



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



UFR S.T.M.I.A.  
École Doctorale IAEM  
Université Henri Poincaré - Nancy I  
D.F.D. Mathématiques

---

Thèse  
présentée pour l'obtention du titre de  
Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I  
en Mathématiques  
par  
**Antoine LAURAIN**

---

**Domaines singulièrement perturbés  
en  
optimisation de formes**

---

Thèse soutenue publiquement le 16 juin 2006

**Composition du jury**

Président du jury :	Antoine HENROT	Professeur, Ecole des Mines de Nancy
Directeur de Thèse :	Jan SOKOLOWSKI	Professeur, U.H.P., Nancy I
Rapporteurs :	Michel DELFOUR Michel PIERRE Antoni ZOCHOWSKI	Professeur, Université de Montréal, Canada Professeur, ENS Cachan, Antenne de Bretagne Professeur, Université de Varsovie, Pologne
Examineurs :	Sergej NAZAROV Evariste SANCHEZ-PALENCIA	Professeur, St-Petersbourg, Russie Professeur, Paris VI

---

Institut Élie Cartan Nancy, Laboratoire de Mathématiques, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex



## Remerciements

Je voudrais remercier avant tout mon directeur de thèse Jan Sokolowski qui a suivi avec attention l'évolution de mon travail et m'a toujours beaucoup aidé. J'ai pu constater autour de moi que tous les directeurs de thèse n'étaient pas aussi attentionnés. De plus, les nombreuses et longues discussions que nous avons pu avoir ont été pour moi une source d'inspiration importante. J'ai découvert que la recherche est avant tout une communauté où l'on trouve des gens amicaux aussi bien que des concurrents avec qui il est important de discuter et de partager ou confronter ses connaissances.

Je suis très reconnaissant à Jan de m'avoir toujours poussé à participer à de nombreux colloques, et de m'avoir fait rencontrer beaucoup de monde. Je pense notamment à Michel Pierre, dont l'aide a été précieuse pour mes travaux, ainsi qu'à Virginie Bonnaillie-Noël, Gregory Vial, Martin Costabel et Monique Dauge pour leur accueil à Rennes. Je pense également à Sergej Nazarov, Antoni Zochowski qui de plus m'ont fait l'honneur de faire partie de mon jury de thèse. Merci de même à Antoine Henrot pour avoir été président du jury et merci pour son excellent cours de Dea. Je remercie aussi chaleureusement Michel Delfour et Evariste Sanchez-Palencia de m'avoir fait l'honneur de leur présence au jury. Merci enfin à Günther Leugering pour l'invitation à Erlangen.

Je pense également à tous les doctorants que j'ai pu rencontrer au cours de mes voyages, merci à Filippo et à tous les italiens pour les bons moments passés à Lyngby. Bonne chance à Lekbir pour ses problèmes de Levelset, merci à Katarzyna pour sa bonne humeur, bonne continuation à Ioana pour sa thèse à Metz, bonne chance aussi à Oleg pour la suite de sa carrière et encore merci pour l'invitation, merci aussi à tous ceux que j'ai pu oublier.

Merci à tous les gens du labo pour la bonne ambiance et plus particulièrement aux autres doctorants et aux amis que je connais depuis déjà plusieurs années maintenant à l'université : Pierre, François, Simon à Elie Cartan mais aussi Pascal, Vincent et ceux qui sont arrivés après, Stéphane, Yannick, Lucas, etc... Bonne chance à tous, j'espère que je pourrais assister à votre soutenance !

Merci bien sûr à ma famille et particulièrement à mes parents pour leur soutien tout au long de mes études, ainsi qu'à mes amis en dehors de l'université, car il y a une vie en dehors de la fac, si si c'est vrai ! Merci à Thomas et à Julie pour la bonne humeur à Nancy, et merci à Anne-So pour cette fameuse soirée, ça fait aussi partie de la thèse ! Merci à ma famille pour s'être intéressé à ce que je faisais, même si ça n'est pas toujours facile à expliquer. Enfin je tire mon chapeau à mes parents qui se sont levés à quatre heures du matin pour préparer le pot de thèse, qui, évidemment, était délicieux !

*Pour Nico...*

## Table des matières

Introduction	7
Chapitre I. Structure des dérivées de forme dans des domaines fissurés	11
1.. Enoncé du théorème de structure	13
2.. Perturbations normale et tangentielle	16
3.. Preuve du Théorème de structure	22
4.. Le théorème de structure en dimension deux	24
5.. Perturbations normale et tangentielle	26
6.. Preuve du Théorème de structure en dimension deux	28
Chapitre II. Exemples d'application du théorème de structure	31
1.. Conditions de Neumann sur la fissure	33
2.. Conditions de Dirichlet sur les faces de la fissure	42
3.. Problème avec conditions unilatérales sur les faces de la fissure	44
Chapitre III. Extensions auto-adjointes et optimisation topologique	53
1.. Problème de Dirichlet en dimension 2	55
2.. Estimations pour le Laplacien en dimension trois	61
3.. Perturbation de la position du trou	68
4.. Extension auto-adjointe et approximation de l'énergie en dimension trois	70
5.. Un problème d'optimisation de formes utilisant des extensions auto-adjointes	72
Chapitre IV. Une méthode "levelset" en optimisation de formes	77
1.. Introduction	79
2.. Le problème linéaire	80
3.. Le problème non-linéaire	106
4.. La formulation "levelset"	108
5.. L'algorithme d'optimisation de forme	109
6.. Méthode numérique pour l'équation "levelset"	110
7.. Résultats numériques	111
Conclusions et perspectives	121
Bibliographie	123



## Introduction

En optimisation de formes, de nombreux résultats ont déjà été obtenus dans le cas de domaines à frontière régulière et pour des perturbations régulières de ces domaines. Ces résultats permettent à l'heure actuelle des applications en mécanique et dans l'industrie. Par contre, l'étude de domaines non-réguliers, tels que des domaines fissurés par exemple, et l'étude de perturbations singulières telles que la création d'un trou dans un domaine est plus récente et plus complexe. Ce nouveau domaine de recherche est l'aboutissement logique du précédent, et il est de plus motivé par de multiples applications industrielles, car en pratique, les hypothèses de régularité ne sont pas toujours vérifiées, au contraire.

Des résultats d'existence pour des problèmes d'optimisation de formes dans des domaines fissurés ont été obtenus en [13] [12][19]. Nous nous intéressons quant à nous aux conditions d'optimalité en optimisation de formes. Les outils tels que la dérivée topologique introduite dans [60],[61] permettent d'appréhender ces perturbations singulières de domaines et leur utilisation est maintenant fréquente.

Ce travail traite différents aspects de perturbations singulières de domaines. Dans une première partie, nous nous intéressons à la structure de la dérivée au sens de Fréchet de fonctionnelles de forme pour des domaines fissurés. Dans une deuxième partie, nous étudions la modélisation d'une perturbation singulière d'un domaine à l'aide d'extensions auto-adjointes du Laplacien. Enfin, dans une troisième partie on décrit une application numérique de la dérivée topologique pour créer des trous dans un domaine afin de maximiser la fonctionnelle d'énergie associée à un problème modèle.

Dans la première partie, nous nous intéressons donc à la structure de la dérivée de forme pour des domaines fissurés. Dans son mémoire de 1907 [29], Hadamard constate que la dérivée d'une fonctionnelle de forme dépendant d'un domaine  $\Omega$  dans une direction  $\xi$  ne dépend que de la composante normale de la trace de  $\xi$  sur le bord de  $\Omega$ . Ce résultat de structure connu sous le nom de théorème de structure a été démontré par Zolésio dans sa thèse en 1979 [71], et le cas de la dérivée seconde a été étudié par Bucur et Zolésio dans [14]. Dans le cas d'un ouvert régulier, de classe  $C^1$  ou lipschitzien par exemple, la dérivée dépend uniquement des perturbations de la frontière du domaine en direction de la normale. On pourra consulter [18][44] et [66] pour des résultats détaillés dans le cas régulier, et [54] pour une approche similaire à la nôtre dans le cas régulier. Ce résultat est utilisé systématiquement dans les problèmes d'optimisation de formes. Cependant en pratique une telle régularité n'est pas toujours vérifiée. En particulier, ce théorème de structure n'est plus valable pour des domaines contenant des fissures, qui



ne sont pas lipschitziens.

Au cours de sa thèse ([22]), Gilles Frémiot a dégagé un théorème de structure pour la semi-dérivée eulérienne du premier ordre dans le cas de domaines fissurés en dimension deux. La première partie de cette thèse s'inscrit dans la continuité du travail de Gilles Frémiot en généralisant ce théorème de structure à  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , et en donnant la structure de la dérivée seconde. En fait, la méthode utilisée pour parvenir aux résultats est différente et intéressante en soi. En effet nous généralisons ici une méthode développée par Michel Pierre et Arian Novruzi dans [54]. Sous des hypothèses plus fortes que celles de Gilles Frémiot, à savoir la Fréchet-dérivabilité de la fonctionnelle de forme, on obtient le théorème de structure au premier et au deuxième ordre, et il est possible de l'obtenir facilement à n'importe quel ordre avec cette méthode.

En dimension deux, on retrouve le résultat de Frémiot au premier ordre, à savoir qu'en plus du terme classique, deux nouvelles contributions apparaissent dûes aux extrémités de la fissure. En dimension supérieure, un nouveau terme apparaît en plus du terme classique, dû à la frontière de la variété à bord représentant la fissure.

Dans la deuxième partie, nous étudions la perturbation singulière d'un domaine et la modélisation de cette perturbation à l'aide d'extension auto-adjointes d'opérateurs. On considère habituellement des perturbations d'un ouvert qui modifient seulement sa frontière, interdisant notamment les changements de topologie, alors qu'ils apparaissent naturellement dans de nombreuses applications. D'un point de vue théorique, si  $u$  est la solution du Laplacien dans un domaine  $\Omega$ , il est possible de modéliser la perturbation de  $u$  due à l'apparition d'un trou dans  $\Omega$  par une perturbation du Laplacien dans le domaine  $\Omega$  sans trou. Cette technique utilisant la théorie des extensions auto-adjointes (voir [39] et [1]) a été développée par Serguei Nazarov dans [47][50][51][53]. Nous décrivons cette modélisation, puis nous montrons comment elle peut être utilisée pour un problème d'optimisation de forme. En définissant une fonctionnelle d'énergie approchée pour ce problème modèle, on retrouve notamment la formule de la dérivée topologique usuelle.

Dans la troisième partie, on propose une application numérique de la dérivée topologique. On cherche à maximiser l'énergie associée à la solution du Laplacien dans un domaine  $\Omega$ . En ajoutant des termes de volume et de périmètre, on peut montrer qu'il existe une unique solution optimale à ce problème de maximisation. On procède ensuite à la résolution numérique du problème en utilisant une méthode de gradient pour faire varier la frontière et en calculant la dérivée topologique pour savoir où créer des trous si nécessaire.

**Dans le premier chapitre**, nous énonçons et démontrons tout d'abord le théorème de structure dans le cas de domaines fissurés de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 3$ . La preuve de ce résultat est basée sur l'utilisation du théorème des fonctions implicites, et sur le principe que toute perturbation  $\theta$  d'un domaine  $\Omega$  peut être décomposée de la façon suivante

$$I + \theta = (I + \Phi(\theta)n) \circ H(\theta) \text{ sur } \Sigma$$

$$H(\theta) = (I + \phi_n(\theta)n + \phi_\nu(\theta)\nu) \circ h(\theta) \text{ sur } \gamma$$

avec  $\Phi(\theta)$  et  $H(\theta)$  les perturbations normale et tangentielle, respectivement, sur la surface  $\Sigma$  de dimension  $d - 1$ , frontière de  $\Omega$ . Les fonctions  $\phi_n(\theta)$  et  $\phi_\nu(\theta)$  sont les perturbations normales de la courbe  $\gamma$  dans les directions  $n$  et  $\nu$ , où  $n$  et  $\nu$  forment une base orthogonale du supplémentaire à l'espace tangent à  $\gamma$ , et  $h(\theta)$  est la perturbation tangentielle sur la variété  $\gamma \subset \Sigma$  de dimension  $d - 2$ . Cette idée a été introduite dans [54] pour des domaines réguliers et nous la généralisons ici au cas de domaines fissurés. Nous étudions également le cas de  $\mathbb{R}^2$  qui est un cas dégénéré du précédent. Nous donnons le théorème de structure et sa démonstration. La démonstration pour  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 3$  doit être adaptée au cas de la dimension deux et on obtient un résultat similaire mais plus simple.

**Dans le deuxième chapitre**, nous donnons quelques applications du théorème de structure pour des domaines fissurés de  $\mathbb{R}^2$ . En effet, par rapport au cas régulier, la structure de la dérivée comprend deux nouveaux termes dûs aux extrémités de la fissure et il est intéressant de les calculer.

Tout d'abord, nous considérons le Laplacien avec conditions de Dirichlet sur la frontière extérieure et conditions de Neumann sur la fissure. Nous prouvons la Fréchet-différentiabilité jusqu'à l'ordre deux de la fonctionnelle d'énergie, ce qui nous permet d'appliquer le théorème de structure. On étudie ensuite le même problème avec des conditions de Dirichlet sur la fissure. On obtient de la même manière la Fréchet-dérivabilité au premier ordre et on peut calculer les coefficients grâce au théorème de structure.

On étudie ensuite un problème non-linéaire avec conditions unilatérales sur les faces de la fissure. Dans ce cas, on ne peut pas montrer la Fréchet-dérivabilité de la fonctionnelle mais on peut tout de même appliquer un théorème de structure qui requiert des hypothèses plus faibles. En utilisant la notion de polyédricité des cônes convexes, on peut également définir une dérivée seconde directionnelle.

**Dans le troisième chapitre**, nous considérons le Laplacien avec conditions de Dirichlet posé dans un domaine  $\Omega$  à frontière régulière. Ce problème est singulièrement perturbé par la création d'une petite cavité  $\omega_\varepsilon$  dans  $\Omega$ . Nous procédons à l'analyse asymptotique de ce problème quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . On définit ensuite une extension auto-adjointe dépendante de  $\varepsilon$  du Laplacien. Cette extension est définie sur le domaine  $\Omega$ , et on montre que le nouveau problème est une approximation au premier ordre du problème initial. On définit ensuite un problème d'optimisation de formes utilisant cette approximation et on montre qu'on peut retrouver la formule classique de la dérivée topologique à partir d'une fonctionnelle d'énergie approchée.

**Dans le quatrième chapitre**, on applique la notion de dérivée topologique à un problème numérique. On montre qu'il existe une solution au problème de maximisation de l'énergie pénalisée par le volume et le périmètre, pour des problèmes linéaire et non-linéaire. On obtient ensuite des résultats numériques de maximisation de la fonctionnelle. Le domaine  $\Omega$  initial est un carré dont la frontière est fixe au cours des itérations. A

l'aide de la dérivée topologique, on change la topologie du domaine en créant des trous dans  $\Omega$ . On perturbe ensuite la frontière intérieure à l'aide d'une méthode classique de gradient de forme. Le domaine  $\Omega$  est modélisé par la méthode "levelset".

## CHAPITRE I

### Structure des dérivées de forme dans des domaines fissurés



## 1.. Enoncé du théorème de structure

L'étude de la sensibilité par rapport à la forme pour des domaines fissurés a des applications importantes. On pourra consulter [15] pour un aperçu des applications en mécanique des fractures et une liste de références sur le sujet. La structure de la dérivée par rapport au domaine pour des domaines fissurés a été montrée dans [22], mais certains résultats avaient déjà été établis dans cette direction en [21][27][7]. Dans [20], une approche directe permet de traiter le problème avec conditions unilatérales sur les faces de la fissure. On considère dans [36], [37] respectivement, le problème avec conditions unilatérales sur les faces de la fissure pour une équation scalaire et pour le système de l'élasticité, où l'on obtient notamment la formule de Rice-Cherepanov. Des résultats plus récents ont été obtenus en [40] et [5], et pour un problème inverse en [4].

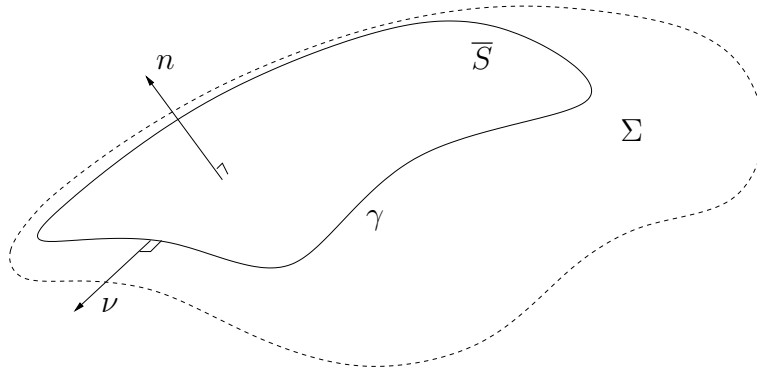
Dans son mémoire datant de 1907, Hadamard note que la dérivée d'une fonctionnelle de forme dans une direction  $\xi$  ne dépend que de la trace de  $\xi$  sur le bord de  $\Omega$  et seulement de la composante normale de cette trace. Ce résultat est vrai pour des domaines  $\Omega$  dont la frontière est suffisamment régulière, pour plus de détails, on pourra consulter [31], [66]. Les domaines contenant des fissures ne sont mêmes pas lipschitziens, par conséquent on ne peut pas leur appliquer un tel résultat. Par contre, il est possible de généraliser ce résultat de structure aux domaines fissurés. Une telle généralisation à été faite en [22], pour la dérivée première, dans le cadre de la semi-dérivée eulérienne de fonctionnelles de formes. Une telle analyse est difficilement réalisable pour des dérivées d'ordre supérieur, notamment pour la dérivée seconde qui est importante pour les applications.

Nous nous proposons donc ici, en généralisant une méthode introduite en [54], de donner le théorème de structure pour les dérivées d'ordre un et deux dans des domaines fissurés, dans le cadre de la différentiabilité au sens de Fréchet. Ce théorème permet d'obtenir une formule de représentation pour les dérivées par rapport au domaine. Avant de donner le théorème de structure, nous allons définir une classe  $\mathcal{F}_k(\Omega)$  de domaines fissurés.

Dans la suite,  $U$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 3$  avec une frontière lisse. L'ensemble  $U$  est appelé le fourre-tout et les perturbations  $\theta$  définies plus loin laissent  $U$  globalement inchangé. Soit également  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ .

**Les domaines :** On note

$$\mathcal{O}_k = \{D \in U; D \text{ ouvert borne de classe } C^k\}. \quad (\text{I.1})$$

FIG. 1. La fissure  $\bar{S}$ 

De classe  $C^k$  signifie que, pour tout  $x \in \partial D$ , il existe un voisinage ouvert  $\omega_x$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\xi_x : \omega_x \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$  tels que

$$\nabla \xi_x \neq 0 \text{ sur } \omega_x, \quad \xi_x(\omega_x \cap \partial D) = 0, \quad (\text{I.2})$$

$$\xi_x(\omega_x \cap D) \subset [-\infty, 0], \quad \xi_x(\omega_x \setminus \bar{D}) \subset ]0, +\infty] \quad (\text{I.3})$$

On remarque que  $n = \nabla \xi_x / |\nabla \xi_x|$  définit localement le vecteur unitaire normal sortant à  $D$ .

**Domaines fissurés :** Soit  $D \in \mathcal{O}_k$ . La frontière  $\partial D = \Sigma$  de  $D$  est une variété fermée de dimension  $d - 1$ . Soit  $\gamma$  une sous-variété fermée et connexe de  $\Sigma$  de dimension  $d - 2$  et de classe  $C^k$  telle que  $\Sigma \setminus \gamma$  a deux composantes connexes  $S$  et  $S'$ . Alors  $\bar{S}$  est appelé une fissure et on définit le domaine fissuré par  $\Omega = U \setminus \bar{S}$  (voir la figure 1).

Soit  $\Omega_0$  un domaine fissuré, on a alors,

$$\gamma_0 \subset \Sigma_0 = \partial D_0, \quad S_0 \cup S'_0 = \Sigma_0 \setminus \gamma_0 \quad \Omega_0 = U \setminus \bar{S}_0$$

et on note  $n$  le vecteur normal unitaire sortant de  $D$ . La codimension de  $\gamma_0$  est deux, c'est à dire que le supplémentaire dans  $\mathbb{R}^d$  de l'espace tangent à  $\gamma_0$  est de dimension deux. On définit alors le vecteur  $\nu$  tel que  $(n, \nu)$  soit une base orthonormée de cet espace.

Pour un domaine  $\Omega_0$  donné, on introduit le domaine perturbé  $\Omega_\theta$  de  $\Omega_0$  pour un champ de vecteurs donné  $\theta$ . On restreint l'étude à des perturbations du sous-ensemble  $D$ , i.e. la frontière extérieure  $\partial U$  reste fixe.

**Cadre fonctionnel :** Soit  $\Theta_k$  l'espace des champs de vecteurs de  $C^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  qui s'annulent sur  $U^c$  et dont les dérivées sont bornées jusqu'à l'ordre  $k$ . Muni de la norme usuelle  $\|\cdot\|_k$ ,  $\Theta_k$  est un espace de Banach. On note

$$\mathcal{D}_k := \{\theta \in \Theta_k, \|\theta\|_k < 1\}.$$

Pour  $\theta \in \mathcal{D}_k$ , l'application  $I + \theta$  est un  $C^k$ -difféomorphisme.  $I$  est l'identité dans  $\mathbb{R}^d$  ( $\forall x \in \mathbb{R}^d, I(x) = x$ ). Pour  $\theta \in \mathcal{D}_k$  donné, soit  $D_\theta, \Omega_\theta, \Sigma_\theta$  et  $\gamma_\theta$  définis par :

$$\begin{aligned}
D_\theta &= \{(I + \theta)(x), x \in D_0\}, \\
\Omega_\theta &= \{(I + \theta)(x), x \in \Omega_0\}, \\
\Sigma_\theta &= \{(I + \theta)(x), x \in \Sigma_0\}, \\
\gamma_\theta &= \{(I + \theta)(x), x \in \gamma_0\}.
\end{aligned}$$

Comme  $D_0 \in \mathcal{O}_k$ , on a clairement  $D_\theta \in \mathcal{O}_k$  et  $\Sigma_\theta$  est de classe  $C^k$ .

Etant donné  $\Omega_0$  un domaine fissuré avec  $D_0 \in \mathcal{O}_k$ , on pose

$$\mathcal{F}_k(\Omega_0) = \{\Omega_\theta, \theta \in \mathcal{D}_k\} \quad (\text{I.4})$$

comme étant l'ensemble des domaines fissurés admissibles. Pour simplifier, comme  $\Omega_0$  est donné, on écrit  $\mathcal{F}_k$  au lieu de  $\mathcal{F}_k(\Omega_0)$ .

**Fonctionnelle de forme :** Soit  $J : \mathcal{F}_k \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle de forme donnée. On associe à  $J$  la fonctionnelle  $E$  définie sur  $\mathcal{D}_k$  par l'égalité

$$\forall \theta \in \mathcal{D}_k, E(\theta) := J(\Omega_\theta) .$$

Comme  $\Theta_k$  est un espace de Banach, les dérivées au sens de Fréchet de  $E$  peuvent être définies. On note  $E'(\theta) \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_k; \mathbb{R})$  la dérivée au sens de Fréchet au premier ordre de  $E$  en  $\theta$  et par  $E'(\theta)(\xi)$  sa valeur dans la direction  $\xi \in \Theta_k$ . De même  $E''(\theta) \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_k \times \mathcal{D}_k; \mathbb{R})$  est la dérivée au sens de Fréchet de  $E$  du second ordre et  $E''(\theta)(\xi, \eta)$  désigne sa valeur en  $\xi, \eta \in \Theta_k$ .

**Notations :** Pour  $x, y \in \mathbb{R}^d$ , on note  $\langle x, y \rangle$  le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^d$ .

Etant donné un champ de vecteurs  $\xi$  sur  $\Sigma_0$ , on écrira  $\xi_n$  au lieu de  $\langle \xi, n \rangle$  et  $\xi_\nu$  au lieu de  $\langle \xi, \nu \rangle$ . On notera également  $\xi_\Sigma = \xi - \xi_n n$  sa composante dans l'espace tangent en un point  $x$  de la variété  $\Sigma$ . On définit alors  $\xi_\gamma := \xi_\Sigma - \xi_\nu \nu$  la projection de  $\xi$  sur l'espace tangent à la variété  $\gamma$ . Notons que  $\xi_n$  et  $\xi_\nu$  sont des scalaires tandis que  $\xi_\Sigma$  et  $\xi_\gamma$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^d$ .

Nous pouvons maintenant donner le résultat principal de ce chapitre.

**Théorème I.1.** *Soit  $k \geq 1$ .*

- (1) *Soit  $\Omega_0$  un domaine fissuré avec  $D_0 \in \mathcal{O}_{k+1}$ . On suppose que  $E$  est Fréchet-différentiable dans  $\Theta_k$  en 0, alors il existe deux formes linéaires continues  $l^1 : C^k(\Sigma_0, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $l_\nu^1 : C^k(\gamma_0, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , telles que :*

$$E'(0)(\xi) = l^1(\xi_n) + l_\nu^1(\xi_\nu), \quad \forall \xi \in \Theta_k . \quad (\text{I.5})$$

- (2) *Soit  $\Omega_0$  un domaine fissuré avec  $D_0 \in \mathcal{O}_{k+2}$ . On suppose que  $E$  est deux fois Fréchet-différentiable en 0 dans  $\Theta_k$ , alors il existe trois formes bilinéaires :*

$$\begin{aligned}
l^2 &: C^k(\Sigma_0, \mathbb{R}) \times C^k(\Sigma_0, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} , \\
l_\nu^2 &: C^k(\gamma_0, \mathbb{R}) \times C^k(\gamma_0, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} , \\
\mathcal{L}^2 &: C^k(\Sigma_0, \mathbb{R}) \times C^k(\gamma_0, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} ,
\end{aligned}$$



et une forme linéaire  $l_n^1 : C^k(\gamma_0, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , telles que pour tout champ de vecteurs  $\xi, \eta \in \Theta_{k+1}$  :

$$\begin{aligned} E''(0)(\xi, \eta) &= l^2(\xi_n, \eta_n) \\ &\quad + l_\nu^2(\xi_\nu, \eta_\nu) \\ &\quad + l^1(\Phi''(0)(\xi, \eta)) \\ &\quad + l_n^1(\phi_n''(0)(\xi, \eta)) \\ &\quad + l_\nu^1(\phi_\nu''(0)(\xi, \eta)) \\ &\quad + \mathcal{L}^2(\xi_n, \eta_\nu) \\ &\quad + \mathcal{L}^2(\eta_n, \xi_\nu), \end{aligned} \tag{I.6}$$

avec  $\Phi''(0)(\xi, \eta)$ ,  $\phi_n''(0)(\xi, \eta)$  et  $\phi_\nu''(0)(\xi, \eta)$  donnés respectivement par (I.16), (I.19) et (I.20).

**Remarque I.2.** Si  $\Omega_0$  est une forme critique pour  $E$  i.e.,  $E'(0) = 0$  en 0, alors  $l^1 \equiv 0$ ,  $l_\nu^1 \equiv 0$ , par conséquent l'expression (I.6) de la dérivée seconde se simplifie et devient :

$$\begin{aligned} E''(0)(\xi, \eta) &= l^2(\xi_n, \eta_n) \\ &\quad + l_\nu^2(\xi_\nu, \eta_\nu) \\ &\quad + l_n^1(\phi_n''(0)(\xi, \eta)) \\ &\quad + \mathcal{L}^2(\xi_n, \eta_\nu) \\ &\quad + \mathcal{L}^2(\eta_n, \xi_\nu). \end{aligned} \tag{I.7}$$

## 2.. Perturbations normale et tangentielle

Pour tout  $l \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq l \leq k$ , on pose

$$\begin{aligned} G^{k-l}(\Sigma, \Sigma) &:= \{g \in C^{k-l}(\Sigma, \mathbb{R}^d); g(\Sigma) \subset \Sigma\} \\ G^{k-l}(\gamma, \gamma) &:= \{g \in C^{k-l}(\gamma, \mathbb{R}^d); g(\gamma) \subset \gamma\} \end{aligned}$$

On note  $\Phi(\theta)$  et  $H(\theta)$  les perturbations normale et tangentielle, respectivement, sur la surface  $\Sigma$ . On note également  $\phi_n(\theta)$  et  $\phi_\nu(\theta)$  les perturbations normales de la courbe  $\gamma$  dans les directions  $n$  et  $\nu$ , et  $h(\theta)$  les perturbations tangentielles de la variété  $\gamma$ . On utilise le théorème des fonctions implicites pour obtenir le lemme suivant, qui sera utilisé pour la preuve du théorème de structure.

**Lemme I.3.** *On suppose que  $\Sigma$  et  $\gamma$  sont des variétés de classe  $C^k$ . Pour tout  $1 \leq l \leq k$ , il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{U}_k$  de 0 dans  $\Theta_k$  et un unique vecteur  $(H, \Phi, h, \phi_n, \phi_\nu)$  de fonctions  $C^l$  :*

$$(H, \Phi, h, \phi_n, \phi_\nu) : \mathcal{U}_k \rightarrow G^{k-l}(\Sigma, \Sigma) \times C^{k-l}(\Sigma, \mathbb{R}) \times G^{k-l}(\gamma, \gamma) \times C^{k-l}(\gamma, \mathbb{R}) \times C^{k-l}(\gamma, \mathbb{R}) \tag{I.8}$$

telles que  $(H, \Phi, h, \phi_n, \phi_\nu)(0) = (I, 0, I, 0, 0)$  et pour tout  $\theta \in \mathcal{U}_k$

$$I + \theta = (I + \Phi(\theta)n) \circ H(\theta) \text{ sur } \Sigma_0 \tag{I.9}$$

$$H(\theta) = (I + \phi_n(\theta)n + \phi_\nu(\theta)\nu) \circ h(\theta) \text{ sur } \gamma_0 \tag{I.10}$$

De plus, pour tout  $\xi, \eta \in \Theta_k$  on a pour  $l \geq 1$  :

$$H'(0)(\xi) = \xi_\Sigma, \tag{I.11}$$

$$\Phi'(0)(\xi) = \xi_n, \tag{I.12}$$

$$h'(0)(\xi) = \xi_\gamma, \tag{I.13}$$

$$\phi_n'(0)(\xi) = 0, \tag{I.14}$$

$$\phi_\nu'(0)(\xi) = \xi_\nu, \tag{I.15}$$

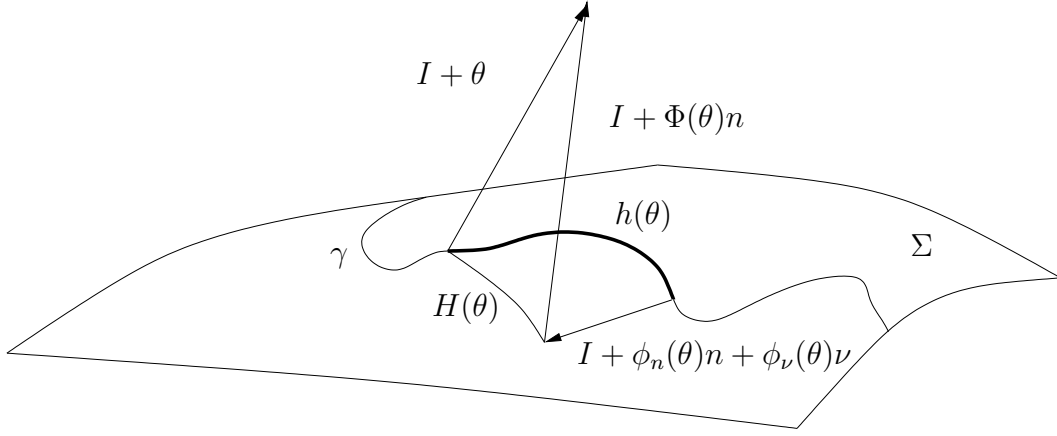


FIG. 2. Perturbations normale et tangentielle

et pour  $l \geq 2$  les dérivées secondes sont données par

$$\Phi''(0)(\xi, \eta) = -\langle D\eta \xi_\Sigma, n \rangle - \langle D\xi \eta_\Sigma, n \rangle - \langle Dn \xi_\Sigma, \eta_\Sigma \rangle \quad (\text{I.16})$$

$$H''(0)(\xi, \eta) = -\langle Dn \eta_\Sigma, \xi_\Sigma \rangle n - \eta_n Dn \xi_\Sigma - \xi_n Dn \eta_\Sigma \quad (\text{I.17})$$

$$\begin{aligned} h''(0)(\xi, \eta) &= \langle \xi_\gamma, Dn \eta_\gamma \rangle n + \langle \xi_\gamma, D\nu \eta_\gamma \rangle \nu \\ &\quad - \eta_n Dn \xi_\Sigma - \xi_n Dn \eta_\Sigma \\ &\quad + \eta_n \langle Dn \xi_\Sigma, \nu \rangle \nu + \xi_n \langle Dn \eta_\Sigma, \nu \rangle \nu \\ &\quad - \xi_\nu D\nu \eta_\gamma - \eta_\nu D\nu \xi_\gamma \\ &\quad + \xi_\nu \langle D\nu \eta_\gamma, n \rangle n + \eta_\nu \langle D\nu \xi_\gamma, n \rangle n \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

$$\phi_n''(0)(\xi, \eta) = -\eta_\nu \xi_\nu \langle Dn \nu, \nu \rangle \quad (\text{I.19})$$

$$\begin{aligned} \phi_\nu''(0)(\xi, \eta) &= -\langle \xi_\gamma, D\nu \eta_\gamma \rangle \\ &\quad - \langle \nu, D\eta \xi_\gamma \rangle - \langle \nu, D\xi \eta_\gamma \rangle \\ &\quad - \eta_n \langle \nu, Dn \xi_\Sigma \rangle - \xi_n \langle \nu, Dn \eta_\Sigma \rangle \\ &\quad - \eta_n \langle n, D\nu \xi_\gamma \rangle - \xi_n \langle n, D\nu \eta_\gamma \rangle. \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

### Preuve du lemme I.3.

Comme  $\Sigma$  et  $\gamma$  sont des variétés de classe  $C^k$  et de dimension respectives  $d-1$  et  $d-2$ , il existe deux fonctions  $\zeta_0, \zeta_1 \in C^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  et deux voisinages ouverts  $\omega_0$  et  $\omega_1$  respectivement de  $\Sigma$  et  $\gamma$  tels que

$$\Sigma = \{x \in \omega_0; \zeta_0(x) = 0\} \quad \forall x \in \Sigma, \nabla \zeta_0(x) \neq 0. \quad (\text{I.21})$$

$$\gamma = \{x \in \omega_1; \zeta_0(x) = 0, \zeta_1(x) = 0\} \quad \forall x \in \gamma, \nabla \zeta_1(x) \neq 0. \quad (\text{I.22})$$

De plus le vecteur normal unitaire sortant à  $S$  est donné par

$$\forall x \in \Sigma, n(x) = \nabla \zeta_0(x) / |\nabla \zeta_0(x)|, \quad (\text{I.23})$$

et on peut choisir  $\zeta_0$  et  $\zeta_1$  de sorte que  $(n(x), \nu(x))$  soit une base orthonormale, avec  $\nu(x)$  défini comme

$$\forall x \in \gamma, \nu(x) = \nabla \zeta_1(x) / |\nabla \zeta_1(x)|. \quad (\text{I.24})$$

Le plan orthogonal à  $\gamma$  en  $x \in \gamma$  est alors donné par la base orthonormale  $(n(x), \nu(x))$ . On introduit maintenant  $Z^l = C^{k-l}(\Sigma, \mathbb{R}^d) \times C^{k-l}(\Sigma, \mathbb{R}) \times C^{k-l}(\gamma, \mathbb{R}^d) \times C^{k-l}(\gamma, \mathbb{R}) \times C^{k-l}(\gamma, \mathbb{R})$  et

$$T : \begin{cases} \Theta_k \times Z^l \rightarrow Z^l \\ (\theta, (H, \Phi, h, \phi_n, \phi_\nu)) \mapsto \begin{pmatrix} I + \theta - (I + \Phi n) \circ H \\ \zeta_0 \circ H \\ H - (I + \phi_n n + \phi_\nu \nu) \circ h \\ \zeta_1 \circ h \\ \zeta_0 \circ h \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{I.25})$$

On vérifie que la fonction  $T$  est de classe  $C^l$ . Pour tout  $(H, \Phi, h, \phi_n, \phi_\nu) \in Z^l$ , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} T(0, (I, 0, I, 0, 0)) = (0, 0, 0, 0, 0) \\ D_{(H, \Phi, h, \phi_n, \phi_\nu)} T(0, (I, 0, I, 0, 0))(H, \Phi, h, \phi_n, \phi_\nu) = \begin{pmatrix} -\Phi n - H \\ D\zeta_0 H \\ H - \phi_n n - \phi_\nu \nu - h \\ D\zeta_1 h \\ D\zeta_0 h \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{I.26})$$

On remarque que  $D\zeta_0 H = |\nabla \zeta_0| \langle n, H \rangle$ ,  $D\zeta_0 h = |\nabla \zeta_0| \langle n, h \rangle$  et  $D\zeta_1 h = |\nabla \zeta_0| \langle n, h \rangle$ . Afin de prouver que  $D_{(H, \Phi, h, \phi_n, \phi_\nu)} T(0, (I, 0, I, 0, 0))$  est un isomorphisme de  $Z^l$  dans lui-même, on doit d'abord prouver que pour tout  $(A, u, a, w, v)$ , la solution de

$$D_{(H, \Phi, h, \phi_n, \phi_\nu)} T(0, (I, 0, I, 0, 0))(H, \Phi, h, \phi_n, \phi_\nu) = (A, u, a, w, v)$$

est unique. Tout d'abord, on calcule le produit scalaire de la première ligne de (I.26) avec  $n$  et on trouve

$$\begin{aligned} \Phi &= -\langle A, n \rangle - |\nabla \zeta_0|^{-1} u, \\ H &= |\nabla \zeta_0|^{-1} u n - A_\Sigma. \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

Ensuite on calcule successivement le produit scalaire de (I.26) avec  $n$  et  $\nu$  et on obtient

$$\begin{aligned} \phi_n &= |\nabla \zeta_0|^{-1} u - |\nabla \zeta_0|^{-1} v - \langle a, n \rangle, \\ \phi_\nu &= -|\nabla \zeta_1|^{-1} w - \langle A, \nu \rangle - \langle a, \nu \rangle, \\ h &= -A_\gamma - a_\gamma + |\nabla \zeta_0|^{-1} v n + |\nabla \zeta_1|^{-1} w \nu \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

Ainsi,  $D_{(H, \Phi, h, \phi_n, \phi_\nu)} T(0, (I, 0, I, 0, 0))$  est un isomorphisme de  $Z^l$  dans lui-même, et la fonction  $T$  vérifie les conditions du théorème des fonctions implicites au voisinage de  $(0, (I, 0, I, 0, 0))$ . Par conséquent il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{U}_k \subset \Theta_k$  de 0 et cinq fonctions  $(H, \Phi, h, \phi_n, \phi_\nu)$  de classe  $C^l$

$$(H, \Phi, h, \phi_n, \phi_\nu) : \mathcal{U}_k \rightarrow Z^l \quad (\text{I.29})$$

tel que  $(H, \Phi, h, \phi_n, \phi_\nu)(0) = (I, 0, I, 0, 0)$  et

$$I + \theta = (I + \Phi(\theta)) \circ H(\theta), \quad (\text{I.30})$$

$$H(\theta) = (I + \phi_n(\theta)n + \phi_\nu(\theta)\nu) \circ h(\theta), \quad (\text{I.31})$$

$$\zeta_0(H(\theta)) = 0, \quad (\text{I.32})$$

$$\zeta_0(h(\theta)) = 0, \quad (\text{I.33})$$

$$\zeta_1(h(\theta)) = 0. \quad (\text{I.34})$$

Quitte à restreindre  $\mathcal{U}_k$ , on peut toujours supposer que  $H(\theta)$  prend ses valeurs dans  $\omega_0$  et que  $h(\theta)$  prend ses valeurs dans  $\omega_0 \cap \omega_1$ , de sorte que (I.32), (I.33), (I.34) impliquent  $H(\theta)(x) \in \Sigma$  pour tout  $x \in \Sigma$  et  $h(\theta)(x) \in \gamma$  pour tout  $x \in \gamma$ . On a donc montré la première partie du lemme .

On peut maintenant différentier les cinq équations (I.30)- (I.34) par rapport à  $\theta$  au voisinage de 0. Pour tout  $\xi \in \Theta_k$ , on a

$$\begin{aligned} \xi &= H'(\theta)(\xi) + D(\Phi(\theta)n) \circ H(\theta)H'(\theta)(\xi) \\ &\quad + (\Phi'(\theta)(\xi)n) \circ H(\theta), \end{aligned} \quad (\text{I.35})$$

$$\begin{aligned} H'(\theta)(\xi) &= h'(\theta)(\xi) + D(\phi_n(\theta)n + \phi_\nu(\theta)\nu) \circ h(\theta)h'(\theta)(\xi) \\ &\quad + (\phi'_n(\theta)(\xi)n + \phi'_\nu(\theta)(\xi)\nu) \circ h(\theta), \end{aligned} \quad (\text{I.36})$$

$$D\zeta_0(H(\theta))H'(\theta)(\xi) = 0, \quad (\text{I.37})$$

$$D\zeta_0(h(\theta))h'(\theta)(\xi) = 0, \quad (\text{I.38})$$

$$D\zeta_1(h(\theta))h'(\theta)(\xi) = 0. \quad (\text{I.39})$$

En particulier, pour  $\theta = 0$ , on obtient

$$\xi = H'(0)(\xi) + D(\Phi(0)n)H'(0)(\xi) + \Phi'(0)(\xi)n, \quad (\text{I.40})$$

$$\begin{aligned} H'(0)(\xi) &= h'(0)(\xi) + D(\phi_n(0)n + \phi_\nu(0)\nu)h'(0)(\xi) \\ &\quad + (\phi'_n(0)(\xi)n + \phi'_\nu(0)(\xi)\nu), \end{aligned} \quad (\text{I.41})$$

$$D\zeta_0 H'(0)(\xi) = 0 = |\nabla\zeta_0|\langle n, H'(0)(\xi) \rangle, \quad (\text{I.42})$$

$$D\zeta_0 h'(0)(\xi) = 0 = |\nabla\zeta_0|\langle n, h'(0)(\xi) \rangle, \quad (\text{I.43})$$

$$D\zeta_1 h'(0)(\xi) = 0 = |\nabla\zeta_1|\langle \nu, h'(0)(\xi) \rangle. \quad (\text{I.44})$$

Ensuite, on multiplie (I.40) par  $n$ , et en tenant compte de (I.42) on obtient

$$H'(0)(\xi) = \xi_\Sigma, \quad (\text{I.45})$$

$$\Phi'(0)(\xi) = \xi_n. \quad (\text{I.46})$$

En multipliant successivement (I.41) par  $n$  et  $\nu$ , et en utilisant les égalités (I.43) et (I.44) on obtient

$$h'(0)(\xi) = \xi_\gamma, \quad (\text{I.47})$$

$$\phi'_n(0)(\xi) = 0, \quad (\text{I.48})$$

$$\phi'_\nu(0)(\xi) = \xi_\nu. \quad (\text{I.49})$$

Maintenant, afin d'obtenir la dérivée par rapport au domaine du second ordre, on dérive (I.35)-(I.39) en  $\theta = 0$ . On en déduit le système d'équations suivant, pour tout  $\xi, \eta \in \Theta_k$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= H''(0)(\xi, \eta) + D(\Phi'(0)(\eta)n)H'(0)(\xi) \\ &\quad + \Phi''(0)(\xi, \eta)n + D(\Phi'(0)(\xi)n)H'(0)(\eta), \end{aligned} \quad (\text{I.50})$$

$$\begin{aligned} H''(0)(\xi, \eta) &= h''(0)(\xi, \eta) + (\phi''_n(0)(\xi, \eta)n + \phi''_\nu(0)(\xi, \eta)\nu) \\ &\quad + D(\phi'_n(0)(\xi)n + \phi'_\nu(0)(\xi)\nu)h'(0)(\eta) \\ &\quad + D(\phi'_n(0)(\eta)n + \phi'_\nu(0)(\eta)\nu)h'(0)(\xi), \end{aligned} \quad (\text{I.51})$$

$$0 = D\zeta_0 H''(0)(\xi, \eta) + D^2\zeta_0 H'(0)(\xi)H'(0)(\eta), \quad (\text{I.52})$$

$$0 = D\zeta_0 h''(0)(\xi, \eta) + D^2\zeta_0 h'(0)(\xi)h'(0)(\eta), \quad (\text{I.53})$$

$$0 = D\zeta_1 h''(0)(\xi, \eta) + D^2\zeta_0 h'(0)(\xi)h'(0)(\eta). \quad (\text{I.54})$$

Cependant, comme pour tout  $k \in \mathbb{R}^d$ ,  $D\zeta_0 k = |\nabla\zeta_0|\langle n, k \rangle$ , alors pour tout  $l \in \mathbb{R}^d$

$$D^2\zeta_0(k, l) = (D(|\nabla\zeta_0|)l)\langle n, k \rangle + |\nabla\zeta_0|\langle Dn l, k \rangle \quad (\text{I.55})$$

de sorte que

$$D^2\zeta_0(\xi_\Sigma, \eta_\Sigma) = |\nabla\zeta_0|\langle Dn \eta_\Sigma, \xi_\Sigma \rangle. \quad (\text{I.56})$$

En substituant les expressions (I.45)-(I.49) dans (I.50)-(I.54) et en utilisant (I.56) on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= H''(0)(\xi, \eta) + D(\langle \eta, n \rangle n)\xi_\Sigma \\ &\quad + \Phi''(0)(\xi, \eta)n + D(\xi_n n)\eta_\Sigma, \end{aligned} \quad (\text{I.57})$$

$$\begin{aligned} H''(0)(\xi, \eta) &= h''(0)(\xi, \eta) + (\phi''_n(0)(\xi, \eta)n + \phi''_\nu(0)(\xi, \eta)\nu) \\ &\quad + D(\xi_\nu \nu)\eta_\gamma + D(\langle \eta, \nu \rangle \nu)\xi_\gamma, \end{aligned} \quad (\text{I.58})$$

$$0 = \langle \xi_\Sigma, Dn \eta_\Sigma \rangle + \langle n, H''(0)(\xi, \eta) \rangle, \quad (\text{I.59})$$

$$0 = \langle \xi_\gamma, Dn \eta_\gamma \rangle + \langle n, h''(0)(\xi, \eta) \rangle, \quad (\text{I.60})$$

$$0 = \langle \xi_\gamma, D\nu \eta_\gamma \rangle + \langle \nu, h''(0)(\xi, \eta) \rangle. \quad (\text{I.61})$$

En multipliant (I.57) par  $n$  et en utilisant (I.59) on obtient

$$\Phi''(0)(\xi, \eta) = \langle \xi_\Sigma, Dn \eta_\Sigma \rangle - \langle D(\eta_n n)\xi_\Sigma, n \rangle - \langle D(\xi_n n)\eta_\Sigma, n \rangle. \quad (\text{I.62})$$

On peut simplifier (I.62) de la manière suivante

$$\langle D(\eta_n n)\xi_\Sigma, n \rangle = \langle Dn \xi_\Sigma, n \rangle \eta_n + \langle (n \otimes \nabla \eta_n)\xi_\Sigma, n \rangle. \quad (\text{I.63})$$

Le premier terme du membre de droite de (I.63) vaut 0 car  $\langle n, n \rangle = 1$  implique  $\langle Dn k, n \rangle = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{R}^d$ . Par conséquent (I.63) devient

$$\langle D(\eta_n n) \xi_\Sigma, n \rangle = \langle \nabla \eta_n, \xi_\Sigma \rangle \quad (\text{I.64})$$

$$= \langle D\eta \xi_\Sigma, n \rangle + \langle Dn \xi_\Sigma, \eta \rangle \quad (\text{I.65})$$

$$= \langle D\eta \xi_\Sigma, n \rangle + \langle Dn \xi_\Sigma, \eta_\Sigma \rangle. \quad (\text{I.66})$$

Enfin, en injectant (I.66) dans (I.62) on obtient

$$\Phi''(0)(\xi, \eta) = -\langle D\eta \xi_\Sigma, n \rangle - \langle D\xi \eta_\Sigma, n \rangle - \langle Dn \xi_\Sigma, \eta_\Sigma \rangle. \quad (\text{I.67})$$

En utilisant maintenant les équations (I.57) et (I.67) et en tenant compte de la décomposition (I.63) on obtient

$$H''(0)(\xi, \eta) = -\langle Dn \eta_\Sigma, \xi_\Sigma \rangle n - \eta_n Dn \xi_\Sigma - \xi_n Dn \eta_\Sigma. \quad (\text{I.68})$$

On multiplie (I.58) par  $n$  et  $\nu$  et en utilisant (I.60) et (I.61) on trouve

$$\begin{aligned} \phi_n''(0)(\xi, \eta) &= \langle \xi_\gamma, Dn \eta_\gamma \rangle - \langle \xi_\Sigma, Dn \eta_\Sigma \rangle \\ &\quad - \langle n, D(\xi_\nu \nu) \eta_\gamma \rangle - \langle n, D(\eta_\nu \nu) \xi_\gamma \rangle, \end{aligned} \quad (\text{I.69})$$

$$\begin{aligned} \phi_\nu''(0)(\xi, \eta) &= \langle \xi_\gamma, D\nu \eta_\gamma \rangle - \langle \nu, \eta_n Dn \xi_\Sigma \rangle - \langle \nu, \xi_n Dn \eta_\Sigma \rangle \\ &\quad - \langle \nu, D(\xi_\nu \nu) \eta_\gamma \rangle - \langle \nu, D(\eta_\nu \nu) \xi_\gamma \rangle. \end{aligned} \quad (\text{I.70})$$

De la même manière que pour (I.63)-(I.66), on peut écrire

$$D(\eta_\nu \nu) \xi_\gamma = \eta_\nu D\nu \xi_\gamma + \langle \nu, D\eta \xi_\gamma \rangle \nu + \langle \eta, D\nu \xi_\gamma \rangle \nu. \quad (\text{I.71})$$

De plus, on à la décomposition suivante

$$\begin{aligned} \langle \xi_\Sigma, Dn \eta_\Sigma \rangle &= \langle \xi_\gamma, Dn \eta_\gamma \rangle + \eta_\nu \xi_\nu \langle Dn \nu, \nu \rangle \\ &\quad + \eta_\nu \langle Dn \nu, \xi_\gamma \rangle + \xi_\nu \langle Dn \eta_\gamma, \nu \rangle. \end{aligned} \quad (\text{I.72})$$

En substituant (I.72) et (I.71) dans (I.69) on obtient finalement

$$\phi_n''(0)(\xi, \eta) = -\eta_\nu \xi_\nu \langle Dn \nu, \nu \rangle. \quad (\text{I.73})$$

On conclut avec le cas de  $\phi_\nu''(0)(\xi, \eta)$ . En substituant (I.71) dans (I.70) on obtient le résultat

$$\begin{aligned} \phi_\nu''(0)(\xi, \eta) &= -\langle \xi_\gamma, D\nu \eta_\gamma \rangle \\ &\quad - \langle \nu, D\eta \xi_\gamma \rangle - \langle \nu, D\xi \eta_\gamma \rangle \\ &\quad - \eta_n \langle \nu, Dn \xi_\Sigma \rangle - \xi_n \langle \nu, Dn \eta_\Sigma \rangle \\ &\quad - \eta_n \langle n, D\nu \xi_\gamma \rangle - \xi_n \langle n, D\nu \eta_\gamma \rangle. \end{aligned} \quad (\text{I.74})$$

On regroupe maintenant les expressions (I.74), (I.73) et (I.68) et on les insère dans (I.59), on obtient alors

$$\begin{aligned} h''(0)(\xi, \eta) &= \langle \xi_\gamma, Dn \eta_\gamma \rangle n + \langle \xi_\gamma, D\nu \eta_\gamma \rangle \nu \\ &\quad - \eta_n Dn \xi_\Sigma - \xi_n Dn \eta_\Sigma \\ &\quad + \eta_n \langle Dn \xi_\Sigma, \nu \rangle \nu + \xi_n \langle Dn \eta_\Sigma, \nu \rangle \nu \\ &\quad - \xi_\nu D\nu \eta_\gamma - \eta_\nu D\nu \xi_\gamma \\ &\quad + \xi_\nu \langle D\nu \eta_\gamma, n \rangle n + \eta_\nu \langle D\nu \xi_\gamma, n \rangle n. \end{aligned} \quad (\text{I.75})$$

On a donc terminé la preuve du lemme I.3. ■

### 3.. Preuve du Théorème de structure

Notre objectif est de prouver que pour  $\theta$  suffisamment proche de 0 dans  $\mathcal{D}_k$ , il existe une fonction  $F$  telle que

$$E(\theta) = F(\Phi(\theta), \phi_n(\theta), \phi_\nu(\theta)) \quad (\text{I.76})$$

où  $F$  est une fonctionnelle sur  $C^k(\Sigma, \mathbb{R}) \times C^k(\gamma, \mathbb{R}) \times C^k(\gamma, \mathbb{R})$  et les fonctions  $\Phi$ ,  $\phi_n$  et  $\phi_\nu$  sont définies en (I.9)-(I.10).

