de Ω sur Ω et un difféomorphisme de $F(0) = \Omega \setminus S$ sur $F_{\mathbf{q}(t)} = \Omega \setminus S_{\mathbf{q}(t)}$ pour tout $t \in [0, T_0]$.

Preuve : L'existence d'un $T \geq T_0 > 0$ et la régularité de la fonction Ψ provient de la régularité de la fonction χ du Lemme 3.2.1 et du théorème classique d'existence et d'unicité des équation différentielles ordinaires (voir le livre d'Hartman [26, p. 100]). La formule (3.10) est une conséquence du théorème de Liouville (voir Hartman[26, p. 96]). Ainsi l'application $\Psi(t, .)$ est bijective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, pour $n = 2, 3$. De plus pour $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, comme $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ (voir les propriétés du Lemme 3.2.1) implique que $\Psi_0(t, \mathbf{y}) \equiv \mathbf{y}$ est une solution du problème de Cauchy (3.8), pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. Or comme il y a unicité de la solution d'un problème de Cauchy nous en déduisons que $\Psi(t, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$ pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. En utilisant un argument similaire il est facile de montrer que $\Psi(t, \mathbf{y}) = \mathbf{h}^i(t) + [R^i(t)](\mathbf{y} - \mathbf{h}_0^i)$ pour tout $\mathbf{y} \in S_0^i$. Ainsi $\Psi(t, .)$ est aussi un difféomorphisme de $F(0)$ sur $F_{\mathbf{q}(t)} = \Omega \setminus S_{\mathbf{q}(t)}$. ■

3.3 Produit et composition

Dans cette section donnons certaines propriétés sur le produit et la composition dans des espaces de Sobolev. Ces propriétés seront essentiellement utilisées dans la preuve du résultat d'existence pour le cas d'un fluide de rotationnel non nul. Soient un entier $n \geq 1$, Ω et Ω' deux domaines bornés de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Dans la suite $s \geq 0$ désigne un entier. Nous commençons par rappeler deux résultats principaux :

Proposition 3.3.1 *Nous avons les injections suivantes :*

- *Si $s < n/2$ alors pour tout $2 \leq r \leq 2n/(n-2s)$, nous avons $H^s(\Omega) \subset L^r(\Omega)$ avec injection continue. En d'autre termes il existe $K > 0$*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq K \|u\|_{H^s(\Omega)} \qquad (u \in H^s(\Omega)), \qquad \text{pour tout } u \in H^s(\Omega).$$

- *Si $s = n/2$ alors pour tout $2 \leq r < \infty$, nous avons pour tout $H^s(\Omega) \subset L^r(\Omega)$ avec injection continue. Il existe une constante $K > 0$ telle que :*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq K \|u\|_{H^s(\Omega)}, \qquad \text{pour tout } u \in H^s(\Omega);$$

- *Enfin si $s > n/2$ et $k \geq 0$, l'injection $H^{k+s}(\Omega) \subset \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ est continue et il existe une constante K telle que :*

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} \leq K\|u\|_{H^{s+k}(\Omega)}, \qquad \text{pour tout } u \in H^{s+k}(\Omega).$$

où la constante K ne dépend que de s, n, k et Ω.

Pour la démonstration de cette proposition on peut consulter le Théorème 5.4 du livre de Adams [1, page 97]. Nous rappelons également le résultat suivant qui est une conséquence du Théorème 5.23, page 115 de [1].

Théorème 3.3.1 *Soit $s > n/2$, il existe une constante K qui dépend de s, n et Ω telle que pour tout u et v dans $H^s(\Omega)$ le produit uv est dans $H^s(\Omega)$ et de plus*

$$\|uv\|_{H^s(\Omega)} \leq K\|u\|_{H^s(\Omega)}\|v\|_{H^s(\Omega)}.$$

Ce théorème est très utile car il justifie les régularités des produits de fonctions d'une manière simple. La condition $s > n/2$ doit être remplit or pour $n = 3$ nous obtenons $s > 3/2$ donc $s \geq 2$.

Pour l'étude de (1.32)-SC :syscomplet2, nous serons confrontés à la composition d'applications. Dans ce sens nous rappelons des résultats de Brezis sur la compositions d'un élément $\mathbf{u}$ de $H^s(\Omega')$ avec un difféomorphisme de Ω sur Ω' qui est de plus dans $H^s(\Omega, \mathbf{R}^n)$. Les résultats que nous présentons ici sont des adaptations aux cas des espaces $H^s(\Omega)$ des résultats de l'article de Brezis et Bourguignon [8] sur la composition entre un élément $\mathbf{f}$ de $H^s(\Omega')$ et un difféomorphisme $\mathbf{u}$ de $\mathrm{Diff}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{m}}(\Omega, \Omega')$ qui est défini par

$$\mathrm{Diff}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{m}}(\Omega, \Omega') = \{\mathbf{u} \in \mathrm{Diff}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{m}}(\Omega) \mid \mathbf{u}(\Omega) = \Omega'\}$$

Un des principaux résultats est le suivant :

Théorème 3.3.2 *Soient $s > n/2 + 1$ et $0 < m < 1$, si $f \in H^s(\Omega', \mathbb{R})$ alors l'application*

$$\mathbf{u} \mapsto f \circ \mathbf{u}$$

est une application continue de $\mathrm{Diff}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{m}}(\Omega, \Omega')$ dans $H^s(\Omega, \mathbb{R})$

Remarque 3.3.1 *Si l'on suppose que $f \in H^{s+k}(\Omega')$ alors l'application*

$$\mathbf{u} \in \mathrm{Diff}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{m}}(\Omega, \Omega') \mapsto \mathrm{f} \circ \mathbf{u} \in \mathrm{H}^{\mathrm{s}}(\Omega)$$

est une application de classe $\mathcal{C}^k$, si nous munissons la variété $\mathrm{Diff}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{m}}(\Omega, \Omega')$ d'une structure adéquate. Le lecteur pourra consulter l'article de Ebin et Marsden [19, section 2] pour plus de détails sur la structure de variété des espaces $\mathrm{Diff}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{m}}(\Omega, \Omega')$.

La preuve du Théorème 3.3.2 est basée sur les trois lemmes ci-dessous, qui sont des légères variations des résultats de l'article [8], et qui seront utilisés ultérieurement.

Lemme 3.3.1 *Soient $s > n/2$, $f \in C^s(\overline{\Omega'})$ et $\mathbf{u} \in H^s(\Omega, \Omega')$ alors $f \circ \mathbf{u} \in H^s(\Omega)$ et vérifie l'inégalité :*

$$||f \circ \mathbf{u}||_{H^s(\Omega)} \leq K||f||_{C^s(\Omega')} \left[||\mathbf{u}||_{[H^s(\Omega)]^3} + 1\right], \tag{3.11}$$

où la constante K dépend de s, n, Ω et Ω'.

Lemme 3.3.2 *Soient $s > n/2$, $f \in C^{s+1}(\overline{\Omega'})$, $\mathbf{u} \in H^s(\Omega, \Omega')$ et $\mathbf{v} \in H^s(\Omega, \Omega')$ alors nous avons :*

$$\|f \circ \mathbf{u} - f \circ \mathbf{v}\|_{H^s(\Omega)} \leq K \|f\|_{C^{s+1}(\Omega')} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{H^s(\Omega)} \left[\|\mathbf{u}\|^s_{H^s(\Omega)} + \|\mathbf{v}\|^s_{H^s(\Omega)} + 1 \right], \tag{3.12}$$

où la constante K dépend de s, n, Ω et Ω'.

Remarque 3.3.2 *Comme dans la remarque que suit le Théorème 3.3.2, en munissant $\mathrm{Diff}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{m}}(\Omega, \Omega')$ d'une structure approprié et en supposant que $f \in C^{s+1+l}(\overline{\Omega'})$ alors*

$$\mathrm{Diff}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{m}}(\Omega, \Omega') \to \mathrm{H}^{\mathrm{s}}(\Omega, \mathbb{R}^{\mathrm{n}}); \quad \mathbf{u} \mapsto \mathrm{f} \circ \mathbf{u}$$

est une application de classe $\mathcal{C}^l$ de $\mathrm{Diff}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{m}}(\Omega, \Omega')$ vers $H^s(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Nous utiliserons surtout ce résultat pour des fonctions f de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour plus de détails sur ces propriétés nous conseillons de consulter [19, section 2].

Lemme 3.3.3 *Soient $s > n/2 + 1$, $0 < m < 1$, $f \in H^s(\Omega')$ et $\mathbf{u} \in \mathrm{Diff}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{m}}(\Omega, \Omega')$ alors $f \circ \mathbf{u} \in H^s(\Omega)$ et vérifie l'inégalité :*

$$\|f \circ \mathbf{u}\|_{H^s(\Omega)} \leq K \|f\|_{H^s(\Omega')} \frac{1}{\inf |\det[\mathrm{D}\mathbf{u}]|^{1/2}} \cdot \left[\|\mathbf{u}\|^s_{H^s(\Omega)} + 1 \right], \tag{3.13}$$

où la constante K dépend de s, n, Ω et Ω'.

3.4 Problème de Neumann non homogènes

Le problème de Neumann joue un très grand rôle dans cette thèse. Il intervient dans l'étude des fluides potentiels ou dans le cas général pour récupérer la pression si la vitesse du fluide est connue. Une bonne étude du problème de Neumann sera le point clef de nombreuses applications. Dans toute cette section $n \geq 1$ est un entier et Ω est un domaine de $\mathbb{R}^n$. Nous rappelons les conditions d'existence et d'unicité des solutions pour des domaines bornés et non bornés du problème de Neumann :

$$-\Delta\phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \Omega, \tag{3.14a}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \text{ sur } \partial\Omega. \tag{3.14b}$$

3.4.1 Le cas des domaines bornés

Dans cette partie nous supposons que le domaine Ω est borné de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il est bien connu que les solutions du problème de Neumann (3.14) sont définies à une constante près. Pour obtenir l'unicité de ces problèmes nous allons choisir un espace de Sobolev particulier. Pour tout $s \geq 0$ et $m \geq 1$ des entiers nous posons

$$N^s(\Omega, \mathbb{R}^m) = \left\{ \mathbf{u} \in H^s(\Omega, \mathbb{R}^m) \;\middle|\; \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} = 0 \right\}, \tag{3.15}$$

$$V^s(\Omega, \mathbb{R}^m) = \big\{ (\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in H^s(\Omega, \mathbb{R}^m) \times H^{s+1/2}(\partial\Omega, \mathbb{R}^m) \mid \int_\Omega \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathrm{d}\sigma_{\mathbf{x}} = 0 \Big\}. \tag{3.16}$$

En adaptant certains résultats classiques (voir par exemple [35, théorème 5.2 page 172] et [9, théorème IX. 25 page 181 et théorème IX. 26 page 182]), l'existence et l'unicité de la solution du problème de Neumann (3.14) est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.4.1 *Soient $s \geq 0$ et $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in V^s(\Omega, \mathbf{R}^m)$. Le problème*

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

admet une unique solution $\mathbf{u}$ dans $N^{s+2}(\Omega, \mathbf{R}^m)$. De plus $\mathbf{u}$ vérifie la formulation variationnelle suivante :

$$\int_\Omega \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f}(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \mathrm{d}\sigma_{\mathbf{x}},$$

pour tout $\mathbf{v} \in H^{s+2}(\Omega, \mathbf{R}^m)$. De plus il existe une constante K, qui dépend de Ω, n, s et m, telle que

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{H^{s+1}(\Omega, \mathbf{R}^m)} \leq K \left[\|\nabla \mathbf{f}\|_{H^s(\Omega, \mathbf{R}^m)} + \|\mathbf{g}\|_{H^{s+1/2}(\partial\Omega, \mathbf{R}^m)} \right].$$

Pour faciliter la lecture de ce travail nous n'avons regrouper ici que les parties essentielles des propriétés des solutions d'un problème de Neumann. Pour plus de détails nous conseillons de consulter les ouvrages [35, 9].

Le choix de l'espace $N^s(\Omega, \mathbf{R}^m)$ est justifié par deux arguments. D'une part tout élément de cet espace vérifie l'inégalité de Poincaré-Wirtinger. Pour tout $s \geq 0$ entier, il existe une constante K qui dépend de Ω, s, n et m telle que

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{s+1}(\Omega, \mathbf{R}^m)} \leq K \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^s(\Omega, \mathbf{R}^m)},$$

pour tout $\mathbf{u}$ dans $N^{s+1}(\Omega, \mathbf{R}^m)$. Le membre de gauche de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger ne contient pas la moyenne de $\mathbf{u}$ car les éléments de l'espace $N^s(\Omega, \mathbf{R}^m)$ ont une moyenne nulle. Ainsi sur l'espace $N^s(\Omega, \mathbf{R}^m)$ la norme donnée par

$$|\mathbf{u}|_s = \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^{s-1}(\Omega, \mathbf{R}^m)}$$

est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^s(\Omega, \mathbf{R}^m)}$. La seconde raison est justifiée par l'unicité de la solution du problème de Neumann. En effet le noyau de l'opérateur linéaire

$$\begin{aligned} Q : H^{s+2}(\Omega, \mathbf{R}^m) &\to H^s(\Omega, \mathbf{R}^m) \times H^{s+1/2}(\partial\Omega, \mathbf{R}^m), \\ \mathbf{u} &\mapsto (-\Delta \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}), \end{aligned}$$

est composé uniquement des fonctions presque partout constante sur Ω. La restriction de Q a $N^{s+2}(\Omega, \mathbf{R}^m)$ rend donc cet opérateur injectif. De la même manière, le choix de l'espace $V^s(\Omega, \mathbf{R}^m)$ est imposé car il correspond à l'image de l'opérateur Q.

3.4.2 Le cas des domaines non bornés

Dans cette partie nous regardons seulement un type particulier de problème de Neumann. Soient $n = 2, 3$ et Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$ tel que $\partial\Omega = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ où Γ_1 est soit un hyperplan, soit l'ensemble vide et Γ_2 est la frontière d'un compact. Nous rappelons que les espaces fonctionnels qui sont utilisés ici sont

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R}^m) &= \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^m) \;\middle|\; \rho \mathbf{u} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^m) \right\}, \\ \mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^m) &= \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathbb{R}^m) \;\middle|\; \frac{\mathbf{u}}{\rho} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^m) \text{ et } \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)\, i = 1, \ldots, n \right\}, \\ \mathcal{H}^2(\Omega, \mathbb{R}^m) &= \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{H}^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \;\middle|\; \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^m) \text{ pour } i, j = 1, \ldots, n \right\}. \end{aligned}$$

qui sont définis à la Section 3.1. Nous considérons les problèmes de Neumann suivants :

$$-\Delta\phi(\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \Omega, \tag{3.17a}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \text{ sur } \Gamma_1, \tag{3.17b}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \text{ sur } \Gamma_2, \tag{3.17c}$$

pour $g \in H^{1/2}(\Gamma_1)$. La condition sur le bord Γ_2 disparaît si ce dernier est l'ensemble vide. Nous avons le résultat suivant pour le problème (3.17)

Théorème 3.4.2 *Pour tout $g \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, le système* (3.17) *admet une unique solution ϕ dans $\mathcal{H}^2(\Omega)$. De plus ϕ est l'unique solution faible de*

$$\int_\Omega \nabla\phi(\mathbf{x}) \cdot \nabla\psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\Gamma_1} g(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}, \qquad \forall\psi \in \mathcal{H}^1(\Omega), \tag{3.18}$$

et il existe une constante $K(\Omega) > 0$ telle que

$$\|\phi\|_{\mathcal{H}^2(\Omega)} \leq K(\Omega)\|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)}.$$

La preuve de ce théorème peut être trouvé dans [3, 2] pour le cas des domaines extérieurs et [7] pour le cas du demi-espace. Il faut remarquer ici que les conditions de compatibilité ont disparu. Ceci est expliquer aussi dans [7].

Chapitre 4

Problème de Neumann dépendant d'un paramètre

Dans cette section, nous présentons certains résultats de l'article de J. Houot et A. Munnier [31] sur l'étude des problèmes de Neumann définis des domaines variables et sur le mouvement des solides dans un fluide potentiel. Les méthodes que nous utilisons ici proviennent principalement du livre de A. Henrot et M. Pierre [28] sur la dépendance du problème de Neumann par rapport à un paramètre. Le but est de justifier la régularité des solutions d'un problème de Neumann qui dépendant d'un paramètre et de certaines intégrales d'énergie associées au problème. Ces dernières interviennent dans le calcul du Lagrangien du système et dans le calcul des équations d'Euler-Lagrange. Pour les fluides potentiels nous montrerons que le système d'équations ordinaires d'ordre deux obtenu grâce aux équations de la mécanique analytique admet une unique solution locale. Dans le cas simplifié d'un solide dans un domaine borné en dimension 2 nous prouverons que les équations de Newton pour le solide sont équivalentes à la description Lagrangienne de ce dernier.

4.1 Le cas des domaines bornés

Dans cette partie nous fixons un entier $n \geq 1$, un domaine borné Ω de $\mathbb{R}^n$ et un espace de Banach E, muni d'une norme $|\cdot|_E$. Pour $\theta \in E$, nous considérons l'application $(\theta, \mathbf{y}) \to \Lambda(\theta, \mathbf{y})$ qui vérifie :

- Pour tout $\theta \in E$, $\Lambda(\theta, \cdot) \in D^\infty(\mathbb{R}^n)$ où $D^\infty(\mathbb{R}^n)$ est défini par (3.5). $\Lambda(\theta, \cdot)$ est donc un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et qui conserve le volume. De plus, pour tout $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ et $\theta \in E$, $\Lambda(\theta, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$.
- Il existe $k \geq 1$ un entier tel que $\theta \to \Lambda(\theta, \cdot) \in D^\infty(\overline{\Omega})$ est de classe $\mathcal{C}^k$.
- Il existe $\theta_0 \in E$ tel que $\Lambda(\theta_0, \cdot)$ est l'application identité sur $\mathbb{R}^n$.
- Il existe $0 < \alpha < \beta < +\infty$ tel que pour tout $\theta \in E$ nous avons

$$\alpha \leq \sup_{\mathbf{y} \in \Omega} |||[A(\theta, \mathbf{y})]||| \leq \beta,$$

où la matrice $[A(\theta, \mathbf{y})]$ est définie par

$$A(\theta, \mathbf{y}) = ([D_{\mathbf{y}}\Lambda(\theta, \mathbf{y})]^{-1})^* [D_{\mathbf{y}}\Lambda(\theta, \mathbf{y})]^{-1} |\mathrm{detD}_{\mathbf{y}}\, \Lambda(\theta, \mathbf{y})| \quad \text{pour tout } \mathbf{y} \in \Omega. \tag{4.1}$$

Nous remarquons que cette matrice est symétrique et définie positive pour tout $\theta \in E$ et $\mathbf{y} \in \Omega$. Dans la suite nous posons $\Omega(\theta) = \Lambda(\theta, \Omega)$ et grâce à l'application $\Lambda(\theta, \cdot)$, nous pouvons définir

un problème de Neumann sur le domaine variable $\Omega(\theta)$ par

$$-\Delta\Phi(\theta,\mathbf{x}) = f(\theta,\mathbf{x}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x}\in\Omega(\theta) \tag{4.2a}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}(\theta,\mathbf{x}) = g(\theta,\mathbf{x}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x}\in\partial\Omega(\theta) \tag{4.2b}$$

où $(f(\theta,.),g(\theta,.))$ est dans l'espace $V^s(\Omega(\theta))$ qui est définit dans la section 3.4 comme

$$V^s(\Omega(\theta)) = \Big\{(\mathbf{f},\mathbf{g})\in H^s(\Omega(\theta),\mathbb{R})\times H^{s+1/2}(\partial\Omega(\theta),\mathbb{R}) \mid \int_{\Omega(\theta)}\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}+\int_{\partial\Omega(\theta)}\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{x}}=0\Big\},$$

pour tout $s\geq 0$ entier. Or d'après le théorème 3.4.1, pour chaque $\theta\in E$ le problème (4.2) admet une unique solution dans $N^{s+2}(\Omega(\theta))$, cet espace est défini comme dans la section 3.4 par :

$$N^s(\Omega(\theta)) = \left\{\mathbf{u}\in H^s(\Omega(\theta),\mathbb{R}) \;\middle|\; \int_{\Omega(\theta)}\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}=0\right\},$$

pour tout $s\geq 0$ entier. Pour $\theta=\theta_0$, nous posons $\Phi_0(\cdot)=\Phi(\theta_0,\cdot)$ la solution du problème de Neumann

$$\begin{aligned} -\Delta\Phi_0(\mathbf{y}) &= f_0(\mathbf{y}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{y}\in\Omega,\\ \frac{\partial\Phi_0}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{y}) &= g_0(\mathbf{y}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{y}\in\partial\Omega,\end{aligned}$$

où $f_0(\mathbf{y})=f(\theta_0,\mathbf{y})$ et $g_0(\mathbf{y})=g(\theta_0,\mathbf{y})$ et $(f_0,g_0)\in V^s(\Omega)$. Pour définir la régularité de $\Phi(\theta,\cdot)$ dans un voisinage de θ_0, nous introduisons la fonction $\Psi(\theta,\cdot)$ en posant :

$$\Psi(\theta,\mathbf{y}) = \Phi(\theta,\Lambda(\theta,\mathbf{y})) \qquad \text{pour tout } \mathbf{y}\in\Omega \text{ et } \theta\in E. \tag{4.3}$$

Les propriétés de Ψ sont données par le théorème

Théorème 4.1.1 *Soient $s\geq 0$, $k\geq 1$ des entiers. Supposons que pour tout $\theta\in E$,*

$$(f(\theta,\cdot),g(\theta,\cdot))\in V^s(\Omega(\theta)),$$

et que les applications

$$\theta\in E\mapsto(f(\theta,\Lambda(\theta,\cdot)),g(\theta,(\Lambda(\theta,\cdot)))),\qquad \theta\in E\mapsto\Lambda(\theta,.),$$

sont de classe $\mathcal{C}^k$. Alors il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de θ_0 tel que l'application $\theta\in\mathcal{O}\mapsto\Psi(\theta,.)\in N^{s+2}(\Omega)$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

De plus nous pouvons en déduire le corollaire suivant qui permet de donner la régularité des fonctions Φ :

Corollaire 4.1.1 *Sous les hypothèses du théorème 4.1.1 et en supposant que $k<s+2$, alors l'application $\theta\mapsto\Phi(\theta,\cdot)$ est dans $\cap_{i=0}^k\mathcal{C}^i(\mathcal{O};H^{s+2-i}(K))$, pour tout compact $K\subset\cap_{\theta\in\mathcal{O}}\Omega(\theta)$.*

La régularité de Φ s'explique avec la formule de dérivation suivante :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}(\theta,\mathbf{x}) = \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}(\theta,\Lambda^{-1}(\theta,\mathbf{x}))+[D\Psi(\theta,\Lambda^{-1}(\theta,\mathbf{x}))]\frac{\partial\Lambda^{-1}}{\partial\theta}(\theta,\mathbf{x}).$$

La fonction Φ perd donc en régularité, ce qui explique le corollaire.

Preuve : Le but est de construire un problème dont Ψ est solution. Pour cela nous utilisons la formulation faible du problème (4.2). Ainsi pour tout fonction $\mathbf{u} \in N^{s+2}(\Omega(\theta))$ nous avons :

$$\int_{\Omega(\theta)} \nabla\Phi(\theta,\mathbf{x}) \cdot \nabla\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\Omega(\theta)} f(\theta,\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega(\theta)} g(\theta,\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}$$

En utilisant la fonction Λ, nous écrivons ces intégrales sur le domaine fixe Ω. Le gradient de Φ s'exprime en fonction de celui de Ψ par la formule :

$$\nabla\Phi(\theta,\mathbf{x}) = [D\Lambda^{-1}(\theta,\mathbf{x})]\nabla\Psi(\theta,\Lambda^{-1}(\theta,\mathbf{x})).$$

Pour toute fonction $\mathbf{u} \in H^{s+2}(\Omega(\theta))$, il existe $\mathbf{v} \in H^{s+2}(\Omega)$ telle que

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}) = \mathbf{u}(\theta,\Lambda(\theta,\mathbf{y})), \quad \text{pour tout } \mathbf{y} \in \Omega.$$

En effectuant le changement de variable $\mathbf{x} = \Lambda(\theta,\mathbf{y})$ dans la formulation variationnelle, nous obtenons

$$\int_{\Omega} ([A(\theta,\mathbf{y})]\nabla\Psi(\theta,\mathbf{y})) \cdot \nabla\mathbf{v}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_{\Omega(\theta)} F(\theta,\mathbf{y})\mathbf{v}(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} + \int_{\partial\Omega(\theta)} G(\theta,\mathbf{y})\mathbf{v}(\mathbf{y})\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}},$$

où les fonctions $F(\theta,\cdot)$ et $G(\theta,\cdot)$ sont données par

$$\begin{array}{rcll} F(\theta,\mathbf{y}) & = & f(\theta,\Lambda(\theta,\mathbf{y}))\ |\mathrm{detD}_{\mathbf{y}}\,\Lambda(\theta,\mathbf{y})| & \text{pour tout } \mathbf{y} \in \Omega \\ G(\theta,\mathbf{y}) & = & g(\theta,\Lambda(\theta,\mathbf{y}))\ |[\Lambda(\theta,\mathbf{y})^{-1}]^{*}\mathbf{n}|\ |\mathrm{detD}_{\mathbf{y}}\,\Lambda(\theta,\mathbf{y})| & \text{pour tout } \mathbf{y} \in \partial\Omega. \end{array}$$

Nous rappelons que la matrice $A(\theta,\mathbf{y})$ est définie positive pour tout $\mathbf{y} \in \Omega$ et $\theta \in E$. Ainsi $\Psi(\theta,\cdot)$ est solution du problème aux limites suivant :

$$\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}[\mathrm{A}(\theta,\mathbf{y})\nabla\mathrm{U}(\mathbf{y})] & = & F(\theta,\mathbf{y}) & \mathbf{y} \in \Omega, \\ ([A(\theta,\mathbf{y})]\nabla U(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) & = & G(\theta,\mathbf{y}) & \mathbf{y} \in \partial\Omega. \end{array}$$

Grâce aux hypothèses sur $[A(\theta,\cdot)]$ et au théorème [35, théorème 5.2 page 172], ce problème admet une unique solution dans $N^{s+2}(\Omega)$ si et seulement si les fonctions $(F(\theta,\cdot),G(\theta,\cdot))$ sont dans $V^s(\Omega)$. Or en appliquant le changement de variable $\mathbf{x} = \Lambda(\theta,\mathbf{y})$, pour $\mathbf{y} \in \Omega$, nous remarquons que

$$\int_{\Omega} F(\theta,\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} + \int_{\partial\Omega} \mathrm{G}(\theta,\mathbf{y})\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}} = \int_{\Omega(\theta)} \mathrm{f}(\theta,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega(\theta)} \mathrm{g}(\theta,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{x}} = 0.$$

Nous construisons l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : E \times N^{s+2}(\Omega) & \to & V^s(\Omega), \\ (\theta,U) & \mapsto & \left(\begin{array}{c} \mathrm{div}\,[\mathrm{A}(\theta,.)\nabla\mathrm{U}] + \mathrm{F}(\theta,.) \\ ([A(\theta,\cdot)]\nabla U) \cdot \mathbf{n} - G(\theta,.) \end{array} \right). \end{array} \tag{4.4}$$

Le but est donc d'appliquer le théorème des fonctions implicites à $\mathcal{F}$ et ainsi obtenir la régularité des applications $\Psi(\theta,\cdot)$. Nous rappelons que les fonctions

$$\theta \to \Lambda(\theta,\cdot), \quad \theta \to f(\theta,\Lambda(\theta,\cdot)) \quad \text{et } \theta \to g(\theta,\Lambda(\theta,\cdot)),$$

sont des applications de classe $\mathcal{C}^k$, donc les applications

$$\theta \to [A(\theta,\cdot)], \quad \theta \to F(\theta,\cdot), \text{ et } \theta \to G(\theta,\cdot)$$

sont aussi de classe $\mathcal{C}^k$. Pour tout $\theta \in E$, les applications

$$U \mapsto \mathrm{div}([A(\theta,.)]\nabla U), \text{ et } U \mapsto [A(\theta,\cdot)]\nabla U \cdot \mathbf{n}$$

sont linéaires. La fonction $\mathcal{F}$ est donc une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur $E \times N^{s+2}(\Omega)$. Nous rappelons que pour $\theta_0 \in E$, l'application $\Lambda(\theta_0,\cdot)$ est l'application identité sur $\Omega = \Omega(\theta_0)$ et nous rappelons que $\Phi_0 = \Phi(\theta_0,\cdot) = \Psi(\theta_0,\cdot)$ est la solution du problème de Neumann :

$$\begin{aligned} -\Delta\Phi_0(\mathbf{y}) &= f_0(\mathbf{y}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{y} \in \Omega, \\ \frac{\partial\Phi_0}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{y}) &= g_0(\mathbf{y}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{y} \in \partial\Omega(\theta). \end{aligned}$$

Comme les fonctions (f_0, g_0) sont dans $V^{s+2}(\Omega)$, le problème admet une unique solution dans $N^{s+2}(\Omega)$, par le théorème 3.4.1 et nous remarquons aussi que $\mathcal{F}(\theta_0,\Phi_0) = 0$. Enfin le calcul de la différentielle de $\mathcal{F}$ par rapport à U au point (θ_0,Ψ_0) donne l'application linéaire définie par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial U}(\theta_0,\Psi_0) : \quad N^{s+2}(\Omega) &\to V^s(\Omega), \\ H &\mapsto \begin{pmatrix} -\Delta H(\mathbf{y}) & \text{pour } \mathbf{y} \in \Omega \\ \dfrac{\partial H}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{y}) & \text{pour } \mathbf{y} \in \partial\Omega \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par le théorème 3.4.1, $\partial\mathcal{F}/\partial U(\theta_0,\Phi_0)$ est un isomorphisme de $N^{s+2}(\Omega)$ sur $V^s(\Omega)$(le choix des espaces $N^{s+2}(\Omega)$ et $V^s(\Omega)$ joue un rôle crucial ici). Ainsi nous pouvons appliquer le théorème des fonctions implicites. Il existe donc un voisinage $\mathcal{O}$ de θ_0 et une unique application $\theta \in \mathcal{O} \to \varphi(\theta,\cdot) \in N^{s+2}(\Omega)$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que

$$\mathcal{F}(\theta,\varphi(\theta,\mathbf{y})) = 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{y} \in \Omega \text{ et } \theta \in \mathcal{O}.$$

Ainsi $\varphi(\theta,\cdot)$ est solution du problème de Neumann :

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}[\mathrm{A}(\theta,\mathbf{y})\nabla\varphi(\mathbf{y})] &= F(\theta,\mathbf{y}) \qquad \mathbf{y} \in \Omega \\ (A(\theta,\mathbf{y})\nabla\varphi(\mathbf{y}))\cdot\mathbf{n}(\mathbf{y}) &= G(\theta,\mathbf{y}) \qquad \mathbf{y} \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Ainsi par l'unicité des solutions, nous en déduisons que $\theta \in \mathcal{O} \to \Psi(\theta,\cdot) \in N^{s+2}(\Omega)$ est de classe $\mathcal{C}^k$, ce qui permet de terminer la démonstration. ■

Nous passons à la démonstration du corollaire.
Preuve : D'après le théorème 4.1.1 nous savons que

$$\theta \in \mathcal{O} \to \Psi(\theta,\cdot) \in N^{s+2}(\Omega),$$

est de classe $\mathcal{C}^k$. Fixons un compact $K \in \cap_{\theta\in\mathcal{O}}\Omega(\theta)$. Nous restreignons les fonctions aux compacts K, car nous ne pouvons pas donner de définition de $\Phi(\theta,\cdot)$ où cette dernière fonction n'est pas définie. Pour comparer deux fonctions, il faut le faire sur un domaine où ces fonctions sont définies simultanément. Nous rappelons que l'application

$$\theta \in \mathcal{O} \to \Lambda^{-1}(\theta,\cdot) \in D^\infty(\overline{\Omega}),$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ et que pour tout multi-indice α, tel que $|\alpha| \geq 1$ $\partial^\alpha\Lambda^{-1}(\theta,\cdot)$ est dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, nous en déduisons que $\theta \in \mathcal{O} \to \Phi(\theta,\cdot) \in H^{s+2}(K)$ est continue. En dérivant terme à terme la formule $\Phi(\theta,\mathbf{x}) = \Psi(\theta,\Lambda^{-1}(\theta,\mathbf{x}))$ par rapport à θ, pour $\mathbf{x} \in K$, nous obtenons :

$$\frac{\partial\Phi_\theta}{\partial\theta}(\mathbf{x}) = \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}(\theta,\Lambda^{-1}(\theta,\mathbf{x})) + [D\Psi(\theta,\Lambda^{-1}(\theta,\mathbf{x}))]\frac{\partial\Lambda^{-1}}{\partial\theta}(\theta,\mathbf{x}).$$

Nous observons une perte de régularité qui provient du terme $[D\Psi(\theta, \Lambda^{-1}(\theta, \mathbf{x}))] \in H^{s+1}(K)$. Ainsi $\theta \in \mathcal{O} \to \partial\Phi_\theta/\partial\theta \in H^{s+1}(K)$ est continue. La i-ème dérivée de la fonction Φ par rapport à θ est dans $H^{s+2-i}(K)$, pour $1 \leq i \leq k$. Enfin nous avons

$$\Phi \in \cap_{i=0}^{k} \mathcal{C}^i(\mathcal{O}; H^{s+2-i}(K)).$$

■

Nous regardons maintenant la régularité de certaines intégrales qui dépendent du paramètre θ au travers des fonctions $\Phi(\theta, \cdot)$. Nous introduisons les fonctions $(f_i(\theta, \cdot), g_i(\theta, \cdot))$ pour $i = 1, 2$ qui vérifient les hypothèses du théorème 4.1.1 :

- pour tout $\theta \in E$ les applications $(f_i(\theta, \cdot), g_i(\theta, \cdot)) \in V^s(\Omega(\theta))$ pour tout $i = 1, 2$,
- les applications $\theta \in E \mapsto (f_i(\theta, \Lambda^{-1}(\theta, \cdot)), g_i(\theta, (\Lambda^{-1}(\theta, \cdot))))$ sont de classe $\mathcal{C}^k$, pour tout $i = 1, 2$.

