



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Faculté des Sciences et Techniques - UFR STMP
École Doctorale EMMA (Énergétique, Mécanique et Matériaux)
Département de Formation doctorale : Mécanique Énergétique

Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I
en Mécanique et Énergétique

par

Nacer BEROUR

Modélisation du transfert de chaleur par rayonnement, conduction et convection. Application aux fours verriers

Soutenue le 3 Novembre 2005

Composition du jury

<i>Président :</i>	Alain DEGIOVANNI	Professeur, Institut National Polytechnique de Lorraine
<i>Rapporteurs :</i>	Véronique FELDHEIM Anouar SOUFIANI	Professeur, Faculté Polytechnique de Mons (Belgique) Directeur de Recherche CNRS, École Centrale de Paris
<i>Examineurs :</i>	Gérard JEANDEL David LACROIX Laurent PIERROT	Professeur, Université Henri Poincaré, Nancy-I Maître de Conférences, Université Henri Poincaré, Nancy-I Docteur-Ingénieur, St Gobain Recherche

Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée — UMR 7563
Faculté des Sciences et Techniques, B.P. 239-54506 Vandoeuvre les Nancy cedex, FRANCE

BIBLIOTHEQUE SCIENCES NANCY 1



D 095 172549 6

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMTA), à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1, laboratoire dirigé par Monsieur le Professeur C. Moyne.

Je remercie tout d'abord Monsieur le Professeur G. Jeandel de m'avoir accueilli au sein de son équipe de recherche TRMC (Transfert Radiatif dans les Milieux Complexes) et pour la confiance qu'il m'a accordée ainsi que pour ses qualités d'écoute. Il a toujours montré beaucoup de disponibilité pour me faire bénéficier de sa grande expérience et ses précieux conseils m'ont fortement aidé pour mener à bien ce travail.

Je tiens également à exprimer mes vifs remerciements à Monsieur D. Lacroix, Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1, qui a assuré la direction scientifique de cette thèse. Sa valeur scientifique, son dynamisme, ses conseils mais aussi sa sympathie, auront toujours été pour moi un soutien lorsque les résultats se faisaient attendre. Qu'il trouve ici toute ma reconnaissance.

Toute ma gratitude va à Monsieur le Professeur A. Degiovanni de l'Institut National Polytechnique de Lorraine pour s'être intéressé à cette recherche et pour avoir bien voulu présider le jury de thèse.

Je remercie aussi Monsieur A. Soufiani, Directeur de Recherche CNRS à l'École Centrale de Paris, et Madame le Professeur V. Feldheim de la Faculté Polytechnique de Mons (Belgique) d'être les rapporteurs de ce travail. L'intérêt qu'ils ont porté à cette étude et leurs connaissances des transferts de chaleur couplé m'ont valu de nombreuses remarques constructives.

Je tiens à associer dans tous ces remerciements l'équipe avec laquelle j'ai travaillé durant trois années dans une excellente ambiance, en particulier, Messieurs ; P. Boulet, A. Warin, G. Parent, F. Asllanaj, X. Brige, A. Collin ainsi que B. Monod.

J'ai une pensée particulière pour mes frères Foudil et Hamid qui ont été mon plus grand soutien durant tout mon parcours scolaire.

Enfin, merci à ma toute famille de l'autre côté de la mer ; sa confiance et ses encouragements ont toujours été mon réservoir de volonté.

Memorandum

On 11/11/1918, the following was received from the Bureau of the Census, Washington, D.C.:

The Bureau of the Census has been advised by the Bureau of the Census, Washington, D.C., that the following information is being furnished to the Bureau of the Census, Washington, D.C.:

The Bureau of the Census has been advised by the Bureau of the Census, Washington, D.C., that the following information is being furnished to the Bureau of the Census, Washington, D.C.:

The Bureau of the Census has been advised by the Bureau of the Census, Washington, D.C., that the following information is being furnished to the Bureau of the Census, Washington, D.C.:

The Bureau of the Census has been advised by the Bureau of the Census, Washington, D.C., that the following information is being furnished to the Bureau of the Census, Washington, D.C.:

The Bureau of the Census has been advised by the Bureau of the Census, Washington, D.C., that the following information is being furnished to the Bureau of the Census, Washington, D.C.:

The Bureau of the Census has been advised by the Bureau of the Census, Washington, D.C., that the following information is being furnished to the Bureau of the Census, Washington, D.C.:

The Bureau of the Census has been advised by the Bureau of the Census, Washington, D.C., that the following information is being furnished to the Bureau of the Census, Washington, D.C.:

*Je dédie cette thèse
à mes parents.*

1971-1972
1973-1974

Table des matières

Nomenclature	9
Acronymes	11
Introduction générale	13
1 Méthode des Volumes Finis appliquée aux transferts conducto-radiatifs	21
1.1 Introduction	21
1.2 Équation du Transfert Radiatif	21
1.3 Méthodes numériques	23
1.3.1 Approximation de diffusion	23
1.3.2 Méthodes du tracé de rayons et de Monte Carlo	23
1.3.3 Approximation P_N	24
1.3.4 Méthodes des Ordonnées Discrètes et des Volumes Finis	24
1.4 Méthode des Volumes Finis (MVF)	24
1.4.1 Discrétisation spatiale	25
1.4.2 Discrétisation angulaire	27
1.4.3 Discrétisation spectrale	28
1.5 Relations de fermetures	28
1.5.1 Approximation STEP	28
1.5.2 Approximation Exponentielle	30
1.5.3 Approximation Exponentielle Modifiée	32
1.5.4 Approximation Exponentielle à Température Linéarisée (MELT)	35
1.6 Validation du modèle radiatif	38
1.6.1 Gaz entre deux plaques noires	38
1.6.2 Gaz dans une enceinte carrée noire	40
1.7 Couplage de la conduction avec le rayonnement	42
1.7.1 Équation de Conservation de l'Énergie	42
1.7.2 Discrétisation de l'équation de conservation de l'énergie	44

1.7.3	Linéarisation du terme source radiatif	46
1.7.4	Adimensionnement et Nombre de Stark	47
1.7.5	Validation pour un gaz gris entre deux plaques noires	48
2	Rayonnement et Conduction dans les Fours Verriers	51
2.1	Introduction	51
2.2	Géométrie simplifiée d'un four verrier	51
2.3	Conditions aux limites	52
2.3.1	Conditions aux limites radiatives	52
2.3.2	Conditions aux limites thermiques	54
2.4	Propriétés optiques et thermiques du verre	55
2.4.1	Caractéristiques optiques	55
2.4.2	Caractéristique thermique - conductivité	55
2.5	Modèle de Rosseland - Approximation de diffusion	56
2.6	Validation unidimensionnelle	57
2.6.1	Modèle physique et numérique	58
2.6.2	Cas test 1	59
2.6.3	Cas test 2	65
2.6.4	Conclusions pour le modèle unidimensionnel	67
2.7	Validation bidimensionnelle	68
2.7.1	Modèle physique et numérique	68
2.7.2	Cas test 1 : $H \times L = 1m \times 10m$ - verre clair	69
2.7.3	Cas test 2 : $H \times L = 1m \times 2m$ - verre clair	71
2.7.4	Cas test 3 : $H \times L = 0.1m \times 1m$ - verre clair	75
2.7.5	Cas test 4 : $H \times L = 1m \times 20m$ - verre vert	76
2.8	Études de sensibilité	80
2.8.1	Sensibilité aux quadratures angulaires	80
2.8.2	Sensibilité au nombre de mailles	81
2.8.3	Sensibilité au pas de maillage	84
3	Méthode des Volumes Finis pour le transfert par convection et rayonne-	89
	ment	
3.1	Introduction	89
3.2	Équations et notations	91
3.3	Discrétisation de l'équation de transport	92
3.4	Schémas de discrétisation : relations de fermeture	96
3.4.1	Schéma UDS	97

3.4.2	Schéma CDS	98
3.4.3	Schéma HDS	98
3.4.4	Schéma Quick	98
3.4.5	Schéma CDS de 4 ^{ème} ordre	98
3.5	Technique de la correction reportée	99
3.5.1	Schéma CDS de 4 ^{ème} ordre	100
3.5.2	Schéma Quick	102
3.6	Modélisation des équations de Navier-Stokes	104
3.6.1	Discretisation	104
3.6.2	Correction pression-vitesse	106
3.7	Convection forcée	108
3.7.1	Évaluation des performances de plusieurs formulations du schéma Quick	111
3.8	Convection naturelle	114
3.9	Convection thermocapillaire (effet MARANGONI)	118
3.10	Couplage convection naturelle-rayonnement	120
3.10.1	Conditions aux limites	126
3.10.2	Confrontation des résultats	126
4	Modélisation des fours verriers	129
4.1	Introduction	129
4.2	Limites de l'approximation de Rosseland	129
4.3	Modèle de Rosseland Modifié	132
4.4	Modélisation du chauffage du bain	132
4.4.1	Cavité de $1m \times 2m$	134
4.4.2	Cavité de $1m \times 10m$	142
4.4.3	Conclusion	143
4.5	Modèle complet	145
4.5.1	Modèle de Batch	146
4.5.2	Tirage du verre fondu	147
4.6	Modélisation du four Ford Nashville	148
4.6.1	Caractéristiques du four et modèle physique	148
4.6.2	Résultats	149
	Conclusion	153
A	Quadratures angulaires	157

B Quadratures spectrales	161
C Règles de stabilité des schémas	163
Bibliographie	167

Nomenclature

A_i	surface frontières d'une maille, $[m^2]$
$A_{i\lambda}^m$	contribution de l'absorption dans le calcul de la luminance, $[W m^{-2} sr^{-1}]$
C_i^m	cosinus directeur pondéré, $[sr]$
C_p	chaleur spécifique, $[J kg^{-1} K^{-1}]$
d_i^m	longueur de propagation, $[m]$
$D_{i\lambda}^m$	contribution de la diffusion dans le calcul de la luminance, $[W m^{-2} sr^{-1}]$
$E_n(x)$	fonction intégrale exponentielle
G	luminance intégrée, $[W m^{-2}]$
h_i	coefficient d'échange convectif, $[W m^{-2} K^{-1}]$
h	enthalpie massique, $[J kg^{-1}]$
H	hauteur, $[m]$
$\mathcal{H}_c$	enthalpie de la réaction chimique, $[J kg^{-1}]$
K_g	coefficient d'échange global, $[W m^{-2} K^{-1}]$
k_c	conductivité thermique, $[W m^{-1} K^{-1}]$
l, L	longueur de référence, $[m]$
L_λ	luminance, $[W m^{-2} sr^{-1} \mu m^{-1}]$
L_λ^0	luminance du corps noir, $[W m^{-2} sr^{-1} \mu m^{-1}]$
n	indice de réfraction
$\vec{n}_i$	vecteur normal à la surface i
N_{xx}, N_{xy}, N_{yy}	intégration du double produit scalaire sur l'angle solide de contrôle $[sr]$
N_{vol}	nombre de volume de contrôle
$\vec{q}_c$	flux conductif, $[W m^{-2}]$
$\vec{q}_r$	flux radiatif, $[W m^{-2}]$
$\vec{q}_t$	flux total, $[W m^{-2}]$
R, R_a	fonction source de l'ETR, $[W m^{-3} sr^{-1}]$
p	pression $[Pa]$
Q	puissance $[W]$
$S_n(x)$	fonction intégrale exponentielle
s	vecteur position
S_r	terme source radiatif, $[W m^{-3}]$
t	temps, $[s]$
T	température, $[K]$
u, v, w	composantes de la vitesse, $[m s^{-1}]$
V_P	volume de contrôle, $[m^3]$
$\vec{V}$	vitesse, $[m s^{-1}]$

Symboles grecs

α	diffusivité thermique, $[m^2 s^{-1}]$
$\beta_\lambda, \beta_{a\lambda}$	coefficient d'extinction, $[m^{-1}]$
$\Delta x, \Delta y$	dimension d'une maille, $[m]$
$\Delta\Omega^m$	poids angulaire associé à la direction m , $[sr]$
ϵ	émissivité
κ	coefficient d'absorption, $[m^{-1}]$
λ	longueur d'onde, $[m]$
Φ	fonction de phase de diffusion

Nomenclature

μ	viscosité dynamique, [Pa s]
μ, ξ, η	cosinus directeurs
Ω	direction de propagation du rayonnement
ρ	masse volumique, [kg m ⁻³]
ρ_λ	réflectivité
σ	coefficient de diffusion, [m ⁻¹]
σ_B	constante de Boltzmann
τ_λ	transmittivité

Indices et exposants

b	batch
f	fluide
m	direction discrète du rayonnement
n, e, s, w	faces d'une maille
N, E, S, W, P	nœuds autour d'une maille
0	corps noir
$O.Inf$	ordre inférieur
$O.Sup$	ordre supérieur
s	sortie
v	verre
$*$	itération précédente
$*$	grandeurs adimensionnées

Nombres sans dimension

Ma	Nombre de Marangoni, [-]
Nu	Nombre de Nusselt, [-]
Pe	Nombre de Péclet, [-]
Pl	Nombre de Planck, [-]
Pr	Nombre de Prandtl, [-]
Ra	Nombre de Rayleigh, [-]
Re	Nombre de Reynolds, [-]
Ns	Nombre de Stark, [-]
τ	épaisseur optique, [-]

Acronymes

CDS	Schéma aux différences centrées (Central Differencing Scheme)
DSC	Discrete Singular Convolution
EDP	Équation aux Dérivées Partielles
ETR	Équation du Transfert Radiatif
HDS	Schéma hybride (Hybrid Differencing Scheme)
MDF	Méthode des Différences Finies
MEF	Méthode des Éléments Finis
MELT	Modified Exponential Linearized Temperature scheme
MOD	Méthode des Ordonnées Discrètes
MR	Modèle de Rosseland
MRM	Modèle de Rosseland Modifié
MST	Milieu Semi Transparent
MVF	Méthode des Volumes Finis
PDS	Schéma puissance (Power-law Differencing Scheme)
PISO	Pressure Implicit with Splitting Operators
SIMPLE	Semi Implicit Method for Pressure Linked Equation
SIMPLEC	Semi Implicit Method for Pressure Linked Equation Consistant
SIMPLER	Semi Implicit Method for Pressure Linked Equation Revised
SIMPLEV	Semi Implicit Method for Pressure Linked Equation Vincent
UDS	Schéma upwind (Upwind Differencing Scheme)

Introduction générale

Histoire du verre

La production de verre est l'une des formes les plus antiques de l'industrie. On a trouvé des objets en verre enduits remontant à 12.000 ans av. *J.C.* De même, à l'époque de l'Égypte ancienne, les articles en verre étaient considérés comme des objets de luxe que l'on ne trouvait que dans les tombes des prêtres et des membres de la famille royale. De véritables objets de verre ont été produits dans la civilisation mésopotamienne (Irak) vers 4.500 ans av. *J.C.*

La découverte de la production du verre était probablement accidentelle. La bonne combinaison des ingrédients nécessaires : cendre de soude, pierre à chaux (coquillages) et sable (silice), réunis par hasard et exposés à un feu (de camp) pouvait ainsi conduire à la création de verre.

À l'origine, pour fabriquer des récipients en verre, on recouvrait un noyau d'argile de verre fondu, et on enlevait ensuite ce noyau lorsque le verre avait refroidi. Un progrès technologique a été le développement du soufflage du verre. La canne du souffleur fut inventée vers l'an 100 av. *J.C.* Les verriers purent alors créer des récipients plus grands en moins de temps. Cette technique naît au début de notre ère en Palestine et en Syrie. Elle consiste à recueillir le verre en fusion à l'extrémité d'une canne creuse dans laquelle on souffle afin de donner à l'objet la forme désirée. Peu après, le verre est devenu un article d'utilisation quotidienne dans tout l'empire romain. Le nouvel art du soufflage du verre se répand dans toute l'Europe avec l'expansion de l'Empire Romain. Après sa chute, des centres de verrerie se sont établis à Venise, en France, en Allemagne et en Grande-Bretagne. En Amérique du Nord, les premières productions datent de 1608, mais la véritable première verrerie ne fut créée qu'en 1739. La fabrication du verre au Canada remonte au *XIX^{ème}* siècle.

En France c'est au *XIV^{ème}* siècle que la technique du verre plat voit le jour en Normandie. Au *XVIII^{ème}* siècle, l'industrie verrière naissante se développe à travers plusieurs manufactures. Certaines d'entre elles produisent plus d'un million de bouteilles par an. La quantité reste cependant limitée car ces bouteilles sont encore soufflées à la bouche.

L'utilisation du charbon, à la place du bois pour chauffer les fours, améliore leur fonctionnement. Les premières machines qui automatisent la production sont introduites dans les usines. Enfin, le soufflage artisanal est progressivement remplacé par un jet d'air comprimé associé à l'utilisation de moules métalliques. On peut considérer qu'à partir de ce moment l'industrie verrière moderne est née. C'est au *XX^{ème}* siècle qu'elle deviendra une industrie de masse, ceci à travers la mise en place des fours à feu continu et aux progrès réalisés dans l'automatisation de la production. Ils permettront le développement de production en grandes

séries. Elle ne cessera au cours du siècle d'intégrer les avancées technologiques, en particulier la simulation des procédés de fabrication grâce à l'informatique.

Fours verriers

La formulation de base - sable, soude et chaux - n'a pas changé au fil des siècles, mais il existe bien des variantes. Par exemple, l'ajout de potasse et de plomb améliore la qualité du verre, alors que l'introduction de cobalt, de soufre ou d'autres minéraux le colore. Pour accélérer la fusion, on ajoute au mélange de matières premières du calcin, un déchet de verre. Les ingrédients pour fabriquer le verre sont mélangés et fondus dans de grandes cuves chauffées dans un four. Il s'agit de fours à pots (discontinus). Actuellement, il existe de nombreux types de fours correspondant aux diverses productions. Le volume, la nature du chauffage et les différentes parties de four sont choisis en fonction de la capacité de production et du produit final.

Fours à pot (procédé discontinu)

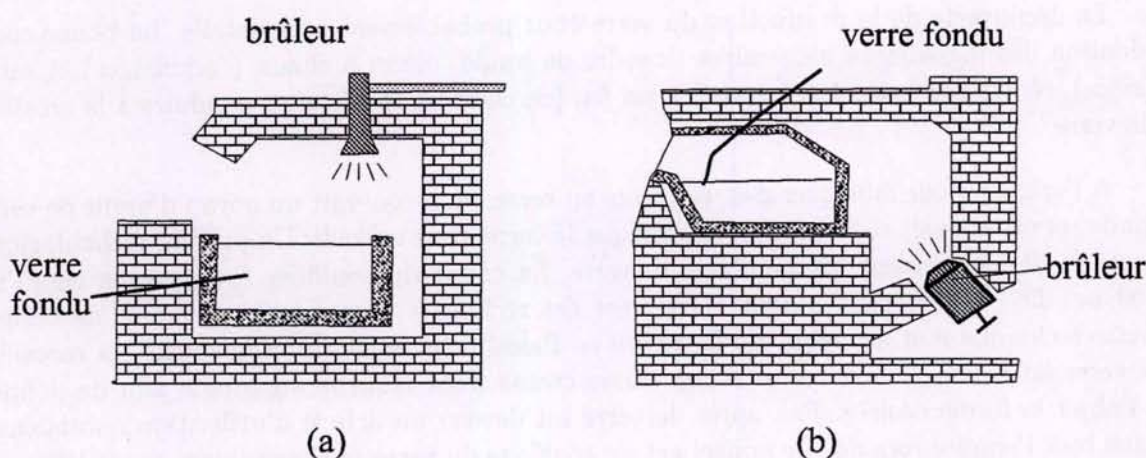


FIG. 1 – Principe du four à pot

Jusqu' à la première moitié du *XIX^{ème}* siècle, le verre était fondu dans des fours discontinus (four à pot Fig. 1). Dans un tel four, le verre fondu est contenu dans des pots de volume égal à la production journalière. Ces fours fonctionnent selon un cycle de 24 heures : en effet le pot chauffé est chargé le soir en matières premières afin que le verre fondu durant la nuit soit prêt à être utilisé par le verrier le lendemain. Ce type de fours, destiné au cueillage manuel, n'est plus utilisé aujourd'hui que dans des verreries artisanales et des cristalleries (telles que les cristalleries de Baccarat) où les productions journalières sont faibles.

Fours continus

Dans la seconde moitié du *XIX^{ème}* siècle fut développé le premier four continu (Fig. 2) : le four de Siemens-Martin. De nos jours, ce type du four est ajusté aux demandes spécifiques des industriels du verre. Les matières premières sont chargées sans interruption à une extrémité du four ; le verre fondu est traité à l'autre extrémité. Le processus d'affinement (c.-à-d. évacuation

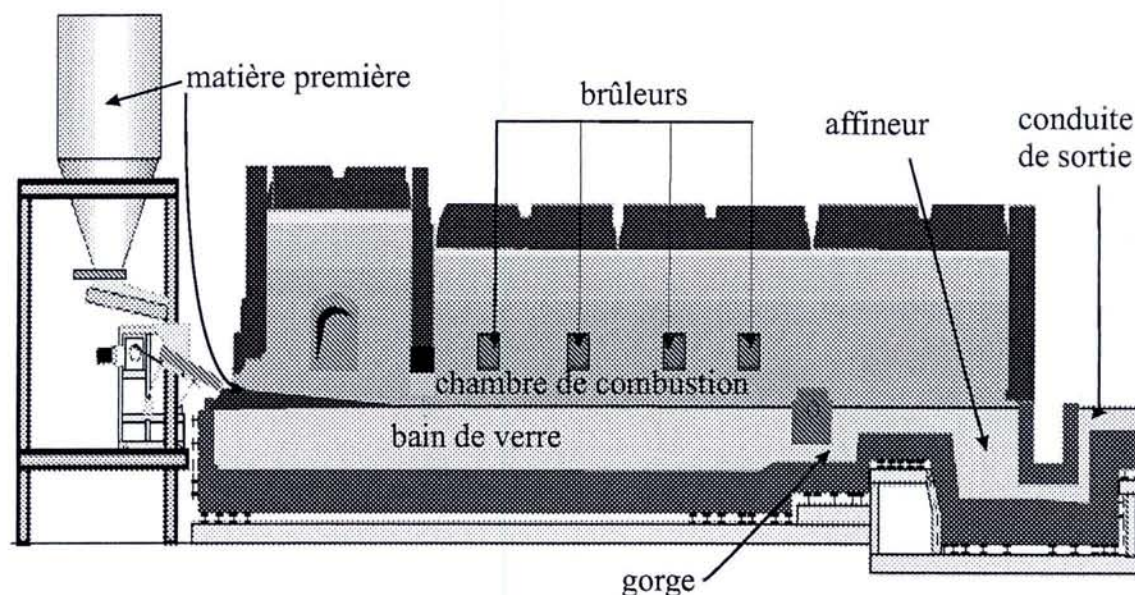


FIG. 2 – Coupe verticale d'un four continu

des gaz et des bulles) ainsi que l'homogénéisation de la température ont lieu dans le même réservoir (le bain de verre). Le temps de résidence typique du verre est de 24 heures pour une production de l'ordre de 250 tonnes de verre par jour.

Fonctionnement d'un four continu

Dimensions

Un four de verrier se compose du bain de verre et d'une superstructure (chambre de combustion) (Fig. 3). Dans le bain, le verre est fondu, affiné et homogénéisé. La longueur d'un tel réservoir se situe entre 8 et 50 m, pour une largeur entre 5 à 15 m et une profondeur comprise entre 0.6 à 1.5 m. La hauteur de la chambre de combustion évolue selon la largeur du four. Elle est comprise entre 1 et 2.5 m.

Bain et affineur

La matière première est déposée en amont du four (Fig. 2). Le passage à l'état vitreux a lieu à haute température (entre 1600 et 2000 K) dans la première partie du four. Le verre fondu s'écoule vers la sortie du bain en passant par une gorge qui le conduit vers l'affineur. Dans cette partie du four, le verre est affiné et refroidi de 200 à 300 K par un soufflage d'air. Dans les canaux d'évacuation, un refroidissement supplémentaire est souvent nécessaire.

Conduites

La cuve d'affinage est reliée par une ou plusieurs conduites aux machines de fabrication des produits verriers. Le verre dans les canaux est utilisable à une viscosité et pour une homogénéité thermique données. Ceci implique que les différences de température lors de l'écoulement soient minimales. En outre, la capacité de refroidissement de ces conduites est conçue pour un rendement maximum. Les canaux conducteurs sont faits de matériaux réfractaires (AZS

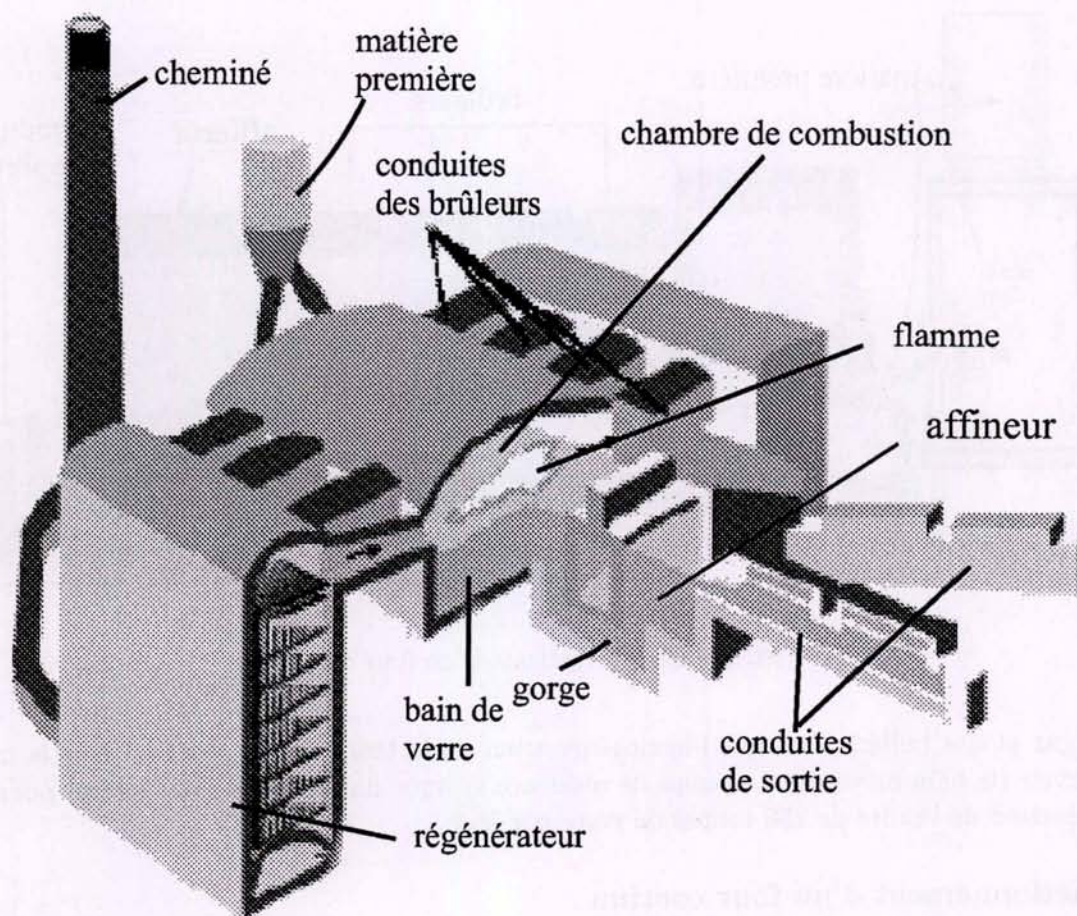


FIG. 3 - four continu

ou alumine) et mesurent en général 50 à 120 centimètres de large. Ils ont une profondeur d'environ 30 centimètres et sont construits en pente pour permettre l'écoulement du verre fondu.

Échangeurs de chaleur (régénérateurs)

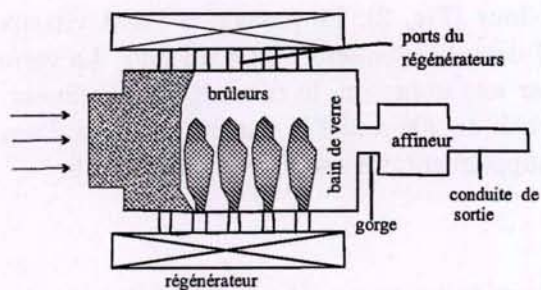


FIG. 4 - Four à flammes croisées

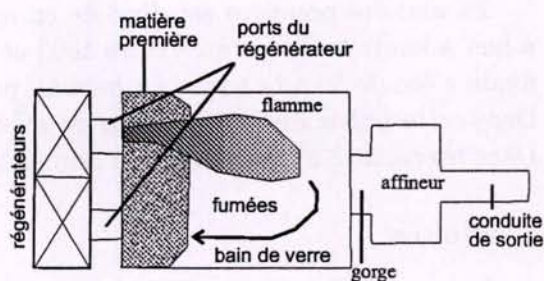


FIG. 5 - Four à flammes parallèles

Pour augmenter l'efficacité des flammes dans le four, l'air de combustion est préchauffé

dans de grands régénérateurs qui utilisent la chaleur contenue dans les fumées. Les fours à régénération ont habituellement deux régénérateurs. Un régénérateur se compose de la chambre de régénération où des briques réfractaires ont été empilées. Ces briques forment une construction régulière avec des canaux où circulent alternativement les fumées puis l'air de combustion. Les fumées traversent le régénérateur en cédant leur chaleur aux briques réfractaires qui la restituent lors du passage de l'air de combustion qui est préchauffé de 1300 à 1500 K. Les régénérateurs existent pour les four à flammes croisées (Fig. 4) et fours à flammes parallèles (Fig. 5).

Fours à flammes croisées

Dans ces fours, les brûleurs sont situés le long des parois latérales perpendiculaires à l'entrée et à la sortie de verre (Fig. 2, Fig. 4). Ils sont destinés à la grande production.

Fours à flammes parallèles

Dans les fours à flammes parallèles (Fig. 5), le brûleur et les régénérateurs sont situés en amont du four. Ils sont également nommés fours uniflammes. L'intérêt de ce type de four réside dans leur compacité. Cela minimise les pertes de chaleur et donc la consommation de l'énergie. En revanche, étant donné leur taille réduite, ils ne peuvent pas suivre les grandes cadences de production.

Transfert de chaleur dans les fours verriers

Dans un four verrier, le transfert de chaleur se fait par le couplage de trois modes que sont le rayonnement, la conduction et la convection. La non-homogénéité du rayonnement à la surface du bain est due à la présence ou non des brûleurs dans la chambre de combustion. Elle induit des gradients thermiques horizontaux qui sont responsables de la convection naturelle dans le bain du verre. Ce mouvement favorise l'homogénéisation de la température et de la matière. Ainsi, le contrôle des échanges radiatifs peut représenter une voie privilégiée pour atteindre des conditions thermiques optimales dans un four verrier.

En raison des niveaux de températures auxquels le verre est traité, le rayonnement doit être pris en considération si l'on veut connaître précisément la température ainsi que les mouvements du verre dans le four dus aux effets thermocapillaire et thermogravitationnel. Bien que la physique des échanges de chaleur par rayonnement soit maîtrisée depuis longtemps, les solutions numériques restent difficiles à mettre en œuvre. Ce travail de thèse cherche à établir des méthodes numériques adaptées à la complexité du problème.

L'augmentation des coûts énergétiques et la concurrence croissante entre les fabricants de verre ont poussé ces derniers à rechercher des moyens d'optimisation de la production. Pour réaliser une réduction de la dépense d'énergie, les usines modernes de fabrication du verre se servent de fours à régénérateurs qui sont très performants énergiquement, mais nécessitent des investissements lourds. Ces dernières années, les fours ont souvent été équipés de systèmes de commande de rétroaction qui ajustent les paramètres du four en fonction de mesures de la température du verre. En général, la mesure de la température du verre est faite dans les conduites d'évacuation. L'inhomogénéité de la température, responsable de défauts sur les produits finis, est souvent découverte dans cette zone. Pour réaliser des systèmes de commande

fiables, on ne peut pas se fonder seulement sur l'expérience des opérateurs du four. Des modèles de simulation sont nécessaires pour établir des corrélations entre la fusion du verre et les paramètres du four (débit d'entrée de la matière première, débit de la masse fusionnée, intensité de chauffage, ...). Les critères économiques ne sont pas uniquement liés au coût de l'énergie et au rendement de fours. Les coûts associés au rejet d'une partie de la production d'objets manufacturés pour cause de défauts (bulles, fissures, ...) sont aussi imputables à une mauvaise gestion de la température du verre fondu à la sortie de four. Ainsi, un facteur important dans la simulation de la production du verre est donc la connaissance précise de la distribution des températures dans le four. Celle-ci a une grande influence sur divers paramètres, tels que la viscosité et la composition chimique du produit.

Le calcul de la température du verre fondu est compliqué du fait de la nature semi-transparente de ce matériau dans la région infrarouge du spectre.

La qualité du verre est non seulement liée à la connaissance de la température du verre dans toutes les parties du four mais aussi à l'affinage (élimination des bulles gazeuses) et à l'homogénéisation de la masse vitreuse. Ces deux facteurs dépendent étroitement des courants qui se créent dans le verre en fusion sous l'effet de la convection naturelle, thermocapillaire et forcée. Ces courants ont un effet bénéfique si ils augmentent le temps de séjour du verre dans le four, apportant plus de brassage et d'affinage. Cependant, si ils sont mal établis, ils peuvent avoir un effet contraire en accélérant le passage du verre non affiné vers la sortie du four.

La visualisation expérimentale de tels courants dans le bain de verre, pour les fours en fonctionnement, est complexe, coûteuse et souvent incompatible avec l'activité industrielle. La modélisation, dans la mesure où elle permet la prévision des courants de verre fondu, présente donc un très grand intérêt. Elle permet, notamment, d'optimiser à moindres frais les dimensions du four.

Plan du travail

Le plan de ce mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous présentons la simulation numérique des transferts de chaleur par rayonnement et conduction. Nous exposons la résolution du problème radiatif par la méthode des volumes finis (MVF). La plus grande partie de ce chapitre est consacrée aux schémas de discrétisation dédiés au transfert radiatif. Dans cette partie, nous exposons également un nouveau schéma de discrétisation. Ensuite, nous détaillons la résolution numérique du transfert couplé conducto-radiatif. Enfin, en raison de la non-linéarité de l'équation de l'énergie due à la présence de rayonnement, nous discutons une technique de linéarisation. Des validations de notre schéma de discrétisation sont faites à chaque étape et comparées à des solutions semi-analytiques. La comparaison de notre approche avec d'autres schémas évoqués dans ce chapitre a été effectuée dans le second chapitre.

Ce chapitre 2 est consacré à l'application du modèle conducto-radiatif aux problèmes de transfert de chaleur dans le verre, en particulier dans les fours verriers. Nous commençons par la présentation du modèle physique : géométrie, conditions aux limites thermiques et radiatives et propriétés physiques du verre. Les résultats de simulation numérique sont proposés pour deux types de verres (verre clair et verre vert) et pour différentes géométries (1-D et 2-D).

Ces résultats sont comparés à ceux de la littérature obtenus avec : la solution intégrale (SI), la Méthode des Ordonnées Discrètes (MOD) et le modèle de Rosseland (MR). Enfin, une

étude de sensibilité des différentes approches utilisées par MVF conclut cette partie

Dans le chapitre 3, nous présentons la résolution numérique, par la MVF, des équations de la mécanique des fluides (masse, quantité de mouvement et énergie) à travers la discrétisation d'une équation générique de transport. Nous analysons également différentes relations de fermeture utilisées avec la MVF. Étant donné les problèmes de stabilité et de convergence de la MVF, avec certaines relations de fermeture, pour les écoulements à recirculations, nous proposons une nouvelle formulation stable et rapide. Des validations et des comparaisons de cette nouvelle formulation sont discutées dans le cas de la convection forcée avec un fluide quelconque. Ce modèle est aussi testé dans les cas de la convection libre (thermogravitationnelle) et la convection thermocapillaire (prise en compte dans des mouvements de la surface libre dus aux gradients de température). Enfin, nous abordons l'interaction de la convection naturelle et du rayonnement à travers le couplage des deux modèles.

Le chapitre 4 est dédié au couplage des modèles convectif et radiatif, pour étudier les transferts de chaleur et de masse dans un four verrier. Tout d'abord, nous montrons les faiblesses du modèle de Rosseland standard ainsi que de la version corrigée de Howel et Goldstein pour simuler le transfert de chaleur dans le verre fondu. À l'issue de cette analyse, nous proposons une version modifiée du modèle de Rosseland (MRM) capable de mieux simuler les phénomènes physiques à l'interface semi-transparente. Le reste de l'étude est consacré à l'emploi de ces méthodes (MVF et MRM) pour modéliser les échanges de chaleur couplés avec la dynamique du bain de verre soumis à diverses conditions aux limites.

Chapitre 1

Méthode des Volumes Finis appliquée aux transferts conducto-radiatifs

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la résolution numérique des problèmes de transfert radiatif et conductif dans un milieu quelconque. Dans un premier temps, nous exposons l'équation du transfert radiatif ainsi que les méthodes de résolution numérique dédiées aux problèmes radiatifs. A l'issue d'une synthèse de diverses approches, notre choix s'est porté sur la Méthode des Volumes Finis (MVF) que nous exposons en détail dans ce chapitre. Nous présentons également une nouvelle relation de fermeture qui sera validée avec des solutions semi-analytiques. La seconde partie de ce premier chapitre évoque le couplage du rayonnement et de la conduction à travers l'équation de conservation de l'énergie.

1.2 Équation du Transfert Radiatif

L'équation qui définit les échanges par rayonnement est l'Équation du Transfert Radiatif. Elle caractérise les phénomènes de renforcement et d'atténuation le long d'un volume de contrôle de longueur ds dans un angle solide $d\Omega$ (Fig. 1.1).

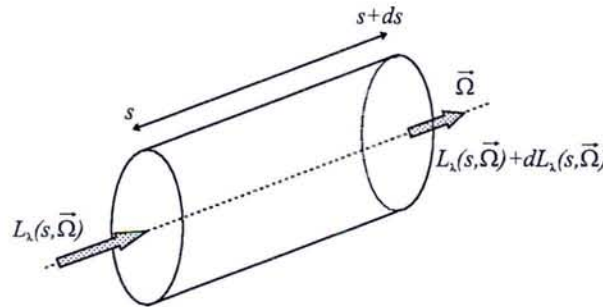


FIG. 1.1 – Volume de contrôle d'un milieu semi-transparent

Elle s'écrit sous la forme suivante en régime permanent :

$$\frac{dL_\lambda(s, \vec{\Omega})}{ds} = -\beta_\lambda L_\lambda(s, \vec{\Omega}) + n_\lambda^2 \kappa_\lambda L_\lambda^0(T) + \sigma_\lambda \bar{L}_\lambda(s, \vec{\Omega}) \quad (1.1)$$

avec :

$$\beta_\lambda = \kappa_\lambda + \sigma_\lambda \quad (1.2)$$

et :

$$\frac{dL_\lambda(s, \vec{\Omega})}{ds} = \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} L_\lambda(s, \vec{\Omega}) \quad (1.3)$$

Le renforcement du rayonnement est dû à l'émission propre du milieu et à la diffusion dans la direction considérée. L'atténuation est provoquée par l'absorption le long du chemin parcouru et par la diffusion dans les autres directions. $\bar{L}_\lambda$ représente le gain par diffusion dans la direction de propagation $\vec{\Omega}$ considérée du fait des contributions de toutes les autres directions $\vec{\Omega}'$:

$$\bar{L}_\lambda(s, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega=4\pi} L_\lambda(s, \vec{\Omega}') \Phi_\lambda(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) d\Omega' \quad (1.4)$$

avec $\Phi_\lambda(\vec{\Omega}', \vec{\Omega})$ qui est la fonction de phase de diffusion ; elle définit la probabilité de diffuser un rayonnement dans une direction $\vec{\Omega}$ donnée compte tenu de la présence d'un rayonnement incident dans la direction $\vec{\Omega}'$.

Par ailleurs, $L_\lambda^0(T)$ est la luminance monochromatique du corps noir à la température T ; elle s'exprime selon la loi de Planck :

$$L_\lambda^0(T) = \frac{C_1}{\lambda^5 \left[e^{\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)} - 1 \right]} \quad (1.5)$$

où $C_1 = 1.9088 \cdot 10^{-16} \text{ W m}^{-2} \text{ sr}^{-1} \mu\text{m}^{-1}$ et $C_2 = 14.388 \mu\text{m K}$; dans le cas présent on exprime λ en μm . L'ETR écrite sous sa forme réduite est une équation différentielle simple :

$$\frac{dL_\lambda(s, \vec{\Omega})}{ds} = -\beta_\lambda L_\lambda(s, \vec{\Omega}) + R_\lambda(s, \vec{\Omega}) \quad (1.6)$$

Nous définissons R_λ , la fonction source de l'ETR, d'après les éq. (1.1) et (1.6), R_λ :

$$R_\lambda = n_\lambda^2 \kappa_\lambda L_\lambda^0(T) + \sigma_\lambda \bar{L}_\lambda \quad (1.7)$$

Les matériaux que nous étudions sont non gris, c'est-à-dire que leurs propriétés optiques évoluent avec la longueur d'onde. Nous devons résoudre l'ETR sur un nombre donné de bandes spectrales, caractéristiques du problème considéré. L'intégration des grandeurs radiatives sur l'ensemble des longueurs d'onde nous donne les grandeurs totales.

Par ailleurs, comme nous le verrons dans la suite de ce mémoire, le couplage de l'ETR et de l'équation de conservation de l'énergie se fait à l'aide d'une grandeur appelée terme source radiatif S_r . Cette grandeur caractérise, en un point de l'espace, la différence entre le rayonnement émis et le rayonnement absorbé dans toutes les directions de propagation et pour l'ensemble des longueurs d'onde :

$$S_r = \int_{\lambda=0}^{\infty} \kappa_\lambda \left[4\pi n_\lambda^2 L_\lambda^0(T(s)) - \int_{\Omega=4\pi} L_\lambda(s, \vec{\Omega}) d\Omega \right] d\lambda \quad (1.8)$$

Ce terme source est aussi défini comme la divergence du flux radiatif $S_r = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q}_r$. Ce flux ($\vec{q}_r$) est quant à lui donné par l'intégration de la luminance, en un point, sur toutes les directions de l'espace et toutes les longueurs d'onde :

$$\vec{q}_r = \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\Omega=4\pi} L_\lambda(s, \vec{\Omega}) \vec{\Omega} d\Omega d\lambda \quad (1.9)$$

Les bases de la théorie radiative étant posées, nous allons discuter de la discrétisation de ces équations par la MVF. Afin d'alléger l'écriture des équations discrétisées dans les paragraphes suivants, nous omettons volontairement l'indice λ (notamment dans l'éq. 1.6). Nous allons raisonner sur l'équation suivante, et proposer plusieurs relations de fermeture nécessaires à la résolution numérique de l'ETR :

$$\frac{dL(s, \vec{\Omega})}{ds} = -\beta L(s, \vec{\Omega}) + R(s, \vec{\Omega}) \quad (1.10)$$

1.3 Méthodes numériques

Les premiers travaux modernes sur les échanges de chaleur par rayonnement sont attribuables à Max Planck. Au cours des années qui suivirent, cette théorie a été développée par de nombreux chercheurs et a trouvé de nombreuses applications en astrophysique. Longtemps abordée de manière simplifiée dans les problèmes d'ingénierie du fait de sa complexité, elle connaît depuis 20 ans de nouveaux développements grâce aux progrès de l'informatique. Nous allons présenter, en bref, quelques-unes des méthodes numériques qui ont été couramment employées dans les modélisations des procédés verriers.

1.3.1 Approximation de diffusion

La méthode la plus largement appliquée dans l'industrie du verre est l'approximation de Rosseland, également connue sous le nom "d'approximation de diffusion". Rosseland, un astrophysicien, a exposé cette méthode en 1936 [1] en étudiant le transfert radiatif. Cette méthode est très simple à mettre en application. Elle peut être appliquée avec succès à la modélisation du rayonnement dans le verre si certaines conditions sont satisfaites. La première condition concerne l'épaisseur optique. Elle stipule que l'objet doit être optiquement épais ; la seconde condition implique que les calculs doivent être menés loin des frontières du milieu. Malheureusement, c'est souvent dans ces endroits que l'on souhaite connaître avec exactitude la distribution de la température. Ce sont les régions qui ont, en général, les gradients de température les plus importants. Dans le cas des fours verriers, Lee et Viskanta [2, 3] ont montré que le modèle de Rosseland peut prédire des températures fortement sous-estimées (250 K) à proximité des frontières. Les travaux de Howell et Goldstein [4] ainsi que ceux de Deissler [5] ont proposé une amélioration des conditions aux limites utilisées par le Modèle de Rosseland (MR). Ces modifications ont montré leurs limites en terme d'exactitude des résultats pour les simulations du transfert radiatif dans les fours verriers [6, 7].

Ceci implique que des méthodes réduites ne peuvent pas être employées pour résoudre l'Équation de Transfert Radiatif (ETR) dans un tel milieu. Ainsi la résolution de l'ETR est nécessaire pour modéliser finement toutes les interactions. La plupart des modèles précis pour le rayonnement sont basés sur le calcul de la luminance.

1.3.2 Méthodes du tracé de rayons et de Monte Carlo

Dans la méthode du tracé de rayons, désignée également sous le nom du Méthode des Transferts Discrets (MTD) [8, 9, 10], l'ETR est résolue selon des rayons choisis pour un nombre prédéfini de directions. Les rayons construits traversent le milieu. Les inconvénients majeurs de cette méthode sont : le calcul du flux radiatif dans le milieu et la prise en compte de frontières réfléchissantes avec peu de rayons [9, 10]. Il faut en effet augmenter le nombre de

rayons, donc le temps de calcul, pour obtenir des résultats convenables. La méthode de Monte Carlo [11] peut être placée dans la même classe d'approche numérique du transfert radiatif. Elle est semblable à la MTD, mais les directions des rayons sont choisies aléatoirement et elle s'attache au suivi de paquets d'énergie. Ceci fait que cette méthode est appropriée à la simulation réaliste des phénomènes radiatifs. Son inconvénient majeur réside dans le temps de calcul ; un échantillonnage important est nécessaire pour les calculs statistiques.

1.3.3 Approximation P_N

D'autres approches permettent d'éliminer les variables directionnelles afin de remplacer l'ETR par un système d'équations aux dérivées partielles. Ces techniques sont basées sur le développement de la luminance sur une base normée et orthogonale : les *Harmoniques Sphériques* [12]. Théoriquement, cette base est de dimension infinie, mais à cause de la complexité du développement, dans la pratique, on est limité aux premiers ordres. Le développement de la luminance sur N termes est connue sous le nom d'approximation P_N . Pour des raisons de simplicité, les approches P_1 et P_3 sont les plus utilisées. Ces méthodes présentent des faiblesses lors de la prise en compte des frontières réfléchissantes et sont mises en défaut pour les problèmes où intervient le rayonnement collimaté. L'accroissement de l'ordre N améliore les résultats ; toutefois, la complexité et la durée des calculs sont alors un frein à l'utilisation de cette technique.

1.3.4 Méthodes des Ordonnées Discrètes et des Volumes Finis

Une autre classe d'approche est basée sur la discrétisation de l'espace directionnel et sur un nombre fini d'angles solides, à l'intérieur desquels on définit une direction moyenne de propagation du rayonnement. L'ETR est résolue comme une simple équation de transport dans chaque direction. Le calcul du flux radiatif se fait par intégration numérique de la luminance sur toutes les directions. Chandrasekhar [13] est le premier à avoir proposé la Méthode des Ordonnées Discrètes (MOD) en 1950. Cette technique est largement utilisée grâce à sa simplicité et son exactitude. Son défaut majeur est relatif aux problèmes de "fausse diffusion" (diffusion numérique) qui altèrent les calculs dans certains cas. Le choix des relations de fermeture en est généralement la cause. Dans le cas des fours verriers, Lee et Viskanta [2, 3] ont montré que cette source d'imprécision peut conduire à l'obtention de températures surestimées.

Récemment, une méthode semblable a été exposée par Raithby et Chui [14]. Il s'agit de la Méthode des Volumes Finis (MVF) adaptée au transfert radiatif. Cette dernière a connu un très grand succès au cours des deux dernières décennies. Elle est conservative et la quadrature angulaire peut être choisie de manière à privilégier certaines directions de propagation du rayonnement. Cette méthode est aussi assujettie à l'inconvénient de la fausse diffusion. Toutefois, ce phénomène peut être minoré en utilisant des relations de fermeture bien adaptées au transfert radiatif comme nous le verrons pour le verre à haute température (chapitre 2).

1.4 Méthode des Volumes Finis (MVF)

La résolution des transferts de chaleur par rayonnement à l'aide de la méthode des volumes finis est relativement récente. Cette méthode appliquée aux échanges radiatifs a été développée par G.D. Raithby [14]. Elle présente différents avantages que nous allons évoquer.

L'intérêt majeur de cette technique de résolution de l'ETR réside dans le fait qu'elle peut être utilisée sur le même maillage que celui choisi pour caractériser un écoulement (résolution des équations de Navier-Stokes). On conserve ainsi la même discrétisation spatiale pour l'équation de conservation de l'énergie, pour l'équation de la quantité de mouvement, pour l'équation du transfert de masse et pour tout autre mode d'échange thermique. Un autre point important qu'il convient de noter est que cette technique de résolution est conservative; elle assure pour chaque composante discrète de la luminance un bilan exact. Il en va de même pour le calcul des flux.

La Méthode des Volumes Finis appliquée à l'ETR implique le calcul de la luminance au centre P d'un volume de contrôle. Pour cela, il faut connaître les luminances aux frontières de ce volume. Le calcul de la luminance au centre de la maille sera réalisé dans une direction et à une longueur d'onde donnée. Dans la pratique, la mise en oeuvre de cette approche est semblable à celle de la Méthode des Ordonnées Discrètes (MOD). D'ailleurs, pour un problème radiatif pur, l'approche numérique est identique.

1.4.1 Discrétisation spatiale

A présent, nous allons discuter de la discrétisation de l'ETR en vue de sa résolution numérique. En effet, les problèmes nous intéressant ne possèdent pas de solutions analytiques. Diverses techniques permettant cette discrétisation existent; l'approche que nous privilégions est celle des Volumes Finis. La MVF implique l'intégration de l'ETR; nous allons détailler les différentes étapes du calcul. Nous considérons, lors des développements suivants, la discrétisation spatiale décrite à la figure 1.2.

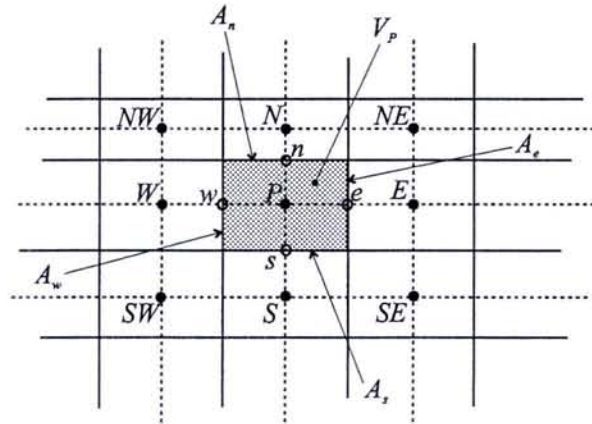


FIG. 1.2 – Volume de contrôle

L'application de la MVF à l'ETR conduit à une équation intégrale de la luminance au point P . Nous réalisons l'intégration de l'éq. (1.10) sur le volume de contrôle V_P (autour du point P), dans l'angle solide élémentaire $d\Omega$ pour la direction de propagation du rayonnement $\vec{\Omega}$:

$$\int_{\Delta\Omega} \int_{V_P} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} L(s, \vec{\Omega}) dV d\Omega = \int_{\Delta\Omega} \int_{V_P} (-\beta L(s, \vec{\Omega}) + R(s, \vec{\Omega})) dV d\Omega \quad (1.11)$$

L'application du théorème de la divergence (théorème d'Ostrogradsky) au premier membre

de l'éq. 1.11 permet de transformer l'intégrale de volume en une intégrale de surface sur les frontières de la maille considérée :

$$\sum_{i=n,e,s,w} \int_{\Delta\Omega} \int_{A_i} L_i(\vec{\Omega})(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_i) dA_i d\Omega = \int_{\Delta\Omega} \int_{V_P} (-\beta L_P(\vec{\Omega}) + R_P(\vec{\Omega})) dV d\Omega \quad (1.12)$$

A_i et V_P représentent respectivement les surfaces frontières et le volume de contrôle entourant P . Ainsi, $L_i(\vec{\Omega})$ est la luminance à la frontière i et $L_P(\vec{\Omega})$ la luminance au centre de la cellule dans la direction $\vec{\Omega}$. Cette équation exprime simplement le bilan radiatif dans le volume de contrôle, pour l'angle solide $d\Omega$. Le membre de gauche traduit les flux entrant et sortant aux limites de la maille ; le terme de droite est relatif à la production et à la dissipation d'énergie dans cette maille.

L'espace entourant le point P est découpé en faisceaux d'angles solides discrets $\Delta\Omega^m$ et vérifie notamment les moments d'ordre zéro, un et deux. Nous reviendrons plus en détail sur la discrétisation angulaire dans le paragraphe suivant :

$$\text{Moment d'ordre 0} \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{N_d} \Delta\Omega^m = 4\pi \quad (1.13)$$

$$\text{Moment d'ordre 1} \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{N_d} \Omega^m \Delta\Omega^m = 0 \quad (1.14)$$

$$\text{Moment d'ordre 2} \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{N_d} \Omega^m \Omega^m \Delta\Omega^m = \frac{4\pi}{3} \quad (1.15)$$

Dans le cas de la discrétisation bidimensionnelle du problème radiatif, le volume de contrôle V_P devient la surface S_P de la maille. Les surfaces frontières A_i ($i = n, e, s, w$) entourant V_P sont alors décrites par les longueurs l_i de chacune des faces de S_P . L'intégration de l'équation (1.12) donne pour le premier membre, à chaque frontière :

$$\sum_{i=n,e,s,w} \int_{\Delta\Omega^m} \int_{A_i} L_i(\vec{\Omega})(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_i) dA_i d\Omega = \sum_{i=n,e,s,w} Q_i^m \quad (1.16)$$

Q_i^m représente la puissance rayonnée qui traverse la surface A_i suivant la direction Ω^m dans l'angle solide $\Delta\Omega^m$. Dans le cas d'une maille de petites dimensions, on suppose que le vecteur normal à la surface $\vec{n}_i$ reste orienté dans la même direction sur toute la longueur de la frontière ; l'intégration sur A_i donne :

$$Q_i^m = A_i \int_{\Delta\Omega^m} L_i(\vec{\Omega})(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_i) d\Omega \quad (1.17)$$

Le second membre de la relation (1.12) est approché par les valeurs au centre de la maille :

$$\int_{\Delta\Omega^m} \int_{V_P} (-\beta L_P(\vec{\Omega}) + R_P(\vec{\Omega})) dV d\Omega = (-\beta L_P^m + R_P^m) V_P \Delta\Omega^m \quad (1.18)$$

Au final, la forme intégrée puis discrétisée de l'ETR (1.12) devient :

$$\sum_{i=n,e,s,w} Q_i^m = (-\beta L_P^m + R_P^m) V_P \Delta\Omega^m \quad (1.19)$$

1.4.2 Discrétisation angulaire

Comme on vient de le voir, l'ETR (1.1) est une équation directionnelle ; la luminance et ses variations sont définies en un point de l'espace s , pour une direction $\vec{\Omega}$. Par ailleurs, l'expression générale de l'ETR comprend une intégrale liée au renforcement par diffusion. Aussi, lors d'une approche numérique, la discrétisation angulaire est nécessaire pour plusieurs raisons. En premier lieu, elle permet de fixer des directions spécifiques pour lesquelles le calcul de la luminance sera réalisé. A chaque direction est associé un poids angulaire, le tout vérifiant les moments d'ordres zéro, un et deux (1.13). De plus, en présence de diffusion, la discrétisation angulaire permet la transformation de l'intégrale $\bar{L}_\lambda(s, \vec{\Omega})$ en une somme sur un nombre de directions fixé N_d , soit :

$$\int_{4\pi} f(\Omega) d\Omega \rightarrow \sum_{m=1}^{N_d} f(\Omega^m) \Delta\Omega^m \quad (1.20)$$

Donc, l'écriture et la manipulation de l'ETR nécessitent une décomposition angulaire permettant de repérer la direction de propagation du rayonnement $\vec{\Omega}$. Dans un repère cartésien, le vecteur directeur $\vec{\Omega}$ est défini par l'angle polaire θ et l'angle azimutal φ (Fig. 1.3). Nous considérons dans la suite de ce paragraphe les grandeurs angulaires discrètes sans l'exposant m afin d'alléger les expressions.

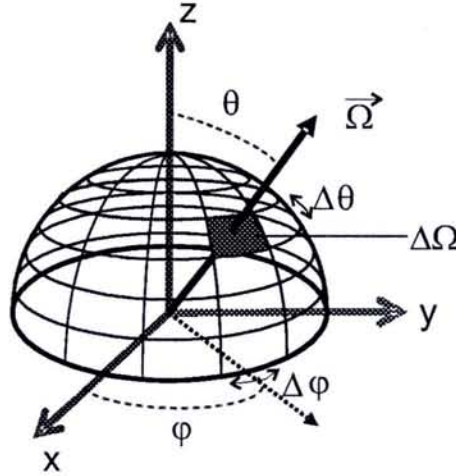


FIG. 1.3 – Discrétisation angulaire

On peut écrire en projetant selon les trois directions de l'espace :

$$\vec{\Omega} = \sin\theta \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\theta \sin\varphi \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z \quad (1.21)$$

La discrétisation angulaire utilisée dans notre étude a été reprise d'après le modèle employé par G.D. Raithby et E.H. Chui [14, 15] afin de valider simplement notre approche par la MVF. L'espace angulaire ($4\pi\text{sr}$) est subdivisé en $N_\varphi \times N_\theta = N_d$ angles solides. La figure 1.3 présente le schéma de discrétisation angulaire à pas constants ($\Delta\varphi$, $\Delta\theta$). Nous pouvons aussi utiliser une discrétisation angulaire à pas variables ou même une des quadratures angulaires généralement mises en œuvre avec la Méthode aux Ordonnées Discrètes ; ce sont les quadratures :

- S_N ,
- DCT_N ,

– $LC_N, \dots$

Pour de plus amples informations concernant ces quadratures angulaires et leur efficacité, l'article de R. Koch et R. Becker [16] donne de nombreuses informations. Les cosinus directeurs et les poids considérés pour différentes quadratures angulaires utilisées lors des calculs seront détaillés dans l'annexe § A. Dans le cadre d'études de sensibilité, nous avons utilisé certaines de ces quadratures.

1.4.3 Discrétisation spectrale

De même que l'on choisit un ensemble de directions et de poids angulaires pour résoudre l'ETR, la nature spectrale de la plupart des milieux que nous sommes amenés à étudier nécessite une discrétisation selon la longueur d'onde. En fonction de la nature de ces milieux (gaz, solides,...) différentes approches sont envisageables. Parmi celles-ci, une liste non exhaustive peut être établie :

- milieu gris,
- discrétisation par bande (régulières ou non),
- modèle ck, ...

Dans le cadre de cette étude (verre), une discrétisation par bande se révèle être satisfaisante. Nous montrerons dans le chapitre suivant que des matériaux tels que les verres peuvent être simplement caractérisés par une telle approche dans leurs zones de transparence. Les quadratures spectrales utilisées pour les verres sont décrites en annexe § B.

1.5 Relations de fermetures

1.5.1 Approximation STEP

L'utilisation de cette relation de fermeture est classique dans le domaine des méthodes numériques. Différents auteurs, notamment M. Kim [17] et G.D. Raithby [18], ont utilisé ce schéma pour résoudre l'ETR par la Méthode des Volumes Finis. Pour une direction donnée de propagation du rayonnement, les luminances sur les faces en aval du point P sont approchées par la luminance au centre de la maille, les luminances sur les faces en amont du point P par les luminances nodales calculées en amont. Dans le cas schématisé figure 1.4, nous connaissons les luminances aux nœuds *Sud* (S) et *Ouest* (W) ; les luminances sur chaque face du volume de contrôle sont :

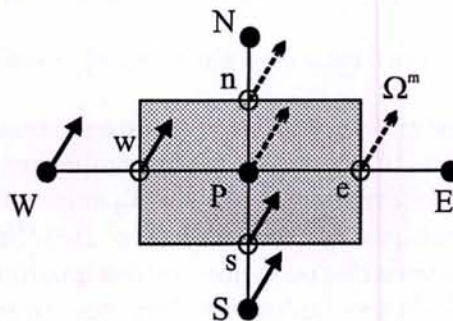


FIG. 1.4 – Approximation STEP

$$L_n^m = L_e^m = L_P^m \quad (1.22)$$

$$L_s^m = L_S^m \quad (1.23)$$

$$L_w^m = L_W^m \quad (1.24)$$

Dans ce cas, le flux qui traverse la surface A_i suivant la direction Ω^m dans l'angle solide $\Delta\Omega^m$, s'écrit, conformément à la relation (1.17) :

$$Q_i^m = A_i L_i^m C_i^m \quad (1.25)$$

avec :

$$C_i^m = \int_{\Omega^m} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_i) d\Omega \quad (1.26)$$

Dans le cas d'un maillage cartésien, on note que :

$$A_e = A_w = A_x = \Delta y \quad (1.27)$$

$$A_n = A_s = A_y = \Delta x \quad (1.28)$$

$$\vec{n}_e = -\vec{n}_w = \vec{n}_x \quad (1.29)$$

$$\vec{n}_n = -\vec{n}_s = \vec{n}_y \quad (1.30)$$

D'après les éq. 1.26, 1.29 et 1.30, nous remarquons que les grandeurs C_i^m sont en fait l'équivalent de cosinus directeurs pondérés de l'élément d'angle solide associé aux directions m . Elles vérifient :

$$C_n^m = -C_s^m = C_y^m \quad (1.31)$$

et :

$$C_e^m = -C_w^m = C_x^m \quad (1.32)$$

Nous remplaçons les différents Q_i^m ($i = e, s, w, n$) par leurs expressions ; l'ETR intégrée et discrétisée (1.19) est alors écrite sous la forme suivante :

$$L_e^m A_e C_e^m + L_w^m A_w C_w^m + L_n^m A_n C_n^m + L_s^m A_s C_s^m = (-\beta L_P^m + R_P^m) V_P \Delta\Omega^m \quad (1.33)$$

Nous introduisons les relations de fermeture (1.22), (1.23) et (1.24) dans l'équation précédente (1.33). On établit alors la relation qui donne la luminance au point P en fonction des grandeurs connues (luminances aux nœuds S et W dans le cas présent) :

$$L_P^m = \frac{\Delta y C_x^m L_W^m + \Delta x C_y^m L_S^m + R_P^m \Delta\Omega^m V_P}{\Delta y C_x^m + \Delta x C_y^m + \beta V_P \Delta\Omega^m} \quad (1.34)$$

Cette relation est similaire à celle qui donne la luminance au point P par la MOD quand on utilise le schéma STEP. Cette approximation est souvent utilisée, pas uniquement du fait de sa simplicité, mais aussi car elle garantit que les luminances calculées sont positives. D'autres alternatives à l'approximation STEP existent. Les plus connues et fonctionnant sur le même principe sont les schémas : Diamant et Pondéré (ou Positif).

Avec le schéma Diamant, la luminance au centre de la maille est la moyenne de ses valeurs n et s ou w et e . Des valeurs négatives de la luminance peuvent être obtenues, notamment dans le cas de milieux optiquement épais. Cette approximation donne des résultats réalistes

pour une discrétisation spatiale très fine ou lorsque la variation de la fonction source de l'ETR est non significative (milieu optiquement mince ou isotherme).

Les schémas Pondérés fonctionnent sur le principe d'une "moyenne décalée" privilégiant un des côtés (*Nord* ou *Sud*, *Est* ou *Ouest*). Les coefficients de pondérations peuvent dépendre des propriétés optiques du milieu et de la valeur des cosinus directeurs. C'est notamment le cas des coefficients proposés par B.G. Carlson et K.D. Lathrop [19]. Les schémas Pondérés fonctionnent bien dans le cas de milieux optiquement minces ainsi que pour les milieux faiblement diffusants.

1.5.2 Approximation Exponentielle

Le schéma explicité précédemment converge pour un maillage fin et garantit la positivité des luminances. Toutefois, il peut générer de "la fausse diffusion" (ou diffusion numérique) et altérer les résultats du calcul. On entend par "fausse diffusion" le fait que, dans certaines directions de propagation du rayonnement, les grandeurs calculées sont généralement surestimées. Kim Il-Kyoung [20] a récemment exposé les conséquences de l'utilisation de tels schémas lors du calcul de la luminance par la MOD. Afin de remédier au problème de la diffusion numérique, Kim Il-Kyoung propose un schéma dit "hybride". Dans une étude comparative des différentes relations de fermeture, l'auteur montre notamment que le schéma STEP fausse le calcul de la luminance; il diffuse le rayonnement même pour un milieu purement absorbant.

Afin de contourner ce problème, une approche plus physique de la propagation du rayonnement dans le volume de contrôle a été suggérée par Chai [21]. Il propose de calculer la luminance sur les faces en aval du centre du volume de contrôle à partir des grandeurs connues sur les faces en amont. Ce calcul consiste à résoudre l'ETR selon la direction de propagation du rayonnement. L'intégration de l'ETR se fait à partir de l'entrée du rayon lumineux dans le volume de contrôle au point u (Fig. 1.5) jusqu'à sa sortie au point e (sur notre schéma). Entre u et e , les grandeurs radiatives sont supposées constantes et égales à leurs valeurs en P , centre du volume de contrôle. Cette approximation est caractéristique de la Méthode des Volumes Finis. En effet, avec cette technique, on suppose que toutes les grandeurs physiques sont constantes à l'intérieur de la maille et peuvent être exprimées au centre de celle-ci. Par exemple, dans les codes de CFD (Computational Fluid Dynamics), la pression du fluide est supposée constante dans la maille et donnée en son centre.

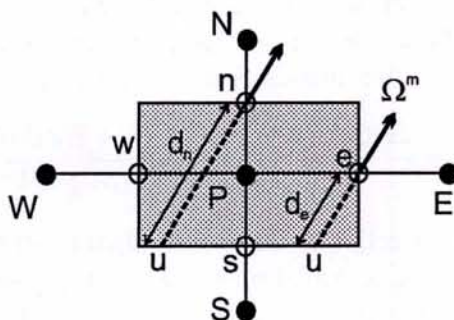


FIG. 1.5 – Approximation Exponentielle

Nous utilisons à nouveau l'ETR sous sa forme réduite (1.10) avec un rayonnement se propageant dans la direction m . Il est entendu que nous nous affranchissons toujours de l'écriture

de l'indice λ afin d'alléger le développement des équations :

$$\frac{dL_P^m}{ds} = -\beta^m L_P^m + R_P^m \quad (1.35)$$

Dans le cas d'un milieu absorbant et diffusant, la luminance au centre de la maille dans une direction donnée apparaît au sein de la fonction source R_P^m . Afin de pouvoir intégrer simplement la luminance dans l'équation précédente (1.35), J.C. Chai modifie le coefficient d'extinction et la fonction source de l'ETR. Il propose de soustraire la luminance L_P^m à la fonction source de l'ETR, R_P^m devient R_a^m . On définit alors un nouveau coefficient d'extinction β_a^m . Il est donc possible d'écrire :

$$\beta_a^m = \beta^m - \frac{\sigma^m}{4\pi} \Phi^{mm} \Delta\Omega^m \quad (1.36)$$

et :

$$R_a^m = \kappa L^0(T) + \sum_{m'=1, m' \neq m}^M \frac{\sigma^m}{4\pi} L_P^{m'} \phi^{m'm} \Delta\Omega^m \quad (1.37)$$

Pour calculer la luminance au point e (Fig. 1.5), on intègre l'ETR (1.35) le long du chemin parcouru par le rayonnement dans la direction Ω^m . La distance qui sépare u de e est d_e^m . La résolution de l'équation différentielle (1.35) est classique. Nous supposons que $L_u^m = L_P^m$ comme condition initiale de l'équation différentielle. Nous obtenons ainsi la luminance au point e en fonction des grandeurs définies au préalable :

$$L_e^m = L_P^m e^{-(\beta_a^m)_P d_e^m} + \left(\frac{R_a^m}{\beta_a^m} \right)_P \left[1 - e^{-(\beta_a^m)_P d_e^m} \right] \quad (1.38)$$

Nous remplaçons L_n^m, L_e^m, L_s^m et L_w^m par leurs expressions dans l'équation (1.33), qui devient :

$$a_P^m L_P^m = a_S^m L_S^m + a_W^m L_W^m + b_P^m \quad (1.39)$$

avec :

$$a_S^m = -A_y C_y^m e^{-(\beta_a^m)_S d_s^m} \quad (1.40)$$

$$a_W^m = -A_x C_x^m e^{-(\beta_a^m)_W d_w^m} \quad (1.41)$$

$$a_P^m = A_y C_y^m e^{-(\beta_a^m)_S d_s^m} + A_x C_x^m e^{-(\beta_a^m)_W d_w^m} + (\beta_a^m)_P V_P \Delta\Omega^m \quad (1.42)$$

et :

$$\begin{aligned} b_P^m &= (R_a^m)_P V_P \Delta\Omega^m - \left(\frac{R_a^m}{\beta_a^m} \right)_P A_y C_y^m (1 - e^{-(\beta_a^m)_P d_n^m}) \\ &\quad - \left(\frac{R_a^m}{\beta_a^m} \right)_P A_x C_x^m (1 - e^{-(\beta_a^m)_P d_e^m}) + \left(\frac{R_a^m}{\beta_a^m} \right)_W A_x C_x^m (1 - e^{-(\beta_a^m)_W d_w^m}) \\ &\quad - \left(\frac{R_a^m}{\beta_a^m} \right)_S A_y C_y^m (1 - e^{-(\beta_a^m)_S d_s^m}) \end{aligned} \quad (1.43)$$

Globalement, on obtient un système d'équations linéaires pouvant se mettre sous la forme générale $[A] \times (L) = (B)$. $[A]$ est une matrice tridiagonale contenant les termes a_P^m, a_S^m et a_W^m , (L) un vecteur contenant les luminances nodales et (B) le vecteur solution. Ce type de système peut être résolu de différentes manières. Cependant, le terme solution b_P^m peut être

négatif et donner lieu à l'obtention de luminances négatives au centre de la maille. Afin d'éviter ce phénomène, J.C. Chai [21] propose de réécrire les termes a_P^m et b_P^m comme l'a suggéré S.V. Patankar [22]. On extrait du vecteur solution b_P^m les deux composantes données au point P et on les ajoute au terme diagonal a_P^m de la matrice (on veille à diviser par la luminance en P , calculée à l'itération précédente, afin de rester homogène) :

$$a_P^m = (\beta_a^m)_P V_P \Delta \Omega^m + A_y C_y^m e^{(\beta_a^m)_S d_s^m} + A_x C_x^m e^{(\beta_a^m)_W d_w^m} + \frac{\left(\frac{R_a^m}{\beta_a^m}\right)_P [A_y C_y^m (1 - e^{(-\beta_a^m)_P d_n^m}) + A_x C_x^m (1 - e^{(-\beta_a^m)_P d_e^m})]}{L_P^{m*}} \quad (1.44)$$

et :

$$b_P^m = (R_a^m)_P V_P \Delta \Omega^m - \left(\frac{R_a^m}{\beta_a^m}\right)_W A_x C_x^m (1 - e^{(-\beta_a^m)_W d_e^m}) - \left(\frac{R_a^m}{\beta_a^m}\right)_S A_y C_y^m (1 - e^{(-\beta_a^m)_S d_s^m}) \quad (1.45)$$

avec L_P^{m*} la luminance au centre calculée à l'itération précédente.