**Lemme I.4.** *Soit  $h_{1,\varepsilon}$  et  $h_{2,\varepsilon}$  deux fonctions de  $C^k(\Sigma, \Sigma)$  munies de la norme usuelle  $\|\cdot\|_k$ . Ces fonctions sont proches de l'identité au sens suivant :*

$$\|h_{1,\varepsilon} - I\|_k, \|h_{2,\varepsilon} - I\|_k \longrightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (\text{I.77})$$

On a alors le résultat suivant :

$$\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0, h_{1,\varepsilon}(\Sigma) = h_{2,\varepsilon}(\Sigma) = \Sigma \text{ et } h_{1,\varepsilon}(\gamma) = h_{2,\varepsilon}(\gamma) \implies h_{1,\varepsilon}(S) = h_{2,\varepsilon}(S) \quad (\text{I.78})$$

**Preuve.** Tout d'abord, si  $\varepsilon$  est suffisamment proche de 0, alors  $h_{1,\varepsilon}$  et  $h_{2,\varepsilon}$  sont des  $C^k$ -difféomorphismes grâce à (I.77). Ainsi on obtient  $\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0, h_{1,\varepsilon}(\Sigma) = h_{2,\varepsilon}(\Sigma) = \Sigma$ . Comme  $S \cup S' = \Sigma \setminus \gamma$ , on a également

$$h_{1,\varepsilon}(S) \cup h_{1,\varepsilon}(S') = \Sigma \setminus h_{1,\varepsilon}(\gamma) \quad (\text{I.79})$$

$$h_{2,\varepsilon}(S) \cup h_{2,\varepsilon}(S') = \Sigma \setminus h_{2,\varepsilon}(\gamma) \quad (\text{I.80})$$

car  $h_{1,\varepsilon}$  et  $h_{2,\varepsilon}$  sont des  $C^k$ -difféomorphismes. L'ensemble  $\Sigma \setminus h_{1,\varepsilon}(\gamma)$  a deux composantes connexes car  $\Sigma \setminus \gamma$  a deux composantes connexes. Comme les unions dans (I.79)-(I.80) sont des unions disjointes d'ouverts,  $h_{1,\varepsilon}(S)$  et  $h_{1,\varepsilon}(S')$  sont les composantes connexes recherchées. C'est vrai également pour  $h_{2,\varepsilon}$ , par conséquent on a deux possibilités :

$$h_{1,\varepsilon}(S) = h_{2,\varepsilon}(S) \quad \text{ou} \quad h_{1,\varepsilon}(S) = h_{2,\varepsilon}(S').$$

Dans le premier cas le lemme est prouvé et on va montrer que le cas  $h_{1,\varepsilon}(S) = h_{2,\varepsilon}(S')$  est impossible si  $\varepsilon$  est suffisamment proche de 0. Sinon, il existe une suite  $(\varepsilon_i)$  qui tend vers 0 telle que  $h_{1,\varepsilon_i}(S) \cap h_{2,\varepsilon_i}(S) = \emptyset$ .

Pour simplifier, on écrit  $\varepsilon$  au lieu de  $\varepsilon_i$ , et pour  $x \in S$  on définit

$$x_{1,\varepsilon} = h_{1,\varepsilon}(x) \quad \text{et} \quad x_{2,\varepsilon} = h_{2,\varepsilon}(x).$$

$$h_{1,\varepsilon}(\gamma) = h_{2,\varepsilon}(\gamma) = \gamma_\varepsilon$$

Comme  $h_{1,\varepsilon}(S) \cap h_{2,\varepsilon}(S) = \emptyset$ ,  $x_{1,\varepsilon}$  et  $x_{2,\varepsilon}$  sont séparés par  $\gamma_\varepsilon$ , ce qui signifie que pour tout chemin  $\alpha$  joignant  $x_{1,\varepsilon}$  à  $x_{2,\varepsilon}$ ,  $\alpha \cap \gamma_\varepsilon \neq \emptyset$ . Soit  $A$  l'ensemble des courbes régulières joignant  $x_{1,\varepsilon}$  à  $x_{2,\varepsilon}$ , alors on a

$$d(x_{1,\varepsilon}, x_{2,\varepsilon}) = \inf_{\alpha \in A} \mathcal{L}(\alpha)$$

où  $d$  est la distance sur la variété  $\Sigma$  et  $\mathcal{L}(\alpha)$  est la longueur du chemin  $\alpha$ . Alors par définition de l'infimum on obtient :

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0, \exists \alpha_\varepsilon \quad d(x_{1,\varepsilon}, x_{2,\varepsilon}) \geq \mathcal{L}(\alpha_\varepsilon) - \delta. \quad (\text{I.81})$$

On choisit  $y_\varepsilon$  dans  $\gamma_\varepsilon \cap \alpha_\varepsilon$  tel que

$$\mathcal{L}(\alpha_\varepsilon) = \mathcal{L}(\widehat{x_{1,\varepsilon}y_\varepsilon}) + \mathcal{L}(\widehat{y_\varepsilon x_{2,\varepsilon}}).$$

En prenant la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}(\alpha_\varepsilon) \geq 2d(x, \gamma).$$

Si on choisit  $\delta = d(x, \gamma)$ , l'équation (I.81) devient

$$d(x_{1,\varepsilon}, x_{2,\varepsilon}) \geq \mathcal{L}(\alpha_\varepsilon) - d(x, \gamma)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d(x_{1,\varepsilon}, x_{2,\varepsilon}) &\geq 2d(x, \gamma) - d(x, \gamma) \\ &\geq d(x, \gamma) > 0. \end{aligned}$$

ce qui est impossible car  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d(x_{1,\varepsilon}, x_{2,\varepsilon}) = 0$ . Par conséquent la preuve est terminée. ■

On applique maintenant le lemme I.3 avec  $k$  remplacé par  $k + 1$  et  $l = 1$ . On obtient l'existence d'un voisinage ouvert  $\mathcal{U}_{k+1} \subset \Theta_{k+1}$  de 0, et d'un vecteur  $(H, \Phi, h, \phi_n, \phi_\nu)$  de fonctions  $C^1$  :

$$(H, \Phi, h, \phi_n, \phi_\nu) : \mathcal{U}_k \rightarrow G^{k-l}(\Sigma, \Sigma) \times C^{k-l}(\Sigma, \mathbb{R}) \times G^{k-l}(\gamma, \gamma) \times C^{k-l}(\gamma, \mathbb{R}) \times C^{k-l}(\gamma, \mathbb{R}). \quad (\text{I.82})$$

Quitte à restreindre  $\mathcal{U}_{k+1}$ , on peut supposer que  $H(\theta)$  et  $h(\theta)$  sont bijectifs respectivement de  $\Sigma$  dans  $\Sigma$  et de  $\gamma$  dans  $\gamma$  pour tout  $\theta \in \mathcal{U}_{k+1}$ . En utilisant l'équation (I.10) on peut écrire

$$H(\theta)(\gamma) = (I + \phi_n(\theta)n + \phi_\nu(\theta)\nu) \circ h(\theta)(\gamma) \quad (\text{I.83})$$

$$= (I + \phi_n(\theta)n + \phi_\nu(\theta)\nu)(\gamma). \quad (\text{I.84})$$

Soit  $v$  une extension continue :

$$v : C^k(\gamma, \Sigma) \rightarrow C^k(\Sigma, \Sigma),$$

telle que l'image par  $v$  d'un élément de  $C^k(\gamma, \Sigma)$  soit proche de l'identité au sens du lemme I.4. Une telle extension existe, et on en donne une construction explicite dans le cas particulier de la dimension 2. Alors  $v(I + \phi_n(\theta)n + \phi_\nu(\theta)\nu) \in C^k(\Sigma, \Sigma)$  peut s'écrire

$$v(I + \phi_n(\theta)n + \phi_\nu(\theta)\nu) = I + w(\phi_n(\theta), \phi_\nu(\theta))$$

où  $w$  est une fonction de  $C^k(\gamma, \mathbb{R}^d)^2$  dans  $C^k(\Sigma, \mathbb{R}^d)$ . En appliquant le lemme I.4 on obtient l'implication suivante

$$H(\theta)(\gamma) = (I + \phi_n(\theta)n + \phi_\nu(\theta)\nu) \circ h(\theta)(\gamma) \implies H(\theta)(S) = (I + w(\phi_n(\theta), \phi_\nu(\theta)))(S).$$

Maintenant soit  $u$  une extension continue :

$$u : C^k(\Sigma, \mathbb{R}^d) \rightarrow C^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d).$$

En utilisant (I.9) et (I.10) on obtient

$$\begin{aligned} (I + \theta)(S) &= [I + \Phi(\theta)n] \circ [I + w(\phi_n(\theta), \phi_\nu(\theta))](S) \\ &= [I + w(\phi_n(\theta), \phi_\nu(\theta)) + \Phi((\theta)n) \circ (I + w(\phi_n(\theta), \phi_\nu(\theta)))](S) \\ &= [I + u[w(\phi_n(\theta), \phi_\nu(\theta)) + \Phi((\theta)n) \circ (I + w(\phi_n(\theta), \phi_\nu(\theta)))]](S) \end{aligned} \quad (\text{I.85})$$

Comme  $\Omega_\theta$  est défini par  $U \setminus \overline{S_\theta}$ , on obtient clairement de (I.85) que

$$E(\theta) = E(u[w(\phi_n(\theta), \phi_\nu(\theta)) + \Phi((\theta)n) \circ (I + w(\phi_n(\theta), \phi_\nu(\theta)))] := F(\Phi(\theta), \phi_n(\theta), \phi_\nu(\theta))$$



qui fournit (I.76). On différentie maintenant (I.76) en  $\theta = 0$  dans la direction  $\xi \in \theta_{k+1}$ . En utilisant le lemme I.3 et la loi de dérivation d'une fonction composée, on obtient

$$E'(0)(\xi) = F_{\Phi}(\Phi'(0)(\xi)) + F_{\phi_{\nu}}(\phi'_{\nu}(0)(\xi)) + F_{\phi_n}(\phi'_n(0)(\xi)) = F_{\Phi}(\xi_n) + F_{\phi_{\nu}}(\xi_{\nu}),$$

où  $F_{\Phi}$  est la dérivée de  $F$  par rapport à  $\Phi$ . Comme  $\Theta_{k+1}$  est dense dans  $\Theta_k$  et  $F_{\Phi}$ ,  $F_{\phi_{\nu}}$  et  $F_{\phi_n}$  sont des formes linéaires continues, on obtient (I.5) avec  $l^1 = F_{\Phi}$  et  $l^1_{\nu} = F_{\phi_{\nu}}$ . On pose également  $l^1_n = F_{\phi_n}$ .

Pour la preuve de la deuxième partie du théorème I.1, on applique le lemme I.3 avec  $k$  remplacé par  $k+2$  et  $l = 2$ . On obtient alors (I.6) de la même manière que pour (I.5). La preuve est donc terminée.  $\blacksquare$

#### 4.. Le théorème de structure en dimension deux

Le cas de la dimension deux est un cas dégénéré du cas général étudié au chapitre précédent. En effet, en reprenant les mêmes notations,  $D$  est un ouvert borné de classe  $C^k$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Sigma = \partial D$  est une courbe fermée de classe  $C^k$ , et  $\gamma$  est une variété connexe de dimension 0. Autrement dit,  $\gamma$  est réduit à un point ce qui pose plusieurs problèmes par rapport à l'étude précédente. En effet  $\Sigma \setminus \gamma$  à maintenant une seule composante connexe. On voit bien que pour obtenir une "vraie" fissure, il est nécessaire que  $\gamma$  ne soit pas réduit à un point, mais soit la réunion de deux points distincts de  $\Sigma$ .

On adapte en fait sans difficulté les résultats précédents au cas de la dimension deux. Dans la suite, on énonce donc le théorème de structure et sa preuve en dimension deux. Les résultats obtenus sont plus simples que les résultats dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 3$ , toutefois nous gardons dans la mesure du possible les mêmes notations afin de pouvoir faire la correspondance avec le cas général. Nous ferons également référence au cas général quand les notions à introduire ou les démonstrations sont redondantes, la différence principale tenant au fait que  $\gamma$  est la réunion de deux points et n'est donc pas connexe.

Dans la suite,  $U$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  avec une frontière lisse. L'ensemble  $U$  est appelé le fourre-tout et les perturbations  $\theta$  définies plus loin laissent  $U$  globalement inchangé. Soit également  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ . L'ensemble  $\mathcal{O}_k$  est défini comme en (I.1).

**Domaines fissurés :** Soit  $D \in \mathcal{O}_k$ , on note  $\Sigma = \partial D$ . Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux points distincts de  $\Sigma$ , on définit  $\gamma = \{A_1, A_2\}$ . Alors  $\Sigma \setminus \gamma$  a deux composantes connexes  $S$  et  $S'$ ,  $\bar{S}$  est appelé une fissure et on définit  $\Omega = U \setminus \bar{S}$  comme le domaine fissuré.

Soit  $\Omega_0$  un domaine fissuré, on a alors

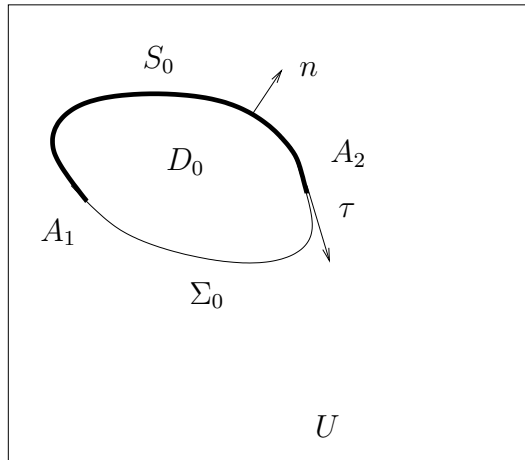
$$\gamma_0 \subset \Sigma_0 = \partial D_0, \quad S_0 \cup S'_0 = \Sigma_0 \setminus \gamma_0, \quad \Omega_0 = U \setminus \bar{S}_0,$$

et on note  $n$  le vecteur normal unitaire sortant de  $D$ , et  $\tau$  le vecteur unitaire tangent à  $\Sigma$ . Le vecteur  $\tau$  correspond au vecteur  $\nu$  dans le cas général.

L'espace fonctionnel  $\Theta_k$ , les domaines perturbés  $\Omega_{\theta}$ , l'ensemble des domaines fissurés admissibles  $\mathcal{F}_k$  et la fonctionnelle  $E$  sont définis comme dans le paragraphe 1..

**Notations :** Pour  $x, y \in \mathbb{R}^2$ , on note  $\langle x, y \rangle$  le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^2$ .

Dans la suite, pour simplifier la notation, on utilise la convention d'Einstein pour les

FIG. 3. Le domaine  $\Omega_0$ 

indices répétés  $i = 1, 2$ , i.e. on note  $\alpha_i \beta_i := \sum_{i=1}^2 \beta_i \alpha_i$ . Etant donné un vecteur  $\xi$  dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\xi = \xi_n n + \xi_\tau \tau$  où  $\xi_n = \langle \xi, n \rangle$  et  $\xi_\tau = \langle \xi, \tau \rangle$  désignent les composantes normales et tangentielles, respectivement. On remarquera que  $\xi_n$  et  $\xi_\tau$  sont des scalaires.

Nous pouvons maintenant donner le résultat principal de ce chapitre.

**Théorème I.5.** *Soit  $k \geq 1$ .*

- (1) *Soit  $\Omega_0$  un domaine fissuré avec  $D_0 \in \mathcal{O}_{k+1}$ . On suppose que  $E$  est Fréchet-différentiable dans  $\Theta_k$  en 0, alors il existe une forme linéaire continue  $l^1 : C^k(\Sigma_0, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  et des constantes  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2$ , telles que :*

$$E'(0)(\xi) = l^1(\xi_n) + \alpha_i \xi_\tau(A_i), \quad \forall \xi \in \Theta_k. \quad (\text{I.86})$$

- (2) *Soit  $\Omega_0$  un domaine fissuré avec  $D_0 \in \mathcal{O}_{k+2}$ . On suppose que  $E$  est deux fois Fréchet-différentiable en 0 dans  $\Theta_k$ , et notons  $\mathcal{H}$  la courbure moyenne de  $\Sigma_0$  alors il existe des constantes  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2$ , des constantes  $\tilde{\alpha}_i$ ,  $i = 1, 2$ , et deux formes bilinéaires :*

$$\begin{aligned} l^2 &: C^k(\Sigma_0, \mathbb{R}) \times C^k(\Sigma_0, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \\ \mathcal{L}^2 &: C^k(\Sigma_0, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

telles que pour tout champ de vecteurs  $\xi, \eta \in \Theta_{k+1}$  :

$$\begin{aligned} E''(0)(\xi, \eta) &= l^2(\xi_n, \eta_n) \\ &+ \beta_i \xi_\tau(A_i) \eta_\tau(A_i) \\ &+ \beta_{12} (\xi_\tau(A_1) \eta_\tau(A_2) + \xi_\tau(A_2) \eta_\tau(A_1)) \\ &- l^1(\mathcal{H} \xi_\tau \eta_\tau + \langle n, D\xi\tau \rangle \eta_\tau + \langle n, D\eta\tau \rangle \xi_\tau) \\ &+ \alpha_i \mathcal{H}(A_i) (\xi_\tau \eta_n + \xi_n \eta_\tau)(A_i) \\ &+ \tilde{\alpha}_i \mathcal{H}(A_i) \xi_\tau(A_i) \eta_\tau(A_i) \\ &+ \mathcal{L}^2(\xi_n, \eta_\tau(A_1), \eta_\tau(A_2)) \\ &+ \mathcal{L}^2(\eta_n, \xi_\tau(A_1), \xi_\tau(A_2)). \end{aligned} \quad (\text{I.87})$$

**Remarque I.6.** Si  $\Omega_0$  est une forme critique pour  $E$  i.e.,  $E'(0) = 0$  en  $\Omega_0$ , alors  $l^1 \equiv 0$  et  $\alpha_i = 0$   $i = 1, 2$ , ainsi l'expression de la dérivée du second ordre se simplifie et

devient :

$$\begin{aligned}
E''(0)(\xi, \eta) &= l^2(\xi_n, \eta_n) \\
&\quad + \beta_i \xi_\tau(A_i) \eta_\tau(A_i) \\
&\quad + \beta_{12}(\xi_\tau(A_1) \eta_\tau(A_2) + \xi_\tau(A_2) \eta_\tau(A_1)) \\
&\quad + \tilde{\alpha}_i \mathcal{H}(A_i) \xi_\tau(A_i) \eta_\tau(A_i) \\
&\quad + \mathcal{L}^2(\xi_n, \eta_\tau(A_1), \eta_\tau(A_2)) \\
&\quad + \mathcal{L}^2(\eta_n, \xi_\tau(A_1), \xi_\tau(A_2))
\end{aligned}$$

**Remarque I.7.** Nous avons utilisé la relation spécifique à la dimension deux :  $\langle Dn\tau, \tau \rangle = \mathcal{H}$ , où  $\mathcal{H}$  est la courbure moyenne de la courbe  $\Sigma_0$ . Cette égalité permet de faire le lien entre (I.87) et la formule dans le cas général (I.6).

### 5.. Perturbations normale et tangentielle

Pour tout  $l \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq l \leq k$ , on pose

$$G^{k-l}(\Sigma, \Sigma) := \{g \in C^{k-l}(\Sigma, \mathbb{R}^2); g(\Sigma) \subset \Sigma\} \quad (\text{I.88})$$

On note  $\Phi(\theta)$  et  $H(\theta)$  les perturbations normale et tangentielle, respectivement, sur la surface  $\Sigma$ . Contrairement au cas général, il n'est pas nécessaire d'introduire les fonctions  $\phi_n(\theta)$  et  $\phi_\nu(\theta)$  et  $h(\theta)$  définies en (I.10). On utilise le théorème des fonctions implicites pour obtenir le lemme suivant, qui sera utilisé pour la preuve du théorème de structure.

**Lemme I.8.** *On suppose que  $\Sigma$  est une variété de classe  $C^k$ . Pour tout  $1 \leq l \leq k$ , il existe un voisinage ouvert  $\mathcal{U}_k$  de 0 dans  $\Theta_k$  et un unique vecteur  $(H, \Phi)$  de fonctions  $C^l$  :*

$$(H, \Phi) : \mathcal{U}_k \rightarrow G^{k-l}(\Sigma, \Sigma) \times C^{k-l}(\Sigma, \mathbb{R}) \quad (\text{I.89})$$

telles que  $(H, \Phi)(0) = (I, 0)$  et pour tout  $\theta \in \mathcal{U}_k$

$$I + \theta = (I + \Phi(\theta)n) \circ H(\theta) \text{ sur } \Sigma_0 \quad (\text{I.90})$$

De plus, pour tout  $\xi, \eta \in \Theta_k$  on a pour  $l \geq 1$  :

$$H'(0)(\xi) = \xi_\tau \tau, \quad (\text{I.91})$$

$$\Phi'(0)(\xi) = \xi_n, \quad (\text{I.92})$$

et pour  $l \geq 2$  les dérivées secondes sont données par

$$H''(0)(\xi, \eta) = -\mathcal{H}[(\xi_\tau \eta_n + \xi_n \eta_\tau) \tau + \xi_\tau \eta_\tau n] \quad (\text{I.93})$$

$$\Phi''(0)(\xi, \eta) = -\mathcal{H} \xi_\tau \eta_\tau - \langle n, D\xi \tau \rangle \eta_\tau - \langle n, D\eta \tau \rangle \xi_\tau \quad (\text{I.94})$$

**Remarque I.9.** Les formules (I.94) et (I.93) dans le cas de la dimension deux sont identiques aux formules (I.16) et (I.17) dans le cas général, certaines simplifications ayant pu être faites en dimension deux, en utilisant notamment la formule  $\langle Dn\tau, \tau \rangle = \mathcal{H}$ .

**Preuve du lemme I.8.** La décomposition (I.90) est obtenue de manière identique à (I.9) dans le cas général, c'est à dire en utilisant le théorème des fonctions implicites. Par conséquent la preuve n'est pas répétée ici.

Comme  $\Sigma_0$  est de classe  $C^k$ , il existe  $\zeta \in C^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  tel que  $\nabla \zeta(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in \Sigma_0$ , ainsi qu'un voisinage ouvert  $\omega_0$  de  $\Sigma_0$  dans  $\mathbb{R}^2$  tel que

$$\Sigma_0 = \{x \in \omega_0 \mid \zeta(x) = 0\}.$$

La fonction distance orientée  $\zeta(x) = \min_{y \in L_0} |y - x|$ , voir [18] pour une étude approfondie, vérifie ces hypothèses. La fonction  $\zeta$  peut être utilisée pour définir le vecteur normal  $n$  à  $\Sigma_0$ ,

$$\forall x \in \Sigma_0, n(x) = \nabla\zeta(x)/|\nabla\zeta(x)|.$$

On en déduit deux équations pour les applications  $\Phi$  et  $H$ ,

$$I + \theta = (I + \Phi(\theta)n) \circ H(\theta), \quad (\text{I.95})$$

$$\zeta(H(\theta)) = 0. \quad (\text{I.96})$$

Quitte à réduire  $\mathcal{U}_k$ , on peut supposer que  $H(\theta)$  prend ses valeurs dans  $\omega_0$ . Dès lors, l'équation (I.96) implique que  $H(\theta)(\Sigma_0) \subset \Sigma_0$ . En dérivant (I.95) et (I.96) par rapport à  $\theta$  au voisinage de 0, il s'ensuit que pour tout  $\xi \in \Theta_k$  :

$$\xi = H'(\theta)(\xi) + D(\Phi(\theta)n) \circ H(\theta)H'(\theta)(\xi) + (\Phi'(\theta)(\xi)n) \circ H(\theta), \quad (\text{I.97})$$

$$0 = D\zeta(H(\theta))H'(\theta)(\xi). \quad (\text{I.98})$$

En particulier, pour  $\theta = 0$ , en tenant compte de  $H(0) = I$ , on a

$$\xi - H'(0)(\xi) + \Phi'(0)(\xi)n = 0, \quad (\text{I.99})$$

$$D\zeta H'(0)(\xi) = 0. \quad (\text{I.100})$$

Comme  $n = \nabla\zeta/|\nabla\zeta|$ , en multipliant (I.99) par  $n$  et en utilisant (I.100) on obtient

$$\Phi'(0)(\xi) = \xi_n, \quad H'(0)(\xi) = \xi_\tau \tau. \quad (\text{I.101})$$

Maintenant, pour obtenir la dérivée seconde par rapport au domaine, on dérive (I.97) et (I.98) en  $\theta = 0$ . En utilisant (I.101), on en déduit le système d'équations suivant, pour tout  $\xi, \eta \in \Theta_k$ ,

$$0 = H''(0)(\xi, \eta) + D(\eta_n n)\xi_\tau \tau + \Phi''(0)(\xi, \eta)n + D(\xi_n n)\eta_\tau \tau, \quad (\text{I.102})$$

$$0 = D^2\zeta(\xi_\tau \tau, \eta_\tau \tau) + \langle |\nabla\zeta|n, H''(0)(\xi, \eta) \rangle. \quad (\text{I.103})$$

La valeur de  $D^2\zeta(\xi_\tau \tau, \eta_\tau \tau)$  peut être obtenue en dérivant  $D\zeta h = \langle |\nabla\zeta|n, h \rangle$ . Le calcul nous mène à

$$D^2\zeta(\xi_\tau \tau, \eta_\tau \tau) = |\nabla\zeta| \langle Dn\tau, \tau \rangle \eta_\tau \xi_\tau = |\nabla\zeta| \mathcal{H} \eta_\tau \xi_\tau. \quad (\text{I.104})$$

Ainsi, grâce à (I.103)

$$\langle H''(0)(\xi, \eta), n \rangle = -\mathcal{H} \eta_\tau \xi_\tau. \quad (\text{I.105})$$

De même à l'aide de (I.102) :

$$\begin{aligned} \langle H''(0)(\xi, \eta), \tau \rangle &= -\xi_\tau \langle D(\eta_n n)\tau, \tau \rangle - \eta_\tau \langle D(\xi_n n)\tau, \tau \rangle \\ &= -\eta_n \xi_\tau \langle Dn\tau, \tau \rangle - \xi_n \eta_\tau \langle Dn\tau, \tau \rangle \\ &= -\mathcal{H}(\eta_n \xi_\tau + \xi_n \eta_\tau). \end{aligned} \quad (\text{I.106})$$

L'égalité  $\langle D(\eta_n n)\tau, \tau \rangle = \eta_n \langle Dn\tau, \tau \rangle$  est confirmée par

$$D(\eta_n n) = \eta_n Dn + n \otimes \nabla\eta_n.$$

En tenant compte de  $\langle n, \tau \rangle = 0$ , il s'ensuit que

$$\langle (n \otimes \nabla\eta_n)\tau, \tau \rangle = \sum_{i,j=1}^2 n_i \tau_i (\nabla\eta_n)_j \tau_j = 0.$$

Finalement on doit calculer  $\Phi''(0)(\xi, \eta)$  afin de vérifier que le résultat coincide avec (I.94). On utilise le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \langle D(\xi_n n) \eta_\tau \tau, n \rangle &= \langle Dn \eta_\tau \tau, n \rangle \xi_n \eta_\tau + \langle (n \otimes \nabla \xi_n) \tau, n \rangle \eta_\tau \\ &= \langle \nabla \xi_n, \tau \rangle \eta_\tau \\ &= \langle D\xi \tau, n \rangle \eta_\tau + \langle Dn \tau, \xi \rangle \eta_\tau \\ &= \langle D\xi \tau, n \rangle \eta_\tau + \langle Dn \tau, \tau \rangle \xi_\tau \eta_\tau \end{aligned}$$

et en injectant  $\langle D(\xi_n n) \eta_\tau \tau, n \rangle = \langle D\xi \tau, n \rangle \eta_\tau + \langle Dn \tau, \tau \rangle \xi_\tau \eta_\tau$  dans (I.102) on obtient (I.94). On a donc terminé la preuve du lemme I.8.  $\blacksquare$

## 6.. Preuve du Théorème de structure en dimension deux

Tout d'abord on introduit la fonction  $K$  de  $\mathcal{D}_k$  dans  $\Sigma \times \Sigma$  :

$$K(\theta) = \begin{pmatrix} H(\theta)(A_1) \\ H(\theta)(A_2) \end{pmatrix}. \quad (\text{I.107})$$

La fonction  $K(\theta)$  joue un rôle équivalent en deux dimensions à la décomposition (I.10) dans le cas général. Notre objectif est de prouver que pour  $\theta$  suffisamment proche de 0 dans  $\mathcal{D}_k$ , il existe une fonction  $F$  telle que

$$E(\theta) = F(\Phi(\theta), K(\theta)) \quad (\text{I.108})$$

où les fonctions  $\Phi$  et  $K$  sont définies respectivement en (I.90) et (I.107).

**Lemme I.10.** *Soit  $h_{1,\varepsilon}$  et  $h_{2,\varepsilon}$  deux fonctions de  $C^k(\Sigma, \Sigma)$  munies de la norme usuelle  $\|\cdot\|_k$ . Ces fonctions sont proches de l'identité au sens suivant :*

$$\|h_{1,\varepsilon} - I\|_k, \|h_{2,\varepsilon} - I\|_k \longrightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (\text{I.109})$$

On a alors le résultat suivant :

$$\exists \varepsilon_0, \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0, h_{1,\varepsilon}(\Sigma) = h_{2,\varepsilon}(\Sigma) = \Sigma \text{ et } h_{1,\varepsilon}(\gamma) = h_{2,\varepsilon}(\gamma) \implies h_{1,\varepsilon}(S) = h_{2,\varepsilon}(S) \quad (\text{I.110})$$

La démonstration de ce lemme est identique à celle du lemme I.4. On peut maintenant terminer la démonstration du théorème de structure en dimension deux.

On applique le lemme I.8 avec  $k$  remplacé par  $k+1$  et  $l=1$ . On obtient l'existence d'un voisinage ouvert  $\mathcal{U}_{k+1} \subset \Theta_{k+1}$  de 0, et d'un vecteur  $(H, \Phi)$  de fonctions  $C^1$  :

$$(H, \Phi) : \mathcal{U}_k \rightarrow G^{k-l}(\Sigma, \Sigma) \times C^{k-l}(\Sigma, \mathbb{R}). \quad (\text{I.111})$$

Quitte à restreindre  $\mathcal{U}_{k+1}$ , on peut supposer que  $H(\theta)$  est bijectif de  $\Sigma$  dans  $\Sigma$  pour tout  $\theta \in \mathcal{U}_{k+1}$ .

Soit  $v$  une extension continue :

$$v : \Sigma \times \Sigma \rightarrow C^k(\Sigma, \Sigma),$$

qui vérifie de plus

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (B_1, B_2) \in \Sigma \times \Sigma, \\ \|(B_1, B_2) - (A_1, A_2)\| \leq \delta \implies \|v(B_1, B_2) - I\|_{C^k(\Sigma, \Sigma)} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

où  $I$  désigne la fonction identité de  $C^k(\Sigma, \Sigma)$ . Une telle extension existe, on peut en donner une construction explicite comme suit. La courbe  $\Sigma$  peut être paramétrée par un difféomorphisme  $\varphi$  de classe  $C^k$  vérifiant

$$\varphi([0, 1]) = \Sigma, \quad (\text{I.112})$$

$$\varphi(0) = \phi(1), \quad (\text{I.113})$$

$$(\text{I.114})$$

et on pose

$$a_1 := \varphi(A_1), \quad (\text{I.115})$$

$$a_2 := \varphi(A_2). \quad (\text{I.116})$$

$$(\text{I.117})$$

On peut toujours supposer, quitte à changer la paramétrisation, que  $0 < a_1 < a_2 < 1$ . on construit maintenant une fonction  $\tilde{v}$  vérifiant

$$\begin{aligned} \tilde{v} : \quad [0, 1]^2 &\rightarrow C^\infty([0, 1]^2) \\ (b_1, b_2) &\mapsto \tilde{v}_{b_1, b_2} \end{aligned} \quad (\text{I.118})$$

et

$$\|\tilde{v}_{b_1, b_2} - I\|_{C^\infty([0, 1]^2)} \leq 2 \max(|b_1 - a_1|, |b_2 - a_2|). \quad (\text{I.119})$$

En effet soit  $f$  la fonction affine par morceaux définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{b_1}{a_1}x \quad \text{sur } [0, a_1] \\ f(x) &= b_2 \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} + b_1 \quad \text{sur } [a_1, a_2] \\ f(x) &= \frac{x - a_2}{1 - a_2} + b_2 \quad \text{sur } [a_2, 1] \end{aligned}$$

Comme  $C^\infty([0, 1])$  est dense dans  $C^0([0, 1])$ , et que  $\|f - I\| \leq \max(|b_1 - a_1|, |b_2 - a_2|)$ , il existe une fonction  $\tilde{v}$  vérifiant (I.118) et (I.119). En posant ensuite

$$v := \tilde{v} \circ \varphi^{-1},$$

on a trouvé l'extension recherchée. La fonction  $v(K(\theta)) \in C^k(\Sigma, \Sigma)$  peut s'écrire

$$v(K(\theta)) = I + w(K(\theta))$$

où  $w$  est une fonction de  $\Sigma \times \Sigma$  dans  $C^k(\Sigma, \Sigma)$ .

En appliquant le lemme I.10, ce qui est possible grâce à (I.119), on obtient l'implication suivante

$$H(\theta)(\gamma) = K(\theta)(\gamma) \implies H(\theta)(S) = I + w(K(\theta))(S)$$

Maintenant soit  $u$  une extension continue :

$$u : C^k(\Sigma, \mathbb{R}^2) \rightarrow C^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2).$$

En utilisant (I.90) on obtient

$$\begin{aligned} (I + \theta)(S) &= [I + \Phi(\theta)n] \circ [I + w(K(\theta))] (S) \\ &= [I + w(K(\theta)) + \Phi((\theta)n) \circ (I + w(K(\theta)))] (S) \\ &= [I + u[w(K(\theta)) + \Phi((\theta)n) \circ (I + w(K(\theta)))] (S) \end{aligned} \quad (\text{I.120})$$

Comme  $\Omega_\theta$  est défini par  $U \setminus \overline{S_\theta}$ , on obtient clairement de (I.120) que

$$E(\theta) = E(u[w(K(\theta)) + \Phi((\theta)n) \circ (I + w(K(\theta)))] := F(\Phi(\theta), K(\theta)),$$

qui fournit (I.108). On différentie maintenant (I.108) en  $\theta = 0$  dans la direction  $\xi \in \theta_{k+1}$ . En utilisant le lemme I.8 et la loi de dérivation d'une fonction composée, on obtient

$$E'(0)(\xi) = F_\Phi(\Phi'(0)(\xi)) + F_K(K'(0)(\xi)), \quad (\text{I.121})$$

où  $F_\Phi$  est la dérivée de  $F$  par rapport à  $\Phi$ . Comme  $\Theta_{k+1}$  est dense dans  $\Theta_k$  et  $F_\Phi$ , et  $F_K$  sont des formes linéaires continues, on obtient (I.86) avec  $l^1 = F_\Phi$  et

$$F_K = \begin{pmatrix} \alpha_1 \langle \cdot, \tau \rangle + \tilde{\alpha}_1 \langle \cdot, n \rangle \\ \alpha_2 \langle \cdot, \tau \rangle + \tilde{\alpha}_2 \langle \cdot, n \rangle \end{pmatrix}. \quad (\text{I.122})$$

Pour la preuve de la deuxième partie du théorème I.5, on applique le lemme I.8 avec  $k$  remplacé par  $k + 2$  et  $l = 2$ . On obtient alors (I.87) de la même manière qu'on a obtenu (I.86).

$$\begin{aligned} E''(0)(\xi, \eta) &= F_{\Phi\Phi}(0)(\Phi'(0)(\xi), \Phi'(0)(\eta)) + F_\Phi(0)(\Phi''(0)(\xi, \eta)) \\ &\quad + F_{\Phi K}(0)(\Phi'(0)(\xi), K'(0)(\eta)) + F_{\Phi K}(0)(\Phi'(0)(\eta), K'(0)(\xi)) \\ &\quad + F_{KK}(0)(K'(0)(\xi), K'(0)(\eta)) + F_K(0)(K''(0)(\xi, \eta)) \end{aligned} \quad (\text{I.123})$$

Par densité de  $\Theta_{k+2}$  dans  $\Theta_{k+1}$ , et par la continuité des formes linéaires dans cette formule,  $l^2$  et  $\mathcal{L}_2$  dans la formule (I.87) sont donnés par  $l^2 = F_{\Phi\Phi}(0)$  et  $\mathcal{L}_2 = F_{\Phi K}(0)$ . En ce qui concerne  $F_{KK}(0)$ , on fait la remarque suivante : on peut écrire la fonction  $K(\theta)$  de la façon suivante

$$K(\theta) = \begin{pmatrix} K_1(\theta) \\ K_2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (\text{I.124})$$

on peut alors écrire

$$\begin{aligned} F_{KK}(0)(K'(0)(\xi), K'(0)(\eta)) &= F_{K_1 K_1}(0)(K'_1(0)(\xi), K'_1(0)(\eta)) \\ &\quad + F_{K_2 K_2}(0)(K'_2(0)(\xi), K'_2(0)(\eta)) \\ &\quad + F_{K_2 K_1}(0)(K'_2(0)(\xi), K'_1(0)(\eta)) \\ &\quad + F_{K_1 K_2}(0)(K'_1(0)(\xi), K'_2(0)(\eta)). \end{aligned}$$

Et les fonctions  $F_{K_1 K_1}(0)$ ,  $F_{K_2 K_2}(0)$ ,  $F_{K_2 K_1}(0)$  et  $F_{K_1 K_2}(0)$  s'identifient chacune à une matrice carrée d'ordre deux. Avec la notation suivante pour  $i = 1, 2$

$$F_{K_i K_i}(0) = \begin{pmatrix} \beta_i & \delta_i \\ \lambda_i & \mu_i \end{pmatrix}, \quad (\text{I.125})$$

$$F_{K_1 K_2}(0) = F_{K_2 K_1}(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta_{12} & \delta_{12} \\ \lambda_{12} & \mu_{12} \end{pmatrix}, \quad (\text{I.126})$$

on trouve bien la formule (I.87). La preuve est donc terminée. ■

## CHAPITRE II

### Exemples d'application du théorème de structure





## EXEMPLES D'APPLICATION DU THÉORÈME DE STRUCTURE

On applique le théorème de structure aux fonctionnelles d'énergie pour des équations elliptiques linéaires et non-linéaires en dimension deux. On considère trois cas : les conditions de Neumann et de Dirichlet sur les faces de la fissure et les conditions unilatérales entre les faces. Dans le dernier cas la fonctionnelle d'énergie est deux fois différentiable par rapport au domaine, cependant, seule la dérivée du premier ordre est Fréchet.

Le cas de l'élasticité peut être traité exactement de la même manière, c'est-à-dire que si on connaît les singularités aux extrémités de la fissure, on peut calculer explicitement les coefficients apparaissant dans le théorème de structure. Dans le cas de l'élasticité linéaire, ces singularités sont connues. Pour simplifier, on préfère considérer ici le cas scalaire.

### 1.. Conditions de Neumann sur la fissure

**1.1.. Différentiabilité au sens de Fréchet.** Dans le premier exemple on calcule la dérivée seconde de la fonctionnelle d'énergie associée à une équation elliptique dans un domaine fissuré, et on prouve que la fonctionnelle est dérivable deux fois au sens de Fréchet. On utilise les résultats établis dans [22], où la différentiabilité au sens de Fréchet du premier ordre de la fonctionnelle d'énergie est prouvée.

On choisit  $\Omega$  comme dans le paragraphe 4. du chapitre I. Autrement dit soit  $D \in \mathcal{O}_{k+2}$ , on note  $\Sigma = \partial D$ . Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux points distincts de  $\Sigma$ , on définit  $\gamma = \overline{\{A_1, A_2\}}$ . Alors  $\Sigma \setminus \gamma$  a deux composantes connexes  $S$  et  $S'$ , et on définit  $\Omega = U \setminus \overline{S}$  comme le domaine fissuré,  $U$  étant un ouvert régulier contenant strictement  $D$ . On note  $\Gamma = \partial U$ . Soit également  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $u$  est la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial u / \partial n = 0 & \text{sur } \overline{S}^\pm. \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

La formulation variationnelle de (II.1) est donnée par

$$u \in H_\Gamma^1(\Omega) : \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla w \rangle dx = \int_\Omega f w dx \quad \forall w \in H_\Gamma^1(\Omega), \quad (\text{II.2})$$

où  $H_\Gamma^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$ .

Soit  $\xi$  un champ de vecteurs dans  $\Theta_k$ . Pour simplifier, sa norme dans  $\Theta_k$  est notée  $|\xi| = \|\xi\|_{C^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)}$ . On considère les transformations  $F_\xi = I + \xi$  et on note  $\Omega_\xi = F_\xi(\Omega)$ . Pour  $|\xi|$  suffisamment petit,  $F_\xi$  est un difféomorphisme. Par conséquent, il existe une unique solution  $u^\xi \in H_\Gamma^1(\Omega_\xi)$  à l'équation variationnelle

$$\int_{\Omega_\xi} \langle \nabla u^\xi, \nabla v \rangle dx = \int_{\Omega_\xi} f v dx \quad \forall v \in H_\Gamma^1(\Omega_\xi). \quad (\text{II.3})$$

Afin de transporter (II.3) dans le domaine fixe  $\Omega$ , on note  $u_\xi$  la fonction transportée définie par la composition  $u_\xi = u^\xi \circ F_\xi \in H_\Gamma^1(\Omega)$ . En utilisant ce changement de variable dans (II.3), on obtient l'équation variationnelle satisfaite par  $u_\xi$

$$\int_{\Omega} \langle (DF_\xi^T)^{-1} \nabla u_\xi, (DF_\xi^T)^{-1} \nabla w \rangle q_\xi dx = \int_{\Omega} f_\xi w q_\xi dx \quad \forall w \in H_\Gamma^1(\Omega), \quad (\text{II.4})$$

où  $f_\xi = f \circ F_\xi$ ,  $q_\xi$  est le Jacobien de la transformation  $F_\xi$ ,  $DF_\xi$  étant la matrice Jacobienne, on a plus précisément

$$DF_\xi = I + D\xi,$$

$$q_\xi = \det DF_\xi = 1 + \operatorname{div} \xi + \det D\xi.$$

On montre dans [22] que  $u_\xi$  admet le développement de Taylor suivant

$$u_\xi = u + u^1(\xi) + \tilde{u}(\xi), \quad (\text{II.5})$$

avec les estimations

$$\|u_\xi - u\|_{H_\Gamma^1(\Omega)} \leq c|\xi|, \quad (\text{II.6})$$

$$\|\tilde{u}(\xi)\|_{H_\Gamma^1(\Omega)} = \|u_\xi - u - u^1(\xi)\|_{H_\Gamma^1(\Omega)} \leq c|\xi|^2. \quad (\text{II.7})$$

Maintenant soit  $J$  et  $E$  les fonctionnelles associées à l'équation (II.1) définies de la manière suivante

$$J(\Omega_\xi) = E(\xi) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_\xi} \|\nabla u^\xi\|^2 dy. \quad (\text{II.8})$$

On peut montrer comme pour (II.5) que  $E(\xi)$  admet le développement

$$E(\xi) = E(0) + E'(0)(\xi) + \tilde{E}(\xi), \quad (\text{II.9})$$

avec l'estimation

$$|\tilde{E}(\xi)| \leq c|\xi|^2, \quad (\text{II.10})$$

ce qui prouve la différentiabilité au sens de Fréchet du premier ordre pour  $E$ .

On va établir la propriété de Fréchet-différentiabilité pour la dérivée du second ordre de la fonctionnelle d'énergie  $E$ . L'argument utilisé est le même, si ce n'est que les calculs sont plus compliqués puisque l'équation vérifiée par la dérivée matérielle  $\dot{u}(\xi)$  est plus complexe que celle vérifiée par  $u$ .

On veut prouver que la dérivée par rapport au domaine du premier ordre de  $E$  est également Fréchet-différentiable.

Soit  $\xi$  et  $\eta$  deux champs de vecteurs dans  $\Theta_{k+1}$ . Tout d'abord, on veut obtenir une expression pour  $E'(\eta)(\xi)$  obtenue en développant

$$E(\xi + \eta) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_{\xi+\eta}} \|\nabla u^{\xi+\eta}\|_{\mathbb{R}^2}^2 dy, \quad (\text{II.11})$$

où  $u^{\xi+\eta} \in H_\Gamma^1(\Omega_{\xi+\eta})$  est l'unique solution de l'équation variationnelle

$$\int_{\Omega_{\xi+\eta}} \langle \nabla u^{\xi+\eta}, \nabla v \rangle dx = \int_{\Omega_{\xi+\eta}} f v dx \quad \forall v \in H_\Gamma^1(\Omega_{\xi+\eta}). \quad (\text{II.12})$$

Maintenant, la définition fournit

$$\begin{aligned}\Omega_{\xi+\eta} &= (I + \xi + \eta)(\Omega) \\ &= (I + \xi \circ (I + \eta)^{-1})((I + \eta)(\Omega)) . \\ &= (I + \xi \circ (I + \eta)^{-1})(\Omega_\eta)\end{aligned}$$

Par conséquent, on considère la transformation  $F_\xi = I + \xi \circ (I + \eta)^{-1}$  où  $I$  est la fonction identité dans  $\mathbb{R}^2$ .

