



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



FACULTE DES SCIENCES & TECHNIQUES

U.F.R. Sciences & Techniques de la Matière et des Procédés
Ecole Doctorale EMMA
Département de Formation Doctorale POEM

Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I
en Physique des Plasmas

par **Emmanuel FLEURENCE**

**Descriptions fluide et cinétique d'une turbulence d'interchange
dans un plasma magnétisé**

Soutenue le 4 novembre 2005

Membres du jury :

Rapporteurs :	M. Guy PELLETIER	Professeur, Université Joseph Fourier, Grenoble I
	M. Jean-Marcel RAX	Professeur, Université Paris XI, Directeur de recherche
Examineurs :	M. Pierre BERTRAND	Professeur, U.H.P., Nancy I (Directeur de thèse)
	Mme Katia FERRIERE	Chargée de recherche, Observatoire Midi-Pyrénées
	M. Xavier GARBET	Ingénieur-chercheur CEA (HDR), Cadarache
	M. Yanick SARAZIN	Ingénieur-chercheur CEA, Cadarache (Responsable CEA)

BIBLIOTHEQUE SCIENCES NANCY 1



D 095 172202 0

Laboratoire de physique des Milieux Ionisés et Applications
Faculté des Sciences & Techniques - 54500 Vandœuvre-lès-Nancy

Table des matières

Introduction	1
1 Modèle cinétique 3D pour l'instabilité d'échange	5
1.1 Equation cinétique des centres-guides	5
1.2 Quasi-électroneutralité dans la limite $k_{\perp}\rho_{c,i} \rightarrow 0$	8
1.3 Réduction à 3 dimensions de l'espace des phases	11
1.4 Evolution autour de l'équilibre maxwellien	13
1.5 Relation de dispersion et réponses naturelles	14
1.6 Stabilité marginale dans le plan (A_n, A_T)	16
1.7 Spectre en k de l'instabilité	20
1.8 Flux quasi-linéaire	24
2 Modèle fluide à deux champs	27
2.1 Equations de transport fluides	27
2.2 Expression des flux turbulents	29
2.3 Etude linéaire : stabilité marginale	30
2.4 Analogie avec une modélisation cinétique à deux énergies	33
3 Comparaison non-linéaire du fluide et du cinétique	41
3.1 Méthode numérique	41
3.1.1 Schéma semi-lagrangien	42
3.1.2 Forçage de type Rayleigh-Bénard	44
3.1.3 Tests de validité du schéma numérique	46
3.2 Anisotropie des cellules de convection : écoulements zonaux et "streamers"	49
3.3 Amplitude du transport turbulent	51
3.3.1 Flux de chaleur turbulents fluide et cinétique	51
3.3.2 Transition non-linéaire du flux de chaleur cinétique	55
3.3.3 Ecart persistants en l'absence d'écoulements zonaux	59
3.4 Evaluation des écarts à la maxwellienne	62
3.4.1 Convergence lente des moments d'ordre supérieur à deux	63

TABLE DES MATIÈRES

3.4.2	Description fluide des écarts à la maxwellienne d'équilibre en présence de "streamers"	66
4	Théorie quasi-linéaire d'une fermeture fluide non-collisionnelle	71
4.1	Production totale d'entropie	72
4.1.1	Production d'entropie cinétique	72
4.1.2	Production d'entropie fluide	73
4.1.3	Fermeture sur le flux conducteur	74
4.2	Ajustement du comportement linéaire fluide	75
4.3	Taux quasi-linéaires de production d'entropie	78
4.3.1	Dérivation cinétique	79
4.3.2	Ajustement du taux quasi-linéaire de production d'entropie fluide .	81
	Conclusion	89
A	Gyromoyenne et vitesses de dérive	91
B	Dynamique du système en variables angle-action	95
C	Stabilité marginale cinétique en l'absence de pôles résonants	101
D	Stabilité marginale cinétique dans la limite $\omega_r \gg 1$	103
E	Calcul de la relation de dispersion	105
F	Impact de la diffusion au bord sur le flux au centre	109
G	Calcul des incertitudes sur le flux turbulent cinétique	111

Introduction

A l'instar des milieux discrets à très grand nombre de degrés de liberté, tels les gaz, les plasmas se prêtent à différents niveaux de description ¹. Ces approches sont typiquement au nombre de trois. Elles procèdent d'approximations successives :

- **Description particulaire** : l'équation fondamentale de la dynamique est résolue pour chaque particule individuelle. Le nombre de degrés de liberté est dans ce cas $6N$: 6 degrés de liberté (position-vitesse) par particule, au nombre de N . Cette approche se révèle rapidement inutilisable, sitôt que N excède typiquement plusieurs milliards. Or, ce sont environ 10^{23} particules qu'il faudrait suivre dans un tokamak comme ITER.
- **Description cinétique** : elle s'appuie sur une approximation de champ moyen. La dynamique de la fonction de distribution f des particules – qui mesure le nombre de particules contenues dans un élément de volume de l'espace des phases à 6 dimensions² – est gouvernée par les champs électrique et magnétique moyennés sur une longueur intermédiaire entre la distance interparticulaire et la longueur de Debye. Le nombre de degrés de liberté est $6N_s$, où N_s est le nombre d'espèces considérées (ions, électrons, impuretés). Dans la limite non-collisionnelle, qui prévaudra dans ITER, la dynamique de f peut être raisonnablement décrite par l'équation de Vlasov, de structure hamiltonienne.
- **Description fluide** : elle s'intéresse aux moments de la fonction de distribution. Un moment d'ordre n est relié à l'intégrale en vitesse de la quantité $v^{(n)}f$, où la puissance (n) indique un produit tensoriel. Les premiers moments sont la densité, la vitesse d'écoulement, la pression, etc. Chacun de ces moments est couplé au suivant, de sorte que le problème fondamental de cette approche réside dans le choix de fermeture de cette hiérarchie infinie d'équations. Le nombre de degrés de liberté est dans ce cas $3N_M N_s$, où N_M est le nombre de moments fluides retenus.

La question du choix du niveau de description, en pratique cinétique ou fluide, se pose de manière particulièrement aigüe lorsque l'on étudie le transport turbulent dans

¹Voir par exemple l'article très didactique de Laure Saint-Raymond dans "Pour la Science", numéro 324 (octobre 2004)

²Dans la limite adiabatique, où les champs électromagnétiques varient lentement par rapport à la fréquence cyclotronique, l'espace des phases peut être réduit à 5 dimensions en considérant la moyenne sur la phase cyclotronique. C'est l'approche gyrocinétique, pleinement justifiée pour décrire la turbulence dans les plasmas de fusion. La fonction de distribution étudiée est alors celle des centres-guides.

les machines à fusion. Ce transport contrôle pour l'essentiel les propriétés de confinement du plasma. Il est donc primordial d'en avoir une connaissance aussi fine que possible, afin de disposer entre autres de prédictions fiables sur l'amplitude et la dynamique de la turbulence dans les machines de prochaine génération. Du fait de son nombre restreint de degrés de liberté, l'approche fluide est la plus attractive. Encore faut-il s'assurer que les approximations qui la fondent sont justifiées, et que la fermeture choisie permet de retrouver les résultats cinétiques. Or, il s'avère que, avec les fermetures actuellement considérées, elle est insuffisante, et ce à au moins deux titres :

- De manière intrinsèque, elle ne permet pas de rendre pleinement compte d'effets purement cinétiques, qui trouvent leur origine dans la structure en vitesse de la fonction de distribution. On peut distinguer deux grandes classes de tels phénomènes. En premier lieu se trouvent les résonances ondes-particules, ou résonances Landau, qui caractérisent les effets collectifs dans les plasmas. Dans un plasma collisionnel, l'élargissement des résonances est tel que l'effet Landau joue un rôle négligeable. Dans ce cas, la fermeture collisionnelle des équations fluides, proposée par Braginskii [1], donne des résultats satisfaisants. Mais les plasmas du cœur des machines à fusion sont très peu collisionnels, de sorte que ces résonances doivent être prises en compte. Enfin, il faut mentionner certaines classes de particules qui ont un rôle important, telles les particules piégées dans les miroirs magnétiques et les particules énergétiques. Les particules alpha, issues des réactions de fusion deutérium-tritium, seront de telles particules dans un réacteur à fusion.
- Les deux approches donnent des résultats notablement différents quant aux seuils linéaires des instabilités, mais également quant au niveau de transport turbulent pour un écart au seuil donné. La comparaison directe des deux approches appliquées à une même instabilité n'est encore que très peu développée. Pour autant, Dimits a synthétisé en 2000 les résultats de plusieurs simulations non-linéaires, et montré que les prédictions des codes cinétiques et fluides différaient de plusieurs facteurs, voire d'ordres de grandeur [2]. Ces derniers tendent à surestimer le flux turbulent. Ce travail a également mis en évidence que les écoulements zonaux, c'est-à-dire les écoulements moyens dans les deux directions périodiques des machines toriques, autogénérés par la turbulence, traités différemment en cinétique et fluide, pouvaient expliquer au moins pour partie les différences observées.

Ce travail de thèse s'inscrit dans cette problématique. Il vise à quantifier les différences entre les approches cinétique et fluide dans une turbulence plasma, à en comprendre l'origine, et à proposer un cadre théorique pour optimiser les fermetures fluides. C'est l'instabilité d'interchange, générique dans les machines toriques, qui sert de cadre à notre étude. L'instabilité est portée à la fois par le gradient de température, et par la courbure moyenne des lignes de champ magnétique. Le système est simplifié et réduit à deux dimensions spatiales, la direction radiale du confinement et une direction angulaire, et une dimension en vitesse, l'énergie transverse. Un des points forts de notre approche est d'utiliser le même code numérique pour comparer les descriptions cinétique et fluide, ce qui nous affranchit de fait de différences d'origine purement numérique. Les résultats majeurs

sont les suivants :

- Le flux turbulent cinétique reste quasiment nul jusqu'à un forçage environ quatre fois supérieur au seuil d'instabilité linéaire. La transition se produit lorsque le taux de croissance linéaire devient comparable au taux de cisaillement des écoulements zonaux. Cette transition non-linéaire est absente en fluide.
- Pour des caractéristiques linéaires analogues, le niveau de transport turbulent fluide est supérieur au cinétique, et ce de plusieurs ordres de grandeur. Cette différence perdure, bien qu'amointrie, lorsque les écoulements zonaux sont volontairement supprimés. Ces derniers ne permettent donc pas d'expliquer toutes les différences observées. De fait, notre analyse montre que la fonction de distribution des simulations cinétiques est caractérisée par un grand nombre de moments fluides indépendants, que les écoulements zonaux soient présents ou pas.
- Enfin, une fermeture non collisionnelle est proposée, basée sur la comparaison des taux quasi-linéaires de production d'entropie fluide et cinétique. Cette méthode permet entre autres de contraindre les paramètres pour ajuster les propriétés linéaires cinétique et fluide du système étudié.

Le corps de ce mémoire est divisé en quatre chapitres. Dans le chapitre 1, le système cinétique est présenté et ses caractéristiques linéaires sont étudiées analytiquement. Un système fluide à deux champs, densité et pression, équivalent au système cinétique, est dérivé dans le chapitre 2. Il est en particulier montré qu'une analogie peut être établie entre les modélisations fluide à deux champs et cinétique à deux énergies. Cela permet entre autres de simuler avec le même code numérique les régimes non-linéaires fluide et cinétique. C'est l'objet du chapitre 3, où les résultats obtenus pour différents forçages sont présentés. Le rôle des écoulements zonaux est discuté en détail. Enfin, le chapitre 4 est consacré à la recherche d'une fermeture fluide non-collisionnelle, fondée sur la comparaison des taux quasi-linéaires de production d'entropie cinétique et fluide.

Chapitre 1

Modèle cinétique 3D pour l'instabilité d'échange

Nous allons étudier les caractéristiques d'une turbulence dans un modèle simplifié, afin de cerner plus aisément l'origine des différences de comportement pouvant exister entre une modélisation fluide et une modélisation cinétique. Nous nous limiterons à l'étude d'une turbulence électrostatique et plus particulièrement à une instabilité générique dans les plasmas de fusion : l'instabilité d'échange ionique¹. Nous dérivons ici les équations permettant de la décrire dans le cadre de la théorie cinétique. Une étude linéaire détaillée sera ensuite réalisée.

1.1 Equation cinétique des centres-guides

Dans une machine à confinement magnétique, la fréquence cyclotronique des particules ω_c est supérieure de plusieurs ordres de grandeur aux fréquences caractéristiques d'évolution du système, en particulier vis-à-vis des échelles de temps des phénomènes turbulents². Il est alors raisonnable de moyenner les équations du mouvement sur un temps de l'ordre de ω_c^{-1} , ou, ce qui est équivalent, de les moyenner sur la phase cyclotronique φ_c . Cette opération est appelée gyromoyenne³. Dans ce cadre, la variable d'espace pertinente n'est plus la position réelle d'une particule $\mathbf{x}$ mais la position du centre de masse du mouvement cyclotronique $\mathbf{x}_G$, appelé centre-guide. Ces variables sont reliées par la relation $\mathbf{x} = \mathbf{x}_G + \boldsymbol{\rho}_c$, où $\boldsymbol{\rho}_c$ est le vecteur associé au rayon de giration cyclotronique $\rho_c = v_\perp / \omega_c$. Celui-ci mesure l'extension spatiale du domaine sur lequel la gyromoyenne est effectuée. Ce domaine est d'autant plus petit que le champ magnétique confinant B est intense, étant donné que $\omega_c = qB/m$, où q et m sont respectivement la charge et la masse de

¹On parle d'instabilité d'"interchange" en anglais.

²La fréquence cyclotronique ionique $\omega_{c,i}$ vaut approximativement 5.10^8Hz pour $B = 5\text{T}$ alors que la fréquence de la turbulence est typiquement inférieure à 10^6Hz . La fréquence cyclotronique électronique $\omega_{c,e}$ est plus élevée, de l'ordre de $\sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \omega_{c,i} = 2.10^{10} \text{Hz}$

³Le "y" est conservé en français en mémoire de l'origine américaine de cette théorie [3].

la particule. D'autre part, il est directement relié à l'énergie cinétique de la particule au travers de la vitesse $v_\perp$ de la particule dans le plan transverse au champ confinant. Pour un champ magnétique lentement variable vis-à-vis de ω_c^{-1} , il est possible de montrer [4] que le moment magnétique μ de la particule est un invariant à tous les ordres de son développement selon le petit paramètre ρ_c/R , où R est la longueur caractéristique du champ magnétique (le grand rayon dans un tokamak). Cet invariant est appelé invariant adiabatique. Il est défini par :

$$\mu = \frac{mv_\perp^2}{2B_G} \quad (1.1)$$

où $B_G = B(\mathbf{x}_G)$ est le champ magnétique à la position du centre-guide.

La gyromoyenne conduit en outre à la réduction de l'espace des phases de 6 dimensions $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$, à 5 dimensions $(\mathbf{x}_G, v_\parallel, \mu)$, où $v_\parallel$ est la vitesse des particules le long des lignes de champ. La dynamique des centres-guides est décomposée en un mouvement parallèle aux lignes de champ dont la fréquence caractéristique est de l'ordre de $\omega_c \rho_c / R$ et d'un mouvement de dérive dans la direction perpendiculaire aux lignes de champ dont la fréquence caractéristique est d'un ordre inférieur, c'est-à-dire de l'ordre de $\omega_c (\rho_c / R)^2$. Le détail du calcul des dérivées est donné en annexe A. Leur expression générale est donnée par :

$$\mathbf{u}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{u}_d = (\mu B + mv_\parallel^2) \frac{\mathbf{B}}{qB^2} \times \frac{\nabla_\perp B}{B} \quad (1.3)$$

où les champs sont pris à la position des centres-guides⁴.

Nous considérons un plasma à symétrie cylindrique (figure 1.1) décrit par un système de coordonnées (R, θ, y) . Le champ magnétique $\mathbf{B}$, confinant le plasma, est supposé créé par un fil conducteur infini, situé sur l'axe du cylindre. Il est parcouru par un courant constant noté I . Le théorème d'Ampère donne l'expression du champ en fonction de la coordonnée radiale :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \mathbf{e}_\theta \\ &= \frac{B_0 R_0}{R} \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

La direction parallèle aux lignes de champ est la direction θ , on définit $v_\parallel \equiv v_\theta$. Nous considérons un domaine d'étude de faible extension radiale L_x se situant loin de l'axe de symétrie du système. Cette limite permet d'étudier le système dans une géométrie cartésienne : c'est la limite "slab". Nous décomposons la position radiale R comme suit : $R = R_0 - x$, avec $0 \leq x \leq L_x$ et $L_x \ll R_0$. Le champ magnétique s'écrit : $B = B_0(1 + x/R_0)$.

⁴L'indice 'G' sera à présent omis pour alléger l'écriture.

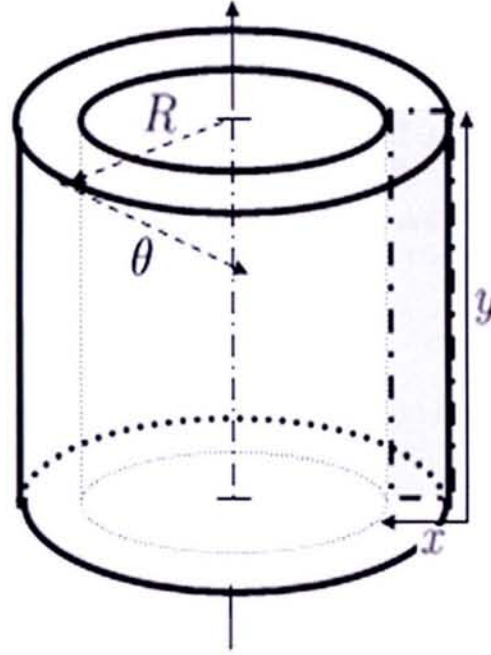


FIG. 1.1 – Géométrie du système. Le domaine d'étude dans la limite slab est représenté en grisé.

Le système est supposé périodique dans la direction y . Nous définissons $L_y = 2\pi L_x$ la longueur telle que pour chaque grandeur g : $g(y = 0) = g(y = L_y)$. Enfin, les calculs sont effectués dans le nouveau repère direct (x, y, θ) .

Dans le cadre électrostatique, le champ électrique $\mathbf{E}$ dérive du potentiel U : $\mathbf{E} = -\nabla U$. La vitesse de dérive électrique (1.2) s'écrit alors à l'ordre le plus bas en x/R_0 :

$$\mathbf{u}_E = \frac{1}{B_0} (-\partial_y U \mathbf{e}_x + \partial_x U \mathbf{e}_y) \quad (1.4)$$

La vitesse de dérive de courbure (1.3) s'écrit au même ordre :

$$\mathbf{u}_d = \frac{\mu B_0 + m v_{\parallel}^2}{q B_0 R_0} \mathbf{e}_y \quad (1.5)$$

où nous avons utilisé la relation $\frac{\nabla_{\perp} B}{B} = \frac{1}{B} \frac{dB}{dx} \mathbf{e}_x = \frac{1}{R_0} \mathbf{e}_x$. La vitesse de dérive de courbure est indépendante des coordonnées d'espace dans cette limite.

La dynamique des centres-guides est régie par les équations d'évolution :

$$\frac{dx}{dt} = u_{Ex}; \quad \frac{dy}{dt} = u_{Ey} + u_d; \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{R}; \quad \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\frac{q}{mR} \partial_{\theta} U$$

1.2. QUASI-ÉLECTRONEUTRALITÉ DANS LA LIMITE $k_{\perp} \rho_{c,i} \rightarrow 0$

L'évolution de la fonction de distribution F des centres-guides est régie par une équation décrivant sa variation temporelle totale qui s'écrit en fonction des équations d'évolution :

$$\frac{dF}{dt} = \partial_t F + \frac{dx}{dt} \partial_x F + \frac{dy}{dt} \partial_y F + \frac{d\theta}{dt} \partial_{\theta} F + \frac{dv_{\parallel}}{dt} \partial_{v_{\parallel}} F$$

De manière générale, l'évolution de la fonction de distribution est contrainte par un opérateur décrivant les collisions $\mathcal{C}(F)$:

$$\frac{dF}{dt} = \mathcal{C}(F)$$

Cette équation est l'équation de Boltzmann. Elle permet en particulier de déterminer une solution d'équilibre pour la fonction de distribution en présence de collisions. Dans un régime de faible collisionnalité, cet opérateur est mis à zéro. L'évolution de la fonction de distribution est seulement une advection dans l'espace des phases. L'équation correspondante est une équation de Vlasov :

$$\partial_t F + u_{Ex} \partial_x F + (u_{Ey} + u_d) \partial_y F + \frac{v_{\parallel}}{R} \partial_{\theta} F - \frac{q}{mR} \partial_{\theta} U \partial_{v_{\parallel}} F = 0 \quad (1.6)$$

où les dérivées sont définies par les équations (1.4) et (1.5). L'équation de Vlasov est une équation de conservation. La fonction de distribution reste constante le long de ses caractéristiques, c'est-à-dire, le long de ses trajectoires dans l'espace des phases. Le potentiel électrostatique U apparaît dans l'équation de Vlasov au travers de la vitesse de dérive $\mathbf{u}_E$. Il constitue la deuxième inconnue du problème. Il convient d'établir la contrainte de quasi-électroneutralité décrivant la génération du potentiel par les fluctuations de la densité de charge.

1.2 Quasi-électroneutralité dans la limite $k_{\perp} \rho_{c,i} \rightarrow 0$

Globalement, les plasmas de fusion sont électriquement neutres. En l'absence de champ électrique extérieur, les ions (de charge $q = e$) et les électrons (de charge $q = -e$) ont la même densité locale à l'équilibre : $N_{i,0} = N_{e,0} = N_0$. Localement, la turbulence génère des écarts à la densité d'équilibre. Soit $\tilde{N}_i$ et $\tilde{N}_e$ les écarts en densité ionique et électronique. Dans la limite électrostatique, l'équation de Maxwell-Poisson donne la valeur du potentiel U qui découle de la distribution de charge locale.

$$\lambda_{De}^2 \nabla^2 \frac{eU}{T_e} = \frac{\tilde{N}_e}{N_0} - \frac{\tilde{N}_i}{N_0}$$

Nous avons introduit la longueur de Debye électronique $\lambda_{De} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 T_e}{e^2 N_0}}$. T_e désigne ici la température électronique d'équilibre, prise constante. Dans les tokamaks, les fluctuations normalisées du potentiel électrique $\frac{eU}{T_e}$ sont inférieures à l'unité. D'autre part, leur échelle

caractéristique reste typiquement supérieure au rayon de Larmor ionique $\rho_{c,i}$. Or, dans les plasmas de fusion la longueur de Debye est d'environ un ordre de grandeur plus petite que $\rho_{c,i}$ ($\lambda_{De} \sim 10^{-4}m$, $\rho_{c,i} \sim 5.10^{-3}m$). Dans ces conditions, telles que l'échelle caractéristique des fluctuations reste grande par rapport à λ_{De} , l'équation de Maxwell-Poisson peut raisonnablement être remplacée par la contrainte de quasi-électronéutralité :

$$\frac{\tilde{N}_e}{N_0} = \frac{\tilde{N}_i}{N_0} \quad (1.7)$$

Il nous faut à présent calculer les densités ionique et électronique.

Une des difficultés de la théorie gyrocinétique consiste à exprimer les densités réelles qui interviennent dans la quasi-électronéutralité au moyen des densités de centres-guides. La fluctuation de la densité ionique réelle $\tilde{N}_i$ peut être calculée à partir de la fonction de distribution des centres-guides ioniques F_i :

$$\tilde{N}_i = \int d\mathbf{p} G_0 \cdot F_i - N_0 + \tilde{N}^{pol} \quad (1.8)$$

On voit apparaître les fluctuations de la densité de centres-guides gyromoyennée⁵, et le terme de polarisation :

$$\tilde{N}^{pol} = \int d\mathbf{p} F_{0,i} \left(\frac{eG_0^2 U}{T_{0,i}} - \frac{eU}{T_{0,i}} \right)$$

L'opérateur de gyromoyenne G_0 est défini par l'équation (A.4). Nous avons supposé ici qu'une double application de l'opérateur de gyromoyenne laisse inchangées la fonction de distribution d'équilibre des ions $F_{0,i}$ et la température ionique d'équilibre $T_{0,i}$. Cette hypothèse est légitime tant que les quantités d'équilibre varient sur des échelles spatiales grandes devant le rayon de Larmor. Nous prenons une forme maxwellienne pour l'équilibre :

$$F_{0,i} = \frac{N_0}{(2\pi m_i T_{0,i})^{3/2}} \exp \left(-\frac{v_\perp^2 + v_\parallel^2}{2T_{0,i}/m_i} \right)$$

où $m_i(v_\perp^2 + v_\parallel^2)/2$ est l'énergie cinétique totale des ions. Le calcul du terme de polarisation s'effectue en passant dans l'espace de Fourier dans le plan transverse au champ magnétique :

$$\hat{N}^{pol} = \int d\mathbf{p} F_{0,i} \left(G_0^2 \frac{e\hat{U}}{T_{0,i}} - \frac{e\hat{U}}{T_{0,i}} \right)$$

où $\hat{N}^{pol}$ et $\hat{U}$ sont les transformées de Fourier spatiales de $\tilde{N}^{pol}$ et U . L'opérateur de gyromoyenne ne dépend que de la vitesse transverse des particules au travers du rayon de Larmor ionique : $\rho_{c,i} = \rho_s v_\perp / c_s$ avec $c_s = \sqrt{T_e/m_i}$ et $\rho_s = c_s / \omega_{c,i}$. L'intégration sur la

⁵L'intégration porte sur l'espace des impulsions $\mathbf{p}$.

1.2. QUASI-ÉLECTRONEUTRALITÉ DANS LA LIMITE $K_{\perp}\rho_{C,I} \rightarrow 0$

vitesse parallèle est alors triviale. L'intégration sur la vitesse transverse est effectuée en utilisant la relation [5] :

$$\int_0^{\infty} v_{\perp} dv_{\perp} \exp(-bv_{\perp}^2) J_0^2(av_{\perp}) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{a^2}{2b}\right) I_0^2\left(\frac{a^2}{2b}\right)$$

où $I_0(z) = J_0(iz)$ est la fonction de Bessel modifiée. On obtient une expression intégrée du terme de polarisation :

$$\begin{aligned} \hat{N}^{pol} &= N_0 \left[\exp\left(-k_{\perp}^2 \rho_s^2 \frac{T_{0,i}}{T_e}\right) I_0^2\left(k_{\perp}^2 \rho_s^2 \frac{T_{0,i}}{T_e}\right) - 1 \right] \frac{e\hat{U}}{T_{0,i}} \\ &\sim -N_0 k_{\perp}^2 \rho_s^2 \frac{e\hat{U}}{T_e} \end{aligned}$$

où nous n'avons gardé que le terme du premier ordre en $k_{\perp}\rho_s$, $k_{\perp}$ étant la norme du vecteur d'onde dans le plan perpendiculaire au champ magnétique. Dans l'hypothèse adiabatique, nous prenons $G_0 F_i = F_i$. Nous écrivons alors l'expression de la réponse en densité $\tilde{N}_i$:

$$\tilde{N}_i = \int d\mathbf{p} F_i - N_0 + N_0 \rho_s^2 \nabla_{\perp}^2 \frac{eU}{T_e} \quad (1.9)$$

Le calcul rigoureux d'une turbulence en présence de deux populations de particules chargées (les ions et les électrons) devrait s'effectuer au moyen de deux équations de Vlasov de la forme (1.6). Cependant, cette démarche est très coûteuse du point de vue numérique et reste difficile d'accès avec les moyens de simulation actuels. Nous faisons le choix de simplifier le calcul de la densité électronique. La méthode consiste à trouver une valeur approchée de la réponse linéaire $\tilde{F}_e$ à une perturbation U , d'origine purement ionique, au moyen de l'équation de Vlasov pour les électrons ((1.6) avec $m = m_e$, $q = -e$ et $F = F_e$). Pour ce faire, il est préférable d'utiliser les variables d'angle et d'action plutôt que les variables de position et de vitesse. Cette étude est exposée dans l'annexe B, nous n'en donnerons ici que le résultat. La réponse électronique peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\tilde{N}_e}{N_0} = \frac{eU}{T_e} - \frac{e\langle\langle U \rangle\rangle}{T_e} \quad (1.10)$$

où $\langle\langle U \rangle\rangle$ représente une moyenne sur y et θ . Cette expression peut être trompeuse et doit être interprétée correctement. Les perturbations qui peuvent se développer dans le système sont de deux natures : des perturbations de nombre d'onde différent de zéro et des écoulements zonaux, c'est-à-dire des écoulements moyens ayant un nombre d'onde égal à zéro : $k_y = k_{\theta} = 0$. Pour ces derniers $U = \langle\langle U \rangle\rangle$: la relation (1.10) indique donc que les électrons ont une réponse nulle à ces perturbations. Les perturbations de nombre d'onde différent de zéro, sont de moyenne nulle $\langle\langle U \rangle\rangle = 0$, la réponse électronique est alors adiabatique. En effet, dans ce cas la vitesse parallèle électronique élevée permet de négliger toute interaction entre les particules et les ondes turbulentes.

1.3 Réduction à 3 dimensions de l'espace des phases

Le système que nous considérons est composé de l'équation de Vlasov décrivant la dynamique des centres-guides ioniques (1.6) et de la contrainte de quasi-électronéutralité (1.7). Le système d'équations auto-cohérent s'écrit :

$$\partial_t F_i + \frac{T_e}{eB_0} [\Phi, F_i] + \frac{\mu B_0 + mv_{\parallel}^2}{eB_0 R_0} \partial_y F_i + \frac{v_{\parallel}}{R_0} \partial_{\theta} F_i - \frac{q}{mR_0} \partial_{\theta} U \partial_{v_{\parallel}} F_i = 0 \quad (1.11)$$

$$(\Phi - \langle \Phi \rangle) - \rho_s^2 \nabla_{\perp}^2 \Phi = \frac{1}{N_0} \int d\mathbf{p} F_i - 1$$

Nous avons défini le crochet de Poisson comme : $[\Phi, F_i] = \partial_x \Phi \partial_y F_i - \partial_y \Phi \partial_x F_i$. Nous nous plaçons dans la limite où les températures caractéristiques ionique et électronique sont égales $T_e = T_i = T_0$. Le potentiel adimensionné est défini par $\Phi = \frac{eU}{T_0}$.

Par souci de simplification, nous adoptons en outre un certain nombre d'hypothèses visant à réduire la dimensionnalité du problème à la dynamique transverse aux lignes de champ. Nous considérons uniquement les centres-guides de vitesse parallèle nulle : $v_{\parallel} = 0$. Nous supposons de plus que les fluctuations sont constantes le long des lignes de champ. La vitesse de dérive de courbure ne dépend alors que de l'énergie perpendiculaire des particules $E = \frac{1}{2} m_i v_{\perp}^2 = \mu B_0$. L'équation de Vlasov (1.11) décrit maintenant seulement la dynamique des centres-guides ioniques dans le plan transverse à $\mathbf{B}$:

$$\partial_t F_i + \frac{T_0}{eB_0} [\Phi, F_i] + \frac{E}{eB_0 R_0} \partial_y F_i = 0$$

Nous travaillerons par la suite avec des grandeurs normalisées. Les longueurs sont normalisées au rayon de Larmor ionique : $\hat{x} = x/\rho_s$ et $\hat{y} = y/\rho_s$. Le temps est normalisé à la pulsation cyclotronique ionique : $\hat{t} = \omega_{c,i} t$. Nous définissons un paramètre adimensionné, indépendant de l'énergie, représentant la dérive de courbure :

$$v_d = \frac{1}{c_s} \frac{T_0}{eB_0 R_0} = \rho_s / R_0$$

De la même manière, nous pouvons définir une vitesse de dérive électrique normalisée : $\mathbf{v}_E = \mathbf{u}_E / c_s$. Les densité et température normalisées sont : $n_{eq} = \frac{N_{eq,i}}{N_0}$ et $T_{eq} = \frac{T_{eq,i}}{T_0}$. De la même manière la fonction de distribution normalisée s'écrit : $f = \frac{T_0}{N_0} F_i$. L'énergie normalisée s'écrit quant-à-elle : $\hat{E} = \frac{E}{T_0}$. Par la suite, les chapeaux qui apparaissent sur les variables normalisées ne seront pas conservés.

Finalement, le système s'écrit :

$$\partial_t f + [H, f] = 0 \quad (1.12)$$

$$(\Phi - \langle \Phi \rangle) - \nabla_{\perp}^2 \Phi = \int f dE - 1 \quad (1.13)$$

où nous rappelons la définition du crochet de Poisson : $[\Phi, f] = \partial_x \Phi \partial_y f - \partial_y \Phi \partial_x f$. La moyenne du potentiel dans la quasi-électroneutralité $\langle \Phi \rangle$ est une moyenne sur y . L'équation de Vlasov s'écrit à présent sous forme hamiltonienne, avec le hamiltonien défini par :

$$H = E + v_d E x + \Phi \quad (1.14)$$

Le premier terme E , indépendant de l'espace, ne contribue pas à l'équation de Vlasov. Nous l'avons cependant fait apparaître pour introduire la fonction de distribution d'équilibre f_{eq} que nous allons utiliser. Celle-ci est définie par une maxwellienne locale dépendant explicitement du hamiltonien d'équilibre :

$$f_{eq} = \frac{n_{eq}(x)}{T_{eq}(x)} \exp \left(-\frac{H_{eq}}{T_{eq}(x)} \right) = \frac{n_{eq}(x)}{T_{eq}(x)} \exp \left(-\frac{E(1 + v_d x)}{T_{eq}(x)} \right) \quad (1.15)$$

Nous discuterons dans le prochain paragraphe de l'impact du terme correctif en v_d sur les écarts à l'équilibre thermodynamique.

1.4 Evolution autour de l'équilibre maxwellien

La fonction de distribution et le potentiel électrostatique sont décomposés en une partie d'équilibre et une partie fluctuante :

$$\begin{aligned} f &= \bar{f} + \tilde{f} \\ \Phi &= \bar{\Phi} \end{aligned}$$

Nous considérons le cas d'un équilibre sans champ électrique en prenant $\bar{\Phi} = 0$. L'équilibre $\bar{f}$ est défini comme étant la moyenne de f le long de la direction périodique y et sur un temps long vis-à-vis de l'échelle caractéristique d'évolution des perturbations. L'intégration sur les temps longs ne sera utilisée explicitement que pour le calcul des flux quasi-linéaires au paragraphe 1.8. La moyenne des fluctuations spatiales ou temporelles sont nulles par définition :

$$\langle \tilde{f} \rangle = \langle \tilde{\Phi} \rangle = 0$$

La moyenne de l'équation de Vlasov (1.12) donne :

$$\partial_t \bar{f} + \langle [\tilde{\Phi}, \tilde{f}] \rangle = 0 \quad (1.16)$$

qui peut s'écrire également sous forme conservative :

$$\partial_t \bar{f} + \partial_x \langle \tilde{f} (-\partial_y \tilde{\Phi}) \rangle = 0 \quad (1.17)$$

Le flux turbulent résulte de la convection moyenne des fluctuations de la fonction de distribution par la vitesse de dérive électrique dans la direction radiale, $\tilde{v}_{Ex} = -\partial_y \tilde{\Phi}$:

$$Q_{turb} = \langle \tilde{f} \tilde{v}_{Ex} \rangle \quad (1.18)$$

L'équation d'évolution des perturbations est calculée en décomposant les champs et en les injectant dans l'équation de Vlasov. La variation temporelle de l'équilibre étant donnée par l'équation (1.16), nous obtenons :

$$\partial_t \tilde{f} + [\bar{H}, \tilde{f}] + [\tilde{\Phi}, \bar{f}] + [\tilde{\Phi}, \tilde{f}] - \langle [\tilde{\Phi}, \tilde{f}] \rangle = 0 \quad (1.19)$$

où le hamiltonien d'équilibre est défini à partir de l'expression (1.14), en ne conservant que le terme non nul dépendant de l'espace :

$$\bar{H} = v_d E x \quad (1.20)$$

L'hypothèse quasi-linéaire consiste à considérer une turbulence de faible amplitude vis-à-vis de l'équilibre. Les termes du second ordre sont supposés négligeables :

$$[\tilde{\Phi}, \tilde{f}] \ll \partial_t \tilde{f} \text{ et } \langle [\tilde{\Phi}, \tilde{f}] \rangle \ll \partial_t \tilde{f}$$

L'équation sur les perturbations est alors linéarisée :

$$\partial_t \tilde{f} + [\bar{H}, \tilde{f}] + [\tilde{\Phi}, \bar{f}] = 0 \quad (1.21)$$

Le système d'équations composé de l'équation de Vlasov sur les fluctuations, couplée à la contrainte de quasi-électroneutralité linéarisée (1.13) s'écrit :

$$\partial_t \tilde{f} + [\tilde{\Phi}, \tilde{f}] + v_d E \partial_y \tilde{f} = 0 \quad (1.22)$$

$$\tilde{\Phi} - \nabla_{\perp}^2 \tilde{\Phi} = \int_0^{\infty} \tilde{f} dE \quad (1.23)$$

Considérons la stabilité linéaire autour d'un équilibre pour lequel la fonction de distribution est maxwellienne (1.15) :

$$\tilde{f}(x, E) = \frac{\bar{n}(x)}{\bar{T}(x)} \exp\left(-\frac{E}{\bar{T}(x)}\right) \quad (1.24)$$

où le facteur $1 + v_d x$, contenant la dépendance radiale du hamiltonien d'équilibre (1.14), est introduit dans les définitions des densité et température moyennes :

$$\bar{n}(x) = \frac{n_{eq}(x)}{1 + v_d x} \quad ; \quad \bar{T}(x) = \frac{T_{eq}(x)}{1 + v_d x}$$

Le gradient radial de $\tilde{f}$ mesure l'intensité des forces thermodynamique s'appliquant au système. Il s'écrit sous forme compacte :

$$\partial_x \tilde{f} = \tilde{f} \left(\kappa_n + \kappa_T \left(\frac{E}{\bar{T}} - 1 \right) \right) \quad (1.25)$$

avec

$$\kappa_n = \frac{\partial_x \bar{n}}{\bar{n}} \sim \frac{\partial_x n_{eq}}{n_{eq}} - v_d \quad ; \quad \kappa_T = \frac{\partial_x \bar{T}}{\bar{T}} \sim \frac{\partial_x T_{eq}}{T_{eq}} - v_d \quad (1.26)$$

en prenant en compte que $v_d = \rho_s / R_0 \ll 1$. Dans la limite où les longueurs de gradient d'équilibre sont grandes devant l'échelle des fluctuations, on suppose $\bar{n}$, $\bar{T}$, κ_n et κ_T constants dans l'étude linéaire. Leurs valeurs sont définies à l'origine radiale du domaine d'étude ($x = 0$).

Les définitions (1.26) montrent que la prise en compte du hamiltonien dans l'expression de la fonction de distribution d'équilibre conduit à une correction sur les forces thermodynamiques, représentées par les gradients de densité κ_n et de température κ_T . Les effets géométriques dus au gradient du champ magnétique d'équilibre, paramétrés par v_d , minimisent l'action des gradients de densité et de température réels. Ce point est plus amplement développé dans la référence [6].