Bien que la formulation mathématique de cette approche reste simple, elle donne généralement des résultats plus précis que ceux obtenus à l'aide de l'approximation STEP. D'ailleurs, si l'on suppose une épaisseur optique faible (milieu transparent), on retrouve le schéma STEP. Il est en effet simple de vérifier que dans le cas où : $\beta_a^m \rightarrow 0$, on a : $e^{-\beta_a^m d_i^m} \rightarrow 1$, les expressions 1.39, 1.40, 1.41 et 1.42 se simplifient et on retrouve l'éq. 1.34.

Par ailleurs, l'approximation exponentielle ne demande aucune interpolation ; la valeur initiale u est prise égale à celle au centre P du volume de contrôle. Toutefois, elle néglige la variation physique des grandeurs radiatives le long du chemin optique parcouru par le rayonnement. Cette hypothèse peut avoir une incidence importante dans le cas où le milieu est très absorbant ou lorsque la variation de température est grande.

1.5.3 Approximation Exponentielle Modifiée

G.D. Raithby et E.H. Chui [14] ont proposé un schéma plus complet tenant compte de la variation des grandeurs radiatives (luminance et fonction source de l'ETR) à l'intérieur du volume de contrôle. Afin d'approcher les luminances aux frontières de la maille, ils supposent une variation linéaire de la fonction source de l'ETR. Celle-ci est remplacée par son développement limité, tronqué au premier ordre, autour du point où l'on veut calculer la luminance. Cette approche donne des résultats souvent plus précis que ceux obtenus par les méthodes exposées précédemment. Cette amélioration est en grande partie due à la prise en compte de la variation des grandeurs radiatives le long du chemin optique. La figure 1.6 permet d'illustrer cette approche.

Nous exprimons dans les calculs suivants la fonction source pour le point e en fonction de sa dérivée :

$$R^m = R_e^m + (s - s_e) \left(\frac{\partial R^m}{\partial s} \right)_e \quad (1.46)$$

La luminance au point e est obtenue en intégrant l'ETR, explicitée précédemment (1.35), écrite sous la forme suivante :

$$\frac{dL^m}{ds} = -\beta L^m + R_e^m + (s - s_e) \left(\frac{\partial R^m}{\partial s} \right)_e \quad (1.47)$$

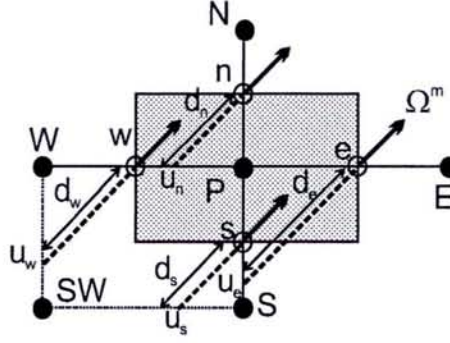


FIG. 1.6 – Approximation Exponentielle Modifiée

Le calcul se fait à partir de la dernière intersection u_i du rayon lumineux avec un segment qui lie deux nœuds jusqu'au point considéré. Par exemple, pour calculer la luminance au point e on intègre l'ETR (1.47) entre les points u_e et e . Dans ce cas, L_e^m est écrite sous la forme suivante :

$$L_e^m = L_{u_e}^m e^{-\beta_e^m d_e^m} + \frac{R_e^m}{\beta_e^m} (1 - e^{-\beta_e^m d_e^m}) - \left[1 - e^{-\beta_e^m d_e^m} (1 + \beta_e^m d_e^m) \right] \frac{(\partial R^m / \partial s)_e}{(\beta_e^m)^2} \quad (1.48)$$

Cette équation peut encore s'exprimer sous forme vectorielle ; nous utilisons cette écriture pour le calcul du flux radiatif :

$$L_e^m = L_{u_e}^m e^{-\beta_e^m d_e^m} + \frac{R_e^m}{\beta_e^m} (1 - e^{-\beta_e^m d_e^m}) - \left[1 - e^{-\beta_e^m d_e^m} (1 + \beta_e^m d_e^m) \right] \frac{\vec{\nabla} R^m|_e}{(\beta_e^m)^2} \cdot \vec{\Omega} \quad (1.49)$$

Les valeurs de $L_{u_e}^m$, et indirectement de R_e^m dans le cas de milieux diffusants, sont obtenues par interpolation linéaire entre les points nodaux. Pour les directions des x et y positives illustrées sur la figure 1.6, on écrit :

$$\begin{aligned} L_{u_e}^m &= f_{P-e}^m L_P^m + f_{S-e}^m L_S^m, & f_{P-e}^m + f_{S-e}^m &= 1 \\ L_{u_n}^m &= f_{P-n}^m L_P^m + f_{W-n}^m L_W^m, & f_{P-n}^m + f_{W-n}^m &= 1 \\ L_{u_s}^m &= f_{SW-s}^m L_{SW}^m + f_{W-s}^m L_S^m, & f_{SW-s}^m + f_{W-s}^m &= 1 \\ L_{u_w}^m &= f_{W-w}^m L_W^m + f_{SW-w}^m L_{SW}^m, & f_{W-w}^m + f_{SW-w}^m &= 1 \end{aligned} \quad (1.50)$$

Les coefficients f_i^m sont de type barycentriques ; les grandeurs R_{ui}^m s'expriment de la même manière.

Connaissant les luminances L_{ui}^m sur chaque face, on peut déterminer les flux radiatifs conformément à la relation 1.17. Nous allons exprimer ces flux à chaque frontière du volume de contrôle, et, comme nous l'y autorise la MVF, exprimer la luminance au centre de la maille. Dans le cas présent, nous écrivons pour la limite *Est* :

$$Q_e^m = A_x \int_{\Omega^m} L_e^m (\vec{\Omega}^m \cdot \vec{n}_x) d\Omega = F_e^m L_{u_e}^m + G_e^m R_e^m - H_{ex}^m \frac{\partial R^m}{\partial x} \Big|_e - H_{ey}^m \frac{\partial R^m}{\partial y} \Big|_e \quad (1.51)$$

avec :

$$F_e^m = A_x e^{-\beta_e^m d_e^m} C_x^m \quad (1.52)$$

$$G_e^m = A_x \frac{1 - e^{-\beta_e^m d_e^m}}{\beta_e^m} C_x^m \quad (1.53)$$

$$H_{ex}^m = A_x \frac{1 - e^{-\beta_e^m d_e^m} (1 + \beta_e^m d_e^m)}{(\beta_e^m)^2} N_{ex}^m \quad (1.54)$$

$$H_{ey}^m = A_x \frac{1 - e^{-\beta_e^m d_e^m} (1 + \beta_e^m d_e^m)}{(\beta_e^m)^2} N_{ey}^m \quad (1.55)$$

et :

$$\begin{aligned} N_{xx}^m &= \int_{\Omega^m} (\vec{\Omega}^m \cdot \vec{n}_x)^2 d\Omega \\ &= N_{ex}^m = -N_{wx}^m \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} N_{yy}^m &= \int_{\Omega^m} (\vec{\Omega}^m \cdot \vec{n}_y)^2 d\Omega \\ &= N_{ny}^m = -N_{sy}^m \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} N_{xy}^m &= \int_{\Omega^m} (\vec{\Omega}^m \cdot \vec{n}_y)(\vec{\Omega}^m \cdot \vec{n}_x) d\Omega \\ &= N_{ey}^m = N_{nx}^m = -N_{wy}^m = -N_{sx}^m \end{aligned} \quad (1.58)$$

De la même façon, les flux aux points n , s et w sont donnés par :

$$\begin{aligned} Q_w^m &= -A_x \int_{\Omega^m} L_w^m (\vec{\Omega}^m \cdot \vec{n}_x) d\Omega \\ &= -F_w^m L_{u_w}^m - G_w^m R_w^m + H_{wx}^m \left. \frac{\partial R^m}{\partial x} \right|_w + H_{wy}^m \left. \frac{\partial R^m}{\partial y} \right|_w \end{aligned} \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} Q_n^m &= A_y \int_{\Omega^m} L_n^m (\vec{\Omega}^m \cdot \vec{n}_y) d\Omega \\ &= F_n^m L_{u_n}^m + G_n^m R_n^m - H_{nx}^m \left. \frac{\partial R^m}{\partial x} \right|_n - H_{ny}^m \left. \frac{\partial R^m}{\partial y} \right|_n \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned} Q_s^m &= -A_y \int_{\Omega^m} L_s^m (\vec{\Omega}^m \cdot \vec{n}_y) d\Omega \\ &= -F_s^m L_{u_s}^m - G_s^m R_s^m + H_{sx}^m \left. \frac{\partial R^m}{\partial x} \right|_s + H_{sy}^m \left. \frac{\partial R^m}{\partial y} \right|_s \end{aligned} \quad (1.61)$$

Nous remplaçons les luminances $L_{u_i}^m$ ($i = e, s, w, n$) par leurs expressions (1.50) dans les relations donnant les flux Q_i^m ($i = e, s, w, n$). Nous injectons ces derniers dans l'éq. 1.19 ; on obtient alors l'équation qui donne la luminance au centre de volume de contrôle V_P qui ne dépend que des luminances Sud , $Ouest$ et $Sud - Ouest$ pour la direction considérée (Ω^m tel que $(\vec{\Omega}^m \cdot \vec{n}_x) > 0$ et $(\vec{\Omega}^m \cdot \vec{n}_y) > 0$) :

$$(-\beta L_P^m + R_P^m) V_P \Delta \Omega^m = (Q_s^m + Q_e^m + Q_n^m + Q_w^m) \quad (1.62)$$

soit encore :

$$a_P^m L_P^m = a_S^m L_S^m + a_W^m L_W^m + a_{SW}^m L_{SW}^m + b_P^m \quad (1.63)$$

avec :

$$a_P^m = f_{P-n}^m F_n^m + f_{P-e}^m F_e^m + \beta_P^m V_P \Delta \Omega^m \quad (1.64)$$

$$a_{SW}^m = -f_{SW-w}^m F_w^m - f_{SW-s}^m F_s^m \quad (1.65)$$

$$a_S^m = f_{S-e}^m F_e^m - f_{W-s}^m F_s^m \quad (1.66)$$

$$a_W^m = f_{W-w}^m F_w^m - f_{W-w}^m F_w^m \quad (1.67)$$

et :

$$\begin{aligned} b_p^m = & -G_e^m R_e^m - G_n^m R_n^m + G_w^m R_w^m + G_s^m R_s^m \\ & + H_{ex}^m \frac{\partial R^m}{\partial x} \Big|_e + H_{ey}^m \frac{\partial R^m}{\partial y} \Big|_e + H_{nx}^m \frac{\partial R^m}{\partial x} \Big|_n + H_{ny}^m \frac{\partial R^m}{\partial y} \Big|_n \\ & - H_{wx}^m \frac{\partial R^m}{\partial x} \Big|_w - H_{wy}^m \frac{\partial R^m}{\partial y} \Big|_w - H_{sx}^m \frac{\partial R^m}{\partial x} \Big|_s - H_{sy}^m \frac{\partial R^m}{\partial y} \Big|_s \end{aligned} \quad (1.68)$$

La formulation mathématique de cette approche est plus complexe que celle décrite dans les deux schémas précédents, notamment en raison des interpolations qu'il est nécessaire de faire pour chaque direction afin de calculer les luminances L_{ui}^m . Pour un maillage Cartésien simple (mailles rectangulaires), nous calculons la dérivée de la fonction source radiative à l'ordre deux. En revanche, pour un maillage non uniforme, les calculs sont plus complexes et arrêtés au premier ordre.

1.5.4 Approximation Exponentielle à Température Linéarisée (MELT)

Comme nous l'avons évoqué précédemment, les relations de fermetures de l'ETR sont plus ou moins complexes selon l'approximation réalisée. Aussi, elles peuvent donner des résultats différents selon la nature du problème considéré. Dans le cas de bains de verre, la littérature montre que le champ de températures est en général stratifié [2, 3, 23], c'est-à-dire que, loin des frontières, la température évolue de façon linéaire. Si l'on considère un milieu gris purement absorbant où la température varie linéairement, d'après la loi de Stefan Boltzman, la fonction source R de l'ETR varie en puissance quatre. Dans ce cas, les hypothèses : R constant (schéma Exponentiel) ou R variant linéairement (schéma Exponentiel Modifié) sont souvent loin d'être justifiées.

Dans le cas d'un milieu optiquement épais, le couplage du rayonnement et de la conduction tend à linéariser le champ de températures, la conduction représentant une part non négligeable du transfert de chaleur. Il faut aussi noter que l'on observe de très faibles variations de la conductivité en fonction de la température pour les verres ; ceci permet en partie de valider l'évolution quasi linéaire de T comme nous le verrons dans le chapitre suivant. Enfin, la prise en compte des mouvement convectifs du bain renforce le phénomène de stratification de la température.

Pour ces raisons et du fait de la difficulté à calculer $\vec{\nabla} R_\lambda^m$ sur un maillage non uniforme, nous avons développé une nouvelle approche qui nous permet, même avec un maillage peu dense, de trouver des résultats satisfaisants. Le principe de la méthode est le suivant : nous décomposons la fonction source de l'ETR selon sa partie "émission propre" : $\kappa L_\lambda^0(T(s))$, et selon sa contribution "diffusive" : $\sigma \bar{L}_\lambda^m$. Dans le cas présent, nous utilisons les grandeurs spectrales, étant donné que la luminance du corps noir évolue de façon spécifique avec la température. On a donc :

$$\frac{dL_\lambda^m}{ds} = -\beta_\lambda^m L_\lambda^m + R_\lambda^m = -\beta_\lambda^m L_\lambda^m + \kappa_\lambda^m L_\lambda^0(T) + \sigma^m \bar{L}_\lambda^m \quad (1.69)$$

On conserve le formalisme décrit figure 1.6. Dans ce cas, la luminance au point e est donnée par l'intégration de l'ETR entre les points u_e et e :

$$L_{e\lambda}^m = L_{u_e\lambda}^m e^{-\beta_\lambda^m d_e^m} + \underbrace{\int_{u_e}^e \kappa_\lambda^m L_\lambda^0(T(s)) e^{-\beta_\lambda^m (d_e^m - s)} ds}_{A_{e\lambda}^m} + \underbrace{\int_{u_e}^e \sigma_\lambda^m \bar{L}_\lambda^m(s) e^{-\beta_\lambda^m (d_e^m - s)} ds}_{D_{e\lambda}^m} \quad (1.70)$$

Le calcul des intégrales $A_{e\lambda}^m$ et $D_{e\lambda}^m$ nécessite les valeurs de $L_\lambda^0(T(s))$ et $\bar{L}_\lambda^m(s)$ en fonction de s . La variable s représente l'abscisse curviligne le long du chemin optique parcouru par le rayonnement entre les points u_e et e . Nous supposons une variation linéaire de la température entre ces points qui s'exprime :

$$T(s) = T_{u_e} + \frac{T_{u_e} - T_e}{d_e^m} s = T_{u_e} + as \quad (1.71)$$

T_u et T_e sont obtenus par interpolation linéaire avec les valeurs des nœuds voisins. Nous remplaçons la température par son expression 1.71 lors de l'écriture de la luminance du corps noir. $A_{e\lambda}^m$ devient pour une longueur d'onde donnée :

$$A_{e\lambda}^m = \int_0^{d_e^m} \frac{C_1}{\lambda^5 e^{\left[\frac{C_2}{\lambda(T_{u_e} + as)}\right]}} e^{-\beta_\lambda^m (d_e^m - s)} ds \quad (1.72)$$

Cette intégrale est calculée par la méthode de Gauss, qui utilise des points non régulièrement espacés et convenablement choisis [24, 25]. Cette méthode peut être utilisée lorsque l'intégrande est connue analytiquement ; c'est le cas ici (eq 1.72). On note que la méthode de Gauss est exacte pour l'intégration d'un polynôme de degré inférieur à $2n - 1$ (n est le nombre de points d'intégration) (Par exemple, pour le calcul de $\int_0^4 e^x dx$ l'erreur est de 2.10^{-4} pour quatre points d'intégration et de 2.10^{-7} pour cinq points d'intégration).

Pour le calcul de la seconde intégrale $D_{e\lambda}^m$, nous supposons aussi que $\bar{L}_\lambda^m$ évolue linéairement entre les points u_e et e :

$$\bar{L}_\lambda^m(s) = \bar{L}_{u_e\lambda}^m + \frac{\bar{L}_{e\lambda}^m - \bar{L}_{u_e\lambda}^m}{d_e^m} s = \bar{L}_{u_e\lambda}^m + b_\lambda^m s \quad (1.73)$$

$\bar{L}_{e\lambda}^m$ et $\bar{L}_{u_e\lambda}^m$ sont estimés par des interpolations linéaires à partir de leurs valeurs aux nœuds. Dans ce cas $D_{e\lambda}^m$ s'écrit :

$$D_{e\lambda}^m = \int_0^{d_e^m} \sigma_\lambda^m [\bar{L}_{u_e\lambda}^m + b_\lambda^m s] e^{-\beta_\lambda^m (d_e^m - s)} ds \quad (1.74)$$

L'intégration se fait analytiquement.

$$D_{e\lambda}^m = \frac{\sigma_\lambda^m}{\beta_\lambda^m} \left[\left(\bar{L}_{u_e\lambda}^m - \frac{b_\lambda^m}{\beta_\lambda^m} \right) (1 - e^{-\beta_\lambda^m d_e^m}) + b_\lambda^m d_e^m \right] \quad (1.75)$$

Au final, nous avons :

$$L_{e\lambda}^m = L_{u_e\lambda}^m e^{-\beta_\lambda^m d_e^m} + A_{e\lambda}^m + D_{e\lambda}^m \quad (1.76)$$

Avec le même raisonnement, nous trouvons les luminances aux points n , s et w :

$$\begin{aligned} L_{n\lambda}^m &= L_{u_n\lambda}^m e^{-\beta_\lambda^m d_n^m} + A_{n\lambda}^m + D_{n\lambda}^m \\ L_{s\lambda}^m &= L_{u_s\lambda}^m e^{-\beta_\lambda^m d_s^m} + A_{s\lambda}^m + D_{s\lambda}^m \\ L_{w\lambda}^m &= L_{u_w\lambda}^m e^{-\beta_\lambda^m d_w^m} + A_{w\lambda}^m + D_{w\lambda}^m \end{aligned} \quad (1.77)$$

Les luminances $L_{u_i\lambda}^m$ ($i = n, e, s, w$) sont données en fonction des luminances nodales, avec les relations (1.50). Dans ce cas, les flux radiatifs Q_i^m s'écrivent :

$$Q_e^m = A_x \int_{\Omega^m} L_e^m(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_x) d\Omega = F_e^m L_{u_e}^m + C_x^m [A_e^m + D_e^m] \quad (1.78)$$

$$Q_n^m = A_y \int_{\Omega^m} L_n^m(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_y) d\Omega = F_n^m L_{u_n}^m + C_y^m [A_n^m - D_n^m] \quad (1.79)$$

$$Q_w^m = -A_x \int_{\Omega^m} L_w^m(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_x) d\Omega = -F_w^m L_{u_w}^m - C_x^m [A_w^m + D_w^m] \quad (1.80)$$

$$Q_s^m = -A_y \int_{\Omega^m} L_s^m(\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_y) d\Omega = -F_s^m L_{u_s}^m - C_y^m [A_s^m + D_s^m] \quad (1.81)$$

avec :

$$F_e^m = A_x e^{-\beta_\lambda^m d_e^m} C_x^m \quad (1.82)$$

$$F_s^m = A_y e^{-\beta_\lambda^m d_s^m} C_y^m \quad (1.83)$$

$$F_w^m = A_x e^{-\beta_\lambda^m d_w^m} C_x^m \quad (1.84)$$

$$F_n^m = A_y e^{-\beta_\lambda^m d_n^m} C_y^m \quad (1.85)$$

Nous remplaçons les luminances $L_{u_i}^m$ données par les relations 1.50 (valeurs pondérées) dans les expressions des flux radiatifs Q_i^m ($i = e, s, w, n$). Ces derniers sont introduits dans l'ETR écrite selon l'éq. 1.19. Nous obtenons l'équation qui donne la luminance au point P , le centre de la maille. Son écriture est similaire à celle rencontrée pour le schéma Exponentiel Modifié ; seules changent les valeurs des coefficients.

$$a_P^m L_P^m = a_S^m L_S^m + a_W^m L_W^m + a_{SW}^m L_{SW}^m + b_P^m \quad (1.86)$$

avec :

$$a_P^m = f_{P-n}^m F_n^m + f_{P-e}^m F_e^m + \beta_P^m V_P \Delta\Omega^m \quad (1.87)$$

$$a_{SW}^m = -f_{SW-w}^m F_w^m - f_{SW-s}^m F_s^m \quad (1.88)$$

$$a_S^m = f_{S-e}^m F_e^m - f_{W-s}^m F_s^m \quad (1.89)$$

$$a_W^m = f_{W-w}^m F_w^m - f_{W-w}^m F_w^m \quad (1.90)$$

et :

$$b_P^m = A_x C_x^m [A_w^m + D_w^m - A_e^m - D_e^m] + A_y C_y^m [A_s^m + D_s^m - A_n^m - D_n^m] + R_P^m V_P \Omega^m \quad (1.91)$$

Cette formulation est la dernière relation de fermeture que nous proposons et explicitons dans ce chapitre. Avant de nous intéresser au problème du couplage des différents modes d'échange de chaleur dans les bains de verre, il nous a paru utile de tester ces diverses techniques de résolution de l'équation du transfert radiatif en rayonnement pur. C'est l'objet de la partie suivante où deux "benchmark" ont servi de modèle de référence.

1.6 Validation du modèle radiatif

Nous allons à présent donner quelques éléments de validation de la Méthode des Volumes Finis utilisée pour la résolution de l'ETR. Différents cas test existent dans la littérature. Certains d'entre eux présentent l'intérêt de fournir une solution analytique (donc exacte) ou semi-analytique au problème posé. Ils sont généralement associés à des géométries simples : milieu unidimensionnel (mur), ou bidimensionnel (cavité). En outre, les milieux considérés sont dans la plupart des cas des gaz gris. Nous présentons ici deux de ces cas test :

1. un mur présentant un gradient thermique,
2. une boîte à parois froides et noires.

1.6.1 Gaz entre deux plaques noires

Ce premier cas test a été exposé par M.A. Heaslet et R.F. Warming [26] en 1965. Il s'agit de l'étude d'un gaz gris enfermé entre deux plaques noires infinies. Une solution semi-analytique du flux radiatif entre les deux plaques est proposée. Elle est obtenue par le calcul de fonctions exponentielles intégrales d'ordre n ($E_n(x)$). Ces fonctions sont tabulées dans l'ouvrage de R. Siegel et J.R. Howell [27] :

$$E_n(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \frac{dt}{t^n} = \int_0^1 \mu^{n-2} e^{-x/\mu} d\mu \quad (1.92)$$

Ces fonctions permettent notamment d'exprimer le flux radiatif et d'en déduire la température ; celle-ci est exprimée en fonction de l'épaisseur optique τ du milieu :

$$T^4(\tau) = \frac{1}{2} \left[T_a^4 E_2(\tau) + T_b^4 E_2(\tau_L - \tau) + \int_\tau^{\tau_L} T^4(\tau') E_1(|\tau' - \tau|) d\tau' \right] \quad (1.93)$$

Les deux plaques ont des températures constantes T_a et T_b telles que $T_a > T_b$ (Fig. 1.7) ; elles sont séparées d'une distance L . Nous avons déterminé le flux radiatif sortant du côté froid (face inférieure) ; il est adimensionné par $\sigma_B(T_a^4 - T_b^4)$. Les calculs sont réalisés pour différentes épaisseurs optiques. Le tableau (Tab. 1.1) donne la comparaison entre notre approche (approximation Exponentielle à Température Linéarisée), l'approche proposée par G.D. Raithby [14] (approximation Exponentielle Modifiée) et la solution exacte proposée par M.A. Heaslet et R.D. Warming.

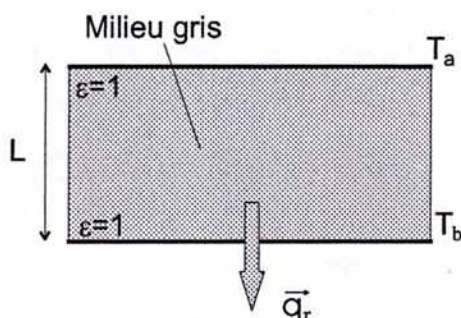


FIG. 1.7 – Milieu gris entre deux plaques noires

Dans le cas de l'approximation Exponentielle à Température Linéarisée, l'intégration de la fonction source a été réalisée par une méthode de Gauss à 10 points. Le nombre de volumes

de contrôle est de 64 et le nombre de directions de propagation du rayonnement est de 96. Ces conditions sont similaires à celles utilisées par G.D. Raithby et E.H. Chui [14] pour le calcul à l'aide de l'approximation Exponentielle Modifiée.

Épaisseur optique	Approx. Exp. avec Linéarisation de T	Erreur relative (%)	Approx. Exp. Modifiée [14]	Erreur relative (%)	Solution exacte
0,0	1,000	0,0	1,000	0,0	1,0000
0,1	$9,156 \cdot 10^{-1}$	$5,678 \cdot 10^{-3}$	$9,125 \cdot 10^{-1}$	0,3	$9,157 \cdot 10^{-1}$
0,5	$7,041 \cdot 10^{-2}$	$1,420 \cdot 10^{-2}$	$6,964 \cdot 10^{-1}$	1,1	$7,040 \cdot 10^{-1}$
1,0	$5,533 \cdot 10^{-1}$	$2,187 \cdot 10^{-2}$	$5,469 \cdot 10^{-1}$	1,1	$5,532 \cdot 10^{-1}$
2,0	$3,901 \cdot 10^{-1}$	$1,538 \cdot 10^{-2}$	$3,865 \cdot 10^{-1}$	0,9	$3,900 \cdot 10^{-1}$
3,0	$3,016 \cdot 10^{-1}$	$1,326 \cdot 10^{-2}$	—	—	$3,016 \cdot 10^{-1}$
5,0	$2,077 \cdot 10^{-1}$	$7,222 \cdot 10^{-3}$	—	—	$2,077 \cdot 10^{-1}$
10	$1,167 \cdot 10^{-1}$	$6,855 \cdot 10^{-3}$	—	—	$1,167 \cdot 10^{-1}$
50	$2,589 \cdot 10^{-2}$	$1,158 \cdot 10^{-2}$	—	—	$2,590 \cdot 10^{-2}$
100	$1,313 \cdot 10^{-2}$	$2,700 \cdot 10^{-1}$	—	—	$1,310 \cdot 10^{-2}$

TAB. 1.1 – Erreur sur le calcul du flux radiatif adimensionné

Étant donné la rapidité des calculs et de la géométrie et de la nature du problème, seules les performances en terme de précision par rapport à la solution analytique sont spécifiées. Par ailleurs, nous n'avons pas réitéré les calculs de G.D. Raithby et E.H. Chui, mais uniquement repris les valeurs qu'ils ont publiées.

Dans l'analyse de G.D. Raithby et E.H. Chui [14] ne sont simulées que des épaisseurs optiques modérées. Les résultats obtenus sont satisfaisants ; l'erreur est de l'ordre du pour cent. Nous avons repris ces calculs de flux avec notre schéma Exponentiel Modifié à Température Linéarisée et étendu l'étude à des épaisseurs optiques plus fortes l'objectif étant de simuler des conditions proches de celles rencontrées dans les bains de verre et susceptibles de générer des difficultés de convergence. Nous constatons que l'accord avec la solution analytique est très bon pour des épaisseurs optiques inférieures à 10 où l'écart est inférieur à 0,01%. Dans le cas de très fortes valeurs de cette épaisseur, nos résultats demeurent satisfaisants ; l'erreur est toujours inférieure au pour cent. On peut noter que pour $\tau_L > 10$, Heaslet et Warming considèrent le milieu comme optiquement épais, en conséquence de quoi le flux radiatif adimensionnel est estimé par l'approximation de Rosseland et s'écrit :

$$\frac{q_r}{\sigma_B(T_a^4 - T_b^4)} = \frac{4/3}{1,42089 + \tau_L} \quad (1.94)$$

En ce qui concerne la température, nous représentons son évolution à la puissance quatre (Fig. 1.8). Les températures représentées pour plusieurs coefficients d'absorption y sont spécifiées en fonction de l'épaisseur normée de la cavité.

Pour l'ensemble des différentes épaisseurs optiques, nos résultats sont parfaitement identiques à ceux définis par la solution exacte (cercles) et ce en tout point de la couche. Par ailleurs, on note bien le saut de températures aux frontières. Ce saut est d'autant plus important que le milieu est optiquement mince. Il est caractéristique des échanges de chaleur purement radiatifs dans les milieux semi-transparents, et est attribué au libre parcours moyen des photons issus des frontières qui ne sont pas absorbés à proximité de ces limites.

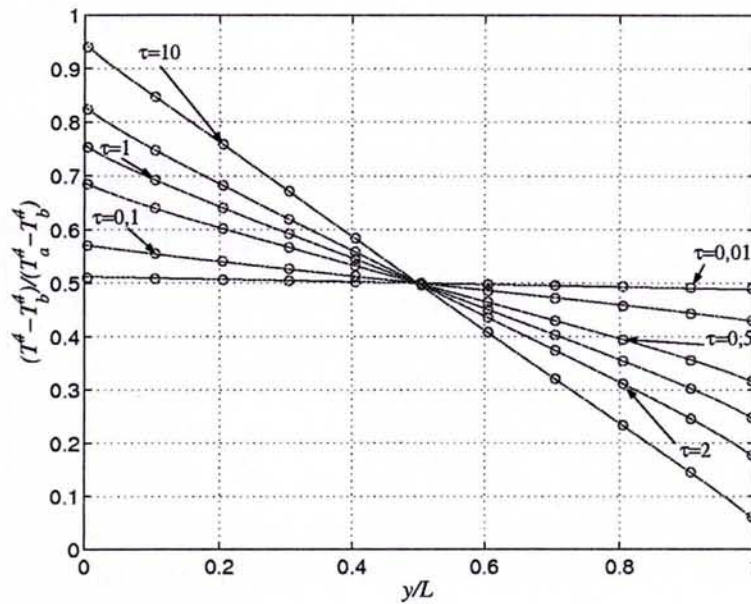


FIG. 1.8 – Température adimensionnée dans le milieu

1.6.2 Gaz dans une enceinte carrée noire

Le second cas test décrit une enceinte fictive contenant un gaz à la température T_g , uniforme dans toute la cavité. Les parois sont noires et à la température imposée de $0K$ (Fig. 1.9). Cette "benchmark" est issue de l'ouvrage de R. Siegel et J.R. Howell [27] et a fait l'objet d'un article de R. Siegel [28]. L'intérêt de cette simulation est de valider le modèle dans le cas d'une géométrie bidimensionnelle.

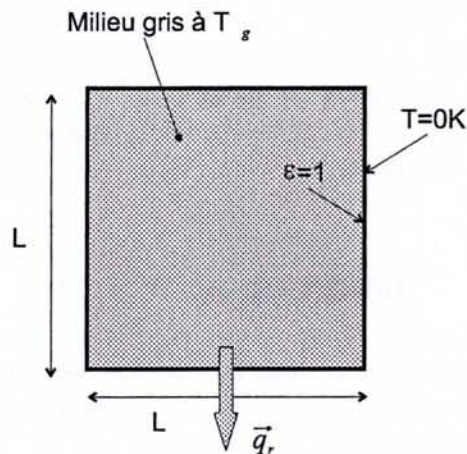


FIG. 1.9 – Gaz dans une enceinte carrée noire

La grandeur calculée avec ce cas test est le flux radiatif à la limite inférieure que l'on adimensionne : $q_r / \sigma_B T_g^4$. Le calcul proposé par R. Siegel est semi-analytique ; il utilise comme dans le cas précédent des fonctions intégrales : $S_n(x)$ (tabulées dans l'ouvrage cité précédem-

ment [27]) :

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n \sqrt{t^2 - 1}} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-x/\cos \theta} \cos^{n-1} \theta d\theta \quad (1.95)$$

La solution recherchée dépend de plusieurs paramètres ($B = \kappa L$ épaisseur optique maximale, $R = \text{hauteur/largeur} = 1$, $X = x/L$ et $Y = y/L$) ; elle a la forme suivante :

$$\begin{aligned} q_r / \sigma_B T_g^4 = & 1 - S_1(BX) + S_3(BX) - S_1[B(R - X)] + S_3[B(R - X)] \\ & - B \int_{X'=0}^R \left\{ S_0 \left(B \left[(X - X')^2 + 1 \right]^{1/2} \right) \right. \\ & \left. - S_2 \left(B \left[(X - X')^2 + 1 \right]^{1/2} \right) \right\} dX' \end{aligned} \quad (1.96)$$

Les résultats (flux radiatif adimensionnel) sont donnés pour plusieurs valeurs de l'épaisseur optique du milieu (Fig. 1.10). Ces valeurs ont été obtenues par le schéma Exponentiel à Température Linéarisée. Le maillage utilisé est de 10×10 ; le nombre de directions de propagation du rayonnement sur le demi-espace vaut : $N_d = 96$, soit 24 directions en azimut et 4 en polaire. La confrontation de ce cas test avec l'approche Exponentielle Modifiée est mentionnée dans la publication de G.D. Raithby et E.H. Chui [14] citée auparavant. Nous ne discutons pas ces résultats ici.

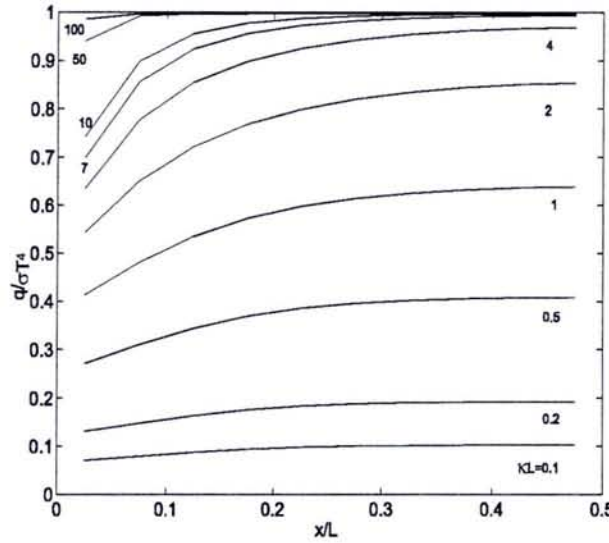


FIG. 1.10 – Flux adimensionnel

Dans les tables suivantes (Tab. 1.2, 1.3 et 1.4) nous donnons l'erreur calculée entre les deux approches pour trois épaisseurs optiques : $\tau = 0, 1$, $\tau = 1$ et $\tau = 10$.

L'erreur relative est en général inférieure au pour cent, et diminue de manière importante au centre de la cavité. A contrario, ce sont les grandeurs calculées au voisinage des parois qui sont les plus éloignées de la solution semi-analytique. De plus, l'erreur relative dans cette zone croît avec l'épaisseur optique. Toutefois, l'augmentation du nombre de mailles ou l'utilisation d'un maillage non uniforme, resserré aux frontières, permet de diminuer cette erreur.

En conclusion, on peut noter que l'approche Exponentielle à Température Linéarisée, utilisée dans le cas d'un problème radiatif, donne des résultats satisfaisants. Ceux-ci demeurent convenables pour le cas de discrétisations spatiales grossières.

Position x/L	Approx. Exp. avec Linéarisation de T ($\tau = 0, 1$)	Solution exacte ($\tau = 0, 1$)	Erreur relative (%)
0,05	$7,675 \cdot 10^{-2}$	$7,755 \cdot 10^{-2}$	1,031
0,15	$8,987 \cdot 10^{-2}$	$8,952 \cdot 10^{-2}$	$3,910 \cdot 10^{-1}$
0,25	$9,648 \cdot 10^{-2}$	$9,663 \cdot 10^{-2}$	$1,552 \cdot 10^{-1}$
0,35	$1,006 \cdot 10^{-1}$	$1,008 \cdot 10^{-1}$	$1,984 \cdot 10^{-1}$
0,45	$1,031 \cdot 10^{-1}$	$1,028 \cdot 10^{-1}$	$2,918 \cdot 10^{-1}$

TAB. 1.2 – Erreur sur le calcul du flux radiatif, $\tau = 0, 1$

Position x/L	Approx. Exp. avec Linéarisation de T ($\tau = 1$)	Solution exacte ($\tau = 1$)	Erreur relative (%)
0,05	$4,550 \cdot 10^{-1}$	$4,616 \cdot 10^{-1}$	1,430
0,15	$5,461 \cdot 10^{-1}$	$5,485 \cdot 10^{-1}$	$4,376 \cdot 10^{-1}$
0,25	$5,936 \cdot 10^{-1}$	$5,958 \cdot 10^{-1}$	$3,692 \cdot 10^{-1}$
0,35	$6,208 \cdot 10^{-1}$	$6,224 \cdot 10^{-1}$	$2,571 \cdot 10^{-1}$
0,45	$6,343 \cdot 10^{-1}$	$6,345 \cdot 10^{-1}$	$3,152 \cdot 10^{-2}$

TAB. 1.3 – Erreur sur le calcul du flux radiatif, $\tau = 1$

Position x/L	Approx. Exp. avec Linéarisation de T ($\tau = 10$)	Solution exacte ($\tau = 10$)	Erreur relative (%)
0,05	$8,390 \cdot 10^{-1}$	$8,616 \cdot 10^{-1}$	2,623
0,15	$9,632 \cdot 10^{-1}$	$9,735 \cdot 10^{-1}$	1,058
0,25	$9,917 \cdot 10^{-1}$	$9,935 \cdot 10^{-1}$	$1,812 \cdot 10^{-1}$
0,35	$9,979 \cdot 10^{-1}$	$9,982 \cdot 10^{-1}$	$3,005 \cdot 10^{-2}$
0,45	$9,992 \cdot 10^{-1}$	$9,993 \cdot 10^{-1}$	$1,001 \cdot 10^{-2}$

TAB. 1.4 – Erreur sur le calcul du flux radiatif, $\tau = 10$

1.7 Couplage de la conduction avec le rayonnement

Un des objectifs du travail de thèse est de réaliser un modèle de transfert thermique, le plus complet possible, fonctionnant selon la Méthode des Volumes Finis. Dans la pratique, nous devons nous intéresser aux problèmes couplés (conduction, convection et rayonnement). Dans cette partie, nous allons expliciter le couplage : conduction-rayonnement. Nous discuterons dans le troisième chapitre du problème complet associant les trois modes d'échange thermique.

Au cours de ce paragraphe, la résolution de l'équation de conservation de l'énergie, en l'absence de convection, est développée à l'aide de la MVF. Dans un souci de clarté, nous rappelons l'écriture de l'équation de conservation de l'énergie, puis nous présentons sa forme discrétisée ; enfin différents points délicats concernant son utilisation lors du transfert de chaleur couplé seront évoqués.

1.7.1 Équation de Conservation de l'Énergie

Pour résoudre un problème de thermique (faisant intervenir les trois grands types de transfert de chaleur) il faut coupler la résolution de plusieurs équations que sont :

- l'ETR,

- les équations de Navier-Stokes (équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement),
- des équations de bilan chimique,
- des équations de combustion, ...

Afin d'établir un lien entre toutes ces relations, il faut une équation supplémentaire que l'on appelle : Équation de Conservation de l'Énergie. Cette équation peut être explicitée à l'aide d'un bilan d'énergie interne. L'expression générale de cet équilibre s'écrit sous la forme suivante :

$$\underbrace{\rho \frac{Du}{Dt}}_{\text{Variation totale de l'énergie interne}} = \underbrace{-\vec{\nabla} \cdot \vec{q}}_{\text{Divergence du flux}} - \underbrace{p(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})}_{\text{Énergie mécanique}} + \underbrace{\Phi}_{\text{Dissipation visqueuse}} + \underbrace{\dot{Q}'''}_{\text{Terme source}} \quad (1.97)$$

La dérivée particulaire (premier terme) représente la variation d'énergie interne provenant à la fois de la variation temporelle de la grandeur considérée, mais aussi de sa variation spatiale du fait de son mouvement. Elle peut également s'écrire selon deux composantes qui sont : un terme de dérivation par rapport au temps et un terme dit "convectif" :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \left(\frac{du}{dt} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} u \right) \quad (1.98)$$

Par ailleurs, l'énergie interne par unité de masse du fluide peut être liée à l'enthalpie par la relation :

$$h = u + \frac{p}{\rho} \quad (1.99)$$

où h est l'enthalpie massique et p la pression du milieu. Dans le cas d'un milieu solide ou fluide à pression atmosphérique constante (milieu non compressible), il est possible d'approcher la dérivée de l'énergie interne par :

$$\frac{du}{dt} = \frac{dh}{dt} \quad (1.100)$$

ou encore d'un point de vue thermodynamique (pour $p = cst$) :

$$\frac{du}{dt} = C_p \frac{dT}{dt} \quad (1.101)$$

La loi de conservation de l'énergie peut alors s'écrire :

$$\rho C_p \left(\frac{dT}{dt} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T \right) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} - p(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \Phi + \dot{Q}''' \quad (1.102)$$

Dans un premier temps, comme nous l'avons précisé en introduction, nous ne nous intéressons pas aux mouvements convectifs. Aussi les termes d'énergie mécanique et de dissipation visqueuse seront nuls. En outre, il n'y a pas d'autre source de chaleur que la source radiative dans les problèmes que nous serons amenés à considérer. Le terme source radiatif apparaît au niveau de la divergence du flux total. Donc le terme source volumique $\dot{Q}'''$ sera lui aussi nul. Dans ces conditions (cas où le milieu est immobile) et pour le régime permanent, la loi de conservation de l'énergie devient :

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{q} = (-\vec{\nabla} \cdot \vec{q}_c) + (-\vec{\nabla} \cdot \vec{q}_r) = 0 \quad (1.103)$$

ou bien :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{q}_c - S_r = 0 \quad (1.104)$$

Nous allons à présent discuter de la modélisation de l'équation de conservation de l'énergie pour une géométrie bidimensionnelle. Au terme de cette analyse, nous vérifierons le bon comportement de notre technique de résolution à l'aide de différents cas test tirés de la littérature.

1.7.2 Discrétisation de l'équation de conservation de l'énergie

Afin de résoudre l'équation de conservation de l'énergie, nous devons discrétiser le milieu. Cette discrétisation spatiale est décrite figure 1.11. Il s'agit d'un maillage cartésien pouvant être uniforme ou non.

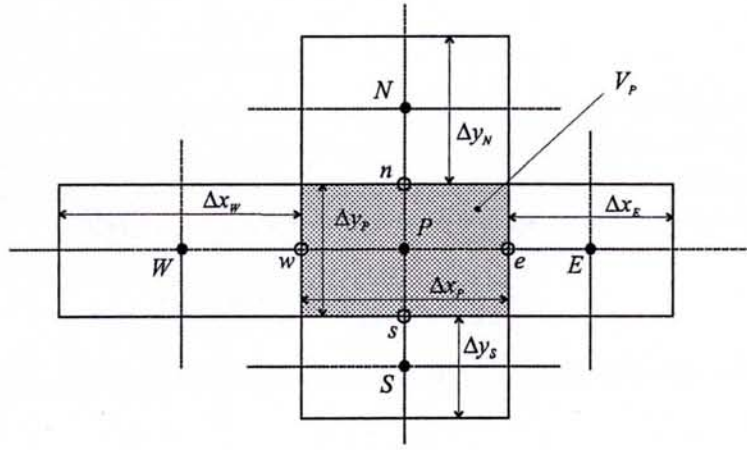


FIG. 1.11 – Discrétisation spatiale du milieu

Pour un problème ayant atteint le régime stationnaire et en absence de tout mouvement convectif cette équation est simple (1.104) et ne dépend que de deux grandeurs : les flux conductif et radiatif, que nous allons expliciter :

$$\vec{q}_c = -k_c(T) \vec{\nabla} T \quad (1.105)$$

et :

$$\vec{q}_r = \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\Omega=4\pi} L_{\lambda}(s, \vec{\Omega}) \vec{\Omega} d\Omega d\lambda \quad (1.106)$$

La divergence du flux radiatif S_r est donnée par :

$$S_r(s) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q}_r = \int_{\lambda=0}^{\infty} \kappa_{\lambda} \left[4\pi n_{\lambda}^2 L_{\lambda}^0(T(s)) - \int_{\Omega=4\pi} L_{\lambda}(s, \vec{\Omega}) d\Omega \right] d\lambda \quad (1.107)$$

Cette équation est simplement discrétisée en transformant les intégrales en sommes selon le nombre : de bandes spectrales caractérisant le milieu N_{λ} et de directions de propagation du rayonnement N_d caractérisé par la quadrature angulaire retenue. Les grandeurs radiatives sont prises au centre du volume de contrôle :

$$S_r = \sum_{n_{\lambda}=0}^{N_{\lambda}} \kappa_{\lambda} \left[4\pi n_{\lambda}^2 L_{\lambda}^0(T_P) - \sum_{m=1}^{N_d} L_{P\lambda}^m \Delta\Omega^m \right] \quad (1.108)$$

En intégrant la loi de Fourier (éq. 1.105) dans l'éq. 1.104, pour une géométrie bidimensionnelle, la conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_c \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_c \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S_r = 0 \quad (1.109)$$

L'intégration de l'éq. 1.109 sur le volume de contrôle V_P (Fig. 1.11), tout en supposant que le terme source radiatif S_r est constant dans ce volume, nous permet d'écrire :

$$\left[k_c \frac{\partial T}{\partial x} \right]_e - k_c \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w \Delta y + \left[k_c \frac{\partial T}{\partial y} \right]_n - k_c \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_s \Delta x + S_r V_P = 0 \quad (1.110)$$

avec :

$$\Delta y_P \Delta x_P = V_P \quad (1.111)$$

Les dérivées sont exprimées à partir des approximations suivantes, conformément au schéma de discrétisation des différences centrées :

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_e = 2 \frac{T_E - T_P}{\Delta x_P + \Delta x_E} \quad (1.112)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w = 2 \frac{T_P - T_W}{\Delta x_P + \Delta x_W} \quad (1.113)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_n = 2 \frac{T_N - T_P}{\Delta y_P + \Delta y_N} \quad (1.114)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_s = 2 \frac{T_P - T_S}{\Delta y_P + \Delta y_S} \quad (1.115)$$

Les approximations des dérivées aux limites du volume de contrôle permettent la réécriture de l'éq. 1.110 sous la forme générale :

$$a_P T_P = a_W T_W + a_S T_S + a_N T_N + a_E T_E + b_P \quad (1.116)$$

avec :

$$a_N = 2 \frac{k_c(T_e) \Delta x_P}{\Delta y_P + \Delta y_N} \quad (1.117)$$

$$a_S = 2 \frac{k_c(T_s) \Delta x_P}{\Delta y_P + \Delta y_S} \quad (1.118)$$

$$a_E = 2 \frac{k_c(T_e) \Delta y_P}{\Delta x_P + \Delta x_E} \quad (1.119)$$

$$a_W = 2 \frac{k_c(T_w) \Delta y_P}{\Delta x_P + \Delta x_W} \quad (1.120)$$

et :

$$a_P = a_N + a_E + a_S + a_E + a_W \quad (1.121)$$

$$b_P = S_r V_P \quad (1.122)$$

Différentes techniques peuvent être utilisées pour résoudre le système linéaire précédent (Décomposition LU, Gradients conjugué et biconjugué, ...). En règle générale, nous partons d'un champ de température initial proche de la solution afin d'accélérer la convergence. Nous

résolvons l'ETR à l'aide de la MVF décrite précédemment, en utilisant l'un des schémas de fermeture proposé. Une fois que le champ de luminance est convergé, nous calculons le terme source radiatif S_r en utilisant la relation 1.108 pour chaque maille. Ce dernier est alors injecté dans la relation (1.116) afin de déterminer le nouveau champ de températures. Le processus est réitéré jusqu'à la convergence. Le critère d'arrêt est fixé sur la variation relative de la température dans le milieu.

1.7.3 Linéarisation du terme source radiatif

La présence du rayonnement dans les problèmes que nous considérons rend l'équation de conservation de l'énergie (1.116) non linéaire. En effet, à travers de l'expression du terme source S_r , la température T_P apparaît implicitement. L'utilisation de ce terme source radiatif (1.108), calculé à l'issue de la résolution de l'ETR dans l'éq. 1.116 sans précautions particulières, peut poser des problèmes de convergence dans certains cas. En effet, la grandeur que l'on cherche à déterminer (T_P) n'est pas considérée aux mêmes instants du calcul. La méthode générale pour résoudre ce genre de difficultés est de linéariser le terme source. En fait, il s'agit de sous-relaxer S_r afin d'éviter des oscillations numériques pouvant altérer la convergence. La forme recherchée de S_r est :

$$S_r = S_c + S_P \times T_P \quad (1.123)$$

Pour s'assurer de la convergence de la solution, il est nécessaire d'ajouter une contrainte à l'expression précédente : S_P doit être négatif. Dans ce cas, le terme a_P de l'éq. 1.116 devient $a_P - S_P V_P$; on note que ce dernier est toujours positif. Ici encore nous retrouvons la condition de positivité obligatoire du terme diagonal du système linéaire afin de rendre possible sa résolution (voir §1.5.2). Le vecteur solution est défini par les valeurs b_P égales à $S_c V_P$. Le développement en série de Taylor du terme source au premier ordre nous donne :

$$S_r = S_r^* + \left. \frac{\partial S_r}{\partial T} \right|_{T=T^*} (T_P - T_P^*) \quad (1.124)$$

L'étoile (*) désigne ici la valeur obtenue lors de l'itération précédente. D'après les éq. 1.107 et 1.122, la dérivée du terme source par rapport à la température vaut :

$$\frac{\partial S_r}{\partial T} = - \int_{\lambda=0}^{\infty} \kappa_{\lambda} 4\pi n_{\lambda}^2 \frac{\partial L_{\lambda}^0(T)}{\partial T} d\lambda \quad (1.125)$$

Sachant que la luminance monochromatique du corps noir s'exprime selon la loi de Planck :

$$L_{\lambda}^0(T) = \frac{C_1}{\lambda^5 \left[e^{\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)} - 1 \right]} \quad (1.126)$$

En dérivant par rapport à la température, nous obtenons :

$$\frac{\partial L_{\lambda}^0(T)}{\partial T} = \frac{C_1 C_2 e^{\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)}}{\lambda^6 \left[e^{\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)} - 1 \right]^2 T^2} \quad (1.127)$$

On identifie les grandeurs S_p et S_c ; il vient alors :

$$S_c = - \int_{\lambda=0}^{\infty} \kappa_{\lambda} 4\pi n_{\lambda}^2 \frac{C_1 C_2 e^{\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)}}{\lambda^6 \left[e^{\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)} - 1 \right]^2} d\lambda \quad S_P = S_r^* \quad (1.128)$$

Cette démarche, proposée par Patankar [22], s'avère donner de bons résultats et permet de stabiliser les calculs même si les maillages utilisés ne sont pas très denses. En revanche, ce type de technique, comme toute démarche de sous-relaxation, augmente fortement le temps de calcul pour atteindre la convergence.

Le processus numérique de calcul du problème couplé explicité dans les sections précédentes (§1.7.2 et 1.7.3) va être validé par un cas test. Cependant, pour utiliser cet "benchmark", nous devons introduire certaines notions relatives au nombre de Stark N_s , grandeur sans dimensions, qui caractérise le couplage entre le rayonnement et la conduction. C'est l'objet du paragraphe suivant.

1.7.4 Adimensionnement et Nombre de Stark

Les équations à résoudre sont : l'équation de conservation de l'énergie ainsi que l'équation du transfert radiatif. Les propriétés radiatives et thermiques seront supposées indépendantes de la température. Afin de simplifier les calculs, nous considérons un milieu gris non diffusant et une géométrie bidimensionnelle; nous avons donc :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_c \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa_c \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} q_r + \frac{\partial}{\partial y} q_r = 0 \quad (1.129)$$

et :

$$\frac{dL}{ds} = -\kappa L + \kappa \frac{\sigma_B T^4}{\pi} \quad (1.130)$$

Les deux équations sont adimensionnées en utilisant les grandeurs suivantes :

$$x^* = \frac{x}{l} \quad y^* = \frac{y}{l} \quad s^* = \frac{s}{l} \quad \tau = \kappa l \quad (1.131)$$

$$T^* = \frac{T}{T_{ref}} \quad q_r^* = \frac{q_r}{4\sigma_B T_{ref}^4} \quad L^* = \frac{L}{4\sigma_B T_{ref}^4} \quad (1.132)$$

avec l : la longueur de référence et τ l'épaisseur optique du milieu. Les éq. 1.129 et 1.130 sont réécrites sous la forme suivante :

$$-\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} + \left(\frac{\partial}{\partial x^*} q_r^* + \frac{\partial}{\partial y^*} q_r^* \right) \frac{\tau}{N_s} = 0 \quad (1.133)$$

et :

$$\frac{dL^*}{ds^*} = -\tau L^* + \tau \frac{T^{*4}}{4\pi} \quad (1.134)$$

Dans l'équation de conservation de l'énergie apparaît un nombre adimensionnel N_s , appelé nombre de Stark [29, 26, 30]. Ce nombre représente la contribution de la conduction rapportée

à la contribution du rayonnement ; il peut être interprété comme le rapport des flux conductif et radiatif. Il est défini par :

$$N_s = \frac{k_c \kappa}{4\sigma_B T_{ref}^3} \quad (1.135)$$

Selon la valeur de la grandeur N_s , il est possible de caractériser quel mode de transfert domine l'échange thermique. La conduction est prédominante pour $N_s \gg 1$; en revanche, pour de faibles valeurs de N_s la contribution radiative est prépondérante dans le transfert de chaleur.

1.7.5 Validation pour un gaz gris entre deux plaques noires

Le cas test qui nous a permis de valider le couplage conducto-radiatif a été proposé par R. Viskanta et R.J. Grosh [31]. Il s'agit d'un système à plaques chaudes gardées, similaire à celui évoqué dans le paragraphe 1.6.1 (Fig. 1.7). Toutefois, nous considérons à présent la conduction dans le milieu (gaz). Les équations ont été réécrites sous leurs formes adimensionnées, afin d'associer au problème couplé le nombre de Stark. La solution semi-analytique proposée par R. Viskanta s'appuie sur les fonctions intégrales exponentielles $E_n(x)$ pour résoudre le problème couplé. La température adimensionnée $\theta = T/T_b$ est obtenue par la résolution itérative des équation suivantes :

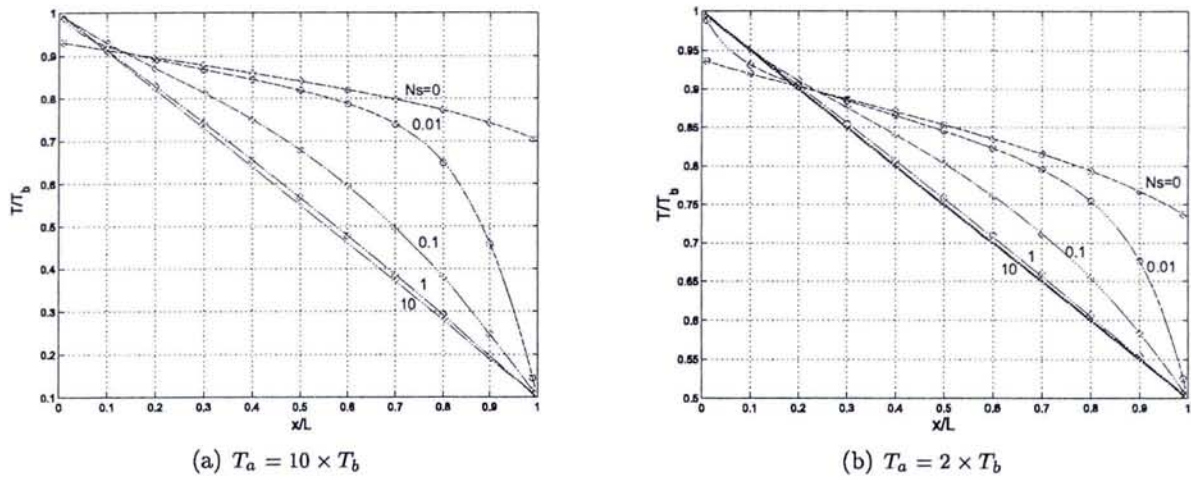
$$\begin{aligned} \theta(\tau) = & G(\tau) + \frac{1}{2N_s} \int_0^{\tau_L} n^2(\tau') \{ -E_3(|\tau - \tau'|) + E_3(\tau') \\ & + \frac{\tau}{\tau_L} [E_3(\tau_L - \tau') - E_3(\tau')] \} \theta^4(\tau') d\tau' \end{aligned} \quad (1.136)$$

et :

$$\begin{aligned} G(\tau) = & \frac{1}{2N_s} \left\{ \theta^4(0) \left[-E_4(\tau) + \frac{\tau}{\tau_L} E_4(\tau_L) + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_L} \right) \right] \right. \\ & + \theta^4(\tau_L) \left[\left(1 - \frac{\tau}{\tau_L} \right) E_4(\tau_L) + E_4(\tau_L - \tau) + \frac{1}{3} \frac{\tau}{\tau_L} \right] \\ & \left. + 2N_s \left[\theta(0) + \frac{\tau}{\tau_L} (\theta(\tau_L) - \theta(0)) \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.137)$$

Deux cas ont été envisagés, le gradient thermique entre les deux plaques étant plus ou moins grand. Nous avons considéré : $T_b = 10 \times T_a$ et $T_b = 2 \times T_a$. Le milieu entre les plaques est toujours un gaz gris. Nous avons résolu ce cas test avec la relation de fermeture Exponentielle à Température Linéarisée. Le maillage utilisé comporte 100 mailles réparties uniformément dans l'épaisseur. Comptetenu du fait que le problème est unidimensionnel, il y a symétrie azimutale et nous utilisons 16 directions de discrétisation pour l'angle polaire. Les résultats obtenus sont décrits respectivement par les figures 1.12 (a) et (b) qui donnent l'évolution de la température adimensionnée en fonction de la longueur adimensionnée, pour différentes valeurs de N_s .

On note la très bonne concordance entre nos résultats et la solution semi-analytique [31] (cercles sur les deux figures). Dans le cas de grandes valeurs du nombre de Stark, le profil de température est quasi linéaire entre les deux plaques ; on vérifie bien que l'échange est dominé par la conduction. A l'opposé, pour $N_s = 0$, on retrouve un profil de température similaire à ceux présentés figure 1.8. Par ailleurs, le saut de température aux frontières évoqué


FIG. 1.12 – Température adimensionnée T/T_b

dans le paragraphe 1.6.1 est toujours présent. Toutefois, dès que la conduction est prise en compte, même pour de faibles valeurs, il y a "accrochage" de la température aux limites que l'on contraint aux valeurs : T_a et T_b .

Chapitre 2

Rayonnement et Conduction dans les Fours Verriers

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter les premiers résultats concernant l'étude du transfert de chaleur dans un bain de verre. Nous résolvons les équations du transfert radiatif et de conservation de l'énergie par la MVF présentée dans le chapitre précédent. Le modèle physique retenu pour ces simulations a été proposé par Lee et Viskanta [2] lors de premiers travaux sur l'étude du couplage entre le rayonnement et la conduction dans les bains de verre. Cette étude est menée en régime permanent, en absence de convection au sein du bain. L'objet de ce chapitre est, notamment, de confronter nos modèles de couplage du rayonnement et de la conduction à ceux d'auteurs reconnus dans la communauté s'intéressant à la modélisation des fours verriers. Toutefois, avant d'évoquer les travaux de ces auteurs, nous allons préciser le plan de ce second chapitre. Il est le suivant :

- premièrement nous allons décrire la géométrie du four verrier considéré dans les différents cas test,
- dans le second paragraphe, les conditions aux limites du problème seront précisées,
- ensuite, nous rappellerons les propriétés optiques et thermiques du verre,
- un bref résumé de la technique de Rosseland, couramment employée pour simuler ces fours, sera fait,
- Enfin, nous présenterons nos résultats et les comparerons à ceux d'autres auteurs à travers plusieurs cas d'études.

2.2 Géométrie simplifiée d'un four verrier

Il existe une grande variété de fours verriers. La géométrie de ceux-ci change selon :

- le procédé de production du verre (silice+oxydes, verre recyclé, ...),
- le combustible utilisé (gaz naturel, procédé électrique, réchauffeurs, ...),
- le devenir du verre produit (vitrage, embouteillage, verrerie d'art, ...),

En conséquence les dimensions de ces fours varient de quelques dizaines de centimètres à plusieurs dizaines de mètres. Cependant les matériaux utilisés (réfractaires) pour la conception de ces fours sont souvent identiques. La géométrie et les différentes caractéristiques du four

verrier que nous modélisons sont précisées sur la figure 2.1. Il s'agit d'une coupe transversale d'un four verrier de type "Float", destiné à la production de verre plat.

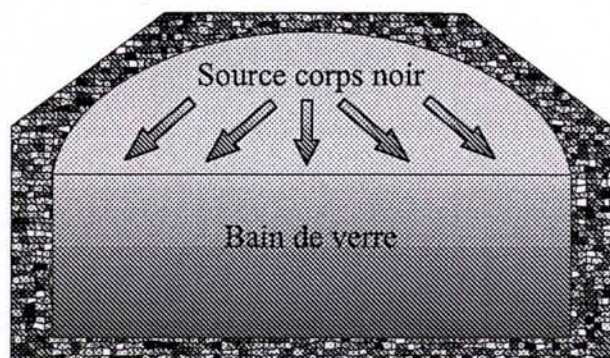


FIG. 2.1 – Coupe transversale du four

La partie supérieure du four rayonne en direction du bain de verre du fait : des gaz chauds, des flammes et des parois réfractaires. Cette zone est ici modélisée par un corps noir à la température de $1800K$. Les parois latérales et inférieure du bain sont constituées de matériaux réfractaires. L'interface entre le bain et la zone de combustion est supposée semi-transparente pour $\lambda < \lambda_{op} = 0.5\mu m$. Nous négligeons la présence d'une phase solide (verre, silice, oxydes surnageants) ; le milieu est considéré homogène. Dans la suite de ce chapitre, nous allons discuter des conditions aux limites radiative et thermique du modèle.

2.3 Conditions aux limites

Comme nous venons de l'évoquer, le modèle décrivant le four verrier présente différents types de conditions aux limites. La partie nous intéressant pour la modélisation est le bain de fusion. La voûte, les gaz chauds et les flammes présentes dans la partie supérieure ne sont pas modélisés. Ainsi, on distingue une interface semi-transparente située (à la limite *Nord*) et des limites opaques caractéristiques des parois latérales et inférieure (faces *Sud*, *Est* et *Ouest*) constituées de briques réfractaires. Nous allons décrire les équations associées à ces limites :

- d'un point de vue radiatif afin de pouvoir résoudre l'ETR,
- à l'aide d'un bilan énergétique pour la résolution de l'équation de la chaleur.

Le domaine de calcul et les conditions aux limites nous intéressant sont schématisés figure 2.2.

2.3.1 Conditions aux limites radiatives

Étant donné la nature semi-transparente de l'interface gaz-verre, une partie du rayonnement arrivant à la frontière *Nord* (surface du bain de verre) est réfléchié selon les lois de Descartes. La part restante est transmise dans le bain. Les coefficients de transmission et de réflexion sont déterminés à partir de la théorie électromagnétique de Maxwell [29]. Ils dépendent notamment des indices optiques de réfraction du verre et du gaz. Pour ce dernier, nous prenons $n_{\lambda-gaz} = n_0 = 1$. Cette hypothèse est une approximation relativement grossière, étant donné que le milieu au-dessus du bain est composé, entre autres : de gaz de combustion, de suies et d'une couche de matière surnageante ("glass foam").

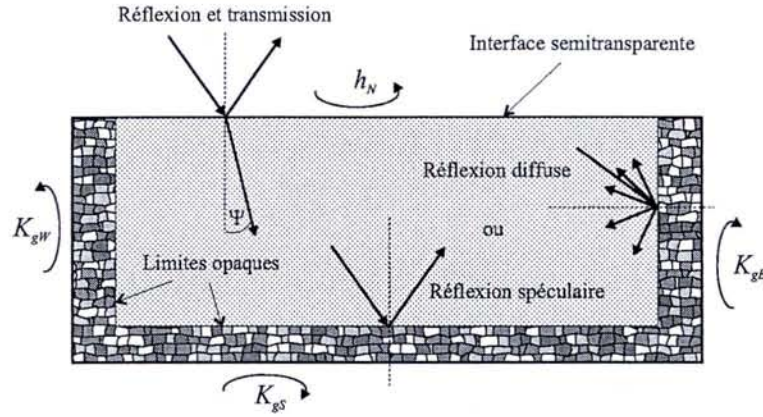


FIG. 2.2 – Conditions aux limites radiatives et thermiques

Frontière semi-transparente

La luminance à la frontière *Nord* est la somme de deux contributions : celle du rayonnement issu des gaz chauds transmis dans le bain et du rayonnement provenant du verre en fusion qui est réfléchi à l'interface semi-transparente (Fig. 2.2). Cette luminance s'écrit :

$$y = H \Rightarrow L_{\lambda,n}^m = \tau_{\lambda}^m \left(\frac{n_{\lambda}}{n_0} \right)^2 L_{\lambda}^0(T_{gaz}) + \rho_{\lambda}^m L_{\lambda,n}^{m'} \quad (2.1)$$

où ρ_{λ}^m et τ_{λ}^m sont les coefficients de réflexion et de transmission monochromatiques directionnels. Leurs expressions sont données par la théorie électromagnétique. Ces deux coefficients sont liés ; ils dépendent des valeurs prises par l'indice optique complexe des deux milieux. Dans le cas d'une interface séparant de l'air et du verre, certaines simplifications peuvent être apportées aux relations de Maxwell. Nous vérifions que $n_{\lambda,verre}^2 \gg k_{\lambda,verre}^2$ dans la plage de longueurs d'onde où sont faits les calculs (zone de transparence). Dans ces conditions, les coefficients de réflexion et de transmission s'écrivent :

$$\begin{aligned} \rho_{\lambda}(\Psi) &= 1 & \text{si } \Psi < \Psi_{lim} \\ \rho_{\lambda}(\Psi) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \Psi - n_{\lambda}^r P_{\lambda}}{\cos \Psi + n_{\lambda}^r P_{\lambda}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{n_{\lambda}^r \cos \Psi - P_{\lambda}}{n_{\lambda}^r \cos \Psi + P_{\lambda}} \right)^2 & \text{si } \Psi \geq \Psi_{lim} \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec $P_{\lambda} = \sqrt{1 - n_{\lambda}^{r2} \sin^2 \Psi}$. La relation qui existe entre le coefficient de réflexion et celui de transmission à une interface est :

$$\tau_{\lambda}(\Psi) = 1 - \rho_{\lambda}(\Psi) \quad (2.3)$$

Ψ est l'angle entre la direction de propagation du rayonnement et le vecteur normal à l'interface. L'angle limite Ψ_{lim} est défini par la troisième loi de Descartes $\Psi_{lim} = \arcsin(1/n_{\lambda}^r)$ avec $n_{\lambda}^r = n_{\lambda}/n_0$ qui est l'indice relatif de réfraction entre les deux milieux. Au-delà de cet angle limite il y a réflexion totale. Ainsi, une partie du rayonnement provenant du bain est piégée et intégralement redirigée vers l'intérieur de celui-ci quand elle arrive à la surface.

Pour mieux comprendre la variation de ces grandeurs en fonction de la direction et de la longueur d'onde du rayonnement, nous conseillons au lecteur l'ouvrage de M.F. Modest [29] qui rappelle les notions d'électromagnétisme utiles au thermicien.

