AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHEQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex



U.F.R. S.T.M.I.A.
École doctorale IAE+M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré - Nancy I

et

Docteur de l'Université Charles de Prague

en Mathématiques

par

Martin Ondreját

Équations d'évolution stochastiques dans les espaces de Banach : unicités abstraites, propriété de Markov forte, équations hyperboliques

soutenue publiquement le 25 juin 2003 devant le jury composé de

Zdzisław Brzeźniak	Rapporteur	Reader à l'Université de Hull
Marco Dozzi	Directeur de thèse	Professeur à l'Université Nancy II
Ben Gołdys	Rapporteur	Senior Lecturer à l'Université de New South Wales à Sydney
Bohdan Maslowski	Examinateur	Senior Research Scientist à l'Académie des Sciences à Prague
Annie Millet	Président	Professeur à l'Université Paris I
Jan Seidler	Directeur de thèse	Research Scientist à l'Académie des Sciences à Prague
Pierre Vuillermot	Examinateur	Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy I

Institut Élie Cartan Nancy et Université Charles de Prague

Je voudrais en premier lieu remercier mes directeurs de thèse Jan Seidler et Marco Dozzi, et leur exprimer ma profonde gratitude du fait qu'ils m'ont encadré et guidé durant les dernières trois années que j'ai passées en Tchéquie et en France. Ils m'ont proposé les sujets de recherche intéressants que j'ai élaborés dans cette thèse. Par ailleurs, ils ont lu tout le texte et leurs remarques ont beaucoup amélioré sa qualité.

Je remercie chaleureusement Annie Millet qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance à Zdzisław Brzeźniak et Ben Gołdys d'avoir acceptés la responsabilité d'être rapporteurs.

J'aimerais aussi remercier Bohdan Maslowski et Pierre Vuillermot pour leur participation à ce jury et pour leur intérêt à mes travaux.

Je suis d'autre part redevable à l'Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences à Prague et à l'Institut Élie Cartan de leur accueil et des excellents moyens mis à ma disposition.

Je remercie également l'Université Charles à Prague et le Ministère des Affaires Etrangères Français pour leur soutien financier.

Table des matières

0. Introduction

0.1 Références 1
0.2 Équations d'évolution 1
0.3 Mise de bruit 3
0.4 Résumé du premier chapitre 5
0.4.1 Définitions 5
0.4.2 Résultats principaux 8
0.4.3 Résultats concernant des conceptions des solutions 10
0.4.4 Commentaires et remarques 11
0.5 Résumé du deuxième chapitre 11
0.5.1 Première section 11
0.5.2 Deuxième section 13
0.5.3 Troisième section 17
0.6 Résumé du troisième chapitre 17
0.6.1 Introduction 17
0.6.2 Processus de Wiener spatialement homogène 18
0.6.3 Propagation des solutions 18
0.6.4 Existence de solutions globales 19
0.6.5 Meilleure régularité des solutions 20
0.7 Résumé du quatrième chapitre 20
0.8 Bibliographie 22

Chapter 1 **Uniqueness for stochastic evolution equations in Banach spaces**

Introduction 26
Notation 28
Main theorems 29
Results of similar nature 33
Equivalent concepts of solutions 34
Ideas of the proofs 35
Preliminary results and notation 37
Section 1.1 Cylindrical Wiener process 37
Section 1.2 Radonifying mappings and the space U_0 39
Section 1.3 Stochastic integral 42
Section 1.4 A convergence result 48
Section 1.5 Burkholder inequality 49
Section 1.6 Fubini's theorem, Proof of Theorem 1.12 and 1.13 51
Section 1.7 Girsanov-Novikov theorem 55
Section 1.8 Distribution of random integrals and measurable selectors 55

Distribution of random Bochner integrals 55
Distribution of stochastic integrals 57
Distribution of measurable selectors 60
Proofs
Section 1.9 Proofs of Theorem 1.3 and 1.4 61
Section 1.10 Proof of Theorem 1.5 and 1.6 71
Section 1.11 Preliminaries to proof of Theorem 1.1 and 1.2 73
Section 1.12 Proof of Theorem 1.2, Theorem 1.12.1 and Lemma 1.A, 1.B, 1.C, 1.D, 1.E 75
Section 1.13 Proof of Theorem 1.1 80
Section 1.14 Proofs of Theorem 1.8, 1.9 and 1.10 81
Used notation 83
References 83

Chapter 2 **Brownian representations of cylindrical local martingales, martingale problem and strong Markov property of weak solutions of SPDEs in Banach spaces**

2.0 Introduction 85
2.1 Brownian representations of cylindrical martingales 86
2.2 The stochastic equation and the settings 88
2.3 Martingale Theorem 92
2.4 Main Theorem and its Applications to SPDEs 93
2.5 Markov and Strong Markov Property 94
2.6 The Demonstrations 96
2.6.1 Proof of Theorem 2.1.2 96
2.6.2 Proof of Theorem 2.3.2 100
2.6.3 Proofs of Theorem 2.4.4 and Theorem 2.4.5 103
2.6.4 Proof of Theorem 2.4.6 107
2.6.5 Proofs of the Corollaries 109
2.7 References 111

Chapitre 3 **Existence de solutions globales des équations d'évolution hyperboliques stochastiques par rapport à un processus de Wiener spatialement homogène**

3.0 Introduction 113
3.1 Notations et rappels 115
3.2 Vitesse finie de propagation des solutions 120
3.3 Existence des solutions "mild" globales 121
3.4 Existence de solutions fortes globales 122
3.5 Exemples et commentaires 124
3.6 Démonstrations 128
3.7 Bibliographie 141

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHEQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

Chapitre 4 Existence de solutions faibles globales des équations d'évolution hyperboliques stochastiques par rapport à un processus de Wiener spatialement homogène

4.0 Introduction 143
4.1 Notations et rappels 145
4.2 Vitesse finie de propagation des solutions 151
4.3 Existence de solutions faibles globales 152
4.4 Exemples et commentaires 155
4.5 Preuve du Théorème 4.3.1 162
4.6 Références 177

0. Introduction

0.1 RÉFÉRENCES

Ce travail porte sur plusieurs aspects des équations d'évolution stochastiques dans les espaces de dimension infinie, notamment dans les espaces de Hilbert ou de Banach. Ces équations généralisent les équations stochastiques d'Ito [1], et interviennent en mathématiques théoriques (par exemple dans les problèmes de Dirichlet ou des équations paraboliques [2], [3], [4], [5], dans les équations de filtrage non linéaire [6], [7], dans les équations de type de Kolmogorov [8], [9], [10], [11], des équations retardées [12], [13]) ainsi que dans des modèles décrivant des phénomènes aléatoires en physique (par exemple la propagation des ondes en milieux aléatoires [14], [15], des problèmes concernant la turbulence [16], [17]), biologie (évolutions de populations [18], [19], neurophysiologie [20]) ou en théorie du contrôle ([21], [22], [23]). Une belle introduction au sujet des équations d'évolution stochastiques ainsi que beaucoup d'autres exemples et de références peuvent être trouvés dans [24].

0.2 ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION

Nous nous basons sur la théorie des semigroupes linéaires qui permet de traiter d'une manière unifiante des équations semilinéaires aux dérivées partielles paraboliques, hyperboliques ainsi que des équations retardées. En général, soit X un espace de Banach séparable et A un opérateur linéaire défini sur son domaine $D(A)$. Supposons que A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe d'opérateurs linéaires (S_t) sur X. Soit $F : [0,\infty) \times X \to X$ une application mesurable. On a alors l'équation d'évolution

$$\dot{u} = Au(t) + F(u(t)) \qquad \text{sur} \qquad X.$$

Faisons maintenant le lien avec les trois types d'équations:

• Dans le cas d'une équation **parabolique** on considère, par exemple, le problème de Neumann pour l'équation de la chaleur avec la perturbation cubique de signe négatif sur un C^2-domaine borné D dans $\mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u - u^3 \qquad \text{sur} \qquad D \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \qquad\qquad\quad \text{sur} \qquad \partial D \end{aligned} \tag{0.2.1}$$

Dans ce cas, on prend pour X l'espace de Lebesgue $L^p(D)$ avec $1 < p < \infty$, pour A le Laplacien sur le domaine

$$D(A) = \left\{ u \in W^{2,p}(D) : \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial D \right\},$$

$F(u) = -u^3$ pour $u \in L^p(D) \cap L^{3p}(D)$ et $F(u) = 0$ pour $u \in L^p(D) \setminus L^{3p}(D)$.

• Dans le cas d'une EDP **hyperbolique** considérons, par exemple, le problème de Cauchy pour l'équation d'ondes avec la perturbation cubique de signe négative

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u^3 \qquad \text{sur} \qquad \mathbb{R}^3. \tag{0.2.2}$$

Alors, ici on prend pour X l'espace produit $H^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$, pour le générateur infinitésimal l'opérateur matriciel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$$

de domaine $D(A) = H^2(\mathbb{R}^3) \times H^1(\mathbb{R}^3)$, et

$$F\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -u^3 \end{pmatrix}, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^3), \quad v \in L^2(\mathbb{R}^3).$$

Cette équation sera étudié dans le cas stochastique plus en détail dans le Chapitre 3 et 4.

• Dans le cas d'une **équation retardée** on peut considérer, par exemple, l'équation

$$u'(t) = \int_{-r}^{0} d\mu(x)\, u(t+x) + f(u(t)) \tag{0.2.3}$$

où $r > 0$ est le retard, μ est une mesure finie sur $[-r, 0]$ à valeurs dans les $(d \times d)$-matrices et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une fonction. Ici on prend pour X l'espace produit $\mathbb{R}^d \times L^2([-r, 0]; \mathbb{R}^d)$, pour le domaine du générateur infinitésimal

$$D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} h(0) \\ h \end{pmatrix} \in X : h \in W^{1,2}([-r, 0]; \mathbb{R}^d) \right\},$$

pour le générateur infinitésimal l'opérateur

$$A\begin{pmatrix} y \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-r}^{0} h(x)\, d\mu(x) \\ h' \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y \\ h \end{pmatrix} \in D(A),$$

et

$$F\begin{pmatrix} y \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(y) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y \\ h \end{pmatrix} \in X.$$

0.3 MISE DE BRUIT

Ayant une équation d'évolution dans $\mathbb{R}^d$, le générateur infinitésimal A est une matrice et F est une fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$. Considérons une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ avec un processus de Wiener $W = (W_1, \ldots, W_m)$ par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$, et une fonction G mesurable définie sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans les matrices $(d \times m)$. Un processus $(u(t) \in \mathbb{R}^d : t \geq 0)$ continu adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ résout l'équation

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= Au(t) + F(u(t)) + G(u(t))\,\dot{W} \\ &= Au(t) + F(u(t)) + \sum_{i=1}^{m} G(u(t))e_i\,\dot{W}_i \end{aligned}$$

au sens d'Ito si

$$\begin{aligned} u(t) &= u(0) + \int_0^t A(u(s))\,ds + \int_0^t F(u(s))\,ds + \int_0^t G(u(s))\,dW \qquad t \geq 0, \\ &= u(0) + \int_0^t A(u(s))\,ds + \int_0^t F(u(s))\,ds + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t G(u(s))e_i\,dW_i \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

ou, par la formule d'Ito, d'une manière équivalente, si

(0.3.1)

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{At}u(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}F(u(s))\,ds + \int_0^t e^{A(t-s)}G(u(s))\,dW \qquad t \geq 0, \\ &= e^{At}u(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}F(u(s))\,ds + \sum_{i=1}^{m} \int_0^t e^{A(t-s)}G(u(s))e_i\,dW_i \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

où (e^{At}) est le C_0-groupe de $(d \times d)$-matrices engendré par A, et $e_1, \ldots, e_m$ est la base canonique dans $\mathbb{R}^m$ car

$$W(t) = \sum_{i=1}^{m} W_i(t)e_i. \tag{0.3.2}$$

Repassant au cas banachique, on considère un espace de Hilbert séparable U et une application G définie sur X à valeurs dans l'espace des opérateurs linéaires bornés $L(U, X)$. Ensuite, soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ une base stochastique soutenant une suite de processus de Wiener $(W_i : i \in \mathbb{N})$ par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$, tous indépendants, et, enfin, soit $(e_i : i \in \mathbb{N})$ une base orthonormée dans U. Alors, compte tenu de (0.3.1) et (0.3.2), on définit le processus de Wiener formellement comme

$$W(t) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i(t)e_i$$

et on dit qu'un processus $(u(t) \in X : t \geq 0)$ progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$, résout l'équation

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= Au(t) + F(u(t)) + G(u(t))\,\dot{W} \\ &= Au(t) + F(u(t)) + \sum_{i=1}^{\infty} G(u(t))e_i\,\dot{W}_i \end{aligned}$$

au sens d'Ito si

$$\begin{aligned} u(t) &= S_t u(0) + \int_0^t S_{t-s}F(u(s))\,ds + \int_0^t S_{t-s}G(u(s))\,dW \qquad t \geq 0, \\ &= S_t u(0) + \int_0^t S_{t-s}F(u(s))\,ds + \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t S_{t-s}G(u(s))e_i\,dW_i \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

Voyons maintenant comment la mise de bruit intervient dans les trois exemples précédants.

