



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# Filtrage robuste pour les systèmes stochastiques incertains

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 12 décembre 2005

pour l'obtention du

**Doctorat de l'Université Henri Poincaré – Nancy 1**  
(spécialité automatique)

par

**Souheil HALABI**

**Ingénieur ISSAT - Syrie**

### Composition du jury

*Président :* R. OUTBIB Professeur, L2ES, Université de Technologie de Belfort-Montbéliard

*Rapporteurs :* G. GARCIA Professeur, LAAS, INSA, Toulouse  
D. MEHDI Professeur, Université de Poitiers

*Examineurs :* M. DAROUACH Professeur, CRAN, Université Henri Poincaré, Nancy I  
H. RAFARALAHY Maître de Conférences, CRAN, Université Henri Poincaré, Nancy I  
M. ZASADZINSKI Professeur, CRAN, Université Henri Poincaré, Nancy I

Mis en page avec la classe thloria.

## Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués, sous la responsabilité scientifique du Professeur Michel ZASADZINSKI, au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN, UMR 7039, CNRS,) dirigé par Monsieur le Professeur Alain RICHARD, plus particulièrement au sein de l'équipe de Longwy du CRAN, dirigée par Monsieur le Professeur Mohamed DAROUACH.

Je tiens tout d'abord à remercier les membres du jury qui me font l'honneur de participer à l'examen de ce travail.

Que Monsieur Mohamed DAROUACH, Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy I et responsable de l'équipe de Longwy du CRAN, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour m'avoir accueilli au sein de son équipe, pour m'avoir encouragé et aidé tout au long de mes recherches et pour m'avoir offert de très bonnes conditions de travail.

Je suis très sensible à l'intérêt qu'ont bien voulu porter à ce travail Monsieur Germain GARCIA, Sous Directeur de Recherche au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS-CNRS), Professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées et Monsieur Driss MEHDI, Professeur à l'Université de Poitiers. Je tiens à les remercier pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de ce mémoire.

Je tiens à remercier vivement Monsieur Michel ZASADZINSKI, Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy I et membre de l'équipe de Longwy du CRAN, mon Directeur de Thèse, pour sa disponibilité et son soutien permanent. Ses qualités, tant humaines que scientifiques furent pour moi un apport inestimable. Je lui en suis très reconnaissant.

Mes remerciements vont également à Monsieur Hugues RAFARALAHY, Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré - Nancy I et membre de l'équipe de Longwy du CRAN, pour avoir co-encadré mes travaux de recherche et pour ses conseils judicieux et nos discussions fructueuses.

Que Monsieur Rachid OUTBIB, Professeur à Université de Technologie de Belfort-Montbéliard, et membre du Laboratoire d'Electronique, Electrotechnique et Systèmes, soit remercié pour avoir accepté de juger mon travail.

Je tiens à remercier spécialement Monsieur Harouna SOULEY ALI, Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré - Nancy I et membre de l'équipe de Longwy du CRAN, pour son aide, ses précieux conseils et son soutien de tous les instants.

Je tiens à remercier Madame Joëlle PINELLI, secrétaire de l'équipe de Longwy du CRAN et Madame Nadine PETIT l'ancienne secrétaire, pour leurs soutiens.

J'adresse un grand merci à tous les membres de l'équipe de Longwy du CRAN que j'ai eu le plaisir de côtoyer pendant la durée de ma thèse : Mohamed BOUTAYEB, Christophe FONTE, Roland MUSSET, Jean Michel CHAMBAUD, Latifa BOUTAT-BADDAS, Yasmina BECIS, Kheir-Eddine BOUAZZA, Adil ALIF, Mohamed TAFRAOUTI et Boulaïd BOULKROUNE. Ils ont tous, de près ou de loin, contribué, par les nombreuses discussions que nous avons pu tenir, leur conseils ou leur bonne humeur, à l'excellent déroulement de ma thèse. Je n'oublie pas Monsieur Michel BORDET, Bahram BASSIRI, Célia COQUILLARD et Olivier DELAFONT pour leur aide en informatique.

Je remercie également l'ensemble du personnel de l'Institut Henri Poincaré de Longwy.

Durant ces longues années, ma mère, Kawkab SABBAGH, mes frères et sœurs Bachar, Abdulghani, Rawaa, Honada ont toujours été présents et m'ont apporté leur soutien. Qu'ils trouvent ici toute ma reconnaissance.

J'adresse enfin toute ma reconnaissance à mon épouse Imane, pour son aide permanente, sa compréhension totale et pour les nombreux sacrifices qu'elle a consentis tout au long de cette thèse.

*à mon épouse Imane.  
à mes enfants Ayman, Rami et Bachir.*



# Table des matières

<b>Symboles et abréviations</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction générale</b>	
<b>Chapitre 1</b>	
<b>Généralités et position du problème</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Présentation des systèmes stochastiques . . . . .	9
1.2.1 Notation des systèmes stochastiques . . . . .	9
1.2.2 Systèmes stochastiques : forme différentielle et forme intégrale . . .	9
1.2.3 Equation différentielle ordinaire et équation différentielle stochastique	10
1.2.4 Bruit multiplicatif et bruit additif . . . . .	10
1.2.5 Les systèmes stochastiques et les systèmes déterministes incertains .	11
1.3 Le processus d'Itô et la formule d'Itô . . . . .	11
1.4 Stabilité des systèmes déterministes et stochastiques . . . . .	13
1.4.1 Stabilité des systèmes non linéaires déterministes . . . . .	13
1.4.1.1 Stabilité des systèmes non linéaires déterministes : défini-	
tions . . . . .	14
1.4.1.2 Stabilité des systèmes non linéaires déterministes : théorèmes	15
1.4.2 Stabilité des systèmes stochastiques . . . . .	15
1.4.2.1 Stabilité des systèmes stochastiques : définitions . . . . .	16
1.4.2.2 Stabilité des systèmes stochastiques : théorèmes . . . . .	17
1.5 Stabilisation et déstabilisation des systèmes stochastiques . . . . .	18
1.5.1 Cas scalaire . . . . .	18
1.5.2 Cas de dimension 2 . . . . .	19
1.6 Outils pour l'analyse des systèmes . . . . .	20
1.6.1 Lemme borné réel pour les systèmes déterministes (LBR) . . . . .	20



1.6.2	Lemme borné réel pour les systèmes stochastiques (LBRS) . . . . .	21
1.7	Les notations utilisées dans ce mémoire . . . . .	24
1.8	Conclusion . . . . .	25

## Chapitre 2

### Filtrage robuste d'ordre plein pour les systèmes stochastiques 27

2.1	Introduction . . . . .	28
2.2	Filtrage des systèmes stochastiques sans commande . . . . .	29
2.2.1	Formulation du problème . . . . .	29
2.2.2	Synthèse du filtre et performance $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	30
2.2.3	Traitement de la non convexité du problème . . . . .	31
2.2.4	Exemple numérique . . . . .	32
2.3	Filtrage des systèmes stochastiques avec commande . . . . .	34
2.3.1	Filtrage des systèmes stochastiques avec une commande . . . . .	34
2.3.1.1	Formulation du problème . . . . .	34
2.3.1.2	Passage du système stochastique avec une commande vers un système avec incertitudes paramétriques . . . . .	35
2.3.1.3	Synthèse du filtre et performance $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	36
2.3.1.4	Exemple numérique . . . . .	40
2.3.2	Filtrage des systèmes stochastiques avec $m$ commandes . . . . .	45
2.3.2.1	Formulation du problème . . . . .	45
2.3.2.2	Passage du système stochastique avec $m$ commandes vers un système avec incertitudes paramétriques . . . . .	46
2.3.2.3	Synthèse du filtre et performance $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	47
2.3.2.4	Exemple numérique . . . . .	48
2.4	Filtrage des systèmes stochastiques avec plusieurs bruits multiplicatifs . . . . .	51
2.4.1	Formulation du problème . . . . .	51
2.4.2	Passage du système stochastique avec une commande vers un sys- tème avec incertitudes paramétriques . . . . .	52
2.4.3	Synthèse du filtre et performance $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	53
2.4.4	Exemple numérique . . . . .	58
2.5	Filtrage des systèmes stochastiques avec des mesures stochastiques . . . . .	60
2.5.1	Formulation du problème . . . . .	60
2.5.2	Passage du système stochastique avec une commande vers un sys- tème avec incertitudes paramétriques . . . . .	61

2.5.3	Synthèse du filtre et performance $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	62
2.5.4	Exemple numérique . . . . .	64
2.6	Conclusion . . . . .	66

### Chapitre 3

#### Filtrage robuste d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques 67

3.1	Introduction . . . . .	68
3.2	Filtrage d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques sans commande . .	70
3.2.1	Formulation du problème . . . . .	70
3.2.2	Résolution de l'équation de Sylvester . . . . .	72
3.2.3	Synthèse du filtre d'ordre réduit et performance $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	74
3.2.4	Exemple numérique . . . . .	76
3.3	Filtrage d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques avec $m$ commandes	78
3.3.1	Formulation du problème . . . . .	78
3.3.2	Résolution des équations de Sylvester . . . . .	80
3.3.3	Passage du système stochastique avec $m$ commandes vers un sys- tème avec incertitudes paramétriques . . . . .	81
3.3.4	Synthèse du filtre d'ordre réduit et performance $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	83
3.3.5	Exemple numérique . . . . .	86
3.4	Filtrage d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques avec plusieurs bruits multiplicatifs . . . . .	89
3.4.1	Formulation du problème . . . . .	89
3.4.2	Résolution des équations de Sylvester . . . . .	91
3.4.3	Passage du système stochastique vers un système avec incertitudes paramétriques . . . . .	92
3.4.4	Synthèse du filtre d'ordre réduit et performance $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	94
3.4.5	Exemple numérique . . . . .	98
3.5	Filtrage d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques avec des mesures stochastiques . . . . .	101
3.5.1	Formulation du problème . . . . .	101
3.5.2	Résolution des équations de Sylvester . . . . .	102
3.5.3	Passage du système stochastique avec une commande vers un sys- tème avec incertitudes paramétriques . . . . .	103
3.5.4	Synthèse du filtre d'ordre réduit et performance $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	104
3.5.5	Exemple numérique . . . . .	107

3.6	Filtrage robuste d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques incertains . . . . .	109
3.6.1	Formulation du problème . . . . .	109
3.6.2	Passage du système stochastique incertain vers un système augmenté incertain en fonction du gain $Z$ . . . . .	110
3.6.3	Synthèse du filtre robuste d'ordre réduit et performance $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	112
3.6.4	Exemple numérique . . . . .	114
3.7	Commande $\mathcal{H}_\infty$ robuste basée observateur pour les systèmes stochastiques incertains . . . . .	118
3.7.1	Formulation du problème . . . . .	118
3.7.2	Expression de la boucle fermée . . . . .	119
3.7.3	Calcul du gain de retour d'état $L$ . . . . .	120
3.7.4	Conception de la commande basée observateur . . . . .	121
3.7.5	Exemple numérique . . . . .	126
3.8	Conclusion . . . . .	131

<b>Conclusion générale</b>	<b>133</b>
----------------------------	------------

<b>Annexe A</b>	
<b>Définitions relatives aux processus stochastiques</b>	<b>135</b>

A.1	Tribu ou $\sigma$ -algèbre . . . . .	135
A.2	Espace probabilisé . . . . .	135
A.3	Espérance mathématique . . . . .	135
A.4	Processus de Wiener ou mouvement brownien . . . . .	136
A.5	Martingale . . . . .	136
A.6	Différence entre la forme d'Itô et la forme de Stratonovich . . . . .	136

<b>Annexe B</b>	
<b>Compléments mathématiques</b>	<b>139</b>

B.1	Lemme de majoration . . . . .	139
B.2	Lemme de Schur . . . . .	139
B.3	Lemme de projection . . . . .	139

<b>Annexe C</b>	
<b>Résolution des équations de Sylvester</b>	<b>141</b>

---

C.1	Cas général . . . . .	141
C.2	Cas particuliers . . . . .	144
C.2.1	Cas d'un système avec $m$ commandes et $D_0 = 0$ . . . . .	144
C.2.2	Cas d'un système avec une commande . . . . .	144
C.2.3	Cas d'un système sans commande . . . . .	145

<b>Annexe D</b>
-----------------

<b>Prise en compte de la contrainte <math>PQ = I</math> (théorèmes 3.3.1 et 3.7.1)</b>	<b>147</b>
--	------------

<b>Bibliographie</b>	<b>151</b>
<b>Résumé</b>	<b>161</b>
<b>Abstract</b>	<b>162</b>



# Symboles et abréviations

## Ensembles

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	l'ensemble des nombres réels (resp. complexes)
$\mathbb{R}_+$	l'ensemble des nombres réels non négatifs $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$	espace réel (resp. complexe) euclidien de dimension $n$
$\mathbb{R}^{n \times m}, \mathbb{C}^{n \times m}$	ensemble des matrices réelles (resp. complexes) de dimension $n \times m$
$\Omega$	ensemble non vide (espace d'état)
$\mathcal{F}$	$\sigma$ -algèbre
$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$	une famille croissante de $\sigma$ -algèbre $(\mathcal{F}_t) \in \mathcal{F}$
$\mathcal{L}$	opérateur de différentiation stochastique utilisé dans la formule d'Itô

## Sous-espaces de fonctions

$f(\cdot) > 0$	la fonction $f(\cdot)$ est définie positive
$f(\cdot) \leq 0$	la fonction $f(\cdot)$ est définie non positive
$f(\cdot) < 0$	la fonction $f(\cdot)$ est définie négative
$f(\cdot) \geq 0$	la fonction $f(\cdot)$ est définie non négative
$\langle X, Y \rangle = X^T Y$	est le produit scalaire des vecteurs $X$ et $Y$
$\mathcal{C}^k(\mathbb{R}; \mathbb{R})$	ensemble des fonctions $f(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont continûment dérivables $k$ fois
$\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$	ensembles des fonctions $V(t, x(t))$ définies sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport au temps $t \in \mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à la variable $x \in \mathbb{R}^n$ .
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	espace probabilisé
$P\{\cdot\}$	une mesure de probabilité
$\mathbf{E}\{\cdot\}$	espérance mathématique

$\widehat{\mathcal{L}}_2([0, \infty); \mathbb{R}^k)$	espace des processus stochastiques non anticipatifs de carré-intégrables au sens de $\ f\ _{\widehat{\mathcal{L}}_2}^2$
$\mathcal{L}_\infty[0, \infty)$ (ou $\mathcal{L}_\infty$ )	espace des signaux continus à amplitude finie sur $[0, \infty)$ vers $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{L}_1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$	espace des fonctions de module intégrable sur $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{n \times m})$	espace des fonctions du carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}^{n \times m}$
$B_r$	boule de rayon $r$ et de centre $x_0$ est l'ensemble $\{x \in B_r; d(x, x_0) < r\}$

## Normes

$\ \cdot\ $	norme euclidienne d'un vecteur ou norme spectrale d'une matrice
$\ f\ _{\widehat{\mathcal{L}}_2}^2 = \mathbf{E}\{\int_0^\infty \ f(t)\ ^2 dt\} = \int_0^\infty \mathbf{E}\{\ f(t)\ ^2\} dt < \infty$ , avec $f(\cdot) = (f(t))_{t \in [0, \infty)} \in \mathbb{R}^k$ ,	par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$
$\ x\ _\infty$	norme $\mathcal{L}_\infty$ du signal $x \in \mathcal{L}_\infty[0, \infty)$
$\ x\ _2$	norme $\mathcal{L}_2$ du signal $x \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$
$\ G\ _\infty$	norme $\mathcal{H}_\infty$ du système continu $G(s)$

## Matrices, opérations et relations matricielles

$P > 0, P \geq 0$	matrice $P$ symétrique définie (resp. semi-définie) positive
$P > Q, P \geq Q$	$P - Q > 0$ (resp. $P - Q \geq 0$ ) pour $P, Q$ symétriques $\in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\text{tr}(A)$	trace de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\text{rang}(A)$	rang de $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$
$\det(A)$	déterminant de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\text{Im}(A)$	espace image de $A : \{y \text{ tel que } y = Ax\}$
$\text{Re}(A)$	partie réelle de $A$
$A^\perp$	matrice $Z$ telle que $AZ = 0$ et $[A^T \ Z]$ de rang maximal
$\ker(A)$	noyau de $A : \{x \text{ tel que } Ax = 0\}$
$\lambda(A)$	valeurs propres de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$\lambda_{\max}(A), \lambda_{\min}(A)$	valeur propre de module maximal (resp. minimal) de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
$A^T, A^{-T}$	transposée de $A$ (resp. de l'inverse de $A$ ) $\in \mathbb{R}^{n \times m}$
$A^{-1}$	inverse de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \det(A) \neq 0$
$A^\dagger$	pseudo-inverse de $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ vérifiant $AA^\dagger A = A$

---

$I, 0$	matrice identité (resp. nulle) de dimension appropriée
$I_n, 0_{n \times m}$	matrice identité (resp. nulle) de dimension $n \times n$ (resp. $n \times m$ )
$\text{diag}(A_1, \dots, A_p)$	matrice diagonale constituée avec les éléments de la diagonale des matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, i = 1, \dots, p$
$\text{bdiag}(A_1, \dots, A_p)$	matrice bloc-diagonale constituée avec $A_1, \dots, A_p$ ( $A_i \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ) matrices $A_i \in \mathbb{C}^{n \times n}, i = 1, \dots, p$
$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ (1,2)^T & A_{22} \end{bmatrix}$	matrice partitionnée telle que le symbole $(1,2)^T$ représente le transposé du bloc $(1,2)$ , soit $A_{12}^T$

## Abréviations

EDO	Equations Différentielles Ordinaires
EDS	Equations Différentielles Stochastiques
p.s.	presque sûrement : la probabilité d'un événement $F$ est presque sûre si cet événement se produit avec une probabilité égale à un (c'est-à-dire $P(F) = 1$ )
LBR	Lemme Borné Réel
LBRS	Lemme Borné Réel pour les systèmes Stochastiques
LMI	Inégalités Matricielles Affines (pour Linear Matrix Inequalities)
ln	logarithme népérien





# Introduction générale

Pendant les cinquante dernières années, l'étude des phénomènes stochastiques a pris un intérêt croissant. De nombreuses recherches ont été réalisées dans ce domaine, stimulées par le besoin de prendre en compte les aspects “aléatoires” dans les systèmes physiques. Les équations différentielles stochastiques (EDS) sont très utiles dans la représentation de la dynamique des processus physiques, techniques, biologiques et économiques, afin de tenir compte des phénomènes aléatoires affectant ces systèmes.

Quand un processus physique est affecté par un bruit brownien (ou de Wiener), l'équation différentielle ordinaire (EDO) ne peut plus être utilisée car ce type de bruit n'est pas dérivable, la dérivation par rapport au temps n'ayant donc plus de sens. Une des méthodes dans l'analyse des EDS est de convertir l'EDO en une EDS formulée avec des termes différentiables et non avec des dérivées pour pouvoir exprimer l'effet de bruit qui affecte le système physique.

Une EDS comprenant un processus de Wiener  $w(t)$  (voir annexe A paragraphe A.4) est composée de deux parties, à savoir la dérive (ce qui est multiplié par  $dt$ ) et la diffusion (ce qui est multiplié par  $dw(t)$ ). Il y a deux formes importantes des EDS affectées par un processus de Wiener : la forme dite de Stratonovich et la forme dite d'Itô (voir annexe A paragraphe A.6 pour la différence entre ces deux formes). Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés à celle au sens d'Itô.

La théorie des EDS introduite par Itô [Itô51], et développée indépendamment dans l'ex-URSS par Gikhman, ainsi que les travaux de Wiener [Wie49] et Levy [Lév48] sur le mouvement brownien, ont fourni les outils de base pour l'étude des EDS.

La notion de stabilité des solutions des EDS est apparue pour la première fois dans l'article de Kats et Krasovskij [KK61]. Puis, dans les années soixante, la stabilité des EDS au sens d'Itô a été étudiée par Has'minskii [Has80]<sup>1</sup> dans l'ex-URSS et par Kushner [Kus67] aux Etats-Unis. D'autres études plus récentes sur les EDS ont été réalisées par Gikhman et Skorokhod [GS72], Friedman [Fri75], Krylov [Kry80, Kry95], Ikeda et Watanabe [IW81], Karatzas et Shreve [KS91], Da Prato et Zabczyk [DZ92] et Øksendal [Øks03]. Plusieurs définitions de stabilité ont été introduites par Has'minskii [Has80], Kushner [Kus67] et Mao [Mao94a, Mao97]. La théorie de l'existence et de l'unicité des

---

<sup>1</sup>L'édition russe du livre de Has'minskii est parue en 1969 et la traduction anglaise du livre a été réalisée en 1980.

solutions des EDS a été faite dans Has'minskii [Has80].

La méthode de Lyapunov, développée dans le 19<sup>ème</sup> siècle, reste un des outils les plus importants pour l'étude de la stabilité des EDO. Le point fort de cette méthode est que la stabilité du point d'équilibre est démontrée à partir d'une étude qualitative, sans avoir besoin de trouver la solution de cette équation explicitement. Cette théorie a été généralisée aux EDS par Has'minskii [Has80] et Kushner [Kus67]. Un opérateur différentiel  $\mathcal{L}$  (voir l'équation (1.20)) est introduit. Cet opérateur est composé de trois termes dont un tient compte de la partie diffusion de l'EDS (voir paragraphe 1.3).

La condition de stabilité asymptotique  $\dot{V}(x(t)) < 0$ , où  $V(t)$  est une fonction de Lyapunov, en déterministe, est remplacée par la condition  $\mathcal{L}V(x(t)) < 0$  en stochastique.

Cette méthode de Lyapunov pour les systèmes stochastiques a été développée et utilisée récemment dans les problèmes de la commande des systèmes stochastiques par Florchinger [Flo93, Flo95, Flo97, Flo02] et d'autres [Thy97, CG98, HP98, Ugr98, EHP99, Yon02, CZ04].

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés au filtrage des systèmes stochastiques décrits par des EDS au sens d'Itô. Le but du filtrage est l'estimation de l'état d'un système donné ou l'estimation d'une combinaison linéaire de l'état en présence d'un signal de bruit, le signal filtré pouvant être employé pour l'analyse et la synthèse de lois de commande du système étudié. Dans le filtrage, on cherche à minimiser l'effet du signal de bruit sur l'erreur d'estimation. Le critère de minimisation souvent retenu est la variance de l'erreur d'estimation : il s'agit alors du filtrage de Kalman, proposé par Kalman [Kal60] pour les systèmes linéaires à temps discret et par Kalman et Bucy [KB61] pour les systèmes linéaires à temps continu. Cette approche requiert que les bruits qui affectent le système aient des propriétés statistiques connues et interviennent linéairement, c'est-à-dire d'une manière additive dans l'équation de l'état et dans les mesures : c'est pourquoi on peut alors approximer "la dérivée" d'un bruit brownien par un bruit blanc (voir [AM79]). La littérature sur le filtre de Kalman est abondante, un tour d'horizon exhaustif est proposé dans [Jaz70, AM79]. Kailath [Kai68] a dérivé le filtre de Kalman à partir des propriétés de la séquence d'innovation. Les problèmes dus à l'implantation numérique de filtre de Kalman ont été traités dans [Men71] pour les volumes de calcul requis et dans [KBS71] pour la robustification du comportement numérique des algorithmes. Concernant l'application du filtre de Kalman à des problèmes spécifiques de l'automatique, notons par exemple l'estimation des biais [Fri69], l'identification récursive des paramètres [Meh71] et le diagnostic de l'état des systèmes [WJ76]. L'application du filtre de Kalman pour les systèmes incertains à temps continu est faite dans [XS94], et pour les systèmes incertains à temps discret dans [XSd94]. La dérivation du filtre de Kalman en utilisant les EDS au sens d'Itô est décrite dans [RS85, Øks03].

En pratique, on n'a pas toujours à disposition toutes les propriétés statistiques des bruits. Pour surmonter ces difficultés, une approche alternative appelée, filtrage  $\mathcal{H}_\infty$ , a été introduite.

---

En effet, dans le filtrage  $\mathcal{H}_\infty$ , les perturbations sont supposées être des signaux à énergie bornée. Ceci rend cette approche plus appropriée dans plusieurs applications. Des méthodes d'études diverses, comme l'équation algébrique de Riccati, l'interpolation, la théorie des jeux, la théorie de Lyapunov (les LMIs), ont été proposées pour la conception du filtre  $\mathcal{H}_\infty$  dans [Sha90, Fu91, NK91, YS92a, PK97, FS01].

A la différence du filtrage de Kalman, le point de vue  $\mathcal{H}_\infty$  pour le filtrage des systèmes est déterministe car la perturbation utilisée pour l'indice de performance est considérée comme un signal à énergie bornée. Récemment, plusieurs auteurs ont généralisé cette approche aux systèmes stochastiques en ajoutant un bruit brownien qui intervient de manière multiplicative vis-à-vis de l'état. Les modèles utilisés sont alors des EDS. Dans [HP98], le lemme borné réel [BEFB94, Sch90] est étendu aux systèmes stochastiques à temps continu (voir paragraphe 1.6.2). En utilisant ce lemme, des problèmes d'estimation pour le filtrage robuste  $\mathcal{H}_\infty$  d'ordre plein pour les systèmes stochastiques linéaires incertains à temps continu ont été traités dans [GLSY01]. Dans [GLSY01], une condition suffisante pour la résolution du problème de filtrage  $\mathcal{H}_\infty$  pour les systèmes stochastiques à temps continu avec un bruit multiplicatif est obtenue et une approche LMI est proposée. Le cas discret est traité dans [GSY01]. Il est à noter que l'ordre du filtre  $\mathcal{H}_\infty$  dérivé dans ces derniers articles est le même que celui des systèmes considérés.

Le filtre d'ordre réduit, c'est-à-dire d'ordre inférieur à celui du système, est utilisé dans beaucoup d'applications lorsque la mise en œuvre pratique d'un filtre d'ordre plein est très difficile pour différentes raisons : un ordre élevé du filtre peut engendrer des limitations liées au temps de calcul ou à l'implémentation du filtre en temps réel [KSN92, NHS87, WG98]. Un autre avantage des filtres d'ordre réduit est l'estimation d'une combinaison linéaire de l'état qui estime directement une commande de retour d'état  $u(t) = Lx(t)$  où  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  et  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  avec  $m < n$ . C'est pourquoi, la réalisation d'un filtre d'ordre réduit a été étudiée dans plusieurs références. Dans [NHS87, NHS89], un filtre de Kalman d'ordre réduit est proposé. Le filtre  $\mathcal{H}_\infty$  d'ordre réduit est abordé dans [BK94]. Plus généralement, dans [GW97], des conditions nécessaires et suffisantes ont été données pour trouver un filtre  $\mathcal{H}_\infty$  d'ordre réduit pour les systèmes déterministes à temps continu et discret en résolvant certaines LMIs. Concernant les systèmes stochastiques, on rencontre également plusieurs références qui traitent du filtrage  $\mathcal{H}_\infty$  d'ordre réduit. Dans [Sto02, XC02], un filtre  $\mathcal{H}_\infty$  d'ordre réduit est proposé pour un système stochastique dont l'état est affecté par un bruit multiplicatif.

Les travaux proposés dans ce mémoire abordent la synthèse de filtres  $\mathcal{H}_\infty$  d'ordre plein et d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques à temps continu avec bruits multiplicatifs. Les bruits considérés dans l'équation d'état et dans les mesures sont des processus de Wiener.

Les systèmes stochastiques étudiés dans ce mémoire sont écrits sous la forme d'une équation différentielle stochastique au sens d'Itô. Dans ces systèmes, la dérive et la diffusion sont linéaires et/ou bilinéaires. Les systèmes avec plusieurs bruits multiplicatifs et les systèmes dont les mesures sont affectées par des bruits multiplicatifs sont également

traités dans ce mémoire. La conception d'une commande  $\mathcal{H}_\infty$  basée sur un observateur d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques incertains est également étudiée.

Les systèmes avec bilinéarités, rencontrés dans ce mémoire, sont transformés en systèmes avec des incertitudes paramétriques en utilisant un changement de variable sur la commande  $u_i(t)$  supposée bornée. Cela n'est pas restrictif car c'est le cas de la majorité des systèmes physiques [ZMRS03].

Dans ce mémoire, nous avons utilisé une approche de Lyapunov pour l'étude des systèmes stochastiques. La condition de stabilité  $\mathcal{L}V(x(t)) < 0$ , l'application de la formule d'Itô et des lemmes de majoration nous ont permis d'écrire le problème sous la forme d'une LMI avec une ou des contraintes de type égalité. Une LMI est un système d'inégalités matricielles de la forme

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^N x_i F_i < 0$$

où les matrices  $F_i$  sont symétriques et connues et où les scalaires  $x_i$  sont les variables inconnues à déterminer. L'observateur ou le correcteur à synthétiser est une fonction de ces variables  $x_i$ .

L'intérêt des méthodes basées sur des LMIs vient du fait que ces dernières peuvent être résolues en utilisant la programmation convexe. Avec cette approche, on n'est plus limité aux problèmes ayant une solution analytique. En résolvant ces inégalités, on obtient un domaine de solutions faisables, c'est-à-dire de solutions satisfaisant ces LMIs, plus vaste que celui généré par la recherche de solutions analytiques. En utilisant le fait qu'une inégalité possède davantage de solutions qu'une équation, il est possible d'employer les degrés de liberté supplémentaires pour inclure d'autres objectifs que ceux initialement retenus. Ainsi, en utilisant l'approche de type Lyapunov pour les systèmes aussi bien déterministes que stochastiques, un nombre important de problèmes de commande et de filtrage, incluant simultanément plusieurs spécifications, peuvent se mettre sous une forme LMI.

Le critère de performance considéré est le gain  $\mathcal{H}_\infty$  du signal de perturbation  $v(t)$  vers le signal d'erreur d'estimation  $e(t)$

$$\|e(t)\|_{\hat{L}_2}^2 \leq \gamma \|v(t)\|_{L_2}^2.$$

La stabilité retenue pour les systèmes stochastiques étudiés dans ce travail est la stabilité exponentielle en moyenne quadratique. Cette définition de la stabilité a été retenue pour son efficacité et l'efficacité des outils nécessaires à l'analyse des systèmes stochastiques.

La méthode utilisée pour trouver les matrices des filtres est basée sur l'utilisation de la formule d'Itô, et la résolution des LMIs couplées à des contraintes bilinéaires qui assurent la stabilité et la performance et permettent de calculer les matrices du filtre. Pour les filtres d'ordre réduit, la solution d'une contrainte écrite sous la forme d'une équation de Sylvester permet d'exprimer toutes les matrices du filtre recherchées en fonction d'une

---

seule matrice de gain  $Z$  et finalement la résolution des LMIs couplées à des contraintes bilinéaires permet le calcul du gain  $Z$  et donc des matrices du filtre.



# Chapitre 1

## Généralités et position du problème

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>1.2</b>	<b>Présentation des systèmes stochastiques . . . . .</b>	<b>9</b>
1.2.1	Notation des systèmes stochastiques . . . . .	9
1.2.2	Systèmes stochastiques : forme différentielle et forme intégrale .	9
1.2.3	Equation différentielle ordinaire et équation différentielle stochastique . . . . .	10
1.2.4	Bruit multiplicatif et bruit additif . . . . .	10
1.2.5	Les systèmes stochastiques et les systèmes déterministes incertains	11
<b>1.3</b>	<b>Le processus d'Itô et la formule d'Itô . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>1.4</b>	<b>Stabilité des systèmes déterministes et stochastiques . . . . .</b>	<b>13</b>
1.4.1	Stabilité des systèmes non linéaires déterministes . . . . .	13
1.4.2	Stabilité des systèmes stochastiques . . . . .	15
<b>1.5</b>	<b>Stabilisation et déstabilisation des systèmes stochastiques . .</b>	<b>18</b>
1.5.1	Cas scalaire . . . . .	18
1.5.2	Cas de dimension 2 . . . . .	19
<b>1.6</b>	<b>Outils pour l'analyse des systèmes . . . . .</b>	<b>20</b>
1.6.1	Lemme borné réel pour les systèmes déterministes (LBR) . . .	20
1.6.2	Lemme borné réel pour les systèmes stochastiques (LBRS) . . .	21
<b>1.7</b>	<b>Les notations utilisées dans ce mémoire . . . . .</b>	<b>24</b>
<b>1.8</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>25</b>

---

## 1.1 Introduction

Les équations différentielles ordinaires (EDO) sont utilisées pour décrire le comportement de systèmes physiques dans différents domaines. Mais cette approche s'avère insatisfaisante, en particulier quand le modèle n'est pas connu exactement ou quand les bruits intervenant dans la dynamique du système ne sont pas dérivables. C'est pourquoi



les équations différentielles stochastiques (EDS) sont utilisées pour représenter ce type de systèmes.

Les EDS interviennent dans une variété de problèmes d'intérêt pratique. En génie civil, par exemple, l'étude de la stabilité des systèmes mécaniques et des systèmes de structure élastique sujets à des charges d'intensité aléatoirement variable est réalisée à partir des EDS. Dans le domaine de l'automatique, les perturbations aléatoires agissant sur un processus commandé sont prises en compte dans des équations du type d'Itô (voir paragraphe 1.3) décrivant le comportement dynamique du système. Les phénomènes de dispersion dans des milieux aléatoires et de l'évolution d'un processus chimiques et biologiques sont également décrits par des équations ayant des coefficients stochastiques. Les EDS sont aussi utilisées en sismologie pour analyser les tremblements de terre, en économie et les cours boursiers, en informatique pour modéliser des réseaux, ...

La différence des EDS par rapport aux EDO est qu'elles contiennent un terme aléatoire qui représente la partie probabiliste dans le système. Les systèmes stochastiques sont donc composés de deux parties : la dérive qui représente la partie dominante du système et la diffusion qui représente la nature aléatoire de la dynamique du système autour de la dérive [Cyg96]. Par exemple, dans un système électrique, les variations de la résistance avec la température peuvent être assimilées à un processus stochastique [UP99], ainsi que les vibrations qu'un système mécanique subit [Ugr98], ... Ainsi, une EDS peut être écrite sous la forme suivante, dite équation différentielle d'Itô

$$dx(t) = f(x, t)dt + g(x, t)dw(t). \quad (1.1)$$

Dans cette équation, la dérive est  $f(x, t)dt$  et la diffusion est  $g(x, t)dw(t)$  où  $w(t)$  est un mouvement brownien, appelé aussi processus de Wiener.

Le mouvement brownien est le nom donné aux trajectoires irrégulières du pollen en suspension dans l'eau, observées par le botaniste Robert Brown en 1828. Ce mouvement "aléatoire", dû aux chocs successifs entre le pollen et les molécules d'eau, entraîne la dispersion du pollen dans l'eau. Le champ d'application du mouvement brownien est beaucoup plus vaste que l'étude des particules microscopiques en suspension et inclut la modélisation du prix des actions boursières, du bruit thermique dans les circuits électroniques, du comportement limite des problèmes de files d'attente et des perturbations aléatoires dans un grand nombre de systèmes physiques, biologiques ou économiques.

Bachelier (1900) a obtenu les premiers résultats quantitatifs en s'intéressant aux fluctuations du prix des actions en économie. Einstein (1905) a déterminé la densité de probabilité de transition du mouvement brownien à partir de la théorie moléculaire de la chaleur. Le premier traitement mathématique rigoureux est dû à N. Wiener (1923, 1924), qui a prouvé l'existence du mouvement brownien (voir [KS91]).

Plusieurs auteurs, comme Kushner [Kus67], Kozin [Koz69], Has'minskii [Has80] et Mao [Mao94a, Mao97], se sont intéressés à l'étude de la stabilité des solutions des EDS. Une analyse exhaustive de l'existence, l'unicité et le comportement de la solution de l'équation différentielle d'Itô est faite dans [Has80, Mao97].

## 1.2 Présentation des systèmes stochastiques

### 1.2.1 Notation des systèmes stochastiques

Tout au long de ce mémoire, l'équation d'état d'un système stochastique sera donnée sous la forme suivante

$$dx(t) = f(x(t), u(t), v(t))dt + g(x(t), u(t), v(t))dw(t) \quad (1.2)$$

où

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,
  - $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande,
  - $v(t) \in \mathbb{R}^q$  est le signal de perturbation,
  - $f(x(t), u(t), v(t))$  représente la dérive de l'EDS qui est une fonction linéaire ou bilinéaire en  $x(t)$ ,  $u(t)$  et  $v(t)$ ,
  - $g(x(t), u(t), v(t))$  représente la diffusion de l'EDS qui est une fonction linéaire ou bilinéaire en  $x(t)$ ,  $u(t)$  et  $v(t)$ ,
  - $w(t)$  est un processus de Wiener scalaire centré (ou mouvement brownien<sup>2</sup>),
- et donc le nom d'un système sera donné en fonction de la linéarité des deux fonctions  $f(x(t), u(t), v(t))$  et  $g(x(t), u(t), v(t))$ .

Dans le cas des systèmes avec plusieurs processus de Wiener, le deuxième terme de l'équation (1.2) devient  $\sum_{i=1}^k g_i(x(t), u(t), v(t))dw_i(t)$ .

### 1.2.2 Systèmes stochastiques : forme différentielle et forme intégrale

Un système stochastique peut être décrit sous les formes équivalentes suivantes :

- la forme différentielle

$$dx(t) = (A_{t0}x(t) + B_0v(t))dt + A_{w0}x(t)dw(t) \quad (1.3a)$$

$$y(t) = Cx(t) + D_0v(t) \quad (1.3b)$$

- la forme intégrale

$$x(t) = x(0) + \int_0^t (A_{t0}x(s) + B_0v(s))ds + \int_0^t A_{w0}x(s)dw(s) \quad (1.4a)$$

$$y(t) = Cx(t) + D_0v(t) \quad (1.4b)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de mesure et  $v(t) \in \mathbb{R}^q$  représente les perturbations exogènes.  $w(t)$  est un processus de Wiener scalaire centré qui vérifie [Has80]

$$\mathbf{E}\{dw(t)\} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\{dw^2(t)\} = dt. \quad (1.5)$$

Dans ce mémoire, c'est la forme différentielle qui sera utilisée.

---

<sup>2</sup>Tout au long de ce mémoire nous allons utiliser le terme processus de Wiener au lieu du mouvement brownien (voir annexe A paragraphe A.4).

### 1.2.3 Equation différentielle ordinaire et équation différentielle stochastique

Une EDO peut être écrite sous deux formes qui sont équivalentes

- soit :

$$dx(t) = A_{t0}x(t)dt, \quad (1.6)$$

- soit :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_{t0}x(t), \quad (1.7)$$

et dont la solution est

$$x(t) = x(0)e^{A_{t0}t}. \quad (1.8)$$

Alors qu'une EDS est écrite sous la forme suivante

$$dx(t) = A_{t0}x(t)dt + A_{w0}x(t)dw(t) \quad (1.9)$$

et ne peut pas être écrite sous la forme analogue à (1.7)

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_{t0}x(t) + A_{w0}x(t)\frac{dw(t)}{dt} \quad (1.10)$$

car  $w(t)$  est un processus de Wiener et donc non dérivable.

La notation de (1.10) est une notation abusive et il ne faut donc pas l'utiliser.

Tout au long de ce mémoire la notation retenue pour représenter un système stochastique est celle de (1.9).

### 1.2.4 Bruit multiplicatif et bruit additif

Le terme “bruit multiplicatif”, “incertitudes stochastiques” ou “système bilinéaire stochastique” est utilisé dans la littérature, par exemple dans [GLSY01], [El 95], [CG98] ou [Sto02], quand on a le terme  $A_{w0}x(t)dw(t)$ , c'est-à-dire quand on a le produit entre l'état et le processus de Wiener dans l'équation de la dynamique de l'état. C'est la différence par rapport au bruit additif qui est représenté par le terme  $A_{w0}dw(t)$  et qui, à la différence du cas multiplicatif, intervient linéairement. Quand on a seulement ce terme additif dans l'équation d'état, on peut appliquer le filtre de Kalman pour l'estimation de l'état de système [Kal60, KB61, Fri69, AM79], l'identification récursive des paramètres [Meh71] et le diagnostic de l'état des systèmes [WJ76]. L'application du filtre de Kalman pour les systèmes incertains à temps continu est faite dans [XS94], et pour les systèmes incertains à temps discret dans [XSd94]. Dans [NHS87, NHS89], un filtre de Kalman d'ordre réduit est proposé. La dérivation du filtre de Kalman en utilisant les EDS au sens d'Itô est décrite dans [RS85, Øks03]. Cependant, à la différence du cas additif, la présence d'un bruit multiplicatif pose des problèmes au niveau de stabilité pour réaliser une estimation de l'état du système et elle exprime le côté non linéaire du phénomène physique. C'est pourquoi les définitions de la stabilité des systèmes stochastiques sont spécifiques (voir paragraphe 1.4.2).

### 1.2.5 Les systèmes stochastiques et les systèmes déterministes incertains

Dans les systèmes déterministes, les incertitudes sont représentées comme des variations paramétriques bornées qui peuvent affecter les matrices de système.

Considérons un système déterministe incertain décrit par l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\dot{x}(t) = \left( A_0 + \underbrace{M\Delta(t)N}_{\Delta A_0(t)} \right) x(t) + B_0 v(t) \quad (1.11)$$

où  $\Delta A_0(t)$  représente des incertitudes paramétriques bornées.

Une autre façon de modéliser ces incertitudes est l'utilisation de processus de Wiener [Sus78, Ugr98, UP99]. Considérons un système stochastique décrit par l'équation différentielle stochastique suivante

$$dx(t) = (A_{t0}x(t) + B_0v(t))dt + A_{w0}x dw(t) \quad (1.12)$$

où  $w(t)$  est un processus de Wiener qui représente les incertitudes ou les variations paramétriques et qui vérifie (1.5). Sous des conditions de dérivabilité et de Lipschitz, il est montré dans [Sus78] que les deux descriptions ci-dessus sont connectées de la manière suivante :  $A_{t0} = A_0$  et  $A_{w0} = \sigma MN$  où  $\sigma^2 = \mathbf{E} \{ \Delta^2(t) \}$ .

Pour obtenir une forme d'Itô (à la place de la forme de Stratonovich<sup>3</sup> [Has80, RW87a, Øks03] voir paragraphe 1.3), qui est plus aisée pour la résolution car cette forme est une martingale (voir annexe A paragraphe A.5 et A.6), il faut poser  $A_{t0} = A_0 + 0.5A_{w0}^2$ . C'est la forme d'Itô qui va être retenue tout au long de ce mémoire.

Pour les systèmes déterministes incertains, il est possible de prévoir l'état du système à un instant futur connaissant son état à un instant initial (à condition qu'il n'y ait pas d'incertitudes). Par contre, pour les systèmes stochastiques, l'état du système à un instant futur connaissant son état à un instant initial n'est pas prévisible : nous pouvons seulement estimer la probabilité qu'a le système d'être dans un état donné à un instant futur.

Finalement, c'est la nature physique de système étudié qui nous guide dans le choix entre le modèle déterministe incertain et le modèle stochastique pour l'étude d'un système donné.

## 1.3 Le processus d'Itô et la formule d'Itô

**Définition 1.3.1 (Processus stochastique).** *On appelle processus stochastique à valeurs dans un espace  $E^4$  munie d'une tribu<sup>5</sup>  $\mathcal{E}$  une famille  $X = \{x(t) ; 0 \leq t < \infty\}$  de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  à valeurs dans l'espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$ .*

<sup>3</sup>Le système stochastique peut être mis sous la forme de Stratonovich (voir [Sus78]).

<sup>4</sup> $E = \mathbb{R}^n$  dans la pratique.

<sup>5</sup>Tribu : ensemble stable par réunion et par passage au complémentaire.

**Définition 1.3.2 (Processus d'Itô).** C'est un processus stochastique  $x(t)$  à valeurs dans  $E$  (ou dans  $\mathbb{R}^n$ ) de la forme :

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s) ds + \int_0^t g(s) dw(s) \quad (1.13)$$

avec  $0 \leq t \leq T, x(0) \in \mathbb{R}^n, f(s) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$  et  $g(s) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^{n \times m})$  tels que

$$\int_0^T |f(s)| dt < \infty \quad p.s. \text{ pour tout } T > 0, \quad (1.14)$$

et

$$\int_0^T |g(s)|^2 dt < \infty \quad p.s. \text{ pour tout } T > 0. \quad (1.15)$$

■

On peut aussi écrire l'équation (1.13) sous la forme :

$$dx(t) = f(t)dt + g(t)dw(t). \quad (1.16)$$

Avant d'introduire la formule d'Itô, notons que les différentielles dans une EDS vérifient les règles suivantes [Mao97, Øks03]

$$dw(t) dw(t) = dt, \quad (1.17a)$$

$$dw(t) dt = dt dw(t) = 0. \quad (1.17b)$$

Un outil très important pour résoudre et analyser les EDS est la formule d'Itô donnée par le théorème suivant.

**Théorème 1.3.1 (Formule d'Itô).** [Kus67, Koz69, Mao97] Soit  $x(t)$  un processus d'Itô. Pour toute fonction  $\Phi(t, x(t)) \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  et tout  $0 \leq t \leq T$ ,  $\Phi(t, x(t))$  est un processus d'Itô et vérifie l'EDS suivante :

$$d\Phi(t, x(t)) = \left\{ \Phi_t(t, x(t)) + \Phi_x(t, x(t))f(t) + \frac{1}{2} \text{tr} (g^T(t)\Phi_{xx}(t, x(t))g(t)) \right\} dt + \Phi_x(t, x(t))g(t)dw(t) \quad (1.18)$$

que l'on peut également écrire sous la forme intégrale suivante et en utilisant le produit scalaire

$$\begin{aligned} \Phi(t, x(t)) &= \Phi(0, x(0)) + \\ &\int_0^t \left\{ \Phi_s(s, x(s)) + \langle \Phi_x(s, x(s)), f(s) \rangle + \frac{1}{2} \text{tr} (g^T(s)\Phi_{xx}(s, x(s))g(s)) \right\} ds \\ &\quad + \int_0^t \langle \Phi_x(s, x(s)), g(s)dw(s) \rangle \end{aligned} \quad (1.19)$$

avec les notations suivantes

- $\Phi_t$  : est la dérivée de la fonction  $\Phi$  par rapport au temps,
- $\Phi_x$  : est la dérivée première de la fonction  $\Phi$  par rapport à la variable  $x$ ,
- $\Phi_{xx}$  : est la dérivée seconde de la fonction  $\Phi$  par rapport à la variable  $x$ ,

avec

$$\Phi_t = \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad \Phi_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{xx} = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{n \times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Dans la littérature [Kus67, Koz69, Has80, Mao94a, Mao94b, Mao97, Thy97], on trouve souvent la notation suivante

$$\mathcal{L}\Phi(x(t)) = \Phi_t(t, x(t)) + \Phi_x(t, x(t))f(t) + \frac{1}{2} \text{tr} (g(t)^T \Phi_{xx}(t, x(t))g(t)) \quad (1.20)$$

et donc la formule d'Itô (1.18) se réécrit avec cette dernière notation

$$d\Phi(t, x(t)) = \mathcal{L}\Phi(x(t))dt + \Phi_x(t, x(t))g(t)dw(t). \quad (1.21)$$

## 1.4 Stabilité des systèmes déterministes et stochastiques

La stabilité est une propriété qualitative des solutions des équations différentielles qui sont souvent étudiées sans être résolues. Des concepts de stabilité sont habituellement définis en termes de paramètres relatifs à la convergence tels que les conditions initiales ou le temps. La littérature sur le sujet est abondante avec des nombreux concepts de stabilité qui ont été étudiés. Ces concepts de stabilité, en général, ont été dérivés de l'étude des systèmes déterministes. Il s'en suit qu'il y a au moins autant de concepts de stabilité pour l'étude des systèmes stochastiques qu'il y en a pour l'étude des systèmes déterministes. La raison est tout à fait claire. Les concepts déterministes de la stabilité ont leurs contre-parties stochastiques en fonction de la convergence de la théorie des probabilités. La stabilité, sous ses nombreuses définitions, est une propriété de base de tous les systèmes que l'on peut rencontrer. Nous allons présenter quelques définitions de la stabilité pour les systèmes déterministes et stochastiques.

### 1.4.1 Stabilité des systèmes non linéaires déterministes

Considérons l'équation différentielle non linéaire suivante

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (1.22)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système. On note  $x(t, x_0, t_0)$  la trajectoire (solution) d'une équation différentielle déterministe avec comme condition initiale  $x(t_0) = x_0$  à

l'instant initial  $t_0$ . Nous supposons que le champ de vecteurs  $f(x(t))$  est Lipschitzien<sup>6</sup> pour garantir l'existence et l'unicité d'une solution dans le cas déterministe.

Nous supposons également, sans perte de généralité, que  $x_e = 0$  est un point d'équilibre du système (1.22) car on peut toujours se ramener au point d'équilibre nul en faisant le changement de variable  $\bar{x}(t) = x(t) - x_e$ .

#### 1.4.1.1 Stabilité des systèmes non linéaires déterministes : définitions

**Définition 1.4.1 (La stabilité au sens de Lyapunov).** [Hah67, Lya92, Vid93] *Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est stable au sens de Lyapunov si*

$$\forall (\delta, t_0) > 0, \exists \varepsilon(\delta, t_0) > 0, t_0 > 0 \text{ tel que si } \|x_0\| < \varepsilon \text{ alors} \\ \|x(t, x_0, t_0)\| < \delta \quad \text{pour tout } t \geq t_0. \quad (1.23)$$

Lorsque l'on dit qu'un système est stable, cela sous-entend que le point d'équilibre considéré est stable au sens de Lyapunov. Si le point d'équilibre n'est pas précisé, il s'agit de l'origine  $x_e = 0$ .

**Définition 1.4.2 (La stabilité uniforme).** [Hah67, Lya92, Vid93] *La stabilité est uniforme si la relation (1.23) est vérifiée quel que soit  $t_0$ .*

Cette notion de stabilité uniforme se traduit par le fait que  $\varepsilon$  est indépendant de l'instant initial  $t_0$ , c'est-à-dire  $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ . C'est généralement le cas des systèmes autonomes (le champ  $f$  ne dépend pas explicitement de  $t$  comme dans (1.22)). Dans la plupart des cas, il est "naturel" de prendre  $t_0 = 0$ .

**Définition 1.4.3 (L'attractivité).** [Hah67, Lya92, Vid93] *Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est attractif si*

$$\forall t_0 > 0, \exists \varepsilon(t_0) > 0 \text{ tel que si } \|x_0\| < \varepsilon \text{ alors } \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0, t_0)\| \rightarrow 0. \quad (1.24)$$

*Remarque 1.4.1.* L'attractivité du point d'équilibre  $x_e = 0$  est dite uniforme si  $\varepsilon > 0$  existe indépendamment de  $t_0$ . La valeur  $\varepsilon > 0$  définit une boule ouverte  $B_\varepsilon$  de rayon  $\varepsilon$  et de centre  $x_0$ .  $B_\varepsilon$  est le domaine d'attraction ou le bassin d'attraction.  $\square$

**Définition 1.4.4 (La stabilité asymptotique).** [Hah67, Lya92, Vid93] *Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est asymptotiquement stable s'il est stable au sens de Lyapunov et attractif.*

*Remarque 1.4.2.* Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et uniformément attractif.  $\square$

**Définition 1.4.5 (La stabilité exponentielle).** [Hah67, Lya92, Vid93] *Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est exponentiellement stable s'il existe  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  tels que*

$$\|x(t, x_0, t_0)\| \leq \alpha \|x_0\| e^{-\beta(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.25)$$

---

<sup>6</sup>Une fonction  $f(x)$  est Lipschitzienne si

$$\exists k > 0; \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|.$$

Toutes ces notions sont locales puisque la stabilité est assurée dans un voisinage de l'origine de rayon  $\varepsilon$  ( $B_\varepsilon$  est le domaine d'attraction).

**Définition 1.4.6 (La stabilité globale).** [Hah67, Lya92, Vid93] *Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est globalement asymptotiquement (exponentiellement) stable s'il est asymptotiquement (exponentiellement) stable pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .*

#### 1.4.1.2 Stabilité des systèmes non linéaires déterministes : théorèmes

Les théorèmes suivants donnent les conditions suffisantes de stabilité du point d'équilibre  $x_e = 0$ .

**Théorème 1.4.1 (Théorème de Lyapunov pour la stabilité asymptotique locale).** [Hah67, Lya92, Vid93] *Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est stable (respectivement asymptotiquement stable) s'il existe une fonction scalaire  $V(x(t))$  de classe  $C^1(\mathbb{R}^n)$ , définie dans une boule  $B_\varepsilon$ , telle que*

- $V(x(t)) > 0$ ,  $V(0) = 0$ ,
- $\dot{V}(x(t)) \leq 0$  (respectivement  $\dot{V}(x(t)) < 0$ ),  $\forall t \geq t_0$ ,  $\forall x_0 \in B_\varepsilon$ .

**Théorème 1.4.2 (Théorème de Lyapunov pour la stabilité uniforme).** [Hah67, Lya92, Vid93] *Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est uniformément stable s'il existe une fonction scalaire  $V(x(t)) > 0$  de classe  $C^1(\mathbb{R}^n)$ , définie dans une boule  $B_\varepsilon$ , telle que*

$$\dot{V}(x(t)) \leq 0, \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall x_0 \in B_\varepsilon. \quad (1.26)$$

**Théorème 1.4.3 (Théorème de Lyapunov pour la stabilité asymptotique globale).** [Hah67, Lya92, Vid93] *Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est globalement asymptotiquement stable s'il existe une fonction scalaire  $V(x(t))$  de classe  $C^1(\mathbb{R}^n)$  telle que*

- $V(x(t)) > 0$ ,  $V(0) = 0$ ,
- $\dot{V}(x(t)) < 0$ ,  $\dot{V}(0) = 0$
- $V(x(t)) \rightarrow \infty$  quand  $\|x(t)\| \rightarrow \infty$ .

**Théorème 1.4.4 (Théorème de la stabilité exponentielle).** [Hah67, Lya92, Vid93] *Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est exponentiellement stable s'il existe une fonction de Lyapunov  $V(x(t))$  de classe  $C^1(\mathbb{R}^n)$ , définie dans une boule  $B_\varepsilon$ , et des constantes  $c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 > 0$  et  $c_4 > 0$ , telles que,  $\forall x \in B_\varepsilon$  et  $\forall t \geq 0$ , nous avons les inégalités suivantes*

- $c_1 \|x(t)\|^2 \leq V(x(t)) \leq c_2 \|x(t)\|^2$ ,
- $\dot{V}(x(t)) \leq -c_3 \|x(t)\|^2$ ,
- $\left\| \frac{\partial V(x(t))}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x(t)\|$ .

#### 1.4.2 Stabilité des systèmes stochastiques

Les notions de stabilité pour les équations différentielles stochastiques sont, pour la plupart, dérivées de la stabilité au sens de Lyapunov des équations différentielles non linéaires déterministes.



Nous allons rappeler l'équation différentielle stochastique (1.1)

$$dx(t) = f(x, t)dt + g(x, t)dw(t). \quad (1.27)$$

Supposons que

$$f(0, t) \equiv 0 \quad \text{et} \quad g(0, t) \equiv 0, \quad \forall t \geq t_0,$$

alors l'équation (1.27) a pour solution  $x(t) \equiv 0$ , ce qui correspond à la valeur initiale  $x(t_0) = 0$ . Cette solution est appelée la solution triviale.

Pour assurer l'existence et l'unicité de la trajectoire, la condition de Lipschitz suivante est suffisante [Has80]

$$\|f(x, t) - f(y, t)\| + \|g(x, t) - g(y, t)\| < b \|x - y\|, \quad \text{avec} \quad b > 0.$$

#### 1.4.2.1 Stabilité des systèmes stochastiques : définitions

**Définition 1.4.7 (La stabilité en probabilité).** [Koz69, Has80, Mao97] *Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est stable en probabilité si, pour toute paire  $\delta \in (0, 1)$  et  $r > 0$ , il existe  $\varepsilon = \varepsilon(\delta, r, t_0) > 0$  tel que*

$$P\{\|x(t, x_0, t_0)\| < r \quad \forall t \geq t_0\} \geq 1 - \delta, \quad \forall \|x_0\| < \varepsilon. \quad (1.28)$$

C'est la version stochastique de la stabilité au sens de Lyapunov (voir définition 1.4.1).

**Définition 1.4.8 (La stabilité asymptotique).** [Koz69, Has80, Mao97] *Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est asymptotiquement stable s'il est stable en probabilité et si, pour tout  $\delta \in (0, 1)$ , il existe  $\varepsilon = \varepsilon(\delta, t_0) > 0$  tel que*

$$P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0\right\} \geq 1 - \delta, \quad \forall \|x_0\| < \varepsilon. \quad (1.29)$$

C'est la version de la stabilité asymptotique au sens de Lyapunov (voir définition 1.4.4).

**Définition 1.4.9 (La stabilité asymptotique au sens large “in the large”).** [Koz69, Has80, Mao97] *Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est asymptotiquement stable au sens large s'il est stable en probabilité et, en plus, si*

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0, t_0)\| = 0\right\} = 1. \quad (1.30)$$

**Définition 1.4.10 (La stabilité en moyenne quadratique).** [Koz69, Has80] *Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est stable en moyenne quadratique si, pour un  $\delta > 0$  donné, il existe  $\varepsilon(\delta, t_0) > 0$  tel que  $\|x_0\| < \varepsilon$  implique*

$$\mathbf{E}\left\{\sup_{t \geq t_0} \|x(t; x_0, t_0)\|^2\right\} < \delta. \quad (1.31)$$

**Définition 1.4.11 (La stabilité asymptotique en moyenne quadratique).** [Koz69, Has80] Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est asymptotiquement stable en moyenne quadratique si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \mathbf{E} \left\{ \|x(t; x_0, t_0)\|^2 \right\} \right) = 0. \quad (1.32)$$

**Définition 1.4.12 (La stabilité exponentielle en moyenne quadratique).** [Koz69, Has80, Mao97] Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est exponentiellement stable en moyenne quadratique s'il existe  $\varepsilon > 0$  et deux constantes  $c > 0$ ,  $\beta > 0$  tels que  $\|x_0\| < \varepsilon$  implique pour tout  $t \geq t_0$

$$\mathbf{E} \left\{ \|x(t; x_0, t_0)\|^2 \right\} \leq c \|x_0\|^2 e^{-\beta(t-t_0)}. \quad (1.33)$$

**Définition 1.4.13 (La stabilité interne).** [HP98] Le point d'équilibre  $x_e = 0$  vérifie la stabilité interne s'il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\mathbf{E} \left\{ \int_0^\infty \|x(t; x_0, t_0)\|^2 dt \right\} \leq c \|x_0\|^2, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (1.34)$$

*Remarque 1.4.3.* La stabilité exponentielle en moyenne quadratique est équivalente à la stabilité interne [HP98, Dam04].  $\square$

**Définition 1.4.14 (La Stabilité externe).** [HP98] Le système stochastique (1.3) vérifie la stabilité externe si

$$\begin{aligned} \forall v(t) \in \widehat{L}_2([0, \infty); \mathbb{R}^r), y(t) = Cx(t) + D_0v(t) \in \widehat{L}_2([0, \infty); \mathbb{R}^q) \\ \text{et } \exists \gamma \geq 0 \quad \text{tels que} \quad \|y(t)\|_{\widehat{L}_2}^2 \leq \gamma \|v(t)\|_{\widehat{L}_2}^2. \end{aligned} \quad (1.35)$$

**Corollaire 1.4.1.**

- La stabilité exponentielle en moyenne quadratique implique la stabilité asymptotique en moyenne quadratique.
- La stabilité interne (ou exponentielle en moyenne quadratique) implique la stabilité externe (voir [HP98]).