Frontières opaques

Les faces latérales et inférieure du bain de verre sont opaques et noires; l'expression des conditions aux limites radiatives en est fortement simplifiée. Toutefois, nous pouvons aussi considérer des conditions aux limites radiatives de type diffuses ou spéculaires en réflexion dans notre modèle. Ainsi, pour de la réflexion diffuse aux parois nous obtenons pour la limite *Sud* :

$$y = 0 \Rightarrow L_{\lambda,s}^m = n_{\lambda}^2 L_{\lambda}^0(T_s) + \frac{1 - \epsilon_{w\lambda}}{\pi} q_{\lambda,s}^- \quad (2.4)$$

avec $q_{\lambda,s}^-$ le flux radiatif spectral incident sur la surface inférieure. Il est donné par :

$$q_{\lambda,s}^- = \sum_{|\vec{\Omega}^m \cdot \vec{n}_y| \leq 0} L_{\lambda}^m |\vec{\Omega}^m \cdot \vec{n}_y| d\Omega \quad (2.5)$$

Pour la même paroi si la réflexion est spéculaire, la luminance vaut :

$$y = 0 \Rightarrow L_{\lambda,s}^m = \epsilon_{w\lambda} n_{\lambda}^2 L_{\lambda}^0(T_s) + (1 - \epsilon_{w\lambda}) L_{\lambda,s}^{m'} \quad (2.6)$$

Les directions m et m' vérifient la condition de spécularité dans cette étude. La luminance dans le cas de la paroi noire se réduit à l'expression suivante :

$$y = 0 \Rightarrow L_{\lambda,s}^m = n_{\lambda}^2 L_{\lambda}^0(T_s) \quad (2.7)$$

Il en va de même pour les frontières latérales (*Est* et *Ouest*) :

$$x = 0 \Rightarrow L_{\lambda,w}^m = n_{\lambda}^2 L_{\lambda}^0(T_w) \quad (2.8)$$

$$x = L \Rightarrow L_{\lambda,e}^m = n_{\lambda}^2 L_{\lambda}^0(T_e) \quad (2.9)$$

Enfin, l'intérêt de la MVF pour l'aspect radiatif de la résolution réside notamment dans le fait qu'il est possible de choisir la quadrature angulaire pour la discrétisation de l'ETR. Cet aspect peut s'avérer être utile lorsque l'on envisage des conditions aux limites radiatives faisant intervenir un rayonnement collimaté.

2.3.2 Conditions aux limites thermiques

Afin de résoudre l'équation de conservation de l'énergie dans le milieu, nous devons définir des conditions aux limites thermiques. Ce sont les bilans énergétiques aux limites du domaine étudié.

Frontière semi-transparente

Plusieurs types de conditions aux limites thermiques peuvent être envisagés; dans notre cas, on a pour la face supérieure :

$$-k_c \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=H} + \int_{\lambda_{lim}}^{\infty} \alpha_{\lambda} \pi L_{\lambda}^0(T_{gaz}) d\lambda = h_N [T(x, H) - T_{gaz}] + \int_{\lambda_{lim}}^{\infty} \epsilon_{\lambda} \pi L_{\lambda}^0(T_{x,H}) d\lambda \quad (2.10)$$

Les termes de gauche traduisent les gains par conduction et absorption à la surface du bain. Les termes de droite sont relatifs aux pertes par convection et émission vers les gaz environnants. Nous supposons que le verre est opaque à la propagation du rayonnement pour $\lambda > \lambda_{lim} = 5\mu m$. Ceci est justifié par les fortes valeurs que prend k , la partie imaginaire de l'indice optique, à ces longueurs d'onde. Pour un milieu transparent, les termes intégraux (pertes et gains d'énergie d'origine radiatives) disparaissent.

Frontières opaques

Dans le cas des parois opaques, les conditions aux limites thermiques seront du type (ici pour la limite inférieure) :

$$k_c \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} + \int_{\lambda=0}^{\lambda_{lim}} \alpha_{w\lambda} q_{y\lambda}^-(x, 0) d\lambda = K_{gS} [T(x, 0) - T_\infty] + \int_{\lambda=0}^{\lambda_{lim}} \epsilon_{w\lambda} \pi n_\lambda^2 L_\lambda^0(T(x, 0)) d\lambda \quad (2.11)$$

avec $q_{\lambda s}^-$ le flux radiatif dans la direction négative à la frontière *sud*. Le même type de bilan énergétique peut être fait aux frontières latérales. La grandeur K_{gS} est un coefficient global d'échange. Il prend en compte les phénomènes d'échanges convectifs dans et à l'extérieur du bain de verre, ainsi que la conduction dans les briques réfractaires.

Pour les frontières *Ouest* et *Est*, nous écrivons respectivement :

$$k_c \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} + \int_{\lambda=0}^{\lambda_{lim}} \alpha_{w\lambda} q_{x\lambda}^-(0, y) d\lambda = K_{gW} [T(0, y) - T_\infty] + \int_{\lambda=0}^{\lambda_{lim}} \epsilon_{w\lambda} \pi n_\lambda^2 L_\lambda^0(T(0, y)) d\lambda d\lambda \quad (2.12)$$

$$-k_c \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} + \int_{\lambda=0}^{\lambda_{lim}} \alpha_{w\lambda} \pi n_\lambda^2 L_\lambda^0(T(L, y)) d\lambda = K_{gE} [T(L, y) - T_\infty] + \int_{\lambda=0}^{\lambda_{lim}} \epsilon_{w\lambda} q_{x\lambda}^+(L, y) d\lambda \quad (2.13)$$

2.4 Propriétés optiques et thermiques du verre

2.4.1 Caractéristiques optiques

L'indice de réfraction et le coefficient d'absorption de différents types de verres sont proposés par M. Rubin [32]. Nous donnons (Fig. 2.3) les valeurs de n et k pour le verre clair (verre à vitrage) et le verre vert (verre à bouteille). Ces valeurs nous ont permis de calculer $\rho_\lambda(\theta)$ et $\tau_\lambda(\theta)$. Le coefficient d'absorption κ_λ du verre est relativement faible dans le visible ; il augmente rapidement dans le proche infrarouge ; il est représenté figure 2.4 dans la gamme spectrale $[\lambda = 0 \mu m, \lambda_{lim} = 5 \mu m]$.

Le verre est considéré comme opaque au rayonnement pour les longueurs d'ondes supérieures à la longueur d'onde dite d'arrêt λ_{lim} . Elle est de l'ordre de $5 \mu m$ pour les verres. Ceci, est dû aux fortes valeurs du coefficient d'absorption spectral qui sont alors atteintes. L'émissivité dans la région opaque est supposée constante ; on a : $\epsilon_{lim} = \alpha_{lim} = 0.9$ pour le verre à haute température. Cette valeur de l'émissivité est un ordre de grandeur susceptible de changer selon la composition chimique du verre.

En toute rigueur, l'indice optique complexe du verre dépend aussi de la température. Dans cette étude, cet aspect ne sera pas pris en compte, les variations étant supposées faibles. Elles sont, en outre, difficilement mesurables.

2.4.2 Caractéristique thermique - conductivité

La conductivité phonique (thermique) k_c du verre évolue avec la température. Plusieurs auteurs se sont intéressés à cette grandeur. Parmi eux V.I. Primenko [33], J. Endrys [34], S. Andre and A. Degiovanni [35] et D. Mann [36]. Nous avons retenu pour notre modèle la conductivité déterminée par D. Mann pour deux raisons : elle a été estimée récemment et c'est

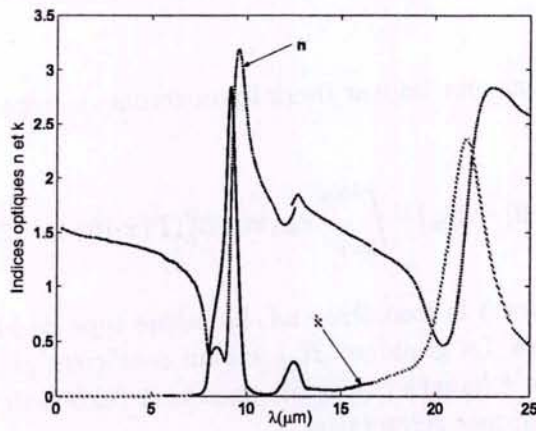


FIG. 2.3 - Indice optique complexe du verre clair

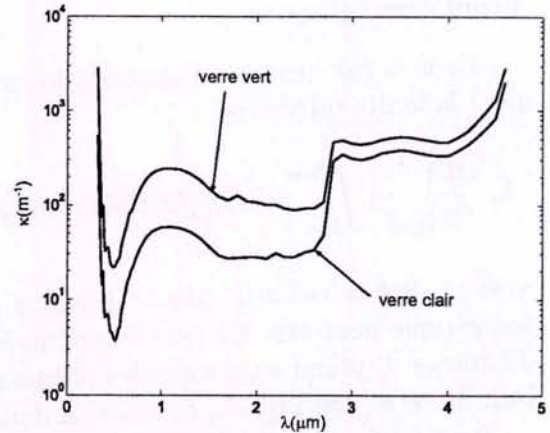


FIG. 2.4 - Coefficient d'absorption spectral des verres clair et vert

celle utilisée par les auteurs auxquels nous nous référons pour les validations (D. Lacroix [23] et K.H. Lee et R. Viskanta [2, 3]). Elle est donnée par la relation suivante :

$$k_c(T) = 1,14 + 6,24 \cdot 10^{-4}(T - 273) \quad (2.14)$$

Les autres grandeurs thermodépendantes que sont la masse volumique, la chaleur spécifique ou encore la viscosité, seront détaillées dans le chapitre 4 où sont considérés les aspects convectifs du bain dans le bilan énergétique.

2.5 Modèle de Rosseland - Approximation de diffusion

L'analyse rigoureuse du transfert radiatif, dans les fours destinés à la production de verre, est complexe et exige des ressources informatiques considérables pour la modélisation numérique. Ainsi, U. Fotheringham et F.T. Lentes [37] proposent des approches réduites pour simplifier le modèle thermique et diminuer les besoins en termes de : place mémoire et temps de calcul. L'approximation de diffusion (dite de Rosseland) en est une. Elle est couramment utilisée par les scientifiques et les industriels modélisant les processus de fabrication du verre [2, 3, 38, 37, 39, 40]. Nous allons brièvement rappeler cette méthode dont le champ d'application est restreint aux milieux optiquement épais.

En utilisant cette approximation, le vecteur flux radiatif s'écrit :

$$\vec{q}_r = -k_R \vec{\nabla} T \quad (2.15)$$

où k_R est la conductivité radiative équivalente du milieu étudié. Cette conductivité est aussi connue sous le nom de conductivité radiative de Rosseland [40]. Elle est donnée par :

$$k_R = \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \frac{n_\lambda^2}{\kappa_\lambda} \left(\frac{dL_\lambda^0}{dT} \right) d\lambda \quad (2.16)$$

Avec cette approche, il n'est plus nécessaire de réaliser un calcul radiatif afin d'obtenir $\vec{q}_r$ (à l'aide du champ de luminance). La conductivité de Rosseland est uniquement dépendante

de la température et des propriétés optiques du matériau. La seule équation à résoudre est l'équation de la conservation de l'énergie qui s'écrit sous la forme suivante en régime établi :

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{q}_t = -\vec{\nabla} \cdot [\vec{q}_c + \vec{q}_r] = \vec{\nabla} \cdot [(k_e) \vec{\nabla} T] = 0 \quad (2.17)$$

La conductivité thermique totale k_e , dite "efficace", est la somme de la conductivité thermique (phonique) et de conductivité radiative de Rosseland.

$$k_e = k_R + k_c \quad (2.18)$$

La figure 2.5 donne la comparaison entre la conductivité thermique totale calculée par Lee [3] et des données expérimentales obtenues par J. Endrys et A. Blazek [39].

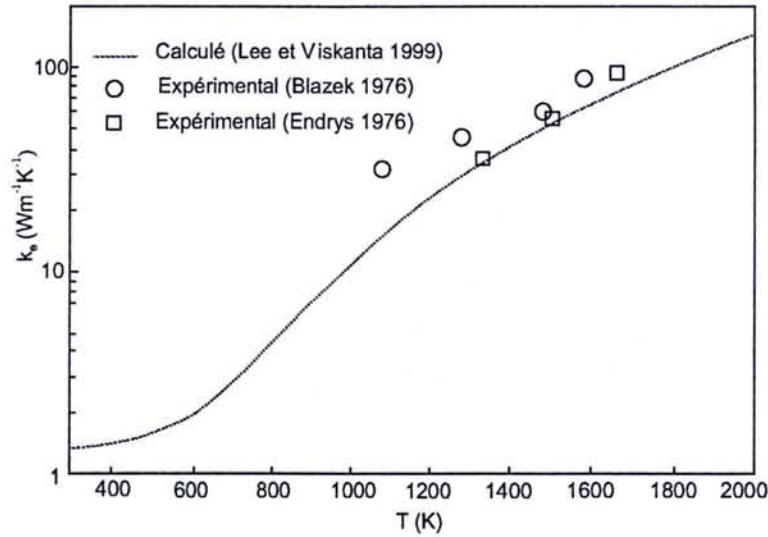


FIG. 2.5 – Conductivité thermique totale du verre clair

L'approximation de diffusion est très simple à programmer et donne des résultats convenables pour les milieux unidimensionnels, optiquement épais. Par ailleurs, il est notable que les grandeurs calculées à proximité des frontières sont éloignées de la réalité.

K.H. Lee et R. Viskanta [3, 2] ont montré que l'approximation de diffusion est une mauvaise approche pour l'étude des fours verriers. Elle sous-estime le champ de températures surtout à proximité des réfractaires. Toutefois, leurs conclusions ne sont valables que si l'on néglige les échanges convectifs dans le bain. En effet, le transfert de chaleur par convection libre ou forcée doit homogénéiser les températures. Une approche complète, associant les trois modes d'échange de chaleur, sera seule capable de nous renseigner sur les limites exactes de l'approximation de diffusion, comme nous le verrons dans le chapitre 4.

2.6 Validation unidimensionnelle

Afin de valider notre modèle numérique (MVF) et tester les différentes relations de fermetures explicitées précédemment pour résoudre l'ETR, nous allons confronter nos résultats à ceux de différents auteurs utilisant d'autres techniques. La première série de cas test s'organise autour des échanges thermiques dans un milieu unidimensionnel. Ensuite, l'analyse d'une section de bain de four verrier (géométrie bidimensionnelle) est abordée.

2.6.1 Modèle physique et numérique

Nous considérons le transfert de chaleur dans un volume de verre en fusion (Fig. 2.6). Le bas du bain de verre est en contact avec les briques réfractaires qui sont opaques (réflexion diffuse ou spéculaire). Le milieu est chauffé à sa limite supérieure par des gaz de combustion à haute température. Dans le cas présent, nous supposons que l'on est très loin des frontières latérales et que les effets de bord sont négligeables. L'interface supérieure est semi-transparente ; elle réfléchit et transmet le rayonnement. La surface libre du bain est chauffée par un rayonnement de type corps noir. Elle échange par convection avec les gaz chauds (issus de la combustion). La limite inférieure échange la chaleur avec le milieu extérieur par convection et conduction. Le milieu extérieur est supposé à température ambiante. Le transfert de chaleur par convection aux limites est évalué en spécifiant les coefficients d'échange h et K_g . Les échanges thermiques dans la couche de verre sont obtenus par le couplage de la conduction avec le rayonnement ; les mouvements convectifs du bain sont négligés en première approximation. Le verre considéré est un milieu homogène, absorbant et émettant ; la diffusion du rayonnement est négligée.

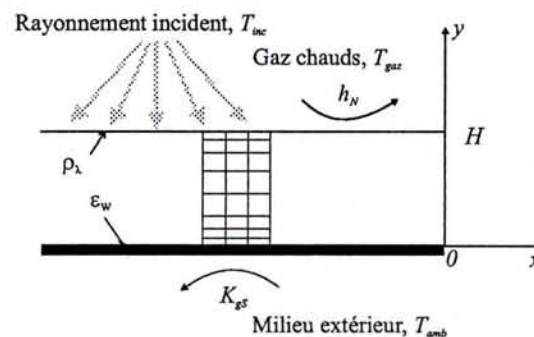


FIG. 2.6 – Modèle unidimensionnel

L'équation de conservation de l'énergie est non-linéaire ; sa solution est obtenue numériquement. La MVF est utilisée pour la résolution de ce problème couplé. Pour la résolution de l'équation du transfert radiatif, nous avons utilisé les quatre relations de fermeture décrites dans le chapitre précédent.

Pour un problème unidimensionnel, la solution intégrale (exacte) de l'ETR est disponible [38, 40]. Elle est décrite dans le paragraphe § 1.7.5. Son inconvénient majeur réside dans le temps de calcul important, notamment pour évaluer les fonctions intégrales exponentielles avec exactitude. Étant donné que ces fonctions intégrales exponentielles incluent les propriétés radiatives et spectrales, leur intégration numérique exige une augmentation considérable du nombre de points d'intégration quand l'opacité du milieu croît. Afin d'obtenir des résultats satisfaisants avec cette méthode, un schéma numérique précis d'intégration est nécessaire. La méthode de Gauss avec une quadrature à dix points est employée par Viskanta [38, 40]. Le code de transfert de chaleur couplé que nous avons développé s'appuie sur la MVF décrivant une géométrie bidimensionnelle. Afin de simuler un problème unidimensionnel, tout en conservant ce code de calcul (bidimensionnel), nous avons modifié les conditions aux limites latérales :

- En ce qui concerne l'ETR, on considère toujours des parois noires, qui sont suffisamment éloignées, afin de ne pas affecter la luminance au centre du domaine.
- Pour l'équation de conservation de l'énergie, on utilise des conditions de continuité, c'est-à-dire flux nul à la paroi.

Le maillage spatial utilisé est non-uniforme, similaire à celui de Lee et Viskanta [3] ; il est

resserré près des limites supérieure et inférieure (Fig. 2.6).

2.6.2 Cas test 1

Les paramètres de ce premier cas test sont les suivants :

- profondeur du four $H = 1\text{ m}$ ou $H = 0.1\text{ m}$,
- température des gaz chauds $T_{gaz} = 1800\text{ K}$,
- température de la voûte $T_{inc} = 1800\text{ K}$,
- température de l'air extérieur $T_{amb} = 300\text{ K}$,
- coefficient d'échange convectif à la limite supérieure $h_N = 100\text{ W m}^{-2}\text{ K}^{-1}$,
- coefficient d'échange global à la limite inférieure $K_{gS} = 100\text{ W m}^{-2}\text{ K}^{-1}$,
- émissivités $\epsilon_\lambda = \alpha_\lambda = 0.9$ et $\epsilon_{w\lambda} = \alpha_{w\lambda} = 1$,
- conductivité thermique [36] : $k_c = 1.14 + 0.000624 \times (T - 273.19)\text{ W m}^{-1}\text{ K}^{-1}$
- indice optique (modèle à 10 bandes) n_λ (Fig. 2.3) [32],
- coefficient d'absorption (modèle à 10 bandes) κ_λ (Fig. 2.4) [32],
- discrétisation angulaire $N_\theta \times N_\phi = 4 \times 8$,

La luminance spectrale incidente est évaluée à l'aide de la luminance du corps noir à la température de combustion, $L_\lambda^0(T_{gaz})$. La face inférieure du mur est opaque; son émissivité peut être choisie. Pour ce cas test, nous supposons que cette limite est noire ($\epsilon_s = 1$), conformément au cas test proposé par Lee [3]. Dans les fours verriers industriels, le coefficient K_{gS} est une fonction de la température. Il peut être calculé à partir : des propriétés thermiques des briques réfractaires, de leurs épaisseurs et des propriétés du milieu extérieur.

La MVF est employée pour résoudre l'ETR; elle permet l'obtention : du flux radiatif et du terme source radiatif. Ce dernier est utilisé pour la résolution de l'équation de la conservation de l'énergie. Pour ce premier cas test, différentes grandeurs ont été calculées. Nous allons notamment comparer nos résultats en ce qui concerne :

- les flux de chaleur par conduction et rayonnement,
- le flux total de chaleur échangé et son importance quant à l'estimation de la convergence,
- le profil de température dans la couche considérée.

Milieu d'épaisseur $H = 1\text{ m}$

Les figures 2.7 et 2.8 décrivent l'évolution des flux conductifs et radiatifs dans le milieu considéré et ce à l'aide de différentes techniques. Les valeurs obtenues par l'approche intégrale (solution exacte) et celles utilisant la MOD, employée par Lee et Viskanta, constituent les éléments de validation (Fig. 2.7 (a)). Nos résultats obtenus par la MVF pour les diverses relations de fermeture apparaissent sur la figure 2.7 (b). Les résultats obtenus par l'approche de Rosseland sont aussi explicités (Fig. 2.8). Afin de comparer la MVF à la MOD, des maillages similaires ont été utilisés. En revanche, la solution exacte nécessite, comme nous l'avons évoqué précédemment, un maillage plus dense (101, puis 301 nœuds).

Une première remarque concernant les comparaisons entre MOD et MVF est que les grandeurs calculées sont du même ordre. Le flux radiatif est largement dominant; il représente plus de 90% du flux total. On observe aussi que seul le flux radiatif est sensible à la relation de fermeture choisie pour la résolution de l'ETR. A cela il existe deux raisons. Premièrement le calcul des luminances est notoirement moins bon avec les relations de fermetures correspondant à des approches simples; de ce fait les erreurs commises se retrouvent naturellement

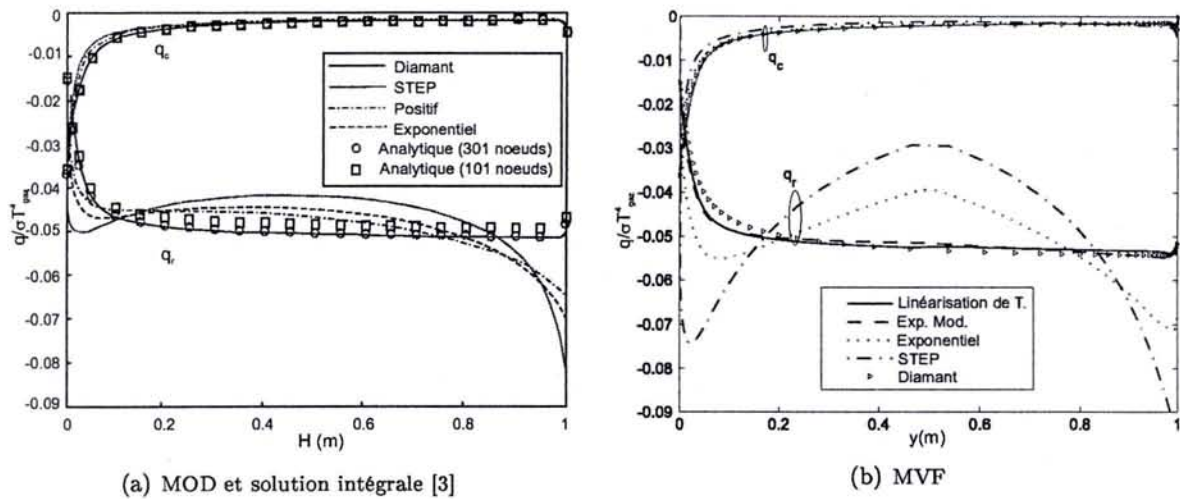


FIG. 2.7 – Flux radiatifs et conductifs pour différents schémas de fermeture ($H = 1m$, 50 mailles)

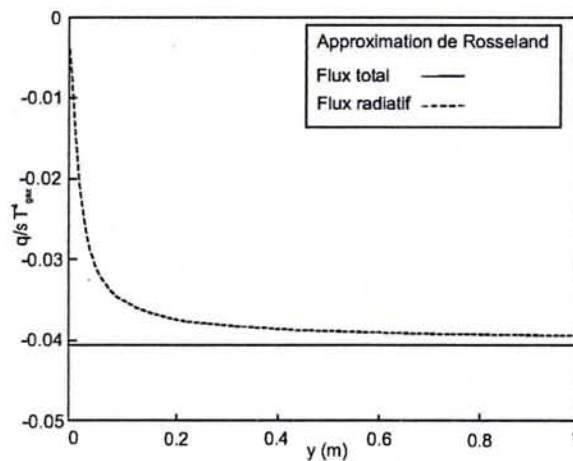


FIG. 2.8 – Flux radiatif, approche de Rosseland [3]

lors du calcul du terme source puis du flux radiatif. Deuxièmement, il faut ajouter la nature du maillage (resserré aux frontières) que nous utilisons.

En ce qui concerne le flux radiatif, pour le milieu de forte épaisseur ($H = 1m$), plusieurs remarques peuvent être faites. En premier lieu, il convient de noter que l'approximation de diffusion (méthode de Rosseland) (Fig. 2.8) appliquée au calcul de $\bar{q}_r$ donne des résultats satisfaisants quand elle est utilisée conformément à ses hypothèses restrictives (milieu optiquement épais, calcul loin des frontières). Dans ce cas, on observe une bonne concordance avec la solution intégrale (Fig. 2.7). Avec les deux méthodes : MOD et MVF, les résultats obtenus dépendent fortement de la relation de fermeture choisie comme nous allons le préciser (Fig. 2.7 (a) et (b)). D'un point de vue général, il apparaît clairement que pour le maillage considéré (50 mailles) les flux obtenus par les relations de différenciation de type : STEP, Positive et

2.6. Validation unidimensionnelle

Exponentielle, sont éloignés de la solution intégrale. Il-Kyoung [20] et Chai [41, 42] ont prouvé en utilisant la MOD que les schémas : STEP, Exponentiel ou Positif produisent de la diffusion artificielle et faussent le calcul des luminances.

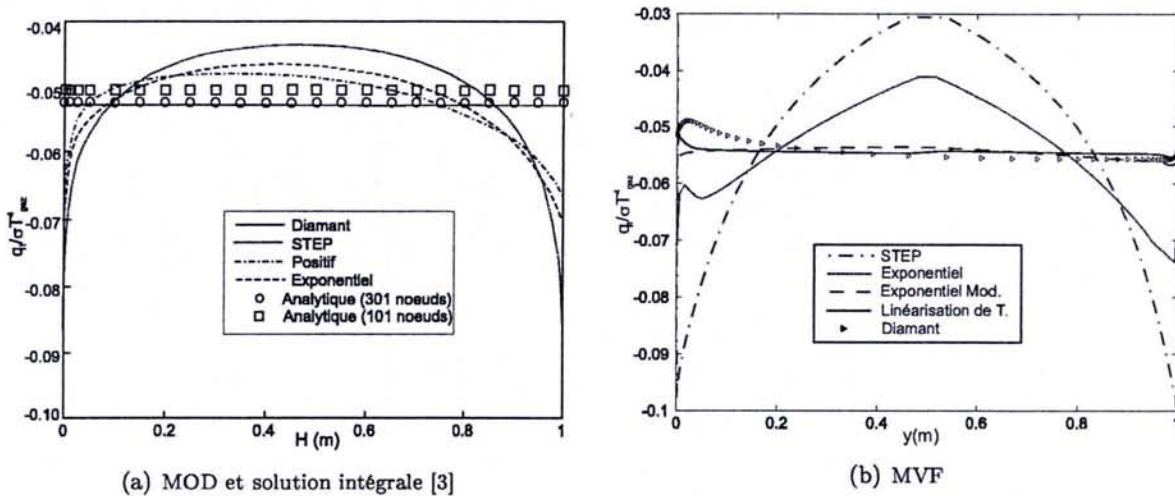


FIG. 2.9 – Flux total pour différents schémas de fermeture ($H = 1m$, 50 mailles)

A contrario, le schéma Diamant est très proche de la solution semi-analytique, et donne pour ce modèle unidimensionnel une bonne approche du flux radiatif pour un temps de calcul relativement faible (et ce pour les deux méthodes de calcul). Ce résultat s'explique pour deux raisons. D'une part, les champs de températures dans les bains de verre sont fortement stratifiés et se prêtent bien à une discrétisation de type centré de la luminance aux faces *Nord* et *Sud* d'une maille. D'autre part, la géométrie est unidimensionnelle. Dans le cas contraire comme nous le verrons dans le cas bidimensionnel, le calcul de la luminance résultant d'une moyenne sur quatre faces ou plus peut générer de fortes instabilités à proximité des "frontières froides" (limites latérales non exposées au rayonnement direct des flammes au-dessus du bain). De plus, ce schéma doit être employé avec précaution car, il peut conduire à l'obtention de luminances négatives, ce qui est physiquement irréaliste. Lee et Viskanta [3] recommandent de remplacer les luminances négatives par zéro afin de réduire l'ampleur de la fausse diffusion et de préserver la stabilité du calcul. Enfin, il est aussi important de rappeler que le schéma diamant, pour un maillage peu dense, ne fonctionnera bien que si le problème est correctement initialisé, c'est-à-dire que le champ de température supposé dans le bain n'est pas trop éloigné de la solution finale.

L'ensemble de ces remarques est à modérer, compte tenu du fait que l'augmentation du nombre de mailles a pour conséquence d'uniformiser les résultats obtenus pour les flux de chaleur, et ce pour toutes les relations de fermeture. Par exemple, le schéma Exponentiel nécessite au moins 400 mailles pour produire un flux total constant. Pour le schéma STEP, un maillage de plus de 500 mailles est nécessaire. Une étude de sensibilité des relations de fermeture selon le maillage sera détaillée dans les paragraphes § 2.8.2 et 2.8.3

Les fluctuations du flux radiatif $\vec{q}_r$ se retrouvent dans l'allure du flux total $\vec{q}_t$ (non-uniformité). Les figures 2.9 (a) et (b) font clairement ressortir les incertitudes liées à l'utilisation des relations de fermetures STEP, Exponentielle et Positive dans le cas de milieux

optiquement épais avec des maillages peu denses.

Si l'on s'intéresse au flux total de chaleur calculé par la MVF à l'aide des relations de fermeture du type : Exponentiel Modifié et à Température Linéarisée, on note qu'il n'y a que de très faibles variations du flux total autour de sa valeur de base (Fig. 2.9 (b)). Les valeurs obtenues sont très proches de la solution semi-analytique et ce même pour un maillage de 50 mailles. Toutefois, ces deux méthodes présentent l'inconvénient de temps de calcul plus longs, spécialement la méthode à température linéarisée qui peut s'avérer être quatre fois plus lente que l'approche STEP (pour le même nombre de mailles). Une optimisation de ces temps de calculs pourrait passer par l'emploi de deux méthodes : STEP ou Exponentielle pour obtenir une allure approchée du champ de températures, Exponentiel Modifiée ou à Température Linéarisée afin d'obtenir des résultats convenablement convergés.

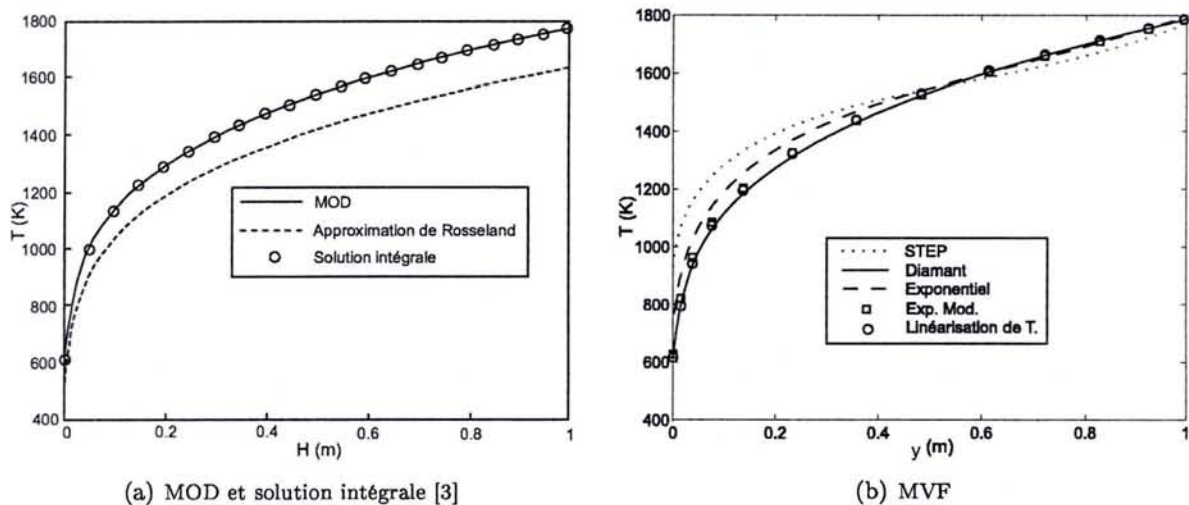


FIG. 2.10 – Températures pour différents schémas de fermeture ($H = 1m$, 50 mailles)

Les profils de températures calculés en utilisant : l'approximation de diffusion, la MOD avec le schéma diamant et la solution intégrale, sont représentés figure 2.10 (a). Nous constatons que la MOD donne des valeurs de la température dans l'épaisseur du bain tout à fait conformes à celles obtenues par l'approche semi-analytique. En revanche, l'écart existant entre ces deux méthodes de résolution de l'ETR et l'approche de Rosseland est nettement plus marqué. Dans le haut du bain de verre, cet écart est de l'ordre de 200 K. Ce phénomène peut être aisément expliqué. A mesure que l'on s'approche de la zone supérieure du bain, l'épaisseur optique diminue et l'on s'éloigne des critères de validité de l'approche de diffusion [40]. Une interprétation simple de ce résultat vient du fait que le transport à longue portée d'énergie rayonnée ne peut pas être prédit par l'approximation de Rosseland.

La figure 2.10 (b) présente les profils de température obtenus par les différentes relations de fermeture avec la MVF. Comme dans le cas du flux total, les résultats obtenus par le biais des schémas STEP et Exponentiels tendent à majorer la température dans la partie inférieure du bain, de 150 K à 300 K selon le schéma retenu. Les trois autres schémas de fermeture ont conduit à des résultats qui concordent très bien avec la solution intégrale.

Milieu d'épaisseur $H = 0.1m$

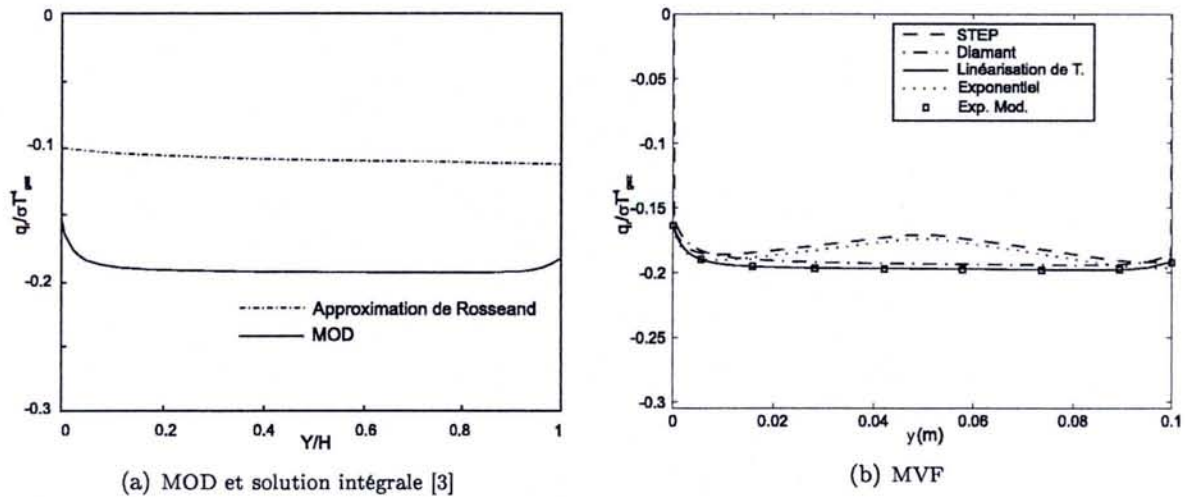


FIG. 2.11 – Flux radiatifs pour différents schémas de fermeture ($H = 0.1m$, 50 mailles)

Afin d'étudier le transfert de chaleur dans les conduites de sortie des fours verriers, le deuxième cas test porte sur un milieu de profondeur plus faible $H = 0.1m$. Tous les autres paramètres restent inchangés. La figure 2.11 (a), issue des mêmes travaux de Lee et Viskanta [3], donne l'évolution du flux radiatif $\vec{q}_r$ obtenu par la MOD en utilisant le schéma Diamant et l'approximation de diffusion. Les résultats de la figure 2.12 (a) représentent l'évolution du flux total selon la hauteur. Pour les deux approches, il y a uniformité des flux $\vec{q}_t$. Toutefois, il existe un écart assez important entre ces deux valeurs de flux, compte tenu de la faible épaisseur du bain de verre. Cette mauvaise estimation des flux a une incidence très marquée sur les profils de températures, (Fig. 2.13 (a)), l'approche de diffusion sous-estimant les températures de près de 400 K sur toute la hauteur.

Les flux radiatifs et totaux obtenus par la MVF sont représentés sur les figures 2.11 (b) et 2.12 (b). Une première analyse de ces flux montre que la fausse diffusion, générée par les schémas : STEP et Exponentiel, est toujours présente, dans une moindre mesure, étant donné le ratio dimension nombre de mailles. Par ailleurs, les flux obtenus par trois autres schémas sont en accord avec les résultats obtenus par la MOD.

Les profils de températures obtenus par la MVF (Fig. 2.13 (b)) montrent que l'ensemble des schémas de fermeture donnent des résultats très proches de la solution exacte. Une analyse plus fine de la figure 2.13 (b) fait apparaître la parfaite égalité entre les résultats obtenus avec les schémas Exponentiel Modifié et à Température Linéarisée. Par ailleurs, les trois autres schémas présentent de petits écarts à la limite inférieure. Si l'on se réfère à la solution semi-analytique les écarts maximaux de température sont de l'ordre de : 7 K pour le schéma Diamant, 14 K pour le schéma Exponentiel et 18 K pour le schéma STEP.

Conclusion

Les calculs effectués avec la MVF (avec un nombre de mailles constant, 50 mailles), font ressortir une meilleure uniformité du flux total $\vec{q}_t$ obtenu avec les trois schémas suivants :

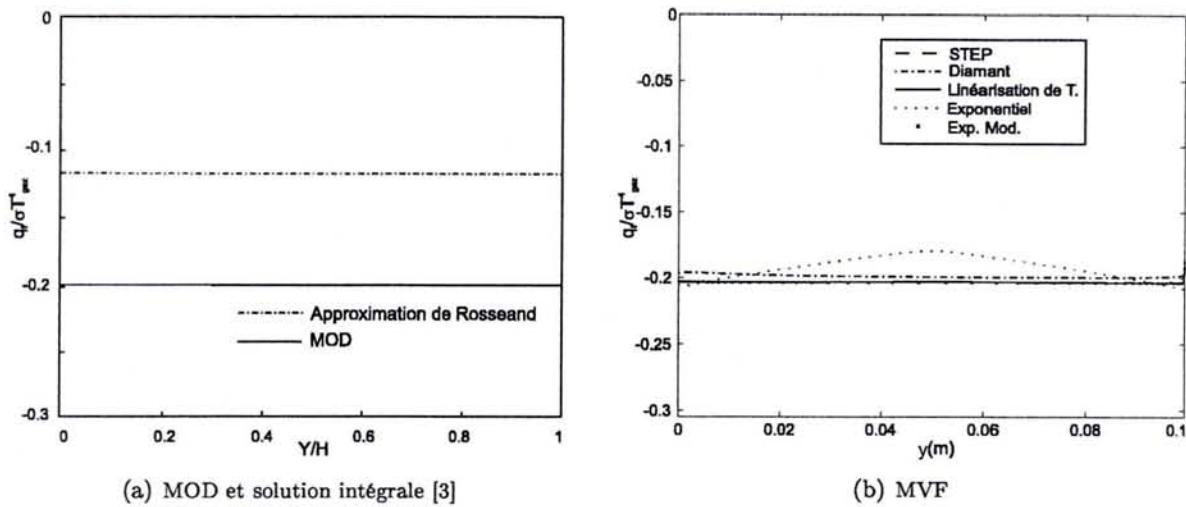


FIG. 2.12 – Flux totaux pour différents schémas de fermeture ($H = 0.1m$, 50 mailles)

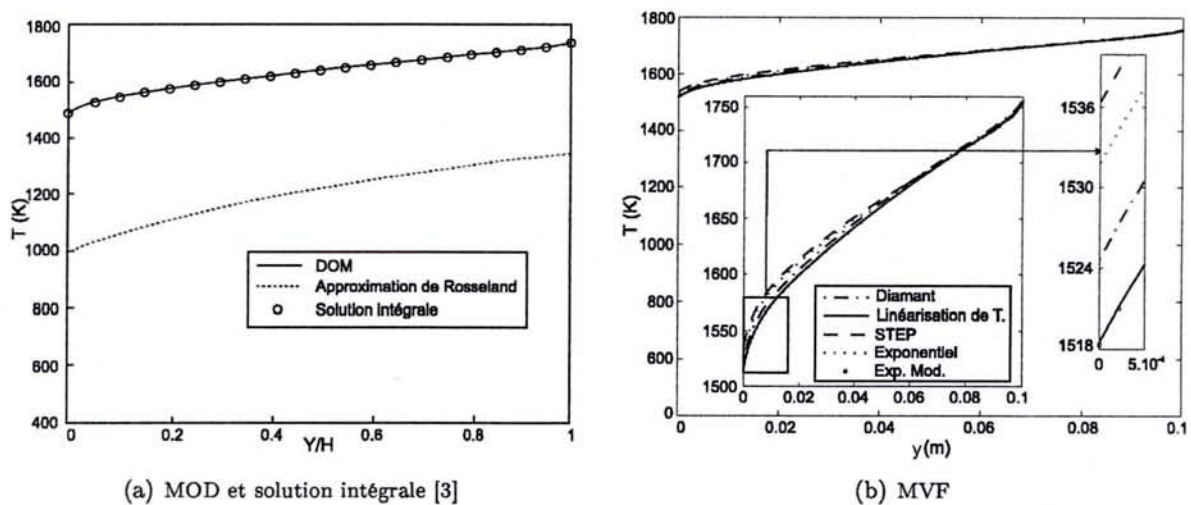


FIG. 2.13 – Températures pour différents schémas de fermeture ($H = 0.1m$, 50 mailles)

- Exponentiel Modifié à Température Linéarisée,
- Exponentiel Modifié,
- Diamant.

Toutefois, le schéma Diamant peut engendrer des luminances négatives susceptibles de déstabiliser le calcul (Lee et Viskanta [3] recommandent de remplacer les luminances négatives par zéro afin de préserver la stabilité du calcul).

Par ailleurs, les résultats obtenus avec ces trois relations de fermeture sont bien en accord avec les validations décrites à l'aide de la MOD et de la méthode intégrale. En revanche, les schémas Exponentiel et STEP produisent des flux totaux non-uniformes et des profils de température surestimés (surtout en zone de paroi froide). Cette non-uniformité du flux ainsi que la surestimation de température disparaissent quand la densité du maillage croît.

L'approximation de diffusion sous-estime fortement la température et les flux dans l'épaisseur de la couche de verre, surtout quand l'opacité est faible. En outre, même si le flux total prédit par l'approximation de Rosseland est correct quand cette épaisseur augmente, il existe toujours dans la partie supérieure du bain de verre une zone où la température est très mal estimée.

2.6.3 Cas test 2

Dans les deux cas présentés précédemment, les contraintes extérieures, à savoir le coefficient d'échange convectif et coefficient d'échange global ($h_N = 100 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$, $K_{gS} = 100 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$) sont relativement grandes. Dans leurs travaux relatifs aux fours verriers, Lee et Viskanta [2] ont utilisé des coefficients d'échange convectif dix fois moins élevés ($h_N = 10 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$, $K_{gS} = 10 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$).

Tous les autres paramètres restent inchangés. Nos résultats obtenus par la MVF avec les différentes relations de fermeture seront comparés à la solution semi-analytique du modèle unidimensionnel.

Milieu d'épaisseur $H = 1\text{m}$

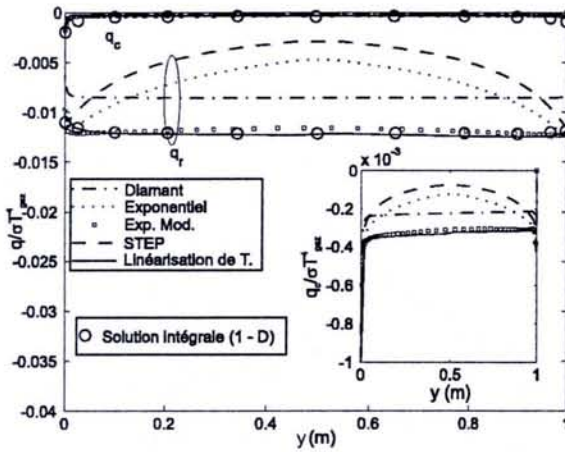


FIG. 2.14 – Flux de chaleur pour différents schémas de fermeture ($H = 1\text{m}$, 50 mailles)

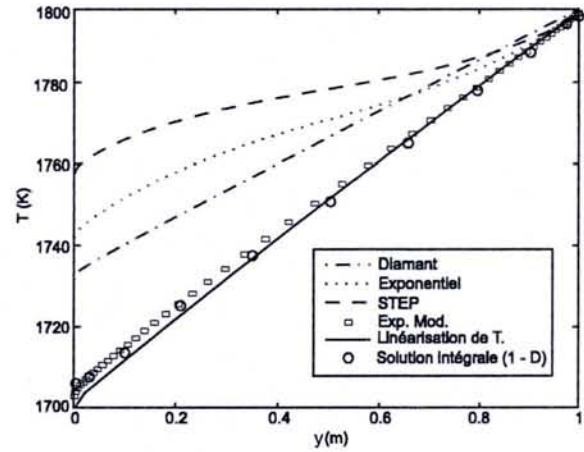


FIG. 2.15 – Températures pour différents schémas de fermeture ($H = 1\text{m}$)

Les flux conductifs et radiatifs obtenus par la MVF avec les différents schémas de fermeture sont représentés figure 2.14. Comme dans le premier cas test, les schémas Exponentiel et STEP produisent des flux non-uniformes. Ceci est en partie dû à la fausse diffusion et à la nature du maillage (resserré aux frontières) que nous utilisons. Les flux calculés à l'aide du schéma Exponentiel Modifié concordent bien avec la solution intégrale. La linéarisation du terme source de l'ETR amortit les effets de maillage et la fausse diffusion (même si elle existe). L'approximation MELT est toujours en très bon accord avec la solution intégrale.

Des calculs de sensibilité concernant le maillage ont été effectués sur l'ensemble des relations de fermeture; dans le cas du schéma à Exponentiel Modifié à Température Linéarisée, l'augmentation du nombre de maille a un effet imperceptible sur les valeurs de flux calculées.

Enfin, en ce qui concerne le schéma Diamant, bien que les flux calculés soient uniformes, nous observons (Fig. 2.14) un décalage du niveau atteint ($q_r/\sigma_B T_{gaz}^4 = -0.008$) relativement à la solution intégrale ($q_r/\sigma_B T_{gaz}^4 = -0.012$). Par ailleurs, l'accroissement du nombre de mailles diminue ce décalage; pour 150 mailles ($q_r/\sigma_B T_{gaz}^4 = -0.011$); pour 300 mailles les résultats sont identiques à ceux de la solution semi-analytique. Toutefois, le schéma Diamant perd alors de son intérêt car un schéma STEP ou Exponentiel utilisé dans les mêmes conditions conduit à des résultats similaires, tout en préservant la positivité des luminances.

L'analyse de la figure 2.15 montre que les profils de températures obtenus par MVF avec les schémas Exponentiel Modifié et MELT sont équivalents à ceux déterminés par la formulation intégrale. Les autres schémas surestiment la température dans la zone proche de la paroi inférieure. Les écarts en bas du bain sont d'environ : 38 K pour le schéma Diamant, 42 K pour le schéma exponentiel et 60 K pour le schéma STEP. Conformément aux observations faites sur les flux, le schéma Diamant donne dans le cas de contraintes thermiques plus faibles une moins bonne estimation de la température que dans le cas test précédent.

Milieu d'épaisseur $H = 0.1m$

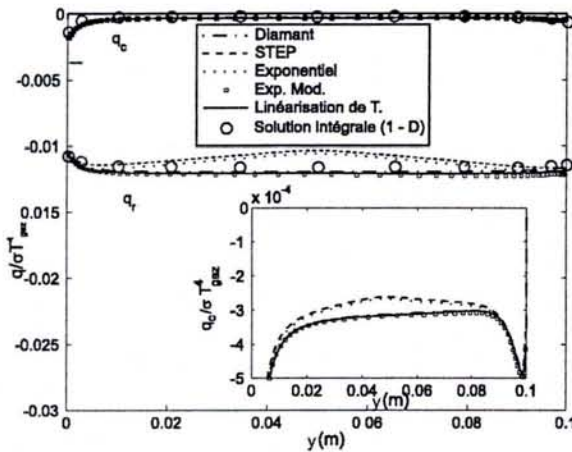


FIG. 2.16 – Flux de chaleur pour différents schémas de fermeture ($H = 0.1m$)

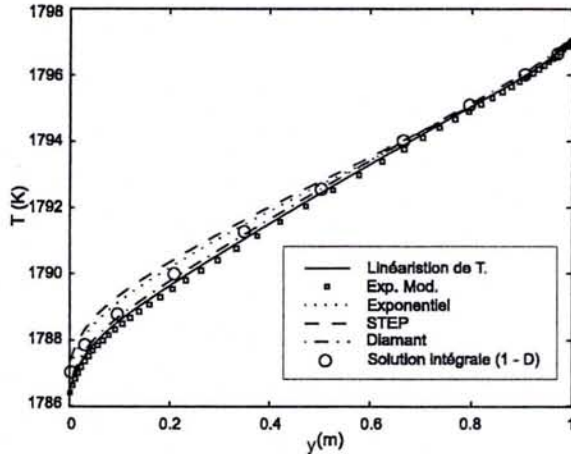


FIG. 2.17 – Profils de températures pour différents schémas de fermeture ($H = 0.1m$)

Pour une partie du bain de verre de faible profondeur (conduites d'évacuation), avec le même nombre de mailles, on observe à nouveau un flux radiatif moins perturbé au centre du maillage pour les calculs réalisés avec les schémas : STEP et Exponentiel (Fig. 2.16). Par ailleurs, l'utilisation des trois autres relations de fermeture conduit à des flux égaux entre eux et équivalents à la solution intégrale.

Les profils de température obtenus par la MVF, pour les différents schémas, sont représentés sur la figure 2.17. L'écart maximum entre les températures obtenues par les cinq schémas est très faible; il est de l'ordre du Kelvin. Cependant, on remarque que les méthodes simplifiées surestiment toujours la température, même si cela est dans une moindre mesure.

Conclusion

Comme pour le cas test 1, les calculs effectués avec la MVF utilisant un maillage non-uniforme de 50 mailles sont satisfaisants en terme de flux total et de température pour les schémas : Exponentiel modifié et à Température Linéarisée. Les schémas STEP et Exponentiel donnent des solutions très proches de la solution intégrale et convergent vers celle-ci si l'on augmente la densité du maillage. Cependant, il convient d'observer avec précaution les résultats obtenus par le schéma Diamant, car même pour un flux total constant on note un décalage de niveau du flux radiatif relativement à la solution semi-analytique. Ceci peut s'expliquer par la présence de luminances négatives (prises égales à zéro lors du calcul). Ce décalage disparaît à mesure que le maillage est affiné.

Les profils de température obtenus par la MVF avec les schémas ; Exponentiel Modifié et MELT, sont en bon accord avec ceux obtenus par la solution intégrale. Avec les autres relations de fermeture, la température est légèrement surestimée dans la moitié inférieure du bain si l'épaisseur optique est faible. Sinon, les écarts dans cette zone peuvent être conséquents ; ils diminuent pour des maillages plus denses.

2.6.4 Conclusions pour le modèle unidimensionnel

Plusieurs conclusions peuvent être faites à l'issue de ces premières validations. En premier lieu, il apparaît que l'approche de Rosseland (cas test 1) est à éviter pour tout calcul couplé associant rayonnement et conduction, même si les flux calculés sont correctement estimés pour les fortes épaisseurs optiques. Dans tous les cas étudiés, on note que les grandeurs déterminées aux limites du domaine sont fausses.

Les deux méthodes de résolution (MOD et MVF) conduisent à des résultats similaires pour un type donné de relation de fermeture. D'ailleurs, dans le cas de problème purement radiatif, ces deux techniques sont identiques.

La validité des différents schémas s'exprime en termes : de bonne uniformité du flux total ($\nabla \vec{q}_t = 0$) et de températures calculées similaires à celles obtenues par la méthode semi-analytique. Les différentes techniques et les principaux commentaires concernant les schémas sont :

1. Les schémas STEP et Exponentiel, sont proches en terme de performances pour le cas nous intéressant (avec un léger avantage à la méthode Exponentielle). Ces deux schémas propagent de la diffusion numérique dans les calculs et ne permettent pas d'obtenir des flux totaux parfaitement uniformes sans une augmentation conséquente du nombre de mailles. Les températures obtenues à l'aide de ces schémas surestiment souvent la valeur théorique dans les zones dites "froides".
2. Le schéma Diamant s'avère être une relation de fermeture satisfaisante dans la mesure où les échanges convectifs aux limites sont importants. Dans ces conditions les résultats obtenus sont très proches des valeurs fixées par la méthode semi-analytique. Dans le cas contraire, on note des écarts sur le flux et la température si la densité du maillage n'est pas suffisante. De plus, ce schéma est susceptible de produire des luminances négatives, ce qui n'est pas acceptable d'un point de vue physique.
3. Les relations de fermeture à Température Linéarisée et Exponentielle Modifiée sont celles qui garantissent le meilleur accord avec la solution intégrale. Ces techniques convergent de manière satisfaisante, même pour un nombre de mailles limité. Toutefois, pour le même nombre de maille, elles nécessitent des temps de calcul plus importants.

Nous restons prudents quant à ces premières conclusions car deux aspects importants n'ont pas été intégrés :

1. Le bain de verre a une géométrie tridimensionnelle ; nous verrons plus loin que dans le cas bidimensionnel certaines de nos premières conclusions sont invalidées.
2. Les transferts de chaleur n'associent que le rayonnement et la conduction, négligeant tout mouvement convectif du bain comme c'est normalement le cas. De fait, nous nous attendons à avoir une homogénéisation des températures dans l'épaisseur de la couche de verre, compte tenu des phénomènes de recirculation.

2.7 Validation bidimensionnelle

Nous allons dans cette partie confronter notre approche du problème couplé, utilisant la MVF et différentes relations de fermeture pour une géométrie bidimensionnelle, à plusieurs études menées sur le même sujet, généralement à l'aide de la MOD. Ces validations se font toujours en l'absence de mouvements convectifs dans le bain de verre.

2.7.1 Modèle physique et numérique

Nous considérons les transferts de chaleur par rayonnement et conduction dans la largeur d'un four verrier. Celui-ci est réduit à la région bidimensionnelle représentée figure 2.18. Les parois du four sont constituées de briques réfractaires ; nous les supposons opaques et noires.

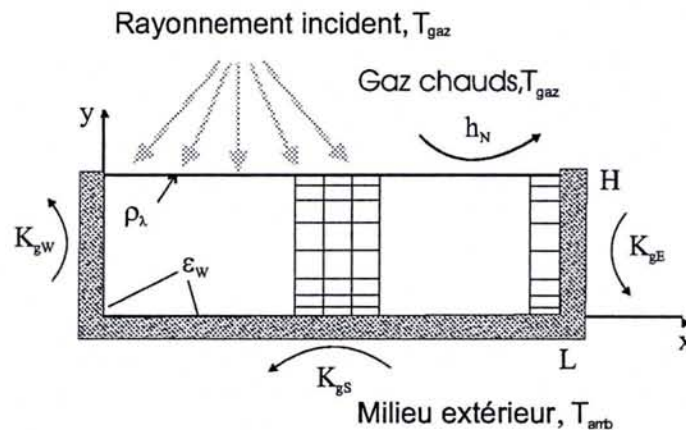


FIG. 2.18 – Modèle bidimensionnel

Le bain de verre est chauffé par des gaz à haute température issus de brûleurs présents dans la chambre de combustion. Les pertes de chaleur à travers les parois latérales et inférieure se font par conduction et convection. Nous utilisons une formulation décrite par des coefficients d'échanges convectifs globaux Kg .

Il y a un grand nombre de paramètres utiles pour décrire les caractéristiques du bain. Il est donc nécessaire d'être sélectif et de choisir des cas d'étude pertinents. La littérature fournit peu de références pour ce type de problème. Ici aussi nous avons utilisé les travaux de K.H. Lee et R. Viskanta [2], afin de comparer nos calculs. Les paramètres fixes sont :

- température des gaz chauds $T_{gaz} = 1800 K$,
- température de la voûte $T_{inc} = 1800 K$,

- température de l'air extérieur $T_{amb} = 300\text{ K}$,
- coefficient d'échange convectif à la limite supérieure $h_N = 10\text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$,
- coefficient d'échange global aux limites inférieure et latérales $K_g = 5\text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$,
- maillage 50×50 .

Dans leurs travaux, K.H. Lee et R. Viskanta [2] utilisent la solution intégrale unidimensionnelle pour valider leurs résultats obtenus avec une géométrie bidimensionnelle. Le calcul radiatif est mené à l'aide de la MOD associée au schéma Positif. Contrairement à leurs travaux antérieurs (milieu unidimensionnel [3]) ils n'utilisent plus le schéma Diamant. En effet, cette approche est écartée étant donné qu'elle ne permet pas de garantir la convergence des calculs dans le cas de géométries 2-D. Le schéma Positif a donc été retenu en vertu du fait qu'il donne de meilleurs résultats que les schémas STEP et Exponentiel (Fig. 2.7). Toutefois, les flux de chaleur et les champs de températures calculés avec ce schéma sont en partie faussés par le phénomène de diffusion numérique. C'est pourquoi nous discutons avec prudence les diverses comparaisons entre les deux approches numériques (MVF et MOD). Les études présentées caractérisent différents types de bains de verre. Les deux paramètres clés sont :

- le rapport de taille du four : longueur/hauteur : L/H
- la nature du verre : clair ou vert.

Dans un premier temps nous considérons le verre clair (vitrage). Une seconde partie traite des problèmes numériques rencontrés pour le verre vert (embouteillage), dont le coefficient d'absorption est globalement plus élevé que celui du verre clair.

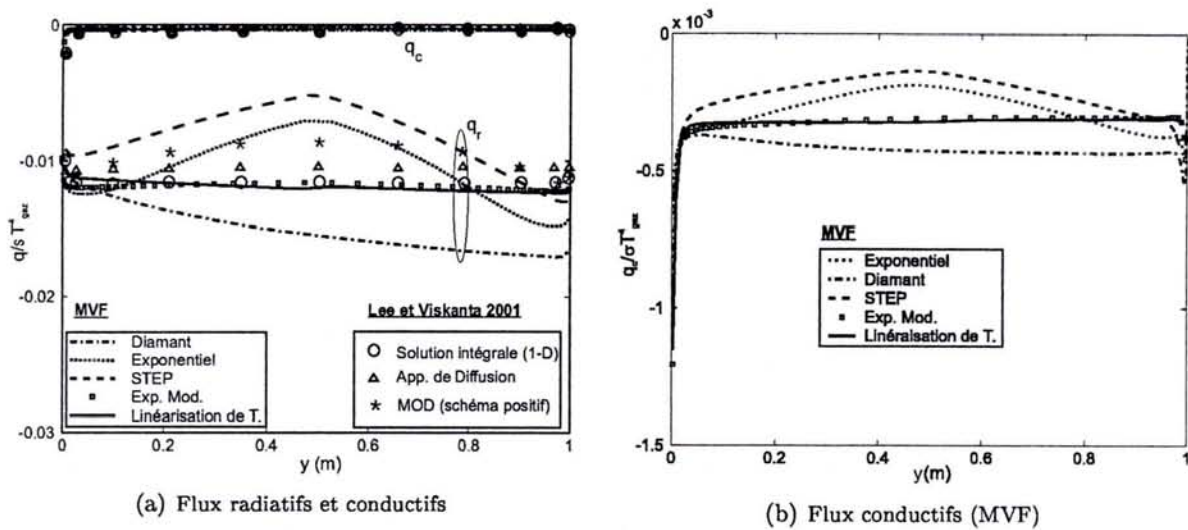
2.7.2 Cas test 1 : $H \times L = 1\text{ m} \times 10\text{ m}$ - verre clair

Nous présentons des résultats obtenus par notre modèle (MVF) avec différentes relations de fermeture. Nous comparons notamment les flux radiatifs et conductifs à ceux obtenus par la MOD avec le schéma Positif, l'approximation de Rosseland, et la solution intégrale unidimensionnelle [3, 2]. Les profils de température selon la dimension verticale du bain sont donnés au centre et aux limites latérales. Compte-tenu des données issues de la littérature, seules les grandeurs calculées au centre sont comparées.

Flux de chaleur

Les figures 2.19 (a) et (b) décrivent l'évolution des flux conductifs et radiatifs adimensionnés. Les valeurs obtenues par l'approche intégrale, celles utilisant la MOD et l'approche de diffusion, employée par K.H. Lee et R. Viskanta [2] constituent les éléments de validation. Les maillages des diverses approches numériques sont similaires ($N_x \times N_y = 50 \times 50$). Toutefois, la solution intégrale unidimensionnelle nécessite un maillage plus dense (301 nœuds).

Ici encore on observe que les flux radiatifs et conductifs sont très sensibles au choix de la relation de fermeture utilisée pour la résolution de l'ETR. En ce qui concerne le flux radiatif (Fig. 2.19 (a)) les grandeurs obtenues à l'aide des schémas STEP et Exponentiel ainsi que celles obtenues par le schéma positif avec la MOD [2] sont non-uniformes et éloignées de la solution semi-analytique 1-D. Pour les mêmes raisons que dans le cas unidimensionnel, la diffusion numérique et la dépendance au maillage sont responsables des écarts présentés. Le schéma Diamant ne donne satisfaction que dans la partie inférieure du bain ; ailleurs il surestime fortement la solution. L'approche de Diffusion s'avère donner des résultats satisfaisants concernant le calcul des flux. Les hypothèses de base relative à son utilisation sont ici respectées


 FIG. 2.19 – Flux radiatifs et conductifs au centre du bain ($H \times L = 1m \times 10m$)

(milieu optiquement épais, grandeurs calculés loin des frontières). Les deux approximations Exponentielles Modifiées donnent des résultats satisfaisants.

Pour les flux conductifs, l'analyse de la figure 2.19 (a) donne l'impression que toutes les approches sont satisfaisantes, compte tenu de l'échelle choisie. Toutefois, un agrandissement des flux conductifs obtenus à l'aide de la MVF (Fig. 2.19 (b)) montre clairement des disparités. En fait, les remarques sont similaires à celles faites pour $\bar{q}_r$. Le couplage entre les deux modes de transferts accentue les écarts par rapport à la solution analytique à mi-hauteur du bain, là où le maillage est le moins dense.

Profils de températures

Les figures 2.20 (a) et (b) proposent les profils de températures au centre et aux limites latérales du bain de fusion le long de la verticale.

Sur la figure 2.20 (a) nous avons présenté plusieurs profils de températures obtenus à l'aide de la MVF ainsi que des éléments de comparaison. Sur la figure 2.20 (b) nous n'avons représenté que les profils de températures calculés par la MVF, aucune source permettant de comparer nos résultats n'étant disponible.

Nous commençons notre analyse avec les profils de températures au centre du bain (Fig. 2.20 (a)). En premier lieu, on note que l'approximation de Diffusion est la plus mauvaise approche pour la prédiction de la température. En effet, elle sous-estime cette grandeur d'environ 100 K sur toute la hauteur du bain. En revanche, toutes les autres techniques concordent bien, avec la solution intégrale 1-D, à mesure que l'on s'approche de la limite supérieure du bain. Toutefois, les schémas Positif, Exponentiel et STEP surestiment la température dans la zone "froide". Cet écart par rapport à la solution semi-analytique s'explique par le phénomène de diffusion numérique ; une quantité du rayonnement se propage loin dans le milieu, contribuant ainsi à l'échauffement de ces zones. L'accroissement de la température est évalué à 18 K pour le schéma Exponentiel, 20 K pour le Positif et 40 K pour le STEP. A l'opposé, le schéma Diamant sous-estime la température dans la partie inférieure du bain. L'écart par rapport à

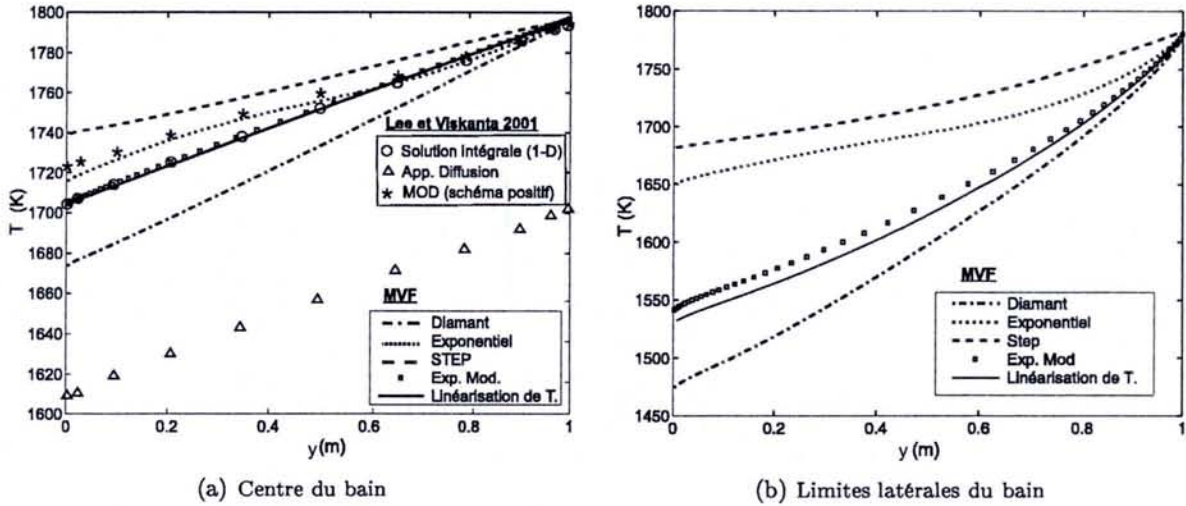


FIG. 2.20 – Profils de températures pour différents schémas de fermeture ($H \times L = 1m \times 10m$)

la solution intégrale est d'environ 30 K à la paroi *Sud*. Nous remarquons enfin que les profils de température prédits par les approximations Exponentielles Modifiées et Exponentielles Modifiées à Température Linéarisée sont superposés avec la solution intégrale.

La figure 2.20 (b) montre des comportements très divers. On note une forte décroissance de la température à chacun des coins inférieurs, les minima atteints évoluant selon la relation de fermeture retenue. L'approche que nous avons développée ainsi que le schéma Exponentiel Modifié sont tous deux proches. Par ailleurs, comme au centre, les mêmes tendances sont observées pour l'ensemble des relations de fermetures. On remarque que l'amplitude thermique maximale est proche de 200 K (schéma STEP). Dans ce cas particulier, les effets de bords sont prépondérants et une mauvaise estimation du terme source radiatif a une forte incidence sur les champs de températures.

Champs de températures

Cette simulation (voir Fig. 2.21) lorsque L est grand par rapport à H , ici $L/H = 10$, montre que les effets dus aux frontières latérales sont négligeables dans le plan médian. Parmi toutes les techniques utilisées pour la résolution du problème, nous observons que la MVE utilisant les schémas Exponentiels Modifiés avec et sans Linéarisation de la Température donne des solutions les plus semblables.

2.7.3 Cas test 2 : $H \times L = 1m \times 2m$ - verre clair

Profils de températures

Pour observer les effets de bords sur les profils de températures et les flux de chaleur, nous abordons le cas d'un milieu de profondeur $H = 1m$ et $L = 2m$ ($L/H = 2$). Ici, le bain de verre ne peut être assimilé à un milieu semi-infini et les calculs issus de l'approche semi-analytique 1-D ne peuvent, a priori, servir de référence. Afin de mieux cerner les problèmes engendrés par les effets de bords, nous commençons par expliciter les profils de températures (Fig. 2.22 (a) et (b)) obtenus à l'aide des différentes approches.