Avec ces fonctions nous définissions les problèmes de Neumann suivants :

$$\begin{aligned} -\Delta\Phi_i(\theta, \mathbf{x}) &= f_i(\theta, \mathbf{x}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \Omega(\theta), \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{n}}(\theta, \mathbf{x}) &= g_i(\theta, \mathbf{x}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \partial\Omega(\theta), \end{aligned}$$

pour $i = 1, 2$. De même nous définissons les fonctions Ψ_i associées à Φ_i par

$$\Psi_i(\theta, \mathbf{y}) = \Phi_i(\theta, \Lambda(\theta, \mathbf{y})) \qquad \text{pour tout } \mathbf{y} \in \Omega,\ \theta \in E \text{ et } pour i = 1, 2.$$

Grâce à Φ_1, Φ_2 nous définissons la fonctionnelle

$$I(\theta) = \int_{\Omega(\theta)} \nabla\Phi_1(\theta, \mathbf{x}) \cdot \nabla\Phi_2(\theta, \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{4.5}$$

Ces intégrales jouent un rôle important dans l'étude des fluides potentiels. En effet elles interviennent dans le calcul de la matrice de masse $\mathcal{K}(\mathbf{q})$ du système (1.42). Le paramètre θ joue le rôle des coordonnées généralisées. Donc l'étude de $I(\theta)$ va permettre de justifier l'existence et l'unicité locale des solutions des équations d'Euler-Lagrange. Le théorème suivant donne la régularité de l'application $\theta \to I(\theta)$ ainsi que la formule de sa dérivée :

Théorème 4.1.2 *Soient s, k, Λ et (f_i, g_i) qui vérifient les même hypothèses que le Théorème 4.1.1 pour $i = 1, 2$, alors il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de θ_0 tel que l'application $\theta \to I(\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^k$. De plus pour tout $\theta \in \mathcal{O}$, la dérivée par rapport à θ est donnée par :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \theta}(\theta) &= \int_{\Omega(\theta)} \frac{\partial f_1}{\partial \theta}(\theta, \mathbf{x})\Phi_2(\theta, \mathbf{x}) + \frac{\partial f_2}{\partial \theta}(\theta, \mathbf{x})\Phi_1(\theta, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega(\theta)} \mathrm{div}\left[(\mathrm{f}_1(\theta, \mathbf{x})\Phi_2(\theta, \mathbf{x}) + \mathrm{f}_2(\theta, \mathbf{x})\Phi_1(\theta, \mathbf{x}))\mathbf{V}(\theta, \mathbf{x})\right] d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\partial\Omega(\theta)} \left(\frac{\partial G_1}{\partial \theta}((\theta), \Lambda^{-1}(\theta, \mathbf{x})) - \nabla_\Gamma g_1(\theta, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{V}_\Gamma(\theta, \mathbf{x})\right) \Phi_2(\theta, \mathbf{x}) \, \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \\ &+ \int_{\partial\Omega(\theta)} \left(\frac{\partial G_2}{\partial \theta}((\theta), \Lambda^{-1}(\theta, \mathbf{x})) - \nabla_\Gamma g_2(\theta, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{V}_\Gamma(\theta, \mathbf{x})\right) \Phi_1(\theta, \mathbf{x}) \, \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \\ &+ \int_{\partial\Omega(\theta)} \left[2g_1(\theta, \mathbf{x})g_2(\theta, \mathbf{x}) - \nabla\Phi_1(\theta, \mathbf{x}) \cdot \nabla\Phi_2(\theta, \mathbf{x})\right] (\mathbf{V}(\theta, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\theta, \mathbf{x})) \, \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \\ &+ \int_{\partial\Omega(\theta)} \mathcal{H}(\theta, \mathbf{x}) \left[g_1(\theta, \mathbf{x})\Phi_2(\theta, \mathbf{x}) + g_2(\theta, \mathbf{x})\Phi_1(\theta, \mathbf{x})\right] (\mathbf{V}(\theta, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\theta, \mathbf{x})) \, \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}, \end{aligned} \tag{4.6}$$

où $\mathcal{H}(\theta,\mathbf{x})$ est la courbure moyen de la surface $\partial\Omega(\theta)$ au point $\mathbf{x}$ (voir [18, page 129] pour une définition plus complète),

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x}) &= \frac{\partial\Lambda}{\partial\theta}(\theta,\Lambda^{-1}(\theta,\mathbf{x})) \qquad \textit{pour tout } \mathbf{x}\in\Omega(\theta),\\ G_i(\theta,\mathbf{y}) &= g_i(\theta,\Lambda(\theta,\mathbf{y})) \qquad \textit{pour tout } \mathbf{y}\in\partial\Omega \ \textit{ pour } i=1,2,\end{aligned}$$

et pour tout champ de vecteur $\mathbf{u}$ défini sur $\partial\Omega(\theta)$, $\mathbf{u}_\Gamma$ désigne la composante tangentielle de $\mathbf{u}$,

$$\mathbf{u}_\Gamma(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\theta,\mathbf{x}) \qquad \textit{pour tout } \mathbf{x}\in\partial\Omega(\theta).$$

Preuve : Nous commençons par montrer la régularité de l'application I. En effectuant le changement de variable $\mathbf{x}=\Lambda(\theta,\mathbf{y})$ dans $I(\theta)$ nous obtenons :

$$I(\theta) = \int_\Omega ([A(\theta,\mathbf{y})]\nabla\Psi_1(\theta,\mathbf{y}))\cdot\nabla\Psi_2(\theta,\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y},$$

où la matrice $A(\theta,\cdot)$ est définie par (4.1). D'après les hypothèses de la Proposition 4.1, l'application $\theta\to[A(\theta,\cdot)]$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur E. De plus par le Théorème 4.1.1, il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de θ_0 tel que les applications $\theta\in\mathcal{O}\to\Psi_i(\theta,\cdot)\in N^{s+2}(\Omega)$ sont de classe $\mathcal{C}^k$. Ainsi l'application

$$\theta\in\mathcal{O}\to[A(\theta,\mathbf{y})]\nabla\Psi_1(\theta,\mathbf{y})\cdot\nabla\Psi_2(\theta,\mathbf{y})\in L^1(\Omega)$$

est de classe $\mathcal{C}^k$. Cette régularité provient de la régularité des fonctions Ψ_1, Ψ_2 et des hypothèses sur $[A(\theta,\cdot)]$ qui sont :

$$\alpha\le\sup_{\mathbf{y}\in\Omega}|||[A(\theta,\mathbf{y})]|||\le\beta.$$

En utilisant la régularité de l'intégrale pour des fonction de $L^1(\Omega)$, nous en déduisons que I est une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{O}$. Nous faisons remarquer ici que la démonstration repose sur la régularité des fonctions Ψ_1 et Ψ_2 mais pas sur celle de Φ_1 et Φ_2.

Pour simplifier les calculs de la dérivée de I, nous notons par

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x}) &= \frac{\partial\Lambda}{\partial\theta}(\theta,\Lambda^{-1}(\theta,\mathbf{x})) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x}\in\Omega(\theta),\\ \Phi_k'(\theta,\mathbf{x}) &= \frac{\partial\Phi_k}{\partial\theta}(\theta,\mathbf{x}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x}\in\Omega(\theta),\end{aligned}$$

où

$$\frac{\partial\Phi_k}{\partial\theta}(\theta,\mathbf{x}) = \frac{\partial\Psi_k}{\partial\theta}(\theta,\Lambda^{-1}(\theta,\mathbf{x})) + [D\Psi_k(\theta,\Lambda^{-1}(\theta,\mathbf{x}))]\frac{\partial\Lambda^{-1}}{\partial\theta}(\theta,\mathbf{x})$$

Pour calculer la dérivée de I, nous appliquons la formule de Reynolds (1.18) à $I(\theta)$:

$$\frac{\partial I}{\partial\theta}(\theta) = \int_{\Omega(\theta)}\nabla\Phi_1'\cdot\nabla\Phi_2(\theta,\mathbf{x}) + \nabla\Phi_1\cdot\nabla\Phi_2'(\theta,\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega(\theta)}\nabla\Phi_1\cdot\nabla\Phi_2(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})(\theta,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}.$$

Il faut donc calculer les intégrales qui contiennent les quantités Φ_k', pour $k=1,2$. Pour cela nous dérivons, par rapport à θ, les formulations variationnelles associées aux fonctions Φ_k. Pour toutes fonctions testes $\phi\in H^{s+2}(\Omega(\theta))$, Φ_k vérifie la formulation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega(\theta)}\nabla\Phi_k(\theta,\mathbf{x})\cdot\nabla\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\Omega(\theta)}f_k(\theta,\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega(\theta)}g_k(\theta,\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}.$$

Ainsi en appliquant la formule de Reynolds (1.18), nous obtenons les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\int_{\Omega(\theta)}\nabla\Phi_k(\theta,\mathbf{x})\cdot\nabla\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\right) &= \int_{\Omega(\theta)}\nabla\Phi_k'(\theta,\mathbf{x})\cdot\nabla\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\\ &\quad+\int_{\partial\Omega(\theta)}\nabla\Phi_k(\theta,\mathbf{x})\cdot\nabla\phi(\mathbf{x})\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\theta,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\int_{\Omega(\theta)} f_k(\theta,\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\right) = \int_{\Omega(\theta)} f_k'(\theta,\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) + \mathrm{div}(\mathrm{f_k}(\theta,\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Pour la dernière intégrale nous ne pouvons pas appliquer la formule de Reynolds. Donc pour calculer sa dérivée nous sommes obliger d'effectuer le changement de variables $\mathbf{x} = \Lambda(\theta,\mathbf{y})$, pour $\mathbf{y} \in \Omega$, qui permet d'obtenir une intégrale sur un domaine fixe. Pour tout $\theta \in \mathcal{O}$ et $\mathbf{y} \in \partial\Omega$, nous notons par

$$\mathrm{Jac}_\Gamma(\theta,\mathbf{y}) = |\mathrm{Jac}(\Lambda(\theta,\mathbf{y}))|\left|([\mathrm{D}\Lambda(\theta,\mathbf{y})]^{-1})^*\mathbf{n}(\mathbf{y})\right|,$$

est la jacobienne tangentielle au point $\mathbf{y}$ de $\partial\Omega$ et $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ est le vecteur normal à $\partial\Omega$ en $\mathbf{y}$. Ainsi l'intégrale sur le bord $\partial\Omega(\theta)$ devient

$$\int_{\partial\Omega(\theta)} g_k(\theta,\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_\mathrm{x} = \int_{\partial\Omega} \mathrm{g_k}(\theta,\Lambda(\theta,\mathbf{y}))\phi(\Lambda(\theta,\mathbf{y}))\mathrm{Jac}_\Gamma(\theta,\mathbf{y})\mathrm{d}\sigma_\mathbf{y}.$$

Pour calculer la dérivée par rapport à θ de cette intégrale, nous commençons par rappeler certaines formules.

$$G_i(\theta,\mathbf{y}) = g_i(\theta,\Lambda(\theta,\mathbf{y})), \qquad \text{pour tout } \mathbf{y} \in \partial\Omega.$$

La différentielle de la jacobienne tangentielle par rapport à θ est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\mathrm{Jac}_\Gamma(\theta,\mathbf{y})\right] = \mathrm{div}_\Gamma\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\Lambda(\theta,\mathbf{y}))\right]\mathrm{Jac}_\Gamma(\theta,\mathbf{y}),$$

où div_Γ est l'opérateur défini par

$$\mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \mathrm{div}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) - ([\mathrm{D}\mathbf{u}(\mathbf{x})]\mathbf{n}(\mathbf{x}))\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}), \tag{4.7}$$

où $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ et $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est la normale de la surface $\partial\Omega$ au point $\mathbf{x}$. Nous pouvons retrouver l'ensemble de ces définitions dans le livre de A. Henrot et M. Pierre [28]. Un calcul formel de la différentielle de l'intégrale de bord donne :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\int_{\partial\Omega(\theta)} g_k(\theta,\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_\mathrm{x}\right) &= \int_{\partial\Omega} G_k(\theta,\mathbf{y})\phi(\Lambda(\theta,\mathbf{y}))\mathrm{div}_\Gamma[\frac{\partial}{\partial\theta}(\Lambda(\theta,\mathbf{y}))]\mathrm{Jac}_\Gamma(\theta,\mathbf{y})\\ &+\left[\frac{\partial G_k}{\partial\theta}(\theta,\mathbf{y})\phi(\Lambda(\theta,\mathbf{y})) + G_k(\theta,\mathbf{y})\nabla\phi(\Lambda(\theta,\mathbf{y}))\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(\Lambda(\theta,\mathbf{y}))\right]\mathrm{Jac}_\Gamma(\theta,\mathbf{y})\mathrm{d}\sigma_\mathbf{y}.\end{aligned}$$

Cette intégrale se simplifie si nous effectuons le changement de variable inverse :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\int_{\partial\Omega(\theta)} g_k(\theta,\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_\mathrm{x}\right) &= \int_{\partial\Omega(\theta)} \frac{\partial G_k}{\partial\theta}(\theta,\Lambda^{-1}(\theta,\mathbf{x}))\phi(\mathbf{x})\\ &\quad + g_k(\theta,\mathbf{x})\nabla\phi(\mathbf{x})\cdot\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x}) + g_k(\theta,\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{div}_\Gamma[\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})]\mathrm{d}\sigma_\mathbf{y}.\end{aligned}$$

Finalement nous obtenons une formulation variationnelle pour Φ_k' :

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega(\theta)} \nabla\Phi_k'(\theta,\mathbf{x})\cdot\nabla\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega(\theta)} \nabla\Phi_k(\theta,\mathbf{x})\cdot\nabla\phi(\mathbf{x})\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\theta,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_\mathrm{x}\\ &\quad= \int_{\Omega(\theta)} f_k'(\theta,\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\Omega(\theta)} \mathrm{div}(\mathrm{f_k}(\theta,\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x}))\mathrm{d}\mathbf{x}\\ &\quad+ \int_{\partial\Omega(\theta)} \frac{\partial G_k}{\partial\theta}(\theta,\Lambda^{-1}(\theta,\mathbf{x}))\phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega(\theta)} \mathrm{g_k}(\theta,\mathbf{x})\nabla\phi(\mathbf{x})\cdot\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_\mathbf{x}\\ &\quad+ \int_{\partial\Omega(\theta)} g_k(\theta,\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\mathrm{div}_\Gamma[\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})]\mathrm{d}\sigma_\mathbf{x},\end{aligned}$$

pour toutes fonctions testes $\phi \in H^{s+2}(\Omega(\theta))$. En prenant $\phi = \Phi_1(\theta,\cdot)$ et $\phi = \Phi_2(\theta,\cdot)$ dans la formulation variationnelle plus haut, nous pouvons ainsi calculer la différentielle de I :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial\theta}(\theta) &= -\int_{\partial\Omega(\theta)} \nabla\Phi_1(\theta,\mathbf{x})\cdot\nabla\Phi_2(\theta,\mathbf{x})\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\theta,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \\
&+ \int_{\Omega(\theta)} f_1'(\theta,\mathbf{x})\Phi_2(\theta,\mathbf{x}) + f_1'(\theta,\mathbf{x})\Phi_2(\theta,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&+ \int_{\Omega(\theta)} \mathrm{div}\left[(\mathrm{f}_1(\theta,\mathbf{x})\Phi_2(\theta,\mathbf{x}) + (\mathrm{f}_2(\theta,\mathbf{x})\Phi_1(\theta,\mathbf{x}))\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})\right]\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&+ \int_{\partial\Omega(\theta)} \frac{\partial G_1}{\partial\theta}(\theta,\Lambda^{-1}(\theta,\mathbf{x}))\Phi_2(\theta,\mathbf{x}) + \frac{\partial G_2}{\partial\theta}(\theta,\Lambda^{-1}(\theta,\mathbf{x}))\Phi_1(\theta,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{x}} \\
&+ \int_{\partial\Omega(\theta)} (g_1(\theta,\mathbf{x})\nabla\Phi_2(\theta,\mathbf{x}) + g_2(\theta,\mathbf{x})\nabla\Phi_1(\theta,\mathbf{x}))\cdot\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{x}} \\
&+ \int_{\partial\Omega(\theta)} (g_1(\theta,\mathbf{x})\Phi_2(\theta,\mathbf{x}) + g_2(\theta,\mathbf{x})\Phi_1(\theta,\mathbf{x}))\,\mathrm{div}_\Gamma[\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})]\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{x}}.
\end{aligned}$$

Pour terminer la preuve, nous avons besoin de rappeler quelques formules de géométrie différentielle. Pour tout champ de vecteur $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ et pour toutes applications f définit sur un voisinage de $\partial\Omega(\theta)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_\Gamma(\mathrm{f}(\theta,\mathbf{x})\mathbf{n}(\theta,\mathbf{x})) &= \mathcal{H}(\theta,\mathbf{x})f(\theta,\mathbf{x}), \\
\mathbf{U}(\theta,\mathbf{x}) &= \mathbf{U}_\Gamma(\theta,\mathbf{x}) + [\mathbf{U}(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\theta,\mathbf{x})]\mathbf{n}(\theta,\mathbf{x}), \\
\mathbf{U}(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x}) &= \mathbf{U}_\Gamma(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{V}_\Gamma(\theta,\mathbf{x}) + (\mathbf{U}(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\theta,\mathbf{x}))(\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\theta,\mathbf{x})).
\end{aligned}$$

Nous rappelons aussi certaines propriétés de la divergence tangentielle

$$\mathrm{div}_\Gamma(\mathrm{f}(\theta,\mathbf{x})\mathbf{U}(\theta,\mathbf{x})) = f(\theta,\mathbf{x})\mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{U}(\theta,\mathbf{x})) + \nabla_\Gamma\mathrm{f}(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{U}_\Gamma(\theta,\mathbf{x}), \tag{4.8}$$

$$\mathrm{div}_\Gamma(\mathrm{f}(\theta,\mathbf{x})\mathbf{U}(\theta,\mathbf{x})) = \mathrm{div}_\Gamma(\mathrm{f}(\theta,\mathbf{x})\mathbf{U}_\Gamma(\theta,\mathbf{x})) + \mathcal{H}(\theta,\mathbf{x})[\mathrm{f}(\theta,\mathbf{x})\mathbf{U}(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\theta,\mathbf{x})]. \tag{4.9}$$

De plus nous avons la relation

$$\int_{\partial\Omega(\theta)} \mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{U}_\Gamma(\theta,\mathbf{x}))\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} = 0, \tag{4.10}$$

où $\mathbf{n}(\theta,\mathbf{x})$ désigne le vecteur normale à $\partial\Omega(\theta)$ au point $\mathbf{x}$ et $\mathcal{H}(\theta,\mathbf{x})$ est la courbure moyenne de $\partial\Omega(\theta)$ au point $\mathbf{x}$. Le vecteur $\mathbf{U}_\Gamma$ est la composante tangentielle du vecteur $\mathbf{U}$. Les formules (4.8) permettent de simplifier l'expression de la dérivée de I.

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_\Gamma(\mathrm{g}_1(\theta,\mathbf{x})\Phi_2(\theta,\mathbf{x})\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})) &= \mathrm{g}_1(\theta,\mathbf{x})\Phi_2(\theta,\mathbf{x})\mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})) \\
&\quad + g_1(\theta,\mathbf{x})\nabla_\Gamma\Phi_2(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{V}_\Gamma(\theta,\mathbf{x}) + \Phi_2(\theta,\mathbf{x})\nabla_\Gamma g_1(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{V}_\Gamma(\theta,\mathbf{x}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_\Gamma(\mathrm{g}_1(\theta,\mathbf{x})\Phi_2(\theta,\mathbf{x})\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})) &= \mathrm{div}_\Gamma(\mathrm{g}_1(\theta,\mathbf{x})\Phi_2(\theta,\mathbf{x})\mathbf{V}_\Gamma(\theta,\mathbf{x})) \\
&\quad + \mathcal{H}(\theta,\mathbf{x})g_1(\theta,\mathbf{x})\Phi_2(\theta,\mathbf{x})\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\theta,\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Finalement en utilisant la formule (4.10) nous obtenons

$$\begin{aligned}
&g_1(\theta,\mathbf{x})\Phi_2(\theta,\mathbf{x})\mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})) + \mathrm{g}_1(\theta,\mathbf{x})\nabla\Phi_2(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x}) \\
&\quad = \mathrm{div}_\Gamma(\mathrm{g}_1(\theta,\mathbf{x})\Phi_2(\theta,\mathbf{x})\mathbf{V}_\Gamma(\theta,\mathbf{x})) + \mathcal{H}(\theta,\mathbf{x})\mathrm{g}_1(\theta,\mathbf{x})\Phi_2(\theta,\mathbf{x})\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\theta,\mathbf{x}) \\
&\qquad + g_1(\theta,\mathbf{x})g_2(\theta,\mathbf{x})\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\theta,\mathbf{x}) - \Phi_2(\theta,\mathbf{x})\nabla_\Gamma g_1(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Ainsi les intégrales de bords deviennent

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial\Omega(\theta)} g_1(\theta,\mathbf{x})\Phi_2(\theta,\mathbf{x})\mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})) + \mathrm{g}_1(\theta,\mathbf{x})\nabla\Phi_2(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}\\
&= \int_{\partial\Omega(\theta)} \mathcal{H}(\theta,\mathbf{x})g_1(\theta,\mathbf{x})\Phi_2(\theta,\mathbf{x})\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\theta,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}\\
&+ \int_{\partial\Omega(\theta)} g_1(\theta,\mathbf{x})g_2(\theta,\mathbf{x})\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\theta,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}\\
&- \int_{\partial\Omega(\theta)} \Phi_2(\theta,\mathbf{x})\nabla_\Gamma g_1(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}.
\end{aligned}$$

Ce dernier calcul permet donc d'obtenir la différentielle de I :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial\theta}(\theta) &= \int_{\Omega(\theta)} \frac{\partial f_1}{\partial\theta}(\theta,\mathbf{x})\Phi_2(\theta,\mathbf{x}) + \frac{\partial f_2}{\partial\theta}(\theta,\mathbf{x})\Phi_1(\theta,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&+ \int_{\Omega(\theta)} \mathrm{div}\left[(\mathrm{f}_1(\theta,\mathbf{x})\Phi_2(\theta,\mathbf{x}) + \mathrm{f}_2(\theta,\mathbf{x})\Phi_1(\theta,\mathbf{x}))\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})\right]\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&+ \int_{\partial\Omega(\theta)} \left(\frac{\partial G_1}{\partial\theta}((\theta),\Lambda^{-1}(\theta,\mathbf{x})) - \nabla_\Gamma g_1(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{V}_\Gamma(\theta,\mathbf{x})\right)\Phi_2(\theta,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}\\
&+ \int_{\partial\Omega(\theta)} \left(\frac{\partial G_2}{\partial\theta}((\theta),\Lambda^{-1}(\theta,\mathbf{x})) - \nabla_\Gamma g_2(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{V}_\Gamma(\theta,\mathbf{x})\right)\Phi_1(\theta,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}\\
&+ \int_{\partial\Omega(\theta)} \left[2g_1(\theta,\mathbf{x})g_2(\theta,\mathbf{x}) - \nabla\Phi_1(\theta,\mathbf{x})\cdot\nabla\Phi_2(\theta,\mathbf{x})\right](\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\theta,\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}\\
&+ \int_{\partial\Omega(\theta)} \mathcal{H}(\theta,\mathbf{x})\left[g_1(\theta,\mathbf{x})\Phi_2(\theta,\mathbf{x}) + g_2(\theta,\mathbf{x})\Phi_1(\theta,\mathbf{x})\right](\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\theta,\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}.
\end{aligned}$$

■

4.2 Le cas des domaines non bornés

Dans cette section nous travaillons sur un problème de Neumann simplifié par rapport au cas des domaines bornés. Soient $n = 2, 3$ et Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$ tel que $\partial\Omega = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$ où Γ_1 est soit un hyperplan, soit l'ensemble vide et Γ_2 est la frontière d'un compact K. Nous notons toujours par E un espace de Banach, muni de la norme $|\cdot|_E$. Comme dans le cas borné nous avons besoin d'introduire une application $(\theta,\mathbf{y}) \mapsto \Lambda(\theta,\mathbf{y})$ qui vérifie les propriétés suivantes.

- Pour tout $\theta \in E$, $\Lambda(\theta,\cdot)$ est dans $D_0^\infty(\Omega)$.
- Il existe une boule B tel que $K \subset B$ et pour tout $\theta \in E$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus (\overline{B})$, $\Lambda(\theta,\mathbf{y}) = \mathbf{y}$. De plus si Γ_1 n'est pas vide alors il existe un voisinage U de Γ_1 tel que pour tout $\theta \in E$ et $\mathbf{y} \in U$ $\Lambda(\theta,\mathbf{y}) = \mathbf{y}$.
- Il existe $k \geq 1$ un entier tel que $\theta \to \Lambda(\theta,\cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{B\cap\Omega},\mathbb{R}^n)$ est de classe $\mathcal{C}^k$.
- Il existe $\theta_0 \in E$ tel que $\Lambda(\theta_0,\cdot)$ est l'application identité sur $\mathbb{R}^n$.
- Il existe $0 < \alpha < \beta < +\infty$ tel que pour tout $\theta \in E$ nous avons

$$\alpha \leq \sup_{\mathbf{y}\in\Omega} |||[A(\theta,\mathbf{y})]||| \leq \beta,$$

où la matrice $[A(\theta,\mathbf{y})]$ est définie par (4.1).

Comme dans le cas borné, nous notons $\Omega(\theta) = \Lambda(\theta, \Omega)$ et $\Gamma_2(\theta) = \Lambda(\theta, \Gamma_2)$. Nous remarquons que $\Gamma_1 = \Lambda(\theta, \Gamma_1)$. Nous considérons les problèmes de Neumann suivants :

$$-\Delta\phi(\theta, \mathbf{x}) = 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \Omega(\theta), \tag{4.11a}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}(\theta, \mathbf{x}) = g(\theta, \mathbf{x}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \text{ sur } \Gamma_2(\theta), \tag{4.11b}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}(\theta, \mathbf{x}) = 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \text{ sur } \Gamma_1, \tag{4.11c}$$

pour $g(\theta, \cdot) \in H^{1/2}(\Gamma_2(\theta))$. La condition sur le bord Γ_1 disparaît si ce dernier est l'ensemble vide. En appliquant le Théorème 3.4.2, le problème (4.11) admet une unique solution $\phi(\theta, \cdot) \in \mathcal{H}^2(\Omega(\theta))$ où $\mathcal{H}^2(\Omega(\theta))$ est défini par (3.4c). Comme dans le cas borné nous introduisons les applications sur le domaine fixe Ω :

$$\psi(\theta, \mathbf{y}) = \phi(\theta, \Lambda(\theta, \mathbf{y})), \qquad \mathbf{y} \in \Omega,$$

et pour $\theta = \theta_0$, nous notons par $\phi_0 \in \mathcal{H}^2(\Omega)$ la solution du problème de Neumann

$$\begin{aligned} -\Delta\phi_0(\mathbf{x}) &= 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \Omega, \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) &= g(\theta_0, \mathbf{x}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \text{ sur } \Gamma_2, \\ \frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) &= 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \text{ sur } \Gamma_1, \end{aligned}$$

Nous avons le résultat suivant pour la fonction $\psi(\theta, \cdot)$.

Théorème 4.2.1 *Soit $k \geq 1$ un entier. Supposons que pour tout $\theta \in E$ les applications*

$$g(\theta, \cdot) \in \mathcal{H}^{1/2}(\Gamma_2(\theta)) \text{ et } \theta \in E \mapsto g(\theta, (\Lambda(\theta, \cdot)))$$

sont de classe $\mathcal{C}^k$. Alors il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de θ_0 tel que l'application $\theta \in \mathcal{O} \mapsto \psi(\theta, \cdot) \in \mathcal{H}^2(\Omega)$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

Preuve : Comme dans le cas borné, nous allons appliquer le Théorème des fonctions implicites. Nous montrons que $\psi(\theta, \cdot)$ est solution du problème elliptique suivant

$$\begin{aligned} \mathrm{div}([\mathrm{A}(\theta, \mathbf{y})]\nabla\psi(\theta, \mathbf{y})) &= 0 \qquad \text{pour } \mathbf{y} \in \Omega, \\ [A(\theta, \mathbf{y})]\psi(\theta, \mathbf{y}) &= g(\theta, (\Lambda(\theta, \mathbf{y}))) \quad \text{pour } \mathbf{y} \in \Gamma_2(\theta), \\ [A(\theta, \mathbf{y})]\psi(\theta, \mathbf{y}) &= 0 \text{ pour } \mathbf{y} \in \Gamma_1, \end{aligned}$$

pour tout $\theta \in E$. Nous construisons donc l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \quad E \times \mathcal{H}^2(\Omega) &\to \mathcal{L}^2(\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega), \\ (\theta, U) &\mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{div}\,[\mathrm{A}(\theta, .)\nabla \mathrm{U}] \\ [A(\theta, .)\nabla U] \cdot \mathbf{n} - G(\theta, \cdot) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où la fonction $G(\theta, .)$ est définie par

$$G(\theta, \mathbf{y}) = \begin{cases} g(\theta, \Lambda(\theta, \mathbf{y})) & \text{pour } \mathbf{y} \in \Gamma_2, \\ 0 & \text{pour } \mathbf{y} \in \Gamma_1. \end{cases}$$

Comme dans la démonstration du Théorème 4.1.1, nous pouvons appliquer le Théorème des fonctions implicites à $\mathcal{F}$ et en déduire qu'il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de θ_0 et une application $U : \mathcal{O} \to \mathcal{H}^2(\Omega)$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $\mathcal{F}(\theta, U(\theta)) = 0$ pour tout $\theta \in \mathcal{O}$. Enfin par unicité du

problème (4.11), nous en déduisons que $\psi = U$ pour tout $\theta \in \mathcal{O}$. Ce qui termine la preuve. ■

Comme dans le cas borné nous devons étudier la régularité de certaines intégrales qui dépendent de θ. Pour $g_1(\theta,\cdot)$ et $g_2(\theta,\cdot)$ dans $H^{1/2}(\Gamma_2(\theta))$ vérifiant les hypothèses du Théorème 4.2.1, nous introduisons les problèmes de Neumann suivants :

$$\begin{aligned} -\Delta\phi_i(\theta,\mathbf{x}) &= 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{x}\in\Omega(\theta),\\ \frac{\partial\phi_i}{\partial\mathbf{n}}(\theta,\mathbf{x}) &= g_i(\theta,\mathbf{x}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x}\in\Gamma_2(\theta),\\ \frac{\partial\phi_i}{\partial\mathbf{n}}(\theta,\mathbf{x}) &= 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{x}\in\Gamma_1, \end{aligned}$$

pour $i = 1, 2$. De même nous définissons les fonctions ψ_i associées à ϕ_i par

$$\psi_i(\theta,\mathbf{y}) = \phi_i(\theta,\Lambda(\theta,\mathbf{y})) \qquad \text{pour tout } \mathbf{y}\in\Omega,\ \theta\in E \text{ et } \textit{pour} i = 1,2.$$

Comme dans le cas borné nous devons étudier la fonctionnelle suivante

$$I(\theta) = \int_{\Omega(\theta)} \nabla\phi_1(\theta,\mathbf{x})\cdot\nabla\phi_2(\theta,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{4.12}$$

Nous obtenons donc un résultat similaire au cas borné sur $I(\theta)$:

Théorème 4.2.2 *Soient $k \geq 1$, Λ et g_i qui vérifient les même hypothèses que le Théorème 4.2.1 pour $i = 1, 2$, alors il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de θ_0 tel que l'application $\theta \to I(\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^k$. De plus pour tout $\theta \in \mathcal{O}$, la dérivée par rapport à θ est donnée par :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial\theta}(\theta) &= \int_{\partial\Gamma_2(\theta)} \left(\frac{\partial G_1}{\partial\theta}((\theta),\Lambda^{-1}(\theta,\mathbf{x})) - \nabla_\Gamma g_1(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{V}_\Gamma(\theta,\mathbf{x})\right)\Phi_2(\theta,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}\\ &+ \int_{\partial\Gamma_2(\theta)} \left(\frac{\partial G_2}{\partial\theta}((\theta),\Lambda^{-1}(\theta,\mathbf{x})) - \nabla_\Gamma g_2(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{V}_\Gamma(\theta,\mathbf{x})\right)\Phi_1(\theta,\mathbf{x})\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}\\ &+ \int_{\partial\Gamma_2(\theta)} \left[2g_1(\theta,\mathbf{x})g_2(\theta,\mathbf{x}) - \nabla\Phi_1(\theta,\mathbf{x})\cdot\nabla\Phi_2(\theta,\mathbf{x})\right](\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\theta,\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}\\ &+ \int_{\partial\Gamma_2(\theta)} \mathcal{H}(\theta,\mathbf{x})\left[g_1(\theta,\mathbf{x})\Phi_2(\theta,\mathbf{x}) + g_2(\theta,\mathbf{x})\Phi_1(\theta,\mathbf{x})\right](\mathbf{V}(\theta,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\theta,\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}, \end{aligned} \tag{4.13}$$

où $\mathcal{H}(\theta,\mathbf{x})$ est la courbure moyen de la surface $\partial\Gamma_2(\theta)$ au point $\mathbf{x}$ (voir [18, page 129] pour une définition plus complète),

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\theta,\mathbf{x}) &= \frac{\partial\Lambda}{\partial\theta}(\theta,\Lambda^{-1}(\theta,\mathbf{x})) \qquad \textit{pour tout } \mathbf{x}\in\Omega(\theta),\\ G_i(\theta,\mathbf{y}) &= g_i(\theta,\Lambda(\theta,\mathbf{y})) \qquad \textit{pour tout } \mathbf{y}\in\partial\Gamma_2 \ \textit{ pour } i = 1,2, \end{aligned}$$

et pour tout champ de vecteur $\mathbf{u}$ défini sur $\partial\Omega(\theta)$, $\mathbf{u}_\Gamma$ désigne la composante tangentielle de $\mathbf{u}$.