#### 1.4.2.2 Stabilité des systèmes stochastiques : théorèmes

**Théorème 1.4.5 (Théorème de la stabilité en probabilité).** [Kus67, Has80, Mao97] Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est stable en probabilité s'il existe une fonction de Lyapunov définie positive  $V(t, x(t)) \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  telle que

$$\mathcal{L}V(t, x(t)) \leq 0, \quad (1.36)$$

pour tout  $x \neq 0$  (voir la définition de  $\mathcal{L}$  dans l'équation (1.20)).

**Théorème 1.4.6 (Théorème de la stabilité asymptotique).** [Kus67, Has80, Mao97] Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est asymptotiquement stable en probabilité s'il existe une fonction de Lyapunov définie positive  $V(t, x(t)) \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  telle que

$$\mathcal{L}V(t, x(t)) < 0, \quad (1.37)$$

pour tout  $x \neq 0$  (voir la définition de  $\mathcal{L}$  dans l'équation (1.20)).

**Théorème 1.4.7 (Théorème de la stabilité asymptotique en probabilité au sens large (globale)).** [Has80] *Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est globalement asymptotiquement stable en probabilité s'il existe une fonction de Lyapunov définie positive  $V(t, x(t)) \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  vérifiant*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{t > 0} V(t, x(t)) \right\} = 0$$

*telle que  $\mathcal{L}V(t, x(t))$  est définie négative et*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \inf_{t > 0} V(t, x(t)) \right\} = \infty. \quad (1.38)$$

**Théorème 1.4.8 (Théorème de la stabilité exponentielle en moyenne quadratique).** [Kus67, Has80, Mao94a, Mao97] *Le point d'équilibre  $x_e = 0$  est exponentiellement stable en moyenne quadratique s'il existe une fonction de Lyapunov définie positive  $V(t, x(t)) \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$  et des constantes positives  $c_1, c_2$  et  $c_3$  telles que, si*

$$c_1 \|x(t)\|^2 \leq V(t, x(t)) \leq c_2 \|x(t)\|^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}V(t, x(t)) \leq -c_3 V(t, x(t)) \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad (1.39)$$

*alors*

$$\mathbf{E} \left\{ \|x(t; x_0, t_0)\|^2 \right\} \leq \frac{c_2}{c_1} \|x_0\|^2 e^{-c_3(t-t_0)} \quad \text{pour} \quad t \geq t_0. \quad (1.40)$$

*Remarque 1.4.4.* La stabilité en moyenne quadratique implique la stabilité en probabilité et la stabilité asymptotique en moyenne quadratique implique la stabilité asymptotique. Nous pouvons obtenir la stabilité en moyenne quadratique (asymptotique) avec un choix particulier de la fonction de Lyapunov.  $\square$

Dans ce mémoire, nous allons utiliser essentiellement la stabilité exponentielle en moyenne quadratique (ou la stabilité interne) et la stabilité asymptotique en moyenne quadratique.

En fait, ces deux définitions de stabilité sont en grande partie utilisées en raison de leur efficacité et de l'efficacité des outils nécessaires à l'analyse des systèmes stochastiques [Flo95, RS96, Mao96, HP98, MKR98, Ugr98, GLSY01, XC02, Sto02, XC03, ZCT05].

## 1.5 Stabilisation et déstabilisation des systèmes stochastiques

### 1.5.1 Cas scalaire

Considérons le système stochastique scalaire suivant

$$dx(t) = ax(t)dt + bx(t)dw(t) \quad (1.41)$$

avec  $x(t) \in \mathbb{R}$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ .

En divisant par  $x(t)$  (avec  $x(t) \neq 0$ ), et puis en intégrant de 0 à  $t$ , nous avons

$$\int_0^t \frac{dx(s)}{x(s)} = at + bw(t) \quad \text{avec} \quad w(0) = 0. \quad (1.42)$$

En appliquant la formule d'Itô (1.18) à la fonction  $g$  suivante [Øks03]

$$g(t, x(t)) = \ln x(t) \quad \text{avec} \quad x(t) > 0, \quad (1.43)$$

on obtient

$$d(\ln x(t)) = \frac{1}{x(t)} dx(t) + \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{x^2(t)} \right) (dx(t))^2, \quad (1.44)$$

soit

$$\frac{dx(t)}{x(t)} = d(\ln x(t)) + \frac{1}{2} b^2 dt. \quad (1.45)$$

Finalement, en intégrant cette dernière relation de 0 jusqu'à  $t$  et en utilisant la relation (1.42), nous obtenons la solution  $x(t)$  suivante

$$x(t) = x(0) e^{(a - \frac{1}{2} b^2)t + bw(t)}. \quad (1.46)$$

Nous remarquons que nous avons trois cas :

- (i) si  $a > \frac{1}{2} b^2$  alors  $x(t) \rightarrow \infty$  p.s. quand  $t \rightarrow \infty$ ,
- (ii) si  $a < \frac{1}{2} b^2$  alors  $x(t) \rightarrow 0$  p.s. quand  $t \rightarrow \infty$ ,
- (iii) si  $a = \frac{1}{2} b^2$  alors  $x(t)$  va fluctuer suivant les variations du bruit, p.s.

Nous pouvons remarquer que le bruit multiplicatif, dont "l'amplitude" est représentée par la constante  $b$ , peut influencer la stabilité du système (1.41).

En effet, si le système  $dx(t) = ax(t)dt$  est instable c'est-à-dire quand  $a > 0$ , le système (1.41) peut devenir stable si (ii) est vérifié. Donc, le bruit peut stabiliser le système. Par contre, dans le cas scalaire, le bruit ne peut pas déstabiliser le système stable  $dx(t) = ax(t)dt$  avec  $a < 0$ . Ces remarques sont valables uniquement pour une EDS scalaire avec bruit multiplicatif.

## 1.5.2 Cas de dimension 2

Considérons le système stochastique de dimension 2 suivant

$$dx(t) = Ax(t)dt + bBx(t)dw(t) \quad (1.47)$$

avec  $x(t) \in \mathbb{R}^2$ ,  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  et  $b \in \mathbb{R}$ .

Il est montré dans [Mao94a, Mao94b] que, si l'inégalité suivante est vérifiée

$$b^2 > 2 \|A\|, \quad (1.48)$$

alors, selon le choix de la matrice  $B$ , le système (1.47) peut être exponentiellement stable ou instable. Par exemple, le système (1.47) est exponentiellement stable pour  $B = I$

et exponentiellement instable pour  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  (voir [Mao94a]). Ainsi, indépendam-

ment de la stabilité du système  $dx(t) = Ax(t)dt$ , le bruit multiplicatif peut stabiliser ou déstabiliser le système stochastique.

## 1.6 Outils pour l'analyse des systèmes

Nous allons donner dans cette section une série de définitions, de lemmes et de théorèmes pour les systèmes déterministes qui nous seront utiles dans la suite de notre travail et nous allons examiner leurs correspondants pour les systèmes stochastiques.

### 1.6.1 Lemme borné réel pour les systèmes déterministes (LBR)

Considérons le système déterministe LTI décrit par

$$(G) = \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_{t0}x(t) + B_0v(t) \\ z(t) &= Cx(t) + D_0v(t) \end{cases} \quad (1.49)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  est le vecteur de sortie et  $v(t) \in \mathbb{R}^q$  est celui de la perturbation.

**Définition 1.6.1 (Norme  $\mathcal{H}_\infty$ ).** [Fra87] La norme  $\mathcal{H}_\infty$  du système (1.49), stable ou instable, est définie par

$$\|G\|_\infty := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \lambda_{\max}(G(j\omega)G^T(-j\omega)). \quad (1.50)$$

En d'autres termes, la norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'une fonction de transfert représente le maximum sur toute la bande des fréquences de la valeur singulière maximale de la réponse fréquentielle du système considéré.

La norme  $\mathcal{H}_\infty$  est définie par (1.50), que le système soit stable ou instable, tant que le système ne possède pas de pôles sur l'axe imaginaire. Par exemple,  $\|\frac{1}{s+1}\|_\infty = \|\frac{1}{s-1}\|_\infty = 1$ , tandis que  $\|\frac{1}{s}\|_\infty = \infty$ . Toutefois, pour une entrée bornée, le système  $\frac{1}{s+1}$  possède une sortie bornée, ce qui n'est pas vrai pour le système  $\frac{1}{s-1}$ . Il est donc nécessaire de définir le gain  $\mathcal{L}_2$ .

**Définition 1.6.2 (Gain  $\mathcal{L}_2$ ).** [GL95] Si le système (1.49) est asymptotiquement stable, alors, si  $v(t) \in \mathcal{L}_2$  implique  $y(t) \in \mathcal{L}_2$  et, pour  $x(0) = 0$ , le gain  $\mathcal{L}_2$  du système (1.49) est donné par

$$\|G\|_\infty = \sup_{v \in \mathcal{L}_2} \frac{\|y\|_2}{\|v\|_2}, \quad \|v\|_2 \neq 0. \quad (1.51)$$

Le gain  $\mathcal{L}_2$  sert à mesurer la quantité d'énergie transmise par le système. Si ce gain est inférieur à 1, on dit que le système est contractif ou non expansif. Ainsi, la notion de gain  $\mathcal{L}_2$  est utile pour quantifier la façon dont le système rejette les perturbations externes.

La norme  $\mathcal{H}_\infty$  permet donc de spécifier des conditions de *pire cas*. Cette propriété est en fait une norme très pertinente pour traiter les problèmes de robustesse.

**Remarque 1.6.1 (Norme  $\mathcal{H}_\infty$  et gain  $\mathcal{L}_2$ ).** L'utilisation du théorème de Parseval permet d'interpréter (1.51) comme un gain fréquentiel ou temporel sur les signaux (la norme  $\mathcal{L}_2$  d'un signal temporel est la même que la norme  $\mathcal{L}_2$  de la transformée de Laplace de ce même signal). Ainsi, pour un système stable, la norme  $\mathcal{H}_\infty$  de la fonction de transfert est la norme induite  $\mathcal{L}_2$  de l'opérateur d'entrée-sortie associé au système, c'est donc le gain  $\mathcal{L}_2$  du système. De plus, les équations (1.50) et (1.51) permettent de considérer  $\|G\|_\infty$  comme une généralisation de la norme spectrale des matrices constantes.  $\square$

*Remarque 1.6.2.* D'après la définition 1.6.2, la norme  $\|G\|_\infty$  est une norme induite, elle vérifie donc l'inégalité multiplicative

$$\|GF\|_\infty \leq \|G\|_\infty \|F\|_\infty.$$

Cette propriété s'avère très utile pour les problèmes de robustesse.  $\square$

Le lemme borné réel pour les systèmes déterministes est donné par le théorème suivant.

**Théorème 1.6.1 (Lemme borné réel : cas continu).** *Les trois propositions suivantes sont équivalentes pour le système (1.49) :*

1.  $A_{t_0}$  est stable<sup>7</sup> et  $\|G\|_\infty < \gamma$ ,
2.  $\exists P = P^T > 0$  telle que [Wil71, AV73, SMN90]

$$R = \gamma^2 I_q - D_0^T D_0 > 0, \quad (1.52)$$

$$A_{t_0}^T P + P A_{t_0} + C^T C + (P B_0 + C^T D_0) R^{-1} (P B_0 + C^T D_0)^T < 0. \quad (1.53)$$

3.  $\exists P = P^T > 0$  telle que [BEFB94, Sch90]

$$\begin{bmatrix} A_{t_0}^T P + P A_{t_0} & P B_0 & C^T \\ B_0^T P & -\gamma^2 I_q & D_0^T \\ C & D_0 & -I_r \end{bmatrix} < 0. \quad (1.54)$$

Le théorème 1.6.1 peut s'écrire en fonction d'une équation algébrique de Riccati en remplaçant  $\exists P = P^T > 0$  par  $\exists P = P^T \geq 0$  et le symbole d'inégalité dans l'inégalité algébrique de Riccati (1.53) par le symbole d'égalité si, de plus, on a  $A + B R^{-1} (D^T C + B^T P)$  est asymptotiquement stable.

## 1.6.2 Lemme borné réel pour les systèmes stochastiques (LBRS)

Considérons le système stochastique suivant

$$dx(t) = (A_{t_0}x(t) + B_0v(t))dt + (A_{w0}x(t) + B_wv(t))dw(t) \quad (1.55a)$$

$$y(t) = Cx(t) + D_0v(t) \quad (1.55b)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $y(t) \in \mathbb{R}^r$  est le vecteur de sortie et  $v(t) \in \mathbb{R}^q$  est celui de la perturbation.  $w(t)$  est un processus de Wiener qui vérifie (1.5).

**Définition 1.6.3 (Gain  $\mathcal{L}_2$  stochastique).** [HP98, GLSY01] *Si le système (1.55) est exponentiellement stable en moyenne quadratique, alors  $v(t) \in \widehat{L}_2$  implique  $y(t) \in \widehat{L}_2$ . Le gain  $\mathcal{L}_2$  stochastique du système (1.55) est donné, pour  $x(0) = 0$ , par*

$$\|y(t)\|_{\widehat{L}_2}^2 \leq \gamma \|v(t)\|_{\widehat{L}_2}^2 \quad (1.56)$$

<sup>7</sup>Une matrice est dite stable si elle est Hurwitz. C'est-à-dire si la partie réelle de toutes ses valeurs propres est strictement négative ( $\text{Re}(\lambda) < 0$ ).

La norme  $\|\cdot\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2}^2$  est définie par

$$\|f\|_{\widehat{\mathcal{L}}_2}^2 = \mathbf{E} \left\{ \int_0^\infty \|f(t)\|^2 dt \right\} = \int_0^\infty \mathbf{E} \left\{ \|f(t)\|^2 \right\} dt < \infty, \quad (1.57)$$

où  $\widehat{\mathcal{L}}_2([0, \infty); \mathbb{R}^k)$  est l'espace des processus stochastiques non anticipatifs de carré-intégrables et  $f(\cdot) = (f(t))_{t \in [0, \infty)} \in \mathbb{R}^k$ . Le gain  $\mathcal{L}_2$  stochastique sert à trouver une limite sur le gain d'entrée-sortie du système.

Le lemme borné réel pour les systèmes stochastiques est donné par le théorème suivant.

**Théorème 1.6.2 (Lemme borné réel stochastique : cas continu).** [Mor95, DHS97, HP98, GLSY01] Supposons que le système (1.55) vérifie la stabilité interne 1.4.13, alors le système (1.55) vérifie la stabilité externe 1.4.14. De plus, ce système vérifie la performance  $\mathcal{H}_\infty$  (1.56) pour un certain réel  $\gamma > 0$  donné et pour tout  $v(t) \in \widehat{\mathcal{L}}_2([0, \infty]; \mathbb{R}^m)$  s'il existe une matrice  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , telle que la LMI suivante soit vérifiée

$$\begin{bmatrix} PA_{t0} + A_{t0}^T P & PB_0 & A_{w0}^T P & C^T \\ B_0^T P & -\gamma^2 I_q & B_w^T P & D_0^T \\ PA_{w0} & PB_w & -P & 0 \\ C & D_0 & 0 & -I_r \end{bmatrix} < 0. \quad (1.58)$$

Cette dernière LMI est équivalente à  $\exists P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , avec  $P > 0$ , telle que

$$R = \gamma^2 I_q - D_0^T D_0 > 0, \quad (1.59)$$

$$A_{t0}^T P + PA_{t0} + C^T C + (PB_0 + C^T D_0)R^{-1}(PB_0 + C^T D_0)^T + (A_{w0} + B_w)^T P(A_{w0} + B_w) < 0. \quad (1.60)$$

*Démonstration.* La démonstration que la stabilité interne de système (1.55) implique la stabilité externe est un passage simple entre leurs définitions (voir définition 1.4.13 et définition 1.4.14).

Pour démontrer maintenant la LMI (1.58), nous allons considérer la fonction de Lyapunov suivante

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t), \quad \text{avec} \quad P = P^T > 0. \quad (1.61)$$

En utilisant la formule d'Itô (1.18) avec les dérivées suivantes

- $V_t(t, x(t)) = x^T(t) \frac{dP}{dt} x(t) = 0$ , car  $x$  et  $P$  sont considérés comme des termes indépendants et  $P$  est une matrice constante,
- $V_x(t, x(t)) = (P + P^T)x(t) = 2Px(t)$ ,
- $V_{xx}(t, x(t)) = 2P$ ,

nous avons

$$dV(x(t)) = \mathcal{L}V(x(t))dt + 2x^T(t)PA_{w0}x(t)dw \quad (1.62)$$

avec

$$\mathcal{L}V(x(t)) = 2x^T(t)P(A_{t_0}x(t) + B_0v(t)) + \frac{1}{2} \text{tr}((A_{w_0}x(t) + B_wv(t))^T 2P(A_{w_0}x(t) + B_wv(t))). \quad (1.63)$$

Considérons l'indice de performance suivant

$$J_{yv} = \mathbf{E} \left\{ \int_0^\infty (y^T(t)y(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t)) dt \right\}, \quad (1.64)$$

que l'on peut écrire en utilisant le théorème de Fubini<sup>8</sup> [Che85]

$$J_{yv} = \int_0^\infty \mathbf{E} \{ (y^T(t)y(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t)) dt + dV(x(t)) \} - \mathbf{E} \{ V(x(t)) \}_{t=\infty} + \mathbf{E} \{ V(x(t)) \}_{t=0}, \quad (1.65)$$

car, en prenant l'espérance mathématique des deux côtés de l'équation (1.62) et grâce à (1.5), nous avons

$$\mathbf{E} \{ dV(x(t)) \} = \mathbf{E} \{ \mathcal{L}V(x(t)) dt \}.$$

Or, comme  $\mathbf{E} \{ V(x(t)) \}_{t=0} = 0$  car  $x(0) = 0$  et  $\mathbf{E} \{ V(x(t)) \}_{t=\infty} \geq 0$ , ceci implique

$$J_{yv} \leq \int_0^\infty \mathbf{E} \{ (y^T(t)y(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t)) dt + \mathcal{L}V(x(t)) dt \}. \quad (1.66)$$

Maintenant supposons que la LMI (1.58) est vérifiée. On va montrer qu'elle est suffisante pour assurer la stabilité et la performance  $\mathcal{H}_\infty$  du système (1.55).

En appliquant le lemme de Schur (voir annexe B paragraphe B.2) sur la LMI (1.58), on a

$$\begin{bmatrix} C^T C & C^T D_0 \\ D_0^T C & -\gamma^2 I_q + D_0^T D_0 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} PA_{t_0} + A_{t_0}^T P + A_{w_0}^T P A_{w_0} & PB_0 + A_{w_0}^T P B_w \\ B_0^T P + B_w^T P A_{w_0} & B_w^T P B_w \end{bmatrix}}_{\Xi} < 0, \quad (1.67)$$

et l'inégalité (1.66) se réécrit

$$J_{yv} \leq \int_0^\infty \mathbf{E} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} x(t)^T & v(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^T C & C^T D_0 \\ D_0^T C & -\gamma^2 I_q + D_0^T D_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}}_{(y^T(t)y(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t)) dt} + \underbrace{\begin{bmatrix} x(t)^T & v(t)^T \end{bmatrix} \Xi \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}}_{\mathcal{L}V(x(t))} dt \right\} < 0,$$

<sup>8</sup>Pour un processus stochastique  $X(t)$ , si  $X(t)$  est mesurable, alors nous avons l'égalité suivante

$$\mathbf{E} \left\{ \int_0^T X(t) dt \right\} = \int_0^T \mathbf{E} \{ X(t) \} dt$$



donc, si la LMI (1.58) est vérifiée, alors le système (1.55) est stable et vérifie la performance  $\mathcal{H}_\infty$  donnée par (1.56). •

*Remarque 1.6.3.* Le LBR (1.54) pour les systèmes déterministes du théorème 1.6.1 est obtenu à partir du LBRS du théorème 1.6.2 en remplaçant  $A_{w0} = 0$  et  $B_w = 0$  dans (1.58) (voir aussi (1.60) et (1.53)). □

## 1.7 Les notations utilisées dans ce mémoire

Les systèmes étudiés tout au long de ce mémoire seront notés généralement de la façon suivante

- l'équation d'état :

$$\begin{aligned} dx(t) = & \left( \left( A_{t0} + \sum_{i \geq 1} u_i(t) A_{ti} \right) x(t) + B_0 v(t) \right) dt + A_{w0} x(t) dw(t) + B_w v(t) dw(t) \\ & + \sum_{j \geq 1} u_j(t) A_{wj} x(t) dw_j(t) + Bu(t) dt \end{aligned} \quad (1.68)$$

- l'équation de sortie mesurée utilisée :

$$y(t) = Cx(t) + D_0 v(t) \quad (1.69)$$

ou

$$dy(t) = Cx(t)dt + \sum_{k \geq 1} J_k x(t) dw_k(t) \quad (1.70)$$

- l'équation de sortie du système utilisée :

$$z(t) = Lx(t) + D_1 v(t) \quad \text{pour le filtrage} \quad (1.71)$$

ou

$$z(t) = C_1 x(t) + D_1 v(t) + D_2 u(t) \quad \text{pour la commande} \quad (1.72)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie,  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  est une combinaison linéaire des composantes du vecteur d'état  $x(t)$  avec  $r \leq n$  dans le cas du filtrage,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est l'entrée,  $u_i(t)$  et  $u_j(t)$  sont des commandes scalaires et  $v(t) \in \mathbb{R}^q$  représente les perturbations exogènes.  $w_i(t)$  est un processus de Wiener scalaire centré qui vérifie

$$\mathbf{E} \{dw_i(t)\} = 0, \quad \mathbf{E} \{dw_i(t)^2\} = dt, \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots \quad (1.73a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{dw_i(t)dw_j(t)\} &= \mathbf{E} \{dw_j(t)dw_i(t)\} = \varphi_{ij}dt, \quad \text{avec } 0 \leq \varphi_{ij} < 1, \\ &\text{pour } i, j = 0, 1, \dots \text{ avec } i \neq j. \end{aligned} \quad (1.73b)$$

Dans le cas du filtre d'ordre plein nous allons utiliser les notations suivantes avec la mesure  $y(t)$

$$d\hat{x}(t) = (A_{t0}\hat{x}(t) + u_1(t)A_{t1}\hat{x}(t))dt + K_0(y(t) - C\hat{x}(t))dt + u_1(t)K_1(y(t) - C\hat{x}(t))dt \quad (1.74)$$

ou avec la mesure  $dy(t)$

$$d\hat{x}(t) = (A_{t_0}\hat{x}(t) + u_1(t)A_{t_1}\hat{x}(t))dt + K_0(dy(t) - C\hat{x}(t)dt) + u_1(t)K_1(dy(t) - C\hat{x}(t)dt) \quad (1.75)$$

où  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'estimation de l'état  $x(t)$ ,  $K_0$  et  $K_1$  sont les matrices à calculer.

Dans le cas du filtre d'ordre réduit nous allons utiliser les notations suivantes

$$d\eta(t) = M_0\eta(t)dt + \sum_{i \geq 1} u_i(t)M_i\eta(t)dt + N_0y(t)dt + \sum_{j \geq 1} u_j(t)N_jy(t)dt \quad (1.76a)$$

$$\hat{z}(t) = \eta(t) + Ry(t) \quad (1.76b)$$

où  $\eta \in \mathbb{R}^r$  est l'état du filtre avec  $r \leq n$ ,  $\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^r$  est l'estimation de  $z(t)$  et  $M_i, N_i$  pour  $i = 0, 1, \dots$  et  $R$  sont les matrices à déterminer.

Les indices  $t$  ou  $w$  des matrices du système (1.68) permettent de préciser que la matrice est multipliée par  $dt$  ou par  $dw(t)$  (c'est-à-dire si la matrice intervient dans la dérive ou dans la diffusion du système stochastique). Le coefficient  $i$  qui suit ces indices indique la présence ou non d'une commande scalaire  $u_i(t)$  dans le terme considéré.

Des notations identiques sont utilisées dans les développements mathématiques lorsque les termes considérés représentent "la même notion". Ainsi, la même matrice  $\mathcal{A}_{w1}$  peut avoir une expression donnée dans un paragraphe et une expression différente dans un autre paragraphe, mais elle intervient de manière "similaire" dans les EDS.

Dans le but d'alléger les notations lorsque nous avons, dans le système étudié, un seul processus de Wiener, il sera noté sans aucun indice.

## 1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les systèmes stochastiques en commençant par introduire les EDS et la différence entre celles-ci et les EDO. Parmi les différentes formes des EDS, nous nous sommes intéressés aux EDS au sens d'Itô, et donc la définition du processus d'Itô et de la formule d'Itô ont été développées. Cette formule représente un outil très important pour l'étude des EDS et donc des systèmes stochastiques.

Nous avons présenté un tour d'horizon sur les différentes définitions et théorèmes sur la stabilité des systèmes déterministes et stochastiques. Puis, l'effet de la présence d'un bruit multiplicatif dans un système stochastique sur la stabilisation ou la déstabilisation de ce dernier (cas de dimension 1 et 2) a été explicité.

Nous avons conclu ce chapitre en introduisant quelques outils nécessaires pour l'analyse des systèmes et notamment le LBR pour les systèmes déterministes et le LBRS pour les systèmes stochastiques.



# Chapitre 2

## Filtrage robuste d'ordre plein pour les systèmes stochastiques

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>2.2</b>	<b>Filtrage des systèmes stochastiques sans commande . . . . .</b>	<b>29</b>
2.2.1	Formulation du problème . . . . .	29
2.2.2	Synthèse du filtre et performance $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	30
2.2.3	Traitement de la non convexité du problème . . . . .	31
2.2.4	Exemple numérique . . . . .	32
<b>2.3</b>	<b>Filtrage des systèmes stochastiques avec commande . . . . .</b>	<b>34</b>
2.3.1	Filtrage des systèmes stochastiques avec une commande . . . . .	34
2.3.2	Filtrage des systèmes stochastiques avec $m$ commandes . . . . .	45
<b>2.4</b>	<b>Filtrage des systèmes stochastiques avec plusieurs bruits multiplicatifs . . . . .</b>	<b>51</b>
2.4.1	Formulation du problème . . . . .	51
2.4.2	Passage du système stochastique avec une commande vers un système avec incertitudes paramétriques . . . . .	52
2.4.3	Synthèse du filtre et performance $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	53
2.4.4	Exemple numérique . . . . .	58
<b>2.5</b>	<b>Filtrage des systèmes stochastiques avec des mesures stochastiques . . . . .</b>	<b>60</b>
2.5.1	Formulation du problème . . . . .	60
2.5.2	Passage du système stochastique avec une commande vers un système avec incertitudes paramétriques . . . . .	61
2.5.3	Synthèse du filtre et performance $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	62
2.5.4	Exemple numérique . . . . .	64
<b>2.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>66</b>

---

## 2.1 Introduction

L'estimation de l'état d'un système donné sert dans de nombreuses applications. Par exemple, pour diminuer les effets des bruits sur les mesures, pour faire de la commande par retour d'état estimé, pour estimer certaines variables non accessibles, pour faire de la supervision ou du diagnostic de procédés industriels ...

Le problème du filtrage a reçu une attention toute particulière depuis les célèbres travaux de Kalman et Bucy [Kal60, KB61]. Puis, la notion du filtrage  $\mathcal{H}_\infty$  a été introduite dans les années quatre-vingt, et depuis le filtrage  $\mathcal{H}_\infty$  a été traité par plusieurs auteurs en utilisant un critère de performance  $\mathcal{H}_\infty$ . Le filtre d'ordre plein (c'est-à-dire que la dynamique du filtre est de même ordre que celui du système) est étudié, avec les différentes approches comme l'équation algébrique de Riccati, l'interpolation, la théorie des jeux, la théorie de Lyapunov (les LMIs) et d'autres, dans [Sha90, Fu91, NK91, YS91b, YS91a, ST92a, ST92b, YS92b, SK94, HSK96b, HSK96c, HSK96a, DZ97, PP98, XFL98, BM99, KSH00, HK01]. Le filtrage robuste d'ordre plein pour les systèmes linéaires incertains, avec un critère de type  $\mathcal{H}_\infty$ , est abordé dans [XdF91, FdX92, PM94, XS94, XSd94, PM96, TS96, LF97, Ger99, GB99, WB99, PP00, EC01, Say01]. Dans [XdS94], Xie *et al.* ont proposé un filtre robuste d'ordre plein lorsque le système incertain à observer est instable.

L'application de la technique du filtrage au sens  $\mathcal{H}_\infty$  pour les systèmes stochastiques a pris beaucoup d'importance dans les deux dernières décennies [Mao97, DS98, Ugr98, HP98, CGS00, GLSY01, SP02, GMP02, Sto02, XC03, ZC05].

La plupart des articles cités ci-dessus traitent le cas des systèmes stochastiques avec un bruit multiplicatif dont la dynamique est donnée par

$$dx(t) = (A_{t_0}x(t) + B_0v(t))dt + (A_{w_0}x(t) + B_wv(t))dw(t).$$

Dans ce chapitre, nous allons présenter le filtrage d'ordre plein pour différentes classes de systèmes stochastiques par ordre croissant de complexité du système.

La section 2.2 traite le filtrage des systèmes décrits par l'EDS précédente avec des mesures données par

$$y(t) = Cx(t).$$

Dans la section 2.3, (voir [SRZ<sup>+</sup>05]), le système considéré présente une bilinéarité état-commande dans la dérive de la dynamique de l'état et est sous la forme

$$\begin{aligned} dx(t) &= (A_{t_0}x(t) + u_1(t)A_{t_1}x(t) + B_0v(t))dt + (A_{w_0}x(t) + B_wv(t))dw(t) \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned}$$

Le filtrage  $\mathcal{H}_\infty$  d'ordre plein pour ce système est étudié dans le cas où il y a  $m$  bilinéarités état-commande dans la dérive de la dynamique de l'état, c'est-à-dire pour un système de la forme

$$\begin{aligned} dx(t) &= \left( A_{t_0}x(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t)A_{t_i}x(t) + B_0v(t) \right) dt + (A_{w_0}x(t) + B_wv(t)) dw(t) \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned}$$

Dans la section 2.4, (voir [HRZS06]), le système considéré présente la même bilinéarité état-commande que celui de la section 2.3, de plus, une bilinéarité état-commande est présente dans la partie diffusion de la dynamique de l'état

$$\begin{aligned} dx(t) &= (A_{t_0}x(t) + u_1(t)A_{t_1}x(t) + B_0v(t))dt + A_{w_0}x(t)dw_0(t) + u_1(t)A_{w_1}x(t)dw_1(t) \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned}$$

Enfin la section 2.5, (voir [HRSZ05]), concerne un système présentant une bilinéarité état-commande dans la dérive et dont la mesure et l'état sont corrompus par des bruits multiplicatifs

$$\begin{aligned} dx(t) &= (A_{t_0}x(t) + u_1(t)A_{t_1}x(t) + B_0v(t))dt + A_{w_0}x(t)dw_0(t) \\ dy(t) &= Cx(t)dt + J_1x(t)dw_1(t). \end{aligned}$$

L'approche utilisée pour traiter les systèmes bilinéaires est basée sur un changement de variable qui transforme la bilinéarité état-commande en une incertitude paramétrique. Puis, en utilisant la formule d'Itô et des lemmes de majoration sur le système devenu "incertain", nous arrivons à écrire une LMI couplée à une contrainte égalité qui garantit la stabilité exponentielle en moyenne quadratique et la performance  $\mathcal{H}_\infty$  des systèmes. La résolution de ces LMIs couplées à une contrainte égalité nous permettent de trouver les différentes matrices du filtre. Un exemple illustratif est présenté pour chaque cas traité.

## 2.2 Filtrage des systèmes stochastiques sans commande

### 2.2.1 Formulation du problème

Considérons le système stochastique suivant, dans lequel  $f(x(t), v(t))$  et  $g(x(t), v(t))$  de l'équation (1.2) sont linéaires

$$dx(t) = (A_{t_0}x(t) + B_0v(t))dt + (A_{w_0}x(t) + B_wv(t))dw(t) \quad (2.1a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.1b)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie et  $v(t) \in \mathbb{R}^q$  représente les perturbations exogènes.  $w(t)$  est un processus de Wiener scalaire centré qui vérifie (1.5).

**Hypothèse 2.2.1.** *Nous supposons que le système stochastique (2.1a) avec  $v(t) \equiv 0$  est exponentiellement stable en moyenne quadratique.*

**Problème 2.2.1.** *Le but est de construire un filtre d'ordre plein pour le système (2.1) de la forme suivante*

$$d\hat{x}(t) = A_{t_0}\hat{x}(t)dt + K_0(y(t) - C\hat{x}(t))dt \quad (2.2)$$

où  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'estimation du vecteur d'état et  $K_0$  est un gain matriciel à déterminer afin que l'erreur d'estimation  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  soit exponentiellement stable en moyenne quadratique (voir définition 1.4.12) et que, pour un réel  $\gamma > 0$  donné, la performance  $\mathcal{H}_\infty$  suivante

$$\|e(t)\|_{\hat{L}_2}^2 \leq \gamma \|v(t)\|_{\hat{L}_2}^2 \quad (2.3)$$

soit vérifiée.

La dynamique de l'erreur est alors donnée par

$$de(t) = (A_{t_0} - K_0C)e(t)dt + B_0v(t)dt + (A_{w_0}x(t) + B_wv(t))dw(t). \quad (2.4)$$

Considérons maintenant l'état augmenté  $\xi(t)$  composé de l'état  $x(t)$  et du signal d'erreur  $e(t)$

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

A partir de (2.4) et (2.1), le système augmenté s'écrit de la façon suivante

$$d\xi(t) = \left( \hat{A}_{t_0}\xi(t) + \hat{B}_0v(t) \right) dt + \left( \hat{A}_{w_0}\xi(t) + \hat{B}_wv(t) \right) dw(t) \quad (2.6a)$$

$$e(t) = \hat{C}\xi(t) \quad (2.6b)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{A}_{t_0} &= \begin{bmatrix} A_{t_0} & 0 \\ 0 & A_{t_0} - K_0C \end{bmatrix}, & \hat{B}_0 &= \begin{bmatrix} B_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \\ \hat{A}_{w_0} &= \begin{bmatrix} A_{w_0} & 0 \\ A_{w_0} & 0 \end{bmatrix}, & \hat{B}_w &= \begin{bmatrix} B_w \\ B_w \end{bmatrix}, & \hat{C} &= \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## 2.2.2 Synthèse du filtre et performance $\mathcal{H}_\infty$

Le théorème suivant garantit la stabilité en moyenne quadratique et la performance  $\mathcal{H}_\infty$  du système (2.6).

**Théorème 2.2.1 (La stabilité et la performance  $\mathcal{H}_\infty$ ).** *Le problème 2.2.1 du filtrage  $\mathcal{H}_\infty$  est résolu pour le système (2.1) avec le filtre (2.2) tel que la dynamique de l'erreur (2.4) soit exponentiellement stable en moyenne quadratique si, pour un réel  $\gamma > 0$  donné, il existe des matrices  $P_1 = P_1^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_2 = P_2^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_{20} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  et  $Y_{30} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  telles que la LMI suivante soit vérifiée*

$$\begin{bmatrix}
 P_1 A_{t0} + A_{t0}^T P_1 & P_3 A_{t0} + A_{t0}^T P_3 - Y_{30} C \\
 P_3^T A_{t0}^T + P_3^T A_{t0} - C^T Y_{30}^T & P_2 A_{t0} - Y_{20} C + A_{t0}^T P_2 - C^T Y_{20}^T + I_n \\
 B_0^T (P_1 + P_3^T) & B_0^T (P_3 + P_2) \\
 (P_1 + P_3) A_{w0} & 0 \\
 (P_3^T + P_2) A_{w0} & 0 \\
 (P_1 + P_3) B_0 & A_{w0}^T (P_1 + P_3^T) & A_{w0}^T (P_3 + P_2) \\
 (P_3^T + P_2) B_0 & 0 & 0 \\
 -\gamma^2 I_q & B_w^T (P_1 + P_3^T) & B_w^T (P_3 + P_2) \\
 (P_1 + P_3) B_w & -P_1 & -P_3 \\
 (P_3^T + P_2) B_w & -P_3^T & -P_2
 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.7)$$

et que le gain  $K_0$  soit la solution de l'équation suivante

$$\begin{bmatrix} Y_{20} \\ Y_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} K_0. \quad (2.8)$$

*Démonstration.* En appliquant le LBRS du théorème 1.6.2 au système augmenté (2.6), nous obtenons la LMI suivante

$$\begin{bmatrix}
 \mathcal{P} \hat{A}_{t0} + \hat{A}_{t0}^T \mathcal{P} + \hat{C}^T \hat{C} & \mathcal{P} \hat{B}_0 & \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P} \\
 \hat{B}_0^T \mathcal{P} & -\gamma^2 I_q & \hat{B}_w^T \mathcal{P} \\
 \mathcal{P} \hat{A}_{w0} & \mathcal{P} \hat{B}_w & -\mathcal{P}
 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.9)$$

avec

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3^T & P_2 \end{bmatrix} > 0. \quad (2.10)$$

Il suffit de remplacer les matrices du système augmenté (2.6) par leur expression pour trouver la LMI (2.7) du théorème 2.2.1.  $\bullet$

### 2.2.3 Traitement de la non convexité du problème

La solution de la LMI (2.7) avec la contrainte (2.8) est un problème non convexe<sup>9</sup>. Une solution  $K_0$  à la relation (2.8) existe si et seulement si la condition du rang suivante est vérifiée

$$\text{rang} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} Y_{20} & P_2 \\ Y_{30} & P_3 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

<sup>9</sup>Une fonction  $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$  où  $A \subset \mathbb{R}^n$  est convexe si

$$f((1 - \alpha)x + \alpha y) \leq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y), \quad \forall \alpha \in [0, 1], \text{ et } \forall x, y \in A.$$



Alors, pour obtenir des solutions à la LMI (2.7) qui satisfont la contrainte (2.8), on applique un algorithme itératif qui consiste à résoudre la LMI (2.7) de manière itérative en testant la condition de rang (2.11) à chaque étape.

**Algorithme 2.1 (Algorithme de relaxation).** *Les différentes étapes de l'algorithme sont*

- (Étape 1) résoudre la LMI (2.7) avec  $P_1, P_2, P_3, Y_{20}$  et  $Y_{30}$  comme variables,
- (Étape 2) tester la condition de rang (2.11)
  - si la condition (2.11) est vérifiée  $\implies$  fin de l'algorithme,
  - sinon aller à l'étape suivante,
- (Étape 3) résoudre la LMI (2.7) avec  $P_1, P_2$  et  $P_3$  comme variables,  $Y_{20}$  et  $Y_{30}$  étant fixes et obtenues à l'étape 1,
- (Étape 4) tester la condition de rang (2.11)
  - si la condition (2.11) est vérifiée  $\implies$  fin de l'algorithme,
  - sinon aller à l'étape suivante,
- (Étape 5) résoudre la LMI (2.7) avec  $P_1, Y_{20}$  et  $Y_{30}$  comme variables,  $P_2$  et  $P_3$  étant fixes et obtenues à l'étape 3,
- (Étape 6) tester la condition de rang (2.11)
  - si la condition (2.11) est vérifiée  $\implies$  fin de l'algorithme,
  - sinon aller à l'étape suivante,
- (Étape 7) si le nombre d'itérations est inférieur à un nombre  $N$  fixé par l'utilisateur, aller à l'étape 3,
- (Étape 8) si le nombre d'itérations est supérieur ou égal à  $N \implies$  l'algorithme ne converge pas.

*Remarque 2.2.1.* La solution de l'équation (2.8) devient un problème convexe dans le cas où  $P_3 = 0$ , c'est-à-dire dans le cas où la matrice  $\mathcal{P}$  est une matrice bloc-diagonale, car la matrice  $P_2$  est inversible. Dans ce cas, l'équation (2.8) devient

$$Y_{20} = P_2 K_0 \tag{2.12}$$

et le gain  $K_0$  est obtenu directement. □

## 2.2.4 Exemple numérique

Considérons le système (2.1). Les différentes matrices de ce système ont les valeurs suivantes

$$A_{t_0} = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 & -1 \\ 0.5 & -2.5 & 1 \\ 0 & -0.6 & -3.5 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.3 \\ -1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$A_{w0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0 \\ -0.6 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les conditions initiales sont

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Avec le théorème 2.2.1, la solution de la LMI (2.7) est obtenue pour  $\gamma = 2.279$  et le gain  $K_0$  est calculé de la relation (2.8)

$$K_0 = \begin{bmatrix} -7.2510 & 6.2417 \\ -7.6428 & 3.6170 \\ -7.0580 & 5.5010 \end{bmatrix}.$$

Ce calcul a été fait avec une matrice  $\mathcal{P}$  bloc-diagonale de la forme

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}.$$

Les figures suivantes montrent la simulation du système augmenté (2.6). Nous pouvons voir l'évolution de l'état  $x(t)$  (figure 2.1) et l'évolution du signal d'erreur  $e(t)$  et du signal de perturbation  $v(t)$  (figure 2.2).

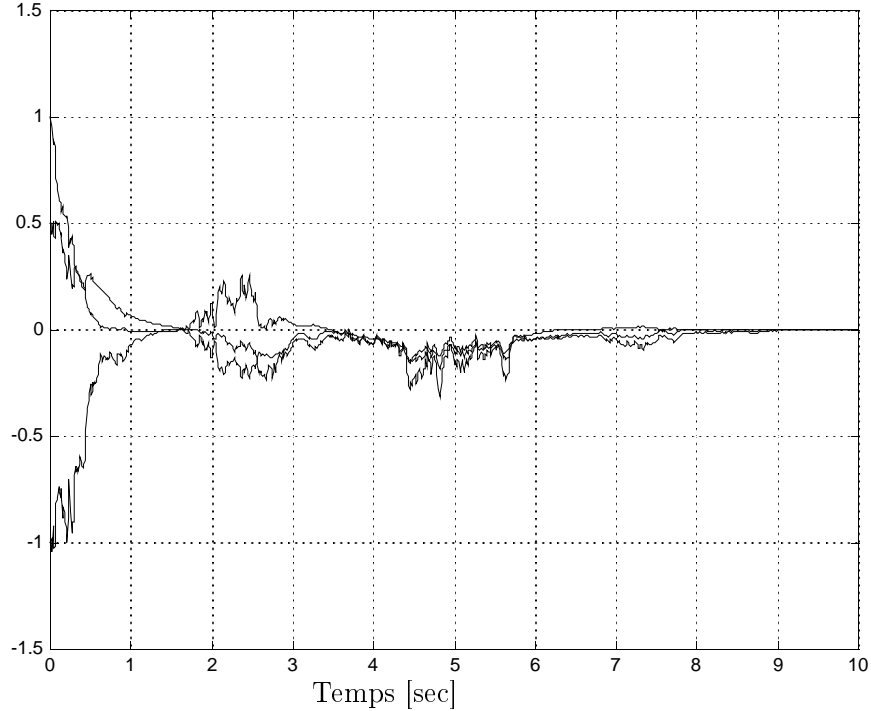


FIG. 2.1 – L'état  $x(t)$ .

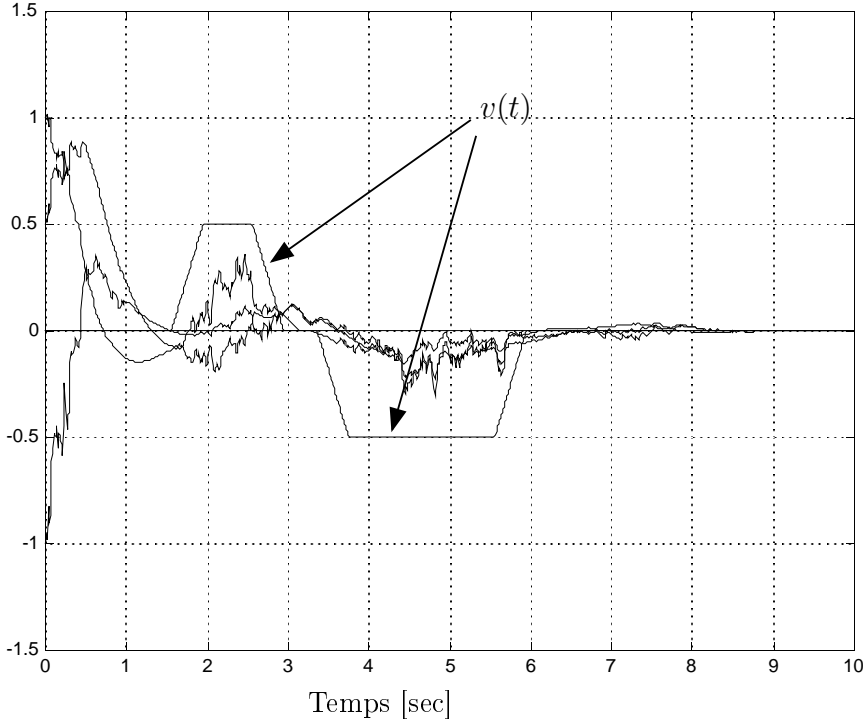


FIG. 2.2 – Le signal d'erreur  $e(t)$  et le signal de perturbation  $v(t)$ .

## 2.3 Filtrage des systèmes stochastiques avec commande

### 2.3.1 Filtrage des systèmes stochastiques avec une commande

#### 2.3.1.1 Formulation du problème

Considérons le système stochastique suivant, dans lequel  $f(x(t), u(t), v(t))$  de l'équation (1.2) est bilinéaire et  $g(x(t), v(t))$  de l'équation (1.2) est linéaire

$$dx(t) = (A_{t0}x(t) + u_1(t)A_{t1}x(t) + B_0v(t))dt + (A_{w0}x(t) + B_wv(t))dw(t) \quad (2.13a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.13b)$$

avec  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état du système,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de sortie,  $v(t) \in \mathbb{R}^q$  les perturbations exogènes et  $u_1(t) \in \mathbb{R}$  une commande scalaire.  $w(t)$  est un processus de Wiener scalaire centré qui vérifie (1.5).

On suppose que la commande  $u_1(t)$  dans le système (2.13), est une commande appartenant à l'ensemble  $\Gamma$  suivant

$$\Gamma = \{u_1(t) \in \mathbb{R} \mid u_{1\min} \leq u_1(t) \leq u_{1\max}\}. \quad (2.14)$$

**Hypothèse 2.3.1.** Nous supposons que le système stochastique (2.13) avec  $v(t) \equiv 0$  est exponentiellement stable en moyenne quadratique (voir définition 1.4.12)  $\forall u_1(t) \in \Gamma$ .

**Problème 2.3.1.** *Le problème à résoudre est de construire un filtre d'ordre plein pour le système (2.13) de la forme suivante*

$$d\hat{x}(t) = (A_{t_0}\hat{x}(t) + u_1(t)A_{t_1}\hat{x}(t))dt + K_0(y(t) - C\hat{x}(t))dt + u_1(t)K_1(y(t) - C\hat{x}(t))dt \quad (2.15)$$

où  $K_0$  et  $K_1$  sont des gains matriciels à déterminer tels que l'erreur  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  soit exponentiellement stable en moyenne quadratique et que, pour un réel  $\gamma > 0$  donné, la performance  $\mathcal{H}_\infty$  suivante

$$\|e(t)\|_{L_2}^2 \leq \gamma \|v(t)\|_{L_2}^2 \quad (2.16)$$

soit vérifiée.

La dynamique de l'erreur est alors donnée par

$$de(t) = dx(t) - d\hat{x}(t) = (A_{t_0} + u_1(t)A_{t_1} - K_0C - u_1(t)K_1C)e(t)dt + B_0v(t)dt + (A_{w0}x(t) + B_wv(t))dw(t). \quad (2.17)$$

Considérons le vecteur d'état augmenté suivant

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

La dynamique du système augmenté (2.13) et (2.17) est donnée par

$$d\xi(t) = (\mathcal{A}_{t_0}\xi(t) + u_1(t)\mathcal{A}_{t_1}\xi(t) + \mathcal{B}_0v(t))dt + (\mathcal{A}_{w0}\xi(t) + \mathcal{B}_wv(t))dw(t) \quad (2.19a)$$

$$e(t) = \mathcal{C}\xi(t) \quad (2.19b)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ti} &= \begin{bmatrix} A_{ti} & 0 \\ 0 & A_{ti} - K_iC \end{bmatrix}, & \text{pour } i = 0, 1, & \mathcal{B}_0 &= \begin{bmatrix} B_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A}_{w0} &= \begin{bmatrix} A_{w0} & 0 \\ A_{w0} & 0 \end{bmatrix}, & \mathcal{B}_w &= \begin{bmatrix} B_w \\ B_w \end{bmatrix}, & \mathcal{C} &= \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 2.3.1.2 Passage du système stochastique avec une commande vers un système avec incertitudes paramétriques

Pour étudier la stabilité, nous allons faire le changement de variable suivant sur la commande  $u_1(t)$

$$u_1(t) = \alpha_1 + \sigma_1 \varepsilon_1(t) \quad (2.20)$$

où  $\alpha_1 \in \mathbb{R}$  et  $\sigma_1 \in \mathbb{R}$  sont donnés par

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(u_{1\min} + u_{1\max}), \quad \sigma_1 = \frac{1}{2}(u_{1\max} - u_{1\min}). \quad (2.21)$$

La nouvelle variable  $\varepsilon_1(t)$  est définie par  $\varepsilon_1(t) \in \bar{\Gamma} \subset \mathbb{R}$  où  $\bar{\Gamma}$  est défini par

$$\bar{\Gamma} = \{\varepsilon_1(t) \in \mathbb{R} \mid \varepsilon_{1\min} = -1 \leq \varepsilon_1(t) \leq \varepsilon_{1\max} = 1\}. \quad (2.22)$$

Le système augmenté (2.19) peut être réécrit sous la forme suivante après avoir remplacé  $u_1(t) = \alpha_1 + \sigma_1 \varepsilon_1(t)$

$$d\xi(t) = \left( (\hat{A}_{t0} + \Delta \hat{A}_{t0}(t))\xi(t) + \hat{B}_0 v(t) \right) dt + \left( \hat{A}_{w0}\xi(t) + \hat{B}_w v(t) \right) dw(t) \quad (2.23a)$$

$$e(t) = \hat{C}\xi(t) \quad (2.23b)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{A}_{t0} &= \mathcal{A}_{t0} + \alpha_1 \mathcal{A}_{t1}, & \Delta \hat{A}_{t0}(t) &= H_1 \Delta_\xi(\varepsilon_1(t)) H, & \hat{B}_0 &= \mathcal{B}_0, \\ \hat{A}_{w0} &= \mathcal{A}_{w0}, & \hat{B}_w &= \mathcal{B}_w, & \hat{C} &= \mathcal{C}, \end{aligned}$$

avec

$$H_1 = \sigma_1 \mathcal{A}_{t1}, \quad \Delta_\xi(\varepsilon_1(t)) = \varepsilon_1(t) I_{2n} \quad \text{et} \quad H = I_{2n}.$$

Notons, qu'à partir de (2.22),  $\Delta_\xi(\varepsilon_1(t))$  vérifie

$$\|\Delta_\xi(\varepsilon_1(t))\| \leq 1. \quad (2.24)$$

**Lemme 2.3.1.** *La stabilité exponentielle en moyenne quadratique du système (2.13) est équivalente à la stabilité exponentielle robuste stochastique du système (2.23).*

### 2.3.1.3 Synthèse du filtre et performance $\mathcal{H}_\infty$

Le théorème suivant garantit la stabilité en moyenne quadratique et la performance  $\mathcal{H}_\infty$  du système (2.23).

**Théorème 2.3.1 (La stabilité et la performance  $\mathcal{H}_\infty$ ).** *Le problème 2.3.1 du filtrage  $\mathcal{H}_\infty$  stochastique est résolu pour le système (2.13) avec le filtre (2.15) tel que la dynamique de l'erreur (2.17) soit exponentiellement stable en moyenne quadratique si, pour un réel  $\gamma > 0$  donné, il existe un réel  $\mu > 0$  et des matrices  $P_1 = P_1^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_2 = P_2^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_{20} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $Y_{21} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $Y_{30} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  et  $Y_{31} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  tels que la LMI suivante soit vérifiée*

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (P_1 + P_3)B_0 & \sigma_1 P_1 A_{t1} \\ (1,2)^T & (2,2) & (P_3^T + P_2)B_0 & \sigma_1 P_3^T A_{t1} \\ B_0^T(P_1 + P_3^T) & B_0^T(P_3 + P_2) & -\gamma^2 I_q & 0 \\ \sigma_1 A_{t1}^T P_1 & \sigma_1 A_{t1}^T P_3 & 0 & -\mu I_n \\ \sigma_1(A_{t1}^T P_3^T - C^T Y_{31}^T) & \sigma_1(A_{t1}^T P_2 - C^T Y_{21}^T) & 0 & 0 \\ (P_1 + P_3)A_{w0} & 0 & (P_1 + P_3)B_w & 0 \\ (P_3^T + P_2)A_{w0} & 0 & (P_3^T + P_2)B_w & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1(P_3 A_{t1} - Y_{31} C) & A_{w0}^T (P_1 + P_3^T) & A_{w0}^T (P_3 + P_2) \\ \sigma_1(P_2 A_{t1} - Y_{21} C) & 0 & 0 \\ 0 & B_w^T (P_1 + P_3^T) & B_w^T (P_3 + P_2) \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mu I_n & 0 & 0 \\ 0 & -P_1 & -P_3 \\ 0 & -P_3^T & -P_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.25)$$

où

$$\begin{aligned} (1, 1) &= P_1(A_{t0} + \alpha_1 A_{t1}) + (A_{t0} + \alpha_1 A_{t1})^T P_1 + \mu I_n, \\ (1, 2) &= P_3(A_{t0} + \alpha_1 A_{t1}) + (A_{t0} + \alpha_1 A_{t1})^T P_3 - Y_{30} C - \alpha_1 Y_{31} C, \\ (2, 2) &= P_2(A_{t0} + \alpha_1 A_{t1}) + (A_{t0} + \alpha_1 A_{t1})^T P_2 - Y_{20} C - C^T Y_{20}^T \\ &\quad - \alpha_1 (Y_{21} C + C^T Y_{21}^T) + (\mu + 1) I_n, \end{aligned}$$

et que les gains matriciels  $K_0$  et  $K_1$  soient solution de l'équation suivante

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_0 & K_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{20} & Y_{21} \\ Y_{30} & Y_{31} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

*Démonstration.* Nous allons commencer par démontrer la stabilité du système (2.23) pour  $v(t) \equiv 0$ .

Considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V(\xi(t)) = \xi^T(t) \mathcal{P} \xi(t), \quad (2.27)$$

avec la matrice de Lyapunov suivante

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^T = \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3^T & P_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \text{où} \quad P_i \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.28)$$

En appliquant la formule d'Itô sur le système (2.23) (voir théorème 1.3.1), nous avons

$$dV(\xi(t)) = \mathcal{L}V(\xi(t))dt + 2\xi^T(t) \mathcal{P} \hat{A}_{w0} \xi(t)dw(t) \quad (2.29)$$

avec

$$\mathcal{L}V(\xi(t)) = \xi^T(t) \left( \mathcal{P} \hat{A}_{t0} + \hat{A}_{t0}^T \mathcal{P} + \mathcal{P} \Delta \hat{A}_{t0}(t) + \Delta \hat{A}_{t0}(t)^T \mathcal{P} + \hat{A}_{w0} \mathcal{P} \hat{A}_{w0} \right) \xi(t). \quad (2.30)$$

En utilisant le lemme de majoration (voir annexe B lemme B.1.1), nous avons

$$2\xi^T(t) \mathcal{P} \Delta \hat{A}_{t0}(t) \xi(t) \leq \xi^T(t) (\mu + \mu^{-1} \mathcal{P} \sigma_1 \mathcal{A}_{t1} \mathcal{A}_{t1}^T \sigma_1 \mathcal{P}) \xi(t), \quad (2.31)$$

d'où

$$\begin{aligned} dV(\xi(t)) \leq & \xi^T(t) \left( \mathcal{P}\hat{A}_{t0} + \hat{A}_{t0}^T \mathcal{P} + \mu I_{2n} + \mu^{-1} \mathcal{P} \sigma_1 \mathcal{A}_{t1} \mathcal{A}_{t1}^T \sigma_1 \mathcal{P} + \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P} \hat{A}_{w0} \right) \xi(t) dt \\ & + 2\xi^T(t) \mathcal{P} \hat{A}_{w0} \xi(t) dw(t). \end{aligned} \quad (2.32)$$

En prenant l'espérance des deux côtés de l'équation (2.32), nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{dV(\xi(t))\} \leq & \mathbf{E} \left\{ \xi^T(t) \left( \mathcal{P}\hat{A}_{t0} + \hat{A}_{t0}^T \mathcal{P} + \mu I_{2n} + \mu^{-1} \mathcal{P} \sigma_1 \mathcal{A}_{t1} \mathcal{A}_{t1}^T \sigma_1 \mathcal{P} + \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P} \hat{A}_{w0} \right) \xi(t) dt \right\} \\ & + \underbrace{\mathbf{E} \left\{ 2\xi^T(t) \mathcal{P} \hat{A}_{w0} \xi(t) dw(t) \right\}}_{=0}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

le terme de droite de l'inégalité (2.33) est nul, grâce à la relation (1.5).

En appliquant le lemme du Schur (voir annexe B lemme B.2.1) sur la LMI (2.25) du théorème 2.3.1, si cette LMI est vérifiée, nous avons

$$\mathcal{P}\hat{A}_{t0} + \hat{A}_{t0}^T \mathcal{P} + \mu H^T H + \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P} \hat{A}_{w0} + \mu^{-1} \mathcal{P} H_1 H_1^T \mathcal{P} = -\mathcal{K} < 0. \quad (2.34)$$

Puisque  $\lambda_{\min}(\mathcal{K}) > 0$ , où  $\lambda_{\min}$  est la plus petite valeur propre de la matrice  $\mathcal{K}$ , la relation (2.33) devient

$$\mathbf{E} \{dV(\xi(t))\} \leq -\lambda_{\min}(\mathcal{K}) \mathbf{E} \left\{ \|\xi(t)\|^2 \right\} dt. \quad (2.35)$$

Soit  $\beta > 0$  donné par (voir [MKR98] équation (2.3))

$$\beta = \frac{\lambda_{\min}(\mathcal{K})}{\lambda_{\max}(\mathcal{P})}, \quad (2.36)$$

et en utilisant l'intégration par parties, nous avons

$$d(e^{\beta t} V(\xi(t))) = e^{\beta t} (\beta V(\xi(t)) dt + dV(\xi(t))) \quad (2.37)$$

or, d'après (2.32) et en utilisant  $V(\xi(t)) = \xi^T(t) \mathcal{P} \xi(t) \leq \lambda_{\max}(\mathcal{P}) \|\xi(t)\|^2$ , nous avons

$$dV(\xi(t)) \leq e^{\beta t} (\beta \lambda_{\max}(\mathcal{P}) - \lambda_{\min}(\mathcal{K})) \|\xi(t)\|^2 + 2\xi^T(t) \mathcal{P} \hat{A}_{w0} \xi(t) dw(t). \quad (2.38)$$

qui est équivalent à

$$dV(\xi(t)) \leq 2\xi^T(t) \mathcal{P} \hat{A}_{w0} \xi(t) dw(t), \quad (2.39)$$

car selon la valeur de  $\beta$  donnée par (2.36), nous avons

$$\beta \lambda_{\max}(\mathcal{P}) - \lambda_{\min}(\mathcal{K}) = 0, \quad (2.40)$$

et donc en prenant l'espérance des deux côtés de la relation (2.39), nous avons

$$\mathbf{E} \left\{ d \left( e^{\beta t} V(\xi(t)) \right) \right\} \leq 0. \quad (2.41)$$

En intégrant de 0 à  $t > 0$  l'équation (2.41) et en utilisant le théorème de Fubini [Che85], nous avons

$$e^{\beta t} \mathbf{E} \left\{ \xi^T(t) \mathcal{P} \xi(t) \right\} \leq e^{\beta \times 0} \mathbf{E} \left\{ \xi^T(0) \mathcal{P} \xi(0) \right\} \quad (2.42)$$

qui peut être réécrite comme

$$\lambda_{\min}(\mathcal{P}) \mathbf{E} \left\{ \|\xi(t)\|^2 \right\} \leq \mathbf{E} \left\{ \xi^T(t) \mathcal{P} \xi(t) \right\} \leq c e^{-\beta t} \quad (2.43)$$

où  $c = \mathbf{E} \left\{ \xi^T(0) \mathcal{P} \xi(0) \right\}$  est une constante positive bornée.

