



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

Thèse

présentée pour l'obtention du titre de
Docteur en Mathématiques de l'Université Henri Poincaré
par

Manon DIDRY

STRUCTURES ALGEBRIQUES SUR LES ESPACES SYMETRIQUES

Soutenue publiquement le 16 juin 2006

Membres du jury :

Lionel BERARD-BERGY	Examineur	Professeur, Nancy I
Wolfgang BERTRAM	Directeur de Thèse	Professeur, Nancy I
Pierre BIELIAVSKY	Rapporteur	Professeur, Louvain-la-Neuve
Jean-Louis LODAY	Président du jury	Directeur de recherche au CNRS, Strasbourg
Karl-Hermann NEEB	Rapporteur	Professeur, Darmstadt
Tilman WURZBACHER	Examineur	Professeur, Metz

Institut Élie Cartan Nancy
Laboratoire de Mathématiques
B.P. 239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

Table des matières

1	Intégration de certaines structures algébriques	13
1.1	Introduction et présentation des résultats	14
1.2	Le cas des algèbres de Lie	19
1.2.1	Groupes associés à une algèbre de Lie	19
1.2.2	Présentation des groupes par générateurs et relateurs	26
1.2.3	Action du groupe symétrique	31
1.2.4	Compléments	36
1.3	Le cas des systèmes triples de Lie	43
1.3.1	Espaces symétriques associés à un système triple de Lie	43
1.3.2	Fonctorialité de la construction	49
2	Notion de fibré symétrique	55
2.1	Le point de vue algébrique	56
2.1.1	Représentation d'un système triple de Lie	56
2.1.2	Lien avec les représentations d'algèbres de Lie avec involution	60
2.1.3	Notion de fibré symétrique polynomial	64
2.1.4	Constructions algébriques de $\mathfrak{q}$ -modules	72
2.2	Le point de vue géométrique	77
2.2.1	Définition d'un fibré symétrique	77
2.2.2	Propriétés géométriques de base	79
2.2.3	Fibrés symétriques et connexions d'Ehresmann	81
2.2.4	Version infinitésimale d'un fibré symétrique	84
2.3	Cas de la dimension finie sur le corps des réels	85
3	Le cas du fibré tangent	91
3.1	Extensions d'espaces symétriques	92
3.1.1	Extension quadratique d'un $\mathbb{K}$ -module	92
3.1.2	Extension quadratique d'un espace symétrique	93
3.1.3	Version infinitésimale	93
3.1.4	Cas des systèmes triples de Lie admettant une extension de Jordan	96
3.2	Exemples	99
3.2.1	Généralités sur le processus de Cayley-Dickson	99
3.2.2	Exemple du groupe linéaire	102
3.2.3	Exemple de la Grassmannienne	106
3.2.4	Exemple de la Lagrangienne	108

A	Espaces symétriques sur des corps ou anneaux généraux	113
A.1	Notion de variété sur un corps topologique non discret	114
A.2	Notion de fibré vectoriel	115
A.3	Espace symétrique et système triple de Lie associé	117
B	Représentation des algèbres n-aires	121
B.1	Idéal des identités d'une algèbre n -aire	122
B.1.1	La catégorie des algèbres n -aires	122
B.1.2	Evaluation des n -formes abstraites dans une algèbre n -aire	123
B.1.3	Idéal des identités d'une algèbre n -aire	124
B.1.4	Exemples	125
B.2	La catégorie des représentations d'une algèbre n -aire	128
B.2.1	Les représentations d'algèbres n -aires	128
B.2.2	Identities multilinéaires d'une représentation	128
B.2.3	Exemples	129
B.2.4	Lien entre l'idéal des identités d'une algèbre n -aire et les identités de sa représentation régulière	130
B.2.5	Constructions algébriques de représentations	131
B.3	Extension d'une algèbre n -aire	134
B.3.1	La catégorie des extensions d'une algèbre n -aire	134
B.3.2	Représentation associée à une extension intégrable	134
B.3.3	Partie facteur d'une extension	136
B.3.4	Caractérisation des extensions intégrables isomorphes	137
B.3.5	Idéal des identités d'une extension de A par V	138
B.3.6	Principe de permanence	140
B.4	Foncteurs induits par une forme abstraite	141
B.5	Principe de dualité	145

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier celui qui a su m'initier à la recherche, puis m'a aidée et aiguillée tout au long de ces quatre années de travail. Merci donc à Wolfgang Bertram pour son entière disponibilité et ses nombreux conseils mathématiques. Je tiens à souligner combien j'ai apprécié ses qualités humaines.

Je remercie également l'ensemble du jury, notamment les rapporteurs, pour le travail accompli et l'intérêt porté à ma thèse.

A ceux qui m'ont soutenue et encouragée pendant mes périodes de doute, nombreuses il faut l'avouer, je leur fait porter l'entière responsabilité de ce manuscrit. Ce qui suit est de votre très grande faute. Voilà comment je remercie ma famille et mes plus proches amis. Exception faite de Bruno, compagnon de misère, qui a bien vite compris la galère dans laquelle nous nous embarquions.

Pas de pauses café pour moi, mais de temps à autre des pauses phi, avec deux, puis trois amis, qui me renvoyaient bien joyeuse à la rédaction. Merci à Matthieu, Julien et Marie pour leur joie de vivre.

J'en profite pour saluer les copains du labo, gais lurons ou raleurs professionnels, blonds, roux et bruns. Serais-je sincère en les remerciant pour leurs nombreuses (trop nombreuses?) visites au bureau 111? Merci en tous cas de ne m'avoir jamais laissée seule.

Toute ma reconnaissance à Lars, Pierre et Marie-Amélie, qui ont su prendre soin de mon moral et de mes formes (je pense ici aux nombreuses tablettes de chocolat offertes et vite englouties).

Enfin, à mon père, qui a su éveiller ma curiosité mathématique depuis bien longtemps déjà, et à ma mère, qui a assuré à merveille la logistique des mercredis et du pot de thèse, un grand merci.

Introduction générale

Espaces symétriques et espaces à symétries

La notion d'espace symétrique a été introduite dans les années 20 par le mathématicien Elie Cartan (1869-1951) : il définit les espaces symétriques (riemanniens) comme étant des variétés riemanniennes possédant un "gros" groupe d'isométries. Plus précisément, on demande qu'en chaque point x de la variété, la symétrie géodésique s_x soit une isométrie.

Il y a actuellement plusieurs définitions de la notion d'espace symétrique (essentiellement équivalentes).

Par analogie avec la définition des espaces riemanniens symétriques, un espace symétrique peut être défini comme étant une variété M munie d'une connexion affine ∇ pour laquelle la symétrie géodésique s_x se prolonge en un automorphisme de (M, ∇) , en tout point x de la variété.

Un espace symétrique peut également être vu comme le quotient d'un groupe de Lie G muni d'une involution σ par un sous groupe fermé H , sous-groupe contenu dans le sous-groupe G^σ des points fixes de G sous σ et contenant sa composante connexe. On appelle ces espaces symétriques des espaces symétriques homogènes.

Le point de vue de Loos sur les espaces symétriques est sensiblement plus algébrique. Il introduit tout d'abord la notion d'*espace à symétries* : un espace à symétries est une variété M munie d'une application "produit", i.e. d'une application lisse

$$\begin{aligned} \mu : M \times M &\longrightarrow M \\ (x, y) &\longmapsto s_x(y) \end{aligned}$$

vérifiant les trois axiomes algébriques suivants, pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de M :

$$\begin{aligned} \text{(S1)} \quad &\mu(x, x) = x \\ \text{(S2)} \quad &\mu(x, \mu(x, y)) = y \\ \text{(S3)} \quad &\mu(x, \mu(y, z)) = \mu(\mu(x, y), \mu(x, z)). \end{aligned}$$

Si on pose $s_x(y) = \mu(x, y)$, les deux premiers axiomes traduisent le fait que les applications s_x sont des involutions admettant x pour point fixe, le dernier axiome peut s'écrire sous la forme

$$s_x s_y s_x = s_{s_x(y)},$$

ce qui traduit le fait que l'ensemble des applications s_x est stable par conjugaison. Les applications s_x sont les symétries de l'espace à symétries M .

Un premier exemple très simple d'espace à symétries est donné par le plan $\mathbb{R}^2$ muni des symétries axiales suivantes : si A est un point du plan, s_A est la symétrie orthogonale par rapport à l'unique droite verticale passant par A . On obtient également un espace à symétries en munissant le plan des symétries ponctuelles.

Loos définit ensuite les espaces symétriques comme étant des espaces à symétries possédant une propriété topologique supplémentaire : un espace à symétries est un *espace symétrique* si et seulement si ses symétries s_x possèdent x comme point fixe isolé. Dans les deux exemples précédents, il est clair que le plan muni des symétries ponctuelles est un espace symétrique alors que le plan muni des symétries par rapport aux droites verticales n'est qu'un espace à symétries.

Tout espace symétrique homogène G/H , avec involution σ , est un espace symétrique (au sens de Loos) : le produit est donné par

$$\mu(xH, yH) = x\sigma(x^{-1}y)H.$$

Réciproquement, Loos démontre que tout espace symétrique connexe est un espace symétrique homogène connexe. Plus précisément, dans l'article [20], il établit que tout espace à symétries connexe est isomorphe, en tant qu'espace à symétries, à un fibré homogène sur un espace symétrique homogène connexe.

Prenons l'exemple d'un groupe de Lie G . Cette variété peut être munie d'une structure d'espace symétrique pour laquelle le produit est décrit par

$$\mu(x, y) = xy^{-1}x.$$

En tant qu'espace symétrique, G est isomorphe à l'espace symétrique homogène $G \times G / \text{diag}(G \times G)$, l'involution σ étant définie par

$$\sigma(g, h) = (h, g),$$

et l'action de $G \times G$ sur G étant donnée par

$$(g, h).x = gxh^{-1}.$$

Dans ce travail, nous reprenons le point de vue de Loos. Cependant, afin de pouvoir travailler sur des variétés de dimension quelconque sur des corps ou anneaux topologiques généraux (avec le calcul différentiel introduit par W.Bertram, H.Glöckner et K.-H.Neeb dans [2]), nous remplaçons le dernier axiome des espaces symétriques (pour tout x , x est point fixe isolé de s_x) par l'axiome suivant : pour tout point x , on demande que la différentielle en x de la symétrie s_x soit égale à l'opposé de l'application identité, c'est l'axiome

$$(S4) \quad T_x(s_x) = -Id_{T_x M},$$

qui, dans le cadre de la dimension finie sur les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est bien équivalent à l'axiome précédent, en vertu du théorème d'inversion locale.

Systèmes triples de Lie

La version infinitésimale d'un espace symétrique est une algèbre ternaire (espace vectoriel ou module muni d'une application produit trilinéaire) dont le produit triple, noté $[\cdot, \cdot, \cdot]$, vérifie les identités multilinéaires suivantes, pour tout quintuplet de vecteurs (x, y, z, u, v) :

$$\begin{aligned} (\text{STL1}) \quad & [x, y, z] = -[y, x, z] \\ (\text{STL2}) \quad & [x, y, z] + [y, z, x] + [z, x, y] = 0 \\ (\text{STL3}) \quad & [u, v, [x, y, z]] = [[u, v, x], y, z] + [x, [u, v, y], z] + [x, y, [u, v, z]]. \end{aligned}$$

Un tel objet est appelé *système triple de Lie*. Si (M, ∇) est un espace symétrique (défini à l'aide de sa connexion affine ∇), le système triple de Lie de M s'interprète grâce au tenseur de courbure R de ∇ . Le système triple de Lie de M est l'espace tangent $T_o M$ en un point o de la variété, muni du crochet

$$[x, y, z] = -R_o(x, y)z.$$

Pour reprendre l'exemple du groupe, si G désigne un groupe de Lie d'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [., .])$, la structure de système triple de Lie de l'espace symétrique G est donnée par l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni du crochet triple défini par

$$[x, y, z] = \frac{1}{4}[[x, y], z].$$

Plus généralement, si $(\mathfrak{g}, [., .])$ est une algèbre de Lie munie d'une involution σ (morphisme involutif d'algèbre de Lie), les deux sous-espaces propres de cette involution $\mathfrak{g}^+$ et $\mathfrak{g}^-$ sont des sous-systèmes triples de Lie de $(\mathfrak{g}, [., ., .])$, où $[., ., .]$ désigne le crochet triple défini par

$$[x, y, z] = [[x, y], z].$$

On peut montrer que le système triple de Lie $\mathfrak{g}^-$ est l'exemple générique : tout système triple de Lie est isomorphe à un certain $\mathfrak{g}^-$. En effet, si $\mathfrak{q}$ est un système triple de Lie, introduisons le sous-espace vectoriel $[q, q]$ de $\text{End}(\mathfrak{q})$ engendré par les applications du type

$$R(x, y) : z \longrightarrow [x, y, z].$$

On peut alors munir l'espace $\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \oplus [q, q]$ d'une structure d'algèbre de Lie pour laquelle l'application $\sigma = -\text{Id}_{\mathfrak{q}} \oplus \text{Id}_{[q, q]}$ est une involution telle que $\mathfrak{g}^-$ soit isomorphe à $\mathfrak{q}$ en tant que système triple de Lie. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ ainsi construite est appelée le plongement standard du système triple de Lie $\mathfrak{q}$.

Il est aisé de vérifier que l'application associant à une algèbre de Lie avec involution $(\mathfrak{g}, \sigma)$ le système triple de Lie $\mathfrak{g}^-$ est une application fonctorielle. Soulignons en revanche le défaut de fonctorialité du plongement standard. Le problème qui se pose est un problème de définition : si f est un morphisme du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ dans le système triple de Lie $\tilde{\mathfrak{q}}$, l'application

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \quad \mathfrak{q} \oplus [q, q] &\longrightarrow \tilde{\mathfrak{q}} \oplus [\tilde{q}, \tilde{q}] \\ x + \sum_{i=1}^k [y_i, z_i] &\longmapsto f(x) + \sum_{i=1}^k [f(y_i), f(z_i)] \end{aligned}$$

semble bien être un morphisme d'algèbres de Lie. Se pose cependant le problème de la licite de la définition de cette application. En général, avec cette définition, l'image d'un élément X de $[q, q]$ dépend de son écriture sous la forme $\sum_{i=1}^k [y_i, z_i]$, qui n'est en général pas unique (on peut montrer que la définition est licite dans le cas particulier où le plongement standard du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ est une algèbre de Lie semi-simple).

En dimension finie sur le corps des réels ou des complexes, la catégorie des espaces symétriques connexes et simplement connexes est équivalente à celle des systèmes triples de Lie (résultat que l'on peut trouver dans [21]). La preuve de ce théorème s'articule autour de deux points. Premièrement, en utilisant le troisième théorème de Lie, on peut montrer qu'à tout système triple de Lie correspond un espace symétrique. Il reste alors à prouver que, sous cette correspondance, tout morphisme de systèmes triples de Lie provient d'un morphisme des espaces symétriques associés.

Nous travaillons ici sur des corps ou anneaux généraux, sans hypothèse de dimension. Nous montrons, dans ce cadre, que toute algèbre de Lie est associée à un groupe polynomial, qui,

dans le cas où les entiers sont inversibles dans l'anneau de base, est essentiellement isomorphe à la structure de groupe formel donnée par la formule de Campbell-Hausdorff. Ce résultat permet alors d'associer à tout système triple de Lie un espace symétrique polynomial. Nous montrons que cette construction est fonctorielle : tout morphisme de systèmes triples de Lie donne lieu à un morphisme des espaces symétriques polynomiaux associés.

Par la suite, nous nous intéressons à l'interprétation géométrique des représentations linéaires de systèmes triples de Lie.

Représentations de systèmes triples de Lie et d'algèbres n -aires

Nous savons déjà que toute représentation linéaire d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur un espace vectoriel V fournit une structure d'algèbre de Lie sur l'espace vectoriel $\mathfrak{g} \oplus V$ telle que la suite

$$\{0\} \longrightarrow V \longrightarrow \mathfrak{g} \oplus V \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \{0\}$$

soit une suite exacte scindée d'algèbres de Lie. Si G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et F est un fibré vectoriel sur G de fibre V , muni d'une structure de groupe de Lie pour laquelle l'algèbre de Lie est donnée par $\mathfrak{g} \oplus V$, alors la projection de F sur G et la section zéro de G dans F sont des morphismes de groupes. Désignons par fibrés vectoriels dans la catégorie des groupes de Lie de tels objets géométriques. Réciproquement, étant donné un fibré vectoriel dans la catégorie des groupes de Lie noté F , de fibre V , sur le groupe de Lie G , on obtient une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ sur l'espace vectoriel V , donnée par

$$g.v = [g, v],$$

le crochet étant celui de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \oplus V = \text{Lie}(F)$.

Dans le cadre de la dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il y a donc correspondance biunivoque entre les fibrés dans la catégorie des groupes de Lie et les représentations linéaires d'algèbres de Lie.

Le premier problème qui se pose est de comprendre la notion de représentation linéaire d'un système triple de Lie. Les systèmes triples de Lie et les algèbres de Lie sont des algèbres n -aires (module muni d'un produit n -linéaire) vérifiant un certain nombre d'identités multilinéaires. Pour ces types d'algèbres, il existe une notion générale de représentation linéaire. Nous la présentons en détail dans l'annexe B qui reprend le travail de Eilenberg ([10]). En particulier, nous montrons que l'ensemble des représentations linéaires d'une catégorie d'algèbres donnée (définie par l'ensemble des identités multilinéaires annulées, comme les algèbres de Lie ou les systèmes triples de Lie) est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des extensions inessentiels intégrables de la même catégorie d'algèbres. Nous désignons ici par *extension inessentielle intégrable* toute suite exacte scindée

$$\{0\} \longrightarrow V \longrightarrow A \oplus V \longrightarrow A \longrightarrow \{0\}$$

dans la catégorie d'algèbres donnée, vérifiant de plus la propriété suivante : tout produit de n éléments de $A \oplus V$ est nul dès que plus d'un des n arguments appartient à V .

Fibrés symétriques

Etant donnée une représentation du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ dans l'espace vectoriel V , on obtient alors une structure de système triple de Lie sur l'espace vectoriel $\mathfrak{q} \oplus V$ pour laquelle la suite

$$\{0\} \longrightarrow V \longrightarrow \mathfrak{q} \oplus V \longrightarrow \mathfrak{q} \longrightarrow \{0\}$$

est une extension inessentielle intégrable de systèmes triples de Lie, V étant muni de la structure triviale de système triple de Lie. Si M est un espace symétrique de système triple de Lie $\mathfrak{q}$ et F est un fibré vectoriel sur M de fibre V , muni d'une structure d'espace symétrique pour laquelle le système triple de Lie est donné par $\mathfrak{q} \oplus V$, nous savons que la projection canonique de F sur M et la section zéro sont des morphismes d'espaces symétriques (ce qui correspond au fait que la suite de systèmes triples de Lie soit exacte et scindée). La dernière propriété (le crochet de trois éléments du système triple de Lie $\mathfrak{q} \oplus V$ est nul dès que deux de ses arguments appartiennent à V) se traduit par le fait que l'application

$$(-1) : F \longrightarrow F,$$

identiquement égale à $-\text{Id}$ sur chacune des fibres de F , est un morphisme de l'espace symétrique F .

Désignons par fibré vectoriel symétrique (ou plus simplement fibré symétrique) un tel objet géométrique : plus précisément, un fibré vectoriel F de fibre V sur un espace symétrique M est un *fibré symétrique* sur M si et seulement si F est muni d'une structure d'espace symétrique pour laquelle :

- (FS1) l'application $(-1) : F \longrightarrow F$ est un morphisme d'espace symétrique,
- (FS2) la projection $\pi : F \longrightarrow M$ est un morphisme d'espaces symétriques,
- (FS3) chaque fibre F_x , en tant que sous-espace symétrique de F , est un espace symétrique plat.

A chaque représentation linéaire de système triple de Lie est donc associé, en dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, un fibré symétrique.

Réciproquement, étant donné un fibré symétrique F sur l'espace symétrique M , de fibre V , nous montrons que le système triple de Lie de F provient d'une représentation linéaire du système triple de Lie de M dans l'espace vectoriel V .

Dans le cadre de la dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il y a donc une correspondance biunivoque entre les représentations linéaires de systèmes triples de Lie et les fibrés symétriques.

Nous établissons une correspondance analogue dans le cadre général (dimension quelconque sur un corps ou un anneau), en remplaçant les espaces symétriques par des espaces symétriques polynomiaux, et en définissant une notion adaptée de fibré symétrique polynomial.

Nous étudions ensuite les propriétés géométriques des fibrés symétriques, montrant en particulier qu'à chaque fibré symétrique F est associé une structure d'espace à symétries sur F et une connexion d'Ehresmann sur TF .

Le fibré tangent

Un premier exemple naturel de fibré symétrique est donné par le fibré tangent. En effet, si (M, μ) est un espace symétrique, le produit $T\mu$ munit la variété TM d'une structure d'espace symétrique : les propriétés (S1), (S2), (S3) vérifiées par le produit μ s'écrivant sous forme de diagramme commutatif, en appliquant le foncteur tangent, on récupère les mêmes identités pour le produit $T\mu$. Enfin, la propriété (S4) et les propriétés (F1), (F2), (F3) sont vérifiées en utilisant la formule explicite

$$T_{(p,q)}\mu(v, w) = T_q s_p(w) + T_p r_q(v),$$

dans laquelle s_p et r_q désignent les applications partielles du produit μ :

$$s_p(q) = r_q(p) = \mu(p, q).$$

Un des intérêts du calcul différentiel développé sur des corps ou anneaux généraux par W.Bertram, H.Glöckner et K.-H.Neeb, est de pouvoir interpréter le foncteur tangent comme un foncteur d'extension par les nombres duaux. Si M désigne une variété lisse sur l'anneau $\mathbb{K}$, alors TM est une variété lisse sur l'anneau tangent $T\mathbb{K} = \mathbb{K}[X]/(X^2) = \mathbb{K}[\varepsilon]$, où ε est une unité infinitésimale (ce qui signifie que $\varepsilon^2 = 0$). Si M est un espace symétrique sur l'anneau $\mathbb{K}$ de système triple de Lie $\mathfrak{q}$, alors TM est un espace symétrique sur l'anneau $T\mathbb{K}$ de système triple de Lie $\mathfrak{q} \otimes_{\mathbb{K}} T\mathbb{K}$, le crochet triple étant celui de $\mathfrak{q}$ étendu par $\mathbb{K}[\varepsilon]$ -linéarité.

Le fibré symétrique TM correspond donc à la représentation linéaire fournissant l'extension inessentielle intégrable de systèmes triples de Lie suivante :

$$\{0\} \longrightarrow \varepsilon\mathfrak{q} \longrightarrow \mathfrak{q} \oplus \varepsilon\mathfrak{q} \longrightarrow \mathfrak{q} \longrightarrow \{0\}.$$

La question qui se pose alors est de savoir s'il existe sur le fibré TM d'autres structures de fibré symétrique. La question revient d'un point de vue infinitésimal à savoir si l'on peut munir le module $\mathfrak{q} \oplus \varepsilon\mathfrak{q}$ d'une autre structure de système triple de Lie pour laquelle la suite

$$\{0\} \longrightarrow \varepsilon\mathfrak{q} \longrightarrow \mathfrak{q} \oplus \varepsilon\mathfrak{q} \longrightarrow \mathfrak{q} \longrightarrow \{0\}$$

soit une extension inessentielle et intégrable de systèmes triples de Lie.

Nous répondons par l'affirmative à cette question dans le cas particulier où le système triple de Lie $\mathfrak{q}$ admet une extension de Jordan, en construisant une seconde structure de fibré symétrique sur TM . Divers exemples sont ensuite traités. Nous n'avons en revanche aucun résultat dans le cas général et ne savons même pas s'il est possible qu'il existe plus de deux structures de fibré symétrique sur le fibré tangent d'un espace symétrique quelconque.

Chapitre 1

Intégration de certaines structures algébriques

Nous associons à toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ définie sur un anneau $\mathbb{K}$ une suite de groupes $(G_n(\mathfrak{g}))_{n \in \mathbb{N}}$. Ces groupes sont des *groupes polynomiaux* au sens de [1]. En décrivant par générateurs et relateurs la structure de groupe de $G_n(\mathfrak{g})$, nous mettons en évidence une action par automorphismes du groupe symétrique d'ordre n . Le sous-groupe des points fixes sous cette action, noté $J_n(\mathfrak{g})$, est encore polynomial et nous pouvons former la limite projective $J_\infty(\mathfrak{g})$ de la suite $(J_n(\mathfrak{g}))_{n \in \mathbb{N}}$. Le groupe formel $J_\infty(\mathfrak{g})$ ainsi associé à $\mathfrak{g}$ peut être vu comme une généralisation du groupe formel associé à une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique nulle par la formule de Campbell-Hausdorff. Une des suites naturelles de ce travail est de traiter le cas des systèmes triples de Lie. En utilisant le plongement standard d'un système triple de Lie, les résultats obtenus précédemment permettent de construire une suite d'espaces symétriques polynomiaux $(G_n(\mathfrak{q}))_{n \in \mathbb{N}}$ associés au système triple de Lie $\mathfrak{q}$. Ces constructions sont fonctorielles.

Les résultats de la section 1.2 font partie d'un article soumis ([9]).

1.1 Introduction et présentation des résultats

Dans ce travail, nous décrivons une construction qui permet d'associer à toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (sur un corps ou anneau $\mathbb{K}$) une famille de groupes $(G_n(\mathfrak{g}))_{n \in \mathbb{N}}$. Si $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle, alors $G_n(\mathfrak{g})$ est essentiellement isomorphe au groupe polynomial obtenu par troncature en degré n de la formule de Campbell-Hausdorff. Cependant, notre approche est beaucoup plus simple du point de vue combinatoire et présente en outre l'avantage d'être valable en caractéristique quelconque.

Introduisons les notations et définitions nécessaires pour énoncer les résultats obtenus.

Soit $\mathbb{K}$ un anneau commutatif unitaire. L'anneau quotient $\mathbb{K}[X]/(X^2)$ est noté $T\mathbb{K}$. Il est isomorphe à l'anneau des nombres duaux sur $\mathbb{K}$ qui est le modèle algébrique du «fibré tangent de $\mathbb{K}$ », donné par $\mathbb{K}[\varepsilon] = \mathbb{K} \oplus \varepsilon\mathbb{K}$ avec $\varepsilon^2 = 0$: le produit est décrit par

$$(x + \varepsilon x')(y + \varepsilon y') = xy + \varepsilon(xy' + x'y).$$

Définissons par récurrence sur n l'anneau $T^n\mathbb{K} := T(T^{n-1}\mathbb{K})$. Cet anneau peut être décrit par n générateurs $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ vérifiant les relations $\varepsilon_i\varepsilon_j = \varepsilon_j\varepsilon_i$ et $\varepsilon_i^2 = 0$ pour tous i, j . Ces éléments sont appelés *unités infinitésimales*.

Remarquons alors que

$$T^n\mathbb{K} = \mathbb{K} \oplus \bigoplus_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha \mathbb{K},$$

où l'on a utilisé une notation multi-indice. Le symbole I_n désigne l'ensemble des multi-indices d'ordre n , à valeurs dans $\{0, 1\}$, non nuls :

$$I_n = \{0, 1\}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}.$$

Le symbole ε^α désigne, pour $\alpha \in I_n$, le nombre infinitésimal $\prod_{i=1}^n \varepsilon_i^{\alpha_i}$.

De même, si $\mathfrak{g}$ est un module sur $\mathbb{K}$, l'extension de $\mathfrak{g}$ par l'anneau $T^n\mathbb{K}$ est donnée par

$$\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{K}} T^n\mathbb{K} = \mathfrak{g} \oplus G_n(\mathfrak{g}),$$

où

$$G_n(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha \mathfrak{g}$$

est le noyau de la projection de $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{K}} T^n\mathbb{K}$ sur $\mathfrak{g}$.

Remarquons que si $\mathfrak{g}$ est muni d'une structure d'algèbre sur $\mathbb{K}$, le module $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{K}} T^n\mathbb{K}$ est naturellement muni d'une structure d'algèbre sur $T^n\mathbb{K}$ et $G_n(\mathfrak{g})$ est alors un idéal, appelé idéal d'augmentation de cette extension. En particulier, $G_n(\mathfrak{g})$ est muni d'une structure d'algèbre nilpotente.

L'ensemble I_n est muni de l'ordre lexicographique : on a $(\alpha_i) < (\beta_i)$ si et seulement si il existe $j \in \{1, \dots, n\}$, tel que $\alpha_i = \beta_i$ pour tout $i < j$ et $\alpha_j < \beta_j$. Par exemple, dans l'ensemble I_3 , on a

$$(001) < (010) < (011) < (100) < (101) < (110) < (111).$$

Soit $\alpha \in I_n$. La longueur $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ du multi-indice α est notée $|\alpha|$. Pour un entier naturel $m \in \{2, \dots, |\alpha|\}$, on note $P^m(\alpha)$ l'ensemble des partitions croissantes (pour l'ordre lexicographique) en m sous-ensembles du multi-indice α :

$$P^m(\alpha) = \{(\lambda^1, \dots, \lambda^m) \in I_n^m \mid \alpha = \sum_{i=1}^m \lambda^i, \lambda^1 < \dots < \lambda^m\}.$$

Par exemple,

$$P^2(111) = \{(001, 110), (010, 101), (011, 100)\}.$$

Nous pouvons alors énoncer le

Théorème 1.1.1 (Structure de groupe). *Supposons que $\mathfrak{g}$ soit muni d'une structure d'algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$, avec crochet noté $[\cdot, \cdot]$. Alors l'ensemble $G_n(\mathfrak{g})$ est muni d'une structure de groupe pour laquelle le produit est donné par la formule*

$$\sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha x_\alpha \cdot \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha y_\alpha = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha (x \cdot y)_\alpha$$

avec

$$(1.1) \quad (x \cdot y)_\alpha = x_\alpha + y_\alpha + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [\dots [x_{\lambda^m}, y_{\lambda^1}], y_{\lambda^2}], \dots y_{\lambda^{m-1}}].$$

Le neutre de ce groupe est 0 et l'inverse d'un élément $x = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha x_\alpha$ est alors $x^{-1} = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha (x^{-1})_\alpha$, où

$$(1.2) \quad (x^{-1})_\alpha = -x_\alpha + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} (-1)^m [[x_{\lambda^m}, x_{\lambda^{m-1}}], \dots x_{\lambda^1}].$$

Enfin, l'application qui à une algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ associe le groupe $(G_n(\mathfrak{g}), \cdot)$ est un foncteur de la catégorie des algèbres de Lie dans celle des groupes.

Une des propriétés vérifiées par ce produit est que tout élément de $G_n(\mathfrak{g})$ s'écrit de manière unique comme un produit strictement croissant d'éléments purs (un élément pur est un élément du type $\varepsilon^\alpha x$, avec $x \neq 0$). La preuve de l'associativité s'appuie de manière fondamentale sur ce point et celle de l'existence d'un inverse en découle immédiatement.

Le théorème 1.1.1 peut être interprété comme un «théorème d'intégration», comparable aux théorèmes de Bourbaki et Serre ([6], [27]) qui associent un groupe formel à toute algèbre de Lie sur un corps de caractéristique nulle. Un résultat réciproque, «de différentiation», a été démontré dans [1], où les formules (1.1) et (1.2) ont été introduites pour décrire la structure du groupe tangent itéré $T^m G = T(T^{m-1} G)$ d'un groupe de Lie G , respectivement celle de son n -jet $J^n G$ (voir plus bas, théorème 1.1.3).

Nous nous attachons dans une seconde partie à montrer que les relations

$$\varepsilon^\alpha x \cdot \varepsilon^\alpha y = \varepsilon^\alpha (x + y)$$

(l'«axe» $\varepsilon^\alpha \mathfrak{g}$ est un sous groupe abélien) et

$$\varepsilon^\alpha x \cdot \varepsilon^\beta y = \varepsilon^\beta y \cdot \varepsilon^\alpha x \cdot \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta [x, y]$$

(relation de commutation), valables pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathfrak{g}$ et pour tous multi-indices $\alpha, \beta \in I_n$, caractérisent la structure de groupe de $G_n(\mathfrak{g})$. Remarquons que la relation de commutation s'écrit, en utilisant le commutateur de deux éléments du groupe, de la manière suivante :

$$[\varepsilon^\alpha x, \varepsilon^\beta y] = \begin{cases} \varepsilon^{\alpha+\beta} [x, y] & \text{si } \alpha + \beta \in I_n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous obtenons alors une description du groupe $G_n(\mathfrak{g})$ par générateurs et relateurs.

Théorème 1.1.2 (Générateurs et relateurs). *Sous les hypothèses du théorème 1.1.1, le groupe $G_n(\mathfrak{g})$ est défini par la famille génératrice $I = I_n \times \mathfrak{g}$ et les relateurs suivants, avec $\alpha, \beta \in I_n$, $x, y \in \mathfrak{g}$:*

- $(\alpha, 0)$,
- $(\alpha, x + y)(\alpha, x)^{-1}(\alpha, y)^{-1}$,
- $(\alpha, x)(\beta, y)(\alpha, x)^{-1}(\beta, y)^{-1}$ si $\alpha + \beta \notin I_n$,
- $(\alpha, x)(\beta, y)(\alpha + \beta, [x, y])^{-1}(\alpha, x)^{-1}(\beta, y)^{-1}$ si $\alpha + \beta \in I_n$.

De cette description découle une action naturelle du groupe symétrique d'ordre n sur $G_n(\mathfrak{g})$:

Théorème 1.1.3 (Action du groupe symétrique). *Sous les hypothèses du théorème 1.1.1, le groupe symétrique Σ_n agit par automorphismes sur le groupe $G_n(\mathfrak{g})$.*

1. Si $x = \prod_{i=1}^k \varepsilon^{\alpha_i} x_i$ est un élément de $G_n(\mathfrak{g})$, écrit sous forme de produit strictement croissant d'éléments purs, l'action du groupe symétrique est donnée par la formule

$$\sigma.x = \prod_{i=1}^k \varepsilon^{\sigma.\alpha_i} x_i.$$

2. Le sous-groupe des points fixes sous cette action est

$$J_n(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i=1}^n \delta^{(i)} \mathfrak{g},$$

$$\text{où } \delta^{(i)} = \sum_{\alpha, |\alpha|=i} \varepsilon^\alpha.$$

Cependant, la structure de groupe de $J_n(\mathfrak{g})$ est compliquée à décrire, nous nous contenterons d'en donner le calcul des premiers termes.

La nature de l'action du groupe symétrique sur $G_n(\mathfrak{g})$ est plus subtile que ce que l'on pourrait croire à première vue. Il existe évidemment une action naturelle du groupe symétrique sur l'anneau $T^n(\mathbb{K})$, qui fournit donc une action $\mathbb{K}$ -linéaire naturelle sur le module $G_n(\mathfrak{g})$. Cependant, cette action ne respecte pas la structure de groupe (sauf dans le cas où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie abélienne). Par exemple, pour $n = 2$, l'action de la transposition $(1, 2)$ est donné par l'automorphisme d'"échange" :

$$\begin{aligned} (1, 2)(\varepsilon^{01} x_{01} + \varepsilon^{10} x_{10} + \varepsilon^{11} x_{11}) &= (1, 2)(\varepsilon^{01} x_{01} \cdot \varepsilon^{10} x_{10} \cdot \varepsilon^{11} x_{11}) \\ &= \varepsilon^{10} x_{01} \cdot \varepsilon^{01} x_{10} \cdot \varepsilon^{11} x_{11} \\ &= \varepsilon^{01} x_{10} + \varepsilon^{10} x_{01} + \varepsilon^{11}(x_{11} + [x_{01}, x_{10}]). \end{aligned}$$

Cette action n'est pas linéaire puisqu'elle contient un terme "bilinéaire". Cependant, le point 2. du théorème 1.1.1 assure que le sous-groupe des points fixes sous cette action est celui de l'action "naturelle".

Dans une dernière partie, nous exploitons le fait que la structure de groupe obtenue sur $G_n(\mathfrak{g})$ est une structure de groupe polynomial. L'algèbre de Lie associée à ce groupe est la structure naturelle d'algèbre de $G_n(\mathfrak{g})$.

Nous montrons ensuite que l'on peut former la limite projective $G_\infty(\mathfrak{g})$ des groupes polynomiaux $G_n(\mathfrak{g})$. Le système projectif considéré est compatible avec l'action du groupe symétrique et l'on obtient un sous groupe de $G_\infty(\mathfrak{g})$, noté $J_\infty(\mathfrak{g})$, limite projective des sous groupes $J_n(\mathfrak{g})$.

1.1. INTRODUCTION ET PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

Ce groupe a une structure plus simple à décrire que celle de $G_\infty(\mathfrak{g})$ et s'identifie à un module de séries formelles. Il peut être interprété comme un groupe formel associé à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'application qui à une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ associe ce groupe formel est fonctorielle. Nous étudions alors le lien entre ce foncteur et le foncteur associant à une algèbre de Lie sur un corps de caractéristique nulle le groupe formel donné par la formule de Campbell-Hausdorff.

Nous utilisons les résultats généraux sur les groupes polynomiaux décrits dans [1]. En supposant que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle, on obtient une application exponentielle polynomiale et canonique

$$\exp_n : G_n(\mathfrak{g}) \longrightarrow G_n(\mathfrak{g})$$

et une application inverse $\log_n$. Nous montrons alors que le produit

$$x \star y = \log_n(\exp_n(x) \cdot \exp_n(y))$$

est donné par la formule de Campbell-Hausdorff pour le crochet de Lie décrit plus haut.

Certains de ces résultats restent valables dans un cadre plus général. Rappelons qu'une *algèbre de Leibniz* ([19]) est un $\mathbb{K}$ -module $\mathfrak{g}$ muni d'une application bilinéaire $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ tel que l'identité de Leibniz

$$[[x, y], z] = [[x, z], y] + [x, [y, z]]$$

soit vérifiée pour tout triplet (x, y, z) de $\mathfrak{g}$. Cette condition est équivalente au fait que les applications $ad(z) : x \longmapsto [x, z]$ soient des dérivations du crochet, pour tout $z \in \mathfrak{g}$.

Remarquons que si le crochet est antisymétrique, l'identité de Leibniz est équivalente à l'identité de Jacobi, ce qui montre que toute algèbre de Lie est une algèbre de Leibniz.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Leibniz, l'ensemble $G_n(\mathfrak{g})$ reste muni d'une structure de groupe. En revanche, dans ce groupe, il n'y a plus de relation de commutation et l'on ne peut donc plus effectuer la même présentation du groupe par générateurs et relateurs. Dans ce cas, il semble plus difficile d'identifier une action du groupe symétrique.

Néanmoins, le groupe $G_n(\mathfrak{g})$, en tant que groupe polynomial, donne lieu à une algèbre de Lie décrite par

$$\left[\sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha x_\alpha, \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha y_\alpha \right] = \sum_{\alpha > \beta} \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta ([x_\alpha, y_\beta] - [y_\alpha, x_\beta]).$$

Nous avons donc construit un foncteur de la catégorie des algèbres de Leibniz dans celle des algèbres de Lie.

Une des suites naturelles de ce travail est l'étude du cas des systèmes triples de Lie : si $\mathfrak{q}$ désigne un système triple de Lie sur l'anneau $\mathbb{K}$, l'idéal d'augmentation $G_n(\mathfrak{q})$ du module $\mathfrak{q}$ par l'anneau $T^n\mathbb{K}$ peut être muni d'une structure d'espace à symétries ([20]), c'est-à-dire d'un produit μ vérifiant les trois axiomes suivants :

- $\mu(x, x) = x$,
- $\mu(x, \mu(x, y)) = y$
- $\mu(x, \mu(y, z)) = \mu(\mu(x, y), \mu(x, z))$.

Nous montrons ce résultat en utilisant le plongement standard $\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \oplus [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]$ d'un système triple de Lie $\mathfrak{q}$. L'involution de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ définie par

$$\sigma = -\text{Id}_{\mathfrak{q}} \oplus \text{Id}_{[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]}$$

se prolonge en une involution du groupe $G_n(\mathfrak{g})$. Si 2 est inversible dans l'anneau $\mathbb{K}$, l'ensemble

$$M_n(\mathfrak{q}) = \{X \in G_n(\mathfrak{g}) \mid \sigma(X) = X^{-1}\}$$

est en bijection avec $G_n(\mathfrak{q})$. Le produit naturel d'espace symétrique algébrique sur l'ensemble $M_n(\mathfrak{q})$ permet alors de munir le module $G_n(\mathfrak{q})$ d'une structure d'espace symétrique polynomial.

Notations : Dans ce qui suit, la lettre $\mathbb{K}$ désigne un anneau commutatif unitaire, la lettre $\mathfrak{g}$ désigne un module sur $\mathbb{K}$. Nous retenons les définitions et notations introduites précédemment.

1.2 Le cas des algèbres de Lie

1.2.1 Groupes associés à une algèbre de Lie

Ainsi que nous l'avons précisé plus haut, le théorème 1.1.1 reste vrai dans un cadre plus général. Nous allons donc établir directement le

Théorème 1.2.1. *Soit $(\mathfrak{g}, [., .])$ une algèbre de Leibniz sur l'anneau $\mathbb{K}$. La formule (1.1) munit l'ensemble $G_n(\mathfrak{g})$ d'une structure de groupe.*

Explicitons tout d'abord cette structure de groupe sur les ensembles $G_n(\mathfrak{g})$, avec $n \leq 3$. La structure de groupe de l'ensemble $G_1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ est celle du module : pour $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$x \cdot y = x + y.$$

Si $x = \varepsilon^{01}x_{01} + \varepsilon^{10}x_{10} + \varepsilon^{11}x_{11}$ et $y = \varepsilon^{01}y_{01} + \varepsilon^{10}y_{10} + \varepsilon^{11}y_{11}$ sont deux éléments de $G_2(\mathfrak{g})$, alors

$$x \cdot y = x = \varepsilon^{01}(x_{01} + y_{01}) + \varepsilon^{10}(x_{10} + y_{10}) + \varepsilon^{11}(x_{11} + y_{11} + [x_{10}, y_{01}]).$$

Enfin, si $x = \sum_{\alpha \in I_3} \varepsilon^\alpha x_\alpha$ et $y = \sum_{\alpha \in I_3} \varepsilon^\alpha y_\alpha$ sont deux éléments de $G_3(\mathfrak{g})$, alors

$$x \cdot y = \sum_{\alpha \in I_3} \varepsilon^\alpha (x \cdot y)_\alpha$$

avec, par exemple,

$$(x \cdot y)_{111} = x_{111} + y_{111} + [x_{110}, y_{001}] + [x_{101}, y_{010}] + [x_{100}, y_{011}] + [[x_{100}, y_{001}], y_{010}].$$

Supposons donc que le module $\mathfrak{g}$ soit muni d'une structure d'algèbre de Leibniz sur $\mathbb{K}$ et montrons que le produit défini par la formule (1.1) munit l'ensemble $G_n(\mathfrak{g})$ d'une structure de groupe. Précisons tout d'abord la

Définition 1.2.1. *On appelle élément pur de $G_n(\mathfrak{g})$ tout élément du type $\varepsilon^\alpha x$, avec $x \neq 0$. L'ensemble des éléments purs de $G_n(\mathfrak{g})$ est noté $\mathcal{P}_n(\mathfrak{g})$.*

Remarque 1.2.1. *Pour tout $z \in G_n(\mathfrak{g})$, l'application $x \mapsto x \cdot z - z$ est $\mathbb{K}$ -linéaire.*

Remarque 1.2.2. *Soient $\varepsilon^\alpha x, \varepsilon^\beta y$ deux éléments purs de $G_n(\mathfrak{g})$. Si $\alpha \leq \beta$, alors*

$$\varepsilon^\alpha x \cdot \varepsilon^\beta y = \varepsilon^\alpha x + \varepsilon^\beta y.$$

Nous obtenons alors le

Lemme 1.2.1. *Pour tout $x \in G_n(\mathfrak{g})$, il existe une unique suite d'éléments purs $(\varepsilon^{\alpha_i} x_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$, avec $(\alpha_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$ strictement croissante, telle que*

$$x = ((\dots (\varepsilon^{\alpha_1} x_1 \cdot \varepsilon^{\alpha_2} x_2) \cdot \dots) \cdot \varepsilon^{\alpha_k} x_k).$$

Démonstration. Désignons par $(\theta_i)_{i \in \{1, \dots, 2^n - 1\}}$ la suite strictement croissante des éléments de I_n . Nous allons montrer que

$$\sum_{i=1}^{2^n - 1} \varepsilon^{\theta_i} x_i = \prod_{i, x_i \neq 0} \varepsilon^{\theta_i} x_i,$$

où l'on a utilisé la notation $\prod_{i=1}^k \varepsilon^{\alpha_i} y_i = ((\dots (\varepsilon^{\alpha_1} y_1 \cdot \varepsilon^{\alpha_2} y_2) \cdot \dots) \cdot \varepsilon^{\alpha_k} y_k)$.

La preuve est menée par récurrence sur le nombre l d'indices i pour lesquels $x_i \neq 0$. Le cas $l = 1$ est clairement vérifié. La propriété d'hérédité découle du calcul suivant : si $(\alpha_i)_{i \in \{1, \dots, k\}} \in (I_n)^k$ et si $\beta > \alpha_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on obtient, en utilisant les remarques 2.1 et 1.2.2,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon^{\alpha_i} x_i \right) \cdot \varepsilon^\beta x &= \sum_{i=1}^k \varepsilon^{\alpha_i} x_i \cdot \varepsilon^\beta x - (k-1) \varepsilon^\beta x \\ &= \sum_{i=1}^k (\varepsilon^{\alpha_i} x_i + \varepsilon^\beta x) - (k-1) \varepsilon^\beta x \\ &= \sum_{i=1}^k \varepsilon^{\alpha_i} x_i + \varepsilon^\beta x. \end{aligned}$$

□

Définition 1.2.2. La longueur d'un élément x de $G_n(\mathfrak{g})$ est le nombre d'éléments purs intervenant dans sa décomposition en produit strictement croissant d'éléments purs.

Vérifions que le produit introduit est associatif, ie que

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de $G_n(\mathfrak{g})$. La preuve se fait par récurrence sur la longueur de z .

Si le résultat est vrai pour les éléments z de longueur k , et pour les éléments z purs, le calcul suivant, où z est de longueur k et z' est pur, assure que le résultat est vrai pour les éléments de longueur $k+1$:

$$\begin{aligned} (x \cdot y) \cdot (z \cdot z') &= ((x \cdot y) \cdot z) \cdot z' \\ &= (x \cdot (y \cdot z)) \cdot z' \\ &= x \cdot ((y \cdot z) \cdot z') \\ &= x \cdot (y \cdot (z \cdot z')). \end{aligned}$$

Il ne nous reste donc qu'à étudier le cas des éléments purs pour conclure à l'associativité du produit. C'est l'objet du

Lemme 1.2.2. Soient x, y, z trois éléments de $G_n(\mathfrak{g})$. Si z est pur, alors

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

Démonstration. Soient $x = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha x_\alpha$, $y = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha y_\alpha$ et $z = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha z_\alpha$ trois éléments de $G_n(\mathfrak{g})$. Supposons z pur : il existe $\theta \in I_n$ tel que $z_\alpha = 0$ pour tout multi-indice α distinct de θ , $z_\theta \neq 0$.

Désignons par A_α la quantité $(x \cdot (y \cdot z))_\alpha - ((x \cdot y) \cdot z)_\alpha$. Le lemme sera démontré si nous montrons que cette quantité est nulle pour tout multi-indice α .

Soit $\alpha \in I_n$. Alors

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} ([y_{\lambda^m}, z_{\lambda^1}], \dots, z_{\lambda^{m-1}}] + [[x_{\lambda^m}, y_{z_{\lambda^1}}] \dots y_{z_{\lambda^{m-1}}}] \\ &\quad - [[x_{y_{\lambda^m}}, z_{\lambda^1}], \dots, z_{\lambda^{m-1}}] - [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^1}], \dots, y_{\lambda^{m-1}}]), \end{aligned}$$

et nous pouvons encore développer cette quantité en une somme de crochets itérés ayant pour arguments des éléments du type $x_{\lambda_i}, y_{\lambda_i}, z_{\lambda_i}$, avec $i \in \{1, \dots, m\}$, $m \in \{1, \dots, |\alpha|\}$, $\lambda \in P^m(\alpha)$.

Plus précisément, après avoir effectué ce développement (et remarqué que le crochet $[[y_{\lambda^m}, z_{\lambda^1}], \dots, z_{\lambda^{m-1}}]$ se simplifie avec le développement du crochet $[[xy_{\lambda^m}, z_{\lambda^1}], \dots, z_{\lambda^{m-1}}]$), nous obtenons

$$A_\alpha = \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} C^\alpha(m, \lambda),$$

où $C^\alpha(m, \lambda)$ désigne la somme des crochets itérés en m arguments de A_α faisant intervenir m éléments de l'ensemble

$$\{x_{\lambda^m}, y_{\lambda^1}, \dots, y_{\lambda^{m-1}}, z_\theta\}.$$

Montrons par récurrence sur $|\alpha|$ que $C^\alpha(m, \lambda) = 0$ pour tout $m \in \{2, \dots, |\alpha|\}$, $\lambda \in P^m(\alpha)$. Dans le cas où $|\alpha| = 2$, on a $m = 2$ et pour $\lambda \in P^2(\alpha)$,

$$\begin{aligned} C^\alpha(m, \lambda) &= [x_{\lambda^2}, y_{\lambda^1}] + [x_{\lambda^2}, z_{\lambda^1}] - [x_{\lambda^2}, z_{\lambda^1}] - [x_{\lambda^2}, y_{\lambda^1}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Supposons alors la propriété vraie pour tout multi-indice de longueur inférieure ou égale à r . Soit α un multi-indice de longueur $r+1$, $m \in \{2, \dots, r+1\}$, $\lambda \in P^m(\alpha)$.

Supposons tout d'abord que pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$, λ_i soit distinct de θ . Alors

$$\begin{aligned} C^\alpha(m, \lambda) &= [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^1}], \dots, y_{\lambda^{m-1}}] - [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^1}], \dots, y_{\lambda^{m-1}}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Supposons au contraire qu'il existe $i \in \{1, \dots, m-1\}$ tel que $\lambda^i = \theta$. Distinguons deux cas. Si $i = m-1$,

$$\begin{aligned} C^\alpha(m, \lambda) &= [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^1}], \dots, y_{\lambda^{m-1}}] + [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^1}], \dots, y_{\lambda^{m-2}}, z_\theta] \\ &\quad - [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^1}], \dots, y_{\lambda^{m-2}}, z_\theta] - [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^1}], \dots, y_{\lambda^{m-1}}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Supposons alors $i \neq m-1$. Introduisons la notation suivante : pour i_0, i_1 fixés, $X \in \mathfrak{g}$,

$$[X, y_{\lambda^{i_0 < k < i_1}}] = [[[X, y_{\lambda^{i_0+1}}], y_{\lambda^{i_0+2}}], \dots, y_{\lambda^{i_1-1}}].$$

Alors

$$\begin{aligned} C^\alpha(m, \lambda) &= [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^1}], \dots, y_{\lambda^{m-1}}] + [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^{k < i}}, z_\theta], y_{\lambda^{i < k}}] \\ &\quad - [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^{k < i}}, y_{\lambda^{i < k}}, z_\theta] - [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^1}], \dots, y_{\lambda^{m-1}}] \\ &\quad + \sum_{j=i+1}^{m-1} [[[[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^{k < i}}, y_{\lambda^{i < k < j}}, [y_{\lambda^j}, z_\theta]], y_{\lambda^{j < k}}] \\ &= [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^{k < i}}, z_\theta], y_{\lambda^{i < k}}] - [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^{k < i}}, y_{\lambda^{i < k}}, z_\theta] \\ &\quad + \sum_{j=i+1}^{m-1} [[[[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^{k < i}}, y_{\lambda^{i < k < j}}, [y_{\lambda^j}, z_\theta]], y_{\lambda^{j < k}}]. \end{aligned}$$

Considérons le multi-indice $\alpha' = \alpha - \lambda^{m-1}$ et désignons par λ' la partition $(\lambda^1, \dots, \lambda^{m-2}, \lambda^m)$ de α' .

Alors, par analogie avec le calcul précédent,

$$\begin{aligned} C^{\alpha'}(m-1, \lambda') &= [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^{k < i}}, z_{\theta}], y_{\lambda^{i < k < m-1}}] - [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^{k < i}}, y_{\lambda^{i < k < m-1}}], z_{\theta}] \\ &\quad + \sum_{j=i+1}^{m-2} [[[[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^{k < i}}, y_{\lambda^{i < k < j}}], [y_{\lambda^j}, z_{\theta}]], y_{\lambda^{j < k}}]. \end{aligned}$$

Introduisons la quantité

$$\begin{aligned} B &= [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^{k < i}}, z_{\theta}], y_{\lambda^{i < k < m}}] \\ &\quad + \sum_{j=i+1}^{m-2} [[[[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^{k < i}}, y_{\lambda^{i < k < j}}], [y_{\lambda^j}, z_{\theta}]], y_{\lambda^{j < k < m-1}}]. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} B &= C^{\alpha'}(m-1, \lambda') + [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^{k < i}}, y_{\lambda^{i < k < m-1}}], z_{\theta}] \\ &= [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^{k < i}}, y_{\lambda^{i < k < m-1}}], z_{\theta}], \end{aligned}$$

puisque par hypothèse de récurrence, $C^{\alpha'}(m-1, \lambda') = 0$.