• Cas **parabolique** - mouvement d'une corde élastique dans un milieu aléatoire visqueux (voir [25])

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^3 + u^2\,\dot{W} \qquad \text{sur} \qquad (0,1) \\ &\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0 \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

est un cas correspondant à l'équation (0.2.1). Plus précisément, $X = L^2(0,1)$, $U = L^2(0,1)$ et $G(u)h = u^2 h$ pour $u \in L^\infty(0,1)$ et $G(u)h = 0$ pour $u \in L^2(0,1) \setminus L^\infty(0,1)$.

• Cas **hyperbolique** - l'équation d'ondes stochastique (voir le Chapitre 3 et 4). Soit W un processus de Wiener spatialement homogène sur $\mathbb{R}^3$ de mesure spectral μ finie. Alors, on considère l'équation (0.2.2) avec une perturbation stochastique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - u^3 + u^2\,\dot{W} \qquad \text{sur} \qquad \mathbb{R}^3.$$

Là, $X = H^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$, U est l'espace autoreproduisant de W qui est contenu dans l'espace de fonctions bornées uniformément continues sur $\mathbb{R}^3$, et

$$G\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ u^2\xi \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X, \quad \xi \in U.$$

• Cas de **l'équation retardée** (0.2.3) avec bruit (voir [13])

$$u'(t) = \int_{-r}^{0} d\mu(x)\,u(t+x) + f(u(t)) + \dot{W}.$$

Ici, $X = \mathbb{R}^d \times L^2([-r,0];\mathbb{R}^d)$, $U = \mathbb{R}^d$ et

$$G\begin{pmatrix} y \\ h \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y \\ h \end{pmatrix} \in X, \quad z \in U.$$

0.4 RÉSUMÉ DU PREMIER CHAPITRE

0.4.1 Définitions

► *Unicité pour des équations d'évolution stochastiques dans des espaces de Banach*

Nous considérons une équation d'évolution stochastique

$$\begin{aligned} &\dot{u}(t) = Au(t) + f(t,u(t)) + g(t,u(t))\,\dot{W} \\ &u(0) = \mu \qquad \text{en loi} \end{aligned} \tag{0.4.1}$$

sur un espace 2-lisse séparable X (par exemple $L^p(D)$, $2 \le p < \infty$), où A est un générateur infinitésimal d'un C_0-semigroupe d'opérateurs linéaires (S_t) sur X (par exemple un opérateur différentiel uniformément elliptique), W est un processus de Wiener cylindrique de covariance $Q \in L(U)$ sur un espace de Hilbert séparable U, $f : [0,T] \times X \to X$ est un drift (une application mesurable), $g : [0,T] \times X \to L(U_0, X)$ est une diffusion (une application fortement mesurable) où $U_0 = \operatorname{Rng} Q^{1/2}$ est l'espace autoreproduisant de W, T est un réel positif et μ est une mesure de probabilité borélienne sur X, et nous étudions plusieurs notions d'unicité des solutions et les relations entre elles. A savoir, ayant donné une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ avec un processus de Wiener cylindrique W de covariance Q, on dit qu'un processus u défini sur $[0.T]$ à valeurs dans X progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ tel que la loi de $u(0)$ est égale a μ, résout l'équation (0.4.1) si

$$\mathbb{P}\left[\int_0^t \|S_{t-s} f(s,u(s))\|_X + \|S_{t-s} g(s,u(s))\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds < \infty\right] = 1$$

et

$$\mathbb{P}\left[u(t) = S_t u(0) + \int_0^t S_{t-s} f(s,u(s))\, ds + \int_0^t S_{t-s} g(s,u(s))\, dW\right] = 1$$

pour tout $t \in [0,T]$, où $L_2(U_0,X)$ est l'espace d'opérateurs linéaires radonifiants de U_0 dans X.

Pour les équations d'évolution sans bruit la question d'unicité est triviale et ne concerne que l'unicité trajectorielle:

- *Pour toutes solutions u^1 et u^2 telles que $u^1(0) = u^2(0)$, les trajectoires coïncident, c'est-à-dire, $u^1(t) = u^2(t)$ pour tout t.*

Dans le cas des équations bruitées une solution u n'est plus seulement une fonction du temps mais aussi de l'omega - l'élément représentant le côté aléatoire, et plusieurs définitions d'unicité s'avèrent appropriées:

L'unicité trajectorielle est le type d'unicité le plus naturel et concerne des solutions sur une base stochastique commune:

- *Pour toute base stochastique* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ *soutenant un processus de Wiener cylindrique* W *de covariance* Q *et deux processus* u^1, u^2 *résolvant l'équation (0.4.1) tels que*

$$\mathbb{P}[u^1(0) = u^2(0)] = 1$$

on a

$$\mathbb{P}[u^1(t) = u^2(t)] = 1$$

pour tout $t \in [0, T]$.

L'unicité en loi, à la différence de l'unicité trajectorielle, concerne des solutions qui vivent sur des bases stochastiques différentes:

- *Pour toutes bases stochastiques* $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, (\mathcal{F}_t^i), \mathbb{P}^i, W^i, u^i)$, $i = 1, 2$ *soutenant un processus de Wiener cylindrique* W^1, *resp.* W^2 *de covariance* Q *et un processus* u^1, *resp.* u^2 *résolvant l'équation (0.4.1) on a*

$$\mathfrak{Law}_{\mathbb{P}^1}\left(u^1(t_1), \ldots, u^1(t_m)\right) = \mathfrak{Law}_{\mathbb{P}^2}\left(u^2(t_1), \ldots, u^2(t_m)\right)$$

sur

$$\underbrace{\mathbb{B}(X) \otimes \cdots \otimes \mathbb{B}(X)}_{m \text{ fois}}$$

pour toute partition $0 \leq t_1 < \cdots < t_m \leq T$.

L'unicité conjointe en loi est un renforcement de l'unicité en loi où on réclame la coïncidence des lois du couple de la solution u et du processus de Wiener W:

- *Pour toutes bases stochastiques* $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, (\mathcal{F}_t^i), \mathbb{P}^i, W^i, u^i)$, $i = 1, 2$ *soutenant un processus de Wiener cylindrique* W^1, *resp.* W^2 *de covariance* Q *et un processus* u^1, *resp.* u^2 *résolvant l'équation (0.4.1) on a*

$$\mathfrak{Law}_{\mathbb{P}^1}\left(u^1_{t_1}, \ldots, u^1_{t_m}, W^1_{t_1}, \ldots, W^1_{t_m}\right) = \mathfrak{Law}_{\mathbb{P}^2}\left(u^2_{t_1}, \ldots, u^2_{t_m}, W^2_{t_1}, \ldots, W^2_{t_m}\right)$$

sur

$$\bigotimes_{i=1}^{m} \mathbb{B}(X) \otimes \bigotimes_{i=1}^{m} \mathbb{B}(\mathbb{R})^U$$

pour toute partition $0 \leq t_1 < \cdots < t_m \leq T$.

La u-unicité conjointe en loi est le membre de raccord entre l'unicité en loi et l'unicité conjointe en loi:

- *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, u)$ une base stochastique avec un processus de Wiener cylindrique W de covariance Q et un processus solution u. On dit que la u-unicité conjointe en loi vaut pour l'équation (0.4.1) si pour toute base stochastique $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t), \widetilde{\mathbb{P}}, \widetilde{W}, \widetilde{u})$ soutenant un processus de Wiener cylindrique $\widetilde{W}$ de covariance Q et un processus $\widetilde{u}$ résolvant l'équation (0.4.1) on a l'implication suivante:*

$$\mathfrak{Law}_{\mathbb{P}}\left(u(t_1), \dots, u(t_m)\right) = \mathfrak{Law}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\widetilde{u}(t_1), \dots, \widetilde{u}(t_m)\right)$$

sur

$$\underbrace{\mathbb{B}(X) \otimes \cdots \otimes \mathbb{B}(X)}_{m \text{ fois}}$$

pour toute partition $0 \leq t_1 < \cdots < t_m \leq T$ implique

$$\mathfrak{Law}_{\mathbb{P}}\left(u_{t_1}, \dots, u_{t_m}, W_{t_1}, \dots, W_{t_m}\right) = \mathfrak{Law}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\widetilde{u}_{t_1}, \dots, \widetilde{u}_{t_m}, \widetilde{W}_{t_1}, \dots, \widetilde{W}_{t_m}\right)$$

sur

$$\bigotimes_{i=1}^{m} \mathbb{B}(X) \otimes \bigotimes_{i=1}^{m} \mathbb{B}(\mathbb{R})^U$$

pour toute partition $0 \leq t_1 < \cdots < t_m \leq T$.

La u-unicité trajectorielle est une unicité trajectorielle dans une sous-classe de solutions liée par la loi d'une solution de référence u:

- *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, u)$ une base stochastique avec un processus de Wiener cylindrique W de covariance Q et un processus solution u. On dit que la u-unicité trajectorielle vaut pour l'équation (0.4.1) si pour toute base stochastique $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t), \widetilde{\mathbb{P}})$ soutenant un processus de Wiener cylindrique $\widetilde{W}$ de covariance Q et deux processus $\widetilde{u}^1$, $\widetilde{u}^2$ résolvant l'équation (0.4.1) on a l'implication suivante:*

$$\widetilde{\mathbb{P}}[\widetilde{u}^1(0) = \widetilde{u}^2(0)] = 1$$

et

$$\mathfrak{Law}_{\mathbb{P}}\left(u(t_1), \dots, u(t_m)\right) = \mathfrak{Law}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\widetilde{u}^1(t_1), \dots, \widetilde{u}^1(t_m)\right) = \mathfrak{Law}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\widetilde{u}^2(t_1), \dots, \widetilde{u}^2(t_m)\right)$$

sur

$$\underbrace{\mathbb{B}(X) \otimes \cdots \otimes \mathbb{B}(X)}_{m \text{ fois}}$$

pour toute partition $0 \leq t_1 < \cdots < t_m \leq T$ implique

$$\widetilde{\mathbb{P}}[\widetilde{u}^1(t) = \widetilde{u}^2(t)] = 1$$

pour tout $t \in [0, T]$.