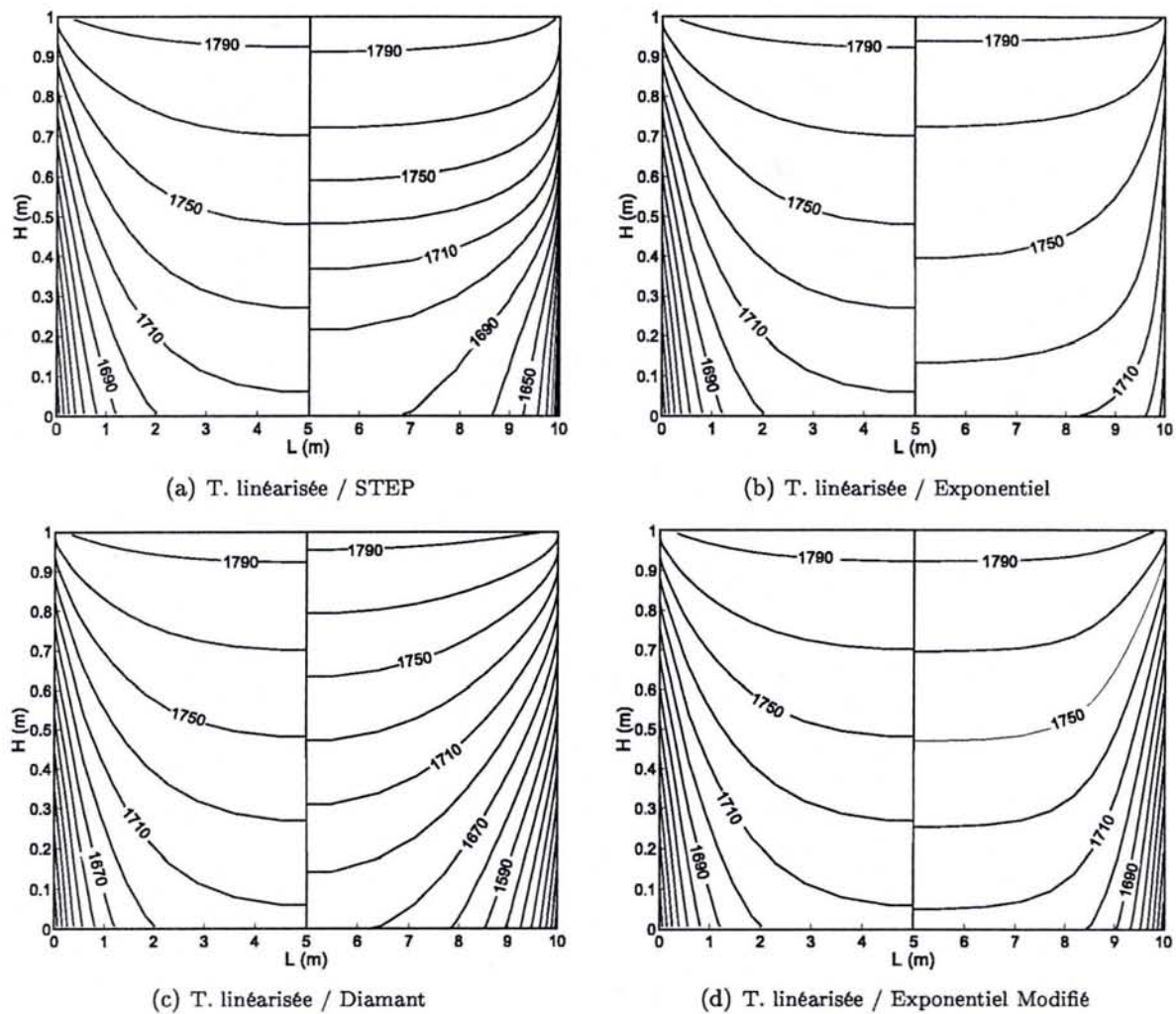
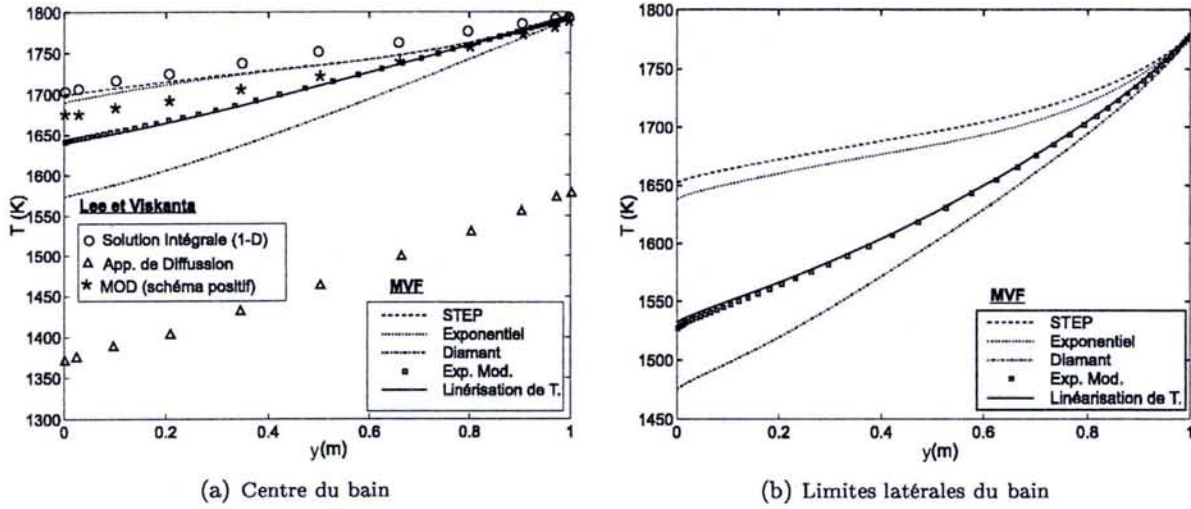
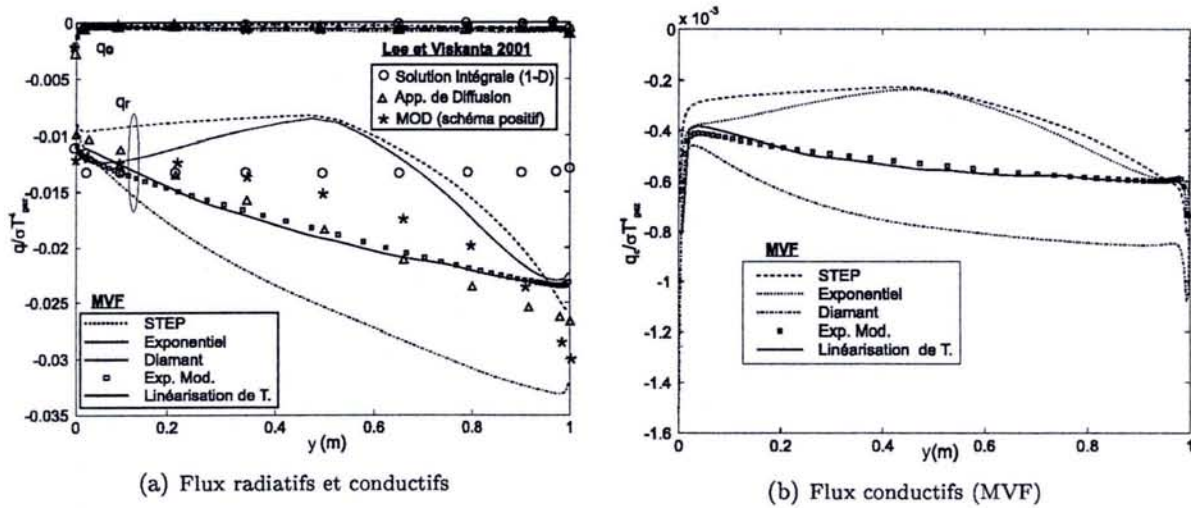


FIG. 2.21 – Comparaison des champs de températures ($H \times L = 1m \times 10m$)

Le long du plan médian, nous constatons que les niveaux de températures sont inférieurs à ceux calculés dans le cas précédent. Ceci s'explique par les pertes de chaleurs vers le milieu extérieur, par convection et conduction. Elles provoquent une diminution de la température compte tenu de l'augmentation de la surface d'échange relative (rapport de la surface du bain à la longueur des frontières).

Nous remarquons aussi que les températures calculées à l'aide de la MVF en employant les schémas Exponentiel Modifié et à Température Linéarisée sont pratiquement superposées. Par ailleurs, l'évolution de T dans le plan médian pour les autres techniques est similaire au cas d'étude précédent où $L/H=10$ (Fig. 2.20 (a)). La figure 2.22 (b) présente les profils de températures le long des limites latérales ; la diminution de la température entre les faces supérieure et inférieure est elle aussi plus importante ; les mêmes remarques que précédemment peut être renouvelée.

FIG. 2.22 – Profils de températures pour différents schémas de fermeture ($H \times L = 1m \times 2m$)FIG. 2.23 – Flux radiatifs et conductifs au centre du bain ($H \times L = 1m \times 2m$)

Flux de chaleur

Les flux de chaleur au sein du bain de verre (Fig. 2.23 (a) et (b)) sont, dans ce cas, éloignés de la solution semi-analytique. Ce fait était attendu étant donné que l'on ne peut plus considérer l'hypothèse d'un milieu semi-infini. Dans ce cas, l'ensemble des techniques conduit à des flux radiatifs plus importants au voisinage de la surface libre. Il y a propagation de la chaleur vers les murs réfractaires et donc un refroidissement plus important comme nous venons de le détailler. Toutefois, on note que les approches Exponentielle et STEP sont toujours très sensibles au maillage et sous-estiment les flux dans la zone centrale. Les deux méthodes Exponentielles Modifiées sont encore très proches. Enfin les valeurs obtenues par la méthode de Diffusion sont correctes si l'on se situe à au moins 20 cm de la limite supérieure. Ici encore, on note la dichotomie existant entre température et flux pour l'approximation de

Rosseland.

Champs de températures

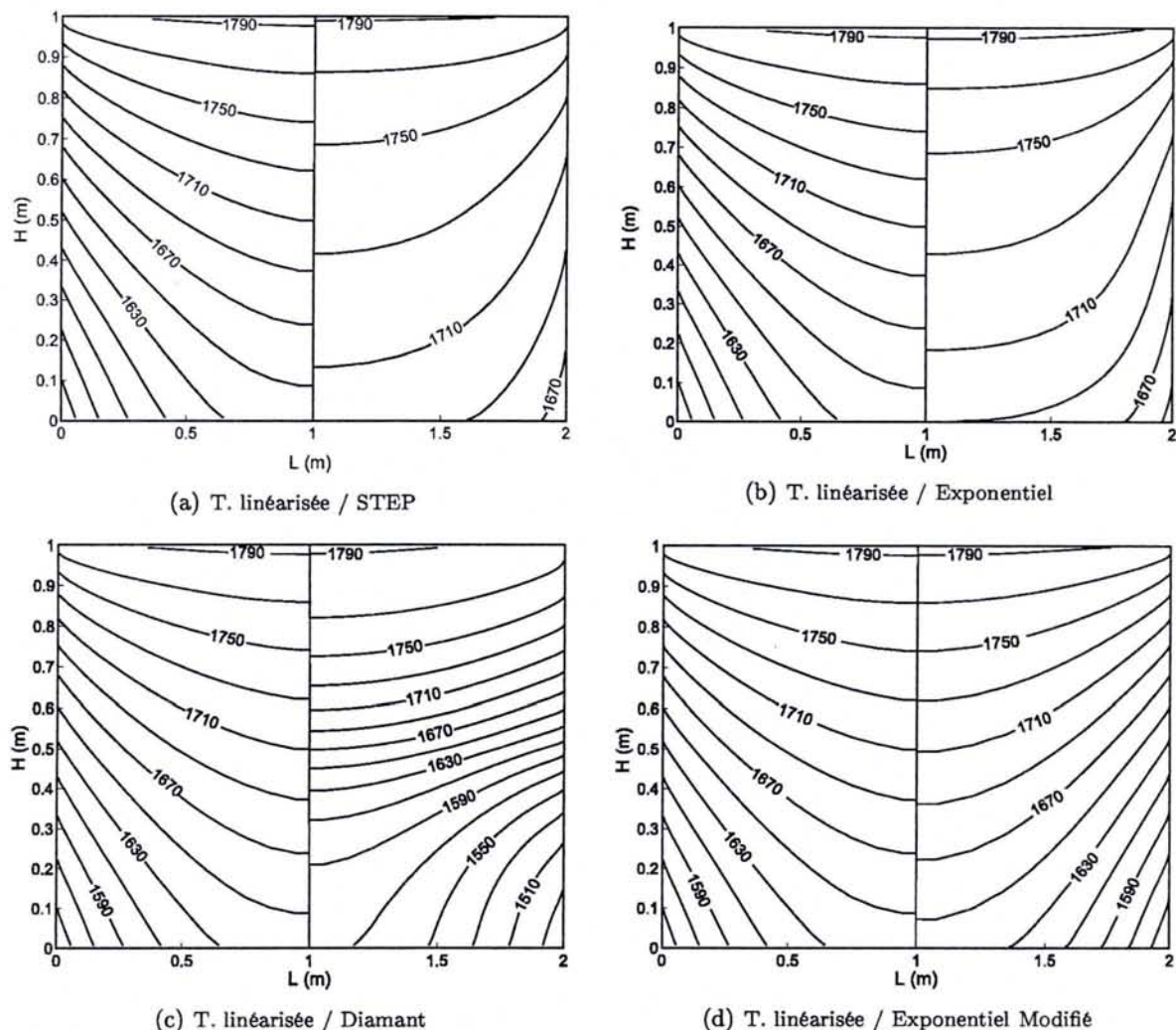


FIG. 2.24 – Comparaison des champs de températures ($H \times L = 1\text{m} \times 2\text{m}$)

Les champs de températures sont présentés figures 2.24 (a), (b), (c) et (d). Bien que les niveaux de températures soient relativement proches pour l'ensemble des relations de fermeture utilisées, on note des différences quant à l'allure des isothermes. Les schémas STEP et Exponentiels surestiment la température dans la région centrale du bain, ce qui est en parfait accord avec la sous-estimation du flux radiatif aux mêmes endroits par ces deux approximations. A l'inverse, l'utilisation du schéma Diamant conduit à la sous-estimation des températures au voisinages des frontières opaques du fait des erreurs induites lors des opérations de moyenne. Seul le schéma Exponentiel Modifié donne des valeurs en accord avec l'approche à Température Linéarisée.

2.7.4 Cas test 3 : $H \times L = 0.1m \times 1m$ - verre clair

Nous allons nous intéresser à présent aux cas où le bain de verre est caractérisé par de faibles profondeurs ($H = 0.1m$) similaires à celles observées dans les dispositifs en sortie des fours, les "Feeders" (conduites de sortie). Les paramètres et les conditions aux limites sont les mêmes que précédemment. Nous utilisons le même maillage (50×50) et nous nous intéressons notamment à :

- l'effet de la taille moyenne des mailles sur le calcul,
- la validation de nos résultats avec ceux déjà publiés [2].

Flux de chaleur

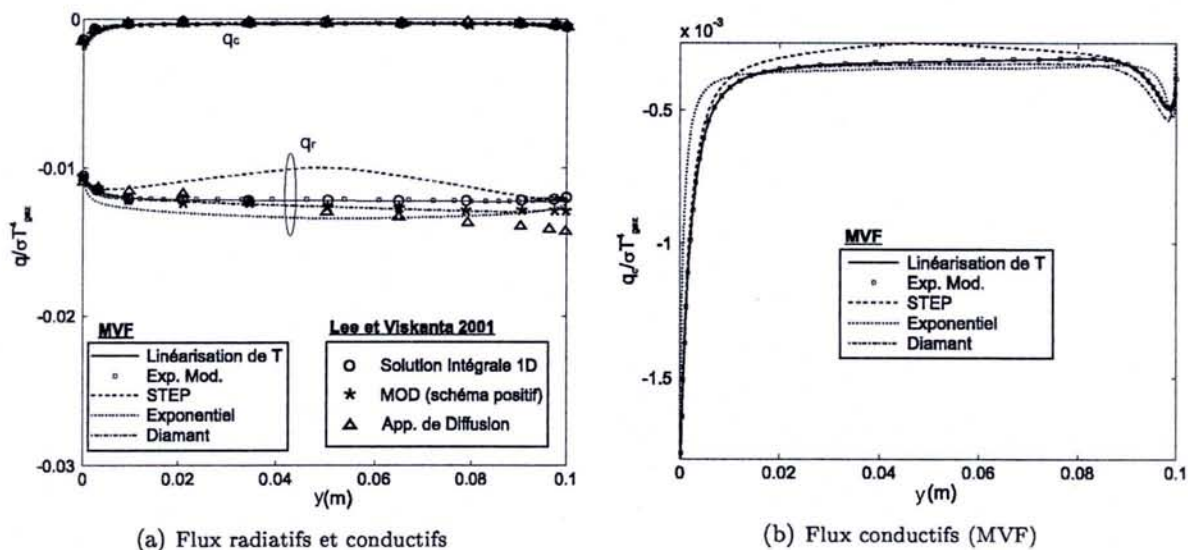
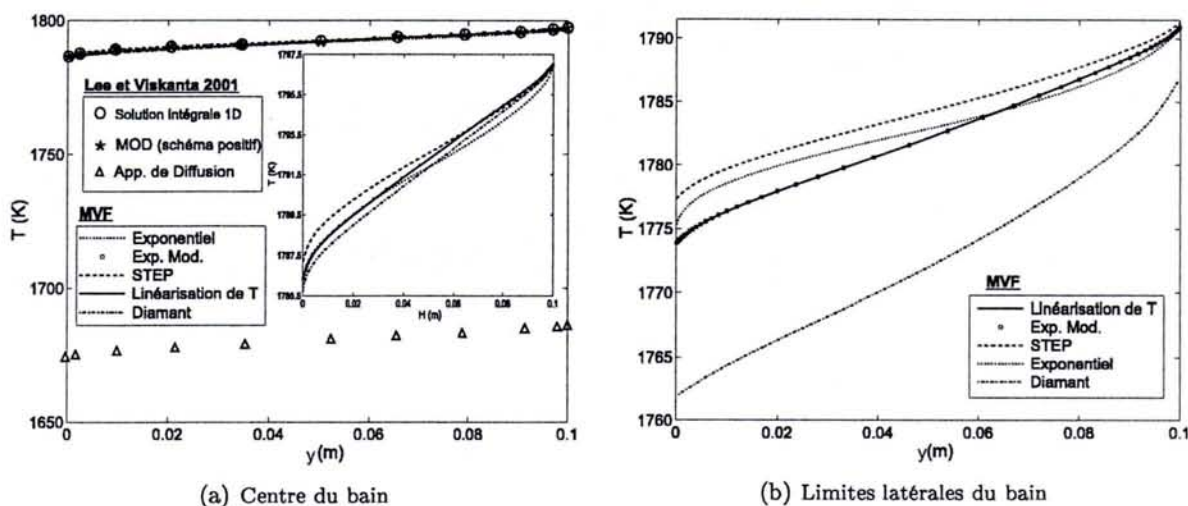


FIG. 2.25 – Flux radiatifs et conductifs au centre du bain ($H \times L = 0.1m \times 1m$)

Nous analysons en premier lieu les figures 2.25 (a) et (b) qui représentent les flux radiatifs et conductifs dans le plan médian.

Contrairement aux résultats présentés sur les figures 2.19 (a) et (b) (cas précédent), nous observons que toutes les techniques donnent des flux très proches de ceux calculés avec la solution intégrale 1-D. L'effet de la diffusion numérique et la dépendance au maillage sont fortement amortis pour le schéma STEP. Par ailleurs, les mêmes effets ont complètement disparu pour les schémas Exponentiel et Positif. Le schéma Diamant donne des résultats proches de la solution exacte. Par ailleurs, pour le même ratio H/L que dans le premier cas test, les flux calculés à l'aide de cette approximation sont satisfaisants. L'approche simplificatrice de Rosseland donne de bons résultats pour les flux dans le bas du bain ; en revanche, on observe distinctement des écarts dans la zone proche de la surface. Les schémas Exponentiel Modifié et à Température Linéarisée prouvent, encore une fois, qu'ils sont bien adaptés à la résolution du transfert radiatif dans les milieux d'épaisseur optique plus faible. En effet, les flux radiatifs calculés par ces deux approches se superposent avec la solution semi-analytique.

Profils de températures

FIG. 2.26 – Profils de températures pour différents schémas de fermeture ($H \times L = 0.1m \times 1m$)

Nous représentons les profils de températures le long de la médiane et aux frontières latérales du bain, figures 2.26 (a) et (b).

Les températures calculées par les différentes relations de fermeture sont très proches dans le plan médian. Par ailleurs, elles satisfont toutes à la solution intégrale à l'exception des valeurs calculées par la méthode de Rosseland qui sous-estime très fortement la température (de plus de 100 K). Aux frontières, *Est* et *Ouest*, les grandeurs calculées sont équivalentes sauf celles déterminées par le schéma Diamant. En effet, du fait des fortes contraintes thermiques aux voisinage des réfractaires, les moyennes calculées à l'aide de ce schéma induisent de forts écarts.

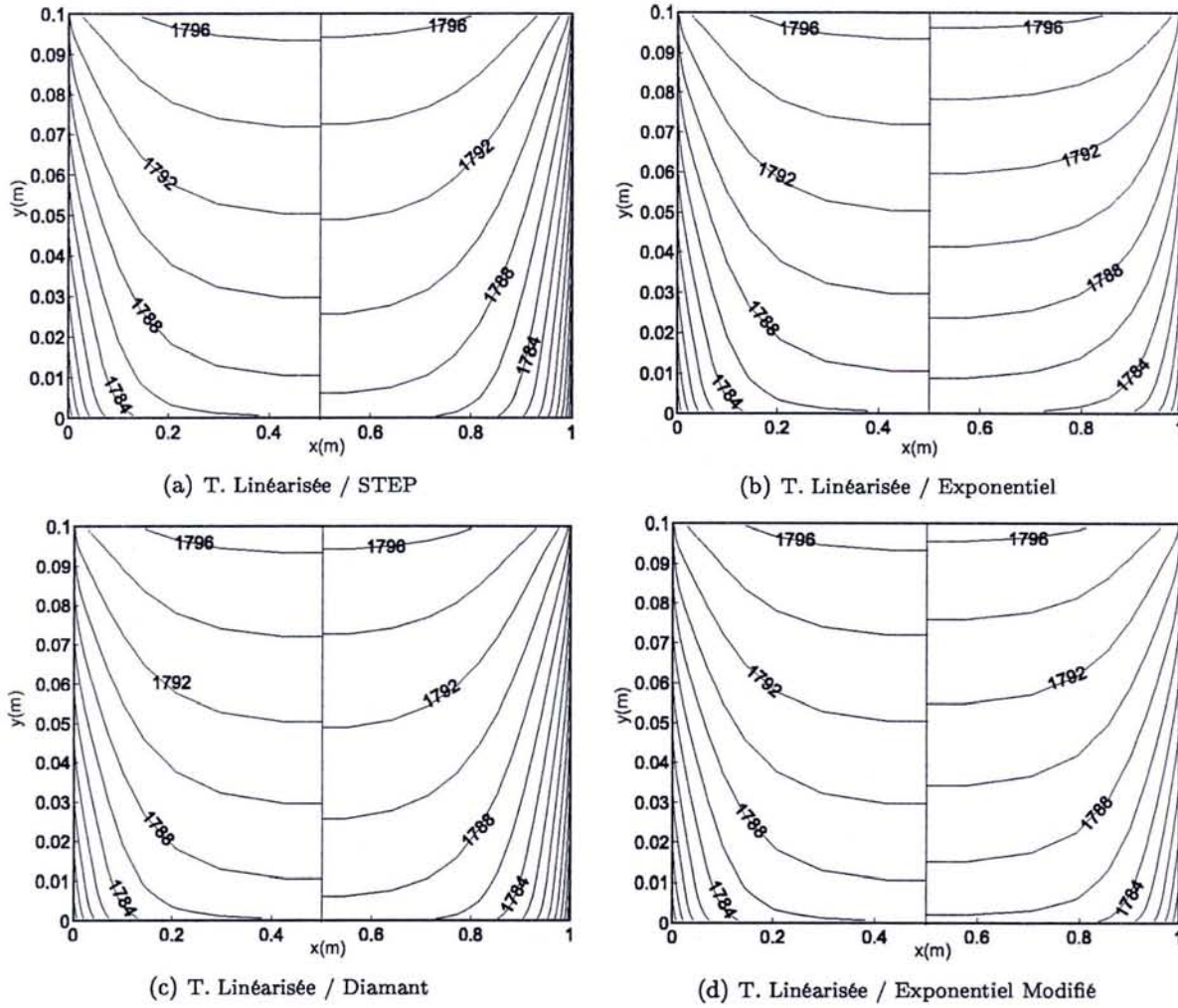
Champs de températures

Les champs de températures pour ce cas d'étude sont eux aussi comparés relativement au schéma Exponentiel Modifié à Température Linéarisée sur les figures 2.27 (a), (b), (c) et (d).

2.7.5 Cas test 4 : $H \times L = 1m \times 20m$ - verre vert

Flux de chaleur

Ce dernier cas test permet d'observer l'effet du coefficient d'absorption, notamment son augmentation, sur la modélisation des bains de verre fondu. Aussi, lors de cette étude, nous considérons du verre vert (verre destiné à la fabrication de bouteilles) dont les valeurs du coefficient d'absorption sont rappelées sur la figure 2.4. Par ailleurs, afin d'approcher au plus près les conditions réelles de fusion du verre, l'enceinte modélisée a une dimension de $H \times L = 1m \times 20m$. L'association de ces deux contraintes : fort coefficient d'absorption et grandes dimensions, a été un élément pénalisant en terme de temps de calcul. De plus, afin de pouvoir conserver des éléments de comparaison avec les travaux de Lee et Viskanta [2], le maillage utilisé est toujours de 50×50 mailles.

FIG. 2.27 – Comparaison des champs de températures ($H \times L = 0.1m \times 1m$)

Les flux de chaleurs radiatifs et conductifs sont présentés figures 2.28 (a) et (b). Étant donné que le rapport $L/H = 20$, l'hypothèse d'un milieu unidimensionnel peut s'appliquer dans le plan médian du four. La solution semi-analytique proposée par Viskanta [38] s'applique dans le cas présent. On note que les flux radiatifs diffèrent assez fortement selon le schéma utilisé pour résoudre l'ETR. Ainsi, les approches STEP et Exponentielle sont éloignées de la solution intégrale et plutôt proches de la solution obtenue par la MOD avec un schéma Positif. Dans le cas présent, la forte absorptivité du milieu ainsi que l'utilisation d'un maillage relativement lâche dans la zone centrale conduisent à des interpolations et minorent le flux radiatif. Les schémas Diamant et Exponentiel Modifié surestiment légèrement le flux radiatif obtenu par la méthode intégrale. On note que dans le cas du verre vert le schéma Diamant donne des résultats moins perturbés par les effets de bords, ce qui est logique compte tenu de l'évolution des propriétés optiques. L'approximation de Diffusion est elle aussi très proche de la solution intégrale; dans ce cas d'étude nous validons les hypothèses d'utilisation du modèle de Rosseland : milieu optiquement épais et calculs réalisés loin des frontières. Le schéma Exponentiel Modifié à Température Linéarisée donne les résultats les plus satisfaisants; ils

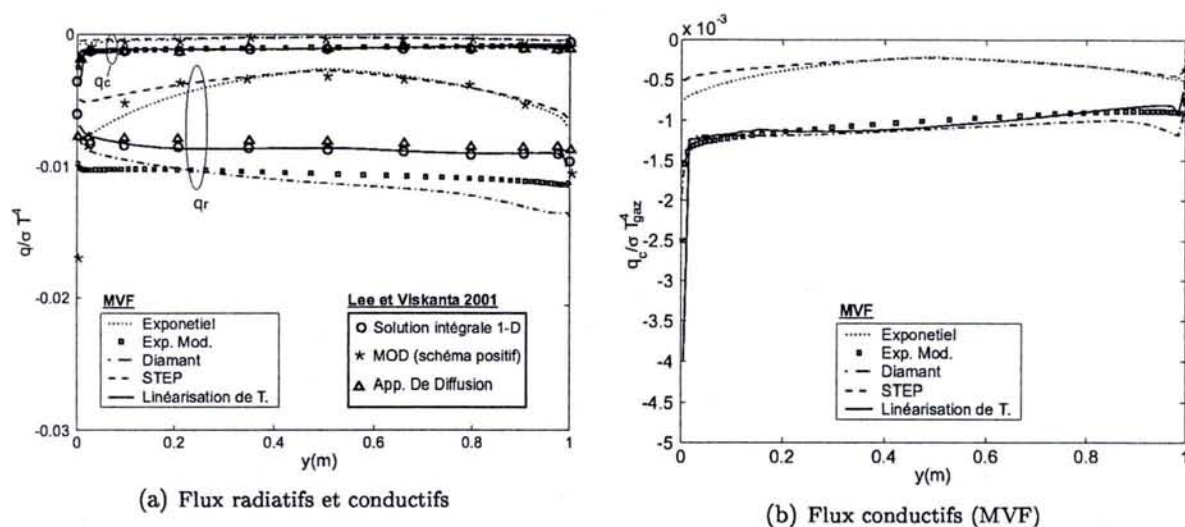


FIG. 2.28 – Flux radiatifs et conductifs au centre du bain ($H \times L = 1m \times 20m$)

sont confondus avec ceux obtenus pour la solution unidimensionnelle.

Profils de températures

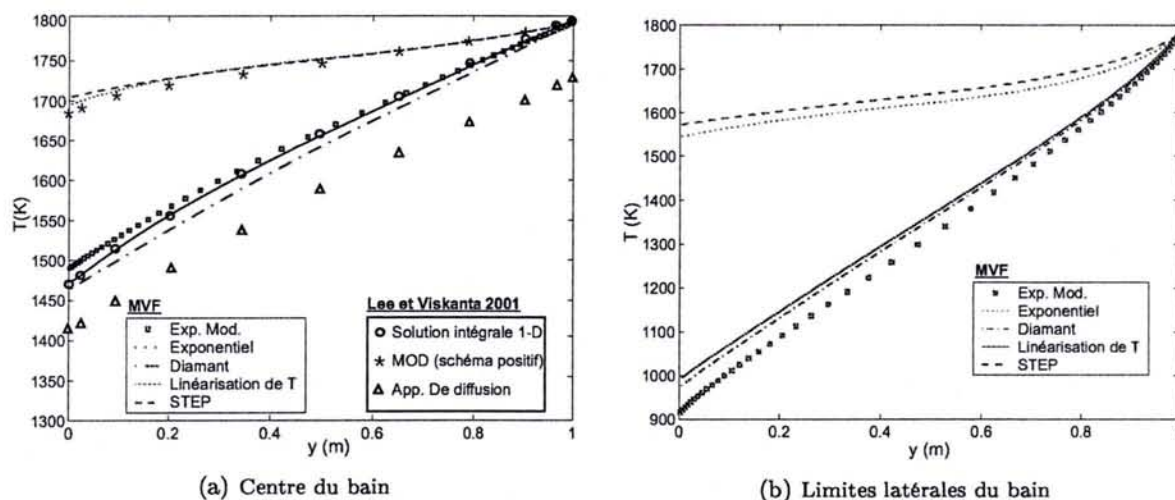


FIG. 2.29 – Profils de température pour différents schémas de fermeture ($H \times L = 1m \times 20m$)

La plupart des commentaires qui ont été faits sur les flux se retrouvent lors de l'interprétation des températures au centre du bain (Fig. 2.29 (a)). En effet, la sous-estimation du flux (schémas STEP et Exponentiel) provoque une surestimation des températures. Les écarts mesurés pouvant être conséquents, dans le bas du bain, ils sont de l'ordre de 230 K par rapport à la solution analytique. Les relations de fermeture plus complexes (schémas Exponentiels Modifiés) ainsi que le schéma Diamant dont les flux étaient corrects ont des températures variant peu autour de la solution intégrale. En revanche, l'approximation de Diffusion qui donnait

une bonne estimation du flux radiatif est mise en défaut pour le calcul des températures; toutefois l'écart mesuré (de l'ordre de 70 K) est inférieur à l'erreur commise avec un schéma de fermeture de type Positif ou Exponentiel.

Champs de températures

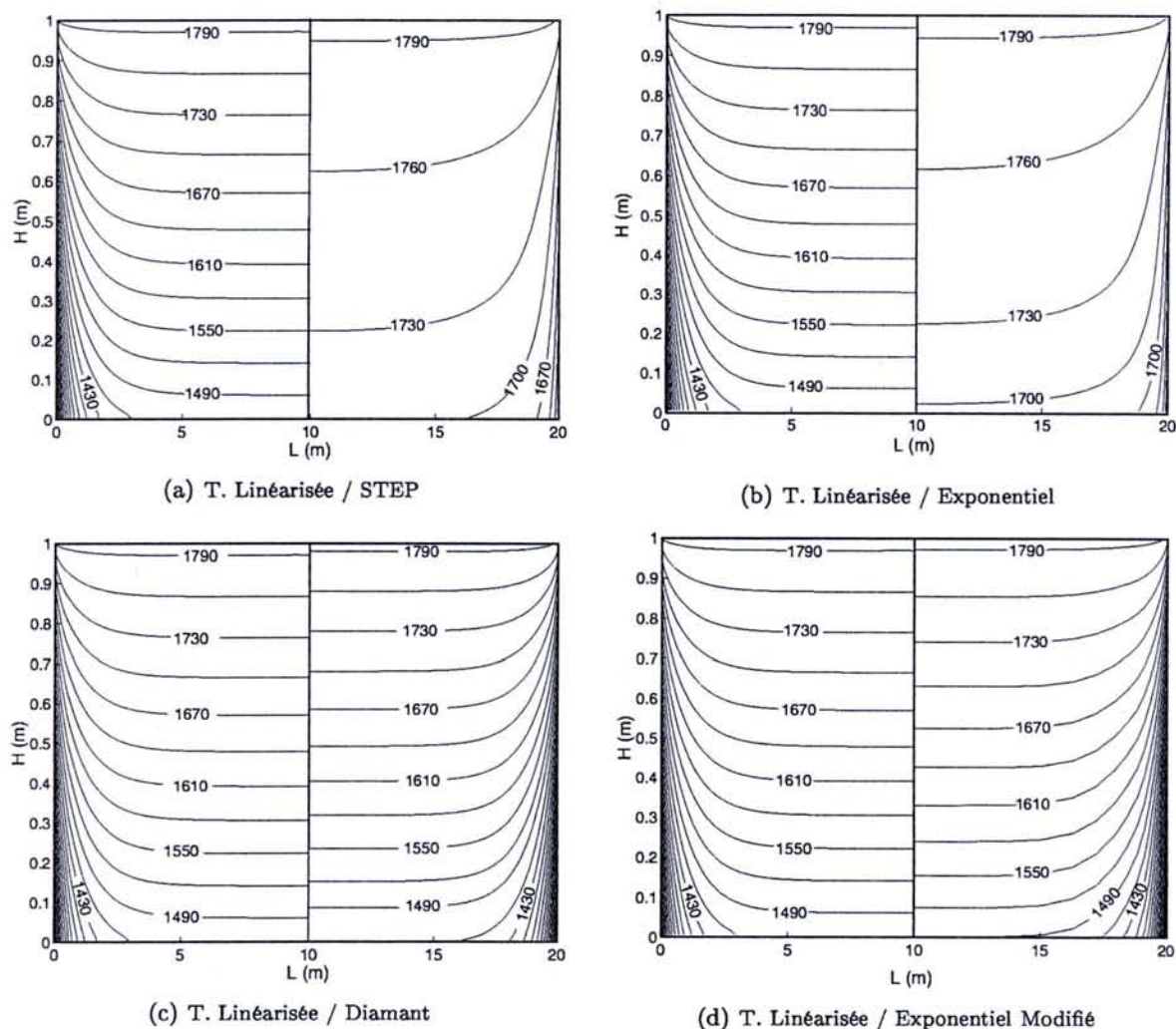


FIG. 2.30 – Comparaison des champs de températures ($H \times L = 1\text{m} \times 20\text{m}$)

Les champs de températures représentatifs des cinq relations de fermeture utilisées avec la Méthode des Volumes Finis sont présentés sur les figures 2.30 (a), (b) (c) et (d). On y distingue clairement les forts écarts existant entre les différentes approches. La surestimation des températures est manifeste pour les schémas STEP et Exponentiel. Dans la pratique, les industriels du verre ont besoin de connaître précisément la température du verre au voisinage des réfractaires afin de pouvoir correctement dimensionner les fours. Une mauvaise estimation de ces températures a des conséquences en terme de durée de vie de four, le verre liquide étant un milieu très corrosif qui dégrade ces réfractaires. Cette étude montre que le choix des

méthodes numériques utilisées pour de tels dimensionnements est crucial.

2.8 Études de sensibilité

2.8.1 Sensibilité aux quadratures angulaires

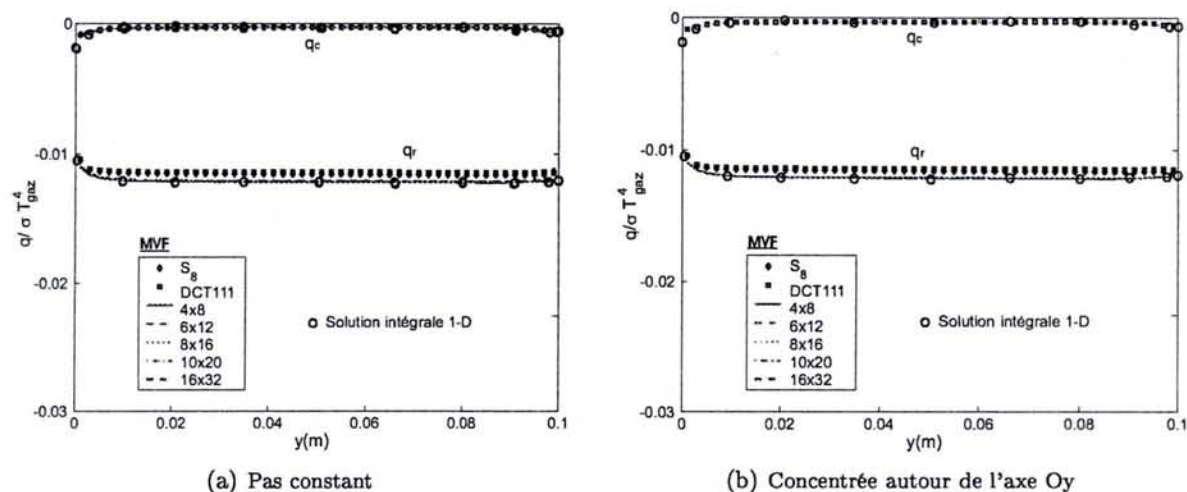


FIG. 2.31 – Effet de la quadrature angulaire sur les flux de chaleur

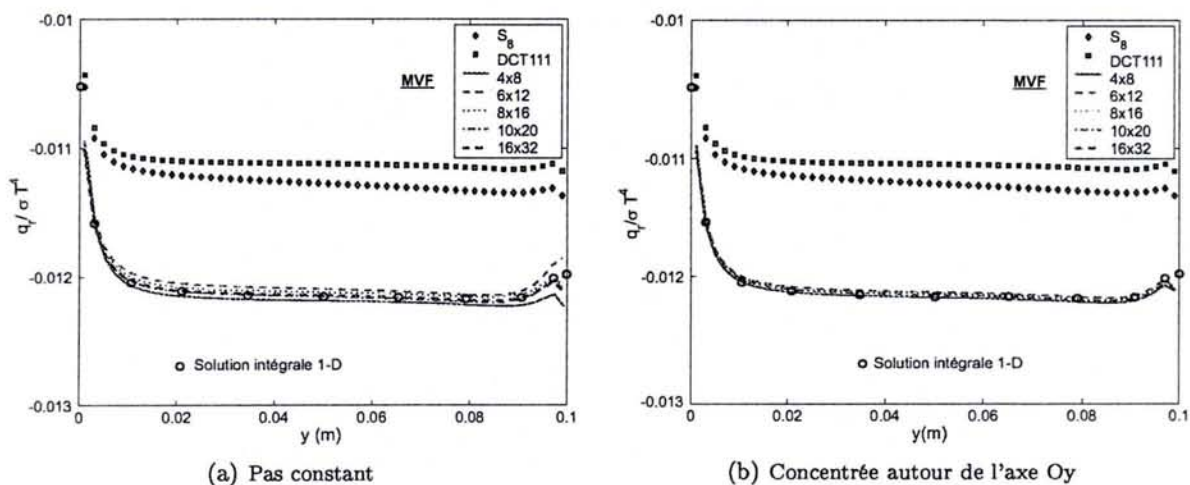


FIG. 2.32 – Effet de la quadrature angulaire sur les flux radiatifs

Dans les cas test abordés précédemment, nous avons utilisé une quadrature angulaire à pas constant $N_\theta \times N_\varphi = 4 \times 8$. Nous allons présenter dans ce paragraphe les résultats obtenus lors de l'emploi de différents types de quadratures angulaires. Celles-ci sont représentées en annexe § A (Fig. A.1). La première est à pas angulaires réguliers, la seconde présente un nombre de directions plus important autour de l'axe Oy. C'est autour de cette direction que se fait la réfraction du rayonnement issu des gaz chauds. A cette interface les coefficients de transmission de réflexion évoluent très vite avec l'angle Ψ (angle de réfraction - Fig. 2.2).

Le coefficient de transmission $\tau_\lambda(\Psi)$ varie de l'unité pour $\Psi = 0$ à une valeur nulle pour $\Psi = \Psi_{lim} = \arcsin(1/n_\lambda)$. Le fait de concentrer les directions de la quadrature autour de Oy doit permettre une meilleure prise en compte du phénomène de réfraction à l'interface.

Deux autres types de quadratures angulaires ont été testés dans cette étude. La première est souvent utilisée avec la MOD ; c'est la quadrature S_8 (80 directions), issue de la famille des quadratures S_N . La seconde quadrature testée est la DCT_{111} , référencée par R. Koch [16] comme étant une solution alternative intéressante aux quadratures S_N .

Les figures 2.31 et 2.32 représentent les flux de chaleur calculés par la MVF en géométrie unidimensionnelle (Cas test 2, $H = 0.1m$) avec : le schéma Exponentiel Modifié à Température Linéarisée, un maillage uniforme, différentes quadratures angulaires. Ces résultats sont comparés aux flux obtenus par la solution intégrale.

En premier lieu nous constatons que les deux discrétisations angulaires donnent des flux en accord avec la solution exacte. De plus, quel que soit le nombre de directions utilisées elles produisent des résultats très proches. Les quadratures S_8 et DCT_{111} sous-estiment le flux radiatif même si leur comportement est similaire à celui observé pour nos quadratures. Ceci peut être dû à la répartition des directions et à la façon dont sont calculés les poids angulaires associés à chaque direction. Par ailleurs, il est possible que notre discrétisation angulaire soit mieux adaptée à la méthode des volumes finis.

Si l'on ne s'intéresse qu'aux flux radiatifs, les figures 2.32 (c) et (d) montrent que la discrétisation avec les directions concentrées autour de l'axe Oy donne les résultats les plus proches de la solution semi-analytique et ce pour tous les degrés de raffinement de la quadrature angulaire. Avec cette approche, nous donnons plus d'importances aux échanges entre les gaz chauds et le bain de verre.

2.8.2 Sensibilité au nombre de mailles

Le choix du maillage et des facteurs conditionnant sa non-uniformité horizontale et verticale influe fortement sur le calcul. On l'a vu lors de l'utilisation de maillages grossiers avec des schémas de discrétisation simples (STEP, Positif, Diamant et Exponentiel) ; dans certaines zones du domaine de calcul les interpolations peuvent induire d'importantes fluctuations du flux radiatif et une mauvaise estimation de la température.

Ainsi, afin de mesurer l'influence du maillage sur le calcul, nous reprenons le cas unidimensionnel traité dans le paragraphe 2.6.3. Tous les paramètres de calculs sont les mêmes (conditions aux limites, propriétés optiques et thermiques) ; seul le maillage change. Celui-ci est toujours uniforme ; les résultats sont présentés pour un nombre croissant de volumes de contrôle : N_{vol} . Cette grandeur varie entre la valeur minimale permettant la convergence et la maximale pour laquelle la solution semi-analytique est obtenue. Nous allons dans la suite analyser cette évolution pour l'ensemble des relations de fermeture.

Approximation STEP

Les flux de chaleur obtenus à l'aide d'un maillage régulier (Fig. 2.33 (a)) sont uniformes et ne présentent plus les oscillations précédemment observées dans le cas d'un maillage de 50 volumes de contrôle non régulièrement espacés (Fig. 2.14). Toutefois, pour obtenir ce résultat, un maillage d'au moins 400 cellules est nécessaire. L'augmentation progressive du nombre de mailles permet d'approcher la solution intégrale. En ce qui concerne le profil de température

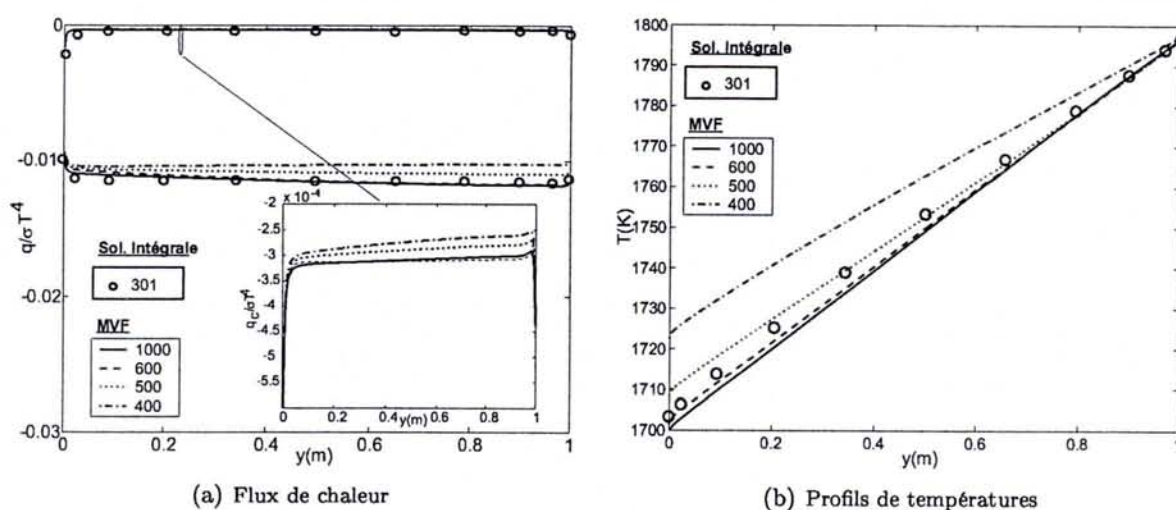


FIG. 2.33 – Sensibilité au maillage : approximation STEP

(Fig. 2.33 (b)) la dépendance vis-à-vis de N_{vol} est plus marquée. En effet, il faut au moins 600 mailles pour approcher correctement la température.

Approximation Diamant

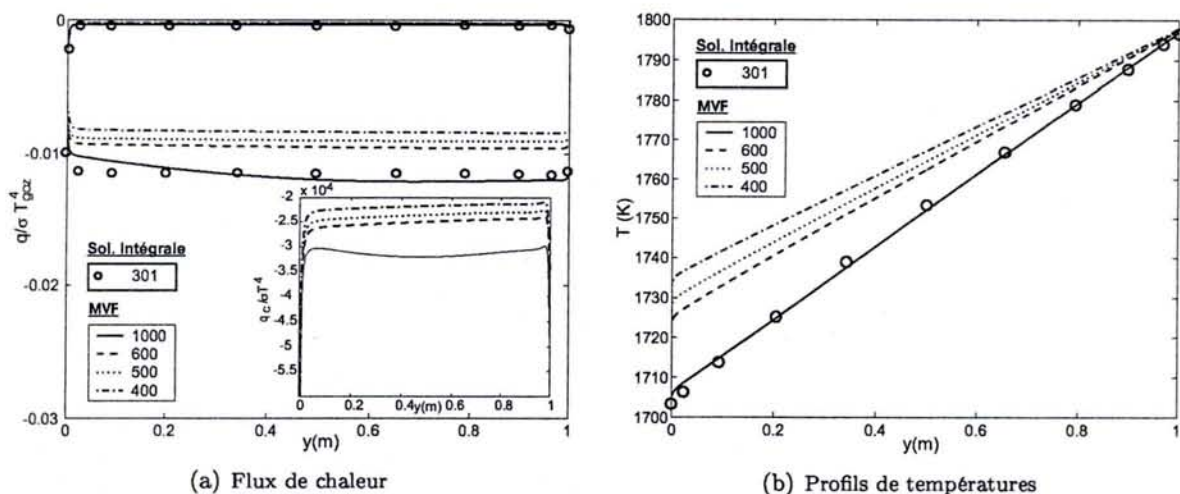


FIG. 2.34 – Sensibilité au maillage : approximation Diamant

En ce qui concerne le schéma Diamant, les flux calculés sont eux aussi plus uniformes (Fig. 2.34 (a)). Cependant l'augmentation de N_{vol} ne permet pas d'approcher de façon satisfaisante le flux radiatif calculé par la méthode semi-analytique. Même pour 1000 volumes de contrôle, il subsiste un écart et pour des valeurs inférieures de N_{vol} le flux radiatif est clairement sous-estimé. En conséquence, la température le long de l'axe vertical (Fig. 2.34 (b)) est toujours surestimée. L'utilisation d'un milieu plus absorbant tel que le verre vert pourrait modérer cet effet et permettre l'utilisation d'un maillage moins dense.

Approximation Exponentielle

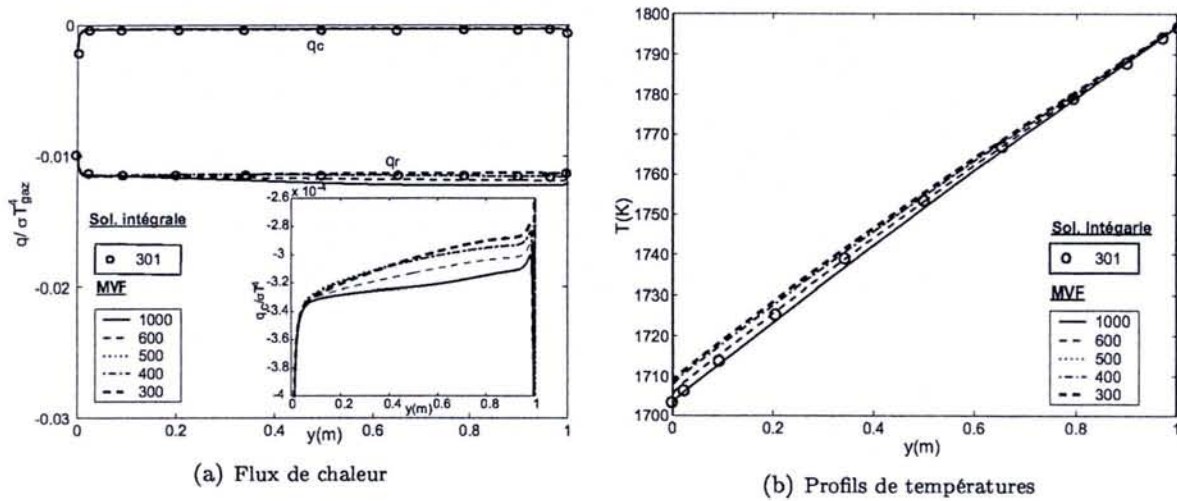


FIG. 2.35 – Sensibilité au maillage : Approximation Exponentielle

L'utilisation du schéma Exponentiel limite clairement la dispersion des résultats. Les flux de chaleur ainsi que les profils de températures calculés pour les différentes valeurs de N_{vol} (Fig. 2.35 (a) et (b)) sont dans la même fourchette. De fait, les températures varient de moins de 10 K. Par ailleurs, avec cette relation de fermeture, il est possible d'abaisser le nombre de mailles nécessaires à la convergence ($N_{vol} = 300$).

Approximation Exponentielle Modifiée

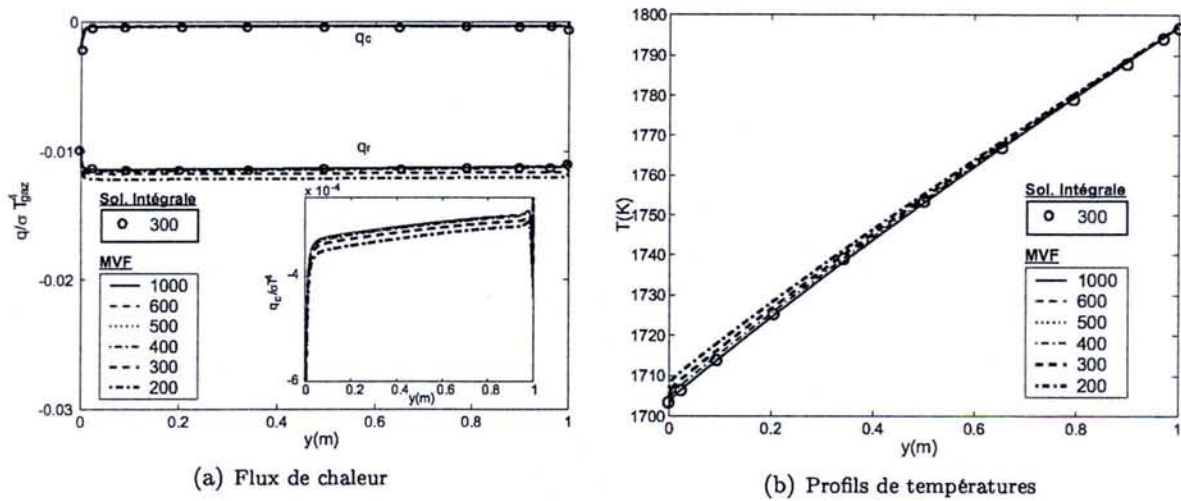


FIG. 2.36 – Sensibilité au maillage : approximation Exponentielle Modifiée

La convergence dans ce cas est obtenue à partir d'un nombre de mailles $N_{vol} = 200$ (Fig. 2.36 (a) et (b)) au lieu de $N_{vol} = 300$ pour le schéma Exponentiel. Ceci implique que le

schéma Exponentiel Modifié est mieux adapté pour le calcul des luminances dans les milieux optiquement épais. Une simple comparaison entre la figure 2.36 (b) et la figure 2.35 (b) nous montre que nous obtenons pratiquement les mêmes niveaux de températures en utilisant l'approche Exponentielle avec $N_{vol} = 1000$ ou le schéma Exponentiel Modifié avec $N_{vol} = 500$. Cette dernière approche nous permet de réduire le nombre de mailles nécessaires à la bonne convergence du problème.

Approximation Exponentielle à Température Linéarisée

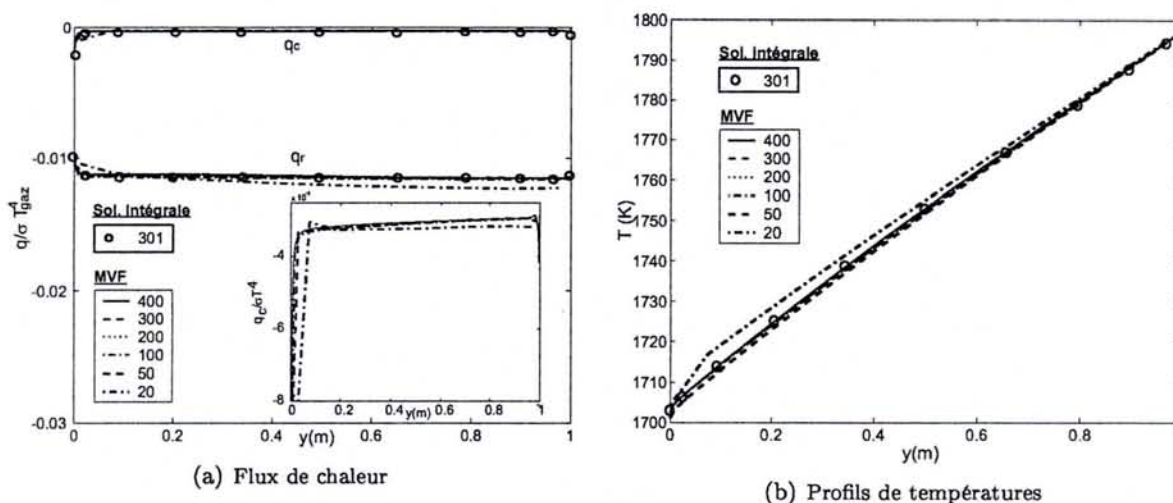


FIG. 2.37 – Sensibilité au maillage : approximation Exponentielle à Température Linéarisée

Les résultats obtenus par cette approche (figures 2.37 (a) et (b)) sont pratiquement insensibles au nombre de mailles employées. De plus, la convergence peut être obtenue à partir d'un nombre de mailles très faible $N_{vol} = 20$. Nous observons que pour $N_{vol} = 50$ les flux et les niveaux de température sont quasiment identiques à ceux calculés par la solution intégrale. Il faut dix fois moins de mailles pour obtenir la convergence dans ce cas 1-D.

Conclusion sur la sensibilité au maillage

Cette étude de sensibilité au maillage montre qu'il existe une forte dépendance entre la relation de fermeture et le nombre de volumes de contrôle permettant d'obtenir des résultats convenables. On note que la simplicité du schéma implique un maillage important (donc plus de place mémoire), celui-ci pouvant devenir grossier pour des techniques de différentiation plus sophistiquées. En outre, cette analyse a aussi montré que notre technique de résolution utilisant la MVF est bien conservatrice; les flux totaux calculés sont constants.

2.8.3 Sensibilité au pas de maillage

En utilisant un maillage à pas constant, les flux radiatifs calculés par notre modèle sont uniformes, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent. Ceci est valable pour toutes les relations de fermeture utilisées avec la MVF. En revanche, les flux radiatifs et conductifs calculés par la MVF où la MOD en utilisant un maillage non régulier peuvent présenter une

certaine non-uniformité (Fig. 2.7 et 2.14). Lee et Viskanta [2, 3] ont justifié ce phénomène par la diffusion numérique propre aux schémas Exponentiel, positif et STEP. Toutefois les résultats présentés dans le paragraphe précédent montrent que cette non uniformité disparaît quand on utilise un maillage à pas constant. Ainsi, nous pouvons conclure sur le fait que cette non-uniformité des flux est liée à la non-régularité du maillage utilisé.

Pour tester les performances des différentes relations de fermeture, nous présentons les flux et les profils de température calculés par la MVF en utilisant des maillages irréguliers. Le pas du maillage est défini par une suite géométrique :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{\frac{n_i}{2}} \Delta y_i &= \frac{H}{2} \\
 \Delta y_i &= k_y \Delta y_{i+1} \quad i = \frac{n_i}{2} - 1, 1 \\
 \Delta y_i &= k_y \Delta y_{n_i-i} \quad i = \frac{n_i}{2}, n_i \\
 y_1 &= \frac{\Delta y_i}{2} \quad y_i = y_{i-1} + \frac{\Delta y_i + \Delta y_{i+1}}{2} \quad i = 2, n_i
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

où k_y est la raison de la suite. Pour $k_y = 1$ nous obtenons un maillage à pas constant. Un maillage affiné aux frontières est obtenu pour une raison $k_y < 1$. Plus k_y sera faible, plus le maillage sera resserré aux frontières. Afin d'observer l'influence sur les flux et les températures, nous avons repris le cas étudié dans le paragraphe 2.8.2 en utilisant des maillages qui diffèrent par leur raison k_y . Quatre cas ont été envisagés. Les caractéristiques des maillages sont : $N_{vol} = 50$ et $k_y = 1.00, 0.95, 0.90$ et 0.80 .

Approximation STEP

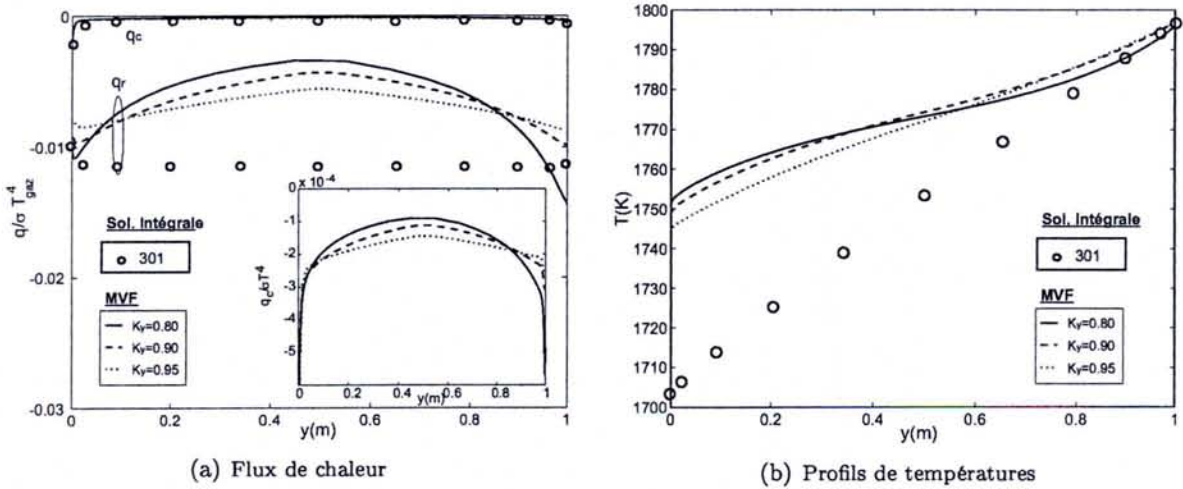


FIG. 2.38 – Sensibilité au pas du maillage : approximation STEP

Comme nous l'avons constaté plus haut, avec un maillage régulier, le schéma STEP n'assure la convergence des calculs qu'à partir de $N_{vol} = 400$. Toutefois, l'utilisation d'un maillage

resserré aux frontières permet d'éviter la divergence des calculs avec un nombre de mailles beaucoup plus faible. Les résultats présentés ici sont obtenus pour 50 nœuds espacés irrégulièrement. L'évolution des flux et de la température dans le bain de verre sont représentés sur les figures 2.38 (a) et (b), pour $k_y = 0.95, 0.90$ et 0.80 . Nous remarquons que la diminution du facteur k_y est accompagné par l'augmentation : de l'amplitude de la déformation du flux radiatif, ainsi que de l'écart de température dans le fond de bain. Les valeurs du flux radiatif calculées par la MVF s'éloignent fortement de la solution intégrale à mesure que l'on s'approche du centre de bain où les mailles sont les plus grandes. Les températures ne sont correctement estimées qu'au voisinage de la surface libre. A mesure que l'on atteint la limite inférieure, la différence avec la solution intégrale croît pour des valeurs de k_y de plus en plus faibles.

Approximation Diamant

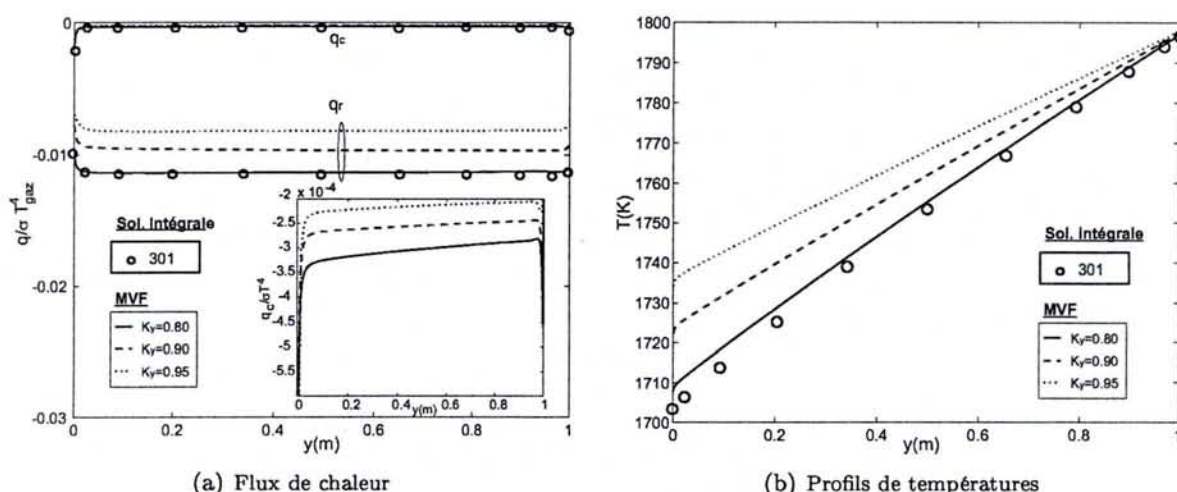


FIG. 2.39 – Sensibilité au pas du maillage : approximation Diamant

Les figures 2.39 (a) et (b) donnent les flux et les températures pour les mêmes facteurs k_y . Contrairement au schéma STEP, le schéma Diamant donne des résultats plus proches de la solution intégrale quand k_y diminue. Les flux radiatifs ne présentent aucune déformation. Ceci est dû au fait que le schéma Diamant est de second ordre, c'est-à-dire que nous avons une relation entre trois luminances. Il faut cependant rappeler que cette approche perd de son efficacité dans le cas de modélisations bidimensionnelles.

Approximation Exponentielle

Les figures 2.40 (a) et (b) donnent les flux et les températures calculés par le schéma Exponentiel et comparés avec la solution analytique. Les résultats obtenus sont similaires à ceux prédits par le schéma STEP. On constate néanmoins que les températures sont un peu plus proches de la solution analytique, notamment pour $k_y = 0,95$.

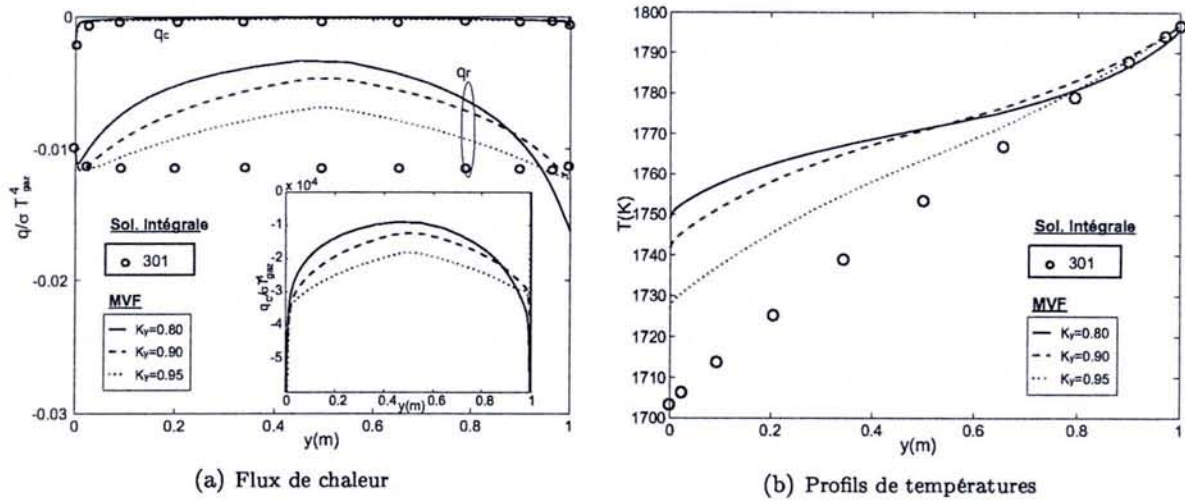


FIG. 2.40 – Sensibilité au pas du maillage : approximation Exponentielle

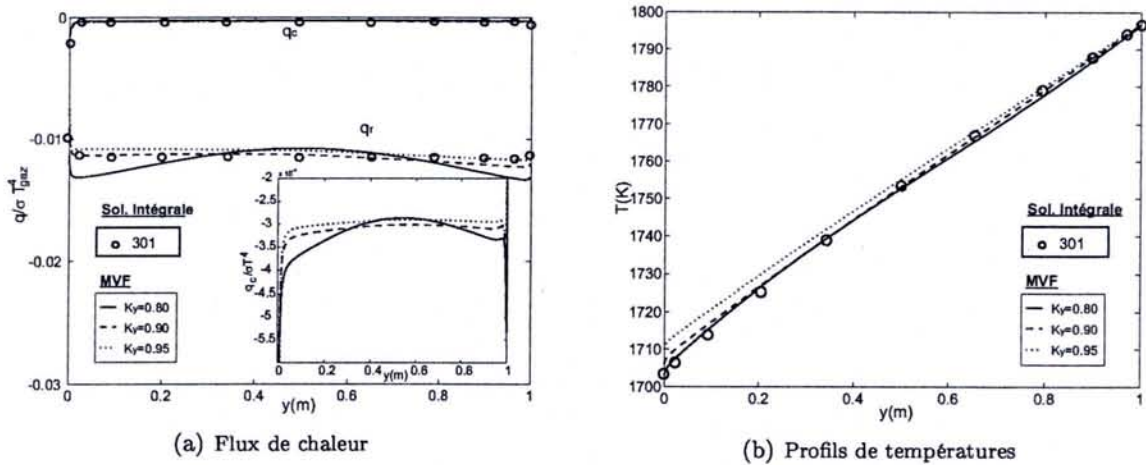


FIG. 2.41 – Sensibilité au pas du maillage : approximation Exponentielle Modifié

Approximation Exponentielle Modifiée

L'approximation Exponentielle Modifiée a permis le calcul de flux et de température (Fig. 2.41 (a) et (b)) conformes aux solutions semi-analytiques. Les flux radiatif et conductif sont uniformes pour $k_y = 0,95$ et $k_y = 0,9$. Une légère fluctuation est observée quand $k_y = 0,8$. En revanche la température est mieux approchée avec cette valeur du décrément géométrique.

Approximation Exponentielle Modifiée à Température Linéarisée

Enfin, l'approche Exponentielle Modifiée à Température Linéarisée assure une bonne convergence, même avec 50 mailles régulièrement espacées (Fig 2.42). Tous les résultats sont en très bon accord avec la solution semi-analytique. Nous remarquons que le fait d'affiner le maillage aux frontières n'a aucune influence sur les valeurs calculées. Un des points forts de cette approche est donc sa stabilité. Elle permet d'obtenir des résultats en accord avec la théorie et

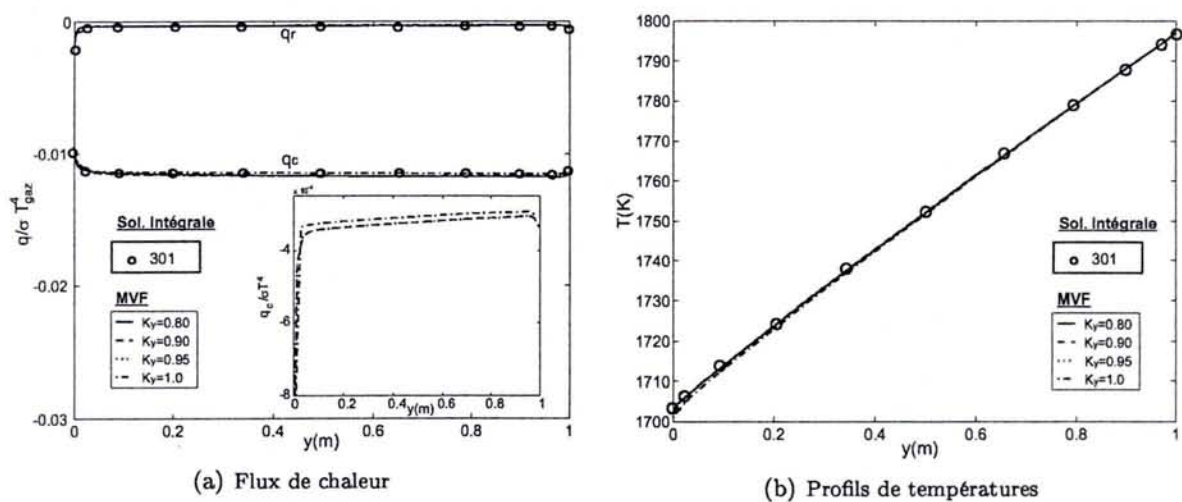


FIG. 2.42 – Sensibilité au pas du maillage : Approximation Exponentielle Modifiée à Température Linéarisée

les études de références à l'aide de maillage peu denses, uniformes ou non.

Chapitre 3

Méthode des Volumes Finis pour le transfert par convection et rayonnement

3.1 Introduction

La modélisation mathématique des transferts de masse et de chaleur dans le bain de verre doit tenir compte des variations des propriétés physiques du verre avec la température. Les méthodes modernes de calcul de mécanique des fluides s'appuient sur la résolution directe des équations de Navier-Stokes. Pour les écoulements à recirculation, cette modélisation consomme beaucoup de temps de calcul et de la place mémoire. Plusieurs méthodes de résolution numérique sont exposées dans la littérature :

- la méthode spectrale,
- la méthode des éléments finis,
- la méthode des singularités,
- la méthode des différences finies,
- la méthode des volumes finis,

Notre choix s'est porté sur la dernière approche, la MVF. Cette méthode a été la première à atteindre un stade de développement très avancé pour les calculs de transfert couplé (rayonnement, conduction et convection). Elle peut aussi être utilisée pour la prise en compte des phénomènes de combustion et de fusion en modélisant des réactions chimiques ou faisant intervenir la chaleur latente de fusion. Elle se distingue aussi par une formulation très simple. L'étude des transferts de masse et de chaleur dans les fours verriers nécessite la résolution des équations de Navier-Stokes. En outre, celles-ci sont au cœur de nombreuses problématiques scientifiques et industrielles. La résolution analytique de ces équations est rarement envisageable, hormis dans des cas simples. Ainsi, l'approche numérique est devenue incontournable pour la majorité des études menées actuellement.