Preuve : La preuve étant identique au cas borné, nous renvoyons le lecteur à la preuve du Théorème 4.1.2. ■

Chapitre 5

Mouvements des solides à l'intérieur d'un fluide potentiel

Dans cette partie nous étudions le mouvement de plusieurs solides dans un fluide potentiel. Plus précisément, nous supposons que le champ de vitesse du fluide est le gradient d'un champ scalaire. La principale nouveauté que nous apportons ici est l'existence et l'unicité locale des trajectoires des solides, lorsque le système fluide-solide est un domaine régulier arbitraire, borné ou non borné. En effet nous utilisons des résultats qui proviennent de la théorie de l'optimisation de forme dans nos démonstrations. Ce concept est très bien adapté au problème car comme nous le verrons la forme du domaine est donnée par la configuration des solides. De plus le procédé que nous utilisons permet de traiter une collection quelconque de solides sans apporter de grandes difficultés. Nous pouvons aussi traiter les cas des domaines fluides bornés ou non bornés de manières similaires. Les équations que nous obtenons sont des équations différentielles ordinaires dont les coefficients dépendent des solutions de problème de Neumann. C'est un atout de taille pour un calcul numérique des solutions car la résolution d'équations différentielles ordinaires est plus rapide. Cette particularité a été utilisée par A. Munnier pour réaliser plusieurs codes en MATLAB.

Enfin nous montrerons que dans le cas particulier des fluides potentiels la description newtonienne des solides est équivalente à la description lagrangienne de ces derniers.

Pour la simplicité de la présentation, nous considérons uniquement le cas ou il n'y a pas de forces extérieures qui agissent sur le système.

5.1 Existence et unicité locale des solutions

Dans ce chapitre nous regardons le mouvement de m solides rigides S^i, pour $i = 1, \cdots, m$, dans un fluide potentiel contenu dans un domaine Ω, où Ω est soit un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ avec $n = 2$, soit un demi-espace de $\mathbb{R}^3$ ou un demi-plan de $\mathbb{R}^2$ ou soit l'espace $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Les solides sont repérer par la position de leur centrer de gravité $\mathbf{h}^i$ et par les angles d'Euler $\Theta^i = (\theta_1^i, \theta_2^i, \theta_3^i)$ de leur matrice de rotation dans le cas $\mathbb{R}^3$ ou l'angle de rotation θ^i. Nous rappelons que les coordonnées généralisées du système sont donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^i &= (\mathbf{h}^i, \Theta^i) \text{ pour tout } i = 1, \ldots, m \text{ et } \mathbf{q} = (\mathbf{q}^1, \ldots, \mathbf{q}^m) \text{ si } n = 3, \\ \mathbf{q}^i &= (\mathbf{h}^i, \theta^i) \text{ pour tout } i = 1, \ldots, m \text{ et } \mathbf{q} = (\mathbf{q}^1, \ldots, \mathbf{q}^m) \text{ si } n = 2. \end{aligned}$$

Pour simplifier les notations, nous donnons une nouvelle indexation du vecteur $\mathbf{q}$ par

$$\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_N)$$

où le nombre $N = m\,n(n+1)/2$. De plus nous rappelons la définition de l'ensemble des positions admissibles des solides est défini (1.40)

$$P(\Omega, S) = \bigcup_{\epsilon>0} P^\epsilon(\Omega, S).$$

où pour $\epsilon > 0$ nous avons défini $P^\epsilon(\Omega, S)$ par (1.38) pour $n = 3$

$$P^\epsilon(\Omega, S) = \Big\{ \mathbf{q} = (\mathbf{h}^i, \Theta^i)_{i=1,\dots,m} \left[\mathbb{R}^3 \times \mathcal{U}\right]^m \;\Big|\; \mathrm{dist}(\mathrm{S}^{\mathrm{i}}_{\mathbf{q_i}}, \mathrm{S}^{\mathrm{j}}_{\mathbf{q_j}}) > \epsilon \text{ et } \mathrm{dist}(\mathrm{S}^{\mathrm{i}}_{\mathbf{q_i}}, \partial\Omega) > \epsilon \text{ pour tout } i, j = 1, \dots, m \Big\},$$

et par (1.39) pour $n = 2$.

$$P^\epsilon(\Omega, S) \Big\{ \mathbf{q} = (\mathbf{h}^i, \theta^i)_{i=1,\dots,m} \in \mathbb{R}^{3m} \;\Big|\; \mathrm{dist}(\mathrm{S}^{\mathrm{i}}_{\mathbf{q_i}}, \mathrm{S}^{\mathrm{j}}_{\mathbf{q_j}}) > \epsilon \text{ et } \mathrm{dist}(\mathrm{S}^{\mathrm{i}}_{\mathbf{q_i}}, \partial\Omega) > \epsilon \text{ pour tout } i, j = 1, \dots, m \Big\}.$$

Nous rappelons aussi certaines notations de la section (1.2.4). L'énergie cinétique des solides est donnée par la formule :

$$\mathbf{T}_S = \frac{1}{2} \left[\mathcal{K}_S(\mathbf{q})\right] \dot{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

où la matrice $[\mathcal{K}_S(\mathbf{q})]$ est définie par :

- Si $n = 3$

$$[\mathcal{K}_S(\mathbf{q})] = \mathrm{diag}\left[\begin{pmatrix} m_1 Id_3 & 0 \\ 0 & J^1(\Theta^1) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m_m Id_3 & 0 \\ 0 & J^m(\Theta^m) \end{pmatrix} \right]$$

- Si $n = 2$

$$[\mathcal{K}_S(\mathbf{q}] = [\mathcal{K}_S] = \mathrm{diag}\left[\begin{pmatrix} m_1 Id_2 & 0 \\ 0 & I^1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m_m Id_2 & 0 \\ 0 & I^m \end{pmatrix} \right].$$

Il est facile de vérifier que la matrice $[\mathcal{K}_S]$ est symétrique et définie positive. De plus si λ_m est la plus petite valeur propre de $[\mathcal{K}_S]$ et λ_M sa plus grande valeur propre, nous avons donc l'inégalité pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$:

$$\lambda_m |\mathbf{x}|^2 \leq [\mathcal{K}_S]\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \leq \lambda_M |\mathbf{x}|^2.$$

Concernant le fluide, nous rappelons qu'il existe une application Ψ tel que la vitesse du fluide est donnée par

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \nabla\Psi(t, \mathbf{x}), \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in F(t) \text{ et } t \in [0, T]$$

Ainsi l'équation d'Euler se traduit par l'équation de Bernoulli :

$$p(t, \mathbf{x}) = c(t) - \rho_f [\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{2} |\nabla\Psi(t, \mathbf{x})|^2], \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in F_{\mathbf{q}(t)} \text{ et } t \in [0, T],$$

où $c(t)$ est une fonction qui ne dépend que du temps t. Nous rappelons que Ψ est solution du Neumann suivant :

$$\begin{aligned}
-\Delta\Psi(t, \mathbf{x}) &= 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in F(t), \\
\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) &= 0 \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \\
\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) &= \left[\dot{\mathbf{h}}^i(t) + \mathbf{w}(\dot{\Theta}^i(t))(\mathbf{x} - \mathbf{h}^i(t))\right] \cdot \mathbf{n}(t, \mathbf{x}) \text{ pour } \mathbf{x} \in \Gamma^i(t), \text{ pour } n = 3, \\
\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) &= \left[\dot{\mathbf{h}}^i(t) + \dot{\theta}^i(t)[A_0](\mathbf{x} - \mathbf{h}^i(t))\right] \cdot \mathbf{n}(t, \mathbf{x}) \text{ pour } \mathbf{x} \in \Gamma^i(t), \text{ pour } n = 2,
\end{aligned}$$

où le vecteur $\mathbf{w}(\dot{\Theta}^i(t))$ est défini par

$$\mathbf{w}(\dot{\Theta}^i(t)) = \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{w}(\dot{\Theta}^i(t))_1 & = & \dot{\Theta}^i_1(t) + \dot{\Theta}^i_3(t)\sin(\Theta^i_2(t)), \\ \mathbf{w}(\dot{\Theta}^i(t))_2 & = & \dot{\Theta}^i_2(t)\cos(\Theta^i_1(t)) - \dot{\Theta}^i_3(t)\sin(\Theta^i_1(t))\cos(\Theta^i_2(t)), \\ \mathbf{w}(\dot{\Theta}^i(t))_3 & = & \dot{\Theta}^i_2(t)\sin(\Theta^i_1(t)) + \dot{\Theta}^i_3(t)\cos(\Theta^i_1(t))\cos(\Theta^i_2(t)), \end{array} \right.$$

et la matrice $[A_0]$ est définie par la formule (1.6). L'énergie cinétique du fluide est donnée par :

$$\mathbf{T}_F = \frac{1}{2}\left[\mathcal{K}_F(\mathbf{q})\right]\dot{\mathbf{q}}\cdot\dot{\mathbf{q}},$$

où

$$[\mathcal{K}_F(\mathbf{q})]_{i,j} = \int_{F_\mathbf{q}} \rho_F \nabla\Phi_i(t,\mathbf{x})\cdot\nabla\Phi_j(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}, \qquad \text{pour } i,j = 1,\ldots,N.$$

Les fonctions Φ_j sont les solutions des problèmes de Neumann suivants :

$$-\Delta\Phi_j(t,\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{x}\in F_{\mathbf{q}(t)} \tag{5.1a}$$

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial\mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{pour } \mathbf{x}\in\partial\Omega, \tag{5.1b}$$

$$\frac{\partial\Phi_j}{\partial\mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{C}_j(t,\mathbf{x}) \text{ pour } \mathbf{x}\in\partial S^i_{\mathbf{q}(t)}, \tag{5.1c}$$

où les fonctions $\mathbf{C}_j$ sont définies par

- Pour $n=3$ et $j=6i+l$ avec $i=1,\cdots,m$, $l=1,\cdots,6$, nous posons

$$\mathbf{C}_j(t,\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{K}^i_l(t,\mathbf{x}) & \text{pour } \mathbf{x}\in\partial S^i(\mathbf{q}(t)), \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \tag{5.2}$$

  où $\mathbf{K}^i_l$ est définie par (1.36).
- Pour $n=2$ et $j=3i+l$ avec $i=1,\cdots,m$, $l=1,2,3$, nous posons

$$\mathbf{C}_j(t,\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{K}^i_l(t,\mathbf{x}) & \text{pour } \mathbf{x}\in\partial S^i(\mathbf{q}(t)), \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \tag{5.3}$$

  où $\mathbf{K}^i_l$ est définie par (1.37)

Le Lagrangien du système $\mathcal{L}$ se réduit à la somme des énergies cinétiques des solides $\mathbf{T}_S$ et de l'énergie cinétique du fluide T_F.

$$\mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}([\mathcal{K}_S(\mathbf{q})] + [\mathcal{K}_F(\mathbf{q})])\dot{\mathbf{q}}\cdot\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}([\mathcal{K}(\mathbf{q})])\dot{\mathbf{q}}\cdot\dot{\mathbf{q}}.$$

Nous commençons par montrer que la matrice $[\mathcal{K}(\mathbf{q})]$ possède les propriétés suivantes :

Lemme 5.1.1 *La matrice $[\mathcal{K}(\mathbf{q})]$ est symétrique définie positive pour tout $\mathbf{q}\in P(\Omega,S)$.*

Preuve : Nous rappelons que $[\mathcal{K}(\mathbf{q})] = [\mathcal{K}_S(\mathbf{q})] + [\mathcal{K}_F(\mathbf{q})]$ pour tout $\mathbf{q}\in P(\Omega,S)$. La matrice $[\mathcal{K}_S(\mathbf{q})]$ est symétrique définie positive par définition. Il suffit de montrer que $[\mathcal{K}_F(\mathbf{q})]$ est symétrique et positive. En effet cela implique que $[\mathcal{K}(\mathbf{q})]$ est symétrique et positive et si pour $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^N$ nous avons $[\mathcal{K}(\mathbf{q})]\mathbf{z},\cdot\mathbf{z} = 0$, alors $[\mathcal{K}_S(\mathbf{q})]\mathbf{z},\cdot\mathbf{z} = 0$ et donc que $\mathbf{z}=0$ car $[\mathcal{K}_S(\mathbf{q})]$ est définit. Nous allons donc prouver que pour tout $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^N$ nous avons

$$[\mathcal{K}_F(\mathbf{q})]\mathbf{z}\cdot\mathbf{z}\geq 0.$$

Nous commençons par rappeler la définition de $[\mathcal{K}_F(\mathbf{q})]$.

$$[\mathcal{K}_F(\mathbf{q})]_{i,j} = \int_{F_\mathbf{q}} \rho_F \nabla\Phi_i(t,\mathbf{x})\cdot\nabla\Phi_j(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}, \qquad \text{pour } i,j = 1,\ldots,N.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^N$ et nous posons

$$\Psi_\lambda = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \Psi_i.$$

Pour finir la preuve du lemme il suffit de remarquer que

$$[\mathcal{K}_F(\mathbf{q})]\lambda \cdot \lambda = \int_{F_{\mathbf{q}(t)}} |\nabla \Psi_\lambda(\mathbf{x})|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} \geq 0.$$

■

Grâce au Lemme nous pouvons simplifier les équations de Lagrange.

Lemme 5.1.2 *Le système d'équations*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0, \qquad \textit{pour } k = 1, \cdots, N,$$

est équivalent au système d'équation différentielle suivant

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathcal{K}(\mathbf{q})]^{-1}\mathbf{T}(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}.$$

où $\mathbf{T}$ *est le vecteur défini par*

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})_k = \sum_{i,j=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j}[\mathcal{K}(\mathbf{q})]_{i,k} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_k}[\mathcal{K}(\mathbf{q})]_{i,j} \right) \mathbf{x}_i \mathbf{y}_j, \qquad \textit{pour } k = 1, \cdots, N.$$

Preuve : Nous commençons par donner les expressions de certaines dérivée et nous rappelons que le Lagrangien est donné par

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} [\mathcal{K}(\mathbf{q})]_{i,j} \dot{\mathbf{q}}_i \dot{\mathbf{q}}_j.$$

Nous fixons $k \in \{1, \cdots, N\}$, la symétrie de $[\mathcal{K}(\mathbf{q})]$ implique

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}_k} = \sum_{i=1}^{N} [\mathcal{K}(\mathbf{q})]_{i,k} \dot{\mathbf{q}}_i.$$

Pour la dérivée par rapport au temps t il faut remarquer que

$$\frac{d}{dt}[\mathcal{K}(\mathbf{q})]_{i,j} = \sum_{l=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_l}[\mathcal{K}(\mathbf{q})]_{i,j} \dot{\mathbf{q}}_l$$

Ainsi nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^{N} [\mathcal{K}(\mathbf{q})]_{i,k} \ddot{\mathbf{q}}_i + \sum_{i,l=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_l}[\mathcal{K}(\mathbf{q})]_{i,k} \dot{\mathbf{q}}_l \dot{\mathbf{q}}_i$$

Enfin le dérivée par rapport à $\mathbf{q}_k$ donne

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_k}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_k}[\mathcal{K}(\mathbf{q})]_{i,j} \dot{\mathbf{q}}_i \dot{\mathbf{q}}_j$$

Les équations de Lagrange s'écrivent donc

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \sum_{i=1}^{N} [\mathcal{K}(\mathbf{q})]_{i,k} \ddot{\mathbf{q}}_i + \sum_{i,j=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j} [\mathcal{K}(\mathbf{q})]_{i,k} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_k} [\mathcal{K}(\mathbf{q})]_{i,j} \right) \dot{\mathbf{q}}_i \dot{\mathbf{q}}_j.$$

Pour simplifier les calculs nous introduisons le vecteur $\mathbf{T}$ défini par

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})_k = \sum_{i,j=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j} [\mathcal{K}(\mathbf{q})]_{i,k} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_k} [\mathcal{K}(\mathbf{q})]_{i,j} \right) \mathbf{x}_i \mathbf{y}_j, \qquad \text{pour } k = 1, \cdots, N.$$

Ceci permet d'obtenir une relation sur la dérivée seconde $\mathbf{q}$

$$\ddot{\mathbf{q}} = [\mathcal{K}(\mathbf{q})]^{-1} \mathbf{T}(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}).$$

Nous aboutissons donc au système d'équations différentielles suivant

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}, \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathcal{K}(\mathbf{q})]^{-1} \mathbf{T}(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

■

Le Lemme 5.1.2 met en évidence l'importance des résultats du chapitre 4. En effet l'étude de la matrice $[\mathcal{K}(\mathbf{q})]$ est principalement réduite à l'étude des intégrales suivantes

$$[\mathcal{K}_F(\mathbf{q})]_{i,j} = \int_{F_\mathbf{q}} \rho_F \nabla \Phi_i(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla \Phi_j(t, \mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}, \qquad \text{pour } i, j = 1, \ldots, N.$$

Théorème 5.1.1 *Pour tout $\mathbf{q}_0 \in P(\Omega, S)$, il existe un voisinage de $\mathcal{Q}$ de $\mathbf{q}_0$ dans $P(\Omega, S)$ tel que l'application*

$$\begin{array}{rcl} P(\Omega, S) & \to & \mathcal{M}_N(\mathbb{R}), \\ \mathbf{q} & \mapsto & [\mathcal{K}(\mathbf{q})] = [\mathcal{K}_S(\mathbf{q})] + [\mathcal{K}_F(\mathbf{q})], \end{array}$$

soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{Q}$.

Preuve : Il suffit d'appliquer les Théorèmes 4.1.2 et 4.2.2 à la matrice $[\mathcal{K}_F]$ avec $E = P(\Omega, S)$. Nous choisissons ici l'application Ψ définie par la Proposition 3.2.2 comme transformation géométrique. L'application Λ, qui apparaît dans les Théorème 4.1.2 et 4.2.2 sera la fonction Ψ. De plus il est facile de voir que les applications

$$\mathbf{C}_i, j(\mathbf{q}, \Psi(\mathbf{q}, \cdot)) \in H^{1/2}(\partial F(0))$$

sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $P(\Omega, S)$. Ainsi pour tout $\mathbf{q}_0 \in P(\Omega, S)$, il existe un voisinage $\mathcal{Q}$ de $\mathbf{q}_0$ tel que $\mathbf{q} \to [\mathcal{K}_F(\mathbf{q})]$ soit une application de classe $\mathcal{C}^\infty$. Concernant la régularité de la matrice $[\mathcal{K}_S]$, il est facile de vérifier qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $P(\Omega, S)$. Donc nous en déduisons que sur $\mathcal{Q}$, la matrice $[\mathcal{K}]$ est une application de classe $\mathbf{C}^\infty$. ■

Ainsi nous obtenons le résultat suivant sur les solutions de l'équation différentielle ordinaire (5.4).

Théorème 5.1.2 *Pour tout $\mathbf{q}_0 \in P(\Omega, S)$ et $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^N$, il existe un $0 < T_0 \leq T$ et une unique application $\mathbf{q} \in \mathcal{C}^2([0, T_0]; P(\Omega, S))$ tels que $\mathbf{q}$ soit solution de l'équation différentielle*

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}, \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathcal{K}(\mathbf{q})]^{-1} \mathbf{T}(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \qquad \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{p}_0.$$

De plus le plus grand T_0 que nous pouvons prendre correspond à T ou à un instant de choc entre deux solides ou entre un solide et la paroi.

Preuve : Nous commençons par fixer $\epsilon > 0$ tel que $4\epsilon \leq \text{dist}(\partial\Omega, \text{S})$ et $4\epsilon \leq \text{dist}(\text{S}^\text{i}, \text{S}^\text{j})$ pour tout $i \neq j$ et tel que $\mathbf{q}_0 \in P^\epsilon(\Omega, S)$. Par le Théorème 5.1.1, nous en déduisons que

$$\mathbf{q} \mapsto [\mathbf{K}(\mathbf{q})]^{-1}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $P^\epsilon(\Omega, S)$ et que

$$(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mapsto \mathbf{T}(\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}})$$

est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $P^\epsilon(\Omega, S) \times \mathbb{R}^N$. Nous obtenons ainsi existence et unicité locale de la solution de l'équation différentielle. Concernant T_0, il faut utiliser la conservation de l'énergie cinétique. La conservation de l'énergie cinétique du système donne

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0) = \mathcal{L}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \geq [\mathcal{K}_S(\mathbf{q})]\dot{\mathbf{q}}(t) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) \geq \lambda_S \|\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2,$$

où λ_S est la plus petite des valeurs propres de la matrice $[\mathcal{K}_S(\mathbf{q})]$. Ainsi le meilleur T_0 peut être égale à T quand il n'y a pas de choc. Sinon T_0 correspond à un instant de choc. ■

5.2 Lien entre les différentes descriptions

Dans cette partie nous montrons que les équations d'Euler-Lagrange pour les solides sont équivalentes aux équations de Newton. Pour simplifier les calculs nous supposons que le système est constitué d'un unique solide et que $n = 2$. La vitesse du fluide est donnée par $\mathbf{u} = \nabla\Phi$ où Φ est solution du problème de Neumann suivant

$$-\Delta\Phi(t, \mathbf{x}) = 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in F(t), \tag{5.5a}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = 0 \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \tag{5.5b}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}(t, \mathbf{x}) = \left[\dot{\mathbf{h}}(t) + \dot{\theta}(t)[A_0](\mathbf{x} - \mathbf{h}(t))\right] \cdot \mathbf{n}(t, \mathbf{x}) \text{ pour } \mathbf{x} \in \partial S(t), \text{ pour } n = 2, \tag{5.5c}$$

Ainsi nous simplifions les composantes des forces extérieurs $\mathbf{F}$ appliquées au solide et le moment M des forces appliquées au solide. Nous ferons apparaître le Lagrangien du système qui se réduit à l'énergie cinétique du système.

Proposition 5.2.1 *Les composantes de* $\mathbf{F}$ *sont données par les formules*

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\rho_F}{2}\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{h}_i}\int_{F(t)} |\nabla\Phi|^2 d\mathbf{x} + \frac{\rho_F}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla\Phi|^2 n_i \mathrm{d}\sigma_\mathrm{x} \tag{5.6}$$

Preuve : La formule de Bernoulli est utiliser pour exprimer la pression en fonction de Φ :

$$p(t, \mathbf{x}) = C(t) - \rho_F\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{2}|\nabla\Phi(t, \mathbf{x})|^2\right], \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in F(t) \text{ et } t \in [0, T].$$

Pour simplifier les calculs, nous fixons l'indice $i = 1$(pour $i = 2$ il suffit d'intervertir les indices), donc la composantes $\mathbf{F}_1$ devient :

$$\mathbf{F}_1 = \int_{\partial S(t)} (C(t) - \rho_F\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t, \mathbf{x}) - \frac{\rho_F}{2}|\nabla\Phi(t, \mathbf{x})|^2)\mathbf{n}_1(t, \mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_\mathrm{x}$$

Nous observons que l'intégrale

$$\int_{\partial S(t)} C(t)\mathbf{n}_1 \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} = \int_{\mathrm{S(t)}} \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_1}(\mathrm{C(t)})\mathrm{d}\mathbf{x} = 0.$$

Pour simplifier les calculs, nous notons par

$$\begin{aligned} I_1 &= -\int_{\partial S(t)} \rho_F \frac{\partial \Phi}{\partial t}\mathbf{n}_1 \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}, \\ I_2 &= -\int_{\partial S(t)} \frac{\rho_F}{2}|\nabla\Phi|^2 \mathbf{n}_1 \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}. \end{aligned}$$

Commençons par simplifier I_1

$$I_1 = -\rho_F \int_{F(t)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial t}\mathrm{d}\mathbf{x} + \rho_F \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial t}\mathbf{n}_1 \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}$$

En appliquant la formule de Reynolds (1.18)

$$-\int_{F(t)} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\mathrm{d}\mathbf{x} = -\frac{d}{dt}\int_{F(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial S(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(\mathbf{v}.\mathbf{n})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}_1}(\mathbf{v}.\mathbf{n})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}$$

En utilisant la condition de bord $\mathbf{v}.\mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, nous obtenons :

$$I_1 = -\rho_F \frac{d}{dt}\int_{\partial S(t)} \Phi \mathbf{n}_1 \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} + \rho_{\mathrm{F}} \int_{\partial \mathrm{S(t)}} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}_1}(\mathbf{v}.\mathbf{n})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}$$

Remarquons que $\mathbf{n}_1 = \partial/\partial\dot{\mathbf{h}}_1(\partial\Phi/\partial\mathbf{n})$ sur $\partial S(t)$ et en utilisant la formule de Green pour la fonction Φ nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_1 &= -\rho_F \frac{d}{dt}\int_{F(t)} \mathrm{div}(\Phi \frac{\partial \nabla\Phi}{\partial \dot{\mathbf{h}}_1})\mathrm{d}\mathbf{x} + \rho_{\mathrm{F}} \int_{\partial \mathrm{S(t)}} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}_1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \\ &= -\frac{\rho_F}{2}\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{h}}_1}\int_{F(t)} |\nabla\Phi|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} + \rho_F \int_{\partial S(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}. \end{aligned}$$

Concernant l'intégrale I_2, nous appliquons la formule de Green et nous obtenons :

$$I_2 = -\frac{\rho_F}{2}\int_{F(t)} \frac{\partial |\nabla\Phi|^2}{\partial x_1}\mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{\rho_F}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla\Phi|^2 \mathbf{n}_1 \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}.$$

Nous rappelons que la vitesse du fluide est donnée par $\mathbf{u} = \nabla\Phi$ et $\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0$. Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}(\mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_1} &= -\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_2}, \\ \frac{\partial |\nabla\Phi|^2}{\partial x_1} &= 2\frac{\partial {u_1}^2}{\partial x_1} + 2\frac{\partial u_1 u_2}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Nous réduisons l'intégrale I_2 comme ceci :

$$\begin{aligned} I_2 &= -\rho_F \int_{\partial S(t)} ({\mathbf{u}_1}^2 \mathbf{n}_1 + \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{n}_2)\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} - \rho_{\mathrm{F}} \int_{\partial\Omega} ({\mathbf{u}_1}^2 \mathbf{n}_1 + \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2\mathbf{n}_2)\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \\ &\quad + \frac{\rho_F}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla\Phi|^2 \mathbf{n}_1 \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \\ &= -\rho_F \int_{\partial S(t)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(\mathbf{v}.\mathbf{n})d\sigma + \frac{\rho_F}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla\Phi|^2 \mathbf{n}_1 \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}. \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons les expressions des composantes de la force $\mathbf{F}$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= -\frac{\rho_F}{2}\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\mathbf{h}}_1}\int_{F(t)}|\nabla\Phi|^2\mathrm{d}\mathbf{x}+\frac{\rho_F}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla\Phi|^2\mathbf{n}_1\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}},\\ \mathbf{F}_2 &= -\frac{\rho_F}{2}\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{\mathbf{h}}_2}\int_{F(t)}|\nabla\Phi|^2\mathrm{d}\mathbf{x}+\frac{\rho_F}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla\Phi|^2\mathbf{n}_2\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}.\end{aligned}$$

■

De même pour le moment M des forces appliquées au solide $S(t)$, nous pouvons l'exprimer en fonction de Φ :

Proposition 5.2.2 *Le moment M des forces appliquées au solide $S(t)$ est donnée par la formule :*

$$M=-\frac{\rho_F}{2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\dot{(\theta)}}\int_{F(t)}|\nabla\Phi|^2d\mathbf{x}+\frac{\rho_F}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla\Phi|^2([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}))\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}$$
$$+\rho_F\int_{\partial S(t)}\Phi\frac{\partial[A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})}{\partial t}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}},\quad(5.7)$$

Preuve : Nous rappelons que la formule du moment M des forces appliquées au solide $S(t)$:

$$M=\int_{\partial S(t)}p([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}))\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}$$

où p est la pression du fluide. La pression p est s'exprime avec Φ grâce à la formule de Bernoulli :

$$p(t,\mathbf{x})=C(t)-\rho_F\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,\mathbf{x})+\frac{1}{2}|\nabla\Phi(t,\mathbf{x})|^2\right],\quad\text{pour tout }\mathbf{x}\in F(t)\text{ et }t\in[0,T].$$

Comme pour les composantes des forces F, nous réduisons les calculs aux calculs de trois intégrales. Cependant en prenant une extension de $x\mapsto[A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})$ sur $S(t)$ et en effectuant une intégration par partie, nous avons :

$$\int_{\partial S(t)}C(t)[A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}(t))^{\perp}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}=\int_{\mathrm{S(t)}}\mathrm{div}[\mathrm{C(t)[A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}(t))}]\mathrm{d}\mathbf{x}=0,$$

car $\mathrm{div}([\mathrm{A_0}](\mathbf{x}-\mathbf{h}))=0$. Il suffit donc de simplifier les deux intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}M_1 &= -\rho_F\int_{\partial S(t)}\frac{\partial\Phi}{\partial t}([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}))\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}},\\ M_2 &= -\frac{\rho_F}{2}\int_{\partial S(t)}|\nabla\Phi|^2([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}))\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}.\end{aligned}$$

Nous commençons par simplifier l'expression de M^1 en effectuant une intégration par partie.

$$M^1=-\rho_F\int_{F(t)}\mathrm{div}(\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{t}}[\mathrm{A_0}](\mathbf{x}-\mathbf{h})\mathrm{d}\mathbf{x}+\rho_{\mathrm{F}}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Phi}{\partial\mathrm{t}}([\mathrm{A_0}](\mathbf{x}-\mathbf{h}))\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}.$$