La (u, W)-unicité trajectorielle est une unicité trajectorielle dans une sous-classe encore plus étroite que dans le cas de la u-unicité trajectorielle:

- *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, u)$ une base stochastique avec un processus de Wiener cylindrique W de covariance Q et un processus solution u. On dit que la u-unicité trajectorielle vaut pour l'équation (0.4.1) si pour toute base stochastique $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t), \widetilde{\mathbb{P}})$ soutenant un processus de Wiener cylindrique $\widetilde{W}$ de covariance Q et deux processus $\widetilde{u}^1$, $\widetilde{u}^2$ résolvant l'équation (0.4.1) on a l'implication suivante:*

$$\widetilde{\mathbb{P}}[\widetilde{u}^1(0) = \widetilde{u}^2(0)] = 1$$

et

$$\begin{aligned}\mathfrak{Law}_{\mathbb{P}}\left(u_{t_1}, \ldots, u_{t_m}, W_{t_1}, \ldots, W_{t_m}\right) &= \mathfrak{Law}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\widetilde{u}^1_{t_1}, \ldots, \widetilde{u}^1_{t_m}, \widetilde{W}_{t_1}, \ldots, \widetilde{W}_{t_m}\right) \\ &= \mathfrak{Law}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\widetilde{u}^2_{t_1}, \ldots, \widetilde{u}^2_{t_m}, \widetilde{W}_{t_1}, \ldots, \widetilde{W}_{t_m}\right)\end{aligned}$$

sur

$$\bigotimes_{i=1}^{m} \mathbb{B}(X) \otimes \bigotimes_{i=1}^{m} \mathbb{B}(\mathbb{R})^U$$

pour toute partition $0 \leq t_1 < \cdots < t_m \leq T$ implique

$$\widetilde{\mathbb{P}}[\widetilde{u}^1(t) = \widetilde{u}^2(t)] = 1$$

pour tout $t \in [0, T]$.

A part des diverses unicités nous rencontrerons un meilleur type d'existence:

- *L'équation (0.4.1) possède une* **solution forte** *si, pour toute base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ soutenant un processus de Wiener cylindrique W de covariance Q et une variable aléatoire ξ à valeurs dans X mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_0$ qui a pour loi μ, il existe un processus solution u tel que $\mathbb{P}[u(0) = \xi] = 1$ et $u(t)$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par $(u(0), W(s) : s \leq t)$ pour tout $t \leq T$.*

0.4.2 Résultats principaux

Le Théorème 1.1 nous dit que l'existence d'une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ avec un processus de Wiener cylindrique W de covariance Q et d'un processus solution u tel que $u(t)$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par $(u(0), W(s) : s \leq t)$ pour tout $t \leq T$, entraîne l'existence d'une *solution forte*, et si, en plus, l'unicité conjointe en loi vaut, alors *l'unicité trajectorielle* vaut aussi. Ce résultat a été prouvé dans le cas de dimension finie dans [26].

Le Théorème 1.2 assure que l'existence d'une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ avec un processus de Wiener cylindrique W de covariance Q et un processus solution u, avec l'unicité trajectorielle entraînent l'existence d'une *solution forte* et *l'unicité conjointe en loi.* Dans le cas de dimension finie ce résultat est dû à [27] et [26].

Le Théorème 1.3 dit que l'existence d'une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ avec un processus de Wiener cylindrique W de covariance Q et un processus solution u tel que

$$P\left[\int_0^T \|f(s,u(s))\|_X + \|g(s,u(s))\|^2_{L(U_0,X)}\, ds < \infty\right] = 1$$

et l'opérateur de diffusion $g(\cdot, u(\cdot))$ est injectif tout le long les trajectoires, alors *la u-unicité conjointe en loi* vaut. En particulier, si l'opérateur de diffusion $g(t,x)$ et injectif pour tout t et $x \in X$, et l'unicité en loi vaut, alors *l'unicité conjointe en loi* vaut aussi. Ce résultat a été prouvé dans le cas de dimension finie dans [26].

Le Théorème 1.4 affirme en gros que, pour les conditions initiales non aléatoires, *l'unicité en loi* et *l'unicité conjointe en loi* coïncident. Dans le cas de dimension finie ce résultat a été démontré dans [28].

Le Théorème 1.5 est basé sur le Théorème de Girsanov, et démontre que *l'unicité conjointe en loi* vaut pour toute une classe d'équations à bruit additif de type

$$\dot{u}(t) = Au(t) + g(t)f(t,u(t)) + g(t)\,\dot{W}.$$

Dans le cas de dimension finie voir [29].

Le Théorème 1.6 dit que, pour une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, u)$ avec un processus de Wiener cylindrique W de covariance Q et un processus u progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$, le processus u est une solution si et seulement s'il existe une solution $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, (\tilde{\mathcal{F}}_t), \tilde{\mathbb{P}}, \tilde{W}, \tilde{u})$ telle que la loi conjointe du couple (u, W) coïncide avec la loi conjointe de $(\tilde{u}, \tilde{W})$.

Le Théorème 1.8 clôt la chaine des implications en affirmant que les énoncés suivants sont équivalents (dans le cas de dimension finie voir [26] et [30]):

(i) Il existe une solution $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P, W, u)$ et l'unicité trajectorielle vaut.

(ii) Il existe une solution $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P, W, u)$ telle que la (u, W)-unicité trajectorielle vaut, et l'unicité conjointe en loi vaut.

(iii) Il existe une solution $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P, W, u)$ telle que $u(t)$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par $(u(0), W(s) : s \leq t)$ pour tout $t \leq T$ et l'unicité conjointe en loi vaut.

Le Théorème 1.9 concerne la (u, W)-unicité trajectorielle: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P, W, u)$ une solution. Alors la (u, W)-unicité trajectorielle est équivalente à ce qu'il existe une solution $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t), P', W', u')$ telle que $u'(t)$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par $(u'(0), W'(s) : s \leq t)$ pour tout $t \leq T$, et la loi conjointe de (u, W) coïncide avec celle de (u', W'). Ce résultat a été démontre dans le cas de dimension finie dans [26].

Le Théorème 1.10 est une analogie du Théorème 1.8: Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P, W, u)$ une solution. Alors, les énoncés suivants sont équivalents (dans le cas de dimension finie voir [26]):

(i) La u-unicité trajectorielle vaut.

(ii) La u-unicité conjointe en loi vaut et il existe une solution

$$(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t), P', W', u')$$

telle que la loi de u coïncide avec la loi de u' et la (u', W')-unicité trajectorielle vaut.

(iii) La u-unicité conjointe en loi vaut et il existe une solution

$$(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t), P', W', u')$$

telle que la loi de u' coïncide avec la loi de u et $u'(t)$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par $(u'(0), W'(s) : s \leq t)$ pour tout $t \leq T$.

Le Théorème 1.11 dit que l'unicité conjointe en loi est équivalente à ce que l'unicité en loi vaut et la u-unicité conjointe en loi vaut pour toute solution $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P, W, u)$.

0.4.3 Résultats concernant des conceptions de solutions

Les Théorèmes 1.12 et 1.13 généralisent le théorème de Chojnowska-Michalik [31] et affirment que la formulation de solution *mild*

$$u(t) = S_t u(0) + \int_0^t S_{t-s} f(s, u(s))\, ds + \int_0^t S_{t-s} g(s, u(s))\, dW_s \qquad t \in [0, T]$$

est équivalente avec la formulation *faible*

$$\begin{cases} \int_0^t u(s)\, ds \in D(A) & t \in [0, T] \\ u(t) = u(0) + A \int_0^t u(s)\, ds + \int_0^t f(s, u(s))\, ds + \int_0^t g(s, u(s))\, dW_s & t \in [0, T] \end{cases}$$

et c'est également équivalent à la formulation *variationelle*

$$\langle x^*, u_t \rangle = \langle x^*, u_0 \rangle + \int_0^t \langle A^* x^*, u_s \rangle\, ds + \int_0^t \langle x^*, f(s, u(s)) \rangle\, ds + \int_0^t \langle x^*, g(s, u(s)) \cdot \rangle\, dW_s$$

pour tout $t \in [0, T]$ et $x^* \in D(A^*)$.

0.4.4 Commentaires et remarques

Nous travaillons dans les espaces de Banach 2-lisses (en particulier, les espaces de Hilbert ou les espaces de Lebesgue L^p pour $2 \leq p < \infty$) et nous nous servons des outils de l'analyse stochastique comme par exemple l'intégrale stochastique et ses propriétés de convergence, les inégalités de Burkholder générales, le Théorème de Girsanov ou le Théorème de Fubini stochastique. Pour cette raison nous rappelons d'abord les définitions d'un processus de Wiener cylindrique et des espaces de Banach 2-lisses en fournissant leurs propriétés. Puis, nous suggérons une approche alternative de la construction de l'intégrale stochastique dans les espaces 2-lisses en suivant plutôt les idées dans [32] que celles dans [33], [34] ou [35]. En fin, notre construction aboutit à l'intégrale stochastique habituelle. Ensuite nous étudions les propriétés de conservation des lois conjointes des *intégrales de Bochner*, des *intégrales stochastiques* et des *sélecteurs mesurables aléatoires*. La dernière section est consacrée aux démonstrations des Théorèmes 1.1 - 1.13.

0.5 RÉSUMÉ DU DEUXIÈME CHAPITRE

- *Représentations browniennes de martingales locales cylindriques*
- *Problème de martingale en dimension infinie*
- *Propriété de Markov forte des solutions des EDPS dans des espaces de Banach*

0.5.1 Première section

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ une base stochastique, W un processus de Wiener par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ et soit g est un processus réel $(\mathcal{F}_t)$-progressivement mesurable dont les trajectories appartiennent localement dans L^2. Alors l'intégrale stochastique

$$M(t) = \int_0^t g(s)\, dW_s$$

est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale continue issue de zéro dont la variation quadratique est égale à

$$\int g^2(s)\, ds.$$

Alors, on peut se poser la question si, pour toute $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale continue issue de zéro dont la variation quadratique est égale à

$$\int g^2(s)\, ds$$

où g est un processus réel $(\mathcal{F}_t)$-progressivement mesurable dont les trajectories appartiennent localement dans L^2, il existe un processus de Wiener W par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ tel que

$$M(t) = \int_0^t g(s)\, dW_s.$$

Ce problème a été résolu par Doob dans [36] et son résultat a été généralisé aux dimensions supérieures dans [29], et dans le cas hilbertien dans [24]. Cependant, cette généralité n'est pas suffisante pour le problème suivant que nous allons étudier:

Soit X un espace de Banach 2-lisse séparable, A un générateur infinitésimal d'un (C_0)-semigroupe sur X, U un espace de Hilbert séparable, $Q \in L(U)$ un opérateur de covariance, $U_0 = \operatorname{Rng} Q^{1/2}$ l'espace autoreproduisant, $f : [0,\infty) \times X \to X$ un drift mesurable, $g : [0,\infty) \times X \to L(U_0, X)$ une diffusion fortement mesurable, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ une base stochastique et u un processus à valeurs dans X progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$.