Afin de transporter les problèmes (II.11) et (II.12) dans le domaine  $\Omega_\eta$ , on introduit  $u_{\xi+\eta}$  la fonction transportée définie par la composition  $u_{\xi+\eta} = u^{\xi+\eta} \circ F_\xi \in H_\Gamma^1(\Omega_\eta)$  et grâce à un changement de variable dans (II.11) et (II.12), on obtient l'expression de la fonctionnelle d'énergie transportée sur le domaine  $\Omega_\eta$

$$E(\xi + \eta) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_\eta} \|(DF_\xi^T)^{-1} \nabla u_{\xi+\eta}\|_{\mathbb{R}^2}^2 dy \quad (\text{II.13})$$

et l'inégalité variationnelle satisfaite par  $u_{\xi+\eta}$ , similaire à (II.4),

$$\int_{\Omega_\eta} \langle (DF_\xi^T)^{-1} \nabla u_{\xi+\eta}, (DF_\xi^T)^{-1} \nabla w \rangle_{q_\xi} dx = \int_{\Omega_\eta} f_\xi w q_\xi dx \quad \forall w \in H_\Gamma^1(\Omega_\eta), \quad (\text{II.14})$$

où  $f_\xi = f \circ F_\xi$ , et on a précisément

$$DF_\xi = I + D[\xi \circ (I + \eta)^{-1}], \quad (\text{II.15})$$

$$q_\xi = \det DF_\xi = 1 + \operatorname{div}(\xi \circ (I + \eta)^{-1}) + \det D(\xi \circ (I + \eta)^{-1}). \quad (\text{II.16})$$

Ainsi  $u_{\xi+\eta}$  admet le développement de Taylor suivant

$$u_{\xi+\eta} = u^\eta + u^{\eta,1}(\xi) + \tilde{u}^\eta(\xi),$$

où  $u^\eta$  est l'unique solution dans  $H_\Gamma^1(\Omega_\eta)$  de l'équation

$$\int_{\Omega_\eta} \langle \nabla u^\eta, \nabla v \rangle dx = \int_{\Omega_\eta} f v dx \quad \forall v \in H_\Gamma^1(\Omega_\eta). \quad (\text{II.17})$$

En remplaçant les développements (II.15) et (II.16) dans les expressions (II.13) et (II.14) et en tenant compte uniquement des termes du premier ordre on obtient la dérivée par rapport au domaine du premier ordre

$$E'(\eta)(\xi) = - \int_{\Omega_\eta} \langle \nabla u^\eta, \nabla u^{\eta,1}(\xi) \rangle dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\eta} \langle A(\xi \circ (I + \eta)^{-1}) \nabla u^\eta, \nabla u^\eta \rangle dy \quad (\text{II.18})$$

ainsi que l'équation variationnelle pour la dérivée matérielle  $u^{\eta,1}(\xi)$ ,  $\forall w \in H_\Gamma^1(\Omega_\eta)$

$$\int_{\Omega_\eta} \langle \nabla u^{\eta,1}(\xi), \nabla w \rangle dy = \int_{\Omega_\eta} \langle A(\xi \circ (I + \eta)^{-1}) \nabla u^\eta, \nabla w \rangle dy + \int_{\Omega_\eta} g(\xi \circ (I + \eta)^{-1}) w dy. \quad (\text{II.19})$$

La matrice  $A(\xi)$  et la fonction scalaire  $g(\xi)$  sont donnés par

$$A(\xi) = D\xi + D\xi^T - (\operatorname{div}\xi)I ,$$

$$g(\xi) = \operatorname{div}(f\xi) .$$

En appliquant l'identité variationnelle (II.19) avec  $w = u^\eta$ , on obtient

$$\int_{\Omega_\eta} \langle \nabla u^\eta, \nabla u^{\eta,1}(\xi) \rangle dy = \int_{\Omega_\eta} \langle A(\xi \circ (I + \eta)^{-1}) \nabla u^\eta, \nabla u^\eta \rangle dy + \int_{\Omega_\eta} g(\xi \circ (I + \eta)^{-1}) u^\eta dy \quad (\text{II.20})$$

Etant donné l'équation (II.20), on peut éliminer la dérivée matérielle  $u^{\eta,1}(\xi)$  de (II.18) et on obtient

$$E'(\eta)(\xi) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_\eta} \langle A(\xi \circ (I + \eta)^{-1}) \nabla u^\eta, \nabla u^\eta \rangle dy - \int_{\Omega_\eta} g(\xi \circ (I + \eta)^{-1}) u^\eta dy . \quad (\text{II.21})$$

On est maintenant en mesure de donner la dérivée seconde par rapport au domaine de l'énergie et de prouver sa dérivabilité au sens de Fréchet. Considérons la transformation  $F_\eta = I + \eta$  et notons  $u_\eta$  la fonction composée définie par  $u_\eta = u^\eta \circ F_\eta$ . En utilisant ce changement de variable dans l'équation (II.21) pour transporter les intégrales sur le domaine  $\Omega$ , on obtient :

$$\begin{aligned} E'(\eta)(\xi) &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(\xi \circ F_\eta^{-1}) \circ F_\eta (DF_\eta^T)^{-1} \nabla u_\eta, (DF_\eta^T)^{-1} \nabla u_\eta \rangle q_\eta dy \\ &\quad - \int_{\Omega} g(\xi \circ F_\eta^{-1}) \circ F_\eta u_\eta q_\eta dy . \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

De plus, on a le développement de Taylor suivant pour  $u_\eta$

$$u_\eta = u + u^1(\eta) + \tilde{u}(\eta), \quad (\text{II.23})$$

avec les estimations

$$\|u_\eta - u\|_{H_F^1(\Omega)} \leq c|\eta| , \quad (\text{II.24})$$

$$\|\tilde{u}(\eta)\|_{H_F^1(\Omega)} = \|u_\eta - u - u^1(\eta)\|_{H_F^1(\Omega)} \leq c|\eta|^2 . \quad (\text{II.25})$$

Pour  $|\eta|$  suffisamment petit, la matrice jacobienne  $DF_\eta = I + D\eta$  est inversible et son inverse est donné par la série

$$(DF_\eta)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (D\eta)^n ,$$

ce qui implique que

$$(DF_\eta)^{-1} = I - D\eta + \tilde{R}(\eta), \quad (\text{II.26})$$

avec l'estimation  $\|\tilde{R}(\eta)\|_\infty \leq c|\eta|^2$ . On doit maintenant trouver les développements de  $A(\xi \circ F_\eta^{-1}) \circ F_\eta$  et  $g(\xi \circ F_\eta^{-1}) \circ F_\eta$ . Des calculs simples nous mènent au résultat suivant.

$$\begin{aligned} D[\xi \circ F_\eta^{-1}] \circ F_\eta &= D\xi DF_\eta^{-1} \\ &= D\xi - D\xi D\eta + O(|\eta|^2) , \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

$$\begin{aligned} \text{div}(\xi \circ F_\eta^{-1}) \circ F_\eta &= \text{Tr}(D[\xi \circ F_\eta^{-1}] \circ F_\eta) \\ &= \text{Tr}(D\xi DF_\eta^{-1}) , \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

$$\begin{aligned} g(\xi \circ F_\eta^{-1}) \circ F_\eta &= [\langle \nabla f, \xi \circ F_\eta^{-1} \rangle + f \text{div}(\xi \circ F_\eta^{-1})] \circ F_\eta \\ &= \langle (DF_\eta^T)^{-1} \nabla f_\eta, \xi \rangle + f_\eta \text{Tr}(D\xi DF_\eta^{-1}) \\ &= g(\xi) + \langle D^2 f \xi, \eta \rangle + \langle \nabla f, \eta \rangle \text{div}(\xi) - f \text{Tr}(D\xi D\eta) + O(|\eta|^2) . \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

En fait, le Jacobien  $q_\eta$  de la transformation  $F_\eta$  est égal à

$$q_\eta = 1 + \operatorname{div}(\eta) + \det(D\eta). \quad (\text{II.30})$$

Maintenant, on insère les développements (II.23),(II.26),(II.27),(II.28),(II.29),(II.30) dans l'équation (II.22) ce qui conduit à

$$\begin{aligned} E'(\eta)(\xi) &= E'(0)(\xi) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} -\langle A(\xi)\nabla u, (2D\eta^T - \operatorname{div}(\eta)I)\nabla u \rangle + 2\langle A(\xi)\nabla u, \nabla u_\eta^1 \rangle dy \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} -2\langle D\xi D\eta \nabla u, \nabla u \rangle + \operatorname{Tr}(D\xi D\eta)\langle \nabla u, \nabla u \rangle dy \\ &\quad - \int_{\Omega} g(\xi)u^1(\eta) + u[\langle D^2 f \xi, \eta \rangle + \langle \nabla f, \eta \rangle \operatorname{div}(\xi) - f \operatorname{Tr}(D\xi D\eta) \\ &\quad + g(\xi)\operatorname{div}(\eta)] dy + O(|\eta|^2). \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

En appliquant l'équation variationnelle du type (II.19) pour  $u^1(\xi)$  avec  $w = u^1(\eta)$ , on obtient

$$\int_{\Omega} g(\xi)u^1(\eta) dy = \int_{\Omega} \langle \nabla u^1(\xi), \nabla u^1(\eta) \rangle - \int_{\Omega} \langle A(\xi)\nabla u, \nabla u^1(\eta) \rangle. \quad (\text{II.32})$$

Finalement, en remplaçant (II.32) dans (II.31) on obtient

$$\begin{aligned} E'(\eta)(\xi) &= E'(0)(\xi) + \int_{\Omega} \langle B(\xi, \eta)\nabla u, \nabla u \rangle - \langle \nabla u^1(\xi), \nabla u^1(\eta) \rangle \\ &\quad - \int_{\Omega} u[\langle D^2 f \xi, \eta \rangle + \langle \nabla f, \eta \rangle \operatorname{div}(\xi) - f \operatorname{Tr}(D\xi D\eta) + \\ &\quad \langle \nabla f, \xi \rangle \operatorname{div}(\eta) + f \operatorname{div}(\eta)\operatorname{div}(\xi)] dy + O(|\eta|^2), \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

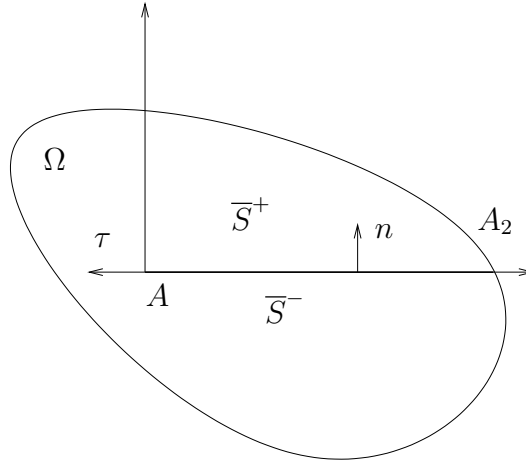
où  $B(\xi, \eta)$  est une forme bilinéaire égale à

$$B(\xi, \eta) = D\xi D\eta + D\eta D\xi + D\xi D\eta^T - \operatorname{div}(\xi)D\eta - \operatorname{div}(\eta)D\xi + \frac{1}{2}(\operatorname{div}(\xi)\operatorname{div}(\eta) - \operatorname{Tr}(D\xi D\eta))I. \quad (\text{II.34})$$

On remarque que la dérivée de forme est bien symétrique par rapport aux variables  $\eta$  et  $\xi$ . Ainsi, on a obtenu un développement de la fonctionnelle  $E'(\eta)(\xi)$  qui d'une part nous donne la dérivée seconde  $E''(0)(\eta, \xi)$  et qui prouve que la fonctionnelle  $E(\theta)$  est deux fois Fréchet-différentiable, d'autre part. Les hypothèses du théorème de structure sont remplies par conséquent on peut appliquer le théorème dans la section suivante.

**1.2.. Structure des dérivées pour la fonctionnelle d'énergie.** Maintenant que nous avons établi la différentiabilité au sens de Fréchet de la fonctionnelle d'énergie, on peut utiliser le théorème de structure et déterminer les coefficients  $\alpha_i$ , ainsi que la forme linéaire  $l_1$  dans l'expression (I.86).

Sans perte de généralité, on peut supposer que la fissure est un segment. Sinon, un changement de variable approprié peut être employé. La fissure  $\bar{S}$  est donnée par le segment  $\bar{S} = (x, 0), x \in [-1, 1]$ . La frontière de  $\Omega = U \setminus \bar{S}$  est la réunion de  $\Gamma$  et des faces de la fissure  $\bar{S}^+, \bar{S}^-$  qui font référence aux directions positives et négatives du vecteur normal

FIG. 1. Le domaine  $\Omega$ 

$n$  respectivement. Le point  $A_1$  noté simplement  $A$ , est situé à l'origine du repère. Dans la suite on considère des perturbations de la fissure dans un voisinage de  $A$  seulement afin de simplifier les calculs.

On considère le problème (II.1), avec  $u$  l'unique solution dans  $H^1_\Gamma(\Omega)$  de l'équation variationnelle (II.2). On veut dériver la fonctionnelle d'énergie

$$J(\Omega_\xi) = E(\xi) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_\xi} \|\nabla u^\xi\|^2 dy . \quad (\text{II.35})$$

avec  $\|\nabla u^\xi\|^2 = \langle \nabla u, \nabla u \rangle$  Le domaine  $\Omega$  n'est pas régulier, par conséquent on sait que  $u$  n'est en général pas dans l'espace  $H^2(\Omega)$ , même si  $f$  est arbitrairement régulier. Cependant, dans ce cas, en utilisant les résultats de [26], on peut décomposer  $u$  en la somme d'une partie régulière dans l'espace  $H^2$ , et d'une partie singulière qui appartient seulement à  $H^1$ . On a la représentation suivante pour  $u$

$$u = u^R + cS, \quad (\text{II.36})$$

où  $S = \sqrt{r} \cos \frac{\lambda}{2}$  est une représentation locale de la fonction singulière en coordonnées polaires,  $u^R \in H^2(V)$ ,  $V$  est un voisinage de  $(0,0)$  dans  $\Omega$  tel que  $\bar{V} \cap \Gamma = \emptyset$ , et  $c = c(\Omega, A)$  est le coefficient de singularité à l'extrémité  $A$ .

Dans [22], on prouve que le coefficient  $\alpha_1$  est égal à

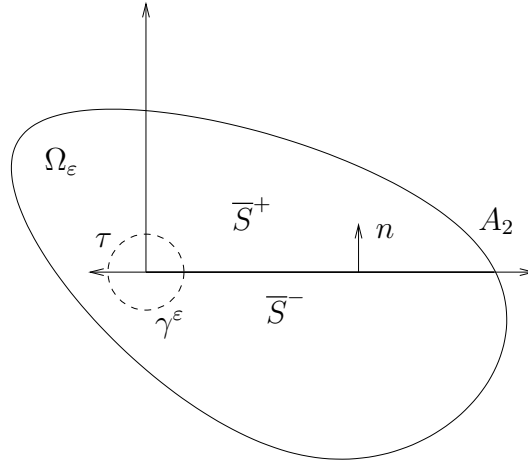
$$\alpha_1 = -\frac{\pi c^2}{4}, \quad (\text{II.37})$$

où  $c = c(\Omega, A)$  est le coefficient de la partie singulière dans l'expression (II.36).

On veut d'abord déterminer  $l_1$  puis la dérivée de forme du second ordre.

Ainsi, on utilise seulement des transformations de  $\Omega$  qui perturbent la fissure dans la direction normale, et à support compact dans  $D$ . On choisit un champ de vecteurs  $\xi$  de la forme

$$\xi(y) = (0, \xi_2(y)) ,$$

FIG. 2. Le domaine  $\Omega_\varepsilon$ 

où  $\xi_2$  est à support compact dans  $D$  et  $\xi_2 \equiv -1$  au voisinage de l'origine  $A$ . On a obtenu précédemment la formule (II.21) pour la dérivée  $E'(\eta)(\xi)$  :

$$E'(\eta)(\xi) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_\eta} \langle A(\xi \circ (I + \eta)^{-1}) \nabla u^\eta, \nabla u^\eta \rangle dy - \int_{\Omega_\eta} g(\xi \circ (I + \eta)^{-1}) u^\eta dy, \quad (\text{II.38})$$

où la matrice  $A(\xi)$  et le scalaire  $g(\xi)$  sont donnés par

$$A(\xi) = D\xi + D\xi^T - (\text{div}\xi) I, \\ g(\xi) = \text{div}(f\xi).$$

En prenant  $\eta = 0$ , on trouve

$$E'(0)(\xi) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(\xi) \nabla u, \nabla u \rangle dy - \int_{\Omega} g(\xi) u dy. \quad (\text{II.39})$$

On va maintenant réécrire  $E'(0)(\xi)$  sous la forme d'une limite, par rapport au petit paramètre  $\varepsilon > 0$ . Nous pouvons ainsi, en éliminant la singularité au point  $A$ , faire une intégration par parties dans un domaine dépendant de  $\varepsilon$ . On a alors

$$E'(0)(\xi) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega^\varepsilon} \langle A(\xi) \nabla u, \nabla u \rangle dy \right) - \int_{\Omega} g(\xi) u dy, \quad (\text{II.40})$$

où  $\Omega^\varepsilon$  et  $\bar{S}^\varepsilon$  sont les sous-ensembles de  $\Omega$  et  $\bar{S}$ , respectivement, définies dans le système de coordonnées polaires  $(r, \lambda)$  par  $r > \varepsilon$ . On introduit également la courbe  $\gamma^\varepsilon$  définie en coordonnées polaires par  $r = \varepsilon$  et  $0 < \lambda < 2\pi$  et on pose

$$K_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{\Omega^\varepsilon} \langle A(\xi) \nabla u, \nabla u \rangle dy.$$

On calcule la matrice jacobienne ainsi que la divergence du champ  $\xi$

$$D\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}, \quad \text{div}\xi = \frac{\partial \xi_2}{\partial y_2}. \quad (\text{II.41})$$



Comme  $A(\xi) = D\xi + D\xi^T - (\operatorname{div}\xi)I$ , en insérant les relations (II.41) dans  $K_\varepsilon$ , on obtient

$$K_\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial \xi_2}{\partial y_2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y_2} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 \right) + \frac{\partial \xi_2}{\partial y_1} \frac{\partial u}{\partial y_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} dy .$$

On fait maintenant une intégration par parties.

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= - \int_{\Omega^\varepsilon} \xi_2 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y_2} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{\partial u}{\partial y_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} \right) \right) dy \\ &\quad - \int_{\gamma^\varepsilon} \xi_2 \left( \frac{1}{2} \sin \lambda \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y_2} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 \right) + \cos \lambda \frac{\partial u}{\partial y_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} \right) d\sigma(y) \\ &\quad - \int_{\bar{S}^\varepsilon} \xi_2 \left[ \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y_2} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 \right) \right] d\bar{S}(y) , \end{aligned}$$

où  $d\sigma(y)$  est la mesure de Lebesgue linéique sur la courbe  $\gamma^\varepsilon$ ,  $d\sigma(y) = \varepsilon d\lambda$ . La normale extérieure sur  $\gamma^\varepsilon$  est donnée par  $n = (n_1, n_2) = (-\cos \lambda, -\sin \lambda)$ .

La notation  $[f]$  est utilisée pour le saut de la fonction  $f$  sur la fissure  $\bar{S}$ . Précisément, pour une fonction donnée  $f$ , on pose  $[f] = f^+ - f^-$  où  $f^+$  et  $f^-$  sont les valeurs de  $f$  et  $\bar{S}^+$  et  $\bar{S}^-$ , respectivement. Enfin  $d\bar{S}(y)$  est la mesure de Lebesgue linéique sur le segment  $\bar{S}$ . L'expression obtenue pour  $K_\varepsilon$  peut être simplifiée, puisque l'on a

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y_2} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{\partial u}{\partial y_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} \right) = \frac{\partial u}{\partial y_2} \Delta u = -f \frac{\partial u}{\partial y_2} .$$

D'autre part, sur la frontière  $\frac{\partial u}{\partial y_2} = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$ . Par conséquent,  $K_\varepsilon$  prend la forme

$$K_\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} \xi_2 f \frac{\partial u}{\partial y_2} dy + L_\varepsilon + \frac{1}{2} \int_{\bar{S}^\varepsilon} \xi_2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 \right] d\bar{S}(y) ,$$

avec  $L_\varepsilon$  égal à

$$L_\varepsilon = - \int_{\gamma^\varepsilon} \xi_2 \left( \frac{1}{2} \sin \lambda \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y_2} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 \right) + \cos \lambda \frac{\partial u}{\partial y_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} \right) d\sigma(y) .$$

Maintenant on calcule  $L_\varepsilon$  grâce à la formule de représentation (II.36). En injectant cette formule dans  $L_\varepsilon$  on obtient trois termes

$$L_\varepsilon = L_\varepsilon^{(1)} + L_\varepsilon^{(2)} + L_\varepsilon^{(3)} , \quad (\text{II.42})$$

avec

$$\begin{aligned} L_\varepsilon^{(1)} &= -\varepsilon c^2 \int_0^{2\pi} - \left( \frac{1}{2} \sin \lambda \left( \left( \frac{\partial S}{\partial y_2} \right)^2 - \left( \frac{\partial S}{\partial y_1} \right)^2 \right) + \cos \lambda \frac{\partial S}{\partial y_2} \frac{\partial S}{\partial y_1} \right) d\lambda . \\ L_\varepsilon^{(2)} &= -\varepsilon c \int_0^{2\pi} - \left( \sin \lambda \left( \frac{\partial u^R}{\partial y_2} \frac{\partial S}{\partial y_2} - \frac{\partial u^R}{\partial y_1} \frac{\partial S}{\partial y_1} \right) + \cos \lambda \left( \frac{\partial u^R}{\partial y_2} \frac{\partial S}{\partial y_1} + \frac{\partial u^R}{\partial y_1} \frac{\partial S}{\partial y_2} \right) \right) d\lambda . \\ L_\varepsilon^{(3)} &= -\varepsilon \int_0^{2\pi} - \left( \frac{1}{2} \sin \lambda \left( \left( \frac{\partial u^R}{\partial y_2} \right)^2 - \left( \frac{\partial u^R}{\partial y_1} \right)^2 \right) + \cos \lambda \frac{\partial u^R}{\partial y_2} \frac{\partial u^R}{\partial y_1} \right) d\lambda . \end{aligned}$$

La forme de la partie singulière est donnée explicitement, on peut calculer ses dérivées, et on obtient des fonctions avec des singularités d'ordre  $r^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial S}{\partial y_1} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\lambda}{2}, \quad \frac{\partial S}{\partial y_2} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\lambda}{2} .$$

Le calcul de  $L_\varepsilon^{(1)}$  nous donne

$$L_\varepsilon^{(1)} = 0 .$$

De plus, on voit facilement que  $L_\varepsilon^{(2)}$  et  $L_\varepsilon^{(3)}$  tendent vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . En particulier, on obtient les estimations  $L_\varepsilon^{(2)} = O(\sqrt{\varepsilon})$  et  $L_\varepsilon^{(3)} = O(\varepsilon)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

Comme on a les convergences suivantes

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega^\varepsilon} \xi_2 f \frac{\partial u}{\partial y_2} dy &= \int_{\Omega} \xi_2 f \frac{\partial u}{\partial y_2} dy, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{S}^\varepsilon} \xi_2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 \right] d\bar{S}(y) &= \int_{\bar{S}} \xi_2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 \right] d\bar{S}(y), \end{aligned}$$

la dérivée de la fonctionnelle d'énergie est donnée par l'expression

$$E'(0)(\xi) = - \int_{\Omega} \xi_2 f \frac{\partial u}{\partial y_2} dy - \int_{\Omega} \operatorname{div}(f\xi) u dy - \frac{1}{2} \int_{\bar{S}} \xi_2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 \right] d\bar{S}(y) .$$

Comme

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f\xi) &= \langle \nabla f, \xi \rangle + f \operatorname{div}(\xi) \\ &= \frac{\partial f}{\partial y_2} \xi_2 + f \frac{\partial \xi_2}{\partial y_2} \\ &= \frac{\partial}{\partial y_2} (f\xi_2) , \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y_2} (uf\xi_2) dy &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_2} (uf\xi_2) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\gamma^\varepsilon} uf\xi_2 \sin \lambda d\sigma(y) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$E'(0)(\xi) = -\frac{1}{2} \int_{\bar{S}} \xi_2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 \right] d\bar{S}(y) .$$

D'autre part comme on a choisi  $\xi$  tel que  $\langle \xi, \tau \rangle = 0$  et  $\langle \xi, n \rangle = \xi_n = \xi_2$  sur  $\bar{S}$ , on obtient par le théorème de structure

$$E'(0)(\xi) = l_1(\xi_n) = -\frac{1}{2} \int_{\bar{S}} \xi_n \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 \right] d\bar{S}(y) . \quad (\text{II.43})$$

On obtient finalement les expressions suivantes pour les dérivées du premier et du second ordre de la fonctionnelle d'énergie,

$$E'(0)(\xi) = l^1(\xi_n) + \alpha_1 \xi_\tau(A), \quad (\text{II.44})$$

$$\begin{aligned}
E''(0)(\xi, \eta) &= l^2(\xi_n, \eta_n) \\
&\quad + \beta_1 \xi_\tau(A) \eta_\tau(A) \\
&\quad - l^1(\mathcal{H} \xi_\tau \eta_\tau + \langle n, D\xi\tau \rangle \eta_\tau + \langle n, D\eta\tau \rangle \xi_\tau) \\
&\quad + \alpha_1 \mathcal{H}(A)(\xi_\tau \eta_n + \xi_n \eta_\tau)(A) \\
&\quad + \tilde{\alpha}_1 \mathcal{H}(A) \xi_\tau(A) \eta_\tau(A) \\
&\quad + \mathcal{L}^2(\xi_n, \eta_\tau(A_2), \eta_\tau(A)) \\
&\quad + \mathcal{L}^2(\eta_n, \xi_\tau(A), \xi_\tau(A_2))
\end{aligned} \tag{II.45}$$

avec la constante  $\alpha_1$  donnée par (II.37) et  $l_1$  donné par (II.43).

**Remarque II.1.** Les constantes  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$  et  $\tilde{\alpha}_1$  dépendent du domaine fissuré, par exemple on montre dans [22] que  $\alpha_1 = \frac{\pi c^2(\Omega, A_1)}{4}$  dans le cas d'une fissure rectiligne. L'expression (I.123) nous montre que  $\beta_1$  peut être déduit de  $\alpha_1$  en dérivant  $\alpha_1$  par rapport au domaine. Cependant, on connaît peu de choses sur la dépendance par rapport au domaine de  $c(\Omega, A)$ , par conséquent il est difficile de calculer  $c'(\Omega, A)$ . On renvoie à [46] pour des résultats dans cette direction.

## 2.. Conditions de Dirichlet sur les faces de la fissure

On considère le système d'équations (II.1) avec des conditions de Dirichlet sur les faces de la fissure au lieu de conditions de Neumann. Par conséquent on considère le nouveau système

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ u = 0 & \text{sur } \bar{S}^\pm. \end{cases} \tag{II.46}$$

La formulation variationnelle de (II.46) est donnée par

$$u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla w \rangle dx = \int_{\Omega} f w dx \quad \forall w \in H_0^1(\Omega), \tag{II.47}$$

où  $H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma \cup \bar{S}^\pm \right\}$ .

La preuve de la Fréchet-différentiabilité est la même que dans le cas de conditions de Neumann, par conséquent on ne la réitère pas. Il est par contre intéressant de calculer la dérivée par rapport à la fissure dans les directions normale et tangentielle. Tout d'abord on considère des perturbations normales. Le calcul est le même que pour le cas de conditions de Neumann, excepté pour la valeur de la singularité dans la décomposition (II.36). On a maintenant la décomposition

$$u = u^R + cS \tag{II.48}$$

avec  $S = \sqrt{r} \sin \frac{\lambda}{2}$ . En utilisant les mêmes notations que dans la section 1.2. on a une décomposition identique à (II.42)

$$L_\varepsilon = L_\varepsilon^{(1)} + L_\varepsilon^{(2)} + L_\varepsilon^{(3)} \tag{II.49}$$

avec  $L_\varepsilon^{(2)}$  et  $L_\varepsilon^{(3)}$  qui tendent vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  et

$$L_\varepsilon^{(1)} = -\varepsilon c^2 \int_0^{2\pi} - \left( \frac{1}{2} \sin \lambda \left( \left( \frac{\partial S}{\partial y_2} \right)^2 - \left( \frac{\partial S}{\partial y_1} \right)^2 \right) + \cos \lambda \frac{\partial S}{\partial y_2} \frac{\partial S}{\partial y_1} \right) d\lambda$$

La forme de la partie singulière est donnée explicitement, on peut calculer ses dérivées, et on obtient des fonctions avec des singularités d'ordre  $r^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial S}{\partial y_1} = -\frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\lambda}{2}, \quad \frac{\partial S}{\partial y_2} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\lambda}{2}. \quad (\text{II.50})$$

Le calcul de  $L_\varepsilon^{(1)}$  donne également  $L_\varepsilon^{(1)} = 0$ . Par conséquent, en remarquant que  $\frac{\partial u}{\partial y_1} = 0$  sur  $\bar{S}$  à cause des conditions de Dirichlet, on trouve un résultat similaire au cas de conditions de Neumann, autrement dit

$$E'(0)(\xi) = l_1(\xi_n) = \frac{1}{2} \int_{\bar{S}} \xi_n \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y_2} \right)^2 \right] d\bar{S}(y). \quad (\text{II.51})$$

où  $\xi_n$  est la composante normale de  $\xi$  et  $\left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y_2} \right)^2 \right]$  est le saut de la fonction  $\left( \frac{\partial u}{\partial y_2} \right)^2$  sur la fissure  $\bar{S}$ .

On considère maintenant des perturbations tangentielles de la fissure. Les calculs sont très proches de ceux du paragraphe 1.2., par conséquent on explique seulement les différences et on renvoie au paragraphe 1.2. pour plus de détails.

On choisit un champ de vecteurs  $\xi$  de la forme

$$\xi(y) = (\xi_1(y), 0),$$

où  $\xi_1$  est à support compact dans  $U$  et  $\xi_1 \equiv -1$  au voisinage de l'origine  $A$ . On calcule la matrice jacobienne ainsi que la divergence du champ  $\xi$

$$D\xi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{div} \xi = \frac{\partial \xi_1}{\partial y_1}. \quad (\text{II.52})$$

Pour  $K_\varepsilon$  on obtient

$$K_\varepsilon = \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial \xi_1}{\partial y_1} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial y_2} \right)^2 \right) + \frac{\partial \xi_1}{\partial y_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} \frac{\partial u}{\partial y_2} dy.$$

On procède maintenant à une intégration par parties.

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= - \int_{\Omega^\varepsilon} \xi_1 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial y_2} \right)^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left( \frac{\partial u}{\partial y_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} \right) \right) dy \\ &\quad - \int_{\gamma^\varepsilon} \xi_1 \left( \frac{1}{2} \cos \lambda \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial y_2} \right)^2 \right) + \sin \lambda \frac{\partial u}{\partial y_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} \right) d\sigma(y) \\ &\quad - \int_{\bar{S}^\varepsilon} \xi_2 \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y_2} \frac{\partial u}{\partial y_1} \right] d\bar{S}(y). \end{aligned}$$

En insérant la décomposition (II.48) dans  $K_\varepsilon$  on obtient une expression similaire à (II.42)

$$L_\varepsilon = L_\varepsilon^{(1)} + L_\varepsilon^{(2)} + L_\varepsilon^{(3)} \quad (\text{II.53})$$

$L_\varepsilon^{(3)}$  tend vers zéro quand  $\varepsilon$  tend vers zéro car  $\frac{\partial u}{\partial y_1}$  est nul sur  $\bar{S}$  puisqu'on a des conditions de Dirichlet sur la fissure.  $L_\varepsilon^{(2)}$  tend également vers zéro quand  $\varepsilon$  tend vers zéro. Le calcul

de  $L_\varepsilon^{(1)}$  donne

$$L_\varepsilon^{(1)} = -\varepsilon c^2 \int_0^{2\pi} - \left( \frac{1}{2} \cos \lambda \left( \left( \frac{\partial S}{\partial y_1} \right)^2 - \left( \frac{\partial S}{\partial y_2} \right)^2 \right) + \sin \lambda \frac{\partial S}{\partial y_2} \frac{\partial S}{\partial y_1} \right) d\lambda$$

En utilisant (II.50) on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_\varepsilon^{(1)} = -\frac{\pi c^2}{4}.$$

Finalement on trouve

$$E'(0)(\xi) = \alpha_1 \xi_\tau(A) = \frac{\pi c^2}{4}. \quad (\text{II.54})$$

Ainsi on a identifié le coefficient  $\alpha_1$  puisque  $\xi_\tau(A) = 1$ ,  $\alpha_1 = \frac{\pi c^2}{4}$ . On trouve qu'il s'agit de l'opposé du coefficient obtenu pour des conditions de Neumann sur la fissure (voir (II.37)).

### 3.. Problème avec conditions unilatérales sur les faces de la fissure

Les conditions de type égalité sur la fissure que l'on a considéré jusqu'à présent ne peuvent garantir la condition de non-pénétrabilité entre les faces de la fissure. Par conséquent, d'un point de vue mécanique, il est plus approprié de considérer des conditions non-linéaires sur les faces de la fissure. On écrit ces conditions sous forme d'inégalités qui garantissent la non-pénétration entre les faces de la fissure. Afin de calculer les coefficients pour la dérivée de forme, nous devons connaître l'expansion asymptotique de la solution au voisinage des extrémités de la fissure. Un article récent de Khludnev et Kozlov (voir [38]) nous donne le premier terme de ce développement asymptotique, mais on ne peut pas calculer les coefficients de la dérivée pour autant car il nous faut connaître au moins un terme d'ordre supérieur.

Nous donnons maintenant un exemple avec la dérivée de forme du second ordre de la fonctionnelle d'énergie. Cette dérivée n'est pas, en général, une dérivée au sens de Fréchet. Afin de montrer que les restrictions imposées par le théorème I.1, un exemple d'équations non-linéaires qui ne remplit pas les hypothèses du théorème I.1 est présenté. En effet l'espace fonctionnel n'est pas un espace de Banach et la fonctionnelle n'est pas différentiable au sens du théorème I.1. En fait, elle est différentiable deux fois dans un sens plus faible, i.e la dérivée seconde directionnelle existe. On utilise pour la dérivation la notion de polyhédricité d'un ensemble convexe. Cela permet d'appliquer un théorème de structure adapté qui ne nécessite pas la Fréchet-différentiabilité de la fonctionnelle de forme. Un tel théorème peut être trouvé par exemple, dans [22]. Dans le cas de l'élasticité linéaire, la différentiabilité du premier ordre de fonctionnelles du type énergie est établie dans [37],[35],[6].

**3.1.. Inégalité variationnelle.** Le problème considéré ici est un problème aux limites avec des conditions unilatérales sur les faces de la fissure. On considère le domaine fissuré  $\Omega$  défini dans le paragraphe 1.1.. Dans le domaine  $\Omega$ , on considère le problème

suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ [u] \geq 0 \text{ sur } \bar{S}, \\ [\partial u / \partial n] = 0 \text{ sur } \bar{S}, \\ \partial u / \partial n \leq 0 \text{ sur } \bar{S}, \\ [u] \partial u / \partial n = 0 \text{ sur } \bar{S}, \end{array} \right. \quad (\text{II.55})$$

où  $f \in C^2(D)$  est une fonction fixée,  $[u] = u^+ - u^-$  est le saut de la fonction  $u$  à travers les faces de la fissure  $\bar{S}$ , et  $n$  est le vecteur normal à la fissure. Les solutions faibles pour le problème (II.55) sont obtenus en minimisant la fonctionnelle suivante

$$I(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \int_{\Omega} f v$$

sur l'ensemble convexe fermé suivant

$$K_0 = \{v \in H^1(\Omega) \mid [v] \geq 0 \text{ sur } \bar{S}; v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

Les solutions faibles sont caractérisées par l'inégalité variationnelle

$$u \in K_0 : \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v - \nabla u \rangle \geq \int_{\Omega} f(v - u) \quad \forall v \in K_0, \quad (\text{II.56})$$

Soit  $\delta \geq 0$  un paramètre donné et  $\xi \in C_0^\infty(U)$  un champ de vecteurs donné. On considère la transformation  $F_\delta = I + \delta \xi$ . On utilise la notation  $\Omega_\delta = F_\delta(\Omega)$  et  $\bar{S}_\delta = F_\delta(\bar{S})$ . Il existe un unique  $u^\delta \in K_\delta$  solution de l'égalité variationnelle suivante

$$\int_{\Omega_\delta} \langle \nabla u^\delta, \nabla v - \nabla u^\delta \rangle \geq \int_{\Omega_\delta} f(v - u^\delta) \quad \forall v \in K_\delta, \quad (\text{II.57})$$

où

$$K_\delta = \{v \in H^1(\Omega_\delta) \mid [v] \geq 0 \text{ sur } \bar{S}_\delta; v = 0 \text{ sur } \Gamma\} . \quad (\text{II.58})$$

**3.2.. La différentiabilité par rapport au domaine du premier ordre.** La fonctionnelle d'énergie associée au problème (II.55) posé dans le domaine perturbé est

$$J(\Omega_\delta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\delta} |\nabla u^\delta|^2 - \int_{\Omega_\delta} f u^\delta \quad (\text{II.59})$$

On montre dans [22] et dans [36] que la fonctionnelle  $J(\Omega_\delta)$  est dérivable par rapport au domaine, i.e. la limite suivante

$$J'(\Omega, \xi) := \frac{dJ(\Omega_\delta)}{d\delta} \Big|_{\delta=0} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{J(\Omega_\delta) - J(\Omega)}{\delta} \quad (\text{II.60})$$

existe et est finie, elle est également linéaire et continue par rapport au champ de vecteurs  $\xi$ . Si on transporte les intégrales définies sur  $\Omega_\delta$  sur le domaine initial  $\Omega$ , on obtient :

$$J(\Omega_\delta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|(DF_\delta^T)^{-1} \nabla u_\delta\|_{q_\delta} dy - \int_{\Omega} f_\delta u_\delta q_\delta dy, \quad (\text{II.61})$$

où

$$q_\delta = \det DF_\delta = 1 + \delta \operatorname{div}(\xi) + \delta^2 \det D\xi .$$

On considère maintenant la fonction  $f^\delta$  définie par  $f^\delta = q_\delta f_\delta$ . Comme  $f$  est régulier, on peut calculer la limite  $f'$  définie par

$$f' = \left. \frac{df^\delta}{d\delta} \right|_{\delta=0} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{f^\delta - f^0}{\delta} .$$

On peut montrer que  $f'$  est égal à

$$f' = \operatorname{div}(\xi f) . \quad (\text{II.62})$$

De plus, comme  $f \in C^2(U)$ , on peut montrer que la limite existe dans  $L^\infty(U)$  pour  $\delta \rightarrow 0^+$ . De manière similaire,  $q_\delta (DF_\delta^T)^{-1}$  est différentiable par rapport à  $\delta$  dans l'espace  $L^\infty(U)$ .

Soit  $v^\delta$  une fonction donnée définie sur  $\Omega_\delta$ , et soit  $v_\delta$  la fonction transportée sur  $\Omega$  i.e.,  $v^\delta \circ F_\delta = v_\delta$ . L'inclusion  $v^\delta \in K_\delta$  implique  $v_\delta \in K_0$ , et réciproquement  $v_\delta \in K_0$  implique  $v^\delta \in K_\delta$ . Ainsi la transformation  $F_\delta$  est bijective entre les ensembles convexes  $K_0$  et  $K_\delta$ . On peut vérifier que la solution de l'inégalité variationnelle est Lipschitzienne par rapport à  $\delta$ .

On a également un résultat de continuité important pour la norme  $H^1$  de la solution  $u_\delta$  par rapport au paramètre  $\delta$ , où  $u_\delta = u^\delta \circ F_\delta$  et  $u$  est la solution de l'équation (II.55)

$$\|u_\delta - u\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (\text{II.63})$$

En fait on a  $\|u_\delta - u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\delta$ . Pour simplifier, on introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \pi(\Omega; u) &:= J(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dy - \int_{\Omega} f u dy, \\ \pi_\delta(\Omega; u_\delta) &:= J(\Omega_\delta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|(DF_\delta^T)^{-1} \nabla u_\delta\|_{q_\delta}^2 dy - \int_{\Omega} f_\delta u_\delta q_\delta dy. \end{aligned}$$

On remarque qu'on a aussi par conséquent

$$\pi(\Omega_\delta; u^\delta) = J(\Omega_\delta) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\delta} |\nabla u^\delta|^2 - \int_{\Omega_\delta} f u^\delta.$$

La fonction  $u_\delta$  est un minimiseur pour  $\pi_\delta(\Omega; \cdot)$  dans l'ensemble  $K_0$ , ainsi on a

$$\pi_\delta(\Omega; u_\delta) \leq \pi_\delta(\Omega; u).$$

Par conséquent on peut écrire l'inégalité suivante

$$\frac{J(\Omega_\delta) - J(\Omega)}{\delta} = \frac{\pi_\delta(\Omega; u_\delta) - \pi(\Omega; u)}{\delta} \leq \frac{\pi_\delta(\Omega; u) - \pi(\Omega; u)}{\delta},$$

et en passant à la limite on trouve

$$\begin{aligned} \limsup_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{J(\Omega_\delta) - J(\Omega)}{\delta} &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\pi_\delta(\Omega; u) - \pi(\Omega; u)}{\delta} \\ &\leq -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(\xi) \nabla u, \nabla u \rangle dy - \int_{\Omega} g(\xi) u dy, \end{aligned}$$

où les notations  $A(\xi)$  et  $g(\xi)$  sont définies dans le paragraphe 1.1.. De la même manière, on a une autre inégalité

$$\frac{J(\Omega_\delta) - J(\Omega)}{\delta} = \frac{\pi_\delta(\Omega; u_\delta) - \pi(\Omega; u)}{\delta} \geq \frac{\pi_\delta(\Omega; u_\delta) - \pi(\Omega; u_\delta)}{\delta},$$

et en passant à la limite, on obtient

$$\begin{aligned} \liminf_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{J(\Omega_\delta) - J(\Omega)}{\delta} &\geq \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\pi_\delta(\Omega; u_\delta) - \pi(\Omega; u_\delta)}{\delta} \\ &\geq -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(\xi) \nabla u, \nabla u \rangle dy - \int_{\Omega} g(\xi) u dy, \end{aligned}$$

grâce à la convergence forte de  $u_\delta$  vers  $u$  dans  $H^1(\Omega)$ . Ainsi on a montré que  $\frac{J(\Omega_\delta) - J(\Omega)}{\delta}$  a une limite quand  $\delta \rightarrow 0$ , et cette limite est

$$J'(\Omega, \xi) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{J(\Omega_\delta) - J(\Omega)}{\delta} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(\xi) \nabla u, \nabla u \rangle dy - \int_{\Omega} g(\xi) u dy.$$

En remplaçant  $A(\xi)$  et  $g(\xi)$  par leur expression, avec  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  on trouve

$$\begin{aligned} J'(\Omega, \xi) &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial y_2} \right) \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 - \left( \frac{\partial u}{\partial y_2} \right)^2 \right) + 2 \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial y_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial y_1} \right) \frac{\partial u}{\partial y_1} \frac{\partial u}{\partial y_2} \right) dy \\ &\quad - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial(\xi_1 f)}{\partial y_1} + \frac{\partial(\xi_2 f)}{\partial y_2} \right) u dy. \end{aligned}$$

**3.3.. Structure des dérivées.** On remarque que la différentiabilité au sens de Fréchet de la fonctionnelle n'a pas été démontré, par conséquent, on ne peut pas appliquer le théorème de structure. Cependant, on peut appliquer un théorème de structure qui requière des hypothèses plus faibles :  $dJ(\Omega, \cdot)$  doit seulement être linéaire et continu, ce qui le cas ici. Ce théorème peut être trouvé dans [22].

On peut trouver dans [38] la formule asymptotique suivante pour  $u$  près de l'extrémité de la fissure  $x = 0$  :

$$u(x) - u(0) = c\sqrt{r} \sin \frac{\lambda}{2} + o(\sqrt{r}), \quad c \geq 0. \quad (\text{II.64})$$

Ce résultat est similaire au cas linéaire avec des conditions de Dirichlet sur les faces de la fissure, la différence étant que pour le problème linéaire, le reste est  $O(r^{\frac{1}{2}+\gamma})$  avec un  $\gamma \in (0, 1/2)$  arbitraire, et la constante  $c$  peut être négative. Toutefois, cette formule n'est pas suffisante pour conclure et mener à bien un calcul similaire à celui du paragraphe 2.. En effet, dans le cas linéaire, on peut montrer que

$$u^R \in H^{2+s}(\Omega), \quad (\text{II.65})$$

pour un certain  $s > 0$ ,  $u^R$  ayant été introduit en (II.36). Donc le gradient de  $u^R$  est borné et on peut en déduire que

$$L_\varepsilon^{(1)} \rightarrow 0, \quad L_\varepsilon^{(2)} \rightarrow 0. \quad (\text{II.66})$$

comme on l'a fait dans les paragraphes 1.2. et 2.. Pour le problème non-linéaire, une telle régularité pour  $u^R$  n'a pas été démontrée, et à priori,  $u^R$  est seulement dans  $H^1(\Omega)$ . On ne peut donc pas affirmer que  $L_\varepsilon^{(1)}$  et  $L_\varepsilon^{(2)}$  convergent vers 0. Il nous faut aller plus loin dans le développement de  $u$ .



**3.4.. Polyhédricité d'un cône convexe.** On a besoin de plus d'informations sur la dépendance par rapport au domaine des inégalités variationnelles pour obtenir la dérivée du second ordre, i.e. on a besoin de la notion de polyhédricité d'un cône convexe. L'espace fonctionnel considéré est l'espace de Sobolev  $H^1_\Gamma(\Omega)$  des fonctions dont la trace vaut zéro sur  $\Gamma$ . L'ensemble convexe

$$K = K_0 = \{v \in H^1_\Gamma(\Omega) \mid [v] \geq 0 \text{ sur } \bar{S}\}$$

est un cône convexe fermé. Toute fonction  $f \in H^1(\Omega)$  admet une unique projection  $u_0 = P_K f$  sur  $K$  qui est une projection métrique en norme  $H^1$ ,

$$\|u_0 - f\| = \inf_{v \in K} \|v - f\|$$

On s'intéresse à la dérivabilité de l'application  $t \mapsto P_K(f + th)$ . On a ainsi besoin d'introduire le cône tangent à  $K$  au point  $u_0 \in K$ . Pour  $u_0 \in K$  on note

$$C_K(u_0) = \{v \in H^1_\Gamma(\Omega) : \exists t > 0 \mid u_0 + tv \in K\} \quad (\text{II.67})$$

et le cône tangent est la fermeture dans  $H^1$

$$T_K(u_0) = \overline{C_K(u_0)}. \quad (\text{II.68})$$

On peut donner une caractérisation de  $T_K(u_0)$  comme

$$T_K(u_0) = \{v \in H^1_\Gamma(\Omega) \mid [v] \geq 0 \text{ sur } \Xi\},$$

où  $\Xi = \{y \in \bar{S} \mid [u] = 0\}$ . Soit  $\mu$  la mesure définie par

$$\mu(v) = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle - \int_\Omega f u$$

$K$  est polyhédrique en  $u$  pour la mesure  $\mu$ , si on a l'égalité suivante de cônes convexes

$$T_K(u) \cap \mathfrak{D}(\mu) = \overline{C_K(u) \cap \mathfrak{D}(\mu)},$$

où

$$\mathfrak{D}(\mu) = \{v \in H^1_\Gamma(\Omega) \mid \mu(v) = 0\}.$$

On a le résultat suivant : la fonction  $u_\delta \in K_0$  obtenue par transport de  $u^\delta \in K_\delta$ , qui est l'unique solution de l'inégalité variationnelle définie dans  $\Omega_\delta = F_\delta(\Omega)$ , est dérivable à droite dans  $H^1(\Omega)$  en  $\delta = 0$ , i.e. pour  $\delta > 0$  on a le développement suivant :

$$u_\delta = u + \delta u^1(\xi) + o(\delta)$$

et la dérivée directionnelle  $u^1(\xi)$  notée  $u' = u^1(\xi) \in T_K(u) \cap \mathfrak{D}(\mu)$  de  $u_\delta$  dans la direction  $\xi$  est donnée par l'unique solution à l'inégalité variationnelle suivante

$$\int_\Omega \langle \nabla u', \nabla(v - u') \rangle \geq - \int_\Omega \langle M'(\xi) \nabla u, \nabla(v - u') \rangle + \int_\Omega f'(\xi)(v - u') \quad \forall v \in T_K(u) \cap \mathfrak{D}(\mu) \quad (\text{II.69})$$

où  $M'(\xi)$  désigne la dérivée de  $M^\delta = q_\delta(DF_\delta^T)^{-1}$ . Ainsi on obtient la dérivée de forme du second ordre de  $J(\Omega_\delta)$  grâce au développement de  $u_\delta$ . Un résultat similaire à celui de la section 1.1. est obtenu. Cependant la dérivée est seulement une semi-dérivée au sens de Gâteaux, et il s'agit d'un résultat de dérivation plus faible en comparaison de la dérivabilité au sens de Fréchet obtenue pour les problèmes linéaires.