Or

$$\begin{aligned} C^{\alpha}(m, \lambda) &= [B, y_{\lambda^{m-1}}] - [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^{k < i}}, y_{\lambda^{i < k}}, z_{\theta}] \\ &\quad + [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^{k < i}}, y_{\lambda^{i < k < m-1}}], [y_{\lambda^{m-1}}, z_{\theta}]], \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} C^{\alpha}(m, \lambda) &= [[[[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^{k < i}}, y_{\lambda^{i < k < m-1}}], z_{\theta}], y_{\lambda^{m-1}}] \\ &\quad - [[[[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^{k < i}}, y_{\lambda^{i < k < m-1}}], y_{\lambda^{m-1}}], z_{\theta}] \\ &\quad + [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^{k < i}}, y_{\lambda^{i < k < m-1}}], [y_{\lambda^{m-1}}, z_{\theta}]] \\ &= 0, \end{aligned}$$

car $[\cdot, z_{\theta}]$ est une dérivation du crochet.

Ceci termine la récurrence et établit l'associativité du produit. $\square$

La preuve de l'existence de l'inverse de tout élément s'appuie sur la

Remarque 1.2.3. *Un élément pur $x = \varepsilon^{\alpha} x_{\alpha}$ admet l'élément $x^{-1} = \varepsilon^{\alpha}(-x_{\alpha})$ pour inverse. En effet,*

$$\varepsilon^{\alpha} x_{\alpha} \cdot \varepsilon^{\alpha}(-x_{\alpha}) = \varepsilon^{\alpha}(-x_{\alpha}) \cdot \varepsilon^{\alpha} x_{\alpha} = 0.$$

Il est alors immédiat de constater que l'inverse d'un élément quelconque $x = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$ de $G_n(\mathfrak{g})$, écrit comme produit strictement croissant d'une suite d'éléments purs $(x_1, \dots, x_n)$, est donné par

$$x^{-1} = x_n^{-1} \cdot \dots \cdot x_1^{-1}.$$

Le produit défini par la formule (1.1) munit donc l'ensemble $G_n(\mathfrak{g})$ d'une structure de groupe.

Démontrons la formule explicite de l'inverse :

Proposition 1.2.1. *L'inverse d'un élément $x = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha x_\alpha$ de $G_n(\mathfrak{g})$ est donné par $x^{-1} = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha (x^{-1})_\alpha$ où*

$$(x^{-1})_\alpha = -x_\alpha + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} (-1)^m [[x_{\lambda^m}, x_{\lambda^{m-1}}], \dots, x_{\lambda^1}].$$

Démonstration. Le résultat est vrai pour x de longueur 1. Supposons le vrai pour tout x de longueur k . Soit x de longueur $k+1$. Il existe une suite strictement croissante de multi-indices $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1})$, des éléments non nuls $x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{k+1}}$ de l'algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$, tels que

$$x = \varepsilon^{\alpha_1} x_{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \varepsilon^{\alpha_{k+1}} x_{\alpha_{k+1}}.$$

Notons y l'élément $\varepsilon^{\alpha_1} x_{\alpha_1}$ et z l'élément $\varepsilon^{\alpha_2} x_{\alpha_2} \cdot \dots \cdot \varepsilon^{\alpha_{k+1}} x_{\alpha_{k+1}}$. Alors on obtient $x = y \cdot z$ avec $y = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha y_\alpha$ pur ($y_\alpha = x_\alpha$ si $\alpha = \alpha_1$, $y_\alpha = 0$ sinon) et $z = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha z_\alpha$ de longueur k ($z_\alpha = x_\alpha$ si $\alpha = \alpha_k$ avec $k > 1$, $z_\alpha = 0$ sinon).

Par hypothèse de récurrence, $z^{-1} = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha (z^{-1})_\alpha$ avec

$$(z^{-1})_\alpha = -z_\alpha + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} (-1)^m [[z_{\lambda^m}, z_{\lambda^{m-1}}], \dots, z_{\lambda^1}].$$

Remarquons que si $\alpha - \alpha_1 \notin \{0, 1\}^n$, alors

$$(z^{-1})_\alpha = -z_\alpha + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} (-1)^m [[x_{\lambda^m}, x_{\lambda^{m-1}}], \dots, x_{\lambda^1}],$$

et si $\alpha - \alpha_1 \in I_n$, alors

$$(z^{-1})_\alpha = -x_\alpha + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha), \lambda^i \neq \alpha_1} (-1)^m [[x_{\lambda^m}, x_{\lambda^{m-1}}], \dots, x_{\lambda^1}].$$

Soit $\alpha \in I_n$. On obtient

$$\begin{aligned} (x^{-1})_\alpha &= (z^{-1} \cdot y^{-1})_\alpha \\ &= (z^{-1})_\alpha + (y^{-1})_\alpha \\ &\quad + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} (-1)^m [[(z^{-1})_{\lambda^m}, (y^{-1})_{\lambda^1}], \dots, (y^{-1})_{\lambda^{m-1}}] \end{aligned}$$

Nous savons que y^{-1} est l'élément pur $-\varepsilon^{\alpha_1} x_1$. Distinguons trois cas.

Si $\alpha = \alpha_1$, alors

$$\begin{aligned} (x^{-1})_\alpha &= (y^{-1})_{\alpha_1} \\ &= -x_{\alpha_1}. \end{aligned}$$

Si $\alpha - \alpha_1 \notin I_n$ et si $\alpha \neq \alpha_1$, alors

$$\begin{aligned} (x^{-1})_\alpha &= (z^{-1})_\alpha \\ &= -x_\alpha + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} (-1)^m [[x_{\lambda^m}, x_{\lambda^{m-1}}], \dots, x_{\lambda^1}]. \end{aligned}$$

Supposons alors $\alpha - \alpha_1 \in I_n$ et notons β le multi-indice tel que $(\alpha_1, \beta) \in P^2(\alpha)$. Remarquons que $|\alpha| = |\beta| + |\alpha_1|$.

Alors

$$\begin{aligned}
 (x^{-1})_\alpha &= (z^{-1})_\alpha + [(z^{-1})_\beta, (y^{-1})_{\alpha_1}] \\
 &= (z^{-1})_\alpha - [(z^{-1})_\beta, x_{\alpha_1}] \\
 &= -x_\alpha + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha), \lambda^1 \neq \alpha_1} (-1)^m [[x_{\lambda^m}, x_{\lambda^{m-1}}], \dots, x_{\lambda^1}] \\
 &\quad + [x_\beta, x_{\alpha_1}] - \sum_{m=2}^{|\beta|} \sum_{\lambda \in P^m(\beta)} (-1)^m [[[x_{\lambda^m}, x_{\lambda^{m-1}}], \dots, x_{\lambda^1}], x_{\alpha_1}] \\
 &= -x_\alpha + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha), \lambda^1 \neq \alpha_1} (-1)^m [[x_{\lambda^m}, x_{\lambda^{m-1}}], \dots, x_{\lambda^1}] \\
 &\quad + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha), \lambda^1 = \alpha_1} (-1)^m [[[x_{\lambda^m}, x_{\lambda^{m-1}}], \dots, x_{\lambda^1}] \\
 &= -x_\alpha + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} (-1)^m [[x_{\lambda^m}, x_{\lambda^{m-1}}], \dots, x_{\lambda^1}].
 \end{aligned}$$

Nous avons donc prouvé que la formule de l'inverse est correcte pour tout élément de degré $k + 1$, ce qui achève la récurrence. $\square$

Etudions à présent la fonctorialité de la construction.

Proposition 1.2.2. *L'application associant à une algèbre de Leibniz $\mathfrak{g}$ le groupe polynomial $G_n(\mathfrak{g})$ est fonctorielle.*

Démonstration. Soit $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ un morphisme d'algèbres de Leibniz. Nous affirmons que l'application

$$\begin{aligned}
 \tilde{f} : G_n(\mathfrak{g}) &\longrightarrow G_n(\mathfrak{h}) \\
 \sum \varepsilon^\alpha x_\alpha &\longmapsto \sum \varepsilon^\alpha f(x_\alpha),
 \end{aligned}$$

restriction de l'application $f \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$ à l'idéal d'augmentation $G_n(\mathfrak{g})$, est un morphisme de groupes.

En effet, considérons deux éléments de $G_n(\mathfrak{g})$, notés $x = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha x_\alpha$ et $y = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha y_\alpha$. Alors $x \cdot y = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha (x \cdot y)_\alpha$, avec

$$(x \cdot y)_\alpha = x_\alpha + y_\alpha + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [\dots, [x_{\lambda^m}, y_{\lambda^1}], y_{\lambda^2}], \dots, y_{\lambda^{m-1}}].$$

D'autre part, $\tilde{f}(x) = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha f(x_\alpha)$ et $\tilde{f}(y) = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha f(y_\alpha)$. On obtient ainsi $\tilde{f}(x) \cdot \tilde{f}(y) = \sum_{\alpha \in I_n} (\tilde{f}(x) \cdot \tilde{f}(y))_\alpha$, avec

$$\begin{aligned}
 (\tilde{f}(x) \cdot \tilde{f}(y))_\alpha &= f(x_\alpha) + f(y_\alpha) \\
 &\quad + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [\dots, [f(x_{\lambda^m}), f(y_{\lambda^1})], f(y_{\lambda^2})], \dots, f(y_{\lambda^{m-1}})].
 \end{aligned}$$

Il est alors clair, puisque f est un morphisme d'algèbres de Leibniz, que

$$\tilde{f}(x) \cdot \tilde{f}(y) = \tilde{f}(x \cdot y),$$

ce qui prouve que $\tilde{f}$ est un morphisme de groupes.

□

1.2.2 Présentation des groupes par générateurs et relateurs

Désormais, le module $\mathfrak{g}$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie. Par la section précédente, l'ensemble $G_n(\mathfrak{g})$ est muni d'une structure de groupe. Le but de cette section est d'établir la description de cette structure de groupe par générateurs et relateurs ([5]), donnée dans le théorème 1.1.2.

Rappelons que tout élément de $G_n(\mathfrak{g})$ s'écrit de manière unique comme produit strictement croissant d'éléments purs.

D'autre part, pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathfrak{g}$ et tout multi-indice $\alpha \in I_n$,

$$\varepsilon^\alpha x \cdot \varepsilon^\alpha y = \varepsilon^\alpha (x + y).$$

Montrons enfin que pour tout couple $(\varepsilon^\alpha x, \varepsilon^\alpha y)$ d'éléments purs de $G_n(\mathfrak{g})$, on a la relation de commutation suivante

$$\varepsilon^\alpha x \cdot \varepsilon^\beta y = \varepsilon^\beta y \cdot \varepsilon^\alpha x \cdot \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta [x, y].$$

En effet, la formule du produit (1.1) fournit l'identité cherchée dans le cas où $\alpha \geq \beta$. En multipliant à droite les deux membres de l'égalité par

$$(\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta [x, y])^{-1} = \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta (-[x, y]) = \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta [y, x],$$

on obtient alors l'identité dans le cas restant. Remarquons que l'antisymétrie du crochet intervient de manière essentielle dans la preuve de cette relation de commutation. Il n'existe pas de telle relation dans le cas d'une algèbre de Leibniz.

Nous allons prouver que ces identités caractérisent le produit du groupe $G_n(\mathfrak{g})$.

Désignons par $F(I)$ le groupe libre sur l'ensemble I et par N le plus petit sous-groupe normal de I contenant les relateurs donnés dans le théorème 1.1.2. Il s'agit de montrer que le groupe $G_n(\mathfrak{g})$ est isomorphe au groupe quotient $F(I)/N$.

Rappelons que tout élément x du groupe libre sur I peut s'écrire de manière unique sous la forme (cf [17])

$$x = \prod_{i=1}^m (\alpha_i, x_i)^{\xi_i},$$

où $m \in \mathbb{N}$, $((\alpha_i, x_i)) \in I^m$, $(\xi_i) \in \{+1, -1\}^m$, et avec la condition

$$(\alpha_i, x_i) = (\alpha_{i+1}, x_{i+1}) \Rightarrow \xi_i \xi_{i+1} = 1.$$

Notons $\sim$ la relation d'équivalence définie sur $F(I)$ par le sous-groupe normal N : $X \sim Y$ si et seulement si $XY^{-1} \in N$.

Introduisons l'ensemble $F(I)^+$ défini de la manière suivante :

$$F(I)^+ = \left\{ \prod_{i=1}^m (\alpha_i, x_i) \mid m \in \mathbb{N}, ((\alpha_i, x_i)) \in I^m, x_i \neq 0 \right\}.$$

Remarquons que cet ensemble est un sous-monoïde de $F(I)$.

Définition 1.2.3. On appelle application permutation toute application du type $T^{(r, r+1)}$, avec

$$T^{(r, r+1)} : F(I)^+ \longrightarrow F(I)^+$$

définie pour r entier naturel non nul de la manière suivante :

Soit $X = \prod_{i=1}^k (\alpha_i, x_i)$ un élément de $F(I)^+$.

Si $k \leq r$, on pose

$$T^{(r,r+1)}(X) = X.$$

Si $k > r$ et si l'on a $\alpha_r + \alpha_{r+1} \notin I_n$ ou $[x_r, x_{r+1}] = 0$, on pose

$$\begin{aligned} T^{(r,r+1)}(X) = & (\alpha_1, x_1) \dots (\alpha_{r-1}, x_{r-1}) (\alpha_{r+1}, x_{r+1}) \\ & (\alpha_r, x_r) (\alpha_{r+2}, x_{r+2}) \dots (\alpha_k, x_k). \end{aligned}$$

Enfin, si $k > r$ et si l'on a $\alpha_r + \alpha_{r+1} \in I_n$ et $[x_r, x_{r+1}] \neq 0$, on pose

$$\begin{aligned} T^{(r,r+1)}(X) = & (\alpha_1, x_1) \dots (\alpha_{r-1}, x_{r-1}) (\alpha_{r+1}, x_{r+1}) (\alpha_r, x_r) \\ & (\alpha_r + \alpha_{r+1}, [x_r, x_{r+1}]) (\alpha_{r+2}, x_{r+2}) \dots (\alpha_k, x_k). \end{aligned}$$

Définition 1.2.4. Pour deux éléments X, Y de $F(I)^+$, on dit que X est en relation avec Y et on note $X\mathcal{R}Y$ si et seulement si il existe une suite finie d'applications permutation $(T_1, \dots, T_p)$ telle que $T_1 \circ \dots \circ T_p(X) = Y$.

Remarque 1.2.4. Cette relation est réflexive et transitive, mais n'est pas symétrique.

On vérifie aisément que si $X\mathcal{R}Y$, alors $X \sim Y$.

Lemme 1.2.3. Cette relation est compatible avec le produit à gauche sur $F(I)^+$: si $X\mathcal{R}Y$, alors $(A.X)\mathcal{R}(A.Y)$ pour tout $A \in F(I)^+$.

Démonstration. La compatibilité avec le produit à gauche est immédiate : définissons, pour tout entier naturel k , une application notée L_k qui à une application permutation du type $T^{(r,r+1)}$ associe l'application permutation $T^{(l+r,l+r+1)}$. On remarque alors que si X, Y sont deux éléments de $F(I)^+$ tels que $T(X) = Y$ pour une application permutation T , alors pour tout élément A de $F(I)^+$, $L_k(T)(A.X) = A.Y$.

Ainsi, $X\mathcal{R}Y$ implique $(A.X)\mathcal{R}(A.Y)$ pour tout $A \in F(I)^+$. $\square$

Pour un multi-indice α de I_n , définissons l'application Π_α suivante :

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha : \quad F(I)^+ & \longrightarrow F(I)^+ \\ \prod_{i=1}^k (\alpha_i, x_i) & \longmapsto \prod_{i, \alpha_i = \alpha} (\alpha_i, x_i). \end{aligned}$$

Lemme 1.2.4. Soit X un élément de $F(I)^+$, α un multi-indice. Il existe deux éléments X_α, X^α de $F(I)^+$ tels que :

- $X\mathcal{R}(X_\alpha.X^\alpha)$
- $\Pi_\alpha(X_\alpha) = X_\alpha$,
- $\Pi_\alpha(X^\alpha) = \emptyset$,
- pour tout $\beta < \alpha$, $\Pi_\beta(X^\alpha) = \Pi_\beta(X)$.

Démonstration. Démontrons ce résultat par induction. Introduisons l'hypothèse de récurrence (H_l) suivante :

pour tout élément X de $F(I)^+$ contenant l éléments purs appartenant à l'axe $\{\alpha\} \times \mathfrak{g}$, il existe des éléments X_l, X^l de $F(I)^+$ tels que

- $X\mathcal{R}(X_l.X^l)$
- $\Pi_\alpha(X_l) = X_l$,
- $\Pi_\alpha(X^l) = \emptyset$,
- pour tout $\beta < \alpha$, $\Pi_\beta(X^l) = \Pi_\beta(X)$.

L'hypothèse (H_0) étant clairement vérifiée, considérons l tel que l'hypothèse (H_l) le soit également.

Soit $X = \prod_{i=1}^k (\alpha_i, x_i)$ un élément de $F(I)^+$ tel que $l+1$ des α_i soient égaux à α . Soit i tel que $\alpha_i = \alpha$. Il est alors immédiat de constater que

$$T^{(1,2)} \circ \dots \circ T^{(i-1,i)}(X)$$

est du type

$$(\alpha_i, x_i).X'$$

où X' est un élément de $F(I)^+$ comportant l éléments purs sur l'axe $\{\alpha\} \times \mathfrak{g}$ et vérifiant pour tout $\beta < \alpha$, $\Pi_\beta(X') = \Pi_\beta(X)$.

Par hypothèse de récurrence, il existe alors deux éléments X_l, X^l de $F(I)^+$ tels que

- $X'\mathcal{R}(X_l.X^l)$
- $\Pi_\alpha(X_l) = X_l$,
- $\Pi_\alpha(X^l) = \emptyset$,
- pour tout $\beta < \alpha$, $\Pi_\beta(X^l) = \Pi_\beta(X')$.

Alors

$$((\alpha_i, x_i).X')\mathcal{R}((\alpha_i, x_i).X_l.X^l)$$

et par transitivité de la relation

$$X\mathcal{R}((\alpha_i, x_i).X_l.X^l).$$

En posant $X_{l+1} = \alpha_i, x_i.X_l$ et $X^{l+1} = X^l$, on obtient donc

- $X\mathcal{R}(X_{l+1}.X^{l+1})$
- $\Pi_\alpha(X_{l+1}) = \varepsilon^{\alpha_i} x_i. \Pi_\alpha(X_l) = \varepsilon^{\alpha_i} x_i. X_l = X_{l+1}$,
- $\Pi_\alpha(X^{l+1}) = \Pi_\alpha(X^l) = \emptyset$,
- pour tout $\beta < \alpha$, $\Pi_\beta(X^{l+1}) = \Pi_\beta(X^l) = \Pi_\beta(X') = \Pi_\beta(X)$.

ce qui montre que (H_{l+1}) est vraie. □

Introduisons l'ensemble $F(I)^\nearrow$ (resp. l'ensemble $F(I)^\uparrow$), constitué des éléments $\prod_{i=1}^k (\alpha_i, x_i)$ de $F(I)^+$ pour lesquels $(\alpha_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$ est une suite croissante (resp. strictement croissante) d'éléments de I_n . Le lemme permet d'obtenir la

Proposition 1.2.3. *Pour tout élément X de $F(I)^+$, il existe un élément Y de $F(I)^\nearrow$ tel que $X\mathcal{R}Y$.*

Démonstration. Notons (θ_i) la suite constituée de l'ensemble des éléments de I_n rangés par ordre croissant.

Définissons par induction une suite $(X_k, X^k)_{k \in \{1, \dots, 2^n - 1\}}$ de couples d'éléments de $F(I)^+$.

Par le lemme, il existe des éléments X_1, X^1 de $F(I)^+$ tels que

- $X\mathcal{R}(X_1.X^1)$
- $\Pi_{\theta_1}(X_1) = X_1$,
- $\Pi_{\theta_1}(X^1) = \emptyset$.

Supposons X_k, X^k construits. Par le lemme, il existe des éléments X_{k+1}, X^{k+1} de $F(I)^+$ tels que

- $X^k\mathcal{R}(X_{k+1}.X^{k+1})$
- $\Pi_{\theta_{k+1}}(X_{k+1}) = X_{k+1}$,
- $\Pi_{\theta_{k+1}}(X^{k+1}) = \emptyset$.
- pour tout $l < k+1$, $\Pi_{\theta_l}(X^{k+1}) = \Pi_{\theta_l}(X^k)$.

Par induction, on montre que pour tout $k \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$, l'élément X^k vérifie $\Pi_{\theta_l}(X^k) = \emptyset$ pour tout $l \leq k$. En particulier, $X^{2^n - 1} = \emptyset$.

Remarquons d'autre part que $Y = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_{2^n - 1}$ appartient à $F(I)^\nearrow$. Puisque la relation est transitive et stable par produit à gauche, nous obtenons finalement

$$XRY,$$

ce qui achève la preuve. □

Proposition 1.2.4. *L'ensemble quotient $F(I)/N$ est en bijection avec l'ensemble $F(I)^\uparrow$.*

Démonstration. Les éléments $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, x + y)(\alpha, x)^{-1}(\alpha, y)^{-1}$ appartenant à N , l'élément

$$(\alpha, -x)(\alpha, x) = ((\alpha, 0)^{-1}(\alpha, x + (-x))(\alpha, x)^{-1}(\alpha, -x)^{-1})^{-1}$$

est également élément de N .

Soit X un élément du groupe libre $F(I)$. En utilisant les relateurs du type $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, x)(\alpha, -x)$, on vérifie alors qu'il existe $Y \in F(I)^\uparrow$ tel que $X \sim Y$. Par ce qui précède, il existe $Y' \in F(I)^\nearrow$ tel que YRY' . Alors $Y \sim Y'$.

Par les relateurs du type

$$(\alpha, x + y)(\alpha, -x)(\alpha, -y),$$

il est clair qu'il existe $Y'' \in F(I)^\uparrow$ tel que $Y' \sim Y$. Ainsi $X \sim Y''$.

Supposons alors qu'il existe $Z \in F(I)^\uparrow$ tel que $X \sim Z$. On en déduit $Y'' \sim Z$ et donc $Y''Z^{-1} \in N$. Or les éléments de N sont de la forme $n = \prod_{i=1}^k g_i r_i g_i^{-1}$, où les r_i sont des relateurs, et les g_i des éléments de $F(I)$. Un tel élément est de la forme $\prod_{i=1}^r (\alpha_i, x_i) \prod_{i=1}^x (\beta_i, y_i)^{-1}$ avec (α_i) suite strictement croissante et (β_i) suite strictement décroissante si et seulement si $n = \emptyset$. Ainsi $Y''Z^{-1} \in N$ implique $Y''Z^{-1} = \emptyset$ et donc $Y'' = Z$.

Finalement, l'ensemble $F(I)/N$ est en bijection avec $F(I)^\uparrow$. □

L'application

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G_n(\mathfrak{g}) \\ (\alpha, x) & \longmapsto & \varepsilon^\alpha x \end{array}$$

se prolonge en un unique morphisme de groupes $\varphi : F(I) \longrightarrow G_n(\mathfrak{g})$. Ce morphisme est surjectif car si $x = \sum_{i=1}^{2^n - 1} \varepsilon^{\theta_i} x_i$ est un élément de $G_n(\mathfrak{g})$ ((θ_i) désignant la suite croissante des éléments de I_n),

$$\varphi\left(\prod_{i=1}^{2^n - 1} (\theta_i, x_i)\right) = x.$$

On vérifie sans peine que si n est un relateur, $\varphi(n) = 0$, ce qui prouve que l'application φ se factorise en un morphisme surjectif $\psi : F(I)/N \longrightarrow G_n(\mathfrak{g})$.

La preuve du théorème 1.1.2 s'achève donc avec la

Proposition 1.2.5. *L'application ψ est un isomorphisme du groupe $F(I)/N$ sur le groupe $G_n(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer l'injectivité de cette application.

Si $X = \prod_{i=1}^k (\alpha_i, x_i)$, $Y = \prod_{i=1}^l (\beta_i, y_i)$ sont deux éléments de $F(I)^\uparrow$ tels que $\varphi(X) = \varphi(Y)$, alors $\prod_{i=1}^k \varepsilon^{\alpha_i} x_i = \prod_{i=1}^l \varepsilon^{\beta_i} y_i$. Les suites (α_i) et (β_i) étant strictement croissantes, on obtient alors

$$\sum_{i=1}^k \varepsilon^{\alpha_i} x_i = \sum_{i=1}^l \varepsilon^{\beta_i} y_i,$$

et donc $k = l$, $\alpha_i = \beta_i$ et $x_i = y_i$. Ainsi $X = Y$ et l'application ψ est injective.

□

1.2.3 Action du groupe symétrique

Nous restons dans le cadre de la section précédente : le module $\mathfrak{g}$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie. Nous allons montrer que le groupe symétrique d'ordre n agit de manière naturelle par morphismes sur le groupe $G_n(\mathfrak{g})$.

Le groupe symétrique d'ordre n agit sur l'ensemble I par $\sigma.(\alpha, x) = (\sigma.\alpha, x)$. On en déduit une action par morphismes sur le groupe libre $F(I)$. Cette action passe au quotient car il est aisé de vérifier que $\sigma.r \in N$ pour tout relateur r . Ainsi le groupe des permutations d'ordre n agit par automorphismes sur

$$G_n(\mathfrak{g}) \simeq F(I)/N.$$

La formule est donnée de manière explicite grâce à l'isomorphisme ψ : pour $\sigma \in \Sigma_n$ et $x = \prod_{i=1}^k \varepsilon^{\alpha_i} x_i \in G_n(\mathfrak{g})$ écrit comme produit strictement croissant d'éléments purs,

$$\sigma(x) = \prod_{i=1}^k \varepsilon^{\sigma.\alpha_i} x_i.$$

Nous avons ainsi établi la première partie du théorème 1.1.3.

L'ensemble $J_n(\mathfrak{g})$ des éléments de $G_n(\mathfrak{g})$ fixes sous l'action du groupe symétrique d'ordre n est donc un sous-groupe de $G_n(\mathfrak{g})$.

Nous nous intéressons à présent à l'étude de ce sous-groupe.

Remarquons que le groupe symétrique d'ordre n agit également de manière naturelle par automorphismes sur l'anneau $T^n\mathbb{K}$: si $x + \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha x_\alpha$ est un élément de $T^n\mathbb{K}$, et si σ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$, l'action est donnée par

$$\sigma(x + \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha x_\alpha) = x + \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^{\sigma.\alpha} x_\alpha.$$

On désigne par $J^n\mathbb{K}$ le sous-anneau de $T^n\mathbb{K}$ des points fixes sous l'action de Σ_n . Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, désignons par $\delta^{(i)}$ l'élément

$$\sum_{\alpha \in I_n, |\alpha|=i} \varepsilon^\alpha.$$

Il est alors aisé de vérifier que

$$J^n\mathbb{K} = \{x + \sum_{i=1}^n \delta^{(i)} x_i \mid x, x_i \in \mathbb{K}\}.$$

Montrons alors que le sous-groupe $J_n(\mathfrak{g})$ est l'idéal d'augmentation de l'extension de l'algèbre $\mathfrak{g}$ par l'anneau $J^n\mathbb{K}$:

Proposition 1.2.6. *L'ensemble $\bigoplus_{i=1}^n \delta^{(i)} \mathfrak{g}$ est un sous-groupe de $G_n(\mathfrak{g})$. Plus précisément,*

$$\bigoplus_{i=1}^n \delta^{(i)} \mathfrak{g} = J_n(\mathfrak{g}).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $J_n(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i=1}^n \delta^{(i)} \mathfrak{g}$.

Montrons en premier lieu que $\bigoplus_{i=1}^n \delta^{(i)} \mathfrak{g} \subset J_n(\mathfrak{g})$. La preuve se conduit par récurrence sur n , le cas $n = 1$ étant évident. Notons (k_n) la suite de terme général $2^n - 1$ et $(\theta_i^n)_{1 \leq i \leq k_n}$ la suite croissante des éléments de I_n . On pose de plus $\theta_0^n = (0, \dots, 0)$, de sorte que

$$(\theta_i^{n+1})_{1 \leq i \leq k_{n+1}} = ((0, \theta_1^n), \dots, (0, \theta_{k_n}^n), (1, \theta_0^n), \dots, (1, \theta_{k_n}^n)).$$

Supposons le résultat vrai au rang n : pour tout $x = \sum_{i=1}^{k_n} \varepsilon^{\theta_i^n} x_{|\theta_i^n|}$ élément de $\bigoplus_{i=1}^n \delta^{(i)} \mathfrak{g}$, pour toute permutation $\sigma \in \Sigma_n$,

$$\sigma(x) = x.$$

Soit alors $x = \sum_{i=1}^{k_{n+1}} \varepsilon^{\theta_i^{n+1}} x_{|\theta_i^{n+1}|}$ un élément de $\bigoplus_{i=1}^{n+1} \delta^{(i)} \mathfrak{g}$. Puisque (θ_i^{n+1}) est une suite strictement croissante,

$$\begin{aligned} x &= \prod_{i=1}^{k_{n+1}} \varepsilon^{\theta_i^{n+1}} x_{|\theta_i^{n+1}|} \\ &= \prod_{i=1}^{k_n} \varepsilon^{(0, \theta_i^n)} x_{|\theta_i^n|} \cdot \prod_{i=0}^{k_n} \varepsilon^{(1, \theta_i^n)} x_{|\theta_i^n|+1}. \end{aligned}$$

Soit $\sigma \in \Sigma_{n+1}$. Les transpositions du type $(i, i+1)$ engendrant le groupe Σ_{n+1} , supposons que σ soit de ce type.

Distinguons deux cas. Si $\sigma = (i, i+1)$ avec i distinct de 1, alors, en notant $\sigma' = (i-1, i)$, on obtient

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \prod_{i=1}^{k_{n+1}} \varepsilon^{\sigma \cdot \theta_i^{n+1}} x_{|\theta_i^{n+1}|} \\ &= \prod_{i=1}^{k_n} \varepsilon^{(0, \sigma' \cdot \theta_i^n)} x_{|\theta_i^n|} \cdot \varepsilon^{(1, 0, \dots, 0)} x_1 \cdot \prod_{i=1}^{k_n} \varepsilon^{(1, \sigma' \cdot \theta_i^n)} x_{|\theta_i^n|+1}. \end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence,

$$\prod_{i=1}^{k_n} \varepsilon^{\sigma' \cdot \theta_i^n} x_{|\theta_i^n|} = \prod_{i=1}^{k_n} \varepsilon^{\theta_i^n} x_{|\theta_i^n|}$$

et

$$\prod_{i=1}^{k_n} \varepsilon^{\sigma' \cdot \theta_i^n} x_{|\theta_i^n|+1} = \prod_{i=1}^{k_n} \varepsilon^{\theta_i^n} x_{|\theta_i^n|+1},$$

d'où

$$\prod_{i=1}^{k_n} \varepsilon^{(0, \sigma' \cdot \theta_i^n)} x_{|\theta_i^n|} = \prod_{i=1}^{k_n} \varepsilon^{(0, \theta_i^n)} x_{|\theta_i^n|}$$

et

$$\prod_{i=1}^{k_n} \varepsilon^{(1, \sigma' \cdot \theta_i^n)} x_{|\theta_i^n|+1} = \prod_{i=1}^{k_n} \varepsilon^{(1, \theta_i^n)} x_{|\theta_i^n|+1}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \prod_{i=1}^{k_n} \varepsilon^{(0, \theta_i^n)} x_{|\theta_i^n|} \cdot \varepsilon^{(1, 0, \dots, 0)} x_1 \cdot \prod_{i=1}^{k_n} \varepsilon^{(1, \theta_i^n)} x_{|\theta_i^n|+1} \\ &= x. \end{aligned}$$

Supposons alors que $\sigma = (1, 2)$.

On a

$$\begin{aligned} (\theta_i^{n+1}) &= ((0, 0, \theta_1^{n-1}), \dots, (0, 0, \theta_{k_{n-1}}^{n-1}), (0, 1, \theta_0^{n-1}), \dots, (0, 1, \theta_{k_{n-1}}^{n-1}), \\ &\quad (1, 0, \theta_0^{n-1}), \dots, (1, 0, \theta_{k_{n-1}}^{n-1}), (1, 1, \theta_0^{n-1}), \dots, (1, 1, \theta_{k_{n-1}}^{n-1})). \end{aligned}$$

Alors

$$x = x_{(0,0)} \cdot x_{(0,1)} \cdot x_{(1,0)} \cdot x_{(1,1)}$$

avec

$$x_{(0,0)} = \prod_{i=1}^{k_{n-1}} \varepsilon^{(0,0,\theta_i^{n-1})} x_{|\theta_i^{n-1}|},$$

$$x_{(0,1)} = \prod_{i=0}^{k_{n-1}} \varepsilon^{(0,1,\theta_i^{n-1})} x_{|\theta_i^{n-1}|+1},$$

$$x_{(1,0)} = \prod_{i=0}^{k_{n-1}} \varepsilon^{(1,0,\theta_i^{n-1})} x_{|\theta_i^{n-1}|+1},$$

et

$$x_{(1,1)} = \prod_{i=0}^{k_{n-1}} \varepsilon^{(1,1,\theta_i^{n-1})} x_{|\theta_i^{n-1}|+2}.$$

D'autre part,

$$\sigma(x) = x_{(0,0)} \cdot x_{(1,0)} \cdot x_{(0,1)} \cdot x_{(1,1)}.$$

Or, en utilisant la relation $\varepsilon^\alpha y \cdot \varepsilon^\beta z = \varepsilon^\beta z \cdot \varepsilon^\alpha y \cdot \varepsilon^{\alpha+\beta}[y, z]$, on obtient

$$\begin{aligned} x_{(1,0)} \cdot x_{(0,1)} &= x_{(0,1)} \cdot x_{(1,0)} \cdot \prod_{i,j=0}^{k_{n-1}} \varepsilon^{(1,1,\theta_i^{n-1}+\theta_j^{n-1})} [x_{|\alpha_i^{n-1}|+1}, x_{|\alpha_j^{n-1}|+1}] \\ &= x_{(0,1)} \cdot x_{(1,0)} \cdot \prod_{0 \leq i < j \leq k_{n-1}} \varepsilon^{(1,1,\theta_i^{n-1}+\theta_j^{n-1})} \\ &\quad ([x_{|\alpha_i^{n-1}|+1}, x_{|\alpha_j^{n-1}|+1}] + [x_{|\alpha_j^{n-1}|+1}, x_{|\alpha_i^{n-1}|+1}]) \\ &= x_{(0,1)} \cdot x_{(1,0)}, \end{aligned}$$

car

$$[x_{|\alpha_i^{n-1}|+1}, x_{|\alpha_j^{n-1}|+1}] = -[x_{|\alpha_j^{n-1}|+1}, x_{|\alpha_i^{n-1}|+1}].$$

On en déduit

$$\sigma(x) = x,$$

ce qui termine la récurrence.

Il reste à montrer l'inclusion réciproque.

Soit $x = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha x_\alpha$ un élément de $J_n(\mathfrak{g})$.

Considérons une transposition du type $(i, i+1)$ et distinguons les quatre types suivants de multi-indices : $(\sigma_1, 0, 0, \sigma_2)$, $(\sigma_1, 0, 1, \sigma_2)$, $(\sigma_1, 1, 0, \sigma_2)$, et $(\sigma_1, 1, 1, \sigma_2)$, de manière à ce que la permutation $(i, i+1)$ transforme un multi-indice du second type en un multi-indice du troisième type et fixe les multi-indices du premier et quatrième type.

Nous notons T_k la suite strictement croissante des multi-indices du k -ième type. Introduisons de plus $x_{(0,0)} = \prod_{\alpha \in T_1} \varepsilon^\alpha x_\alpha$, et $x_{(1,1)} = \prod_{\alpha \in T_4} \varepsilon^\alpha x_\alpha$. Alors

$$x = x_{(0,0)} \cdot \prod_{\alpha \in T_2} \varepsilon^\alpha x_\alpha \cdot \prod_{\alpha \in T_3} \varepsilon^\alpha x_\alpha \cdot x_{(1,1)}.$$

Nous obtenons

$$(i, i+1)(x) = x_{(0,0)} \cdot \prod_{\alpha \in T_2} \varepsilon^{(i,i+1) \cdot \alpha} x_\alpha \cdot \prod_{\alpha \in T_3} \varepsilon^{(i,i+1) \cdot \alpha} x_\alpha \cdot x_{(1,1)},$$

ou, de manière plus explicite,

$$\begin{aligned} (i, i+1)(x) &= x_{(0,0)} \cdot \prod_{(\alpha_1, 0, 1, \alpha_2) \in T_2} \varepsilon^{(\alpha_1, 1, 0, \alpha_2)} x_{(\alpha_1, 0, 1, \alpha_2)} \\ &\cdot \prod_{(\alpha_1, 1, 0, \alpha_2) \in T_3} \varepsilon^{(\alpha_1, 0, 1, \alpha_2)} x_{(\alpha_1, 1, 0, \alpha_2)} \cdot x_{(1,1)}. \end{aligned}$$

En utilisant les relations du type

$$\varepsilon^\alpha x_\alpha \cdot \varepsilon^\beta x_\beta = \varepsilon^\beta x_\beta \cdot \varepsilon^\alpha x_\alpha \cdot \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta [x_\alpha, x_\beta],$$

on vérifie aisément que

$$\begin{aligned} (i, i+1)(x) &= x_{(0,0)} \cdot \prod_{(\alpha_1, 0, 1, \alpha_2) \in T_2} \varepsilon^{(\alpha_1, 0, 1, \alpha_2)} x_{(\alpha_1, 1, 0, \alpha_2)} \\ &\cdot \prod_{(\alpha_1, 1, 0, \alpha_2) \in T_3} \varepsilon^{(\alpha_1, 1, 0, \alpha_2)} x_{(\alpha_1, 0, 1, \alpha_2)} \cdot x'_{(1,1)}, \end{aligned}$$

où $x'_{(1,1)}$ désigne un produit strictement croissant d'éléments purs appartenant à l'axe $\varepsilon^\alpha \mathfrak{g}$, avec $\alpha \in T_4$. Ainsi

$$(i, i+1)(x) = x_{(0,0)} \cdot \prod_{\alpha \in T_2} \varepsilon^\alpha x_{(i,i+1) \cdot \alpha} \cdot \prod_{\alpha \in T_3} \varepsilon^\alpha x_{(i,i+1) \cdot \alpha} \cdot x'_{(1,1)}.$$

L'élément x appartenant à $J_n(\mathfrak{g})$, l'action de la transposition $(i, i+1)$ sur x est triviale, ce qui implique

$$\begin{aligned} x_{(0,0)} &\cdot \prod_{\alpha \in T_2} \varepsilon^\alpha x_{(i,i+1) \cdot \alpha} \cdot \prod_{\alpha \in T_3} \varepsilon^\alpha x_{(i,i+1) \cdot \alpha} \cdot x'_{(1,1)} \\ &= x_{(0,0)} \cdot \prod_{\alpha \in T_2} \varepsilon^\alpha x_\alpha \cdot \prod_{\alpha \in T_3} \varepsilon^\alpha x_\alpha \cdot x_{(1,1)}. \end{aligned}$$

Or, tout élément de $G_n(\mathfrak{g})$ s'écrit de manière unique comme produit strictement croissant d'éléments purs. L'égalité précédente impose donc $x_{(i,i+1) \cdot \alpha} = x_\alpha$ pour tout $\alpha \in T_2$. Ainsi, pour tout $\alpha \in I_n$, pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, $x_{\sigma \cdot \alpha} = x_\alpha$, ce qui montre que $x_\alpha = x_\beta$ si α et β sont deux multi-indices de même longueur.

Finalement, nous avons montré que x appartient à $\bigoplus_{i=1}^n \delta^{(i)} \mathfrak{g}$.

Des deux inclusions, on déduit l'égalité cherchée. $\square$

Si $\mathfrak{g}$ est munie d'une structure d'algèbre de Leibniz, le groupe symétrique Σ_n n'agit en général pas par automorphismes sur le groupe $G_n(\mathfrak{g})$. En revanche, l'ensemble $J_n(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i=1}^n \delta^{(i)} \mathfrak{g}$ est toujours un sous-groupe de $G_n(\mathfrak{g})$.

En effet, si $x = \sum_{i=1}^n \delta^{(i)} x_i$ et si $y = \sum_{i=1}^n \delta^{(i)} y_i$ sont deux éléments de $J_n(\mathfrak{g})$, on a

$$x \cdot y = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha (x \cdot y)_\alpha$$

avec

$$(x \cdot y)_\alpha = x_{|\alpha|} + y_{|\alpha|} + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [[x_{|\lambda^m|}, y_{|\lambda^1|}], y_{|\lambda^1|}], \dots, y_{|\lambda^{m-1}|}].$$

Si α et β sont deux multi-indices de même longueur, les partitions de α et de β étant du même type, on a alors $(x \cdot y)_\alpha = (x \cdot y)_\beta$, ce qui prouve que $x \cdot y \in J_n(\mathfrak{g})$.

Puisque $J_n(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i=1}^n \delta^{(i)} \mathfrak{g}$ est un sous-groupe de $G_n(\mathfrak{g})$, on en déduit que pour tous n -uplets $(x_i), (y_i) \in \mathfrak{g}^n$, il existe un n -uplet $(z_i) \in \mathfrak{g}^n$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^n \delta^{(i)} x_i \cdot \sum_{i=1}^n \delta^{(i)} y_i = \sum_{i=1}^n \delta^{(i)} z_i,$$

avec (z_i) ne dépendant que de (x_i) et (y_i) .

Explicitons les premiers termes :

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + y_1 \\ z_2 &= x_2 + y_2 + [x_1, y_1] \\ z_3 &= x_3 + y_3 + 2[x_2, y_1] + [[x_1, y_1], y_1] + [x_1, y_2] \\ z_4 &= x_4 + y_4 + 3[x_3, y_1] + 3[x_2, y_2] + 3[[x_2, y_1], y_1] + [x_1, y_3] \\ &\quad + 2[[x_1, y_2], y_1] + [[x_1, y_1], y_2] + [[[x_1, y_1], y_1], y_1] \\ z_5 &= x_5 + y_5 + 4[x_4, y_1] + 6[x_3, y_2] + 6[[x_3, y_1], y_1] \\ &\quad + 4[x_2, y_3] + 8[[x_2, y_2], y_1] + 4[[x_2, y_1], y_2] + 4[[[x_2, y_1], y_1], y_1] \\ &\quad + [x_1, y_4] + 3[[x_1, y_3], y_1] + 3[[x_1, y_2], y_2] + 3[[[x_1, y_2], y_1], y_1] \\ &\quad + 2[[[x_1, y_1], y_2], y_1] + [[[x_1, y_1], y_1], y_2] + [[[[x_1, y_1], y_1], y_1], y_1]. \end{aligned}$$

Donnons encore la formule explicite du cas particulier où un seul des éléments de chaque n -uplet (x_i) et (y_i) est non nul :

$$(1.3) \quad \delta^{(i)} x \cdot \delta^{(j)} y = \delta^{(i)} x + \delta^{(j)} y + \sum_{k \geq 1} C_{i,j,k} \delta^{(i+kj)} [\dots [x, y], y], \dots, y]_k,$$

où $\delta^{(r)} = 0$ si $r > n$, $[\dots [x, y], y], \dots, y]_k$ désigne le crochet itéré de $[x, y]$ avec y faisant intervenir k fois l'élément y , et

$$C_{i,j,k} = \binom{i+kj-1}{i-1} \binom{kj-1}{j-1} \binom{(k-1)j-1}{j-1} \cdots \binom{2j-1}{j-1} \binom{j-1}{j-1}.$$

Similairement, les coefficients de la formule générale des z_i , que nous n'explicitons pas ici, font intervenir des produits de coefficients binomiaux.

1.2.4 Compléments

Dans cette section, on suppose que le module $\mathfrak{g}$ est muni d'une structure d'algèbre de Leibniz sur l'anneau $\mathbb{K}$.

Le groupe polynomial $G_n(\mathfrak{g})$

Nous utilisons dans ce paragraphe la notion de groupe polynomial développée dans [1], qui s'appuie sur celle d'application polynomiale sur un anneau (voir [4], chapitre IV). Rappelons-en tout d'abord la

Définition 1.2.5. *On dit qu'un $\mathbb{K}$ -module G muni d'une structure de groupe (G, m) est un groupe polynomial d'ordre au plus k si et seulement si la multiplication m , l'inversion i sont des applications polynomiales et si les produits itérés*

$$\begin{aligned} m^{(j)} : G^j &\longrightarrow G \\ (x_i) &\longmapsto \prod_{i=1}^j x_i, \end{aligned}$$

pour tout entier j , sont des applications polynomiales de degré au plus k .

On dit qu'un module G muni d'une structure de groupe (G, m) est un groupe polynomial si et seulement s'il existe un entier naturel k tel que (G, m) soit polynomial d'ordre au plus k .

Remarquons alors que le groupe $(G_n(\mathfrak{g}), \cdot)$ est polynomial (d'ordre au plus n). Par conséquent, le sous-groupe $(J_n(\mathfrak{g}), \cdot)$ est également polynomial.

A tout groupe polynomial est associé une algèbre de Lie (c'est une restriction du foncteur Lie de la catégorie des groupes formels dans celle des algèbres de Lie, voir [27] ou [6]).

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, l'algèbre de Lie associée au groupe polynomial $(G_n(\mathfrak{g}), \cdot)$ est la structure naturelle d'algèbre nilpotente sur $G_n(\mathfrak{g})$ donnée par :

$$\left[\sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha x_\alpha, \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha y_\alpha \right] = \sum_{\alpha, \beta \in I_n} \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta [x_\alpha, y_\beta].$$

On montre aussi, en utilisant la formule (1.3), que l'algèbre de Lie associée au groupe polynomial $J_n(\mathfrak{g})$ est donnée par le crochet bilinéaire sur $J_n(\mathfrak{g})$ vérifiant :

$$[\delta^{(i)} x, \delta^{(j)} y] = \binom{i+j}{i} \delta^{(i+j)} [x, y].$$

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Leibniz, l'algèbre de Lie associée au groupe polynomial $G_n(\mathfrak{g})$ est le module $G_n(\mathfrak{g})$ muni du crochet de Lie

$$\left[\sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha x_\alpha, \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha y_\alpha \right] = \sum_{\alpha > \beta} \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta ([x_\alpha, y_\beta] - [y_\alpha, x_\beta]).$$

Ce crochet est clairement antisymétrique et nous savons par construction qu'il vérifie l'identité de Jacobi. Il n'est cependant pas difficile de démontrer directement ce dernier point.

Nous obtenons alors la

Proposition 1.2.7. *L'application qui à une algèbre de Leibniz $(\mathfrak{g}, [.,.])$ associe l'algèbre de Lie $(G_n(\mathfrak{g}), [.,.])$ décrite précédemment est un foncteur de la catégorie des algèbres de Leibniz dans celle des algèbres de Lie.*

Remarque 1.2.5. *La structure d'algèbre de Leibniz du module $\mathfrak{g}$ est entièrement caractérisée par la structure de groupe construite sur $G_2(\mathfrak{g})$.*

En effet, l'application qui à une structure d'algèbre de Leibniz $[\cdot, \cdot]$ sur le module $\mathfrak{g}$ associe la structure de groupe polynomial $\cdot_{[\cdot, \cdot]}$ précédemment décrite sur $G_2(\mathfrak{g})$ est injective. En effet, si une structure de groupe polynomial du type $\cdot_{[\cdot, \cdot]}$ est donnée sur $G_2(\mathfrak{g})$, on identifie le crochet dont elle provient en utilisant la formule suivante :

$$[\varepsilon_{10}x, \varepsilon_{11}y] = \varepsilon_{11}[x, y],$$

où le crochet du terme de gauche désigne le commutateur de deux éléments du groupe $G_2(\mathfrak{g})$.

Limites projectives

L'anneau tangent $T\mathbb{K}$ se projette de manière naturelle sur la base $\mathbb{K}$ par l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[x]/(x^2) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ [p] & \longmapsto & p(0). \end{array}$$

En utilisant la présentation par nombre d'aux, cette projection associe à l'élément $x + \varepsilon y$ de $T\mathbb{K}$ l'élément x de $\mathbb{K}$. De manière analogue, il existe des projections naturelles, notées $\pi_{n,k}$, des anneaux $T^n(\mathbb{K})$ sur les anneaux $T^k(\mathbb{K})$, pour $n \geq k$.

Désignons par $p_{n,k}$ la projection de I_n sur $I_k \cup \{0\}$ définie par

$$p_{n,k}((\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \begin{cases} (\alpha_1, \dots, \alpha_k) & \text{si, pour tout } i > k, \alpha_i = 0, \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

On définit alors

$$\pi_{n,k} \left(x + \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha x_\alpha \right) = x + \sum_{\alpha \in I_n, p_{n,k}(\alpha) \neq 0} \varepsilon^{p_{n,k}(\alpha)} x_\alpha.$$

Ces projections forment clairement un système projectif d'anneaux et la limite projective de la suite $(T^n\mathbb{K})$, notée $T^\infty\mathbb{K}$ est donc munie d'une structure d'anneau.

En utilisant l'inclusion naturelle du groupe symétrique d'ordre k dans le groupe symétrique d'ordre n , on remarque que Σ_k agit à la fois sur $T^k\mathbb{K}$ et sur $T^n\mathbb{K}$. Pour cette action, la projection $\pi_{n,k}$ est équivariante et l'on obtient alors, par restriction de $\pi_{n,k}$ aux sous-anneaux des points fixes, un homomorphisme d'anneaux de $T^n\mathbb{K}^{\Sigma_k}$ sur $T^k\mathbb{K}^{\Sigma_k}$. Si $x + \sum_{i=1}^n \delta^{(i)} x_i$ est un élément de $J^n\mathbb{K}$ (ensemble inclus dans $T^n\mathbb{K}^{\Sigma_k}$), on sait que son image par la projection $\pi_{n,k}$ doit appartenir à $J^k\mathbb{K} = T^k\mathbb{K}^{\Sigma_k}$, et on vérifie alors que

$$\pi_{n,k} \left(x + \sum_{i=1}^n \delta^{(i)} x_i \right) = x + \sum_{i=1}^k \delta^{(i)} x_i.$$

On obtient ainsi un sous anneau de $T^\infty\mathbb{K}$, noté $J^\infty\mathbb{K}$, en passant à la limite projective des sous-anneaux $J^n\mathbb{K}$.

Remarquons qu'en caractéristique nulle, l'anneau $J^\infty\mathbb{K}$ peut-être vu comme un anneau de séries formelles : en effet, en désignant par δ l'élément

$$\delta^{(1)} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i,$$

on remarque que

$$i! \delta^{(i)} = \delta^i,$$

et on obtient ainsi, en supposant les entiers inversibles dans $\mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} J^\infty\mathbb{K} &= \left\{ x + \sum_{i=1}^{\infty} \delta^{(i)} x_i \mid x, x_i \in \mathbb{K} \right\} \\ &= \left\{ x + \sum_{i=1}^{\infty} \delta^i x_i \mid x, x_i \in \mathbb{K} \right\}, \end{aligned}$$

avec $\delta^i \cdot \delta^j = \delta^{i+j}$.

Proposition 1.2.8. *Les homomorphismes d'anneaux $\pi_{n,k} : T^n \mathbb{K} \longrightarrow T^k \mathbb{K}$ (resp. $\pi_{n,k} : J^n \mathbb{K} \longrightarrow J^k \mathbb{K}$), définis pour $n \geq k$, induisent des homomorphismes de groupes $\Pi_{n,k} : G^n(\mathfrak{g}) \longrightarrow G^k(\mathfrak{g})$ (resp. $\Pi_{n,k} : J^n(\mathfrak{g}) \longrightarrow J^k(\mathfrak{g})$), qui forment ainsi un système projectif de groupes.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que la projection $\Pi_{n,k} : G^n(\mathfrak{g}) \longrightarrow G^k(\mathfrak{g})$, définie pour $n \geq k$ par

$$\Pi_{n,k} \left(\sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha x_\alpha \right) = \sum_{\alpha \in I_n, p_{n,k}(\alpha) \neq 0} \varepsilon^{p_{n,k}(\alpha)} x_\alpha,$$

est un homomorphisme de groupes. On aura alors montré en même temps que l'application $\Pi_{n,k} : J_n(\mathfrak{g}) \longrightarrow J_k(\mathfrak{g})$, associant à un élément $\sum_{i=1}^n \delta^{(i)} x_i$ de $J_n(\mathfrak{g})$ l'élément $\sum_{i=1}^k \delta^{(i)} x_i$, et qui est la restriction de l'application précédente au sous-groupe $J_n(\mathfrak{g})$, est un homomorphisme de groupes.