- *Existe-il un processus de Wiener W par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ de covariance Q tel que u résolve l'équation*

$$\dot{u}(t) = Au(t) + f(t, u(t)) + g(t, u(t))\,\dot{W} \qquad ?$$

Grâce au Théorème de Chojnowska-Michalik (voir le Théorème 1.12 et le Théorème 1.13 du premier chapitre) il suffit et il est nécessaire de vérifier que le processus cylindrique

$$M_t(x^*) = \langle x^*, u(t)\rangle - \langle x^*, u(0)\rangle - \int_0^t \langle A^*x^*, u(s)\rangle\, ds - \int_0^t \langle x^*, f(s, u(s))\rangle\, ds$$

est une martingale locale pour tout $x^* \in D(A^*)$ et que sa variation quadratique est donnée par

$$\langle M(x^*)\rangle = \int \|g^*(s, u(s))x^*\|_{U_0}^2\, ds,$$

et que M admet une représentation brownienne. C'est-à-dire qu'il existe un processus de Wiener W cylindrique par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ de covariance Q tel que

$$M(x^*) = \int \langle x^*, g(s, u(s))\cdot\rangle\, dW, \qquad x^* \in D(A^*).$$

Là, nous voyons qu'il est utile de savoir si le théorème de représentations browniennes est valable même pour les martingales locales *cylindriques* vivants sur *des espaces de Banach.*

La réponse affirmative se trouve dans le théorème suivant:

Théorème 2.1.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ une base stochastique, g un processus à valeurs dans $L(U_0, X)$ progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ tel que*

$$\mathbb{P}\left[\int_0^T \|g_s\|_{L(U_0,X)}^2\, ds\right] = 1 \qquad \textit{pour tout} \quad T > 0$$

et $(M(x^*) : x^* \in D)$ est une famille de $(\mathcal{F}_t)$-martingales locales continues issues de zéro, où D est un ensemble dense dans X^* tel que $qx_1^* + x_2^* \in D$ pour tout $x_1^* \in D$, $x_2^* \in D$ et $q \in \mathbb{Q}$. Nous supposons que

- ▷ $\mathbb{P}\left[M_t(qx_1^* + x_2^*) = qM_t(x_1^*) + M_t(x_2^*)\right] = 1$, $t \geq 0$, $q \in \mathbb{Q}$, $x_1^* \in D$, $x_2^* \in D$.
- ▷ *la variation quadratique est donnée par* $\langle M(x^*)\rangle = \int \|g^* x^*\|_{U_0}^2 \, ds$, $x^* \in D$.

Soit au moins une des conditions suivantes satisfaite:

- ▷ *l'opérateur $g(t,\omega)$ est injective pour $dt \otimes \mathbb{P}$-presque tout (t,ω).*
- ▷ *$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ soutient un système infini dénombrable de $(\mathcal{F}_t)$-processus de Wiener standards réels indépendants, et la tribu engendrée par eux est indépendante du processus M.*

Alors il existe un processus de Wiener cylindrique W par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ de covariance Q tel que

$$M(x^*) = \int \langle x^*, g\cdot \rangle \, dW_s$$

pour tout $x^* \in D$.

Le Théorème 2.1.2 a un corollaire immédiat. Effectivement, si X est un espace de Banach 2-lisse ou, en particulier, un espace de Hilbert, et le processus g vérifie une condition d'intégrabilité supplémentaire, alors le processus cylindrique M est représentable comme une martingale locale à valeurs dans X.

Corollaire 2.1.3. Notons $R(U_0, X)$ l'espace des opérateurs radonifiants de U_0 dans X. Si X est un espace de Banach 2-lisse, resp. un espace de Hilbert, et

$$\mathbb{P}\left[\int_0^T \|g_s\|_{R(U_0,X)}^2 \, ds\right] = 1 \qquad \text{resp.} \qquad \mathbb{P}\left[\int_0^T \|g_s\|_{HS(U_0,X)}^2 \, ds\right] = 1$$

pour tout $T > 0$, alors M admet une représentation $\mathcal{M}$ dans X où

$$\mathcal{M} = \int g \, dW$$

et $M(x^*) = \langle x^*, \mathcal{M}\rangle$ pour tout $x^* \in D$.

0.5.2 Deuxième section

Supposons que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ est une base stochastique, $W = (W_1, \ldots, W_m)$ un processus de Wiener, A une $(d \times d)$-matrice, $F : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $G : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times m}$ deux transformations mesurables et u une solution de l'équation

$$\dot{u}(t) = Au(t) + F(t, u(t)) + G(t, u(t))\dot{W}.$$

Alors, grâce à la formule d'Ito, le processus

$$\widetilde{M}_t(f) = f(u(t)) - f(u(0)) - \int_0^t \langle \nabla f(u(s)), Au(s) + F(s, u(s)) \rangle_{\mathbb{R}^d} \, ds -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^t \mathrm{Tr} \left\{ D^2 f(u(s)) G(s, u(s)) G^*(s, u(s)) \right\} ds, \qquad t \geq 0$$

est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale pour tout $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$, et on a explictement

$$\widetilde{M}_t(f) = \int_0^t (\nabla f(u(s)))^* \, G(s, u(s)) \, dW.$$

Par la suite, le processus défini sur l'espace canonique des trajectoires

$$M(f)(t, \omega) = f(\omega(t)) - f(\omega(0)) - \int_0^t \langle \nabla f(\omega(s)), A\omega(s) + F(s, \omega(s)) \rangle_{\mathbb{R}^d} \, ds -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^t \mathrm{Tr} \left\{ D^2 f(\omega(s)) G(s, \omega(s)) G^*(s, \omega(s)) \right\} ds, \qquad t \geq 0, \quad \omega \in C([0, \infty); \mathbb{R}^d)$$

est une martingale locale par rapport à la filtration naturelle $(\sigma(\omega(s) : s \leq t))_t$ et pour la loi de u. En fait, la réciproque est vrai aussi:

Proposition 5.4.6 [29]. *Soit le processus $M(f)$ une martingale locale sur l'espace canonique $\widetilde{\Omega} = C([0, \infty); \mathbb{R}^d)$ par rapport à une mesure de probabilité borélienne P sur $\widetilde{\Omega}$ pour les choix $f(x) = x_i$ et $f(x) = x_i x_j$, $i \leq d$, $j \leq d$. Alors il existe une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ avec un processus de Wiener $W = (W_1, \ldots, W_m)$ et un processus $(\mathcal{F}_t)$-progressivement mesurable u vérifiant*

$$\dot{u}(t) = Au(t) + F(t, u(t)) + G(t, u(t)) \dot{W}.$$

En plus, la loi de u est égale à P.

Effectivement, *l'existence faible* d'une solution de l'équation différentielle stochastique est équivalente à l'existence *d'une mesure de probabilité P* sur l'espace canonique qui rend les processus explicites $M(f)$ des martingales locales. On appelle la mesure *P la solution du problème de martingale* d'après Stroock et Varadhan [37].

Si on passe au cas banachique on trouve que cette méthode n'est pas directement applicable car la solution de l'équation n'est pas une semimartingale dans X à cause de l'opérateur A qui n'est pas borné sur X et, par conséquent, la formule d'Ito ne peut pas être utilisée. C'est pour cette raison que nous suggérons de franchir cet obstacle à l'aide du théorème de Chojnowska-Michalik (voir le Théorème 1.12 et 1.13 du premier chapitre):

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, u)$ une solution de l'équation

$$\dot{u}(t) = Au(t) + F(t, u(t)) + G(t, u(t))\,\dot{W}. \tag{0.5.2}$$

Alors

$$\langle x^*, u_t\rangle = \langle x^*, u_0\rangle + \int_0^t \langle A^*x^*, u_s\rangle\, ds + \int_0^t \langle x^*, F(s, u_s)\rangle\, ds + \int_0^t \langle x^*, G(s, u_s)\cdot\rangle\, dW_s$$

pour tout $t \in [0, T]$ et $x^* \in D(A^*)$ par le théorème de Chojnowska-Michalik et le côté gauche est une semimartingale continue. Or, si $f \in C^2(\mathbb{R})$, le processus

$$f(\langle x^*, u_t\rangle) - f(\langle x^*, u_0\rangle) - \int_0^t \dot{f}(\langle x^*, u_s\rangle)\,\{\langle A^*x^*, u_s\rangle + \langle x^*, F(s, u_s)\rangle\}\, ds -$$

$$- \int_0^t \ddot{f}(\langle x^*, u_s\rangle)\, \|G^*(s, u_s)x^*\|_{U_0}^2\, ds$$

est une martingale locale et, grâce à la formule d'Ito, égale à

$$\int_0^t \dot{f}(\langle x^*, u_s\rangle)\, \langle x^*, G(s, u_s)\cdot\rangle\, dW_s.$$

Notons $\overline{\Omega} = C([0, \infty), \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ l'espace canonique de référence et fixons une suite $D = \{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ dans le domaine $D(A^*)$ de l'opérateur adjoint A^* telle que

- ▷ $qh_n + h_m \in D$ pour tout q rationnel, $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$.
- ▷ l'ensemble $\{(h_n, A^*h_n); n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $\{(x^*, A^*x^*) : x^* \in D(A^*)\}$ pour la topologie de $X^* \times X^*$.

Ceci est possible puisque X^* et séparable. Ensuite, notons

$$L_n(f)(t, \omega) = f(\omega_n(t)) - f(\omega_n(0)) -$$

$$- \int_0^t \dot{h}(\omega_n(s))\, \left(\langle A^*h_n, e^{-1}\omega(s)\rangle + \langle h_n, F(s, e^{-1}\omega(s))\rangle\right) ds -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^t \ddot{f}(\omega_n(s))\, \left\|G^*(s, e^{-1}\omega(s))h_n\right\|_{U_0}^2 ds, \qquad t \geq 0, \quad \omega \in \overline{\Omega}$$

pour $f \in C^2(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$, où

$$e : X \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x \mapsto (\langle h_n, x\rangle : n \in \mathbb{N})$$

est l'injection de X dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et, en fin, soit $L_{nm}(f)$ le processus $L_n(f)$ tué en premier temps de sortie de la boule de rayon $m \in \mathbb{N}$.

Alors, nous avons une version en dimension infinie de la proposition précédente (voir le Théorème 2.3.2) qui dit en gros *qu'il existe une mesure de probabilité borélienne P sur $\overline{\Omega}$ qui rend les processus continus bornés $L_{nm}(f)$ des martingales pour tout $f \in C^2(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe une solution $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, u)$ de l'équation (0.5.2) dont la loi est égale à P.*

Le caractère de ce théorème nous permet de reporter la recherche des mesures solutions (les lois des processus solutions) sur un seul espace de référence $\overline{\Omega}$.

Quant à l'unicité du problème de martingale on définit la notion de *well-posedness*:

Définition. *Soit O un borélien dans X et supposons que pour tout $a \geq 0$ et $x \in O$*

- ▷ *il existe une solution $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, u)$ de l'équation (0.5.2) sur $[a, \infty)$ telle que $\mathbb{P}[u(a) = x] = 1$ et $\mathbb{P}[u(t) \in O] = 1$ pour tout $t \geq a$.*
- ▷ *l'unicité en loi vaut sur $[a, \infty)$ pour la mesure initiale $\mu = \delta_x$.*

Alors on dit que l'équation (0.5.2) est bien posée sur O.

Remarque (unicité). *Soit l'équation (0.5.2) bien posée sur O. Alors, pour tout $a \geq 0$ et $x \in O$ il existe une seule mesure de probabilité borélienne $P^{a,x}$ sur $\overline{\Omega}$ telle que*

- ▷ *$P^{a,x}[\omega(s) = e(x)] = 1$ pour tout $s \leq a$.*
- ▷ *$P^{a,x}$ est une solution du problème de martingale.*

L'importance de cette approche pour l'étude des mesures solutions peut être illustrée sur le théorème suivant (voir le Théorème 2.4.6): *Soit l'équation (0.5.2) bien posée sur O et soit τ un temps d'arrêt fini sur $\overline{\Omega}$. Notons $\overline{\mathcal{F}}_t$ la tribu engendrée par le processus canonique $\omega(s)$, $s \leq t$ et $\overline{\mathcal{F}}_{t,\infty}$ la tribu complémentaire engendrée par $\omega(s)$, $s \geq t$ pour tout $t \geq 0$. Soit $x \in O$ et désignons r une version régulière de la probabilité $P^{0,x}$ conditionnée par rapport à la tribu $\overline{\mathcal{F}}_\tau$. Alors*

$$r(\omega, V) = P^{\tau(\omega), e^{-1}(\omega(\tau(\omega)))}(V), \qquad V \in \overline{\mathcal{F}}_{\tau(\omega),\infty}$$

pour presque tout $\omega \in \overline{\Omega}$.

Ce théorème a une conséquence immédiate (voir le Corollaire 2.4.7): *Soit O un borélien dans X. Alors les énoncés suivants sont équivalents:*

- ▷ *L'équation (0.5.2) est bien posée sur O.*
- ▷ *L'équation (0.5.2) possède une solution à valeurs dans O pour toute mesure de probabilité borélienne initiale μ sur O et l'équation (0.5.2) est unique en loi pour μ.*

0.5.3 Troisième section

Le Théorème 2.4.6 a en effet davantage de conséquences de longue portée (voir les Théorèmes 2.5.1, 2.5.3 et 2.5.4):

Soit l'équation (0.5.2) bien posée sur un borélien O. Alors les solutions

$$(0.5.3)\quad (\Omega_{a,x}, \mathcal{F}_{a,x}, (\mathcal{F}_{a,x;t}), \mathbb{P}_{a,x}, W_{a,x}, u_{a,x}), \quad \mathbb{P}_{a,x}[u_{a,x} = x] = 1, \quad a \geq 0, \quad x \in O$$

définissent un processus de Markov sur O. Si, en plus, les coefficients F et G dans l'équation (0.5.2) ne dépendant pas de la coordonnée temporelle alors les solutions (0.5.3) définissent un processus de Markov fort sur O.

0.6 RÉSUMÉ DU TROISIÈME CHAPITRE

Équations d'évolution hyperboliques stochastiques dirigées par un processus de Wiener spatialement homogène

- *Vitesse finie de propagation des solutions*
- *Existence des solutions globales*
- *Meilleure régularité des solutions*

0.6.1 Introduction

Nous allons étudier l'existence et des propriétés des solutions globales de l'équation

$$(0.6.1)\qquad u_{tt} = \mathcal{A}u + f(u) + g(u)\,\dot{W}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues, $\mathcal{A}$ est un opérateur différentiel uniformément elliptique de deuxième ordre défini soit sur $\mathbb{R}^d$ soit sur un domaine borné $D \subseteq \mathbb{R}^d$ avec la condition de Dirichlet ou de Neumann au bord, et W est un processus de Wiener spatialement homogène sur $\mathbb{R}^d$.

L'équation d'ondes stochastique a été étudiée sur la droite réelle par exemple dans [38], [39], [20], [40], [41] ou [42] et le premier essai d'aborder le cas dans $\mathbb{R}^2$ remonte au travail [43] dont les résultats ont été améliorés par [44]. Le cas dans la dimension trois a été traité dans [45] et le cas multidimensionnel de l'équation linéaire dans [46], [47]. La généralisation du cas multidimensionnel linéaire à des problèmes multidimensionnels non linéaires a été fait dans [48], et sur des groupes de Lie dans [49]. Les questions d'explosion et de non explosion des solutions de l'équation d'ondes avec un processus de Wiener spatialement non homogène ont été traitées dans [50].

A part du travail [50] qui n'a pas couvert le bruit de type de Wiener spatialement homogène, tous les articles mentionnés ci-dessus traitant les perturbations stochastiques de type de Wiener spatialement homogène n'ont considéré que des fonctions nonlinéaires f et g globalement Lipschitz. Nous allons traiter le cas de bruit spatialement homogène avec des nonlinéarités f et g non lipschitziennes.

0.6.2 Processus de Wiener spatialement homogène

Notons $\mathbb{S}(\mathbb{R}^d)$ l'espace de Schwartz sur $\mathbb{R}^d$. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ une base stochastique et $W = (W(\varphi) : \varphi \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^d))$ une famille de processus de Wiener réels par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ telle que

$$\mathbb{P}[aW_t(\varphi_1) + W_t(\varphi_2) = W_t(a\varphi_1 + \varphi_2)] = 1$$

pour tout $t \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\varphi_1 \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^d)$, $\varphi_2 \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^d)$ et

$$\mathbb{E}\, W_t(\varphi)W_t(\psi) = \langle \Gamma, \varphi * \psi_{(s)} \rangle \tag{0.6.2}$$

où Γ est une distribution tempérée définie positive sur $\mathbb{R}^d$ appelée *corrélation spatiale*, et $\psi_{(s)}(x) = \psi(-x)$, $x \in \mathbb{R}^d$. On dit alors que W est un processus de Wiener *spatialement homogène.*

Voici une remarque éclaircissant la notion *spatialement homogène*:

Remarque. *La condition (0.6.2) est équivalente à ce que la loi de $W_t(\varphi(\cdot + h))$ soit égale à la loi de $W_t(\varphi)$ pour tout $t \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^d)$ et $h \in \mathbb{R}^d$. Dans ce cas, il existe une seule mesure tempérée positive symétrique μ telle que Γ est la transformée de Fourier de μ grâce au Théorème de Bochner (voir [51]). On appelle μ la mesure spectrale.*

Or, W peut être vu comme un processus de Wiener à valeurs dans l'espace des distributions tempérées $\mathbb{S}'(\mathbb{R}^d)$ dont la covariance est invariante par translations dans $\mathbb{S}'(\mathbb{R}^d)$. Divers exemples des processus de Wiener spatialement homogène peuvent être trouvés dans [52] ou [43]. Vu la remarque précédente nous en présenterons un:

• Supposons que la mesure spectrale μ soit finie. Alors Γ est une fonction bornée uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$ et W admet une représentation en tant *que champs aléatoire gaussien* $(\mathcal{W}(t,x) : t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d)$ tel que $(t,x,\omega) \mapsto \mathcal{W}(t,x,\omega)$ est mesurable

$$\mathbb{E}\, \mathcal{W}(t,x)\mathcal{W}(s,y) = (t \wedge s)\Gamma(x-y), \qquad t \geq 0, \quad s \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, \quad y \in \mathbb{R}^d$$

et

$$W_t(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\mathcal{W}(t,x)\, dx \qquad t \geq 0.$$

0.6.3 Propagation des solutions

Supposons que $f(0) = g(0) = 0$ et soit $(u(t) : t < \tau_{\max})$ une solution locale maximale au sens qu'elle est définie sur un intervalle temporel de longueur maximale, de l'équation

$$u_{tt} = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u + f(u) + g(u)\dot{W} \qquad \text{dans} \quad \mathbb{R}^d,$$

où W est un processus de Wiener spatialement homogène dont la mesure spectrale μ est finie. Soit $K(\omega)$ un compact dans $\mathbb{R}^d$ tel que le support de $u(0,\omega)$ et $u_t(0,\omega)$ est contenu dans $K(\omega)$ pour presque tout ω et notons $\mathcal{A}$ la matrice (a_{ij}). Alors le support de $u(t,\omega)$ et $u_t(t,\omega)$ est contenu dans

$$K(\omega) + \left\{x : |\mathcal{A}^{-1/2}x| \leq t\right\}$$

pour tout $t < \tau_{\max}(\omega)$ et presque tout $\omega \in \Omega$ (voir le Théorème 3.2.4).

Le fait que les solutions des équations hyperboliques propagent à vitesse finie était connu depuis longtemps, et le Théorème 3.2.4 affirme que ce fait reste valable si on ajoute une perturbation stochastique.

0.6.4 Existence de solutions globales

Cette section est consacrée à l'étude de la nonexplosion des solutions locales de l'équation (0.6.1). Nous décomposons l'équation de deuxième ordre (0.6.1) en un système de deux équations de premier ordre

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix} z + F(z) + G(z)\,\dot{W} \tag{0.6.4}$$

où

$$F(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(u) \end{pmatrix}, \qquad G(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(u) \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

sont les opérateurs de Nemytski associés aux fonctions f et g et W est un processus de Wiener spatialement homogène dont la mesure spectrale est finie.

Nous donnons des conditions suffisantes (Prop. 3.3.1) pour que les opérateurs de Nemytski F et G soient Lipschitz sur les ensembles bornés dans l'espace

$$E = D(-A)^{1/2} \times L^2(D).$$

Ceci entraîne, grâce à la théorie générale, l'existence de solutions locales vivantes jusqu'à un temps d'arrêt maximal $\tau_{\max}$ et notre but dans cette section est de trouver des conditions sur f et g afin que $\tau_{\max} = \infty$, à savoir, que la solution soit globale.

Dans ce but, nous définissons la fonction de Lyapunov V (voir la formule (3.3.1)), et après avoir fait quelques approximations nous montrons que si le carré de g est majoré par l'intégrale indéfinie de $-f$ alors l'espérance de la fonction de Lyapunov V appliquée à la solution locale n'explose pas, ce qui entraîne déjà le fait que la solution elle-même ne peut pas exploser dans l'espace E. Par conséquent, $\tau_{\max}$ est infini presque sûrement (voir le Théorème 3.3.2).

Par ailleurs, nous avons obtenu la régularité spatiotemporelle de u qui est continu en tant que processus à valeurs dans l'espace de Sobolev $W^{1,2}(D)$ et le processus de première dérivée temporelle u_t est continu dans $L^2(D)$. En plus, la solution propage à vitesse finie d'après le Théorème 3.2.4.

0.6.5 Meilleure régularité des solutions globales

En général, à la différence des équations paraboliques, les équations hyperboliques ne produisent pas l'effet de régularisation des solutions. Néanmoins, si les fonctions f et g sont en plus de classe C^2 et la mesure spectrale vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|^2)\, d\mu(x) < \infty$$

alors les solutions globales $z(t) = (u(t), u_t(t))$ de l'équation (0.6.4) sont continues en tant que processus à valeurs dans le produit des espaces de Sobolev $W^{2,2}(D) \times W^{1,2}(D)$ (voir le Théorème 3.4.2).

La démonstration porte essentiellement sur la répétition de la démonstration du Théorème 3.3.2 avec une autre fonction de Lyapunov dans le domaine du générateur infinitésimal

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}$$

défini sur le sous-espace $D(A) \times D(-A)^{1/2}$ muni de la norme de graphe.

0.7 RÉSUMÉ DU QUATRIÈME CHAPITRE

Équations d'évolution hyperboliques stochastiques dirigées par un processus de Wiener spatialement homogène

- *Existence de solutions faibles globales*

Le chapitre précédent concernait les solutions de type suivant: Étant donnés une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ avec un processus de Wiener spatialement homogène W par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ et une condition initiale z_0 à valeurs dans E mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_0$, alors il existe un processus z progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ résolvant l'équation (0.6.4). Nous avons montré cette existence dans le Théorème 3.3.2 ainsi que dans le Théorème 3.4.2. Grâce à l'hypothèse de Lipschitz locale des nonlinéarités F et G nous savons que l'unicité trajectorielle vaut pour l'équation (0.6.4). Il n'y a donc qu'une seule solution globale de condition initiale z_0.

Une autre notion de solution de l'équation (0.6.4) peut être introduite (voir aussi le premier et le deuxième chapitre): On dit qu'une famille de six membres

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, z)$$

composée d'une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$, d'un processus de Wiener spatialement homogène W par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ et d'un processus z progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ résolvant l'équation (0.6.4) est *une solution faible de l'équation (0.6.4).*

Les méthodes qui aboutisent à l'existence de solutions globales reposent premièrement sur le théorème de point fixe de Banach qui réclame, implicitement, que les nonlinéarités F et G soient globalement Lipschitz. Deuxièmement, on affaiblit l'hypothèse de Lipschitz globale de F et G à la condition de Lipschitz locale produisant l'existence de solutions locales dont l'explosion en temps fini n'est pas exclue. En fin, on a montré à l'aide de la méthode de fonctions de Lyapunov que, sous certaines hypothèses supplémentaires sur la croissance de f et g (par exemple, la croissance polynomiale), que les solutions existent en fait globalement (voir Thm 3.3.2 et Thm 3.4.2).

Dans ce chapitre nous utitlisons une troisième méthode. Nous considérons une suite de fonctions globalement Lipschitz f_n, g_n approximant les fonctions f et g et nous observons les solutions globales z_n des équations

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix} z + F_n(z) + G_n(z)\,\dot{W}^1$$

$$z(0) = z_0$$

où

$$F_n(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_n(u) \end{pmatrix}, \qquad G_n(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ g_n(u) \end{pmatrix}, \qquad z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in E, \quad n \in \mathbb{N},$$

W^1 est un processus de Wiener spatialement homogène de mesure spectrale finie sur une base stochastique $(\Omega^1, \mathcal{F}^1, (\mathcal{F}_t^1), \mathbb{P}^1)$ et z_0 est une variable aléatoire à valeurs dans E mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_0^1$.

On espère que les solutions z_n convergent vers un processus limite z résolvant l'équation (0.6.4). Malheureusement ce n'est pas le cas. Par contre, profitant des estimations en terme des fonctions de Lyapunov du troisième chapitre, on peut choisir les fonctions f_n, g_n de telle sorte que les lois des processus z_n sur un espace canonique convenable des trajectoires soient relativement compactes. Par conséquent, il existe au moins un point d'accumulation pour la convergence faible des mesures. Tout cela peut être modélisé sur un espace de référence grâce au théorème de Skorohod. A savoir, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec des processus η_n, ayant les mêmes lois que les processus z_n, et qui convergent uniformément sur tout intervalle compact vers un processus limite z.

Alors que nous sommes arrivés à un processus limite z, afin de vérifier que z est une solution de l'équation (0.6.4), il nous manque un processus de Wiener W sur l'espace Ω, et c'est exactement l'endroit où nous pouvons nous servir du théorème de représentations browniennes du deuxième chapitre (Théorème 2.1.2). Le passage à la limite des processus z_n (ou également η_n) a conservé le caractère de martingales locales des processus

$$N_t(x) = \langle z(t), x\rangle_{E(-\beta)} - \langle z(0), x\rangle_{E(-\beta)} - \int_0^t \langle z(s), M^* x\rangle_{E(-\beta)} -$$

$$- \int_0^t \langle F(z(s)), x\rangle_{E(-\beta)}\, ds$$

pour tout $x \in D(M^*)$ où M^* est l'opérateur adjoint à

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}$$

et $E(-\beta)$ est une completion de E. En plus, la variation quadratique de $N(x^*)$ est égale à

$$\int \|G^*(z(s))x\|^2_{H_w}\, ds$$

où H_w est l'espace autoreproduisant du processus de Wiener en question. Alors, grâce au Théorème 2.1.2 du deuxième chapitre il existe un processus de Wiener spatialement homogène W sur Ω de même mesure spectrale que W^1, tel que

$$N_t(x) = \int_0^t \langle G(z(s))\cdot, x\rangle_{E(-\beta)}\, dW, \qquad t \geq 0$$

pour tout $x \in D(M^*)$. C'est-à-dire

$$\langle z(t), x\rangle_{E(-\beta)} = \langle z(0), x\rangle_{E(-\beta)} + \int_0^t \langle z(s), M^*x\rangle_{E(-\beta)}\, ds + \int_0^t \langle F(z(s)), x\rangle_{E(-\beta)}\, ds +$$

$$+ \int_0^t \langle G(z(s))\cdot, x\rangle_{E(-\beta)}\, dW, \qquad t \geq 0$$

pour tout $x \in D(M^*)$. Or, $(\Omega, \mathcal{F}, (\sigma(z(s) : s \leq t)_t, \mathbb{P}, W, z)$ résout l'équation (0.6.4) de façon faible par le théorème de Chojnowska-Michalik (voir le Théorème 1.12 et le Théorème 1.13 du premier chapitre).

Cette méthode aboutit à l'existence de solutions faibles de l'équation (0.6.4) avec des fonctions f et g continues de croissance polynomiale (voir le Théorème 4.3.1, les exemples suivants et la section 4.4).

0.8 BIBLIOGRPHIE

[1] Ito, K. Differential equations determining Markov processes, Zenkoku Shijo Sugaku Danwakai, No. 1077, 1352 - 1400 (1942)

[2] Gross, L. Potential theory in Hilbert spaces, J. Funct. Anal., 1, 123-189 (1965)

[3] Daleckii, Ju. Differential equations with functional derivatives and stochastic equations for generalized random processes, Dokl. Akad. Nauk, SSSR, 166, 1035-1038 (1966)

[4] Malliavin, P. Stochastic calculus on variations and hypoelliptic operators, Proceedings of International symposium SDE, Kyoto, ed. K. Ito, Kinokuniya, Tokyo, 195-263 (1978)

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

[5] Stroock, D.V. The Malliavin calculus of functional analytic approach, J. Funct. Anal., 44, 212-257 (1981)

[6] Fujisaki, M. Kallianpur, G. Kunita, H. Stochastic differential equations for the nonlinear filtering problem, Osaka J. Math. 9, 19-40 (1972)

[7] Liptzer, R.S., Shiryaev, A.N. Statistics of stochastic processes, Nauka (1974)

[8] Krylov, N.V., Rozovskii, B.L. Stochastic evolution equations, J. Sov. Math., 16, 1233-1277 (1981)

[9] Carverhill, A.P., Elworthy, K.D. Flow of stochastic dynamical systems: The functional analysis approach, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 65, 245-267 (1983)

[10] Kunita, H. Stochastic flows and stochastic differential equations, Cambridge University Press (1990)

[11] Pardoux, E. Stochastic partial differential equations and filtering of diffusions processes, Stochastics, 3, 127-167 (1979)

[12] Vinter, R.B., Kwong, R.H. The infinite time quadratic control problem for linear systems with state and control delays: An evolution equation approach SIAM J. Control Optimiz., 19, 139-153 (1981)

[13] Chojnowska-Michalik, A. Representation theorem for general stochastic delay equations, Bull. Acad. Pol. Sci. Math., 26, 7, 634-641(1978)

[14] Keller, J.B. Stochastic equations and wave propagation in random media, Proc. Symp. Appl. Math., No. 16, 145-170 (1964)

[15] Frisch, U. Wave propagation in random media, in Probabilistic Methods in Applied Mathematics, ed. A.T. Bharucha-Reid, Academic Press (1968)

[16] Novikov, E.A. Functionals and the random-force method in turbulence theory, Sov, Phys. JETP, 20, 1290-1294 (1965)

[17] Chow, P.L. Stochastic partial differential equations in turbulence, in Probabilistic analysis and related topics, Vol. 1, ed. A.T. Bharucha-Reid, Academic Press, 1-43 (1978)

[18] Dawson, D.A. Stochastic evolution equations, Math. Biosci., 154, No. 3-4, 187-316 (1972)

[19] Fleming, W.H. Distributed parameter stochastic systems in population biology, Lecture Notes in Economy and Mathematical Systems, No. 107, eds. A. Bensoussan, J.L. Lions, Springer-Verlag, 179-191 (1975)

[20] Walsh, J.B., An introduction to stochastic partial differential equations, cole d'été de Probabilité de Saint Flour XIV-1984, ed. P.L. Hennequin, Lecture Notes in Mathematics No. 1180, 265-439 (1984)

[21] Wang, P.K.C. On the almost sure stability of linear stochastic distributed parameter dynamical systems, A.S.M.E. Transactions, Journal of Applied Mathematics, 182-186 (1966)

[22] Kushner, H.J. On the optimal control of a system governed by a linear parabolic equation with white noise imputs , SIAM, J. Control Optim., 6, No. 4, 596-614 (1978)

[23] Bensoussan, A., Viot, M. Optimal control of stochastic linear distributed parameter systems, SIAM J. Control Optim., 13, 904-926 (1975)

[24] Da Prato, G.; Zabczyk, J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions; Encyclopedia of Mathematics and its Applications 44; Cambridge University Press: Cambridge, (1992)

[25] Funaki, T. Random motions of string and related stochastic evolution equations, Nagoya Math. J., 89, 129-193 (1983)
[26] Engelbert, H. J. On the theorem of T. Yamada and S. Watanabe, Stochastics Stochastics Rep 36, 205-216 (1991)
[27] Yamada, T., Watanabe, S. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, J. Math. Kyoto Univ. 11, 155-167 (1971)
[28] Cherny, A. S. On strong and weak uniqueness for stochastic differential equations (Russian), Teor. Veroyatnost. i Primenen. 46, 483-497 (2001)
[29] Karatzas, I., Shreve, S. Brownian motion and stochastic calculus, Springer-Verlag, New York 1988
[30] Jacod, J. Weak and strong solutions of stochastic differential equations, Stochastics 3, 171-191 (1980)
[31] Chojnowska-Michalik, A. Stochastic differential equations in Hilbert spaces, Probability theory, Banach center publications , Vol. 5 (1979)
[32] Métivier, M., Pellaumail, J. Cylindrical stochastic integral, Sém. de l'Université de Rennes (1976)
[33] Neidhardt, A. L. Stochastic integrals in 2-uniformly smooth Banach spaces, University of Wisconsin (1978)
[34] Dettweiler, E. Stochastic integration relative to Brownian motion on a general Banach space, Doga-Tr. J. of Mathematics, 15, 6-44 (1991)
[35] Brzeźniak, Z. On stochastic convolution in Banach spaces and applications, Stochastics and Stochastics Reports, Vol. 61, 245-295 (1997)
[36] Doob, J. L. Stochastic processes. J. Wiley & Sons, New York (1953)
[37] Stroock, D. V.; Varadhan, S. R. S. Multidimensional diffusion processes. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 233, Springer-Verlag, Berlin-New York (1979)
[38] Cabaña, E. On barrier problems for the vibrating string. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 22, 13-24, (1972)
[39] Orsingher, E. Randomly forced vibrations of a string. Ann. Inst. H. Poincaré, 18, 367-394, (1982)
[40] Carmona, R., Nualart, D. Random non linear wave equations: propagation of singularities. Ann. Probab. 16, 730-751, (1988)
[41] Léandre, R., Russo, F. Small stochastic perturbation of a non linear stochastic wave equation. In Progress in Probability (H. Korezlioglu, A.S. Ustunel eds.) 31, 285-332. Birkhäuser. Boston (1992)
[42] Mueller, C. Long time existence for the wave equation with a noise term. Ann. Probab. 25, 133-151 (1997)
[43] Dalang, R.C., Frangos, N.E. The stochastic wave equation in two spatial dimensions. Ann. Probab. 26 (1) 187-212 (1998)
[44] Millet, A., Sanz-Solé, M. A stochastic wave equation in two space dimension: Smoothness of the law. Ann. Probab. 27, 803-844 (1999)
[45] Peszat, S. Zabczyk, J. Nonlinear stochastic heat and wave equations. Probab. Theory Related Fields 116, 421-443 (2000)
[46] Karczewska, A., Zabczyk, J. Stochastic PDEs with function-valued solutions, Infinite Dimensional Stochastic Analysis (Amsterdam 1999, Ph. Clément, F. den Hollander, J. van Neerven and B. de Pagter, eds.), Verh. Afd. Natuurkd. 1.

Reeks. K. Ned. Akad. Wet., 52, R. Neth. Acad. Arts Sci., Amsterdam, 197-216 (2000)

[47] Karczewska, A., Zabczyk, J. A note on stochastic wave equations, Evolution Equations and their Applications in Physical and Life Sciences (Bad Herrenhalb 1998, G. Lumer and L. Weis, eds.), Marcel Dekker, 501-511 (2001)

[48] Peszat, S. The Cauchy problem for a non linear stochastic wave equation in any dimension, J. Evol. Equ. 2, 383-394 (2002)

[49] Peszat, S., Tindel, S. Stochastic heat and wave equations on a Lie group (to appear)

[50] Chow, P.-L. Stochastic wave equations with polynomial nonlinearity, Ann. Appl. Probab. 12 (1), 361-381 (2002)

[51] Gelfand, I.M., Vilenkin, N. Ya., Generalized functions, Vol IV. Applications of Harmonic Analysis, Academic Press, New York (1964)

[52] Peszat, S. Zabczyk, J. Stochastic evolution equations with a spatially homogeneous Wiener process, Stochastic processes and their applications 72, 187-204 (1997)

Chapter 1

UNIQUENESS FOR STOCHASTIC EVOLUTION EQUATIONS IN BANACH SPACES

ABSTRACT: Different types of uniqueness (e.g. pathwise uniqueness, uniqueness in law, joint uniqueness in law) and existence (e.g. strong solution, martingale solution) for stochastic evolution equations driven by a Wiener process are studied and compared. We show a sufficient condition for a joint distribution of a process and a Wiener process to be a solution of a given SPDE. Equivalences between different concepts of solutions are shown. An alternative approach to the construction of the stochastic integral in 2-smooth Banach spaces is included as well as Burkholder's inequality, stochastic Fubini's theorem, Girsanov theorem and Novikov's condition.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 60H15.

INTRODUCTION

The object of this chapter is to show what relations there are between existence and uniqueness of stochastic evolution equations. We will consider a stochastic semilinear equation (1.0.1) with a probability distribution as the initial condition - in other words, we are given deterministic transformations appearing in the equation as a drift and diffusion term respectively and a measure on the state space. These quantities are purely deterministic and do not incorporate the stochastic part. This means that before we can speak of any solution we must specify what probability filtered space we work on and what Wiener process drives our equation to complete the necessary information for our problem. Now we can seek a stochastic process solving the equation whose value at time 0 - a random variable - is of the given probability distribution. Having inspired ourselves from stochastic differential equation theory we pose the following natural question:

Provided there exists a probability space where a solving process lives what conditions are sufficient to conclude that there is a solving process on every probability space ?

But we will be mainly interested in the uniqueness point of view. We know from the finite dimensional case that if an equation is pathwise unique (i.e. no initial condition can evolve into two different solutions) implies that every two solutions living on possibly different probability spaces have necessarily the same probability distribution on the space of functions (uniqueness in law). Our second question is whether this is true in the Banach space setting too.

Third problem we treat is also inspired from the stochastic differential equations theory. Under suitable conditions there exists a deterministic function of two variables - the first corresponds to an initial condition and the second to a Wiener process. The function's value is a solution with respect to this Wiener process which starts from this initial condition. We will show the sufficient conditions for the existence of such a function (Thm 1.12.1, Thm 1.13.2, Lemma 1.E).

We also give an example of an equation which is *jointly unique in law* (Def. 1.1, Thm 1.5) and another equation which is *jointly u-unique in law* (Def. 1.1, Thm 1.3). The first example is based on Girsanov's theorem, therefore it regards additive noise equations only, while the second one uses measurable selectors approach and covers fairly general class of multiplicative noise equations, namely all those with one-to-one (i.e. injective) diffusion term.

Thm 1.4 is a Banach space version of a remarkable theorem by A. S. Cherny [Ch] (who proved it in finite dimensions) which states that uniqueness in law is, in fact, equivalent with joint uniqueness in law provided we consider deterministic initial conditions.

An essential part of the proof of Thm 1.3 and Thm 1.4 is an alternative explicit form of the solution (Thm 1.13) thus we decided to include the complete proof of stochastic Fubini's theorem (Prop. 1.6.1) together with its consequences (Thm 1.12, Thm 1.13) which were proven by the same method in a less general form and in the Hilbert space setting by A. Chojnowska-Michalik [ChM].

Next we will prove three so called distribution preserving theorems. The first one for stochastic Bochner integrals (Thm 1.8.3), the second one for stochastic integrals (Thm 1.8.6) and the third one for measurable selectors (Prop. 1.8.6). The combination of the first two theorems will result in the fundamental solution-preserving theorem (Thm 1.6) which gives a sufficient condition for a pair of a process and a Wiener process to be a solution in terms of their joint distribution on the space of functions.

Throughout this chapter we will work with Banach valued processes, therefore, in the first part, we recalled the construction of the stochastic integral in a separable 2-smooth Banach space - firstly because the latter proofs go often in depth closely along it and secondly because of its "directness" - the construction of the integral is free of any auxiliary embeddings even in the case of the cylindrical Wiener process with non trace class covariance. We emphasize that, apart from the observation made in Step 1, the construction is more or less classical and we have just collected the "common knowledge" and sometimes gave shorter proofs in light of newer methods - many of them surveyed in [ChTV]. Our sources for stochastic integration and geometry of uniformly smooth Banach spaces were mainly works of A. L. Neidhardt [N] (construction of the integral), P. Assouad [A] (Burkholder inequality, geometry of 2-smooth Banach spaces), E. Dettweiler [D] (Burkholder inequality), W. Linde & A. Pietsch (characterisation of integrands), G. Pisier [P] (geometry of 2-smooth Banach spaces), J. Hoffmann-Jørgensen (geometry of 2-smooth Banach spaces, characterization of integrands [ChTV]).

The cylindrical Wiener process is understood in the sense of M. Métivier & J. Pellaumail - we refer to their paper on cylindrical stochastic integration [MP] while the contents regarding uniqueness trace its origin back to stochastic differential equation results of T. Yamada and S. Watanabe [YW], H. J. Engelbert [En] and J. Jacod [J].

This work could not have been done without Jan Seidler who initiated and motivated me into the direction of stochastic evolution equations and often contributed by valuable suggestions and discussions on the subject. Another acknowledgement goes to Marco Dozzi who enabled me to work on this topic while my stay at the Institute of Mathematics Elie Cartan in Nancy, France, and for many interesting discussions. Last

but not least thanks are for Zdzisław Brzeźniak who helped me complete the part of the proof of Burkholder's inequality for stochastic integrals in 2-smooth Banach spaces in case $0 < p < 2$.

NOTATION

1. We shall consider only *complete filtrations*, i.e. whenever $(\mathcal{F}_t)_t$ is a filtration on some probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ then $\mathcal{F}_0$ is supposed to contain all P-negligible sets in $\mathcal{F}$.

2. X stands for a separable 2-smooth Banach space (Def. 1.3.1), X^* for its topological dual space, $(x^*, x) \mapsto \langle x^*, x \rangle$ for the pairing between them and U will be a separable Hilbert space. If $h \in H$ and $x \in X$ then we will write $h \otimes_{L(U,X)} x = h \otimes x$ to denote the operator $U \to X : y \mapsto \langle y, h \rangle_U x$.

3. The *strong σ-algebra* on $L(U, X)$ is the smallest σ-algebra which renders the mappings $L(U, X) \to X : B \mapsto Bh$, $h \in U$ measurable. A mapping $g : (Y, \mathcal{Y}) \to L(U, X)$ is said to be *strongly measurable* provided that it is measurable with respect to the strong σ-algebra on $L(U, X)$, i.e. the mappings $Y \to X : y \mapsto g(h)$ are measurable for every $h \in U$.

4. X_1 is a separable Banach space such that X is continuously embedded in X_1, i.e. X is a subspace of X_1 and the identity mapping $i : X \to X_1$ is continuous.

5. Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space, $(Y, \mathcal{Y})$ a measurable space and $g : \Omega \to Y$ a measurable mapping. Then we define the image of P under g by $\mathfrak{Law}_P(g)(B) = P\{\omega : g(\omega) \in B\}$, $B \in \mathcal{Y}$.

6. In view of Definition 1.1 and Definition 1.7 we are going to write shortly

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1, W^1\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(u^2, W^2\right), \text{ resp. } \mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(u^2\right)$$

instead of

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1(t_i), W^1(t_i, h_j) : i, j\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(u^2(t_i), W^2(t_i, h_j) : i, j\right), \text{ resp.}$$

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1(t_i) : i\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(u^2(t_i) : i\right)$$

for every partition $0 = t_0 < \cdots < t_n \leq T$ and every $h_1, \ldots, h_m$ in U.

7. We are going to say that a process $(u_t : t \leq T)$ on $(\Omega, \mathcal{F}, P, W)$ is $(u_0, W)_P$-adapted instead of saying that u is adapted to the P-augmentation of the filtration $\sigma(u_0, W(s, h) : s \leq t, h \in U)$ in $\mathcal{F}$.

MAIN THEOREMS

Consider the following stochastic evolution equation on $[0,T]$ in a separable 2-smooth Banach space X (Def. 1.3.1):

(1.0.1)

$$u(t) = S_t u(0) + \int_0^t S_{t-s} f(s,u(s))\, ds + \int_0^t S_{t-s} g(s,u(s))\, dW_s, \quad 0 < t \leq T$$

(1.0.1) $$\mathfrak{Law}(u(0)) = \mu$$

where $S : (0,T] \to L(X_1, X)$ is a strongly measurable operator-valued function, Q a covariance operator on U (i.e. a symmetric nonnegative linear bounded operator), $f : [0,T] \times X \to X_1$ a measurable mapping, $g : [0,T] \times X \to L(U_0, X_1)$ a strongly measurable mapping (see Def. 1.2.1 for the definition of U_0) and μ a probability Borel measure on X.

We are going to say that a 6-tuple $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P, W, u)$ consisting of a filtered probability space, a Q-$(\mathcal{F}_t)$-Wiener process W on U (Def. 1.1.4) and a measurable X-valued process u on $[0,T]$ is a solution of (1.0.1) provided that

$$P\left[\int_0^t \|S_{t-s} f(s,u(s))\|_X + \|S_{t-s} g(s,u(s))\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds < \infty\right] = 1 \tag{1.0.2}$$

for every $t \in (0,T]$, equation (1.0.1) is satisfied for every $t \in (0,T]$ and **there exists a sequence $(x_n^* : n)$ in X^* which separates points of X such that the real processes $t \mapsto \langle x_n^*, u(t)\rangle$ have continuous adapted modifications on** $[0,T]$ (hence u has a predictable modification by Corollary 1.11.2 and the stochastic integral in (1.0.1) is well defined).

The last, sort of untypical, condition will be very important in the sequel. We chose this formulation because such a sequence $(x_n^* : n)$ always exists if u is progressively measurable, $X = X_1$, (S_t) is a C_0-semigroup and the following integrability condition holds (see Thm 1.13)

$$P\left[\int_0^T \|f(s,u(s))\|_{X_1} + \|g(s,u(s))\|^2_{L(U_0,X_1)}\, ds < \infty\right] = 1. \tag{1.0.3}$$

We will refer to (1.0.3) later on even in situations when X will not coincide with X_1.

Almost all results in this chapter hold under fairly general conditions. Theorem 1.4 is exceptional in this sense - we do not know how to avoid additional assumptions. Namely we must "eliminate" the uncountable number of conditions a process must satisfy to be a solution (as in (1.0.2) where the condition is to be verified for every t in the interval $[0,T]$). Each particular condition unfolds an exceptional set so if there are uncountably many of them we face a terminal encumbrance for measure-theoretical operations.