**Théorème II.2.** *La dérivée de forme du second ordre de la fonctionnelle d'énergie  $J$  est donnée par*

$$\begin{aligned} J''(0)(\xi, \eta) &= \int_{\Omega} \langle B(\xi, \eta) \nabla u, \nabla u \rangle - \langle \nabla u^1(\xi), \nabla u^1(\eta) \rangle \\ &\quad - \int_{\Omega} u [\langle D^2 f \xi, \eta \rangle + \langle \nabla f, \eta \rangle \operatorname{div}(\xi) - f \operatorname{Tr}(D\xi D\eta) + \\ &\quad \langle \nabla f, \xi \rangle \operatorname{div}(\eta) + f \operatorname{div}(\eta) \operatorname{div}(\xi)] dy + O(|\eta|^2) . \end{aligned} \quad (\text{II.70})$$

La fonction matricielle  $B(\xi, \eta)$  est donnée par

$$B(\xi, \eta) = D\xi D\eta + D\eta D\xi + D\xi D\eta^T - \operatorname{div}(\xi) D\eta - \operatorname{div}(\eta) D\xi + \frac{1}{2} (\operatorname{div}(\xi) \operatorname{div}(\eta) - \operatorname{Tr}(D\xi D\eta)) I \quad (\text{II.71})$$

**3.5.. Semi-dérivée eulérienne.** Dans la littérature, les semi-dérivées eulériennes de fonctionnelles de forme sont calculées. La semi-dérivée eulérienne du second ordre que l'on note  $d^2 J$  est définie comme suit (voir [18] pour plus de détails) : On note  $X^\xi$  le flot défini comme,  $X^\xi(t) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est solution de

$$\frac{\partial X(t)}{\partial t}(x) = \xi(t, X(t)(x)), \quad t > 0, \quad X(0)(x) = x . \quad (\text{II.72})$$

avec  $\xi : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Alors pour  $X^\xi, X^\eta$  donné par (II.72), la dérivée eulérienne d'ordre deux en  $\Omega_0$  dans les directions  $\xi, \eta$  est définie par

$$d^2 J(\Omega_0, \xi, \eta) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \Big|_{t=0, s=0} J(X^\xi(t) \circ X^\eta(s)(\Omega_0)) \quad (\text{II.73})$$

Comme  $J(X^\xi(t) \circ X^\eta(s)(\Omega_0)) = E(X^\xi(t) \circ X^\eta(s) - I)$ , on conclut en dérivant des deux côtés que :

$$d^2 J(\Omega_0, \xi, \eta) = E''(0)(\xi, \eta) + E'(0)(D\xi\eta) . \quad (\text{II.74})$$

On connaît déjà l'expression de  $E''(0)(\xi, \eta)$  et de  $E'(0)(\xi)$ , donc on peut ajouter calculer  $d^2 J$ . On rappelle que  $E'(0)(\xi)$  est donné par la formule (II.39). En remplaçant  $\xi$  par  $D\xi\eta$  dans la même formule, on en déduit une expression pour  $E'(0)(D\xi\eta)$

$$\begin{aligned} E'(0)(D\xi\eta) &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} 2 \langle D^2 \xi(\eta, \nabla u), \nabla u \rangle + 2 \langle D\xi D\eta \nabla u, \nabla u \rangle - \operatorname{Tr}(D^2 \xi\eta + D\xi D\eta) \|\nabla u\|^2 \\ &\quad - \int_{\Omega} \operatorname{Tr}(f(D^2 \xi\eta + D\xi D\eta)) u \end{aligned} \quad (\text{II.75})$$

Afin de simplifier ces formules, on suppose que  $\xi = (\theta, 0)$  et  $\eta = (\psi, 0)$ , c'est à dire que l'on considère uniquement des déplacements tangentiels à l'extrémité de la fissure. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} D\xi &= \begin{pmatrix} \theta_{y_1} & \theta_{y_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \\ D\eta &= \begin{pmatrix} \psi_{y_1} & \psi_{y_2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

De plus  $B(\xi, \eta)$  obtenu dans (II.34) se simplifie considérablement puisque l'on trouve

$$B(\xi, \eta) = D\xi D\eta^T = \begin{pmatrix} \theta_{y_1} \psi_{y_1} + \theta_{y_2} \psi_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En définitive, on a la dérivée seconde de  $E$ ,

$$\begin{aligned} E''(0)(\xi, \eta) &= \int_{\Omega} u_{y_1}^2 (\theta_{y_1} \psi_{y_1} + \theta_{y_2} \psi_{y_2}) \\ &\quad - \int_{\Omega} u'_{y_1} (\theta_{y_1} u_{y_1} + \theta_{y_2} u_{y_2}) + u'_{y_2} (\theta_{y_2} u_{y_1} - \theta_{y_1} u_{y_2}) \\ &\quad - \int_{\Omega} u (\theta \psi f_{y_1 y_1} + f_{y_1} (\theta \psi + f_{y_1} \theta \psi)_{y_1}) \\ &\quad - \int_{\Omega} u' (\theta f)_{y_1} , \end{aligned}$$

la dérivée du premier ordre

$$\begin{aligned} E'(0)(D\xi\eta) &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\theta_{y_1} \psi)_{y_1} (u_{y_1}^2 - u_{y_2}^2) + 2(\theta_{y_1} \psi)_{y_2} u_{y_1} u_{y_2} \\ &\quad - \int_{\Omega} u (\theta_{y_1} \psi f)_{y_1} , \end{aligned}$$

ainsi que la semi-dérivée eulérienne du second ordre

$$\begin{aligned} d^2 J(\Omega_0, \xi, \eta) &= E''(0)(\xi, \eta) + E'(0)(D\xi\eta) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\theta_{y_1} \psi)_{y_1} (u_{y_1}^2 + u_{y_2}^2) \\ &\quad - \int_{\Omega} \theta_{y_1} \psi_{y_2} u_{y_1} u_{y_2} - \theta_{y_2} \psi_{y_2} u_{y_1}^2 \\ &\quad - \int_{\Omega} \theta_{y_1} (u_{y_1} u'_{y_1} - u_{y_2} u'_{y_2}) - \theta_{y_2} (u_{y_1} u'_{y_2} + u_{y_2} u'_{y_1}) \\ &\quad - \int_{\Omega} u (\psi (\theta f)_{y_1})_{y_1} - (\theta f)_{y_1} u' \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta_{y_1 y_1} \psi (u_{y_1}^2 - u_{y_2}^2) \\ &\quad - \int_{\Omega} \theta_{y_1 y_2} \psi u_{y_1} u_{y_2} . \end{aligned}$$

**Remarque II.3.** La Hessienne de forme  $d^2 J(\Omega_0, \xi, \eta)$  n'est pas symétrique par rapport aux variables  $\xi$  et  $\eta$ , car le terme  $E'(0)(D\xi\eta)$  n'est pas symétrique. L'astuce habituellement utilisée pour avoir la symétrie est d'utiliser la semi-dérivée eulérienne, et de faire en sorte que  $D\xi\eta$  soit égal à zéro de manière à ce que  $E'(0)(D\xi\eta)$  disparaisse. On peut obtenir un tel résultat par exemple en supposant que le support de  $\eta$  est inclus dans l'ensemble où  $\xi$  est constant et égal à 1. Plusieurs termes disparaissent alors dans

ce cas, et la dérivée du second ordre devient alors

$$\begin{aligned} d^2J(\Omega_0, \xi, \eta) &= - \int_{\Omega} \theta_{y_1} (u_{y_1} u'_{y_1} - u_{y_2} u'_{y_2}) - \theta_{y_2} (u_{y_1} u'_{y_2} + u_{y_2} u'_{y_1}) \\ &\quad - \int_{\Omega} u \theta (\psi f)_{y_1} - (\theta f)_{y_1} u' . \end{aligned}$$

On rappelle que la dérivée ci-dessus  $d^2J(\Omega_0, \xi, \eta)$  est seulement une semi-dérivée au sens de Gâteaux. Quand peut-on obtenir une dérivée au sens de Gâteaux, i.e dans quel cas la différentielle est-elle linéaire et continue ?

Etant donnée l'inégalité variationnelle (II.69), si le cône  $T_K(u) \cap \mathfrak{D}(\mu)$  est un sous-espace linéaire, alors la dérivée  $u'$  est linéaire par rapport à la direction et par conséquent  $d^2J(\Omega_0, \xi, \eta)$  devient linéaire par rapport à  $\xi, \eta$ . Ainsi on doit savoir sous quelles conditions  $T_K(u) \cap \mathfrak{D}(\mu)$  est linéaire. On rappelle que

$$\Xi = \{y \in \bar{S} \mid [u] = 0\}$$

Ainsi  $T_K(u) \cap \mathfrak{D}(\mu)$  peut s'écrire de la façon suivante :

$$T_K(u) \cap \mathfrak{D}(\mu) = \{v \mid v \geq 0 \text{ sur } \Xi_+, v = 0 \text{ sur } \Xi_0\}$$

où  $\Xi_0 = \text{supp}(\mu)$  et  $\Xi = \Xi_+ \cup \Xi_0$ . En effet, si  $v \in \mathfrak{D}(\mu)$ , alors par définition  $v$  est égal à 0 sur  $\text{supp}(\mu)$ . Une condition suffisante pour que le problème soit linéaire est alors que le support de la mesure  $\mu$  soit égal à  $\Xi$ , i.e. la mesure  $\mu$  charge l'ensemble  $\Xi$ . On obtient alors la dérivée au sens de Gâteaux. On renvoie à [34] pour les détails de la construction du cône convexe dans le cas général.

La Fréchet-dérivabilité pour ce problème peut être établie sous des hypothèses supplémentaires de régularité de la solution inconnue.



## CHAPITRE III

### Extensions auto-adjointes et optimisation topologique



## EXTENSIONS AUTO-ADJOINTES ET OPTIMISATION TOPOLOGIQUE

Nous avons considéré au cours des chapitres précédents des transformations régulières de domaines fissurés. Dans ce chapitre, nous considérons un domaine  $\Omega$  régulier que l'on perturbe singulièrement en créant un trou de petite taille  $\omega_\varepsilon$  dans ce domaine. Ce type de perturbation singulière a déjà été largement étudié dans la littérature, la nouveauté réside ici dans l'utilisation d'une extension auto-adjointe pour modéliser cette perturbation. Cette méthode a été introduite par Nazarov dans [47][50][51][53], et nous l'appliquons ici à un problème d'optimisation de forme.

Tout d'abord, on procède au développement asymptotique de la solution du Laplacien quand un petit trou de taille  $\varepsilon$  est créé à l'intérieur du domaine initial  $\Omega$ . Pour trouver ce développement asymptotique, on étudie des problèmes limites qui ne dépendent pas de la variable  $\varepsilon$ , et dont les solutions donnent des approximations extérieure (loin de  $\omega_\varepsilon$ ) et intérieure (au voisinage de  $\omega_\varepsilon$ ) de la solution du problème initial.

On définit ensuite un nouvel opérateur dans le domaine  $\Omega$  sans trou qui est une extension auto-adjointe du Laplacien et qui tient compte du développement asymptotique précédent. La solution du nouveau problème est alors une approximation de la solution du problème initial sur  $\Omega_\varepsilon$ . On a donc remplacé une perturbation singulière du domaine  $\Omega$  par une perturbation de l'opérateur Laplacien. Dans le cadre de cette extension auto-adjointe, on étudie également le comportement de certaines fonctionnelles quand la position  $h$  du centre du trou varie. Les cas de la dimension deux et trois sont étudiés.

### 1.. Problème de Dirichlet en dimension 2

Soit  $\Omega$  et  $\omega$ , avec  $0 \in \omega$ ,  $0 \in \Omega$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^2$  dont les frontières sont lisses. Soit  $\varepsilon > 0$  un petit paramètre et  $h$  un petit vecteur de  $\mathbb{R}^2$ . On définit les domaines perturbés  $\Omega_\varepsilon^h$  et  $\omega_\varepsilon^h$  de la façon suivante :  $\omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2, x = \varepsilon\xi, \xi \in \omega\}$  et  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \omega_\varepsilon$ ,  $\omega_\varepsilon^h = \{x = y + h, y \in \omega_\varepsilon\}$  et  $\Omega_\varepsilon^h = \Omega \setminus \omega_\varepsilon^h$ . On considère alors le problème perturbé dans  $\mathbb{R}^2$ , avec  $f$  dans  $L^2(\Omega)$  :

$$-\Delta u_h(x, \varepsilon) = f(x) \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon^h, \tag{III.1}$$

$$u_h(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \tag{III.2}$$

$$u_h(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{sur } \partial\omega_\varepsilon^h. \tag{III.3}$$

Le problème est perturbé à la fois par rapport à  $h$  et par rapport à  $\varepsilon$ .

**1.1.. Le premier problème limite.** On considère le premier problème limite :

$$-\Delta v^0(x) = f(x) \quad \text{dans } \Omega, \tag{III.4}$$

$$v^0(x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{III.5}$$



Comme  $f$  est dans  $L^2(\Omega)$ ,  $v^0$  est dans  $H^2(\Omega)$ . Cette approximation est valable en dehors d'un voisinage de la frontière du trou  $\omega_\varepsilon^h$ . Comme on a des conditions de Dirichlet sur la frontière du trou  $\omega_\varepsilon^h$ , il est raisonnable d'anticiper que la solution du problème

$$-\Delta v_h(x) = f(x) + \beta_h \delta(x - h) \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{III.6})$$

$$v_h(x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (\text{III.7})$$

donne une meilleure approximation de  $u_h(x, \varepsilon)$ . On a la représentation

$$v_h(x) = v^0(x) + \beta_h G(x, h).$$

$G(x, y)$  est la fonction de Green généralisée définie par

$$-\Delta_x G(x, y) = \delta(x - y) \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{III.8})$$

$$G(x, y) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (\text{III.9})$$

où  $\delta$  est la masse de Dirac. La fonction  $u_h(x, \varepsilon)$  à l'extérieur d'un voisinage de  $\omega_\varepsilon^h$  est approchée par

$$u_h(x, \varepsilon) \simeq v^0(x) + \beta_h G(x, h).$$

La fonction  $G(x, y)$  admet la représentation suivante au voisinage de l'origine :

$$G(x, h) = - \{ (2\pi)^{-1} \log \|x - h\| + \mathcal{G}(x, h) \}, \quad \|x - h\| \rightarrow 0, \quad (\text{III.10})$$

où  $\mathcal{G}(x, y)$  est la partie régulière de la fonction de Green solution de

$$-\Delta_x \mathcal{G}(x, y) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{III.11})$$

$$\mathcal{G}(x, y) = -(2\pi)^{-1} \log \|x - y\| \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (\text{III.12})$$

Si on développe le terme  $-(2\pi)^{-1} \log \|x - h\|$  dans (III.12) par rapport au petit vecteur  $h$  on obtient

$$-(2\pi)^{-1} \log \|x - h\| = -(2\pi)^{-1} \log \|x\| + (2\pi)^{-1} \left\langle h, \frac{x}{\|x\|^2} \right\rangle + r_h,$$

avec  $r_h = O(\|h\|^2)$ . Ainsi  $\mathcal{G}(x, h)$  admet le développement

$$\mathcal{G}(x, h) = \mathcal{G}(x, 0) + \mathcal{S}_h(x) + \mathcal{R}_h(x) \quad (\text{III.13})$$

avec  $\mathcal{S}_h(x)$  et  $\mathcal{R}_h(x)$  solutions de

$$-\Delta \mathcal{S}_h(x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{III.14})$$

$$\mathcal{S}_h(x) = (2\pi)^{-1} \left\langle h, \frac{x}{\|x\|^2} \right\rangle \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (\text{III.15})$$

$$-\Delta \mathcal{R}_h(x) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (\text{III.16})$$

$$\mathcal{R}_h(x) = r_h \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (\text{III.17})$$

Finalement  $\mathcal{G}(h, h)$  peut être décomposé en

$$\mathcal{G}(h, h) = \mathcal{G}(0, 0) + 2 \langle h, \nabla \mathcal{G}(0, 0) \rangle + O(\|h\|^2) \quad (\text{III.18})$$

L'approximation  $u_h(x, \varepsilon) \simeq v^0(x) + \beta_h G(x, h)$  ne vérifie pas la condition aux limites (III.3) sur le trou. Par conséquent, on doit ajouter une couche limite  $w_h^0(\xi_h, \varepsilon)$  qui dépend

de la variable  $\xi_h$  définie comme  $\xi_h = \varepsilon^{-1}(x - h)$  pour compenser la discrédance induite. En développant  $v^0(x) + \beta_h G(x, h)$  quand  $x \rightarrow h$  on obtient

$$\begin{aligned} v^0(x) + \beta_h G(x, h) &= v^0(x) - \beta_h \left\{ (2\pi)^{-1} \log \|x - h\| + \mathcal{G}(x, h) \right\} \\ &= v^0(h) - \beta_h \left\{ (2\pi)^{-1} \log \|\varepsilon \xi_h\| + \mathcal{G}(h, h) \right\} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Maintenant la couche limite  $w_h^0(\xi, \varepsilon)$  est solution du système suivant

$$-\Delta_{\xi_h} w_h^0(\xi_h, \varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \omega_h, \quad (\text{III.19})$$

$$w_h^0(\xi_h, \varepsilon) = -v^0(h) + \beta_h \left\{ (2\pi)^{-1} \log \|\varepsilon \xi_h\| + \mathcal{G}(h, h) \right\} \quad \text{sur } \partial\omega_h. \quad (\text{III.20})$$

La solution du système (III.19)-(III.20) est

$$w_h^0(\xi_h, \varepsilon) = -v^0(h) + \beta_h \left\{ (2\pi)^{-1} \log \varepsilon + \mathcal{G}(h, h) \right\} + \beta_h \mathcal{E}_h^0(\xi_h), \quad (\text{III.21})$$

avec  $\mathcal{E}_h^0(\xi_h)$  solution de

$$-\Delta_{\xi_h} \mathcal{E}_h^0(\xi_h) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \omega_h, \quad (\text{III.22})$$

$$\mathcal{E}_h^0(\xi_h) = (2\pi)^{-1} \log \|\xi_h\| \quad \text{sur } \partial\omega_h. \quad (\text{III.23})$$

La fonction  $\mathcal{E}_h^0(\xi_h)$  admet le développement suivant

$$\mathcal{E}_h^0(\xi_h) = (2\pi)^{-1} L + O(\|\xi_h\|^{-1}), \quad (\text{III.24})$$

où  $L$  est une constante qui dépend uniquement de la forme du domaine  $\omega$ . La quantité  $\exp(L)$  est appelée la capacité logarithmique ou le rayon extérieur conforme du domaine  $\omega$ . Ainsi,  $w_h^0(\xi_h, \varepsilon)$  admet le développement

$$w_h^0(\xi_h, \varepsilon) = -v^0(h) + \beta_h \left\{ (2\pi)^{-1} \log \varepsilon + \mathcal{G}(h, h) \right\} + \beta_h (2\pi)^{-1} L + O(\|\xi_h\|^{-1}).$$

Afin d'obtenir que  $w_h^0(\xi_h, \varepsilon) \rightarrow 0$  quand  $\|\xi_h\| \rightarrow \infty$ , on impose une condition sur  $\beta_h$  :

$$\beta_h = \left\{ (2\pi)^{-1} (\log \varepsilon + L) + \mathcal{G}(h, h) \right\}^{-1} v^0(h). \quad (\text{III.25})$$

Par conséquent, la solution  $u_h(x, \varepsilon)$  de (III.1)-(III.3) peut être représentée par

$$u_h(x, \varepsilon) = v^0(x) + \beta_h G(x, h) + \tilde{u}_h^0(x, \varepsilon), \quad (\text{III.26})$$

où la fonction  $\tilde{u}_h^0(x, \varepsilon)$  est solution du problème

$$-\Delta \tilde{u}_h^0(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon^h \quad (\text{III.27})$$

$$\tilde{u}_h^0(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{III.28})$$

$$\tilde{u}_h^0(x, \varepsilon) = - (v^0(x) - v^0(h)) \quad (\text{III.29})$$

$$+ \beta_h \left\{ (2\pi)^{-1} (\log \|\xi_h\| - L) \right\}$$

$$+ \beta_h \left\{ \mathcal{G}(x, h) - \mathcal{G}(h, h) \right\} \quad \text{sur } \partial\omega_\varepsilon^h$$

### 1.2.. Extension auto-adjointe du Laplacien avec conditions de Dirichlet.

Dans ce paragraphe on suppose pour simplifier les notations que  $h = 0$  sans perte de généralité.

On considère l'opérateur  $\mathcal{A}_0$  dans  $L_2(\Omega)$  donné par l'expression différentielle  $-\Delta_x$  et dont le domaine de définition est

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \left\{ v \in C_0^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{0\}), v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} \quad (\text{III.30})$$

On souligne que l'inclusion  $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$  indique que  $v$  satisfait les conditions aux limites (III.2) et est égal à zéro au voisinage du centre 0 de la cavité  $\omega_\varepsilon$ , cette dernière condition

imitant la condition de Dirichlet (III.3).

Maintenant la fermeture  $\overline{\mathcal{A}_0}$  et l'adjoint  $\mathcal{A}_0^*$  de l'opérateur  $\mathcal{A}_0$  sont donnés par le lemme suivant

**Lemme III.1.** *La fermeture  $\overline{\mathcal{A}_0}$  et l'adjoint  $\mathcal{A}_0^*$  de l'opérateur  $\mathcal{A}_0$  sont donnés par l'expression différentielle  $-\Delta_x$ , avec les domaines de définition respectifs suivants :*

$$\mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0}) = \{v \in H^2(\Omega), v(0) = 0, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \quad (\text{III.31})$$

et

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0^*) = \left\{ v : v(x) = \chi_\delta(x) \left( -\frac{a}{2\pi} \log r + b \right) + \bar{v}(x), \bar{v} \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0}), a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{III.32})$$

Comme le domaine de définition de l'opérateur initial  $\mathcal{A}_0$  est substantiellement restreint, le domaine de définition de l'adjoint est large, et les deux opérateurs  $\overline{\mathcal{A}_0}$  et  $\mathcal{A}_0^*$  ne sont pas auto-adjoints. Cependant, il existe une famille d'opérateurs auto-adjoints  $\mathcal{A}$ , telle que  $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0^*$  et le domaine de définition  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  contient toutes les solutions singulières requises du problème de Dirichlet dans  $\Omega$ .

On construit une famille d'extensions auto-adjointes de l'opérateur  $\mathcal{A}_0$  en retréignant le domaine de l'opérateur  $\mathcal{A}_0^*$ . On ajoute la condition aux limites abstraite  $b = Sa$  entre les coefficients  $a$  et  $b$  dans la définition de  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0^*)$  avec  $S$  un coefficient donné. Une seule extension  $\mathcal{A}$  nous intéresse avec  $S$  obtenu par le développement asymptotique précédent. Avec un tel  $S$  on modélise l'influence du petit trou. Pour cela, on montre le théorème suivant :

**Théorème III.2.**

(1) *Soit  $\mathbf{A}$  la restriction de l'opérateur  $\mathcal{A}_0^*$  à l'espace vectoriel*

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}) = \{v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0^*) : b = Sa\} \quad (\text{III.33})$$

*où  $S = S(\varepsilon) = (2\pi)^{-1}(\log \varepsilon + L)$ , la quantité  $L$  est définie dans (III.24). Alors  $\mathbf{A}$  est un opérateur auto-adjoint.*

(2) *L'équation suivante*

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = f \in L_2(\Omega) \quad (\text{III.34})$$

*admet une unique solution  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$ .*

**Preuve.**

1) Il suffit de prouver la chose suivante : Si pour  $\mathbf{v}, f \in L_2(\Omega)$  l'égalité suivante est vraie

$$(\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{z})_\Omega = (f, \mathbf{z})_\Omega \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{D}(\mathbf{A}), \quad (\text{III.35})$$

alors  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$  et  $f = \mathbf{A}\mathbf{v}$ . Comme  $\mathcal{A}_0 \subset \mathbf{A}$ , on voit que  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0^*)$  et  $\mathcal{A}_0^*\mathbf{v} = f$ . Ainsi, on doit seulement montrer que  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$ . De (III.35) on peut écrire la formule

de Green :

$$\begin{aligned}
0 &= (\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{z})_\Omega - (\mathcal{A}_0^* \mathbf{v}, \mathbf{z})_\Omega \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus \mathbb{B}_\delta} (\mathbf{z} \Delta_x \mathbf{v} - \mathbf{v} \Delta_x \mathbf{z}) dx \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial \mathbb{B}_\delta} \mathbf{v} \partial_n \mathbf{z} - \mathbf{z} \partial_n \mathbf{v} ds_x + \int_{\partial \Omega} \mathbf{v} \partial_n \mathbf{z} - \mathbf{z} \partial_n \mathbf{v} ds_x \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial \mathbb{B}_\delta} \mathbf{v} \partial_n \mathbf{z} - \mathbf{z} \partial_n \mathbf{v} ds_x.
\end{aligned}$$

Comme  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0^*)$ ,  $v = 0$  sur  $\partial \Omega$  et par conséquent  $\int_{\partial \Omega} \mathbf{v} \partial_n \mathbf{z} - \mathbf{z} \partial_n \mathbf{v} ds_x = 0$ . En remplaçant  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{z}$  par les développements asymptotiques donnés dans la définition de  $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0^*)$ , avec les coefficients notés respectivement  $a, b$  et  $p, q$ , on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta \int_0^{2\pi} (b - a \frac{1}{2\pi} \log r) \frac{\partial}{\partial r} (q - p \frac{1}{2\pi} \log r) |_{r=\delta} \\
&\quad - (q - p \frac{1}{2\pi} \log r) \frac{\partial}{\partial r} (b - a \frac{1}{2\pi} \log r) |_{r=\delta} d\phi. \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} a(q - p \frac{1}{2\pi} \log \delta) - p(b - a \frac{1}{2\pi} \log \delta) \\
&= aq - bp \\
&= (Sa - b)p,
\end{aligned}$$

et la conclusion est  $b = Sa$  ce qui signifie que  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$ . On a utilisé ici la relation  $q = Sp$  car  $\mathbf{z} \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$ .

2) Tout d'abord on prouve l'unicité de la solution. Soit  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  deux fonctions dans  $\mathcal{D}(\mathbf{A})$ . Alors la différence  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$  vérifie  $\mathbf{A}\mathbf{v} = 0$  dans  $\Omega$  et  $\mathbf{v} = 0$  sur  $\partial \Omega$ . Ainsi  $\mathbf{v}$  est la solution fondamentale du laplacien

$$\mathbf{v} = \mu G(0, x) = -\mu ((2\pi)^{-1} \log r + \mathcal{G}(0, x)) \quad (\text{III.36})$$

où  $G$  et  $\mathcal{G}$  sont définis dans (III.8)-(III.9) et (III.11)-(III.12). La représentation asymptotique (III.36) nous donne les coefficients  $a = \mu$  et  $b = -\mathcal{G}(0, 0)\mu$ . D'après la définition de  $\mathcal{D}(\mathbf{A})$  on doit avoir  $b = Sa$ , ainsi on obtient

$$-\mathcal{G}(0, 0)\mu = ((2\pi)^{-1} \log \varepsilon + L)\mu$$

ce qui implique  $\mu = 0$ . Ainsi  $\mathbf{v} \equiv 0$  et on a prouvé l'unicité de la solution.

Il nous reste à montrer que

$$\mathbf{v} = v^0(x) + \beta G(x, 0) \quad (\text{III.37})$$

est solution de  $\mathbf{A}\mathbf{v} = f$ . Grâce aux définitions (III.8)-(III.9) et (III.4)-(III.5) respectivement de  $G(x, 0)$  et  $v^0$ , on a clairement  $-\Delta_x u(x, \varepsilon) = f(x)$  dans  $\Omega \setminus 0$  et  $u(x, \varepsilon) = 0$  sur  $\partial \Omega$ . On a également  $a = \beta$  et  $b = v^0(0) - \beta \mathcal{G}(0, 0)$ , de sorte que la relation  $b = Sa$  est satisfaite. Par conséquent, on a  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$ . La preuve est terminée. ■

**1.3.. Dérivation par rapport à la position du trou.** On rappelle que la fonction  $u_h(x, \varepsilon)$  de (III.1)-(III.3) peut être représentée par

$$u_h(x, \varepsilon) = v^0(x) + \beta_h G(x, h) + \tilde{u}_h^0(x, \varepsilon). \quad (\text{III.38})$$

Elle peut également être représentée sous la forme (III.32)

$$u_h(x, \varepsilon) = -\frac{a_h}{2\pi} \log r_h + b_h + \bar{u}_h(x, \varepsilon). \quad (\text{III.39})$$

avec

$$a_h = \beta_h = \left\{ (2\pi)^{-1} (\log \varepsilon + L) + \mathcal{G}(h, h) \right\}^{-1} v^0(h), \quad (\text{III.40})$$

$$b_h = v^0(h) - \beta_h \mathcal{G}(h, h) = S a_h, \quad (\text{III.41})$$

et  $S = (2\pi)^{-1} (\log \varepsilon + L)$ ,  $(r_h, \theta_h)$  étant les coordonnées polaires de centre  $h$ . Le coefficient  $S$  dépend de  $\varepsilon$  mais ne dépend pas de la position du trou  $h$ .

**1.4.. Fonctionnelles d'énergie dans  $L_p$ .** On considère des fonctionnelles de la forme :

$$\mathcal{F}(u, \varepsilon) = \int_{\Omega_\varepsilon} F(x, u) dx. \quad (\text{III.42})$$

avec  $u \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$ . On fait une hypothèse sur la fonctionnelle (III.42), suffisante pour l'analyse asymptotique qui suit. On suppose que l'égalité suivante a lieu pour un certain  $p \in [1, \infty[$  et pour tout  $u, v \in L_p(\Omega_\varepsilon)$

$$|\mathcal{F}(u, \varepsilon) - \mathcal{F}(v, \varepsilon)| \leq c \|u - v\|_p \left( \|u\|_p^{p-1} + \|v\|_p^{p-1} \right), \quad (\text{III.43})$$

où la constante  $c$  dépend de  $\Omega$ , mais  $c$  est indépendant du paramètre  $\varepsilon$  et des fonctions  $u, v$ . On suppose également que la même inégalité a lieu dans le domaine non perturbé  $\Omega$ ,

$$|\mathcal{F}(u, 0) - \mathcal{F}(v, 0)| \leq c \|u - v\|_p \left( \|u\|_p^{p-1} + \|v\|_p^{p-1} \right), \quad (\text{III.44})$$

où  $\|\cdot\|_p$  désigne la norme de  $L_p(\Omega)$ . Soit  $u_h(x, \varepsilon)$  la solution de l'équation (III.1)-(III.3). La fonction  $u_h$  est prolongée par zéro sur le domaine  $\omega_\varepsilon^h$ , et la fonction prolongée est toujours notée  $u_h$ . Ainsi, grâce au plongement  $H^1(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ ,  $p \in [1, \infty[$  et à l'inégalité (III.44) on a

$$|\mathcal{F}(u, 0) - \mathcal{F}(u_h, 0)| \leq c \|u - u_h\|_p \left( \|u\|_p^{p-1} + \|u_h\|_p^{p-1} \right), \quad (\text{III.45})$$

où  $\|\cdot\|_p$  est la norme dans  $L_p(\Omega)$ . Comme  $u$  et  $u_h$  sont dans  $\mathcal{D}(\mathbf{A})$ , on a le développement (III.32) pour  $u$  et  $u_h$ , ainsi

$$\|u - u_h\|_p = \left\| -\frac{a_0}{2\pi} \log r + \frac{a_h}{2\pi} \log r_h + S(a_0 - a_h) + \bar{u} - \bar{u}_h \right\|_p \quad (\text{III.46})$$

Grâce au développement (III.18) de  $\mathcal{G}(h, h)$  et à la régularité de  $v^0$  solution de (III.4)-(III.5) on obtient

$$\|a_0 - a_h\|_p = \|\beta - \beta_h\|_p \leq c|h| \quad (\text{III.47})$$

où  $c$  est une constante qui dépend seulement de  $\varepsilon$  et  $\Omega$ , d'après l'expression (III.40) de  $\beta_h$ . On obtient évidemment pour  $b_h$  les mêmes résultats en raison de la relation  $b_h = S a_h$

$$\|b_0 - b_h\|_p = \|S a - S a_h\|_p \leq S c |h| \quad (\text{III.48})$$

et  $S$  dépend seulement de  $\varepsilon$  et  $\Omega$ . D'après la  $H^2$ -régularité de  $\bar{u}$  et  $\bar{u}_h$ , on obtient la même inégalité pour  $\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_p$

$$\|\bar{u} - \bar{u}_h\|_p \leq c|h| \quad (\text{III.49})$$

Le seul terme dans (III.46) qui doit être majoré est  $-\frac{a_0}{2\pi} \log r + \frac{a_0}{2\pi} \log r_h$ . Puisqu'on a prouvé la continuité de  $\|a_0 - a_h\|_p$  dans (III.47), il suffit de donner une estimation de  $\|\log r - \log r_h\|_p$ . Quitte à faire un changement de repère, on peut supposer que  $h = (|h|, 0)$ . Ainsi on peut séparer l'intégrale suivante en deux parties

$$\int_{\Omega} |\log r_h - \log r|^p dx = I_0^h + I_1^h$$

avec

$$\begin{aligned} I_0^h &= \int_{|x| < 2|h|} |\log \|x + |h|e_1\| - \log \|x\||^p dx \\ &= |h|^2 \int_{|\xi| < 2} |\log \|\xi + e_1\| - \log \|\xi\||^p d\xi \\ &\leq c|h|^2. \end{aligned}$$

On a utilisé le changement de variables  $x = |h|\xi$ . On a également  $e_1 = (1, 0)$ .

$$\begin{aligned} I_1^h &= \int_{\Omega \setminus |x| < 2|h|} \left| \log \frac{|x|^2 - 2|h|x_1 + |h|^2}{|x|^2} \right|^p dx \\ &\leq C_{\alpha} \int_{\Omega \setminus |x| < 2|h|} \left( \left( \frac{|h|}{r} \right)^{\alpha p} + \left( \frac{|h|^2}{r^2} \right)^{\alpha p} \right) \\ &\leq C_{\alpha} \left( |h|^{\alpha p} \int_{2|h|}^D r^{-\alpha p + 1} dr + |h|^{2\alpha p} \int_{2|h|}^D r^{-2\alpha p + 1} dr \right), \end{aligned}$$

avec  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $C_{\alpha}$  une constante qui dépend de  $\alpha$ . Ainsi, si  $\alpha p < 1$ , alors

$$I_1^h \leq C_{\alpha} (|h|^{\alpha p} |h|^{-\alpha p + 2} + |h|^{2\alpha p} |h|^{-2\alpha p + 2}) = C_{\alpha} |h|^2.$$

Finalement, on obtient

$$\|\log r - \log r_h\|_p \leq C_{\alpha} |h|^{2/p}. \quad (\text{III.50})$$

Par conséquent, en choisissant  $p \in [1, 2]$  et en combinant (III.47), (III.48), (III.49) et (III.50) on obtient la  $h$ -convergence pour la fonctionnelle (III.42).

## 2.. Estimations pour le Laplacien en dimension trois

On considère deux domaines  $\Omega$  et  $\omega$  de  $\mathbb{R}^3$  ayant des frontières régulières, et  $0 \in \omega$ ,  $0 \in \Omega$ . Les domaines perturbés  $\omega_{\varepsilon}$  et  $\Omega_{\varepsilon}$  sont définis respectivement comme  $\omega_{\varepsilon} = \{x = \varepsilon\xi, \xi \in \omega\}$  et  $\Omega_{\varepsilon} = \Omega \setminus \omega_{\varepsilon}$ . Le Laplacien avec conditions de Dirichlet sur  $\partial\Omega$  et sur la frontière du trou  $\partial\omega_{\varepsilon}$  est

$$-\Delta u(x, \varepsilon) = f \quad \text{dans } \Omega_{\varepsilon} \quad (\text{III.51})$$

$$u(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_{\varepsilon} \quad (\text{III.52})$$

où  $f$  est une fonction dans  $L_2(\Omega)$ . On veut construire une approximation de  $u(x, \varepsilon)$  sous la forme d'une série suivant les puissances de  $\varepsilon$ .

**2.1.. Le premier problème limite.** Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\Omega_\varepsilon \rightarrow \Omega \setminus 0$ , alors on considère le premier problème limite :

$$-\Delta v^0(x) = f \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{III.53})$$

$$v^0(x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{III.54})$$

Cette approximation est valable en dehors d'un voisinage de la frontière du trou  $\omega_\varepsilon$ .

**2.2.. Le premier terme de la couche limite.** Afin de donner une approximation de  $u(x, \varepsilon)$  près de la frontière de  $\omega_\varepsilon$ , on doit ajouter la couche limite  $w^0(\xi)$  dépendant de la variable  $\xi$ . Comme  $f$  est dans  $L_2(\Omega)$  et que la frontière de  $\Omega$  est régulière, la solution  $v^0$  de (III.53)-(III.54) est dans  $H^2(\Omega)$  et par conséquent  $v^0$  est dans  $C^0(\bar{\Omega})$ . Ainsi le développement de Taylor de  $v^0$  au voisinage de 0 est

$$v^0(x) = v^0(\varepsilon\xi) = v^0(0) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\text{III.55})$$

La solution  $u(x, \varepsilon)$  de (III.51)-(III.52) vérifie la condition de Dirichlet sur la frontière du trou  $\partial\omega_\varepsilon$ . L'approximation  $v^0(x)$  de  $u(x, \varepsilon)$  ne vérifie pas cette condition de Dirichlet. On dit que la fonction  $v^0$  laisse une discrédance  $v^0(0)$  car le premier terme du développement de Taylor (III.55) de  $v^0$  au voisinage de 0 est  $v^0(0)$ .

Par conséquent on doit compenser cette discrédance  $v^0(0)$  sur la frontière du trou  $\partial\omega_\varepsilon$ . Le potentiel capacitair  $P$  dans le domaine  $\mathbb{R}^3 \setminus \omega$  est défini comme la solution de

$$-\Delta P(\xi) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \omega \quad (\text{III.56})$$

$$P(\xi) = 1 \quad \text{sur } \partial\omega \quad (\text{III.57})$$

Il est connu qu'il existe une unique solution  $P \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \omega)$  avec  $|P(\xi)| = O(|\xi|^{-1})$  quand  $|\xi| \rightarrow \infty$ . On développe  $P$  en fonction de la solution fondamentale  $\Phi$ , où  $\Phi(\xi) = |\xi|^{-1}$

$$P(\xi) = c_0\Phi(\xi) + \sum_{j=1}^3 c_j \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}(x) + O(|x|^{-3}). \quad (\text{III.58})$$

Si on pose  $w^0(\xi) = -P(\xi)v^0(0)$ ,  $w^0$  compense la discrédance d'ordre zéro  $v^0(0)$  sur  $\partial\omega_\varepsilon$ . En fait, on peut préciser la valeur de la constante  $c_0$  dans le développement (III.58) de  $P$ .

**Lemme III.3.** *Soit  $P$  le potentiel capacitair défini en (III.56)-(III.57). Alors  $P$  admet le développement suivant quand  $|\xi| \rightarrow \infty$*

$$P(\xi) = \frac{cap\omega}{|\xi|} + O\left(\frac{1}{|\xi|^2}\right) \quad (\text{III.59})$$

où  $cap\omega$  est la capacité de l'ensemble  $\omega$ .

**Preuve.** On utilise la formule de Green ainsi que le développement (III.58) :

$$\underbrace{\int_{B_R \setminus \omega} \Delta P(1-P)}_{=0} = \int_{B_R \setminus \omega} \nabla P \nabla(1-P) + \int_{\partial B_R \setminus \partial\omega} \partial_n P(1-P).$$

On obtient alors

$$\int_{B_R \setminus \omega} \|\nabla P\|^2 = - \int_{\partial B_R} \partial_n P(1-P) = - \int_{\partial B_R} -\frac{c_0}{|\xi|^2} \left(1 - \frac{c_0}{|\xi|}\right) + O\left(\frac{1}{|\xi|^3}\right).$$

Finalement on trouve

$$4\pi c_0 = \int_{B_R \setminus \omega} \|\nabla P\|^2.$$

Par définition de la capacité on a

$$c_0 = \frac{1}{4\pi} \int_{B_R \setminus \omega} \|\nabla P\|^2 = \text{cap } \omega$$

ce qui termine la preuve ■

Ainsi on peut approximer  $u(x, \varepsilon)$  par

$$u(x, \varepsilon) \simeq v^0(x) + w^0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = v^0(x) - P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v^0(0). \quad (\text{III.60})$$

**2.3.. Le deuxième problème limite.** La couche limite  $w^0(\xi)$  crée une discrédance sur la frontière  $\partial\Omega$ . En utilisant la formule (III.59), on obtient le développement suivant quand  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$-P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v^0(0) = -\frac{\text{cap } \omega}{|x|} \varepsilon v^0(0) + O(\varepsilon^2).$$

On veut compenser la discrédance du premier ordre  $-\frac{\text{cap } \omega}{|x|} \varepsilon v^0(0)$ . Par conséquent, on doit ajouter le terme  $\varepsilon v^1(x)$  à l'approximation de  $u(x, \varepsilon)$ , avec  $v^1$  solution de

$$-\Delta v^1(x) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{III.61})$$

$$v^1(x) = v^0(0) \frac{\text{cap } \omega}{|x|} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{III.62})$$

Maintenant l'approximation pour  $u(x, \varepsilon)$  est

$$u(x, \varepsilon) \simeq v^0(x) + w^0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon v^1(x)$$

La solution de (III.61)-(III.62) peut être calculée explicitement avec la fonction de Green  $G(x, y)$  solution de

$$-\Delta_x G(x, y) = \delta(x - y) \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{III.63})$$

$$G(x, y) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{III.64})$$

où  $\delta$  est la masse de Dirac.  $G(x, y)$  admet le développement suivant :

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} + \mathcal{G}(x, y) \quad (\text{III.65})$$

où  $\mathcal{G}$  est la partie régulière de la fonction de Green,  $\mathcal{G}$  est la solution de

$$-\Delta_x \mathcal{G}(x, y) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{III.66})$$

$$\mathcal{G}(x, y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{III.67})$$

**Lemme III.4.** La solution  $v^1$  de (III.61)-(III.62) est donnée par

$$\begin{aligned} v^1(x) &= -v^0(0) \text{cap } \omega \int_{\partial\Omega} \frac{\partial_n G(x, y)}{|y|} dy \\ &= -4\pi \mathcal{G}(0, x) v^0(0) \text{cap } \omega \end{aligned}$$



**Preuve.** Soit  $B_\delta$  la boule de rayon  $\delta$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus B_\delta} \frac{\Delta G(x, y)}{|y|} - \Delta\left(\frac{1}{|y|}\right)G(x, y)dy &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial_n G(x, y)}{|y|} - \partial_n\left(\frac{1}{|y|}\right)G(x, y)dy \\ &+ \int_{\partial B_\delta} \frac{\partial_n G(x, y)}{|y|} - \partial_n\left(\frac{1}{|y|}\right)G(x, y)dy \end{aligned}$$

L'intégrale sur  $\Omega \setminus B_\delta$  vaut zéro car les fonctions  $G(x, y)$  et  $\frac{1}{|y|}$  sont harmoniques sur ce domaine. On a également

$$\int_{\partial\Omega} \partial_n\left(\frac{1}{|y|}\right)G(x, y)dy = 0$$

car  $G(x, y) = 0$  sur  $\partial\Omega$ , et on a les convergences suivantes

$$\int_{\partial B_\delta} \frac{\partial_n G(x, y)}{|y|} \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0,$$

$$\int_{\partial B_\delta} \partial_n\left(\frac{1}{|y|}\right)G(x, y)dy \rightarrow 4\pi\mathcal{G}(0, x), \quad \delta \rightarrow 0.$$

Ces dernières convergences sont dues à  $\partial_n\left(\frac{1}{|y|}\right) = -\partial_r\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}$  ■

Ainsi on obtient le développement suivant pour  $u(x, \varepsilon)$

$$u(x, \varepsilon) = v^0(x) - v^0(0)P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon 4\pi v^0(0)\text{cap } \omega \mathcal{G}(0, x) + \tilde{u}^1(x, \varepsilon).$$

Si on écrit le développement de  $P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  on trouve

$$P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \varepsilon \frac{\text{cap } \omega}{|x|} + \tilde{P}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

où  $\tilde{P}(\xi)$  est solution de

$$-\Delta \tilde{P}(\xi) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \omega \tag{III.68}$$

$$\tilde{P} = 1 - \frac{\text{cap } \omega}{|\xi|} \quad \text{sur } \partial\omega \tag{III.69}$$

Etant donné (III.65) on trouve

$$G(0, x) = \frac{1}{4\pi|x|} + \mathcal{G}(0, x).$$

Ainsi on peut écrire

$$u(x, \varepsilon) = v^0(x) - \varepsilon 4\pi v^0(0)\text{cap } \omega G(0, x) - v^0(0)\tilde{P}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \tilde{u}^1(x, \varepsilon). \tag{III.70}$$

Finalement,  $\tilde{u}^1(x, \varepsilon)$  est solution de

$$-\Delta \tilde{u}^1(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \tag{III.71}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}^1(x, \varepsilon) &= -v^0(x) + v^0(0)P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &+ \varepsilon 4\pi v^0(0)\text{cap } \omega \mathcal{G}(0, x) \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \end{aligned} \tag{III.72}$$

Plus précisément, on peut écrire

$$-\Delta \tilde{u}^1(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \quad (\text{III.73})$$

$$\tilde{u}^1(x, \varepsilon) = v^0(0)P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon \frac{v^0(0)\text{cap } \omega}{|x|} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{III.74})$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}^1(x, \varepsilon) &= -(v^0(x) - v^0(0)) \\ &\quad + \varepsilon 4\pi v^0(0)\text{cap } \omega \mathcal{G}(0, x) \quad \text{sur } \partial\omega_\varepsilon \end{aligned} \quad (\text{III.75})$$

**2.4.. Justification des développements asymptotiques.** Soit  $\mathcal{U}$  défini par

$$\mathcal{U}(x, \varepsilon) = v^0(x) - v^0(0)P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon 4\pi v^0(0)\text{cap } \omega \mathcal{G}(0, x) \quad (\text{III.76})$$

de sorte que

$$u(x, \varepsilon) = \mathcal{U}(x, \varepsilon) + \tilde{u}^1(x, \varepsilon). \quad (\text{III.77})$$

La fonction  $\mathcal{U}$  est l'approximation asymptotique globale. On définit aussi la fonction  $\mathcal{U}'$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{U}'(x, \varepsilon) &= (v^0(x) - v^0(0))(1 - \chi_\varepsilon(x)) + v^0(0) \\ &\quad - v^0(0) \frac{\text{cap } \omega}{r} - v^0(0) \tilde{P}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \chi \\ &\quad - \varepsilon 4\pi v^0(0)\text{cap } \omega \mathcal{G}(0, x)(1 - \chi_\varepsilon(x)). \end{aligned} \quad (\text{III.78})$$

La fonction cutoff  $\chi_\varepsilon$  a les propriétés standards :  $\chi$  vaut 1 au voisinage de  $\omega$  et  $\chi$  est à support compact dans  $\mathbb{R}^3$ . Finalement  $\chi_\varepsilon(x) = \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ . Alors on a

$$u(x, \varepsilon) = \mathcal{U}'(x, \varepsilon) + \chi_\varepsilon(x)(v^0(x) - v^0(0)) \quad (\text{III.79})$$

$$\begin{aligned} &-v^0(0) \tilde{P}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) (1 - \chi) \\ &- \varepsilon 4\pi v^0(0)\text{cap } \omega \mathcal{G}(0, x) \chi_\varepsilon + \tilde{u}^1(x, \varepsilon). \end{aligned} \quad (\text{III.80})$$

Maintenant on pose

$$\mathcal{R} = u - \mathcal{U}'. \quad (\text{III.81})$$

On remarque que la définition (III.78) de la fonction  $\mathcal{U}'$  montre que  $\mathcal{R}$  vaut 0 sur  $\partial\Omega_\varepsilon$ .

On veut donner une estimation de la norme  $\|\mathcal{R}; H^1(\Omega_\varepsilon)\|$ . Les calculs nous donnent

$$\begin{aligned} -\Delta \mathcal{R} &= -\Delta u + \Delta \mathcal{U}' \\ &= -\Delta u + (1 - \chi_\varepsilon)\Delta v^0 - \Delta \chi_\varepsilon(v^0(x) - v^0(0)) - 2\nabla \chi_\varepsilon \nabla v^0 \\ &\quad - v^0(0)\Delta\left(\tilde{P}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \chi\right) - \varepsilon 4\pi v^0(0)\text{cap } \omega \Delta(\mathcal{G}(0, x)(1 - \chi_\varepsilon)). \\ &= \chi_\varepsilon f - [\Delta, \chi_\varepsilon](v^0(x) - v^0(0)) - v^0(0)[\Delta, \chi] \tilde{P}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &\quad + \varepsilon 4\pi v^0(0)\text{cap } \omega [\Delta, \chi_\varepsilon] \mathcal{G}(0, x) \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \end{aligned}$$

avec  $[\Delta, \chi_\varepsilon] = (\Delta \chi_\varepsilon) + 2\nabla \chi_\varepsilon \nabla_x$ .

Pour calculer ces estimations, on introduit les inégalités de Hardy dans les lemmes III.5 et III.6. On donne une preuve simple pour le lemme III.5 issue de [45]. La preuve du lemme III.6 peut être trouvée dans [30].