Introduisons l'application

$$\begin{aligned} i : I_k &\longrightarrow I_n \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_k) &\longmapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Soient $x = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha x_\alpha, y = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha y_\alpha$ deux éléments de $G_n(\mathfrak{g})$. Il s'agit de montrer que $\Pi_{n,k}(x \cdot y) = \Pi_{n,k}(x) \cdot \Pi_{n,k}(y)$. Or

$$\begin{aligned} \Pi_{n,k}(x \cdot y) &= \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^{p_{n,k}(\alpha)} (x \cdot y)_\alpha \\ &= \sum_{\theta \in I_k} \varepsilon^\theta (x \cdot y)_{i(\theta)}, \end{aligned}$$

avec

$$(x \cdot y)_{i(\theta)} = x_{i(\theta)} + y_{i(\theta)} + \sum_{m=2}^{|i(\theta)|} \sum_{\lambda \in P^m(i(\theta))} [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^1}], y_{\lambda^2}], \dots, y_{\lambda^{m-1}}].$$

Désignons par $\tilde{x} = \sum_{\theta \in I_k} \varepsilon^\theta \tilde{x}_\theta$ et $\tilde{y} = \sum_{\theta \in I_k} \varepsilon^\theta \tilde{y}_\theta$ les éléments $\Pi_{n,k}(x)$ et $\Pi_{n,k}(y)$ de $G_k(\mathfrak{g})$. Alors, pour tout $\theta \in I_k$, $\tilde{x}_\theta = x_{i(\theta)}$ et $\tilde{y}_\theta = y_{i(\theta)}$. On a donc

$$\begin{aligned} \Pi_{n,k}(x) \cdot \Pi_{n,k}(y) &= \tilde{x} \cdot \tilde{y} \\ &= \sum_{\theta \in I_k} \varepsilon^\theta (\tilde{x} \cdot \tilde{y})_\theta, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} (\tilde{x} \cdot \tilde{y})_\theta &= \tilde{x}_\theta + \tilde{y}_\theta + \sum_{m=2}^{|\theta|} \sum_{\lambda \in P^m(\theta)} [[\tilde{x}_{\lambda^m}, \tilde{y}_{\lambda^1}], \tilde{y}_{\lambda^2}], \dots, \tilde{y}_{\lambda^{m-1}}] \\ &= x_{i(\theta)} + y_{i(\theta)} + \sum_{m=2}^{|\theta|} \sum_{\lambda \in P^m(\theta)} [[x_{i(\lambda^m)}, y_{i(\lambda^1)}], y_{i(\lambda^2)}], \dots, y_{i(\lambda^{m-1})}] \end{aligned}$$

Il suffit alors de remarquer que $|i(\theta)| = |\theta|$ et que

$$P^m(i(\theta)) = \{i(\lambda) | \lambda \in P^m(\theta)\}$$

pour conclure à $(\tilde{x} \cdot \tilde{y})_\theta = (x \cdot y)_{i(\theta)}$. Finalement, on a prouvé l'égalité cherchée et montré que l'application $\Pi_{n,k}$ est un homomorphisme de groupes. $\square$

Remarque 1.2.6. En munissant le module $\varepsilon_{n+1}(\mathfrak{g} \oplus G_n(\mathfrak{g}))$ de sa structure naturelle abélienne de groupe polynomial, l'application $\Pi_{n+1,n}$ fournit une suite exacte scindée de groupes polynomiaux :

$$\{0\} \longrightarrow \varepsilon_{n+1}(\mathfrak{g} \oplus G_n(\mathfrak{g})) \longrightarrow G_{n+1}(\mathfrak{g}) \longrightarrow G_n(\mathfrak{g}) \longrightarrow \{0\},$$

dont une section est donnée par l'application

$$\begin{array}{ccc} G_n(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & G_{n+1}(\mathfrak{g}) \\ \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha x_\alpha & \longmapsto & \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^{(\alpha,0)} x_\alpha. \end{array}$$

Le groupe $G_{n+1}(\mathfrak{g})$ est donc produit semi-direct du groupe $G_n(\mathfrak{g})$ par le groupe abélien $\varepsilon_{n+1}(\mathfrak{g} \oplus G_n(\mathfrak{g}))$.

Corollaire 1.2.1. La suite de groupes $(G_n(\mathfrak{g}))$ (resp. $(J_n(\mathfrak{g}))$) admet une limite projective, notée $G_\infty(\mathfrak{g})$ (resp. $J_\infty(\mathfrak{g})$), donnée par le système projectif $(\Pi_{n,k})$.

Remarquons que le groupe $J_\infty(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe de $G_\infty(\mathfrak{g})$. Dans le cas où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, il semble difficile de pouvoir identifier une action d'un groupe symétrique sur $G_\infty(\mathfrak{g})$ et de construire ainsi directement $J_\infty(\mathfrak{g})$ à partir de $G_\infty(\mathfrak{g})$.

En caractéristique nulle, on a vu que l'anneau $J^\infty \mathbb{K}$ peut être interprété comme un anneau de séries formelles. De manière analogue, sous les mêmes hypothèses, on peut voir le groupe $J_\infty(\mathfrak{g})$ comme un groupe formel associé à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. La structure de $G_\infty(\mathfrak{g})$ est, en revanche, plus compliquée.

Signalons enfin que l'application qui à une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ associe le groupe $G_\infty(\mathfrak{g})$ (respectivement $J_\infty(\mathfrak{g})$) est fonctorielle.

Dans le cas où $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle et où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$, il reste à étudier le lien entre les groupes $J_\infty(\mathfrak{g})$, $G_\infty(\mathfrak{g})$ ainsi construits et le groupe formel $CH(\mathfrak{g})$ donné par la formule de Campbell-Hausdorff.

Application exponentielle et formule de Campbell Hausdorff

Nous supposons à présent que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle et que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. Il existe alors un analogue polynomial du théorème sur l'existence de la série exponentielle pour les groupes formels (cf [1]) :

Théorème 1.2.2. *Soit G un groupe polynomial sur le corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. Alors il existe une unique application polynomiale $\exp : G \longrightarrow G$ telle que*

- pour tout $x \in G$ et pour tout entier relatif n , $\exp(nx) = (\exp x)^n$,
- la partie linéaire de l'application $\exp$ est l'identité.

L'application polynomiale $\exp$ est bijective et son application réciproque, notée $\log$ est encore polynomiale.

Le théorème donne de plus les formules explicites de ces deux applications polynomiales.

Notons $\exp_n$, $\log_n$ les applications polynomiales inverses l'une de l'autre fournies par le théorème précédent pour le groupe polynomial $G_n(\mathfrak{g})$.

Nous obtenons plus explicitement, pour un élément $x = \sum_{\alpha} \varepsilon^{\alpha} x_{\alpha}$ de $G_n(\mathfrak{g})$,

$$\exp_n x = \sum_{\alpha} \varepsilon^{\alpha} (\exp_n x)_{\alpha}$$

où, (cf [1]),

$$(\exp_n x)_{\alpha} = x_{\alpha} + \sum_{m=2}^n \frac{1}{m!} \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_m(\alpha)} [[x_{\lambda^m}, x_{\lambda^{m-1}}], \dots, x_{\lambda^2}], x_{\lambda^1}].$$

Notons $(G_n(\mathfrak{g}), \star)$ la structure de groupe formel sur l'algèbre de Lie $G_n(\mathfrak{g})$ donnée par la formule de Campbell-Hausdorff : pour tout couple (x, y) d'éléments de $G_n(\mathfrak{g})$,

$$x \star y = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}([x, [x, y]] + [y, [y, x]]) + \dots,$$

où $[\cdot, \cdot]$ désigne la structure naturelle d'algèbre de Lie de $G_n(\mathfrak{g})$. L'algèbre de Lie $G_n(\mathfrak{g})$ étant nilpotente, $(G_n(\mathfrak{g}), \star)$ est un groupe polynomial.

Le lien entre les deux structures de groupe polynomial existant sur $G_n(\mathfrak{g})$ est donné par la

Proposition 1.2.9. *L'application $\exp_n : (G_n(\mathfrak{g}), \star) \longrightarrow (G_n(\mathfrak{g}), \cdot)$ est un isomorphisme de groupes polynomiaux.*

Démonstration. Puisque $\exp_n(mx) = \exp_n(x)^m$ pour tout élément x de $G_n(\mathfrak{g})$ et tout entier relatif m , on a $\exp_n((\lambda + \lambda')x) = \exp_n(\lambda x) \cdot \exp_n(\lambda' x)$ pour tous scalaires λ, λ' . Par le théorème 4, Ch. III, Par. 4 de [6], l'application $\exp_n$ est un isomorphisme de groupes formels. Cette application étant polynomiale, c'est un isomorphisme de groupes polynomiaux. $\square$

Corollaire 1.2.2. *Pour tout couple (x, y) d'éléments de $G_n(\mathfrak{g})$,*

$$x \star y = \log_n(\exp_n(x) \cdot \exp_n(y)).$$

Remarquons que l'application exponentielle du groupe polynomial $J_n(\mathfrak{g})$ est donnée par la restriction de l'application $\exp_n$ à $J_n(\mathfrak{g})$. Pour le prouver, il suffit de vérifier que $\exp_n(\sigma.x) = \sigma.\exp_n(x)$ pour toute permutation σ et tout élément x de $G_n(\mathfrak{g})$. Or, de manière plus générale, l'application exponentielle d'un groupe polynomial commute à tout automorphisme de groupe polynomial (par unicité de l'application exponentielle). On obtient donc, pour le sous-groupe $(J_n(\mathfrak{g}), \star)$, le

Corollaire 1.2.3. *Pour tout couple (x, y) d'éléments de $J_n(\mathfrak{g})$,*

$$x \star y = \log_n(\exp_n(x) \cdot \exp_n(y)).$$

Enfin, on peut vérifier que la suite d'applications $(\exp_n)$ est compatible avec le système projectif $(\Pi_{n,k})$: pour tout $n \leq k$ et tout $x \in G_n(\mathfrak{g})$, on a

$$\exp_k(\Pi_{n,k}(x)) = \Pi_{n,k}(\exp_n(x)).$$

On peut donc former la limite projective de la suite $(\exp_n)$ et obtenir une application exponentielle $\exp_\infty$ définie sur $G_\infty(\mathfrak{g})$ (respectivement sur $J_\infty(\mathfrak{g})$). De même, la suite $(\log_n)$ fournit une application inverse $\log_\infty$ et alors, pour x, y éléments de $G_\infty(\mathfrak{g})$ (respectivement éléments de $J_\infty(\mathfrak{g})$), on obtient

$$x \star y = \log_\infty(\exp_\infty(x) \cdot \exp_\infty(y)),$$

où $\star$ désigne le produit donné par la formule de Campbell-Hausdorff pour la structure naturelle d'algèbre de Lie de $G_\infty(\mathfrak{g})$ (respectivement de $J_\infty(\mathfrak{g})$).

1.3 Le cas des systèmes triples de Lie

Dans cette partie, nous supposons que $\mathbb{K}$ est un anneau dans lequel l'élément 2 est inversible.

1.3.1 Espaces symétriques associés à un système triple de Lie

Rappelons qu'un module $\mathfrak{q}$ sur l'anneau $\mathbb{K}$, muni d'un crochet trilinéaire $[\cdot, \cdot, \cdot]$ est un système triple de Lie, si et seulement si, pour tout $x, y, z, u, v \in \mathfrak{q}$, les trois identités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} (\text{STL1}) \quad & [x, y, z] = -[y, x, z] \\ (\text{STL2}) \quad & [x, y, z] + [y, z, x] + [z, x, y] = 0 \\ (\text{STL3}) \quad & [u, v, [x, y, z]] = [[u, v, x], y, z] + [x, [u, v, y], z] + [x, y, [u, v, z]]. \end{aligned}$$

Les systèmes triples de Lie apparaissent pour la première fois dans les travaux d'Elie Cartan sur les sous-espaces totalement géodésiques d'un groupe de Lie ([8]). Ils y sont définis comme étant des sous-espaces d'une algèbre de Lie stables sous le crochet itéré $[[\cdot, \cdot], \cdot]$. De manière équivalente, un système triple de Lie est un sous-espace propre pour la valeur propre -1 d'une algèbre de Lie avec involution. La première caractérisation intrinsèque des systèmes triples de Lie a été donnée par N. Jacobson (cf [14], [18]). Elle reprend les trois identités énoncées ci-dessus et deux autres, dont K. Yamaguti (cf [28]) a démontré qu'elles étaient une conséquence des trois premières identités (ce point découle déjà de [15], section 3).

L'ensemble des systèmes triples de Lie forme une sous-catégorie complète de la catégorie des algèbres ternaires : si $(\mathfrak{q}, [\cdot, \cdot, \cdot]_{\mathfrak{q}})$, $(\mathfrak{q}', [\cdot, \cdot, \cdot]_{\mathfrak{q}'})$ sont deux systèmes triples de Lie, une application

$$f : \mathfrak{q} \longrightarrow \mathfrak{q}'$$

est un morphisme de systèmes triples de Lie si et seulement si, pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de $\mathfrak{q}$,

$$f([x, y, z]_{\mathfrak{q}}) = [f(x), f(y), f(z)]_{\mathfrak{q}'}$$

Soit $\mathfrak{q}$ un système triple de Lie sur l'anneau $\mathbb{K}$. Nous allons utiliser la construction précédente (suite de groupes polynomiaux associés à une algèbre de Lie) pour définir une suite d'espaces symétriques polynomiaux associée au système triple de Lie $\mathfrak{q}$. En effet, tout système triple de Lie peut être considéré comme le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 d'une algèbre de Lie avec involution, son plongement standard.

Rappelons proprement la définition du plongement standard de $\mathfrak{q}$.

Une application linéaire $A : \mathfrak{q} \longrightarrow \mathfrak{q}$ est appelée dérivation de $\mathfrak{q}$ si et seulement si, pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de $\mathfrak{q}$,

$$A([x, y, z]) = [A(x), y, z] + [x, A(y), z] + [x, y, A(z)].$$

Un premier exemple de dérivation est fourni par les applications

$$\begin{aligned} R(x, y) : \quad \mathfrak{q} &\longrightarrow \mathfrak{q} \\ z &\longrightarrow [x, y, z]. \end{aligned}$$

En effet, l'identité (STL3) fournit la relation

$$R(u, v)[x, y, z] = [R(u, v)x, y, z] + [x, R(u, v)y, z] + [x, y, R(u, v)z].$$

L'ensemble des dérivations du système triple de Lie $\mathfrak{q}$, noté $\text{Der}(\mathfrak{q})$, est une sous-algèbre de Lie de l'ensemble des endomorphismes de $\mathfrak{q}$: $\text{Der}(\mathfrak{q})$ est stable sous le crochet

$$[A, B] = A \circ B - B \circ A.$$

Munissons l'ensemble $\mathfrak{q} \oplus \text{Der}(\mathfrak{q})$ d'une structure d'algèbre de Lie en définissant un crochet bilinéaire antisymétrique par les relations suivantes, où x, y sont éléments de $\mathfrak{q}$ et A, B sont des dérivations de $\mathfrak{q}$:

$$\begin{aligned} [A, B] &= A \circ B - B \circ A, \\ [A, x] &= A(x), \\ [x, y] &= R(x, y). \end{aligned}$$

Désignons par σ l'involution de l'algèbre de Lie $\mathfrak{q} \oplus \text{Der}(\mathfrak{q})$ définie par

$$\sigma(x + A) = -x + A,$$

où $x \in \mathfrak{q}$, $A \in \text{Der}(\mathfrak{q})$. Le système triple de Lie $\mathfrak{q}$ est alors le sous-espace propre de σ associé à la valeur propre -1 , munie de la structure de système triple de Lie donnée par le crochet $[[\cdot, \cdot], \cdot]$.

Introduisons le sous-module $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]$ de l'ensemble des dérivations de $\mathfrak{q}$ engendré par les dérivations du type $R(x, y)$. Cet ensemble est en fait une sous-algèbre de $\text{Der}(\mathfrak{q})$: en effet, la propriété (STL3) des systèmes triples de Lie peut s'écrire sous la forme

$$[R(x, y), R(u, v)] = R(R(x, y)u, v) + R(u, R(x, y)v).$$

On vérifie alors aisément que l'ensemble $\mathfrak{q} \oplus [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{q} \oplus \text{Der}(\mathfrak{q})$. Par définition, le plongement standard du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ est cette sous-algèbre

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \oplus [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}].$$

Désignons alors par $\pi_{\mathfrak{q}}$ et $\pi_{[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]}$ les projections respectives de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{q}$ et $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ engendre une suite de groupes polynomiaux $(G_n(\mathfrak{g}))$. Chaque module $G_n(\mathfrak{g})$ se décompose en la somme directe des deux sous-modules $G_n(\mathfrak{q})$ et $G_n([\mathfrak{q}, \mathfrak{q}])$ et les projections de $G_n(\mathfrak{g})$ sur ces deux sous-modules sont données par le prolongement des projections $\pi_{\mathfrak{q}}$, $\pi_{[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]}$ à $G_n(\mathfrak{g})$. On les note encore $\pi_{\mathfrak{q}}$ et $\pi_{[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]}$. De même, l'involution σ donne lieu à une involution du groupe $G_n(\mathfrak{g})$, encore notée σ . Introduisons l'ensemble

$$M_n(\mathfrak{q}) = \{X \in G_n(\mathfrak{g}) \mid \sigma(X) = X^{-1}\}$$

Proposition 1.3.1. *L'ensemble $M_n(\mathfrak{q})$ est en bijection avec l'ensemble $G_n(\mathfrak{q})$ par l'application*

$$\begin{aligned} \varphi : M_n(\mathfrak{q}) &\longrightarrow G_n(\mathfrak{q}) \\ X &\longmapsto \pi_{\mathfrak{q}}(X). \end{aligned}$$

Démonstration. Si $X = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha X_\alpha$ est un élément de $G_n(\mathfrak{g})$, l'élément X^{-1} est donné par $X^{-1} = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha (X^{-1})_\alpha$ où

$$(X^{-1})_\alpha = -X_\alpha + \sum_{m=2}^{|\alpha|} (-1)^m \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [[[X_{\lambda^m}, X_{\lambda^{m-1}}], \dots], X_{\lambda^1}].$$

On note alors, pour X appartenant à $G_n(\mathfrak{g})$ et α appartenant à I_n ,

$$A_\alpha(X) = \sum_{m=2}^{|\alpha|} (-1)^m \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [[[X_{\lambda^m}, X_{\lambda^{m-1}}], \dots], X_{\lambda^1}].$$

Ainsi $(X^{-1})_\alpha = -X_\alpha + A_\alpha(X)$.

Remarquons que si X^θ désigne l'élément $\sum_{\alpha < \theta} \varepsilon^\alpha X_\alpha$, alors $A_\alpha(X) = A_\alpha(X^\theta)$ pour tout $\alpha \leq \theta$.

Soit $X \in G_n(\mathfrak{g})$. On note $x = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha x_\alpha$ et $\bar{x} = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha \bar{x}_\alpha$ les éléments $\pi_q(X)$ et $\pi_{[q,q]}(X)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $X \in M_n$,
- $\sigma(X) = X^{-1}$,
- pour tout $\alpha \in I_n$, $-x_\alpha + \bar{x}_\alpha = -X_\alpha + A_\alpha(X)$,
- pour tout $\alpha \in I_n$, $2\bar{x}_\alpha = A_\alpha(X)$,
- pour tout $\alpha \in I_n$, $\pi_q(A_\alpha(X)) = 0$ et $\pi_{[q,q]}(A_\alpha(X)) = 2\bar{x}_\alpha$.

Soit $x = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha x_\alpha$ un élément de $G_n(\mathfrak{q})$. Il s'agit de montrer qu'il existe un unique élément X de M_n tel que $\varphi(X) = x$, ce qui revient à montrer qu'il existe un unique élément $\bar{x}$ de $G_n([q, q])$ tel que $x + \bar{x}$ appartienne à M_n .

Soit $\bar{x} = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha \bar{x}_\alpha$ un élément de $G_n([q, q])$. D'après ce qui précède, si l'élément $X = x + \bar{x}$ appartient à M_n , alors, pour tout $i \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$,

$$\begin{aligned} 2\bar{x}_{\theta_i} &= \pi_{[q,q]}(A_{\theta_i}(X)) \\ &= \pi_{[q,q]}(A_{\theta_i}(X^{\theta_i})). \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'unicité de l'élément $\bar{x}$ pouvant convenir : les éléments $\bar{x}_{\theta_i}$ sont définis par induction de la manière suivante : $\bar{x}_{\theta_1} = 0$, et si les $\bar{x}_{\theta_i}$ ont été définis pour $i < k$, on pose

$$\bar{x}_{\theta_k} = \frac{1}{2} \pi_{[q,q]}(A_{\theta_k}(X^{\theta_k})),$$

où $X^{\theta_k} = \sum_{i=1}^{k-1} \varepsilon^{\theta_i} (x_{\theta_i} + \bar{x}_{\theta_i})$.

Démontrons à présent que cet élément $\bar{x}$ convient. On pose $X = x + \bar{x}$. Il s'agit de montrer que $\pi_q(A_\alpha(X)) = 0$ pour tout $\alpha \in I_n$, ou encore que $\sigma(A_\alpha(X)) = A_\alpha(X)$, ce qui est aussi équivalent à $\sigma(X_\alpha) = (X^{-1})_\alpha$. La preuve se mène par récurrence sur la longueur de α . Si α est de longueur 1, $A_\alpha(X) = 0$ et le résultat est vrai. Supposons le vrai pour tous les multi-indices de longueur au plus k et considérons un multi-indice α de longueur $k+1$.

Par définition,

$$A_\alpha(X) = X_\alpha + (X^{-1})_\alpha.$$

Puisque

$$(X^{-1} \cdot X)_\alpha = (X \cdot X^{-1})_\alpha = 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned} A_\alpha(X) &= X_\alpha + (X^{-1})_\alpha - (X^{-1} \cdot X)_\alpha \\ &= \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [((X^{-1})_{\lambda^m}, X_{\lambda^1}), \dots, X_{\lambda^{m-1}}] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_\alpha(X) &= X_\alpha + (X^{-1})_\alpha - (X \cdot X^{-1})_\alpha \\ &= \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [[X_{\lambda^m}, (X^{-1})_{\lambda^1}], \dots, (X^{-1})_{\lambda^{m-1}}]. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \sigma(A_\alpha(X)) &= \sigma\left(\sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [[(X^{-1})_{\lambda^m}, X_{\lambda^1}], \dots, X_{\lambda^{m-1}}]\right) \\ &= \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} \sigma([[(X^{-1})_{\lambda^m}, X_{\lambda^1}], \dots, X_{\lambda^{m-1}}]) \\ &= \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [[\sigma((X^{-1})_{\lambda^m}), \sigma(X_{\lambda^1})], \dots, \sigma(X_{\lambda^{m-1}})] \\ &= \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [[X_{\lambda^m}, (X^{-1})_{\lambda^1}], \dots, (X^{-1})_{\lambda^{m-1}}] \\ &= A_\alpha(X), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Donnons la

Définition 1.3.1. Soit V un module sur l'anneau $\mathbb{K}$, muni d'une application produit $\mu : V \times V \longrightarrow V$. On dit que V est un espace symétrique polynomial de degré au plus k sur $\mathbb{K}$ si et seulement si, pour tout $x, y, z \in V$,

$$\begin{aligned} (SP1) \quad & \mu(x, x) = x, \\ (SP2) \quad & \mu(x, \mu(x, y)) = y, \\ (SP3) \quad & \mu(x, \mu(y, z)) = \mu(\mu(x, y), \mu(x, z)), \\ (SP4) \quad & \mu(0, x) = -x + \deg(2), \end{aligned}$$

et si pour tout entier naturel $n > 1$, l'application

$$\mu_n : (x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \mu(x_1, \mu(x_2, \dots \mu(x_{n-1}, x_n)))$$

est polynomiale de degré au plus k .

On dit que V est un espace symétrique polynomial sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il existe un entier naturel k tel que V soit un espace symétrique polynomial de degré au plus k .

Nous pouvons alors énoncer le

Théorème 1.3.1. Le $\mathbb{K}$ -module $G_n(\mathfrak{q})$, muni du produit μ défini par

$$\mu(x, y) = \varphi(\varphi^{-1}(x) \cdot \sigma(\varphi^{-1}(y)) \cdot \varphi^{-1}(x)),$$

est un espace symétrique polynomial.

Démonstration. Par construction, le produit μ vérifie les trois axiomes (SP1), (SP2), (SP3). D'autre part,

$$\begin{aligned}\mu(0, x) &= \varphi(\sigma(\varphi^{-1}(x))) \\ &= -x,\end{aligned}$$

ce qui montre en particulier que μ vérifie (SP4). De plus, $G_n(\mathfrak{g})$ étant un groupe polynomial d'ordre au plus n , il est aisé de vérifier que les applications μ_k sont polynomiales de degré au plus n , pour tout entier naturel k . □

On peut expliciter le calcul de $\mu(x, y)_\alpha$ pour les multi-indices de longueur inférieure ou égale à 3 : si α est un multi-indice de I_n tel que $|\alpha| \leq 2$, alors

$$\mu(x, y)_\alpha = 2x_\alpha - y_\alpha,$$

et si α est un multi-indice de I_n de longueur 3, alors, en considérant l'unique $\lambda \in P^3(\alpha)$, on obtient

$$\begin{aligned}\mu(x, y)_\alpha &= 2x_\alpha - y_\alpha \\ &+ \frac{1}{2}([x_{\lambda^3}, x_{\lambda^1} - y_{\lambda^1}, 2x_{\lambda^2} - y_{\lambda^2}] + [x_{\lambda^3}, x_{\lambda^2} - y_{\lambda^2}, 2x_{\lambda^1} - y_{\lambda^1}]) \\ &- \frac{1}{2}([y_{\lambda^3}, x_{\lambda^1} - y_{\lambda^1}, x_{\lambda^2}] + [y_{\lambda^3}, x_{\lambda^2} - y_{\lambda^2}, x_{\lambda^1}]).\end{aligned}$$

Remarque 1.3.1. En désignant par $Q(X)$ l'application

$$Y \longrightarrow s_X(s_0(Y)) = \mu(X, \mu(0, Y)),$$

on vérifie que pour tout $x, y, z \in \mathfrak{q}$,

$$[Q(\varepsilon_{001}x), Q(\varepsilon_{010}y)](\varepsilon_{100}z) = \varepsilon_{100}z + \varepsilon_{111}[x, y, z],$$

ce qui prouve que la structure de système triple de Lie sur le module $\mathfrak{q}$ est entièrement déterminée par la structure d'espace symétrique construite sur $G_3(\mathfrak{q})$.

Remarque 1.3.2. Dans le cas particulier où $\mathfrak{q}$ est un système triple de Lie trivial, le plongement standard de $\mathfrak{q}$ a une structure abélienne d'algèbre de Lie. On en déduit que la structure d'espace symétrique de $G_n(\mathfrak{q})$ est la structure plate : pour tout $x, y \in G_n(\mathfrak{q})$,

$$\mu(x, y) = 2x - y.$$

Corollaire 1.3.1. Le $\mathbb{K}$ -module $J_n(\mathfrak{q}) = \sum_{i=1}^n \delta^{(i)} \mathfrak{q}$ est un sous-espace symétrique de $G_n(\mathfrak{q})$.

Démonstration. Introduisons l'ensemble

$$M'_n(\mathfrak{q}) = M_n(\mathfrak{q}) \cap J_n(\mathfrak{g}).$$

En suivant la preuve de la proposition 1.3.1, on montre que l'application φ est une bijection de $M'_n(\mathfrak{q})$ sur $J_n(\mathfrak{q})$, ce qui permet de conclure. □

Ainsi, pour tout couple $(x, y) = (\sum_i \delta^{(i)} x_i, \sum_i \delta^{(i)} y_i)$ d'éléments de $J_n(\mathfrak{q})$, il existe un élément $z = \sum_i \delta^{(i)} z_i$ de $J_n(\mathfrak{q})$ tel que

$$\mu(x, y) = z.$$

On peut calculer les premiers termes de cet élément :

- $z_1 = 2x_1 - y_1,$
- $z_2 = 2x_2 - y_2,$
- $z_3 = 2x_3 - y_3 - [x_1, y_1, x_1] - [y_1, x_1, y_1],$
- $z_4 = 2x_4 - y_4 - 6[x_2, y_1, x_1] + 3[x_2, y_1, y_1] + 3[x_1, y_1, y_2] + 3[x_2, x_1, x_1].$

Il semble en revanche très difficile de trouver une formule générale explicite donnant le produit μ de l'espace symétrique $G_n(\mathfrak{q})$ ou celui de l'espace symétrique $J_n(\mathfrak{q})$.

1.3.2 Fonctorialité de la construction

Si M et N sont deux espaces symétriques connexes et simplement connexes de dimension finie sur le corps des réels, tout morphisme du système triple de Lie de M à valeurs dans le système triple de Lie de N provient de manière unique d'un morphisme d'espaces symétriques de M dans N . Ce résultat (que l'on peut trouver dans [21]) permet de démontrer l'équivalence de la catégorie des espaces symétriques connexes simplement connexes de dimension finie sur le corps des réels avec la catégorie des systèmes triples de Lie de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

Nous nous attachons dans cette section à démontrer l'analogue polynomial de ce résultat. Il nous faut tout d'abord définir la notion de morphisme de la catégorie des espaces symétriques polynomiaux.

Définition 1.3.2. Soient (M, μ) , (M', μ') deux espaces symétriques polynomiaux. On appelle morphisme de l'espace symétrique polynomial (M, μ) dans l'espace symétrique polynomial (M', μ') toute application polynomiale

$$f : M \longrightarrow M'$$

respectant les applications produits : pour tout $x, y \in M$,

$$f(\mu(x, y)) = \mu'(f(x), f(y)).$$

Nous pouvons alors énoncer le

Théorème 1.3.2. L'application qui associe à un système triple de Lie $\mathfrak{q}$ l'espace symétrique polynomial $G_n(\mathfrak{q})$ est fonctorielle : si $f : \mathfrak{q} \longrightarrow \mathfrak{q}'$ est un morphisme de systèmes triples de Lie, l'application $f : G_n(\mathfrak{q}) \longrightarrow G_n(\mathfrak{q}')$, restriction de l'application $f \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$ au sous-module $G_n(\mathfrak{q})$, est un morphisme d'espaces symétriques polynomiaux.

Un obstacle à la démonstration de ce théorème est l'absence de formule générale explicite pour le produit μ de l'espace symétrique $G_n(\mathfrak{q})$.

Afin de contourner ce problème, nous montrons proprement que le produit μ peut s'exprimer uniquement en fonction du crochet triple du système triple de Lie $\mathfrak{q}$. C'est l'objet du lemme 1.3.1, qui utilise des notions et notations introduites dans l'appendice B et rappelées brièvement ici.

Introduisons une suite d'indéterminées $X = (X_i)_{i > n}$ et considérons l'algèbre ternaire Lib_X^3 libre sur l'ensemble X (cf définition B.1.2). Si L est une 3-forme abstraite élément de Lib_X^3 , si (A, p) est un système triple (algèbre ternaire), nous définissons une application évaluation de L en A (cf section B.1.2), en posant, pour $(a_i) \in A^{(\mathbb{N})}$,

$$L^p((a_i)) = \theta((a_i))(L),$$

où $\theta((a_i))$ est l'unique prolongement à Lib_X^3 de l'application

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & A \\ x_i & \longmapsto & a_i. \end{array}$$

Nous pouvons alors énoncer le

Lemme 1.3.1. Soit n un entier naturel non nul. Pour tout élément α de I_n , il existe une 3-forme abstraite L_α élément de Lib_X^3 telle que l'égalité

$$\mu(x, y)_\alpha = L_\alpha^{[\cdot, \cdot, \cdot]}((x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_n}, y_{\beta_1}, \dots, y_{\beta_n}, 0, 0, \dots))$$

soit vérifiée pour tout couple $(x, y) = (\sum_{\beta \in I_n} \varepsilon^\beta x_\beta, \sum_{\beta \in I_n} \varepsilon^\beta y_\beta)$ d'éléments de $G_n(\mathfrak{q})$, $(\mathfrak{q}, [\cdot, \cdot, \cdot])$ étant un système triple de Lie.

Montrons en premier lieu que ce lemme entraîne le théorème.

Soit donc

$$f : \mathfrak{q} \longrightarrow \mathfrak{q}'$$

un morphisme de systèmes triples de Lie et introduisons l'application

$$\tilde{f} : G_n(\mathfrak{q}) \longrightarrow G_n(\mathfrak{q}'),$$

restriction de l'application $f \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]$ au sous-module $G_n(\mathfrak{q})$. Il s'agit de montrer que cette application est un morphisme d'espaces symétriques polynomiaux.

Soient $x = \sum_{\beta \in I_n} \varepsilon^\beta x_\beta, y = \sum_{\beta \in I_n} \varepsilon^\beta y_\beta$ deux éléments de $G_n(\mathfrak{q})$. On obtient alors $\tilde{f}(x) = \sum_{\beta \in I_n} \varepsilon^\beta f(x_\beta), \tilde{f}(y) = \sum_{\beta \in I_n} \varepsilon^\beta f(y_\beta)$ et par le lemme 1.3.1,

$$\mu(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y))_\alpha = L_\alpha^{[\dots]}((f(x)_{\beta_1}, \dots, f(x)_{\beta_n}, f(y)_{\beta_1}, \dots, f(y)_{\beta_n}, 0, 0, \dots)).$$

Or f est un morphisme de systèmes triples de Lie. En particulier, c'est un morphisme d'algèbres ternaires. Par la proposition B.1.2, on a alors

$$L_\alpha^{[\dots]_{\mathfrak{q}'}} \circ f = f \circ L_\alpha^{[\dots]_{\mathfrak{q}}},$$

ce qui prouve que

$$\mu(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y))_\alpha = f(\mu(x, y)_\alpha),$$

pour tout $\alpha \in I_n$, et ainsi

$$\mu(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) = \tilde{f}(\mu(x, y)).$$

Aussi l'application $\tilde{f}$ est-elle un morphisme d'espaces symétriques polynomiaux.

Il nous faut à présent démontrer le lemme 1.3.1.

Introduisons $\mathfrak{L}_X$ et $\mathfrak{q}_X$ l'algèbre de Lie et le système triple de Lie libres sur X (voir la proposition B.1.3). Nous notons i et j les injections naturelles de X dans $\mathfrak{L}_X$ et $\mathfrak{q}_X$. Définissons l'involution $\sigma : \mathfrak{L}_X \longrightarrow \mathfrak{L}_X$ comme étant l'unique morphisme d'algèbres de Lie prolongement de l'application

$$(-i) : X \longrightarrow \mathfrak{L}_X$$

à l'algèbre de Lie libre sur X . Nous sommes alors en présence d'une algèbre de Lie avec involution et l'ensemble $\mathfrak{L}_X^-$ des points anti-fixes sous σ est donc naturellement muni d'une structure de système triple de Lie.

Lemme 1.3.2. *Il existe un isomorphisme de systèmes triples de Lie de $\mathfrak{L}_X^-$ sur le système triple de Lie libre sur X .*

Démonstration. L'injection naturelle i est à valeurs dans $\mathfrak{L}_X^-$. Elle se prolonge donc en un unique morphisme de systèmes triples de Lie $\eta : \mathfrak{q}_X \longrightarrow \mathfrak{L}_X^-$. Il s'agit de montrer que cette application est bijective.

L'ensemble $\mathfrak{q}_X \oplus [\mathfrak{q}_X, \mathfrak{q}_X]$ est naturellement muni d'une structure d'algèbre de Lie (donnée par le plongement standard du système triple de Lie $\mathfrak{q}_X$). L'injection naturelle j de X dans $\mathfrak{q}_X \oplus [\mathfrak{q}_X, \mathfrak{q}_X]$ admet donc un unique prolongement

$$\nu : \mathfrak{L}_X \longrightarrow \mathfrak{q}_X \oplus [\mathfrak{q}_X, \mathfrak{q}_X]$$

qui soit un morphisme d'algèbres de Lie.

Notons $\tilde{\sigma}$ l'involution naturelle du plongement standard $\mathfrak{q}_X \oplus [\mathfrak{q}_X, \mathfrak{q}_X]$. Nous obtenons alors l'égalité $\nu \circ \sigma = \tilde{\sigma} \circ \nu$, puisque les deux membres de l'égalité sont des morphismes d'algèbres de Lie prolongeant l'application

$$-j : X \longrightarrow \mathfrak{q}_X \oplus [\mathfrak{q}_X, \mathfrak{q}_X],$$

opposée de l'injection naturelle de X dans $\mathfrak{q}_X$.

Aussi l'image de l'ensemble $\mathfrak{L}_X^-$ par l'application ν correspond-elle à l'ensemble $\mathfrak{q}_X$ et l'on obtient un morphisme de systèmes triples de Lie, encore noté ν , en considérant la restriction du morphisme d'algèbres de Lie ν à l'ensemble $\mathfrak{L}_X^-$.

Les applications $\nu \circ \eta$ et $\eta \circ \nu$ sont alors des endomorphismes du système triple de Lie $\mathfrak{q}_X$. On vérifie aisément que ces applications sont des prolongations de l'injection naturelle j de X dans $\mathfrak{q}_X$, ce qui prouve que $\nu \circ \eta = \eta \circ \nu = \text{Id}$ (par unicité du prolongement). Aussi l'application η est-elle bijective. Le système triple de Lie $\mathfrak{L}_X^-$ est donc un système triple de Lie isomorphe au système triple de Lie libre sur X . $\square$

Soit $(\mathfrak{q}, [., ., .])$ un système triple de Lie. Désignons par $(\mathfrak{g}, [., ., .])$ son plongement standard, et par $\sigma_{\mathfrak{q}}$ l'involution d'algèbre de Lie associée.

Lemme 1.3.3. *Soit $(x_i)_{i \geq 0}$ une suite presque nulle d'éléments de $\mathfrak{q}$. Pour toute 2-forme abstraite A élément de $\mathfrak{L}_X$, on obtient*

$$\sigma_{\mathfrak{q}}(A^{[\cdot, \cdot]}((x_i))) = \sigma(T)^{[\cdot, \cdot]}((x_i)).$$

Si de plus A est élément de $\mathfrak{L}_X^-$,

$$A^{[\cdot, \cdot]}((x_i)) = \nu(A)^{[\cdot, \cdot]}((x_i)),$$

où ν désigne l'isomorphisme de $\mathfrak{L}_X^-$ sur $\mathfrak{q}_X$.

Démonstration. Soit $(x_i)_{i \geq 0}$ une suite presque nulle d'éléments de $\mathfrak{q}$.

L'application

$$\begin{array}{ccc} l_1 : \mathfrak{L}_X & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ A & \longmapsto & \sigma_{\mathfrak{q}}(A^{[\cdot, \cdot]}((x_i))) \end{array}$$

est un morphisme d'algèbre de Lie prolongeant l'application

$$\begin{array}{ccc} l : X & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ X_i & \longmapsto & -x_i. \end{array}$$

D'autre part, l'application

$$\begin{array}{ccc} l_2 : \mathfrak{L}_X & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ A & \longmapsto & \sigma(A)^{[\cdot, \cdot]}((x_i)) \end{array}$$

est également un morphisme d'algèbres de Lie qui prolonge l'application l . Par unicité du prolongement de l en un morphisme d'algèbres de Lie défini sur $\mathfrak{L}_X$, on a alors $l_1 = l_2$, ce qui démontre la première partie du lemme.

La deuxième partie du lemme peut se reformuler ainsi : on veut montrer que pour toute 3-forme abstraite A élément de $\mathfrak{q}_X$,

$$\eta(A)^{[\cdot, \cdot]}((x_i)) = A^{[\cdot, \cdot]}((x_i)),$$

où η désigne l'isomorphisme de $\mathfrak{q}_X$ sur $\mathfrak{L}_X^-$.

Remarquons qu'il suffit de montrer cette égalité dans le cas particulier où A est la projection d'un mot de Lib_X^3 sur $\mathfrak{q}_X$, le cas général en découlant par linéarité.

Si $A = j(X_l)$ est l'injection naturelle d'une indéterminée X_l dans $\mathfrak{q}_X$, alors $\eta(A) = i(X_l)$ est l'injection naturelle de l'indéterminée X_l dans $\mathfrak{L}_X$, et ainsi

$$\eta(A)^{[\dots]}((x_i)) = x_l = A^{[\dots]}((x_i)).$$

Désignons par π la projection de Lib_X^3 sur $\mathfrak{q}_X$. Rappelons que l'on désigne par X^m l'ensemble des mots de Lib_X^3 de longueur m (avec m entier naturel impair). Supposons que $\eta(A)^{[\dots]}((x_i))$ soit égal à $A^{[\dots]}((x_i))$ pour tout élément A de $\pi(X^m)$, pour $m < k$, et montrons que le résultat est vrai pour les éléments de $\pi(X^k)$. Soit donc $A \in X^k$. Il existe A_1, A_2, A_3 trois mots de Lib_X^3 de longueur strictement inférieure à k tels que

$$A = p_3(A_1, A_2, A_3),$$

où p_3 désigne le produit triple de Lib_X^3 . Alors, en notant p'_3 le produit triple de $\mathfrak{q}_X$, et A'_i les projections dans $\mathfrak{q}_X$ des éléments A_i de Lib_X^3 , on obtient

$$A' = p'_3(A'_1, A'_2, A'_3)$$

et ainsi, l'application η étant un morphisme de systèmes triples de Lie,

$$\eta(A') = p_3(\eta(A'_1), \eta(A'_2), \eta(A'_3)).$$

Ainsi, en utilisant l'hypothèse de récurrence et la définition du crochet du plongement standard, on obtient

$$\begin{aligned} \eta(A')^{[\dots]}((x_i)) &= [[\eta(A'_1)^{[\dots]}((x_i)), \eta(A'_2)^{[\dots]}((x_i))], \eta(A'_3)^{[\dots]}((x_i))] \\ &= [[(A'_1)^{[\dots]}((x_i)), (A'_2)^{[\dots]}((x_i))], (A'_3)^{[\dots]}((x_i))] \\ &= [(A'_1)^{[\dots]}((x_i)), (A'_2)^{[\dots]}((x_i)), (A'_3)^{[\dots]}((x_i))] \\ &= A'^{[\dots]}((x_i)), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Revenons à présent à la preuve du lemme 1.3.1.

L'ensemble $\mathfrak{L}_X$ étant une algèbre de Lie, on peut considérer l'ensemble $G_n(\mathfrak{L}_X)$ muni de sa structure de groupe polynomial.

En copiant sa définition sur celle de la bijection $\varphi^{-1} : G_n(\mathfrak{q}) \longrightarrow M_n(\mathfrak{q})$ (cf proposition 1.3.1), nous construisons une application $f : G_n(\mathfrak{L}_X) \longrightarrow G_n(\mathfrak{L}_X)$. Soit $R = \sum_{\alpha \in I^n} \varepsilon^\alpha R_\alpha$ un élément de $G_n(\mathfrak{L}_X)$. Nous devons définir un élément $f(R) = \sum_{\alpha \in I^n} \varepsilon^\alpha f(R)_\alpha$ de $G_n(\mathfrak{L}_X)$. Si α est un multi-indice de longueur 1, on pose

$$f(R)_\alpha = R_\alpha.$$

Puis pour α quelconque, on pose

$$f(R)_\alpha = R_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{m=2}^{|\alpha|} (-1)^m \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [[f(R)_{\lambda^m}, f(R)_{\lambda^{m-1}}], \dots, f(R)_{\lambda^1}].$$

Si $(\beta_i)_{1 \leq i \leq 2^n-1}$ désigne la suite strictement croissante des éléments de I_n , on introduit les deux éléments de $G_n(\mathfrak{L})$ suivants :

$$M_1 = \sum_{i=1}^{2^n-1} \varepsilon^{\beta_i} X_i,$$

$$M_2 = \sum_{i=1}^{2^n-1} \varepsilon^{\beta_i} X_{i+2^n-1}.$$

Nous pouvons alors former le produit $f(M_1)\sigma(f(M_2))f(M_1)$. C'est un élément de $G_n(\mathfrak{L}_X)$. Posons

$$T_\alpha = (f(M_1)\sigma(f(M_2))f(M_1))_\alpha.$$

Soient $x = \sum_{i=1}^{2^n-1} \varepsilon^{\beta_i} x_i$, $y = \sum_{i=1}^{2^n-1} \varepsilon^{\beta_i} y_i$ un couple d'éléments de $G_n(\mathfrak{q})$. Désignons par $(x, y, 0, \dots)$ la suite presque nulle d'éléments de $\mathfrak{q}$ définie par

$$(x, y, 0, \dots) = (x_1, \dots, x_{2^n-1}, y_1, \dots, y_{2^n-1}, 0, 0, \dots).$$

Il est alors clair que

$$T_\alpha^{[\cdot, \cdot]}((x, y, 0, \dots)) = (\varphi^{-1}(x) \cdot \sigma(\varphi^{-1}(y)) \cdot \varphi^{-1}(x))_\alpha.$$

En notant $\tilde{T}_\alpha$ la projection de T_α sur $\mathfrak{L}_X^{-1}$, on a alors $\tilde{T}_\alpha = \frac{1}{2}(T_\alpha - \sigma(T_\alpha))$, et en utilisant le lemme précédent, on obtient

$$\begin{aligned} \nu(\tilde{T}_\alpha)^{[\cdot, \cdot]}((x, y, 0, \dots)) &= \tilde{T}_\alpha^{[\cdot, \cdot]}((x, y, 0, \dots)) \\ &= \frac{1}{2}(T_\alpha - \sigma(T_\alpha))^{[\cdot, \cdot]}((x, y, 0, \dots)) \\ &= \frac{1}{2}(T_\alpha^{[\cdot, \cdot]}((x, y, 0, \dots)) - \sigma(T_\alpha)^{[\cdot, \cdot]}((x, y, 0, \dots))) \\ &= \frac{1}{2}(T_\alpha^{[\cdot, \cdot]}((x, y, 0, \dots)) - \sigma_{\mathfrak{q}}(T_\alpha^{[\cdot, \cdot]}((x, y, 0, \dots)))) \\ &= \pi_{\mathfrak{q}}((\varphi^{-1}(x) \cdot \sigma(\varphi^{-1}(y)) \cdot \varphi^{-1}(x))_\alpha) \\ &= \mu(x, y)_\alpha. \end{aligned}$$

Finalement, l'élément $\nu(\tilde{T}_\alpha)$ vérifie

$$\nu(\tilde{T}_\alpha)((x, y, 0, \dots)) = \mu(x, y)_\alpha$$

pour tout couple (x, y) d'éléments de $G_n(\mathfrak{q})$, et il suffit alors de choisir un élément L_α de Lib_X^3 dont la projection sur $\mathfrak{q}_X$ coïncide avec $\tilde{T}_\alpha$, pour obtenir la preuve du lemme 1.3.1.

Chapitre 2

Notion de fibré symétrique

Les fibrés symétriques sont des fibrés vectoriels sur des espaces symétriques, munis d'une structure d'espace symétrique compatible avec la structure de la base, et telle que chaque fibre soit munie de la structure plate. De plus, l'application (-1) , définie sur chaque fibre par $(-1)_x(v) = -v$, doit être un automorphisme d'espace symétrique. Nous développons dans une première partie le point de vue algébrique des fibrés symétriques, montrant qu'un tel objet est naturellement associé à une représentation de système triple de Lie. Dans une seconde partie, nous développons le point de vue géométrique, montrant en particulier qu'à chaque fibré symétrique sont associés un espace à symétries et une connexion d'Ehresmann.

2.1 Le point de vue algébrique

Rappelons qu'une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans un module V est la donnée d'un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre des endomorphismes de V . Il y a une correspondance biunivoque entre ces représentations et les suites exactes scindées d'algèbres de Lie

$$\{0\} \longrightarrow V \longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \{0\},$$

où $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus V$ et V est muni de sa structure triviale d'algèbre de Lie (on dit alors que $\tilde{\mathfrak{g}}$ est une extension inessentielle intégrable ou abélienne de $\mathfrak{g}$ par V).

Étant donnée une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans le module V , on obtient pour tout entier naturel n , par fonctorialité de la construction précédente, une suite exacte scindée de groupes polynomiaux

$$\{0\} \longrightarrow G_n(V) \longrightarrow G_n(\tilde{\mathfrak{g}}) \longrightarrow G_n(\mathfrak{g}) \longrightarrow \{0\},$$

où $G_n(V)$ est muni de sa structure abélienne triviale de groupe polynomial.

Réciproquement, étant donnés deux algèbres de Lie $\mathfrak{g}, \tilde{\mathfrak{g}}$ et un module V tels que, pour tout entier naturel n , la suite de groupes polynomiaux

$$\{0\} \longrightarrow G_n(V) \longrightarrow G_n(\tilde{\mathfrak{g}}) \longrightarrow G_n(\mathfrak{g}) \longrightarrow \{0\}$$

soit une suite exacte scindée, on montre, en utilisant l'injectivité de la construction (cf remarque 1.2.5), que l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus V$ est une extension abélienne de $\mathfrak{g}$ par V .

Introduisons la notion de fibré de groupes polynomiaux. Soient G, G' deux groupes polynomiaux, V un $\mathbb{K}$ -module. On dit que G' est un fibré de groupes polynomiaux sur G de fibre V si et seulement si $G' = G \oplus V$ et si la suite

$$\{0\} \longrightarrow V \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow \{0\},$$

où V est muni de sa structure abélienne triviale de groupe polynomial, est une suite exacte scindée de groupes polynomiaux.

Il y a donc une correspondance biunivoque entre les représentations d'algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans V et les suites de fibrés de groupes polynomiaux sur $G_n(\mathfrak{g})$ de fibre $G_n(V)$.

L'appendice B présente la notion de représentation pour des catégories générales d'algèbres n -aires annulant une famille donnée de formes abstraites. En particulier, il existe une notion naturelle de représentation dans la catégorie des systèmes triples de Lie. Après avoir présenté cette notion dans une première partie, nous introduisons la notion de fibré symétrique polynomial et établissons une correspondance biunivoque entre ces deux notions.

2.1.1 Représentation d'un système triple de Lie

Soit $(\mathfrak{q}, [., ., .])$ une algèbre ternaire sur l'anneau $\mathbb{K}$. Introduisons les applications produit partielles R, M, L de l'algèbre ternaire $\mathfrak{q}$: elles sont définies par

$$R(x, y)z = M(x, z)y = L(y, z)x = [x, y, z].$$

Les trois identités définissant un crochet de système triple de Lie sont des identités multilinéaires, ce qui fait des systèmes triples de Lie des L -algèbres (cf appendice B). On peut transcrire ces identités en des identités sur les applications produit partielles :

Proposition 2.1.1. *Soit $\mathfrak{q}$ un module muni d'une application trilinéaire $[\cdot, \cdot, \cdot]$. Alors $(\mathfrak{q}, [\cdot, \cdot, \cdot])$ est un système triple de Lie si et seulement si, pour tout quadruplet (x, y, u, v) d'éléments de $\mathfrak{q}$, les relations suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned}
 (RSTL0) \quad & M(x, y) = -L(x, y) \\
 (RSTL1) \quad & R(x, y) = -R(y, x) \\
 (RSTL2) \quad & R(x, y) = M(x, y) - M(y, x) \\
 (RSTL3) \quad & R(x, y)R(u, v) - R(u, v)R(x, y) = R([x, y, u], v) + R(u, [x, y, v]) \\
 (RSTL4) \quad & R(x, y)M(u, v) - M(u, v)R(x, y) = M([x, y, u], v) + M(u, [x, y, v]) \\
 (RSTL5) \quad & M(x, [u, v, y]) = M(u, y)M(x, v) - M(v, y)M(x, u) + R(u, v)M(x, y),
 \end{aligned}$$

où R, M, L désignent les applications produit partielles de l'algèbre ternaire $\mathfrak{q}$.

Démonstration. Il s'agit de l'écriture des identités (STL) en utilisant les applications produit partielles. $\square$

Remarque 2.1.1. *L'identité (RSTL2) implique l'identité (RSTL1). De même, les identités (RSTL2) et (RSTL4) impliquent l'identité (RSTL3).*

Les applications R, M et L , définies sur $\mathfrak{q} \times \mathfrak{q}$ et à valeurs dans $\text{End}(\mathfrak{q})$ devant former une représentation de $\mathfrak{q}$ dans $\mathfrak{q}$ (représentation que l'on appelle régulière), on définit par analogie les représentations de systèmes triples de Lie :

Définition 2.1.1. *Une représentation du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ dans le module V est la donnée de trois applications bilinéaires r, m et l définies sur $\mathfrak{q} \times \mathfrak{q}$ et à valeurs dans $\text{End}(V)$ vérifiant les six identités (RSTL0-5), ou de manière équivalente, vérifiant les quatre identités (RSTL0-2-4-5).*

Remarquons que les identités (RSTL0) et (RSTL2) permettent de définir les applications r et l à partir de l'application m , ce qui permet de définir une représentation de systèmes triples de Lie comme la donnée d'une application bilinéaire m vérifiant les identités (RSTL4) et (RSTL5), où l'application r est définie par (RSTL2) (cf [16]).

Une autre définition possible de la notion de représentation de système triple de Lie est celle donnée par W.G. Lister dans [18] : en suivant les définitions de représentation d'algèbre de Lie et de représentation spéciale d'algèbre de Jordan (cf [14]) données par un morphisme d'algèbres de Lie ou d'algèbres de Jordan dans $\text{End}(V)$ (muni de son crochet de Lie d'algèbre associative $[x, y] = xy - yx$ ou de son produit de Jordan d'algèbre associative $x \cdot y = \frac{xy + yx}{2}$), celui-ci définit les représentations de systèmes triples de Lie comme étant des morphismes de systèmes triples de Lie d'un système triple de Lie $\mathfrak{q}$ dans $\text{End}(V)$, muni du crochet triple donné par itération du crochet de Lie : $[x, y, z] = [[x, y], z]$.

Nous allons montrer que les représentations de systèmes triples de Lie correspondent de manière biunivoque à certaines extensions inessentiellles et intégrables du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ par le système triple de Lie trivial V . Précisons la

Définition 2.1.2. *Soit $\mathfrak{q}$ un système triple de Lie sur $\mathbb{K}$, V un $\mathbb{K}$ -module. On dit que le système triple de Lie $\tilde{\mathfrak{q}}$ est une extension de $\mathfrak{q}$ par V si et seulement si la suite*

$$\{0\} \longrightarrow V \longrightarrow \tilde{\mathfrak{q}} \longrightarrow \mathfrak{q} \longrightarrow \{0\}$$

est une suite exacte de systèmes triples de Lie, le module V étant considéré muni du crochet nul.

Si, de plus, la suite est une suite exacte scindée de systèmes triples de Lie (donc admet une section homomorphisme de systèmes triples de Lie), on dit que $\tilde{\mathfrak{q}}$ est une extension inessentielle de $\mathfrak{q}$ par V .