En utilisant les formules

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,[\mathrm{f}\,[\mathrm{A_0}](\mathbf{x}-\mathbf{h})] &= (\nabla f)\cdot([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})),\\ \mathrm{div}\left[\mathrm{f}\frac{\partial[\mathrm{A_0}](\mathbf{x}-\mathbf{h})}{\partial\mathrm{t}}\right] &= (\nabla f)\cdot\frac{\partial[A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})}{\partial t},\end{aligned}$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, nous obtenons donc :

$$M^1 = -\rho_F \int_{F(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla\Phi \cdot ([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}))\right) - \nabla\Phi \frac{\partial [A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})}{\partial t} \mathrm{d}\mathbf{x} + \rho_F \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \left([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})\right) \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}$$

De plus en appliquant la formule de Reynolds (1.18) et en utilisant le fait que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, où $\mathbf{v}$ est la vitesse Eulérienne de la déformation Λ qui envoie $F(0)$ sur $F(t)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
I &= -\rho_F \int_{F(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla\Phi \cdot [A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})\right) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= -\rho_F \frac{\partial}{\partial t} \int_{F(t)} \mathrm{div}\left(\Phi \cdot ([\mathrm{A}_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}))\right) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\quad +\rho_F \int_{\partial S(t)} \left(\nabla\Phi \cdot [A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})\right) (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \\
&= -\rho_F \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{\partial S(t)} \Phi([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})) \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} + \int_{\partial\Omega} \Phi[\mathrm{A}_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}) \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}\right] \\
&\quad +\rho_F \int_{\partial S(t)} \left(\nabla\Phi \cdot ([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}))\right) (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}.
\end{aligned}$$

Ainsi M^1 devient

$$\begin{aligned}
M^1 &= -\rho_F \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial S(t)} \Phi([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})) \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \\
&\quad +\rho_F \int_{\partial S(t)} \left(\nabla\Phi \cdot ([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}))\right) (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \\
&\quad +\rho_F \int_{\partial S(t)} \Phi \frac{\partial [A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}
\end{aligned}$$

La formule $[A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}) = \dfrac{\partial}{\partial\dot{\theta}} \dfrac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}$ permet de simplifier la première intégrale comme ceci

$$\begin{aligned}
I &= -\rho_F \frac{\partial}{\partial t} \int_{\partial S(t)} \Phi([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})) \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \\
&= -\frac{\rho_F}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial\dot{\theta}} \int_{F(t)} |\nabla\Phi|^2 \mathrm{d}\mathbf{x}
\end{aligned}$$

En remplaçant cette formule dans M^1 nous obtenons les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
M^1 &= -\frac{\rho_F}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial\dot{\theta}} \int_{F(t)} |\nabla\Phi|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} + \rho_F \int_{F(t)} \mathrm{div}(\nabla\Phi \cdot ([\mathrm{A}_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}))\nabla\Phi) \mathrm{d}\mathbf{x} \\
&\quad -\rho_F \int_{\partial\Omega} (\nabla\Phi \cdot ([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})))(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} + \rho_{\mathrm{F}} \int_{\partial \mathrm{S(t)}} \Phi \frac{\partial [\mathrm{A}_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})}{\partial \mathrm{t}} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}, \\
&= -\frac{\rho_F}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial\dot{\theta}} \int_{F(t)} |\nabla\Phi|^2 \mathrm{d}\mathbf{x} + \rho_F \int_{\partial S(t)} \Phi \frac{\partial [A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \\
&\quad +\rho_F \int_{F(t)} \nabla\left[\nabla\Phi \cdot ([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}))\right] \nabla\Phi + (\nabla\Phi \cdot [A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})) \Delta\Phi \mathrm{d}\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Nous observons que nous avons la formule suivante sur $F(t)$

$$\nabla[\nabla\Phi\cdot[A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})]\cdot\nabla\Phi=\mathrm{div}\left[\frac{1}{2}(\|\nabla\varphi\|^2)[\mathrm{A}_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})\right].$$

Cette formule est en effet le point clé de l'équivalence entre les équations de Newton et les équations d'Euler-Lagrange. Finalement nous obtenons une nouvelle expression pour M^1

$$\begin{aligned}
M^1 &= -\frac{\rho_F}{2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\dot\theta}\int_{F(t)}|\nabla\Phi|^2\mathrm{d}\mathbf{x}+\frac{\rho_F}{2}\int_{F(t)}\mathrm{div}(|\nabla\Phi|^2)\cdot[\mathrm{A}_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&\quad+\rho_F\int_{\partial S(t)}\Phi\frac{\partial[A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})}{\partial t}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}},\\
&= -\frac{\rho_F}{2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\dot\theta}\int_{F(t)}|\nabla\Phi|^2\mathrm{d}\mathbf{x}+\frac{\rho_F}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla\Phi|^2([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}))\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}\\
&\quad+\frac{\rho_F}{2}\int_{\partial S(t)}|\nabla\Phi|^2([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}))\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}+\rho_{\mathrm{F}}\int_{\partial\mathrm{S(t)}}\Phi\frac{\partial[\mathrm{A}_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})}{\partial\mathrm{t}}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}.
\end{aligned}$$

Ainsi la formule réduite de M devient

$$\begin{aligned}
M=-\frac{\rho_F}{2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\dot\theta}\int_{F(t)}|\nabla\Phi|^2\mathrm{d}\mathbf{x}+\frac{\rho_F}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla\Phi|^2([A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}))\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}\\
+\rho_F\int_{\partial S(t)}\Phi\frac{\partial[A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})}{\partial t}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}
\end{aligned}$$

■

Nous rappelons que E_F est l'énergie cinétique du fluide donnée

$$E_F=\frac{\rho_F}{2}\int_{F(t)}|\nabla\Phi|^2\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Ainsi les composantes de F et le moment M deviennent :

$$\begin{aligned}
F_i &= -\frac{d}{dt}\frac{\partial E_F}{\partial\dot h_i}+\frac{\rho_F}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla\Phi|^2 n_i\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}\\
M &= -\frac{\rho_F}{2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial E_F}{\partial\dot\theta}+\frac{\rho_F}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla\Phi|^2[A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}\\
&\quad+\rho_F\int_{\partial S(t)}\Phi\frac{\partial[A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})}{\partial t}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}
\end{aligned}$$

Nous voyons donc apparaître les termes des équations d'Euler-Lagrange. Pour terminer l'équivalence il suffit donc de montrer que

Proposition 5.2.3

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_F}{\partial h_i} &= \frac{\rho_F}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla\Phi|^2 n_i\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}},\\
\frac{\partial E_F}{\partial\theta} &= \frac{\rho_F}{2}\int_{\partial\Omega}|\nabla\Phi|^2[A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}+\rho_{\mathrm{F}}\int_{\partial\mathrm{S(t)}}\Phi(-[\mathrm{A}_0]\dot{\mathrm{h}})\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}},
\end{aligned}$$

Preuve : Nous appliquons donc le Théorème 4.1.2 à l'intégrale qui définie l'énergie cinétique du fluide E_F. Nous notons par $\Lambda(\mathbf{q},\cdot)$ la déformation géométrique qui envoie le domaine $F(0)$ sur le domaine $F(t)$. Nous rappelons que cette déformation correspond à

$$\Lambda(\mathbf{q},\mathbf{y}) = \mathbf{h} + [R(\theta)](\mathbf{y}-\mathbf{h}_0)$$

sur un voisinage du bord du solide et

$$\Lambda(\mathbf{q},\mathbf{y}) = \mathbf{y}$$

sur un voisinage du bord du domaine Ω. Nous rappelons les notations

$$F_{\mathbf{q(t)}} = F(t), \qquad S_{\mathbf{q(t)}} = S(t), \qquad \text{et } \partial F_{\mathbf{q}} = \partial\Omega \cup \partial S_{\mathbf{q(t)}}.$$

Nous rappelons aussi que Φ est solution du problème de Neumann (5.5). Nous notons par $g(\mathbf{q},\cdot)$ l'application définie par

$$\begin{aligned} g(\mathbf{q},\mathbf{x}) &= 0, \qquad \text{si } \mathbf{x}\in\partial\Omega, \\ g(\mathbf{q},\mathbf{x}) &= \Big(\dot h + \dot\theta[A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})\Big)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{q},\mathbf{x}), \qquad \text{si } \mathbf{x}\in\partial S_{\mathbf{q}}, \end{aligned}$$

et nous notons par

$$G(\mathbf{q},\mathbf{y}) = g(\mathbf{q},\Lambda(\mathbf{q},\mathbf{y})), \qquad \text{pour tout } \mathbf{y}\in\partial F_{\mathbf{q}}.$$

Nous rappelons que l'énergie cinétique du fluide est donnée par

$$E_F(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{\rho_F}{2}\int_{F_{\mathbf{q}}} |\nabla\Phi(\mathbf{x})|^2 \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Enfin nous notons par

$$\mathbf{V}^i(\mathbf{q},\mathbf{x}) = \frac{\partial\Lambda}{\partial q_i}(\mathbf{q},\Lambda^{-1}(\mathbf{q},\mathbf{x})), \qquad \mathbf{x}\in F_{\mathbf{q}},$$

où $q_1 = h_1$, $q_2 = h_2$ et $q_3 = \theta$. Un simple calcul permet d'obtenir les expressions de $\mathbf{V}^i$ sur le bord du solide

$$\mathbf{V}^1(\mathbf{q},\mathbf{x}) = (1,0)^t, \quad \mathbf{V}^2(\mathbf{q},\mathbf{x}) = (0,1)^t, \quad \mathbf{V}^3(\mathbf{q},\mathbf{x}) = [A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})$$

et $\mathbf{V}^i = 0$ sur le bord $\partial\Omega$. Nous appliquons donc le théorème 4.1.2 à $E_F(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_F}{\partial q_i} = \rho_F \int_{\partial F_{\mathbf{q}}} \left(\frac{\partial G}{\partial q_i}(\mathbf{q},\Lambda^{-1}(\mathbf{q},\mathbf{x})) - \nabla_\Gamma g(\mathbf{q},\mathbf{x})\cdot\mathbf{V}^i_\Gamma(\theta,\mathbf{x})\right)\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \\ \rho_F\int_{\partial F_{\mathbf{q}}}\left[g^2(\mathbf{q},\mathbf{x}) - \frac{1}{2}|\nabla\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})|^2\right](\mathbf{V}^i(\mathbf{q},\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{q},\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \\ + \rho_F\int_{\partial F_{\mathbf{q}}}\mathcal{H}(\mathbf{q},\mathbf{x})g(\mathbf{q},\mathbf{x})\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})(\mathbf{V}^i(\mathbf{q},\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{q},\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}, \end{aligned}$$

où $\mathcal{H}(\mathbf{q},\mathbf{x})$ est la courbure moyen de $F_{\mathbf{q}}$. Nous commençons par éliminer $\mathcal{H}(\mathbf{q},\mathbf{x})$

$$\begin{aligned} I &= \mathcal{H}(\mathbf{q},\mathbf{x})g(\mathbf{q},\mathbf{x})\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})(\mathbf{V}^i(\mathbf{q},\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{q},\mathbf{x})), \\ &= \mathrm{div}\left[\mathrm{g}(\mathbf{q},\mathbf{x})\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})(\mathbf{V}^{\mathrm{i}}(\mathbf{q},\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{q},\mathbf{x}))\mathbf{n}(\mathbf{q},\mathbf{x})\right], \\ &= \mathrm{div}_\Gamma\left[\mathrm{g}(\mathbf{q},\mathbf{x})\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})\mathbf{V}^{\mathrm{i}}(\mathbf{q},\mathbf{x})\right] - \mathrm{div}_\Gamma\left[\mathrm{g}(\mathbf{q},\mathbf{x})\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})\mathbf{V}^{\mathrm{i}}_\Gamma(\mathbf{q},\mathbf{x})\right]. \end{aligned}$$

Nous rappelons que

$$\int_{\partial F_{\mathbf{q}}} \mathrm{div}_\Gamma \left[\mathrm{g}(\mathbf{q},\mathbf{x})\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})\mathbf{V}^{\mathrm{i}}_\Gamma(\mathbf{q},\mathbf{x}) \right] \, \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} = 0.$$

Ainsi nous obtenons

$$\int_{\partial F_{\mathbf{q}}} \mathcal{H}(\mathbf{q},\mathbf{x}) g(\mathbf{q},\mathbf{x})\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})(\mathbf{V}^i(\mathbf{q},\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{q},\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} = \int_{\partial \mathrm{F}_{\mathbf{q}}} \mathrm{div}_\Gamma \left[\mathrm{g}(\mathbf{q},\mathbf{x})\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})\mathbf{V}^{\mathrm{i}}(\mathbf{q},\mathbf{x}) \right] \, \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}.$$

De plus nous avons la relation

$$\mathrm{div}_\Gamma \left[\mathrm{g}(\mathbf{q},\mathbf{x})\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})\mathbf{V}^{\mathrm{i}}(\mathbf{q},\mathbf{x}) \right] = \nabla_\Gamma(\mathrm{g}(\mathbf{q},\mathbf{x})\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x}))\mathbf{V}^{\mathrm{i}}_\Gamma(\mathbf{q},\mathbf{x}) + \mathrm{g}(\mathbf{q},\mathbf{x})\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})\mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{V}^{\mathrm{i}}(\mathbf{q},\mathbf{x})).$$

Or comme la matrice de la différentielle de $\mathbf{V}^i$ est soit nulle, soit une matrice antisymétrique l'expression de sa divergence tangentielle devient

$$\mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{V}^{\mathrm{i}}) = \mathrm{div}(\mathbf{V}^{\mathrm{i}}) - \left([\mathrm{D}\mathbf{V}^{\mathrm{i}}]\mathbf{n}\right)\cdot\mathbf{n} = 0.$$

Ainsi l'expression de la dérivée de E_F devient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_F}{\partial q_i} &= \rho_F \int_{\partial F_{\mathbf{q}}} \left(\frac{\partial G}{\partial q_i}(\mathbf{q},\Lambda^{-1}(\mathbf{q},\mathbf{x})) - \nabla_\Gamma g(\mathbf{q},\mathbf{x})\cdot\mathbf{V}^i_\Gamma(\theta,\mathbf{x}) \right) \Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \\
&\quad + \rho_F \int_{\partial F_{\mathbf{q}}} \left[g^2(\mathbf{q},\mathbf{x}) - \frac{1}{2}|\nabla\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})|^2 \right] (\mathbf{V}^i(\mathbf{q},\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{q},\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \\
&\quad + \rho_F \int_{\partial F_{\mathbf{q}}} \mathcal{H}(\mathbf{q},\mathbf{x}) g(\mathbf{q},\mathbf{x})\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})(\mathbf{V}^i(\mathbf{q},\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{q},\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}, \\
&= \rho_F \int_{\partial F_{\mathbf{q}}} \left(\frac{\partial G}{\partial q_i}(\mathbf{q},\Lambda^{-1}(\mathbf{q},\mathbf{x})) - \nabla_\Gamma g(\mathbf{q},\mathbf{x})\cdot\mathbf{V}^i_\Gamma(\theta,\mathbf{x}) \right) \Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \\
&\quad + \rho_F \int_{\partial F_{\mathbf{q}}} \left[g(\mathbf{q},\mathbf{x})\nabla\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{q},\mathbf{x}) - \frac{1}{2}|\nabla\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})|^2 \right] (\mathbf{V}^i(\mathbf{q},\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{q},\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \\
&\quad + \rho_F \int_{\partial F_{\mathbf{q}}} \nabla_\Gamma \left(g(\mathbf{q},\mathbf{x})\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x}) \right)\cdot\mathbf{V}^i_\Gamma(\theta,\mathbf{x}) + g(\mathbf{q},\mathbf{x})\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})\mathrm{div}_\Gamma(\mathbf{V}^{\mathrm{i}}(\mathbf{q},\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}, \\
&= \rho_F \int_{\partial F_{\mathbf{q}}} \nabla\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})\cdot\mathbf{V}^i(\mathbf{q},\mathbf{x})\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{q},\mathbf{x}) - \frac{1}{2}|\nabla\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})|^2(\mathbf{V}^i(\mathbf{q},\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{q},\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \\
&+ \rho_F \int_{\partial F_{\mathbf{q}}} \frac{\partial G}{\partial q_i}(\mathbf{q},\Lambda^{-1}(\mathbf{q},\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}.
\end{aligned}$$

Or comme le vecteur $\mathbf{V}^i = 0$ sur le bord $\partial\Omega$ et

$$\mathbf{V}^1 = (1,0), \quad \mathbf{V}^2 = (0,1), \quad \mathbf{V}^3 = [A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h}), \qquad \mathbf{x}\in\partial S_{\mathbf{q}},$$

des intégrations par partie permettent d'obtenir

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\partial F_{\mathbf{q}}} \nabla\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})\cdot\mathbf{V}^i(\mathbf{q},\mathbf{x})\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{q},\mathbf{x}) - \frac{1}{2}|\nabla\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})|^2(\mathbf{V}^i(\mathbf{q},\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{q},\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}, \\
&= \int_{F_{\mathbf{q}}} \mathrm{div}\left(\nabla\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})\cdot\mathbf{V}^{\mathrm{i}}(\mathbf{q},\mathbf{x})\nabla\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x}) \right)\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\partial \mathrm{S}_{\mathbf{q}}} \frac{1}{2}|\nabla\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})|^2(\mathbf{V}^{\mathrm{i}}(\mathbf{q},\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{q},\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}, \\
&= \int_{F_{\mathbf{q}}} \mathrm{div}\left(\nabla\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})\cdot\mathbf{V}^{\mathrm{i}}(\mathbf{q},\mathbf{x})\nabla\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x}) \right) - \mathrm{div}\left(\frac{1}{2}|\nabla\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})|^2\mathbf{V}^{\mathrm{i}}(\mathbf{q},\mathbf{x}) \right)\mathrm{d}\mathbf{x}, \\
&+ \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2}|\nabla\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})|^2(\mathbf{V}^i(\mathbf{q},\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{q},\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}},
\end{aligned}$$

Nous avons la simplification suivante

$$\begin{aligned} J &= \mathrm{div}(\nabla\Phi\cdot\mathbf{V}^{\mathrm{i}}\nabla\Phi)-\frac{1}{2}\mathrm{div}(|\nabla\Phi|^2\mathbf{V}^{\mathrm{i}}),\\ &= \nabla\Phi\cdot\mathbf{V}^i\Delta\Phi+\nabla\left(\nabla\Phi\cdot\mathbf{V}^i\right)\nabla\Phi-\frac{1}{2}\nabla\left(|\nabla\Phi|^2\right)\mathbf{V}^i-\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\mathrm{div}(\mathbf{V}^{\mathrm{i}}),\\ &= \nabla\Phi\cdot\mathbf{V}^i\Delta\Phi+\nabla\left(\nabla\Phi\cdot\mathbf{V}^i\right)\nabla\Phi-\frac{1}{2}\nabla\left(|\nabla\Phi|^2\right)\mathbf{V}^i-\frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2\mathrm{div}(\mathbf{V}^{\mathrm{i}}),\\ &= \nabla\left(\nabla\Phi\cdot\mathbf{V}^i\right)\nabla\Phi-\frac{1}{2}\nabla\left(|\nabla\Phi|^2\right)\mathbf{V}^i, \end{aligned}$$

car $\mathrm{div}(\mathbf{V}^{\mathrm{i}})=0$. Or nous avons la formule suivante

$$\nabla\left(\nabla\Phi\cdot\mathbf{V}^i\right)\nabla\Phi=\frac{1}{2}\nabla\left(|\nabla\Phi|^2\right)\mathbf{V}^i+\nabla\Phi\cdot([D\mathbf{V}^i]\nabla\Phi).$$

Or comme $[D\mathbf{V}^i]$ est une matrice nulle pour $i=1,2$ ou une matrice antisymétrique pour $i=3$, l'expression de $\partial E_F/\partial\mathbf{q}_i$ devient

$$\frac{\partial E_F}{\partial q_i}=\rho_F\int_{\partial\Omega}\frac{1}{2}|\nabla\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})|^2(\mathbf{V}^i(\mathbf{q},\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{q},\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}+\rho_{\mathrm{F}}\int_{\partial\mathrm{F}_{\mathbf{q}}}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial\mathrm{q_i}}(\mathbf{q},\Lambda^{-1}(\mathbf{q},\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}$$

Il suffit maintenant de calculer la dérivée de G. Pour cela nous rappelons que $G=0$ sur le bord Ω et

$$G(\mathbf{q},\mathbf{y})=\left(\dot{\mathbf{h}}+\dot\theta[A_0][R(\theta)](\mathbf{y}-\mathbf{h}_0)\right)\cdot[R(\theta)]\mathbf{n}(\mathbf{y}),\qquad \mathbf{y}\in\partial S,$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal sur ∂S. Nous vérifions simplement que

$$\frac{\partial G}{\partial q_1}=\frac{\partial G}{\partial q_2}=0.$$

Pour la dérivée par rapport à θ, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial q_3}(\mathbf{q},\Lambda^{-1}(\mathbf{q},\mathbf{x})) &= \dot\theta[A_0]^2(\mathbf{x}-\mathbf{h})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})+\left(\dot{\mathbf{h}}+\dot\theta[A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})\right)[A_0]\mathbf{n}(\mathbf{x}),\\ &= \dot{\mathbf{h}}\cdot([A_0]\mathbf{n}(\mathbf{x}))\,,\\ &= \left(-[A_0]\dot{\mathbf{h}}\right)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Ainsi les expression des dérivées deviennent

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_F}{\partial q_1} &= \rho_F\int_{\partial\Omega}\frac{1}{2}|\nabla\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})|^2 n_1((\mathbf{q},\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}},\\ \frac{\partial E_F}{\partial q_2} &= \rho_F\int_{\partial\Omega}\frac{1}{2}|\nabla\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})|^2 n_2((\mathbf{q},\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}},\\ \frac{\partial E_F}{\partial q_3} &= \rho_F\int_{\partial\Omega}\frac{1}{2}|\nabla\Phi(\mathbf{q},\mathbf{x})|^2[A_0](\mathbf{x}-\mathbf{h})\mathbf{n}((\mathbf{q},\mathbf{x}))\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}},\\ &\quad+\rho_F\int_{\partial F_{\mathbf{q}}}\Phi((\mathbf{q},\mathbf{x}))\left(-[A_0]\dot{\mathbf{h}}\right)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \end{aligned}$$

Nous retrouvons donc les expressions annoncées. ■

Chapitre 6

Mouvement d'un solide dans un fluide parfait : le cas général

Dans cette partie nous adaptons les résultats de Brézis et Bourguignon [8] et de Ebin et Marsden [19] pour étudier le mouvement de solides rigides dans un fluide parfait incompressible. Nous montrons que le système (1.32)-(1.33) s'écrit sous la forme équivalente d'une équation différentielle ordinaire sur une variété de dimension infinie. En admettant une certaine condition de tangence, nous montrons que l'équation différentielle ordinaire admet une unique solution locale et donc que le système (1.32)-(1.33) admet une unique solution forte locale. Grâce à cette méthode nous pouvons en déduire la dépendance de la solution par rapport aux conditions initiales et nous pouvons donner facilement la régularité de la pression du fluide. En écrivant le problème de Neumann dont la pression est solution nous décomposons la pression pour séparer la partie liée à l'accélération du solide. Grâce à cette décomposition et en utilisant les résultats obtenus pour l'étude des fluides parfaits nous pouvons simplifier les équations de Newton pour le solide rigide. Cette démarche transforme le système (1.32)-(1.33) en un système d'équations différentielles ordinaires sur une variété de dimension infinie dont une grande partie des termes dépendent des solutions de problèmes de Neumann comme dans le chapitre sur les fluides potentiels. Nous utiliserons le travail effectué dans le chapitre précédant pour réduire notre système. Ceci montre l'importance des fonctions introduites par Lamb (voir Chapitre 5) dans le cas de l'interaction fluide-structure. Pour la simplicité de l'exposé nous considérerons uniquement le cas d'un seul solide, mais les méthodes utilisées s'adaptent facilement au cas de plusieurs solides dont les distances réciproques ne tendent pas vers zéro.

6.1 Le résultat principal

Dans ce chapitre nous allons étudier le mouvement d'un solide S dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ qui contient un fluide parfait incompressible. De plus nous supposerons qu'il n'y a pas de force extérieure qui agit sur le système. Les équations du système vues dans la Section 1.2

se mettent sous la forme suivante :

$$\rho_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_F(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = 0 \qquad \mathbf{x}\in F(t), t\geq 0, \tag{6.1a}$$

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{u}) = 0 \qquad \mathbf{x}\in F(t), t\geq 0, \tag{6.1b}$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 \qquad \mathbf{x}\in \partial\Omega, t\geq 0, \tag{6.1c}$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = (\dot{\mathbf{h}} + \mathbf{w}\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{h}))\cdot\mathbf{n} \qquad \mathbf{x}\in \partial S(t), t\geq 0, \tag{6.1d}$$

$$\mathbf{u}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}\in F_0, \tag{6.1e}$$

$$m_s\ddot{\mathbf{h}} = \int_{\partial S(t)} p\mathbf{n}\mathrm{d}\mathbf{x} \qquad t\geq 0, \tag{6.1f}$$

$$\frac{d}{dt}([J]\mathbf{w}) = \mathbf{w}\wedge([J]\mathbf{w}) + [J]\dot{\mathbf{w}} = \int_{\partial S(t)} p(\mathbf{x}-\mathbf{h})\wedge\mathbf{n}\mathrm{d}\mathbf{x} \quad t\geq 0, \tag{6.1g}$$

$$\frac{d[R]}{dt}(t) = \mathcal{A}(\mathbf{w}(t))[R(t)] \qquad t\geq 0, \tag{6.1h}$$

$$\mathbf{h}(0) = \mathbf{h}_0,\ \dot{\mathbf{h}}(0) = \mathbf{k}_0,\ R(0) = Id_{\mathcal{M}_3},\ \mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0, \tag{6.1i}$$

où $S(t)$ est le domaine occupé par le solide à l'instant t, alors que $F(t) = \Omega\setminus S(t)$ est le domaine occupé par le fluide à l'instant t, $F_0 = F(0)$ et $\mathbf{u}$ est la vitesse Eulérienne du fluide, p est la pression du fluide, $\mathbf{h}$ est la position du centre de gravité du solide, $[R(t)]$ la matrice de rotation du solide et $\mathbf{w}$ la vitesse angulaire du solide. La matrice d'inertie J est donnée par la formule (1.7) :

$$[J(t)](\mathbf{a},\mathbf{b}) = \int_{S(t)} \rho_S\left[\mathbf{a}\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{h}(t))\right]\cdot\left[\mathbf{b}\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{h}(t))\right]\mathrm{d}\mathbf{x} \qquad \text{pour tout } \mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3,$$

pour tout $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3$. Dans la suite la position initiale du solide est notée par S_0. Les résultats nouveaux que nous apportons dans cette section sont résumés dans le théorème suivant :

Théorème 6.1.1 *Soit $s\geq 3$ un entier, alors pour tout $\mathbf{q}_0 = (\mathbf{h}_0, Id_3)\in P(\Omega,S_0)$, $(\mathbf{k}_0,\mathbf{w})\in\mathbb{R}^6$ et $\mathbf{u}_0\in H^s(F_0,\mathbb{R}^3)$ vérifiant :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\mathbf{u}_0)(\mathbf{x}) &= 0 \qquad \textit{pour tout } \mathbf{x}\in F_0,\\
\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}) &= 0 \qquad \textit{pour tout } \mathbf{x}\in\partial\Omega,\\
\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}) &= [\mathbf{k}_0+\mathbf{w}_0\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{h}_0)] \qquad \textit{pour tout } \mathbf{x}\in\partial S_0.
\end{aligned}$$

il existe $T_0>0$ tel que le système d'équations formé par (6.1) *admet une unique solution avec*

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} &= (\mathbf{h},[\mathbf{R}])\in\mathcal{C}^2([0,T];P(\Omega,S_0)),\\
\mathbf{u} &\in \mathcal{C}([0,T];H^s(F(\cdot),\mathbb{R}^3))\cap\mathcal{C}^1([0,T];H^{s-1}(F(\cdot),\mathbb{R}^3)),\\
p &\in \mathcal{C}([0,T];N^{s+1}(F(\cdot),\mathbb{R})).
\end{aligned}$$

où $P(\Omega,S_0)$ est l'ensemble des positions admissibles du solide donné par la formule (1.40).

Nous adaptons ici les méthodes utilisées dans [8, 19] pour transformer le système (6.1) en une équation différentielle ordinaire sur une variété de dimension infinie. Cette méthode peut être adaptée au cas de plusieurs solides.

6.2 Préliminaires

Dans cette partie nous allons introduire les variétés différentielles qui seront utilisées pour réduire le système (6.1) en un système d'équations différentielles ordinaires et nous rappelons

certaines définitions. Dans toute cette partie nous fixons un entier $s \geq 3$. Pour $\mathbf{q} = (\mathbf{h}, [R]) \in \mathbb{R}^3 \times SO_3(\mathbb{R})$ nous rappelons que

$$S_{\mathbf{q}} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \mathbf{x} = \mathbf{h} + [R](\mathbf{y} - \mathbf{h}_0),\, \mathbf{y} \in S_0 \right\}, \qquad F_{\mathbf{q}} = \Omega \setminus \overline{S_{\mathbf{q}}}.$$

Nous supposons que $d = \mathrm{dist}(\partial\Omega, \mathrm{S}_0) > 0$ et nous posons $\epsilon = d/4$. Nous rappelons la définition (1.38) des positions admissibles du solide

$$P(\Omega, S_0) = \left\{ \mathbf{q} = (\mathbf{h}, [R]) \in \mathbb{R}^3 \times SO_3(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{dist}(\partial\Omega, \mathrm{S}_{\mathbf{q}}) > 0 \right\}.$$

Pour tout $\mathbf{q} \in P^{\epsilon}(\Omega, S_0)$, nous pouvons introduire le sous-ensemble ouvert suivant de $H^s(F_0, \mathbb{R}^3)$

$$\mathrm{Diff}^{\mathrm{s}}_0(\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_{\mathbf{q}}) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathrm{H}^{\mathrm{s}}(\mathrm{F}_0, \mathbb{R}^3) \,\middle|\, \mathbf{u} \text{ est une bijection de } \overline{\mathrm{F}_0} \text{ sur } \overline{\mathrm{F}_{\mathbf{q}}}, \right.$$
$$\left. \text{et } \mathbf{u}^{-1} \in H^s(F_{\mathbf{q}}, \mathbb{R}^3) \right\}. \quad (6.2)$$

Cet ensemble est introduit dans la section 2 de l'article d'Ebin et Marsden [19]. La preuve du fait que cet ensemble est ouvert est aussi dans la même section de l'article. Comme dans la section 3.2 nous définissons pour $0 < m < 1$ les ouverts suivants

$$\mathrm{Diff}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{m}}(\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_{\mathbf{q}}) = \{ \mathbf{u} \in \mathrm{Diff}^{\mathrm{s}}_0(\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_{\mathbf{q}}) \;|\; \mathrm{m} < |\det[\mathrm{D}_{\mathbf{y}}\mathbf{u}(\mathbf{y})]| < 1/\mathrm{m}$$
$$\text{pour tout } \mathbf{y} \in F_0 \}. \quad (6.3)$$

Ces ensembles sont des ouverts de $H^s(F_0, \mathbb{R}^3)$ car l'application

$$\begin{aligned} \delta : H^s(F_0, \mathbb{R}^3) &\to H^{s-1}(F_0, \mathbb{R}), \\ \mathbf{u} &\mapsto |\det[\mathrm{D}_{\mathbf{y}}\mathbf{u}(\mathbf{y})]|. \end{aligned}$$

est la composée des applications continues suivantes

$$\begin{aligned} H^s(F_0, \mathbb{R}^3) &\to H^{s-1}(F_0, \mathcal{M}_3(\mathbb{R})), \\ \mathbf{u} &\mapsto [D\mathbf{u}], \\ GL_3(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}, \\ [A] &\mapsto |\det([\mathrm{A}])|. \end{aligned}$$

En appliquant le Théorème 3.3.1 et en utilisant le fait que $\det[\mathrm{D}_{\mathbf{y}}\mathbf{u}(\mathbf{y})]$ est une application polynomiale en fonction des dérivées de $\mathbf{u}$, nous obtenons que $\det[\mathrm{D}_{\mathbf{y}}\mathbf{u}(\mathbf{y})] \in \mathrm{H}^{\mathrm{s}-1}(\mathrm{F}_0, \mathbb{R})$. De même il est facile de voir que l'ensemble

$$\mathrm{Diff}^{\mathrm{s}}(\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_{\mathbf{q}}) = \{ \mathbf{u} \in \mathrm{Diff}^{\mathrm{s}}_0(\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_{\mathbf{q}}) \;|\; |\det[\mathrm{D}_{\mathbf{y}}\mathbf{u}(\mathbf{y})]| = 1, \text{ pour tout } \mathbf{y} \in \mathrm{F}_0, \}. \quad (6.4)$$

est un fermé de $H^s(F_0, \mathbb{R}^3)$. Nous pouvons définir enfin la variété de dimension infinie suivante

$$\Sigma^s(\Omega, S_0) = \{ \sigma = (\eta, \mathbf{q}) \,|\, \mathbf{q} \in P(\Omega, S) \text{ et } \eta \in \mathrm{Diff}^{\mathrm{s}}(\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_{\mathbf{q}}) \}. \quad (6.5)$$

Il est facile de montrer que cet ensemble est un fermé car $P^(\Omega, S_0)$ est fermé et $\mathrm{Diff}^{\mathrm{s}}(\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_{\mathbf{q}})$ est fermé pour tout $\mathbf{q}$. Pour $\tilde{\sigma} = (\tilde{\eta}, \tilde{\mathbf{q}}) \in \Sigma^s(\Omega, S_0)$, nous définissons l'espace vectoriel suivant

$$\mathrm{T}_{\tilde{\sigma}}\Sigma^{\mathrm{s}}(\Omega, \mathrm{S}_0) = \left\{ \nu = (\xi, \mathbf{k}, \mathbf{w}) \in \mathrm{H}^{\mathrm{s}}(\mathrm{F}(0), \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \right.$$
$$\mathbf{u} = \xi \circ (\tilde{\eta}^{-1}) \in H^s(F_{\tilde{\mathbf{q}}}, \mathbb{R}^3), \mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0 \text{ sur } \mathrm{F}_{\tilde{\mathbf{q}}},$$
$$\left. \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \text{ pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega \text{ et } \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{k} + \mathbf{w} \wedge (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{h}}) \text{ pour } \mathbf{x} \in \partial S_{\tilde{\mathbf{q}}} \right\}. \quad (6.6)$$

Le but des parties suivantes est de montrer que le système (6.1) est équivalant à un système d'équations différentielles ordinaires dont les solutions restent dans $\Sigma^s(\Omega, S_0)$. Comme $\Sigma^s(\Omega, S_0)$ n'est pas un sous-espace vectoriel, nous ne pouvons pas appliquer le Théorème de Cauchy-Lipschitz standard. Comme dans l'article de Brezis et Bourguignon [8], nous pouvons appliquer le résultat suivant de R.H. Martin [36] par exemple.