**Lemme III.5.** *Si  $z \in C_0^\infty[a, \infty[$ ,  $a \geq 0$  et  $b > 0$  alors*

$$\int_a^\infty r^{b-1}|z(r)|^2 dr \leq \frac{4}{b^2} \int_a^\infty r^{b+1}|\partial_r z(r)|^2 dr. \quad (\text{III.82})$$

**Preuve.** Comme  $z(t)^2 = -2 \int_t^\infty z(r)\partial_r z(r) dr$ , on a

$$\begin{aligned} \int_a^\infty t^{b-1}|z(t)|^2 dt &= -2 \int_a^\infty t^{b-1} \int_t^\infty z(r)\partial_r z(r) dr dt \\ &\leq 2 \int_a^\infty |z(r)| |\partial_r z(r)| \int_a^r t^{b-1} dt dr \\ &= 2b^{-1} \int_a^\infty (r^b - a^b) |z(r)| |\partial_r z(r)| dr \\ &\leq 2b^{-1} \left( \int_a^\infty r^{b-1}|z(r)|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^\infty r^{b+1}|\partial_r z(r)|^2 dr \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

On déduit de la dernière inégalité la formule (III.82). ■

**Lemme III.6.** *Si  $z \in C_0^\infty[0, \infty[$ , et  $z(0) = 0$ ,  $b < 0$  alors*

$$\int_0^\infty r^{b-1}|z(r)|^2 dr \leq \frac{4}{b^2} \int_0^\infty r^{b+1}|\partial_r z(r)|^2 dr. \quad (\text{III.83})$$

On définit maintenant  $\mathcal{F}$  comme

$$-\Delta \mathcal{R} = \mathcal{F} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Alors  $\mathcal{R}$  est solution de

$$\begin{cases} -\Delta \mathcal{R} = \mathcal{F} & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \mathcal{R} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon \end{cases} \quad (\text{III.84})$$

Pour simplifier, on utilise la notation  $\|\cdot\|$  au lieu de  $\|\cdot, L_2(\Omega_\varepsilon)\|$ . On obtient alors l'estimation

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathcal{R}\|^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon} \mathcal{R} \mathcal{F} \leq \|r^{-1} \mathcal{R}\| \|r \mathcal{F}\| \\ &\leq c \|\mathcal{R}, H^1(\Omega_\varepsilon)\| \|r \mathcal{F}\|. \end{aligned}$$

L'inégalité  $\|r^{-1} \mathcal{R}\| \leq \|\mathcal{R}, H^1(\Omega_\varepsilon)\|$  provient de l'inégalité de Hardy (III.82) avec  $a = 0$  et  $b = 1$ . Ainsi, on obtient l'inégalité suivante

$$\|\mathcal{R}, H^1(\Omega_\varepsilon)\| \leq c \|r \mathcal{F}\|. \quad (\text{III.85})$$

Par conséquent on a besoin de donner une estimation de la quantité  $\|r \mathcal{F}\|$ . Sachant que  $\mathcal{F} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$  on a

$$\|r I_1\| \leq c \varepsilon \|f\|, \quad (\text{III.86})$$

$$\begin{aligned}
\|rI_2\|^2 &= \|r[\Delta, \chi_\varepsilon](v^0(x) - v^0(0))\|^2 \\
&= \int_{\Omega_\varepsilon \cap \text{supp} \nabla \chi_\varepsilon} r^2 (2\nabla v^0 \cdot \nabla \chi_\varepsilon)^2 + r^2 |\Delta \chi_\varepsilon|^2 |v^0(x) - v^0(0)|^2 dx \\
&\leq c\varepsilon^2 \int_{\text{supp} \nabla \chi_\varepsilon} |\nabla v^0|^2 |\nabla \chi_\varepsilon|^2 + |\Delta \chi_\varepsilon|^2 |v^0(x) - v^0(0)|^2 dx \\
&\leq c\varepsilon^2 \int_{\text{supp} \nabla \chi_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} |\nabla v^0|^2 \frac{\varepsilon^2}{r^2} + \frac{1}{\varepsilon^4} |v^0(x) - v^0(0)|^2 \frac{\varepsilon^4}{r^4} dx \\
&\leq c\varepsilon^2 \|v_0, H^2(\Omega)\|^2 \\
&\leq c\varepsilon^2 \|f\|^2.
\end{aligned} \tag{III.87}$$

On a utilisé les deux inégalités de Hardy (III.82) et (III.83) pour la majoration (III.87). En effet, pour majorer

$$\int_{\text{supp} \nabla \chi_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} |\nabla v^0|^2 \frac{\varepsilon^2}{r^2},$$

on utilise (III.82) avec  $a = 0$  et  $b = 1$ , et pour majorer

$$\int_{\text{supp} \nabla \chi_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^4} |v^0(x) - v^0(0)|^2 \frac{\varepsilon^4}{r^4} dx,$$

on utilise (III.83) avec  $b = -1$  puis (III.82) avec  $a = 0$  et  $b = 1$ . On utilise cette procédure dans la plupart des inégalités qui suivent.

$$\begin{aligned}
\|rI_3\|^2 &= \|rv^0(0)[\Delta, \chi] \tilde{P}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\|^2 \\
&\leq c|v^0(0)|^2 \int_{\text{supp} \nabla \chi} r^2 |\nabla \tilde{P}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)|^2 + r^2 |\Delta \chi|^2 \tilde{P}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 dx \\
&\leq c|v^0(0)|^2 \int_{\text{supp} \nabla \chi} r^2 \frac{|\varepsilon^2 x|^2}{|x|^8} + r^2 \frac{\varepsilon^4}{|x|^4} dx \\
&\leq c|v^0(0)|^2 \int_{\text{supp} \nabla \chi} r^2 \left( \frac{\varepsilon^4}{r^6} + \frac{\varepsilon^4}{r^4} \right) dx \\
&\leq c\varepsilon^4 \|v^0, H^2(\Omega)\|^2 \\
&\leq c\varepsilon^4 \|f\|^2.
\end{aligned} \tag{III.88}$$

On a utilisé dans l'inégalité (III.88) le plongement  $H^2(\Omega) \subset C^0(\Omega)$ .

$$\begin{aligned}
\|rI_4\|^2 &= \|r\varepsilon 4\pi v^0(0) \text{cap } \omega[\Delta, \chi_\varepsilon] \mathcal{G}(0, x)\|^2 \\
&\leq c|v^0(0)|^2 \varepsilon^4 \left( \int_{\Omega_\varepsilon \cap \text{supp} \nabla \chi_\varepsilon} |\Delta \chi_\varepsilon \mathcal{G}(0, x)|^2 + |\nabla \chi_\varepsilon|^2 |\nabla \mathcal{G}(0, x)|^2 \right) \\
&\leq c|v^0(0)|^2 \varepsilon^4 \left( \int_{\Omega_\varepsilon \cap \text{supp} \nabla \chi_\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^4} |\mathcal{G}(0, x)|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} |\nabla \mathcal{G}(0, x)|^2 \right) \\
&\leq c\varepsilon^2 \|f\|^2
\end{aligned} \tag{III.89}$$

En regroupant les inégalités (III.86), (III.87), (III.88), (III.89), on en déduit une estimation pour  $\|r\mathcal{F}\|$  :

$$\|r\mathcal{F}\| \leq c\varepsilon \|f\|, \tag{III.90}$$

ce qui signifie que

$$\|\mathcal{R}, H^1(\Omega_\varepsilon)\| \leq c\varepsilon\|f\|. \quad (\text{III.91})$$

Afin de compléter les estimations pour  $u(x, \varepsilon)$ , on doit donner une estimation pour le terme  $\mathcal{U} - \mathcal{U}'$ . D'après les équations (III.77) et (III.79) on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{U} - \mathcal{U}' &= \chi_\varepsilon(v_0(x) - v^0(0)) \\ &\quad - v^0(0)\tilde{P}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(1 - \chi) \\ &\quad - \varepsilon 4\pi v^0(0)\text{cap } \omega \mathcal{G}(0, x)\chi_\varepsilon \\ &= J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

On donne maintenant des estimations pour les normes  $L_2$  des gradients de  $J_1$ ,  $J_2$  et  $J_3$ .

$$\begin{aligned} \|\nabla J_1\|^2 &\leq c \int_{\Omega_\varepsilon \cap \text{supp}_{\chi_\varepsilon}} |\nabla \chi_\varepsilon|^2 |v^0(x) - v^0(0)|^2 + |\nabla v^0(x)|^2 \\ &\leq \frac{c}{\varepsilon^2} \int_{\Omega_\varepsilon \cap \text{supp}_{\chi_\varepsilon}} \frac{\varepsilon^4}{r^4} |v^0(x) - v^0(0)|^2 + c \int_{\Omega_\varepsilon \cap \text{supp}_{\chi_\varepsilon}} \frac{\varepsilon^2}{r^2} |\nabla v^0(x)|^2 \\ &\leq c\varepsilon^2\|f\|^2, \end{aligned} \quad (\text{III.92})$$

$$\begin{aligned} \|\nabla J_2\|^2 &\leq c|v^0(0)|^2 \left( \int_{\text{supp}_{\nabla \chi}} \tilde{P}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 + \int_{\Omega \setminus \text{supp}_\chi} |\nabla \tilde{P}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)|^2 \right) \\ &\leq c|v^0(0)|^2 \left( \int_{\text{supp}_{\nabla \chi}} \frac{\varepsilon^4}{r^4} + \int_{\Omega \setminus \text{supp}_\chi} \frac{\varepsilon^4}{r^6} \right) \\ &\leq c\varepsilon^4|v^0(0)|^2 \\ &\leq c\varepsilon^4\|v^0, H^2(\Omega)\|^2 \\ &\leq c\varepsilon^4\|f\|^2, \end{aligned} \quad (\text{III.93})$$

$$\begin{aligned} \|\nabla J_3\|^2 &\leq c\varepsilon^2|v^0(0)|^2 \int_{\text{supp}_{\chi_\varepsilon}} |\nabla \mathcal{G}(0, x)|^2 + |\mathcal{G}(0, x)|^2 |\nabla \chi_\varepsilon|^2 \\ &\leq c\varepsilon^2|v^0(0)|^2 \int_{\text{supp}_{\nabla \chi_\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon^2} |\mathcal{G}(0, x)|^2 \\ &\leq c\varepsilon^2\|f\|^2. \end{aligned} \quad (\text{III.94})$$

Ainsi on a obtenu

$$\|\mathcal{U} - \mathcal{U}', H^1(\Omega_\varepsilon)\| \leq c\varepsilon\|f\|, \quad (\text{III.95})$$

et finalement, en combinant (III.95) et (III.91) on obtient

$$\|u(x, \varepsilon) - \mathcal{U}, H^1(\Omega_\varepsilon)\| \leq c\varepsilon\|f\|, \quad (\text{III.96})$$

### 3.. Perturbation de la position du trou

On considère toujours les mêmes ouverts  $\omega$  et  $\Omega$  dont les frontières sont régulières comme dans le paragraphe 2.. On fait une petite translation du trou dans la direction  $h$ . Soit  $h$  un vecteur donné dans  $\mathbb{R}^3$ , l'ensemble  $\omega_\varepsilon^h$  est défini comme  $\omega_\varepsilon^h = \{x = y + h, y \in$

$\omega_\varepsilon\}$  et  $\Omega_\varepsilon^h = \Omega \setminus \omega_\varepsilon^h$ . Ensuite on définit le problème perturbé correspondant au problème (III.51)-(III.52) :

$$\begin{cases} -\Delta u_h(x, \varepsilon) = f & \text{dans } \Omega_\varepsilon^h \\ u_h(x, \varepsilon) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon^h \end{cases} \quad (\text{III.97})$$

où  $f$  est une fonction de  $L_2(\Omega)$ .

**3.1.. Développement asymptotique du problème perturbé.** On utilise la fonction  $v^0(x)$  définie en (III.53)-(III.54) comme une approximation de  $u_h(x, \varepsilon)$  au voisinage de la frontière du trou  $\omega_\varepsilon^h$ . La fonction  $v^0(x)$  peut être développée au voisinage de  $h$ .

$$v^0(x) = v^0(\varepsilon\xi) = v^0(h) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

On pose  $\xi_h = \xi - \frac{h}{\varepsilon}$  les nouvelles coordonnées correspondant à l'origine  $h$ . Le potentiel  $P_h(\xi_h)$  est défini comme en (III.56)-(III.57) avec  $\omega_h$  au lieu de  $\omega$ . Ensuite, si on pose  $w_h^0(\xi_h) = -P_h(\xi_h)v_h^0(0)$  on a l'analogue de la formule (III.60) dans le domaine perturbé

$$u_h(x, \varepsilon) \simeq v^0(x) + w_h^0\left(\frac{x-h}{\varepsilon}\right) = v^0(x) - P\left(\frac{x-h}{\varepsilon}\right)v^0(h). \quad (\text{III.98})$$

Ensuite,  $v_h^1$  est défini comme dans (III.61)-(III.62) avec  $v^0(h)\frac{\text{cap}\omega}{|x-h|}$  au lieu de  $v^0(0)\frac{\text{cap}\omega}{|x|}$  et comme dans le lemme III.4, on a

$$v_h^1(x) = -4\pi\mathcal{G}(h, x)v^0(h)\text{cap}\omega$$

Finalement, le développement de  $u_h(x, \varepsilon)$  est

$$u_h(x, \varepsilon) = v^0(x) - \varepsilon 4\pi v^0(h)G(h, x) - v^0(h)\tilde{P}_h\left(\frac{x-h}{\varepsilon}\right) + \tilde{u}_h^1(x, \varepsilon), \quad (\text{III.99})$$

avec  $\tilde{u}_h^1(x, \varepsilon)$  défini comme en (III.71)-(III.72) avec les quantités correspondants au problème perturbé.

On veut maintenant donner une estimation de la différence  $u_h(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)$ . Au vu de (III.99) et (III.70), on a donc

$$\begin{aligned} u_h(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon) &= -\left(v^0(h)P\left(\frac{x-h}{\varepsilon}\right) - v^0(0)P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \\ &\quad - 4\pi\varepsilon\text{cap}\omega(v^0(h)\mathcal{G}(h, x) - v^0(0)\mathcal{G}(0, x)) \\ &\quad + \tilde{u}_h^1(x, \varepsilon) - \tilde{u}^1(x, \varepsilon). \end{aligned}$$

En procédant à un développement limité par rapport à  $h$ , on obtient

$$\begin{aligned} u_h(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon) &= -\left(P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + 4\pi\varepsilon\text{cap}\omega\mathcal{G}(0, x)\right)\langle\nabla v^0(0), h\rangle \\ &\quad - \varepsilon\text{cap}\omega v^0(0)\frac{\langle x, h\rangle}{|x|^2} + \frac{v^0(0)}{\varepsilon}\langle\nabla\tilde{P}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), h\rangle \\ &\quad - \varepsilon 4\pi v^0(0)\text{cap}\omega\langle\nabla\mathcal{G}(0, x), h\rangle \\ &\quad + \tilde{u}_h^1(x, \varepsilon) - \tilde{u}^1(x, \varepsilon) + O(\|h\|^2). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a l'estimation

$$\|u_h(x, \varepsilon) - u(x, \varepsilon)\|_\infty \leq ch, \quad (\text{III.100})$$

avec  $c$  une constante qui ne dépend pas de  $\varepsilon$ . Par ailleurs, on ne peut pas obtenir l'expression complète de la dérivée par rapport à  $h$  car le reste  $\tilde{u}_h^1(x, \varepsilon) - \tilde{u}^1(x, \varepsilon)$  contient des termes d'ordre 1 en  $h$ . Il est alors nécessaire d'aller plus loin dans la procédure d'approximation et d'introduire une nouvelle couche limite  $w^1$ .

#### 4.. Extension auto-adjointe et approximation de l'énergie en dimension trois

**4.1.. Extension auto-adjointe.** Les caractéristiques principales de l'extension auto-adjointe pour le problème en dimension trois sont les mêmes qu'en dimension deux, par conséquent nous ne détaillons pas ce qui suit.

On considère l'opérateur  $\mathcal{A}_0$  dans  $L_2(\Omega)$  donné par l'expression différentielle  $-\Delta_x$  et munis des domaines de définition :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \{v \in C_0^\infty(\bar{\Omega} \setminus \{0\}), v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

La fermeture  $\overline{\mathcal{A}_0}$  et l'adjoint  $\mathcal{A}_0^*$  pour l'opérateur  $\mathcal{A}_0$  sont donnés par l'expression différentielle  $-\Delta_x$ , avec les domaines de définition :

$$\mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0}) = \{v \in H^2(\Omega), v(0) = 0, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

et

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_0^*) = \left\{ v : v(x) = \chi_\delta(x) \left( -\frac{a}{4\pi r} + b \right) + \bar{v}(x), \bar{v} \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_0}), a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad (\text{III.101})$$

**Théorème III.7.**

(1) Soit  $\mathbf{A}$  la restriction de l'opérateur  $\mathcal{A}_0^*$  à l'espace vectoriel

$$\mathcal{D}(\mathbf{A}) = \{v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0^*) : b = Sa\} \quad (\text{III.102})$$

où

$$S = S(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi\varepsilon \text{cap}\omega} - \mathcal{G}(0, 0).$$

Alors  $\mathbf{A}$  est un opérateur auto-adjoint.

(2) L'équation suivante

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = f \in L_2(\Omega) \quad (\text{III.103})$$

admet une unique solution  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathbf{A})$ .

**4.2.. Fonctionnelle d'énergie approchée.** Pour simplifier, on considère le problème (III.51)-(III.52) perturbé seulement par rapport à  $\varepsilon$  :

$$-\Delta u(x, \varepsilon) = f(x) \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \quad (\text{III.104})$$

$$u(x, \varepsilon) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon. \quad (\text{III.105})$$

et on écrit  $u$  au lieu de  $u(x, \varepsilon)$ . La fonctionnelle d'énergie correspondante est donnée par

$$\mathcal{E}_\varepsilon(u, f) = \frac{1}{2}(\nabla u, \nabla u)_{\Omega_\varepsilon} - (f, u)_{\Omega_\varepsilon} = -\frac{1}{2}(f, u)_{\Omega_\varepsilon} \quad (\text{III.106})$$

Pour l'opérateur auto-adjoint  $\mathbf{A}$  défini en (III.102), on peut introduire la fonctionnelle d'énergie associée

$$\mathbf{E}(\mathbf{v}, f) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{v})_\Omega - (f, \mathbf{v})_\Omega = -\frac{1}{2}(f, \mathbf{v})_\Omega \quad (\text{III.107})$$

qui, comme on le montrera dans la proposition suivante, est une approximation de la fonctionnelle d'énergie pour le problème (III.104)-(III.105).

**Proposition III.8.** *Si  $u$  et  $\mathbf{v}$  sont solutions des problèmes (III.104)-(III.105) et (III.103) avec la même fonction  $f \in L_2(\Omega)$ , alors la différence des fonctionnelles d'énergie (III.106) et (III.107) admet l'estimation*

$$|\mathcal{E}_\varepsilon(u, f) - \mathbf{E}(\mathbf{v}, f)| \leq c\varepsilon \|f\|^2. \quad (\text{III.108})$$

**Preuve.** Tout d'abord, on a l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_\varepsilon(u, f) - \mathbf{E}(\mathbf{v}, f)| &= \frac{1}{2} |(f, u)_{\Omega_\varepsilon} - (f, \mathbf{v})_\Omega| \\ &\leq \frac{1}{2} \|f, L_2(\Omega)\| \| \mathbf{v} - u(x, \varepsilon), L_2(\Omega_\varepsilon) \| + \frac{1}{2} |(\mathbf{v}, f)_{\omega_\varepsilon}| \end{aligned} \quad (\text{III.109})$$

D'après le théorème III.7, (voir également le théorème III.2) on a  $\mathbf{v} = v^0(x) - \varepsilon 4\pi v^0(0) \text{cap } \omega G(0, x)$ . D'après (III.77) on a

$$\begin{aligned} u(x, \varepsilon) &= \mathcal{U}(x, \varepsilon) + \tilde{u}^1(x, \varepsilon) \\ &= \mathbf{v} - v^0(0) \tilde{P}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \tilde{u}^1(x, \varepsilon). \end{aligned} \quad (\text{III.110})$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \| \mathbf{v} - u(x, \varepsilon), L_2(\Omega_\varepsilon) \| &\leq \| -v^0(0) \tilde{P}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \tilde{u}^1(x, \varepsilon), L_2(\Omega_\varepsilon) \| \\ &\leq \| v^0(0) \tilde{P}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), L_2(\Omega_\varepsilon) \| + \| u - \mathcal{U}, L_2(\Omega_\varepsilon) \|. \end{aligned} \quad (\text{III.111})$$

Comme (III.96) donne une estimation pour  $\| u - \mathcal{U}, L_2(\Omega_\varepsilon) \|$ , on doit seulement donner une estimation de  $\| v^0(0) \tilde{P}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), L_2(\Omega_\varepsilon) \|$ . En fait, en combinant (III.88) et (III.93) on trouve

$$\| v^0(0) \tilde{P}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), L_2(\Omega_\varepsilon) \| \leq c\varepsilon \|f\|. \quad (\text{III.112})$$

En combinant (III.96) et (III.112) on obtient

$$\| \mathbf{v} - u(x, \varepsilon), L_2(\Omega_\varepsilon) \| \leq c\varepsilon \|f\|. \quad (\text{III.113})$$

Pour terminer la preuve on donne une estimation de  $|(\mathbf{v}, f)_{\omega_\varepsilon}|$  :

$$\begin{aligned} |(\mathbf{v}, f)_{\omega_\varepsilon}| &\leq |(v^0, f)_{\omega_\varepsilon} - \varepsilon 4\pi v^0(0) \text{cap } \omega \int_{\omega_\varepsilon} G(0, x) f(x)| \\ &\leq \|f\| \left( \int_{\omega_\varepsilon} v^0(0)^2 + \varepsilon^4 \int_{\omega_\varepsilon} \frac{(v^0(x) - v^0(0))^2}{r^4} \right)^{1/2} \\ &\leq c\varepsilon \|f\|^2. \end{aligned} \quad (\text{III.114})$$

En insérant (III.113) et (III.114) dans (III.109) la preuve est terminée. ■

En particulier le développement du premier ordre de la fonctionnelle d'énergie approchée



$\mathbf{E}(\mathbf{v}, f)$  donne le résultat classique suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{v}, f) &= -\frac{1}{2}(f, \mathbf{v})_{\Omega} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} f(x)v^0(x) dx + 2\pi\varepsilon\text{cap} \omega v^0(0) \int_{\Omega} G(0, x)f(x) dx \\ &= \mathcal{E}_0(u, f) + 2\pi\varepsilon\text{cap} \omega v^0(0)^2. \end{aligned} \quad (\text{III.115})$$

On a utilisé le fait que  $G(0, x)$  défini en (III.63)-(III.64) est la fonction de Green généralisée. Le terme  $2\pi\varepsilon\text{cap} \omega v^0(0)^2$  dans (III.115) est la dérivée topologique de la fonctionnelle d'énergie  $\mathcal{E}_{\varepsilon}(u, f)$  pour le problème original (III.51) – (III.52).

**Remarque III.9.** On obtient un résultat similaire en dimension deux, i.e. la fonctionnelle d'énergie approchée  $\mathbf{E}(\mathbf{v}, f)$  pour l'opérateur  $\mathbf{A}$  défini dans le théorème III.2 admet le développement asymptotique suivant

$$\mathbf{E}(\mathbf{v}, f) = -\frac{1}{2}(\nabla u(x, 0), \nabla u(x, 0))_{\Omega} - \frac{\pi v^0(0)^2}{\log \varepsilon} + O\left(\frac{1}{\log^2 \varepsilon}\right), \quad (\text{III.116})$$

et le terme  $\pi v^0(0)^2$  est en effet la dérivée topologique de la fonctionnelle d'énergie pour le problème (III.1)-(III.3) (avec  $h = 0$ ).

### 5.. Un problème d'optimisation de formes utilisant des extensions auto-adjointes

Dans la suite,  $U$  est un ouvert borné dans  $\mathbb{R}^2$  avec une frontière régulière. L'ensemble  $U$  est appelé le fourre-tout et les perturbations  $\theta$  définies plus loin laissent  $U$  globalement invariant. Soit également  $k \in \mathbb{N}, k \geq 4$ . On note

$$\mathcal{O}_k = \{D \Subset U; D \text{ bounded open set of class } C^k\}.$$

Soit  $\Omega$  un élément de  $\mathcal{O}_k$ .

Soit  $\Theta_k$  l'espace des champs de vecteur de  $C^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  dont les dérivées sont bornées jusqu'à l'ordre  $k$ . Muni de la norme  $C^k$  usuelle  $\|\cdot\|_k$ ,  $\Theta_k$  est un espace de Banach. On note

$$\mathcal{D}_k := \{\theta \in \Theta_k, \text{supp}(\theta) \subset U\}.$$

Pour  $\theta \in \mathcal{D}_k$  et  $t \in \mathbb{R}$  suffisamment petit, l'application  $F_t = I + t\theta$  est un  $C^k$ -difféomorphisme, et la condition  $\text{supp}(\theta) \subset U$  implique que  $I + t\theta$  laisse la frontière de  $U$  invariante.  $I$  est l'application identité dans  $\mathbb{R}^2$  ( $\forall x \in \mathbb{R}^2, I(x) = x$ ). Pour un  $\theta \in \mathcal{D}_k$  donné, soit  $\Omega_t$  défini par :

$$\Omega_t = \{(I + t\theta)(x), x \in \Omega\}$$

Il est clair, puisque  $\Omega \in \mathcal{O}_k$ , que l'on a  $\Omega_t \in \mathcal{O}_k$ .

Dans ce paragraphe on considère la fonctionnelle d'énergie approchée  $\mathbf{E}(\mathbf{v}, f)$ , définie en (III.107). On travaillera dans  $\mathbb{R}^2$  mais le même résultat peut être obtenu dans  $\mathbb{R}^3$ . Dorénavant, soit  $h$  un point de  $\Omega$ . Il existe  $t_0 > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  tels que pour tout  $t < t_0$  et  $\varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $\omega_{\varepsilon}^h \Subset \Omega_t$ . On définit une fonctionnelle de forme  $J : [0, t_0] \times [0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}$  de la façon suivante

$$J(t, \varepsilon) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_t \mathbf{v}_t, \mathbf{v}_t)_{\Omega_t} - (f, \mathbf{v}_t)_{\Omega_t} = -\frac{1}{2}(f, \mathbf{v}_t)_{\Omega_t}$$

avec  $\mathbf{v}_t \in \mathcal{D}(\mathbf{A}_t)$  solution de (III.34) avec  $\Omega$  remplacé par  $\Omega_t$  et  $f \in H^2(U)$ . Pour une lecture plus claire, on décrit brièvement les changements dans les définitions de (III.30), (III.31), (III.32) et (III.33).

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0,t}) &= \{v \in C_0^\infty(\overline{\Omega}_t \setminus \{h\})\} \\ \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_{0,t}}) &= \{v \in H^2(\Omega_t), v(h) = 0, v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_t\} \\ \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0,t}^*) &= \left\{v : v(x) = \chi_\delta(x) \left(-\frac{a}{2\pi} \log r_h + b\right) + \bar{v}(x), \bar{v} \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_{0,t}}), a, b \in \mathbb{R}\right\} \\ \mathcal{D}(\mathbf{A}_t) &= \{v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0,t}^*) : b = Sa\} \end{aligned}$$

où  $S = S(\varepsilon) = (2\pi)^{-1}(\log \varepsilon + L)$ , la quantité  $L$  est définie dans (III.24). La solution  $\mathbf{v}_t \in \mathcal{D}(\mathbf{A}_t)$  de

$$\mathbf{A}_t \mathbf{v}_t = f$$

vérifie (voir (III.37))

$$\mathbf{v}_t(x) = v_t^0(x) + \beta_{h,t} G_t(x, h). \quad (\text{III.117})$$

Les fonctions  $G_t, \mathcal{G}_t$  sont définies respectivement comme dans (III.8)-(III.9), (III.11)-(III.12) mais avec  $\Omega$  remplacé par  $\Omega_t$ , et la constante  $\beta_{h,t}$  est égale à

$$\beta_{h,t} = \{(2\pi)^{-1}(\log \varepsilon + L) + \mathcal{G}_t(h, h)\}^{-1} v_t^0(h)$$

**5.1.. Dérivées topologique et de forme simultanées.** Considérons le problème (III.4) défini dans le domaine perturbé  $\Omega_t$  au lieu de  $\Omega$  :

$$-\Delta v_t^0(x) = f(x) \quad \text{dans } \Omega_t \quad (\text{III.118})$$

$$v_t^0(x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_t \quad (\text{III.119})$$

avec  $f \in H^2(U)$ . Pour  $t$  suffisamment petit,  $F_t$  est un  $C^k$ -difféomorphisme et son inverse vérifie

$$F_t^{-1}(y) = y - tK_1(y, t) \quad (\text{III.120})$$

avec

$$\|K_1(\cdot, t)\|_{k-1} \leq c\|\theta\|_k. \quad (\text{III.121})$$

En effet  $y = F_t(x)$ . Alors

$$\begin{aligned} y - t\theta(y) &= x + t\theta(x) - t\theta(x + t\theta(x)) \\ &= x + t\theta(x) - t\theta(x) - t^2 D\theta(y')\theta(x), \end{aligned}$$

avec  $y' = x + \eta t\theta(x)$  et  $0 < \eta < 1$ . Ainsi on a la représentation (III.120) avec  $K_1(y, t) = \theta(y) - tD\theta(y')\theta(x)$ .

**Lemme III.10.** *Pour  $t \geq 0$  suffisamment petit, la solution de (III.118)-(III.119) admet le développement*

$$v_t^0 = v^0 + tz \quad (\text{III.122})$$

avec  $\|z\|_{H^3(\Omega)} \leq c\|\theta\|_k$ .

**Preuve.** Après avoir effectué le changement de variables  $y = F_t(x)$ , le système (III.118)-(III.119) devient

$$\operatorname{div} - [J(F_t)(D_y F_t)^{-1}(D_y F_t^*)^{-1} \nabla v_t^0] = J(F_t)f(F_t(x)) \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{III.123})$$

$$v_t^0(x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{III.124})$$

On fait quelques simplifications pour les prochains calculs

$$(D_y F_t)^{-1} = I - t D_y K_1 \quad (\text{III.125})$$

$$J(F_t) = \det(I + t D \theta(x)) = 1 + t k_1(x, t) \quad (\text{III.126})$$

avec

$$\|k_1(\cdot, t)\|_{k-1} \leq c \|\theta\|_k.$$

Par conséquent on a

$$(D_y F_t)^{-1} (D_y F_t^*)^{-1} = (I - t D_y K_1) (I - t D_y K_1^*) = I + t D_y K_2, \quad (\text{III.127})$$

$$J(F_t) (D_y F_t)^{-1} (D_y F_t^*)^{-1} = I + t D_y K_3, \quad (\text{III.128})$$

$$J(F_t) f(F_t(x)) = f(x) + t f_1(x, t), \quad (\text{III.129})$$

avec

$$\|K_2(\cdot, t)\|_{k-2}, \|K_3(\cdot, t)\|_{k-2} \leq c \|\theta\|_k \text{ and } \|f_1(\cdot, t)\|_{H^1(U)} \leq c \|\theta\|_k. \quad (\text{III.130})$$

Ainsi, le système transformé prend la forme

$$-\operatorname{div} [(I + t K_3) \nabla v_t^0] = f + t f_1 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{III.131})$$

$$v_t^0(x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{III.132})$$

On suppose maintenant que la solution  $v_t^0$  peut être développée sous la forme d'une série par rapport au paramètre  $t$ .

$$v_t^0 = \sum_{k=0}^{\infty} t^k v_k^0(x, t). \quad (\text{III.133})$$

En remplaçant (III.133) dans (III.131)-(III.132) on obtient formellement le système :

$$-\sum_{k=0}^{\infty} t^k \Delta v_k^0 - \sum_{k=0}^{\infty} t^{k+1} \operatorname{div}(K_3 \nabla v_k^0) = f + t f_1 \quad \text{dans } \Omega \quad (\text{III.134})$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k v_k^0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{III.135})$$

En comparant les termes correspondants aux puissances de  $t$  de même ordre, on obtient une suite de problèmes aux limites. Pour  $k = 0$ ,  $v_0^0 = v^0$  solution de (III.118)-(III.119) avec  $t = 0$ , pour  $k = 1$  on a

$$\begin{aligned} -\Delta v_1^0 &= f_1 - \operatorname{div}(K_3 \nabla v^0) \quad \text{dans } \Omega \\ v_1^0 &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

et pour  $k \geq 2$

$$\begin{aligned} -\Delta v_k^0 &= -\operatorname{div}(K_3 \nabla v_{k-1}^0) \quad \text{dans } \Omega \\ v_k^0 &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

Grâce aux bornes (III.130) sur  $K_3$  et  $f_1$ , on obtient

$$\text{pour } k = 1 : \|v_1^0\|_{H^3(\Omega)} \leq c \|\theta\|_k (1 + \|v^0\|_{H^3(\Omega)}), \quad (\text{III.136})$$

$$\text{pour } k > 1 : \|v_k^0\|_{H^3(\Omega)} \leq c \|\theta\|_k \|v_{k-1}^0\|_{H^3(\Omega)}. \quad (\text{III.137})$$

Il existe donc une constante  $t_1$  telle que pour  $t < t_1$ , la série (III.133) est convergente dans  $H^3(\Omega)$ . Si on note  $v_t^{0,N}$  la série tronquée

$$v_t^{0,N}(x) = \sum_{k=0}^N t^k v_k^0(x, t).$$

on obtient l'estimation suivante pour le reste de la série

$$\|v_t^{0,N} - v_t^0\|_{H^3(\Omega)} \leq ct^{N+1}$$

ce qui termine la preuve. ■

**Remarque III.11.** On peut obtenir le même résultat pour des conditions de Dirichlet non-homogènes au lieu de (III.119). La seule différence est qu'une fonction dans le membre de droite de (III.119) serait développée par rapport à  $t$ , mais la construction du développement asymptotique reste la même. Cette remarque est utile pour la construction de la partie régulière  $\mathcal{G}$  de la fonction de Green (III.11)-(III.12).

**Théorème III.12.** *La fonctionnelle  $J(t, \varepsilon)$  admet le développement suivant*

$$J(t, \varepsilon) = J(0, 0) - \frac{1}{\log \varepsilon} \mathcal{T}J(\Omega, h) + tJ'(0, 0) + o(t) + O\left(\frac{t}{\log \varepsilon}\right) \quad (\text{III.138})$$

où  $\mathcal{T}J(\Omega, h)$  est la dérivée topologique de  $J$  dans  $\Omega$  en  $h$  tandis que  $J'(0, 0)$  est la dérivée par rapport au domaine de  $J$  en  $\Omega$  pour  $\varepsilon = 0$  et  $h = 0$ .

**Preuve.** Tout d'abord on peut écrire

$$J(t, \varepsilon) - J(0, 0) = J(t, \varepsilon) - J(t, 0) + J(t, 0) - J(0, 0). \quad (\text{III.139})$$

Un résultat classique de sensibilité par rapport au domaine nous indique que

$$J(t, 0) - J(0, 0) = tJ'(0, 0) + o(t).$$

Il nous reste à analyser la première différence dans le membre de droite de (III.139).

$$J(t, \varepsilon) - J(t, 0) = -\frac{1}{2}(f, \mathbf{v}_t - v_t^0)_{\Omega_t}. \quad (\text{III.140})$$

En utilisant (III.117) on obtient :

$$\mathbf{v}_t(x) - v_t^0(x) = \beta_{h,t} G_t(x, h) \quad (\text{III.141})$$

$$= -\frac{(2\pi)^{-1} \log \|x - h\| + \mathcal{G}_t(x, h)}{(2\pi)^{-1}(\log \varepsilon + L) + \mathcal{G}_t(h, h)} v_t^0(h). \quad (\text{III.142})$$

D'après le lemme III.10 et la remarque III.11, on obtient le développement

$$\mathbf{v}_t(x) - v_t^0(x) = -\frac{(2\pi)^{-1} \log \|x - h\| + \mathcal{G}(x, h)}{(2\pi)^{-1}(\log \varepsilon + L) + \mathcal{G}(h, h)} v^0(h) + O\left(\frac{t}{\log \varepsilon}\right)$$

En exploitant la remarque III.9, (III.140) devient alors

$$J(t, \varepsilon) - J(t, 0) = -\frac{\pi v^0(h)^2}{\log \varepsilon} + O\left(\frac{t}{\log \varepsilon}\right)$$

et on obtient (III.138) avec  $\mathcal{T}J(\Omega, h) = \pi v^0(h)^2$ .



## CHAPITRE IV

### Une méthode "levelset" en optimisation de formes



## 1.. Introduction

Les perturbations singulières de domaine sont étudiées dans [33], [32], [45], [47], [48], [49], [50], [51], [52], [61], [62], [63]. La construction de l'approximation asymptotique pour l'opérateur de Steklov-Poincaré est donnée dans [65].

Soit  $U$  et  $V$  deux ouverts fixes de  $\mathbb{R}^2$  tels que  $V \subset\subset U$ . On note  $\#\bar{\omega}$  le nombre de composantes connexes de  $\bar{\omega}$  et on considère l'ensemble des domaines admissibles

$$\mathcal{O}_k = \{\Omega = U \setminus \bar{\omega}; \omega \text{ ouvert}, \omega \subset V, \#\bar{\omega} \leq k\}. \quad (\text{IV.1})$$

Dans le cas du problème linéaire, on note alors  $\Gamma_N = \partial\omega$ ,  $\Gamma_D = \partial U$  et on a donc  $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$ . Les frontières  $\Gamma_N$  et  $\Gamma_D$  sont destinées à avoir des conditions de Neumann et de Dirichlet, respectivement. L'ouvert  $\omega$  n'est pas nécessairement connexe comme le montre la figure 1. Dans le cas du problème non-linéaire de Signiorini, la frontière  $\partial U$  est séparée en deux composantes connexes,  $\partial U = \Gamma_S \cup \Gamma_D$ ,  $\Gamma_S$  étant destiné à recevoir des conditions de Signiorini.

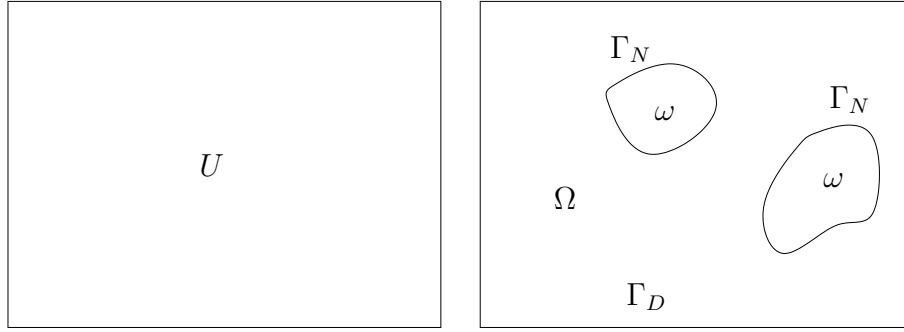


FIG. 1. Le domaine  $U$  et le domaine  $\Omega$

On considère successivement les problèmes suivants, avec  $f \in C^\infty(U)$

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

Sans hypothèse supplémentaire sur la régularité de  $\Omega$ , on a  $u \in H^1(\Omega)$ . On considère également le problème non-linéaire de Signiorini

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \partial_n u = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ u \geq 0 & \text{sur } \Gamma_S, \\ \partial_n u \geq 0 & \text{sur } \Gamma_S, \\ u \partial_n u = 0 & \text{sur } \Gamma_S. \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$



La solution  $u(\Omega)$  du problème (IV.3) vérifie l'inéquation variationnelle

$$u = u(\Omega) \in K : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - u) \geq \int_{\Omega} (f - u)(v - u) \quad \forall v \in K, \quad (\text{IV.4})$$

où

$$K(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ p.p. on } \Gamma_D, v \geq 0 \text{ p.p. on } \Gamma_S\}. \quad (\text{IV.5})$$

On considère maintenant les fonctionnelles suivantes.

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 - \int_{\Omega} f u \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} f u, \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

$$J(\Omega) = E(\Omega) + \lambda A(\Omega) - \mu P_c(\Omega)^2, \quad (\text{IV.7})$$

avec  $A(\Omega)$  et  $P_c(\Omega)$  définis par

$$A(\Omega) = |\Omega|, \quad (\text{IV.8})$$

$$P_c(\Omega) = \max(0, \mathcal{H}^1(\partial\Omega) - c), \quad (\text{IV.9})$$

où  $|\Omega|$  est la mesure de Lebesgue de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{H}^1(\partial\Omega)$  est la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle de  $\partial\Omega$ . Les constantes  $c, \lambda$  et  $\mu$  sont arbitraires et strictement positives. Nous allons prouver dans le paragraphe suivant que le problème

$$\max\{J(\Omega) : \Omega \in \mathcal{O}_k\} \quad (\text{IV.10})$$

admet au moins une solution.

La frontière extérieure de  $\Omega$  est maintenue fixe et égale à  $\partial U$ . Donc les domaines inconnus  $\Omega$  qui réalisent (IV.10) sont en fait déterminés par leur frontière intérieure  $\Gamma_N$ . Dans cet article nous étudions la sensibilité par rapport au domaine et on modélise le problème à l'aide d'une représentation "levelset", l'objectif étant d'accroître la fonctionnelle de forme. On utilisera la dérivée topologique (si nécessaire) pour créer un nouveau trou de frontière incluse dans  $\Gamma_N$ .

## 2.. Le problème linéaire

**2.1.. Existence d'un domaine optimal.** On peut montrer l'existence d'un domaine  $\Omega$  solution du problème (IV.10). Pour cela on utilise un résultat de Bucur et Varchon [9] et [10] qui est l'analogue du résultat de Sverak [68] pour des conditions de Neumann sur la frontière des trous. En apportant quelques modifications à la preuve de ce résultat, on peut l'adapter à notre problème. Ceci est possible sans difficulté car la frontière  $\Gamma_D$  dans (IV.2) est fixe. On obtient donc le théorème suivant :

**Théorème IV.1.** *Soit  $\Omega_i = U \setminus \bar{\omega}_i$  une suite d'ouverts telle que le nombre de composantes connexes de  $\bar{\omega}_i$  soit uniformément borné. Si  $\bar{\omega}_i$  converge au sens de la métrique de Hausdorff vers  $\bar{\omega}$ , alors la solution  $u_i$  du problème de Neumann*

$$\begin{cases} -\Delta u_i + u_i = f & \text{dans } \Omega_i, \\ u_i = 0 & \text{sur } \partial U, \\ \partial u_i / \partial n = 0 & \text{sur } \partial \omega_i. \end{cases} \quad (\text{IV.11})$$

*converge vers la solution  $u$  du problème (IV.11) sur  $\Omega$  si et seulement si  $|\Omega_i| \rightarrow |\Omega|$ . (Toutes les fonctions sont implicitement étendues par zéro en posant  $u_i = 0$  dans  $\omega_i$  et  $u = 0$  dans  $\omega$ ).*

On est désormais en mesure de prouver l'existence d'un domaine optimal.

**Théorème IV.2.** *Le problème (IV.10) admet au moins une solution  $\Omega \in \mathcal{O}_k$ .*

**Preuve.** Soit  $\Omega_i$  une suite maximisante pour le problème (IV.10). Il existe une sous-suite toujours notée  $\Omega_i$  telle que  $\Omega_i \rightarrow \Omega$  au sens de Hausdorff et on note  $\Omega_i \xrightarrow{H} \Omega$ . Pour la définition de la convergence au sens de Hausdorff, on pourra consulter [31].

On montre dans [31] que le nombre de composantes connexes de  $\Omega^c$  est borné et on a également à la limite

$$\mathcal{H}^1(\partial\Omega) \leq \liminf_i \mathcal{H}^1(\partial\Omega_i). \quad (\text{IV.12})$$

donc  $\mathcal{H}^1(\partial\Omega) < \infty$  car on maximise  $J(\Omega)$  et donc  $P_c(\Omega)$  est borné. En utilisant la notion de périmètre de densité introduite dans [8], on peut alors montrer que la convergence de Hausdorff des  $\Omega_i$  vers  $\Omega$  implique la convergence au sens des fonctions caractéristiques :

$$\Omega_i \xrightarrow{H} \Omega \implies \chi_{\Omega_i} \xrightarrow{L^1(U)} \chi_{\Omega}. \quad (\text{IV.13})$$

Par conséquent, on a

$$|\Omega_i| \rightarrow |\Omega|. \quad (\text{IV.14})$$

Pour conclure, il nous reste à montrer la convergence de  $E(\Omega_i) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_i} f u_i$ . Or

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_i} f u_i - \int_{\Omega} f u \right| &= \left| \int_U f u_i \chi_{\Omega_i} - \int_U f u \chi_{\Omega} \right| \\ &= \left| \int_U f u_i (\chi_{\Omega_i} - \chi_{\Omega}) + \int_U f \chi_{\Omega} (u_i - u) \right| \\ &\leq \|u_i\|_2 \|f(\chi_{\Omega_i} - \chi_{\Omega})\|_2 + \|f \chi_{\Omega}\|_2 \|u_i - u\|_2, \end{aligned}$$

où  $\|\cdot\|_2$  est la norme de  $L^2(U)$  et on a

$$\|u_i\|_2 \rightarrow \|u\|_2 \quad \text{et} \quad \|u_i - u\|_2 \rightarrow 0 \quad (\text{IV.15})$$

d'après le théorème (IV.1). Enfin

$$\|f(\chi_{\Omega_i} - \chi_{\Omega})\|_2 \rightarrow 0 \quad (\text{IV.16})$$

grâce à la convergence au sens des fonctions caractéristiques de  $\chi_{\Omega_i}$  vers  $\chi_{\Omega}$ . Ainsi

$$E(\Omega_i) \rightarrow E(\Omega). \quad (\text{IV.17})$$

Finalement les convergences (IV.17), (IV.14) et (IV.12) montrent que

$$J(\Omega) \geq \limsup_i J(\Omega_i). \quad (\text{IV.18})$$

Donc  $\Omega$  est bien solution du problème (IV.10). ■

**Remarque IV.3.** Pour pouvoir utiliser la dérivation par rapport au domaine, on doit travailler avec des domaines à frontière régulière. Or les solutions de (IV.10) ne sont pas nécessairement des domaines réguliers. On suppose donc pour la suite l'existence d'un domaine optimal pour (IV.10) qui soit suffisamment régulier.

**2.2.. La dérivée par rapport au domaine.** Soit  $\Omega$  un domaine suffisamment régulier. La formulation variationnelle du problème (IV.2) est donnée par

$$u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) : \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla w \rangle dx + \int_{\Omega} uw dx = \int_{\Omega} fw dx \quad \forall w \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega), \quad (\text{IV.19})$$

où  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$ .