On dit que l'extension est intégrable si et seulement si pour tout $x, y, z \in \tilde{\mathfrak{q}}$, $[x, y, z]_{\tilde{\mathfrak{q}}} = 0$ dès que deux des éléments x, y, z appartiennent à V .

Nous pouvons alors énoncer le

Théorème 2.1.1. *Soit $\tilde{\mathfrak{q}}$ un $\mathbb{K}$ -module. Supposons qu'il existe deux sous-modules $\mathfrak{q}$ et V tels que $\mathfrak{q}$ soit muni d'une structure de système triple de Lie et tel que $\tilde{\mathfrak{q}}$ soit somme directe des deux modules $\mathfrak{q}$ et V . Soient r et m deux applications bilinéaires de $\mathfrak{q} \times \mathfrak{q}$ à valeurs dans $\text{End}(V)$. Le produit triple défini pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{q}$ et pour tout $u, v, w \in V$ par*

$$(2.1) \quad [X + u, Y + v, Z + w] = [X, Y, Z]_{\mathfrak{q}} + r(X, Y)w + m(X, Z)v - m(Y, Z)u$$

munit le module $\tilde{\mathfrak{q}}$ d'une structure de système triple de Lie (et alors $\tilde{\mathfrak{q}}$ est une extension intégrable et inessentielle de $\mathfrak{q}$ par V) si et seulement si (r, m) est une représentation de systèmes triples de Lie.

Démonstration. Supposons que le crochet triple défini par (1) munisse $\tilde{\mathfrak{q}}$ d'une structure de système triple de Lie. Alors clairement, le système triple de Lie $\tilde{\mathfrak{q}}$ est une extension inessentielle et intégrable de $\mathfrak{q}$ par V .

Notons R, M les applications partielles du produit triple de Lie $\tilde{\mathfrak{q}}$. Par hypothèse, puisque $\tilde{\mathfrak{q}}$ est un système triple de Lie, elles vérifient les identités (RSTL).

Or $r(X, Y)(w) = R(X, Y)(w)$ et $m(X, Z)(v) = M(X, Z)(v)$ donc par restriction des identités (RSTL) pour les applications R, M , on obtient les identités (RSTL) pour les applications r, m . Ainsi (r, m) est une représentation de système triple de Lie.

Réciproquement, supposons que les applications r et m vérifient les identités (RSTL).

Remarquons que le crochet triple défini par (1) sur $\tilde{\mathfrak{q}}$ est nul dès que deux au moins de ses arguments appartiennent à V .

Par (RSTL1), on a

$$R(X, Y) = -R(Y, X)$$

pour $X, Y \in \mathfrak{q}$.

Si $X, Z \in \mathfrak{q}$ et $v \in V$, on a

$$R(X, v)Z = [X, v, Z] = m(X, Z)v = -[v, X, Z] = -R(v, X)Z.$$

Ainsi R vérifie (RSTL1).

La relation (RSTL2) implique

$$M(X, Z) - M(Z, X) = R(X, Z)$$

pour tout $X, Z \in \mathfrak{q}$.

Si $X, Y \in \mathfrak{q}$ et $w \in V$, on a

$$\begin{aligned} M(X, w)Y - M(w, X)Y &= r(X, Y)w + m(Y, X)w \\ &= m(X, Y)w \\ &= R(X, w)Y. \end{aligned}$$

Avec (RSTL1), on conclut que (RSTL2) est vérifié pour les applications R, M .

2.1. LE POINT DE VUE ALGÈBRIQUE

Vérifions que les applications produit partielles satisfont à l'identité (RSTL3) : on doit montrer que pour tout $U, W, X, Y, Z \in \tilde{\mathfrak{q}}$,

$$R(U, W)[X, Y, Z] = [R(U, W)X, Y, Z] + [X, R(U, W)Y, Z] + [X, Y, R(U, W)Z].$$

Si $U, W, X, Y, Z \in \mathfrak{q}$, c'est la relation (RSTL3) pour le système triple de Lie de $\mathfrak{q}$.

Si $U, W, X, Y \in \mathfrak{q}$ et $w \in V$, respectivement si $U, W, X, Z \in \mathfrak{q}$ et $v \in V$ (et de manière symétrique par (RSTL1) si $U, W, Y, Z \in \mathfrak{q}$ et $u \in V$), les conditions (RSTL3) pour la représentation (r, m) fournissent respectivement (RSTL3) et (RSTL4).

Supposons alors $X, Y, Z, U \in \mathfrak{q}$ et $w \in V$ (le cas $X, Y, Z, W \in \mathfrak{q}$ et $u \in V$ s'en déduit par (RSTL1)). La relation (RSTL3) s'écrit

$$m(U, R(X, Y)Z) = -m(Y, Z) \circ m(Y, X) + m(X, Z) \circ m(U, Y) + r(X, Y) \circ m(U, Z),$$

ce qui est exactement (RSTL4).

Ainsi le crochet triple défini sur $\tilde{\mathfrak{q}}$ est un crochet de système triple de Lie. Il reste à vérifier que le système triple de Lie $\tilde{\mathfrak{q}}$ est une extension inessentielle et intégrable de $\mathfrak{q}$ par V . □

Appelons $\mathfrak{q}$ -module tout module V pour lequel le module $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} \oplus V$ est muni d'une structure de système triple de Lie admettant $\mathfrak{q}$ pour sous-système triple et étant une extension intégrable et inessentielle du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ par le module V . Cette notion a été introduite par B.Harris dans [11]. Par le théorème précédent, il existe une correspondance biunivoque entre les représentations du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ et les structures de $\mathfrak{q}$ -modules. En effet, si V est un $\mathfrak{q}$ -module, en notant $[\cdot, \cdot, \cdot]$ la structure de système triple de Lie de l'extension $\mathfrak{q} \oplus V$, on définit une représentation (r, m) de $\mathfrak{q}$ dans V en posant

$$\begin{aligned} r(X, Y)(v) &= [X, Y, v] \\ m(X, Y)(v) &= [X, v, Y]. \end{aligned}$$

Réciproquement, si (r, m) est une représentation du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ dans le module V , on obtient une structure de $\mathfrak{q}$ -module sur V en considérant le module $\mathfrak{q} \oplus V$ muni du crochet triple donné par la formule (2.1). On vérifie aisément que ces deux correspondances sont inverses l'une de l'autre.

La proposition suivante fournit une autre caractérisation de la structure de $\mathfrak{q}$ -module.

Proposition 2.1.2. *Soit $\mathfrak{q}$ un système triple de Lie, soit V un $\mathbb{K}$ -module. Une structure de système triple de Lie sur le module $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} \oplus V$ provient d'une structure de $\mathfrak{q}$ -module sur V si et seulement si les trois points suivants sont vérifiés :*

- $\mathfrak{q}$ est un sous-système triple de $\tilde{\mathfrak{q}}$,
- V est un idéal de $\tilde{\mathfrak{q}}$, sous-système triple de Lie trivial,
- l'application $(-1) : x + v \longrightarrow x - v$ est un morphisme du système triple de Lie $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} \oplus V$.

Démonstration. Le sens direct est évident (puisque la structure de système triple de Lie sur $\tilde{\mathfrak{q}}$ est alors du type de celle donnée dans le théorème précédent).

Réciproquement, supposons que $\tilde{\mathfrak{q}}$ soit muni d'une structure de système triple de Lie vérifiant les trois points précédents. Le système triple de Lie $\tilde{\mathfrak{q}}$ est alors une extension inessentielle de $\mathfrak{q}$ par V . Cette extension est intégrable, car si deux des éléments x, y, z donnés dans $\tilde{\mathfrak{q}}$ appartiennent à V , le dernier appartenant à $\mathfrak{q}$, on a, en utilisant le fait que l'application (-1) soit un morphisme de système triple de Lie,

$$(-1)[x, y, z] = [(-1)x, (-1)y, (-1)z] = [x, y, z].$$

Ainsi, l'élément $[x, y, z]$ appartient à $\mathfrak{q}$. Or c'est également un élément de V puisque V est un idéal. Les deux modules V et $\mathfrak{q}$ étant en somme directe, on en déduit

$$[x, y, z] = 0,$$

ce qui prouve que l'extension est intégrable. Il suffit alors de considérer les applications bilinéaires r et m de $\mathfrak{q} \times \mathfrak{q}$ à valeurs dans $\text{End}(V)$ définies par $r(x, y)(v) = [x, y, v]$ et $m(x, y)(v) = [x, v, y]$ pour conclure. $\square$

Remarque 2.1.2. *La correspondance biunivoque existant entre $\mathfrak{q}$ -modules et représentations linéaires de $\mathfrak{q}$ est en fait une équivalence de catégories : les notions de morphisme de représentations et de morphisme d'extensions sont précisées dans les sections B.2.1 et B.3.1.*

2.1.2 Lien avec les représentations d'algèbres de Lie avec involution

Si A est une algèbre de Lie munie d'une involution σ (ie d'un automorphisme involutif), on obtient un système triple de Lie $\mathfrak{q}$ en considérant l'espace propre de σ associé à la valeur propre -1 , muni du crochet triple

$$[a, b, c] = [[a, b], c].$$

L'application associant à l'algèbre de Lie avec involution (A, σ) le système triple de Lie $\mathfrak{q}$ est un foncteur, noté F , de la catégorie des algèbres de Lie avec involution dans celle des systèmes triples de Lie. Rappelons qu'un morphisme dans la catégorie des algèbres de Lie avec involution est un morphisme d'algèbres de Lie compatible avec les involutions données.

Dans le cadre des algèbres de Lie, une suite exacte

$$\{0\} \longrightarrow V \longrightarrow E \longrightarrow A \longrightarrow \{0\}$$

est dite extension abélienne de A par V si et seulement si c'est une suite exacte d'algèbres de Lie, V étant muni du crochet nul. Dans le cas d'une structure d'algèbre de Lie induite par une structure d'algèbre associative, cela correspond au fait que la loi de l'algèbre associative V est abélienne.

On vérifie alors aisément que toute extension abélienne d'algèbres de Lie avec involution induit par le foncteur F une extension intégrable de systèmes triples de Lie.

En effet, soit

$$\{0\} \longrightarrow (V, \sigma_V) \longrightarrow (E, \sigma_E) \longrightarrow (A, \sigma_A) \longrightarrow \{0\}$$

une extension d'algèbres de Lie avec involutions, supposée abélienne.

Il est alors clair que la suite de systèmes triples de Lie

$$\{0\} \longrightarrow F(V) \longrightarrow F(E) \longrightarrow F(A) \longrightarrow \{0\}$$

est une suite exacte.

De plus, $[F(V), F(V), F(E)] \subset [[V, V], E]$. L'algèbre de Lie V étant abélienne, on a alors $[F(V), F(V), F(E)] = \{0\}$.

De même, $[F(E), F(V), F(V)] \subset [[E, V], V]$ et puisque V est un idéal de E , $[F(E), F(V), F(V)] \subset [V, V]$ et ainsi $[F(E), F(V), F(V)] = \{0\}$.

L'extension de systèmes triples

$$\{0\} \longrightarrow F(V) \longrightarrow F(E) \longrightarrow F(A) \longrightarrow \{0\}$$

est donc intégrable.

Réciproquement, étant donnée une extension intégrable de systèmes triples de Lie, existe-t-il une extension abélienne d'algèbres de Lie avec involution, induisant par le foncteur F l'extension intégrable de systèmes triples de Lie donnée ?

Rappelons en premier lieu que le foncteur F est un foncteur surjectif : si $\mathfrak{q}$ est un système triple de Lie, son plongement standard, noté $L(\mathfrak{q})$ est une algèbre de Lie avec involution vérifiant $F(L(\mathfrak{q})) = \mathfrak{q}$. Cependant, l'application L n'est pas fonctorielle.

Pour pallier ce problème, on montre l'existence d'un foncteur adjoint à gauche au foncteur d'oubli F , noté L_u (voir [12], [13]) : il existe une équivalence naturelle du foncteur $STL(-, F(-))$ dans le foncteur $ALS(L_u(-), -)$ (foncteurs de la catégorie produit $STL^{op} \times ALS$ dans la catégorie des ensembles).

Si $\mathfrak{q}$ est un système triple de Lie, on montre de plus que $L_u(\mathfrak{q})$ est une algèbre de Lie avec involution engendrée par $\mathfrak{q}$ et que $F(L_u(\mathfrak{q})) = \mathfrak{q}$.

Ce foncteur est défini par la propriété universelle suivante : pour tout système triple de Lie $\mathfrak{q}$, pour toute algèbre de Lie avec involution $\mathfrak{g}$, il existe un isomorphisme d'espace vectoriel de l'ensemble des homomorphismes de systèmes triples de Lie $STL(\mathfrak{q}, F(\mathfrak{g}))$ dans l'ensemble des homomorphismes d'algèbres de Lie avec involutions $ALS(L_u(\mathfrak{q}), \mathfrak{g})$, noté $\eta_{\mathfrak{q}, \mathfrak{g}}$. On suppose que pour tous systèmes triples de Lie $\mathfrak{m}, \mathfrak{q}$, pour toutes algèbres de Lie avec involution $\mathfrak{a}, \mathfrak{g}$, pour tout $\psi \in STL(\mathfrak{q}, \mathfrak{m})$, pour tout $\varphi \in ALS(\mathfrak{a}, \mathfrak{g})$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} STL(\mathfrak{m}, F(\mathfrak{a})) & \longrightarrow & ALS(L_u(\mathfrak{m}), \mathfrak{a}) \\ \psi \times \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \times \varphi \\ STL(\mathfrak{q}, F(\mathfrak{g})) & \longrightarrow & ALS(L_u(\mathfrak{q}), \mathfrak{g}) \end{array}$$

commute.

Décrivons une construction de ce foncteur. Soit $\mathfrak{q}$ un système triple de Lie. Si φ est un morphisme du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ dans le système triple $F(\mathfrak{g})$, avec $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie avec involution donnée, on obtient une application linéaire en considérant l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} \wedge^2(\mathfrak{q}) & \longrightarrow \mathfrak{g} \\ x \wedge y & \longmapsto [\varphi(x), \varphi(y)]. \end{aligned}$$

Si M désigne l'intersection des noyaux de toutes les applications de ce type, alors $L_u(\mathfrak{q})$ peut être identifié au module $(\wedge^2(\mathfrak{q})/M) \oplus \mathfrak{q}$ muni du crochet de Lie suivant : en notant $\langle x, y \rangle$ la classe d'équivalence modulo M d'un élément $x \wedge y$ de $\wedge^2 \mathfrak{q}$, on a

$$\begin{aligned} [x, y] &= \langle x, y \rangle \\ [\langle x, y \rangle, z] &= [x, y, z]_{\mathfrak{q}} \\ [\langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle] &= \langle [x, y, u]_{\mathfrak{q}}, v \rangle + \langle u, [x, y, v]_{\mathfrak{q}} \rangle, \end{aligned}$$

pour $x, y, z, u, v \in \mathfrak{q}$.

Pour une algèbre de Lie avec involution $\mathfrak{g}$, l'isomorphisme η existant entre $STL(\mathfrak{q}, F(\mathfrak{g}))$ et $ALS(L_u(\mathfrak{q}), \mathfrak{g})$ est décrit de la manière suivante : si $\varphi \in STL(\mathfrak{q}, F(\mathfrak{g}))$, alors $\eta(\varphi)$ est l'homomorphisme d'algèbres de Lie avec involution donné par

$$(2.2) \quad \eta(\varphi)(x + \langle y, z \rangle) = \varphi(x) + [\varphi(y), \varphi(z)]_{\mathfrak{g}},$$

où $x + \langle y, z \rangle \in L_u(\mathfrak{q})$.

Proposition 2.1.3. *Soit*

$$\{0\} \longrightarrow V \longrightarrow \mathfrak{q} \oplus V \longrightarrow \mathfrak{q} \longrightarrow \{0\}$$

une extension intégrable et inessentielle de système triple de Lie provenant d'une structure de $\mathfrak{q}$ -module. Il existe alors une extension inessentielle (extension admettant une section homomorphisme d'algèbres de Lie) et abélienne d'algèbres de Lie avec involution induisant par le foncteur F l'extension donnée. Celle-ci est donnée par la suite d'algèbres de Lie avec involution exacte et scindée suivante :

$$\{0\} \longrightarrow N \longrightarrow N \oplus L_u(\mathfrak{q}) \longrightarrow L_u(\mathfrak{q}) \longrightarrow \{0\},$$

où N désigne l'idéal $V \oplus [\mathfrak{q}, V]$ du plongement standard de $\mathfrak{q} \oplus V$, avec $[\mathfrak{q}, V]$ défini par

$$[\mathfrak{q}, V] = \{D \in [\mathfrak{q} \oplus V, \mathfrak{q} \oplus V] \mid D(\mathfrak{q}) \subset V, D(V) = 0\}.$$

Démonstration. Nous reprenons la construction donnée dans [11].

Soit donc

$$\{0\} \longrightarrow V \longrightarrow \mathfrak{q} \oplus V \longrightarrow \mathfrak{q} \longrightarrow \{0\}$$

une extension intégrable et inessentielle de système triple de Lie provenant d'une structure de $\mathfrak{q}$ -module. Alors l'application identité de $\mathfrak{q}$ à valeurs dans $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} \oplus V$ est une section de cette suite exacte de systèmes triples de Lie.

Donnons la construction explicite d'une extension abélienne d'algèbres de Lie avec involution induisant par le foncteur F l'extension de systèmes triples de Lie donnée.

Introduisons le plongement standard $L(\tilde{\mathfrak{q}}) = \tilde{\mathfrak{q}} \oplus [\tilde{\mathfrak{q}}, \tilde{\mathfrak{q}}]$ de $\tilde{\mathfrak{q}}$.

Posons alors $N = V \oplus [V, \mathfrak{q}]$, où $[V, \mathfrak{q}]$ a été défini dans l'énoncé de la proposition. On vérifie que N est un idéal de $L(\tilde{\mathfrak{q}})$ en utilisant le fait que l'extension est intégrable.

Par la propriété universelle du foncteur adjoint L_u , il existe une bijection entre $STL(\mathfrak{q}, \tilde{\mathfrak{q}})$ et $ALS(L_u(\mathfrak{q}), L(\tilde{\mathfrak{q}}))$. L'application identité étant un homomorphisme de systèmes triples de Lie de $\mathfrak{q}$ dans $\tilde{\mathfrak{q}}$, il existe donc un homomorphisme φ d'algèbres de Lie avec involution de $L_u(\mathfrak{q})$ dans $L(\tilde{\mathfrak{q}})$.

Alors φ définit une représentation d'algèbres de Lie de $L_u(\mathfrak{q})$ dans N et on obtient une extension inessentielle d'algèbres de Lie

$$\{0\} \longrightarrow N \longrightarrow N \oplus L_u(\mathfrak{q}) \longrightarrow L_u(\mathfrak{q}) \longrightarrow \{0\}$$

en munissant $N \oplus L_u(\mathfrak{q})$ de la structure d'algèbre de Lie suivante :

$$[n + l, n' + l'] = [n, n']_{L(\tilde{\mathfrak{q}})} + \varphi(l).n' - \varphi(l').n + [l, l']_{L_u(\mathfrak{q})}.$$

Cette extension est abélienne car

$$[N, N] = [V \oplus [V, \mathfrak{q}], V \oplus [V, \mathfrak{q}]]_{L(\tilde{\mathfrak{q}})} = \{0\},$$

l'extension de systèmes triples de Lie étant intégrable.

L'algèbre de Lie N est munie de l'involution σ_N , restriction de l'involution de $L(\tilde{\mathfrak{q}})$ à N . Ainsi $F(N) = V$.

On désigne par $\sigma_{L_u(\mathfrak{q})}$ l'involution de l'algèbre de Lie $L_u(\mathfrak{q})$, on sait que $F(L_u(\mathfrak{q})) = \mathfrak{q}$.

On vérifie alors que l'application $\sigma_N \oplus \sigma_{L_u(\mathfrak{q})}$ est une involution de l'algèbre de Lie $N \oplus L_u(\mathfrak{q})$. On a de plus clairement $F(N \oplus L_u(\mathfrak{q})) = V \oplus \mathfrak{q}$, ce qui prouve que l'extension

$$\{0\} \longrightarrow N \longrightarrow N \oplus L_u(\mathfrak{q}) \longrightarrow L_u(\mathfrak{q}) \longrightarrow \{0\}$$

est une extension d'algèbres de Lie avec involution induisant par le foncteur F l'extension de systèmes triples de Lie

$$\{0\} \longrightarrow V \longrightarrow V \oplus \mathfrak{q} \longrightarrow \mathfrak{q} \longrightarrow \{0\}.$$

□

Introduisons la notion de représentation d'algèbre de Lie avec involution :

Définition 2.1.3. Soit $(\mathfrak{g}, \sigma)$ une algèbre de Lie avec involution, (N, σ') un $\mathbb{K}$ -module avec involution. Une représentation d'algèbre de Lie avec involution de $(\mathfrak{g}, \sigma)$ dans (N, σ') est une représentation r de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans le module N vérifiant pour tout $x \in \mathfrak{g}$, pour tout $n \in N$,

$$r(\sigma(x))(\sigma'(n)) = \sigma'(r(x)(n)).$$

Nous obtenons alors le

Corollaire 2.1.1. Etant donnée une représentation r de l'algèbre de Lie avec involution $(\mathfrak{g}, \sigma_{\mathfrak{g}})$ dans le module (N, σ_N) , on obtient une représentation (R, M) du système triple de Lie $F(\mathfrak{g})$ dans le module $F(N)$ en posant

$$\begin{aligned} R(X, Y)(v) &= r([X, Y])(v) \\ M(X, Y)(v) &= -r(Y)r(X)(v). \end{aligned}$$

Réciproquement, toute représentation (R, M) du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ dans le module V induit une représentation r de l'algèbre de Lie avec involution $L_u(\mathfrak{q})$ dans le module $N = V \oplus [\mathfrak{q}, V]$. Celle-ci est donnée pour $X + \langle Y, Z \rangle \in L_u(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q} \oplus (\wedge^2 \mathfrak{q}/M)$, $v + D \in N = V \oplus [\mathfrak{q}, V]$, par

$$r(X + \langle Y, Z \rangle)(v + D) = R(Y, Z)(v) - D(X) + [X, v] + [[Y, Z], D].$$

Démonstration. Si r est une représentation de l'algèbre de Lie avec involution $(\mathfrak{g}, \sigma_{\mathfrak{g}})$ dans le module avec involution (N, σ_N) , on obtient une structure d'algèbre de Lie avec involution sur le module $(\mathfrak{g} \oplus N, \sigma_{\mathfrak{g}} \oplus \sigma_N)$ en munissant $\mathfrak{g} \oplus N$ du produit

$$[x + n, y + m] = [x, y]_{\mathfrak{g}} + r(x)(m) - r(y)(n).$$

Pour cette structure d'algèbre de Lie avec involution, la suite

$$\{0\} \longrightarrow N \longrightarrow \mathfrak{g} \oplus N \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \{0\}$$

est une extension abélienne et inessentielle d'algèbres de Lie avec involution. Cette suite induit donc une extension inessentielle et intégrable de systèmes triples de Lie

$$\{0\} \longrightarrow F(N) \longrightarrow F(\mathfrak{g} \oplus N) \longrightarrow F(\mathfrak{g}) \longrightarrow \{0\}.$$

Comme $F(\mathfrak{g} \oplus N) = F(\mathfrak{g}) \oplus F(N)$, on en déduit que le module $F(N)$ est un $F(\mathfrak{g})$ -module, donc on obtient une représentation du système triple de Lie $F(\mathfrak{g})$ dans le module $F(N)$ en posant

$$\begin{aligned} R(X, Y)(v) &= [X, Y, v]_{F(\mathfrak{g})} \\ &= [[X, Y], v]_{\mathfrak{g}} \\ &= r([X, Y])(v) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 M(X, Y)(v) &= [X, v, Y]_{F(\mathfrak{g})} \\
 &= [[X, v], Y]_{\mathfrak{g}} \\
 &= -[Y, [X, v]] \\
 &= -r(Y) \circ r(X)(v).
 \end{aligned}$$

Réciproquement, étant donnée une représentation du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ dans le module V , on obtient une structure d'extension inessentielle et intégrable de $\mathfrak{q}$ par V sur le module $\mathfrak{q} \oplus V$. Par la proposition 2.1.3, l'algèbre de Lie $L_u(\mathfrak{q} \oplus V)$ est une extension intégrable et inessentielle de l'algèbre de Lie avec involution $L_u(\mathfrak{q})$ par le module $N = V \oplus [\mathfrak{q}, V]$. Par construction, en utilisant l'isomorphisme explicite 2.2, on vérifie que la représentation de l'algèbre de Lie avec involution $L_u(\mathfrak{q})$ dans le module N induisant cette extension est bien donnée par la formule énoncée. $\square$

2.1.3 Notion de fibré symétrique polynomial

Un premier exemple d'extension intégrable d'un système triple de Lie $(\mathfrak{q}, [\cdot, \cdot, \cdot])$ est donné par l'extension scalaire $(\mathfrak{q} \oplus \varepsilon \mathfrak{q}, [\cdot, \cdot, \cdot] \otimes_{\mathbb{K}} \text{Id}_{\mathbb{K}[\varepsilon]})$.

L'interprétation géométrique de cette extension est la suivante : si (M, μ) est un espace symétrique sur un corps ou anneau topologique $\mathbb{K}$, l'application tangente $T\mu$ munit le fibré tangent TM d'une structure d'espace symétrique sur l'anneau $T\mathbb{K}$. Le foncteur tangent s'interprète ainsi comme un foncteur d'extension par les nombres duaux : si $(\mathfrak{q}, [\cdot, \cdot, \cdot])$ désigne le système triple de Lie de l'espace symétrique (M, μ) , $(\mathfrak{q} \oplus \varepsilon \mathfrak{q}, [\cdot, \cdot, \cdot] \otimes_{\mathbb{K}} \text{Id}_{\mathbb{K}[\varepsilon]})$ est le système triple de Lie associé à l'espace symétrique $(TM, T\mu)$.

Etudions alors l'espace symétrique polynomial associé à cette extension.

Puisque la suite de systèmes triples de Lie

$$\{0\} \longrightarrow \varepsilon \mathfrak{q} \longrightarrow \mathfrak{q} \oplus \varepsilon \mathfrak{q} \longrightarrow \mathfrak{q} \longrightarrow \{0\}$$

est une suite exacte scindée, en utilisant la fonctorialité de la construction, on obtient une suite exacte scindée d'espaces symétriques

$$\{0\} \longrightarrow G_n(\varepsilon \mathfrak{q}) \longrightarrow G_n(\mathfrak{q} \oplus \varepsilon \mathfrak{q}) \longrightarrow G_n(\mathfrak{q}) \longrightarrow \{0\}.$$

Le système triple de Lie $\varepsilon \mathfrak{q}$ étant un système triple de Lie trivial, l'espace symétrique $G_n(\varepsilon \mathfrak{q})$ est plat (cf remarque 1.3.2).

Le lemme suivant va nous permettre de préciser la structure d'espace symétrique de $G_n(\mathfrak{q} \oplus \varepsilon \mathfrak{q})$.

Lemme 2.1.1. *L'application*

$$\begin{aligned}
 G_n(\mathfrak{q} \oplus \varepsilon \mathfrak{q}) &\longrightarrow G_{n+1}(\mathfrak{q}) \\
 \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha (x_\alpha + \varepsilon x'_\alpha) &\longmapsto \sum_{\alpha \in I_n} (\varepsilon^{(\alpha, 0)} x_\alpha + \varepsilon^{(\alpha, 1)} x'_\alpha)
 \end{aligned}$$

est un morphisme d'espaces symétriques polynomiaux.

Démonstration. Le plongement standard du système triple de Lie $\mathfrak{q} \oplus \varepsilon \mathfrak{q}$ étant donné par l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \oplus \varepsilon \mathfrak{g}$, où $\mathfrak{g}$ est le plongement standard de $\mathfrak{q}$, il nous suffit de montrer que l'application

$$\begin{aligned}
 G_n(\mathfrak{g} \oplus \varepsilon \mathfrak{g}) &\longrightarrow G_{n+1}(\mathfrak{g}) \\
 \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha (x_\alpha + \varepsilon x'_\alpha) &\longmapsto \sum_{\alpha \in I_n} (\varepsilon^{(\alpha, 0)} x_\alpha + \varepsilon^{(\alpha, 1)} x'_\alpha)
 \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes.

Soient donc $\sum_{\alpha \in I_n} (x_\alpha + \varepsilon x'_\alpha)$, $\sum_{\alpha \in I_n} (y_\alpha + \varepsilon y'_\alpha)$ deux éléments du groupe $G_n(\mathfrak{g} \oplus \varepsilon \mathfrak{g})$. On a alors

$$\sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha (x_\alpha + \varepsilon x'_\alpha) \cdot \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha (y_\alpha + \varepsilon y'_\alpha) = \sum_{\alpha \in I_n} \varepsilon^\alpha (z_\alpha + \varepsilon z'_\alpha)$$

avec

$$\begin{aligned} z_\alpha + \varepsilon z'_\alpha &= x_\alpha + \varepsilon x'_\alpha + y_\alpha + \varepsilon y'_\alpha \\ &\quad + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [[x_{\lambda^m} + \varepsilon x'_{\lambda^m}, y_{\lambda^1} + \varepsilon y'_{\lambda^1}], \dots, y_{\lambda^{m-1}} + \varepsilon y'_{\lambda^{m-1}}] \\ &= x_\alpha + y_\alpha + \varepsilon (x'_\alpha + y'_\alpha) \\ &\quad + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^1}], \dots, y_{\lambda^{m-1}}] \\ &\quad + \varepsilon \left(\sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [[x'_{\lambda^m}, y_{\lambda^1}], \dots, y_{\lambda^{m-1}}] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} \sum_{i=1}^{m-1} [[[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^1}], \dots, y'_{\lambda^i}], \dots, y_{\lambda^{m-1}}] \right). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\sum_{\alpha \in I_n} (\varepsilon^{(\alpha,0)} x_\alpha + \varepsilon^{(\alpha,1)} \varepsilon x'_\alpha) \cdot \sum_{\alpha \in I_n} (\varepsilon^{(\alpha,0)} y_\alpha + \varepsilon^{(\alpha,1)} \varepsilon y'_\alpha) = \sum_{\beta \in I_{n+1}} \varepsilon^\beta z_\beta$$

avec, si β est de la forme $(\alpha, 0)$,

$$\begin{aligned} z_\beta &= x_\alpha + y_\alpha \\ &\quad + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m((\alpha,0))} [[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^1}], \dots, y_{\lambda^{m-1}}], \end{aligned}$$

si β est de la forme $(\alpha, 1)$,

$$\begin{aligned} z_\beta &= x'_\alpha + y'_\alpha + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m((\alpha,0))} [[x'_{\lambda^m}, y_{\lambda^1}], \dots, y_{\lambda^{m-1}}] \\ &\quad + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} \sum_{i=1}^{m-1} [[[x_{\lambda^m}, y_{\lambda^1}], \dots, y'_{\lambda^i}], \dots, y_{\lambda^{m-1}}], \end{aligned}$$

et enfin, si $\beta = (0, \dots, 0, 1)$,

$$z_\beta = 0,$$

ce qui prouve que l'application considérée est un morphisme de groupes. □

Nous pouvons ainsi regarder l'espace symétrique $G_n(\mathfrak{q} \oplus \varepsilon \mathfrak{q})$ comme un sous-espace symétrique de l'espace symétrique $G_{n+1}(\mathfrak{q})$.

Décrivons à présent la structure d'espace symétrique de $G_{n+1}(\mathfrak{q})$ en utilisant celle de $G_n(\mathfrak{q})$. En considérant la projection naturelle $\pi : G_{n+1}(\mathfrak{g}) \longrightarrow G_n(\mathfrak{g})$, nous obtenons une suite exacte de groupes

$$\{0\} \longrightarrow \varepsilon_{n+1}(\mathfrak{g} \oplus G_n(\mathfrak{g})) \longrightarrow G_{n+1}(\mathfrak{g}) \longrightarrow G_n(\mathfrak{g}) \longrightarrow \{0\},$$

où le groupe $\varepsilon_{n+1}(\mathfrak{g} \oplus G_n(\mathfrak{g}))$ est abélien (cf remarque 1.2.6). Il est clair que l'application σ commute à la projection π et ainsi, $\pi(M_{n+1}) \subset M_n$.

De plus, les projections π et $\pi_{\mathfrak{q}}$ commutent. Ainsi

$$\begin{aligned} \pi_{\mathfrak{q}}(\pi(M_{n+1}(\mathfrak{q}))) &= \pi(\pi_{\mathfrak{q}}(M_{n+1}(\mathfrak{q}))) \\ &= \pi(G_{n+1}(\mathfrak{q})) \\ &= G_n(\mathfrak{q}). \end{aligned}$$

En utilisant la bijectivité de l'application φ , on en déduit $\pi(M_{n+1}(\mathfrak{q})) = M_n(\mathfrak{q})$. Plus précisément, en utilisant la notation provenant de la structure sur $G_{n+1}(\mathfrak{g})$ de produit semi-direct, on a les équivalences suivantes

- $(N, H) \in M_{n+1}(\mathfrak{q})$
- $\sigma((N, H)) = (N, H)^{-1}$
- $(\sigma(N), \sigma(H)) = (H^{-1}N^{-1}H, H^{-1})$
- $\sigma(N) = H^{-1}N^{-1}H$ et $\sigma(H) = H^{-1}$
- $\sigma(N) = H^{-1}N^{-1}H$ et $H \in M_n(\mathfrak{q})$

Si $(n, h), (n', h')$ sont éléments de l'espace symétrique

$$G_{n+1}(\mathfrak{q}) = \varepsilon_{n+1}(\mathfrak{q} \oplus G_n(\mathfrak{q})) \times G_n(\mathfrak{q}),$$

en notant $(N, H), (N', H')$ les uniques éléments de $M_{n+1}(\mathfrak{q})$ dont les images par l'application φ sont $(n, h), (n', h')$, on obtient

$$\begin{aligned} \mu((n, h), (n', h')) &= \varphi((N, H)\sigma(N', H')(N, H)) \\ &= \varphi((NH\sigma(N')\sigma(H')N\sigma(H')^{-1}H^{-1}, H\sigma(H')H)). \end{aligned}$$

Or on sait que $\sigma(H') = H'^{-1}$ et $\sigma(N') = H'^{-1}N'^{-1}H'$. Ainsi,

$$\mu((n, h), (n', h')) = \varphi((NH(H')^{-1}N'^{-1}NH'H^{-1}, H\sigma(H')H))$$

En particulier,

$$\mu((n, h)(n', h)) = \varphi((NN'^{-1}N, H\sigma(H)H)) = (2n - n', h),$$

car $\varepsilon_{n+1}(\mathfrak{g} \oplus G_n(\mathfrak{g}))$ est abélien. Aussi le sous-espace à symétries $\varepsilon_{n+1}(\mathfrak{q} \oplus G_n(\mathfrak{q}))$ est-il muni de la structure plate d'espace à symétries.

Remarquons d'autre part que si (N, H) appartient à l'ensemble $M_{n+1}(\mathfrak{q})$, alors (N^{-1}, H) en est aussi un élément. En effet, l'application σ étant un endomorphisme de groupe polynomial, on a

$$\begin{aligned} \sigma(N^{-1}) &= (\sigma(N))^{-1} \\ &= (H^{-1}N^{-1}H)^{-1} \\ &= H^{-1}NH, \end{aligned}$$

ce qui prouve que (N^{-1}, H) appartient à $M_{n+1}(\mathfrak{q})$. Or l'espace $\varepsilon_{n+1}(\mathfrak{g} \oplus G_n(\mathfrak{g}))$ est abélien. Ainsi $N^{-1} = -N$.

Montrons alors que l'application

$$\begin{aligned} (-1) : G_{n+1}(\mathfrak{q}) &\longrightarrow G_{n+1}(\mathfrak{q}) \\ (n, h) &\longmapsto (-n, h) \end{aligned}$$

est un morphisme d'espace symétrique.

Soient $(n, h), (n', h')$ deux éléments de $G_{n+1}(\mathfrak{q})$. Notons $(N, H), (N', H')$ les uniques éléments de $M_{n+1}(\mathfrak{q})$ vérifiant $\varphi((N, H)) = (n, h)$ et $\varphi((N', H')) = (n', h')$. Alors $(N^{-1}, H), (N'^{-1}, H') \in M_n(\mathfrak{g} \oplus \varepsilon\mathfrak{g})$ et $\varphi((N^{-1}, H)) = (-n, h), \varphi((N'^{-1}, H')) = (-n', h')$.

D'une part, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mu((-1)(n, h), (-1)(n', h')) &= \mu((-n, h), (-n', h')) \\ &= \varphi(N^{-1}HH'^{-1}(N'^{-1})^{-1}N^{-1}H'H^{-1}, H\sigma(H')H) \\ &= \varphi(N^{-1}HH'^{-1}N'N^{-1}H'H^{-1}, H\sigma(H')H), \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} (-1)\mu((n, h), (n', h')) &= (-1)(\varphi(NHH'^{-1}N'^{-1}NH'H^{-1}, H\sigma(H')H) \\ &= \varphi(-NHH'^{-1}N'^{-1}NH'H^{-1}, H\sigma(H')H) \\ &= \varphi(NHH'^{-1}N'^{-1}NH'H^{-1})^{-1}, H\sigma(H')H) \\ &= \varphi(HH'^{-1}N^{-1}N'H'H^{-1}N^{-1}, H\sigma(H')H). \end{aligned}$$

En utilisant la commutativité des éléments de $\varepsilon_{n+1}(\mathfrak{g} \oplus G_n(\mathfrak{g}))$, on obtient alors l'égalité cherchée :

$$\mu((-1)(n, h), (-1)(n', h')) = (-1)\mu((n, h), (n', h')).$$

Nous allons montrer que ces propriétés caractérisent les espaces symétriques provenant d'extensions inessentiels et intégrables de systèmes triples de Lie données par une structure de $\mathfrak{q}$ -module.

Donnons la

Définition 2.1.4. Soient $(M, \mu), (M', \mu')$ deux espaces symétriques polynomiaux sur l'anneau $\mathbb{K}$. Soit V un $\mathbb{K}$ -module. On dit que M' est un fibré symétrique polynomial sur M de fibre V si et seulement si les quatre assertions suivantes sont vérifiées :

- (FSP1) $M' = M \oplus V$,
- (FSP2) M est un sous-espace symétrique de M'
- (FSP3) l'application $(-1) : M' \longrightarrow M'$, définie par $(-1)(x + v) = x - v$, est un automorphisme d'espace symétrique polynomial,
- (FSP4) pour tout $(x, v, w) \in M \times V \times V$, $\mu'(x + v, x + w) = x + 2v - w$.

Exemple 2.1.1. Pour tout entier naturel n , l'espace symétrique $G_{n+1}(\mathfrak{q})$ est un fibré symétrique polynomial sur l'espace symétrique $G_n(\mathfrak{q})$, de fibre $\varepsilon_{n+1}(\mathfrak{q} \oplus G_n(\mathfrak{q}))$. On en déduit que $G_n(\mathfrak{q} \oplus \varepsilon\mathfrak{g})$ est un fibré symétrique polynomial sur l'espace symétrique $G_n(\mathfrak{q})$, de fibre $\varepsilon G_n(\mathfrak{q})$.

Nous pouvons alors énoncer le

Théorème 2.1.2. *Supposons que 2 soit inversible dans l'anneau $\mathbb{K}$. Soit $\mathfrak{q}$ un système triple de Lie sur $\mathbb{K}$. Soit V un $\mathbb{K}$ -module. Supposons que $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} \oplus V$ soit muni d'une structure de système triple de Lie. Cette structure provient d'une structure de $\mathfrak{q}$ -module sur V si et seulement si, pour tout entier naturel n non nul, $G_n(\tilde{\mathfrak{q}})$ est un fibré symétrique polynomial sur $G_n(\mathfrak{q})$ de fibre $G_n(V)$.*

Démonstration. Supposons en premier lieu que pour tout entier naturel non nul n , $G_n(\tilde{\mathfrak{q}})$ soit un fibré symétrique polynomial sur $G_n(\mathfrak{q})$ de fibre $G_n(V)$.

En particulier, la suite

$$\{0\} \longrightarrow G_3(V) \longrightarrow G_3(\tilde{\mathfrak{q}}) \longrightarrow G_3(\mathfrak{q}) \longrightarrow \{0\}$$

est une suite exacte scindée de fibrés symétriques polynomiaux, où $G_3(V)$ est muni de sa structure plate. De plus, $G_3(\mathfrak{q})$ est un sous-système triple de Lie de $G_3(\tilde{\mathfrak{q}})$. Or, on a vu que pour tout système triple de Lie $\mathfrak{l}$, la structure de système triple de Lie sur $\mathfrak{l}$ est entièrement déterminée par la structure de fibré symétrique construite sur $G_3(\mathfrak{l})$ (remarque 1.3.1) : plus précisément, pour $x, y, z \in \mathfrak{l}$, $[x, y, z]$ est l'unique élément de $\mathfrak{l}$ tel que

$$[Q(\varepsilon_{001}x), Q(\varepsilon_{010}y)](\varepsilon_{100}z) = \varepsilon_{100}z + \varepsilon_{111}[x, y, z].$$

On en déduit que la suite

$$\{0\} \longrightarrow V \longrightarrow \tilde{\mathfrak{q}} \longrightarrow \mathfrak{q} \longrightarrow \{0\}$$

est une suite exacte scindée de systèmes triples de Lie, V étant muni de sa structure triviale de système triple de Lie et que $\mathfrak{q}$ est un sous-système triple de Lie de $\tilde{\mathfrak{q}}$.

Pour tout homomorphisme f d'espace symétrique polynomial, on vérifie que $f \circ Q(x) = Q(f(x)) \circ f$. L'application $(-1) : X + V \longrightarrow X - V$ étant un homomorphisme du fibré symétrique polynomial $G_3(\tilde{\mathfrak{q}}) = G_3(\mathfrak{q}) \oplus G_3(V)$, on a donc, pour tout $X, Y, Z \in G_3(\tilde{\mathfrak{q}})$,

$$(-1)([Q(X), Q(Y)](Z)) = [Q((-1)(X)), Q((-1)(Y))]((-1)(Z)),$$

ce qui permet de montrer que l'application $(-1) : x + v \longrightarrow x - v$ est un homomorphisme du système triple de Lie $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} \oplus V$.

Finalement, on a montré que $\tilde{\mathfrak{q}}$ provient d'une structure de $\mathfrak{q}$ -module sur V .

Supposons à présent que $\tilde{\mathfrak{q}}$ soit une extension inessentielle et intégrable de $\mathfrak{q}$ par V , provenant d'une structure de $\mathfrak{q}$ -module sur V .

En particulier,

$$\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} \oplus V$$

et on a une suite exacte scindée de systèmes triples de Lie

$$\{0\} \longrightarrow V \longrightarrow \tilde{\mathfrak{q}} \longrightarrow \mathfrak{q} \longrightarrow \{0\}$$

(où V est muni de sa structure triviale de système triple de Lie). D'autre part, on sait que l'application

$$\begin{array}{ccc} (-1) : & \tilde{\mathfrak{q}} & \longrightarrow \tilde{\mathfrak{q}} \\ & x + v & \longmapsto x - v \end{array}$$

est un morphisme de système triple de Lie.

En utilisant la fonctorialité de l'application qui à un système triple de Lie $\mathfrak{q}$ associe l'espace symétrique $G_n(\mathfrak{q})$, on obtient une suite exacte scindée d'espaces symétriques

$$\{0\} \longrightarrow G_n(V) \longrightarrow G_n(\tilde{\mathfrak{q}}) \longrightarrow G_n(\mathfrak{q}) \longrightarrow \{0\}$$

(où $G_n(V)$ est muni de la structure plate) et un morphisme d'espace symétrique $(-1)_n : G_n(\tilde{\mathfrak{q}}) \longrightarrow G_n(\tilde{\mathfrak{q}})$.

Il reste à montrer que pour tout $x, u, w \in G_n(\mathfrak{q}) \times G_n(V) \times G_n(V)$,

$$\mu(x + u, x + w) = x + 2u - w.$$

Notons X l'élément $\varphi^{-1}(x)$, $f(u)$ l'élément $\varphi^{-1}(x + u) - \varphi^{-1}(x)$ de telle sorte que $\varphi^{-1}(x + u) = X + f(u)$.

On sait que

$$\varphi^{-1}(x + u) = x + u + \frac{1}{2}A(x + u),$$

où $A(x + u)_\alpha$ est défini par récurrence sur la longueur de α par

$$A(x + u)_\alpha = \sum_{m=2}^{|\alpha|} (-1)^m \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [[[(X + f(u))_{\lambda^m}, (X + f(u))_{\lambda^{m-1}}], \dots], (X + f(u))_{\lambda^1}].$$

Puisque $\tilde{\mathfrak{q}}$ est une extension inessentielle de $\mathfrak{q}$ par V , le plongement standard de $\tilde{\mathfrak{q}}$ est donné par $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{q} \oplus [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}] \oplus V \oplus [\mathfrak{q}, V] = \mathfrak{g} \oplus V \oplus [\mathfrak{q}, V]$.

Remarquons que pour tout multi-indice α , l'élément $f(u)_\alpha$ appartient au sous-module $V \oplus [\mathfrak{q}, V]$: cela se montre par récurrence sur la longueur du multi-indice α .

Si α est de longueur 1, $f(u)_\alpha = (x + u)_\alpha - x_\alpha = u_\alpha$ est élément de V . Supposons le résultat vrai pour les multi-indices de longueur inférieure ou égale à k . En notant $\Pi_{\mathfrak{g}}$ la projection de l'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on a donc, pour tout multi-indice β de longueur inférieure ou égale à k ,

$$\Pi_{\mathfrak{g}}((X + f(u))_\beta) = X_\beta.$$

Considérons un multi-indice α de longueur $k + 1$. Alors, puisque la projection $\Pi_{\mathfrak{g}}$ est un morphisme d'algèbres de Lie, on obtient

$$\begin{aligned} & \Pi_{\mathfrak{g}}(A(x + u)_\alpha) \\ = & \Pi_{\mathfrak{g}}\left(\sum_{m=2}^{|\alpha|} (-1)^m \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [[[(X + f(u))_{\lambda^m}, (X + f(u))_{\lambda^{m-1}}], \dots], (X + f(u))_{\lambda^1}]\right) \\ = & \sum_{m=2}^{|\alpha|} (-1)^m \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [[[\Pi_{\mathfrak{g}}((X + f(u))_{\lambda^m}), \Pi_{\mathfrak{g}}((X + f(u))_{\lambda^{m-1}})], \dots], \Pi_{\mathfrak{g}}((X + f(u))_{\lambda^1})] \\ = & \sum_{m=2}^{|\alpha|} (-1)^m \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [[[X_{\lambda^m}, X_{\lambda^{m-1}}], \dots], X_{\lambda^1}] \\ = & A(x)_\alpha, \end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathfrak{g}}((X + f(u))_\alpha) &= \Pi_{\mathfrak{g}}(x_\alpha + u_\alpha + \frac{1}{2}A(x + u)_\alpha) \\ &= x_\alpha + \frac{1}{2}A(x)_\alpha \\ &= X_\alpha. \end{aligned}$$

Aussi le résultat est-il vrai pour les multi-indices de longueur $k + 1$.

Montrons alors que l'application

$$\begin{array}{ccc} f : G_n(V) & \longrightarrow & G_n(\tilde{\mathfrak{g}}) \\ u & \longmapsto & f(u) \end{array}$$

est linéaire. On a $f(u) = u + \frac{1}{2}(A(x+u) - A(x))$. Il s'agit donc de montrer que pour tout couple (u, w) d'éléments de $G_n(V)$, pour tout multi-indice α ,

$$A(x+u+w)_\alpha + A(x)_\alpha = A(x+u)_\alpha + A(x+w)_\alpha,$$

ce qui se fait par récurrence sur la longueur du multi-indice α en développant les crochets itérés intervenant dans la définition de $A(x+u+w)_\alpha$ et en remarquant que $V \oplus [\mathfrak{q}, V]$ est un idéal abélien de $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Il est alors licite de noter U, W les images par f de deux éléments u, w de $G_n(V)$: l'élément $U + W$ correspond alors à l'image par f de $u + w$.

Avec ces notations, $\varphi^{-1}(x+u) = X + U$ et $\varphi^{-1}(x+w) = X + W$.

Démontrer l'égalité

$$\mu(x+u, x+w) = x + 2u - w$$

revient alors à démontrer que

$$(X + U) \cdot \sigma(X + W) \cdot (X + U) = X + 2U - W.$$

Considérons un multi-indice α . On obtient alors

$$\begin{aligned} & ((X + U) \cdot \sigma(X + W))_\alpha \\ = & (X + U)_\alpha + \sigma(X + W)_\alpha \\ & + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [(X + U)_{\lambda^m}, \sigma(X + W)_{\lambda^1}, \dots, \sigma(X + W)_{\lambda^{m-1}}] \\ = & X_\alpha + \sigma(X)_\alpha + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [X_{\lambda^m}, \sigma(X)_{\lambda^1}, \dots, \sigma(X)_{\lambda^{m-1}}] \\ & + U_\alpha + \sigma(W)_\alpha + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [U_{\lambda^m}, \sigma(X)_{\lambda^1}, \dots, \sigma(X)_{\lambda^{m-1}}] \\ & + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} \sum_{i=1}^{m-1} [X_{\lambda^m}, \sigma(X)_{\lambda^1}, \dots, \sigma(W)_{\lambda^i}, \dots, \sigma(X)_{\lambda^{m-1}}]. \end{aligned}$$

Or

$$X \cdot \sigma(X) = 0.$$

On en déduit

$$X_\alpha + \sigma(X)_\alpha + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [X_{\lambda^m}, \sigma(X)_{\lambda^1}, \dots, \sigma(X)_{\lambda^{m-1}}] = 0,$$

ce qui prouve que

$$\begin{aligned} ((X + U) \cdot \sigma(X + W))_\alpha &= U_\alpha + \sigma(W)_\alpha \\ &+ \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [U_{\lambda^m}, \sigma(X)_{\lambda^1}, \dots, \sigma(X)_{\lambda^{m-1}}] \\ &+ \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} \sum_{i=1}^{m-1} [X_{\lambda^m}, \sigma(X)_{\lambda^1}, \dots, \sigma(W)_{\lambda^i}, \dots, \sigma(X)_{\lambda^{m-1}}]. \end{aligned}$$

Développons de même la relation

$$(X + W) \cdot \sigma(X + W) = 0.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} 0 &= (X + W)_\alpha + \sigma(X + W)_\alpha \\ &+ \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [(X + W)_{\lambda^m}, \sigma(X + W)_{\lambda^1}, \dots, \sigma(X + W)_{\lambda^{m-1}}] \\ &= X_\alpha + \sigma(X)_\alpha + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [X_{\lambda^m}, \sigma(X)_{\lambda^1}, \dots, \sigma(X)_{\lambda^{m-1}}] \\ &\quad + W_\alpha + \sigma(W)_\alpha + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [W_{\lambda^m}, \sigma(X)_{\lambda^1}, \dots, \sigma(X)_{\lambda^{m-1}}] \\ &\quad + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} \sum_{i=1}^{m-1} [X_{\lambda^m}, \sigma(X)_{\lambda^1}, \dots, \sigma(W)_{\lambda^i}, \dots, \sigma(X)_{\lambda^{m-1}}] \\ &= W_\alpha + \sigma(W)_\alpha + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [W_{\lambda^m}, \sigma(X)_{\lambda^1}, \dots, \sigma(X)_{\lambda^{m-1}}] \\ &\quad + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} \sum_{i=1}^{m-1} [X_{\lambda^m}, \sigma(X)_{\lambda^1}, \dots, \sigma(W)_{\lambda^i}, \dots, \sigma(X)_{\lambda^{m-1}}], \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\begin{aligned} \sigma(W)_\alpha &+ \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} \sum_{i=1}^{m-1} [X_{\lambda^m}, \sigma(X)_{\lambda^1}, \dots, \sigma(W)_{\lambda^i}, \dots, \sigma(X)_{\lambda^{m-1}}] = \\ &-W_\alpha + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [W_{\lambda^m}, \sigma(X)_{\lambda^1}, \dots, \sigma(X)_{\lambda^{m-1}}]. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} ((X + U) \cdot \sigma(X + W))_\alpha &= U_\alpha - W_\alpha \\ &+ \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [(U - W)_{\lambda^m}, \sigma(X)_{\lambda^1}, \dots, \sigma(X)_{\lambda^{m-1}}]. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors effectuer le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
 & ((X + U) \cdot \sigma(X + W) \cdot (X + U))_\alpha \\
 = & X_\alpha + 2U_\alpha - W_\alpha \\
 & + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [(U - W)_{\lambda^m}, \sigma(X)_{\lambda^1}, \dots, \sigma(X)_{\lambda^{m-1}}] \\
 & + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [(U - W)_{\lambda^m}, X_{\lambda^1}, \dots, X_{\lambda^{m-1}}] \\
 & + \sum_{l=2}^{|\alpha|} \sum_{\mu \in P^l(\alpha)} \sum_{m=2}^{|\mu_l|} \sum_{\lambda \in P^m(\mu_l)} [(U - W)_{\lambda^m}, \sigma(X)_{\lambda^1}, \dots, \sigma(X)_{\lambda^{m-1}}, X_{\mu^1}, \dots, X_{\mu^{l-1}}].
 \end{aligned}$$

En partant de la relation

$$((U - W) \cdot \sigma(X)) \cdot X = (U - W) \cdot (\sigma(X) \cdot X) = U - W,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
 0 = & \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [(U - W)_{\lambda^m}, \sigma(X)_{\lambda^1}, \dots, \sigma(X)_{\lambda^{m-1}}] \\
 & + \sum_{m=2}^{|\alpha|} \sum_{\lambda \in P^m(\alpha)} [(U - W)_{\lambda^m}, X_{\lambda^1}, \dots, X_{\lambda^{m-1}}] \\
 & + \sum_{l=2}^{|\alpha|} \sum_{\mu \in P^l(\alpha)} \sum_{m=2}^{|\mu_l|} \sum_{\lambda \in P^m(\mu_l)} [(U - W)_{\lambda^m}, \sigma(X)_{\lambda^1}, \dots, \sigma(X)_{\lambda^{m-1}}, X_{\mu^1}, \dots, X_{\mu^{l-1}}],
 \end{aligned}$$

ce qui prouve que

$$(X + U) \cdot \sigma(X + W) \cdot (X + U) = X + 2U - W,$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

2.1.4 Constructions algébriques de $\mathfrak{q}$ -modules

Nous décrivons ici des constructions algébriques permettant d'obtenir de nouvelles représentations de systèmes triples de Lie à partir de représentations données. D'après le théorème 2.1.2, cette construction permet de construire de nouvelles structures de fibrés symétriques polynomiaux.

