



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

Processus associés à l'équation de diffusion rapide



Etude asymptotique du temps de ruine et de l'overshoot.

THESE

présentée et soutenue publiquement le 11 juin 2003
pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré – Nancy I
Spécialité Mathématiques Appliquées

par

Agnès VOLPI

Composition du jury :

Rapporteurs : Jean BERTOIN, Professeur à l'Université P. et M. Curie, Paris VI.
Hanspeter SCHMIDLI, Professeur à l'Université de Copenhague.
Directeur de Thèse : Pierre VALLOIS, Professeur à l'Université H. Poincaré, Nancy I.
Examineurs : Monique JEANBLANC, Professeur à l'Université d'Evry,
Denis TALAY, Dir. de Recherche à l'INRIA de Sophia-Antipolis,
Bernard ROYNETTE, Professeur à l'Univ. H. Poincaré, Nancy I.

Institut Élie Cartan Nancy

Remerciements

Je tiens en tout premier lieu à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Pierre Vallois, mon Directeur de Recherche, pour avoir dirigé mes travaux et pour ses précieux conseils. J'ai particulièrement apprécié sa disponibilité de tous les instants, sa gentillesse, sa grande compétence et ses qualités de pédagogue. Il a toujours su m'encourager spécialement dans les moments les plus difficiles.

Je remercie aussi tout particulièrement Monsieur Bernard Roynette pour les conseils qu'il m'a prodigués, pour la qualité de ses remarques mais aussi pour son accueil, son dévouement et sa chaleur humaine. Sans ses aides concrètes, ce travail n'aurait pu être ce qu'il est.

Monsieur Pierre Vallois et Monsieur Bernard Roynette, par leur présence active et bienveillante et par leurs connaissances impressionnantes, ont su cimenter l'équipe de probabilité de l'IECN et c'est la raison pour laquelle j'ai eu grand plaisir à y travailler.

Je remercie chaleureusement Monsieur Hanspeter Schmidli pour l'honneur qu'il me fait de rapporter sur ma thèse et pour les relations très agréables, tant scientifiques qu'humaines, que j'ai partagées avec lui.

Je remercie profondément Monsieur Jean Bertoin, qui malgré ses occupations extrêmement lourdes a eu la gentillesse d'accepter de rapporter sur ma thèse. C'est un grand honneur pour moi. Je voudrais aussi souligner la simplicité avec laquelle il m'a écouté et il a répondu à mes questions.

J'adresse mes sincères et vifs remerciements à Madame Monique Jeanblanc et Monsieur Denis Talay qui ont accepté de faire partie du jury de ma thèse.

Une partie de ce travail a été réalisée avec Christophe Ackermann et une partie avec Ivan Nourdin, toujours de façon efficace et dans la bonne humeur. Je leur suis reconnaissante de cette sympathique collaboration et les en remercie vivement.

C'est pour moi un plaisir d'associer à cette thèse tous les membres de l'équipe de probabilité. L'ambiance très agréable qu'ils font régner et leur amitié m'ont été très précieuses. Un grand merci à eux tous.

Ma reconnaissance va aussi vers mes collègues et amis de l'ESSTIN qui m'ont encouragée durant ce travail.

J'exprime ma gratitude envers Monsieur le Directeur de l'ESSTIN qui m'a permis d'obtenir une décharge partielle de service pendant deux ans.

Enfin je remercie Madame Florence L'Hôte pour m'avoir aidé si gentiment et efficacement pour le tirage de tous les documents.

Merci à tous ceux qui m'ont permis de faire un petit bout de chemin dans l'aventure mathématique.

Introduction

Dans cette thèse, nous nous intéressons à deux problèmes différents, tous les deux étant de nature probabiliste. Ces deux problèmes étant indépendants, nous les traitons dans deux parties séparées.

Première partie Cette première partie a été faite en collaboration avec Christophe Ackermann. Elle est inspirée d'un travail voisin, effectué par S. Benachour, P. Chassaing, B. Roynette et P. Vallois (cf. [BCRV96]), qui étudient l'aspect probabiliste de l'équation des milieux poreux, i.e. :

$$(S_{m,\mu}) \left\{ \begin{array}{l} X_t = X_0 + \int_0^t u^m(s, X_s) dB_s \\ X_t \text{ admet pour densité } u(t, \cdot) , t > 0 \\ X_0 \text{ a pour loi } \mu \end{array} \right. , \quad (0.0.1)$$

où $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien linéaire, X_0 est une variable aléatoire indépendante de $(B_t, t \geq 0)$ et m est un réel strictement positif.

Nous étudions ici un processus $(X_t, t \geq 0)$, non linéaire, associé à l'équation de diffusion rapide, c'est à dire satisfaisant au système $S_{m,\mu}$ où m est un réel de $] -\frac{1}{2}, 0[$.

★ Dans un premier temps, nous supposons que μ est la masse de Dirac en 0.

1. Nous montrons alors que (S_{m,δ_0}) admet une unique solution faible $((^0X_t, t \geq 0), (^0u(t, \cdot), t \geq 0))$.
2. Puis nous prouvons que :

$$(i) \text{ Si } \beta = \frac{1}{2m+2},$$

$$\text{p.s.} \quad \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{{}^0X_t}{t^\beta} = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}^0X_t}{t^\beta} = +\infty \quad (0.0.2)$$

$$\text{p.s.} \quad \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{{}^0X_t}{t^\beta} = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}^0X_t}{t^\beta} = -\infty. \quad (0.0.3)$$

(ii) Pour tout $\lambda > 0$, le processus $({}^0X_t^\lambda, t \geq 0)$ défini par :

$${}^0X_t^\lambda := \lambda {}^0X_{\frac{t}{\lambda^{2m+2}}}, \quad (0.0.4)$$

a même loi que le processus $({}^0X_t^\lambda, t \geq 0)$.

(iii) Pour tout $\nu < \frac{1}{2}$, les trajectoires de $({}^0X_t^\lambda, t \geq 0)$ sont presque sûrement höldériennes d'indice ν .

3. Ensuite nous calculons explicitement, à l'aide de fonctions hypergéométriques bien choisies, les transformées de Laplace des temps d'arrêt suivants :

$$T_{y_0} = \inf \{t > s; {}^0X_t^{s,x} = y_0 t^\beta\}, \quad y_0 \neq 0 \quad \text{et} \quad |x| < |y_0| s^\beta$$

$$T_{z_0}^* = \inf \{t > s; |{}^0X_t^{s,x}| = z_0 t^\beta\}, \quad z_0 > 0 \quad \text{et} \quad |x| < z_0 s^\beta$$

où $({}^0X_t^{s,x}, t \geq s)$ désigne le processus $({}^0X_t, t \geq 0)$ conditionné à valoir x au temps s .

★ Nous supposons, dans un deuxième temps, que μ a une densité, i.e. $\mu \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, et qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 strictement positives telles que pour tout réel x :

$$\mu(x) \leq \frac{1}{C_1 + C_2 |x|^{\frac{1}{|m|}}}. \quad (0.0.5)$$

Nous montrons alors, sous cette hypothèse, que l'équation $S_{m,\mu}$ a encore une solution faible $({}^\mu X_t, t \geq 0)$.

Puis nous obtenons un théorème de renormalisation et nous montrons que le processus $(\lambda {}^\mu X_{\frac{t}{\lambda^{2m+2}}}, t \geq 0)$ converge en loi, lorsque λ tend vers 0, vers le processus $({}^0X_t, t \geq 0)$. Le processus $({}^0X_t, t \geq 0)$ sert donc de "processus de référence" pour l'équation $(S_{m,\mu})$.

Deuxième partie Il est classique de modéliser la fortune d'une compagnie d'assurance à l'instant t ($t \geq 0$) par un processus $(Z_t^x, t \geq 0)$ défini par $Z_t^x = x - X_t$, avec

$$X_t = B_t - ct + J_t, \quad (0.0.6)$$

où $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien linéaire, $(J_t, t \geq 0)$ un processus de Lévy, de sauts purs, de mesure de Lévy ν , indépendant de $(B_t, t \geq 0)$. Nous supposons $B_0 = J_0 = 0$; x désigne une constante réelle positive et c un réel.

Soit T_x , le premier temps de ruine, i.e. :

$$T_x := \inf \{t \geq 0; X_t > x\}. \quad (0.0.7)$$

Nous supposerons toujours dans la suite que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y| \nu(dy) < +\infty. \quad (0.0.8)$$

En particulier $\mathbb{E}(|J_1|) < +\infty$.

1. De nombreux auteurs se sont intéressés à la probabilité de ruine (cf. le paragraphe 4.6) et plus particulièrement à la décroissance de $x \rightarrow \mathbb{P}(T_x < +\infty)$, lorsque x tend vers $+\infty$. Dans notre contexte, $\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t = -\infty$ p.s. si et seulement si $c > \mathbb{E}(J_1)$, condition appelée habituellement, hypothèse de profit net, par les financiers.

Au lieu de nous restreindre à la probabilité de ruine, i.e. $\mathbb{P}(T_x < +\infty)$, nous considérons plus généralement la fonction F définie par :

$$F(\theta, \mu, x) := \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}} \right), \quad \theta \geq 0, \mu \geq 0, x \geq 0, \quad (0.0.9)$$

où $K_x := X_{T_x} - x$ est l'overshoot ou dépassement du niveau x .

Il est clair que si $\theta = \mu = 0$, $F(0, 0, x)$ coïncide avec la probabilité de ruine.

En supposant l'existence de certains moments exponentiels pour ν , nous prouvons (cf. Théorème 7.3, chapitre 7), que $F(\theta, \mu, x)$ admet, quand x tend vers $+\infty$, un développement asymptotique de la forme :

$$F(\theta, \mu, x) = C_0(\theta, \mu) e^{-\gamma_0(\theta)x} + \sum_{i=1}^p (C_i(\theta, \mu) e^{-\gamma_i(\theta)x} + \overline{C}_i(\theta, \mu) e^{-\overline{\gamma}_i(\theta)x}) + O(e^{-Bx}) \quad (0.0.10)$$

où les $C_i(\theta, \mu)$ sont des complexes, $B \in \mathbb{R}_+$, $\gamma_0(\theta) \in \mathbb{R}_+^*$, et les $\gamma_i(\theta)$, $i \in \{1, \dots, n\}$ sont les racines de l'équation $\psi(x) = \theta$ où ψ est l'exposant caractéristique du processus $(X_t, t \geq 0)$. Les $\gamma_i(\theta)$ sont des nombres complexes conjugués deux à deux et vérifient :

$$0 \leq \gamma_0(\theta) < \operatorname{Re} \gamma_1(\theta) \leq \dots \leq \operatorname{Re} \gamma_p(\theta) < B.$$

Lorsque ν ne charge que $\mathbb{R}_+$, les constantes $C_i(\theta, \mu)$ sont explicites. En particulier si $\theta = \mu = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_x < +\infty) = & C_0 e^{-\gamma_0(0)x} + \sum_{i=1}^p (C_i e^{-\gamma_i(0)x} + \overline{C_i} e^{-\overline{\gamma_i}(0)x}) \\ & + O(e^{-Bx}) \end{aligned} \quad (0.0.11)$$

avec

$$0 \leq \gamma_0(0) < \operatorname{Re} \gamma_1(0) \leq \dots \leq \operatorname{Re} \gamma_p(0) < B.$$

2. Nous montrons, dans le chapitre 8, un résultat de décroissance de $x \rightarrow \mathbb{P}(T_x < +\infty)$ de nature différente. Sous l'hypothèse de profit net ($\mathbb{E}(J_1) < c$), et lorsque la restriction de ν à $\mathbb{R}_+$ possède des moments d'ordre $n \geq 3$, nous obtenons une majoration du type :

$$\mathbb{P}(T_x < +\infty) \leq \frac{C}{1 + x^{n-2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \quad (0.0.12)$$

3. Nous utilisons le développement (0.0.10) pour prouver un théorème de convergence au second ordre. Plus précisément :

1^{er} cas : Sous la condition de profit net, $\mathbb{E}(X_1) = -c + \mathbb{E}(J_1) < 0$, conditionnellement à $\{T_x < +\infty\}$, le couple (T_x, K_x) , convenablement renormalisé, converge en loi vers une v.a. bidimensionnelle (ξ_1, ξ_2) . ξ_1 et ξ_2 sont indépendantes et ξ_1 suit une loi gaussienne (cf. Théorème 10.1). Lorsque ν ne charge que $\mathbb{R}_+$, la loi de ξ_2 est explicite. Ainsi les variables aléatoires T_x et K_x sont “asymptotiquement indépendantes”.

2^{ème} cas : Sous la condition $\mathbb{E}(X_1) = -c + \mathbb{E}(J_1) > 0$, le couple (T_x, K_x) , convenablement renormalisé, converge en loi vers une v.a. bidimensionnelle (ξ_1, ξ_2) . ξ_1 et ξ_2 sont indépendantes et ξ_1 suit une loi gaussienne (cf. Théorème 10.3). Lorsque ν ne charge que $\mathbb{R}_+$, la loi de ξ_2 est explicite. Là encore, les variables aléatoires T_x et K_x sont “asymptotiquement indépendantes”.

3^{ème} cas : Sous la condition $\mathbb{E}(X_1) = -c + \mathbb{E}(J_1) = 0$,

Nous avons un résultat de convergence analogue au 2^{ème} cas, mais cette fois, ξ_1 n'est plus gaussienne (cf. Théorème 10.5).

4. Cette partie a été réalisée en commun avec Ivan Nourdin. Nous nous intéressons à la formule de Zolotareff pour le processus $(X_t, t \geq 0)$ défini en (0.0.6), i.e. :

$$t \mathbb{P}(T_x \in dt) dx = x \mathbb{P}(X_t \in dx) dt \quad \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+. \quad (0.0.13)$$

Nous montrons l'équivalence des trois propriétés suivantes :

- (i) $(X_t, t \geq 0)$ vérifie la relation de Zolotareff (0.0.13).
- (ii) ν ne charge que $\mathbb{R}_-$.
- (iii) $\forall \theta > 0, \exists C_\theta > 0$ tel que $\forall x \geq 0, \mathbb{E}(e^{-\theta T_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}}) = e^{-C_\theta x}$.

Notons que l'assertion (i) $\Rightarrow$ (ii) est classique (cf. Bertoin [Ber96]) et que Borokov a établi un résultat analogue pour les marches aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Table des matières

Remerciements	1
Introduction	3
I Processus associés à l'équation de diffusion rapide	15
1 Introduction	17
1.1 Motivation	17
1.2 Le processus de diffusion rapide	19
1.2.1 Définition du processus	19
1.2.2 Lien avec l'équation de diffusion rapide	20
1.2.3 Propriétés des solutions de l'équation de diffusion rapide	21
1.2.4 L'aspect non linéaire	22
1.3 Plan de l'étude et résultats	22
2 Étude de (S_{m,δ_0})	25
2.1 Existence et unicité de la solution de (S_{m,δ_0})	25
2.2 Etude trajectorielle du processus 0X	35
2.2.1 Comportement asymptotique des trajectoires de 0X . . .	35
2.2.2 Propriété d'échelle du processus 0X	36
2.2.3 Propriétés du processus $Y_t := Argsh(bZ_t)$	37
2.2.4 Corollaire pour le processus Z	42
2.2.5 Caractère höldérien des trajectoires de 0X	43
2.3 Etude de temps de passage	47
2.3.1 Définition de temps de passage	47
2.3.2 Calcul explicite de la transformée de Laplace des lois des temps de passage	48

3	Résolution de $(S_{m,\mu})$	53
3.1	Existence et unicité de la solution de $(S_{m,\mu})$	53
3.2	Théorème de renormalisation	62
II	Etude asymptotique du temps de ruine et de l'overshoot	77
4	Introduction	79
4.1	Le temps de ruine et l'overshoot	79
4.2	Sous-exponentialité de $F(\theta, 0, \cdot)$	81
4.2.1	Utilisation de la sous additivité de $-\ln \circ F(\theta, 0, \cdot)$	81
4.2.2	Utilisation d'un théorème de renouvellement	83
4.3	Comportement asymptotique en $+\infty$ de $F(\theta, \mu, \cdot)$	83
4.3.1	Equation fonctionnelle satisfaite par $F(\theta, \mu, \cdot)$	83
4.3.2	Développement asymptotique de $F(\theta, \mu, x)$, quand x tend vers $+\infty$	83
4.3.3	Comportement asymptotique, quand x tend vers $+\infty$, de la probabilité de ruine $\mathbb{P}(T_x < +\infty)$	84
4.4	Résultats pour le couple (T_x, K_x)	85
4.5	Formule de Zolotareff	86
4.6	Commentaires bibliographiques	86
4.6.1	Le modèle classique	87
4.6.2	Le modèle perturbé	88
4.6.3	Approximation numérique	91
4.6.4	Le triplet (T_x, K_x, L_x)	92
4.6.5	Formule de Zolotarev	92
4.6.6	Problématiques voisines	94
4.7	Notations	95
4.8	Plan de la partie II	97
5	Processus de Poisson composé	99
5.1	Le contexte	99
5.2	Equation fonctionnelle satisfaite par $F(\theta, \mu, \cdot)$	101
5.3	Etude de l'opérateur Λ_θ	107
6	Transformée de Laplace de $F(\theta, \mu, \cdot)$	117
6.1	Expression de la Transformée de Laplace $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$	117
6.2	Etude de cas particuliers	129
6.2.1	Si ν ne charge que $\mathbb{R}_+$	130

6.2.2	Si ν ne charge que $\mathbb{R}_-$	134
6.2.3	Transformée de Laplace de la probabilité de ruine (cas où $\theta = \mu = 0$)	137
6.2.4	Equation de Dufresne Gerber	139
7	Comportement en $+\infty$ de $F(\theta, \mu, \cdot)$	141
7.1	Développement asymptotique en $+\infty$ de $F(\theta, \mu, \cdot)$	141
7.2	Calcul “explicite” des coefficients $C_i(\theta, \mu)$	158
7.2.1	Dans le cas de pôle simple	159
7.2.2	Positivité de $C_0(\theta, \mu)$	159
7.2.3	Equation satisfaite par $C_0(0, \mu)$ pour $\mu \geq 0$	160
7.2.4	Lorsque ν ne charge que $\mathbb{R}_+$	162
8	Utilisation d’un théorème de renouvellement	165
9	Majoration polynomiale de $\mathbb{P}(T_x < +\infty)$	173
10	Loi limite du couple (T_x, K_x)	183
10.1	Théorème central limite avec profit net	183
10.2	Théorème central limite avec $c - \mathbb{E}(J_1) < 0$	187
10.3	Théorème central limite avec $c = \mathbb{E}(J_1)$	191
11	Formule de Zolotareff	197
	Annexes	209
A	Propriétés de la fonction φ	209
A.1	Etude de φ sur $\mathbb{R}$	210
A.2	Etude de φ_θ sur $\mathbb{R}$	212
A.3	Zéros du polynôme $C_\theta(q)$	213
A.4	Etude de φ_θ sur $\mathbb{C}$	215
A.5	Prolongement méromorphe de φ_θ	217
B	Limite de la suite $(\Lambda_\theta^n F(\theta, \mu, \cdot))$	221
C	Exemple où ν est de densité gamma	227
C.1	Introduction	227
C.1.1	But de cette annexe	227
C.1.2	Notations et remarques	230
C.2	Etude de φ_θ	231

C.2.1	Etude de φ_θ sur $\mathbb{R}$	231
C.2.2	Etude de φ_θ sur $] -b, +\infty[$	232
C.2.3	Etude de φ_θ sur $] -\infty, -b[$	233
C.2.4	Etude de φ_θ sur $\mathbb{C} - \{-b\}$	234
C.3	Expression de $F(\theta, \mu, x)$	235
C.4	Calcul de la loi de l'overshoot	238
C.5	Exemples	243
C.5.1	1 ^{er} exemple : $a = 1$	243
C.5.2	2 ^{ème} exemple : $a = 2$	246
D	Fonctions hypergéométriques	249

Table des figures

5.1	Position de T_x par rapport à τ_1	100
7.1	Chemin $\Gamma_{-B, q_1, R}$	152
11.1	Trajectoire $(X_t(\omega), t \geq 0)$	205
11.2	Trajectoire translatée de r_0	205
A.1	Situation de profit net, $c > \mathbb{E}(J_1)$	211
A.2	Situation où $c < \mathbb{E}(J_1)$	211
A.3	Situation où $c = \mathbb{E}(J_1)$	211
A.4	φ_θ a un ou pas de zéro	213
A.5	φ_θ a deux zéros	213
A.6	Comparaison des zéros de $C_\theta(q)$ et des zéros de φ_θ	215
A.7	Zéros complexes de φ_θ ($\theta > 0$) dans la bande $-B < \operatorname{Re} q \leq \beta_\theta$	220
C.1	Graphe de φ_θ sur $] -b, +\infty[$	232
C.2	Graphe de φ_θ sur $] -\infty, -b[$	233

Première partie

Processus associés à l'équation de diffusion rapide

Chapitre 1

Introduction

1.1 Motivation

Depuis Mc Kean et Vlasov (cf. [Szn89], [MK66] et [MK67]), nous savons qu'il existe un lien étroit entre les systèmes de particules en interaction et les processus "non linéaires", via la propagation du chaos. Plus précisément, soit N particules dont les positions à l'instant t ($t \geq 0$) sont modélisées par le processus N -dimensionnel $(X_t^{i,N}, t \geq 0, i \in \{1, \dots, N\})$ solution de l'E.D.S., N -dimensionnelle, suivante :

$$X_t^{i,N} = X_0^i + \int_0^t \frac{1}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sigma(X_s^{i,N} - X_s^{j,N}) dB_s^i + \int_0^t \frac{1}{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N b(X_s^{i,N} - X_s^{j,N}) ds, \quad (1.1.1)$$

où b et σ sont des fonctions régulières de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $(B_t^i, t \geq 0, i \in \{1, \dots, N\})$ est un mouvement brownien N -dimensionnel.

Nous savons (cf. les articles de S. Méléard et Roelly-Copoletta et de A.S. Sznitman [MRC87] et [Szn89]) que, sous des conditions convenables, le processus $(X_t^{1,N}, t \geq 0)$ converge quand N tend vers $+\infty$, vers $(X_t, t \geq 0)$, le processus non linéaire, qui satisfait à une équation de la forme :

$$X_t = X_0^1 + \int_0^t \tilde{\sigma}(\mu_s, X_s) dB_s^1 + \int_0^t \tilde{b}(\mu_s, X_s) ds, \quad (1.1.2)$$

où μ_t est la loi de X_t et $\tilde{b}$ et $\tilde{\sigma}$ sont définies par :

$$\tilde{b}(\mu, y) = b * \mu(y) = \int_{\mathbb{R}} b(y - x) \mu(dx) \quad (1.1.3)$$

$$\tilde{\sigma}(\mu, y) = \sigma * \mu(y) = \int_{\mathbb{R}} \sigma(y - x) \mu(dx). \quad (1.1.4)$$

Lorsque nous ne faisons porter l'interaction des particules que sur le terme brownien (c'est à dire $b = 0$ dans l'équation (1.1.1)) et que nous faisons tendre σ vers la masse de Dirac en 0 (deux particules n'interagissent que lorsqu'elles se touchent), nous obtenons, (cf. [BCRV96]), comme processus “non linéaire”, le processus $(X_t, t \geq 0)$, de densités $(u(t, \cdot), t > 0)$ tel que le couple $((X_t, t \geq 0), (u(t, \cdot), t > 0))$ soit solution du système suivant :

$$(S_{1,\mu}) \begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t u(s, X_s) dB_s \\ X_t \text{ admet pour densité } u(t, \cdot), t > 0 \\ X_0 \text{ a pour loi } \mu \end{cases} \quad (1.1.5)$$

Plus généralement, réécrivons (1.1.1) en faisant agir m particules sur une particule (cf. [BCRV96]), soit :

$$X_t^{i,N} = X_0^i + \int_0^t \frac{1}{N^m} \sum_{\substack{j_k \neq j_i \\ j_1, \dots, j_m=1}}^N \sigma(X_s^{i,N} - X_s^{j_1,N}, \dots, X_s^{i,N} - X_s^{j_m,N}) dB_s^i. \quad (1.1.6)$$

avec $\sigma : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$, d'intégrale 1 et ayant un petit support contenant l'origine. En faisant tendre ce support vers 0 (c'est à dire en faisant tendre σ vers la mesure de Dirac δ_0 dans $\mathbb{R}^m$), nous obtenons le système suivant :

$$(S_{m,\mu}) \begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t u^m(s, X_s) dB_s \\ X_t \text{ admet pour densité } u(t, \cdot), t > 0 \\ X_0 \text{ a pour loi } \mu \end{cases} \quad (1.1.7)$$

Bien que pour les considérations intuitives qui précèdent, m a été choisi entier positif, le système $(S_{m,\mu})$ a encore un sens pour tout m réel positif. En appliquant la formule d'Itô à la première ligne de (1.1.7), il est classique de montrer que la densité de probabilité $u(t, \cdot)$ satisfait à l'équation des milieux poreux (équation qui modélise l'écoulement d'un fluide à travers un milieu poreux et

homogène), soit, pour $m > 0$:

$$(E_{m,\mu}) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (u^{2m+1})}{\partial x^2} \\ u(0, \cdot) = \mu \end{cases}, \quad (1.1.8)$$

Une littérature abondante existe sur cette équation voir en particulier [Bar52], [OKYL58], [LSU68], [Aro69], [Kne77], [AB79], [BC81], [Ben83], [BM84] et [Kal87]. Nous savons alors que :

1. Quand $m > 0$,
 - (i) La vitesse de diffusion est finie ou, plus précisément, si μ est à support compact, il en est de même de $u(t, \cdot)$ pour tout $t > 0$.
 - (ii) Le paramètre m , lorsqu'il est entier, représente la modalité coopérative d'interaction des particules (pour que des particules agissent sur une autre, elles doivent se grouper par paquets de m particules).
2. Quand $m = 0$, auquel cas l'équation $(E_{m,\mu})$ devient l'équation de la chaleur, soit :

$$(E_{0,\mu}) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, \cdot) = \mu \end{cases}, \quad (1.1.9)$$

et le processus $(X_t, t \geq 0)$, solution du système $(S_{0,\mu})$ est le mouvement brownien.

Ainsi, dans ce cas :

- (i) La vitesse de propagation est infinie, c'est à dire que pour toute mesure μ à support compact et tout $t > 0$, le support de $u(t, \cdot)$ est $\mathbb{R}$ tout entier.
- (ii) Il n'y a pas d'interaction de particules entre elles, le processus est "linéaire" : La première ligne du système $(S_{0,\mu})$ est toute résolue car $m = 0$.

Une question vient donc naturellement : Que se passe-t-il quand m est négatif ?

1.2 Le processus de diffusion rapide

1.2.1 Définition du processus

Bien qu'apparemment, dans le cas $m < 0$, il n'y ait pas d'interprétation en terme d'interaction de particules, nous nous intéressons au processus non

linéaire $(X_t, t \geq 0)$, appelé processus de diffusion rapide, de famille de densités $(u(t, \cdot), t > 0)$, tel que le couple $((X_t, t \geq 0), (u(t, \cdot), t > 0))$ soit solution du système :

$$(S_{m,\mu}) \begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t u^m(s, X_s) dB_s \\ X_t \text{ admet pour densité } u(t, \cdot), t > 0 \\ X_0 \text{ a pour loi } \mu \end{cases} \quad (1.2.10)$$

où $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien linéaire, u est une fonction de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, μ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ et m est un paramètre réel négatif.

L'une des difficultés, à priori, de cette étude provient du fait que $u(t, \cdot)$ étant une densité de probabilité et $m < 0$, la fonction $u^m(t, \cdot)$ possède nécessairement une singularité à l'infini.

1.2.2 Lien avec l'équation de diffusion rapide

Supposons qu'il existe une solution $((X_t, t \geq 0), (u(t, \cdot), t > 0))$ au système $(S_{m,\mu})$. Une application de la formule d'Itô, (cf. la première étape de la démonstration du Théorème 2.1), montre qu'alors la densité $u(t, \cdot)$ satisfait à l'équation suivante :

$$(E_{m,\mu}) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (u^{2m+1})}{\partial x^2} \\ u(0, \cdot) = \mu \end{cases} \quad (1.2.11)$$

Les dérivées apparaissant dans $(E_{m,\mu})$ sont à prendre au sens des distributions. Le système $(S_{m,\mu})$ est donc étroitement lié à l'équation $(E_{m,\mu})$.

Classiquement cette dernière équation possède des solutions pour $m > -\frac{1}{2}$ (condition qui assure le caractère parabolique de l'équation $(E_{m,\mu})$) et il y a vitesse infinie de propagation : si μ est positive, à support compact, non identiquement nulle, le support de $u(t, \cdot)$ est $\mathbb{R}$ tout entier, pour tout $t > 0$.

Ainsi, dans la première partie de ce travail, nous étudierons l'équation $(S_{m,\mu})$ avec $m \in \left] -\frac{1}{2}, 0 \right[$.

L'équation $(E_{m,\mu})$ est appelée équation de diffusion rapide pour la raison suivante. Lorsque nous comparons la solution, pour $\mu = \delta_0$, de l'équation de la chaleur d'une part et celle de (E_{m,δ_0}) d'autre part, nous constatons :

- Pour l'équation de la chaleur, la densité $u(t, \cdot)$ se comporte, à t fixé, comme $C_1 e^{-C_2 x^2}$ et décroît donc exponentiellement vite quand $|x|$ tend vers $+\infty$.
- Pour l'équation de diffusion rapide, la densité $u(t, \cdot)$ se comporte, à t fixé, quand $|x|$ tend vers $+\infty$, comme l'inverse d'une puissance positive de x , $\frac{C}{x^{\frac{1}{|m|}}}$ (cf. (1.3.18)).

Ainsi l'équation de diffusion rapide modélise des phénomènes physiques de diffusion (cf [Kal87]) dont la vitesse de propagation dépasse celle de la chaleur.

1.2.3 Propriétés des solutions de l'équation de diffusion rapide

Oublions maintenant le système $(S_{m,\mu})$ et considérons l'équation de diffusion rapide. Supposons que la fonction $u(t, \cdot)$, de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, satisfasse à cette équation, i.e. :

$$(E_{m,\mu}) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 (u^{2m+1})}{\partial x^2} \\ u(0, \cdot) = \mu \end{cases}, \quad (1.2.12)$$

où μ est une mesure de probabilité et m est un paramètre réel appartenant à l'intervalle $\left] -\frac{1}{2}; 0 \right[$.

D'après le principe du maximum, toute solution u de $(E_{m,\mu})$ est positive. Si u est régulière et s'annule à l'infini, en intégrant $(E_{m,\mu})$ par rapport à x , nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 (u^{2m+1})}{\partial x^2} (t, x) dx = 0. \quad (1.2.13)$$

Nous en déduisons que $\int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}} \mu(dx) = 1$. Ainsi, pour tout $t \geq 0$, $u(t, \cdot)$ est une mesure de probabilité.

Il est alors naturel de chercher un processus $(X_t; t \geq 0)$ tel que pour tout $t \geq 0$, X_t ait pour densité $u(t, \cdot)$. Au vu des alinéa 1.2.1 et 1.2.2, nous sommes

conduits à nous intéresser au système :

$$(S_{m,\mu}) \begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t u^m(s, X_s) dB_s \\ X_t \text{ admet pour densité } u(t, \cdot), t > 0 \\ X_0 \text{ a pour loi } \mu \end{cases} \quad (1.2.14)$$

où $(B_t, t \geq 0)$ désigne un mouvement brownien réel indépendant de X_0 . Les inconnues de ce système sont le processus $(X_t, t \geq 0)$ et la famille de densité $(u(t, \cdot); t > 0)$. C'est une autre façon d'arriver au système $(S_{m,\mu})$.

1.2.4 L'aspect non linéaire

Une des difficultés que nous rencontrons dans l'étude de l'équation $(S_{m,\mu})$, avec $m \in \left] -\frac{1}{2}, 0 \right[$, tient à la non linéarité de cette équation. En effet, dans le cas de l'équation de la chaleur, la solution fondamentale, i.e. correspondant à $\mu = \delta_0$, du système (S_{0,δ_0}) est le couple $((B_t, t \geq 0), (u(t, \cdot), t > 0))$ avec :

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}. \quad (1.2.15)$$

Cette solution permet de construire, grâce à l'aspect linéaire de l'équation de la chaleur, la solution $((X_t^{(\mu)}, t \geq 0), (u_\mu(t, \cdot), t > 0))$ du système $(S_{0,\mu})$, pour toute mesure de probabilité μ , de la façon suivante :

$$X_t^{(\mu)} = X_0 + B_t, \quad (1.2.16)$$

$$u_\mu(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} \mu(dy), \quad (1.2.17)$$

où X_0 est une variable aléatoire indépendante de $(B_t, t \geq 0)$ et de loi μ .

Dans le cadre qui est ici le notre, i.e. la diffusion rapide, l'aspect non linéaire interdit une relation simple entre la solution du système (S_{m,δ_0}) et celle du système $(S_{m,\mu})$. C'est ce qui nous conduit à étudier dans un premier temps, le cas où $\mu = \delta_0$, puis ensuite une situation plus générale.

1.3 Plan de l'étude et résultats

Ce travail est consacré à l'étude du système $(S_{m,\mu})$, où $m \in \left] -\frac{1}{2}, 0 \right[$.

1- Dans le chapitre 2, nous nous plaçons dans le cas particulier où μ est la mesure de Dirac δ_0 .

- (i) Dans le paragraphe 2.1, nous montrons l'existence et l'unicité d'une solution faible de (S_{m,δ_0}) (cf. Théorème 2.1). La fonction 0u est la densité de Barenblatt–Pattle (cf. [Bar52] et [Pat59]), fonction auto-similaire donnée par la formule :

$${}^0u(t, x) = \frac{1}{t^\beta} \left(a_m^2 + q_m \frac{x^2}{t^{2\beta}} \right)^{\frac{1}{2m}}, \quad (1.3.18)$$

où $\beta = \frac{1}{2m+2}$ ($\beta > 0$) et a_m et q_m sont des constantes positives que nous précisons.

$({}^0X_t, t \geq 0)$ est solution faible de l'E.D.S. première ligne de (S_{m,δ_0}) où nous avons remplacé u par la fonction définie par (1.3.18).

- (ii) Une fois l'existence et l'unicité du couple $(({}^0X_t, t \geq 0), ({}^0u(t, \cdot), t > 0))$ solution de (S_{m,δ_0}) établies, nous étudions, dans le paragraphe 2.2, les propriétés trajectorielles de $({}^0X_t, t \geq 0)$.

★ Le processus $({}^0X_t, t \geq 0)$ est récurrent (cf. alinéa 2.2.1) et vérifie :

$$\text{p.s.} \quad \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{{}^0X_t}{t^\beta} = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}^0X_t}{t^\beta} = +\infty \quad (1.3.19)$$

$$\text{p.s.} \quad \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{{}^0X_t}{t^\beta} = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}^0X_t}{t^\beta} = -\infty. \quad (1.3.20)$$

avec $\beta = \frac{1}{2m+2}$.

★ Il satisfait à la propriété d'échelle (cf. alinéa 2.2.2) suivante :

Pour tout $\lambda > 0$, le processus $({}^0X_t, t \geq 0)$ a même loi que le processus $({}^0X_t^\lambda, t \geq 0)$, défini par :

$${}^0X_t^\lambda = \lambda {}^0X_{\frac{t}{\lambda^{2m+2}}}. \quad (1.3.21)$$

soit

$$({}^0X_t^\lambda, t \geq 0) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} ({}^0X_t, t \geq 0). \quad (1.3.22)$$

★ Le processus $({}^0X_t, t \geq 0)$ est à trajectoires hölderiennes, d'indice strictement inférieur à $\frac{1}{2}$ (cf. alinéa 2.2.5, Théorème 2.9). Pour montrer le Théorème 2.9, nous utilisons des résultats auxiliaires qui font l'objet des alinéas 2.2.3 et 2.2.4.

(iii) Dans le paragraphe 2.3, nous étudions certains temps de passage.

★ Les limites (1.3.19) et (1.3.20) ainsi que la propriété d'échelle (1.3.22) nous invitent à nous intéresser aux familles de temps d'arrêt définies (cf. alinéa 2.3.1) par :

pour $y_0 \neq 0$ et $|x| < |y_0|s^\beta$,

$$T_{y_0} = \inf \{t > s; {}^0X_t^{s,x} = y_0 t^\beta\}$$

et pour $z_0 > 0$ et $|x| < z_0 s^\beta$,

$$T_{z_0}^* = \inf \{t > s; |{}^0X_t^{s,x}| = z_0 t^\beta\}$$

où $({}^0X_t^{s,x}, t \geq s)$ désigne le processus $({}^0X_t, t \geq 0)$ conditionné à valoir x au temps s .

★ Nous montrons à l'alinéa 2.3.2, que les transformées de Laplace de $T_{z_0}^*$ et de T_{y_0} s'expriment au moyen de fonctions hypergéométriques.

Nous avons rassemblé, dans l'Annexe D, les propriétés des fonctions hypergéométriques que nous utilisons.

2- Dans le chapitre 3, nous résolvons l'équation $(S_{m,\mu})$ sous des conditions très générales portant sur μ . Plus précisément :

(i) Au paragraphe 3.1, nous supposons que μ satisfait aux hypothèses suivantes :

- μ admet une densité (notée encore μ),
- Il existe $\kappa > 0$ et $\theta > 0$ tels que pour tout réel x , nous avons :

$$\mu(x) \leq \frac{1}{\kappa + \theta|x|^{\frac{1}{|m|}}} . \quad (1.3.23)$$

Nous démontrons alors l'existence et l'unicité d'une solution faible au système $(S_{m,\mu})$.

(ii) Au paragraphe 3.2, nous démontrons, sous l'hypothèse (1.3.23), la convergence du processus solution de $(S_{m,\mu})$, convenablement renormalisé, vers le processus, solution du système (S_{m,δ_0}) , étudiée au chapitre 2. Ainsi la solution de (S_{m,δ_0}) , bien qu'il s'agisse ici d'équation non linéaire, a tout de même un caractère de référence pour l'équation générale.

Chapitre 2

Étude de (S_{m,δ_0})

2.1 Existence et unicité de la solution de (S_{m,δ_0})

Nous considérons l'équation :

$$(S_{m,\delta_0}) \left\{ \begin{array}{l} {}^0X_t = \int_0^t {}^0u^m(s, {}^0X_s) dB_s \\ {}^0X_t \text{ admet pour densité } {}^0u(t, \cdot) \\ {}^0X_0 = 0 \end{array} \right. \quad (t > 0) \quad . \quad (2.1.1)$$

Nous introduisons tout d'abord quelques notations.

Pour tout réel $m \in]-\frac{1}{2}, 0[$, nous posons :

$$\beta := \frac{1}{2m+2} \quad (2.1.2)$$

$$q_m := \frac{|m|}{(2m+1)(m+1)} . \quad (2.1.3)$$

Remarquons que $\beta > 0$.

Nous notons alors :

$$a_m := \left[q_m^{-1/2} B \left(\frac{1+m}{2|m|}; \frac{1}{2} \right) \right]^{\frac{|m|}{m+1}} , \quad (2.1.4)$$

où B est la première fonction d'Euler. Enfin, nous définissons γ_m et la fonction φ par :

$$\gamma_m = a_m q_m^{-1/2} \quad (2.1.5)$$

$$\varphi(x) = \left[a_m^2 \left(1 + \frac{x^2}{\gamma_m^2} \right) \right]^{\frac{1}{2m}} \quad \forall x \in \mathbb{R} . \quad (2.1.6)$$

Théorème 2.1

- i) Pour tout réel m dans l'intervalle $]-\frac{1}{2}, 0[$, l'équation (S_{m,δ_0}) admet une solution faible unique $({}^0X, {}^0u)$.
- ii) La densité ${}^0u(t, \cdot)$ de la variable aléatoire 0X_t est celle de Barenblatt-Pattle :

$${}^0u(t, x) = \frac{1}{t^\beta} \left(a_m^2 + q_m \frac{x^2}{t^{2\beta}} \right)^{\frac{1}{2m}}. \quad (2.1.7)$$

La loi de $\frac{{}^0X_t}{t^\beta}$ ne dépend pas de t et vaut $\varphi(x)dx$.

Démonstration du Théorème 2.1

Cette démonstration se fait en plusieurs étapes :

- 1- Nous montrons que si (S_{m,δ_0}) admet une solution $({}^0X, {}^0u)$, alors 0u est solution de (E_{m,δ_0}) (cf. (1.2.11) avec $\mu = \delta_0$).
- 2- Nous calculons explicitement la solution de (E_{m,δ_0}) sous forme d'une fonction autosimilaire.
- 3- Nous remplaçons alors dans la première ligne de (S_{m,δ_0}) , 0u par la fonction trouvée au point précédent.
- 4- Pour prouver l'existence d'une solution faible à l'équation (S_{m,δ_0}) , obtenue alors, nous étudions une équation stochastique auxiliaire, stationnaire et homogène (cf.(2.1.34)), dont la solution est notée $(Z_t, t \in \mathbb{R})$.
- 5- Nous prouvons que la solution cherchée est le processus $(({}^0X_t, t \geq 0))$ défini par :

$$\begin{cases} {}^0X_t := t^\beta Z_{\ln t} & \text{pour } t > 0 \\ {}^0X_0 = 0. \end{cases} \quad (2.1.8)$$

- 6- En particulier, nous montrons que $\lim_{t \rightarrow 0} ({}^0X_t) = 0$.

Première étape

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact. En appliquant la formule d'Itô, nous obtenons :

$$f({}^0X_t) = f({}^0X_0) + \int_0^t f'({}^0X_s) {}^0u^m(s, {}^0X_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''({}^0X_s) {}^0u^{2m}(s, {}^0X_s) ds. \quad (2.1.9)$$

En prenant l'espérance, nous avons :

$$\mathbb{E}(f({}^0X_t)) = \mathbb{E}(f({}^0X_0)) + \frac{1}{2} \int_0^t \mathbb{E}(f''({}^0X_s) {}^0u^{2m}(s, {}^0X_s)) ds, \quad (2.1.10)$$

c'est-à-dire :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) {}^0u(t, x) dx = f(0) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f''(x) {}^0u^{2m}(s, x) {}^0u(s, x) dx ds. \quad (2.1.11)$$

En dérivant cette expression par rapport à t , nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}} f(x) {}^0u(t, x) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f''(x) {}^0u^{2m+1}(t, x) dx, \quad (2.1.12)$$

et en intégrant le deuxième membre deux fois par parties,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\partial {}^0u}{\partial t}(t, x) dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\partial^2 ({}^0u^{2m+1})}{\partial x^2}(t, x) dx. \quad (2.1.13)$$

Cette égalité étant vérifiée pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact, nous en déduisons que 0u vérifie :

$$(E_{m,\delta_0}) \begin{cases} \frac{\partial {}^0u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 ({}^0u^{2m+1})}{\partial x^2} \\ {}^0u(0, \cdot) = \delta_0 \end{cases}. \quad (2.1.14)$$

D'après [BF83], (E_{m,δ_0}) admet une solution positive unique, la fonction dite de Barenblatt-Pattle.

Deuxième étape

Nous allons écrire ici l'expression explicite de cette solution sous la forme d'une fonction autosimilaire. Pour cela, nous posons :

$${}^0u(t, x) = \frac{1}{t^\rho} \varphi\left(\frac{x}{t^\rho}\right), \quad (2.1.15)$$

où φ est l'inconnue, positive et d'intégrale 1. Nous avons donc :

$$\frac{\partial^0 u}{\partial t}(t, x) = -\frac{\rho}{t^{1+\rho}}\varphi\left(\frac{x}{t^\rho}\right) - \frac{\rho x}{t^{1+2\rho}}\varphi'\left(\frac{x}{t^\rho}\right) \quad (2.1.16)$$

et

$$\frac{\partial^2({}^0u^{2m+1})}{\partial x^2}(t, x) = \frac{1}{t^{\rho(2m+3)}}(\varphi^{2m+1})''\left(\frac{x}{t^\rho}\right). \quad (2.1.17)$$

Puisque 0u vérifie (E_{m,δ_0}) , nous obtenons :

$$-\frac{\rho}{t^{1+\rho}}\varphi\left(\frac{x}{t^\rho}\right) - \frac{\rho x}{t^{1+2\rho}}\varphi'\left(\frac{x}{t^\rho}\right) = \frac{1}{2t^{\rho(2m+3)}}(\varphi^{2m+1})''\left(\frac{x}{t^\rho}\right). \quad (2.1.18)$$

Nous pouvons maintenant choisir ρ tel que $1 + \rho = \rho(2m + 3)$, c'est à dire :
 $\rho = \beta = \frac{1}{2m + 2}$.

En posant $y = \frac{x}{t^\rho}$ et en simplifiant par $\frac{1}{t^\rho}$ dans (2.1.18), il résulte que :

$$-\beta\varphi(y) - \beta y\varphi'(y) = \frac{1}{2}(\varphi^{2m+1})''(y) \quad (2.1.19)$$

et donc

$$-2\beta\frac{d}{dy}(y\varphi(y)) = (\varphi^{2m+1})''(y). \quad (2.1.20)$$

Nous intégrons alors (2.1.20) avec une constante d'intégration nulle (car nous cherchons φ d'intégrale 1) et nous obtenons :

$$\begin{aligned} -2\beta y\varphi(y) &= (\varphi^{2m+1})'(y) \\ &= (2m + 1)\varphi'(y)\varphi^{2m}(y). \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Pour tout nombre réel y tel que $\varphi(y) \neq 0$, nous pouvons donc écrire :

$$-\frac{2\beta y}{2m + 1} = \varphi'(y)\varphi^{2m-1}(y) = \frac{1}{2m}(\varphi^{2m})'(y) \quad (2.1.22)$$

et, puisque $-\frac{2m\beta}{2m + 1} > 0$ et φ positive :

$$\varphi^{2m}(y) = a^2 - \frac{2m\beta}{2m + 1}y^2 \quad (2.1.23)$$

ou encore

$$\varphi(y) = \left(a^2 + \frac{|m|}{(2m + 1)(m + 1)}y^2\right)^{\frac{1}{2m}}. \quad (2.1.24)$$

Il reste à choisir a positif tel que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(y) dy = 1$.

En notant $q_m = \frac{|m|}{(2m+1)(m+1)}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) dy &= a^{\frac{1}{m}} \int_{\mathbb{R}} \left(1 + q_m \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2m}} dy \\ &= a^{\frac{1}{m}+1} q_m^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (1 + z^2)^{\frac{1}{2m}} dz \end{aligned}$$

où nous avons effectué le changement de variable $z = \sqrt{q_m} \frac{y}{a}$.

Or $\frac{1}{2m} < -1$ et, pour $r > 1$, nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dz}{(1+z^2)^r} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^r} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^r \sqrt{(x-1)}}, \quad (2.1.25)$$

où nous avons posé : $x = 1 + z^2$.

En notant $t = \frac{1}{x}$, nous obtenons :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^r \sqrt{(x-1)}} = \int_0^1 t^{(r-\frac{1}{2})-1} (1-t)^{\frac{1}{2}-1} dt = B\left(r - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right). \quad (2.1.26)$$

Par conséquent, $\int_{\mathbb{R}} (1+z^2)^{\frac{1}{2m}} dz = B\left(\frac{1+m}{2|m|}; \frac{1}{2}\right)$.

Nous posons alors :

$$a_m := a = \left[q_m^{-1/2} B\left(\frac{1+m}{2|m|}; \frac{1}{2}\right) \right]^{\frac{|m|}{m+1}}, \quad (2.1.27)$$

de sorte que :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(y) dy = a^{\frac{1}{m}+1} q_m^{-1/2} B\left(\frac{1+m}{2|m|}; \frac{1}{2}\right) = 1. \quad (2.1.28)$$

Alors

$$\varphi(y) = (a_m^2 + q_m y^2)^{\frac{1}{2m}} \quad (2.1.29)$$

ou encore en posant $\gamma_m = a_m q_m^{-1/2}$,

$$\varphi(y) = \left[a_m^2 \left(1 + \frac{y^2}{\gamma_m^2} \right) \right]^{\frac{1}{2m}}. \quad (2.1.30)$$

d'où (2.1.7).

Troisième étape

Nous avons vu que si $({}^0X, {}^0u)$ est solution de (S_{m,δ_0}) alors 0u est la densité de Barenblatt–Pattle. On peut donc remplacer 0u par sa forme explicite dans l'E.D.S. de la première ligne de (S_{m,δ_0}) et ainsi chercher une solution faible de :

$${}^0X_t = \int_0^t s^{-\beta m} \varphi^m \left(\frac{{}^0X_s}{s^\beta} \right) dB_s. \quad (2.1.31)$$

Nous remarquons que la loi de $\frac{{}^0X_t}{t^\beta}$ ne dépend pas de t et que cette variable aléatoire admet pour densité la fonction φ . Nous commençons donc par chercher une E.D.S. homogène stationnaire dont la solution admet φ pour densité. Nous considérons pour cela l'E.D.S. générale suivante :

$$V_t = V_0 + \int_0^t \sigma(V_s) dB_s - \int_0^t b(V_s) ds. \quad (2.1.32)$$

Si α est la densité stationnaire de V , l'équation de Fokker–Planck s'écrit :

$$\frac{1}{2}(\alpha \sigma^2)'' + (b\alpha)' = 0. \quad (2.1.33)$$

D'après (2.1.20), en posant $b(x) = \beta x$ et $\sigma = \varphi^m$, nous obtenons : $\alpha = \varphi$.

Quatrième étape

Pour prouver l'existence d'une solution de (S_{m,δ_0}) , par comparaison avec la troisième étape, nous étudions donc, tout d'abord, l'équation homogène stationnaire suivante :

$$Z_t = Z_s + \int_s^t \varphi^m(Z_r) dB_r - \beta \int_s^t Z_r dr, \quad t \geq s \quad (2.1.34)$$

où pour tout réel t , Z_t est de densité φ et $(B_t; t \in \mathbb{R})$ est un mouvement brownien défini sur $\mathbb{R}$.

Puisque la fonction φ est égale à

$$\varphi(y) = (a_m^2 + q_m y^2)^{\frac{1}{2m}},$$

φ^m est une fonction sous-linéaire et lipschitzienne ; de plus, ce qui apparait dans le terme de dérive est une fonction lipschitzienne et linéaire donc l'équation (2.1.34) possède une unique solution forte.

On peut définir Z sur $\mathbb{R}$ tout entier. En effet si s_1 et s_2 sont deux nombres réels tels que $s_1 < s_2$, et si l'on note $(Z_t^1)_{t \geq s_1}$ la solution de (2.1.34) pour $s = s_1$ et $(Z_t^2)_{t \geq s_2}$ la solution de (2.1.34) pour $s = s_2$, alors les processus Z^1 et Z^2 restreints à l'intervalle $[s_2, +\infty[$ ont même loi, puisque $Z_{s_2}^1$ a pour densité φ . On est donc en présence d'un système projectif de probabilités ce qui permet de construire le processus Z sur $\mathbb{R}$.

Cinquième étape

Nous définissons :

$$\begin{cases} {}^0X_t = t^\beta Z_{\ln t} & \text{pour } t > 0 \\ {}^0X_0 = 0. \end{cases} \quad (2.1.35)$$

Nous allons montrer qu'il existe un mouvement brownien (B'_t) tel que pour tout $0 < s < t$, on ait :

$${}^0X_t = {}^0X_s + \int_s^t {}^0u^m(s, {}^0X_s) dB'_r. \quad (2.1.36)$$

La formule (2.1.35) implique que

$$d{}^0X_t = \beta t^{\beta-1} Z_{\ln t} dt + t^\beta d(Z_{\ln t})$$

c'est-à-dire

$$d{}^0X_t = \beta t^{\beta-1} Z_{\ln t} dt + t^\beta \left(-\beta Z_{\ln t} \frac{dt}{t} \right) + t^\beta d \int_0^{\ln t} \varphi^m(Z_s) dB_s$$

et donc :

$$d{}^0X_t = t^\beta d \left(\int_0^{\ln t} \varphi^m(Z_s) dB_s \right). \quad (2.1.37)$$

Nous définissons le processus $(\mathcal{M}_t, t \geq 0)$ par :

$$\mathcal{M}_t = \int_0^{\ln t} \varphi^m(Z_s) dB_s. \quad (2.1.38)$$

$(\mathcal{M}_t ; t \geq 0)$ est une martingale locale. Il reste à montrer que le processus $(B'_t ; t \geq 0)$ défini par :

$$t^\beta d\mathcal{M}_t = \frac{1}{t^{\beta m}} \varphi^m(Z_{\ln t}) dB'_t. \quad (2.1.39)$$

est un mouvement brownien.

Nous avons

$$dB'_t = t^{\beta(1+m)} \varphi^{-m}(Z_{\ln t}) d\mathcal{M}_t, \quad (2.1.40)$$

donc $(B'_t, t \geq 0)$ est une martingale locale. Calculons son crochet :

$$\begin{aligned} \langle B'_\cdot, B'_\cdot \rangle_t &= \int_0^t s^{2\beta(1+m)} \varphi^{-2m}(Z_{\ln s}) d \langle \mathcal{M}_\cdot, \mathcal{M}_\cdot \rangle_s \\ &= \int_0^t s^{2\beta(1+m)} \varphi^{-2m}(Z_{\ln s}) \varphi^{2m}(Z_{\ln s}) \frac{ds}{s} \end{aligned} \quad (2.1.41)$$

$$(2.1.42)$$

et puisque $2\beta(1+m) = 1$,

$$\langle B'_\cdot, B'_\cdot \rangle_t = t. \quad (2.1.43)$$

Ainsi $(B'_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien et $({}^0X_t, t \geq 0)$ est solution de (2.1.36).

Sixième étape

Nous allons montrer que :

$${}^0X_t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{p.s.} 0. \quad (2.1.44)$$

Il nous faut pour cela introduire quelques notations.

Soit T une partie de $\mathbb{R}$ et $F = (t_i)_{i \in \{1, \dots, d\}}$, une suite finie, strictement croissante d'éléments de T .

Nous considérons une fonction continue $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ et deux nombres réels a et b tels que $a < b$. Nous définissons par récurrence la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} s_1 &= \inf\{t_i ; f(t_i) > b\} & s_2 &= \inf\{t_i > s_1 ; f(t_i) < a\} \\ s_{2n+1} &= \inf\{t_i > s_{2n} ; f(t_i) > b\} & s_{2n+2} &= \inf\{t_i > s_{2n+1} ; f(t_i) < a\} \end{aligned}$$

avec la convention $\inf \emptyset = t_d$.

Nous définissons

$$D(f, F, [a, b]) := \sup\{n; s_{2n} < t_d\}, \quad (2.1.45)$$

et le nombre de “descentes” de f sur $[a, b]$, le long de T par :

$$D(f, T, [a, b]) = \sup_{F \text{ fini}, F \subset T} F(f, F; [a, b]). \quad (2.1.46)$$

Soit $0 < s < 1$. $({}^0X_v)_{v \in [s, 1]}$ est une martingale.

Pour toute partie T dénombrable de $[s, 1]$, nous avons donc, d’après les inégalités de Dubins (cf. [RY91], page 61) :

$$(b - a)E(D({}^0X, T, [a, b])) \leq \sup_{t \in T} E({}^0X_t - b)_+, \quad (2.1.47)$$

et

$$(b - a)E(D({}^0X, T, [a, b])) \leq |b| + \sup_{t \in T} E(|{}^0X_t|). \quad (2.1.48)$$

0X étant à trajectoire continues, nous obtenons :

$$E(D({}^0X, [s, 1], [a, b])) \leq \frac{|b| + \sup_{t \in [s, 1]} E(|{}^0X_t|)}{b - a}. \quad (2.1.49)$$

En effet, il suffit d’appliquer (2.1.48) pour $T = \mathbb{Q} \cap [s, 1]$ et d’utiliser la continuité de 0X .

Nous allons maintenant montrer que :

$$\sup_{t \in [0, 1]} E(|{}^0X_t|) < \infty. \quad (2.1.50)$$

Puisque 0u est la densité de 0X_t , nous avons :

$$E(|{}^0X_t|) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t^\beta} \varphi\left(\frac{x}{t^\beta}\right) |x| dx \quad (2.1.51)$$

et en faisant le changement de variable $y = x/t^\beta$, nous obtenons :

$$E(|{}^0X_t|) = t^\beta \int_{\mathbb{R}} |y| \varphi(y) dy. \quad (2.1.52)$$

D’après la forme explicite (2.1.29) de φ , nous avons :

$$\varphi(y) \underset{|y| \rightarrow +\infty}{\sim} C|y|^{1/m}, \quad (2.1.53)$$

et donc

$$|y| \varphi(y) \underset{|y| \rightarrow +\infty}{\sim} C|y|^{\frac{1}{m}+1}. \quad (2.1.54)$$

Ainsi $\int_{\mathbb{R}} |y| \varphi(y) dy < \infty$ et puisque β est strictement positif, $\sup_{t \in [0,1]} t^\beta = 1$. Nous en déduisons la relation (2.1.50).

Remarque 2.2

En utilisant le même argument, nous montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$, dépendant de m , tel que :

$$\sup_{t \in [0,1]} E(|^0X_t|^{1+\varepsilon}) < \infty. \quad (2.1.55)$$

Ceci prouve l'équi-intégrabilité de la martingale $(^0X_t, t \geq 0)$.

Nous avons donc, d'après (2.1.49) :

$$E(D(^0X, [s, 1], [a, b])) \leq k < \infty \quad (2.1.56)$$

où la constante k ne dépend pas de s .

Si nous notons $D(^0X, [s, 1], [a, b]) = D_s$, alors D_s est une variable aléatoire qui croît, quand s décroît, vers $D(^0X,]0, 1], [a, b])$.

Le théorème de convergence monotone permet d'en déduire

$$E(D(^0X,]0, 1], [a, b])) \leq k < \infty. \quad (2.1.57)$$

Comme cela est vrai pour tous les nombres réels a et b tels que $a < b$, ceci implique classiquement que $\lim_{s \rightarrow 0} ^0X_s$ existe presque sûrement.

Il reste à identifier cette limite. Nous définissons alors la suite $(t_n)_{n \geq 1}$ par $t_n = n^{-\frac{3}{\beta}}$. Il est clair que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$.

D'après l'inégalité de Markov et (2.1.52), nous avons :

$$P(|^0X_{t_n}| > \frac{1}{n}) \leq nE(|^0X_{t_n}|) = nCt_n^\beta = \frac{c}{n^2}. \quad (2.1.58)$$

Puisque $\sum_{n \geq 1} P(|^0X_{t_n}| > 1/n) \leq c \sum_{n \geq 1} 1/n^2 < \infty$, d'après le lemme de Borel-

Cantelli, presque sûrement pour n suffisamment grand, $|^0X_{t_n}| < \frac{1}{n}$, et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ^0X_{t_n} = 0 \quad \text{p.s.} \quad (2.1.59)$$

La limite de 0X_s lorsque s tend vers 0 est donc égale à 0, ce qui achève la démonstration de l'existence de la solution de (S_{m,δ_0}) .

L'unicité en loi résulte du caractère markovien du processus 0X et de l'unicité de la solution de l'E.D.P. (E_{m,δ_0}) .

2.2 Etude trajectorielle du processus 0X

2.2.1 Comportement asymptotique des trajectoires de 0X

Rappelons que $({}^0X, {}^0u)$ est la solution de l'équation (S_{m,δ_0}) .

Théorème 2.3

Le processus $({}^0X_t, t \geq 0)$ vérifie :

$$\text{p.s.} \quad \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{{}^0X_t}{t^\beta} = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}^0X_t}{t^\beta} = +\infty, \quad (2.2.60)$$

$$\text{p.s.} \quad \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{{}^0X_t}{t^\beta} = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}^0X_t}{t^\beta} = -\infty. \quad (2.2.61)$$

$({}^0X_t, t \geq 0)$ est en particulier récurrent.

Démonstration du Théorème 2.3

Z étant un processus markovien et stationnaire dont la densité stationnaire φ a pour support $] -\infty, +\infty[$, Z est récurrent sur $] -\infty, +\infty[$ et nous avons :

$$\begin{aligned} \text{p.s.} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} Z_t = +\infty & \quad \text{et} \quad \text{p.s.} \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} Z_t = -\infty \\ \text{p.s.} \quad \limsup_{t \rightarrow -\infty} Z_t = +\infty & \quad \text{et} \quad \text{p.s.} \quad \liminf_{t \rightarrow -\infty} Z_t = -\infty. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque ${}^0X_t = t^\beta Z_{\ln t}$, il en découle :

$$\text{p.s.} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} {}^0X_t = +\infty \quad \text{et} \quad \text{p.s.} \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} {}^0X_t = -\infty. \quad (2.2.62)$$

Le processus 0X étant continu, il est récurrent d'après ce qui précède, et nous avons :

$$\begin{aligned} \text{p.s.} \quad \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{{}^0X_t}{t^\beta} = +\infty \quad & \text{et} \quad \text{p.s.} \quad \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{{}^0X_t}{t^\beta} = -\infty \\ \text{p.s.} \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}^0X_t}{t^\beta} = +\infty \quad & \text{et} \quad \text{p.s.} \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}^0X_t}{t^\beta} = -\infty. \end{aligned}$$

□

2.2.2 Propriété d'échelle du processus 0X

Proposition 2.4

Pour tout $\lambda > 0$, le processus 0X a même loi que le processus ${}^0X^\lambda$ défini par ${}^0X_t^\lambda = \lambda {}^0X_{\frac{t}{\lambda^{2m+2}}}$.

Démonstration de la proposition 2.4

Pour $\lambda > 0$, nous définissons le processus ${}^0X_t^\lambda$ par :

$${}^0X_t^\lambda = \lambda {}^0X_{\frac{t}{\lambda^{2m+2}}} \quad (2.2.63)$$

où $({}^0X, {}^0u)$ est la solution de (S_{m,δ_0}) et on note $v_\lambda(t, \cdot)$ la densité de la variable aléatoire ${}^0X_t^\lambda$. Pour toute fonction f borélienne, nous avons :

$$E(f({}^0X_t^\lambda)) = E[f(\lambda {}^0X_{\frac{t}{\lambda^{2m+2}}})] = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda x) {}^0u\left(\frac{t}{\lambda^{2m+2}}, x\right) dx$$

donc en effectuant le changement de variable $y = \lambda x$, nous avons :

$$E(f({}^0X_t^\lambda)) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\lambda} {}^0u\left(\frac{t}{\lambda^{2m+2}}, \frac{y}{\lambda}\right) dy. \quad (2.2.64)$$

Or, par définition,

$$E(f({}^0X_t^\lambda)) = \int_{\mathbb{R}} f(y) v_\lambda(t, y) dy, \quad (2.2.65)$$

donc

$$v_\lambda(t, y) = \frac{1}{\lambda} {}^0u\left(\frac{t}{\lambda^{2m+2}}, \frac{y}{\lambda}\right) \quad (2.2.66)$$

où 0u est la densité de Barenblatt–Pattle, définie en (2.1.7). Avec la définition (2.2.63) de ${}^0X^\lambda$, nous obtenons :

$${}^0X_t^\lambda = \lambda \int_0^{t/\lambda^{2m+2}} {}^0u^m(s, {}^0X_s) dB_s$$

et en posant $r = \lambda^{2m+2}s$, il vient

$$\begin{aligned} {}^0X_t^\lambda &= \lambda \int_0^t {}^0u^m \left(\frac{r}{\lambda^{2m+2}}, \frac{\lambda {}^0X_{\frac{r}{\lambda^{2m+2}}}}{\lambda} \right) dB_{\frac{r}{\lambda^{2m+2}}} \\ &= \int_0^t v_\lambda^m(r, {}^0X_r^\lambda) \lambda^{m+1} dB_{\frac{r}{\lambda^{2m+2}}} . \end{aligned}$$

On définit ensuite le processus $(B'_t, t \geq 0)$ par $B'_t = \lambda^{m+1} B_{\frac{t}{\lambda^{2m+2}}}$. Il est alors clair que $(B'_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien. Ainsi

$${}^0X_t^\lambda = \int_0^t v_\lambda^m(r, {}^0X_r^\lambda) dB'_r$$

et $({}^0X^\lambda, v_\lambda)$ est solution de (S_{m, δ_0}) . On en déduit immédiatement que les processus ${}^0X^\lambda$ et 0X ont même loi.

□

2.2.3 Propriétés du processus $Y_t := \text{Argsh}(bZ_t)$

Nous allons maintenant établir quelques résultats auxiliaires qui nous permettront d'étudier la régularité des trajectoires de $({}^0X_t, t \geq 0)$.

En notant $b = \frac{\sqrt{q_m}}{a_m}$ et $a = a_m$, nous pouvons réécrire l'équation (2.1.34) de la façon suivante :

$$Z_t = Z_s + \int_s^t a \sqrt{1 + b^2 Z_r^2} dB_r - \beta \int_s^t Z_r dr, \quad (2.2.67)$$

où a et b sont des réels strictement positifs.

Nous définissons alors le processus $(Y_t, t \geq 0)$ par $Y_t := \text{Argsh}(bZ_t)$.

La formule d'Itô nous donne alors :

$$Y_t = Y_s + \int_s^t \frac{b}{\sqrt{1 + b^2 Z_r^2}} (a \sqrt{1 + b^2 Z_r^2} dB_r - \beta Z_r dr) - \int_s^t \frac{a^2 b^3 Z_r (1 + b^2 Z_r^2)}{2(1 + b^2 Z_r^2)^{3/2}} dr,$$

c'est à dire

$$Y_t = Y_s + ab(B_t - B_s) - \frac{1}{2}(a^2b^2 + 2\beta)b \int_s^t \frac{Z_r}{\sqrt{1 + b^2 Z_r^2}} dr, \quad (2.2.68)$$

ou encore

$$Y_t = Y_s + ab(B_t - B_s) - \frac{1}{2}(a^2b^2 + 2\beta) \int_s^t \frac{\text{sh } Y_r}{\sqrt{1 + \text{sh}^2 Y_r}} dr. \quad (2.2.69)$$

Finalement, le processus $(Y_t, t \geq 0)$ est solution de l'E.D.S. suivante :

$$Y_t = Y_s + ab(B_t - B_s) - \frac{1}{2}(a^2b^2 + 2\beta) \int_s^t \text{th } Y_r dr. \quad (2.2.70)$$

Remarque 2.5

La fonction th étant bornée et lipschitzienne, l'équation (2.2.70) admet une solution forte unique. On retrouve alors l'existence d'une solution forte unique pour l'E.D.S. (2.1.34).

Etudions alors les propriétés du processus $(Y_t, t \geq 0)$.

Proposition 2.6

- (i) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le processus (Y_t) admet pour densité stationnaire la fonction $y \rightarrow \theta (\text{ch } y)^{\frac{m+1}{m}}$ avec $\theta = \frac{a^{\frac{1}{m}}}{b}$.
- (ii) Pour tout t et tout α vérifiant $0 < \alpha < -\frac{m+1}{m}$, $E(\exp(\alpha Y_t))$ est finie et ne dépend pas de t .
- (iii) Nous notons $Y^{(n)}$ le processus Y , conditionné par l'événement $\{Y_0 \leq k \ln n\}$.
Presque sûrement, pour n suffisamment grand, nous avons

$$\forall t \in [0, 1], Y_t^{(n)} \leq 2k \ln n. \quad (2.2.71)$$

- (iv) Pour $C > 0$ suffisamment grand, presque sûrement pour t suffisamment grand, $(t \geq T(\omega))$, nous avons :

$$|Y_t| < C \ln t. \quad (2.2.72)$$

Démonstration de la Proposition 2.6

- **démonstration de (i) :**

Z_t admettant φ pour densité stationnaire, nous avons :

$$E(f(Y_t)) = \int_{\mathbb{R}} f(\text{Argsh}(bx)) \varphi(x) dx$$

et avec le changement de variable $y = \text{Argsh}(bx)$,

$$E(f(Y_t)) = \frac{1}{b} \int_{\mathbb{R}} f(y) \varphi\left(\frac{\text{sh } y}{b}\right) \text{ch } y dy.$$

Or $\varphi\left(\frac{\text{sh } y}{b}\right) = a^{1/m} (\text{ch } y)^{1/m}$, donc

$$E(f(Y_t)) = \theta \int_{\mathbb{R}} f(y) (\text{ch } y)^{\frac{m+1}{m}} dy$$

avec $\frac{m+1}{m} < 0$.

Remarque 2.7

Le processus $\tilde{Y}$ défini par $\tilde{Y}_t = \frac{1}{ab} \text{Argsh}(bZ_t)$ vérifie l' E.D.S.

$$\tilde{Y}_t = \tilde{Y}_0 + B_t - \frac{1}{2} \left(\frac{2\beta}{ab} + ab \right) \int_0^t \text{th}(ab\tilde{Y}_s) ds.$$

En notant $w'(x) = \left(\frac{2\beta}{ab} + ab \right) \text{th}(abx)$, on peut définir une mesure de probabilité $\tilde{\mu}$ en posant $\tilde{\mu}(x) = e^{-w(x)}$ où w est une primitive de w' . Un résultat classique nous prouve que $\tilde{\mu}$ est la mesure invariante du processus $\tilde{Y}$. Le calcul de $\tilde{\mu}$ nous donne :

$$\tilde{\mu}(x) = K (\text{ch}(abx))^{\frac{m+1}{m}} \quad (K > 0). \quad (2.2.73)$$

- **démonstration de (ii) :**

Nous calculons, pour $0 < \alpha < -\frac{m+1}{m}$:

$$E(\exp(\alpha Y_t)) = \theta \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\alpha y}}{(\text{ch } y)^{-\frac{m+1}{m}}} dy \leq C \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\alpha y}}{e^{-\frac{m+1}{m}y} + e^{\frac{m+1}{m}y}} dy.$$

Cette intégrale converge et ne dépend pas de t .

- démonstration de (iii) :

Nous considérons le processus noté $\tilde{B}^{(n)}$ défini par :

$$\tilde{B}_t^{(n)} := k \ln n + ab B_t. \quad (2.2.74)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ nous désignons par D_n et E_n les événements suivants :

$$D_n := \{\forall t \in [0, 1], 0 \leq \tilde{B}_t^{(n)} \leq 2k \ln n\}$$

et

$$E_n := \{\forall t \in [0, 1], Y_t^{(n)} \leq 2k \ln n\}.$$

Sur $D_n \cap \{Y_t^{(n)} \geq 0, \forall t \in [0, 1]\}$, nous avons :

$$-\frac{1}{2b}(a^2b^2 + 2\beta) \int_0^t \text{th} Y_r^{(n)} dr < 0 \quad \text{et} \quad Y_0^{(n)} \leq \tilde{B}_0^{(n)}. \quad (2.2.75)$$

Le principe de comparaison assure alors :

$$Y_t^{(n)} \leq \tilde{B}_t^{(n)} \quad \forall t \in [0, 1]. \quad (2.2.76)$$

Sur $D_n \cap \{Y_t^{(n)} < 0, \forall t \in [0, 1]\}$, nous avons :

$$Y_t^{(n)} \leq 0 \leq \tilde{B}_t^{(n)}, \forall t \in [0, 1]. \quad (2.2.77)$$

En conséquence, sur D_n , nous avons :

$$\forall t \in [0, 1], Y_t^{(n)} \leq \tilde{B}_t^{(n)} \leq 2k \ln n. \quad (2.2.78)$$

Donc :

$$P(D_n) \leq P(E_n). \quad (2.2.79)$$

Nous allons calculer $P(D_n^c)$ où D_n^c désigne le complémentaire de D_n .