Finalement, de l'inégalité (2.43) on peut déduire que

$$\mathbf{E} \left\{ \|\xi(t)\|^2 \right\} \leq \frac{c}{\lambda_{\min}(\mathcal{P})} e^{-\beta t} \quad (2.44)$$

ce qui assure la stabilité exponentielle en moyenne quadratique du système (2.23).

Maintenant, nous allons étudier les performances  $\mathcal{H}_\infty$  du système (2.23) avec  $v(t) \neq 0$  et  $x(0) = 0$  car ces performances ne sont fonction que de la perturbation  $v(t)$ , mais pas de la condition initiale  $x(0)$ .

On considère l'indice de performance suivant

$$J_{\xi v} = \mathbf{E} \left\{ \int_0^\infty \left( \xi^T(t) \widehat{C}^T \widehat{C} \xi(t) - \gamma^2 v^T(t) v(t) \right) dt \right\}. \quad (2.45)$$

En appliquant la formule d'Itô au système (2.23) nous avons

$$dV(\xi(t)) = \mathcal{L}V(\xi(t))dt + 2\xi^T(t) \mathcal{P} (\widehat{A}_{w0}\xi(t) + \widehat{B}_w v(t)) dw(t) \quad (2.46)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(\xi(t)) = & 2\xi^T(t) \mathcal{P} \left( \widehat{A}_{t0} + \Delta \widehat{A}_{t0}(t) + \widehat{B}_0 v(t) \right) \\ & + \left( \widehat{A}_{w0}\xi(t) + \widehat{B}_w v(t) \right)^T \mathcal{P} \left( \widehat{A}_{w0}\xi(t) + \widehat{B}_w v(t) \right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ecrivons  $J_{\xi v}$  en utilisant le théorème de Fubini [Che85]

$$\begin{aligned} J_{\xi v} = & \int_0^\infty \mathbf{E} \left\{ \left( \xi^T(t) \widehat{C}^T \widehat{C} \xi(t) - \gamma^2 v^T(t) v(t) \right) dt \right. \\ & \left. + \mathcal{L}V(\xi(t))dt \right\} - \mathbf{E} \{ V(\xi(t)) \}_{t=\infty} + \mathbf{E} \{ V(\xi(t)) \}_{t=0}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Or, comme  $\mathbf{E} \{ V(\xi(t)) \}_{t=0} = 0$  car  $\xi(0) = 0$  et  $\mathbf{E} \{ V(\xi(t)) \}_{t=\infty} \geq 0$ , ceci implique

$$J_{\xi v} \leq \int_0^\infty \mathbf{E} \left\{ \left( \xi^T(t) \widehat{C}^T \widehat{C} \xi(t) - \gamma^2 v^T(t) v(t) \right) dt + \mathcal{L}V(\xi(t))dt \right\}. \quad (2.49)$$



Maintenant considérons que la LMI (2.25) est vérifiée. On va montrer qu'elle est suffisante pour assurer la stabilité et la performance  $\mathcal{H}_\infty$  de (2.23).

En appliquant le lemme de Schur (voir annexe B lemme B.2.1) sur la LMI (2.25), on a

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Theta & \mathcal{P}\hat{B}_0 + \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P}\hat{B}_w \\ \hat{B}_0^T \mathcal{P} + \hat{B}_w^T \mathcal{P}\hat{A}_{w0} & \hat{B}_w^T \mathcal{P}\hat{B}_w \end{bmatrix}}_{\Xi} + \begin{bmatrix} I_{2n} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.50)$$

avec

$$\Theta = \mathcal{P}\hat{A}_{t0} + \hat{A}_{t0}^T \mathcal{P} + \mu H^T H + \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P}\hat{A}_{w0} + \mu^{-1} \mathcal{P}H_1 H_1^T \mathcal{P}.$$

Ainsi, l'inégalité (2.49) devient

$$J_{\xi v} \leq \int_0^\infty \mathbf{E} \left\{ \begin{bmatrix} \xi(t)^T & v(t)^T \end{bmatrix} \Xi \begin{bmatrix} \xi(t) \\ v(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \xi(t)^T & v(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C}^T \hat{C} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ v(t) \end{bmatrix} dt \right\} < 0,$$

donc si la LMI (2.25) est vérifiée alors le système (2.23) est stable et vérifie la performance  $\mathcal{H}_\infty$ . •

*Remarque 2.3.1.* La solution donnée par le théorème 2.3.1 est non convexe. Les gains  $K_0$  et  $K_1$  calculés par l'équation (2.26) existent si et seulement si la condition de rang suivante est satisfaite

$$\text{rang} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} Y_{20} & Y_{21} & P_2 \\ Y_{30} & Y_{31} & P_3 \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Pour la résolution de la LMI (2.25), nous appliquons l'algorithme de relaxation 2.1. Dans ce cas, le test de rang est fait sur l'équation (2.51), les variables de l'étape 1 sont remplacées par  $P_1, P_2, P_3, Y_{20}, Y_{21}, Y_{30}$  et  $Y_{31}$ , les variables de l'étape 3 sont remplacées par  $P_1, P_2$  et  $P_3$  avec  $Y_{20}, Y_{21}, Y_{30}$  et  $Y_{31}$  fixes et, finalement, dans l'étape 5, les variables sont remplacées par  $P_1, Y_{20}, Y_{21}, Y_{30}$  et  $Y_{31}$  avec  $P_2$  et  $P_3$  fixes. Ainsi, la remarque 2.2.1 adaptée à ce cas reste valable. □

#### 2.3.1.4 Exemple numérique

Considérons le système (2.13). Les différentes matrices de ce système ont les valeurs suivantes

$$A_{t0} = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 & -1 \\ 0.5 & -2.5 & 1 \\ 0 & -0.6 & -3.5 \end{bmatrix}, \quad A_{t1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.02 & 0.04 \\ 0 & -0.01 & -0.02 \\ 0 & -0.01 & 0.02 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.3 \\ -1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$A_{w0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0 \\ -0.6 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}.$$

La commande  $u_1(t)$  est définie comme dans (2.14), soit

$$u_{1\min} = -7 \leq u_1(t) \leq u_{1\max} = 8,$$

et les conditions initiales sont

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En vertu du théorème 2.3.1 et pour  $\mu = 0.38$ , la solution de la LMI (2.25) est obtenue pour  $\gamma = 1.5$  et les gains  $K_0$  et  $K_1$  sont obtenus à partir de la relation (2.26)

$$K_0 = \begin{bmatrix} 65.290 & 36.329 \\ 21.893 & 25.930 \\ 12.650 & -7.583 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} 1.737 & -1.184 \\ -0.8684 & 0.921 \\ 0.868 & -0.592 \end{bmatrix}.$$

Ce calcul a été effectué à partir d'une matrice  $\mathcal{P}$  bloc-diagonale de la forme

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}.$$

Les figures suivantes montrent la simulation du système augmenté (2.23). Nous pouvons voir l'évolution de l'état  $x(t)$  (figure 2.3) et l'évolution du signal d'erreur  $e(t)$  et du signal de perturbation  $v(t)$  (figure 2.4). Les simulations sont faites avec la commande  $u_1(t) = 0.5 \sin(3t) + 2$ .

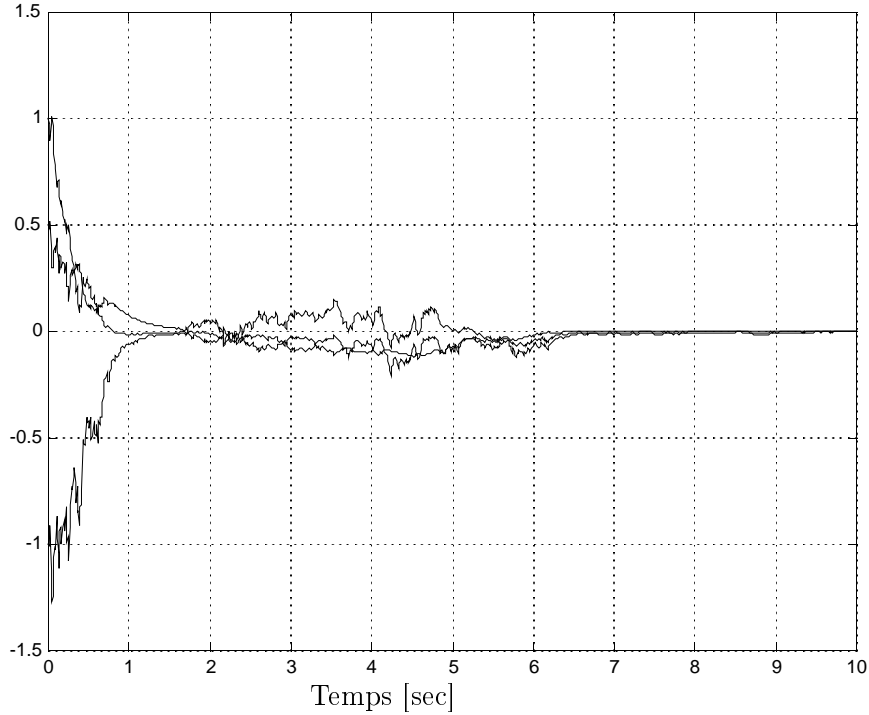


FIG. 2.3 – L'état  $x(t)$ .

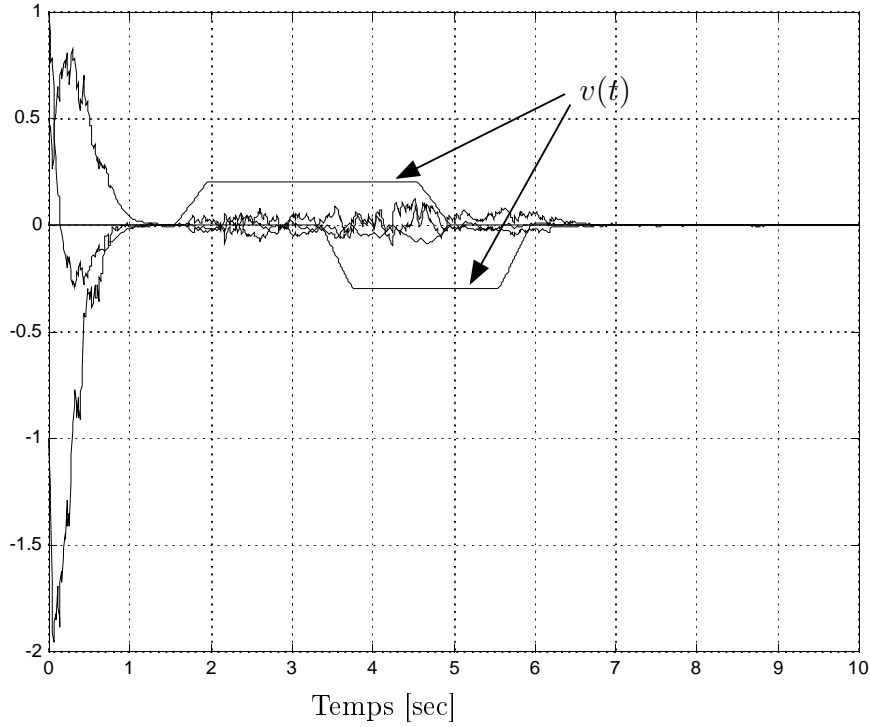


FIG. 2.4 – Le signal d'erreur  $e(t)$  et le signal de perturbation  $v(t)$ .

Nous allons maintenant faire les calculs avec la matrice

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3^T & P_2 \end{bmatrix}.$$

En appliquant l'algorithme 2.1 nous avons :

**(Etape 1)** la résolution de la LMI (2.25), avec  $P_1, P_2, P_3, Y_{20}, Y_{21}, Y_{30}$  et  $Y_{31}$  comme variables, donne

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{bmatrix} 1.0970 & 0.3567 & -0.1458 \\ 0.3567 & 0.7714 & 0.0047 \\ -0.1458 & 0.0047 & 0.5049 \end{bmatrix}, & P_2 &= \begin{bmatrix} 1.1114 & 0.2953 & -0.1536 \\ 0.2953 & 1.0213 & 0.2486 \\ -0.1536 & 0.2486 & 1.4391 \end{bmatrix}, \\ P_3 &= \begin{bmatrix} -0.6381 & -0.4891 & 0.0304 \\ -0.4724 & -0.4532 & 0.1576 \\ 0.1023 & 0.0511 & -0.4228 \end{bmatrix}, \\ Y_{20} &= \begin{bmatrix} -4.1046 & 2.8417 \\ -6.8163 & 1.2771 \\ -9.3839 & 5.9468 \end{bmatrix}, & Y_{21} &= \begin{bmatrix} 1.5404 & -1.0502 \\ -0.1580 & 0.1078 \\ 0.7671 & -0.5230 \end{bmatrix}, \\ Y_{30} &= \begin{bmatrix} 0.1995 & 3.0860 \\ -1.5742 & 2.9864 \\ 4.7498 & -0.9585 \end{bmatrix}, & Y_{31} &= \begin{bmatrix} -0.3286 & 0.2240 \\ -0.1450 & 0.0989 \\ -0.1169 & 0.0797 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

**(Etape 2)** le test de la condition de rang (2.51) donne

$$\text{rang} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = 3 \neq \text{rang} \begin{bmatrix} Y_{20} & Y_{21} & P_2 \\ Y_{30} & Y_{31} & P_3 \end{bmatrix} = 6,$$

**(Etape 3)** la résolution de la LMI (2.25), avec  $P_1, P_2$  et  $P_3$  comme variables et  $Y_{20}, Y_{21}, Y_{30}$  et  $Y_{31}$  données à l'étape 1, est

$$\begin{aligned} P_1 &= \begin{bmatrix} 2.3525 & 0.6458 & -0.2493 \\ 0.6458 & 1.7317 & 0.0383 \\ -0.2493 & 0.0383 & 1.2335 \end{bmatrix}, & P_2 &= \begin{bmatrix} 1.9761 & 0.4893 & -0.1630 \\ 0.4893 & 1.8715 & 0.0873 \\ -0.1630 & 0.0873 & 2.1908 \end{bmatrix}, \\ P_3 &= \begin{bmatrix} -1.1332 & -0.6271 & 0.2768 \\ -0.8067 & -0.6193 & 0.4583 \\ 0.1605 & 0.1735 & -0.4101 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

**(Etape 4)** le test de la condition de rang (2.51) donne

$$\text{rang} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} Y_{20} & Y_{21} & P_2 \\ Y_{30} & Y_{31} & P_3 \end{bmatrix} = 3, \implies \text{fin et convergence de l'algorithme.}$$

La solution de la LMI (2.25) est obtenue pour  $\gamma = 3$  et pour  $\mu = 0.91$ . Les gains  $K_0$  et  $K_1$  sont calculés de la relation (2.26)

$$K_0 = \begin{bmatrix} -2.4029 & 1.9238 \\ -2.2395 & -2.2236 \\ -7.1523 & 4.7879 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} 1.6322 & -1.1129 \\ -0.9268 & 0.6319 \\ 0.8525 & -0.5813 \end{bmatrix}.$$

Les figures 2.3 et 2.4 deviennent

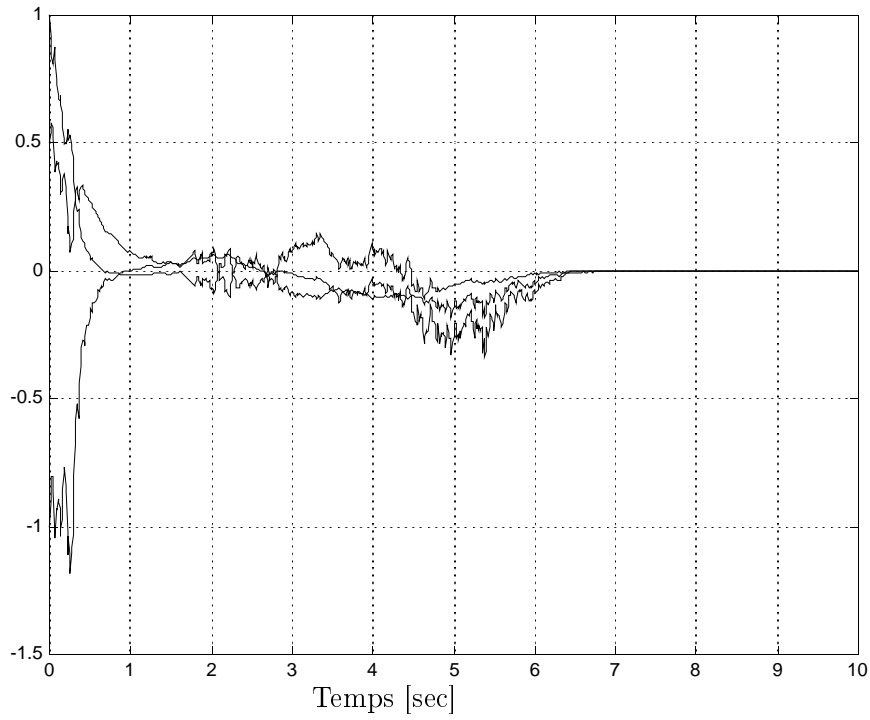


FIG. 2.5 – L'état  $x(t)$ .

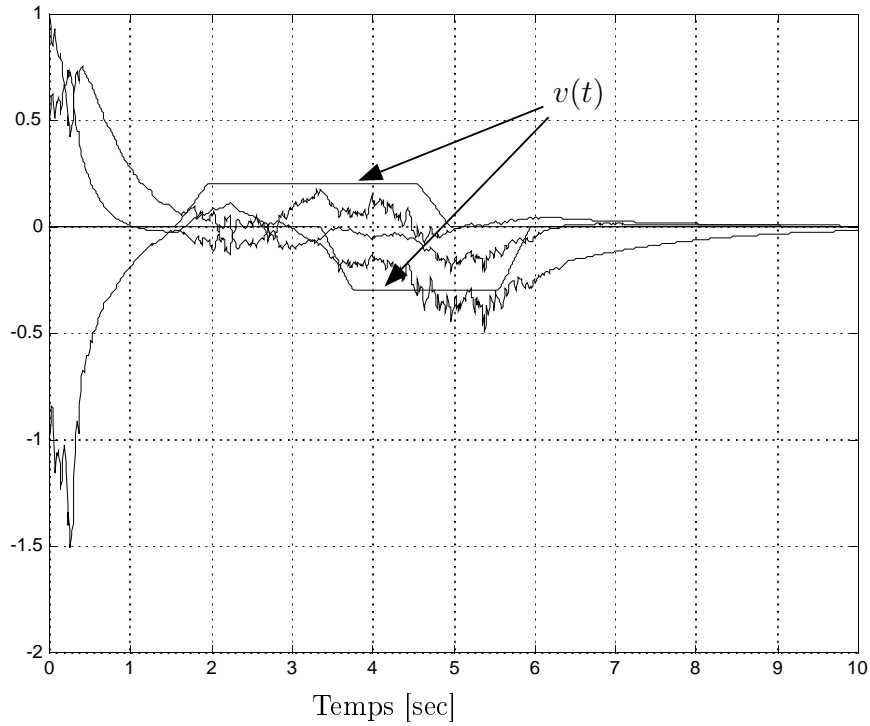


FIG. 2.6 – Le signal d'erreur  $e(t)$  et le signal de perturbation  $v(t)$ .

## 2.3.2 Filtrage des systèmes stochastiques avec $m$ commandes

### 2.3.2.1 Formulation du problème

Considérons le système stochastique suivant, dans lequel  $f(x(t), u(t), v(t))$  de l'équation (1.2) est bilinéaire d'ordre  $m$  et  $g(x(t), v(t))$  de l'équation (1.2) est linéaire

$$dx(t) = \left( A_{t_0}x(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t)A_{ti}x(t) + B_0v(t) \right) dt + (A_{w_0}x(t) + B_wv(t)) dw(t) \quad (2.52a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.52b)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie,  $v(t) \in \mathbb{R}^q$  représente les perturbations exogènes et  $u_i(t) \in \mathbb{R}$  pour  $i = 1, \dots, m$  sont des commandes scalaires.  $w(t)$  est un processus de Wiener scalaire centré qui vérifie (1.5).

On suppose que les commandes  $u_i(t)$  pour  $i = 1, \dots, m$  sont toutes bornées et qu'elles appartiennent à l'ensemble  $\Gamma$  suivant (analogue de (2.14))

$$\Gamma_m = \{u_i(t) \in \mathbb{R} \mid u_{i\min} \leq u_i(t) \leq u_{i\max} \text{ pour } i = 1, \dots, m\}. \quad (2.53)$$

**Hypothèse 2.3.2.** *Nous supposons que le système stochastique (2.52) avec  $v(t) \equiv 0$  est exponentiellement stable en moyenne quadratique.*

**Problème 2.3.2.** *Le problème à résoudre est de construire un filtre d'ordre plein pour le système (2.52) de la forme suivante*

$$d\hat{x}(t) = \left( A_{t_0}\hat{x}(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t)A_{ti}\hat{x}(t) \right) dt + K_0(y(t) - C\hat{x}(t))dt + \sum_{i=1}^m u_i(t)K_i(y(t) - C\hat{x}(t))dt \quad (2.54)$$

où  $K_0, \dots, K_m$  sont des gains matriciels à déterminer tels que l'erreur  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  soit exponentiellement stable en moyenne quadratique et que pour un réel  $\gamma > 0$  donné la performance  $\mathcal{H}_\infty$  suivante

$$\|e(t)\|_{\hat{L}_2}^2 \leq \gamma \|v(t)\|_{L_2}^2 \quad (2.55)$$

soit vérifiée.

La dynamique de l'erreur est alors donnée par

$$de(t) = dx(t) - d\hat{x}(t) = (A_{t_0} - K_0C)e(t)dt + \sum_{i=1}^m u_i(t)(A_{ti} - K_iC)e(t)dt + B_0v(t)dt + (A_{w_0}x(t) + B_wv(t))dw(t). \quad (2.56)$$

Considérons le vecteur d'état augmenté  $\xi(t)$  donné par (2.18). Donc, la dynamique du système augmenté formé par (2.52) et (2.56) est donnée par

$$d\xi(t) = (\mathcal{A}_{t_0}\xi(t) + \mathcal{A}_m\xi(t) + \mathcal{B}_0v(t))dt + (\mathcal{A}_{w_0}\xi(t) + \mathcal{B}_wv(t))dw(t) \quad (2.57a)$$

$$e(t) = \mathcal{C}\xi(t) \quad (2.57b)$$

avec

$$\mathcal{A}_{t_0} = \begin{bmatrix} A_{t_0} & 0 \\ 0 & A_{t_0} - K_0 C \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_m = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m u_i(t) A_{t_i} & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^m u_i(t) (A_{t_i} - K_i C) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}_{w0} = \begin{bmatrix} A_{w0} & 0 \\ A_{w0} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_0 = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_w = \begin{bmatrix} B_w \\ B_w \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix}.$$

### 2.3.2.2 Passage du système stochastique avec $m$ commandes vers un système avec incertitudes paramétriques

Pour étudier la stabilité du système augmenté (2.57), nous allons faire le changement de variable sur les commandes  $u_i(t)$  suivant

$$u_i(t) = \alpha_i + \sigma_i \varepsilon_i(t) \quad (2.58)$$

où  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  et  $\sigma_i \in \mathbb{R}$  pour  $i = 1, \dots, m$  sont donnés par

$$\alpha_i = \frac{1}{2}(u_{i\min} + u_{i\max}), \quad \sigma_i = \frac{1}{2}(u_{i\max} - u_{i\min}), \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.59)$$

et  $\alpha_0 = 1$  et  $\sigma_0 = 0$ .

Les nouvelles variables “incertaines” sont les  $\varepsilon_i(t) \in \bar{\Gamma}_m \subset \mathbb{R}$  où le polytope  $\bar{\Gamma}_m$  est défini par

$$\bar{\Gamma}_m = \{\varepsilon_i(t) \in \mathbb{R} \mid \varepsilon_{i\min} = -1 \leq \varepsilon_i(t) \leq \varepsilon_{i\max} = 1 \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, m\}. \quad (2.60)$$

Donc, le système augmenté (2.57) peut être réécrit sous la forme suivante

$$d\xi(t) = \left( (\hat{A}_{0m} + \Delta \hat{A}_{0m}(t)) \xi(t) + \hat{B}_0 v(t) \right) dt + \left( \hat{A}_{w0} \xi(t) + \hat{B}_w v(t) \right) dw(t) \quad (2.61a)$$

$$e(t) = \hat{C} \xi(t) \quad (2.61b)$$

où

$$\hat{A}_{0m} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^m \alpha_i A_{t_i} & 0 \\ 0 & \sum_{i=0}^m \alpha_i (A_{t_i} - K_i C) \end{bmatrix}, \quad \Delta \hat{A}_{0m}(t) = H_{0m} \Delta_{\xi m}(\varepsilon(t)) H_m,$$

$$\hat{B}_0 = \mathcal{B}_0, \quad \hat{A}_{w0} = \mathcal{A}_{w0}, \quad \hat{B}_w = \mathcal{B}_w, \quad \hat{C} = \mathcal{C},$$

avec

$$H_{0m} = \begin{bmatrix} \sigma_1 A_{t_1} & \cdots & \sigma_m A_{t_m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_1 (A_{t_1} - K_1 C) & \cdots & \sigma_m (A_{t_m} - K_m C) \end{bmatrix}, \quad (2.62a)$$

$$\Delta_{\xi m}(\varepsilon(t)) = \text{bdiag}(\varepsilon_1(t) I_n, \dots, \varepsilon_m(t) I_n, \varepsilon_1(t) I_n, \dots, \varepsilon_m(t) I_n), \quad (2.62b)$$

$$H_m = \begin{bmatrix} I_n & \cdots & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I_n & \cdots & I_n \end{bmatrix}^T. \quad (2.62c)$$

Remarquons que les matrices  $H_{0m}$  et  $H_m^T$  sont de dimensions  $2n \times 2(n \times m)$ .

Notons, qu'à partir de (2.60),  $\Delta_{\xi_m}(\varepsilon(t))$  vérifie

$$\|\Delta_{\xi_m}(\varepsilon(t))\| \leq 1. \quad (2.63)$$

**Lemme 2.3.2.** *La stabilité exponentielle en moyenne quadratique du système (2.52) est équivalente à la stabilité exponentielle robuste stochastique du système (2.61).*

### 2.3.2.3 Synthèse du filtre et performance $\mathcal{H}_\infty$

Le théorème suivant garantit la stabilité en moyenne quadratique et la performance  $\mathcal{H}_\infty$  du système (2.61).

**Théorème 2.3.2 (La stabilité et la performance  $\mathcal{H}_\infty$ ).** *Le problème 2.3.2 du filtrage  $\mathcal{H}_\infty$  stochastique est résolu pour le système (2.52) avec le filtre (2.54) tel que la dynamique de l'erreur (2.56) soit exponentiellement stable en moyenne quadratique si, pour un réel  $\gamma > 0$  donné, il existe un réel  $\mu > 0$  et des matrices  $P_1 = P_1^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_2 = P_2^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Y_{2i} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  et  $Y_{3i} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  pour  $i = 0, \dots, m$  tels que la LMI suivante soit vérifiée*

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (P_1 + P_3)B_0 & (\mathcal{P}H_{0m})_{11} & (\mathcal{P}H_{0m})_{12} \\ (1,2)^T & (2,2) & (P_3^T + P_2)B_0 & (\mathcal{P}H_{0m})_{21} & (\mathcal{P}H_{0m})_{22} \\ B_0^T(P_1 + P_3^T) & B_0^T(P_3 + P_2) & -\gamma^2 I_q & 0 & 0 \\ (\mathcal{P}H_{0m})_{11}^T & (\mathcal{P}H_{0m})_{21}^T & 0 & -\mu I_{(n \times m)} & 0 \\ (\mathcal{P}H_{0m})_{12}^T & (\mathcal{P}H_{0m})_{22}^T & 0 & 0 & -\mu I_{(n \times m)} \\ (P_1 + P_3)A_{w0} & 0 & (P_1 + P_3)B_w & 0 & 0 \\ (P_3^T + P_2)A_{w0} & 0 & (P_3^T + P_2)B_w & 0 & 0 \\ & & A_{w0}^T(P_1 + P_3^T) & A_{w0}^T(P_3 + P_2) \\ & & 0 & 0 \\ & & B_w^T(P_1 + P_3^T) & B_w^T(P_3 + P_2) \\ & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & -P_1 & -P_3 \\ & & -P_3^T & -P_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.64)$$

où

$$(1,1) = \sum_{i=0}^m \alpha_i P_1 A_{ti} + \sum_{i=0}^m \alpha_i A_{ti}^T P_1 + m\mu I_n, \quad (2.65a)$$



$$(1, 2) = \sum_{i=0}^m \alpha_i A_{ti}^T P_3 + \sum_{i=0}^m \alpha_i P_3 A_{ti} - \sum_{i=0}^m \alpha_i Y_{3i} C, \quad (2.65b)$$

$$(2, 2) = \sum_{i=0}^m \alpha_i (P_2 A_{ti} + A_{ti}^T P_2^T - Y_{2i} C - C^T Y_{2i}^T) + (1 + m\mu) I_n, \quad (2.65c)$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} (\mathcal{P}H_{0m})_{11} & (\mathcal{P}H_{0m})_{12} \\ \hline (\mathcal{P}H_{0m})_{21} & (\mathcal{P}H_{0m})_{22} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \sigma_1 P_1 A_{t1} \cdots \sigma_m P_1 A_{tm} & \sigma_1 (P_3 A_{t1} - Y_{31} C) \cdots \sigma_m (P_3 A_{tm} - Y_{3m} C) \\ \hline \sigma_1 P_3^T A_{t1} \cdots \sigma_m P_3^T A_{tm} & \sigma_1 (P_2 A_{t1} - Y_{21} C) \cdots \sigma_m (P_2 A_{tm} - Y_{2m} C) \end{array} \right], \quad (2.65d)$$

et que les gains matriciels  $K_0, \dots, K_m$  soient solution de l'équation suivante

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_0 & \cdots & K_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{20} & \cdots & Y_{2m} \\ Y_{30} & \cdots & Y_{3m} \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

*Démonstration.* Elle est similaire à la démonstration du théorème 2.3.1 et est donc omise. •

*Remarque 2.3.2.* La solution donnée par le théorème 2.3.2 est non convexe. Les gains  $K_0, \dots, K_m$  calculés par l'équation (2.66) existent si et seulement si la condition de rang suivante est satisfaite

$$\text{rang} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} Y_{20} & \cdots & Y_{2m} & P_2 \\ Y_{30} & \cdots & Y_{3m} & P_3 \end{bmatrix}. \quad (2.67)$$

Pour la résolution de la LMI (2.64), nous appliquons l'algorithme de relaxation 2.1. Dans ce cas, le test de rang est fait sur l'équation (2.67), les variables de l'étape 1 sont remplacées par  $P_1, P_2, P_3, Y_{2i}$  et  $Y_{3i}$  pour  $i = 0, \dots, m$ , les variables de l'étape 3 sont remplacées par  $P_1, P_2$  et  $P_3$  avec  $Y_{2i}$  et  $Y_{3i}$  pour  $i = 0, \dots, m$  fixes et, finalement, dans l'étape 5, les variables sont remplacées par  $P_1, Y_{2i}$  et  $Y_{3i}$  pour  $i = 0, \dots, m$  avec  $P_2$  et  $P_3$  fixes. Ainsi, la remarque 2.2.1 adaptée à ce cas reste valable. □

#### 2.3.2.4 Exemple numérique

Considérons le système (2.52) avec deux commandes. Les différentes matrices de ce système sont données par

$$A_{t0} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.1 & -1 \\ 0.5 & -2.5 & 1 \\ 0 & -0.6 & -3.5 \end{bmatrix}, \quad A_{t1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.02 & 0.04 \\ 0 & 0.01 & -0.02 \\ 0 & -0.01 & 0.02 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 A_{t_2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.01 & -0.01 \\ 0 & -0.01 & 0.01 \\ 0 & 0.01 & -0.01 \end{bmatrix}, & B_0 &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0.3 \\ -1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}, \\
 A_{w0} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}, & B_w &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0 \\ -0.6 & 0.2 \end{bmatrix}, \\
 C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Les commandes  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  sont définies comme dans (2.53), soit

$$\begin{aligned}
 u_{1\min} &= -7 \leq u_1(t) \leq u_{1\max} = 8, \\
 u_{2\min} &= -5 \leq u_2(t) \leq u_{2\max} = 6,
 \end{aligned}$$

et les conditions initiales sont

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En vertu du théorème 2.3.2 et pour  $\mu = 0.38$ , la solution de la LMI (2.64) est obtenue pour  $\gamma = 15$  et les gains  $K_0$ ,  $K_1$  et  $K_2$  sont obtenus à partir de la relation (2.66)

$$\begin{aligned}
 K_0 &= \begin{bmatrix} -15.8784 & 80.5728 \\ -7.0722 & 40.3935 \\ -6.1623 & -15.4757 \end{bmatrix}, & K_1 &= \begin{bmatrix} 0.1158 & -0.0789 \\ -0.0579 & 0.0395 \\ 0.0579 & -0.0395 \end{bmatrix}, \\
 K_2 &= \begin{bmatrix} -0.0263 & 0.0316 \\ 0.0263 & -0.0316 \\ -0.0263 & 0.0316 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Les figures suivantes montrent la simulation du système augmenté (2.61). Nous pouvons voir l'évolution de l'état  $x(t)$  (figure 2.7) et l'évolution du signal d'erreur  $e(t)$  et du signal de perturbation  $v(t)$  (figure 2.8).

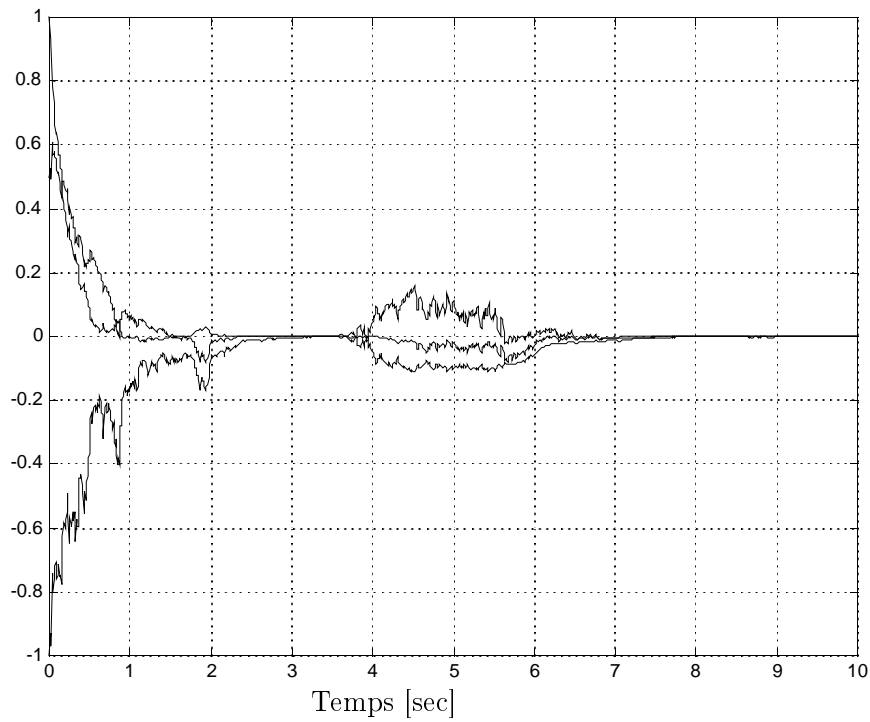


FIG. 2.7 – L'état  $x(t)$ .

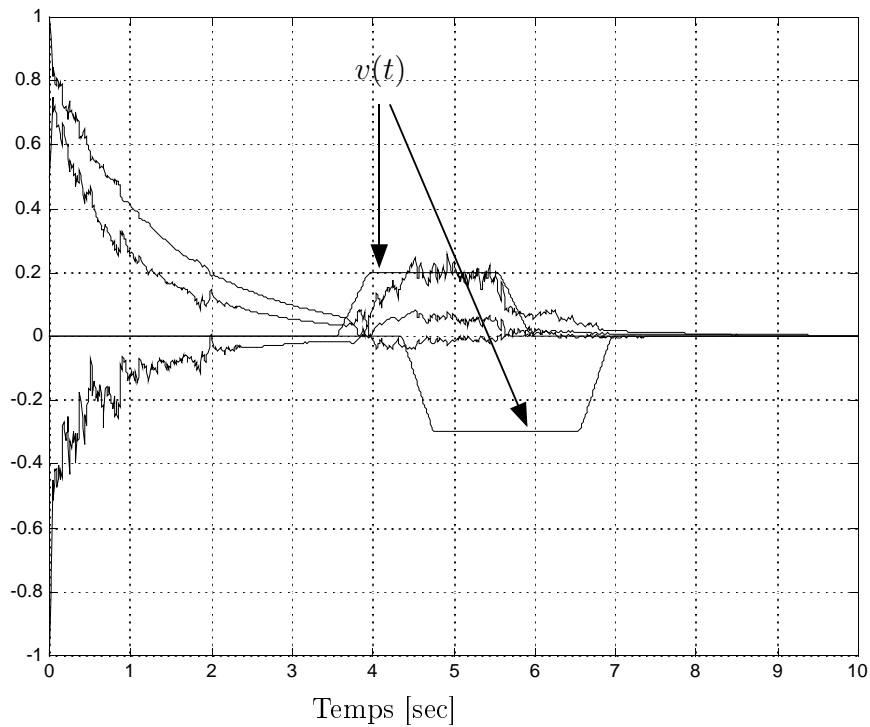


FIG. 2.8 – Le signal d'erreur  $e(t)$  et le signal de perturbation  $v(t)$ .

## 2.4 Filtrage des systèmes stochastiques avec plusieurs bruits multiplicatifs

### 2.4.1 Formulation du problème

Considérons le système stochastique suivant avec deux bruits multiplicatifs, dans lequel  $f(x(t), u(t), v(t))$  de l'équation (1.2) est bilinéaire,  $g_0(x(t))$  de l'équation (1.2) est linéaire et  $g_1(x(t), u(t))$  est bilinéaire

$$\begin{aligned} dx(t) = & (A_{t0}x(t) + u_1(t)A_{t1}x(t) + B_0v(t))dt \\ & + A_{w0}x(t)dw_0(t) + u_1(t)A_{w1}x(t)dw_1(t) \end{aligned} \quad (2.68a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.68b)$$

avec  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état du système,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de sortie,  $v(t) \in \mathbb{R}^q$  les perturbations exogènes et  $u_1(t) \in \mathbb{R}$  une commande scalaire.  $w_i(t)$  pour  $i = 0, 1$  est un processus de Wiener scalaire centré qui vérifie [Has80]

$$\mathbf{E}\{dw_i(t)\} = 0, \quad \mathbf{E}\{dw_i(t)^2\} = dt, \quad \text{pour } i = 0, 1 \quad (2.69a)$$

$$\mathbf{E}\{dw_0(t)dw_1(t)\} = \mathbf{E}\{dw_1(t)dw_0(t)\} = \varphi dt, \quad \text{avec } 0 \leq \varphi < 1. \quad (2.69b)$$

Comme c'est souvent le cas pour des processus physiques, nous supposons que la commande  $u_1(t)$  dans le système (2.68) est bornée, c'est-à-dire que  $u_1(t)$  une commande appartenant à l'ensemble  $\Gamma \subset \mathbb{R}$  où  $\Gamma$  est défini en (2.14).

**Hypothèse 2.4.1.** *Nous supposons que le système stochastique (2.68) avec  $v(t) \equiv 0$  est exponentiellement stable en moyenne quadratique (voir définition 1.4.12)  $\forall u_1(t) \in \Gamma$ .*

**Problème 2.4.1.** *Le problème à résoudre est de construire un filtre de la forme suivante*

$$d\hat{x}(t) = (A_{t0}\hat{x}(t) + u_1(t)A_{t1}\hat{x}(t))dt + K_0(y(t) - C\hat{x}(t))dt + u_1(t)K_1(y(t) - C\hat{x}(t))dt \quad (2.70)$$

où  $K_0$  et  $K_1$  sont des gains matriciels à déterminer tels que l'erreur  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  soit exponentiellement stable en moyenne quadratique et que, pour un réel  $\gamma > 0$  donné, la performance  $\mathcal{H}_\infty$  suivante

$$\|e(t)\|_{\hat{L}_2}^2 \leq \gamma \|v(t)\|_{\hat{L}_2}^2 \quad (2.71)$$

soit vérifiée.

La dynamique du signal d'erreur est donnée par

$$\begin{aligned} de(t) = & ((A_{t0} - K_0C)e(t) + u_1(t)(A_{t1} - K_1C)e(t) + B_0v(t))dt \\ & + A_{w0}x(t)dw_0(t) + u_1(t)A_{w1}x(t)dw_1(t). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Considérons le vecteur d'état augmenté suivant

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

La dynamique du système augmenté (2.68) et (2.72) est donnée par

$$\begin{aligned} d\xi(t) = & ((\mathcal{A}_{t0} + u_1(t)\mathcal{A}_{t1})\xi(t) + \mathcal{B}_0v(t)) dt \\ & + \mathcal{A}_{w0}\xi(t)dw_0(t) + u_1(t)\mathcal{A}_{w1}\xi(t)dw_1(t) \end{aligned} \quad (2.74a)$$

$$e(t) = \mathcal{C}\xi(t) \quad (2.74b)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ti} &= \begin{bmatrix} A_{ti} & 0 \\ 0 & A_{ti} - K_i C \end{bmatrix}, & \text{pour } i = 0, 1, & \mathcal{B}_0 = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A}_{wi} &= \begin{bmatrix} A_{wi} & 0 \\ A_{wi} & 0 \end{bmatrix}, & \text{pour } i = 0, 1, & \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 2.4.2 Passage du système stochastique avec une commande vers un système avec incertitudes paramétriques

Comme dans le paragraphe 2.3.1.2, pour étudier la stabilité du système augmenté (2.74), nous faisons le même changement de variable sur la commande  $u_1(t)$  donné par l'équation (2.20) (voir aussi (2.21) et (2.22)). Et donc, ce dernier système augmenté peut être réécrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} d\xi(t) = & \left( (\hat{A}_{t0} + \Delta\hat{A}_{t0}(t))\xi(t) + \hat{B}_0v(t) \right) dt + \hat{A}_{w0}\xi(t)dw_0(t) \\ & + (\hat{A}_{w1} + \Delta\hat{A}_{w1}(t))\xi(t)dw_1(t) \end{aligned} \quad (2.75a)$$

$$e(t) = \hat{C}\xi(t) \quad (2.75b)$$

où

$$\hat{A}_{t0} = \mathcal{A}_{t0} + \alpha_1 \mathcal{A}_{t1}, \quad \Delta\hat{A}_{t0}(t) = H_1 \Delta_\xi(\varepsilon_1(t)) H, \quad (2.76a)$$

$$\hat{B}_0 = \mathcal{B}_0, \quad \hat{A}_{w0} = \mathcal{A}_{w0}, \quad (2.76b)$$

$$\hat{A}_{w1} = \alpha_1 \mathcal{A}_{w1}, \quad \Delta\hat{A}_{w1}(t) = H_{01} \Delta_\xi(\varepsilon_1(t)) H, \quad (2.76c)$$

$$\hat{C} = \mathcal{C}, \quad (2.76d)$$

avec

$$H_1 = \sigma_1 \mathcal{A}_{t1}, \quad H_{01} = \sigma_1 \mathcal{A}_{w1}, \quad (2.77a)$$

$$H = I_{2n}, \quad \Delta_\xi(\varepsilon(t)) = \varepsilon_1(t) I_{2n}. \quad (2.77b)$$

Notons, qu'à partir de (2.22),  $\Delta_\xi(\varepsilon_1(t))$  vérifie l'équation (2.24).

**Lemme 2.4.1.** *La stabilité exponentielle en moyenne quadratique du système (2.68) est équivalente à la stabilité exponentielle robuste stochastique du système (2.75).*

### 2.4.3 Synthèse du filtre et performance $\mathcal{H}_\infty$

Le théorème suivant garantit la stabilité en moyenne quadratique et la performance  $\mathcal{H}_\infty$  du système (2.75).

**Théorème 2.4.1 (La stabilité et la performance  $\mathcal{H}_\infty$ ).** *Le problème 2.4.1 du filtrage  $\mathcal{H}_\infty$  stochastique est résolu pour le système (2.68) avec le filtre (2.70) tel que la dynamique de l'erreur (2.72) soit exponentiellement stable en moyenne quadratique si, pour un réel  $\gamma > 0$  donné, il existe des réels  $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$  et  $\mu_3 > 0$  et des matrices  $P_1 = P_1^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, P_2 = P_2^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, P_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}, Y_{20} \in \mathbb{R}^{n \times p}, Y_{21} \in \mathbb{R}^{n \times p}, Y_{30} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  et  $Y_{31} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  tels que la LMI suivante soit vérifiée*

$$\left[ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (P_1 + P_3)B_0 & \sigma_1 P_1 A_{t1} & (1,5) & A_{w0}^T (P_1 + P_3^T) \\ (1,2)^T & (2,2) & (P_3^T + P_2)B_0 & \sigma_1 P_3^T A_{t1} & (2,5) & 0 \\ B_0^T (P_1 + P_3^T) & B_0^T (P_3 + P_2) & -\gamma^2 I_q & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 A_{t1}^T P_1 & \sigma_1 A_{t1}^T P_3^T & 0 & -\mu_1 I_n & 0 & 0 \\ (1,5)^T & (2,5)^T & 0 & 0 & -\mu_1 I_n & 0 \\ (P_1 + P_3)A_{w0} & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_1 \\ (P_3^T + P_2)A_{w0} & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_3^T \\ (1,8)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 (P_1 + P_3)A_{w1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 (P_3^T + P_2)A_{w1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{w0}^T (P_3 + P_2) & (1,8) & \alpha_1 A_{w1}^T (P_1 + P_3^T) & \alpha_1 A_{w1}^T (P_3 + P_2) & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ -P_3 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ -P_2 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & -\mu_3 I_n & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -P_1 & -P_3 & \sigma_1 (P_1 + P_3)A_{w1} & \\ 0 & 0 & -P_3^T & -P_2 & \sigma_1 (P_3^T + P_2)A_{w1} & \\ 0 & 0 & \sigma_1 A_{w1}^T (P_1 + P_3^T) & \sigma_1 A_{w1}^T (P_3 + P_2) & -\mu_2 I_n & \end{array} \right] < 0, \quad (2.78)$$

où

$$\begin{aligned} (1,1) &= P_1(A_{t0} + \alpha_1 A_{t1}) + (A_{t0} + \alpha_1 A_{t1})^T P_1 + (\mu_1 + \mu_2 + \varphi \mu_3) I_n \\ &\quad + \alpha_1 \varphi (A_{w0}^T (P_1 + P_3^T + P_3 + P_2)A_{w1} + A_{w1}^T (P_1 + P_3 + P_3^T + P_2)A_{w0}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1, 2) &= (A_{t0} + \alpha_1 A_{t1})^T P_3 + P_3 (A_{t0} + \alpha_1 A_{t1}) - Y_{30} C - \alpha_1 Y_{31} C, \\
(2, 2) &= P_2 (A_{t0} + \alpha_1 A_{t1}) + (A_{t0} + \alpha_1 A_{t1})^T P_2 - Y_{20} C - C^T Y_{20}^T - \alpha_1 (Y_{21} C + C^T Y_{21}^T) \\
&\quad + (1 + \mu_1 + \mu_2 + \varphi \mu_3) I_n, \\
(1, 5) &= \sigma_1 (P_3 A_{t1} - Y_{31} C), \\
(2, 5) &= \sigma_1 (P_2 A_{t1} - Y_{21} C), \\
(1, 8) &= \varphi^{\frac{1}{2}} \sigma_1 A_{w0}^T (P_1 + P_3^T + P_3 + P_2) A_{w1},
\end{aligned}$$

et que les gains matriciels  $K_0$  et  $K_1$  soient solution de l'équation suivante

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_0 & K_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{20} & Y_{21} \\ Y_{30} & Y_{31} \end{bmatrix}. \quad (2.79)$$

■

*Démonstration.* Considérons la fonction et la matrice de Lyapunov (2.27) et (2.28) respectivement. Nous allons commencer par démontrer la stabilité du système (2.75) qui est équivalente à la stabilité du système (2.68) pour  $v(t) \equiv 0$ .

En appliquant la formule d'Itô sur le système (2.75) (voir théorème 1.3.1), nous avons

$$dV(\xi(t)) = \mathcal{L}V(\xi(t))dt + 2\xi^T(t)\mathcal{P}\hat{A}_{w01}(t)\xi(t) \quad (2.80)$$

où

$$\hat{A}_{w01}(t) = \hat{A}_{w0}dw_0(t) + \left(\hat{A}_{w1} + \Delta\hat{A}_{w1}(t)\right)dw_1(t), \quad (2.81)$$

avec

$$\mathcal{L}V(\xi(t))dt = 2\xi^T(t)\mathcal{P}\left(\hat{A}_{t0} + \Delta\hat{A}_{t0}(t)\right)\xi(t)dt + \langle \mathcal{P}\hat{A}_{w01}(t)\xi(t), \hat{A}_{w01}(t)\xi(t) \rangle. \quad (2.82)$$

En prenant l'espérance mathématique de l'équation (2.80), le deuxième terme de la droite de l'égalité, en vertu de l'équation (2.69a), est nul. Donc, d'après l'équation (2.69), voir aussi la proposition 5.3 (page 35) [YZ99], et le théorème 5.21 (page 28) [Mao97], l'équation (2.80) devient

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\{dV(\xi(t))\} &= \mathbf{E}\{\mathcal{L}V(\xi(t))dt\} \\
&= 2\xi^T(t)\mathcal{P}\left(\hat{A}_{t0} + \Delta\hat{A}_{t0}(t)\right)\xi(t)dt + \mathbf{E}\left\{\langle \mathcal{P}\hat{A}_{w01}(t)\xi(t), \hat{A}_{w01}(t)\xi(t) \rangle\right\}, \quad (2.83)
\end{aligned}$$

et donc, en utilisant (2.69), nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\{dV(\xi(t))\} &= 2\xi^T(t)\mathcal{P}\left(\hat{A}_{t0} + \Delta\hat{A}_{t0}(t)\right)\xi(t)dt + \xi^T(t)\left\{\hat{A}_{w0}^T\mathcal{P}\hat{A}_{w0}\right. \\
&\quad \left.+ \left(\hat{A}_{w1} + \Delta\hat{A}_{w1}(t)\right)^T\mathcal{P}\left(\hat{A}_{w1} + \Delta\hat{A}_{w1}(t)\right)\right. \\
&\quad \left.+ \varphi\left(\hat{A}_{w0}^T\mathcal{P}\left(\hat{A}_{w1} + \Delta\hat{A}_{w1}(t)\right) + \left(\hat{A}_{w1} + \Delta\hat{A}_{w1}(t)\right)^T\mathcal{P}\hat{A}_{w0}\right)\right\}\xi(t)dt. \quad (2.84)
\end{aligned}$$

En utilisant les lemmes de majoration (voir annexe B lemme B.1.1), nous avons les inégalités suivantes

$$2\xi^T(t)\mathcal{P}\Delta\hat{A}_{t_0}(t)\xi(t) \leq \xi^T(t) (\mu_1^{-1}\mathcal{P}H_1H_1^T\mathcal{P} + \mu_1H^TH) \xi(t), \quad (2.85a)$$

$$\left(\hat{A}_{w_1} + \Delta\hat{A}_{w_1}(t)\right)^T \mathcal{P} \left(\hat{A}_{w_1} + \Delta\hat{A}_{w_1}(t)\right) \leq \hat{A}_{w_1}^T (\mathcal{P}^{-1} - \mu_2^{-1}H_{01}H_{01}^T)^{-1} \hat{A}_{w_1} + \mu_2H^TH, \quad (2.85b)$$

$$2\xi^T(t)\hat{A}_{w_0}^T\mathcal{P}\Delta\hat{A}_{w_1}(t)\xi(t) \leq \xi^T(t) \left(\mu_3^{-1}\hat{A}_{w_0}^T\mathcal{P}H_{01}H_{01}^T\mathcal{P}\hat{A}_{w_0} + \mu_3H^TH\right) \xi(t), \quad (2.85c)$$

et  $\mathbf{E}\{dV(\xi(t))\}$  peut alors être borné par

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{dV(\xi(t))\} &\leq \xi^T(t) \left\{ \mathcal{P}\hat{A}_{t_0} + \hat{A}_{t_0}^T\mathcal{P} + \mu_1^{-1}\mathcal{P}H_1H_1^T\mathcal{P} + \mu_1H^TH \right. \\ &\quad + \hat{A}_{w_0}^T\mathcal{P}\hat{A}_{w_0} + \hat{A}_{w_1}^T(\mathcal{P}^{-1} - \mu_2H_{01}H_{01}^T)^{-1}\hat{A}_{w_1} + \mu_2H^TH \\ &\quad \left. + \varphi \left( \mu_3^{-1}\hat{A}_{w_0}^T\mathcal{P}H_{01}H_{01}^T\mathcal{P}\hat{A}_{w_0} + \mu_3H^TH \right) \right\} \xi(t)dt. \end{aligned} \quad (2.86)$$

En suivant le même raisonnement utilisé dans la démonstration du théorème 2.3.1 nous pouvons prouver que

$$\mathbf{E}\left\{\|\xi(t)\|^2\right\} \leq \frac{c}{\lambda_{\min}(\mathcal{P})} e^{-\beta t} \quad (2.87)$$

où  $c = \mathbf{E}\{\xi^T(0)\mathcal{P}\xi(0)\}$  et  $\beta$  est une constante positive, ce qui assure la stabilité exponentielle en moyenne quadratique du système (2.75).

Maintenant, nous allons étudier les performances  $\mathcal{H}_\infty$  du système (2.75) avec  $v(t) \neq 0$  et  $x(0) = 0$  car ces performances ne sont fonction que de la perturbation  $v(t)$ , mais pas de la condition initiale  $x(0)$ .

En appliquant la formule d'Itô pour le système (2.75) (voir théorème 1.3.1), nous avons

$$dV(\xi(t)) = \mathcal{L}V(\xi(t))dt + 2\xi^T(t)\mathcal{P}\hat{A}_{w01}(t)\xi(t) \quad (2.88)$$

où  $\hat{A}_{w01}(t)$  est donnée par l'équation (2.81) et  $\mathcal{L}V(\xi(t))$  est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(\xi(t))dt &= 2\xi^T(t) \left( \left( \hat{A}_{t_0} + \Delta\hat{A}_{t_0}(t) \right) \xi(t) + \hat{B}_0v(t) \right) dt \\ &\quad + \langle \mathcal{P}\hat{A}_{w01}(t)\xi(t), \hat{A}_{w01}(t)\xi(t) \rangle. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Ecrivons  $J_{\xi v}$ , de l'équation (2.45), en utilisant le théorème de Fubini [Che85]

$$\begin{aligned} J_{\xi v} &= \int_0^\infty \mathbf{E} \left\{ \left( \xi^T(t)\hat{C}^T\hat{C}\xi(t) - \gamma^2v^T(t)v(t) \right) dt \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{L}V(\xi(t))dt \right\} - \mathbf{E}\{V(\xi(t))\}_{t=\infty} + \mathbf{E}\{V(\xi(t))\}_{t=0}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Or, comme  $\mathbf{E}\{V(\xi(t))\}_{t=0} = 0$  car  $\xi(0) = 0$  et  $\mathbf{E}\{V(\xi(t))\}_{t=\infty} \geq 0$ , ceci implique

$$J_{\xi v} \leq \int_0^\infty \mathbf{E} \left\{ \left( \xi^T(t)\hat{C}^T\hat{C}\xi(t) - \gamma^2v^T(t)v(t) \right) dt + \mathcal{L}V(\xi(t))dt \right\}. \quad (2.91)$$



En prenant l'espérance mathématique de l'équation (2.88), le deuxième terme de la droite de l'égalité, en vertu de l'équation (2.69a), est nul. Donc, d'après l'équation (2.69), voir aussi la proposition 5.3 (page 35) [YZ99], et le théorème 5.21 (page 28) [Mao97], l'équation (2.88) devient

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{dV(\xi(t))\} &= \mathbf{E} \{ \mathcal{L}V(\xi(t))dt \} \\ &= 2\xi^T(t) \mathcal{P} \left( \left( \hat{A}_{t0} + \Delta \hat{A}_{t0}(t) \right) \xi(t) + \hat{B}_0 v(t) \right) dt \\ &\quad + \mathbf{E} \left\{ \langle \mathcal{P} \hat{A}_{w01}(t) \xi(t), \hat{A}_{w01}(t) \xi(t) \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (2.92)$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{ \mathcal{L}V(\xi(t))dt \} &= 2\xi^T(t) \mathcal{P} \left( \left( \hat{A}_{t0} + \Delta \hat{A}_{t0}(t) \right) \xi(t) + \hat{B}_0 v(t) \right) dt \\ &\quad + \xi^T(t) \left( \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P} \hat{A}_{w0} + \left( \hat{A}_{w1} + \Delta \hat{A}_{w1}(t) \right)^T \mathcal{P} \left( \hat{A}_{w1} + \Delta \hat{A}_{w1}(t) \right) \right. \\ &\quad \left. + \varphi \left( \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P} \left( \hat{A}_{w1} + \Delta \hat{A}_{w1}(t) \right) + \left( \hat{A}_{w1} + \Delta \hat{A}_{w1}(t) \right)^T \mathcal{P} \hat{A}_{w0} \right) \right) \xi(t) dt. \end{aligned} \quad (2.93)$$

que nous pouvons majorer en appliquant les lemmes de majoration (voir annexe B lemme B.1.1).

Maintenant, supposons que la LMI (2.78) est vérifiée. On va montrer qu'elle est suffisante pour assurer la stabilité et la performance  $\mathcal{H}_\infty$  du système (2.75).

En appliquant le lemme de Schur (voir annexe B lemme B.2.1) sur la LMI (2.78), on a

$$\Theta_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} \Theta & \mathcal{P} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_0^T \mathcal{P} & 0 \end{bmatrix}}_{\Xi} + \begin{bmatrix} \hat{C}^T \hat{C} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.94)$$

avec

$$\begin{aligned} \Theta &= \mathcal{P} \hat{A}_{t0} + \hat{A}_{t0}^T \mathcal{P} + \mu_1^{-1} \mathcal{P} H_1^T H_1 \mathcal{P} + (\mu_1 + \mu_2 + \varphi \mu_3) H^T H \\ &\quad + \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P} \hat{A}_{w0} + \varphi \mu_3^{-1} \left( \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P} H_{01} H_{01}^T \mathcal{P} \hat{A}_{w0} \right) + \hat{A}_{w1}^T \left( \mathcal{P}^{-1} - \mu_2 H_{01} H_{01}^T \right)^{-1} \hat{A}_{w1} \\ &\quad + \varphi \left( \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P} \hat{A}_{w1} + \hat{A}_{w1}^T \mathcal{P} \hat{A}_{w0} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (2.91) devient

$$J_{\xi v} \leq \int_0^\infty \mathbf{E} \left\{ \begin{bmatrix} \xi(t)^T & v(t)^T \end{bmatrix} \Xi \begin{bmatrix} \xi(t) \\ v(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \xi(t)^T & v(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C}^T \hat{C} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ v(t) \end{bmatrix} dt \right\} < 0,$$

donc si la LMI (2.78) est vérifiée alors le système (2.75) est stable et vérifie la performance  $\mathcal{H}_\infty$ .