Somme directe

Soient V et W deux modules, munis d'une structure de $\mathfrak{q}$ -module. Notons (R^V, M^V) , (R^W, M^W) les représentations linéaires associées. La représentation $(R^{V \oplus W}, M^{V \oplus W})$ définie par

$$\begin{aligned}
 R^{V \oplus W}(X, Y) &= R^V(X, Y) \oplus R^W(X, Y) \\
 M^{V \oplus W}(X, Y) &= M^V(X, Y) \oplus M^W(X, Y)
 \end{aligned}$$

est une représentation linéaire du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ dans le module $V \oplus W$ (cf proposition B.2.3). On obtient ainsi une structure de $\mathfrak{q}$ -module sur $V \oplus W$.

Dualité

Soit V un $\mathfrak{q}$ -module, (R, M) la représentation associée. En combinant les propositions B.5.1 et B.2.4, on montre que les applications (R^*, M^*) , définies par

$$\begin{aligned} R^*(X, Y) &= R(Y, X)^* \\ M^*(X, Y) &= M(Y, X)^* \end{aligned}$$

forment une représentation linéaire du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ dans le module dual V^* . On obtient ainsi une structure de $\mathfrak{q}$ -module sur V^* .

Produit tensoriel

Soient V et W deux modules, munis d'une structure de $\mathfrak{q}$ -module. Notons (R^V, M^V) , (R^W, M^W) les représentations linéaires associées. On ne peut pas construire directement de représentation de système triple de Lie de $\mathfrak{q}$ sur $V \otimes W$. En revanche, pour les représentations d'algèbres de Lie, nous pouvons effectuer un produit tensoriel : si r_A, r_B sont deux représentations linéaires d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans des modules A et B , on obtient une représentation linéaire de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans le module $A \otimes B$ en considérant l'application linéaire $r_{A \otimes B}$ définie par

$$r_{A \otimes B}(g)(a \otimes b) = r_A(g)(a) \otimes b + a \otimes r_B(g)(b).$$

Nous pouvons alors utiliser la correspondance existant entre les représentations linéaires du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ et les représentations linéaires de l'algèbre de Lie avec involution $L_u(\mathfrak{q})$ (cf 2.1.1) afin d'effectuer le produit tensoriel des représentations d'algèbres de Lie.

Désignons par $\mathfrak{q}_V = \mathfrak{q} \oplus V$, $\mathfrak{q}_W = \mathfrak{q} \oplus W$ les extensions inessentiels et intégrables de $\mathfrak{q}$ associées aux structures de $\mathfrak{q}$ -modules données sur V et W . Nous notons

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \oplus (\wedge^2 \mathfrak{q} / M)$$

l'algèbre de Lie universelle $L_u(\mathfrak{q})$ du système triple de Lie $\mathfrak{q}$,

$$\mathfrak{g}_N = \mathfrak{g} \oplus N = \mathfrak{g} \oplus V \oplus [\mathfrak{q}, V]$$

et

$$\mathfrak{g}_M = \mathfrak{g} \oplus M = \mathfrak{g} \oplus W \oplus [\mathfrak{q}, W]$$

les plongements standards des systèmes triples de Lie $\mathfrak{q}_V$ et $\mathfrak{q}_W$, où l'on a noté

$$[\mathfrak{q}, V] = \{D \in [\mathfrak{q}_V, \mathfrak{q}_V] \mid D(V) = \{0\}, D(\mathfrak{q}) \subset V\},$$

$$[\mathfrak{q}, W] = \{D \in [\mathfrak{q}_W, \mathfrak{q}_W] \mid D(W) = \{0\}, D(\mathfrak{q}) \subset W\}.$$

En utilisant le corollaire 2.1.1, on obtient alors deux représentations de l'algèbre de Lie avec involution $\mathfrak{g}$ sur les modules avec involution N et M , notées r_N et r_M . La représentation déduite $r_{N \otimes M}$ de l'algèbre de Lie avec involution $\mathfrak{g}$ sur le module avec involution $N \otimes M$ (muni du produit tensoriel des involutions de N et M) fournit alors une représentation, notée (R, M) , du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ dans le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 du module

$$N \otimes M = V \otimes W \oplus V \otimes [\mathfrak{q}, W] \oplus [\mathfrak{q}, V] \otimes W \oplus [\mathfrak{q}, V] \otimes [\mathfrak{q}, W],$$

c'est-à-dire dans

$$V \otimes [\mathfrak{q}, W] \oplus [\mathfrak{q}, V] \otimes W.$$

Proposition 2.1.4. *En désignant par (R^q, M^q) la représentation régulière du système triple de Lie $\mathfrak{q}$, les formules*

$$R(X, Y)(v \otimes B) = R^V(X, Y)(v) \otimes B + v \otimes [R^q(X, Y), B],$$

$$M(X, Y)(v \otimes B) = M^V(X, Y)(v) \otimes B + [X, v] \otimes B(Y) + [Y, v] \otimes B(X) + v \otimes [Y, B(X)],$$

$$R(X, Y)(A \otimes w) = [R^q(X, Y), A] \otimes w + A \otimes R^W(X, Y)(w),$$

$$M(X, Y)(A \otimes w) = [Y, A(X)] \otimes w + A(X) \otimes [Y, w] + A(Y) \otimes [X, w] + A \otimes M^W(X, Y)(w),$$

où

$$X, Y \in \mathfrak{q}, v \in V, w \in W, A \in [\mathfrak{q}, V], B \in [\mathfrak{q}, W],$$

définissent une représentation du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ dans le module

$$V \otimes [\mathfrak{q}, W] \oplus [\mathfrak{q}, V] \otimes W.$$

Démonstration. On obtient en effet, par la construction précédente,

$$\begin{aligned} R(X, Y)(v \otimes B) &= r_{N \otimes M}([X, Y])(v \otimes B) \\ &= r_N([X, Y])(v) \otimes B + v \otimes r_M([X, Y])(B) \\ &= R^V(X, Y)(v) \otimes B + v \otimes [R^q(X, Y), B], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(X, Y)(v \otimes B) &= -r_{N \otimes M}(Y)r_{N \otimes M}(X)(v \otimes B) \\ &= -r_{N \otimes M}(Y)(r_N(X)(v) \otimes B + v \otimes r_M(X)(B)) \\ &= -r_{N \otimes M}(Y)([X, v] \otimes B - v \otimes B(X)) \\ &= -r_N(Y)([X, v] \otimes B - [X, v] \otimes r_M(Y)(B) + r_N(Y)(v) \otimes B(X) \\ &\quad + v \otimes r_M(Y)(B(X))) \\ &= M^V(X, Y)(v) \otimes B + [X, v] \otimes B(Y) + [Y, v] \otimes B(X) \\ &\quad + v \otimes [Y, B(X)], \end{aligned}$$

et, de même,

$$\begin{aligned} R(X, Y)(A \otimes w) &= r_{N \otimes M}([X, Y])(A \otimes w) \\ &= r_N([X, Y])(A) \otimes w + v \otimes r_M([X, Y])(w) \\ &= [R^q(X, Y), A] \otimes w + A \otimes R^W(X, Y)(w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(X, Y)(A \otimes w) &= -r_{N \otimes M}(Y)r_{N \otimes M}(X)(A \otimes w) \\ &= -r_{N \otimes M}(Y)(r_N(X)(A) \otimes w + A \otimes r_M(X)(w)) \\ &= -r_{N \otimes M}(Y)(-A(X) \otimes w + A \otimes [X, w]) \\ &= r_N(Y)(A(X)) \otimes w + A(X) \otimes r_M(Y)(w) - r_N(Y)(A) \otimes [X, w] \\ &\quad - A \otimes r_M(Y)([X, w]) \\ &= [Y, A(X)] \otimes w + A(X) \otimes [Y, w] + A(Y) \otimes [X, w] \\ &\quad + A \otimes M^W(X, Y)(w), \end{aligned}$$

□

Homomorphismes

Soient V et W deux modules, munis d'une structure de $\mathfrak{q}$ -module. Notons (R^V, M^V) , (R^W, M^W) les représentations linéaires associées. Il n'existe pas de construction permettant d'obtenir une représentation du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ sur le module $\text{Hom}(V, W)$. En revanche, cette construction existe au niveau des représentations d'algèbre de Lie : si r_A, r_B sont deux représentations linéaires d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans des modules A et B , on obtient une représentation linéaire de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans le module $\text{Hom}(A, B)$ en considérant l'application linéaire $r_{\text{Hom}(A, B)}$ définie par

$$(r_{\text{Hom}(A, B)}(g)(u))(a) = r_B(g)(u(a)) - u(r_A(g)(a)).$$

Nous pouvons alors effectuer la même construction que dans la section précédente (produit tensoriel). On obtient la

Proposition 2.1.5. *En désignant par $(R^{\mathfrak{q}}, M^{\mathfrak{q}})$ la représentation régulière du système triple de Lie $\mathfrak{q}$, les formules*

$$\begin{aligned} (R(X, Y)(f + g))(v + A) &= [R^{\mathfrak{q}}(X, Y), f(v)] - f(R^V(X, Y)(v)) \\ &\quad - g([R^{\mathfrak{q}}(X, Y), A] + R^W(X, Y)(g(A))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (M(X, Y)(f + g))(v + A) &= [Y, (f(v))(X)] + [Y, g([X, v])] + [X, g([Y, v])] \\ &\quad + M^W(X, Y)(g(A)) + f(A(X))(Y) \\ &\quad + f(A(Y))(X) + f(M^V(Y, X)(v)) \\ &\quad + g([X, A(Y)]), \end{aligned}$$

où

$$X, Y \in \mathfrak{q}, f \in \text{Hom}(V, [\mathfrak{q}, W]), g \in \text{Hom}([\mathfrak{q}, V], W), v \in V, A \in [\mathfrak{q}, V],$$

définissent une représentation du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ dans le module

$$\text{Hom}(V, [\mathfrak{q}, W]) \oplus \text{Hom}([\mathfrak{q}, V], W).$$

Démonstration. Nous gardons les mêmes notations que dans la section précédente et obtenons, grâce aux plongements standards des systèmes triples $\mathfrak{q}_V$ et $\mathfrak{q}_W$ deux représentations r_N et r_M de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans les modules N et M . On en déduit une représentation notée $r_{\text{Hom}(N, M)}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans le module $\text{Hom}(N, M)$, qui induit une représentation du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ dans le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 du module

$$\begin{aligned} \text{Hom}(N, M) &= \text{Hom}(V \oplus [\mathfrak{q}, V], W \oplus [\mathfrak{q}, W]) \\ &= \text{Hom}(V, W) \oplus \text{Hom}(V, [\mathfrak{q}, W]) \\ &\quad \oplus \text{Hom}([\mathfrak{q}, V], W) \oplus \text{Hom}([\mathfrak{q}, V], [\mathfrak{q}, W]), \end{aligned}$$

c'est-à-dire une représentation, notée (R, M) , du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ dans le module

$$\text{Hom}(V, [\mathfrak{q}, W]) \oplus \text{Hom}([\mathfrak{q}, V], W).$$

Plus précisément, nous obtenons, pour

$$X, Y \in \mathfrak{q}, f \in \text{Hom}(V, [\mathfrak{q}, W]), g \in \text{Hom}([\mathfrak{q}, V], W), v \in V, A \in [\mathfrak{q}, V],$$

$$\begin{aligned}
 (R(X, Y)(f + g))(v + A) &= (r_{\text{Hom}(N, M)}([X, Y])(f + g))(v + A) \\
 &= r_M([X, Y])(f(v) + g(A)) \\
 &\quad - (f + g)(r_N([X, Y])(v + A)) \\
 &= [R^q(X, Y), f(v)] + R^W(X, Y)(g(A)) \\
 &\quad - (f + g)(R^V(X, Y)(v) + [R^q(X, Y), A]) \\
 &= [R^q(X, Y), f(v)] - f(R^V(X, Y)(v)) \\
 &\quad - g([R^q(X, Y), A]) + R^W(X, Y)(g(A)),
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (M(X, Y)(f + g))(v + A) &= (-r_{\text{Hom}(N, M)}(Y)r_{\text{Hom}(N, M)}(X)(f + g))(v + A) \\
 &= -r_M(Y)(r_{\text{Hom}(N, M)}(X)(f + g)(v + A)) \\
 &\quad + (r_{\text{Hom}(N, M)}(X)(f + g))(r_N(Y)(v + A)).
 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
 (r_{\text{Hom}(N, M)}(X)(f + g))(v + A) &= r_M(X)(f(v) + g(A)) \\
 &\quad - (f + g)(r_N(X)(v + A)) \\
 &= -(f(v))(X) + [X, g(A)] \\
 &\quad - g([X, v]) + f(A(X)),
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (r_{\text{Hom}(N, M)}(X)(f + g))(r_N(Y)(v + A)) &= (r_{\text{Hom}(N, M)}(X)(f + g))([Y, v] - A(Y)) \\
 &= r_M(X)(g([Y, v]) - f(A(Y))) \\
 &\quad - (f + g)(r_N(X)([Y, v] - A(Y))) \\
 &= [X, g([Y, v])] + f(A(Y))(X) \\
 &\quad + f(M^V(Y, X)(v)) + g([X, A(Y)]).
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
 (M(X, Y)(f + g))(v + A) &= [Y, f(v)(X)] + M^W(X, Y)(g(A)) \\
 &\quad + [Y, g([X, v])] + f(A(X))(Y) \\
 &\quad + [X, g([Y, v])] + f(A(Y))(X) \\
 &\quad + f(M^V(Y, X)(v)) + g([X, A(Y)]).
 \end{aligned}$$

□

2.2 Le point de vue géométrique

Nous considérons dans cette partie des espaces symétriques définis sur des corps ou anneaux généraux pour lesquels il existe une notion de calcul différentiel (voir annexe A). Dans ce contexte, le foncteur tangent peut s'interpréter comme un foncteur d'extension par les nombres duaux.

Si (M, μ) est un espace symétrique sur l'anneau $\mathbb{K}$, le fibré tangent TM est alors naturellement muni d'une structure d'espace symétrique sur l'anneau $T\mathbb{K} = \mathbb{K} \oplus \varepsilon\mathbb{K}$, structure induite par l'application produit $T\mu$.

Introduisons pour tout scalaire r l'application $(r)_{TM}$ dont la restriction à chaque espace vectoriel $T_x M$ est l'homothétie de rapport r et remarquons que ces applications sont des automorphismes de l'espace symétrique TM .

En particulier, l'involution $(-1)_{TM}$ fournit une décomposition du système triple de Lie $\tilde{\mathfrak{q}}$ de TM sous la forme $\mathfrak{q} \oplus V$, où $\mathfrak{q}$ est un sous-système triple de Lie de $\tilde{\mathfrak{q}}$ isomorphe au système triple de Lie de l'espace symétrique M .

Partant de cette remarque, nous définissons la notion de fibré symétrique. Un fibré symétrique est un fibré vectoriel (F, π, M) muni d'une structure d'espace symétrique (F, μ) telle que π soit un automorphisme d'espaces symétriques et telle que l'application $(-1)_F$, dont la restriction à chaque fibre F_x est l'homothétie de rapport (-1) , soit un automorphisme de l'espace symétrique (F, μ) .

Si (F, π, M, μ) est un fibré symétrique, on construit une seconde application produit $\tilde{\mu}$ vérifiant (S1), (S2) et (S3). On est alors en présence de trois involutions : σ_x , $v_x = \tilde{\mu}(x, \cdot)$ et $h_x = \sigma_x \circ v_x$. L'étude de ces différentes symétries fait l'objet de la seconde partie.

Enfin, nous étudions le lien existant entre les structures de fibré symétrique sur un fibré vectoriel et les connexions d'Ehresmann sur ce fibré.

Dans cette section, nous supposons que 2 est un élément inversible de l'anneau $\mathbb{K}$.

2.2.1 Définition d'un fibré symétrique

La définition d'un fibré symétrique est motivée par l'exemple du fibré tangent.

Proposition 2.2.1. *Soit (M, μ) un espace symétrique. L'application tangente $T\mu$ munit le fibré tangent TM d'une structure d'espace symétrique. Pour cette structure, l'application $(-1)_{TM}$, dont la restriction à chaque fibre $T_x M$ est l'homothétie de rapport -1 , est un automorphisme d'espace symétrique.*

Démonstration. Par la proposition A.3.1, l'application tangente $T\mu$ est une application produit sur TM .

En utilisant la fonctorialité de T , on montre facilement que $T\mu$ vérifie les trois premiers axiomes (S1), (S2) et (S3) d'un espace symétrique (voir la définition A.3.2).

Par la formule explicite

$$T_{(p,q)}\mu(v, w) = T_q\sigma_p(w) + T_p r_q(v)$$

de la proposition A.3.1, on montre que pour tout scalaire r , l'application

$$(r) : TM \longrightarrow TM,$$

dont la restriction à chaque fibre $T_p M$ est l'homothétie de rapport r est un automorphisme du produit $T\mu$:

$$\begin{aligned} T_{(p,q)}\mu((r)(v), (r)(w)) &= T_q\sigma_p((r)(w)) + T_p r_q((r)(v)) \\ &= (r)(T_q\sigma_p(w) + T_p r_q(v)) \\ &= (r)(T_{(p,q)}\mu(v, w)). \end{aligned}$$

Si $v, w \in T_p M$, on obtient, sachant que $T_p\mu(v, v) = v$ ((S1) pour $T\mu$) et que $T_p\sigma_p(v) = -v$, $T_p\sigma_p(w) = -w$ ((S4) pour μ) :

$$\begin{aligned} T_p r_p(v) &= T_{(p,p)}\mu(v, v) - T_p\sigma_p(v) \\ &= 2v, \end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} T_{(p,p)}\mu(v, w) &= T_p\sigma_p(w) + T_p r_p(v) \\ &= 2v - w, \end{aligned}$$

ce qui montre que chaque espace vectoriel $T_p M$ est muni de la structure canonique d'espace symétrique.

Désignons par θ_v l'application qui à $w \in TM$ associe $T\mu(v, w)$. On veut donc montrer que $T\theta_v(w) = -w$ si $w \in T_v TM$.

Soit $v \in T_p M$. On a par ce qui précède $0_p = \theta_{(\frac{1}{2})(v)}(v)$ avec $\theta_{(\frac{1}{2})(v)}$ automorphisme du produit $T\mu$. Il suffit donc de vérifier (S4) pour $v = 0_p$, ce qui revient à prouver que $T\theta_{0_p}(w) = -w$ si $w \in T_{0_p} TM$.

Or, si $w \in T_q M$,

$$\begin{aligned} \theta_{0_p}(w) &= T_{(p,q)}\mu(0_p, w) \\ &= T_q\sigma_p(w) + T_p r_q(0_p) \\ &= T_q\sigma_p(w), \end{aligned}$$

et ainsi $\theta_{0_p} = T\sigma_p$.

Ainsi $T_{0_p}\theta_{0_p} = T_{0_p}T\sigma_p$ est canoniquement isomorphe à $T_p\sigma_p \times T_p\sigma_p$, par la proposition A.2.2.

Or, puisque l'application μ vérifie (S4), $T_p\sigma_p(v) = -v$ pour tout $v \in T_p M$ et ainsi $T_{0_p}\theta_{0_p}(w) = -w$ pour tout $w \in T_{0_p} TM$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Définition 2.2.1. Soient M un espace symétrique et F un fibré vectoriel sur M , dont la projection est notée π . Soit μ une application produit sur F munissant F d'une structure d'espace symétrique. On dit que (F, π, M, μ) est un fibré symétrique sur M si et seulement si

- (FS1) π est un homomorphisme d'espaces symétriques,
- (FS2) pour tout $x \in M$, le sous espace symétrique $(F_x, \mu|_{F_x})$ est l'espace symétrique canonique associé à l'espace vectoriel F_x ,
- (FS3) l'application $(-1) : F \rightarrow F$ identiquement égale à $-Id$ sur chaque fibre F_x est un automorphisme d'espace symétrique.

Lemme 2.2.1. Si F est un fibré symétrique sur l'espace symétrique M , la section zéro est un isomorphisme d'espace symétrique de M sur son image.

Démonstration. Désignons par 0_x l'image d'un élément x de M par la section zéro z . L'application (-1) , identiquement égale à $-Id$ sur chaque fibre de F , est par hypothèse un morphisme d'espace symétrique. Ainsi, si $x, y \in M$, si $\tilde{\mu}$ désigne le produit de l'espace symétrique F , on a

$$(-1)\tilde{\mu}(0_x, 0_y) = \tilde{\mu}((-1)0_x, (-1)0_y) = \tilde{\mu}(0_x, 0_y),$$

ce qui montre qu'il existe $t \in M$ tel que $\tilde{\mu}(0_x, 0_y) = 0_t$. Nécessairement, en notant μ le produit de l'espace symétrique M , on a $t = \mu(x, y)$, puisque π est un morphisme d'espaces symétriques. Aussi l'application z est-elle un morphisme de l'espace symétrique M dans l'espace symétrique F . $\square$

Définition 2.2.2. On appelle *homomorphisme de fibré symétrique* tout homomorphisme de fibré vectoriel (f, g) tel que les applications f et g soient des homomorphismes d'espaces symétriques.

L'ensemble des fibrés symétriques forme donc une catégorie.

Exemple 2.2.1. Soit (M, μ) un espace symétrique. Le fibré tangent TM , muni de l'application produit $T\mu$, est un fibré symétrique sur M .

2.2.2 Propriétés géométriques de base

Soit (F, π, M, μ) un fibré symétrique.

Notons, pour tout $u \in F$, σ_u la "symétrie ponctuelle" définie par

$$\sigma_u(v) = \mu(u, v).$$

On introduit alors, pour tout $u \in F$, la "symétrie horizontale" ρ_u définie par

$$\rho_u = \sigma_{\frac{1}{2}u} \circ (-1)_F \circ \sigma_{\frac{1}{2}u}$$

et la "symétrie verticale" ν_u définie par

$$\nu_u = \sigma_u \circ \rho_u.$$

La proposition suivante justifie l'appellation de ces applications.

Proposition 2.2.2. Ces trois "symétries" sont des automorphismes involutifs de l'espace symétrique (F, μ) .

Démonstration. Tout est immédiat excepté le fait que ν_u soit une involution.

Il s'agit de montrer que les involutions σ_u et ρ_u commutent.

On le vérifie tout d'abord pour $u = 0_x$ puisque $\rho_{0_x} = (-1)_F$ est un automorphisme de μ , par (FS3).

En effet,

$$\begin{aligned} \rho_{0_x} \circ \sigma_{0_x} &= (-1)_F \circ \sigma_{0_x} \\ &= \sigma_{(-1)_F(0_x)} \circ (-1)_F \\ &= \sigma_{0_x} \circ \rho_{0_x}. \end{aligned}$$

Soit alors $u \in F_x$.

Puisque σ_v est un automorphisme de μ , on a, pour tout $w \in F$,

$$\sigma_v \circ \sigma_w = \sigma_{\sigma_v(w)} \circ \sigma_v.$$

En particulier,

$$\sigma_{\frac{1}{2}u} \circ \sigma_{0_x} = \sigma_{\sigma_{\frac{1}{2}u}(0_x)} \circ \sigma_{\frac{1}{2}u}.$$

Or, par (FS2),

$$\sigma_{\frac{1}{2}u}(0_x) = u.$$

D'où

$$\sigma_{\frac{1}{2}u} \circ \sigma_{0_x} = \sigma_u \circ \sigma_{\frac{1}{2}u}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \rho_u \circ \sigma_u &= \sigma_{\frac{1}{2}u} \circ \rho_{0_x} \circ \sigma_{\frac{1}{2}u} \circ \sigma_u \\ &= \sigma_{\frac{1}{2}u} \circ \rho_{0_x} \circ \sigma_{0_x} \circ \sigma_{\frac{1}{2}u} \\ &= \sigma_{\frac{1}{2}u} \circ \sigma_{0_x} \circ \rho_{0_x} \circ \sigma_{\frac{1}{2}u} \\ &= \sigma_u \circ \sigma_{\frac{1}{2}u} \circ \rho_{0_x} \circ \sigma_{\frac{1}{2}u} \\ &= \sigma_u \circ \rho_u. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.2.1. La preuve montre en particulier que si $u \in F_x$, $\nu_u = \sigma_{\frac{1}{2}u} \circ \nu_{0_x} \circ \sigma_{\frac{1}{2}u}$.

Propriétés 2.2.1. 1. L'ensemble des points fixes de ρ_u est $\sigma_{\frac{1}{2}u}(z(M))$ et l'application ρ_u laisse stable chacune des fibres de F .

2. Si $u \in F_x$, $\nu_u = \nu_{0_x}$, ce qui signifie que la symétrie verticale ne dépend que de la fibre.
3. Si $u \in F_x$, ν_u a pour ensemble de points fixes la fibre F_x et pour tout $y \in M$, $\nu_u(F_y) = \sigma_u(F_y)$.
4. Pour tout $u, w \in F$, $\nu_u \circ \nu_w \circ \nu_u = \nu_{\nu_u(w)}$

Démonstration. 1. L'ensemble des points fixes de l'application $(-1)_F$ est clairement $z(M)$. Puisque $\rho_u = \sigma_{\frac{1}{2}u} \circ (-1)_F \circ \sigma_{\frac{1}{2}u}$, on en déduit que l'ensemble des points fixes de ρ_u est $\sigma_{\frac{1}{2}u}(z(M))$.

Enfin, le fait que chaque fibre de F soit un espace stable pour ρ_u découle du fait que π est un homomorphisme d'espaces symétriques :

si $u, v \in F_x \times F_y$,

$$\begin{aligned} \pi \circ \rho_u(v) &= \pi(\sigma_{\frac{1}{2}u} \circ (-1)_F \circ \sigma_{\frac{1}{2}u}(v)) \\ &= \mu(\pi \circ (\frac{1}{2})_F(u), \pi \circ (-1)_F \circ \sigma_{\frac{1}{2}u}(v)) \\ &= \mu(\pi(u), \pi \circ \sigma_{\frac{1}{2}u}(v)) \\ &= \mu(x, \mu(\pi \circ (\frac{1}{2})_F(u), \pi(v))) \\ &= \mu(x, \mu(\pi(u), y)) \\ &= \mu(x, \mu(x, y)) \\ &= y \end{aligned}$$

par (S1).

2. Soit $u \in F_x$. Il résulte de (FS2) que $-\frac{1}{2}u = \sigma_{0_x}(\frac{1}{2}u)$. Alors, sachant que σ_{0_x} est un automorphisme de l'application produit μ , on obtient

$$\begin{aligned}\sigma_{-\frac{1}{2}u} \circ \sigma_{0_x} &= \sigma_{\sigma_{0_x}(\frac{1}{2}u)} \circ \sigma_{0_x} \\ &= \sigma_{0_x} \circ \sigma_{\frac{1}{2}u}\end{aligned}$$

et ainsi,

$$\begin{aligned}\nu_u &= \sigma_{\frac{1}{2}u} \circ \nu_{0_x} \circ \sigma_{\frac{1}{2}u} \\ &= \sigma_{\frac{1}{2}u} \circ (-1)_F \circ \sigma_{0_x} \circ \sigma_{\frac{1}{2}u} \\ &= \sigma_{\frac{1}{2}u} \circ (-1)_F \circ \sigma_{-\frac{1}{2}u} \circ \sigma_{0_x} \\ &= (-1)_F \circ \sigma_{-\frac{1}{2}u} \circ \sigma_{-\frac{1}{2}u} \circ \sigma_{0_x} \\ &= (-1)_F \circ \sigma_{0_x} \\ &= \nu_{0_x}.\end{aligned}$$

3. Si $u \in F_x$, on déduit de (FS2) que $\sigma_{0_x}(u) = -u$ et par conséquent, on obtient $\nu_{0_x}(u) = u$. Ainsi, ν_{0_x} et donc ν_u laisse fixe la fibre F_x .
Si $y \in M$, $\nu_u(F_y) = \sigma_u(\rho_u(F_y)) = \sigma_u(F_y)$ puisque ρ_u préserve les fibres.
4. Par le point 2., il suffit de montrer que pour tout $x, y \in M$,

$$\nu_{\nu_{0_x}(0_y)} = \nu_{0_x} \circ \nu_{0_y} \circ \nu_{0_x}.$$

Or

$$\begin{aligned}\nu_{\nu_{0_x}(0_y)} &= (-1)_F \circ \sigma_{\sigma_{0_x}(0_y)} \\ &= (-1)_F \circ \sigma_{0_x} \circ \sigma_{0_y} \circ \sigma_{0_x} \\ &= (-1)_F \circ \sigma_{0_x} \circ \sigma_{0_y} \circ (-1)_F \circ (-1)_F \circ \sigma_{0_x} \\ &= \nu_{0_x} \circ \nu_{0_y} \circ \nu_{0_x}.\end{aligned}$$

□

Remarque 2.2.2. *L'application produit*

$$\begin{aligned}\nu : F \times F &\longrightarrow F \\ (u, w) &\longmapsto \nu_u(w)\end{aligned}$$

vérifie (S1), (S2) et (S3). On dit, selon [Lo], que (F, ν) est un espace à symétries.

Il est facile de vérifier que l'application qui associe à un fibré symétrique (F, π, M, μ) sur M associe l'espace à symétries (F, ν) est un foncteur de la catégorie des fibrés symétriques dans la catégorie des espaces à symétries.

2.2.3 Fibrés symétriques et connexions d'Ehresmann

Connexions d'Ehresmann

Soient M une variété lisse modelée sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel F , S une variété lisse modelée sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel G , et (E, p, M, S) un fibré sur M de fibre S .

Soient $\{(U_i, \varphi_i)_{i \in I}\}$ un atlas de M , de sorte que l'on écrira

$$M = \{[i, x] | i, x \in I \times \varphi_i(U_i)\},$$

quotient de $\widetilde{M} = \{(i, x) | i \in I, x \in \varphi(U_i)\}$ par la relation d'équivalence

$$(i, x) \equiv (j, y) \text{ si et seulement si } \varphi_{ji}(x) = y.$$

Soit $\{g_{ij}(x) | [i, x] = [j, x]\}$ l'ensemble des fonctions de transition du fibré E , de sorte que l'on écrira

$$E = \{[i, x, v] | i \in I, x \in \varphi_i(U_i), v \in S\},$$

quotient de $\widetilde{E} = \{(i, x, v) | i \in I, x \in \varphi_i(U_i), v \in S\}$ par la relation d'équivalence

$$(i, x, v) \equiv (j, y, w) \text{ si et seulement si } \varphi_{ji}(x) = y \text{ et } g_{ji}(x)(v) = w.$$

On désigne par $\widetilde{g}_{ji}$ l'application $(x, v) \rightarrow (\varphi_{ij}(x), g_{ji}(x)(v))$.

On montre tout d'abord le

Lemme 2.2.2. *L'ensemble VE , défini comme étant le noyau de l'application tangente Tp , est un fibré vectoriel sur E . De plus,*

$$VE = \{[i, x, v, 0, v'] | [i, x, v] \in E, v' \in G\}.$$

Démonstration. Décrivons tout d'abord le fibré tangent TE . On a

$$TE = \{[i, x, v, x', v'] | (i, x, v, x', v') \in \widetilde{TE}\},$$

quotient de

$$\widetilde{TE} = \{(i, x, v, x', v') | i \in I, x \in \varphi(U_i), v \in S, x' \in F, v' \in G\}$$

par la relation d'équivalence

$$\begin{aligned} (i, x, v, x', v') &\equiv (j, y, w, y', w') \\ &\text{si et seulement si} \\ \widetilde{g}_{ji}(x, v) &= (y, w) \text{ et } d\widetilde{g}_{ji}(x, v)(x', v') = (y', w'). \end{aligned}$$

Remarquons que TE est un fibré vectoriel sur E de fibre $F \times G$.

Puisque

$$\begin{aligned} p : E &\longrightarrow M \\ [i, x, v] &\longmapsto [i, x], \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} Tp : TE &\longrightarrow TM \\ [i, x, v, x', v'] &\longmapsto [i, x, x'], \end{aligned}$$

de sorte que

$$\text{Ker}Tp = \{[i, x, v, 0, v'] | (i, x, v, 0, v') \in \widetilde{TE}\}.$$

Vérifions que cet ensemble est bien un fibré sur E de fibre $\{0\} \times G$.

En effet, si $(i, x, v, 0, v'), (j, y, w, y', w') \in \widetilde{E}$ sont tels que

$$(i, x, v, 0, v') \equiv (j, y, w, y', w'),$$

alors $Tp([i, x, v, 0, v']) = Tp([j, y, w, y', w'])$ ie $[i, x, 0] = [j, y, y']$. Ainsi $y' = d\varphi_{ji}(x)(0)$, ce qui prouve que $y' = 0$.

Le sous ensemble $\{(i, x, v, x', v') \in \widetilde{TE} | x' = 0\}$ de $\widetilde{TE}$ est donc stable par la relation d'équivalence, ce qui montre que $VE = \text{Ker}Tp$ est un sous fibré de TE .

□

Nous pouvons alors donner la définition d'une connexion au sens d'Ehresmann (cf [26]) :

Définition 2.2.3. Une connexion (au sens d'Ehresmann) sur le fibré E est une section φ du fibré (sur E) $\text{End}(TE)$, vérifiant pour tout $x \in E$,

- $\Psi_x \circ \Psi_x = \Psi_x$,
- $\text{Im} \Psi_x = V_x E$,

Remarquons tout de suite qu'une connexion d'Ehresmann Ψ sur le fibré E associe à tout $x \in E$ une projection Ψ_x de $T_x E$ sur $V_x E$.

Lemme 2.2.3. Si Ψ est une connexion d'Ehresmann sur le fibré E , l'ensemble $HE = \bigcup_{x \in E} \text{Ker}(\Psi_x)$ est un fibré vectoriel sur E , supplémentaire de VE dans TE .

Démonstration. Puisque Ψ est une section de $\text{End}(TE)$, il est facile de vérifier que HE est un fibré vectoriel sur E . Si $x \in E$, Ψ_x est une projection sur $V_x E$, donc son noyau, noté $H_x E$ est un supplémentaire de $V_x E$ dans $T_x E$. Ainsi, HE est un fibré supplémentaire de VE dans TE . $\square$

Proposition 2.2.3. Soit HE un fibré vectoriel sur E , supplémentaire de VE dans TE . L'ensemble $\mathcal{E}$ des connexions d'Ehresmann sur le fibré E est un espace affine modelé sur l'espace vectoriel $\Gamma(\text{End}(HE, VE))$, ensemble des sections de $\text{End}(HE, VE)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\longrightarrow \Gamma(\text{End}(HE, VE)) \\ \Psi &\longmapsto (x \mapsto \Psi_x|_{H_x E}) \end{aligned}$$

est correctement définie et admet pour inverse l'application

$$\begin{aligned} \Gamma(\text{End}(HE, VE)) &\longrightarrow \mathcal{E} \\ \phi &\longmapsto (x \mapsto \phi_x \oplus \text{Id}_{V_x E}). \end{aligned}$$

$\square$

Connexion d'Ehresmann associée à une structure de fibré symétrique

Soit (E, p, M, μ) un fibré symétrique sur l'espace symétrique M . On a défini dans la section 2.2, pour tout $u \in E$ la symétrie horizontale ρ_u associée au produit μ .

Proposition 2.2.4. L'application

$$\begin{aligned} \Psi \quad E &\longrightarrow \text{End}(TE) \\ u &\longmapsto \frac{1}{2}(\text{Id}_{T_u E} - T_u \rho_u) \end{aligned}$$

est une connexion d'Ehresmann sur le fibré E .

Démonstration. Si $u \in E$, Ψ_u est un endomorphisme de $T_u E$, ce qui prouve que ψ est une section du fibré $\text{End}(TE)$.

Soit $u \in E$. Il nous faut montrer que Ψ_u est une projection de $T_u E$ sur $V_u E$. Utilisant $\rho_u^2 = \text{Id}_E$, il vient $(T_u \rho_u)^2 = \text{Id}_{T_u E}$ et par suite $\Psi_u \circ \Psi_u = \Psi_u$.

Montrons que Ψ_u est à valeurs dans $V_u E$, ie que $T_u p \circ \Psi_u = 0$.

On sait que ρ_u préserve les fibres de E donc $p \circ \rho_u = p$. Il en découle $T_u p \circ T_u \rho_u = T_u p$ et de là

$$T_u p \circ \Psi_u = \frac{1}{2}(T_u p - T_u p \circ T_u \rho_u) = 0.$$

Ainsi $\text{Im}\Psi_u \subset V_u E$.

Montrons que $\text{Im}\Psi_u = V_u E$ en montrant que $\Psi_u|_{V_u E} = \text{Id}$.

Il existe $(i, y, v) \in \tilde{E}$ tel que $u = [i, y, v]$. On a vu que si $[i, y, v], [i, y, w] \in E$, $h_u[i, y, w] = [i, y, 2v - w]$, ce qui entraîne pour $[i, y, v, 0, v'] \in V_u E$,

$$T_u \rho_u([i, y, v, 0, v']) = [i, y, v, 0, -v']$$

et ainsi

$$\Psi_u([i, y, v, 0, v']) = [i, y, v, 0, v'],$$

ce qu'il fallait démontrer. □

2.2.4 Version infinitésimale d'un fibré symétrique

Le but de cette section est d'étudier le système triple de Lie associé à un fibré symétrique.

Soit (F, μ) un fibré symétrique de fibre V sur l'espace symétrique M .

Désignons par $\mathfrak{q}$ le système triple de Lie de l'espace symétrique (M, o) et par $\tilde{\mathfrak{q}}$ celui de l'espace symétrique $(F, \mu, 0_o)$. Par la proposition A.2.1, en introduisant H l'ensemble image de M par la section zéro du fibré F , on a

$$\tilde{\mathfrak{q}} = T_0 H \oplus V$$

où V est assimilé à l'espace tangent en 0_o à la fibre F_o .

La proposition suivante précise cette décomposition.

Proposition 2.2.5. *L'application $T_0 \pi : \tilde{\mathfrak{q}} \longrightarrow \mathfrak{q}$ fournit une suite exacte de systèmes triples de Lie*

$$\{0\} \longrightarrow V \longrightarrow \tilde{\mathfrak{q}} \longrightarrow \mathfrak{q} \longrightarrow \{0\}.$$

Si $z : M \longrightarrow F$ désigne la section zéro du fibré F , l'application $T_o z : \mathfrak{q} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{q}}$ est une section de $T_0 \pi$.

Démonstration. Puisque $\pi : F \longrightarrow M$ est un homomorphisme d'espaces symétriques avec point de base, l'application $T_0 \pi : \tilde{\mathfrak{q}} \longrightarrow \mathfrak{q}$ est un homomorphisme de systèmes triples de Lie. De l'égalité $\pi \circ z = \text{Id}|_M$, on déduit l'égalité $T_o(\pi \circ z) = T_o(\text{Id}|_M)$, ou encore $T_0 \pi \circ T_o z = \text{Id}_{T_o M}$, ce qui montre que $T_o z$ est une section linéaire de $T_0 \pi$. De plus, l'application z étant un morphisme d'espaces symétriques (cf lemme 2.2.1), l'application $T_o z$ est un morphisme de systèmes triples de Lie.

Il reste à montrer que V est le noyau de l'application $T_o \pi$.

Soit $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un atlas de M , variété modelée sur E . Notons W l'espace vectoriel fibre de E . Explicitement, si $o = [i_o, x_o]$, on a

$$\begin{array}{ccc} T_0 \pi : & T_0 F & \longmapsto T_o M \\ & [i_o, x_o, 0_W, e, w] & \longrightarrow [i_o, x_o, e], \end{array}$$

ce qui montre que $V = T_0 F_o = \{[i_o, x_o, 0_W, 0_E, w] | w \in W\}$ est le noyau de cette application.

Aussi la suite

$$\{0\} \longrightarrow V \longrightarrow \tilde{\mathfrak{q}} \longrightarrow \mathfrak{q} \longrightarrow \{0\}$$

est-elle une suite exacte de systèmes triples de Lie. □

En identifiant désormais T_0H et $\mathfrak{q}$, on a ainsi

$$\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} \oplus V.$$

On montre alors que l'espace vectoriel V est un module pour le système triple de Lie $\mathfrak{q}$:

Proposition 2.2.6. *L'espace vectoriel $V = T_0F_o$ est un $\mathfrak{q}$ -module (où $\mathfrak{q} = T_0H$) dont l'extension inessentielle et intégrable est le système triple de Lie $\tilde{\mathfrak{q}} = T_0F$.*

Démonstration. Il nous reste à montrer que l'extension inessentielle de $\mathfrak{q}$ par V est intégrable.

L'application $(-1)_F$ étant un automorphisme involutif de l'espace symétrique (F, μ) , l'application

$$\begin{array}{ccc} T_0(-1)_F : & T_0F & \longmapsto \\ & [i_o, x_o, 0_W, e, w] & \longrightarrow [i_o, x_o, 0_W, e, -w] \end{array}$$

est un automorphisme involutif du système triple de Lie T_0F . Les sous-espaces propres correspondant aux valeurs propres 1 et -1 de cet automorphisme sont respectivement $T_0H = \mathfrak{q}$ et $T_0F_o = V$.

Soit u, v, w trois vecteurs propres de $T_0(-1)_F$, dont deux exactement de valeur propre -1 . Alors

$$\begin{aligned} T_0(-1)_F([u, v, w]) &= [T_0(-1)_F(u), T_0(-1)_F(v), T_0(-1)_F(w)] \\ &= [u, v, w], \end{aligned}$$

ce qui montre que $[u, v, w] \in \mathfrak{q}$. Or, par le point 1., $[u, v, w] \in V$. Les espaces $\mathfrak{q}$ et V étant supplémentaires, on en déduit $[u, v, w] = 0$.

Enfin, puisque le sous-espace symétrique F_o est muni de la structure plate (c'est l'axiome (FS2)), $[u, v, w] = 0$ pour tout $u, v, w \in V$. □

2.3 Cas de la dimension finie sur le corps des réels

Nous travaillons à présent sur des variétés lisses et de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Les espaces symétriques considérés sont supposés connexes et simplement connexes. Rappelons que, dans ce cadre, il y a une équivalence de catégories entre les espaces symétriques avec point de base et les systèmes triples de Lie.

Une équivalence de catégories

Lemme 2.3.1. *Soit M un espace symétrique avec point de base o . Soit F un fibré vectoriel de fibre V sur l'espace symétrique M . Alors une structure d'espace symétrique sur F est une structure de fibré symétrique sur F si et seulement si le système triple de Lie de l'espace symétrique F avec point de base 0_o est une extension inessentielle et intégrable du système triple de Lie de M provenant d'une structure de $\mathfrak{q}$ -module sur V .*

Démonstration. La proposition 2.2.6 fournit l'implication directe. Supposons à présent que le système triple de Lie de l'espace symétrique F , noté $\tilde{\mathfrak{q}}$, soit une extension inessentielle et intégrable du système triple de Lie de l'espace symétrique M , noté $\mathfrak{q}$, par l'espace vectoriel V . La projection de $\tilde{\mathfrak{q}}$ sur $\mathfrak{q}$ est alors un morphisme de systèmes triples de Lie, ce qui prouve que la projection de F sur M est un morphisme d'espaces symétriques. De même, puisque l'application $\text{Id}_{\tilde{\mathfrak{q}}} - \text{Id}_V$ est un morphisme du système triple de Lie $\tilde{\mathfrak{q}}$, on en déduit que l'application

identiquement égale à $-\text{Id}$ sur chacune des fibres de F est un morphisme d'espace symétrique. Enfin, V est un sous-système triple de Lie trivial, donc chaque fibre de F est un sous-espace symétrique plat de F . $\square$

Pour un espace symétrique donné M , on introduit la catégorie des fibrés symétriques sur M : un morphisme du fibré symétrique F sur M dans le fibré symétrique F' sur M est la donnée d'une application f de F dans F' tel que (f, Id) soit un morphisme de fibrés symétriques (au sens de la définition 2.2.2).

Théorème 2.3.1. *Soit M un espace symétrique avec point de base (connexe, simplement connexe et de dimension finie sur $\mathbb{R}$). Notons $\mathfrak{q}$ son système triple de Lie. Il y a alors équivalence de catégories entre la catégorie des fibrés symétriques sur M et celle des représentations linéaires de dimension finie du système triple de Lie $\mathfrak{q}$.*

Démonstration. Nous savons qu'il y a équivalence de catégories entre la catégorie des extensions inessentiels et intégrables de $\mathfrak{q}$ provenant de structures de $\mathfrak{q}$ -modules et celle des représentations linéaires de $\mathfrak{q}$ (cf remarque 2.1.2).

En utilisant l'équivalence de catégories, existant en dimension finie sur le corps des réels, entre la catégorie des espaces symétriques et celle des systèmes triples de Lie, on montre qu'il y a équivalence de catégories entre la catégorie des fibrés symétriques sur M et celle des extensions inessentiels et intégrables de $\mathfrak{q}$ provenant de structures de $\mathfrak{q}$ -module : soient F, F' deux fibrés symétriques sur M , de fibres modelées respectivement sur V et sur V' . Si f est un morphisme du fibré symétrique F dans le fibré symétrique F' , alors son application tangente en 0_o est un morphisme du système triple de Lie $\tilde{\mathfrak{q}}$ de F dans le système triple de Lie $\tilde{\mathfrak{q}}'$ de F' . Ce morphisme est un morphisme d'extensions, puisque $\pi_{\mathfrak{q}} \circ T_{0_o} f = \pi_{\mathfrak{q}}$ (par définition, on a en effet $\pi_M \circ f = \pi_M$) et $T_{0_o} f(V) \subset V'$ (puisque $f(F_o) \subset F'_o$).

Réciproquement, si $\tilde{\mathfrak{q}}$ et $\tilde{\mathfrak{q}}'$ sont deux extensions intégrables et inessentiels de $\mathfrak{q}$ provenant de structures de $\mathfrak{q}$ -modules sur V , respectivement sur V' . Introduisons F et F' les espaces symétriques connexes simplement connexes de systèmes triples de Lie associés $\tilde{\mathfrak{q}}, \tilde{\mathfrak{q}}'$. Ce sont des fibrés symétriques sur M de fibres modelées sur V , respectivement sur V' . Si $f : \tilde{\mathfrak{q}} \rightarrow \tilde{\mathfrak{q}}'$ est un morphisme d'extensions, on vérifie sans difficultés que f induit un morphisme d'espace symétriques entre F et F' , qui est un morphisme de fibrés symétriques.

Ces deux foncteurs fournissent une équivalence de catégories. $\square$

Etude de l'espace à symétries sous-jacent

Etudions à présent les conditions sous lesquelles deux structures de fibré symétrique sur un même fibré vectoriel ont le même espace à symétries sous-jacent.

Théorème 2.3.2. *Soit M un espace symétrique, (F, π) un fibré vectoriel sur M . Soient $\mu, \tilde{\mu}$ deux applications produit sur F définissant deux fibrés symétriques (F, π, M, μ) et $(F, \pi, M, \tilde{\mu})$. Notons σ_u , respectivement $\tilde{\sigma}_u$, la symétrie ponctuelle associée à μ , respectivement $\tilde{\mu}$.*

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- les espaces à symétries sous-jacents aux deux fibrés symétriques sont identiques,
- les symétries par rapport aux points de la section zéro sont identiques : pour tout $x \in M$, $\sigma_{0_x} = \tilde{\sigma}_{0_x}$,
- pour tout $x \in M$, $\sigma_{0_x} \in \text{Aut}(\tilde{\mu})$,
- pour tout $x \in M$, $\tilde{\sigma}_{0_x} \in \text{Aut}(\mu)$.

Démonstration. Désignons par ν_u , respectivement $\tilde{\nu}_u$, la symétrie verticale associée à μ , respectivement $\tilde{\mu}$. Les espaces à symétries sous-jacents aux deux fibrés symétriques sont identiques si et seulement si pour tout $u \in F$

$$\nu_u = \tilde{\nu}_u.$$

Puisque les symétries verticales ne dépendent que de la fibre, ce dernier point est équivalent à

$$\nu_{0_x} = \tilde{\nu}_{0_x}$$

pour tout $x \in M$, ou encore à

$$\sigma_{0_x} = \tilde{\sigma}_{0_x}$$

pour tout $x \in M$, puisque $\nu_{0_x} = (-1)_F \circ \sigma_{0_x}$ et $\tilde{\nu}_{0_x} = (-1)_F \circ \tilde{\sigma}_{0_x}$.

Il est encore clair que si, pour $x \in M$, $\sigma_{0_x} = \tilde{\sigma}_{0_x}$, alors les symétries ponctuelles σ_{0_x} et $\tilde{\sigma}_{0_x}$ sont des automorphismes des applications produit μ et $\tilde{\mu}$.

Soit $x \in M$. Supposons que

$$\tilde{\sigma}_{0_x} \in \text{Aut}(\mu).$$

Il s'agit de montrer que les symétries ponctuelles σ_{0_x} et $\tilde{\sigma}_{0_x}$ coïncident. Or ce sont toutes les deux des morphismes de l'espace symétrique (F, μ) et elles ont le même 1-jet :

$$\sigma_{0_x}(0_x) = \tilde{\sigma}_{0_x}(0_x) = 0_x$$

et

$$T_{0_x}\sigma_{0_x} = T_{0_x}\tilde{\sigma}_{0_x} = -Id.$$

En utilisant un résultat de Loos (corollaire du théorème 4.8, [21]), on en déduit que ces deux applications sont égales. □

Dans le cadre de cette section (cadre réel et de dimension finie, connexe et simplement connexe), Loos a démontré dans [20] que tout espace à symétries est isomorphe, en tant qu'espace à symétries, à un fibré homogène sur un espace symétrique.

Plus précisément, si F est un espace à symétries, il existe un espace homogène G/H , avec involution notée σ , et une variété U sur laquelle H opère à gauche de manière lisse, tel que F soit isomorphe au fibré homogène

$$G \times_H U$$

muni du produit μ d'espace à symétries suivant :

$$\mu([g, x], [h, y]) = [g\sigma(g^{-1}h), y].$$

Rappelons que le fibré homogène $G \times_H U$ est le quotient de l'ensemble $G \times H$ par la relation d'équivalence $\sim$ définie par $(g, x) \sim (f, y)$ si et seulement si il existe $h \in H$ vérifiant $gh = f$ et $x = hy$. C'est un fibré sur l'espace symétrique G/H , de fibre U .

Dans la suite, la lettre F désigne un espace à symétries. Nous introduisons le fibré homogène $G \times_H U$ auquel F est isomorphe. Les symétries de F sont notées ν_x . Remarquons que la projection du fibré F sur l'espace symétrique homogène G/H est un morphisme d'espaces à symétries.

Dans le cas particulier où F est un espace symétrique, tout point x de F est un point fixe isolé de la symétrie ν_x . Alors nécessairement, la variété U est réduite à un point. Ainsi tout espace symétrique est isomorphe à un espace symétrique homogène G/H .

Décrivons la construction du fibré homogène $G \times_H U$ à partir de l'espace à symétries F décrite dans [20]. Si x est un point de F , l'espace tangent $T_x F$ se décompose en la somme directe des deux sous-espaces propres de l'involution $T_x \nu_x$. Plus généralement, on a une décomposition de l'espace tangent TF en la somme directe de deux sous-fibrés, notés TF^+ et TF^- . On montre alors que le sous fibré TF^+ est intégrable et on introduit pour chaque point p de F la sous-variété intégrale maximale en p de TF^+ , notée F_p . En particulier, si F est un espace symétrique, TF^+ est le fibré nul et F_p est réduit à un point, pour tout $p \in F$. Désignons par G le groupe engendré par les produits de deux symétries :

$$G = \langle \{\nu_x \circ \nu_y | x, y \in F\} \rangle .$$

On montre alors que G agit transitivement sur l'ensemble des fibres F_p et en particulier, en fixant un point base e de F et en notant H le sous-groupe des éléments de G laissant fixe la fibre F_e , on montre que l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times_H F_e & \longrightarrow & F \\ [g, x] & \longmapsto & g(x) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces à symétries, ce qu'il fallait montrer.