Nous avons :

$$D_n^c = \left\{ \sup_{t \in [0, 1]} \tilde{B}_t^{(n)} > 2k \ln n \text{ ou } \inf_{t \in [0, 1]} \tilde{B}_t^{(n)} < 0 \right\} \quad (2.2.80)$$

et d'après (2.2.74),

$$D_n^c = \left\{ \sup_{t \in [0, 1]} B_t > \frac{k}{ab} \ln n \text{ ou } \inf_{t \in [0, 1]} B_t < -\frac{k}{ab} \ln n \right\} = \left\{ \sup_{t \in [0, 1]} |B_t| > \frac{k}{ab} \ln n \right\}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(D_n^c) &\leq 4P\left(|B_1| \geq \frac{k}{ab} \ln n\right) \\ &\leq C \exp\left(-\frac{k^2}{2a^2b^2}(\ln n)^2\right) \\ &\leq C \exp\left(-\frac{k^2}{2a^2b^2} \ln n\right) \end{aligned} \quad (2.2.81)$$

donc

$$P(D_n^c) \leq C n^{-\frac{k^2}{2a^2b^2}}. \quad (2.2.82)$$

Par ailleurs, d'après (2.2.79), $P(E_n^c) \leq P(D_n^c)$ donc

$$P(E_n^c) \leq C n^{-\frac{k^2}{2a^2b^2}}.$$

En choisissant $k > \max\{1, \sqrt{2ab}\}$, la série $\sum_{n \geq 1} P(E_n^c)$ converge.

D'après le lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement pour tout $n \geq N_2(\omega)$,

$$\forall t \in [0, 1], Y_t^{(n)} \leq 2k \ln n.$$

- démonstration de (iv) :

Nous montrons que pour tout $k > \max\{1, \sqrt{2ab}\}$, presque sûrement pour n suffisamment grand,

$$Y_n \leq k \ln n.$$

Nous avons :

$$P(Y_n > k \ln n) = P(e^{Y_n} > n^k)$$

et d'après l'inégalité de Markov :

$$P(Y_n > k \ln n) \leq \frac{1}{n^k} E(e^{Y_n})$$

où $E(e^{Y_n})$ est une constante indépendante de n d'après le point (ii) de la Proposition 2.6, $-\frac{m+1}{m}$ étant strictement supérieur à 1.

Par conséquent, la série $\sum_{n \geq 1} P(Y_n > k \ln n)$ est convergente et d'après le théorème de Borel-Cantelli, presque sûrement pour $n \geq N_1(\omega)$,

$$Y_n(\omega) \leq k \ln n.$$

Or d'après le point (iii) de la Proposition 2.6, presque sûrement pour $n \geq N_2(\omega)$,

$$\forall t \in [0, 1], \quad Y_t^{(n)} \leq 2k \ln n.$$

D'où, presque sûrement pour $n \geq N(\omega)$,

$$\forall t \in [n, n+1], \quad Y_t \leq 2k \ln n \leq 2k \ln t.$$

En conclusion, $Y_t \leq 2k \ln t$ presque sûrement, pour $t \geq T_1(\omega)$. Nous démontrons de même que, presque sûrement, pour $t \geq T_2(\omega)$, $Y_t \geq -2k \ln t$.

Ainsi, presque sûrement, pour $t \geq T(\omega)$,

$$|Y_t| \leq 2k \ln t.$$

□

2.2.4 Corollaire pour le processus Z

De la Proposition 2.6 et de la relation $Y_t = \text{Argsh}(bZ_t)$ où nous avons $Z_t = \frac{1}{b} \text{sh}(Y_t)$, nous déduisons :

Corollaire 2.8

(i) Presque sûrement, il existe $T(\omega)$ et $C(\omega)$ tels que

$$\forall |t| > T(\omega), \quad |Z_t| \leq C(\omega)|t|^{2k}.$$

(ii) Presque sûrement, pour tout $\xi > 0$, il existe une constante $C_\xi(\omega)$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$|Z_t| \leq C_\xi(\omega)(\xi + |t|^{2k})$$

(iii) Presque sûrement, pour tout $\xi > 0$, il existe une constante $C'_\xi(\omega)$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, nous avons :

$$|Z_t|^2 \leq C'_\xi(\omega)(\xi + |t|^{4k}).$$

Démonstration du corollaire 2.8

(i) Pour les $t > 0$, ceci découle directement du corollaire précédent et de la majoration $\text{sh } x \leq e^x$. Le cas $t < 0$ résulte de la symétrie du processus Z . $\square$

2.2.5 Caractère höldérien des trajectoires de 0X **Théorème 2.9**

Pour tout $\nu < 1/2$, le processus 0X est presque sûrement à trajectoire höldérienne d'indice ν .

Démonstration du Théorème 2.9

La preuve du caractère Hölderien du processus 0X se décompose en trois étapes.

Première étape

Soit $\nu < \frac{1}{2}$.

Nous majorons l'expression $\frac{|{}^0X_t - {}^0X_s|}{|t - s|^\nu}$ de la façon suivante :

$$\frac{|{}^0X_t - {}^0X_s|}{|t - s|^\nu} = \frac{|t^\beta Z_{\ln t} - s^\beta Z_{\ln s}|}{|t - s|^\nu} \leq \underbrace{\frac{|t^\beta - s^\beta| |Z_{\ln t}|}{|t - s|^\nu}}_{(A_1)} + \underbrace{\frac{s^\beta |Z_{\ln t} - Z_{\ln s}|}{|t - s|^\nu}}_{(A_2)}. \quad (2.2.83)$$

La fonction $x \mapsto x^\beta$ étant concave puisque $\frac{1}{2} < \beta < 1$, pour tout $\eta > 0$ tel que $\beta - \eta > \nu$ et pour tous s et t de $[0, 1]$ tels que $s \leq t$, nous avons :

$$A_1 \leq \frac{|t - s|^{\beta - \eta}}{|t - s|^\nu} |Z_{\ln t}| |t - s|^\eta \quad (2.2.84)$$

donc

$$A_1 \leq |t - s|^{\beta - \eta - \nu} |t|^\eta |Z_{\ln t}| \quad (2.2.85)$$

avec $|t - s|^{\beta - \eta - \nu} \leq 1$ et $\lim_{t \rightarrow 0} t^\eta |Z_{\ln t}| = 0$ presque sûrement (cf le point 6 de la preuve du théorème 2.1).

Les trajectoires de Z étant presque sûrement continues, il existe une constante $C(\omega)$ telle que pour tous s et t de $[0, 1]$ tels que $s \leq t$, nous avons :

$$A_1 \leq C(\omega). \quad (2.2.86)$$

Il reste à majorer le terme A_2 . C'est l'objet des deux étapes suivantes.

Deuxième étape

Majoration de $|Z_{\ln t} - Z_{\ln s}|$.

Soit $0 \leq s \leq t \leq 1$.

D'après (2.2.67), nous avons :

$$|Z_{\ln t} - Z_{\ln s}| \leq \beta \left| \int_{\ln s}^{\ln t} Z_r dr \right| + \left| \int_{\ln s}^{\ln t} a(1 + b^2 Z_r^2)^{1/2} dB_r \right|. \quad (2.2.87)$$

Nous majorons tout d'abord le premier terme :

$$\begin{aligned} \beta \left| \int_{\ln s}^{\ln t} Z_r dr \right| &\leq \beta \int_{\ln s}^{\ln t} |Z_r| dr \\ &\leq C \int_{\ln s}^{\ln t} \left(\frac{1}{2k} + r^{2k} \right) dr \quad (\text{d'après le point (ii) du corollaire 2.8}) \\ &\leq C \left\{ (|\ln s| - |\ln t|) + (|\ln s|^{2k+1} - |\ln t|^{2k+1}) \right\} \end{aligned}$$

donc

$$\beta \left| \int_{\ln s}^{\ln t} Z_r dr \right| \leq C(\omega) (|\ln s|^{2k+1} - |\ln t|^{2k+1}).$$

Pour le deuxième terme, il faut d'abord remarquer que celui-ci peut s'écrire sous la forme d'un mouvement Brownien changé de temps : si nous notons $\tilde{B}$ un mouvement Brownien classique, alors :

$$\int_{\ln s}^{\ln t} (1 + b^2 Z_r^2)^{1/2} dB_r = \tilde{B}_{\int_{\ln s}^{\ln t} (1 + b^2 Z_r^2) dr}. \quad (2.2.88)$$

Ainsi, sachant d'après la loi du logarithme itéré, que :

$$\left| \tilde{B}_t \right| \leq C(\omega) \sup \{ t^{\frac{1}{2}-\varepsilon}, t^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \} \quad \text{avec } \varepsilon > 0, \quad (2.2.89)$$

et en notant :

$$\mathcal{I} = \left| \int_{\ln s}^{\ln t} a(1 + b^2 Z_r^2)^{\frac{1}{2}} dB_r \right|, \quad (2.2.90)$$

nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\leq C \sup \left\{ \left(\int_{\ln s}^{\ln t} (1 + b^2 Z_r^2) dr \right)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}, \left(\int_{\ln s}^{\ln t} (1 + b^2 Z_r^2) dr \right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \right\} \\ &\leq C \sup \left\{ \left(\int_{\ln s}^{\ln t} (1 + r^{4k}) dr \right)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}, \left(\int_{\ln s}^{\ln t} (1 + r^{4k}) dr \right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \right\} \end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{I} \leq C(\omega) \sup \left\{ \left(|\ln s|^{4k+1} - |\ln t|^{4k+1} \right)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}, \left(|\ln s|^{4k+1} - |\ln t|^{4k+1} \right)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \right\}.$$

Troisième étape

Majoration de A_2 .

$$A_2 \leq \frac{s^\beta \left| \int_{\ln s}^{\ln t} Z_r dr \right|}{|t - s|^\nu} + \frac{s^\beta \left| \int_{\ln s}^{\ln t} a(1 + b^2 Z_r^2)^{\frac{1}{2}} dB_r \right|}{|t - s|^\nu}, \quad (2.2.91)$$

et nous majorons les deux termes du membre de droite séparément :

$$\begin{aligned} \frac{s^\beta \left| \int_{\ln s}^{\ln t} Z_r dr \right|}{|t - s|^\nu} &\leq C s^\beta \frac{|\ln s|^{2k+1} - |\ln t|^{2k+1}}{|t - s|^\nu} \\ &\leq C s^{\beta-\eta} \frac{(|\ln s|^{2k+1} - |\ln t|^{2k+1})^\nu}{|t - s|^\nu} s^\eta (|\ln s|^{2k+1} - |\ln t|^{2k+1})^{1-\nu} \end{aligned}$$

et par l'inégalité des accroissements finis,

$$\frac{s^\beta \left| \int_{\ln s}^{\ln t} Z_r dr \right|}{|t - s|^\nu} \leq C s^{\beta-\eta} \frac{\{(2k+1)|\ln s|^{2k}|s - t|\}^\nu}{s^\nu |t - s|^\nu} s^\eta |\ln s|^{(2k+1)(1-\nu)}$$

ce qui donne finalement

$$\frac{s^\beta \left| \int_{\ln s}^{\ln t} Z_r dr \right|}{|t - s|^\nu} \leq C s^{\beta-\eta-\nu} s^\eta |\ln s|^{2k+1-\nu}.$$

En choisissant η tel que $\beta - \eta - \nu > 0$, comme $\lim_{s \rightarrow 0} s^\eta |\ln s|^{2k+1-\nu} = 0$, il vient

$$\frac{s^\beta \left| \int_{\ln s}^{\ln t} Z_r dr \right|}{|t - s|^\nu} \leq C(\omega).$$

Nous procédons de façon similaire pour le deuxième terme :

$$\begin{aligned} & \frac{s^\beta \left| \int_{\ln s}^{\ln t} a(1 + b^2 Z_r^2)^{\frac{1}{2}} dB_r \right|}{|t - s|^\nu} \\ & \leq C s^\beta \frac{(|\ln s|^{4k+1} - |\ln t|^{4k+1})^{\frac{1}{2}+\varepsilon} + (|\ln s|^{4k+1} - |\ln t|^{4k+1})^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}{|t - s|^\nu} \\ & \leq C s^{\beta-\delta} \frac{(|\ln s|^{4k+1} - |\ln t|^{4k+1})^\nu}{|t - s|^\nu} s^\delta \\ & \quad \left[(|\ln s|^{4k+1} - |\ln t|^{4k+1})^{\frac{1}{2}-\varepsilon-\nu} + (|\ln s|^{4k+1} - |\ln t|^{4k+1})^{\frac{1}{2}+\varepsilon-\nu} \right]. \end{aligned} \tag{2.2.92}$$

Nous choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{1}{2} - \varepsilon - \nu > 0$ et par un raisonnement identique au précédent, nous obtenons :

$$\frac{s^\beta \left| \int_{\ln s}^{\ln t} a(1 + b^2 Z_r^2)^{\frac{1}{2}} dB_r \right|}{|t - s|^\nu} \leq C s^\delta |\ln s|^{(4k+1)(\frac{1}{2}+\varepsilon)-\nu}$$

et puisque $\lim_{s \rightarrow 0} s^\delta |\ln s|^{(4k+1)(1/2+\varepsilon)-\nu} = 0$,

$$\frac{s^\beta \left| \int_{\ln s}^{\ln t} a(1 + b^2 Z_r^2)^{\frac{1}{2}} dB_r \right|}{|t - s|^\nu} \leq C.$$

Finalement,

$$A_2 \leq C(\omega).$$

Nous avons donc démontré :

$$\sup_{\substack{s, t \leq 1 \\ s \neq t}} \frac{|{}^0X_t - {}^0X_s|}{|t - s|^\nu} \leq C(\omega), \tag{2.2.93}$$

ce qui signifie que 0X est localement Höldérien d'indice $\nu < \frac{1}{2}$. □

2.3 Etude de temps de passage

2.3.1 Définition de temps de passage

Les limites

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{{}^0X_t}{t^\beta} = +\infty \quad \text{p.s.} \quad \text{et} \quad \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{{}^0X_t}{t^\beta} = -\infty \quad \text{p.s.}$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}^0X_t}{t^\beta} = +\infty \quad \text{p.s.} \quad \text{et} \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{{}^0X_t}{t^\beta} = -\infty \quad \text{p.s.}$$

nous invitent à nous intéresser au moment où ${}^0X_{\frac{t}{t^\beta}}$ dépasse une valeur donnée. Pour tout x réel et tout $s > 0$, nous notons $({}^0X_t^{s,x}, t \geq s)$ le processus, solution de l'équation différentielle stochastique :

$${}^0X_t^{s,x} = x + \int_s^t {}^0u^m(r, {}^0X_r^{s,x}) dB_r, \quad t \geq s. \quad (2.3.94)$$

Nous définissons alors deux familles de temps d'arrêt : pour $y_0 \neq 0$ et $|x| < |y_0|s^\beta$, nous posons :

$$T_{y_0} = \inf\{t > s; {}^0X_t^{s,x} = y_0 t^\beta\}, \quad (2.3.95)$$

et pour $y_0 > 0$ et $|x| < y_0 s^\beta$,

$$T_{y_0}^* = \inf\{t > s; |{}^0X_t^{s,x}| = y_0 t^\beta\}. \quad (2.3.96)$$

Il est clair que :

$$T_{y_0}^* = T_{y_0} \wedge T_{-y_0}. \quad (2.3.97)$$

En définissant le processus Z^y comme solution de l'E.D.S. :

$$Z_t^y = y + \int_0^t \varphi^m(Z_r^y) dB_r - \beta \int_0^t Z_r^y dr, \quad t \geq 0, \quad (2.3.98)$$

nous avons l'égalité :

$${}^0X_t^{s,x} = t^\beta Z_{\ln(\frac{t}{s})}^{\frac{x}{s^\beta}}, \quad t \geq s. \quad (2.3.99)$$

Si nous notons S_{x_0, y_0} le temps d'arrêt :

$$S_{x_0, y_0} := \inf\{t \geq 0; Z_t^{x_0} = y_0\}, \quad (2.3.100)$$

nous avons :

$$\begin{aligned} S_{\frac{x}{s^\beta}, y_0} &= \ln \left(\inf \{t \geq s, Z_{\ln(\frac{t}{s})}^{\frac{x}{s^\beta}} = y_0\} \right) - \ln s \\ &= \ln \left(\inf \{t \geq s, {}^0X_t^{s,x} = y_0 t^\beta\} \right) - \ln s. \end{aligned} \quad (2.3.101)$$

Par conséquent,

$$S_{\frac{x}{s^\beta}, y_0} = \ln \left(\frac{T_{y_0}}{s} \right). \quad (2.3.102)$$

Nous sommes donc amenés à déterminer la loi de ces temps d'arrêt. En fait, nous allons calculer explicitement la transformée de Laplace de ces temps. Nous utiliserons les résultats et les notations de l'appendice D.

2.3.2 Calcul explicite de la transformée de Laplace des lois des temps de passage

Théorème 2.10

Pour tout $\lambda \geq 0$ et pour tous réels x, y, z tels que $y \leq x \leq z$, nous avons :

$$E[\exp -\lambda(S_{x,y} \wedge S_{x,z})] = \frac{h_\lambda(x)(k_\lambda(z) - k_\lambda(y)) - k_\lambda(x)(h_\lambda(z) - h_\lambda(y))}{h_\lambda(y)k_\lambda(z) - k_\lambda(y)h_\lambda(z)}, \quad (2.3.103)$$

et pour $z > 0$ et $-z \leq x \leq z$,

$$E[\exp -\lambda(S_{x,z} \wedge S_{x,-z})] = \frac{h_\lambda(x) + h_\lambda(-x)}{h_\lambda(z) + h_\lambda(-z)}, \quad (2.3.104)$$

où les fonctions h_λ et k_λ sont définies dans l'annexe D (cf. (D.0.20)).

Démonstration du Théorème 2.10

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. D'après la formule d'Itô, nous avons :

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} f(Z_t^x) &= f(Z_0^x) + \int_0^t e^{-\lambda s} f'(Z_s^x) \varphi^m(Z_s^x) dB_s - \beta \int_0^t e^{-\lambda s} f'(Z_s^x) Z_s^x ds \\ &\quad - \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} f(Z_s^x) ds + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\lambda s} f''(Z_s^x) \varphi^{2m}(Z_s^x) ds \end{aligned} \quad (2.3.105)$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} f(Z_t^x) = & f(x) + \int_0^t e^{-\lambda s} f'(Z_s^x) \varphi^m(Z_s^x) dB_s \\ & + \int_0^t (-\lambda e^{-\lambda s} f(Z_s^x) + e^{-\lambda s} Lf(Z_s^x)) ds, \end{aligned} \quad (2.3.106)$$

Avec :

$$Lg(z) := \frac{1}{2} \varphi^{2m}(z) g''(z) - \beta z g'(z), \quad g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), \quad z \in \mathbb{R}. \quad (2.3.107)$$

Par conséquent, le processus $(M_t, t \geq 0)$ défini par :

$$M_t := e^{-\lambda t} f(Z_t^x) - f(x) + \int_0^t (-\lambda e^{-\lambda s} f(Z_s^x) + e^{-\lambda s} Lf(Z_s^x)) ds \quad (2.3.108)$$

est une martingale locale.

De plus, la martingale arrêtée $(M_t^{S_{x,y} \wedge S_{x,z}}, t \geq 0)$ est une vraie martingale bornée.

Pour $f = f_\lambda^y$ (pour la définition de f_λ^y , cf. (D.0.21), annexe D), nous avons :

$$-\lambda e^{-\lambda s} f_\lambda^y(Z_s^x) + e^{-\lambda s} Lf_\lambda^y(Z_s^x) = -\lambda e^{-\lambda s} f_\lambda^y(Z_s^x) + e^{-\lambda s} \lambda f_\lambda^y(Z_s^x) = 0, \quad (2.3.109)$$

et donc :

$$M_t = e^{-\lambda t} f_\lambda^y(Z_t^x) - f_\lambda^y(x). \quad (2.3.110)$$

D'où $(M_t, t \geq 0)$ est une martingale bornée sur $[0, S_{x,y} \wedge S_{x,z}[$ et nous pouvons lui appliquer le théorème d'arrêt :

$$E[M_{S_{x,y} \wedge S_{x,z}}] = E[M_0^{S_{x,y} \wedge S_{x,z}}] = 0. \quad (2.3.111)$$

Ainsi,

$$E[e^{-\lambda(S_{x,y} \wedge S_{x,z})} f_\lambda^y(Z_{S_{x,y} \wedge S_{x,z}}^x)] = f_\lambda^y(x). \quad (2.3.112)$$

Nous décomposons alors le membre de gauche de l'égalité (2.3.112) et nous obtenons :

$$E[e^{-\lambda(S_{x,y} \wedge S_{x,z})} f_\lambda^y(y) \mathbb{1}_{\{S_{x,y} \leq S_{x,z}\}} + e^{-\lambda(S_{x,y} \wedge S_{x,z})} f_\lambda^y(z) \mathbb{1}_{\{S_{x,y} > S_{x,z}\}}] = f_\lambda^y(x) \quad (2.3.113)$$

ce qui donne, vu que $f_\lambda^y(y) = 0$ (d'après la définition de f_λ^y , cf. (D.0.21)),

$$E[e^{-\lambda(S_{x,y} \wedge S_{x,z})} f_\lambda^y(z) \mathbb{1}_{\{S_{x,y} > S_{x,z}\}}] = f_\lambda^y(x). \quad (2.3.114)$$

Si nous supposons qu'il existe un $z > y$ tel que $f_\lambda^y(z) = 0$, alors pour tout $y \leq x' \leq z$, $f_\lambda^y(x') = 0$, ce qui est absurde car f_λ^y n'est pas identiquement nulle. Donc f_λ^y ne s'annule pas sur $]y, +\infty[$ et nous avons :

$$E[e^{-\lambda(S_{x,y} \wedge S_{x,z})} \mathbb{1}_{\{S_{x,y} > S_{x,z}\}}] = \frac{f_\lambda^y(x)}{f_\lambda^y(z)} \quad (2.3.115)$$

et de la même manière,

$$E[e^{-\lambda(S_{x,y} \wedge S_{x,z})} \mathbb{1}_{\{S_{x,y} \leq S_{x,z}\}}] = \frac{g_\lambda^z(x)}{g_\lambda^z(y)}. \quad (2.3.116)$$

Des deux égalités précédentes et en se référant aux définitions de f_λ^y et g_λ^z (cf. (D.0.21) et (D.0.22), annexe D), nous déduisons :

$$E[\exp -\lambda(S_{x,y} \wedge S_{x,z})] = \frac{h_\lambda(x)(k_\lambda(z) - k_\lambda(y)) - k_\lambda(x)(h_\lambda(z) - h_\lambda(y))}{h_\lambda(y)k_\lambda(z) - k_\lambda(y)h_\lambda(z)}. \quad (2.3.117)$$

Soit z un réel positif et $x \in]-z, z[$. En remarquant que pour tout $w \in \mathbb{R}$, $k_\lambda(w) = h_\lambda(-w)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} E[\exp -\lambda(S_{x,z} \wedge S_{x,-z})] &= \frac{h_\lambda(x)(h_\lambda(-z) - h_\lambda(z)) - h_\lambda(-x)(h_\lambda(z) - h_\lambda(-z))}{h_\lambda(-z)^2 - h_\lambda(z)^2} \\ &= \frac{(h_\lambda(x) + h_\lambda(-x))(h_\lambda(-z) - h_\lambda(z))}{(h_\lambda(-z) + h_\lambda(z))(h_\lambda(-z) - h_\lambda(z))}. \end{aligned} \quad (2.3.118)$$

D'où :

$$E[\exp -\lambda(S_{x,z} \wedge S_{x,-z})] = \frac{h_\lambda(x) + h_\lambda(-x)}{h_\lambda(z) + h_\lambda(-z)}. \quad (2.3.119)$$

□

Corollaire 2.11

Pour tout $\lambda \geq 0$, nous avons :

$$E[(T_{y_0}^*)^{-\lambda}] = s^{-\lambda} \frac{h_\lambda(xs^{-\beta}) + h_\lambda(-xs^{-\beta})}{h_\lambda(y_0) + h_\lambda(-y_0)}.$$

Démonstration du corollaire 2.11

D'après le théorème 2.10 et l'identité (2.3.102), nous avons :

$$\begin{aligned}
 E\left[\exp -\lambda \ln \left(\frac{T_{y_0} \wedge T_{-y_0}}{s}\right)\right] &= E\left[\exp -\lambda(\ln T_{y_0}/s \wedge \ln T_{-y_0}/s)\right] \\
 &= E\left[\exp -\lambda(S_{x/s^\beta, y_0} \wedge S_{x/s^\beta, -y_0})\right] \\
 &= \frac{h_\lambda(xs^{-\beta}) + h_\lambda(-xs^{-\beta})}{h_\lambda(y_0) + h_\lambda(-y_0)}.
 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
 E[(T_{y_0}^*)^{-\lambda}] &= E[(T_{y_0} \wedge T_{-y_0})^{-\lambda}] = E[\exp -\lambda(\ln(T_{y_0} \wedge T_{-y_0}))] \\
 &= E[\exp -\lambda(\ln(T_{y_0}) \wedge \ln(T_{-y_0}))]
 \end{aligned}$$

donc

$$E[(T_{y_0}^*)^{-\lambda}] = s^{-\lambda} \frac{h_\lambda(xs^{-\beta}) + h_\lambda(-xs^{-\beta})}{h_\lambda(y_0) + h_\lambda(-y_0)}.$$

□

Chapitre 3

Résolution de $(S_{m,\mu})$ avec μ quelconque

3.1 Existence et unicité de la solution de $(S_{m,\mu})$ pour une large classe de mesures μ

Nous avons démontré au paragraphe 2 que $(S_{m,\mu})$ (cf. (1.2.10)) possède une unique solution lorsque $\mu = \delta_0$. Le but de ce paragraphe est de prouver le même résultat pour une large classe de données initiales. Nous nous restreindrons au cas où μ admet une densité, que nous noterons encore μ . Soit donc $\mu \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Nous montrons aisément que si $({}^\mu X, {}^\mu u)$ est solution de $(S_{m,\mu})$, alors ${}^\mu u$ est solution de $(E_{m,\mu})$ (cf. (1.2.11) et d'après [Kal87] et [AB79], il existe une unique solution positive à l'équation $(E_{m,\mu})$. Ainsi ${}^\mu u$ est cette unique solution positive.

Nous notons $(\mathcal{H})$, l'hypothèse suivante :

$$(\mathcal{H}) \quad \text{Il existe } \kappa > 0 \text{ et } \theta > 0 \text{ tels que : } \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mu(x) \leq \frac{1}{\kappa + \theta|x|^{1/|m|}} . \quad (3.1.1)$$

Théorème 3.1

Soit $\mu \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Sous l'hypothèse $(\mathcal{H})$, l'équation $(S_{m,\mu})$ possède une unique solution faible $({}^\mu X, {}^\mu u)$.

Avant de démontrer le théorème 3.1, nous établirons deux résultats préliminaires : les lemmes 3.2 et 3.3. Nous rappelons tout d'abord les résultats

classiques sur la solution ${}^\mu u$ de $(E_{m,\mu})$ qui sont indépendants de l'hypothèse $\mathcal{H}$ et vrais si $\mu \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Les résultats suivants apparaissent dans les articles de A.S. Kalashnikov [Kal87], pour $(\mathcal{A})$, $(\mathcal{B})$ et $(\mathcal{E})$, D.J. Aronson - P. Benilan [AB79], pour $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$ et J.L. Vázquez [V93] :

$$(\mathcal{A}) \quad {}^\mu u \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[\times \mathbb{R}), \quad (3.1.2)$$

$$(\mathcal{B}) \quad {}^\mu u \text{ est strictement positive sur }]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \quad (3.1.3)$$

$$(\mathcal{C}) \quad \text{L'application } t \rightarrow {}^\mu u(t, \cdot) \text{ est continue pour la norme } \mathcal{L}^1, \quad (3.1.4)$$

$$(\mathcal{D}) \quad \text{Il existe une constante } C \text{ telle que } \forall t > 0, \|{}^\mu u(t, \cdot)\|_\infty \leq Ct^{-\beta}, \quad (3.1.5)$$

$$(\mathcal{E}) \quad \liminf_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^{\frac{1}{|m|}} {}^\mu u(t, x) \geq C_m t^{\frac{1}{2|m|}} \text{ avec } C_m = \left(\frac{2(2m+1)(m+1)}{|m|} \right)^{\frac{1}{2|m|}}. \quad (3.1.6)$$

Lemme 3.2

Sous l'hypothèse $(\mathcal{H})$ et pour tout $T > 0$, il existe des constantes κ_T et θ_T telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous ayons :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} {}^\mu u(t, x) \leq \frac{1}{\kappa_T + \theta_T |x|^{\frac{1}{m}}}.$$

Démonstration du lemme 3.2

Nous procédons en deux étapes.

Première étape

Pour tout $a > 0$, nous notons $\tilde{u}_a$ la fonction définie par :

$$\tilde{u}_a(t, x) := \frac{1}{t^\beta} \left(a + q_m \left(\frac{x}{t^\beta} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2m}}$$

pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. La fonction $\tilde{u}_a$ vérifie l'E.D.P. première ligne de (E_{m,δ_0}) . Nous avons

$$\tilde{u}_a(t, x) = \frac{1}{t^\beta \left(a + \frac{q_m}{t^{2\beta}} x^2 \right)^{\frac{1}{2|m|}}}.$$

Puisque $\frac{1}{2|m|} > 1$, il existe une constante C_m telle que

$$\left(a + \frac{q_m}{t^{2\beta}} x^2\right)^{\frac{1}{2|m|}} \leq C_m \left(a^{\frac{1}{2|m|}} + \frac{q_m^{\frac{1}{2|m|}}}{t^{\frac{\beta}{|m|}}} |x|^{\frac{1}{|m|}}\right).$$

Ainsi,

$$\tilde{u}_a(t, x) \geq \frac{1}{C_m a^{\frac{1}{2|m|}} t^\beta + C_m q_m^{\frac{1}{2|m|}} t^{\beta(1-\frac{1}{|m|})} |x|^{\frac{1}{|m|}}},$$

or $\beta(1 - \frac{1}{|m|}) < 0$ donc, pour t_0 suffisamment grand :

$$C_m q_m^{\frac{1}{2|m|}} t_0^{\beta(1-\frac{1}{|m|})} \leq \theta.$$

Nous pouvons également choisir a tel que $C_m a^{\frac{1}{2|m|}} t_0^\beta \leq \kappa$. Dans ce cas,

$$\mu \leq \frac{1}{\kappa + \theta |x|^{\frac{1}{|m|}}} \leq \tilde{u}_a(t_0, x)$$

et le principe de comparaison assure que pour tout $(t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}$,

$${}^{\iota}u(t, x) \leq \tilde{u}_a(t_0 + t, x).$$

Deuxième étape

Soit $T > 0$. Nous avons :

$$\sup_{0 \leq t \leq T} {}^{\iota}u(t, x) \leq \sup_{0 \leq t \leq T} \tilde{u}_a(t_0 + t, x) \leq \frac{1}{t_0^\beta} \left(a + q_m \frac{x^2}{(t_0 + T)^{2\beta}}\right)^{-\frac{1}{2|m|}}$$

et puisque $\frac{1}{2|m|} > 1$,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} {}^{\iota}u(t, x) \leq \frac{1}{t_0^\beta} \left(a^{\frac{1}{2|m|}} + q_m^{\frac{1}{2|m|}} \frac{x^{\frac{1}{|m|}}}{(t_0 + T)^{\frac{\beta}{|m|}}}\right)^{-1}.$$

En posant $\kappa_T = t_0^\beta a^{\frac{1}{2|m|}}$ et $\theta_T = q_m^{\frac{1}{2|m|}} \frac{t_0^\beta}{(t_0 + T)^{\beta/|m|}}$, nous obtenons le résultat attendu. $\square$

Soit ε et T deux réels strictement positifs tels que $\varepsilon < T$. Soit ${}^\mu X_\varepsilon$ une variable aléatoire de densité ${}^\mu u(\varepsilon, \cdot)$, indépendante de $(B_s, s \geq \varepsilon)$. Nous considérons l'E.D.S. suivante

$$(E_\varepsilon) \quad {}^\mu X_t = {}^\mu X_\varepsilon + \int_\varepsilon^t {}^\mu u^m(s, {}^\mu X_s) dB_s, \quad t \geq \varepsilon$$

où ${}^\mu u$ est la solution de $(E_{m,\mu})$.

Lemme 3.3

Soit $\mu \in \mathcal{L}^1$. Sous l'hypothèse $(\mathcal{H})$, l'équation (E_ε) admet une unique solution forte sur $[\varepsilon, T]$.

Démonstration du lemme 3.3

Première étape

La fonction ${}^\mu u$ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ et strictement positive sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, ${}^\mu u^m$ est localement lipschitzienne en sa deuxième variable, uniformément en $t \in [\varepsilon, T]$. D'après l'exercice 2.10 page 364 de [RY91], il existe un unique temps d'arrêt T_e appelé temps d'explosion et un unique processus $({}^\mu X_t, t \geq \varepsilon)$ tel que ${}^\mu X$ soit continu sur $[\varepsilon, T_e \wedge T[$ et vérifie, pour tout $\varepsilon \leq t < T_e \wedge T$ l'équation (E_ε) . De plus, si nous notons T_n le temps d'arrêt défini pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $T_n = \inf\{\varepsilon \leq t \leq T, |{}^\mu X_t| > n\}$, alors $T_e = \sup_n T_n$.

Deuxième étape

Il reste à voir que presque sûrement, $T_e = +\infty$. Soit $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Nous considérons la fonction ζ définie sur $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ par $\zeta(x) = |x|^\alpha$ et

construite sur $] -1, 1[$ de telle sorte que ζ soit de classe $\mathcal{C}^2$ et positive sur $\mathbb{R}$. D'après la formule d'Itô, nous avons :

$$\zeta({}^\mu X^{T \wedge T_n}) = \zeta({}^\mu X_\varepsilon) + \int_\varepsilon^{T \wedge T_n} \zeta'({}^\mu X_s) {}^\mu u^m(s, {}^\mu X_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_\varepsilon^{T \wedge T_n} \zeta''({}^\mu X_s) {}^\mu u^{2m}(s, {}^\mu X_s) ds.$$

Nous avons : $\mathbb{1}_{\{T_e \leq T\}} \zeta({}^\mu X_{T \wedge T_n}) \leq \zeta({}^\mu X_{T \wedge T_n})$ et sur $\{T_e \leq T\}$, $|{}^\mu X_{T \wedge T_n}| = n$. Nous obtenons alors successivement :

$$\begin{aligned} P(T_e \leq T) \zeta(n) &\leq E(\zeta({}^\mu X_{T \wedge T_n})) \\ &\leq E(\zeta({}^\mu X_\varepsilon)) + E\left(\int_\varepsilon^{T \wedge T_n} \zeta'({}^\mu X_s) {}^\mu u^m(s, {}^\mu X_s) dB_s\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} E\left(\int_\varepsilon^{T \wedge T_n} \zeta''({}^\mu X_s) {}^\mu u^{2m}(s, {}^\mu X_s) ds\right). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Nous allons montrer que les trois termes du membre de droite de (3.1.7) sont finis et ne dépendent pas de n .

Pour tout $s \in [\varepsilon, T]$, nous avons :

$${}^\mu u(s, x) \leq \frac{1}{\kappa_T + \theta_T |x|^{1/|m|}}.$$

Ainsi, d'après le lemme 3.2, nous obtenons :

$$E(\zeta({}^\mu X_\varepsilon)) = \int_{\mathbb{R}} \zeta(x) {}^\mu u(\varepsilon, x) dx \leq \int_{\mathbb{R}} \zeta(x) \frac{1}{\kappa_T + \theta_T |x|^{1/|m|}} dx,$$

et

$$\zeta(x) \frac{1}{\kappa_T + \theta_T |x|^{1/|m|}} = O_{\pm\infty}(|x|^{\alpha-1/|m|}), \quad (3.1.8)$$

avec $\alpha - \frac{1}{|m|} < -1$. Ainsi :

$$E(\zeta({}^\mu X_\varepsilon)) < +\infty.$$

D'autre part, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\begin{aligned}
E \left(\left| \int_{\varepsilon}^{T \wedge T_n} \zeta'({}^{\mu}X_s) {}^{\mu}u^m(s, {}^{\mu}X_s) dB_s \right| \right) &\leq \left(E \left(\int_{\varepsilon}^{T \wedge T_n} \zeta'({}^{\mu}X_s) {}^{\mu}u^m(s, {}^{\mu}X_s) dB_s \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(E \left(\int_{\varepsilon}^T (\zeta')^2({}^{\mu}X_s) {}^{\mu}u^{2m}(s, {}^{\mu}X_s) ds \right) \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_{\varepsilon}^T \int_{\mathbb{R}} (\zeta'(x))^2 {}^{\mu}u^{2m+1}(s, x) dx ds \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_{\varepsilon}^T \int_{\mathbb{R}} \frac{(\zeta'(x))^2}{(\kappa_T + \theta_T |x|^{\frac{1}{|m|}})^{2m+1}} dx ds \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\frac{(\zeta'(x))^2}{(\kappa_T + \theta_T |x|^{\frac{1}{|m|}})^{2m+1}} = O_{\pm\infty}(|x|^{2(\alpha-1) - \frac{2m+1}{|m|}}),$$

avec $2(\alpha-1) - \frac{2m+1}{|m|} < -1$. L'espérance majorée en (3.1.9) est donc finie et ne dépend pas de n .

De même, nous avons :

$$\begin{aligned}
E \left(\int_{\varepsilon}^{T \wedge T_n} \zeta''({}^{\mu}X_s) {}^{\mu}u^{2m}(s, {}^{\mu}X_s) ds \right) &\leq \int_{\varepsilon}^T \int_{\mathbb{R}} |\zeta''(x)| {}^{\mu}u^{2m+1}(s, x) dx ds \\
&\leq \int_{\varepsilon}^T \int_{\mathbb{R}} \frac{|\zeta''(x)|}{(\kappa_T + \theta_T |x|^{\frac{1}{|m|}})^{2m+1}} dx ds.
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

Cependant, nous avons :

$$\frac{|\zeta''(x)|}{(\kappa_T + \theta_T |x|^{\frac{1}{|m|}})^{2m+1}} = O_{\pm\infty}(|x|^{\alpha-2 - \frac{2m+1}{|m|}}), \tag{3.1.11}$$

et $\alpha-2 - \frac{2m+1}{|m|} < -1$. L'espérance majorée en (3.1.10) est donc finie et ne dépend pas de n .

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (3.1.7, nous obtenons :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} P(T_e \leq T) \zeta(n) < +\infty. \tag{3.1.12}$$

Ceci implique que $P(T_e \leq T) = 0$. Donc $P(T_e = +\infty) = 1$, c'est-à-dire que le processus n'explose pas sur $[\varepsilon, T]$. Il existe donc une solution de (E_ε) sur $[\varepsilon, T]$. $\square$

Remarque 3.4

Voici une autre démonstration du lemme 3.3. Nous allons montrer qu'il existe des constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$$\sup_{t \in [\varepsilon, T]} {}^\mu u^m(t, x) \leq C_1 + C_2|x|, \quad (3.1.13)$$

c'est-à-dire que ${}^\mu u^m$ est sous-linéaire à l'infini. La fonction ${}^\mu u^m$ étant par ailleurs localement lipschitzienne en x , l'exercice 2.10 page 383 de [RY91] permet de conclure que l'équation (E_ε) admet une unique solution forte sur $[\varepsilon, T]$.

A ε fixé, d'après les propriétés $(\mathcal{B})$ et $(\mathcal{E})$, il existe une constante K telle que, pour tout réel x , nous ayons :

$${}^\mu u(\varepsilon, x) \geq \frac{K}{1 + |x|^{\frac{1}{|m|}}}. \quad (3.1.14)$$

Soit $c > 0$ et v_c la solution de l'équation $(E_{m,c\delta_0})$. Il existe alors des constantes $\gamma_1(c) > 0$ et $\gamma_2(c) > 0$, telles que :

$$v_c(t, x) = \frac{\gamma_1(c)}{t^\beta} \left(\gamma_2(c) + \frac{x^2}{t^{2\beta}} \right)^{\frac{1}{2m}}, \quad (3.1.15)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} v_c(t, x) dx = \gamma_1(c) \int_{\mathbb{R}} (\gamma_2(c) + y^2)^{\frac{1}{2m}} dy = c, \quad (3.1.16)$$

d'où $\lim_{c \rightarrow 0} \gamma_1(c) = 0$.

Ainsi, au vu de la forme explicite de v_c (cf. (3.1.15)), nous pouvons choisir c suffisamment petit pour que pour tout nombre réel x , nous ayons :

$${}^\mu u(\varepsilon, x) \geq v_c(\varepsilon, x).$$

Le principe de comparaison implique alors que pour tout nombre réel x et tout $t \geq \varepsilon$,

$${}^\mu u(t, x) \geq v_c(t, x), \quad (3.1.17)$$

et donc :

$${}^\mu u(t, x) \geq \frac{\gamma_1(c)}{t^\beta} \left(\gamma_2(c) + \frac{x^2}{t^{2\beta}} \right)^{\frac{1}{2m}}. \quad (3.1.18)$$

Comme m est négatif, nous avons alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \geq \varepsilon$:

$$\mu u^m(t, x) \leq \frac{(\gamma_1(c))^m}{t^{\beta m}} \left(\gamma_2(c) + \frac{x^2}{t^{2\beta}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1.19)$$

La majoration (3.1.13) en découle aisément.

Démonstration du théorème 3.1

Première étape

D'après le lemme 3.3, pour tous réels ε et T tels que $\varepsilon < T$, il existe une solution à $(S_{m,\mu})$ sur l'intervalle $[\varepsilon, T]$. Nous notons $P_{\varepsilon,T}$ la loi sur $\mathcal{C}([\varepsilon, T])$ du processus solution $({}^\mu X_t, \varepsilon \leq t \leq T)$. Puisque la solution de $(S_{m,\mu})$ est unique et que le processus ${}^\mu X$ est markovien, la famille de probabilité $P_{\varepsilon,T}$ forme un système projectif. Nous pouvons alors construire une probabilité P sur $\mathcal{C}([0, +\infty[)$ telle que $P|_{\mathcal{C}([\varepsilon, T])} = P_{\varepsilon,T}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t > \varepsilon$, le processus des coordonnées $({}^\mu X_t)$ vérifie l'équation (E_ε) .

Deuxième étape

Il faut maintenant montrer que sous la probabilité P , il existe une variable aléatoire ${}^\mu X_0$ de densité μ telle que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} {}^\mu X_\varepsilon = {}^\mu X_0$ presque sûrement. Nous procédons comme dans le cas de (S_{m,δ_0}) : pour tout $T > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} E|{}^\mu X_t| &= \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}} |x| \mu u(t, x) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |x| \sup_{0 \leq t \leq T} \mu u(t, x) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{\kappa_T + \theta_T |x|^{\frac{1}{|m|}}} dx < +\infty \end{aligned}$$

d'après le lemme 3.2. En opérant comme dans la démonstration du théorème 2.1, nous montrons que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} {}^\mu X_\varepsilon$ existe presque sûrement. Nous notons ${}^\mu X_0$ cette limite. Il reste à déterminer sa loi.

Soit f une fonction continue et bornée. Nous avons :

$$\begin{aligned} \left| E(f({}^\mu X_\varepsilon)) - \int_{\mathbb{R}} \mu(x) f(x) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) ({}^\mu u(\varepsilon, x) - \mu(x)) dx \right| \\ &\leq \|f\|_\infty \|{}^\mu u(\varepsilon, \cdot) - {}^\mu u(0, \cdot)\|_{\mathcal{L}^1} \end{aligned}$$

or d'après la propriété (C), $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|{}^\mu u(\varepsilon, \cdot) - {}^\mu u(0, \cdot)\|_{\mathcal{L}^1} = 0$, donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E(f({}^\mu X_\varepsilon)) = \int_{\mathbb{R}} \mu(x) f(x) dx.$$

Étant donné que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E(f({}^\mu X_\varepsilon)) = E(f({}^\mu X_0))$, nous obtenons :

$$E(f({}^\mu X_0)) = \int_{\mathbb{R}} \mu(x) f(x) dx$$

c'est-à-dire, ${}^\mu X_0$ admet pour densité la fonction μ .

Troisième étape

Nous allons montrer que pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact, le processus $(N_t, t \geq 0)$ défini par :

$$N_t = f({}^\mu X_t) - f({}^\mu X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t {}^\mu u^{2m}(s, {}^\mu X_s) f''({}^\mu X_s) ds, \quad (3.1.20)$$

est une P-martingale.

Pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons d'après la formule d'Itô :

$$f({}^\mu X_t) = f({}^\mu X_\varepsilon) + \int_\varepsilon^t {}^\mu u^m(s, {}^\mu X_s) f'({}^\mu X_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_\varepsilon^t {}^\mu u^{2m}(s, {}^\mu X_s) f''({}^\mu X_s) ds. \quad (3.1.21)$$

Le processus $(N_t, t \geq \varepsilon)$ est donc une P-martingale.

D'autre part, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f({}^\mu X_\varepsilon) = f({}^\mu X_0)$ presque sûrement, et dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ par convergence dominée.

Pour tout $t > 0$, nous avons donc :

$$\begin{aligned} &E \left(\left| \int_0^t {}^\mu u^{2m}(s, {}^\mu X_s) f''({}^\mu X_s) ds - \int_\varepsilon^t {}^\mu u^{2m}(s, {}^\mu X_s) f''({}^\mu X_s) ds \right| \right) \\ &\leq \int_0^\varepsilon E({}^\mu u^{2m}(s, {}^\mu X_s) |f''({}^\mu X_s)|) ds \\ &\leq \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}} {}^\mu u^{2m+1}(s, x) |f''(x)| dx ds. \end{aligned}$$

En utilisant la propriété (D), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \mu u^{2m+1}(s, x) |f''(x)| dx ds &\leq \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \frac{C}{s^{\beta(2m+1)}} |f''(x)| dx ds \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f''(x)| dx \int_0^\varepsilon \frac{C}{s^{\frac{2m+1}{2m+2}}} ds \\ &\leq \varepsilon^{\frac{1}{2m+2}} C(f). \end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{(2m+2)} > 0$, alors nous avons : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\frac{1}{2m+2}} = 0$ et donc

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_\varepsilon^t \mu u^{2m}(s, {}^\mu X_s) f''({}^\mu X_s) ds = \frac{1}{2} \int_0^t \mu u^{2m}(s, {}^\mu X_s) f''({}^\mu X_s) ds \quad \text{dans } \mathcal{L}^1(\mathbb{R}).$$

Ainsi, $(N_t, t \geq 0)$ est une P-martingale et le processus $({}^\mu X_t, t \geq 0)$ est solution du problème des martingales. Le théorème de Stroock et Varadhan (cf. [KS91] page 318) affirme que $({}^\mu X_t, t \geq 0)$ est une solution faible sous P de $(S_{m,\mu})$.

Quatrième étape

L'unicité en loi de la solution de $(S_{m,\mu})$ résulte de l'unicité de la solution de $(E_{m,\mu})$ et du caractère markovien de la solution. $\square$

3.2 Théorème de renormalisation

Soit μ une densité vérifiant les hypothèses du Théorème 3.1. Pour tout $\lambda > 0$, nous posons :

$$\mu_\lambda(x) := \frac{1}{\lambda} \mu\left(\frac{x}{\lambda}\right), \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.2.22)$$

μ_λ est alors une densité qui vérifie les hypothèses du Théorème 3.1. De plus, lorsque λ tend vers 0, μ_λ tend étroitement vers δ_0 .

Nous notons $({}^\mu X, {}^\mu u)$ la solution de (S_{m,μ_λ}) .

Théorème 3.5

(i) Soit $({}^\mu X_t^\lambda, t \geq 0)$, défini par :

$${}^\mu X_t^\lambda := \lambda {}^\mu X_{\frac{t}{\lambda^{2m+2}}}, \quad (3.2.23)$$

où $({}^\mu X, {}^\mu u)$ est solution de $(S_{m,\mu})$. Alors, nous avons :

$$({}^\mu X_t^\lambda, t \geq 0) \stackrel{Loi}{=} ({}^\mu X_t, t \geq 0). \quad (3.2.24)$$

(ii) Pour tout $m \in \left] \frac{-3 + \sqrt{5}}{4}, 0 \right[$, les processus ${}^\mu X^\lambda$ et ${}^\mu X$ convergent en loi, lorsque λ tend vers 0, vers ${}^0 X$, où $({}^0 X, {}^0 u)$ est la solution du problème (S_{m,δ_0}) .

Remarque 3.6

1. Ce théorème affirme que le processus $({}^\mu X_t, t \geq 0)$, convenablement renormalisé, converge vers la solution du problème correspondant à $\mu = \delta_0$.
2. L'intervalle $\left] \frac{-3 + \sqrt{5}}{4}, 0 \right[$ est inclus strictement dans $\left] -\frac{1}{2}, 0 \right[$. Nous ne savons pas démontrer ce Théorème pour tout $m \in \left] -\frac{1}{2}, 0 \right[$.

Démonstration du théorème 3.5

- démonstration du point (i) :

Nous notons $({}^\mu X, {}^\mu u)$ la solution de $(S_{m,\mu})$. Nous allons d'abord vérifier que le processus $({}^\mu X_t^\lambda, t \geq 0)$ a même loi que $({}^\mu X_t^\lambda, t \geq 0)$.

Nous commençons par calculer la densité de ${}^\mu X_t^\lambda$. Soit f une fonction borélienne. Nous avons

$$\begin{aligned} E[f({}^\mu X_t^\lambda)] &= E[f(\lambda {}^\mu X_{\frac{t}{\lambda^{2m+2}}})] \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\lambda x) {}^\mu u\left(\frac{t}{\lambda^{2m+2}}, x\right) dx. \end{aligned}$$

Par le changement de variable $y = \lambda x$, nous obtenons :

$$E[f({}^\mu X_t^\lambda)] = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\lambda} {}^\mu u \left(\frac{t}{\lambda^{2m+2}}, \frac{y}{\lambda} \right) dy. \quad (3.2.25)$$

Donc ${}^\mu X_t^\lambda$ a pour densité :

$${}^\mu u_\lambda(t, \cdot) := \frac{1}{\lambda} {}^\mu u \left(\frac{t}{\lambda^{2m+2}}, \frac{\cdot}{\lambda} \right). \quad (3.2.26)$$

En particulier, pour $t = 0$, ${}^\mu X_0^\lambda$ a pour densité μ_λ .

Par définition de ${}^\mu X$, nous avons :

$${}^\mu X_t = {}^\mu X_0 + \int_0^t {}^\mu u^m(s, {}^\mu X_s) dB_s,$$

donc

$$\lambda {}^\mu X_{\frac{t}{\lambda^{2m+2}}} = \lambda {}^\mu X_0 + \int_0^{\frac{t}{\lambda^{2m+2}}} \lambda {}^\mu u^m(s, {}^\mu X_s) dB_s. \quad (3.2.27)$$

En posant $r = \lambda^{2m+2}s$, nous avons :

$${}^\mu X_t^\lambda = {}^\mu X_0^\lambda + \int_0^t \left[\lambda {}^\mu u^m \left(\frac{r}{\lambda^{2m+2}}, X_{\frac{r}{\lambda^{2m+2}}} \right) \frac{1}{\lambda^{m+1}} \right] \frac{1}{\lambda^{m+1}} dB_{\frac{r}{\lambda^{2m+2}}}. \quad (3.2.28)$$

Nous posons, pour tout réel r positif :

$$B'_r = \lambda^{m+1} B_{\frac{r}{\lambda^{2m+2}}}. \quad (3.2.29)$$

B' est alors un mouvement brownien et vérifie :

$$dB'_r = \lambda^{m+1} \frac{1}{\lambda^{2m+2}} dB_{\frac{r}{\lambda^{2m+2}}} = \frac{1}{\lambda^{m+1}} dB_{\frac{r}{\lambda^{2m+2}}}.$$

Donc, nous avons :

$${}^\mu X_t^\lambda = {}^\mu X_0^\lambda + \int_0^t \left(\frac{1}{\lambda} {}^\mu u \left(\frac{r}{\lambda^{2m+2}}, \frac{{}^\mu X_r^\lambda}{\lambda} \right) \right)^m dB'_r.$$

Ainsi $({}^\mu X^\lambda, {}^\mu u_\lambda)$ est solution de (S_{m,μ_λ}) , ${}^\mu X^\lambda$ a donc même loi que le processus ${}^{\mu_\lambda} X$ et ${}^\mu u_\lambda = {}^{\mu_\lambda} u$.

- démonstration du point (ii) :

Cette démonstration se fait en quatre étapes :

1. Soit P^λ la loi du processus ${}^\mu X$ (ou celle donc du processus ${}^\mu X^\lambda$). Nous montrons que la famille de lois $(P^\lambda)_{\lambda>0}$ est relativement compacte.
2. Soit pour $f \in \mathcal{C}^2$, à support compact, le processus $(M_t^\lambda, t \geq 0)$, défini par :

$$M_t^\lambda := f({}^\mu X_t) - f({}^\mu X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t f''({}^\mu X_s) {}^\mu u(s, {}^\mu X_s) ds, \quad (3.2.30)$$

et soit Q^λ la loi de M^λ . Nous montrons que la famille de probabilités $(Q^\lambda)_{\lambda>0}$ est relativement compacte.

3. Soit $(\widetilde{M}_t^\lambda, t \geq 0)$, le processus défini par :

$$\widetilde{M}_t^\lambda := f({}^\mu X_t) - f({}^\mu X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t f''({}^\mu X_s) {}^0 u(s, {}^\mu X_s) ds, \quad (3.2.31)$$

où ${}^0 u$ est la densité de Barenplatt-Pattle donnée en (2.1.7). Nous montrons que les lois des processus M^λ et $\widetilde{M}^\lambda$ ont les mêmes points adhérents quand λ tend vers 0.

4. Nous concluons.

Première étape

Nous notons P^λ la loi du processus ${}^\mu X$. C'est une probabilité sur $\mathcal{C}([0, +\infty[)$. Nous allons montrer que la famille de lois $(P^\lambda)_{\lambda>0}$ est relativement compacte.

Pour tout entier $n \geq 1$, nous définissons la fonction ξ_n de la façon suivante :

$$\begin{cases} \xi_n(x) = x & \text{si } x \in [-n, n] \\ \xi_n(x) = n + 1 & \text{si } x \geq n + 1 \\ \xi_n(x) = -(n + 1) & \text{si } x \leq -(n + 1) \end{cases}$$

et nous construisons ξ_n sur $[-(n + 1), -n] \cup]n, n + 1[$ de sorte que $\|\xi_n\|_\infty \leq n + 1$ et que ξ_n soit de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Pour tout réel $\lambda > 0$, nous notons $P^{\lambda,n}$, la loi de probabilité du processus $(\xi_n(X_t^\lambda), t \geq 0)$. A n fixé, nous allons montrer que la famille $(P^{\lambda,n})_{\lambda>0}$ est tendue. D'après Karatzas et Schreve (cf. [KS91], page 64), la tension de la famille $(P^{\lambda,n})_{\lambda>0}$ va résulter du lemme suivant :

Lemme 3.7

Il existe trois réels strictement positifs α , γ et ν tels que :

$$(i) \quad \sup_{\lambda > 0} E(|\xi_n(\mu_\lambda X_0)|^\nu) < \infty \quad (3.2.32)$$

$$(ii) \quad \text{Pour tout réel } T > 0, \text{ il existe } C(T) > 0 \text{ tel que}$$

$$\sup_{\lambda > 0} E(|\xi_n(\mu_\lambda X_t) - \xi_n(\mu_\lambda X_s)|^\alpha) \leq C(T)|t - s|^{1+\gamma}, \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T. \quad (3.2.33)$$

Démonstration du Lemme 3.7**Démonstration de (3.2.32)**

Nous avons $\sup_{\lambda > 0} E(|\xi_n(\mu_\lambda X_0)|) \leq n + 1$, donc le point (i) est vérifié avec $\nu = 1$.

Démonstration de (3.2.33)

En appliquant la formule d'Itô, nous obtenons à n fixé

$$\begin{aligned} \xi_n(\mu_\lambda X_t) - \xi_n(\mu_\lambda X_s) &= \int_s^t \xi'_n(\mu_\lambda X_r) d\mu_\lambda X_r + \frac{1}{2} \int_s^t \xi''_n(\mu_\lambda X_r) d\langle \mu_\lambda X, \mu_\lambda X \rangle_r \\ &= \int_s^t \xi'_n(\mu_\lambda X_r) (\mu_\lambda u)^m(r, \mu_\lambda X_r) dB_r + \frac{1}{2} \int_s^t \xi''_n(\mu_\lambda X_r) (\mu_\lambda u)^{2m}(r, \mu_\lambda X_r) dr. \end{aligned}$$

Soit $p > 1$. Il existe alors une constante C_p telle que :

$$\begin{aligned} |\xi_n(\mu_\lambda X_t) - \xi_n(\mu_\lambda X_s)|^{2p} &\leq C_p \left(\left| \int_s^t \xi'_n(\mu_\lambda X_r) (\mu_\lambda u)^m(r, \mu_\lambda X_r) dB_r \right|^{2p} \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_s^t \xi''_n(\mu_\lambda X_r) (\mu_\lambda u)^{2m}(r, \mu_\lambda X_r) dr \right|^{2p} \right). \quad (3.2.34) \end{aligned}$$

Nous majorons séparément les espérances des deux termes du membre de droite de (3.2.34).

Majoration du premier terme de (3.2.34) :

D'après l'inégalité de Burkolder-Davis-Gundy, il existe une constante k_p telle que pour tout $s, t \in [0, T]$, nous avons :

$$\begin{aligned} E \left(\left| \int_s^t (\xi'_n)^{(\mu_\lambda X_r)} (\mu_\lambda u)^m(r, \mu_\lambda X_r) dB_r \right|^{2p} \right) \\ \leq E \left(\left[\int_s^t (\xi'_n)^2 (\mu_\lambda X_r) (\mu_\lambda u)^{2m}(r, \mu_\lambda X_r) dr \right]^p \right). \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

Par l'inégalité de Hölder, nous obtenons :

$$\left[\int_s^t (\xi'_n)^2 (\mu_\lambda X_r) (\mu_\lambda u)^{2m}(r, \mu_\lambda X_r) dr \right]^p \leq |t-s|^{p-1} \int_s^t (\xi'_n)^{2p} (\mu_\lambda X_r) (\mu_\lambda u)^{2mp}(r, \mu_\lambda X_r) dr.$$

Or, nous avons :

$$E \left(\int_s^t (\xi'_n)^{2p} (\mu_\lambda X_r) (\mu_\lambda u)^{2mp}(r, \mu_\lambda X_r) dr \right) \leq \int_s^t \int_{\mathbb{R}} |\xi'_n|^{2p}(x) (\mu_\lambda u)^{2mp+1}(r, x) dx dr.$$

Par ailleurs, lorsque $1 < p < \frac{1}{2|m|}$, nous avons

$$2mp + 1 > 0 \quad \text{et} \quad \|(\mu_\lambda u)^{2m+1}(r, \cdot)\|_\infty \leq C r^{-\beta(2mp+1)}, \quad (3.2.36)$$

où la constante C ne dépend ni de r , ni de λ .

En effet, d'après la propriété $\mathcal{D}$, nous avons $\|u(t, \cdot)\|_\infty \leq C t^{-\beta}$ pour tout $t > 0$, et donc :

$$\|(\mu_\lambda u)(t, \cdot)\|_\infty \leq \lambda^{-1} C \lambda^{(2m+2)\beta} t^{-\beta} \leq c t^{-\beta}. \quad (3.2.37)$$

Ainsi,

$$\int_s^t \int_{\mathbb{R}} |\xi'_n|^{2p}(x) (\mu_\lambda u)^{2mp+1}(r, x) dx dr \leq \int_{\mathbb{R}} |\xi'_n|^{2p}(x) dx \int_s^t \frac{C}{r^{\beta(2mp+1)}} dr.$$

Par construction, ξ'_n est à support borné donc :

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi'_n|^{2p}(x) dx = M < \infty. \quad (3.2.38)$$

Comme $\beta(2mp+1) \neq 1$, nous avons :

$$\int_s^t \frac{C}{r^{\beta(2mp+1)}} dr = C(t^{-\beta(2mp+1)+1} - s^{-\beta(2mp+1)+1}). \quad (3.2.39)$$

Par ailleurs, puisque $-\beta(2mp+1)+1 < 1$, nous avons :

$$\int_s^t \frac{C}{r^{\beta(2mp+1)}} dr \leq C|t-s|^{-\beta(2mp+1)+1}.$$

Par conséquent, nous obtenons :

$$E\left(C_p \left| \int_s^t \xi_n'(\mu_\lambda X_r)(\mu_\lambda u)^m(r, \mu_\lambda X_r) dB_r \right|^{2p}\right) \leq C|t-s|^{p-\beta(2mp+1)}.$$

Majoration du deuxième terme de (3.2.34) :

Nous majorons maintenant $E\left(C_p \left| \int_s^t \xi_n''(\mu_\lambda X_r)(\mu_\lambda u)^{2m}(r, \mu_\lambda X_r) \right|^{2p}\right)$. Avec l'inégalité de Hölder, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t \xi_n''(\mu_\lambda X_r)(\mu_\lambda u)^{2m}(r, \mu_\lambda X_r) dr \right|^{2p} &\leq |t-s|^{2p-1} \left| \int_s^t (\xi_n'')^{2p}(\mu_\lambda X_r)(\mu_\lambda u)^{4mp}(r, \mu_\lambda X_r) dr \right| \\ &\leq |t-s|^{2p-1} \int_s^t |\xi_n''|^{2p}(\mu_\lambda X_r) |\mu_\lambda u|^{4mp}(r, \mu_\lambda X_r) dr. \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons

$$E\left(\int_s^t |\xi_n''|^{2p}(\mu_\lambda X_r) |\mu_\lambda u|^{4mp+1}(r, \mu_\lambda X_r) dr\right) = \int_s^t \int_{\mathbb{R}} |\xi_n''|^{2p}(x) |\mu_\lambda u|^{4mp+1}(r, x) dx dr.$$

Lorsque $1 < p < \frac{1}{4|m|}$, nous avons :

$$4mp+1 > 0 \quad \text{et} \quad \|(\mu_\lambda u)^{4m+1}(r, \cdot)\|_\infty \leq Cr^{-\beta(4mp+1)}. \quad (3.2.40)$$

Ainsi :

$$\int_s^t \int_{\mathbb{R}} |\xi_n''|^{2p}(x) |\mu_\lambda u|^{4mp+1}(r, x) dx dr \leq \int_{\mathbb{R}} |\xi_n''|^{2p}(x) dx \int_s^t \frac{C}{r^{\beta(4mp+1)}} dr.$$

Comme précédemment, nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi_n''|^{2p}(x) dx = \widetilde{M} < \infty. \quad (3.2.41)$$

Par ailleurs, comme nous avons $\beta(4m+1) \neq 1$ et $-\beta(2m+1)+1 < 1$, alors nous pouvons écrire :

$$\int_s^t \frac{C}{r^{\beta(4mp+1)}} dr \leq C|t-s|^{-\beta(4mp+1)+1}.$$

Ainsi,

$$E\left(C_p \left| \int_s^t \xi_n''(\mu_\lambda X_r)(\mu_\lambda u)^{2m}(r, \mu_\lambda X_r) \right|^{2p}\right) \leq C|t-s|^{2p-\beta(4mp+1)}.$$

Nous constatons alors que $p - \beta(2mp + 1)$ et $2p - \beta(4mp + 1)$ sont strictement supérieurs à 1 si et seulement si $p > \frac{2m+3}{2}$.

Nous posons alors :

$$\gamma_1 = p - \beta(2mp + 1) - 1 \quad \text{et} \quad \gamma_2 = 2p - \beta(4mp + 1) - 1.$$

Lorsque $p \in]\frac{2m+3}{2}; \frac{1}{4|m}]$, nous pouvons écrire pour tout $s, t \in [0, T]$,

$$\sup_{\lambda > 0} E(|\xi_n(\mu_\lambda X_t) - \xi_n(\mu_\lambda X_s)|^{2p}) \leq C(|t-s|^{1+\gamma_1} + |t-s|^{1+\gamma_2}).$$

L'intervalle $I_m =]\frac{2m+3}{2}; \frac{1}{4|m}]$ est non vide lorsque $m \in]\frac{-3+\sqrt{5}}{4}, 0[$, et pour p choisi dans I_m , il existe une constante $C(T)$ telle que pour tout $s, t \in [0, T]$, nous avons :

$$\sup_{\lambda > 0} E(|\xi_n(\mu_\lambda X_t) - \xi_n(\mu_\lambda X_s)|^{2p}) \leq C(T)|t-s|^{1+\gamma}, \quad (3.2.42)$$

où nous avons posé $\gamma = \inf \{\gamma_1, \gamma_2\}$.

Ceci achève la démonstration de (3.2.34), avec $\alpha = 2p$. $\square$

Ainsi, la famille $(P^{\lambda, n})_{\lambda > 0}$ est tendue. Elle possède donc un point adhérent P^n . Par construction, la famille de probabilités $(P^n)_{n \geq 1}$ est projective et cette suite induit donc une probabilité P sur $\mathcal{C}([0, +\infty[)$. Il est clair que P est un point adhérent à la famille de probabilités $(P^\lambda)_{\lambda > 0}$ et que sous P , le processus des coordonnées de $\mathcal{C}([0, +\infty[)$ est une martingale, car $(\mu_\lambda X_t, t \geq 0)$ est une martingale.

Deuxième étape

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à support compact.

Nous définissons le processus $(M_t^\lambda; t \geq 0)$ par :

$$M_t^\lambda = f(\mu_\lambda X_t) - f(\mu_\lambda X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t f''(\mu_\lambda X_s)(\mu_\lambda u)^{2m}(s, \mu_\lambda X_s) ds. \quad (3.2.43)$$

Nous notons Q^λ la loi du processus M^λ . C'est également une probabilité sur $\mathcal{C}([0, +\infty[)$.

Lemme 3.8

La famille $(Q^\lambda)_{\lambda>0}$ est tendue.

Démonstration du Lemme 3.8

Nous avons, d'après la formule d'Itô,

$$M_t^\lambda = \int_0^t f'(\mu_\lambda X_s)(\mu_\lambda u)^m(s, \mu_\lambda X_s) dB_s. \quad (3.2.44)$$

Donc $(M_t^\lambda; t \geq 0)$ est une martingale locale. Nous appliquons le critère de tension, énoncé dans le Lemme 3.7.

Il nous faut donc démontrer l'existence de trois constantes $p > 0$, $\gamma > 0$ et $\nu < 0$ telles que :

$$(i) \quad \sup_{\lambda>0} E(|M_0^\lambda|^\nu) < \infty \quad (3.2.45)$$

$$(ii) \quad \text{Pour tout réel } T > 0, \text{ il existe } C(T) > 0 \text{ tel que} \\ \sup_{\lambda>0} E(|M_t^\lambda - M_s^\lambda|^{2p}) \leq C(T)|t - s|^{1+\gamma}, \quad \forall 0 \leq s \leq t \leq T. \quad (3.2.46)$$

Démonstration de (3.2.45)

Nous avons $E(|M_0^\lambda|) = 0$, donc le point (i) est vérifié avec $\nu = 1$.

Démonstration de (3.2.46)

$$E(|M_t^\lambda - M_s^\lambda|^{2p}) = E\left(\left|\int_s^t f'(\mu_\lambda X_s)(\mu_\lambda u)^m(s, \mu_\lambda X_s) dB_s\right|^{2p}\right)$$

donc par le Théorème de Burkholder–Davis–Gundy

$$E(|M_t^\lambda - M_s^\lambda|^{2p}) \leq C_p E\left[\left(\int_s^t (f')^2(\mu_\lambda X_s)(\mu_\lambda u)^{2m}(s, \mu_\lambda X_s) ds\right)^p\right].$$

En utilisant la même démarche que celle utilisée pour prouver (3.2.34), nous avons :

$$E(|M_t^\lambda - M_s^\lambda|^{2p}) \leq C_{p,T}|t - s|^{1+\gamma}$$

où p et γ sont obtenus de la même manière que précédemment. La famille $(Q^\lambda)_{\lambda>0}$ est donc tendue. $\square$

La famille $(Q^\lambda)_{\lambda>0}$ possède un point adhérent Q . De plus, sous la probabilité Q , le processus $(M_t^\lambda; 0 \leq t \leq T)$ est une martingale.

Troisième étape

Pour tout $\lambda > 0$, nous notons :

$$\xi_\lambda := \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{1}{2} \int_0^t (\mu_\lambda u)^{2m}(s, \mu_\lambda X_s) f''(\mu_\lambda X_s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t {}^0u^{2m}(s, \mu_\lambda X_s) f''(\mu_\lambda X_s) ds \right|, \quad (3.2.47)$$

où ${}^0u(t, \cdot)$ est la densité de Barenblatt Pattle donné en (2.1.7).