Pour retrouver la LMI (2.78), il suffit d'appliquer le lemme de Schur (voir annexe B lemme B.2.1) plusieurs fois sur l'équation (2.94).

En effet  $\Theta_1$  s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} \Theta_1 = & \begin{bmatrix} \mathcal{P}\hat{A}_{t0} + \hat{A}_{t0}^T \mathcal{P} + \mathcal{C}^T \mathcal{C} & \mathcal{P}\hat{B}_0 \\ \hat{B}_0^T \mathcal{P} & -\gamma^2 I_q \end{bmatrix} + \mu_1^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{P}H_1^T H_1 \mathcal{P} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + (\mu_1 + \mu_2 + \varphi\mu_3) \begin{bmatrix} H^T H & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P} \hat{A}_{w0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi\mu_3^{-1} \left( \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P} H_{01} H_{01}^T \mathcal{P} \hat{A}_{w0} \right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \hat{A}_{w1}^T (\mathcal{P}^{-1} - \mu_2 H_{01} H_{01}^T)^{-1} \hat{A}_{w1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varphi \begin{bmatrix} \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P} \hat{A}_{w1} + \hat{A}_{w1}^T \mathcal{P} \hat{A}_{w0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.95) \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Schur une première fois,  $\Theta_1$  est équivalent à

$$\begin{aligned} \Theta_2 = & \begin{bmatrix} (1, 1) & \mathcal{P}\hat{B}_0 & \mathcal{P}H_1 \\ \hat{B}_0^T \mathcal{P} & -\gamma^2 I_q & 0 \\ H_1^T \mathcal{P} & 0 & -\mu_1 I_{2n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{A}_{w0}^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathcal{P} \begin{bmatrix} \hat{A}_{w0} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \varphi\mu_3^{-1} \left( \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P} H_{01} H_{01}^T \mathcal{P} \hat{A}_{w0} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{A}_{w1}^T (\mathcal{P}^{-1} - \mu_2 H_{01} H_{01}^T)^{-1} \hat{A}_{w1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.96) \end{aligned}$$

où

$$(1, 1) = \mathcal{P}\hat{A}_{t0} + \hat{A}_{t0}^T \mathcal{P} + \hat{C}^T \hat{C} + (\mu_1 + \mu_2 + \varphi\mu_3) H^T H + \varphi \left( \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P} \hat{A}_{w1} + \hat{A}_{w1}^T \mathcal{P} \hat{A}_{w0} \right).$$

Finalement, en appliquant le lemme de Schur une deuxième fois,  $\Theta_2$  est équivalent à

$$\Theta_3 = \begin{bmatrix} (1, 1) & \mathcal{P}\hat{B}_0 & \mathcal{P}H_1 & \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P} & \varphi^{\frac{1}{2}} \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P} H_{01} & \hat{A}_{w1}^T \mathcal{P} & 0 \\ \hat{B}_0^T \mathcal{P} & -\gamma^2 I_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_1^T \mathcal{P} & 0 & -\mu_1 I_{2n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{P}\hat{A}_{w0} & 0 & 0 & -\mathcal{P} & 0 & 0 & 0 \\ \varphi^{\frac{1}{2}} H_{01}^T \mathcal{P} \hat{A}_{w0} & 0 & 0 & 0 & -\mu_3 I_{2n} & 0 & 0 \\ \mathcal{P}\hat{A}_{w1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{P} & \mathcal{P}H_{01} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{01}^T \mathcal{P} & -\mu_2 I_{2n} \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

et la LMI (2.78) se déduit en remplaçant les différentes matrices par leur expression (c'est-à-dire insérer (2.76) et (2.77)) dans la LMI (2.97). •

*Remarque 2.4.1.* La solution donnée par le théorème 2.4.1 est non convexe. Les gains  $K_0$  et  $K_1$  calculés par l'équation (2.79) existent si et seulement si la condition de rang suivante est satisfaite

$$\text{rang} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} Y_{20} & Y_{21} & P_2 \\ Y_{30} & Y_{31} & P_3 \end{bmatrix}. \quad (2.98)$$

Pour la résolution de la LMI (2.78), nous appliquons l'algorithme de relaxation 2.1. Dans ce cas, le test de rang est fait sur l'équation (2.98), les variables de l'étape 1 sont remplacées par  $P_1, P_2, P_3, Y_{20}, Y_{21}, Y_{30}$  et  $Y_{31}$ , les variables de l'étape 3 sont remplacées par  $P_1, P_2$  et  $P_3$  avec  $Y_{20}, Y_{21}, Y_{30}$  et  $Y_{31}$  fixes et, finalement, dans l'étape 5, les variables sont remplacées par  $P_1, Y_{20}, Y_{21}, Y_{30}$  et  $Y_{31}$  avec  $P_2$  et  $P_3$  fixes. Ainsi, la remarque 2.2.1 adaptée à ce cas reste valable.  $\square$

*Remarque 2.4.2.* Tout au long de cette analyse le terme  $B_w v(t) dw_0(t)$  n'a pas été pris en compte dans le système (2.68), car ce terme aurait introduit dans l'égalité (2.93) le terme  $2v^T(t)\hat{B}_w^T \mathcal{P} \Delta \hat{A}_{w1}(t)\xi(t)$  que l'on aurait pu borner par l'inégalité suivante (en appliquant les lemmes de majoration B.1.1)

$$2v^T(t)\hat{B}_w^T \mathcal{P} \Delta \hat{A}_{w1}(t)\xi(t) \leq v^T(t) \left( \mu_4^{-1} \hat{B}_w^T \mathcal{P} H_{01} H_{01}^T \mathcal{P} \hat{B}_w \right) v(t) + \mu_4 \xi^T(t) H^T H \xi(t), \quad (2.99)$$

et alors on aurait eu le terme suivant dans la relation de  $\Theta_1$  de l'équation (2.95)

$$\begin{bmatrix} \varphi \mu_3^{-1} \left( \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P} H_{01} H_{01}^T \mathcal{P} \hat{A}_{w0} \right) & \varphi \mu_4^{-1} \hat{B}_w^T \mathcal{P} H_{01} H_{01}^T \mathcal{P} \hat{B}_w \\ \varphi \mu_4^{-1} \hat{B}_w \mathcal{P} H_{01}^T H_{01} \mathcal{P} \hat{B}_w^T & 0 \end{bmatrix} + \varphi \mu_4 \begin{bmatrix} H^T H & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.100)$$

à la place du terme

$$\begin{bmatrix} \varphi \mu_3^{-1} \left( \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P} H_{01} H_{01}^T \mathcal{P} \hat{A}_{w0} \right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.101)$$

donc on aurait une bilinéarité que l'on n'aurait pas pu enlever. Cette bilinéarité est, en effet, due aux deux termes antidiagonaux et au zéro qui est sur la diagonale.  $\square$

## 2.4.4 Exemple numérique

Considérons le système (2.68) dans le cas particulier où les différentes matrices de ce système sont données par

$$A_{t0} = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 & -1 \\ 0.5 & -2.5 & 1 \\ 0 & -0.3 & -3.5 \end{bmatrix}, \quad A_{t1} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.2 & 0.04 \\ 0.9 & -0.1 & -0.02 \\ 1 & -0.01 & -1.2 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -1 & -3 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$A_{w0} = \begin{bmatrix} -0.01 & 0 & 0.02 \\ 0.05 & -0.3 & -0.01 \\ -0.2 & 0 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad A_{w1} = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.02 & 0.04 \\ -0.1 & -0.1 & -0.002 \\ 0.05 & -0.001 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La commande  $u_1(t)$  est définie comme dans (2.14), soit

$$u_{1\min} = -5 \leq u_1(t) \leq u_{1\max} = 7,$$

et les conditions initiales sont

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En vertu du théorème 2.4.1 et pour  $\mu_1 = 0.1$ ,  $\mu_2 = 0.01$  et  $\mu_3 = 0.01$ , la solution de la LMI (2.78) est obtenue pour  $\gamma = 1$  et les gains  $K_0$  et  $K_1$  sont obtenus à partir de la relation (2.79)

$$K_0 = \begin{bmatrix} 5.506 & -10.009 \\ 4.460 & 48.640 \\ -0.010 & 2.644 \end{bmatrix}, \quad K_1 = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 7.692 & -100 \\ -3.846 & 49.999 \\ 3.846 & -50 \end{bmatrix}.$$

Les figures suivantes montrent la simulation du système augmenté (2.75). Nous pouvons voir l'évolution de l'état  $x(t)$  (figure 2.9) et l'évolution du signal d'erreur  $e(t)$  et du signal de perturbation  $v(t)$  (figure 2.10). Les simulations sont réalisées avec un coefficient de covariance entre les processus de Wiener  $w_0(t)$  et  $w_1(t)$  qui vaut  $\varphi = 0.0541$ .

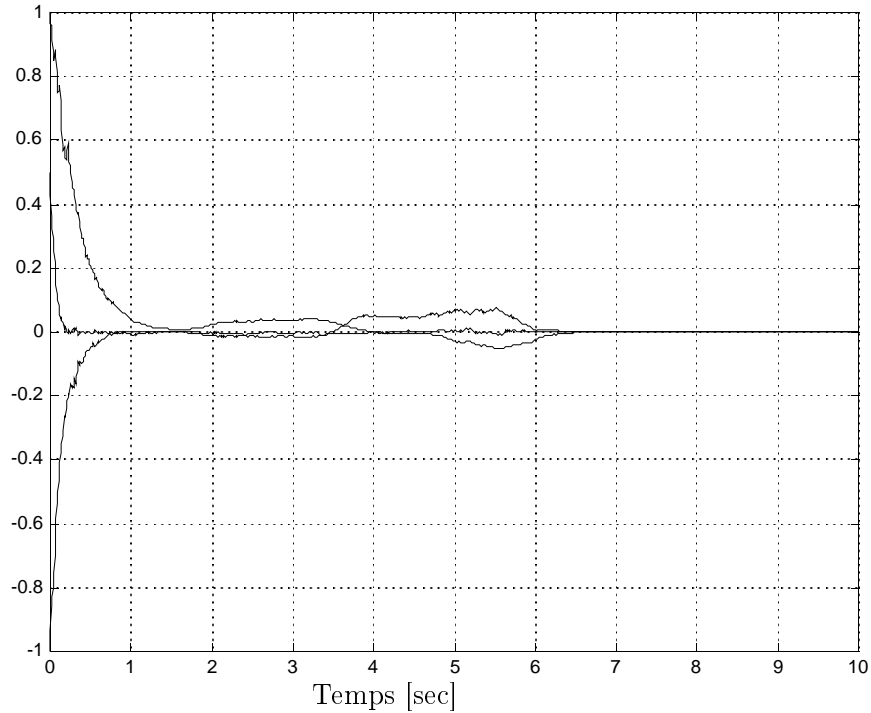


FIG. 2.9 – L'état  $x(t)$ .

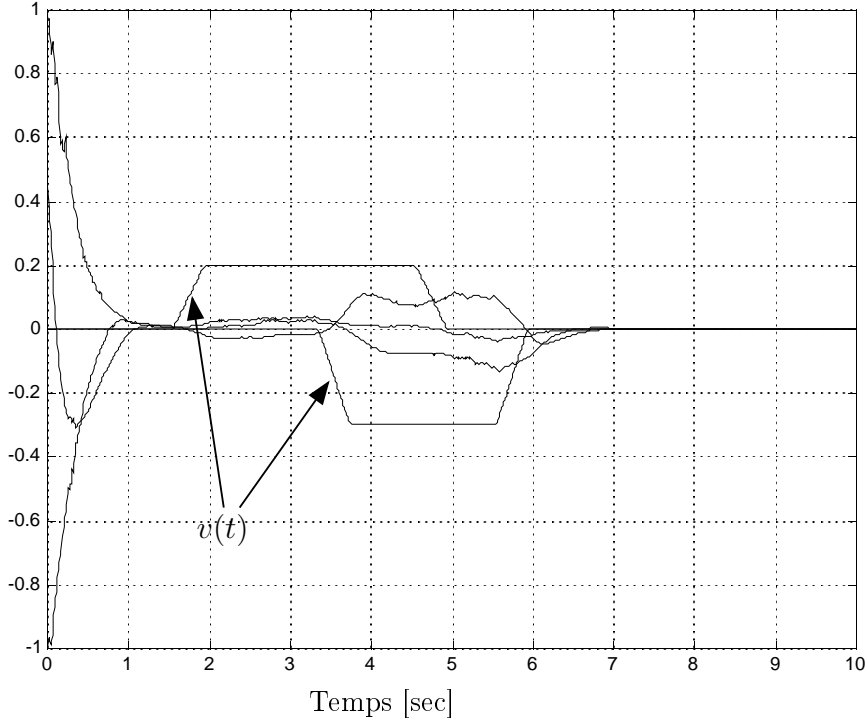


FIG. 2.10 – Le signal d'erreur  $e(t)$  et le signal de perturbation  $v(t)$ .

## 2.5 Filtrage des systèmes stochastiques avec des mesures stochastiques

### 2.5.1 Formulation du problème

Considérons le système stochastique avec une mesure stochastique suivant, dans lequel  $f(x(t), u(t), v(t))$  de l'équation (1.2) est bilinéaire et  $g(x(t))$  de l'équation (1.2) est linéaire

$$dx(t) = (A_{t0}x(t) + u_1(t)A_{t1}x(t) + B_0v(t))dt + A_{w0}x(t)dw_0(t) \quad (2.102a)$$

$$dy(t) = Cx(t)dt + J_1x(t)dw_1(t) \quad (2.102b)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie,  $v(t) \in \mathbb{R}^q$  représente les perturbations exogènes et  $u_1(t) \in \mathbb{R}$  est une commande scalaire.  $w_i(t)$ , pour  $i = 0, 1$ , est un processus de Wiener scalaire centré qui vérifie (2.69).

Notre objectif est de construire un filtre de la forme suivante

$$\begin{aligned} d\hat{x}(t) = & (A_{t0}\hat{x}(t) + u_1(t)A_{t1}\hat{x}(t))dt + K_0(dy(t) - C\hat{x}(t)dt) \\ & + u_1(t)K_1(dy(t) - C\hat{x}(t)dt) \end{aligned} \quad (2.103a)$$

où  $K_0$  et  $K_1$  sont des gains matriciels à déterminer tels que l'erreur  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  soit stable en moyenne quadratique.

La dynamique de l'erreur  $e(t)$  est donnée alors par l'équation suivante

$$\begin{aligned} de(t) = & (A_{t0} - K_0C + u_1(t)(A_{t1} - K_1C)) e(t)dt + B_0v(t)dt \\ & + A_{w0}x(t)dw_0(t) - (K_0 + u_1(t)K_1) J_1x(t)dw_1(t). \end{aligned} \quad (2.104)$$

Considérons le vecteur d'état augmenté  $\xi(t)$  défini dans (2.73). La dynamique du système augmenté (2.102) et (2.104) est donnée par

$$\begin{aligned} d\xi(t) = & (\mathcal{A}_{t0}\xi(t) + u_1(t)\mathcal{A}_{t1}\xi(t) + \mathcal{B}_0v(t))dt + \mathcal{A}_{w0}\xi(t)dw_0(t) \\ & + (\mathcal{A}_{w1} + u_1(t)\mathcal{A}_{w2})\xi(t)dw_1(t) \end{aligned} \quad (2.105a)$$

$$e(t) = \mathcal{C}\xi(t) \quad (2.105b)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{t0} &= \begin{bmatrix} A_{t0} & 0 \\ 0 & A_{t0} - K_0C \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_{t1} = \begin{bmatrix} A_{t1} & 0 \\ 0 & A_{t1} - K_1C \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_0 = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A}_{w0} &= \begin{bmatrix} A_{w0} & 0 \\ A_{w0} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_{w1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -K_0J_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_{w2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -K_1J_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Hypothèse 2.5.1.** Nous supposons que le système stochastique (2.102) avec  $v(t) \equiv 0$  est exponentiellement stable en moyenne quadratique (voir définition 1.4.12).

**Problème 2.5.1.** Le problème à résoudre est de construire un filtre de la forme (2.103) tel que le système augmenté (2.105) est exponentiellement stable en moyenne quadratique et que, pour un  $\gamma > 0$  donné, la performance  $\mathcal{H}_\infty$  suivante

$$\|e(t)\|_{\hat{L}_2}^2 \leq \gamma \|v(t)\|_{\hat{L}_2}^2 \quad (2.106)$$

soit vérifiée.

## 2.5.2 Passage du système stochastique avec une commande vers un système avec incertitudes paramétriques

Comme dans le paragraphe 2.3.1.2, pour étudier la stabilité du système augmenté (2.105), nous faisons le même changement de variable sur la commande  $u_1(t)$  donné par l'équation (2.20) (voir aussi (2.21) et (2.22)). Et donc, ce système augmenté (2.105) peut être réécrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned} d\xi(t) = & \left( \left( \hat{A}_{t0} + \Delta\hat{A}_{t0}(t) \right) \xi(t) + \hat{B}_0v(t) \right) dt + \hat{A}_{w0}\xi(t)dw_0(t) \\ & + \left( \hat{A}_{w1} + \Delta\hat{A}_{w1}(t) \right) \xi(t)dw_1(t) \end{aligned} \quad (2.107a)$$

$$e(t) = \hat{C}\xi(t) \quad (2.107b)$$

où

$$\hat{A}_{t0} = \mathcal{A}_{t0} + \alpha_1 \mathcal{A}_{t1}, \quad \Delta\hat{A}_{t0}(t) = H_1 \Delta_\xi(\varepsilon_1(t)) H,$$

$$\begin{aligned}\widehat{B}_0 &= \mathcal{B}_0, & \widehat{A}_{w0} &= \mathcal{A}_{w0}, \\ \widehat{A}_{w1} &= \mathcal{A}_{w1} + \alpha_1 \mathcal{A}_{w2}, & \Delta \widehat{A}_{w1}(t) &= H_{02} \Delta_\xi(\varepsilon_1(t)) H, \\ \widehat{C} &= \mathcal{C},\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}H_1 &= \sigma_1 \mathcal{A}_{t1}, & H_{02} &= \sigma_1 \mathcal{A}_{w2}, \\ H &= I_{2n}, & \Delta_\xi(\varepsilon_1(t)) &= \varepsilon_1(t) I_{2n}.\end{aligned}$$

Notons, qu'à partir de (2.22),  $\Delta_\xi(\varepsilon_1(t))$  vérifie l'équation (2.24).

**Lemme 2.5.1.** *La stabilité exponentielle en moyenne quadratique du système (2.102) est équivalente à la stabilité exponentielle robuste stochastique du système (2.107).*

### 2.5.3 Synthèse du filtre et performance $\mathcal{H}_\infty$

Le théorème suivant garantit la stabilité en moyenne quadratique et la performance  $\mathcal{H}_\infty$  du système (2.107).

**Théorème 2.5.1 (La stabilité et la performance  $\mathcal{H}_\infty$ ).** *Le problème 2.5.1 du filtrage  $\mathcal{H}_\infty$  stochastique est résolu pour le système (2.102) avec le filtre (2.103) tel que la dynamique de l'erreur (2.104) soit exponentiellement stable en moyenne quadratique si, pour un réel  $\gamma > 0$  donné, il existe des réels  $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$  et  $\mu_3 > 0$  et des matrices  $P_1 = P_1^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, P_2 = P_2^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, P_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}, Y_{20} \in \mathbb{R}^{n \times p}, Y_{21} \in \mathbb{R}^{n \times p}, Y_{30} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  et  $Y_{31} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  tels que la LMI suivante soit vérifiée*

$$\left[ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (P_1 + P_3)B_0 & \sigma_1 P_1 A_{t1} & (1,5) & A_{w0}^T (P_1 + P_3^T) \\ (1,2)^T & (2,2) & (P_3^T + P_2)B_0 & \sigma_1 P_3^T A_{t1} & (2,5) & 0 \\ B_0^T (P_1 + P_3^T) & B_0^T (P_3 + P_2) & -\gamma^2 I_q & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 A_{t1}^T P_1 & \sigma_1 A_{t1}^T P_3^T & 0 & -\mu_1 I_n & 0 & 0 \\ (1,5)^T & (2,5)^T & 0 & 0 & -\mu_1 I_n & 0 \\ (P_1 + P_3)A_{w0} & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_1 \\ (P_3^T + P_2)A_{w0} & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_3^T \\ (1,8)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(Y_{30} + \alpha_1 Y_{31})J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(Y_{20} + \alpha_1 Y_{21})J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix}
 A_{w0}^T(P_3 + P_2) & (1, 8) & -J_1^T(Y_{30}^T + \alpha_1 Y_{31}^T) & -J_1^T(Y_{20}^T + \alpha_1 Y_{21}^T) & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -P_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\mu_3 I_n & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -P_1 & -P_3 & -\sigma_1 Y_{31} J_1 \\
 0 & 0 & -P_3^T & -P_2 & -\sigma_1 Y_{21} J_1 \\
 0 & 0 & -\sigma_1 J_1^T Y_{31}^T & -\sigma_1 J_1^T Y_{21}^T & -\mu_2 I_n
 \end{bmatrix} < 0, \quad (2.108)$$

où

$$\begin{aligned}
 (1, 1) &= P_1 (A_{t0} + \alpha_1 A_{t1}) + (A_{t0} + \alpha_1 A_{t1})^T P_1 + (\mu_1 + \mu_2 + \varphi \mu_3) I_n \\
 &\quad + \varphi (A_{w0}^T (Y_{20} + Y_{30} + \alpha_1 (Y_{21} + Y_{31})) J_1 + J_1^T (Y_{20}^T + Y_{30}^T + \alpha_1 (Y_{21}^T + Y_{31}^T)) A_{w0}), \\
 (1, 2) &= P_3 (A_{t0} + \alpha_1 A_{t1}) + (A_{t0} + \alpha_1 A_{t1})^T P_3 - Y_{30} C - \alpha_1 Y_{31} C, \\
 (2, 2) &= P_2 (A_{t0} + \alpha_1 A_{t1}) + (A_{t0} + \alpha_1 A_{t1})^T P_2 - Y_{20} C - C^T Y_{20}^T - \alpha_1 (Y_{21} C + C^T Y_{21}^T) \\
 &\quad + (1 + \mu_1 + \mu_2 + \varphi \mu_3) I_n, \\
 (1, 5) &= \sigma_1 (P_3 A_{t1} - Y_{31} C), \\
 (2, 5) &= \sigma_1 (P_2 A_{t1} - Y_{21} C), \\
 (1, 8) &= \varphi^{\frac{1}{2}} \sigma_1 A_{w0}^T (Y_{21} + Y_{31}) J_1,
 \end{aligned}$$

et que les gains matriciels  $K_0$  et  $K_1$  soient solution de l'équation suivante

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_0 & K_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{20} & Y_{21} \\ Y_{30} & Y_{31} \end{bmatrix}. \quad (2.109)$$

■

*Démonstration.* Pour démontrer ce théorème, il suffit de suivre les mêmes démarches faites dans la démonstration du théorème 2.4.1. •

*Remarque 2.5.1.* La solution donnée par le théorème 2.5.1 est non convexe. Les gains  $K_0$  et  $K_1$  calculés par l'équation (2.109) existent si et seulement si la condition de rang suivante est satisfaite

$$\text{rang} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} Y_{20} & Y_{21} & P_2 \\ Y_{30} & Y_{31} & P_3 \end{bmatrix}. \quad (2.110)$$

Pour la résolution de la LMI (2.108), nous appliquons l'algorithme de relaxation 2.1. Dans ce cas, le test de rang est fait sur l'équation (2.110), les variables de l'étape 1 sont



remplacées par  $P_1, P_2, P_3, Y_{20}, Y_{21}, Y_{30}$  et  $Y_{31}$ , les variables de l'étape 3 sont remplacées par  $P_1, P_2$  et  $P_3$  avec  $Y_{20}, Y_{21}, Y_{30}$  et  $Y_{31}$  fixes et, finalement, dans l'étape 5, les variables sont remplacées par  $P_1, Y_{20}, Y_{21}, Y_{30}$  et  $Y_{31}$  avec  $P_2$  et  $P_3$  fixes. Ainsi, la remarque 2.2.1 adaptée à ce cas reste valable.  $\square$

### 2.5.4 Exemple numérique

Considérons le système (2.102). Les différentes matrices de ce système sont données par

$$A_{t_0} = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 & -1 \\ 0.5 & -2.5 & 1 \\ 0 & -0.6 & -3.5 \end{bmatrix}, \quad A_{t_1} = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.1 & 0 \\ 0 & -0.05 & 0 \\ 0.15 & 0 & -0.02 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.3 \\ -1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$A_{w_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad J_1 = \begin{bmatrix} -0.03 & 0 & -0.03 \\ 0 & -0.01 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La commande  $u_1(t)$  est définie comme dans (2.14), soit

$$u_{1\min} = -5 \leq u_1(t) \leq u_{1\max} = 6,$$

et les conditions initiales sont

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En vertu du théorème 2.5.1 et pour  $\mu_1 = 6.3008$ ,  $\mu_2 = 0.1311$  et  $\mu_3 = 3.5733$ , la solution de la LMI (2.108) est obtenue pour  $\gamma = 8$  et les gains  $K_0$  et  $K_1$  sont obtenus à partir de la relation (2.109)

$$K_0 = \begin{bmatrix} -20.9706 & 254.9143 \\ -14.9540 & 162.3214 \\ 5.6050 & -62.5710 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} -0.0144 & 0.1207 \\ -0.0112 & -0.0336 \\ 0.0978 & -0.0057 \end{bmatrix}.$$

Les figures suivantes montrent la simulation du système augmenté (2.107). Nous pouvons voir l'évolution de l'état  $x(t)$  (figure 2.11) et l'évolution du signal d'erreur  $e(t)$  et du signal de perturbation  $v(t)$  (figure 2.12). Les simulations sont réalisées avec un coefficient de covariance entre les processus de Wiener  $w_0(t)$  et  $w_1(t)$  qui vaut  $\varphi = 0.0235$ .

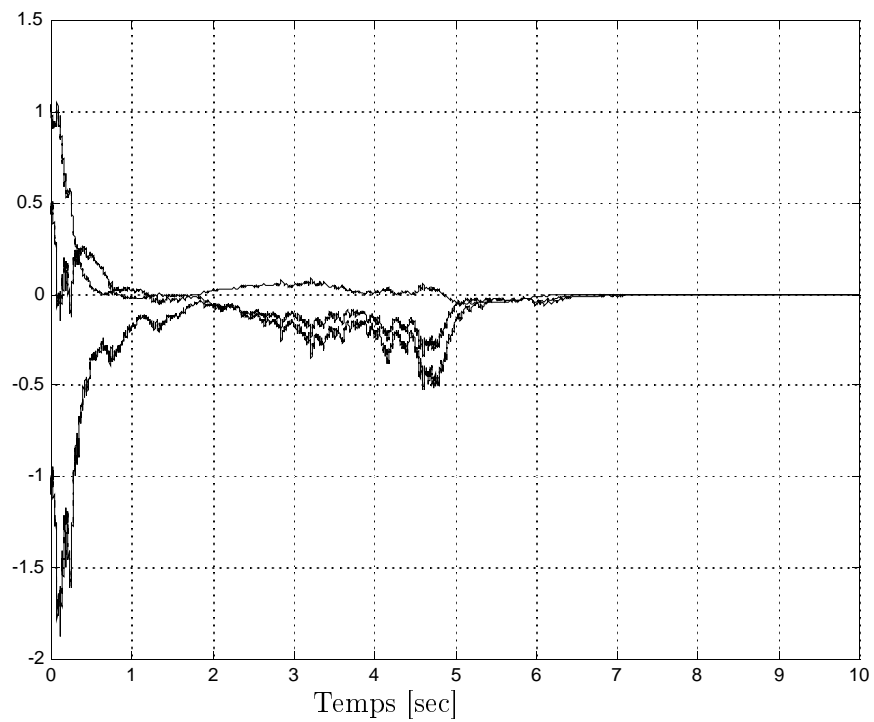


FIG. 2.11 – L'état  $x(t)$ .

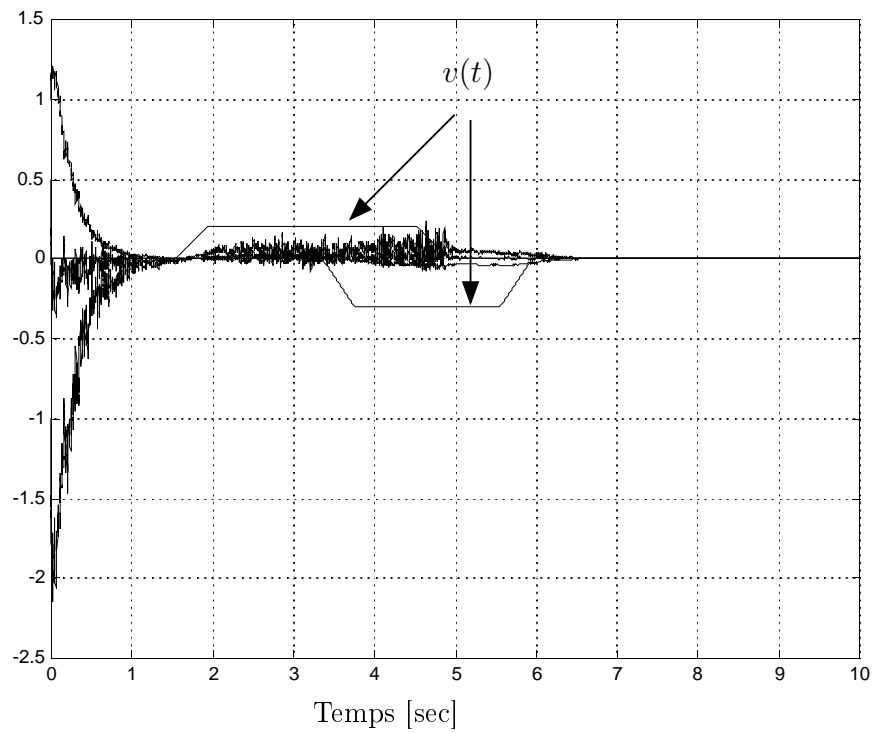


FIG. 2.12 – Le signal d'erreur  $e(t)$  et le signal de perturbation  $v(t)$ .

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le filtrage  $\mathcal{H}_\infty$  d'ordre plein pour différentes classes des systèmes stochastiques.

Le critère  $\mathcal{H}_\infty$  qui exprime l'atténuation entre la norme du signal de perturbation  $v(t)$  et la norme de l'erreur d'estimation  $e(t)$  par un réel  $\gamma > 0$  a été retenu comme un indice de performance.

Un changement de variable est utilisé pour transformer la présence d'une bilinéarité en une incertitude paramétrique. En utilisant la formule d'Itô et des lemmes de majoration sur le système devenu "incertain", nous avons développé pour chaque système étudié une LMI couplée à une contrainte égalité qui assure la stabilité exponentielle en moyenne quadratique et qui vérifie l'indice de performance  $\mathcal{H}_\infty$ .

La résolution de cette LMI avec contrainte nous a permis de calculer les matrices du filtre  $\mathcal{H}_\infty$  pour chaque cas traité.

# Chapitre 3

## Filtrage robuste d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>68</b>
<b>3.2</b>	<b>Filtrage d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques sans commande . . . . .</b>	<b>70</b>
3.2.1	Formulation du problème . . . . .	70
3.2.2	Résolution de l'équation de Sylvester . . . . .	72
3.2.3	Synthèse du filtre d'ordre réduit et performance $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	74
3.2.4	Exemple numérique . . . . .	76
<b>3.3</b>	<b>Filtrage d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques avec <math>m</math> commandes . . . . .</b>	<b>78</b>
3.3.1	Formulation du problème . . . . .	78
3.3.2	Résolution des équations de Sylvester . . . . .	80
3.3.3	Passage du système stochastique avec $m$ commandes vers un système avec incertitudes paramétriques . . . . .	81
3.3.4	Synthèse du filtre d'ordre réduit et performance $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	83
3.3.5	Exemple numérique . . . . .	86
<b>3.4</b>	<b>Filtrage d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques avec plusieurs bruits multiplicatifs . . . . .</b>	<b>89</b>
3.4.1	Formulation du problème . . . . .	89
3.4.2	Résolution des équations de Sylvester . . . . .	91
3.4.3	Passage du système stochastique vers un système avec incertitudes paramétriques . . . . .	92
3.4.4	Synthèse du filtre d'ordre réduit et performance $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	94
3.4.5	Exemple numérique . . . . .	98
<b>3.5</b>	<b>Filtrage d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques avec des mesures stochastiques . . . . .</b>	<b>101</b>
3.5.1	Formulation du problème . . . . .	101
3.5.2	Résolution des équations de Sylvester . . . . .	102

3.5.3	Passage du système stochastique avec une commande vers un système avec incertitudes paramétriques . . . . .	103
3.5.4	Synthèse du filtre d'ordre réduit et performance $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	104
3.5.5	Exemple numérique . . . . .	107
<b>3.6</b>	<b>Filtrage robuste d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques incertains . . . . .</b>	<b>109</b>
3.6.1	Formulation du problème . . . . .	109
3.6.2	Passage du système stochastique incertain vers un système augmenté incertain en fonction du gain $Z$ . . . . .	110
3.6.3	Synthèse du filtre robuste d'ordre réduit et performance $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	112
3.6.4	Exemple numérique . . . . .	114
<b>3.7</b>	<b>Commande <math>\mathcal{H}_\infty</math> robuste basée observateur pour les systèmes stochastiques incertains . . . . .</b>	<b>118</b>
3.7.1	Formulation du problème . . . . .	118
3.7.2	Expression de la boucle fermée . . . . .	119
3.7.3	Calcul du gain de retour d'état $L$ . . . . .	120
3.7.4	Conception de la commande basée observateur . . . . .	121
3.7.5	Exemple numérique . . . . .	126
<b>3.8</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>131</b>

---

## 3.1 Introduction

Pour des raisons liées à des limitations de temps de calcul ou à l'implantation en temps réel, le filtrage d'ordre réduit, c'est-à-dire d'ordre inférieur à celui du système, est préféré au filtrage d'ordre plein, en particulier pour les systèmes de grande dimension. Un autre intérêt des filtres d'ordre réduit est l'estimation d'une combinaison linéaire de l'état (la partie utile seulement), par exemple la synthèse d'une commande par retour d'état estimé  $u(t) = L\hat{x}(t)$  où  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  et  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  avec  $m < n$ .

Le filtrage d'ordre réduit pour les systèmes déterministes, dans lequel on estime tout le vecteur de l'état via un filtre dont l'ordre est inférieur à la dimension de l'état estimé, a été traité dans [Lue66, Lue71, O'R78] : il s'agit de l'observateur de Luenberger. Le filtrage d'ordre réduit est dit fonctionnel lorsqu'on ne souhaite estimer qu'une combinaison linéaire de l'état. Ce problème a été traité dans [Dar00a]. L'utilisation des factorisations dans le domaine fréquentiel pour synthétiser un observateur de Luenberger est abordé dans [Hip89]. L'application des observateurs de Luenberger dans le cadre du filtrage de Kalman a été étudiée dans [NHS87, HW90, WH90, PSS91, KSN92]. Le filtrage fonctionnel au sens de Kalman est résolu dans [Dar00b], d'une part, et au sens  $\mathcal{H}_\infty$  d'ordre réduit dans [GW97, YH97, WG98, DZS01], d'autre part.

Le problème du filtrage d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques au sens  $\mathcal{H}_\infty$  est peu abordé dans la littérature [XC02].

Dans ce chapitre, nous allons présenter le filtrage d'ordre réduit pour différentes classes de systèmes stochastiques par ordre croissant de complexité du système.

Dans la section 3.2, (voir [SHR<sup>+</sup>04]), le système considéré est donné par

$$\begin{aligned} dx(t) &= (A_{t0}x(t) + B_0v(t))dt + (A_{w0}x(t) + B_wv(t))dw(t) \\ y(t) &= Cx(t) + D_0v(t) \\ z(t) &= Lx(t). \end{aligned}$$

Dans la section 3.3, le système considéré présente  $m$  bilinéarités état-commande dans la dérive de la dynamique de l'état et écrit sous la forme

$$\begin{aligned} dx(t) &= \left( A_{t0}x(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t)A_{ti}x(t) + B_0v(t) \right) dt + (A_{w0}x(t) + B_wv(t)) dw(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ z(t) &= Lx(t). \end{aligned}$$

Dans la section 3.4, le système considéré présente une bilinéarité état-commande dans la dérive et des bruits multiplicatifs bilinéaires dans la diffusion de la dynamique de l'état

$$\begin{aligned} dx(t) &= ((A_{t0} + u_1(t)A_{t1})x(t) + B_0v(t))dt + A_{w0}x(t)dw_0(t) + u_1(t)A_{w1}x(t)dw_1(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ z(t) &= Lx(t). \end{aligned}$$

Dans la section 3.5, (voir [HSR<sup>+</sup>06]), le système étudié présente une bilinéarité état-commande dans la dérive de la dynamique de son état qui est affectée par un bruit multiplicatif ainsi que son équation de mesures

$$\begin{aligned} dx(t) &= (A_{t0}x(t) + u_1(t)A_{t1}x(t) + B_0v(t))dt + A_{w0}x(t)dw_0(t) \\ dy(t) &= Cx(t)dt + J_1x(t)dw_1(t) \\ z(t) &= Lx(t). \end{aligned}$$

Dans la section 3.6, (voir [SHR<sup>+</sup>04]), nous avons considéré un système stochastique avec des incertitudes paramétriques

$$\begin{aligned} dx(t) &= ((A_{t0} + \Delta A_{t0}(t))x(t) + (B_0 + \Delta B_0(t))v(t))dt \\ &\quad + ((A_{w0} + \Delta A_{w0}(t))x(t) + (B_w + \Delta B_w(t))v(t))dw(t) \\ y(t) &= Cx(t) + D_0v(t) \\ z(t) &= Lx(t). \end{aligned}$$

Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'étude de la commande pour les systèmes stochastiques comme Florchinger dans [Flo97], Ugrinovskii dans [Ugr98] et Chen et Zhang dans [CZ04]. La commande  $\mathcal{H}_\infty$  basée sur un observateur pour un système stochastique

avec des incertitudes paramétriques est traité dans la section 3.7 (voir [ZHR<sup>+</sup>05]) pour le système suivant

$$\begin{aligned} dx(t) &= ((A_{t0} + \Delta A_{t0}(t))x(t) + (B_0 + \Delta B_0(t))v(t))dt + Bu(t)dt \\ &\quad + ((A_{w0} + \Delta A_{w0}(t))x(t) + (B_w + \Delta B_w(t))v(t))dw(t) \\ y(t) &= (C + \Delta C(t))x(t) + (D_0 + \Delta D_0(t))v(t) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_1v(t) + D_2u(t). \end{aligned}$$

L'approche utilisée pour traiter les systèmes bilinéaires est basée sur un changement de variable qui transforme la bilinéarité état-commande en une incertitude paramétrique. Puis, en utilisant la formule d'Itô, la résolution d'une condition écrite sous la forme d'une équation de Sylvester qui permet d'exprimer les matrices du filtre d'ordre réduit en fonction d'un gain unique  $Z$  et des lemmes de majoration sur le système devenu "incertain", nous arrivons à une formulation LMI avec une contrainte égalité qui garantit la stabilité exponentielle en moyenne quadratique et la performance  $\mathcal{H}_\infty$  du système. Les matrices du filtre sont exprimées en fonction du gain  $Z$ . Un exemple illustratif est présenté pour chaque cas traité.

## 3.2 Filtrage d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques sans commande

### 3.2.1 Formulation du problème

Considérons le système stochastique suivant, dans lequel  $f(x(t), v(t))$  et  $g(x(t), v(t))$  de l'équation (1.2) sont linéaires

$$dx(t) = (A_{t0}x(t) + B_0v(t))dt + (A_{w0}x(t) + B_wv(t))dw(t) \quad (3.1a)$$

$$y(t) = Cx(t) + D_0v(t) \quad (3.1b)$$

$$z(t) = Lx(t) \quad (3.1c)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie,  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  est une combinaison linéaire des composantes du vecteur d'état  $x(t)$  avec  $r < n$ , et  $v(t) \in \mathbb{R}^q$  représente les perturbations exogènes.  $w(t)$  est un processus de Wiener scalaire centré qui vérifie (1.5). Sans perte de généralité, nous supposons que  $\text{rang } L = r$ .

L'objectif est de synthétiser un filtre fonctionnel pour estimer  $z(t)$ .

**Hypothèse 3.2.1.** *Nous supposons que le système (3.1) avec  $v(t) \equiv 0$  est exponentiellement stable en moyenne quadratique.*

**Problème 3.2.1.** *Notre but est de construire un filtre fonctionnel d'ordre réduit de la forme suivante*

$$d\eta(t) = M_0\eta(t)dt + N_0y(t)dt \quad (3.2a)$$

$$\hat{z}(t) = \eta(t) + Ry(t) \quad (3.2b)$$

où  $\eta(t) \in \mathbb{R}^r$  (avec  $r < n$ ) est le vecteur d'état du filtre et les matrices  $M_0, N_0$  et  $R$  sont à déterminer afin que l'erreur d'estimation  $e(t) = z(t) - \widehat{z}(t)$  soit stable exponentiellement en moyenne quadratique (voir définition 1.4.12) et vérifie la performance  $\mathcal{H}_\infty$

$$\|e(t)\|_{\widehat{L}_2}^2 \leq \gamma \|v(t)\|_{\widehat{L}_2}^2 \quad (3.3)$$

pour un  $\gamma > 0$  et pour tout  $v(t) \in \widehat{L}_2([0, \infty]; \mathbb{R}^m)$ .

En utilisant (3.1c), l'erreur d'estimation devient

$$e(t) = Lx(t) - \widehat{z}(t) = \varepsilon(t) - RD_0v(t) \quad (3.4)$$

avec

$$\varepsilon(t) = Tx(t) - \eta(t), \quad (3.5)$$

$$T = L - RC. \quad (3.6)$$

A partir de (3.5), nous avons

$$d\varepsilon(t) = Tdx(t) - d\eta(t) \quad (3.7)$$

qui est équivalent, d'après (3.1) et (3.2), à

$$\begin{aligned} d\varepsilon(t) = & T((A_{t_0}x(t) + B_0v(t))dt + (A_{w_0}x(t) + B_wv(t))dw(t)) \\ & - M_0\eta(t)dt - N_0(Cx(t) + D_0v(t))dt. \end{aligned} \quad (3.8)$$

En posant  $\eta(t) = Tx(t) - \varepsilon(t)$  dans (3.8), nous avons

$$\begin{aligned} d\varepsilon(t) = & (M_0\varepsilon(t) + (TA_{t_0} - M_0T - N_0C)x(t) + (TB_0 - N_0D_0)v(t))dt \\ & + (TA_{w_0}x(t) + TB_wv(t))dw(t). \end{aligned} \quad (3.9)$$

En définissant l'état augmenté suivant

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

le système augmenté obtenu à partir de l'équation d'erreur (3.9) et l'équation de la dynamique d'état (3.1a) est donné par

$$d\xi(t) = (\mathcal{A}_{t_0}\xi(t) + \mathcal{B}_0v(t))dt + (\mathcal{A}_{w_0}\xi(t) + \mathcal{B}_wv(t))dw(t) \quad (3.11a)$$

$$e(t) = \mathcal{C}\xi(t) - RD_0v(t) \quad (3.11b)$$

avec

$$\mathcal{A}_{t_0} = \begin{bmatrix} A_{t_0} & 0 \\ TA_{t_0} - M_0T - N_0C & M_0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_0 = \begin{bmatrix} B_0 \\ (TB_0 - N_0D_0) \end{bmatrix},$$



$$\mathcal{A}_{w0} = \begin{bmatrix} A_{w0} & 0 \\ TA_{w0} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_w = \begin{bmatrix} B_w \\ TB_w \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix}.$$

Afin de supprimer l'effet direct de l'état  $x(t)$  dans la dérive de la dynamique de l'erreur d'observation, on pose la condition suivante

$$TA_{t0} - M_0T - N_0C = 0, \quad (3.12)$$

qui correspond à une équation de Sylvester.

Ceci est “équivalent” à la condition de non biais pour les systèmes linéaires déterministes [DZS01].

*Remarque 3.2.1.* La contrainte (3.12) sert à transformer la matrice  $\mathcal{A}_{t0}$  dans le système augmenté (3.11) en une matrice bloc-diagonale. Ceci ressemble à l'approche du filtrage d'ordre plein dans lequel l'effet de l'état dans la dynamique de l'erreur y est également annulé. En fait, nous pouvons retrouver les matrices correspondantes à l'ordre plein en posant

$$T = I \quad (3.13a)$$

$$M_0 = A_{t0} - K_0C. \quad (3.13b)$$

□

### 3.2.2 Résolution de l'équation de Sylvester

Dans la suite, nous allons utiliser la condition de Sylvester (3.12) pour exprimer toutes les matrices du filtre (3.2) en fonction d'une matrice de gain unique  $Z$ .

Puisque  $[L^\dagger \ (I_n - L^\dagger L)]$  est de rang plein lignes, l'équation (3.12) est équivalente à

$$(TA_{t0} - M_0T - N_0C) \begin{bmatrix} L^\dagger & I_n - L^\dagger L \end{bmatrix} = 0, \quad (3.14)$$

où  $L^\dagger$  est une inverse généralisée de  $L$  et satisfait  $L = LL^\dagger L$  [LT85]. Puisque  $\text{rang } L = r$ , on a  $LL^\dagger = I_r$  et la relation (3.14) devient

$$0 = TA_{t0}L^\dagger - M_0TL^\dagger - N_0CL^\dagger, \quad (3.15a)$$

$$0 = T\bar{A} + M_0R\bar{C} - N_0\bar{C}, \quad (3.15b)$$

où

$$\bar{A} = A_{t0}(I_n - L^\dagger L), \quad (3.16a)$$

$$\bar{C} = C(I_n - L^\dagger L). \quad (3.16b)$$

En utilisant (3.6) et la relation  $LL^\dagger = I_r$ , l'équation (3.15a) donne

$$\begin{aligned} M_0 &= LA_{t0}L^\dagger - RCA_{t0}L^\dagger + M_0RCL^\dagger - N_0CL^\dagger \\ &= LA_{t0}L^\dagger - RCA_{t0}L^\dagger - (N_0 - M_0R)CL^\dagger \\ &= LA_{t0}L^\dagger - \begin{bmatrix} R & \underbrace{N_0 - M_0R}_{K_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CA_{t0}L^\dagger \\ CL^\dagger \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

que l'on écrit sous la forme

$$M_0 = \bar{\bar{A}} - \mathcal{K}\bar{\bar{C}}, \quad (3.18)$$

avec

$$\bar{\bar{A}} = LA_{t_0}L^\dagger, \quad (3.19a)$$

$$\bar{\bar{C}} = \begin{bmatrix} CA_{t_0}L^\dagger \\ CL^\dagger \end{bmatrix}, \quad (3.19b)$$

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} R & K_0 \end{bmatrix}, \quad (3.19c)$$

$$K_0 = N_0 - M_0R. \quad (3.19d)$$

Puis, les relations (3.6), (3.19c) et (3.19d) nous permettent de réécrire l'équation (3.15b) sous la forme

$$\mathcal{K}\bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0 & L\bar{A} \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

où

$$\bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} D & C\bar{A} \\ 0 & \bar{C} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

et, s'il existe une solution générale à l'équation (3.20), elle est alors donnée par

$$\mathcal{K} = L\bar{A}\bar{\Sigma}^\dagger + Z(I_{2p} - \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^\dagger), \quad (3.22)$$

avec

$$Z = \begin{bmatrix} Z_R & Z_0 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

où  $Z$  est une matrice arbitraire de dimensions appropriées.

La solution de la contrainte (3.12) existe si et seulement si la condition de rang (C.20) est vérifiée (voir annexe C, lemme C.1.1).

En utilisant la définition de  $T$  et les équations (3.19) et (3.22), la relation (3.18) devient

$$M_0 = \mathbb{A}_t - Z\mathbb{C}_t, \quad (3.24)$$

où

$$\mathbb{A}_t = \bar{\bar{A}} - \begin{bmatrix} 0 & L\bar{A} \end{bmatrix} \bar{\Sigma}^\dagger \bar{\bar{C}}, \quad \mathbb{C}_t = (I_{2p} - \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^\dagger) \bar{\bar{C}}.$$

En utilisant les développements précédents, la fonction de transfert de  $v(t)$  vers  $e(t)$  donnée par (3.4) et (3.9), devient

$$\begin{aligned} d\varepsilon(t) &= ((\mathbb{A}_t - Z\mathbb{C}_t)\varepsilon(t) + (LB_0 - RCB_0 - K_0D_0 - \mathbb{A}_tRD_0 + Z\mathbb{C}_tRD_0)v(t))dt \\ &\quad + (TA_{w_0}x(t) + TB_wv(t))dw(t) \end{aligned} \quad (3.25a)$$

$$e(t) = \varepsilon(t) - RD_0v(t) \quad (3.25b)$$

Nous allons maintenant imposer la contrainte suivante

$$RD_0 = 0. \quad (3.26)$$

Nous introduisons cette contrainte pour deux raisons.

D'une part, le fait de considérer  $RD_0 = 0$  évite d'avoir une bilinéarité pour le gain  $Z$  dans l'équation (3.25a), ce qui "linéarise" ce problème de filtrage, et nous pourrions, plus loin, l'exprimer sous la forme d'une LMI.

D'autre part, avec la relation (3.25b), on obtient  $e(t) = \varepsilon(t)$  et la fonction de transfert de  $v(t)$  vers  $e(t)$ , donnée par (3.25), n'a plus de terme direct et devient

$$\begin{aligned} de(t) = & ((\mathbb{A}_t - Z\mathbb{C}_t) e(t) + (\mathbb{B}_{01} - Z\mathbb{B}_{02}) v(t)) dt \\ & + ((\mathbb{A}_{w(01)} - Z\mathbb{A}_{w(02)}) x(t) + (\mathbb{B}_{w(01)} - Z\mathbb{B}_{w(02)}) v(t)) dw(t), \end{aligned} \quad (3.27)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{01} &= LB_0 - \begin{bmatrix} 0 & L\bar{A} \end{bmatrix} \bar{\Sigma}^\dagger \begin{bmatrix} CB_0 \\ D_0 \end{bmatrix}, & \mathbb{B}_{02} &= (I_{2p} - \bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^\dagger) \begin{bmatrix} CB_0 \\ D_0 \end{bmatrix}, \\ \mathbb{A}_{w(01)} &= LA_{w0} - \begin{bmatrix} 0 & L\bar{A} \end{bmatrix} \bar{\Sigma}^\dagger \begin{bmatrix} CA_{w0} \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbb{A}_{w(02)} &= (I_{2p} - \bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^\dagger) \begin{bmatrix} CA_{w0} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbb{B}_{w(01)} &= LB_w - \begin{bmatrix} 0 & L\bar{A} \end{bmatrix} \bar{\Sigma}^\dagger \begin{bmatrix} CB_w \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbb{B}_{w(02)} &= (I_{2p} - \bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^\dagger) \begin{bmatrix} CB_w \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sous les contraintes (3.12) et (3.26), le système augmenté (3.11) peut être réécrit sous la forme suivante (voir [Dar00a, DZS01]) avec les notations de la relation (3.27)

$$\begin{aligned} d\xi(t) = & \left( \begin{bmatrix} A_{t0} & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_t - Z\mathbb{C}_t \end{bmatrix} \xi(t) + \begin{bmatrix} B_0 \\ \mathbb{B}_{01} - Z\mathbb{B}_{02} \end{bmatrix} v(t) \right) dt \\ & + \left( \begin{bmatrix} A_{w0} & 0 \\ \mathbb{A}_{w(01)} - Z\mathbb{A}_{w(02)} & 0 \end{bmatrix} \xi(t) + \begin{bmatrix} B_w \\ \mathbb{B}_{w(01)} - Z\mathbb{B}_{w(02)} \end{bmatrix} v(t) \right) dw(t) \end{aligned} \quad (3.29a)$$

$$e(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix} \xi(t) \quad (3.29b)$$

### 3.2.3 Synthèse du filtre d'ordre réduit et performance $\mathcal{H}_\infty$

Nous pouvons alors écrire le système augmenté (3.29) comme

$$d\xi(t) = \left( \hat{A}_{t0}\xi(t) + \hat{B}_0v(t) \right) dt + \left( \hat{A}_{w0}\xi(t) + \hat{B}_wv(t) \right) dw(t) \quad (3.30a)$$

$$e(t) = \hat{C}\xi(t) \quad (3.30b)$$

où les matrices  $\hat{A}_{t0}$ ,  $\hat{B}_0$ ,  $\hat{A}_{w0}$ ,  $\hat{B}_w$  et  $\hat{C}$  peuvent être déduites directement de (3.29).

Le théorème suivant donne le filtre  $\mathcal{H}_\infty$  stochastique d'ordre réduit.

**Théorème 3.2.1.** *Si la condition de rang (C.19) est vérifiée, le système stochastique (3.1) admet le filtre (3.2) qui assure la stabilité exponentielle en moyenne quadratique du signal d'erreur (3.4) et la performance  $\mathcal{H}_\infty$  (3.3) si, pour un réel  $\gamma > 0$  donné, il existe des matrices  $P_1 = P_1^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_2 = P_2^T \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $P_3 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $Y_2 \in \mathbb{R}^{r \times 2p}$  et  $Y_3 \in \mathbb{R}^{n \times 2p}$  telles que la LMI suivante soit vérifiée*

$$\begin{bmatrix} P_1 A_{t0} + A_{t0}^T P_1 & A_{t0}^T P_3 + P_3 \mathbb{A}_t - Y_3 \mathbb{C}_t & P_1 B_0 + P_3 \mathbb{B}_{01} - Y_3 \mathbb{B}_{02} \\ P_3^T A_{t0} + \mathbb{A}_t^T P_3 - \mathbb{C}_t^T Y_3^T & P_2 \mathbb{A}_t + \mathbb{A}_t^T P_2 - Y_2 \mathbb{C}_t - \mathbb{C}_t^T Y_2^T & P_3^T B_0 + P_2 \mathbb{B}_{01} - Y_2 \mathbb{B}_{02} \\ B_0^T P_1 + \mathbb{B}_{01}^T P_3 - \mathbb{B}_{02}^T Y_3^T & B_0^T P_3 + \mathbb{B}_{01}^T P_2 - \mathbb{B}_{02}^T Y_2^T & -\gamma^2 I_q \\ P_1 A_{w0} + P_3^T \mathbb{A}_{w(01)} - Y_3 \mathbb{A}_{w(02)} & 0 & P_1 B_w + P_3 \mathbb{B}_{w(01)} - Y_3 \mathbb{B}_{w(02)} \\ P_3^T \mathbb{A}_{w(01)} - Y_2 \mathbb{A}_{w(02)} & 0 & P_3^T B_w + P_2 \mathbb{B}_{w(01)} - Y_2 \mathbb{B}_{w(02)} \\ 0 & I_r & 0 \\ A_{w0}^T P_1 + \mathbb{A}_{w(01)}^T P_3 - \mathbb{A}_{w(02)}^T Y_3^T & \mathbb{A}_{w(01)}^T P_3 - \mathbb{A}_{w(02)}^T Y_2^T & 0 \\ 0 & 0 & I_r \\ B_w^T P_1 + \mathbb{B}_{w(01)}^T P_3 - \mathbb{B}_{w(02)}^T Y_3^T & B_w^T P_3 + \mathbb{B}_{w(01)}^T P_2 - \mathbb{B}_{w(02)}^T Y_2^T & 0 \\ -P_1 & P_3 & 0 \\ P_3^T & -P_2 & 0 \\ 0 & 0 & -I_r \end{bmatrix} < 0, \quad (3.31)$$

et que le gain  $Z$  soit solution de l'équation suivante

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

■

*Démonstration.* En vertu du théorème 1.6.2, le problème du filtrage  $\mathcal{H}_\infty$  est résolu pour le système (3.30), si et seulement s'il existe une matrice  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T > 0$  telle que l'inégalité matricielle suivante soit vérifiée

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} \hat{A}_{t0} + \hat{A}_{t0}^T \mathcal{P} & \mathcal{P} \hat{B}_0 & \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P} & \hat{C}^T \\ \hat{B}_0^T \mathcal{P} & -\gamma^2 I_q & \hat{B}_w^T \mathcal{P} & 0 \\ \mathcal{P} \hat{A}_{w0} & \mathcal{P} \hat{B}_w & -\mathcal{P} & 0 \\ \hat{C} & 0 & 0 & -I_r \end{bmatrix} < 0. \quad (3.33)$$

En prenant  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T = \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3^T & P_2 \end{bmatrix} > 0$  et en remplaçant les différentes matrices du système (3.30) par leur expression, la LMI (3.31) est obtenue directement. •

*Remarque 3.2.2.* La solution donnée par le théorème 3.2.1 est non convexe. La matrice du gain  $Z$  calculée par l'équation (3.32) existe si et seulement si la condition de rang suivante est satisfaite

$$\text{rang} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} Y_2 & P_2 \\ Y_3 & P_3 \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Pour la résolution de la LMI (3.31), nous appliquons l'algorithme de relaxation 2.1. Dans ce cas, le test de rang est fait sur l'équation (3.34), les variables de l'étape 1 sont remplacées par  $P_1, P_2, P_3, Y_2$  et  $Y_3$ , les variables de l'étape 3 sont remplacées par  $P_1, P_2$  et  $P_3$  avec  $Y_2$  et  $Y_3$  fixes et, finalement, dans l'étape 5, les variables sont remplacées par  $P_1, Y_2$  et  $Y_3$  avec  $P_2$  et  $P_3$  fixes.

Ainsi, la remarque 2.2.1 adaptée à ce cas reste valable.  $\square$

### 3.2.4 Exemple numérique

Considérons le système (3.1). Les différentes matrices de ce système sont données par

$$A_{t0} = \begin{bmatrix} -3.5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1.5 & -1 & 0.5 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0.5 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.3 \\ -1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.5 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix},$$

$$A_{w0} = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 & 0 & -0.3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -0.6 & 0.1 & 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0.1 & -0.5 & -0.4 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0 \\ -0.6 & 0.2 \\ 0.5 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Le gain  $Z$  calculé par la LMI (3.31) du théorème 3.2.1 est obtenu pour  $\gamma = 1.119$

$$Z = \begin{bmatrix} -7923.945 & -6658.539 & 15197.665 & 7.0247 \\ 13527.306 & 10489.120 & -22286.430 & -10.196 \end{bmatrix}.$$

Ce calcul a été fait avec une matrice  $\mathcal{P}$  bloc-diagonale de la forme

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}.$$

Les matrices du filtre (3.2) sont données par

$$M_0 = \begin{bmatrix} 3.683 & 9.366 \\ -6.673 & -14.720 \end{bmatrix}, \quad N_0 = \begin{bmatrix} 1.262 & 3.012 \\ -3.176 & -4.333 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.625 & -0.625 \end{bmatrix}.$$

Les figures suivantes montrent la simulation du système augmenté (3.30). Nous pouvons voir l'évolution de l'état  $x(t)$  (figure 3.1) et l'évolution du signal d'erreur  $\varepsilon(t)$  et du signal de perturbation  $v(t)$  (figure 3.2).