Théorème 6.2.1 *Soient F un sous-ensemble fermé d'un espace de Banach E, et $\mathcal{L} : (t, z) \in [0, T) \times F \to \mathcal{L}(t, z) \in E$ une application localement Lipschitz en z et continue en t. Nous supposons que pour tout $(t, z) \in [0, T) \times F$, $\mathcal{L}$ vérifie*

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\epsilon} \mathrm{dist}(\mathrm{z} + \epsilon \mathcal{L}(\mathrm{t}, \mathrm{z}); \mathrm{F}) = 0.$$

Alors pour tout $z_0 \in F$ il existe T_0 tel que l'équation

$$\frac{dz}{dt} = \mathcal{L}(t, z), \qquad z(0) = z_0$$

admet une unique solution $z \in C^1([0, T_0], F)$.

Nous commençons par introduire F^s un fermé de l'espace de Banach E^s et dans la suite nous construirons une application $\mathcal{L}$ sur ces espaces telle que l'équation différentielle ordinaire associée à $\mathcal{L}$ soit une forme équivalente du système 6.1.

Nous considérons l'espace de Banach E^s défini par

$$E^s = H^s(F_0, \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \times H^s(F_0, \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3. \tag{6.7}$$

La norme d'un élément

$$\mathbf{z} = (\sigma, \nu) = (\eta, \mathbf{h}, [R], \xi, \mathbf{k}, \mathbf{w}) \in E^s$$

sera notée par $\| \cdot \|_{E^s}$ et elle est définie comme

$$\|\mathbf{z}\|_{E^s} = \|\eta\|_{H^s(F_0, \mathbb{R}^3)} + |\mathbf{h}| + \|[R]\|_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} + \|\xi\|_{H^s(F(0), \mathbb{R}^3)} + |\mathbf{k}| + |\mathbf{w}|,$$

où $\| \cdot \|_{M_3(\mathbb{R})}$ est une norme fixée de $M_3(\mathbb{R})$ et $| \cdot |$ est la norme Euclidienne de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble F^s sera défini comme

$$F^s = \{\mathbf{z} = (\eta, \mathbf{h}, [R], \xi, \mathbf{k}, \mathbf{w}) \in E^s \mid \sigma = (\eta, \mathbf{h}, [R]) \in \Sigma^s(\Omega, S_0) \text{ et } \nu = (\xi, \mathbf{k}, \mathbf{w}) \in T_\sigma \Sigma^s(\Omega, S_0)\}, \tag{6.8}$$

où $\Sigma^s(\Omega, S_0)$ est donné par (6.5) et $T_\sigma \Sigma^s(\Omega, S_0)$ est défini par (6.6). Il est claire que $T_\sigma \Sigma^s(\Omega, S_0)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $H^s(F_0, \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Enfin pour terminer cette section nous précisons un résultat d'existence et unicité de problème de Cauchy.

Théorème 6.2.2 *Soient $s \geq 3$ un entier, $T > 0$ et $\mathbf{q} = (\mathbf{h}, [R]) \in \mathcal{C}^2([0, T]; P(\Omega, S_0))$. Supposons que $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1([0, T]; H^s(F_{\mathbf{q}(\cdot)}, \mathbb{R}^3))$ tel que*

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\mathbf{u})(\mathrm{t}, \mathbf{x}) &= 0, \qquad \mathbf{x} \in F_{\mathbf{q}(t)},\ t \in [0, T], \\
\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(t, \mathbf{x}) &= 0, \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega,\ t \in [0, T], \\
\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(t, \mathbf{x}) &= \dot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{w}(t) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{h}(t)), \qquad \mathbf{x} \in \partial F_{\mathbf{q}(t)},\ t \in [0, T],
\end{aligned}$$

alors il existe $0 < T_0 \leq T$ tel que pour tout $\mathbf{y} \in F_0$ le problème

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta}{\partial t}(t, \mathbf{y}) &= \mathbf{u}(t, \eta(t, \mathbf{y})), \\
\eta(0, \mathbf{y}) &= \mathbf{y},
\end{aligned}$$

admet une unique solution $\eta \in \mathcal{C}^1([0, T_0]; H^s(F_0, \mathbb{R}^3))$. De plus pour tout $t \in [0, T_0]$ $\eta(t, \cdot) \in \mathrm{Diff}^{\mathrm{s}}(\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_{\mathbf{q}(\mathrm{t})})$.

Preuve : Cette preuve est basée sur le Lemme A.6 de l'article [8] où les auteurs montrent un résultat similaire pour des domaines fixes. Comme $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1([0,T]; H^s(F(t), \mathbb{R}^3))$, le Théorème 3.3.1 assure que $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^1([0,T]; \mathcal{C}^1(\overline{F(t)}, \mathbb{R}^3))$. Ainsi en reprenant la démonstration de la Proposition 3.2.2, nous obtenons le fait que $\eta(t,\cdot)$ soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de F_0 sur $F(t)$ et que $\det[\mathrm{D}\eta] = 1$. Pour terminer la preuve il suffit donc de montrer que $\eta \in \mathcal{C}^1([0,T]; H^s(F(t), \mathbb{R}^3))$. Nous avons les formules

$$\begin{aligned} \frac{d[D_{\mathbf{y}}\eta]}{dt}(t,\mathbf{y}) &= [D_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(t,\eta(t,\mathbf{y}))][D_{\mathbf{y}}\eta(t,\mathbf{y})] \qquad \text{pour tout } t \in [0,T],\ \mathbf{y} \in F_0, \\ [D_{\mathbf{y}}\eta](0,\mathbf{y}) &= Id_3 \qquad \text{pour tout } \mathbf{y} \in F_0. \end{aligned}$$

Nous avons donc un équation différentielle ordinaire pour la différentielle de η qui est linéaire. Pour $\eta \in \mathcal{C}^1(\overline{F(t)}, \mathbb{R}^3)$, $[D_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(t,\eta(t,\mathbf{y}))]$ reste borné dans $\mathcal{C}^1([0,T]; H^{s-1}(F(t), \mathbb{R}^3))$. Ainsi l'équation

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = [D_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(t,\eta(t,\mathbf{y}))]\mathbf{v}, \qquad \mathbf{v}(0) = Id_3,$$

admet une unique solution dans $\mathcal{C}^1([0,T]; H^{s-1}(F(t), \mathbb{R}^3))$ et donc $[D_{\mathbf{y}}\eta] \in \mathcal{C}^1([0,T]; H^{s-1}(F(t), \mathbb{R}^3))$. Nous obtenons ainsi que $\eta \in \mathcal{C}^1([0,T]; H^s(F(t), \mathbb{R}^3))$. ■

6.3 Décomposition de la pression

Dans la majorité des problèmes fluide-structure il est intéressant de faire disparaître la pression p du fluide en utilisant le projecteur de Leray. Cependant les projecteurs que nous obtenons dépendent du temps t et donc ils introduisent des éléments difficilement contrôlables. Dans notre cas nous n'utiliserons pas de projecteur mais nous utiliserons le fait que la pression est solution d'un problème de Neumann qui dépend de la vitesse $\mathbf{u}$ et de la trajectoire du solide $\mathbf{q} = (\mathbf{h}, [R])$. De plus ceci permettra de mettre le système (6.1) sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires. Nous commençons par définir deux fonctions qui simplifieront les calculs dans la suite.

Lemme 6.3.1 *Soit $s \geq 3$ un entier et soit $\mathbf{u}(t,\cdot) \in H^s(F_{\mathbf{q}(t)}, \mathbb{R}^3)$ pour tout $t \in [0,T]$. Alors l'application*

$$\mathbf{x} \mapsto \sum_{i,j} \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x_i}(t,\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j}(t,\mathbf{x}),$$

est dans $H^{s-1}(F_{\mathbf{q}(t)}, \mathbb{R})$ tandis que l'application

$$\mathbf{x} \mapsto \sum_{i,j} \mathbf{u}_i(t,\mathbf{x}) \mathbf{u}_j(t,\mathbf{x}) \frac{\partial n_i}{\partial x_j}(t,\mathbf{x}),$$

est dans $H^{s-1/2}(\Gamma, \mathbb{R})$, où Γ est $\partial\Omega$ ou $\partial S_{\mathbf{q}(t)}$.

Preuve : D'après le Théorème 3.3.1, comme $\mathbf{u}(t,\cdot)$ est dans $H^s(F_{\mathbf{q}(t)}, \mathbb{R}^3)$, l' application

$$\mathbf{x} \mapsto \sum_{i,j} \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x_i}(t,\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j}(t,\mathbf{x}),$$

est $H^{s-1}(F_{\mathbf{q}(t)}, \mathbb{R})$.

Grâce aux hypothèses faites sur ∂F_0, l'application $\mathbf{x} \in \partial F_{\mathbf{q}(t)} \mapsto \partial n_i/\partial x_j(t,\mathbf{x})$ peut être étendu à $F_{\mathbf{q}(t)}$ par une fonction appartenant à $H^s(F_{\mathbf{q}(t)},\mathbb{R})$ pour tout $i=1,2,3$ et $j=1,2,3$. Ainsi en appliquant le Théorème 3.3.1, dès que $\mathbf{u}(t,\cdot) \in H^s(F_{\mathbf{q}(t)},\mathbb{R}^3)$ nous avons

$$\mathbf{u}_i(t,\mathbf{x})\mathbf{u}_j(t,\mathbf{x})\frac{\partial n_i}{\partial x_j}(t,\cdot) \in H^s(F_{\mathbf{q}(t)},\mathbb{R}^3).$$

Nous en déduisons que la trace de $\mathbf{u}_i\mathbf{u}_j\partial\mathbf{n}_i/\partial\mathbf{x}_j$ est dans $\partial F_{\mathbf{q}}$ est dans $H^{s-1/2}(\partial F_{\mathbf{q}},\mathbb{R})$. Ainsi l'application

$$\mathbf{x} \mapsto \sum_{i,j} \mathbf{u}_i(t,\mathbf{x})\mathbf{u}_j(t,\mathbf{x})\frac{\partial n_i}{\partial x_j}(t,\mathbf{x}),$$

est dans $H^{s-1/2}(\Gamma,\mathbb{R})$ où $\Gamma=\partial\Omega$ ou $\Gamma=\partial S_{\mathbf{q}(t)}$. ■

Le Lemme ci-dessus permet d'introduire les opérateurs

$$\mathcal{F} : H^s(F_{\mathbf{q}(t)},\mathbb{R}^3) \to H^{s-1}(F_{\mathbf{q}(t)},\mathbb{R}), \qquad \mathcal{F}(\mathbf{u})(t,\cdot) = \sum_{i,j} \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x_i}\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j}(t,\cdot), \tag{6.9}$$

$$\mathcal{G} : H^s(F_{\mathbf{q}(t)},\mathbb{R}^3) \to H^{s-1/2}(\Gamma,\mathbb{R}), \qquad \mathcal{G}(\mathbf{u})(t,\cdot) = \sum_{i,j} \mathbf{u}_i(t,\cdot)\mathbf{u}_j(t,\cdot)\frac{\partial n_i}{\partial x_j}(t,\cdot), \tag{6.10}$$

où Γ est soit $\partial\Omega$ soit $\partial S_{\mathbf{q}(t)}$. Le résultat ci-dessous permet d'éliminer la pression du système (6.1) en montrant qu'elle est solution d'un problème de Neumann.

Proposition 6.3.1 *Soient $T_0>0$, $s\geq 3$ un entier. Nous supposons que*

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} &= (\mathbf{h},[R]) \in C^2([0,T_0],\mathcal{P}(\Omega,S_0)),\\
\mathbf{u} &\in C([0,T_0],H^s(F_{\mathbf{q}(t)},\mathbb{R}^3)\cap C^1([0,T_0],H^{s-1}(F_{\mathbf{q}(\cdot)},\mathbb{R}^3),\\
\mathrm{div}(\mathbf{u}(\mathrm{t},\mathbf{x})) &= 0 \qquad \mathbf{x}\in F_{\mathbf{q}(t)},\\
\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) &= 0 \qquad \mathbf{x}\in\partial\Omega,\\
\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) &= [\mathbf{k}+\mathbf{w}\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{h})]\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}\in\partial S_{\mathbf{q}(t)},\\
p &\in C([0,T_0],N^{s+1}(F_{\mathbf{q}(\cdot)}),
\end{aligned}$$

pour tout $t\in[0,T_0]$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes

i) $(\mathbf{u},p,\mathbf{q})$ *vérifient* (6.1a).

ii) pour tout $t\in[0,T_0]$, $(\mathbf{u},p,\mathbf{q})$ *vérifient*

$$-\Delta p(t,\mathbf{x}) = \rho_F\mathcal{F}(\mathbf{u})(t,\mathbf{x}) \qquad \textit{pour tout } \mathbf{x}\in F_{\mathbf{q}(t)}, \tag{6.11a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial\mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) = \rho_F\mathcal{G}(\mathbf{u})(t,\mathbf{x}) \qquad \textit{sur } \partial\Omega, \tag{6.11b}$$

$$\frac{\partial p}{\partial\mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) = \rho_F\mathcal{G}(\mathbf{u}-\mathbf{v})(t,\mathbf{x}) - \rho_F\left[(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right](t,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) \qquad \textit{sur } \partial S_{\mathbf{q}(t)}, \tag{6.11c}$$

où $\mathbf{v}$ *est la vitesse du solide donnée par la formule*

$$\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{h}}(t)+\mathbf{w}(t)\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{h}(t)),$$

et les fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont données par les formules (6.9) *et* (6.10).

Preuve : Montrons que $i)$ implique $ii)$. En appliquant l'opérateur de divergence à l'équation (6.1a) nous obtenons l'équation :

$$-\Delta p(t,\mathbf{x}) = \rho_F \mathrm{div}\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathrm{t}}(\mathrm{t},\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathrm{t},\mathbf{x})\cdot\nabla\mathbf{u}(\mathrm{t},\mathbf{x})\right] \text{ pour } \mathbf{x}\in \mathrm{F}_{\mathbf{q}}.$$

De plus en utilisant le fait que $\mathrm{div}(\mathbf{u})\equiv 0$, le terme de droite se simplifie en

$$\mathrm{div}\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathrm{t}}(\mathrm{t},\mathbf{x}) + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}(\mathrm{t},\mathbf{x})\right] = \sum_{\mathrm{i,j}} \frac{\partial \mathbf{u}_{\mathrm{j}}}{\partial \mathrm{x}_{\mathrm{i}}}\frac{\partial \mathbf{u}_{\mathrm{i}}}{\partial \mathrm{x}_{\mathrm{j}}}(\mathrm{t},\mathbf{x}) + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathrm{div}(\mathbf{u})(\mathbf{x},\mathrm{t}) = \sum_{\mathrm{i,j}} \frac{\partial \mathbf{u}_{\mathrm{j}}}{\partial \mathrm{x}_{\mathrm{i}}}\frac{\partial \mathbf{u}_{\mathrm{i}}}{\partial \mathrm{x}_{\mathrm{j}}}(\mathrm{t},\mathbf{x}).$$

Les formules ci-dessus impliquent que

$$-\Delta p(t,\mathbf{x}) = \rho_F \mathcal{F}(\mathbf{u})(t,\mathbf{x}).$$

Pour construire les conditions de bords de (6.11), il suffit de prendre les traces normales de l'équation (6.1a) sur $\partial\Omega$ et sur $\partial S_{\mathbf{q}}$. Ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) &= \rho_F\left[-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{u}(t,\mathbf{x})\cdot\nabla\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\right]\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) \text{ pour tout } \mathbf{x}\in\partial\Omega,\\
\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) &= \rho_F\left[-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{u}(t,\mathbf{x})\cdot\nabla\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\right]\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) \text{ pour tout } \mathbf{x}\in\partial S_{\mathbf{q}}.
\end{aligned}$$

Ces conditions de bords peuvent s'exprimer en fonction de la position et de la vitesse du solide. En effet grâce à l'équation (6.1d) et au changement de variable géométrique $\Psi : [0,T]\times F_0 \to F(t)$ que nous avons construit dans la Proposition 3.2.2, nous avons

$$\mathbf{u}(t,\Psi(t,\mathbf{y}))\cdot(R(t)\mathbf{n}(0,\mathbf{y})) = \mathbf{v}(t,\Psi(t,\mathbf{y}))\cdot(R(t)\mathbf{n}(0,\mathbf{y})) \qquad (t\geq 0,\ y\in\partial S_0).$$

Nous rappelons que pour tout $\mathbf{y}\in F_0$ nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(t,\Psi(t,\mathbf{y})) &= [R(t)]\mathbf{n}(0,\mathbf{y}),\\
\frac{\partial \Psi}{\partial t}(t,\mathbf{y}) &= \mathbf{v}(t,\Psi(t,\mathbf{y})),\\
\nabla\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) &= \frac{d[R](t)}{dt}[R^*(t)] = [A(\mathbf{w}(t))],
\end{aligned}$$

où $\mathbf{n}(0,\cdot)$ est la normale sur ∂F_0, $\mathbf{v}$ est la vitesse du solide S et $[A(\mathbf{w})]$ est la matrice antisymétrique définie par (1.4). En calculant la dérivée totale par rapport à t de (6.1d) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t,\Psi(t,\mathbf{y}))\cdot R(t)\mathbf{n}(\mathbf{y})] = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t,\Psi(t,\mathbf{y}))\cdot\mathbf{n}(t,\Psi(t,\mathbf{y})) + [\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{u}]\cdot\mathbf{n}(t,\Psi(t,\mathbf{y}))\\
+ [\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}]\cdot\mathbf{n}(t,\Psi(t,\mathbf{y})),
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}(t,\Psi(t,\mathbf{y}))\cdot[R(t)]\mathbf{n}(\mathbf{y})\right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(t,\Psi(t,\mathbf{y}))\cdot\mathbf{n}(t,\Psi(t,\mathbf{y})) + 2[\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}](t,\Psi(t,\mathbf{y}))\cdot\mathbf{n}(t,\Psi(t,\mathbf{y})).$$

Ainsi les conditions de bords sur $\partial S_{\mathbf{q}}$ deviennent :

$$\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right]\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) = (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) + \left[\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right]\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x})$$

Grâce à la relation $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x})$ sur $S_{\mathbf{q}}$, nous avons

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot\nabla(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) &= \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}[(\mathbf{u}-\mathbf{v})_i(t,\mathbf{x})\mathbf{n}_i(t,\mathbf{x})(\mathbf{u}-\mathbf{v})_j(t,\mathbf{x})],\\ &\quad -[(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}]\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial(\mathbf{u}-\mathbf{v})_i}{x_i} - \mathcal{G}(\mathbf{u}-\mathbf{v})(t,\mathbf{x}),\\ &= -\mathcal{G}(\mathbf{u}-\mathbf{v})(t,\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Nous pouvons donc en déduire une expression simple de la dérivée normale de la pression sur le bord $\partial S_{\mathbf{q}}$:

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) = \rho_F\mathcal{G}(\mathbf{u}-\mathbf{v})(t,\mathbf{x}) - \rho_F\left[\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}+\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\right](t,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \text{ sur } \partial S_{\mathbf{q}}.$$

Pour $\partial\Omega$, il faut remarquer que $\Psi(t,.)$ est l'application identité au voisinage de $\partial\Omega$, ainsi nous pouvons considérer $\Psi(t,\cdot)$ comme un déplacement rigide avec $\mathbf{h}(t)=0$ et $[R(t)]=Id_3$ pour tout $t\in[0,T]$, donc $\mathbf{v}=0$. Grâce aux calculs effectuer sur $\partial S_{\mathbf{q}}$, nous pouvons en déduire facilement la trace normale de p :

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) = \rho_F\mathcal{G}(\mathbf{u})(t,\mathbf{x}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \text{ sur } \partial\Omega.$$

Nous obtenons donc un problème de Neumann pour la pression p.

Réciproquement si p est solution de (6.11), $\mathbf{q}=(\mathbf{h},[R])\in C^2([0,T_0],\mathcal{P}(\Omega,S_0))$ et $\mathbf{u}(t,\cdot)\in H^s(F_{\mathbf{q}(t)},\mathbb{R}^3)$ avec

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{u}(\mathrm{t},\mathbf{x})) &= 0 \qquad \mathbf{x}\in F_{\mathbf{q}(t)},\\ \mathbf{u}(t,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) &= 0 \qquad \mathbf{x}\in\partial\Omega,\\ \mathbf{u}(t,\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) &= [\mathbf{k}+\mathbf{w}\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{h})]\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x}\in\partial S_{\mathbf{q}(t)}.\end{aligned}$$

En utilisant les calculs ci-dessus, nous vérifions que p est aussi solution du problème de Neumann suivant :

$$\begin{aligned}-\Delta p(t,\mathbf{x}) &= \rho_F\mathrm{div}\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathrm{t}}(\mathrm{t},\mathbf{x})+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}(\mathrm{t},\mathbf{x})\right) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x}\in\mathrm{F}_{\mathbf{q}},\\ \frac{\partial p}{\partial\mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) &= -\rho_F\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}(t,\mathbf{x})+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\right)\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) \qquad \text{sur } \partial\Omega,\\ \frac{\partial p}{\partial\mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) &= -\rho_F\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}(t,\mathbf{x})+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\right)\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) \qquad \text{sur } \partial S_{\mathbf{q}}.\end{aligned}$$

En appliquant le Théorème 3.4.1, p est aussi la solution faible du problème variationnel suivant :

$$\begin{aligned}\int_{F_{\mathbf{q}}}\nabla p(t,\mathbf{x})\cdot\nabla\psi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{F_{\mathbf{q}}}\rho_F\mathrm{div}\left[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathrm{t}}(\mathrm{t},\mathbf{x})+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}(\mathrm{t},\mathbf{x})\right]\psi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\\ +\int_{\partial F_{\mathbf{q}}}-\rho_F\left[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}(t,\mathbf{x})+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\right]\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x})\psi\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}\end{aligned}$$

pour toutes fonctions $\psi\in H^{s+1}(F_{\mathbf{q}(t)},\mathbb{R})$. En intégrant par parties, il est alors facile de vérifier que

$$\int_{F_{\mathbf{q}}}\left[\rho_F\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\rho_F\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}+\nabla p\right]\cdot\nabla\psi\mathrm{d}\mathbf{x}=0,$$

pour toutes fonctions $\psi \in H^{s+1}(F_{\mathbf{q}(t)}, \mathbb{R})$. Ainsi pour tout $\mathbf{x} \in F_{\mathbf{q}(t)}$ nous obtenons

$$\rho_F \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t,\mathbf{x}) + \rho_F \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) + \nabla p(t,\mathbf{x}) = 0, \qquad \text{pour tout } (t,\mathbf{x}) \in [0,T]\times F_{\mathbf{q}(t)}.$$

Les fonctions $(\mathbf{u}, p)$ vérifient donc l'équation (6.1a). ■

Remarque 6.3.1 *Nous pouvons facilement vérifier que le problème de Neumann pour la pression* (6.11) *est bien posé en appliquant le Théorème 3.4.1. Grâce au Lemme 6.3.1 nous avons* $\mathcal{F}(\mathbf{u})(t,\cdot) \in H^{s-1}(F(t))$ *et* $\mathcal{G}(\mathbf{u})(t,\cdot) \in H^{s-1/2}(\partial\Omega)$. *De plus en remarquant que* $\mathbf{v}(t,.) \in C^2([0,T], C^\infty(\mathbb{R}^3))$, *cela implique que* $\mathcal{G}(\mathbf{u}-\mathbf{v})(t,\cdot)$ *et* $-\left[\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} + \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right](t,\cdot)\cdot\mathbf{n}(t,\cdot)$ *sont dans* $H^{s-1/2}(\partial S_{\mathbf{q}})$. *Enfin il faut vérifier que*

$$\int_{F_{\mathbf{q}}} \mathcal{F}(t,\mathbf{x})d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathcal{G}(\mathbf{u})(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} + \int_{\partial \mathrm{S}_{\mathbf{q}}} \mathcal{G}(\mathbf{u}-\mathbf{v})(\mathrm{t},\mathrm{x}) - \left[\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathrm{t}}\right](\mathrm{t},\mathrm{x})\cdot\mathbf{n}(\mathrm{t},\mathrm{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} = 0.$$

Or cette relation provient des calculs effectués dans la preuve de la Proposition 6.3.1. La principale difficulté est apportée par les termes sur le bord $\partial S_{\mathbf{q}(t)}$. *Ainsi la pression* p *est l'unique solution* (6.11) *et* $p(t,\cdot) \in N^{s+1}(F_{\mathbf{q}(t)}, \mathbb{R})$.

Cette proposition montre que la pression cache une partie qui contient les dérivées secondes de la position du solide. Pour faire disparaître cette dépendance nous allons séparer la pression en deux parties. Nous définissons les fonctions Φ_i, pour $i = 1,\dots,6$, comme les solutions des problèmes de Neumann suivants

$$-\Delta\Phi_i(t,\mathbf{x}) = 0 \qquad \mathbf{x} \in F_{\mathbf{q}}, \tag{6.12a}$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) = 0 \qquad \mathbf{x} \text{ sur } \partial\Omega, \tag{6.12b}$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) = K_i(t,\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \text{ sur } \partial S_{\mathbf{q}}, \tag{6.12c}$$

où le vecteur $\mathbf{K}$ est donné par

$$\mathbf{K}(t,\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{K}_i(t,\mathbf{x}) & = n_i(t,\mathbf{x}) \qquad \text{for } i = 1,2,3, \\ \mathbf{K}_i(t,\mathbf{x}) & = [(\mathbf{x}-\mathbf{h})\wedge\mathbf{n}(t,\mathbf{x})]_{i-3} \qquad \text{for } i = 4,5,6, \end{cases} \tag{6.13}$$

et nous remarquons que $(\Phi_i)_{0\le i\le 6}$ dépendent uniquement de la position du solide. Nous retrouvons ici les fonctions qui ont été introduites au chapitre 5. Nous voyons donc le rôle essentiel que ces fonctions jouent pour l'étude du mouvement de solide dans un fluide parfait incompressible. Nous définissons une dernière fonction, μ qui est solution du problème de Neumann suivant :

$$-\Delta\mu(t,\mathbf{x}) = \mathcal{F}(\mathbf{u})(t,\mathbf{x}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in F_{\mathbf{q}}, \tag{6.14a}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) = \mathcal{G}(\mathbf{u})(t,\mathbf{x}) \qquad \text{sur } \partial\Omega, \tag{6.14b}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) = \mathcal{G}(\mathbf{u}-\mathbf{v})(t,\mathbf{x}) - [(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}(t,\mathbf{x}) - \mathbf{w}(t)\wedge\mathbf{k}(t)]\cdot\mathbf{n}(t,\mathbf{x}) \text{ sur } \partial S_{\mathbf{q}}. \tag{6.14c}$$

Ainsi la pression devient

$$p(t,\mathbf{x}) = \rho_F\mu(t,\mathbf{x}) - \rho_F\Phi(t,\mathbf{x})\cdot(ddot\mathbf{h}(t), \dot{\mathbf{w}}(t)). \tag{6.15}$$

6.4 Une forme équivalente du système

Le but de cette partie est de montrer que le système (6.1) peut se réduire à une équation différentielle ordinaire sur une variété de dimension infinie. Dans un premier temps nous supposons que

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &\in C^2([0,T),\mathcal{P}(\Omega,S_0)),\\ \mathbf{u} &\in C([0,T),H^s(F_{\mathbf{q}(\cdot)})\cap C^1([0,T),H^{s-1}(F_{\mathbf{q}(\cdot)}),\\ p &\in C([0,T),N^{s+1}(F_{\mathbf{q}(\cdot)}), \end{aligned}$$

sont solutions de (6.1), avec $s \geq 3$. Le but de cette section est de construire une application $\mathcal{L} : [0,T] \times F^s \to E^s$ tel que le système (6.1) soit équivalente à l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt}(t) = \mathcal{L}(t,\mathbf{z}(t)), \qquad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 = (\sigma_0,\nu_0) \tag{6.16}$$

où $\mathbf{z}_0$, $\mathbf{z}(t)$ sont dans F^s, $\sigma_0 \in \Sigma^s(\Omega,S_0)$ et $\nu_0 \in T_{\sigma_0}\Sigma^s(\Omega,S_0)$. Pour appliquer le Théorème 6.2.1, nous allons montrer dans les sections suivantes que l'application $\mathcal{L}$ est localement lipschitzienne sur F^s et que pour tout $(\mathbf{z},t) \in [0,T] \times F^s$ vérifie la condition de tangence suivante

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\epsilon}\mathrm{dist}(\mathrm{z}+\epsilon\mathcal{L}(\mathrm{t},\mathrm{z});\mathrm{F^s}) = 0. \tag{6.17}$$

Pour construire $\mathcal{L}$, nous commençons par transformer les équations de Newton (6.1f) et (6.1g) et nous construisons une application $\mathcal{L}_S : [0,T] \times F^s \to E^s$. Nous rappelons la définition de la matrice de masse du système vue au chapitre 5

$$[\mathcal{K}(\mathbf{q})] = [\mathcal{K}_S(\mathbf{q})] + [\mathcal{K}_F(\mathbf{q})], \qquad [\mathcal{K}_S(\mathbf{q})] = \begin{pmatrix} mId_3 & 0\\ 0 & [J]\end{pmatrix},$$
$$[\mathcal{K}_F(\mathbf{q})] = \left(\rho_F \int_{F_\mathbf{q}} \nabla\Phi_i(t,\mathbf{x})\cdot\nabla\Phi_j(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\right)_{1\leq i,j\leq 6}, \tag{6.18}$$

où $[J]$ est la matrice d'inertie du solide S définie par (1.7). Nous rappelons que $[\mathcal{K}]$ est inversible car elle est la somme d'une matrice définie positive $[\mathcal{K}_S]$, donc inversible, et d'une matrice positive $[\mathcal{K}_F]$.