Théorème 2.3.3. *Le foncteur d'oubli qui associe à un fibré symétrique son espace à symétries sous-jacent correspond au niveau infinitésimal au foncteur associant à une représentation (r, m) du système triple de Lie q dans le module V la représentation r de l'algèbre de Lie $[q, q]$ dans V .*

Démonstration. Soit F un fibré symétrique de fibre V sur l'espace symétrique $M = G/H$, où

$$G = \langle \{s_p \circ s_q | p, q \in M\} \rangle .$$

Par la caractérisation précédente des espaces à symétries, en considérant l'espace à symétries sous-jacent noté (F, ν) , on obtient une action lisse de H sur V pour laquelle (F, ν) s'identifie avec le fibré homogène $G \times_H V$. Plus précisément, si l'on désigne par s_p les symétries de l'espace symétrique G/H , l'action de $H = \langle \{g \in G | g(o) = o\} \rangle$ sur $V = F_o$ est donnée par

$$(s_p \circ s_q).v = \nu_{0_p} \circ \nu_{0_q}(v).$$

Désignons par σ_u les symétries de l'espace symétrique F . On a alors, puisque les symétries verticales ne dépendent que de la fibre (cf Propriétés 2.2.1),

$$\begin{aligned} \nu_{u_p} &= \nu_{0_p} \\ &= (-1)_F \circ \sigma_{0_p} \\ &= \sigma_{0_p} \circ (-1)_F. \end{aligned}$$

En particulier, pour tout $(u_p, w_q) \in F_p \times F_q$,

$$\begin{aligned} \nu_{u_p} \circ \nu_{w_q} &= \sigma_{0_p} \circ (-1)_F \circ (-1)_F \circ \sigma_{0_q} \\ &= \sigma_{0_p} \circ \sigma_{0_q}. \end{aligned}$$

Aussi l'action de H sur V peut-elle également être décrite par les symétries de l'espace symétrique F par rapport aux points de la section zéro :

$$(s_p \circ s_q).v = \sigma_{0_p} \circ \sigma_{0_q}(v).$$

Introduisons la structure canonique $\tilde{G}/\tilde{H}$ d'espace homogène de l'espace symétrique F . Par ce qui précède, l'action de H sur V est donnée par restriction de l'action de

$$\tilde{H} = \langle \{\sigma_u \circ \sigma_w | u, w \in F, \sigma_u \circ \sigma_w(0_o) = 0_o\} \rangle$$

sur F .

Au niveau infinitésimal, si $[\cdot, \cdot, \cdot]$ désigne le crochet triple du système triple de Lie $\tilde{\mathfrak{q}}$ de F , l'action de l'algèbre de Lie de H (qui est l'espace propre associé à la valeur propre 1 du plongement standard de $\mathfrak{q}$, c'est-à-dire la sous-algèbre de Lie $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}]$) sur V est ainsi décrite sur les éléments générateurs par

$$\begin{aligned} [X, Y].v &= [X, Y, v] \\ &= r(X, Y)(v), \end{aligned}$$

où l'on a noté (r, m) la représentation du système triple de Lie de M dans V associée à la structure de fibré symétrique sur F . $\square$

Par exemple, si $M = G/H$ est un espace symétrique, alors $TM = TG/TH$ est un fibré symétrique sur M , pour lequel la structure d'espace à symétries sous-jacent est donnée par l'action d'isotropie : H agit sur T_oM par

$$h.v = T_o l_h(v)$$

où l_h désigne l'application

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto h(x). \end{aligned}$$

En effet, si μ désigne l'application produit de l'espace symétrique $M = G/H$, alors la structure d'espace symétrique de l'espace $TM = TG/TH$ est donnée par l'application produit $T\mu$. Désignons par s_p , respectivement par σ_u les symétries de l'espace symétrique M , respectivement TM . On a alors, pour tout couple de points (p, q) de M , pour tout point w_q dans la fibre T_qM ,

$$\sigma_{0_p}(w_q) = T\mu(0_p, w_q) = T_q s_p(w_q),$$

où l'on a utilisé la formule de la proposition A.3.1.

Alors, pour tout $(u_p, w_q) \in T_pM \times T_qM$,

$$\sigma_{0_p} \circ \sigma_{0_q} = T(s_p \circ s_q),$$

ce qu'il fallait montrer.

Constructions algébriques de fibrés symétriques

Nous exploitons ici les résultats obtenus dans la section 2.1.4 et le théorème établissant l'équivalence de catégories entre fibrés symétriques d'un espace symétrique et représentations de son système triple de Lie (en dimension finie sur le corps des réels).

Si F_1 et F_2 sont deux fibrés symétriques sur un espace symétrique M , on obtient une structure canonique de fibré symétrique sur la somme directe des deux fibrés $F_1 \oplus F_2$.

Si F est un fibré symétrique sur l'espace symétrique M , il existe une structure canonique de fibré symétrique sur le fibré dual F^* . Par exemple, il existe une structure canonique d'espace symétrique sur le fibré cotangent d'un espace symétrique. Si M est l'espace symétrique homogène G/H , cette structure d'espace symétrique sur T^*M est donnée par la structure d'espace

symétrique homogène T^*G/T^*H (où la structure de groupe de Lie du fibré cotangent d'un groupe de Lie est fournie par la représentation coadjointe).

Enfin, si $F_1 = G \times_H V$ et $F_2 = G \times_H W$ sont deux fibrés symétriques sur un espace symétrique $M = G/H$ de système triple de Lie $\mathfrak{q}$, on obtient une structure de fibré symétrique sur le fibré homogène

$$G \times_H (V \otimes [\mathfrak{q}, W] \oplus [\mathfrak{q}, V] \otimes W)$$

et une autre sur le fibré homogène

$$G \times_H (\text{Hom}(V, [\mathfrak{q}, W]) \oplus \text{Hom}([\mathfrak{q}, V], W)).$$

Chapitre 3

Le cas du fibré tangent

Etant donné un fibré vectoriel F sur un espace symétrique (M, μ) , combien de structures non isomorphes de fibré symétrique existe-t-il sur F ?

Dans le cas du fibré tangent, nous avons vu qu'il en existe au moins une : celle donnée par l'application tangente $T\mu$. Mais en existe-t-il d'autres ? Le but de ce chapitre est la construction d'une seconde structure de fibré symétrique sur le fibré tangent, possédant de plus le même espace à symétries sous-jacent.

Nous abordons le problème dans sa version infinitésimale : si $\mathfrak{q}$ désigne le système triple de Lie de l'espace symétrique (M, o) , on cherche à savoir combien de structures différentes de $\mathfrak{q}$ -module existent sur l'espace tangent en 0_o à TM . La seconde partie de ce chapitre construit une structure non canonique de $\mathfrak{q}$ -module sur $T_{0_o}TM$ dans le cas où $\mathfrak{q}$ admet une extension de Jordan.

Nous traitons par la suite différents exemples.

3.1 Extensions d'espaces symétriques

Nous reprenons la démarche de W.Bertram qui, dans le livre [3], introduit la notion de complexification (resp. polarisation) droite et gauche d'un espace symétrique. Il montre en particulier que l'ensemble des complexifications ou polarisations gauches d'un espace symétrique est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des extensions de Jordan du système triple de Lie associé.

Une complexification (resp. polarisation) d'espace symétrique peut être vue comme une extension quadratique de l'espace symétrique par le scalaire -1 (resp. 1). Nous présentons la notion d'extension quadratique d'un espace symétrique par un scalaire α , le cas $\alpha = 0$ se rapportant au fibré tangent de l'espace symétrique.

Notations : Dans ce qui suit, la lettre $\mathbb{K}$ désigne un anneau de scalaires, c'est-à-dire un anneau commutatif, associatif et unitaire. La lettre α désigne un élément de cet anneau. On suppose que l'élément 2 est inversible dans l'anneau $\mathbb{K}$.

Par définition, l'extension quadratique de $\mathbb{K}$ par α est l'anneau quotient $\mathbb{K}[X]/(X^2 - \alpha)$. Les éléments de cet anneau sont notés $a + \sqrt{\alpha}b$ (classe d'équivalence du polynôme $a + bX$ dans $\mathbb{K}[X]/(X^2 - \alpha)$). Par exemple, selon cette définition, $\mathbb{C}$ est l'extension quadratique de $\mathbb{R}$ par l'élément -1 .

Dans le cas particulier où α est l'élément nul, $\mathbb{K}_0$ est encore noté $\mathbb{K}[\varepsilon]$, et ses éléments sont notés $a + \varepsilon b$ (où ε est un nombre dual : $\varepsilon^2 = 0$).

On adopte également la notation particulière $i = \sqrt{-1}$. Aussi l'extension quadratique $\mathbb{K}_{-1}$ de $\mathbb{K}$ par -1 est-elle encore notée $\mathbb{K}[i]$.

3.1.1 Extension quadratique d'un $\mathbb{K}$ -module

Définition 3.1.1. Soient $V, \tilde{V}$ deux $\mathbb{K}$ -modules, J un endomorphisme de $\tilde{V}$. On dit que $(\tilde{V}, J)$ est une extension quadratique de V par α si et seulement si $J^2 = \alpha Id$, $\tilde{V} = V \oplus JV$ et la restriction de J à V est injective.

Si $(\tilde{V}, J)$ est une extension quadratique de V par α , alors l'application

$$\tau = Id|_V \oplus (-Id)|_{JV}$$

est la conjugaison associée à cette extension.

Remarque 3.1.1. L'hypothèse "la restriction de J à V est injective" dans la définition précédente est bien évidemment inutile si le scalaire α est inversible.

Lemme 3.1.1. Soit $(\tilde{V}, J)$ une extension quadratique de V par α . Alors les $\mathbb{K}$ -modules $\tilde{V}$ et $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_{\alpha}$ sont isomorphes, ce qui permet de considérer $\tilde{V}$ muni d'une structure de $\mathbb{K}_{\alpha}$ -module.

Démonstration. L'isomorphisme est donné par l'application linéaire

$$\begin{aligned} V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_{\alpha} &\longrightarrow V \oplus JV \\ X \otimes (a, b) &\longmapsto (a + bJ)X. \end{aligned}$$

□

Exemple 3.1.1. Si M est une variété lisse modelée sur un module V , alors pour tout $p \in M$, l'espace tangent en 0_p à TM est une extension quadratique du module V par 0 .

Exemple 3.1.2. Une extension quadratique du module V par le scalaire -1 est une complexification du module V .

3.1.2 Extension quadratique d'un espace symétrique

Définition 3.1.2. Soient M, M' deux espaces symétriques modélés sur un $\mathbb{K}$ -module E . Soit J un champ de tenseurs sur M' de type $(1, 1)$. On dit que (M', J) est une extension quadratique de M par α si et seulement si

- il existe τ automorphisme involutif de M' tel que M s'identifie au sous espace symétrique M'^τ ,
- pour tout $p \in M$, $(T_p M', J_p)$ est une extension quadratique du $\mathbb{K}$ -module $T_p M$ par α dont la conjugaison associée est $T_p \tau$.

Un premier exemple d'extension d'espace symétrique est donné par la

Proposition 3.1.1. Soit (M, μ) un espace symétrique modélé sur le $\mathbb{K}$ -module E . Soit $(TM, \tilde{\mu})$ une structure de fibré tangent symétrique sur M . Alors il existe un champ de tenseurs J de TM de type $(1, 1)$ tel que $((TM, \tilde{\mu}), J)$ soit une extension quadratique de (M, μ) par 0 .

Démonstration. Désignons par F le fibré tangent TM et identifions M et l'image de M par la section zéro du fibré.

Par hypothèse, l'application $\tau : F \longrightarrow F$ identiquement égale à $-Id$ sur chaque fibre de F est un automorphisme d'espace symétrique dont l'ensemble des points fixes F^τ est identifié à M par la section zéro.

Soit $p \in F : p = [i, x, v]$, avec $v \in E$. Introduisons l'endomorphisme

$$\begin{aligned}
 J_p : \quad T_p F &\longrightarrow T_p F \\
 [i, x, v, e, f] &\longmapsto [i, x, v, 0_E, e].
 \end{aligned}$$

Alors $J : p \longmapsto J_p$ est un champ de tenseurs de F de type $(1, 1)$ vérifiant pour tout $p \in F$, $J_p^2 = 0$. De plus, si $p \in M$, nous savons déjà que

$$T_p F = T_p M \oplus T_p F_p$$

et puisque J_p fournit un isomorphisme de $T_p(M)$ sur $T_p F_p$, on en déduit que $(T_p F, J_p)$ est une extension quadratique du $\mathbb{K}$ -module $T_p M$ par 0 . On vérifie aisément que la conjugaison associée est $T_p \tau$, ce qui achève la preuve. $\square$

3.1.3 Version infinitésimale

Définition 3.1.3. Soit $(\tilde{\mathfrak{q}}, \tilde{R})$, $(\mathfrak{q}, R)$ deux systèmes triples de Lie sur l'anneau $\mathbb{K}$, soit J une application linéaire du module $\tilde{\mathfrak{q}}$. On dit que $((\tilde{\mathfrak{q}}, \tilde{R}), J)$ est une extension quadratique du système triple de Lie $(\mathfrak{q}, R)$ par α si et seulement si $(\tilde{\mathfrak{q}}, J)$ est une extension quadratique du $\mathbb{K}$ -module $\mathfrak{q}$ par α pour laquelle la conjugaison associée τ , la projection canonique de $\tilde{\mathfrak{q}}$ dans $\mathfrak{q}$ et l'injection canonique de $\mathfrak{q}$ dans $\tilde{\mathfrak{q}}$ sont des morphismes de systèmes triples de Lie.

On dit de plus que l'extension est invariante, resp. droite, resp. gauche, si et seulement si l'application J vérifie pour tout $X, Y, Z \in \tilde{\mathfrak{q}}$,

$$\begin{aligned}
 [X, Y, JZ] &= J[X, Y, Z], \\
 \text{resp. } [JX, Y, Z] &= [X, JY, Z], \\
 \text{resp. } [JX, Y, Z] &= -[X, JY, Z].
 \end{aligned}$$

Remarque 3.1.2. Si $\tilde{\mathfrak{q}}$ est une extension quadratique du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ par α , alors $\mathfrak{q}$ est un sous-système triple de Lie de $\tilde{\mathfrak{q}}$.

Propriétés 3.1.1. Soit $((\tilde{\mathfrak{q}}, \tilde{R}), J)$ une extension quadratique invariante du système triple de Lie $(\mathfrak{q}, R)$ par α .

En supposant l'élément 2 inversible dans l'anneau $\mathbb{K}$, l'extension est droite si et seulement si le crochet triple est J -trilinéaire : pour tout $X, Y, Z \in \tilde{\mathfrak{q}}$,

$$J[X, Y, Z] = [JX, Y, Z] = [X, JY, Z] = [X, Y, JZ].$$

L'extension est gauche si et seulement si J est une dérivation de $\tilde{\mathfrak{q}}$: pour tout $X, Y, Z \in \tilde{\mathfrak{q}}$,

$$J[X, Y, Z] = [JX, Y, Z] + [X, JY, Z] + [X, Y, JZ].$$

Démonstration. Par définition, l'extension est droite si et seulement si pour tout $X, Y, Z \in \tilde{\mathfrak{q}}$,

$$[JX, Y, Z] = [X, JY, Z].$$

En utilisant cette propriété, l'invariance de J et l'identité de Jacobi, on obtient

$$\begin{aligned} 2J[X, Y, Z] &= J([Z, Y, X] + [X, Z, Y]) + J[X, Y, Z] \\ &= [Z, Y, JX] + [X, Z, JY] + J[X, Y, Z] \\ &= [JX, Y, Z] + [Z, JX, Y] + [JY, Z, X] + [X, JY, Z] + J[X, Y, Z] \\ &= 2[JX, Y, Z] + [Z, JX, Y] + [JY, Z, X] + J[X, Y, Z] \\ &= 2[JX, Y, Z] + [JZ, X, Y] + [Y, JZ, X] + [X, Y, JZ] \\ &= 2[JX, Y, Z], \end{aligned}$$

ce qui prouve que si 2 est inversible dans l'anneau $\mathbb{K}$, l'extension est droite si et seulement si le crochet triple est J -linéaire.

D'autre part, sachant que

$$J[X, Y, Z] = [X, Y, JZ],$$

on a clairement la deuxième propriété : l'extension est gauche si et seulement si J est une dérivation de $\tilde{\mathfrak{q}}$. $\square$

Lemme 3.1.2. Soient $\tilde{\mathfrak{q}}, \mathfrak{q}$ deux systèmes triples de Lie. Soit $(\tilde{\mathfrak{q}}, J)$ une extension quadratique du $\mathbb{K}$ -module $\mathfrak{q}$ par 0. Si $J\mathfrak{q}$ est un $\mathfrak{q}$ -module, alors le système triple de Lie $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} \oplus J\mathfrak{q}$ est une extension quadratique du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ par 0. Réciproquement, si le système triple de Lie $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} \oplus J\mathfrak{q}$ est une extension quadratique droite ou gauche du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ par 0, alors $\tilde{\mathfrak{q}}$ est une extension inessentielle et intégrable du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ par le module $J\mathfrak{q}$.

Démonstration. Supposons que $J\mathfrak{q}$ soit un $\mathfrak{q}$ -module. Alors, pour la structure triviale de système triple de Lie sur $J\mathfrak{q}$, la suite

$$\{0\} \longrightarrow V \longrightarrow \tilde{\mathfrak{q}} \longrightarrow \mathfrak{q} \longrightarrow \{0\}$$

est une suite exacte scindée de systèmes triples de Lie. Aussi l'injection canonique de $\mathfrak{q}$ dans $\tilde{\mathfrak{q}}$ et la projection canonique de $\tilde{\mathfrak{q}}$ dans $\mathfrak{q}$ sont-elles des morphismes de systèmes triples de Lie. Vérifions que la conjugaison τ est un morphisme du système triple de Lie $\tilde{\mathfrak{q}}$: soit $(a_i + Jb_i)$ un triplet d'éléments de $\tilde{\mathfrak{q}}$. L'extension étant intégrable, on a

$$[a_1 + Jb_1, a_2 + Jb_2, a_3 + Jb_3] = [a_1, a_2, a_3] + [a_1, a_2, Jb_3] + [a_1, Jb_2, a_3] + [Jb_1, a_2, a_3]$$

et puisque $J\mathfrak{q}$ est un idéal de $\tilde{\mathfrak{q}}$, chacun des trois crochets $[a_1, a_2, Jb_3]$, $[a_1, Jb_2, a_3]$, $[Jb_1, a_2, a_3]$ est élément de $J\mathfrak{q}$. On peut alors vérifier que τ est un morphisme de système triple de Lie. On a donc montré que $(\tilde{\mathfrak{q}}, J)$ est une extension quadratique de $\mathfrak{q}$ par 0.

Réciproquement, supposons que $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} \oplus J\mathfrak{q}$ soit une extension quadratique gauche ou droite de $\mathfrak{q}$ par 0.

Tout d'abord, remarquons que $[J\mathfrak{q}, J\mathfrak{q}, \tilde{\mathfrak{q}}] = 0$. En effet, en utilisant le fait que l'extension soit gauche ou droite et le fait que $J^2 = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} [J\mathfrak{q}, J\mathfrak{q}, \tilde{\mathfrak{q}}] &= \pm[\mathfrak{q}, J^2\mathfrak{q}, \tilde{\mathfrak{q}}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a alors une suite exacte de systèmes triples de Lie

$$\{0\} \longrightarrow J\mathfrak{q} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{q}} \longrightarrow \mathfrak{q} \longrightarrow \{0\},$$

$J\mathfrak{q}$ étant muni de la structure triviale de système triple de Lie. Cette suite est scindée puisque par hypothèse, l'injection canonique de $\mathfrak{q}$ dans $\tilde{\mathfrak{q}}$ est un morphisme de systèmes triples de Lie. Le système triple de Lie $\tilde{\mathfrak{q}}$ est donc extension inessentielle et intégrable de $\mathfrak{q}$ par $J\mathfrak{q}$. $\square$

Exemple 3.1.3. Soit $(\mathfrak{q}, R)$ un système triple de Lie sur le corps $\mathbb{K}$. On désigne par $(\tilde{\mathfrak{q}}, \tilde{R})$ le système triple de Lie sur $\mathbb{K}_\alpha$ défini par

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{q}} &= \mathfrak{q} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_\alpha, \\ \tilde{R} &= R \otimes_{\mathbb{K}} (Id_{\mathbb{K}_\alpha} \times Id_{\mathbb{K}_\alpha} \times Id_{\mathbb{K}_\alpha}). \end{aligned}$$

Alors $(\tilde{\mathfrak{q}}, \tilde{R})$ est un $\mathbb{K}$ -système triple de Lie, extension quadratique invariante et droite de $(\mathfrak{q}, R)$ par α . La structure d'extension invariante est donnée par

$$J : X + \sqrt{\alpha}Y \longrightarrow \alpha Y + \sqrt{\alpha}X,$$

la conjugaison associée étant donnée par

$$\tau : X + \sqrt{\alpha}Y \longrightarrow X - \sqrt{\alpha}Y.$$

L'exemple précédent est en fait l'unique exemple d'extension quadratique invariante et droite par α d'un système triple de Lie donné :

Proposition 3.1.2. Le système triple de Lie $(\tilde{\mathfrak{q}}, \tilde{R})$ est une extension quadratique invariante et droite de $(\mathfrak{q}, R)$ par α si et seulement si il est isomorphe au système triple de Lie $(\mathfrak{q} \otimes \mathbb{K}_\alpha, R \otimes Id_{\mathbb{K}_\alpha}^3)$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que l'isomorphisme de $\mathbb{K}$ -modules

$$\begin{aligned} V \otimes \mathbb{K}_\alpha &\longrightarrow V \oplus JV \\ X \otimes (a, b) &\longmapsto (a + bJ)X \end{aligned}$$

est un homomorphisme de systèmes triples de Lie. $\square$

Nous allons construire dans la section suivante une extension quadratique invariante gauche d'un système triple de Lie donné dans le cas particulier où celui-ci admet une extension de Jordan.

Etudions à présent le lien entre les extensions quadratiques d'espaces symétriques et les extensions quadratiques de systèmes triples de Lie.

Proposition 3.1.3. *Soient M', M deux espaces symétriques, J un champ de tenseurs de M' de type $(1, 1)$ tels que (M', J) soit une extension quadratique de M par α . Désignons par $(\tilde{q}, \tilde{R})$, (q, R) les systèmes triples de Lie associés (M et M' étant munis du même point de base, noté o). Alors $((\tilde{q}, \tilde{R}), J_o)$ est une extension quadratique de (q, R) par α .*

Démonstration. Par définition, on sait que $(T_o M', J_o)$ est une extension quadratique du $\mathbb{K}$ -module $T_o M$ par α . Ainsi le module $\tilde{q}$ est une extension quadratique du module q par α .

D'autre part, on sait qu'il existe un automorphisme involutif τ de l'espace symétrique M' tel que M s'identifie au sous-espace symétrique $(M')^\tau$. La projection de M' sur M et l'injection de M dans M' sont donc des morphismes d'espaces symétriques. Par fonctorialité, on en déduit alors que la projection canonique de $\tilde{q}$ sur q et l'injection canonique de q dans $\tilde{q}$ sont des morphismes de systèmes triples de Lie.

L'involution τ étant un morphisme d'espace symétrique, l'application tangente $T_o \tau$ est un morphisme du système triple de Lie $\tilde{q}$. Or l'application $T_o \tau$ est la conjugaison associée à l'extension quadratique $(\tilde{q}, J_o)$.

On a donc bien prouvé que $(\tilde{q}, J_o)$ est une extension quadratique du système triple de Lie q par α . $\square$

Nous donnons alors la

Définition 3.1.4. *Une extension quadratique d'espace symétrique est dite invariante, resp. droite, resp. gauche, si et seulement si l'extension quadratique du système triple de Lie associé est invariante, resp. droite, resp. gauche.*

Exemple 3.1.4. *Soit (M, μ, o) un espace symétrique modelé sur le $\mathbb{K}$ -module E , de système triple de Lie associé (q, R) . Alors $(TM, T\mu, 0_o)$, en tant que fibré tangent symétrique sur M , est une extension quadratique de M par 0 . Aussi son système triple de Lie $(\tilde{q}, \tilde{R})$ est-il une extension quadratique de (q, R) par 0 . On vérifie que cette extension est invariante et droite en utilisant le fait que $(TM, T\mu)$ est un espace symétrique modelé sur le $\mathbb{K}[\varepsilon]$ -module $E \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\varepsilon]$.*

Afin de munir le fibré tangent d'un espace symétrique M d'une seconde structure de fibré symétrique sur M , nous allons construire une extension gauche du système triple de Lie de M , dans le cas particulier où celui-ci admet une extension de Jordan.

3.1.4 Cas des systèmes triples de Lie admettant une extension de Jordan

Nous reprenons ici une construction donnée dans [3] dans le cas particulier où $\alpha = \pm 1$.

Soit q un système triple de Lie sur un $\mathbb{K}$ -module E admettant une extension de Jordan : il existe un produit triple de Jordan T sur E tel que pour tout $X, Y, Z \in q$,

$$T(X, Y, Z) - T(Y, X, Z) = -R(X, Y)Z.$$

Le but de cette section est d'expliciter la construction d'une extension quadratique invariante gauche de q par α .

Notons $\tilde{q} = q \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_\alpha$ et posons $T_\alpha = T \otimes_{\mathbb{K}} (Id_{\mathbb{K}_\alpha})^3$.

L'involution $c : x + \sqrt{\alpha}y \mapsto x - \sqrt{\alpha}y$ de $\mathbb{K}_\alpha$ induit une involution de $\tilde{q}$

$$\tau = Id_q \otimes_{\mathbb{K}} c.$$

On vérifie aisément que cette application est un automorphisme du produit triple T_α : en effet,

$$\begin{aligned} T_\alpha \circ (\tau \times \tau \times \tau) &= (T \otimes_{\mathbb{K}} Id_{\mathbb{K}_\alpha}) \circ (Id_{\mathfrak{q}^3} \otimes_{\mathbb{K}} c) \\ &= T \otimes_{\mathbb{K}} c \\ &= (Id_{\mathfrak{q}} \otimes_{\mathbb{K}} c) \circ (T \otimes_{\mathbb{K}} Id_{\mathbb{K}_\alpha}) \\ &= \tau \circ T_\alpha, \end{aligned}$$

puisque

$$(f \otimes g) \circ (f' \otimes g') = (f \circ f') \otimes (g \circ g').$$

En particulier, pour tout $X, Y, Z \in \tilde{\mathfrak{q}}$,

$$T_\alpha(\tau(X), Y, \tau(Z)) = \tau(T_\alpha(X, \tau(Y), Z)),$$

et on obtient alors un nouveau produit triple de Jordan sur $\tilde{\mathfrak{q}}$ en posant

$$\tilde{T}_\alpha(X, Y, Z) = T_\alpha(X, \tau(Y), Z).$$

Introduisons alors le produit triple de Lie $\tilde{R}_\alpha$ induit par le produit triple de Jordan $\tilde{T}_\alpha$ sur $\tilde{\mathfrak{q}}$: il est donné par la formule

$$\tilde{R}_\alpha(X, Y)Z = \tilde{T}_\alpha(Y, X, Z) - \tilde{T}_\alpha(X, Y, Z).$$

Proposition 3.1.4. *Introduisons l'application*

$$J : X \longrightarrow \sqrt{\alpha}X.$$

Alors $((\tilde{\mathfrak{q}}, \tilde{R}_\alpha), J, \tau)$ est une extension quadratique invariante gauche du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ par le scalaire α .

Démonstration. Clairement, $J^2 = \alpha Id$, $\tau \circ J = -J \circ \tau$ et $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} \oplus J\mathfrak{q}$.

D'autre part, en utilisant la $\mathbb{K}_\alpha$ -linéarité de T_α , on obtient

$$T_\alpha \circ (Id \times Id \times J) = J \circ T_\alpha$$

et ainsi

$$\tilde{T}_\alpha \circ (Id \times Id \times J) = J \circ \tilde{T}_\alpha,$$

ce qui entraîne

$$\tilde{R}_\alpha \circ (Id \times Id \times J) = J \circ \tilde{R}_\alpha.$$

Ainsi $(\tilde{\mathfrak{q}}, J, \tau)$ est une extension quadratique invariante de $\mathfrak{q}$ par α .

Montrons que cette extension est gauche. On a

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\alpha \circ (Id \times J \times Id) &= T_\alpha \circ (Id \times \tau \circ J \times Id) \\ &= T_\alpha \circ (Id \times -J \circ \tau \times Id) \\ &= -J \circ T_\alpha \circ (Id \times \tau \times Id) \\ &= T_\alpha \circ (-J \times \tau \times Id) \\ &= \tilde{T}_\alpha \circ (-J \times Id \times Id), \end{aligned}$$

et ainsi

$$\tilde{R}_\alpha \circ (Id \times J \times Id) = -\tilde{R}_\alpha \circ (J \times Id \times Id).$$

□

Nous avons donc construit, pour tout élément α de $\mathbb{K}$, une application φ_α de l'ensemble des extensions de Jordan de $\mathfrak{q}$ à valeurs dans l'ensemble des extensions quadratiques invariantes gauches de $\mathfrak{q}$ par α .

Dans le cas où α est inversible, cette application est bijective (voir [3]).

Cette extension fournit une structure de $\mathfrak{q}$ -module sur $\varepsilon\mathfrak{q}$:

Proposition 3.1.5. *Soit $\mathfrak{q}$ un système triple de Lie admettant une extension de Jordan. Alors la construction précédente munit $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} \oplus \varepsilon\mathfrak{q}$ d'une structure de système triple de Lie pour laquelle $\tilde{\mathfrak{q}}$ est une extension inessentielle et intégrable du système triple de Lie $\mathfrak{q}$ par le module $\varepsilon\mathfrak{q}$.*

Démonstration. On désigne par $\tilde{R}_\varepsilon$ la structure de système triple de Lie construite sur $\tilde{\mathfrak{q}}$. Le lemme 3.1.2 assure déjà que $\tilde{\mathfrak{q}}$ est une extension inessentielle de $\mathfrak{q}$ par $J\mathfrak{q} = \varepsilon\mathfrak{q}$. Montrons que cette extension est intégrable. Soient X, Y, Z trois éléments de $\mathfrak{q}$. Puisque $\tilde{R}_\varepsilon$ est gauche et puisque $J^2 = 0$, on a

$$\tilde{R}_\varepsilon(JX, JY, Z) = \tilde{R}_\varepsilon(X, J^2Y, Z) = 0.$$

D'autre part, en utilisant la $\mathbb{K}_\varepsilon$ -linéarité de T_ε , on a

$$\begin{aligned} \tilde{T}_\varepsilon(X, JY, JZ) &= T_\varepsilon(X, \tau(JY), JZ) \\ &= -J^2(T_\varepsilon(X, Y, Z)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même, $\tilde{T}_\varepsilon(JX, Y, JZ) = 0$. On prouve ainsi que $\tilde{R}_\varepsilon(X, JY, JZ) = 0$ et que $\tilde{R}_\varepsilon(JX, Y, JZ) = 0$ pour tout triplet (X, Y, Z) d'éléments de $\mathfrak{q}$, ce qui montre que $\tilde{\mathfrak{q}}$ est une extension intégrable de $\mathfrak{q}$ par $J\mathfrak{q}$. $\square$

Dans le cas particulier où le système triple de Lie $\mathfrak{q}$ admet une extension de Jordan, nous avons donc construit une seconde structure de $\mathfrak{q}$ -module sur $\varepsilon\mathfrak{q}$. Nous allons par la suite illustrer cette construction par quelques exemples.

3.2 Exemples

Dans cette section, nous présentons des exemples concrets d'espaces symétriques dont le fibré tangent peut être muni d'une seconde structure de fibré symétrique. Ces espaces symétriques possèdent une extension de Jordan et l'on vérifie que la seconde structure de fibré symétrique construite sur le fibré tangent correspond à l'extension gauche par 0 de leur système triple de Lie (construction décrite dans la section précédente).

Dans une première partie, nous revenons sur l'extension de Cayley-Dickson d'une algèbre (voir par exemple [25]) et quelques-unes de ses propriétés. Cette notion nous permet par la suite de présenter de manière unifiée sur nos exemples des extensions quadratiques gauches d'espaces symétriques par un scalaire α . En spécifiant les valeurs de α , nous obtenons pour chacun de nos exemples un espace tangent gauche (cas où $\alpha = 0$), un espace polarisé gauche (cas où $\alpha = 1$) et un espace complexe gauche (cas où $\alpha = -1$). On retrouve en particulier certains exemples traités dans [3].

Nous retenons les notations de la section précédente.

3.2.1 Généralités sur le processus de Cayley-Dickson

Nous appelons $\mathbb{K}$ -algèbre tout $\mathbb{K}$ -module muni d'une application produit bilinéaire.

Nous reprenons ici la définition et la notation donnée par K.McCrimmon dans [25] de l'extension de Cayley-Dickson d'une algèbre avec involution. Remarquons cependant que celui-ci ne s'intéresse qu'aux extensions par un scalaire inversible, ce afin d'obtenir une algèbre de composition. Nous définissons ici les extensions de Cayley-Dickson par un scalaire α quelconque, l'extension par le scalaire $\alpha = 0$ apparaissant de manière naturelle dans l'étude du fibré tangent.

Définition 3.2.1. Soit A une $\mathbb{K}$ -algèbre, munie d'une involution c . Soit α un scalaire. On appelle extension de Cayley-Dickson de A par α , et on note $\mathcal{KD}(A, \alpha)$ la $\mathbb{K}$ -algèbre $A \times A$ avec involution $\tilde{c}$, où $A \times A$ est munie du produit

$$(a, b)(a', b') = (aa' + \alpha c(b')b, b'a + bc(a'))$$

et où l'involution $\tilde{c}$ est définie par

$$\tilde{c}(a, b) = (c(a), -b).$$

Remarque 3.2.1. Si A désigne une algèbre commutative munie de l'involution triviale, $\mathcal{KD}(A, \alpha)$ est isomorphe à l'extension quadratique $A[X]/(X^2 - \alpha)$. Ainsi, $\mathcal{KD}(A, \alpha)$ est une algèbre commutative et $\mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha)$ est isomorphe à l'anneau $\mathbb{K}_\alpha$.

Proposition 3.2.1. Soit (A, c) une algèbre commutative avec involution et α un scalaire. L'extension de Cayley-Dickson $\mathcal{KD}(A, \alpha)$ est isomorphe à la sous-algèbre de $M_2(A)$ donnée par

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & \alpha b \\ c(b) & c(a) \end{pmatrix} \mid a, b \in A \right\}.$$

Sous cet isomorphisme, l'involution $\tilde{c}$ de $\mathcal{KD}(A, \alpha)$ est alors donnée par

$$\tilde{c} \left(\begin{pmatrix} a & \alpha b \\ c(b) & c(a) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} c(a) & -\alpha b \\ -c(b) & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration. En utilisant la commutativité de l'algèbre A , on vérifie aisément que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{KD}(A, \alpha) &\longrightarrow M_2(A) \\ (a, b) &\longmapsto \begin{pmatrix} a & \alpha b \\ c(b) & c(a) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un morphisme injectif d'algèbres. $\square$

Corollaire 3.2.1. *Soit A une algèbre commutative, que l'on munit de l'involution triviale. Alors $\mathcal{KD}(A, 1)$ est isomorphe au produit direct $A \times A$, avec involution c donnée par*

$$c(a, b) = (b, a).$$

Démonstration. Nous introduisons la matrice

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

qui induit la transformation de Cayley

$$\begin{aligned} M_2(A) &\longrightarrow M_2(A) \\ M &\longmapsto RMR^{-1}. \end{aligned}$$

Remarquons que $R^{-1} = \frac{1}{2}R^t$. En utilisant cette transformation et l'isomorphisme de la proposition précédente, on obtient que $\mathcal{KD}(A, 1)$ est isomorphe à la sous-algèbre de $M_2(A)$ donnée par

$$\left\{ \begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in A \right\},$$

avec involution c donnée par

$$c\left(\begin{pmatrix} a-b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix},$$

ce qui prouve que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{KD}(A, 1) &\longrightarrow A \times A \\ (a, b) &\longmapsto (a-b, a+b) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres avec involution, si $A \times A$ est munie de l'involution c donnée par

$$c(a, b) = (b, a).$$

$\square$

Proposition 3.2.2. *Soit A une algèbre commutative munie de l'involution triviale. On désigne par $\mathcal{KD}(A, \alpha_1, \alpha_2)$ l'extension de Cayley-Dickson par le scalaire α_2 de l'algèbre avec involution $\mathcal{KD}(A, \alpha_1)$.*

Il existe un isomorphisme canonique (d'algèbres avec involution) entre l'extension $\mathcal{KD}(A, \alpha_1, \alpha_2)$ et l'extension $\mathcal{KD}(A, \alpha_2, \alpha_1)$.

Démonstration. Par la proposition 3.2.1, si (B, c) est une algèbre commutative avec involution, alors pour tout scalaire α , l'extension de Cayley-Dickson $\mathcal{KD}(B, \alpha)$ est isomorphe à la sous-algèbre de $M_2(B)$ donnée par

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & \alpha b \\ c(b) & c(a) \end{pmatrix} \mid a, b \in B \right\}.$$

L'algèbre avec involution $\mathcal{KD}(A, \alpha_1)$ étant commutative (cf remarque 3.2.1), on sait que $\mathcal{KD}(A, \alpha_1, \alpha_2)$ est isomorphe à la sous-algèbre de $M_2(\mathcal{KD}(A, \alpha_1))$ donnée par

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & \alpha_2 b \\ c_1(b) & c_1(a) \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathcal{KD}(A, \alpha_1) \right\},$$

l'application c_1 désignant l'involution de $\mathcal{KD}(A, \alpha_1)$ définie par

$$c_1((a, b)) = (a, -b).$$

En particulier, une base canonique de $\mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha_1, \alpha_2)$ est donnée par les quatre vecteurs (e_1, e_2, e_3, e_4) , où

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{pmatrix} (1, 0) & (0, 0) \\ (0, 0) & (1, 0) \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} (0, 1) & (0, 0) \\ (0, 0) & (0, -1) \end{pmatrix}, \\ e_3 &= \begin{pmatrix} (0, 0) & (\alpha_2, 0) \\ (1, 0) & (0, 0) \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} (0, 0) & (0, \alpha_2) \\ (0, -1) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En échangeant les rôles de α_1 et α_2 , on obtient une base canonique de $\mathcal{KD}(A, \alpha_2, \alpha_1)$, notée (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) , et donnée par

$$\begin{aligned} e'_1 &= \begin{pmatrix} (1, 0) & (0, 0) \\ (0, 0) & (1, 0) \end{pmatrix}, \quad e'_2 = \begin{pmatrix} (0, 1) & (0, 0) \\ (0, 0) & (0, -1) \end{pmatrix}, \\ e'_3 &= \begin{pmatrix} (0, 0) & (\alpha_1, 0) \\ (1, 0) & (0, 0) \end{pmatrix}, \quad e'_4 = \begin{pmatrix} (0, 0) & (0, \alpha_1) \\ (0, -1) & (0, 0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On vérifie alors par les tables de produit que l'application linéaire

$$\varphi : \mathcal{KD}(A, \alpha_1, \alpha_2) \longrightarrow \mathcal{KD}(A, \alpha_2, \alpha_1)$$

définie par

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= e'_1 \\ \varphi(e_2) &= e'_3 \\ \varphi(e_3) &= e'_2 \\ \varphi(e_4) &= -e'_4 \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres.

On vérifie aisément que cet isomorphisme respecte les involutions. □

3.2.2 Exemple du groupe linéaire

Nous décrivons ici la structure de fibré tangent gauche (respectivement d'espace complexifié gauche, respectivement d'espace paracomplexifié gauche) dont la construction a été donnée dans la section précédente, existant sur le groupe linéaire $GL(n, \mathbb{K})$, ensemble des matrices inversibles à coefficients dans $\mathbb{K}$, de taille n .

Introduisons le sous-espace symétrique de $GL(2n, \mathbb{K})$ défini par

$$\mathcal{M} = \{X \in GL(2n, \mathbb{K}) \mid X^2 = \text{Id}, sg(X) = (n, n)\}.$$

L'espace symétrique $GL(n, \mathbb{K})$ s'identifie au sous-espace symétrique de $\mathcal{M}$, ensemble des points fixes de l'involution

$$\tau : X \longrightarrow -I_{nn} X I_{nn},$$

où I_{nn} désigne la matrice

$$\begin{pmatrix} \text{Id}_n & 0 \\ 0 & -\text{Id}_n \end{pmatrix}.$$

En effet,

$$\mathcal{M}^\tau = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix} \mid A \in GL(n, \mathbb{K}) \right\}$$

et on vérifie alors que l'application

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}^\tau \\ A &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un morphisme d'espaces symétriques.

De même, le groupe linéaire $GL(n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha))$ s'identifie à l'ensemble des points fixes sous l'involution τ de l'espace symétrique

$$\mathcal{M}_\alpha = \{X \in GL(2n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha)) \mid X^2 = \text{Id}, sg(X) = (n, n)\}.$$

Clairement, $GL(n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha))$ est une extension quadratique invariante et droite de $GL(n, \mathbb{K})$ par α .

Nous allons montrer que l'on obtient une extension gauche de $GL(n, \mathbb{K})$ par α en considérant l'ensemble des points fixes de $\mathcal{M}_\alpha$ sous l'involution $\tilde{\tau} = \tau \circ c$, c désignant la conjugaison naturelle de $GL(2n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha))$.

Lemme 3.2.1. *L'espace symétrique $\mathcal{M}_\alpha^{\tilde{\tau}}$ est isomorphe à l'espace symétrique homogène*

$$GL(n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha, 1)) / GL(n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha)).$$

Démonstration. Le groupe $G = GL(2n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha))$ agit de manière transitive sur l'espace $\mathcal{M}_\alpha$. Le sous-groupe agissant sur $\mathcal{M}_\alpha^{\tilde{\tau}}$ est

$$G' = \{X \in G \mid I_{nn} X = c(X) I_{nn}\}.$$

Après calculs, on trouve

$$G' = \left\{ \begin{pmatrix} A & \sqrt{\alpha} B \\ \sqrt{\alpha} C & D \end{pmatrix} \mid A, B, C, D \in GL(n, \mathbb{K}) \right\},$$

et par la transformation de Cayley,

$$\begin{aligned} RG'R^{-1} &= \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ c(B) & c(A) \end{pmatrix} \mid A, B \in GL(n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha)) \right\} \\ &= GL(n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha, 1)). \end{aligned}$$

Le stabilisateur du point de base $J = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id}_n \\ \text{Id}_n & 0 \end{pmatrix}$ est

$$H = \{X \in G' \mid XJ = JX\} = \left\{ \begin{pmatrix} A & \sqrt{\alpha}B \\ \sqrt{\alpha}B & A \end{pmatrix} \mid A, B \in GL(n, \mathbb{K}) \right\},$$

sous-groupe isomorphe à $GL(n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha))$ par la transformation de Cayley : en effet,

$$R \begin{pmatrix} A & \sqrt{\alpha}B \\ \sqrt{\alpha}B & A \end{pmatrix} R^{-1} = \begin{pmatrix} A - \sqrt{\alpha}B & 0 \\ 0 & A + \sqrt{\alpha}B \end{pmatrix}.$$

□

Proposition 3.2.3. *L'espace symétrique homogène*

$$GL(n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha, 1)) / GL(n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha))$$

est une extension quadratique invariante et gauche de $GL(n, \mathbb{K})$ par α .

Démonstration. Introduisons le système triple de Lie $M(n, \mathbb{K})$ associé à l'espace symétrique $GL(n, \mathbb{K})$. Nous le notons $\mathfrak{q}$. Le crochet triple de ce système triple est donné par

$$[A, B, C] = \frac{1}{4}[[A, B], C],$$

où $[\cdot, \cdot]$ désigne le crochet de Lie associé à l'algèbre associative $M(n, \mathbb{K})$.

Calculons le système triple de Lie $\tilde{\mathfrak{q}}$ associé à l'espace symétrique

$$GL(n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha, 1)) / GL(n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha)).$$

C'est un sous système triple de Lie du système triple $M(2n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha))$ (muni du crochet triple usuel) et nous obtenons

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{q}} &= \{X \in M(2n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha)) \mid c(X)I_{nn} = I_{nn}X, JXJ = -X\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A & \sqrt{\alpha}B \\ -\sqrt{\alpha}B & -A \end{pmatrix} \mid A, B \in M(n, \mathbb{K}) \right\}. \end{aligned}$$

Considérons alors l'application $j : X \longrightarrow \sqrt{\alpha}JX$.

En utilisant l'égalité $J I_{nn} = -I_{nn}J$, on vérifie que j est un endomorphisme du module $\tilde{\mathfrak{q}}$: en effet, si $X \in \tilde{\mathfrak{q}}$, on a par définition $c(X)I_{nn} = I_{nn}X$ et $JXJ = -X$. Alors

$$\begin{aligned} c(j(X))I_{nn} &= c(\sqrt{\alpha}JX)I_{nn} \\ &= -\sqrt{\alpha}Jc(X)I_{nn} \\ &= -\sqrt{\alpha}JI_{nn}X \\ &= \sqrt{\alpha}I_{nn}JX \\ &= I_{nn}j(X), \end{aligned}$$

et de plus,

$$\begin{aligned} Jj(X)J &= J\sqrt{\alpha}JXJ \\ &= J(-\sqrt{\alpha}X) \\ &= -j(X), \end{aligned}$$

ce qui prouve que $j(X) \in \tilde{\mathfrak{q}}$.

De plus, $j^2 = \alpha Id$, $j \circ c = -c \circ j$ et enfin, pour $A, B, C \in \tilde{\mathfrak{q}}$, J anticommute avec A, B , on obtient

$$\begin{aligned} [A, B, j(C)] &= \frac{1}{4}[[A, B], \sqrt{\alpha}JC] \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\alpha}[[A, B], JC] \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{\alpha}J[[A, B], C] \\ &= j([A, B, C]). \end{aligned}$$

et par un calcul analogue,

$$[A, j(B), C] = -[j(A), B, C].$$

Nous identifions $\mathfrak{q} = M(n, \mathbb{K})$ avec

$$\mathfrak{q} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \mid A \in M(n, \mathbb{K}) \right\}.$$

Alors $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} \oplus j(\mathfrak{q})$ et on vérifie que la conjugaison associée à cette extension est la restriction à $\tilde{\mathfrak{q}}$ de la conjugaison usuelle de $M(2n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha))$. Aussi a-t-on prouvé que $(\tilde{\mathfrak{q}}, j)$ est une extension quadratique invariante et gauche de $\mathfrak{q}$ par α , donc que

$$GL(n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha, 1)) / GL(n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha))$$

est une extension invariante et gauche de $GL(n, \mathbb{K})$ par α . □

Lemme 3.2.2. 1. Les algèbres $\mathcal{KD}(\mathbb{K}, -1, 1)$ et $M(2, \mathbb{K})$ sont isomorphes.

2. Si $\mathbb{D}$ désigne l'algèbre

$$\mathbb{D} = \left\{ \begin{pmatrix} a & \varepsilon b \\ \varepsilon c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{K} \right\} \subset M(2, \mathbb{K}[\varepsilon]),$$

les algèbres $\mathcal{KD}(\mathbb{K}, 0, 1)$ et $\mathbb{D}$ sont isomorphes.

Démonstration. Par la proposition 3.2.1, l'algèbre $\mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha, 1)$ est isomorphe à la sous-algèbre de $M(2, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha))$ donnée par

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c(b) & c(a) \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha) \right\},$$

où c désigne la conjugaison usuelle de $\mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha)$.

Introduisons la transformation de Cayley complexe donnée par conjugaison avec la matrice

$$R' = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{K}[i]),$$

où i désigne l'élément $\sqrt{-1}$ de l'anneau $\mathcal{KD}(\mathbb{K}, -1)$.

On vérifie alors aisément (en utilisant $R'^{-1} = \frac{1}{2}R'$) que

$$R' \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} R'^{-1} = \begin{pmatrix} a + d + i(c - b) & -b - c + i(a - d) \\ -b - c - i(a - d) & a + d - i(c - b) \end{pmatrix},$$

ce qui prouve que les algèbres $\mathcal{KD}(\mathbb{K}, -1, 1)$ et $M(2, \mathbb{K})$ sont isomorphes.

D'autre part, on vérifie que

$$R \begin{pmatrix} a & \varepsilon b \\ \varepsilon c & d \end{pmatrix} R^{-1} = \begin{pmatrix} a + d - \varepsilon(c + b) & a - d + \varepsilon(b - c) \\ a - d - \varepsilon(b - c) & a + d + \varepsilon(c + b) \end{pmatrix},$$

ce qui prouve que $\mathbb{D}$ est isomorphe à $\mathcal{KD}(\mathbb{K}, 0, 1)$. $\square$

Proposition 3.2.4. 1. *L'espace homogène $GL(n, \mathbb{D})/GL(n, \mathbb{K}[\varepsilon])$ est un fibré symétrique tangent gauche de l'espace symétrique $GL(n, \mathbb{K})$.*

2. *L'espace homogène $GL(2n, \mathbb{K})/GL(n, \mathbb{K}) \times GL(n, \mathbb{K})$ est un espace symétrique polarisé gauche de l'espace symétrique $GL(n, \mathbb{K})$.*

3. *L'espace homogène $GL(2n, \mathbb{K})/GL(n, \mathbb{K}[i])$ est un espace symétrique complexifié gauche de l'espace symétrique $GL(n, \mathbb{K})$.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser le résultat de la proposition 3.2.3 en donnant à α les valeurs respectives 0, 1 et -1 . Le lemme précédent permet alors de conclure. $\square$

Proposition 3.2.5. *L'extension gauche*

$$GL(n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha, 1))/GL(n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha))$$

provient du système triple de Jordan $M(n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha))$ muni du produit triple

$$\tilde{T}(A + \sqrt{\alpha}A', B + \sqrt{\alpha}B', C + \sqrt{\alpha}C') = -T(A + \sqrt{\alpha}A', B - \sqrt{\alpha}B', C + \sqrt{\alpha}C')$$

où T désigne le système triple de Jordan usuel sur $M(n, \mathbb{K})$ défini par

$$T(A, B, C) = ABC + CBA.$$

On retrouve ainsi l'extension gauche associée au système triple de Lie $M(n, \mathbb{K})$ qui admet l'extension de Jordan usuelle T (construction de la section (3.1.4)).

Démonstration. Explicitement,

$$\tilde{\mathfrak{q}} = \left\{ \begin{pmatrix} A & \sqrt{\alpha}B \\ -\sqrt{\alpha}B & -A \end{pmatrix} \mid A, B \in M(n, \mathbb{K}) \right\},$$

ce qui permet de calculer le crochet triple de Lie sur $\tilde{\mathfrak{q}} = M(n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha))$: pour $a = A + \sqrt{\alpha}A', b = B + \sqrt{\alpha}B'$ et $c = C + \sqrt{\alpha}C'$ éléments de $M(n, \mathcal{KD}(\mathbb{K}, \alpha))$, on a

$$\begin{aligned} [a, b, c]_{\tilde{\mathfrak{q}}} &= [A, B, C] - \alpha[A', B', C] \\ &\quad + \alpha(T(A', B, C') + T(B, A', C') - T(A, B', C') - T(B', A, C')) \\ &\quad + \sqrt{\alpha}([A, B, C'] - \alpha[A', B', C']) \\ &\quad + \sqrt{\alpha}(T(A', B, C) + T(B, A', C) - T(A, B', C) - T(B', A, C)), \end{aligned}$$

où $[., ., .]$ désigne le produit triple usuel sur $M(n, \mathbb{K})$.

Le résultat suit. $\square$

3.2.3 Exemple de la Grassmannienne

Afin de ne pas trop alourdir la présentation des résultats de cette section, nous considérons comme corps de base le corps des réels.

On considère la Grassmannienne $Grass(k, n)$, ensemble des sous-modules de $\mathbb{R}^n$ de dimension k .

Introduisons l'espace symétrique

$$\mathcal{M} = \{X \in GL(n, \mathbb{R}) \mid X^2 = \text{Id}, sg(X) = (k, n - k)\}.$$

Si τ désigne l'application transposée, l'espace symétrique $Grass(k, n)$ s'identifie à l'ensemble $\mathcal{M}^\tau$ des points fixes de $\mathcal{M}$ sous τ .

Soit α un scalaire. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{M}_\alpha = \{X \in GL(n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \mid X^2 = \text{Id}, sg(X) = (k, n - k)\}.$$

Alors l'espace symétrique $\mathcal{M}_\alpha^\tau$ est une extension quadratique invariante et droite de $\mathcal{M}(\tau)$ par α . L'involution c commutant à τ , l'application $\tilde{\tau} = \tau \circ c$ est une involution de $\mathcal{M}_\alpha$ et l'ensemble $\mathcal{M}_\alpha^{\tilde{\tau}}$ de ses points fixes est donc un sous-espace symétrique. Nous allons montrer que c'est une extension gauche de $\mathcal{M}^\tau$ par α .

Dans ce qui suit, si $\mathbb{F}$ est un anneau muni d'une involution c , la lettre $U(n, \mathbb{F})$ désigne l'ensemble

$$\{X \in GL(n, \mathbb{F}) \mid c(X)X^t = \text{Id}_n\}.$$

Dans le cas particulier où $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, on note simplement $U(n)$ cet ensemble.

Lemme 3.2.3. *L'espace symétrique $\mathcal{M}_\alpha^{\tilde{\tau}}$ est l'espace homogène*

$$U(n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) / U(k, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \times U(n - k, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)).$$

Démonstration. Le groupe $G = GL(n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha))$ agit de manière transitive sur $\mathcal{M}_\alpha$. Le sous-groupe G' agissant sur l'espace $\mathcal{M}_\alpha^{\tilde{\tau}}$ est

$$G' = \{X \in G \mid c(X)^t X = \text{Id}\} = U(n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)).$$

Le stabilisateur du point de base

$$I_{k, n-k} = \begin{pmatrix} \text{Id}_k & 0 \\ 0 & -\text{Id}_{n-k} \end{pmatrix}$$

est

$$\begin{aligned} H &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in G' \right\} \\ &= U(k, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \times U(n - k, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)). \end{aligned}$$

□

Proposition 3.2.6. *L'espace symétrique homogène*

$$U(n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) / U(k, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \times U(n - k, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha))$$

est une extension quadratique invariante et gauche de $Grass(k, n)$ par α .