Soit  $\xi$  un champ de vecteurs de classe  $C^k$  et à support compact dans  $U$ . Pour simplifier, sa norme dans  $\Theta_k$  est notée  $|\xi| = \|\xi\|_{C^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)}$ . On considère les transformations  $F_{\xi} = I + \xi$  et on note  $\Omega_{\xi} = F_{\xi}(\Omega)$ . Pour  $|\xi|$  suffisamment petit,  $F_{\xi}$  est un difféomorphisme. Par conséquent, il existe une unique solution  $u^{\xi} \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_{\xi})$  à l'équation variationnelle

$$\int_{\Omega_{\xi}} \langle \nabla u^{\xi}, \nabla v \rangle dx + \int_{\Omega_{\xi}} u^{\xi} v dx = \int_{\Omega_{\xi}} f v dx \quad \forall v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_{\xi}). \quad (\text{IV.20})$$

Afin de transporter (IV.20) dans le domaine fixe  $\Omega$ , on note  $u_{\xi}$  la fonction transportée définie par la composition  $u_{\xi} = u^{\xi} \circ F_{\xi} \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$ . En utilisant ce changement de variable dans (IV.20), on obtient l'équation variationnelle satisfaite par  $u_{\xi}$

$$\int_{\Omega} \langle (DF_{\xi}^T)^{-1} \nabla u_{\xi}, (DF_{\xi}^T)^{-1} \nabla w \rangle q_{\xi} dx + \int_{\Omega} u_{\xi} w q_{\xi} dx = \int_{\Omega} f_{\xi} w q_{\xi} dx \quad \forall w \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega), \quad (\text{IV.21})$$

où  $f_{\xi} = f \circ F_{\xi}$ ,  $q_{\xi}$  est le Jacobien de la transformation  $F_{\xi}$ ,  $DF_{\xi}$  étant la matrice Jacobienne, on a plus précisément

$$DF_{\xi} = I + D\xi, \quad (\text{IV.22})$$

$$q_{\xi} = \det DF_{\xi} = 1 + \operatorname{div} \xi + \det D\xi. \quad (\text{IV.23})$$

On montre dans [22] que  $u_{\xi}$  admet le développement de Taylor suivant

$$u_{\xi} = u + u^1(\xi) + \tilde{u}(\xi), \quad (\text{IV.24})$$

avec les estimations

$$\|u_{\xi} - u\|_{H_{\Gamma_D}^1(\Omega)} \leq c|\xi|, \quad (\text{IV.25})$$

$$\|\tilde{u}(\xi)\|_{H_{\Gamma_D}^1(\Omega)} = \|u_{\xi} - u - u^1(\xi)\|_{H_{\Gamma_D}^1(\Omega)} \leq c|\xi|^2. \quad (\text{IV.26})$$

On va maintenant calculer la dérivée par rapport au domaine de  $E$  définie par (IV.6) :

$$E(\Omega_{\xi}) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_{\xi}} |\nabla u^{\xi}|^2 dy - \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\xi}} (u^{\xi})^2 dy \quad (\text{IV.27})$$

En insérant les développements (IV.22) et (IV.23) dans les expressions (IV.27) et (IV.21), on obtient la dérivée par rapport au domaine du premier ordre

$$\begin{aligned} dE(\Omega; \xi) &= - \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla u^1(\xi) \rangle dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(\xi) \nabla u, \nabla u \rangle dy \\ &\quad - \int_{\Omega} u u^1(\xi) dy - \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 \operatorname{div}(\xi) dy, \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

ainsi que l'équation variationnelle pour la dérivée matérielle  $u^1(\xi)$ ,  $\forall w \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u^1(\xi), \nabla w \rangle dy = \int_{\Omega} \langle A(\xi)^{-1} \nabla u, \nabla w \rangle dy + \int_{\Omega} g(\xi) w dy - \int_{\Omega} u w \operatorname{div}(\xi) + u^1 w dy. \quad (\text{IV.29})$$

La matrice  $A(\xi)$  et la fonction scalaire  $g(\xi)$  sont donnés par

$$A(\xi) = D\xi + D\xi^T - (\operatorname{div}\xi)I ,$$

$$g(\xi) = \operatorname{div}(f\xi) .$$

En appliquant l'identité variationnelle (IV.29) avec  $w = u$ , on obtient

$$\int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla u^1(\xi) \rangle dy = \int_{\Omega} \langle A(\xi) \nabla u, \nabla u \rangle dy + \int_{\Omega} g(\xi) u dy - \int_{\Omega} u^2 \operatorname{div}(\xi) + u^1(\xi) u dy. \quad (\text{IV.30})$$

Etant donné l'équation (IV.30), on peut éliminer la dérivée matérielle  $u^1(\xi)$  de (IV.28) et on obtient

$$dE(\Omega; \xi) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(\xi) \nabla u, \nabla u \rangle dy - \int_{\Omega} g(\xi) u dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 \operatorname{div}(\xi) dy . \quad (\text{IV.31})$$

A partir de cette expression, on va retrouver le résultat classique pour la dérivée par rapport au domaine. On commence par écrire, à partir de l'expression de  $A(\xi)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle A(\xi) \nabla u, \nabla u \rangle dy &= \int_{\Omega} \langle D\xi \nabla u, \nabla u \rangle dy - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \operatorname{div}(\xi) dy \\ &= \int_{\Omega} \langle \nabla(\langle \xi, \nabla u \rangle), \nabla u \rangle dy - \int_{\Omega} \langle D^2 u \xi, \nabla u \rangle dy - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \operatorname{div}(\xi) dy \\ &= - \int_{\Omega} \Delta u \langle \xi, \nabla u \rangle dy + \int_{\partial\Omega} \langle \xi, \nabla u \rangle \langle \nabla u, n \rangle dy - \int_{\Omega} \langle D^2 u \xi, \nabla u \rangle dy. \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \operatorname{div}(\xi) dy \end{aligned}$$

Sachant que  $-\Delta u = f - u$  l'équation (IV.31) devient alors

$$\begin{aligned} dE(\Omega; \xi) &= - \int_{\Omega} f \langle \xi, \nabla u \rangle dy - \int_{\Omega} \operatorname{div}(f\xi) u dy \\ &\quad + \int_{\Omega} \langle D^2 u \xi, \nabla u \rangle dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \operatorname{div}(\xi) dy \\ &\quad + \int_{\Omega} u \langle \xi, \nabla u \rangle dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 \operatorname{div}(\xi) dy \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \langle \xi, \nabla u \rangle \langle \nabla u, n \rangle dy. \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} dE(\Omega; \xi) &= \int_{\Omega} \operatorname{div}\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 \xi + \frac{1}{2}u^2 \xi - f\xi u\right) dy - \int_{\partial\Omega} \langle \xi, \nabla u \rangle \langle \nabla u, n \rangle dy. \\ &= \int_{\Gamma_N} \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}u^2 - fu\right) \langle \xi, n \rangle dy, \end{aligned} \quad (\text{IV.32})$$

car  $\langle \nabla u, n \rangle = 0$  sur  $\Gamma_N$  et  $\xi$  est à support compact dans  $U$ . On retrouve l'expression classique de la dérivée de forme pour des conditions de Neumann sur la frontière. Les

dérivées par rapport au domaine de  $A(\Omega)$  et  $P_c(\Omega)$  sont données par

$$dA(\Omega; \xi) = \int_{\Gamma_N} \langle \xi, n \rangle dy, \quad (\text{IV.33})$$

$$dP_c(\Omega; \xi) = \mathbb{1}_{\{\mathcal{H}^1(\partial\Omega)=c\}} \max \left( 0, \int_{\Gamma_N} \mathcal{H}(\xi, n) dy \right) \quad (\text{IV.34})$$

$$+ \mathbb{1}_{\{P_c(\Omega)>0\}} \int_{\Gamma_N} \mathcal{H}(\xi, n) dy, \quad (\text{IV.35})$$

$$dP_c(\Omega; \xi)^2 = 2P_c(\Omega) \int_{\Gamma_N} \mathcal{H}(\xi, n) dy, \quad (\text{IV.36})$$

avec  $\mathcal{H}$  la courbure de  $\Gamma_N$ . On obtient donc la dérivée par rapport au domaine de  $J(\Omega)$

$$dJ(\Omega; \xi) = \int_{\Gamma_N} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} u^2 - fu + \lambda - 2P_c(\Omega) \mu \mathcal{H} \right) \langle \xi, n \rangle dy \quad (\text{IV.37})$$

**2.3.. La dérivée topologique avec conditions de Dirichlet sur le trou.** Pour calculer la dérivée topologique, on utilise une méthode appelée troncation de domaine introduite en [43]. On introduit l'opérateur de Steklov-Poincaré qui dépend du rayon  $\rho$  du trou, puis on réalise un développement asymptotique de cet opérateur. On travaille donc maintenant sur un domaine fixe  $\Omega_R$ .

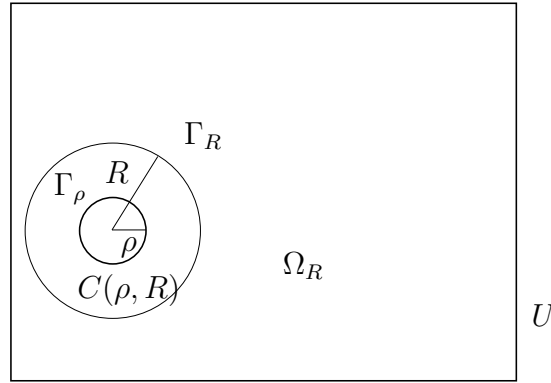


FIG. 2. Le domaine tronqué  $\Omega_R$

Soit  $\Omega_\rho$  le domaine défini par

$$\Omega_\rho = U \setminus B_\rho, \quad (\text{IV.38})$$

où  $B_\rho$  est la boule de rayon  $\rho$ , et on note  $\Gamma_\rho = \partial B_\rho$ . On définit alors le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_\rho + u_\rho = f & \text{dans } \Omega_\rho, \\ u_\rho = 0 & \text{sur } \Gamma_\rho. \end{cases} \quad (\text{IV.39})$$

On note maintenant  $\Omega_R$  le domaine

$$\Omega_R = U \setminus B_R, \quad (\text{IV.40})$$

où  $B_R$  est la boule de rayon  $R$  avec  $R > \rho$ , on peut définir le problème tronqué suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_\rho^R + u_\rho^R = f & \text{dans } \Omega_R, \\ u_\rho^R = 0 & \text{sur } \partial U, \\ -\partial_n y_\rho + \partial_n u_\rho^R = A_\rho(u_\rho^R) & \text{sur } \Gamma_R, \end{cases} \quad (\text{IV.41})$$

avec  $A_\rho$  défini en (IV.49) et  $y_\rho$  solution de (IV.76). La formulation variationnelle correspondant à (IV.41) est donnée par

$$u \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_R) : a_\rho(u_\rho^R, v) = l_\rho(v) \quad \forall v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_R) \quad (\text{IV.42})$$

où  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega_R) = \{v \in H^1(\Omega_R) \mid v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$  et la forme bilinéaire  $a_\rho$  et linéaire  $l_\rho$  sont données par

$$a_\rho(u, v) = \int_{\Omega_R} \langle \nabla u, \nabla v \rangle + uv \, dS + \int_{\Gamma_R} A_\rho(u)v \quad (\text{IV.43})$$

$$l_\rho(v) = \int_{\Omega_R} f v - \int_{\Gamma_R} v \partial_n y_\rho, \quad (\text{IV.44})$$

$$(\text{IV.45})$$

On a alors le théorème suivant, dont la preuve est standard.

**Théorème IV.4.** *La solution  $u_\rho^R$  du problème (IV.41) vérifie*

$$u_\rho^R = u_{\rho|\Omega_R}, \quad (\text{IV.46})$$

et on a également

$$u_{\rho|C(R,\rho)} = w_\rho(u_\rho^R) + y_\rho, \quad (\text{IV.47})$$

avec  $w_\rho$  et  $y_\rho$  solutions de (IV.48) et (IV.76) respectivement.

On veut calculer le développement asymptotique de l'énergie  $E_\rho(f)$  pour le problème (IV.39) définie par

$$\begin{aligned} E_\rho(f) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} |\nabla u_\rho|^2 + u_\rho^2 \, dS - \int_{\Omega_\rho} f u_\rho \, dS \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} |\nabla u_\rho|^2 + u_\rho^2 \, dS. \end{aligned}$$

Pour cela, on étudie indépendamment les problèmes (IV.48) et (IV.76).

2.3.1. *Le problème homogène.* On considère le problème de Poisson homogène dans la couronne  $C(R, \rho)$  de rayon intérieur  $\rho$  et de rayon extérieur  $R$  avec condition de Dirichlet sur la frontière extérieure  $\Gamma_R$  et condition de Dirichlet homogène sur la frontière intérieure  $\Gamma_\rho$  :

$$\begin{cases} -\Delta w_\rho + w_\rho = 0 & \text{dans } C(R, \rho), \\ w_\rho = v & \text{sur } \Gamma_R, \\ w_\rho = 0 & \text{sur } \Gamma_\rho, \end{cases} \quad (\text{IV.48})$$

avec  $v$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_R)$ . On définit l'opérateur de Steklov-Poincaré  $A_\rho$  de la manière suivante

$$\begin{aligned} A_\rho : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_R) &\rightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_R) \\ v &\mapsto \partial_n w_\rho \end{aligned} \quad (\text{IV.49})$$

Du fait que  $v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_R)$  on déduit l'existence du développement en séries de Fourier, avec  $(r, \phi)$  les coordonnées polaires à l'origine

$$v(\phi) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin(k\phi) + b_k \cos(k\phi))$$

dont les coefficients vérifient :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{1+k^2}(a_k^2 + b_k^2) \leq M,$$

où  $M$  est une constante dépendant seulement de  $R$ . Ceci implique deux propriétés importantes :

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq M, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k^2 + b_k^2) \leq M. \quad (\text{IV.50})$$

On définit les énergies

$$E^{(1)}(v) = \int_{B(R)} |\nabla w|^2 + w^2 dS, \quad E_{\rho}^{(1)}(v) = \int_{C(R,\rho)} |\nabla w_{\rho}|^2 + w_{\rho}^2 dS, \quad (\text{IV.51})$$

qui dépendent de  $v$  à travers les conditions aux bords sur  $\Gamma_R$ . Nous voulons montrer que  $E_{\rho}$  a un développement pour lequel le reste est uniformément borné. Plus précisément, on peut l'exprimer comme suit :

**Théorème IV.5.** *L'énergie  $E_{\rho}^{(1)}(v)$  a une expansion*

$$E_{\rho}^{(1)}(v) = E^{(1)}(v) + \frac{\pi a_0^2}{2I_0(R)^2 |\ln \rho|} + \mathfrak{R}(v),$$

avec

$$|\mathfrak{R}(v)| \leq \frac{M}{|\ln \rho|^2},$$

uniformément sur tout sous-ensemble borné de  $H^1(\Omega_R)$ .

**Preuve.** Comme tout compact peut être recouvert par un nombre fini de boules, il est suffisant de prouver le lemme pour une boule fixée dans  $H^1(\Omega_R)$ . On peut donc supposer que (IV.50) à lieu. La preuve consiste à obtenir des formules explicites pour  $w$  et  $w_{\rho}$  sous forme de séries. On peut alors calculer les énergies explicitement et obtenir la majoration pour le reste  $\mathfrak{R}(v)$ .

On cherche la solution  $w_{\rho}$  de (IV.48) dans  $C(R, \rho)$  sous la forme

$$w_{\rho}(r, \phi) = \frac{1}{2}a_0 c_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k,\rho}(r) (a_k \sin(k\phi) + b_k \cos(k\phi)). \quad (\text{IV.52})$$

Le laplacien en coordonnées polaires vaut :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

En insérant l'équation (IV.52) dans  $-\Delta w_\rho + w_\rho = 0$  on obtient

$$c''_{k,\rho}(r) + \frac{1}{r}c'_{k,\rho}(r) - \left(\frac{k^2}{r^2} + 1\right)c_{k,\rho}(r) = 0, \quad k \geq 1 \quad (\text{IV.53})$$

$$c''_{0,\rho}(r) + \frac{1}{r}c'_{0,\rho}(r) - c_{0,\rho}(r) = 0 \quad (\text{IV.54})$$

En multipliant (IV.53) et (IV.54) par  $r^2$  on obtient

$$r^2 c''_{k,\rho}(r) + r c'_{k,\rho}(r) - (k^2 + r^2)c_{k,\rho}(r) = 0, \quad k \geq 1 \quad (\text{IV.55})$$

$$r^2 c''_{0,\rho}(r) + r c'_{0,\rho}(r) - r^2 c_{0,\rho}(r) = 0 \quad (\text{IV.56})$$

D'après [69], les solutions des équations (IV.55) et (IV.56) sont données par

$$c_k(r) = A_k I_k(r) + B_k K_k(r) \quad k \geq 0, \quad (\text{IV.57})$$

où les fonctions  $I_k(r)$  et  $K_k(r)$  sont les fonctions de Bessel définies par

$$I_k(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{k+2m}}{m!(k+m)!}, \quad k \geq 0, \quad (\text{IV.58})$$

et pour  $k \geq 1$

$$K_k(r) = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^m (k-m-1)!}{m! \left(\frac{r}{2}\right)^{k-2m}} \quad (\text{IV.59})$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \left(\frac{r}{2}\right)^{k+2m}}{m!(k+m)!} \left[ \ln\left(\frac{r}{2}\right) - \frac{1}{2}\psi(m+1) - \frac{1}{2}\psi(k+m+1) \right] \quad (\text{IV.60})$$

où  $\psi$  est la dérivée logarithmique de la fonction  $\Gamma$ , à savoir

$$\psi(x) = \frac{\partial}{\partial h} \ln \Gamma(x+h). \quad (\text{IV.61})$$

Enfin pour  $k = 0$

$$K_0(r) = -\ln\left(\frac{r}{2}\right) I_0(r) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2m}}{m!^2} \psi(m+1). \quad (\text{IV.62})$$

Les conditions aux limites sur  $\Gamma_R$  et  $\Gamma_\rho$  nous permettent d'obtenir les systèmes suivants pour  $k \geq 0$

$$\begin{aligned} A_k I_k(R) + B_k K_k(R) &= 1 \\ A_k I_k(\rho) + B_k K_k(\rho) &= 0 \end{aligned}$$

La résolution de ces systèmes donne

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{I_k(R) \left(1 - \frac{I_k(\rho) K_k(R)}{K_k(\rho) I_k(R)}\right)} \\ B_k &= -A_k \frac{I_k(\rho)}{K_k(\rho)} \end{aligned}$$



On en déduit l'expression de  $c_{k,\rho}(r)$  pour  $k \geq 0$  sous une forme appropriée au développement asymptotique quand  $\rho \rightarrow 0$  :

$$c_{k,\rho}(r) = \frac{I_k(r)}{I_k(R)} - \frac{\frac{I_k(\rho)}{K_k(\rho)}}{\frac{I_k(R)}{K_k(R)} - \frac{I_k(\rho)}{K_k(\rho)}} \left[ \frac{K_k(r)}{K_k(R)} - \frac{I_k(r)}{I_k(R)} \right] \quad (\text{IV.63})$$

**Remarque IV.6.** Il existe une formule analogue à (IV.63) dans [61] pour le cas du Laplacien. On peut retrouver ce résultat en remplaçant  $I_k(r)$  et  $K_k(r)$  par  $r^k$  et  $r^{-k}$  respectivement, pour  $k \geq 1$  dans (IV.63).

On peut maintenant effectuer le développement de  $w_\rho$  en fonction de  $\rho$ . Le développement des coefficients  $c_{k,\rho}(r)$ ,  $k \geq 1$  fournit des termes supérieurs d'ordre  $O(\rho^2)$  au minimum, tandis que le développement de  $c_{0,\rho}(r)$  fournit un terme en  $(\ln \rho)^{-1}$ . En effet, pour  $k \geq 1$ , les formules (IV.58) et (IV.59) nous indiquent que

$$\begin{aligned} I_k(\rho) &= O(\rho^k), \\ K_k(\rho) &= O(\rho^{-k}), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{I_k(\rho)}{K_k(\rho)} = O(\rho^{2k}), \quad k \geq 1, \quad (\text{IV.64})$$

tandis que pour  $k = 0$ , d'après les formules (IV.58) et (IV.62)

$$\begin{aligned} I_0(\rho) &= 1 + O(\rho^2), \\ K_0(\rho) &= -\ln \rho + O(1). \end{aligned}$$

Donc on a

$$\frac{I_0(\rho)}{K_0(\rho)} = -(\ln \rho)^{-1} + O((\ln \rho)^{-2}). \quad (\text{IV.65})$$

Le développement de  $w_\rho$  nous donne :

$$w_\rho = w + z_\rho, \quad (\text{IV.66})$$

avec  $w$  solution du problème (IV.48) pour  $\rho = 0$  donné par

$$w(r, \phi) = \frac{1}{2} a_0 \frac{I_0(r)}{I_0(R)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_k(r)}{I_k(R)} (a_k \sin(k\phi) + b_k \cos(k\phi)), \quad (\text{IV.67})$$

et

$$\begin{aligned} z_\rho(r, \phi) &= -\frac{a_0}{2} \frac{\frac{I_0(\rho)}{K_0(\rho)}}{\frac{I_0(R)}{K_0(R)} - \frac{I_0(\rho)}{K_0(\rho)}} \left[ \frac{K_0(r)}{K_0(R)} - \frac{I_0(r)}{I_0(R)} \right] \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{I_k(\rho)}{K_k(\rho)}}{\frac{I_k(R)}{K_k(R)} - \frac{I_k(\rho)}{K_k(\rho)}} \left[ \frac{K_k(r)}{K_k(R)} - \frac{I_k(r)}{I_k(R)} \right] (a_k \sin(k\phi) + b_k \cos(k\phi)). \end{aligned} \quad (\text{IV.68})$$

Maintenant, à l'aide de la formule suivante

$$|\nabla f|^2 = f_{/r}^2 + \frac{1}{r^2} f_{/\phi}^2,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
E_\rho^{(1)}(v) &= \int_{C(R,\rho)} |\nabla w + \nabla z_\rho|^2 + (w + z_\rho)^2 dS \\
&= E^{(1)}(v) + \int_{C(R,\rho)} [z_{\rho/r}^2 + \frac{1}{r^2} z_{\rho/\phi}^2 + z_\rho^2] dS \\
&\quad + 2 \int_{C(R,\rho)} [w_{/r} z_{\rho/r} + \frac{1}{r^2} w_{/\phi} z_{\rho/\phi} + w z_\rho] dS \\
&\quad - \int_{B(\rho)} |\nabla w|^2 + w^2 dS \\
&:= E^{(1)}(v) + I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

On a clairement  $I_3 = O(\rho^2)$ . On obtient également  $I_2 = O(\rho)$ , en effet par une intégration par partie on a

$$\begin{aligned}
I_2 &= 2 \int_{C(R,\rho)} [w_{/r} z_{\rho/r} + \frac{1}{r^2} w_{/\phi} z_{\rho/\phi} + w z_\rho] dS \\
&= 2 \int_{C(R,\rho)} \langle \nabla w, \nabla z_\rho \rangle + w z_\rho dS \\
&= 2 \int_{C(R,\rho)} z_\rho (-\Delta w + w) + 2 \int_{\partial C(R,\rho)} z_\rho \partial_n w dS \\
&= -2 \int_{\Gamma_\rho} w \partial_n w,
\end{aligned}$$

car  $-\Delta w + w = 0$  dans  $C(R, \rho)$ ,  $z_\rho = 0$  sur  $\Gamma_R$  et  $w = -z_\rho$  sur  $\Gamma_\rho$  étant donné (IV.66) et (IV.48). Au vu de la définition (IV.58) de  $I_k(r)$ , la fonction  $w \partial_n w$  est clairement bornée sur  $\Gamma_\rho$  donc

$$I_2 = -2 \int_{\Gamma_\rho} w \partial_n w = O(\rho),$$

d'où le résultat. Avant de calculer  $I_1$ , faisons quelques remarques. Tout d'abord d'après (IV.59), pour  $k \geq 1$

$$\int_\rho^R r K'_k(r)^2 = O(\rho^{-2k}). \quad (\text{IV.69})$$

Ensuite d'après (IV.58), pour  $k \geq 1$

$$\int_\rho^R r I'_k(r)^2 = O(1). \quad (\text{IV.70})$$

On sépare maintenant  $I_1$  en deux parties  $I_1 = I_{11} + I_{12}$  avec

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \int_{C(R,\rho)} [z_{\rho/r}^2 + \frac{1}{r^2} z_{\rho/\phi}^2] dS, \\
I_{12} &= \int_{C(R,\rho)} z_\rho^2 dS.
\end{aligned}$$

Par conséquent, comme  $\frac{I_k(\rho)}{K_k(\rho)} = O(\rho^{2k})$  pour  $k \geq 1$ , seul le premier terme de  $z_\rho$  fournit un terme d'ordre supérieur à  $O(\rho^2)$  dans  $I_{11}$

$$I_{11} = \int_0^{2\pi} \int_\rho^R \left( a_0 \frac{\frac{I_0(\rho)}{K_0(\rho)}}{\frac{I_0(R)}{K_0(R)} - \frac{I_0(\rho)}{K_0(\rho)}} \left[ \frac{K'_0(r)}{K_0(R)} - \frac{I'_0(r)}{I_0(R)} \right] \right)^2 r dr d\theta + O(\rho^2). \quad (\text{IV.71})$$

En utilisant le développement (IV.65) et en remarquant notamment que  $K'_0(r)$  est d'ordre  $r^{-1}$  d'après la formule (IV.62), on en déduit que

$$I_{11} = -\frac{a_0^2 \pi}{2I_0(R)^2 \ln \rho} + O((\ln \rho)^{-2}). \quad (\text{IV.72})$$

Enfin le terme de plus haut degré dans  $z_\rho^2$  est

$$\left( a_0 \frac{\frac{I_0(\rho)}{K_0(\rho)}}{\frac{I_0(R)}{K_0(R)} - \frac{I_0(\rho)}{K_0(\rho)}} \left[ \frac{\ln r}{K_0(R)} \right] \right)^2. \quad (\text{IV.73})$$

Or on voit facilement que

$$\int_0^{2\pi} \int_\rho^R \left( a_0 \frac{\frac{I_0(\rho)}{K_0(\rho)}}{\frac{I_0(R)}{K_0(R)} - \frac{I_0(\rho)}{K_0(\rho)}} \left[ \frac{\ln r}{K_0(R)} \right] \right)^2 r dr d\theta = O((\ln \rho)^{-2}). \quad (\text{IV.74})$$

Donc en regroupant (IV.72) et (IV.74) on obtient

$$I_1 = I_{11} + I_{12} = -\frac{a_0^2 \pi}{2I_0(R)^2 \ln \rho} + O((\ln \rho)^{-2}). \quad (\text{IV.75})$$

Ceci achève la démonstration du théorème. ■

**2.3..2. Le problème non-homogène.** On considère maintenant le problème de Poisson non-homogène dans la couronne  $C(R, \rho)$  de rayon intérieur  $\rho$  et de rayon extérieur  $R$  avec condition de Dirichlet homogène sur la frontière  $\Gamma_R \cup \Gamma_\rho$  :

$$\begin{cases} -\Delta y_\rho + y_\rho = f|_{C(R, \rho)} & \text{dans } C(R, \rho) \\ y_\rho = 0 & \text{sur } \Gamma_R \\ y_\rho = 0 & \text{sur } \Gamma_\rho \end{cases} \quad (\text{IV.76})$$

avec  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ . On étudie la fonction suivante :

$$f|_{C(R, \rho)} \mapsto \frac{\partial y_\rho}{\partial n}|_{\Gamma_R} = g_\rho.$$

On veut obtenir un développement de  $g_\rho$  par rapport à  $\rho$ . On a le développement de Fourier suivant pour  $f$ .

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2} \tilde{a}_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (\tilde{a}_k(r) \sin(k\phi) + \tilde{b}_k(r) \cos(k\phi))$$

**Théorème IV.7.** *La fonction  $g_\rho$  admet le développement*

$$g_\rho = g_0 - \frac{h(R)}{2RI_0(R) \ln \rho} + O((\ln \rho)^{-2}), \quad (\text{IV.77})$$

où  $h(R)$  est défini en (IV.105).

**Preuve.** On cherche la solution  $y_\rho$  du problème sous la forme

$$y_\rho = \frac{1}{2}c_{0,\rho}(r) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k,\rho}(r) \sin(k\phi) + d_{k,\rho}(r) \cos(k\phi). \quad (\text{IV.78})$$

Le laplacien en coordonnées polaires vaut :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi^2}$$

En insérant l'équation (IV.78) dans  $-\Delta y_\rho + y_\rho = f|_{C(R,\rho)}$  on obtient

$$r^2 c''_{k,\rho}(r) + r c'_{k,\rho}(r) - (k^2 + r^2) c_{k,\rho}(r) = -r^2 \tilde{a}_k(r), \quad k \geq 0 \quad (\text{IV.79})$$

$$r^2 d''_{k,\rho}(r) + r d'_{k,\rho}(r) - (k^2 + r^2) d_{k,\rho}(r) = -r^2 \tilde{b}_k(r), \quad k \geq 1 \quad (\text{IV.80})$$

Les solutions du problème homogène (IV.79) pour  $k \geq 0$  sont

$$c_{k,\rho}(r) = A_k I_k(r) + B_k K_k(r), \quad (\text{IV.81})$$

avec  $I_k(r)$  et  $K_k(r)$  les fonctions de Bessel définies par (IV.58), (IV.59) et (IV.62). Pour trouver la solution de (IV.79), on applique la méthode de variation des constantes. On obtient alors le système suivant

$$A'_k I_k + B'_k K_k = 0, \quad (\text{IV.82})$$

$$A'_k I'_k + B'_k K'_k = -\tilde{a}_k. \quad (\text{IV.83})$$

Le calcul nous donne

$$A'_k = \frac{-\tilde{a}_k K_k}{I'_k K_k - I_k K'_k},$$

$$B'_k = \frac{\tilde{a}_k I_k}{I'_k K_k - I_k K'_k}.$$

D'après [69] (page 80), on a pour tout  $k \geq 0$

$$I'_k(r) K_k(r) - I_k(r) K'_k(r) = \frac{1}{r}, \quad (\text{IV.84})$$

ainsi

$$A'_k(r) = -r \tilde{a}_k(r) K_k(r),$$

$$B'_k(r) = r \tilde{a}_k(r) I_k(r).$$

On obtient finalement

$$A_k(r, \rho) = L_A(r, k) + \alpha_k(\rho), \quad (\text{IV.85})$$

$$B_k(r, \rho) = L_B(r, k) + \beta_k(\rho), \quad (\text{IV.86})$$

avec

$$L_A(r, k) = - \int_R^r t \tilde{a}_k(t) K_k(t) dt, \quad (\text{IV.87})$$

$$L_B(r, k) = \int_R^r t \tilde{a}_k(t) I_k(t) dt. \quad (\text{IV.88})$$

Les conditions aux limites pour  $c_{k,\rho}$  sont

$$\begin{aligned} c_{k,\rho}(R) &= 0, \\ c_{k,\rho}(\rho) &= 0. \end{aligned}$$

En remplaçant ces conditions limites dans (IV.81), on trouve les expressions de  $\alpha_k(\rho)$  et de  $\beta_k(\rho)$  :

$$\alpha_k(\rho) = \frac{L_A(\rho, k)I_k(\rho) + L_B(\rho, k)K_k(\rho)}{I_k(R)K_k(\rho) - K_k(R)I_k(\rho)}K_k(R), \quad (\text{IV.89})$$

$$\beta_k(\rho) = -\alpha_k(\rho)\frac{I_k(R)}{K_k(R)}. \quad (\text{IV.90})$$

La constante  $\alpha_k(\rho)$  peut également s'écrire

$$\alpha_k(\rho) = \frac{L_A(\rho, k)\frac{I_k(\rho)}{K_k(\rho)} + L_B(\rho, k)}{\frac{I_k(R)}{K_k(R)} - \frac{I_k(\rho)}{K_k(\rho)}}. \quad (\text{IV.91})$$

Nous allons maintenant procéder aux développements de  $L_A(\rho, k)$  et  $L_B(\rho, k)$  en fonction du petit paramètre  $\rho$ . Etant donné les définitions sous forme de série de (IV.58) et (IV.59), on voit que pour  $k \geq 1$

$$I_k(r) = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^k}{k!} + O(r^{k+2}), \quad (\text{IV.92})$$

$$K_k(r) = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{2}\right)^{-k}(k-1)! + O(r^{-k+2}). \quad (\text{IV.93})$$

Par conséquent, comme  $f$  est de classe  $C^\infty$ , la quantité sous l'intégrale dans (IV.87) est  $O(t^{-k+1})$  :

$$t\tilde{a}_k(t)K_k(t) = O(t^{-k+1}). \quad (\text{IV.94})$$

Enfin, étant donné (IV.94), (IV.87) et (IV.64), on trouve

$$L_A(\rho, k)\frac{I_k(\rho)}{K_k(\rho)} = O(\rho^{k+2}). \quad (\text{IV.95})$$

Par un raisonnement similaire, on obtient

$$L_B(\rho, k) = L_B(0, k) + O(\rho^{k+2}). \quad (\text{IV.96})$$

Maintenant, en insérant les développements (IV.95) et (IV.96) dans (IV.91) et (IV.90) respectivement, on obtient les développements suivants pour  $k \geq 1$  :

$$\alpha_k(\rho) = \alpha_k(0) + O(\rho^{2k}) + O(\rho^{2+k}), \quad (\text{IV.97})$$

$$\beta_k(\rho) = \beta_k(0) + O(\rho^{2k}) + O(\rho^{2+k}). \quad (\text{IV.98})$$

On remarque que seul le cas  $k = 1$  donne un terme d'ordre  $\rho^2$ . Dans tous les autres cas, le premier terme du développement est au mieux d'ordre  $\rho^4$ . On détermine maintenant le cas  $k = 0$ . Le développement pour  $K_0$  est différent du développement (IV.93). D'après (IV.58) et (IV.62) on a

$$I_0(r) = 1 + O(r^2), \quad (\text{IV.99})$$

$$K_0(r) = -\ln\left(\frac{r}{2}\right) + O(1), \quad (\text{IV.100})$$

donc

$$\frac{I_0(\rho)}{K_0(\rho)} = -\frac{1}{\ln \rho} + O((\ln \rho)^{-2}). \quad (\text{IV.101})$$

D'après (IV.91), on a

$$\alpha_0(\rho) = \frac{K_0(R)}{I_0(R)} \left( L_A(\rho, 0) \frac{I_0(\rho)}{K_0(\rho)} + L_B(\rho, 0) \right) \left( 1 + \frac{K_0(R)}{I_0(R)} \frac{I_0(\rho)}{K_0(\rho)} + O\left(\frac{I_0(\rho)^2}{K_0(\rho)^2}\right) \right). \quad (\text{IV.102})$$

En utilisant le développement limité (IV.101) on obtient

$$\alpha_0(\rho) = \alpha_0(0) - \frac{K_0(R)h(R)}{I_0(R) \ln \rho} + O((\ln \rho)^{-2}), \quad (\text{IV.103})$$

avec

$$\alpha_0(0) = -\frac{K_0(R)}{I_0(R)} \int_0^R t \tilde{a}_0(t) I_0(t) dt, \quad (\text{IV.104})$$

et

$$h(R) = -\frac{K_0(R)}{I_0(R)} \int_0^R t \tilde{a}_0(t) I_0(t) dt + \int_0^R t \tilde{a}_0(t) K_0(t) dt. \quad (\text{IV.105})$$

On a aussi grâce à (IV.90) le développement

$$\beta_0(\rho) = \beta_0(0) + \frac{h(R)}{\ln \rho} + O((\ln \rho)^{-2}), \quad (\text{IV.106})$$

avec

$$\beta_0(0) = \int_0^R t \tilde{a}_0(t) I_0(t) dt. \quad (\text{IV.107})$$

On peut maintenant écrire le développement en fonction du petit paramètre  $\rho$  de  $c'_{k,\rho}(R)$ . D'après (IV.81) et (IV.82) ainsi que les expressions (IV.85)-(IV.86), (IV.87)-(IV.88) on a

$$c'_{k,\rho}(R) = \alpha_k(\rho) I'_k(R) + \beta_k(\rho) K'_k(R).$$

On obtient donc le développement suivant pour  $k \geq 1$

$$c'_{k,\rho}(R) = c'_{k,0}(R) + O(\rho^{\min\{2k, k+2\}}), \quad (\text{IV.108})$$

et pour  $k = 0$

$$c'_{0,\rho}(R) = c'_{0,0}(R) - \frac{h(R)}{\ln \rho} \left( \frac{K_0(R)}{I_0(R)} I'_0(R) - K'_0(R) \right) + O((\ln \rho)^{-2}). \quad (\text{IV.109})$$

On obtient enfin en utilisant la relation (IV.84)

$$c'_{0,\rho}(R) = c'_{0,0}(R) - \frac{h(R)}{R I_0(R) \ln \rho} + O((\ln \rho)^{-2}). \quad (\text{IV.110})$$

En ce qui concerne le développement de  $d'_{k,\rho}(R)$ , on obtient exactement le même résultat en remplaçant les coefficients  $\tilde{a}_k(r)$  par les coefficients  $\tilde{b}_k(r)$  dans les expressions (IV.108) et (IV.110). En dérivant le développement en série de Fourier (IV.78) on obtient le développement suivant

$$\frac{\partial y_\rho}{\partial n}_{|\Gamma_R} = \frac{1}{2} c'_{0,\rho}(R) + \sum_{k=1}^{\infty} c'_{k,\rho}(R) \sin(k\phi) + d'_{k,\rho}(R) \cos(k\phi). \quad (\text{IV.111})$$

On insère dans (IV.111) les développements obtenus pour  $c'_{0,\rho}(R)$ ,  $c'_{k,\rho}(R)$  et  $d'_{k,\rho}(R)$  et on obtient

$$g_\rho = g_0 - \frac{h(R)}{2RI_0(R)\ln\rho} + O((\ln\rho)^{-2}). \quad (\text{IV.112})$$

On a donc démontré l'expansion (IV.77). ■

Nous voulons maintenant effectuer un développement asymptotique de l'énergie associée au problème non-homogène (IV.76). On définit donc les énergies

$$E^{(2)}(f) = - \int_{B(R)} |\nabla y|^2 + y^2 dS, \quad E_\rho^{(2)}(f) = - \int_{C(R,\rho)} |\nabla y_\rho|^2 + y_\rho^2 dS \quad (\text{IV.113})$$

qui dépendent de  $f$  à travers l'équation (IV.76). Nous voulons montrer que  $J_\rho$  a un développement pour lequel le reste est uniformément borné. Plus précisément, on peut l'exprimer comme suit :

**Théorème IV.8.** *L'énergie  $E_\rho^{(2)}(f)$  a une expansion*

$$E_\rho^{(2)}(f) = E^{(2)}(f) + \frac{\pi h(R)^2}{2|\ln\rho|} + \mathfrak{R}(f),$$

avec

$$|\mathfrak{R}(f)| \leq \frac{M}{|\ln\rho|^2},$$

**Preuve.** On calcule tout d'abord le développement asymptotique de  $c_{0,\rho}(r)$  quand  $\rho \rightarrow 0$ . En utilisant les formules (IV.81), (IV.85)-(IV.86), (IV.87)-(IV.88), (IV.103) et (IV.106) on obtient

$$c_{0,\rho}(r) = c_{0,0}(r) - \frac{h(R)}{I_0(R)\ln\rho} (K_0(R)I_0(r) - I_0(R)K_0(r)) + O((\ln\rho)^{-2}). \quad (\text{IV.114})$$

avec  $h(R)$  donné par (IV.105) et

$$\begin{aligned} c_{0,0}(r) &= K_0(r) \int_R^r t\tilde{a}_0(t)I_0(t) dt - I_0(r) \int_R^r t\tilde{a}_0(t)K_0(t) dt \\ &\quad - \frac{K_0(R)I_0(r) - K_0(r)I_0(R)}{I_0(R)} \int_0^R t\tilde{a}_0(t)I_0(t) dt. \end{aligned}$$

De même en utilisant les expressions (IV.81), (IV.85)-(IV.86), (IV.87)-(IV.88) et (IV.97)-(IV.98), et en remarquant que  $r \geq \rho$ , on obtient les développements de  $c_{k,\rho}(r)$  et  $d_{k,\rho}(r)$  pour tout  $k \geq 1$  :

$$c_{k,\rho}(r) = c_{k,0}(r) + O(\rho^2), \quad (\text{IV.115})$$

$$d_{k,\rho}(r) = d_{k,0}(r) + O(\rho^2), \quad (\text{IV.116})$$

avec

$$c_{k,0}(r) = (L_A(r, k) + \alpha_k(0))I_k(r) + (L_B(r, k) + \beta_k(0))K_k(r), \quad (\text{IV.117})$$

et on a une formule similaire pour  $d_{k,0}(r)$  en remplaçant  $\tilde{a}_k$  par  $\tilde{b}_k$  dans (IV.117). On va pouvoir donner maintenant le développement de l'énergie. En raison des conditions de Dirichlet dans l'équation (IV.76), et en utilisant la formule de Green, on obtient

$$E_\rho^{(2)}(f) = - \int_{C(R,\rho)} f y_\rho dS. \quad (\text{IV.118})$$

On remplace alors  $y_\rho$  par son développement en série de Fourier (IV.78) et on trouve

$$E_\rho^{(2)}(f) = -\frac{1}{2} \int_{C(R,\rho)} f c_{0,\rho} dS - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{C(R,\rho)} f c_{k,\rho} \sin(k\phi) + f d_{k,\rho} \cos(k\phi) dS. \quad (\text{IV.119})$$

Or d'après (IV.114)

$$\begin{aligned} \int_{C(R,\rho)} f c_{0,\rho} dS &= \int_{B(R)} f c_{0,0} dS - \int_{B(\rho)} f c_{0,0} dS \\ &\quad - \frac{h(R)}{I_0(R) \ln \rho} \int_{C(R,\rho)} f (K_0(R)I_0(r) - I_0(R)K_0(r)) dS \\ &\quad + O((\ln \rho)^{-2}) \\ &= \int_{B(R)} f c_{0,0} dS - \frac{h(R)}{I_0(R) \ln \rho} \int_{B(R)} f (K_0(R)I_0(r) - I_0(R)K_0(r)) dS \\ &\quad + O((\ln \rho)^{-2}) \\ &= \int_{B(R)} f c_{0,0} dS - \frac{\pi h(R)}{I_0(R) \ln \rho} \int_0^R t \tilde{a}_0(t) (K_0(R)I_0(t) - I_0(R)K_0(t)) dt \\ &\quad + O((\ln \rho)^{-2}), \end{aligned}$$

car

$$\int_{B(\rho)} f c_{0,0} dS = O(\rho^2), \quad (\text{IV.120})$$

et en outre

$$\int_{B(R)} f (K_0(R)I_0(r) - I_0(R)K_0(r)) dS < \infty$$

car  $f$  est de classe  $C^\infty$ . Finalement, on obtient

$$\int_{C(R,\rho)} f c_{0,\rho} dS = \int_{B(R)} f c_{0,0} dS + \frac{\pi h(R)^2}{\ln \rho} + O((\ln \rho)^{-2}) \quad (\text{IV.121})$$

De même on a d'après (IV.115)-(IV.116) pour  $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \int_{C(R,\rho)} f c_{k,\rho} \sin(k\phi) dS &= \int_{B(R)} f c_{k,0} \sin(k\phi) dS \\ &\quad - \int_{B(\rho)} f c_{k,0} \sin(k\phi) dS + O(\rho^2) \\ &= \int_{B(R)} f c_{k,0} \sin(k\phi) dS + O(\rho^2), \end{aligned} \quad (\text{IV.122})$$

et

$$\int_{C(R,\rho)} f d_{k,\rho} \cos(k\phi) dS = \int_{B(R)} f d_{k,0} \cos(k\phi) dS + O(\rho^2). \quad (\text{IV.123})$$

Nous pouvons maintenant conclure, à l'aide de (IV.119),(IV.121) et (IV.122)-(IV.123) :

$$E_\rho^{(2)}(f) = E^{(2)}(f) - \frac{\pi h(R)^2}{2 \ln \rho} + O((\ln \rho)^{-2}). \quad (\text{IV.124})$$

Ceci achève la démonstration du théorème IV.8. ■



2.3..3. *Le problème complet.* Dans cette partie, on note  $w_\rho(v)$  la solution de (IV.48) afin de souligner la dépendance en  $v$  de  $w_\rho$ . Grâce au théorème IV.41, on peut écrire

$$\begin{aligned}
E_\rho(f) &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} |\nabla u_\rho|^2 + u_\rho^2 dS \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\Omega_R} |\nabla u_\rho|^2 + u_\rho^2 dS - \frac{1}{2} \int_{C(R,\rho)} |\nabla(w_\rho + y_\rho)|^2 + (w_\rho + y_\rho)^2 dS \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\Omega_R} |\nabla u_\rho^R|^2 + (u_\rho^R)^2 dS - \frac{1}{2} E_\rho^{(1)}(v) + \frac{1}{2} E_\rho^{(2)}(f) - \int_{C(R,\rho)} \langle \nabla w_\rho, \nabla y_\rho \rangle + w_\rho y_\rho dS \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\Omega_R} |\nabla u_\rho^R|^2 + (u_\rho^R)^2 dS - \frac{1}{2} E_\rho^{(1)}(v) + \frac{1}{2} E_\rho^{(2)}(f).
\end{aligned}$$

En effet la formule de Green nous indique que

$$\int_{C(R,\rho)} \langle \nabla w_\rho, \nabla y_\rho \rangle + w_\rho y_\rho dS = \int_{C(R,\rho)} (-\Delta w_\rho + w_\rho) y_\rho dS + \int_{\partial C(R,\rho)} y_\rho \partial_n w_\rho = 0 \quad (\text{IV.125})$$

On définit ainsi la fonctionnelle  $J_\rho$  sur  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega_R)$

$$J_\rho(u_\rho^R) := -\frac{1}{2} \int_{\Omega_R} |\nabla u_\rho^R|^2 + (u_\rho^R)^2 dS - \frac{1}{2} E_\rho^{(1)}(v) + \frac{1}{2} E_\rho^{(2)}(f). \quad (\text{IV.126})$$

On introduit le Lagrangien  $\mathcal{L}_\rho$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\rho : H_{\Gamma_D}^1(\Omega_R) \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega_R) &\rightarrow \mathbb{R} \\
(u, v) &\mapsto \mathcal{L}_\rho(u, v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\rho(u, v) &= J_\rho(u) + a_\rho(u, v) - l(v) \\
&= J_\rho(u) + \int_{\Omega_R} \langle \nabla u, \nabla v \rangle + uv dS + \int_{\Gamma_R} A_\rho(u) v - \int_{\Omega_R} f v + \int_{\Gamma_R} v \partial_n y_\rho
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
J_\rho(u_\rho^R) - J_0(u_0^R) &= \mathcal{L}_\rho(u_\rho^R, u_0^R) - \mathcal{L}_0(u_0^R, u_0^R) \\
&= \int_{\Omega_R} \langle \nabla u_\rho^R, \nabla u_0^R \rangle + u_\rho^R u_0^R - \int_{\Omega_R} |\nabla u_0^R|^2 + (u_0^R)^2 dS \\
&\quad + \int_{\Gamma_R} A_\rho(u_\rho^R) u_0^R - \int_{\Gamma_R} A_0(u_0^R) u_0^R \\
&\quad - \int_{\Omega_R} \langle \nabla u_0^R, \nabla (u_\rho^R - u_0^R) \rangle + u_0^R (u_\rho^R - u_0^R) \\
&\quad - \int_{B(R)} \langle \nabla w_0(u_0^R), \nabla w_0(u_\rho^R - u_0^R) \rangle + w_0(u_0^R) w(u_\rho^R - u_0^R) \\
&\quad - \frac{\pi a_0^2}{4 \ln \rho} - \frac{\pi h(R)^2}{4 \ln \rho} + \int_{\Gamma_R} u_0^R \partial_n (y_\rho - y_0).
\end{aligned}$$

Ce qui se simplifie en

$$\begin{aligned} J_\rho(u_\rho^R) - J_0(u_0^R) &= \int_{\Omega_R} \langle \nabla u_\rho^R, \nabla u_0^R \rangle + \int_{\Gamma_R} A_\rho(u_\rho^R) u_0^R \\ &\quad - \int_{\Omega_R} \langle \nabla u_\rho^R, \nabla u_0^R \rangle - \int_{\Gamma_R} A_0(u_\rho^R) u_0^R \\ &\quad - \frac{\pi a_0^2}{4I_0(R)^2 |\ln \rho|} + \frac{\pi h(R)^2}{4 |\ln \rho|} + \int_{\Gamma_R} u_0^R \partial_n (y_\rho - y_0) \end{aligned}$$

Or on a d'après les formules (IV.67),(IV.68) et (IV.84)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} A_\rho(u_\rho^R) u_0^R - \int_{\Gamma_R} A_0(u_\rho^R) u_0^R &= \int_{\Gamma_R} (A_\rho - A_0)(u_0^R) u_0^R + O((\ln \rho)^{-2}) \\ &= \int_{\Gamma_R} w(u_0^R) \partial_n z_\rho(u_0^R) \\ &= \frac{\pi a_0^2}{2I_0(R)^2 |\ln \rho|} + O((\ln \rho)^{-2}). \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que

$$u_\rho^R - u_0^R = O((\ln \rho)^{-1}), \quad \partial_n (u_\rho^R - u_0^R) = O((\ln \rho)^{-1}). \quad (\text{IV.127})$$

Enfin, on peut calculer le dernier terme grâce à (IV.112)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} u_0^R \partial_n (y_\rho - y_0) &= \int_{\Gamma_R} u_0^R (g_\rho - g_0) \\ &= -\frac{\pi a_0 h(R)}{2I_0(R) \ln \rho} \end{aligned}$$

On peut maintenant énoncer le résultat suivant

**Théorème IV.9.** *L'énergie  $E_\rho(f)$  admet le développement suivant*

$$E_\rho(f) = E(f) + \frac{\pi a_0(R)^2}{4I_0(R)^2 |\ln \rho|} + \frac{\pi h(R)^2}{4 |\ln \rho|} + \frac{\pi a_0(R) h(R)}{2I_0(R) |\ln \rho|} + \mathfrak{R}(f) \quad (\text{IV.128})$$

avec

$$|\mathfrak{R}(f)| \leq \frac{M}{|\ln \rho|^2}.$$

Le coefficient  $a_0$  étant donné par

$$a_0(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \phi) d\phi.$$

et la fonction  $h(R)$  définie en (IV.105).

On a clairement d'après (IV.105) et (IV.58) et (IV.62) les convergences suivantes

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 0} h(R) &= 0, \\ \lim_{R \rightarrow 0} a_0(R) &= 2u(0), \\ \lim_{R \rightarrow 0} I_0(R) &= 1. \end{aligned}$$

En fait le terme d'ordre 1 dans (IV.128) ne dépend pas de  $R$ , et on montre sans difficulté que

$$u(0) = \frac{a_0(R)}{2I_0(R)} + \frac{h(R)}{2}$$

et donc que

$$\frac{\pi a_0(R)^2}{4I_0(R)^2 |\ln \rho|} + \frac{\pi h(R)^2}{4 |\ln \rho|} + \frac{\pi a_0 h(R)}{2I_0(R) |\ln \rho|} = \frac{\pi u(0)^2}{|\ln \rho|}, \quad (\text{IV.129})$$

qui est bien l'expression de la dérivée topologique habituelle pour ce problème. L'intérêt de la formule (IV.128) est de fournir une expression approchée de la dérivée topologique si on néglige les termes qui dépendent de  $h(R)$  qui peut être calculée le long de la courbe  $\Gamma_R$ , ce qui peut être intéressant du point de vue numérique.

**2.4.. La dérivée topologique avec conditions de Neumann sur le trou.** On reprend les mêmes notations que dans le paragraphe 2.3., et pour éviter les répétitions, on développe seulement les différences dues au changement de conditions sur la frontière du trou. On considère maintenant le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta w_\rho + w_\rho = 0 & \text{dans } C(R, \rho), \\ w_\rho = v & \text{sur } \Gamma_R, \\ \partial_n w_\rho = 0 & \text{sur } \Gamma_\rho, \end{cases} \quad (\text{IV.130})$$

avec  $v$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_R)$ . On a le théorème suivant

**Théorème IV.10.** *L'énergie  $E_\rho^{(1)}(v)$  a une expansion*

$$E_\rho^{(1)}(v) = E^{(1)}(v) - \left( \frac{\pi(a_1^2 + b_1^2)}{2I_1(R)^2} + \frac{\pi a_0^2}{4I_0(R)^2} \right) \rho^2 + \mathfrak{R}(v),$$

avec

$$|\mathfrak{R}(v)| \leq \frac{M^2}{\rho},$$

uniformément sur tout sous-ensemble borné de  $H^1(\Omega_R)$ .