1.5 Relation de dispersion et réponses naturelles

Dans un premier temps, nous cherchons les modes propres du système d'équations Vlasov—quasi-électroneutralité linéarisé (équations (1.22) et (1.23)). La structure de ce

système montre que les modes de Fourier sont des modes propres pour la direction périodique y et pour le temps. Ainsi, les perturbations sont décomposées sur une base de Fourier spatio-temporelle :

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= \sum_{k,\omega} \hat{f}_{k,\omega} e^{i(ky-\omega t)} \\ \tilde{\Phi} &= \sum_{k,\omega} \hat{\Phi}_{k,\omega} e^{i(ky-\omega t)}\end{aligned}\tag{1.27}$$

$k = 2\pi l/L_y$ est le nombre d'onde dans la direction périodique (l est un nombre entier). De manière générale ω est un nombre complexe. Sa partie réelle ω_r correspond à la pulsation, sa partie imaginaire ω_i est le taux de croissance de l'instabilité. Lorsque le taux de croissance est positif, l'amplitude du mode associé croît exponentiellement avec le temps : il y a instabilité. Pour qu'une description temporelle en terme de transformée de Fourier soit valable, il faut que les transformées de Fourier inverses, $\hat{f}$ et $\hat{\Phi}$, soient définies, ce qui est réalisé pour $\Im(\omega) > 0$ et $\tilde{f} = 0$ lorsque $t \rightarrow -\infty$, en accord avec le principe de causalité⁶.

En décomposant l'équation de Vlasov linéarisée (1.22) sur la base de Fourier (1.27) on obtient une équation algébrique, décrivant la réponse linéaire de la fonction de distribution $\hat{f}_{k,\omega}(x)$ à une perturbation du potentiel $\hat{\Phi}_{k,\omega}(x)$:

$$\hat{f} = \frac{\bar{n}e^{-\zeta} \kappa_n + \kappa_T(\zeta - 1)}{\bar{T} \omega_d \zeta - \omega} k \hat{\Phi}\tag{1.28}$$

où l'expression du gradient radial de la fonction de distribution d'équilibre est donnée par (1.25). Il est plus aisé de travailler avec le paramètre $\zeta = E/\bar{T}$ et la pulsation correspondant à la dérive de courbure thermique :

$$\omega_d = kv_d \bar{T}\tag{1.29}$$

L'équation de Vlasov linéarisée fait apparaître l'existence de pôles dans la réponse du système. Lorsque la vitesse de phase de l'onde turbulente $v_\varphi = \omega_r/k$ est égale à la vitesse de dérive d'un centre-guide $v_d E$ la réponse diverge. Cette interaction résonante entre les ondes turbulentes et les centres-guides est spécifique d'une description cinétique, elle est connue sous le nom de résonance Landau.

En introduisant cette réponse dans la quasi-électroneutralité linéarisée (1.23) nous obtenons une équation différentielle dans la direction radiale :

$$\partial_x^2 \hat{\Phi}_{k,\omega} - K^2 \hat{\Phi}_{k,\omega} = 0\tag{1.30}$$

avec

$$K^2 = 1 + k^2 + \bar{n}k \int e^{-\zeta} \frac{\kappa_n + \kappa_T(\zeta - 1)}{\omega - \omega_d \zeta} d\zeta$$

⁶ $\Im(\omega)$ représente la partie imaginaire de ω .

Dans la limite de faible variation radiale où nous nous sommes placés, K est indépendant de x et l'équation différentielle (1.30) possède des solutions réelles, non triviales pour $K = ik_x$, avec des conditions aux limites de Dirichlet ($\hat{\Phi}(0) = \hat{\Phi}(L_x) = 0$) : $\hat{\Phi}_{k,\omega}(x) = \hat{\Phi}(0) \sin(k_x x)$ avec $k_x = \pi l_x / L_x$, où l_x est un entier. Les modes de Fourier peuvent être considérés comme des modes propres du système dans la direction radiale. Au final, la relation de dispersion s'écrit :

$$1 + k_\perp^2 + \bar{n}k \int_0^\infty d\zeta e^{-\zeta} \frac{\kappa_n + \kappa_T(\zeta - 1)}{\omega - \omega_d \zeta} = 0 \quad (1.31)$$

avec $k_\perp^2 = k_x^2 + k^2$. La relation de dispersion est une contrainte imposée entre ω et le vecteur d'onde $\mathbf{k}_\perp = \mathbf{k}_x + \mathbf{k}$, de sorte que $\omega = \omega(\mathbf{k}_\perp)$. Les champs qui satisfont la contrainte de la relation de dispersion sont appelés les modes naturels.

1.6 Stabilité marginale dans le plan (A_n, A_T)

Nous nous intéressons ici à la stabilité d'un mode donné, en fonction des paramètres de contrôle que sont les gradients de densité et de température. Nous répondrons à la question de l'instabilité globale du système, à savoir s'il existe au moins un mode instable dans le système, dans le prochain paragraphe.

La dépendance en $\mathbf{k}_\perp$ ne nous intéressant pas ici, nous écrivons la relation de dispersion (1.31) de manière compacte :

$$1 - \int_0^\infty d\zeta e^{-\zeta} \frac{A_n + A_T(\zeta - 1)}{\zeta - \hat{\omega}} = 0 \quad (1.32)$$

où le nombre d'onde est contenu dans les définitions :

$$A_n = \frac{\bar{n}\kappa_n}{(1 + k_\perp^2)v_d\bar{T}} \quad A_T = \frac{\bar{n}\kappa_T}{(1 + k_\perp^2)v_d\bar{T}} \quad (1.33)$$

représentant les gradients de densité et de température, et

$$\hat{\omega} \equiv \frac{\omega}{\omega_d} = \frac{\omega}{kv_d\bar{T}} \quad (1.34)$$

représentant la vitesse de phase de l'onde sur la vitesse de dérive de courbure thermique. Nous pouvons à présent déterminer la courbe de stabilité marginale, définie par $\omega_i = 0$, dans le plan défini par A_n et A_T . Le système étudié ici a ceci de particulier que seules les ondes telles que $\omega_r \cdot \omega_d \geq 0$ sont résonantes avec les centres-guides. Dans le cas contraire il n'existe pas de pôles sous l'intégrale dans (1.32). En conséquence, il convient de traiter séparément les cas où les ondes se propagent dans le sens de la dérive, $\hat{\omega}_r \geq 0$, et dans le sens opposé, $\hat{\omega}_r < 0$.

Dans le premier cas il convient d'utiliser la prescription de Landau. Celle-ci préconise d'ajouter à la pulsation ω_r une partie imaginaire, positive et infiniment petite $i0^+$. Comme nous l'avons déjà signalé, cette prescription découle du principe de causalité. Elle peut aussi se déduire du second principe de la thermodynamique appliqué à la solution (1.28), comme on le verra au paragraphe 4.3.1. Le pôle dans la relation de dispersion (1.32) peut alors être traité en utilisant la propriété :

$$\frac{1}{x + i0^+} = PP(1/x) - i\pi \delta(x) \quad (1.35)$$

où $PP(1/x)$ est la partie principale⁷ de $1/x$. La relation de dispersion peut alors être décomposée en parties réelle et imaginaire (pour $k > 0$) :

$$\begin{aligned} 1 - PP \int_0^\infty d\zeta e^{-\zeta} \frac{A_n + A_T(\zeta - 1)}{\zeta - \hat{\omega}_r} &= 0 \\ -i\pi \int_0^\infty d\zeta e^{-\zeta} (A_n + A_T(\zeta - 1)) \delta(\zeta - \hat{\omega}_r) &= 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

Cette dernière équation nous donne la valeur de la pulsation marginale en fonction des écarts à l'équilibre :

$$\omega_r = \omega_d \left(1 - \frac{A_n}{A_T} \right) \quad (1.37)$$

qui n'est valable que dans la zone $A_n/A_T \leq 1$ du fait de la condition $\hat{\omega}_r \geq 0$. Introduire l'expression de la pulsation marginale dans la partie réelle de la relation de dispersion fait apparaître un seuil indépendant du gradient de densité :

$$A_T = 1 \quad (1.38)$$

Pour la même raison que précédemment, cette expression n'est valable que pour $A_n \leq 1$. Un mode donné sera donc instable lorsque le gradient de température est plus grand que sa valeur marginale, quel que soit $A_n \leq 1$.

Lorsque la fréquence de l'onde et la fréquence due à la vitesse de courbure sont de signe contraire, $\omega_r \omega_d < 0$ (ou $\hat{\omega}_r < 0$), la relation de dispersion (1.32) ne possède plus de pôles. Après quelques manipulations, celle-ci s'écrit sous la forme :

$$1 - A_T - (A_n + A_T(\hat{\omega}_r - 1) + iA_T\hat{\omega}_i) \int_0^\infty d\zeta e^{-\zeta} \frac{\zeta - \hat{\omega}_r + i\hat{\omega}_i}{(\zeta - \hat{\omega}_r)^2 + \hat{\omega}_i^2} = 0$$

que l'on peut décomposer en partie réelle et partie imaginaire :

$$\begin{aligned} 1 - A_T - (A_n + A_T(\hat{\omega}_r - 1)) \int \frac{(\zeta - \hat{\omega}_r)e^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta - \hat{\omega}_r)^2 + \hat{\omega}_i^2} + A_T\hat{\omega}_i^2 \int \frac{d\zeta e^{-\zeta}}{(\zeta - \hat{\omega}_r)^2 + \hat{\omega}_i^2} &= 0 \\ -\hat{\omega}_i \left[(A_n + A_T(\hat{\omega}_r - 1)) \int \frac{d\zeta e^{-\zeta}}{(\zeta - \hat{\omega}_r)^2 + \hat{\omega}_i^2} + A_T \int \frac{(\zeta - \hat{\omega}_r)e^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta - \hat{\omega}_r)^2 + \hat{\omega}_i^2} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

⁷La partie principale est définie au sens des distributions par la relation : $\int_a^b dx PP(1/x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{-\varepsilon} dx/x + \int_\varepsilon^b dx/x \right)$ si $a < 0 < b$.

1.6. STABILITÉ MARGINALE DANS LE PLAN (A_N, A_T)

où les intégrales ne divergent pas du fait de la condition $\hat{\omega}_r < 0$. La courbe de stabilité marginale est donnée par $\omega_i = 0$. La partie imaginaire de la relation de dispersion (deuxième équation) est alors trivialement nulle. Pour accéder à l'information présente dans la partie imaginaire, il est raisonnable de poser $\omega_i = o^+$, en accord avec le principe de causalité. Ainsi, les parties réelle et imaginaire de la relation de dispersion peuvent s'écrire dans la limite de stabilité marginale :

$$1 - A_T - (A_n + A_T(\hat{\omega}_r - 1)) I_1(\hat{\omega}_r) = 0 \quad (1.40)$$

$$(A_n + A_T(\hat{\omega}_r - 1)) I_2(\hat{\omega}_r) + A_T I_1(\hat{\omega}_r) = 0 \quad (1.41)$$

où apparaissent les deux intégrales, fonctions de $\hat{\omega}_r$:

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta} d\zeta}{\hat{\omega}_r - \zeta} \quad ; \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta} d\zeta}{(\hat{\omega}_r - \zeta)^2} = -\frac{1}{\hat{\omega}_r} - I_1 \quad (1.42)$$

Signalons que c'est à ce niveau que les traitements avec pôles et sans pôles ne sont plus équivalents. Le terme en $A_T I_1$ dans la partie imaginaire de la relation de dispersion sans pôles (1.41) est nul en présence de pôles :

$$\lim_{\hat{\omega}_i \rightarrow 0^+} \int \frac{(\zeta - \hat{\omega}_r) \hat{\omega}_i e^{-\zeta} d\zeta}{(\zeta - \hat{\omega}_r)^2 + \hat{\omega}_i^2} = \int (\zeta - \hat{\omega}_r) \pi \delta(\zeta - \hat{\omega}_r) e^{-\zeta} d\zeta = 0$$

C'est ce terme supplémentaire qui, à lui seul, va être responsable de la différence entre les résultats avec et sans pôles. Dans le cas sans pôles, le système d'équation (1.40) et (1.41) conduit à une expression paramétrique des gradients marginaux :

$$A_n = -\frac{I_1 + I_2(\hat{\omega}_r - 1)}{I_2 - I_1^2} \quad ; \quad A_T = \frac{I_2}{I_2 - I_1^2} \quad (1.43)$$

Ces relations sont suffisantes pour établir la courbe de stabilité marginale, mais ne donnent aucune indication ni sur la pulsation marginale, ni sur le comportement asymptotique de la courbe de stabilité pour $A_n \gg 1$. Pour obtenir ces informations, il faut combiner judicieusement les parties réelle et imaginaire de la relation de dispersion de manière à trouver une relation indépendante des intégrales I_1 et I_2 . Le détail du calcul est donné dans l'annexe C, où l'on obtient les expressions de la pulsation marginale :

$$\hat{\omega}_r = 1 - \frac{A_n(A_T + 1)}{2A_T}$$

et du gradient marginal de température :

$$A_T = \frac{A_n^2}{8} + \frac{A_n}{2} + \frac{1}{8} \sqrt{A_n^3(A_n + 8)} \quad (1.44)$$

valable pour $A_T > 1$.

La courbe de stabilité marginale est montrée sur la figure 1.2. Comme on le voit, en

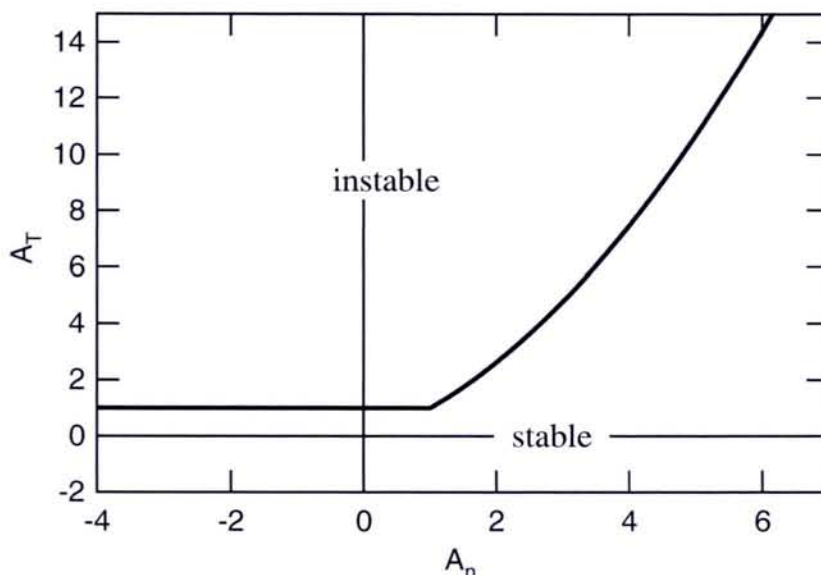


FIG. 1.2 – Courbe de stabilité marginale cinétique dans le plan (A_n, A_T) . Le système est instable au-dessus de la courbe. La branche résonante (non-résonante) correspond à $A_n < 1$ ($A_n > 1$).

présence de pôles, le gradient de densité n'influe pas sur la stabilité d'un mode donné. En l'absence de pôles, on constate l'effet stabilisant du gradient de densité : il faut appliquer un gradient de température plus grand pour déstabiliser un mode donné.

Nous pouvons préciser encore le comportement particulier de la pulsation marginale par une résolution numérique direct de la relation de dispersion en l'absence de pôles, qui, étant donné l'annulation triviale de sa partie imaginaire pour $\omega_i = 0$, donne un résultat identique à celle de sa partie réelle (1.40). Celle-ci permet d'obtenir le comportement de la fréquence en fonction du gradient de température, montré sur la figure (1.3 traits pleins). Il existe une valeur critique de A_T au-delà de laquelle il n'y a plus de solutions $\hat{\omega}_i = 0$, correspondant au gradient marginal. La pulsation associée est la pulsation marginale. Celle-ci décroît avec A_T , jusqu'à atteindre $\hat{\omega}_r = 0$ pour $A_T = A_n = 1$. Pour $A_n < 1$, la valeur du maximum de A_T n'appartient plus au domaine $\hat{\omega}_r < 0$, les résonances doivent alors être prises en compte. De plus, pour $A_n > 1$ (courbe $A_n = 1.5$), il existe un domaine pour lequel deux fréquences sont solutions pour un gradient de température donné. Cette région est caractérisée par $A_T > A_n$. Ce comportement est typique d'une instabilité réactive, c'est-à-dire d'une instabilité fluide, où le régime stable admet deux fréquences réelles et un taux de croissance nul, et le régime instable deux fréquences complexes conjuguées.

A travers cette analyse, il est clair que la partie réelle contient, à elle seule, toute l'information sur la pulsation marginale et le gradient marginal, mais de manière qualitative. L'utilisation de $\omega_i \sim o^+$ permet de prendre en compte la partie imaginaire de la relation de dispersion en l'absence de pôles (1.41), et conduit à l'information analytique

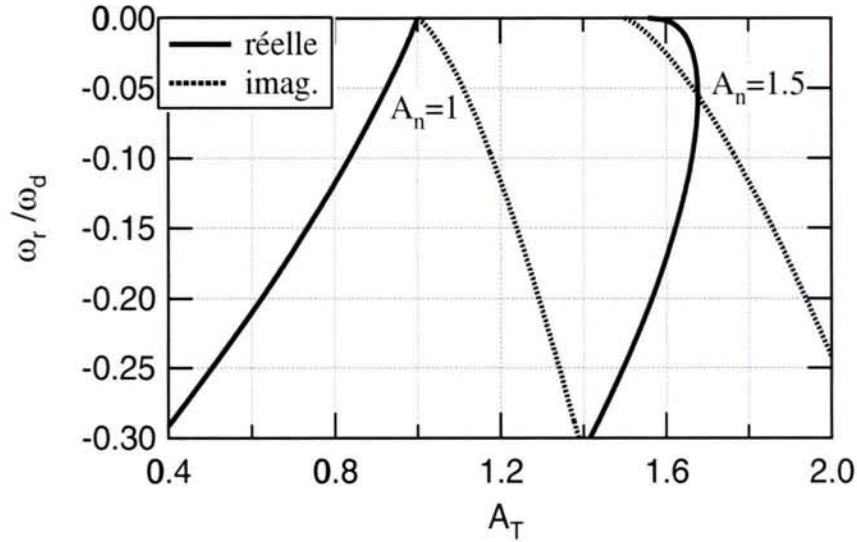


FIG. 1.3 – Solutions des parties réelle et imaginaire de la relation de dispersion en l'absence de résonances ($\hat{\omega}_r < 0$), représentées dans le plan gradient de température A_T , pulsation $\hat{\omega}_r$, pour deux valeurs du gradient de densité, $A_n = 1$ et $A_n = 1.5$.

quantitative sur la stabilité marginale. Cela apparaît sur la figure 1.3, où pour un gradient de densité donné, le point d'intersection des solutions pour la partie réelle et pour la partie imaginaire de la dispersion (trait pointillé) correspond effectivement au maximum du gradient de température.

1.7 Spectre en k de l'instabilité

Dans l'optique d'une étude non-linéaire de la turbulence qui peut se développer dans le système, ce paragraphe est dédié à l'étude de la stabilité linéaire en fonction du nombre d'onde k dans la direction périodique. L'étude se concentre sur le cas où $\bar{n}$ a une valeur constante. De plus, nous nous plaçons dans la partie du diagramme $A_n - A_T$ où les résonances sont possibles. De fait, nous prenons un gradient de densité d'équilibre plat, c'est-à-dire $\kappa_n = 0$.

En reprenant les expressions de la pulsation marginale (1.37) et du gradient marginal de température (1.38), pour le cas $\kappa_n = 0$, on obtient leurs expressions en fonction de k et de $k_\perp^2$:

$$\omega_r = kv_d \bar{T} \quad (1.45)$$

$$\kappa_T = \frac{v_d \bar{T}}{\bar{n}} (1 + k_\perp^2) \quad (1.46)$$

On peut introduire ici la notion de seuil d'instabilité. Il s'agit de la valeur minimum du

gradient de température qu'il faut atteindre pour qu'au moins un mode du système soit destabilisé. Ici, il s'agit du premier mode permis par la géométrie du système $\mathbf{k}_{\perp 0} = \pi/L_x \mathbf{e}_x + 2\pi/L_y \mathbf{e}_y$. Ce gradient sera appelé gradient critique dans ce qui suit, il vaut :

$$\kappa_{T,cr} = \frac{v_d \bar{T}}{\bar{n}} (1 + k_{\perp 0}^2) \quad (1.47)$$

On constate dans l'expression du gradient de température (1.46), le rôle fondamental du terme de polarisation en $k_{\perp}^2$ dans la stabilisation des petites structures. En effet pour un gradient donné, supérieur au gradient critique, seul un certain nombre des premiers modes du spectre seront destabilisés. Les modes correspondants aux petites structures spatiales (nombre d'onde élevé) seront stables. Cet effet de stabilisation des petites structures via la polarisation n'est pas surprenant si l'on se souvient que la polarisation provient de l'action de la gyromoyenne sur la densité ionique, le rôle de cette dernière étant précisément de moyenner l'information contenue aux échelles de l'ordre du rayon de Larmor.

Il est possible de déterminer l'expression approchée de ω lorsque le taux de croissance est grand devant la pulsation de dérive ω_d . Dans cette limite, l'intégrale dans la relation de dispersion (1.31), ne diverge pas. On peut dire qu'alors les résonances sont "élargies", dans le sens que le terme en $i\pi\delta(E - \hat{\omega}_r)$ n'apparaît pas. De même que dans l'annexe D, on effectue un développement de Taylor du dénominateur, en fonction du petit paramètre $\zeta/\hat{\omega}$:

$$1 - A_T + A_T \left(1 - \frac{1}{\hat{\omega}}\right) \left(1 + \frac{1}{\hat{\omega}} + \frac{2}{\hat{\omega}^2} + \frac{6}{\hat{\omega}^3} + \dots\right)$$

En prenant en compte les termes jusqu'à l'ordre 2 en $1/\hat{\omega}$, on obtient $\hat{\omega}^2 = -A_T$, qui n'est valable que pour une pulsation nulle et un taux de croissance :

$$\omega_i = \frac{k}{\sqrt{1 + k_{\perp}^2}} \sqrt{v_d \bar{T} \kappa_T} \quad (1.48)$$

Cette expression du taux de croissance n'est valable que pour $\kappa_T \gg 1$ et pour k suffisamment petit. Cette limite décrit correctement le comportement cinétique loin du seuil de stabilité linéaire. Les résonances, élargies, n'ont alors plus d'influence sur le taux de croissance, on parle, dans ce cas, de limite fluide. En prenant en compte l'ordre supérieur du développement de Taylor, on obtient une équation cubique en $\hat{\omega}$:

$$\hat{\omega}^3 + A_T \hat{\omega} + 4A_T = 0$$

qui peut être résolue de manière approchée en réintroduisant la solution d'ordre 2 : $\hat{\omega} = \pm i\sqrt{A_T} + \tilde{\omega}$ et en cherchant la solution au premier ordre en $\tilde{\omega}$, soit : $\tilde{\omega} = 2$, on a ainsi l'expression de la pulsation dans la limite fluide :

$$\omega_r = 2k v_d \bar{T}$$

Afin de préciser le comportement du système pour de faibles écarts à l'équilibre, il est nécessaire de pouvoir accéder à la totalité de l'information contenue dans la relation de

dispersion (1.31). Cette analyse ne peut être effectuée analytiquement, nous devons exprimer la relation de dispersion au moyen de fonctions spéciales, bien connues et tabulées. Dans notre cas, la relation de dispersion générale (1.31), s'écrit (en prenant $\kappa_n = 0$) :

$$1 - \frac{\bar{n}k\kappa_T}{1 + k_\perp^2} (1 + (\hat{\omega} - 1)I(\hat{\omega})) = 0 \quad (1.49)$$

où nous avons défini I comme :

$$I(\hat{\omega}) = \int_0^\infty \frac{d\zeta e^{-\zeta}}{\zeta - \hat{\omega}} \quad \text{pour } \omega_i > 0 \quad (1.50)$$

avec la notation : $\hat{\omega} \equiv \omega/\omega_d = \omega/(kv_d\bar{T})$. Comme nous l'avons déjà signalé dans la discussion sur l'utilisation de la transformée de Fourier en temps (équation (1.27)), la relation de dispersion (1.49) n'est définie que pour $\omega_i > 0$. Elle doit être prolongée analytiquement dans tout le plan complexe. Le calcul du prolongement analytique de I pour $\omega_i \leq 0$ est explicité dans l'annexe E. Il s'écrit⁸ :

$$I = \int_0^\infty \frac{d\zeta e^{-\zeta}}{\zeta - \hat{\omega}} + \text{sign}(k) 2i\pi e^{-\hat{\omega}} \quad \text{pour } \omega_i \leq 0$$

où $\text{sign}(k)$ est le signe de k . La relation de dispersion (1.49) ne peut pas être exprimée directement à partir de la fonction de Fried et Conte (définie par exemple dans [7] page 218). Il est plus judicieux d'utiliser l'intégrale [9] :

$$E_1(z) = \int_z^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad \text{pour } |\arg(z)| < \pi$$

qui est le prolongement analytique de l'intégrale exponentielle, définie pour un argument réel :

$$E_1(x) = -PP \int_{-x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \quad \text{pour } x > 0$$

L'expression de I dans tout le plan complexe est alors (pour $k > 0$) :

$$\begin{aligned} I &= e^{-\hat{\omega}} E_1(-\hat{\omega}) \quad \text{pour } \hat{\omega}_i > 0 \\ I &= e^{-\hat{\omega}} (E_1(-\hat{\omega}) + 2i\pi) \quad \text{pour } \hat{\omega}_i \leq 0 \end{aligned}$$

La relation de dispersion (1.49) peut être résolue numériquement⁹. Le comportement du taux de croissance et de la pulsation ainsi calculés est montré sur la figure 1.4. L'amortissement des petites structures par l'effet Landau et la polarisation¹⁰ semble quasiment linéaire. Cependant son comportement asymptotique n'a pas pu être déterminé. En effet, comme nous l'avons vu, le calcul de la limite $\hat{\omega} \gg 1$ ne permet pas d'accéder à l'information sur le comportement asymptotique de ω aux grands k (1.48).

⁸ ζ est ici une variable réelle, correspondant à ζ_r dans les expressions (E.6) et (E.7) de l'annexe. I représente ici aussi bien l'intégrale de départ que son prolongement analytique (noté $\bar{I}$ dans l'annexe).

⁹Le comportement de ω pour $k < 0$ peut être obtenu par symétrie étant donné que la transformée de Fourier d'une fonction réelle est inchangée par la transformation $(i, \omega, k) \rightarrow (-i, -\omega, -k)$, soit $\omega_r(k) = -\omega_r(-k)$ et $\omega_i(k) = \omega_i(-k)$.

¹⁰Le rôle de la polarisation a déjà été discuté à partir de l'équation du gradient marginal (1.46).

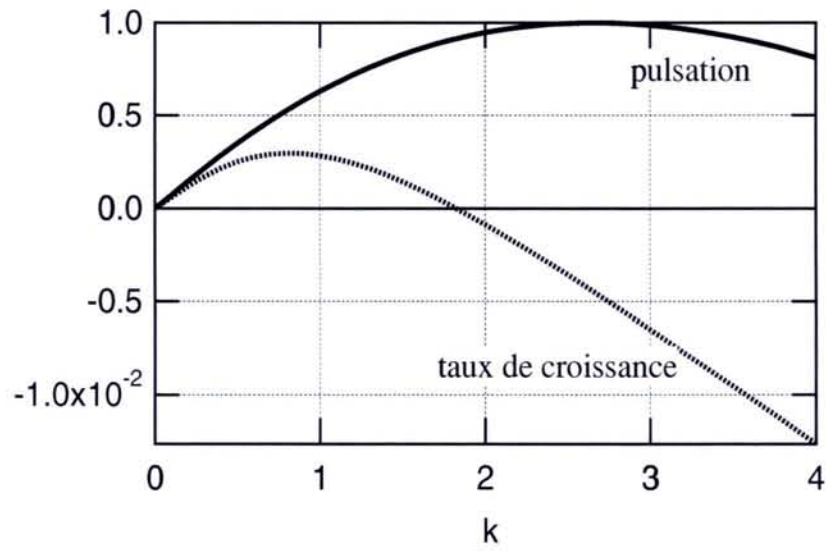


FIG. 1.4 – Taux de croissance et pulsation cinétique en fonction du vecteur d'onde k pour $k_x = \pi/L_x$ et $\kappa_T = 4\kappa_{T,cr}$

1.8 Flux quasi-linéaire

Nous dérivons ici l'expression du flux quasi-linéaire. Il s'agit de l'approximation du flux turbulent (1.18) dans la limite quasi-linéaire. Pour des fluctuations de faible amplitude, on peut calculer celui-ci à partir de la réponse linéaire cinétique (1.28). Cette expression du flux nous sera utile dans la dérivation de la production d'entropie au paragraphe 4.3.1. Le flux turbulent a pour expression :

$$Q_{turb} = \int_0^\tau \frac{dt}{\tau} \int_0^{L_y} \frac{dy}{L_y} \tilde{f} \tilde{v}_{Ex} \quad (1.51)$$

où nous rappelons que $\tilde{v}_{Ex} = -\partial_y \tilde{\Phi}$. Nous regardons l'impact du flux turbulent sur la dynamique de la fonction de distribution d'équilibre (équation (1.17)). Il s'agit de connaître son comportement pour des temps longs vis-à-vis de l'échelle de temps caractéristique d'évolution des fluctuations : $\tau \gg \omega^{-1}$, mais pour des temps petits devant l'échelle caractéristique d'évolution de l'équilibre. Les fluctuations poloïdales et temporelles de la fonction de distribution et du potentiel s'écrivent comme des sommes infinies de modes de Fourier :

$$\tilde{f}(y, t) = \sum_{\omega} \sum_k \hat{f}_{k,\omega} e^{i(ky - \omega t)} \quad ; \quad \tilde{\Phi}(y, t) = \sum_{\omega'} \sum_{k'} \hat{\Phi}_{k',\omega'} e^{i(k'y - \omega' t)}$$

Les intégrales dans la définition du flux (1.51) permettent de passer de quatre à deux sommations, par exemple l'intégrale sur y donne :

$$\begin{aligned} \sum_k \sum_{k'} \hat{f}_k(-ik') \hat{\Phi}_{k'} \int \frac{dy}{L_y} e^{i(k+k')y} &= \sum_k \sum_{k'} \hat{f}_k(-ik') \hat{\Phi}_{k'} \delta_{k+k'} \\ &= \sum_k \hat{f}_k i k \hat{\Phi}_{-k} \end{aligned}$$

Le flux turbulent étant réel, son expression dans l'espace de Fourier prend finalement la forme :

$$Q_{turb} = -\Im \left(\sum_{\omega} \sum_k \hat{f}_{k,\omega} k \hat{\Phi}_{-k,-\omega} \right) \quad (1.52)$$

avec $\Im(z)$ la partie imaginaire de z .

En introduisant la réponse linéaire de la fonction de distribution (1.28) dans cette expression, nous obtenons l'approximation quasi-linéaire du flux turbulent :

$$Q_{ql} = -\Im \left(\sum_{\omega} \sum_k k^2 |\hat{\Phi}_{k,\omega}|^2 \frac{\partial_x \bar{f}}{\omega_d \zeta - \omega} \right)$$

où nous avons fait apparaître le module au carré $|\hat{\Phi}_{k,\omega}|^2 \equiv \hat{\Phi}_{k,\omega} \hat{\Phi}_{k,\omega}^*$, étant donné que, pour tout Φ réel, $\hat{\Phi}_{k,\omega}^* = \hat{\Phi}_{-k,-\omega}$. Le flux quasi-linéaire est calculé à la résonance grâce à

la prescription Landau : $\omega = \omega_r + i\omega^+$. En utilisant (1.35) on obtient :

$$\Im \left(\frac{1}{\omega_d \zeta - \omega} \right) = \pi \delta(\omega_d \zeta - \omega) = \frac{\pi}{|\omega_d|} \delta(\zeta - \omega/\omega_d)$$

Le flux quasi-linéaire peut finalement s'écrire comme un flux diffusif :

$$Q_{qt} = -D_{qt} \partial_x \bar{f} \quad \text{avec} \quad D_{qt} = \frac{\pi}{|\omega_d|} \sum_{\omega} \sum_k |k \hat{\Phi}_{k,\omega}|^2 \delta(\zeta - \omega/\omega_d) \quad (1.53)$$

Le flux quasi-linéaire se présente comme un peigne de Dirac à deux dimensions¹¹, une somme infinie de pics de Dirac localisés pour chaque couple (ω, k) tel que la vitesse de phase de l'onde turbulente $v_\varphi = \omega/k$ soit égale à la vitesse d'évolution des particules sous l'effet de la dérive de courbure : $v_\varphi = v_d E$.

Le cas $\omega_d = 0$ est intéressant puisqu'il conduit à l'égalité du coefficient de diffusion quasi-linéaire avec le coefficient de diffusion électrostatique dans la limite de "recouvrement" des résonances. Lorsque ω possède une partie imaginaire non nulle $i\Delta\omega_k$ les résonances sont "élargies", puisqu'alors $\Im \left(\frac{-1}{\omega + i\Delta\omega_k} \right) = \frac{\Delta\omega_k}{\omega^2 + \Delta\omega_k^2}$ est plus "large" que $\delta(\omega)$. Cet élargissement est responsable du recouvrement des résonances lorsque plusieurs énergies E sont impliquées. Dans cette limite la théorie quasi-linéaire est correcte. En supposant un spectre large en fréquence de la forme : $|k \hat{\Phi}_{k,\omega}|^2 = \frac{1}{\pi} \frac{|k \hat{\Phi}_k|^2 \Delta\omega_k}{\omega^2 + \Delta\omega_k^2}$, le coefficient de diffusion quasi-linéaire $D_{qt} = \pi \sum_{\omega} \sum_k |k \hat{\Phi}_{k,\omega}|^2 \delta(\omega)$ redonne le coefficient de diffusion électrostatique dû à une marche aléatoire :

$$D_{qt} = \sum_k \frac{\hat{v}_{Ex}^2}{\Delta\omega_k}$$

Le temps de corrélation est donné par $\tau_c = \Delta\omega_k^{-1}$. $\Delta\omega_k$ peut être identifié au taux de croissance linéaire de l'instabilité (ω_i), mais aussi à la fréquence caractéristique d'un processus de décorrélation non-linéaire [6].

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE SCIENCES
RUE DE LA LIBÉRIÉ 1
54601 VILLERS-LES-NANCY Cedex

¹¹De fait, il s'agirait plutôt d'une brosse de Dirac.

1.8. FLUX QUASI-LINÉAIRE

Chapitre 2

Modèle fluide à deux champs

Maintenant que nous avons dérivé et analysé les caractéristiques linéaires essentielles du modèle cinétique, nous allons présenter le modèle fluide le plus simple qui permettra une comparaison raisonnable des deux approches dans le régime non-linéaire. Avant cela, nous tenons à faire remarquer ici que la théorie fluide n'est pas la seule alternative possible pour réduire la dimensionnalité du problème. On peut citer en particulier les modèles de type "Multi Water-Bag" (voir [10]), remis au goût du jour récemment par l'équipe de Pierre Bertrand¹ du LPMIA (Université Henri Poincaré, Nancy I).

2.1 Equations de transport fluides

A partir de l'équation de Vlasov (1.12) nous pouvons dériver une hiérarchie d'équations de transport décrivant l'évolution de grandeurs fluides, c'est-à-dire de grandeurs dépendant uniquement des coordonnées spatiales et du temps. L'intégration sur l'énergie de l'équation de Vlasov donne l'équation d'évolution de la densité :

$$\partial_t n + [\Phi, n] + v_d \partial_y P = 0$$

où la densité est identifiée au premier moment (d'ordre zéro) de la fonction de distribution :

$$n = \int_0^\infty f dE$$

La dépendance en énergie du hamiltonien du système $H = \Phi + v_d E x$ fait apparaître le moment d'ordre un, c'est-à-dire la pression scalaire P , dans l'équation d'évolution sur la densité. La pression est définie comme :

$$P = \int f E dE$$

Dans une hiérarchie fluide, l'évolution d'un moment est ainsi inévitablement couplée à l'évolution du moment d'ordre supérieur. L'équation de transport donnant l'évolution

¹Une thèse sur le sujet est actuellement menée par Pierre Morel.

2.1. EQUATIONS DE TRANSPORT FLUIDES

de P est obtenue par l'intégrale en énergie de la fonction de distribution pondérée par l'énergie E :

$$\partial_t P + [\Phi, P] + v_d \partial_y Q = 0$$

L'évolution de la pression est couplée au moment d'ordre deux, défini comme un flux :

$$Q = \int f E^2 dE \quad (2.1)$$

Il faudrait une infinité d'équations de transport pour retrouver toute l'information contenue dans l'équation de Vlasov qui décrit l'évolution de la fonction de distribution pour une infinité de valeurs de l'énergie. La troncature de cette hiérarchie infinie de moments consiste à relier un moment d'ordre J aux moments d'ordres inférieurs $0, \dots, J-1$. Cette opération de fermeture est à la base de la théorie fluide. Son choix n'est bien souvent pas unique. Les hypothèses sur lesquelles il repose visent à ajuster les comportements linéaires et non-linéaires des descriptions fluide et cinétique du problème considéré.

Dans le cas où le système est à l'équilibre thermodynamique local, il est complètement décrit par une fonction de distribution maxwellienne, qui s'écrit à deux dimensions :

$$f_M = \frac{n}{T} e^{-E/T}$$

La température T est définie en fonction des deux premiers moments par l'équation d'état :

$$T = P/n$$

La hiérarchie fluide qui en découle se limite donc à l'évolution de la densité et de la température (ou de la pression), le flux Q (2.1) est défini à partir des deux moments précédents :

$$\begin{aligned} Q &= \int f_M E^2 dE = \Upsilon n T^2 \\ &= 2nT^2 = 2P^2/n = 2PT \end{aligned} \quad (2.2)$$

où $\Upsilon = C_p/C_v$ est le coefficient d'adiabaticité. Dans ce qui suit, nous admettrons que la fonction de distribution s'écarte peu d'une maxwellienne, de sorte que nous supposons que le flux peut toujours s'exprimer sous la forme (2.2). Cette hypothèse constitue notre premier choix de fermeture. La description fluide du système physique repose donc sur la résolution du système d'équations :

$$\begin{aligned} \partial_t n + [\Phi, n] + v_d \partial_y P &= 0 \\ \partial_t P + [\Phi, P] + v_d \partial_y Q &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Le potentiel Φ est donné par la quasi-électronneutralité (1.13). Le flux Q est défini par l'hypothèse de fermeture (2.2). Ce système possède à présent autant d'équations que d'inconnues et peut être résolu.