Démonstration. Le système triple de Lie associé à l'espace homogène

$$U(n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) / U(k, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \times U(n-k, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha))$$

est le sous-système triple de Lie de $M(n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha))$ donné par

$$\tilde{\mathfrak{q}} = \{X \in M(n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \mid I_{k,n-k} X I_{k,n-k} = -X, c(X)^t = X\}.$$

L'application $j : X \longrightarrow \sqrt{\alpha} I_{k,n-k} X$ est un endomorphisme du module $\tilde{\mathfrak{q}}$ anticommutant avec l'involution c et vérifiant $j^2 = \alpha Id$.

De plus, si A, B, C sont trois éléments de $\tilde{\mathfrak{q}}$, comme A et B anticommutent avec $I_{k,n-k}$, on obtient

$$[A, B, j(C)] = j([A, B, C])$$

et

$$[A, j(B), C] = -[j(A), B, C].$$

Enfin, puisque

$$\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} \oplus j(\mathfrak{q}),$$

avec

$$\mathfrak{q} = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid I_{k,n-k} X I_{k,n-k} = -X, X^t = X\},$$

système triple de Lie de $Grass(k, n)$, on a bien prouvé que $\tilde{\mathfrak{q}}$ est une extension invariante gauche de $\mathfrak{q}$ par $j(\mathfrak{q})$ et donc que

$$U(n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) / U(k, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \times U(n-k, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha))$$

est une extension quadratique invariante et gauche de $Grass(k, n)$ par α . $\square$

Proposition 3.2.7. 1. *L'espace homogène $U(n, \mathbb{R}[\varepsilon]) / U(k, \mathbb{R}[\varepsilon]) \times U(n-k, \mathbb{R}[\varepsilon])$ est un fibré symétrique tangent gauche de l'espace symétrique $Grass(k, n)$.*

2. *L'espace homogène $GL(n, \mathbb{R}) / GL(k, \mathbb{R}) \times GL(n-k, \mathbb{R})$ est un espace symétrique polarisé gauche de l'espace symétrique $Grass(k, n)$.*

3. *L'espace homogène $U(n) / U(k) \times U(n-k)$ est un espace symétrique complexifié gauche de l'espace symétrique $Grass(k, n)$.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser le résultat de la proposition 3.2.3 en donnant à α les valeurs respectives 0, 1 et -1 .

On obtient directement

$$\mathcal{M}_0^{\tilde{\tau}} = U(n, \mathbb{R}[\varepsilon]) / U(k, \mathbb{R}[\varepsilon]) \times U(n-k, \mathbb{R}[\varepsilon]),$$

espace tangent gauche, puis

$$\mathcal{M}_1^{\tilde{\tau}} = U(n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, 1)) / U(k, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, 1)) \times U(n-k, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, 1)),$$

espace polarisé gauche, et l'on montre que $GL(n, \mathbb{R})$ est isomorphe à $U(n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, 1))$ via l'application

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow U(n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, 1)) \\ X &\longmapsto \frac{1}{2}(X + (X^{-1})^t, X - (X^{-1})^t). \end{aligned}$$

Enfin, on a bien $\mathcal{M}_{-1}^{\tilde{\tau}} = U(n) / U(k) \times U(n-k)$, espace complexifié gauche. $\square$

Proposition 3.2.8. *L'extension gauche*

$$U(n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) / U(k, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \times U(n - k, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha))$$

provient du système triple de Jordan $M(p, q, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha))$ muni du produit triple

$$\tilde{T}(A + \sqrt{\alpha}A', B + \sqrt{\alpha}B', C + \sqrt{\alpha}C') = -T(A + \sqrt{\alpha}A', B - \sqrt{\alpha}B', C + \sqrt{\alpha}C')$$

où T désigne le système triple de Jordan usuel sur $M(p, q, \mathbb{R})$ défini par

$$T(A, B, C) = AB^tC + CB^tA.$$

C'est donc l'extension gauche associée au système triple de Lie $M(p, q, \mathbb{K})$ construite à partir de l'extension de Jordan T .

Démonstration. Explicitement,

$$\tilde{\mathfrak{q}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A \\ c(A)^t & 0 \end{pmatrix} \mid A \in M(p, q, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \right\},$$

ce qui permet de calculer le crochet triple de Lie sur $\tilde{\mathfrak{q}} = M(p, q, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha))$: pour A, B et C éléments de $M(p, q, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha))$, on a

$$[A, B, C]_{\tilde{\mathfrak{q}}} = Ac(B)^tC - Cc(A)^tB - Bc(A)^tC + Cc(b)^tA.$$

On en déduit le résultat. □

3.2.4 Exemple de la Lagrangienne

Comme dans la section précédente, nous supposons ici que le corps de base est le corps des réels.

Par la suite, si $\mathbb{F}$ est un anneau avec involution c , si $M \in GL(n, \mathbb{F})$, on introduit le groupe orthogonal

$$O(M, \mathbb{F}) = \{X \in GL(n, \mathbb{F}) \mid M^{-1}X^tM = X^{-1}\},$$

et le groupe unitaire

$$U(M, \mathbb{F}) = \{X \in GL(n, \mathbb{F}) \mid M^{-1}X^tM = c(X)^{-1}\}.$$

Dans le cas particulier où $\mathbb{F}$ est le corps des réels et M est une matrice du type

$$I_{pq} = \begin{pmatrix} \text{Id}_p & 0 \\ 0 & -\text{Id}_q \end{pmatrix},$$

on note $O(I_{pq}, \mathbb{R}) = O(p, q)$ et $O(n, 0) = O(n)$. Si F désigne la matrice

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id}_n \\ -\text{Id}_n & 0 \end{pmatrix},$$

le groupe orthogonal $O(F, \mathbb{R})$ est noté $Sp(n, \mathbb{R})$.

Dans le cas particulier où $\mathbb{F}$ est le corps des complexes muni de la conjugaison usuelle, on note $U(I_{pq}, \mathbb{C}) = U(p, q)$ et $U(n, 0) = U(n)$.

Soit $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Posons

$$B = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

et

$$D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Introduisons l'espace symétrique

$$\mathcal{M} = \{X \in GL(2n, \mathbb{R}) \mid X^2 = Id, X^t B = -BX\}.$$

Si τ désigne l'involution $X \longrightarrow D^{-1}X^t D$, alors l'ensemble des points fixes $\mathcal{M}^\tau$ de $\mathcal{M}$ sous τ s'identifie à l'espace symétrique $O(A, \mathbb{R})$.

De manière analogue, si

$$\mathcal{M}_\alpha = \{X \in GL(2n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \mid X^2 = Id, X^t B = -BX\},$$

alors $\mathcal{M}_\alpha^\tau$ s'identifie à $O(A, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha))$.

Clairement, $O(A, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha))$ est une extension quadratique invariante et droite de $O(A, \mathbb{R})$ par α .

Nous allons montrer que l'on obtient une extension gauche de $O(A, \mathbb{R})$ en considérant l'ensemble des points fixes de $\mathcal{M}_\alpha$ sous l'involution $\tilde{\tau} = \tau \circ c$, où c désigne la conjugaison naturelle de $GL(2n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha))$.

Lemme 3.2.4. *L'espace symétrique $\mathcal{M}_\alpha^{\tilde{\tau}}$ est isomorphe à l'espace homogène*

$$O(B, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \cap U(D, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) / U(A, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)).$$

Démonstration. Le groupe $G = O(B, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha))$ agit de manière transitive sur $\mathcal{M}_\alpha$. Le sous-groupe G' agissant sur l'espace $\mathcal{M}_\alpha^{\tilde{\tau}}$ est

$$G' = \{X \in G \mid c(X)^t D X = D\} = O(B, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \cap U(D, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)).$$

Le stabilisateur du point de base $J = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ Id & 0 \end{pmatrix}$ est

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} A & \sqrt{\alpha}B \\ \sqrt{\alpha}B & A \end{pmatrix} \mid A, B \in M(n, \mathbb{R}), A + \sqrt{\alpha}B \in U(A, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \right\},$$

sous-groupe isomorphe à $U(A, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha))$. □

Proposition 3.2.9. *L'espace symétrique homogène*

$$O(B, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \cap U(D, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) / U(A, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha))$$

est une extension gauche de $O(A, \mathbb{R})$ par α .

Démonstration. Notons $\mathfrak{q}$ le système triple de Lie associé à l'espace symétrique $O(A, \mathbb{R})$. Le système triple de Lie associé à

$$O(B, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \cap U(D, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) / U(A, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha))$$

est

$$\tilde{\mathfrak{q}} = \{X \in M(2n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \mid UX = X^t U, VX = -c(X)^t V, JXJ = -X\},$$

avec

$$U = JB = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$V = JD = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère l'application $j : X \longrightarrow \sqrt{\alpha}JX$. En utilisant les relations $JX = -XJ$, $UJ = -JU$ et $VJ = JV$, on montre aisément que j est un endomorphisme du module $\tilde{\mathfrak{q}}$.

Puisque $\tilde{\mathfrak{q}}$ est un sous système triple de Lie du système triple de Lie extension gauche de $M(n, \mathbb{R})$ par α construit dans la section exemple du groupe linéaire, l'endomorphisme j est une structure d'extension gauche de $\tilde{\mathfrak{q}}^{\tilde{\tau}} = \text{Asym}(A, \mathbb{R})$ par α . □

Remarque 3.2.2. *D'une part, on a*

$$\begin{aligned} G' &= \{X \in GL(2n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \mid X^t BX = B, c(X)^t DX = D\} \\ &= \{X \in GL(2n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \mid D^{-1} BX = c(X)D^{-1} B, X^t BX = B\} \\ &= \{X \in GL(2n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \mid I_{nn} X = c(X)I_{nn}, X^t BX = B\} \\ &= \{X \in GL(2n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \mid I_{nn} X = c(X)I_{nn}\} \cap O(B, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \\ &= (RGL(n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha, 1))R^{-1}) \cap O(B, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} G' &= \{X \in GL(2n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \mid X^t BX = B, c(X)^t DX = D\} \\ &= \{X \in GL(2n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \mid D^{-1} BX = c(X)D^{-1} B, c(X)^t DX = D\} \\ &= \{X \in GL(2n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \mid I_{nn} X = c(X)I_{nn}, c(X)^t DX = D\} \\ &= \{X \in GL(2n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \mid I_{nn} X = c(X)I_{nn}\} \cap U(D, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \\ &= (RGL(n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha, 1))R^{-1}) \cap U(D, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)). \end{aligned}$$

Proposition 3.2.10. 1. *L'espace homogène $GL(n, \mathbb{D}) \cap U(D, \mathbb{R}[\varepsilon]) / U(A, \mathbb{R}[\varepsilon])$ est un fibré symétrique tangent gauche de l'espace symétrique $O(A, \mathbb{R})$.*

2. *L'espace homogène $O(B, \mathbb{R}) / GL(2n, \mathbb{R})$ est un espace symétrique polarisé gauche de l'espace symétrique $O(A, \mathbb{R})$.*

3. *L'espace homogène $O(D, \mathbb{R}) / U(A, \mathbb{C})$ est un espace symétrique complexifié gauche de l'espace symétrique $O(A, \mathbb{R})$.*

Démonstration. On utilise la proposition précédente en spécifiant les valeurs de α pour 0, 1, -1.

On obtient, en utilisant la remarque précédente,

- $\mathcal{M}_0^{\tilde{\tau}} = (RGL(n, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, 0, 1))R^{-1}) \cap U(D, \mathbb{R}[\varepsilon]) / U(A, \mathbb{R}[\varepsilon]) = GL(n, \mathbb{D}) \cap U(D, \mathbb{R}[\varepsilon]) / U(A, \mathbb{R}[\varepsilon])$ espace tangent gauche.
- $\mathcal{M}_1^{\tilde{\tau}} = O(B, \mathbb{R}) / GL(2n, \mathbb{R})$, espace polarisé gauche, où $GL(2n, \mathbb{R})$ est identifié à $U(A, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, 1))$ par

$$X \longrightarrow \frac{1}{2}(X + (A^{-1})^t(X^{-1})^t A^t + \sqrt{\mu}(X - (A^{-1})^t(X^{-1})^t A^t)).$$

- $\mathcal{M}_{-1}^{\tilde{}} = O(D, \mathbb{R})/U(A, \mathbb{R}[i])$, espace complexifié gauche, où l'on identifie $G' = RC.(GL(2n, \mathbb{R}) \cap U(D, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, -1))) = RC.O(D, \mathbb{R})$ avec $O(D, \mathbb{R})$.

□

Proposition 3.2.11. *L'extension gauche*

$$O(B, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha)) \cap U(D, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha))/U(A, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha))$$

provient du système triple de Jordan $Asym(A, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha))$ muni du produit triple

$$\tilde{T}(A + \sqrt{\alpha}A', B + \sqrt{\alpha}B', C + \sqrt{\alpha}C') = -T(A + \sqrt{\alpha}A', B - \sqrt{\alpha}B', C + \sqrt{\alpha}C')$$

où T désigne le système triple de Jordan usuel sur $Asym(A, \mathbb{R})$ défini par

$$T(A, B, C) = ABC + CBA.$$

Démonstration. C'est la restriction à $Asym(A, \mathcal{KD}(\mathbb{R}, \alpha))$ du système triple de Jordan associé à l'extension gauche de $GL(n, \mathbb{R})$ construite dans la section groupe linéaire. □

Examinons à présent les cas classiques.

Pour étudier le cas de l'espace symétrique $O(p, q)$, supposons que $A = I_{p,q}$. On obtient alors

- $GL(n, \mathbb{D}) \cap U(2p, 2q, \mathbb{R}[\varepsilon])/U(p, q, \mathbb{R}[\varepsilon])$, fibré tangent gauche,
- $O(n, n)/GL(2n, \mathbb{R})$, espace polarisé gauche,
- $O(2p, 2q)/U(p, q)$, espace complexifié gauche.

Etudions le cas de l'espace symétrique $Sp(n, \mathbb{R})$: supposons $A = F$. On obtient alors

- $GL(n, \mathbb{D}) \cap U(D, \mathbb{R}[\varepsilon])/U(F, \mathbb{R}[\varepsilon])$, fibré tangent gauche,
- $Sp(2n, \mathbb{R})/GL(2n, \mathbb{R})$, espace polarisé gauche,
- $Sp(2n, \mathbb{R})/U(n, n)$, espace complexifié gauche.

Annexe A

Espaces symétriques sur des corps ou anneaux généraux

La notion de variété lisse sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ repose sur la notion de calcul différentiel sur ces corps. En généralisant cette notion à un corps ou anneau $\mathbb{K}$ topologique non discret (pour des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie ou infinie), W. Bertram, H. Glöckner et K.-H. Neeb définissent la notion de variété lisse sur ces corps.

On retrouve en particulier la notion de variété lisse de dimension finie ou infinie sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$ ou sur un corps ultramétrique, comme le corps des entiers p -adiques.

Nous développons dans une première partie ce point de vue, rappelant la construction du fibré tangent, et la définition d'un fibré vectoriel sur ces variétés.

La définition d'un espace symétrique dans ce contexte reprend et généralise celle de [21].

On dit qu'une variété M , munie d'une application produit lisse μ , est un espace symétrique si et seulement si, pour tout $x \in M$, l'application

$$\sigma_x : y \mapsto \mu(x, y)$$

vérifie

- (S1) x est point fixe de σ_x ,
- (S2) $\sigma_x^2 = Id$
- (S3) $\sigma_x \in Aut(\mu)$
- (S4) $T_x \sigma_x = -Id$.

Cette annexe énonce donc (la plupart du temps sans démonstration) des résultats de W.Bertram, H.Glöckner et K.-H. Neeb.

A.1 Notion de variété sur un corps topologique non discret

Soit $\mathbb{K}$ un anneau topologique non discret. Les lettres E, F, G désignent des modules topologiques sur cet anneau. Nous allons tout d'abord définir la notion d'application lisse sur ces modules.

Définition A.1.1. Soient U un ouvert de E et f une application continue de U dans F . On dit que f est de classe C^1 sur U si et seulement si il existe une application continue $f^{[1]}$, définie sur $U^{[1]} = \{(x, v, t) \in U \times E \times \mathbb{K} / x + tv \in U\}$, et vérifiant pour tout $(x, v, t) \in U^{[1]}$,

$$f(x + tv) - f(x) = tf^{[1]}(x, v, t).$$

Si f est de classe C^1 , on définit pour tout $x \in U$ la différentielle de f en x comme étant l'application

$$\begin{aligned} df(x) : E &\longmapsto F \\ v &\longmapsto f^{[1]}(x, v, 0). \end{aligned}$$

On vérifie que l'application différentielle $df(x)$ définie précédemment est une application linéaire et continue.

Remarque A.1.1. La notion de classe C^1 est une notion locale : si U et V sont deux ouverts de E tels que $V \subset U$ et si f est de classe C^1 sur U , alors f est de classe C^1 sur V . De plus, si $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert d'un ouvert U de E et si l'application $f : U \rightarrow F$ est de classe C^1 sur chacun des ouverts U_i , alors f est de classe C^1 sur U .

Proposition A.1.1. Soient f une application continue de E dans F et g une application continue de F dans G . Si ces applications sont de classe C^1 , alors l'application $g \circ f$ l'est aussi et l'on a la règle de différentiation usuelle :

$$d(g \circ f)(x)(v) = dg(f(x))(df(x)(v)).$$

On définit alors par induction la notion de classe C^k .

Définition A.1.2. Soit U un ouvert de E et f une application lisse de U dans F . Soit k un entier naturel non nul. On dit que f est de classe C^k sur U si et seulement si f est de classe C^1 sur U et $f^{[1]}$ est de classe C^{k-1} sur $U^{[1]}$. On dit que f est lisse sur U si et seulement si f est de classe C^k sur U pour tout entier naturel k .

Exemple A.1.1. Toute application linéaire continue est lisse.

La notion de classe C^k est stable par composition :

Proposition A.1.2. Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont deux applications de classe C^k , alors l'application $g \circ f$ l'est également.

Aussi cette notion permet-elle de définir des variétés de classe C^k sur E .

Définition A.1.3. Une variété de classe C^k modelée sur E est un espace topologique M muni d'un atlas $\{(U_i, \varphi_i)_{i \in I}\}$ vérifiant

- $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de M ,
- pour tout indice i , l'application $\varphi_i : U_i \rightarrow E$ est un homéomorphisme de U_i sur son image,
- pour tout couple d'indices (i, j) , l'application $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ définie sur $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ est de classe C^k .

A.2 Notion de fibré vectoriel

Soit M une variété lisse (i.e. de classe C^k pour tout entier naturel k) modélisée sur un $\mathbb{K}$ -module E . Introduisons l'ensemble

$$S = \{(i, x) | i \in I, x \in U_i\}.$$

La relation d'équivalence $\sim$ définie sur S par

$$(i, x) \sim (j, y) \text{ si et seulement si } \varphi_i^{-1}(x) = \varphi_j^{-1}(y)$$

permet d'identifier M et $S/\sim$.

Définition A.2.1. Soit V un $\mathbb{K}$ -module topologique. Soit donné pour tout couple d'indices (i, j) , pour tout $x \in \varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j)$ un difféomorphisme $g_{ij}(x) : V \longrightarrow V$ tel que l'application

$$\begin{array}{ccc} (\varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j)) \times V & \longrightarrow & V \\ (x, v) & \longmapsto & g_{ij}(x)(v) \end{array}$$

soit lisse.

On suppose que ces difféomorphismes sont des fonctions de transition, c'est-à-dire qu'ils vérifient les relations de cocycle :

$$g_{ij}(\varphi_{jk}(x)) \circ g_{jk}(x) = g_{ik}(x), g_{ii}(x) = Id.$$

On définit une relation d'équivalence sur $S \times V$ en posant

$$(i, x, v) \sim (j, y, w) \text{ si et seulement si } \varphi_{ij}(x) = y \text{ et } g_{ij}(x)v = w.$$

On appelle alors fibré vectoriel de fibre V sur M l'espace quotient

$$F = S \times V / \sim.$$

C'est une variété lisse sur $E \times V$ et en notant les classes d'équivalence entre crochets, on définit une projection π de F sur M en posant

$$\begin{array}{ccc} \pi : F & \longrightarrow & M \\ [i, x, v] & \longmapsto & [i, x]. \end{array}$$

Pour tout $x \in M$, on définit la fibre de F en x comme étant l'espace $\pi^{-1}([i, \tilde{x}])$, où $[i, \tilde{x}]$ est tel que $\varphi_i(x) = \tilde{x}$. Cet espace, noté F_x , est difféomorphe à V et est ainsi naturellement muni d'une structure de module.

L'application

$$\begin{array}{ccc} z : M & \longrightarrow & F \\ [i, x] & \longmapsto & [i, x, 0_V], \end{array}$$

où 0_V désigne le vecteur nul du module V , est une section lisse de π , appelée section zéro. On notera 0_x l'image du point $[i, x]$ par cette application.

Définition A.2.2. L'espace tangent à la variété M est le fibré vectoriel TM de fibre E dont les fonctions de transition sont données par

$$g_{ij}(x) = d(\varphi_{ij})(x).$$

On note $T_x M$ la fibre de TM en x .

Soient M, N deux variétés lisses sur E d'atlas respectifs (U_i, φ_i) et (V_j, ψ_j) .

Si $f : M \longrightarrow N$ est une application lisse, on définit son application tangente $Tf : TM \longrightarrow TN$ par

$$Tf([i, x, v]) = [j, f_{ij}(x), df_{ij}(x)v],$$

où j est tel que $f \circ \varphi_i^{-1}(x) \in V_j$ et $f_{ij} = \psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$. C'est une application lisse de TM dans TN , variétés modelées sur $E \times E$.

L'ensemble des fibrés vectoriels est une catégorie : étant donnés deux fibrés vectoriels (M, F, π) et (M', F', π') , on appelle homomorphisme de fibrés vectoriels tout couple d'applications lisses $f : F \longrightarrow F'$, $g : M \longrightarrow M'$ telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \longrightarrow & M' \end{array}$$

commute, et tel que pour tout $x \in M$, la restriction de l'application f à la fibre F_x soit linéaire.

Proposition A.2.1. Soit (F, π, M, μ) un fibré vectoriel sur M . Soit $o \in M$. On désigne par 0 l'image de ce point par la section zéro du fibré vectoriel. Introduisons l'ensemble H , image de M par la section zéro. Alors

$$T_0 F = T_0 F_o \oplus T_0 H.$$

Démonstration. Désignons par $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ un atlas de M , variété modelée sur E et notons W l'espace vectoriel fibre de F . Alors

$$F = \{[i, x, v] / i \in I, x \in \varphi_i(U_i), v \in W\}$$

est une variété modelée sur $E \times W$ et

$$TF = \{[i, x, v, e, w] / i \in I, x \in \varphi_i(U_i), v, w \in W, e \in E\}.$$

Si $o = [i_o, x_o]$ i.e. si $\varphi_{i_o}(o) = x_o$, alors

$$F_o = \{[i_o, x_o, v] / v \in W\}$$

est une variété sur $\{0_E\} \times W$ et

$$TF_o = \{[i_o, x_o, v, 0_E, w] / v, w \in W\}.$$

De même,

$$H = \{[i, x, 0_W] / i \in I, x \in \varphi_i(U_i)\}$$

est une variété modelée sur $E \times \{0_W\}$ et

$$TH = \{[i, x, 0_W, e, 0_W] / i \in I, x \in \varphi_i(U_i), e \in E\}.$$

On vérifie alors immédiatement que

$$T_0 F = T_0 F_o \oplus T_0 H$$

puisque

$$T_0F = \{[i_o, x_o, 0_W, e, w]/w \in W, e \in E\},$$

$$T_0F_o = \{[i_o, x_o, 0_W, 0_E, w]/w \in W\},$$

et

$$T_0H = \{[i_o, x_o, 0_W, e, 0_W]/e \in E\}.$$

□

Dans le cas particulier où F est le fibré tangent TM , on obtient la proposition suivante :

Proposition A.2.2. *L'espace tangent $T_0T M$ est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel $T_pM \times T_pM$. De plus, si f est une application lisse de la variété M dans la variété N , alors l'application*

$$T_0(Tf) : T_0T M \longrightarrow T_0T N$$

s'identifie de manière canonique à l'application

$$T_p f \times T_p f : T_p M \times T_p M \longrightarrow T_p N \times T_p N.$$

Démonstration. En effet, par ce qui précède,

$$T_0T M = T_0H \oplus T_0T_p M.$$

Chacun des sous-espaces T_0H et $T_0T_p M$ étant canoniquement isomorphe à T_pM , on en déduit l'isomorphisme cherché.

Introduisons ici $\{(U_i, \varphi_i)|i \in I\}$ et $\{(V_i, \psi_i)|i \in J\}$ deux atlas de M et N . Alors $\{(TU_i, T\varphi_i)|i \in I\}$, $\{(TV_i, T\psi_i)|i \in J\}$ sont des atlas de TM et TN .

Soit f une application lisse de M dans N .

Localement, en notant $f_{ij} = \psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$, on a pour tout $[i, y, v] \in TU_i$,

$$\begin{aligned} (Tf)_{ij}(y, v) &= T\psi_j \circ Tf \circ T\varphi_i^{-1}(y, v) \\ &= (f_{ij}(y), df_{ij}(y)v). \end{aligned}$$

On obtient alors, pour tout $v, w \in E$, en notant $[j, y, 0] = Tf([i, x, 0])$,

$$\begin{aligned} T_0(Tf)([i, x, 0, v, w]) &= [j, y, 0, d(Tf_{ij})(x, 0)(v, w)] \\ &= \left[j, y, 0, \begin{pmatrix} df_{ij}(x) & 0 \\ 0 & df_{ij}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \right] \\ &= [j, y, 0, df_{ij}(x)v, df_{ij}(x)w], \end{aligned}$$

ce qui montre que $T_0(Tf)$ s'identifie à $T_p f \times T_p f$. □

A.3 Espace symétrique et système triple de Lie associé

Soit M une variété lisse modelée sur le $\mathbb{K}$ -module E .

Définition A.3.1. *On appelle application produit sur M toute application*

$$m : M \times M \longrightarrow M.$$

Si m est une telle application, pour tout $x \in M$, les applications partielles à gauche $y \mapsto m(x, y)$ et à droite $y \mapsto m(y, x)$ sont usuellement notées l_x et r_x .

Proposition A.3.1. *Soit m une application produit lisse sur M . Alors l'application tangente Tm est identifiée de manière canonique à une application produit lisse sur la variété TM . De plus, pour tout $(v, w) \in T_p M \times T_q M$,*

$$T_{(p,q)}m(v, w) = T_q l_p(w) + T_p r_q(v).$$

Démonstration. Soit $\{(U_i, \varphi_i)\}$ un atlas de M .

L'application

$$\begin{aligned} TM \times TM &\longrightarrow T(M \times M) \\ ([i, x, v], [j, y, w]) &\longmapsto [(i, j), (x, y), (v, w)] \end{aligned}$$

permet d'identifier $TM \times TM$ et $T(M \times M)$. Aussi l'application Tm peut-elle être considérée comme une application produit lisse sur la variété TM .

Explicitons Tm .

Si $m : E \times E \rightarrow E$ est une application produit lisse, on obtient facilement

$$m^{[1]}((x, y), (v, w), t) = r_y^{[1]}(x, v, t) + l_{x+tv}^{[1]}(y, w, t).$$

On en déduit

$$dm(x, y)(v, w) = dr_y(x)(v) + dl_x(y)(w),$$

et ainsi

$$T_{(p,q)}m(v, w) = T_q l_p(w) + T_p r_q(v)$$

pour tout $(v, w) \in T_p M \times T_q M$. □

Définition A.3.2. *Soit μ une application produit lisse sur M . Introduisons, pour tout $x \in M$, l'application $\sigma_x : y \mapsto \mu(x, y)$. On dit que (M, μ) est un espace symétrique si et seulement si, pour tout $x \in M$,*

- (S1) x est point fixe de σ_x ,
- (S2) σ_x est une involution i.e. $\sigma_x^2 = Id$,
- (S3) σ_x est un automorphisme de l'application produit μ ,
i.e. pour tout $y, z \in M$, $\mu(\sigma_x(y), \sigma_x(z)) = \sigma_x(\mu(y, z))$,
- (S4) $T_x \sigma_x = -Id$.

L'ensemble des espaces symétriques est une catégorie pour laquelle la notion d'homomorphisme est la suivante : soient (M, μ) , (M', μ') deux espaces symétriques et φ une application lisse définie sur M , à valeurs dans M' . On dit que φ est un homomorphisme d'espaces symétriques si et seulement si pour tout $x, y \in M$,

$$\varphi(\mu(x, y)) = \mu'(\varphi(x), \varphi(y)).$$

Exemple A.3.1. *Si G est un groupe de Lie (variété lisse munie d'une structure de groupe telle que multiplication et inversion soient des applications lisses), alors G est muni d'une structure canonique d'espace symétrique donnée par le produit*

$$\mu(g, h) = gh^{-1}g.$$

En particulier, si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel topologique, la structure canonique d'espace symétrique sur E est donnée par le produit

$$\mu(v, w) = 2v - w.$$

Rappelons que si M est un espace symétrique avec point de base o , l'espace vectoriel tangent $T_o M$ est naturellement muni d'une structure de système triple de Lie :

Définition A.3.3. On appelle système triple de Lie tout espace vectoriel V muni d'une application trilinéaire $[\cdot, \cdot, \cdot] : V \times V \times V \longrightarrow V$ telle que, en notant $R(X, Y) : Z \longmapsto -[X, Y, Z]$,

- (LT1) $R(X, Y) = -R(Y, X)$,
- (LT2) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (identité de Jacobi),
- (LT3) $R(U, V)$ est une dérivation du produit triple $[\cdot, \cdot, \cdot]$, ce qui signifie
 $R(U, V)[X, Y, Z]$ est égal à
 $[R(U, V)X, Y, Z] + [X, R(U, V)Y, Z] + [X, Y, R(U, V)Z]$.

Si V est un système triple de Lie, on désigne de manière usuelle par R et M les applications définies par

$$R(X, Y)Z = -[X, Y, Z] = M(X, Z)Y.$$

L'ensemble des systèmes triples de Lie est une catégorie : étant donnés deux systèmes triples de Lie (V, R) et (V', R') , et φ une application linéaire de V dans V' , on dit que φ est un homomorphisme de système triple de Lie si et seulement si, pour tout $X, Y, Z \in V$,

$$\varphi(R(X, Y)Z) = R'(\varphi(X), \varphi(Y))\varphi(Z).$$

Rappelons que l'application qui à un espace symétrique avec point de base associe son système triple de Lie est un foncteur : si $\varphi : (M, o) \longrightarrow (M', o')$ est un homomorphisme d'espace symétrique avec point de base (i.e. vérifiant $\varphi(o) = o'$), l'application $T_o \varphi : T_o M \longrightarrow T_{o'} M'$ est un homomorphisme de système triple de Lie.

Annexe B

Représentation des algèbres n -aires

Nous présentons ici de manière unifiée la notion de représentation linéaire, existant sur de nombreuses catégories d'algèbres et de systèmes triples (en particulier sur la catégorie des algèbres de Lie, respectivement de Jordan, et celle des systèmes triples de Lie, respectivement de Jordan).

Nous suivons la démarche de Eilenberg, qui dans son article [10], a défini la notion de représentation (à valeurs dans l'algèbre des transformations linéaires d'un espace vectoriel) pour la catégorie des algèbres annulant une forme abstraite donnée : on retrouve en particulier la notion de représentation d'une algèbre de Lie, respectivement de Jordan.

B.1 Idéal des identités d'une algèbre n -aire

B.1.1 La catégorie des algèbres n -aires

De manière à pouvoir englober le cas des algèbres et celui des systèmes triples, nous donnons la définition de la notion d'algèbre n -aire, que l'on peut trouver dans [7].

Définition B.1.1. On appelle algèbre n -aire tout module A muni d'une application produit $p : A^n \longrightarrow A$ multilinéaire. Un idéal de l'algèbre n -aire (A, p) est un sous-module I de A tel que $p(a_1, \dots, a_n)$ est dans I dès que l'un des éléments a_i appartient au module I .

Exemple B.1.1. Une algèbre binaire est une algèbre au sens usuel, un système triple est une algèbre ternaire.

Remarque B.1.1. L'ensemble des algèbres n -aires, noté $\mathcal{A}_n$, forme une catégorie pour laquelle la notion de morphisme est la notion d'application linéaire respectant les produits : l'application linéaire

$$\varphi : (A, p) \longrightarrow (A', p')$$

est un morphisme d'algèbres n -aires si et seulement si

$$p'(\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n)) = \varphi(p(a_1, \dots, a_n))$$

pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$.

Remarque B.1.2. Une partie d'une algèbre n -aire est un idéal si et seulement si c'est le noyau d'un morphisme d'algèbres n -aires.

Définition B.1.2. Soit A une algèbre n -aire et X un sous-ensemble de A . L'algèbre n -aire A est dite libre sur X si et seulement si, pour toute algèbre n -aire B , pour toute application $f : X \longrightarrow B$, il existe un unique morphisme d'algèbres n -aires $\tilde{f} : A \longrightarrow B$ prolongeant f .

Proposition B.1.1. Pour tout ensemble X , il existe une unique algèbre n -aire libre sur X , à isomorphisme d'algèbres n -aires près. On la note Lib_X^n .

Démonstration. La preuve de l'unicité est classique.

Montrons l'existence de l'algèbre n -aire libre sur X .

On construit tout d'abord M_X^n , magma n -aire libre sur X , de la manière suivante : en notant

$$I_n = \{m \in \mathbb{N}, n-1 \mid m-1\},$$

on définit par induction sur $m \in I_n$ des ensembles X_m , en posant

$$X_1 = X$$

et pour $m \in I_n$,

$$X_m = \bigsqcup_{(p_i) \in I_n^n \mid \sum_{i=1}^n p_i = m} X_{p_1} \times \dots \times X_{p_n}.$$

Les éléments de X_m sont appelés mots de longueur m .

On définit alors un produit en n arguments sur l'ensemble

$$M_X^n = \bigsqcup_{m \in I_n} X_m$$

en considérant l'injection canonique

$$\begin{aligned} p : X_{m_1} \times \cdots \times X_{m_n} &\longrightarrow X_{\sum_{i=1}^n m_i} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Introduisons l'espace vectoriel libre sur M_X^n défini par

$$Lib_X^n = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \mid k \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{K}, x_i \in M_X^n \right\}.$$

En prolongeant le produit p par multilinéarité, on obtient alors une structure d'algèbre n -aire sur Lib_X^n .

Il reste à montrer que Lib_X^n est une algèbre n -aire libre sur X .

Soit (B, p_B) une algèbre n -aire et f une application de X à valeurs dans B . On prolonge f en une application $\tilde{f}$ définie sur M_X^n en la définissant sur les ensembles X_m , par induction sur m .

On pose, si $x \in X_1$,

$$\tilde{f}(x) = f(x),$$

et si $(x_1, \dots, x_n) \in X_m$,

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = p_B(\tilde{f}(x_1), \dots, \tilde{f}(x_n)).$$

Il reste alors à prolonger par linéarité l'application $\tilde{f}$ à l'algèbre n -aire Lib_X^n , l'application obtenue étant par construction un morphisme d'algèbres n -aires. L'unicité de ce prolongement est évidente, l'algèbre n -aire Lib_X^n étant engendrée par X . □

B.1.2 Evaluation des n -formes abstraites dans une algèbre n -aire

Soit $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'indéterminées. Posons $X = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Les éléments de Lib_X^n sont appelés n -formes abstraites, ceux de M_X^n n -monômes.

Soit (A, p) une algèbre n -aire.

Si $(a_i) \in A^{(\mathbb{N})}$ est une suite presque nulle d'éléments de A , on note $\theta((a_i))$ l'unique prolongement à l'algèbre n -aire libre Lib_X^n de l'application

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow A \\ x_j &\longmapsto a_j. \end{aligned}$$

On obtient ainsi une application $\theta : A^{(\mathbb{N})} \longrightarrow \text{Hom}(Lib_X^n, A)$.

A chaque élément L de l'algèbre n -aire libre sur X , on associe une application L^p de $A^{(\mathbb{N})}$ à valeurs dans A , en posant

$$L^p((a_i)) = \theta((a_i))(L).$$

Définition B.1.3. Soit (A, p) une algèbre n -aire et L un élément de Lib_X^n . On appelle *évaluation de la n -forme abstraite L en $(a_i) \in A^{(\mathbb{N})}$* l'élément $L^p((a_i))$ de l'algèbre n -aire A .

Proposition B.1.2. Soient (A, p_A) , (B, p_B) deux algèbres n -aires. Soit f un morphisme de l'algèbre n -aire A dans l'algèbre n -aire B . Pour toute forme abstraite L élément de Lib_X^n , on a alors

$$f \circ L^{p_A} = L^{p_B} \circ f,$$

où f désigne encore, par abus de notation, l'application de $B^{(\mathbb{N})}$ à valeurs dans $B^{(\mathbb{N})}$, associant à une suite presque nulle (b_i) la suite presque nulle $(f(b_i))$.

Démonstration. Soit (a_i) une suite presque nulle d'éléments de A . On vérifie aisément que les deux applications

$$\begin{array}{ccc} l_1 : & \text{Lib}_X^n & \longrightarrow B \\ & L & \longmapsto f \circ L^{pA}((a_j)) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} l_2 : & \text{Lib}_X^n & \longrightarrow B \\ & L & \longmapsto L^{pB} \circ f((a_j)) \end{array}$$

sont des prolongements, morphismes d'algèbres n -aires, de l'application

$$\begin{array}{ccc} l : & X & \longrightarrow B \\ & x_i & \longmapsto f(a_i) \end{array}.$$

Par unicité du prolongement, on a alors $l_1 = l_2$, ce que l'on voulait montrer. $\square$

B.1.3 Idéal des identités d'une algèbre n -aire

Définition B.1.4. Soit L une n -forme abstraite. On dit que L est une identité de l'algèbre n -aire A si et seulement si son évaluation en (a_i) est nulle pour tout $(a_i) \in A^{(\mathbb{N})}$, si et seulement si $L^p = 0$.

Exemple B.1.2. Une algèbre de Lie est une algèbre binaire admettant les deux identités binaires suivantes :

$$L_1 = x_1 x_1,$$

$$L_2 = (x_1 x_2) x_3 + (x_2 x_3) x_1 + (x_3 x_1) x_2.$$

Si l'élément 2 est inversible dans l'anneau des scalaires, on remarque que L_1 est une identité pour l'algèbre binaire A si et seulement si

$$L'_1 = x_1 x_2 + x_2 x_1$$

en est une.

Lemme B.1.1. L'ensemble des identités de A est un idéal de Lib_X^n , appelé idéal des identités de l'algèbre n -aire A et noté $I(A)$.

Démonstration. L'ensemble $A^{A^{(\mathbb{N})}}$ des applications de $A^{(\mathbb{N})}$ à valeurs dans A est naturellement muni d'une structure d'algèbre n -aire : si $f_1, \dots, f_n \in A^{A^{(\mathbb{N})}}$, leur produit $f_1 \dots f_n$ est défini par

$$f_1 \dots f_n((a_i)) = p(f_1((a_i)), \dots, f_n((a_i))),$$

où p désigne l'application produit de A .

Montrons alors que l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} \varphi : & \text{Lib}_X^n & \longrightarrow A^{A^{(\mathbb{N})}} \\ & L & \longmapsto L^p \end{array}$$

est un morphisme d'algèbres n -aires. Soit $L_1, \dots, L_n \in \text{Lib}_X^n$. Alors, l'application $\theta((a_i))$ étant un morphisme d'algèbres n -aires, on obtient

$$\begin{aligned} (L_1 \dots L_n)^p((a_i)) &= \theta((a_i))(L_1 \dots L_n) \\ &= p(\theta((a_i))(L_1), \dots, \theta((a_i))(L_n)) \\ &= p(L_1^p((a_i)), \dots, L_n^p((a_i))) \\ &= L_1^p \dots L_n^p((a_i)), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait prouver.

Ainsi, l'ensemble des identités de A , en tant que noyau du morphisme d'algèbre n -aire φ , est un idéal de Lib_X^n . □

Définition B.1.5. Si I est un idéal de Lib_X^n , on appelle classe des algèbres n -aires d'idéal d'identités I l'ensemble des algèbres n -aires A telles que $I \subset I(A)$.

La proposition B.1.2 entraîne la

Remarque B.1.3. La classe des algèbres n -aires d'idéal d'identités I , notée $\mathcal{A}_I$ est une sous-catégorie complète de l'ensemble des algèbres n -aires.

Définition B.1.6. Soit I un idéal de Lib_X^n . Soit A une algèbre n -aire d'idéal d'identités I , Y un sous-ensemble de A . On dit que l'algèbre A est une algèbre n -aire d'idéal d'identités I libre sur Y si et seulement si, pour toute algèbre n -aire B d'idéal d'identités I , pour toute application $f : Y \rightarrow B$, il existe un unique morphisme d'algèbres n -aires $\tilde{f} : A \rightarrow B$ prolongeant f .

Proposition B.1.3. Soit I un idéal de Lib_X^n . Pour tout ensemble Y , il existe une unique algèbre n -aire d'idéal d'identités I libre sur Y . On la note $\text{Lib}_Y^n(I)$.

Démonstration. La preuve de l'unicité étant classique, nous nous attachons à démontrer l'existence d'une telle algèbre.

Introduisons (A, p_A) , algèbre quotient de l'algèbre n -aire libre sur Y , (Lib_Y^n, p) , par l'idéal J engendré par les éléments du type $i((a_i))$, où $i \in I$ et $(a_i) \in (\text{Lib}_Y^n)^{(N)}$. Alors A est une algèbre n -aire d'idéal d'identités I .

Soit (B, p_B) une algèbre n -aire d'idéal d'identités I et f une application de Y dans B . Il existe alors une unique application $\tilde{f} : \text{Lib}_Y^n \rightarrow B$, morphisme d'algèbres n -aires, prolongeant f . Soit $i \in I$ et $(a_i) \in (\text{Lib}_Y^n)^{(N)}$. On vérifie alors, en utilisant la propriété B.1.2, que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(i^p((a_i))) &= i^{p_B}(\tilde{f}((a_i))) \\ &= 0, \end{aligned}$$

puisque B a pour idéal d'identités I . Aussi l'application $\tilde{f}$ se factorise-t-elle en un morphisme d'algèbres n -aires, encore noté $\tilde{f}$, de A à valeurs dans B . Cette application prolonge bien l'application f .

L'unicité d'un tel prolongement provient de l'unicité de l'application

$$\tilde{f} : \text{Lib}_Y^n \rightarrow B$$

prolongeant f . □

B.1.4 Exemples

Nous présentons ici des exemples de telles classes pour $n = 2$ et $n = 3$, en donnant les générateurs de leur idéal d'identités. Comme dans l'exemple précédent, si les éléments 2 et 3 sont inversibles dans l'anneau de base, nous pouvons choisir des identités "multilinéaires".

Exemples de classes d'algèbres binaires

- La classe des algèbres commutatives a pour idéal d'identités (L) , avec

$$L = x_1x_2 - x_2x_1.$$

- La classe des algèbres associatives a pour idéal d'identités (L) , avec

$$L = (x_1x_2)x_3 - x_1(x_2x_3).$$

- La classe des algèbres alternatives a pour idéal d'identités (L_1, L_2) , avec

$$L_1 = x_1(x_2x_3) + x_2(x_1x_3) - (x_1x_2)x_3 - (x_2x_1)x_3$$

$$L_2 = x_1(x_2x_3) + x_1(x_3x_2) - (x_1x_2)x_3 - (x_1x_3)x_2.$$

- La classe des algèbres de Leibniz a pour idéal d'identités (L) , avec

$$L = (x_1x_2)x_3 - (x_1x_3)x_2 - x_1(x_2x_3).$$

- La classe des algèbres de Lie a pour idéal d'identités (L_1, L_2) , avec

$$L_1 = x_1x_1$$

ou, en linéarisant

$$L_1 = x_1x_2 - x_2x_1$$

$$L_2 = (x_1x_2)x_3 + (x_2x_3)x_1 + (x_3x_1)x_2.$$

- La classe des algèbres de Jordan a pour idéal d'identités (L_1, L_2) , avec

$$L_1 = x_1x_2 - x_2x_1$$

$$L_2 = (x_1x_1)(x_1x_2) - x_1((x_1x_1)x_2)$$

ou encore, en linéarisant,

$$\begin{aligned} L_2 = & ((x_1x_2)x_3)x_4 + ((x_2x_4)x_3)x_1 + ((x_4x_1)x_3)x_2 \\ & - (x_1x_2)(x_3x_4) - (x_2x_4)(x_3x_1) - (x_4x_1)(x_3x_2). \end{aligned}$$

Exemples de classes d'algèbres ternaires

- La classe des systèmes triples associatifs a pour idéal d'identités (L_1, L_2) , avec

$$L_1 = x_1x_2(x_3x_4x_5) - x_1(x_4x_3x_2)x_5$$

$$L_2 = x_1x_2(x_3x_4x_5) - (x_1x_2x_3)x_4x_5.$$

- La classe des systèmes triples alternatifs (cf [22]) a pour idéal d'identités (L_1, L_2, L_3) , avec

$$L_1 = x_1x_2(x_3x_4x_5) - x_3x_4(x_1x_2x_5) - (x_1x_2x_3)x_4x_5 - x_3(x_2x_1x_4)x_5$$

$$L_2 = x_1x_2(x_3x_4x_5) + x_1x_2(x_5x_4x_3) - (x_1x_2x_3)x_4x_5 + (x_1x_2x_5)x_4x_3$$

$$L_3 = (x_1x_2x_3)x_4x_5 + (x_3x_2x_1)x_4x_5 - x_1(x_4x_3x_2)x_5 - x_3(x_4x_1x_2)x_5.$$

B.1. IDÉAL DES IDENTITÉS D'UNE ALGÈBRE N-AIRE

- La classe des systèmes triples de Lie a pour idéal d'identités (L_1, L_2, L_3) , avec

$$L_1 = x_1x_2x_3 + x_2x_1x_3$$

$$L_2 = x_1x_2x_3 + x_2x_3x_1 + x_3x_1x_2$$

$$L_3 = x_1x_2(x_3x_4x_5) - (x_1x_2x_3)x_4x_5 - x_3(x_1x_2x_4)x_5 - x_3x_4(x_1x_2x_5).$$

- La classe des systèmes triples de Jordan (cf [23]) a pour idéal d'identités (L_1, L_2) , avec

$$L_1 = x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1$$

$$L_2 = x_1x_2(x_3x_4x_5) - x_3x_4(x_1x_2x_5) - (x_1x_2x_3)x_4x_5 + x_3(x_2x_1x_4)x_5.$$

B.2 La catégorie des représentations d'une algèbre n -aire

B.2.1 Les représentations d'algèbres n -aires

Nous présentons ici la notion de représentation d'une algèbre n -aire dans un module, reprenant celle développée par Eilenberg (et qui correspond à la notion de bireprésentation présentée dans [29]).

Définition B.2.1. Soit A une algèbre n -aire, $\mathfrak{A}$ une algèbre binaire associative et unitaire. Une représentation R de A dans $\mathfrak{A}$ est la donnée de n applications multilinéaires $R_i : A^{n-1} \longrightarrow \mathfrak{A}$. On désigne par $\text{Rep}(A, \mathfrak{A})$ le module des représentations de l'algèbre n -aire A dans l'algèbre $\mathfrak{A}$.

Une représentation de A dans un module V est une représentation de A dans l'algèbre associative et unitaire $\text{End}(V)$. On désigne par $\text{Rep}(A, V)$ le module des représentations de l'algèbre n -aire A dans le module V .

Exemple B.2.1. Si (A, p) est une algèbre n -aire, les applications

$$\begin{aligned} \text{Reg}_i^p : \quad A^{n-1} &\longrightarrow \text{End}(A) \\ (a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n) &\longmapsto a_i \mapsto p(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

définissent une représentation de l'algèbre n -aire A dans le module A , appelée représentation régulière de A et notée Reg^p .

Remarque B.2.1. Si A est une algèbre n -aire, l'ensemble des représentations de A dans des modules,

$$\text{Rep}(A) = \{R \in \text{Rep}(A, V) \mid V \in \mathcal{A}_1\},$$

est une catégorie : un morphisme de $R \in \text{Rep}(A, V)$ dans $R' \in \text{Rep}(A, V')$ est la donnée d'une application linéaire $\varphi : V \longrightarrow V'$ telle que pour tout $a \in A^{n-1}$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\varphi \circ R_i(a) = R'_i(a) \circ \varphi.$$

B.2.2 Identités multilinéaires d'une représentation

Définition B.2.2. Soit $M \in M_X^n$.

On dit que M est un n -monôme d'ordre au plus k si et seulement si il existe $Y \subset X$ sous-ensemble de cardinal k tel que $M \in M_Y^n$.

On dit que M est un n -monôme d'ordre k si et seulement si c'est un n -monôme d'ordre k qui n'est pas un n -monôme d'ordre $k-1$.

Un n -monôme $M \in M_X^n$ est dit multilinéaire si et seulement si son ordre est égal à sa longueur.

Une n -forme abstraite multilinéaire est une combinaison linéaire finie de n -monômes multilinéaires de même ordre, faisant intervenir les mêmes indéterminées.

Si X' est une partie de X de cardinal m , on désigne par $\text{Lib}_{X'}^{n,m}$ l'ensemble des n -formes abstraites multilinéaires combinaisons linéaires de n -monômes multilinéaires d'ordre m appartenant à $M_{X'}^n$.

Soit (A, p) une algèbre n -aire, $\mathfrak{A}$ une algèbre associative et unitaire et $R = (R_i)_{i \in [1, n]}$ une représentation de A dans $\mathfrak{A}$. A chaque n -forme abstraite L multilinéaire, $L \in \text{Lib}_{X'}^{n,m}$, avec X' sous-ensemble de X de cardinal m , on associe des applications multilinéaires, notées L_i^R , pour i tel que $x_i \in X'$, de $A^{(N)}$ à valeurs dans $\mathfrak{A}$: on les définit pour les n -monômes multilinéaires d'ordre m , par induction sur m .

Si X' est un sous-ensemble de cardinal 1 de X , et si $M \in M_{X'}^{n,1}$ est un n -monôme d'ordre 1, on définit l'application M_i^R pour i tel que $\{x_i\} = X'$ en posant

$$\begin{aligned} M_i^R : A^{(\mathbb{N})} &\longrightarrow \mathfrak{A} \\ a &\longmapsto 1. \end{aligned}$$

Si X' est un sous-ensemble de cardinal $m > 1$ de X et si $M \in M_{X'}^{n,m}$ est un n -monôme multilinéaire d'ordre m , il existe des sous-ensembles $(X_i)_{i \in [1,m]}$ formant une partition de X' , des n -monômes multilinéaires d'ordre k_i $M_i \in M_{X_i}^{n,k_i}$ tels que $M = (M_1, \dots, M_m)$.

On définit alors les applications M_i^R en posant, si i est tel que $x_i \in X_s$,

$$\begin{aligned} M_i^R : A^{(\mathbb{N})} &\longrightarrow \mathfrak{A} \\ a &\longmapsto R_s(M_1^p(a), \dots, \widehat{M_s^p(a)}, \dots, M_m^p(a)).(M_s)_i^R(a). \end{aligned}$$

Définition B.2.3. Soit R une représentation de l'algèbre n -aire A dans l'algèbre associative et unitaire $\mathfrak{A}$. Soit L une n -forme abstraite multilinéaire. On dit que la représentation R annule L ou que L est une identité de R si et seulement si chacune des applications multilinéaires associées $L_i^R : A^{(\mathbb{N})} \longrightarrow \mathfrak{A}$ est nulle. Si $L = (L_1, \dots, L_k)$ est une famille finie de n -formes abstraites multilinéaires, on introduit l'ensemble $\text{Rep}_L(A, \mathfrak{A})$ des représentations de A dans $\mathfrak{A}$ annulant chacune des n -formes abstraites L_i .

Remarque B.2.2. L'ensemble

$$\text{Rep}_L(A) = \{R \in \text{Rep}_L(A, \text{End}(V)) \mid V \in \mathcal{A}_1\}$$

des L -représentations de l'algèbre n -aire A dans un module est une sous-catégorie complète de la catégorie $\text{Rep}(A)$. On montre en effet que si $\tau : V \longrightarrow V'$ est un morphisme de la représentation R dans la représentation R' ,

$$\tau \circ L_i^R(a) = L_i^{R'}(a) \circ \tau$$

pour toute n -forme abstraite multilinéaire L d'ordre k .

B.2.3 Exemples

- Une représentation de Leibniz (cf [19]) d'une algèbre A dans une algèbre associative et unitaire $\mathcal{A}$ est la donnée de deux applications linéaires r, l de A à valeurs dans $\mathfrak{A}$ vérifiant

$$\begin{aligned} r(X.Y) &= l(Y).r(X) + r(X).r(Y) \\ r(X.Y) &= l(Y).r(X) - r(X).l(Y) \\ l(X.Y) &= l(Y).l(X) - l(X).l(Y) \end{aligned}$$

- Une représentation de Lie d'une algèbre A dans une algèbre associative et unitaire $\mathfrak{A}$ est la donnée de deux applications linéaires r, l de A à valeurs dans $\mathfrak{A}$ vérifiant

$$\begin{aligned} r &= -l \\ r(X.Y) &= r(X).r(Y) - r(Y).r(X) \end{aligned}$$

Une représentation de Lie d'une algèbre de Lie A dans un module V est donc la donnée d'un homomorphisme d'algèbres de Lie $r : A \longrightarrow \text{End}(V)$, où $\text{End}(V)$ est muni de sa structure naturelle d'algèbre de Lie.