**Preuve.** Les conditions aux limites sur  $\Gamma_R$  et  $\Gamma_\rho$  nous permettent d'obtenir les systèmes suivants pour  $k \geq 0$

$$\begin{aligned} A_k I_k(R) + B_k K_k(R) &= 1 \\ A_k I'_k(\rho) + B_k K'_k(\rho) &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit l'expression de  $c_{k,\rho}(r)$  pour  $k \geq 0$  sous une forme appropriée au développement asymptotique quand  $\rho \rightarrow 0$  :

$$c_{k,\rho}(r) = \frac{I_k(r)}{I_k(R)} - \frac{\frac{I'_k(\rho)}{K'_k(\rho)}}{\frac{I_k(R)}{K_k(R)} - \frac{I'_k(\rho)}{K'_k(\rho)}} \left[ \frac{K_k(r)}{K_k(R)} - \frac{I_k(r)}{I_k(R)} \right] \quad (\text{IV.131})$$

Pour  $k \geq 1$ , les formules (IV.58) et (IV.59) nous indiquent que

$$I'_k(\rho) = \frac{\rho^{k-1}}{2^k(k-1)!} + O(\rho^{k+1}), \quad (\text{IV.132})$$

$$K'_k(\rho) = -\frac{k!2^{k-1}}{\rho^{k+1}} + o(\rho^{-k-1}), \quad (\text{IV.133})$$

de sorte que

$$\frac{I'_k(\rho)}{K'_k(\rho)} = -\frac{\rho^{2k}}{k!(k-1)!2^{2k-1}} + O(\rho^{2k}), \quad k \geq 1, \quad (\text{IV.134})$$

et en particulier

$$\frac{I'_1(\rho)}{K'_1(\rho)} = -\frac{\rho^2}{2} + O(\rho^2), \quad (\text{IV.135})$$

tandis que pour  $k = 0$ , d'après les formules (IV.58) et (IV.62)

$$I'_0(\rho) = \frac{\rho}{2} + O(\rho^3), \quad (\text{IV.136})$$

$$K'_0(\rho) = -\frac{1}{\rho} + o(\rho). \quad (\text{IV.137})$$

Donc on a

$$\frac{I'_0(\rho)}{K'_0(\rho)} = -\frac{\rho^2}{2} + o(\rho^2). \quad (\text{IV.138})$$

Le développement de  $w_\rho$  nous donne :

$$w_\rho = w + z_\rho, \quad (\text{IV.139})$$

avec  $w$  solution du problème (IV.130) pour  $\rho = 0$  donné par

$$w(r, \phi) = \frac{1}{2}a_0 \frac{I_0(r)}{I_0(R)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_k(r)}{I_k(R)} (a_k \sin(k\phi) + b_k \cos(k\phi)), \quad (\text{IV.140})$$

et

$$\begin{aligned} z_\rho(r, \phi) = & -\frac{a_0}{2} \frac{\frac{I'_0(\rho)}{K'_0(\rho)}}{\frac{I_0(R)}{K_0(R)} - \frac{I'_0(\rho)}{K'_0(\rho)}} \left[ \frac{K_0(r)}{K_0(R)} - \frac{I_0(r)}{I_0(R)} \right] \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{I'_k(\rho)}{K'_k(\rho)}}{\frac{I_k(R)}{K_k(R)} - \frac{I'_k(\rho)}{K'_k(\rho)}} \left[ \frac{K_k(r)}{K_k(R)} - \frac{I_k(r)}{I_k(R)} \right] (a_k \sin(k\phi) + b_k \cos(k\phi)). \end{aligned} \quad (\text{IV.141})$$

On a toujours

$$E_\rho^{(1)}(v) := E^{(1)}(v) + I_1 + I_2 + I_3. \quad (\text{IV.142})$$

ainsi que

$$I_2 = -2 \int_{\Gamma_\rho} z_\rho \partial_n z_\rho, \quad (\text{IV.143})$$

car  $z_\rho = 0$  sur  $\Gamma_R$  et  $\partial_n w = -\partial_n z_\rho$  sur  $\Gamma_\rho$  étant donné (IV.139) et (IV.130). De plus, comme  $n$  est le vecteur normal sortant à  $C(R, \rho)$ , on a  $\partial_n z_\rho = -\partial_r z_\rho$ . D'après l'expression (IV.141) de  $z_\rho$ , et étant donné les développements (IV.132)-(IV.133), (IV.136)-(IV.137), on montre donc que le terme principal dans  $I_2$  est donné par

$$\begin{aligned} & 2\pi\rho(a_1^2 + b_1^2) \left( \frac{\frac{I'_1(\rho)}{K'_1(\rho)}}{\frac{I_1(R)}{K_1(R)} - \frac{I'_1(\rho)}{K'_1(\rho)}} \right)^2 \left[ \frac{K'_1(\rho)}{K_1(R)} - \frac{I'_1(\rho)}{I_1(R)} \right] \left[ \frac{K_1(\rho)}{K_1(R)} - \frac{I_1(\rho)}{I_1(R)} \right] \\ & = -\frac{2\pi(a_1^2 + b_1^2)}{4I_1(R)^2} \rho^2 + o(\rho^2) \end{aligned}$$

et donc

$$I_2 = -\frac{2\pi(a_1^2 + b_1^2)}{4I_1(R)^2}\rho^2 + o(\rho^2). \quad (\text{IV.144})$$

L'intégrale  $I_3$  est donnée par

$$\begin{aligned} I_3 &= -\int_{B(\rho)} \|\nabla w\|^2 + w^2 \\ &= -\int_{\Gamma_\rho} w \partial_r w \\ &= \left( -\frac{\pi a_0^2}{4I_0(R)^2} - \frac{\pi(a_1^2 + b_1^2)}{4I_1(R)^2} \right) \rho^2 + o(\rho^2) \end{aligned} \quad (\text{IV.145})$$

Avant de calculer  $I_1$ , faisons quelques remarques. Tout d'abord d'après (IV.59), pour  $k \geq 1$

$$\int_\rho^R r K_k'(r)^2 = O(\rho^{-2k}), \quad (\text{IV.146})$$

et pour  $k = 0$ , on a

$$\int_\rho^R r K_0'(r)^2 = O(\ln \rho), \quad (\text{IV.147})$$

Ensuite d'après (IV.58), pour  $k \geq 0$

$$\int_\rho^R r I_k'(r)^2 = O(1). \quad (\text{IV.148})$$

On sépare maintenant  $I_1$  en deux parties  $I_1 = I_{11} + I_{12}$  avec

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_{C(R,\rho)} \left[ z_{\rho/r}^2 + \frac{1}{r^2} z_{\rho/\phi}^2 \right] dS, \\ I_{12} &= \int_{C(R,\rho)} z_\rho^2 dS. \end{aligned}$$

Par conséquent, comme  $\frac{I_k'(\rho)}{K_k'(\rho)} = O(\rho^{2k})$  pour  $k \geq 1$ , et que  $\frac{I_0'(\rho)}{K_0'(\rho)} = O(\rho^2)$  les termes dominants dans  $I_{11}$  issus de  $z_{\rho/r}^2$  et  $\frac{1}{r^2} z_{\rho/\phi}^2$  sont donnés respectivement par

$$\int_0^{2\pi} \int_\rho^R \left( \frac{\frac{I_1'(\rho)}{K_1'(\rho)}}{\frac{I_1(R)}{K_1(R)} - \frac{I_1'(\rho)}{K_1'(\rho)}} \left[ \frac{K_1'(r)}{K_1(R)} - \frac{I_1'(r)}{I_1(R)} \right] \right)^2 (a_1^2 \sin^2(k\phi) + b_1^2 \cos^2(k\phi)) r dr d\theta + O(\rho^2), \quad (\text{IV.149})$$

et

$$\int_0^{2\pi} \int_\rho^R \frac{1}{r^2} \left( \frac{\frac{I_1'(\rho)}{K_1'(\rho)}}{\frac{I_1(R)}{K_1(R)} - \frac{I_1'(\rho)}{K_1'(\rho)}} \left[ \frac{K_1(r)}{K_1(R)} - \frac{I_1(r)}{I_1(R)} \right] \right)^2 (a_1^2 \cos^2(k\phi) + b_1^2 \sin^2(k\phi)) r dr d\theta + O(\rho^2). \quad (\text{IV.150})$$

Le calcul de ces deux termes nous permet d'obtenir

$$I_{11} = \frac{\pi(a_1^2 + b_1^2)}{4I_1(R)^2}\rho^2 + o(\rho^2). \quad (\text{IV.151})$$

On montre également facilement que

$$I_{12} = o(\rho^2). \quad (\text{IV.152})$$

On peut maintenant conclure en regroupant (IV.151), (IV.152), (IV.144) et (IV.145)

$$E_\rho^{(1)}(u) = E^{(1)}(v) - \left( \frac{\pi(a_1^2 + b_1^2)}{2I_1(R)^2} + \frac{\pi a_0^2}{4I_0(R)^2} \right) \rho^2 + o(\rho^2). \quad (\text{IV.153})$$

Ceci achève la démonstration du théorème. ■

2.4.1. *Le problème non-homogène.* On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta y_\rho + y_\rho = f|_{C(R,\rho)} & \text{dans } C(R,\rho) \\ y_\rho = 0 & \text{sur } \Gamma_R \\ \partial_n y_\rho = 0 & \text{sur } \Gamma_\rho \end{cases} \quad (\text{IV.154})$$

avec  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ . On a le théorème

**Théorème IV.11.** *La fonction  $g_\rho$  admet le développement*

$$g_\rho = g_0 - \left( \frac{h_0(R) - \tilde{a}_0(0)}{4RI_0(R)} \right) \rho^2 \quad (\text{IV.155})$$

$$- \left( \frac{h_1^a(R)}{2RI_1(R)} \sin \phi + \frac{h_1^b(R)}{2RI_1(R)} \cos \phi \right) \rho^2 + o(\rho^2). \quad (\text{IV.156})$$

où  $h_0^a(R)$ ,  $h_1^a(R)$  sont définis en (IV.165) et  $h_1^b(R)$  est obtenu à partir de  $h_1^a(R)$  en substituant  $\tilde{b}_1(t)$  à  $\tilde{a}_1(t)$  dans (IV.165).

**Preuve.** On réutilise les résultats et les notations du paragraphe 2.3.. On cherche la solution  $y_\rho$  du problème sous la forme

$$y_\rho = \frac{1}{2}c_{0,\rho}(r) + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k,\rho}(r) \sin(k\phi) + d_{k,\rho}(r) \cos(k\phi). \quad (\text{IV.157})$$

Les conditions aux limites pour  $c_{k,\rho}$  sont maintenant

$$\begin{aligned} c_{k,\rho}(R) &= 0, \\ c'_{k,\rho}(\rho) &= 0. \end{aligned}$$

On obtient donc les expressions

$$\alpha_k(\rho) = \frac{L_A(\rho, k)I'_k(\rho) + L_B(\rho, k)K'_k(\rho)}{I_k(R)K'_k(\rho) - K_k(R)I'_k(\rho)} K_k(R), \quad (\text{IV.158})$$

$$\beta_k(\rho) = -\alpha_k(\rho) \frac{I_k(R)}{K_k(R)}. \quad (\text{IV.159})$$

La constante  $\alpha_k(\rho)$  peut également s'écrire

$$\alpha_k(\rho) = \frac{L_A(\rho, k) \frac{I'_k(\rho)}{K'_k(\rho)} + L_B(\rho, k)}{\frac{I_k(R)}{K_k(R)} - \frac{I'_k(\rho)}{K'_k(\rho)}}. \quad (\text{IV.160})$$

D'après (IV.160) et les développements (IV.135) et (IV.138), on a pour  $i = 0, 1$

$$\alpha_i(\rho) = \frac{K_i(R)}{I_i(R)} \left( L_A(\rho, i) \frac{I'_i(\rho)}{K'_i(\rho)} + L_B(\rho, i) \right) \left( 1 + \frac{K_i(R)}{I_i(R)} \frac{I'_i(\rho)}{K'_i(\rho)} + O\left(\frac{I'_i(\rho)^2}{K'_i(\rho)^2}\right) \right), \quad (\text{IV.161})$$

ainsi que

$$\alpha_i(\rho) = \alpha_i(0) - \frac{K_i(R)h_i^a(R)}{2I_i(R)}\rho^2 + \frac{K_i(R)}{I_i(R)} \int_0^\rho t\tilde{a}_i(t)I_i(t) dt + O(\rho^2), \quad (\text{IV.162})$$

$$(\text{IV.163})$$

avec

$$\alpha_i(0) = -\frac{K_i(R)}{I_i(R)} \int_0^R t\tilde{a}_i(t)I_i(t) dt, \quad (\text{IV.164})$$

et

$$h_i^a(R) = -\frac{K_i(R)}{I_i(R)} \int_0^R t\tilde{a}_i(t)I_i(t) dt + \int_0^R t\tilde{a}_i(t)K_i(t) dt. \quad (\text{IV.165})$$

On a aussi grâce à (IV.159) le développement

$$\beta_i(\rho) = \beta_i(0) + \frac{h_i^a(R)}{2}\rho^2 - \int_0^\rho t\tilde{a}_i(t)I_i(t) dt + O(\rho^2),$$

avec

$$\beta_i(0) = \int_0^R t\tilde{a}_i(t)I_i(t) dt. \quad (\text{IV.166})$$

Pour  $k \geq 2$ , le développement des  $\alpha_k(\rho)$  et  $\beta_k(\rho)$  donne des termes d'ordre strictement supérieur à  $\rho^2$ . Dans (IV.162), le terme  $\int_0^\rho t\tilde{a}_i(t)I_i(t) dt$  donne pour  $i = 0$

$$\int_0^\rho t\tilde{a}_0(t)I_0(t) dt = \frac{\tilde{a}_0(0)}{2}\rho^2 + O(\rho^3). \quad (\text{IV.167})$$

Par contre pour  $i = 1$  on trouve en raison de (IV.58)

$$\int_0^\rho t\tilde{a}_1(t)I_1(t) dt = O(\rho^3). \quad (\text{IV.168})$$

On a donc

$$\alpha_0(\rho) = \alpha_0(0) - \frac{K_0(R)(h_0^a(R) - \tilde{a}_0(0))}{2I_0(R)}\rho^2 + O(\rho^2), \quad (\text{IV.169})$$

et

$$\alpha_1(\rho) = \alpha_1(0) - \frac{K_1(R)h_1^a(R)}{2I_1(R)}\rho^2 + O(\rho^2), \quad (\text{IV.170})$$

On peut maintenant écrire le développement en fonction du petit paramètre  $\rho$  de  $c'_{k,\rho}(R)$ . D'après (IV.81) et (IV.82) ainsi que les expressions (IV.85)-(IV.86), (IV.87)-(IV.88) on a

$$c'_{k,\rho}(R) = \alpha_k(\rho)I'_k(R) + \beta_k(\rho)K'_k(R).$$

On obtient donc les développements

$$c'_{0,\rho}(R) = c'_{0,0}(R) - \frac{h_0^a(R) - \tilde{a}_0(0)}{2} \left( \frac{K_0(R)}{I_0(R)} I'_0(R) - K'_0(R) \right) \rho^2 + o(\rho^2), \quad (\text{IV.171})$$

$$c'_{1,\rho}(R) = c'_{1,0}(R) - \frac{h_1^a(R)}{2} \left( \frac{K_1(R)}{I_1(R)} I'_1(R) - K'_1(R) \right) \rho^2 + o(\rho^2), \quad (\text{IV.172})$$

et pour  $k \geq 2$

$$c'_{k,\rho}(R) = c'_{k,0}(R) + o(\rho^2), \quad (\text{IV.173})$$

On obtient enfin en utilisant la relation (IV.84)

$$c'_{0,\rho}(R) = c'_{0,0}(R) - \left( \frac{h_0^a(R) - \tilde{a}_0(0)}{2RI_0(R)} \right) \rho^2 + o(\rho^2). \quad (\text{IV.174})$$

$$c'_{1,\rho}(R) = c'_{1,0}(R) - \frac{h_1^a(R)}{2RI_1(R)} \rho^2 + o(\rho^2). \quad (\text{IV.175})$$

En ce qui concerne le développement de  $d'_{k,\rho}(R)$ , on obtient exactement le même résultat en remplaçant les coefficients  $\tilde{a}_k(r)$  par les coefficients  $\tilde{b}_k(r)$  dans les expressions (IV.174) et (IV.175). En dérivant le développement en série de Fourier (IV.78) on obtient le développement suivant

$$\frac{\partial y_\rho}{\partial n}_{|\Gamma_R} = \frac{1}{2} c'_{0,\rho}(R) + \sum_{k=1}^{\infty} c'_{k,\rho}(R) \sin(k\phi) + d'_{k,\rho}(R) \cos(k\phi). \quad (\text{IV.176})$$

On insère dans (IV.111) les développements obtenus pour  $c'_{0,\rho}(R)$ ,  $c'_{k,\rho}(R)$  et  $d'_{k,\rho}(R)$  et on obtient

$$\begin{aligned} g_\rho &= g_0 - \left( \frac{h_0^a(R) - \tilde{a}_0(0)}{4RI_0(R)} \right) \rho^2 \\ &\quad - \left( \frac{h_1^a(R)}{2RI_1(R)} \sin \phi + \frac{h_1^b(R)}{2RI_1(R)} \cos \phi \right) \rho^2 + o(\rho^2). \end{aligned} \quad (\text{IV.177})$$

On a donc démontré l'expansion (IV.155). ■

L'énergie  $E^{(2)}(f)$  est définie comme dans le paragraphe 2.3.

**Théorème IV.12.** *L'énergie  $E_\rho^{(2)}(f)$  a une expansion*

$$E_\rho^{(2)}(f) = E^{(2)}(f) - \frac{\pi h_0^a(R)^2}{4} \rho^2 - \frac{\pi (h_1^a(R)^2 + h_1^b(R)^2)}{2} \rho^2 + \mathfrak{R}(f) \quad (\text{IV.178})$$

avec

$$|\mathfrak{R}(f)| \leq \frac{M^2}{\rho},$$

**Preuve.** A l'aide des développements asymptotiques précédents, on obtient

$$c_{0,\rho}(r) = c_{0,0}(r) - \frac{h_0^a(R) - \tilde{a}_0(0)}{2} \left( \frac{K_0(R)}{I_0(R)} I_0(r) - K_0(r) \right) \rho^2 + o(\rho^2), \quad (\text{IV.179})$$

$$c_{1,\rho}(r) = c_{1,0}(r) - \frac{h_1^a(R)}{2} \left( \frac{K_1(R)}{I_1(R)} I_1(r) - K_1(r) \right) \rho^2 + o(\rho^2), \quad (\text{IV.180})$$

avec pour  $i = 0, 1$ ,  $h_i^a(R)$  donné par (IV.165) et

$$\begin{aligned} c_{0,0}(r) &= K_0(r) \int_R^r t \tilde{a}_0(t) I_0(t) dt - I_0(r) \int_R^r t \tilde{a}_0(t) K_0(t) dt \\ &\quad - \frac{K_0(R) I_0(r) - K_0(r) I_0(R)}{I_0(R)} \int_0^R t \tilde{a}_0(t) I_0(t) dt. \end{aligned}$$



Pour  $k \geq 2$ , on a clairement

$$c_{k,\rho}(r) = c_{k,0}(r) + o(\rho^2), \quad (\text{IV.181})$$

$$d_{k,\rho}(r) = d_{k,0}(r) + o(\rho^2), \quad (\text{IV.182})$$

On va pouvoir donner maintenant le développement de l'énergie. En utilisant la formule de Green, on obtient

$$E_\rho^{(2)}(f) = - \int_{C(R,\rho)} f y_\rho dS. \quad (\text{IV.183})$$

On remplace alors  $y_\rho$  par son développement en série de Fourier (IV.157) et on trouve

$$E_\rho^{(2)}(f) = -\frac{1}{2} \int_{C(R,\rho)} f c_{0,\rho} dS - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{C(R,\rho)} f c_{k,\rho} \sin(k\phi) + f d_{k,\rho} \cos(k\phi) dS. \quad (\text{IV.184})$$

Or d'après (IV.179) et en substituant à  $f$  son développement en série de Fourier

$$\begin{aligned} \int_{C(R,\rho)} f c_{0,\rho} dS &= \pi \int_\rho^R r \tilde{a}_0(r) c_{0,\rho}(r) dr \\ &= \pi \int_\rho^R r \tilde{a}_0(r) c_{0,0}(r) dr + \frac{\pi(h_0^a(R)^2 - \tilde{a}_0(0)h_0^a(R))}{2} \rho^2 + o(\rho^2) \\ &= \pi \int_0^R r \tilde{a}_0(r) c_{0,0}(r) dr + \frac{\pi(h_0^a(R)^2 - 2\tilde{a}_0(0)h_0^a(R))}{2} \rho^2 + o(\rho^2). \end{aligned}$$

On a également

$$\begin{aligned} \int_{C(R,\rho)} f c_{1,\rho} \sin \phi &= \pi \int_\rho^R r \tilde{a}_1(r) c_{1,\rho}(r) dr \\ &= \pi \int_\rho^R r \tilde{a}_1(r) c_{1,0}(r) dr + \frac{\pi h_1^a(R)^2}{2} \rho^2 + o(\rho^2) \\ &= \pi \int_0^R r \tilde{a}_1(r) c_{1,0}(r) dr + \frac{\pi(h_1^a(R)^2 + \tilde{a}_1(0)h_1^a(R))}{2} \rho^2 + o(\rho^2). \end{aligned}$$

D'après le développement de Fourier de  $f$ , on a clairement  $\tilde{a}_1(0) = 0$ . Nous pouvons maintenant conclure, à l'aide de (IV.181),(IV.182) :

$$E_\rho^{(2)}(f) = E^{(2)}(f) - \frac{\pi(h_0^a(R)^2 - 2\tilde{a}_0(0)h_0^a(R))}{4} \rho^2 - \frac{\pi(h_1^a(R)^2 + h_1^b(R)^2)}{2} \rho^2 + o(\rho^2) \quad (\text{IV.185})$$

Ceci achève la démonstration du théorème IV.12. ■

2.4..2. *Le problème complet.* Comme dans le paragraphe 2.3., on a

$$E_\rho(f) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega_R} |\nabla u_\rho^R|^2 + (u_\rho^R)^2 dS - \frac{1}{2} E_\rho^{(1)}(v) + \frac{1}{2} E_\rho^{(2)}(f). \quad (\text{IV.186})$$

et on introduit la fonctionnelle  $J_\rho$  sur  $H^1(\Omega_R)$  comme précédemment

$$J_\rho(u_\rho^R) := -\frac{1}{2} \int_{\Omega_R} |\nabla u_\rho^R|^2 + (u_\rho^R)^2 dS - \frac{1}{2} E_\rho^{(1)}(v) + \frac{1}{2} E_\rho^{(2)}(f). \quad (\text{IV.187})$$

On trouve

$$\begin{aligned}
J_\rho(u_\rho^R) - J_0(u_0^R) &= \int_{\Gamma_R} A_\rho(u_\rho^R)u_0^R - \int_{\Gamma_R} A_0(u_\rho^R)u_0^R \\
&\quad - \frac{\pi(h_0^a(R)^2 - 2\tilde{a}_0(0)h_0^a(R))}{8}\rho^2 - \frac{\pi(h_1^a(R)^2 + h_1^b(R)^2)}{4}\rho^2 \\
&\quad + \left( \frac{\pi(a_1^2 + b_1^2)}{4I_1(R)^2} + \frac{\pi a_0^2}{8I_0(R)^2} \right) \rho^2 \\
&\quad + \int_{\Gamma_R} u_0^R \partial_n(y_\rho - y_0) + o(\rho^2)
\end{aligned}$$

Or on a d'après les formules (IV.140),(IV.141) et (IV.84)

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_R} A_\rho(u_\rho^R)u_0^R - \int_{\Gamma_R} A_0(u_\rho^R)u_0^R &= \int_{\Gamma_R} (A_\rho - A_0)(u_0^R)u_0^R + O((\ln \rho)^{-2}) \\
&= \int_{\Gamma_R} w(u_0^R)\partial_n z_\rho(u_0^R) \\
&= -\frac{\pi a_0^2}{4I_0(R)^2}\rho^2 - \frac{\pi(a_1^2 + b_1^2)}{2I_1(R)^2}\rho^2 + o(\rho^2).
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que

$$u_\rho^R - u_0^R = o(\rho^2), \quad \partial_n(u_\rho^R - u_0^R) = o(\rho^2). \quad (\text{IV.188})$$

Enfin, on peut calculer le dernier terme grâce à (IV.177)

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_R} u_0^R \partial_n(y_\rho - y_0) &= \int_{\Gamma_R} u_0^R(g_\rho - g_0) \\
&= -\pi \left( \frac{a_0(R)h_0^a(R) - \tilde{a}_0(0)a_0(R)}{4I_0(R)} + \frac{a_1 h_1^a(R)}{2I_1(R)} + \frac{b_1 h_1^b(R)}{2I_1(R)} \right) \rho^2 + o(\rho^2).
\end{aligned}$$

Finalement, en regroupant les développements précédents, et en remarquant que  $\tilde{a}_0 = 2f(0)$ , on obtient

**Théorème IV.13.** *L'énergie  $E_\rho(f)$  admet le développement suivant*

$$\begin{aligned}
E_\rho(f) &= E(f) - \left[ \frac{a_0(R)^2}{8I_0(R)^2} + \frac{h_0^a(R)^2}{8} + \frac{a_0(R)h_0^a(R)}{4I_0(R)} \right] \pi \rho^2 \\
&\quad - \left[ \frac{a_1(R)^2 + b_1(R)^2}{4I_1(R)^2} + \frac{a_1(R)h_1^a(R)}{2I_1(R)} + \frac{b_1(R)h_1^b(R)}{2I_1(R)} + \frac{h_1^a(R)^2}{4} + \frac{h_1^b(R)^2}{4} \right] \pi \rho^2 \\
&\quad + \left[ \frac{f(0)a_0(R)}{2I_0(R)} + \frac{f(0)h_0^a(R)}{2} \right] \pi \rho^2 + \mathfrak{R}(f)
\end{aligned} \quad (\text{IV.189})$$

avec

$$|\mathfrak{R}(f)| \leq M\rho^2.$$

Les coefficients  $a_0, a_1$  et  $b_1$  sont donnés par

$$a_0(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \phi) d\phi.$$

$$a_1(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \phi) \sin \phi \, d\phi, \quad b_1(R) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(R, \phi) \cos \phi \, d\phi.$$

Les fonctions  $h_i^a(R)$ ,  $i = 1, 2$  sont définies en (IV.165).

Les quantités entre crochets dans (IV.189) ne dépendent pas de  $R$ , et on montre en fait sans difficultés que

$$u(0) = \frac{a_0(R)}{2I_0(R)} + \frac{h_0^a(R)}{2}$$

$$\frac{u(0)^2}{2} = \frac{a_0(R)^2}{8I_0(R)^2} + \frac{h_0^a(R)^2}{8} + \frac{a_0(R)h_0^a(R)}{4I_0(R)},$$

ainsi que

$$|\nabla u(0)|^2 = \frac{a_1(R)^2 + b_1(R)^2}{4I_1(R)^2} + \frac{a_1(R)h_1^a(R)}{2I_1(R)} + \frac{b_1(R)h_1^b(R)}{2I_1(R)} + \frac{h_1^a(R)^2}{4} + \frac{h_1^b(R)^2}{4}.$$

On en déduit une expression différente du développement asymptotique précédent, qui est en fait l'expression habituelle pour la dérivée topologique

$$E_\rho(f) = E(f) + \left[ -\frac{u(0)^2}{2} - |\nabla u(0)|^2 + f(0)u(0) \right] \pi \rho^2 + \mathfrak{R}(f). \quad (\text{IV.190})$$

On obtient donc deux expressions utilisables pour la dérivée topologique, et en remarquant qu'on a pour  $i = 1, 2$

$$\lim_{R \rightarrow 0} h_i^a(R) = 0,$$

$$\lim_{R \rightarrow 0} h_1^b(R) = 0,$$

la formule (IV.189) fournit une approximation de la dérivée topologique qui se calcule sur le contour  $\Gamma_R$ , ce qui peut être intéressant du point de vue numérique. En particulier, on peut calculer  $a_1(R)$  et  $b_1(R)$  sans calculer le gradient de la solution  $u$ .

On peut maintenant donner l'expression de la dérivée topologique pour la fonctionnelle  $J(\Omega)$ . Si on note  $B_\rho(x_0)$  la boule de centre  $x_0$  et de rayon  $\rho$ , et

$$\Omega_\rho = U \setminus B_\rho$$

alors la fonctionnelle  $J(\Omega_\rho)$  définie en (IV.7) admet le développement

$$J(\Omega_\rho) = J(\Omega) + \left[ -\frac{u(x_0)^2}{2} - |\nabla u(x_0)|^2 + f(x_0)u(x_0) - \lambda \right] \pi \rho^2 + 4P_c(\Omega)\pi\rho + o(\rho^2)$$

et la dérivée topologique de  $J$  est donc donnée par

$$\begin{cases} \mathcal{T}_\Omega(x_0) = -|\nabla u(x_0)|^2 - \frac{1}{2}u(x_0)^2 + 2uf(x_0) - \lambda & \text{si } P_c(\Omega) = 0 \\ \mathcal{T}_\Omega(x_0) = 4\mu P_c(\Omega)\pi & \text{si } P_c(\Omega) > 0 \end{cases} \quad (\text{IV.191})$$

### 3.. Le problème non-linéaire

**3.1.. Existence d'un domaine optimal.** A propos de l'existence d'un domaine optimal pour le problème (IV.3), le résultat obtenu pour le problème linéaire pourrait éventuellement être adapté car la frontière avec des conditions non-linéaire reste fixe. Une telle adaptation n'est pourtant pas triviale.

**3.2.. Dérivation par rapport au domaine.** Dans le paragraphe 3. du chapitre II, on a calculé l'expression de la dérivée directionnelle de forme pour une fonctionnelle  $J$  dépendant de la solution d'un problème non-linéaire. Il s'agissait du problème avec conditions unilatérales sur les faces de la fissure, mais le même résultat peut être appliqué dans notre situation.

Soit  $\delta \geq 0$  un paramètre donné et  $\xi \in C_0^\infty(U)$  un champ de vecteurs donné. On considère la transformation  $F_\delta = I + \delta\xi$ . On utilise la notation  $\Omega_\delta = F_\delta(\Omega)$ . Il existe un unique  $u^\delta \in K_\delta$  solution de l'égalité variationnelle suivante

$$u^\delta \in K_\delta : \int_{\Omega_\delta} \nabla u^\delta \cdot \nabla(v - u_\delta) \geq \int_{\Omega_\delta} (f - u^\delta)(v - u_\delta) \quad \forall v \in K_\delta, \quad (\text{IV.192})$$

où

$$K_\delta = \{v \in H^1(\Omega_\delta) \mid v = 0 \text{ p.p. on } \Gamma_D, v \geq 0 \text{ p.p. on } \Gamma_S\}. \quad (\text{IV.193})$$

On montre alors comme dans le chapitre II que la limite

$$J'(\Omega, \xi) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{J(\Omega_\delta) - J(\Omega)}{\delta} \quad (\text{IV.194})$$

existe et vaut

$$J'(\Omega, \xi) = \int_{\Gamma_N} \left( \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} u^2 - fu \right) \langle \xi, n \rangle dy, \quad (\text{IV.195})$$

comme dans le cas linéaire. Toutefois il s'agit seulement d'une dérivée directionnelle et non pas d'une dérivée Eulérienne comme dans le cas linéaire.

**3.3.. La dérivée topologique.** On a utilisé pour le problème linéaire la méthode de troncation de domaine. L'intérêt de cette technique est qu'elle peut être utilisée également dans le cas non-linéaire du problème de Signiorini. En utilisant un résultat abstrait sur la différentiabilité conique de la solution d'une inéquation variationnelle, on peut adapter un résultat de [64] et montrer que la solution  $u_\rho^R$  de IV.3 sur le domaine tronqué  $\Omega_\delta^R$  admet le développement suivant

$$u_\rho^R = u^R + \rho^2 q + o(\rho^2),$$

où  $q$  est la dérivée topologique extérieure de la solution  $u$  du problème de Signiorini (IV.3) sans trou,  $q$  est également l'unique solution de l'inégalité variationnelle suivante

$$a(q, v - q) + a'(u^R, v - q) \geq l'(v - q), \quad q \in S_K(u^R)$$

$$S_K(u^R) = \{v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega_R) \mid v \geq 0 \text{ sur } \Xi(u^R), a(u^R, v) = 0\}$$

L'ensemble de coïncidence  $\Xi(u) = \{x \in \Gamma_s \mid u(x) = 0\}$  est bien défini pour toute fonction  $u \in H^1(\Omega_R)$  et la fonction  $u_\rho^R$  est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u_\rho^R + u_\rho^R = f & \text{dans } \Omega_R, \\ u_\rho^R \geq 0, \partial_n u_\rho^R \geq 0, u_\rho^R \partial_n u_\rho^R = 0 & \text{sur } \partial U, \\ -\partial_n y_\rho + \partial_n u_\rho^R = A_\rho(u_\rho^R) & \text{sur } \Gamma_R, \end{array} \right. \quad (\text{IV.196})$$

Les formes bilinéaire  $a_\rho(u, v)$  et linéaire  $l_\rho(v)$  sont définies comme en (IV.43) et (IV.44). Comme

$$a_\rho(v, v) = E^{(1)}(v),$$

on en déduit l'expression de  $a'(u, v)$  grâce au développement (IV.153). De même  $l'(v)$  est obtenu grâce au développement (IV.177). Enfin, on peut montrer que

$$u_\rho|_{\Omega_R} = u|_{\Omega_R} + \rho^2 q|_{\Omega_R} + o(\rho^2),$$

et on en déduit la même formule pour la dérivée topologique de  $E_\rho(f)$  que dans le cas linéaire.

#### 4.. La formulation "levelset"

**4.1.. L'équation de Hamilton-Jacobi.** L'idée de base de la méthode "levelset" est de représenter un domaine et sa frontière comme des lignes de niveau d'une fonction continue  $\phi$  définie sur tout le domaine  $U$ . Considérons la transformation du domaine

$$\Omega_t \subset (I + t\xi)(\Omega) \subset U \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

par un champ de vitesse  $\xi$ . Le domaine et la frontière sont définis par une fonction  $\phi = \phi(x, t)$  telle que

$$\Omega_t = \{x \in U, \phi(x, t) < 0\} \quad \text{et} \quad \partial\Omega_t = \{x \in U, \phi(x, t) = 0\}, \quad (\text{IV.197})$$

c'est à dire que la frontière  $\partial\Omega_t$  est la courbe de niveau zéro de la fonction  $\phi$  (see Fig. 3).

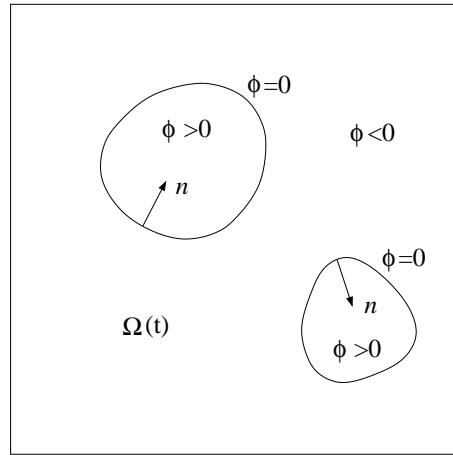


FIG. 3. Domaine et fonction levelset.

Soit  $x(t)$  la position d'une particule sur la frontière  $\partial\Omega_t$  se déplaçant avec la vitesse  $\xi = \dot{x}(t)$ . En dérivant la relation  $\phi(x(t), t) = 0$  par rapport à  $t$ , on obtient l'équation de transport

$$\phi_t + \xi \cdot \nabla \phi = 0. \quad (\text{IV.198})$$

De plus, les directions normales  $n$  aux courbes de niveau de  $\phi$  sont données par  $n = \nabla \phi / |\nabla \phi|$ . L'évolution de  $\phi$  est alors gouvernée par l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\phi_t + \xi_n |\nabla \phi| = 0 \quad \text{dans } U \times \mathbb{R}^+ \quad (\text{IV.199})$$

où  $\xi_n$  est la vitesse normale (la composante normale de  $\xi$ ) autrement dit  $\xi_n = \xi \cdot n$ . On doit ajouter une condition initiale et une condition aux limites avec l'équation de Hamilton-Jacobi (IV.199). La donnée initiale  $\phi(0, x) = \phi_0(x)$  est choisie comme la fonction distance

signée à la frontière initiale  $\partial\Omega_0$  i.e.

$$\phi_0(x) = \pm \text{dist}(x, \partial\Omega_0), \quad (\text{IV.200})$$

avec le signe moins (resp. plus) si le point  $x$  est à l'intérieur (resp. à l'extérieur) du domaine initial  $\Omega_0$ .

Une condition limite doit également être imposée sur la partie de la frontière  $\Gamma_D$  du domaine  $U$  où la vitesse normale  $\xi_n$  est négative, c'est-à-dire là où la vitesse est dirigée vers l'intérieur du domaine  $U$ . En outre, on décide d'imposer des conditions de Neumann homogène sur toute la frontière  $\Gamma_D$  :

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \Gamma_D. \quad (\text{IV.201})$$

**4.2.. Vitesse normale pour l'équation de la fonction "levelset".** Quand un trou est créé à l'intérieur du domaine, la condition limite pour l'équation d'état sur la frontière du trou est de type Neumann. La dérivée par rapport au domaine est alors donnée par (IV.37). Pour de petites perturbations du domaine, on veut  $dJ(\Omega; \xi) > 0$ . Etant donné l'expression (IV.37), on fait donc le choix suivant pour la composante normale  $\xi_n = \xi \cdot n$  du champ de vitesse

$$\xi_n = \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}u^2 - fu + \lambda - 2P_c(\Omega)\mu\mathcal{H} \quad (\text{IV.202})$$

on a alors clairement  $dJ(\Omega; \xi) \geq 0$ .

## 5.. L'algorithme d'optimisation de forme

On va maintenant décrire les étapes du calcul numérique

### Première étape : le domaine initial

Tout d'abord, on calcule la solution du problème (IV.2) à l'aide d'une méthode éléments finis sur un maillage (non-structuré) approprié. On peut alors calculer la dérivée topologique (IV.191) qui nous montre où créer un trou dans le domaine  $\Omega^0$ .

### Deuxième étape : créer un trou

On crée un trou circulaire  $\omega_\rho$ . On impose une condition de Neumann sur sa frontière. Le rayon de ce trou doit être aussi petit que possible, selon le pas d'espace de la grille.

### Troisième étape : évolution

On procède maintenant à l'évolution du domaine. On doit calculer les solutions  $\phi$  de l'équation d'Hamilton-Jacobi (IV.199). La fonction  $\phi$  initiale est prise comme la fonction distance signée au domaine  $\Omega^0$ . Comme la vitesse normale  $\xi_n$  est connue seulement sur la frontière interne  $\Gamma_N$  de  $\partial\Omega^0$ , on doit l'étendre à tout le domaine  $U$ . Cette extension est nécessaire pour résoudre l'équation (IV.199) dans  $U$ . Le paragraphe suivant explique comment procéder pour construire l'extension de la vitesse numériquement de façon adéquate. Une fois calculée la fonction "levelset", on peut déterminer le nouveau domaine  $\Omega^1$ . On revient ensuite à la première étape avec  $\Omega^1$  au lieu de  $\Omega^0$ . Il n'est pas nécessaire de créer un trou à chaque étape, mais seulement quand il est intéressant de le faire.

## 6.. Méthode numérique pour l'équation "levelset"

On décrit maintenant comment construire l'extension de la vitesse normale à tout le domaine  $U$  et comment résoudre l'équation de hamilton-Jacobi associée (IV.199).

On commence par une remarque générale sur la résolution numérique de (IV.199). Pour un calcul numérique précis, la solution de l'équation (IV.199) ne doit être ni trop plate ni trop pentue. C'est le cas si  $\phi$  est une fonction distance i.e.  $|\nabla\phi| = 1$ . Malheureusement, même si on initialise avec une fonction distance (signée) pour la donnée initiale  $\phi_0$ , la solution  $\phi$  de l'équation (IV.199) ne reste pas en général proche de la fonction distance. On peut réaliser une réinitialisation de  $\phi$  au temps  $t$  en cherchant la solution  $\varphi = \varphi(\tau, x)$  de l'équation suivante, jusqu'à l'état stationnaire (voir [57])

$$\varphi_\tau + S(\phi)(|\nabla\varphi| - 1) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times U, \quad (\text{IV.203})$$

$$\varphi(0, x) = \phi(t, x), \quad x \in U, \quad (\text{IV.204})$$

Ici,  $S$  est une approximation de la fonction signe i.e.

$$S(d) = \frac{d}{\sqrt{d^2 + |\nabla d|^2 \varepsilon^2}}, \quad (\text{IV.205})$$

avec  $\varepsilon = \min(\Delta x, \Delta y)$  où  $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont les pas de discrétisation en espace dans les directions  $x$  et  $y$  (voir ci-dessous). D'autres choix sont possibles pour l'approximation de la fonction signe. On se réfère à [57] pour plus de détails.

**6.1.. Extension de la vitesse normale.** La vitesse normale  $\xi_n$  doit être définie sur tout le domaine  $U$  si l'on veut résoudre l'équation (IV.199). Comme la vitesse normale  $\xi_n$  est donnée seulement sur la frontière  $\Gamma_N$  (voir (IV.202)), on doit l'étendre au domaine  $U$ . On peut également étendre la vitesse normale de manière à forcer la solution  $\phi$  de l'équation de Hamilton-Jacobi à rester proche de la fonction distance. En effet, si on est capable de calculer une extension de la vitesse normale  $\xi_{\text{ext}}$  telle que

$$\nabla \xi_{\text{ext}} \cdot \nabla \phi = 0 \text{ in } U \times \mathbb{R}^+, \quad (\text{IV.206})$$

alors on peut montrer que (voir [70]) la solution  $\phi$  de l'équation (IV.199) satisfait à  $|\nabla\phi| = 1$ . Pour construire une extension  $\xi_{\text{ext}}$  satisfaisant (IV.206) au temps  $t$  il faut résoudre l'équation suivante, jusqu'à l'état stationnaire (voir [55], [57])

$$q_\tau + S(\phi) \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \cdot \nabla q = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times U \quad (\text{IV.207})$$

$$q(0, x) = p(t, x), \quad x \in U \quad (\text{IV.208})$$

où  $p$  est égal à  $\xi_n$  sur la frontière  $\Gamma_N$  et 0 partout ailleurs. La fonction  $S$  est l'approximation de la fonction signe définie par (IV.205).

**6.2.. Discrétisation de l'équation de Hamilton-Jacobi.** On fixe le carré unité  $U = (0, 1) \times (0, 1)$ . Pour la discrétisation de l'équation de Hamilton-Jacobi (IV.199), on définit d'abord la grille de  $U$ . On introduit les noeuds  $P_{ij}$  dont les coordonnées sont données par  $(i\Delta x, j\Delta y)$  où  $\Delta x$  et  $\Delta y$  sont les pas de discrétisation en espace dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement. On note également que  $t^k = k\Delta t$  le temps discret pour  $k \in \mathbb{N}$ , où  $\Delta t$  est le pas de temps. On cherche une approximation  $\phi_{ij}^k \simeq \phi(P_{ij}, t^k)$ . Le

schéma numérique qu'on utilise ici est proposé par Osher et Sethian [56],[59],[55]. Ce schéma "upwind" explicite s'écrit

$$\phi_{ij}^{k+1} = \phi_{ij}^k - \Delta t g(D_-^x \phi_{ij}^k, D_+^x \phi_{ij}^k, D_-^y \phi_{ij}^k, D_+^y \phi_{ij}^k) \quad (\text{IV.209})$$

où

$$D_-^x \phi_{ij} = \frac{\phi_{ij} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x}, \quad D_+^x \phi_{ij} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{ij}}{\Delta x}, \quad (\text{IV.210})$$

sont les approximations à gauche et à droite de la dérivée en  $x$  de  $\phi$  en  $P_{ij}$ . On a des expressions similaires pour les approximations  $D_-^y$  et  $D_+^y$  de la dérivée en  $y$ . Le flux numérique est donné par

$$g_{ij} = g(D_-^x \phi_{ij}, D_+^x \phi_{ij}, D_-^y \phi_{ij}, D_+^y \phi_{ij}) = \max(v_{ij}, 0) G^+ + \min(v_{ij}, 0) G^-$$

avec

$$G^+ = \left[ \max(D_-^x v_{ij}, 0)^2 + \min(D_+^x v_{ij}, 0)^2 + \max(D_-^y v_{ij}, 0)^2 + \min(D_+^y v_{ij}, 0)^2 \right]^{1/2}$$

$$G^- = \left[ \min(D_-^x v_{ij}, 0)^2 + \max(D_+^x v_{ij}, 0)^2 + \min(D_-^y v_{ij}, 0)^2 + \max(D_+^y v_{ij}, 0)^2 \right]^{1/2}$$

et  $v_{ij} = \xi_n(P_{ij})$  est l'extension de la vitesse normale au point  $P_{ij}$ . Ce schéma "upwind" est stable sous la condition CFL

$$(\max_U |\xi_n|) \Delta t \left( \frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta y} \right) \leq \frac{1}{2}. \quad (\text{IV.211})$$

**6.3.. Calcul de l'extension de la vitesse.** A chaque itération  $k$  du schéma précédent, on calcule l'extension de la vitesse normale comme la solution stationnaire de (IV.207),(IV.208). On calcule  $q_{ij}^n \simeq q(P_{ij}, t^n)$  à partir de l'approximation suivante de (IV.207) :

$$q_{ij}^{n+1} = q_{ij}^n - \Delta \tau \left[ \max(s_{ij} n_{ij}^x, 0) D_-^x q_{ij} + \min(s_{ij} n_{ij}^x, 0) D_+^x q_{ij} + \max(s_{ij} n_{ij}^y, 0) D_-^y q_{ij} + \min(s_{ij} n_{ij}^y, 0) D_+^y q_{ij} \right], \quad (\text{IV.212})$$

où  $s_{ij} = S(\phi_{ij}^n)$ . On utilise des différences centrées pour calculer l'approximation  $n_{ij}$  du vecteur normal unitaire  $n = (n^x, n^y) = (\phi_x / \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}, \phi_y / \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2})$  au noeud  $P_{ij}$ . La valeur initiale  $q_0$  est égale à  $\xi_n$  sur les points de la grille dont la distance à l'interface est inférieure à  $\min(\Delta x, \Delta y)$  et égale à zéro partout ailleurs.

## 7.. Résultats numériques

Des calculs numériques ont été réalisés pour des équations variationnelles avec  $\Gamma_S = \emptyset$  i.e. quand on impose des conditions de Dirichlet sur la frontière extérieure  $\Gamma_D$ . Pour le premier résultat (voir figure 4), on utilise la dérivée topologique pour créer des trous, on peut voir l'apparition des trous sur l'illustration suivante. L'équation de Hamilton-Jacobi est résolue sur une grille  $51 \times 51$ . Les paramètres utilisés pour les calculs sont

$$f = 10 \sin^2(4\pi x), \quad \lambda = 0.5, \quad \mu = 0$$

Si on appelle  $\Omega_1$  le domaine optimal pour ce premier exemple, la valeur constatée pour la fonctionnelle  $J$  en  $\Omega_1$  est

$$J(\Omega_1) = 0,282319.$$



Dans le deuxième exemple (voir figure 5), on n'utilise pas la dérivée topologique, et on se contente de modifier la frontière du domaine initial à l'aide du gradient de forme pour comparer avec le cas précédent. Il est nécessaire de choisir un domaine initial avec de nombreux trous pour trouver la topologie adéquate. Ici, le domaine initial est le carré privé de 21 trous placés régulièrement.

De plus, on résout l'équation de Hamilton-Jacobi sur une grille  $101 \times 101$  à cause de ces nombreux trous ce qui ralentit considérablement le programme. On constate alors que l'algorithme converge vers un maximum local seulement, car on n'a pas réussi à capter la topologie idéale. En effet, si on appelle  $\Omega_2$  le domaine optimal pour ce premier exemple, on a

$$J(\Omega_2) = 0,2640695 < J(\Omega_1) = 0,282319.$$

Autrement dit  $\Omega_1$  permet une amélioration de 6,5% de la fonctionnelle  $J$  par rapport à  $\Omega_2$ . Il est également intéressant de constater que même sans utiliser la dérivée topologique, le nombre de composantes connexes du complémentaire de  $\Omega$  peut augmenter comme on peut le voir sur la figure 5, non pas par création d'un trou mais par la séparation d'une composante connexe en deux composantes connexes. Cela reste une situation exceptionnelle et le deuxième exemple montre bien que si on n'a pas recours à la dérivée topologique, la solution optimale trouvée dépend fortement du domaine initial, ce qui n'est pas le cas si on utilise la dérivée topologique.

L'autre aspect intéressant est le temps de calcul, qui est beaucoup moins long dans le premier exemple que dans le deuxième, en raison notamment du nombre de noeuds qui doit être doublé pour Hamilton-Jacobi dans les deux directions.

Dans le troisième exemple (voir figure 7), le cas non-linéaire est étudié. La fonction source  $f$  et la solution  $u$  et son gradient sont représentés sur la figure 6. On constate que la convergence vers un maximum a lieu globalement, mais localement, la fonctionnelle est beaucoup plus sensible aux petites perturbations du domaine. Ceci s'explique par la nature des dérivées plus faible que pour le problème linéaire (dérivée directionnelle).