On peut remarquer que le modèle fluide dérivé ici, qui découle naturellement de l'équation de Vlasov (1.12), est sensiblement différent du modèle usuellement utilisé dans les plasmas de tokamaks (dans le cas électrostatique), c'est-à-dire le modèle de Braginskii [1] dans la limite 2D non-collisionnelle². On peut constater deux différences principales. D'une part, notre modèle ne prend en compte que la non-linéarité due au crochet de Poisson³ $[\Phi, n]$, correspondant au terme en $\mathbf{v_E} \cdot \nabla n$. D'autre part, nous n'avons pas de terme de courbure associé au potentiel. Cependant, les équations de transport fluides utilisées ici, correspondent elles aussi à des équations de conservation. Elles assurent la conservation du nombre total de centres-guides ainsi que de l'énergie totale du système, respectivement définis par : $N = \int n \, dx dy$ et $E_T = \int P \, dx dy$. On a en effet :

$$\dot{N} = \int \partial_t n \, dx dy \quad (2.4)$$

$$= - \int ([\Phi, n] + v_d \partial_y P) \, dx dy = 0 \quad (2.5)$$

L'intégrale sur le crochet de poisson est nulle puisque :

$$\begin{aligned} \int [\Phi, n] \, dy &= \int (\partial_x \Phi \partial_y n - \partial_y \Phi \partial_x n) \, dy \\ &= \int (-n \partial_x \partial_y \Phi - \partial_y \Phi \partial_x n) \, dy \\ &= - \int \partial_x (n \partial_y \Phi) \, dy \end{aligned}$$

dont l'intégrale sur x est nulle en l'absence de perturbations du potentiel aux limites radiales du système. Il en va de même pour la conservation de l'énergie totale du système E_T .

2.2 Expression des flux turbulents

La densité, la pression et le potentiel électrique sont décomposés en une partie d'équilibre et une partie fluctuante :

$$n = \bar{n} + \tilde{n}, \quad P = \bar{P} + \tilde{P}, \quad \Phi = \tilde{\Phi}$$

Les grandeurs d'équilibre sont définies comme étant les moyennes sur y des différentes quantités. Nous considérons le cas où le potentiel d'équilibre est nul : $\bar{\Phi} = 0$.

La densité et la pression d'équilibre évoluent suivant les équations :

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{n} + \langle [\tilde{\Phi}, \tilde{n}] \rangle &= 0 \\ \partial_t \bar{P} + \langle [\tilde{\Phi}, \tilde{P}] \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

²Les équations de Braginskii dans cette limite peuvent être trouvées dans la référence [6].

³Il en va de même dans l'équation sur P , outre le terme de fermeture.

2.3. ETUDE LINÉAIRE : STABILITÉ MARGINALE

où les crochets désignent une moyenne sur y . Ces équations s'écrivent sous forme conservative :

$$\begin{aligned}\partial_t \bar{n} + \partial_x \Gamma_{turb} &= 0 \\ \partial_t \bar{P} + \partial_x \mathcal{Q}_{turb} &= 0\end{aligned}\tag{2.7}$$

Les flux turbulents de centres-guides Γ_{turb} et de pression $\mathcal{Q}_{turb}$ résultent de la convection moyenne des perturbations par la vitesse de dérive électrique dans la direction radiale, $\tilde{v}_{Ex} = -\partial_y \tilde{\Phi}$:

$$\begin{aligned}\Gamma_{turb} &= \langle \tilde{n} \tilde{v}_{Ex} \rangle \\ \mathcal{Q}_{turb} &= \langle \tilde{P} \tilde{v}_{Ex} \rangle\end{aligned}\tag{2.8}$$

Les expressions des flux dans l'espace de Fourier sont calculées de la même manière que pour le flux turbulent cinétique (1.52), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\Gamma_{turb} &= -\Im \sum_k k \hat{n}_k \hat{\Phi}_{-k} \\ \mathcal{Q}_{turb} &= -\Im \sum_k k \hat{P}_k \hat{\Phi}_{-k}\end{aligned}\tag{2.9}$$

Ces expressions montrent clairement qu'un déphasage doit exister entre les fluctuations de densité, respectivement de pression, et du potentiel afin que les flux soient non nuls. Ces derniers sont maximaux pour des fluctuations en quadrature de phase.

2.3 Etude linéaire : stabilité marginale

L'étude de la stabilité marginale du système d'équations fluides dans le plan (A_n, A_T) va nous permettre de caractériser le comportement typique d'une instabilité fluide en fonction du forçage, et de le comparer à celui obtenu avec une modélisation cinétique. Les équations de transport (2.3) linéarisées s'écrivent, avec le flux Q donné par (2.2) :

$$\begin{aligned}\partial_t \tilde{n} + v_d \partial_y \tilde{P} &= \partial_x \bar{n} \partial_y \tilde{\Phi} \\ \partial_t \tilde{P} + \Upsilon v_d \partial_y (2\bar{T} \tilde{P} - \bar{T}^2 \tilde{n}) &= \partial_x \bar{P} \partial_y \tilde{\Phi}\end{aligned}\tag{2.10}$$

Dans cette section, le coefficient d'adiabaticité Υ est un paramètre libre pouvant prendre n'importe quelle valeur entière positive.

Les réponses en densité $\hat{n}$ et en pression $\hat{P}$ s'écrivent dans l'espace réciproque :

$$\begin{aligned}\frac{\hat{n}}{\bar{n}} &= -\frac{(\omega - 2\Upsilon\omega_d)\kappa_n + \omega_d\kappa_P}{\mathcal{D}(\omega, \omega_d)} k \hat{\Phi} \\ \frac{\hat{P}}{\bar{P}} &= -\frac{\omega\kappa_P - \Upsilon\omega_d\kappa_n}{\mathcal{D}(\omega, \omega_d)} k \hat{\Phi}\end{aligned}\tag{2.11}$$

On rappelle que $\omega_d = kv_d \bar{T}$. Le gradient de pression est donné par :

$$\kappa_P = \frac{\partial_x \bar{P}}{\bar{P}} = \kappa_n + \kappa_T = \frac{\partial_x (n_{eq} T_{eq})}{n_{eq} T_{eq}} - 2v_d$$

Le dénominateur est un polynôme d'ordre deux :

$$\mathcal{D}(\omega, \omega_d) = \omega^2 - 2\Upsilon \omega_d \omega + \Upsilon \omega_d^2$$

La contrainte de quasi-électroneutralité (1.23) est :

$$\hat{\Phi} + k_\perp^2 \hat{\Phi} = \hat{n}$$

En la couplant à l'équation (2.11), on obtient la relation de dispersion fluide :

$$\hat{\omega}^2 + \hat{\omega}(A_n - 2\Upsilon) - A_n(2\Upsilon - 1) + A_T + \Upsilon = 0$$

On rappelle que $\hat{\omega} = \omega/\omega_d$. Les quantités A_n et A_T sont définies par (1.33). Pour un système fluide à deux champs, la relation de dispersion possède deux solutions :

$$\hat{\omega}_\pm = -\frac{A_n}{2} + \Upsilon \pm \Delta^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \Delta = \frac{A_n^2}{4} + (A_n + \Upsilon)(\Upsilon - 1) - A_T \quad (2.12)$$

Lorsque le discriminant Δ est positif, les solutions de la relation de dispersion sont réelles. Le taux de croissance est marginalement stable. Aucune instabilité ne peut se développer. Lorsque le discriminant est négatif, les solutions sont complexes conjuguées. Deux branches coexistent : une stable et une instable. Cette dernière conduit à l'instabilité du système. La courbe de stabilité marginale correspond à la transition entre ces deux états du système, elle est donnée par $\Delta = 0$. Cette contrainte définit le gradient marginal de température au-delà duquel le système est instable :

$$A_T = \frac{A_n^2}{4} + (A_n + \Upsilon)(\Upsilon - 1) \quad (2.13)$$

La pulsation correspondante est fonction uniquement du gradient de densité :

$$\hat{\omega}_r = -\frac{A_n}{2} + \Upsilon$$

Le gradient marginal (2.13) dépend du paramètre Υ . La figure 2.1 compare les courbes de stabilité marginale fluide, pour trois valeurs de Υ , à la courbe de stabilité marginale cinétique. Le comportement asymptotique pour les grandes valeurs du gradient de densité est identique à la courbe cinétique en l'absence de pôles (1.44) quelle que soit la valeur de Υ : $A_T \propto \frac{A_n^2}{4}$. Comme nous l'avons déjà noté, du point de vue de la stabilité marginale, le traitement cinétique en l'absence de pôles montre un comportement très similaire au comportement fluide.

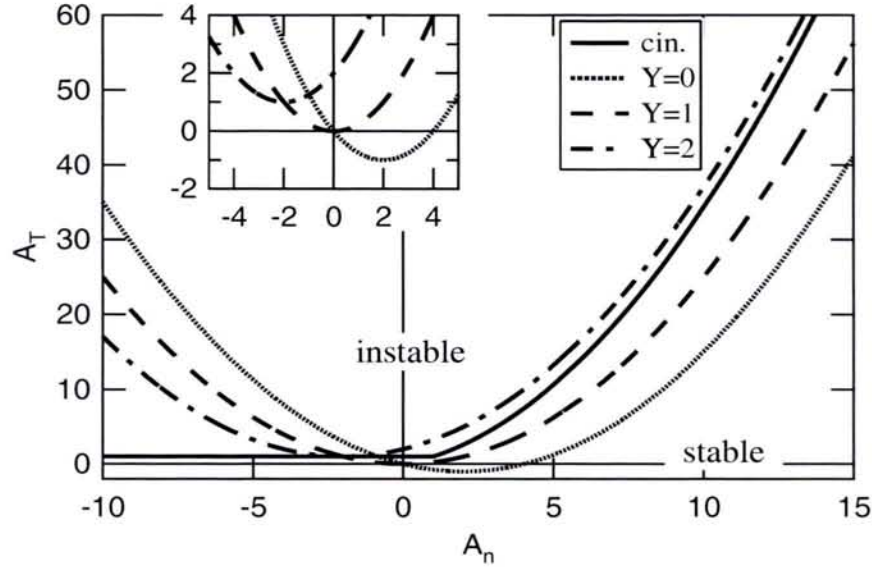


FIG. 2.1 – Courbes de stabilité fluides dans le plan (A_n, A_T) pour $\Upsilon = 0, 1, 2$, ainsi que la courbe cinétique. On rappelle que la branche résonante cinétique correspond à $A_n > 1$.

Pour $A_n < 1$, les comportements fluide et cinétique diffèrent notablement. Pour de forts gradients de densité, la modélisation fluide surestime la valeur du gradient marginal de température au delà duquel un mode donné est instable, le rôle stabilisant du gradient de densité n'apparaissant pas en cinétique en présence de pôles. Cependant, l'étude du système cinétique dans la limite où la pulsation est grande devant la dérive des centres-guides ($\omega_r \gg \omega_d$) conduit à une expression du gradient marginal identique au fluide pour $\Upsilon = 0$ (annexe D). Cette limite est valable lorsque $|A_n| \gg 1$. L'effet des résonances est alors très faible et le taux de croissance cinétique reste voisin de zéro même au-dessus de la courbe marginale cinétique.

D'autre part, comme on peut le voir en lucarne de la figure 2.1, le comportement fluide pour les faibles gradients de densité dépend de manière cruciale de la fermeture du système fluide au travers de Υ . Dans tous les cas, le comportement fluide est alors très différent du comportement cinétique, les résonances devant forcément être prises en compte dans cette région du plan. Le cas $\Upsilon = 0$ correspond à la troncature la plus simple de la hiérarchie fluide, mettant Q à zéro. Le comportement fluide dans ce cas, malgré son accord avec la limite $\omega_r \gg \omega_d$ en cinétique, est celui qui semble être le plus éloigné d'une représentation réaliste du système. Pour celui-ci en effet, il existe une zone ($0 < A_n < 2$) où un gradient de température négatif peut être déstabilisant, ce qui est en désaccord avec la physique de l'instabilité d'échange. Les deux cas $\Upsilon = 1$ et $\Upsilon = 2$ correspondent à des situations physiquement acceptables. Comme nous l'avons déjà signalé, le cas $\Upsilon = 2$ correspond à faire l'hypothèse que la fonction de distribution d'équilibre reste maxwellienne (2.2). Le

terme négligé est :

$$v_d \partial_y \int (f - f_M) E^2 dE \sim 0$$

Cela revient à supposer que les écarts à la maxwellienne sont faibles pour les grandes énergies. La fermeture $\Upsilon = 1$, quant-à-elle, suppose que le terme négligé est :

$$v_d \partial_y \int f (E - T)^2 dE \sim 0$$

On retrouve ici encore que les écarts à la maxwellienne doivent être négligés, puisque cette intégrale est nulle pour $f = f_M$.

Les valeurs $\Upsilon = 1$ et $\Upsilon = 2$ représentent les deux cas limites entre lesquels une modélisation fluide reste voisine d'une modélisation cinétique, en terme de stabilité marginale. Pour $\Upsilon < 1$ le comportement décrit n'est pas physiquement acceptable (gradient de température négatif déstabilisant). Pour $\Upsilon > 2$, il n'existe plus de point d'intersection entre les courbes fluide et cinétique, on ne peut alors plus évaluer les seuils d'instabilité pour un gradient de densité donné.

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons plus particulièrement au cas où le gradient de densité est nul. Nous allons de plus considérer à présent une fermeture sensiblement différente de celle utilisée ici. En effet, nous avons en point de mire les simulations numériques des régimes non-linéaires. Afin, de réduire au maximum les différences non physiques entre les modélisations fluide et cinétique, nous allons montrer qu'il est possible de modéliser les systèmes fluide et cinétique avec le même outil de simulation numérique en utilisant l'analogie formelle entre une modélisation fluide à deux champs et une modélisation cinétique avec seulement deux énergies⁴.

2.4 Analogie avec une modélisation cinétique à deux énergies

Le système fluide est modélisé en utilisant une fonction de distribution paramétrée par seulement deux énergies définies comme $E_0 - \varepsilon$ et $E_0 + \varepsilon$. Les deux fonctions de distribution associées, respectivement f_- et f_+ , sont solutions du système d'équations différentielles :

$$\begin{aligned} \partial_t f_- + [\Phi, f_-] + v_d (E_0 - \varepsilon) \partial_y f_- &= D \nabla_\perp^2 f_- \\ \partial_t f_+ + [\Phi, f_+] + v_d (E_0 + \varepsilon) \partial_y f_+ &= D \nabla_\perp^2 f_+ \end{aligned} \quad (2.14)$$

⁴L'égalité des seuils pour $A_n = 0$ est donnée par le nombre d'or : $\Upsilon = (1 + \sqrt{5})/2$. L'apparition de cette proportion harmonieuse entre le fluide et le cinétique est rendue anecdotique du fait que la simulation numérique a désormais détrôné les critères esthétiques pour guider notre intuition dans ses choix. Cette trace explicite de la transition entre tradition antique et considération moderne se devait, ce nous semble, d'être signalée.

2.4. ANALOGIE AVEC UNE MODÉLISATION CINÉTIQUE À DEUX ÉNERGIES

On définit la densité comme :

$$n = f_- + f_+ \quad (2.15)$$

Dans notre modèle à deux énergies, les fonctions de distribution f_- et f_+ ont ainsi la dimension d'une densité. La pression se déduit de l'équation d'évolution de la densité :

$$P = f_-(E_0 - \varepsilon) + f_+(E_0 + \varepsilon) = nE_0 + (f_+ - f_-)\varepsilon \quad (2.16)$$

Les deux premiers moments ainsi définis permettent d'exprimer la température comme :

$$T = \frac{P}{n} = E_0 + \varepsilon \frac{f_+ - f_-}{n} \quad (2.17)$$

Enfin, la fermeture découle automatiquement de la procédure de construction. Le flux de chaleur se déduit de l'équation d'évolution de la pression :

$$\begin{aligned} Q &= f_-(E_0 - \varepsilon)^2 + f_+(E_0 + \varepsilon)^2 \\ &= 2E_0P - (E_0^2 - \varepsilon^2)n \end{aligned} \quad (2.18)$$

Le flux ainsi défini prend la forme d'une combinaison linéaire des deux premiers moments.

Il est intéressant d'exprimer ce dernier en fonction du flux défini à partir d'une distribution maxwellienne (paragraphe 2.1) :

$$Q - nT^2 = 4\varepsilon^2 \frac{f_+ f_-}{n} \quad (2.19)$$

L'information contenue dans le flux (2.18) est plus riche que celle obtenue en prenant $\Upsilon = 1$ dans les fermetures étudiées précédemment, en témoigne l'apparition du produit $f_+ f_-$ dans le membre de droite. Il est *a priori* possible d'ajuster les définitions des flux Q et nT^2 en annulant approximativement le membre de droite, c'est-à-dire en prenant ε suffisamment petit (mais non nul). Nous avons cependant préféré ici garder le choix du paramètre libre ε pour contraindre les caractéristiques linéaires du système. Nous ne conservons ainsi que la non-linéarité principale ($[\Phi, n]$ ou $[\Phi, P]$). Nous focalisons par là notre attention sur la dynamique associée au crochet de Poisson qui régit, comme nous le verrons, les écoulements moyens (paragraphe 3.2) et les flux (paragraphe 3.3) dans le régime turbulent.

Le système d'équations (2.14) est donc équivalent à un système fluide à deux champs, en présence de processus collisionnels :

$$\begin{aligned} \partial_t n + [\Phi, n] + v_d \partial_y P &= D \nabla_\perp^2 n \\ \partial_t P + [\Phi, P] + v_d \partial_y Q &= D \nabla_\perp^2 P \end{aligned} \quad (2.20)$$

Les membres de gauche sont les équations de transport fluides dérivées précédemment, pour une fermeture définie par (2.18). Les membres de droite sont des termes collisionnels ajoutés de manière *ad hoc* : un terme de diffusion, de coefficient constant D , dans

l'équation sur la densité de centres-guides⁵ et un terme de conduction dans l'équation sur la pression. Cet ajout dans les deux équations est nécessaire pour amortir les petites structures spatiales. On peut noter que l'ajout d'un terme collisionnel dans l'équation sur la pression seule, en gardant une équation sur la densité exacte, conduit à un système instable à toutes les échelles et ne possédant pas de seuil. La limite pour les grands $k_\perp$ du taux de croissance est en effet donnée par $\lim_{k_\perp \rightarrow \infty} \omega_i = -\min(D_n, D_P)k_\perp^2$. Le choix de coefficients (D) identiques permet de relier directement les coefficients apparaissant dans les équations fluides à leurs analogues utilisés en cinétique à deux énergies, sans introduire de termes couplés dans l'évolution de f_- et f_+ . On conserve ainsi la structure du schéma numérique. Enfin, l'utilisation de termes collisionnels *ad hoc* dans les équations fluides est une étape intermédiaire dans le contexte général des comparaisons fluide-cinétique. La motivation principale réside dans la simplicité du traitement numérique de tels opérateurs. D'autre part, il n'existe pas à notre connaissance, d'études comparatives systématiques des modèles cinétiques de type Vlasov (de plus en plus utilisés pour décrire les plasmas de fusion) aux modèles fluides collisionnels (grandement employés par le passé, pour les mêmes fins, et encore utilisés actuellement). Cette absence justifie à elle seule l'utilité de notre travail. Cependant, notre dernier chapitre est consacré à la dérivation et à l'étude linéaire d'une fermeture permettant d'amortir les petites structures sans ajouts de termes collisionnels.

Un système d'équation auto-cohérent est obtenu en ajoutant aux équations 2.14, la contrainte de quasi-électronéutralité :

$$\Phi - \nabla_\perp^2 \Phi = f_- + f_+ - 1$$

Nous pouvons à présent réaliser l'étude linéaire du système. Pour un gradient de densité nul, les gradients des fonctions de distribution d'équilibre sont reliés au gradient de température par :

$$\partial_x \bar{f}_\pm = \pm \frac{\bar{n} \bar{T}}{2\varepsilon} \kappa_T \quad (2.21)$$

De même que précédemment, la relation de dispersion est obtenue après passage dans l'espace de Fourier en espace et en temps. La transformation $x \rightarrow k_x$ étant licite dans l'hypothèse de séparation d'échelle entre l'équilibre (décrit par (2.21)) et les perturbations qui subissent la diffusion (terme en $-Dk_x^2$). Cette hypothèse revient à supposer que, dans le régime linéaire, l'aplatissement du profil de température d'équilibre est négligeable sur l'échelle de temps considérée. Après quelques manipulations, la relation de dispersion lie $\omega = \omega_r + i\omega_i$ à k et $k_\perp^2$:

$$\omega^2 - 2\omega(kv_d E_0 - iDk_\perp^2) + (kv_d E_0 - iDk_\perp^2)^2 + (kv_d \varepsilon)^2 + \frac{v_d \kappa_T \bar{P} k^2}{1 + k_\perp^2} = 0$$

⁵La moyenne sur y de l'équation de transport des centres-guides peut être ramenée à une équation d'évolution de la vitesse de dérive électrique d'équilibre dans la direction périodique, $\langle v_{Ey} \rangle$, (paragraphe 3.2). Le coefficient de diffusion représente donc aussi une viscosité.

2.4. ANALOGIE AVEC UNE MODÉLISATION CINÉTIQUE À DEUX ÉNERGIES

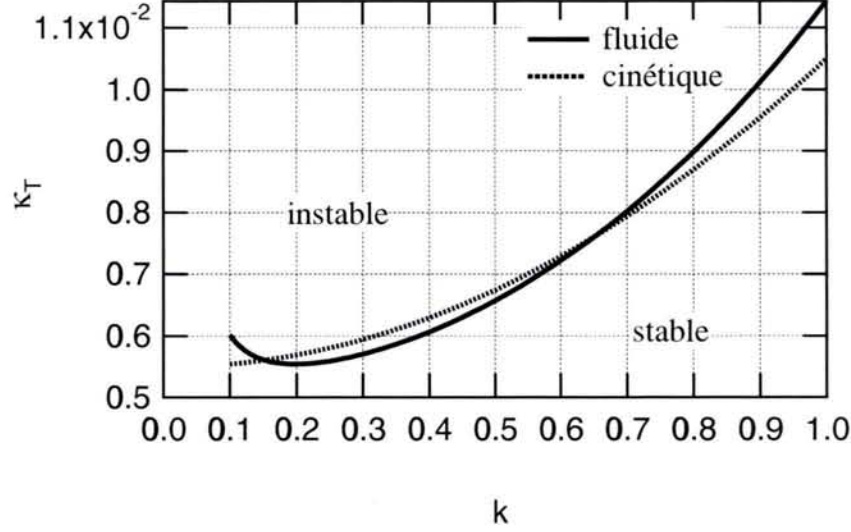


FIG. 2.2 – Gradients marginaux de température en fonction du vecteur d'onde dans la direction périodique. Pour un gradient donné, les modes (multiples de 0.1) en-dessous des courbes sont stables (ainsi que le mode $k = 0$), les modes au-dessus sont instables. Les paramètres utilisés ici sont : $L_x = 10$, $L_y = 2\pi L_x$, $v_d = 5 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon = 0.95$ et $D = 2 \cdot 10^{-3}$.

La stabilité marginale du système est obtenue en posant $\omega_i = 0$. La partie imaginaire de la relation de dispersion donne la pulsation marginale :

$$\omega_r = kv_d E_0 \quad (2.22)$$

Celle-ci ne dépend que du paramètre E_0 . La partie réelle de la relation de dispersion donne la valeur du gradient marginal de température :

$$\frac{\bar{n}\kappa_T}{v_d\bar{T}} = (1 + k_\perp^2) \left(\frac{\varepsilon^2}{\bar{T}^2} + \frac{Dk_\perp^2}{kv_d\bar{T}} \right)$$

Il dépend de la valeur des deux paramètres ε et D . On rappelle que, dans la limite linéaire, le gradient marginal a une valeur unique dans l'espace. Comme précédemment, les grandeurs $\bar{n}$ et $\bar{T}$ sont supposées indépendantes de x .

Le système est instable lorsqu'il possède au moins un mode instable pour un gradient de température donné. Dans le cas cinétique, le gradient marginal, donné par (1.46), est :

$$\kappa_T = \frac{v_d\bar{T}}{\bar{n}}(1 + k_x^2 + k^2)$$

Celui-ci est minimum pour les modes les plus petits pouvant se développer dans le système : $k_x = \pi/L_x$ et $k = 2\pi/L_y$. Le seuil d'instabilité, où gradient critique $\kappa_{T,cr}$,

est alors défini comme le gradient marginal pour ces modes :

$$\kappa_{T,cr}^{cin} = \frac{v_d \bar{T}}{\bar{n}} \left(1 + (\pi/L_x)^2 + (2\pi/L_y)^2 \right) \quad (2.23)$$

La dépendance en vecteur d'onde du gradient marginal fluide est plus complexe qu'en cinétique :

$$\kappa_T = \frac{v_d \bar{T}}{\bar{n}} (1 + k_x^2 + k_y^2) \left(\frac{\varepsilon^2}{\bar{T}^2} + \left(\frac{D}{v_d \bar{T}} \right)^2 \frac{(k_x^2 + k_y^2)^2}{k^2} \right) \quad (2.24)$$

De même qu'en cinétique, celui-ci est minimum pour $k_x = \pi/L_x$. Son comportement en fonction du mode k est donné par la figure 2.2. Le premier mode instable en fluide n'est pas forcément le mode $k = 2\pi/L_y$, puisqu'il dépend de la valeur de D . Dans le cas considéré, le premier mode instable fluide est le mode $k = 4\pi/L_y = 0.2$. Le seuil d'instabilité fluide correspond alors au gradient marginal pour ce mode :

$$\kappa_{T,cr}^{fl} = \min(\kappa_T(k)) \quad (2.25)$$

où le gradient marginal fluide $\kappa_T(k)$ est défini par l'expression (2.24).

Les racines complexes de la relation de dispersion sont :

$$\omega_{\pm} = kv_d E_0 - iDk_{\perp}^2 \pm kv_d \bar{T} \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{\bar{T}^2} - \frac{\bar{n}\kappa_T}{(1 + k_{\perp}^2)v_d \bar{T}}}$$

Le comportement de la partie réelle ω_r (pulsation) et imaginaire ω_i (taux de croissance) de ω , pour un forçage κ_T donné, en fonction du vecteur d'onde k et pour $k_x = \pi/L_x$ est montré sur la figure 2.3. Le discriminant sous la racine est indépendant du terme diffusif. Le comportement réactif de l'instabilité est donc uniquement contraint par la valeur de ε :

- Pour $\kappa_T < (1 + k_{\perp}^2) \frac{v_d \bar{T}}{\bar{n}} \frac{\varepsilon^2}{\bar{T}^2}$ le discriminant est positif et la pulsation et le taux de croissance prennent la forme :

$$\omega_{r\pm} = kv_d E_0 \pm kv_d \bar{T} \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{\bar{T}^2} - \frac{\bar{n}\kappa_T}{(1 + k_{\perp}^2)v_d \bar{T}}} \quad ; \quad \omega_i = -Dk_{\perp}^2 \quad (2.26)$$

Le taux de croissance décroît comme $-k_{\perp}^2$ aux grands vecteurs d'ondes. La pulsation peut prendre deux valeurs.

- Pour $\kappa_T > (1 + k_{\perp}^2) \frac{v_d \bar{T}}{\bar{n}} \frac{\varepsilon^2}{\bar{T}^2}$ le discriminant est négatif. La vitesse de phase est constante $v_{\varphi} = \omega_r/k = v_d E_0$ et la branche la plus instable est caractérisée par :

$$\omega_{i+} = -Dk_{\perp}^2 + kv_d \bar{T} \sqrt{\frac{\bar{n}\kappa_T}{(1 + k_{\perp}^2)v_d \bar{T}} - \frac{\varepsilon^2}{\bar{T}^2}} \quad (2.27)$$

Le système possède alors un spectre instable dont la largeur dépend des valeurs de D et ε . Lorsque la diffusion est mise à zéro, les petites structures spatiales ne sont

2.4. ANALOGIE AVEC UNE MODÉLISATION CINÉTIQUE À DEUX ÉNERGIES

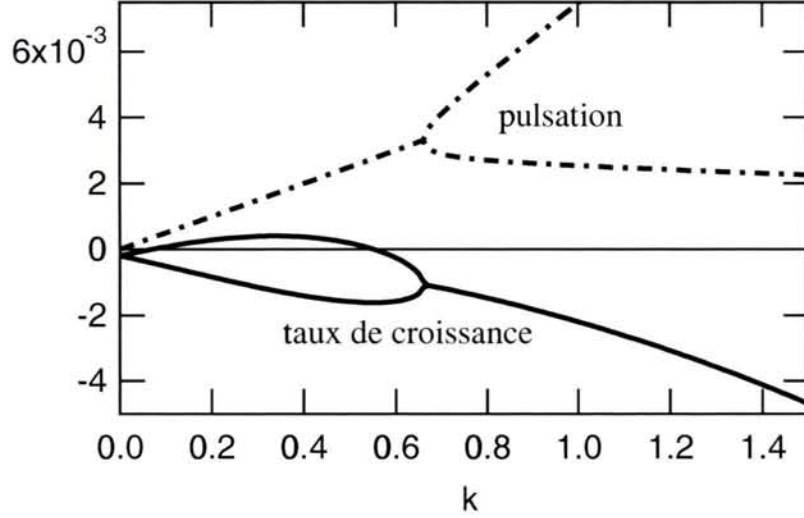


FIG. 2.3 – Taux de croissance et pulsation fluide en fonction du vecteur d'onde k ($k_x = \pi/L_x$) pour un forçage de 1.25 fois le seuil. Les paramètres utilisés sont les mêmes que pour la figure 2.2.

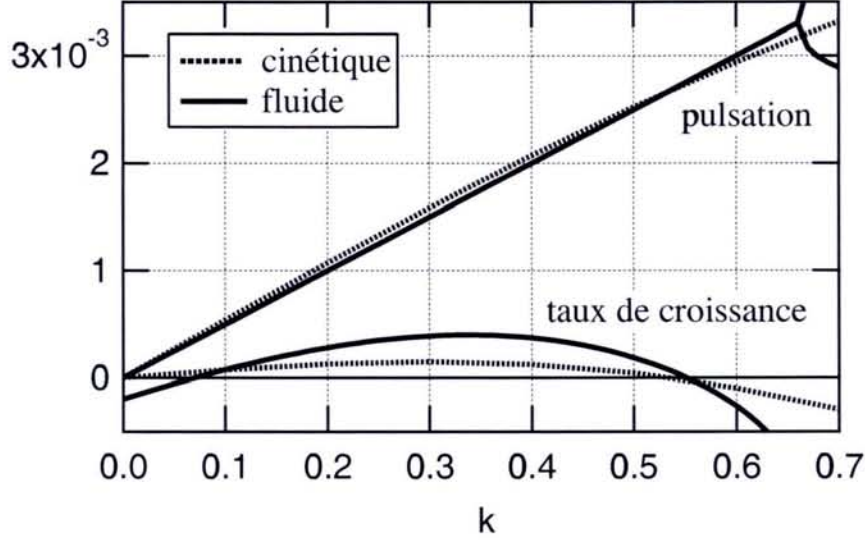
plus amorties, elle sont marginalement stables (2.26). Lorsque ε est nul, le système ne présente plus de seuil d'instabilité fini. Il est instable quel que soit $\kappa_T > 0$.

Avec les gradients de température critique $\kappa_{T,cr}^{cin}$ et $\kappa_{T,cr}^{fl}$ défini par les équations (2.23) et (2.25), nous pouvons introduire un paramètre permettant de quantifier la déstabilisation du système : l'écart au seuil $\kappa_T/\kappa_{T,cr}$. Le maintien du gradient de température κ_T au-dessus de sa valeur critique, constitue une source d'énergie libre qui permet à la turbulence de se développer et de se maintenir dans le régime non-linéaire. La comparaison des réponses des systèmes fluide et cinétique à cette contrainte a alors un sens pour un écart au seuil donné, quand bien même les valeurs des seuils soient sensiblement différentes. Nous nous intéressons, dans ce qui suit, à un intervalle de forçage allant de $\kappa_T/\kappa_{T,cr} = 1.25$ à 6.

Les paramètres libres du problème, E_0 , ε et D sont choisis de telle sorte que les contraintes linéaires fluide et cinétique soient similaires :

- La pulsation marginale fluide $kv_d E_0$ (2.22) est égale à la pulsation marginale cinétique $kv_d \bar{T}$ (1.45), soit $E_0 = \bar{T}$. Les deux énergies définissant les deux distributions sont donc situées de part et d'autre de l'énergie thermique des centres-guides. En pratique, en se plaçant dans la limite où la longueur de gradient est petite devant la dimension caractéristique du système, nous prendrons $E_0 = \bar{T} = 1$.
- La largeur du spectre instable fluide est ajustée à la largeur cinétique pour un forçage donné.

La figure 2.4 montre un exemple de spectre linéaire avec les paramètres ajustés. Les systèmes fluide et cinétique ont le même nombre de modes instables, cinq dans le cas


 FIG. 2.4 – Taux de croissance et pulsation linéaire fluide et cinétique pour un forçage $\kappa_T = 1.25\kappa_{T,cr}$.

$\kappa_T/\kappa_{T,cr}$	1.25	1.5	2	4	6
ε	0.95	0.98	0.98	0.99	0.99
D	2.10^{-3}	9.10^{-4}	9.10^{-4}	5.10^{-4}	5.10^{-4}
R_a	9	51	68	440	660
$\omega_{i,M}^{fl}/\omega_{i,M}^{cin}$	2.6	2.6	2.1	1.6	1.4

 TAB. 2.1 – Paramètres utilisés pour différents forçages. Le nombre de Rayleigh ainsi que les rapports des taux de croissance maximaux $\omega_{i,M}^{fl}/\omega_{i,M}^{cin}$ sont aussi reportés ici. Les simulations sont toutes réalisées pour $v_d = 5.10^{-3}$.

$\kappa_T = 1.25\kappa_{T,cr}$. Seul le comportement du mode $k = 0$ est différent sous l'effet de la dissipation collisionnelle présente en fluide et qui amortit le mode d'équilibre, marginalement stable en cinétique.

Les valeurs des paramètres pour les différents forçages sont données dans le tableau 2.1. Par analogie avec les systèmes fluides, un nombre sans dimension analogue au nombre de Rayleigh $R_a = \kappa_T v_d / D^2$ est présenté dans ce tableau. Il correspond au rapport des termes déstabilisants sur les termes stabilisants. D'autre part, l'ajustement des spectres instables fluide et cinétique se fait au détriment de l'ajustement des taux de croissance maximaux (dernière ligne du tableau). La différence reste somme toute assez faible (légèrement supérieure à l'unité).

Le premier mode instable fluide est le mode $\mathbf{k}_0 = \pi/L_x \mathbf{e}_x + 2\pi/L_y \mathbf{e}_y$ quel que soit

2.4. ANALOGIE AVEC UNE MODÉLISATION CINÉTIQUE À DEUX ÉNERGIES

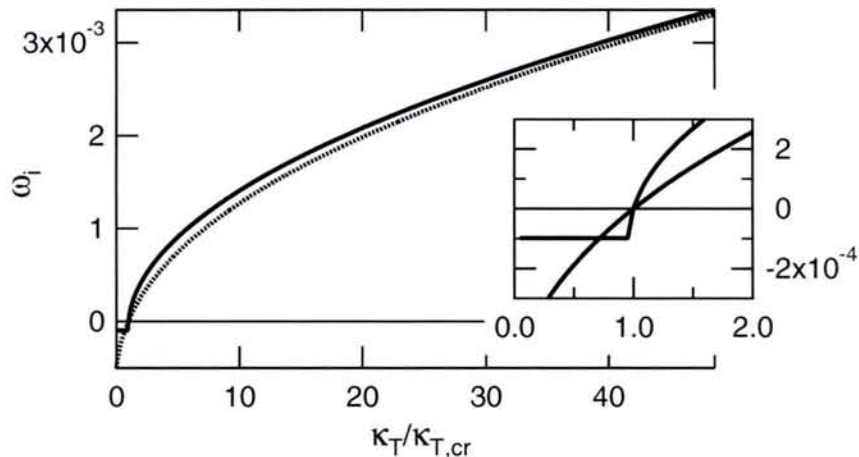


FIG. 2.5 – Taux de croissance du mode $(\pi/L_x, 2\pi/L_y)$ en fluide et en cinétique en fonction du gradient de température.

$\kappa_T/\kappa_{T,cr}$, excepté pour $\kappa_T/\kappa_{T,cr} = 1.25$, où le mode $2.(2\pi/L_y)$ est déstabilisé le premier. Dans tous les cas, le comportement du taux de croissance du mode $\mathbf{k}_0$ en fonction du gradient de température $\kappa_T/\kappa_{T,cr}$ est similaire à celui montré sur la figure 2.5, correspondant aux paramètres utilisés pour $\kappa_T/\kappa_{T,cr} = 2$. Lorsque le gradient est inférieur à $(1 + k_0^2) \frac{v_d \bar{T}}{\bar{n}} \frac{\varepsilon^2}{\bar{T}^2}$, le taux de croissance ne dépend que de D . Passé cette valeur, le taux de croissance croît rapidement avec le forçage (pente infinie au point de bifurcation). L'ajustement des paramètres permet de faire correspondre la valeur marginale du taux de croissance de ce mode en fluide et en cinétique. L'abscisse du point de bifurcation est directement reliée à ε , la valeur $\varepsilon \sim \bar{T} \sim 1$ semble alors dans tous les cas être la plus optimale pour l'ajustement des seuils. La valeur de D est secondaire, étant donnée la pente infinie à la bifurcation qui rend le seuil peu sensible à la valeur de D (donnant l'ordonnée du point de bifurcation). La valeur optimale de D est trouvée comme étant $D \sim v_d$.

Il apparaît cependant que les comportements fluide et cinétique, régis par des mécanismes différents, sont très différents aux alentours du seuil. On constate, enfin, que ces différences tendent à disparaître pour les grands forçages. Le taux de croissance cinétique tend asymptotiquement vers le taux de croissance fluide. Cette limite correspond à la limite fluide calculée dans le chapitre précédent (1.48). Dans ce domaine, les processus stabilisants n'ont alors aucune influence, que ce soit la diffusion en fluide où l'amortissement Landau en cinétique.

Chapitre 3

Comparaison non-linéaire du fluide et du cinétique

3.1 Méthode numérique

La résolution numérique de l'évolution du plasma dans l'espace des phases peut se faire au moyen de différentes approches. D'abord, l'approche particulaire ou lagrangienne, utilisée dans les codes PIC (pour "particules in cell"), consiste à suivre l'évolution d'un nombre fini de macroparticules, chacune représentant un ensemble de particules d'énergie donnée. A chaque instant, la densité de particules est calculée sur une grille spatiale. Les équations de Maxwell donnent accès aux champs moyens sur cette grille. Ils servent au calcul des nouvelles positions et vitesses des macroparticules via les équations de Newton-Lorentz. Ces modèles sont limités par le bruit numérique dû au nombre fini N de macroparticules considérées (les fluctuations numériques sont de l'ordre de $\delta N/N \sim N^{-1/2}$). Les capacités numériques actuelles permettent de prendre en compte jusqu'à une centaine de millions de particules et semblent assurer une bonne convergence numérique des résultats [2]. En particulier, la difficulté majeure consiste à prendre en compte les interactions résonantes entre ondes et particules dans des régions de faible densité de l'espace des phases. Ce dernier inconvénient peut être contourné en raffinant judicieusement la répartition des macroparticules en cours de simulation [11].