Proposition 6.4.1 *Soit $s \geq 3$, nous introduisons l'application*

$$\mathcal{L}_S : [0,T] \times F^s \to \mathbb{R}^6, \tag{6.19a}$$
$$(t,\mathbf{z}) \mapsto [\mathcal{K}]^{-1}\left(I(J(t),\mathbf{w}) + \rho_F\int_{F_\mathbf{q}} \nabla\mu(t,\mathbf{x})\cdot\nabla\Phi(t,\mathbf{x})d\mathbf{x}\right). \tag{6.19b}$$

où μ est solution de (6.14)*, Φ est solution de* (6.12) *et $I(J,\mathbf{w}) = (0,0,0,([J]\mathbf{w})\wedge\mathbf{w}) \in \mathbb{R}^6$. Le vecteur $(\ddot{\mathbf{h}},\dot{\mathbf{w}})$ est donné par*

$$\begin{pmatrix}\ddot{\mathbf{h}}\\ \dot{\mathbf{w}}\end{pmatrix} = [\mathcal{K}(\mathbf{q})]^{-1}\left(I(J,\mathbf{w}) + \rho_F\int_{F_\mathbf{q}} \nabla\mu(t,\mathbf{x})\cdot\nabla\Phi(t,\mathbf{x})d\mathbf{x}\right) = \mathcal{L}_S(t,\mathbf{z}). \tag{6.20}$$

Preuve : Nous montrons ici la relation $(\ddot{\mathbf{h}},\dot{\mathbf{w}}) = \mathcal{L}_S(t,\mathbf{z})$. En utilisant la formule de décomposition de la pression (6.15), les formules (6.1f) et (6.1g) deviennent

$$m_s\mathbf{k}_j = m_s\ddot{\mathbf{h}}_j = \int_{\partial S_\mathbf{q}} \rho_F\mu(t,\mathbf{x})n_j(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_\mathrm{x} - \sum_{\mathrm{i}=1}^{3}\ddot{\mathbf{h}}_\mathrm{i}(\mathrm{t})\int_{\partial\mathrm{S}_\mathbf{q}}\rho_\mathrm{F}\Phi_\mathrm{i}(\mathrm{t},\mathbf{x})\mathrm{n_j}(\mathrm{t},\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_\mathrm{x},$$
$$-\sum_{i=1}^{3}\dot{\mathbf{w}}_i(t)\int_{\partial S_\mathbf{q}}\rho_F\Phi_{i+3}(t,\mathbf{x})n_j(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_\mathrm{x},$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} J_{i,j}\dot{\mathbf{w}}_i = (J\mathbf{w}\wedge\mathbf{w})_j \quad &+ \quad \int_{\partial S_{\mathbf{q}}} \rho_F \mu(t,\mathbf{x})[(\mathbf{x}-\mathbf{h})\wedge\mathbf{n}]_j(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \\ &- \quad \sum_{i=1}^{3} \ddot{\mathbf{h}}_i(t)\int_{\partial S_{\mathbf{q}}} \rho_F \Phi_i(t,\mathbf{x})[(\mathbf{x}-\mathbf{h})\wedge\mathbf{n}]_j(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} \\ &- \quad \sum_{i=1}^{3} \dot{\mathbf{w}}_i(t)\int_{\partial S_{\mathbf{q}}} \rho_F \Phi_{i+3}(t,\mathbf{x})[(\mathbf{x}-\mathbf{h})\wedge\mathbf{n}]_j(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}\end{aligned}$$

Nous rappelons que pour tout $j = 1,\ldots,6$

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_j(t,\mathbf{x}) &= 0, \qquad \mathbf{x}\in F_{\mathbf{q}},\\ \frac{\partial\Phi_j}{\partial\mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) &= 0, \qquad \partial\Omega,\\ \frac{\partial\Phi_j}{\partial\mathbf{n}}(t,\mathbf{x}) &= \mathbf{K}_j(t,\mathbf{x}), \qquad \text{sur } \partial S_{\mathbf{q}}.\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\int_{\partial S_{\mathbf{q}}} \Phi_i(t,\mathbf{x})\mathbf{K}_j(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} &= \int_{\partial S_{\mathbf{q}}} \Phi_i(t,\mathbf{x})\frac{\partial\phi_j}{\partial\mathbf{n}}(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}},\\ &= \int_{F_{\mathbf{q}}} \nabla\Phi_i(t,\mathbf{x})\cdot\nabla\Phi_j(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\partial S_{\mathbf{q}}} \mu(t,\mathbf{x})\mathbf{K}_j(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}} &= \int_{F_{\mathbf{q}}} \mathrm{div}\,(\mu\nabla\Phi_{\mathrm{j}})(\mathrm{t},\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x},\\ &= \sum_{k=1}^{3}\int_{F_{\mathbf{q}}} \frac{\partial\mu}{\partial x_k}(t,\mathbf{x})\frac{\partial\Phi_j}{\partial x_k}(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Ces équations conduisent donc à l'équation

$$[\mathcal{K}(\mathbf{q}(t))](\ddot{\mathbf{h}}(t),\dot{\mathbf{w}}(t))^t = I(J,\mathbf{w}(t)) + \rho_F\int_{\partial S_{\mathbf{q}(t)}} \mu(t,\mathbf{x})\mathbf{K}(t,\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{x}}.$$

En utilisant l'inversibilité de la matrice $[\mathcal{K}(\mathbf{q})]$, nous obtenons la formule (6.20). ■

Pour transformer l'équation (6.1a), nous introduisons les lignes de courant associées à la vitesse Eulérienne du fluide $\mathbf{u}$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}(t,\mathbf{y}) = \mathbf{u}(t,\eta(t,\mathbf{y})), \quad \eta(0,\mathbf{y}) = \mathbf{y} \text{ pour tout } \mathbf{y}\in F_0. \tag{6.21}$$

De plus nous notons par ξ la dérivée par rapport à t de η

$$\xi(t,\mathbf{y}) = \frac{\partial\eta}{\partial t}(t,\mathbf{y}) \qquad \text{pour tout } t\geq 0,\ \mathbf{y}\in F_0. \tag{6.22}$$

Nous remarquons que $\mathbf{u}$ peut être exprimé en fonction de η et ξ par

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = \xi(t,\eta^{-1}(t,\mathbf{x})) \qquad \text{pour tout } t\in[0,T],\ \mathbf{x}\in F_{\mathbf{q}(t)}. \tag{6.23}$$

Nous définissons maintenant l'application $\mathcal{L}_F : [0,T] \times F^s \to H^s(F_0, \mathbb{R}^3)$

$$\mathcal{L}_F : [0,T] \times F^s \to H^s(F_0, \mathbb{R}^3), \tag{6.24a}$$
$$(t, \mathbf{z}) \mapsto \rho_F \nabla \Phi(t, \eta) \cdot \mathcal{L}_S(t, \mathbf{z}) - \rho_F \nabla \mu(t, \eta), \tag{6.24b}$$

où $s \geq 3$, $\mathbf{z} = (\eta, \mathbf{h}, [R], \xi, \mathbf{k}, \mathbf{w})$, μ est solution de (6.14), Φ est solution de (6.12) et $\mathcal{L}_S$ est définie par (6.19). En dérivant l'équation (6.21) par rapport à t et en utilisant la décomposition de la pression (6.15), nous obtenons les relations suivantes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}(t, \mathbf{y}) &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t, \eta(t, \mathbf{y})) + \frac{\partial \eta}{\partial t}(t, \mathbf{y}) \cdot \nabla \mathbf{u}(t, \eta(t, \mathbf{y})) \\
&= \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right)(t, \eta(t, \mathbf{y})), \\
&= -\nabla p(t, \eta(t, \mathbf{y})), \\
&= \rho_F \nabla \Phi(t, \eta(t, \mathbf{y})) \cdot \mathcal{L}_S(t, \mathbf{z}) - \rho_F \nabla \mu(t, \eta(t, \mathbf{y})), \\
&= \mathcal{L}_F(t, \mathbf{z}).
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant définir l'application $\mathcal{L}$ sur l'ensemble fermé F^s

$$\mathcal{L} : [0,T] \times F^s \to E^s, \tag{6.25a}$$
$$(t, \mathbf{z}) = \left(\xi\,, \mathbf{k}\,, [A(\mathbf{w})][R]\,, \mathcal{L}_F(t, \mathbf{z})\,, \mathcal{L}_S(t, \mathbf{z})\right)^t, \tag{6.25b}$$

où $\mathbf{z} = (\eta, \mathbf{q}, \xi, \mathbf{k}, \mathbf{w}) \in F^s$, $\mathbf{q} = (\mathbf{h}, [R])$, la matrice $[\mathcal{K}(\mathbf{q})]$ est définie par (6.18), la matrice $[A(\mathbf{w})]$ est donnée par (1.4), Φ est défini par (6.12) et μ est défini par (6.14). Nous pouvons donc construire le problème de Cauchy suivant

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt}(t) = \mathcal{L}(t, \mathbf{z}(t)), \tag{6.26a}$$
$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 = (e_{F_0}, \mathbf{h}_0, Id_3, \mathbf{u}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{w}_0), \tag{6.26b}$$

où e_{F_0} est l'application identité sur F_0 et $\mathbf{u}_0$ est la vitesse initiale du fluide. Le théorème suivant donne un lien entre la solution de (6.26) et le système initial (6.1).

Théorème 6.4.1 *Soient $s \geq 3$ un entier,*

$$\sigma_0 = (e_{F(0)}, \mathbf{h}_0, Id_3) \in \Sigma^s(\Omega, S_0), \qquad \text{et } \nu_0 = (\mathbf{u}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{w}_0) \in T_{\sigma_0}\Sigma^s(\Omega, S_0)$$

Supposons qu'il existe T_0 tel que le problème de Cauchy (6.26) *admet une unique solution*

$$\mathbf{z} = (\eta, \mathbf{h}, [R], \xi, \mathbf{k}, \mathbf{w}) \in C^1([0, T_0]; F^s).$$

Alors $(\mathbf{h}, [R], \mathbf{u}, p)$ sont solutions du problème (6.1) *sur $[0, T_0]$, où $(\mathbf{h}, [R], \mathbf{u}, p)$ sont définis comme*

$$\begin{aligned}
(\mathbf{h}, [R]) &\in \mathcal{C}^2([0, T_0]; P(\Omega, S_0)), \\
\mathbf{u} &= \xi \circ \eta^{-1} \in \mathcal{C}([0, T_0]; H^s(F(\cdot), \mathbb{R}^3)) \bigcap \mathcal{C}^1([0, T_0]; H^{s-1}(F(\cdot), \mathbb{R}^3)), \\
p &= \rho_F \mu - \rho_F \Phi \cdot (\ddot{\mathbf{h}}, \dot{\mathbf{w}}) \in \mathcal{C}([0, T_0]; N^{s+1}(F(\cdot), \mathbb{R})),
\end{aligned}$$

où μ est solution du problème de Neumann (6.14)*, Φ est solution du problème* (6.12)*, l'ensemble $P(\Omega, S)$ est défini par* (1.40) *et le sous-espace $N^{s+1}(F(t), \mathbb{R})$ de $H^{s+1}(F(t), \mathbb{R})$ est défini par* (3.15).

Preuve : Supposons que (6.26) admet une unique solution

$$\mathbf{z} = (\eta, \mathbf{h}, [R], \xi, \mathbf{k}, \mathbf{w}) \in \mathcal{C}^1([0,T_0]; F^s).$$

Nous pouvons en déduire directement que

$$(\mathbf{h}, [R]) \in \mathcal{C}^2([0,T_0]; P(\Omega, S_0)).$$

Concernant la fonction $\mathbf{u}$ du fluide, les Théorèmes 3.3.1 et 3.3.2 assurent le fait que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t,\cdot) &= \xi(t,\eta^{-1}(t,\cdot)) \in H^s(F(t),\mathbb{R}^3), \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(t,\cdot) &= \frac{\partial \xi}{\partial t}(t,\eta^{-1}(t,\cdot)) + \left([D\xi](t,\eta^{-1}(t,\cdot))\right) \frac{\partial \eta^{-1}}{\partial t}(t,\cdot) \in H^{s-1}(F(t),\mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

De plus nous pouvons vérifier que les équations (6.1b), (6.1c) et (6.1d) sont satisfaites par la fonction $\mathbf{u}$ que nous avons construite.

Pour la fonction p, nous rappelons que les fonctions μ et Φ sont les solutions de problèmes de Neumann sur le domaine $F(t)$. Or comme les fonctions $\Phi(t,\cdot)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ (voir Théorème 3.4.1) et $\mu(t,\cdot)$ est dans $N^{s+1}(F(t),\mathbb{R})$ par la remarque qui suit la Proposition 6.3.1, nous avons donc

$$p = \rho_F \mu - \rho_F \Phi \cdot (\ddot{\mathbf{h}}, \dot{\mathbf{w}}) \in \mathcal{C}([0,T_0]; N^{s+1}(F(t),\mathbb{R})).$$

Enfin le problème de Cauchy (6.26) apporte les relations suivantes

$$\begin{aligned} \left(\ddot{\mathbf{h}}, \dot{\mathbf{w}}\right) &= \mathcal{L}_S(t,\mathbf{z}) = [\mathcal{K}(\mathbf{q})]^{-1} \left(I(J,\mathbf{w}) + \rho_F \int_{F_\mathbf{q}} \nabla\mu(t,\mathbf{x}) \cdot \nabla\Phi(t,\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} \right), \\ \dot{\xi}(t) &= \mathcal{L}_F(t,\mathbf{z}) = \rho_F \nabla\Phi(t,\eta) \cdot \mathcal{L}_S(t,\mathbf{z}) - \rho_F \nabla\mu(t,\eta), \end{aligned}$$

où la matrice $\mathcal{K}$ est définie par (6.18) et $I(J,\mathbf{w})$ est défini comme dans la Proposition 6.4.1. Les lois de Newton proviennent de la relation $\left(\ddot{\mathbf{h}}, \dot{\mathbf{w}}\right) = \mathcal{L}_S$. Pour cela nous utilisons la formule (6.15)

$$\rho_F \mu = p + \rho_F \Phi \cdot (\ddot{\mathbf{h}}, \dot{\mathbf{w}}),$$

pour aboutir aux relations

$$\begin{aligned} \left[\mathcal{K}_S + \mathcal{K}_F\right] (\ddot{\mathbf{h}}, \dot{\mathbf{w}})^t &= I(J,\mathbf{w}) + \int_{F_\mathbf{q}} \nabla(p + \rho_F \Phi \cdot \dot{\gamma}) \cdot \nabla\Phi \mathrm{d}\mathbf{x}, \\ &= I(J,\mathbf{w}) + \int_{F_\mathbf{q}} \nabla p \cdot \nabla\Phi(t,\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} + \mathcal{K}_F \dot{\gamma}. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de Φ et en intégrant par partie, nous retrouvons les lois de Newton

$$\mathcal{K}_S \left(\ddot{\mathbf{h}}, \dot{\mathbf{w}}\right) = I(J,\mathbf{w}) + \int_{\partial S_\mathbf{q}} p\mathbf{K} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}\sigma_\mathrm{x}. \tag{6.27}$$

Enfin comme $\xi = \mathbf{u} \circ \eta$ et $\mathcal{L}_F(t,\mathbf{z}) = (\nabla p) \circ \eta$, il est facile de vérifier que $\mathbf{u}$ et p vérifient l'équation d'Euler (6.1a). ■

Remarque 6.4.1 *Réciproquement supposons que le système* (6.1) *admet une solution*

$$\begin{aligned} (\mathbf{h}, [\mathbf{R}]) &\in \mathcal{C}^2([0,T]; P(\Omega, S_0)), \\ \mathbf{u} &\in \mathcal{C}([0,T]; H^s(F(\cdot),\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^1([0,T]; H^{s-1}(F(\cdot),\mathbb{R}^3)), \\ p &\in \mathcal{C}([0,T]; N^{s+1}(F(\cdot),\mathbb{R})). \end{aligned}$$

Nous définissons η et ξ comme les solutions de (6.21) *et* (6.22). *Le Théorème 6.2.2 assure que*

$$\mathbf{z} = (\eta, \mathbf{h}, [R], \xi, \dot{\mathbf{h}}, \mathbf{w}) \in \mathcal{C}^1([0, T_0], F^s).$$

De plus les constructions de $\mathcal{L}_S$, $\mathcal{L}_F$ et $\mathcal{L}$ montrent clairement que $\mathbf{z}$ est solution de (6.26). *Ainsi le système* (6.1) *admet une unique solution si et seulement si l'équation différentielle ordinaire* (6.26) *admet une unique solution.*

6.5 $\mathcal{L}_S$, $\mathcal{L}_F$ sont localement Lipschitz

Pour démontrer le Théorème 6.1.1, nous appliquons le résultat de Martin 6.2.1. Nous appliquons donc ce Théorème à l'équation différentielle (6.26). Il faut donc dans un premier temps montrer que l'application $\mathcal{L}(t, \cdot)$ est localement lipschitzienne sur F^s. Nous introduisons l'application

$$\begin{array}{rccl} \Pi^s : & F^s & \to H^s(F_0, \mathbb{R}^3), \\ & \mathbf{z} & \mapsto \nabla\mu(\mathbf{z}, \cdot) \circ \eta, \end{array} \tag{6.28}$$

où $\mathbf{z} = (\mathbf{h}, [R], \eta, \mathbf{k}, \mathbf{w}, \xi)$ et $\mu(\mathbf{z}, \cdot)$ est la solution du problème de Neumann (6.14)

$$-\Delta\mu(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \mathcal{F}(\xi \circ \eta^{-1})(\mathbf{x}) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in F_{\mathbf{q}}, \tag{6.29a}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \mathcal{G}(\xi \circ \eta^{-1})(\mathbf{x}) \qquad \text{sur } \partial\Omega, \tag{6.29b}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \mathcal{G}(\xi \circ \eta^{-1} - \mathbf{v})(\mathbf{x}) - [(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{w}(t) \wedge \mathbf{k}] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \text{ sur } \partial S_{\mathbf{q}}, \tag{6.29c}$$

$\mathcal{F}$ est défini par (6.9), $\mathcal{G}$ est défini par (6.10) et $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{k} + \mathbf{w} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{h})$ pour $\mathbf{x} \in S_{\mathbf{q}}$.

Nous commençons par montrer que Π^s est une application Lipschitzienne sur F^s. Pour cela nous adaptons les résultats de l'article de Brézis et Bourguignon [8]. Pour $\mathbf{z} = (\sigma, \nu) \in E^s$, nous posons les opérateurs :

$$\alpha : F^s \to H^{s-1}(F(0)); \qquad \alpha(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \mathrm{tr}([\mathrm{D}\xi(\mathbf{y})][\mathrm{D}\eta(\mathbf{y})]^{-1}[\mathrm{D}\xi(\mathbf{y})][\mathrm{D}\eta(\mathbf{y})]^{-1}) \tag{6.30}$$

$$\beta_0 : F^s \to H^{s-1/2}(\partial\Omega); \qquad \beta_0(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = [D\mathbf{N}(\eta(\mathbf{y}))]\xi(\mathbf{y}) \cdot \xi(\mathbf{y}) \tag{6.31}$$

$$\begin{aligned} &\beta : F^s \to H^{s-1/2}(\partial S); \\ &\quad \beta(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = ([R][D\mathbf{N}(\mathbf{h}_0 + [R]^*(\eta(\mathbf{y}) - \mathbf{h}))][R](\xi(\mathbf{y}) - \mathbf{v}(\eta(\mathbf{y})))) \cdot (\xi(\mathbf{y}) - \mathbf{v}(\eta(\mathbf{y}))) \\ &\qquad\qquad - [\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v}(\eta) - \mathbf{w} \wedge \mathbf{k}] \cdot [R]\mathbf{N}(\mathbf{h}_0 + [R]^*(\eta(\mathbf{y}) - \mathbf{h})) \end{aligned} \tag{6.32}$$

où $\mathbf{N}$ est une extension du vecteur normal sur un voisinage de $\partial\Omega$ ou une extension de la normale sur ∂S_0. Nous avons donc les résultats suivants

Proposition 6.5.1 *Soient $s \geq 3$ un entier, $\mathbf{z}_0 = (\sigma_0, \nu_0)$ avec*

$$\sigma_0 = (e_{F(0)}, \mathbf{h}_0, Id_3) \in \Sigma^s(\Omega, S_0), \qquad \text{et } \nu_0 = (\mathbf{u}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{w}_0) \in T_{\sigma_0}\Sigma^s(\Omega, S_0).$$

Les applications α, β_0 et β sont localement Lipschitziennes au voisinage de $\mathbf{z}_0$.

Preuve : Nous fixons $r > 0$ et nous considérons l'ensemble $B^s(r)$ des éléments de F^s vérifiant

$$B^s(r) = \{\mathbf{z} \in F^s \mid |\mathbf{z} - \mathbf{z}_0|_{E^s} \leq r\}.$$

Dans la suite $\mathbf{z}_1$ et $\mathbf{z}_2$ seront dans $B^s(r)$ et nous noterons par $K(r)$ une fonction croissante en r qui jouera le rôle de constante. Pour simplifier la lecture, nous ne distinguerons pas les

constantes $K(r)$. En appliquant le Théorème 3.3.1 sur le produit de fonctions de H^s et en remarquant que α est polynomial en $[D\xi]$ et $[D\eta]^{-1}$, il est facile de voir que α est localement Lipschitzienne si $\eta \mapsto [D\eta]^{-1}$ est localement lipschitzienne. Pour cela il suffit de remarquer que pour toute matrice $A, B \in GL_3(\mathbb{R})$, nous avons les relations

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(\mathrm{A})}\mathrm{cof(A)^t}, \tag{6.33}$$

où cof(A) est la matrice des cofacteurs de A dont les coefficients sont des polynômes de degré deux en fonction des coefficients de A. En appliquant le Théorème 3.3.1 et comme $|\det(\mathrm{D}\eta)| = 1$, il existe une constante $K(r)$ telle que pour tout $\mathbf{z} \in B^s(r)$

$$||[D\eta]^{-1}||_{H^{s-1}(F(0),\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))} \leq K(r).$$

Ainsi pour tout $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in B^s(r)$, il existe une constante $K(r)$ telle que

$$\begin{aligned} ||[D\eta_1]^{-1} - [D\eta_1]^{-1}||_{H^{s-1}(H^{s-1}(F(0),\mathcal{M}_3(\mathbb{R})))} &\leq K(r)||\eta_1 - \eta_2||_{H^{s-1}(F(0),\mathbb{R})} \\ &\leq K(r)\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_{E^s}. \end{aligned} \tag{6.34}$$

Ainsi l'application α est lipschitzienne sur $B^s(r)$.

Concernant β_0 et β, nous remarquons que ces applications sont les traces d'applications définies sur $F(0)$, car les domaines que nous considérons sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus la majorité des termes forment des polynômes en $\mathbf{z}$. Pour les termes plus complexes, il faut utiliser le Lemme 3.3.2 pour traiter par exemple le terme $[D\mathbf{N}(\eta)]$. Ainsi pour β, en appliquant l'inégalité de trace, nous obtenons

$$\|\beta_0(\mathbf{z}_1, \cdot) - \beta_0(\mathbf{z}_2, \cdot)\|_{H^{s-1/2}(\partial\Omega)} \leq K\|\beta_0(\mathbf{z}_1, \cdot) - \beta_0(\mathbf{z}_2, \cdot)\|_{H^s(F(0))}.$$

En utilisant le fait que $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in B^s(r)$ et le Théorème 3.3.1, il existe une constante $K(r)$ telle que

$$\|\beta_0(\mathbf{z}_1, \cdot) - \beta_0(\mathbf{z}_2, \cdot)\|_{H^{s-1/2}(\partial\Omega)} \leq K(r)\left(\|\xi_1 - \xi_2\|_{H^s(F(0),\mathbb{R}^3)} + \|[D\mathbf{N}(\eta_1)] - [D\mathbf{N}(\eta_2)]\|_{H^s(F(0),\mathbb{R}^3)}\right),$$

car l'expression de β_0 est polynomial en $\mathbf{z}$ si nous omettons les termes contenant la normale. Finalement le Lemme 3.3.2 permet d'obtenir

$$\|\beta_0(\mathbf{z}_1, \cdot) - \beta_0(\mathbf{z}_2, \cdot)\|_{H^{s-1/2}(\partial\Omega)} \leq K(r)\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_{E^s}.$$

En reprenant cette méthode pour traiter le cas de β_0 et en observant que β est aussi polynomial en $\mathbf{z}$, si nous omettons les termes contenant la normale, nous obtenons aussi l'existence d'une constante $K(r)$ telle que

$$\|\beta(\mathbf{z}_1, \cdot) - \beta(\mathbf{z}_2, \cdot)\|_{H^{s-1/2}(\partial\Omega)} \leq K(r)\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_{E^s},$$

La preuve de cette inégalité étant assez longue et étant globalement identique à celle pour β_0, nous ne donnons pas les détails des calculs. ■

Nous allons montrer que l'application Π^s est localement lipschitzienne sur un voisinage de $\mathbf{z}_0$. Pour cela nous suivons les méthodes employées dans l'article [8]. Nous commençons donc par rappeler deux résultats.

Proposition 6.5.2 *Soient $s \geq 3$ et Ω un domaine de $\mathbb{R}^3$, pour tout $\mathbf{u} \in H^s(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Il existe une constante K qui dépend de s et Ω telle que*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega,\mathbb{R}^3)} \leq K\big[&\|\mathrm{div}(\mathbf{u})\|_{\mathrm{H^{s-1}}(\Omega,\mathbb{R}^3)} + \|\mathrm{curl}(\mathbf{u})\|_{\mathrm{H^{s-1}}(\Omega,\mathbb{R}^3)} \\ &+\|\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\|_{H^{s-1/2}(\partial\Omega,\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{u}\|_{H^{s-1}(\Omega,\mathbb{R}^3)}\big]. \end{aligned} \tag{6.35}$$

où $\mathrm{curl}(\mathbf{u})$ *est la matrice définie par*

$$\mathrm{curl}(\mathbf{u})_{\mathrm{i,j}} = \frac{\partial \mathbf{u}_\mathrm{i}}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{j}} - \frac{\partial \mathbf{u}_\mathrm{j}}{\partial \mathrm{x}_\mathrm{i}}, \qquad \textit{pour } \mathrm{i,j} \in \{1,2,3\}.$$

De plus pour toute norme plus faible sur $H^{s-1}(\Omega,\mathbb{R}^3)$ *noté* $|||\cdot|||$*, il existe une constante* K *telle que*

$$\|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega,\mathbb{R}^3)} \leq K\left[\|\mathrm{div}(\mathbf{u})\|_{\mathrm{H^{s-1}}(\Omega,\mathbb{R}^3)} + \|\mathrm{curl}(\mathbf{u})\|_{\mathrm{H^{s-1}}(\Omega,\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}\|_{H^{s-1/2}(\partial\Omega,\mathbb{R}^3)} + |||\mathbf{u}|||\right].$$

La preuve de cette proposition peut être trouver dans l'article [8, Lemme 5 page 349]. Nous avons aussi besoin du Lemme suivant :

Lemme 6.5.1 *Soient* $s \geq 3$ *un entier,* $r > 0$*,* Ω_1 *et* Ω_2 *deux ouverts de* $\mathbb{R}^3$ *tels que l'ensemble* $\mathrm{Diff^s}(\Omega_1,\Omega_2)$ *ne soit pas vide. Pour tout* $f \in H^s(\Omega_2)$ *et* $\eta \in \mathrm{Diff^s}(\Omega_1,\Omega_2)$ *tel que*

$$\|\eta\|_{H^s(\Omega_1,\mathbb{R}^3)} \leq r,$$

il existe une constante $C(r)$ *telle que*

$$\left\|\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(f\circ\eta^{-1})\right)\circ\eta - \frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_{H^{s-1}(\Omega_2,\mathbb{R}^3)} \leq C(r)\|D_\mathbf{x}\eta - Id_3\|_{H^{s-1}(\Omega_1,\mathbb{R}^3)}\,\|f\|_{H^s(\Omega_2)}. \tag{6.36}$$

Ce lemme est une adaptation du Lemme 4 de l'article [8].

En suivant les méthodes utilisées dans l'article [8], nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 6.5.3 *Soient* $s \geq 3$ *un entier,* $\mathbf{z}_0 = (\sigma_0,\nu_0)$ *avec*

$$\sigma_0 = (e_{F(0)}, \mathbf{h}_0, Id_3) \in \Sigma^s_\epsilon(\Omega,S) \textit{ et } \nu_0 = (\mathbf{u}_0,\mathbf{k}_0,\mathbf{w}_0) \in T_{\sigma_0}\Sigma^s_\epsilon(\Omega,S).$$

Alors l'application Π^s *est localement lipschitzienne sur un voisinage de* $\mathbf{z}_0$*.*

Preuve : Comme pour la preuve de la Proposition 6.5.1, nous fixons un $r > 0$ et nous considérons l'ensemble $B^s(r)$ des éléments de F^s vérifiant

$$B^s(r) = \left\{\mathbf{z} \in F^s \,|\, |\mathbf{z}-\mathbf{z}_0|_{E^s} \leq r\right\}.$$

Dans la suite $\mathbf{z}_1$ et $\mathbf{z}_2$ seront dans $B^s(r)$ et nous noterons par $K(r)$ une fonction croissante en r qui jouera le rôle de constante. Pour simplifier la lecture, nous ne distinguerons pas les constantes $K(r)$. Nous suivons ici la démarche adoptée dans l'article [8] pour démontrer la Proposition 6.5.3. Nous rappelons que

$$\xi(\mathbf{y}) = \mathbf{u}\circ\eta(\mathbf{y}) \text{ pour tout } \mathbf{y} \in F(0),$$

et que $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{k} + \mathbf{w}\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{h})$. Nous rappelons aussi que le vecteur normal $\mathbf{n}$ extérieur au fluide sur $\partial F_\mathbf{q}$ s'exprime en fonction d'une extension du vecteur normal $\overline{\mathbf{n}}$ de ∂S grâce à la formule

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = [R]\overline{\mathbf{n}}(\mathbf{h}_0 + [R]^*(\mathbf{x}-\mathbf{h})), \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in F_\mathbf{q}.$$

Nous commençons par simplifier certaines expressions. Nous regardons l'expression

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi_j\circ\eta^{-1}}{\partial x_i}(\eta(\mathbf{y})) &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \eta_k^{-1}}{\partial x_i}(\eta(\mathbf{y}))\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}(\mathbf{y}),\\
&= \sum_{k=1}^3 [D\xi(\mathbf{y})]_{jk}[D\eta^{-1}(\eta(\mathbf{y}))]_{ki},\\
&= \sum_{k=1}^3 [D\xi(\mathbf{y})]_{jk}([D\eta(\mathbf{y})]^{-1})_{ki}.
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $\mathbf{y} \in F(0)$, nous obtenons une formule réduite pour

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\xi \circ \eta^{-1})(\eta(\mathbf{y})) &= \sum_{i,j,k,l,m=1}^{3} [D\xi(\mathbf{y})]_{jk}([D\eta(\mathbf{y})]^{-1})_{kl}[D\xi(\mathbf{y})]_{lm}([D\eta(\mathbf{y})]^{-1})_{mi}, \\ &= \mathrm{tr}([\mathrm{D}\xi(\mathbf{y})][\mathrm{D}\eta(\mathbf{y})]^{-1}[\mathrm{D}\xi(\mathbf{y})][\mathrm{D}\eta(\mathbf{y})]^{-1}).\end{aligned}$$

Nous obtenons donc la relation suivante

$$\mathcal{F}(\xi \circ \eta^{-1})(\eta(\mathbf{y})) = \alpha(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \qquad \text{pour tout } \mathbf{y} \in F(0).$$

Concernant les termes de bord, il faut commencer par obtenir une extension convenable du vecteur normal orienté vers l'extérieur du fluide. Nous rappelons que dans cette thèse les bords des domaines sont supposés de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi sur $\partial\Omega$, le vecteur normal $\mathbf{n}$ peut se prolonger sur un voisinage du bord par une application $\mathbf{N}$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$. Pour tout $\mathbf{y} \in \partial\Omega$, nous obtenons donc la relation

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\xi \circ \eta^{-1})(\eta(\mathbf{y})) &= \sum_{i,j=1}^{3} \xi_i(\mathbf{y})\xi_j(\mathbf{y})\frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial x_j}(\eta(\mathbf{y})), \\ &= [D\mathbf{N}(\eta(\mathbf{y}))]\xi(\mathbf{y}) \cdot \xi(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Comme pour la fonction $\mathcal{F}$, il faut remarquer que

$$\mathcal{G}(\xi \circ \eta^{-1})(\eta(\mathbf{y})) = \beta_0(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \qquad \text{pour tout } \mathbf{y} \in \partial\Omega.$$

De même le vecteur normal $\overline{\mathbf{n}}$ sur ∂S admet une extension de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3$. Attention ici il ne faut pas le confondre avec le vecteur normal sur $\partial S_{\mathbf{q}}$. Une extension de ce dernier est donnée par la formule

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = [R]\overline{\mathbf{N}}(\mathbf{h}_0 + [R]^*(\mathbf{x} - \mathbf{h})), \text{ pour tout } \mathbf{x} \in \partial S_{\mathbf{q}},$$

où $\overline{\mathbf{N}}$ est une extension du vecteur normal sur ∂S. Pour simplifier et uniformiser les notations, nous noterons $\overline{\mathbf{N}}$ par $\mathbf{N}$. Ceci permet d'avoir un vecteur $\mathbf{N}$ défini sur tout $\partial F(0)$. Nous simplifions l'expression

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{n}_i}{\partial x_j} &= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left([R]_{ik}\mathbf{N}_k(\mathbf{h}_0 + [R]^*(\mathbf{x} - \mathbf{h}))\right), \\ &= \sum_{k,l=1}^{3} [R]_{ik}\frac{\partial \mathbf{N}_k}{\partial x_l}(\mathbf{h}_0 + [R]^*(\mathbf{x} - \mathbf{h}))[R]_{lj}, \\ &= ([R][D\mathbf{N}(\mathbf{h}_0 + [R]^*(\mathbf{x} - \mathbf{h}))][R])_{ij}.\end{aligned}$$

Ainsi l'expression sur le bord $S_{\mathbf{q}}$ devient

$$\mathcal{G}(\xi \circ \eta^{-1} - \mathbf{v})(\eta(\mathbf{y})) = \sum_{i,j=1}^{3} \left(\xi_i(\mathbf{y}) - \mathbf{v}_i(\eta(\mathbf{y}))\right)\left(\xi_j(\mathbf{y}) - \mathbf{v}_j(\eta(\mathbf{y}))\right) ([R][D\mathbf{N}(\mathbf{h}_0 + [R]^*(\eta(\mathbf{y}) - \mathbf{h}))][R])_{ij}.$$

Donc la dérivée normale de μ sur $\partial S_{\mathbf{q}}$ est donnée par

$$\frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \beta(\mathbf{z}, \eta^{-1}(\mathbf{x})) \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \partial S_{\mathbf{q}}.$$

Nous allons estimer la norme de $\Pi^s(\mathbf{z}_1) - \Pi^s(\mathbf{z}_1)$. Pour cela nous utilisons le Lemme 3.3.3 et nous obtenons

$$\|\Pi^s(\mathbf{z}_1) - \Pi^s(\mathbf{z}_1)\|_{H^s(F(0),\mathbb{R}^3)} \leq K(r) \left\|\nabla\mu(\mathbf{z}_1, \eta_1 \circ \eta_2^{-1}) - \nabla\mu(\mathbf{z}_2, \cdot)\right\|_{H^s(F_{\mathbf{q}_2},\mathbb{R}^3)}.$$

Dans la suite pour simplifier les calculs nous noterons par

$$\eta = \eta_1 \circ \eta_2^{-1}, \qquad \mu_1 = \mu(\mathbf{z}_1), \qquad \mu_2 = \mu(\mathbf{z}_2).$$

Nous appliquons ensuite la Proposition 6.5.2 à $\nabla\mu_1 \circ \eta - \nabla\mu_2$. Nous obtenons donc les quatre quantités suivantes que nous devons examiner.

$$\begin{aligned} I_1 &= \|\mathrm{div}\,(\nabla\mu_1 \circ \eta - \nabla\mu_2)\|_{H^{s-1}(F_{\mathbf{q}_2},\mathbb{R}^3)}, \\ I_2 &= \|\mathrm{curl}\,(\nabla\mu_1 \circ \eta - \nabla\mu_2)\|_{H^{s-1}(F_{\mathbf{q}_2},\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))}, \\ I_3 &= \|(\nabla\mu_1 \circ \eta - \nabla\mu_2)\cdot\mathbf{n}\|_{H^{s-1/2}(\partial F_{\mathbf{q}_2},\mathbb{R}^3)}, \\ I_4 &= |||\nabla\mu_1 \circ \eta - \nabla\mu_2|\,|||, \end{aligned}$$

où $|||\cdot|||$ est une norme plus faible que la norme sur $H^{s-1}(\partial F_{\mathbf{q}_2},\mathbb{R}^3)$. Nous donnerons une expression de cette norme lorsque nous regarderons I_4.