Sur les figures 8,9 et 10, on compare trois cas sans la contrainte de périmètre ou avec cette contrainte. Dans les deux premiers cas, la fonctionnelle n'est pas pénalisée par le périmètre et on voit apparaître des oscillations plus ou moins importantes selon la valeur de  $\lambda$ , autrement dit selon le poids affecté à la contrainte de volume. Cela signifie qu'on n'a pas de solutions optimales pour le problème d'optimisation car le périmètre tend vers l'infini. La figure 10 montre alors l'effet régularisant de la contrainte de périmètre pour la même fonction source.

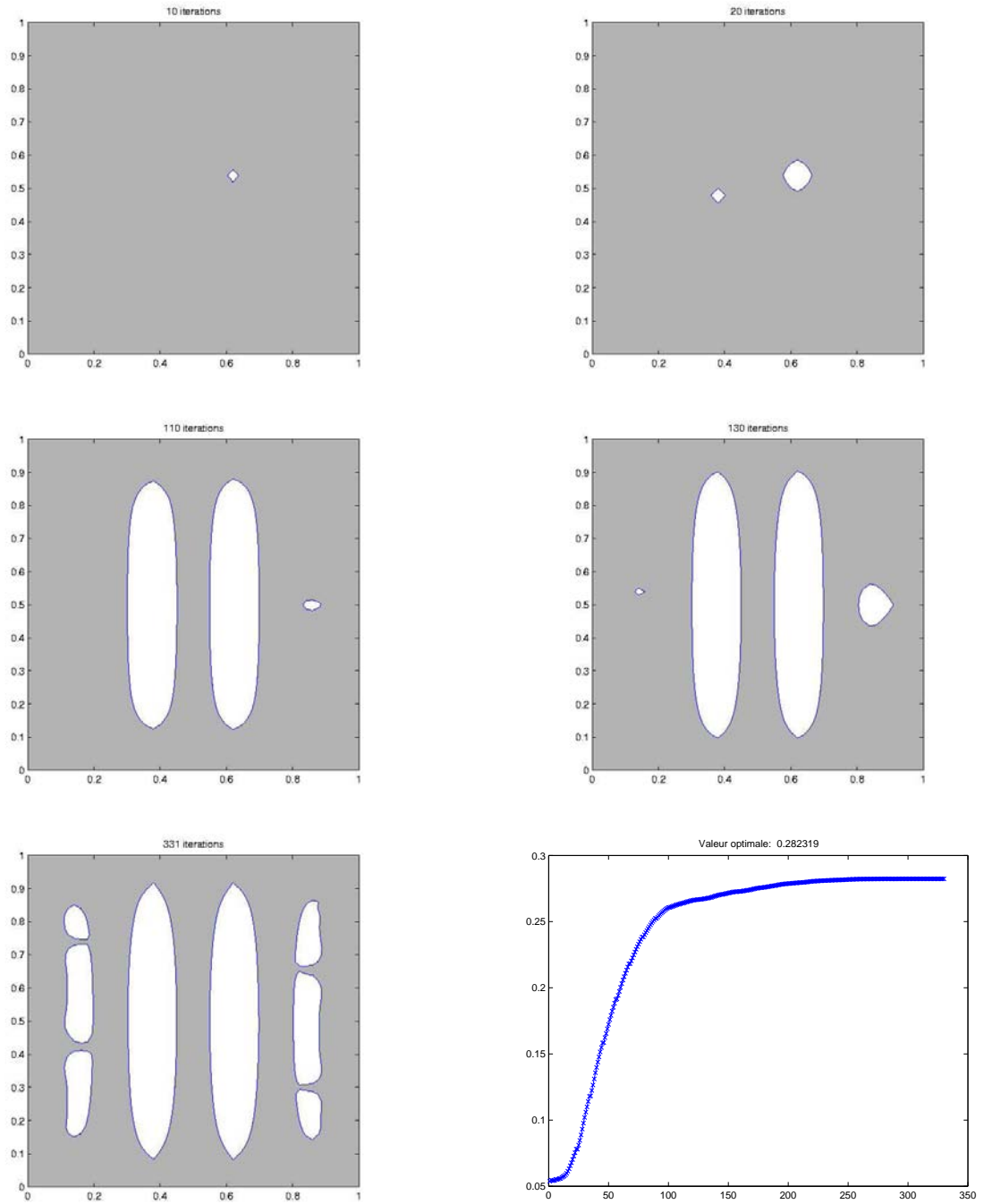


FIG. 4. Utilisation de la dérivée topologique, domaine initial plein  
 $f = 10 \sin^2(4\pi x)$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $\mu = 0$

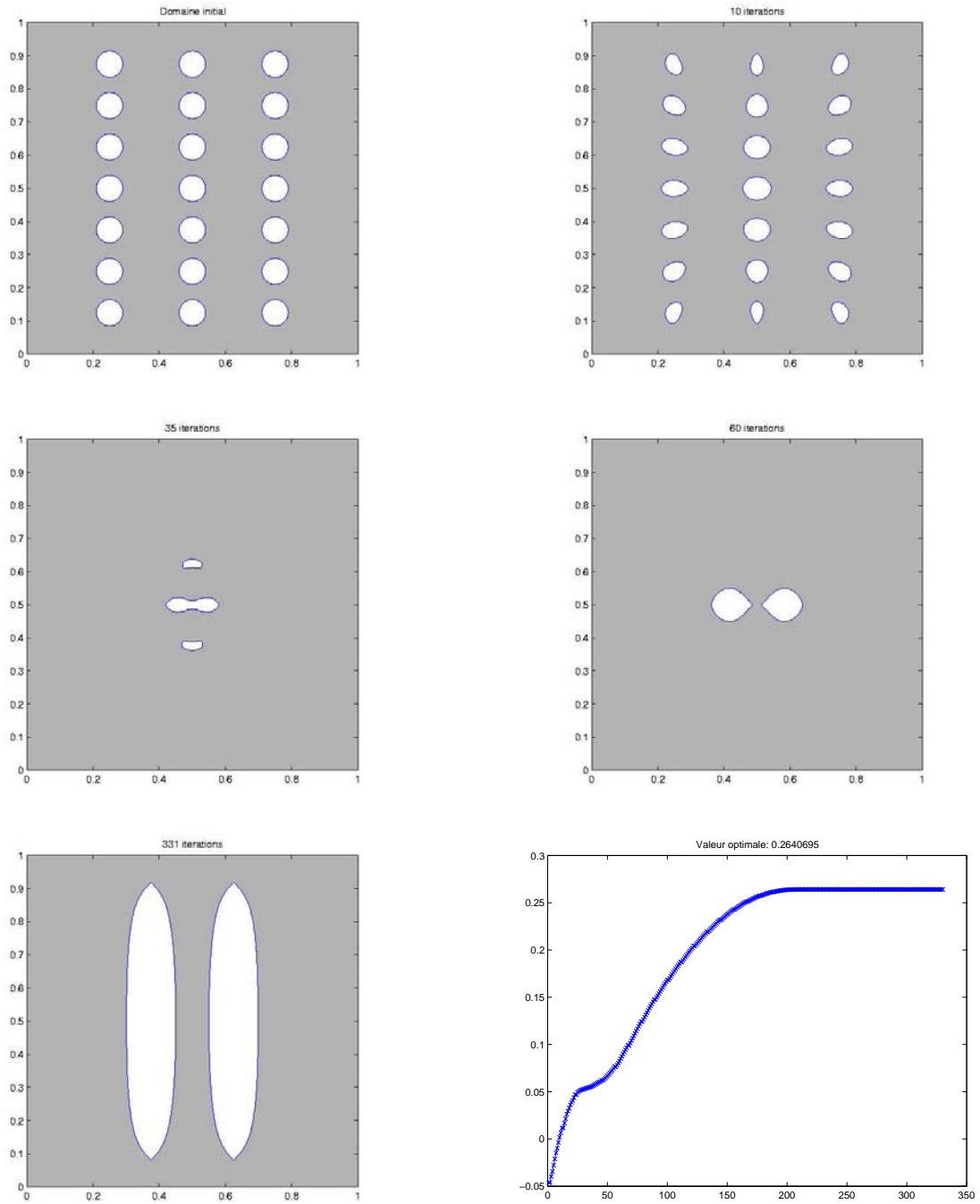
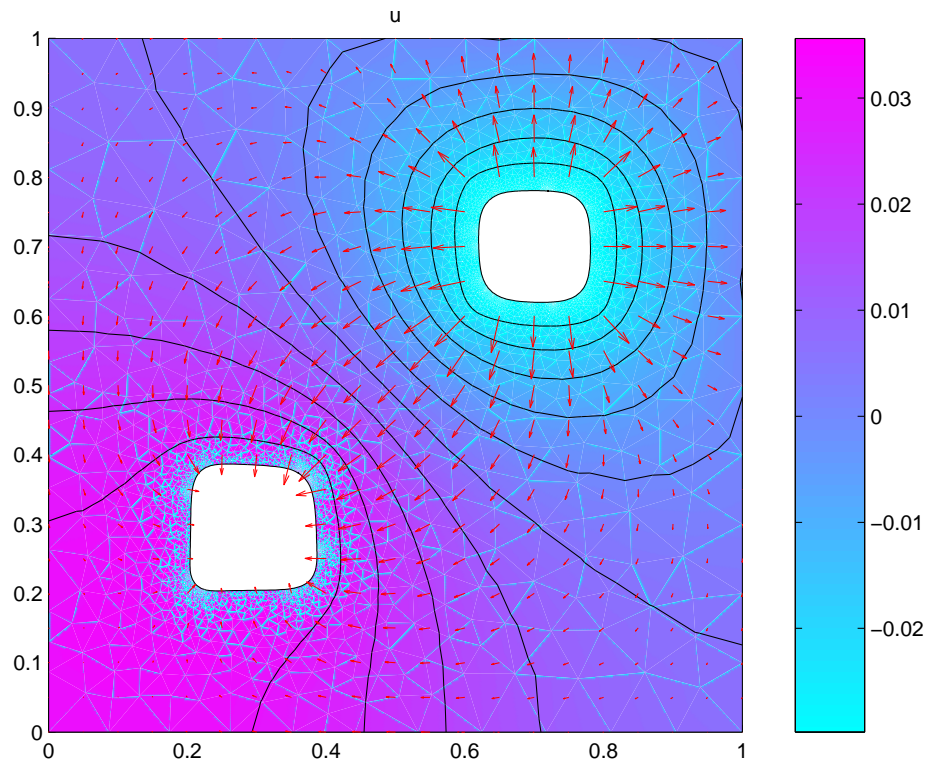
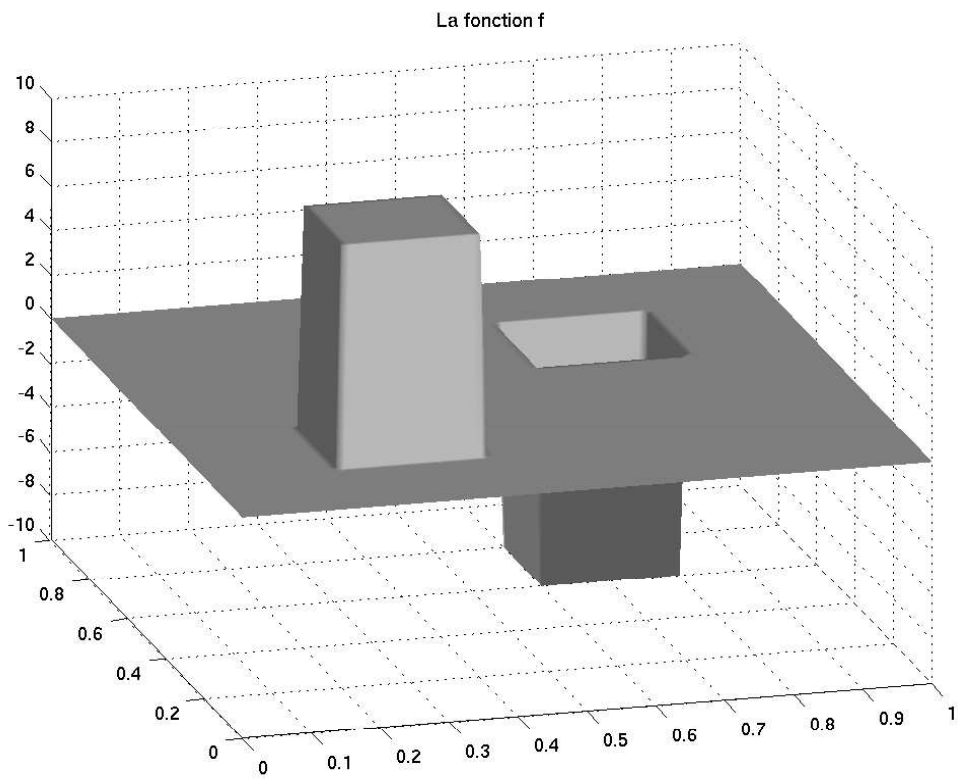


FIG. 5. Pas de création de trou, domaine initial troué  
 $f = 10 \sin^2(4\pi x)$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $\mu = 0$

FIG. 6. La fonction  $f$  et la solution  $u$  sur le domaine final

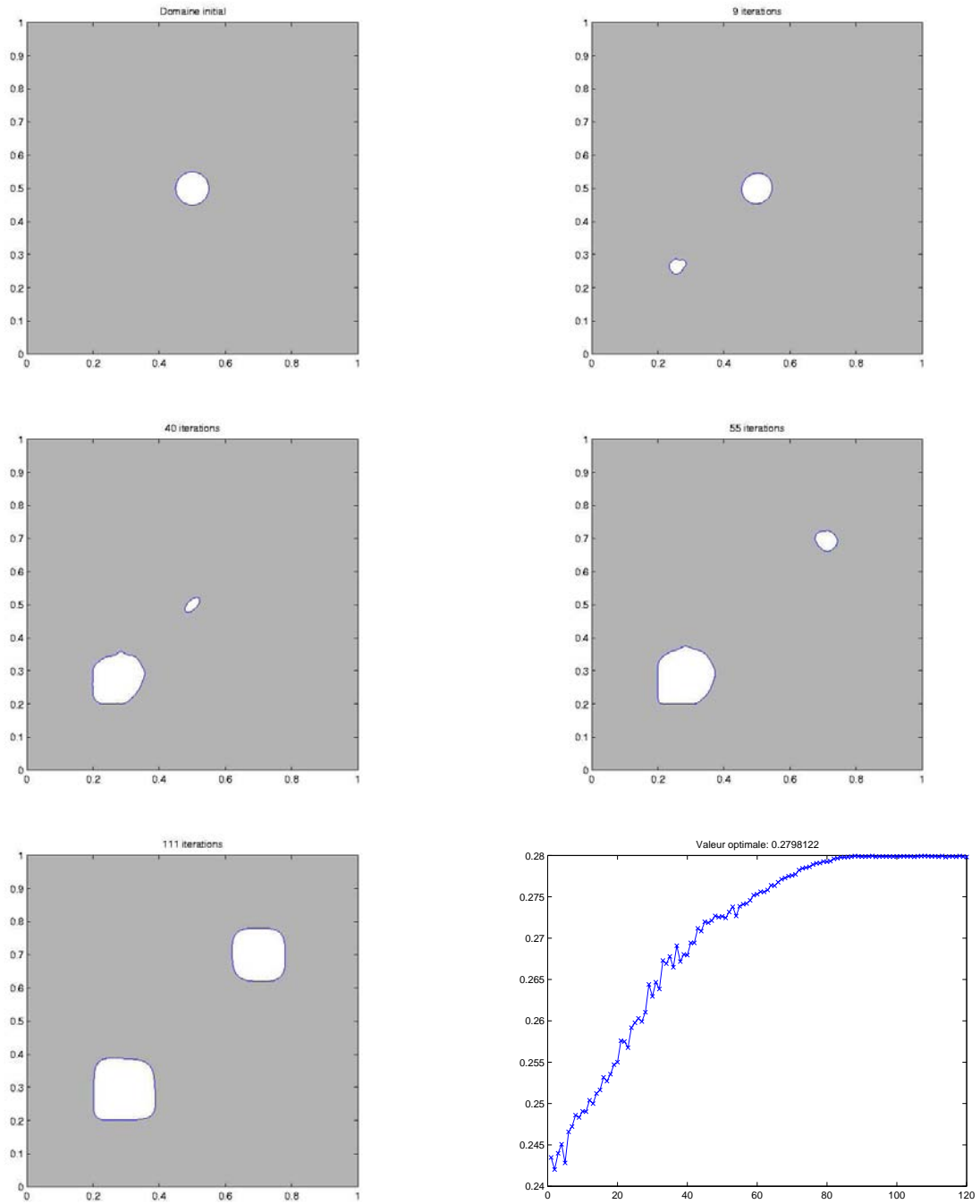


FIG. 7. Le cas non-linéaire  
 $\lambda = 0.3$ ,  $\mu = 0.001$ ,  $c = 0.6$

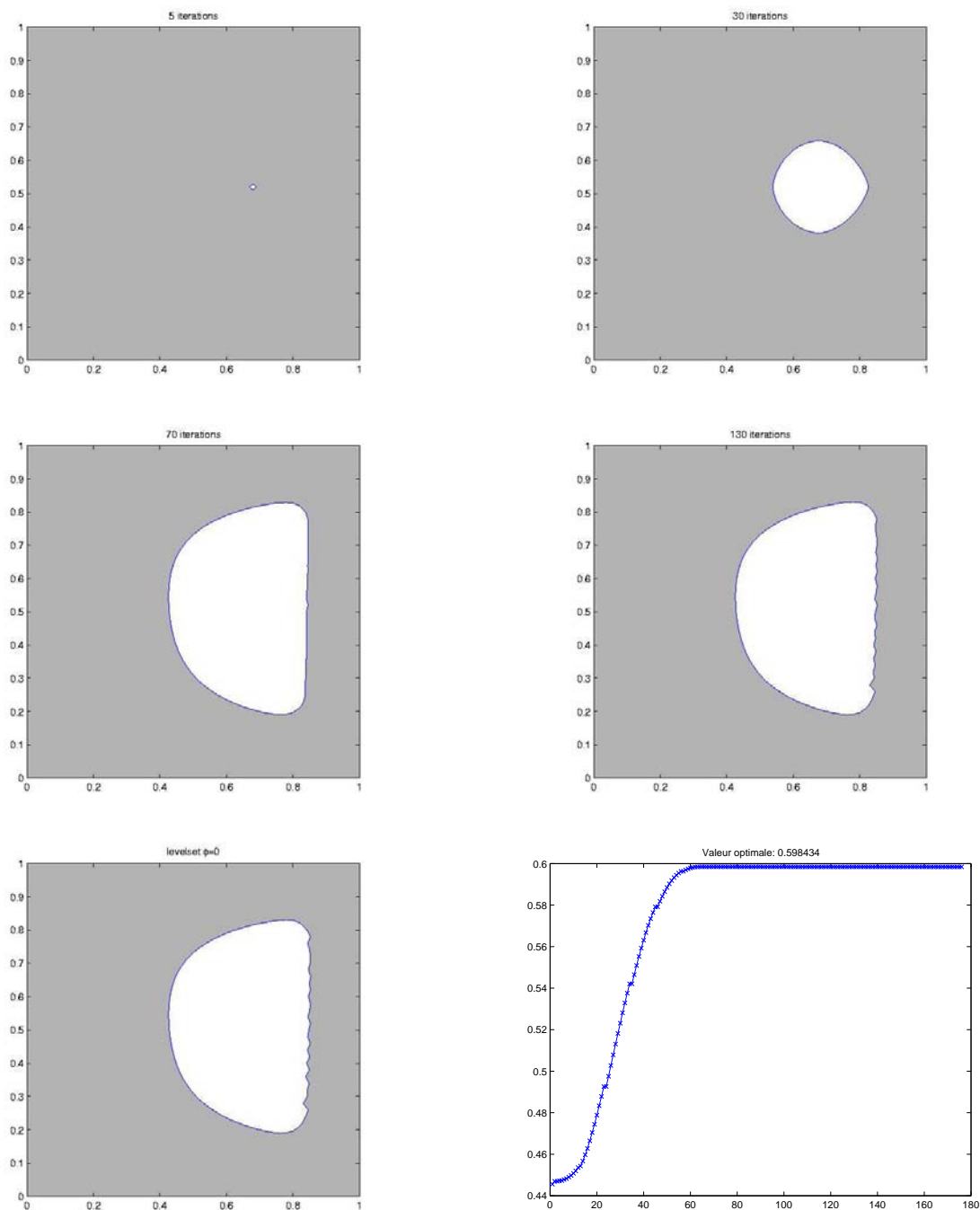


FIG. 8. On observe un début d'oscillations

$$f = 10x + y, \lambda = 1, \mu = 0$$

Valeur optimale :  $J(\Omega) = 0,598434$

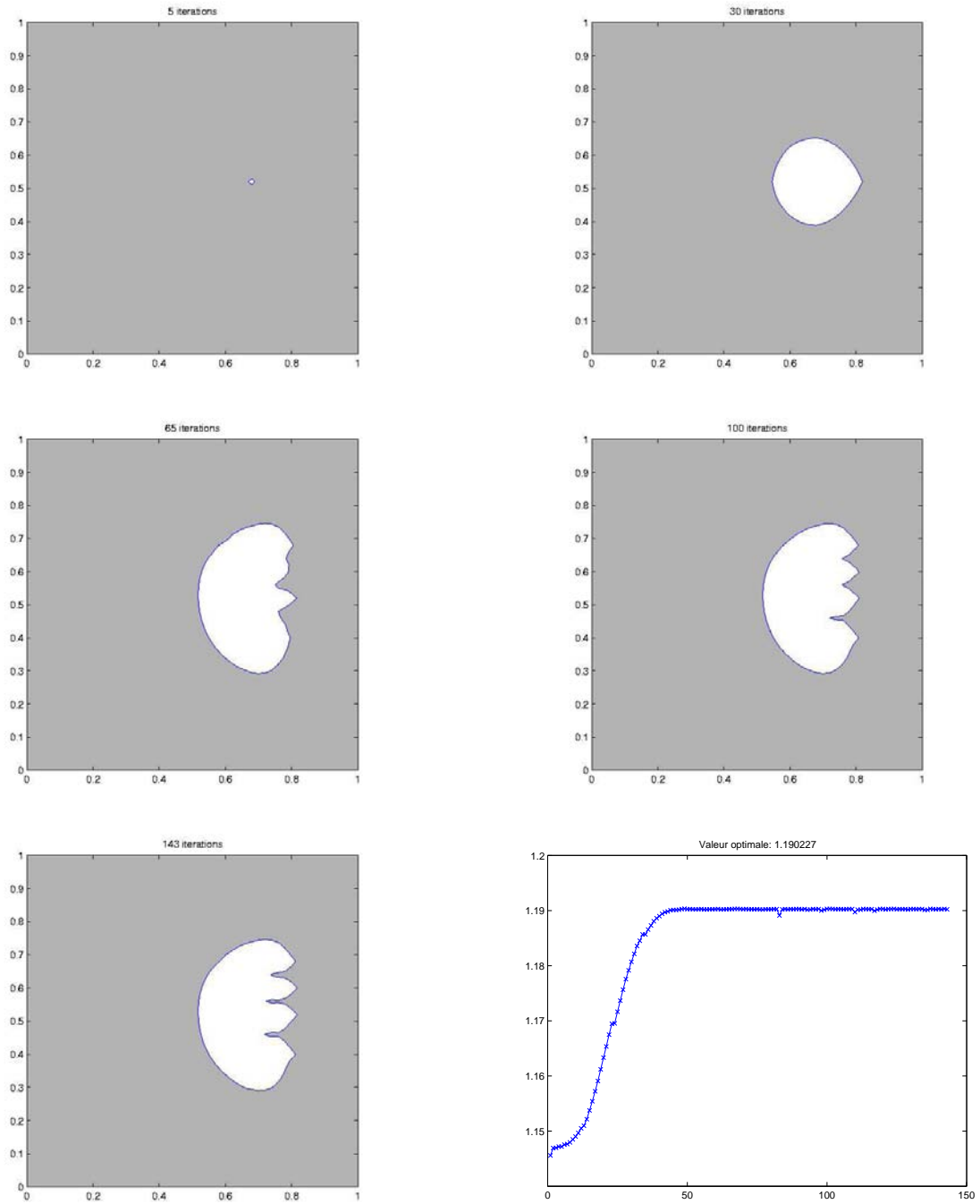


FIG. 9. On observe de fortes oscillations

$$f = 10x + y, \lambda = 1,7, \mu = 0$$

$$\text{Valeur optimale : } J(\Omega) = 1.190227$$

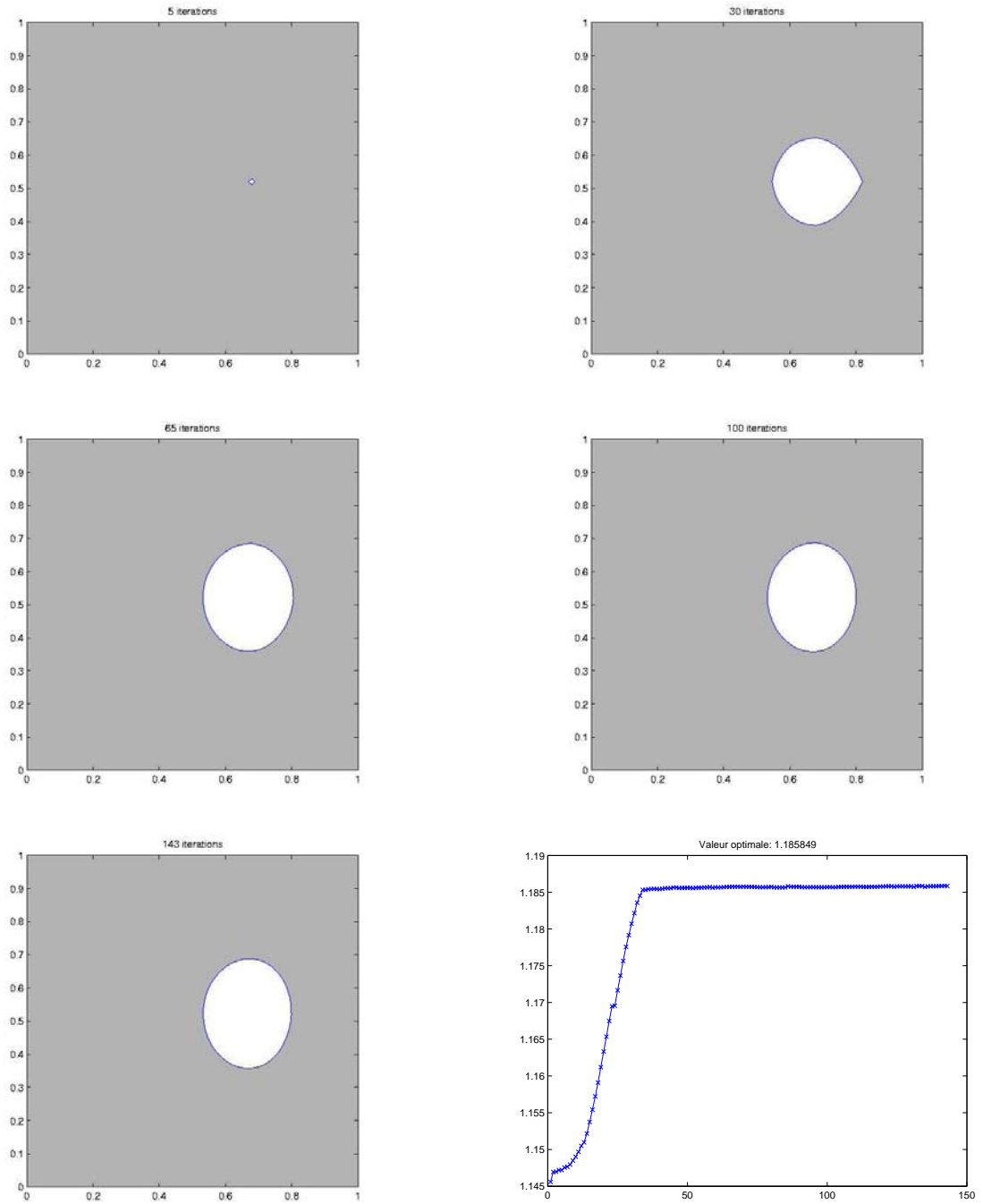


FIG. 10. Les oscillations ont disparu  
 $f = 10x + y$ ,  $\lambda = 1,7$ ,  $\mu = 0,4$   
 Valeur optimale :  $J(\Omega) = 1.185849$





## Conclusions et perspectives

Trois thèmes ont été traités dans cette thèse :

**Dans la première partie**, nous avons obtenu le théorème de structure dans des domaines fissurés pour les dérivées premières et secondes. Le théorème de structure pour la dérivée première avait déjà été obtenu par Frémiot dans sa thèse [22] mais dans un cadre différent, i.e. celui de la semi-dérivabilité eulérienne. Nous retrouvons donc ici le théorème au premier ordre et y ajoutons la structure pour la dérivée seconde. A l'issue de cette thèse, on constate que de nombreux résultats théoriques peuvent encore être obtenus. Par exemple, le coefficient de singularité  $c$  dans la décomposition du domaine (II.36) dépend lui-même du domaine, et le calcul de la dérivée de forme de ce terme permettrait de calculer les coefficients donnés par le théorème de structure pour la dérivée seconde, comme on l'a fait pour la dérivée première.

Plusieurs applications pratiques de ces résultats peuvent être envisagés. Par exemple la méthode du serpent permettant de détecter des contours dans une image utilise des dérivées de forme dans des domaines fissurés. On peut envisager l'utilisation de la dérivée seconde pour une méthode de Newton. Une autre application à l'analyse d'images en cours d'études est l'utilisation de fissures dont le périmètre reste constant pour ajouter une composante tangentielle à la vitesse qui déforme une image. Cette composante tangentielle est utile pour définir une vitesse la plus uniforme possible.

**Dans la deuxième partie**, nous avons étudié l'utilisation d'extensions auto-adjointes pour modéliser la création d'un petit trou en optimisation de formes. Cette méthode issue de la physique mathématique a notamment été introduite par Nazarov en optimisation de formes. Dans cette thèse, nous étudions le comportement de fonctionnelles d'énergie dans  $L_p$  quand la position  $h$  du trou varie. Nous étudions également la variation d'une fonctionnelle d'énergie approchée définie à partir de l'extension auto-adjointe et nous retrouvons la valeur de la dérivée topologique qui montre que l'approximation est correcte au premier ordre. Enfin nous considérons la variation de la frontière extérieure pour cette fonctionnelle d'énergie approchée, et nous obtenons une dérivée de forme et topologique simultanée.

Sur le plan pratique, l'intérêt de cette modélisation est qu'on travaille sur un domaine sans trou, ce qui peut présenter un avantage du point de vue numérique. En effet la création d'un trou infinitesimal est difficile à appréhender numériquement car la singularité qui apparaît oblige à raffiner considérablement le maillage ce qui alourdit le calcul. A l'aide des extensions auto-adjointes, on remplace la perturbation singulière du domaine par une perturbation de l'opérateur Laplacien. Une application possible de

cette modélisation par des extensions auto-adjointes est un problème inverse de corrosion où une partie de la frontière est inconnue ainsi qu'une cavité circulaire de taille et de position inconnue. A partir de l'observation effectuée sur une partie du domaine, on cherche à retrouver cette frontière et cette cavité inconnus.

**Dans la troisième partie**, nous utilisons à la fois la dérivée par rapport au domaine et la dérivée topologique pour trouver la géométrie optimale d'un problème d'optimisation de forme. Dans [70], la méthode "levelset" et la dérivée topologique sont couplés en introduisant la dérivée topologique sous forme de terme source dans l'équation de Hamilton-Jacobi. Dans [2], le cas de l'élasticité linéaire est traité avec la méthode "levelset" : la dérivée topologique est aussi utilisée pour définir un critère de nucléation permettant, à certaines étapes du calcul, de déterminer où il serait avantageux, du point de vue de la décroissance de la fonction-objectif, de percer un trou de taille infinitésimale.

L'originalité de cette troisième partie réside donc essentiellement dans le calcul des gradients topologique et de forme pour le problème non-linéaire de Signiorini, et leur application à la résolution numérique d'un problème d'optimisation de forme. Les résultats numériques obtenus corroborent les résultats théoriques même si on constate une plus grande instabilité que pour le problème linéaire. Une application à d'autres conditions non-linéaires au bord ainsi qu'au problème de l'élasticité peuvent donc être envisagées. On peut également envisager des calculs numériques dans des domaines contenant des fissures.

La méthode "levelset" est idéale pour appréhender facilement des changements de topologie en dimension deux, et dans une moindre mesure en dimension trois comme le montre [2], mais rien n'a été démontré en ce qui concerne la convergence de la méthode. Des travaux sont en cours sur ce sujet qui permettent d'espérer des résultats dans un avenir proche.

## Bibliographie

- [1] S. ALBEVERIO, P. KURASOV *Singular perturbations of differential operators : Solvable Schrödinger type operators*, Cambridge : Cambridge university press , 1999.
- [2] G. ALLAIRE, F. DE GOURNAY, F. JOUVE, A.M. TOADER, *Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method*, Control and cybernetics (2005).
- [3] G. ALLAIRE, F. JOUVE, A.-M. TOADER, *Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method* Journal of Computational Physics, Vol. 194, Issue 1, 2004, pp. 363–393.
- [4] S. AMSTUTZ, I. HORCHANI, M. MASMOUDI, *Crack detection by the topological gradient method*, Control and Cybernetics 34(1), pp. 81-101, 2005.
- [5] I.I. ARGATOV, S.A. NAZAROV *Energy release caused by the kinking of a crack in a plane anisotropic solid* J.Appl.Maths Mechs, Vol.66, No. 3,pp. 491-503, 2002.
- [6] M. BACH, A.M. KHLUDNEV, V.A. KOVTUNENKO *Derivatives of the energy fonctional for 2D-problems with a crack under Signorini and friction conditions*. Math. Methods Appl. Sci. 23 (2000), no. 6, 515–534.
- [7] J. BLAT, J.M. MOREL *Elliptic problems in image segmentation and their relation to fracture theory*. In recent advances in nonlinear elliptic and parabolic problems. Proceedings of an international conference, Eds. :P. Benilan, M. Chipot, L.C. Evans, M. Pierre. Longman Scientific and Technical, 1988.
- [8] D. BUCUR *Contrôle par rapport au domaine dans les E.D.P.*, Thèse de doctorat de l'école des mines de Paris, 1995.
- [9] D. BUCUR, N. VARCHON *Boundary variation for a Neumann problem*, Ann. Scuola Norm.Sup.Pisa Cl.Sci., 4 29 (2000), 807-821.
- [10] D. BUCUR, N. VARCHON *A duality approach for the boundary variation of Neumann problems*, SIAM J. MATH ANAL. Vol. 34 (2002), No.2,pp. 460-477
- [11] D. BUCUR, G. BUTTAZZO, *Variationnal methods in some shape optimization problems*, Appunti dei Corsi Tenuti da Docenti della Scuola, Scuola Normale Superiore, Pisa, 2002 and Birkhäuser Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications 2005.
- [12] D. BUCUR, G. BUTTAZZO, N. VARCHON, *On the problem of optimal cutting*, SIAM Journal on Optimization, Vol. 13, Issue 1 (2002), 157 - 167.
- [13] D. BUCUR, J.P. ZOLÉSIO, *Boundary optimization under pseudo curvature constraint*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Sc. Fis e Mat, Ser IV, XXIII, Fasc. 4 (1996), pp. 681-699.
- [14] D. BUCUR, J.P. ZOLÉSIO, *Anatomy of the shape Hessian via Lie brackets*, Ann. Mat. Pura Appl. 173 (1997), no.4, 127-143.
- [15] H.D. BUI, A. EHRLACHER, *Developements of fracture mechanics in France in the last decades*. In Fracture Research in Retrospect, H.P. Rossmannith (Ed.), A.A.Balkema, Rotterdam, 369-387,1997.
- [16] A. CHAMBOLLE, F. DOVERI *Continuity of Neumann linear elliptic problems on varying two-dimensional bounded open sets.*, Commun. Partial Differ. Equations, 22 (5-6)(1997), 811-840.
- [17] M. DAMBRINE, J. SOKOLOWSKI, A. ZOCHOWSKI *On stability analysis in shape optimization : critical shapes for Neumann problem*, Control and cybernetics, 2003.
- [18] M.C. DELFOUR, J.-P. ZOLESIO *Shapes and Geometries*, Advances in Design and Control. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2001.

- [19] M.C. DELFOUR, J.-P. ZOLESIO *The new family of cracked sets and the image segmentation problem revisited*, Communications in Information and Systems, Vol. 4, No. 1, pp. 29-52, September 2004.
- [20] P. DESTYUNDER *Calcul de forces d'avancement d'une fissure en tenant compte du contact unilatéral entre les lèvres de la fissure*. CRAS, série I, t.321, 1337-1340,1995.
- [21] P. DESTYUNDER, M. JAOUA *Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile*. Math.Meth. in the applied Sci., Vol.3,70-87,1981.
- [22] G. FREMIOT *Structure de la semi-dérivée eulérienne dans le cas de domaines fissurés et quelques applications*, PhD Thesis of University Henri Poincaré-Nancy 1, 2000.
- [23] G. FREMIOT *Eulerian semiderivatives of the eigenvalues for Laplacian in domains with cracks*. Adv. Math. Sci. Appl. 12 (2002), no. 1, 115–134.
- [24] G. FREMIOT, J. SOKOŁOWSKI *A structure theorem for the Euler derivative of configuration functionals defined on domains with cracks* Sibirsk. Mat. Zh. 41 (2000), no. 5, 1183–1202, English translation in Siberian Math. J. 41 (2000), no. 5, 974–993
- [25] P. FULMANSKI, A. LAURAIN, J.-F. SCHEID, *Level set method for shape optimization of Signorini problem* MMAR 2004, pages 71-75 (reference in proceedings from A.L.).
- [26] P. GRISVARD *Singularities in Boundary value problems*, Recherches en Mathématiques appliquées .22.Paris :Masson.Berlin :Springer-Verlag,1992.
- [27] P. GRISVARD *Elliptic problems in non-smooth domains.*, Monographs and studies in Mathematics, 24. Pitman Advanced Publishing Program. Boston-London-Melbourne : Pitman Publishing Inc. XIV, 1985.
- [28] PH. GUILLAUME, K. SID IDRIS *The topological asymptotic expansion for the Dirichlet Problem*, vol. 41, No. 4, pp. 1042-1072, SIAM 2002.
- [29] J. HADAMARD *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastées*, (1907), dans Oeuvres de J.Hadamard, CNRS Paris 1968.
- [30] G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD, G. POLYA *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge 1934
- [31] HENROT A., PIERRE M., *Variation et optimisation de formes : une analyse géométrique*, No 48 de Mathématiques et Applications, Springer , 2005.
- [32] A. L. JACKOWSKA, J. SOKOŁOWSKI, A. ŻOCHOWSKI *Topological optimization and inverse problems* Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, **Vol. 10**, no. 2, 2003, pp. 163–176.
- [33] L. JACKOWSKA, J. SOKOŁOWSKI, A. ŻOCHOWSKI, A. HENROT *On numerical solution of shape inverse problems* Computational Optimization and Applications, **Vol. 23**, no. 2, 2002, pp. 231–255.
- [34] J. JARUSEK, M. KRBEK, M. RAO, J. SOKOŁOWSKI *Conical differentiability for evolution variational inequalities* J. Differential Equations 193 (2003), no. 1, 131–146.
- [35] A.M. KHLUDNEV, K. OHTSUKA, J. SOKOŁOWSKI *On derivative of energy functional for elastic bodies with cracks and unilateral conditions*. Quart. Appl. Math. 60 (2002), no. 1, 99–109.
- [36] A.M. KHLUDNEV, J. SOKOŁOWSKI *Griffith formula and Rice integral for elliptic equations with unilateral conditions in nonsmooth domains*, EJAM, 1999, v.10, 379-394.
- [37] A.M. KHLUDNEV, J. SOKOŁOWSKI *Griffith formulae for elasticity systems with unilateral conditions in domains with cracks*. Eur. J. Mech. A Solids 19 (2000), no. 1, 105–119.
- [38] A.M. KHLUDNEV, V.A. KOZLOV *Asymptotics of solutions near crack tips for Poisson equation with inequality type boundary conditions*
- [39] V. KOSHMANENKO *Singular quadratic forms in perturbation theory*, Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [40] V.A. KOVTUNENKO *Shape sensitivity of a plane crack front*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2003 ; **26** :359-374.
- [41] A. LAURAIN *Structure of shape derivatives in non-smooth domains and applications* Advances in Mathematical Sciences and Applications, Vol.15, No.1 (2005).

- [42] D. LEGUILLON, E. SÁNCHEZ-PALENCIA, *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester ; Masson, Paris, 1987.
- [43] M. MASMOUDI *The topological asymptotic*, in : H;Kawarada, J.Periaux (Eds.), *Computational Methods for Control Applications*, International Series GAKUTO, 2002.
- [44] F. MURAT, J.SIMON, *Sur le contrôle par un domaine géométrique*. Thèse d'état, Paris, 1976.
- [45] V. MAZ'YA, S.A. NAZAROV, B. PLAMENEVSKIJ *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains* Vol. 1 and 2 Basel : Birkhäuser Verlag, 2000, 435 p.
- [46] S. A. NAZAROV *An interface crack in anisotropic bodies. Stress singularities and invariant integrals*. (Russian. Russian summary) Prikl. Mat. Mekh. 62 (1998), no. 3, 489–502 ; translation in J. Appl. Math. Mech. 62 (1998), no. 3, 453–464
- [47] S.A. NAZAROV *Asymptotic conditions at a point, self adjoint extensions of operators, and the method of matched asymptotic expansions*, American Mathematical Society Translations (2), Vol. **198**, 1999, pp. 77–125.
- [48] S.A. NAZAROV, J. SOKOŁOWSKI *Asymptotic analysis of shape functionals* Journal de Mathématiques pures et appliquées. **82**(2003), 125-196.
- [49] S.A. NAZAROV, J. SOKOŁOWSKI *The topological derivative of the Dirichlet integral due to formation of a thin ligament* Siberian Math. J. March - April 2004, Volume 45, Issue 2, 341-355.
- [50] S.A. NAZAROV, J. SOKOŁOWSKI *Self adjoint extensions of differential operators in application to shape optimization* Comptes Rendus Mecanique, Volume 331, Issue 10, October 2003, 667-672.
- [51] S.A. NAZAROV, J. SOKOŁOWSKI *Selfadjoint extensions for elasticity system in application to shape optimization* to appear in Bulletin of the Polish Academy of Sciences – Mathematics.
- [52] S.A. NAZAROV, A.S. SLUTSKIJ, J. SOKOŁOWSKI *Topological derivative of the energy functional due to formation of a thin ligament on a spatial body* Les prépublications de l'Institut Élie Cartan No. 14/2004.
- [53] S.A. NAZAROV, J. SOKOŁOWSKI *Self adjoint extensions for the Neumann laplacian in application to Shape Optimization*, Les prépublications de l'institut Elie Cartan 9/2003.
- [54] A. NOVRUZI, M. PIERRE, *Structure of shape derivatives*, J. Evol. Equ. 2 (2002), no. 3, 365-382.
- [55] S. OSHER, R. FEDKIW *Level set methods and dynamic implicit surfaces*. Springer, 2004.
- [56] S. OSHER, J. SETHIAN *Fronts propagating with curvature-dependant speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulation*. J. Comp. Phys. 79, pp. 12-49, 1988.
- [57] D. PENG, B. MERRIMAN, S. OSHER, H. ZHAO, M. KANG *A PDE-based fast local level set method*. J. Comp. Phys. 155, pp. 410-438 (1999).
- [58] M. RAO, J. SOKOŁOWSKI *Tangent sets in Banach spaces and applications to variational inequalities* Les prépublications de l'Institut Élie Cartan 42/2000.
- [59] J. SETHIAN, *Level set methods*. Cambridge University Press, 1996.
- [60] J. SOKOŁOWSKI, A. ŻOCHOWSKI *On the topological derivative in shape optimization*, INRIA-Lorraine, Rapport de recherche No. 3170, 1997.
- [61] J. SOKOŁOWSKI, A. ŻOCHOWSKI *On the topological derivative in shape optimization*, SIAM Journal on Control and Optimization. **37**, Number 4 (1999), pp. 1251–1272.
- [62] J. SOKOŁOWSKI, A. ŻOCHOWSKI *Topological derivatives of shape functionals for elasticity systems* Mechanics of Structures and Machines 29(2001), pp. 333-351.
- [63] J. SOKOŁOWSKI, A. ŻOCHOWSKI *Optimality conditions for simultaneous topology and shape optimization* SIAM Journal on Control and Optimization, **Vol. 42**, no. 4 , 2003, pp. 1198–1221.
- [64] J. SOKOŁOWSKI, A. ŻOCHOWSKI *Topological derivatives for contact problems* Les prépublications de l'Institut Élie Cartan No. 25/2003.
- [65] J. SOKOŁOWSKI, A. ŻOCHOWSKI *Topological derivatives for obstacle problems* Les prépublications de l'Institut Élie Cartan No. 12/2005.

- [66] J. SOKOLOWSKI, J.-P. ZOLESIO *Introduction to shape optimization*, vol. 16 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [67] X.Z. SUO, P.P. VALETA *Second variation of energy and an associated line independant integral in fracture mechanics.*, Eur.J.Mech.A/Solids, **17**, no. 4, 541-565, 1998.
- [68] V. SVERAK *On optimal shape design*, J.Math.Pures Appl., **72-6** (1993), 537-551.
- [69] WATSON G.N. *Theory of Bessel functions* Cambridge : The University Press , 1944.
- [70] H.K. ZHAO, T. CHAN, B. MERRIMAN, S. OSHER *A variational level set approach to multi-phase motion*. J. Comp. Phys. 122, pp. 179-195 (1996).
- [71] J.P. ZOLÉSIO *Identification de domaines par déformation*, thèse de doctorat d'état, Université de Nice, France, 1979.

**Résumé :** En optimisation de formes, de nombreux résultats ont déjà été obtenus dans le cas de domaines à frontière régulière et pour des perturbations régulières de ces domaines. Par contre, l'étude de domaines non-réguliers, tels que des domaines fissurés par exemple, et l'étude de perturbations singulières telles que la création d'un trou dans un domaine est plus récente et plus complexe. Ce nouveau domaine de recherche est motivé par de multiples applications, car en pratique, les hypothèses de régularité ne sont pas toujours vérifiées. Les outils tels que la dérivée topologique permettent d'appréhender ces perturbations singulières de domaines et leur utilisation est maintenant fréquente.

Dans la première partie, nous étudions la structure de la dérivée de forme pour des domaines fissurés. Dans le cas d'un ouvert régulier, de classe  $C^1$  ou lipschitzien par exemple, la dérivée dépend uniquement des perturbations de la frontière du domaine en direction de la normale. Ce théorème de structure n'est plus valable pour des domaines contenant des fissures. On généralise ici ce théorème de structure aux domaines fissurés en dimension quelconque pour les dérivées premières et secondes. En dimension deux, on retrouve le résultat usuel, à savoir qu'en plus du terme classique, deux nouvelles contributions apparaissent dues aux extrémités de la fissure. En dimension supérieure, un nouveau terme apparaît en plus du terme classique, dû à la frontière de la variété à bord représentant la fissure.

Dans la deuxième partie, nous étudions la perturbation singulière d'un domaine et nous modélisons cette perturbation à l'aide d'extensions auto-adjointes d'opérateurs. Nous décrivons cette modélisation, puis nous montrons comment elle peut être utilisée pour un problème d'optimisation de forme. En définissant une fonctionnelle d'énergie approchée pour ce problème modèle, on retrouve notamment la formule de la dérivée topologique usuelle.

Dans la troisième partie, on propose une application numérique de la dérivée topologique et de la dérivée de forme pour un problème non-linéaire. On cherche à maximiser l'énergie associée à la solution d'un problème de Signorini dans un domaine  $\Omega$ . L'évolution du domaine est représentée à l'aide d'une méthode levelset.

**Mots-clés :** optimisation de forme et topologique, perturbations singulières de domaines, structure des dérivés de forme, domaines fissurés, extensions auto-adjointes, analyse asymptotique, problème de Signorini, méthodes levelset.

**Abstract :** In shape optimization, the main results concerning the case of domains with smooth boundaries and smooth perturbations of these domains are well-known, whereas the study of non-smooth domains, such as domains with cracks for instance, and the study of singular perturbations such as the creation of a hole in a domain is more recent and complex. This new field of research is motivated by multiple applications, since the smoothness assumptions are not fulfilled in the general case. These singular perturbations can be handled now with new and efficient tools like topological derivative.

In the first part, the structure of the shape derivative for domains with cracks is studied. In the case of a smooth domain, with boundary of class  $C^1$  or lipschitzian for instance, the derivative depends only on the perturbations of the boundary of the domain in the normal direction. This structure theorem is no longer valid for domains with cracks. We extend here the structure theorem to domains with cracks in any dimension for the first and second derivatives. In dimension two, we get the usual result, i.e. the shape derivative depends also on the tangential components of the deformation at the tips of the crack. In higher dimension, a new term appears in addition to the classical one, coming from the boundary of the manifold representing the crack.

In the second part, the singular perturbation of a domain is approximated by using self adjoint extensions of operators. This approximation is first described, then it is applied to a shape optimization problem. An approximated energy functional can be defined for this model problem, and we obtain in particular the usual formula of the topological derivative.

In the third part, a numerical application of the topological and shape derivatives is proposed for a non-linear problem. The problem consists in maximizing the energy associated to a Signorini problem in a domain  $\Omega$ . The evolution of the domain is done with the help of a levelset method to handle easily topological changes.



**Keywords :** shape and topological optimization, singular perturbations of a domain, structure of shape derivative, cracked domains, self-adjoint extensions, asymptotic analysis, Signorini problem, levelset methods.