Une alternative consiste en l'approche eulérienne, qui vise à résoudre l'équation de Vlasov sur une grille fixe dans l'espace des phases (en différence finie par exemple). L'avantage d'une telle méthode réside essentiellement dans l'absence de bruit numérique. En outre, l'évolution temporelle de la fonction de distribution étant réalisée sur une grille fixe, il est possible de décrire les zones de faible densité avec la précision souhaitée a priori. Les capacités numériques (mémoire et temps de calcul) ont longtemps limité l'essor de cette méthode. Le développement des moyens de calcul, avec en particulier l'utilisation de calculateurs parallélisés, a permis d'utiliser cette approche dans un espace des phases à plusieurs dimensions. Ces simulations possèdent elles aussi des limitations intrinsèques : leur problème principal est lié au phénomène de filamentation dans l'espace des phases.

L'équation de Vlasov interdit à deux trajectoires de l'espace des phases de se couper. Elles s'enroulent alors l'une autour de l'autre jusqu'à atteindre la limite de résolution de la simulation. A ce stade, la résolution numérique impose une coupure franche des spectres spatiaux et en vitesse, ce qui génère une dissipation effective. Dès lors, les propriétés de conservation du nombre de particules et de l'énergie sont une bonne mesure de la validité de tels schémas. On peut également signaler que l'utilisation d'une grille fixe dans le cadre d'une modélisation eulérienne explicite impose un pas de temps relativement petit¹.

3.1.1 Schéma semi-lagrangien

La méthode semi-lagrangienne possède les avantages des deux méthodes précédentes : absence de bruit numérique et de limitation contraignante pour le pas de temps. Le principe du schéma numérique utilisé dans ce chapitre, a été mis au point initialement par Cheng et Knorr [12] pour résoudre le système Vlasov-Poisson à une dimension. Cette méthode a été appliquée à des problèmes plus complexes par Pierre Bertrand et ses collaborateurs. On peut voir par exemple [13] pour la méthode générale et [14] pour le traitement de l'équation de Vlasov possédant des invariants. Cette méthode tire profit de l'écriture de l'équation de Vlasov sous forme advective :

$$\partial_t f + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} f = 0$$

où $\vec{V}$, vecteur à 4 dimensions paramétré par μ en gyrocinétique, désigne la vitesse généralisée dans l'espace des phases. Le traitement du problème particulier de l'équation de Vlasov des centres-guides est clairement exposé dans l'article [13].

Pour comprendre le principe de base de la méthode semi-lagrangienne, considérons le cas le plus simple à une dimension :

$$\frac{df}{dt} = \partial_t f + v(x, t) \partial_x f = 0 \quad (3.1)$$

Tout d'abord, l'évolution temporelle du système est réalisée au moyen d'un schéma "saute-mouton" : deux fonctions de distribution évoluent en parallèle. Le temps est discrétisé, $t_n = n\Delta t$, les deux fonctions de distribution évoluent par saut de $2\Delta t$, l'une tous les n pairs, l'autre tous les n impairs. Pour éviter toute divergence entre les deux fonctions, elles sont remplacées par leur valeur moyenne au bout d'un certain nombre d'itérations (quelques dizaines en pratique). L'advection entre le temps $t_n - \Delta t$ et le temps $t_n + \Delta t$ est calculée à partir de $v(x, t_n)$ qui est relié à $f(x, t_n)$ par la quasi-électroneutralité. A chaque pas de temps, la procédure est répétée pour calculer chaque fonction de distribution alternativement à chaque itération. Le calcul de l'advection de f entre les temps $t_n - \Delta t$

¹La condition CFL ("Current Friedrich Levy") impose en effet $\Delta t u / \Delta x < 1$ où Δt et Δx sont les discrétisations temporelle et spatiale, u est la vitesse d'advection. Les particules ne peuvent s'être déplacées de plus d'un pas spatial pendant un pas temporel.

et $t_n + \Delta t$ grâce à la connaissance de $v(x, t_n)$ est effectué par la méthode semi-lagrangienne. L'équation (3.1) décrit l'advection lagrangienne de f le long de ses caractéristiques :

$$\frac{dx}{dt} = v(x, t)$$

La fonction de distribution est constante le long de ces dernières de sorte que : $f(x_f, t_n + \Delta t) = f(x_i, t_n - \Delta t)$, où x_f et x_i appartiennent à la même caractéristique. La direction spatiale est elle aussi discrétisée avec un pas Δx . La fonction de distribution est connue sur les points de grille au temps $t_n - \Delta t$ ainsi que la vitesse d'advection au temps t_n . La détermination de la fonction de distribution sur les points de grille au temps $t_n + \Delta t$ se fait en deux étapes :

- le calcul de la position du pied de la caractéristique x_i
- l'interpolation (par splines cubiques) de la valeur de f en un point qui n'est pas a priori sur la grille.

Le pied de la caractéristique peut être calculé à l'ordre 2 en Δt en utilisant le point intermédiaire sur la caractéristique $x^* = x(t_n)$. Pour ce faire, on développe à l'ordre 2 x_i et x_f autour de x^* :

$$x_i = x_f - 2\Delta t v(x^*, t) \quad (3.2)$$

où la vitesse est donnée par son développement à l'ordre 1 :

$$v(x^*, t) = v(x_f, t) + (x^* - x_f) \frac{dv}{dx}(x_f, t)$$

Cette vitesse doit être précise à l'ordre 1 pour conserver l'ordre 2 dans (3.2), soit en utilisant :

$$x^* = x_f - \Delta t v(x_f, t + \Delta t) = x_f - \Delta t v(x_f, t)$$

on obtient finalement

$$x_i = x_f - 2\Delta t v(x_f, t) \left(1 - \Delta t \frac{dv}{dx}(x_f, t) \right) \quad (3.3)$$

Il apparaît dans cette expression que la méthode semi-lagrangienne permet de s'affranchir de la condition de courant (CFL) des codes eulériens en la remplaçant par une inégalité moins contraignante : $|\Delta t \frac{dv}{dx}| < 1$.

Le code de simulation que nous utilisons est basé sur ce schéma de principe. Il s'agit d'une version modifiée du code décrivant l'évolution d'une turbulence d'ions piégés développé par G. Depret [15] et utilisé par Y. Sarazin [16]. C'est ce même outil de simulation que nous avons utilisé pour étudier l'évolution des équations fluides en utilisant l'analogie avec un système cinétique à deux énergies décrit au paragraphe 2.4. L'ajout des termes dissipatifs dans l'équation de Vlasov sera brièvement explicité au paragraphe suivant. La version cinétique a été parallélisée grâce à la bibliothèque MPI (Message Passing Interface). Le code tourne sur les calculateurs centralisés du CEA (Compaq SC 232).

3.1.2 Forçage de type Rayleigh-Bénard

Le maintien du système dans le régime turbulent nécessite la présence d'une source d'énergie dans laquelle la turbulence pourra puiser. Cette source d'énergie constitue le forçage du système. Il existe différents moyens de le modéliser : en imposant un flux de chaleur (et/ou de matière) entrant dans le système, ou en fixant les profils moyens des forces thermodynamiques (température et/ou densité). Ces méthodes ne sont pas équivalentes [17]. Le forçage que nous utilisons ici consiste à imposer les valeurs de la température et de la densité aux limites radiales du système. Cette méthode s'apparente au forçage par le gradient qui est plus aisé à mettre en place numériquement. Une version du code forcé par le flux est actuellement en cours de développement.

Les conditions aux limites radiales du système ($x = 0$ et $x = L_x$) sont calculées en utilisant le développement limité de la fonction de distribution d'équilibre (1.24) pour un gradient de densité nul :

$$\begin{aligned}\bar{f}(x) &= \bar{f}(0) + x\partial_x\bar{f}(0) \\ &= e^{-E}(1 + x\kappa_T(E - 1))\end{aligned}\quad (3.4)$$

où nous avons posé $\bar{T}(0) = \bar{n}(0) = 1$. L'inverse de la longueur de gradient de température κ_T est le paramètre de contrôle du forçage du système, il est constant dans les simulations. En pratique, la fonction de distribution prend les valeurs :

$$f(0) = \bar{f}(0) = e^{-E} \quad ; \quad f(L_x) = \bar{f}(L_x) = \bar{f}(0)(1 + L_x\kappa_T(E - 1)) \quad (3.5)$$

Le même code de simulation est utilisé pour modéliser le système fluide. Les fonctions $\bar{f}_-$ et $\bar{f}_+$ se déduisent des définitions de la densité (2.15) et de la température (2.17) d'équilibre :

$$\bar{f}_{\pm} = \pm \frac{\bar{n}}{2\varepsilon}(\bar{T} - E_0 + \varepsilon)$$

On utilise, de même qu'en cinétique, le développement limité de ces deux fonctions de distribution, pour $\kappa_n = 0$, soit :

$$\begin{aligned}\bar{f}_{\pm}(x) &= \bar{f}_{\pm}(0) \pm x\kappa_T \frac{\bar{T}}{2\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2} \pm x\kappa_T \frac{\bar{T}}{2\varepsilon}\end{aligned}\quad (3.6)$$

où nous avons utilisé comme en cinétique $\bar{T}(0) = \bar{n}(0) = 1$ et la contrainte $E_0 = \bar{T} = 1$ (voir page 38) dans la définition de $\bar{f}_{\pm}$. Le paramètre ε est donné pour chaque forçage dans le tableau 2.1. Les conditions aux limites s'écrivent alors :

$$f_{\pm}(0) = \bar{f}_{\pm}(0) = \frac{1}{2} \quad ; \quad f_{\pm}(L_x) = \bar{f}_{\pm}(L_x) = \frac{1}{2} \pm L_x \frac{\kappa_T}{2\varepsilon}$$

En fluide comme en cinétique, ces conditions aux limites sont équivalentes à une turbulence nulle sur les premiers et derniers points de la grille radiale, $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(L_x) = 0$. Or,

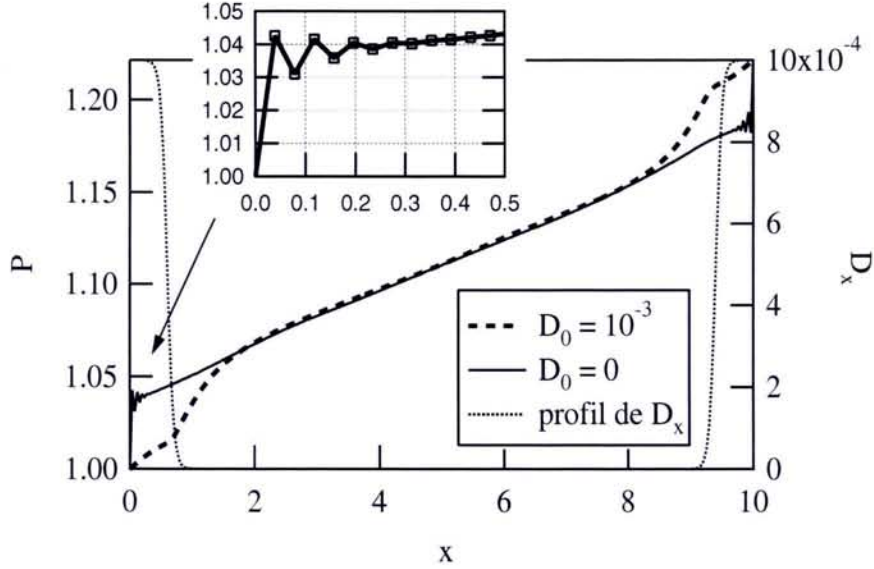


FIG. 3.1 – Profils de pression avec et sans diffusion au bord pour une simulation cinétique. Echelle de droite : coefficient de diffusion. En lucarne : zoom sur l'instabilité numérique qui se développe au bord pour $D_0 = 0$. Les simulations sont réalisées avec $\kappa_T = 4\kappa_{T,cr}$ et sans écoulements zonaux ($\Phi_0 = 0$). Les profils sont moyennés sur la phase de saturation turbulente (de $t = 6.10^3$ à $t = 2.10^4$).

dans l'équation de Vlasov, le flux est entièrement porté par la turbulence au travers des fluctuations $\tilde{f}$. Le flux arrivant sur ces points n'est alors pas transporté. Il en résulte une discontinuité physique qui conduit de fait à une instabilité numérique : des oscillations d'un point de grille à l'autre apparaissent, comme par exemple sur le profil de pression montré sur la figure 3.1. Ces oscillations s'amortissent sur quelques points de grille (en lucarne de la figure). Les conséquences de telles oscillations sur le flux turbulent sont décrites dans l'annexe F.

Pour contourner ce problème, il convient d'introduire un processus qui prendra le relais du flux turbulent au bord, où ce dernier ne peut pas assurer le transport tout en satisfaisant les conditions aux limites. Notre avons opté pour de la diffusion :

$$\partial_t f + [\Phi, f] + v_d E \partial_y f = \partial_x D_x \partial_x f \quad (3.7)$$

Le coefficient de dissipation est non nul sur une épaisseur de peau aux bords radiaux (figure 3.1) :

$$D_x = D + (D_0 - D) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\tanh \frac{L_x - x_0 - x}{L_D} + \tanh \frac{x - x_0}{L_D} \right) \right] \quad (3.8)$$

avec la longueur radiale de la boîte de simulation, $L_x = 10$, la largeur caractéristique de décroissance du profil, $L_D = 0.1$, et la largeur de zones diffusives, $x_0 = 0.6$, avec la valeur maximale au bord $D_0 = 10^{-3}$. On constate sur la figure que l'ajout de la diffusion

3.1. MÉTHODE NUMÉRIQUE

v_d	Δt	L_x	L_y	v_{max}	N_x	N_y	N_v
5.10^{-3}	10	10	20π	5	256	256	128

TAB. 3.1 – Tableau des paramètres numériques utilisés pour les simulations. Pour plus de précision, les intégrales en énergie sont calculées en vitesse avec E compris entre 0 et $E_{max} = v_{max}^2/2$. Les discrétisations sont données par les trois dernières colonnes.

au bord ne modifie pas le profil de pression au centre. Dans les simulations fluides, le bord est traité comme en cinétique avec un coefficient de diffusion D_0 . L'utilisation d'un coefficient de diffusion de valeur unique en fluide et cinétique, quel que soit le forçage permet de minimiser le nombre de paramètres modifiés dans les simulations. Afin de ne pas affecter outre mesure le comportement du système fluide, nous avons choisi une valeur de D_0 intermédiaire entre les valeurs utilisées pour D au centre (donnée par le tableau 2.1).

3.1.3 Tests de validité du schéma numérique

La validation du schéma numérique s'appuie sur deux tests :

- accord des taux de croissance et pulsation linéaires analytiques et numériques
- conservation de l'énergie en régime non-linéaire.

Les simulations sont réalisées avec les paramètres numériques indiqués dans le tableau 3.1.

Le test linéaire est effectué en excitant un seul mode initialement :

$$\Phi = 10^{-6} \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \cos\left(3 \frac{2\pi y}{L_y}\right)$$

On suit alors l'évolution temporelle de l'amplitude de la transformée de Fourier en y du potentiel pour le mode $n = 3$ au centre de la boîte² ($x = 5$), comme le montre la figure 3.2. La partie grisée (hachurée pour le fluide) correspond à la fenêtre temporelle sur laquelle le taux de croissance est calculé. Son estimation, ainsi que celle de la pulsation, donne une valeur correspondant au calcul linéaire (ω_i sur la figure) avec une précision de moins de 1%.

Dans le cas général, les simulations débutent avec un niveau de perturbation nul pour la plupart des modes spatiaux et faible pour quelques modes initiaux³ :

$$\Phi = 10^{-4} \sin(\pi x/L_x) [\cos(4\pi y/L_y) + \cos(6\pi y/L_y) - \cos(8\pi y/L_y) - \cos(10\pi y/L_y) + \cos(12\pi y/L_y)]$$

²Les résultats analytiques sont donnés pour le mode radial $n_x = 1$ et non à une position donnée. Cette différence ne conduit cependant à aucune différence significative, ce mode radial évoluant très lentement au centre.

³Les simulations cinétiques pour les forçages $\kappa_T = 3.8\kappa_{T,cr}$ et $\kappa_T = 4.2\kappa_{T,cr}$ sont initialisées en utilisant la fin de la simulation à $\kappa_T = 4\kappa_{T,cr}$ comme condition initiale

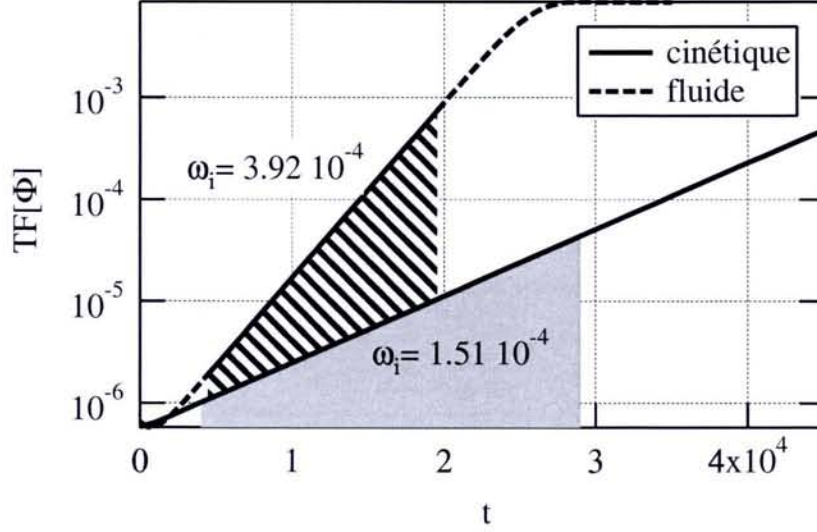


FIG. 3.2 – Transformée de Fourier en y des perturbations du potentiel au centre, en fonction du temps. La zone grisée (hachurée en fluide) correspond à la fenêtre temporelle sur laquelle le taux de croissance est calculé. Les valeurs de ω_i sont données par le calcul linéaire.

L'écriture hamiltonienne de l'équation de Vlasov (1.12) montre que toute fonction $\mathcal{F}(H)$ du hamiltonien seul est globalement conservée (aux termes de surface près) :

$$\int \mathcal{F}(H) \partial_t f \, dE dx dy = - \int \mathcal{F}(H) [H, f] \, dE dx dy = 0$$

C'est le cas en particulier pour $\mathcal{F}(H) = H = v_d E x + \Phi$. On obtient alors la propriété de conservation de l'énergie totale :

$$\frac{d}{dt}(E_c + E_p) = 0$$

où les énergies cinétique E_c et potentielle E_p sont données par :

$$\begin{aligned} E_c &= v_d \int E x f \, dE dx dy \\ E_p &= \frac{1}{2} \int [\Phi(\Phi - \langle \Phi \rangle) + |\nabla \Phi|^2] \, dx dy \end{aligned}$$

L'expression de E_p se déduit de la quasi-électroneutralité⁴(1.13). Le terme de dissipation diffusive (membre de droite de l'équation (3.7)) introduit une énergie supplémentaire E_D .

⁴ $\partial_t E_p = \int dx dy \, \Phi \partial_t \int dE f = \int dx dy \, \Phi \partial_t [(\Phi - \langle \Phi \rangle) + \nabla \cdot \nabla \Phi]$, avec $\int dy \, \Phi \partial_t \langle \Phi \rangle = L_y \langle \Phi \rangle \partial_t \langle \Phi \rangle = \int \frac{dy}{2} \partial_t \Phi \langle \Phi \rangle$ et $\int dx dy \, \Phi \nabla \partial_t \nabla \Phi = - \int dx dy \, \nabla \Phi \partial_t \nabla \Phi = - \int \frac{dx dy}{2} \partial_t |\nabla \Phi|^2$

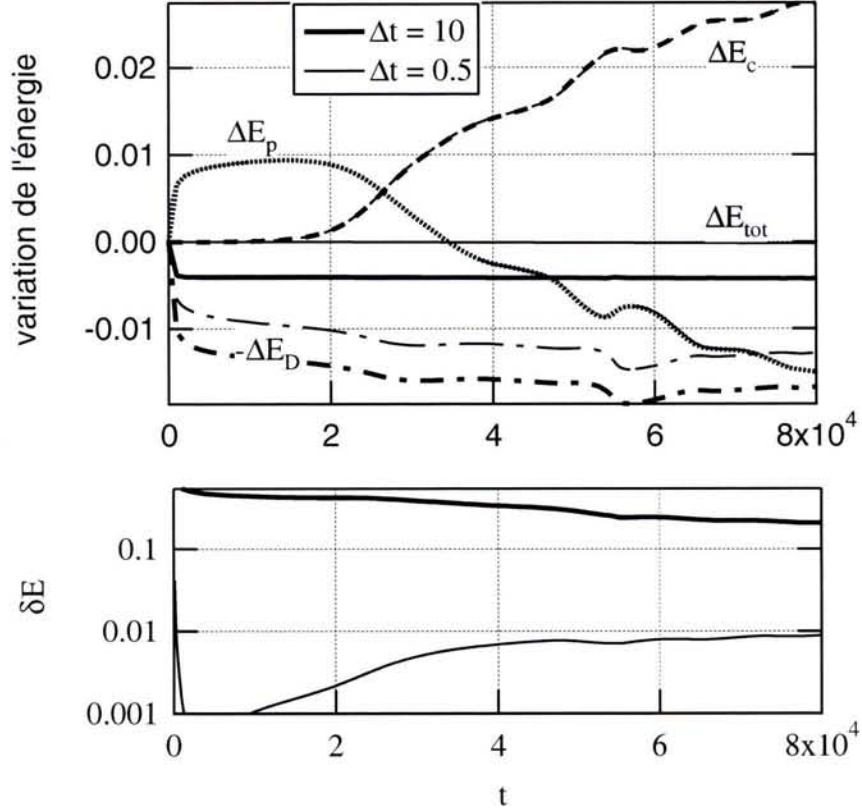


FIG. 3.3 – Figure du haut : Evolution temporelle de l'énergie totale du système, $\Delta E_{tot} = E_{tot} - E_{tot}(t = 0) = \Delta E_c + \Delta E_p - \Delta E_D$ et de ces différentes contributions, pour un forçage de $4\kappa_{T,cr}$ et pour deux valeurs du pas de temps Δt .

Figure du bas : Evolution temporelle de l'erreur sur l'énergie définie par l'équation (3.9), pour les deux valeurs du pas de temps.

Elle est donnée par l'intégrale en temps de la puissance dissipée :

$$E_D = \int_0^t dt' \int H \partial_x (D_x \partial_x f) dE dx dy$$

La conservation de l'énergie totale s'écrit alors : $E_c + E_p - E_D = \text{constante}$. La figure 3.3 montre ces différentes contributions. On définit l'erreur sur la conservation de l'énergie totale par :

$$\delta E = \frac{\sqrt{3} \Delta E_{tot}}{\sqrt{\Delta E_c^2 + \Delta E_p^2 + \Delta E_D^2}} \quad (3.9)$$

Pour un pas de temps $\Delta t = 0.5$, l'erreur est typiquement de l'ordre de quelques pourcents dans le régime de saturation non linéaire. Cependant, afin de simuler le système sur des

temps suffisamment long, nous avons travaillé avec un pas de temps plus grand : $\Delta t = 10$. L'erreur est alors supérieure de plus d'un ordre de grandeur à la valeur précédente. Cette erreur est due, pour la plus grande partie aux erreurs de calcul du terme dissipatif dans la phase de croissance initiale ($t < 10^3$), lorsque celui-ci doit compenser l'augmentation rapide de l'énergie potentielle. L'énergie dissipée a ensuite un comportement similaire à celle calculée pour un pas de temps plus petit. Les énergies potentielle et cinétique, quant-à-elle, ont une évolution temporelle tout à fait identique. D'autre part, nous avons vérifié

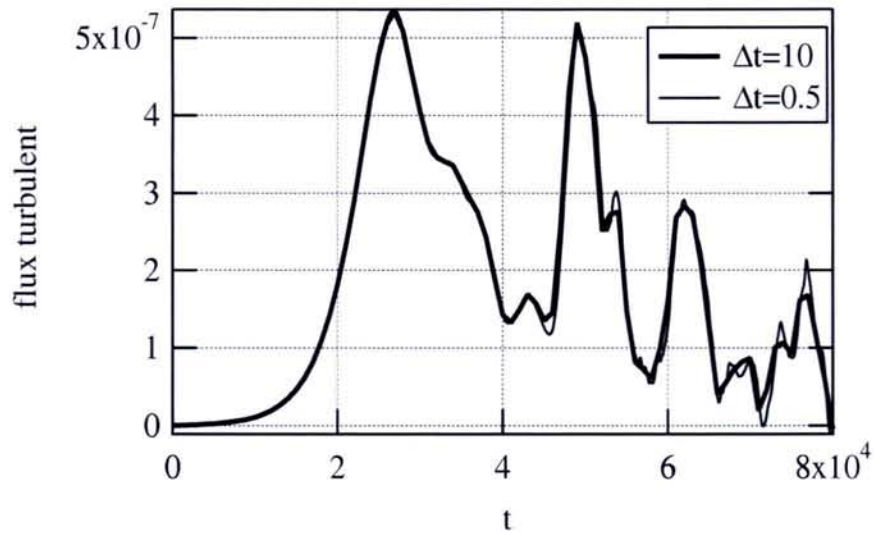


FIG. 3.4 – Evolution temporelle du flux de chaleur turbulent (équation (3.15)) pour les deux valeurs du pas de temps.

a posteriori que l'amplitude et la dynamique des flux turbulents reste la même lorsqu'on augmente le pas de temps, comme on le voit sur la figure 3.4. Les moyennes temporelles des flux et des grandeurs fluides sont similaires pour les deux pas de temps considérés.

3.2 Anisotropie des cellules de convection : écoulements zonaux et “streamers”

Dans le régime non-linéaire, le couplage entre modes spatiaux k est à l'origine de la création et du maintien d'un potentiel électrique d'équilibre, c'est-à-dire de modes turbulents $k = 0$. Il en résulte un écoulement cisailé du plasma dans la direction périodique y . Ce mécanisme rentre en compétition avec le transport turbulent radial et joue donc un rôle important dans le niveau de ce dernier.

3.2. ANISOTROPIE DES CELLULES DE CONVECTION : ÉCOULEMENTS ZONAUX ET "STREAMERS"

L'équation d'évolution de la densité moyenne des centres-guides $\langle n \rangle = \int n dy / L_y$ est :

$$\partial_t \langle n \rangle + \langle [\Phi, n] \rangle = \partial_x (D_x \partial_x \langle n \rangle)$$

La quasi-électronneutralité (1.13) permet de relier cette densité au potentiel moyen :

$$\langle n \rangle = -\partial_x^2 \langle \Phi \rangle + 1 \quad (3.10)$$

En injectant cette relation dans l'équation d'évolution de la densité, on obtient, après intégration, l'équation d'évolution des écoulements moyens $\langle v_{Ey} \rangle = \partial_x \langle \Phi \rangle$:

$$\partial_t \langle v_{Ey} \rangle = -\partial_x \langle \tilde{v}_{Ex} \tilde{v}_{Ey} \rangle + D_x \partial_x^2 \langle v_{Ey} \rangle \quad (3.11)$$

Ces écoulements sont connus sous le nom d'écoulements zonaux ("zonal flows", notés ZF par la suite). Ils sont excités par la turbulence au travers du tenseur de Reynolds :

$$\Pi = \langle \tilde{v}_{Ex} \tilde{v}_{Ey} \rangle \quad (3.12)$$

En cinétique, les écoulements zonaux ne sont pas amortis linéairement par l'effet Landau [18]. De fait, ces derniers dominent complètement la dynamique dans le régime non-linéaire, en particulier proche du seuil de stabilité. Afin d'atténuer cet effet, nous avons introduit un paramètre λ devant la réponse des électrons aux modes d'équilibre $\langle \Phi \rangle$. La quasi-électronneutralité s'écrit alors :

$$\Phi - \lambda \langle \Phi \rangle - \nabla_\perp^2 \Phi = n - 1 \quad (3.13)$$

La densité moyenne devient :

$$\langle n \rangle = (1 - \lambda) \langle \Phi \rangle - \partial_x^2 \langle \Phi \rangle + 1$$

L'impact du terme supplémentaire sur le niveau des écoulements zonaux apparaît clairement dans l'espace de Fourier en espace, soit :

$$\langle \hat{\Phi} \rangle = \frac{\langle \hat{n} \rangle}{1 - \lambda + k_x^2}$$

Pour $\lambda = 1$, la réponse du potentiel moyen $\langle \hat{\Phi} \rangle$ (et donc celle des écoulements zonaux), à une perturbation de la densité de centres-guides $\langle \hat{n} \rangle$ sera amplifiée d'un facteur $1/k_x^2 \gg 1$ (la longueur d'onde des fluctuations est grande devant ρ_s , longueur de normalisation). Pour $\lambda \neq 1$, la réponse de potentiel moyen est du même ordre de grandeur que la source en densité. En pratique, les comparaisons fluide-cinétique seront réalisées avec $\lambda = 0.5$ aussi bien en fluide qu'en cinétique.

Dans le régime de saturation turbulente, le potentiel s'organise en cellules de convection allongées dans la direction périodique (figure 3.5 à gauche) : ce sont les écoulements zonaux. Ceux-ci ont un effet plus visible dans les simulations cinétiques : le potentiel

moyen conserve une amplitude supérieure d'un facteur 3 à celle des fluctuations. En fluide, l'amplitude du potentiel moyen est voisin de celle du potentiel fluctuant. Cette différence s'explique en notant que les écoulements zonaux ne sont pas amortis linéairement en cinétique. En revanche ils le sont en fluide par la dissipation collisionnelle, en particulier proche du seuil de stabilité marginale où la dissipation est importante. On s'attend donc à ce que leur niveau soit beaucoup plus élevé en cinétique.

En supprimant artificiellement les écoulements zonaux, c'est-à-dire en imposant à chaque pas de temps $\hat{\Phi}_0 = 0$, le système s'organise en privilégiant la formation de structures allongées dans la direction radiale, de la taille de la boîte de simulation (connues sous la dénomination de "streamers"). Les cellules de convection ont des formes identiques en fluide et en cinétique (figure 3.5 à droite).

3.3 Amplitude du transport turbulent

3.3.1 Flux de chaleur turbulents fluide et cinétique

Nous nous intéressons dans cette section au transport turbulent de la chaleur dans la direction radiale. La dynamique turbulente du système est régie par les équations de transport moyennées dans la direction y , de la densité $\langle n \rangle$ et de la pression $\langle P \rangle$. Celles-ci sont données par les équations (2.7) auxquelles on ajoute les termes de dissipation collisionnelle utilisés pour amortir les petites échelles en fluide (équation (2.20)) et les oscillations numériques aux bords radiaux en cinétique (3.7). Les équations d'évolution d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{aligned}\partial_t \langle n \rangle + \partial_x (\Gamma_{turb} + \Gamma_D) &= 0 \\ \partial_t \langle P \rangle + \partial_x (\mathcal{Q}_{turb} + \mathcal{Q}_D) &= 0\end{aligned}\tag{3.14}$$

Les flux diffusifs sont :

$$\Gamma_D = -D_x \partial_x \langle n \rangle \quad ; \quad \mathcal{Q}_D = -D_x \partial_x \langle P \rangle$$

où D_x est défini par (3.8). Les flux turbulents de centres-guides Γ_{turb} et de chaleur $\mathcal{Q}_{turb}$ sont :

$$\begin{aligned}\Gamma_{turb} &= \langle \tilde{n} \tilde{v}_{Ex} \rangle \\ \mathcal{Q}_{turb} &= \langle \tilde{P} \tilde{v}_{Ex} \rangle\end{aligned}\tag{3.15}$$

Ces flux résultent de l'advection des perturbations de densité ($\tilde{n} = n - \langle n \rangle$) et de pression $\tilde{P}$ par la vitesse de dérive électrique dans la direction radiale : $\tilde{v}_{Ex} = -\partial_y \Phi$. Notons que le flux de centres-guides Γ_{turb} n'est en fait pas relié au transport des particules, mais plutôt au tenseur de Reynolds 3.12. En effet, la quasi-électronneutralité (3.13) permet d'écrire :

$$\Gamma_{turb} = \langle \partial_y \Phi \partial_x^2 \Phi \rangle = -\partial_x \Pi$$

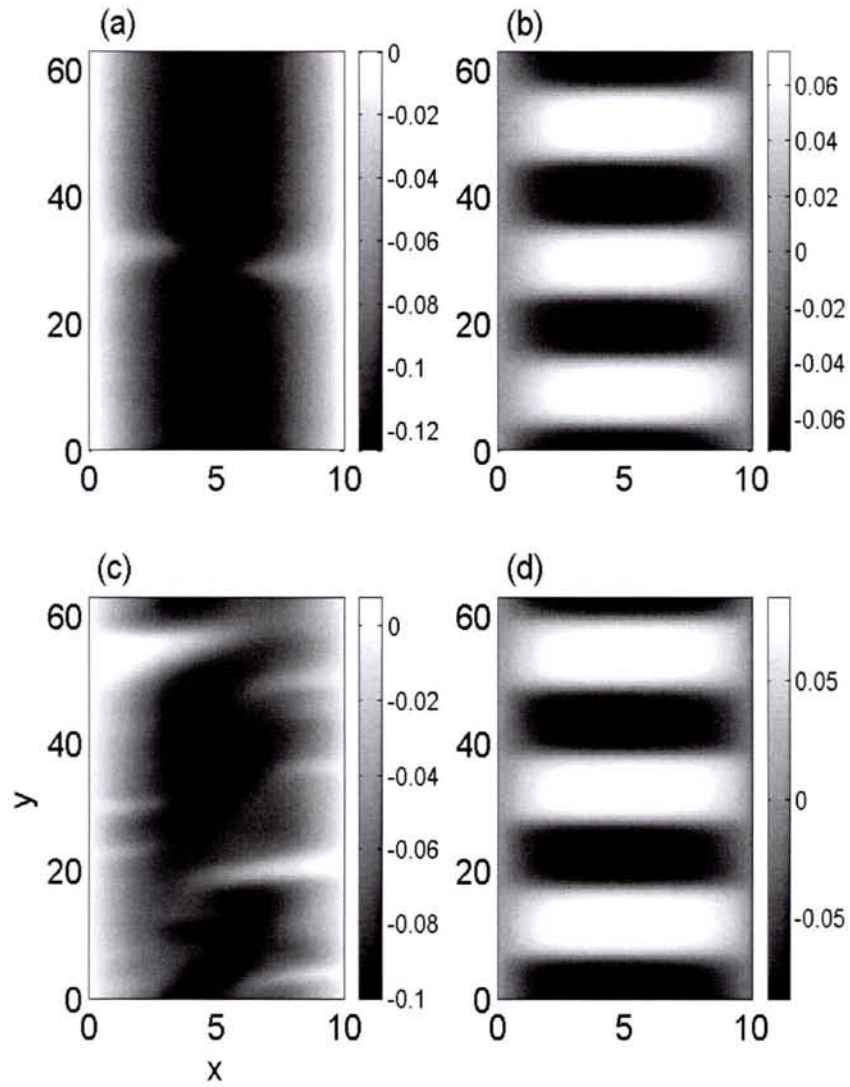


FIG. 3.5 – Cartes du potentiel à la fin des simulations ($t = 1.2 \cdot 10^5$ en fluide et $t = 6 \cdot 10^5$ en cinétique) pour un écart au seuil $\kappa_T = 4\kappa_{T,cr}$. Les figures cinétiques sont en haut, les figures fluides en bas. Les simulations avec écoulements zonaux sont à gauche, celles sans écoulements zonaux, à droite.

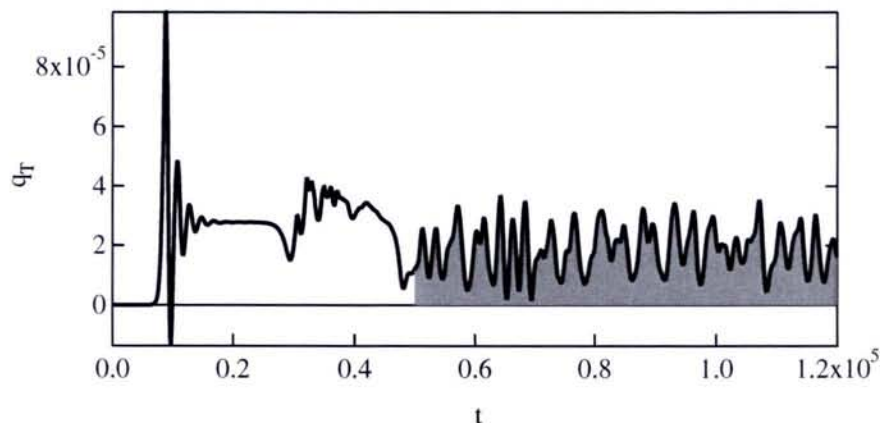


FIG. 3.6 – Evolution temporelle du flux de chaleur turbulent fluide, au centre de la boîte, pour un forçage $\kappa_T = 2\kappa_{T,cr}$. La partie grisée correspond à la phase de saturation turbulente.

Nous nous intéressons plus particulièrement au flux de chaleur défini comme :

$$q_T = \frac{\mathcal{Q}_{turb} - \langle T \rangle \Gamma_{turb}}{\langle n \rangle} \quad (3.16)$$

Ce flux représente le flux de chaleur total $\mathcal{Q}_{turb}$ auquel on a retiré la contribution "convective" $\bar{T}\Gamma_{turb}$. En pratique, pour $\kappa_n = 0$ cette contribution est faible et le flux de chaleur ainsi défini est voisin du flux de chaleur turbulent total $\mathcal{Q}_{turb}$. Dans la limite quasi-linéaire, q_T s'exprime directement en fonction de la perturbation de température $\tilde{T}$: $q_T = \langle \tilde{T} \tilde{v}_{Ex} \rangle$ ⁵. Par convention, les flux se propageant du bord chaud ($x = L_x$) au bord froid ($x = 0$) sont définis positifs.

Comme montré sur la figure 3.6, l'évolution temporelle du flux de chaleur turbulent fluide ou cinétique peut généralement se décomposer en 3 phases :

- De $t = 0$ à $t \sim 8 \cdot 10^3$ le système est dans sa phase de croissance linéaire.
- Les couplages non-linéaires deviennent significatifs et le système entre dans une phase transitoire, jusqu'à $t \sim 2 \cdot 10^4$, caractérisée par des oscillations amorties du flux. On constate alors une corrélation importante entre les oscillations du flux et les oscillations du gradient de température au centre : elles évoluent en quadrature de phase.
- Le système atteint le régime de saturation turbulente, où le flux se stabilise autour d'une valeur moyenne stationnaire (partie grisée sur la figure 3.6). Les écoulements zonaux atteignent le régime stationnaire plus tardivement, ce qui explique le comportement du flux de $t \sim 3 \cdot 10^3$ à $5 \cdot 10^3$.