Pour I_1 il faut faire apparaître le Laplacien de μ_1 et μ_2. Le Lemme 3.3.3 conduit à

$$I_1 \leq K(r)\left(\|\mathrm{div}\,(\nabla\mu_1 \circ \eta) - \Delta\mu_1 \circ \eta\|_{H^{s-1}(F_{\mathbf{q}_2},\mathbb{R}^3)} + \|\alpha(\mathbf{z}_1) - \alpha(\mathbf{z}_2)\|_{H^{s-1}(F_{\mathbf{q}_2},\mathbb{R}^3)}\right).$$

En appliquant le Lemme 6.5.1 et le Lemme 3.3.3, nous obtenons les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \|\mathrm{div}\,(\nabla\mu_1 \circ \eta) - \Delta\mu_1\|_{H^{s-1}(F(0),\mathbb{R}^3)} &\leq K(r)\,\|D\eta - Id_3\|_{H^{s-1}(F_{\mathbf{q}_2},\mathbb{R}^3)}\,\|\nabla\mu_1\|_{H^s(F_{\mathbf{q}_1},\mathbb{R}^3)}, \\ &\leq K(r)\,\|\eta_1 - \eta_2\|_{H^s(F(0),\mathbb{R}^3)}\,\|\nabla\mu_1\|_{H^s(F_{\mathbf{q}_1},\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Le théorème 3.4.1 permet de contrôler le terme $\nabla\mu_1$ et en utilisant le fait que α soit localement Lipschitzienne, nous pouvons en déduire l'existence d'une constante $C(r)$ telle que

$$I_1 \leq K(r)\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_{E^s}.$$

Pour I_2, nous rappelons que $\mathrm{curl}(\nabla \mathrm{f}) = 0$ pour toute fonction f. En utilisant une décomposition similaire à I_1 et en appliquant encore le Lemme 6.5.1 aux termes restant, nous obtenons aussi

$$I_2 \leq K(r)\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_{E^s}.$$

Pour I_3, il faut remarquer que le vecteur normal $\mathbf{n}$ qui intervient est défini sur le bord $\partial F_{\mathbf{q}_2}$. Pour différencier les vecteurs normaux nous notons par $\mathbf{n}^1$ celui sur $\partial F_{\mathbf{q}_1}$ et par $\mathbf{n}^2$ celui sur $\partial F_{\mathbf{q}_2}$. Ainsi nous obtenons la majoration suivante pour I_3

$$I_3 \leq K(r)\left[\left\|\nabla\mu_1 \circ \eta \cdot \left(\mathbf{n}^2 - \mathbf{n}^1(\eta)\right)\right\|_{H^{s-1/2}(\partial F_{\mathbf{q}_2},\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial\mu_1}{\partial\mathbf{n}^1} \circ \eta - \frac{\partial\mu_2}{\partial\mathbf{n}^2}\right\|_{H^{s-1/2}(\partial F_{\mathbf{q}_2},\mathbb{R}^3)}\right].$$

En appliquant le Théorème 3.3.1, nous obtenons

$$I_3 \leq K(r)\left[\left\|\mathbf{n}^2(\eta_2) - \mathbf{n}^1(\eta_1)\right\|_{H^{s-1/2}(\partial F(0),\mathbb{R}^3)} + \left\|\frac{\partial\mu_1}{\partial\mathbf{n}^1} \circ \eta_1 - \frac{\partial\mu_2}{\partial\mathbf{n}^2} \circ \eta_2\right\|_{H^{s-1/2}(\partial F(0),\mathbb{R}^3)}\right].$$

En utilisant une extension des vecteurs normaux $\mathbf{n}^1$ et $\mathbf{n}^2$ et en appliquant le Lemme 3.11, il existe une constante $K(r)$ telle que

$$\left\|\mathbf{n}^2(\eta_2) - \mathbf{n}^1(\eta_1)\right\|_{H^{s-1/2}(\partial F(0),\mathbb{R}^3)} \leq K(r)\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_{E^s}.$$

Pour la seconde partie nous remarquons que les termes de bords sont

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mu_i}{\partial \mathbf{n}^i}\circ\eta_i(\mathbf{y}) &= \beta_0(\mathbf{z}_i)(\mathbf{y}), \qquad \text{pour } \mathbf{y}\in\partial\Omega,\\ \frac{\partial \mu_i}{\partial \mathbf{n}^i}\circ\eta_i(\mathbf{y}) &= \beta(\mathbf{z}_i)(\mathbf{y}), \qquad \text{pour } \mathbf{y}\in\partial S.\end{aligned}$$

le Lemme 6.5.1 permet d'assurer l'existence d'une constante $K(r)$ telle que

$$\left\|\frac{\partial \mu_1}{\partial \mathbf{n}^1}\circ\eta_1 - \frac{\partial \mu_2}{\partial \mathbf{n}^2}\circ\eta_2\right\|_{H^{s-1/2}(\partial F(0),\mathbb{R}^3)} \leq K(r)\|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2\|_{E^s}.$$

Ainsi pour I_3, il existe une constante $K(r)$ telle que

$$I_3 \leq K(r)\|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2\|_{E^s}.$$

Enfin pour I_4, nous pouvons utiliser la norme suivante pour $\mathbf{f}\in H^{s-1}(F_{\mathbf{q_2}},\mathbb{R}^3)$:

$$|||\mathbf{f}||| = \sup\left\{\int_{F_{\mathbf{q_2}}}\mathbf{f}(\mathbf{y})\gamma(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\,;\,\gamma\in\mathcal{C}^{\mathrm{s}}(\overline{\mathrm{F}_{\mathbf{q_2}}},\mathbb{R}^3),\ \gamma=0 \text{ sur } \partial\mathrm{F}_{\mathbf{q_2}} \text{ et } \|\gamma\|_{\mathcal{C}^{\mathrm{s}}(\overline{\mathrm{F}_{\mathbf{q_2}}})}\leq 1\right\}.$$

Or en effectuant le changement de variable $\mathbf{x}=\eta_2(\mathbf{y})$, nous avons

$$\int_{F_{\mathbf{q_2}}}\mathbf{f}(\mathbf{x})\gamma(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\mathrm{F}(0)}\mathbf{f}(\eta_2(\mathbf{y}))\gamma(\eta_2\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}.$$

Ainsi nous remplaçons la norme de $\mathbf{f}$ par

$$|||\mathbf{f}||| = \sup\left\{\int_{F(0)}\mathbf{f}(\eta_2(\mathbf{y}))\gamma(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\,;\,\gamma\in\mathcal{C}^{\mathrm{s}}(\overline{\mathrm{F}(0)},\mathbb{R}^3),\ \gamma=0 \text{ sur } \partial\mathrm{F}(0) \text{ et } \|\gamma\|_{\mathcal{C}^{\mathrm{s}}}\leq 1\right\}.$$

Le but est donc de montrer qu'il existe une constante $K(r)$ telle que

$$\int_{F(0)}\left[\nabla\mu_1\circ\eta_1(\mathbf{y})-\nabla\mu_2\circ\eta_2(\mathbf{y})\right]\gamma(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\leq K(r)\|\gamma\|_{\mathcal{C}^s}\|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_2\|_{E^s},$$

pour toute fonction $\gamma\in\mathcal{C}^s(\overline{F(0)},\mathbb{R}^3)$. Nous commençons par rappeler que pour $i=1,2$, μ_i est solution du problème de Neumann suivant :

$$\begin{aligned}-\Delta\mu_i(\mathbf{x}) &= \alpha(\mathbf{z}_i,\eta_i^{-1}(\mathbf{x})), \qquad \mathbf{x}\in F(0),\\ \frac{\partial\mu_i}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x}) &= \beta_0(\mathbf{z}_i,\eta_i^{-1}(\mathbf{x})), \qquad \mathbf{x}\in\partial\Omega,\\ \frac{\partial\mu_i}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x}) &= \beta(\mathbf{z}_i,\eta_i^{-1}(\mathbf{x})), \qquad \mathbf{x}\in\partial S(0).\end{aligned}$$

La formulation variationnelle associée à ce problème est

$$\begin{aligned}\int_{F_{\mathbf{q_i}}}\nabla\mu_i(\mathbf{x})\cdot\nabla\Phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = &\int_{F_{\mathbf{q_i}}}\alpha(\mathbf{z}_i,\eta_i^{-1}(\mathbf{x}))\Phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}\\ &+\int_{\partial\Omega}\beta_0(\mathbf{z}_i,\eta_i^{-1}(\mathbf{x}))\Phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{x}}+\int_{\partial\mathrm{S}_{\mathbf{q_i}}}\beta(\mathbf{z}_{\mathrm{i}},\eta_{\mathrm{i}}^{-1}(\mathbf{x}))\Phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{x}},\end{aligned}$$

pour tout $\Phi \in H^{s+1}(F_{\mathbf{q_i}}, \mathbb{R}^3)$. Nous effectuons le changement de variable $\mathbf{x} = \eta_i(\mathbf{y})$,

$$\begin{aligned}\int_{F(0)} \nabla\mu_i(\eta_i(\mathbf{y})) \cdot \nabla\Phi(\eta_i(\mathbf{y}))\mathrm{d}\mathbf{y} &= \int_{F(0)} \alpha(\mathbf{z}_i, \mathbf{y})\Phi(\eta_i(\mathbf{y}))\mathrm{d}\mathbf{y} \\ &+ \int_{\partial\Omega} \beta_0(\mathbf{z}_i, \mathbf{y})\Phi(\eta_i(\mathbf{y})) \left|\left([D\eta_i(\mathbf{y})]^{-1}\right)^* \mathbf{n}(\mathbf{y})\right| \mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}} \\ &+ \int_{\partial S(0)} \beta(\mathbf{z}_i, \mathbf{y})\Phi(\eta_i(\mathbf{y})) \left|\left([D\eta_i(\mathbf{y})]^{-1}\right)^* \mathbf{n}(\mathbf{y})\right| \mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}},\end{aligned}$$

Nous posons $\Psi(\mathbf{y}) = \Phi(\eta_i(\mathbf{y})) \in H^s(F(0))$, car si $\Phi \in H^{s+1}(F_{\mathbf{q_i}})$ et $\eta_i \in \mathrm{Diff^s(F(0), F_{\mathbf{q_i}})}$, le Lemme 3.3.3 assure que $\Psi \in H^s(F(0))$. De plus si Φ décrit $H^{s+1}(F_{\mathbf{q_i}})$, alors Ψ décrit $H^s(F(0))$. Ainsi pour tout $\Psi \in H^s(F(0))$, nous avons

$$\begin{aligned}&\int_{F(0)} ([D\eta_i(\mathbf{y})]^{-1})^* \nabla\mu_i(\eta_i(\mathbf{y})) \cdot \nabla\Psi(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_{\mathrm{F(0)}} \alpha(\mathbf{z_i}, \mathbf{y})\Psi(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} \\ &+ \int_{\partial\Omega} \beta_0(\mathbf{z}_i, \mathbf{y})\Psi(\mathbf{y}) \left|\left([D\eta_i(\mathbf{y})]^{-1}\right)^* \mathbf{n}(\mathbf{y})\right| \mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}} + \int_{\partial \mathrm{S(0)}} \beta(\mathbf{z_i}, \mathbf{y})\Psi(\mathbf{y}) \left|\left([\mathrm{D}\eta_i(\mathbf{y})]^{-1}\right)^* \mathbf{n}(\mathbf{y})\right| \mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}}\end{aligned} \tag{6.37}$$

Cette relation va nous permettre de traiter le cas de I_4. Nous introduisons la quantité

$$f(\gamma) = \int_{F(0)} (\nabla\mu_1(\eta_1(\mathbf{y})) - \nabla\mu_2(\eta_2(\mathbf{y}))) \cdot \gamma(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}. \tag{6.38}$$

Dans $f(\gamma)$, nous utilisons les relations $Id_3 = ([D\eta_i])^*([D\eta_i]^{-1})^*$ et ainsi faire apparaître les formules (6.37).

$$\begin{aligned}f(\gamma) &= \int_{F(0)} \left[([D\eta_1(\mathbf{y})]^* - [D\eta_2(\mathbf{y})]^*) ([D\eta_1(\mathbf{y})]^{-1})^* \nabla\mu_1(\eta_1(\mathbf{y}))\right] \cdot \gamma(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} \\ &+ \int_{F(0)} \left([D\eta_2(\mathbf{y})]^* ([D\eta_1]^{-1})^* \nabla\mu_1(\eta_1(\mathbf{y}))\right) \cdot \gamma(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} \\ &- \int_{F(0)} \left([D\eta_2(\mathbf{y})]^* ([D\eta_2(\mathbf{y})]^{-1})^* \nabla\mu_2(\eta_2(\mathbf{y}))\right) \cdot \gamma(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\end{aligned}$$

Nous introduisons le problème de Neumann suivant

$$\Delta\Psi(\mathbf{y}) = \mathrm{div}\left([\mathrm{D}\eta_2(\mathbf{y})]\gamma(\mathbf{y})\right), \quad \mathbf{y} \in \mathrm{F}(0), \tag{6.39a}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} \in \partial F(0). \tag{6.39b}$$

Nous rappelons que $\eta \in H^s(F(0))$ et $\gamma \in \mathcal{C}^s(\overline{F(0)}, \mathbb{R}^3)$ avec $\gamma(\mathbf{y}) = 0$ pour tout $\mathbf{y} \in \partial F(0)$. Il est facile de vérifier que $\mathrm{div}([\mathrm{D}\eta_2]\gamma) \in \mathrm{H^{s-2}(F(0))}$ et que

$$\int_{F(0)} \mathrm{div}([\mathrm{D}\eta_2(\mathbf{y})]\gamma(\mathbf{y}))\mathrm{d}\mathbf{y} = \int_{\partial \mathrm{F(0)}} ([\mathrm{D}\eta_2(\mathbf{y})]\gamma(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}} = 0.$$

Le Théorème 3.4.1 assure l'existence et l'unicité de la solution $\Psi \in N^s(F(0))$ du problème de Neumann ci-dessus et il existe une constante $K(r)$ telle que

$$\|\nabla\Psi\|_{H^{s-1}(F(0))} \leq K(r)\|\mathrm{div}([\mathrm{D}\eta_2]\gamma)\|_{\mathrm{H^{s-2}(F(0))}}.$$

Ainsi en utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger et en sortant la norme de γ, il existe une constante $K(r)$ telle que

$$\|\Psi\|_{H^s(F(0))} \leq K(r)\|\gamma\|_{\mathcal{C}^s(\overline{F(0)})}. \tag{6.40}$$

De plus il est facile de vérifier que $\nabla\Psi = [D\eta_2]\gamma$ dans $H^{s-1}(F(0),\mathbb{R}^3)$ donc nous pouvons utiliser la solution Ψ du problème de Neumann (6.39) comme fonction test dans (6.37). Ainsi nous obtenons la relations suivantes

$$\begin{aligned}
J_i &= \int_{F(0)} \left(([D\eta_i(\mathbf{y})]^{-1})^* \nabla\mu_i(\eta_i(\mathbf{y}))\right)\cdot[D\eta_2(\mathbf{y})]\gamma(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y},\\
&= \int_{F(0)} \left(([D\eta_i(\mathbf{y})]^{-1})^* \nabla\mu_i(\eta_i(\mathbf{y}))\right)\cdot\nabla\Psi(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y},\\
&= \int_{F(0)} \alpha(\mathbf{z}_i,\mathbf{y})\Psi(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y} + \int_{\partial\Omega} \beta_0(\mathbf{z}_\mathrm{i},\mathbf{y})\Psi(\mathbf{y})\left|\left([\mathrm{D}\eta_\mathrm{i}(\mathbf{y})]^{-1}\right)^*\mathbf{n}(\mathbf{y})\right|\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}}\\
&+ \int_{\partial S(0)} \beta(\mathbf{z}_i,\mathbf{y})\Psi(\mathbf{y})\left|\left([D\eta_i(\mathbf{y})]^{-1}\right)^*\mathbf{n}(\mathbf{y})\right|\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}}.
\end{aligned}$$

Ainsi $f(\gamma)$ se met sous la forme

$$\begin{aligned}
f(\gamma) &= \int_{F(0)} \left[\left([D\eta_1(\mathbf{y})]^* - [D\eta_2(\mathbf{y})]^*\right)([D\eta_1(\mathbf{y})]^{-1})^*\nabla\mu_1(\eta_1(\mathbf{y}))\right]\cdot\gamma(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\\
&+ \int_{F(0)} \left(\alpha(\mathbf{z}_1,\mathbf{y}) - \alpha(\mathbf{z}_2,\mathbf{y})\right)\Psi(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}\\
&+ \int_{\partial\Omega} \left(\beta_0(\mathbf{z}_1,\mathbf{y})\left|\left([D\eta_1(\mathbf{y})]^{-1}\right)^*\mathbf{n}(\mathbf{y})\right| - \beta_0(\mathbf{z}_2,\mathbf{y})\left|\left([D\eta_2(\mathbf{y})]^{-1}\right)^*\mathbf{n}(\mathbf{y})\right|\right)\Psi(\mathbf{y})\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}}\\
&+ \int_{\partial S(0)} \left(\beta(\mathbf{z}_1,\mathbf{y})\left|\left([D\eta_1(\mathbf{y})]^{-1}\right)^*\mathbf{n}(\mathbf{y})\right| - \beta(\mathbf{z}_2,\mathbf{y})\left|\left([D\eta_2(\mathbf{y})]^{-1}\right)^*\mathbf{n}(\mathbf{y})\right|\right)\Psi(\mathbf{y})\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}}.
\end{aligned}$$

Nous notons par $\mathbf{N}$ un prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ des vecteurs normaux $\mathbf{n}$ $\partial\Omega$ et $\partial S(0)$. Nous obtenons donc les estimations suivantes pour $f(\gamma)$

$$\begin{aligned}
f(\gamma) &\leq \|[D\eta_1] - [D\eta_2]\|_{L^2(F(0))}\left\|([D\eta_1]^{-1})^*\nabla\mu_1\circ\eta_1\right\|_{L^2(F(0))}\|\gamma\|_{\mathcal{C}^s(\bar{(}F(0)))}\\
&+ \|\alpha(\mathbf{z}_1,\cdot) - \alpha(\mathbf{z}_2,\cdot)\|_{L^2(F(0))}\|\Psi\|_{L^2(F(0))}\\
&+ \left\|[\beta_0(\mathbf{z}_1,\cdot) - \beta_0(\mathbf{z}_2,\cdot)]\,|([D\eta_1]^{-1})^*\mathbf{N}|\right\|_{L^2(F(0))}\|\Psi\|_{L^2(F(0))}\\
&+ \left\|\beta_0(\mathbf{z}_2,\cdot)\left[|([D\eta_1]^{-1})^*\mathbf{N}| - |([D\eta_2]^{-1})^*\mathbf{N}|\right]\right\|_{L^2(F(0))}\|\Psi\|_{L^2(F(0))}\\
&+ \left\|[\beta(\mathbf{z}_1,\cdot) - \beta(\mathbf{z}_2,\cdot)]\,|([D\eta_1]^{-1})^*\mathbf{N}|\right\|_{L^2(F(0))}\|\Psi\|_{L^2(F(0))}\\
&+ \left\|\beta(\mathbf{z}_2,\cdot)\left[|([D\eta_1]^{-1})^*\mathbf{N}| - |([D\eta_2]^{-1})^*\mathbf{N}|\right]\right\|_{L^2(F(0))}\|\Psi\|_{L^2(F(0))}.
\end{aligned}$$

Nous rappelons que les applications α, β_0 et β sont lipschitziennes sur F^s. En utilisant le Théorème 3.3.1, le Lemme 3.3.3, la majoration (6.40) sur Ψ et l'inégalité

$$\left||([D\eta_1]^{-1})^*\mathbf{N}| - |([D\eta_2]^{-1})^*\mathbf{N}|\right| \leq \left|([D\eta_1]^{-1})^*\left[[D\eta_2] - [\eta_1]\right]^*([D\eta_2]^{-1})^*\mathbf{N}\right|,$$

il existe une constante $K(r)$ telle que

$$|f(\gamma)| \leq K(r)\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_{E^s}\|\gamma\|_{\mathcal{C}^s(\bar{(}F(0)))}.$$

Ainsi en prenant la borne supérieur sur les fonction de $\mathcal{C}^s(\overline{F(0)})$, il existe une constante $K(r)$ telle que

$$I_4 \leq K(r)\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_{E^s}.$$

Il existe donc une constante $K(r)$ telle que pour tout $\mathbf{z}_1 \in B^s(r)$ et $\mathbf{z}_2 \in B^s(r)$ nous avons

$$\|\Pi^s(\mathbf{z}_1) - \Pi^s(\mathbf{z}_1)\| \leq K(r)\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_{E^s}.$$

Ainsi l'application Π^s est localement lipschitzienne au voisinage de $\mathbf{z}_0$. ■

Finalement nous pouvons en déduire le théorème suivant

Théorème 6.5.1 *Soient $s \geq 3$ un entier, $\mathbf{z}_0 = (\sigma_0, \nu_0)$ avec*

$$\sigma_0 = (e_{F(0)}\mathbf{h}_0, Id_3) \in \Sigma^s_\epsilon(\Omega, S) \text{ et } \nu_0 = (\mathbf{u}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{w}_0) \in T_{\sigma_0}\Sigma^s_\epsilon(\Omega, S).$$

Les application $\mathcal{L}_S$, $\mathcal{L}_F$ et $\mathcal{L}$ sont localement lipschitziennes sur un voisinage de $\mathbf{z}_0$.

Preuve : Nous notons par $\mathbf{q}_0 = (\mathbf{h}_0, Id_3)$. Pour $r > 0$ nous définissons comme précédemment l'ensemble $B^s(r)$ par

$$B^s(r) = \{\mathbf{z} \in F^s \mid |\mathbf{z} - \mathbf{z}_0|_{E^s} \leq r\}.$$

Nous commençons par montrer que $\mathcal{L}_S$ est localement lipschitzienne sur $B^s(r)$ pour r assez petit. La Proposition 6.5.3, l'application assure que Π^s est localement lipschitzienne sur $B^s(r)$. Concernant l'application $[\mathcal{K}(\mathbf{q})]^{-1}$ définie par 6.18, le Théorème 4.1.2 assure que $\mathbf{q} \mapsto [\mathcal{K}(\mathbf{q})]$ est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de $(\mathbf{h}_0, Id_3)$ et la formule 6.33 montre que cette dernière application est localement lipschitzienne. Le corollaire du théorème 4.1.1 montre que les fonctions Φ, définies par 6.12, sont aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de $(\mathbf{h}_0, Id_3)$. Enfin il faut signaler le fait que pour tout $\mathbf{q}$ dans un voisinage de $\mathbf{q}_0$ le Théorème 3.4.1 montre que les fonctions Φ sont dans $\mathcal{C}^\infty(F_\mathbf{q}, \mathbb{R}^6)$ car les membres de droite des problèmes de Neumann 6.12 sont dans les espaces $V^k(F_\mathbf{q}, \mathbb{R})$ donc les solutions sont dans $H^k(F_\mathbf{q}, \mathbb{R})$ pour tout $k \geq 0$. De plus en appliquant les Lemme 3.3.1 et 3.3.2 nous obtenons que l'application

$$\mathbf{z} \in B^s(r) \mapsto \nabla\Phi \circ \eta \in H^s(F(0), \mathcal{M}_{3\times 6}(\mathbb{R})),$$

est localement lipschitzienne sur $B^s(r)$. Il est facile de voir que l'application

$$\mathbf{z} \in B^s(r) \mapsto I(J, \mathbf{w}) = (0_3, ([J]\mathbf{w}) \wedge \mathbf{w}) \in \mathbb{R}^6$$

est localement lipschitzienne. En utilisant le changement de variable $\mathbf{x} = \eta(\mathbf{y})$ pour $\mathbf{y} \in F(0)$ et $\mathbf{x} \in F_\mathbf{q}$, nous obtenons la formule suivante

$$\int_{F_\mathbf{q}} \nabla\mu(\mathbf{x}) \cdot \nabla\Phi(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{F_{\mathbf{q}_0}} \nabla\mu(\eta(\mathbf{y})) \cdot \nabla\Phi(\eta(\mathbf{y})) \mathrm{d}\mathbf{y}. \tag{6.41}$$

Nous rappelons que η est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $F_{\mathbf{q}_0}$ sur $F_\mathbf{q}$ tel que $|\det([\mathrm{D}_\mathbf{y}\eta])| = 1$. De plus en utilisant le Théorème 3.3.1, $\nabla\mu(\eta) \cdot \nabla\Phi(\eta)$ est dans l'espace $H^s(F_{\mathbf{q}_0}, \mathbb{R})$. Grâce aux propriétés obtenues précédemment et à la linéarité de l'intégrale, l'intégrale définie par 6.41 est une application localement lipschitzienne sur un voisinage de $\mathbf{z}_0$. Ainsi il existe un $r > 0$ tel que $\mathcal{L}_S$ soit lipschitzienne sur $B^s(r)$.

Pour $\mathcal{L}_F$, nous remarquons que c'est une combinaison de somme et de produit d'applications localement lipschitziennes donc il existe un $r > 0$ tel que $\mathcal{L}_F$ soit lipschitzienne sur $B^s(r)$. Ceci permet donc de conclure qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{L}$ soit lipschitzienne sur $B^s(r)$. ■

6.6 Preuve du résultat principal

Dans cette section nous allons démontrer le Théorème 6.1.1. Pour cela nous appliquons le Théorème 6.2.1 de R.H. Martin à l'équation différentielle ordinaire (6.26)

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{z}}{dt}(t) = \mathcal{L}(t, \mathbf{z}(t)), \\ &\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 = (e_{F_0}, \mathbf{h}_0, Id_3, \mathbf{u}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{w}_0) \text{ pour } \mathbf{y} \in F(0), \end{aligned}$$

où $\mathcal{L}$ est défini par (6.25) et $\mathbf{z}_0 \in F^s$ pour $s \geq 3$. Dans la partie précédente nous avons montrer que l'opérateur $\mathcal{L}(t,\cdot)$ est lipschitzien sur le fermé F^s. Nous allons donc construire une courbe dans $\Sigma^s_\epsilon(\Omega, S)$ dont nous fixons la vitesse et l'accélération initiales.

Proposition 6.6.1 *Soient $s \geq 3$ un entier, $(\mathbf{h}_0, Id_3) \in P(\Omega, S)$, $(\mathbf{k}_0, \mathbf{w}_0) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $(\mathbf{L}, \mathbf{M}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}_0 \in H^s(F(0), \mathbb{R}^3)$ et $\gamma \in H^s(F(0), \mathbb{R}^3)$ vérifiant :*

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\mathbf{u}_0) &= 0, \qquad \mathbf{x} \in F(0),\\
\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} &= 0, \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega,\\
\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} &= (\mathbf{k}_0 + \mathbf{w}_0 \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{h}_0)), \qquad \mathbf{x} \in \partial S(0),\\
\mathrm{div}(\gamma) &= -\mathcal{F}(\mathbf{u}_0), \qquad \mathbf{x} \in F(0),\\
\gamma \cdot \mathbf{n} &= -\mathcal{G}(\mathbf{u}_0), \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega,\\
\gamma \cdot \mathbf{n} &= -\mathcal{G}(\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0) + (\mathbf{L} + (\mathbf{M} + \Gamma) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{h}_0) - \mathbf{w}_0 \wedge \mathbf{k}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \mathbf{v}_0), \qquad \mathbf{x} \in \partial S(0),
\end{aligned}$$

où $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{k}_0 + \mathbf{w}_0 \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{h}_0)$ et $\Gamma = (\mathbf{w}_{0,2}\mathbf{w}_{0,3}, -\mathbf{w}_{0,3}\mathbf{w}_{0,1}, \mathbf{w}_{0,1}\mathbf{w}_{0,2})^t$.

Alors il existe $T_0 > 0$ et des applications $\mathbf{q} \in \mathcal{C}^2([0,T_0];\mathbb{R}^3)$, $\theta \in \mathcal{C}^2([0,T_0];\mathbb{R}^3)$ et $\eta \in \mathcal{C}^2([0,T_0]; H^s(F(0),\mathbb{R}^3))$ tels que $(\eta(t), \mathbf{q}(t), [\mathcal{R}(\theta(t))]) \in \Sigma^s(\Omega, S)$ pour tout $t \in [0,T_0]$, $[\mathcal{R}(\theta(t))]$ est la matrice de rotation obtenue avec les angles d'Euler (1.1)*. De plus ces fonctions vérifient*

$$\begin{aligned}
\eta(0) = e_{F(0)}, \quad \dot{\eta(0)} = \mathbf{u}_0, \quad \ddot{\eta(0)} = \gamma,\\
\mathbf{q}(0) = \mathbf{h}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{k}_0, \quad \ddot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{L},\\
\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = \mathbf{w}_0, \quad \ddot{\theta}(0) = \mathbf{M},
\end{aligned}$$

où $e_{F(0)}$ est l'application identité de $F(0)$ sur $F(0)$.