Lemme 3.9

Pour tout $\alpha > 0$, nous avons :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} P^\lambda(\xi_\lambda > \alpha) = 0. \quad (3.2.48)$$

Démonstration du Lemme 3.9

Nous avons :

$$\begin{aligned} E^\lambda(\xi_\lambda) &\leq \frac{1}{2} E^\lambda \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \left| (\mu_\lambda u)^{2m} - {}^0u^{2m} \right| (s, \mu_\lambda X_s) |f''(\mu_\lambda X_s)| ds \right) \\ &\leq \frac{1}{2} E^\lambda \left(\int_0^T \left| (\mu_\lambda u)^{2m} - {}^0u^{2m} \right| (s, \mu_\lambda X_s) |f''(\mu_\lambda X_s)| ds \right) \end{aligned} \quad (3.2.49)$$

$$(3.2.50)$$

et

$$\begin{aligned} &E^\lambda \left(\int_0^T \left| (\mu_\lambda u)^{2m} - {}^0u^{2m} \right| (s, \mu_\lambda X_s) |f''(\mu_\lambda X_s)| ds \right) \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \left| (\mu_\lambda u)^{2m} - {}^0u^{2m} \right| (s, x) |f''(x)| \mu_\lambda u(s, x) dx ds. \end{aligned} \quad (3.2.51)$$

Nous notons :

$$\theta(t, x) := t^\rho (\mu_u(t, x) - {}^0u(t, x)) \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{1}{m+1}. \quad (3.2.52)$$

Ainsi nous avons :

$$\mu_u(t, x) = {}^0u(t, x) + \frac{\theta(t, x)}{t^\rho}, \quad (3.2.53)$$

et

$$\begin{aligned} \mu_{\lambda u}(t, x) &= \frac{1}{\lambda} \mu_u \left(\frac{t}{\lambda^{2m+2}}, \frac{x}{\lambda} \right) = \frac{1}{\lambda} {}^0u \left(\frac{t}{\lambda^{2m+2}}, \frac{x}{\lambda} \right) + \frac{\lambda^{(2m+2)\rho-1}}{t^\rho} \theta \left(\frac{t}{\lambda^{2m+2}}, \frac{x}{\lambda} \right) \\ &= \frac{\lambda^{(2m+2)\beta}}{\lambda t^\beta} \varphi \left(\frac{x \lambda^{(2m+2)\beta}}{\lambda t^\beta} \right) + \frac{\lambda}{t^\rho} \theta \left(\frac{t}{\lambda^{2m+2}}, \frac{x}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que :

$$\mu_{\lambda u}(t, x) = {}^0u(t, x) + \frac{\lambda}{t^\rho} \theta \left(\frac{t}{\lambda^{2m+2}}, \frac{x}{\lambda} \right)$$

et

$$|\mu_{\lambda u}(t, x) - {}^0u(t, x)| = \frac{\lambda}{t^\rho} \left| \theta \left(\frac{t}{\lambda^{2m+2}}, \frac{x}{\lambda} \right) \right|.$$

Or d'après [V93], $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\theta(t, \cdot)\|_\infty = 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0, T]$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \mu_{\lambda u}(t, x) = {}^0u(t, x)$$

et

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} |(\mu_{\lambda u})^{2m} - {}^0u^{2m}|(s, x) |f''(x)| \mu_{\lambda u}(s, x) = 0.$$

Notons K le support de f et $M = \|f''\|_\infty$.

Par la propriété $\mathcal{D}$ et la définition de 0u , nous avons alors, pour tout $\lambda > 0$, tout $t \in]0, T]$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & \left| (\mu_{\lambda u})^{2m} - {}^0u^{2m} \right| (s, x) |f''(x)| \mu_{\lambda u}(s, x) \\ & \leq \left((\mu_{\lambda u})^{2m+1}(s, x) + {}^0u^{2m}(s, x) \mu_{\lambda u}(s, x) \right) M \mathbb{1}_K(x) \\ & \leq \left[\frac{C}{t^{\beta(2m+1)}} + \frac{C}{t^\beta} \frac{1}{t^{2m\beta}} (a_m + q_m x^2) \right] M \mathbb{1}_K(x). \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$|(\mu_\lambda u)^{2m} - {}^0u^{2m}|(s, x)|f''(x)|\mu_\lambda u(s, x) \leq \frac{C}{t^{\beta(2m+1)}}(c + x^2)\mathbf{1}_K.$$

Le membre de droite est intégrable car K est compact et $\beta(2m + 1) < 1$. D'après le théorème de convergence dominée, nous avons donc $\lim_{\lambda \rightarrow 0} E^\lambda(\xi_\lambda) = 0$ et pour tout $\alpha > 0$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} P^\lambda(\xi_\lambda > \alpha) = 0.$$

Ceci prouve (3.2.48). $\square$

Ainsi, nous avons :

$$\left| \frac{1}{2} \int_0^\cdot (\mu_\lambda u)^{2m}(s, \mu_\lambda X_s) f''(\mu_\lambda X_s) ds - \frac{1}{2} \int_0^\cdot {}^0u^{2m}(s, \mu_\lambda X_s) f''(\mu_\lambda X_s) ds \right| \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{loi} 0. \quad (3.2.54)$$

Ainsi les lois des processus $(M_t^\lambda; 0 \leq t \leq T)$ définis par (3.2.43) et les lois des processus $(\widetilde{M}_t^\lambda; 0 \leq t \leq T)$ défini par :

$$\widetilde{M}_t^\lambda = f(\mu_\lambda X_t) - f(\mu_\lambda X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t f''(\mu_\lambda X_s) {}^0u^{2m}(s, \mu_\lambda X_s) ds,$$

ont les mêmes points adhérents, quand λ tend vers 0. Nous rappelons que la loi de $(M_t^\lambda; 0 \leq t \leq T)$ est Q^λ .

Quatrième étape

Soit $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ une suite convergeant vers 0 telle que $(P^{\lambda_n})_{n \geq 0}$ converge vers P . La famille $(Q^{\lambda_n})_{n \geq 0}$ étant relativement compacte, elle possède un point adhérent Q , qui est une probabilité. Ainsi, il existe une suite extraite $(\lambda'_n)_{n \geq 0}$ telle que $(P^{\lambda'_n})_{n \geq 0}$ et $(Q^{\lambda'_n})_{n \geq 0}$ convergent respectivement vers P et Q .

Soit $(W_t, t \geq 0)$ le processus des coordonnées de l'espace $\mathcal{C}[0, +\infty[$. Nous avons donc :

1. Sous P , $(W_t, t \geq 0)$ est une martingale, car $(\mu_\lambda X_t, t \geq 0)$ est une martingale.

2. Sous Q , $(W_t, t \geq 0)$ est une martingale, car $(M_t^\lambda, t \geq 0)$ est une martingale.

Ainsi, sous P , le processus $(\mathcal{N}_t, t \geq 0)$ défini par :

$$\mathcal{N}_t := f(W_t) - f(W_0) - \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_s) ({}^0u)^{2m}(s, W_s) ds, \quad (3.2.55)$$

est une martingale.

Dans ces conditions, il est alors classique, (cf. Karatzas et Schreve [KS91], page 314), qu'il existe un mouvement brownien $(B_t'', t \geq 0)$ défini sur $\mathcal{C}[0, +\infty[$, tel que :

$$W_t = W_0 + \int_0^t {}^0u^m(s, W_s) dB_s''. \quad (3.2.56)$$

Ainsi la loi du processus $(W_t, t \geq 0)$ est celle du processus $({}^0X_t, t \geq 0)$ tel que $({}^0X, {}^0u)$ soit solution de (S_{m,δ_0}) . Or P^λ , la loi du processus $({}^\mu X_t, t \geq 0)$ converge, quand λ tend vers 0, vers P . Ce qui achève la démonstration du Théorème 3.5.

□

Deuxième partie

Etude asymptotique du temps de ruine et de l'overshoot

Chapitre 4

Introduction

4.1 Le temps de ruine et l'overshoot

Nous nous intéressons ici au problème suivant : une compagnie d'assurance, à l'instant initial 0, possède un capital initial x ($x \geq 0$) ; elle compte sur des rentrées régulières mais son capital connaît des fluctuations aléatoires. Nous modélisons son capital à l'instant t ($t \geq 0$) par le processus $(Z_t^x, t \geq 0)$ défini par :

$$Z_t^x = x - X_t \quad \forall t \geq 0, \quad (4.1.1)$$

avec :

$$X_t = \sigma B_t - ct + J_t \quad \forall t \geq 0, \quad (4.1.2)$$

où $(B_t, t \geq 0)$ représente “les petites fluctuations régulières” de la fortune et est un mouvement brownien linéaire, issu de 0. σ est un réel non nul (sans perte de généralité, nous supposons que $\sigma = 1$). c est un réel et ct représente les rentrées non aléatoires. $(J_t, t \geq 0)$ représente les fluctuations discontinues du capital et est un processus de Lévy, de sauts purs, de mesure de Lévy ν , indépendant de $(B_t, t \geq 0)$ et vérifiant $J_0 = 0$.

Nous considérons le temps de ruine de la compagnie, c'est à dire le premier temps d'atteinte du niveau 0 par le processus $(Z_t^x, x \geq 0)$, noté T_x et défini par :

$$T_x := \inf\{t \geq 0; Z_t^x < 0\}. \quad (4.1.3)$$

Il est clair que T_x est aussi le premier temps de dépassement du niveau x par le processus $(X_t, t \geq 0)$:

$$T_x = \inf\{t \geq 0; X_t > x\}. \quad (4.1.4)$$

Nous nous intéressons à la probabilité que T_x soit fini, c'est à dire à la probabilité de ruine $\mathbb{P}(T_x < +\infty)$.

De nombreux auteurs se sont intéressés au calcul de cette probabilité, à l'étude asymptotique de $\mathbb{P}(T_x < +\infty)$, lorsque x tend vers $+\infty$, et à des problèmes voisins. Nous reportons au paragraphe 4.6 de ce chapitre, une courte bibliographie où nous situerons nos résultats par rapport à ceux de la littérature.

Nous supposerons dans toute la suite que $\mathbb{E}(|X_1|)$ est finie, c'est à dire :

$$\mathbb{E}(|J_1|) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |y| \nu(dy) < +\infty. \quad (4.1.5)$$

Nous distinguerons les deux cas suivants :

1. $\mathbb{E}(X_1) < 0$, hypothèse dite de profit net, soit :

$$\mathbb{E}(X_1) = -c + \mathbb{E}(J_1) = -c + \int_{-\infty}^{+\infty} y \nu(dy) < 0. \quad (4.1.6)$$

Sous (4.1.6), nous avons :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X_t = -\infty \quad \text{p.s.} \quad (4.1.7)$$

En particulier la fonction $x \rightarrow \mathbb{P}(T_x < +\infty)$ est décroissante et vérifie :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_x < +\infty) = 0. \quad (4.1.8)$$

2. $\mathbb{E}(X_1) = -c + \mathbb{E}(J_1) \geq 0$

Dans ce cas, nous avons :

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} X_t = +\infty \quad \text{p.s.} \quad (4.1.9)$$

et alors :

$$\mathbb{P}(T_x < +\infty) = 1 \quad \forall x \geq 0. \quad (4.1.10)$$

Il est clair que l'étude de la probabilité de ruine n'est donc intéressante que sous l'hypothèse (4.1.6).

Nous définissons, pour tout $x \geq 0$, sur $\{T_x < +\infty\}$:

$$K_x := X_{T_x} - x. \quad (4.1.11)$$

K_x est appelé overshoot ou dépassement du niveau x , à l'instant T_x .

Nous nous intéressons donc à la loi conjointe du couple (T_x, K_x) , conditionnellement à $\{T_x < +\infty\}$. Ceci nous conduit à considérer la fonction F , définie par :

$$F(\theta, \mu, x) := \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}} \right) \quad \theta \geq 0, \mu \geq 0, x \geq 0. \quad (4.1.12)$$

Remarquons que $F(0, 0, x) = \mathbb{P}(T_x < +\infty)$.

4.2 Sous-exponentialité de $F(\theta, 0, \cdot)$

Le but de cette section est de montrer qu'avec des arguments très simples, nous pouvons montrer que $x \rightarrow F(\theta, 0, x)$ et donc $x \rightarrow \mathbb{P}(T_x < +\infty)$ sont à décroissance exponentielle.

4.2.1 Utilisation de la sous additivité de $-\ln \circ F(\theta, 0, \cdot)$

Soit x et x' deux réels positifs. Sur $\{T_x < +\infty\}$, nous notons :

$$T'_{x'} = \inf \{t \geq 0; \quad X_{T_x+t} - X_{T_x} > x'\}. \quad (4.2.13)$$

De la relation $\{T_x < +\infty\} \cap \{T'_{x'} < +\infty\} \subset \{T_{x+x'} < +\infty\}$, nous déduisons en utilisant la propriété de Markov forte et la stationnarité des accroissements de $(X_t, t \geq 0)$ que :

$$\mathbb{E} \left(e^{-\theta(T_x + T'_{x'})} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\} \cap \{T'_{x'} < +\infty\}} \right) \leq \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_{x+x'}} \mathbb{1}_{\{T_{x+x'} < +\infty\}} \right), \quad (4.2.14)$$

ce qui équivaut, comme T_x et $T'_{x'}$ sont indépendants, à :

$$F(\theta, 0, x) \cdot F(\theta, 0, x') \leq F(\theta, 0, x + x'). \quad (4.2.15)$$

La fonction $x \rightarrow -\ln F(\theta, 0, x)$ est alors sous additive et d'après un théorème classique, nous déduisons la proposition suivante :

Proposition 4.1 Soit $\tilde{\gamma}_\theta = \inf_{x>0} -\frac{\ln(F(\theta, 0, x))}{x}$.

Alors

$$(i) \quad \tilde{\gamma}_\theta \geq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} \ln F(\theta, 0, x) = \tilde{\gamma}_\theta \quad (4.2.16)$$

$$(ii) \quad F(\theta, 0, x) \leq e^{-\tilde{\gamma}_\theta x} \quad \forall x \geq 0. \quad (4.2.17)$$

Ce qui nous permet d'affirmer que $F(\theta, 0, \cdot)$ est sous exponentielle.

Remarquons alors que : $\forall \theta \geq 0, \forall \mu \geq 0, \forall x \geq 0$,

$$\begin{aligned} F(\theta, \mu, x) &= \mathbb{E}(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}}) \\ &\leq \mathbb{E}(e^{-\theta T_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}}) = F(\theta, 0, x) \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

donc comme $F(\theta, 0, \cdot)$ est sous exponentielle, $F(\theta, \mu, \cdot)$ l'est aussi.

De plus, lorsque ν ne charge que $\mathbb{R}_-$, le processus $(X_t, t \geq 0)$ n'a pas de saut positif, donc si $T_x < +\infty$, presque sûrement, $X_{T_x} = x$, $K_x = 0$ et $T_{x'} + T_x = T_{x+x'}$. Ainsi l'inégalité (4.2.15) devient une égalité et par conséquent :

$$F(\theta, \mu, x) = F(\theta, 0, x) = \mathbb{E}(e^{-\theta T_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}}) = e^{-\tilde{\gamma}_\theta x} \quad \forall x \geq 0. \quad (4.2.19)$$

Précisons que :

$$\text{si } \theta > 0, \quad \text{alors } \tilde{\gamma}_\theta > 0. \quad (4.2.20)$$

En effet, comme $0 < F(\theta, 0, x) \leq 1$, la constante $\tilde{\gamma}_\theta$ est positive ou nulle.

Soit $\theta > 0$. Supposons que $\tilde{\gamma}_\theta = 0$. Alors $\mathbb{E}(1 - e^{-\theta T_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}}) = 0$ et comme la variable aléatoire $(1 - e^{-\theta T_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}})$ est positive alors elle est nulle presque sûrement.

Donc $e^{-\theta T_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}} = 1$ p.s. et alors $T_x = 0$ p.s., ce qui est absurde.

La proposition 4.1 nous invite de manière naturelle à :

- Déterminer $\tilde{\gamma}_\theta$ à l'aide des caractéristiques du processus de Lévy.
- Trouver des majorations, soit exponentielles, soit polynomiales, de $F(\theta, \mu, x)$ et de $\mathbb{P}(T_x < +\infty)$, quand x tend vers $+\infty$, en fonction d'hypothèses convenables sur ν .
- Si possible, trouver le comportement asymptotique exact, quand x tend vers $+\infty$, de $F(\theta, \mu, x)$ et donc de $\mathbb{P}(T_x < +\infty)$.

4.2.2 Utilisation d'un théorème de renouvellement

Lorsque $(X_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson composé (i.e. $\nu(\mathbb{R}) < +\infty$), et sous des hypothèses convenables (cf. chapitre 8, (8.0.3) et (8.0.4)) nous montrons, en utilisant un théorème de renouvellement, que :

$$F(\theta, \mu, x) \sim_{x \rightarrow +\infty} C(\theta, \mu) e^{-\gamma_0(\theta)x}, \quad (4.2.21)$$

où $C(\theta, \mu) > 0$ et $\gamma_0(\theta) > 0$ si $\theta > 0$ ou si $\theta = 0$ et $c > \mathbb{E}(J_1)$ (cf. Théorème 8.1, chapitre 8).

4.3 Comportement asymptotique de $F(\theta, \mu, x)$, quand x tend vers $+\infty$

4.3.1 Equation fonctionnelle satisfaite par $F(\theta, \mu, \cdot)$

Sous l'hypothèse simplificatrice que $(J_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson composé, nous prouvons que $F(\theta, \mu, \cdot)$ satisfait à l'équation fonctionnelle suivante :

$$G(x) = F_0(\theta, \mu, x) + F_1(\theta, \mu, x) + \Lambda_\theta G(x) \quad \forall x \geq 0 \quad (4.3.22)$$

où $F_0(\theta, \mu, x)$ et $F_1(\theta, \mu, x)$ sont deux fonctions explicites et Λ_θ un opérateur (cf. Théorème 5.1 du chapitre 5).

Dans le paragraphe 5.3 de ce même chapitre, nous montrons que l'opérateur Λ_θ est contractant dans des espaces de Banach bien choisis. Ceci permet de montrer que $F(\theta, \mu, \cdot)$ est l'unique solution de l'équation (4.3.22).

Par ailleurs, de l'équation (4.3.22), nous déduisons :

$$F(\theta, \mu, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Lambda_\theta^n (F_0 + F_1)(\theta, \mu, x). \quad (4.3.23)$$

Ceci fournit un schéma d'approximation numérique de $F(\theta, \mu, \cdot)$, à vitesse exponentielle.

4.3.2 Développement asymptotique de $F(\theta, \mu, x)$, quand x tend vers $+\infty$

Nous montrons que la transformée de Laplace $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$ de $F(\theta, \mu, \cdot)$ définie par :

$$\widehat{F}(\theta, \mu, q) := \int_0^{+\infty} e^{-qy} F(\theta, \mu, y) dy, \quad (4.3.24)$$

vérifie une équation de type fonctionnelle (cf. (6.1.7)). Cette équation est obtenue en intégrant (4.3.22) par rapport à la mesure $e^{-qx} \mathbb{1}_{\{x>0\}} dx$, lorsque la mesure de Lévy ν de $(J_t, t \geq 0)$ est une mesure bornée (i.e. : $(J_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson composé).

Ce calcul étant fait, nous constatons que $\widehat{F}(\theta, \mu, q)$ ne dépend plus de $\lambda = \nu(\mathbb{R})$. Ceci nous permet d'étendre cette équation à des processus de Lévy plus généraux que les processus de Poisson composés. Par contre, dans l'équation fonctionnelle (4.3.22), une telle généralisation n'est pas claire.

Dans le cas où ν n'a que des sauts positifs, $\widehat{F}(\theta, \mu, .)$ est calculée explicitement. (cf. chapitre 6)

Nous utilisons ensuite l'équation fonctionnelle (6.1.7) pour obtenir un développement asymptotique, quand x tend vers $+\infty$ de $F(\theta, \mu, x)$, généralisant (4.2.21).

Plus précisément, nous montrons alors que sous des hypothèses convenables portant sur des moments exponentiels de ν , la fonction $F(\theta, \mu, .)$ admet un développement asymptotique quand x tend vers $+\infty$ de la forme :

$$F(\theta, \mu, x) = C_0(\theta, \mu) e^{-\gamma_0(\theta)x} + \sum_{i=1}^p a_i (C_i(\theta, \mu) e^{-\gamma_i(\theta)x} + \overline{C_i}(\theta, \mu) e^{-\overline{\gamma_i}(\theta)x}) + O(e^{-Bx}), \quad (4.3.25)$$

où $\gamma_0(\theta) \in \mathbb{R}_+$, $B \in \mathbb{R}_+$ et les $(\gamma_i(\theta))_{i \in \{1, \dots, n\}}$ sont des complexes conjugués deux à deux vérifiant :

$$0 \leq \gamma_0(\theta) < \operatorname{Re} \gamma_1(\theta) \leq \dots \leq \operatorname{Re} \gamma_p(\theta) < B,$$

et $a_i = \frac{1}{2}$ si $-\gamma_i(\theta)$ est réel et $a_i = 1$ sinon. (cf. Théorème 7.3).

La démonstration de (4.3.25) repose sur l'inversion, par la méthode de Mellin Fourier, de l'équation fonctionnelle (6.1.7) satisfaite par la transformée de Laplace $\widehat{F}(\theta, \mu, .)$.

4.3.3 Comportement asymptotique, quand x tend vers $+\infty$, de la probabilité de ruine $\mathbb{P}(T_x < +\infty)$

1. Les résultats du paragraphe 4.3.2 s'appliquent lorsque $\theta = \mu = 0$ et donc lorsque ν admet des moments exponentiels convenables, nous obtenons un développement asymptotique de $x \rightarrow \mathbb{P}(T_x < +\infty)$, quand x tend

vers $+\infty$, de la forme :

$$\mathbb{P}(T_x < +\infty) = C_0 e^{-\gamma_0(0)x} + \sum_{i=1}^p a_i \left(C_i e^{-\gamma_i(0)x} + \overline{C_i} e^{-\overline{\gamma_i(0)}x} \right) + O(e^{-Bx}), \quad (4.3.26)$$

où $\gamma_0(0) \in \mathbb{R}_+^*$, $B \in \mathbb{R}_+$ et les $\gamma_i(0)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, sont des complexes conjugués deux à deux, vérifiant :

$$0 < \gamma_0(0) < \operatorname{Re} \gamma_1(0) \leq \dots \leq \operatorname{Re} \gamma_p(0) < B,$$

et $a_i = \frac{1}{2}$ si $-\gamma_i(0)$ est réel et $a_i = 1$ sinon.

2. Sous des hypothèses plus faibles, c'est à dire l'existence de moments d'ordre $n \geq 3$ pour la restriction de ν à $\mathbb{R}_+$ et la condition de profit net, nous obtenons la majoration :

$$\mathbb{P}(T_x < +\infty) \leq \frac{C}{1 + x^{n-2}} \quad \forall x \geq 0. \quad (4.3.27)$$

Remarquons qu'il est naturel qu'il n'y ait pas de condition portant sur la restriction de ν à $\mathbb{R}_-$, outre $\int_{-\infty}^0 |y| \nu(dy) < +\infty$. En effet, plus les sauts négatifs sont grands, plus la probabilité $\mathbb{P}(T_x < +\infty)$ sera petite.

4.4 Résultats pour le couple (T_x, K_x)

L'un des intérêts de notre approche est d'avoir pris en compte la loi conjointe du couple (T_x, K_x) , via sa transformée de Laplace (i.e. la fonction F)

Connaissant un équivalent de $F(\theta, \mu, x)$, quand x tend vers $+\infty$, avec des hypothèses raisonnables (hypothèses du Théorème 7.3), nous montrons (cf. chapitre 10) :

1^{er} cas : Sous la condition de profit net, $\mathbb{E}(X_1) = -c + \mathbb{E}(J_1) < 0$, conditionnellement à $\{T_x < +\infty\}$, le couple (T_x, K_x) , convenablement renormalisé, converge en loi vers une v.a. bidimensionnelle (ξ_1, ξ_2) . ξ_1 et ξ_2 sont indépendantes et ξ_1 suit une loi gaussienne (cf. Théorème 10.1). Lorsque ν ne charge que $\mathbb{R}_+$, la loi de ξ_2 est explicite. Ainsi les variables aléatoires T_x et K_x sont “asymptotiquement indépendantes”.

2^{ème} cas : Sous la condition $\mathbb{E}(X_1) = -c + \mathbb{E}(J_1) > 0$,

le couple (T_x, K_x) , convenablement renormalisé, converge en loi vers une v.a. bidimensionnelle (ξ_1, ξ_2) . ξ_1 et ξ_2 sont indépendantes et ξ_1 suit une loi gaussienne (cf. Théorème 10.3). Lorsque ν ne charge que $\mathbb{R}_+$, la loi de ξ_2 est explicite. Là encore, les variables aléatoires T_x et K_x sont “asymptotiquement indépendantes”.

3^{ème} cas : Sous la condition $\mathbb{E}(X_1) = -c + \mathbb{E}(J_1) = 0$,

Nous avons un résultat de convergence analogue au 2^{ème} cas, mais cette fois, ξ_1 n'est plus gaussienne (cf. Théorème 10.5).

4.5 Formule de Zolotareff

Cette étude est indépendante de ce qui précède.

Nous savons classiquement que pour un processus de Lévy tel que sa mesure de Lévy ν ne charge que $\mathbb{R}_-$, nous avons la formule de Zolotareff, i.e. :

$$t \mathbb{P}(T_x \in dt) dx = x \mathbb{P}(X_t \in dx) dt \quad \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+. \quad (4.5.28)$$

Nous montrons ici (cf. chapitre 11) une réciproque de ce théorème. Plus précisément, nous montrons l'équivalence des propriétés suivantes :

- (i) ν ne charge que $\mathbb{R}_-$.
- (ii) $t \mathbb{P}(T_x \in dt) dx = x \mathbb{P}(X_t \in dx) dt \quad \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+.$
- (iii) $\forall \theta > 0, \exists C_\theta > 0 \text{ tel que } \forall x \geq 0, \mathbb{E}(e^{-\theta T_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}}) = e^{-C_\theta x}.$

Ce résultat généralise un théorème de Borovkov ([Bor64]), relatif aux marches aléatoires $(S_n)_{n \geq 0}$ sur $\mathbb{Z}$:

Il y'a équivalence entre les assertions suivantes :

- (i) $n \mathbb{P}(T_k = n) = k \mathbb{P}(S_n = k), \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{N}.$
- (ii) le pas de la marche est à support dans $] -\infty, 1]$.

4.6 Commentaires bibliographiques

Le livre de T. Rolski, H. Schmidli et J. Teugels [RSST99] contient une très grande bibliographie sur les sujets traités ici. On pourra s'y reporter pour des informations complémentaires.

4.6.1 Le modèle classique

Dans la littérature, on désigne par modèle classique, un processus de la forme :

$$X_t = -ct + J_t, \quad (4.6.29)$$

où $(J_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson composé, c'est à dire un processus de Lévy de sauts purs, dont la mesure de Lévy ν est de masse finie λ , défini par :

$$J_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad (4.6.30)$$

où le processus $(N_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson de paramètre λ et les variables aléatoires Y_i , indépendantes de $(N_t, t \geq 0)$ et indépendantes entre elles, sont de loi commune μ . Nous avons alors $\nu = \lambda \mu$. Très souvent, les auteurs choisissent des variables aléatoires Y_i positives. Ce modèle a été introduit par Filip Lundberg [Lun03] et a été étudié de façon approfondie par Harald Cramér [Cra30] et [Cra55]. C'est pourquoi, ce modèle est souvent appelé modèle de Cramer-Lundberg.

En particulier, ces auteurs se sont intéressés à la probabilité de ruine, $F(0, 0, x)$, avec nos notations (cf. 4.1.12). Ils obtiennent une équation satisfaite par la transformée de Laplace de cette probabilité et calculent explicitement cette probabilité quand les variables aléatoires Y_i sont exponentielles, de paramètre δ , à savoir :

$$F(0, 0, x) = \mathbb{P}(T_x < +\infty) = \frac{\lambda}{c\delta} e^{-(\delta - \frac{\lambda}{c})x} \quad \forall x \geq 0. \quad (4.6.31)$$

D'autres démonstrations de (4.6.31) ont été obtenues par des méthodes différentes (utilisation de martingales (voir Gerber [Ger73]) ou de martingales inverses (voir [DH95]), utilisation du générateur infinitésimal du processus $(X_t, t \geq 0)$ (voir Dassios-Embrecht [DE89] et Taylor [Tay76]). Lorsque la loi μ est plus générale, ces nouvelles approches permettent d'obtenir des encadrements de la probabilité de ruine :

$$\forall x \geq 0, \quad C_1 e^{-\gamma_0 x} \leq F(0, 0, x) \leq C_2 e^{-\gamma_0 x}, \quad (4.6.32)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes et γ_0 est l'unique racine de l'équation :

$$-\gamma c + \lambda \left(\int_0^{+\infty} e^{\gamma y} d\mu(y) - 1 \right) = 0. \quad (4.6.33)$$

Remarquons que si nous notons ψ l'exposant caractéristique de $(X_t, t \geq 0)$, i.e. : $\mathbb{E}(e^{\lambda X_t}) = e^{t\psi(\lambda)}$, et $\varphi(t) = \psi(-t)$ alors (4.6.33) est équivalente à $\varphi(-\gamma) = 0$.

L'existence de la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\gamma_0 x} F(0, 0, x) = C, \quad (4.6.34)$$

est classiquement connue et sa démonstration repose sur le Théorème de renouvellement de Feller [Fel71].

Des résultats du type précédent ont été montrés lorsque la mesure de Lévy ν est de masse infinie mais où ν charge $\mathbb{R}_+$. De tels processus sont souvent appelés gamma processus et ont été étudiés par D.C.M. Dickson et H.R. Waters [DW93], par F. Dufresne, H.U. Gerber et E. Shiu [DG93] et [DGS91].

4.6.2 Le modèle perturbé

Le processus $(X_t, t \geq 0)$ est défini ici par :

$$X_t := -ct + J_t + \sigma B_t, \quad (4.6.35)$$

où σ est une constante non nulle et $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard issu de 0, indépendant de $(J_t, t \geq 0)$, processus de Poisson composé, comme défini en (4.6.30).

Ce modèle a été introduit par Gerber [Ger70].

Citons, pour le modèle (4.6.35), les résultats suivants :

1. Gerber et Landry [GL98], Furrer et Schmidli [FS94] et Schmidli [Sch95] ont obtenu des majorations et des minoration de la probabilité de ruine :

$$C e^{-\gamma_0 x} \leq F(0, 0, x) \leq e^{-\gamma_0 x} \quad \forall x \geq 0. \quad (4.6.36)$$

où $C > 0$.

2. Lorsque :

$$J_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad (4.6.37)$$

où les v.a. Y_i ont une distribution de densité p qui est une combinaison d'exponentielles :

$$p(x) := \sum_{i=1}^n A_i \beta_i e^{-\beta_i x} \quad \forall x \geq 0, \quad (4.6.38)$$

avec $p(x) > 0, \forall x \geq 0$, (les constantes A_i pouvant être pour certaines négatives et les constantes β_i étant strictement positives), F. Dufresne et H.U. Gerber ont démontré en 1990 (cf. [DG90]) que :

$$F(0, 0, x) = \sum_{k=1}^{n+1} C_k e^{-r_k x} \quad x \geq 0, \quad (4.6.39)$$

avec

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\beta_i}{\beta_i - r_k} C_k &= 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \\ \sum_{i=1}^{n+1} C_i &= 1 \end{aligned}$$

et

$$C_h = \prod_{i=1}^n \left(\frac{r_k - \beta_i}{\beta_i} \right) \prod_{k=1, k \neq h}^{n+1} \left(\frac{r_k}{r_h - r_k} \right) \quad \forall h \in \{i, \dots, n+1\},$$

les r_h étant les solutions de $\lambda \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_i}{\lambda_i - r} + \frac{\sigma^2}{2} \right) = c$.

3. Dans le cas où $(J_t, t \geq 0)$ est un processus de Lévy, de sauts purs, de mesure de Lévy ν ne chargeant que $\mathbb{R}_+$, et s'il existe $\gamma_0 > 0$ tel que $\psi(\gamma_0) = 0$ où ψ est l'exposant caractéristique du processus $(X_t, t \geq 0)$, R.A. Doney prouve en 1991 (cf. [Don91]), que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\gamma_0 x} F(0, 0, x) = C, \quad (4.6.40)$$

avec

$$C = -\frac{\varphi'(0)}{\varphi'(-\gamma_0)}. \quad (4.6.41)$$

4. Lorsque $(J_t, t \geq 0)$ est un processus de Lévy, de sauts purs, mais où la mesure de Lévy ν ne charge pas seulement $\mathbb{R}_+$ (cf. [BD94]) J. Bertoin et R.A. Doney établissent en 1994, le même résultat que (4.6.40), mais cette fois la constante C n'est pas explicite.

5. Dans le cadre du modèle perturbé :

$$X_t := \sigma B_t - ct + J_t, \quad (4.6.42)$$

où

$$J_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \quad \text{avec} \quad Y_i > 0, \quad (4.6.43)$$

mais où le processus $(N_t, t \geq 0)$ est cette fois, un processus de renouvellement, alors H.J. Furrer et H. Schmidli (cf. [FS94]) obtiennent des inégalités du type :

$$F(0, 0, x) \leq C(r) e^{-rx}, \quad (4.6.44)$$

où les constantes $C(r) > 0$ et $r > 0$ sont données plus ou moins explicitement.

6. Pour le modèle perturbé (4.6.35), avec $J_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$, processus de Poisson composé, S.G. Kou et H. Wang [KW01] calculent explicitement la transformée de Laplace de la probabilité de ruine, lorsque les variables aléatoires Y_i ont une densité de la forme :

$$p(y) = c_1 \eta_1 e^{-\eta_1 y} \mathbb{1}_{\{y > 0\}} + c_2 \eta_2 e^{-\eta_2 y} \mathbb{1}_{\{y < 0\}}, \quad (4.6.45)$$

avec $c_1 + c_2 = 1$, $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$, $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$.

7. En 1997, M. Dozzi et P. Vallois ont calculé explicitement la loi de T_x lorsque le processus $(X_t, t \geq 0)$ est la différence d'un processus de Poisson composé, à sauts positifs, exponentiels, et d'un processus de Lévy croissant (cf. [DV97], Théorème 4.1, page 371).

8. Notre travail se situe dans l'esprit des résultats précédents. Nous considérons le processus $(X_t, t \geq 0)$ défini en (4.6.35), mais où $(J_t, t \geq 0)$ est un processus de Lévy, de sauts purs, de mesure de Lévy ν telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y| \nu(dy) < +\infty.$$

(i) Tout d'abord, nous obtenons, sous des hypothèses convenables portant sur les moments exponentiels de la mesure ν , un développement

asymptotique, au voisinage de $+\infty$, de $F(\theta, \mu, \cdot)$ (cf. (4.1.12) pour la définition de F). Ce développement est de la forme :

$$F(\theta, \mu, x) = C_0(\theta, \mu)e^{-\gamma_0(\theta)x} + \sum_{i=1}^p a_i (C_i(\theta, \mu)e^{-\gamma_i(\theta)x} + \overline{C_i}(\theta, \mu)e^{-\overline{\gamma_i}(\theta)x}) + O(e^{-Bx}), \quad (4.6.46)$$

où $\gamma_0(\theta) \in \mathbb{R}_+$, $B \in \mathbb{R}_+$ et les $(\gamma_i(\theta))_{i \in \{1, \dots, n\}}$ sont des complexes conjugués deux à deux vérifiant :

$$0 \leq \gamma_0(\theta) < \operatorname{Re} \gamma_1(\theta) \leq \dots \leq \operatorname{Re} \gamma_p(\theta) < B.$$

et $a_i = \frac{1}{2}$ si $-\gamma_i(\theta)$ est réel et $a_i = 1$ sinon. (cf. (4.3.25) et Théorème 7.3). Dans le cas où ν ne charge que $\mathbb{R}_+$, les coefficients $C_i(\theta, \mu)$ et $\gamma_i(\theta)$ sont obtenus explicitement.

Nos résultats généralisent donc le travail de F. Dufresne et H.U. Gerber [DG90], R.A. Doney [Don91], et J. Bertoin et R. A. Doney [BD94].

(ii) Nous montrons par ailleurs que dans le cas d'existence de moments d'ordre $n \geq 3$ pour la mesure ν , la probabilité de ruine admet une majoration polynomiale du type $F(0, 0, x) \leq \frac{C}{(1+x)^{n-2}}$.

Notons que des inégalités de ce type ont été obtenues par A. Frolova, Y. Kabanov et S. Pergamenshchikov (cf. [FKP01]), pour un modèle où le processus $(8X)$ est solution d'une équation différentielle stochastique avec sauts positifs.

4.6.3 Approximation numérique

De nombreux articles sont consacrés à l'approximation numérique explicite de la probabilité de ruine (voir Abate et Whitt [AW92] et [AW95]). Cette dernière est approchée par la fonction :

$$F_{\text{approx}}(x) = Ce^{-\gamma_0 x}. \quad (4.6.47)$$

Dans notre approche, l'équation fonctionnelle (5.2.9) (cf. Théorème 5.1), fournit un schéma d'approximation numérique qui converge à vitesse exponentielle (cf. (5.3.78)).

4.6.4 Le triplet (T_x, K_x, L_x)

Assez récemment, des auteurs se sont intéressés à la loi du triplet (T_x, K_x, L_x) où $K_x := X_{T_x} - x$ désigne le déficit aussitôt la ruine, appelé overshoot ou sévérité de la ruine et $L_x := x - X_{T_x^-}$ désigne la fortune immédiatement avant la ruine.

Ces notions ont été introduites et étudiées par Gerber, Goovaerts et Kaas [GGK87] dans le modèle classique. Il faut voir aussi sur ce thème Dickson [Dic92], Dickson et Waters [DW92], Dufresne et Gerber [DG88], Frey et Schmidt [FS96] et Gerber et Schiu [GS97], mais toujours pour le modèle classique.

Plus précisément, H.U. Gerber et E.S.W. Shiu, en 1997, (cf. [GS97]), établissent, pour le modèle classique défini en (4.6.29), la formule suivante :

$$\mathbb{E}(e^{-\delta T_x} \mathbb{1}_{\{x - X_{T_x^-} \in du\}} \mathbb{1}_{\{X_{T_x} - x \in dv\}}) = \frac{\lambda}{c} \mu(x + y) e^{-\rho x} du dv, \quad (4.6.48)$$

où ρ est une constante dépendant de δ .

Pour le modèle perturbé, le théorème de Pecherskii-Rogozin (cf. l'article de L. Nguyen et M. Yor [NY01]) établit un lien entre la transformée de Laplace de $F(\theta, \mu, \cdot)$ et la loi du processus $(X_t, t \geq 0)$. Plus précisément, il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$\widehat{F}(\theta, \mu, q) = \frac{\kappa(\theta, q) - \kappa(\theta, \mu)}{(q - \mu)\kappa(\theta, q)}, \quad (4.6.49)$$

avec

$$\kappa(\alpha, \beta) := k \exp \left(\int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} (e^{-t} - e^{-\alpha t - \beta x}) \mathbb{P}(X_t \in dx) \right). \quad (4.6.50)$$

On pourra rapprocher la formule (4.6.49) de l'expression (6.1.7) de $\widehat{F}(\theta, \mu, q)$, énoncée dans le Théorème 6.1.

Nos théorèmes de renormalisation (cf. Théorèmes 10.1, 10.3 et 10.5) existent pour des marches aléatoires (voir le livre d'Allan Gut (cf. [Gut88], page 102, Théorème 10.11) et semblent nouveaux dans notre situation.

4.6.5 Formule de Zolotarev

Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus de lévy de la forme :

$$X_t := \sigma B_t - ct + J_t \quad \forall t \geq 0$$

où $(J_t, t \geq 0)$ est un processus de Lévy de sauts purs, vérifiant $J_0 = 0$ et de mesure de Lévy ν et T_x , le premier temps d'atteinte du niveau x par $(X_t, t \geq 0)$, i.e. :

$$T_x := \inf \{t \geq 0; X_t > x\}.$$

On dit que le processus $(X_t, t \geq 0)$ satisfait à la formule de Zolotareff si :

$$t \mathbb{P}(T_x \in dt) dx = x \mathbb{P}(X_t \in dx) dt \quad \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+. \quad (4.6.51)$$

Dans les années 60, A. Borovkov et M. Zolotarev ont montré que la classe des processus de Lévy sans sauts positifs satisfait à la formule de Zolotareff (cf. le livre de J. Bertoin [Ber96], pages 190-191, pour une démonstration de ce théorème). En 1966, B.A. Rogozin [Rog66] a prouvé une réciproque de ce théorème.

A. Borovkov s'est aussi intéressé à la version discrète de (4.6.51) et a montré que si $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ est une marche aléatoire unidimensionnelle issue de 0, si $T = (T_k, k \in \mathbb{N}^*)$ est défini par $T_k = \inf \{n \in \mathbb{N} / X_n \geq k\}$, alors il y'a équivalence entre les propositions suivantes :

$$(i) \quad k \mathbb{P}(X_n = k) = n \mathbb{P}(T_k = n), \quad n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}^*, \quad (4.6.52)$$

$$(ii) \quad \mathbb{P}(X_1 \leq 1) = 1. \quad (4.6.53)$$

Plus récemment, M. Dozzi et P. Vallois [DV97] ont montré que la classe des processus vérifiant la condition suivante, légèrement plus générale que (4.6.51) :

$$\mathbb{P}(T_x < t) = -x \frac{\partial^+}{\partial x} \int_0^t \mathbb{P}(X_u > x) \frac{du}{u}, \quad (4.6.54)$$

est fermée pour la convergence en loi. Ce qui fournit une nouvelle démonstration de l'identité (4.6.51) pour les processus de Lévy sans sauts positifs (cf. [DV97], Théorème 3.1, page 362).

Enfin, en 2001, A.A. Borovkov et Z. Burq [BB01] donnent une autre démonstration de l'identité (4.6.51) pour un processus de Lévy sans sauts positifs, à l'aide de martingales et de changement de mesure.

Notre contribution à l'étude de la formule de Zolotareff consiste à fournir une nouvelle démonstration de la réciproque énoncée par Rogozin. Plus précisément, il y'a équivalence entre les propriétés suivantes :

$$(i) \quad t \mathbb{P}(T_x \in dt) dx = x \mathbb{P}(X_t \in dx) dt \quad \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+.$$

$$(ii) \quad \nu \text{ ne charge que } \mathbb{R}_-.$$

4.6.6 Problématiques voisines

Afin de mieux prendre en compte la gestion des actifs d'une compagnie d'assurance et la ruine de cette compagnie, de nombreux auteurs ont remplacé le processus de Lévy $(X_t, t \geq 0)$ par des processus mieux adaptés, dont voici des exemples :

Barrière de ruine, ruine absolue :

- Le niveau de ruine n'est plus un réel fixe mais devient une fonction du temps. (voir article de C. Lefevre et P. Picard [LP97]).
- La compagnie d'assurance peut emprunter de l'argent pour éviter la ruine qui ne se produit plus quand le capital devient nul mais quand il atteint un seuil négatif. Le processus étudié devient :

$$X_t = x - J_t - \int_0^t b(X_s) ds, \quad (4.6.55)$$

où

$$b(x) = \begin{cases} \beta_1(x - \Delta) + c & \text{si } x \geq \Delta \\ c & \text{si } 0 \leq x < \Delta \\ \beta_2 x + c & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (4.6.56)$$

Le temps de ruine absolue est alors le temps d'atteinte du niveau $-\frac{c}{\beta_2}$, au delà duquel la compagnie d'assurance n'est plus capable de rembourser ses dettes (voir articles de A. Dassios et de P. Embrechts [DE89] et de P. Embrechts et H. Schmidli [ES94]). Avec des hypothèses particulières portant sur la loi du processus de Poisson composé $(J_t, t \geq 0)$, ces auteurs calculent explicitement les probabilités de ruine absolue.

Modèle avec intérêts et inflation :

A. Dassios et de P. Embrechts généralisant le processus défini en (4.6.55) en introduisant un taux d'inflation δ constant, avec $\delta < \beta_1 \wedge \beta_2$ (cf. [DE89]). Ainsi la fonction b devient :

$$b(x) = \begin{cases} \beta_1(x - \Delta) - \delta x + c & \text{si } x \geq \Delta \\ c - \delta x & \text{si } 0 \leq x < \Delta \\ \beta_2 x - \delta x + c & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (4.6.57)$$

Le premier temps de ruine absolue se produit dès que $(X_t, t \geq 0)$ atteint le niveau $-\frac{c}{\beta_2 - \delta}$. A. Dassios et de P. Embrechts calculent la probabilité

de ruine absolue lorsque la loi des sauts est exponentielle.

Modèles plus généraux

De nombreux auteurs s'intéressent à des modèles plus généraux, citons :

- R. Norberg [Nor] qui réalise des calculs de probabilité dans le cas où le mouvement brownien dans (4.6.35) est remplacé par un processus d'Ornstein Uhlenbeck ou un mouvement brownien géométrique.
- H. Schmidli [Sch01] qui étudie des processus $(X_t, t \geq 0)$ du type (4.6.35), où le mouvement brownien est remplacé par un processus de Lévy α -stable .
- J. Paulsen et H.K. Gjessing (cf. [PG97] et [Pau01]) introduisent des modèles où l'argent de la compagnie peut être, à tout instant, réinvesti dans un actif risqué.
- H. Schmidli considère des modèles dépendant d'un niveau de réassurance et d'investissement (cf. [Sch02]). La compagnie dispose d'un contrôle permettant d'agir sur ce niveau. Il s'agit donc d'optimiser une fonctionnelle mesurant le risque et dépendant du contrôle.

4.7 Notations

Nous rassemblons ici les notations principales qui sont utilisées dans la suite.

1. Le processus $(X_t, t \geq 0)$, objet de notre étude est :

$$X_t := \sigma B_t - ct + J_t \quad \forall t \geq 0$$

où

- $(J_t, t \geq 0)$ est un processus de Lévy de sauts purs, vérifiant $J_0 = 0$ et de mesure de Lévy ν telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} |y| \nu(dy) < +\infty, \quad (4.7.58)$$

En particulier $\mathbb{E}(|J_1|) < +\infty$.

- $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien linéaire, indépendant de $(J_t, t \geq 0)$, tel que $B_0 = 0$.

Quitte à changer $(B_t, t \geq 0)$ en $(-B_t, t \geq 0)$, nous pouvons supposer que σ est un réel strictement positif. Par la suite, sans perte de généralité, nous considérerons $\sigma = 1$.

Par conséquent :

$$X_t = B_t - ct + J_t \quad \forall t \geq 0 \quad (4.7.59)$$

Nous nous intéressons à :

$$T_x := \inf\{t \geq 0; X_t > x\} \quad \forall x \geq 0, \quad (4.7.60)$$

et

$$K_x := X_{T_x} - x \quad \forall x \geq 0. \quad (4.7.61)$$

2. Soit ψ l'exposant caractéristique de $(X_t, t \geq 0)$, i.e. : $\mathbb{E}(e^{qX_t}) = e^{t\psi(q)}$.
 Nous travaillons plutôt avec la fonction φ définie par $\varphi(q) := \psi(-q)$ et nous avons :

$$\varphi(q) = \frac{q^2}{2} + cq + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-qy} - 1) \nu(dy). \quad (4.7.62)$$

Compte tenu de (4.7.58), $\varphi(q)$ existe dès que :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{|y| \geq 1\}} e^{-qy} \nu(dy) < +\infty. \quad (4.7.63)$$

Suivant le contexte et donc suivant les hypothèses faites sur ν , nous précisons le domaine de validité de $\varphi : q \in \mathbb{R}_+, q \in \mathbb{C}$, etc.

Pour tout θ , nous définissons :

$$\forall \theta \geq 0 \quad \varphi_\theta(q) := \varphi(q) - \theta. \quad (4.7.64)$$

3. Soit la fonction F définie par :

$$F(\theta, \mu, x) = \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}} \right) \quad \theta \geq 0, \mu \geq 0, x \geq 0. \quad (4.7.65)$$

4. Si ρ est une mesure positive, σ finie sur $\mathbb{R}$, $\widehat{\rho}$ désigne sa transformée de Laplace, i.e. :

$$\widehat{\rho}(q) = \int_{\mathbb{R}} e^{-qy} \rho(dy). \quad (4.7.66)$$

De même, si f est une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, $\widehat{f}$ désigne sa transformée de Laplace, i.e. :

$$\widehat{f}(q) = \int_0^{+\infty} e^{-qy} f(y) dy. \quad (4.7.67)$$

en particulier :

$$\widehat{F}(\theta, \mu, q) = \int_0^{+\infty} e^{-qy} F(\theta, \mu, x) dx. \quad (4.7.68)$$

Nous utiliserons parfois aussi, pour une fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$, la notation $\widehat{f}$, pour sa transformée de Laplace définie par :

$$\widehat{f}(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-qy} f(x) dx. \quad (4.7.69)$$

Le domaine de validité du paramètre q sera précisé dans chaque contexte.

4.8 Plan de la partie II

1. Chapitre 5

Nous montrons, lorsque $(J_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson composé, que $F(\theta, \mu, \cdot)$ satisfait à l'équation fonctionnelle (4.3.22) et nous étudions cette équation.

2. Chapitre 6

Nous montrons que la transformée de Laplace $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$ satisfait à l'équation fonctionnelle (6.1.7).

3. Chapitre 7

Nous démontrons l'existence du développement asymptotique, quand x tend vers $+\infty$, de $F(\theta, \mu, x)$, donné en (4.3.25).

4. Chapitre 8

Nous retrouvons le premier terme du comportement asymptotique de $F(\theta, \mu, x)$, quand x tend vers $+\infty$, à l'aide d'un théorème de renouvellement.

5. Chapitre 9

Nous montrons la majoration polynomiale (4.3.27) de $\mathbb{P}(T_x < +\infty)$.

6. Chapitre 10

Nous démontrons les Théorèmes de la limite centrale 10.1, 10.3 et 10.5, pour le couple (T_x, K_x) , quand x tend vers $+\infty$.

7. Chapitre 11

Nous établissons une réciproque du théorème de Zolotareff.

Nous avons reporté en appendice :

1. Les propriétés de l'exposant caractéristique de $(X_t, t \geq 0)$ dont nous avons besoin dans ce texte (Annexe A).
2. La démonstration de l'unicité de la solution de l'équation fonctionnelle (4.3.22) (Annexe B).
3. Un exemple d'étude de processus où ν est une loi gamma (Annexe C).

Chapitre 5

Etude du cas où $(J_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson composé

5.1 Le contexte

Nous considérons le processus $(X_t, t \geq 0)$ défini par :

$$X_t = B_t - ct + J_t, \quad (5.1.1)$$

où $c \in \mathbb{R}$, $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien linéaire, issu de 0 et $(J_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson composé, de mesure de Lévy ν , tel que $J_0 = 0$, et indépendant de $(B_t, t \geq 0)$. Par conséquent :

$$\lambda := \nu(\mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) < +\infty. \quad (5.1.2)$$

Pour tout $x \geq 0$, T_x désigne le premier temps d'atteinte par $(X_t, t \geq 0)$ du niveau x :

$$T_x := \inf \{t \geq 0; X_t > x\}. \quad (5.1.3)$$

Le dépassement du niveau x , au temps T_x , ou overshoot est noté :

$$K_x := X_{T_x} - x. \quad (5.1.4)$$

K_x n'existant que sur l'événement $\{T_x < +\infty\}$.

Considérons la fonction F définie par :

$$F(\theta, \mu, x) = \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}} \right) \quad ; \quad \theta \geq 0, \mu \geq 0, x \geq 0. \quad (5.1.5)$$

Remarquons que

$$F(0, 0, x) = \mathbb{P}(T_x < +\infty) \quad (5.1.6)$$

est la probabilité de ruine.

De plus

$$0 \leq F(\theta, \mu, x) \leq F(\theta, 0, x) \leq \mathbb{P}(T_x < +\infty) \leq 1, \quad (5.1.7)$$

et

$$0 \leq F(\theta, \mu, x) \leq F(0, \mu, x) \leq \mathbb{P}(T_x < +\infty) \leq 1. \quad (5.1.8)$$

L'intérêt de considérer $(J_t, t \geq 0)$ processus de Poisson composé est que $(J_t, t \geq 0)$ admet un premier temps de saut τ_1 ($0 < \tau_1 < +\infty$ p.s.). Ainsi, sur l'intervalle $[0, \tau_1]$, le processus $(X_t, t \geq 0)$ est le mouvement brownien avec dérive $(B_t - ct, t \geq 0)$ arrêté en τ_1 . Nous allons décomposer l'événement $\{T_x < +\infty\}$ en fonction des positions relatives de T_x et de τ_1 . Nous en déduisons que $F(\theta, \mu, \cdot)$ vérifie une équation fonctionnelle (cf. Théorème 5.1).

Nous étudierons ensuite cette équation fonctionnelle et nous montrerons qu'elle admet une unique solution dans un espace fonctionnel ad-hoc, lorsque les paramètres sont choisis convenablement (cf. Théorème 5.5).

Afin de ne pas alourdir la preuve des deux résultats principaux de cette section (Théorèmes 5.1 et 5.5), nous avons repoussé la démonstration de certains points techniques dans l'Appendice B.

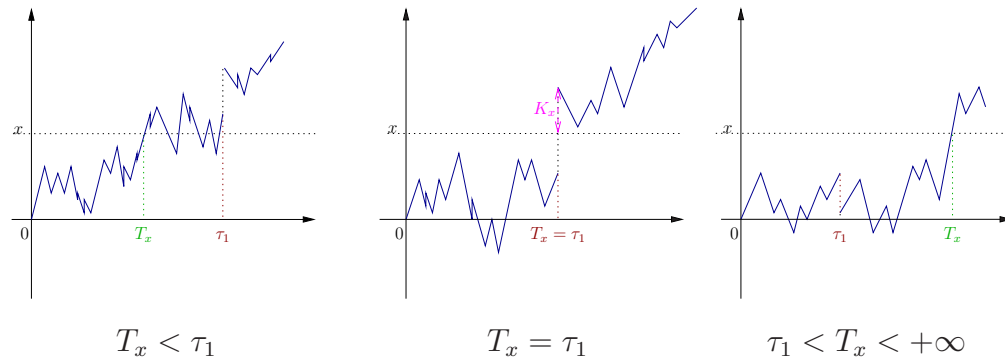


FIG. 5.1 – Position de T_x par rapport à τ_1

5.2 Equation fonctionnelle satisfaite par $F(\theta, \mu, \cdot)$

Montrons à présent que $F(\theta, \mu, \cdot)$ vérifie une équation fonctionnelle.

Théorème 5.1 *Nous supposons que $\lambda = \nu(\mathbb{R}) < +\infty$. Pour tout $\theta \geq 0$ et tout $\mu \geq 0$, la fonction $F(\theta, \mu, \cdot)$ est solution de l'équation fonctionnelle suivante :*

$$G(x) = F_0(\theta, \mu, x) + F_1(\theta, \mu, x) + \Lambda_\theta G(x) \quad \forall x \geq 0 \quad (5.2.9)$$

où

$$\alpha_\theta = \sqrt{c^2 + 2(\lambda + \theta)}, \quad (5.2.10)$$

$$F_0(\theta, \mu, x) = e^{-(c+\alpha_\theta)x}, \quad (5.2.11)$$

$$\begin{aligned} F_1(\theta, \mu, x) = & \frac{e^{-(c+\alpha_\theta)x}}{\alpha_\theta(\mu + c + \alpha_\theta)} \int_{[0,x]} (e^{(c+\alpha_\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \\ & + \frac{1}{\alpha_\theta(\mu + c - \alpha_\theta)} \int_{]x,+\infty[} (e^{-(\alpha_\theta-c)(y-x)} - e^{-\mu(y-x)}) \nu(dy) \\ & + \frac{e^{\mu x} - e^{-(c+\alpha_\theta)x}}{\alpha_\theta(\mu + c + \alpha_\theta)} \int_{]x,+\infty[} e^{-\mu y} \nu(dy) \\ & - \frac{e^{-(c+\alpha_\theta)x}}{\alpha_\theta(\mu + c - \alpha_\theta)} \int_0^{+\infty} (e^{-(\alpha_\theta-c)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy), \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Λ_θ est l'opérateur défini par :

$$\Lambda_\theta G(x) = \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_{-\infty}^{(x-y)\wedge x} e^{-ca} (e^{-\alpha_\theta|a|} - e^{-(2x-a)\alpha_\theta}) G(x-a-y) da. \quad (5.2.13)$$

Démonstration du Théorème 5.1

τ_1 étant le premier temps de saut du processus $(X_t, t \geq 0)$, nous écrivons :

$$\{T_x < +\infty\} = \{T_x < \tau_1\} \cup \{T_x = \tau_1\} \cup \{\tau_1 < T_x < +\infty\}. \quad (5.2.14)$$

Ces trois événements étant disjoints, nous en déduisons :

$$\begin{aligned} F(\theta, \mu, x) = & \mathbb{E}(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x < \tau_1\}}) + \mathbb{E}(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x = \tau_1\}}) \\ & + \mathbb{E}(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{\tau_1 < T_x < +\infty\}}). \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Le calcul de ces trois espérances nous conduira à l'équation fonctionnelle (5.2.9) satisfaite par $F(\theta, \mu, \cdot)$.

Lemme 5.2 Soit α_θ , le réel défini par la relation (5.2.10), alors :

$$\mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x < \tau_1\}} \right) = e^{-(c + \alpha_\theta)x}. \quad (5.2.16)$$

Démonstration du Lemme 5.2

Soit $(\tilde{B}_t, t \geq 0)$, le mouvement brownien avec dérive, défini par :

$$\tilde{B}_t = B_t - ct \quad \forall t \geq 0, \quad (5.2.17)$$

et $\tilde{T}_x$ le temps d'atteinte du niveau x par le processus $(\tilde{B}_t, t \geq 0)$, i.e. :

$$\tilde{T}_x := \inf \{t \geq 0; \tilde{B}_t > x\} \quad \forall x \geq 0. \quad (5.2.18)$$

alors :

$$\{T_x < \tau_1\} = \{\tilde{T}_x < \tau_1\}. \quad (5.2.19)$$

Sur l'événement $\{T_x < \tau_1\}$, $K_x = 0$ et $T_x = \tilde{T}_x$. De plus τ_1 est une v.a. indépendante de $\tilde{T}_x$ et de loi exponentielle. Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x < \tau_1\}} \right) &= \mathbb{E} \left(e^{-\theta \tilde{T}_x} \mathbb{1}_{\{\tilde{T}_x < \tau_1\}} \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbb{E} \left(e^{-\theta \tilde{T}_x} \mathbb{1}_{\{\tilde{T}_x < t\}} \right) \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= \mathbb{E} \left(e^{-\theta \tilde{T}_x} \int_{\tilde{T}_x}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt \right) \\ &= \mathbb{E} \left(e^{-(\lambda + \theta) \tilde{T}_x} \right), \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

et d'après ([KS91], exercice 5.10 page 197) nous avons :

$$\mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x < \tau_1\}} \right) = e^{-(c + \sqrt{c^2 + 2(\lambda + \theta)})x} = e^{-(c + \alpha_\theta)x}. \quad \square$$

Lemme 5.3 *Nous avons :*

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x = \tau_1\}} \right) \\
&= \frac{e^{-(c+\alpha_\theta)x}}{\alpha_\theta(\mu + c + \alpha_\theta)} \int_{[0, x[} (e^{(c+\alpha_\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \\
&\quad + \frac{1}{\alpha_\theta(\mu + c - \alpha_\theta)} \int_{[x, +\infty[} (e^{-(\alpha_\theta - c)(y-x)} - e^{-\mu(y-x)}) \nu(dy) \\
&\quad + \frac{e^{\mu x} - e^{-(c+\alpha_\theta)x}}{\alpha_\theta(\mu + c + \alpha_\theta)} \int_{[x, +\infty[} e^{-\mu y} \nu(dy) \\
&\quad - \frac{e^{-(c+\alpha_\theta)x}}{\alpha_\theta(\mu + c - \alpha_\theta)} \int_0^{+\infty} (e^{-(\alpha_\theta - c)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy).
\end{aligned} \tag{5.2.21}$$

Démonstration du Lemme 5.3

Appelons Y_1 , la taille du premier saut de $(J_t, t \geq 0)$.

Remarquons que, sur $\{T_x = \tau_1\}$, $Y_1 > 0$.

Nous rappelons que $(\tilde{B}_t, t \geq 0)$ est le processus défini par (5.2.17). Alors

$$\{T_x = \tau_1\} = \left\{ \sup_{t \leq \tau_1} \tilde{B}_t < x, \tilde{B}_{\tau_1} + Y_1 > x \right\} \tag{5.2.22}$$

et

$$K_x = \tilde{B}_{\tau_1} + Y_1 - x. \tag{5.2.23}$$

En conditionnant par τ_1 et Y_1 , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x = \tau_1\}} \right) \\
&= \int_0^{+\infty} dt e^{-\lambda t} \int_0^{+\infty} \nu(dy) \mathbb{E} \left(e^{-\theta t - \mu(\tilde{B}_t + y - x)} \mathbb{1}_{\{\sup_{u \leq t} \tilde{B}_u < x ; \tilde{B}_t + y \geq x\}} \right) \\
&= \int_0^{+\infty} dt e^{-(\lambda + \theta)t} \int_0^{+\infty} \nu(dy) \mathbb{E} \left(e^{-\mu(\tilde{B}_t + y - x)} \mathbb{1}_{\{\sup_{u \leq t} \tilde{B}_u < x ; x - y \leq \tilde{B}_t\}} \right)
\end{aligned} \tag{5.2.24}$$

La densité du couple $(\sup_{u \leq t} B_u, B_t)$ nous est donnée par ([KS91] page 95), i.e. :

$$\mathbb{P} \left(B_t \in da; \sup_{u \leq t} B_u \in db \right) = \frac{2(2b - a)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(2b-a)^2}{2t}} \mathbb{1}_{\{a < b; b > 0\}} da db. \tag{5.2.25}$$

En appliquant la formule de Girsanov, nous avons :

$$\mathbb{P} \left(\tilde{B}_t \in da; \sup_{u \leq t} \tilde{B}_u \in db \right) = \frac{2(2b-a)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-ca - \frac{c^2}{2}t} e^{-\frac{(2b-a)^2}{2t}} \mathbb{1}_{\{a < b; b > 0\}} da db. \quad (5.2.26)$$

En reportant (5.2.26) dans (5.2.24), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x = \tau_1\}} \right) \\ &= e^{\mu x} \int_0^\infty \nu(dy) e^{-\mu y} \int_{x-y}^x da e^{-(c+\mu)a} \int_{a \vee 0}^x db (2b-a) \\ & \quad \int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-(\lambda+\theta)t - \frac{c^2}{2}t - \frac{(2b-a)^2}{2t}} dt \\ &= e^{\mu x} \int_0^\infty \nu(dy) e^{-\mu y} \int_{x-y}^x da e^{-(c+\mu)a} \int_{a \vee 0}^x db (2b-a) \\ & \quad \int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{1}{2} \left((2(\lambda+\theta)+c^2)t + \frac{(2b-a)^2}{t} \right)} dt. \quad (5.2.27) \end{aligned}$$

Désignant par $\mathcal{K}_{\frac{1}{2}}$ la fonction définie par :

$$\mathcal{K}_{\frac{1}{2}}(\delta) := \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\delta}{2}(t+\frac{1}{t})} dt \quad \forall \delta > 0, \quad (5.2.28)$$

et utilisant la formule classique :

$$\mathcal{K}_{\frac{1}{2}}(\delta) = \sqrt{\frac{\pi}{2\delta}} e^{-\delta} \quad \forall \delta > 0, \quad (5.2.29)$$

nous en déduisons par dérivation et par le changement de variable $t \rightarrow \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}} t$ la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^3}} e^{-\frac{1}{2}(\beta t + \frac{\gamma}{t})} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}} e^{-\sqrt{\beta\gamma}} \quad \forall \beta > 0, \forall \gamma > 0. \quad (5.2.30)$$

Ceci nous permet de calculer l'intégrale en dt figurant dans le second membre de (5.2.27) et nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x = \tau_1\}} \right) \\ &= 2e^{\mu x} \int_0^{+\infty} \nu(dy) e^{-\mu y} \int_{x-y}^x da e^{-(c+\mu)a} \int_{a \vee 0}^x e^{-\alpha_\theta(2b-a)} db \quad (5.2.31) \end{aligned}$$

où α_θ est défini en (5.2.10). En calculant l'intégrale en db , nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x = \tau_1\}} \right) \\ &= \frac{e^{\mu x}}{\alpha_\theta} \int_0^{+\infty} \nu(dy) e^{-\mu y} \int_{x-y}^x da e^{-(c+\mu)a} (e^{-\alpha_\theta |a|} - e^{-\alpha_\theta (2x-a)}) . \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

En distinguant alors les cas $x - y \geq 0$ et $x - y < 0$ pour faire disparaître la valeur absolue $|a|$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x = \tau_1\}} \right) \\ &= \frac{e^{\mu x}}{\alpha_\theta} \int_{[0, x[} \nu(dy) e^{-\mu y} \int_{x-y}^x e^{-(c+\mu+\alpha_\theta)a} da \\ & \quad + \frac{e^{\mu x}}{\alpha_\theta} \int_{[x, +\infty[} \nu(dy) e^{-\mu y} \left[\int_{x-y}^0 e^{-(c+\mu-\alpha_\theta)a} da + \int_0^x e^{-(c+\mu+\alpha_\theta)a} da \right] \\ & \quad - \frac{e^{(-2\alpha_\theta+\mu)x}}{\alpha_\theta} \int_0^{+\infty} \nu(dy) e^{-\mu y} \int_{x-y}^x e^{-(c+\mu-\alpha_\theta)a} da . \end{aligned} \quad (5.2.33)$$

Le calcul des intégrales en da donne alors :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x = \tau_1\}} \right) \\ &= \frac{e^{-(c+\alpha_\theta)x}}{\alpha_\theta(c+\alpha_\theta+\mu)} \int_{[0, x[} (e^{(c+\alpha_\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \\ & \quad + \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{[x, +\infty[} \left[\frac{e^{-(c-\alpha_\theta)(x-y)} - e^{\mu(x-y)}}{c - \alpha_\theta + \mu} + e^{-\mu y} \left(\frac{e^{\mu x} - e^{-(c+\alpha_\theta)x}}{c + \alpha_\theta + \mu} \right) \right] \nu(dy) \\ & \quad - \frac{e^{-(c+\alpha_\theta)x}}{\alpha_\theta(c - \alpha_\theta + \mu)} \int_0^{+\infty} (e^{(c-\alpha_\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) . \end{aligned} \quad (5.2.34)$$

□

Lemme 5.4

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{\tau_1 < T_x < +\infty\}} \right) = \\ & \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_{-\infty}^{(x-y) \wedge x} e^{-ca} (e^{-\alpha_\theta |a|} - e^{(2x-a)\alpha_\theta}) F(\theta, \mu, x - a - y) da . \end{aligned} \quad (5.2.35)$$

Remarquons tout d'abord que :

$$e^{-\alpha_\theta|a|} - e^{-(2x-a)\alpha_\theta} \geq 0 \quad \text{pour} \quad a \leq (x-y) \wedge x. \quad (5.2.36)$$

L'opérateur Λ_θ défini par (5.2.13) est donc positif.

Démonstration du Lemme 5.4

En opérant comme dans la démonstration du lemme 5.3, nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{\tau_1 < T_x < +\infty\}} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_0^{+\infty} \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{t < T_x < +\infty\}} / \tau_1 = t; Y_1 = y \right) e^{-\lambda t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_0^{+\infty} dt e^{-\lambda t} \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty; \sup_{u \leq t} \tilde{B}_u < x; \tilde{B}_t < x; \tilde{B}_t + y < x\}} / \mathcal{F}_t \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_0^{+\infty} \mathbb{E} \left(e^{-\theta(t+T_x \circ \vartheta_t) - \mu(X_{t+T_x \circ \vartheta_t} - x)} \mathbb{1}_{\{t+T_x \circ \vartheta_t < +\infty\}} \right. \\ & \quad \left. \mathbb{1}_{\{\sup_{u \leq t} \tilde{B}_u < x; \tilde{B}_t < x \wedge (x-y)\}} \right) e^{-\lambda t} dt \quad (5.2.37) \end{aligned}$$

où ϑ est l'opérateur de translation.

Nous utilisons alors la propriété de Markov pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{\tau_1 < T_x < +\infty\}} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_0^{+\infty} \mathbb{E} \left[e^{-\theta T_{x-(\tilde{B}_t+y)} - \mu \left(X_{T_{x-(\tilde{B}_t+y)}} - (x-(\tilde{B}_t+y)) \right)} \mathbb{1}_{\{T_{x-(\tilde{B}_t+y)} < +\infty\}} \right. \\ & \quad \left. \mathbb{1}_{\{\sup_{u \leq t} \tilde{B}_u < x; \tilde{B}_t < x \wedge (x-y)\}} \right] e^{-(\lambda+\theta)t} dt. \quad (5.2.38) \end{aligned}$$

Utilisant de nouveau le loi du couple $(\sup_{u \leq t} \tilde{B}_u; \tilde{B}_t)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{\tau_1 < T_x < +\infty\}} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_{-\infty}^{(x-y) \wedge x} da e^{-ca} \int_{a \vee 0}^x db \frac{2(2b-a)}{\sqrt{2\pi}} \\ & \quad \int_0^{+\infty} dt \frac{1}{\sqrt{t^3}} e^{-(\lambda+\theta)t - \frac{(2b-a)^2}{2t} - \frac{c^2}{2}t} F(\theta, \mu, x-a-y). \quad (5.2.39) \end{aligned}$$

En calculant l'intégrale en t grâce à (5.2.30), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{\tau_1 < T_x < +\infty\}} \right) \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_{-\infty}^{(x-y) \wedge x} da e^{-ca} \int_{a \vee 0}^x db e^{-\alpha_\theta(2b-a)} F(\theta, \mu, x - a - y). \end{aligned} \quad (5.2.40)$$

L'intégrale en b se calcule et :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{\tau_1 < T_x < +\infty\}} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_{-\infty}^{(x-y) \wedge x} e^{-ca} \left(e^{-\alpha_\theta |a|} - e^{-(2x-a)\alpha_\theta} \right) F(\theta, \mu, x - a - y) da. \end{aligned}$$

□

5.3 Etude de l'opérateur Λ_θ

Pour étudier l'équation (5.2.9) et en particulier l'unicité de la solution, nous allons montrer que l'opérateur Λ_θ est contractant dans des espaces de Banach bien choisis. Puisque $F(\theta, \mu, \cdot)$ a un comportement sous exponentiel (cf. (4.2.17) et (4.2.18), paragraphe 4.2), il paraît naturel d'introduire pour tout $\gamma \geq 0$, l'espace de Banach $\mathcal{B}_\gamma$:

$$\mathcal{B}_\gamma := \{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}; \sup_{x \in \mathbb{R}_+} e^{\gamma x} |f(x)| < +\infty\}, \quad (5.3.41)$$

muni de la norme :

$$\|f\|_\gamma = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} e^{\gamma x} |f(x)|. \quad (5.3.42)$$

L'étude des valeurs de γ pour lesquelles Λ_θ est contractant dans $\mathcal{B}_\gamma$ est liée au signe, donc aux zéros, de la fonction φ dont nous rappelons la définition vue en (4.7.62) :

$$\varphi(q) = \frac{q^2}{2} + cq + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-qy} - 1) \nu(dy). \quad (5.3.43)$$

Soit :

$$r_\nu := \sup \left\{ s \geq 0; \int_0^{+\infty} (e^{sy} - 1) \nu(dy) < +\infty \right\}. \quad (5.3.44)$$

Lorsque :

$$r_\nu > 0 \quad (\text{éventuellement } r_\nu = +\infty), \quad (5.3.45)$$

la fonction φ est donc définie sur $] -r_\nu, 0]$.