D'un point de vue historique, on constate que la simulation de la dynamique des fluides s'est considérablement développée au cours des trois dernières décennies. Un grand nombre de scientifiques ont consacré des efforts de recherche importants pour développer de nouvelles techniques calculatoires permettant d'appréhender ces phénomènes. Il en résulte un tout aussi grand nombre de publications de référence dédiées à de nombreuses applications. Dans cette

abondante littérature, nous citons de manière chronologique quelques ouvrages de référence qui ont orienté notre recherche. Ce sont notamment : Roache 1972 [43], Patankar 1980 [22], Baker 1983 [44], Peyret 1983 [45], Anderson 1984 [46], Hirsch 1990 [47], Fletcher 1991 [48], Shyy 1994 [49], Versteeg 1995 [50] et Ferziger 2002 [51].

Toutefois, les techniques et méthodes numériques abordées dans ces documents ne fournissent pas, à ce jour, de solution pouvant être considérée comme parfaite pour modéliser tous types d'écoulements, que ce soit en terme d'exactitude, d'efficacité ou encore de stabilité numérique. Au préalable de tout calcul, une étude critique doit être effectuée quant au choix des techniques employées pour résoudre le système d'équations caractérisant l'écoulement. Néanmoins l'approche numérique la plus répandue pour résoudre les problèmes de mécanique des fluides et de transfert convectif est la Méthode des Volumes Finis (MVF). Elle est basée sur l'intégration des équations de conservation sur des volumes de contrôle. Cette approche est celle que nous avons retenue pour modéliser l'hydrodynamique du bain de verre. Nous allons discuter la méthodologie qui lui est associée.

Le processus de résolution des équations de Navier-Stokes débute par la discrétisation du domaine de calcul en un nombre fini de volumes de contrôle. Les grandeurs physiques sont aussi discrétisées et affectées aux centres des mailles. Lors de la discrétisation, les variables aux nœuds du maillage sont employées pour interpoler les valeurs aux surfaces des volumes de contrôle. Ces interpolations sont nécessaires afin de relier les grandeurs nodales d'une part et de manière à prendre en compte les conditions aux limites d'autre part. Un schéma d'interpolation approprié contribue largement à l'exactitude de la solution et à la stabilité du processus de résolution.

Comme pour la résolution de l'ETR, nous avons besoin de relations de fermeture pour les équations de Navier-Stokes. Il existe plusieurs schémas ; les plus courants sont référencés ci-après : Upwind (UDS), Hybrid (HDS) et Power-Law (PDS). Ils sont dits de premier ordre en terme de précision. Le schéma aux Différences Centrées (CDS) est de second ordre. Il existe aussi des schémas de troisième ordre qui sont bien adaptés au calcul des écoulements complexes. Le schéma Quick proposé par Leonard [52] en fait partie. Il est réputé pour sa précision relativement aux schémas précédents. En outre, c'est le schéma le plus fréquemment utilisé parmi ceux d'ordre supérieur à deux. Au-delà du troisième ordre, d'autres schémas peuvent être employés [53, 54, 55, 56]. Un des plus courants est le schéma CDS de quatrième ordre.

Un inconvénient majeur des schémas d'ordre élevé (égal ou supérieur à deux) réside dans leur difficulté de mise en œuvre. Ceci est principalement dû à trois raisons :

- leur instabilité numérique qui peut conduire à la divergence des calculs dans le cas d'écoulement complexes,
- la difficulté d'implémentation étant donné les nombreuses interpolations exigées par ces schémas,
- l'importance des temps de calcul.

A l'aide d'un traitement spécifique, ces difficultés peuvent être souvent résolues. En fait, la stabilité et la convergence sont les principaux défis imposés aux numériciens.

Le traitement de l'instabilité des schémas d'ordre élevé conduit en général à l'obtention d'un schéma d'ordre inférieur auquel s'ajoute un terme correctif. Cette approche est connue sous le nom de correction reportée "deferred correction" [57, 58]. La technique de la correction

reportée a été initialement appliquée à la résolution des équations ordinaires. Elle a été par la suite développée pour résoudre les équations aux dérivées partielles. Nous détaillerons cette méthode lors de l'emploi du schéma Quick. On peut toutefois noter que le résultat a toujours la précision du schéma originel (d'ordre élevé). De cette façon, le conflit entre précision et stabilité peut être généralement résolu.

Ce chapitre discute les techniques classiques utilisées lors de la résolution numérique des équations aux dérivées partielles (EDP) en utilisant la MVF. Il traite aussi l'influence des relations de fermeture employées sur les résultats obtenus. Étant donné les problèmes de stabilité de certaines relations de fermeture, pour les écoulements à recirculations, nous proposons une nouvelle formulation de schéma Quick stable et rapide. Des validations et des comparaisons de cette nouvelle formulation sont discutées dans le cas de la convection forcée avec un fluide quelconque. Ce modèle est aussi testé dans les cas de la convection naturelle et thermocapillaire. Enfin, nous abordons le problème de couplage de la convection naturelle et du rayonnement.

La MVF donne des solutions pour un ensemble de points discrets situés dans le domaine du calcul (divisé en un certain nombre de volumes de contrôle). En intégrant les EDP sur les volumes de contrôle, les équations sont écrites sous une forme conservative. Les dérivées sont approchées par des relations aux différences finies. Ainsi, le problème s'écrit sous la forme d'un système d'équations linéaires. Il est résolu itérativement. Afin de réduire les développements mathématiques concernant les équations de Navier-Stokes, nous considérerons une équation générique de transport. Elle est étudiée sur un maillage cartésien nonuniforme.

3.2 Équations et notations

L'équation de transport traduisant la conservation d'une grandeur physique scalaire ou vectorielle ϕ dans un écoulement s'écrit :

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}}_{\text{Évolution temporelle}} + \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \phi)}_{\text{Terme convectif}} = \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\Gamma \vec{\nabla} \phi)}_{\text{Terme diffusif}} + \underbrace{S_\phi}_{\text{Terme source}} \quad (3.1)$$

Γ est le coefficient de diffusion, S_ϕ est le terme source de ϕ par unité de volume, ρ est la densité du milieu fluide et $\vec{V}$ est la vitesse de l'écoulement. Le premier terme de de l'éq. 3.1 représente la variation temporelle de ϕ . Le second terme est la composante convective ; il représente le transport de la quantité ϕ générée par le mouvement du fluide. Du côté droit de l'équation, le premier terme de transport est dû à la diffusion. Le dernier terme représente la contribution due aux sources. Pour une géométrie unidimensionnelle (1-D) l'éq. 3.1 devient :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + S_\phi \quad (3.2)$$

Dans le cas de modélisation à deux et trois dimensions on obtient :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S_\phi \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w\phi)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S_\phi \quad (3.4)$$

où u, v et w sont respectivement les composantes de la vitesse suivant x, y et z . Dans le cas du régime permanent, la dérivée par rapport au temps est nulle ; ainsi le premier terme des éq de 3.1 à 3.4 disparaît.

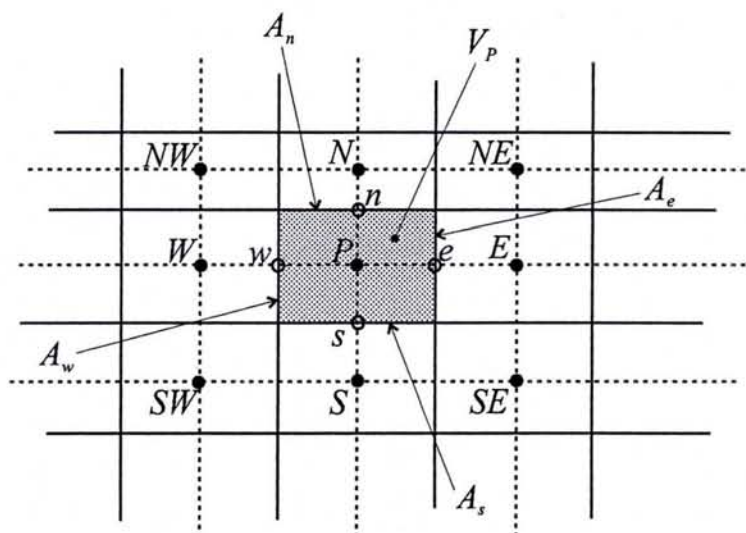


FIG. 3.1 – Volumes de contrôle, géométrie bidimensionnelle

Dans le cas d'une géométrie bidimensionnelle, l'équation de transport est discrétisée sur un ensemble de nœuds. Notre algorithme utilise un maillage nonuniforme où les nœuds sont les centres des volumes de contrôle (Fig. 3.1). Ils sont repérés par deux indices : i suivant x et j suivant y .

Par définition, nous orientons l'axe x positivement selon l'*Est* et négativement vers l'*Ouest*. La même convention est retenue pour les directions *Nord* et *Sud* de l'axe y . Le centre du volume de contrôle (i, j) est indicé P . Les deux nœuds voisins de P dans la direction *Est* sont repérés par E (indice $i + 1$) et EE (indice $i + 2$). Le même formalisme est adopté pour les premiers et seconds voisins le long des directions *Ouest*, *Nord* et *Sud* (W et WW , N et NN , S et SS). Les surfaces entourant le volume de contrôle V_P sont notées : A_e pour l'est, A_w pour l'ouest, A_n pour le nord et A_s pour le sud.

Le volume de contrôle V_P a une longueur $\Delta x_i = \Delta x_P$ et une largeur $\Delta y_j = \Delta y_P$. Δx_e est la distance entre les points P et E et Δx_w est la distance entre les points P et W . Δy_n et Δy_s sont définis de même façon. Les surfaces frontières du volume de contrôles sont données par $A_e = A_w = \Delta x_i = \Delta x_P$ et $A_n = A_s = \Delta y_j = \Delta y_P$, et son volume $\Delta V = \Delta x_P \Delta y_P$.

3.3 Discrétisation de l'équation de transport

L'équation de transport en régime stationnaire peut être explicitée de manière réduite :

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \phi) = \vec{\nabla} \cdot (\Gamma \vec{\nabla} \phi) + S_\phi \quad (3.5)$$

Nous allons discrétiser cette équation à l'aide la MVF. Le cas unidimensionnel est détaillé. Les équations résultantes pour des géométries 2-D et 3-D seront brièvement discutées.

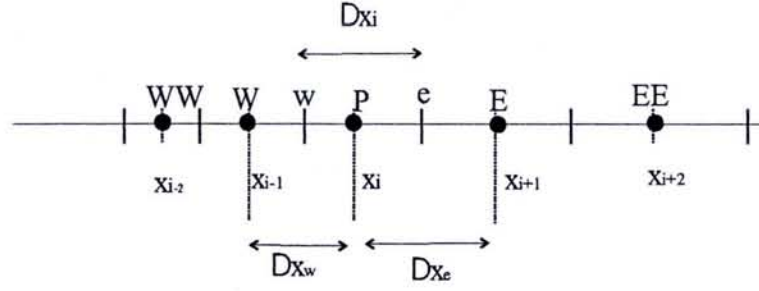


FIG. 3.2 – Volumes de contrôle, géométrie unidimensionnelle

L'intégration l'éq. 3.2 selon x , sur le volume de contrôle associé (Fig. 3.2) donne :

$$\int_w^e \frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} dx = \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx + \int_w^e S_\phi dx \quad (3.6)$$

Nous supposons que le terme source est constant sur tout le volume de contrôle et égal à S_P . L'intégration nous donne :

$$\int_w^e S_\phi dx = S_P \Delta V_P \quad (3.7)$$

En exprimant la dérivée par l'approche des différences centrées, le terme de diffusion s'écrit :

$$\int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx = \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w = \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_e} - \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_w} \quad (3.8)$$

Enfin, si l'on suppose que les vitesses à travers les interfaces du volume de contrôle sont connues, les termes convectifs $(\rho u \phi)$ peuvent être obtenus en utilisant une interpolation linéaire pour la grandeur ϕ :

$$\int_w^e \frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} dx = (\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w = (\rho u)_e \frac{\phi_E + \phi_P}{2} - (\rho u)_w \frac{\phi_P + \phi_W}{2} \quad (3.9)$$

Les équations de transport sont discrétisées par des approximations de type "différences finies". De telles approximations génèrent des erreurs de troncature. Les interpolations utilisées dans les éq. 3.8 et 3.9 sont de second ordre en précision. Quand l'ordre d'interpolation augmente, l'erreur tend rapidement vers zéro. Cependant, sur les maillages non uniformes, en particulier dans les zones où les cellules sont grandes, les schémas d'ordre élevé peuvent causer des oscillations numériques. Dans ce cas, le calcul devient instable et conduit souvent à des solutions erronées. L'utilisation d'approximations du second ordre lors de l'intégration de l'équation de transport sur le volume de contrôle ΔV_P s'écrit :

$$(\rho u)_e \frac{\phi_E + \phi_P}{2} - (\rho u)_w \frac{\phi_P + \phi_W}{2} = \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_e} - \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_w} + S_P \Delta V_P \quad (3.10)$$

cette relation se factorise :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Gamma_e}{\Delta x_e} + \frac{\Gamma_w}{\Delta x_w} + \frac{(\rho u)_e}{2} - \frac{(\rho u)_w}{2} \right) \phi_P = \left(\frac{\Gamma_e}{\Delta x_e} - \frac{(\rho u)_e}{2} \right) \phi_E \\ & + \left(\frac{\Gamma_w}{\Delta x_w} + \frac{(\rho u)_w}{2} \right) \phi_W + S_P \Delta V_P \end{aligned} \quad (3.11)$$

En utilisant le formalisme de la MVF vu au chapitre précédent, il vient :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + b_P \quad (3.12)$$

avec :

$$\begin{cases} a_E = \left(\frac{\Gamma_e}{\Delta x_e} - \frac{(\rho u)_e}{2} \right) \\ a_W = \left(\frac{\Gamma_w}{\Delta x_w} + \frac{(\rho u)_w}{2} \right) \\ a_P = \frac{\Gamma_e}{\Delta x_e} + \frac{\Gamma_w}{\Delta x_w} + \frac{(\rho u)_e}{2} - \frac{(\rho u)_w}{2} = (a_E + a_W) + (\rho u)_e - (\rho u)_w \\ b_P = S_p \Delta V_P \end{cases} \quad (3.13)$$

Cette écriture peut être réduite si l'on considère les flux de diffusion (D_f) et de masse (F_f) aux interfaces f du volume de contrôle. Ces derniers sont :

$$\begin{aligned} D_f &= A_f \frac{\Gamma_f}{\Delta x_f} \\ F_f &= A_f (\rho u)_f \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec l'indice f associé aux surfaces (A_f) du volume de contrôle (e, w). On remarque que le flux diffusif sera toujours positif ou nul, tandis que le flux de masse peut prendre des valeurs positives ou négatives selon le sens de l'écoulement. En employant ces notations, les éq. 3.13 sont réécrites :

$$\begin{cases} a_E = \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \\ a_W = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \\ a_P = D_e + D_w + \frac{F_e}{2} - \frac{F_w}{2} = (a_E + a_W) + F_e - F_w \\ b_P = S_p \Delta V_P \end{cases} \quad (3.15)$$

Dans le cas unidimensionnel, on rappelle que A_f a une dimension égale à l'unité. Le terme a_P fait apparaître la somme des coefficients voisins auxquels on ajoute le terme $F_e - F_w$, qui traduit la perte de masse nette de la cellule. Lors de la discrétisation de l'équation de continuité, le terme $F_e - F_w$ devient nul pour un écoulement incompressible.

Pour la géométrie bidimensionnelle, la discrétisation des équations de Navier-Stokes implique l'intégration de l'équation de transport (3.3) sur le volume de contrôle, selon les deux directions x et y :

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_s^n \left[\frac{\partial (\rho u \phi)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v \phi)}{\partial y} \right] dx dy &= \int_w^e \int_s^n S_\phi dx dy \\ + \int_w^e \int_s^n \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] dx dy \end{aligned} \quad (3.16)$$

En utilisant les mêmes approximations du second ordre, employées pour l'équation de transport unidimensionnelle, nous obtenons pour la géométrie 2-D :

$$\begin{aligned} \Delta y_P \left[(\rho u)_e \frac{\phi_E + \phi_P}{2} - (\rho u)_w \frac{\phi_P + \phi_W}{2} \right] + \Delta x_P \left[(\rho v)_n \frac{\phi_N + \phi_P}{2} - (\rho v)_s \frac{\phi_P + \phi_S}{2} \right] = \\ \Delta y \left[\Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_e} - \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_w} \right] + \Delta x \left[\Gamma_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y_n} - \Gamma_s \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y_s} \right] + S_P \Delta V_P \end{aligned} \quad (3.17)$$

ce qui s'écrit sous la forme simplifiée usuelle :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b_P \quad (3.18)$$

avec :

$$\begin{cases} a_E = \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), & a_W = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \\ a_N = \left(D_n - \frac{F_n}{2} \right), & a_S = \left(D_s + \frac{F_s}{2} \right) \\ a_P = D_e + D_w + D_n + D_s + \frac{F_e}{2} - \frac{F_w}{2} + \frac{F_n}{2} - \frac{F_s}{2} \\ & = (a_E + a_W + a_N + a_S) + F_e - F_w + F_n - F_s \\ b_P = S_P \Delta V_P \end{cases} \quad (3.19)$$

Enfin, la discrétisation l'équation transport en géométrie tridimensionnelle est obtenue par l'intégration de l'éq. 3.4 sur le volume de contrôle suivant les trois axes x , y et z :

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_s^n \int_b^t \left[\frac{\partial (\rho u \phi)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v \phi)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w \phi)}{\partial z} \right] dx dy dz = \int_w^e \int_s^n \int_b^t S_\phi dx dy dz \\ + \int_w^e \int_s^n \int_b^t \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \end{aligned} \quad (3.20)$$

En appliquant la même démarche que dans les deux cas précédents nous obtenons la forme générale suivante :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_T \phi_T + a_B \phi_B + b_P \quad (3.21)$$

avec les différents coefficients a_i et b_P :

$$\begin{cases} a_E = \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), & a_N = \left(D_n - \frac{F_n}{2} \right), & a_T = \left(D_t - \frac{F_t}{2} \right) \\ a_W = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), & a_S = \left(D_s + \frac{F_s}{2} \right), & a_B = \left(D_b + \frac{F_b}{2} \right) \\ a_P = D_e + D_w + D_n + D_s + D_t + D_b + \frac{F_e}{2} - \frac{F_w}{2} + \frac{F_n}{2} - \frac{F_s}{2} + \frac{F_t}{2} - \frac{F_b}{2} \\ & = (a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B) + F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b \\ b_P = S_P \Delta V_P \end{cases} \quad (3.22)$$

Les équations discrétisées en géométries bidimensionnelle et tridimensionnelle discutées précédemment sont respectivement la somme de deux et trois équations unidimensionnelles

discrétisées sur des axes orthogonaux. Ceci est confirmé par l'observation du système (3.15) qui est comparable aux systèmes 2-D et 3-D donnés par (3.19 et 3.22). Ainsi, dans la suite de cette étude, nous limiterons le développement des équations au cas unidimensionnel. Les équations pour les autres géométries cartésiennes seront directement explicitées.

En ce qui concerne la résolution du système d'équations linéaires, résultant de la discrétisation de l'équation de transport, diverses méthodes existent. Celles-ci sont en général délicates à mettre en œuvre pour les géométries 2-D et 3-D. Ainsi, des méthodes itératives sont habituellement utilisées pour résoudre ces systèmes. De plus, la stabilité, la convergence et la précision de la solution obtenue sont liées au schéma d'interpolation utilisé pour exprimer la grandeur ϕ aux faces du volume de contrôle. Nous allons présenter et discuter certains de ces schémas de différentiation.

3.4 Schémas de discrétisation : relations de fermeture

La discrétisation par la méthode des volumes finis décrite dans la section précédente suppose que le flux de masse à travers l'interface f est connu, sachant que la valeur de ϕ à cette limite est donnée par une interpolation linéaire. Par exemple, le flux convectif de ϕ à travers l'interface e s'écrit :

$$(\rho u \phi)_e = (\rho u)_e \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \quad (3.23)$$

Cette interpolation linéaire est aussi appelée schéma aux différences centrées (CDS). C'est un schéma de deuxième ordre. Il ne peut être utilisé que dans certaines conditions. En effet, il génère parfois des oscillations numériques qui font diverger les calculs. Pour assurer la convergence des systèmes d'éq. 3.12, 3.18 et 3.22, il faut vérifier, pour chaque cellule du maillage, la condition dite de "diagonale dominante" :

$$|a_P| \geq \sum_{i=\text{voisins}} |a_i| \quad (3.24)$$

Les coefficients a_i sont les nœuds voisins de P (pour une géométrie 2-D, ce sera a_E , a_W , a_N et a_S).

Un nombre adimensionnel, le nombre de Péclet (Pe), est utilisé pour établir un critère de stabilité du calcul. Ce nombre est le rapport entre le temps caractéristique de diffusion et le temps caractéristique d'advection (transport de masse). Si $Pe < 2$, l'écoulement est dominé par le phénomène de diffusion. Nous définissons le nombre de Péclet cellulaire :

$$Pe = \frac{U \Delta x}{\Gamma} \quad (3.25)$$

Les travaux de Patankar [22] et Versteeg et al. [50] montrent que le schéma CDS est à diagonale dominante seulement quand le nombre de Péclet cellulaire est inférieur ou égal à 2. Dans le cas contraire, les calculs deviennent instables et la convergence n'est plus assurée. Ainsi, pour éviter ces problèmes d'instabilité et de divergence numérique, un certain nombre de schémas d'interpolation alternatifs ont été proposés au fil des années. Courant et al [59] ont été les premiers à avoir observé l'instabilité du schéma CDS. Ils ont alors proposé le schéma Upwind (qui est de premier ordre) en guise d'alternative. Ce schéma est généralement employé pour les problèmes unidimensionnels. Il s'avère raisonnablement précis en l'absence de

recirculations [60, 61]. Cependant, pour des problèmes multidimensionnels, le schéma Upwind est sujet à un autre type de problème : "la diffusion numérique" (fausse diffusion). Plus de détails concernant ce phénomène peuvent être obtenus dans les travaux de G. de Vahl Davis et G.D. Mallinson [62, 63, 64] qui font référence en la matière.

Comme nous venons de l'évoquer, la diffusion numérique peut modifier la solution non seulement quantitativement mais aussi qualitativement. Pour surmonter les problèmes de stabilité liés au schéma CDS, Spalding [60] a suggéré l'utilisation d'un schéma hybride (HDS). C'est le schéma CDS si le nombre de Péclet est inférieur ou égal à 2, sinon il est remplacé par le schéma UDS. Ce schéma améliore l'exactitude de la solution, comparativement au schéma Upwind dans le cas 1-D. Pour les géométries multidimensionnelles il génère toujours de la diffusion numérique.

D'autres approches existent pour préserver la stabilité du calcul lors de la résolution du système linéaire. On peut notamment, à l'aide de la technique de "correction reportée" exposée par Kholsa et Rubin [57], forcer le système de sorte qu'il soit à diagonale dominante. Cette approche repose sur la résolution du problème à l'aide d'un schéma simple, et à chaque itération, de corriger le calcul à l'aide d'un schéma d'ordre élevé. Ainsi, après convergence (si tout va bien!) la solution est conforme à celle que l'on obtiendrait avec un schéma d'ordre supérieur. La méthode a été employée par plusieurs auteurs. Une bonne description de ce schéma dit à "stabilité conditionnée" est donnée par Hayase et al. [65].

A présent, nous allons détailler plusieurs schémas d'interpolation. Afin de limiter les développements numériques, nous ne considérons que le cas unidimensionnel (Fig. 3.2). En outre, les équations sont établies seulement pour la face *Est* du volume de contrôle. Avec les notations et indices déjà utilisés, la forme générale d'un schéma numérique d'interpolation donnant la grandeur ϕ_e est la suivante :

$$\phi_e = \dots + g_{-2,e}\phi_{i-2} + g_{-1,e}\phi_{i-1} + g_{0,e}\phi_i + g_{+1,e}\phi_{i+1} + g_{+2,e}\phi_{i+2} + \dots \quad (3.26)$$

Cette relation peut être étendue à d'autres nœuds en amont et en aval de i . La somme des coefficients $g_{n,e}$ est normée et le choix de n_{max} et n_{min} détermine l'ordre et la nature du schéma :

$$\sum_{n=n_{min}}^{n_{max}} g_{n,e} = 1 \quad (3.27)$$

3.4.1 Schéma UDS

Le schéma Upwind (UDS) dépend de la direction de l'écoulement, c'est-à-dire du signe pris par le flux de masse F_e à l'interface A_e ; il est caractérisé par les relations :

$$\left\| \begin{array}{lll} n_{max} = n_{min} = 0 & g_{0,e} = 1 & F_e > 0 \\ n_{max} = n_{min} = 1 & g_{1,e} = 1 & F_e < 0 \end{array} \right. \quad (3.28)$$

3.4.2 Schéma CDS

Les coefficients du schéma aux différences centrées (CDS) ne dépendent pas de la direction de l'écoulement. Ce sont :

$$\left\| \begin{aligned} n_{max} &= 1, \quad n_{min} = 0 \\ g_{0,e} &= 1 - g_{+1,e} \\ g_{+1,e} &= \frac{x_e - x_i}{x_{i+1} - x_i} \end{aligned} \right. \quad (3.29)$$

3.4.3 Schéma HDS

Le schéma hybride (HDS) peut être de type CDS où UDS selon la valeur prise par le nombre de Péclet. Si $Pe > 2$ on utilise une approche UDS sinon la technique CDS.

3.4.4 Schéma Quick

Le schéma Quick utilise trois points nodaux pour approcher la valeur interfaciale. Selon la direction de l'écoulement, on a besoin de deux points en amont et d'un point en aval. Les coefficients $g_{n,e}$ dépendent donc du signe de F_e (dans le cas présent $F_e > 0$) :

$$\left\| \begin{aligned} n_{max} &= 1, \quad n_{min} = -1 \\ g_{-1,e} &= \frac{-(x_e - x_i)(x_{i+1} - x_e)}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})} \\ g_{+1,e} &= \frac{(x_e - x_i)(x_{i-1} - x_e)}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} \\ g_{0,e} &= 1 - (g_{+1,e} + g_{-1,e}) \end{aligned} \right. \quad (3.30)$$

3.4.5 Schéma CDS de 4^{ème} ordre

Avec les schémas d'ordre supérieur à trois le calcul des coefficients $g_{n,e}$ est de plus en plus complexe. Nous donnons ceux du schéma CDS de 4^{ème} ordre qui a été utilisé pour certains de nos calculs. Ses coefficients ne dépendent pas de la direction de l'écoulement :

$$\left\| \begin{aligned} n_{max} &= -1, \quad n_{min} = -2 \\ g_{+2,e} &= \frac{(x_{i+1} - x_e)(x_i - x_e)(x_{i+1} - x_e)}{(x_{i+2} - x_{i-1})(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})} \\ g_{+1,e} &= \frac{(x_{i+1} - x_e)(x_i - x_e)(x_{i+2} - x_e)}{(x_{i+2} - x_{i+1})(x_{i+2} - x_i)(x_{i+1} - x_i)} \\ g_{-1,e} &= \frac{(x_i - x_e)(x_{i+1} - x_e)(x_{i+2} - x_e)}{(x_{i+2} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_{i-1})(x_i - x_{i-1})} \\ g_{0,e} &= 1 - (g_{+2,e} + g_{+1,e} + g_{-1,e}) \end{aligned} \right. \quad (3.31)$$

Cette approche est la plus utilisée parmi celles d'ordre supérieur. L'expérience montre que ce schéma est très précis, même dans le cas d'écoulements complexes, avec des maillages peu denses. Toutefois, il peut s'avérer instable et nécessite alors un traitement numérique particulier pour assurer la convergence des calculs. Des études spécifiques [53, 54, 55, 56] font état des modalités d'utilisation.

En appliquant le schéma général (3.26) avec le formalisme de l'approche CDS de 4^{ème} ordre, pour les faces *Est* et *Ouest* du volume de contrôle, on peut réécrire l'équation de transport (3.9). Nous obtenons :

$$\begin{aligned} & (\rho u)_e [g_{-2,e}\phi_{i-2} + g_{-1,e}\phi_{i-1} + g_{0,e}\phi_i + g_{+1,e}\phi_{i+1} + g_{+2,e}\phi_{i+2}] \\ & - (\rho u)_w [g_{-2,w}\phi_{i-2} + g_{-1,w}\phi_{i-1} + g_{0,w}\phi_i + g_{+1,w}\phi_{i+1} + g_{+2,w}\phi_{i+2}] \\ & = \Gamma_e \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x_e} - \Gamma_w \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x_w} + S_P \Delta V_P \end{aligned} \quad (3.32)$$

soit en utilisant les indices ($_{WW}, _W, _P, _E, _{EE}$) définis précédemment (Fig. 3.2) :

$$\begin{aligned} & (\rho u)_e [g_{-2,e}\phi_{WW} + g_{-1,e}\phi_W + g_{0,e}\phi_P + g_{+1,e}\phi_E + g_{+2,e}\phi_{EE}] \\ & - (\rho u)_w [g_{-2,w}\phi_{WW} + g_{-1,w}\phi_W + g_{0,w}\phi_P + g_{+1,w}\phi_E + g_{+2,w}\phi_{EE}] \\ & = \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_e} - \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_w} + S_P \Delta V_P \end{aligned} \quad (3.33)$$

L'équation caractérisant le système à résoudre (3.12) comporte deux termes supplémentaires :

$$a_P \phi_P = a_{WW} \phi_{WW} + a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_{EE} \phi_{EE} + b_P \quad (3.34)$$

avec les différents coefficients réduits définis précédemment (3.14) :

$$\begin{cases} a_{WW} = g_{-2,w}F_w - g_{-2,e}F_e, & a_W = D_w + g_{-1,w}F_w - g_{-1,e}F_e \\ a_{EE} = g_{+2,w}F_w - g_{+2,e}F_e, & a_E = D_e + g_{+1,w}F_w - g_{+1,e}F_e \\ a_P = D_w - g_{0,w}F_w + D_e + g_{0,e}F_e, & b_P = S_P \Delta V_P \end{cases} \quad (3.35)$$

Afin de résoudre le système d'équations linéaire explicité ci-dessus (3.34), la plupart des méthodes numériques imposent des conditions quant à la valeur des coefficients a_i . Certains exigent notamment que a_P soit dominant par rapport aux coefficients associés aux volumes voisins (3.24). Avec le schéma CDS, la stabilité est assurée par la condition $Pe \leq 2$ si le maillage est uniforme, sinon (maillage nonuniforme) avec $Pe \leq 1/g_{+1,e}$. Toutefois, pour les schémas de troisième et de quatrième ordres, les conditions de stabilité ne sont pas bien définies. Ainsi, il est souvent délicat de mettre directement en pratique de tels schémas, notamment dans le cas d'écoulements complexes.

Ceci nous a conduits à utiliser la technique de la correction reportée ("deferred correction"), développée par Khosla et Rubin [57] pour les équations ordinaires, et appliquée au schéma Quick par plusieurs auteurs. Parmi ceux-ci, nous avons étudié les travaux de : Freitas [66], Han [67], Leschziner [68], Pollard [69] et Hayase [65]. Dans le paragraphe suivant, nous allons détailler cette méthode numérique, notamment pour les schémas de troisième et quatrième ordres.

3.5 Technique de la correction reportée

La formulation générale de la technique de la correction reportée, appliquée à un schéma d'ordre supérieur (schémas Quick ou CDS de 4^{ème} ordre), pour différencier la grandeur ϕ à l'interface A_e s'écrit :

$$\phi_e = \phi_e^{O.Inf} + \underbrace{[\phi_e^{O.Sup} - \phi_e^{O.Inf}]}_{\text{terme source}} \quad (3.36)$$

Nous allons appliquer la méthode aux schémas CDS de 4^{ème} ordre, puis au schéma Quick que nous avons couramment utilisé dans la suite de cette étude.

3.5.1 Schéma CDS de 4^{ème} ordre

Compte tenu des expressions proposées pour ce schéma (3.34 et 3.35) et au vu de la technique de correction reportée, il est possible d'écrire ϕ_e à l'aide du schéma Upwind (UDS) et d'un terme source. Selon la direction prise par l'écoulement nous obtenons :

$$\begin{aligned}\phi_e &= \underbrace{\phi_{i+1}}_{\text{implicite}} + \underbrace{[g_{-2,e}\phi_{i-2} + g_{-1,e}\phi_{i-1} + g_{0,e}\phi_i + (g_{+1,e} - 1)\phi_{i+1} + g_{+2,e}\phi_{i+2}]}_{\text{terme source}} \text{ si } F_e < 0 \\ \phi_e &= \underbrace{\phi_i}_{\text{implicite}} + \underbrace{[g_{-2,e}\phi_{i-2} + g_{-1,e}\phi_{i-1} + (g_{0,e} - 1)\phi_i + g_{+1,e}\phi_{i+1} + g_{+2,e}\phi_{i+2}]}_{\text{terme source}} \text{ si } F_e \geq 0\end{aligned}\quad (3.37)$$

La partie explicite (terme source $S_{\phi,e}$ de ϕ_e) peut être réécrite selon le sens de l'écoulement ; ainsi on définit les opérateurs "+" et "-" :

$$\begin{cases} F_e^+ = F_e \text{ si } F_e > 0 \\ F_e^+ = 0 \text{ si } F_e < 0 \\ F_e^- = 0 \text{ si } F_e > 0 \\ F_e^- = F_e \text{ si } F_e < 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

les termes source sont écrits $S_{\phi,e}^-$ et $S_{\phi,e}^+$:

$$\begin{aligned}S_{\phi,e}^- &= [g_{-2,e}\phi_{i-2} + g_{-1,e}\phi_{i-1} + g_{0,e}\phi_i + (g_{+1,e} - 1)\phi_{i+1} + g_{+2,e}\phi_{i+2}] \text{ si } F_e < 0 \\ S_{\phi,e}^+ &= [g_{-2,e}\phi_{i-2} + g_{-1,e}\phi_{i-1} + (g_{0,e} - 1)\phi_i + g_{+1,e}\phi_{i+1} + g_{+2,e}\phi_{i+2}] \text{ si } F_e > 0\end{aligned}\quad (3.39)$$

Des développements identiques sont réalisés pour le calcul de la valeur de ϕ sur la face Ouest. L'éq. 3.34 est alors réduite à l'équation caractéristique d'un schéma de premier ordre :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + b_P \quad (3.40)$$

avec les coefficients a_{WW} et a_{EE} qui sont nuls et les autres grandeurs définies comme suit :

$$\begin{cases} a_W = D_w + F_w^+ & a_E = D_e + F_e^- \\ a_P = D_w + F_w^- + D_e + F_e^+ \\ b_P = S_P \Delta V_P - F_e^+ S_{\phi,e}^+ - F_e^- S_{\phi,e}^- + F_w^+ S_{\phi,w}^+ + F_w^- S_{\phi,w}^- \end{cases} \quad (3.41)$$

Pour les géométries à deux dimensions, l'éq. 3.16 se réduit à l'expression générale suivante :

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + b_P \quad (3.42)$$

où seuls les coefficients associés aux nœuds voisins de P sont non nuls :

$$\begin{cases} a_W = D_w + F_w^+ & a_S = D_s + F_s^+ \\ a_P = D_w + F_w^- + D_e + F_e^+ + D_s + F_s^- + D_n + F_n^+ \\ a_E = D_e + F_e^- & a_N = D_n + F_n^- \\ b_P = S_P \Delta V_P - F_e^+ S_{\phi,e}^+ - F_e^- S_{\phi,e}^- + F_w^+ S_{\phi,w}^+ + F_w^- S_{\phi,w}^- \\ \quad - F_n^+ S_{\phi,n}^+ - F_n^- S_{\phi,n}^- + F_s^+ S_{\phi,s}^+ + F_s^- S_{\phi,s}^- \end{cases} \quad (3.43)$$

3.5. Technique de la correction reportée

Avec ce formalisme, on supprime les problèmes d'instabilités dus au signe et à l'amplitude des coefficients a_i du système linéaire à résoudre. Par ailleurs, afin d'augmenter la vitesse de convergence, nous utilisons le schéma CDS comme schéma d'ordre inférieur quand le nombre de Péclet vérifie la condition $|P_e| \leq 2$ discutée précédemment.

Nous allons discuter le cas d'un problème de recirculation d'un fluide (Fig. 3.3) pour illustrer l'intérêt d'un tel choix. Dans cet exemple, la grandeur ϕ est la vitesse u selon l'axe x . Les lignes de courant sont définies dans la partie supérieure du graphe; en dessous, on représente l'évolution de u aux nœuds du maillage. Dans le cas présent $u_E < 0$ et $u_W > 0$. Le problème du calcul de la vitesse en P dépend du choix de la vitesse à l'interface A_e comme nous allons le montrer.

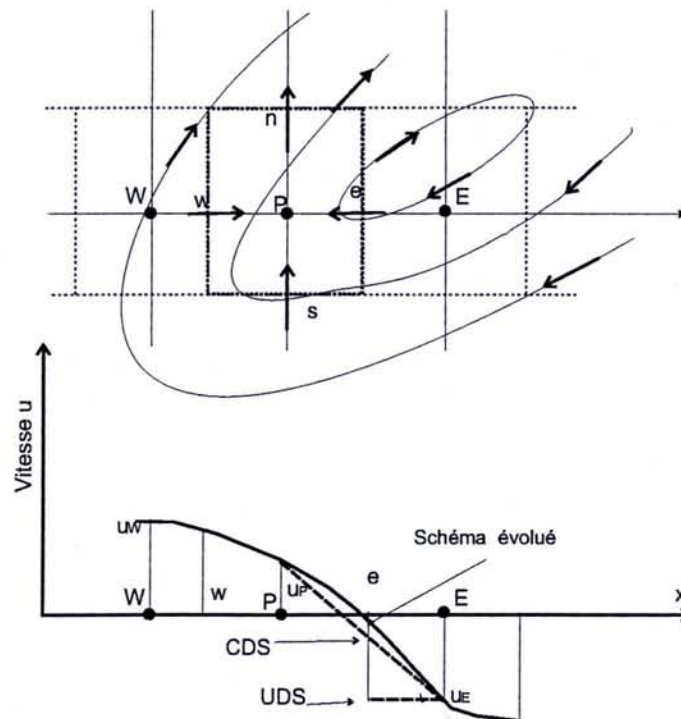


FIG. 3.3 – Écoulement complexe en géométrie 2-D

En appliquant la technique de correction reportée avec un schéma d'ordre inférieur de type Upwind (UDS) [65], on note que la valeur estimée $u_e = u_E$ est éloignée de la solution réelle. Le processus itératif de convergence des calculs est alors ralenti. Une alternative est d'utiliser le schéma CDS de 2^{ème} ordre qui donnera une meilleure estimation de u_e et permettra de diminuer le temps de calcul. Toutefois, si la règle concernant le Péclet local n'est pas toujours vérifiée, des instabilités numériques peuvent survenir. C'est pourquoi, nous utilisons dans nos calculs le schéma hybride (HDS) associé au schéma CDS de 4^{ème} ordre.

A mesure que notre problème couplé a évolué, il est apparu que le choix du schéma numérique d'interpolation devait être soigneusement effectué. En effet, la méthode discutée précédemment peut s'avérer être très lourde numériquement, en particulier quand l'aspect radiatif du problème est pris en compte. Pour limiter le temps de calcul, tout en préservant suffisamment de précision dans l'établissement des grandeurs de la mécanique des fluides, nous

utilisons la méthode Quick comme schéma d'ordre supérieur.

3.5.2 Schéma Quick

Le schéma Quick a été développé par Leonard [52]. Il est couramment employé pour résoudre les problèmes de mécanique des fluides. La formulation de ce schéma sur un maillage irrégulier a été donnée précédemment (3.30). Dans le cas d'une grille à pas régulier on obtient :

$$\begin{aligned}\phi_e &= \frac{3}{8}\phi_E + \frac{3}{4}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_W & F_e > 0 \\ \phi_e &= \frac{3}{8}\phi_P + \frac{3}{4}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_{EE} & F_e < 0\end{aligned}\quad (3.44)$$

L'emploi de la technique de correction reportée, associée au schéma CDS [52] (schéma d'ordre inférieur) permet alors de transformer ces deux équations :

$$\begin{aligned}\phi_e &= \underbrace{\frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P)}_{\text{CDS}} + \underbrace{\frac{1}{8}(\phi_E + \phi_P - 2\phi_W)}_{\text{terme source}} & F_e > 0 \\ \phi_e &= \underbrace{\frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P)}_{\text{CDS}} + \underbrace{\frac{1}{8}(\phi_P + \phi_E - 2\phi_{EE})}_{\text{terme source}} & F_e < 0\end{aligned}\quad (3.45)$$

Cette formulation peut s'avérer instable comme nous l'avons déjà évoqué en raison de l'utilisation du schéma CDS. Historiquement, les premiers auteurs ayant appliqué la technique de correction reportée avec le schéma Quick sont : Leschziner [68], Han [67], Pollard [69] et Freitas [66]. En 1992, Hayase [65] a généralisé l'étude de ce schéma et a proposé une description complète de celui-ci. Dans ce travail, les diverses études menées sur le sujet sont comparées et qualifiées par le biais de 5 critères (règles décrites en annexe § C). Cet article de référence fournit la marche à suivre pour établir un schéma numérique stable. Nous nous sommes inspirés de ces travaux.

La démarche utilisée par Hayase pour construire son propre schéma Quick ("amélioré") permet d'écrire l'éq. 3.45 sous la forme générale :

$$\phi_e = \begin{cases} a_1\phi_E + a_2\phi_P + a_3\phi_W + S_e^+ & F_e > 0 \\ b_3\phi_P + b_2\phi_E + b_1\phi_{EE} + S_e^- & F_e < 0 \end{cases}\quad (3.46)$$

$$\phi_w = \begin{cases} b_1\phi_W + b_2\phi_P + b_3\phi_E + S_w^+ & F_w > 0 \\ a_3\phi_P + a_2\phi_W + a_1\phi_{WW} + S_w^- & F_w < 0 \end{cases}\quad (3.47)$$

Les différents termes source S sont donnés ci-dessous :

$$\begin{cases} S_e^+ = \left(-\frac{1}{8} - a_1\right)\phi_W + \left(\frac{6}{8} - a_2\right)\phi_P + \left(\frac{3}{8} - a_3\right)\phi_E \\ S_w^+ = -\frac{1}{8}\phi_{WW} + \left(\frac{6}{8} - b_1\right)\phi_W + \left(\frac{3}{8} - b_2\right)\phi_P - b_3\phi_E \\ S_e^- = -\frac{1}{8}\phi_{EE} + \left(\frac{6}{8} - b_1\right)\phi_E + \left(\frac{3}{8} - b_2\right)\phi_P - b_3\phi_W \\ S_w^- = \left(-\frac{1}{8} - a_1\right)\phi_E + \left(\frac{6}{8} - a_2\right)\phi_P + \left(\frac{3}{8} - a_3\right)\phi_W \end{cases}\quad (3.48)$$

En utilisant le schéma aux différences centrées pour les termes de diffusion, l'équation de transport unidimensionnelle peut être discrétisée avec la MVF :

$$(F_e^+ + F_e^-)\phi_e - (F_w^+ + F_w^-)\phi_w = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) + S_p\Delta V_P \quad (3.49)$$

Nous remplaçons ϕ_e et ϕ_w par leurs expressions (3.46 et 3.47). Nous obtenons alors :

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + S \quad (3.50)$$

avec :

$$\begin{cases} a_P = a_2F_e^+ + b_2F_e^- - b_2F_w^- - a_2F_w^+ + (D_e + D_w) \\ a_E = -a_3F_e^+ - b_1F_e^- + b_3F_w^+ + a_1F_w^- + D_e \\ a_W = -a_1F_e^+ - b_3F_e^- + b_1F_w^+ + a_3F_w^- + D_w \\ S = S_p\Delta V_P - S_e^+F_e^+ - S_e^-F_e^- + S_w^+F_w^+ + S_w^-F_w^- \end{cases} \quad (3.51)$$

Il est possible d'écrire a_P en fonction de a_E et a_W , ainsi que d'un troisième paramètre noté a_0 , de sorte que :

$$a_P\phi_P = a_E + a_W + a_0 \quad (3.52)$$

où :

$$a_0 = (a_1 + a_2 + a_3)F_e^+ + (b_1 + b_2 + b_3)F_e^- - (b_1 + b_2 + b_3)F_w^+ - (a_1 + a_2 + a_3)F_w^- \quad (3.53)$$

L'intérêt de cette écriture, au premier abord complexe, réside dans l'évaluation des performances du schéma Quick. En effet, l'efficacité de ce modèle peut être estimée par le biais de cinq règles proposées par Patankar (pour quatre d'entre elles) et Hayase. Ces critères, si ils sont vérifiés, assurent que la résolution du système d'équations est stable et qu'il convergera alors vers la solution du problème. Ces cinq règles peuvent être résumées comme suit :

- règle 1 : les flux doivent être uniformes de part et d'autre d'une interface du volume de contrôle.
- règle 2 : les coefficients de l'équation discrétisée doivent être positifs.
- règle 3 : la dérivée première du terme source linéarisée doit être négative.
- règle 4 : la somme des coefficients a_i des cellules voisines doit être égale au coefficient a_P de la cellule principale.
- règle 5 : la somme des coefficients a_1 , a_2 et a_3 , ainsi que b_1 , b_2 et b_3 , est égale à l'unité.

Nous explicitons et détaillons ces règles dans l'annexe § C. Un tableau récapitulatif, précisant la valeur des coefficients a_1 , a_2 , a_3 , b_1 , b_2 et b_3 déterminés par les auteurs des études précitées, ainsi que la validité de leurs modèles et du nôtre, y est aussi reporté (annexe § C).

La formulation du schéma Quick proposée par Hayase [65] est simple et c'est la seule parmi les versions antérieures qui respecte toutes les règles de stabilités évoquées précédemment. Les valeurs aux faces sont approchées par le schéma Upwind plus une terme source. Ainsi, les éq. 3.46 et 3.47 deviennent :

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P + \frac{1}{8}(-\phi_W - 2\phi_P + 3\phi_E) & F_e > 0 \\ \phi_E + \frac{1}{8}(3\phi_P - 2\phi_E - \phi_{EE}) & F_e < 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

et :

$$\phi_w = \begin{cases} \phi_W + \frac{1}{8}(3\phi_W - 2\phi_P - \phi_E) & F_w > 0 \\ \phi_P + \frac{1}{8}(-\phi_W - 2\phi_P + 3\phi_P) & F_w < 0 \end{cases} \quad (3.55)$$

Les termes sources S sont les valeurs entre parenthèses. Par ailleurs, les relations 3.51 qui donnent les coefficients du système linéaire à résoudre sont :

$$\begin{cases} a_P = F_e^+ - F_w^+ + (D_e + D_w) \\ a_E = -F_e^- + D_e \\ a_W = F_w^+ + D_w \\ S = S_p \Delta V_P - S_e^+ F_e^+ - S_e^- F_e^- + S_w^+ F_w^+ + S_w^- F_w^- \end{cases} \quad (3.56)$$

La nouvelle formulation du schéma Quick que nous proposons est donnée par les relations (3.57 et 3.58), déduites des relations (C.15, annexe § C) dans l'intervalle vérifiant $-2 \geq P_e \geq 2$. Ailleurs, nous utilisons la formulation de Hayase (eq. 3.54 et 3.55) :

$$\phi_e = \begin{cases} \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_E) - \frac{1}{8}(\phi_W - 2\phi_P + \phi_E) & F_e > 0 \\ \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_E) - \frac{1}{8}(\phi_P - 2\phi_E + \phi_{EE}) & F_e < 0 \end{cases} \quad (3.57)$$

et :

$$\phi_w = \begin{cases} \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) - \frac{1}{8}(\phi_{WW} - 2\phi_W + \phi_P) & F_w > 0 \\ \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) - \frac{1}{8}(\phi_W - 2\phi_P + \phi_E) & F_w < 0 \end{cases} \quad (3.58)$$

Cette nouvelle forme du schéma Quick respecte les cinq règles exposées. Elle est aussi stable que celle proposé par Hayase (voire annexe C). D'autre part, elle permet l'utilisation des facteurs de sous-relaxation plus grands. En conséquence, moins d'itérations sont nécessaires pour converger vers la même solution. Elle est définie par :

$$\begin{cases} a_P = \begin{cases} \frac{F_e}{2} - \frac{F_w}{2} + (D_e + D_w) & |P_e^e| \leq 2, |P_e^w| \leq 2 \\ F_e^+ - \frac{F_w}{2} + (D_e - D_w) & |P_e^e| \geq 2, |P_e^w| \leq 2 \\ \frac{F_e}{2} + F_w^- + (D_e + D_w) & |P_e^e| \leq 2, |P_e^w| \geq 2 \\ F_e^+ + F_w^- + (D_e + D_w) & |P_e^e| \geq 2, |P_e^w| \geq 2 \end{cases} \\ a_E = \begin{cases} -\frac{F_e}{2} + D_e & |P_e^e| \leq 2 \\ F_e^- + D_e & |P_e^e| \geq 2 \end{cases} \\ a_W = \begin{cases} \frac{F_w}{2} + D_w & |P_e^w| \leq 2 \\ F_w^+ + D_w & |P_e^w| \geq 2 \end{cases} \\ S = S_p \Delta V_P - S_e^+ F_e^+ - S_e^- F_e^- + S_w^+ F_w^+ + S_w^- F_w^- \end{cases} \quad (3.59)$$

3.6 Modélisation des équations de Navier-Stokes

3.6.1 Discrétisation

L'écoulement laminaire incompressible bidimensionnel en régime permanent est décrit par un ensemble d'équations aux dérivées partielles. Ce sont les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Elles sont obtenues à partir de l'équation de transport (3.3) pour différentes valeurs de ϕ et Γ . L'équation de la conservation de la masse est obtenue avec $\phi = 1$ et $\Gamma = 0$:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (3.60)$$

La conservation de la quantité de mouvement est gouvernée par la vitesse et la viscosité ($\phi = \|\vec{v}\|$ et $\Gamma = \mu$). Dans le cas 2-D, on a deux composantes u et v . Selon la direction x on obtient :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.61)$$

dans la direction y :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} - \rho g \quad (3.62)$$

Enfin, l'équation de conservation de l'énergie (où $\phi = T$ et $\Gamma = \alpha$) est donnée ci-dessous :

$$\frac{\partial \rho u C_p T}{\partial x} + \frac{\partial \rho v C_p T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_c \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_c \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_r \quad (3.63)$$

Le tableau 3.1 rappelle les correspondances utiles entre les grandeur ϕ , Γ et S_{phi} pour retrouver les équations de transport.

équation	ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
équation de conservation de la masse	1	0	0
équation de conservation de la qtité de mvt selon x	u	μ	$-\frac{\partial P}{\partial x}$
équation de conservation de la qtité de mvt selon y	v	μ	$-\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g$
équation de conservation de l'énergie	$C_p T$	$\frac{\lambda_c}{C_p}$	$-\vec{\nabla} \cdot \vec{Q}_r$

TAB. 3.1 – Paramètres des équations de transport

Afin de résoudre numériquement les champs de vitesses et de pression obéissant aux équations de quantité de mouvement et de continuité, nous avons utilisé la MVF développée dans ce chapitre. Cette méthode consiste à intégrer les équations de transport sur un volume de contrôle bidimensionnel. On utilise des maillages décalés (Fig. 3.4) afin d'optimiser la résolution numérique conformément aux travaux de F.H. Harlow, S.V. Patankar et H.K. Versteeg [50, 70, 71].

Le premier maillage (trait pointillés) évalue les variables scalaires (pressions, températures) qui sont stockées aux nœuds, situés aux centres des volumes de contrôle. Ces points sont indiqués par les indices majuscules (P , W , E , N et S). Les composantes u de la vitesse sont calculées et stockées aux interfaces *Est* et *Ouest* des cellules repérées par e et w . De même, les composantes v de la vitesse sont calculées et stockées aux faces *Nord* et *Sud* des cellules (n et s). Ces points sont les nœuds du maillage secondaire (traits pleins). Avec le maillage proposé, l'équation de continuité est discrétisée :

$$[(\rho u)_e - (\rho u)_w] \Delta y_P + [(\rho v)_n - (\rho v)_s] \Delta x_P = 0 \quad (3.64)$$

L'équation discrétisée de conservation de la quantité de mouvement projetée selon x s'écrit :

$$a_e u_e = \sum a_{voisin} u_{voisin} + b_u \quad (3.65)$$

sa composante selon y vaut :

$$a_e v_e = \sum a_{voisin} v_{voisin} + b_v \quad (3.66)$$

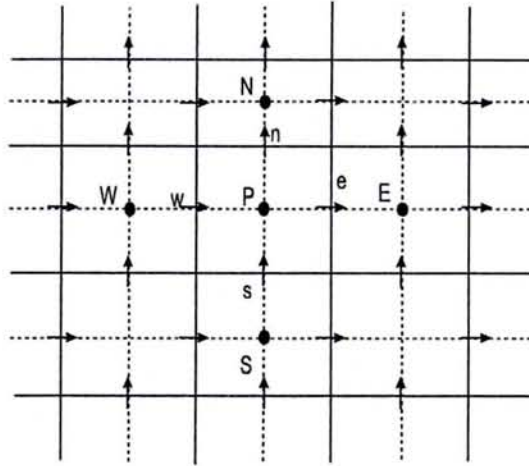


FIG. 3.4 – Représentation des maillages décalés

Les valeurs des coefficients a_e et a_n aux interfaces *Est* et *Nord* sont obtenues en utilisant la technique de correction reportée (3.43) ; on décalera le maillage d'une demi-cellule, dans les directions *Est* ou *Nord*. Les coefficients voisins a_{voisin} sont les termes a_E , a_N , a_S et a_W . Les termes sources b_u et b_v s'écrivent :

$$\begin{aligned} b_u &= S_{u,e}^+ + S_{u,e}^- + S_{u,w}^+ + S_{u,w}^- + S_{u,n}^+ + S_{u,n}^- + S_{u,s}^+ + S_{u,s}^- - (P_E - P_P)\Delta x_P \\ b_v &= S_{v,e}^+ + S_{v,e}^- + S_{v,w}^+ + S_{v,w}^- + S_{v,n}^+ + S_{v,n}^- + S_{v,s}^+ + S_{v,s}^- - (P_N - P_P)\Delta y_P - \rho g \end{aligned} \quad (3.67)$$

Les termes sources (3.67) sont calculés en utilisant la valeur des vitesses calculées à l'itération précédente selon le formalisme défini avec les relations 3.39. La quantité $(P_E - P_P)\Delta x_P$ et $(P_N - P_P)\Delta y_P$ représente les forces de pression agissant aux limites du volume de contrôle.

3.6.2 Correction pression-vitesse

La résolution des équations 3.65 et 3.66 exige la connaissance du champ de pression qui est généralement inaccessible dans la plupart des problèmes de mécanique des fluides. En effet, il n'y a aucune équation particulière permettant d'obtenir le champ de pression. Néanmoins, le problème peut être résolu en utilisant une forme modifiée de l'équation de continuité. On transforme cette dernière en une équation de correction de pression ; un processus itératif permet alors de réviser pression et vitesse durant la résolution numérique. Patankar et Spalding [71] ont proposé l'algorithme SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations) pour résoudre les équations de conservation de quantité de mouvement discrétisées. La méthodologie de l'algorithme SIMPLE a été récemment discutée par Versteeg et Malalasekera [50]. Ils détaillent le calcul du champ de vitesse pour un volume de contrôle bidimensionnel. L'algorithme SIMPLE a un taux de convergence plutôt lent étant donné le facteur de sous-relaxation qui est souvent utilisé pour éviter la divergence du calcul.

Anjorin et Barton [72] ont proposé une amélioration de cette méthode afin d'augmenter la vitesse de convergence. Ce nouvel algorithme est connu sous le nom d'algorithme de SIMPLEV. L'algorithme de SIMPLEV emploie la même méthodologie que l'algorithme SIMPLE. Toute-

fois, le processus de sous-relaxation n'est plus pris en compte dans l'équation de correction de la pression.

L'algorithme SIMPLER de Patankar [22] est une version améliorée de SIMPLE. Le champ de pression est directement obtenu sans aucune correction. Ainsi, l'équation de correction de la pression n'est utilisée que pour les vitesses [50].

Une autre forme améliorée de la méthode SIMPLE a été proposée par Van Doormal et Raithby [73]. Il s'agit de l'algorithme SIMPLER. Ce dernier adopte le même formalisme que la méthode SIMPLE. La différence entre les deux approches réside dans la prise en compte des effets dus aux cellules voisines. Un facteur correctif est introduit pour modifier les vitesses calculées.

Toujours dans le même esprit, l'algorithme PISO de R.I. Issa [74] peut être considéré comme la prolongation de SIMPLE avec une précision accrue. Cette méthode est issue d'un procédé de calcul des pressions et de la vitesse, développé à l'origine pour la simulation non itérative des écoulements compressibles instationnaires. Il a été adapté avec succès à la résolution itérative des problèmes stationnaires. Cet algorithme implique deux étapes de correction.

L'algorithme de SIMPLE est relativement simple à mettre en œuvre. Il est implanté dans de nombreux codes de calculs de mécanique des fluides. Avec cette méthode les corrections apportées aux vitesses sont satisfaisantes mais pas celles concernant la pression. Des résultats comparables sont obtenus en utilisant l'algorithme SIMPLEV. Comparativement, l'approche SIMPLER est plus performante, notamment en ce qui concerne le calcul du champ de pression. Cette technique est rigoureuse, il n'y a pas d'hypothèses simplificatrices lors de la détermination de l'équation de pression. Il en résulte une méthode numériquement plus "lourde" (on observe un accroissement de 30% de la mémoire nécessaire au calcul). Cependant, en terme de vitesse de convergence des calculs, l'algorithme SIMPLER est de 30 à 50% plus efficace que le SIMPLE selon Anderson [46] et Jang [75].

Les méthodes SIMPLER et PISO se sont avérées aussi efficaces que la technique SIMPLER pour différents types d'écoulements. En revanche, il n'est pas évident que l'on puisse catégoriquement établir qu'elles soient meilleures. Les comparaisons ont prouvé que les performances de chaque algorithme dépendent des conditions d'écoulement et du degré de couplage entre l'équation de quantité de mouvement et les équations scalaires. L'étude comparative de ces algorithmes est proposée par D.S. Jang et [75] pour des problèmes où les équations de conservation de la quantité de mouvement ne sont pas couplées aux équations scalaires. L'algorithme de PISO est robuste et la convergence des calculs nécessite moins de ressources informatiques que les approches SIMPLER et SIMPLER. Toutefois, pour les problèmes de type convection naturelle, l'algorithme PISO est équivalent aux autres méthodes. Les techniques itératives utilisant les algorithmes SIMPLER et SIMPLER ne présentent aucune difficulté de convergence pour les problèmes fortement couplés, sans que l'on puisse discriminer une approche vis-à-vis de l'autre. Étant donné que le problème que l'on souhaite modéliser est fortement couplé (convection-conduction-rayonnement), nous avons utilisé l'algorithme SIMPLER. Il présente les mêmes performances que les approches PISO et SIMPLER. De plus, il est plus simple à implémenter dans le code de calcul.

En association à ces techniques d'estimation et de correction de la pression et des vitesses,

nous avons utilisé pour nos simulations trois schémas numériques (UDS, Quick et CDS de 4^{ème} ordre) parmi les cinq méthodes discutées dans la section précédente (§ 3.4). Les schémas Quick et CDS 4^{ème} ordre sont implémentés dans notre modèle par le biais de la technique de correction reportée, afin d'éviter les instabilités numériques. Dans le paragraphe suivant, ces schémas sont testés et comparés au schéma UDS. Nous validons aussi nos résultats par rapport à ceux de la littérature utilisant d'autres techniques de résolution. Des paramètres tels que le nombre de mailles et le temps de calculs pour obtenir la bonne convergence sont analysés. Le premier cas test que nous considérons est celui de la "cavité à paroi entraînée".

3.7 Convection forcée

On étudie l'écoulement isotherme au sein d'une cavité carrée fermée dont la paroi supérieure est animée d'une vitesse horizontale constante U_P (Fig. 3.5). Pour plus de clarté et afin de permettre une comparaison rapide et aisée des résultats obtenus avec ceux de la littérature, nous utilisons la forme adimensionnelle des équations de transport. Dans notre cas test on norme les distances (x, y), les vitesses (u, v) et la pression respectivement par L, U_P et ρU_P^2 (3.60, 3.61 et 3.62) :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{\partial(VU)}{\partial Y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial X} \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial Y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial Y} \quad (3.70)$$

avec Re le nombre de Reynolds ($Re = \frac{\rho U_P L}{\mu}$) caractérisant l'écoulement. Pour les schémas d'ordre superi

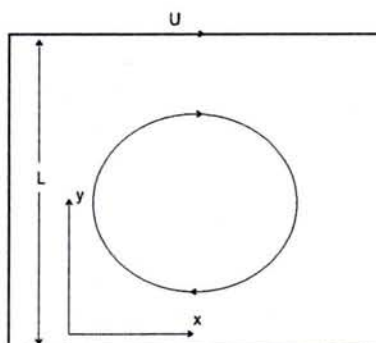


FIG. 3.5 – Cavité carrée fermée à paroi supérieure entraînée

Les trois schémas implémentés dans notre code sont comparés, pour divers nombres de Reynolds et différents maillages. La formulation des conditions aux limites utilisée dans cette étude pour les schémas d'ordre supérieur est exposée dans la publication de Hayase et al [65]. Les résultats de référence sont ceux obtenus par Ghia et al. [76] qui ont résolu les équations caractérisant l'écoulement avec un maillage cartésien de 129×129 mailles. Ces résultats ont été calculés avec la méthode des différences finies associées à la technique multigrilles. Par ailleurs, nous comparons aussi nos résultats à ceux de Hayase et al. [65] qui ont modélisé le

même problème en utilisant un schéma Quick standard et un code de type volumes finis (avec un maillage rectangulaire de 80×80). Cette étude a conduit à des résultats identiques à ceux de Ghia. Enfin, nous confrontons nos calculs à ceux de V. Feldheim [9], ces derniers étant réalisés avec un maillage non-structuré triangulaire et deux approches numériques (volumes finis et éléments finis). La comparaison des calculs menés avec ces deux codes et nos travaux montre de très faibles différences. Trois valeurs du nombre de Reynolds sont envisagées : 100, 1000 et 10000. Les comparaisons sont effectuées sur les profils des composantes horizontale U et verticale V de la vitesse le long des plans médians.

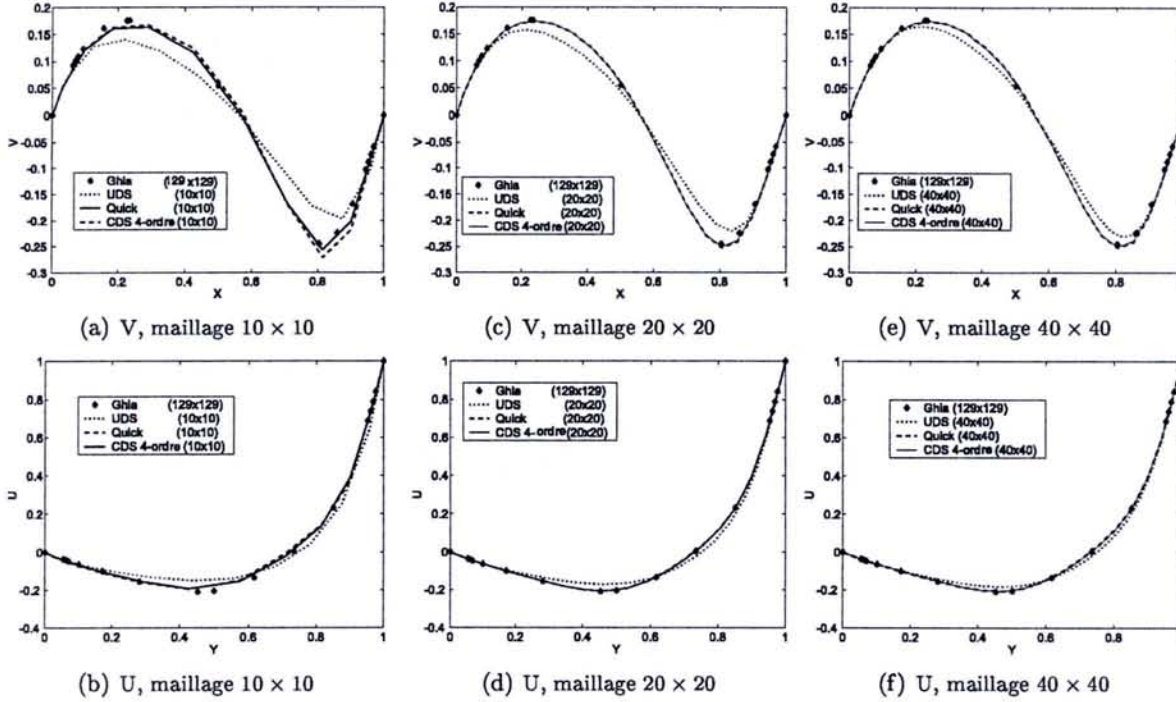


FIG. 3.6 – Profils des composantes horizontale U et verticale V de la vitesse, le long des plans médians de la cavité pour différents maillages avec $Re = 10^2$

Reynolds = 10^2

L'évolution des composantes horizontale et verticale de la vitesse obtenues par nos calculs et ceux de Ghia [76] est proposée sur la figure (3.6). Divers maillages ont été envisagés ; ils utilisent 10×10 , 20×20 et 40×40 volumes de contrôles. Nous remarquons que les schémas Quick et CDS de 4^{ème} ordre donnent les mêmes résultats et sont très proches de ceux obtenus par Ghia. Pour ces calculs le nombre de mailles n'a pas d'influence sur la concordance des résultats. En revanche, le schéma UDS est visiblement sensible au nombre de mailles. Il n'approche la solution de référence que pour un maillage suffisamment dense.

Nous n'avons pas représenté les résultats de V. Feldheim [9] et T. Hayase [65] pour ne pas encombrer les figures. Les valeurs obtenues par ces auteurs sont similaires à la solution de référence (Ghia [76]).

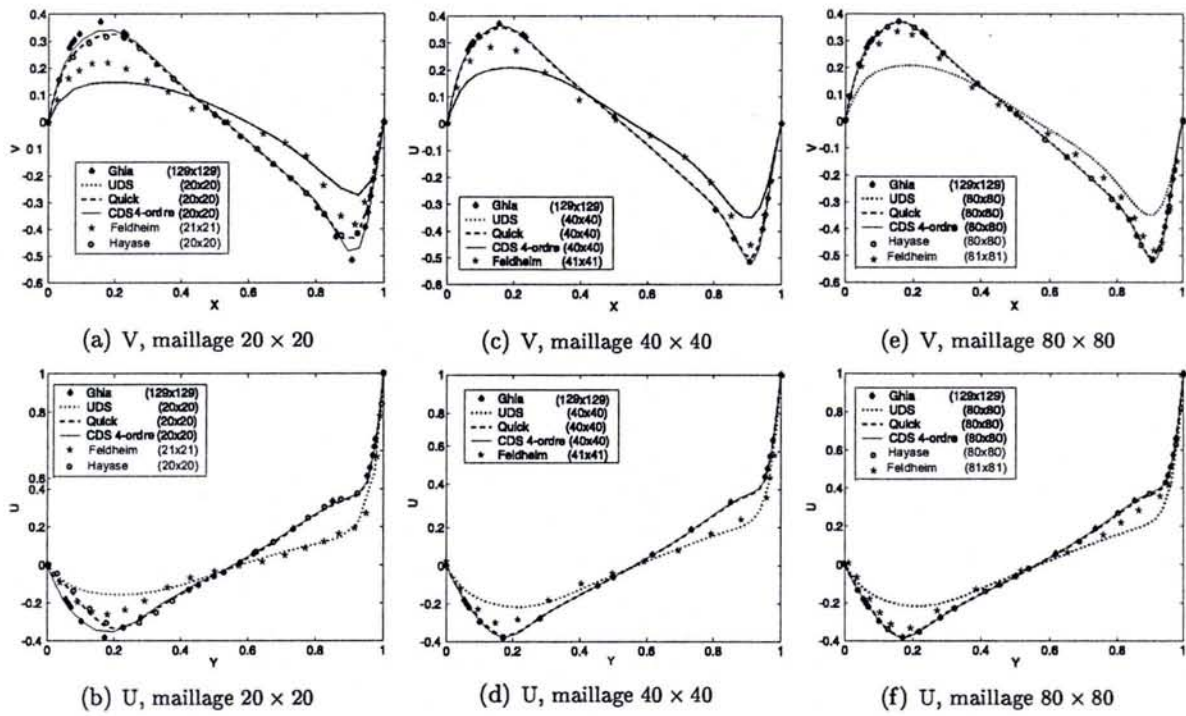


FIG. 3.7 – Profils des composantes horizontale U et verticale V de la vitesse, le long des plans médians de la cavité pour différents maillages avec $Re = 10^3$

Reynolds = 10^3

Avec la figure 3.7 nous donnons l'évolution des composantes horizontale et verticale de la vitesse pour un Reynolds plus élevé ($Re = 10^3$). Différents maillages sont étudiés. Pour un maillage 20×20 , nous constatons que les vitesses calculées par le schéma CDS de 4^{ème} ordre sont les plus proches de la solution de référence. Nous observons aussi que notre formulation du schéma Quick donne des résultats identiques à ceux de T. Hayase. Les résultats obtenus par V. Feldheim et ceux que nous avons déterminés en employant le schéma UDS laissent apparaître un écart par rapport à la solution de référence.