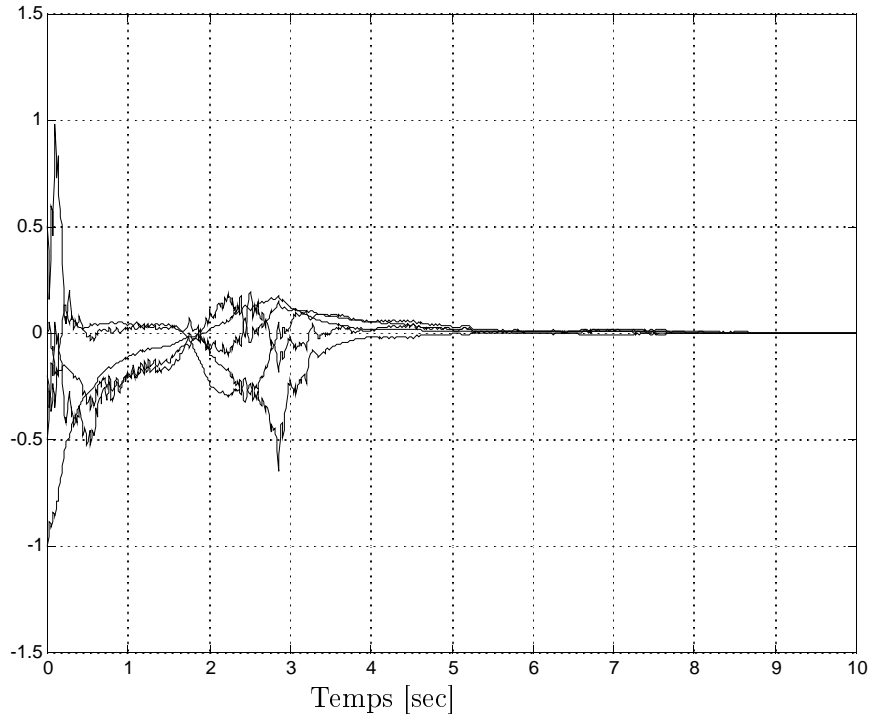
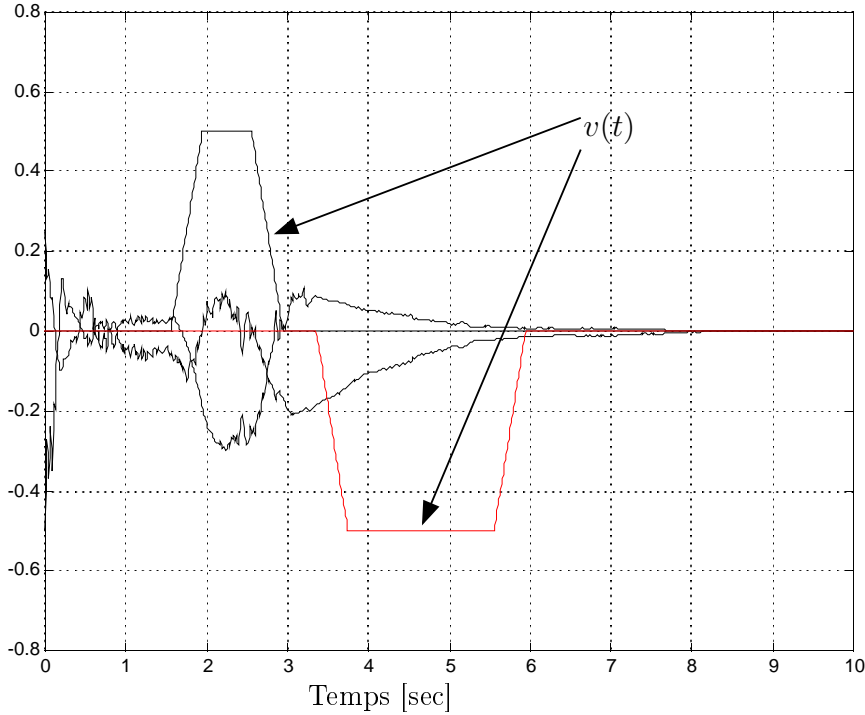


FIG. 3.1 – L'état  $x(t)$ .


 FIG. 3.2 – Le signal d'erreur  $\varepsilon(t)$  et le signal de perturbation  $v(t)$ .

### 3.3 Filtrage d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques avec $m$ commandes

#### 3.3.1 Formulation du problème

Considérons le système stochastique suivant, dans lequel  $f(x(t), u(t), v(t))$  de l'équation (1.2) est bilinéaire ( $m$  bilinéarités) et  $g(x(t), v(t))$  de l'équation (1.2) est linéaire

$$dx(t) = \left( A_{t_0}x(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t)A_{t_i}x(t) + B_0v(t) \right) dt + (A_{w_0}x(t) + B_wv(t)) dw(t) \quad (3.35a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (3.35b)$$

$$z(t) = Lx(t) \quad (3.35c)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie,  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  est une combinaison linéaire des composantes du vecteur d'état  $x(t)$  avec  $r < n$ ,  $v(t) \in \mathbb{R}^q$  représente les perturbations exogènes et  $u_i(t) \in \mathbb{R}$ , pour  $i = 1, \dots, m$ , sont des commandes scalaires.  $w(t)$  est un processus de Wiener scalaire centré qui vérifie (1.5). Sans perte de généralité, nous supposons que  $\text{rang } L = r$ .

On suppose que les commandes  $u_i(t)$  pour  $i = 1, \dots, m$  sont toutes bornées et appartiennent à l'ensemble  $\Gamma_m$  suivant (voir paragraphe 2.3.2.1, équation (2.53))

$$\Gamma_m = \{u_i(t) \in \mathbb{R} \mid u_{i \min} \leq u_i(t) \leq u_{i \max} \text{ pour } i = 1, \dots, m\}. \quad (3.36)$$

L'objectif est de construire un filtre d'ordre réduit de la forme suivante

$$d\eta(t) = \left( M_0\eta(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t)M_i\eta(t) \right) dt + \left( N_0y(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t)N_iy(t) \right) dt \quad (3.37a)$$

$$\widehat{z}(t) = \eta(t) + Ry(t) \quad (3.37b)$$

où les matrices  $M_i, N_i$  pour  $i = 0, \dots, m$  et  $R$  sont à déterminer.

**Hypothèse 3.3.1.** *Nous supposons que le système (3.35) avec  $v(t) \equiv 0$  est exponentiellement stable en moyenne quadratique  $\forall u_1(t) \in \Gamma_m$ .*

**Problème 3.3.1.** *Pour un réel  $\gamma > 0$  donné, le but est de trouver les matrices du filtre d'ordre réduit (3.37) telles que l'erreur  $e(t) = z(t) - \widehat{z}(t)$  soit exponentiellement stable en moyenne quadratique et que pour un réel  $\gamma > 0$  donné la performance  $\mathcal{H}_\infty$  suivante*

$$\|e(t)\|_{\widehat{L}_2}^2 \leq \gamma \|v(t)\|_{\widehat{L}_2}^2 \quad (3.38)$$

soit vérifiée.

L'erreur d'estimation est donnée par

$$e(t) = (L - RC)x(t) - \eta(t). \quad (3.39)$$

Soit

$$T = L - RC, \quad (3.40)$$

alors, en utilisant (3.35a) et (3.37a), la dynamique de l'erreur devient

$$\begin{aligned} de(t) = & \left( \left( M_0 + \sum_{i=1}^m M_i u_i(t) \right) e(t) + TB_0 v(t) \right) dt + (TA_{t0} - M_0T - N_0C) x(t) dt \\ & + \sum_{i=1}^m (TA_{ti} - M_iT - N_iC) u_i(t) x(t) dt + T(A_{w0}x(t) + B_w v(t)) dw(t). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Afin de supprimer l'effet direct de l'état dans la dérive de la dynamique de l'erreur, nous allons poser les contraintes suivantes

$$TA_{ti} - M_iT - N_iC = 0, \quad \text{pour } i = 0, \dots, m, \quad (3.42)$$

qui correspondent à des équations de Sylvester.

Ceci est "équivalent" à la condition de non biais pour les systèmes linéaires déterministes [DZS01].

Considérons le vecteur d'état augmenté suivant

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$



La dynamique du système augmenté constitué de (3.35a) et (3.41), en considérant les équations de Sylvester (3.42), est donnée par

$$d\xi(t) = \left( \left( \mathcal{A}_{t0} + \sum_{i=1}^m \mathcal{A}_{ti} u_i(t) \right) \xi(t) + \mathcal{B}_0 v(t) \right) dt + (\mathcal{A}_{w0} \xi(t) + \mathcal{B}_w v(t)) dw(t) \quad (3.44)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ti} &= \begin{bmatrix} A_{ti} & 0 \\ 0 & M_i \end{bmatrix}, & \text{pour } i = 0, \dots, m, & \mathcal{B}_0 &= \begin{bmatrix} B_0 \\ TB_0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A}_{w0} &= \begin{bmatrix} A_{w0} & 0 \\ TA_{w0} & 0 \end{bmatrix}, & \mathcal{B}_w &= \begin{bmatrix} B_w \\ TB_w \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 3.3.2 Résolution des équations de Sylvester

Dans la suite, nous allons utiliser la condition de Sylvester (3.42) pour exprimer toutes les matrices du filtre (3.37) en fonction d'une matrice de gain unique  $Z$ .

L'équation (3.42) est équivalente à

$$(TA_{ti} - M_i T - N_i C) \begin{bmatrix} L^\dagger & I_n - L^\dagger L \end{bmatrix} = 0, \quad \text{pour } i = 0, \dots, m, \quad (3.45)$$

où  $L^\dagger$  est une inverse généralisée de  $L$  et satisfait  $L = LL^\dagger L$  [LT85]. Puisque  $\text{rang } L = r$ , on a  $LL^\dagger = I_r$  et la relation (3.45) devient

$$0 = TA_{ti}L^\dagger - M_i TL^\dagger - N_i CL^\dagger, \quad \text{pour } i = 0, \dots, m, \quad (3.46a)$$

$$0 = T\bar{A}_i + M_i R\bar{C} - N_i \bar{C}, \quad \text{pour } i = 0, \dots, m, \quad (3.46b)$$

où

$$\bar{A}_i = A_{ti}(I_n - L^\dagger L), \quad \text{pour } i = 0, \dots, m, \quad (3.47a)$$

$$\bar{C} = C(I_n - L^\dagger L). \quad (3.47b)$$

En utilisant (3.40), l'équation (3.46a) donne

$$M_i = \bar{\bar{A}}_i - \mathcal{K}_i \bar{\bar{C}}_i \quad \text{pour } i = 0, \dots, m, \quad (3.48)$$

avec

$$\bar{\bar{A}}_i = LA_{ti}L^\dagger, \quad (3.49a)$$

$$\bar{\bar{C}}_i = \begin{bmatrix} CA_{ti}L^\dagger \\ CL^\dagger \end{bmatrix}, \quad (3.49b)$$

$$\mathcal{K}_i = \begin{bmatrix} R & K_i \end{bmatrix}, \quad (3.49c)$$

$$K_i = N_i - M_i R. \quad (3.49d)$$

Puis, les relations (3.40), (3.49c) et (3.49d) nous permettent de réécrire l'équation (3.46b) sous la forme

$$\mathcal{K}\bar{\Sigma} = L\bar{A}, \quad (3.50)$$

où

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} R & K_0 & \cdots & K_m \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_0 & \cdots & \bar{A}_m \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

$$\bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} C\bar{A}_0 & C\bar{A}_1 & \cdots & C\bar{A}_m \\ \bar{C} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{C} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \bar{C} \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

et, s'il existe une solution générale à l'équation (3.50), elle est alors donnée par

$$\mathcal{K} = L\bar{A} \bar{\Sigma}^\dagger + Z(I_{(m+2)p} - \bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^\dagger), \quad (3.54)$$

avec

$$Z = \begin{bmatrix} Z_R & Z_0 & \cdots & Z_m \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

où  $Z$  est une matrice arbitraire de dimensions appropriées.

La solution de la contrainte (3.45) existe si et seulement si la condition de rang (C.14) est vérifiée (voir annexe C, lemme C.1.1).

### 3.3.3 Passage du système stochastique avec $m$ commandes vers un système avec incertitudes paramétriques

Comme dans le paragraphe 2.3.2.2, pour étudier la stabilité du système augmenté (3.44), nous allons faire le changement de variable suivant sur les commandes  $u_i(t)$

$$u_i(t) = \alpha_i + \sigma_i \varepsilon_i(t) \quad (3.56)$$

où  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  et  $\sigma_i \in \mathbb{R}$  pour  $i = 1, \dots, m$  sont donnés par

$$\alpha_i = \frac{1}{2}(u_{i\min} + u_{i\max}), \quad \sigma_i = \frac{1}{2}(u_{i\max} - u_{i\min}), \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.57)$$

et  $\alpha_0 = 1$  et  $\sigma_0 = 0$ .

Les nouvelles variables "incertaines" sont les  $\varepsilon_i(t) \in \bar{\Gamma}_m \subset \mathbb{R}$  où le polytope  $\bar{\Gamma}_m$  est défini par

$$\bar{\Gamma}_m = \{\varepsilon_i(t) \in \mathbb{R} \mid \varepsilon_{i\min} = -1 \leq \varepsilon_i(t) \leq \varepsilon_{i\max} = 1 \quad \text{pour} \quad i = 1, \dots, m\}. \quad (3.58)$$

Donc, la dynamique de l'erreur (3.41) peut être réécrite comme

$$\begin{aligned} de(t) = & \left( \mathbb{A}_t - Z\mathbb{C}_t + (\tilde{\mathbb{A}}_t - Z\tilde{\mathbb{C}}_t)\Delta_\varepsilon(\varepsilon(t))H_e \right) e(t)dt + (\mathbb{B}_{01} - Z\mathbb{B}_{02})v(t)dt \\ & + ((\mathbb{A}_{w(01)} - Z\mathbb{A}_{w(02)})x(t) + (\mathbb{B}_{w(01)} - Z\mathbb{B}_{w(02)})v(t))dw(t) \end{aligned} \quad (3.59)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_t &= \sum_{i=0}^m \alpha_i \bar{\bar{A}}_i - L\bar{A} \bar{\Sigma}^\dagger \Lambda, & \mathbb{C}_t &= (I_{(m+2)p} - \bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^\dagger) \Lambda, \\ \tilde{\mathbb{A}}_t &= \begin{bmatrix} \sigma_1 \bar{\bar{A}}_1 & \cdots & \sigma_m \bar{\bar{A}}_m \end{bmatrix} - L\bar{A} \bar{\Sigma}^\dagger \Upsilon, & \tilde{\mathbb{C}}_t &= (I_{(m+2)p} - \bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^\dagger) \Upsilon, \\ \mathbb{B}_{01} &= LB_0 - L\bar{A} \bar{\Sigma}^\dagger \Phi, & \mathbb{B}_{02} &= (I_{(m+2)p} - \bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^\dagger) \Phi, \\ \mathbb{A}_{w(01)} &= LA_{w0} - L\bar{A} \bar{\Sigma}^\dagger \Psi, & \mathbb{A}_{w(02)} &= (I_{(m+2)p} - \bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^\dagger) \Psi, \\ \mathbb{B}_{w(01)} &= LB_w - L\bar{A} \bar{\Sigma}^\dagger \Theta, & \mathbb{B}_{w(02)} &= (I_{(m+2)p} - \bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^\dagger) \Theta, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Lambda &= \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^m \alpha_i CA_{ti} L^\dagger \\ \alpha_0 CL^\dagger \\ \vdots \\ \alpha_m CL^\dagger \end{bmatrix}, & \Upsilon &= \begin{bmatrix} \sigma_1 CA_{t1} L^\dagger & \cdots & \sigma_m CA_{tm} L^\dagger \\ 0 & \cdots & 0 \\ \sigma_1 CL^\dagger & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 \\ \cdots & 0 & \sigma_m CL^\dagger \end{bmatrix}, \\ \Phi &= \begin{bmatrix} CB \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, & \Psi &= \begin{bmatrix} CA_{w0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, & \Theta &= \begin{bmatrix} CB_w \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, & H_e &= \begin{bmatrix} I_r \\ \vdots \\ I_r \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\Delta_\varepsilon(\varepsilon(t)) = \text{bdiag}(\varepsilon_1(t)I_r, \dots, \varepsilon_m(t)I_r).$$

En utilisant la définition (3.58), la matrice  $\Delta_\varepsilon(\varepsilon(t))$  vérifie

$$\|\Delta_\varepsilon(\varepsilon(t))\| \leq 1. \quad (3.62)$$

En utilisant (3.56), l'équation d'état (3.35a) devient

$$dx(t) = \left( \left( \sum_{i=0}^m \alpha_i A_{ti} + \sum_{i=1}^m \sigma_i \varepsilon_i(t) A_{ti} \right) x(t) + B_0 v(t) \right) dt + (A_{w0} x(t) + B_w v(t)) dw(t). \quad (3.63)$$

Donc le système augmenté (3.44) s'écrit

$$d\xi(t) = \left( \left( \hat{A}_{t0} + \Delta \hat{A}_{t0}(t) \right) \xi(t) + \hat{B}_0 v(t) \right) dt + \left( \hat{A}_{w0} \xi(t) + \hat{B}_w v(t) \right) dw(t) \quad (3.64)$$

où

$$\hat{A}_{t0} = \begin{bmatrix} A_\alpha & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_t - Z\mathbb{C}_t \end{bmatrix}, \quad A_\alpha = \sum_{i=0}^m \alpha_i A_{ti}, \quad \Delta \hat{A}_{t0} = H_1 \Delta_\varepsilon(\varepsilon(t)) H,$$

$$\widehat{B}_0 = \begin{bmatrix} B_0 \\ \mathbb{B}_{01} - Z\mathbb{B}_{02} \end{bmatrix}, \quad \widehat{A}_{w0} = \begin{bmatrix} A_{w0} & 0 \\ \mathbb{A}_{w(01)} - Z\mathbb{A}_{w(02)} & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{B}_w = \begin{bmatrix} B_w \\ \mathbb{B}_{w(01)} - Z\mathbb{B}_{w(02)} \end{bmatrix},$$

avec

$$H_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 A_{t1} & \cdots & \sigma_m A_{tm} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \widetilde{\mathbb{A}}_t - Z\widetilde{\mathbb{C}}_t \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} I_n & \cdots & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I_r & \cdots & I_r \end{bmatrix}^T,$$

$$\Delta_\xi(\varepsilon(t)) = \text{bdiag}(\varepsilon_1(t)I_n, \dots, \varepsilon_m(t)I_n, \varepsilon_1(t)I_r, \dots, \varepsilon_m(t)I_r).$$

Il est à noter qu'à partir de (3.58),  $\Delta_\xi(\varepsilon(t))$  vérifie

$$\|\Delta_\xi(\varepsilon(t))\| \leq 1. \quad (3.65)$$

### 3.3.4 Synthèse du filtre d'ordre réduit et performance $\mathcal{H}_\infty$

Considérons le système obtenu par l'équation (3.64)

$$d\xi(t) = \left( (\widehat{A}_{t0} + \Delta\widehat{A}_{t0}) \xi(t) + \widehat{B}_0 v(t) \right) dt + \left( \widehat{A}_{w0} \xi(t) + \widehat{B}_w v(t) \right) dw(t) \quad (3.66a)$$

$$e(t) = \widehat{C} \xi \quad (3.66b)$$

où

$$\widehat{C} = \begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

Le théorème suivant permet d'obtenir le gain  $Z$  et donc de synthétiser le filtre (3.37).

**Théorème 3.3.1.** *Si la condition de rang (C.14) est vérifiée, le problème 3.3.1 du filtrage  $\mathcal{H}_\infty$  d'ordre réduit est résolu pour le système (3.35) avec le filtre (3.37) tel que la dynamique de l'erreur d'estimation (3.41) est exponentiellement stable en moyenne quadratique si, pour un réel  $\gamma > 0$  donné, il existe un réel  $\mu > 0$ , et des matrices  $\mathbb{P} = \mathbb{P}^T$  et  $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^T$ ,  $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in \mathbb{R}^{(n+r) \times (n+r)}$  tels que*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}_u & 0 \\ 0 & I_{((n+r) \times m + q)} \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} \overline{\mathbb{A}}_{t0}\mathbb{P} + \mathbb{P}\overline{\mathbb{A}}_{t0}^T & \mathbb{P}\widehat{\mathbb{C}}^T & \mathbb{P}\overline{H}_1^T & \mathbb{P}\overline{\mathbb{A}}_{w0}^T & \mu H & \overline{\mathbb{B}}_0 \\ \widehat{\mathbb{C}}\mathbb{P} & -I_{n+r} & 0 & \mathbb{P}\overline{\mathbb{B}}_w^T & 0 & 0 \\ \overline{H}_1\mathbb{P} & 0 & -\mu I_{(n+r)m} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{\mathbb{A}}_{w0}\mathbb{P} & \overline{\mathbb{B}}_w\mathbb{P} & 0 & -\mathbb{P} & 0 & 0 \\ \hline \mu H^T & 0 & 0 & 0 & -\mu I_{(n+r)m} & 0 \\ \overline{\mathbb{B}}_0^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I_q \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbb{K}_u & 0 \\ 0 & I_{((n+r) \times m + q)} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{c|c} \mathbb{K}_y & 0 \\ \hline 0 & I_{((n+r) \times (m+1))} \end{array} \right]^T \\
 & \times \left[ \begin{array}{cccc|cc} \mathbb{Q}\bar{\mathbb{A}}_{t0} + \bar{\mathbb{A}}_{t0}^T \mathbb{Q} & \mathbb{Q}\bar{\mathbb{B}}_0 & \mathbb{Q}H & \bar{\mathbb{A}}_{w0}^T \mathbb{Q} & \mu\bar{H}_1^T & \hat{C}^T \\ \bar{\mathbb{B}}_0^T \mathbb{Q} & -\gamma^2 I_q & 0 & \bar{\mathbb{B}}_w^T \mathbb{Q} & 0 & 0 \\ H^T \mathbb{Q} & 0 & -\mu I_{(n+r)m} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{Q}\bar{\mathbb{A}}_{w0} & \mathbb{Q}\bar{\mathbb{B}}_w & 0 & -\mathbb{Q} & 0 & 0 \\ \hline \mu\bar{H}_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu I_{(n+r)m} & 0 \\ \hat{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{n+r} \end{array} \right] \\
 & \times \left[ \begin{array}{c|c} \mathbb{K}_y & 0 \\ \hline 0 & I_{((n+r) \times (m+1))} \end{array} \right] < 0, \quad (3.69)
 \end{aligned}$$

$$I_{n+r} = \mathbb{P}\mathbb{Q}, \quad (3.70)$$

où

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbb{A}}_{t0} &= \begin{bmatrix} A_\alpha & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_t \end{bmatrix}, & \bar{\mathbb{B}}_0 &= \begin{bmatrix} B_0 \\ \mathbb{B}_{01} \end{bmatrix}, & \bar{\mathbb{A}}_{w0} &= \begin{bmatrix} A_{w0} & 0 \\ \mathbb{A}_{w(01)} & 0 \end{bmatrix}, & \bar{\mathbb{B}}_w &= \begin{bmatrix} B_w \\ \mathbb{B}_{w(01)} \end{bmatrix}, \\
 \mathcal{C}_t &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{C}_t \end{bmatrix}, & \tilde{\mathcal{C}}_t &= \begin{bmatrix} 0 & \tilde{\mathbb{C}}_t \end{bmatrix}, & \hat{\mathcal{A}}_w &= \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{w(02)} & 0 \end{bmatrix}, & \mathcal{I}_{0,r} &= \begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix}^T, \\
 \bar{H}_1 &= \begin{bmatrix} \sigma_1 A_{t1} & \cdots & \sigma_m A_{tm} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{\mathbb{A}}_t \end{bmatrix}, & & & & I_{(n+r)m} &= \text{bdiag}(I_{n_m}, I_{r_m}),
 \end{aligned}$$

et les matrices  $\mathbb{K}_y$  et  $\mathbb{K}_u$  sont respectivement les bases des noyaux de  $\begin{bmatrix} \mathcal{C}_t & \mathbb{B}_{02} \\ \hat{\mathcal{A}}_w & \mathbb{B}_{w(02)} \\ \tilde{\mathcal{C}}_t & 0 \end{bmatrix}$  et

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{ccccc} -\mathcal{I}_{0,r}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathcal{I}_{0,r}^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{I}_{0,r}^T \end{array} \right]^T. \text{ Tous les gains } Z \text{ sont donnés par} \\
 & Z = \bar{\mathbb{H}}_R^\dagger \mathbb{K} \bar{\mathbb{G}}_L^\dagger + \mathbb{Z} - \bar{\mathbb{H}}_R^\dagger \bar{\mathbb{H}}_R \mathbb{Z} \bar{\mathbb{G}}_L \bar{\mathbb{G}}_L^\dagger, \quad (3.72)
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \mathbb{K} &= -\mathbb{R}_1^{-1} \bar{\mathbb{H}}_L^T \mathbb{S}_1 \bar{\mathbb{G}}_R^T \left( \bar{\mathbb{G}}_R \mathbb{S}_1 \bar{\mathbb{G}}_R^T \right)^{-1} + \mathbb{R}_1^{-1} \mathbb{S}_2^{1/2} \mathbb{R}_2 \left( \bar{\mathbb{G}}_R \mathbb{S}_1 \bar{\mathbb{G}}_R^T \right)^{-1/2}, \\
 \mathbb{S}_1 &= \left( \bar{\mathbb{H}}_L \mathbb{R}_1^{-1} \bar{\mathbb{H}}_L^\dagger - \bar{\mathbb{Q}} \right)^{-1} > 0, \\
 \mathbb{S}_2 &= \mathbb{R}_1 - \bar{\mathbb{H}}_L^T \left( \mathbb{S}_1 - \mathbb{S}_1 \bar{\mathbb{G}}_R^T \left( \bar{\mathbb{G}}_R \mathbb{S}_1 \bar{\mathbb{G}}_R^T \right)^{-1} \bar{\mathbb{G}}_R \mathbb{S}_1 \right) \bar{\mathbb{H}}_L,
 \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbb{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbb{Q}\bar{\mathbb{A}}_{t_0} + \bar{\mathbb{A}}_{t_0}^T \mathbb{Q} & \mathbb{Q}\bar{\mathbb{B}}_0 & \mathbb{Q}H & \bar{\mathbb{A}}_{w0}^T \mathbb{Q} & \mu \bar{H}_1^T & \hat{C}^T \\ \bar{\mathbb{B}}_0^T \mathbb{Q} & -\gamma^2 I_q & 0 & \bar{\mathbb{B}}_w^T \mathbb{Q} & 0 & 0 \\ H^T \mathbb{Q} & 0 & -\mu I_{(n+r)m} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{Q}\bar{\mathbb{A}}_{w0} & \mathbb{Q}\bar{\mathbb{B}}_w & 0 & -\mathbb{Q} & 0 & 0 \\ \mu \bar{H}_1 & 0 & 0 & 0 & -\mu I_{(n+r)m} & 0 \\ \hat{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{n+r} \end{bmatrix}.$$

Les matrices  $\mathbb{R}_1$ ,  $\mathbb{R}_2$  et  $\mathbb{Z}$  sont arbitraires et vérifient les relations  $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_1^T > 0$  et  $\|\mathbb{R}_2\| < 1$ . Les matrices  $\bar{\mathbb{H}}_L$ ,  $\bar{\mathbb{H}}_R$ ,  $\bar{\mathbb{G}}_L$  et  $\bar{\mathbb{G}}_R$  sont de rang plein et vérifient  $\bar{\mathbb{H}} = \bar{\mathbb{H}}_L \bar{\mathbb{H}}_R$  et  $\bar{\mathbb{G}} = \bar{\mathbb{G}}_L \bar{\mathbb{G}}_R$  avec

$$\bar{\mathbb{H}} = \begin{bmatrix} -\mathcal{I}_{0,r}^T \mathbb{Q}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathcal{I}_{0,r}^T \mathbb{Q}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{I}_{0,r}^T & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\bar{\mathbb{G}} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_t & \mathbb{B}_{02} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{\mathcal{A}}_w & \mathbb{B}_{w(02)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\mathcal{C}}_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

*Démonstration.* Supposons que, pour un réel  $\gamma > 0$  et  $\mu > 0$ , il existe une matrice  $\bar{\mathbb{Q}} = \bar{\mathbb{Q}}^T > 0$  telle que

$$\bar{\mathbb{Q}} + \left( \bar{\mathbb{H}} \begin{bmatrix} Z & 0 & 0 \\ 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & Z \end{bmatrix} \bar{\mathbb{G}} \right) + \left( \bar{\mathbb{G}}^T \begin{bmatrix} Z^T & 0 & 0 \\ 0 & Z^T & 0 \\ 0 & 0 & Z^T \end{bmatrix} \bar{\mathbb{H}}^T \right) < 0. \quad (3.73)$$

D'après le lemme de projection [IS94], cette solution  $\bar{\mathbb{Q}}$  existe si et seulement si les matrices  $\mathbb{P} = \mathbb{P}^T > 0$  et  $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^T > 0$ , avec  $\mathbb{P} = \mathbb{Q}^{-1}$  (voir annexe D), sont les solutions des LMIs (3.68) et (3.69) et de l'équation (3.70).

Les LMIs (3.68) et (3.69) sont déduites de (3.73). Les formules proposées dans [IS94] (voir annexe B lemme B.3.1) nous permettent de trouver le gain  $Z$  (3.72).

Considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V(\xi(t)) = \xi^T(t) \mathbb{P} \xi(t), \quad \text{avec} \quad \mathbb{P} = \mathbb{P}^T > 0. \quad (3.74)$$

En appliquant la formule d'Itô sur le système (3.64), nous avons

$$dV(\xi(t)) = \mathcal{L}V(\xi(t))dt + 2\xi^T(t) \left( \hat{A}_{w0}\xi(t) + \hat{B}_w v(t) \right) dw(t) \quad (3.75)$$

avec

$$\mathcal{L}V(\xi(t)) = 2\xi^T(t) \mathbb{P} \left( (\hat{A}_{t_0} + \Delta \hat{A}_{t_0})\xi(t) + \hat{B}_0 v(t) \right) + \xi^T(t) \hat{A}_0^T \mathbb{P} \hat{A}_0 \xi(t). \quad (3.76)$$

En utilisant les lemmes de majoration (voir annexe B lemme B.1.1) et une intégration par partie, nous pouvons montrer que le système augmenté (3.64) avec  $v(t) \equiv 0$  est exponentiellement stable en moyenne quadratique (voir la démonstration du théorème 2.3.1).

En effet, en remarquant que l'équation (3.75) avec (3.76) pour  $v(t) \equiv 0$  correspondent à l'équation (2.29) avec (2.30), nous pouvons suivre les démarches de la démonstration jusqu'à l'équation (2.44) et déduire la stabilité exponentielle en moyenne quadratique du système augmenté (3.64), pour  $v(t) \equiv 0$ , si la LMI (3.73) est satisfaite.

Maintenant, en suivant les démarches de la démonstration du théorème 2.3.1 pour  $v(t) \neq 0$ , nous pouvons affirmer que, si la LMI (3.73) est vérifiée, alors le système (3.64) est stable et vérifie la performance  $\mathcal{H}_\infty$ . •

*Remarque 3.3.1.* Pour résoudre les LMIs du théorème avec l'égalité (3.70), nous devons utiliser un algorithme heuristique de chute de rang pour obtenir des solutions locales à la contrainte non convexe (3.70) (voir annexe D). Celui qui a donné le meilleur résultat, dans notre cas, est l'algorithme de linéarisation avec complémentarité conique [EOA97]. □

### 3.3.5 Exemple numérique

Considérons le système (3.35) avec deux commandes. Les différentes matrices de ce système sont données par

$$\begin{aligned}
 A_{t0} &= \begin{bmatrix} -1.5 & 1 & -1 \\ 0.5 & -2.5 & 1 \\ 0 & -0.6 & -3.5 \end{bmatrix}, & A_{t1} &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 & -0.03 \\ 0.2 & -0.05 & 0.04 \\ 0.15 & 0.2 & -0.02 \end{bmatrix}, \\
 A_{t2} &= \begin{bmatrix} 0.01 & -0.02 & 0.04 \\ -0.06 & 0.01 & -0.02 \\ 0.03 & -0.01 & 0.02 \end{bmatrix}, & B_0 &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0.3 \\ -1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}, \\
 A_{w0} &= \begin{bmatrix} -0.35 & 0.1 & -0.2 \\ -0.25 & -0.3 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}, & B_w &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0 \\ -0.6 & 0.2 \end{bmatrix}, \\
 C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & L &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Les commandes  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  sont définies comme dans (3.36), soit

$$\begin{aligned} u_{1\min} &= -5 \leq u_1(t) \leq u_{1\max} = 6, \\ u_{2\min} &= -7 \leq u_2(t) \leq u_{2\max} = 8, \end{aligned}$$

et les conditions initiales sont

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \eta(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Le gain  $Z$  est obtenu de la relation (3.72) du théorème 3.3.1 pour  $\gamma = 9$  et  $\mu = 25.5308$  est donné par

$$Z = \begin{bmatrix} -0.9633 & -2.8985 & 1.9872 & -3.1750 & -0.6573 & -0.8893 & 0.1733 \\ 1.6339 & 1.4718 & -0.6419 & 2.3150 & -0.2040 & 0.0281 & 0.1181 \end{bmatrix}.$$

Ce calcul a été fait avec une matrice  $\mathcal{P}$  bloc-diagonale de la forme

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}.$$

Finalement, les matrices du filtre (3.37) sont données par

$$M_0 = \begin{bmatrix} -1.6626 & 0.5600 \\ 0.5600 & -1.6626 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0.0118 & -0.0118 \\ -0.0118 & 0.0118 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} -0.0102 & 0.0102 \\ 0.0102 & -0.0102 \end{bmatrix},$$

$$N_0 = \begin{bmatrix} 1.9210 & -7.1830 \\ 0.2843 & 4.9777 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0.3370 & 0.1351 \\ -0.3370 & -0.1351 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} -0.0146 & -0.0211 \\ 0.0146 & 0.0211 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.7454 & -1.5320 \\ 0.2546 & 0.5320 \end{bmatrix}.$$

Les figures suivantes montrent la simulation du système augmenté (3.66). Nous pouvons voir l'évolution de l'état  $x(t)$  (figure 3.3) et l'évolution du signal d'erreur  $e(t)$  et du signal de perturbation  $v(t)$  (figure 3.4).



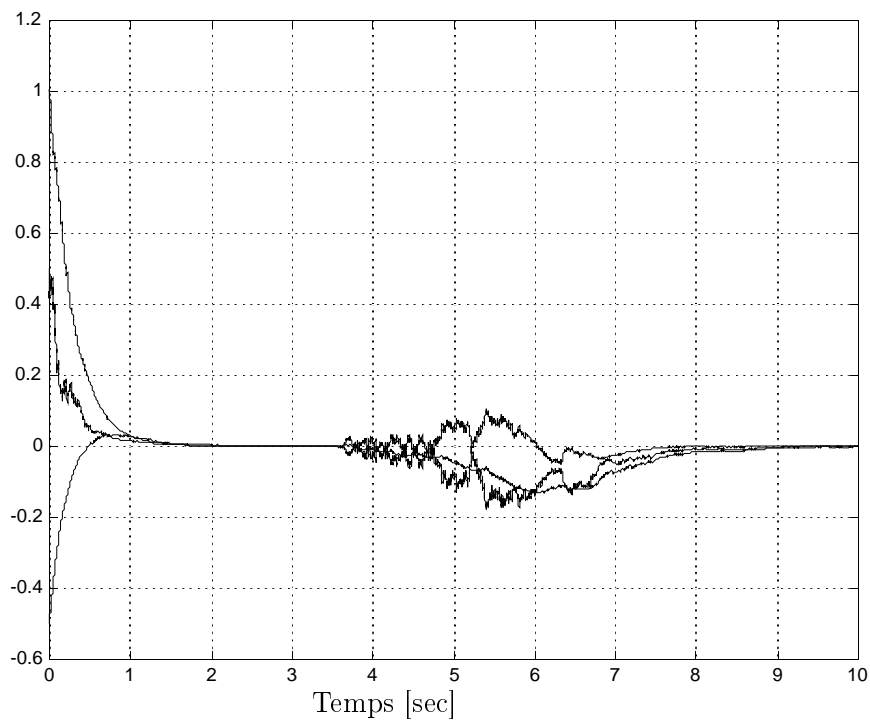


FIG. 3.3 – L'état  $x(t)$ .

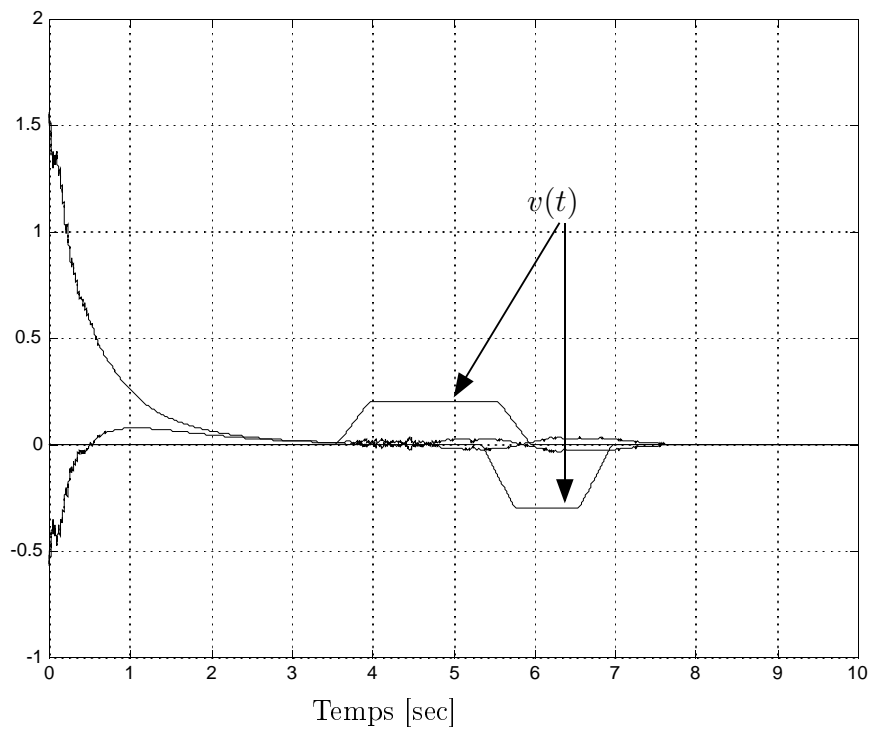


FIG. 3.4 – Le signal d'erreur  $e(t)$  et le signal de perturbation  $v(t)$ .

## 3.4 Filtrage d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques avec plusieurs bruits multiplicatifs

### 3.4.1 Formulation du problème

Considérons le système stochastique bilinéaire avec deux bruits multiplicatifs suivant, dans lequel  $f(x(t), u(t), v(t))$  de l'équation (1.2) est bilinéaire,  $g_0(x(t))$  de l'équation (1.2) est linéaire et  $g_1(x(t), u(t))$  de l'équation (1.2) est bilinéaire

$$dx(t) = ((A_{t_0} + u_1(t)A_{t_1})x(t) + B_0v(t))dt + A_{w_0}x(t)dw_0(t) + u_1(t)A_{w_1}x(t)dw_1(t) \quad (3.77a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (3.77b)$$

$$z(t) = Lx(t) \quad (3.77c)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie,  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  est une combinaison linéaire des composantes du vecteur d'état  $x(t)$  avec  $r < n$ ,  $v(t) \in \mathbb{R}^q$  représente les perturbations exogènes et  $u_1(t) \in \mathbb{R}$  est une commande scalaire. Sans perte de généralité, nous supposons que  $\text{rang } L = r$ .  $w_i(t)$ , pour  $i = 0, 1$ , est un processus de Wiener scalaire centré qui vérifie (voir l'équation (2.69))

$$\mathbf{E} \{dw_i(t)\} = 0, \quad \mathbf{E} \{dw_i(t)^2\} = dt, \quad \text{pour } i = 0, 1, \quad (3.78a)$$

$$\mathbf{E} \{dw_0(t)dw_1(t)\} = \mathbf{E} \{dw_1(t)dw_0(t)\} = \varphi dt, \quad \text{avec } 0 \leq \varphi < 1. \quad (3.78b)$$

On suppose que la commande  $u_1(t)$  appartient à l'ensemble  $\Gamma$  suivant (voir paragraphe 2.3.1.1, équation (2.14))

$$\Gamma = \{u_1(t) \in \mathbb{R} \mid u_{1\min} \leq u_1(t) \leq u_{1\max}\}. \quad (3.79)$$

L'objectif est de construire un filtre d'ordre réduit de la forme suivante

$$d\eta(t) = (M_0 + u_1(t)M_1)\eta(t)dt + (N_0 + u_1(t)N_1)y(t)dt \quad (3.80a)$$

$$\hat{z}(t) = \eta(t) + Ry(t) \quad (3.80b)$$

où les matrices  $M_i, N_i$  pour  $i = 0, 1$  et  $R$  sont à déterminer.

**Hypothèse 3.4.1.** Nous supposons que le système (3.77) avec  $v(t) \equiv 0$  est exponentiellement stable en moyenne quadratique  $\forall u_1(t) \in \Gamma$ .

**Problème 3.4.1.** Pour un réel  $\gamma > 0$  donné, le but est de trouver les matrices du filtre d'ordre réduit (3.80) telles que l'erreur  $e(t) = z(t) - \hat{z}(t)$  soit exponentiellement stable en moyenne quadratique et que pour un réel  $\gamma > 0$  donné la performance  $\mathcal{H}_\infty$  suivante

$$\|e(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \gamma \|v(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 \quad (3.81)$$

soit vérifiée.

Avant de continuer nous allons faire un changement de base afin d'obtenir des processus de Wiener décorrélés. La matrice de ce changement de base est  $\varphi_b$

$$\varphi_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.82)$$

L'équation d'état (3.77a) est équivalente à

$$\begin{aligned} dx(t) = & ((A_{t_0} + u_1(t)A_{t_1})x(t) + B_0v(t))dt \\ & + \begin{bmatrix} A_{w_0}x(t) & u_1(t)A_{w_1}x(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dw_0(t) \\ dw_1(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et finalement la dynamique de l'état s'écrit

$$\begin{aligned} dx(t) = & ((A_{t_0} + u_1(t)A_{t_1})x(t) + B_0v(t))dt \\ & + (A_{w_0} + \varphi u_1(t)A_{w_1})x(t)dw_0(t) + u_1(t)A_{w_1}x(t)d\bar{w}_1(t). \end{aligned} \quad (3.83)$$

où

$$d\bar{w}_1(t) = -\varphi dw_0(t) + dw_1(t) \quad (3.84)$$

et les relations (3.78a) et (3.78b) deviennent

$$\mathbf{E}\{dw_0(t)\} = \mathbf{E}\{d\bar{w}_1(t)\} = 0 \quad (3.85a)$$

$$\mathbf{E}\{dw_0(t)^2\} = dt, \quad \mathbf{E}\{d\bar{w}_1(t)^2\} = (1 - \varphi^2)dt, \quad \text{avec } 0 \leq \varphi < 1, \quad (3.85b)$$

$$\mathbf{E}\{dw_0(t)d\bar{w}_1(t)\} = \mathbf{E}\{d\bar{w}_1(t)dw_0(t)\} = 0. \quad (3.85c)$$

L'erreur d'estimation est donnée par

$$e(t) = (L - RC)x(t) - \eta(t). \quad (3.86)$$

Soit

$$T = L - RC, \quad (3.87)$$

alors, la dynamique de l'erreur devient

$$de(t) = Tdx(t) - d\eta(t). \quad (3.88)$$

En insérant (3.77) et (3.80) dans (3.88), la dynamique de l'erreur (3.88) s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} de(t) = & (M_0 + u_1(t)M_1)e(t)dt + TB_0v(t)dt \\ & + (TA_{t_0} - M_0T - N_0C)x(t)dt + (TA_{t_1} - M_1T - N_1C)u_1(t)x(t)dt \\ & + T(A_{w_0} + \varphi u_1(t)A_{w_1})x(t)dw_0(t) + u_1(t)TA_{w_1}x(t)d\bar{w}_1(t). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Afin de supprimer l'effet direct de l'état dans la dérive de la dynamique de l'erreur, nous allons poser les contraintes suivantes

$$TA_{t_i} - M_iT - N_iC = 0, \quad \text{pour } i = 0, 1, \quad (3.90)$$

qui correspondent à des équations de Sylvester.

Ceci est “équivalent” à la condition de non biais pour les systèmes linéaires déterministes [DZS01].

Considérons le vecteur d'état augmenté suivant

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}. \quad (3.91)$$

La dynamique du système augmenté constitué de la nouvelle équation d'état (3.83) et (3.89), tout en considérant les contraintes (3.90), est donnée par

$$d\xi(t) = ((\mathcal{A}_{t0} + \mathcal{A}_{t1}u_1(t))\xi(t) + \mathcal{B}_0v(t))dt + \mathcal{A}_{w0}\xi(t)dw_0(t) + \mathcal{A}_{w1}u_1(t)\xi(t)d\bar{w}_1(t), \quad (3.92)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{t0} &= \begin{bmatrix} A_{t0} & 0 \\ 0 & M_0 \end{bmatrix}, & \mathcal{A}_{t1} &= \begin{bmatrix} A_{t1} & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix}, & \mathcal{B}_0 &= \begin{bmatrix} B_0 \\ TB_0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A}_{w0} &= \begin{bmatrix} A_{w0} + \varphi u_1(t)A_{w1} & 0 \\ T(A_{w0} + \varphi u_1(t)A_{w1}) & 0 \end{bmatrix}, & \mathcal{A}_{w1} &= \begin{bmatrix} A_{w1} & 0 \\ TA_{w1} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 3.4.2 Résolution des équations de Sylvester

Comme dans le paragraphe 3.3.2, la solution de l'équation de Sylvester (3.90) donne

$$M_i = \bar{\bar{A}}_i - \mathcal{K}_i \bar{\bar{C}}_i \quad \text{pour } i = 0, 1, \quad (3.93)$$

avec

$$\bar{\bar{A}}_i = LA_{ti}L^\dagger, \quad (3.94a)$$

$$\bar{\bar{C}}_i = \begin{bmatrix} CA_{ti}L^\dagger \\ CL^\dagger \end{bmatrix}, \quad (3.94b)$$

$$\mathcal{K}_i = \begin{bmatrix} R & K_i \end{bmatrix}, \quad (3.94c)$$

$$K_i = N_i - M_i R, \quad (3.94d)$$

et

$$\mathcal{K}\bar{\Sigma} = L\bar{A}, \quad (3.95)$$

où

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} R & K_0 & K_1 \end{bmatrix}, \quad (3.96)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_0 & \bar{A}_1 \end{bmatrix}, \quad (3.97)$$

$$\bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} C\bar{A}_0 & C\bar{A}_1 \\ \bar{C} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{bmatrix}, \quad (3.98)$$

et, s'il existe une solution générale à l'équation (3.95), elle est alors donnée par

$$\mathcal{K} = L\bar{A}\bar{\Sigma}^\dagger + Z(I_{3p} - \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^\dagger), \quad (3.99)$$

avec

$$Z = \begin{bmatrix} Z_R & Z_0 & Z_1 \end{bmatrix}, \quad (3.100)$$

où  $Z$  est une matrice arbitraire de dimensions appropriées.

La solution des contraintes (3.90) existe si et seulement si la condition de rang (C.17) est vérifiée (voir annexe C, lemme C.1.1).

### 3.4.3 Passage du système stochastique vers un système avec incertitudes paramétriques

Comme dans le paragraphe 2.3.1.2, pour étudier la stabilité du système augmenté (3.92), nous faisons le même changement de variable sur la commande  $u_1(t)$  donné par l'équation (2.20) (voir aussi (2.21) et (2.22)).

La dynamique de l'erreur (3.89) peut donc être réécrite comme suit

$$\begin{aligned} de(t) = & \left( \mathbb{A}_t - Z\mathbb{C}_t + \left( \tilde{\mathbb{A}}_t - Z\tilde{\mathbb{C}}_t \right) \Delta_\varepsilon(\varepsilon(t))H_e \right) e(t)dt + (\mathbb{B}_{01} - Z\mathbb{B}_{02})v(t)dt \\ & + \left( \mathbb{A}_{w(01)} - Z\mathbb{A}_{w(02)} + \left( \tilde{\mathbb{A}}_{w(01)} - Z\tilde{\mathbb{A}}_{w(02)} \right) \Delta_x(\varepsilon(t))H_x \right) x(t)dw_0(t) \\ & + \left( \mathbb{A}_{w(11)} - Z\mathbb{A}_{w(12)} + \left( \tilde{\mathbb{A}}_{w(11)} - Z\tilde{\mathbb{A}}_{w(12)} \right) \Delta_x(\varepsilon(t))H_x \right) x(t)d\bar{w}_1(t) \end{aligned} \quad (3.101)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_t &= \bar{\bar{A}}_0 + \alpha_1 \bar{\bar{A}}_1 - L\bar{A}\bar{\Sigma}^\dagger \Lambda, & \mathbb{C}_t &= (I_{3p} - \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^\dagger)\Lambda, \\ \tilde{\mathbb{A}}_t &= \sigma_1 \bar{\bar{A}}_1 - L\bar{A}\bar{\Sigma}^\dagger \Upsilon, & \tilde{\mathbb{C}}_t &= (I_{3p} - \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^\dagger)\Upsilon, \\ \mathbb{B}_{01} &= LB_0 - L\bar{A}\bar{\Sigma}^\dagger \Phi, & \mathbb{B}_{02} &= (I_{3p} - \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^\dagger)\Phi, \\ \mathbb{A}_{w(01)} &= L(A_{w0} + \varphi\alpha_1 A_{w1}) - L\bar{A}\bar{\Sigma}^\dagger \Psi_{0\alpha}, & \mathbb{A}_{w(02)} &= (I_{3p} - \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^\dagger)\Psi_{0\alpha}, \\ \tilde{\mathbb{A}}_{w(01)} &= LA_{w1} - L\bar{A}\bar{\Sigma}^\dagger \Psi_{0\sigma}, & \tilde{\mathbb{A}}_{w(02)} &= (I_{3p} - \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^\dagger)\Psi_{0\sigma}, \\ \mathbb{A}_{w(11)} &= LA_{w1} - L\bar{A}\bar{\Sigma}^\dagger \Psi_{1\alpha}, & \mathbb{A}_{w(12)} &= (I_{3p} - \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^\dagger)\Psi_{1\alpha}, \\ \tilde{\mathbb{A}}_{w(11)} &= LA_{w1} - L\bar{A}\bar{\Sigma}^\dagger \Psi_{1\sigma}, & \tilde{\mathbb{A}}_{w(12)} &= (I_{3p} - \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^\dagger)\Psi_{1\sigma}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Lambda &= \begin{bmatrix} CA_{t0}L^\dagger + \alpha_1 CA_{t1}L^\dagger \\ CL^\dagger \\ \alpha_1 CL^\dagger \end{bmatrix}, & \Upsilon &= \begin{bmatrix} \sigma_1 CA_{t1}L^\dagger \\ 0 \\ \sigma_1 CL^\dagger \end{bmatrix}, & \Phi &= \begin{bmatrix} CB \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \Psi_{0\alpha} &= \begin{bmatrix} C(A_{w0} + \varphi\alpha_1 A_{w1}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \Psi_{0\sigma} &= \begin{bmatrix} \varphi\sigma_1 CA_{w1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \Psi_{1\alpha} &= \begin{bmatrix} \alpha_1 CA_{w1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\Psi_{1\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 C A_{w1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H_e = I_r, \quad H_x = I_n,$$

$$\Delta_\varepsilon(\varepsilon(t)) = \varepsilon_1(t) I_r, \quad \Delta_x(\varepsilon(t)) = \varepsilon_1(t) I_n.$$

En utilisant la définition (2.21), les matrices  $\Delta_\varepsilon(\varepsilon(t))$  et  $\Delta_x(\varepsilon(t))$  vérifient

$$\|\Delta_\varepsilon(\varepsilon(t))\| \leq 1, \quad \text{et} \quad \|\Delta_x(\varepsilon(t))\| \leq 1. \quad (3.105)$$

En utilisant (2.20), l'équation d'état (3.83) devient

$$\begin{aligned} dx(t) = & ((A_{t0} + \alpha_1 A_{t1} + A_{t1} \sigma_1 \varepsilon_1(t)) x(t) + B_0 v(t)) dt \\ & + (A_{w0} + \varphi \alpha_1 A_{w1} + \varphi \sigma_1 \varepsilon_1(t) A_{w1}) x(t) dw_0(t) + (\alpha_1 A_{w1} + \sigma_1 \varepsilon_1(t) A_{w1}) x(t) d\bar{w}_1(t). \end{aligned} \quad (3.106)$$

Donc le système augmenté (3.92) s'écrit

$$\begin{aligned} d\xi(t) = & \left( (\hat{A}_{t0} + \Delta \hat{A}_{t0}(t)) \xi(t) + \hat{B}_0 v(t) \right) dt + (\hat{A}_{w0} + \Delta \hat{A}_{w0}(t)) dw_0(t) \\ & + (\hat{A}_{w1} + \Delta \hat{A}_{w1}(t)) \xi(t) d\bar{w}_1(t) \end{aligned} \quad (3.107a)$$

$$e(t) = \hat{C} \xi(t) \quad (3.107b)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{A}_{t0} &= \begin{bmatrix} A_{t0} + \alpha_1 A_{t1} & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_t - Z \mathbb{C}_t \end{bmatrix}, & \Delta \hat{A}_{t0}(t) &= H_1 \Delta_\varepsilon(\varepsilon(t)) H, \\ \hat{A}_{w0} &= \begin{bmatrix} A_{w0} + \varphi \alpha_1 A_{w1} & 0 \\ \mathbb{A}_{w(01)} - Z \mathbb{A}_{w(02)} & 0 \end{bmatrix}, & \Delta \hat{A}_{w0}(t) &= H_2 \Delta_\varepsilon(\varepsilon(t)) H, \\ \hat{A}_{w1} &= \begin{bmatrix} \alpha_1 A_{w1} & 0 \\ \mathbb{A}_{w(11)} - Z \mathbb{A}_{w(12)} & 0 \end{bmatrix}, & \Delta \hat{A}_{w1}(t) &= H_3 \Delta_\varepsilon(\varepsilon(t)) H, \\ H_1 &= \begin{bmatrix} \sigma_1 A_{t1} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbb{A}}_t - Z \tilde{\mathbb{C}}_t \end{bmatrix}, & H_2 &= \begin{bmatrix} \varphi \sigma_1 A_{w1} & 0 \\ \tilde{\mathbb{A}}_{w(01)} - Z \tilde{\mathbb{A}}_{w(02)} & 0 \end{bmatrix}, \\ H_3 &= \begin{bmatrix} \sigma_1 A_{w1} & 0 \\ \tilde{\mathbb{A}}_{w(11)} - Z \tilde{\mathbb{A}}_{w(12)} & 0 \end{bmatrix}, & H &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix}, \\ \hat{B}_0 &= \begin{bmatrix} B_0 \\ \mathbb{B}_{01} - Z \mathbb{B}_{02} \end{bmatrix}, & \hat{C} &= \begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\Delta_\xi(\varepsilon(t)) = \varepsilon_1(t) I_{n+r},$$

avec, du fait de (3.58),

$$\|\Delta_\xi(\varepsilon(t))\| \leq 1. \quad (3.109)$$

### 3.4.4 Synthèse du filtre d'ordre réduit et performance $\mathcal{H}_\infty$

Le théorème suivant nous permet de calculer les matrices du filtre réduit robuste.