Nous rappelons que $\widehat{\nu}$ désigne la transformée de Laplace de la mesure ν , soit :

$$\widehat{\nu}(q) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-qy} \nu(dy). \quad (5.3.46)$$

et nous introduisons la notation :

$$\widehat{\nu^+}(q) := \widehat{\nu}_{[0, +\infty[}(q) = \int_0^{+\infty} e^{-qy} \nu(dy). \quad (5.3.47)$$

Théorème 5.5

- (i) Pour tout $\theta \geq 0$, l'opérateur Λ_θ défini par (5.2.13) est un opérateur positif et de norme égale à $\frac{\lambda}{\lambda + \theta}$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+)$.
- (ii) Nous supposons $r_\nu > 0$. Soit $\gamma \in [0, r_\nu[$ et $\theta \geq 0$.
 Λ_θ est un opérateur linéaire, borné, de $\mathcal{B}_\gamma$ à valeurs dans $\mathcal{B}_\gamma$.
Plus précisément,

$$\|\Lambda_\theta f\|_\gamma \leq c_{\theta, \gamma} \|f\|_\gamma \quad \forall f \in \mathcal{B}_\gamma, \quad (5.3.48)$$

avec

$$c_{\theta, \gamma} = \frac{\widehat{\nu}(-\gamma)}{\widehat{\nu}(-\gamma) - \varphi(-\gamma) + \theta}. \quad (5.3.49)$$

De plus si $\varphi(-\gamma) < \theta$, alors :

$$0 < c_{\theta, \gamma} < 1. \quad (5.3.50)$$

Lorsqu'il en est ainsi, Λ_θ est donc contractant dans $\mathcal{B}_\gamma$.

Remarque 5.6 D'après la remarque A.2, point 5, et la remarque A.3 de l'Annexe A, nous savons que l'intervalle $\{q \in] -r_\nu, 0] / \varphi(q) < \theta\}$ est non vide :

- pour tout $\theta > 0$,
- pour $\theta = 0$ si $c > \mathbb{E}(J_1)$.

(voir figures A.1, A.4 et A.5 de l'Annexe A).

Démonstration du Théorème 5.5

Démonstration du point (i) :

a) L'inégalité (5.2.36) implique que Λ_θ est un opérateur positif.

b) $\forall h \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\forall x \geq 0$, nous avons :

$$|\Lambda_\theta h(x)| \leq \frac{1}{\alpha_\theta} \|h\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_{-\infty}^{(x-y) \wedge x} e^{-ca} (e^{-\alpha_\theta |a|} - e^{-(2x-a)\alpha_\theta}) da. \quad (5.3.51)$$

Nous remarquons que la fonction ℓ définie par :

$$\ell(x) = \mathbb{1}_{\{a+y \leq x; a \leq x\}} e^{-ca} (e^{-\alpha_\theta |a|} - e^{-(2x-a)\alpha_\theta}) \quad (5.3.52)$$

est strictement croissante. Elle est, en particulier, strictement majorée par sa limite à l'infini :

$$\mathbb{1}_{\{a+y \leq x; a \leq x\}} e^{-ca} (e^{-\alpha_\theta |a|} - e^{-(2x-a)\alpha_\theta}) < e^{-ca} e^{-\alpha_\theta |a|} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5.3.53)$$

Nous en déduisons que, pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} |\Lambda_\theta h(x)| &\leq \frac{1}{\alpha_\theta} \|h\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ca} e^{-\alpha_\theta |a|} da \\ &\leq \frac{1}{\alpha_\theta} \|h\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \left[\int_{-\infty}^0 e^{-(c-\alpha_\theta)a} da + \int_0^{+\infty} e^{-(c+\alpha_\theta)a} da \right] \\ &\leq \frac{1}{\alpha_\theta} \|h\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \left(-\frac{1}{c-\alpha_\theta} + \frac{1}{c+\alpha_\theta} \right) \\ &\leq \frac{\lambda}{\lambda+\theta} \|h\|_\infty \leq \|h\|_\infty \end{aligned} \quad (5.3.54)$$

Par ailleurs, si nous considérons la fonction $h_1 : x \rightarrow 1$ alors $\|\Lambda_\theta h_1\|_\infty = \frac{\lambda}{\lambda+\theta}$,

d'après la remarque (5.3.53). Nous en déduisons donc que : $\|\Lambda_\theta\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} = \frac{\lambda}{\lambda+\theta}$.

Démonstration du point (ii) :

Par définition, si f appartient à $\mathcal{B}_\gamma$, alors $|f(x)| \leq \|f\|_\gamma e^{-\gamma x}$, $\forall x \geq 0$.

Soit $\gamma \in [0, r_\nu[$. Nous avons :

$$|\Lambda_\theta f(x)| \leq \frac{1}{\alpha_\theta} \|f\|_\gamma e^{-\gamma x} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_{-\infty}^{(x-y) \wedge x} e^{-ca} (e^{-\alpha_\theta |a|} - e^{-(2x-a)\alpha_\theta}) e^{\gamma(a+y)} da.$$

Nous déduisons de (5.3.53) :

$$\begin{aligned}
& |\Lambda_\theta f(x)| \\
& \leq \frac{1}{\alpha_\theta} \|f\|_\gamma e^{-\gamma x} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) e^{\gamma y} \left[\int_{-\infty}^0 e^{-(c-\alpha_\theta-\gamma)a} da + \int_0^{+\infty} e^{-(c+\alpha_\theta-\gamma)a} da \right] \\
& \leq \frac{1}{\alpha_\theta} \|f\|_\gamma e^{-\gamma x} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) e^{\gamma y} \left(\frac{1}{\alpha_\theta - c + \gamma} + \frac{1}{\alpha_\theta + c - \gamma} \right) \\
& \leq \|f\|_\gamma e^{-\gamma x} \frac{\widehat{\nu}(-\gamma)}{-\frac{1}{2}\gamma^2 + c\gamma + \lambda + \theta}. \tag{5.3.55}
\end{aligned}$$

Utilisant (5.1.2) et la définition de φ , il vient :

$$|\Lambda_\theta f(x)| \leq \|f\|_\gamma e^{-\gamma x} \frac{\widehat{\nu}(-\gamma)}{\widehat{\nu}(-\gamma) - \varphi(-\gamma) + \theta} \tag{5.3.56}$$

D'où (5.3.48)

$$\|\Lambda_\theta f\|_\gamma \leq c_{\theta,\gamma} \|f\|_\gamma.$$

□

Proposition 5.7 *Nous supposons que $r_\nu > 0$. Soit $\mu \geq 0$, soit $\theta > 0$ ou $\theta = 0$ si $c > \mathbb{E}(J_1)$. Pour tout $\gamma \in [0, r_\nu[$ tel que $\varphi(-\gamma) < \theta$, nous avons :*

(i) *La fonction $F(\theta, \mu, \cdot)$ appartient à $\mathcal{B}_\gamma$ et*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln F(\theta, \mu, x) \leq -\gamma. \tag{5.3.57}$$

(ii) *L'équation (5.2.9) possède une unique solution dans $\mathcal{B}_\gamma$.*

Remarquons que de tels γ existent d'après la Remarque 5.6.

Démonstration de la Proposition 5.7

Démonstration du point (i)

a) Nous montrons directement que la fonction $F_0(\theta, \mu, \cdot) + F_1(\theta, \mu, \cdot)$ appartient à $\mathcal{B}_\gamma$.

Tout d'abord :

$$e^{\gamma x} |F_0(\theta, \mu, x)| = e^{-(c+\alpha_\theta-\gamma)x} \leq 1 \tag{5.3.58}$$

car $c + \alpha_\theta - \gamma > 0$ (cf. (A.3.18) dans l'Appendice A), donc

$$F_0(\theta, \mu, \cdot) \in \mathcal{B}_\gamma. \quad (5.3.59)$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} e^{\gamma x} |F_1(\theta, \mu, x)| &\leq \frac{1}{\alpha_\theta(\mu + c + \alpha_\theta)} \int_{[0, x]} e^{-(c + \alpha_\theta - \gamma)(x-y)} e^{\gamma y} \nu(dy) \\ &\quad + \frac{e^{-(c + \alpha_\theta - \gamma)x}}{\alpha_\theta(\mu + c + \alpha_\theta)} \int_{[0, x]} e^{-\mu y} \nu(dy) \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_\theta |\mu + c - \alpha_\theta|} \int_{]x, +\infty[} e^{-(\alpha_\theta - c + \gamma)(y-x)} e^{\gamma y} \nu(dy) \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_\theta |\mu + c - \alpha_\theta|} \int_{]x, +\infty[} e^{-(\mu + \gamma)(y-x)} e^{\gamma y} \nu(dy) \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_\theta(\mu + c + \alpha_\theta)} \int_{]x, +\infty[} e^{-(\mu + \gamma)(y-x)} e^{\gamma y} \nu(dy) \\ &\quad + \frac{e^{-(c + \alpha_\theta - \gamma)x}}{\alpha_\theta(\mu + c + \alpha_\theta)} \int_{]x, +\infty[} e^{-\mu y} \nu(dy) \\ &\quad + \frac{e^{-(c + \alpha_\theta - \gamma)x}}{\alpha_\theta |\mu + c - \alpha_\theta|} \left| \int_0^{+\infty} (e^{-(\alpha_\theta - c)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right|. \end{aligned} \quad (5.3.60)$$

Comme, d'après (A.3.18) dans l'Appendice A, si $\varphi(-\gamma) < \theta$, nous avons $-\alpha_\theta - c < -\gamma < \alpha_\theta - c$, alors :

$$\begin{aligned} e^{\gamma x} |F_1(\theta, \mu, x)| &\leq \frac{2\widehat{\nu}^+(-\gamma)}{\alpha_\theta(\mu + c + \alpha_\theta)} + \frac{2\widehat{\nu}^+(\mu)}{\alpha_\theta(\mu + c + \alpha_\theta)} + \frac{2\widehat{\nu}^+(-\gamma)}{\alpha_\theta |\mu + c - \alpha_\theta|} + \frac{\widehat{\nu}^+(\alpha_\theta - c) + \widehat{\nu}^+(\mu)}{\alpha_\theta |\mu + c - \alpha_\theta|}. \end{aligned} \quad (5.3.61)$$

Le membre de droite est fini puisque $\gamma < r_\nu$, $\alpha_\theta - c \geq 0$ et $\mu \geq 0$.

Donc :

$$F_1(\theta, \mu, \cdot) \in \mathcal{B}_\gamma. \quad (5.3.62)$$

b) Nous itérons alors l'équation fonctionnelle (5.2.9) et nous obtenons :

$$F(\theta, \mu, x) = \sum_{p=0}^n \Lambda_\theta^p (F_0(\theta, \mu, \cdot) + F_1(\theta, \mu, \cdot))(x) + \Lambda_\theta^{n+1} F(\theta, \mu, \cdot)(x). \quad (5.3.63)$$

Nous prouvons dans l'Appendice B (cf. Proposition B.2) que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Lambda_\theta^{n+1} F(\theta, \mu, \cdot)(x) = 0. \quad (5.3.64)$$

Par ailleurs, les fonctions $F_0(\theta, \mu, \cdot)$ et $F_1(\theta, \mu, \cdot)$ appartenant à $\mathcal{B}_\gamma$ et Λ_θ étant contractant, nous en déduisons :

$$F(\theta, \mu, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Lambda_\theta^n (F_0(\theta, \mu, \cdot) + F_1(\theta, \mu, \cdot)) (x), \quad (5.3.65)$$

cette dernière série étant convergente dans $\mathcal{B}_\gamma$. Ainsi si $\gamma \in [0, r_\nu[$ et $\varphi(-\gamma) < \theta$:

$$F(\theta, \mu, \cdot) \in \mathcal{B}_\gamma, \quad (5.3.66)$$

et

$$F(\theta, \mu, x) \leq e^{-\gamma x} \|F(\theta, \mu, \cdot)\|_\gamma. \quad (5.3.67)$$

D'après l'Appendice B, Proposition B.2, nous savons que la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $\frac{1}{x} \ln F(\theta, \mu, x)$ existe, donc avec (5.3.67), nous déduisons, pour tout γ de $[0, r_\nu[$ tel que $\varphi(-\gamma) < \theta$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln F(\theta, \mu, x) \leq -\gamma. \quad (5.3.68)$$

Démonstration du point (ii)

L'unicité de la solution de l'équation (5.2.9) dans $\mathcal{B}_\gamma$ découle du caractère contractant de Λ_θ . $\square$

Remarque 5.8 1. Nous définissons, pour tout $\theta \geq 0$, $\bar{\gamma}_0(\theta)$ par :

$$\bar{\gamma}_0(\theta) := \sup\{\gamma \in [0, r_\nu[\text{ tel que } \varphi(-\gamma) < \theta \}. \quad (5.3.69)$$

D'après l'étude faite en Appendice A, (voir figures A.1, A.2, A.3, A.4 et A.5) :

$$\text{Si } \theta > 0 \quad \bar{\gamma}_0(\theta) > 0 \quad (5.3.70)$$

$$\text{Si } \theta = 0 \text{ et } c > \mathbb{E}(J_1) \quad \bar{\gamma}_0(0) > 0 \quad (5.3.71)$$

$$\text{Si } \theta = 0 \text{ et } c \leq \mathbb{E}(J_1) \quad \bar{\gamma}_0(0) = 0 \quad (5.3.72)$$

De (5.3.68), nous déduisons que, pour tout $\theta > 0$ ou pour $\theta = 0$ et $c > \mathbb{E}(J_1)$, et tout $\mu \geq 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln F(\theta, \mu, x) \leq -\bar{\gamma}_0(\theta). \quad (5.3.73)$$

D'après le caractère sous-exponentiel de $F(\theta, 0, \cdot)$ et d'après (4.2.16), nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} \ln F(\theta, 0, x) = -\tilde{\gamma}_\theta \leq -\bar{\gamma}_0(\theta). \quad (5.3.74)$$

Ainsi, nous en déduisons que $\tilde{\gamma}_\theta \geq \bar{\gamma}_0(\theta) > 0$.

Dans le cas où la condition de profit net n'est pas réalisée, $c - \mathbb{E}(J_1) \leq 0$, alors l'intervalle $\{\gamma \in [0, r_\nu[\mid \varphi(-\gamma) < 0\}$ est vide (cf. Remarque 5.6), mais nous savons dans ce cas que : $F(0, 0, x) = 1 \quad \forall x \geq 0$.

2. Sous les hypothèses de la Proposition 5.7, il découle de la propriété de contraction de Λ_θ que :

$$F(\theta, \mu, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Lambda_\theta^n (F_0(\theta, \mu, \cdot) + F_1(\theta, \mu, \cdot)) (x). \quad (5.3.75)$$

Ceci fournit un schéma d'approximation numérique de $F(\theta, \mu, \cdot)$, à vitesse exponentielle, car :

$$\begin{aligned} & \left| F(\theta, \mu, x) - \sum_{n=0}^p \Lambda_\theta^n (F_0(\theta, \mu, \cdot) + F_1(\theta, \mu, \cdot)) (x) \right| \\ &= \left| \sum_{n=p+1}^{+\infty} \Lambda_\theta^n (F_0(\theta, \mu, \cdot) + F_1(\theta, \mu, \cdot)) (x) \right| \\ &= \left| \Lambda_\theta^{p+1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \Lambda_\theta^n (F_0(\theta, \mu, \cdot) + F_1(\theta, \mu, \cdot)) \right) (x) \right| \end{aligned} \quad (5.3.76)$$

et comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \Lambda_\theta^n (F_0(\theta, \mu, \cdot) + F_1(\theta, \mu, \cdot))$ appartient à $\mathcal{B}_\gamma$ alors

$$\begin{aligned} & \left\| F(\theta, \mu, x) - \sum_{n=0}^p \Lambda_\theta^n (F_0(\theta, \mu, \cdot) + F_1(\theta, \mu, \cdot)) \right\|_\gamma \\ & < c_{\theta, \gamma}^{p+1} \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \Lambda_\theta^n (F_0(\theta, \mu, \cdot) + F_1(\theta, \mu, \cdot)) \right\|_\gamma. \end{aligned} \quad (5.3.77)$$

Nous en déduisons qu'il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$\left| F(\theta, \mu, x) - \sum_{n=0}^p \Lambda_{\theta}^n (F_0(\theta, \mu, \cdot) + F_1(\theta, \mu, \cdot))(x) \right| < c_{\theta, \gamma}^{p+1} K e^{-\gamma x}, \quad (5.3.78)$$

où $c_{\theta, \gamma}$ est définie par (5.3.49).

3. Lorsque ν ne charge que $\mathbb{R}_-$ alors φ est définie sur $\mathbb{R}_-$ et $r_{\nu} = +\infty$. Le processus $(X_t, t \geq 0)$ franchit continûment le niveau $x > 0$ donc :

$$K_x = X_{T_x} - x = 0 \quad \text{et} \quad F_1(\theta, \mu, x) = 0. \quad (5.3.79)$$

L'équation (5.2.9) devient donc :

$$F(\theta, \mu, x) = e^{-(c+\alpha_{\theta})x} + \Lambda_{\theta} F(\theta, \mu, \cdot)(x). \quad (5.3.80)$$

D'après l'Appendice A, Remarque A.2, point 3 et figures A_i ($i \in \{1, \dots, 5\}$), nous savons que, pour tout $\theta > 0$ et pour $\theta = 0$ dans le cas de profit net, il existe un réel unique $\gamma_0(\theta)$ tel que :

$$-\gamma_0(\theta) < 0 \quad \text{et} \quad \varphi(-\gamma_0(\theta)) = \theta, \quad (5.3.81)$$

soit :

$$\frac{\gamma_0^2(\theta)}{2} - c\gamma_0(\theta) + \int_{-\infty}^0 e^{\gamma_0(\theta)y} \nu(dy) - \lambda = \theta. \quad (5.3.82)$$

Un calcul direct montre que la fonction $f_{\theta} : x \rightarrow e^{-\gamma_0(\theta)x}$ est solution de (5.2.9).

En effet :

$$\begin{aligned}
& e^{-(c+\alpha_\theta)x} + \Lambda_\theta f_\theta(x) \\
&= e^{-(c+\alpha_\theta)x} + \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^0 \nu(dy) \int_{-\infty}^{(x-y) \wedge x} e^{-ca} (e^{-\alpha_\theta|a|} - e^{-(2x-a)\alpha_\theta}) e^{-\gamma_0(\theta)(x-a-y)} da \\
&= e^{-(c+\alpha_\theta)x} - \frac{e^{-(2\alpha_\theta-\gamma_0(\theta))x}}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^0 e^{\gamma_0(\theta)y} \nu(dy) \int_{-\infty}^x e^{-(c-\alpha_\theta-\gamma_0(\theta))a} da \\
&\quad + \frac{e^{-\gamma_0(\theta)x}}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^0 e^{\gamma_0(\theta)y} \nu(dy) \left(\int_{-\infty}^0 e^{-(c-\alpha_\theta-\gamma_0(\theta))a} da + \int_0^x e^{-(c+\alpha_\theta-\gamma_0(\theta))a} da \right) \\
&= e^{-(c+\alpha_\theta)x} + \frac{e^{-(2\alpha_\theta-\gamma_0(\theta))x}}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^0 e^{\gamma_0(\theta)y} \nu(dy) \frac{e^{-(c-\alpha_\theta-\gamma_0(\theta))x}}{c-\alpha_\theta-\gamma_0(\theta)} + \frac{e^{-\gamma_0(\theta)x}}{\alpha_\theta} \\
&\quad \int_{-\infty}^0 e^{\gamma_0(\theta)y} \nu(dy) \left[\frac{1}{-c+\alpha_\theta+\gamma_0(\theta)} + \frac{1}{c+\alpha_\theta-\gamma_0(\theta)} - \frac{e^{-(c+\alpha_\theta-\gamma_0(\theta))x}}{c+\alpha_\theta-\gamma_0(\theta)} \right] \\
&= e^{-(c+\alpha_\theta)x} + \frac{2 e^{-\gamma_0(\theta)x}}{\alpha_\theta^2 - (c-\gamma_0(\theta))^2} \int_{-\infty}^0 e^{\gamma_0(\theta)y} \nu(dy) \\
&\quad + \frac{e^{-(c+\alpha_\theta)x}}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^0 e^{\gamma_0(\theta)y} \nu(dy) \left(-\frac{1}{c+\alpha_\theta-\gamma_0(\theta)} + \frac{1}{c-\alpha_\theta-\gamma_0(\theta)} \right) \\
&= e^{-(c+\alpha_\theta)x} + \frac{2e^{-\gamma_0(\theta)x} \widehat{\nu}(-\gamma_0(\theta)) - 2e^{-(c+\alpha_\theta)x} \widehat{\nu}(-\gamma_0(\theta))}{-\gamma_0^2(\theta) + 2c\gamma_0(\theta) + 2(\lambda + \theta)} \\
&= e^{-\gamma_0(\theta)x} \tag{5.3.83}
\end{aligned}$$

car $\varphi(-\gamma_0(\theta)) = \theta$ donc :

$$\frac{2 \widehat{\nu}(-\gamma_0(\theta))}{-\gamma_0^2(\theta) + 2c\gamma_0(\theta) + 2(\lambda + \theta)} = 1, \tag{5.3.84}$$

et d'après le point (ii) de la Proposition 5.7, nous déduisons donc que :

$$F(\theta, \mu, x) = e^{-\gamma_0(\theta)x} \quad \forall x \geq 0. \tag{5.3.85}$$

En particulier, si la condition de profit net, $c > \mathbb{E}(J_1)$, est vérifiée, nous avons :

$$\mathbb{P}(T_x < +\infty) = F(0, 0, x) = e^{-\gamma_0(0)x}, \tag{5.3.86}$$

et si la condition de profit net n'est pas réalisée, $\gamma_0(0) = 0$ et nous retrouvons :

$$\mathbb{P}(T_x < +\infty) = F(0, 0, x) = 1. \quad (5.3.87)$$

Le point (i) de la Proposition 5.7 nous donne partiellement le comportement asymptotique de $F(\theta, \mu, x)$ quand x tend vers $+\infty$. L'objet des paragraphes suivants est de préciser ce comportement.

Chapitre 6

Transformée de Laplace de $F(\theta, \mu, .)$

6.1 Expression de la Transformée de Laplace $\widehat{F}(\theta, \mu, .)$

Nous ne supposons plus ici que $(J_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson composé. La mesure ν n'est donc plus nécessairement de masse finie. Nous supposons que $(J_t, t \geq 0)$ est un processus de Lévy, de sauts purs, de mesure de Lévy ν telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y| \nu(dy) < \infty. \quad (6.1.1)$$

Nous supposons par ailleurs que :

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{-qy} \nu(dy) < \infty \quad \forall q > 0. \quad (6.1.2)$$

Nous définissons l'opérateur R de la manière suivante :

Pour toute fonction h de $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ et pour tout q appartenant à D_0 , où

$$D_0 = \{q \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re} q > 0\}, \quad (6.1.3)$$

nous posons :

$$Rh(q) := \int_{-\infty}^0 e^{-qy} \nu(dy) \int_0^{-y} e^{-qb} h(b) db - \int_{-\infty}^0 \nu(dy) \int_0^{-y} h(b) db. \quad (6.1.4)$$

Remarquons que les hypothèses (6.1.1) et (6.1.2) assurent l'existence de $Rh(q)$ pour tout $q \in D_0$ et toute fonction h bornée, définie sur $\mathbb{R}_+$.

Nous utiliserons la même notation qu'en (4.7.62), pour tout complexe q de D_0 :

$$\varphi(q) = \frac{q^2}{2} + cq + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-qy} - 1)\nu(dy), \quad (6.1.5)$$

Observons que d'après les hypothèses (6.1.1) et (6.1.2), φ est définie sur $\overline{D_0} = \{q \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re} q \geq 0\}$.

Puisque $F(\theta, \mu, \cdot)$ est une fonction bornée, sa transformée de Laplace $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$ est holomorphe sur le domaine D_0 et :

$$\widehat{F}(\theta, \mu, q) := \int_0^{+\infty} e^{-qy} F(\theta, \mu, y) dy \quad \forall q \in D_0. \quad (6.1.6)$$

Théorème 6.1 *Sous les hypothèses (6.1.1) et (6.1.2), la transformée de Laplace $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$ de $F(\theta, \mu, \cdot)$ satisfait, pour tout $\theta \geq 0$, tout $\mu \geq 0$ et tout $q \in D_0$, à :*

$$\begin{aligned} \widehat{F}(\theta, \mu, q) = & \frac{1}{\varphi(q) - \theta} \left(\frac{q - \gamma_0^*(\theta)}{2} + \frac{1}{q - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) + RF(\theta, \mu, \cdot)(q) - RF(\theta, \mu, \cdot)(\gamma_0^*(\theta)) \right) \end{aligned} \quad (6.1.7)$$

où $\gamma_0^*(\theta)$ est défini par :

– Si $\theta > 0$ ou si $\theta = 0$ et $c < \mathbb{E}(J_1)$ alors $\gamma_0^*(\theta)$ est l'unique réel vérifiant :

$$\gamma_0^*(\theta) > 0 \quad \text{et} \quad \varphi(\gamma_0^*(\theta)) = \theta. \quad (6.1.8)$$

– Si $\theta = 0$ et $c \geq \mathbb{E}(J_1)$ alors :

$$\gamma_0^*(0) = 0. \quad (6.1.9)$$

Remarque 6.2 1. L'expression (6.1.7) est énoncée avec la convention que

$$\frac{e^a - e^b}{a - b} \text{ vaut } e^a \text{ quand } a = b.$$

2. D'après (6.1.2), φ est définie sur $] -r_\nu, +\infty[$. Dans ces conditions, pour tout $\theta \geq 0$, l'existence de $\gamma_0^*(\theta)$ est prouvée dans l'Appendice A (cf. (A.5.26)).
3. Comme $\varphi(\gamma_0^*(\theta)) = \theta$ et $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$ est définie sur D_0 , l'expression (6.1.7) fait clairement apparaître que $q = \mu$ et $q = \gamma_0^*(\theta)$ sont des “fausses” singularités pour $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$.

4. Si ν ne charge que $\mathbb{R}_+$, $RF(\theta, \mu, \cdot)(q) = 0$, $\forall q \in D_0$, et alors l'expression (6.1.7) n'est plus une équation mais devient une formule explicite donnant $\widehat{F}(\theta, \mu, q)$:

$$\begin{aligned} \widehat{F}(\theta, \mu, q) = \frac{1}{\varphi(q) - \theta} & \left(\frac{q - \gamma_0^*(\theta)}{2} + \frac{1}{q - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right) \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

5. Si ν ne charge que $\mathbb{R}_-$, l'expression (6.1.7) devient :

$$\widehat{F}(\theta, \mu, q) = \frac{1}{\varphi(q) - \theta} \left(\frac{q - \gamma_0^*(\theta)}{2} + RF(\theta, \mu, \cdot)(q) - RF(\theta, \mu, \cdot)(\gamma_0^*(\theta)) \right) \quad (6.1.11)$$

Nous détaillerons ces deux derniers cas particuliers à la suite de la démonstration du théorème 6.1.

Démonstration du Théorème 6.1

Première étape Nous allons supposer dans un premier temps, que $(J_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson composé. Les notations sont celles du paragraphe 5. $F(\theta, \mu, \cdot)$ vérifie l'équation fonctionnelle (5.2.9) donc $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$ vérifie l'équation :

$$\widehat{F}(\theta, \mu, q) = \widehat{F}_0(\theta, \mu, q) + \widehat{F}_1(\theta, \mu, q) + \widehat{\Lambda}_\theta \widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)(q) \quad q \in D_0. \quad (6.1.12)$$

De la définition de $F_0(\theta, \mu, x)$ donnée en (5.2.11), il découle :

$$\widehat{F}_0(\theta, \mu, q) = \frac{1}{c + \alpha_\theta + q}. \quad (6.1.13)$$

De la définition de $F_1(\theta, \mu, x)$ donnée en (5.2.12), il découle :

$$\begin{aligned} \widehat{F}_1(\theta, \mu, q) &= \int_0^{+\infty} e^{-qx} F_1(\theta, \mu, x) dx \\ &= I_1(\theta, \mu, q) + I_2(\theta, \mu, q) + I_3(\theta, \mu, q) + I_4(\theta, \mu, q) \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

avec

$$\begin{aligned}
 I_1(\theta, \mu, q) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(q+c+\alpha_\theta)x}}{\alpha_\theta(\mu+c+\alpha_\theta)} \left(\int_{[0,x]} (e^{(c+\alpha_\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right) dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \nu(dy) \frac{(e^{(c+\alpha_\theta)y} - e^{-\mu y})}{\alpha_\theta(\mu+c+\alpha_\theta)} \int_y^{+\infty} e^{-(q+c+\alpha_\theta)x} dx \\
 &= \frac{1}{\alpha_\theta(q+c+\alpha_\theta)(\mu+c+\alpha_\theta)} \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - e^{-(q+\mu+c+\alpha_\theta)y}) \nu(dy),
 \end{aligned} \tag{6.1.15}$$

$$\begin{aligned}
 I_2(\theta, \mu, q) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-qx}}{\alpha_\theta(\mu+c-\alpha_\theta)} \left(\int_{]x,+\infty[} (e^{-(\alpha_\theta-c)(y-x)} - e^{-\mu(y-x)}) \nu(dy) \right) dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{\nu(dy)}{\alpha_\theta(\mu+c-\alpha_\theta)} \int_0^y (e^{-(q+c-\alpha_\theta)x} e^{-(\alpha_\theta-c)y} - e^{-(q-\mu)x} e^{-\mu y}) dx \\
 &= \frac{1}{\alpha_\theta(\mu+c-\alpha_\theta)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-(\alpha_\theta-c)y} - e^{-qy}}{q+c-\alpha_\theta} + \frac{e^{-qy} - e^{-\mu y}}{q-\mu} \right) \nu(dy),
 \end{aligned} \tag{6.1.16}$$

$$\begin{aligned}
 I_3(\theta, \mu, q) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(q-\mu)x} - e^{-(q+c+\alpha_\theta)x}}{\alpha_\theta(\mu+c+\alpha_\theta)} \left(\int_{]x,+\infty[} e^{-\mu y} \nu(dy) \right) dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \nu(dy) \frac{e^{-\mu y}}{\alpha_\theta(\mu+c+\alpha_\theta)} \int_0^y (e^{-(q-\mu)x} - e^{-(q+c+\alpha_\theta)x}) dx \\
 &= -\frac{1}{\alpha_\theta(\mu+c+\alpha_\theta)} \int_0^{+\infty} \nu(dy) \left(\frac{e^{-qy} - e^{-\mu y}}{q-\mu} - \frac{e^{-(q+\mu+c+\alpha_\theta)y} - e^{-\mu y}}{q+c+\alpha_\theta} \right),
 \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

$$\begin{aligned}
 I_4(\theta, \mu, q) &= - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(q+c+\alpha_\theta)x}}{\alpha_\theta(\mu+c-\alpha_\theta)} dx \left(\widehat{\nu^+}(\alpha_\theta - c) - \widehat{\nu^+}(\mu) \right) \\
 &= \frac{\widehat{\nu^+}(\mu) - \widehat{\nu^+}(\alpha_\theta - c)}{\alpha_\theta(q+c+\alpha_\theta)(\mu+c-\alpha_\theta)}
 \end{aligned} \tag{6.1.18}$$

Nous rappelons que $\widehat{\nu}^+$ est la fonction définie en (5.3.47) par :

$$\widehat{\nu}^+(q) := \widehat{\nu}_{[0, +\infty[}(q) = \int_0^{+\infty} e^{-qy} \nu(dy).$$

En reportant ces expressions dans (6.1.14), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \widehat{F}_1(\theta, \mu, q) &= \frac{\widehat{\nu}^+(q)}{\alpha_\theta(\mu + c + \alpha_\theta)} \left(\frac{1}{q + c + \alpha_\theta} - \frac{1}{q - \mu} \right) \\ &\quad - \frac{\widehat{\nu}^+(q)}{\alpha_\theta(\mu + c - \alpha_\theta)} \left(\frac{1}{q + c - \alpha_\theta} - \frac{1}{q - \mu} \right) \\ &\quad + \frac{\widehat{\nu}^+(\alpha_\theta - c)}{\alpha_\theta(\mu + c - \alpha_\theta)} \left(\frac{1}{q + c - \alpha_\theta} - \frac{1}{q + c + \alpha_\theta} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\widehat{\nu}^+(\mu)}{\alpha_\theta(\mu + c - \alpha_\theta)} - \frac{\widehat{\nu}^+(\mu)}{\alpha_\theta(\mu + c + \alpha_\theta)} \right) \left(-\frac{1}{q - \mu} + \frac{1}{q + c + \alpha_\theta} \right), \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \widehat{F}_1(\theta, \mu, q) &= -\frac{\widehat{\nu}^+(q)}{\alpha_\theta(q + c + \alpha_\theta)(q - \mu)} + \frac{\widehat{\nu}^+(q)}{\alpha_\theta(q + c - \alpha_\theta)(q - \mu)} \\ &\quad + \frac{2 \widehat{\nu}^+(\alpha_\theta - c)}{(\mu + c - \alpha_\theta)(q + c - \alpha_\theta)(q + c + \alpha_\theta)} \\ &\quad - \frac{2 \widehat{\nu}^+(\mu)}{(\mu + c - \alpha_\theta)(q - \mu)(q + c + \alpha_\theta)}. \end{aligned} \tag{6.1.19}$$

Enfin, en notant :

$$C_\theta(q) := (q + c + \alpha_\theta)(q + c - \alpha_\theta) = q^2 + 2cq - 2(\lambda + \theta), \tag{6.1.20}$$

nous obtenons :

$$\widehat{F}_1(\theta, \mu, q) = \frac{2 \widehat{\nu}^+(q)}{(q - \mu)C_\theta(q)} + \frac{2 \widehat{\nu}^+(\alpha_\theta - c)}{(\mu + c - \alpha_\theta)C_\theta(q)} - \frac{2 \widehat{\nu}^+(\mu)(q + c - \alpha_\theta)}{(q - \mu)(\mu + c - \alpha_\theta)C_\theta(q)}$$

ou encore

$$\widehat{F}_1(\theta, \mu, q) = \frac{2}{C_\theta(q)} \left(\frac{\widehat{\nu}^+(q) - \widehat{\nu}^+(\mu)}{q - \mu} - \frac{\widehat{\nu}^+(\mu) - \widehat{\nu}^+(\alpha_\theta - c)}{\mu + c - \alpha_\theta} \right). \tag{6.1.21}$$

Remarquons que $C_\theta(q)$ ne peut s'annuler que pour $q = \alpha_\theta - c$, puisque $q \in D$ et donc $\operatorname{Re} q + c + \alpha_\theta > 0$.

Calculons maintenant $\widehat{\Lambda_\theta F}(\theta, \mu, \cdot)(q)$.

En effectuant le changement de variable $b = x - a - y$ dans (5.2.13), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Lambda_\theta F(\theta, \mu, \cdot)(x) &= \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_{0 \vee (-y)}^{+\infty} e^{-c(x-b-y)} (e^{-\alpha_\theta|x-y-b|} - e^{-(x+y+b)\alpha_\theta}) F(\theta, \mu, b) db \\ &= \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_0^{+\infty} e^{-c(x-b-y)} (e^{-\alpha_\theta|x-y-b|} - e^{-(x+y+b)\alpha_\theta}) F(\theta, \mu, b) db \\ &\quad - \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^0 \nu(dy) \int_0^{-y} e^{-c(x-b-y)} (e^{-\alpha_\theta(x-y-b)} - e^{-(x+y+b)\alpha_\theta}) F(\theta, \mu, b) db. \end{aligned} \quad (6.1.22)$$

Avec des notations évidentes, nous avons :

$$\Lambda_\theta F(\theta, \mu, \cdot)(x) = H_1 F(\theta, \mu, \cdot)(x) + I(\theta, \mu, x) + H_2 F(\theta, \mu, \cdot)(x), \quad (6.1.23)$$

avec

$$H_1 F(\theta, \mu, \cdot)(x) = \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_0^{+\infty} e^{-c(x-b-y)} e^{-\alpha_\theta|x-y-b|} F(\theta, \mu, b) db, \quad (6.1.24)$$

$$\begin{aligned} I(\theta, \mu, x) &= -\frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_0^{+\infty} e^{-c(x-b-y)} e^{-(x+y+b)\alpha_\theta} F(\theta, \mu, b) db \\ &= \frac{1}{\alpha_\theta} e^{-(c+\alpha_\theta)x} \widehat{\nu}(\alpha_\theta - c) \widehat{F}(\theta, \mu, \alpha_\theta - c), \end{aligned} \quad (6.1.25)$$

et

$$\begin{aligned} H_2 F(\theta, \mu, \cdot)(x) &= -\frac{e^{-(c+\alpha_\theta)x}}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^0 e^{(c+\alpha_\theta)y} \nu(dy) \int_0^{-y} e^{(c+\alpha_\theta)b} F(\theta, \mu, b) db \\ &\quad + \frac{e^{-(c+\alpha_\theta)x}}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^0 e^{(c-\alpha_\theta)y} \nu(dy) \int_0^{-y} e^{(c-\alpha_\theta)b} F(\theta, \mu, b) db. \end{aligned} \quad (6.1.26)$$

$H_2F(\theta, \mu, \cdot)(x)$ s'écrit, avec la notation (6.1.4) :

$$H_2F(\theta, \mu, \cdot)(x) = \frac{e^{-(c+\alpha_\theta)x}}{\alpha_\theta} (RF(\theta, \mu, \cdot)(\alpha_\theta - c) - RF(\theta, \mu, \cdot)(-\alpha_\theta - c)) . \quad (6.1.27)$$

Ainsi la transformée de Laplace $\widehat{\Lambda_\theta F}(\theta, \mu, \cdot)$ nous est donnée par :

$$\begin{aligned} \widehat{\Lambda_\theta F}(\theta, \mu, \cdot)(q) &= \widehat{H_1 F}(\theta, \mu, \cdot)(q) - \frac{\widehat{\nu}(\alpha_\theta - c)\widehat{F}(\theta, \mu, \alpha_\theta - c)}{\alpha_\theta(q + c + \alpha_\theta)} \\ &\quad + \frac{RF(\theta, \mu, \cdot)(\alpha_\theta - c) - RF(\theta, \mu, \cdot)(-\alpha_\theta - c)}{\alpha_\theta(q + c + \alpha_\theta)} . \end{aligned} \quad (6.1.28)$$

Calculons $\widehat{H_1 F}(\theta, \mu, \cdot)(q)$:

$$\begin{aligned} \widehat{H_1 F}(\theta, \mu, \cdot)(q) &= \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{cy} \nu(dy) \int_0^{+\infty} e^{cb} F(\theta, \mu, b) db \int_0^{+\infty} e^{-(q+c)x} e^{-\alpha_\theta|x-y-b|} dx \\ &= \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^0 e^{cy} \nu(dy) \int_0^{-y} e^{cb} F(\theta, \mu, b) db \int_0^{+\infty} e^{-(q+c)x} e^{-\alpha_\theta(x-y-b)} dx \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{cy} \nu(dy) \int_{0 \vee (-y)}^{+\infty} e^{cb} F(\theta, \mu, b) db \int_0^{b+y} e^{-(q+c)x} e^{-\alpha_\theta(x-y-b)} dx \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{cy} \nu(dy) \int_{0 \vee (-y)}^{+\infty} e^{cb} F(\theta, \mu, b) db \int_{b+y}^{+\infty} e^{-(q+c)x} e^{-\alpha_\theta(x-y-b)} dx . \end{aligned} \quad (6.1.29)$$

En calculant alors les intégrales en x , nous trouvons :

$$\begin{aligned} \widehat{H_1 F}(\theta, \mu, \cdot)(q) &= \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^0 e^{(c+\alpha_\theta)y} \nu(dy) \int_0^{-y} e^{(c+\alpha_\theta)b} F(\theta, \mu, b) db \frac{1}{q + c + \alpha_\theta} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(c-\alpha_\theta)y} \nu(dy) \int_{0 \vee (-y)}^{+\infty} e^{(c-\alpha_\theta)b} F(\theta, \mu, b) db \frac{1 - e^{-(q+c-\alpha_\theta)(b+y)}}{q + c - \alpha_\theta} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(c+\alpha_\theta)y} \nu(dy) \int_{0 \vee (-y)}^{+\infty} e^{(c+\alpha_\theta)b} F(\theta, \mu, b) db \frac{e^{-(q+c+\alpha_\theta)(b+y)}}{q + c + \alpha_\theta} . \end{aligned} \quad (6.1.30)$$

D'où, d'après la définition de l'opérateur R (cf. (6.1.4)) :

$$\begin{aligned} \widehat{H_1 F}(\theta, \mu, \cdot)(q) &= \frac{1}{\alpha_\theta(q + c + \alpha_\theta)} \left[RF(\theta, \mu, \cdot)(-\alpha_\theta - c) + \int_{-\infty}^0 \nu(dy) \int_0^{-y} F(\theta, \mu, b) db \right] \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_\theta(q + c - \alpha_\theta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(c - \alpha_\theta)y} \nu(dy) \int_{0 \vee (-y)}^{+\infty} e^{(c - \alpha_\theta)b} F(\theta, \mu, b) db \\ &\quad - \frac{1}{\alpha_\theta(q + c - \alpha_\theta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-qy} \nu(dy) \int_{0 \vee (-y)}^{+\infty} e^{-qb} F(\theta, \mu, b) db \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_\theta(q + c + \alpha_\theta)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-qy} \nu(dy) \int_{0 \vee (-y)}^{+\infty} e^{-qb} F(\theta, \mu, b) db. \end{aligned} \quad (6.1.31)$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta y} \nu(dy) \int_{0 \vee (-y)}^{+\infty} e^{-\delta b} F(\theta, \mu, b) db \\ &= \widehat{\nu}(\delta) \widehat{F}(\theta, \mu, \delta) - RF(\theta, \mu, \cdot)(\delta) + \int_{-\infty}^0 \nu(dy) \int_0^{-y} F(\theta, \mu, b) db. \end{aligned} \quad (6.1.32)$$

En utilisant la notation (6.1.20) et en remarquant que :

$$\frac{1}{\alpha_\theta(q + c + \alpha_\theta)} - \frac{1}{\alpha_\theta(q + c - \alpha_\theta)} = -\frac{2}{C_\theta(q)}, \quad (6.1.33)$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \widehat{H_1 F}(\theta, \mu, \cdot)(q) &= \frac{RF(\theta, \mu, \cdot)(-\alpha_\theta - c)}{\alpha_\theta(q + c + \alpha_\theta)} \\ &\quad + \frac{\widehat{\nu}(\alpha_\theta - c) \widehat{F}(\theta, \mu, \alpha_\theta - c) - RF(\theta, \mu, \cdot)(\alpha_\theta - c)}{\alpha_\theta(q + c - \alpha_\theta)} \\ &\quad - \frac{2}{C_\theta(q)} \left(\widehat{\nu}(q) \widehat{F}(\theta, \mu, q) - RF(\theta, \mu, \cdot)(q) \right). \end{aligned} \quad (6.1.34)$$

Ainsi en reportant (6.1.34) dans (6.1.28), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \widehat{\Lambda_\theta F}(\theta, \mu, \cdot)(q) &= -\frac{2}{C_\theta(q)} \left(\widehat{\nu}(q) \widehat{F}(\theta, \mu, q) - RF(\theta, \mu, \cdot)(q) \right) \\ &\quad + \frac{2}{C_\theta(q)} \left(\widehat{\nu}(\alpha_\theta - c) \widehat{F}(\theta, \mu, \alpha_\theta - c) - RF(\theta, \mu, \cdot)(\alpha_\theta - c) \right). \end{aligned} \quad (6.1.35)$$

Utilisant de plus (6.1.12), nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\widehat{F}(\theta, \mu, q) &= \widehat{F}_0(\theta, \mu, q) + \widehat{F}_1(\theta, \mu, q) \\ &+ \frac{2}{C_\theta(q)} \left(-\widehat{\nu}(q) \widehat{F}(\theta, \mu, q) + RF(\theta, \mu, \cdot)(q) \right) \\ &+ \frac{2}{C_\theta(q)} \left(\widehat{\nu}(\alpha_\theta - c) \widehat{F}(\theta, \mu, \alpha_\theta - c) - RF(\theta, \mu, \cdot)(\alpha_\theta - c) \right) .\end{aligned}\tag{6.1.36}$$

Soit

$$\begin{aligned}\widehat{F}(\theta, \mu, q) \left(1 + \frac{2\widehat{\nu}(q)}{C_\theta(q)} \right) &= \widehat{F}_0(\theta, \mu, q) + \widehat{F}_1(\theta, \mu, q) + \frac{2}{C_\theta(q)} RF(\theta, \mu, \cdot)(q) \\ &+ \frac{2}{C_\theta(q)} \left(\widehat{\nu}(\alpha_\theta - c) \widehat{F}(\theta, \mu, \alpha_\theta - c) - RF(\theta, \mu, \cdot)(\alpha_\theta - c) \right) .\end{aligned}\tag{6.1.37}$$

Or en remarquant que $C_\theta(q) + 2\widehat{\nu}(q) = 2(\varphi(q) - \theta)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}(\varphi(q) - \theta) \widehat{F}(\theta, \mu, q) &= \frac{1}{2} C_\theta(q) \left[\widehat{F}_0(\theta, \mu, q) + \widehat{F}_1(\theta, \mu, q) \right] + RF(\theta, \mu, \cdot)(q) \\ &+ \widehat{\nu}(\alpha_\theta - c) \widehat{F}(\theta, \mu, \alpha_\theta - c) - RF(\theta, \mu, \cdot)(\alpha_\theta - c) .\end{aligned}\tag{6.1.38}$$

Nous choisissons $q = \gamma_0^*(\theta)$ dans (6.1.38), nous obtenons :

$$\begin{aligned}&\widehat{\nu}(\alpha_\theta - c) \widehat{F}(\theta, \mu, \alpha_\theta - c) - RF(\theta, \mu, \cdot)(\alpha_\theta - c) \\ &= -\frac{1}{2} C_\theta(\gamma_0^*(\theta)) \left(\widehat{F}_0(\theta, \mu, \gamma_0^*(\theta)) + \widehat{F}_1(\theta, \mu, \gamma_0^*(\theta)) \right) - RF(\theta, \mu, \cdot)(\gamma_0^*(\theta)) .\end{aligned}\tag{6.1.39}$$

En utilisant (6.1.13) et (6.1.21), nous avons :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} C_\theta(q) \left(\widehat{F}_0(\theta, \mu, q) + \widehat{F}_1(\theta, \mu, q) \right) \\ &= \frac{1}{2} (q + c - \alpha_\theta) + \frac{\widehat{\nu}^+(q) - \widehat{\nu}^+(\mu)}{q - \mu} - \frac{\widehat{\nu}^+(\mu) - \widehat{\nu}^+(\alpha_\theta - c)}{\mu - \alpha_\theta + c} .\end{aligned}\tag{6.1.40}$$

Ainsi en reportant dans l'expression (6.1.12) de $\widehat{F}(\theta, \mu, q)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \widehat{F}(\theta, \mu, q) = & \frac{1}{\varphi(q) - \theta} \left[\frac{1}{2}(q + c - \alpha_\theta) + \frac{1}{q - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right. \\ & - \frac{1}{2}(\gamma_0^*(\theta) + c - \alpha_\theta) - \frac{1}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \\ & \left. + RF(\theta, \mu, \cdot)(q) - RF(\theta, \mu, \cdot)(\gamma_0^*(\theta)) \right], \end{aligned} \quad (6.1.41)$$

d'où (6.1.7).

Remarquons que $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$ est holomorphe sur D_0 car $F(\theta, \mu, \cdot)$ est bornée. Donc les zéros de $q \rightarrow \varphi(q) - \theta$ appartenant à D_0 , (par exemple $\gamma_0^*(\theta)$, quand $\gamma_0^*(\theta) > 0$), sont des fausses singularités pour $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$.

Par ailleurs, nous avons démontré dans l'Appendice A (cf. Proposition A.5, point (iii)), que si $\theta = 0$ et $c \geq \mathbb{E}(J_1)$, il n'y a pas de zéro de $\varphi(q) = 0$ du type $q = iy$, autre que $q = 0$. Là encore, nous montrons que 0 est une fausse singularité pour $\widehat{F}(0, \mu, \cdot)$ (cf. paragraphe 6.2). $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$ vérifie bien (6.1.7), pour tout $q \in D_0$.

Deuxième étape $(J_t, t \geq 0)$ est à présent un processus de Lévy de mesure de Lévy ν , vérifiant (6.1.1) et (6.1.2). Nous travaillons par approximation. Plus précisément, soit :

$$\nu_n(dy) := \nu_{[\mathbb{R} \setminus]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[}(dy) \quad \forall n \geq 1. \quad (6.1.42)$$

ν_n est de masse finie que nous notons λ_n :

$$\lambda_n := \int_{-\infty}^{+\infty} \nu_n(dy) = \nu \left(\left[-\infty, -\frac{1}{n} \right] \right) + \nu \left(\left[\frac{1}{n}, +\infty \right] \right). \quad (6.1.43)$$

Ainsi pour tout $n \geq 1$, le processus de Lévy associé à ν_n , noté J^n est un processus de Poisson composé. Nous lui appliquons le résultat du paragraphe précédent et nous utiliserons les notations évidentes suivantes, pour tout $n \geq 1$,

tout $x \geq 0$ et tout $t \geq 0$:

$$X_t^n = B_t - ct + J_t^n \quad (6.1.44)$$

$$T_x^n = \inf \{t \geq 0, X_t^n > x\} \quad (6.1.45)$$

$$K_x^n = X_{T_x^n}^n - x \quad (6.1.46)$$

$$F_n(\theta, \mu, x) = \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x^n - \mu K_x^n} \mathbb{1}_{\{T_x^n < +\infty\}} \right). \quad (6.1.47)$$

D'après (6.1.7), la transformée de Laplace $\widehat{F}_n(\theta, \mu, \cdot)$ de $F_n(\theta, \mu, \cdot)$ vérifie, pour tout $q \in D_0$:

$$\begin{aligned} \widehat{F}_n(\theta, \mu, q) = & \frac{1}{\varphi_n(q) - \theta} \left[\frac{q - \gamma_0^{*n}(\theta)}{2} + \frac{1}{q - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - e^{-\mu y}) \nu_n(dy) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\gamma_0^{*n}(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^{*n}(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu_n(dy) + R_n F_n(\theta, \mu, \cdot)(q) - R_n F_n(\theta, \mu, \cdot)(\gamma_0^{*n}(\theta)) \right] \end{aligned} \quad (6.1.48)$$

où

$$\varphi_n(q) = \frac{q^2}{2} + cq + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-qy} - 1) \nu_n(dy), \quad (6.1.49)$$

et pour toute fonction h de $L^\infty(\mathbb{R}_+)$:

$$R_n h(q) = \int_{-\infty}^0 e^{-qy} \nu_n(dy) \int_0^{-y} e^{-by} h(b) db - \int_{-\infty}^0 \nu_n(dy) \int_0^{-y} h(b) db. \quad (6.1.50)$$

et où pour tout $\theta > 0$, $\gamma_0^{*n}(\theta)$ est le réel vérifiant :

$$\gamma_0^{*n}(\theta) > 0 \quad \text{et} \quad \varphi_n(\gamma_0^{*n}(\theta)) = \theta. \quad (6.1.51)$$

φ_n ayant les mêmes propriétés que φ , nous démontrons, comme en (A.5.26) de l'Appendice A, l'existence de $\gamma_0^{*n}(\theta)$.

Lemme 6.3

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} T_x^n = T_x \quad \text{p.s.} \quad (6.1.52)$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} K_x^n = K_x \quad (6.1.53)$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(\theta, \mu, x) = F(\theta, \mu, x) \quad \forall \theta \geq 0, \forall \mu \geq 0. \quad (6.1.54)$$

Démonstration du Lemme 6.3

Les points (i) et (ii) sont des résultats classiques.

(iii) D'après les hypothèses (6.1.1) et (6.1.2), nous démontrons grâce au théorème de Lebesgue de convergence dominée que :

1— Soit $q \geq 0$ et $\mu \geq 0$ fixés.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - e^{-\mu y}) \nu_n(dy) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - e^{-\mu y}) \mathbb{1}_{\{|y| \geq \frac{1}{n}\}} \nu(dy) \\ &= \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - e^{-\mu y}) \nu(dy). \end{aligned} \quad (6.1.55)$$

Nous déduisons de (6.1.55), avec $\mu = 0$, que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(q) = \varphi(q), \quad (6.1.56)$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_0^{*n}(\theta) = \gamma_0^*(\theta). \quad (6.1.57)$$

$$\begin{aligned} 2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^{*n}(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu_n(dy) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^{*n}(\theta)y} - e^{-\mu y}) \mathbb{1}_{\{|y| \geq \frac{1}{n}\}} \nu(dy) \\ &= \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy). \end{aligned} \quad (6.1.58)$$

$$\begin{aligned} 3 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^0 e^{-qy} \nu_n(dy) \int_0^{-y} e^{-bq} F_n(\theta, \mu, b) db \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^0 e^{-qy} \mathbb{1}_{\{y \leq \frac{1}{n}\}} \nu(dy) \int_0^{-y} e^{-bq} F_n(\theta, \mu, b) db \\ = \int_{-\infty}^0 e^{-qy} \nu(dy) \int_0^{-y} e^{-bq} F(\theta, \mu, b) db. \end{aligned} \quad (6.1.59)$$

Pour la démonstration de (6.1.59), nous utilisons (6.1.54) et l'inégalité :

$$\left| \int_0^{-y} e^{-bq} F_n(\theta, \mu, b) db \right| \leq |y|. \quad (6.1.60)$$

4— D'une manière analogue,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^0 \nu_n(dy) \int_0^{-y} F_n(\theta, \mu, b) db &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^0 \mathbb{1}_{\{y \leq \frac{1}{n}\}} \nu(dy) \int_0^{-y} F_n(\theta, \mu, b) db \\ &= \int_{-\infty}^0 \nu(dy) \int_0^{-y} F(\theta, \mu, b) db. \end{aligned} \quad (6.1.61)$$

De (6.1.59) et (6.1.61), nous déduisons que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n F_n(\theta, \mu, \cdot)(q) = RF(\theta, \mu, \cdot)(q) \quad (6.1.62)$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n F_n(\theta, \mu, \cdot)(\gamma_0^{*n}(\theta)) = RF(\theta, \mu, \cdot)(\gamma_0^*(\theta)). \quad (6.1.63)$$

Enfin si

$$\widehat{F}_n(\theta, \mu, q) := \int_0^{+\infty} e^{-qx} F_n(\theta, \mu, x) dx, \quad (6.1.64)$$

alors, d'après (6.1.54) et le théorème de Lebesgue de convergence dominée, nous avons :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \widehat{F}_n(\theta, \mu, q) = \widehat{F}(\theta, \mu, q). \quad (6.1.65)$$

Nous déduisons de toutes les limites précédentes que $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$ vérifie l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \widehat{F}(\theta, \mu, q) = & \frac{1}{\varphi(q) - \theta} \left(\frac{q - \gamma_0^*(\theta)}{2} + \frac{1}{q - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) + RF(\theta, \mu, \cdot)(q) - RF(\theta, \mu, \cdot)(\gamma_0^*(\theta)) \right) \end{aligned}$$

□

6.2 Etude de cas particuliers

Nous supposons que :

$$r_\nu > 0 \quad (\text{éventuellement } r_\nu = +\infty), \quad (6.2.66)$$

où r_ν est défini en (5.3.44).

L'étude des zéros de φ_θ sur $\mathbb{R}$ est faite aux paragraphes A.1 et A.2 de l'Appendice A. Toutefois, afin d'étudier les deux cas particuliers, ν ne charge que $\mathbb{R}_+$ et ν ne charge que $\mathbb{R}_-$, nous nous plaçons uniquement dans les cas des figures A.1 cas a, A.2 cas a, A.3 et A.5. Il est équivalent de supposer, qu'il existe $\kappa > 0$ tel que, pour tout $\theta \in [0, \kappa]$:

$$\exists -\gamma_0(\theta) \in]-r_\nu, 0] \quad \text{tel que} \quad \varphi(-\gamma_0(\theta)) = \theta, \quad (6.2.67)$$

avec :

$$(i) \quad \text{si } \theta > 0, \quad -\gamma_0(\theta) < 0, \quad (6.2.68)$$

$$(ii) \quad \text{si } \theta = 0 \quad \text{et} \quad c > \mathbb{E}(J_1), \quad -\gamma_0(0) < 0, \quad (6.2.69)$$

$$(iii) \quad \text{si } \theta = 0 \quad \text{et} \quad c \leq \mathbb{E}(J_1), \quad -\gamma_0(0) = 0. \quad (6.2.70)$$

6.2.1 Si ν ne charge que $\mathbb{R}_+$

$\widehat{F}(\theta, \mu, q)$ nous est donnée explicitement par (6.1.10), $q \in D_0$.

Or les fonctions φ et $q \rightarrow \frac{1}{q - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - e^{-\mu y}) \nu(dy)$ sont définies sur $] -r_\nu, +\infty[$, $\varphi(-\gamma_0(\theta)) = \theta$ et d'après l'hypothèse (6.2.67), $-\gamma_0(\theta)$ appartient à $] -r_\nu, 0]$, donc la fonction $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$ admet un prolongement holomorphe sur :

$$D_{-\gamma_0(\theta)} := \{q \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} q > -\gamma_0(\theta)\} \quad (6.2.71)$$

Le prolongement holomorphe de $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$ est encore la transformée de Laplace de $F(\theta, \mu, \cdot)$ qui est donc définie sur $D_{-\gamma_0(\theta)}$, d'après Lukacs (cf. [Luk70], Théorème 7.1.1, page 193).

Ainsi la fonction $q \rightarrow \widehat{F}(\theta, \mu, q - \gamma_0(\theta))$ est définie pour $q > 0$ et cette fonction est la transformée de Laplace de la fonction $x \rightarrow e^{\gamma_0(\theta)x} F(\theta, \mu, x)$.

La proposition suivante nous donne le comportement asymptotique de $\widehat{F}(\theta, \mu, q - \gamma_0(\theta))$ quand q tend vers 0.

Proposition 6.4 *Sous les hypothèses (6.1.1), (6.1.2), (6.2.67) et si $\nu_{]-\infty, 0[} = 0$, alors $\forall \theta \in [0, \kappa]$, $\forall \mu \geq 0$,*

$$\widehat{F}(\theta, \mu, q - \gamma_0(\theta)) \sim_{q \rightarrow 0} \frac{C_0(\theta, \mu)}{q} \quad (6.2.72)$$

où la constante $C_0(\theta, \mu)$ vaut :

1. Si $\theta > 0$ ou si $\theta = 0$ et $c \neq \mathbb{E}(J_1)$,

$$C_0(\theta, \mu) = \frac{1}{\varphi'(-\gamma_0(\theta))} \left[-\frac{\gamma_0(\theta) + \gamma_0^*(\theta)}{2} + \frac{1}{-\gamma_0(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{\gamma_0(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) - \frac{1}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right]. \quad (6.2.73)$$

2. Si $\theta = 0$ et $c = \mathbb{E}(J_1)$,

$$C_0(0, \mu) = \frac{1 - \frac{2}{\mu^2} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu y} - \mu y) \nu(dy)}{\varphi''(0)}. \quad (6.2.74)$$

Remarque 6.5 1. Quand $(J_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson composé, nous prouvons au chapitre 8, par un théorème de renouvellement (cf. Théorème 8.1), que la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $e^{\gamma_0(\theta)x} F(\theta, \mu, x)$ existe. Nous montrons au chapitre 7, que cette limite existe aussi dans le cas où $(J_t, t \geq 0)$ est un processus de Lévy qui n'est plus un processus de Poisson composé.

La Proposition 6.4 nous permet donc d'identifier cette limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\gamma_0(\theta)x} F(\theta, \mu, x) = C_0(\theta, \mu). \quad (6.2.75)$$

En particulier, lorsque $\theta = \mu = 0$, nous retrouvons ainsi le résultat de Doney [Don91].

2. L'expression (6.2.73) est énoncée avec la convention que $\frac{e^a - e^b}{a - b}$ vaut e^a quand $a = b$.
3. $\varphi'(-\gamma_0(\theta)) < 0$, sauf quand $\theta = 0$ et $c = \mathbb{E}(J_1)$, auquel cas $\varphi'(0) = 0$, ce qui explique que $C_0(\theta, \mu)$ prend deux expressions différentes dans la Proposition 6.4.
4. Par définition de $\hat{F}(\theta, \mu, q - \gamma_0(\theta))$, la fonction $\mu \rightarrow \hat{F}(\theta, \mu, q - \gamma_0(\theta))$ est décroissante, donc la fonction $\mu \rightarrow C_0(\theta, \mu)$ est aussi décroissante.

Si $\theta > 0$ ou si $\theta = 0$ et $c \neq \mathbb{E}(J_1)$, $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} C_0(\theta, \mu) = -\frac{\gamma_0(\theta) + \gamma_0^*(\theta)}{2\varphi'(-\gamma_0(\theta))}$ et cette limite est strictement positive.

Si $\theta = 0$ et $c = \mathbb{E}(J_1)$, $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} C_0(0, \mu) = \frac{1}{\varphi''(0)}$ et cette limite est strictement positive.

Nous avons donc toujours $C_0(\theta, \mu) > 0$.

Démonstration de la Proposition 6.4

1) Nous supposons $\theta > 0$ ou $\theta = 0$ et $c \neq \mathbb{E}(J_1)$.

Soient $\mu \geq 0$ et $q > 0$. D'après (6.1.10), nous avons :

$$\begin{aligned} \widehat{F}(\theta, \mu, q - \gamma_0(\theta)) &= \frac{1}{\varphi(q - \gamma_0(\theta)) - \theta} \left[\frac{q - \gamma_0(\theta) - \gamma_0^*(\theta)}{2} \right. \\ &\quad + \frac{1}{q - \gamma_0(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-(q - \gamma_0(\theta))y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \\ &\quad \left. - \frac{1}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right]. \end{aligned} \quad (6.2.76)$$

Nous avons : $\varphi'(-\gamma_0(\theta)) \neq 0$. (cf. Remarque 6.5, point 3). Nous pouvons donc écrire :

$$\varphi(q - \gamma_0(\theta)) - \theta = \varphi(q - \gamma_0(\theta)) - \varphi(-\gamma_0(\theta)) \sim_{q \rightarrow 0} q\varphi'(-\gamma_0(\theta)). \quad (6.2.77)$$

En utilisant (6.2.77) et en faisant tendre q vers 0 dans (6.2.76), nous obtenons $\widehat{F}(\theta, \mu, q - \gamma_0(\theta)) \sim_{q \rightarrow 0} \frac{C_0(\theta, \mu)}{q}$ avec $C_0(\theta, \mu)$ vérifiant (6.2.73).

2) Etudions le cas où $\theta = 0$ et $c = \mathbb{E}(J_1)$.

Soient $\mu \geq 0$ et $q > 0$. D'après (6.1.10), nous avons :

$$\begin{aligned} \widehat{F}(0, \mu, q) &= \frac{1}{\varphi(q)} \left[\frac{q}{2} + \frac{1}{q - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right]. \end{aligned} \quad (6.2.78)$$

Comme $\varphi'(0) = 0$, nous avons :

$$\varphi(q) \sim_{q \rightarrow 0} \frac{q^2}{2} \varphi''(0). \quad (6.2.79)$$

Par ailleurs, nous avons :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{q - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - e^{-\mu y}) \nu(dy) + \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu y}) \nu(dy) \\ &= -\frac{1}{\mu} \left(1 + \frac{q}{\mu} \right) \int_0^{+\infty} (1 - qy - e^{-\mu y}) \nu(dy) + \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu y}) \nu(dy) + o(q) \\ &= -\frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} \left(-qy + \frac{q}{\mu} - \frac{q^2}{\mu} y - \frac{q}{\mu} e^{-\mu y} \right) \nu(dy) + o(q) \\ &\sim_{q \rightarrow 0} -\frac{q}{\mu^2} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu y} - \mu y) \nu(dy). \end{aligned} \quad (6.2.80)$$

De (6.2.79) et (6.2.80), nous pouvons donc déduire que $\widehat{F}(0, \mu, q) \sim_{q \rightarrow 0} \frac{C_0(0, \mu)}{q}$ où $C_0(0, \mu)$ vérifie (6.2.74). $\square$

Remarque 6.6 En faisant $\theta = \mu = 0$ dans l'expression de $\widehat{F}(\theta, \mu, q - \gamma_0(\theta))$ de la Proposition 6.4, nous obtenons des résultats sur la probabilité de ruine. Nous distinguons les cas $c > \mathbb{E}(J_1)$, (condition de profit net), $c < \mathbb{E}(J_1)$ et $c = \mathbb{E}(J_1)$:

1^{er} **cas** $c > \mathbb{E}(J_1)$ (condition de profit net)

D'après (6.2.69) et (6.1.9), nous avons :

$$\widehat{F}(0, 0, q - \gamma_0(0)) \sim_{q \rightarrow 0} \frac{C_0(0, 0)}{q} \quad (6.2.81)$$

où la constante $C_0(0, 0)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} C_0(0, 0) &= \\ &= \frac{1}{\varphi'(-\gamma_0(0))} \left[-\frac{\gamma_0(0)}{2} + \frac{1}{-\gamma_0(0)} \int_0^{+\infty} (e^{\gamma_0(0)y} - 1) \nu(dy) + \int_0^{+\infty} y \nu(dy) \right] \\ &= \frac{1}{\varphi'(-\gamma_0(0))} \left[-\frac{\varphi(-\gamma_0(0))}{-\gamma_0(0)} - c + \int_0^{+\infty} y \nu(dy) \right]. \end{aligned} \quad (6.2.82)$$

En remarquant que $\varphi'(0) = c - \int_0^{+\infty} y \nu(dy) = c - \mathbb{E}(J_1) > 0$ et que $\varphi(-\gamma_0(0)) = 0$, nous avons :

$$\widehat{F}(0, 0, q - \gamma_0(0)) \sim_{q \rightarrow 0} -\frac{\varphi'(0)}{\varphi'(-\gamma_0(0))} \frac{1}{q}. \quad (6.2.83)$$

Nous retrouvons ainsi le résultat de Doney [Don91] :

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\gamma_0(0)x} \mathbb{P}(T_x < +\infty) = -\frac{\varphi'(0)}{\varphi'(-\gamma_0(0))}. \quad (6.2.84)$$

2^{  me} **cas** $c < \mathbb{E}(J_1)$

D'après (6.2.70) et (6.1.8), nous avons :

$$\widehat{F}(0, 0, q) \sim_{q \rightarrow 0} \frac{C_0(0, 0)}{q} \quad (6.2.85)$$

où la constante $C_0(0, 0)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} C_0(0, 0) &= \\ &= \frac{1}{\varphi'(0)} \left[-\frac{\gamma_0^*(0)}{2} - \frac{1}{\gamma_0^*(0)} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(0)y} - 1) \nu(dy) - \int_0^{+\infty} y \nu(dy) \right] \\ &= \frac{1}{\varphi'(0)} \left[-\frac{\varphi(\gamma_0^*(0))}{\gamma_0^*(0)} + c - \int_0^{+\infty} y \nu(dy) \right]. \end{aligned} \quad (6.2.86)$$

En remarquant que $\varphi'(0) = c - \int_0^{+\infty} y \nu(dy)$ et que $\varphi(\gamma_0^*(0)) = 0$, nous obtenons :

$$\widehat{F}(0, 0, q) \sim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{q}. \quad (6.2.87)$$

Ceci est en accord avec (4.1.10), i.e. $F(0, 0, x) = \mathbb{P}(T_x < +\infty) = 1$.

3^{ème} cas) $c = \mathbb{E}(J_1)$

En remarquant que :

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \left(1 - \frac{2}{\mu^2} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu y} - \mu y) \nu(dy) \right) = 1 + \int_0^{+\infty} y^2 \nu(dy) = \varphi''(0),$$

nous déduisons, de la Proposition 6.4 :

$$\widehat{F}(0, 0, q) \sim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{q}. \quad (6.2.88)$$

Ceci est en accord avec (4.1.10), i.e. $F(0, 0, x) = \mathbb{P}(T_x < +\infty) = 1$.

6.2.2 Si ν ne charge que $\mathbb{R}_-$

$\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$ vérifie l'équation (6.1.11) que nous rappelons :

$$\widehat{F}(\theta, \mu, q) = \frac{1}{\varphi(q) - \theta} \left(\frac{q - \gamma_0^*(\theta)}{2} + RF(\theta, \mu, \cdot)(q) - RF(\theta, \mu, \cdot)(\gamma_0^*(\theta)) \right).$$

Proposition 6.7 La fonction $G_\theta : x \rightarrow e^{-\gamma_0(\theta)x}$ est solution de (6.1.11).

Remarque 6.8 1. Si G_θ est solution de (6.1.11), elle l'est aussi de l'équation équivalente (5.2.9). La proposition (5.7) (ii), prouve que G_θ est l'unique solution de (5.2.9) dans $\mathcal{B}_\gamma$, $\forall \gamma \in [0, \gamma_0(\theta)[$, donc :

$$F(\theta, \mu, x) = e^{-\gamma_0(\theta)x} \quad \forall x \geq 0. \quad (6.2.89)$$

2. μ ne joue aucun rôle ici car ν ne charge que $\mathbb{R}_-$, donc $K_x = X_{T_x} - x = 0$ et donc pour tout $\mu \geq 0$, $F(\theta, \mu, \cdot) = F(\theta, 0, \cdot)$.
3. D'après (4.2.17), nous savons que $F(\theta, 0, \cdot)$ est majorée par une exponentielle, l'analyse précédente nous permet de préciser la valeur de la constante $\tilde{\gamma}_\theta$ de (4.2.16) : $\tilde{\gamma}_\theta = \gamma_0(\theta)$. Nous retrouvons ainsi le résultat de (4.2.19).

Démonstration de la Proposition 6.7

Le numérateur du second membre de (6.1.11) sera noté $NF(q)$, donc :

$$\begin{aligned}
 NG_\theta(q) &= \frac{1}{2}(q - \gamma_0^*(\theta)) + RG_\theta(q) - RG_\theta(\gamma_0^*(\theta)) \\
 &= \frac{1}{2}(q - \gamma_0^*(\theta)) + \int_{-\infty}^0 e^{-qy} \nu(dy) \int_0^{-y} e^{-(q+\gamma_0(\theta))b} db \\
 &\quad - \int_{-\infty}^0 e^{-\gamma_0^*(\theta)y} \nu(dy) \int_0^{-y} e^{-(\gamma_0^*(\theta)+\gamma_0(\theta))b} db \\
 &= \frac{1}{2}(q - \gamma_0^*(\theta)) + \frac{1}{q + \gamma_0(\theta)} \int_{-\infty}^0 (e^{-qy} - e^{\gamma_0(\theta)y}) \nu(dy) \\
 &\quad - \frac{1}{\gamma_0^*(\theta) + \gamma_0(\theta)} \int_{-\infty}^0 (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{\gamma_0(\theta)y}) \nu(dy)
 \end{aligned} \tag{6.2.90}$$

Par ailleurs, comme $\varphi(-\gamma_0(\theta)) = \varphi(\gamma_0^*(\theta)) = \theta$, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \varphi(\gamma_0^*(\theta)) - \varphi(-\gamma_0(\theta)) &= 0 \\
 &= \frac{\gamma_0^{*2}(\theta) - \gamma_0^2(\theta)}{2} + c(\gamma_0^*(\theta) + \gamma_0(\theta)) + \int_{-\infty}^0 (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{\gamma_0(\theta)y}) \nu(dy).
 \end{aligned} \tag{6.2.91}$$

Soit encore :

$$-\frac{1}{\gamma_0^*(\theta) + \gamma_0(\theta)} \int_{-\infty}^0 (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{\gamma_0(\theta)y}) \nu(dy) = \frac{\gamma_0^*(\theta) - \gamma_0(\theta)}{2} + c. \tag{6.2.92}$$

de même, comme

$$\begin{aligned}
 \varphi(q) - \theta &= \varphi(q) - \varphi(-\gamma_0(\theta)) \\
 &= \frac{q^2}{2} - \frac{\gamma_0^2(\theta)}{2} + c(q + \gamma_0(\theta)) + \int_{-\infty}^0 (e^{-qy} - e^{\gamma_0(\theta)y}) \nu(dy),
 \end{aligned} \tag{6.2.93}$$

nous avons :

$$\frac{1}{q + \gamma_0(\theta)} \int_{-\infty}^0 (e^{-qy} - e^{\gamma_0(\theta)y}) \nu(dy) = \frac{\varphi(q) - \theta}{q + \gamma_0(\theta)} - \frac{1}{2}(q - \gamma_0(\theta)) - c. \quad (6.2.94)$$

En reportant (6.2.92) et (6.2.94) dans (6.2.90), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{NG_\theta(q)}{\varphi(q) - \theta} \\ &= \frac{1}{\varphi(q) - \theta} \left[\frac{1}{2}(q - \gamma_0^*(\theta)) + \frac{\varphi(q) - \theta}{q + \gamma_0(\theta)} - \frac{1}{2}(q - \gamma_0(\theta)) - c + \frac{\gamma_0^*(\theta) - \gamma_0(\theta)}{2} + c \right] \\ &= \frac{1}{q + \gamma_0(\theta)}. \end{aligned} \quad (6.2.95)$$

Nous retrouvons donc bien $\widehat{G}_\theta(q) = \frac{1}{q + \gamma_0(\theta)}$.

Remarque 6.9 Nous pouvons montrer directement le résultat de la Proposition 6.7 par un argument de martingale.

Nous posons pour tout $t \geq 0$ et tout $q \in] -r_\nu, 0[$ tel que $\varphi(q) > 0$:

$$M_t^q := \exp(-qX_t - \varphi(q)t). \quad (6.2.96)$$

$(M_t^q)_{t \geq 0}$ est une martingale bornée sur $[0, T_x]$ et pour $q \in] -r_\nu, 0[$ tel que $\varphi(q) > 0$ par e^{-qx} .

Appliquant le théorème d'arrêt à la martingale $(M_t^q)_{t \geq 0}$ au temps d'arrêt $t \wedge T_x$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_0^q) &= 1 = \mathbb{E}(M_{t \wedge T_x}^q) \\ &= \mathbb{E}(e^{-qX_{t \wedge T_x} - \varphi(q)(t \wedge T_x)} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}}) + \mathbb{E}(e^{-qX_t - \varphi(q)t} \mathbb{1}_{\{T_x = +\infty\}}). \end{aligned} \quad (6.2.97)$$

En faisant tendre t vers $+\infty$, comme $(e^{-qX_t} \mathbb{1}_{\{T_x = +\infty\}})_{t \geq 0}$ est borné par e^{-qx} , en appliquant le théorème de Lebesgue, nous obtenons :

$$\mathbb{E}(e^{-\varphi(q)T_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}}) = e^{-qx} \quad \forall q \in] -r_\nu; 0[\quad \text{tel que} \quad \varphi(q) > 0. \quad (6.2.98)$$

En choisissant $q = -\gamma_0(\theta)$, comme $\varphi(-\gamma_0(\theta)) = \theta$, nous obtenons :

$$F(\theta, 0, x) = \mathbb{E}(e^{-\theta T_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}}) = e^{-\gamma_0(\theta)x}. \quad \square$$

6.2.3 Transformée de Laplace de la probabilité de ruine (cas où $\theta = \mu = 0$)

Nous supposons ici que le support de ν n'est réduit ni à $\mathbb{R}_+$, ni à $\mathbb{R}_-$. Ce paragraphe ne donne pas de résultats nouveaux, mais donne, à partir de l'expression obtenue en (6.1.7), des formules explicites de la transformée de Laplace de la probabilité de ruine que nous utiliserons par la suite, et apporte des vérifications à des formules antérieures.

1^{er} **cas**) $c > \mathbb{E}(J_1)$ (condition de profit net)

D'après (6.1.7) et (6.1.9), nous obtenons :

$$\widehat{F}(0, 0, q) = \frac{1}{\varphi(q)} \left(\frac{q}{2} + \frac{1}{q} \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - 1 + qy) \nu(dy) + RF(0, 0, .)(q) \right) \quad (6.2.99)$$

Dans ce cas, 0 est une fausse singularité pour $\widehat{F}(0, 0, .)$.

1. Lorsque ν ne charge que $\mathbb{R}_+$,

$$\widehat{F}(0, 0, q) = \frac{1}{\varphi(q)} \left(\frac{q}{2} + \frac{1}{q} \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - 1 + qy) \nu(dy) \right), \quad (6.2.100)$$

soit encore :

$$\widehat{F}(0, 0, q) = \frac{1}{q} - \frac{c - \mathbb{E}(J_1)}{\varphi(q)}. \quad (6.2.101)$$

Nous en déduisons facilement l'équivalent vu en (6.2.83).

2. Lorsque ν ne charge que $\mathbb{R}_-$, $\mathbb{P}(T_x < +\infty) = e^{-\gamma_0(0)x}$, d'après la Proposition 6.7.

2^{ème} **cas**) $c < \mathbb{E}(J_1)$

D'après (6.1.7) et (6.1.8), nous avons :

$$\begin{aligned} \widehat{F}(0, 0, q) = & \frac{1}{\varphi(q)} \left(\frac{q - \gamma_0^*(0)}{2} + \frac{1}{q} \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - 1) \nu(dy) \right. \\ & - \frac{1}{\gamma_0^*(0)} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(0)y} - 1) \nu(dy) \\ & \left. + RF(0, 0, .)(q) - RF(0, 0, .)(\gamma_0^*(0)) \right) \quad (6.2.102) \end{aligned}$$

Dans ce cas, $q = \gamma_0^*$ est une fausse singularité pour $\widehat{F}(0, 0, \cdot)$.

Montrons, à titre de vérification, que la fonction $h : x \rightarrow 1$ vérifie l'équation (6.2.102) :

$$\begin{aligned} Rh(q) - Rh(\gamma_0^*(0)) &= \int_{-\infty}^0 e^{-qy} \nu(dy) \int_0^{-y} e^{-qb} db - \int_{-\infty}^0 e^{-\gamma_0^*(0)y} \nu(dy) \int_0^{-y} e^{-\gamma_0^*(0)b} db \\ &= \frac{1}{q} \int_{-\infty}^0 (e^{-qy} - 1) \nu(dy) - \frac{1}{\gamma_0^*(0)} \int_{-\infty}^0 (e^{-\gamma_0^*(0)y} - 1) \nu(dy). \end{aligned}$$

Ainsi (6.2.102) devient :

$$\begin{aligned} \widehat{h}(q) &= \frac{1}{\varphi(q)} \left(\frac{q - \gamma_0^*(0)}{2} + \frac{1}{q} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-qy} - 1) \nu(dy) - \frac{1}{\gamma_0^*(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(0)y} - 1) \nu(dy) \right) \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \left(\frac{\varphi(q)}{q} - c - \frac{\varphi(\gamma_0^*(0))}{\gamma_0^*(0)} + c \right) = \frac{1}{q} \end{aligned} \quad (6.2.103)$$

Ce résultat est en accord avec le résultat (4.1.10) et celui de la Proposition 6.7 qui lui, n'est vrai que quand ν ne charge que $\mathbb{R}_-$.

3^{ème} cas) $c = \mathbb{E}(J_1)$

D'après (6.1.7) et (6.1.9), nous avons :

$$\widehat{F}(0, 0, q) = \frac{1}{\varphi(q)} \left(\frac{q}{2} + \frac{1}{q} \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - 1 + qy) \nu(dy) + RF(0, 0, \cdot)(q) \right) \quad (6.2.104)$$

Dans ce cas, $q = 0$ est un pôle double de $\widehat{F}(0, 0, \cdot)$, car q est un zéro de φ d'ordre de multiplicité 2..

Montrons alors, à titre de vérification, que la fonction $h : x \rightarrow 1$ vérifie l'équation (6.2.104) :

$$\begin{aligned} Rh(q) &= \int_{-\infty}^0 e^{-qy} \nu(dy) \int_0^{-y} e^{-qb} db - \int_{-\infty}^0 \nu(dy) \int_0^{-y} db \\ &= \frac{1}{q} \int_{-\infty}^0 (e^{-qy} - 1) \nu(dy) + \int_{-\infty}^0 y \nu(dy). \end{aligned}$$

Ainsi (6.2.104) devient, comme $c = \int_{-\infty}^{+\infty} y \nu(dy)$:

$$\widehat{h}(q) = \frac{1}{\varphi(q)} \left(\frac{q}{2} + c + \frac{1}{q} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-qy} - 1) \nu(dy) \right) = \frac{1}{q} \quad (6.2.105)$$

Ce résultat est bien en accord avec (4.1.10).

6.2.4 Equation de Dufresne Gerber

Soit

$$A(x) := 1 - \mathbb{P}(T_x < +\infty). \quad (6.2.106)$$

Dans le cas où ν ne charge que $\mathbb{R}_+$ et sous l'hypothèse de profit net, Dufresne et Gerber [DG90] montrent que A satisfait à l'équation suivante :

$$\forall x \geq 0 \quad A(x) = \left(1 - \frac{\mathbb{E}(J_1)}{c}\right) H_1(x) + \frac{\mathbb{E}(J_1)}{c} A * K(x) \quad (6.2.107)$$

où

$$H_1(x) = 1 - e^{-2cx} \quad \text{et} \quad K(x) = h_1 * h_2(x) \quad (6.2.108)$$

avec

$$h_1(x) = 2ce^{-2cx} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} \quad \text{et} \quad h_2(x) = \frac{\nu[x; +\infty[}{\mathbb{E}(J_1)}. \quad (6.2.109)$$

Le but de cette remarque est de montrer que l'équation (6.2.107) est un cas particulier de notre équation (6.1.7). En effet, d'après (6.2.101), nous avons :

$$\widehat{F}(0, 0, q) = \frac{1}{q} - \frac{c - \mathbb{E}(J_1)}{\varphi(q)}.$$

D'après (6.2.106), la transformée de Laplace de A vérifie :

$$\widehat{A}(q) = \frac{1}{q} - \widehat{F}(0, 0, q) = \frac{c - \mathbb{E}(J_1)}{\varphi(q)}. \quad (6.2.110)$$

L'équation (6.2.107) de [DG90] est donc équivalente à :

$$\frac{c - \mathbb{E}(J_1)}{\varphi(q)} = \left(1 - \frac{\mathbb{E}(J_1)}{c}\right) \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q + 2c}\right) + \frac{\mathbb{E}(J_1)}{c} \left(\frac{c - \mathbb{E}(J_1)}{\varphi(q)} \widehat{K}(q)\right). \quad (6.2.111)$$

où

$$\begin{aligned} \widehat{K}(q) &= \frac{2c}{(q + 2c)\mathbb{E}(J_1)} \int_0^{+\infty} dx e^{-qx} \int_{[x, +\infty[} \nu(dy) \\ &= \frac{2c}{(q + 2c)\mathbb{E}(J_1)} \int_0^{+\infty} \nu(dy) \int_0^y e^{-qx} dx \\ &= \frac{2c}{(q + 2c)\mathbb{E}(J_1)} \frac{1}{q} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-qy}) \nu(dy). \end{aligned} \quad (6.2.112)$$

Il s'agit donc de montrer que :

$$\begin{aligned} \frac{c - \mathbb{E}(J_1)}{\varphi(q)} &= \frac{2(c - \mathbb{E}(J_1))}{(q + 2c)q} + \frac{2(c - \mathbb{E}(J_1))}{(q + 2c)\varphi(q)} \frac{1}{q} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-qy})\nu(dy) \\ &= \frac{2(c - \mathbb{E}(J_1))}{(q + 2c)q\varphi(q)} \left[\varphi(q) + \int_0^{+\infty} (1 - e^{-qy})\nu(dy) \right]. \end{aligned} \quad (6.2.113)$$

Or

$$\varphi(q) + \int_0^{+\infty} (1 - e^{-qy})\nu(dy) = \frac{q^2}{2} + cq = \frac{1}{2}(q + 2c)q. \quad (6.2.114)$$

ce qui achève la démonstration de cette remarque. $\square$

Chapitre 7

Comportement asymptotique de $F(\theta, \mu, .)$ au voisinage de $+\infty$

7.1 Forme du développement asymptotique de $F(\theta, \mu, .)$ au voisinage de $+\infty$

Nous allons utiliser la transformée de Laplace $\widehat{F}(\theta, \mu, .)$ de $F(\theta, \mu, .)$ pour étudier le comportement asymptotique de $F(\theta, \mu, .)$ en $+\infty$. Au vu de l'expression de $\widehat{F}(\theta, \mu, .)$ (cf. Théorème 6.1), les zéros de la fonction φ_θ , définie en (4.7.64), vont jouer un rôle déterminant.

Dans ce paragraphe, ν vérifie les hypothèses (6.1.1) et (6.1.2), i.e. :

$$(i) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |y| \nu(dy) < +\infty \quad \text{et} \quad (ii) \quad \int_{-\infty}^{-1} e^{-qy} \nu(dy) < +\infty \quad \forall q > 0. \quad (7.1.1)$$

Nous supposons que :

$$r_\nu > 0 \quad (\text{éventuellement } r_\nu = +\infty), \quad (7.1.2)$$

où nous rappelons que r_ν est l'élément de $[0, +\infty]$, défini par :

$$r_\nu := \sup \left\{ s \geq 0; \int_0^{+\infty} (e^{sy} - 1) \nu(dy) < +\infty \right\}. \quad (7.1.3)$$

Nous nous plaçons uniquement dans les cas des figures A.1 cas a , A.2 cas a , A.3 et A.5 de l'Appendice A. Il est équivalent de supposer, qu'il existe $\kappa > 0$ tel que, pour tout $\theta \in [0, \kappa]$:

$$\exists -\gamma_0(\theta) \in]-r_\nu, 0] \quad \text{tel que} \quad \varphi(-\gamma_0(\theta)) = \theta, \quad (7.1.4)$$

avec :

$$(i) \quad \text{si } \theta > 0, \quad -\gamma_0(\theta) < 0, \quad (7.1.5)$$

$$(ii) \quad \text{si } \theta = 0 \text{ et } c > \mathbb{E}(J_1), \quad -\gamma_0(0) < 0, \quad (7.1.6)$$

$$(iii) \quad \text{si } \theta = 0 \text{ et } c \leq \mathbb{E}(J_1), \quad -\gamma_0(0) = 0. \quad (7.1.7)$$

D'après (7.1.1) (ii), φ est définie sur $] -r_\nu, +\infty[$. Dans ces conditions, (cf. (A.5.26) Appendice A), nous avons :

$$\forall \theta \geq 0, \quad \exists \gamma_0^*(\theta) \geq 0 \quad \text{tel que} \quad \varphi(\gamma_0^*(\theta)) = \theta, \quad (7.1.8)$$

avec :

$$(i) \quad \text{si } \theta > 0, \quad \gamma_0^*(\theta) > 0, \quad (7.1.9)$$

$$(ii) \quad \text{si } \theta = 0 \text{ et } c < \mathbb{E}(J_1), \quad \gamma_0^*(0) > 0, \quad (7.1.10)$$

$$(iii) \quad \text{si } \theta = 0 \text{ et } c \geq \mathbb{E}(J_1), \quad \gamma_0^*(0) = 0. \quad (7.1.11)$$

Soit $\widehat{\nu_{|1,+\infty[}}$ la transformée de Laplace de la restriction de ν à $[1, +\infty[$:

$$\widehat{\nu_{|1,+\infty[}}(q) := \int_1^{+\infty} e^{-qy} \nu(dy) \quad (7.1.12)$$

Pour tout $b \geq 0$, notons

$$D_b := \{q \in \mathbb{C} \quad \text{tel que} \quad \operatorname{Re} q > -b\}. \quad (7.1.13)$$

Nous introduisons :

$$B_\nu := \sup \{b > 0 \text{ tel que } \widehat{\nu_{|1,+\infty[}} \text{ admet un prolongement méromorphe sur } D_b\} \quad (7.1.14)$$

Remarquons que d'après l'hypothèse (7.1.2), nous avons $B_\nu \geq r_\nu$ et éventuellement $B_\nu = +\infty$.

Dans ces conditions, φ admet un prolongement méromorphe sur D_{B_ν} et nous noterons encore φ ce prolongement. De même, nous noterons encore $\widehat{\nu_{|1,+\infty[}}$ le prolongement de $\widehat{\nu_{|1,+\infty[}}$.

Nous faisons, en outre, l'hypothèse suivante :

$\forall 0 < B < B_\nu \quad \exists K > 0, \quad \exists R_0 > 0$, tels que :

$$|\widehat{\nu_{|1,+\infty[}}(q)| \leq K|q|, \quad \text{pour tout } q \text{ vérifiant : } \begin{cases} -B \leq \operatorname{Re} q \leq 0 \\ |\operatorname{Im} q| \geq R_0 \end{cases} \quad (7.1.15)$$

Remarque 7.1 1. Compte tenu de (7.1.1), nous pouvons remplacer

$\widehat{\nu}_{|1, +\infty[}(q)$ dans (7.1.15), de manière équivalente, par $\int 0_0^+(\mathfrak{E}^{-qy} - 1)\nu(dy)$
ou par $\int 0_{-\infty}^+(\mathfrak{E}^{-qy} - 1)\nu(dy)$.

2. Comme nous avons :

$$\sup_{\operatorname{Re} q \geq 0} |\widehat{\nu}_{|1, +\infty[}(q)| < +\infty, \quad (7.1.16)$$

alors, si l'hypothèse 7.1.15 est vérifiée, nous avons aussi :

$$\forall q \text{ vérifiant : } \begin{cases} \operatorname{Re} q \geq -B \\ |\operatorname{Im} q| \geq R_0 \end{cases} \quad |\widehat{\nu}_{|1, +\infty[}(q)| \leq K|q| \quad (7.1.17)$$

Nous donnerons ci-dessous (cf. Remarque 7.4), des hypothèses raisonnables portant sur ν pour que l'hypothèse (7.1.15) soit satisfaite.

Proposition 7.2 *Sous les hypothèses (7.1.1), (7.1.2), (7.1.4) et (7.1.15), pour tout $\theta \in [0, \kappa]$, il existe $\beta_\theta > 0$ tel que, pour tout $B \in]0, B_\nu[$, aussi proche que l'on veut de B_ν , les zéros de φ_θ dans la bande :*

$$D_{B, \beta_\theta} := \{q \in \mathbb{C} \text{ tel que } -B \leq \operatorname{Re} q \leq \beta_\theta\} \quad (7.1.18)$$

sont en nombre fini, conjugués deux à deux et s'écrivent :

- (i) Si $\theta > 0$:
 $-\gamma_0(\theta), -\gamma_1(\theta), -\overline{\gamma}_1(\theta), \dots, -\gamma_p(\theta)$ et $-\overline{\gamma}_p(\theta)$,
- (ii) Si $\theta = 0$ et $c > \mathbb{E}(J_1)$:
 $0, -\gamma_0(0), -\gamma_1(0), -\overline{\gamma}_1(0), \dots, -\gamma_p(0)$ et $-\overline{\gamma}_p(0)$,
- (iii) Si $\theta = 0$ et $c \leq \mathbb{E}(J_1)$:
 $-\gamma_0(0) = 0, -\gamma_1(0), -\overline{\gamma}_1(0), \dots, -\gamma_p(0)$ et $-\overline{\gamma}_p(0)$,

où p est un entier, éventuellement nul, et

$$-B < -\operatorname{Re}(\gamma_p(\theta)) \leq \dots \leq -\operatorname{Re}(\gamma_1(\theta)) < -\gamma_0(\theta) \leq 0. \quad (7.1.19)$$

Démonstration de la Proposition 7.2

Cette démonstration est faite dans l'Appendice A, Proposition A.6.

Théorème 7.3 *Nous supposons les hypothèses (7.1.1), (7.1.2) et (7.1.15) satisfaites. Soit $B \in]0, B_\nu[$, aussi proche que l'on veut de B_ν et soit $\kappa > 0$, assez petit, tels que (7.1.4) soit vérifié et (7.1.19) soit également satisfait pour tout $\theta \in [0, \kappa]$ (avec un nombre p indépendant de θ , $\theta \in [0, \kappa]$).*

Pour tout $\theta \in [0, \kappa]$ et pour tout $\mu \geq 0$, il existe $C_0(\theta, \mu) > 0$ et des constantes complexes $C_1(\theta, \mu), \dots, C_p(\theta, \mu)$, telles que $F(\theta, \mu, \cdot)$ admet, quand x tend vers $+\infty$, un développement asymptotique de la forme :

$$F(\theta, \mu, x) = C_0(\theta, \mu)e^{-\gamma_0(\theta)x} + \sum_{i=1}^p a_i (C_i(\theta, \mu)e^{-\gamma_i(\theta)x} + \overline{C_i}(\theta, \mu)e^{-\overline{\gamma_i}(\theta)x}) + O(e^{-Bx}), \quad (7.1.20)$$

où O est uniforme en $\mu \in \mathbb{R}_+$ et en θ appartenant à $[0, \kappa]$ et $a_i = \frac{1}{2}$ si $-\gamma_i(\theta)$ est réel et $a_i = 1$ sinon.

Remarque 7.4 1. Le choix de B (aussi proche de B_ν que nous voulons) sera précisé au cours de la démonstration.

2. Lorsque ν ne charge que $\mathbb{R}_+$, la constante $C_0(\theta, \mu)$ figurant dans (7.1.20) est bien la même que celle de la Proposition 6.4. Plus généralement, toujours lorsque $\nu|_{]-\infty, 0[} = 0$, les constantes $C_i(\theta, \mu)$ se calculent explicitement (cf. (7.2.104)).
3. Si l'hypothèse (7.1.4) n'est pas vérifiée, φ_θ n'a pas de zéro sur $[-r_\nu, 0[$, mais il est encore possible de montrer que, quand x tend vers $+\infty$:

$$F(\theta, \mu, x) = O(e^{-(r_\nu - \varepsilon)x}), \quad \varepsilon > 0. \quad (7.1.21)$$

4. Voici des situations où l'hypothèse (7.1.15) est vérifiée :
 - a) Supposons que la mesure ν a des moments exponentiels de tout ordre, c'est à dire :

$$\forall q \in \mathbb{R} \quad \int 0_{-\infty}^{+\infty} |e^{-qy} - 1| \nu(dy) < +\infty. \quad (7.1.22)$$

Dans ce cas, les fonctions $\widehat{\nu|_{[1, +\infty[}}$ et φ sont holomorphes dans $\mathbb{C}$, elles admettent un prolongement sur tout $\mathbb{C}$ et nous avons $B_\nu = +\infty$. De plus, pour tout $B > 0$:

$$\sup_{\operatorname{Re} q \geq -B} \left| \int_1^{+\infty} e^{-qy} \nu(dy) \right| \leq \int_1^{+\infty} e^{By} \nu(dy) < +\infty. \quad (7.1.23)$$

Donc l'hypothèse (7.1.15) est vérifiée.

En particulier, si ν est à support compact et intègre $|y|$ au voisinage de 0, alors ν vérifie (7.1.22).

- b) Nous supposons que ν ne charge que $\mathbb{R}_+$ et que ν est une combinaison de lois gamma :

$$\nu(dy) := \sum_{i=1}^n \rho_i e^{-\beta_i} y^{m_i} dy. \quad (7.1.24)$$

avec pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\rho_i > 0$, $\beta_i > 0$ et $m_i \in \mathbb{N}$.

Le calcul explicite de la transformée de Laplace de ν donne de façon évidente le prolongement méromorphe souhaité. Donc $B_\nu = +\infty$ et l'hypothèse (7.1.15) est vérifiée.

$$\widehat{\nu}(q) = \int_0^{+\infty} e^{-qx} \sum_{i=1}^n \rho_i e^{-\beta_i x} x^{m_i} dx = \sum_{i=1}^n \rho_i \int_0^{+\infty} x^{m_i} e^{-(q+\beta_i)x} dx. \quad (7.1.25)$$

En posant $y = (q + \beta_i)x$, nous obtenons :

$$\widehat{\nu}(q) = \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i}{(q + \beta_i)^{m_i+1}} \int_0^{+\infty} y^{m_i} e^{-y} dy = \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i m_i!}{(q + \beta_i)^{m_i+1}}. \quad (7.1.26)$$

$\widehat{\nu}$ et φ sont holomorphes sur $\mathbb{C} - \{-\beta_1, \dots, -\beta_n\}$ et méromorphes sur $\mathbb{C}$.

- c) Nous pouvons généraliser l'exemple développé en b). Nous supposons que ν ne charge que $\mathbb{R}_+$ et s'écrit :

$$\begin{aligned} \nu(dy) := & \left[(\rho_0 e^{-\beta_0 y} y^{m_0-1} + \sum_{i=1}^n (\rho_i e^{-\beta_i y} + \bar{\rho}_i e^{-\bar{\beta}_i y}) y^{m_i-1}) dy \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}} \right] \phi(y) \\ & + O(e^{-\beta_{n+1} y}), \end{aligned} \quad (7.1.27)$$

avec $\rho_0 \geq 0$, $\beta_0 > 0$, $\rho_i \in \mathbb{C}^*$, $m_i \in \mathbb{N}^*$ et $\beta_{n+1} \geq \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} \operatorname{Re}(\beta_i)$,

et où ϕ est une fonction égale à un $O(y)$ au voisinage de 0 et est constante pour y assez grand. Les fonction $\widehat{\nu}$ et φ sont méromorphes sur $\{q / \operatorname{Re} q \geq \beta_{n+1}\}$. Donc $B_\nu = \beta_{n+1}$ et l'hypothèse (7.1.15) est vérifiée.

- d) Par ailleurs si $\nu = \nu_1 + \nu_2$ avec ν_1 et ν_2 satisfaisant à l'hypothèse (7.1.15) alors ν satisfait à l'hypothèse (7.1.15).

Démonstration du Théorème 7.3

La démonstration se fait en trois étapes :

1. Nous modifions $F(\theta, \mu, \cdot)$ au voisinage de 0 en une fonction $\tilde{F}(\theta, \mu, \cdot)$ de façon à rendre la transformée de Fourier de $\tilde{F}(\theta, \mu, \cdot)$ intégrable.
2. Nous inversons la transformée de Fourier de $\tilde{F}(\theta, \mu, \cdot)$ grâce aux techniques de Mellin Fourier et à l'équation fonctionnelle (6.1.7) satisfaite par $\hat{F}(\theta, \mu, \cdot)$.
3. Les coefficients $C_i(\theta, \mu)$ sont fournis par les résidus de la fonction que nous inversons, les pôles étant précisément les points $-\gamma_i(\theta)$ et leurs conjugués, définis dans la Proposition 7.2.

Dans les étapes 1 et 2 ci-dessous, $B \in]0, B_\nu[$, est fixé aussi proche que l'on veut de B_ν .

Etape 1 Nous rappelons que :

$$F(\theta, \mu, x) = \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}} \right) \quad \forall x \geq 0. \quad (7.1.28)$$

Nous prolongeons la fonction $F(\theta, \mu, \cdot)$ en une fonction $\tilde{F}(\theta, \mu, \cdot)$ définie et continue sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tilde{F}(\theta, \mu, x) := F(\theta, \mu, x) \mathbb{1}_{[0; +\infty[}(x) + (1+x) \mathbb{1}_{[-1; +0]}(x). \quad (7.1.29)$$

Nous noterons $\hat{\tilde{F}}(\theta, \mu, \cdot)$, la transformée de Laplace de $\tilde{F}(\theta, \mu, \cdot)$, définie par :

$$\hat{\tilde{F}}(\theta, \mu, q) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-qx} \tilde{F}(\theta, \mu, x) dx. \quad (7.1.30)$$

Le remplacement de $F(\theta, \mu, \cdot)$ par $\tilde{F}(\theta, \mu, \cdot)$ rend intégrable sur $\mathbb{R}$ la fonction $t \rightarrow \hat{\tilde{F}}(\theta, \mu, q_1 + it)$, comme nous le verrons dans l'étape 2.

En utilisant la formule (6.1.7) donnant la transformée de Laplace $\hat{F}(\theta, \mu, q)$ et en remarquant que :

$$\int_{-1}^0 (1+x) e^{-qx} dx = \frac{e^q - 1 - q}{q^2}, \quad (7.1.31)$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, q) = & \frac{e^q - 1 - q}{q^2} + \frac{1}{\varphi(q) - \theta} \left(\frac{q - \gamma_0^*(\theta)}{2} + \frac{1}{q - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) + RF(\theta, \mu, \cdot)(q) - RF(\theta, \mu, \cdot)(\gamma_0^*(\theta)) \right) \end{aligned} \quad (7.1.32)$$

Remarquant ensuite que :

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(q) - \theta}{q + \gamma_0^*(\theta)} &= \frac{\varphi(q) - \varphi(\gamma_0^*(\theta))}{q + \gamma_0^*(\theta)} \\ &= \frac{q - \gamma_0^*(\theta)}{2} + c \frac{q - \gamma_0^*(\theta)}{q + \gamma_0^*(\theta)} + \frac{1}{q + \gamma_0^*(\theta)} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-qy} - e^{-\gamma_0^*(\theta)y}) \nu(dy), \end{aligned} \quad (7.1.33)$$

et que :

$$\frac{e^q - 1 - q}{q^2} + \frac{1}{q + \gamma_0^*(\theta)} = \frac{e^q - 1}{q^2} - \frac{\gamma_0^*(\theta)}{q(q + \gamma_0^*(\theta))}, \quad (7.1.34)$$

nous obtenons, pour tout q tel que $\operatorname{Re} q > 0$:

$$\begin{aligned} \widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, q) = & \frac{e^q - 1}{q^2} - \frac{\gamma_0^*(\theta)}{q(q + \gamma_0^*(\theta))} \\ & + \frac{1}{\varphi(q) - \theta} \left[-c \frac{q - \gamma_0^*(\theta)}{q + \gamma_0^*(\theta)} - \frac{1}{q + \gamma_0^*(\theta)} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-qy} - e^{-\gamma_0^*(\theta)y}) \nu(dy) \right. \\ & + \frac{1}{q - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - e^{-\mu y}) \nu(dy) - \frac{1}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \\ & \left. + RF(\theta, \mu, \cdot)(q) - RF(\theta, \mu, \cdot)(\gamma_0^*(\theta)) \right]. \end{aligned} \quad (7.1.35)$$

Il est clair, d'après (7.1.1) (ii), que $RF(\theta, \mu, \cdot)$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et que toutes les intégrales qui apparaissent dans la formule ci-dessus sont holomorphes soit dans $\mathbb{C}$, soit dans D_{B_ν} . En considérant les prolongements méromorphes à D_{B_ν} , de φ et de tous les autres termes, la formule (7.1.35) donne le prolongement méromorphe au domaine D_{B_ν} , de $\widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, \cdot)$, que nous noterons encore $\widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, \cdot)$.

Observons par ailleurs que, si $\theta > 0$ ou si $\theta = 0$ et $c \neq \mathbb{E}(J_1)$, $\widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, \cdot)$, comme $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$, est holomorphe au voisinage de $q = \gamma_0^*(\theta)$, bien que $\gamma_0^*(\theta)$ soit un zéro de φ_θ , ce zéro étant une fausse singularité de $\widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, \cdot)$. Par contre, si $\theta = 0$ et $c = \mathbb{E}(J_1)$, $\gamma_0^*(0) = 0$ est un pôle de $\widehat{\widehat{F}}(0, \mu, \cdot)$.

Etape 2 Soit θ appartenant à $[0, \kappa]$, fixé. Nous considérons alors $\beta_\theta > 0$, choisi comme dans la proposition A.5 (Annexe A). Soit $q_1 \in]0, \beta_\theta[$.

Lemme 7.5 *Supposons les hypothèses (7.1.1) et (7.1.15) vérifiées et soit un réel q_1 vérifiant $0 < q_1 < \beta_\theta$. La fonction $t \rightarrow \widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, q_1 + it)$ appartient alors à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$.*

Avant de démontrer le lemme 7.5, nous allons énoncer et démontrer un certain nombre de majorations dont nous nous servirons dans toute la suite.

Lemme 7.6 *Soit $\theta_1 < \theta_2$. Avec les hypothèses (7.1.1) et (7.1.15), nous avons :*

(i) $\exists k > 0$ tel que $\forall q / \operatorname{Re} q \in [\theta_1, \theta_2]$, nous avons :

$$\left| \int_{-1}^1 (e^{-qy} - 1) \nu(dy) \right| \leq k|q|, \quad (7.1.36)$$

$$\left| \int_{-1}^0 (e^{-qy} - 1) \nu(dy) \right| \leq k|q| \quad \text{et} \quad \left| \int_0^1 (e^{-qy} - 1) \nu(dy) \right| \leq k|q|, \quad (7.1.37)$$

$$(ii) \quad \forall d > 0, \quad \exists k_0 > 0 \quad \text{tel que} \quad \sup_{\operatorname{Re} q \leq d} \left| \int_{-\infty}^{-1} e^{-qy} \nu(dy) \right| \leq k_0 \quad (7.1.38)$$

$$(iii) \quad \forall A > 0 \quad \exists k_1 > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall q \quad \text{vérifiant :} \quad \begin{cases} -B \leq \operatorname{Re} q \leq A \\ |\operatorname{Im} q| \geq R_0 \end{cases},$$

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-qy} - 1) \nu(dy) \right| \leq k_1(1 + |q|), \quad (7.1.39)$$

$$\frac{1}{k_1} |q|^2 \leq |\varphi(q)| \leq k_1 |q|^2 \quad (7.1.40)$$

$$(iv) \quad \forall h \in \mathbb{R}, \quad \sup_{\operatorname{Re} q \leq h} |RF(\theta, \mu, q)| < +\infty. \quad (7.1.41)$$

Démonstration du Lemme 7.6

(i) Soit, en posant $q = a + ib$ avec $a \in [\theta_1, \theta_2]$:

$$\left| \int_{-1}^1 (e^{-qy} - 1) \nu(dy) \right| \leq \left| \int_{-1}^1 (e^{-(a+ib)y} - e^{-ay}) \nu(dy) \right| + \left| \int_{-1}^1 (e^{-ay} - 1) \nu(dy) \right|. \quad (7.1.42)$$

En utilisant la formule des accroissements finis, nous en déduisons (7.1.36). Les deux inégalités de (7.1.37) s'obtiennent de manière analogue.

(ii) Pour tout q tel que $\operatorname{Re} q \leq d$,

$$\left| \int_{-\infty}^{-1} e^{-qy} \nu(dy) \right| \leq \int_{-\infty}^{-1} e^{-\operatorname{Re} q y} \nu(dy) \leq \int_{-\infty}^{-1} e^{-dy} \nu(dy) = k_0. \quad (7.1.43)$$

k_0 est fini d'après l'hypothèse (7.1.1) (ii).

(iii) Pour tout q tel que $-B \leq \operatorname{Re} q \leq A$ et $|\operatorname{Im} q| \geq R_0$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-qy} - 1) \nu(dy) &= \int_{-\infty}^{-1} e^{-qy} \nu(dy) + \int_{-1}^1 (e^{-qy} - 1) \nu(dy) \\ &\quad + \int_1^{+\infty} e^{-qy} \nu(dy) + \int_{-\infty}^{-1} \nu(dy) + \int_1^{+\infty} \nu(dy). \end{aligned} \quad (7.1.44)$$

L'inégalité (7.1.39) est une conséquence de l'hypothèse (7.1.15), et des inégalités (7.1.36) et (7.1.37).

De la définition de φ :

$$\varphi(q) = \frac{q^2}{2} + cq + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-qy} - 1) \nu(dy), \quad (7.1.45)$$

nous déduisons alors (7.1.40).

(iv) Nous avons d'après (6.1.4),

$$RF(\theta, \mu, q) = \int_{-\infty}^0 \nu(dy) \int_0^{-y} e^{-q(y+b)} F(\theta, \mu, b) db - \int_{-\infty}^0 \nu(dy) \int_0^{-y} F(\theta, \mu, b) db.$$

Donc la fonction $q \rightarrow RF(\theta, \mu, q)$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et elle s'annule en $q = 0$.

Ainsi, pour tout complexe q tel que $\operatorname{Re} q \leq h$,

$$\begin{aligned} |RF(\theta, \mu, q)| &\leq \int_{-\infty}^0 \nu(dy) \int_0^{-y} e^{-\operatorname{Re} q(y+b)} F(\theta, \mu, b) db + \int_{-\infty}^0 (-y) \nu(dy) \\ &\leq RF(\theta, \mu, h) + 2 \int_{-\infty}^0 (-y) \nu(dy) \end{aligned}$$

D'où (7.1.41).

□

Démonstration du lemme 7.5

D'après (7.1.35), la fonction $t \rightarrow \widehat{F}(\theta, \mu, q_1 + it)$ est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, remarquons que, d'après la Proposition A.5, φ_θ n'a pas de zéro sur la bande $\{q \in \mathbb{C} / 0 < \operatorname{Re} q < \beta_\theta\}$ et donc $\varphi(q_1 + it) - \theta$ ne s'annule jamais.

Son appartenance à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$ ne dépend que de son comportement en $+\infty$. C'est ce que nous allons étudier maintenant.

Les dénominateurs apparaissant dans l'expression (7.1.35) de $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$, q^2 , $q(q + \gamma_0^*(\theta))$ et $\varphi(q) - \theta$, sont minorés, en module, par $C|q^2|$ où $C > 0$, quand $|q|$ tend vers $+\infty$ (cf. point (iii) du lemme 7.6) et les numérateurs sont des fonctions bornées sur la droite $\{q_1 + it / t \in \mathbb{R}\}$. En effet, en notant $q = q_1 + it$:

- $|e^q - 1| \leq e^{q_1} + 1$,
- $\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-qy} - e^{-\gamma_0^*(\theta)y}) \nu(dy) = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-qy} - 1) \nu(dy) + \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-\gamma_0^*(\theta)y}) \nu(dy)$,
donc, d'après (7.1.39) :

$$\left| \frac{1}{q_1 + it + \gamma_0^*(\theta)} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-(q_1+it)y} - e^{-\gamma_0^*(\theta)y}) \nu(dy) \right| \leq \frac{K_1(|q_1 + it| + 1)}{|q_1 + it + \gamma_0^*(\theta)|} \quad (7.1.46)$$

où K_1 est une constante.

- $\int_0^{+\infty} (e^{-qy} - e^{-\mu y}) \nu(dy) = \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - 1) \nu(dy) + \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu y}) \nu(dy)$,
donc, d'après (7.1.36) et l'hypothèse (7.1.15) :

$$\left| \frac{1}{q_1 + it - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-(q_1+it)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right| \leq \frac{K_2(|q_1 + it| + 1)}{|q_1 + it - \mu|} \quad (7.1.47)$$

où K_2 est une constante. Remarquons que pour cette dernière expression intégrale, $q = \mu$ est une fausse singularité.

- Pour majorer le terme $RF(\theta, \mu, \cdot)(q)$, nous utilisons (7.1.41).

□

Etape 3

Pour tout θ appartenant à $[0, \kappa]$, nous considérons alors $\beta_\theta > 0$, choisi comme dans la proposition A.5 et $q_1 \in]0, \beta_\theta[$. Nous choisisons B de telle sorte qu'aucun zéro de φ_θ ne se trouve sur la droite $\{-B + it / t \in \mathbb{R}\}$ et tel que $B \neq \gamma_0^*(\theta)$. Ce choix peut se faire grâce à la Proposition 7.2. Ce B dépend à priori de θ , mais en fait, nous pouvons choisir B indépendant de θ , à condition de prendre κ assez petit.

En effet, soit $A > 0$ fixé. Pour tout $B \in]0, B_\nu[$, proche de B_ν , il existe $R_1 > R_0$ tel que φ_θ ne s'annule pas sur les demi bandes $\{q \in \mathbb{C} / -B \leq \operatorname{Re} q \leq A \text{ et } |\operatorname{Im} q| > R_1\}$, ainsi les zéros des fonctions φ_θ , θ variant dans $[0, \kappa]$, sur la bande $\{q \in \mathbb{C} / -B \leq \operatorname{Re} q \leq A\}$, sont dans des compacts. Comme φ est holomorphe, lorsque κ tend vers 0, ces compacts décroissent vers l'ensemble des zéros de φ , qui sont en nombre fini dans $\{q \in \mathbb{C} / -B \leq \operatorname{Re} q \leq A\}$.

Ainsi, à condition de prendre κ suffisamment petit, nous pouvons choisir B de telle sorte que pour tout $\theta \in [0, \kappa]$, aucun zéro de φ_θ ne se trouve sur la droite $\{-B + it / t \in \mathbb{R}\}$.

Par ailleurs la fonction $\gamma_0^* : \theta \rightarrow \gamma_0^*(\theta)$ est continue et donc $\gamma_0^*([0, \kappa])$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}_+$. Ainsi, à condition de prendre κ suffisamment petit, nous pouvons choisir $B \notin \{\gamma_0^*(\theta); \theta \in [0, \kappa]\}$. C'est ainsi que nous choisissons κ et B .

Comme nous avons démontré (cf. Lemme 7.5) que la fonction $t \rightarrow \widehat{\widetilde{F}}(\theta, \mu, q_1 + it)$ appartient à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, nous pouvons donc appliquer la formule d'inversion de Mellin Fourier et obtenir, pour $x \geq 0$:

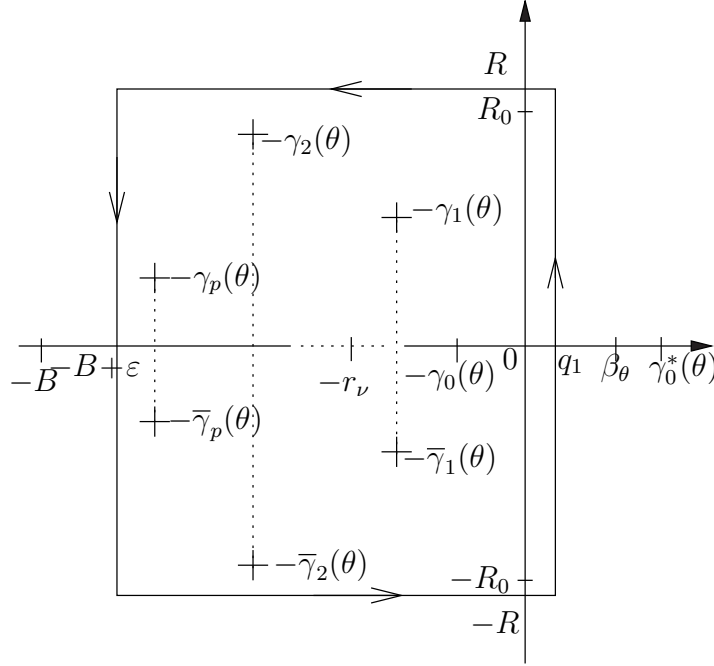
$$e^{-q_1 x} \widetilde{F}(\theta, \mu, x) = e^{-q_1 x} F(\theta, \mu, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \widehat{\widetilde{F}}(\theta, \mu, q_1 + it) dt, \quad (7.1.48)$$

d'où

$$\begin{aligned} F(\theta, \mu, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(q_1 + it)x} \widehat{\widetilde{F}}(\theta, \mu, q_1 + it) dt \\ &= -\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_{q_1}} e^{zx} \widehat{\widetilde{F}}(\theta, \mu, z) dz, \end{aligned} \quad (7.1.49)$$

où Γ_{q_1} est le chemin défini par :

$$\Gamma_{q_1} := \{z = q_1 + it \text{ tel que } t \in \mathbb{R}, \quad t \text{ croissant}\}. \quad (7.1.50)$$

FIG. 7.1 – Chemin $\Gamma_{-B, q_1, R}$

Nous avons démontré en Appendice A, Proposition A.6, qu'il existe $R_1 > R_0$, tel que φ_θ n'a pas de zéro - et donc $\widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, \cdot)$ est holomorphe - dans les demi-bandes $\{q \in \mathbb{C} / -B \leq \operatorname{Re} q < \beta_\theta \text{ et } |\operatorname{Im} q| > R_1\}$. Soit $R > R_1$.

Nous définissons alors :

$$\Gamma_{q_1, R} := \{q_1 + it / |t| \leq R, \quad t \text{ croissant}\}, \quad (7.1.51)$$

$$\Gamma_R := \{t + iR / -B \leq t \leq q_1, \quad t \text{ décroissant}\} \quad (7.1.52)$$

$$\Gamma_{-B, R} := \{-B + it / |t| \leq R, \quad t \text{ décroissant}\}, \quad (7.1.53)$$

$$\Gamma_{-R} := \{t - iR / -B \leq t \leq q_1, \quad t \text{ croissant}\}. \quad (7.1.54)$$

Soit le chemin rectangulaire $\Gamma_{-B, q_1, R}$, (voir Figure 7.1), défini par :

$$\Gamma_{-B, q_1, R} := \Gamma_{q_1, R} \cup \Gamma_R \cup \Gamma_{-B, R} \cup \Gamma_{-R} \quad (7.1.55)$$

Appliquant le théorème des résidus à la fonction $z \rightarrow e^{zx} \widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, z)$ ou plus exactement, à son prolongement méromorphe sur D_{B_ν} , le long de $\Gamma_{-B, q_1, R}$, nous

obtenons, pour tout $R > R_1$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{-B, q_1, R}} e^{zx} \widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, z) dz &= 2i\pi \left[\text{Res} (e^{zx} \widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, z), -\gamma_0(\theta)) + \right. \\ &\left. \sum_{i=1}^p a_i \left(\text{Res} (e^{zx} \widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, z), -\gamma_i(\theta)) + \text{Res} (e^{zx} \widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, z), -\overline{\gamma}_i(\theta)) \right) \right] \end{aligned} \quad (7.1.56)$$

où $\text{Res}(f(z); \gamma)$ désigne le résidu de f en γ et $a_i = \frac{1}{2}$ si $-\gamma_i(\theta)$ est réel et $a_i = 1$ sinon.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} F(\theta, \mu, x) &= -\frac{i}{2\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_{q_1, R}} e^{zx} \widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, z) dz \\ &= -\frac{i}{2\pi} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\int_{\Gamma_{-B, q_1, R}} e^{zx} \widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, z) dz - \int_{\Gamma_R} e^{zx} \widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, z) dz \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Gamma_{-B, R}} e^{zx} \widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, z) dz - \int_{\Gamma_{-R}} e^{zx} \widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, z) dz \right]. \end{aligned} \quad (7.1.57)$$

Lemme 7.7 *Sous les hypothèses (6.1.1), (6.1.2) et (7.1.15), nous avons :*

$$(i) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_{\pm R}} e^{zx} \widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, z) dz = 0. \quad (7.1.58)$$

$$(ii) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_{-B, R}} e^{zx} \widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, z) dz = O(e^{-Bx}). \quad (7.1.59)$$

où O est uniforme en $\theta \in [0, \kappa]$ et en $\mu \in \mathbb{R}_+$.

Admettons provisoirement le Lemme 7.7 et terminons la preuve du Théorème 7.3.

Ainsi, d'après (7.1.56) et (7.1.57), le Lemme 7.7, nous permet de conclure

que, quand x tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} F(\theta, \mu, x) = & \operatorname{Res} \left(e^{zx} \widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, z); -\gamma_0(\theta) \right) \\ & + \sum_{i=1}^p a_i \left[\operatorname{Res} \left(e^{zx} \widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, z); -\gamma_i(\theta) \right) + \operatorname{Res} \left(e^{zx} \widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, z); -\overline{\gamma}_i(\theta) \right) \right] \\ & + O(e^{-Bx}). \end{aligned} \quad (7.1.60)$$

Et si nous notons :

$$C_i(\theta, \mu) := \operatorname{Res} \left(\widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, z); -\gamma_i(\theta) \right), \quad (7.1.61)$$

nous avons :

$$\operatorname{Res} \left(e^{zx} \widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, z); -\gamma_i(\theta) \right) = e^{-\gamma_i(\theta)x} C_i(\theta, \mu), \quad (7.1.62)$$

et donc, quand x tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} F(\theta, \mu, x) = & e^{-\gamma_0(\theta)x} C_0(\theta, \mu) + \sum_{i=1}^p a_i \left[e^{-\gamma_i(\theta)x} C_i(\theta, \mu) + e^{-\overline{\gamma}_i(\theta)x} \overline{C}_i(\theta, \mu) \right] \\ & + O(e^{-Bx}). \end{aligned} \quad (7.1.63)$$

Ceci achève donc la démonstration du Théorème 7.3. $\square$

Démonstration du Lemme 7.7

(i) D'après (7.1.32), nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_R} e^{zx} \widehat{\widehat{F}}(\theta, \mu, z) dz = & \int_{\Gamma_R} dz e^{zx} \left[\frac{e^z - 1 - z}{z^2} + \frac{1}{\varphi(z) - \theta} \left(\frac{z - \gamma_0^*(\theta)}{2} + \frac{1}{z - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-zy} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) + RF(\theta, \mu, \cdot)(z) - RF(\theta, \mu, \cdot)(\gamma_0^*(\theta)) \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.1.64)$$

Pour tout z appartenant à Γ_R , nous avons :

$$z = t + iR \quad \text{avec} \quad t \in [-B, q_1].$$

En remarquant que :

$$\frac{1}{z - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-zy} - e^{-\mu y}) \nu(dy) = \frac{1}{z - \mu} \left[\int_0^{+\infty} (e^{-zy} - 1) \nu(dy) + \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right], \quad (7.1.65)$$

nous appliquons le point (i) du Lemme 7.6 et l'hypothèse (7.1.15), pour écrire :

$$\forall \mu \geq 0, \quad \exists C_1 > 0, \quad \exists C_2 > 0, \quad \text{tels que} \quad \forall t \in [-B, q_1], \quad \forall R > R_1 : \\ \left| \frac{1}{z - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-zy} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right| \leq \frac{1}{|z - \mu|} (C_1 |z| + C_2). \quad (7.1.66)$$

Ainsi, uniformément en $\operatorname{Re} z = t \in [-B, q_1]$ et pour R assez grand, nous déduisons d'après le Lemme 7.6 que, dans l'expression à intégrer (7.1.64), :

- les dénominateurs $|z^2|$ et $|\varphi(z) - \theta|$ sont minorés par CR^2 , où C est une constante ,
- les numérateurs $|e^{zx}|$, $\left| \frac{1}{z - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-zy} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right|$, $\left| \frac{1}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right|$ et $|RF(\theta, \mu, \cdot)(z) - RF(\theta, \mu, \cdot)(\gamma_0^*(\theta))|$ sont bornés par des constantes ,
- les numérateurs $|e^z - 1 - z|$ et $|z - \gamma_0^*(\theta)|$ sont bornés par $C'R$ où C' est une constante.

Nous en déduisons alors que :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-B}^{q_1} e^{(t+iR)x} \widehat{F}(\theta, \mu, t + iR) dt = 0, \quad (7.1.67)$$

et le point (i) du Lemme 7.7 en découle.

(ii) En utilisant l'écriture (7.1.35), nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{-a,R}} e^{zx} \widehat{F}(\theta, \mu, z) dz &= \int_{\Gamma_{-a,R}} dz e^{zx} \left[\frac{e^z - 1}{z^2} - \frac{\gamma_0^*(\theta)}{z(z + \gamma_0^*(\theta))} \right. \\ &\quad - \frac{1}{\varphi(z) - \theta} \left(c \frac{z - \gamma_0^*(\theta)}{z + \gamma_0^*(\theta)} + \frac{1}{z + \gamma_0^*(\theta)} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-zy} - e^{-\gamma_0^*(\theta)y}) \nu(dy) \right. \\ &\quad + \frac{1}{z - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-zy} - e^{-\mu y}) \nu(dy) - \frac{1}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \\ &\quad \left. \left. + RF(\theta, \mu, \cdot)(z) - RF(\theta, \mu, \cdot)(\gamma_0^*(\theta)) \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.1.68)$$

Pour tout z appartenant à $\Gamma_{-B,R}$, nous avons :

$$z = -B + it \quad \text{avec} \quad -R \leq t \leq R.$$

Nous allons alors montrer que les numérateurs de l'expression à intégrer dans (7.1.68) sont encore bornés et que les dénominateurs sont minorés mais ici uniformément en $\theta \in [0, \kappa]$ et en $\mu \in \mathbb{R}_+$.

1) Tout d'abord, observons que la fonction $\gamma_0^* : \theta \rightarrow \gamma_0^*(\theta)$ est définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ d'après l'hypothèse (7.1.1) (cf. (7.1.8)), elle est continue, croissante et donc bornée sur le compact $[0, \kappa]$.

Il existe donc une constante k_1 telle que :

$$\frac{1}{|z + \gamma_0^*(\theta)|} \leq \frac{k_1}{|z|}, \quad (7.1.69)$$

et ainsi

$$\left| \frac{\gamma_0^*(\theta)}{z(z + \gamma_0^*(\theta))} \right| \leq \frac{k_1 \gamma_0^*(\kappa)}{|z|^2}. \quad (7.1.70)$$

2) Comme B a été choisi de telle sorte que, pour tout $\theta \in [0, \kappa]$ et tout $t \in \mathbb{R}$, $z + \gamma_0^*(\theta) = -B + \gamma_0^*(\theta) + it \neq 0$, nous déduisons qu'il existe une constante C telle que :

$$\sup_{\substack{\theta \in [0, \kappa] \\ t \in \mathbb{R}}} \left| \frac{c(z - \gamma_0^*(\theta))}{z + \gamma_0^*(\theta)} \right| \leq C. \quad (7.1.71)$$

3) En reprenant l'écriture (7.1.65), et en appliquant le point (i) du Lemme 7.6 et l'hypothèse (7.1.15), nous déduisons qu'il existe une constante indépendante de $\mu \geq 0$, $C_1 > 0$, telle que, pour tout z vérifiant $|\operatorname{Im} z| \geq R_1$:

$$\left| \frac{1}{z - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-zy} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right| \leq \frac{1}{|z - \mu|} C_1 (|z| + 1) + \left| \frac{1}{z - \mu} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right|. \quad (7.1.72)$$

Comme $\operatorname{Re} z = -B < 0$, alors

$$\forall \mu \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{|z - \mu|} \leq \frac{1}{|z|}. \quad (7.1.73)$$

Mais si $y \geq 0$, $|1 - e^{-\mu y}| \leq \mu y$ et nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z - \mu} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right| &\leq \left| 1 - \frac{z}{z - \mu} \right| \int_0^{+\infty} y \nu(dy) \\ &\leq 2 \int_0^{+\infty} y \nu(dy). \end{aligned} \quad (7.1.74)$$

Ainsi, il existe des constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$, indépendantes de $\mu \geq 0$, telles que :

$$\left| \frac{1}{z - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-zy} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right| \leq \frac{1}{|z|} (C_1 |z| + C_2). \quad (7.1.75)$$

4) En utilisant le point (iii) du Lemme 7.6 et (7.1.69), nous avons successivement, pour tout z vérifiant $\text{Im } z \geq R_1$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{z + \gamma_0^*(\theta)} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-zy} - e^{-\gamma_0^*(\theta)y}) \nu(dy) \right| \\ &= \frac{1}{|z + \gamma_0^*(\theta)|} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-zy} - 1) \nu(dy) + \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-\gamma_0^*(\theta)y}) \nu(dy) \right| \\ &\leq \frac{C_3}{|z|} \left(C_4 |z| + C_5 + \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-\gamma_0^*(\kappa)y}) \nu(dy) \right| \right). \end{aligned} \quad (7.1.76)$$

5) Montrons que pour tout $\theta \in [0, \kappa]$ et pour tout $\mu \in \mathbb{R}_+$, nous avons :

$$\left| \frac{1}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right| \leq \int_0^{+\infty} y \nu(dy). \quad (7.1.77)$$

En effet :

- Supposons que $\gamma_0^*(\theta) < \mu$. Grâce au théorème des accroissements finis, il existe $y_0 \in [0, y]$ tel que :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right| &= \left| \int_0^{+\infty} e^{-\gamma_0^*(\theta)y} \frac{1 - e^{-(\mu - \gamma_0^*(\theta))y}}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \nu(dy) \right| \\ &= \left| \int_0^{+\infty} e^{-\gamma_0^*(\theta)y} y e^{-(\mu - \gamma_0^*(\theta))y_0} \nu(dy) \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} y \nu(dy) \end{aligned} \quad (7.1.78)$$

- Supposons que $\gamma_0^*(\theta) > \mu$. Grâce au théorème des accroissements finis, il existe $y_0 \in [0, y]$ tel que :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right| &= \left| \int_0^{+\infty} e^{-\mu y} \frac{e^{-(\gamma_0^*(\theta) - \mu)y} - 1}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \nu(dy) \right| \\ &= \left| \int_0^{+\infty} e^{-\mu y} y e^{-(\gamma_0^*(\theta) - \mu)y_0} \nu(dy) \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} y \nu(dy) \end{aligned} \quad (7.1.79)$$

6) D'après le point (iv) du Lemme 7.6, comme $\operatorname{Re} z = -B$ et la fonction γ_0^* est bornée sur $[0, \kappa]$, il existe une constante C_κ indépendante de $\theta \in [0, \kappa]$ et de $\mu \geq 0$ telle que :

$$|RF(\theta, \mu, \cdot)(z) - RF(\theta, \mu, \cdot)(\gamma_0^*(\theta))| \leq C_\kappa. \quad (7.1.80)$$

7) Par hypothèse B a été choisi tel que $\varphi(B) - \theta \neq 0$, donc d'après le point (iii) du Lemme 7.6, il existe une constante k indépendante de $\theta \in [0, \kappa]$ telle que :

$$\frac{1}{|\varphi(z) - \theta|} \leq \frac{k}{|z|^2}. \quad (7.1.81)$$

Ainsi, il existe des constantes $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ telles que, pour tout $\theta \in [0, \kappa]$ et tout $\mu \in \mathbb{R}_+$:

$$\left| \int_{\Gamma_{-B,R}} e^{zx} \widehat{F}(\theta, \mu, z) dz \right| \leq e^{-Bx} \int_{-R}^R \left(\frac{k_1}{B^2 + t^2} + \frac{k_2}{(B^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dt \quad (7.1.82)$$

et $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \left(\frac{k_1}{B^2 + t^2} + \frac{k_2}{(B^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dt$ est une constante ne dépendant que de B .

Ce qui achève la démonstration du point (ii). $\square$

7.2 Calcul “explicite” des coefficients $C_i(\theta, \mu)$ du développement

Pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$, nous avons montré (cf. (7.1.61), que les constantes $C_i(\theta, \mu)$ apparaissant dans (7.1.20) sont égales à :

$$C_i(\theta, \mu) = \operatorname{Res} \left(\widehat{F}(\theta, \mu, z); -\gamma_i(\theta) \right). \quad (7.2.83)$$

D'après (7.1.29) et (7.1.31), nous avons :

$$C_i(\theta, \mu) = \operatorname{Res} \left(\frac{e^z - 1 - z}{z^2} + \widehat{F}(\theta, \mu, z); -\gamma_i(\theta) \right). \quad (7.2.84)$$

La fonction $z \rightarrow \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$ admet un prolongement holomorphe sur $\mathbb{C}$. Donc, nous avons pour tout $\theta \in [0, \kappa]$ et tout $\mu \geq 0$:

$$C_i(\theta, \mu) = \operatorname{Res} \left(\widehat{F}(\theta, \mu, z); -\gamma_i(\theta) \right) \quad \forall i \in \{0, \dots, p\}. \quad (7.2.85)$$

Remarquons par ailleurs que $\overline{C}_i(\theta, \mu) = \text{Res} \left(\widehat{F}(\theta, \mu, z); -\overline{\gamma}_i(\theta) \right)$, $\bar{z}$ désignant le conjugué de z .

7.2.1 Dans le cas de pôle simple

Si $-\gamma_i(\theta)$ est un zéro simple de φ_θ , alors $-\gamma_i(\theta)$ est un pôle simple de $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$. Cette situation se produit en particulier, pour $i = 0$, quand $\theta > 0$ ou quand $\theta = 0$ et $c \neq \mathbb{E}(J_1)$.

Si par ailleurs, la partie réelle de $-\gamma_i(\theta)$ est supérieure à $-r_\nu$, d’après (6.1.7) et (7.2.85), nous avons :

$$\begin{aligned} C_i(\theta, \mu) &= \\ &= \frac{1}{\varphi'(-\gamma_i(\theta))} \left[\frac{-\gamma_i(\theta) - \gamma_0^*(\theta)}{2} + \frac{1}{-\gamma_i(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{\gamma_i(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right. \\ &\quad - \frac{1}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \\ &\quad \left. + RF(\theta, \mu, \cdot)(-\gamma_i(\theta)) - RF(\theta, \mu, \cdot)(\gamma_0^*(\theta)) \right]. \end{aligned} \quad (7.2.86)$$

7.2.2 Positivité de $C_0(\theta, \mu)$

Nous avons :

$$C_0(\theta, \mu) > 0 \quad \forall \theta \in [0, \kappa] \quad \forall \mu \geq 0. \quad (7.2.87)$$

En effet, d’après le développement asymptotique de $F(\theta, \mu, \cdot)$, quand x tend vers $+\infty$ (cf. Théorème 7.3), nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\gamma_0(\theta)x} F(\theta, \mu, x) = C_0(\theta, \mu). \quad (7.2.88)$$

La fonction $x \rightarrow e^{\gamma_0(\theta)x} F(\theta, \mu, x)$ étant positive, $C_0(\theta, \mu)$ est donc positive.

Par ailleurs, $-\gamma_0(\theta)$ est un pôle simple de $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$ pour tout $\theta > 0$ et pour $\theta = 0$ et $c \neq \mathbb{E}(J_1)$ donc dans ces cas, le résidu de $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$ en $-\gamma_0(\theta)$ ne peut être nul.

Enfin lorsque $\theta = 0$ et $c = \mathbb{E}(J_1)$, l’expression de $C_0(0, \mu)$ (cf. (7.2.103)), montre là encore que $C_0(0, \mu) \neq 0$.

7.2.3 Equation satisfaite par $C_0(0, \mu)$ pour $\mu \geq 0$

Précisons les expressions de $C_0(0, \mu)$ et de $C_0(0, 0)$ en distinguant les trois cas suivants :

1^{er} cas) $c > \mathbb{E}(J_1)$ (condition de profit net)

Comme $-\gamma_0(0) < 0$ et $\gamma_0^*(0) = 0$, (cf. (7.1.6) et (7.1.11)), nous avons :

$$C_0(0, \mu) = \frac{1}{\varphi'(-\gamma_0(0))} \left[\frac{-\gamma_0(0)}{2} - \frac{1}{\gamma_0(0) + \mu} \int_0^{+\infty} (e^{\gamma_0(0)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu y}) \nu(dy) + RF(0, \mu, \cdot)(-\gamma_0(0)) \right]. \quad (7.2.89)$$

Et si $\mu = 0$:

$$C_0(0, 0) = \frac{1}{\varphi'(-\gamma_0(0))} \left[\frac{-\gamma_0(0)}{2} + \frac{1}{-\gamma_0(0)} \int_0^{+\infty} (e^{\gamma_0(0)y} - 1) \nu(dy) \right. \\ \left. + \int_0^{+\infty} y \nu(dy) + RF(0, 0, \cdot)(-\gamma_0(0)) \right]. \quad (7.2.90)$$

2^{ème} cas) $c < \mathbb{E}(J_1)$

Comme $-\gamma_0(0) = 0$ et $\gamma_0^*(0) > 0$, (cf. (7.1.7) et (7.1.10)), nous avons :

$$C_0(0, \mu) = \frac{1}{\varphi'(0)} \left[-\frac{\gamma_0^*(0)}{2} - \frac{1}{\gamma_0^*(0) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(0)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right. \\ \left. - \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu y}) \nu(dy) - RF(0, \mu, \cdot)(\gamma_0^*(0)) \right]. \quad (7.2.91)$$

Et si $\mu = 0$:

$$C_0(0, 0) = \frac{1}{\varphi'(0)} \left[-\frac{\gamma_0^*(0)}{2} - \frac{1}{\gamma_0^*(0)} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(0)y} - 1) \nu(dy) \right. \\ \left. - \int_0^{+\infty} y \nu(dy) - RF(0, 0, \cdot)(\gamma_0^*(0)) \right]. \quad (7.2.92)$$

3^{ème} cas) $c = \mathbb{E}(J_1)$

0 est un zéro double de φ mais 0 est un pôle simple de $\widehat{F}(0, \mu, \cdot)$. Ainsi :

$$C_0(0, \mu) = \text{Res}(\widehat{F}(0, \mu, z); 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(z \widehat{F}(0, \mu, z) \right). \quad (7.2.93)$$

D’après (6.1.7) et en remarquant que $-\gamma_0(0) = \gamma_0^*(0) = 0$, (cf. (7.1.7) et (7.1.11)), nous pouvons écrire :

$$\widehat{F}(0, \mu, z) = \frac{N(\mu, z)}{\varphi(z)}, \quad (7.2.94)$$

avec

$$\begin{aligned} N(\mu, z) := & \frac{z}{2} + \frac{1}{z - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-zy} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \\ & + \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu y}) \nu(dy) + RF(0, \mu, \cdot)(z). \end{aligned} \quad (7.2.95)$$

Comme $z \rightarrow N(\mu, z)$ est holomorphe au voisinage de 0, s’annule en 0 et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial z}(\mu, z) = & \frac{1}{2} - \frac{1}{(z - \mu)^2} \int_0^{+\infty} (e^{-zy} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \\ & - \frac{1}{z - \mu} \int_0^{+\infty} y e^{-zy} \nu(dy) + \frac{dRF(0, \mu, \cdot)}{dz}(z), \end{aligned} \quad (7.2.96)$$

où, nous avons :

$$\frac{dRF(0, \mu, \cdot)}{dz}(z) = - \int_{-\infty}^0 \nu(dy) \int_0^{-y} (y + b) e^{-z(y+b)} F(0, \mu, b) db. \quad (7.2.97)$$

Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial N}{\partial z}(\mu, z) = & \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu^2} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu y} - \mu y) \nu(dy) \\ & - \int_{-\infty}^0 \nu(dy) \int_0^{-y} (y + b) F(0, \mu, b) db. \end{aligned} \quad (7.2.98)$$

Par ailleurs, au voisinage de $z = 0$, :

$$N(\mu, z) = z \frac{\partial N}{\partial z}(\mu, 0) + o(z) \quad (7.2.99)$$

$$\varphi(z) = \frac{z^2}{2} \varphi''(0) + o(z^2) \quad (7.2.100)$$

$$\varphi''(0) = 1 + \int_0^{+\infty} y^2 \nu(dy) > 0, \quad (7.2.101)$$

donc :

$$\begin{aligned} C_0(0, \mu) &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(z \widehat{F}(0, \mu, z) \right) = \frac{2}{\varphi''(0)} \frac{\partial N}{\partial z}(\mu, 0) \\ &= \frac{1}{\varphi''(0)} \left(1 - \frac{2}{\mu^2} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu y} - \mu y) \nu(dy) \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_{-\infty}^0 \nu(dy) \int_0^{-y} (y+b) F(0, \mu, b) db \right). \end{aligned} \quad (7.2.102)$$

et si $\mu = 0$:

$$\begin{aligned} C_0(0, 0) &= \frac{1}{\varphi''(0)} \left(1 + \int_0^{+\infty} y^2 \nu(dy) - 2 \int_{-\infty}^0 \nu(dy) \int_0^{-y} (y+b) F(0, 0, b) db \right) \\ &= 1 - \frac{2}{\varphi''(0)} \int_{-\infty}^0 \nu(dy) \int_0^{-y} (y+b) F(0, 0, b) db. \end{aligned} \quad (7.2.103)$$

7.2.4 Calcul explicite des constantes $C_i(\theta, \mu)$, quand ν ne charge que $\mathbb{R}_+$

Si ν ne charge que $\mathbb{R}_+$, les résidus se calculent explicitement.

Soit $i \in \{0, \dots, p\}$. Supposons que $-\gamma_i(\theta)$ est un pôle simple tel que $\operatorname{Re}(-\gamma_i(\theta)) > -r_\nu$. (Remarquons que $-\gamma_0(\theta)$ est toujours un pôle simple et que pour tout θ , nous avons $\operatorname{Re}(-\gamma_0(\theta)) > -r_\nu$).

D'après (7.2.86), nous avons :

$$\begin{aligned} C_i(\theta, \mu) &= \frac{1}{\varphi'(-\gamma_i(\theta))} \left[\frac{-\gamma_i(\theta) - \gamma_0^*(\theta)}{2} \right. \\ &\quad + \frac{1}{-\gamma_i(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{\gamma_i(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \\ &\quad \left. - \frac{1}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right]. \end{aligned} \quad (7.2.104)$$

Etudions plus particulièrement les résidus quand $\theta = 0$ et $\mu = 0$ en dissociant les trois cas suivants :

1^{er} cas) $c > \mathbb{E}(J_1)$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
C_i(0, 0) &= \\
&= \frac{1}{\varphi'(-\gamma_i(0))} \left[\frac{-\gamma_i(0)}{2} + \frac{1}{-\gamma_i(0)} \int_0^{+\infty} (e^{\gamma_i(0)y} - 1) \nu(dy) + \int_0^{+\infty} y \nu(dy) \right] \\
&= \frac{1}{\varphi'(-\gamma_i(0))} \left[\frac{\varphi(-\gamma_i(0))}{-\gamma_i(0)} - c + \int_0^{+\infty} y \nu(dy) \right]. \tag{7.2.105}
\end{aligned}$$

Comme :

$$\varphi(-\gamma_i(0)) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(0) = c - \int_0^{+\infty} y \nu(dy), \tag{7.2.106}$$

nous obtenons :

$$C_i(0, 0) = -\frac{\varphi'(0)}{\varphi'(-\gamma_i(0))}. \tag{7.2.107}$$

En particulier, si $i = 0$, nous retrouvons la constante de (6.2.83) et le résultat de Doney [Don91] : $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\gamma_0(0)x} \mathbb{P}(T_x < +\infty) = -\frac{\varphi'(0)}{\varphi'(-\gamma_0(0))}$.

2^{ème} cas) $c < \mathbb{E}(J_1)$

Si $i = 0$, nous déduisons de (7.2.92) :

$$\begin{aligned}
C_0(0, 0) &= \\
&= \frac{1}{\varphi'(0)} \left[\frac{-\gamma_0^*(0)}{2} - \frac{1}{\gamma_0^*(0)} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(0)y} - 1) \nu(dy) - \int_0^{+\infty} y \nu(dy) \right] \\
&= \frac{1}{\varphi'(0)} \left[-\frac{\varphi(\gamma_0^*(0))}{\gamma_0^*(0)} + c - \int_0^{+\infty} y \nu(dy) \right]. \tag{7.2.108}
\end{aligned}$$

Si $i \in \{1, \dots, p\}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
C_i(0, 0) &= \frac{1}{\varphi'(-\gamma_i(0))} \left[\frac{-\gamma_i(0) - \gamma_0^*(0)}{2} - \frac{1}{\gamma_i(0)} \int_0^{+\infty} (e^{\gamma_i(0)y} - 1) \nu(dy) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\gamma_0^*(0)} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(0)y} - 1) \nu(dy) \right] \\
&= \frac{1}{\varphi'(-\gamma_i(0))} \left[\frac{\varphi(-\gamma_i(0))}{-\gamma_i(0)} - c - \frac{\varphi(\gamma_0^*(0))}{\gamma_0^*(0)} + c \right]. \tag{7.2.109}
\end{aligned}$$

Comme $\varphi(\gamma_0^*(0)) = 0$ et d'après (7.2.106), nous avons :

$$C_0(0, 0) = 1 \quad \text{et} \quad C_i(0, 0) = 0 \quad \text{si} \quad i \in \{1, \dots, p\}. \quad (7.2.110)$$

Ce résultat est en accord avec le résultat (4.1.10) : $\mathbb{P}(T_x < +\infty) = 1$.

3^{ème} cas) $c = \mathbb{E}(J_1)$

Si $i \in \{1, \dots, p\}$:

$$\begin{aligned} C_i(0, 0) &= \\ &= \frac{1}{\varphi'(-\gamma_i(0))} \left[\frac{-\gamma_i(0)}{2} + \frac{1}{-\gamma_i(0)} \int_0^{+\infty} (e^{\gamma_i(0)y} - 1) \nu(dy) + \int_0^{+\infty} y \nu(dy) \right] \\ &= \frac{1}{\varphi'(-\gamma_i(0))} \left[\frac{\varphi(-\gamma_i(0))}{-\gamma_i(0)} - c + \int_0^{+\infty} y \nu(dy) \right]. \end{aligned} \quad (7.2.111)$$

et donc, d'après (7.2.106) :

$$C_i(0, 0) = 0. \quad (7.2.112)$$

Par ailleurs, d'après (7.2.103), nous avons :

$$C_0(0, 0) = 1. \quad (7.2.113)$$

Ainsi (7.2.113) et (7.2.112) sont en accord avec le résultat que nous connaissions : $F(0, 0, z) = \mathbb{P}(T_x < \infty) = 1$.

Remarque 7.8

Si $-\gamma_i(0)$ est tel que $\text{Re}(-\gamma_i(0)) < -r_\nu$, il suffit de remplacer φ , dans les formules (7.2.107), (7.2.109) et (7.2.111), par son prolongement méromorphe pour obtenir là encore $C_i(0, 0)$.

Chapitre 8

Comportement asymptotique de $F(\theta, \mu, .)$ via un théorème de renouvellement

Nous nous proposons ici, de donner le premier terme du développement asymptotique de $F(\theta, \mu, x)$, quand x tend vers $+\infty$, par une autre méthode que celle du paragraphe 7 (cf. Théorème 7.3), c'est à dire en utilisant un théorème de renouvellement.

Plus précisément, nous supposons que $(J_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson composé, de mesure de Lévy ν , vérifiant :

$$\nu(\mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) =: \lambda < +\infty, \quad (8.0.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y| \nu(dy) < +\infty. \quad (8.0.2)$$

Si r_ν désigne $r_\nu := \sup \{s \geq 0 / \int_0^{+\infty} (e^{sy} - 1) \nu(dy) < +\infty\}$, alors nous supposons également :

$$r_\nu > 0 \quad (\text{éventuellement } r_\nu = +\infty). \quad (8.0.3)$$

Nous nous plaçons uniquement dans les cas des figures A.1 cas a , A.2 cas a , A.3 et A.5 de l'Appendice A. Il est équivalent de supposer, qu'il existe $\kappa > 0$ tel que :

$$\forall \theta \in [0, \kappa] \quad \exists \gamma_0(\theta) \in [0, -r_\nu[\quad / \quad \varphi(-\gamma_0(\theta)) = \theta, \quad (8.0.4)$$

avec

$$\text{si } \theta > 0 \qquad \qquad \qquad \gamma_0(\theta) > 0, \qquad (8.0.5)$$

$$\text{si } \theta = 0 \text{ et } c > \mathbb{E}(J_1), \qquad \gamma_0(0) > 0, \qquad (8.0.6)$$

$$\text{si } \theta = 0 \text{ et } c \leq \mathbb{E}(J_1), \qquad \gamma_0(0) = 0. \qquad (8.0.7)$$

Théorème 8.1 *Sous les hypothèses précédentes, pour tout $\mu \geq 0$, et :*

- si $c \neq \mathbb{E}(J_1)$, pour tout $\theta \in [0, \kappa]$,
- si $c = \mathbb{E}(J_1)$, pour tout $\theta \in]0, \kappa]$,

alors $e^{\gamma_0(\theta)x} F(\theta, \mu, x)$ converge lorsque x tend vers $+\infty$, vers un réel $C(\theta, \mu)$, strictement positif.

Remarque 8.2

1. La démonstration du Théorème 8.1 repose sur le fait que la fonction $G(\theta, \mu, \cdot)$ définie par :

$$G(\theta, \mu, x) := e^{\gamma_0(\theta)x} F(\theta, \mu, x), \qquad (8.0.8)$$

satisfait à l'équation de renouvellement :

$$g(x) = \tilde{G}_2(\theta, \mu, x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{x-z \geq 0\}} g(x-z) \mathcal{N}(z) dz, \qquad (8.0.9)$$

où $\tilde{G}_2(\theta, \mu, \cdot)$ est définie par (8.0.17) et $\mathcal{N}$ par (8.0.20). Le Théorème 8.1 est alors une conséquence d'un théorème de renouvellement (cf. [Fel71], general renewal Theorem, page 381).

2. Le cas $\theta = 0$ et $c = \mathbb{E}(J_1)$ est exclus car alors, il nous est impossible d'appliquer le théorème de renouvellement de Feller qui nécessite l'hypothèse $\int_{-\infty}^{+\infty} z \mathcal{N}(z) dz > 0$ (cf. Lemme 8.3, ci-dessous). Par contre, par la méthode employée au chapitre 7, nous avons su traiter ce cas (cf. Théorème 7.3).

Démonstration du Théorème 8.1

Nous conservons les notations du chapitre 7 et nous considérons la fonction $G(\theta, \mu, \cdot)$ définie par (8.0.8).

L'équation fonctionnelle (5.2.9) vérifiée par $F(\theta, \mu, \cdot)$ implique que $G(\theta, \mu, \cdot)$ est solution de l'équation fonctionnelle :

$$g(x) = G_2(\theta, \mu, x) + \bar{\Lambda}_\theta g(x) \qquad x \geq 0. \qquad (8.0.10)$$

où

$$G_2(\theta, \mu, x) := e^{\gamma_0(\theta)x} (F_0(\theta, \mu, x) + F_1(\theta, \mu, x)) , \quad (8.0.11)$$

avec $F_1(\theta, \mu, x)$ et $F_2(\theta, \mu, x)$ donnés en (5.2.11) et (5.2.12) et $\bar{\Lambda}_\theta$ l'opérateur défini sur $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}_+)$ par :

$$\bar{\Lambda}_\theta g(x) := e^{\gamma_0(\theta)x} \Lambda_\theta(e^{-\gamma_0(\theta)\cdot} g)(x) , \quad (8.0.12)$$

avec Λ_θ défini en (5.2.13).

Nous avons alors :

$$\bar{\Lambda}_\theta g(x) = \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) e^{\gamma_0(\theta)y} \int_{-\infty}^{(x-y) \wedge x} e^{(\gamma_0(\theta)-c)a} (e^{-\alpha_\theta|a|} - e^{-(2x-a)\alpha_\theta}) g(x-a-y) da . \quad (8.0.13)$$

En effectuant le changement de variables $b = x - a - y$ dans l'intégrale précédente, nous obtenons :

$$\bar{\Lambda}_\theta g(x) = \frac{e^{(\gamma_0(\theta)-c)x}}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) e^{cy} \int_{0 \vee (-y)}^{+\infty} e^{-(\gamma_0(\theta)-c)b} (e^{-\alpha_\theta|x-b-y|} - e^{-\alpha_\theta(x+b+y)}) g(b) db . \quad (8.0.14)$$

Puis, en regroupant différemment les termes apparaissant dans (8.0.10), nous obtenons :

$$g(x) = \tilde{G}_2(\theta, \mu, x) + \tilde{\Lambda}_\theta g(x) \quad (8.0.15)$$

où $\tilde{\Lambda}_\theta$ est l'opérateur défini par :

$$\tilde{\Lambda}_\theta g(x) := \frac{e^{(\gamma_0(\theta)-c)x}}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) e^{cy} \int_0^{+\infty} e^{-(\gamma_0(\theta)-c)b} e^{-\alpha_\theta|x-b-y|} g(b) db , \quad (8.0.16)$$

et $\tilde{G}_2(\theta, \mu, \cdot)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(\theta, \mu, x) &:= G_2(\theta, \mu, x) \\ &- \frac{e^{(\gamma_0(\theta)-c)x}}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^0 \nu(dy) e^{cy} \int_0^{-y} e^{-(\gamma_0(\theta)-c)b} e^{-\alpha_\theta(x-b-y)} g(b) db \\ &- \frac{e^{(\gamma_0(\theta)-c)x}}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) e^{cy} \int_{0 \vee (-y)}^{+\infty} e^{-(\gamma_0(\theta)-c)b} e^{-\alpha_\theta(x+b+y)} g(b) db , \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2(\theta, \mu, x) &= G_2(\theta, \mu, x) \\ &\quad - \frac{e^{-(c+\alpha_\theta-\gamma_0(\theta))x}}{\alpha_\theta} \left[\int_{-\infty}^0 \nu(dy) e^{(c+\alpha_\theta)y} \int_0^{-y} e^{(c+\alpha_\theta-\gamma_0(\theta))b} g(b) db \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) e^{(c-\alpha_\theta)y} \int_{0 \vee (-y)}^{+\infty} e^{(c-\alpha_\theta-\gamma_0(\theta))b} g(b) db \right]. \end{aligned} \quad (8.0.17)$$

En effectuant le changement de variables $z = x - b$ dans (8.0.16), nous pouvons écrire :

$$\tilde{\Lambda}_\theta g(x) = \frac{e^{(\gamma_0(\theta)-c)x}}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) e^{cy} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{x-z \geq 0\}} g(x-z) e^{-(\gamma_0(\theta)-c)(x-z)} e^{-\alpha_\theta|z-y|} dz, \quad (8.0.18)$$

soit encore :

$$\tilde{\Lambda}_\theta g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{x-z \geq 0\}} g(x-z) \mathcal{N}(z) dz \quad (8.0.19)$$

où $\mathcal{N}$ est défini par :

$$\mathcal{N}(z) := \frac{e^{(\gamma_0(\theta)-c)z}}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{cy - \alpha_\theta|z-y|} \nu(dy). \quad (8.0.20)$$

L'équation (8.0.15) s'écrit alors comme une équation de renouvellement :

$$g(x) = \tilde{G}_2(\theta, \mu, x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{x-z \geq 0\}} g(x-z) \mathcal{N}(z) dz. \quad (8.0.21)$$

Nous démontrons alors que $\mathcal{N}$ est un "bon noyau", c'est à dire :

Lemme 8.3 (i) $\mathcal{N}$ est une densité de probabilité : $\mathcal{N} \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{N}(z) dz = 1$.

(ii) $\mathcal{N}$ vérifie, pour tout $\theta \in [0, \kappa]$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z \mathcal{N}(z) dz = - \frac{\varphi'(-\gamma_0(\theta))}{\widehat{\nu}(-\gamma_0(\theta))}. \quad (8.0.22)$$

(iii) Si $\theta \in]0, \kappa]$ ou si $\theta = 0$ et $c \neq \mathbb{E}(J_1)$ alors $\int_{-\infty}^{+\infty} z \mathcal{N}(z) dz > 0$,

et si $\theta = 0$ et $c = \mathbb{E}(J_1)$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} z \mathcal{N}(z) dz = 0$

Démonstration du Lemme 8.3

(i) $\mathcal{N} \geq 0$ découle de la définition de $\mathcal{N}$. Par ailleurs, nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{N}(z) dz = \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) e^{cy} \left[\int_{-\infty}^y e^{(\gamma_0(\theta) - c + \alpha_\theta)z} e^{-\alpha_\theta y} dz + \int_y^{+\infty} e^{(\gamma_0(\theta) - c - \alpha_\theta)z} e^{\alpha_\theta y} dz \right]. \quad (8.0.23)$$

En remarquant, d'après l'Annexe A (Proposition A.4), que nous avons :

$$\gamma_0(\theta) - c + \alpha_\theta > 0 \quad \text{et} \quad \gamma_0(\theta) - c - \alpha_\theta < 0, \quad (8.0.24)$$

nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{N}(z) dz = \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{e^{\gamma_0(\theta)y}}{\gamma_0(\theta) - c + \alpha_\theta} + \frac{e^{\gamma_0(\theta)y}}{-\gamma_0(\theta) + c + \alpha_\theta} \right] \nu(dy). \quad (8.0.25)$$

En observant alors que :

$$\begin{aligned} (\gamma_0(\theta) - c + \alpha_\theta)(-\gamma_0(\theta) + c + \alpha_\theta) &= \alpha_\theta^2 - (\gamma_0(\theta) - c)^2 \\ &= -\gamma_0^2(\theta) + 2c\gamma_0(\theta) + 2(\lambda + \theta) \\ &= -2\varphi(-\gamma_0(\theta)) + 2\theta + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma_0(\theta)y} \nu(dy) \\ &= 2\widehat{\nu}(-\gamma_0(\theta)), \end{aligned} \quad (8.0.26)$$

nous obtenons $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{N}(z) dz = 1$.

(ii) Par définition de $\mathcal{N}$, nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z \mathcal{N}(z) dz = \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) e^{cy} \left[\int_{-\infty}^y z e^{(\gamma_0(\theta) - c + \alpha_\theta)z} e^{-\alpha_\theta y} dz + \int_y^{+\infty} z e^{(\gamma_0(\theta) - c - \alpha_\theta)z} e^{\alpha_\theta y} dz \right].$$

Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} z \mathcal{N}(z) dz &= \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{y e^{\gamma_0(\theta)y}}{\gamma_0(\theta) - c + \alpha_\theta} - \frac{e^{\gamma_0(\theta)y}}{(\gamma_0(\theta) - c + \alpha_\theta)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{y e^{\gamma_0(\theta)y}}{\gamma_0(\theta) - c - \alpha_\theta} + \frac{e^{\gamma_0(\theta)y}}{(\gamma_0(\theta) - c - \alpha_\theta)^2} \right] \nu(dy). \end{aligned} \quad (8.0.27)$$

En utilisant (8.0.26), nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z\mathcal{N}(z)dz = \frac{1}{\widehat{\nu}(-\gamma_0(\theta))} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} ye^{\gamma_0(\theta)y}\nu(dy) + \gamma_0(\theta) - c \right] \nu(dy), \quad (8.0.28)$$

et d'après la définition de φ' ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z\mathcal{N}(z)dz = - \frac{\varphi'(-\gamma_0(\theta))}{\widehat{\nu}(-\gamma_0(\theta))}. \quad (8.0.29)$$

(iii) Pour tout $\theta > 0$ nous avons : $\varphi'(-\gamma_0(\theta)) < 0$ et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} z\mathcal{N}(z)dz > 0$.

Par ailleurs, si $\theta = 0$ et si $c \neq \mathbb{E}(J_1)$, nous avons : $\varphi'(-\gamma_0(0)) < 0$ et donc nous avons aussi $\int_{-\infty}^{+\infty} z\mathcal{N}(z)dz > 0$.

Mais si $\theta = 0$ et $c = \mathbb{E}(J_1)$, alors $\varphi'(-\gamma_0(0)) = 0$ et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} z\mathcal{N}(z)dz = 0$. $\square$

Le Théorème 8.1 s'obtient alors grâce à une généralisation du Théorème de renouvellement de Feller (cf. [Fel71] general renewal Theorem, page 381) appliquée à l'équation (8.0.21). Nous pouvons utiliser ce théorème si :

1. $\int_0^{+\infty} z\mathcal{N}(z)dz > 0$ (cf. Lemme 8.3 ci-dessus),
2. $\int_0^{+\infty} \widetilde{G}_2(\theta, \mu, x)dx < +\infty$ (cf. Lemme 8.4 ci-dessous).

Le théorème de Feller implique donc que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\gamma_0(\theta)x}F(\theta, \mu, x)$ existe et cette limite est strictement positive car $\int_0^{+\infty} z\mathcal{N}(z)dz < +\infty$. Pour terminer la démonstration du Théorème 8.1, il nous reste donc à démontrer que $\widetilde{G}_2(\theta, \mu, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Lemme 8.4 $\widetilde{G}_2(\theta, \mu, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration du Lemme 8.4

Montrons tout d'abord que $G_2(\theta, \mu, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1) $e^{\gamma_0(\theta)x}F_0(\theta, \mu, x) = e^{-(c+\alpha_\theta-\gamma_0(\theta))x}$. D'après (8.0.24), nous savons que : $c + \alpha_\theta - \gamma_0(\theta) > 0$, donc la fonction $x \rightarrow e^{\gamma_0(\theta)x}F_0(\theta, \mu, x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2) D'après (5.2.12), nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{\gamma_0(\theta)x} F_1(\theta, \mu, x) dx &= \int_{[0, +\infty[} \frac{e^{(c+\alpha_\theta)y} - e^{-\mu y}}{\alpha_\theta(\mu + c + \alpha_\theta)} \nu(dy) \int_y^{+\infty} e^{-(c+\alpha_\theta-\gamma_0(\theta))x} dx \\
&+ \int_{[0, +\infty[} \frac{e^{-(\alpha_\theta-c)y}}{\alpha_\theta(\mu + c - \alpha_\theta)} \nu(dy) \int_0^y e^{(\alpha_\theta-c+\gamma_0(\theta))x} dx \\
&- \int_{[0, +\infty[} \frac{e^{-\mu y}}{\alpha_\theta(\mu + c - \alpha_\theta)} \nu(dy) \int_0^y e^{(\mu+\gamma_0(\theta))x} dx \\
&+ \int_{[0, +\infty[} \frac{e^{-\mu y}}{\alpha_\theta(\mu + c + \alpha_\theta)} \nu(dy) \int_0^y (e^{(\mu+\gamma_0(\theta))x} - e^{-(c+\alpha_\theta-\gamma_0(\theta))x}) dx \\
&- \int_{[0, +\infty[} \frac{e^{-(\alpha_\theta-c)y} - e^{-\mu y}}{\alpha_\theta(\mu + c - \alpha_\theta)} \nu(dy) \int_0^{+\infty} e^{-(c+\alpha_\theta-\gamma_0(\theta))x} dx. \quad (8.0.30)
\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{\gamma_0(\theta)x} F_1(\theta, \mu, x) dx &= \frac{1}{\alpha_\theta(c + \alpha_\theta - \gamma_0(\theta))} \int_{[0, \infty[} \frac{e^{\gamma_0(\theta)y} - e^{-(c+\alpha_\theta-\gamma_0(\theta)+\mu)y}}{c + \alpha_\theta + \mu} \nu(dy) \\
&+ \frac{1}{\alpha_\theta(\mu + c - \alpha_\theta)} \int_{[0, +\infty[} \frac{e^{\gamma_0(\theta)y} - e^{-(\alpha_\theta-c)y}}{\gamma_0(\theta) + \alpha_\theta - c} \nu(dy) \\
&- \frac{2}{(\mu + c)^2 - \alpha_\theta^2} \int_{[0, +\infty[} \frac{e^{\gamma_0(\theta)y} - e^{-\mu y}}{\gamma_0(\theta) + \mu} \nu(dy) \\
&+ \frac{1}{\alpha_\theta(\mu + c + \alpha_\theta)} \int_{[0, +\infty[} \frac{e^{-(c+\alpha_\theta-\gamma_0(\theta)+\mu)y} - e^{-\mu y}}{c + \alpha_\theta - \gamma_0(\theta)} \nu(dy) \\
&- \frac{1}{\alpha_\theta(c + \alpha_\theta - \gamma_0(\theta))} \int_{[0, +\infty[} \frac{e^{-(\alpha_\theta-c)y} - e^{-\mu y}}{-\alpha_\theta + c + \mu} \nu(dy). \quad (8.0.31)
\end{aligned}$$

Puisque par hypothèse $-\gamma_0(\theta) > -r_\nu$, alors $\int_0^{+\infty} e^{\gamma_0(\theta)y} \nu(dy) < +\infty$. De plus, $c + \alpha_\theta - \gamma_0(\theta) > 0$ (cf. (8.0.24)), $\alpha_\theta - c > 0$ et $\mu \geq 0$, ce qui implique, puisque nous avons l'hypothèse $\int_{-\infty}^{+\infty} |y| \nu(dy) < +\infty$, que toutes les intégrales intervenant dans (8.0.31) convergent. $\square$

Chapitre 9

Majoration polynomiale de $\mathbb{P}(T_x < +\infty)$

Pour plus de commodité, dans cette section, la probabilité de ruine sera notée comme suit :

$$F(x) := F(0, 0, x) = \mathbb{P}(T_x < +\infty), \quad (9.0.1)$$

et la transformée de Laplace $\widehat{F}$ de F sera définie par :

$$\widehat{F}(q) := \int_0^{+\infty} e^{-qx} F(x) dx \quad \forall q \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(q) > 0. \quad (9.0.2)$$

Remarquons que, si la condition de profit net n'est pas vérifiée, alors $F(x) = 1$. C'est pourquoi nous supposons dans tout ce paragraphe que la condition de profit net est vérifiée : $c > \mathbb{E}(J_1)$. Il est clair que l'hypothèse (6.1.1) reste vraie dans ce paragraphe.

Le but de cette section est d'affaiblir les hypothèses du paragraphe précédent et de trouver une majoration de $F(x)$ de la forme :

$$F(x) \leq \frac{C}{1 + x^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \quad (9.0.3)$$

Théorème 9.1 *Supposons que la condition de profit net est vérifiée, $c > \mathbb{E}(J_1)$, et qu'il existe un entier $p \geq 3$ tel que :*

$$\int_0^{+\infty} y^p \nu(dy) < +\infty, \quad (9.0.4)$$

alors pour tout entier $n \leq p - 2$, il existe un réel $C_n > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F(x) \leq \frac{C_n}{1 + x^n}. \quad (9.0.5)$$

Démonstration du Théorème 9.1

Cette démonstration se fait en quatre étapes :

1. Nous montrons que nous pouvons nous ramener au cas où le support de ν est inclus dans un intervalle du type $[-k, +\infty[$.
2. Nous montrons que F est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, en prolongeant F par 0 sur $\mathbb{R}_-$, F admet une transformée de Fourier.
3. Nous prouvons que cette transformée de Fourier est $p - 2$ fois dérivable et que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $p - 2$ sont dans $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$.
4. Nous concluons en utilisant alors le Théorème de Riemann-Lebesgue.

Etape 1 Nous nous ramenons au cas où la restriction de ν à $\mathbb{R}_-$ est à support compact.

D'après la condition de profit net, il existe $k > 0$ tel que :

$$c > \int_{-k}^{+\infty} y \nu(dy). \quad (9.0.6)$$

Soit alors le processus $(X_t^k, t \geq 0)$ défini par :

$$X_t^k := B_t - ct + J_t^k \quad \forall t \geq 0, \quad (9.0.7)$$

où $(J_t^k, t \geq 0)$ est le processus de Lévy associé à la mesure de Lévy ν_k , restriction de la mesure ν à $[-k; +\infty[$: $\nu_k = \nu|_{[-k; +\infty[}$.

Remarquons que ν_k vérifie encore (9.0.4).

Nous supposons le processus $(J_t^k, t \geq 0)$ réalisé sur le même espace de probabilité que $(J_t, t \geq 0)$. Puisque $\nu - \nu_k$ est une mesure positive dont le support est inclus dans $] -\infty; -k]$ il est clair que :

$$p.s. \quad \forall t \geq 0 \quad X_t \leq X_t^k, \quad (9.0.8)$$

donc

$$p.s. \quad \forall x \geq 0 \quad T_x^k \leq T_x. \quad (9.0.9)$$

où

$$T_x^k := \inf \{t \geq 0 / X_t^k > x\}. \quad (9.0.10)$$

et ainsi

$$\forall x \geq 0 \quad F(x) \leq F^k(x) := \mathbb{P}(T_x^k < +\infty). \quad (9.0.11)$$

Une majoration de F^k impliquera donc une majoration de F .

Nous supposons dans la suite que ν est à support inclus dans $[-k; +\infty[$ et vérifie, outre la condition de profit net, $c > \int_{-\infty}^{+\infty} y\nu(dy)$, l'hypothèse suivante :

$$\int_0^{+\infty} y^2 \nu(dy) < +\infty. \quad (9.0.12)$$

Etape 2 Intégrabilité de F sur $\mathbb{R}_+$.

Nous commençons par démontrer que $\widehat{F}$ est bornée sur un voisinage $[0, q_0]$ de 0.

Lemme 9.2 *Si ν est à support dans $[-k, +\infty[$, vérifie la condition de profit net et l'hypothèse (9.0.12), alors il existe un réel $q_0 > 0$ tel que :*

$$\sup_{0 \leq q \leq q_0} |\widehat{F}(q)| < +\infty. \quad (9.0.13)$$

Démonstration du lemme 9.2

D'après (6.2.99), $\widehat{F}(q)$ vaut :

$$\widehat{F}(q) = \frac{1}{\varphi(q)} \left(\frac{q}{2} + \frac{1}{q} \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - 1 + qy) \nu(dy) + RF(q) \right) \quad (9.0.14)$$

Au voisinage de $q = 0$, nous pouvons écrire :

$$\varphi(q) \sim_{q \rightarrow 0} q\varphi'(0) = q(c - \mathbb{E}(J_1)) \quad (9.0.15)$$

$$\frac{q}{2} + \frac{1}{q} \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - 1 + qy) \nu(dy) \sim_{q \rightarrow 0} \frac{q}{2} \left[1 + \int_0^{+\infty} y^2 \nu(dy) \right]. \quad (9.0.16)$$

Par ailleurs, comme $\nu|_{\mathbb{R}_-}$ est à support compact, $RF(q)$ s'écrit :

$$RF(q) = \int_{-k}^0 e^{-qy} \nu(dy) \int_0^{-y} e^{-qb} F(b) db - \int_{-k}^0 \nu(dy) \int_0^{-y} F(b) db. \quad (9.0.17)$$

La fonction RF est donc indéfiniment dérivable et s'annule en $q = 0$, donc au voisinage de 0 :

$$\exists a > 0, \quad \exists b > 0 \quad / \quad \forall q \in [0; a] \quad RF(q) \leq bq. \quad (9.0.18)$$

Ainsi, de (9.0.15), (9.0.16) et (9.0.18), nous en déduisons (9.0.13). $\square$

Pour montrer que F appartient à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R}_+)$, il suffit de faire tendre q vers 0 dans (9.0.14) et d'utiliser le Lemme 9.2 :

$$\int_0^{+\infty} F(x)dx = \lim_{q \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} e^{-qx} F(x)dx = \widehat{F}(0) \leq K. \quad (9.0.19)$$

Nous prolongeons F sur $\mathbb{R}$ en posant : $F(x) = 0$, lorsque $x \leq 0$.

Nous pouvons alors déduire que la transformée de Fourier $q \rightarrow \widehat{F}(iq)$ existe, avec :

$$\widehat{F}(iq) = \int_0^{+\infty} e^{-iqx} F(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iqx} F(x)dx \quad \forall q \in \mathbb{R}. \quad (9.0.20)$$

En fait, comme dans la démonstration du théorème 7.3, nous régularisons la fonction F au voisinage de 0, afin d'éviter les problèmes d'intégrabilité en $+\infty$ de $q \rightarrow \widehat{F}(iq)$. Nous définissons donc $\widetilde{F}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \widetilde{F}(x) := F(x) \mathbb{1}_{[0; +\infty[}(x) + (1+x) \mathbb{1}_{[-1; +0]}(x). \quad (9.0.21)$$

Soit $q \rightarrow \widehat{\widetilde{F}}(iq)$ sa transformée de Fourier, avec :

$$\widehat{\widetilde{F}}(iq) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iqx} \widetilde{F}(x)dx = \int_{-1}^{+\infty} e^{-iqx} \widetilde{F}(x)dx \quad \forall q \in \mathbb{R}. \quad (9.0.22)$$

Comme nous avons

$$\int_{-1}^0 (1+x) e^{-iqx} dx = -\frac{e^{iq} - 1 - iq}{q^2}, \quad (9.0.23)$$

Alors

$$\widehat{\widetilde{F}}(iq) = -\frac{e^{iq} - 1 - iq}{q^2} + \frac{1}{\varphi(iq)} \left[\frac{iq}{2} - \frac{i}{q} \int_0^{+\infty} (e^{-iqy} - 1 + iqy) \nu(dy) + RF(iq) \right]. \quad (9.0.24)$$

Etape 3 Intégrabilité de la transformée de Fourier de $\widetilde{F}$ et de ses dérivées.

Plus précisément, nous prouvons que :

- (i) Si ν vérifie (9.0.12) alors la fonction $q \rightarrow \widehat{\widehat{F}}(iq)$ appartient à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$.
- (ii) Si de plus, il existe un entier $p \geq 2$ tel que :

$$\int_0^{+\infty} y^p \nu(dy) < +\infty. \quad (9.0.25)$$

alors $q \rightarrow \widehat{\widehat{F}}(iq)$ est $p-2$ fois dérivable et sa dérivée $(p-2)^{\text{ième}}$ appartient aussi à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$.

Démontrons (i) : Remarquons que d'après la Proposition A.5 de l'Appendice A, $\varphi(iq)$ ne s'annule qu'en $q = 0$. Par ailleurs, l'hypothèse (9.0.12) étant vérifiée, d'après (9.0.15), (9.0.16) et (9.0.18), en remplaçant q par iq , nous déduisons que la fonction $q \rightarrow \frac{1}{\varphi(iq)} \left[\frac{iq}{2} - \frac{i}{q} \int_0^{+\infty} (e^{-iqy} - 1 + iqy) \nu(dy) + RF(iq) \right]$ admet une limite, lorsque q tend vers 0.

Il est clair que la fonction $q \rightarrow -\frac{e^{iq} - 1 - iq}{q^2}$ se prolonge continument en 0.

Ainsi, d'après (9.0.24), la fonction $q \rightarrow \widehat{\widehat{F}}(iq)$ est continue en 0 et sur tout $\mathbb{R}$. Il suffit donc, pour prouver son intégrabilité sur $\mathbb{R}$, d'étudier son comportement à l'infini.

Afin d'étudier $q \rightarrow \widehat{\widehat{F}}(iq)$ au voisinage de $\pm\infty$, nous écrivons $\widehat{\widehat{F}}(iq)$ sous la forme suivante :

$$\widehat{\widehat{F}}(iq) = \frac{1 - e^{iq}}{q^2} + \frac{1}{\varphi(iq)} \left[\frac{i\varphi(iq)}{q} + \frac{iq}{2} - \frac{i}{q} \int_0^{+\infty} (e^{-iqy} - 1 + iqy) \nu(dy) + RF(iq) \right]. \quad (9.0.26)$$

Et comme :

$$\varphi(iq) = -\frac{q^2}{2} + ciq + \int_{-k}^{+\infty} (e^{-iqy} - 1) \nu(dy), \quad (9.0.27)$$

alors :

$$\widehat{\widehat{F}}(iq) = \frac{1 - e^{iq}}{q^2} + \frac{1}{\varphi(iq)} \left[-c + \int_0^{+\infty} y \nu(dy) + \frac{i}{q} \int_{-k}^0 (e^{-iqy} - 1) \nu(dy) + RF(iq) \right]. \quad (9.0.28)$$

Au voisinage de $\pm\infty$, nous avons :

$$\left| \frac{1 - e^{iq}}{q^2} \right| \leq \frac{2}{q^2}, \quad (9.0.29)$$

$$\varphi(iq) \sim_{|q| \rightarrow +\infty} -\frac{q^2}{2}, \quad (9.0.30)$$

$$\left| \frac{i}{q} \int_{-k}^0 (e^{-iqy} - 1) \nu(dy) \right| \leq \int_{-k}^0 |y| \nu(dy), \quad (9.0.31)$$

et

$$\begin{aligned} |RF(iq)| &= \left| \int_{-k}^0 e^{-iqy} \nu(dy) \int_0^{-y} e^{-iqb} F(b) db - \int_{-k}^0 \nu(dy) \int_0^{-y} F(b) db \right| \\ &\leq 2 \int_{-k}^0 |y| \nu(dy). \end{aligned} \quad (9.0.32)$$

Nous concluons donc, qu'au voisinage de $\pm\infty$,

$$\left| \widehat{\widehat{F}}(iq) \right| \leq \frac{C}{q^2}. \quad (9.0.33)$$

Ainsi, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que, pour tout $q \in \mathbb{R}$:

$$\left| \widehat{\widehat{F}}(iq) \right| \leq \frac{C_1}{1 + q^2}. \quad (9.0.34)$$

Donc $q \rightarrow \widehat{\widehat{F}}(iq)$ appartient à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$.

Démontrons (ii) : Nous supposons à présent que (9.0.25) a lieu.

• Etudions tout d'abord les dérivées des différents termes intervenant dans l'expression (9.0.24) de $\widehat{\widehat{F}}(iq)$.

$$\frac{d}{dq} (\varphi(iq)) = -q + ic - i \int_{-k}^{+\infty} y e^{-iqy} \nu(dy), \quad (9.0.35)$$

$$\frac{d^2}{dq^2} (\varphi(iq)) = -1 - \int_{-k}^{+\infty} y^2 e^{-iqy} \nu(dy), \quad (9.0.36)$$

$$\frac{d^n}{dq^n} (\varphi(iq)) = (-i)^n \int_{-k}^{+\infty} y^n e^{-iqy} \nu(dy) \quad \forall 2 < n \leq p. \quad (9.0.37)$$

De même :

$$\frac{d^n}{dq^n} (RF(iq)) = (-i)^{(n)} \int_{-k}^0 \nu(dy) \int_0^{-y} (y+b)^n e^{-iq(y+b)} db \quad \forall n \geq 1. \quad (9.0.38)$$

Enfin, nous avons :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-iqy} - 1}{q} \nu(dy) = \int_0^{+\infty} h(qy) y \nu(dy), \quad (9.0.39)$$

avec

$$h(z) = \frac{e^{-iz} - 1}{z}.$$

Comme la fonction h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}$, ainsi que toutes ses dérivées, il est clair, par dérivation sous le signe intégrale, que la fonction $q \rightarrow \frac{iq}{2} - \frac{i}{q} \int_0^{+\infty} (e^{-iqy} - 1 + iqy) \nu(dy)$ est dérivable n fois sur $\mathbb{R}$, (et ses dérivées sont bornées sur $\mathbb{R}$), dès que $\int_0^{+\infty} |y|^{n+1} \nu(dy) < +\infty$. Cette condition est réalisée si $n \leq p-1$.

- Démontrons que $q \rightarrow \widehat{F}(iq)$ est dérivable au voisinage de $q = 0$.

Nous avons montré dans la Proposition A.5 de l'Appendice A, que $\varphi(iq)$ ne s'annule que pour $q = 0$. D'après (9.0.27), nous avons :

$$\varphi(iq) = qD(q). \quad (9.0.40)$$

où

$$D(q) := -\frac{q}{2} + ci + \int_{-k}^{+\infty} \frac{e^{-iqy} - 1}{q} \nu(dy) \quad \text{et} \quad D(0) = i(c - \mathbb{E}(J_1)). \quad (9.0.41)$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\widehat{F}(iq) = -\frac{e^{iq} - 1 - iq}{q^2} + \frac{N(q)}{D(q)}, \quad (9.0.42)$$

avec

$$N(q) := \frac{i}{2} - i \int_0^{+\infty} \frac{e^{-iqy} - 1 + iqy}{q^2} \nu(dy) + \frac{RF(iq)}{q}. \quad (9.0.43)$$

Remarquons que :

$$\widehat{F}(0) = \frac{1}{2} + \frac{N(0)}{D(0)} \quad \text{avec} \quad N(0) = \lim_{q \rightarrow 0} N(q). \quad (9.0.44)$$

D est une fonction qui ne s'annule pas en 0, qui est n fois dérivable dès que $\int_{-k}^{+\infty} |y|^{n+1} \nu(dy) < +\infty$, donc si $n \leq p-1$. Ainsi $\frac{1}{D}$ est $p-1$ fois dérivable.

Par ailleurs, remarquons que d'après (9.0.18) et (9.0.38), sachant que RF s'annule en 0, $q \rightarrow \frac{RF(iq)}{q}$ et donc N se prolongent continument en 0. De plus, en opérant comme en (9.0.39), nous montrons que N est n fois dérivable dès que $\int_{-k}^{+\infty} |y|^{n+2} \nu(dy) < +\infty$, donc si $n \leq p-2$.

Enfin, il est clair que la fonction $q \rightarrow -\frac{e^{iq} - 1 - iq}{q^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Nous en déduisons que $q \rightarrow \widehat{\widehat{F}}(iq)$ est $p-2$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Nous montrerions, d'une manière analogue que les dérivées successives de $q \rightarrow \widehat{\widehat{F}}(iq)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

• Ainsi, pour montrer l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$, des dérivées de $q \rightarrow \widehat{\widehat{F}}(iq)$, il nous suffit d'étudier leur comportement, quand $|q|$ tend vers $+\infty$.

Nous utilisons l'expression (9.0.28) de $\widehat{\widehat{F}}(iq)$.

Soit N_1 défini par :

$$N_1(q) := -c + \int_0^{+\infty} y \nu(dy) + i \int_{-k}^0 \frac{e^{-iqy} - 1}{q} \nu(dy) + RF(iq). \quad (9.0.45)$$

Nous avons alors

$$\widehat{\widehat{F}}(iq) = \frac{1 - e^{iq}}{q^2} + \frac{N_1(q)}{\varphi(iq)}. \quad (9.0.46)$$

La fonction $q \rightarrow \frac{1 - e^{iq}}{q^2}$ est indéfiniment dérivable au voisinage de $\pm\infty$ et sa dérivée d'ordre n est bornée quand $|q|$ tend vers $+\infty$ par $\frac{C_2}{|q|^2}$ où C_2 est un réel.

Nous avons :

$$\frac{d}{dq} (\varphi(iq)) \sim_{|q| \rightarrow +\infty} -q, \quad (9.0.47)$$

$$\sup_{|q| > 1} \left| \frac{d^{(n)}}{dq^{(n)}} (\varphi(iq)) \right| < +\infty, \quad \text{pour tout } 2 \leq n \leq p. \quad (9.0.48)$$

Les fonctions $q \rightarrow \int_{-k}^0 \frac{e^{-iqy} - 1}{q} \nu(dy)$ et $q \rightarrow RF(iq)$ admettent des dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$, bornées sur $\mathbb{R}$.

Donc N_1 admet des dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$, bornées sur tout $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, il est clair, d'après (9.0.30), (9.0.47) et (9.0.48), que la dérivée $n^{ième} \frac{d^n}{dq^n} \left(\frac{N_1(q)}{\varphi(iq)} \right)$ est équivalente quand $|q|$ tend vers $+\infty$ au terme $\left(\frac{1}{\varphi(iq)} \frac{d^n N_1}{dq^n}(q) \right)$. Elle est donc majorée, en module, par $\frac{C_3}{q^2}$ où C_3 est une constante.

Nous en déduisons donc que $q \rightarrow \widehat{\widetilde{F}}(iq)$ admet des dérivées jusqu'à l'ordre $p-2$, qui sont majorées, quand $|q|$ tend vers $+\infty$, par $\frac{C}{q^2}$ où C est une constante.

Ainsi les dérivées jusqu'à l'ordre $p-2$ de $q \rightarrow \widehat{\widetilde{F}}(iq)$ appartiennent à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$.

Etape 4 Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du Théorème 9.1.

D'après le Théorème de Riemann-Lebesgue, comme la dérivée $(p-2)^{ième}$ de $q \rightarrow \widehat{\widetilde{F}}(iq)$ appartient à $\mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, alors la fonction $x \rightarrow x^{p-2} \widetilde{F}(x)$ est définie par la formule d'inversion :

$$x^{p-2} \widetilde{F}(x) = \frac{i^{p-2}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iqx} \frac{d^{p-2}}{dq^{p-2}} \left(\widehat{\widetilde{F}}(iq) \right) dq. \quad (9.0.49)$$

De plus, cette fonction tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Comme F et $\widehat{F}$ sont égales sur $\mathbb{R}_+$, nous avons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{p-2} \widetilde{F}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{p-2} F(x) = 0. \quad (9.0.50)$$

Nous en déduisons qu'il existe un réel C_p tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F(x) \leq \frac{C_p}{1 + x^{p-2}}. \quad (9.0.51)$$

□

Chapitre 10

Loi limite du couple (T_x, K_x) , quand x tend vers $+\infty$

Le but de ce paragraphe est de montrer que le couple (T_x, K_x) , convenablement renormalisé, converge en loi, quand x tend vers $+\infty$. Nous distinguerons le cas où la condition de profit net est réalisée, $c - \mathbb{E}(J_1) > 0$, le cas où $c - \mathbb{E}(J_1) < 0$ et le cas où $c = \mathbb{E}(J_1)$.

10.1 Théorème central limite sous la condition de profit net

Théorème 10.1 *Sous les hypothèses du Théorème 7.3 et si la condition de profit net est vérifiée, $c - \mathbb{E}(J_1) > 0$, alors, conditionnellement à $\{T_x < +\infty\}$, la loi du couple $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \left(T_x + \frac{x}{\varphi'(-\gamma_0(0))}\right), K_x\right)$ converge, quand x tend vers $+\infty$, vers la loi produit $\mathcal{N}\left(0; -\frac{\varphi''(-\gamma_0(0))}{\varphi'^3(-\gamma_0(0))}\right) \otimes w$ où w est une probabilité portée par $\mathbb{R}_+$ et où $\mathcal{N}(0; \sigma^2)$ désigne la loi normale centrée, de variance σ^2 .*

De plus, si ν ne charge que $\mathbb{R}_+$, w est connue explicitement et vaut :

$$w(dz) = \frac{1}{c - \mathbb{E}(J_1)} \left[\frac{\gamma_0(0)}{2} \delta_0(dz) + \left(\int_{[z, +\infty[} (e^{\gamma_0(0)(y-z)} - 1) \nu(dy) \right) \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz \right] \quad (10.1.1)$$

où δ_0 est la mesure de Dirac en 0 et $-\gamma_0(0)$ est le plus grand réel strictement négatif vérifiant $\varphi(-\gamma_0(0)) = 0$ (cf. (7.1.4)).

- Remarque 10.2** 1. L'égalité (10.1.1) montre que w contient une partie absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et une partie mesure de Dirac en 0. Cette seconde partie correspond intuitivement aux franchissements continus du niveau x par $(X_t, t \geq 0)$.
2. Dans le cas où ν charge tout $\mathbb{R}$, la mesure $w(dz)$ satisfait à l'équation suivante :

$$w(dz) = \frac{-1}{\varphi'(-\gamma_0(0))C_0(0,0)} \left[\frac{\gamma_0(0)}{2} \delta_0(dz) + \left(\int_{[z, +\infty[} (e^{\gamma_0(0)(y-z)} - 1) \nu(dy) \right) \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz - \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^{-y} (e^{\gamma_0(0)(b+y)} - 1) F(0,0,b) \rho(b, dz) db \right) \nu(dy) \right], \quad (10.1.2)$$

où $\rho(x, dz)$ désigne la loi conditionnelle de K_x sachant $\{T_x < +\infty\}$ et $C_0(0,0)$ est donnée en (7.2.90).

Démonstration du Théorème 10.1

Soient θ et μ deux réels strictement positifs fixés.

Nous considérons l'espérance conditionnelle suivante :

$$\mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} / T_x < +\infty \right) = \frac{F(\theta, \mu, x)}{\mathbb{P}(T_x < +\infty)} = \frac{F(\theta, \mu, x)}{F(0, 0, x)}, \quad (10.1.3)$$

où $F(\theta, \mu, x) = \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}} \right)$.

Nous utilisons alors le développement asymptotique au premier ordre de $F(\theta, \mu, x)$, quand x tend vers $+\infty$, vu en (7.1.20). Soit

$$\mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} / T_x < +\infty \right) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{C_0(\theta, \mu) e^{-\gamma_0(\theta)x}}{C_0(0, 0) e^{-\gamma_0(0)x}} = \frac{C_0(\theta, \mu)}{C_0(0, 0)} e^{-(\gamma_0(\theta) - \gamma_0(0))x}. \quad (10.1.4)$$

Remarquons que d'après le Théorème 7.3, l'équivalence est uniforme en $\theta \in [0, \kappa]$.

Développons alors $\gamma_0(\theta) - \gamma_0(0)$ au voisinage de $\theta = 0$.

En remarquant que $\varphi(-\gamma_0(\theta)) = \theta$ et que φ est “localement” bijective, nous avons $\gamma_0(\theta) = -\varphi^{-1}(\theta)$ et donc :

$$\gamma_0(\theta) - \gamma_0(0) = \theta\gamma'_0(0) + \frac{\theta^2}{2}\gamma''_0(0) + o(\theta^2). \quad (10.1.5)$$

Comme

$$\gamma'_0(0) = -(\varphi^{-1})'(0) = \frac{-1}{\varphi'(-\gamma_0(0))} \quad \text{et} \quad \gamma''_0(0) = \frac{\varphi''(-\gamma_0(0))}{(\varphi'(-\gamma_0(0)))^3},$$

alors :

$$\gamma_0(\theta) - \gamma_0(0) = -\frac{1}{\varphi'(-\gamma_0(0))} \theta + \frac{1}{2} \frac{\varphi''(-\gamma_0(0))}{\varphi'^3(-\gamma_0(0))} \theta^2 + o(\theta^2). \quad (10.1.6)$$

Ainsi, en multipliant l'espérance conditionnelle, dans (10.1.4), par $e^{-\frac{\theta}{\varphi'(-\gamma_0(0))}x}$ et en remplaçant θ par $\frac{\theta}{\sqrt{x}}$, nous obtenons :

$$\mathbb{E} \left(e^{-\frac{\theta}{\sqrt{x}} \left(T_x + \frac{x}{\varphi'(-\gamma_0(0))} \right) - \mu K_x} / T_x < +\infty \right) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{C_0(0, \mu)}{C_0(0, 0)} e^{-\frac{1}{2} \frac{\varphi''(-\gamma_0(0))}{\varphi'^3(-\gamma_0(0))} \theta^2}. \quad (10.1.7)$$

Par ailleurs, nous avons d'après (7.2.89) et (7.2.90) :

$$\begin{aligned} \frac{C_0(0, \mu)}{C_0(0, 0)} &= \frac{1}{\varphi'(-\gamma_0(0))C_0(0, 0)} \left[\frac{-\gamma_0(0)}{2} + \frac{1}{-\gamma_0(0) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{\gamma_0(0)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu y}) \nu(dy) + RF(0, \mu, \cdot)(-\gamma_0(0)) \right]. \end{aligned} \quad (10.1.8)$$

où la constante $C_0(0, 0)$ vaut :

$$\begin{aligned} C_0(0, 0) &= \frac{1}{\varphi'(-\gamma_0(0))} \left[\frac{-\gamma_0(0)}{2} - \frac{1}{\gamma_0(0)} \int_0^{+\infty} (e^{\gamma_0(0)y} - 1) \nu(dy) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{+\infty} y \nu(dy) + RF(0, 0, \cdot)(-\gamma_0(0)) \right]. \end{aligned} \quad (10.1.9)$$

Montrons alors que $\frac{C_0(0, \mu)}{C_0(0, 0)}$ est la transformée de Laplace d'une mesure positive w .

En remplaçant $e^{\gamma_0(0)y} - e^{-\mu y}$ par $e^{\gamma_0(0)y}(1 - e^{-(\mu + \gamma_0(0))y})$ et en remarquant que $\frac{1 - e^{-ay}}{a} = \int_0^y e^{-az} dz$, nous écrivons :

$$\begin{aligned} \frac{C_0(0, \mu)}{C_0(0, 0)} = & \frac{-1}{\varphi'(-\gamma_0(0))C_0(0, 0)} \left[\frac{\gamma_0(0)}{2} + \int_0^{+\infty} e^{\gamma_0(0)y} \left(\int_0^y e^{-(\mu + \gamma_0(0))z} dz \right) \nu(dy) \right. \\ & \left. - \int_0^{+\infty} \left(\int_0^y e^{-\mu z} dz \right) \nu(dy) - RF(0, \mu, \cdot)(-\gamma_0(0)) \right]. \end{aligned} \quad (10.1.10)$$

En intervertissant les intégrales, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{C_0(0, \mu)}{C_0(0, 0)} = & \frac{-1}{\varphi'(-\gamma_0(0))C_0(0, 0)} \left[\frac{\gamma_0(0)}{2} + \int_0^{+\infty} e^{-\mu z} \left(\int_{[z, +\infty[} e^{\gamma_0(0)(y-z)} \nu(dy) \right) dz \right. \\ & \left. - \int_0^{+\infty} e^{-\mu z} \nu([z, +\infty[) dz - RF(0, \mu, \cdot)(-\gamma_0(0)) \right]. \end{aligned} \quad (10.1.11)$$

Par ailleurs, d'après (6.1.4) :

$$RF(0, \mu, \cdot)(-\gamma_0(0)) = \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^{-y} (e^{\gamma_0(0)(b+y)} - 1) F(0, \mu, b) db \right) \nu(dy).$$

et $F(0, \mu, x) = \mathbb{E} (e^{-\mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}})$.

Si nous notons $\rho(x, dz)$ la loi conditionnelle de $\{K_x / T_x < +\infty\}$ alors nous avons :

$$\begin{aligned} F(0, \mu, x) &= \mathbb{E} (e^{-\mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}}) = \mathbb{E} (e^{-\mu K_x} / T_x < +\infty) \mathbb{P}(T_x < +\infty) \\ &= F(0, 0, x) \int_0^{+\infty} e^{-\mu z} \rho(x, dz). \end{aligned} \quad (10.1.12)$$

Nous pouvons donc écrire que $\frac{C_0(0, \mu)}{C_0(0, 0)} = \int_0^{+\infty} e^{-\mu z} w(dz)$ avec :

$$\begin{aligned} w(dz) = & \frac{-1}{\varphi'(-\gamma_0(0))C_0(0, 0)} \left[\frac{\gamma_0(0)}{2} \delta_0(dz) \right. \\ & + \left(\int_z^{+\infty} (e^{\gamma_0(0)(y-z)} - 1) \nu(dy) \right) \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz \\ & \left. - \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^{-y} (e^{\gamma_0(0)(b+y)} - 1) F(0, 0, b) \rho(b, dz) db \right) \nu(dy) \right]. \end{aligned} \quad (10.1.13)$$

Comme $\varphi'(-\gamma_0(0)) < 0$ et $C_0(0, 0) > 0$ d'après (7.2.87), nous pouvons affirmer que w est une mesure positive. Nous vérifions aisément que w est une probabilité car $\int_0^{+\infty} w(dz) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{C_0(0, \mu)}{C_0(0, 0)} = 1$.

Si de plus, nous supposons que ν ne charge que $\mathbb{R}_+$, alors d'après (7.2.107), $C_0(0, 0) = \frac{-\varphi'(0)}{\varphi'(-\gamma_0(0))}$ et $\varphi'(0) = c - \mathbb{E}(J_1)$, donc $w(dz)$ est donnée explicitement par :

$$w(dz) = \frac{1}{c - \mathbb{E}(J_1)} \left[\frac{\gamma_0(0)}{2} \delta_0(dz) + \left(\int_{[z, +\infty[} (e^{\gamma_0(0)(y-z)} - 1) \nu(dy) \right) \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz \right]. \quad (10.1.14)$$

□

10.2 Théorème central limite sous la condition $c - \mathbb{E}(J_1) < 0$

Théorème 10.3 *Sous les hypothèses du Théorème 7.3 et si $c - \mathbb{E}(J_1) < 0$, la loi du couple $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} \left(T_x + \frac{x}{\varphi'(0)} \right), K_x \right)$ converge, quand x tend vers $+\infty$, vers la loi produit $\mathcal{N} \left(0; -\frac{\varphi''(0)}{\varphi^3(0)} \right) \otimes w$ où w est une probabilité portée par $\mathbb{R}_+$.*

De plus, si ν ne charge que $\mathbb{R}_+$, w est connue explicitement et vaut :

$$w(dz) = \frac{1}{\mathbb{E}(J_1) - c} \left[\frac{\gamma_0^*(0)}{2} \delta_0(dz) + \left(\int_{[z, +\infty[} (1 - e^{\gamma_0^*(0)(z-y)}) \nu(dy) \right) \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz \right] \quad (10.2.15)$$

où δ_0 est la mesure de Dirac en 0 et $\gamma_0^*(0)$ est le plus petit réel strictement positif tel que $\varphi(\gamma_0^*(0)) = 0$ (cf. (7.1.8)).

Remarque 10.4

1. Dans ce cas, nous ne conditionnons pas par $\{T_x < +\infty\}$ car ici, cet événement est toujours réalisé.
2. Un résultat analogue a été obtenu par Allan Gut (cf. [Gut88], page 102, Théorème 10.11) mais pour des marches aléatoires. Dans le cas de processus de Lévy, ce résultat est nouveau.
3. Dans le cas où ν charge tout $\mathbb{R}$, la mesure $w(dz)$ satisfait à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} w(dz) = & \frac{1}{\mathbb{E}(J_1) - c} \left[\frac{\gamma_0^*(0)}{2} \delta_0(dz) \right. \\ & + \left(\int_{[z, +\infty[} (1 - e^{\gamma_0^*(0)(z-y)}) \nu(dy) \right) \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz \\ & \left. + \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^{-y} (e^{-\gamma_0^*(0)(y+b)} - 1) \zeta(b, dz) db \right) \nu(dy) \right], \quad (10.2.16) \end{aligned}$$

où $\zeta(x, dz)$ désigne la loi de K_x .

Démonstration du Théorème 10.3

La démonstration est analogue à celle du Théorème 10.1 mais tout se passe au voisinage de 0, plus grand zéro négatif de φ , au lieu du voisinage de $-\gamma_0(0)$, plus grand zéro négatif de φ , dans le cas de condition de profit net.

Nous utilisons le développement asymptotique au premier ordre de $F(\theta, \mu, x)$, quand x tend vers $+\infty$, vu en (7.1.20) :

$$\mathbb{E}(e^{-\theta T_x - \mu K_x}) = F(\theta, \mu, x) \sim_{x \rightarrow +\infty} C_0(\theta, \mu) e^{-\gamma_0(\theta)x}. \quad (10.2.17)$$

Remarquons que d'après le Théorème 7.3, l'équivalence est uniforme en $\theta \in [0, \kappa]$.

Développons alors $\gamma_0(\theta)$ au voisinage de $\theta = 0$ en remarquant que $\gamma_0(0) = 0$ (cf. (7.1.7)) et que $\varphi(-\gamma_0(\theta)) = \theta$.

φ étant “localement” bijective, $\gamma_0(\theta) = -\varphi^{-1}(\theta)$.

Donc nous avons :

$$\gamma_0(\theta) = \theta \gamma'_0(0) + \frac{\theta^2}{2} \gamma''_0(0) + o(\theta^2). \quad (10.2.18)$$

Comme

$$\gamma'_0(0) = -(\varphi^{-1})'(0) = \frac{-1}{\varphi'(0)} \quad \text{et} \quad \gamma''_0(0) = \frac{\varphi''(0)}{\varphi'^3(0)},$$

alors :

$$\gamma_0(\theta) = -\frac{1}{\varphi'(0)} \theta + \frac{1}{2} \frac{\varphi''(0)}{\varphi'^3(0)} \theta^2 + o(\theta^2). \quad (10.2.19)$$

Ainsi, en multipliant l'espérance, dans (10.1.4), par $e^{-\frac{\theta}{\varphi'(0)}x}$ et en remplaçant θ par $\frac{\theta}{\sqrt{x}}$, nous obtenons :

$$\mathbb{E} \left(e^{-\frac{\theta}{\sqrt{x}}(T_x + \frac{x}{\varphi'(0)}) - \mu K_x} \right) \sim_{x \rightarrow +\infty} C_0(0, \mu) e^{-\frac{1}{2} \frac{\varphi''(0)}{\varphi'^3(0)} \theta^2}. \quad (10.2.20)$$

Par ailleurs, nous avons d'après (7.2.91) :

$$\begin{aligned} C_0(0, \mu) = \frac{1}{\varphi'(0)} & \left[\frac{-\gamma_0^*(0)}{2} - \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\gamma_0^*(0) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(0)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) - RF(0, \mu, \cdot)(\gamma_0^*(0)) \right]. \end{aligned} \quad (10.2.21)$$

Montrons alors que $C_0(0, \mu)$ est la transformée de Laplace d'une mesure positive w .

En remarquant que $\varphi'(0) = c - \mathbb{E}(J_1)$ et que $\frac{1 - e^{-ay}}{a} = \int_0^y e^{-az} dz$, nous écrivons :

$$\begin{aligned} C_0(0, \mu) = \frac{1}{c - \mathbb{E}(J_1)} & \left[\frac{-\gamma_0^*(0)}{2} - \int_0^{+\infty} \left(\int_0^y e^{-\mu z} dz \right) \nu(dy) \right. \\ & \left. - \int_0^{+\infty} e^{-\gamma_0^*(0)y} \frac{1 - e^{(\gamma_0^*(0) - \mu)y}}{\gamma_0^*(0) - \mu} \nu(dy) - RF(0, \mu, \cdot)(\gamma_0^*(0)) \right]. \end{aligned} \quad (10.2.22)$$

Soit

$$C_0(0, \mu) = \frac{1}{c - \mathbb{E}(J_1)} \left[\frac{-\gamma_0^*(0)}{2} + \int_0^{+\infty} e^{-\gamma_0^*(0)y} \left(\int_0^y e^{(\gamma_0^*(0)-\mu)z} dz \right) \nu(dy) \right. \\ \left. - \int_0^{+\infty} \left(\int_0^y e^{-\mu z} dz \right) \nu(dy) - RF(0, \mu, \cdot)(\gamma_0^*(0)) \right]. \quad (10.2.23)$$

et

$$C_0(0, \mu) = \frac{1}{c - \mathbb{E}(J_1)} \left[\frac{-\gamma_0^*(0)}{2} + \int_0^{+\infty} e^{-\mu z} \left(\int_{[z, +\infty[} e^{\gamma_0^*(0)(z-y)} \nu(dy) \right) dz \right. \\ \left. - \int_0^{+\infty} e^{-\mu z} \left(\int_{[z, +\infty[} \nu(dy) \right) dz - RF(0, \mu, \cdot)(\gamma_0^*(0)) \right]. \quad (10.2.24)$$

Par ailleurs :

$$RF(0, \mu, \cdot)(\gamma_0^*(0)) = \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^{-y} (e^{-\gamma_0^*(0)(y+b)} - 1) F(0, \mu, b) db \right) \nu(dy).$$

et $F(0, \mu, x) = \mathbb{E}(e^{-\mu K_x})$.

Si nous notons $\zeta(x, dz)$ la loi de K_x alors nous avons :

$$F(0, \mu, x) = \int_0^{+\infty} e^{-\mu z} \zeta(x, dz). \quad (10.2.25)$$

Nous pouvons donc écrire que $C_0(0, \mu) = \int_0^{+\infty} e^{-\mu z} w(dz)$ avec :

$$w(dz) = \frac{1}{\mathbb{E}(J_1) - c} \left[\frac{\gamma_0^*(0)}{2} \delta_0(dz) + \left(\int_{[z, +\infty[} (1 - e^{\gamma_0^*(0)(z-y)}) \nu(dy) \right) \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^{-y} (e^{-\gamma_0^*(0)(y+b)} - 1) \zeta(b, dz) db \right) \nu(dy) \right]. \quad (10.2.26)$$

Ainsi, la condition $c < \mathbb{E}(J_1)$, nous permet d'affirmer que w est une mesure positive.

Si de plus nous supposons que ν ne charge que $\mathbb{R}_+$, la mesure $w(dz)$ est donnée explicitement par :

$$w(dz) = \frac{1}{\mathbb{E}(J_1) - c} \left[\frac{\gamma_0^*(0)}{2} \delta_0(dz) + \left(\int_{[z, +\infty[} (1 - e^{\gamma_0^*(0)(z-y)}) \nu(dy) \right) \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz \right]. \quad (10.2.27)$$

Nous vérifions aisément que w est une probabilité car $\int_0^{+\infty} w(dz) = C_0(0, 0) = 1$ (cf.(7.2.92)).

Nous pouvons aussi le vérifier par un calcul direct : Comme nous avons, pour tout x positif :

$$\int_0^{+\infty} \zeta(x, dz) = F(0, 0, x) = 1, \quad (10.2.28)$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^{-y} (e^{-\gamma_0^*(0)(y+b)} - 1) \zeta(b, dz) db \right) \nu(dy) = \\ &= \int_{-\infty}^0 \left(\int_0^{-y} (e^{-\gamma_0^*(0)(y+b)} - 1) db \right) \nu(dy) \\ &= \frac{1}{\gamma_0^*(0)} \int_{-\infty}^0 (e^{-\gamma_0^*(0)y} - 1) \nu(dy) + \int_{-\infty}^0 y \nu(dy). \end{aligned} \quad (10.2.29)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} w(dz) &= \frac{1}{\mathbb{E}(J_1) - c} \left[\frac{\gamma_0^*(0)}{2} + \int_0^{+\infty} \left(\int_0^y (1 - e^{\gamma_0^*(0)(z-y)}) \mathbf{1}_{\{z \geq 0\}} dz \right) \nu(dy) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\gamma_0^*(0)} \int_{-\infty}^0 (e^{-\gamma_0^*(0)y} - 1) \nu(dy) + \int_{-\infty}^0 y \nu(dy) \right] \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}(J_1) - c} \left[\frac{\gamma_0^*(0)}{2} + \frac{1}{\gamma_0^*(0)} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(0)y} - 1) \nu(dy) + \int_0^{+\infty} y \nu(dy) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\gamma_0^*(0)} \int_{-\infty}^0 (e^{-\gamma_0^*(0)y} - 1) \nu(dy) + \int_{-\infty}^0 y \nu(dy) \right] \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}(J_1) - c} \left[\frac{\varphi(\gamma_0^*(0))}{\gamma_0^*(0)} - c + \mathbb{E}(J_1) \right] = 1. \end{aligned} \quad (10.2.30)$$

□

10.3 Théorème central limite sous la condition $c = \mathbb{E}(J_1)$

Théorème 10.5 *Sous les hypothèses du Théorème 7.3 et si $c = \mathbb{E}(J_1)$, alors la loi du couple $\left(\frac{T_x}{x^2}, K_x\right)$ converge, quand x tend vers $+\infty$, vers la loi produit*

$\varrho \otimes w$ où w est une probabilité portée par $\mathbb{R}_+$ et ϱ est la loi d'atteinte du niveau $\sqrt{\frac{1}{\varphi''(0)}}$ par un mouvement brownien standard issu de 0, c'est à dire :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\theta x} \varrho(dx) = e^{-\sqrt{\frac{2\theta}{\varphi''(0)}}},$$

Rappelons que $\varphi''(0) = 1 + \int_{\mathbb{R}} y^2 \nu(dy)$.

De plus, si ν ne charge que $\mathbb{R}_+$, w est connue explicitement et vaut :

$$w(dz) = \frac{1}{\varphi''(0)} \left[\delta_0(dz) + \left(2 \int_{[z, +\infty[} (y - z) \nu(dy) \right) \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz \right] \quad (10.3.31)$$

où δ_0 est la mesure de Dirac en 0.

Remarque 10.6

1. Ici, la renormalisation de T_x n'est plus du même ordre et la loi limite n'est plus gaussienne. Par ailleurs, comme dans le cas $c < \mathbb{E}(J_1)$, l'événement $T_x < +\infty$ est toujours réalisé.
2. Dans le cas où ν charge tout $\mathbb{R}$, la mesure $w(dz)$ satisfait à l'équation suivante :

$$w(dz) = \frac{1}{\varphi''(0)} \left[\delta_0(dz) + 2 \left(\int_{[z, +\infty[} (y - z) \nu(dy) \right) \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz - 2 \int_0^{+\infty} db \left(\int_{-\infty}^b (y + b) e^{-(y+b)x} \nu(dy) \right) \zeta(b, dz) \right], \quad (10.3.32)$$

où $\zeta(x, dz)$ désigne la loi de K_x . Par ailleurs, $\varphi''(0) = 1 + \int_{\mathbb{R}} y^2 \nu(dy)$.

Démonstration du Théorème 10.5

La démonstration est analogue à celle du Théorème 10.3 mais les calculs diffèrent du fait que 0 est un zéro double de φ .

Nous utilisons le développement asymptotique au premier ordre de $F(\theta, \mu, x)$, quand x tend vers $+\infty$, vu en (7.1.20) :

$$\mathbb{E}(e^{-\theta T_x - \mu K_x}) = F(\theta, \mu, x) \sim_{x \rightarrow +\infty} C_0(\theta, \mu) e^{-\gamma_0(\theta)x}. \quad (10.3.33)$$

Remarquons que d'après le Théorème 7.3, l'équivalence est uniforme en $\theta \in [0, \kappa]$.

Développons alors $h := \gamma_0(\theta)$ au voisinage de $\theta = 0$, en remarquant que $\varphi(-\gamma_0(\theta)) = \theta$, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 0$:

$$\theta = \varphi(-\gamma_0(\theta)) = \varphi(-h) = \frac{h^2}{2} \varphi''(0) + o(h^2). \quad (10.3.34)$$

Nous en déduisons aisément :

$$\gamma_0(\theta) = h = \sqrt{\frac{2\theta}{\varphi''(0)}} + o(\sqrt{\theta}). \quad (10.3.35)$$

Ainsi, en remplaçant θ par $\frac{\theta}{x^2}$, nous obtenons :

$$\mathbb{E}\left(e^{-\theta \frac{T_x}{x^2} - \mu K_x}\right) \sim_{x \rightarrow +\infty} C_0(0, \mu) e^{-\sqrt{\frac{2\theta}{\varphi''(0)}}}. \quad (10.3.36)$$

Nous remarquons alors que $e^{-\sqrt{\frac{1}{\varphi''(0)}}\sqrt{2\theta}}$ est la transformée de Laplace de la loi d'atteinte du niveau $\sqrt{\frac{1}{\varphi''(0)}}$ par un mouvement brownien standard issu de 0 (cf. [KS91] page 96 formule (8.6)).

Par ailleurs, nous avons, d'après (7.2.102) :

$$\begin{aligned} C_0(0, \mu) = & \frac{1}{\varphi''(0)} \left[1 + \frac{2}{\mu^2} \int_0^{+\infty} (e^{-\mu y} - 1 + \mu y) \nu(dy) \right. \\ & \left. - 2 \int_{-\infty}^0 \nu(dy) \int_0^{-y} (y+b) F(0, \mu, b) db \right]. \end{aligned} \quad (10.3.37)$$

Montrons alors que $C_0(0, \mu)$ est la transformée de Laplace d'une mesure positive w .

Comme précédemment, si nous notons $\zeta(x, dz)$ la loi de K_x alors nous avons :

$$F(0, \mu, x) = \int_0^{+\infty} e^{-\mu z} \zeta(x, dz). \quad (10.3.38)$$

En remarquant que $\frac{e^{-ay} - 1 + ay}{a^2} = - \int_0^y (z - y)e^{-az} dz$, nous écrivons :

$$C_0(0, \mu) = \frac{1}{\varphi''(0)} \left[1 - 2 \int_0^{+\infty} \left(\int_0^y (z - y)e^{-\mu z} dz \right) \nu(dy) \right. \\ \left. - 2 \int_{-\infty}^0 \nu(dy) \int_0^{-y} db (y + b) \int_0^{+\infty} e^{-\mu z} \zeta(b, dz) \right]. \quad (10.3.39)$$

Soit

$$C_0(0, \mu) = \frac{1}{\varphi''(0)} \left[1 + 2 \int_0^{+\infty} e^{-\mu z} \left(\int_{[z, +\infty[} (y - z) \nu(dy) \right) dz \right. \\ \left. - 2 \int_0^{+\infty} e^{-\mu z} \int_0^{+\infty} db \left(\int_{-\infty}^b (y + b) e^{-(y+b)x} \nu(dy) \right) \zeta(b, dz) \right]. \quad (10.3.40)$$

Nous pouvons donc écrire que $C_0(0, \mu) = \int_0^{+\infty} e^{-\mu z} w(dz)$ avec :

$$w(dz) = \frac{1}{\varphi''(0)} \left[\delta_0(dz) + 2 \left(\int_{[z, +\infty[} (y - z) \nu(dy) \right) \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz \right. \\ \left. - 2 \int_0^{+\infty} db \left(\int_{-\infty}^b (y + b) e^{-(y+b)x} \nu(dy) \right) \zeta(b, dz) \right]. \quad (10.3.41)$$

Nous remarquons donc bien que w est une mesure positive.

Si de plus, nous supposons que ν ne charge que $\mathbb{R}_+$, la mesure $w(dz)$ est donnée explicitement par :

$$w(dz) = \frac{1}{\varphi''(0)} \left[\delta_0(dz) + 2 \left(\int_{[z, +\infty[} (y - z) \nu(dy) \right) \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz \right]. \quad (10.3.42)$$

Nous vérifions aisément que w est une probabilité car $\int_0^{+\infty} w(dz) = C_0(0, 0) = 1$.

Nous pouvons aussi le vérifier par un calcul direct :

Comme nous avons, pour tout x positif :

$$\int_0^{+\infty} \zeta(x, dz) = F(0, 0, x) = 1, \quad (10.3.43)$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} db \left(\int_{-\infty}^b (y+b) \nu(dy) \right) \zeta(b, dz) &= \int_{-\infty}^0 \nu(dy) \int_0^{-y} (y+b) db \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 y^2 \nu(dy). \end{aligned} \quad (10.3.44)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} w(dz) &= \frac{1}{\varphi''(0)} \left[1 + 2 \int_0^{+\infty} \left(\int_0^y (y-z) \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz \right) \nu(dy) \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} db \left(\int_{-\infty}^b (y+b) \nu(dy) \right) \zeta(b, dz) \right] \\ &= \frac{1}{\varphi''(0)} \left[1 + \int_0^{+\infty} y^2 \nu(dy) + \int_{-\infty}^0 y^2 \nu(dy) \right] = 1, \end{aligned} \quad (10.3.45)$$

$$\text{car } \varphi''(0) = 1 + \int_{\mathbb{R}} y^2 \nu(dy).$$

□

Chapitre 11

Formule de Zolotareff pour un processus de Lévy

Soient $B = (B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien standard issu de 0 et $T = (T_x, x > 0)$ le processus défini par $T_x = \inf \{t > 0 ; B_t > x\}$. On sait (voir par exemple [KS91] page 96) que, pour tout $x > 0$, T_x admet une densité :

$$\mathbb{P}(T_x \in dt) = \frac{x}{\sqrt{2\pi t^{\frac{3}{2}}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) \mathbb{1}_{\{t>0\}} dt. \quad (11.0.1)$$

En particulier, les lois des processus B et T vérifient la relation (continue) de Zolotarev

$$x \mathbb{P}(B_t \in dx) dt = t \mathbb{P}(T_x \in dt) dx, \quad t > 0, x > 0. \quad (11.0.2)$$

Cette identité soulève une question naturelle : peut-on trouver une classe $\mathcal{C}$ de processus (contenant le mouvement brownien) telle que tout processus X de $\mathcal{C}$ vérifierait la relation de Zolotarev, i.e. :

$$x \mathbb{P}(X_t \in dx) dt = t \mathbb{P}(T_x \in dt) dx, \quad t > 0, x > 0, \quad (11.0.3)$$

où $T_x = \inf \{t > 0 ; X_t > x\}$?

Plusieurs auteurs se sont intéressés à cette question et ont montré que $\mathcal{C}$ contient la classe des processus de Lévy sans sauts positifs (cf. paragraphe 4.6.5).

Nous nous proposons, dans ce chapitre, de caractériser, parmi les processus de Lévy, ceux qui satisfont à la formule de Zolotareff (11.0.3). Une telle caractérisation a déjà été obtenue par B.A. Rogozin [Rog66]. Nous allons ci-dessous, en donner une démonstration qui nous semble nouvelle. Plus précisément :

Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus de Lévy de la forme :

$$X_t := \sigma B_t + ct + J_t, \quad (11.0.4)$$

où $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard issu de 0, c un réel, σ un réel non nul et $(J_t, t \geq 0)$ un processus de sauts purs, de mesure de Lévy ν , indépendant de $(B_t, t \geq 0)$.

Nous considérons, pour x positif, le premier temps d'atteinte T_x du niveau x par le processus $(X_t, t \geq 0)$, i.e. :

$$T_x := \inf \{t \geq 0 ; X_t > x\}. \quad (11.0.5)$$

Théorème 11.1

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) ν ne charge que $\mathbb{R}_-$.
- (ii) $t \mathbb{P}(T_x \in dt) dx = x \mathbb{P}(X_t \in dx) dt$ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.
- (iii) $\forall \theta > 0, \exists C_\theta > 0$ tel que $\forall x \geq 0, \mathbb{E}(e^{-\theta T_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}}) = e^{-C_\theta x}$.
- (iv) $\exists \theta > 0$ et $\exists C_\theta > 0$ tels que $\forall x \geq 0, \mathbb{E}(e^{-\theta T_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}}) = e^{-C_\theta x}$.
- (v) *p.s.*, $\forall x \geq 0, X_{T_x} = x$ sur $\{T_x < +\infty\}$.

Démonstration du Théorème 11.1

Rappelons tout d'abord quelques propriétés élémentaires que nous utiliserons dans cette démonstration.

Soit pour tout $t \geq 0, S_t := \sup_{u \leq t} X_u$. Alors

$$\{T_x < t\} = \{S_t > x\}. \quad (11.0.6)$$

Soit τ une variable aléatoire, indépendante de $(X_t, t \geq 0)$ et de loi exponentielle de paramètre θ ($\theta > 0$) (i.e. $\mathbb{P}(\tau > t) = e^{-\theta t}$). Comme T_x et τ sont indépendantes, alors nous avons :

$$\mathbb{P}(S_\tau > x) = \mathbb{P}(T_x < \tau) = \mathbb{E}(e^{-\theta T_x}). \quad (11.0.7)$$

Pour tout $q > 0$, en multipliant les membres de (11.0.7) par qe^{-qx} et en les intégrant sur $\mathbb{R}_+$, nous obtenons :

$$q \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(S_\tau > x) e^{-qx} dx = \mathbb{E} \left(\int_0^{S_\tau} q e^{-qx} dx \right) = 1 - \mathbb{E}(e^{-q S_\tau}), \quad (11.0.8)$$

et

$$\mathbb{E}(e^{-qS_\tau}) = 1 - q \int_0^{+\infty} e^{-qx} \mathbb{E}(e^{-\theta T_x}) dx. \quad (11.0.9)$$

En définissant, pour tout $\theta > 0$, la fonction $F(\theta, \cdot)$ par :

$$F(\theta, x) := \mathbb{E}(e^{-\theta T_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}}) = \mathbb{E}(e^{-\theta T_x}) \quad \forall x \geq 0, \quad (11.0.10)$$

(avec la convention : $e^{-\infty} = 0$), et sa transformée de Laplace $\widehat{F}(\theta, \cdot)$ par :

$$\widehat{F}(\theta, q) := \int_0^{+\infty} e^{-qx} F(\theta, x) dx \quad \forall q > 0, \quad (11.0.11)$$

nous obtenons alors :

$$\mathbb{E}(e^{-qS_\tau}) = 1 - q \widehat{F}(\theta, q). \quad (11.0.12)$$

• **démonstration de (i) $\Rightarrow$ (ii) :**

Cette démonstration est faite dans le livre de Jean Bertoin [Ber96], page 190. Nous en reprendrons ici les éléments principaux.

Si ν ne charge que $\mathbb{R}_-$, nous savons que pour tout $\theta > 0$, $\mathbb{E}(e^{-\theta T_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}})$ s'écrit sous forme exponentielle (cf. (4.2.19) et (4.2.20)), i.e. :

$$\forall \theta > 0 \quad \exists C_\theta > 0, \quad \mathbb{E}(e^{-\theta T_x}) = \mathbb{E}(e^{-\theta T_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}}) = e^{-C_\theta x}. \quad (11.0.13)$$

Nous avons alors :

$$F(\theta, x) = e^{-C_\theta x} \quad \text{et} \quad \widehat{F}(\theta, q) = \frac{1}{q + C_\theta}. \quad (11.0.14)$$

Ainsi, d'après (11.0.12), nous avons :

$$\mathbb{E}(e^{-qS_\tau}) = \frac{C_\theta}{q + C_\theta}. \quad (11.0.15)$$

D'après la formule de Frullani, i.e. :

$$\frac{A}{q + A} = \exp \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-qx} - 1}{x} e^{-Ax} dx \right), \quad (11.0.16)$$

nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{-qS_\tau}) &= \exp \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-qx} - 1}{x} e^{-C_\theta x} dx \right) \\
&= \exp \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-qx} - 1}{x} \mathbb{E}(e^{-\theta T_x}) dx \right) \\
&= \exp \left(\int_0^{+\infty} e^{-\theta t} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-qx} - 1}{x} \mathbb{P}(T_x \in dt) dx \right). \quad (11.0.17)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, nous savons (cf. J.Bertoin [Ber96], page 159, Théorème VI-5, point (ii)) que :

$$\mathbb{E}(e^{-qS_\tau}) = \exp \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\theta t}}{t} \left(\int_{[0;+\infty[} (e^{-qx} - 1) \mathbb{P}(X_t \in dx) \right) dt \right). \quad (11.0.18)$$

En comparant (11.0.17) et (11.0.18), nous obtenons le point (ii).

• **démonstration de (ii) $\Rightarrow$ (iii) :**

Appliquons la relation de Zolotareff dans (11.0.18) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{-qS_\tau}) &= \exp \left(\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} \frac{e^{-qx} - 1}{x} e^{-\theta t} \mathbb{P}(T_x \in dt) \right) \\
&= \exp \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-qx} - 1}{x} \mathbb{E}(e^{-\theta T_x}) dx \right) \quad (11.0.19)
\end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\frac{e^{-qx} - 1}{x} = - \int_0^q e^{-vx} dv, \quad (11.0.20)$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{-qS_\tau}) &= \exp \left(- \int_0^{+\infty} \left(\int_0^q e^{-vx} dv \right) \mathbb{E}(e^{-\theta T_x}) dx \right) \\
&= \exp \left(- \int_0^q dv \int_0^{+\infty} e^{-vx} \mathbb{E}(e^{-\theta T_x}) dx \right) \\
&= \exp \left(- \int_0^q \widehat{F}(\theta, v) dv \right). \quad (11.0.21)
\end{aligned}$$

Ainsi d'après (11.0.12) et (11.0.21), nous obtenons :

$$1 - q\widehat{F}(\theta, q) = \exp \left(- \int_0^q \widehat{F}(\theta, v) dv \right). \quad (11.0.22)$$

En dérivant cette dernière expression par rapport à q , nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$-\widehat{F}(\theta, q) - q \frac{\partial \widehat{F}}{\partial q}(\theta, q) = -\widehat{F}(\theta, q) \exp \left(- \int_0^q \widehat{F}(\theta, v) dv \right), \quad (11.0.23)$$

$$-\widehat{F}(\theta, q) - q \frac{\partial \widehat{F}}{\partial q}(\theta, q) = -\widehat{F}(\theta, q) \left(1 - q \widehat{F}(\theta, q) \right), \quad (11.0.24)$$

$$\frac{\partial \widehat{F}}{\partial q}(\theta, q) = -\widehat{F}^2(\theta, q). \quad (11.0.25)$$

Ainsi, pour tout $\theta > 0$, il existe $C_\theta \geq 0$ telle que :

$$\widehat{F}(\theta, q) = \frac{1}{q + C_\theta} \quad \forall q \geq 0. \quad (11.0.26)$$

$C_\theta \geq 0$ découle du fait que $0 < F(\theta, x) \leq 1$ et donc $\widehat{F}(\theta, q) \geq 0$.

Si C_θ était nulle, nous aurions alors pour tout $x \geq 0$, $\mathbb{E}(1 - e^{-\theta T_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}}) = 0$ et comme la variable aléatoire $(1 - e^{-\theta T_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}})$ est positive : $e^{-\theta T_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}} = 1$ p.s., donc $T_x = 0$ p.s., ce qui serait absurde.

Ainsi, il existe $C_\theta > 0$ telle que :

$$F(\theta, x) = e^{-C_\theta x} \quad \forall x \geq 0. \quad (11.0.27)$$

• **démonstration de (iii) $\Rightarrow$ (iv) :**

Elle est immédiate.

• **démonstration de (iv) $\Rightarrow$ (v) :**

Cette démonstration se fait en deux étapes :

1. Nous montrons tout d'abord que : $\forall x \geq 0$, p.s., $X_{T_x} = x$.
2. Nous démontrons que p.s., pour tout $x \geq 0$, $X_{T_x} = x$.

Première étape

Soient $x \geq 0$ et $y \geq 0$ fixés.

Sur $\{T_x < \infty\}$, nous définissons le processus $(\widetilde{X}_t, t \geq 0)$ par :

$$\widetilde{X}_t = X_{T_x+t} - X_{T_x}, \quad t \geq 0. \quad (11.0.28)$$

Soit $\tilde{T}_z$, le premier temps d'atteinte du niveau $z \geq 0$ par $(\tilde{X}_t, t \geq 0)$, i.e. :

$$\tilde{T}_z := \inf \{t \geq 0 ; \tilde{X}_t > z\}. \quad (11.0.29)$$

Nous avons :

$$T_{x+y} = T_x + \tilde{T}_{(x+y-X_{T_x})_+}. \quad (11.0.30)$$

Ainsi, d'après la propriété de Markov forte et l'indépendance du processus $(\tilde{X}_t, t \geq 0)$ et de $\mathcal{F}_{T_x}$, nous avons :

$$\begin{aligned} F(\theta, x+y) &= \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x} e^{-\theta \tilde{T}_{(x+y-X_{T_x})_+}} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x} \mathbb{E} \left(e^{-\theta \tilde{T}_{(x+y-X_{T_x})_+}} / \mathcal{F}_{T_x} \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x} F(\theta, (x+y-X_{T_x})_+) \right). \end{aligned} \quad (11.0.31)$$

Or, d'après l'hypothèse (iv) :

$$F(\theta, x+y) = e^{-C_\theta(x+y)} = \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x} F(\theta, y) \right) \quad (11.0.32)$$

d'où

$$\mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x} [F(\theta, (x+y-X_{T_x})_+) - F(\theta, y)] \right) = 0. \quad (11.0.33)$$

Or la fonction $z \rightarrow F(\theta, z) = e^{-C_\theta z}$ est strictement décroissante puisque $C_\theta > 0$ et comme :

$$(x+y-X_{T_x})_+ \leq y \quad \forall x \geq 0, \quad \forall y \geq 0, \quad (11.0.34)$$

nous en déduisons que :

$$F(\theta, (x+y-X_{T_x})_+) - F(\theta, y) = 0 \quad p.s. \text{ sur } \{T_x < \infty\}. \quad (11.0.35)$$

Comme $F(\theta, \cdot)$ est injective, nous avons :

$$(x+y-X_{T_x})_+ = y \quad p.s. \text{ sur } \{T_x < \infty\}, \quad (11.0.36)$$

d'où

$$X_{T_x} = x \quad p.s. \text{ sur } \{T_x < \infty\}. \quad (11.0.37)$$

Ainsi :

$$\forall x \geq 0 \quad \exists \Omega_x \text{ tel que } \mathbb{P}(\Omega_x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall \omega \in \Omega_x \cap \{T_x < +\infty\} \quad X_{T_x}(\omega) = x. \quad (11.0.38)$$

Deuxième étape

Soit $\tilde{\Omega} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}_+} \Omega_q$. Nous allons montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \omega \in \tilde{\Omega} \quad X_{T_x}(\omega) = x. \quad (11.0.39)$$

Soit $x \geq 0$. Il existe une suite décroissante, $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de rationnels positifs, telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = x$. Pour tout $\omega \in \tilde{\Omega}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_{T_{q_n}}(\omega) = q_n. \quad (11.0.40)$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_x \leq T_{q_n}$ et la suite (T_{q_n}) est une suite décroissante, de limite T , d'où :

$$T_x \leq T. \quad (11.0.41)$$

D'autre part, d'après (11.0.40) et comme $t \rightarrow X_t$ et $x \rightarrow T_x$ sont càd-làg, nous avons :

$$X_T = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_{T_{q_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = x. \quad (11.0.42)$$

Deux situations peuvent alors se produire :

1. $T_x = T < +\infty$. Alors (d'après (11.0.42)), nous avons : $X_{T_x} = x$.
2. $T_x < T < +\infty$ et $X_{T_x} > x$. Il existe alors n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0 \quad x < q_n < X_{T_x}. \quad (11.0.43)$$

Comme $q_n \leq X_{T_x}$, alors $T_{q_n} \leq T_x$. Mais $T_x < T \leq T_{q_n}$ car la suite $(T_{q_n})_{n \geq 0}$ décroît vers T . Ainsi, nous en déduisons que $T_{q_n} = T_x$, d'où $T = T_x$.

La situation 2. ne peut donc jamais se produire et nous avons toujours $T = T_x$. Ainsi :

$$\forall \omega \in \tilde{\Omega}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad X_{T_x}(\omega) = x. \quad (11.0.44)$$

Ce qui donne (v).

• **démonstration de (v) $\Rightarrow$ (i) :**

a) Soit $r \in \mathbb{R}_+$. Le processus $(X_t, t \geq 0)$, partant de 0, a la même loi que le processus $(X_t^r; t \geq 0)$, translaté de r , défini par :

$$X_t^r = X_{r+t} - X_r. \quad (11.0.45)$$

Par conséquent, la propriété (11.0.44) étant vraie pour le processus $(X_t, t \geq 0)$, elle l'est aussi pour le processus $(X_t^r, t \geq 0)$. En particulier, pour tout $r \in \mathbb{Q}_+$, le processus $(X_t^r, t \geq 0)$ vérifie :

$$\exists \tilde{\Omega}^r, \quad \mathbb{P}(\tilde{\Omega}^r) = 1, \quad \forall \omega \in \tilde{\Omega}^r \cap \{T_x^r < +\infty\} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad X_{T_x^r}^r(\omega) = x. \quad (11.0.46)$$

Notons $\tilde{\tilde{\Omega}} = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}_+} \tilde{\Omega}^r$.

b) Supposons que ν charge $\mathbb{R}_+$.

Soit $\Omega_1 := \{\omega \in \Omega / (X_t(\omega), t \geq 0) \text{ a un saut strictement positif}\}$. Nous avons donc $\mathbb{P}(\Omega_1) > 0$ et nous pouvons écrire :

$$\Omega_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_n, \quad \text{avec } \Omega_n := \left\{ \omega \in \Omega / (X_t(\omega), t \geq 0) \text{ a un saut d'amplitude supérieure à } \frac{1}{n} \right\}. \quad (11.0.47)$$

Il est clair qu'il existe donc $n_0 > 0$ tel que :

$$\mathbb{P}(\Omega_{n_0}) > 0. \quad (11.0.48)$$

Pour tout $\omega \in \Omega_{n_0}$, nous définissons :

$$S_0(\omega) = \inf \left\{ t \geq 0 / X_t(\omega) - X_{t-}(\omega) \geq \frac{1}{n_0} \right\}. \quad (11.0.49)$$

Par ailleurs, la fonction $t \rightarrow X_t(\omega)$ étant presque sûrement càdlàg, nous avons :

$$\Omega_{n_0} = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q}_+ \\ p \in \mathbb{N}^*}} \Omega_{n_0}^{r,p}, \quad (11.0.50)$$

avec

$$\Omega_{n_0}^{r,p} := \left\{ \omega \in \Omega / S_0(\omega) \in \left[r - \frac{1}{p}; r + \frac{1}{p} \right] \text{ et } \sup_{s \in [r - \frac{2}{p}; S_0(\omega)[} |X_s(\omega) - X_{S_0}(\omega)| < \frac{1}{4n_0} \right\}. \quad (11.0.51)$$

D'après (11.0.48), il existe donc $r_0 \in \mathbb{Q}_+$ et $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{P}(\Omega_{n_0}^{r_0, p_0}) > 0$.

c) Soit alors $\omega \in \Omega_{n_0}^{r_0, p_0} \cap \tilde{\tilde{\Omega}}$, et $(X_t^{r_0}, t \geq 0)$ la trajectoire translatée de r_0 . D'après (11.0.51), nous avons (cf. Figures 11.1 et 11.2) :

$$X_{S_0 - r_0}^{r_0} > \frac{1}{2n_0}. \quad (11.0.52)$$

d'où $T_{\frac{1}{2n_0}} = S_0 - r_0$ et donc $X_{T_{\frac{1}{2n_0}}}^{r_0} > \frac{1}{2n_0}$.

Ce qui contredit (11.0.46) et prouve (i).

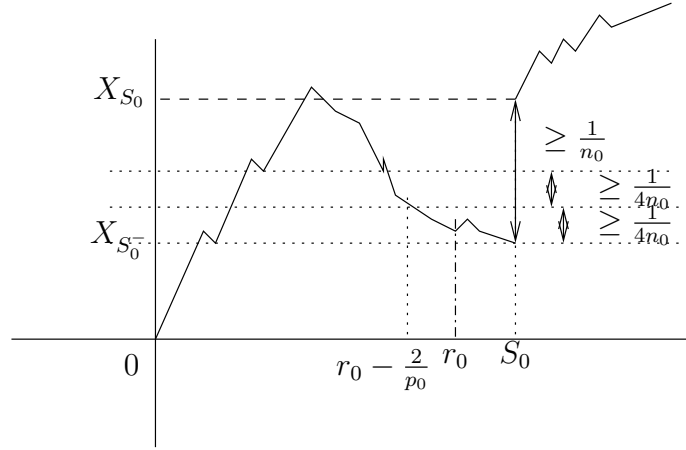


FIG. 11.1 – Trajectoire $(X_t(\omega), t \geq 0)$

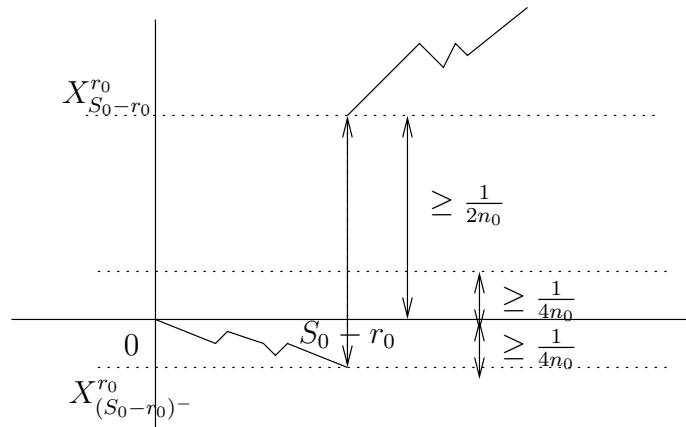


FIG. 11.2 – Trajectoire translatée de r_0

Annexes

Annexe A

Propriétés de la fonction φ

Soit $(X_t, t \geq 0)$ le processus de Lévy :

$$X_t := B_t - ct + J_t \quad \forall t \geq 0$$

où

1. $(J_t, t \geq 0)$ est un processus de Lévy de sauts purs, vérifiant $J_0 = 0$ et de mesure de Lévy ν telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} |y| \nu(dy) < +\infty, \quad (\text{A.0.1})$$

Cette hypothèse sera supposée réalisée dans toute la suite.

2. $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien linéaire, indépendant de $(J_t, t \geq 0)$, tel que $B_0 = 0$.
3. c est un réel.

L'exposant caractéristique de $(X_t, t \geq 0)$ est la fonction ψ définie par :

$$\mathbb{E}(e^{qX_t}) = e^{t\psi(q)}.$$

Nous définissons la fonction φ par $\varphi(q) := \psi(-q)$ et donc :

$$\varphi(q) = \frac{q^2}{2} + cq + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-qy} - 1) \nu(dy). \quad (\text{A.0.2})$$

Compte tenu de (A.0.1), $\varphi(q)$ existe dès que :

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{|y| \geq 1\}} |e^{-qy}| \nu(dy) < +\infty, \quad q \in \mathbb{C}. \quad (\text{A.0.3})$$

A.1 Etude de φ sur $\mathbb{R}$

Soit :

$$r_\nu := \sup \left\{ s \geq 0; \int_0^{+\infty} (e^{sy} - 1) \nu(dy) < +\infty \right\}, \quad (\text{A.1.4})$$

et

$$r_\nu^* := \sup \left\{ s \geq 0; \int_{-\infty}^0 (e^{-sy} - 1) \nu(dy) < +\infty \right\}, \quad (\text{A.1.5})$$

avec la convention $\sup \emptyset = 0$.

La fonction φ est définie sur $] -r_\nu, r_\nu^* [$.

Nous supposons par la suite que :

$$r_\nu > 0 \quad \text{et} \quad r_\nu^* > 0 \quad (\text{éventuellement } r_\nu = +\infty \text{ ou } r_\nu^* = +\infty). \quad (\text{A.1.6})$$

En particulier, si ν ne charge que $\mathbb{R}_+$, alors $r_\nu^* = +\infty$ et si ν ne charge que $\mathbb{R}_-$, alors $r_\nu = +\infty$.

Proposition A.1 *Sous les hypothèses (A.0.1) et (A.1.6), nous avons :*

(i) φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -r_\nu, r_\nu^* [$ et :

$$\varphi(0) = 0, \quad (\text{A.1.7})$$

$$\varphi'(q) = q + c - \int_{-\infty}^{+\infty} y \nu(dy), \quad (\text{A.1.8})$$

$$\varphi'(0) = c - \int_{-\infty}^{+\infty} y \nu(dy) = c - \mathbb{E}(J_1). \quad (\text{A.1.9})$$

(ii) $\varphi''(q) = 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-qy} \nu(dy) > 0$ et donc φ est strictement convexe sur $] -r_\nu, r_\nu^* [$.

Nous distinguons les cas suivants :

1^{er} **cas**) La condition de profit net est vérifiée : $c > \mathbb{E}(J_1)$.

Nous avons donc $\varphi'(0) > 0$.

Trois situations peuvent se produire (voir Figure A.1).

2^{ème} **cas**) $c < \mathbb{E}(J_1)$.

Nous avons alors $\varphi'(0) < 0$.

Trois situations peuvent se produire (voir Figure A.2).

3^{ème} **cas**) $c = \mathbb{E}(J_1)$.

Nous avons alors $\varphi'(0) = 0$. Une seule situation a lieu (voir Figure A.3).

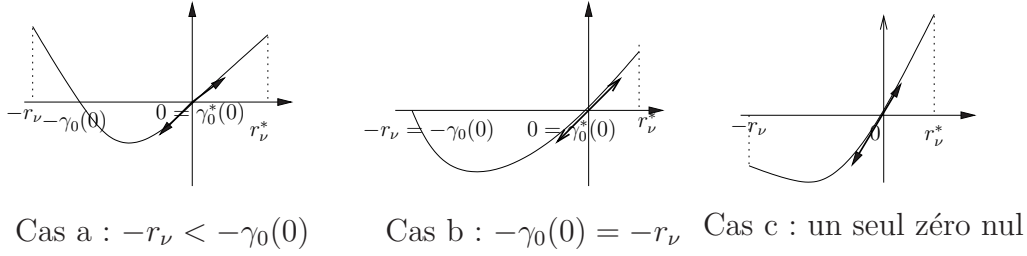


FIG. A.1 – Situation de profit net, $c > \mathbb{E}(J_1)$

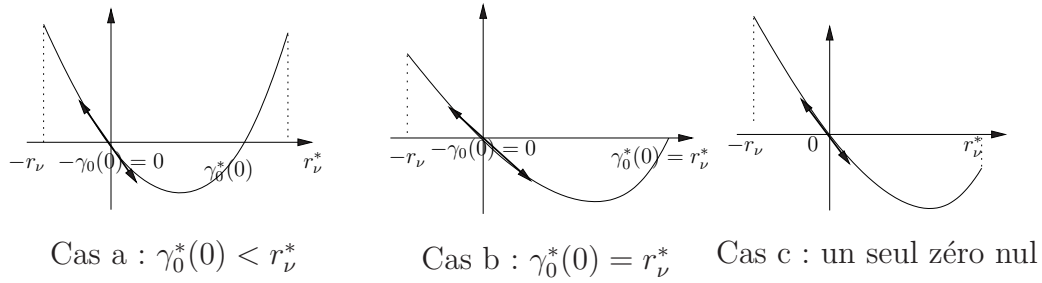


FIG. A.2 – Situation où $c < \mathbb{E}(J_1)$

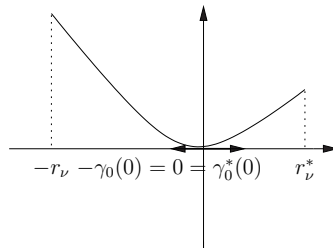


FIG. A.3 – Situation où $c = \mathbb{E}(J_1)$

Remarque A.2

1. Dans tous les cas, 0 est un zéro de φ .
2. Si $r_\nu < +\infty$ et si $r_\nu^* < +\infty$, nous notons les limites (qui existent car φ est convexe) :

$$\varphi(-r_\nu) = \lim_{q \rightarrow -r_\nu} \varphi(q) \quad \text{et} \quad \varphi(r_\nu^*) = \lim_{q \rightarrow r_\nu^*} \varphi(q). \quad (\text{A.1.10})$$

φ est ainsi définie sur $[-r_\nu, r_\nu^*]$. $\varphi(-r_\nu)$ ou $\varphi(r_\nu^*)$ peuvent être infinis.

3. Si $r_\nu = +\infty$, $\lim_{q \rightarrow -\infty} \varphi(q) = +\infty$ et de manière analogue, si $r_\nu^* = +\infty$, $\lim_{q \rightarrow +\infty} \varphi(q) = +\infty$.
4. Lorsque φ a deux zéros (éventuellement un zéro double) dans $[-r_\nu, r_\nu^*]$, nous noterons $-\gamma_0(0)$ le plus petit et $\gamma_0^*(0)$ le plus grand. (voir Figures A.1, A.2 et A.3)
5. L'ensemble $\{s \in [-r_\nu, 0] / \varphi(s) < 0\}$ est un intervalle inclus dans $[-r_\nu, 0]$ et il est non vide dès que $c > \mathbb{E}(J_1)$. (voir Figures A.1, A.2 et A.3)

A.2 Etude de $\varphi_\theta : q \rightarrow \varphi(q) - \theta$ sur $\mathbb{R}$, où $\theta > 0$

Soit $\theta > 0$.

La fonction $\varphi_\theta : q \rightarrow \varphi(q) - \theta$ est convexe, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -r_\nu, r_\nu^*[$. De plus nous avons : $\varphi_\theta(0) = -\theta < 0$.

En considérant les cas de figures du paragraphe précédent et en choisissant θ suffisamment petit, φ_θ satisfait à l'une des quatre situations représentées par les figures A.4 et A.5.

Remarque A.3 L'ensemble $\{s \in [-r_\nu, 0] / \varphi_\theta(s) < 0\}$ est toujours un intervalle non vide inclus dans $[-r_\nu, 0]$.

Par la suite, à partir du chapitre 6, nous nous limitons, pour la représentation de φ , aux cas représentés par la Figure A.1 cas a, la Figure A.2 cas a et la Figure A.3. Ainsi la fonction φ admet deux zéros (éventuellement un zéro double) $-\gamma_0(0)$ et $\gamma_0^*(0)$ qui vérifient :

$$-r_\nu < -\gamma_0(0) \leq 0 \leq \gamma_0^*(0) < r_\nu^*.$$

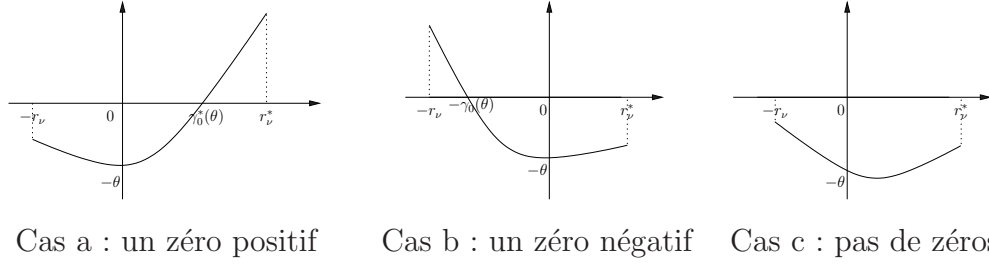


FIG. A.4 – φ_θ a un ou pas de zéro

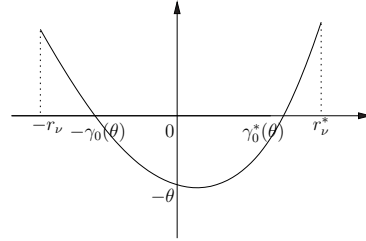


FIG. A.5 – φ_θ a deux zéros

Il existe donc un réel $\kappa > 0$ tel que pour tout $\theta \in]0, \kappa]$, φ_θ admet un zéro négatif, noté $-\gamma_0(\theta)$, et un zéro positif, noté $\gamma_0^*(\theta)$, qui vérifient :

$$-r_\nu < -\gamma_0(\theta) < -\gamma_0(0) \leq 0 \leq \gamma_0(0) < \gamma_0^*(\theta) < r_\nu^*. \quad (\text{A.2.11})$$

Ainsi à partir du chapitre 6, nous ne retiendrons donc plus que le cas de la Figure A.5 pour la représentation de φ_θ .

A.3 Zéros du polynôme $C_\theta(q) = q^2 + 2cq - 2(\lambda + \theta)$, $\theta \geq 0$

Nous supposons dans ce paragraphe que $(J_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson composé, i.e. :

$$\lambda := \nu(\mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) < +\infty. \quad (\text{A.3.12})$$

Remarquons que, pour tout $q \in]-r_\nu, r_\nu^*[$, nous avons :

$$\begin{aligned}\varphi_\theta(q) &= \varphi(q) - \theta = \frac{q^2}{2} + cq + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-qy} \nu(dy) - (\lambda + \theta) \\ &= \frac{1}{2} C_\theta(q) + \widehat{\nu}(q),\end{aligned}\tag{A.3.13}$$

où $\widehat{\nu}$ désigne la transformée de Laplace de ν , i.e. :

$$\widehat{\nu}(q) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-qy} \nu(dy),\tag{A.3.14}$$

et $C_\theta(q)$ désigne le polynôme défini par :

$$C_\theta(q) = q^2 + 2cq - 2(\lambda + \theta).\tag{A.3.15}$$

Nous en déduisons que, si ν n'est pas identiquement nulle :

$$\varphi_\theta(q) > \frac{1}{2} C_\theta(q), \quad q \in]-r_\nu, r_\nu^*[.\tag{A.3.16}$$

Remarquons que :

$$C_\theta(q) = (q + c + \alpha_\theta)(q + c - \alpha_\theta),\tag{A.3.17}$$

où $\alpha_\theta = \sqrt{c^2 + 2(\lambda + \theta)}$.

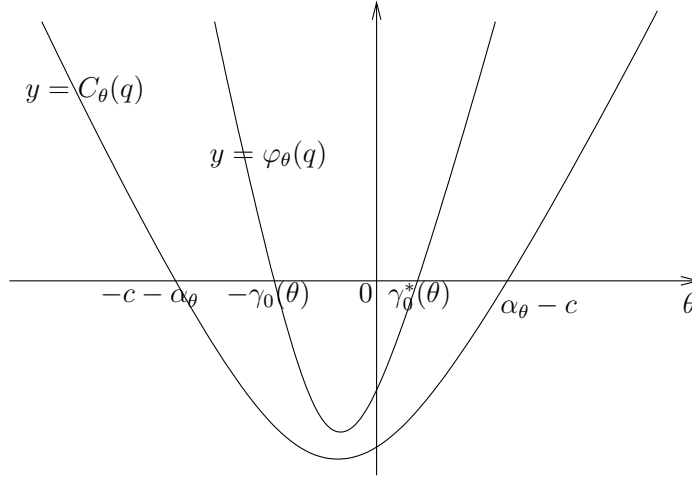
Proposition A.4 *Pour tout $\theta \geq 0$, le polynôme $C_\theta(q)$ admet deux racines dans $\mathbb{R}$, $-\alpha_\theta - c < 0$ et $\alpha_\theta - c > 0$ telles que :*

- (i) *L'ensemble $\{s \in]-r_\nu, r_\nu^*[\mid \varphi_\theta(s) < 0\}$ est un intervalle inclus dans $[-c - \alpha_\theta, \alpha_\theta - c]$.*
- (ii) *En particulier, si φ_θ admet deux zéros réels $-\gamma_0(\theta)$ et $\gamma_0^*(\theta)$ dans $[r_\nu, r_\nu^*]$ alors nous avons :*

$$-c - \alpha_\theta < -\gamma_0(\theta) \leq 0 \leq \gamma_0^*(\theta) < \alpha_\theta - c.\tag{A.3.18}$$

Démonstration de la Proposition A.4

(i) et l'encadrement de (ii) résultent de (A.3.16) (voir FigureA.6). □

FIG. A.6 – Comparaison des zéros de $C_\theta(q)$ et des zéros de φ_θ

A.4 Etude de φ_θ sur $\mathbb{C}$, où $\theta \geq 0$

Soit $\theta \geq 0$.

La fonction $\varphi_\theta : q \rightarrow \varphi(q) - \theta$ se prolonge sur $\{q \in \mathbb{C} ; -r_\nu < \operatorname{Re} q < r_\nu^*\}$.

Dans cette section et les suivantes, nous nous limitons aux cas a des figures A.1 et A.2 et à la figure A.3. Ce qui revient à considérer uniquement la figure A.5, quand $\theta > 0$.

Ainsi, il existe $\kappa > 0$ tel que, pour tout $\theta \in [0, \kappa]$:

$$\begin{aligned} \exists -\gamma_0(\theta) \in]-r_\nu, 0] \quad \text{et} \quad \exists \gamma_0^*(\theta) \in [0, r_\nu^*[\\ \text{tels que} \quad \varphi(-\gamma_0(\theta)) = \varphi(\gamma_0^*(\theta)) = \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.4.19})$$

Proposition A.5 *Pour tout $\theta \in [0, \kappa]$, nous avons :*

- (i) φ_θ est holomorphe sur $\{q \in \mathbb{C} / -r_\nu < \operatorname{Re} q < r_\nu^*\}$.
- (ii) Les seuls zéros réels de φ_θ dans $\{q \in \mathbb{R} / -r_\nu \leq q \leq r_\nu^*\}$ sont $-\gamma_0(\theta)$ et $\gamma_0^*(\theta)$.
- (iii) Les seuls zéros complexes de φ_θ dans $\{q \in \mathbb{C} / -\gamma_0(\theta) \leq \operatorname{Re} q \leq \gamma_0^*(\theta)\}$ sont les zéros réels $-\gamma_0(\theta)$ et $\gamma_0^*(\theta)$.

Démonstration de la Proposition A.5

- (i) découle de la définition de φ_θ .
- (ii) découle de (A.4.19) et de la convexité de la restriction de φ_θ à $] -r_\nu, r_\nu^*[$ (voir Figures A.1 cas a, A.2 cas a, A.3 et A.5).
- (iii) Soit $q \in \mathbb{C}$. Nous distinguons les cas suivants :

1^{er} cas Soit q tel que $-\gamma_0(\theta) < \operatorname{Re} q < \gamma_0^*(\theta)$. Un tel q n'existe que si $\theta > 0$ ou si $\theta = 0$ et $c \neq \mathbb{E}(J_1)$ car alors nous avons : $\gamma_0(\theta) < \gamma_0^*(\theta)$.

Puisque $\mathbb{E}(e^{-qX_1}) = e^{\varphi(q)}$, nous avons :

$$\begin{aligned} |e^{\varphi_\theta(q)}| &= |e^{\varphi(q)-\theta}| = e^{-\theta} |\mathbb{E}(e^{-qX_1})| \leq e^{-\theta} \mathbb{E}(|e^{-qX_1}|) \\ &\leq \mathbb{E}(e^{-\operatorname{Re} q X_1 - \theta}) \\ &\leq e^{\varphi_\theta(\operatorname{Re} q)}. \end{aligned} \quad (\text{A.4.20})$$

Or $e^{\varphi_\theta(\operatorname{Re} q)} < 1$ car φ_θ est strictement négative sur $]-\gamma_0(\theta), \gamma_0^*(\theta)[$. Nous prouvons ainsi que φ_θ ne peut s'annuler sur $\{q \in \mathbb{C} / -\gamma_0(\theta) < \operatorname{Re} q < \gamma_0^*(\theta)\}$.

2^{ème} cas Soit $q = -\gamma_0(\theta) + ib$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi_\theta(q) &= \varphi(-\gamma_0(\theta) + ib) - \theta \\ &= \frac{\gamma_0^2(\theta)}{2} - ib\gamma_0(\theta) - \frac{b^2}{2} - c\gamma_0(\theta) + icb + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{(\gamma_0(\theta)-ib)y} - 1)\nu(dy) - \theta \\ &= \left[\frac{\gamma_0^2(\theta)}{2} - c\gamma_0(\theta) + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{\gamma_0(\theta)y} - 1)\nu(dy) - \theta \right] - \frac{b^2}{2} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma_0(\theta)y} (e^{-iby} - 1)\nu(dy) - ib\gamma_0(\theta) + icb \\ &= \varphi_\theta(-\gamma_0(\theta)) - \frac{b^2}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma_0(\theta)y} (\cos(by) - 1)\nu(dy) \\ &\quad + i \left(-b\gamma_0(\theta) + cb - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma_0(\theta)y} \sin(by)\nu(dy) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4.21})$$

Et comme $\varphi_\theta(-\gamma_0(\theta)) = 0$, nous avons :

$$\operatorname{Re}(\varphi_\theta(q)) = -\frac{b^2}{2} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma_0(\theta)y} (1 - \cos(by))\nu(dy) \leq -\frac{b^2}{2}. \quad (\text{A.4.22})$$

Nous pouvons donc en conclure que $\varphi_\theta(q)$ ne peut s'annuler que si $b = 0$ et donc que si $q = -\gamma_0(\theta)$.

3^{ème} cas Soit $q = \gamma_0^*(\theta) + ib$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Un calcul analogue au précédent nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\varphi_\theta(q) &= \varphi(\gamma_0^*(\theta) + ib) - \theta \\ &= \varphi_\theta(\gamma_0^*(\theta)) - \frac{b^2}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma_0^*(\theta)y} (\cos(by) - 1) \nu(dy) \\ &\quad + i \left(b\gamma_0^*(\theta) + cb - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma_0^*(\theta)y} \sin(by) \nu(dy) \right) \quad (\text{A.4.23})\end{aligned}$$

Et comme $\varphi_\theta(\gamma_0^*(\theta)) = 0$ et pour tout $b \in \mathbb{R}$, $1 - \cos(by) \geq 0$, nous avons :

$$\operatorname{Re}(\varphi_\theta(q)) = -\frac{b^2}{2} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma_0^*(\theta)y} (1 - \cos(by)) \nu(dy) \leq -\frac{b^2}{2}. \quad (\text{A.4.24})$$

Nous pouvons donc en conclure que $\varphi_\theta(q)$ ne peut s'annuler que si $b = 0$ et donc que si $q = -\gamma_0^*(\theta)$.

□

A.5 Prolongement méromorphe de φ_θ , $\theta \geq 0$

Nous supposons que $r_\nu > 0$ (éventuellement $r_\nu = +\infty$) et que de plus :

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{-qy} \nu(dy) < +\infty. \quad (\text{A.5.25})$$

Alors $r_\nu^* = +\infty$, φ est définie sur $] -r_\nu, +\infty[$ et d'après la remarque A.2, point 3, nous avons :

$$\forall \theta \geq 0, \quad \exists \gamma_0^*(\theta) \geq 0 \quad \text{tel que} \quad \varphi(\gamma_0^*(\theta)) = \theta \quad (\text{A.5.26})$$

avec

$$\text{si } \theta > 0, \quad \gamma_0^*(\theta) > 0 \quad (\text{A.5.27})$$

$$\text{si } \theta = 0 \quad \text{et} \quad c < \mathbb{E}(J_1), \quad \gamma_0^*(0) > 0 \quad (\text{A.5.28})$$

$$\text{si } \theta = 0 \quad \text{et} \quad c \geq \mathbb{E}(J_1), \quad \gamma_0^*(0) = 0. \quad (\text{A.5.29})$$

Par ailleurs, il existe $\kappa > 0$ tel que, pour tout $\theta \in [0, \kappa]$:

$$\exists -\gamma_0(\theta) \in] -r_\nu, 0] \quad \text{tel que} \quad \varphi(-\gamma_0(\theta)) = \theta \quad (\text{A.5.30})$$

avec

$$\text{si } \theta > 0, \quad -\gamma_0(\theta) < 0 \quad (\text{A.5.31})$$

$$\text{si } \theta = 0 \quad \text{et} \quad c > \mathbb{E}(J_1), \quad -\gamma_0(0) < 0 \quad (\text{A.5.32})$$

$$\text{si } \theta = 0 \quad \text{et} \quad c \leq \mathbb{E}(J_1), \quad -\gamma_0(0) = 0. \quad (\text{A.5.33})$$

Soit $\widehat{\nu_{|_{[1, +\infty[}}}$ la transformée de Laplace de la restriction de ν à $[1, +\infty[$:

$$\widehat{\nu_{|_{[1, +\infty[}}}(q) := \int_1^{+\infty} e^{-qy} \nu(dy) \quad (\text{A.5.34})$$

Pour tout $b > 0$, nous notons :

$$D_b := \{q \in \mathbb{C} \quad \text{tel que} \quad \operatorname{Re} q > -b\}. \quad (\text{A.5.35})$$

Nous considérons :

$$B_\nu := \sup \{b > 0 / \widehat{\nu_{|_{[1, +\infty[}}} \text{ admet un prolongement méromorphe sur } D_b\}. \quad (\text{A.5.36})$$

Remarquons que d'après l'hypothèse (A.1.6), nous avons $B_\nu \geq r_\nu$ et éventuellement $B_\nu = +\infty$.

Dans ces conditions, φ admet un prolongement méromorphe sur D_{B_ν} et nous noterons encore φ ce prolongement. De même, nous noterons encore $\widehat{\nu_{|_{[1, +\infty[}}}$ le prolongement de $\widehat{\nu_{|_{[1, +\infty[}}}$.

Nous faisons enfin, l'hypothèse suivante :

$$\forall 0 < B < B_\nu \quad \exists K > 0, \quad \exists R_0 > 0, \text{ tels que :}$$

$$|\widehat{\nu_{|_{[1, +\infty[}}}(q)| \leq K|q| \quad \forall q \quad \text{vérifiant :} \quad \begin{cases} -B \leq \operatorname{Re} q \leq 0 \\ |\operatorname{Im} q| \geq R_0 \end{cases} \quad (\text{A.5.37})$$

Remarquons que :

$$\sup_{\operatorname{Re} q \geq 0} |\widehat{\nu_{|_{[1, +\infty[}}}(q)| < +\infty. \quad (\text{A.5.38})$$

Ainsi, si l'hypothèse A.5.37 est vérifiée, nous avons aussi :

$$\forall q \quad \text{vérifiant :} \quad \begin{cases} \operatorname{Re} q \geq -B \\ |\operatorname{Im} q| \geq R_0 \end{cases} \quad |\widehat{\nu_{|_{[1, +\infty[}}}(q)| \leq K|q| \quad (\text{A.5.39})$$

Proposition A.6 *Sous les hypothèses précédentes, pour tout $\theta \in [0, \kappa]$, il existe $\beta_\theta > 0$ tel que, pour tout $B \in]0, B_\nu[$, choisi aussi proche de B_ν que nous le voulons, les zéros de φ_θ dans la bande $\{q \in \mathbb{C} / -B \leq \operatorname{Re} q \leq \beta_\theta\}$ sont en nombre fini, conjugués deux à deux et s'écrivent :*

- (i) Si $\theta > 0$:
 $-\gamma_0(\theta), -\gamma_1(\theta), -\bar{\gamma}_1(\theta), \dots, -\gamma_p(\theta)$ et $-\bar{\gamma}_p(\theta)$,
- (ii) Si $\theta = 0$ et $c > \mathbb{E}(J_1)$:
 $0, -\gamma_0(0), -\gamma_1(0), -\bar{\gamma}_1(0), \dots, -\gamma_p(0)$ et $-\bar{\gamma}_p(0)$,
- (iii) Si $\theta = 0$ et $c \leq \mathbb{E}(J_1)$:
 $-\gamma_0(0) = 0, -\gamma_1(0), -\bar{\gamma}_1(0), \dots, -\gamma_p(0)$ et $-\bar{\gamma}_p(0)$,

où p est un entier, éventuellement nul, et

$$-B < -\operatorname{Re}(\gamma_p(\theta)) \leq \dots \leq -\operatorname{Re}(\gamma_1(\theta)) < -\gamma_0(\theta) \leq 0. \quad (\text{A.5.40})$$

Démonstration de la Proposition A.6

1^{ère} situation : $\theta > 0$ ou $\theta = 0$ et $c < \mathbb{E}(J_1)$. Dans ces conditions, φ_θ admet un unique zéro strictement positif $\gamma_0^*(\theta)$.

Nous choisissons β_θ tel que $0 < \beta_\theta < \gamma_0^*(\theta)$. Soit $B \in]0, B_\nu[$, proche de B_ν . D'après l'hypothèse (A.5.37) et d'après (A.5.38), il existe $R_1 > R_0$ tel que la fonction φ_θ n'a pas de zéro dans l'ensemble formé des deux demi-bandes $\{q \in \mathbb{C} / -B < \operatorname{Re} q < \gamma_0^*(\theta) \text{ et } |\operatorname{Im} q| > R_1\}$.

D'après la Proposition A.5 point (iii), φ_θ n'a pas de zéro dans la bande $\{q \in \mathbb{C} / -\gamma_0(\theta) \leq \operatorname{Re} q \leq \gamma_0^*(\theta)\}$ à l'exception de $-\gamma_0(\theta)$ et de $\gamma_0^*(\theta)$. Ainsi, φ_θ n'a qu'un nombre fini de zéros dans la bande $\{q \in \mathbb{C} / -B < \operatorname{Re} q < \beta_\theta\}$ car φ_θ , méromorphe dans cette bande, n'a qu'un nombre fini de zéros dans le compact $\{q \in \mathbb{C} / -B \leq \operatorname{Re} q \leq \beta_\theta \text{ et } |\operatorname{Im} q| \leq R_1\}$. Ces zéros sont conjugués deux à deux car $\varphi_\theta(\bar{z}) = \overline{\varphi_\theta(z)}$.

2^{ème} situation : $\theta = 0$ et $c \geq \mathbb{E}(J_1)$. Dans ces conditions $\gamma_0^*(\theta) = 0$.

Soit $B \in]0, B_\nu[$, proche de B_ν . D'après l'hypothèse (A.5.37) et d'après (A.5.38), il existe $R_1 > R_0$ tel que φ n'a pas de zéro dans l'ensemble formé des deux demi bandes $\{q \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} q > -B \text{ et } |\operatorname{Im} q| > R_1\}$.

Puisque que φ est méromorphe, pour tout $A > 0$, elle a un nombre fini de zéros sur le compact $\{q \in \mathbb{C} / -B \leq \operatorname{Re} q \leq A \text{ et } |\operatorname{Im} q| \leq R_1\}$.

Par ailleurs, d'après la Proposition A.5 point (iii), φ ne s'annule pas sur $\{q \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} q = 0\}$ sauf en $q = 0$. Il est donc clair que nous pouvons choisir $\beta_\theta > 0$, tel que φ ne s'annule pas sur $\{q \in \mathbb{C} / 0 < \operatorname{Re} q < \beta_\theta\}$ et φ a alors un nombre fini de zéros sur $\{q \in \mathbb{C} / -B < \operatorname{Re} q < \beta_\theta\}$, conjugués deux à deux.

En conclusion, les zéros de φ dans la bande $\{q \in \mathbb{C} / -B < \operatorname{Re} q < \beta_\theta\}$ sont 0 , $-\gamma_0(\theta)$, $-\gamma_1(\theta)$ et $-\bar{\gamma}_1(\theta)$, $\dots$, $-\gamma_p(\theta)$ et $-\bar{\gamma}_p(\theta)$. $\square$

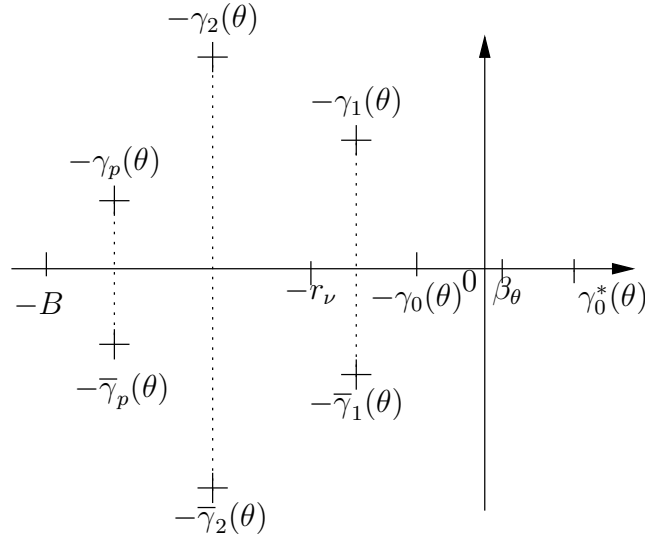


FIG. A.7 – Zéros complexes de φ_θ ($\theta > 0$) dans la bande $-B < \operatorname{Re} q \leq \beta_\theta$

Annexe B

Limite de $\Lambda_\theta^n F(\theta, \mu, \cdot)$, quand n tend vers $+\infty$

Soit le processus $(X_t, t \geq 0)$ défini par :

$$X_t := B_t - ct + J_t, \quad (\text{B.0.1})$$

où $(J_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson composé, de masse totale λ , i.e. :

$$\lambda := \nu(\mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) < +\infty. \quad (\text{B.0.2})$$

Nous définissons pour tout $\theta \geq 0$ et tout $\mu \geq 0$, la fonction $F(\theta, \mu, \cdot)$ par :

$$F(\theta, \mu, x) = \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x < \infty\}} \right) \quad \forall x \geq 0. \quad (\text{B.0.3})$$

où

$$T_x := \inf\{t \geq 0; X_t > x\}, \quad (\text{B.0.4})$$

et

$$K_x := X_{T_x} - x. \quad (\text{B.0.5})$$

D'après le Théorème 5.2.9, nous savons que $F(\theta, \mu, \cdot)$ vérifie l'égalité :

$$F(\theta, \mu, x) = F_0(\theta, \mu, x) + F_1(\theta, \mu, x) + \Lambda_\theta F(\theta, \mu, x) \quad \forall x \geq 0 \quad (\text{B.0.6})$$

où $F_0(\theta, \mu, x)$ et $F_1(\theta, \mu, x)$ sont définies par (5.2.11) et (5.2.12) et Λ_θ est l'opérateur défini par :

$$\Lambda_\theta g(x) = \frac{1}{\alpha_\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_{-\infty}^{(x-y) \wedge x} e^{-ca} \left(e^{-\alpha_\theta |a|} - e^{-(2x-a)\alpha_\theta} \right) g(x-a-y) da. \quad (\text{B.0.7})$$

avec

$$\alpha_\theta = \sqrt{c^2 + 2(\lambda + \theta)}. \quad (\text{B.0.8})$$

Soit $\mathcal{B}_\gamma$, l'espace de Banach défini par :

$$\mathcal{B}_\gamma := \{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}; \sup_{x \in \mathbb{R}_+} e^{\gamma x} |f(x)| < +\infty\}, \quad (\text{B.0.9})$$

muni de la norme :

$$\|f\|_\gamma = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} e^{\gamma x} |f(x)|. \quad (\text{B.0.10})$$

Nous supposons $r_\nu > 0$ (éventuellement $r_\nu = +\infty$), où r_ν est défini en (5.3.44) par :

$$r_\nu := \sup \left\{ s \geq 0; \int_0^{+\infty} (e^{sy} - 1) \nu(dy) < +\infty \right\}. \quad (\text{B.0.11})$$

D'après le Théorème 5.5, point (ii), nous savons que tout $\gamma \in [0, r_\nu[$ vérifiant $\varphi(-\gamma) < \theta$, l'opérateur Λ_θ est borné dans $\mathcal{B}_\gamma$ et

$$\|\Lambda_\theta f\|_\gamma \leq c_{\theta, \gamma} \|f\|_\gamma \quad \forall f \in \mathcal{B}_\gamma, \quad (\text{B.0.12})$$

avec

$$0 < c_{\theta, \gamma} < 1. \quad (\text{B.0.13})$$

Ainsi Λ_θ est contractant dans $\mathcal{B}_\gamma$.

Remarque B.1 D'après la remarque A.2, point 5, et la remarque A.3, nous savons que de tels γ existent :

- pour tout $\theta > 0$,
- pour $\theta = 0$ si $c > \mathbb{E}(J_1)$.

(voir figures A.1, A.2, A.3, A.4 et A.5 de l'Appendice A)

Nous avons démontré (cf. (5.3.59) et (5.3.62)) que $F_0(\theta, \mu, \cdot)$ et $F_1(\theta, \mu, \cdot)$ appartiennent à $\mathcal{B}_\gamma$.

En itérant l'égalité (B.0.6), nous obtenons :

$$F(\theta, \mu, x) = \sum_{p=0}^{n-1} \Lambda_\theta^p [F_0(\theta, \mu, \cdot) + F_1(\theta, \mu, \cdot)](x) + \Lambda_\theta^n F(\theta, \mu, \cdot)(x). \quad (\text{B.0.14})$$

Le but de cet Appendice est de démontrer la Proposition suivante :

Proposition B.2 *Nous supposons $\theta > 0$ ou $\theta = 0$ et $c > \mathbb{E}(J_1)$. Pour tout $\mu \geq 0$ et tout $x \geq 0$, nous avons :*

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \Lambda_\theta^n F(\theta, \mu, \cdot)(x) = 0. \quad (\text{B.0.15})$$

$$(ii) \quad F(\theta, \mu, x) = \sum_{n \geq 0} \Lambda_\theta^n (F_0(\theta, \mu, \cdot) + F_1(\theta, \mu, \cdot))(x), \quad (\text{B.0.16})$$

la série convergeant dans $\mathcal{B}_\gamma$ où $0 \leq \gamma < r_\nu$.

Démonstration de la Proposition B.2

1) Soit $\gamma \in [0, r_\nu[$ tel que $\varphi(-\gamma) < \theta$. Un tel γ existe d'après la Remarque B.1.

Comme $F_0(\theta, \mu, \cdot) + F_1(\theta, \mu, \cdot)$ appartient à $\mathcal{B}_\gamma$ et que Λ_θ est contractant dans $\mathcal{B}_\gamma$ (cf. Théorème 5.5), alors $\sum_{p=0}^{n-1} \Lambda_\theta^p [F_0(\theta, \mu, \cdot) + F_1(\theta, \mu, \cdot)]$ converge, quand n

tend vers $+\infty$, vers une fonction notée $\bar{F}(\theta, \mu, \cdot)$, appartenant à $\mathcal{B}_\gamma$.

D'après (B.0.14), il est clair que (i) implique (ii).

2) Montrons (i), lorsque $\theta > 0$:

D'après ce qui précède, $\bar{F}(\theta, \mu, \cdot)$ appartient donc à $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}_+)$ car la norme $\|\cdot\|_\infty$ est inférieure à la norme $\|\cdot\|_\gamma$, pour tout $\gamma \geq 0$.

Ainsi, d'après l'égalité (B.0.14), la suite $(\Lambda_\theta^n F(\theta, \mu, \cdot))_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$, vers une fonction, notée $G(\theta, \mu, \cdot)$.

Si $\theta > 0$, l'opérateur Λ_θ , considéré comme opérateur de $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}_+)$ dans $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}_+)$, est de norme inférieure ou égale à $\frac{\lambda}{\lambda + \theta} < 1$. Ainsi nous avons

$\|\Lambda_\theta^n F(\theta, \mu, \cdot)\|_\infty \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda + \theta}\right)^n$ et donc la fonction $G(\theta, \mu, \cdot)$ est identiquement nulle.

3) Montrons (i), lorsque $\theta = 0$ et $c > \mathbb{E}(J_1)$:

Lemme B.3 *Sous les hypothèses précédentes, nous avons :*

- (i) $G(0, \mu, \cdot)$ est positive et bornée sur $\mathbb{R}_+$,
- (ii) $\Lambda_0 G(0, \mu, \cdot) = G(0, \mu, \cdot)$,
- (iii) $G(0, \mu, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$,
- (iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(0, \mu, x) = 0$.

Démonstration du lemme B.3

- **démonstration de (i) :** Pour tout $x \geq 0$, $F(0, \mu, x) \geq 0$ et Λ_0 est un opérateur positif donc $G(0, \mu, \cdot)$ est positive.

Puisque, dans (B.0.14), tous les termes sont positifs et que, pour tout $x \geq 0$, $0 \leq F(0, \mu, x) \leq 1$ et $\overline{F}(0, \mu, \cdot)$ appartient à $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}_+)$, nous avons, pour tout $x \geq 0$, $0 \leq G(0, \mu, \cdot) \leq 1$.

- **démonstration de (ii) :** (ii) résulte de la définition de $G(0, \mu, \cdot)$ et du fait que Λ_0 est borné, donc continu, dans $\mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}_+)$ (cf. Théorème 5.5, point (i)).

- **démonstration de (iii) :** D'après (B.0.7) et d'après l'alinéa (ii) du Lemme B.3, nous avons :

$$\begin{aligned} G(0, \mu, \cdot)(x) &= \\ &= \frac{1}{\alpha_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_{-\infty}^{(x-y) \wedge x} e^{-ca} (e^{-\alpha_0|a|} - e^{-(2x-a)\alpha_0}) G(0, \mu, x-a-y) da. \end{aligned} \quad (\text{B.0.17})$$

En effectuant le changement de variables $z = x - a - y$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} G(0, \mu, \cdot)(x) &= \\ &= \frac{1}{\alpha_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_{0 \vee (-y)}^{+\infty} e^{-c(x-y-z)} (e^{-\alpha_0|x-y-z|} - e^{-(x+y+z)\alpha_0}) G(0, \mu, z) dz. \end{aligned} \quad (\text{B.0.18})$$

La fonction $\Upsilon : x \rightarrow e^{-c(x-y-z)} (e^{-\alpha_0|x-y-z|} - e^{-(x+y+z)\alpha_0}) G(0, \mu, z)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $y + z \geq 0$, majorons $|\Upsilon|$ sur le compact $[(x_0 - \varepsilon)^+, x_0 + \varepsilon]$, où $x_0 \geq 0$. Plus précisément, pour tout x appartenant à $[(x_0 - \varepsilon)^+, x_0 + \varepsilon]$:

$$\left| |x - y - z| - |x_0 - y - z| \right| \leq |x - x_0| \leq \varepsilon, \quad (\text{B.0.19})$$

et donc

$$\begin{aligned} |\Upsilon(x)| &\leq \|G(0, \mu, \cdot)\|_\infty e^{-c(x_0 - \varepsilon - y - z)} e^{-\alpha_0(|x_0 - y - z| - \varepsilon)} \\ &\leq \|G(0, \mu, \cdot)\|_\infty e^{(c + \alpha_0)\varepsilon} e^{-c(x_0 - y - z)} e^{-\alpha_0|x_0 - y - z|} \end{aligned} \quad (\text{B.0.20})$$

En remplaçant dans le second membre de (B.0.18), $\Upsilon(x)$ par le majorant obtenu en (B.0.20) et en utilisant le changement de variables $a = x_0 - y - z$, nous avons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_{0 \vee (-y)}^{+\infty} \sup_{x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} |\Upsilon(x)| dz \\ & \leq \frac{1}{\alpha_0} \|G(0, \mu, \cdot)\|_{\infty} e^{(c+\alpha_0)\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_{-\infty}^{(x_0-y) \wedge x_0} e^{-ca} e^{-\alpha_0|a|} da \\ & \leq \frac{1}{\alpha_0} \|G(0, \mu, \cdot)\|_{\infty} e^{(c+\alpha_0)\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ca} e^{-\alpha_0|a|} da < \infty. \end{aligned} \quad (\text{B.0.21})$$

Cette dernière intégrale est finie car $\alpha_0 > |c|$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \nu(dy) = \lambda$.

Nous en déduisons, d'après le théorème de convergence dominée, que la fonction $G(0, \mu, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

- démonstration de (iv) : Nous savons que $\overline{F}(0, \mu, \cdot)$ appartient à $\mathcal{B}_{\gamma}$ et donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{F}(0, \mu, x) = 0. \quad (\text{B.0.22})$$

Dans le cas où $\theta = 0$ et la condition de profit net est vérifiée, $c > \mathbb{E}(J_1)$, nous savons d'après (4.1.8), que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(0, 0, x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_x < +\infty) = 0. \quad (\text{B.0.23})$$

Comme $F(0, \mu, x) \leq F(0, 0, x)$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(0, \mu, x) = 0. \quad (\text{B.0.24})$$

Nous pouvons donc conclure que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(0, \mu, x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(0, \mu, x) - \overline{F}(0, \mu, x)) = 0. \quad (\text{B.0.25})$$

□

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la démonstration de la Proposition B.2.

D'après (B.0.17), (5.3.53) et (5.3.54), nous avons, pour tout $x \geq 0$:

$$G(0, \mu, x) = \Lambda_0 G(0, \mu, \cdot)(x) \leq \|G(0, \mu, \cdot)\|_{\infty}. \quad (\text{B.0.26})$$

D'après l'inégalité stricte (5.3.53), l'inégalité (B.0.26) est stricte dès que

$\|G(0, \mu, \cdot)\|_\infty \neq 0$. Comme $G(0, \mu, \cdot)$ est continue et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (cf. Lemme B.3, (iii) et (iv)), elle atteint son maximum en un point $x_0 \geq 0$, donc $G(0, \mu, \cdot) \equiv 0$. Ceci achève la démonstration de la Proposition B.2.

□

Annexe C

Exemple de processus où ν est de densité gamma

C.1 Introduction

C.1.1 But de cette annexe

Soit le processus $(X_t, t \geq 0)$ défini par :

$$X_t := B_t - ct + J_t, \quad (\text{C.1.1})$$

où $c \in \mathbb{R}$, $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien linéaire, issu de 0 et $(J_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson composé, de mesure de Lévy ν , tel que $J_0 = 0$, indépendant de $(B_t, t \geq 0)$.

Le but de cette annexe est de développer un exemple simple où nous choisissons explicitement la mesure de Lévy ν , de masse finie et de la forme :

$$\nu(dy) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} y^{a-1} e^{-by} \mathbb{1}_{\{y>0\}} dy. \quad (\text{C.1.2})$$

où $a \in \mathbb{N}^*$ et $b > 0$ sont des constantes données.

Pour cet exemple, nous démontrons les deux résultats suivants :

1. Nous démontrons que pour tout $\theta \geq 0$, tout $\mu \geq 0$ et tout $x \geq 0$,

$F(\theta, \mu, x)$ se calcule explicitement (cf. Théorème C.1) :

$$F(\theta, \mu, x) = \sum_{i=0}^{q-1} C_i(\theta, \mu) e^{-\gamma_i(\theta)x} + \sum_{i=1}^p (D_i(\theta, \mu) e^{-\rho_i(\theta)x} + \overline{D}_i(\theta, \mu) e^{-\overline{\rho}_i(\theta)x}) , \quad (\text{C.1.3})$$

où q est le nombre de zéros réels de φ_θ , notés $-\gamma_i(\theta)$, et $2p$ est le nombre de zéros non réels, notés $-\rho_i(\theta)$ et $-\overline{\rho}_i(\theta)$.

Ainsi, nous consacrons tout d'abord un paragraphe, C.2, à l'étude de la fonction φ_θ et de ses pôles.

2. Nous démontrons qu'avec la condition de profit net, $c > \frac{a}{b}$, la loi de l'overshoot K_x (défini sur $\{T_x < +\infty\}$, est égale à (cf. Théorème C.4) :

$$w_x(dz) = A_0(x) \delta_0(dz) + A_1(x) e^{-bz} \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz . \quad (\text{C.1.4})$$

où

$$A_0(x) = \sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i e^{-\gamma_i(0)x} + \sum_{i=1}^p (\beta_i e^{-\rho_i(0)x} + \overline{\beta}_i e^{-\overline{\rho}_i(0)x}) \quad (\text{C.1.5})$$

$$\text{et } A_1(x) = \sum_{i=0}^{q-1} P_i(z) e^{-\gamma_i(0)x} + \sum_{i=1}^p (Q_i(z) e^{-\rho_i(0)x} + \overline{Q}_i(z) e^{-\overline{\rho}_i(0)x}) \quad (\text{C.1.6})$$

avec α_i et β_i des constantes et P_i et Q_i des polynômes de degré $a - 1$.

3. Nous étudions deux cas particuliers : nous choisissons dans (C.1.2), $a = 1$ puis $a = 2$. Nous effectuons alors des calculs précis, en particulier nous donnons explicitement, sous la condition de profit net, la loi de l'overshoot K_x (défini sur $\{T_x < +\infty\}$) :

1) Pour $a = 1$,

$$w_x(dz) = \left(\frac{q_1 e^{q_1 x}}{2\varphi'(q_1)} + \frac{q_2 e^{q_2 x}}{2\varphi'(q_2)} + \frac{\overline{q}_2 e^{\overline{q}_2 x}}{2\varphi'(\overline{q}_2)} \right) \delta_0(dz) + (P_1(z) e^{q_1 z} + P_2(z) e^{q_2 z} + \overline{P}_2(z) e^{\overline{q}_2 z}) e^{-bz} \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz \quad (\text{C.1.7})$$

où q_1 et q_2 sont les zéros non nuls de φ et P_i avec $i \in \{1, 2\}$ est le polynôme, de degré 0, défini par :

$$P_i(z) = \frac{q_i}{(b + q_i) \varphi'(q_i)} , \quad (\text{C.1.8})$$

2) Pour $a = 2$,

$$w_x(dz) = \left(\frac{q_1 e^{q_1 x}}{2\varphi'(q_1)} + \frac{q_2 e^{q_2 x}}{2\varphi'(q_2)} + \frac{\bar{q}_2 e^{\bar{q}_2 x}}{2\varphi'(\bar{q}_2)} \right) \delta_0(dz) \\ + (P_1(z)e^{q_1 x} + P_2(z)e^{q_2 x} + \bar{P}_2(z)e^{\bar{q}_2 x}) e^{-bz} \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz \quad (\text{C.1.9})$$

où q_1 , q_2 et $\bar{q}_2$ sont les zéros non nuls de φ et P_i avec $i \in \{1, 2\}$ est le polynôme, de degré 1, défini par :

$$P_i(z) = \frac{1}{\varphi'(q_i)} \left[\frac{q_i}{b + q_i} z + 1 + \frac{b^2}{(b + q_i)^2} \right]. \quad (\text{C.1.10})$$

Enfin, nous précisons la probabilité de ruine ; ainsi, sous la condition de profit net :

1) Pour $a = 1$,

$$\mathbb{P}(T_x < +\infty) = -\frac{\varphi'(0)}{\varphi'(q_1)} e^{q_1 x} - \frac{\varphi'(0)}{\varphi'(q_2)} e^{q_2 x}, \quad (\text{C.1.11})$$

2) Pour $a = 2$,

$$\mathbb{P}(T_x < +\infty) = -\frac{\varphi'(0)}{\varphi'(q_1)} e^{q_1 x} - \frac{\varphi'(0)}{\varphi'(q_2)} e^{q_2 x} - \frac{\varphi'(0)}{\varphi'(\bar{q}_2)} e^{\bar{q}_2 x}. \quad (\text{C.1.12})$$

Des calculs similaires ont déjà été réalisés par plusieurs auteurs, citons en particulier :

1. S.G. Kou et H. Wang ([KW01]) étudient le cas où :

$$\nu(dy) := (p\eta_1 e^{-\eta_1 y} \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}} + q\eta_2 e^{\eta_2 y} \mathbb{1}_{\{y < 0\}}) dy, \quad (\text{C.1.13})$$

où $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q = 1$, $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$.

Ils calculent explicitement alors la loi de l'overshoot $X_{T_x} - x$ (cf. Proposition 3.1, page 8) et la transformée de laplace de la loi de T_x (cf. proposition 3.2, page 9).

2. F. Dufresne et H.U. Gerber (cf. [DG90]) étudient le cas où (cf. 4.6.38) :

$$\nu(dy) := \left(\sum_{i=1}^n A_i \beta_i e^{-\beta_i y} \mathbb{1}_{\{y \geq 0\}} \right) dy, \quad (\text{C.1.14})$$

et calculent explicitement la probabilité de ruine (cf. 4.6.39) :

$$\mathbb{P}(T_x < +\infty) = \sum_{k=1}^{n+1} C_k e^{-r_k x}. \quad (\text{C.1.15})$$

Leurs calculs sont plus généraux que notre exemple lorsque $a = 1$.

C.1.2 Notations et remarques

La transformée de Laplace de la mesure ν est définie, pour tout $q > -b$, par :

$$\widehat{\nu}(q) := \int_0^{+\infty} e^{-qy} \nu(dy) = \left(\frac{1}{1 + \frac{q}{b}} \right)^a. \quad (\text{C.1.16})$$

Puisque ν ne charge que $\mathbb{R}_+$, nous avons :

$$r_\nu^* = +\infty, \quad (\text{C.1.17})$$

et d'après la définition de r_ν (cf. (5.3.44)), nous avons :

$$r_\nu = b. \quad (\text{C.1.18})$$

Remarquons que nous avons :

$$\mathbb{E}(J_1) = \int_0^{+\infty} y \frac{b^a}{\Gamma(a)} y^{a-1} e^{-by} dy = \frac{1}{b} \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = \frac{a}{b}. \quad (\text{C.1.19})$$

La fonction $\varphi_\theta : q \rightarrow \varphi(q) - \theta$ se calcule explicitement :

$$\begin{aligned} \varphi_\theta(q) &= \frac{q^2}{2} + cq + \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - 1) \nu(dy) - \theta \\ &= \frac{q^2}{2} + cq - (1 + \theta) + \frac{1}{\left(1 + \frac{q}{b}\right)^a}. \end{aligned} \quad (\text{C.1.20})$$

Ainsi φ_θ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} - \{-b\}$ et nous constatons donc que les hypothèses du Théorème 7.3 sont satisfaites. Nous noterons encore φ_θ son prolongement méromorphe.

Pour tout $\theta \geq 0$ et tout $\mu \geq 0$, soit la fonction $F(\theta, \mu, \cdot)$ définie par :

$$F(\theta, \mu, x) := \mathbb{E} \left(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x < \infty\}} \right) \quad \forall x \geq 0. \quad (\text{C.1.21})$$

D'après (6.1.10), $F(\theta, \mu, \cdot)$ a pour transformée de Laplace $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$ définie, pour tout $q \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(q) > 0$, par :

$$\begin{aligned} \widehat{F}(\theta, \mu, q) &= \int_0^{+\infty} e^{-qx} F(\theta, \mu, x) dx \\ &= \frac{1}{\varphi_\theta(q)} \left[\frac{q - \gamma_0^*(\theta)}{2} + \frac{1}{q - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-qy} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.1.22})$$

où $\gamma_0^*(\theta)$ est l'unique réel vérifiant :

$$\gamma_0^*(\theta) \geq 0 \quad \text{et} \quad \varphi_\theta(\gamma_0^*(\theta)) = 0. \quad (\text{C.1.23})$$

avec

$$\text{si } \theta > 0, \quad \gamma_0^*(\theta) > 0 \quad (\text{C.1.24})$$

$$\text{si } \theta = 0 \quad \text{et} \quad c < \mathbb{E}(J_1), \quad \gamma_0^*(0) > 0 \quad (\text{C.1.25})$$

$$\text{si } \theta = 0 \quad \text{et} \quad c \geq \mathbb{E}(J_1), \quad \gamma_0^*(0) = 0. \quad (\text{C.1.26})$$

Comme $\varphi_\theta, \widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$ admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Nous avons vu au paragraphe 7 que les zéros de φ_θ , pôles de $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$, jouent un rôle déterminant dans le comportement de $F(\theta, \mu, \cdot)$ à l'infini.

Nous savons d'autre part que $\gamma_0^*(\theta)$ est une fausse singularité pour $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$ et que $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$ n'a pas de singularité sur $\{q \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} q > 0\}$. L'étude de la fonction φ_θ est l'objet des deux paragraphes suivants.

C.2 Etude de φ_θ

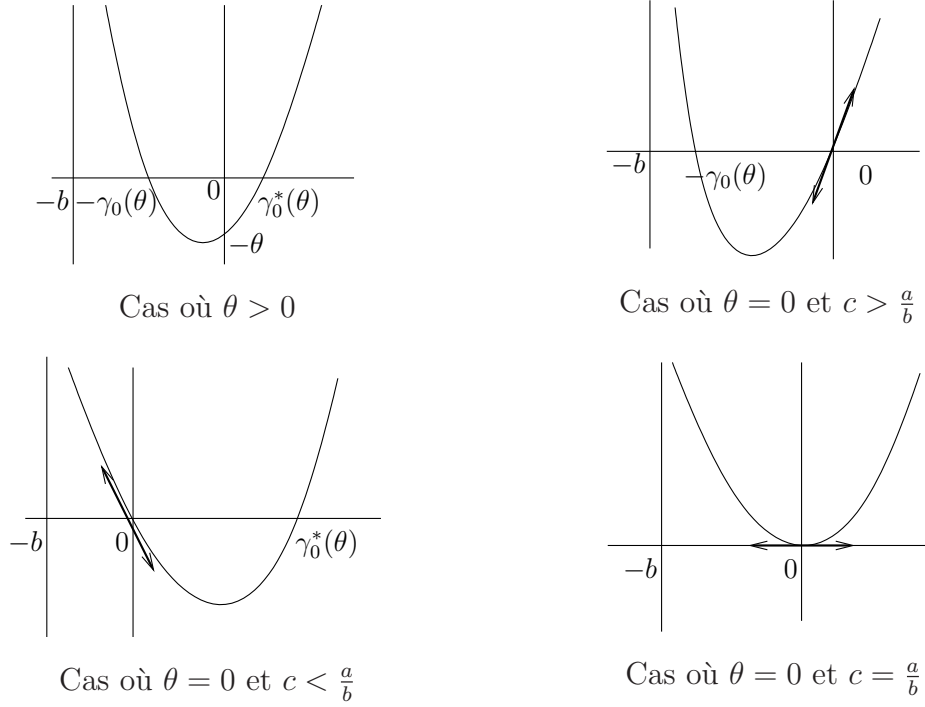
C.2.1 Etude de φ_θ sur $\mathbb{R}$

Nous avons :

$$\varphi'_\theta(q) = q + c - \frac{a}{b} \frac{1}{\left(1 + \frac{q}{b}\right)^{a+1}} \quad (\text{C.2.27})$$

$$\varphi''_\theta(q) = 1 + \frac{a(a+1)}{b^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{q}{b}\right)^{a+2}}. \quad (\text{C.2.28})$$

- La présence dans (C.2.27) du facteur $\frac{1}{\left(1 + \frac{q}{b}\right)^{a+1}}$ indique que les variations de φ_θ , sur $] -\infty, -b[$, dépendent de la parité de a , ce qui n'est pas le cas sur $] -b, +\infty[$.
- La présence dans (C.2.28) du facteur $\frac{1}{\left(1 + \frac{q}{b}\right)^{a+2}}$ montre que φ_θ est convexe sur $] -b, +\infty[$, tandis que cette convexité dépend, sur $] -\infty, -b[$, de la parité de a .

FIG. C.1 – Graphe de φ_θ sur $] -b, +\infty[$

C.2.2 Etude de φ_θ sur $] -b, +\infty[$

φ_θ est donc convexe sur $] -b, +\infty[$ et vérifie :

$$\varphi_\theta(0) = -\theta \quad (\text{C.2.29})$$

$$\varphi'_\theta(0) = c - \frac{a}{b} \quad (\text{C.2.30})$$

$$\lim_{q \rightarrow (-b)^+} \varphi_\theta(q) = +\infty \quad (\text{C.2.31})$$

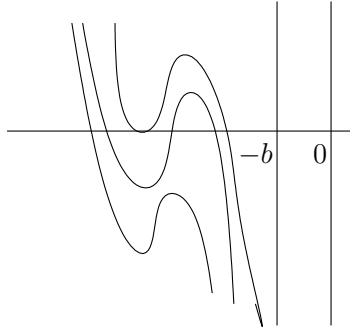
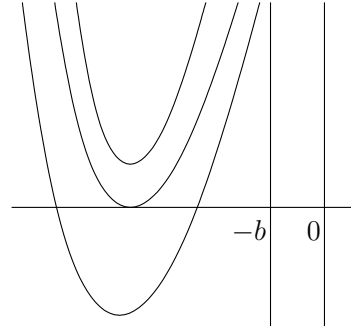
$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \varphi_\theta(q) = +\infty. \quad (\text{C.2.32})$$

Nous en déduisons que (cf. Figure C.1) :

1. Si $\theta > 0$, φ_θ admet dans $] -b, +\infty[$, deux zéros réels $-\gamma_0(\theta) < 0$ et $\gamma_0^*(\theta) > 0$.
2. Si $\theta = 0$ et $c > \frac{a}{b}$ (condition de profit net), $\varphi'(0) > 0$ et φ s'annule en 0 et pour un réel, noté $-\gamma_0(0)$, appartenant à $] -b, 0[$.

3. Si $\theta = 0$ et $c < \frac{a}{b}$, $\varphi'(0) < 0$ et φ s'annule en 0 et pour un réel, noté $\gamma_0^*(0)$, appartenant, à $]0, +\infty[$.
4. Si $\theta = 0$ et $c = \frac{a}{b}$, $\varphi'(0) = 0$ et φ ne s'annule qu'en 0.

C.2.3 Etude de φ_θ sur $] -\infty, -b[$

Cas où a est impairCas où a est pairFIG. C.2 – Graphe de φ_θ sur $] -\infty, -b[$

Etude du cas où a est impair Nous avons alors :

$$\varphi_\theta'''(q) = -\frac{a(a+1)(a+2)}{b^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{q}{b}\right)^{a+3}} < 0 \quad \forall q < -b, \quad (\text{C.2.33})$$

$$\lim_{q \rightarrow -\infty} \varphi_\theta''(q) = 1, \quad (\text{C.2.34})$$

$$\lim_{q \rightarrow (-b)^-} \varphi_\theta''(q) = -\infty. \quad (\text{C.2.35})$$

Ainsi φ_θ'' est strictement décroissante sur $] -\infty, -b[$ et s'annule une seule fois en une valeur $\rho < -b$. D'après (C.2.34) et (C.2.35), φ_θ'' est positive sur $] -\infty, \rho]$ et négative sur $[\rho, -b[$. Nous en déduisons que φ_θ est convexe sur $] -\infty, \rho]$ et concave sur $[\rho, -b[$. Comme

$$\lim_{q \rightarrow -\infty} \varphi_\theta(q) = +\infty \quad (\text{C.2.36})$$

$$\lim_{q \rightarrow (-b)^-} \varphi_\theta(q) = -\infty, \quad (\text{C.2.37})$$

alors φ_θ admet sur $] -\infty, -b[$ soit un seul zéro réel, soit trois zéros dont un double possible. (cf. Figure C.2, cas où a est impair).

Etude du cas où a est pair Nous avons, d'après (C.2.28) :

$$\forall q \in]-\infty, -b[, \quad \varphi''(q) > 0. \quad (\text{C.2.38})$$

Nous en déduisons que φ_θ est convexe sur $] -\infty, -b[$. De plus, nous avons :

$$\lim_{q \rightarrow -\infty} \varphi_\theta(q) = +\infty \quad (\text{C.2.39})$$

$$\lim_{q \rightarrow (-b)^-} \varphi_\theta(q) = +\infty. \quad (\text{C.2.40})$$

Ainsi φ_θ peut avoir deux racines (une double possible) ou aucune racine réelle sur $] -\infty, -b[$ (cf. Figure C.2, cas où a est pair).

C.2.4 Etude de φ_θ sur $\mathbb{C} - \{-b\}$

Nous avons démontré dans le cas général (cf. Proposition A.5), que φ_θ n'a pas de zéro sur la bande $\{q \in \mathbb{C} / -\gamma_0(\theta) \leq \operatorname{Re} q \leq \gamma_0^*(\theta)\}$ autres que $-\gamma_0(\theta)$ et $\gamma_0^*(\theta)$ avec la convention que $-\gamma_0(\theta)$ désigne le zéro réel de φ_θ dans $] -b, 0]$ et que $\gamma_0^*(\theta)$ désigne le zéro réel de φ_θ dans $[0, +\infty[$.

Par ailleurs, nous pouvons écrire, pour tout complexe $q \neq -b$:

$$\varphi_\theta(q) = \frac{1}{\left(1 + \frac{q}{b}\right)^a} \left[\left(\frac{q^2}{2} + cq - (1 + \theta) \right) \left(1 + \frac{q}{b} \right)^a + 1 \right]. \quad (\text{C.2.41})$$

Le numérateur de $\varphi_\theta(q)$ est un polynôme de degré $a + 2$, il admet donc $a + 2$ racines complexes et donc :

1. Si a est impair, φ_θ admet trois ou cinq racines réelles (une double possible) dont $-\gamma_0(\theta)$ et $\gamma_0^*(\theta)$ et $a - 1$ ou $a - 3$ racines complexes, non réelles et conjuguées deux à deux. Notons que $a - 1$ ou $a - 3$ sont des nombres impairs.
2. Si a est pair, φ_θ admet deux ou quatre racines réelles (une double possible) dont $-\gamma_0(\theta)$ et $\gamma_0^*(\theta)$ et $a - 2$ ou $a - 4$ racines complexes, non réelles et conjuguées deux à deux. Notons que $a - 2$ ou $a - 4$ sont des nombres pairs.

C.3 Expression de $F(\theta, \mu, x)$ pour $\theta \geq 0$, $\mu \geq 0$ et $x \geq 0$

Théorème C.1

Pour tout $\theta \geq 0$, tout $\mu \geq 0$ et tout $x \geq 0$, $F(\theta, \mu, x)$ se calcule explicitement :

$$F(\theta, \mu, x) = \sum_{i=0}^{q-1} C_i(\theta, \mu) e^{-\gamma_i(\theta)x} + \sum_{i=1}^p (D_i(\theta, \mu) e^{-\rho_i(\theta)x} + \overline{D_i}(\theta, \mu) e^{-\overline{\rho_i}(\theta)x}) , \quad (\text{C.3.42})$$

où q est le nombre de zéros réels et $2p$ le nombre de zéros non réels de φ_θ ,

$$\operatorname{Re}(-\rho_p(\theta)) < \cdots < \operatorname{Re}(-\rho_1(\theta)) < -\gamma_0(\theta) \leq 0, \quad (\text{C.3.43})$$

$$-\gamma_{q-1}(\theta) < \cdots < -\gamma_1(\theta) < -\gamma_0(\theta) \leq 0, \quad (\text{C.3.44})$$

et les constantes $C_i(\theta, \mu)$ sont des réels et les $D_i(\theta, \mu)$ sont des complexes.

Démonstration du Théorème C.1

(i) Nous rappelons que les pôles de $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$ sont les zéros de φ_θ hormis $\gamma_0^*(\theta)$, fausse singularité de $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$. D'après l'étude faite au paragraphe C.2.4, $\widehat{F}(\theta, \mu, \cdot)$ admet donc $n \leq a + 1$ pôles :

1. q pôles réels (deux ou quatre si a est impair et un ou trois si a est pair), notés $-\gamma_i(\theta)$,
2. $2p$ pôles complexes, non réels, conjugués deux à deux, notés $-\rho_i(\theta)$, tels que :

$$\operatorname{Re}(-\rho_p(\theta)) < \cdots < \operatorname{Re}(-\rho_1(\theta)) < -\gamma_0(\theta) \leq 0. \quad (\text{C.3.45})$$

(ii) D'après (C.1.22), (C.1.16) et (C.1.2), nous avons :

$$\begin{aligned} \widehat{F}(\theta, \mu, q) = & \frac{1}{\varphi_\theta(q)} \left[\frac{q - \gamma_0^*(\theta)}{2} + \frac{1}{q - \mu} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{q}{b}\right)^a} - \frac{1}{\left(1 + \frac{\mu}{b}\right)^a} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma_0^*(\theta)}{b}\right)^a} - \frac{1}{\left(1 + \frac{\mu}{b}\right)^a} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.3.46})$$

où $\varphi_\theta(q)$ est donné en (C.1.20).

Remarquons que pour $\theta \geq 0$ et $\mu \geq 0$ fixés, $\widehat{F}(\theta, \mu, q)$ est une fraction rationnelle en q . Comme $\lim_{q \rightarrow +\infty} \widehat{F}(\theta, \mu, q) = 0$, cette fraction rationnelle est de degré négatif. Ainsi, $\widehat{F}(\theta, \mu, q)$ se décompose dans $\mathbb{C}$, en éléments simples, sous la forme :

$$\widehat{F}(\theta, \mu, q) = \sum_{i=0}^{q-1} \frac{C_i(\theta, \mu)}{q + \gamma_i(\theta)} + \sum_{i=1}^p \left(\frac{D_i(\theta, \mu)}{q + \rho_i(\theta)} + \frac{\overline{D}_i(\theta, \mu)}{q + \overline{\rho}_i(\theta)} \right), \quad (\text{C.3.47})$$

où les $-\gamma_i(\theta)$ et les $-\rho_i(\theta)$ sont les pôles réels et complexes de φ_θ (cf. le point (i) ci-dessus).

Par inversion de la transformée de Laplace, le Théorème C.1 en résulte.

Remarque C.2

Notre Théorème 7.3 fournit également une démonstration du Théorème C.1. En effet, d'après ce Théorème 7.3, pour tout $\theta \geq 0$, tout $\mu \geq 0$ et tout A tel que $-A < \inf_{i,j} (-\gamma_i(\theta), \operatorname{Re}(-\rho_j(\theta)))$, $F(\theta, \mu, \cdot)$ admet, quand x tend vers $+\infty$, un développement asymptotique de la forme :

$$F(\theta, \mu, x) = \sum_{i=0}^{q-1} C_i(\theta, \mu) e^{-\gamma_i(\theta)x} + \sum_{i=1}^p (D_i(\theta, \mu) e^{-\rho_i(\theta)x} + \overline{D}_i(\theta, \mu) e^{-\overline{\rho}_i(\theta)x}) + O(e^{-Ax}), \quad (\text{C.3.48})$$

où O est uniforme en $\mu \in \mathbb{R}_+$ et en $\theta \in \mathbb{R}_+$.

Nous allons montrer qu'en fait $\lim_{A \rightarrow +\infty} O(e^{-Ax}) = 0$ et donc que nous obtenons (C.3.42).

D'après le Lemme 7.7 et en utilisant l'écriture (7.1.35), nous avons :

$$\begin{aligned}
O(e^{-Ax}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-A+it)x} \widehat{F}(\theta, \mu, -A+it) dt \\
&= e^{-Ax} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \left[\frac{e^{-A+it} - 1}{(-A+it)^2} - \frac{\gamma_0^*(\theta)}{(-A+it)(-A+it+\gamma_0^*(\theta))} \right. \\
&\quad + \frac{1}{\varphi(-A+it) - \theta} \left(c \frac{-A+it - \gamma_0^*(\theta)}{-A+it+\gamma_0^*(\theta)} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{-(A+it)y} - e^{-\gamma_0^*(\theta)y})}{-A+it+\gamma_0^*(\theta)} \nu(dy) \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_0^{+\infty} \frac{(e^{-(A+it)y} - e^{-\mu y})}{-A+it-\mu} \nu(dy) - \int_0^{+\infty} \frac{(e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{-\mu y})}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \nu(dy) \right) \right] dt.
\end{aligned} \tag{C.3.49}$$

Remarquons que d'après (C.1.20), nous avons $\varphi_\theta(q) \sim_{|q| \rightarrow +\infty} q^2$ et donc, φ_θ ne s'annulant jamais pour $q \leq \inf_{i,j} (-\gamma_i(\theta), -\operatorname{Re}(\rho_j(\theta)))$, nous montrons, en appliquant le Théorème de Lebesgue, que $\lim_{A \rightarrow +\infty} O(e^{-Ax}) = 0$.

Remarque C.3

Comme ν ne charge que $\mathbb{R}_+$, si les zéros de φ_θ sont des zéros simples dont la partie réelle est supérieure à $-b$, (7.2.104) donne les coefficients $C_i(\theta, \mu)$ et $D_i(\theta, \mu)$ explicitement, i.e. :

$$\begin{aligned}
C_i(\theta, \mu) &= \frac{1}{\varphi'(-\gamma_i(\theta))} \left[\frac{-\gamma_i(\theta) - \gamma_0^*(\theta)}{2} + \frac{1}{-\gamma_i(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{\gamma_i(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right].
\end{aligned} \tag{C.3.50}$$

et

$$\begin{aligned}
D_i(\theta, \mu) &= \frac{1}{\varphi'(-\rho_i(\theta))} \left[\frac{-\rho_i(\theta) - \gamma_0^*(\theta)}{2} + \frac{1}{-\rho_i(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{\rho_i(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\gamma_0^*(\theta) - \mu} \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma_0^*(\theta)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right].
\end{aligned} \tag{C.3.51}$$

Si par contre, la partie réelle des zéros de φ_θ est inférieure à $-b$, il convient de remplacer dans les formules ci-dessus, φ et $\widehat{\nu}$ par leur prolongement méromorphe.

C.4 Calcul de la loi de l'overshoot

Nous supposons dans ce paragraphe que la condition de profit net, $c > \frac{a}{b}$ est vérifiée.

En utilisant (C.3.42) avec $\theta = 0$, nous allons déterminer la loi de l'overshoot K_x , conditionnellement à $\{T_x < +\infty\}$, en inversant la transformée de Laplace en μ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(e^{-\mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}} \right) &= \sum_{i=0}^{q-1} C_i(0, \mu) e^{-\gamma_i(0)x} \\ &\quad + \sum_{i=1}^p \left(D_i(0, \mu) e^{-\rho_i(0)x} + \bar{D}_i(0, \mu) e^{-\bar{\rho}_i(0)x} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.4.52})$$

Il est clair que les $C_i(0, \mu)$ et les $D_i(0, \mu)$ sont des transformées de Laplace en μ de mesures que nous allons déterminer.

Théorème C.4

Nous supposons que tous les zéros de φ sont des zéros simples et que la condition de profit net $c > \frac{a}{b}$ est vérifiée.

- (i) Il existe des constantes α_i , $i \in \{0, \dots, q-1\}$ et β_i , $i \in \{1, \dots, p\}$ et des polynômes, de degré $a-1$, P_i , $i \in \{0, \dots, q-1\}$ et Q_i , $i \in \{1, \dots, p\}$ tels que la loi de la v.a. K_x (définie sur $\{T_x < +\infty\}$) soit égale à :

$$\begin{aligned} w_x(dz) &= \left[\sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i e^{-\gamma_i(0)x} + \sum_{i=1}^p \left(\beta_i e^{-\rho_i(0)x} + \bar{\beta}_i e^{-\bar{\rho}_i(0)x} \right) \right] \delta_0(dz) \\ &\quad + \left[\sum_{i=0}^{q-1} P_i(z) e^{-\gamma_i(0)x} + \sum_{i=1}^p \left(Q_i(z) e^{-\rho_i(0)x} + \bar{Q}_i(z) e^{-\bar{\rho}_i(0)x} \right) \right] e^{-bz} \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz. \end{aligned} \quad (\text{C.4.53})$$

- (ii) Les constantes α_i et β_i sont données par :

$$\alpha_i = \frac{-\gamma_i(0)}{2\varphi'(-\gamma_i(0))} \quad \text{et} \quad \beta_i = \frac{-\rho_i(0)}{2\varphi'(-\rho_i(0))}. \quad (\text{C.4.54})$$

(iii) Les polynômes P_i et Q_i sont explicites :

$$P_i(z) = \frac{e^{bz}}{\varphi'(-\gamma_i(0))} \left(\frac{\Gamma(a, bz)}{\Gamma(a)} - \frac{e^{-\gamma_i(0)z}}{\left(1 - \frac{\gamma_i(0)}{b}\right)^a} \frac{\Gamma(a, (-\gamma_i(0) + b)z)}{\Gamma(a)} \right), \quad (\text{C.4.55})$$

$$Q_i(z) = \frac{e^{bz}}{\varphi'(-\rho_i(0))} \left(\frac{\Gamma(a, bz)}{\Gamma(a)} - \frac{e^{-\rho_i(0)z}}{\left(1 - \frac{\rho_i(0)}{b}\right)^a} \frac{\Gamma(a, (-\rho_i(0) + b)z)}{\Gamma(a)} \right), \quad (\text{C.4.56})$$

où la fonction $Z \rightarrow \Gamma(a, Z)$ est le prolongement holomorphe de la fonction définie pour $X \in \mathbb{R}_+$ par :

$$\Gamma(a, X) := \int_X^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt. \quad (\text{C.4.57})$$

(iv) La loi de K_x , conditionnellement à $\{T_x < +\infty\}$ est égale à :

$$\tilde{w}_x(dz) = \frac{w_x(dz)}{F(0, 0, x)}. \quad (\text{C.4.58})$$

Remarque C.5

1. La formule (C.4.58) permet de retrouver aisément :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{w}_x(dz) = w(dz), \quad (\text{C.4.59})$$

où $w(dz)$ est défini par la formule (10.1.1) énoncée au Théorème 10.1.

2. Dans les situations de non profit net, $c \leq \frac{a}{b}$, nous pouvons obtenir des formules analogues :

Si $c < \frac{a}{b}$,

$$\begin{aligned} w_x(dz) = & \left[\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i e^{-\gamma_i(0)x} + \sum_{i=1}^p (\beta_i e^{-\rho_i(0)x} + \bar{\beta}_i e^{-\bar{\rho}_i(0)x}) \right] \delta_0(dz) \\ & + \left[P_0(z) + \sum_{i=1}^{q-1} P_i(z) e^{-\gamma_i(0)x} \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^p (Q_i(z) e^{-\rho_i(0)x} + \bar{Q}_i(z) e^{-\bar{\rho}_i(0)x}) \right] e^{-bz} \mathbf{1}_{\{z \geq 0\}} dz, \quad (\text{C.4.60}) \end{aligned}$$

avec

$$\alpha_0 = \frac{-\gamma_0^*(0)}{2\varphi'(0)} \quad \text{et} \quad \alpha_i = \frac{-\gamma_i(0) - \gamma_0^*(0)}{2\varphi'(-\gamma_i(0))} \quad \text{et} \quad \beta_i = \frac{-\rho_i(0) - \gamma_0^*(0)}{2\varphi'(-\rho_i(0))} \quad (\text{C.4.61})$$

et

$$P_0(z) = \frac{e^{bz}}{\varphi'(0)} \left(\frac{e^{\gamma_0^*(0)z}}{\left(1 + \frac{\gamma_0^*(0)}{b}\right)^a} \frac{\Gamma(a, (\gamma_0^*(0) + b)z)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma(a, bz)}{\Gamma(a)} \right), \quad (\text{C.4.62})$$

$$P_i(z) = \frac{e^{bz}}{\varphi'(-\gamma_i(0))} \left(\frac{e^{\gamma_0^*(0)z}}{\left(1 + \frac{\gamma_0^*(0)}{b}\right)^a} \frac{\Gamma(a, (\gamma_0^*(0) + b)z)}{\Gamma(a)} - \frac{e^{-\gamma_i(0)z}}{\left(1 - \frac{\gamma_i(0)}{b}\right)^a} \frac{\Gamma(a, (-\gamma_i(0) + b)z)}{\Gamma(a)} \right), \quad (\text{C.4.63})$$

$$Q_i(z) = \frac{e^{bz}}{\varphi'(-\rho_i(0))} \left(\frac{e^{\gamma_0^*(0)z}}{\left(1 + \frac{\gamma_0^*(0)}{b}\right)^a} \frac{\Gamma(a, (\gamma_0^*(0) + b)z)}{\Gamma(a)} - \frac{e^{-\rho_i(0)z}}{\left(1 - \frac{\rho_i(0)}{b}\right)^a} \frac{\Gamma(a, (-\rho_i(0) + b)z)}{\Gamma(a)} \right). \quad (\text{C.4.64})$$

Si $c = \frac{a}{b}$,

$$\begin{aligned} w_x(dz) = & \left[\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q-1} \alpha_i e^{-\gamma_i(0)x} + \sum_{i=1}^p (\beta_i e^{-\rho_i(0)x} + \bar{\beta}_i e^{-\bar{\rho}_i(0)x}) \right] \delta_0(dz) \\ & + \left[P_0(z) + \sum_{i=1}^{q-1} P_i(z) e^{-\gamma_i(0)x} \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^p (Q_i(z) e^{-\rho_i(0)x} + \bar{Q}_i(z) e^{-\bar{\rho}_i(0)x}) \right] e^{-bz} \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz, \quad (\text{C.4.65}) \end{aligned}$$

avec

$$\alpha_0 = \frac{1}{\varphi''(0)} \quad \text{et} \quad \alpha_i = \frac{-\gamma_i(0)}{2\varphi'(-\gamma_i(0))} \quad \text{et} \quad \beta_i = \frac{-\rho_i(0)}{2\varphi'(-\rho_i(0))} \quad (\text{C.4.66})$$

et

$$P_0(z) = \frac{2 e^{bz}}{\varphi''(0)} \left(\frac{\Gamma(a+1, bz)}{b \Gamma(a)} - z \frac{\Gamma(a, bz)}{\Gamma(a)} \right), \quad (\text{C.4.67})$$

$$P_i(z) = \frac{e^{bz}}{\varphi'(-\gamma_i(0))} \left(\frac{\Gamma(a, bz)}{\Gamma(a)} - \frac{e^{-\gamma_i(0)z}}{\left(1 - \frac{\gamma_i(0)}{b}\right)^a} \frac{\Gamma(a, (-\gamma_i(0) + b)z)}{\Gamma(a)} \right), \quad (\text{C.4.68})$$

$$Q_i(z) = \frac{e^{bz}}{\varphi'(-\rho_i(0))} \left(\frac{\Gamma(a, bz)}{\Gamma(a)} - \frac{e^{-\rho_i(0)z}}{\left(1 - \frac{\rho_i(0)}{b}\right)^a} \frac{\Gamma(a, (-\rho_i(0) + b)z)}{\Gamma(a)} \right). \quad (\text{C.4.69})$$

Démonstration du Théorème C.4

Nous supposons, dans un premier temps que $-\gamma_i(0)$ et $-\rho_i(0)$ ont leur partie réelle supérieure à $-b$.

D'après la remarque C.3 et comme nous sommes dans la situation de profit net, $\gamma_0^*(0) = 0$, alors nous avons :

$$\begin{aligned} C_i(0, \mu) = & \frac{1}{\varphi'(-\gamma_i(0))} \left[\frac{-\gamma_i(0)}{2} - \frac{1}{\mu + \gamma_i(0)} \int_0^{+\infty} (e^{\gamma_i(0)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.4.70})$$

et

$$\begin{aligned} D_i(0, \mu) = & \frac{1}{\varphi'(-\rho_i(0))} \left[\frac{-\rho_i(0)}{2} - \frac{1}{\mu + \rho_i(0)} \int_0^{+\infty} (e^{\rho_i(0)y} - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\mu y}) \nu(dy) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.4.71})$$

Nous faisons les calculs avec $C_i(0, \mu)$, ceux pour $D_i(0, \mu)$ s'en déduisant en remplaçant $-\gamma_i(0)$ par $-\rho_i(0)$. d'où

$$\begin{aligned} C_i(0, \mu) = & \frac{1}{\varphi'(-\gamma_i(0))} \left[\frac{-\gamma_i(0)}{2} - \int_0^{+\infty} e^{\gamma_i(0)y} \left(\int_0^y e^{-(\mu + \gamma_i(0))z} dz \right) \nu(dy) \right. \\ & \left. + \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x e^{-\mu z} dz \right) \nu(dy) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.4.72})$$

Ainsi

$$C_i(0, \mu) = \frac{1}{\varphi'(-\gamma_i(0))} \left[\frac{-\gamma_i(0)}{2} - \int_0^{+\infty} e^{-\mu z} \left(\int_z^{+\infty} e^{\gamma_i(0)(y-z)} \nu(dy) \right) dz \right. \\ \left. + \int_0^{+\infty} e^{-\mu z} \left(\int_z^{+\infty} \nu(dy) \right) dz \right]. \quad (\text{C.4.73})$$

Nous déduisons de (C.4.73) :

$$C_i(0, \mu) = \int_0^{+\infty} e^{-\mu z} w^{(i)}(dz), \quad (\text{C.4.74})$$

avec :

$$w^{(i)}(dz) = \frac{1}{\varphi'(-\gamma_i(0))} \left[\frac{-\gamma_i(0)}{2} \delta_0(dz) - \left(\int_z^{+\infty} (e^{\gamma_i(0)(y-z)} - 1) \nu(dy) \right) \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz \right]. \quad (\text{C.4.75})$$

Utilisant alors (C.1.2), nous avons :

$$\int_z^{+\infty} (e^{\gamma_i(0)(y-z)} - 1) \nu(dy) = \\ = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \left(e^{-\gamma_i(0)z} \int_z^{+\infty} y^{a-1} e^{-(\gamma_i(0)+b)y} dy - \int_z^{+\infty} y^{a-1} e^{-by} dy \right) \\ = \frac{b^a e^{-\gamma_i(0)z}}{(b - \gamma_i(0))^a} \frac{\Gamma(a, (-\gamma_i(0) + b)z)}{\Gamma(a)} - \frac{\Gamma(a, bz)}{\Gamma(a)}. \quad (\text{C.4.76})$$

Nous obtenons alors :

$$w^{(i)}(dz) = \frac{1}{\varphi'(-\gamma_i(0))} \left[\frac{-\gamma_i(0)}{2} \delta_0(dz) \right. \\ \left. + \left(\frac{\Gamma(a, bz)}{\Gamma(a)} - \frac{b^a e^{-\gamma_i(0)z}}{(b - \gamma_i(0))^a} \frac{\Gamma(a, (-\gamma_i(0) + b)z)}{\Gamma(a)} \right) \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz \right]. \quad (\text{C.4.77})$$

Dans le cas où $-\gamma_i(0)$ a sa partie réelle inférieure à $-b$, il suffit de remplacer dans (C.4.77), $\varphi'(-\gamma_i(0))$ par la valeur en $-\gamma_i(0)$ du prolongement méromorphe de φ' pour obtenir $w^{(i)}(dz)$.

Par ailleurs, comme $a \in \mathbb{N}^*$, d'après (C.4.57), nous constatons facilement par intégrations par partie que $\Gamma(a, X)$ est le produit d'un polynôme de degré

$a - 1$ et de e^{-X} . Ainsi il est clair qu'il existe un polynôme P_i de degré $a - 1$ tel que :

$$P_i(z) = \frac{1}{\varphi'(-\gamma_i(0))} \left[\frac{\Gamma(a, bz)}{\Gamma(a)} - \frac{b^a e^{-\gamma_i(0)z}}{(b - \gamma_i(0))^a} \frac{\Gamma(a, (-\gamma_i(0) + b)z)}{\Gamma(a)} \right] e^{bz}. \quad (\text{C.4.78})$$

Ainsi :

$$w^{(i)}(dz) = \frac{-\gamma_i(0)}{2 \varphi'(-\gamma_i(0))} \delta_0(dz) + P_i(z) e^{-bz} \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz. \quad (\text{C.4.79})$$

En utilisant alors le développement (C.4.52), nous obtenons (C.4.53). $\square$

Donnons deux exemples.

C.5 Exemples

C.5.1 1^{er} exemple : $a = 1$

La mesure ν est alors une loi exponentielle :

$$\nu(dy) = b e^{-by} \mathbb{1}_{\{y > 0\}} dy. \quad (\text{C.5.80})$$

Zéros de φ_θ :

Pour tout $\theta \geq 0$, φ_θ a exactement trois zéros, réels, notés $-\gamma_1(\theta)$, $-\gamma_0(\theta)$ et $\gamma_0^*(\theta)$, vérifiant :

$$-\gamma_1(\theta) < -b < -\gamma_0(\theta) \leq 0 \leq \gamma_0^*(\theta). \quad (\text{C.5.81})$$

Expression de $F(\theta, \mu, x)$

Ainsi pour tout $\theta \geq 0$, tout $\mu \geq 0$ et tout $x \geq 0$, nous avons :

$$F(\theta, \mu, x) = C_0(\theta, \mu) e^{-\gamma_0(\theta)x} + C_1(\theta, \mu) e^{-\gamma_1(\theta)x}. \quad (\text{C.5.82})$$

Zéros de φ :

Plus particulièrement, si $\theta = 0$, alors les zéros de φ sont, outre $q_0 = 0$:

$$q_1 = -\left(c + \frac{b}{2}\right) + \sqrt{\left(c - \frac{b}{2}\right)^2 + 2} \quad \text{et} \quad q_2 = -\left(c + \frac{b}{2}\right) - \sqrt{\left(c - \frac{b}{2}\right)^2 + 2}. \quad (\text{C.5.83})$$

Ces zéros vérifient :

1. $q_2 < -b$ et avec la notation de (C.5.81), nous avons : $q_2 = -\gamma_1(0)$.
2. Si $c > \frac{1}{b}$ (condition de profit net), nous avons : $-b < q_1 < 0$ et donc : $-\gamma_0(0) = q_1$ et $\gamma_0^*(0) = q_0 = 0$.
3. Si $c < \frac{1}{b}$, nous avons $q_1 > 0$ et donc : $\gamma_0^*(0) = q_1$ et $-\gamma_0(0) = q_0 = 0$.
4. Si $c = \frac{1}{b}$, nous avons $q_1 = 0$ et donc : $q_1 = q_0 = \gamma_0^*(0) = -\gamma_0(0) = 0$.

Loi de l'overshoot, dans le cas de profit net :

Nous nous plaçons dans la situation de profit net, $c > \frac{1}{b}$.

Remarquons tout d'abord que :

$$\Gamma(1, X) = \int_X^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-X}. \quad (\text{C.5.84})$$

Ainsi, la loi de la v.a. K_x (définie sur $\{T_x < +\infty\}$) est, d'après (C.4.53) et (C.5.84), égale à :

$$\begin{aligned} w_x(dz) &= \left[\frac{q_1 e^{q_1 x}}{2\varphi'(q_1)} + \frac{q_2 e^{q_2 x}}{2\varphi'(q_2)} \right] \delta_0(dz) \\ &\quad + \left[\frac{q_1 e^{q_1 x}}{(q_1 + b)\varphi'(q_1)} + \frac{q_2 e^{q_2 x}}{(q_2 + b)\varphi'(q_2)} \right] e^{-bz} \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz. \end{aligned} \quad (\text{C.5.85})$$

Nous nous proposons maintenant de calculer la loi limite, quand x tend vers $+\infty$, de l'overshoot K_x , conditionnellement à $\{T_x < +\infty\}$. Tout d'abord,

calculons la loi $\tilde{w}_x(dz)$ de K_x , conditionnellement à $\{T_x < +\infty\}$:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_x(dz) &= \frac{w_x(dz)}{\mathbb{P}(T_x < +\infty)} = \frac{w_x(dz)}{F(0, 0, x)} \\ &= \frac{\left[\frac{q_1 e^{q_1 x}}{2\varphi'(q_1)} + \frac{q_2 e^{q_2 x}}{2\varphi'(q_2)} \right] \delta_0(dz) + \left[\frac{q_1 e^{q_1 x}}{(q_1+b)\varphi'(q_1)} + \frac{q_2 e^{q_2 x}}{(q_2+b)\varphi'(q_2)} \right] e^{-bz} \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz}{\frac{q_1 e^{q_1 x}}{\varphi'(q_1)} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{b(q_1+b)} \right) + \frac{q_2 e^{q_2 x}}{\varphi'(q_2)} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{b(q_2+b)} \right)}. \end{aligned} \quad (\text{C.5.86})$$

Comme $q_2 < -b < q_1 < 0$, nous obtenons :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{w}_x(dz) = \frac{\frac{1}{2} \delta_0(dz) + \frac{e^{-bz}}{q_1+b} \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz}{\frac{1}{2} + \frac{1}{b(q_1+b)}}. \quad (\text{C.5.87})$$

Par ailleurs, un calcul montre que :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{b(q_1+b)} = \frac{\frac{1}{b} - c}{q_1}. \quad (\text{C.5.88})$$

Ainsi la loi limite, quand x tend vers $+\infty$, de l'overshoot K_x , conditionnellement à $\{T_x < +\infty\}$ est égale à :

$$w(dz) = \frac{1}{c - \frac{1}{b}} \left(-\frac{q_1}{2} \delta_0(dz) - \frac{q_1}{q_1+b} e^{-bz} \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz \right). \quad (\text{C.5.89})$$

Nous retrouvons donc l'expression (10.1.1) de $w(dz)$ énoncée au Théorème 10.1.

Probabilité de ruine :

Ainsi, si $\theta = \mu = 0$, nous avons, d'après (7.2.110), (7.2.113), (7.2.112) et (7.2.107) :

$$\text{Si } c \leq \frac{1}{b} \quad \mathbb{P}(T_x < +\infty) = F(0, 0, x) = 1 \quad (\text{C.5.90})$$

$$\text{Si } c > \frac{1}{b} \quad \mathbb{P}(T_x < +\infty) = -\frac{\varphi'(0)}{\varphi'(q_1)} e^{q_1 x} - \frac{\varphi'(0)}{\varphi'(q_2)} e^{q_2 x}. \quad (\text{C.5.91})$$

Avec (C.5.91), nous retrouvons un résultat de Dufresne-Gerber [DG90].

C.5.2 2^{ème} exemple : $a = 2$

La mesure ν vérifie alors :

$$\nu(dy) = b^2 y e^{-by} \mathbb{1}_{\{y>0\}} dy. \quad (\text{C.5.92})$$

Zéros de φ_θ :

Montrons alors que nous pouvons choisir b suffisamment grand pour que pour tout $\theta \geq 0$, φ_θ n'ait que deux zéros réels, $-\gamma_0(\theta)$ et $\gamma_0^*(\theta)$.

φ_θ étant convexe sur $] -\infty, -b[$ et d'après (C.2.39) et (C.2.40), sa dérivée s'annule une seule fois en $x_1 < -b$, donc :

$$\varphi'_\theta(x_1) = x_1 + c - \frac{2b^2}{(b+x_1)^3} = 0, \quad (\text{C.5.93})$$

donc :

$$\begin{aligned} \varphi_\theta(x_1) &= \frac{x_1^2}{2} + cx_1 - (1+\theta) + \frac{1}{2}(x_1+c)(b+x_1) \\ &= x_1^2 + \frac{3c+b}{2} x_1 + \frac{1}{2}cb - (1+\theta). \end{aligned} \quad (\text{C.5.94})$$

Etudions la fonction h définie pour $q \leq -b$ par :

$$h(q) = q^2 + \frac{3c+b}{2} q + \frac{1}{2} cb - (1+\theta). \quad (\text{C.5.95})$$

Nous avons donc :

$$h'(q) = 2q + \frac{3c+b}{2} < -\frac{3}{2}(b-c) \quad \forall q \leq -b. \quad (\text{C.5.96})$$

De plus :

$$h(-b) = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}cb - (1+\theta). \quad (\text{C.5.97})$$

Nous pouvons choisir b suffisamment grand, pour que h soit décroissante sur $] -\infty, -b[$ et vérifie $h(-b) > 0$. Dans ces conditions nous avons :

$h(x_1) \geq h(-b) > 0$. Ainsi φ_θ admet pour minimum sur $] -\infty, -b[$,

$\varphi_\theta(x_1) = h(x_1) > 0$ et n'a donc pas de racine réelle dans $] -\infty, -b[$. Donc φ_θ admet deux racines réelles $-\gamma_0(\theta)$ et $\gamma_0^*(\theta)$ et deux racines complexes conjuguées notées $-\gamma_1(\theta)$ et $-\overline{\gamma_1}(\theta)$.

Expression de $F(\theta, \mu, x)$

Ainsi pour tout $\theta \geq 0$, tout $\mu \geq 0$ et tout $x \geq 0$, nous avons :

$$F(\theta, \mu, x) = C_0(\theta, \mu)e^{-\gamma_0(\theta)x} + C_1(\theta, \mu)e^{-\gamma_1(\theta)x} + \overline{C_1}(\theta, \mu)e^{-\overline{\gamma_1}(\theta)x}. \quad (\text{C.5.98})$$

Zéros de φ :

Examinons le cas particulier où $\theta = 0$. φ admet comme zéros (calculés avec le logiciel maple) :

$$q_0 = 0 \quad (\text{C.5.99})$$

$$q_1 = A + B - \frac{2}{3}(b + c) \quad (\text{C.5.100})$$

$$q_2 = -\frac{1}{2}(A + B) - \frac{2}{3}(b + c) + \frac{1}{2}(A - B)i\sqrt{3} \quad (\text{C.5.101})$$

$$q_3 = -\frac{1}{2}(A + B) - \frac{2}{3}(b + c) - \frac{1}{2}(A - B)i\sqrt{3} \quad (\text{C.5.102})$$

où

$$A = \frac{1}{3} \left[-6cb^2 + 12c^2b + b^3 + 36b - 18c - 8c^3 + \sqrt{-12c^2 - 24 + 72c^2b^2 - 36cb^3 + 6b^4 - 48c^3b + 132b^2 - 96cb} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (\text{C.5.103})$$

$$B = \frac{-4cb + b^2 + 6 + 4c^2}{9A}. \quad (\text{C.5.104})$$

Il est clair que pour b suffisamment grand, q_1 est réel, q_2 et q_3 sont des complexes conjugués dont la partie réelle admet pour développement limité quand b est voisin de l'infini :

$$\text{Re}(q_2) = -b - \frac{2}{b} + o\left(\frac{1}{b}\right), \quad (\text{C.5.105})$$

ce qui prouve que, pour b assez grand, $\text{Re}(q_2) < -b$.

Loi de l'overshoot, dans le cas de profit net :

Nous nous plaçons dans la situation de profit net, $c > \frac{2}{b}$.
Remarquons tout d'abord que :

$$\Gamma(2, X) = \int_X^{+\infty} t e^{-t} dt = X e^{-X} + e^{-X}. \quad (\text{C.5.106})$$

Ainsi, la loi de la v.a. K_x (définie sur $\{T_x < +\infty\}$) est, d'après (C.4.53) et (C.5.106), égale à :

$$\begin{aligned} w_x(dz) = & \left(\frac{q_1 e^{q_1 x}}{2\varphi'(q_1)} + \frac{q_2 e^{q_2 x}}{2\varphi'(q_2)} + \frac{\bar{q}_2 e^{\bar{q}_2 x}}{2\varphi'(\bar{q}_2)} \right) \delta_0(dz) \\ & + (P_1(z)e^{q_1 x} + P_2(z)e^{q_2 x} + \bar{P}_2(z)e^{\bar{q}_2 x}) e^{-bz} \mathbb{1}_{\{z \geq 0\}} dz. \end{aligned} \quad (\text{C.5.107})$$

où P_i avec $i \in \{1, 2\}$ est le polynôme, de degré 1, défini par :

$$P_i(z) = \frac{1}{\varphi'(q_i)} \left[\frac{q_i}{b + q_i} z + 1 + \frac{b^2}{(b + q_i)^2} \right]. \quad (\text{C.5.108})$$

Probabilité de ruine :

Ainsi si $\theta = \mu = 0$, nous avons, d'après (7.2.110), (7.2.113), (7.2.112) et (7.2.107) :

$$\text{Si } c \leq \frac{2}{b} \quad \mathbb{P}(T_x < +\infty) = F(0, 0, x) = 1 \quad (\text{C.5.109})$$

$$\text{Si } c > \frac{2}{b} \quad \mathbb{P}(T_x < +\infty) = -\frac{\varphi'(0)}{\varphi'(q_1)} e^{q_1 x} - \frac{\varphi'(0)}{\varphi'(q_2)} e^{q_2 x} - \frac{\varphi'(0)}{\varphi'(\bar{q}_2)} e^{\bar{q}_2 x}. \quad (\text{C.5.110})$$

Remarque C.6 En particulier, quand x tend vers $+\infty$:

$$\left(\mathbb{P}(T_x < +\infty) + \frac{\varphi'(0)}{\varphi'(q_1)} e^{q_1 x} \right) e^{-\text{Re}(q_2)x} \quad \text{n'a pas de limite,} \quad (\text{C.5.111})$$

car cette expression est une combinaison linéaire de $\cos(\text{Im}(q_2)x)$ et de $\sin(\text{Im}(q_2)x)$. Dans le chapitre 8, nous avons prouvé par une méthode de renouvellement que $e^{\gamma_0(0)x} \mathbb{P}(T_x < +\infty)$ a une limite quand x tend vers $+\infty$, ce qui nous donne le premier terme du développement asymptotique de $\mathbb{P}(T_x < +\infty)$. (C.5.111) prouve qu'obtenir le second membre par une méthode analogue n'est donc pas possible.

Annexe D

Fonctions hypergéométriques

Nous rassemblons ici les informations sur les fonctions hypergéométriques qui nous sont utiles au paragraphe 2.3.2 du chapitre 2.

Soit $m \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[$.

Nous noterons :

$$\lambda_m = \frac{m+1}{8m(2m+1)} \quad (\text{D.0.1})$$

et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, nous posons

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8(m+1)(2m+1)}{|m|}} \sqrt{|\lambda - \lambda_m|} \quad (\text{D.0.2})$$

Lorsque $\lambda \geq \lambda_m$, nous notons

$$\xi_m = \frac{m+1}{2m} + \rho \quad \text{et} \quad b_m = \frac{m+1}{2m} - \rho \quad (\text{D.0.3})$$

et pour $\lambda < \lambda_m$,

$$\xi_m = \frac{m+1}{2m} + i\rho \quad \text{et} \quad b_m = \frac{m+1}{2m} - i\rho. \quad (\text{D.0.4})$$

Nous noterons désormais $\mathbb{Z}_-$ l'ensemble des entiers négatifs. Pour $c \notin \mathbb{Z}_-$, nous notons $F(\xi, b, c; z)$ la fonction hypergéométrique définie à l'intérieur du disque unité de $\mathbb{C}$ par la série

$$F(\xi, b, c; z) = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{\xi(\xi+1)\dots(\xi+k-1) b(b+1)\dots(b+k-1)}{c(c+1)\dots(c+k-1) k!} z^k. \quad (\text{D.0.5})$$

Cette fonction est analytique sur $\{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ et on peut en réaliser un prolongement holomorphe (cf [Leb65]) sur $\mathbb{C} \setminus [1, +\infty[$ qui vérifie aussi l'équation différentielle :

$$z(1-z)\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \{c - (\xi + b + 1)z\}\frac{\partial F}{\partial z} - \xi bz = 0. \quad (\text{D.0.6})$$

Pour $c \in \mathbb{Z}_-$, l'équation (D.0.6) n'est plus satisfaite puisque F n'est pas définie pour $c \in \mathbb{Z}_-$. C'est pour pallier cette difficulté que nous allons définir la nouvelle fonction hypergéométrique G . Pour $c \in \mathbb{Z}_-$, nous notons $G(\xi, b, c; \cdot)$ la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par

$$G(\xi, b, c; z) = z^{1-c} F(\xi + 1 - c, b + 1 - c, 2 - c; z). \quad (\text{D.0.7})$$

Nous pouvons montrer que G vérifie l'équation différentielle (D.0.6).

Nous notons ensuite :

$$c_m := \frac{2m+1}{2m} \quad (\text{D.0.8})$$

et nous remarquons que si $m = -\frac{1}{2n}$ avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\frac{2m+1}{2m} \in \mathbb{Z}^-$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, et $c_m \notin \mathbb{Z}$, nous notons $\eta(x) := \frac{1}{2} \left(1 - i \frac{x}{\gamma_m} \right)$ et

$$H_\lambda(x) = F(\xi_m, b_m, c_m; \eta(x)) \quad (\text{D.0.9})$$

$$K_\lambda(x) = F(\xi_m, b_m, c_m; \bar{\eta}(x)) \quad (\text{D.0.10})$$

et pour $c_m \in \mathbb{Z}_-$,

$$H_\lambda(x) = G(\xi_m, b_m, c_m; \eta(x)) \quad (\text{D.0.11})$$

$$K_\lambda(x) = G(\xi_m, b_m, c_m; \bar{\eta}(x)). \quad (\text{D.0.12})$$

Nous remarquons ensuite que le générateur infinitésimal L de Z s'écrit

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \varphi^{2m}(x) f''(x) - \beta x f'(x)$$

c'est-à-dire

$$Lf(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{a_m}{\gamma_m} \right)^2 (\gamma_m^2 + x^2) f'' - \beta x f'(x). \quad (\text{D.0.13})$$

Proposition D.1

Les fonctions H_λ et K_λ sont des fonctions propres, associées à la valeur propre λ de l'opérateur L .

Démonstration de la Proposition D.1

Une fonction f est fonction propre de L si

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a_m}{\gamma_m} \right)^2 (\gamma_m^2 + x^2) f''(x) - \beta x f'(x) - \lambda f(x) = 0$$

i.e.

$$(\gamma_m^2 + x^2) f''(x) - 2 \left(\frac{\gamma_m}{a_m} \right)^2 \beta x f'(x) - 2 \left(\frac{\gamma_m}{a_m} \right)^2 \lambda f(x) = 0. \quad (\text{D.0.14})$$

Nous avons :

$$H'_\lambda(x) = -\frac{i}{2\gamma_m} R'(\eta(x)) \quad (\text{D.0.15})$$

où R désigne $F(\xi_m, b_m, c_m; \cdot)$ ou $G(\xi_m, b_m, c_m; \cdot)$ suivant la valeur de m et

$$H''_\lambda(x) = -\frac{1}{4\gamma_m^2} R''(\eta(x)). \quad (\text{D.0.16})$$

Donc

$$R'(\eta(x)) = -\frac{2\gamma_m}{i} H'_\lambda(x) \quad (\text{D.0.17})$$

et

$$R''(\eta(x)) = -4\gamma_m^2 H''_\lambda(x). \quad (\text{D.0.18})$$

Puisque R vérifie l'équation différentielle (D.0.6), nous avons :

$$\eta(x) \bar{\eta}(x) R''(\eta(x)) + \{c_m - (\xi_m + b_m + 1)\eta(x)\} R'(\eta(x)) - \xi_m b_m R(\eta(x)) = 0$$

donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x^2}{\gamma_m^2} \right) (-4\gamma_m^2) H''_\lambda(x) + \\ & \left\{ c_m - (\xi_m + b_m + 1) \frac{1}{2} \left(1 - \frac{ix}{\gamma_m} \right) \right\} \left(-\frac{2\gamma_m}{i} \right) H'_\lambda(x) - \xi_m b_m H_\lambda(x) = 0 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 (\gamma_m^2 + x^2)H_\lambda''(x) &+ (-i\gamma_m)(2c_m - \xi_m - b_m - 1)H_\lambda'(x) \\
 &+ (\xi_m + b_m + 1)xH_\lambda'(x) + \xi_m b_m H_\lambda(x) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{D.0.19}$$

Comme $(\xi_m + b_m + 1) = \frac{2m+1}{m} = -2\left(\frac{\gamma_m}{a_m}\right)^2 \beta$, et $2c_m - \xi_m - b_m - 1 = 0$, et puisque

$$\xi_m b_m = \left(\frac{m+1}{2m}\right)^2 \pm \rho^2 = \frac{2(m+1)(2m+1)}{m} = -2\left(\frac{\gamma_m}{a_m}\right)^2$$

H_λ vérifie l'équation (D.0.14). Ainsi, H_λ est fonction propre de L pour la valeur propre λ .

La démonstration est identique pour la fonction propre K_λ . $\square$

Les parties réelles de H_λ et K_λ sont également fonctions propres de L associées à la valeur propre λ . Nous noterons désormais :

$$h_\lambda := \Re(H_\lambda) \quad \text{et} \quad k_\lambda := \Re(K_\lambda). \tag{D.0.20}$$

Nous posons aussi, pour tout réels w, y et z ,

$$f_\lambda^y(w) := h_\lambda(y)k_\lambda(w) - k_\lambda(y)h_\lambda(w) \tag{D.0.21}$$

et

$$g_\lambda^z(w) := h_\lambda(z)k_\lambda(w) - k_\lambda(z)h_\lambda(w). \tag{D.0.22}$$

f_λ^y et g_λ^z sont fonctions propres de L associées à la valeur propre λ , en tant que combinaisons linéaires de fonctions propres.

Bibliographie

- [AB79] D.J. Aronson and P. Benilan. Régularité des solutions de l'équation des milieux poreux dans $\mathbb{R}^N$. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I A*, 288 :103–105, 1979.
- [Aro69] D.J. Aronson. Regularity properties of flows through porous media,. *SIAM J. Appl. Math.*, 17 :461–467, 1969.
- [AW92] J. Abate and W. Whitt. The fourier-series method for inverting transfors of probability distributions. *Queueing Systems*, 10 :5–88, 1992.
- [AW95] J. Abate and W. Whitt. Numerical inversion of laplace transforms of probability distributions. *ORSA Journal on Computing*, 7 :36–43, 1995.
- [Bar52] G.I. Barenblatt. On some unsteady motions of a liquid or a gas in a porous medium. *Prikl.Mat. Mekh.*, 16 :67–78, 1952.
- [BB01] A.A. Borovkov and Z. Burq. Kendall's identity for the first crossing time revisited. *Electronic Communications in Probability*, 6 :91–94, 2001.
- [BC81] P. Benilan and M.G. Crandal. The continuous dependance on φ of solutions of $u_t = \Delta\varphi(u)$. *Indiana Univ. Math. J.*, 30 :161–177, 1981.
- [BCRV96] S. Benachour, P. Chassaing, B. Roynette, and P. Vallois. Proces-sus associés à l'équation des milieux poreux. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Scienze Fisiche e Matematiche - Serie IV. Vol. XXIII. Fasc. 4*, 1996.
- [BD94] J. Bertoin and R.A. Doney. Cramér's estimate for Lévy processes. *Statistics and Probability Letters*, 21 :363–365, 1994.
- [Ben83] P. Benilan. A strong regularity L^p for solution of the porous media equation. *Research notes math.* , Pitman, London, 89, 1983.

- [Ber96] J. Bertoin. *Lévy process*. Cambridge Univ. Press, 1996. Cambridge tracts in mathematics vol. 121.
- [BF83] H. Brezis and A. Friedman. *Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions*, volume 62. J.Math.pures et appl., 1983.
- [BM84] S. Benachour and M.S. Moulay. Régularité des solutions de l'équation des milieux poreux en une dimension d'espace. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. IA*, 298 :107–110, 1984.
- [Bor64] A.A. Borovkov. On the first passage time for one class of processes with independent increments. *Mathematical institute SO AN SSSR*, pages 331–334, 1964.
- [Cra30] H. Cramér. *On the mathematical Theory of Risk*. Skandia Jubilee Volume, Stockholm, 1930.
- [Cra55] H. Cramér. *Collective Risk Theory*. Skandia Jubilee Volume, Stockholm, 1955.
- [DE89] A. Dassios and P. Embrechts. Martingales in insurance risk. *Commun. Statistics Stochastics Models*, 5(2) :181–217, 1989.
- [DG88] F. Dufresne and H.U. Gerber. The surpluses immediately before and at ruin and the amount of the claim causing ruin. *Insurance : Mathematics and Economics*, 7 :193–199, 1988.
- [DG90] F. Dufresne and H.U. Gerber. Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion. *Insurance : Mathematics and Economics*, 10(1991) :51–59, 1990.
- [DG93] F. Dufresne and H.U. Gerber. The probability of the inverse gaussian and related processes. *Insurance : mathematics and Economics*, 12 :9–22, 1993.
- [DGS91] F. Dufresne, H.U. Gerber, and E. Shiu. Risk theory with the gamma process. *ASTIN Bulletin*, 21 :177–192, 1991.
- [DH95] F. Delbaen and J. Haezendonck. Inversed martingales in risk theory. *Insurance : Mathematics and Economics*, 4 :201–206, 1995.
- [Dic92] D.C.M. Dickson. On the distribution of the surplus prior to ruin. *Insurance : Mathematics and Economics*, 11 :191–207, 1992.
- [Don91] R.A. Doney. Hitting probabilities for spectrally positive Lévy processes. *J.London Math. Soc.*, 44 :566–576, 1991.
- [DV97] M. Dozzi and P. Vallois. Level crossing times for certain processes without positive jumps. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 121 :355–376, 1997.

- [DW92] D.C.M. Dickson and H.R. Waters. The probability and severity of ruin in finite and infinite time. *ASTIN Bulletin*, 22 :177–190, 1992.
- [DW93] D.C.M. Dickson and H.R. Waters. Gamma processes and finite time survival probabilities. *ASTIN Bulletin*, 23 :259–272, 1993.
- [ES94] P. Embrechts and H. Schmidli. Ruin estimation for a general insurance risk model. *Adv. Appl. Prob.*, 26 :404–422, 1994.
- [Fel71] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, volume II. John Wiley and Sons, New York, 2 edition, 1971.
- [FKP01] A.G. Frolova, Y.M. Kabanov, and S.M. Pergamenshchikov. In the insurance business risky investments are dangerous. *Preprint, Univ. de Franche Comté, Besançon*, 2001.
- [FS94] H.J. Furrer and H. Schmidli. Exponential inequalities for ruin probabilities of risk processes perturbed by diffusion. *Insurance : Mathematics and Economics*, 15 :23–36, 1994.
- [FS96] A. Frey and V. Schmidt. Taylor-series expansion for multivariate characteristics of classical risk processes. *Insurance : Mathematics and Economics*, 18 :1–12, 1996.
- [Ger70] H.U. Gerber. An extension of the renewal equation and its application in the collective theory of risk. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 53 :205–210, 1970.
- [Ger73] H.U. Gerber. Martingales in risk theory. *Mitteilungen der Schweizerischen Vereinigung der Versicherungsmathematiker*, pages 205–216, 1973.
- [GGK87] H.U. Gerber, M.J. Goovaerts, and R. Kaas. On the probability and severity of ruin. *ASTIN Bulletin*, 17 :152–163, 1987.
- [GL98] H.U. Gerber and B. Landry. On the discounted penalty at ruin in a jump-diffusion and the perpetual put option. *Insurance : Mathematics and Economics*, 22 :263–276, 1998.
- [GS97] H.U. Gerber and E.S.W. Shiu. The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin and the deficit at ruin. *Insurance : mathematics and Economics*, 21 :129–137, 1997.
- [Gut88] A. Gut. *Stopped Random Walks. Limit Theorems and Applications*, volume 5 of *Applied Probability*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [Kal87] A.S. Kalashnikov. Some problems of the qualitative theory of non linear degenerate second order parabolic equations. *Russ. Math. Surv.*, 42 :169–222, 1987.

- [Kne77] B.F. Kneer. The porous medium equation in one dimension. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 234 :381–415, 1977.
- [KS91] I. Karatzas and S.E. Shreve. *Brownian motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991. Graduate Texts in Mathematics, 113.
- [KW01] S.G. Kou and H. Wang. First passage times of a jump diffusion process. *Preprint*, 2001.
- [Leb65] N.N. Lebedev. *Special functions and their applications*. Dover publications inc., 1965.
- [LP97] C. Lefèvre and P. Picard. The probability of ruin in finite time with discrete claim size distribution. *Scand. Actuarial Journal*, pages 58–69, 1997.
- [LSU68] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov, and N.N. Ural’Ceva. *Linear and quasilinear equation of parabolic type, Translation of Mathematical monographs 23*. AMS, Providence R.I., 1968.
- [Luk70] Eugène Lukacs. *Characteristic functions*. Griffin, London, second edition, 1970.
- [Lun03] F. Lundberg. *I- Approximerad Framställning av Sannolikhetsfunktionen. II- Aterförsäkering av Kollektivrisker*. Almqvist and Wiksell, Uppsala, 1903.
- [MK66] H.P. Mc Kean. A class of markov processes associated with non linear parabolic equation. *Proc.Nat.Acad.Sci.*, 56 :1907–1911, 1966.
- [MK67] H.P. Mc Kean. Propagation of chaos for a class of non linear parabolic equation. *Lec.series in differential equation, Catolic University, Washington, DC*, 7 :41–57, 1967.
- [MRC87] S. Meleard and Roelly-Copoletta. A propagation of chaos result for a system of particules with moderate interaction. *Stochastic Process. Appli.*, 26 :317–332, 1987.
- [Nor] R. Norberg. Ruin problems with assets and liabilities of diffusion type. preprint.
- [NY01] L. Nguyen and M. Yor. Wiener hopf factorization and the pricing of barrier of and lookback options ubder general Lévy processes. *Prepublication*, 2001.
- [OKYL58] O.A. Oleinik, A.S. Kalaschnikov, and Chzou Yui-Lin. The Cauchy problem and boundary problems for equation of the type nonstationary filtration. *Izv. Akad. Nauk. USSR Sér. Mat.*, 22 :667–704, 1958.

- [Pat59] R.E. Pattle. Diffusion from an instantaneous point with concentration dependent coefficient. *Quart.Mech. Appl. Math.*, 12 :407–409, 1959.
- [Pau01] J. Paulsen. On Cramér-like asymptotics for risk processes with stochastic return on investments. *Preprint*, 2001.
- [PG97] J. Paulsen and H.K. Gjessing. Ruin theory with stochastic return on investments. *Advances in Applied Probability*, 29 :965–985, 1997.
- [Rog66] B.A. Rogozin. Distribution of certain functionals related to boundary value problems for processes with independent increments. *Theor. Probab. Appl.*, 11 :161–169, 1966. In Russian.
- [RSST99] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, and J. Teugels. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley and Sons, Chichester, New York, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto, 1999.
- [RY91] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1991. Grundle. der Math. Wiss. 293.
- [Sch95] H. Schmidli. Cramér-Lundberg approximations for ruin probabilities of risk processes perturbed by diffusion. *Insurance : Mathematics and Economics*, 16 :135–149, 1995.
- [Sch01] H. Schmidli. Distribution of the first ladder height of a stationary risk process perturbed by α -stable Lévy motion. *Insurance : Mathematics and Economics*, 28 :13–20, 2001.
- [Sch02] H. Schmidli. Asymptotics of ruin probabilities for controlled risk processes. *preprint*, 2002.
- [Szn89] A.S. Sznitman. Topics in propagation of chaos. In P.L. Hennequin, editor, *Ecole d’été de Probabilités de Saint Flour XIX*, volume 1464 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1989.
- [Tay76] G.C. Taylor. Use of differential and integral inequalities to bound ruin and queueing probabilities. *Scandinavian Actuarial Journal*, pages 57–76, 1976.
- [V93] J.L. Vásquez. Asymptotic behaviour of non linear parabolic equations. anomalous exponents. *Degenerate diffusions (Minneapolis, MN, 1991) IMA Vol. Math. Appl.*, 47, Springer, New York, 1993.

I- Processus associés à l'équation de diffusion rapide

Résumé Nous montrons ici l'existence et l'unicité du processus solution d'une E.D.S. associée à l'équation de diffusion rapide, lorsque la donnée initiale est la mesure de Dirac en 0. Nous prouvons que les trajectoires de ce processus sont hœlderiennes d'indice inférieur à 1/2 et nous explicitons la transformée de Laplace d'une classe de temps d'arrêts liés à ce processus. Puis, nous construisons la solution d'une E.D.S. associée à l'équation de diffusion rapide pour une large classe de données initiales. Enfin, nous montrons que cette solution, convenablement renormalisée, converge vers la solution associée à la donnée initiale mesure de Dirac en 0.

Mots clés : E.D.P. non linéaire de type parabolique, processus auto-similaire, équation différentielle stochastique, temps d'arrêt.

Title : Associated processes with the rapid diffusion's equation.

II- Etude asymptotique du temps de ruine et de l'overshoot

Résumé Nous modélisons la fortune d'une compagnie d'assurance à l'instant t ($t \geq 0$) par un processus $(Z_t^x, t \geq 0)$ défini par $Z_t^x = x - X_t$, avec $X_t = B_t - ct + J_t$ où $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien linéaire, $(J_t, t \geq 0)$ un processus de Lévy, de sauts purs, de mesure de Lévy ν , indépendant de $(B_t, t \geq 0)$. Nous supposons $B_0 = J_0 = 0$; x désigne une constante réelle positive et c un réel. Soit $T_x := \inf \{t \geq 0; X_t > x\}$, le premier temps de ruine et $K_x := X_{T_x} - x$, l'overshoot ou dépassement du niveau x . Nous obtenons les résultats suivants :

1. Soit, $\forall \theta \geq 0, \forall \mu \geq 0, \forall x \geq 0, F(\theta, \mu, x) = \mathbb{E}(e^{-\theta T_x - \mu K_x} \mathbb{1}_{\{T_x < +\infty\}})$. En supposant l'existence de certains moments exponentiels pour ν , nous prouvons que $F(\theta, \mu, x)$ admet, quand x tend vers $+\infty$, un développement asymptotique de la forme :

$$F(\theta, \mu, x) = C_0(\theta, \mu)e^{-\gamma_0(\theta)x} + \sum_{i=1}^p \left(C_i(\theta, \mu)e^{-\gamma_i(\theta)x} + \overline{C}_i(\theta, \mu)e^{-\overline{\gamma}_i(\theta)x} \right) + O(e^{-Bx})$$

avec $0 < \gamma_0(\theta) < \operatorname{Re} \gamma_1(\theta) \leq \dots \leq \operatorname{Re} \gamma_p(\theta) < B$. Lorsque ν ne charge que $\mathbb{R}_+$, les constantes $C_i(\theta, \mu)$ sont explicites.

2. Sous l'hypothèse de moment d'ordre n pour la restriction de ν à $\mathbb{R}_+$ et avec la condition de profit net, nous montrons : $\mathbb{P}(T_x < +\infty) < \frac{C}{1+x^{n-2}}, \quad x \geq 0$.
3. Nous prouvons, en utilisant le développement asymptotique précédent, un théorème de la limite centrale pour le couple (T_x, K_x) convenablement renormalisé, quand x tend vers $+\infty$ (sous différentes formes selon que $c > \mathbb{E}(J_1)$, $c < \mathbb{E}(J_1)$ ou $c = \mathbb{E}(J_1)$).
4. Enfin, nous établissons une réciproque du théorème de Zolotareff, pour des processus de Lévy de la forme donnée dans cette étude.

Mots clés : Problème de ruine, processus de Lévy, comportement asymptotique, décroissance exponentielle, équation de renouvellement, premier temps de passage.

Title : Asymptotic behaviour of the ruin's time and of the overshoot.

Spécialité doctorale Mathématiques Appliquées : Probabilités.

Laboratoire IECN UHP Nancy I, BP 239, 54506 Vandoeuvre Cedex.