Les schémas CDS de 4^{ème} ordre et Quick donnent des résultats pratiquement confondus avec la solution de référence pour un maillage 40×40 . Les résultats de V. Feldheim et ceux calculés à l'aide du schéma UDS présentent toujours un écart par rapport la solution de référence (ceux obtenus par le schéma UDS étant plus éloignés). Dans cette configuration T. Hayase ne fournit pas de données.

Avec le maillage de 80×80 les résultats proposés par T. Hayase et ceux obtenus par les schémas CDS de 4^{ème} ordre et Quick sont superposés et identiques à la solution de référence. Nous remarquons que les vitesses obtenues par V. Feldheim et par notre code utilisant l'approche UDS convergent vers la solution de référence. Pour un maillage non structuré de 161×161 volumes, les calculs sont identiques à ceux de K. Ghia.

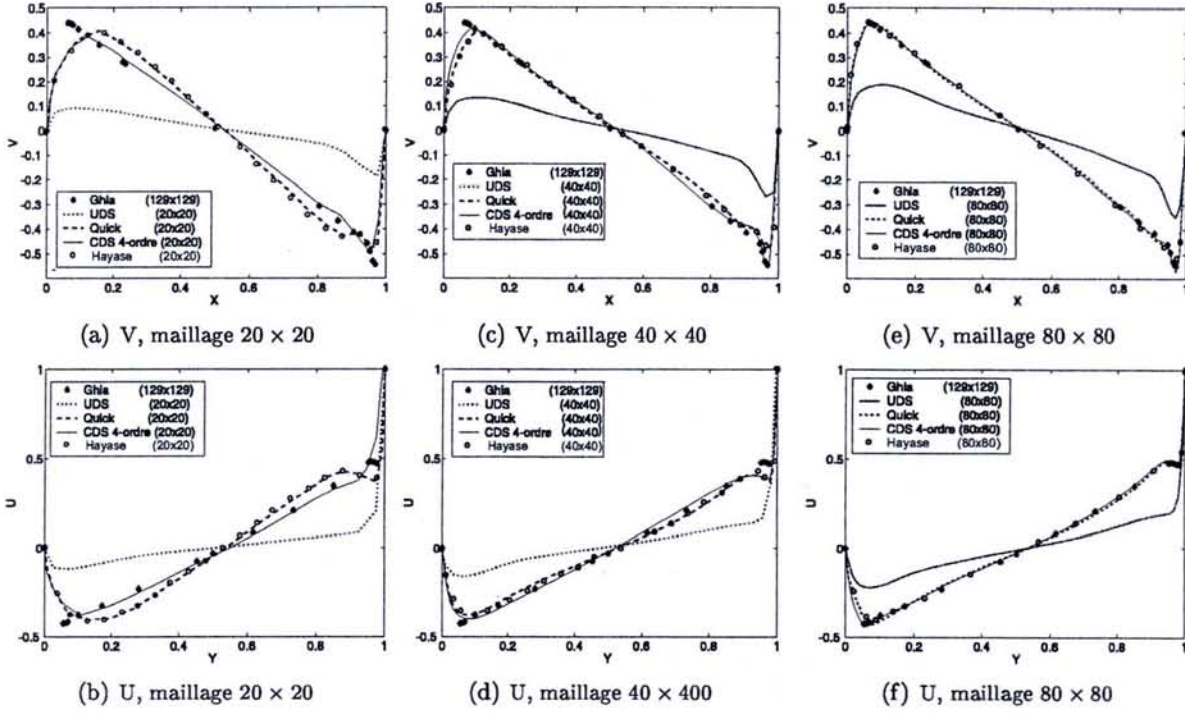


FIG. 3.8 – Profils des composantes horizontale U et verticale V de la vitesse, le long des plans médians de la cavité pour différents maillages avec ($Re = 10^4$).

Reynolds = 10^4

La dernière validation (Fig. 3.8) utilise un nombre de Reynolds élevé ($Re = 10^4$). Nous comparons toujours les vitesses calculées à la solution de référence (Ghia [76]). Seuls les travaux de T. Hayase sont pris en compte pour compléter la validation, V. Feldheim ne proposant pas de résultats pour ce Reynolds. Avec ce cas test, il apparaît clairement que le schéma UDS est inefficace, et ce même pour un maillage dense (80×80). En revanche, les résultats obtenus par les schémas CDS de 4^{ème} ordre et Quick ainsi que ceux de T. Hayase sont en très bon accord avec la solution de référence pour un maillage de 80×80 volumes.

Dans le paragraphe suivant nous évaluons quantitativement les performances de notre schéma Quick. Dans l'article de T. Hayase [65] nous trouvons ces comparaisons avec des schémas d'ordre inférieur (CDS et HDS). Nous adoptons la même démarche et comparons notre formulation du schéma Quick aux versions proposées par : M.A. Leschziner [68], T. Han [67], A. Pollard [69], C.J. Freitas [66] et T. Hayase [65]. Les comparaisons sont faites sur la base du cas test exposé ci-dessus. Nous avons employé l'algorithme SIMPLER en utilisant une initialisation nulle des vitesses et des pressions.

3.7.1 Évaluation des performances de plusieurs formulations du schéma Quick

En règle générale un schéma stable peut utiliser des facteurs de sous-relaxation proches de l'unité. En conséquence, moins d'itérations sont nécessaires pour obtenir la convergence

d'un calcul. La figure 3.9 (a) représente la variation du résidu ϵ pour les diverses versions du schéma Quick, en fonction du nombre d'itérations n_c pour un nombre de Reynolds $Re = 10^3$ avec un maillage de 20×20 volumes de contrôle. Ces courbes sont obtenues en utilisant les valeurs optimales du facteur de sous-relaxation α_{opt} (valeur entre parenthèses sur la figure) pour chaque formulation du schéma Quick. Cette comparaison montre que notre formulation a un taux de convergence supérieur à toutes les approches antérieures. En particulier, elle s'avère plus efficace quand le résidu atteint de très petites valeurs.

Nous avons aussi représenté le nombre d'itérations nécessaires n_c pour obtenir la convergence en fonction du facteur de sous-relaxation α (Fig. 3.9 (b)). Ces résultats sont obtenus dans les mêmes conditions que précédemment. Le facteur optimum de sous-relaxation, α_{opt} , est la valeur correspondant au nombre minimum d'itérations nécessaire pour assurer la convergence. Les courbes représentées établissent clairement la qualité de notre schéma qui, comme les approches de T. Hayase et M.A. Leschziner [68], est peu sensible aux variations du facteur de sous-relaxation.

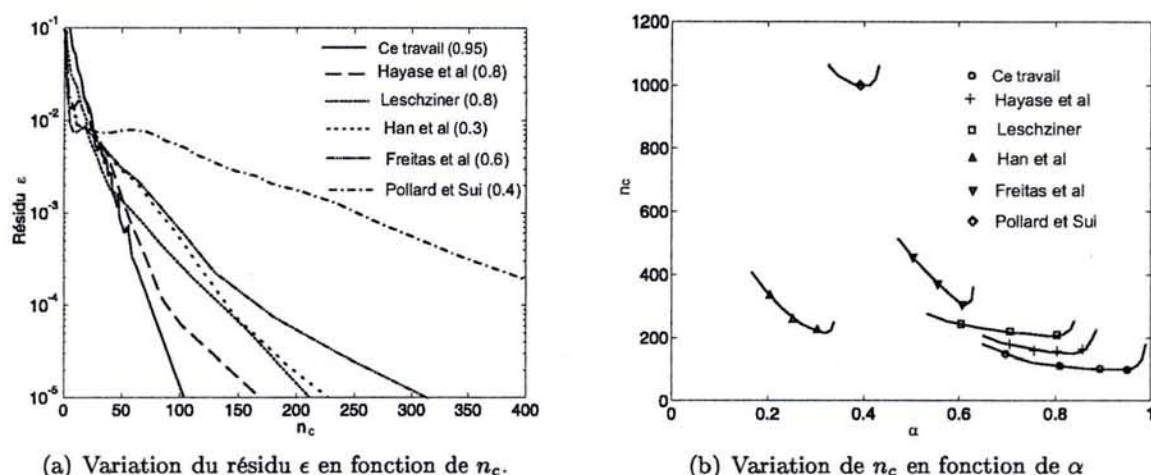


FIG. 3.9 – Performances de différentes formulations du schéma Quick avec un maillage 20×20 et $Re = 10^3$

L'évolution du facteur de sous-relaxation α_{opt} en fonction du nombre de Reynolds Re pour les diverses versions du schéma Quick est proposée sur la figure 3.10 (a). Il a été obtenu numériquement ; le calcul est réalisé sur une grille de 20×20 cellules. Pour $Re < 10^4$ notre méthode ne nécessite pas de sous-relaxation ; dans tous les autres cas un facteur de 0.9 est nécessaire. A mesure que le Reynolds de l'écoulement augmente, il est indispensable d'employer des facteurs de sous-relaxation plus faibles. Toutefois, ceux-ci évoluent peu avec notre formulation du schéma Quick. Par ailleurs, le nombre d'itérations est lui aussi réduit avec notre méthode (Fig. 3.10 (b)). Il reste inférieur à 300 pour $Re < 3000$ et n'augmente de façon significative que par la suite.

L'évolution du coefficient de sous-relaxation (α_{opt}) en fonction du nombre de mailles utilisées ($\sqrt{m}$) est donné (Fig. 3.11 (a)) pour un Reynolds intermédiaire ($Re = 10^3$). On observe que pour les différentes densités du maillage notre version du schéma Quick possède le facteur

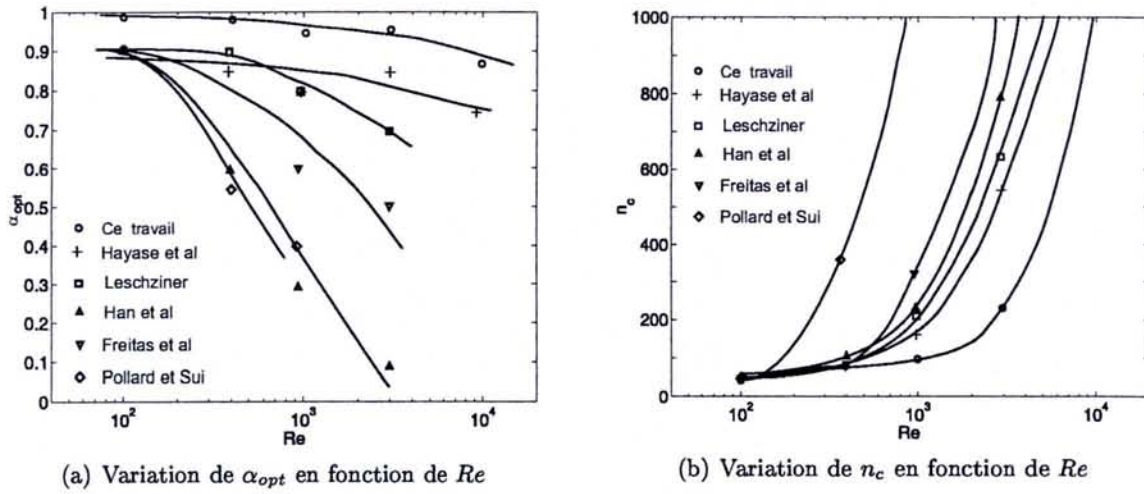


FIG. 3.10 – Effet du nombre de Reynolds sur les performances de plusieurs formulations du schéma Quick avec un maillage de 20×20

de sous-relaxation α_{opt} le plus élevé. Les valeurs du nombre d'itérations n_c correspondantes sont proposées figure 3.11 (b). Les courbes de cette figure montrent que notre formulation du schéma Quick, ainsi que celles de M.A. Leschziner et T. Hayase sont peu sensibles au nombre de mailles.

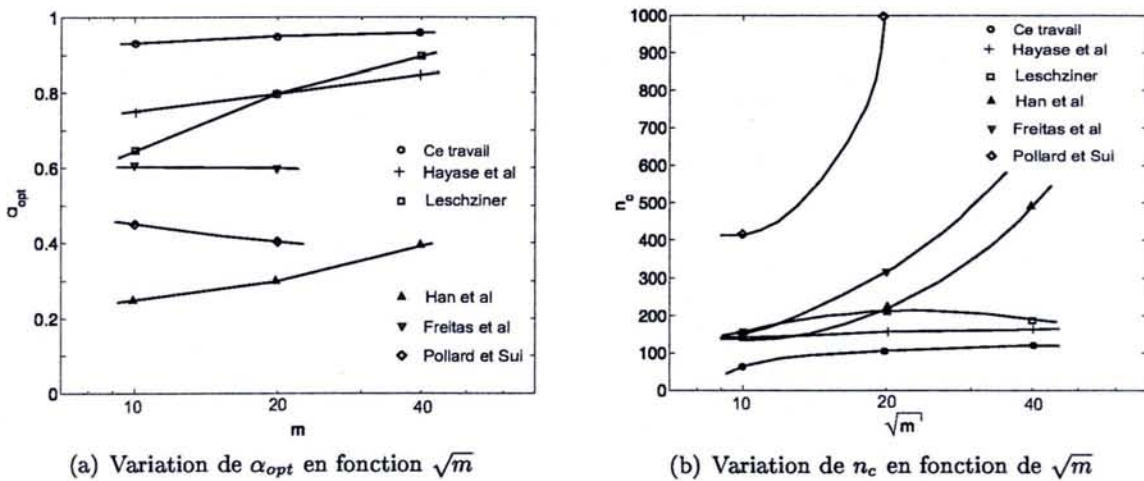


FIG. 3.11 – Effet du nombre de mailles sur les performances de différentes formulations du schéma Quick ($Re = 10^3$)

Dans le cadre de l'étude des fours verriers, il s'avère que le déplacement du verre liquide ne peut être seulement attribué au processus de convection forcée. En effet, les variations de densité du verre lors de son chauffage induisent des déplacements dus à la gravité. Le problème nous intéressant fait donc intervenir la convection naturelle. Nous allons dans le paragraphe suivant montrer dans quelle mesure les outils numériques que nous avons développés sont à

$$\frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{\partial(VU)}{\partial Y} = Pr \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial X} \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial Y} = Pr \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial Y} - Pr Ra \theta \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial(U\theta)}{\partial X} + \frac{\partial(V\theta)}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (3.76)$$

Étude	Maillage	Ψ_{max}	U_{max}	V_{max}	Nu	Nu_{max}	Nu_{min}
N. Berour	20 × 20	1.695	3.620	3.645	1.120	1.523	0.688
"	40 × 40	1.171	3.605	3.645	1.117	1.506	0.692
"	80 × 80	1.173	3.600	3.645	1.117	1.505	0.988
De Vahl Davis [77]	81 × 81	1.174	3.649	3.697	1.117	1.505	0.692
D. Wan [78]	DSC 101 × 101	—	3.643	3.686	1.073	1.444	0.665
"	FEM 101 × 101	—	3.489	3.686	1.117	1.501	0.691

TAB. 3.2 – Convection naturelle, comparaison des grandeurs de référence pour $Ra = 10^3$

Étude	Maillage	Ψ_{max}	U_{max}	V_{max}	Nu	Nu_{max}	Nu_{min}
N. Berour	20 × 20	16.98	62.62	222.80	8.800	18.040	0.982
"	40 × 40	16.79	64.35	220.94	8.815	17.941	0.982
"	80 × 80	16.73	64.56	219.79	8.820	17.927	0.988
De Vahl Davis [77]	81 × 81	16.75	64.63	219.36	8.817	17.925	0.989
D. Wan [78]	DSC 101 × 101	—	65.55	227.24	8.632	17.390	0.903
"	FEM 101 × 101	—	65.40	227.11	8.976	17.860	0.913

TAB. 3.3 – Convection naturelle, comparaison des grandeurs de référence pour $Ra = 10^6$

Étude	Maillage	Ψ_{max}	U_{max}	V_{max}	Nu	Nu_{max}	Nu_{min}
N. Berour	20 × 20	61.92	237.16	2321.19	29.70	98.16	1.961
"	40 × 40	55.90	281.784	2234.35	30.70	88.33	1.869
"	80 × 80	55.88	279.05	2239.31	30.07	87.97	1.876
D. Wan [78]	DSC 101 × 101	—	295.67	2290.13	23.67	68.73	1.41
"	FEM 101 × 101	—	296.71	2259.08	31.49	91.16	1.77

TAB. 3.4 – Convection naturelle, comparaison des grandeurs de référence pour $Ra = 10^8$

Ce problème constitue un excellent test de validation des méthodes numériques car il a fait l'objet de plusieurs publications. I.P. Jones [79] a été l'un des premiers à l'utiliser pour la validation des méthodes numériques employées en convection naturelle. Au début des années 80, ce problème a été considéré par plusieurs auteurs ; leurs résultats sont récapitulés dans l'article de revue proposé par D. de Vahl Davis et I.P. Jones [77]. Par ailleurs, de Vahl Davis [80] a résolu les équations de Navier-Stokes par la méthode des différences finies. Les solutions numériques sont obtenues en se basant sur une extrapolation de Richardson des valeurs calculées sur des maillages de plus en plus fins. Ces travaux sont d'une grande qualité

Chapitre 3. Méthode des Volumes Finis pour le transfert par convection et rayonnement

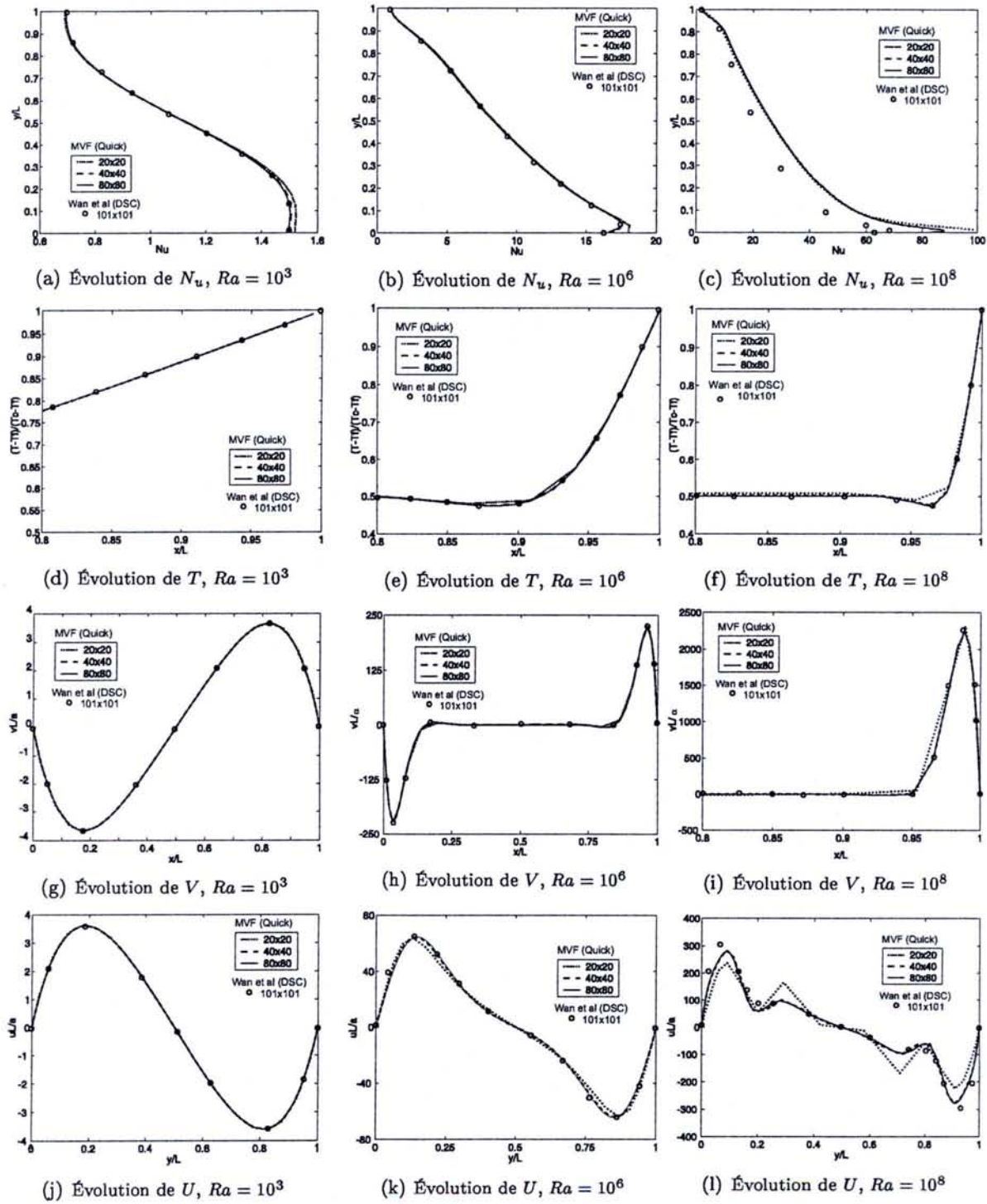


FIG. 3.13 – Influence du maillage sur le Nusselt, la température et les vitesses

et constituent un "benchmark" reconnue pour les problèmes de convection naturelle en cavité différentiellement chauffée. Toutefois, ils sont limités à des nombres de Rayleigh inférieurs à : $Ra = 10^6$. Une grande variété d'algorithmes a été testée avec ce problème et un résumé

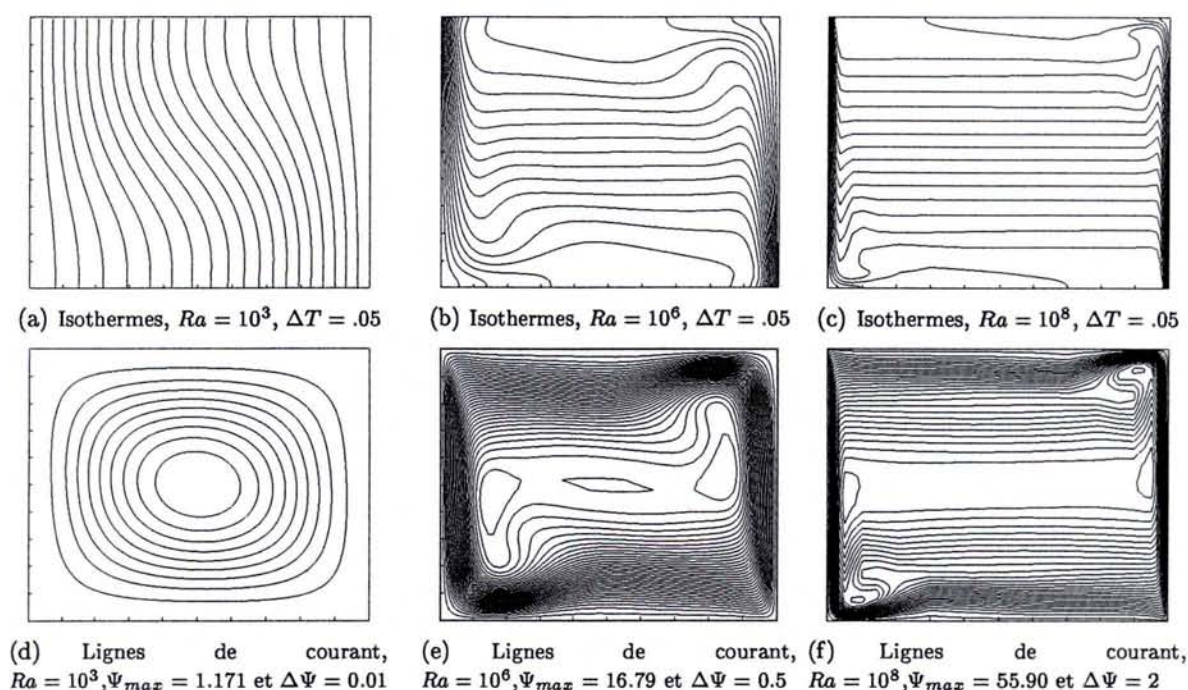


FIG. 3.14 – Isothermes et lignes de courant dans la cavité différentiellement chauffée (40 × 40 cellules)

(chronologique) des publications associées est proposé par Wan et al [78]. Ces auteurs ont obtenu leurs résultats à l'aide de deux méthodes : la méthode des éléments finis (MEF) et la méthode *DSC* (Discrete Singular Convolution).

Nos résultats sont obtenus pour un fluide de référence ayant un nombre de Prandtl $Pr = 0,71$. Le nombre de Rayleigh varie de 10^3 à 10^8 . Les solutions numériques obtenues sont comparées à celles de D. de Vahl Davis [77] et D. Wan [78]. Nous présentons résultats et comparaisons dans trois tableaux (Tab. 3.2, 3.3 et 3.4) correspondant aux différents nombres de Rayleigh ($Ra = 10^3$, $Ra = 10^6$ et $Ra = 10^8$) et à plusieurs maillages. Les valeurs maximales de la fonction de courant et des composantes horizontale et verticale de la vitesse constituent les éléments d'évaluation. Nous avons également calculé le nombre de Nusselt moyen ($\overline{Nu}$) le long de la paroi chaude, ainsi que ses valeurs extrêmes. Toutes les comparaisons ne sont pas toujours possibles. Wan et al [78] ne donnent pas les valeurs extrêmes de la fonction de courant et De Vahl Davis présente des résultats uniquement pour un nombre de Rayleigh inférieur à 10^6 .

L'analyse des trois tableaux montre que nos résultats sont peu sensibles au maillage utilisé. Un maillage 40×40 volumes de contrôle est suffisant pour retrouver les grandeurs de référence, quel que soit le nombre de Rayleigh. Le meilleur accord est obtenu pour $Ra = 10^3$. Quand la valeur du nombre Rayleigh augmente ($Ra = 10^6$ et $Ra = 10^8$) nos calculs sont plus proches de ceux de De Vahl Davis. Il y a toujours un faible écart avec les valeurs déterminées par D. Wan.

Les figures 3.13 donnent l'évolution : du nombre de Nusselt le long de la paroi chaude,

de la température le long du plan médian horizontal et des deux composantes de la vitesse U et V dans les plans médians. Ces données sont présentées pour trois nombres de Rayleigh ($Ra = 10^3$, $Ra = 10^6$ et $Ra = 10^8$) et trois maillages (20×20 , 40×40 et 80×80 cellules). Nos résultats sont comparés à ceux proposés par D. Wan (obtenus avec la méthode DSC). L'analyse de ces figures souligne le fait que nos calculs sont très proches des résultats de référence. Pour le maillage de 20×20 volumes de contrôles, des écarts sont observables, notamment dans le calcul des vitesses. Cependant, dès que le maillage est densifié (40×40 cellules), ces fluctuations disparaissent.

Les champs de températures et les lignes de courant sont présentés (Fig. 3.14). Quand le nombre de Rayleigh croît, nous observons une stratification des champs de températures. Nous remarquons aussi une augmentation de la vitesse de recirculation dans la cavité (les lignes de courant sont de plus en plus proches quand Ra grandit). Pour $Ra = 10^3$ il n'y a qu'une seule boucle de recirculation, au centre du domaine. Lorsque le nombre de Rayleigh augmente, on constate l'apparition de boucles secondaires. Pour $Ra = 10^6$ ces zones d'écoulement secondaires sont proches des parois verticales. Pour $Ra = 10^8$, à ces deux zones s'ajoutent deux autres zones de recirculation (en haut de la paroi chaude et en bas de la paroi froide).

3.9 Convection thermocapillaire (effet MARANGONI)

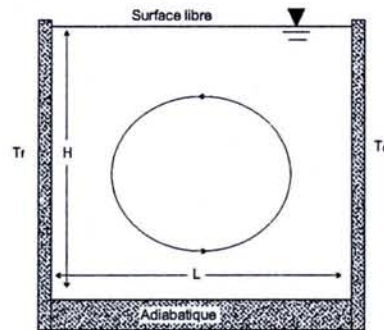


FIG. 3.15 – Convection thermocapillaire dans une cavité différentiellement chauffée

Les problèmes décrivant le mouvement des fluides et le transfert de masse, générés ou altérés par les forces de volume (convection naturelle) ou de surface (convection thermocapillaire) n'ont cessé de susciter un grand intérêt vu l'importance de ces phénomènes dans un grand nombre de domaines scientifiques et technologiques (élaboration de matériaux, énergie solaire, refroidissement du cœur de centrale nucléaire, ...). Dans le cas des fours verriers, les variations de température le long de l'interface entre les deux fluides (gaz et verre fondu) induisent des variations de la tension de surface (σ). Sous l'effet d'un gradient thermique, on l'exprime comme suit :

$$\sigma(T) = \sigma_0 - \gamma(T - T_0) \quad (3.77)$$

Le gradient de température (parallèle à l'interface) fait apparaître une contrainte tangentielle sur celle-ci. Dans la direction x , le gradient de tension de superficielle est égal à :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.78)$$

A la surface libre, cette contrainte est équilibrée par la contrainte visqueuse correspondante :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.79)$$

On suppose que la tension superficielle ne varie, de façon significative, qu'en fonction de la température. On peut alors établir une nouvelle condition aux limites thermiques :

$$-\gamma \frac{\partial T}{\partial x} = \mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.80)$$

La non-homogénéité du champ thermique, à la surface libre du liquide, génère un mouvement qui est transmis en volume du fait de la viscosité. Ce type de convection est appelé convection thermocapillaire ou effet Marangoni.

$Re \times 10^3$	Nu_-	$Nu_- [81]$	Nu_+	$Nu_+ [81]$	Ψ_{max}	$\Psi_{max} [81]$
1	1.92	1.92	1.92	1.93	480	479
2	2.47	2.47	2.47	2.47	426	424
3	2.84	2.85	2.85	2.85	405	404
4	3.15	3.16	3.16	3.17	386	384
5	3.40	3.42	3.43	3.41	375	373
6	2.61	2.63	2.64	2.65	355	350
7	3.80	3.83	3.84	3.50	340	337
6	4.00	4.01	4.02	4.03	330	326
9	4.16	4.17	4.19	4.19	320	315
10	4.34	4.32	4.40	4.34	320	305

TAB. 3.5 – Convection thermocapillaire, comparaison des grandeurs de référence [81], maillage : 62×54

Le modèle physique considéré est composé d'une cavité rectangulaire de hauteur H et de largeur L contenant un fluide newtonien incompressible. La frontière supérieure est à surface libre et le fluide est en contact avec un gaz passif (interface adiabatique). Les murs verticaux sont isothermes à une température T_f et T_c . La frontière inférieure est adiabatique. En l'absence de la convection naturelle ($\rho = \rho_0 = \text{cste}$ et $\beta = 0$) les équations adimensionnelles du problème sont :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (3.81)$$

$$Re \frac{\partial(UU)}{\partial X} + Re \frac{\partial(VU)}{\partial Y} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial X} \quad (3.82)$$

$$Re \frac{\partial(UV)}{\partial X} + Re \frac{\partial(VV)}{\partial Y} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial Y} \quad (3.83)$$

$$Ma \frac{\partial(U\theta)}{\partial X} + Ma \frac{\partial(V\theta)}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (3.84)$$

La longueur, la vitesse, la température et la pression sont réduites par les variables H , $\gamma T_0/\mu$, T_0 et $\gamma T_0/\mu$, respectivement. On suppose que la tension superficielle diminue avec l'augmentation de la température à un taux constant γ . Habituellement, on redéfinit le nombre

de Reynolds et le nombre de Marangoni (produit de Re et Pr) de la manière suivante :

$$Re = \frac{H\gamma T_0}{(\mu\nu)} \quad (3.85)$$

$$Ma = RePr \quad (3.86)$$

Nous avons comparé les résultats obtenus par la MVF en utilisant le schéma Quick avec ceux de Zebib et al [81] qui ont utilisé la méthode des différences finies. Leur étude numérique a été validée par une analyse asymptotique en fonction des nombres de Reynolds et de Prandtl. Nous présentons (Tab. 3.5) les valeurs du nombre de Nusselt moyenné aux parois chaude ($\overline{Nu}_+$) et froide ($\overline{Nu}_-$), ainsi que le maximum de la fonction de courant dans le milieu, pour un nombre de Prandtl $Pr = 1$ et un nombre de Reynolds tel que $10^3 \leq Re \leq 10^4$. Par ailleurs, nous avons comparé les profils de vitesse et les niveaux de température du fluide à la surface libre (Fig. 3.16) pour trois valeurs du nombre de Prandtl ($Pr = 0.01$, $Pr = 1$ et $Pr = 50$) avec le Reynolds évoluant de 20 à 10^4 . La confrontation avec les résultats de A. Zebib atteste la très bonne concordance des deux études.

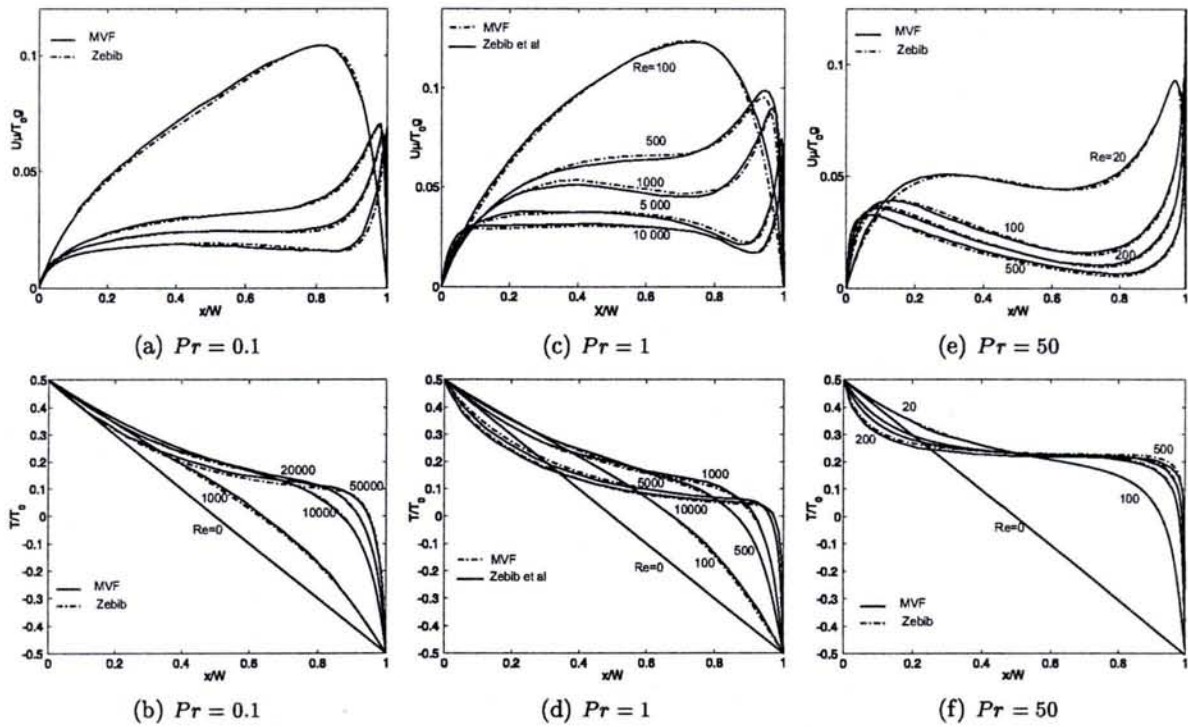
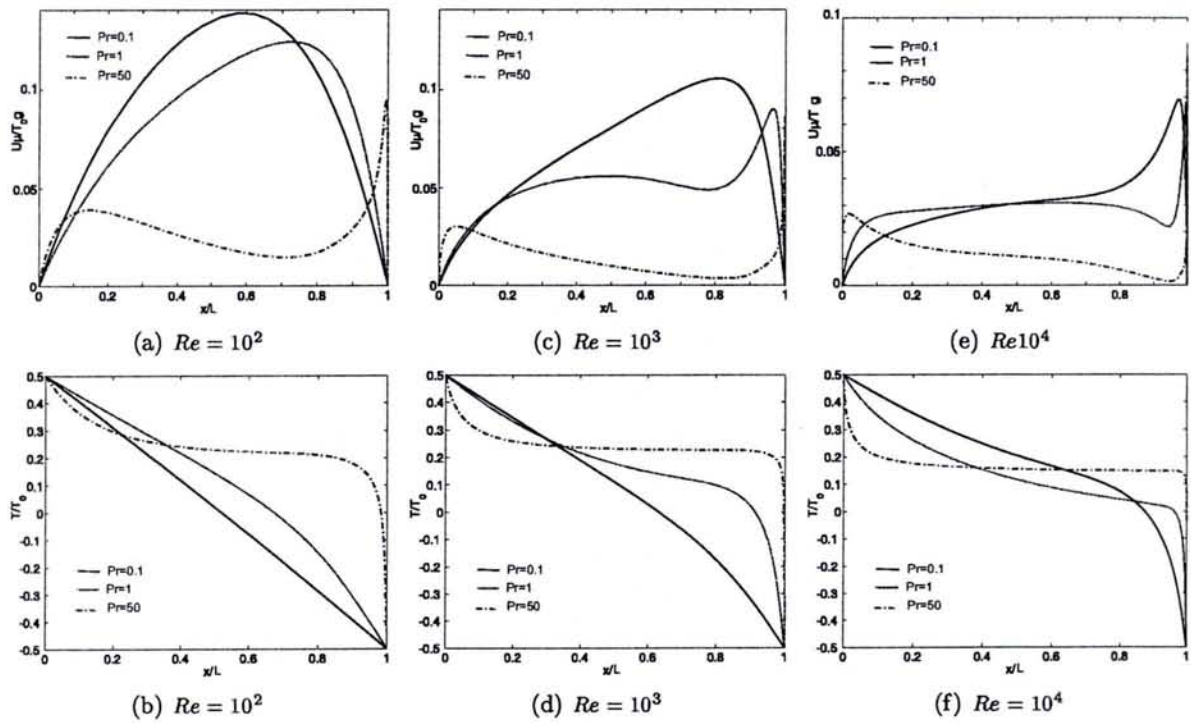
Si le fluide est tel que le Prandtl est proche de l'unité nous avons $Re \approx Ma$. Dans ce cas une grande valeur de Re favorise fortement le transfert de chaleur par convection au détriment du transfert par diffusion. En revanche, pour $Pr \ll 1$, même pour des valeurs de Re élevées, le nombre de Marangoni (associé au transport de la chaleur) restera faible. Il en résulte un faible gradient thermique dans les systèmes considérés. Afin de mettre ce phénomène en évidence nous avons représenté les profils de vitesse, et la température du fluide à la surface libre (Fig. 3.17 et 3.16) pour trois valeurs du Reynolds ($Re = 10^2$, $Re = 10^3$ et $Re = 10^4$) et du Prandtl ($Pr = 0.1$, $Pr = 1$ et $Pr = 50$).

Pour une valeur fixe du nombre de Reynolds, la vitesse du fluide au voisinage de la surface libre a son maximum qui se déplace vers la paroi froide de la cavité quand le Marangoni augmente. Le déplacement du fluide s'illustre notamment par un saut de température très marqué au niveau de la surface libre. Ce phénomène est amplifié pour les grands Reynolds. En revanche, pour les petites valeurs de Ma , la circulation du fluide est centrale au sein de la cavité et la température de la surface libre évolue linéairement entre les parois chaude et froide.

Un aperçu plus global du mouvement du fluide et du champ de températures qui lui est associé complète ces premières observations. Il est représenté sur les figures 3.19 à 3.21.

3.10 Couplage convection naturelle-rayonnement

L'étude des transferts de chaleur couplés (par conduction, convection et rayonnement) dans les milieux semi-transparentes suscite une attention croissante. Cependant, la solution analytique de ce type de problème est dans la plupart des cas impossible à obtenir. En conséquence les méthodes numériques sont régulièrement employées pour résoudre de tels problèmes en thermique. Les recherches théoriques publiées de Goody [82] et Spiegel [83] font partie des travaux fondateurs concernant ce domaine. Le couplage entre la convection et le rayonnement d'un gaz confiné entre deux parois horizontales y est abordé. Les auteurs analysent en particulier les phénomènes de stabilité. L'étude de Spiegel montre que le rayonnement a un effet


FIG. 3.16 – Influence du Re sur U et T à la surface libre (Pr imposé)

FIG. 3.17 – Influence du Pr sur T à la surface libre (Re imposé)

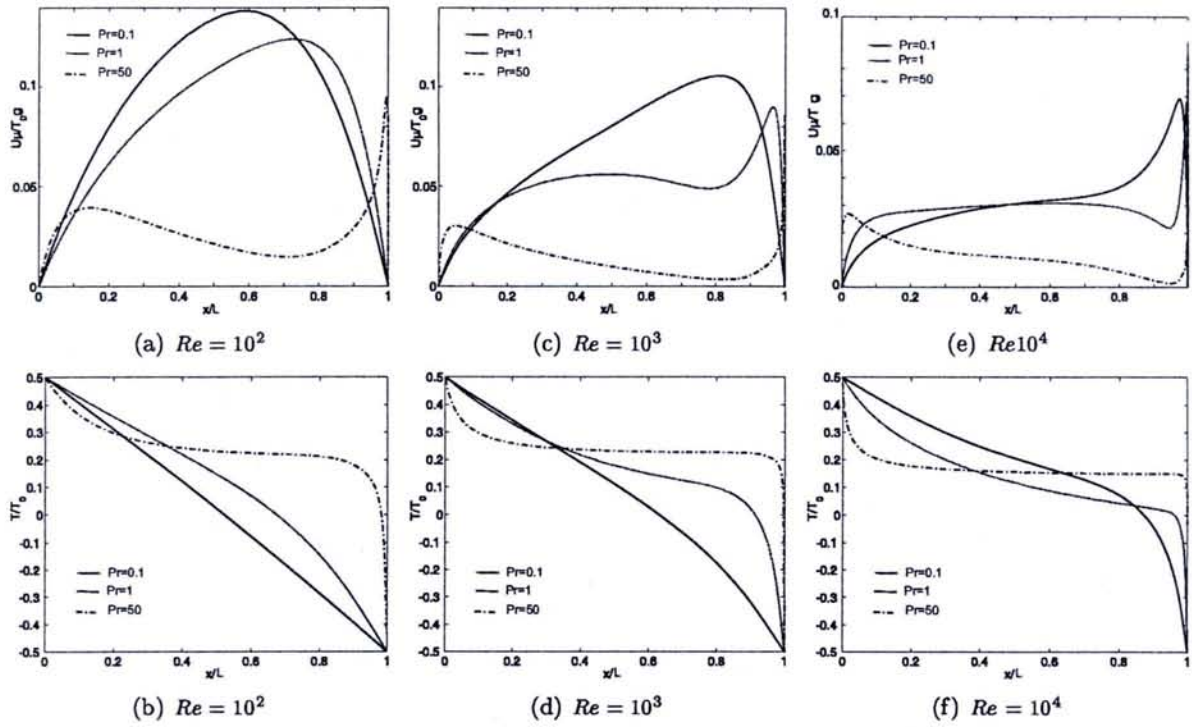


FIG. 3.18 – Influence de Pr sur T à la surface libre (Re imposé)

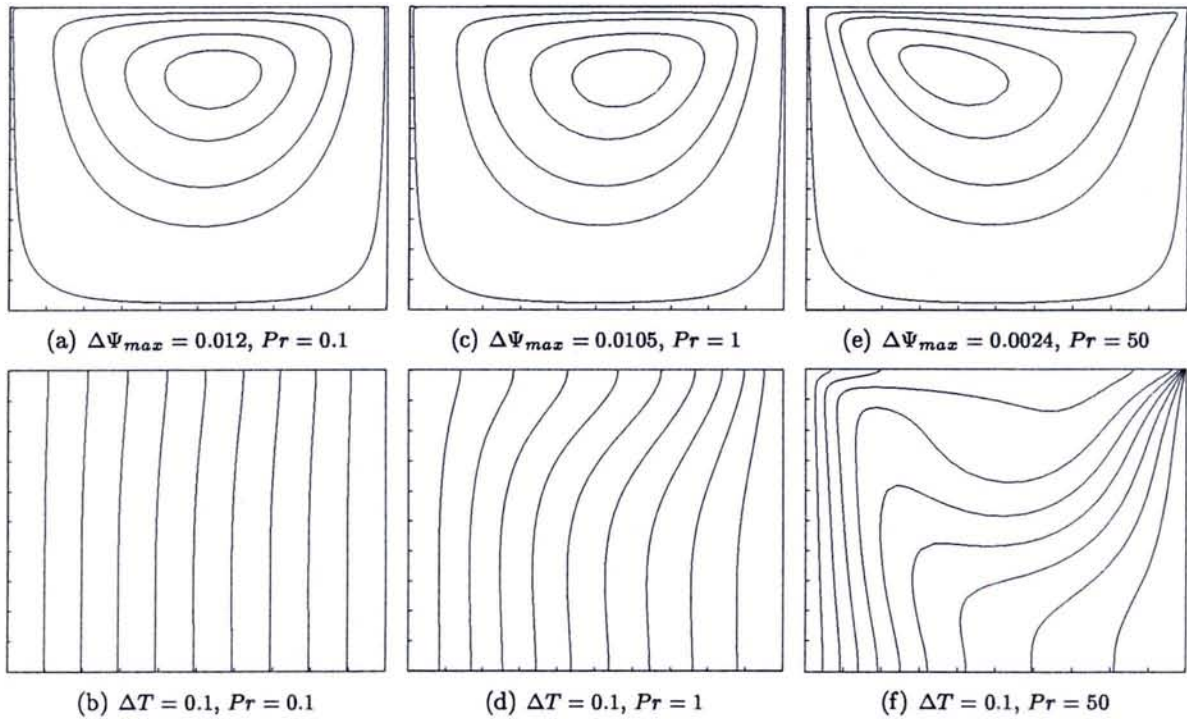


FIG. 3.19 – Influence du nombre de Prandlt Pr sur les lignes de courant et les isothermes pour $Re = 10^2$

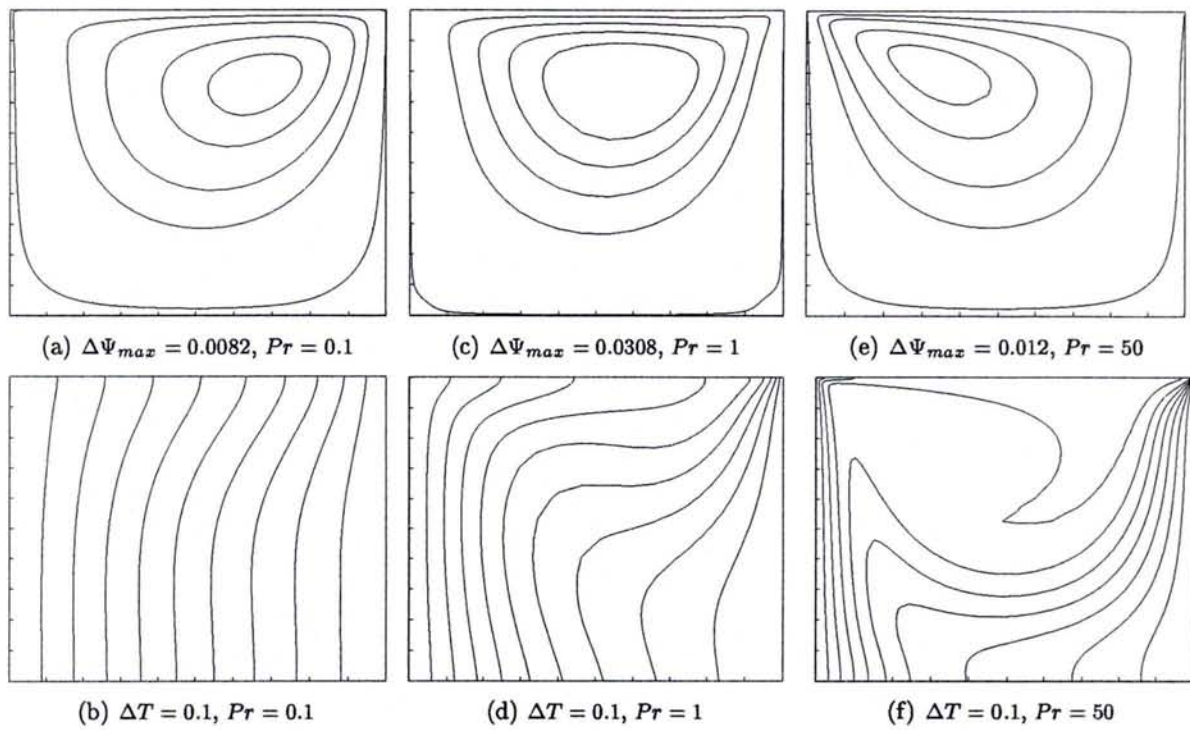


FIG. 3.20 – Influence du nombre de Prandlt Pr sur les lignes de courants et les isothermes pour $Re = 10^3$

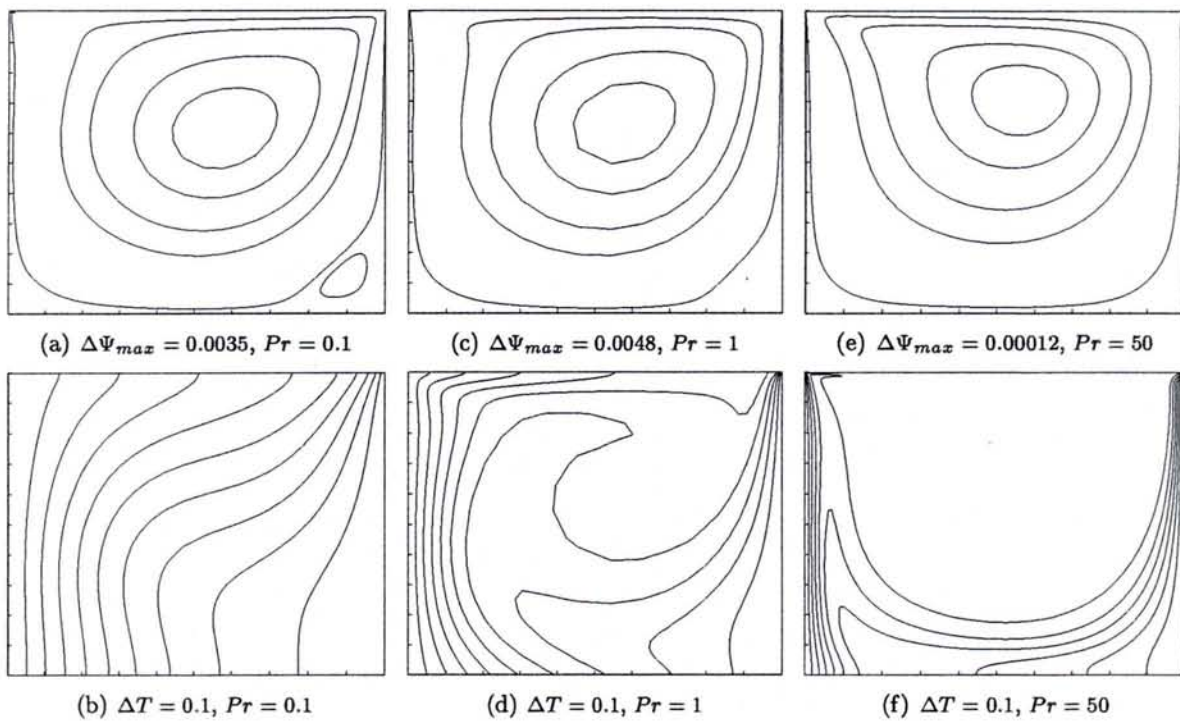


FIG. 3.21 – Influence du nombre de Prandlt Pr sur les lignes de courant et les isothermes pour $Re = 10^4$

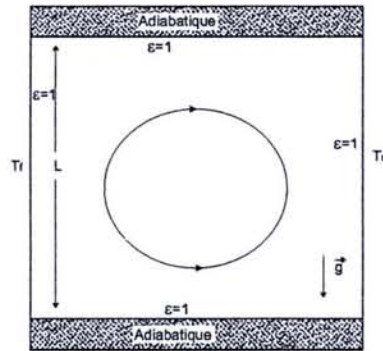


FIG. 3.22 – Convection et rayonnement dans une cavité carrée différentiellement chauffée

stabilisateur qui dépend fortement, pour un nombre de Rayleigh donné, de l'épaisseur optique du gaz. Ces résultats ont été confirmés par Lauriat [84] qui a utilisé l'approximation P1 pour l'étude des transferts couplés dans des cavités à fort allongement vertical.

A. Soufiani et J. Taine [85] ont montré que l'utilisation des modèles à bandes spectrales larges dans les calculs de transferts couplés, conduit fréquemment à des erreurs importantes. Ils ont ainsi développé un modèle statistique à bandes étroites. Ce dernier a été favorablement validé par des mesures expérimentales [86].

L'étude d'une cavité carrée a été traitée par Chang et al [87] avec la méthode des flux radiaux associée à un modèle exponentiel à bande large pour évaluer l'absorption et l'émission du rayonnement par le gaz carbonique (CO_2) ou l'ammoniaque (NH_3). Il a notamment montré que le rayonnement tend à rendre la température du gaz uniforme dans toute la cavité. T. Fusegi [88] a repris cette étude avec des propriétés thermodynamiques des gaz évoluant avec la température.

L'interaction du rayonnement et de la convection naturelle en régime turbulent dans une cavité carrée a été abordée par Fusegi et Bakhtier [89]. Ils ont résolu le problème radiatif avec l'approximation P1.

L'effet du nombre de Rayleigh dans ces cavités carrées a été étudié par Draoui et al [90]. Par ailleurs, ils ont aussi traité différents cas de conditions aux limites pour les parois horizontales (parois adiabatiques, conductrices, noires ou réfléchissantes) [91] dans le cas d'épaisseur optique égale à 1. Akiyama et Chong [92] ont utilisé la méthode des radiosités pour étudier l'effet de l'émissivité des parois sur un fluide parfaitement transparent. Mahapatra et al [93] ont utilisé la MEF pour étudier le transfert couplé entre deux parois verticales pour un fluide transparent.

Pour valider notre approche numérique du couplage de la convection naturelle avec le rayonnement, nous nous référons aux travaux de A. Yucel [94]. Il a traité cette interaction dans une cavité carrée, à parois noires, en utilisant la MOD et l'approximation P1. L'influence de l'épaisseur optique ($\tau = 0.2, 1.0$ et 5.0) sur le champ de températures ainsi que sur l'écoulement du fluide pour un nombre de Rayleigh fixe ($Ra = 5 \times 10^6$) est étudiée. Une comparaison des résultats obtenus par la MOD et de ceux calculés à l'aide de l'approximation P1 est aussi discutée. L'auteur montre que l'erreur commise avec l'approximation P1 varie de 10% à 30%.

En résumé, deux points font que cette étude constitue un bon cas test. En premier lieu le milieu est semi-transparent ; d'autre part cette étude a fait l'objet de nombreuses validations.

Ce cas test est représenté figure 3.22. Les parois horizontales de la cavité sont adiabatiques. La paroi verticale gauche est froide (T_f) la droite est chaude (T_c). Les quatre parois possèdent la même émissivité ($\epsilon = 1$). Le fluide contenu est semi-transparent gris et de coefficient d'absorption κ .

Les équations à considérer sont rappelées ci-dessous. Elles sont écrites sous forme adimensionnée :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{\partial(VU)}{\partial Y} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial X} \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{\partial(VV)}{\partial Y} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) - \frac{\partial P}{\partial Y} - \frac{Ra}{Pr} \theta \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial(U\theta)}{\partial X} + \frac{\partial(V\theta)}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \vec{\nabla}^2 \theta - \frac{\theta_0}{Pr Pl} \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_r^* \quad (3.90)$$

Toutes les propriétés physiques sont supposées indépendantes de la température, sauf la masse volumique pour laquelle l'hypothèse de Boussinesq est retenue. Le terme $\vec{\nabla} \cdot \vec{q}_r^*$ dans l'équation d'énergie est le terme source radiatif donné par la résolution de l'ETR. Pour un milieu gris non diffusant d'indice de réfraction égal à l'unité, cette équation s'écrit dans sa forme adimensionnelle, pour une direction de propagation donnée :

$$\frac{\partial I}{\partial S} = -\tau I + \tau \left(\frac{\theta}{\theta_0} + 1 \right)^4 \quad (3.91)$$

avec $I = \frac{L}{4\sigma_B T_0^4}$ la luminance adimensionnée et $\tau = \kappa L$ l'épaisseur optique.

Dans l'équation de l'énergie, le nombre de Planck Pl est choisi comme grandeur de référence. Le nombre de Stark Ns (déjà abordé dans le chapitre 1) est le paramètre caractérisant l'interaction conduction-rayonnement. Ces deux nombres sans dimension sont liés par l'épaisseur optique.

$$Ns = \frac{k_c \kappa}{4\sigma_B T_0^3} = \frac{k_c / L}{4\sigma_B T_0^3} \kappa L = Pl \cdot \tau \quad (3.92)$$

Les différentes grandeurs réduites utilisées dans les équations de transport (3.87 à 3.90) sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{x}{L} \quad Y = \frac{y}{L} \quad S = \frac{s}{L} \\ U = \frac{uL}{\nu} \quad V = \frac{vL}{\nu} \\ P = \frac{(p + \rho_0 g y) L^2}{\rho \alpha^2} \\ \theta = \frac{T - T_f}{T_c - T_f} \\ q_r^* = \frac{q_r}{4\sigma T_0^4} \end{array} \right. \quad (3.93)$$

3.10.1 Conditions aux limites

L'hypothèse d'adhérence à la paroi est retenue pour la condition dynamique. Dans le cas d'une paroi adiabatique pour les transferts couplés rayonnement-convection naturelle, la condition aux limites thermiques est déterminée grâce au bilan d'énergie qui inclut les termes conductif et radiatif. Nous l'exprimons à l'aide du nombre de Planck.

$$\vec{q}_T^* \cdot \vec{n} = \left(-\vec{\nabla}\theta + \frac{\theta_0}{Pl} \vec{q}_r^* \right) \cdot \vec{n} = 0 \quad (3.94)$$

La condition aux limites radiatives pour une surface noire est simplement la luminance du corps noir émise à la température de surface.

τ	maillage	schéma : $\overline{Nu_T}$	T. linéarisée $\overline{Nu_R}$	schéma : $\overline{Nu_T}$	Diamant $\overline{Nu_R}$	schéma : $\overline{Nu_T}$	STEP $\overline{Nu_R}$	approx. : $\overline{Nu_T}$	P1 $\overline{Nu_R}$
0.00	30 × 30	13.71	0.00	13.83	0.00	—	—	—	—
	50 × 50	13.70	0.00	13.76	0.00	—	—	—	—
0.20	30 × 30	44.52	35.81	46.45	37.67	46.65	37.87	60.31	51.44
	50 × 50	44.50	35.79	46.11	37.40	46.39	37.69	60.31	51.44
1.00	30 × 30	38.53	30.92	39.09	31.36	39.55	31.81	44.67	36.82
	50 × 50	38.50	30.90	38.83	31.28	39.24	31.58	44.55	36.75
5.00	30 × 30	30.32	22.65	31.93	23.77	32.38	24.26	34.27	25.84
	50 × 50	30.27	22.63	32.76	23.64	32.06	23.96	34.20	25.75

TAB. 3.6 – Comparaison de nos résultats avec ceux de Yucel et al [94]

3.10.2 Confrontation des résultats

A. Yucel résout les équations de conservation par la MDF en utilisant l'algorithme SIMPLER. Il emploie l'approximation P1 et la MOD associées aux schémas Diamant et STEP pour le problème radiatif. Nos résultats sont obtenus en résolvant le problème par la MVF. Nous avons utilisé le schéma Quick associé à l'algorithme SIMPLER pour la dynamique et la thermique et le schéma Exponentiel Modifié à Température Linéarisée pour le problème radiatif.

Le tableau 3.6 décrit les résultats obtenus pour deux maillages (32 × 32 et 50 × 50). Nous comparons les nombres de Nusselt moyen total $\overline{Nu_T} = \overline{q}_T^*$ et radiatif $\overline{Nu_R} = \overline{q}_r^* \theta_0 / Pl$ le long de la paroi chaude en fonction de l'épaisseur optique du milieu. Nous observons une faible variation des résultats quand la densité du maillage augmente. Il y a également une bonne concordance de nos résultats avec ceux de l'auteur qui, on le rappelle, utilise la MOD. De plus, ces travaux montrent clairement l'inefficacité de l'approximation P1, spécialement aux faibles épaisseurs optiques.

Les figures 3.23 présentent l'évolution des composantes horizontale et verticale de la vitesse le long des plans médians de la cavité, pour différentes valeurs de l'épaisseur optique du milieu. Nous retrouvons des évolutions assez proches de ce que l'on obtenait en l'absence de rayonnement (d'un point de vue qualitatif) pour les faibles épaisseurs optiques. Néanmoins, le couplage fait que le fluide circule plus rapidement aux voisinage des limites. Quand τ croît, il y a un décalage marqué au sein de la cavité ; dans la partie centrale le fluide se met en

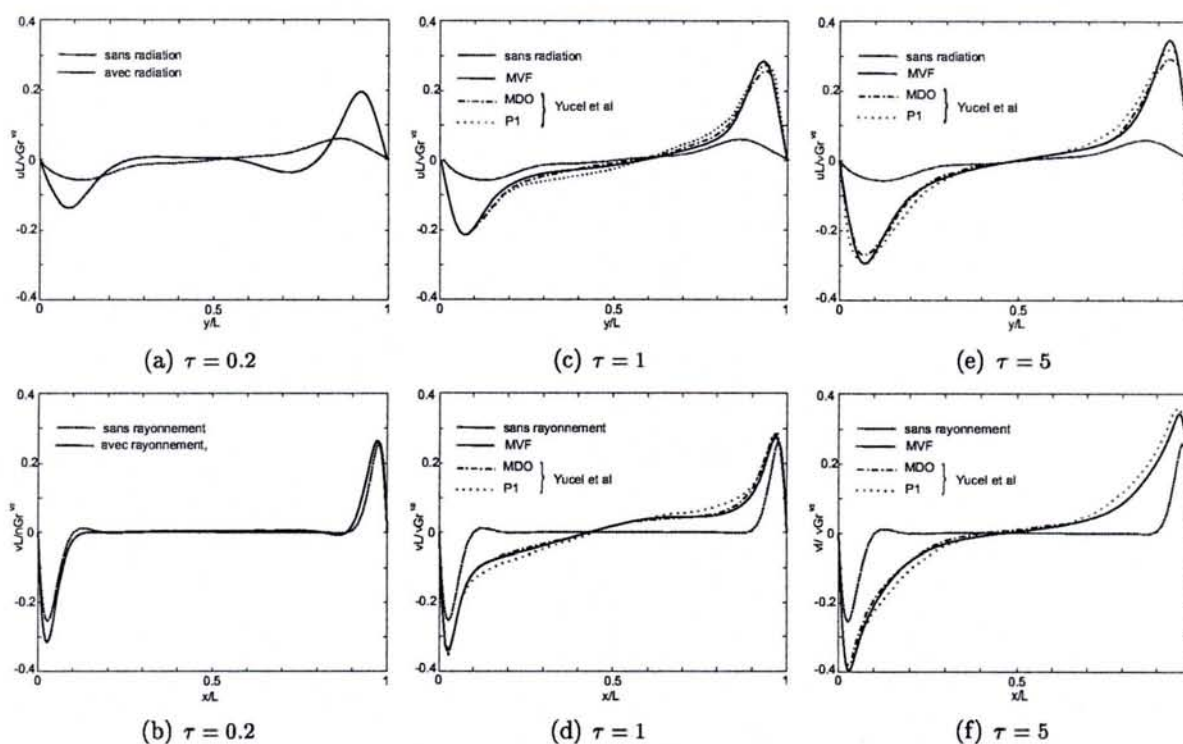


FIG. 3.23 – Influence de l'épaisseur optique sur le profil des vitesses horizontale u et verticale v le long des médianes ($Ra = 5 \times 10^6$ et $Pl = 0.02$)

mouvement. Ce phénomène est clairement illustré sur les figures 3.24 qui présentent l'évolution du champ de températures et de la fonction de courant. En plus de la très bonne concordance entre les calculs, il y a apparition de recirculations autour du centre de la cavité pour les fortes épaisseurs optiques. On note ici que le couplage avec le rayonnement modifie de façon notable les échanges thermiques dès que τ devient important.

Cet aspect va être exposé dans le chapitre suivant ; nous allons y aborder la modélisation complète du chauffage du bain de verre.

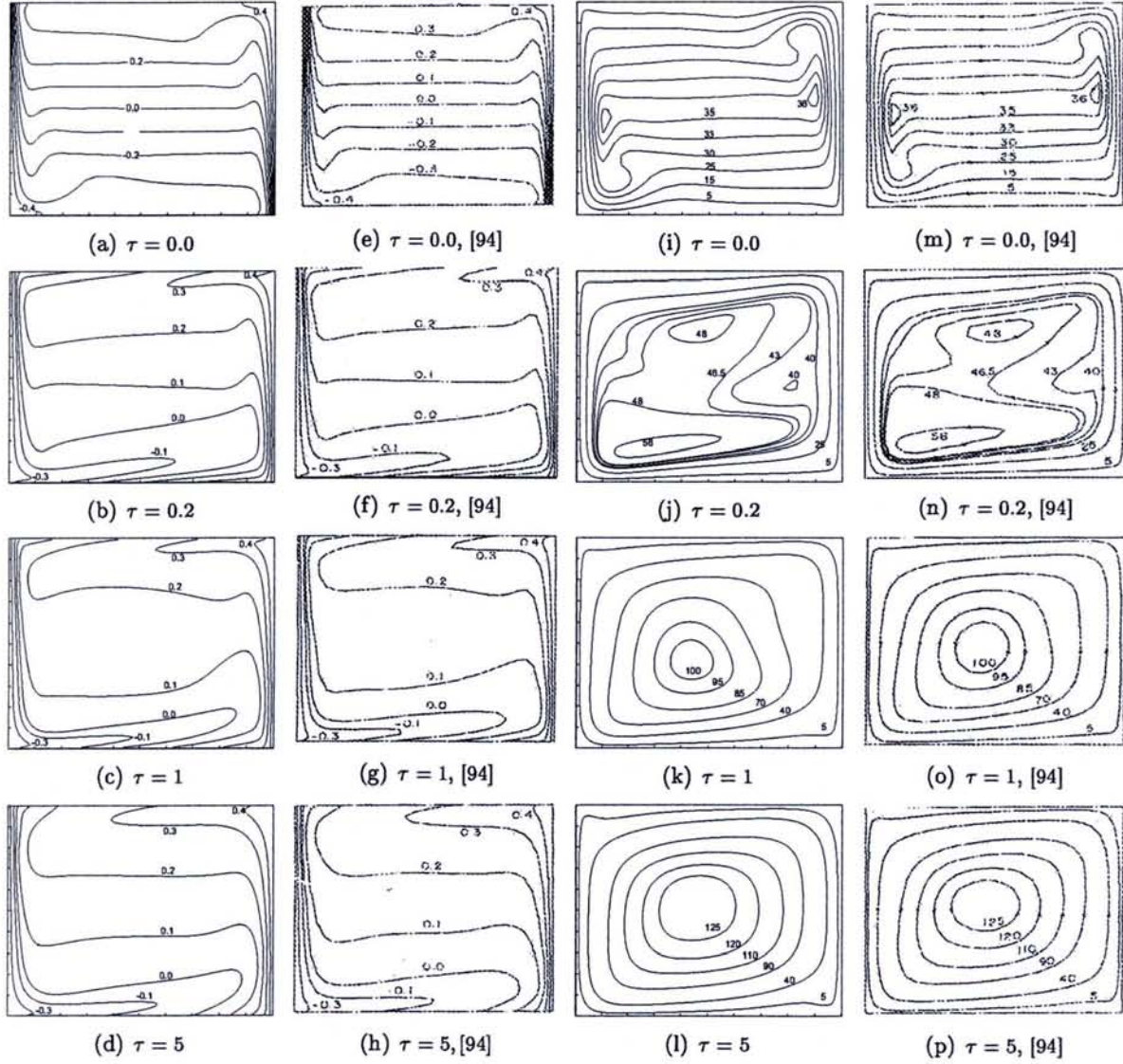


FIG. 3.24 – Champs de températures et lignes de courant dans la cavité ($Ra = 5 \times 10^6$, $Pl = 0.02$, $\tau = 0$, $\tau = 0.2$, $\tau = 1.0$ et $\tau = 5.0$)

Chapitre 4

Modélisation des fours verriers

4.1 Introduction

Ce chapitre est dédiée à la simulation numérique de la thermique et des écoulements dans le milieu complexe qu'est le verre à haute température. Tout d'abord, nous montrons les limites du modèle de Rosseland pour simuler le transfert de chaleur dans le verre fondu. A l'issue de cette analyse, nous proposons une version modifiée du modèle de Rosseland (MRM) capable de mieux simuler les phénomènes physiques à l'interface semi-transparente. Le reste de l'étude est consacré à l'emploi de la MVF et le MRM pour appréhender le transfert de chaleur et de masse dans le bain.

La modélisation prend en compte les trois modes de transfert de chaleur et s'intéresse en particulier à l'influence du chauffage (profil des flammes dans le four) sur l'hydrodynamique du bain et le champ de températures. Des comparaisons avec les études réalisées en rayonnement-conduction sont réalisées : elles mettent en évidence l'importance des phénomènes de recirculation sur la stratification des températures. La dernière étude est consacrée à la modélisation d'un four "float" selon sa section longitudinale. Le transport de masse et la thermique du verre y sont abordés avec la prise en compte du chargement de la matière première solide et l'évacuation du produit affiné. Nos résultats de simulation sont ensuite comparés à des valeurs expérimentales.

4.2 Limites de l'approximation de Rosseland

Les erreurs dues à l'utilisation du modèle de Rosseland (MR) lors de la simulation numérique des mouvements convectifs dans le bain de verre ont été étudiés par Laurent Pierrot [6]. Des résultats de références sont obtenus par la MOD en utilisant deux schémas : Exponentiel et Exponentiel Modifié. En plus de l'approche classique de Rosseland, cet auteur a employé la correction proposée par Howell et Goldstein [4]. Cette modification prend en compte le saut de température au niveau des parois dû au rayonnement (en absence de la conduction). Pour ce faire, ils supposent que la température locale du milieu semi-transparent en contact avec une paroi opaque $T_{MST,w}$ est différente de la température à la paroi T_w . Elle est calculée en utilisant la relation suivante :

$$\varphi_w = \frac{\sigma(T_w^4 - T_{MST,w}^4)}{\Psi(N_s)} \quad (4.1)$$

où φ_w est le flux radiatif à la paroi, Ns est le nombre de Stark et Ψ est le coefficient de glissement ("slip coefficient"). L'évolution de ce dernier en fonction de nombre de Stark est représentée figure 4.1. Siegel et Howell [27] montrent que cette correction améliore notablement les résultats. Ainsi, le champ de température dans le cas des milieux optiquement épais est plus proche de la réalité. Toutefois, cette correction est loin d'être suffisante pour reproduire les résultats semi-analytiques. Par ailleurs, cette correction a été développée afin de traiter proprement, dans la mesure du possible, le problème de transfert radiatif (avec ou sans conduction) par le MR. En revanche, l'ajout des échanges convectifs peut imposer des précautions supplémentaires lors de l'emploi de Ψ . Nous verrons par la suite les conséquences d'une utilisation directe de la technique de Howell et Goldstein pour une étude qui implique la convection dans le verre fondu. Le modèle choisi par L. Pierrot est semblable à celui étudié

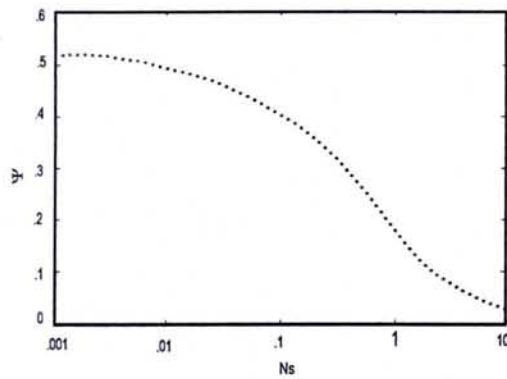


FIG. 4.1 – $\Psi(Ns)$ [27]

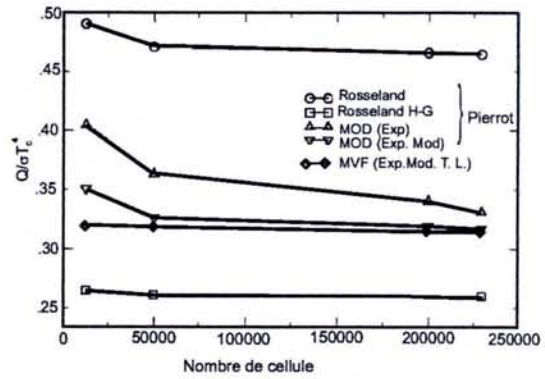
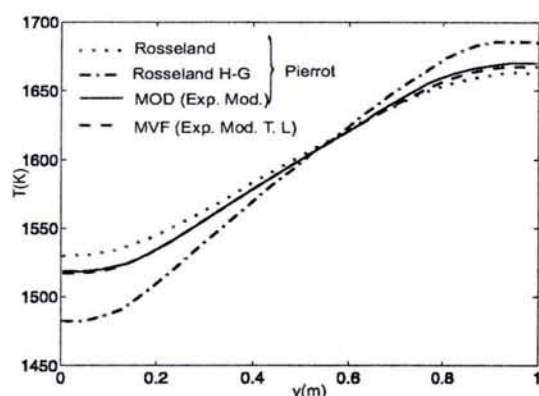


FIG. 4.2 – $qT/(\sigma_B T_c^4)$ à la paroi chaude en fonction du nombre de cellules

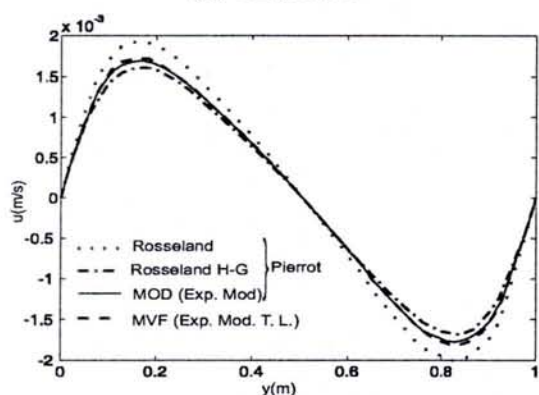
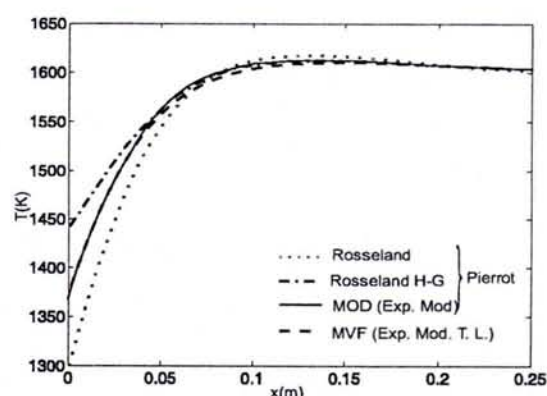
par Pigeonneau et al [95]. Il s'agit d'une longue cavité bidimensionnelle, de hauteur $H = 1m$ de longueur $L = 5m$ (Fig. 3.22). Les parois horizontales sont adiabatiques. Les murs gauche et droit sont à une température imposée de $1300K$ et $1800K$. L'émissivité des quatre parois est égale à l'unité. La cavité est remplie de verre fondu ; les propriétés physiques à la température moyenne sont :

- Densité : $\rho_0 = 2500 \text{ kg m}^{-3}$
- Capacité thermique : $C_p = 1250 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- Coefficient d'expansion thermique : $\beta = 7 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
- Viscosité dynamique : $\mu = 30 \text{ Pa s}$
- Conductivité thermique : $k_c = 0 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- Coefficient d'absorption : $\kappa = 40 \text{ m}^{-1}$
- Indice de réfraction : $n_v = 1.5$

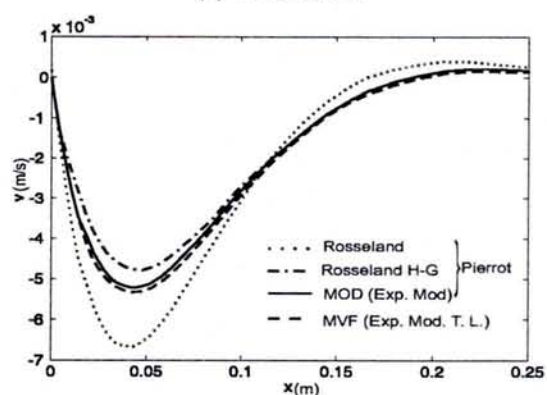
La figure 4.2 présente l'évolution du flux de chaleur à la paroi chaude, calculée par différentes méthodes, en fonction du nombre de mailles. Nous prenons comme solution de référence du flux de chaleur normé la grandeur calculée par la MVF avec le schéma MELT et 225000 volumes de contrôle. Une première analyse montre que le MR conduit à des erreurs relatives supérieures à 50% quel que soit le nombre de mailles. La correction de Howell et Goldstein associée à l'approximation de diffusion réduit fortement cette erreur (20%). Toutefois, le flux est désormais sous-estimé. Nous remarquons aussi que le flux calculé par la MOD en utili-



(a) Température

(b) Composante de vitesse u 

(a) Température

(b) Composante de vitesse v FIG. 4.3 – T et u le long de la médiane verticaleFIG. 4.4 – T et v le long de la médiane horizontale

sant les schémas Exponentiel et Exponentiel Modifié sont sensibles au maillage. Cependant le schéma Exponentiel Modifié est plus performant et tend vers les valeurs obtenues à l'aide de la MVF utilisant le schéma MELT. Cette dernière approche est pour sa part peu sensible à ce paramètre. Elle donne de très bons résultats avec un maillage peu dense (12500 cellules). Pour un maillage de 12500 cellules les schémas Exponentiels produisent des erreurs relatives supérieures à 10 et 20 %.

Les évolutions de la température et de la vitesse, calculées par différentes approches le long des médianes horizontale et verticale, est étudiée (Fig. 4.3 et 4.4). Une analyse globale montre que les schémas Exp. Mod. et MELT donnent pratiquement les mêmes résultats. En revanche, le MR surestime la vitesse et sous-estime la température. L'écart peut atteindre $\Delta T = -150K$ à proximité de la paroi froide. Cette différence de la température calculée est due à la mauvaise modélisation du rayonnement par un modèle conductif. Ce dernier ne peut pas prendre en compte le saut de température observé en proche paroi. La correction de Howell et Goldstein apportée au MR réduit cet écart à $\Delta T = 75K$. La différence peut être imputée au fait que la correction ne tient pas compte du transfert convectif. L'ajout d'un facteur correcteur au coefficient de glissement Ψ pourrait améliorer les résultats. Actuellement, les grandeurs données par les MR corrigé ou standard, sont loin d'être satisfaisantes étant donné

la simplicité (relative) du problème.

Dans le four verrier simulé ci-dessus, une hypothèse forte est faite en ce qui concerne la conductivité thermique (celle-ci est supposée nulle). Il apparaît que dans la réalité cette dernière augmente avec la température et ne peut être négligée, notamment pour assurer la continuité des températures aux parois. De plus, une autre difficulté de ce problème résulte de la modélisation de la frontière supérieure avec un modèle utilisant une conductivité radiative équivalente. C'est une interface semi-transparente et le transfert radiatif à travers cette limite obéit aux lois de Descartes (angle limite, transmission et réflexion). Ces phénomènes ne peuvent pas être pris en compte par les modèles de Rosseland (de base ou corrigé). De plus, la correction de Howell et Goldstein ne peut être mise en œuvre que dans le cas de parois adiabatiques ou à température connue. Pour ces raisons, nous avons proposé un modèle dit de "Rosseland modifié" (MRM) que nous allons exposer.

4.3 Modèle de Rosseland Modifié

Ce modèle fait l'hypothèse que le rayonnement transmis à l'interface supérieure du bain de verre sera absorbé en totalité dans les premiers centimètres. Dans le cas du verre clair où le coefficient moyen d'absorption est égal à 40 m^{-1} , la part de rayonnement non absorbée à la profondeur de cinq centimètres vaut selon la loi de Beer en incidence normale $e^{-0.05 \times 40}$, soit 13.5% du rayonnement entrant dans le bain. Ainsi, nous faisons l'hypothèse que la transmission du rayonnement à l'interface semi-transparente est nulle. Il est absorbé en surface. Par ailleurs, nous supposons que le rayonnement provenant du bain, transmis à cette limite, est en totalité émis par la surface libre. Le MRM reprend donc le formalisme du MR ; seule la condition au limite supérieure est modifiée. Dans la fenêtre de transparence de verre ($0 \leq \lambda \leq 5 \mu\text{m}$) nous définissons une absorptivité et une émissivité effectives à la surface libre : une absorptivité effective α_λ^e qui modélise la transmission du rayonnement des gaz chauds dans le bain de verre :

$$\alpha_\lambda^e = - \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_y \leq 0} \tau_\lambda(\vec{\Omega}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_y) d\Omega \quad (4.2)$$

et une émissivité effective ϵ_λ^e qui caractérise le rayonnement sortant du bain du verre :

$$\epsilon_\lambda^e = \int_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_y \geq 0} \tau_\lambda(\vec{\Omega}) (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_y) d\Omega \quad (4.3)$$

La condition aux limites thermiques à l'interface semi-transparente donnée par la relation 2.10 devient :

$$\begin{aligned} & -k_R \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=H} + \int_0^{\lambda_{lim}} \alpha_\lambda^e \pi L_\lambda^0(T_{gaz}) d\lambda + \int_{\lambda_{lim}}^\infty \alpha_\lambda \pi L_\lambda^0(T_{gaz}) d\lambda \\ & = h_N [T(x, H) - T_{gaz}] + \int_0^{\lambda_{lim}} \epsilon_{\tau\lambda}^e \pi L_\lambda^0(T_{x,H}) d\lambda + \int_{\lambda_{lim}}^\infty \epsilon_\lambda \pi L_\lambda^0(T_{x,H}) d\lambda \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.4 Modélisation du chauffage du bain

A présent, nous allons étudier les transferts de chaleur dans une section verticale du bain de verre éloignée des extrémités (entrée et sortie du four). Pour ce faire, nous avons considéré

deux modèles (Fig. 4.5 et 4.6). Ces deux techniques de chauffage sont représentatives de celles rencontrées dans les fours utilisés pour la production de verre plat ("four float"). Nous proposons diverses hypothèses sur la répartition des températures dans la voûte. Elles dépendent notamment de la longueur, de la disposition et du nombre de flamme(s) considéré.

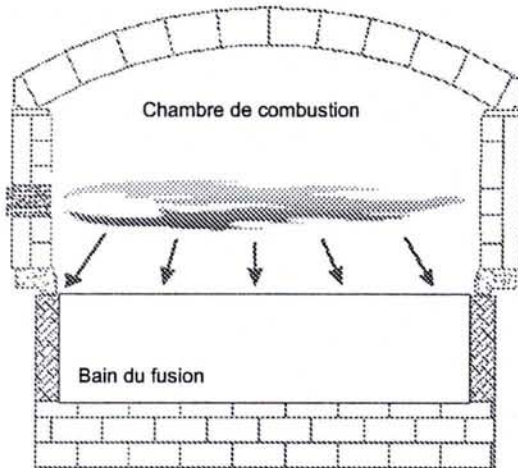


FIG. 4.5 – Four à une flamme

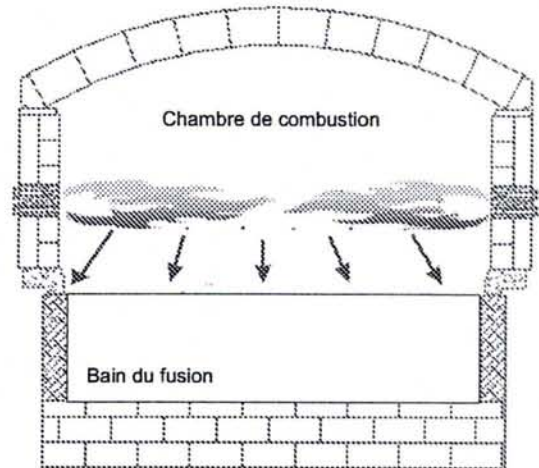


FIG. 4.6 – Four à deux flammes

Quel que soit le type de flamme modélisé, le bain a une hauteur $H=1$ m et une longueur $L=2$ m. Les propriétés du verre fondu utilisé dans ce travail sont les suivantes :

- Densité [96] : $\rho = 2250 \times [1 - 5.1 \times 10^{-5}(T - 1473)] \text{ kg m}^{-3}$
- Capacité thermique [96] : $C_p = 1350 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- Viscosité dynamique [96], (Fig. 4.7) : $\ln \mu = -6.09 + 1042525/(T - 500) \text{ Pa s}$
- Coefficient de tension superficielle [97] : $\gamma = 4 \times 10^{-5} \text{ N m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- Conductivité thermique [36] : $k_c = 1.14 + 0.000624 \times (T - 273.19) \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- Indice optique (modèle à 10 bandes) n_λ (Fig. 2.3) [32]
- Coefficient d'absorption (modèle à 10 bandes) κ_λ (Fig. 2.4) [32]

Nous avons utilisé les conditions aux limites thermiques et radiatives de l'étude sur le couplage conduction-rayonnement dans le bain de verre (§ 2.3). Le coefficient d'échange convectif à la surface libre est $h_N = 10 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$; le coefficient d'échange global de la paroi inférieure est $K_{GS} = 5 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$; aux limites latérales il vaut $10 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$. En ce qui concerne la dynamique du bain, on suppose une condition d'adhérence aux parois latérales et inférieure. A la surface libre, la condition aux limites est dépendante de la tension superficielle et du gradient thermique (3.80).

Le problème radiatif est résolu avec la MVF associée au schéma MELT, ou à l'aide des techniques de Rosseland. La modélisation de l'aspect mécanique des fluides repose sur l'emploi de l'algorithme SIMPLER associé au schéma Quick que nous avons développé. Afin de comparer simplement les résultats nous utilisons un maillage identique pour chaque calcul (pour $2m \times 1m$: 100×60 cellules).

Différents profils de températures des gaz dans la chambre de combustion sont envisagés. Nous supposons des répartitions de températures, uniformes, à décroissance linéaire ou

fluctuant selon une loi sinusoïdale. De plus, la température moyenne de la flamme est fixée à 1800 K de sorte que l'on injecte dans toutes nos simulations une quantité d'énergie similaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = 1800 \text{ K} \\ T_2 = (1900 - 200x/L) \text{ K} \\ T_4 = 1700 + 200 \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \text{ K} \\ T_5 = 1800 + 200 \sin\left(\frac{3\pi x}{2L}\right) \text{ K} \\ T_5 = 1800 + 200 \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \text{ K} \end{array} \right. \quad (4.5)$$

4.4.1 Cavité de 1m   2m

cas 1 : $T_{ray-inc} = 1800 \text{ K}$

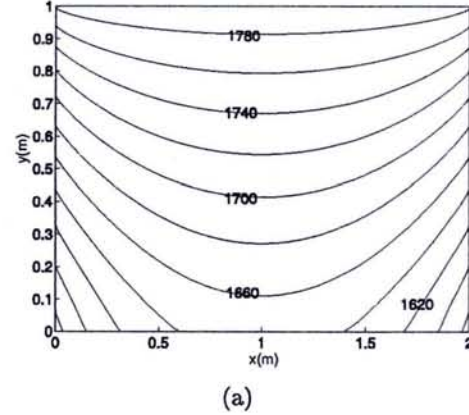
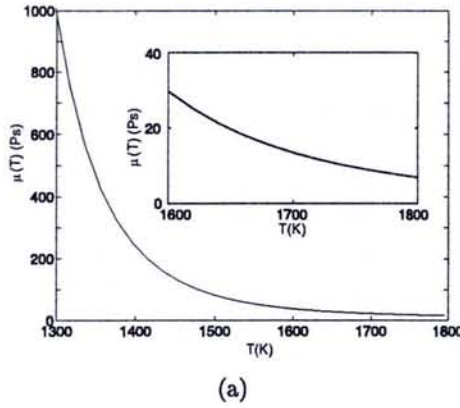


FIG. 4.7 –  volution de la viscosité en fonction de T

FIG. 4.8 – Champ de températures en absence de convection naturelle

Dans ce premier cas, nous supposons que le bain de verre est chauffé par un corps noir à température homogène ($T = 1800 \text{ K}$). Afin de quantifier l'effet de la convection naturelle dans le bain de verre, nous représentons le champ de températures calculé en négligeant celle-ci (Fig. 4.8) et en la prenant en compte (Fig. 4.9). Trois cas peuvent être distingués selon la méthode employée pour résoudre le problème radiatif (a, b : MVF / c, d : MRM / e, f : MR).

Les figures montrent que la convection naturelle change énormément la distribution spatiale de la température. Elle modifie fortement les isothermes et stratifie horizontalement le champ de températures. Les gradients thermiques latéraux sont réduits dans la zone centrale de la cavité, ceci du fait des boucles de recirculation induites par les effets thermogravitationnel et thermocapillaire. Les lignes de courant illustrent les mouvements du fluide. On observe deux rouleaux contrarotatifs dans la cavité.  tant donné que la condition au limite supérieure est uniforme, il y a symétrie des résultats. Ce type de rouleaux a été observé et modélisé par M.G. Carvalho [98]. Afin de mieux analyser les gradients de température et de vitesse dans le bain nous présentons différentes coupes. Le formalisme retenu pour cette analyse est le même pour tous les cas étudiés. Nous représentons les profils de températures horizontaux et verticaux le

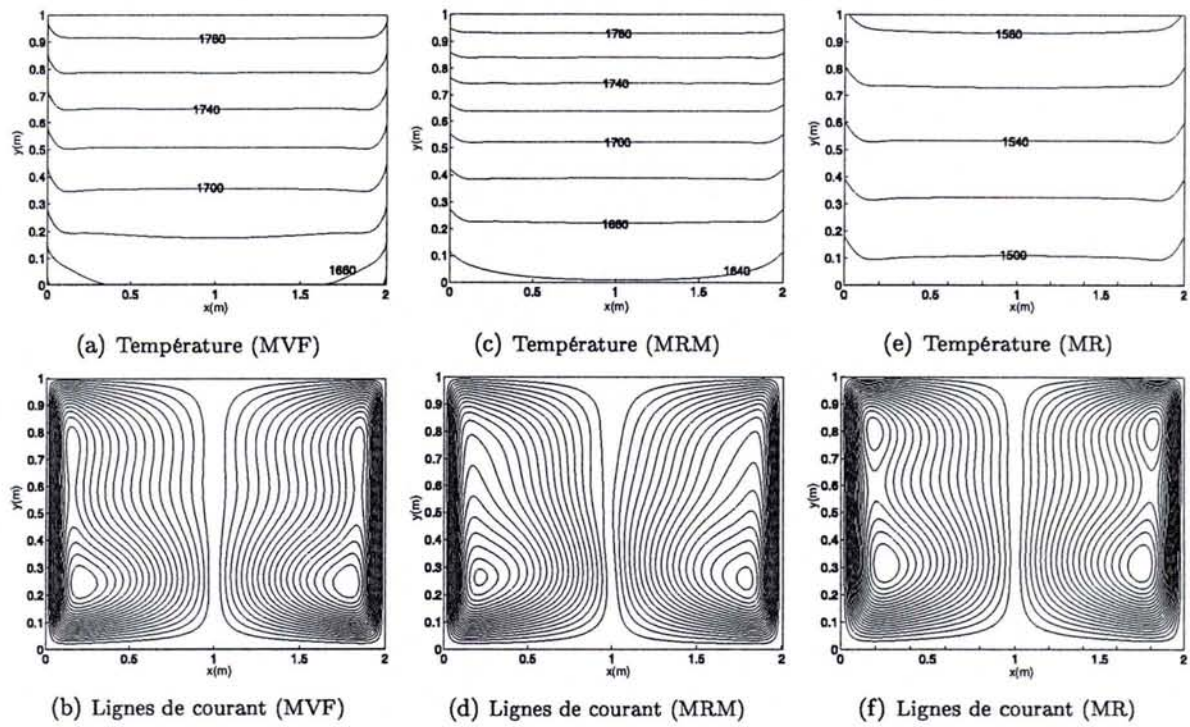


FIG. 4.9 – Cas 1 : températures et lignes de courant

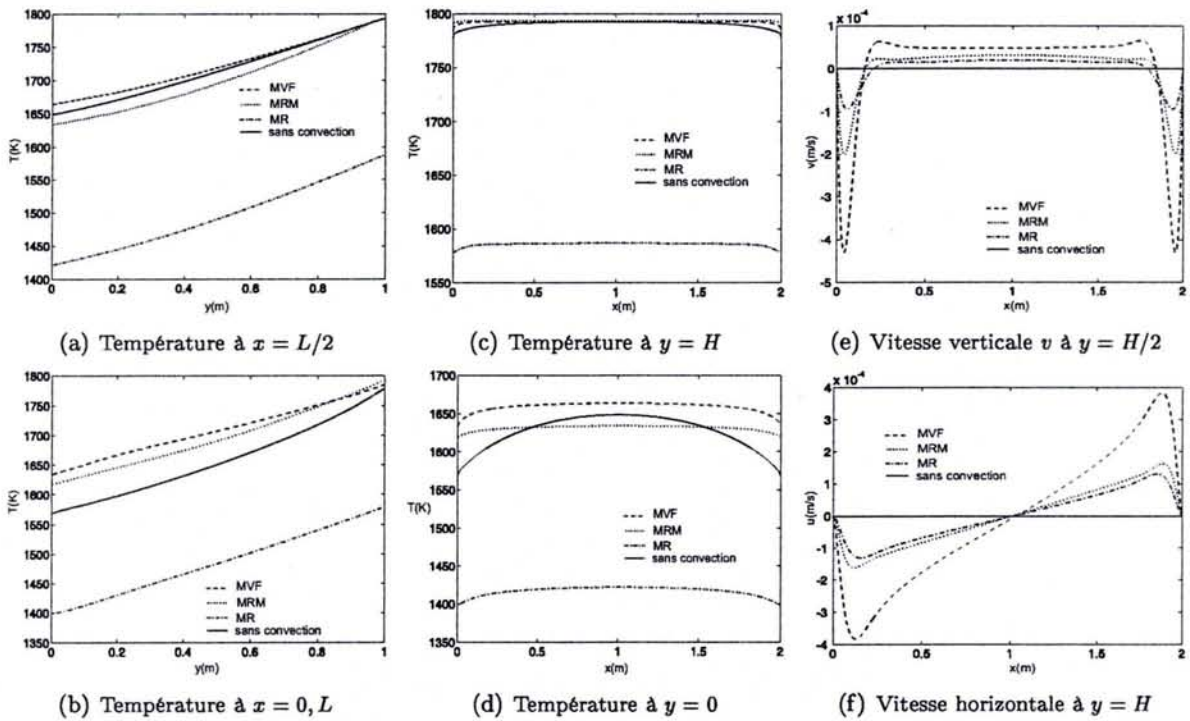


FIG. 4.10 – Cas 1 : profils de températures et de vitesse dans le bain

long de différents axes caractéristiques ($x = 0$, $x = L/2$, $x = L$, $y = 0$ et $y = H$). Par ailleurs, nous décrivons aussi les variations des composantes u et v de la vitesse à mi-hauteur du bain ($y = H/2$) et à la surface libre ($y = H$).

Les trois méthodes, utilisées pour le traitement du problème radiatif, donnent les mêmes allures en ce qui concerne les isothermes dans le bain. Nous observons des écarts, en particulier à proximité des frontières de la cavité. Ils peuvent être quantifiés (Fig. 4.10) ; on observe qu'à la surface libre la température évolue peu, sauf si le problème est résolu avec le MR. La variation de température dépasse alors 200 K dans tout le bain. Dans le bas de la cavité, on observe le même comportement général pour les trois méthodes de résolution de l'ETR avec un écart un peu plus marqué entre la MVF et le MRM ($\Delta T \approx 20$ K). En ce qui concerne les profils de vitesse, les écarts de température (parfois faibles) génèrent néanmoins des variations notables des valeurs prises par u et v . La composante verticale v est fortement affectée dans tout le bain, dans un rapport variant de deux (MRM) à quatre (MR). En ce qui concerne la composante u , la vitesse à la surface libre est sous-estimée par les deux modèles de Rosseland. Ceci étant, on note que le MRM est plus efficace que le MR pour la modélisation de notre problème, spécialement pour le calcul des températures qui sont réalistes du fait de la prise en compte du rayonnement entrant dans le bain à la limite supérieure. Ainsi, il apparaît inutile de conserver la modélisation à l'aide du MR dans les calculs suivants (ceux-ci mettent en œuvre des conditions aux limites plus complexes à simuler).

Cas 2 : $T_{ray-inc} = (1900 - 200x/L) K$

La température de la chambre de combustion (Fig. 4.11 (a)) décroît linéairement selon la largeur du bain. Nous calculons le champ de températures en absence de convection naturelle (Fig. 4.11 (b)) et avec celle-ci par la MVF et le MRM (Fig. 4.11 (d) et (f)). Ces figures montrent une organisation différente des isothermes (relativement au cas d'étude conducto-radiatif). Les boucles convectives génèrent le brassage du verre fondu et on retrouve la stratification horizontale observée dans le cas précédent. La présence de la flamme (générée depuis la frontière *Ouest*) décale la zone chaude et induit un gradient thermique latéral (Fig. 4.11). Il y a plusieurs boucles de recirculation, une en surface et deux dans la partie inférieure de la cavité (Fig. 4.11 (c) et (e)). On note que le verre fondu circule plus rapidement dans la partie supérieure du bain. Les températures en fond de cavité sont peu affectées par la condition aux limites supérieures et la géométrie de la flamme n'a plus d'influence.

Le MRM donne des températures en accord avec celles calculées par la MVF ; l'écart maximum ne dépasse pas 30 K (Fig. 4.12 (a) à (d)). En outre, la convection a un effet clairement marqué sur la température dans le fond de la cavité comme le montre la figure 4.12 (d). En ce qui concerne les vitesses, les observations menées à partir des lignes de courant se confirment. La vitesse horizontale u à la surface libre (Fig. 4.12 (f)) est positive et croît dans le sens opposé au gradient thermique de la flamme dès que l'on s'éloigne des bords. Ceci est en accord avec les lois évoquées pour traiter la convection thermocapillaire (3.80) où l'on montre que le gradient de u est proportionnel à moins le gradient de T .

Cas 3 : $T_{ray-inc} = 1700 + 200 \sin(\frac{\pi x}{2L}) K$

La répartition de températures choisie dans ce cas d'étude simule la présence de deux flammes qui sont vis-à-vis. Elles se rejoignent au centre de la chambre de combustion (Fig.

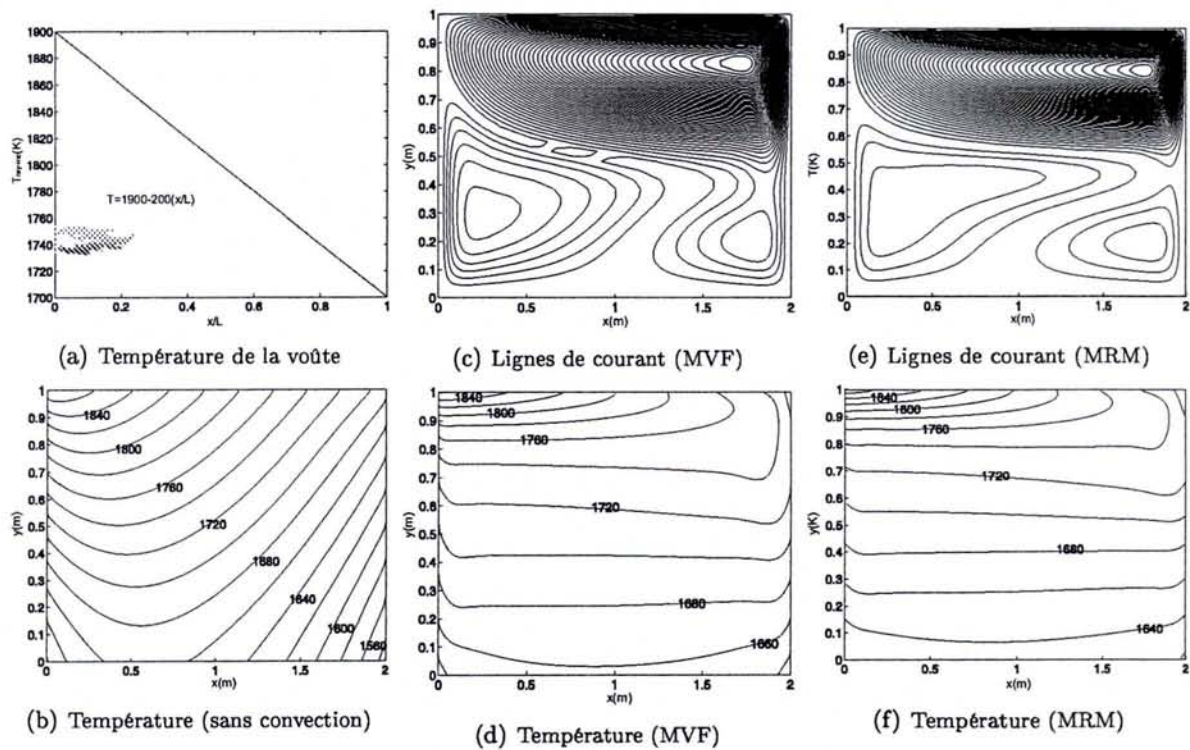


FIG. 4.11 – Cas 2 : températures et lignes de courant

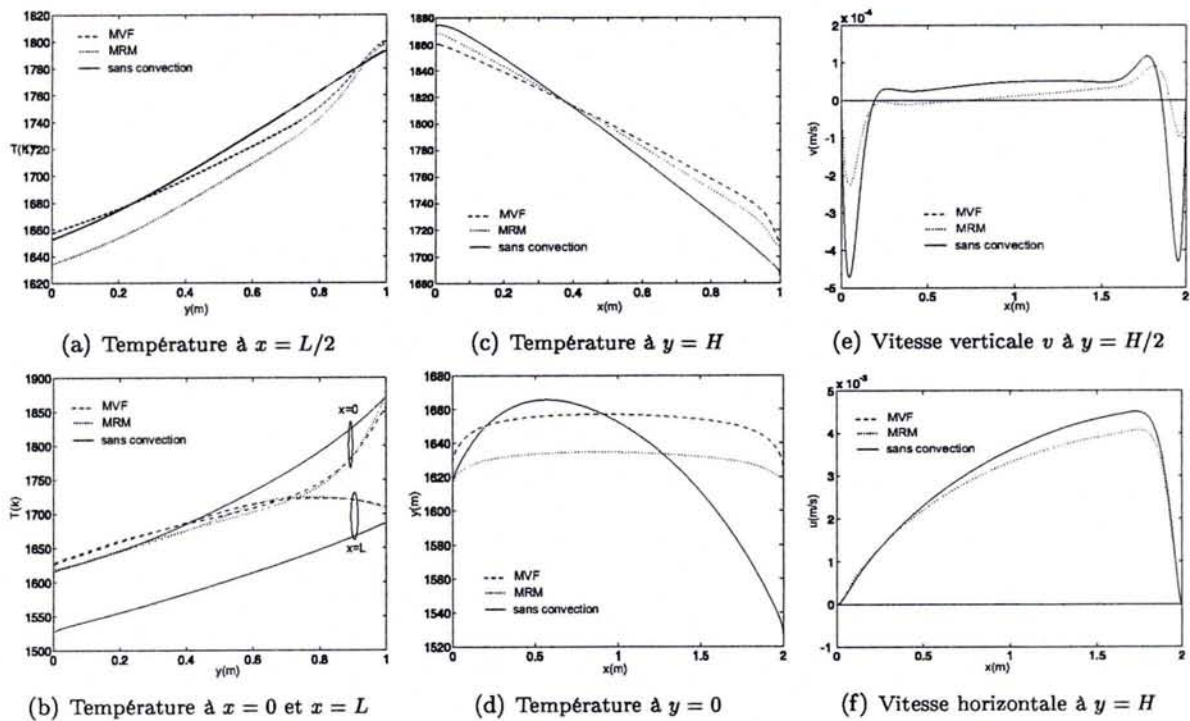


FIG. 4.12 – Cas 2 : profils de températures et de vitesse dans le bain

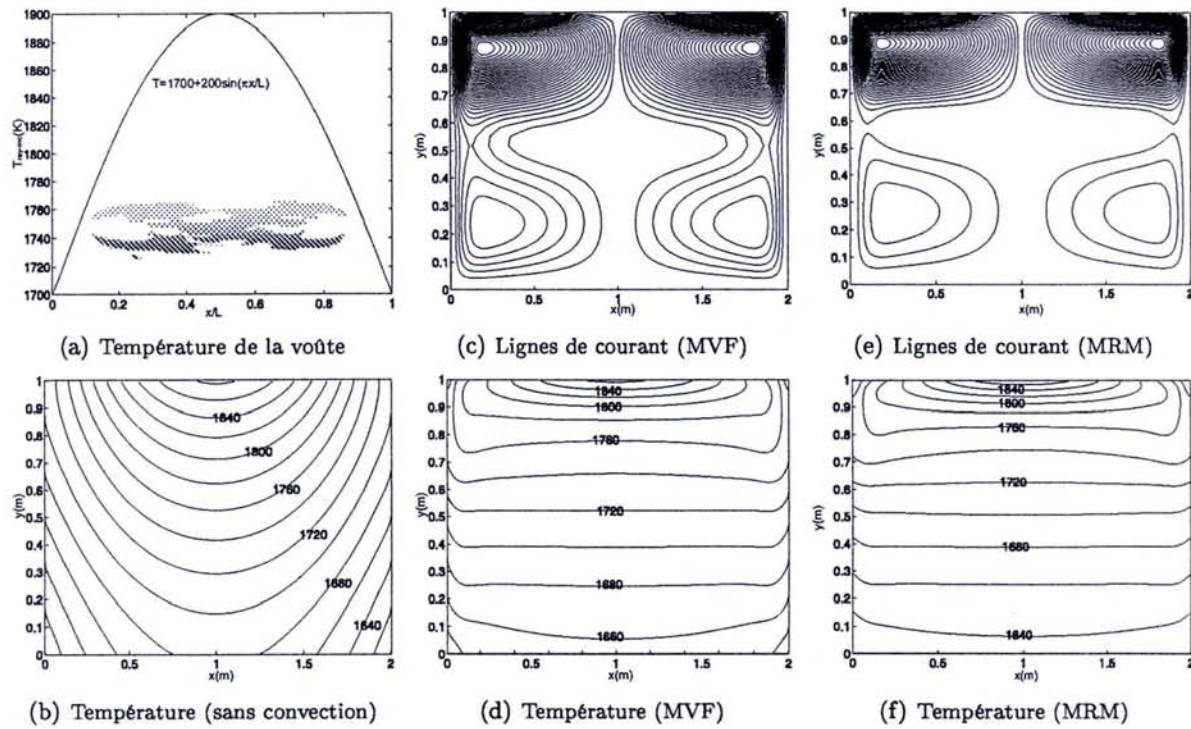


FIG. 4.13 – Cas 3 : températures et lignes de courant

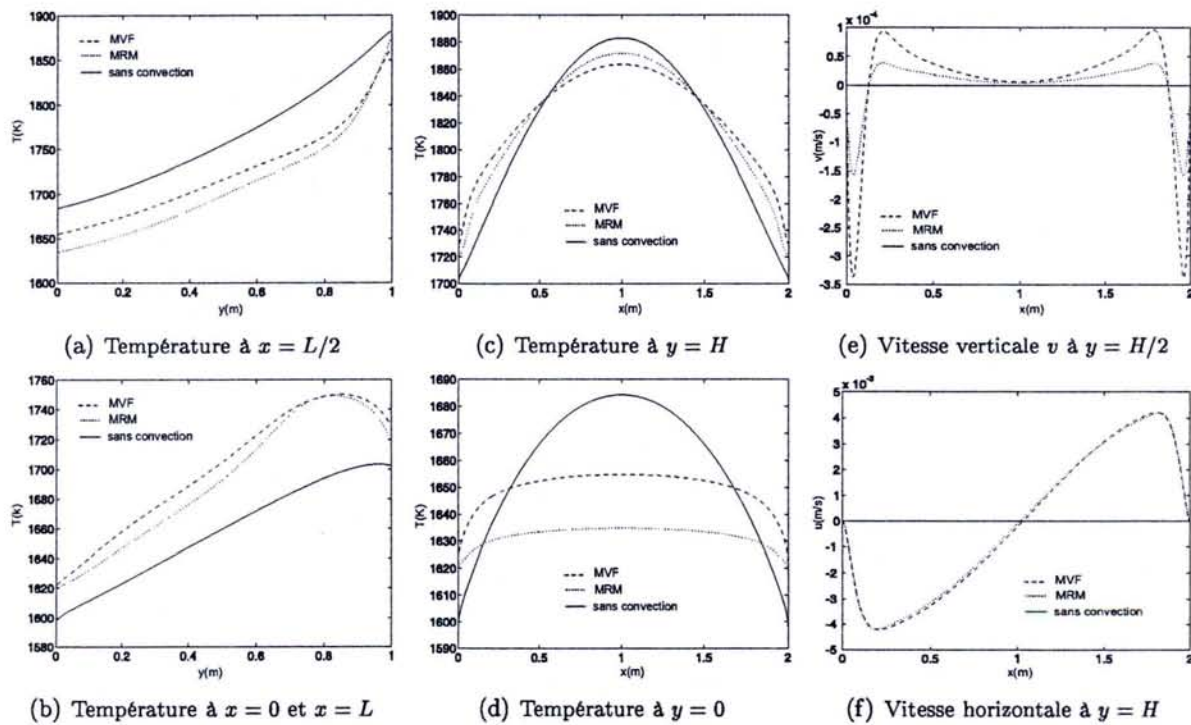


FIG. 4.14 – Cas 3 : profils de températures et de vitesse dans le bain

4.13 (a)). Compte-tenu de cette hypothèse le problème est symétrique par rapport à l'axe $x = 1\text{ m}$. Nous remarquons qu'il y a toujours stratification horizontale des températures dans le bain (Fig. 4.13 (d) et (f)) du fait des boucles de convection. À la différence du premier cas le tracé des lignes de courant laisse apparaître quatre boucles (Fig. 4.13 (c) et (e)) deux dans la moitié supérieure du bain qui tournent rapidement. Deux autres sont présentes dans la partie inférieure et évoluent plus lentement. Ce phénomène est simple à expliquer ; la viscosité du verre diminuant à proximité de la flamme, les mouvements convectifs dans cette zone sont plus rapides.

L'écart de température est de 25 K au maximum entre les modèles MRM et MVF (Fig. 4.14 (a) à (d)). La vitesse à la surface libre est identique pour les deux démarches. Les vitesses obtenues à cette limite sont caractéristiques de celles observées expérimentalement (un peu plus faibles dans le cas présent). Par ailleurs, l'erreur relative sur la vitesse v dans le bain peut dépasser 50% quand on utilise le MRM et qu'il est comparé à la MVF (Fig. 4.14 (e)).

Cas 4 : $T_{\text{ray-inc}} = 1800 + 200 \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$

Afin de simuler la présence de deux flammes non jointives telles qu'elles sont schématisées figure 4.6, nous avons supposé que le bain de verre est chauffé par un corps noir dont la température évolue selon la loi : $1800 + 200 \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$ (Fig. 4.15 (a)). L'influence du chauffage (profils des flammes) est très marquée sur le champ de températures dans le bain (Fig. 4.15 (b)). La prise en compte de la convection naturelle se traduit par des rouleaux de recirculation multiples (Fig. 4.15 (c) et (e)). Comme dans les cas précédents, les effets thermiques imputables aux flammes sont essentiellement localisés dans le haut de la cavité. À mesure que l'on approche du fond il y a uniformisation des gradients thermiques latéraux.

Selon les modèles retenus (MRM et MVF), les écarts de températures sont toujours raisonnables ($\Delta T = 30\text{ K}$) (Fig. 4.16 (a) à (d)). Pour les vitesses, des commentaires similaires à ceux donnés dans le cas précédent restent valables. On note cependant une inversion des vitesses à la limite supérieure du fait du gradient thermique existant entre les flammes (Fig. 4.16 (f)).

Cas 5 : $T_{\text{ray-inc}} = 1800 + 200 \sin\left(\frac{3\pi x}{2L}\right)$

Afin d'approcher au mieux la réalité nous modélisons la température de la chambre de combustion du four à flamme unique (Fig. 4.5) avec le profil décrit figure 4.17 (a). Les champs de températures (Fig. 4.17 (d) et (f)) sont proches de ceux étudiés dans le cas 2. En ce qui concerne l'évolution des lignes de courant on observe une boucle supplémentaire dans le coin *Nord - Ouest*. Celle-ci est due à la forme de la flamme (gradient de température positif dans la première région).

Les profils thermiques sont conformes aux solutions attendues. On distingue notamment sur la figure 4.18 (c) des isothermes proches de celles imposées dans la chambre de combustion. Le profil de vitesse calculé à la surface libre évolue aussi en fonction du gradient thermique comme nous l'avons évoqué dans les cas antérieurs (Fig. 4.18 (f)).

À travers ces cinq cas sont décrites des conditions aux limites plus ou moins pertinentes pour modéliser le chauffage du bain de verre. Cette étude préliminaire nous sera utile dans la

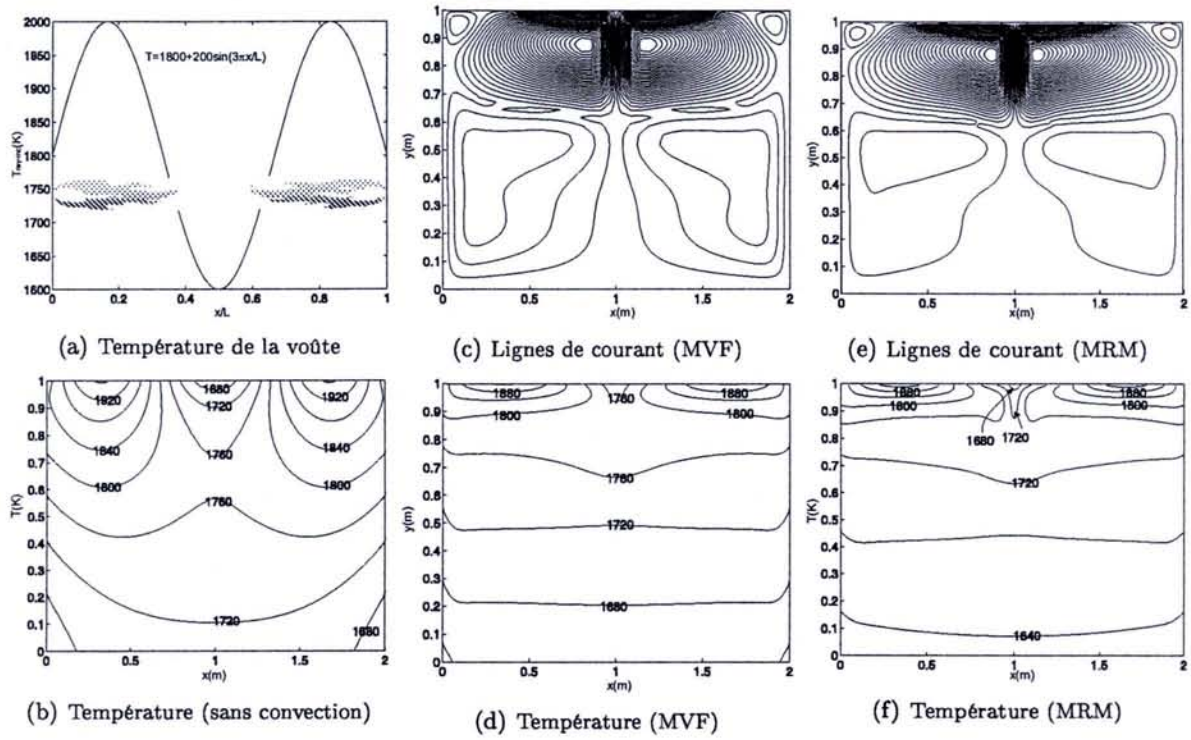


FIG. 4.15 – Cas 4 : températures et lignes de courant

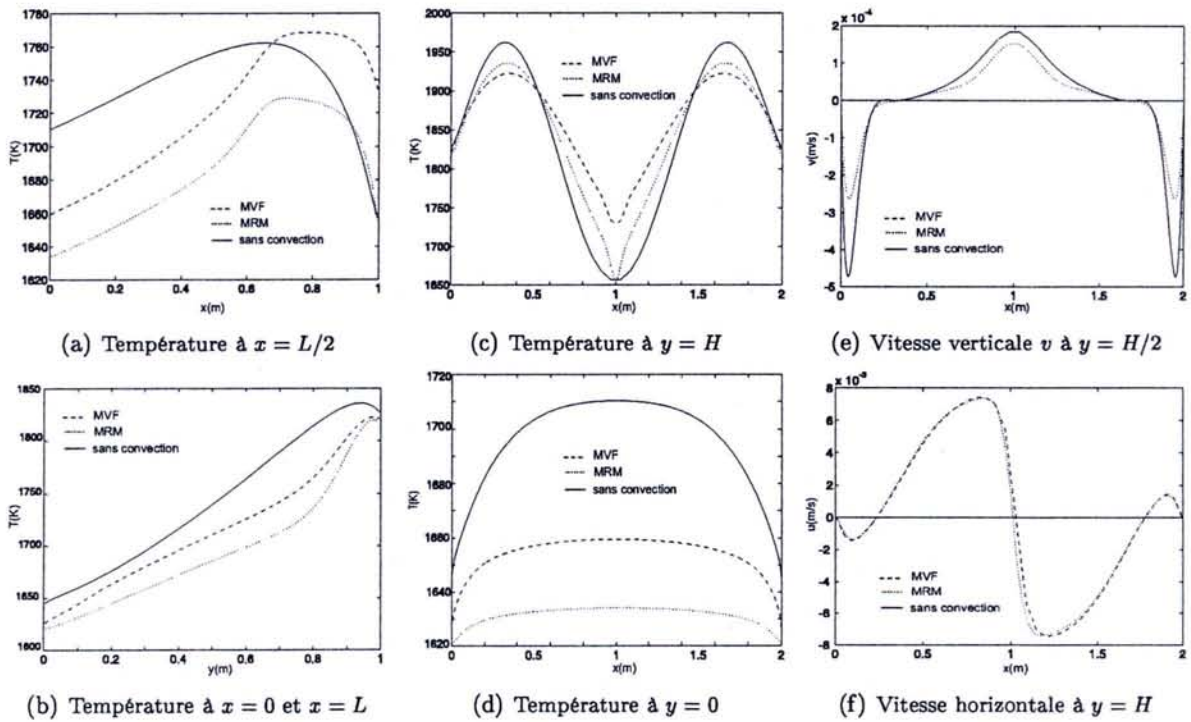


FIG. 4.16 – Cas 4 : profils de températures et de vitesse dans le bain

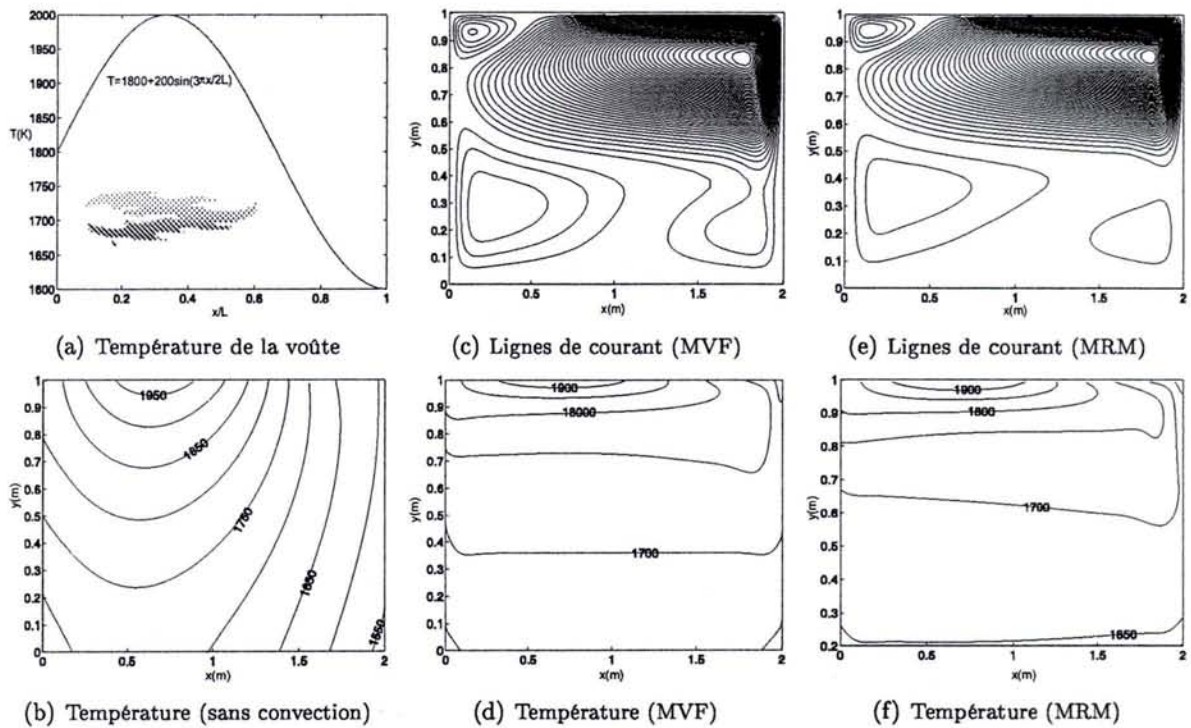


FIG. 4.17 – Cas 5 : températures et lignes de courant

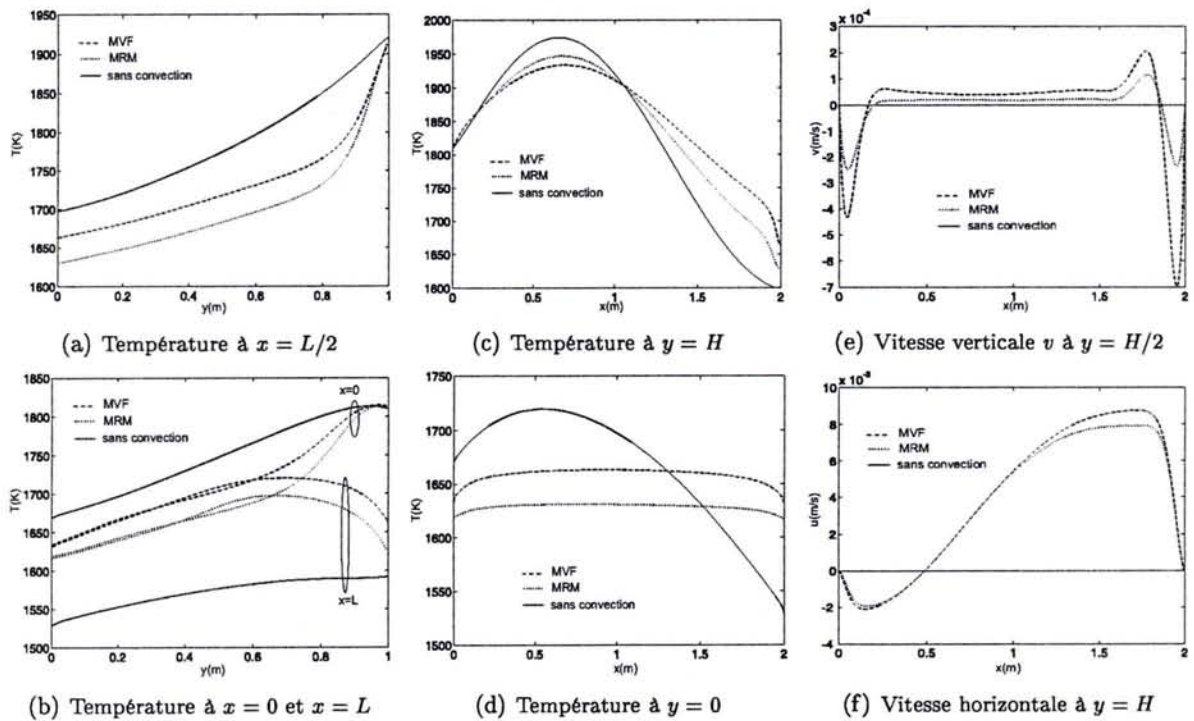


FIG. 4.18 – Cas 5 : profils de température et de vitesse dans le bain

suite de ce travail pour modéliser des fours complets de grandes dimensions. Les cas 1 et 5 sont ceux que nous avons retenus pour modéliser de tels ensembles.

4.4.2 Cavité de 1m   10m

Dans cette étude nous reprenons les paramètres et les propriétés thermophysiques du verre employés dans la section précédente, à l'exception de la longueur du bain qui est multipliée par cinq. Selon la direction horizontale nous comptons désormais 250 mailles avec un décrément géométrique de 0.9. Ce maillage est suffisamment dense pour assurer la bonne prise en compte des phénomènes associés aux couches limites thermiques et dynamiques.

Nous nous intéressons à une coupe verticale dans la longueur du bain et nous avons choisi deux représentations de la chambre de combustion. Dans le premier cas la température du corps noir est supposée constante et égale à 1800K. Dans le second cas, la température varie selon une loi en sinus telle que celle évoquée dans le cas 5 de la section précédente.

Cas 6 : $T_{ray-inc} = 1800 K$

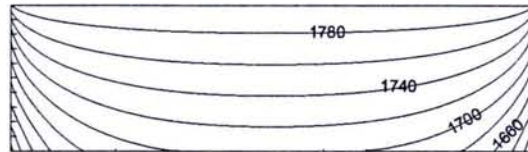


FIG. 4.19 – cas 6 : isothermes dans le bain en absence de convection

Le champ de températures dans le bain calculé par la MVF en négligeant la convection naturelle (Fig. 4.19) et les champs de températures obtenus avec le couplage complet par les trois techniques de résolution de l'ETR (Fig. 4.20) sont caractéristiques d'un chauffage uniforme. On note qu'il y a toujours une mauvaise estimation des températures avec le modèle de Rosseland. Le MRM est pour sa part plus proche de notre solution obtenue par la MVF car les conditions d'utilisation ( loignement des frontières) sont respectées. Les mouvements de recirculation du fluide décrits par les lignes de courant (Fig. 4.21) montrent deux boucles centrées à proximité des parois verticales. L'ensemble de ces données corrobore bien les remarques faites dans le   4.4.1.

Les figures 4.21 (a)   (d) montrent qu'il devient difficile de discriminer la MVF et le MRM, notamment pour les profils de températures au centre du bain. Dans le cas présent les mouvements convectifs ont une importance moindre dans le processus de stratification des isothermes à mesure que l'on s'éloigne des frontières. Les vitesses calculées dans cette étude sont très proches de celles obtenues pour le four de plus petite dimension.

Cas 7 : $T_{ray-inc} = 1800 + 200 \sin\left(\frac{3\pi x}{2L}\right)$

Les résultats de ce dernier cas test sont comparables à ceux obtenus dans le Cas 5. L'allongement de la cavité modifie peu les gradients thermiques calculés. On note cependant qu'il y a moins de boucles de recirculation du verre fondu (Fig. 4.22 (d) et (e)), celles-ci s'étirant désormais sur toute la profondeur de bain.

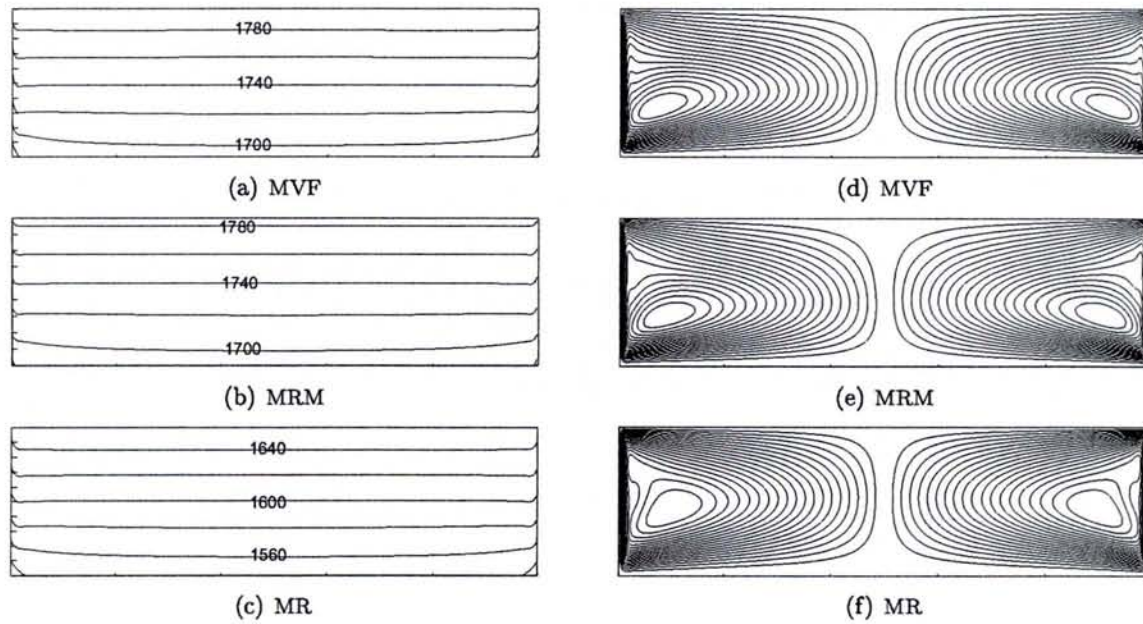


FIG. 4.20 – Cas 6 : températures et Lignes de courant

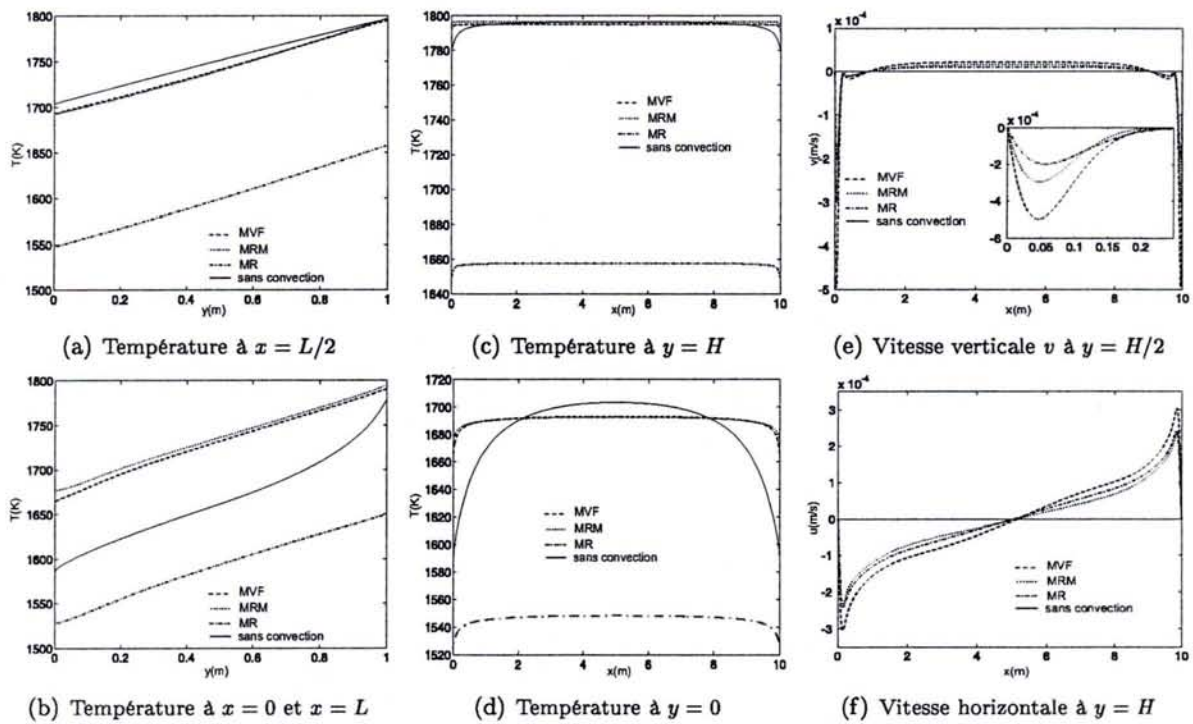


FIG. 4.21 – Cas 6 : profils de températures et de vitesse dans le bain

4.4.3 Conclusion

Tous les cas étudiés dans ce chapitre ont montré que la convection naturelle joue un rôle très important sur la répartition des températures dans le bain de verre. Ce phénomène a

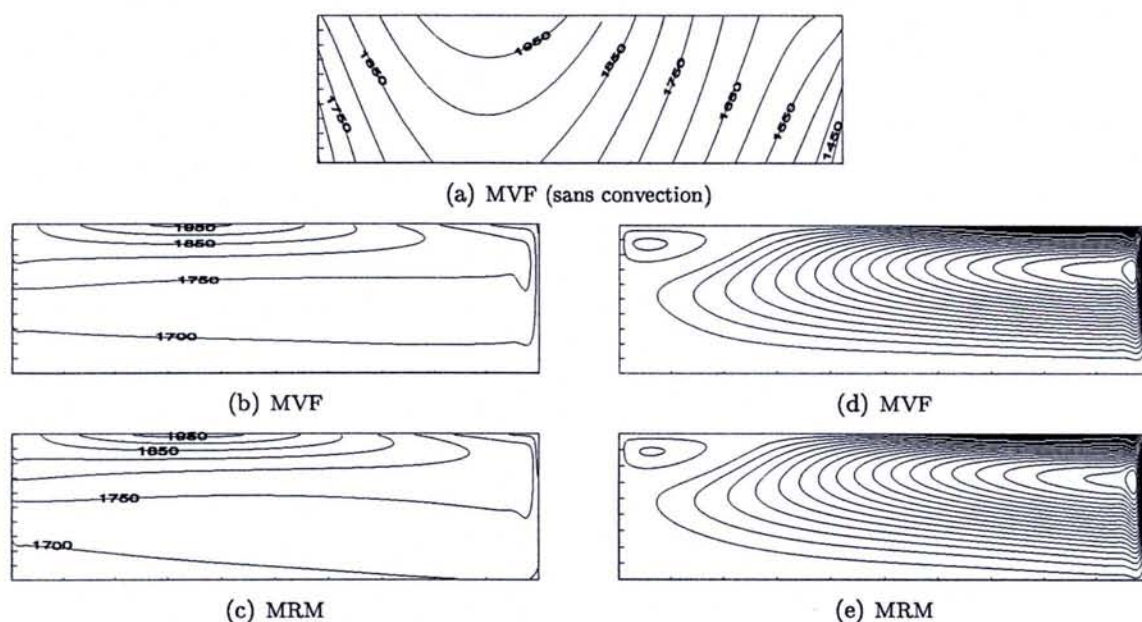


FIG. 4.22 – Cas 7 : températures et lignes de courant

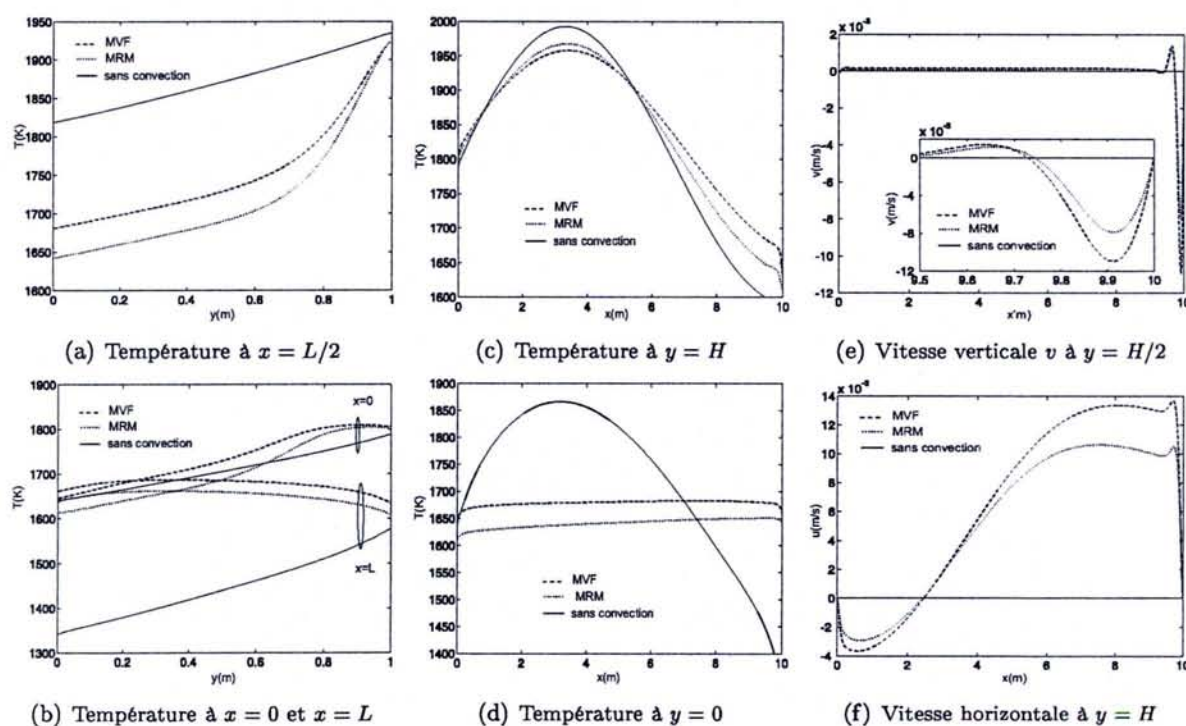


FIG. 4.23 – Cas 7 : profils de températures et de vitesse dans le bain

tendance à réduire les gradients thermiques horizontaux dans le bain.

Les cas étudiés ont aussi montré que le MR standard est une très mauvaise approche pour résoudre les transferts de chaleur dans les bains de verre. Ce modèle donne des températures

toujours sous-estimées, et ce jusque 250 K. En conséquence, les vitesses sont elles aussi sous-estimées (la température étant plus faible, la viscosité croît très rapidement) dans des rapports de l'ordre de 50%. Nous avons constaté que la présence de la convection et des interfaces semi-transparentes rendent la correction proposée par Howell et Goldstein inexploitable.

Le MRM développé dans cette étude permet le calcul des températures très proches de celles déterminées par la MVF. Toutefois, ce modèle n'est plus pertinent pour traiter la dynamique du verre fondu. On observe que les vitesses sont généralement sous-estimées à proximité des frontières.

4.5 Modèle complet

Dans les études précédentes nous avons supposé que les transferts de chaleur et de masse dans le bain de verre se font uniquement par conduction, rayonnement et convection naturelle. Dans le cas réel, les phénomènes physiques sont plus complexes. La présence de matières premières vitrifiables, introduites en amont du four à une température relativement basse, perturbe le transfert de chaleur dans cette zone. Il se forme une couverture flottant à la surface du bain (le batch) qui est moins dense que le verre fondu. En dehors de la fusion du verre recyclé, l'élaboration du verre ne se limite pas à un changement d'état, mais relève aussi de la synthèse chimique. Les réactions qui se produisent dans le batch sont fortement endothermiques; elles absorbent l'énergie au voisinage de cette zone. De plus, le batch est opaque; il constitue un écran au rayonnement provenant de la chambre de combustion. Ainsi, le verre fondu situé sous la matière première est plus froid que dans le reste du four.

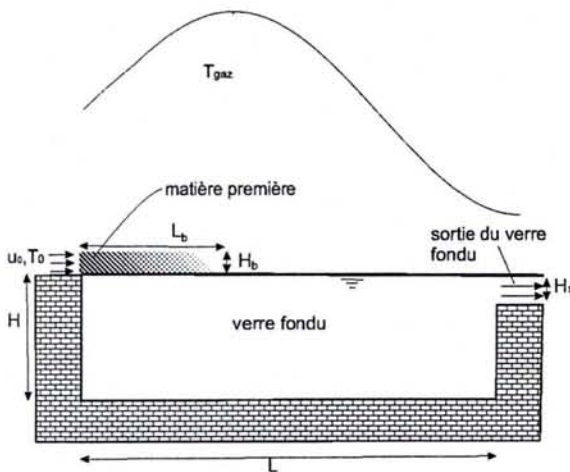


FIG. 4.24 – Modèle complet

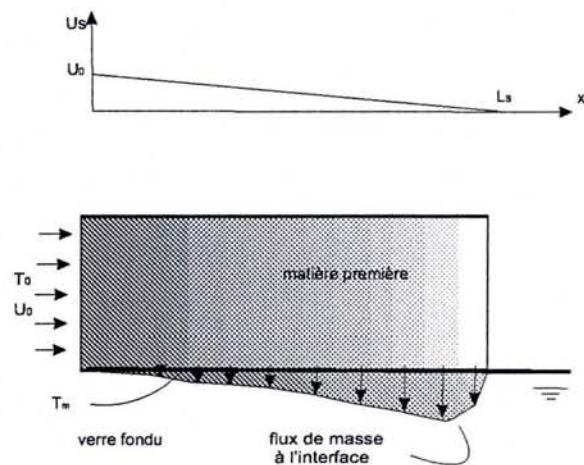


FIG. 4.25 – Modèle de batch

Le recyclage du verre permet de limiter la phase de synthèse, on a alors principalement un processus de fusion. On économise donc sur l'enthalpie d'élaboration; néanmoins il faut continuer à fournir la chaleur latente de fusion. De plus, la dissociation du carbonate génératrice de CO_2 , gaz à effet de serre, n'a pas lieu. C'est pourquoi le recyclage est intéressant à plusieurs niveaux. Toutefois, en l'absence de tri sélectif important, les verres clairs ne peuvent

pas tous être directement produits à partir de verres recyclés. Enfin, il est toujours nécessaire d'apporter des matières premières nobles pour atteindre les compositions voulues.

La complexité de la physique du batch a longtemps rendu impossible toute simulation réaliste. La thèse de Verheijen [99] et les travaux de Conradt [100] introduisent des méthodes permettant une modélisation très précise des phénomènes chimiques de formation du verre. Hélas, ces travaux ne sont pas employés dans les modèles complets de l'énergétique du four. Ainsi, des hypothèses simplificatrices sont souvent utilisées pour appréhender le comportement global de cette zone. En effet, les réactions chimiques de vitrification, l'écoulement tri-phasique (bulles gazeuses, matière première et verre fondu) dans le batch couplé aux flux de chaleur échangés dans la chambre de combustion et dans le bain rendent cette modélisation très complexe. Étant donné que l'influence de cette région est considérable sur le comportement global de four, une simulation fine est exigée pour une prédiction réaliste du comportement thermique et dynamique du bain de verre. Les travaux discutés ci-dessous détaillent les différentes approches existantes.

Modèle de batch immobile, sans réactions chimiques

Pilon [97] et Carvalho [96] ont simulé le batch comme une simple couverture (solide et immobile) flottant à la surface libre. L'interface entre le batch et la chambre de combustion représente un puits d'énergie. Une partie de la chaleur absorbée à cette interface est nécessaire pour chauffer la matière première jusqu'à la température de fusion. L'autre partie participe à la fusion du verre dans des régions du batch qui sont déjà à la température de changement d'état.

Modèle avec écoulement, sans réactions chimiques

Dans la thèse de Carvalho [101] une modélisation diphasique du batch est proposée. L'écoulement est supposé bidimensionnel. Dans ce modèle, on distingue deux zones de fusion : une à la limite supérieure du batch et l'autre à l'interface inférieure. Les réactions chimiques ne sont pas modélisées et le changement de phase se fait à une température fixée.

Modèle avec écoulement et réactions chimiques

Les travaux de Conradt [100] et de Verheijen [99] montrent que l'hypothèse de fusion contrôlée par la température n'est pas réaliste. Cependant, comme nous venons de l'évoquer leurs approches sont délicates à mettre en œuvre. Néanmoins, en dépit de la complexité de ce problème certains auteurs [102] modélisent les principales réactions chimiques ayant lieu dans le batch.

Le modèle de batch utilisé dans cette étude est semblable au modèle proposé par Carvalho [101]. En revanche, dans notre modèle nous supposons une seule zone de fusion à l'interface batch-verre fondu. La fusion est contrôlée par la température ($T > T_m$ état liquide, $T < T_m$ état solide).

4.5.1 Modèle de Batch

Le modèle physique retenu pour notre étude est composé d'une couverture de matière première, de hauteur H_b et de largeur L_b (Fig. 4.25), injectée dans le four à une température

T_0 proche de l'ambiante avec une vitesse U_0 . Nous supposons que le déplacement de la matière première dans le four peut être modélisé par une vitesse horizontale U_b :

$$U_b(x) = U_0 - U_0 \frac{x}{L_b} \quad (4.6)$$

Le batch est opaque au rayonnement, son émissivité vaut ϵ_b . Les conditions aux limites radiatives pour des parois opaques sont données par la relation (2.4). Le transfert de chaleur dans ce milieu solide en déplacement se fait par conduction et convection. L'équation de transfert de chaleur dans ce cas est la suivante :

$$\rho_b c_{p,b} U_b(x) \frac{\partial T_b}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{c,b} \frac{\partial T_b}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{c,b} \frac{\partial T_b}{\partial y} \right) \quad (4.7)$$

La température T_0 correspond à la condition thermique à la frontière *Ouest* du batch. Les faces supérieures $y = H + H_b$ et *Est* ($x = L_b$) sont supposées diffuses et opaques. Les conditions aux limites thermiques pour de telles frontières sont données par l'éq. 2.11.

La condition aux limites thermique à l'interface verre-batch est délicate à modéliser. Afin d'établir un modèle réaliste nous nous basons sur les hypothèses suivantes :

- les températures du verre T_f et de la matière première T_b sont égales à l'interface $T_f(H) = T_b(H) = T_m$, où T_m est la température de fusion (température de vitrification),
- la température locale de la matière première ne peut pas être supérieure à la température de fusion,
- la quantité de verre fondu entrant dans le bain est exprimée par un flux de masse traversant l'interface batch-verre. Elle est proportionnelle à la quantité d'énergie disponible qui est consommée par la fusion.

À l'interface verre-batch ($y = H$, $x < L_b$) deux conditions aux limites sont imposées : la première stipule que la température de cette interface est égale à la température T_m :

$$T_f = T_b = T_m \quad (4.8)$$

la seconde exprime le bilan des flux échangés entre le verre fondu et le batch :

$$-\rho_b v(x, H) \mathcal{H}_c = -k_{c,f} \frac{\partial T_f}{\partial y} \Big|_{y=H} + k_{c,b} \frac{\partial T_b}{\partial y} \Big|_{y=H} + q_r^{net}(H) \quad (4.9)$$

avec

$$q_r^{net}(H) = \int_{\lambda=0}^{\lambda_{lim}} \alpha b \lambda q_{y\lambda}^{r+}(x, H) d\lambda - \int_{\lambda=0}^{\lambda_{lim}} \epsilon_{b\lambda} \pi n_\lambda^2 L_\lambda^0(T(x, H)) d\lambda \quad (4.10)$$

$v(x, H)$ est la vitesse du verre fondu allant du batch vers le bain. $\mathcal{H}_c$ est l'enthalpie de la réaction chimique de vitrification de la matière première (ou la chaleur latente de fusion pour le recyclage du verre). $q_r^{net}(H)$ est le flux radiatif net échangé entre les deux phases à travers cette interface.

4.5.2 Tirage du verre fondu

Les résultats présentés dans la section §4.4 ont montré que les boucles de recirculation dues à la convection modifient énormément la distribution de la température dans le bain.

Ainsi, les mouvements générés par le tirage du verre fondu à la sortie du bain ont également une influence sur le champ de températures. Afin de prendre en compte cet aspect nous avons associé au modèle de bain une conduite de sortie de longueur L_s et de hauteur H_s (Fig. 4.24). La longueur L_s est assez grande pour atteindre le régime établi.

Nous définissons le débit de masse fondue qui traverse l'interface batch-verre et le débit massique sortant de bain de verre comme :

$$\begin{aligned} m_e &= \int_{L_b}^0 \rho v(x, H) dx \\ m_s &= \int_{H_s}^0 \rho u(L + L_s, y) dy \end{aligned} \quad (4.11)$$

La condition aux limites dynamique à l'extrémité de la conduite de sortie est déduite de la définition du régime établi :

$$\begin{aligned} \left. \frac{du(x, y)}{dx} \right|_{x=L+L_s} &= 0 \\ v(L + L_s, y) &= 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ces conditions aux limites ne garantissent pas la conservation de la masse entrant et sortant du bain de verre (i.e. $m_s \neq m_e$). Pour ceci il faut ajouter une condition supplémentaire qui assure l'égalité du débit rentrant et sortant [50] :

$$u(L + L_s, y) = u^*(L + L_s, y) \frac{m_s}{m_e} \quad (4.13)$$

où $u^*(L + L_s, y)$ est la vitesse calculée par la MVF et $u(L + L_s, y)$ est la vitesse corrigée afin de garantir la conservation de la masse.

4.6 Modélisation du four Ford Nashville

La simulation complète de ce type de four implique le couplage de trois modèles : le modèle du bain, le modèle de batch et le modèle de la chambre de combustion. Dans notre étude nous avons remplacé le dernier point par les valeurs expérimentales de la température mesurée dans la chambre de combustion [103]. Les vitesses du fluide obtenues par le modèle de batch à l'interface batch-verre constituent les paramètres d'entrée pour le bain. Les trois régions sont couplées par une méthode itérative basée sur les relations entre le flux de chaleur allant de la chambre de combustion vers les surfaces du bain et du batch et le flux allant de la zone liquide vers la surface inférieure de la zone solide. La procédure numérique est menée jusqu'à l'obtention de la convergence.

4.6.1 Caractéristiques du four et modèle physique

Nous validons notre modèle qui tient compte de la présence du batch, en le comparant à des résultats expérimentaux proposés par Lankhorst [103]. Dans cet article, nous trouvons des mesures des profils de températures dans le bain de verre à plusieurs abscisses. Les caractéristiques du four étudié sont reportées sur la figure 4.24 et dans la table 4.1.

Paramètres	Valeurs
Longueur bain (L)	34,695 m
Largeur bain (W)	10,0584 m
Profondeur bain (H)	1,10 m
Épaisseur parois	0,4 m
Conductivité des parois	6 W/mK
Emissivité intérieure des parois (ϵ_w)	0,6
Emissivité du batch (ϵ_b)	0,5
Température ambiante	40°C
Coefficient d'échange global des parois	11 W/m ² .K
Coefficient d'échange convectif à la surface libre du verre	15 W/m ² .K
Type du verre	Clair
Positions des capteurs K_1 , K_2 et K_3	13,84 m, 19,08 m et 33,53 m
Maillage $N_y \times N_x$	70 $\times$ 250
Température de fusion (T_m)	1500K
Entrée des matières premières	453,6 tonnes/jour

TAB. 4.1 – Caractéristiques du four

Nous étudions les transferts de chaleur dans le plan médian ($W/2$). Dans le paragraphe suivant nous comparons les températures obtenues avec la MVF et le MRM avec celles mesurées par les capteurs (K_1 , K_2 et K_3). Nous présentons aussi le champ de températures et lignes de courant dans le plan médian ($W/2$).

4.6.2 Résultats

Les figures 4.26 (a), (b) et (c) représentent l'évolution de la température en fonction de la profondeur du bain de verre à différentes positions (K_1 , K_2 et K_3). Les températures calculées par la MVF sont proches des valeurs expérimentales. Le faible écart observé dans la position K_3 peut être dû à l'analyse bidimensionnelle d'un problème à trois dimensions.

Les températures obtenues par le MRM sont éloignées de la solution expérimentale, à l'exception des zones proches de la surface libre. Ce comportement est imputable à la nouvelle condition aux limites développée pour la surface libre et qui permet une bonne prédiction de la température dans cette région. Les valeurs déterminées loin de cette limite sont erronées du fait que le modèle de Rosseland ne tient pas compte de l'émissivité des parois. Comme nous l'avons évoqué dans le paragraphe §4.4 ; le MRM est très efficace pour des parois noires ($\epsilon_w = 1$). Il est clair que l'adaptation des conditions aux limites, pour les parois non-noires, est impératif pour améliorer les résultats lors de l'utilisation du MRM.

Les champs de températures bidimensionnels et les lignes de courant sont représentés figure 4.27 (a). Nous observons une stratification du champ de températures dans toutes les régions du bain de verre à l'exception de la zone située en-dessous du batch. L'absorption de la chaleur à l'interface où le verre fond est responsable de la diminution des températures. La couverture de cette région par le batch, qui fait écran au rayonnement issu des flammes, contribue aussi au refroidissement.

La figure 4.27 (b) représente les lignes de courant dans le bain de verre. Nous distinguons des boucles de recirculation. Ce type de boucles a été observé et modélisé par plusieurs auteurs [97, 98]. Ces rouleaux ont un effet bénéfique s'ils augmentent le temps de séjour du verre dans

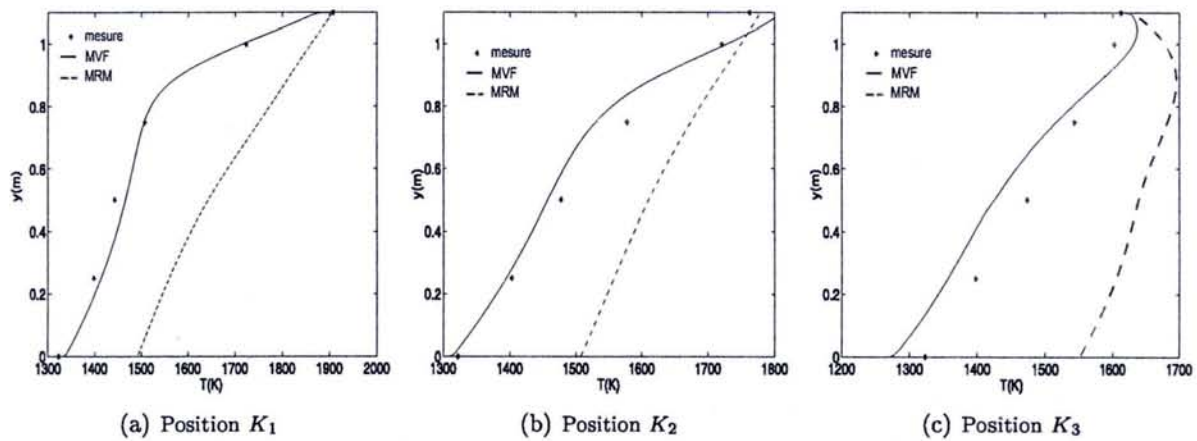


FIG. 4.26 – Températures dans la profondeur de bain, calculées par la MVF, le MRM et mesurées [103]

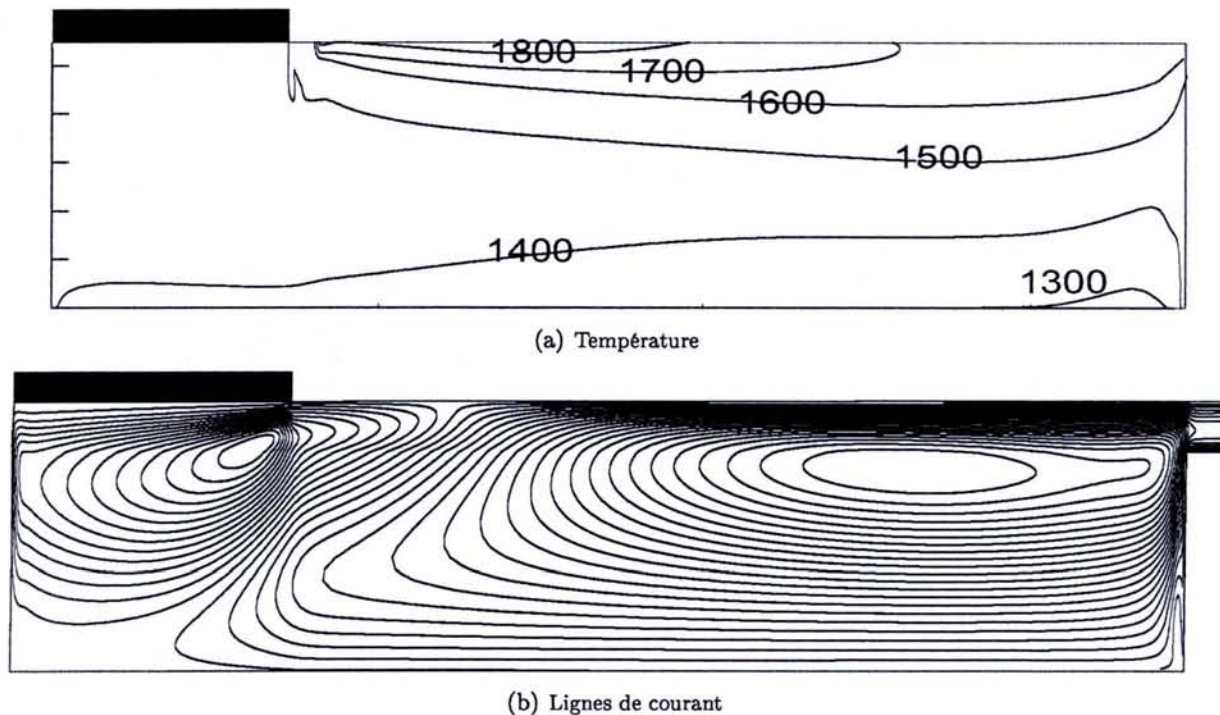


FIG. 4.27 – Champs de température et lignes de courant (MVF)

le four, apportant plus de brassage et d'affinage. Ils contribuent de façon prépondérante à l'homogénéisation de la température dans le bain de verre.

Enfin, nous présentons, sur les figures 4.28 (a), (b), (c) et (d) les profils des vitesses horizontale et verticale caractéristiques de la dynamique de bain. Dans le cadre d'une étude utilisant le même four Hayes et al [104] ont montré que la vitesse maximale à la surface libre est égale à 6,7 mm/s. Les figures 4.28 (c) et (d) indiquent que nos résultats sont du même

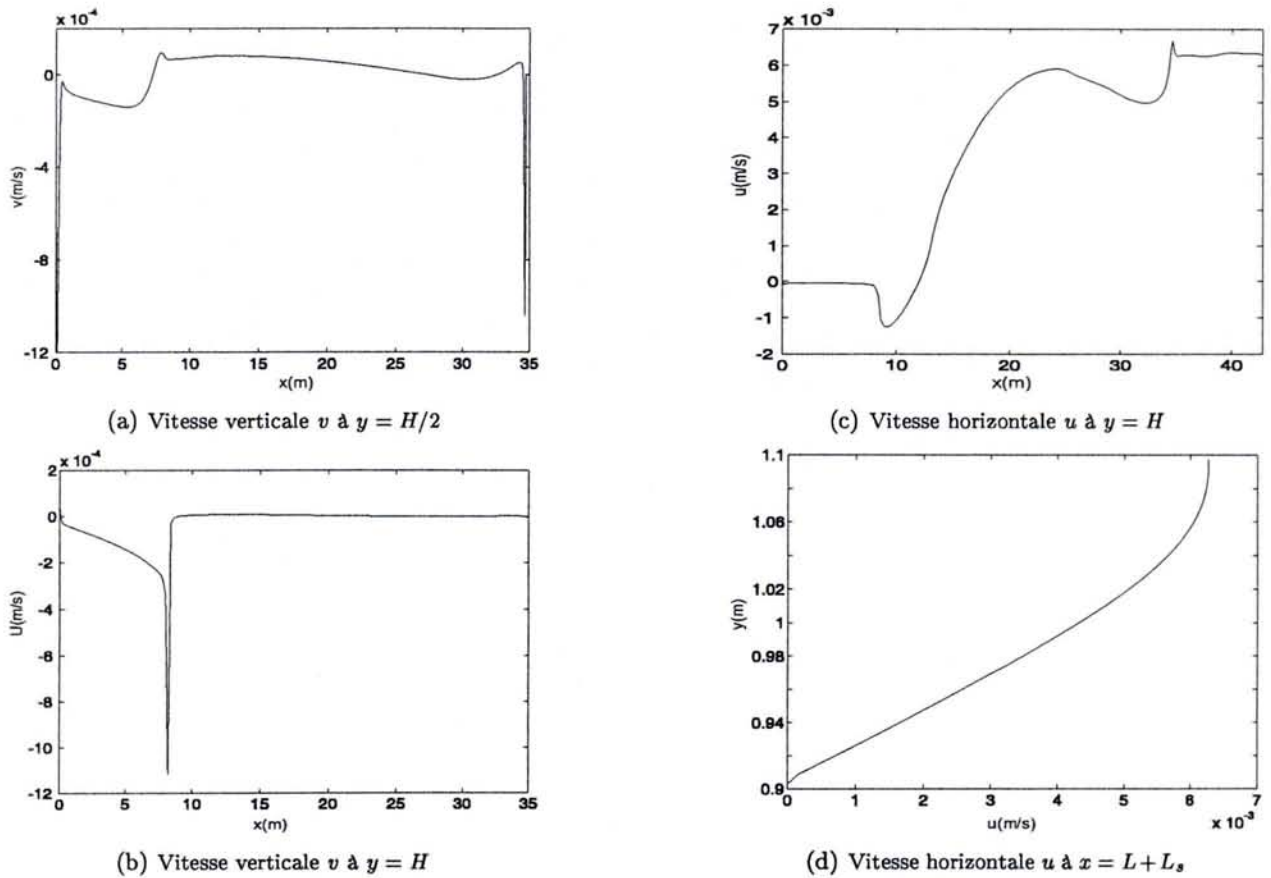


FIG. 4.28 – Vitesses caractéristiques dans le bain de verre

ordre de grandeur. De plus, leurs allures respectent bien la physique des fours verriers. La vitesse verticale est visualisée à deux positions (Fig. 4.28 (a) et (b)) ; à la surface libre et à mi-hauteur du bain. La vitesse v à la surface libre est caractéristique du débit de matière première fondue allant du batch vers le bain. L'effet de la convection naturelle est clairement observé sur la vitesse horizontale à la mi-hauteur.

Conclusion

La maîtrise du procédé de fabrication des produits issus du verre nécessite une bonne connaissance de la température à différents niveaux : d'une part dans les fours verriers lors de l'élaboration de la matière première, d'autre part dans les outils de production (moules, laminoirs, ...). Étant donné les températures élevées qui y règnent, la simulation numérique représente une voie privilégiée pour parvenir à une bonne maîtrise de la chaîne de production. Sensibilisé à ces problématiques par différents acteurs industriels (Saint GOBAIN, l'ONERA) et institutionnel (REVELOR), le LEMTA a développé un modèle de transfert de chaleur couplé associant rayonnement et conduction. Les travaux de D. Lacroix [23] basés sur la Méthode aux Ordonnées Discrètes (MOD), ont constitué, au sein de l'équipe, une première tentative de simulation de la thermique dans les verres à haute température, pour des géométries de petites dimensions.

Cette première étude n'était pas suffisante puisqu'elle ne permettait pas de prendre en compte les dimensions réelles du bain de verre. De plus, dans ces travaux préliminaires, les phénomènes de convection (dynamique du bain) n'ont pas été considérés du fait de la complexité à apporter à la modélisation.

L'objectif de cette thèse porte sur la modélisation des transferts de chaleur couplés (conduction, convection et rayonnement) permettant de simuler avec une bonne précision l'énergétique d'un bain de verre de dimensions réelles.

Pour atteindre cet objectif, nous avons en premier lieu développé un modèle conducto-radiatif basé sur la Méthode des Volumes Finis (MVF). Une étude comparative des différentes approches numériques a montré qu'il existait des écarts importants entre les résultats obtenus par le Modèle de Rosseland (MR) d'une part et la MOD ainsi que la MVF d'autre part. Le MR sous-estime considérablement la température dans la plupart des cas étudiés. En revanche, la MOD ne surestime cette grandeur que pour des configurations multidimensionnelles dans les bains de verre de grandes dimensions.

Cependant, pour obtenir des résultats satisfaisants en ce qui concerne les flux et la température, la MVF nécessite d'être associée à une relation de fermeture performante pour la simulation du problème radiatif. Au cours de ce travail, nous avons comparé l'influence de cinq relations de fermeture de complexité croissante. Il s'agit des schémas suivants : STEP, Positif, Exponentiel, Diamant et Exponentiel Modifié.

Les trois premières approches ont montré l'existence de diffusion numérique due à la forte dépendance vis-à-vis du type et de la densité du maillage utilisé. Ces phénomènes purement numériques conduisent à la surestimation de la température et à des oscillations du flux de chaleur. L'augmentation de la densité du maillage fait disparaître ces lacunes mais s'accompagne

d'un accroissement logique du temps de calcul.

L'instabilité des schémas aux différences centrées a été confirmée par l'obtention de luminances négatives générées avec le schéma Diamant. Ce phénomène contraire à la physique rend ce schéma non fiable pour la modélisation du transfert radiatif dans le verre, en particulier pour les géométries multidimensionnelles.

La dernière approche s'avère être la mieux adaptée pour notre application. Toutefois, elle nécessite un nombre important de mailles, à pas constant, pour converger (par exemple, 200 mailles pour $H = 1$ m). L'utilisation de maillages non-uniformes permet de diminuer considérablement le nombre de mailles. Cependant, ce type de maillage a des effets non souhaitables sur les résultats (oscillation du flux).

L'analyse et l'utilisation de ces différentes relations de fermeture nous ont conduits à développer un nouveau schéma (MELT) adapté à la simulation des milieux fortement absorbants. Ceci a permis d'étudier le transfert thermique dans des bains de verre de grandes dimensions en utilisant un nombre de mailles raisonnable (diminution d'un facteur dix). Cette approche a montré son efficacité pour tous les types de maillages que nous avons mis en œuvre. C'est pourquoi nous avons retenu l'approche MELT pour aborder le problème du couplage convection-rayonnement au sein du verre fondu. Cette méthode nous semble offrir un compromis intéressant entre la précision des résultats obtenus et le coût en temps de calcul nécessaire à l'obtention de la solution.

L'étape suivante du travail entrepris a consisté à simuler la dynamique du bain de verre. Les processus convectifs décrits par les équations de Navier-Stokes ont également été traités par la MVF. Comme pour l'étude du transfert radiatif, nous avons mené une analyse très fine de plusieurs schémas de discrétisation dédiés à la mécanique des fluides. Cette synthèse a été centrée sur la stabilité et la rapidité des schémas couramment utilisés par la MVF pour le transfert de masse et de chaleur. À l'issue de cette étude, nous avons développé une nouvelle formulation du schéma Quick. Cette dernière s'avère plus rapide et plus stable que les formulations déjà publiées dans la littérature (à notre connaissance) : elle permet notamment une réduction de 30% du temps de calcul pour une précision donnée.

Notre modèle convectif a été validé à partir des données de la littérature pour plusieurs phénomènes tels que la convection forcée, naturelle en présence d'effets de thermocapillarité dans un milieu de référence. L'interaction de la convection naturelle et du transfert radiatif a également fait l'objet d'une validation.

Dans le dernier chapitre de ce mémoire, nous avons combiné les trois modes de transfert thermique pour modéliser le four. Étant donné l'emploi fréquent du MR pour ce type de simulation, il nous a semblé pertinent de l'utiliser aussi afin d'en évaluer ses performances. Un travail préliminaire a permis de discuter des limites du modèle de Rosseland standard ainsi que sa version corrigée par Howell et Goldstein à travers une comparaison de nos résultats avec ceux publiés par Saint GOBAIN Recherche. Il apparaît que la principale difficulté porte sur la prise en compte des phénomènes de réflexion et de transmission à l'interface semi-transparente. Afin de contourner ce problème, nous avons proposé une nouvelle formulation de cette condition aux limites, le Modèle de Rosseland Modifié (MRM).

Par ailleurs, afin de nous approcher de la réalité, nous avons étudié l'influence de différentes configurations de chauffage dans les fours verriers. Les résultats ainsi obtenus, sur la température et la dynamique du verre fondu dans le bain, attestent l'importance de ce paramètre.

La dynamique du bain (boucles de recirculation) est directement influencée par le profil de la flamme. Les boucles de convection naturelle ont tendance à homogénéiser la température du verre fondu surtout dans les régions éloignées de la surface libre du bain. Pour des parois noires, nous avons constaté que le MRM donne des températures très proches de celles obtenues par la MVF. En revanche, les vitesses déterminées en couplant notre problème avec le MRM peuvent être entachées d'une erreur dépassant les 50% dans certains cas.

La dernière étude entreprise tient compte de l'injection de matières premières à la surface du bain et du phénomène de fusion (modèle de batch). Elle reprend les paramètres de fonctionnement d'un four instrumenté (four Ford de Nashville). Les résultats de couplage de nos deux modèles basés sur la MVF sont en accord global avec l'expérience. Toutefois, les températures calculées par le MRM montrent des erreurs relativement importantes à proximité de la paroi. Cet écart est dû à la faiblesse du MRM au voisinage des frontières opaques non noires. Cette dernière modélisation confirme une fois encore la faiblesse des modèles simplifiés pour la simulation précise des transferts radiatifs dans les verres à haute température.

Nos résultats, bien qu'ils soient en accord avec les solutions semi-analytiques et les valeurs expérimentales de diverses études, sont pour l'instant limités à des configurations géométriques bidimensionnelles. Conscients des limites de cette hypothèse relativement aux préoccupations du milieu industriel, nous travaillons actuellement sur un modèle tridimensionnel et avons d'ores et déjà obtenu quelques résultats préliminaires.

Une seconde amélioration importante à apporter à notre modèle concerne le modèle de batch. Ce dernier établit la quantité de verre entrant dans le four. La prise en compte des réactions chimiques ainsi que l'écoulement diphasique induit par la fusion de la matière première nous rapprocheront de la réalité physique.

Enfin, pour aborder très précisément les problèmes de transfert de chaleur dans les fours verriers, un bon modèle de la chambre de combustion est nécessaire. Il conviendrait donc de coupler les trois modèles (bain, batch et chambre de combustion) pour parvenir à un résultat "idéal".

Annexe A

Quadratures angulaires

Cosinus directeurs d'un vecteur

Le produit scalaire entre le vecteur $\vec{\Omega}$ et les vecteurs unitaires du repère cartésien ($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) nous donne les cosinus directeurs. Ces quantités apparaissent lors de l'intégration de l'ETR sur le volume de contrôle où dans la relation donnant la puissance rayonnée (1.17). Nous les calculons pour une direction donnée :

$$\begin{aligned}\eta &= \vec{\Omega} \cdot \vec{e}_x = \sin \theta \cos \varphi \\ \xi &= \vec{\Omega} \cdot \vec{e}_y = \sin \theta \sin \varphi \\ \mu &= \vec{\Omega} \cdot \vec{e}_z = \cos \theta\end{aligned}\tag{A.1}$$

ils vérifient notamment que :

$$\eta^2 + \xi^2 + \mu^2 = 1\tag{A.2}$$

Nous pouvons donc écrire l'éq. 1.21, sous la forme réduite :

$$\vec{\Omega} = \eta \vec{e}_x + \xi \vec{e}_y + \mu \vec{e}_z\tag{A.3}$$

En ce qui concerne la MVF, celle-ci se base sur la forme intégrée des cosinus directeurs dans le domaine délimité par l'angle solide de contrôle. Nous calculons ces grandeurs de la façon suivante :

$$C_x^m = \int_{\Delta\Omega} \vec{\Omega} \cdot \vec{e}_x d\Omega = \int_{\varphi^-}^{\varphi^+} \cos \varphi d\varphi \int_{\theta^-}^{\theta^+} \sin^2 \theta d\theta\tag{A.4}$$

$$C_y = \int_{\Delta\Omega} \vec{\Omega} \cdot \vec{e}_y d\Omega = \int_{\varphi^-}^{\varphi^+} \sin \varphi d\varphi \int_{\theta^-}^{\theta^+} \sin^2 \theta d\theta\tag{A.5}$$

$$C_z = \int_{\Delta\Omega} \vec{\Omega} \cdot \vec{e}_z d\Omega = \int_{\varphi^-}^{\varphi^+} d\varphi \int_{\theta^-}^{\theta^+} \sin \theta \cos \theta d\theta\tag{A.6}$$

Ces intégrales peuvent être calculées et nous écrivons :

$$C_x = (\sin \varphi^+ - \sin \varphi^-) \left[\frac{\theta^+ - \theta^-}{2} - \frac{\sin 2\theta^+ - \sin 2\theta^-}{4} \right] \quad (\text{A.7})$$

$$C_y = (\cos \varphi^- - \cos \varphi^+) \left[\frac{\theta^+ - \theta^-}{2} - \frac{\sin 2\theta^+ - \sin 2\theta^-}{4} \right] \quad (\text{A.8})$$

$$C_z = -(\varphi^+ - \varphi^-) [\cos \theta^+ - \cos \theta^-] \quad (\text{A.9})$$

Nous définissons d'autres quantités angulaires, N_{ij} qui apparaissent lors de la résolution de l'ETR par la MVF en utilisant la relation de fermeture Exponentielle Modifiée (paragraphe (1.5.3)). Ces quantités représentent l'intégration du double produit scalaire de la grandeur $(\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_i)(\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_j)$, qui intervient dans certaines formes de l'écriture des relations de fermeture. Autrement dit, c'est l'intégration de deux cosinus directeurs.

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \int_{\Delta\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_x)^2 d\Omega = \int_{\Delta\Omega} \eta^2 d\Omega = \int_{\varphi^-}^{\varphi^+} \cos^2 \varphi d\varphi \int_{\theta^-}^{\theta^+} \sin^3 \theta d\theta \\ N_{yy} &= \int_{\Delta\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_y)^2 d\Omega = \int_{\Delta\Omega} \xi^2 d\Omega = \int_{\varphi^-}^{\varphi^+} \sin^2 \varphi d\varphi \int_{\theta^-}^{\theta^+} \sin^3 \theta d\theta \\ N_{zz} &= \int_{\Delta\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_z)^2 d\Omega = \int_{\Delta\Omega} \mu^2 d\Omega = \int_{\varphi^-}^{\varphi^+} d\varphi \int_{\theta^-}^{\theta^+} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

et

$$\begin{aligned} N_{xy} &= N_{yx} = \int_{\Delta\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_x) (\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_y) d\Omega = \int_{\Delta\Omega} \eta \xi d\Omega \\ N_{xz} &= N_{zx} = \int_{\Delta\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_x) (\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_z) d\Omega = \int_{\Delta\Omega} \eta \mu d\Omega \\ N_{yz} &= N_{zy} = \int_{\Delta\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_y) (\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_z) d\Omega = \int_{\Delta\Omega} \xi \mu d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

après intégration nous obtenons :

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \left(\frac{\varphi^+ - \varphi^-}{2} + \frac{\sin 2\varphi^+ - \sin 2\varphi^-}{4} \right) \\ &\quad \times \left[\frac{3}{4} (\cos \theta^- - \cos \theta^+) - \frac{1}{12} (\cos 3\theta^- - \cos 3\theta^+) \right] \\ N_{yy} &= \left(\frac{\varphi^+ - \varphi^-}{2} - \frac{\sin 2\varphi^+ - \sin 2\varphi^-}{4} \right) \\ &\quad \times \left[\frac{3}{4} (\cos \theta^- - \cos \theta^+) - \frac{1}{12} (\cos 3\theta^- - \cos 3\theta^+) \right] \\ N_{zz} &= (\varphi^+ - \varphi^-) \frac{1}{3} (\cos 3\theta^- - \cos 3\theta^+) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

et

$$\begin{aligned} N_{xy} &= N_{yx} = \left(\frac{\sin^2 \varphi^+ - \sin^2 \varphi^-}{2} \right) \left(\frac{\theta^+ - \theta^-}{2} - \frac{\sin 2\theta^+ - \sin 2\theta^-}{4} \right) \\ N_{xz} &= N_{zx} = (\sin \varphi^+ - \sin \varphi^-) (\sin^2 \theta^+ - \sin^2 \theta^-) \\ N_{yz} &= N_{zy} = (\cos \varphi^- - \cos \varphi^+) (\sin^2 \theta^+ - \sin^2 \theta^-) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

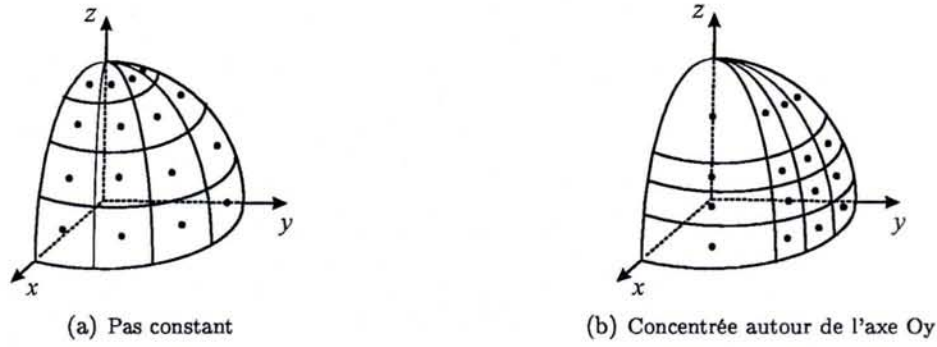


FIG. A.1 – Discrétisation angulaire $N_\theta \times N_\varphi = 8 \times 16$

Discrétisation de MVF à pas constant

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N_\varphi} \quad \varphi_1 = \frac{\Delta\varphi}{2} \quad \varphi_i = \varphi_{i-1} + \frac{\Delta\varphi}{2} \quad 1 \leq i \leq N_\varphi \quad (\text{A.14})$$

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{N_\theta} \quad \theta_1 = \frac{\Delta\theta}{2} \quad \theta_j = \theta_{j-1} + \frac{\Delta\theta}{2} \quad 1 \leq j \leq N_\theta \quad (\text{A.15})$$

Discrétisation de MVF concentrée autour de l'axe Oy

$$\Delta\varphi_1 = \frac{2\pi}{8} \quad \varphi_1 = \frac{\Delta\varphi_1}{2} \quad i = 1 \quad (\text{A.16})$$

$$\Delta\theta_1 = \frac{\pi}{4} \quad \theta_1 = \frac{\Delta\theta_1}{2} \quad j = 1 \quad (\text{A.17})$$

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta\varphi_1}{\frac{N_\varphi}{4} - 1} \quad \varphi_i = \varphi_{i-1} + \frac{\Delta\varphi}{2} \quad 1 \leq i \leq \frac{N_\varphi}{4} \quad (\text{A.18})$$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta\theta_1}{\frac{N_\theta}{2} - 1} \quad \theta_j = \theta_{j-1} + \frac{\Delta\theta}{2} \quad 1 \leq j \leq \frac{N_\theta}{2} \quad (\text{A.19})$$

L'angle solide de contrôle $\Delta\Omega$ (fig. 1.3) et sa valeur discrétisée sont définis par :

$$\begin{aligned} \Delta\Omega &= \int_{\Delta\Omega} d\Omega = \int_{\varphi^-}^{\varphi^+} d\varphi \int_{\theta^-}^{\theta^+} \sin\theta d\theta \\ \Delta\Omega &= (\varphi^+ - \varphi^-) (\cos\theta^- - \cos\theta^+) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

avec

$$\varphi^- = \varphi - \frac{\Delta\varphi}{2}; \quad \varphi^+ = \varphi + \frac{\Delta\varphi}{2}; \quad \theta^- = \theta - \frac{\Delta\theta}{2}; \quad \theta^+ = \theta + \frac{\Delta\theta}{2} \quad (\text{A.21})$$

Discrétisation S_8

Direction m	$\mu(m)$	$\xi(m)$	$\eta(m)$	$w(m)$
1	0.970974	0.169127	0.169127	0.146138
2	0.798788	0.169127	0.577350	0.159838
3	0.798788	0.577350	0.169127	0.159838
4	0.577350	0.169127	0.798788	0.159838
5	0.577350	0.577350	0.577350	0.173346
6	0.577350	0.798788	0.169127	0.159838
7	0.169127	0.169127	0.970974	0.146138
8	0.169127	0.577350	0.798788	0.159838
9	0.169127	0.798788	0.577350	0.159838
10	0.169127	0.970974	0.169127	0.146138

TAB. A.1 – Cosinus directs et poids de la quadrature S_8 pour le premier octant

Discrétisation DCT_{111}

Direction m	$\mu(m)$	$\xi(m)$	$\eta(m)$	$w(m)$
1	1.80464780e-001	1.80464780e-001	9.66884130e-001	0.71430026e-001
2	5.35621980e-001	2.04174670e-001	8.19403310e-001	1.92713914e-001
3	2.04174670e-001	5.35621980e-001	8.19403310e-001	1.92713914e-001
4	8.19403310e-001	2.04174670e-001	5.35621980e-001	1.92713914e-001
5	5.77350269e-001	5.77350269e-001	5.77350269e-001	2.00224182e-001
6	2.04174670e-001	8.19403310e-001	5.35621980e-001	1.92713914e-001
7	9.66884130e-001	1.80464780e-001	1.80464780e-001	0.71430026e-001
8	8.19403310e-001	5.35621980e-001	2.04174670e-001	1.92713914e-001
9	5.35621980e-001	8.19403310e-001	2.04174670e-001	1.92713914e-001
10	1.80464780e-001	9.66884130e-001	1.80464780e-001	0.71430026e-001

TAB. A.2 – Cosinus directs et poids de la quadrature DCT_{111} pour le premier octant

Annexe B

Quadratures spectrales

N° de bande	$\lambda(\mu m)$	$\Delta\lambda(\mu m)$	n	k	κ^{-1}
1	0.5	0.5	1.520	$1.39260575187225E-07$	3.5
2	1.0	0.5	1.485	$4.77464829213342E-06$	60
3	1.5	0.5	1.463	$3.93908484101007E-06$	33
4	2.0	0.5	1.447	$4.13802851984896E-06$	26
5	2.5	0.5	1.428	$5.96831036516678E-06$	30
6	3.0	0.5	1.410	0.000071619724382001	300
7	3.5	0.5	1.395	0.000105838037142291	380
8	4.0	0.5	1.375	0.000098676064704091	310
9	4.5	0.5	1.352	0.000286478897528005	800
10	5.0	0.5	1.324	0.002984155182583390	7500

TAB. B.1 – Quadratures spectrales pour le verre clair

N° de bande	$\lambda(\mu m)$	$\Delta\lambda(\mu m)$	n	k	κ^{-1}
1	0.5	0.5	1.528	$9.096E-07$	11,42283
2	1.0	0.5	1.514	$1.897E-05$	238.3841
3	1.5	0.5	1.508	$1.762E-05$	147.6130
4	2.0	0.5	1.501	$1.076E-05$	67.6071
5	2.5	0.5	1.494	$1.838E-05$	92.3880
6	3.0	0.5	1.485	$1.067E-04$	446.9439
7	3.5	0.5	1.474	$1.473E-04$	528.8647
8	4.0	0.5	1.463	$1.474E-04$	463.0708
9	4.5	0.5	1.449	$4.669E-04$	$1.3038E+03$
10	5.0	0.5	1.3241	0.0422	$1.0606E+05$

TAB. B.2 – Quadratures spectrales pour le verre vert

Annexe C

Règles de stabilité des schémas

Règle 1 : Uniformité des flux aux interfaces du volume de contrôle

Quand une interface est commune à deux volumes de contrôles adjacents, le flux à travers cette interface doit être représenté par la même expression, pour les deux volumes de contrôle. En utilisant les notations de la figure 3.2, cette règle exige :

$$\begin{aligned}(\phi_e)_i &= (\phi_w)_{i+1} \\ (\phi_e)_{i-1} &= (\phi_w)_i\end{aligned}\tag{C.1}$$

L'application de cette loi aux valeurs de ϕ_e et ϕ_w données par les relations 3.46 et 3.47 implique que :

$$a_1 = 0 \quad a_2 = a_3 \quad a_3 = b_2 \quad b_3 = 0\tag{C.2}$$

La colonne R_1 dans le tableau récapitulatif C.1 montre que toutes les formulations du schéma Quick ne satisfont pas rigoureusement cette règle de stabilité élémentaire.

Règle 2 : Positivité des coefficients de l'équation discrétisée

L'équation 3.50 montre que la valeur de ϕ_P est influencé par les valeurs prises par ϕ aux centres des volumes de contrôle adjacents. Le transfert convectif et diffusif implique qu'une augmentation de ϕ en un point doit mener à une augmentation de ϕ aux nœuds voisins. En résumé, si ϕ_E ou ϕ_W croît, il en va de même pour ϕ_P . Il en résulte que les coefficients a_P , a_E et a_W doivent être positifs.

$$a_W \geq 0 \quad a_P \geq 0 \quad a_E \geq 0\tag{C.3}$$

Nous utilisons ces inégalités avec les relations 3.51 qui sont employées pour exprimer les coefficients a_P , a_E et a_W . Il en résulte de nouvelles inégalités.

$$b_1 \geq a_1 - \frac{1}{P_e} \quad a_2 \geq b_2 - \frac{2}{P_e} \quad b_3 \geq a_3 - \frac{1}{P_e}\tag{C.4}$$

Avec l'hypothèse d'un flux de masse grand devant le flux diffusif ($P_e \rightarrow \infty$ si $D \ll F$), Hayase a réduit ces inégalités à :

$$b_1 \geq a_1 \quad a_2 \geq b_2 \quad b_3 \geq a_3\tag{C.5}$$

Toutefois, dans certaines régions de l'écoulement le nombre de Peclet P_e peut être inférieur à 2, et l'approche CDS peut être utilisée pour différencier ϕ . Dans ce cas les inégalités C.4 deviennent :

$$b_1 \geq a_1 - \frac{1}{2} \quad a_2 \geq b_2 - 1 \quad b_3 \geq a_3 - \frac{1}{2} \quad (\text{C.6})$$

Règle 3 : La dérivée première du terme source linéarisé doit être négative

En utilisant la technique de linéarisation du terme source S proposée par Patankar, on écrit :

$$S = S_c + S_P \phi_P \quad (\text{C.7})$$

Donc, le coefficient a_P donné par la relation 3.52 devient :

$$a_P = a_E + a_W + a_0 - S_P \quad (\text{C.8})$$

Pour éviter l'éventualité où $a_P < 0$ (violation de règle 2), due à une grande valeur positive de S_P . La règle 3 exige : $S_P \leq 0$. Toutefois, la linéarisation du terme source ne dépend pas d'un schéma de discrétisation particulier. Ceci fait que tous les schémas doivent satisfaire à la règle 3. Ainsi, la règle ne joue pas un rôle immédiat pour la détermination des coefficients optimum du schéma Quick.

Règle 4 : La somme des coefficients a_i des cellules voisines doit être égale au coefficient a_P de la cellule principale

Cette règle exige :

$$a_P = a_E + a_W \quad (\text{C.9})$$

Elle est la conséquence du fait que ϕ et $\phi + C$ (où C est une constante) doivent vérifier la forme différentielle discrétisée de l'équation de transport (éq. 3.50). Dans le cas où le terme source est défini comme une fonction de ϕ , cette règle n'est plus vérifiée. Le respect de cette loi est indispensable pour obtenir des résultats physiquement réalistes. Son application à l'éq. 3.53 donne le critère suivant :

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 \quad (\text{C.10})$$

Règle 5 : La somme des coefficients a_1 , a_2 et a_3 , ainsi que b_1 , b_2 et b_3 est égale à l'unité

Les quatre premières règles (éq. C.2, C.6 et C.10), utilisées pour la formulation généralisée du schéma Quick, vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = b_1 \geq 0 \\ a_3 = b_2 \leq 0 \\ a_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

Hayase et al [65] ont imposé une condition supplémentaire pour améliorer les performances du schéma Quick. Cette condition se traduit par le fait que les valeurs de ϕ_e et ϕ_w sont exprimables

en fonction des valeurs de ϕ et des des termes source, dans les cellule voisines. On obtient alors deux conditions de normalisation pour les termes a_i et b_i , telles que :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 a_j &= 1 & a_j &\geq 0 \\ \sum_{j=1}^3 b_j &= 1 & b_j &\geq 0 \end{aligned} \quad (C.12)$$

Le couplage de la condition additionnelle (C.12) et des relations C.11 conduit à la détermination non ambiguë des coefficients généralisés du schéma Quick proposée par cet auteur.

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= b_1 = 1 \\ a_3 &= b_2 = 0 \\ a_3 &= 0 \end{aligned} \quad (C.13)$$

Toutefois les relations C.11 peuvent prendre une autre forme quand le nombre de Peclet local est tel que : $P_e \leq 2$. Nous réécrivons ces équations en utilisant les conditions fixées par l'éq. C.6 dans la règle 2.

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 &= 0 \leq b_1 + \frac{1}{2} \\ a_2 &= b_1 \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a_2 = b_1 \geq b_2 - 1 \\ a_3 &= b_2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow a_3 = b_2 \leq a_2 + 1 \\ b_3 &= 0 \leq a_3 + \frac{1}{2} \end{aligned} \right. \quad (C.14)$$

Parmi Ces solutions nous avons choisi les valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= b_1 = \frac{1}{2} \\ a_3 &= b_2 = \frac{1}{2} \\ a_3 &= 0 \end{aligned} \right. \quad (C.15)$$

Données récapitulatives

Nous donnons les coefficients a et b obtenus par les différents auteurs dans le tableau suivant (Tab. C.1). Nous avons aussi reporté l'aptitude des diverses approches à respecter les cinq règles énoncées ci-dessus.

Auteurs	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
Leschziner (1980)	$-1/8$	$6/8$	$3/8$	$6/8$	$3/8$	0	P	P	O	N	P
Han et al (1981)	0	$6/8$	$4/8$	$4/8$	$3/8$	0	N	P	O	N	P
Pollard et al (1982)	$-1/8$	$7/8$	$-6/8$	$6/8$	$-6/8$	0	N	O	O	O	N
Freitas et al (1985)	$-1/8$	$6/8$	$-1/8$	$6/8$	$3/8$	0	N	O	O	N	N
Hayase et al (1992)	0	1	0	1	0	0	O	O	O	O	O
Berour et al (2005) $ P_e \leq 2$	0	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	0	O	O	O	O	O
$ P_e \geq 2$	0	1	0	1	0	0	O	O	O	O	O

TAB. C.1 – Schéma Quick ; coefficients et respect des 5 règles (O : Oui, N : Non, P : Partiellement)

Bibliographie

- [1] S. Rosseland. Theoretical astrophysics. atomic theory and the analysis of stellar atmospheres and envelopes. *Chem. Phys. Lett.*, 1936.
- [2] K.H. Lee and R. Viskanta. Two-dimensional combined conduction and radiation heat transfer : comparison of the discrete ordinates method and the diffusion approximation methods. *Numerical Heat Transfer Part A*, 39 :205–225, 2001.
- [3] K.H. Lee and R. Viskanta. Comparison of the diffusion approximation and the discrete ordinates method for the investigation of heat transfer in glass. *Glastech. Ber. Glass Sci. Technol.*, 72(8) :254–265, 1999.
- [4] J.R. Howell and M.E. Goldstein. Effective slip coefficients for coupled conduction radiation problems. *J. Heat Transf.*, 91 :165–166, 1969.
- [5] R. G. Deissler. Diffusion approximation for thermal radiation in gases with jump boundary conditions. *J. Heat Transf.*, 86 :240–246, 1964.
- [6] L. Pierrot. Accuracy of rosseland approximation in toy models of glass tanks. In *XXth International Congress on Glass*, pages 59–74. XX ICG , Kyoto Japon, 2004.
- [7] K. B. Cheong, K. M. Moon, and T. H. Song. Treatment of radiative transfer in glass melts : validity of rosseland and p-1 approximations. *Physics and Chemistry of glasses*, 40 :266–33, 1999.
- [8] F. C. Lockwood and N. G. Shah. A new radiation solution method for incorporation in general combustion prediction procedures. In *Proceedings of the Eighteenth International Symposium on Combustion*, pages 1405–1413. The Combustion Institute, 1981.
- [9] V. Feldheim. *Simulation numérique des transferts thermiques combinés ; conduction-convection-rayonnement dans les domaines complexes*. PhD thesis, Faculté Polytechnique de Mons, 2002.
- [10] V. Feldheim and P. Lybaert. Solution of radiative heat transfer problems with the discrete transfer method applied to triangular meshes. *J. Computa. and Appl.Math.*, 168(1-2) :179–190, 2004.
- [11] J. Fleck. The calculation of nonlinear radiation transport by a monte carlo method. In *Methods in Computational Physics*, pages 43–65. Ed. B. Alder, S. Fernbach and M. Rotenberg. New York and London : Academic Press 1, 1963.
- [12] M.F. Modest. Two-dimentional radiative equilibrium of a grey medium in a plane layer bounded by non-isothermal walls. *J. Heat Transf.*, 96(c) :483–488, 1999.
- [13] S. Chandrasekhar. *Radiative transfer*. Oxford : Clarendon Press, 1950.
- [14] G.D. Raithby and E.H. Chui. A finite-volume method for predicting a radiant heat transfer in enclosures with participating media. *J. Heat Transf.*, 112 :415–423, 1990.

- [15] G.D. Raithby and E.H. Chui. Computation of radiant heat transfer on a nonorthogonal mesh using the finite-volume method. *Numerical Heat Transfer Part B*, 23 :269–288, 1993.
- [16] R. Koch and R. Becker. Evaluation of quadrature schemes for the discrete ordinate method. In *Eurotherm Seminar 73*, pages 59–74. Mons, april 15-17, 2003.
- [17] M. Kim and S.Baek. Analysis of radiative transfer in cylindrical enclosures using the finite volume method. *J. Thermophysics and Heat Transfer*, 11(2) :246–252, 1997.
- [18] G.D. Raithby. Discusion of the finite-volume method for radiation and its aplication using 3d unstructured meshes. *Numerical Heat Transfer Part B*, B(35) :389–405, 1999.
- [19] B.G. Carlson and K.D. Lathrop. Chap.3, transport theory - the method of discrete ordinates. In *Computing methods in reactors physics*. Gordon and Breach New York, 1968.
- [20] K. Il-kyoung and K. Woo-Seung. A hybrid spatial differencing scheme for discrete ordinates method in 2d rectangular enclosures. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 44 :515–586, 2001.
- [21] J.C. Chai, H.O. Lee, and S.V. Patankar. Finite volume method for for radiation heat transfer. *J. Thermophysics and Heat Transfer*, 8(3) :419–425, 1994.
- [22] S.V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation, 1980.
- [23] D. Lacroix, G. Parent, F. Asllanaj, and G. Jeandel. Coupled radiative and conductive heat transfer in a non-grey absorbing and emitting semitransparent media under collimated radiation. *J. Quant. Spect. Rad. Tran.*, 75 :589–609, 2002.
- [24] J.P. Nougier. *Méthodes de calcul numérique*. Masson, 1989.
- [25] R.W. Hornbeck. *Numerical Methods*. Quantum Publishers Inc. New York, 1975.
- [26] M.A. Heaslet and R.F. Warming. Radiative transport and wall temperature slip in absorbing planar medium. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 8 :979–994, 1965.
- [27] R. Siegel and J.R. Howell. *Thermal Radiation Heat Transfer (Third Edition)*. Taylor and Francis, 1992.
- [28] R. Siegel. Analytical solution for boundary heat fluxes from a radiating rectangular medium. *J. Heat Transf.*, 113(1) :258–261, 1991.
- [29] M.F. Modest. *Radiative Heat Transfer*. Mc Graw Hill, 1993.
- [30] S. Chan. *Numerical Methodes for multidimensional radiative transfer analysis in participating media*, volume 1. Hemisphere, Waschington, T.C. Chawla edition, 1987.
- [31] R. Viskanta and R.J. Grosh. Heat transfer by simultaneous conduction and radiation in an absorbing medium. *J. Heat Transf.*, 84 :63–72, 1962.
- [32] M. Rubin. Optical properties of soda lime glasses. *Solar Energy Material*, 12 :275–288, 1985.
- [33] V.I. Primenko. Theoretical method of determining the temperature dependence of the thermal conductivity of glasses. *Glass and Ceramic*, 37 :240–242, 1980.
- [34] J. Endrys and D. Turzik. *DIE Temperaturverteilung in Glas beistationarem Zustand*, volume 9. In : 9. Internationale Baustoff-und Silikattagung Weimar, Sektion 5, Hochschule fur Architektur und Bauwesen, Weimar, 1985.

-
- [35] S. Andre and A. Degiovanni. A theoretical study of the transient coupled conduction and radiation heat transfer in glass : phonic diffusivity measurements by the flash technique. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 38 (18) :3401–3412, 1995.
 - [36] D. Mann, R.E. Field, and R. Viskanta. Determination of specific heat and true thermal conductivity of glass from dynamic temperature data. *Wärme und Stoffübertragung*, 27 :225–231, 1992.
 - [37] U. Fotheringham and F.T. Lentes. Active thermal conductivity of hot glass. *Glastech. Ber. Glass Sci. Technol.*, 67(12) :335–342, 1994.
 - [38] R. Viskanta and T.H.Song. On the diffusion approximation for radiation transfer in glass. *Glastech. Ber. Glass Sci. Technol.*, 85(4) :80–86, 1985.
 - [39] J. Endrys, A. Blazek, and J. Edrova. Experimental determination of the effective thermal conductivity of glass by steady-state method. *Glastech. Ber.*, 66(6) :151–157, 1993.
 - [40] R. Viskanta and E.E. Anderson. *Heat transfer in semitransparent solids*, volume 11 of *Advances in Heat Transfer*. New York Acad. Press, 1975.
 - [41] J.C. Chai, H.S. Lee, and S.V. Patankar. Ray effect and flase scattering in the discrete ordinates method. *Numerical Heat Transfer Part B*, 24 :373–389, 1993.
 - [42] J.C. Chai, S.V. Patankar, and H.S. Lee. Evaluation of spatial differencing parctices for the discrete-ordinates method. *J. Thermophysics and Heat Transfer*, 8 :140–144, 1994.
 - [43] P.J. Roache. *Computational Fluid Dynamics*. Hermosa Publishers, Albuquerque NM, 1972.
 - [44] A.J. Baker. *Finite Element Computational Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, New York., 1983.
 - [45] R. Peyret and T.D. Taylor. *Computational Methods for Fluid Flow*. Springer, New York, 1983.
 - [46] D.A. Anderson, J.C. Tannehill, and R.H. Pletcher. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Hemisphere, New York, 1984.
 - [47] C. Hirsch. *Computation of Internal and External Flows*. Vol. 2, Wiley, New York, 1990.
 - [48] C.A.J. Fletcher. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, 1991.
 - [49] W. Shyy. *Computational Modeling for Fluid Flow and Interfacial Dynamics*. Elsevier, Amsterdam, 1994.
 - [50] H.K. Versteeg and W. Malalasekera. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. Longman Scientific and Technical, Harlow, England, 1995.
 - [51] J.H. Ferziger and M. Peric. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3rd Ed., Springer, New York, 2002.
 - [52] B.P. Leonard. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 19 :59–98, 1979.
 - [53] M. Li, T. Tang, and B. Fornberg. A compact fourth-order finite difference scheme for the steady incompressible navier-stokes equations. *Int. J. Numerical Meth. Fluids*, 20 :1137–1151, 1995.
 - [54] M. Li and T. Tang. A compact fourth-order finite difference scheme for unsteady viscous incompressible flows. *Int. J. Numerical Meth. Fluids*, 16(1) :29–45, 2001.

- [55] J. Zhang. Convergence of iterative methods for a fourth-order discretization scheme. *Appl. Math. Lett.*, 10(2) :49–55, 1997.
- [56] M. M. Gupta, R.P. Manohar, and J.W. Stephenson. A single cell high order scheme for the convection-diffusion with variable coefficients. *Int. J. Numerical Meth. Fluids*, 4 :641–651, 1984.
- [57] P.K. Khosla and S.G. Rubin. A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme. 2 :207–209, 1974.
- [58] K. Bohmer and H.J. Stetter. *Defect Correction Methods, Theory and applications*. Springer-Verlag, Wein, 1984.
- [59] R. Courant, E. Isaacson, and M. Rees. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. *Pure and Appl. Math.*, 5 :243–255, 1952.
- [60] D.B. Spalding. A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. *Int. J. Numerical Meth. Engineering*, 5 :551–559, 1972.
- [61] G.D. Raithby. A critical evaluation of upstream differencing applied to problems involving fluid flow. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 9 :75–103, 1976.
- [62] G. de Vahl Davis and G.D. Mallinson. False diffusion in numerical fluid mechanics. In *UNSW School of Mechanical and Industrial Engineering*, pages 87–93. Technical Report 1972/FMT/1, , May 1972.
- [63] G. de Vahl Davis and G.D. Mallinson. A note on natural convection in a vertical slot. *J. Fluid Mechanics*, 72(1) :87–93, 1975.
- [64] G. de Vahl Davis and G.D. Mallinson. An evaluation of upwind and central difference approximations by a study of recirculating flow. *J. Comput. Phys.*, 4 :29–43, 1976.
- [65] T. Hayase, J.A.C. Humphrey, and R. Greif. A consistently formulated quick scheme for fast and stable convergence using finite-volume iterative calculation procedures. *J. Comput. Phys.*, 98 :108–118, 1992.
- [66] C.J. Freitas, R.L. Street, A.N. Findikakis, and J.R. Koseff. Numerical simulation of three dimensional flow in a cavity. *Int. J. Numerical Meth. Fluids*, 5 :561–575, 1985.
- [67] T. Han, J.A.C. Humphrey, and B.E. Launder. A comparison of hybrid and quadratic-upstream differencing in high reynolds number elliptic flows. 29 :81–95, 1981.
- [68] M.A. Leschziner. Practical evaluation of three finite difference schemes for the computation of steady state recirculating flow. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 23 :293–312, 1980.
- [69] A. Pollard and A.L.-W. Siu. The calculation of some laminar flows using various discretisation schemes. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 35 :293–312, 1982.
- [70] F.H. Harlow and J.E. Welch. Numerical calculations of time-dependent viscous incompressible flow of a fluid with a free surface. 8 :2182–2189, 1965.
- [71] S.V. Patankar and D.B. Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15 :1787–1806, 1972.
- [72] V.A.O. Anjorin and I.E. Barton. Removal of temporal and under-relaxation terms from the pressure-correction equation of the simple algorithm. 5 :59–76, 2001.
- [73] J.P. Van Doormal and G.D. Raithby. Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows. *Numerical Heat Transfer*, 7 :147–163, 1984.

-
- [74] R.I. Issa. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *J. Chem. Phys.*, 62 :40–63, 1986.
 - [75] D.S. Jang, R. Jetli, and S. Acharya. Comparison of the piso, simpler, and simplec algorithms for the treatment of the pressure-velocity coupling in steady flow problems. *Numerical Heat Transfer*, 19 :209–228, 1986.
 - [76] K. Ghia and U. Ghia. *Elliptic Systems : Finite Difference Method*. In handbook of Numerical Heat Transfer. :293–346. W.J. Minkowycz, E.M. Sparrow, G.S. and Pletcher, R., editors, 1988.
 - [77] D. de Vahl Davis and I.P. Jones. Natural convection of air in a square cavity : A comparison exercise. *Int. J. Numerical Meth. Fluids*, 3 :227–248, 1983.
 - [78] D. Wan, B. Patnaik, , and G. Wei. A new benchmark quality solution for the bouyancy-driven cavity by discret singular convolution. *Numerical Heat Transfer Part B*, 40 :199–228, 2001.
 - [79] I.P. Jones. A comparison problem for numerical methods in fluid dynamics : The double glazing problem in. *Numerical Meth. in Fluids in Thermal Prob.*, R. W. Lewis and K. Morgan, Pineridge Press, Swansea, UK :338–348, 1979.
 - [80] D. de Vahl Davis. Natural convection of air in a square cavity : A benchmark solution. *Int. J. Numerical Meth. Fluids*, 3 :249–244, 1983.
 - [81] A. Zebib, G.M. Homsy, and E. Meiburg. High marangoni number convection in a square cavity. *Physics of Fluids*, 28 :3467–3476, 1985.
 - [82] R.M. Goody. The influence of radiative transfer on cellular convection. *J. Fluid Mechanics*, 1 :424–435, 1956.
 - [83] E.A. Spiegel. The convective instability of radiating fluid layer. *Astrophys. J.*, 132 :715–728, 1960.
 - [84] G. Lauriat. Combined radiation-convection in gray fluids enclosed in vertical cavities. *J. Heat Transf.*, 104 :609–615, 1982.
 - [85] A. Soufiani and J. Taine. Application of statistical narrow-band model to coupled radiation and convection at high temperature. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 30 (3) :437–447, 1987.
 - [86] A. Soufiani and J. Taine. Experimental and theoretical studies of combined radiative and convective transfer in co₂ and h₂o laminar flows. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 32 (3) :477–486, 1989.
 - [87] L.C. Chang, K.T. Yang, and J.R. Lloyd. Radiation-natural convection interactions in two-dimensional complex enclosures. *J. Heat Transf.*, 105 :89–95, 1983.
 - [88] T. Fusegi. Radiation-convection interaction in in asymmetrically heated square enclosures. In *7th International Heat Transfer Conference*, pages 131–140. IHTC, San Francisco, 17–22 August, 1986.
 - [89] T. Fusegi and F. Bakhtier. Laminar and turbulent natural convection-radiation interactions in a square enclosure filled with a nongray gas. *J. Heat Transf.*, 15 :303–322, 1989.
 - [90] A. Draoui, F. Allard, and C. Beghein. Numerical analysis of heat transfer by natural convection and radiation in participating fluids enclosed in square cavities. *J. Heat Transf.*, 20 :253–261, 1991.

- [91] A. Draoui, F. Allard, and C. Beghein. Numerical analysis of heat transfer by natural convection and radiation in absorbing, emitting and scattering fluids enclosed in square cavities. 10(1-2) :160–177, 1992.
- [92] M. Akiyama and Q. Chong. Numerical analysis of natural convection with surface radiation in square enclosure. *Numerical Heat Transfer Part A*, 32 :419–433, 1997.
- [93] S. Mahapatra, S. Sen, and S. Baek. Numerical analysis of surface radiation and variable property natural convection in a differentially heated square cavity. *Int. J. Numerical Meth. Heat Fluid Flow*, 8(4) :423–443, 1999.
- [94] A. Yucel, S. Acharya, and M.L. Williams. Natural convection and radiation in a square enclosure. *Numerical Heat Transfer Part A*, 15 :271–278, 1989.
- [95] F. Pigeonneau and J.M. Flesselles. Convection laws for glass furnaces revisited. *Verre*, 9 :47–49, 2003.
- [96] M.G. Carvalho, Wang Jian, and M. Nogueira. Numerical simulation of thermal phenomena and particulate emissions in an industrial glass melting furnace. *Funda. Glass Sci. Technol.*, pages 414–421, 1997.
- [97] L. Pilon and R. Viskanta. Bubble transport in three-dimensional laminar gravity-driven flow - numerical results. *Int. J. Non-Method Crystalline Solid*, 336 :85–95, 2004.
- [98] M.G. Carvalho, O. Oliveira, and V. Semiao. A three-dimensional modelling of an industrial glass furnace. *J. of The Institute of Energy*, pages 144–156, 1988.
- [99] O.S. Verheijen. *Thermal and chemical behavior of glass forming batches*. PhD thesis, Eindhoven University of Technology, 2003.
- [100] R. Conradt, P. Suwannathada, and Pimkhaotham. Local temperature distribution and primary melt formation in a melting batch heap. *Glastech. Ber. Glass Sci. Technol.*, 67(5) :103–113, 1994.
- [101] M.G. Carvalho. *Computer simulation of a glass furnace*. PhD thesis, University of London, 1983.
- [102] R.O.S. Prasad, A. Mukhopadhyay, and A Dutta. Implementation of a glass batch melting model in the general purpose three dimensional cdf code fluent. In *Fifth Int. Seminar on Mathematical Simulation in Glass Melting*. Czech republic, 1999.
- [103] A.M. Lankhorst, G.P. Boerstoeel, H.P.H. Muysenberg, and K.K. Koram. Complete simulation of the glass tank and combustion chamber of the former ford nashville float furnace including melter refiner and working end. In *The 4th Sem. On Mathematical in Glass Melting*. Czech Republic, June, 1997.
- [104] R. Robert Hayes, Mardson Q. McQuay Jian Wang, and Brent W. Webb. Predicted and measured glass surface temperature in an industrial, regeneratively gas-fired flat glass furnace. *Glastech. Ber. Glass Sci. Technol.*, 72 :367–377, 1999.

Monsieur BEROUR Nacer

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ, NANCY 1

en MECANIQUE & ENERGETIQUE

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER N°1123

Nancy, le 21 novembre 2005

Le Président de l'Université



Résumé

Ce mémoire de recherche porte sur l'étude des transferts de chaleur couplés associant rayonnement, conduction et convection. Les milieux semi-transparents, non gris, portés à haute température sont étudiés. Une description fine de la physique des phénomènes mis en jeu, nous a conduits à développer plusieurs modèles numériques applicables à de tels matériaux. La résolution de l'équation du transfert radiatif (ETR), des équations de Navier-Stokes et du bilan d'énergie est menée grâce à la méthode des volumes finis (MVF). Le recours à une quelconque solution analytique est impossible compte tenu de la complexité des problèmes considérés. Toutefois, l'emploi de méthodes numériques implique le choix d'un certain nombre d'approximations nécessaires à la reformulation du problème réel. Que ce soit pour la résolution de l'ETR ou pour les équations de transport, nous avons testés, développé et comparé plusieurs relations de fermeture. La précision et la stabilité de convergence constituent les critères de choix de ces techniques. Dans le cadre de cette étude des transferts de chaleur couplés, un nouveau schéma de différentiation pour l'ETR et une version modifiée du schéma QUICK pour les équations de transport, s'avèrent être les plus efficaces. Les codes de calculs réalisés lors du travail de thèse ont été employés pour simuler le chauffage de bain de verre en fusion. Un modèle complet décrivant le fonctionnement d'un four float, du chargement de la matière première à l'évacuation du verre affiné, achève le mémoire.

Mots-clés: Transferts thermiques couplés, Rayonnement, MVF, ETR, verre, fours verriers.

Abstract

Study of coupled heat transfer through radiation, conduction and convection has been carried out and detailed in this PhD memory. Non grey semitransparent media at high temperatures are studied. Acute description of involved physical phenomena leads us to develop several numerical methods for such materials. Radiative heat transfer equation (RTE), Navier-Stokes equations and energy balance are solved with the finite volume method (FVM). Analytical solutions cannot be considered for such problems owing to their complexity. Besides numerical treatment induces necessary approximation in order to rewrite characteristic equations describing the real problem. In the case of RTE modelling a new differencing scheme has been proposed, on the other side Navier-Stokes transport equations are solved with a modified QUICK scheme. Both techniques ensure efficient modelling. The achieved simulation codes have been used for glass melting process description. An enhanced model describes a float glass furnace behaviour, from the material feeding to the refined glass extraction.

Keywords: Coupled heat transfer, Radiation, FVM, RTE, glass, float furnace.