**Théorème 3.4.1.** *Si la condition de rang (C.17) est vérifiée, le problème 3.4.1 du filtre réduit du système (3.77) avec le filtre (3.80) tel que la dynamique de l'erreur (3.89) soit exponentiellement stable en moyenne quadratique et vérifie la performance  $\mathcal{H}_\infty$  (3.81) est résolu si, pour un réel  $\gamma > 0$  donné, il existe des réels  $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$  et  $\mu_3 > 0$  et des matrices  $P_1 = P_1^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_2 = P_2^T \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $P_3 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $G_2 \in \mathbb{R}^{r \times 3p}$  et  $G_3 \in \mathbb{R}^{n \times 3p}$  tels que la LMI suivante soit vérifiée*

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \sigma_1 P_1 A_{t1} & 0 & (1,6) & (1,7) & 0 & (1,9) & (1,10) & 0 \\ (1,2)^T & (2,2) & (2,3) & 0 & P_2 \tilde{\mathbb{A}}_t - G_2 \tilde{\mathbb{C}}_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1,3)^T & (2,3)^T & -\gamma^2 I_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 A_{w1}^T P_1 & 0 & 0 & -\mu_1 I_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbb{A}}_t^T P_2 - \tilde{\mathbb{C}}_t^T G_2^T & 0 & 0 & -\mu_1 I_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1,6)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_1 & -P_3 & (6,8) & 0 & 0 & 0 \\ (1,7)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_3^T & -P_2 & (7,8) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (6,8)^T & (7,8)^T & -\mu_2 I_n & 0 & 0 & 0 \\ (1,9)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_1 & -P_3 & (9,11) \\ (1,10)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_3^T & -P_2 & (10,11) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (9,11)^T & (10,11)^T & -\mu_3 I_n \end{bmatrix} < 0 \quad (3.110)$$

où

$$\begin{aligned} (1,1) &= P_1(A_{t0} + \alpha_1 A_{t1}) + (A_{t0} + \alpha_1 A_{t1})^T P_1 + (\mu_1 + \mu_2 + (1 - \varphi^2)\mu_3) I_n, \\ (1,2) &= (A_{t0} + \alpha_1 A_{t1})^T P_3 + P_3 \mathbb{A}_t - G_3 \mathbb{C}_t, \\ (2,2) &= P_2 \mathbb{A}_t + \mathbb{A}_t^T P_2 - G_2 \mathbb{C}_t - \mathbb{C}_t^T G_2^T + (1 + \mu_1 + \mu_2 + (1 - \varphi^2)\mu_3) I_r, \\ (1,3) &= P_1 B_0 + P_3 \mathbb{B}_{01} - G_3 \mathbb{B}_{02}, \\ (2,3) &= P_3^T B_0 + P_2 \mathbb{B}_{01} - G_2 \mathbb{B}_{02}, \\ (1,6) &= (A_{w0}^T + \varphi \alpha_1 A_{w1}^T) P_1 + \mathbb{A}_{w(01)}^T P_3^T - \mathbb{A}_{w(02)}^T G_3^T, \\ (1,7) &= (A_{w0}^T + \varphi \alpha_1 A_{w1}^T) P_3 + \mathbb{A}_{w(01)}^T P_2 - \mathbb{A}_{w(02)}^T G_2^T, \\ (1,9) &= \bar{\varphi} (\alpha_1 A_{w1}^T P_1 + \mathbb{A}_{w(11)}^T P_3 - \mathbb{A}_{w(12)}^T G_3^T) \\ (1,10) &= \bar{\varphi} (\alpha_1 A_{w1}^T P_3^T + \mathbb{A}_{w(11)}^T P_2 - \mathbb{A}_{w(12)}^T G_2^T) \\ (6,8) &= \varphi \sigma_1 P_1 A_{w1} + P_3 \tilde{\mathbb{A}}_{w(01)} - G_3 \tilde{\mathbb{A}}_{w(02)}, \\ (7,8) &= \varphi \sigma_1 P_3^T A_{w1} + P_2 \tilde{\mathbb{A}}_{w(01)} - G_2 \tilde{\mathbb{A}}_{w(02)}, \\ (9,11) &= \sigma_1 P_1 A_{w1} + P_3 \tilde{\mathbb{A}}_{w(11)} - G_3 \tilde{\mathbb{A}}_{w(12)}, \\ (10,11) &= \sigma_1 P_3^T A_{w1} + P_2 \tilde{\mathbb{A}}_{w(11)} - G_2 \tilde{\mathbb{A}}_{w(12)}, \\ \bar{\varphi} &= (1 - \varphi^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

et que le gain  $Z$  soit solution de l'équation suivante

$$\begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} Z = \begin{bmatrix} G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}. \quad (3.111)$$

■

*Démonstration.* Considérons la fonction de Lyapunov suivante

$$V(\xi(t)) = \xi^T(t) \mathcal{P} \xi(t), \quad (3.112)$$

avec la matrice de Lyapunov suivante

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^T = \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3^T & P_2 \end{bmatrix} > 0, \quad \text{où} \quad P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, P_2 \in \mathbb{R}^{r \times r} \quad \text{et} \quad P_3 \in \mathbb{R}^{n \times r}. \quad (3.113)$$

Nous allons commencer par démontrer la stabilité du système (3.107) pour  $v(t) \equiv 0$ . En appliquant la formule d'Itô sur le système (3.107) (voir théorème 1.3.1), nous avons

$$dV(\xi(t)) = \mathcal{L}V(\xi(t))dt + 2\xi^T(t) \mathcal{P} \hat{A}_{w01}(t) \xi(t), \quad (3.114)$$

où

$$\hat{A}_{w01}(t) = \left( \hat{A}_{w0} + \Delta \hat{A}_{w0}(t) \right) dw_0(t) + \left( \hat{A}_{w1} + \Delta \hat{A}_{w1}(t) \right) d\bar{w}_1(t), \quad (3.115)$$

avec

$$\mathcal{L}V(\xi(t))dt = 2\xi^T(t) \mathcal{P} \left( \hat{A}_{t0} + \Delta \hat{A}_{t0}(t) \right) \xi(t)dt + \langle \mathcal{P} \hat{A}_{w01}(t) \xi(t), \hat{A}_{w01}(t) \xi(t) \rangle. \quad (3.116)$$

En calculant l'espérance mathématique de l'équation (3.114), nous annulons le deuxième terme de la droite de l'égalité et donc (3.114) devient

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{dV(\xi(t))\} &= \mathbf{E} \{ \mathcal{L}V(\xi(t))dt \} \\ &= 2\xi^T(t) \mathcal{P} \left( \hat{A}_{t0} + \Delta \hat{A}_{t0}(t) \right) \xi(t)dt + \mathbf{E} \left\{ \langle \mathcal{P} \hat{A}_{w01}(t) \xi(t), \hat{A}_{w01}(t) \xi(t) \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (3.117)$$

puis, en raison des équations (3.85a)–(3.85c), (3.117) donne

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{dV(\xi(t))\} &= 2\xi^T(t) \mathcal{P} \left( \hat{A}_{t0} + \Delta \hat{A}_{t0}(t) \right) \xi(t)dt \\ &\quad + \xi^T(t) \left( \left( \hat{A}_{w0} + \Delta \hat{A}_{w0}(t) \right)^T \mathcal{P} \left( \hat{A}_{w0} + \Delta \hat{A}_{w0}(t) \right) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \varphi^2) \left( \hat{A}_{w1} + \Delta \hat{A}_{w1}(t) \right)^T \mathcal{P} \left( \hat{A}_{w1} + \Delta \hat{A}_{w1}(t) \right) \right) \xi(t)dt. \end{aligned} \quad (3.118)$$

En utilisant les lemmes de majoration (voir annexe B lemme B.1.1), nous avons les inégalités suivantes

$$2\xi^T(t) \mathcal{P} \Delta \hat{A}_{t0}(t) \xi(t) \leq \xi^T(t) \left( \mu_1^{-1} \mathcal{P} H_1 H_1^T \mathcal{P} + \mu_1 H^T H \right) \xi(t), \quad (3.119a)$$

$$\left( \hat{A}_{w0} + \Delta \hat{A}_{w0}(t) \right)^T \mathcal{P} \left( \hat{A}_{w0} + \Delta \hat{A}_{w0}(t) \right) \leq \hat{A}_{w1}^T (\mathcal{P}^{-1} - \mu_2^{-1} H_2 H_2^T)^{-1} \hat{A}_{w1} + \mu_2 H^T H, \quad (3.119b)$$

$$\left( \hat{A}_{w1} + \Delta \hat{A}_{w1}(t) \right)^T \mathcal{P} \left( \hat{A}_{w1} + \Delta \hat{A}_{w1}(t) \right) \leq \hat{A}_{w1}^T (\mathcal{P}^{-1} - \mu_3^{-1} H_3 H_3^T)^{-1} \hat{A}_{w1} + \mu_3 H^T H, \quad (3.119c)$$

et  $\mathbf{E} \{dV(\xi(t))\}$  peut alors être borné par



$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{dV(\xi(t))\} \leq & \xi^T(t) \left( \mathcal{P} \hat{A}_{t_0} + \hat{A}_{t_0}^T \mathcal{P} + \mu_1^{-1} \mathcal{P} H_1 H_1^T \mathcal{P} + \mu_1 H^T H \right. \\ & + \hat{A}_{w_0}^T (\mathcal{P}^{-1} - \mu_2 H_2 H_2^T)^{-1} \hat{A}_{w_0} + \mu_2 H^T H \\ & \left. + (1 - \varphi^2) \hat{A}_{w_1}^T (\mathcal{P}^{-1} - \mu_3 H_3 H_3^T)^{-1} \hat{A}_{w_1} + (1 - \varphi^2) \mu_3 H^T H \right) \xi(t) dt. \end{aligned} \quad (3.120)$$

En suivant le même raisonnement que celui utilisé dans la démonstration du théorème 2.3.1, nous obtenons

$$\mathbf{E} \left\{ \|\xi(t)\|^2 \right\} \leq \frac{c}{\lambda_{\min}(\mathcal{P})} e^{-\beta t}, \quad (3.121)$$

la LMI (3.110) est vérifiée, la stabilité exponentielle en moyenne quadratique du système (3.107) est assurée.

Maintenant, nous allons étudier les performances  $\mathcal{H}_\infty$  du système (3.107) avec  $v(t) \neq 0$  et  $x(0) = 0$  car ces performances ne sont fonction que de la perturbation  $v(t)$ , mais pas de la condition initiale  $x(0)$ .

On considère l'indice de performance suivant

$$J_{\xi v} = \mathbf{E} \left\{ \int_0^\infty \left( \xi^T(t) \hat{C}^T \hat{C} \xi(t) - \gamma^2 v^T(t) v(t) \right) dt \right\}. \quad (3.122)$$

En appliquant la formule d'Itô sur le système (3.107) (voir théorème 1.3.1), nous avons

$$dV(\xi(t)) = \mathcal{L}V(\xi(t))dt + 2\xi^T(t) \mathcal{P} \hat{A}_{w_0 1}(t) \xi(t) \quad (3.123)$$

où  $\hat{A}_{w_0 1}(t)$  est donnée par l'équation (3.115) et  $\mathcal{L}V(\xi(t))$  est donnée par

$$\mathcal{L}V(\xi(t))dt = 2\xi^T(t) \left( \left( \hat{A}_{t_0} + \Delta \hat{A}_{t_0}(t) \right) \xi(t) + \hat{B}_0 v(t) \right) dt + \langle \mathcal{P} \hat{A}_{w_0 1}(t) \xi(t), \hat{A}_{w_0 1}(t) \xi(t) \rangle. \quad (3.124)$$

Ecrivons  $J_{\xi v}$ , de l'équation (3.122), en utilisant le théorème de Fubini [Che85]

$$\begin{aligned} J_{\xi v} = \int_0^\infty \mathbf{E} \left\{ \left( \xi^T(t) \hat{C}^T \hat{C} \xi(t) - \gamma^2 v^T(t) v(t) \right) dt \right. \\ \left. + \mathcal{L}V(\xi(t))dt \right\} - \mathbf{E} \{V(\xi(t))\}_{t=\infty} + \mathbf{E} \{V(\xi(t))\}_{t=0}. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Or, comme  $\mathbf{E} \{V(\xi(t))\}_{t=0} = 0$  car  $\xi(0) = 0$  et  $\mathbf{E} \{V(\xi(t))\}_{t=\infty} \geq 0$ , ceci implique

$$J_{\xi v} \leq \int_0^\infty \mathbf{E} \left\{ \left( \xi^T(t) \hat{C}^T \hat{C} \xi(t) - \gamma^2 v^T(t) v(t) \right) dt + \mathcal{L}V(\xi(t))dt \right\}. \quad (3.126)$$

En prenant l'espérance mathématique de l'équation (3.123) nous annulons le deuxième terme en raison de l'équation (3.85a), et l'équation (3.123) devient

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{dV(\xi(t))\} &= \mathbf{E} \{ \mathcal{L}V(\xi(t))dt \} \\ &= 2\xi^T(t) \mathcal{P} \left( \left( \hat{A}_{t_0} + \Delta \hat{A}_{t_0}(t) \right) \xi(t) + \hat{B}_0 v(t) \right) dt + \mathbf{E} \left\{ \langle \mathcal{P} \hat{A}_{w_0 1}(t) \xi(t), \hat{A}_{w_0 1}(t) \xi(t) \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (3.127)$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \{dV(\xi(t))\} &= 2\xi^T(t)\mathcal{P} \left( \left( \hat{A}_{t0} + \Delta\hat{A}_{t0}(t) \right) \xi(t) + \hat{B}_0 v(t) \right) dt \\ &\quad + \xi^T(t) \left( \left( \hat{A}_{w0} + \Delta\hat{A}_{w0}(t) \right)^T \mathcal{P} \left( \hat{A}_{w0} + \Delta\hat{A}_{w0}(t) \right) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \varphi^2) \left( \hat{A}_{w1} + \Delta\hat{A}_{w1}(t) \right)^T \mathcal{P} \left( \hat{A}_{w1} + \Delta\hat{A}_{w1}(t) \right) \right) \xi(t) dt, \quad (3.128) \end{aligned}$$

que nous pouvons majorer en appliquant les lemmes de majoration B.1.1 (voir (3.119)).

Maintenant considérons que la LMI (3.110) est vérifiée. On va montrer qu'elle est suffisante pour assurer la stabilité et la performance  $\mathcal{H}_\infty$  de (3.107).

En appliquant le lemme de Schur (voir annexe B lemme B.2.1) sur la LMI (3.110), on a

$$\Theta_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} \Theta & \mathcal{P}\hat{B}_0 \\ \hat{B}_0^T \mathcal{P} & 0 \end{bmatrix}}_{\Xi} + \begin{bmatrix} \hat{C}^T \hat{C} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 \end{bmatrix} < 0, \quad (3.129)$$

avec

$$\begin{aligned} \Theta &= \mathcal{P}\hat{A}_{t0} + \hat{A}_{t0}^T \mathcal{P} + \mu_1^{-1} \mathcal{P} H_1^T H_1 \mathcal{P} + (\mu_1 + \mu_2 + (1 - \varphi^2)\mu_3) H^T H \\ &\quad + \hat{A}_{w0}^T (\mathcal{P}^{-1} - \mu_2^{-1} H_2 H_2^T)^{-1} \hat{A}_{w0} + (1 - \varphi^2) \hat{A}_{w1}^T (\mathcal{P}^{-1} - \mu_3^{-1} H_3 H_3^T)^{-1} \hat{A}_{w1}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (3.126) devient

$$J_{\xi v} \leq \int_0^\infty \mathbf{E} \left\{ \begin{bmatrix} \xi(t)^T & v(t)^T \end{bmatrix} \Xi \begin{bmatrix} \xi(t) \\ v(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \xi(t)^T & v(t)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{C}^T \hat{C} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ v(t) \end{bmatrix} dt \right\} < 0,$$

donc si la LMI (3.110) est vérifiée alors le système (3.107) est stable et vérifie la performance  $\mathcal{H}_\infty$ .

Pour retrouver la LMI (3.110), il suffit d'appliquer le lemme de Schur (voir annexe B lemme B.2.1) plusieurs fois sur l'équation (3.129). En effet  $\Theta_1$  s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \begin{bmatrix} \mathcal{P}\hat{A}_{t0} + \hat{A}_{t0}^T \mathcal{P} + \hat{C}^T \hat{C} & \mathcal{P}\hat{B}_0 \\ \hat{B}_0^T \mathcal{P} & -\gamma^2 I_q \end{bmatrix} + \mu_1^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{P} H_1^T H_1 \mathcal{P} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + (\mu_1 + \mu_2 + (1 - \varphi^2)\mu_3) \begin{bmatrix} H^T H & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{A}_{w0}^T (\mathcal{P}^{-1} - \mu_2^{-1} H_2 H_2^T)^{-1} \hat{A}_{w0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + (1 - \varphi^2) \begin{bmatrix} \hat{A}_{w1}^T (\mathcal{P}^{-1} - \mu_3^{-1} H_3 H_3^T)^{-1} \hat{A}_{w1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.130) \end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Schur (voir annexe B paragraphe B.2) plusieurs fois,  $\Theta_1$  est équivalent à

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} (1,1) & \mathcal{P}\widehat{B}_0 & \mathcal{P}H_1 & \widehat{A}_{w0}^T \mathcal{P} & 0 & \overline{\varphi} \widehat{A}_{w1}^T \mathcal{P} & 0 \\ \widehat{B}_0^T \mathcal{P} & -\gamma^2 I_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_1^T \mathcal{P} & 0 & -\mu_1 I_{n+r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{P}\widehat{A}_{w0} & 0 & 0 & -\mathcal{P} & \mathcal{P}H_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_2^T \mathcal{P} & -\mu_2 I_{n+r} & 0 & 0 \\ \overline{\varphi} \mathcal{P}\widehat{A}_{w1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{P} & \mathcal{P}H_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_3^T \mathcal{P} & -\mu_3 I_{n+r} \end{bmatrix}, \quad (3.131)$$

où

$$(1,1) = \mathcal{P}\widehat{A}_{t0} + \widehat{A}_{t0}^T \mathcal{P} + \widehat{C}^T \widehat{C} + (\mu_1 + \mu_2 + (1 - \varphi^2)\mu_3) H^T H,$$

et la LMI (3.110) se déduit en remplaçant les différentes matrices du système (3.107) par leur expression dans la matrice  $\Theta_2$  de l'équation (3.131). •

*Remarque 3.4.1.* La solution donnée par le théorème 3.4.1 est non convexe. La matrice du gain  $Z$  calculée par l'équation (3.111) existe si et seulement si la condition de rang suivante est satisfaite

$$\text{rang} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} G_2 & P_2 \\ G_3 & P_3 \end{bmatrix}. \quad (3.132)$$

Pour la résolution de la LMI (3.110), nous appliquons l'algorithme de relaxation 2.1. Dans ce cas, le test de rang est fait sur l'équation (3.132), les variables de l'étape 1 sont remplacées par  $P_1, P_2, P_3, G_2$  et  $G_3$ , les variables de l'étape 3 sont remplacées par  $P_1, P_2$  et  $P_3$  avec  $G_2$  et  $G_3$  fixes et, finalement, dans l'étape 5, les variables sont remplacées par  $P_1, G_2$  et  $G_3$  avec  $P_2$  et  $P_3$  fixes. Ainsi, la remarque 2.2.1 adaptée à ce cas reste valable. □

### 3.4.5 Exemple numérique

Considérons le système (3.77). Les différentes matrices de ce système sont données par

$$A_{t0} = \begin{bmatrix} -10.5 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0.1 & -6.5 \end{bmatrix}, \quad A_{t1} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 & 0 \\ 0 & -0.0500 & 0 \\ 0.15 & 0 & -0.02 \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.3 \\ -1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad A_{w0} = \begin{bmatrix} -0.35 & 0.1 & -0.2 \\ -0.25 & -0.3 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$A_{w1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & -0.03 & -0.1 \\ 0.2 & 0.3 & -0.2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

La commande  $u_1(t)$  est définie comme dans (2.14), soit

$$u_{1\min} = -5 \leq u_1(t) \leq u_{1\max} = 6,$$

et les conditions initiales sont

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 0.75 \end{bmatrix}, \quad \eta(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Avec le théorème 3.4.1 pour  $\mu_1 = 126.1330$ ,  $\mu_2 = 94.8343$  et  $\mu_3 = 2.2076 \times 10^3$  la solution de la LMI (3.110) est obtenue pour  $\gamma = 20$  et le gain  $Z$  est calculé de la relation (3.111)

$$Z = \begin{bmatrix} -0.2163 & -0.3254 & 76.1372 & -79.9758 & 0.5511 & -0.5698 \\ -0.0149 & -0.4494 & 110.5339 & -113.7233 & -1.9156 & 1.8853 \end{bmatrix}.$$

Ce calcul a été fait avec une matrice  $\mathcal{P}$  bloc-diagonale de la forme

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}.$$

Finalement, les matrices du filtre (3.80) sont données par

$$\begin{aligned} M_0 &= \begin{bmatrix} -84.0802 & -77.5802 \\ -110.9210 & -117.4210 \end{bmatrix}, & M_1 &= \begin{bmatrix} -0.5100 & -0.4900 \\ 1.7600 & 1.7400 \end{bmatrix}, \\ N_0 &= \begin{bmatrix} 92.1982 & -126.9867 \\ 134.0330 & -181.3606 \end{bmatrix}, & N_1 &= \begin{bmatrix} 0.7456 & -0.7681 \\ -2.3291 & 2.8530 \end{bmatrix}, \\ R &= \begin{bmatrix} 0.0508 & -0.2139 \\ 0.1522 & -0.3738 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Les figures suivantes montrent la simulation du système augmenté (3.107). Nous pouvons voir l'évolution de l'état  $x(t)$  (figure 3.5) et l'évolution du signal d'erreur  $e(t)$  et du signal de perturbation  $v(t)$  (figure 3.6). Les simulations sont faites avec la commande  $u_1(t) = 0.5 \sin(3t) + 2$ , et un coefficient de covariance entre les processus de Wiener  $w_0(t)$  et  $w_1(t)$  qui vaut  $\varphi = 0.0215$ .

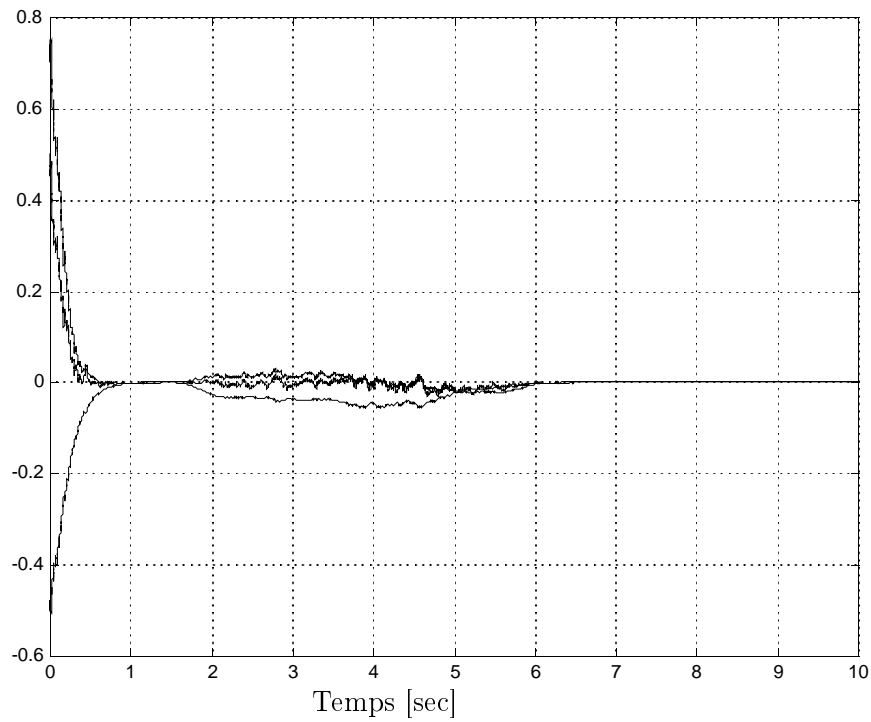


FIG. 3.5 – L'état  $x(t)$ .

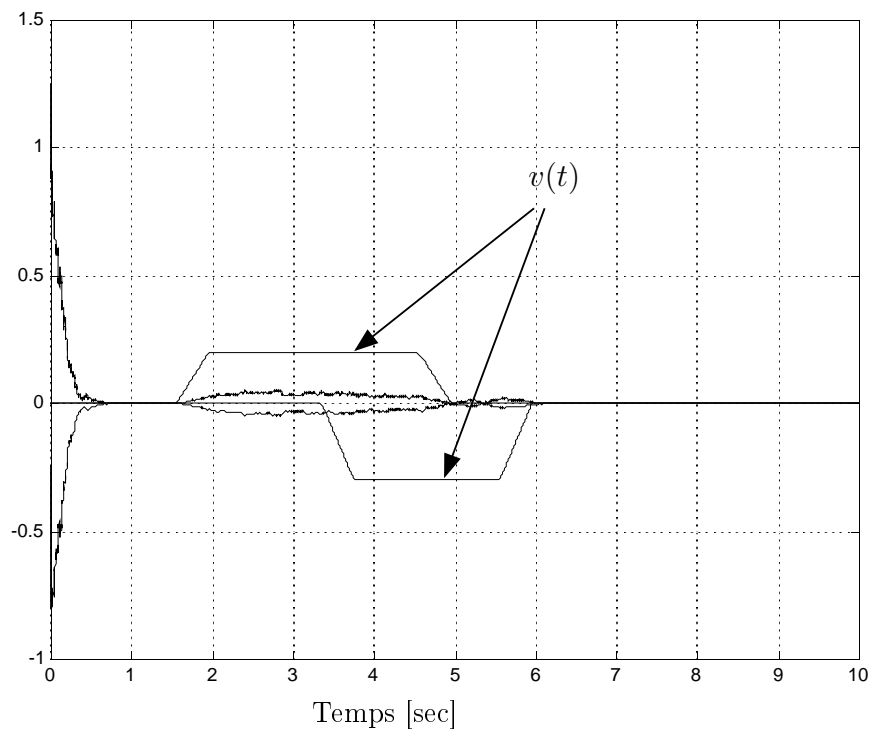


FIG. 3.6 – Le signal d'erreur  $e(t)$  et le signal de perturbation  $v(t)$ .

## 3.5 Filtrage d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques avec des mesures stochastiques

### 3.5.1 Formulation du problème

Considérons le système stochastique avec une mesure stochastique suivant, dans lequel  $f(x(t), u(t), v(t))$  de l'équation (1.2) est bilinéaire et  $g(x(t))$  de l'équation (1.2) est linéaire

$$dx(t) = (A_{t0}x(t) + u_1(t)A_{t1}x(t) + B_0v(t))dt + A_{w0}x(t)dw_0(t) \quad (3.133a)$$

$$dy(t) = Cx(t)dt + J_1x(t)dw_1(t) \quad (3.133b)$$

$$z(t) = Lx(t) \quad (3.133c)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie,  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  est une combinaison linéaire des composantes du vecteur d'état  $x(t)$  avec  $r < n$ ,  $v(t) \in \mathbb{R}^q$  représente les perturbations exogènes et  $u_1(t) \in \mathbb{R}$  est une commande scalaire.  $w_i(t)$ , pour  $i = 0, 1$ , est un processus de Wiener scalaire centré qui vérifie (3.78). Sans perte de généralité, nous supposons que  $\text{rang } L = r$ .

On suppose que la commande  $u_1(t)$  est bornée et appartient à l'ensemble  $\Gamma$  défini par l'équation (3.79).

L'objectif est de construire un filtre d'ordre réduit de la forme suivante

$$d\hat{z}(t) = (M_0 + u_1(t)M_1)\hat{z}(t)dt + (N_0 + u_1(t)N_1)dy(t) \quad (3.134)$$

où  $\hat{z}(t) \in \mathbb{R}^r$  est l'état du filtre avec  $r < n$  et les matrices  $M_i$  et  $N_i$  pour  $i = 0, 1$  sont à déterminer.

**Hypothèse 3.5.1.** *Nous supposons que le système (3.133) avec  $v(t) \equiv 0$  est exponentiellement stable en moyenne quadratique  $\forall u_1(t) \in \Gamma$ .*

**Problème 3.5.1.** *Pour un réel  $\gamma > 0$  donné, le but est de trouver les matrices du filtre d'ordre réduit (3.134) telles que l'erreur  $e(t) = z(t) - \hat{z}(t)$  soit exponentiellement stable en moyenne quadratique et que pour un réel  $\gamma > 0$  donné la performance  $\mathcal{H}_\infty$  suivante*

$$\|e(t)\|_{L_2}^2 \leq \gamma \|v(t)\|_{L_2}^2 \quad (3.135)$$

*soit vérifiée.*

La dynamique de l'erreur d'estimation est alors (avec  $\hat{z}(t) = Lx(t) - e(t)$ )

$$\begin{aligned} de(t) = & (M_0 + M_1u_1(t))e(t)dt + LB_0v(t)dt \\ & + ((LA_{t0} - M_0L - N_0C) + (LA_{t1} - M_1L - N_1C)u_1(t))x(t)dt \\ & + LA_{w0}x(t)dw_0(t) - ((N_0 + u_1(t)N_1)J_1x(t)dw_1(t)). \end{aligned} \quad (3.136)$$

Afin de supprimer l'effet direct de l'état dans la dérive de la dynamique de l'erreur, nous allons poser les contraintes suivantes

$$LA_{ti} - M_iL - N_iC = 0, \quad \text{pour } i = 0, 1, \quad (3.137)$$

qui correspondent à des équations de Sylvester.

Ceci est “équivalent” à la condition de non biais pour les systèmes linéaires déterministes [DZS01].

Considérons le vecteur d'état augmenté suivant

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}. \quad (3.138)$$

La dynamique du système augmenté constitué de (3.133a) et (3.136), tout en considérant les relations de Sylvester (3.137), est donc donnée par

$$\begin{aligned} d\xi(t) = & (\mathcal{A}_{t0} + \mathcal{A}_{t1}u_1(t)) \xi(t)dt + \mathcal{B}_0v(t)dt \\ & + \mathcal{A}_{w0}\xi(t)dw_0(t) + (\mathcal{A}_{w1} + \mathcal{A}_{w2}u_1(t)) \xi(t)dw_1, \end{aligned} \quad (3.139)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{t0} &= \begin{bmatrix} A_{t0} & 0 \\ 0 & M_0 \end{bmatrix}, & \mathcal{A}_{t1} &= \begin{bmatrix} A_{t1} & 0 \\ 0 & M_1 \end{bmatrix}, & \mathcal{B}_0 &= \begin{bmatrix} B_0 \\ LB_0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A}_{w0} &= \begin{bmatrix} A_{w0} & 0 \\ LA_{w0} & 0 \end{bmatrix}, & \mathcal{A}_{w1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -N_0J_1 & 0 \end{bmatrix}, & \mathcal{A}_{w2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -N_1J_1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

### 3.5.2 Résolution des équations de Sylvester

Comme dans le paragraphe 3.3.2, la solution de l'équation (3.137) (l'équation de Sylvester) mène à l'équation

$$M_i = \bar{\bar{A}}_i - K_i \bar{\bar{C}}, \quad \text{pour } i = 0, 1 \quad (3.141)$$

avec

$$\bar{\bar{A}}_i = LA_{ti}L^\dagger, \quad (3.142a)$$

$$\bar{\bar{C}} = CL^\dagger, \quad (3.142b)$$

$$K_i = N_i, \quad (3.142c)$$

et à

$$\mathcal{K}\bar{\Sigma} = L\bar{A}, \quad (3.143)$$

où

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} N_0 & N_1 \end{bmatrix}, \quad (3.144)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_0 & \bar{A}_1 \end{bmatrix}, \quad (3.145)$$

$$\bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} \bar{C} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{bmatrix}, \quad (3.146)$$

$$\bar{A}_i = A_{ti}(I_n - L^\dagger L), \quad \text{pour } i = 0, 1, \quad (3.147)$$

$$\bar{C} = C(I_n - L^\dagger L), \quad (3.148)$$

et, s'il existe une solution générale à l'équation (3.143), elle est alors donnée par

$$\mathcal{K} = L\bar{A}\bar{\Sigma}^\dagger + Z(I_{2p} - \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^\dagger), \quad (3.149)$$

avec

$$Z = \begin{bmatrix} Z_0 & Z_1 \end{bmatrix}, \quad (3.150)$$

où  $Z$  est une matrice arbitraire de dimensions appropriées.

La solution des contraintes (3.137) existe si et seulement si la condition de rang (C.17) est vérifiée (voir annexe C, lemme C.1.1).

### 3.5.3 Passage du système stochastique avec une commande vers un système avec incertitudes paramétriques

Comme dans le paragraphe 3.4.3 (ou 2.3.1.2), pour étudier la stabilité du système augmenté (3.139), nous faisons le même changement de variable sur la commande  $u_1(t)$  donné par l'équation (2.20) (voir aussi (2.21) et (2.22)). La dynamique de l'erreur (3.136) peut être réécrite comme

$$\begin{aligned} de(t) = & \left( \mathbb{A}_t - Z\mathbb{C}_t + (\tilde{\mathbb{A}}_t - Z\tilde{\mathbb{C}}_t)\Delta_\varepsilon(\varepsilon(t))H_e \right) e(t)dt + \mathbb{B}_0 v(t)dt + \mathbb{A}_{w0}x(t)dw_0(t) \\ & + \left( \mathbb{A}_{w(11)} - Z\mathbb{A}_{w(12)} + (\tilde{\mathbb{A}}_{w(11)} - Z\tilde{\mathbb{A}}_{w(12)})\Delta_x(\varepsilon(t))H_x \right) x(t)dw_1(t) \end{aligned} \quad (3.151)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_t &= \bar{\bar{A}}_0 + \alpha_1 \bar{\bar{A}}_1 - L\bar{A}\bar{\Sigma}^\dagger \Lambda, & \mathbb{C}_t &= (I_{2p} - \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^\dagger)\Lambda, \\ \tilde{\mathbb{A}}_t &= \sigma_1 \bar{\bar{A}}_1 - L\bar{A}\bar{\Sigma}^\dagger \Lambda, & \tilde{\mathbb{C}}_t &= (I_{2p} - \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^\dagger)\Lambda, \\ \mathbb{B}_{01} &= LB_0, & \mathbb{A}_{w0} &= LA_{w0}, \\ \mathbb{A}_{w(11)} &= L\bar{A}\bar{\Sigma}^\dagger \Psi_\alpha, & \mathbb{A}_{w(12)} &= (I_{2p} - \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^\dagger)\Psi_\alpha, \\ \tilde{\mathbb{A}}_{w(11)} &= L\bar{A}\bar{\Sigma}^\dagger \Psi_\sigma, & \tilde{\mathbb{A}}_{w(12)} &= (I_{2p} - \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^\dagger)\Psi_\sigma, \end{aligned}$$

et

$$\Lambda = \begin{bmatrix} CL^\dagger \\ \alpha_1 CL^\dagger \end{bmatrix}, \quad \Psi_\alpha = \begin{bmatrix} -J_1 \\ -\alpha_1 J_1 \end{bmatrix}, \quad \Psi_\sigma = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sigma_1 J_1 \end{bmatrix}, \quad H_e = I_r, \quad H_x = I_n,$$

$$\Delta_\varepsilon(\varepsilon(t)) = \varepsilon_1(t)I_r, \quad \Delta_x(\varepsilon(t)) = \varepsilon_1(t)I_n.$$

En utilisant la définition (3.58), les matrices  $\Delta_\varepsilon(\varepsilon(t))$  et  $\Delta_x(\varepsilon(t))$  vérifient

$$\|\Delta_\varepsilon(\varepsilon(t))\| \leq 1, \quad \|\Delta_x(\varepsilon(t))\| \leq 1. \quad (3.154)$$



En utilisant (3.56), l'équation d'état (3.133a) devient

$$dx(t) = ((A_{t0} + \alpha_1 A_{t1} + \sigma_1 \varepsilon_1(t) A_{t1}) x(t) + B_0 v(t)) dt + A_{w0} x(t) dw_0(t). \quad (3.155)$$

et le système augmenté (3.139) s'écrit donc

$$\begin{aligned} d\xi(t) = & \left( (\hat{A}_{t0} + \Delta \hat{A}_{t0}(t)) \xi(t) + \hat{B}_0 v(t) \right) dt \\ & + \hat{A}_{w0} \xi(t) dw_0(t) + (\hat{A}_{w1} + \Delta \hat{A}_{w1}(t)) \xi(t) dw_1(t) \end{aligned} \quad (3.156a)$$

$$e(t) = \hat{C} \xi(t) \quad (3.156b)$$

où

$$\begin{aligned} \hat{A}_{t0} &= \begin{bmatrix} A_{t0} + \alpha_1 A_{t1} & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_t - Z \mathbb{C}_t \end{bmatrix}, & \Delta \hat{A}_{t0}(t) &= H_1 \Delta_\xi(\varepsilon(t)) H, \\ \hat{A}_{w0} &= \begin{bmatrix} A_{w0} & 0 \\ \mathbb{A}_{w0} & 0 \end{bmatrix}, & \hat{B}_0 &= \begin{bmatrix} B_0 \\ \mathbb{B}_{01} \end{bmatrix}, \\ \hat{A}_{w1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{A}_{w(11)} - Z \mathbb{A}_{w(12)} & 0 \end{bmatrix}, & \Delta \hat{A}_{w1}(t) &= H_2 \Delta_\xi(\varepsilon(t)) H, \\ H_1 &= \begin{bmatrix} \sigma_1 A_{t1} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbb{A}}_t - Z \tilde{\mathbb{C}}_t \end{bmatrix}, & H_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \tilde{\mathbb{A}}_{w(11)} - Z \tilde{\mathbb{A}}_{w(12)} & 0 \end{bmatrix}, \\ H &= I_{n+r}, & \hat{C} &= \begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix}, \\ \Delta_\xi(\varepsilon(t)) &= \varepsilon_1(t) I_{n+r}. \end{aligned}$$

Il est à noter qu'à partir de (3.58),  $\Delta_\xi(\varepsilon(t))$  vérifie

$$\|\Delta_\xi(\varepsilon(t))\| \leq 1. \quad (3.158)$$

### 3.5.4 Synthèse du filtre d'ordre réduit et performance $\mathcal{H}_\infty$

Le théorème suivant nous permet de calculer les matrices du filtre réduit robuste.

**Théorème 3.5.1.** *Si la condition de rang (C.17) est vérifiée, le problème 3.5.1 du filtre réduit du système (3.133) avec le filtre (3.134) tel que la dynamique de l'erreur (3.136) soit exponentiellement stable en moyenne quadratique et vérifie la performance  $\mathcal{H}_\infty$  (3.135) est résolu si, pour un réel  $\gamma > 0$  donné, il existe des réels  $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$  et  $\mu_3 > 0$  et des matrices  $P_1 = P_1^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_2 = P_2^T \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $P_3 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $G_2 \in \mathbb{R}^{r \times 2p}$  et  $G_3 \in \mathbb{R}^{r \times 2p}$  tels que la LMI suivante soit vérifiée*

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{cccccc}
 (1,1) & (1,2) & P_1 B_0 + P_3 \mathbb{B}_{01} & \sigma_1 P_1 A_{t1} & P_3 \tilde{\mathbb{A}}_t - G_3 \tilde{\mathbb{C}}_t & (1,6) \\
 (1,2)^T & (2,2) & P_3^T B_0 + P_2 \mathbb{B}_{01} & \sigma_1 P_3^T A_{t1} & P_2 \tilde{\mathbb{A}}_t - G_2 \tilde{\mathbb{C}}_t & 0 \\
 B_0^T P_1 + \mathbb{B}_{01}^T P_3^T & B_0^T P_3 + \mathbb{B}_{01}^T P_2 & -\gamma^2 I_q & 0 & 0 & 0 \\
 \sigma_1 A_{t1}^T P_1 & \sigma_1 A_{t1}^T P_3^T & 0 & -\mu_1 I_n & 0 & 0 \\
 \tilde{\mathbb{A}}_t^T P_3^T - \tilde{\mathbb{C}}_t^T G_3^T & \tilde{\mathbb{A}}_t^T P_2 - \tilde{\mathbb{C}}_t^T G_2^T & 0 & 0 & -\mu_1 I_r & 0 \\
 (1,6) & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_1 \\
 (1,7) & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_3^T \\
 (1,8)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 (1,9)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 (1,10)^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right] \\
 & \left[ \begin{array}{ccccc}
 (1,7) & (1,8) & (1,9) & (1,10) & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -P_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\mu_3 I_n & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -P_1 & -P_3 & P_3 \tilde{\mathbb{A}}_{w(11)} - G_3 \tilde{\mathbb{A}}_{w(12)} \\
 0 & 0 & -P_3^T & -P_2 & P_2 \tilde{\mathbb{A}}_{w(11)} - G_2 \tilde{\mathbb{A}}_{w(12)} \\
 0 & 0 & \tilde{\mathbb{A}}_{w(11)}^T P_3^T - \tilde{\mathbb{A}}_{w(12)}^T G_3^T & \tilde{\mathbb{A}}_{w(11)}^T P_2^T - \tilde{\mathbb{A}}_{w(12)}^T G_2^T & -\mu_2 I_r
 \end{array} \right] < 0 \quad (3.159)
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 (1,1) &= P_1(A_{t0} + \alpha_1 A_{t1}) + (A_{t0} + \alpha_1 A_{t1})^T P_1^T + (\mu_1 + \mu_2 + \varphi \mu_3) I_n \\
 &\quad + \varphi \left( A_{w0}^T (P_3 \mathbb{A}_{w(11)} - G_3 \mathbb{A}_{w(12)}) + (P_3 \mathbb{A}_{w(11)} - G_3 \mathbb{A}_{w(12)})^T A_{w0} \right) \\
 &\quad + \varphi \left( \mathbb{A}_{w0}^T (P_2 \mathbb{A}_{w(11)} - G_2 \mathbb{A}_{w(12)}) + (P_2 \mathbb{A}_{w(11)} - G_2 \mathbb{A}_{w(12)})^T \mathbb{A}_{w0} \right), \\
 (1,2) &= (A_{t0} + \alpha_1 A_{t1})^T P_3 + P_3 \mathbb{A}_t - G_3 \mathbb{C}_t, \\
 (2,2) &= P_2 \mathbb{A}_t + \mathbb{A}_t^T P_2 - G_2 \mathbb{C}_t - \mathbb{C}_t^T G_2^T + (1 + \mu_1 + \mu_2 + \varphi \mu_3) I_r, \\
 (1,6) &= A_{w0}^T P_1 + \mathbb{A}_{w0}^T P_3^T, \\
 (1,7) &= A_{w0}^T P_3 + \mathbb{A}_{w0}^T P_2, \\
 (1,8) &= \varphi^{\frac{1}{2}} \left( A_{w0}^T \left( P_3 \tilde{\mathbb{A}}_{w(11)} - G_3 \tilde{\mathbb{A}}_{w(12)} \right) + \mathbb{A}_{w0}^T \left( P_2 \tilde{\mathbb{A}}_{w(11)} - G_2 \tilde{\mathbb{A}}_{w(12)} \right) \right), \\
 (1,9) &= \mathbb{A}_{w(11)}^T P_3^T - \mathbb{A}_{w(12)}^T G_3^T,
 \end{aligned}$$

$$(1, 10) = \mathbb{A}_{w(11)}^T P_2 - \mathbb{A}_{w(12)}^T G_2^T,$$

et que le gain  $Z$  soit solution de l'équation suivante

$$\begin{bmatrix} G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} Z. \quad (3.160)$$

■

*Démonstration.* En suivant les mêmes étapes de la démonstration du théorème 2.4.1, nous démontrons le théorème ci-dessus, avec comme matrice intermédiaire (qui correspond à la matrice  $\Theta_1$  (2.97) du théorème 2.4.1) la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} (1, 1) & \mathcal{P}\hat{B}_0 & \mathcal{P}H_1 & \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P} & \varphi^{\frac{1}{2}} \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P}H_2 & \hat{A}_{w1}^T \mathcal{P} & 0 \\ \hat{B}_0^T \mathcal{P} & -\gamma^2 I_q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_1^T \mathcal{P} & 0 & -\mu_1 I_{n+r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{P}\hat{A}_{w0} & 0 & 0 & -\mathcal{P} & 0 & 0 & 0 \\ \varphi^{\frac{1}{2}} H_2^T \mathcal{P}\hat{A}_{w0} & 0 & 0 & 0 & -\mu_3 I_{n+r} & 0 & 0 \\ \mathcal{P}\hat{A}_{w1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{P} & \mathcal{P}H_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_2^T \mathcal{P} & -\mu_2 I_{n+r} \end{bmatrix}, \quad (3.161)$$

où

$$(1, 1) = \mathcal{P}\hat{A}_{t0} + \hat{A}_{t0}^T \mathcal{P} + \varphi \left( \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P}\hat{A}_{w1} + \hat{A}_{w1}^T \mathcal{P}\hat{A}_{w0} \right) + (\mu_1 + \mu_2 + \varphi\mu_3) H^T H.$$

Considérons la matrice  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T = \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3^T & P_2 \end{bmatrix} > 0$  avec  $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_2 \in \mathbb{R}^{r \times r}$  et

$P_3 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ . En remplaçant les différentes matrices du système (3.156) par leur expression dans la relation (3.161), la matrice de la LMI (3.159) est obtenue directement. •

*Remarque 3.5.1.* La solution donnée par le théorème 3.5.1 est non convexe. La matrice du gain  $Z$  calculée par l'équation (3.160) existe si et seulement si la condition de rang suivante est satisfaite

$$\text{rang} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} G_2 & P_2 \\ G_3 & P_3 \end{bmatrix}. \quad (3.162)$$

Pour la résolution de la LMI (3.159), nous appliquons l'algorithme de relaxation 2.1. Dans ce cas, le test de rang est fait sur l'équation (3.162), les variables de l'étape 1 sont remplacées par  $P_1, P_2, P_3, G_2$  et  $G_3$ , les variables de l'étape 3 sont remplacées par  $P_1, P_2$  et  $P_3$  avec  $G_2$  et  $G_3$  fixes et, finalement, dans l'étape 5, les variables sont remplacées par  $P_1, G_2$  et  $G_3$  avec  $P_2$  et  $P_3$  fixes. Ainsi, la remarque 2.2.1 adaptée à ce cas reste valable.

□

### 3.5.5 Exemple numérique

Considérons le système (3.133). Les différentes matrices de ce système sont données par

$$\begin{aligned}
 A_{t_0} &= \begin{bmatrix} -1.5 & 1 & -1 \\ 0.5 & -2.5 & 1 \\ 0 & -0.6 & -3.5 \end{bmatrix}, & A_{t_1} &= \begin{bmatrix} -0.01 & 0.1 & 0 \\ 0 & -0.05 & 0 \\ 0.15 & 0 & -0.02 \end{bmatrix}, \\
 A_{w_0} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & -0.1 \\ -0.2 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}, & B_0 &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0.3 \\ -1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}, \\
 C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & J_1 &= \begin{bmatrix} -0.03 & 0 & -0.03 \\ 0 & -0.01 & 0 \end{bmatrix}, \\
 L &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

La commande  $u_1(t)$  est définie comme dans (2.14), soit

$$u_{1\min} = -5 \leq u_1(t) \leq u_{1\max} = 6,$$

et les conditions initiales sont

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \widehat{z}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Avec le théorème 3.5.1 pour  $\mu_1 = 7.4628$ ,  $\mu_2 = 0.0057$  et  $\mu_3 = 0.2476$  la solution de la LMI (3.159) est obtenue pour  $\gamma = 22$  et le gain  $Z$  est calculé de la relation (3.160)

$$Z = \begin{bmatrix} -6179.565 & -6191.2468 & 47.380 & 47.2190 \\ -1810.724 & -1819.847 & 20.760 & 20.796 \end{bmatrix}.$$

Ce calcul a été fait avec une matrice  $\mathcal{P}$  bloc-diagonale de la forme

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}.$$

Finalement, les matrices du filtre (3.134) sont données par

$$M_0 = \begin{bmatrix} -9.291 & -4.791 \\ -4.862 & -7.362 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} -0.041 & -0.020 \\ -0.114 & -0.146 \end{bmatrix},$$

$$N_0 = \begin{bmatrix} 4.291 & -7.391 \\ 5.862 & -3.262 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0.171 & 0.009 \\ -0.002 & -0.002 \end{bmatrix}.$$

Les figures suivantes montrent la simulation du système augmenté (3.156). Nous pouvons voir l'évolution de l'état  $x(t)$  (figure 3.7) et l'évolution du signal d'erreur  $e(t)$  et du signal de perturbation  $v(t)$  (figure 3.8). Les simulations sont faites avec la commande  $u_1(t) = 0.5 \sin(3t) + 2$ , et un coefficient de covariance entre les processus de Wiener  $w_0(t)$  et  $w_1(t)$  qui vaut  $\varphi = 0.0215$ .

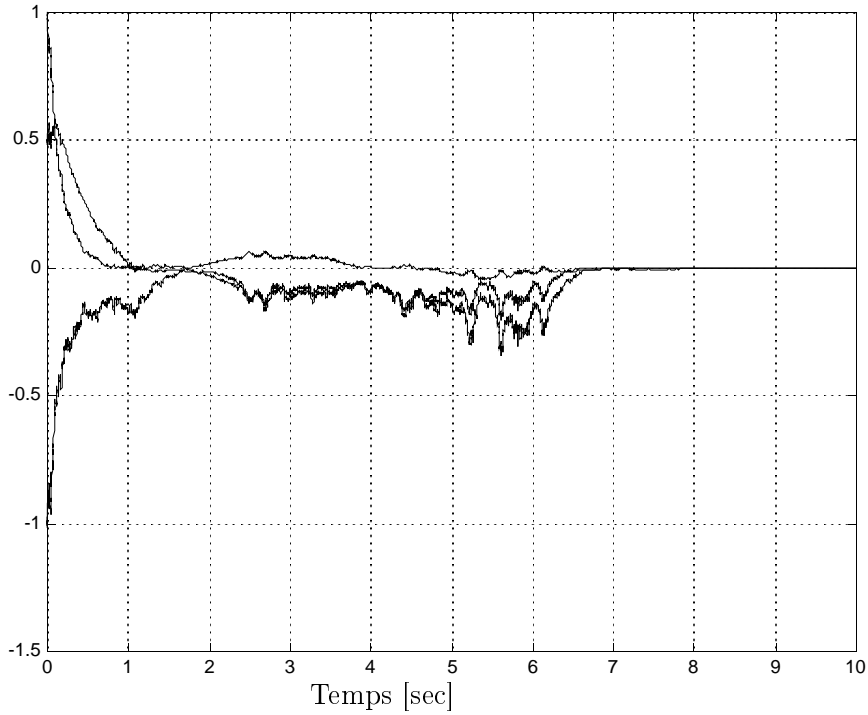
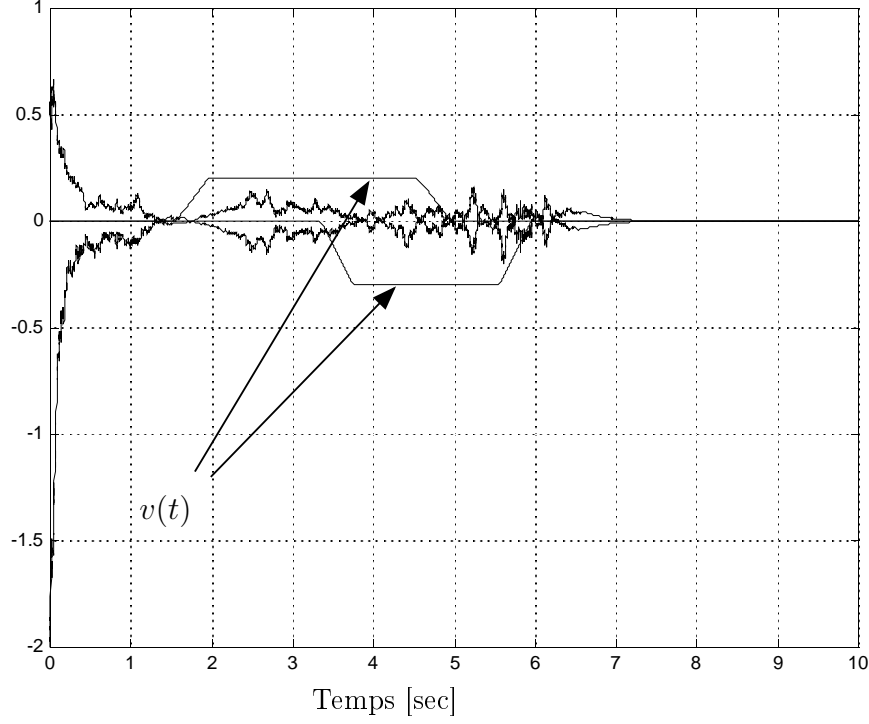


FIG. 3.7 – L'état  $x(t)$ .


 FIG. 3.8 – Le signal d'erreur  $e(t)$  et le signal de perturbation  $v(t)$ .

## 3.6 Filtrage robuste d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques incertains

### 3.6.1 Formulation du problème

Considérons le système stochastique incertain suivant dérivé du système (3.1), dans lequel  $f(x(t), v(t))$  et  $g(x(t), v(t))$  de l'équation (1.2) sont linéaires

$$\begin{aligned} dx(t) = & ((A_{t0} + \Delta A_{t0}(t))x(t) + (B_0 + \Delta B_0(t))v(t)) dt \\ & + ((A_{w0} + \Delta A_{w0}(t))x(t) + (B_w + \Delta B_w(t))v(t)) dw(t) \end{aligned} \quad (3.163a)$$

$$y(t) = Cx(t) + D_0v(t) \quad (3.163b)$$

$$z(t) = Lx(t) \quad (3.163c)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie,  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  est une combinaison linéaire des composantes du vecteur d'état  $x(t)$  avec  $r < n$  et  $v(t) \in \mathbb{R}^q$  représente les perturbations exogènes. Sans perte de généralité, nous avons  $\text{rang } L = r$ .  $w(t)$  est un processus de Wiener scalaire centré qui vérifie (1.5). Sans perte de généralité, nous supposons que  $\text{rang } L = r$ . Les matrices  $\Delta A_{t0}(t)$ ,  $\Delta B_0(t)$ ,  $\Delta A_{w0}(t)$  et  $\Delta B_w(t)$  représentent les incertitudes qui affectent le système et qui vérifient

$$\begin{bmatrix} \Delta A_{t0}(t) & \Delta B_0(t) & \Delta A_{w0}(t) & \Delta B_w(t) \end{bmatrix} = F \Delta(t) \begin{bmatrix} H_{A_{t0}} & H_{B_0} & H_{A_{w0}} & H_{B_w} \end{bmatrix}, \quad (3.164)$$

avec

$$\Delta^T(t) \Delta(t) \leq I_j \quad \forall t \geq 0, \quad (3.165)$$

$\Delta(t) \in \mathbb{R}^{i \times j}$  est une matrice inconnue avec des éléments Lebesgue mesurables.

**Hypothèse 3.6.1.** *Nous supposons que le système (3.163) avec  $v(t) \equiv 0$  est exponentiellement stable en moyenne quadratique.*

**Problème 3.6.1.** *L'objectif est de construire un filtre d'ordre réduit de la forme suivante*

$$d\eta(t) = M_0\eta(t)dt + N_0dy(t) \quad (3.166a)$$

$$\widehat{z}(t) = \eta(t) + Ry(t) \quad (3.166b)$$

tel que l'erreur d'estimation  $e(t) = z(t) - \widehat{z}(t)$  soit exponentiellement stable en moyenne quadratique et que, pour un  $\gamma > 0$  donné, la performance  $\mathcal{H}_\infty$  suivante

$$\|e(t)\|_{\widehat{L}_2}^2 \leq \gamma \|v(t)\|_{\widehat{L}_2}^2 \quad (3.167)$$

soit vérifiée.

En remplaçant  $z(t)$  par son expression, l'erreur d'estimation devient

$$e(t) = Lx(t) - \widehat{z}(t) = \varepsilon(t) - RD_0v(t), \quad (3.168)$$

avec

$$\varepsilon(t) = Tx(t) - \eta(t), \quad (3.169)$$

$$T = L - RC. \quad (3.170)$$

De (3.169), nous avons la relation

$$d\varepsilon(t) = Tdx(t) - d\eta(t), \quad (3.171)$$

qui, d'après (3.163) et (3.166), est équivalente à

$$\begin{aligned} d\varepsilon(t) = & (M_0\varepsilon(t) + (TA_{t0} - M_0T - N_0C + T\Delta A_{t0}(t))x(t))dt \\ & + (TB_0 - N_0D_0 + T\Delta B_0(t))v(t)dt \\ & + (T(A_{w0} + \Delta A_{w0}(t))x(t) + T(B_w + \Delta B_w(t))v(t))dw(t). \end{aligned} \quad (3.172)$$

### 3.6.2 Passage du système stochastique incertain vers un système augmenté incertain en fonction du gain $Z$

Afin de supprimer l'effet direct de l'état  $x(t)$  dans la dérive de la dynamique de l'erreur d'observation, on pose la condition suivante

$$TA_{t0} - M_0T - N_0C = 0, \quad (3.173)$$

qui correspond à une équation de Sylvester qui est équivalente à la relation (3.20).

Si la condition de rang (C.20) est vérifiée, alors la contrainte (3.173) a une solution donnée par (3.22) et (3.23). De plus, si la contrainte (3.26) ( $RD_0 = 0$ ) est vérifiée, il est montré que  $\varepsilon(t) = e(t)$  (voir [Dar00a, DZS01]).

En définissant l'état augmenté suivant

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix}, \quad (3.174)$$

et en utilisant les contraintes (3.26) et (3.173), le système augmenté obtenu à partir de l'équation de la dynamique d'état (3.163a) et de l'équation d'erreur (3.172) s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} d\xi(t) = & \left( \begin{bmatrix} A_{t0} & 0 \\ 0 & \mathbb{A}_t - Z\mathbb{C}_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A_{t0}(t) & 0 \\ T\Delta A_{t0}(t) & 0 \end{bmatrix} \right) \xi(t)dt \\ & + \left( \begin{bmatrix} B_0 \\ \mathbb{B}_{01} - Z\mathbb{B}_{02} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_0(t) \\ T\Delta B_0(t) \end{bmatrix} \right) v(t)dt \\ & + \left( \begin{bmatrix} A_{w0} & 0 \\ \mathbb{A}_{w(01)} - Z\mathbb{A}_{w(02)} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A_{w0}(t) & 0 \\ T\Delta A_{w0}(t) & 0 \end{bmatrix} \right) \xi(t)dw(t) \\ & + \left( \begin{bmatrix} B_w \\ \mathbb{B}_{w(01)} - Z\mathbb{B}_{w(02)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_w(t) \\ T\Delta B_w(t) \end{bmatrix} \right) v(t)dw(t) \end{aligned} \quad (3.175a)$$

$$e(t) = \begin{bmatrix} 0 & I_r \end{bmatrix} \xi(t) \quad (3.175b)$$

où  $Z$  est une matrice arbitraire de dimensions appropriées et

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_t &= \bar{A} - \begin{bmatrix} 0 & L\bar{A} \end{bmatrix} \Sigma^\dagger \bar{C}, & \mathbb{C}_t &= (I_{2p} - \Sigma \Sigma^\dagger) \bar{C}, \\ \mathbb{B}_{01} &= LB_0 - \begin{bmatrix} 0 & L\bar{A} \end{bmatrix} \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} CB_0 \\ D_0 \end{bmatrix}, & \mathbb{B}_{02} &= (I_{2p} - \Sigma \Sigma^\dagger) \begin{bmatrix} CB_0 \\ D_0 \end{bmatrix}, \\ \mathbb{A}_{w(01)} &= LA_{w0} - \begin{bmatrix} 0 & L\bar{A} \end{bmatrix} \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} CA_{w0} \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbb{A}_{w(02)} &= (I_{2p} - \Sigma \Sigma^\dagger) \begin{bmatrix} CA_{w0} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbb{B}_{w(01)} &= LB_w - \begin{bmatrix} 0 & L\bar{A} \end{bmatrix} \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} CB_w \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbb{B}_{w(02)} &= (I_{2p} - \Sigma \Sigma^\dagger) \begin{bmatrix} CB_w \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Les matrices  $\bar{A}$ ,  $\bar{A}$ ,  $\bar{C}$  et  $\Sigma$  sont données par

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A_{t0}(I_n - L^\dagger L), & \bar{C} &= C(I_n - L^\dagger L), \\ \bar{A} &= LA_{t0}L^\dagger, & \bar{C} &= \begin{bmatrix} CA_{t0}L^\dagger \\ CL^\dagger \end{bmatrix}, \\ \Sigma &= \begin{bmatrix} D_0 & C\bar{A} \\ 0 & \bar{C} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$



Le système (3.175) peut être réécrit comme

$$\begin{aligned} d\xi(t) = & \left( \left( \hat{A}_{t0} + \Delta\hat{A}_{t0}(t) \right) \xi(t) + \left( \hat{B}_0 + \Delta\hat{B}_0(t) \right) v(t) \right) dt \\ & + \left( \left( \hat{A}_{w0} + \Delta\hat{A}_{w0}(t) \right) \xi(t) + \left( \hat{B}_w + \Delta\hat{B}_w(t) \right) v(t) \right) dw(t) \end{aligned} \quad (3.176a)$$

$$e(t) = \hat{C}\xi(t) \quad (3.176b)$$

où les matrices  $\hat{A}_{t0}, \hat{B}_0, \hat{A}_{w0}, \hat{B}_w$ , et  $\hat{C}$  sont déduites directement de (3.175), et les incertitudes  $\Delta\hat{A}_{t0}(t), \Delta\hat{B}_0(t), \Delta\hat{A}_{w0}(t)$ , et  $\Delta\hat{B}_w(t)$  vérifient

$$\begin{bmatrix} \Delta\hat{A}_{t0}(t) & \Delta\hat{B}_0(t) & \Delta\hat{A}_{w0}(t) & \Delta\hat{B}_w(t) \end{bmatrix} = \hat{F}V(t) \begin{bmatrix} \hat{H}_{A_{t0}} & \hat{H}_{B_0} & \hat{H}_{A_{w0}} & \hat{H}_{B_w} \end{bmatrix}, \quad (3.177)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{F} &= \begin{bmatrix} F \\ \hat{F}_1 - Z\hat{F}_2 \end{bmatrix}, \\ \hat{F}_1 &= LF - \begin{bmatrix} 0 & L\bar{A} \end{bmatrix} \Sigma^\dagger \begin{bmatrix} CF \\ 0 \end{bmatrix}, & \hat{F}_2 &= (I_{2p} - \Sigma \Sigma^\dagger) \begin{bmatrix} CF \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{H}_{A_{t0}} &= \begin{bmatrix} H_{A_{t0}} & 0 \end{bmatrix}, & \hat{H}_{B_0} &= H_{B_0}, \\ \hat{H}_{A_{w0}} &= \begin{bmatrix} H_{A_{w0}} & 0 \end{bmatrix}, & \hat{H}_{B_w} &= H_{B_w}. \end{aligned}$$

### 3.6.3 Synthèse du filtre robuste d'ordre réduit et performance $\mathcal{H}_\infty$

Le théorème suivant permet de calculer les matrices du filtre réduit robuste.