Preuve : Le mouvement du solide est donné par les formules

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}(t) &= \mathbf{h}_0 + \mathbf{k}_0\, t + \frac{\mathbf{L}}{2}\, t^2,\\
\theta(t) &= \mathbf{w}_0\, t + \frac{\mathbf{M}}{2}\, t^2.
\end{aligned}$$

Ainsi le mouvement du solide est donné par la formule

$$\mathbf{X}(t,\mathbf{y}) = \mathbf{h}(t) + [\mathcal{R}(\theta(t))](\mathbf{y} - \mathbf{h}_0), \qquad \mathbf{y} \in S(0),$$

où la matrice $[\mathcal{R}(\theta(t))]$ est définie avec les angles d'Euler (1.1). De plus il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \in [0,T]$, $(\mathbf{h}(t), [R(\theta(t)]) \in P^\epsilon(\Omega, S)$. Il est facile de vérifier que cette paramétrisation du mouvement du solide convient. Dans la suite nous noterons par

$$\mathbf{Y}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{h}_0 + [\mathcal{R}(\theta(t))]^*(\mathbf{x} - \mathbf{h}(t)), \qquad \mathbf{x} \in S(t),$$

le changement de variable inverse au voisinage de $S(t)$. Grâce à cette description du mouvement, nous allons construire une application $\eta \in \mathcal{C}^2([0,T]; \mathrm{Diff^s(F(0), F_{\mathbf{q}(t)})})$. Le point de départ de cette démonstration est basée sur la preuve du Théorème 4 de l'article [8]. Nous supposons qu'il existe deux fonctions δ_0 et δ telles que

$$\partial\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \delta_0(\mathbf{x}) = 0\}, \qquad \partial S(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \delta(\mathbf{x}) = 0\}.$$

De plus nous supposons que la normale extérieur $\mathbf{n}$ à $F(0)$ est donnée par

$$\mathbf{n}(\mathbf{y}) = -\nabla\delta_0(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \partial\Omega, \qquad \mathbf{n}(\mathbf{y}) = -\nabla\delta(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \partial S(0).$$

Nous définissons l'application Φ par

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & [0,T]\times H^s(F(0),\mathbb{R}^3) & \to & V^s(F(0)), \\ & (t,\eta) & \mapsto & (\Phi_1(t,\eta),\Phi_2(t,\eta),\Phi_3(t,\eta)). \end{array} \tag{6.43}$$

où les fonctions Φ_1, Φ_2 et Φ_3 sont définies par

$$\begin{aligned} \Phi_1(t,\eta) &= \det[D_{\mathbf{y}}\eta] - \frac{1}{|F(0)|}\int_{F(0)}\det[D_{\mathbf{y}}\eta(\mathbf{y})]\mathrm{d}\mathbf{y} - \frac{1}{|\mathrm{F(0)}|}\int_{\partial\Omega}\delta_0(\eta(\mathbf{y}))\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}} \\ &\quad - \frac{1}{|F(0)|}\int_{\partial S(0)}\delta(\mathbf{h}_0+[\mathcal{R}(\theta(t))]^*(\eta(\mathbf{y})-\mathbf{h}(t)))\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{y}}, \qquad (6.44a) \\ \Phi_2(t,\eta) &= \delta_0(\eta(\mathbf{y}))_{|\partial\Omega}, \qquad (6.44b) \\ \Phi_3(t,\eta) &= \delta(\mathbf{h}_0+[\mathcal{R}(\theta(t))]^*(\eta(\mathbf{y})-\mathbf{h}(t)))_{|\partial S(0)}. \qquad (6.44c) \end{aligned}$$

Nous rappelons que l'espace $V^s(F(0),\mathbb{R}^3)$ est défini par (3.16)

$$V^s(F(0)) = \Big\{(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\in H^s(F(0))\times H^{s+1/2}(\partial\Omega)\times H^{s+1/2}(\partial F(0)) \mid \int_{F(0)}\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x}+\int_{\partial\Omega}\mathbf{v}(\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{x}}+\int_{\partial\Omega}\mathbf{w}(\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma_{\mathbf{x}}=0\Big\}.$$

Pour tout $t\in[0,T]$ et $\eta\in H^s(F(0),\mathbb{R}^3)$, par construction nous observons que $\Phi(t,\eta)\in V^s(F(0))$. De plus si $\Phi(t,\eta)=0$ alors $\eta(\partial\Omega)=\partial\Omega$, $\eta(\partial S(0))=\partial S(t)$ donc $\eta(F(0))=F(t)=\Omega\setminus S(t)$. Enfin comme $\Phi_1(t,\eta)=0$, nous en déduisons que $\det[\mathrm{D}_{\mathbf{y}}\eta(\mathbf{y})]$ est constant pour tout $\mathbf{y}\in F(0)$. Mais avec le changement de variable $\mathbf{x}=\eta(\mathbf{y})$ nous avons

$$\int_{F(0)}\det[\mathrm{D}_{\mathbf{y}}\eta(\mathbf{y})]\mathrm{d}\mathbf{y}=\int_{\mathrm{F(t)}}\mathrm{d}\mathbf{x}=|\mathrm{F(t)}|=|\mathrm{F(0)}|,$$

car nous passons de $F(0)$ à $F(t)$ par une transformation rigide. Ainsi nous obtenons le fait que $\det[\mathrm{D}_{\mathbf{y}}\eta(\mathbf{y})]=1$ pour tout $\mathbf{y}\in F(0)$.

Nous allons donc construire une fonction $\eta_t\in H^s(F(0),\mathbb{R}^3)$ telle que $\Phi(t,\eta_t)=0$ pour tout $t\in[0,T_0]$ avec $0<T_0\le T$. Nous remarquons que l'application $\Phi\in\mathcal{C}^2([0,T]\times H^s(F(0),\mathbb{R}^3);V^s(F(0)))$, sa dérivée par rapport à η au point $(0,e_{F(0)})$ est donnée par

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta}(0,e_{F(0)})\right]\mathbf{V} &= \mathrm{div}(\mathbf{V}), \\ \left[\frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta}(0,e_{F(0)})\right]\mathbf{V} &= -\mathbf{V}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{y})_{|\partial\Omega}, \\ \left[\frac{\partial\Phi_3}{\partial\eta}(0,e_{F(0)})\right]\mathbf{V} &= -\mathbf{V}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{y})_{|\partial S(0)}, \end{aligned}$$

où $e_{F(0)}$ est l'application identité de $F(0)$. Nous rappelons que $\partial\Phi/\partial\eta(0,e_{F(0)})$ est un opérateur surjectif de $H^s(F(0),\mathbb{R}^3)$ sur $V^s(F(0))$. Nous notons par $\mathcal{H}$ son noyau,

$$\mathcal{H}=\left\{\mathbf{V}\in H^s(F(0),\mathbb{R}^3)\,\middle|\,\mathrm{div}(\mathbf{V})=0,\quad \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}_{|\partial\mathrm{F}(0)}=0\right\},$$

et par $\mathcal{P}: H^s(F(0),\mathbb{R}^3)\to H^s(F(0),\mathbb{R}^3)$ la projection sur $\mathcal{H}$. Nous introduisons l'application Λ définie par

$$\begin{array}{rccl} \Lambda & :[0,T]\times H^s(F(0),\mathbb{R}^3) & \to & V^s(F(0))\times\mathcal{H}, \\ & (t,\eta) & \mapsto & (\Phi(t,\eta),\mathcal{P}(\eta-e_{F(0)}-t\mathbf{u}_0-\dfrac{t^2}{2}\gamma)). \end{array}$$

Λ est une application de classe $\mathcal{C}^2([0,T]\times H^s(F(0),\mathbb{R}^3);V^s(F(0))\times\mathcal{H})$ car Φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et l'opérateur $\mathcal{P}$ est linéaire. Nous remarquons que $\Lambda(0,e_{F(0)})=0$. La dérivée par rapport à η de Λ donne

$$[\frac{\partial\Lambda}{\partial\eta}(0,\eta)]\mathbf{V}=\left([\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}(0,\eta)]\mathbf{V},\mathcal{P}(\mathbf{V})\right).$$

Cette opérateur est un isomorphisme de $H^s(F(0),\mathbb{R}^3)$ dans $V^s(F(0))\times\mathcal{H}$. En effet la surjectivité provient de la surjectivité de $\partial\Phi/\partial\eta(0,e_{F(0)})$. Car si $(f,g,h)\in V^s(F(0))\times\mathcal{H}$, l'équation

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{V}) &= f, \qquad \mathbf{x}\in F(0),\\ \mathbf{V}\cdot\mathbf{n} &= g, \qquad \mathbf{x}\in\partial F(0),\\ \mathcal{P}(\mathbf{V}) &= h,\end{aligned}$$

admet une solution dans $H^s(F(0),\mathbb{R}^3)$ donnée par $\mathbf{V}=\mathbf{V}_0-\mathcal{P}(\mathbf{V}_0)+h$ où $\mathbf{V}_0$ est solution de

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{V}_0) &= f, \qquad \mathbf{x}\in F(0),\\ \mathbf{V}_0\cdot\mathbf{n} &= g, \qquad \mathbf{x}\in\partial F(0).\end{aligned}$$

Pour l'injectivité, la solution de

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{V}) &= 0, \qquad \mathbf{x}\in F(0),\\ \mathbf{V}\cdot\mathbf{n} &= 0, \qquad \mathbf{x}\in\partial F(0),\\ \mathcal{P}(\mathbf{V}) &= 0,\end{aligned}$$

appartient au noyau de $\partial\Phi/\partial\eta(0,e_{F(0)})$ donc à $\mathcal{H}$ donc $\mathcal{P}(\mathbf{V})=\mathbf{V}=0$. Ainsi l'unique solution de cette équation est $\mathbf{V}=0$. Nous pouvons appliquer le théorème des fonctions implicites à Λ. Il existe donc un $0<T_0\leq T$ et une application $t\mapsto\eta(t)\in\mathcal{C}^2([0,T_0];H^s(F(0),\mathbb{R}^3))$ tels que $\Lambda(t,\eta(t))=0$ pour tout $t\in[0,T_0]$.

Pour terminer cette proposition nous devons montrer que $\dot\eta_0=\mathbf{u}_0$ et $\ddot\eta_0=\gamma$. Pour cela nous calculons les dérivées de l'expression $\Lambda(t,\eta(t))=0$. Dans la suite comme les calculs sont relativement compliqués nous donnons simplement ce que nous devons obtenir. Pour la première dérivée nous obtenons

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\dot\eta_0) &= 0, \qquad \mathbf{x}\in F(0),\\ \dot\eta_0\cdot\mathbf{n} &= 0, \qquad \mathbf{x}\in\partial\Omega,\\ \dot\eta_0\cdot\mathbf{n} &= (\mathbf{k}_0+\mathbf{w}_0\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{h}_0)), \qquad \mathbf{x}\in\partial S(0),\\ \mathcal{P}(\dot\eta) &= \mathcal{P}(\mathbf{u}_0).\end{aligned}$$

Or nous avons supposé que $\mathbf{u}_0$ vérifie

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{u}_0) &= 0, \qquad \mathbf{x}\in F(0),\\ \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n} &= 0, \qquad \mathbf{x}\in\partial\Omega,\\ \mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n} &= (\mathbf{k}_0+\mathbf{w}_0\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{h}_0)), \qquad \mathbf{x}\in\partial S(0).\end{aligned}$$

Ainsi $(\dot\eta-\mathbf{u}_0)\in\mathcal{H}$ et $\mathcal{P}(\dot\eta-\mathbf{u}_0)=0$ donc $\dot\eta=\mathbf{u}_0$. Le calcule de la dérivée seconde donne

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\ddot\eta_0) &= -\mathcal{F}(\mathbf{u}_0), \qquad \mathbf{x}\in F(0),\\ \ddot\eta_0\cdot\mathbf{n} &= -\mathcal{G}(\mathbf{u}_0), \qquad \mathbf{x}\in\partial\Omega,\\ \ddot\eta_0\cdot\mathbf{n} &= -\mathcal{G}(\mathbf{u}_0-\mathbf{v}_0)+(\mathbf{L}+(\mathbf{M}+\Gamma)\wedge(\mathbf{x}-\mathbf{h}_0)-\mathbf{w}_0\wedge\mathbf{k}_0+\mathbf{v}_0\cdot\nabla\mathbf{v}_0), \qquad \mathbf{x}\in\partial S(0),\\ \mathcal{P}(\ddot\eta) &= \mathcal{P}(\gamma),\end{aligned}$$

où $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{k}_0 + \mathbf{w}_0 \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{h}_0)$ et $\Gamma = (\mathbf{w}_{0,2}\mathbf{w}_{0,3}, -\mathbf{w}_{0,3}\mathbf{w}_{0,1}, \mathbf{w}_{0,1}\mathbf{w}_{0,2})^t$. Par hypothèse γ vérifie les même relations, nous en déduisons que $\ddot{\eta} = \gamma$. ■

Grâce à cette proposition nous pouvons donc construire une courbe dans $\Sigma^s(\Omega, S)$ si nous fixons sa dérivée et son accélération initiale. Nous obtenons finalement la Propriété suivante.

Proposition 6.6.2 *Soient $s \geq 3$ un entier, $\mathbf{u}_0 \in H^s(F(0))$, $\mathbf{h}_0 \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{k}_0$ et $\mathbf{w}_0$ vérifiant :*

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x})) &= 0, \qquad \mathbf{x} \in F(0), \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= 0, \qquad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) &= \mathbf{k}_0 + \mathbf{w}_0 \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{h}_0). \end{aligned}$$

Alors pour tout $\mathbf{z}_0 = (e_{F(0)}, \mathbf{h}_0, [Id_3], \mathbf{u}_0, \mathbf{k}_0, \mathbf{w}_0)$ nous avons

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \mathrm{dist}(\mathbf{z}_0 + \mathrm{r}\mathcal{L}(\mathrm{t}, \mathbf{z}_0); \mathrm{F^s}) = 0.$$

Preuve : Le but ici est de construire une courbe $\mathbf{Z}(t)$ dans F^s telle que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r} \mathrm{dist}(\mathbf{z}_0 + \mathrm{r}\mathcal{L}(\mathrm{t}, \mathbf{z}_0); \mathrm{F^s}) \leq \lim_{\mathrm{r} \to 0} \frac{1}{\mathrm{r}} \mathrm{dist}(\mathbf{z}_0 + \mathrm{r}\mathcal{L}(\mathrm{t}, \mathbf{z}_0); \mathrm{Z(r)}) = 0.$$

Pour construire une telle courbe nous utilisons la Proposition 6.6.1 qui permet de construire des courbes dans $\Sigma^s(\Omega, S)$. Les valeurs $\mathbf{k}_0$, $\mathbf{w}_0$ et $\mathbf{u}_0$ sont données par les conditions initiales du fluide et du solide. Il suffit donc d'identifier les valeur de γ, $\mathbf{L}$ et $\mathbf{M}$. Nous commençons par construire la pression initiale du fluide. Nous rappelons que celle-ci se décompose en deux partie

$$p_0 = \rho_F \mu_0 - \rho_F \Phi_0 \cdot (\mathbf{L}, \mathbf{M}),$$

où μ_0 est solution du problème

$$\begin{aligned} -\Delta \mu_0 &= \mathcal{F}(\mathbf{u}_0) \qquad \text{dans } F(0), \\ \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{n}} &= \mathcal{G}(\mathbf{u}_0) \qquad \text{sur } \partial\Omega, \\ \frac{\partial \mu}{\partial \mathbf{n}} &= \mathcal{G}(\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}_0) - [(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla)\mathbf{v}_0 - \mathbf{w}_0 \wedge \mathbf{k}_0] \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \partial S(0), \end{aligned}$$

$\mathbf{v}_0(\mathbf{y}) = \mathbf{k}_0 + \mathbf{w}_0 \wedge (\mathbf{y} - \mathbf{h}_0)$ et les fonctions Φ_0 sont définies par

$$\begin{aligned} -\Delta \Phi_{0,i}(t, \mathbf{x}) &= 0 \qquad \text{dans } F(0), \\ \frac{\partial \Phi_{0,i}}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega, \\ \frac{\partial \Phi_{0,i}}{\partial \mathbf{n}} &= K_{0,i} \qquad \mathbf{x} \text{ sur } \partial S(0), \end{aligned}$$

où le vecteur $\mathbf{K}_0$ est donné par

$$\mathbf{K}_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{K}_{0,i}(\mathbf{x}) = n_i(\mathbf{x}) & \text{for } i = 1, 2, 3, \\ \mathbf{K}_{0,i}(\mathbf{x}) = [(\mathbf{x} - \mathbf{h}) \wedge \mathbf{n}(\mathbf{x})]_{i-3} & \text{for } i = 4, 5, 6, \end{cases}$$

Le choix du vecteur $(\mathbf{L}, \mathbf{M})$ est imposé par

$$\begin{pmatrix} \mathbf{L}, \\ \mathbf{M} + \Gamma \end{pmatrix} = [\mathcal{K}_0]^{-1} \left(I(J_0, \mathbf{w}_0) + \rho_F \int_{F(0)} \nabla \mu_0 \cdot \nabla \Phi_0 \mathrm{d}\mathbf{x} \right)$$

où $\Gamma = (\mathbf{w}_{0,2}\mathbf{w}_{0,3}, -\mathbf{w}_{0,3}\mathbf{w}_{0,1}, \mathbf{w}_{0,1}\mathbf{w}_{0,2})^t$ et la matrice $\mathcal{K}_0$ est définie par

$$[\mathcal{K}_0] = [\mathcal{K}_S] + [\mathcal{K}_F], \qquad [\mathcal{K}_S] = \begin{pmatrix} mId_3 & 0 \\ 0 & [J_0] \end{pmatrix},$$

$$[\mathcal{K}_F(\mathbf{q})] = \left(\rho_F \int_{F(0)} \nabla\Phi_{0,i} \cdot \nabla\Phi_{0,j} \mathrm{d}\mathbf{x}\right)_{1\leq i,j\leq 6},$$

où $[J_0]$ est la matrice d'inertie du solide à l'instant initial. Nous posons ensuite $\gamma = -\nabla p_0$. La courbe ainsi crée vérifie la condition de tangence quand r tend vers 0, car les dérivées premières sont égales aux vitesses du fluide et du solide et les dérivées secondes vérifient l'équation d'Euler pour le fluide et les lois de Newton pour le solide. Donc l'opérateur $\mathcal{L}$ est bien tangent à F^s. ■

Conclusions et perspectives

Dans cette thèse nous avons analysé le mouvement de solides rigides dans un fluide parfait incompressible. La première étape de ce travail consiste à regarder le cas simplifié où le fluide est supposé potentiel (il existe une application Φ telle que la vitesse du fluide $\mathbf{u} = \nabla\Phi$). Dans ce cas l'étude du système se réduit à des équations différentielles ordinaires pour les positions et les vitesses des solides rigides. La fonction Φ est uniquement déterminée par les trajectoires des solides rigides et par la résolution de problèmes de Neumann appropriés. Pour obtenir les équations du système nous avons utilisé la mécanique analytique. Ainsi les équations du système se réduisent à un système d'équations différentielles ordinaires. Nous avons montré l'existence et l'unicité locale de la solution de ce système. Concernant les simulations numériques sur cette théorie, il serait intéressant de programmer quelques exemples avec plusieurs solides. La plupart des calculs proviennent de la résolution de problèmes de Neumann sur des domaines bornés variables dont nous connaissons la forme si les positions des solides sont données. Pour mettre en place ce genre de simulation il faudrait construire des outils qui permettraient de résoudre simplement plusieurs problèmes de Neumann et de calculer les intégrales d'énergie associées à ces problèmes de Neumann.

Dans la seconde partie nous avons regardé le système complet formé par les équations d'Euler pour le fluide et les équations de Newton pour les solides. Grâce à l'étude de la pression, nous avons transformé les équations classiques d'Euler pour le fluide et de Newton pour les solides en une équation différentielle ordinaire sur une variété fermée de dimension infinie. De plus l'étude du cas des fluides potentiels nous a permis de simplifier les équations de Newton et de faire intervenir la théorie de la première partie pour l'étude des trajectoires des solides. En supposant la condition tangence satisfaite et en appliquant une version du Théorème de Cauchy-Lipschitz, nous avons montré l'existence et l'unicité locale de la solution et nous avons aussi déterminé sa régularité en fonction des données initiales. La preuve est essentiellement basée sur l'étude de plusieurs problèmes de Neumann ainsi que sur les estimations des solutions obtenues. Grâce à la mise en forme des équations du système, nous pouvons très facilement appliquer notre méthode à plusieurs solides. Concernant les simulations numériques, elles restent complexes. En effet le fait que les solutions sont dans une variété de dimension infinie complique la résolution du système d'équations différentielles ordinaires. Les exemples numériques qui seraient basés sur ces équations seraient sûrement moins efficaces que d'autres méthodes plus classiques.

Enfin dans le cas des fluides potentiels nous avons regardé le mouvement d'un disque dans un demi-plan. En utilisant la théorie développée dans la première partie, nous avons obtenus une équation différentielle ordinaire pour la position du centre de gravité du disque. Nous avons décrit le mouvement du disque jusqu'à l'instant du choc entre le disque et la paroi. Nous avons montré l'existence de vrai choc contrairement au cas visqueux où les chocs n'existent pas ou se font à vitesse relative nulle. Pour un mouvement vertical du disque nous avons étudié en détail la convergence du problème de Neumann vers le problème de Neumann limite.

Après tout ce travail il reste cependant encore de nombreux problèmes ouverts. Dans cette thèse nous avons supposé que les domaines avaient des bords de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il faudrait étudier ces problèmes pour des domaines qui ne sont pas de classe $\mathbf{C}^\infty$. Concernant les solides, il serait intéressant de considérer le couplage d'un fluide parfait avec des solides élastiques. Concernant le fluide nous pouvons aussi le modéliser comme un fluide visqueux. La méthode employé dans le cas général est basée sur l'article de Ebin et Marsden [19]. Nous pourrions donc adapter les résultats ce cet article pour le cas des systèmes fluide-structure.

Pour l'étude des chocs nous avons obtenus l'existence des chocs dans un cas particulier, cependant pouvons-nous trouver des cas de non choc comme dans le cas des fluides visqueux ? L'étude du choc dans le cas potentiel est fortement liée à l'étude des inégalités de trace pour les problèmes de Neumann. Il est facile de voir que l'énergie du système se réduit à l'étude d'une intégrale sur le bord des solides. Pour montrer que cette intégrale est finie il faut étudier l'opérateur qui donne la trace sur des solutions d'un problème de Neumann sur le bord des solides. De plus ces problèmes de chocs conduisent à l'étude des problèmes asymptotiques dont les domaines limites ne sont pas lipschitziens.

Enfin un problème intéressant serait d'étudier la contrôlabilité des problèmes fluide-structure décrits dans la thèse. Pour le cas potentiel nous pouvons envisager d'introduire de nouvelles variables généralisées qui jouent le rôle des contrôles. Nous obtenons donc un système de dimension finie qu'il faut contrôler. En effet la description du fluide se voit au travers des problèmes de Neumann associés au potentiel donc nous pouvons espérer contrôler la partie fluide en contrôlant le mouvement des solides.

Concernant l'équation d'Euler, nous pouvons signaler les travaux de J.M. Coron [12], [13] en dimension 2 et les travaux de O. Glass [22] pour l'étude de la dimension 3. En adaptant ces méthodes à notre cas, il serait intéressant de voir si le système fluide-structure serait contrôlable si nous agissons uniquement sur les parties solides comme dans le cas potentiel.

Bibliographie

[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich,Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.

[2] C. Amrouche, V. Girault, and J. Giroire, *Weighted Sobolev spaces for Laplace's equation in* $\mathbf{R}^n$, J. Math. Pures Appl. (9), 73 (1994), pp. 579–606.

[3] ——, *Dirichlet and Neumann exterior problems for the n-dimensional Laplace operator : an approach in weighted Sobolev spaces*, J. Math. Pures Appl. (9), 76 (1997), pp. 55–81.

[4] C. Amrouche and Š. Nečasová, *Laplace equation in the half-space with a nonhomogeneous Dirichlet boundary condition*, in Proceedings of Partial Differential Equations and Applications(Olomouc, 1999), vol. 126, 2001, pp. 265–274.

[5] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1978. Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein, Graduate Texts in Mathematics, 60.

[6] M. Boulakia, *Existence of weak solutions for the motion of an elastic structure in an incompressible viscous fluid.*, C. R., Math., Acad. Sci. Paris, 336 (2003), pp. 985–990.

[7] T.-. Z. Boulmezaoud, *Espaces de Sobolev avec poids pour l'équation de Laplace dans le demi-espace*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 328 (1999), pp. 221–226.

[8] J. P. Bourguignon and H. Brezis, *Remarks on the Euler equation*, J. Functional Analysis, 15 (1974), pp. 341–363.

[9] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree], Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[10] A. Chambolle, B. Desjardins, M. J. Esteban, and C. Grandmont, *Existence of weak solutions for the unsteady interaction of a viscous fluid with an elastic plate.*, J. Math. Fluid Mech., 7 (2005), pp. 368–404.

[11] C. Conca, J. San Martín, and M. Tucsnak, *Existence of solutions for the equations modelling the motion of a rigid body in a viscous fluid*, Comm. Partial Differential Equations, 25 (2000), pp. 1019–1042.

[12] J.-M. Coron, *Contrôlabilité exacte frontière de l'équation d'Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 317 (1993), pp. 271–276.

[13] J.-M. Coron, *On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids*, J. Math. Pures Appl. (9), 75 (1996), pp. 155–188.

[14] D. Coutand and S. Shkoller, *Motion of an elastic solid inside an incompressible viscous fluid.*, Arch. Ration. Mech. Anal., 176 (2005), pp. 25–102.

[15] ——, *The interaction between quasilinear elastodynamics and the Navier-Stokes equations.*, Arch. Ration. Mech. Anal., 179 (2006), pp. 303–352.

[16] B. Desjardins and M. J. Esteban, *Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in a viscous fluid*, Arch. Ration. Mech. Anal., 146 (1999), pp. 59–71.

[17] B. Desjardins, M. J. Esteban, C. Grandmont, and P. Le Tallec, *Weak solutions for a fluid-elastic structure interaction model*, Rev. Mat. Complut., 14 (2001), pp. 523–538.

[18] M.-P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Mathematics : Theory & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.

[19] D. G. Ebin and J. Marsden, *Groups of diffeomorphisms and the notion of an incompressible fluid.*, Ann. of Math. (2), 92 (1970), pp. 102–163.

[20] E. Feireisl, *On the motion of rigid bodies in a viscous incompressible fluid*, J. Evol. Equ., 3 (2003), pp. 419–441. Dedicated to Philippe Bénilan.

[21] G. P. Galdi, *On the steady self-propelled motion of a body in a viscous incompressible fluid*, Arch. Ration. Mech. Anal., 148 (1999), pp. 53–88.

[22] O. Glass, *Exact boundary controllability of 3-D Euler equation*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 5 (2000), pp. 1–44 (electronic).

[23] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Press, Inc., Cambridge, Mass., 1951.

[24] M. D. Gunzburger, H.-C. Lee, and G. A. Seregin, *Global existence of weak solutions for viscous incompressible flows around a moving rigid body in three dimensions*, J. Math. Fluid Mech., 2 (2000), pp. 219–266.

[25] M. E. Gurtin, *An introduction to continuum mechanics*, vol. 158 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1981.

[26] P. Hartman, *Ordinary differential equations*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1964.

[27] P. Henrici, *Applied and computational complex analysis. Vol. 1*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1988. Power series—integration—conformal mapping—location of zeros, Reprint of the 1974 original, A Wiley-Interscience Publication.

[28] A. Henrot and M. Pierre, *Variation et optimisation de formes : une analyse géométrique*, vol. 048 of Mathématiques et applications, Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 2005.

[29] T. I. Hesla, *Collisions of smooth bodies in viscous fluids, a mathematical investigation*, PhD thesis, University of Minnesota, May 2005.

[30] M. Hillairet, *Lack of collision between solid bodies in a 2D incompressible viscous flow*, Comm. Partial Differential Equations, 32 (2007), pp. 1345–1371.

[31] J. Houot and A. Munnier, *On the motion and collisions of rigid bodies in an ideal fluid .*, Asymptotic Analysis, 56 (2008), pp. 125–158.

[32] C. Jacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Préface de Henri Villat, Éditions de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucharesst, 1959.

[33] E. Kanso, J. E. Marsden, C. W. Rowley, and J. B. Melli-Huber, *Locomotion of articulated bodies in a perfect fluid*, J. Nonlinear Sci., 15 (2005), pp. 255–289.

[34] H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, sixth ed., 1993. With a foreword by R. A. Caflisch [Russel E. Caflisch].

[35] J.-L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1*, Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17, Dunod, Paris, 1968.

[36] R. H. Martin, Jr., *Differential equations on closed subsets of a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc., 179 (1973), pp. 399–414.

[37] L. M. Milne-Thomson, *Theoretical hydrodynamics*, 4th ed, The Macmillan Co., New York, 1960.

[38] M. Moubachir and J.-P. Zolésio, *Moving shape analysis and control*, vol. 277 of Pure and Applied Mathematics (Boca Raton), Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006. Applications to fluid structure interactions.

[39] J. H. Ortega, L. Rosier, and T. Takahashi, *Classical solutions for the equations modelling the motion of a ball in a bidimensional incompressible perfect fluid*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., 39 (2005), pp. 79–108.

[40] ——, *On the motion of a rigid body immersed in a bidimensional incompressible perfect fluid*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 24 (2007), pp. 139–165.

[41] J. A. San Martín, V. Starovoitov, and M. Tucsnak, *Global weak solutions for the two-dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid*, Arch. Ration. Mech. Anal., 161 (2002), pp. 113–147.

[42] T. Takahashi and M. Tucsnak, *Global strong solutions for the two-dimensional motion of an infinite cylinder in a viscous fluid*, J. Math. Fluid Mech., 6 (2004), pp. 53–77.

[43] J. L. Vázquez and E. Zuazua, *Lack of collision in a simplified 1D model for fluid-solid interaction*, Math. Models Methods Appl. Sci., 16 (2006), pp. 637–678.

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale I A E +M
Université Henri Poincaré, Nancy-I
D.F.D. Mathématiques

Nancy-Université
Université Henri Poincaré

Titre de la thèse : Analyse mathématique des mouvements des rigides dans un fluide parfait.

Résumé

Dans cette thèse nous étudions le mouvement de solides rigides dans un fluide parfait incompressible. Dans la première partie nous étudions le cas des fluides potentiels. Le problème modèle est le mouvement d'un disque dans un demi-plan où nous étudions les chocs entre le disque et la paroi. Ce problème est relié à l'étude de problèmes de Neumann qui dépendent de la trajectoire du disque. Nous généralisons nos résultats aux cas de plusieurs solides. Nous montrons que les équations se réduisent à un système d'équations différentielles sur une variété de dimension finie. La dernière partie est consacrée à l'étude du problème général. Nous utilisons les résultats développés dans les parties précédentes pour transformer le système d'équations aux dérivées partielles du problème en un système d'équations différentielles ordinaires sur une variété de dimension infinie. Nous obtenons ainsi existence et unicité locale de la solution.

Mots Clés : interaction fluide-structure, fluide parfait incompressible, mécanique du solide, problème de Neumann, collisions, optimisation de forme, variétés de difféomorphismes.

Title of the thesis : Mathematical Analysis of the motion of rigid bodies in a perfect fluid.

Abstract

In this thesis we study the motion of rigid bodies in an incompressible perfect fluid. In the first part we study the potential fluids. The model problem is the motion of a disc in a half plan where we study the shocks between the disc and the wall. This problem is linked to the study of Neumann problems which depend on the trajectory of the disc. We generalize our results to the case of several bodies. We prove that the equations reduce to a system of ordinary differential equations on a finite dimensional manifold. The second part is devoted to the study of general case. We use the results developed in the previous part to transform the system of partial differential equations into a system of ordinary differential equations on a infinite dimensional manifold. So we obtain the local existence and uniqueness of the solution.

Key words : interaction fluide-structure, fluide parfait incompressible, mécanique du solide, problème de Neumann, collisions, optimisation de forme, variétés de difféomorphismes.