⁵La température est donnée par l'équation d'état : $T = P/n$. Dans la limite quasi-linéaire, la perturbation de température $\tilde{T}$ est donnée par le terme d'ordre un en perturbation de P/n : $\tilde{T} = \frac{\tilde{P} - T\tilde{n}}{n}$. L'expression $q_T = \langle \tilde{T} \tilde{v}_{Ex} \rangle$ conduit alors à l'expression (3.16).

3.3. AMPLITUDE DU TRANSPORT TURBULENT

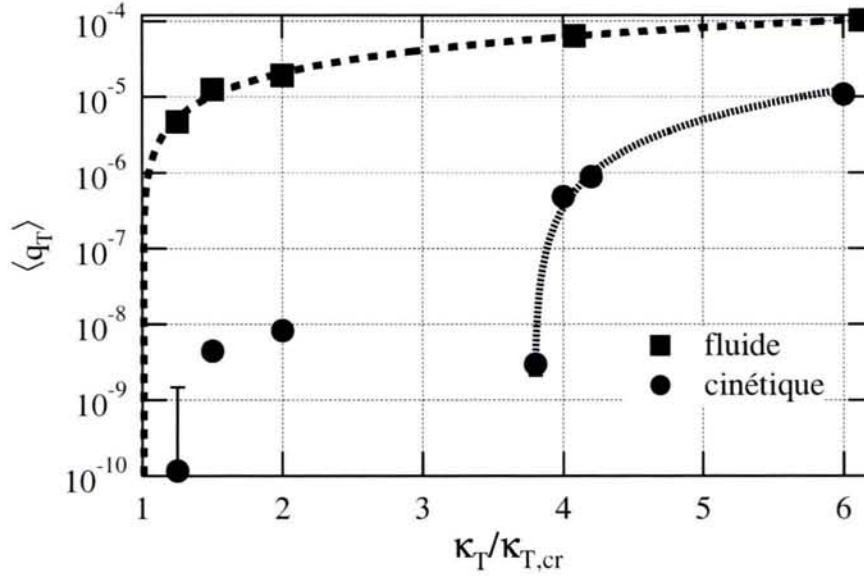


FIG. 3.7 – Moyenne temporelle du flux de chaleur au centre en fonction du forçage du système.

Intéresserons nous à présent en détail à cette phase où la turbulence est dans un régime stationnaire. Dans cette phase, les profils d'équilibre n'évoluent plus sur des temps suffisamment longs : $\partial_t \langle n \rangle = \partial_t \langle P \rangle = 0$, où les moyennes $\langle \rangle$ portent sur les temps courts. Les équations (3.14) imposent aux flux totaux d'être constants dans la direction radiale :

$$\partial_x (\Gamma_{turb} + \Gamma_D) = \partial_x (\mathcal{Q}_{turb} + \mathcal{Q}_D) = 0$$

La valeur du flux au centre peut alors être prise comme représentative du niveau de transport turbulent.

La figure 3.7 représente la valeur du flux de chaleur turbulent moyenné sur la phase de saturation, au centre (noté $\langle q_T \rangle$), en fonction du paramètre qui contrôle le forçage du système : $\kappa_T / \kappa_{T,cr}$. Pour un forçage équivalent, les niveaux de transport fluide sont supérieurs aux niveaux cinétiques de plusieurs ordres de grandeurs (échelle logarithmique sur la figure), bien que les caractéristiques linéaires des deux systèmes soient similaires : même spectre instable et taux de croissance maximaux ne s'écartant que d'un facteur deux. Proche du seuil de stabilité linéaire ($\kappa_T / \kappa_{T,cr} = 1$), le flux cinétique est quasi nul bien que le système soit au-dessus de son seuil de stabilité linéaire. Sa valeur est alors déterminée avec une certaine incertitude représentée par des barres d'erreur sur la figure 3.7. Le principe de calcul des incertitudes est explicité dans l'annexe G. Une variation importante du flux a lieu pour un forçage autour de $\kappa_T \sim 4\kappa_{T,cr}$. Au-dessus de cette valeur, la dépendance en forçage du flux peut être approchée par une loi d'échelle, de

même que le flux fluide :

$$\begin{aligned}\langle q_T \rangle_{cin} &\sim 4.10^{-6} \left(\frac{\kappa_T}{\kappa_{T,cr}} - 3.8 \right)^{1.5} \\ \langle q_T \rangle_{fl} &\sim 2.10^{-5} \left(\frac{\kappa_T}{\kappa_{T,cr}} - 1 \right)\end{aligned}\tag{3.17}$$

Le flux cinétique varie comme la puissance 3/2 de l'écart au seuil non-linéaire $\kappa_T = 3.8\kappa_{T,cr}$. Le flux fluide varie linéairement avec l'écart au seuil linéaire. Cette tendance indique que l'écart entre les flux cinétique et fluide tend à diminuer avec un forçage croissant. Les deux lois de puissance donnent une valeur identique pour $\kappa_T \sim 30\kappa_{T,cr}$. Ces considérations sont en accord avec l'analyse linéaire (figure 2.5). Il en va des flux turbulents comme des taux de croissance : loin du seuil de stabilité, les résonances sont élargies et leur effet ne se fait plus sentir, le comportement cinétique tend vers sa limite fluide.

Cependant, en amont de cette limite, il apparaît clairement que la fermeture collisionnelle utilisée en fluide ne permet pas de reproduire les résultats cinétiques. En particulier, cette transition observée dans les simulations cinétiques n'existe pas en fluide. Nous allons à présent nous intéresser plus en détail à cette différence majeure entre fluide et cinétique.

3.3.2 Transition non-linéaire du flux de chaleur cinétique

Une première information concernant la transition sur le flux cinétique, peut être obtenue en comparant le flux moyen à son écart quadratique (figure 3.8), défini comme :

$$\sigma = \sqrt{\langle q_T^2 \rangle - \langle q_T \rangle^2}\tag{3.18}$$

Pour un forçage inférieur à $4\kappa_{T,cr}$, le niveau des fluctuations temporelles, représenté par σ est supérieur à la valeur moyenne : le flux instantané oscille autour de zéro. Lorsque le forçage est supérieur ou égal à $4\kappa_{T,cr}$, la moyenne est, comme en fluide (non représenté), plus grande que l'écart quadratique. L'évolution temporelle du flux cinétique (figure 3.9) montre que les événements de flux négatif ont la même intensité avant ($\kappa_T = 2\kappa_{T,cr}$) et après ($\kappa_T = 4\kappa_{T,cr}$) la transition. L'intensité des événements de flux positif ont quant-à-eux augmenté lors de la transition (d'environ un ordre de grandeur sur la figure). En fluide, les événements de flux négatif sont quasi inexistantes (figure 3.6).

Cette transition non-linéaire peut être caractérisée en terme de déphasage et de niveau de fluctuations. Le déphasage ψ entre les fluctuations de la pression et de la vitesse de dérive électrique radiale est défini à partir du flux de chaleur turbulent total (3.15) :

$$\mathcal{Q}_{turb} = \langle \tilde{P} \tilde{v}_{Ex} \rangle = \langle \tilde{P}^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \langle \tilde{v}_{Ex}^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \cos \psi\tag{3.19}$$

Cette définition fait apparaître les niveaux de fluctuation de pression $\langle \tilde{P}^2 \rangle^{1/2}$ et de vitesse de dérive électrique $\langle \tilde{v}_{Ex}^2 \rangle^{1/2}$. Il apparaît clairement sur la figure 3.10 que les niveaux de

3.3. AMPLITUDE DU TRANSPORT TURBULENT

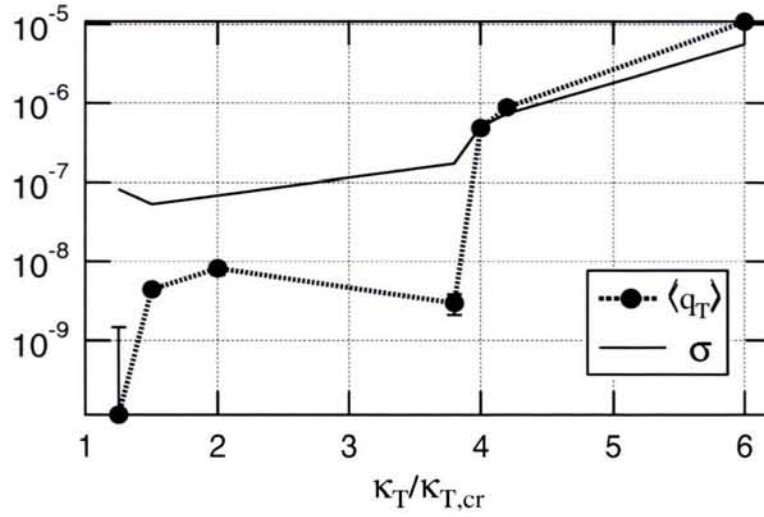


FIG. 3.8 – Moyenne temporelle du flux de chaleur cinétique et écart quadratique moyen (3.18), au centre, en fonction du forçage.

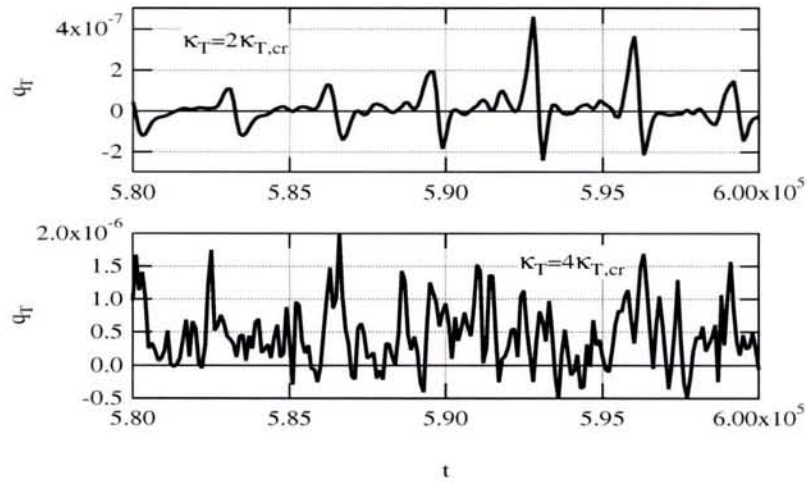


FIG. 3.9 – Evolution temporelle du flux turbulent cinétique, au centre, pour deux simulations $\kappa_T = 2\kappa_{T,cr}$ et $\kappa_T = 4\kappa_{T,cr}$.

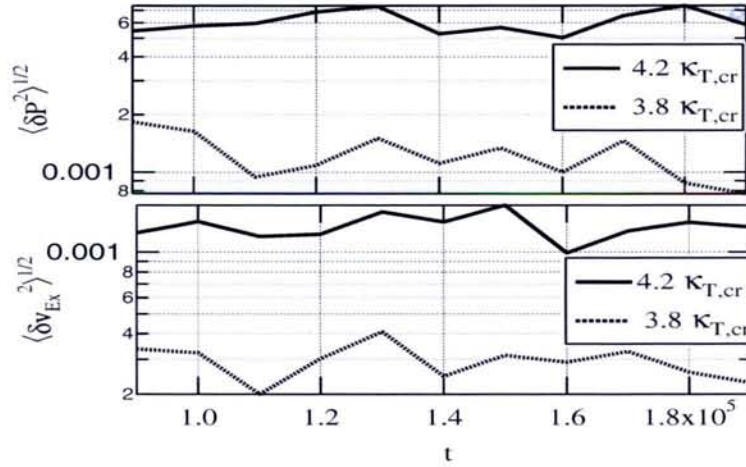


FIG. 3.10 – Evolution temporelle dans le régime de saturation non linéaire des niveaux de fluctuations de pression et de vitesse de dérive électrique radiale (définis par l'équation (3.19)), en $x = 5$, pour deux simulations cinétiques ($\kappa_T = 3.8\kappa_{T,cr}$ et $\kappa_T = 4.2\kappa_{T,cr}$).

fluctuations de pression et de dérive électrique radiale qui augmentent (d'un facteur 5 environ) au niveau de la transition non-linéaire. De même, le niveau du déphasage augmente lui aussi (d'un facteur 10), $\cos \psi$ passant de ~ -0.01 à ~ -0.1 . Il est intéressant de noter la faible valeur du déphasage dans notre modèle. L'augmentation du transport aux alentours de $\kappa_T = 4\kappa_{T,cr}$ est donc portée à la fois par une augmentation des niveaux de fluctuations et du déphasage.

Nous retrouvons ici qualitativement les mêmes résultats que dans l'article [2]. Dimits y compare des simulations numériques issues de différents codes gyrocinétiques et gyrofluides, dans le même domaine de paramètres et pour des seuils linéaires ajustés. Il compare le comportement du coefficient de transport turbulent (typiquement $q_T/\nabla T$) à un temps donné et pour une position donnée. Il obtient un seuil non-linéaire dans les simulations gyrocinétiques en deçà duquel le coefficient de transport est quasi nul. Celui-ci est connu depuis lors sous le nom de "Dimits up-shift" dans la littérature. Les simulations gyrofluides ne possèdent, quant-à-elle, pas ce décalage du seuil⁶. Au-dessus du seuil non-linéaire, les résultats fluides donnent un coefficient 2 à 3 fois supérieurs aux résultats cinétiques. La présence de ce seuil non-linéaire est expliquée par Rosenbluth et Hinton [18], qui ont montrés que les écoulements zonaux n'étaient pas amortis linéairement en gyrocinétique sans collisions, aux alentours de la stabilité marginale. Les effets cinétiques capturés par une fermeture gyro-landau-fluide⁷ conduisaient quant-à-eux à un amortis-

⁶Du moins, ce décalage n'apparaît pas dans les premières versions des codes gyrofluides [19]. Un seuil apparaît avec l'utilisation d'une fermeture améliorée [20], en meilleur accord avec [18] et capable de reproduire, en partie seulement, l'"upshift" non-linéaire.

⁷Pour plus de détails sur les fermetures permettant de prendre en compte l'amortissement Landau,

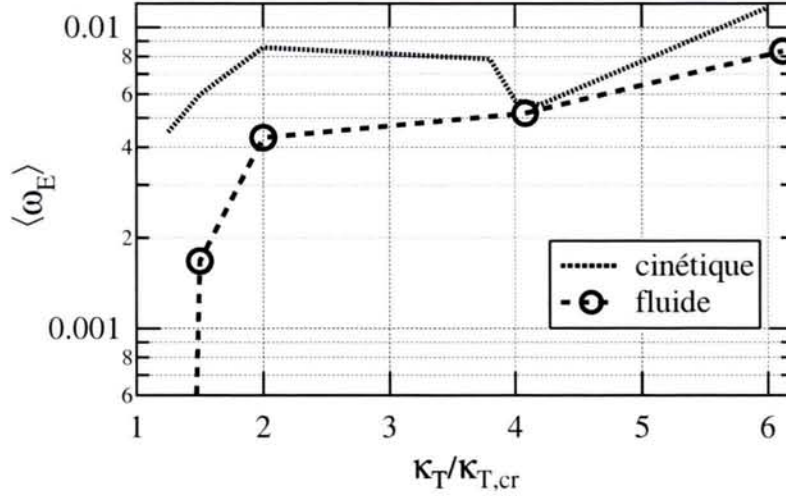


FIG. 3.11 – Valeur absolue de la moyenne sur la phase de saturation turbulente du cisaillement $\langle \omega_E \rangle$, au centre en fonction du forçage.

sement de ces écoulements. Bien que moins sophistiquée, notre traitement fluide, avec dissipation collisionnelle, est donc qualitativement équivalent à un traitement de type Laudau-fluide du point de vue de l'amortissement des écoulements zonaux.

Le cisaillement radial dû aux écoulements zonaux conduit au déchirement des structures de convection allongées radialement et réduit par là le transport. Le cisaillement est défini par :

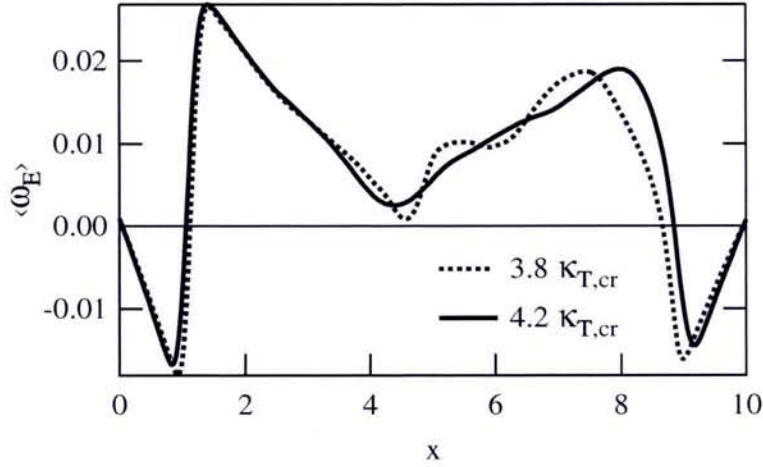
$$\omega_E = \partial_x \langle v_{Ey} \rangle$$

La figure 3.11 montre la moyenne temporelle du cisaillement en fluide et en cinétique. Aux alentours du seuil ($\kappa_T < 2\kappa_{T,cr}$), la diffusion dans le modèle fluide amortit les écoulements zonaux. Pour $\kappa_T > 2\kappa_{T,cr}$, ω_E sature en fluide à la valeur cinétique. En revanche, le cisaillement est peu dépendant du forçage en cinétique, même autour de la transition non-linéaire.

Cette tendance est confirmée au regard des profils du cisaillement qui évoluent peu de part et d'autre de la transition observée sur le flux (figure 3.12). Il est important de noter que dans tous les cas, ω_E est dominé par l'écoulement moyen ($\sqrt{\langle \omega_E^2 \rangle} \ll \langle \omega_E \rangle$). Le décalage non-linéaire du seuil observé en cinétique ne peut donc pas être expliqué par une baisse du niveau des écoulements zonaux avec le forçage.

Cependant, une explication peut être trouvée en comparant le taux de cisaillement ω_E au taux de croissance linéaire maximum ω_i^{max} . Si le taux de cisaillement est plus grand que le taux de croissance $\omega_E > \omega_i^{max}$, on s'attend à ce qu'un mode turbulent soit déchiré avant qu'il ne puisse croître : le transport turbulent est alors supprimé [22]. La figure 3.13

on peut voir le chapitre 4, mais aussi le rapport de stage de Guilhem Dif-Pradalier [21].


 FIG. 3.12 – Profil radial du cisaillement pour $\kappa_T = 3.8\kappa_{T,cr}$ et $\kappa_T = 4.2\kappa_{T,cr}$.

donne crédit à ce mécanisme. Pour $\kappa_T < 4\kappa_{T,cr}$, le taux de cisaillement est supérieur au taux de croissance d'au moins un ordre de grandeur et le flux turbulent est quasi nul. En revanche, pour $\kappa_T \geq 4\kappa_{T,cr}$ le rapport est de l'ordre de l'unité : le flux de chaleur est alors non nul. De même, la présence d'un flux turbulent en fluide quel que soit le forçage est cohérente avec cette analyse. Dans ce cas, la valeur du cisaillement est faible proche du seuil de stabilité linéaire (figure 3.11). Cette analyse, basée sur le rapport ω_E/ω_i^{max} , semble proposer un bon cadre pour expliquer le décalage du seuil en cinétique sous l'effet des écoulements zonaux.

3.3.3 Ecarts persistants en l'absence d'écoulements zonaux

Lorsque les écoulements zonaux sont supprimés⁸ (c'est-à-dire, en imposant à chaque pas de temps $\hat{\Phi}_0 = 0$), le niveau de transport est plus élevé en fluide comme en cinétique (figure 3.14). L'augmentation du flux lors de cette suppression est due à une augmentation des niveaux turbulents (définis par l'équation (3.19)). En particulier, en cinétique, $\langle \tilde{v}_{Ex}^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ est multiplié par un facteur 20 en moyenne, $\langle \tilde{P}^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$ par un facteur 30. En fluide, leur augmentation est moindre, un facteur 7.5 et 2.5 respectivement. Il est surprenant de constater que le déphasage $\cos \psi$, diminue lorsque l'on supprime les écoulements zonaux, d'un facteur 5 dans les deux cas (passant de 0.5 à 0.1 en fluide). Dans ce régime, les perturbations de pression sont quasiment en phase avec le potentiel. Ce comportement n'est pas compris. Il limite l'augmentation du transport en l'absence d'écoulements zonaux.

D'autre part, nous pouvons, ici encore décrire l'augmentation du flux de chaleur avec le forçage à l'aide d'une loi de puissance de l'écart au seuil (courbes reliant les points

⁸Les écoulements zonaux seront notés "ZF" sur les figures.

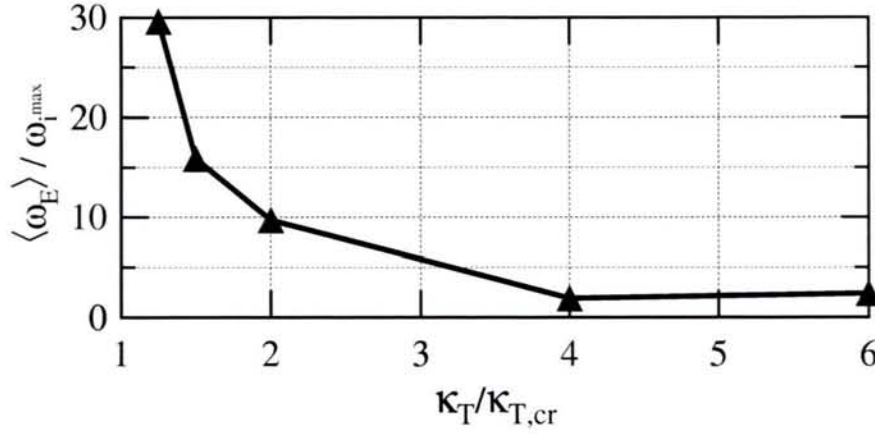


FIG. 3.13 – Rapport du taux de cisaillement au taux de croissance maximum cinétique en fonction du forçage.

“sans ZF” sur la figure) :

$$\langle q_T \rangle_{cin}^{noZF} \sim 8.10^{-7} \left(\frac{\kappa_T}{\kappa_{T,cr}} - 1 \right)^{3.1} \quad (3.20)$$

$$\langle q_T \rangle_{fl}^{noZF} \sim 4.10^{-5} \left(\frac{\kappa_T}{\kappa_{T,cr}} - 1 \right)^{1.5} \quad (3.21)$$

$$(3.22)$$

L'écart entre les valeurs cinétique et fluide est fortement réduit quel que soit le forçage. En particulier, proche du seuil linéaire, le régime stationnaire est atteint en cinétique avec une valeur non nulle du flux turbulent (figure 3.15). Le rôle des écoulements zonaux dans l'apparition du seuil non-linéaire en cinétique est confirmé. La même tendance que précédemment est observée : le cinétique augmente plus vite que le fluide avec le forçage, respectivement comme les puissances 3 et 1.5 de l'écart au seuil. Les deux lois de puissances donnent la même valeur du flux pour $\kappa_T \sim 15\kappa_{T,cr}$, c'est-à-dire pour un forçage deux fois plus faible que lorsque les écoulements moyens sont présents.

Notons que le flux est du même ordre de grandeur pour les simulations fluide avec écoulements zonaux et cinétique sans écoulements zonaux, lorsque l'écart au seuil est voisin de 4 (figure 3.14). Pour ce forçage, il s'avère que les profils de température d'équilibre, quantitativement différents par ailleurs, sont également similaires dans ce cas (figure 3.16). Ce résultat, même profil de température pour un même niveau de transport, donne une confiance supplémentaire quant à la validité de ces simulations numériques.

Cependant, dans l'ensemble, les écarts persistent entre les niveaux de transport fluides et cinétiques. Proche du seuil, il y a encore plus de deux ordres de grandeurs de différence. Pour $\kappa_T \sim 4\kappa_{T,cr}$, le flux turbulent fluide est supérieur au cinétique d'environ un ordre de

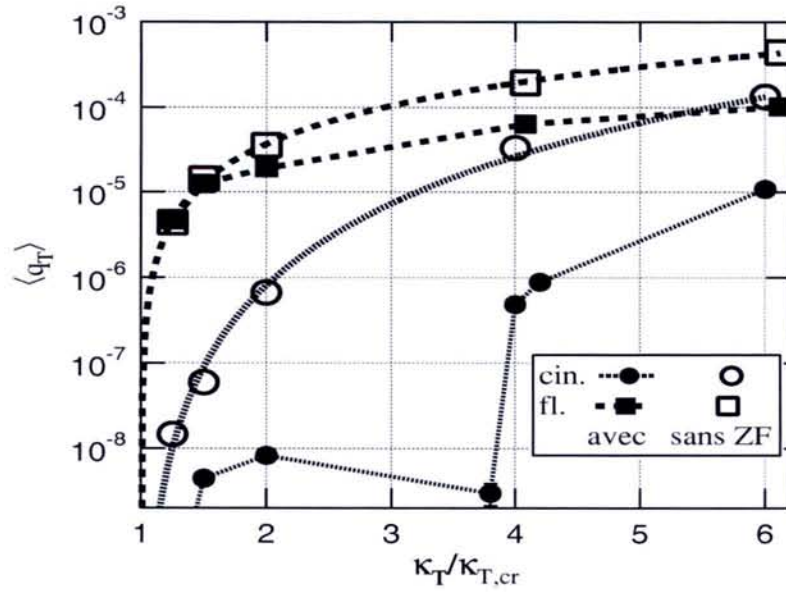


FIG. 3.14 – Moyenne temporelle du flux de chaleur au centre en fonction du forçage en l'absence d'écoulements zonaux. Les résultats avec écoulements zonaux (figure 3.7) sont rappelés.

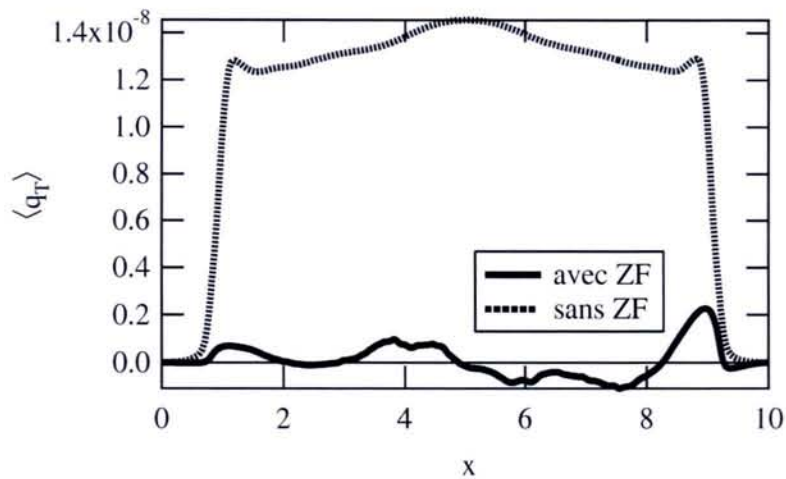


FIG. 3.15 – Profils radiaux du flux turbulent cinétique pour $\kappa_T = 1.25\kappa_{T,cr}$ en présence ou non d'écoulements zonaux.

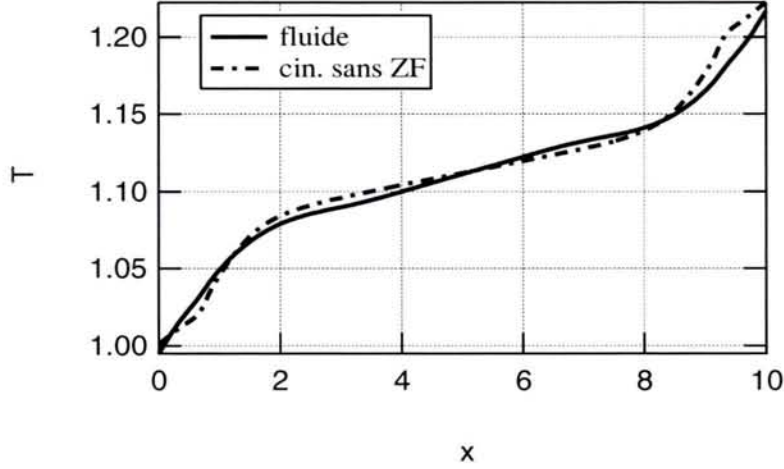


FIG. 3.16 – Profils radiaux de la température pour $\kappa_T = 4\kappa_{T,cr}$ en cinétique sans écoulements zonaux et en fluide avec écoulements zonaux.

grandeur. Comme nous l’avions déjà noté, la dissipation collisionnelle joue un rôle important, en particulier proche du seuil. Son impact ne peut pas se réduire simplement à un amortissement des écoulements zonaux. Le transport turbulent est lui aussi affecté. Ce résultat va dans le même sens que les résultats obtenus par Sugama, Watanabe et Horton [23], qui constatent eux aussi des différences entre niveaux de transport fluide et cinétique sans écoulements zonaux, dans une géométrie simplifiée et pour le même type d’instabilité. Il est à noter que dans leur cas une hypothèse de fermeture plus élaborée est utilisée. La comparaison avec nos résultats n’est alors que qualitative. Cependant ces résultats, comme les nôtres, justifient pleinement l’intérêt porté à des systèmes simplifiés. En particulier, les améliorations apportées aux fermetures fluides [?] pour traiter convenablement l’amortissement des écoulements zonaux (permettant de rendre compte du “Dimits up-shift”) ne sauraient être une fin en soi.

3.4 Evaluation des écarts à la maxwellienne

L’utilisation de termes collisionnels en fluide n’est pas la seule source de différences avec le modèle cinétique. L’hypothèse de fermeture du système fluide est basée sur l’hypothèse d’une fonction de distribution s’éloignant peu d’une distribution maxwellienne. L’étude des écarts à la maxwellienne sous l’effet de la dynamique turbulente va permettre d’isoler l’impact de l’hypothèse de fermeture proprement dite sur les écarts observés sur les flux turbulents.

3.4.1 Convergence lente des moments d'ordre supérieur à deux

Un bon moyen d'estimer l'erreur due à la troncature de la hiérarchie fluide est de décomposer la fonction de distribution obtenue dans le régime non-linéaire, sur une base de polynômes orthonormés appropriée. Dans notre cas, ce sont les polynômes de Laguerre $L_p(\zeta)$ [24]. L'orthonormalité est définie par le produit scalaire :

$$\int_0^\infty L_p(\zeta) L_q(\zeta) e^{-\zeta} d\zeta = \delta_{pq} \quad (3.23)$$

où δ_{pq} est le symbole de Krönecker : $\delta_{pq} = 1$ pour $p = q$ et $\delta_{pq} = 0$ pour $p \neq q$. Dans notre cas, le paramètre d'intégration est le rapport de l'énergie à la température T :

$$\zeta = \frac{E}{T} \quad (3.24)$$

La température est définie par :

$$T = \frac{\int_0^\infty f E dE}{\int_0^\infty f dE} \quad (3.25)$$

Cette dernière peut aussi bien représenter une température locale $T(x, y, t)$ ou une température moyenne $\bar{T}(x, t)$, les deux cas contenant une information différente. Les propriétés générales de la décomposition sont présentées pour $T = T(x, y, t)$. Les polynômes de Laguerre L_p de degré p sont définis par :

$$L_p(\zeta) = \sum_{j=0}^p (-1)^j \frac{C_p^j}{j!} \zeta^j \quad (3.26)$$

où $C_p^j = \frac{p!}{j!(p-j)!}$. Les trois premiers polynômes s'écrivent :

$$L_0 = 1 \quad L_1 = 1 - \zeta \quad L_2 = 1 - 2\zeta + \zeta^2/2$$

La figure 3.17 représente les cinq premiers polynômes en fonction de ζ . Le nombre de zéros de chaque polynôme correspond à son degré. La fonction de distribution peut être projetée de manière unique sur cette base :

$$f(x, y, E, t) = \sum_{p=0}^{\infty} f_p(x, y, t) L_p(\zeta) e^{-\zeta} \quad (3.27)$$

où les f_p sont les coefficients de la projection. Ils sont indépendants de ζ et contiennent l'information sur l'évolution spatio-temporelle de la fonction de distribution :

$$f_p(x, y, t) = \int_0^\infty L_p(\zeta) f(x, y, E, t) d\zeta \quad (3.28)$$

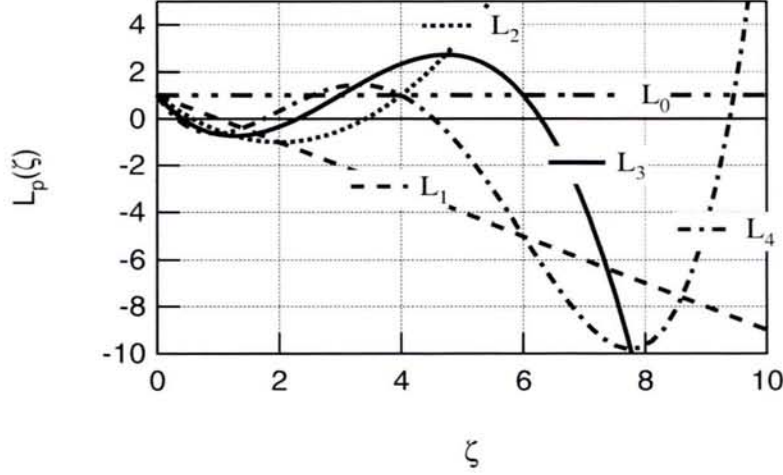


FIG. 3.17 – Allure des cinq premiers polynômes de Laguerre.

Le point qui nous intéresse dans cette décomposition, est qu'il existe un lien direct entre le moment fluide M_J d'ordre J de la fonction de distribution et les coefficients $f_{p \leq J}$. En effet, on peut écrire de manière générale un moment fluide d'ordre J comme :

$$M_J = T^{J+1} \int_0^\infty f \zeta^J d\zeta = T^{J+1} \sum_{j=0}^J c_j^{(J)} f_j \quad (3.29)$$

où les coefficients $c_j^{(J)}$ sont définis par :

$$\zeta^J = \sum_{j=0}^J c_j^{(J)} L_j(\zeta)$$

Il apparaît clairement que le nombre de moments fluides nécessaires à la description du système sera d'autant plus petit que les termes de la série f_p convergeront rapidement vers zéro. En particulier, lorsque la fonction de distribution est maxwellienne $f = ne^{-E/T}/T$ seul le coefficient d'ordre zéro conserve une valeur non nulle $f_0 = n/T$. L'amplitude des coefficients f_p avec $p \geq 1$ fournit alors une bonne mesure de l'écart à la maxwellienne.

Intéressons nous d'abord aux écarts à la maxwellienne locale :

$$f_M(x, y, E, t) = \frac{n(x, y, t)}{T(x, y, t)} e^{-E/T(x, y, t)} \quad (3.30)$$

La figure 3.18 représente les valeurs absolues des quinze premiers coefficients $f_p(x, y, t)$, en un point et à un temps donné, en fonction de leur ordre p , pour deux simulations, avec et sans écoulements zonaux, pour un forçage de $\kappa_T = 4\kappa_{T,cr}$. L'énergie est ici discrétisée par

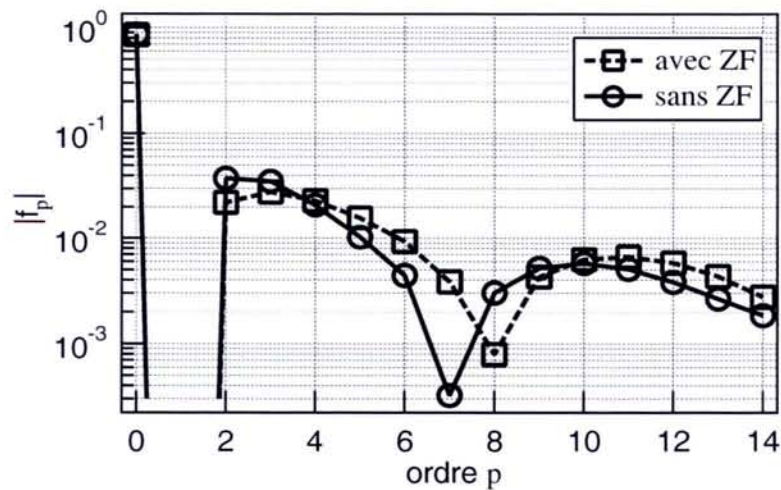


FIG. 3.18 – Valeur absolue des quinze premiers coefficients f_p de la décomposition de $f(x, y, E, t)$ (équation (3.28)), à un temps donné $t = 6.10^5$ et à une position donnée : $x = 5$ et $y = 31$ avec écoulements zonaux, $y = 39$ sans écoulements zonaux.

256 points entre 0 et 72. L'erreur $\int_0^\infty L_p(\zeta) L_q(\zeta) e^{-\zeta} d\zeta - \delta_{pq}$ est alors de l'ordre de 2.10^{-4} pour $p \leq 12$, puis elle augmente rapidement. Les deux courbes ont un comportement très similaire. Le premier coefficient f_0 domine de plus d'un ordre de grandeur les suivants. Le deuxième, f_1 , est nul par définition⁹ de T . On observe une oscillation autour de zéro pour les coefficients suivants. La convergence vers zéro est relativement lente : d'environ un ordre de grandeur par décade de p . Cette caractéristique indique que le nombre de moments fluides pertinents pour ce système est élevé. En particulier, une description fluide ne faisant intervenir que l'évolution dynamique des deux premiers moments, n et P ici, ne parviendra pas à reproduire le comportement local du système cinétique non-linéaire. Les écarts de la fonction de distribution à la fonction de distribution maxwellienne (3.30) pour le cas avec écoulements zonaux sont montrés sur la figure 3.19. Le nombre de zéros de l'écart à la maxwellienne $f - f_M$ est élevé (on en dénombre 4 dans le cas considéré). L'amplitude de $f - f_M$ devient cependant rapidement très faible. On pourrait s'attendre à réussir à approcher le comportement des premières oscillations en vitesse de $f - f_M$ avec les premiers termes de la décomposition en polynômes de Laguerre (3.27). L'utilisation des termes jusqu'à f_2 permet de prendre en compte les deux premiers zéros :

$$f - f_M = f_2 \left(1 - 2 \frac{E}{T} + \frac{E^2}{2T^2} \right) e^{-\frac{E}{T}} + \dots \quad (3.31)$$

Il apparaît cependant sur la figure 3.19, qu'il est impossible d'ajuster correctement cette approximation au comportement cinétique, même à faible énergie : il faut considérer

⁹En effet, d'après les définitions (3.26) et (3.28) $f_1 = \int f(1 - \zeta) d\zeta$, qui en prenant en compte la définition de ζ (3.24) peut s'écrire comme : $f_1 = \left(1 - \frac{\int f E dE}{T \int f dE} \right) \frac{1}{T} \int f dE$. La parenthèse s'annule par définition de T (3.25).