**Théorème 3.6.1.** *Si la condition de rang (C.19) est vérifiée, le problème du filtrage robuste stochastique 3.6.1 est résolu pour le système stochastique incertain (3.163) avec le filtre (3.166) si, pour un réel  $\gamma > 0$  donné, il existe deux réels  $\mu_1 > 0$  et  $\mu_2 > 0$  et des matrices  $P_1 = P_1^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_2 = P_2^T \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $P_3 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $Y_2 \in \mathbb{R}^{r \times 2p}$  et  $Y_3 \in \mathbb{R}^{n \times 2p}$  tels que la LMI suivante soit vérifiée*

$$\begin{bmatrix} \begin{array}{cc} (1,1) & A_{t0}^T P_3 + P_3 A_t - Y_3 C_t \\ P_3^T A_{t0} + A_t^T P_3 - C_t^T Y_3^T & (2,2) \end{array} & \begin{array}{c} (1,3) \\ (1,4)^T \end{array} \\ \begin{array}{cc} B_0^T P_3 + B_{01}^T P_2 - B_{02}^T Y_2^T & 0 \\ P_1 A_{w0} + P_3 A_{w(01)} - Y_3 A_{w(02)} & 0 \\ P_3^T A_{w0} + P_2 A_{w(01)} - Y_2 A_{w(02)} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} (2,4)^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{bmatrix} \begin{array}{c} (1,3) \\ P_3^T B_0 + P_2 B_{01} - Y_2 B_{02} \\ \mu_1 H_{B_0}^T H_{B_0} + \mu_2 H_{B_w}^T H_{B_w} - \gamma^2 I_q \\ 0 \\ P_1 B_w + P_3 B_{w(01)} - Y_3 B_{w(02)} \\ P_3^T B_w + P_2 B_{w(01)} - Y_2 B_{w(02)} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 (1, 4) & A_{w0}^T P_1 + \mathbb{A}_{w(01)}^T P_3^T - \mathbb{A}_{w(02)}^T Y_3^T & A_{w0}^T P_3 + \mathbb{A}_{w(01)}^T P_2 - \mathbb{A}_{w(02)}^T Y_2^T & 0 & \\
 (2, 4) & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & B_w^T P_1 + \mathbb{B}_{w(01)}^T P_3^T - \mathbb{B}_{w(02)}^T Y_3^T & B_w^T P_3 + \mathbb{B}_{w(01)}^T P_2 - \mathbb{B}_{w(02)}^T Y_2^T & 0 & \\
 -\mu_1 I_i & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & -P_1 & -P_3 & (1, 4) & \\
 0 & -P_3^T & -P_2 & (2, 4) & \\
 0 & (1, 4)^T & (2, 4)^T & -\mu_2 I_i & 
 \end{array} < 0, \tag{3.178}$$

avec

$$\begin{aligned}
 (1, 1) &= P_1 A_{t0} + A_{t0}^T P_1 + \mu_1 H_{A_{t0}}^T H_{A_{t0}} + \mu_2 H_{A_{w0}}^T H_{A_{w0}} \\
 (2, 2) &= P_2 \mathbb{A}_t + \mathbb{A}_t^T P_2 - Y_2 \mathbb{C}_t - \mathbb{C}_t^T Y_2^T + I_r, \\
 (1, 3) &= P_1 B_0 + P_3 \mathbb{B}_{01} - Y_3 \mathbb{B}_{02} + \mu_1 H_{A_{t0}}^T H_{B_0} + \mu_2 H_{A_{w0}}^T H_{B_w}, \\
 (1, 4) &= P_1 F + P_3 \hat{F}_1 - Y_3 \hat{F}_2, \\
 (2, 4) &= P_3^T F + P_2 \hat{F}_1 - Y_2 \hat{F}_2.
 \end{aligned}$$

et que le gain  $Z$  soit solution de l'équation suivante

$$\begin{bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} Z. \tag{3.179}$$

■

*Démonstration.* Le système stochastique incertain (3.176) est robuste exponentiellement stable en moyenne quadratique et vérifie la performance  $\mathcal{H}_\infty$  si la LMI suivante est vérifiée [Mao96, MKR98, XC03]

$$\begin{bmatrix}
 (1, 1) & (1, 2) & \mathcal{P}\hat{F} & \hat{A}_{w0}^T \mathcal{P} & 0 \\
 (1, 2)^T & (2, 2) & 0 & \hat{B}_w^T \mathcal{P} & 0 \\
 \hat{F}^T \mathcal{P} & 0 & -\mu_1 I_i & 0 & 0 \\
 \mathcal{P}\hat{A}_{w0} & \mathcal{P}\mathbb{B}_w & 0 & -\mathcal{P} & \mathcal{P}\hat{F} \\
 0 & 0 & 0 & \hat{F}^T \mathcal{P} & -\mu_2 I_i
 \end{bmatrix} < 0, \tag{3.180}$$

avec

$$\begin{aligned}
 (1, 1) &= \mathcal{P}\hat{A}_{t0} + \hat{A}_{t0}^T \mathcal{P} + \hat{C}^T \hat{C} + \mu_1 \hat{H}_{A_{t0}}^T \hat{H}_{A_{t0}} + \mu_2 \hat{H}_{A_{w0}}^T \hat{H}_{A_{w0}}, \\
 (1, 2) &= \mathcal{P}\hat{B}_0 + \mu_1 \hat{H}_{A_{t0}}^T \hat{H}_{B_0} + \mu_2 \hat{H}_{A_{w0}}^T \hat{H}_{B_w}, \\
 (2, 2) &= \mu_1 \hat{H}_{B_0}^T \hat{H}_{B_0} + \mu_2 \hat{H}_{B_w}^T \hat{H}_{B_w} - \gamma^2 I_q.
 \end{aligned}$$

Considérons  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^T = \begin{bmatrix} P_1 & P_3 \\ P_3^T & P_2 \end{bmatrix} > 0$  avec  $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P_2 \in \mathbb{R}^{r \times r}$  et  $P_3 \in \mathbb{R}^{n \times r}$ . En remplaçant les différentes matrices par leur expression dans la relation (3.180), la LMI (3.178) est obtenue directement.

Finalement, le gain  $Z$  donné par (3.179) permet de calculer les matrices du filtre (3.166). •

*Remarque 3.6.1.* La solution donnée par le théorème 3.6.1 est non convexe. La matrice du gain  $Z$  calculée par l'équation (3.179) existe si et seulement si la condition de rang suivante est satisfaite

$$\text{rang} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} Y_2 & P_2 \\ Y_3 & P_3 \end{bmatrix}. \quad (3.181)$$

Pour la résolution de la LMI (3.178), nous appliquons l'algorithme de relaxation 2.1. Dans ce cas, le test de rang est fait sur l'équation (3.181), les variables de l'étape 1 sont remplacées par  $P_1, P_2, P_3, Y_2$  et  $Y_3$ , les variables de l'étape 3 sont remplacées par  $P_1, P_2$  et  $P_3$  avec  $Y_2$  et  $Y_3$  fixes et, finalement, dans l'étape 5, les variables sont remplacées par  $P_1, Y_2$  et  $Y_3$  avec  $P_2$  et  $P_3$  fixes. Ainsi, la remarque 2.2.1 adaptée à ce cas reste valable. ◻

### 3.6.4 Exemple numérique

Considérons le système (3.163). Les différentes matrices de ce système ont les valeurs suivantes

$$A_{t0} = \begin{bmatrix} -3.5 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1.5 & -1 & 0.5 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0.5 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.3 \\ -1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.5 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix},$$

$$A_{w0} = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 & 0 & -0.3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -0.6 & 0.1 & 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0.1 & -0.5 & -0.4 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0 \\ -0.6 & 0.2 \\ 0.5 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

et les incertitudes sont définies par

$$F = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

$$H_A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad H_{A_0} = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.1 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$H_B = \begin{bmatrix} -0.2 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad H_{B_0} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Le gain  $Z$ , calculé par la LMI (3.178) du théorème 3.6.1, est obtenu pour  $\gamma = 2.876$ ,  $\mu_1 = 8.981$  et  $\mu_2 = 5.697$  et est donné par

$$Z = \begin{bmatrix} -3735.766 & -3572.846 & 8971.896 & 2.662 \\ 6544.427 & 5245.425 & -11493.927 & -2.670 \end{bmatrix}.$$

Ce calcul a été fait avec une matrice  $\mathcal{P}$  bloc-diagonale de la forme

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}.$$

Les matrices du filtre (3.166) sont données alors par

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0.775 & 3.550 \\ -1.654 & -4.683 \end{bmatrix}, \quad N_0 = \begin{bmatrix} -0.919 & 0.831 \\ 0.587 & -0.569 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.625 & -0.625 \end{bmatrix}.$$

Les figures suivantes montrent la simulation du système augmenté (3.208). Nous pouvons voir l'évolution de l'état  $x(t)$  (figures 3.9 et 3.11) et l'évolution du signal d'erreur  $\varepsilon(t)$  et du signal de perturbation  $v(t)$  (figures 3.10 et 3.12). Les simulations sont faites pour deux valeurs des incertitudes  $\Delta(t)$ .

1. Cas  $\Delta(t) = 0.5$  :

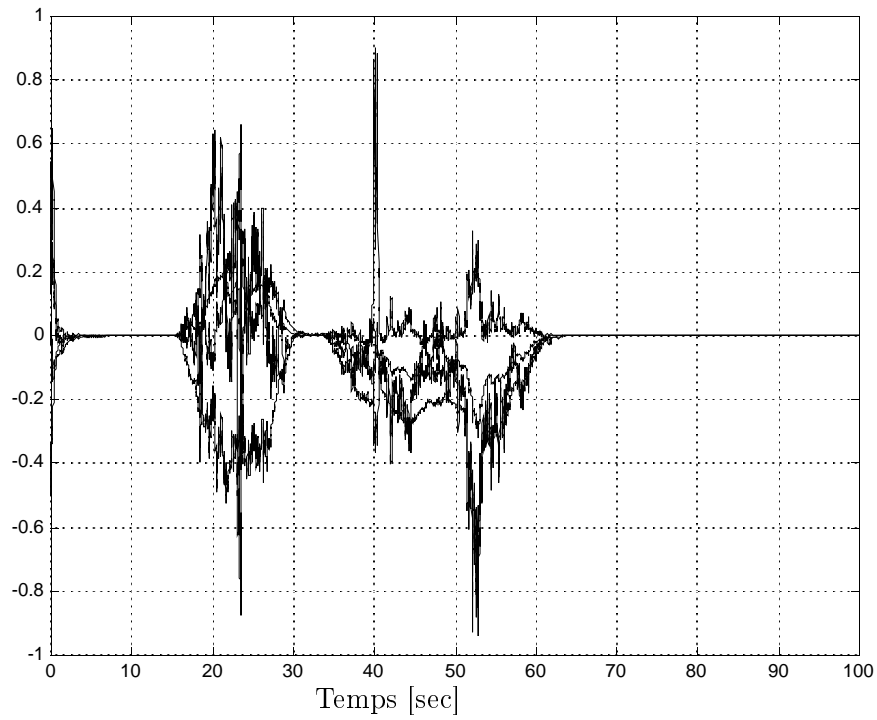


FIG. 3.9 – L'état  $x(t)$ .

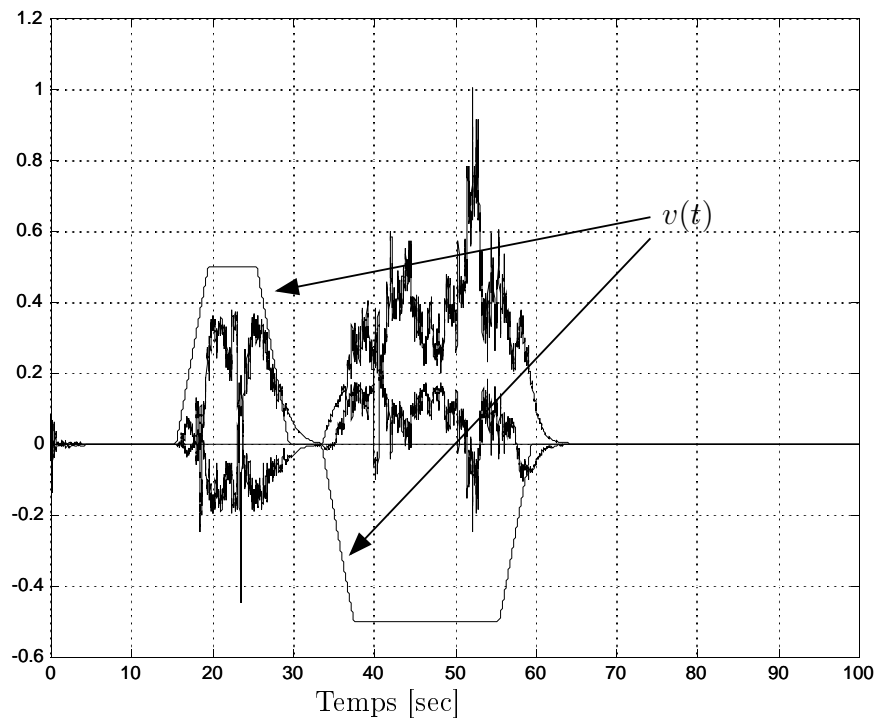


FIG. 3.10 – Le signal d'erreur  $\varepsilon(t)$  et le signal de perturbation  $v(t)$ .

2. Cas  $\Delta(t) = -0.3$  :

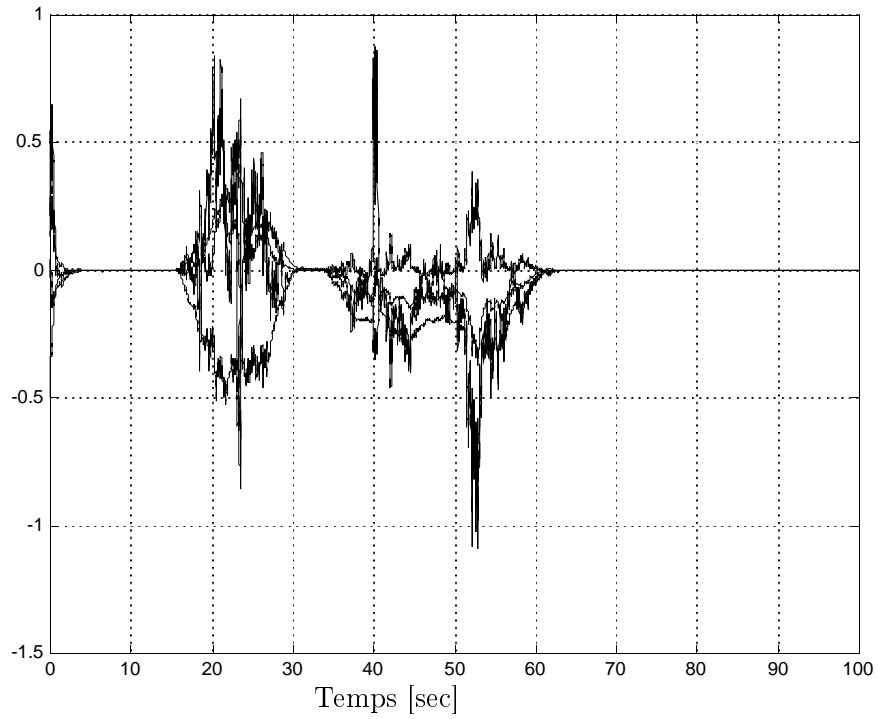


FIG. 3.11 – L'état  $x(t)$ .

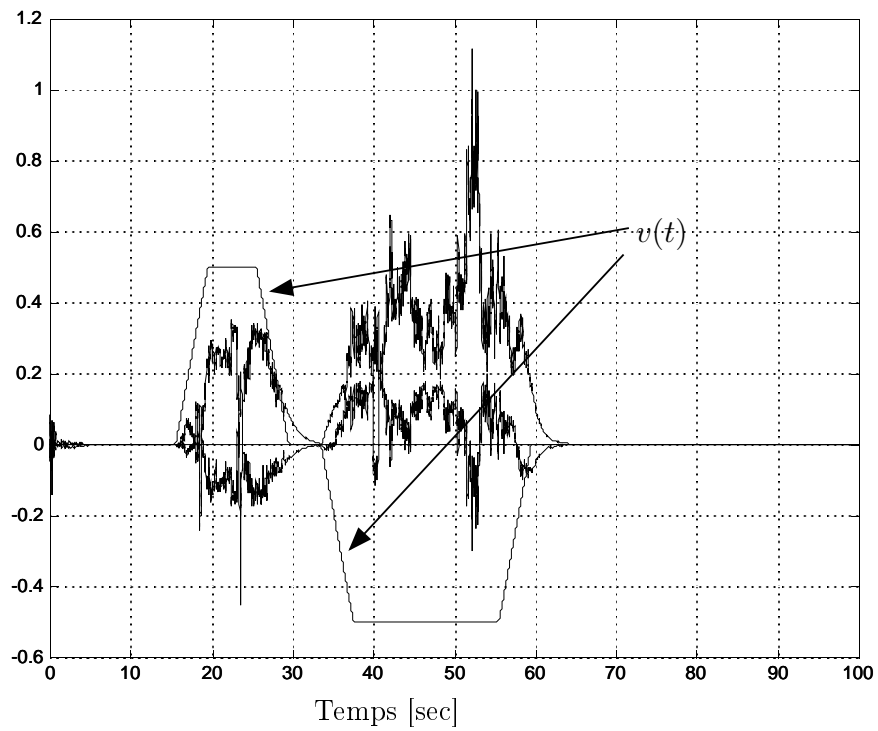


FIG. 3.12 – Le signal d'erreur  $\varepsilon(t)$  et le signal de perturbation  $v(t)$ .

## 3.7 Commande $\mathcal{H}_\infty$ robuste basée observateur pour les systèmes stochastiques incertains

### 3.7.1 Formulation du problème

Considérons le système stochastique incertain avec une commande suivant, dans lequel  $f(x(t), u(t), v(t))$  et  $g(x(t), v(t))$  de l'équation (1.2) sont linéaires

$$\begin{aligned} dx(t) = & ((A_{t0} + \Delta A_{t0}(t))x(t) + (B_0 + \Delta B_0(t))v(t)) dt + Bu(t)dt \\ & + ((A_{w0} + \Delta A_{w0}(t))x(t) + (B_w + \Delta B_w(t))v(t)) dw(t) \end{aligned} \quad (3.182a)$$

$$y(t) = (C + \Delta C(t))x(t) + (D_0 + \Delta D_0(t))v(t) \quad (3.182b)$$

$$z(t) = C_1x(t) + D_1v(t) + D_2u(t) \quad (3.182c)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie,  $z(t) \in \mathbb{R}^r$  est une combinaison linéaire des composantes du vecteur d'état  $x(t)$  avec  $r < n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est l'entrée et  $v(t) \in \mathbb{R}^q$  représente les perturbations exogènes.  $w(t)$  est un processus de Wiener scalaire centré qui vérifie (1.5).

Les matrices  $\Delta A_{t0}(t), \Delta B_0(t), \Delta A_{w0}(t), \Delta B_w(t), \Delta C(t)$  et  $\Delta D_0(t)$  représentent les incertitudes qui affectent le système et qui vérifient

$$\begin{bmatrix} \Delta A_{t0}(t) & \Delta B_0(t) \\ \Delta A_{w0}(t) & \Delta B_w(t) \\ \Delta C(t) & \Delta D_0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_{x_0} \\ F_y \end{bmatrix} \Delta(t) \begin{bmatrix} H_x & H_v \end{bmatrix}, \quad (3.183)$$

avec

$$\Delta^T(t)\Delta(t) \leq I_j \quad \forall t \geq 0, \quad (3.184)$$

où  $\Delta(t) \in \mathbb{R}^{i \times j}$  est une matrice inconnue avec des éléments Lebesgue mesurables.

Notre objectif est de construire une commande basée observateur de la forme

$$d\eta(t) = M_0\eta(t)dt + N_0y(t)dt + Wu(t)dt \quad (3.185a)$$

$$u(t) = \eta(t) + Ry(t) \quad (3.185b)$$

où  $\eta(t) \in \mathbb{R}^m$  est l'état du filtre.

**Définition 3.7.1 (La stabilité en moyenne quadratique pour les systèmes incertains).** [XC03] Le système stochastique incertain (3.182) est dit robuste stochastiquement exponentiellement stable en moyenne quadratique s'il est exponentiellement stable en moyenne quadratique pour toutes les incertitudes admissibles  $\Delta A_{t0}(t), \Delta B_0(t), \Delta A_{w0}(t), \Delta B_w(t), \Delta C(t)$  et  $\Delta D_0(t)$ .

**Définition 3.7.2 (La stabilisation par une commande).** [LGLS01] Le système stochastique incertain (3.182) est dit robuste stochastiquement exponentiellement stabilisable par une commande basée observateur s'il existe un gain  $L$ , un observateur fonctionnel  $d\eta(t) = M_0\eta(t)dt + N_0y(t)dt + Wu(t)dt$  et une commande  $u(t) = \eta(t) + Ry(t)$  tels que

$$(i) \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left\{ \|u(t) - Lx(t)\|^2 \right\} = 0 \text{ si } v(t) \equiv 0,$$

- (ii) le système en boucle fermée (3.182)-(3.185) soit robuste stochastiquement exponentiellement stable.

**Problème 3.7.1.** Le problème est de construire un observateur fonctionnel stochastique (3.185a) et une commande (3.185b) tels que le système incertain (3.182), rebouclé avec (3.185), vérifie la définition 3.7.2 et satisfasse, pour un réel  $\gamma > 0$  donné, la performance  $\mathcal{H}_\infty$  suivante

$$\|z(t)\|_{\hat{L}_2}^2 \leq \gamma \|v(t)\|_{\hat{L}_2}^2 \quad (3.186)$$

pour tout  $v(t) \in \hat{L}_2([0, \infty]; \mathbb{R}^m)$ .

### 3.7.2 Expression de la boucle fermée

En définissant le signal d'erreur d'observation

$$e(t) = Lx(t) - u(t) = \varepsilon(t) - RD_0, \quad (3.187)$$

avec

$$\varepsilon(t) = Tx(t) - \eta(t) \quad \text{et} \quad T = L - RC, \quad (3.188)$$

nous obtenons la relation suivante

$$d\varepsilon(t) = Tdx(t) - d\eta(t). \quad (3.189)$$

La dynamique de  $\varepsilon(t)$  (3.189), est obtenue en remplaçant (3.182a) et (3.185a) dans (3.189) et donnée par

$$\begin{aligned} d\varepsilon(t) = & (M_0\varepsilon(t) + (TA_{i0} - M_0T - N_0C + T\Delta A_{i0}(t) - N_0\Delta D_0(t))x(t))dt \\ & + (TB_0 - N_0D_0 + T\Delta B_0(t) - N_0\Delta D_0(t))v(t)dt + (TB - W)u(t)dt \\ & + (T(A_{w0} + \Delta A_{w0}(t))x(t) + T(B_w + \Delta B_w(t))v(t))dw(t). \end{aligned} \quad (3.190)$$

Afin de supprimer l'effet direct de l'état  $x(t)$  et de la commande  $u(t)$  dans la dérive de la dynamique de l'erreur, nous supposons les contraintes suivantes

$$0 = TA_{i0} - M_0T - N_0C, \quad (3.191a)$$

$$W = TB. \quad (3.191b)$$

Ce qui est "équivalent" à la condition de non biais pour les systèmes linéaires déterministes sans incertitudes.

En définissant l'état augmenté suivant

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix}, \quad (3.192)$$

et en utilisant (3.187), le signal de sortie du système (3.182) est donnée par

$$z(t) = \begin{bmatrix} C_1 + D_2L & -D_2 \end{bmatrix} \xi(t) + (D_1 + D_2R(F_y\Delta(t)H_v + D_0))v(t). \quad (3.193)$$



Avant de continuer, imposons la contrainte suivante qui va être justifiée plus loin.

$$R \begin{bmatrix} F_y & D_0 \end{bmatrix} = 0. \quad (3.194)$$

La contrainte  $RD_0 = 0$  a été justifiée dans le paragraphe 3.2.2. Nous allons donner une justification pour la contrainte  $RF_y = 0$  au paragraphe 3.7.3.

En utilisant (3.190), les contraintes (3.191a)-(3.191b), (3.194) et le retour d'état  $u(t) = Lx(t)$ , la boucle fermée formée par le système (3.182) et le filtre (3.185) est donnée par

$$\begin{aligned} d\xi(t) = & \left( \begin{bmatrix} A_{t0} + BL & -B \\ 0 & M_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A_{t0}(t) & 0 \\ T\Delta A_{t0}(t) - N_0\Delta C(t) & 0 \end{bmatrix} \right) \xi(t)dt \\ & + \left( \begin{bmatrix} B_0 \\ TB_0 - N_0D_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_0(t) \\ T\Delta B_0(t) - N_0\Delta D_0(t) \end{bmatrix} \right) v(t)dt \\ & + \left( \begin{bmatrix} A_{w0} & 0 \\ TA_{w0} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta A_{w0}(t) & 0 \\ T\Delta A_{w0}(t) & 0 \end{bmatrix} \right) \xi(t)dw(t) \\ & + \left( \begin{bmatrix} B_w \\ TB_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_w(t) \\ T\Delta B_w(t) \end{bmatrix} \right) v(t)dw(t) \end{aligned} \quad (3.195a)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} C_1 + D_2L & -D_2 \end{bmatrix} \xi(t) + D_1v(t). \quad (3.195b)$$

### 3.7.3 Calcul du gain de retour d'état $L$

En remplaçant la commande  $u(t)$  par  $Lx(t)$  dans le système (3.182) et en supposant que l'état est mesuré, nous obtenons

$$\begin{aligned} dx(t) = & ((A_{t0} + BL + \Delta A_{t0}(t))x(t) + (B_0 + \Delta B_0(t))v(t))dt \\ & + ((A_{w0} + \Delta A_{w0}(t))x(t) + (B_w + \Delta B_w(t))v(t))dw(t) \end{aligned} \quad (3.196a)$$

$$y(t) = x(t) \quad (3.196b)$$

$$z(t) = (C_1 + D_2L)x(t) + D_1v(t) \quad (3.196c)$$

Le lemme suivant va nous permettre de calculer la matrice du retour d'état  $L$ .

**Lemme 3.7.1.** *Le système (3.182) (ou (3.196)) est robuste stochastiquement exponentiellement stabilisable par la commande  $u(t) = Lx(t)$  et nous avons  $\|z(t)\|_{\tilde{L}_2}^2 \leq \gamma \|v(t)\|_{\tilde{L}_2}^2$  si, pour un réel  $\gamma > 0$  donné, il existe deux matrices  $Q = Q^T$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et deux scalaires réels  $\mu_1 > 0$  et  $\mu_2 > 0$  tels que l'inégalité*

suivante soit vérifiée

$$\begin{bmatrix} (1,1) & B_0 & QC_1^T + Y^T D_2^T & F_x & QA_{w0}^T & 0 & QH_x^T \\ B_0^T & -\gamma^2 I_q & D_1^T & 0 & B_w^T & 0 & H_v^T \\ C_1 Q + D_2 Y & D_1 & -I_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_x^T & 0 & 0 & -\mu_1 I_\ell & 0 & 0 & 0 \\ A_{w0} Q & B_w & 0 & 0 & -Q & F_{x_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{x_0}^T & -\mu_2 I_\ell & 0 \\ H_x Q & H_v & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_1 + \mu_2)^{-1} I_k \end{bmatrix} < 0, \quad (3.197)$$

avec

$$(1,1) = A_{t0}Q + QA_{t0}^T + BY + Y^T B^T.$$

Le gain  $L$  est alors donné par

$$L = YQ^{-1}. \quad (3.198)$$

■

*Démonstration.* Considérons le système incertain (3.196). En appliquant la LMI (3.6.1) du théorème 3.6.1 nous obtenons directement la LMI (3.197). •

### 3.7.4 Conception de la commande basée observateur

Comme dans le paragraphe 3.2.2, la solution de l'équation de Sylvester (3.191a) (ou (3.12)) donne

$$M_0 = \bar{\bar{A}}_0 - \mathcal{K}\bar{\bar{C}}_0, \quad (3.199)$$

avec

$$\bar{\bar{A}}_0 = LA_{t0}L^\dagger, \quad (3.200a)$$

$$\bar{\bar{C}}_0 = \begin{bmatrix} CA_{t0}L^\dagger \\ CL^\dagger \end{bmatrix}, \quad (3.200b)$$

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} R & K_0 \end{bmatrix}, \quad (3.200c)$$

$$K_0 = N_0 - M_0 R, \quad (3.200d)$$

et

$$\mathcal{K}\bar{\bar{\Sigma}} = L\bar{\bar{A}}, \quad (3.201)$$

où

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} R & K_0 \end{bmatrix}, \quad (3.202)$$

$$\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{A}}_0, \quad \bar{\bar{C}} = C(I_n - L^\dagger L), \quad (3.203)$$

$$\bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} F_y & D_0 & C\bar{A} \\ 0 & 0 & \bar{C} \end{bmatrix}, \quad (3.204)$$

et, s'il existe une solution générale à l'équation (3.201), elle est alors donnée par

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L\bar{A} \end{bmatrix} \bar{\Sigma}^\dagger + \bar{Z}(I_{2p} - \bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^\dagger), \quad (3.205)$$

où  $\bar{Z}$  est une matrice arbitraire de dimensions appropriées.

La solution de la contrainte (3.191a) existe si et seulement si la condition de rang (C.16) est vérifiée (voir annexe C, lemme C.1.1).

Il est à noter que les termes dans lesquels il y a des incertitudes comme  $T\Delta A_{t_0}(t) - N_0\Delta C(t)$  et  $T\Delta B_0(t) - N_0\Delta D_0(t)$  dans (3.195), peuvent être exprimées en fonction des matrices du système. Par exemple, en utilisant (3.183), (3.188) et (3.200d), le premier terme est donné par

$$\begin{aligned} T\Delta A_{t_0}(t) - N_0\Delta C(t) &= LF_x\Delta(t)H_x - RCF_x\Delta(t)H_x - (K_0 + M_0R)F_y\Delta(t)H_x, \\ &= \left( LF_x - \begin{bmatrix} R & K_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CF_x \\ F_y \end{bmatrix} \right) \Delta(t)H_x - M_0RF_y\Delta(t)H_x. \end{aligned} \quad (3.206)$$

Remarquons que dans le deuxième terme de l'équation (3.206), nous avons le produit  $M_0R$ . En utilisant (3.199), (3.200) et (3.205), nous trouvons que ce produit est bilinéaire en le gain  $\bar{Z}$ . D'où l'utilité de la contrainte (3.194) ( $RF_y = 0$ ) afin d'éviter cette bilinéarité. Cette bilinéarité existe aussi dans le terme  $TB_0 - N_0D_0$  (voir (3.195)). Donc en vertu de la contrainte (3.194), l'équation (3.206) devient

$$T\Delta A_{t_0}(t) - N_0\Delta C(t) = \left( (LF_x - C_{\{2,F\}}^L) - \bar{Z} \left( I_{2p} - \bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^\dagger \right) C_{\{2,F\}} \right) \Delta(t)H_x, \quad (3.207)$$

où les matrices  $C_{\{2,F\}}$  et  $C_{\{2,F\}}^L$  sont données par

$$C_{\{2,F\}} = \begin{bmatrix} CF_x \\ F_y \end{bmatrix}, \quad C_{\{2,F\}}^L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L\bar{A} \end{bmatrix} \bar{\Sigma}^\dagger C_{\{2,F\}}.$$

D'une façon similaire, nous pouvons calculer les autres termes  $T\Delta B_0(t) - N_0\Delta D_0(t)$  et  $TB_0 - N_0D_0$ . En utilisant (3.183), (3.188) et (3.200d) nous avons

$$\begin{aligned} T\Delta B_0(t) - N_0\Delta D_0(t) &= \left( LF_x - \begin{bmatrix} R & K_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CF_x \\ F_y \end{bmatrix} \right) \Delta(t)H_v - M_0RF_y\Delta(t)H_v, \\ TB_0 - N_0D_0 &= LB_0 - \begin{bmatrix} R & K_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CB_0 \\ D_0 \end{bmatrix} - M_0RD_0, \end{aligned}$$

d'où l'utilité de la contrainte (3.194) ( $RD_0 = 0$ ) afin d'éviter la bilinéarité en le gain  $\bar{Z}$  dans les termes  $M_0RF_y\Delta(t)H_v$  et  $M_0RD_0$ .

Ainsi, la boucle fermée (3.195) devient

$$\begin{aligned} d\xi(t) &= \left( \widehat{\mathbb{A}}_{t0} + \Delta \mathbb{A}_{t0}(t) \right) \xi(t) dt + \left( \widehat{\mathbb{B}}_0 + \Delta \mathbb{B}_0(t) \right) v(t) dt \\ &\quad + \left( \widehat{\mathbb{A}}_{w0} + \Delta \mathbb{A}_{w0}(t) \right) \xi(t) dw(t) + \left( \widehat{\mathbb{B}}_w + \Delta \mathbb{B}_w(t) \right) v(t) dw(t) \end{aligned} \quad (3.208a)$$

$$z(t) = \widehat{\mathbb{C}}\xi(t) + D_1 v(t) \quad (3.208b)$$

où

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbb{A}_{t0}(t) & \Delta \mathbb{B}_0(t) \\ \Delta \mathbb{A}_{w0}(t) & \Delta \mathbb{B}_w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_x \\ \mathbb{F}_{x_0} \end{bmatrix} \Delta(t) \begin{bmatrix} \mathbb{H}_x & \mathbb{H}_v \end{bmatrix}, \quad (3.209)$$

avec

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{A}}_{t0} &= \begin{bmatrix} A_{t0} + BL & -B \\ 0 & \widehat{\mathbb{A}}_t - \overline{Z}\widehat{\mathbb{C}}_t \end{bmatrix}, & \widehat{\mathbb{B}}_0 &= \begin{bmatrix} B_0 \\ \widehat{\mathbb{B}}_{01} - \overline{Z}\widehat{\mathbb{B}}_{02} \end{bmatrix}, \\ \widehat{\mathbb{A}}_{w0} &= \begin{bmatrix} A_{w0} & 0 \\ \widehat{\mathbb{A}}_{w(01)} - \overline{Z}\widehat{\mathbb{A}}_{w(02)} & 0 \end{bmatrix}, & \widehat{\mathbb{B}}_w &= \begin{bmatrix} B_w \\ \widehat{\mathbb{B}}_{w(01)} - \overline{Z}\widehat{\mathbb{B}}_{w(02)} \end{bmatrix}, \\ \widehat{\mathbb{C}} &= \begin{bmatrix} C_1 + D_2 L & -D_2 \end{bmatrix}, \\ \mathbb{F}_x &= \begin{bmatrix} F_x \\ \widehat{F}_{x_{1,1}} - \overline{Z}\widehat{F}_{x_{1,2}} \end{bmatrix}, & \mathbb{F}_{x_0} &= \begin{bmatrix} F_x \\ \widehat{F}_{x_{0,1}} - \overline{Z}\widehat{F}_{x_{0,2}} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{A}}_t &= LA_{t0}L^\dagger - C_{\{1,A_{t0}\}}^L, & \widehat{\mathbb{C}}_t &= (I_{2p} - \Sigma \Sigma^\dagger)C_{\{1,A_{t0}\}}, \\ \widehat{\mathbb{B}}_{01} &= LB_0 - C_{\{0,B_0\}}^L, & \widehat{\mathbb{B}}_{02} &= (I_{2p} - \Sigma \Sigma^\dagger)C_{\{0,B_0\}}, \\ \widehat{\mathbb{A}}_{w(01)} &= LA_{w0} - C_{\{2,A_{w0}\}}^L, & \widehat{\mathbb{A}}_{w(02)} &= (I_{2p} - \overline{\Sigma} \overline{\Sigma}^\dagger)C_{\{2,A_{w0}\}}, \\ \widehat{\mathbb{B}}_{w(01)} &= LB_w - C_{\{2,B_w\}}^L, & \widehat{\mathbb{B}}_{w(02)} &= (I_{2p} - \Sigma \Sigma^\dagger)C_{\{2,B_w\}}, \\ \widehat{F}_{x_{1,1}} &= LF_x - C_{\{2,F\}}^L, & \widehat{F}_{x_{1,2}} &= (I_{2p} - \overline{\Sigma} \overline{\Sigma}^\dagger)C_{\{2,F\}}, \\ \widehat{F}_{x_{0,1}} &= LF_{x_0} - C_{\{2,F_0\}}^L, & \widehat{F}_{x_{0,2}} &= (I_{2p} - \overline{\Sigma} \overline{\Sigma}^\dagger)C_{\{2,F_0\}}, \\ \mathbb{H}_x &= \begin{bmatrix} H_x & 0 \end{bmatrix}, & \mathbb{H}_v &= H_v, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} C_{\{1,A_{t0}\}} &= \begin{bmatrix} CA_{t0}L^\dagger \\ CL^\dagger \end{bmatrix}, & C_{\{1,A_{t0}\}}^L &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & L\overline{A} \end{bmatrix} \overline{\Sigma}^\dagger C_{\{1,A_{t0}\}}, \\ C_{\{0,B_0\}} &= \begin{bmatrix} CB_0 \\ D_0 \end{bmatrix}, & C_{\{0,B_0\}}^L &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & L\overline{A} \end{bmatrix} \overline{\Sigma}^\dagger C_{\{0,B_0\}}, \\ C_{\{2,A_{w0}\}} &= \begin{bmatrix} CA_{w0} \\ 0 \end{bmatrix}, & C_{\{2,A_{w0}\}}^L &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & L\overline{A} \end{bmatrix} \overline{\Sigma}^\dagger C_{\{2,A_{w0}\}}, \end{aligned}$$

$$C_{\{2,B_w\}} = \begin{bmatrix} CB_w \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{\{2,B_w\}}^L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L\bar{A} \end{bmatrix} \bar{\Sigma}^\dagger C_{\{2,B_w\}},$$

$$C_{\{2,F_0\}} = \begin{bmatrix} C_2 F_{x_0} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_{\{2,F_0\}}^L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L\bar{A} \end{bmatrix} \bar{\Sigma}^\dagger C_{\{2,F_0\}}.$$

Le théorème suivant nous permet de déterminer les matrices du filtre réduit robuste.

**Théorème 3.7.1.** *Si la condition de rang (C.19)<sup>10</sup> est vérifiée, le problème 3.7.1 de la commande basée observateur d'ordre réduit est résolu sous la contrainte (3.194) et avec un retour d'état  $L$  donné par (3.197)-(3.198) si, pour un réel  $\gamma > 0$  donné, il existe des réels  $\mu_1 > 0$  et  $\mu_2 > 0$ , et des matrices  $\mathbb{P} = \mathbb{P}^T$  et  $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^T$ ,  $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (m+n)}$  tels que*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}_u & 0 \\ 0 & I_{q+2i} \end{bmatrix}^T \times \left[ \begin{array}{cccc|ccc} \bar{A}_{t0}\mathbb{P} + \mathbb{P}\bar{A}_{t0}^T & \mathbb{P}\hat{C}^T & \mathbb{P}\bar{A}_{w0}^T & (\mu_1 + \mu_2)\mathbb{P}H_x^T & \bar{\mathbb{B}}_0 & \bar{\mathbb{F}}_x & 0 \\ \hat{C}\mathbb{P} & -I_r & 0 & 0 & D_1 & 0 & 0 \\ \bar{A}_{w0}\mathbb{P} & 0 & -\mathbb{P} & 0 & \bar{\mathbb{B}}_w & 0 & \bar{\mathbb{F}}_{x_0} \\ (\mu_1 + \mu_2)H_x\mathbb{P} & 0 & 0 & -I_j & (\mu_1 + \mu_2)H_v & 0 & 0 \\ \hline \bar{\mathbb{B}}_0^T & D_1^T & \bar{\mathbb{B}}_w^T & (\mu_1 + \mu_2)H_v^T & -\gamma^2 I_q & 0 & 0 \\ \bar{\mathbb{F}}_x^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1 I_i & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbb{F}}_{x_0}^T & 0 & 0 & 0 & -\mu_2 I_i \end{array} \right] \times \begin{bmatrix} \mathbb{K}_u & 0 \\ 0 & I_{q+2i} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.213)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}_y & 0 \\ 0 & I_{r+j} \end{bmatrix}^T \times \left[ \begin{array}{ccccc|cc} \mathbb{Q}\bar{A}_{t0} + \bar{A}_{t0}^T\mathbb{Q} & \mathbb{Q}\bar{\mathbb{B}}_0 & \mathbb{Q}\bar{\mathbb{F}}_x & \bar{A}_{w0}^T\mathbb{Q} & 0 & \hat{C}^T & (\mu_1 + \mu_2)H_x^T \\ \bar{\mathbb{B}}_0^T\mathbb{Q} & -\gamma^2 I_q & 0 & \bar{\mathbb{B}}_w^T\mathbb{Q} & 0 & D_1^T & (\mu_1 + \mu_2)H_v^T \\ \bar{\mathbb{F}}_x^T\mathbb{Q} & 0 & -\mu_1 I_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{Q}\bar{A}_{w0} & \mathbb{Q}\bar{\mathbb{B}}_w & 0 & -\mathbb{Q} & \mathbb{Q}\bar{\mathbb{F}}_{x_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbb{F}}_{x_0}^T\mathbb{Q} & -\mu_2 I_i & 0 & 0 \\ \hline \hat{C} & D_1 & 0 & 0 & 0 & -I_r & 0 \\ (\mu_1 + \mu_2)H_x & (\mu_1 + \mu_2)H_v & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_j \end{array} \right] \times \begin{bmatrix} \mathbb{K}_y & 0 \\ 0 & I_{r+j} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.214)$$

<sup>10</sup>Dans (C.19), il faut remplacer  $D_0$  par  $[F_y \ D_0]$ .

$$I_{n+m} = \mathbb{P}\mathbb{Q}, \quad (3.215)$$

où

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{A}}_{t0} &= \begin{bmatrix} A_{t0} + BL & -B \\ 0 & \hat{\mathbb{A}}_t \end{bmatrix}, & \bar{\mathbb{B}}_0 &= \begin{bmatrix} B_1 \\ \hat{\mathbb{B}}_{01} \end{bmatrix}, & \bar{\mathbb{A}}_{w0} &= \begin{bmatrix} A_{w0} & 0 \\ \hat{\mathbb{A}}_{w(01)} & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbb{B}}_w &= \begin{bmatrix} B_0 \\ \hat{\mathbb{B}}_{01} \end{bmatrix}, & \bar{\mathbb{F}}_x &= \begin{bmatrix} F_x \\ \hat{F}_{x_{1,1}} \end{bmatrix}, & \bar{\mathbb{F}}_{x_0} &= \begin{bmatrix} F_x \\ \hat{F}_{x_{0,1}} \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbb{C}} &= \begin{bmatrix} 0 & \hat{\mathbb{C}}_t \end{bmatrix}, & \tilde{\mathbb{C}}_0 &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbb{A}}_{w(02)} & 0 \end{bmatrix}, & \mathcal{I}_{0,m} &= \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

et les matrices  $\mathbb{K}_y$  et  $\mathbb{K}_u$  sont respectivement les bases des noyaux de  $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{C}} & \hat{\mathbb{B}}_{02} & \hat{F}_{x_{1,2}} & 0 & 0 \\ \tilde{\mathbb{C}}_0 & \hat{\mathbb{B}}_{w(02)} & 0 & 0 & \hat{F}_{x_{0,2}} \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} -\mathcal{I}_{0,m}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathcal{I}_{0,m}^T & 0 \end{bmatrix}$ .

Tous les gains  $\bar{\mathbb{Z}}$  sont donnés par

$$\bar{\mathbb{Z}} = \bar{\mathbb{H}}_R^\dagger \mathbb{K} \bar{\mathbb{G}}_L^\dagger + \mathbb{Z} - \bar{\mathbb{H}}_R^\dagger \bar{\mathbb{H}}_R \mathbb{Z} \bar{\mathbb{G}}_L \bar{\mathbb{G}}_L^\dagger, \quad (3.216)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &= -\mathbb{R}_1^{-1} \bar{\mathbb{H}}_L^T \mathbb{S}_1 \bar{\mathbb{G}}_R^T \left( \bar{\mathbb{G}}_R \mathbb{S}_1 \bar{\mathbb{G}}_R^T \right)^{-1} + \mathbb{R}_1^{-1} \mathbb{S}_2^{1/2} \mathbb{R}_2 \left( \bar{\mathbb{G}}_R \mathbb{S}_1 \bar{\mathbb{G}}_R^T \right)^{-1/2}, \\ \mathbb{S}_1 &= \left( \bar{\mathbb{H}}_L \mathbb{R}_1^{-1} \bar{\mathbb{H}}_L^\dagger - \bar{\mathbb{Q}} \right)^{-1} > 0, \\ \mathbb{S}_2 &= \mathbb{R}_1 - \bar{\mathbb{H}}_L^T \left( \mathbb{S}_1 - \mathbb{S}_1 \bar{\mathbb{G}}_R^T \left( \bar{\mathbb{G}}_R \mathbb{S}_1 \bar{\mathbb{G}}_R^T \right)^{-1} \bar{\mathbb{G}}_R \mathbb{S}_1 \right) \bar{\mathbb{H}}_L, \\ \bar{\mathbb{Q}} &= \begin{bmatrix} \mathbb{Q} \bar{\mathbb{A}}_{t0} + \bar{\mathbb{A}}_{t0}^T \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \bar{\mathbb{B}}_0 & \mathbb{Q} \bar{\mathbb{F}}_x & \bar{\mathbb{A}}_{w0}^T \mathbb{Q} & 0 & \hat{\mathbb{C}}^T & (\mu_1 + \mu_2) H_x^T \\ \bar{\mathbb{B}}_0^T \mathbb{Q} & -\gamma^2 I_q & 0 & \bar{\mathbb{B}}_w^T \mathbb{Q} & 0 & D_1^T & (\mu_1 + \mu_2) H_v^T \\ \bar{\mathbb{F}}_x^T \mathbb{Q} & 0 & -\mu_1 I_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{Q} \bar{\mathbb{A}}_{w0} & \mathbb{Q} \bar{\mathbb{B}}_w & 0 & -\mathbb{Q} & \mathbb{Q} \bar{\mathbb{F}}_{x_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbb{F}}_{x_0}^T \mathbb{Q} & -\mu_2 I_i & 0 & 0 \\ \hat{\mathbb{C}} & D_1 & 0 & 0 & 0 & -I_r & 0 \\ (\mu_1 + \mu_2) H_x & (\mu_1 + \mu_2) H_v & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\mu_1 + \mu_2) I_j \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Les matrices  $\mathbb{R}_1$ ,  $\mathbb{R}_2$  et  $\mathbb{Z}$  sont arbitraires et vérifient les relations  $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_1^T > 0$  et  $\|\mathbb{R}_2\| < 1$ . Les matrices  $\bar{\mathbb{H}}_L$ ,  $\bar{\mathbb{H}}_R$ ,  $\bar{\mathbb{G}}_L$  et  $\bar{\mathbb{G}}_R$  sont de rang plein et vérifient  $\bar{\mathbb{H}} = \bar{\mathbb{H}}_L \bar{\mathbb{H}}_R$  et  $\bar{\mathbb{G}} = \bar{\mathbb{G}}_L \bar{\mathbb{G}}_R$  avec

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{H}} &= \begin{bmatrix} -\mathcal{I}_{0,m}^T \mathbb{Q}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathcal{I}_{0,m}^T \mathbb{Q}^T & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \\ \bar{\mathbb{G}} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{C}} & \hat{\mathbb{B}}_{02} & \hat{F}_{x_{1,2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\mathbb{C}}_0 & \hat{\mathbb{B}}_{w(02)} & 0 & 0 & \hat{F}_{x_{0,2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

*Démonstration.* Le système incertain (3.208) est dit robuste exponentiellement stable en moyenne quadratique avec la performance (3.186) si, pour certains scalaires  $\mu_1 > 0$  et  $\mu_2 > 0$ , il existe une matrice  $\bar{\mathbb{Q}} = \bar{\mathbb{Q}}^T > 0$  telles que (voir lemme 3.7.1)

$$\bar{\mathbb{Q}} + \left( \bar{\mathbb{H}} \begin{bmatrix} \bar{Z} & 0 \\ 0 & \bar{Z} \end{bmatrix} \bar{\mathbb{G}} \right) + \left( \bar{\mathbb{G}}^T \begin{bmatrix} \bar{Z}^T & 0 \\ 0 & \bar{Z}^T \end{bmatrix} \bar{\mathbb{H}}^T \right) < 0. \quad (3.217)$$

D'après le lemme de projection d'Iwasaki et Skelton [IS94], cette solution  $\bar{\mathbb{Q}}$  existe si et seulement si les matrices  $\mathbb{P} = \mathbb{P}^T > 0$  et  $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^T > 0$ , avec  $\mathbb{P} = \mathbb{Q}^{-1}$  (voir annexe D), sont les solutions des LMIs (3.213) et (3.214) et de l'équation (3.215). Les LMIs (3.213) et (3.214) sont déduites de (3.217). Les formules proposées dans Iwasaki et Skelton [IS94] (voir annexe B lemme B.3.1) nous permettent de trouver le gain  $\bar{Z}$  (3.216). •

*Remarque 3.7.1.* Pour résoudre les LMIs du théorème avec l'égalité (3.215), nous devons utiliser un algorithme heuristique de chute de rang pour obtenir des solutions locales à la contrainte non convexe (3.215) (voir annexe D). Celui qui a donné le meilleur résultat, dans notre cas, est l'algorithme de linéarisation avec complémentarité conique [EOA97].  $\square$

### 3.7.5 Exemple numérique

Considérons le système (3.182). Les différentes matrices de ce système sont données par

$$\begin{aligned} A_{t0} &= \begin{bmatrix} -3.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0 & -2 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, & B_0 &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0.3 \\ -1 & 0.2 \\ 0.6 & 0.5 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_{w0} &= \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 & 0 & -0.3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -0.6 & 0.1 & 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0.1 & -0.5 & -0.4 \end{bmatrix}, & B_w &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.5 & 0 \\ -0.6 & 0.2 \\ 0.5 & -0.1 \end{bmatrix}, & C_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ D_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & D_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & D_0 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

et les matrices des incertitudes de l'équation (3.183) sont données par

$$F_x = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad F_{x_0} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad F_y = \begin{bmatrix} -0.01 \\ 0.01 \end{bmatrix},$$

$$H_x = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad H_v = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.1 \end{bmatrix},$$

et les conditions initiales sont

$$x(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \eta(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La LMI du lemme 3.7.1 nous donne le gain du retour d'état  $L$  pour  $\gamma = 2.9$ ,  $\mu_1 = 6.765$  et  $\mu_2 = 6.800$

$$L = \begin{bmatrix} -0.026 & -0.083 & 0.024 & -0.030 \\ 1.782 & -0.647 & -0.240 & -0.826 \end{bmatrix},$$

puis le théorème 3.7.1 nous donne le gain  $\bar{Z}$  suivant

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} 180.8 & 142.3 & 274 & -664.8 \\ -2274.2 & -1902 & -3753.2 & 8958.3 \end{bmatrix}.$$

Alors, les matrices du filtre (3.185) sont données par

$$M_0 = \begin{bmatrix} -1.885 & 0.032 \\ 5.248 & -1.187 \end{bmatrix}, \quad N_0 = \begin{bmatrix} -0.071 & -0.002 \\ -4.207 & -0.413 \end{bmatrix},$$

$$W = \begin{bmatrix} 1.035 & 1.035 \\ 0.970 & 0.970 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} -0.035 & -0.035 \\ 0.031 & 0.031 \end{bmatrix}.$$

Les figures suivantes montrent la simulation du système augmenté (3.208). Nous pouvons voir l'évolution de l'état  $x(t)$  (figures 3.13 et 3.16) et l'évolution du signal d'erreur  $\varepsilon(t)$  et du signal de perturbation  $v(t)$  (figures 3.14, 3.15, 3.17 et 3.18). Les simulations sont faites pour deux valeurs des incertitudes  $\Delta(t)$ .



1. Cas  $\Delta(t) = 0.7$  :

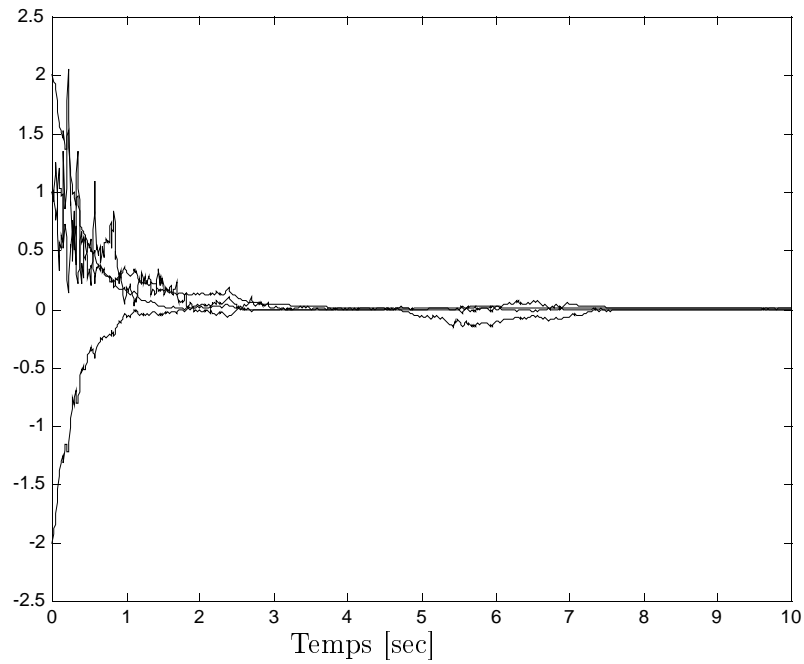


FIG. 3.13 – L'état  $x(t)$ .

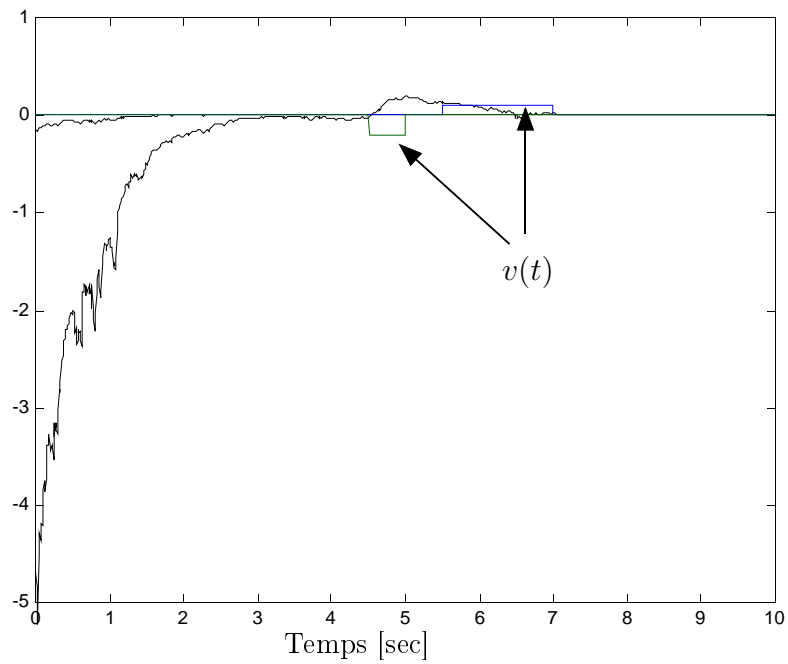


FIG. 3.14 – Le signal d'erreur  $\varepsilon(t)$  et le signal de perturbation  $v(t)$ .

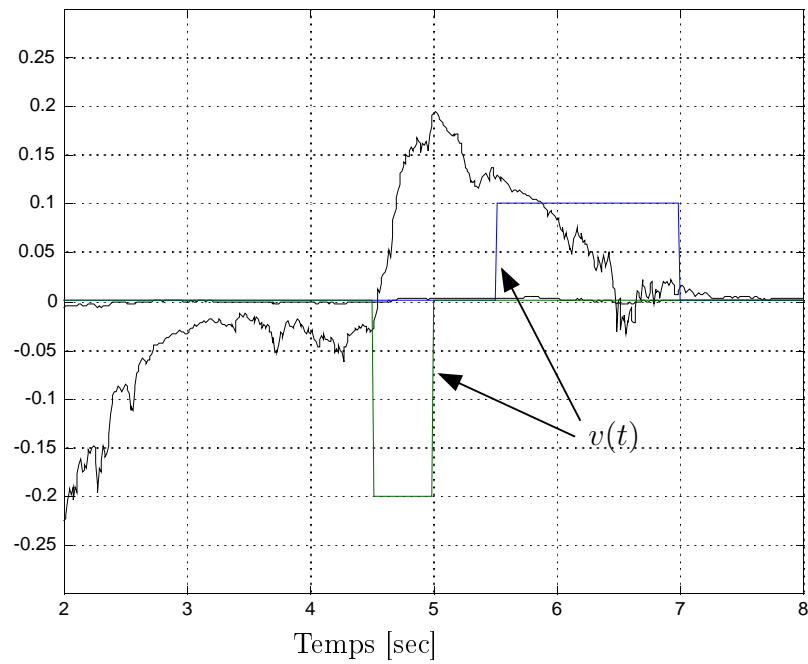


FIG. 3.15 – Zoom de la Figure 3.14

2. Cas  $\Delta(t) = -0.7$  :

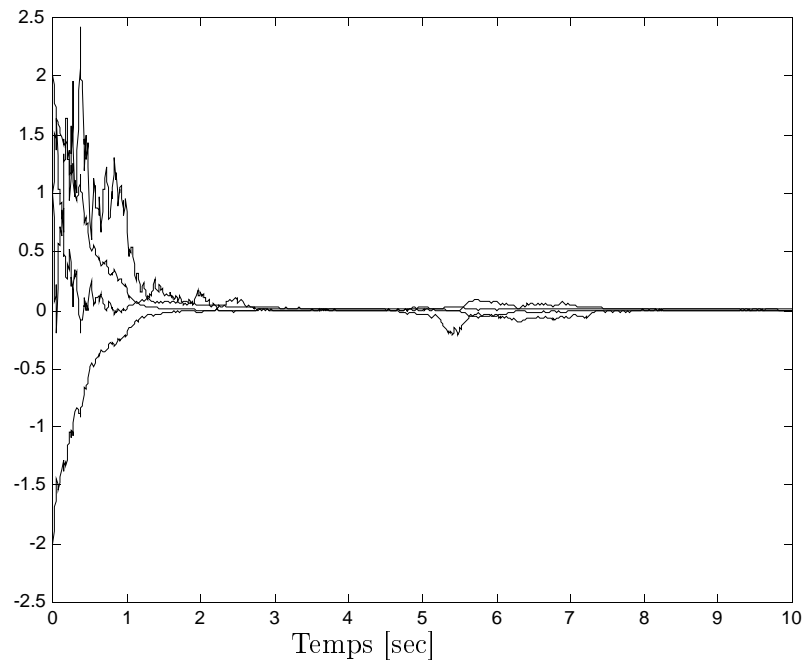


FIG. 3.16 – L'état  $x(t)$ .