- Une représentation de Jordan (cf [14]) d'une algèbre A dans une algèbre associative et unitaire $\mathfrak{A}$ est la donnée de deux applications linéaires r, l de A à valeurs dans $\mathfrak{A}$ vérifiant

$$r = l,$$

$$\begin{aligned} r((XY)Z) &+ r(X).(r(Z).r(Y)) + r(Y).(r(Z).r(X)) \\ &= r(XY).r(Z) + r(ZY).r(X) + r(ZX).r(Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(Z).r(XY) &+ r(X).r(YZ) + r(Y).r(ZX) \\ &= r(XY).r(Z) + r(YZ).r(X) + r(ZX).r(Y) \end{aligned}$$

- Une représentation triple de Lie d'un système triple $(A, <, , >)$ dans une algèbre associative et unitaire $\mathfrak{A}$ est la donnée de trois applications linéaires r, m, l de $A \times A$ à valeurs dans $\mathfrak{A}$ vérifiant

$$r(X, Y) = -r(Y, X)$$

$$m(X, Y) = -l(X, Y)$$

$$r(X, Y) = m(X, Y) - m(Y, X)$$

$$r(X, Y).r(U, V) - r(U, V).r(X, Y) = r(< X, Y, U >, V) + r(U, < X, Y, V >)$$

$$r(X, Y).m(U, V) - m(U, V).r(X, Y) = m(< X, Y, U >, V) + m(U, < X, Y, V >)$$

$$m(X, < U, V, Y >) = m(U, Y).m(X, V) - m(V, Y).m(X, U) + r(U, V).m(X, Y)$$

- Une représentation triple de Jordan (cf [23]) d'un système triple $(A, <, , >)$ dans une algèbre associative et unitaire $\mathfrak{A}$ est la donnée de trois applications linéaires r, m, l de $A \times A$ à valeurs dans $\mathfrak{A}$ vérifiant

$$m(X, Y) = m(Y, X)$$

$$r(X, Y) = l(Y, X)$$

$$r(X, Y).r(U, V) - r(U, V).r(X, Y) = r(< X, Y, U >, V) - r(U, < Y, X, V >)$$

$$r(X, Y).m(U, V) + m(U, V).r(Y, X) = m(< X, Y, U >, V) + m(U, < X, Y, V >)$$

$$m(X, < U, V, Y >) = r(Y, V).m(X, U) - m(U, Y).r(V, X) + r(U, V).m(X, Y)$$

$$r(< U, V, X >, Y) = r(X, V).r(U, Y) - m(U, X).m(Y, V) + r(U, V).r(X, Y)$$

B.2.4 Lien entre l'idéal des identités d'une algèbre n -aire et les identités de sa représentation régulière

Proposition B.2.1. *Soit (A, p) une algèbre n -aire, $L = (L_1, \dots, L_k)$ une famille finie de n -formes abstraites, chaque L_i étant supposée multilinéaire d'ordre k_i . Alors (A, p) admet pour idéal d'identités l'idéal engendré par la famille L si et seulement si la représentation régulière de (A, p) annule chacune des n -formes abstraites L_i .*

Démonstration. Montrons par induction sur k , que pour tout sous-ensemble X' de cardinal k de X , pour tout $M \in M_{X'}^{n,k}$ n -monôme multilinéaire d'ordre k , pour tout $a = (a_i) \in A^{\mathbb{N}}$, et tout i tel que $x_i \in X'$,

$$M^p(a) = (M^{Reg^p})_i(a)(a_i).$$

Si X' est un sous-ensemble de cardinal 1, le résultat est clair.

Supposons alors le résultat vrai pour tous les n -monômes multilinéaires d'ordre strictement inférieur à k . Soit X' un sous-ensemble de X de cardinal k et $M \in M_{X'}^{n,k}$ un n -monôme multilinéaire d'ordre $k \geq n$. Il existe une partition $(X_i)_{i \in [1,n]}$ de X' , des n -monômes multilinéaires d'ordre k_i $M_i \in M_{X_i}^{n,k_i}$ tels que

$$M = (M_1, \dots, M_n).$$

On obtient alors, si i est tel que $x_i \in X_s$, et pour $a = (a_i) \in A^{\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned} M^p(a) &= p(M_1^p(a), \dots, M_n^p(a)) \\ &= Reg_s(M_1^p(a), \dots, \widehat{M_s^p(a)}, \dots, M_n^p(a))(M_s^p(a)) \\ &= Reg_s(M_1^p(a), \dots, \widehat{M_s^p(a)}, \dots, M_n^p(a)) \circ (M_s^{Reg})_i(a)(a_i) \\ &= (M^{Reg})_i(a)(a_i). \end{aligned}$$

Soit alors L une n -forme abstraite multilinéaire d'ordre k . Par ce qui précède, pour tout $a = (a_i) \in A^{\mathbb{N}}$,

$$L^p(a) = (L^{Reg})_i(a)(a_i),$$

ce qui prouve que L^p est nulle si et seulement si L^{Reg^p} est nulle. □

B.2.5 Constructions algébriques de représentations

Somme directe

Lemme B.2.1. Soient (A, p_A) et (B, p_B) deux algèbres n -aires. Alors $(A \oplus B, p_A \oplus p_B)$ est une algèbre n -aire. De plus, si A et B sont des L -algèbres, alors $A \oplus B$ est une L -algèbre.

Démonstration. Clairement, $p_A \oplus p_B$ est une application multilinéaire de $(A \oplus B)^n$ à valeurs dans $A \oplus B$. Aussi $(A \oplus B, p_A \oplus p_B)$ est-elle une algèbre n -aire.

Si (c_i) est une suite presque nulle d'éléments d'une algèbre n -aire C , on note $\theta_C((c_i))$ l'unique prolongement à l'algèbre n -aire libre Lib_X^n de l'application

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow C \\ x_j &\longmapsto c_j. \end{aligned}$$

Par unicité du prolongement, on vérifie alors aisément que pour toutes suites presque nulles (a_i) et (b_i) d'éléments de A et B , on a

$$\theta_{A \oplus B}((a_i + b_i)) = \theta_A((a_i)) \oplus \theta_B((b_i)),$$

ce qui prouve que si A et B sont des L -algèbres, alors $A \oplus B$ en est une. □

Proposition B.2.2. Soient R^A et R^B deux représentations des algèbres n -aires A et B dans les algèbres associatives et unitaires $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$. Alors $R^A \oplus R^B$ est une représentation de l'algèbre n -aire $A \oplus B$ dans l'algèbre associative et unitaire $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$. De plus, si R^A et R^B sont des L -représentations, alors la représentation $R^A \oplus R^B$ est une L -représentation.

Démonstration. Il est clair que $R^A \oplus R^B$ est une représentation de l'algèbre n -aire $A \oplus B$ dans l'algèbre associative et unitaire $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$.

On vérifie d'autre part que pour toute n -forme abstraite multilinéaire L , pour toutes suites presque nulles $((a_i))$ et $((b_i))$ d'éléments de A et B , on a

$$L^{R^A}((a_i)) \oplus L^{R^B}((b_i)) = L^{R^A \oplus R^B}((a_i + b_i)).$$

Il suffit de prouver cette égalité pour les n -monômes multilinéaires. La preuve se mène par récurrence sur la longueur des monômes, en revenant à la définition des applications M_i^R .

Finalement, si R^A et R^B sont des L -représentations, alors la représentation $R^A \oplus R^B$ est une L -représentation. $\square$

Proposition B.2.3. Soient A une algèbre n -aire, R^V et R^W deux représentations linéaires de l'algèbre n -aire A dans les modules V et W . Alors les applications $(R_i^{V \oplus W})_i$ définies sur A^{n-1} et à valeurs dans $\text{End}(V \oplus W)$ par

$$R_i^{V \oplus W}((a))(v + w) = R_i^V((a))(v) + R_i^W((a))(w)$$

définissent une représentation linéaire de l'algèbre n -aire A dans le module $V \oplus W$. De plus, si R^V et R^W sont des L -représentations, alors $R^{V \oplus W}$ est une L -représentation.

Démonstration. Il est clair que les applications $R_i^{V \oplus W}$ sont des applications multilinéaires de A^{n-1} à valeurs dans $\text{End}(V \oplus W)$. Aussi $R^{V \oplus W}$ est-elle une représentation de A dans $\text{End}(V \oplus W)$.

On vérifie de plus aisément que pour toute n -forme abstraite L , pour toute suite presque nulle $((a_i))$ d'éléments de A ,

$$L_i^{R^{V \oplus W}}((a))(v + w) = L_i^{R^V}((a))(v) + L_i^{R^W}((a))(w),$$

ce qui prouve que si R^V et R^W sont des L -représentations, alors $R^{V \oplus W}$ est une L -représentation. $\square$

Représentation duale

Proposition B.2.4. Soient A une algèbre n -aire et R une représentation linéaire de l'algèbre n -aire A dans l'algèbre associative et unitaire $\text{End}(V)$. On obtient une représentation R^* de l'algèbre n -aire A dans l'algèbre $\text{End}(V^*)^{\text{opp}}$ (module $\text{End}(V^*)$ muni du produit opposé défini par $f \circ^{\text{opp}} g = g \circ f$) en posant pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, pour tout $(a) \in A^{n-1}$,

$$R_i^*((a)) = R_i((a))^*,$$

où l'on a noté, si $l \in \text{End}(V)$,

$$\begin{aligned} l^* : V^* &\longrightarrow V^* \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ l. \end{aligned}$$

De plus, si R est une L -représentation, alors R^* est une L -représentation.

Démonstration. Il est clair que R^* est une représentation de A dans $\text{End}(V^*)^{\text{opp}}$.

On peut alors montrer que pour toute n -forme abstraite multilinéaire L , pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, pour toute suite presque nulle $((a))$ d'éléments de A ,

$$L_i^{R^*}((a)) = (L_i^R((a)))^*,$$

ce qui prouve que si R est une L -représentation, alors R^* est une L -représentation. $\square$

Produit tensoriel de deux représentations

Lemme B.2.2. *Soient (A, p_A) et (B, p_B) deux algèbres n -aires. Alors $(A \otimes B, p_A \otimes p_B)$ est une algèbre n -aire. De plus, si A et B sont des L -algèbres, alors $A \otimes B$ est une L -algèbre.*

Démonstration. Il est clair que $p_A \otimes p_B$ est une application multilinéaire de $(A \otimes B)^n$ dans $A \otimes B$. Aussi $(A \otimes B, p_A \otimes p_B)$ est-elle une algèbre n -aire.

Reprenons les notations de la preuve du lemme B.2.1 : si (c_i) est une suite presque nulle d'éléments d'une algèbre n -aire C , on note $\theta_C((c_i))$ l'unique prolongement à l'algèbre n -aire libre Lib_X^n de l'application

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow C \\ x_j &\longmapsto c_j. \end{aligned}$$

Par unicité du prolongement, on vérifie alors aisément que pour toutes suites presque nulles (a_i) et (b_i) d'éléments de A et B , on a

$$\theta_{A \otimes B}((a_i \otimes b_i)) = \theta_A((a_i)) \otimes \theta_B((b_i)),$$

ce qui prouve que pour toute n -forme abstraite L ,

$$L^{p_A \otimes p_B} = L^{p_A} \otimes L^{p_B}.$$

On en déduit que si A et B sont des L -algèbres, alors $A \otimes B$ en est une. □

Proposition B.2.5. *Si R^A et R^B sont deux représentations des algèbres n -aires A et B dans les algèbres $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, alors $R^A \otimes R^B$ définie par*

$$(R^A \otimes R^B)_i = R_i^A \otimes R_i^B$$

est une représentation de l'algèbre n -aire $A \otimes B$ dans l'algèbre $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. De plus, si R^A et R^B sont des L -représentations, alors $R^A \otimes R^B$ est une L -représentation.

Démonstration. Il est clair que $R^A \otimes R^B$ est une représentation de $A \otimes B$ dans $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$.

On vérifie de plus aisément que pour toute n -forme abstraite L , pour toutes suites presque nulles (a_i) , (b_i) d'éléments de A et B ,

$$L_j^{R^A \otimes R^B}((a_i \otimes b_i)) = L_j^{R^A}((a_i)) \otimes L_j^{R^B}((b_i)),$$

ce qui prouve que si R^A et R^B sont des L -représentations, alors $R^A \otimes R^B$ en est une également. □

B.3 Extension d'une algèbre n -aire

B.3.1 La catégorie des extensions d'une algèbre n -aire

Définition B.3.1. Soient A, V deux algèbres n -aires. Une extension de A par V est la donnée d'une algèbre n -aire E admettant V comme sous-algèbre et d'un morphisme d'algèbre n -aire $\varphi : E \longrightarrow A$ tel que la suite

$$\{0\} \longrightarrow V \longrightarrow E \longrightarrow A \longrightarrow \{0\}$$

soit une suite exacte d'algèbres n -aires.

On désigne par $Ext(A, V)$ l'ensemble des extensions de l'algèbre n -aire A par l'algèbre n -aire V .

Remarque B.3.1. L'ensemble des extensions de l'algèbre n -aire A

$$Ext(A) = \{(E, \varphi) \in Ext(A, V) | V \in \mathcal{A}_n\}$$

est une catégorie : un morphisme de $(E, \varphi) \in Ext(A, V)$ dans $(F, \psi) \in Ext(A, W)$ est la donnée d'un morphisme d'algèbres n -aires $\tau : E \longrightarrow F$ tel que $\psi \circ \tau = \varphi$ et $\tau(V) \subset W$.

Définition B.3.2. Soit (E, p_E) une extension de l'algèbre n -aire A par l'algèbre n -aire V . On dit que l'extension est inessentielle si et seulement si le morphisme d'algèbres n -aires

$$\varphi : E \longrightarrow A$$

admet une section qui soit un morphisme d'algèbres n -aires. On dit que l'extension est intégrable si et seulement si

$$p_E(e_1, \dots, e_n) = 0$$

dès que deux des éléments e_i appartiennent à V .

Remarque B.3.2. Si E est une extension intégrable de A par V , l'algèbre n -aire V est une algèbre n -aire triviale (module muni du produit nul).

Remarque B.3.3. Si $n = 2$ et si V est un espace vectoriel considéré de manière triviale comme algèbre n -aire, toute extension de A par V est intégrable.

B.3.2 Représentation associée à une extension intégrable

Lemme B.3.1. Etant donnée une extension intégrable $((E, p), \varphi)$ de l'algèbre n -aire (A, p_A) par le module V , on obtient une représentation $R^{(E, \varphi)}$ de A dans V en posant, pour tout $a_1, \dots, a_n \in A$ et pour tout $v \in V$

$$\begin{aligned} R_i^{(E, \varphi)}(a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n)(v) &= \text{Reg}_i^p(\eta(a_1), \dots, \widehat{\eta(a_i)}, \dots, \eta(a_n))(v) \\ &= p(\eta(a_1), \dots, v, \dots, \eta(a_n)), \end{aligned}$$

où η désigne une section quelconque de φ (ie $\eta : A \longrightarrow E$ est une application linéaire vérifiant $\varphi \circ \eta = \text{Id}$)

Démonstration. Il s'agit de montrer que $p(\eta(a_1), \dots, v, \dots, \eta(a_n))$ est un élément de V , indépendant du choix de la section η .

L'application φ étant un morphisme d'algèbres n -aires, on a

$$\begin{aligned} \varphi(p(\eta(a_1), \dots, v, \dots, \eta(a_n))) &= p_A(\varphi(\eta(a_1)), \dots, \varphi(v), \dots, \varphi(\eta(a_n))) \\ &= p_A(a_1, \dots, 0, \dots, a_n) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $p(\eta(a_1), \dots, v, \dots, \eta(a_n))$ est un élément de V .

Si η' est une autre section de φ , alors $\eta - \eta'$ est à valeurs dans V . Il existe donc des éléments $v_i \in V$ tels que $\eta'(a_i) = \eta(a_i) + v_i$. Ainsi

$$\begin{aligned} p(\eta'(a_1), \dots, v, \dots, \eta'(a_n)) &= p_A(\eta(a_1) + v_1, \dots, v, \dots, \eta(a_n) + v_n) \\ &= p(\eta(a_1), \dots, v, \dots, \eta(a_n)), \end{aligned}$$

puisque $p(e_1, \dots, e_n)$ s'annule dès que deux des e_i appartiennent à V . □

Remarque B.3.4. Soit R une représentation de l'algèbre n -aire A dans le module V . L'ensemble $\text{Ext}^R(A, V)$ des extensions intégrables de A par V induisant la représentation R est non vide : le module $E = A \oplus V$ muni du produit

$$p_E(a_1 + v_1, \dots, a_n + v_n) = p_A(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^n R_i(a_1, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_n)(v_i)$$

est une algèbre n -aire, extension intégrable et inessentielle de A par V induisant la représentation R . On dit que V est muni d'une structure de A -module si et seulement si le module $A \oplus V$ est muni d'une structure d'extension inessentielle et intégrable du type de celle décrite ci-dessus.

Proposition B.3.1. Soit A une algèbre n -aire. L'application qui associe à une extension intégrable (E, φ) la représentation $R^{(E, \varphi)}$ est un foncteur de la catégorie des extensions intégrables de A dans la catégorie des représentations de A .

Démonstration. Soient $(E, \varphi) \in \text{Ext}(A, V)$, $(E', \varphi') \in \text{Ext}(A, V')$ deux extensions intégrables de A . Soit $\tau : E \rightarrow E'$ un morphisme d'extensions. Par définition, on a $\tau(V) \subset V'$ et $\varphi' \circ \tau = \varphi$. Montrons que la restriction de τ à V fournit un morphisme de la représentation $R = R^{(E, \varphi)}$ dans la représentation $R' = R^{(E', \varphi')}$.

Soit η une section de φ . Alors $\eta' = \tau \circ \eta$ est une section de φ' . D'où

$$\begin{aligned} R'_i(a_1, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_n)(\tau(v)) &= p_{E'}(\eta'(a_1), \dots, \tau(v), \dots, \eta'(a_n)) \\ &= \tau \circ p_E(\eta(a_1), \dots, v, \dots, \eta(a_n)) \\ &= \tau \circ R_i(a_1, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_n)(v), \end{aligned}$$

ce qui montre que la restriction de τ à V est un morphisme de représentations. □

B.3.3 Partie facteur d'une extension

Soit (E, φ) une extension intégrable de l'algèbre n -aire A par le module V . On note R la représentation de A dans V induite par E .

Si η est une section linéaire de φ , on obtient une application multilinéaire de A^n dans V en posant

$$f_\eta(a_1, \dots, a_n) = p_E(\eta(a_1), \dots, \eta(a_n)) - \eta(p_A(a_1, \dots, a_n)).$$

Définition B.3.3. On appelle *partie facteur de l'extension intégrable* (E, φ) toute application multilinéaire $f : A^n \longrightarrow V$ telle qu'il existe une section η de φ vérifiant $f_\eta = f$.

Remarque B.3.5. Si E est une extension inessentielle et intégrable de A par V , alors E admet l'application nulle comme partie facteur.

Lemme B.3.2. Soit f une partie facteur de l'extension intégrable (E, φ) . Une application multilinéaire $f' : A^n \longrightarrow V$ est une partie facteur de E si et seulement si il existe une application linéaire $h : A \longrightarrow V$ telle que $f - f' = \partial^R h$, où

$$\partial^R h(a_1, \dots, a_n) = \left(\sum_{i=1}^n R_i(a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n)(h(a_i)) \right) - h(p_A(a_1, \dots, a_n)).$$

Démonstration. Soit η la section de φ telle que $f_\eta = f$. Si η' est une autre section de φ , il existe une application linéaire $h : A \longrightarrow V$ telle que $\eta - \eta' = h$. Alors, pour $a = (a_i) \in A^n$,

$$\begin{aligned} f_{\eta'}(a) &= p_E(\eta(a) + h(a)) - \eta(p_A(a)) - h(p_A(a)) \\ &= p_E(\eta(a)) - \eta(p_A(a)) + \left(\sum_{i=1}^n p_E(\eta(a_1), \dots, h(a_i), \dots, \eta(a_n)) \right) - h(p_A(a)) \\ &= f_\eta(a) + \left(\sum_{i=1}^n R_i(a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n)(h(a_i)) \right) - h(p_A(a)) \\ &= f(a) + \partial^R h(a). \end{aligned}$$

On en déduit que si $f' : A^n \longrightarrow V$ est une application multilinéaire, les assertions suivantes sont équivalentes :

- l'application f' est une partie facteur,
- il existe une section η' de φ telle que $f_{\eta'} = f'$,
- il existe une application linéaire $h : A \longrightarrow V$ telle que $f_{\eta+h} = f'$,
- il existe une application linéaire $h : A \longrightarrow V$ telle que $f - f' = \partial^R h$.

□

Notons $L(A^n, V)$ l'ensemble des applications multilinéaires de A^n à valeurs dans V . On munit le module $L(A^n, V)$ de la relation d'équivalence suivante : deux applications f, f' sont dites R -équivalentes si et seulement si il existe une application linéaire $h : A \longrightarrow V$ telle que $f - f' = \partial^R h$. On note $L^R(A^n, V)$ le module quotient de $L(A^n, V)$ par la relation de R -équivalence.

Le lemme précédent montre que l'application

$$F_R : \text{Ext}^R(A, V) \longrightarrow L^R(A^n, V)$$

qui associe à une extension intégrable E la classe de ses parties facteurs est correctement définie.

B.3.4 Caractérisation des extensions intégrables isomorphes

Lemme B.3.3. Soient $R \in \text{Rep}(A, V)$, $R' \in \text{Rep}(A, V')$ et $\tau : V \longrightarrow V'$ un morphisme de la représentation R dans la représentation R' . Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \tau : L^R(A^n, V) & \longrightarrow & L^{R'}(A^n, V') \\ \bar{f}^R & \longmapsto & \tau \circ f^{R'} \end{array}$$

est correctement définie.

Démonstration. Il s'agit de montrer que si f est R -équivalente à f' , alors $\tau \circ f$ est R' -équivalente à $\tau \circ f'$. Il suffit de montrer que si $h : A \longrightarrow V$ est une application linéaire, alors $\partial^{R'}(\tau \circ h) = \tau \circ \partial^R h$.

Soit donc $h : A \longrightarrow V$ une application linéaire. On a alors

$$\begin{aligned} \tau \circ \partial^R h(a) &= \sum_{i=1}^n \tau \circ R_i(a_1, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_n) \circ h(a) - \tau \circ h(p_A(a)) \\ &= \sum_{i=1}^n R'_i(a_1, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_n) \circ \tau \circ h(a) - \tau \circ h(p_A(a)) \\ &= \partial^{R'}(\tau \circ h)(a), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait montrer. $\square$

Proposition B.3.2. Soient $E \in \text{Ext}^R(A, V)$ et $E' \in \text{Ext}^{R'}(A, V')$. Ces extensions sont isomorphes si et seulement si il existe un isomorphisme $\tau : V \longrightarrow V'$ de la représentation R dans la représentation R' tel que $\tau(F_R(E)) = F_{R'}(E')$.

Démonstration. Supposons les extensions (E, φ) et (E', φ') isomorphes. Il existe une application $\tau : E \longrightarrow E'$ isomorphisme d'algèbres n -aires telle que $\tau(V) = V'$ et $\varphi' \circ \tau = \varphi$.

Nous savons, par la proposition B.3.1, que la restriction de l'application τ à V est un isomorphisme de représentations.

De plus, f est une partie facteur de E relative à la section η si et seulement si $\tau \circ f$ est une partie facteur de E' relative à la section $\tau \circ \eta$, ce qui montre que $\tau(F_R(E)) = F_{R'}(E')$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une application linéaire $\tau : V \longrightarrow V'$ tel que τ soit un isomorphisme de la représentation R dans la représentation R' et tel que $\tau(F_R(E)) = F_{R'}(E')$.

Soit η une section de φ . Puisque $\tau(F_R(E)) = F_{R'}(E')$, il existe η' section de φ' telle que $f_{\eta'} = \tau \circ f_{\eta}$.

Soit $e \in E$. Il existe un unique couple $(a, v) \in A \times V$ tel que $e = \eta(a) + v$. On définit alors une application linéaire $\tilde{\tau} : E \longrightarrow E'$ en posant

$$\tilde{\tau}(\eta(a) + v) = \eta'(a) + \tau(v).$$

L'application $\tilde{\tau}$ ainsi définie est un prolongement de l'application τ et vérifie

$$\varphi' \circ \tilde{\tau} = \varphi.$$

Pour prouver que $\tilde{\tau}$ est un isomorphisme d'extensions, il reste à montrer que $\tilde{\tau}$ est un isomorphisme d'algèbres n -aires. L'application $\tilde{\tau}$ est clairement un isomorphisme d'espaces

vectoriels. On a de plus, si $e_i = \eta(a_i) + v_i$ et $e = (e_i) = a + v$,

$$\begin{aligned}
 p_{E'}(\tilde{\tau}(e)) &= p_{E'}(\eta'(a) + \tau(v)) \\
 &= p_{E'}(\eta'(a)) + \sum_{i=1}^n R'_i(a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n)(\tau(v_i)) \\
 &= \eta' \circ p_A(a) + f_{\eta'}(a) + \sum_{i=1}^n \tau \circ R_i(a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n)(v_i) \\
 &= \eta' \circ p_A(a) + \tau \circ f_{\eta}(a) + \sum_{i=1}^n \tau \circ R_i(a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n)(v_i) \\
 &= \tilde{\tau}(p_A(a) + f_{\eta}(a) + \sum_{i=1}^n R_i(a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n)(v_i)) \\
 &= \tilde{\tau}(p_E(\eta(a) + v)) \\
 &= \tilde{\tau}(p_E(e)),
 \end{aligned}$$

ce qu'il fallait montrer. □

Corollaire B.3.1. *Soit $E \in \text{Ext}^R(A, V)$ et f une partie facteur de E . Alors l'extension E est isomorphe à l'extension $A \oplus V$ munie du produit*

$$p(a + v) = p_A(a) + f(a) + \sum_{i=1}^n R_i(a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n)(v_i).$$

Démonstration. La représentation associée à cette extension est R et la partie facteur de cette extension associée à la section identité est f . Par la proposition précédente, les extensions E et $(A \oplus V, p)$ sont donc isomorphes. □

B.3.5 Idéal des identités d'une extension de A par V

Soit E une extension intégrable de l'algèbre n -aire (A, p_A) par le module V , induisant la représentation R . Soit f une partie facteur de l'extension E . On sait que E est entièrement déterminée, à isomorphisme près, par R et f . On cherche à déterminer les conditions sur R et f pour que l'extension E annule une n -forme abstraite. Nous devons pour cela introduire la notion d'identité d'une partie facteur.

On définit pour tout n -monôme M d'ordre k , par induction sur k , une application

$$M^f : A^{\mathbb{N}} \longrightarrow V.$$

Si M est d'ordre 1, on pose $M^f = 0$.

Si M est d'ordre $k \geq n$, il existe des n -monômes M_i d'ordre k_i tels que $M = (M_1, \dots, M_n)$. On pose alors, pour $a \in A^{\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned}
 M^f(a) &= f(M_1^{p_A}(a), \dots, M_n^{p_A}(a)) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n R_i(M_1^{p_A}(a), \dots, \widehat{M_i^{p_A}(a)}, \dots, M_n^{p_A}(a))(M_i^f(a)).
 \end{aligned}$$

On associe ainsi par linéarité une application $L^f : A^{(\mathbb{N})} \longrightarrow V$ à toute n -forme abstraite L .

B.3. EXTENSION D'UNE ALGÈBRE N-AIRE

Définition B.3.4. On dit que L est une identité de la partie facteur f si et seulement si l'application associée L^f est identiquement nulle.

Proposition B.3.3. Soit (E, p) une extension intégrable de l'algèbre n -aire (A, p_A) par le module V . On note R la représentation induite par E , et f une partie facteur de E . Soit L une n -forme abstraite multilinéaire. Alors L est une identité de l'algèbre n -aire E si et seulement si c'est une identité de l'algèbre n -aire A , de la représentation induite R et de la partie facteur f .

Démonstration. Puisque E est isomorphe à l'extension $A \oplus V$ munie du produit

$$p(a + v) = p_A(a) + f(a) + \sum_{i=1}^n R_i(a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n)(v_i),$$

et que l'ensemble des n -algèbres annulant une n -forme abstraite L d'ordre k est une sous-catégorie, il suffit de montrer le résultat pour les extensions déployées. On suppose donc que $E = A \oplus V$ est munie du produit décrit ci-dessus.

Montrons alors que pour tout n -monôme M multilinéaire d'ordre k , pour tout $a = (a_i) \in A^{(\mathbb{N})}$, pour tout $v = (v_i) \in V^{(\mathbb{N})}$,

$$M^{p_E}(a + v) = M^{p_A}(a) + M^f(a) + \sum_{i=1}^n (M^R)_i(a)(v_i).$$

Si $M \in M_{x_i}^{n,1}$ est d'ordre 1, on a

$$\begin{aligned} M^{p_A}(a) + M^f(a) + \sum_{i=1}^n (M^R)_i(a)(v_i) &= a_i + v_i \\ &= M^{p_E}(a + v). \end{aligned}$$

Si X' est un sous-ensemble de cardinal $k \geq n$ de X et si $M \in M_{X'}^{n,k}$ est d'ordre k , il existe une partition (X_i) de X' et des n -monômes multilinéaires M_i d'ordre k_i tels que $M = (M_1, \dots, M_n)$.

On a alors

$$\begin{aligned} M^{p_E}(a + v) &= p_E((M_i^{p_E}(a + v))) \\ &= p_E((M_i^{p_A}(a) + M_i^f(a) + \sum_{j=1}^n (M_i^R)_j(a)(v_j))) \\ &= p_A((M_i^{p_A}(a))) + f((M_i^{p_A}(a))) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n R_i(M_1^{p_A}(a), \dots, \widehat{M_i^{p_A}(a)}, \dots, M_n^{p_A}(a))(M_i^f(a) + \sum_{j=1}^n (M_i^R)_j(a)(v_j)) \\ &= M^{p_A}(a) + M^f(a) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_i(M_1^{p_A}(a), \dots, \widehat{M_i^{p_A}(a)}, \dots, M_n^{p_A}(a)) \circ (M_i^R)_j(a)(v_j) \\ &= M^{p_A}(a) + M^f(a) + \sum_{i=1}^n (M^R)_i(a)(v_i), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait montrer.

Si L est une n -forme abstraite multilinéaire d'ordre k , on a donc

$$L^{pE}(a + v) = L^{pA}(a) + L^f(a) + \sum_{i=1}^n (L^R)_i(a)(v_i),$$

ce qui prouve que E annule L si et seulement si A , R et f annulent L . □

B.3.6 Principe de permanence

Remarque B.3.6. Soit R une représentation de l'algèbre n -aire A dans le module V et $E = A \oplus V$ l'extension intégrable associée à cette représentation munie du produit

$$p_E(a + v) = p_A(a) + \sum_{i=1}^n R_i(a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n)(v_i).$$

Alors pour tout $a = (a_i) \in A^n$, pour tout $v \in V$,

$$Reg_i^{pE}(a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n)(v) = r_i(a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n)(v).$$

On en déduit la

Proposition B.3.4. (principe de permanence) Soit K une n -forme abstraite d'ordre k , L une n -forme abstraite d'ordre l . Soit $i \in [1, n]$. Supposons que pour toute algèbre n -aire (A, p) annulant L ,

$$K_i^{Reg^A} = 0$$

Alors, pour toute n -algèbre A annulant L , pour tout espace vectoriel V , pour toute représentation $R \in Rep_L(A, V)$,

$$K_i^R = 0.$$

Démonstration. Soit A une algèbre n -aire annulant L , soit V un espace vectoriel et $R \in Rep_L(A, V)$. Introduisons $E = A \oplus V$ extension de A par V munie du produit

$$p_E(a + v) = p_A(a) + \sum_{i=1}^n (R_i(a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n)(v_i).$$

Par hypothèse, pour tout $e \in E^{(\mathbb{N})}$,

$$K_i^{Reg^E} = 0.$$

En particulier, pour tout $a \in A^{(\mathbb{N})}$,

$$K_i^{Reg^E}(a) = 0.$$

Or

$$r_i(a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n) = Reg_i(a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n)|_V.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} K_i^R(a) &= K_i^{Reg^E|_V}(a) \\ &= K_i^{Reg^E}(a)|_V \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

B.4 Foncteurs induits par une forme abstraite

Proposition B.4.1. Soit $K \in A_{x_1, \dots, x_m}^{n, m}$ une n -forme abstraite d'ordre m en les indéterminées $x_1, \dots, x_m$. Par abus de notation, si (A, p) est une algèbre n -aire, on désigne encore par K^p l'application

$$\begin{aligned} A^m &\longrightarrow A \\ (a_1, \dots, a_m) &\longmapsto K^p((a_1, \dots, a_m, 0, \dots, 0, \dots)) \end{aligned}$$

et si R est une représentation de l'algèbre n -aire A dans le module V , on désigne encore par K_i^R l'application

$$\begin{aligned} A^{m-1} &\longrightarrow \text{End}(V) \\ (a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_m) &\longmapsto K_i^R((a_1, \dots, a_m, 0, \dots, 0, \dots)). \end{aligned}$$

Les applications

$$\begin{aligned} F_K : \mathcal{A}_n &\longrightarrow \mathcal{A}_m \\ (A, p) &\longmapsto (A, K^p) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{F}_K : \text{Rep}_n &\longrightarrow \text{Rep}_m \\ R &\longmapsto (K_i^R) \end{aligned}$$

définissent des foncteurs.

De plus, pour toute algèbre n -aire (A, p) ,

$$\tilde{F}_K(\text{Reg}^{(A, p)}) = \text{Reg}^{F_K((A, p))}.$$

Démonstration. Les applications F_K et $\tilde{F}_K$ sont correctement définies :

$$K^p : A^m \longrightarrow A$$

et

$$K_i^R : A^{m-1} \longrightarrow \text{End}(V)$$

sont multilinéaires puisque, par définition, chaque indéterminée x_i , $i \in [1, m]$, apparaît une et une seule fois dans l'écriture d'un n -monôme d'ordre m .

Soit $f : (A, p_A) \longrightarrow (B, p_B)$ un morphisme d'algèbres n -aires. Il s'agit de montrer que $f : (A, K^{p_A}) \longrightarrow (B, K^{p_B})$ est un morphisme d'algèbres m -aires, ce qui se démontre sans difficulté par induction sur m .

Montrons que l'application $\tilde{F}_K$ est un foncteur. Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme d'algèbre n -aires et $\psi : V \longrightarrow W$ un morphisme de modules définissant un morphisme de la représentation $R \in \text{Rep}(A, V)$ dans la représentation $R' \in \text{Rep}(B, W)$. Il s'agit de montrer que ces applications définissent un morphisme de la représentation $\tilde{F}_K(R)$ dans la représentation $\tilde{F}_K(R')$. Or par la remarque B.2.2, on a pour toute n -forme abstraite multilinéaire L ,

$$\psi \circ L_i^R(a) = L_i^{R'}(a) \circ \psi.$$

En particulier, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on a

$$\psi \circ K_i^R(a) = K_i^{R'}(a) \circ \psi,$$

ce qui prouve que ψ est un morphisme de la représentation $\tilde{F}_K(R) = (K_i^R)$ dans la représentation $\tilde{F}_K(R') = (K_i^{R'})$.

Montrons enfin que pour toute algèbre n -aire (A, p) ,

$$\tilde{F}_K(\text{Reg}^{(A,p)}) = \text{Reg}^{F_K((A,p))}.$$

Soit (A, p) une algèbre n -aire. Par la preuve de la proposition B.2.4, pour tout $a_1, \dots, a_m \in A$,

$$K^p(a) = (K^{\text{Reg}^p})_i(a)(a_i),$$

ce qui prouve le résultat. □

Corollaire B.4.1. *Soit K une n -forme abstraite d'ordre m telle que F_K soit un foncteur de la catégorie des L -algèbres dans celle des L' -algèbres. Alors pour toute L -représentation R de la L -algèbre A , $\tilde{F}_K(R)$ est une L' -représentation de la L' -algèbre $F_K(A)$.*

Démonstration. Rappelons que une algèbre n -aire (A, p) est une L -algèbre si et seulement si Reg^p est une L -représentation.

Soit alors (A, p) une L -algèbre. Puisque $F_K(A)$ est une L' -algèbre, $\text{Reg}^{F_K(A,p)}$ est une L' -représentation. Or

$$\text{Reg}^{F_K(A,p)} = \tilde{F}_K(\text{Reg}^p).$$

D'où

$$L'^{\tilde{F}_K(\text{Reg}^p)} = 0,$$

et ce quelle que soit la L -algèbre (A, p) . Par le principe de permanence, pour toute L -algèbre A , pour toute L -représentation R de A dans une algèbre unitaire, on a

$$L'^{\tilde{F}_K(R)} = 0,$$

ce qui prouve que $\tilde{F}_K(R)$ est une L' -représentation. □

Exemple B.4.1. – *Considérons la 2-forme d'ordre 2*

$$K = x_1x_2 - x_2x_1.$$

L'application F_K définit un foncteur de la catégorie des algèbres associatives dans celle des algèbres de Lie.

– *Considérons la 2-forme d'ordre 2*

$$K = x_1x_2 + x_2x_1.$$

L'application F_K définit un foncteur de la catégorie des algèbres associatives dans celle des algèbres de Jordan.

– *Considérons la 2-forme d'ordre 3*

$$K = (x_1x_2)x_3.$$

L'application F_K est un foncteur de la catégorie des algèbres de Lie dans celle des systèmes triples de Lie.

On en déduit le résultat suivant : si R est une représentation de Lie de l'algèbre de Lie $(A, [,])$ dans l'algèbre unitaire $\mathfrak{A}$, alors on définit une représentation triple de Lie R' du système triple de Lie associé à $(A, [,])$ dans $\mathfrak{A}$ en posant

$$r'_1(y, z) = r_1(z).r_1(y),$$

B.4. FONCTEURS INDUITS PAR UNE FORME ABSTRAITE

$$\begin{aligned}r'_2(x, z) &= r_1(z).r_2(y), \\ r'_3(x, y) &= r_2([x, y]).\end{aligned}$$

– Considérons la 2-forme d'ordre 3

$$K = x_1(x_2x_3) - x_2(x_1x_3) + (x_1x_2)x_3.$$

L'application F_K est un foncteur de la catégorie des algèbres de Jordan dans celle des systèmes triples de Jordan : on en déduit que si R est une représentation de Jordan de l'algèbre de Jordan $(A, .)$, alors on définit une représentation triple de Jordan R' du système triple de Jordan associé à $(A, .)$ en posant

$$\begin{aligned}r'_1(y, z) &= r_1(y.z) - r_2(y).r_1(z) + r_1(z).r_1(y), \\ r'_2(x, z) &= r_2(x).r_1(z) - r_1(x.z) + r_1(z).r_2(x), \\ r'_3(x, y) &= r_2(x).r_2(y) - r_2(y).r_2(x) + r_2(x.y).\end{aligned}$$

– Considérons la 3-forme d'ordre 3

$$K = x_2x_1x_3 - x_1x_2x_3.$$

L'application F_K est un foncteur de la catégorie des systèmes triples de Jordan dans celle des systèmes triples de Lie : si $(A, \{, , \})$ est un système triple de Jordan, on obtient un système triple de Lie $(A, [, ,])$ en posant

$$[x, y, z] = \{y, x, z\} - \{x, y, z\}.$$

Par ce qui précède, on en déduit que si R est une représentation triple de Jordan du système triple de Jordan $(A, \{, , \})$, alors on définit une représentation triple de Lie R' du système triple de Lie associé à $(A, \{, , \})$ en posant

$$\begin{aligned}r'_1(y, z) &= r_2(y, z) - r_1(y, z), \\ r'_2(x, z) &= r_1(x, z) - r_2(x, z), \\ r'_3(x, y) &= r_3(y, x) - r_3(x, y).\end{aligned}$$

Remarque B.4.1. En composant les deux derniers exemples cités, on obtient un foncteur de la catégorie des algèbres de Jordan dans celle des systèmes triples de Lie, induit par la 2-forme abstraite d'ordre 3,

$$K = (x_2x_3)x_1 - x_2(x_3x_1).$$

Soit $(A, \star)$ une algèbre de Jordan. Le crochet triple $[, ,]$ défini par

$$[x, y, z] = (y \star z) \star x - y \star (z \star x)$$

munit l'espace vectoriel A d'une structure de système triple de Lie. Si R est une représentation de Jordan de l'algèbre de Jordan $(A, \star)$, on obtient une représentation triple de Lie R' du système triple de Lie $(A, [, ,])$ en posant

$$\begin{aligned}r'_1(y, z) &= r_2(y \star z) - r_2(y).r_2(z), \\ r'_2(x, z) &= r_1(x).r_1(z) - r_2(y).r_2(z), \\ r'_3(x, y) &= r_1(x).r_2(y) - r_2(y).r_1(x).\end{aligned}$$

Proposition B.4.2. *Soit $(A, \star)$ une algèbre de Jordan. Toute représentation R de $(A, \star)$ dans une algèbre associative $\mathfrak{A}$ est un morphisme des systèmes triples de Lie associés à l'algèbre de Jordan $(A, \star)$ et à l'algèbre associative $\mathfrak{A}$ (ce qui signifie que les applications r_1 et r_2 sont des morphismes de systèmes triples).*

Démonstration. Par définition, l'algèbre $(A, \star)$ annule la 2-forme abstraite

$$\begin{aligned} L = & ((x_1x_2)x_3)x_4 + ((x_2x_4)x_3)x_1 + ((x_4x_1)x_3)x_2 \\ & - (x_1x_2)(x_3x_4) - (x_2x_4)(x_3x_1) - (x_4x_1)(x_3x_2), \end{aligned}$$

ce qui montre que l'application $[a, b, \cdot]$ est une dérivation de l'algèbre $(A, \star)$.

Or, pour toute dérivation f de $(A, \star)$,

$$reg_1^*(f(a)) = [f, reg_1^*(a)].$$

D'où, en notant $[\cdot, \cdot, \cdot]$ le système triple de Lie associé à $(A, \star)$,

$$\begin{aligned} reg_1^*([a, b, c]) &= reg_1^*(reg_3^{[\cdot, \cdot]}(a, b)(c)) \\ &= [reg_3^{[\cdot, \cdot]}(a, b), reg_1^*(c)]. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} reg_3^{[\cdot, \cdot]}(a, b) &= [reg_1^*(a), reg_2^*(b)] \\ &= [reg_1^*(b), reg_1^*(a)] \end{aligned}$$

puisque $reg_1^* = reg_2^*$.

Ainsi

$$reg_1^*([a, b, c]) = [[reg_1^*(a), reg_2^*(b)], reg_1^*(c)],$$

ce qui prouve que reg_1^* est un morphisme de systèmes triples de Lie.

Par le principe de permanence, toute représentation de Jordan d'un algèbre de Jordan dans une algèbre associative est un morphisme de systèmes triples de Lie associés.

□

B.5 Principe de dualité

Lemme B.5.1. *Soit R une représentation de Lie d'une algèbre de Lie $(A, [, ,])$ dans un module V . Alors $R^{op} := -R$ est une représentation de Lie de l'algèbre de Lie $(A, [, ,])$ dans le module V .*

Démonstration. On vérifie directement, par les deux identités définissant une représentation de Lie, que R^{op} est une représentation de Lie pour la structure de $End V^{op}$. En effet, on a, puisque R vérifie ces deux identités,

$$r^{op} = -l^{op}$$

et

$$\begin{aligned} r^{op}([X, Y]) &= -r([X, Y]) \\ &= r([Y, X]) \\ &= r(Y) \circ r(X) - r(X) \circ r(Y) \\ &= r^{op}(X) \circ^{op} r^{op}(Y) - r^{op}(Y) \circ^{op} r^{op}(X), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait montrer. $\square$

Corollaire B.5.1. *Soit $\star$ une identité en f , fonction d'une variable. Supposons que pour toute algèbre de Lie A , l'identité $\star$ soit vérifiée pour la fonction reg_1 de la représentation régulière de A . Alors, pour toute représentation de Lie R de A dans une algèbre unitaire, l'identité $\star$ est vérifiée en r_1 et l'identité $\star^{op}$ obtenue en renversant l'ordre des facteurs (ie en effectuant les produits dans $\mathfrak{A}^{op}$) est vérifiée en $-r_1$.*

Proposition B.5.1. *Soit R une représentation triple de Lie du système triple de Lie $(A, [, ,])$ dans une algèbre unitaire $\mathfrak{A}$. On obtient une représentation triple de Lie R^{op} du système triple de Lie $(A, [, ,])$ dans l'algèbre opposée $\mathfrak{A}^{op}$ en posant*

$$r_i^{op}(x, y) = r_i^{op}(y, x).$$

Démonstration. On peut vérifier directement par les identités définissant une représentation triple de Lie que si R est une représentation triple de Lie du système triple de Lie $(A, [, ,])$ dans une algèbre unitaire $\mathfrak{A}$, alors R^{op} est une représentation triple de Lie du système triple de Lie $(A, [, ,])$ dans l'algèbre opposée $\mathfrak{A}^{op}$.

Une autre manière de le comprendre est d'utiliser le principe de dualité obtenu pour les représentations de Lie d'une algèbre de Lie.

Soit $(B, [, ,])$ un système triple de Lie. Il existe une algèbre de Lie $(A, [, ,])$ telle que le système triple de Lie de B soit la restriction à B du système triple de Lie $(A, [, ,])$, image de l'algèbre de Lie $(A, [, ,])$ par le foncteur F_K avec

$$K = (x_1 x_2) x_3.$$

La représentation régulière $Reg(STL)$ du système triple $(A, [, ,])$ est alors l'image par $\tilde{F}_K$ de la représentation régulière $Reg(AL)$ de l'algèbre de Lie $(A, [, ,])$.

Or, par ce qui précède, $R := -Reg(AL)$ est une représentation de Lie de l'algèbre de Lie $(A, [, ,])$ dans l'algèbre opposée $End(A)^{op}$. Ainsi, $R' := \tilde{F}_K(R)$ est une représentation triple de Lie du système triple de Lie $(A, [, ,])$.

On obtient

$$\begin{aligned} r'_1(Y, Z) &= r_1(Z).{}^{op}r_1(Y) \\ &= reg_1(Y).reg_1(Z) \\ &= reg_1(Z, Y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r'_2(X, Z) &= r_1(Z).{}^{op}r_2(X) \\ &= reg_2(X).reg_1(Z) \\ &= reg_2(Z, X), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r'_3(X, Y) &= r_2([X, Y]) \\ &= -reg_2([X, Y]) \\ &= reg_2([Y, X]) \\ &= reg_3(Y, X). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout système triple de Lie A , on obtient une représentation triple de Lie Reg^{op} de A dans l'algèbre opposée $End(A)^{op}$ en posant

$$reg_i^{op}(X, Y) = reg_i(Y, X).$$

Par le principe de permanence, ce résultat est vrai pour n'importe quelle représentation triple de Lie d'un système triple de Lie dans une algèbre unitaire $\mathfrak{A}$.

□

On obtient alors un principe de dualité, semblable à celui énoncé par O. Loos pour les paires de Jordan dans [24] :

Corollaire B.5.2. *Soit $\star$ une identité en f_1, f_2, f_3 , trois fonctions de deux variables. Supposons que pour tout système triple de Lie A , l'identité $\star$ soit vérifiée pour les fonctions reg_1, reg_2, reg_3 de la représentation régulière de A . Alors, pour toute représentation triple de Lie R de A dans une algèbre unitaire, l'identité $\star$ est vérifiée en r_1, r_2, r_3 et l'identité $\star^{op}$ obtenue en renversant l'ordre des facteurs (ie en effectuant les produits dans $\mathfrak{A}^{op}$) est vérifiée en $r_1^{op}, r_2^{op}, r_3^{op}$, où*

$$r_i^{op}(x, y) = r_i(y, x).$$

Par exemple, si on reprend les cinq identités définissant initialement un système triple de Lie au sens de N.Jacobson (cf [14]), on montre que les deux dernières sont une conséquence du principe de dualité énoncé ci-dessus.

Bibliographie

- [1] W. Bertram. *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces over general base fields and rings*. Memoirs of the AMS, to appear. arXiv :math.DG/0502168, 2005.
- [2] W. Bertram, H. Glöckner, and K.-H. Neeb. Differential calculus over general base fields and rings. *Expo. Math.*, 22(3) :213–282, 2004.
- [3] Wolfgang Bertram. *The geometry of Jordan and Lie structures*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [4] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. XI. Première partie : Les structures fondamentales de l'analyse. Livre II : Algèbre. Chapitre IV : Polynômes et fractions rationnelles. Chapitre V : Corps commutatifs*. Actualités Sci. Ind., no. 1102. Hermann et Cie., Paris, 1950.
- [5] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3*. Hermann, Paris, 1970.
- [6] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXVII. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre II : Algèbres de Lie libres. Chapitre III : Groupes de Lie*. Hermann, Paris, 1972. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1349.
- [7] Renate Carlsson. n -ary algebras. *Nagoya Math. J.*, 78 :45–56, 1980.
- [8] Élie Cartan. *Œuvres complètes. Partie I*. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), Paris, second edition, 1984. Groups de Lie. [Lie groups].
- [9] Manon Didry. Construction of groups associated to Lie- and to Leibniz-algebras. *article soumis*, 2006.
- [10] Samuel Eilenberg. Extensions of general algebras. *Ann. Soc. Polon. Math.*, 21 :125–134, 1948.
- [11] Bruno Harris. Cohomology of Lie triple systems and Lie algebras with involution. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 98 :148–162, 1961.
- [12] P. J. Hilton and U. Stammbach. *A course in homological algebra*, volume 4 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.
- [13] Terrell L. Hodge and Brian J. Parshall. On the representation theory of Lie triple systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 354(11) :4359–4391 (electronic), 2002.
- [14] N. Jacobson. General representation theory of Jordan algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 70 :509–530, 1951.
- [15] Nathan Jacobson. Lie and Jordan triple systems. *Amer. J. Math.*, 71 :149–170, 1949.
- [16] Fujio Kubo and Yoshiaki Taniguchi. A controlling cohomology of the deformation theory of Lie triple systems. *J. Algebra*, 278(1) :242–250, 2004.
- [17] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.

- [18] William G. Lister. A structure theory of Lie triple systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 72 :217–242, 1952.
- [19] J-L. Loday. Une version non commutative des algèbres de Lie : les algèbres de Leibniz. *Enseign. Math. (2)*, 39(3-4) :269–293, 1993.
- [20] O. Loos. Reflexion spaces and homogeneous symmetric spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 :250–253, 1967.
- [21] O. Loos. *Symmetric spaces. I : General theory*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.
- [22] Ottmar Loos. Alternative Tripelsysteme. *Math. Ann.*, 198 :205–238, 1972.
- [23] Ottmar Loos. Representations of Jordan triples. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 185 :199–211 (1974), 1973.
- [24] Ottmar Loos. *Jordan pairs*. Springer-Verlag, Berlin, 1975. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 460.
- [25] Kevin McCrimmon. *A taste of Jordan algebras*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [26] Shigeyuki Morita. *Geometry of differential forms*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated from the two-volume Japanese original (1997, 1998) by Teruko Nagase and Katsumi Nomizu, Iwanami Series in Modern Mathematics.
- [27] J-P. Serre. *Lie algebras and Lie groups*, volume 1964 of *Lectures given at Harvard University*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1965.
- [28] Kiyosi Yamaguti. On the cohomology space of Lie triple system. *Kumamoto J. Sci. Ser. A*, 5 :44–52 (1960), 1960.
- [29] K. A. Zhevlakov, A. M. Slin'ko, I. P. Shestakov, and A. I. Shirshov. *Rings that are nearly associative*, volume 104 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1982. Translated from the Russian by Harry F. Smith.

Mademoiselle DIDRY Manon

DOCTORAT DE L'UNIVERSITE HENRI POINCARÉ, NANCY 1
en MATHEMATIQUES

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER N° 1203

Nancy, le 27 juin 2006

Le Président de l'Université



Cette thèse explicite dans un premier temps la construction d'un groupe polynomial associé à une algèbre de Lie sur un anneau. Dans le cas où cette algèbre est intégrable, ce groupe polynomial est donné par le n -jet du groupe de Lie associé. Cette construction passe aux systèmes triples de Lie et il est alors possible d'associer à tout système triple de Lie un espace symétrique polynomial. La deuxième partie de cette thèse est consacrée à l'interprétation géométrique de la notion de représentation linéaire de système triple de Lie, dans le sens du concept de module dégagé par S. Eilenberg [10]. On montre que l'objet géométrique naturellement associé à une représentation du système triple de Lie d'un espace symétrique est un fibré vectoriel muni d'une structure d'espace symétrique compatible avec celle de la base. De tels objets sont appelés fibrés symétriques. Une correspondance analogue entre représentations de système triple de Lie et fibrés symétriques polynomiaux est également explicitée dans le cas général.

In a first part, we describe a method for associating to a Lie algebra over a ring a polynomial group. In the case where this Lie algebra comes from a Lie group, the polynomial group corresponds to the n -jet of the Lie group. Then we extend this construction to the case of Lie triple systems and associate to each Lie triple system over a ring a polynomial symmetric space. The second part of this thesis is devoted to the study of a geometric interpretation of the notion of Lie triple system representation, in the sense of the module concept, introduced by S. Eilenberg [10]. We establish that the geometric object naturally associated to a representation of a Lie triple system coming from a symmetric space is a vector bundle over this symmetric space, carrying a symmetric space structure, compatible with the one of the base. Such an object is called a symmetric bundle. A similar correspondence between Lie triple system representations and polynomial symmetric bundles is also pointed out in the general case.

Discipline : Mathématiques

Mots clés : Algèbre de Lie, groupe polynomial, formule de Campbell-Hausdorff, nombres de Lie, système triple de Lie, espace symétrique, espace à symétries, représentation de système triple de Lie, algèbre n -aire, fibré symétrique.

Institut Élie Cartan Nancy
Laboratoire de Mathématiques
B.P. 239 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex