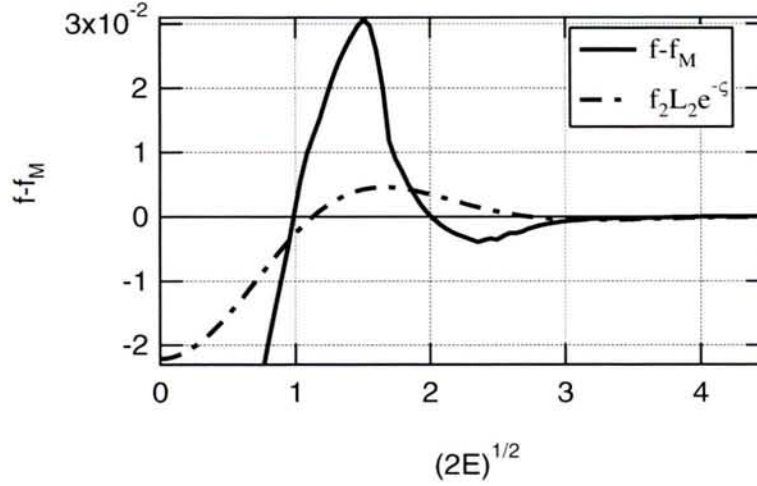


FIG. 3.19 – Différence de la fonction de distribution à la distribution maxwellienne locale, en fonction de la vitesse $\sqrt{2E}$ dans le cas où les écoulements zonaux sont présents. La courbe pointillée représente l'approximation de cet écart (3.31).

un nombre élevé de polynômes de Laguerre (c'est-à-dire des polynômes de degré élevé) pour décrire les oscillations rapides des écarts à la maxwellienne aux faibles énergies. On pourrait faire les mêmes remarques concernant la simulation sans écoulements zonaux.

3.4.2 Description fluide des écarts à la maxwellienne d'équilibre en présence de "streamers"

Dans le cas où les écoulements zonaux sont présents, le système est homogène suivant y (figure 3.5). L'étude des grandeurs moyennes sur y , c'est-à-dire de l'équilibre, donne des résultats similaires à l'étude locale. Pour chaque valeur de y , le comportement des coefficients f_p est similaire à celui montré sur la figure 3.18 : la position du zéro et surtout le signe des coefficients est toujours le même quel que soit y .

Il n'en est pas de même pour les simulations sans écoulements zonaux. Certes, les coefficients f_p ont un comportement identique en valeur absolue (même zéro, amplitudes similaires au cas montré sur la figure 3.18) quel que soit y , mais le signe des coefficients $f_{p \geq 2}$ s'inverse périodiquement en y . L'explication vient du fait que le système n'est pas homogène dans cette direction. Les cellules de convection sont de type "streamers" (figure 3.5). Comme nous l'avons signalé précédemment, les fluctuations des diverses quantités fluides autour de leur valeur moyenne sont quasiment en phase avec le potentiel. f_2 est relié à la différence du flux $Q = \int f E^2 dE$ et de nT^2 (3.29) : $2T^2 f_2 = Q - 2nT^2$. On constate que celui-ci est positif pour $\Phi > 0$ et inversement. En moyenne, la contribution de ces deux "populations" pour $f_{p \geq 2}$ va se compenser en partie.

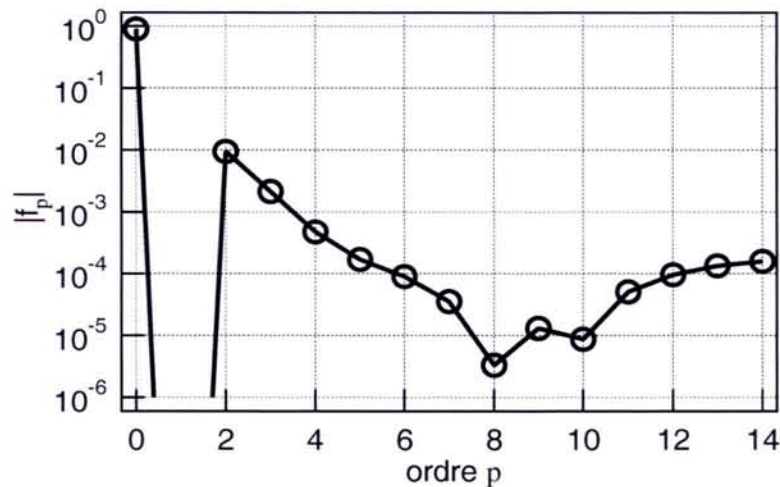


FIG. 3.20 – Valeur absolue des quinze premiers coefficients f_p de la décomposition de $\bar{f}(x, E, t)$, à un temps donné $t = 6.10^5$ en $x = 5$. Les écoulements zonaux sont absents.

On définit les coefficients moyens à partir de l'équation (3.28) pour $f \rightarrow \bar{f}(x, E, t) = \langle f(x, y, E, t) \rangle_y$ et les polynômes de Laguerre définis pour une température d'équilibre¹⁰ $\bar{T}$. Les coefficients de la décomposition en polynôme de Laguerre de la fonction de distribution d'équilibre $\bar{f}$, sont donnés par la figure 3.20. La décroissance des coefficients $f_{p \geq 2}$ est alors beaucoup plus rapide que ce que nous avons vu précédemment. Leur valeur a décri de deux ordres de grandeurs en $p = 5$, f_5 est alors de l'ordre des erreurs. Un nombre limité de moments fluides semble donc être suffisant pour décrire le comportement des grandeurs d'équilibre en cinétique en l'absence d'écoulements zonaux.

La fonction de distribution d'équilibre est définie par :

$$f_M(x, E, t) = \frac{\bar{n}(x, t)}{\bar{T}(x, t)} e^{-E/\bar{T}(x, t)} \quad (3.32)$$

avec $\bar{n}(x, t) = \int dE \bar{f}$ et $\bar{n}\bar{T}(x, t) = \int E dE \bar{f}$. Les écarts de la fonction de distribution d'équilibre à la maxwellienne (3.32) $\bar{f} - f_M$ sont montrés sur la figure 3.21. Leur valeur pour $E = 0$ est inférieure d'un ordre de grandeur à ce qu'ils étaient en un point donné. Les écarts à la maxwellienne n'ont que deux zéros : une description avec seulement les trois premiers termes de la décomposition est raisonnable :

$$\bar{f} - f_M \sim f_2 \left(1 - 2\frac{E}{\bar{T}} + \frac{E^2}{2\bar{T}^2} \right) e^{-\frac{E}{\bar{T}}} \quad (3.33)$$

La figure 3.21 montre que l'accord entre la valeur exacte et son approximation est très bon, tant en amplitude qu'en position des zéros (Le signe des écarts correspond également.).

¹⁰La température d'équilibre $\bar{T}(x, t)$ doit être définie à partir de l'expression (3.25) de manière cohérente avec la fonction de distribution associée $\bar{f}(x, E, t) = \langle f(x, y, E, t) \rangle_y$. Elle ne peut en aucun cas être définie par $\langle T(x, y, t) \rangle_y$.

3.4. EVALUATION DES ÉCARTS À LA MAXWELLIENNE

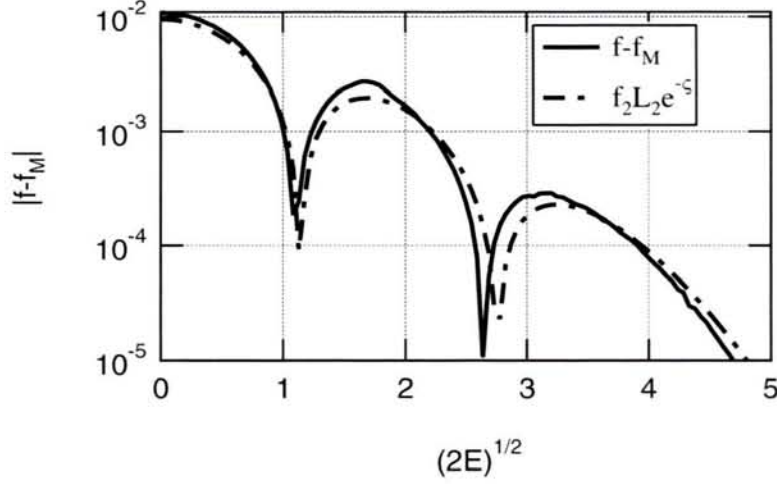


FIG. 3.21 – Valeur absolue de la différence de la fonction de distribution d'équilibre $\bar{f}$ à la distribution maxwellienne en fonction de la vitesse $\sqrt{2E}$ pour la simulation sans écoulements zonaux. La courbe pointillée représente l'approximation de cet écart (3.33).

Le coefficient f_2 peut s'écrire (3.29) en terme de grandeurs fluides :

$$f_2 = \frac{\bar{n}}{\bar{T}} \left(\frac{\bar{Q}}{2\bar{n}\bar{T}^2} - 1 \right) \sim -9.46 \cdot 10^{-3}$$

où $\bar{Q} = \int \bar{f} E^2 dE$. Ce coefficient permet d'exprimer l'erreur commise en fonction du flux que nous avons utilisé pour effectuer la fermeture fluide (2.19), soit :

$$f_2 = -\frac{\bar{n}}{\bar{T}} \left(1 - \frac{E_0}{\bar{T}} + \frac{E_0^2 - \varepsilon^2}{\bar{T}^2} \right) \sim -9.7 \cdot 10^{-2}$$

La valeur numérique est obtenue avec les paramètres utilisés dans la simulation fluide $\varepsilon = 0.99$ et $E_0 = 1$ (tableau 2.1). L'amplitude des écarts à la maxwellienne est supérieure d'un facteur 10 à la valeur obtenue en cinétique. On peut noter que l'accord aurait été bien meilleur ($f_2 \sim -9.0 \cdot 10^{-3}$), si l'on avait ajusté les paramètres en énergie à la valeur de la température au centre $\bar{T} \sim 1.1$, plutôt qu'à la valeur au bord $\bar{T} = 1$. Dans tous les cas, une modélisation fluide à trois champs, où l'évolution dynamique du flux de chaleur Q est prise en compte, doit permettre de rendre compte des écarts à la maxwellienne d'équilibre.

Comme nous venons de le voir, les écarts de la fonction de distribution à une maxwellienne locale (dépendant de y), contredisent l'hypothèse qu'une description fluide locale du système puisse être faite avec un nombre peu élevé de champs fluides. Cette conclusion est valable aussi bien dans le régime où les écoulements zonaux dominent, que dans celui où ce sont les "streamers". Cependant, une étude des écarts de la fonction de distribution d'équilibre (dans le sens de moyennée sur y) à la maxwellienne d'équilibre conduit à

des conclusions qui sont plus cohérentes avec les résultats obtenus sur les flux turbulents (figure 3.14) : l'accord entre le fluide et le cinétique est meilleur lorsque les écoulements zonaux sont supprimés. Dans ce cas, la présence de cellules de convection allongées dans la direction radiale conduit à une compensation partielle des coefficients de Laguerre d'ordre élevé. Une description avec un nombre relativement petit de moments est possible : une modélisation à trois moments semble être la plus adaptée pour réduire les différences (d'un ordre de grandeur) observées sur le flux de chaleur. Lorsque les écoulements zonaux sont présents, une bonne description locale semble inévitable.

Une étape supplémentaire doit être franchie pour tenter de prendre en compte avec un nombre relativement faible de moments fluides, les caractéristiques essentielles d'un modèle cinétique. Dans le chapitre suivant nous déterminons une fermeture fluide non collisionnelle pour un système à deux champs, susceptible d'amortir les petites structures spatiales.

3.4. EVALUATION DES ÉCARTS À LA MAXWELLIENNE

Chapitre 4

Théorie quasi-linéaire d'une fermeture fluide non-collisionnelle

L'analyse linéaire cinétique montre que les petites structures spatiales sont amorties par le biais de la polarisation¹. Cependant, cette dernière ne permet pas à elle seule de stabiliser les petites structures en fluide, où elles sont, dans le meilleur des cas, seulement stables marginalement. De plus, il existe des analogies de comportement entre une modélisation fluide et une modélisation cinétique lorsque les résonances entre ondes et particules peuvent être négligées². On peut en déduire qu'en cinétique, l'interaction entre ondes et particules a un rôle central à jouer dans le mécanisme de stabilisation linéaire des petites structures, comme dans le mécanisme de saturation non-linéaire de la turbulence.

L'ajout de coefficients de dissipation collisionnelle dans les équations fluides n'est alors qu'une première étape permettant d'accéder au régime non-linéaire en fluide et d'établir une première série de comparaisons. La deuxième étape concerne l'obtention d'une fermeture non-collisionnelle susceptible de capturer l'information pertinente dans le mécanisme de résonance. Une revue historique complète sur la question peut être trouvée dans l'introduction de l'article de Smolyakov [25]. Ce sont Hammett et Perkins [26] qui ont les premiers proposé une approche systématique pour comparer les résultats obtenus en fluide avec ce type de fermeture non-collisionnelles aux résultats cinétiques. Leur démarche était basée sur l'ajustement des coefficients numériques apparaissant dans la fermeture dans la limite linéaire.

Dans ce qui suit, nous avons tenté d'obtenir une expression du flux Q , en utilisant des arguments physiques basés sur la comparaison des taux de production d'entropie dans le cadre de la théorie quasi-linéaire. En effet, nous sommes à la recherche d'un processus de stabilisation des petites structures, l'entropie semble alors être le bon critère pour capturer l'information pertinente dans les interactions résonantes. De plus le taux de production

¹Le rôle de la polarisation est discuté à partir de l'expression du gradient marginal (1.46).

²On peut revoir les commentaires des figures 1.3 et 2.1 dans le cas linéaire et les commentaires de la figure 3.7 pour les forçages élevés dans le cas non-linéaire.

d'entropie est fortement lié aux flux turbulents. La base de cette démarche est présentée dans la référence [6].

4.1 Production totale d'entropie

4.1.1 Production d'entropie cinétique

En mécanique statistique classique l'entropie S d'un système hors équilibre est donnée par :

$$S = - \int f \log f dx dy dE \quad (4.1)$$

Sa variation temporelle définit le taux de production d'entropie :

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} \quad (4.2)$$

En inversant les opérateurs de dérivation et d'intégration, on obtient :

$$\dot{S} = - \int (1 + \log f) \partial_t f dx dy dE \quad (4.3)$$

soit, en utilisant l'équation de Vlasov (1.12) :

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \int (1 + \log f) [H, f] dx dy dE \\ &= \int [H, f \log f] dx dy dE \end{aligned}$$

L'intégrale du crochet de Poisson sur l'espace est nulle en l'absence de sources turbulentes au bord, il vient finalement :

$$\dot{S} = 0$$

De par sa structure, l'équation de Vlasov est isentropique. D'autre part, on peut vérifier que le traitement du forçage du système en imposant une fonction de distribution aux bords (3.5) ne produit pas d'entropie. En effet, les conditions aux limites ne sont pas solutions de l'équation de Vlasov, le calcul précédent ne permet donc pas d'estimer la production d'entropie qui peut leur être liée. Il est possible de les modéliser en écrivant l'équation de Vlasov comme :

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} -\nu (\delta(x)(f - f_0) + \delta(x - L_x)(f - f_{L_x})) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} -\nu ((f(0) - f_0) + (f(L_x) - f_{L_x})) \end{aligned} \quad (4.4)$$

où f_0 et f_{L_x} sont définies par (3.5). Les conditions aux limites se présentent comme un terme de friction, où la fréquence est infinie de telle sorte que ce terme domine au bord quelle que soit la solution de l'équation de Vlasov aux limites (donnée par $f(0)$ et $f(L_x)$).

La solution de l'équation différentielle donne (en zéro par exemple) : $f(0) = f_0 + Ce^{-\nu t}$, où C est une constante représentant l'évolution de $f(0)$ sous l'effet de l'équation de Vlasov. En notant que $\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{df} \frac{df}{dt}$, il vient automatiquement :

$$\frac{dS}{dt} = -C \frac{dS}{df} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \nu e^{-\nu t} = 0$$

Ce qui démontre que les conditions aux limites sont isentropiques. L'ajout de termes dissipatifs dans les simulations cinétiques ne nous intéresse pas ici.

4.1.2 Production d'entropie fluide

Dans le cadre de la thermodynamique, pour un gaz parfait mono-atomique, la variation réversible ds de l'entropie d'un élément fluide s'écrit en fonction des variations de densité et de pression de cet élément :

$$ds = C_v \frac{dP}{P} - C_p \frac{dn}{n}$$

où C_v et C_p sont respectivement les capacités calorifiques à volume et pression constante. Pour un gaz mono-atomique, C_v vaut $1/2$ par degré de liberté du système : $C_v = 1$ dans le cas bi-dimensionnel étudié ici. La capacité calorifique à pression constante est donnée par : $C_p = C_v + 1 = 2$. L'entropie s est alors définie à une constante s_0 près (avec $C_v = 1$) :

$$s = \int ds = \log(Pn^{-\Upsilon}) + s_0$$

où $\Upsilon = C_p/C_v = 2$ est le coefficient d'adiabaticité. L'entropie est une quantité extensive, si bien que l'entropie totale S_f d'un système de N centre-guides s'écrit comme :

$$S_f = \int s dN = \int s n dx dy$$

Le taux de production d'entropie s'écrit dans sa version fluide :

$$\dot{S}_f = \int \partial_t(ns) dx dy \quad (4.5)$$

La partie constante de l'entropie s_0 ne contribue pas à la production d'entropie étant donnée la conservation du nombre total de centres-guides (2.4). Nous redéfinissons alors s comme :

$$s = \log(Pn^{-\Upsilon}) \quad (4.6)$$

Cette expression définit la version fluide de l'entropie. La variation d'entropie s'exprime alors comme :

$$ds = \left(\frac{dP}{P} - \Upsilon \frac{dn}{n} \right) \quad (4.7)$$

L'expression (4.6) de l'entropie fluide peut être obtenue de manière alternative à partir de l'entropie générale (4.1) intégrée sur l'ensemble des énergies E , à la condition de considérer une fonction de distribution maxwellienne de la forme $f_M = \frac{n}{T} e^{-E/T}$. Le taux de production d'entropie fluide sera alors nul, comme en cinétique, pour un système fluide à deux champs, avec une fermeture sur le flux de chaleur de la forme (2.2). Cette fermeture correspond au choix adopté au paragraphe 2.3. Dans ce cadre, le système d'équations fluides présente un seuil (figure 2.1). Par contre, on peut montrer facilement qu'alors, les petites structures ne sont pas amorties linéairement mais sont seulement marginalement stables. L'amortissement des petites échelles, présent en cinétique, est perdu pour cette fermeture. Il en est de même avec la fermeture (2.18) du paragraphe 2.4. Comme nous allons le voir à présent, la prise en compte d'un flux de chaleur conductif permet d'obtenir simplement des termes d'amortissement des petites échelles.

4.1.3 Fermeture sur le flux conductif

Ecrivons explicitement le taux de production d'entropie (4.5) pour le système d'équations fluides. Le calcul est facilité en utilisant une dérivée lagrangienne d_t en suivant la dérive électrique :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + [\Phi, \cdot] \quad (4.8)$$

Le taux de production d'entropie s'écrit alors :

$$\dot{S}_f = \int (n d_t s + s d_t n - [\Phi, ns]) \, dx dy$$

Une intégration par partie montre que l'intégrale du crochet de Poisson sur l'espace est nulle en l'absence de sources turbulentes aux bords. En utilisant (4.7) nous pouvons exprimer la production d'entropie en fonction des dérivées totales de n et P :

$$\dot{S}_f = \int \left(\frac{d_t P}{T} + (s - \Upsilon) d_t n \right) \, dx dy$$

Les expressions des dérivées totales de la densité et de la pression sont données par les équations de transport fluides (2.3) :

$$\begin{aligned} d_t n &= -\partial_y \Gamma_* \\ d_t P &= -\partial_y \mathcal{Q}_* \end{aligned} \quad (4.9)$$

où apparaissent les flux diamagnétiques. $\Gamma_* = v_d P = n v_d T$ est le flux de centres-guides convectés par la dérive de courbure à la vitesse $v_d T$. On construit de la même manière un flux de chaleur total $\mathcal{Q}_* = v_d Q$ dans l'équation d'évolution de la pression. Dans le cas général, celui-ci peut se décomposer en une partie convective et une partie conductive :

$$\mathcal{Q}_* = \Upsilon \Gamma_* T + q_* \quad (4.10)$$

Pour une fonction de distribution maxwellienne (2.2), le flux résultant se limite à sa partie convective, soit $q_* = 0$. Après quelques manipulations, il apparaît que le taux de production d'entropie ne dépend que du flux conductif :

$$\dot{S}_f = - \int \frac{q_* \partial_y T}{T^2} dx dy$$

Le taux de production d'entropie apparaît sous la forme standard du produit du flux et de la force thermodynamique qui lui est associée.

La fermeture que nous considérons s'appuie sur une expression du flux de chaleur conductif de la forme :

$$q_* = \Upsilon v_d \bar{P} \sigma T \quad (4.11)$$

où σ est un opérateur et $\bar{P} = \langle P \rangle_y$ est la pression moyenne. Cette forme particulière du flux conductif permet de retrouver une production d'entropie nulle pour σ constant :

$$\dot{S}_f = -\Upsilon v_d \sigma \int \bar{P} \partial_y \log T dx dy = 0$$

On retrouve alors la propriété de l'équation de Vlasov.

Comme attendu, le flux de chaleur (4.11) permet aussi d'obtenir une stabilisation des petites échelles. Par exemple, pour $\sigma = -\partial_y$ on obtient un flux de chaleur diffusif de la forme :

$$q_* = -\Upsilon v_d \bar{P} \partial_y T \quad (4.12)$$

Le taux de production d'entropie associé s'écrit :

$$\dot{S}_f = v_d \Upsilon \int \bar{P} \left(\frac{\partial_y T}{T} \right)^2 dx dy > 0$$

L'entropie augmente sous l'effet d'un flux dissipatif.

L'étude linéaire du système fluide avec ce type de fermeture va mettre en exergue le rôle joué par la partie imaginaire de σ , en particulier pour l'amortissement des petites structures spatiales.

4.2 Ajustement du comportement linéaire fluide

Le système d'équations fluides s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_t n + [\Phi, n] + v_d \partial_y P &= 0 \\ \partial_t P + [\Phi, P] + \Upsilon v_d \partial_y (PT + \bar{P} \sigma T) &= 0 \end{aligned}$$

On obtient la relation de dispersion en utilisant la contrainte de quasi-électronneutralité (1.23) :

$$\omega^2 - \Upsilon(\sigma + 2)\omega_d\omega + \Upsilon(\sigma + 1)\omega_d^2 + \bar{n}\kappa_T \frac{k\omega_d}{1 + k_\perp^2} = 0 \quad (4.13)$$

avec $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$. Pour $\omega_i = 0$, on peut décomposer la relation de dispersion en parties réelle et imaginaire :

$$\begin{aligned} \omega_r^2 - \Upsilon(\sigma_r + 2)\omega_r\omega_d + \Upsilon(\sigma_r + 1)\omega_d^2 + \bar{n}\kappa_T \frac{k\omega_d}{1 + k_\perp^2} &= 0 \\ -\Upsilon\sigma_i\omega_d(\omega_r - \omega_d) &= 0 \end{aligned}$$

L'existence d'une partie imaginaire est permise par l'utilisation de σ complexe. La pulsation marginale est indépendante de Υ . En outre, elle est identique à la pulsation marginale cinétique :

$$\omega_r = \omega_d \quad (4.14)$$

En remplaçant ω_r par sa valeur marginale dans la partie réelle de la relation de dispersion on obtient une expression du gradient de température marginal indépendante de σ :

$$\kappa_T = (\Upsilon - 1) \frac{v_d \bar{T}}{\bar{n}} (1 + k_\perp^2) \quad (4.15)$$

Le gradient de température marginal est identique à la valeur cinétique pour $\Upsilon = 2$. Nous retiendrons cette valeur pour la suite.

Une étude du comportement des petites structures est utile pour déterminer les contraintes sur σ qui permettent de stabiliser ces dernières. Nous étudions le comportement asymptotique pour $k \rightarrow \pm\infty$ du taux de croissance, pour la branche la plus instable :

$$\omega_i = \sigma_i k v_d \bar{T} + v_d \bar{T} |k| \Im \left[\left((\sigma + 1)^2 + 1 - \frac{\bar{n}\kappa_T}{v_d \bar{T} (1 + k_\perp^2)} \right)^{1/2} \right] \quad (4.16)$$

En anticipant le résultat, on postule que la dépendance en k de σ permet de négliger le terme en gradient ($\propto k_\perp^{-2}$) pour les grands k :

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \omega_i = \omega_d \sigma_i k v_d \bar{T} + v_d \bar{T} \frac{|k|}{\sqrt{2}} (|(\sigma + 1)^2 + 1| - \Re((\sigma + 1)^2 + 1))^{1/2}$$

où nous avons utilisé : $\Im(z^{1/2}) = (|z| - \Re(z))^{1/2}/\sqrt{2}$, avec $|z|$ le module de z . Après quelques manipulations, il apparaît que la contrainte de stabilisation $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \omega_i < 0$ est toujours vérifiée pour :

$$\sigma_i \propto -\frac{k}{|k|} = -\text{sign}(k) \quad (4.17)$$

L'amortissement des petites structures est indépendant de σ_r . Contrairement à un opérateur de type diffusif ($-Dk_\perp^2$), un tel opérateur ne conduit qu'à un amortissement des

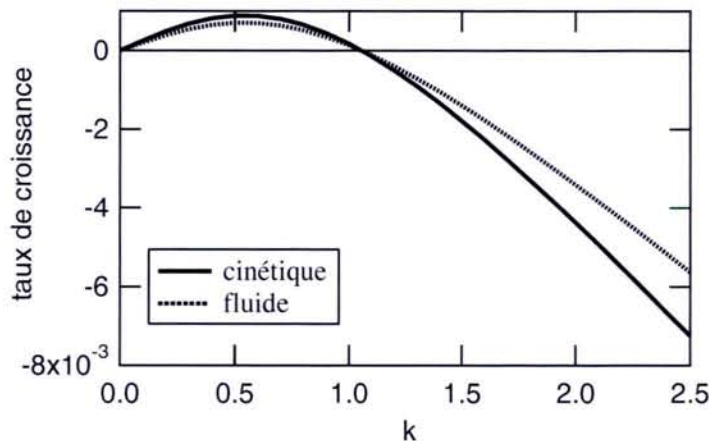


FIG. 4.1 – Taux de croissance cinétique et fluide en fonction de k , pour $k_x = \pi/L_x$, $\kappa_T/\kappa_{T,cr} = 2$, $\Upsilon = 2$ et $\sigma = -(1+i)$.

petites structures dans la direction périodique. Cependant, l'utilisation d'une partie imaginaire pour σ permet à la polarisation de retrouver l'effet stabilisant qu'elle a en cinétique. On peut s'en convaincre au regard de l'expression du gradient marginal de température³ (4.15).

La figure 4.1 représente les spectres en k des taux de croissance fluide et cinétique. La valeur $\sigma = -(1+i)$, permet d'obtenir l'amortissement maximal en fluide (pente maximum pour $k \rightarrow \infty$), qui reste cependant plus faible qu'en cinétique. Pour cette valeur, l'accord entre les spectres instables ($\omega_i > 0$) est bon : même k_{max} et $\omega_{i,max}^{cin} \sim 1.25\omega_{i,max}^{fl}$. La contrainte sur σ conduit à une pulsation toujours égale à sa valeur marginale, puisque dans ce cas : $\omega = \omega_d \pm iv_d \bar{T} |k| \sqrt{\frac{\bar{n}\kappa_T}{v_d \bar{T}(1+k_\perp^2)}}$.

La figure 4.2 montre les taux de croissance fluide et cinétique en fonction de l'écart au seuil pour le premier mode instable $k_0 = 2\pi/L_y$. Outre l'égalité des seuils et le comportement asymptotique pour les grands écarts au seuil qui sont indépendants de σ , le choix $\sigma = -(1+i)$ conduit à un comportement des deux courbes très similaire.

La fermeture utilisée (4.11) s'écrit, en prenant par exemple les contraintes de décroissance maximale de la figure 4.1 :

$$q_* = -2v_d \bar{P} \left(1 + i \frac{k}{|k|}\right) T \quad (4.18)$$

Celle-ci est équivalente à celle présentée dans la référence [26]. C'est une fermeture non-locale en espace. En effet, elle s'écrit dans l'espace réel comme une intégrale de la forme :

³On peut voir la discussion après l'équation (1.47).

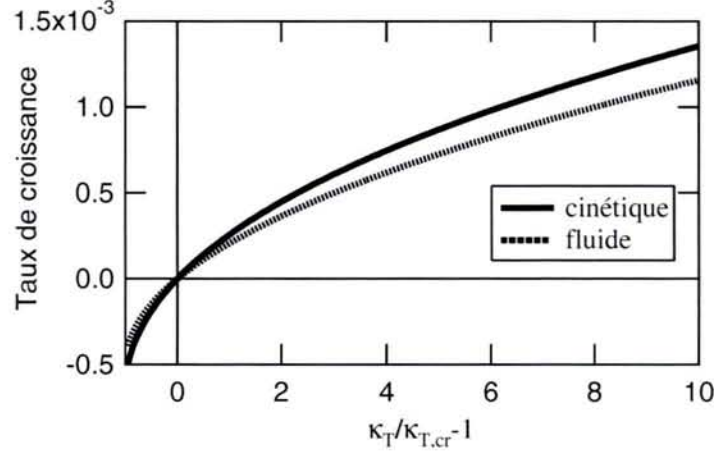


FIG. 4.2 – Taux de croissance cinétique et fluide en fonction de l'écart au seuil, pour $k_x = \pi/L_x$, $k = 2\pi/L_y$, $\kappa_T/\kappa_{T,cr} = 2$, $\Upsilon = 2$ et $\sigma = -(1 + i)$.

$$\frac{ikT_k}{|k|} \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{T(y+y') - T(y-y')}{y'} dy'$$

Dans la référence [26], les auteurs déterminent leur coefficient (σ dans notre cas) en ajustant au mieux les fonctions réponses fluide et cinétique, dans la limite $\omega_r/k \ll 1$. Ce traitement est qualitativement équivalent à celui que nous avons fait ici. Cependant, nous proposons une autre approche pour déterminer le paramètre libre du problème de fermeture.

4.3 Taux quasi-linéaires de production d'entropie

Nous avons montré que l'approche cinétique, basée sur l'équation de Vlasov, était intrinsèquement isentropique. Il en est de même en fluide, pour la fermeture considérée (4.11), pour autant que σ , le paramètre libre que nous avons introduit, soit constant. Il apparaît que ce n'est pas le cas pour une fermeture avec σ dépendant du signe de k , son expression dans l'espace réel conduisant à une dépendance en y de l'opérateur. L'amortissement fluide ainsi déterminé ne peut donc pas être considéré comme l'équivalent de l'amortissement par effet Landau de la théorie cinétique.

Cependant, le critère $\dot{S} = 0$ est difficile à satisfaire en pratique. En effet, en régime turbulent, les couplages non-linéaires génèrent des petites échelles. Il s'ensuit une perte d'information dans les simulations numériques due à la résolution limitée à laquelle les codes ont accès. Cela se traduit par une augmentation de l'entropie.

Dans ce cadre, il est illusoire d'espérer faire converger les descriptions cinétique et

fluide de la turbulence au regard du critère $\dot{S} = 0$. Afin de s'affranchir de ces obstacles essentiellement liés à une résolution numérique finie, nous envisagerons plutôt le taux de production d'entropie sous l'angle quasi-linéaire $\dot{S}_{ql}$. Nous retiendrons alors comme critère de convergence des deux approches l'adéquation des taux quasi-linéaires de production d'entropie, qui mesure l'impact des fluctuations sur le profil d'équilibre. Cette approche a de plus l'avantage d'utiliser explicitement la réponse linéaire du système à une perturbation, elle contient donc l'information sur l'amortissement Landau et mesure son impact sur le taux de production d'entropie lié aux grandeurs d'équilibre.

4.3.1 Dérivation cinétique

Nous nous plaçons dans le cadre de la théorie quasi-linéaire définie au paragraphe 1.4. Nous définissons l'entropie quasi-linéaire par l'expression générale de l'entropie (4.3) appliquée à la fonction de distribution d'équilibre $\bar{f}$:

$$S_{ql} = - \int \bar{f} \log \bar{f} dx dy dE \quad (4.19)$$

Le taux quasi-linéaire de production d'entropie fait intervenir l'expression de la variation temporelle de l'équilibre définie par (1.17) :

$$\dot{S}_{ql} = - \int \frac{\partial_x \bar{f}}{\bar{f}} Q_{turb} dx dy dE \quad (4.20)$$

Il est aisé de se convaincre que le taux de production d'entropie total $\dot{S}$ est bien nul dans le cadre de la théorie quasi-linéaire⁴. D'autre part, on vérifie que le taux quasi-linéaire de production d'entropie s'écrit de manière standard comme le produit d'un flux par les forces thermodynamiques contenues dans le gradient de la fonction de distribution d'équilibre. Il convient de rappeler que les bonnes forces thermodynamiques, dans ce cas, sont les gradients des quantités fluides n et T corrigées par un terme de courbure (1.26). Plus de précisions sont données dans la référence [6]. Le flux, quant-à-lui est de nature turbulente :

$$Q_{turb} = \langle \tilde{f} (-\partial_y \tilde{\Phi}) \rangle$$

En utilisant l'expression quasi-linéaire du flux, dérivée au paragraphe 1.8, la production d'entropie s'écrit :

$$\dot{S}_{ql} = L_y \int D_{ql} \frac{(\partial_x \bar{f})^2}{\bar{f}} dx dE$$

où nous rappelons que le coefficient de diffusion quasi-linéaire (1.53) est donné pour $\omega = \omega_r + i0^+$ par :

$$D_{ql} = \sum_{\omega_r} \sum_k \frac{\pi}{|\omega_d|} k^2 |\hat{\Phi}_{k,\omega_r}|^2 \delta(E/\bar{T} - \omega_r/\omega_d)$$

⁴En supposant $\tilde{f} \ll \bar{f}$, $\dot{S} = - \int ((1 + \log \bar{f}) \partial_t \bar{f} + (\tilde{f} \partial_t \tilde{f}) / \bar{f}) dx dy dE$. Le premier terme décrit l'évolution de l'équilibre et conduit au taux quasi-linéaire de production d'entropie (4.20). Le deuxième décrit l'évolution des perturbations et compense exactement le premier.

4.3. TAUX QUASI-LINÉAIRES DE PRODUCTION D'ENTROPIE

La diffusion quasi-linéaire induite par les fluctuations conduit bien à une augmentation de l'entropie $\dot{S}_{ql} > 0$. La production d'entropie est localisée autour des résonances entre ondes et particules pour chaque valeur de l'énergie. L'intégration sur l'énergie permet de passer d'un peigne de Dirac à une fonction continue en ω_r et ω_d . Nous choisissons de limiter notre analyse au cas où le système reste proche d'un équilibre thermodynamique local, de sorte que la fonction de distribution d'équilibre peut s'écrire : $\bar{f} = \frac{\bar{n}}{\bar{T}} e^{-E/\bar{T}}$. Dans le cas où le profil de densité est plat, les écarts à l'équilibre thermodynamique sont $\partial_x \bar{f} = \frac{\bar{n}\kappa_T}{\bar{T}} (E/\bar{T} - 1) e^{-E/\bar{T}}$, où κ_T est l'inverse de la longueur de gradient défini par (1.26). Le taux de production d'entropie s'écrit alors :

$$\dot{S}_{ql} = L_y \int dx \bar{n} \kappa_T^2 \sum_{\omega_r} \sum_{\omega_d}^{\omega_r \omega_d \geq 0} |k \hat{\Phi}_{k, \omega_r}|^2 \frac{\pi}{|\omega_d|} e^{-\omega_r/\omega_d} (\omega_r/\omega_d - 1)^2 \quad (4.21)$$

Le taux quasi-linéaire de production d'entropie est indépendant du signe du gradient κ_T . Cependant, seuls les gradients déstabilisants créent de l'entropie du fait de la présence de l'intensité des fluctuations turbulentes $|k \hat{\Phi}_{k, \omega_r}|^2$ dans l'expression. Le spectre des fluctuations est pondéré par une fonction poids W_{cin} , donnée par la théorie quasi-linéaire, qui modélise les parties du spectre qui dominent la production d'entropie :

$$W_{cin}(\omega_r, \omega_d) = \frac{\pi}{|\omega_d|} e^{-\omega_r/\omega_d} (\omega_r/\omega_d - 1)^2 \quad (4.22)$$

Cette expression est toujours positive. Le taux de production d'entropie l'est donc aussi. Cette conséquence est reliée directement à la prescription Landau $\omega_i = i0^+$ et donc au principe de causalité. Le taux quasi-linéaire de production d'entropie est lié à l'évolution de la fonction de distribution d'équilibre (4.20). Comme nous l'avons signalé, cette production d'entropie est contrebalancée par la production d'entropie due aux fluctuations pour redonner une production d'entropie totale nulle, conformément à la structure de l'équation de Vlasov. De fait, le principe de causalité impose que le second principe de la thermodynamique soit respecté pour l'équilibre. Les fluctuations, quant-à-elles, contribuent à l'organisation du système : leur taux de production d'entropie est négatif.

D'autre part, l'expression (4.22) n'est valable que lorsque les résonances sont possibles, c'est-à-dire pour $\omega_r \omega_d \geq 0$. Le comportement de W_{cin} en fonction de la vitesse de phase de l'onde $\omega_r/\omega_d = \omega_r/kv_d \bar{T}$ est représenté sur la figure 4.3. La production d'entropie est maximale pour les ondes de vitesse de phase nulle $\omega_r/k = 0$. Il existe un maximum secondaire pour $\omega_r/k = 3v_d \bar{T}$. Elle s'annule dans deux cas :

- Lorsque les ondes turbulentes de vitesse de phase ω_r/k se propagent dans le sens opposé aux centres-guides qui se déplacent à la vitesse $v_d \bar{T}$.
- Lorsque $\omega_r/k = v_d \bar{T}$, c'est-à-dire à la résonance même, pour laquelle les ondes et les centres-guides sont en phase et n'échangent pas d'énergie.

De même, lorsque la vitesse de phase de l'onde est grande vis-à-vis de la vitesse des centres-guides, la contribution des interactions résonantes à la production d'entropie s'annule rapidement sous l'effet de la décroissance exponentielle.

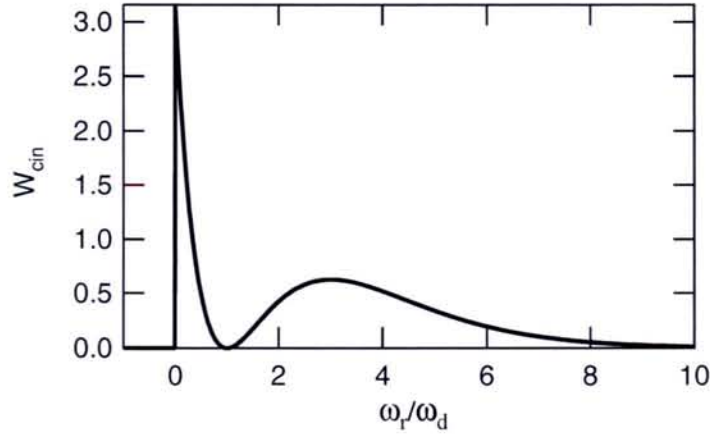


FIG. 4.3 – Fonction poids cinétique en fonction de la vitesse de phase de l'onde. On a pris $v_d \bar{T} = 1$.

L'allure de la fonction poids est entièrement régie par les interactions résonantes qui soutiennent l'amortissement Landau. La comparaison à la production d'entropie quasi-linéaire fluide va fournir les clés de la modélisation d'un amortissement non-collisionnel pour le système fluide.

4.3.2 Ajustement du taux quasi-linéaire de production d'entropie fluide

La même démarche peut être appliquée au système fluide, afin d'établir le taux quasi-linéaire de production d'entropie correspondant à la fermeture définie au paragraphe 4.1.3. L'équivalent fluide de l'entropie quasi-linéaire s'obtient à partir de l'équation (4.19) en faisant l'hypothèse d'une distribution $\bar{f}$ maxwellienne :

$$S_{ql} = \int \bar{n} \log(\bar{P} \bar{n}^{-\gamma}) dx dy$$

Le taux de production d'entropie s'écrit alors en fonction des flux turbulents Γ_{turb} et $\mathcal{Q}_{turb}$, contrôlant la dynamique de l'équilibre. De même qu'en cinétique, nous considérons le cas où le gradient de densité est nul. Le taux de production s'écrit alors :

$$\dot{S}_{ql} = \int \frac{\partial_x \bar{T}}{\bar{T}} \left(\Gamma_{turb} - \frac{\mathcal{Q}_{turb}}{\bar{T}} \right) dx dy$$

En utilisant les expressions quasi-linéaires des flux dans l'espace de Fourier (2.9), nous obtenons :

$$\dot{S}_{ql} = L_y \int \kappa_T \Im \left[\sum_k k \hat{\Phi}_{-k} \left(\frac{\hat{P}_k}{\bar{T}} - \hat{n}_k \right) \right] dx \quad (4.23)$$

4.3. TAUX QUASI-LINÉAIRES DE PRODUCTION D'ENTROPIE

Les flux quasi-linéaires dérivent des réponses linéaires en densité et en pression calculées comme dans le paragraphe 2.3. La fermeture sur le flux Q étant définie au paragraphe 4.1.3 :

$$Q = \Upsilon(P + \bar{P}\sigma)T \quad (4.24)$$

Les réponses linéaires s'écrivent sous la même forme que le système (2.11) dans la limite $\kappa_n = 0$:

$$\frac{\hat{n}}{\bar{n}} = -\kappa_T \frac{\omega_d}{\mathcal{D}(\omega, \omega_d)} k \hat{\Phi} \quad (4.25)$$

$$\frac{\hat{P}}{\bar{P}} = -\kappa_T \frac{\omega}{\mathcal{D}(\omega, \omega_d)} k \hat{\Phi} \quad (4.26)$$

Seule l'expression du dénominateur diffère de précédemment, puisqu'il prend en compte la contribution de σ :

$$\mathcal{D}(\omega, \omega_d) = \omega^2 - \Upsilon(2 + \sigma)\omega_d\omega + \Upsilon(1 + \sigma)\omega_d^2 \quad (4.27)$$

Le dénominateur $\mathcal{D}$ possède deux racines $\omega_{\pm}$:

$$\omega_{\pm} = \frac{\Upsilon}{2}\omega_d(\sigma + 2) \pm \frac{|\omega_d|}{2} \left\{ [\Upsilon\sigma + 2(\Upsilon - 1)]^2 + 4(\Upsilon - 1) \right\}^{1/2} \quad (4.28)$$

Le taux de production d'entropie fluide s'écrit alors :

$$\dot{S}_{qt} = L_y \int dx \bar{n} \kappa_T^2 \sum_{\omega} \sum_k |k \hat{\Phi}_{k,\omega}|^2 \Im \left(-\frac{\omega - \omega_d}{\mathcal{D}} \right)$$

La production d'entropie fluide possède les mêmes dépendances que la production d'entropie cinétique (4.21) vis-à-vis de l'intensité des fluctuations turbulentes $|k \hat{\Phi}_{k,\omega}|^2$ et des écarts à l'équilibre thermodynamique κ_T^2 . De la même manière qu'en cinétique, on définit une fonction poids fluide :

$$W_{fl}(\omega, \omega_d) = \Im \left(-\frac{\omega - \omega_d}{\mathcal{D}} \right) \quad (4.29)$$

Une décomposition en éléments simples de la fonction poids fluide conduit à :

$$W_{fl}(\omega, \omega_d) = \Im \left[-\frac{1}{\omega_+ - \omega_-} \left(\frac{\omega_+ - \omega_d}{\omega - \omega_+} + \frac{\omega_d - \omega_-}{\omega - \omega_-} \right) \right] \quad (4.30)$$

où les valeurs de $\omega_{\pm}$ sont données par (4.28). De même qu'en cinétique, nous nous plaçons à la stabilité marginale telle que, pour un mode k , $\omega_i(k) = 0$. Pour $\Upsilon = 2$, l'annulation de la partie imaginaire des deux pôles impose⁵ $\sigma_i = 0$. De fait, le comportement linéaire fluide est analogue à celui étudié au chapitre 2, tel que les petites échelles ne sont jamais stabilisées. Au regard du critère de l'entropie, il apparaît clairement que l'amortissement cinétique, qui peut être décrit comme un mélange de phase, ne peut en aucun cas être réduit à un terme dissipatif du type $i\sigma_i$. Le mécanisme sous-jacent est par trop différent. Revenons cependant sur les propriétés du taux de production d'entropie fluide ainsi défini :

⁵L'étude pour Υ quelconque n'apporte pas d'information supplémentaire.

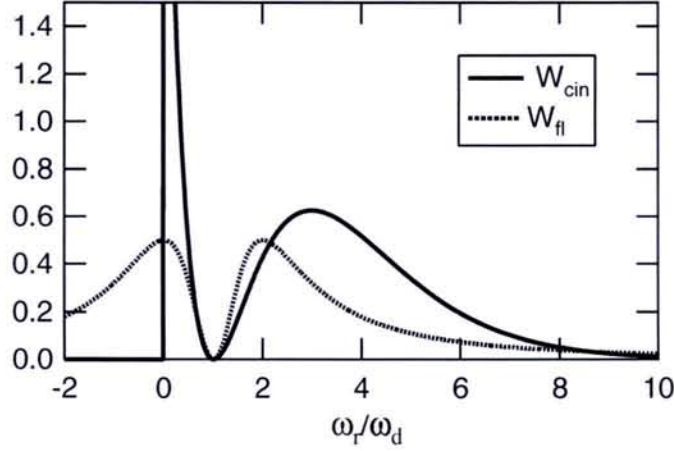


FIG. 4.4 – Fonctions poids fluide et cinétique en fonction de la vitesse de phase. On a pris $v_d \bar{T} = 1$, $\Upsilon = 2$ et $\sigma = -(1 + i)$.

- Les deux pôles sont du signe de ω_d , comme en cinétique, pour $\sigma_r \geq -1$.
- De même qu'en cinétique, on utilise la prescription Landau ($\omega_i = \sigma^+$) pour écrire la fonction poids fluide (4.30) comme la somme de pics de Dirac :

$$W_{fl}(\omega_r, \omega_d) = \frac{\pi}{\omega_+ - \omega_-} [(\omega_+ - \omega_d)\delta(\omega_r - \omega_+) + (\omega_d - \omega_-)\delta(\omega_r - \omega_-)] \quad (4.31)$$

Cette fonction est toujours positive, en accord avec le second principe. Cependant, le peigne de Dirac qui apparaît en cinétique est remplacé, en fluide, par deux Dirac (pour une modélisation fluide à deux champs) localisés en ω_+ et ω_- . Seules deux fréquences de résonance sont sélectionnées. L'ajustement des fonctions poids est alors difficile. L'intégration en énergie en cinétique permet de passer d'une représentation en terme de Dirac à une fonction continue comme celle qui apparaît dans (4.22). La contrainte imposant aux pôles fluides d'être réels se trouve être trop contraignante. Nous allons voir que, pour σ complexe, il est possible de décrire la fonction poids fluide comme une fonction continue.

Nous considérons ici le cas où les pôles ne sont pas réels. L'opérateur σ est complexe. Pour $\sigma_i \neq 0$, la fonction poids aura l'allure de fonctions de Dirac élargies. Pour $\omega_i = 0$ la fonction poids fluide (4.29) s'écrit :

$$W_{fl}(\omega_r, \omega_d) = \frac{-\Upsilon \omega_d \sigma_i (\omega_r - \omega_d)^2}{[\omega_r^2 - \Upsilon(\sigma_r + 2)\omega_d \omega_r + \Upsilon(\sigma_r + 1)\omega_d^2]^2 + [\Upsilon \omega_d \sigma_i (\omega_r - \omega_d)]^2} \quad (4.32)$$

Le second principe de la thermodynamique impose à σ_i d'être du signe contraire de ω_d . Cette contrainte est la même que celle obtenue pour amortir les petites structures dans l'étude linéaire (4.17).

4.3. TAUX QUASI-LINÉAIRES DE PRODUCTION D'ENTROPIE

La figure 4.4 représente les fonctions poids cinétique W_{cin} et fluide W_{fl} pour $\sigma = -(1+i)$ qui est la valeur déterminée pour avoir le meilleur ajustement des taux de croissance linéaires (voir figure 4.1). On constate que l'ajustement des fonctions poids n'est pas optimal. La considération des taux de production d'entropie quasi-linéaire conduit à des choix pour le paramètre σ qui sont différents de ceux obtenus avec des arguments linéaires.

L'allure générale de la courbe fluide est cependant similaire à la courbe cinétique. En particulier, elle s'annule en $\omega_r = \omega_d$ pour $\Upsilon \neq 1$. En notant que cette valeur correspond à la pulsation marginale fluide et cinétique (4.14), il apparaît clairement qu'en cinétique comme en fluide, le taux de production d'entropie est nul au seuil. En cinétique, ceci exprime que l'énergie échangée entre particules et ondes est nulle à la résonance. La fermeture fluide prend donc correctement en compte ce phénomène. On peut noter que dans le cas $\sigma_r = -1$, le premier maximum de la fonction poids fluide se trouve en $\omega_r = 0$ comme en cinétique.

D'autre part, la fonction poids fluide décroît à l'infini comme une lorentzienne :

$$W_{fl}(\omega_r, \omega_d) = \frac{-(\Upsilon \omega_d \sigma_i)^{-1}}{1 + X^2/Y^2}$$

avec les définitions : $X = \omega_r^2 - \Upsilon(\sigma_r + 2)\omega_d\omega_r + \Upsilon(\sigma_r + 1)\omega_d^2$, $Y = \Upsilon\omega_d\sigma_i(\omega_r - \omega_d)$.

Un ajustement possible est montré sur la figure 4.5. Le maximum secondaire fluide est ajusté au cinétique par les contraintes :

$$\sigma_r = \frac{9 - 5\Upsilon}{2\Upsilon} \quad ; \quad \sigma_i = -\frac{\text{sign}(k)e^3}{4\pi\Upsilon}$$

où $\text{sign}(k)$ est le signe de k . La position du pic $\omega_r = 3\omega_d$ est uniquement donnée par la partie réelle de σ . La valeur du maximum secondaire est donnée par la partie imaginaire.

L'utilisation de ces contraintes conduit à des spectres dont l'allure est montrée sur la figure 4.6. L'ajustement des taux de croissance est moins bon que dans le cas étudié précédemment (figure 4.1). Cependant le mode le plus instable est identique en fluide et en cinétique $k_{max} = 5(2\pi/L_y)$. Le taux de croissance cinétique pour ce mode est supérieur au fluide d'un facteur 1.5 (il était de 1.25 pour un amortissement maximum des petites structures). Les petites échelles sont moins fortement amorties qu'en cinétique. Ces conditions paraissent toutefois satisfaisantes pour servir de conditions initiales à une simulation numérique.

D'autre part, nous avons représenté la pulsation cinétique et les deux solutions possibles pour la pulsation fluide, qui peuvent être déterminées à partir de la relation de dispersion (4.13) :

$$\omega_{r\pm} = (\sigma_r + 2)kv_d\bar{T} \pm v_d\bar{T}|k|\Re \left[\left((\sigma + 1)^2 + 1 - \frac{\bar{n}\kappa_T}{v_d\bar{T}(1 + k_\perp^2)} \right)^{1/2} \right]$$

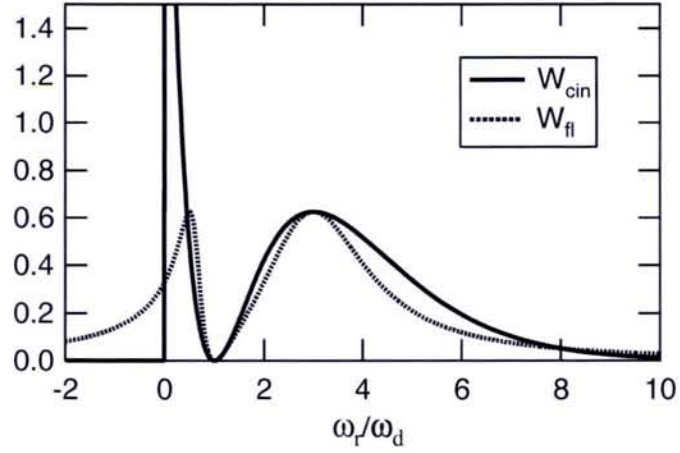


FIG. 4.5 – Fonctions poids fluide et cinétique en fonction de la vitesse de phase. On a pris $v_d \bar{T} = 1$ et $\Upsilon = 2$.

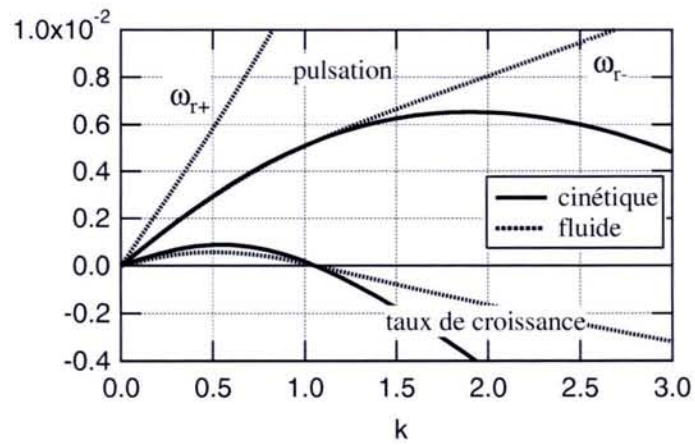


FIG. 4.6 – Taux de croissance et pulsations cinétique et fluide en fonction de k , pour $k_x = \pi/L_x$, $\kappa_T/\kappa_{T,cr} = 2$, $\Upsilon = 2$ et $\sigma = -(0.25 + 0.8i)$.

4.3. TAUX QUASI-LINÉAIRES DE PRODUCTION D'ENTROPIE

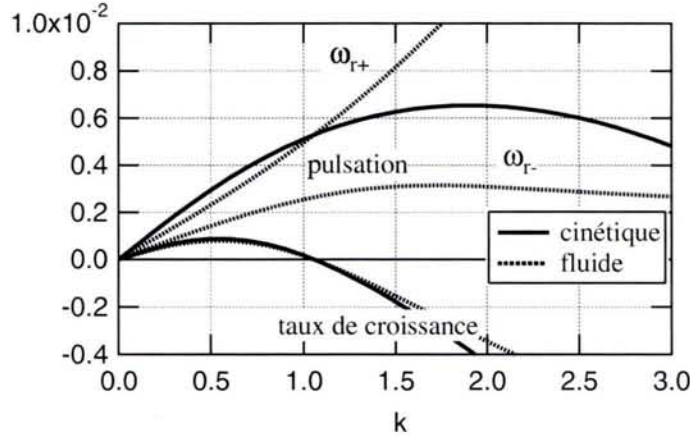


FIG. 4.7 – Taux de croissance et pulsations cinétique et fluide en fonction de k , pour $k_x = \pi/L_x$, $\kappa_T/\kappa_{T,cr} = 2$, $\Upsilon = 2$ et $\sigma = -(1.25 + 0.8i)$.

On rappelle que le taux de croissance ω_i est donné par la branche positive de la relation de dispersion (4.16). La solution ω_{i-} est toujours négative. Elle conduit à l'amortissement de l'onde ω_{r-} quel que soit k . Il apparaît cependant que cette onde amortie (ω_{r-}) s'ajuste convenablement avec la pulsation cinétique. L'écart absolu de l'ordre de 1% pour toutes la zone instable du spectre ($k < 1$ correspondant au dixième mode). La situation s'inverse pour $k > 1$, où c'est la pulsation correspondant aux modes instables ω_{r+} qui s'accorde avec la pulsation cinétique.

Il est intéressant de noter que l'ajustement des pulsations n'est plus possible lorsque la contrainte $\sigma_r \geq -1$ n'est pas vérifiée. Cette situation est montrée pour $\sigma = -(1.25 + 0.8i)$ sur la figure 4.7. Aucune des deux pulsations $\omega_{r\pm}$ ne s'ajuste correctement avec la pulsation cinétique. A l'inverse c'est le taux de croissance qui s'ajuste convenablement au taux de croissance cinétique : pour le mode le plus instable, le cinétique est supérieur d'un facteur 1.1 au fluide, ce qui est meilleur que l'accord obtenu dans les deux autres cas. Dans ce cas, le taux de production d'entropie associé s'ajuste mal à la courbe cinétique (en particulier le premier maximum fluide a une abscisse négative.).

Nous avons, au regard de cette étude, discerné trois cas particuliers pour une même fermeture qui seront à tester dans le régime non-linéaire :

- $\sigma_r = -1$ conduit à un amortissement optimal des petites structures, la pulsation restant quant-à-elle égale à sa valeur marginale quel que soit k . Le taux quasi-linéaire de production d'entropie n'est pas optimisé.
- $\sigma_r < -1$ conduit à un ajustement des spectres instables très convenable, au détriment des petites échelles, de la pulsation et du taux quasi-linéaire de production d'entropie.
- $\sigma_r > -1$ permet un ajustement convenable des taux quasi-linéaires de production

d'entropie, les pulsations s'accordent et les spectres instables sont corrects.

De manière générale, cette description lorentzienne ne permet cependant pas de faire coïncider parfaitement les taux quasi-linéaires de production d'entropie. La décroissance lorentzienne est plus douce que la décroissance exponentielle en cinétique. Les deux maxima fluides ont la même amplitude, ce qui n'est pas le cas en cinétique. Une alternative consiste à évaluer un à un les termes du développement de Taylor en ω_r/ω_d de l'exponentielle et de la lorentzienne. Le moyen d'y parvenir est de permettre la dépendance en k et ω_r de σ_r ⁶. Les fonctions poids sont équivalentes à l'ordre 1 en ω_r/ω_d pour la contrainte :

$$\sigma = -1 + \frac{\pm\sqrt{\omega_r\omega_d} + i\text{sign}(k)}{\Upsilon\pi}$$

D'autre part, la condition $\omega_r\omega_d \geq 0$ n'apparaît pas clairement en fluide. L'annulation de la fonction poids fluide pour $\omega_r\omega_d < 0$ n'est obtenue qu'asymptotiquement dans la limite $\omega_r/\omega_d \rightarrow -\infty$. Ce comportement, paraît fort difficile à décrire même avec l'utilisation d'un opérateur $\sigma(\omega_r, k)$. Cette remarque ne nuit cependant pas à la méthode générale proposée ici, puisqu'elle est particulière à notre système où les résonances se font sur l'énergie, non sur la vitesse. De plus, il convient de rappeler que les taux quasi-linéaires de production d'entropie sont pondérés par l'amplitude des fluctuations du champ électrique $|k\hat{\Phi}_{k,\omega}|^2$ qui n'est pas identique *a priori* en fluide et en cinétique. Tout ceci ouvre la voie pour des comparaisons dans le régime non-linéaire.

⁶Ce type de fermeture a déjà été proposé, par Mattor en particulier [27]. Cette approche est une des voies envisagée afin d'améliorer le traitement de l'amortissement des écoulements zonaux [2].

4.3. TAUX QUASI-LINÉAIRES DE PRODUCTION D'ENTROPIE

Conclusion

Dans cette thèse, deux des descriptions possibles d'une turbulence dans un plasma magnétisé sont comparées : l'approche cinétique et l'approche fluide. La première décrit l'évolution de la fonction de distribution f des particules dans l'espace des phases (position, vitesse), tandis que la seconde étudie la dynamique des moments successifs de f (densité, vitesse moyenne, pression, etc) dans le seul espace réel. Un moment fluide rend compte de la dynamique de particules d'autant plus énergétiques (v grand) que son ordre n est élevé. L'approche fluide procède d'une nécessaire simplification du système. En effet, de par la structure intrinsèque de l'équation de Vlasov, la dynamique de chaque moment fluide d'ordre n est couplée au moment d'ordre supérieur $n + 1$, de sorte que cette hiérarchie *a priori* infinie doit être tronquée. Le point fondamental réside dans le choix de la fermeture utilisée, c'est-à-dire la relation qui relie le dernier moment $n + 1$ aux moments d'ordre inférieur, $n, n - 1, \dots$

Moins coûteuse en temps et mémoire de calcul, l'approche fluide est plus attractive. Pour autant, elle ne permet de rendre compte, que partiellement seulement, d'aspects purement cinétiques qui jouent un rôle fondamental dans les plasmas faiblement collisionnels : les résonances ondes-particules (résonances Landau), et la dynamique de classes de particules particulières (particules énergétiques et piégées). De fait, la comparaison des résultats de différents codes montre que les simulations fluides et cinétiques dans les plasmas magnétisés de fusion conduisent à des niveaux de transport turbulent significativement différents. Notre travail s'inscrit dans cette problématique : comprendre l'origine des différences observées et proposer une fermeture non-collisionnelle.

La comparaison des descriptions fluide et cinétique qui fait l'objet de cette thèse est conduite sur un modèle simplifié décrivant une turbulence d'échange ("interchange" en anglais). Le système est à deux dimensions spatiales et une dimension en vitesse. Cette instabilité est générique dans les tokamaks. Elle apparaît au-delà d'un seuil en gradient de température et courbure des lignes de champ magnétique. Les équations cinétiques sont dérivées dans la limite des grandes longueurs d'onde ($k_{\perp} \rho_{c,i} \ll 1$). Le système fluide retenu ne conserve que les deux premiers moments, la densité et la pression en l'occurrence. La fermeture porte sur le flux de chaleur.

Les principaux résultats de la thèse sont les suivants :

- Le système fluide peut être avantageusement décrit par un système de deux fonc-

tions de distribution monocinétiques, chacune régie par l'équation de Vlasov. Le même code numérique peut alors être utilisé pour comparer les approches cinétique et fluide. La première fermeture considérée est collisionnelle, en ce sens qu'elle ne rend pas compte des résonances Landau, et que des coefficients de dissipation sont introduits *ad-hoc*.

- Dans ce cadre, les diagrammes de stabilité marginale dans le plan (gradient de densité-gradient de température) sont différents en cinétique et fluide. En particulier, le gradient de température critique cinétique $\kappa_{T,cr}$ est constant lorsque le gradient de densité est négatif, alors que le fluide prédit une dépendance quadratique. Dans le cas d'un profil plat de densité, les seuils linéaires peuvent cependant être ajustés, de même que les spectres linéaires. C'est dans ce régime que les comportements non-linéaires sont comparés.
- En cinétique, le transport turbulent ne devient non nul qu'au-delà d'un seuil non-linéaire, supérieur au seuil linéaire. En-deçà, l'essentiel de l'énergie des fluctuations est portée par des modes d'équilibre, les écoulements zonaux, qui ne contribuent pas au transport. Nous retrouvons en cela des résultats déjà publiés. L'analyse montre que cette transition se produit lorsque le taux de croissance linéaire de l'instabilité devient comparable au cisaillement de vitesse induit par les écoulements zonaux.
- Les simulations non-linéaires montrent que le niveau de transport de chaleur fluide excède toujours de plusieurs ordres de grandeur le cinétique. Ce résultat vaut quel que soit l'écart au seuil considéré ($1 < \kappa_T/\kappa_{T,cr} < 6$ dans nos simulations), mais également lorsque les écoulements zonaux sont artificiellement supprimés. Ce dernier résultat montre que ces écoulements ne permettent pas à eux seuls d'expliquer toutes les différences observées entre le fluide et le cinétique.
- Une interprétation possible de ces différences vient de ce que, en cinétique, la fonction de distribution locale s'écarte significativement d'une maxwellienne, que les écoulements zonaux soient présents ou non. En particulier, il est montré que deux moments fluides sont insuffisants pour la décrire. Le choix de la fermeture s'avère donc déterminant.
- Dans le dernier chapitre, une fermeture non-collisionnelle originale pour le flux de chaleur est proposée. Elle repose sur la comparaison des taux de production d'entropie fluide et cinétique dans le régime quasi-linéaire. L'étude de ce taux, qui est gouverné par le transport quasi-linéaire, permet en outre d'assurer la satisfaction du second principe. Les paramètres de la fermeture sont ajustés de manière à reproduire au mieux la réponse cinétique fréquentielle. Dans ce cadre, les propriétés linéaires fluide et cinétique peuvent être ajustées. La comparaison non-linéaire est laissée aux travaux futurs.

Annexe A

Gyromoyenne et vitesses de dérive

En présence d'un champ électrique $\mathbf{E}$ et d'un champ magnétique $\mathbf{B}$, l'équation fondamentale de la dynamique s'écrit pour une particule à la position $\mathbf{x}$ et se déplaçant à la vitesse $\mathbf{v}$:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}))$$

On décompose la position et la vitesse de la particule en une partie de centre-guide et une partie liée au mouvement cyclotronique :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_G + \boldsymbol{\rho}_c \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_c \end{aligned} \tag{A.1}$$

On définit la fréquence cyclotronique comme $\omega_c \equiv q\mathbf{B}_G/m$, où $\mathbf{B}_G = \mathbf{B}(\mathbf{x}_G)$ est le champ à la position du centre-guide. On définit la vitesse cyclotronique par $\mathbf{v}_c = \boldsymbol{\rho}_c \times \boldsymbol{\omega}_c$. On se place dans le cadre où le champ magnétique est intense et lentement variable. De fait, $\omega_c \gg \partial_t B, v \nabla \log B$. Une moyenne sur les temps rapides peut être ramenée à une moyenne sur la phase cyclotronique $\varphi_c = \omega_c t$. La moyenne de l'équation de la dynamique sur la phase cyclotronique donne :

$$\frac{m}{q} \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_c}{2\pi} \mathbf{E} + \mathbf{v}_G \times \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_c}{2\pi} \mathbf{B} + \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_c}{2\pi} (\mathbf{v}_c \times \mathbf{B})$$

étant donné que $\int \frac{d\varphi_c}{2\pi} \mathbf{v}_c = \mathbf{0}$ par définition. Décomposons les champs sur une base de Fourier spatiale :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \int d\mathbf{k} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \int d\mathbf{k} \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \end{aligned}$$

où $\mathbf{k}$ est le vecteur d'onde associé à la position $\mathbf{x}$ des particules. En décomposant les vitesses et positions suivant (A.1), il vient :

$$\frac{m}{q} \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = G_0 \cdot \mathbf{E} + \mathbf{v}_G \times G_0 \cdot \mathbf{B} - \mu \nabla_{\perp} G_1 \cdot \mathbf{B} \tag{A.2}$$

G_0 désigne l'opérateur de gyromoyenne. Dans l'espace de Fourier, il prend la forme :

$$\begin{aligned} G_0 \cdot \mathbf{B} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_c}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_G + \boldsymbol{\rho}_c)} \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_G} \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_c}{2\pi} e^{ik_{\perp} \rho_c \sin(\varphi_c)} \end{aligned}$$

où $k_{\perp}$ est la norme du vecteur d'onde dans le plan perpendiculaire aux lignes de champ. Sachant que :

$$e^{i\xi \sin(\varphi_c)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\xi) e^{in\varphi_c} \quad (\text{A.3})$$

nous pouvons réécrire l'intégrale sur φ_c comme une fonction de Bessel d'ordre 0 (notée J_0) :

$$G_0 \cdot \mathbf{B} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_G} J_0(k_{\perp} \rho_c) \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}) \quad (\text{A.4})$$

où nous avons utilisé le résultat :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_c}{2\pi} e^{in\varphi_c} = \delta(n) \quad (\text{A.5})$$

Il en va bien évidemment de même pour le champ électrique.

Le deuxième terme du membre de droite de l'équation d'évolution des centres-guides (A.2) peut s'écrire sous la forme compacte suivante :

$$\mu \nabla_{\perp} G_1 \cdot \mathbf{B} = \int d\mathbf{k} \hat{\mathbf{B}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_G} \times \int \frac{d\varphi_c}{2\pi} \mathbf{v}_c e^{i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\rho}_c}$$

où μ est l'invariant adiabatique défini par (1.1). Nous allons à présent expliciter l'opérateur de gyromoyenne G_1 . Soit $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ les vecteurs directeurs d'une base de référence dans le plan perpendiculaire aux lignes de champ. Soit α_k l'angle que fait le vecteur d'onde perpendiculaire avec l'axe défini par $\mathbf{e}_1$. On prend, de même, cet axe comme référence pour l'angle φ_c . Les vecteurs s'écrivent alors :

$$\mathbf{k}_{\perp} = k_{\perp} (\cos \alpha_k, \sin \alpha_k) \quad \boldsymbol{\rho}_c = \rho_c (\cos \varphi_c, \sin \varphi_c) \quad \mathbf{v}_c = v_c (-\sin \varphi_c, \cos \varphi_c)$$

Avec ces définitions le champ magnétique s'écrit $\hat{\mathbf{B}} = -\hat{B} \mathbf{e}_3$ pour un repère direct $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Nous avons alors l'expression des produits dans cette base :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{\perp} \cdot \boldsymbol{\rho}_c &= k_{\perp} \rho_c \cos(\alpha_k - \varphi_c) \\ \hat{\mathbf{B}} \times \mathbf{v}_c &= \hat{B} v_c (\cos \varphi_c \mathbf{e}_1 + \sin \varphi_c \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire, en utilisant (A.3) :

$$\mu \nabla_{\perp} G_1 \cdot \mathbf{B} = v_c \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_G} \hat{B} \int \frac{d\varphi_c}{2\pi} (\cos \varphi_c \mathbf{e}_1 + \sin \varphi_c \mathbf{e}_2) e^{ik_{\perp} \rho_c \sin(\pi/2 + \varphi_c - \alpha_k)}$$

$$= v_c \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_G} \hat{B} \int \frac{d\varphi_c}{2\pi} (\cos \varphi_c \mathbf{e}_1 + \sin \varphi_c \mathbf{e}_2) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k_\perp \rho_c) e^{in(\pi/2 + \varphi_c - \alpha_k)}$$

En écrivant les cosinus et les sinus de la phase cyclotronique sous forme d'exponentielles complexes et en utilisant (A.5) pour effectuer l'intégration sur φ_c , les fonctions de Bessel d'ordre 1 apparaissent :

$$\mu \nabla_\perp G_1 \cdot \mathbf{B} = v_c \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_G} \hat{B} \left[\frac{1}{2} (J_{-1} e^{-i(\pi/2 - \alpha_k)} + J_1 e^{i(\pi/2 - \alpha_k)}) \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2i} (J_{-1} e^{-i(\pi/2 - \alpha_k)} - J_1 e^{i(\pi/2 - \alpha_k)}) \mathbf{e}_2 \right]$$

Sachant que $J_{-1} = -J_1$ nous pouvons écrire :

$$\mu \nabla_\perp G_1 \cdot \mathbf{B} = \mu \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_G} \hat{B} \frac{2iJ_1(k_\perp \rho_c)}{\rho_c} (\cos \alpha_k \mathbf{e}_1 + \sin \alpha_k \mathbf{e}_2)$$

où $v_c = \omega_c \rho_c = \frac{2\mu}{q\rho_c}$. En remarquant que $\cos \alpha_k \mathbf{e}_1 + \sin \alpha_k \mathbf{e}_2 = \mathbf{k}_\perp / k_\perp$, il vient finalement :

$$\mu \nabla_\perp G_1 \cdot \mathbf{B} = \mu \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_G} \frac{2J_1(k_\perp \rho_c)}{k_\perp \rho_c} (i\mathbf{k} \hat{B}) \quad (\text{A.6})$$

ce qui définit l'opérateur de gyromoyenne G_1 .

Nous allons à présent donner l'expression des vitesses de dérive $\mathbf{v}_G$ dans le cadre de la théorie adiabatique. En plus de la hiérarchie sur les fréquences définie en début d'annexe, on se place ici dans la limite $k_\perp \rho_c \rightarrow 0$. On ne retient alors que l'ordre le plus bas du développement en $k_\perp \rho_c$ des opérateurs. Dans ce cadre $J_0 = 1$ et $2J_1(k_\perp \rho_c) = k_\perp \rho_c$. Cette limite revient à prendre les champs à la position du centre-guide. L'équation de la dynamique des centres-guides s'écrit alors :

$$m \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} = q(\mathbf{E}_G + \mathbf{v}_G \times \mathbf{B}_G) - \mu \nabla B_G \quad (\text{A.7})$$

La vitesse de centre-guide $\mathbf{v}_G$ se décompose en un mouvement parallèle aux lignes de champ et un mouvement de dérive transverse aux lignes de champ :

$$\mathbf{v}_G = v_\parallel \mathbf{b} + \mathbf{u}$$

où $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}_G}{B_G}$ est le vecteur directeur dans la direction parallèle. L'équation (A.7) devient :

$$m \frac{dv_\parallel}{dt} \mathbf{b} + m v_\parallel \frac{d\mathbf{b}}{dt} + m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q(\mathbf{E}_G + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_G) - \mu \nabla B_G$$

La projection dans la direction parallèle donne :

$$m \frac{dv_\parallel}{dt} + m \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{b} = qE_{G\parallel} - \mu \nabla_\parallel B_G$$

La projection transverse est obtenue par différence :

$$mv_{\parallel} \frac{d\mathbf{b}}{dt} + m \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt} \right)_{\perp} = q(\mathbf{E}_{\mathbf{G}\perp} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_{\mathbf{G}}) - \mu \nabla_{\perp} B_G$$

En supposant que $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \sim 0$, on obtient l'expression de la vitesse de dérive des centres-guides :

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{b}}{qB_G} \times \left(q(\mathbf{E}_{\mathbf{G}\perp} + \mu \nabla_{\perp} B_G + mv_{\parallel} \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt} \right)_{\perp} \right)$$

La dérive peut-être décomposée en deux vitesses de nature différente :

- La vitesse de dérive électrique est indépendante de l'espèce considérée. Elle s'écrit :

$$\mathbf{u}_E = \frac{\mathbf{E}_{\mathbf{G}} \times \mathbf{B}_{\mathbf{G}}}{B_G^2}$$

- Les vitesses de dérive de gradient et de courbure résultent de l'inhomogénéité et de l'anisotropie du champ magnétique :

$$\mathbf{u}_d = \frac{\mathbf{B}_{\mathbf{G}}}{qB_G^2} \times \left(\mu B_G \frac{\nabla_{\perp} B_G}{B_G} + mv_{\parallel} \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right)$$

Dans la limite où la pression magnétique est grande devant la pression thermodynamique, c'est-à-dire pour $\beta = \frac{2\mu_0 P}{B^2} \ll 1$, nous pouvons écrire : $\frac{d\mathbf{b}}{dt} \sim v_{\parallel} \frac{\nabla_{\perp} B}{B}$. La vitesse de dérive de courbure (dénomination générale comprenant aussi la vitesse de dérive de gradient) s'écrit alors :

$$\mathbf{u}_d = (\mu B_G + mv_{\parallel}^2) \frac{\mathbf{B}_{\mathbf{G}}}{qB_G^2} \times \frac{\nabla_{\perp} B_G}{B_G}$$

Cette vitesse dépend de l'énergie totale des particules au travers du terme $\mu B_G + mv_{\parallel}^2$.

Annexe B

Dynamique du système en variables angle-action

Nous dérivons dans un premier temps les équations régissant la dynamique du système en l'absence de perturbations ($U = 0$) à l'aide des variables d'angle et d'action préalablement définies. Nous utilisons ensuite cette base pour déterminer la réponse électronique à une petite perturbation (U). Une valeur approchée de cette réponse est alors déterminée pour calculer la perturbation en densité électronique intervenant dans la quasi-électroneutralité du paragraphe 1.2.

La dynamique d'un système physique est décrite par l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ est le lagrangien du système, dépendant des positions $\mathbf{q}$, des vitesses $\dot{\mathbf{q}}$ et du temps. Il est aisé de constater que, pour une variable q_i telle que $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, l'impulsion généralisée associée, définie par $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ est un invariant du système : $\frac{dp_i}{dt} = 0$. Une telle variable q_i est alors dite cyclique. Dans un système périodique, il est alors utile de travailler avec un nouveau jeu de variables conjuguées. On construit une variable angulaire :

$$\alpha_i = \frac{2\pi q_i}{L_i}$$

où L_i est l'extension de q_i . La variable conjuguée a la dimension d'une action et est définie par

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i$$

Le lagrangien d'une particule chargée immergée dans un champ magnétique, de potentiel vecteur $\mathbf{A}$, est le suivant :

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{q}}_i^2 + q \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{q}}_i$$

Nous avons supposé ici que le potentiel électrostatique d'équilibre était nul¹.

Intéressons nous au système physique décrit dans le paragraphe 1.1. Le potentiel vecteur est calculé pour un champ $B_\theta(R) = \frac{B_0 R_0}{R}$. Il vaut :

$$\mathbf{A} = -B_0 R_0 \ln(R/R_0) \mathbf{e}_y$$

En présence d'un champ magnétique intense, la théorie adiabatique est applicable. Le lagrangien s'écrit en fonction de l'invariant adiabatique (1.1) :

$$L = \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 + \mu B(R) + qA\dot{y}$$

où les positions et vitesses sont celles des centres-guides. Les deux variables cycliques qui apparaissent sont y et θ . Elles définissent les angles :

$$\alpha_2 = \theta \quad \text{et} \quad \alpha_3 = y/R_0$$

Les impulsions correspondantes prennent alors la forme :

$$p_2 = mv_{||} \quad \text{et} \quad p_3 = qA = -qB_0 R_0 \ln(R/R_0)$$

Enfin, les actions associées sont les invariants du problème et s'écrivent :

$$J_2 = mRv_{||} \quad \text{et} \quad J_3 = -qB_0 R_0^2 \ln(R/R_0)$$

L'action J_2 correspond au moment cinétique des centres-guides. Dans la limite slab², l'action J_3 est directement reliée à la position radiale des centres-guides :

$$J_3 = -qB_0 R_0^2 \ln(1 - x/R_0) \sim qB_0 R_0 x$$

On peut remarquer qu'à une charge près, cette action représente le flux du champ magnétique traversant une surface $R_0 x$. Le troisième invariant exact du système est l'énergie des centres-guides :

$$E = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2$$

Enfin, le jeu de variables (α_1, J_1) est relié au mouvement cyclotronique : $\alpha_1 = \varphi_c$ et $J_1 = q\mu/m$. Celles-ci n'interviennent pas dans la dynamique des centres-guides. La variable d'angle α utilisée par la suite ne dépend dès lors plus que de α_2 et α_3 (et de même pour la variable d'action).

¹Le calcul qui suit resterait valable pour un potentiel électrostatique ne dépendant que de la position radiale.

²Cette limite est définie au paragraphe 1.1. Elle consiste à poser $R = R_0(1 - x/R_0)$ avec $x/R_0 \ll 1$.

Les variables d'angle et d'action sont canoniquement conjuguées. Les équations de Hamilton donnent la dynamique du système en l'absence de perturbations :

$$\begin{aligned} d_t \boldsymbol{\alpha} &= \partial_{\mathbf{J}} H_{eq} \equiv \boldsymbol{\Omega} \\ d_t \mathbf{J} &= -\partial_{\boldsymbol{\alpha}} H_{eq} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

où le hamiltonien H_{eq} du système est déterminé par :

$$\begin{aligned} H_{eq} &= \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2 = \mu B(R) + \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 \\ &= \mu B_0 \exp\left(\frac{J_3}{q B_0 R_0^2}\right) + \frac{J_2^2}{2m R_0^2} \exp\left(\frac{2J_3}{q B_0 R_0^2}\right) \end{aligned}$$

Celui-ci s'écrit dans la limite slab :

$$H_{eq} = \mu B_0 + \frac{J_2^2}{2m R_0^2} + \frac{J_3}{q B_0 R_0^2} \left(\mu B_0 + \frac{J_2^2}{m R_0^2} \right) \quad (\text{B.2})$$

Dans ce cadre, l'équation de Vlasov s'écrit sous forme hamiltonienne :

$$\partial_t F_{eq} - \{H_{eq}, F_{eq}\} = 0 \quad (\text{B.3})$$

où les crochets de Poisson sont :

$$\{H_{eq}, F_{eq}\} = \partial_{\boldsymbol{\alpha}} H_{eq} \cdot \partial_{\mathbf{J}} F_{eq} - \partial_{\mathbf{J}} H_{eq} \cdot \partial_{\boldsymbol{\alpha}} F_{eq} \quad (\text{B.4})$$

Pour les variations lentes en temps, l'équation de Vlasov impose à la fonction de distribution d'équilibre F_{eq} de ne dépendre que des variables d'action. En faisant l'hypothèse que ce sont les collisions qui fixent la forme de la fonction de distribution d'équilibre au travers d'une équation de Boltzmann, nous choisissons une fonction de distribution d'équilibre qui est localement maxwellienne :

$$F_{eq}(\mathbf{J}) = \frac{N_{eq}(J_3)}{(2\pi m T_{eq}(J_3))^{3/2}} \exp\left(-\frac{H_{eq}(\mathbf{J})}{T_{eq}(J_3)}\right) \quad (\text{B.5})$$

où $N_{eq}(J_3)$ et $T_{eq}(J_3)$ sont respectivement les densité et température d'équilibre des centres-guides. Celles-ci dépendent de la coordonnée radiale par l'intermédiaire de l'action J_3 . La source d'énergie de la turbulence est contenue dans la variation de la fonction de distribution d'équilibre vis-à-vis de $\mathbf{J}$. Il s'agit de la force thermodynamique :

$$\partial_{\mathbf{J}} F_{eq} = \frac{F_{eq}}{T_{eq}} (\boldsymbol{\Omega}^* - \boldsymbol{\Omega})$$

où $\boldsymbol{\Omega}$ sont les fréquences propres du hamiltonien définies par (B.1). Les écarts à l'équilibre sont représentés par la fréquence :

$$\boldsymbol{\Omega}^* = \left(T_{eq} \partial_{J_3} \log(N_{eq}) + \left(\frac{E}{T_{eq}} - \frac{3}{2} \right) \partial_{J_3} T_{eq} \right) \mathbf{e}_x \quad (\text{B.6})$$

$E = \mu B_0 + \frac{J_2^2}{2mR_0^2}$ représente l'énergie cinétique des centres-guides.

En présence d'une perturbation $U(\alpha)$, l'équation de Vlasov conserve sa forme hamiltonienne :

$$\partial_t F_e - \{H_e, F_e\} = 0 \quad (\text{B.7})$$

où le crochet de poisson est défini par (B.4). Dans l'optique du calcul de la densité électronique $\tilde{N}_e$, nous décrivons l'évolution de la fonction de distribution des centres-guides électroniques F_e . Le hamiltonien total s'écrit :

$$H_e = H_{eq} - eU$$

où H_{eq} est le hamiltonien d'équilibre défini par (B.2) avec $q = -e$ et $m = m_e$. La réponse linéaire à une perturbation de la fonction de distribution des centres-guides électroniques $\tilde{F}_e$ s'écrit en ne gardant que les termes du premier ordre en perturbation dans l'équation de Vlasov (B.7) :

$$\partial_t \tilde{F}_e + \Omega_e \cdot \partial_\alpha \tilde{F}_e = -\frac{F_{eq,e}}{T_{eq,e}} (\Omega_e^* - \Omega_e) \cdot \partial_\alpha eU \quad (\text{B.8})$$

L'équation aux dérivées partielles (B.8) s'écrit sous forme algébrique dans l'espace réciproque pour un mode de Fourier de nombre d'onde $\mathbf{n}$ et de pulsation ω :

$$-\omega \hat{F}_e + \Omega_e \cdot \mathbf{n} \hat{F}_e = -\frac{F_{eq,e}}{T_{eq,e}} (\Omega_e^* - \Omega_e) \cdot \mathbf{n} e\hat{U}$$

La réponse linéaire des centres-guides électroniques s'écrit alors :

$$\hat{F}_e = F_{eq,e} \left(1 - \frac{\omega - \mathbf{n} \cdot \Omega_e^*}{\omega - \mathbf{n} \cdot \Omega_e} \right) \frac{e\hat{U}}{T_{eq,e}}$$

Une solution approchée peut être déterminée en évaluant les ordres de grandeur des différentes fréquences.

- La fréquence du phénomène turbulent ω est évaluée pour une turbulence ionique. Elle est de l'ordre de $\omega_{c,i}(\rho_{c,i}/R_0)^2$.
- Les écarts à l'équilibre thermodynamique pour les centres-guides électroniques sont représentés par la fréquence Ω_e^* (B.6). L'ordre de grandeur de cette fréquence est de $\omega_{c,e}(\rho_{c,e}/R_0)^2 \sim \omega_{c,i}(\rho_{c,i}/R_0)^2$ pour $T_i \sim T_e$. T_i et T_e sont les températures caractéristiques ionique et électronique.

Les fréquences propres du hamiltonien Ω_e sont :

- une basse fréquence due à la dérive de courbure électronique de l'ordre de $\omega_{c,e}(\rho_{c,e}/R_0)^2$: $\Omega_3 = d_t \alpha_3 = \partial_{J_3} H_{eq,e} = -\frac{\mu B + m v_{\parallel}^2}{e B_0 R_0^2}$
- une haute fréquence dans la direction parallèle de l'ordre de $\omega_{c,e} \rho_{c,e}/R_0$: $\Omega_2 = d_t \alpha_2 = \partial_{J_2} H_{eq,e} = \frac{v_{\parallel}}{R}$.

Il existe deux cas limites pour lesquels la réponse électronique à un comportement différent :

- Pour $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, le terme en Ω_2 au dénominateur domine et $\frac{\omega - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}_e^*}{\Omega_e \cdot \mathbf{n}} \sim 0$. La réponse électronique est alors adiabatique : $\frac{\hat{F}_e}{F_{eq,e}} = \frac{e\hat{U}}{T_{eq,e}}$.
- Pour $\mathbf{n} = \mathbf{0}$, c'est-à-dire pour les grandeurs moyennes ³, les électrons ont une réponse nulle quelle que soit la perturbation $\hat{U}$: $\frac{\hat{F}_e}{F_{eq,e}} = 0$.

La réponse électronique s'écrit sous forme compacte :

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{\hat{F}_{e\mathbf{n}}}{F_{eq,e}} e^{i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}} = \sum_{\mathbf{n}} \frac{e\hat{U}_{\mathbf{n}}}{T_{eq,e}} e^{i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}} - \frac{e\hat{U}_0}{T_{eq,e}}$$

Soit encore dans l'espace réel :

$$\frac{\tilde{F}_e}{F_{eq,e}} = \frac{eU}{T_{eq,e}} - \frac{e\langle\langle U \rangle\rangle}{T_{eq,e}}$$

où $\langle\langle U \rangle\rangle$ représente une moyenne sur α_2 et α_3 . La densité électronique est alors définie comme l'intégrale sur l'espace des impulsions de la fonction de distribution des centres-guides électroniques $\tilde{F}_e$, en posant $N_{eq,e} = N_0$ et $T_{eq,e} = T_e$:

$$\frac{\tilde{N}_e}{N_0} = \frac{eU}{T_e} - \frac{e\langle\langle U \rangle\rangle}{T_e}$$

³Une moyenne sur les variables angulaires : $\langle A \rangle = \int A \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{(2\pi)^2}$, correspond, dans l'espace de Fourier à : $\langle A \rangle = \sum \langle \hat{A}_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}} \rangle = \sum \hat{A}_{\mathbf{n}} \delta_{\mathbf{n}} = \hat{A}_0$.

Annexe C

Stabilité marginale cinétique en l'absence de pôles résonants

On exprime l'intégrale I_1 en fonction des gradients en utilisant la partie réelle de la relation de dispersion (1.40) :

$$I_1 = \frac{1 - A_T}{A_n + A_T(\hat{\omega}_r - 1)}$$

pour $A_n + A_T(\hat{\omega}_r - 1) \neq 0$. Cette contrainte induit que $A_T \neq 0$, pour que l'annulation de la partie imaginaire de la relation de dispersion (1.40) soit possible. En introduisant cette expression de I_1 et la relation entre I_1 et I_2 (1.42) dans la partie imaginaire de la relation de dispersion on obtient une équation quadratique en $\hat{\omega}_r$:

$$A_T \hat{\omega}_r^2 + \hat{\omega}_r [A_n(1 + A_T) - 2A_T] + (A_n - A_T)^2 = 0 \quad (\text{C.1})$$

La forme quadratique de cette relation est équivalente à celle obtenue pour la relation de dispersion d'un système fluide à deux champs¹. Le discriminant de l'équation (C.1) s'annule pour trois valeurs de A_T :

$$\Delta = (A_T - 1)(A_T - A_{T+})(A_T - A_{T-})$$

avec

$$A_{T\pm} = \frac{A_n^2}{8} + \frac{A_n}{2} \pm \frac{1}{8} \sqrt{A_n^3(A_n + 8)}$$

solutions réelles pour $A_n > 0$ ou $A_n < -8$. Au regard des expressions paramétriques des gradients (1.43), il est clair qu'à une valeur de la fréquence marginale correspond un couple unique (A_n, A_T) . La réciproque doit être vraie, si bien que la seule solution possible pour l'équation (C.1) correspond à $\Delta = 0$, soit :

$$\hat{\omega}_r = 1 - \frac{A_n(A_T + 1)}{2A_T}$$

¹Un bon exemple se trouve dans le chapitre 2.

qui est nulle en $A_n = A_T = 1$ comme l'était la fréquence marginale en présence de pôles (1.37). Les trois zéros du discriminant ne sont pas des solutions physiquement acceptables pour le système. En effet, au regard de l'expression paramétrique du gradient de température (1.43), et en notant que $I_2 > 0$ (1.42) :

$$\frac{A_T - 1}{A_T} = \frac{I_1^2}{I_2} > 0$$

La solution $A_T = 1$ pour annuler le discriminant est immédiatement rejetée. La solution A_{T-} est rejetée elle aussi puisque $A_{T-} < 1$ pour $A_T > 0$ et $A_{T-} > 1$ pour $A_T < 0$. La solution A_{T+} pour $A_T < 0$ n'est pas du bon signe, ne reste que cette solution pour $A_T > 0$. En l'absence de pôle, la courbe de stabilité marginale s'écrit donc :

$$A_T = \frac{A_n^2}{8} + \frac{A_n}{2} + \frac{1}{8} \sqrt{A_n^3(A_n + 8)}$$

qui est égal à un pour $A_n = 1$. Il convient de noter que cette solution est compatible avec la contrainte $\hat{\omega}_r < 0$ pour A_T ou $A_n > 1$, la courbe de stabilité marginale est donc bien une courbe unique dans le plan (A_n, A_T) , comme on le voit sur la figure 1.2.

Annexe D

Stabilité marginale cinétique dans la limite $\omega_r \gg 1$

Intéressons nous tout d'abord au cas où $\hat{\omega}_r > 0$. La relation de dispersion pour $\hat{\omega}_i = 0$ s'écrit (1.36) :

$$1 - A_T - [A_n + A_T(\hat{\omega}_r - 1)] \left[PP \int_0^\infty \frac{d\zeta e^{-\zeta}}{\hat{\omega}_r - \zeta} + i\pi e^{-\hat{\omega}_r} \right] = 0$$

Dans le cas limite où la pulsation de l'onde ω_r est très grande vis-à-vis de la fréquence caractéristique des centres-guides ω_d (soit $\hat{\omega}_r \gg 1$), on peut supposer que la contribution des pôles, c'est-à-dire de la partie imaginaire de la relation de dispersion, est négligeable : $\lim_{\hat{\omega}_r \rightarrow \infty} e^{-\hat{\omega}_r} = 0$. D'autre part, un développement de Taylor de la partie réelle est raisonnable en s'appuyant sur les mêmes arguments¹. On s'affranchit ainsi du calcul exact de la partie principale :

$$PP \int_0^\infty \frac{d\zeta e^{-\zeta}}{\hat{\omega}_r - \zeta} = -\frac{1}{\hat{\omega}_r} \int_0^\infty d\zeta e^{-\zeta} \left(1 + \frac{\zeta}{\hat{\omega}_r} + \frac{\zeta^2}{\hat{\omega}_r^2} + \frac{\zeta^3}{\hat{\omega}_r^3} + o\left(\frac{\zeta^4}{\hat{\omega}_r^4}\right) \right).$$

On obtient ainsi une solution de la relation de dispersion appelée limite fluide. A l'ordre 2 en $\hat{\omega}_r^{-1}$, elle s'écrit :

$$\hat{\omega}_r^2 + A_n \hat{\omega}_r + A_n + A_T = 0 \quad (\text{D.1})$$

La stabilité marginale est atteinte lorsque le discriminant $\Delta = A_n^2 - 4(A_n + A_T)$ est nul. La pulsation marginale est alors :

$$\hat{\omega}_r = -\frac{A_n}{2} \quad (\text{D.2})$$

La limite fluide est atteinte pour $A_n \ll -1$. La courbe de stabilité marginale est donnée par :

$$A_T = \frac{A_n^2}{4} - A_n \quad (\text{D.3})$$

¹Le petit paramètre du développement $\zeta/\hat{\omega}_r$ peut être supposé petit, même pour ζ tendant vers l'infini, du fait de la pondération par l'exponentielle $\exp(-\zeta)$: les particules à très haute énergie ont une densité infiniment faible.

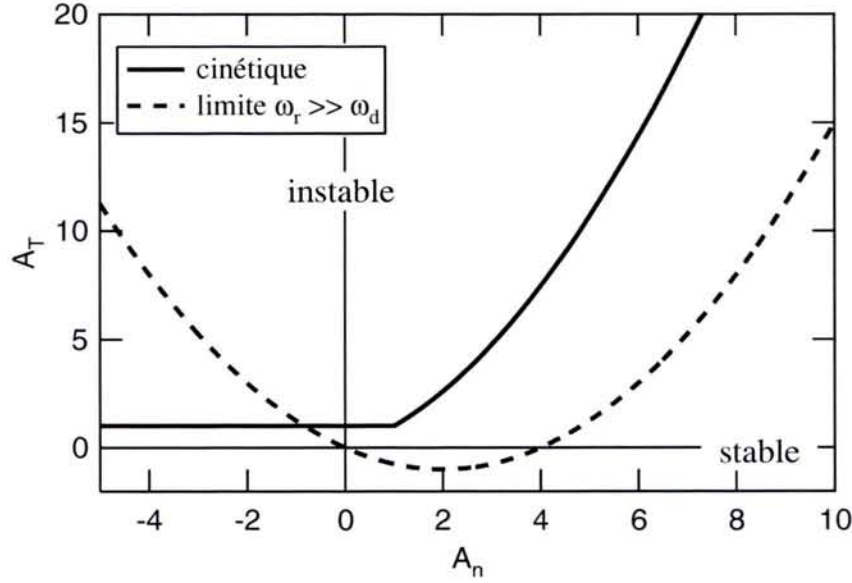


FIG. D.1 – Courbe de stabilité marginale cinétique dans la limite fluide, c'est-à-dire pour $\omega_r \gg \omega_d$, dans le plan (A_n, A_T) . On rappelle la courbe cinétique (figure 1.2).

Dans le cas où $\hat{\omega}_r < 0$, la partie réelle de la relation de dispersion (1.40) donne la même relation (D.1) à l'ordre deux en $\hat{\omega}_r^{-1}$. On vérifie, qu'à cet ordre la partie imaginaire (1.41) s'annule aussi vite que A_n^{-1} . La limite fluide est atteinte, quel que soit le signe de la pulsation, dans la limite $|A_n| \gg 1$. Le courbe de stabilité marginale obtenue dans la limite fluide (équation (D.3)) est comparée à la stabilité marginale obtenue en cinétique sur la figure D.1. Pour les gradients de densité positifs, la courbe de stabilité marginale calculée en l'absence de résonances a un comportement similaire à la limite fluide : les gradients marginaux (D.3) et (1.44) ont le même comportement asymptotique en $A_n^2/4$ pour $A_n \gg 1$. Pour les gradients de densité négatifs, la courbe de stabilité dans la limite fluide ne peut en aucun cas s'accorder avec la courbe cinétique. Toute la différence réside dans l'hypothèse que nous avons fait de négliger l'effet des résonances, en négligeant la partie imaginaire de la relation de dispersion.

On peut comprendre intuitivement de quelle manière il faut interpréter cette limite en considérant un gradient de densité négatif à droite du point d'intersection, soit $A_n < 2 - 2\sqrt{2}$. Le cinétique et sa limite fluide sont en désaccord dans la zone intermédiaire entre les deux courbes : le cinétique prédit un système instable ($\hat{\omega}_i > 0$), la limite fluide prédit la stabilité marginale du système ($\hat{\omega}_i = 0$). Cependant, pour $A_n \ll -1$, le rôle déstabilisant des résonances est supposé être très atténué, de sorte que le taux de croissance doit rester faible même pour un gradient de température supérieur au gradient marginal : $\hat{\omega}_i \sim o^+$ pour $A_T > 1$. On retrouve ainsi un accord entre fluide et cinétique dans la zone intermédiaire.

Annexe E

Calcul de la relation de dispersion

La relation de dispersion (1.49) n'est définie que pour $\omega_i > 0$, son intégrand est alors analytique. Lorsque ω passe dans le demi-plan inférieur $\omega_i \leq 0$, l'intégrale I (1.50) n'est plus définie. De plus, elle n'est plus analytique pour $\omega_i = 0$ puisqu'alors elle possède une singularité au point $\zeta = \hat{\omega}_r$. Ce comportement discontinu peut être évité en considérant l'intégration comme effectuée dans le plan complexe $\zeta = \zeta_r + i\zeta_i$. Nous nous inspirons ici de la méthode proposée dans [7].

Considérons d'abord le cas où $\omega_i > 0$. La position du pôle par rapport à l'axe réel ($\hat{\omega}_i \propto \omega_i/k$), dépend du signe de k : il est au-dessus pour $k > 0$, en-dessous pour $k < 0$ (figure E.1 (a)). L'intégrale I correspond à l'intégrale sur l'axe réel :

$$I = \int_0^\infty \frac{d\zeta_r e^{-\zeta_r}}{\zeta_r - \hat{\omega}} \quad (\text{E.1})$$

En intégrant sur le contour fermé défini par I et C_+ pour $k > 0$ (respectivement C_- pour $k < 0$), et en appliquant le théorème des résidus¹ on obtient l'expression de I :

$$I = C_{\text{sign}(k)} + \text{sign}(k) 2i\pi e^{-\hat{\omega}} \quad (\text{E.2})$$

où $\text{sign}(k)$ est le signe de k .

On définit la partie principale d'une intégrale dans le plan complexe en contournant le pôle de part et d'autre comme montré sur la figure E.1 (a) (pour $k > 0$). On obtient :

$$\frac{1}{2} \left[\int_{C_+} \frac{d\zeta e^{-\zeta}}{\zeta - \hat{\omega}} + \int_{C_-} \frac{d\zeta e^{-\zeta}}{\zeta - \hat{\omega}} \right] = PP \int \frac{d\zeta e^{-\zeta}}{\zeta - \hat{\omega}} \quad (\text{E.3})$$

Par ailleurs, le théorème des résidus nous donne :

$$\int_{C_-} \frac{d\zeta e^{-\zeta}}{\zeta - \hat{\omega}} - \int_{C_+} \frac{d\zeta e^{-\zeta}}{\zeta - \hat{\omega}} = 2i\pi e^{-\hat{\omega}}$$

¹La contribution de l'intégrale rejetée à l'infini est nulle par ailleurs.

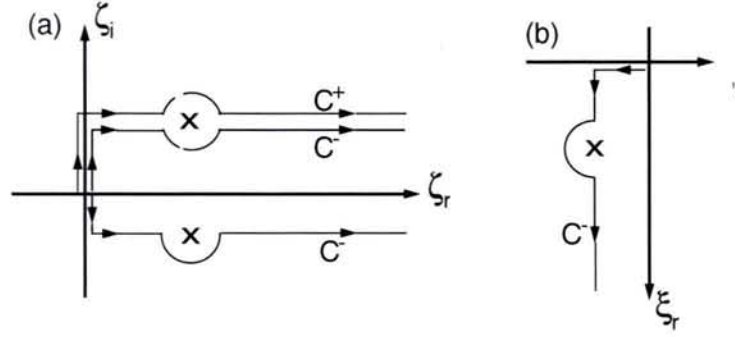


FIG. E.1 – (a) Contours d'intégrations dans le plan complexe $\zeta_r + i\zeta_i$ pour $\hat{\omega}_r > 0$. (b) Contour d'intégration pour $\omega_r < 0$, $\omega_i < 0$ et $k > 0$.

Les intégrales sur C_- et C_+ peuvent alors être définies comme :

$$C_{\pm} = PP \int \frac{d\zeta e^{-\zeta}}{\zeta - \hat{\omega}} \mp i\pi e^{-\hat{\omega}} \quad (\text{E.4})$$

Nous avons ainsi une définition compacte de I pour $\omega_i > 0$:

$$I = PP \int \frac{d\zeta e^{-\zeta}}{\zeta - \hat{\omega}} + \text{sign}(k) i\pi e^{-\hat{\omega}} \quad (\text{E.5})$$

Le prolongement analytique de I pour $\hat{\omega}_i \leq 0$, noté $\bar{I}$, doit être défini de telle sorte que la relation de dispersion varie continuellement lors du franchissement de l'axe réel par le pôle. Autrement dit, il faut que l'expression analytique de I (E.5) reste valable pour $\bar{I}$. $\bar{I}$ est donc égal à C_- (respectivement C_+) pour $k > 0$ (respectivement $k < 0$), $C_{\pm}$ étant définis par (E.4). La continuité est assurée car le pôle est toujours contourné de la même manière par I et par son prolongement analytique² $\bar{I}$. Par exemple pour $k > 0$, I passe en-dessous du pôle ($\hat{\omega}_i > 0$). De même (figure E.1 (a)), $\bar{I} = C_-$ passe en-dessous du pôle ($\hat{\omega}_i < 0$).

Jusqu'à présent, nous avons implicitement travaillé avec $\hat{\omega}_r > 0$, pour lequel une singularité existe en $\zeta_r = \hat{\omega}_r$, et pour lequel l'intégrale peut être calculée en utilisant l'expression (E.5). Le cas qui nous intéresse pour l'étude des spectres du paragraphe 1.7 est celui où $\hat{\omega}_r$ devient négatif pour $\hat{\omega}_i < 0$. Dans ce cas, nous pouvons vérifier que l'expression (E.5) est encore valide³. Pour ce faire, on utilise le changement de variable $\zeta \rightarrow i\zeta$ comme montré sur la figure E.1 (b). En ramenant l'axe d'intégration sur l'axe réel

²Ces prolongements analytiques sont rigoureusement équivalents aux contours utilisés par Landau dans son étude originale [8].

³La méthode décrite ici est analogue à celle utilisée dans [9] pour traiter la relation de dispersion relativiste.

on obtient l'expression de I (E.1) :

$$I(\hat{\omega}) = \int_0^\infty \frac{d\xi_r e^{i\xi_r}}{\xi_r - i\hat{\omega}}$$

Cette manipulation est permise étant donné qu'aucun pôle n'a été "balayé" durant l'opération (puisqu'on suppose que $\hat{\omega}_r < 0$) et que l'intégrand s'annule rapidement à l'infini. L'intégrale est à présent singulière en $\xi_r = \hat{\omega}_i$ (avec $\hat{\omega}_i < 0$). La continuité est assurée en suivant la même démarche que précédemment. Le cas $k > 0$ est montré sur la figure E.1 (b). Le prolongement analytique de I pour $\omega_i < 0$ et $\omega_r < 0$ est alors le même que précédemment : $\bar{I} = C_-$ (respectivement C_+) pour $k > 0$ (respectivement $k < 0$).

Reprenons ces résultats de manière synthétique. La relation de dispersion est résolue dans tout le plan complexe en utilisant l'expression analytique (E.5) :

$$I = \bar{I} = PP \int \frac{d\zeta e^{-\zeta}}{\zeta - \hat{\omega}} + \text{sign}(k) i\pi e^{-\hat{\omega}}$$

où la partie principale est définie par (E.3). Cette expression est valable quel que soit ω . En particulier, lorsque $\omega_i = 0$, on retrouve les formules opérationnelles dites de Plemelj pour les intégrales singulières, que nous avons utilisées pour le calcul de (1.36) dans l'étude de la stabilité marginale. Une expression alternative, en fonction de l'intégrale sur l'axe réel nous sera aussi utile pour le calcul numérique de la relation de dispersion. On distingue alors deux cas :

$$I = \int_0^\infty \frac{d\zeta_r e^{-\zeta_r}}{\zeta_r - \hat{\omega}} \quad \text{pour } \omega_i > 0 \quad (\text{E.6})$$

$$\bar{I} = \int_0^\infty \frac{d\zeta_r e^{-\zeta_r}}{\zeta_r - \hat{\omega}} + \text{sign}(k) 2i\pi e^{-\hat{\omega}} \quad \text{pour } \omega_i \leq 0 \quad (\text{E.7})$$

L'expression (E.7) est obtenue en utilisant (E.2).

Annexe F

Impact de la diffusion au bord sur le flux au centre

Comme nous l'avons vu au paragraphe 3.1.2, les conditions aux limites imposent des fluctuations nulles aux bords radiaux. Cette discontinuité conduit à une instabilité numérique dans les simulations cinétiques. Des oscillations apparaissent sur le profil de pression. La figure F.1 montre les oscillations numériques présentes sur le flux de chaleur turbulent¹ $\mathcal{Q}_{turb}$. Le flux au centre a alors une valeur faible (de l'ordre de 10^{-6}), du même ordre de grandeur que l'amplitude des oscillations aux bords. Les oscillations disparaissent avec l'ajout d'un coefficient de dissipation au bord. Le flux diffusif, $\mathcal{Q}_D = -D_x \partial_x \bar{P}$, prend le relais du flux turbulent au bord. La valeur du flux au centre est alors supérieure de plus d'un ordre de grandeur à sa valeur sans diffusion. On vérifie, de plus, que la moyenne temporelle du flux total, somme du flux turbulent au centre et du flux diffusif au bord, est bien constante à l'équilibre (équation (3.14)), caractérisé par $\partial_t \bar{P} = 0$, de sorte que $\partial_x (\mathcal{Q}_{turb} + \mathcal{Q}_D) = 0$.

La valeur du coefficient de diffusion au bord a une influence sur la valeur du flux turbulent au centre. L'impact reste cependant modeste. Lorsque le coefficient est divisé par 10 ($D_0 = 10^{-4}$) le flux moyen au centre est divisé par 2.5.

¹Le flux de chaleur est défini pour la modélisation fluide par l'équation (2.8). Cette expression est valable aussi en cinétique.

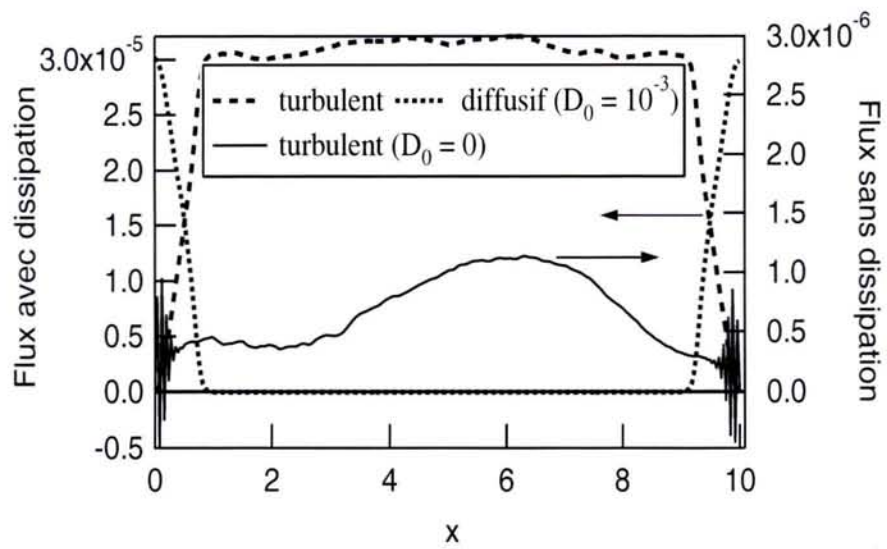


FIG. F.1 – Profils des flux turbulents. Simulations réalisées avec $\kappa_T = 4\kappa_{T,cr}$ et sans écoulements zonaux ($\hat{\Phi}_0 = 0$). Les profils sont moyennés sur la phase de saturation turbulente (de $t = 6.10^3$ à $t = 2.10^4$)

Annexe G

Calcul des incertitudes sur le flux turbulent cinétique

Les barres d'erreurs présentes pour les faibles valeurs du flux cinétique (figure 3.7) sont calculées en utilisant une moyenne glissante comme montré sur la figure G.1. La valeur moyenne est calculée sur la phase de saturation (en grisée sur la courbe). On effectue ensuite une moyenne glissante entre le temps initial ($t = 4.10^5$) et le temps final ($t = 6.10^5$). En lucarne de la figure G.1 nous avons représenté la valeur de cette moyenne entre $t = 5.10^5$ et le temps final. On constate que celle-ci oscille autour d'une valeur moyenne et que les oscillations diminuent au cours du temps. La mesure de l'incertitude consiste à prendre la valeur quadratique moyenne ("rms") de ces oscillations. Ces incertitudes sont représentées sur la figure 3.7 sous forme de barres d'erreurs. Celles-ci ne sont significatives et visibles sur le graphe que pour un forçage inférieur à $4\kappa_{T,cr}$ en cinétique.

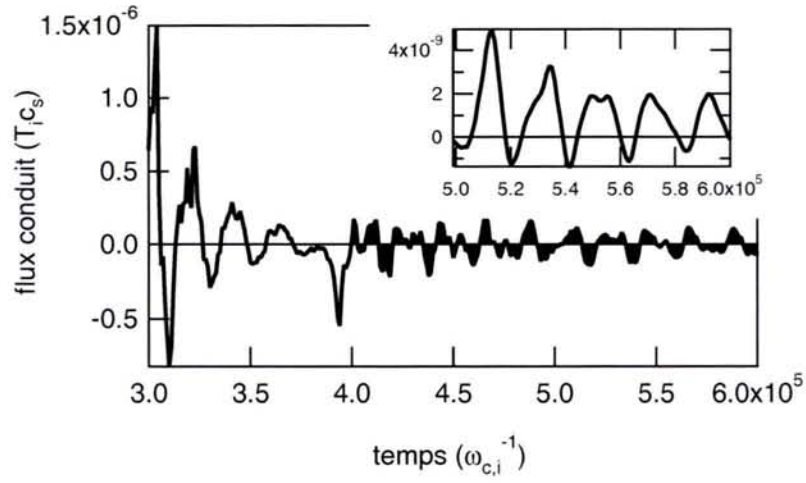


FIG. G.1 – Evolution temporelle du flux turbulent au centre pour une simulation cinétique à $1.25\kappa_{cr}$. La partie grisée correspond à la phase de saturation turbulente sur laquelle on effectue la moyenne temporelle. En lucarne, est représentée la valeur de la moyenne glissante du flux de $t = 4.10^5$ au temps indiqué en abscisse.

Bibliographie

- [1] S. I. Braginskii, *Reviews of Plasma Phys.* edited by M.A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1965), vol I, p.205
- [2] A. M. Dimits, G. Bateman, M. A. Beer et al., *Physics of Plasmas* **7**, 969 (2000)
- [3] E. A. Frieman and Liu Chen, *Physics of Fluids* **25**, 502 (1982)
- [4] M. Kruskal, *Terzo Congresso Internazionale sui Fenomeni di Ionizzazione nei Gas*, Venezia (1957), p.562
- [5] I. S. Gradshteyn & I. M. Ryzhik, *Table of integrals series and products*, quatrième édition, Academic Press NY and London (1965), p.718
- [6] X. Garbet et al. *Turbulent fluxes and entropy production rate*, à paraître
- [7] J.-L. Delcroix and A. Bers, *Physique des plasmas* Vol. 2, Savoirs Actuels, Interéditions / CNRS Editions (1994)
- [8] L. D. Landau, *Sov. Phys.-JETP* **10**, 25 (1946)
- [9] M. Brambilla, *Kinetic theory of plasma waves*, Clarendon Press, Oxford, UK (1998)
- [10] M. R. Feix et P. Bertrand, *A universal model : the Vlasov equation*, à paraître
- [11] R. Hatzky, T.M. Tran, A. Könies, R. Kleiber, S.J. Allfrey, *Physics of Plasmas* **9**, 898 (2002)
- [12] C.Z. Cheng et G. Knorr, *Journal of Computational Physics* **22**, 330 (1976)
- [13] E. Sonnendrücker, J. Roche, P. Bertrand, A. Ghizzo, *Journal of Computational Physics* **149**, 201 (1999)
- [14] G. Manfredi et al., *Journal of Computational Physics* **121**, 298 (1995)
- [15] G. Depret, X. Garbet, P. Bertrand, A. Ghizzo, *Plasma Phys. Control. Fusion* **42**, 949 (2000)
- [16] Y. Sarazin et al., *Kinetic features of bounce averaged trapped ion turbulence*, à paraître
- [17] Y. Sarazin, *Etude de la turbulence de Bord dans les Plasmas de Tokamaks*, thèse de doctorat de l'université Joseph Fourier (1997)
- [18] M.N. Rosenbluth and F.L. Hinton, *Physical Review Letters* **80**, 724 (1998)
- [19] M.A. Beer, Ph. D. thesis, Princeton University (1995)
- [20] M. A. Beer, G. W. Hammett, *Proceedings of the Joint Varenna-Lausanne International Workshop on Theory of Fusion Plasmas, Varenna, 1998* edited by J. W. Connor, E. Sindoni and J. Vaclavik (Societa Italiana di Fisica, Bologna, Italy, 1999), p.19

- [21] G. Dif-Pradalier, *Towards a collisionless fluid closure in plasma turbulence*, Masters thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse III (2005)
- [22] R. E. Waltz, G. D. Kerbel, J. Milovich and G. W. Hammett, *Phys. Plasmas* **2**, 2408 (1995)
- [23] H. Sugama, T.-H. Watanabe, W. Horton, *Phys. Plasmas* **10**, 726 (2003)
- [24] *Handbook of Mathematical Functions*, edited by M. Abramowitz and I. A. Stegun (1972), United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55, p. 775
- [25] A. I. Smolyakov, M. Yagi, J. D. Callen, *Nonlocal closure in long mean free path regime*, à paraître
- [26] G. W. Hammett and F. W. Perkins, *Physical Review Letters* **64**, 3019 (1990)
- [27] N. Mattor, *Physics of Plasmas* **5**, 1822 (1998)

Monsieur FLEURENCE Emmanuel

DOCTORAT DE L'UNIVERSITE HENRI POINCARÉ, NANCY 1
en PHYSIQUE DES PLASMAS

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER N° 1107

Nancy, le 21 novembre 2005

Le Président de l'Université



Descriptions fluide et cinétique d'une turbulence d'interchange dans un plasma magnétisé

Résumé :

Les propriétés des descriptions fluide et cinétique d'une instabilité d'échange sont comparées. Le cadre général est la prédiction du transport turbulent dans les tokamaks. Le modèle cinétique étudié est à deux dimensions en espace et une en énergie. Le système fluide retenu décrit la dynamique de la densité et de la pression. La fermeture considérée est collisionnelle. Nous montrons que les équations fluides sont analogues à deux équations de type Vlasov pour deux fonctions de distribution monocinétiques. Le même code numérique est alors utilisé en régime non-linéaire pour le cinétique et le fluide. Pour des caractéristiques linéaires comparables, le niveau de transport de chaleur fluide excède de plusieurs ordres de grandeur le cinétique. La fonction de distribution s'écarte notablement d'une maxwellienne, rendant caduque la fermeture adoptée. Une fermeture alternative est proposée : non-collisionnelle, elle repose sur la comparaison des taux quasi-linéaires de production d'entropie.

Mots clés :

plasma magnétisé, instabilité d'interchange, descriptions fluide et cinétique, dynamique non-linéaire, flux turbulent, écoulements zonaux, fermeture fluide non-collisionnelle

Fluid and kinetic descriptions of an interchange turbulence in a magnetized plasma

Abstract :

The kinetic and fluid descriptions of the interchange instability are compared. The prediction of the turbulent transport in tokamaks is the general framework. The kinetic model is two dimensional in space and one dimensional in energy. The fluid analogue retains the dynamics of both density and pressure. The closure is collisional. The fluid system is shown to be equivalent to two Vlasov-type equations for two distinct monokinetic distribution functions. This allows one to use the same numerical tool to run non-linear simulations in kinetic and fluid. For similar linear characteristics, the level of heat turbulent transport is larger in fluid than in kinetics, by orders of magnitudes. The distribution function departs significantly from a maxwellian, so that the adopted closure is failing. An alternative collisionless closure is proposed. It aims at fitting the quasi-linear entropy production rates.

Key words :

magnetized plasma, interchange instability, fluid and kinetic descriptions, nonlinear dynamics, turbulent flux, zonal flows, collisionless fluid closure