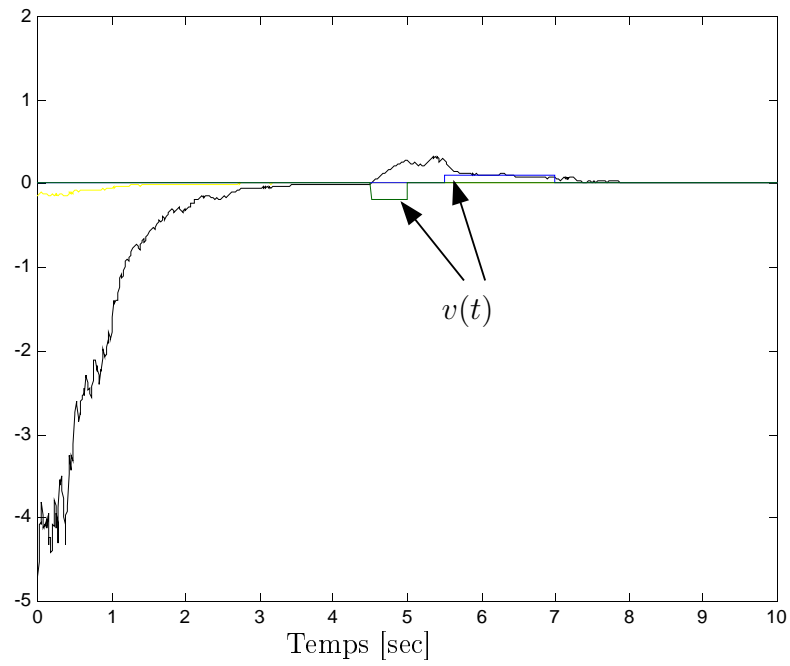


FIG. 3.17 – Le signal d'erreur  $\varepsilon(t)$  et le signal de perturbation  $v(t)$ .

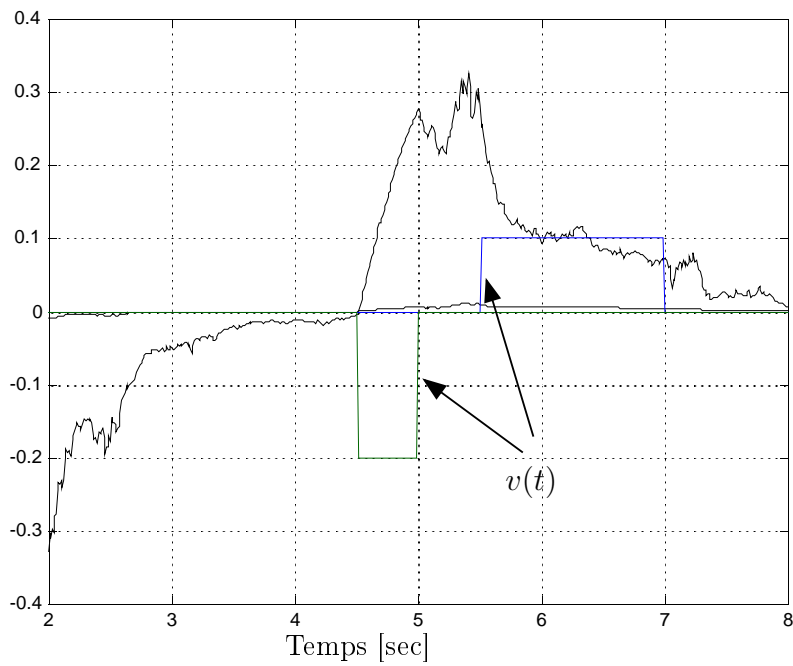


FIG. 3.18 – Zoom de la figure 3.17.

## 3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le filtrage  $\mathcal{H}_\infty$  d'ordre réduit pour différentes classes de systèmes stochastiques.

Le critère  $\mathcal{H}_\infty$  qui exprime l'atténuation entre la norme du signal de perturbation  $v(t)$  et la norme de l'erreur d'estimation  $e(t)$  par un réel  $\gamma > 0$  a été retenu comme indice de performance.

L'approche utilisée pour traiter les systèmes bilinéaires est basée sur un changement de variable qui transforme la bilinéarité état-commande en une incertitude paramétrique. En utilisant la formule d'Itô, des lemmes de majoration sur le système devenu "incertain" et une contrainte écrite sous la forme d'une équation de Sylvester, toutes les matrices du filtre sont exprimées en fonction d'une seule matrice de gain  $Z$ . La résolution d'une LMI couplée à une contrainte algébrique assure la stabilité exponentielle en moyenne quadratique et garantit l'indice de performance  $\mathcal{H}_\infty$ .

Le filtrage  $\mathcal{H}_\infty$  d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques incertains est également traité. A la fin, la synthèse d'une commande  $\mathcal{H}_\infty$  robuste basée sur un observateur d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques incertains est proposée.



# Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons évoqué le problème du filtrage  $\mathcal{H}_\infty$  d'ordre plein et d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques à temps continu.

Les systèmes stochastiques considérés sont décrits par une équation différentielle d'Itô. Dans la dynamique de l'état des systèmes stochastiques considérés, à part la présence d'un bruit multiplicatif, des bilinéarités dans la dérive ou dans la diffusion étaient permises. Le cas des mesures affectées par un bruit multiplicatif a été également étudié. Les bruits considérés sont des processus de Wiener.

Le critère  $\mathcal{H}_\infty$ , qui exprime l'atténuation entre la norme du signal de perturbation  $v(t)$  et la norme de l'erreur d'estimation  $e(t)$  par un réel  $\gamma > 0$ , a été retenu comme indice de performance.

L'approche utilisée pour traiter les systèmes bilinéaires est basée sur un changement de variable qui transforme la bilinéarité en une incertitude paramétrique.

La théorie de Lyapunov généralisée aux EDS a été employée dans la démonstration de la stabilité exponentielle en moyenne quadratique des systèmes étudiés.

L'application de la formule d'Itô et des lemmes de majorations nous a permis d'exprimer le problème du filtrage sous la forme de LMIs couplées à des contraintes bilinéaires. Ces LMIs assurent la stabilité exponentielle en moyenne quadratique et vérifient l'indice de performance  $\mathcal{H}_\infty$ . La résolution de ces LMIs nous a permis de calculer les matrices des filtres. Pour les filtres d'ordre réduit, la solution d'une contrainte écrite sous la forme d'une équation de Sylvester permet d'exprimer toutes les matrices du filtre en fonction d'une seule matrice de gain  $Z$  et finalement la résolution de ces LMIs sous contraintes algébriques permet de trouver ce gain  $Z$  et donc les matrices du filtre.

Le filtre  $\mathcal{H}_\infty$  d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques incertains a été réalisé, ainsi que la commande  $\mathcal{H}_\infty$  robuste basée sur un observateur d'ordre réduit pour ces mêmes systèmes.

## Perspectives

Suite aux travaux exposés dans ce mémoire, les extensions et les perspectives suivantes nous semblent être des pistes de recherche à approfondir :

1. sur les méthodes développées :
  - relaxer la contrainte  $RD_0 = 0$  (voir (1.69) et (1.76)) afin de rendre les conditions de rang (voir annexe C, paragraphe (C.1)) moins restrictives,
  - traiter les bilinéarités état-commande sans introduire la notion d'incertitude,
2. sur la classe de systèmes stochastiques considérée :
  - étudier le cas des systèmes stochastiques dans lesquels la dérive et la diffusion sont des fonctions polynomiales en l'état et trouver un filtre de dimension finie pour ces classes de systèmes,
  - relaxer les contraintes dues à la stabilité exponentielle en moyenne quadratique afin de ne se limiter qu'à la stabilité exponentielle en probabilité, le problème résidant dans la recherche de la fonction de Lyapunov,
  - étendre les résultats obtenus au filtrage des systèmes singuliers (ou algèbro-différentiel) stochastiques,
3. beaucoup de travaux ont été réalisés dans le diagnostic et la supervision des systèmes en utilisant les propriétés stochastiques du filtre de Kalman, les bruits considérés dans ces systèmes étant additifs. L'extension de ces travaux aux systèmes ayant bruits multiplicatifs est un problème ouvert.

# Annexe A

## Définitions relatives aux processus stochastiques

### A.1 Tribu ou $\sigma$ -algèbre

Soit  $\Omega$  un ensemble non vide et  $\mathcal{F}$  une classe de parties de  $\Omega$ . On dit que  $\mathcal{F}$  est une tribu sur  $\Omega$  si

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$ ,
2.  $\mathcal{F}$  est stable par passage au complémentaire : si  $A$  appartient à  $\mathcal{F}$  alors  $A^c$  appartient à  $\mathcal{F}$ ,
3.  $\mathcal{F}$  est stable par union dénombrable : si  $(A_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$  alors  $\cup_{\mathbb{N}} A_n$  appartient à  $\mathcal{F}$ .

Si  $\mathcal{F}$  est une tribu sur  $\Omega$ ,  $(\Omega, \mathcal{F})$  est appelé espace mesurable et les éléments de  $\mathcal{F}$  sont des événements.

### A.2 Espace probabilisé

Soit  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espace mesurable et  $\mathcal{P}$  une application de  $\mathcal{F}$  dans  $[0, 1]$ .  $\mathcal{P}$  est une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  si

1.  $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$ ,  $\mathcal{P}(\Omega) = 1$ ,
2. Pour toute suite  $(A_n)_{\mathbb{N}}$  d'événements deux à deux disjoints, c'est-à-dire  $A_n \cap A_m = \emptyset$  si  $n \neq m$ ,  $\mathcal{P}(\cup_n A_n) = \sum_n \mathcal{P}(A_n)$ .

Le triplet  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  s'appelle un espace probabilisé ou espace de probabilité.

### A.3 Espérance mathématique

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ . On note  $\mathbf{E}(X)$  l'espérance de  $X$  :

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\Omega} X(w) d\mathcal{P}(w) = \int_{\mathbb{R}} x dF(x), \quad (\text{A.1})$$

où  $F$  est la fonction de répartition de  $X$ .

Si  $\mathbf{E}(X) = 0$  on dit que  $X$  est centrée.



## A.4 Processus de Wiener ou mouvement brownien

Sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ , on définit un mouvement brownien (ou un processus de Wiener)  $B$  avec les trois propriétés suivantes :

- (1) Indépendance des accroissements. Pour tout  $n \geq 2$ , les accroissements aléatoires  $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}}, \dots, B_{t_1} - B_{t_0}$  sont indépendants pour tout  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ .
- (2) Stationnarité. Pour tout  $\delta > 0$ , la loi de la variable  $B_{t+\delta} - B_t$  ne dépend pas de l'instant  $t$ .
- (3) Continuité. Le processus  $B$  est continu.

Un processus  $B$  est un mouvement brownien de dimension  $d$  et de matrice de covariance  $Q$  si et seulement si :

- (i)  $B_0 = 0$ ,
- (ii)  $B$  est continu,
- (iii)  $B$  est gaussien,
- (iv) Pour tout  $t, s > 0$ , on a  $\mathbf{E}(B_t) = 0$  et  $\mathbf{E}(B_t B_s^T) = \min(t, s)Q$ .

Quand  $Q = I$ , le mouvement brownien  $B$  est appelé mouvement brownien standard.

## A.5 Martingale

**Définition A.5.1 (Une martingale).** [RW87b, Oks03, KS91] Un processus  $\mathcal{M}(t)$  pour  $t \in \mathbb{R}_+$  est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale si

- (i)  $\mathcal{M}$  est adapté,
- (ii)  $\mathbf{E}(\mathcal{M}(t)) < \infty$ ,
- (iii)  $\mathbf{E}(\mathcal{M}(t) | \mathcal{F}_s) = \mathcal{M}(s)$  p.s.  $\forall 0 \leq t < s$ ,

où  $\mathcal{F}$  est une tribu (voir A.1).

## A.6 Différence entre la forme d'Itô et la forme de Stratonovich

Notre objectif est de calculer l'intégrale stochastique suivante

$$\int_0^t f(s)dw(s), \quad (\text{A.2})$$

or, les trajectoires des processus de Wiener (ou mouvement brownien) ne sont pas à variation finie et donc l'intégrale précédente n'est pas une intégrale au sens de Riemann-Stieltjes.

L'intégrale stochastique (A.2) peut être approximée de la façon suivante

$$x(t) = \int_0^t f(s)dw(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^n f(t_j^*) (w(t_{j+1}) - w(t_j)) \right), \quad (\text{A.3})$$

où  $t_j^* \in [t_j, t_{j+1}]$ . Nous supposons ici que  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = t$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \max_{1 \leq j < n} |t_{j+1} - t_j| \right) = 0$ , et que  $w(t_{j+1}) - w(t_j)$  est centré et indépendant de  $f(t)$ .

La différence principale entre les formes d'Itô et de Stratonovich réside dans l'évaluation la relation (A.3)

- (1) dans le cas où on évalue l'intégrale au point  $t_j^* = t_j$ , on obtient l'intégrale d'Itô notée

$$\int_0^t f(s) dw(s), \quad (\text{A.4})$$

qui est une martingale,

- (2) dans le cas où on évalue l'intégrale au point  $t_j^* = \frac{t_j + t_{j+1}}{2}$ , on obtient l'intégrale de Stratonovich notée

$$\int_0^t f(s) \circ dw(s), \quad (\text{A.5})$$

qui n'est pas une martingale (pour plus de détails, voir [RW87a, Øks03, Dam04]).



# Annexe B

## Compléments mathématiques

### B.1 Lemme de majoration

**Lemme B.1.1 (Lemme de majoration).** *[WXD92, XC03] Soit les matrices réelles suivantes  $\mathcal{A}, \mathcal{D}, \mathcal{S}, \mathcal{W}$  et  $F$  de dimensions appropriées telles que  $\mathcal{W} > 0$  et  $F^T F < I$ . Alors nous avons les inégalités suivantes*

(1) *Pour tout scalaire  $\mu > 0$  et deux vecteurs  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$2x^T \mathcal{D} F \mathcal{S} y \leq \mu^{-1} x^T \mathcal{D} \mathcal{D}^T x + \mu y^T \mathcal{S}^T \mathcal{S} y. \quad (\text{B.1})$$

(2) *Pour tout scalaire  $\mu > 0$  tel que  $\mathcal{W} - \mu \mathcal{D} \mathcal{D}^T > 0$ ,*

$$(\mathcal{A} + \mathcal{D} F \mathcal{S})^T \mathcal{W}^{-1} (\mathcal{A} + \mathcal{D} F \mathcal{S}) \leq \mathcal{A}^T (\mathcal{W} - \mu \mathcal{D} \mathcal{D}^T)^{-1} \mathcal{A} + \mu^{-1} \mathcal{S}^T \mathcal{S}. \quad (\text{B.2})$$

### B.2 Lemme de Schur

**Lemme B.2.1 (Lemme de Schur).** *[BEFB94] Etant données trois matrices  $Q, R$  et  $S$  ( $Q = Q^T$  et  $S = S^T$ ), les deux propositions suivantes sont équivalentes*

(1)

$$\begin{bmatrix} Q & R \\ R^T & S \end{bmatrix} < 0. \quad (\text{B.3})$$

(2)

$$S < 0 \text{ et } Q - R S^{-1} R^T < 0. \quad (\text{B.4})$$

La matrice  $Q - R S^{-1} R^T$  est aussi appelée complément de Schur de  $S$ . Ce lemme reste vérifié lorsque l'on remplace “<” par “ $\leq$ ”, et “>” par “ $\geq$ ”.

### B.3 Lemme de projection

**Lemme B.3.1 (Lemme de projection).** *[GA94, IS94] Etant données trois matrices  $B, C$  et  $Q$  ( $Q = Q^T$ ), les deux propositions suivantes sont équivalentes*

(1) Il existe une matrice  $P$  telle que

$$BPC + (BPC)^T + Q < 0 \quad (\text{B.5})$$

(2)

$$B^{T^\perp} Q B^{T^\perp} < 0 \text{ (ou } \exists \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } \mu B B^T - Q > 0) \quad (\text{B.6})$$

et

$$C^{\perp T} Q C^\perp < 0 \text{ (ou } \exists \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } \mu C^T C - Q > 0). \quad (\text{B.7})$$

Donc, pour résoudre (B.5), il suffit de vérifier (B.6) et (B.7) et après on reconstruit  $P$  par (B.8).

Dans le cas où il existe une solution  $P$  à (1), alors nous pouvons paramétrer toutes les solutions  $P$  par [IS94]

$$P = B_R^\dagger K C_L^\dagger + Z - B_R^\dagger B_R Z C_L C_L^\dagger \quad (\text{B.8})$$

où

$$B = B_L B_R \text{ et } C = C_L C_R \quad (\text{B.9})$$

sont respectivement des factorisations de rang plein de  $B$  et  $C$ , les matrices  $Z$ ,  $R$  et  $L$  sont arbitraires et vérifient

$$R = R^T > 0 \text{ et } \|L\| < 1, \quad (\text{B.10})$$

et les matrices  $K$ ,  $S_1$  et  $S_2$  sont données par

$$K = -R^{-1} B_L^T S_1 C_R^T (C_R S_1 C_R^T)^{-1} + R^{-1} S_2^{1/2} L (C_R S_1 C_R^T)^{-1/2} \quad (\text{B.11a})$$

$$S_1 = (B_L R^{-1} B_L^\dagger - Q)^{-1} > 0 \quad (\text{B.11b})$$

$$S_2 = R - B_L^T \left( S_1 - S_1 C_R^T (C_R S_1 C_R^T)^{-1} C_R S_1 \right) B_L. \quad (\text{B.11c})$$

## Annexe C

# Résolution des équations de Sylvester

### C.1 Cas général

Considérons l'équation de Sylvester suivante

$$(TA_{ti} - M_iT - N_iC) \begin{bmatrix} L^\dagger & I_n - L^\dagger L \end{bmatrix} = 0, \quad \text{pour } i = 0, \dots, m, \quad (\text{C.1})$$

et la contrainte

$$RD_0 = 0, \quad (\text{C.2})$$

avec  $L \in \mathbb{R}^{r \times n}$  et  $\text{rang } L = r$ .

Après avoir développé les calculs (voir chapitre 3, paragraphes 3.2.2 et 3.3.2), on arrive à

$$\mathcal{K}\bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} 0 & L\bar{A} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

où

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} R & K_0 & \cdots & K_m \end{bmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_0 & \cdots & \bar{A}_m \end{bmatrix}, \quad (\text{C.5})$$

$$\bar{\Sigma} = \begin{bmatrix} D_0 & C\bar{A}_0 & C\bar{A}_1 & \cdots & C\bar{A}_m \\ 0 & \bar{C} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C} & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{C} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.6})$$

et, s'il existe une solution générale à l'équation (C.3), elle est alors donnée par

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 0 & L\bar{A} \end{bmatrix} \bar{\Sigma}^\dagger + Z(I_{(m+2)p} - \bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^\dagger), \quad (\text{C.7})$$

avec

$$Z = \begin{bmatrix} Z_R & Z_0 & \cdots & Z_m \end{bmatrix}, \quad (\text{C.8})$$

où  $Z$  est une matrice arbitraire de dimensions appropriées.

L'existence de cette solution est garantie par le lemme suivant.

**Lemme C.1.1 (Existence de la solution des équations de Sylvester).** [SZRD02]  
*L'équation de Sylvester (C.1) a une solution si et seulement si la condition de rang suivante*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} 0 & LA_{t0} & LA_{t1} & \dots & LA_{tm} \\ D_0 & CA_{t0} & CA_{t1} & \dots & CA_{tm} \\ 0 & C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & C & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C \\ 0 & L & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & L & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & L \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} D_0 & CA_{t0} & CA_{t1} & \dots & CA_{tm} \\ 0 & C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & C & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C \\ 0 & L & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & L & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & L \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

est vérifiée.

*Démonstration.* La relation (C.1) est vérifiée, si et seulement si il existe une solution  $\mathcal{K}$  à l'équation (C.3), c'est-à-dire si et seulement si [LT85]

$$\begin{bmatrix} 0 & L\bar{A} \end{bmatrix} (I_{(m+2)p} - \bar{\Sigma} \bar{\Sigma}^\dagger) = 0, \quad (\text{C.10})$$

ce qui est équivalent à

$$\text{rang} \bar{\Sigma} = \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & L\bar{A} \\ \bar{\Sigma} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.11})$$

En partant de chacun des membres de l'équation (C.9), nous pouvons écrire les relations suivantes

$$\text{rang} \begin{bmatrix} 0 & LA_{t0} & LA_{t1} & \dots & LA_{tm} \\ D_0 & CA_{t0} & CA_{t1} & \dots & CA_{tm} \\ C & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & C & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C \\ 0 & L & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & L & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & L \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & LA_{t0} & LA_{t1} & \dots & LA_{tm} \\ D_0 & CA_{t0} & CA_{t1} & \dots & CA_{tm} \\ C & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & C & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C \\ 0 & L & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & L & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & L \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^\dagger & 0 & \dots & 0 & I_n - L^\dagger L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L^\dagger & \ddots & \vdots & 0 & I_n - L^\dagger L & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & L^\dagger & 0 & \dots & 0 & I_n - L^\dagger L \end{bmatrix} \\
 & = \text{rang} \begin{bmatrix} 0 & LA_{t0}L^\dagger & LA_{t1}L^\dagger & \dots & LA_{tm}L^\dagger & L\bar{A}_{t0} & L\bar{A}_{t1} & \dots & L\bar{A}_{tm} \\ D_0 & CA^0L^\dagger & CA^1L^\dagger & \dots & CA^mL^\dagger & C\bar{A}^0 & C\bar{A}^1 & \dots & C\bar{A}^m \\ 0 & CL^\dagger & 0 & \dots & 0 & \bar{C} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & CL^\dagger & \ddots & \vdots & 0 & \bar{C} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & CL^\dagger & 0 & \dots & 0 & \bar{C} \\ 0 & I_r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I_r & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & = (m+1)r + \text{rang} \begin{bmatrix} L\bar{A} \\ \bar{\Sigma} \end{bmatrix} \tag{C.12}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \text{rang} \begin{bmatrix} D_0 & CA_{t0} & CA_{t1} & \dots & CA_{tm} \\ 0 & C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & C & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C \\ 0 & L & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & L & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & L \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} D_0 & CA_{t0} & CA_{t1} & \dots & CA_{tm} \\ 0 & C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & C & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & C \\ 0 & L & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & L & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & L \end{bmatrix} \\
 & \times \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^\dagger & 0 & \dots & 0 & I_n - L^\dagger L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L^\dagger & \ddots & \vdots & 0 & I_n - L^\dagger L & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & L^\dagger & 0 & \dots & 0 & I_n - L^\dagger L \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \text{rang} \begin{bmatrix} D_0 & CA_{t_0}L^\dagger & CA_{t_1}L^\dagger & \dots & CA_{t_m}L^\dagger & C\bar{A}_{t_0} & C\bar{A}_{t_1} & \dots & C\bar{A}_{t_m} \\ 0 & CL^\dagger & 0 & \dots & 0 & \bar{C} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & CL^\dagger & \ddots & \vdots & 0 & \bar{C} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & CL^\dagger & 0 & \dots & 0 & \bar{C} \\ 0 & I_r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_r & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I_r & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= (m+1)r + \text{rang } \bar{\Sigma}. \tag{C.13}
 \end{aligned}$$

Puis, en nous référant à la relation (C.11), la condition (C.9) est démontrée. •

## C.2 Cas particuliers

### C.2.1 Cas d'un système avec $m$ commandes et $D_0 = 0$

La condition (C.9) du lemme C.1.1 devient

$$\text{rang} \begin{bmatrix} LA_{t_0} & LA_{t_1} & \dots & LA_{t_m} \\ CA_{t_0} & CA_{t_1} & \dots & CA_{t_m} \\ C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C \\ L & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & L \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} CA_{t_0} & CA_{t_1} & \dots & CA_{t_m} \\ C & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & C \\ L & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & L \end{bmatrix}. \tag{C.14}$$

### C.2.2 Cas d'un système avec une commande

Dans ce cas, l'équation de Sylvester (C.1) suivante

$$(TA_{t_i} - M_iT - N_iC) \begin{bmatrix} L^\dagger & I_n - L^\dagger L \end{bmatrix} = 0, \quad \text{pour } i = 0, 1. \tag{C.15}$$

Lorsque  $D_0 \neq 0$ , la condition (C.9) du lemme C.1.1 devient

$$\text{rang} \begin{bmatrix} D_0 & LA_{t0} & LA_{t1} \\ 0 & CA_{t0} & CA_{t1} \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} D_0 & CA_{t0} & CA_{t1} \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}. \quad (\text{C.16})$$

Quand  $D_0 = 0$ , la condition (C.9) du lemme C.1.1 devient

$$\text{rang} \begin{bmatrix} LA_{t0} & LA_{t1} \\ CA_{t0} & CA_{t1} \\ C & 0 \\ 0 & C \\ L & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} CA_{t0} & CA_{t1} \\ C & 0 \\ 0 & C \\ L & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}. \quad (\text{C.17})$$

### C.2.3 Cas d'un système sans commande

Dans ce cas, l'équation de Sylvester (C.1) devient

$$(TA_{t0} - M_0T - N_0C) \begin{bmatrix} L^\dagger & I_n - L^\dagger L \end{bmatrix} = 0. \quad (\text{C.18})$$

Lorsque  $D_0 \neq 0$ , la condition (C.9) du lemme C.1.1 devient

$$\text{rang} \begin{bmatrix} 0 & LA_{t0} \\ D_0 & CA_{t0} \\ 0 & C \\ 0 & L \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} D_0 & CA_{t0} \\ 0 & C \\ 0 & L \end{bmatrix}. \quad (\text{C.19})$$

Quand  $D_0 = 0$ , la condition (C.9) du lemme C.1.1 devient

$$\text{rang} \begin{bmatrix} LA_{t0} \\ CA_{t0} \\ C \\ L \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} CA_{t0} \\ C \\ L \end{bmatrix}. \quad (\text{C.20})$$



## Annexe D

### Prise en compte de la contrainte $PQ = I$ (théorèmes 3.3.1 et 3.7.1)

Dans les théorèmes 3.3.1 et 3.7.1 du chapitre 3, on doit résoudre deux LMIs avec la contrainte  $PQ = I_{n+\ell}$  où  $P = P^T > 0$  et  $Q = Q^T > 0$  sont les inconnues pour ces LMIs ( $PQ = I_{n+r}$  dans le théorème 3.3.1 et  $PQ = I_{n+m}$  dans le théorème 3.7.1).

Cette situation se retrouve dans le problème de la synthèse d'un correcteur statique pour un système linéaire : une contrainte de rang ( $\text{rang}(PQ) = n + \ell$ ) est ajoutée, ce qui rend ce problème non convexe.

En effet, la LMI

$$\begin{bmatrix} P & I_{n+\ell} \\ I_{n+\ell} & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{D.1})$$

intervenant dans la synthèse d'un correcteur  $\mathcal{H}_\infty$  d'ordre plein (voir [GA94, MOS98, SGC97]) est alors remplacée par

$$\begin{bmatrix} P & I_{n+\ell} \\ I_{n+\ell} & Q \end{bmatrix} \geq 0, \quad \text{et} \quad \text{rang} \begin{bmatrix} P & I_{n+\ell} \\ I_{n+\ell} & Q \end{bmatrix} = \bar{n} < 2(n + \ell) \quad (\text{D.2})$$

où  $\bar{n}$  est l'ordre du correcteur à obtenir (voir [EG93]).

Les trois heuristiques suivantes :

- (i) réduction de potentiel [DD94b, DD94a],
- (ii) projections alternées [BG96, GW96],
- (iii) linéarisation avec complémentarité conique [EOA97].

permettent d'obtenir une dégénérescence de rang dans la LMI (D.2).

Ces heuristiques ne convergent pas toujours et ne donnent pas forcément le correcteur stabilisant d'ordre minimal. A la différence des deux dernières approches citées ci-dessus, la technique de la réduction de potentiel [DD94b, DD94a] conduit très vite à un problème de taille prohibitive. Les méthodes basées sur la linéarisation avec complémentarité conique [EOA97] et sur les projections alternées [BG96, GW96] sont les plus faciles à implémenter sur le plan informatique. La méthode basée sur la linéarisation avec complémentarité conique [EOA97] réalise à chaque étape une optimisation sur l'ensemble des paramètres des

LMIs, alors que la technique des projections alternées [BG96, GW96] n'optimise que sur les matrices  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$ . De ce fait, l'utilisation de la linéarisation avec complémentarité conique [EOA97] présente un avantage sur l'emploi des projections alternées [BG96, GW96]. Cependant, le principal problème est de fixer le seuil à partir duquel on considère qu'il y a une chute de rang, c'est-à-dire la valeur maximale des valeurs singulières que l'on néglige en les considérant comme nulles. Si ce seuil est fixé trop grand, il peut s'en suivre une dégradation des performances.

Le rang minimal dans (D.2) est  $\bar{n} = n + \ell$  et correspond à notre problème, c'est-à-dire à  $\mathbb{P}\mathbb{Q} = n + \ell$  et donc à  $\text{tr}(\mathbb{P}\mathbb{Q}) = n + \ell$ . Dans ce mémoire, l'algorithme proposé dans [EOA97] a donné des résultats satisfaisants.

Par exemple pour le théorème 3.3.1, cette méthode se met en œuvre de la manière suivante

On lance d'abord le solveur pour trouver une solution faisable  $\mathbf{x} = (\mathbb{P}, \mathbb{Q})$  aux LMIs (3.68), (3.69) et (D.2) pour le théorème 3.3.1. Elle constituera un point de départ pour l'algorithme de décroissance de rang. Le problème d'optimisation à résoudre est alors le suivant [EOA97]

$$\min \text{tr}(\mathbb{P}\mathbb{Q}) \quad (\text{D.3})$$

sous les contraintes LMIs (3.68), (3.69) et (D.2).

Mais bien que la trace soit une fonction linéaire, la relation (D.3) ne l'est pas car nous avons le produit  $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ . Ce problème est résolu en proposant une approximation linéaire de cette trace

$$\min \Psi(\mathbb{P}_k, \mathbb{Q}_k) \quad (\text{D.4})$$

avec

$$\Psi(\mathbb{P}_k, \mathbb{Q}_k) = \text{constante} + \text{tr}(\mathbb{P}_{k-1}\mathbb{Q}_k + \mathbb{Q}_{k-1}\mathbb{P}_k) \quad (\text{D.5})$$

où l'indice  $k$  représente le numéro de l'itération.

Cette linéarisation explique le nom de linéarisation avec complémentarité conique donné à cette méthode dans la mesure où le problème sera résolu dans l'ensemble (cône) constitué par les matrices semi-définies positives.

A l'itération  $k$ ,  $\mathbb{P}_{k-1}$  et  $\mathbb{Q}_{k-1}$  sont donc connues. L'algorithme est initialisé avec une solution  $\mathbf{x}_0 = (\mathbb{P}_0, \mathbb{Q}_0)$  correspondant aux LMIs (3.68), (3.69) et (D.2). L'algorithme à mettre en œuvre est le suivant.

#### Algorithme D.1.

- (i) Trouver un élément  $\mathbf{x}_0 = (\mathbb{P}_0, \mathbb{Q}_0)$  satisfaisant l'ensemble des LMIs. Poser  $k = 0$ .
- (ii) Poser  $k = k + 1$ ,  $V_k = \mathbb{Q}_{k-1}$  et  $W_k = \mathbb{P}_{k-1}$ . Chercher  $\mathbf{x}_k = (\mathbb{P}_k, \mathbb{Q}_k)$  en résolvant le problème d'optimisation suivant

$$\min \text{tr}(V_k\mathbb{P}_k + W_k\mathbb{Q}_k) \quad (\text{D.6})$$

avec  $\mathbf{x}_k = (\mathbb{P}_k, \mathbb{Q}_k)$  vérifiant les LMIs à résoudre.

- (iii) Si le critère sur (D.6) est atteint, on passe à l'étape (iv). Sinon, on relance l'étape (ii) jusqu'à ce que ce critère soit atteint ; s'il n'est pas atteignable, on quitte l'algorithme car il ne peut pas générer de chute de rang.

---

(iv) On pose  $k = 0$ ,  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_k$ . A cette étape, on a obtenu une chute de rang de 1 dans le produit  $\mathbb{P}\mathbb{Q}$ . On va à l'étape (ii) pour tester s'il est encore possible de diminuer le rang. Dans le cas contraire, on pose  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$  et on arrête l'algorithme.

La convergence de l'algorithme est démontrée car la suite  $\text{tr}(\mathbb{P}_{k-1}\mathbb{Q}_k + \mathbb{Q}_{k-1}\mathbb{P}_k)$  est décroissante et minorée par  $2(n + \ell)$ , où  $n + \ell$  est l'ordre du système (3.66) pour lequel nous cherchons un correcteur d'ordre fixe (voir [EOA97], théorème 2.1).

Il est à remarquer qu'il nous faut choisir un seuil à partir duquel on considérera que les valeurs singulières de la matrice sont nulles car, bien que l'algorithme force certaines d'entre elles à tendre vers zéro, elles ne seront jamais précisément nulles.



# Bibliographie

- [AM79] B.D.O. Anderson and J.B. Moore. *Optimal Filtering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1979.
- [AV73] B.D.O. Anderson and S. Vongpanitlerd. *Network Analysis and Synthesis : A Modern Theory Approach*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
- [BEFB94] S.P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Féron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequality in Systems and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [BG96] E.B. Beran and K.M. Grigoriadis. A combined alternating projections and semidefinite algorithm for low-order control design. In *Proc. Triennial IFAC World Congress*, San Francisco, USA, 1996.
- [BK94] M. Bettayeb and D. Kavranoglu. Reduced order  $\mathcal{H}_\infty$  filtering. In *Proc. IEEE American Contr. Conf.*, Baltimore, USA, 1994.
- [BM99] P. Bolzern and M. Maroni. New conditions for the convergence of  $\mathcal{H}_\infty$  filters and predictors. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 44 :1564–1568, 1999.
- [CG98] F. Carravetta and A. Germani. Optimal linear finite-dimensional filtering for vector bilinear stochastic differential systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, Tampa, USA, 1998.
- [CGS00] F. Carravetta, A. Germani, and M.K. Shuakayev. A new suboptimal approach to the filtering problem for bilinear stochastic differential systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, Sydney, Australia, 2000.
- [Che85] H.F. Chen. *Recursive Estimation and control for Stochastic Systems*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.
- [Cyg96] S. Cyganowski. *Solving stochastic differential equations with Maple*, volume 3 of *Maple Tech Newsletter*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [CZ04] B.S. Chen and W. Zhang. Stochastic  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control with state-dependent noise. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 49 :45–57, 2004.
- [Dam04] T. Damm. *Rational Matrix Equations in Stochastic Control*, volume 297 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [Dar00a] M. Darouach. Existence and design of functional observers for linear systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 45 :940–943, 2000.
- [Dar00b] M. Darouach. On the optimal unbiased functional filtering. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 45 :1374–1379, 2000.



- [DD94a] J. David and B. De Moor. Designing reduced order output-feedback controllers using a potential reduction method. In *Proc. IEEE American Contr. Conf.*, volume 1, pages 845–849, Baltimore, USA, 1994.
- [DD94b] J. David and B. De Moor. The opposite of analytic centering for solving minimum rank problems in control and identification. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, volume 1, San Antonio, USA, 1994.
- [DHS97] V. Dragan, A. Halanay, and A. Stoica. A small gain theorem for linear stochastic systems. *Syst. & Contr. Letters*, 30 :243–251, 1997.
- [DS98] V. Dragan and A. Stoica. A  $\gamma$ -attenuation problem for discrete-time time-varying systems with multiplicative noise. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, Tampa, USA, 1998.
- [DZ92] G. Da Prato and J. Zabczyk. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*. Cambridge University Press, Cambridge, USA, 1992.
- [DZ97] M. Darouach and M. Zasadzinski. Unbiased minimum variance estimation for systems with unknown exogenous inputs. *Automatica*, 33 :717–719, 1997.
- [DZS01] M. Darouach, M. Zasadzinski, and H. Souley Ali. Robust reduced order unbiased filtering via LMI. In *Proc. European Contr. Conf.*, Porto, Portugal, 2001.
- [EC01] L. El Ghaoui and G. Calafiore. Robust filtering for discrete-time systems with bounded noise and parametric uncertainties. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 46 :1084–1089, 2001.
- [EG93] L. El Ghaoui and P. Gahinet. Rank minimization under LMI constraints : a framework for output feedback problems. In *Proc. European Contr. Conf.*, Groningen, Netherlands, 1993.
- [EHP99] A. El Bouhtouri, D. Hinrichsen, and A.J. Pritchard.  $\mathcal{H}_\infty$ -type control for discrete-time stochastic systems. *Int. J. Robust & Nonlinear Contr.*, 9 :923–948, 1999.
- [El 95] L. El Ghaoui. State-feedback control of systems with multiplicative noise via linear matrix inequalities. *Syst. & Contr. Letters*, 24 :223–228, 1995.
- [EOA97] L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. Aït Rami. A cone complementary linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 42 :1171–1176, 1997.
- [FdX92] M. Fu, C.E. de Souza, and L. Xie.  $\mathcal{H}_\infty$  estimation for uncertain systems. *Int. J. Robust & Nonlinear Contr.*, 2 :87–105, 1992.
- [Flo93] P. Florchinger. A universal formula for the stabilization of control stochastic differential equations. *Stochastic Analysis and Applications*, 11 :155–162, 1993.
- [Flo95] P. Florchinger. Lyapunov-like techniques for stochastic stability. *SIAM J. Contr. Opt.*, 33 :1151–1169, 1995.
- [Flo97] P. Florchinger. Feedback stabilization of affine in the control stochastic differential systems by the control lyapunov function method. *SIAM J. Contr. Opt.*, 35 :500–511, 1997.

- 
- [Flo02] P. Florchinger. A stochastic Jurdjevic-Quinn theorem. *SIAM J. Contr. Opt.*, 41 :83–88, 2002.
- [Fra87] B.A. Francis. *A course in  $\mathcal{H}_\infty$  Control Theory*, volume 88 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1987.
- [Fri69] B. Friedland. Treatment of bias in recursive filtering. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 14 :359–367, 1969.
- [Fri75] A. Friedman. *Stochastic differential equations and applications*. Academic Press, New York, 1975.
- [FS01] E. Fridman and U. Shaked. A new  $\mathcal{H}_\infty$  design for linear time delay systems. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 49 :2839–2843, 2001.
- [Fu91] M. Fu. Interpolation approach to  $\mathcal{H}_\infty$  estimation and its connection to loop transfer recovery. *Syst. & Contr. Letters*, 17 :29–36, 1991.
- [GA94] P. Gahinet and P. Apkarian. A Linear Matrix Inequality approach to  $\mathcal{H}_\infty$  control. *Int. J. Robust & Nonlinear Contr.*, 4 :421–448, 1994.
- [GB99] J.C. Geromel and M.C. de Oliveira J. Bernussou. Robust filtering of discrete-time linear systems with parameter Lyapunov functions. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, Phoenix, USA, 1999.
- [Ger99] J.C. Geromel. Optimal linear filtering under parameter uncertainty. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 47 :168–175, 1999.
- [GL95] M. Green and D.N.J. Limebeer. *Robust Linear Control*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.
- [GLSY01] E. Gershon, D.J.N. Limebeer, U. Shaked, and I. Yaesh. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  filtering of stationary continuous-time linear systems with stochastic uncertainties. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 46 :1788–1793, 2001.
- [GMP02] A. Germani, C. Manes, and P. Palumbo. Linear filtering for bilinear stochastic differential systems with unknown inputs. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 47 :1726–1730, 2002.
- [GS72] I.I. Gikhman and A.V. Skorokhod. *Stochastic differential equations*. Springer Verlag, New York, 1972.
- [GSY01] E. Gershon, U. Shaked, and I. Yaesh.  $\mathcal{H}_\infty$  control and filtering of discrete-time stochastic systems with multiplicative noise. *Automatica*, 37 :409–417, 2001.
- [GW96] K.M. Grigoriadis and J.T. Watson. Suboptimal  $\mathcal{H}_\infty$  filtering via linear matrix inequalities. In *Proc. Triennial IFAC World Congress*, San Francisco, USA, 1996.
- [GW97] K.M. Grigoriadis and J.T. Watson. Reduced-order  $\mathcal{H}_\infty$  and  $\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_\infty$  filtering via linear matrix inequalities. *IEEE Trans. Aero. Elect. Syst.*, 33 :1326–1338, 1997.
- [Hah67] W. Hahn. *Stability of Motion*. Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [Has80] R.Z. Has'minskii. *Stochastic Stability of Differential Equations*. Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1980.

- [Hip89] P. Hippe. Design of reduced-order optimal estimators directly in the frequency domain. *Int. J. Contr.*, 50 :2599–2614, 1989.
- [HK01] B. Hassibi and T. Kailath.  $\mathcal{H}_\infty$  bounds for least-squares estimators. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 46 :309–314, 2001.
- [HP98] D. Hinrichsen and A.J. Pritchard. Stochastic  $\mathcal{H}_\infty$ . *SIAM J. Contr. Opt.*, 36 :1504–1538, 1998.
- [HRSZ05] S. Halabi, H. Rafaralahy, H. Souley Ali, and M. Zasadzinski.  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for a class of stochastic bilinear systems with multiplicative noise. In *Proc. Triennial IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, 2005.
- [HRZS06] S. Halabi, H. Rafaralahy, M. Zasadzinski, and H. Souley Ali.  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for a class of nonlinear stochastic systems. In *Proc. IEEE American Contr. Conf.*, Minneapolis, USA, 2006. soumis.
- [HSK96a] B. Hassibi, A.H. Sayed, and T. Kailath.  $\mathcal{H}_\infty$  optimality of the LMS algorithm. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 44 :267–280, 1996.
- [HSK96b] B. Hassibi, A.H. Sayed, and T. Kailath. Linear estimation in Krein spaces, Part I : theory. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 41 :18–33, 1996.
- [HSK96c] B. Hassibi, A.H. Sayed, and T. Kailath. Linear estimation in Krein spaces, Part II : applications. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 41 :34–49, 1996.
- [HSR<sup>+</sup>06] S. Halabi, H. Souley Ali, H. Rafaralahy, M. Zasadzinski, and M. Darouach. Reduced order filter for stochastic bilinear systems with multiplicative noise. In *Proc. IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, France, 2006. soumis.
- [HW90] P. Hippe and C. Wurmthaller. Optimal reduced-order estimators in the frequency domain : the discrete-time case. *Int. J. Contr.*, 52 :1051–1064, 1990.
- [IS94] T. Iwasaki and R.E. Skelton. All controllers for the general  $\mathcal{H}_\infty$  control problems : LMI existence conditions and state space formulas. *Automatica*, 30 :1307–1317, 1994.
- [Itô51] K. Itô. On stochastic differential equations. *American Mathematical Society Memoirs*, 4, 1951.
- [IW81] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusions*. North Holland, Amsterdam, 1981.
- [Jaz70] A.H. Jazwinski. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press, New York, 1970.
- [Kai68] T. Kailath. An innovations approach to least-squares estimation - Part I : Linear filtering in additive white noise. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 13 :646–655, 1968.
- [Kal60] R.E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *ASME Trans. - Part D, J. Basic Engineering*, 82 :34–45, 1960.
- [KB61] R.E. Kalman and R.S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *ASME Trans. - Part D, J. Basic Engineering*, 83 :95–108, 1961.

- 
- [KBS71] P.G. Kaminski, A.E. Bryson, and S.F. Schmidt. Discrete square root filtering, a survey of current techniques. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 16 :727–735, 1971.
  - [KK61] I. Kats and N.N. Krasovskii. On the stability of systems with random parameters. *J. Appl. Math. Mach.*, 24 :1225–1246, 1961.
  - [Koz69] F. Kozin. A survey of stability of stochastic systems. *Automatica*, 5 :95–112, 1969.
  - [Kry80] N.V. Krylov. *Controlled diffusion processes*, volume 14 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1980.
  - [Kry95] N.V. Krylov. *Introduction to the theory of diffusion processes*, volume 142 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, New York, 1995.
  - [KS91] I. Karatzas and S.E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer Verlag, New York, 2nd edition, 1991.
  - [KSH00] T. Kailath, A.H. Sayed, and B. Hassibi. *Linear Estimation*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2000.
  - [KSN92] H. Kim, C.S. Sims, and K.M. Nagpal. Reduced order filtering in an  $\mathcal{H}_\infty$  setting. In *Proc. IEEE American Contr. Conf.*, Chicago, USA, 1992.
  - [Kus67] H.J. Kushner. *Stochastic Stability and Control*, volume 33 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, New York, 1967.
  - [Lév48] P. Lévy. *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Gauthier-Villars, Paris, France, 1948.
  - [LF97] H. Li and M. Fu. A linear matrix inequality approach to robust  $\mathcal{H}_\infty$  filtering. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 45 :2338–2350, 1997.
  - [LGLS01] Z. Lin, X. Guan, Y. Liu, and P. Shi. Observer-based robust control for uncertain systems with time-varying delay. *IMA J. of Mathematical Control and Information*, 18 :439–450, 2001.
  - [LT85] P. Lancaster and M. Tismenetsky. *The Theory of Matrices*. Academic Press, Orlando, USA, 2nd edition, 1985.
  - [Lue66] D.G. Luenberger. Observers for multivariable systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 11 :190–197, 1966.
  - [Lue71] D.G. Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 16 :596–603, 1971.
  - [Lya92] A.M. Lyapunov. *The General Problem of Stability of Motion*. PhD thesis, Kharkov Mathematical Society, 1892. Publié dans "IJC, Lyapunov Centenary Issue, Vol. 55, Num. 3, March 1992".
  - [Mao94a] X. Mao. *Exponential Stability of Stochastic Differential Equations*. Marcel Dekker, New York, 1994.
  - [Mao94b] X. Mao. Stochastic stabilization and destabilization. *Syst. & Contr. Letters*, 23 :279–290, 1994.
  - [Mao96] X. Mao. Robustness of exponential stability of stochastic differential delay equations. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 41 :442–447, 1996.

- [Mao97] X. Mao. *Stochastic Differential Equations & Applications*. Horwood, London, 1997.
- [Meh71] R.K. Mehra. On-line identification of linear dynamic systems with applications to kalman filtering. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 16 :12–21, 1971.
- [Men71] J.M. Mendel. Computational requirements for a discrete Kalman filter. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 16 :748–758, 1971.
- [MKR98] X. Mao, N. Koroleva, and A. Rodkina. Robust stability of uncertain stochastic differential delay equations. *Syst. & Contr. Letters*, 35 :325–336, 1998.
- [Mor95] T. Morozan. Parametrized riccati equations associated to input-output operators for time-varying stochastic differential equations with state-dependent noise. In *Preprints*, volume 37, Institute of Mathematics of the Romanian Academy, Romania, 1995.
- [MOS98] I. Masubuchi, A. Ohara, and N. Suda. LMI-based controller synthesis : a unified formulation and solution. *Int. J. Robust & Nonlinear Contr.*, 8 :669–686, 1998.
- [NHS87] K.M. Nagpal, R.E. Helmick, and C.S. Sims. Reduced-order estimation, Part I : filtering. *Int. J. Contr.*, 45 :1867–1888, 1987.
- [NHS89] K.M. Nagpal, R.E. Helmick, and C.S. Sims. Innovation approach to reduced-order estimation of complementary states, Part I : filtering. *Int. J. Syst. Sci.*, 20 :1173–1194, 1989.
- [NK91] K.M. Nagpal and P.P. Khargonekar. Filtering and smoothing in an  $\mathcal{H}_\infty$  setting. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 36 :152–166, 1991.
- [Øks03] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations : an Introduction with Applications*. Springer-Verlag, New York, 6th edition, 2003.
- [O’R78] J. O’Reilly. Minimal-order observers for linear multivariable systems with unmeasurable disturbances. *Int. J. Contr.*, 28 :743–751, 1978.
- [PK97] P.G. Park and T. Kailath.  $\mathcal{H}_\infty$  filtering via convex optimization. *Int. J. Contr.*, 66 :15–22, 1997.
- [PM94] I.R. Petersen and D.C. McFarlane. Optimal guaranteed cost filtering for uncertain linear systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 39 :1971–1977, 1994.
- [PM96] I.R. Petersen and D.C. McFarlane. Optimal guaranteed cost filtering for uncertain discrete-time systems. *Int. J. Robust & Nonlinear Contr.*, 6 :267–280, 1996.
- [PP98] R.M. Pálhares and P.L.D. Peres. Optimal filtering schemes for linear discrete-time systems : a linear matrix inequality approach. *Int. J. Syst. Sci.*, 29 :587–593, 1998.
- [PP00] R.M. Pálhares and P.L.D. Peres. Robust filtering with guaranteed energy-to-peak performance : an LMI approach. *Automatica*, 36 :851–858, 2000.
- [PSS91] B. Priel, E. Soroka, and U. Shaked. The design of optimal reduced-order stochastic estimation for discrete-time linear systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 36 :1300–1307, 1991.

- 
- [RS85] P.A. Ruymgaart and T.T. Song. *Mathematics of Kalman-Bucy Filtering*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
  - [RS96] L. Ryashko and H. Schurtz. Mean square stability analysis of some linear stochastic systems. In *Preprints*, Wierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Berlin, Germany, 1996.
  - [RW87a] L.C.G. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, volume II. John Wiley & Sons, New York, 1987.
  - [RW87b] L.C.G. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, volume I, II. John Wiley & Sons, New York, 1987.
  - [Say01] A.H. Sayed. A framework for state-space estimation with uncertain models. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 46 :998–1013, 2001.
  - [Sch90] C.W. Scherer. *The Riccati Inequality and State-Space  $\mathcal{H}_\infty$ -Optimal Control*. PhD thesis, Dissertation zur Erlangung des naturwissenschaftlichen Doktorgrades der Bayerischen Julius Maximilians-Universität Würzburg, 1990.
  - [SGC97] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 42 :896–911, 1997.
  - [Sha90] U. Shaked.  $\mathcal{H}_\infty$ -minimum error state estimation of linear stationary processes. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 35 :554–558, 1990.
  - [SHR<sup>+</sup>04] H. Souley Ali, S. Halabi, H. Rafaralahy, M. Zasadzinski, and M. Darouach. Stochastic reduced-order unbiased filtering. In *Proc. Mathematical Theory of Networks and Systems Symposium*, Leuven, Belgium, 2004.
  - [SK94] A.H. Sayed and T. Kailath. A state-space approach to adaptive RLS filtering. *IEEE Signal Processing Magazine*, 11 :18–60, 1994.
  - [SMN90] M. Sampei, M. Mita, and M. Nakamichi. An algebraic approach to  $\mathcal{H}_\infty$  output feedback control problems. *Syst. & Contr. Letters*, 14 :13–24, 1990.
  - [SP02] K. Sun and A. Packard. Robust  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  filters for uncertain lft systems. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, Las Vegas, USA, 2002.
  - [SRZ<sup>+</sup>05] H. Souley Ali, H. Rafaralahy, M. Zasadzinski, S. Halabi, and M. Darouach. Observer design for a class of stochastic bilinear systems with multiplicative noise. In *Proc. IEEE American Contr. Conf.*, Portland, USA, 2005.
  - [ST92a] U. Shaked and Y. Theodor.  $\mathcal{H}_\infty$ -optimal estimation : a tutorial. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, pages 2278–2286, Haifa, Israel, 1992.
  - [ST92b] U. Shaked and Y. Theodor. A frequency domain approach to the problem of  $\mathcal{H}_\infty$ -minimum error state estimation and deconvolution. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 40 :3001–3011, 1992.
  - [Sto02] Adrian Stoica.  $\mathcal{H}_\infty$  filtering of signals subjected to multiplicative white noise. In *Proc. Triennial IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, 2002.
  - [Sus78] H. Sussmann. On the gap between deterministic and stochastic differential equations. *Annals of Probability*, 6 :19–41, 1978.

- [SZRD02] H. Souley Ali, M. Zasadzinski, H. Rafaralahy, and M. Darouach.  $\mathcal{H}_\infty$  functional unbiased filtering for uncertain bilinear systems. In *Proc. Triennial IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, 2002.
- [Thy97] U.H. Thygesen. A survey of lyapunov techniques for stochastic differential equations. Technical Report 18-1997, Technical University of Denmark, Lyngby, Denmark, 1997.
- [TS96] Y. Theodor and U. Shaked. Robust discrete-time minimum-variance filtering. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 44 :181–189, 1996.
- [Ugr98] V.A. Ugrinovskii. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  control in the presence of stochastic uncertainty. *Int. J. Contr.*, 71 :219–237, 1998.
- [UP99] V.A. Ugrinovskii and I.P. Petersen. Absolute stabilization and minimax optimal control of uncertain systems with stochastic uncertainty. *SIAM J. Contr. Opt.*, 37 :1089–1122, 1999.
- [Vid93] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2nd edition, 1993.
- [WB99] F. Wang and V. Balakrishnan. Robust estimators for systems with deterministic and stochastic uncertainties. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, Phoenix, USA, 1999.
- [WG98] J.T. Watson and K.M. Grigoriadis. Optimal unbiased filtering via linear matrix inequalities. *Syst. & Contr. Letters*, 35 :111–118, 1998.
- [WH90] C. Wurmthaller and P. Hippe. Comments on ‘design of reduced-order optimal estimators directly in the frequency domain’. *Int. J. Contr.*, 52 :1017–1018, 1990.
- [Wie49] N. Wiener. *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series*. MIT Press, Cambridge, USA, 1949.
- [Wil71] J.C. Willems. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equations. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 16 :621–634, 1971.
- [WJ76] A. S. Willsky and H.L. Jones. A generalized likelihood ratio approach to the detection and estimation of jumps in linear systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 21 :108–112, 1976.
- [WXD92] Y. Wang, L. Xie, and C.E. De Souza. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems. *Syst. & Contr. Letters*, 19 :139–149, 1992.
- [XC02] S. Xu and T. Chen. Reduced-order  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for stochastic systems. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 50 :2998–3007, 2002.
- [XC03] S. Xu and T. Chen. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for uncertain impulsive stochastic systems under sampled measurements. *Automatica*, 39 :500–516, 2003.
- [XdF91] L. Xie, C.E. de Souza, and M. Fu.  $\mathcal{H}_\infty$  estimation for discrete-time linear uncertain systems. *Int. J. Robust & Nonlinear Contr.*, 1 :111–123, 1991.
- [XdS94] L. Xie, C.E. de Souza, and Y.C. Soh. Robust filtering for uncertain systems with unstable modes. In *Proc. IEEE Conf. Decision & Contr.*, Lake Buena Vista, USA, 1994.

- 
- [XFL98] L. Xie, M. Fu, and H. Li. Passivity analysis and passification for uncertain processing systems. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 46 :2394–2403, 1998.
  - [XS94] L. Xie and Y.C. Soh. Robust Kalman filtering for uncertain systems. *Syst. & Contr. Letters*, 22 :123–129, 1994.
  - [XSd94] L. Xie, Y.C. Soh, and C.E. de Souza. Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 39 :1310–1314, 1994.
  - [YH97] X. Yu and C.S. Hsu. Reduced order  $\mathcal{H}_\infty$  filter design for discrete time-variant systems. *Int. J. Robust & Nonlinear Contr.*, 7 :797–809, 1997.
  - [Yon02] J. Yong. A leader-follower stochastic linear quadratic differential game. *SIAM J. Contr. Opt.*, 41 :1015–1041, 2002.
  - [YS91a] I. Yaesh and U. Shaked. Nondefinite least squares and its relation to  $\mathcal{H}_\infty$ -minimum error state estimation. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 36 :1469–1472, 1991.
  - [YS91b] I. Yaesh and U. Shaked. A transfer function approach to the problems of discrete-time systems :  $\mathcal{H}_\infty$ -optimal linear control and filtering. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 36 :1264–1271, 1991.
  - [YS92a] I. Yaesh and U. Shaked. Game theory approach to optimal linear state estimation and its relation to the minimum  $\mathcal{H}_\infty$ -norm estimation. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 37 :828–831, 1992.
  - [YS92b] I. Yaesh and U. Shaked. Game theory approach to state estimation of linear discrete-time processes and its relation to  $\mathcal{H}_\infty$ -optimal estimation. *Int. J. Contr.*, 55 :1443–1452, 1992.
  - [YZ99] J. Yong and X.Y. Zhou. *Stochastic Controls : Hamiltonian Systems and HJB Equations*. Springer Verlag, New York, 1999.
  - [ZC05] W. Zhang and B.S. Chen. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for nonlinear stochastic systems. *IEEE Trans. Sign. Proc.*, 53 :589–598, 2005.
  - [ZCT05] W. Zhang, B.S. Chen, and C.S. Tseng. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for nonlinear stochastic systems. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 53 :589–598, 2005.
  - [ZHR<sup>+</sup>05] M. Zasadzinski, S. Halabi, H. Rafaralahy, H. Souley Ali, and M. Darouach. Stochastic robust reduced order  $\mathcal{H}_\infty$  observer-based control. In *Proc. Triennial IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, 2005.
  - [ZMRS03] M. Zasadzinski, E. Magarotto, H. Rafaralahy, and H. Souley Ali. Residual generator design for singular bilinear systems subjected to unmeasurable disturbances : an LMI approach. *Automatica*, 39 :703–713, 2003.





## Résumé

Ce mémoire aborde la synthèse de filtres  $\mathcal{H}_\infty$  d'ordre plein et d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques à temps continu avec bruits multiplicatifs. Les bruits considérés dans l'équation d'état et dans l'équation de mesures sont des processus de Wiener.

Les systèmes stochastiques étudiés dans ce mémoire sont écrits sous la forme d'une équation différentielle stochastique au sens d'Itô dans lesquels la dérive et la diffusion sont linéaires ou bilinéaires. Les systèmes avec plusieurs bruits multiplicatifs et les systèmes dont les mesures sont affectées par des bruits multiplicatifs sont également traités dans ce mémoire. La conception d'une commande  $\mathcal{H}_\infty$  basée sur un observateur d'ordre réduit pour les systèmes stochastiques incertains est étudiée.

Le critère de performance considéré est le critère  $\mathcal{H}_\infty$  du signal de perturbation vers le signal d'erreur d'estimation. La stabilité retenue pour ces systèmes stochastiques dans ce travail est la stabilité exponentielle en moyenne quadratique.

La méthode utilisée pour trouver les matrices des filtres est basée sur l'utilisation de la théorie de Lyapunov pour les équations différentielles stochastiques, la formule d'Itô et sur la résolution des Inégalités Matricielles Affines couplées à des contraintes bilinéaires qui assurent la stabilité et la performance.

**Mots-clés:** Systèmes stochastiques, Systèmes stochastiques incertains, Filtrage  $\mathcal{H}_\infty$ , Filtrage  $\mathcal{H}_\infty$  d'ordre réduit, Robustesse, Fonction de Lyapunov, Stabilité exponentielle en moyenne quadratique, Formule d'Itô, Inégalités Matricielles Affines, Processus de Wiener.

# Abstract

This memory approaches the synthesis of full and reduced-order  $\mathcal{H}_\infty$  filters for continuous time stochastic systems with multiplicative noises. The noises considered in the state equation and in the measurement one are Wiener processes.

The stochastic systems studied in this memory are written in the form of an Itô differential equation in which the drift and the diffusion are linear or bilinear. The systems with several multiplicative noises and the systems whose measurements are affected by multiplicative noises are treated in this memory. Finally, the design of reduced-order  $\mathcal{H}_\infty$  observer-based control for the uncertain stochastic systems is studied.

The performance index considered is the  $\mathcal{H}_\infty$  criterion from the disturbance signal towards the estimation error signal. The stability retained for these stochastic systems in this work is the exponential mean-square stability.

The method used to find the matrices of the filters is based on the use of the theory of Lyapunov for the stochastic differential equations, the Itô formula and on the resolution of Linear Matrix Inequalities coupled to bilinear constraints which ensure the stability and the performance.

**Keywords:** Stochastic systems, Uncertain stochastic systems,  $\mathcal{H}_\infty$  filtering, reduced-order  $\mathcal{H}_\infty$  filtering, Robustness, Lyapunov function, Exponential mean-square stability, Itô formula, Linear Matrix Inequalities, Winer process.