This is why we introduce the following condition:

$$P\left[\int_0^T M_1(f(s,u(s))) + M_2(g(s,u(s)))\,ds < \infty\right] = 1 \tag{1.0.4}$$

where $M_1 : X_1 \to [0,\infty]$ is some measurable function with the following property: Whenever $y : [0,T] \to X$ is a measurable function such that

$$\int_0^T M_1(f(r,y_r))\,dr < \infty \quad \text{then} \quad \int_0^t \|S_{t-s}f(s,y_s)\|_X\,ds < \infty \quad \text{for every} \quad t \le T$$

and $M_2 : L(U_0,X_1) \to [0,\infty]$ is some strongly measurable function with the property: Whenever $y : [0,T] \to X$ is a measurable function such that

$$\int_0^T M_2(g(r,y_r))\,dr < \infty \quad \text{then} \quad \int_0^t \|S_{t-s}g(s,y_s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\,ds < \infty \quad \text{for every } t \le T.$$

Apparently, M_1 and M_2 may depend on (S_t), f and g. A typical example of M_1 is some dependence of X_1 norm on the behavior of the norm of S_t as $\|S_{t-r}f(r,y_r)\|_X \le \|S_{t-r}\|_{L(X_1,X)}\,\|f(r,y_r)\|_{X_1}$ while an example of M_2 arises naturally in the case when the covariance operator of the Wiener process is nuclear (i.e. $\operatorname{Tr} Q < \infty$) and $g(r,x) \in L(U_0,X)$ can be extended on U for every $x \in X$ and almost all $r \le T$. Then M_2 will be a suitable function of the norm of $L(U,X_1)$ as we have

$$\|S_{t-s}g(s,y_s)\|_{L_2(U_0,X)} \le \|S_{t-s}\|_{L(X_1,X)}\,\|g(s,y_s)\|_{L(U,X_1)}\,(\operatorname{Tr} Q)^{1/2}$$

by Note 1.2.6. Other examples can be constructed in cases when S_t is radonifying.

We should mention that all results in this chapter remain true if we consider only adapted solutions with norm continuous paths. Also, the integrability condition (1.0.2) is fairly general and can be replaced or complemented by e.g. (1.0.3) or (1.0.7), with slight modifications of the proofs. In these cases we usually cover smaller but more regular classes of solutions which, in the end, turns to be important since the better regularity stays preserved.

In this chapter we consider solutions on a bounded interval $[0,T]$ since it is sufficient for the questions of uniqueness even for solutions on $[0,\infty)$. But in Theorem 1.12.1, Theorem 1.13.2 and Lemma 1.E we assert existence of a functional R which assigns a trajectory of a solution on $[0,T]$ to the pair of the value of an initial condition and the trajectory of a Wiener process. This is the only part when the case $[0,\infty)$ is but slightly different so we point out the particular (notational) changes one must do in this situation:

- ▷ Each occurance of $[0,T]$, resp. T shall be replaced by $[0,\infty)$, resp. ∞.
- ▷ The space $\mathfrak{C} = C\left([0,T],\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ shell be replaced by $C\left([0,\infty),\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ which, considered with the topology of locally uniform convergence, is again a Polish space whose Borel σ-algebra is generated by projections $(\pi_t : t < \infty)$.
- ▷ The function ϕ_t shell be replaced by $\phi_t : C\left([0,\infty),\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) \to C\left([0,\infty),\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) : \phi_t(f)(s) = f(t+s) - f(t)$.

Having incorporated these changes the proofs go in the same line.

Before we state the theorems we must give a few definitions.

Definition 1.1. We say that the equation (1.0.1) with the initial distribution μ

- ▷ is *pathwise unique* if $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P,W,u^1)$, $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P,W,u^2)$ are solutions such that $P\left[u^1(0)=u^2(0)\right]=1$ then $P\left[u^1(t)=u^2(t)\right]=1$ for every $t \le T$.
- ▷ is *jointly unique in law* if $(\Omega^1,\mathcal{F}^1,(\mathcal{F}^1_t),P^1,W^1,u^1)$, $(\Omega^2,\mathcal{F}^2,(\mathcal{F}^2_t),P^2,W^2,u^2)$ are solutions then $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1,W^1\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(u^2,W^2\right)$.
- ▷ is *jointly u-unique in law* for some solution $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P,W,u)$ of (1.0.1) whenever $(\Omega^1,\mathcal{F}^1,(\mathcal{F}^1_t),P^1,W^1,u^1)$ is another solution of (1.0.1) such that $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1\right)$ coincides with $\mathfrak{Law}_P\left(u\right)$ then $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1,W^1\right) = \mathfrak{Law}_P\left(u,W\right)$.
- ▷ is *unique in law* provided whenever $(\Omega^i,\mathcal{F}^i,(\mathcal{F}^i_t),P^i,W^i,u^i)$, $i=1,2$ are solutions of (1.0.1) then $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(u^2\right)$.
- ▷ has *strong solution* if, for every probability filtered space $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P,W)$ with a Q-$(\mathcal{F}_t)$-Wiener process W and a $\mathcal{F}_0$-measurable random variable u_0, there exists a process u such that $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}),P,W,u)$ is a solution, $P\left[u(0)=u_0\right]=1$ and u is $(u_0,W)_P$-adapted, i.e. u is adapted to the P-augmentation of the filtration $\sigma\left(u_0,W(s,h) : s \le t, h \in U\right)$ in $\mathcal{F}$.

Observe that the joint uniqueness in law means uniqueness of the joint distribution measure on the space of functions and the distribution of the initial condition u_0 in the definition of the strong solution must be necessarily μ.

Another remark should be made on the notion of the *strong solution* which, in our definition, comprises more information, namely the adaptation of the solving process to the filtration generated by the initial condition and the driving Wiener process.

Now we can state the main theorems:

Theorem 1.1. *Suppose that there exists a solution $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P,W,u)$ such that the process u is $(u(0),W)_P$-adapted. Then*

- ▷ *the equation (1.0.1) has strong solution.*
- ▷ *if joint uniqueness in law holds for (1.0.1) then pathwise uniqueness holds for (1.0.1) as well.*

Theorem 1.2. *Suppose that there exists a solution $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P,W,u)$ and pathwise uniqueness holds for (1.0.1). Then*

- ▷ *the equation (1.0.1) has strong solution.*
- ▷ *joint uniqueness in law holds for (1.0.1).*

Theorem 1.3. *Let, in addition, (S_t) be a C_0-semigroup of linear bounded operators on $L(X_1)$ with X_1 reflexive. Let $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P, W, u)$ be a solution of (1.0.1) satisfying (1.0.3). Further suppose that*[1]

$$dt \otimes P\{(s,\omega) : g(s, u(s,\omega)) \text{ is not one-to-one in } L(U_0, X_1)\} = 0.$$

Then the equation (1.0.1) is jointly u-unique in law. In particular, if (1.0.1) is unique in law and $g(s,x)$ is one-to-one for every $x \in X$ and almost every s then (1.0.1) is jointly unique in law.

Remark. Some authors use the word *injective* instead of *one-to-one.*

Theorem 1.4. *Let, in addition, (S_t) be a C_0-semigroup of linear bounded operators on $L(X_1)$ with X_1 reflexive, $x_0 \in X$ and suppose that the equation (1.0.1) with the initial condition $\mu = \delta_{x_0}$ is unique in law among the solutions satisfying (1.0.3) and (1.0.4). If $S_t x_0 \in X$ for $t \in (0,T]$ then the equation (1.0.1) with the initial condition δ_{x_0} is jointly unique in law in the class of solutions satisfying (1.0.3) and (1.0.4).*

Theorem 1.5. *Let $f : [0,T] \times X \to U_0$ be measurable, $g : [0,T] \to L(U_0, X_1)$ strongly measurable, $\int_0^t \|S_{t-s} g(s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds < \infty$ for every $t \le T$ and μ a Borel probability measure. Then the joint uniqueness in law holds for the equation*

$$u(t) = S_t u(0) + \int_0^t S_{t-s} g(s) f(s, u(s))\, ds + \int_0^t S_{t-s} g(s)\, dW_s \tag{1.0.6}$$

$$\mathfrak{Law}(u(0)) = \mu \tag{1.0.6}$$

in the class of processes satisfying

$$P\left[\int_0^T \|f(s,u(s))\|^2_{U_0} < \infty\right] = 1. \tag{1.0.7}$$

Therefore, if f is locally bounded and each solution has almost surely bounded (in particular, continuous) trajectories, then (1.0.6) is jointly unique in law.

Remark. In Theorem 1.5 we can prove the joint uniqueness in law only in a smaller class of solutions determined by the condition (1.0.7). Nevertheless Theorems 1.1 and 1.2 hold in the class of solutions satisfying (1.0.7) too.

Theorem 1.6. *Let $\left(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \left(\mathcal{F}^i_t\right), P^i, W^i, u^i\right)$ be a probability filtered space, W^i a Q-$(\mathcal{F}^i_t)$-Wiener process and u^i a progressively measurable process, $i = 1,2$. Suppose that $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1, W^1\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(u^2, W^2\right)$. If (u^1, W^1) satisfies (1.0.1), (1.0.2) for every $t \le T$ then so does (u^2, W^2).*

---

[1] the set of one-to-one operators from $L(U_0, X_1)$ is strongly measurable. We denote dt the Lebesgue measure on $[0,T]$.

RESULTS OF SIMILAR NATURE

Apart from joint uniqueness in law and pathwise uniqueness we can also define, according to H. J. Engelbert, finer types of uniqueness so that the implications in Theorem 1.1 and 1.2 turn into equivalences. For instance, we know by Theorem 1.2 that pathwise uniqueness implies joint uniqueness in law. In this section we will deliver an additional condition to joint uniqueness in law to become equivalent with pathwise uniqueness.

Definition 1.7. Let $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P, W, u)$ be a solution of the equation (1.0.1). We will say that (u, W)*-pathwise uniqueness* holds for the equation (1.0.1) provided that whenever $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t), P', W', u'_1)$, $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t), P', W', u'_2)$ are solutions of (1.0.1) such that

- $\mathfrak{Law}_{P'}(u'_1, W') = \mathfrak{Law}_{P'}(u'_2, W') = \mathfrak{Law}_P(u, W)$
- $P'[u'_1(0) = u'_2(0)] = 1$

then $P'[u'_1(t) = u'_2(t)] = 1$ for every $t \leq T$.

We are also going to say that *u-pathwise uniqueness* holds for the equation (1.0.1) provided that whenever $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t), P', W', u'_1)$, $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t), P', W', u'_2)$ are solutions of (1.0.1) such that

- $\mathfrak{Law}_{P'}(u'_1) = \mathfrak{Law}_{P'}(u'_2) = \mathfrak{Law}_P(u)$
- $P'[u'_1(0) = u'_2(0)] = 1$

then $P'[u'_1(t) = u'_2(t)] = 1$ for every $t \leq T$.

The last property we need to define is *uniqueness in law* which is said to hold for the equation (1.0.1) provided that $\mathfrak{Law}_{P^1}(u^1)$ coincides with $\mathfrak{Law}_{P^2}(u^2)$ for every two solutions $(\Omega^1, \mathcal{F}^1, (\mathcal{F}^1_t), P^1, W^1, u^1)$, $(\Omega^2, \mathcal{F}^2, (\mathcal{F}^2_t), P^2, W^2, u^2)$.

Theorem 1.8. *The following conditions on the equation (1.0.1) are equivalent:*

(1) Pathwise uniqueness holds and there exists a solution.
(2) Joint uniqueness in law holds and there exists a solution $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P, W, u)$ such that (u, W)-pathwise uniqueness holds.
(3) Joint uniqueness in law holds and there exists a solution $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P, W, u)$ such that u is $(u(0), W)_P$-adapted.

Theorem 1.9. *Suppose that $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P, W, u)$ is a solution of (1.0.1). Then the following conditions are equivalent:*

(1) (u, W)-pathwise uniqueness holds.
(2) There exists a solution $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t), P', W', u')$ such that u' is $(u'(0), W')_{P'}$-adapted and $\mathfrak{Law}_{P'}(u', W') = \mathfrak{Law}_P(u, W)$.

Theorem 1.10. *Let $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P, W, u)$ be a solution of (1.0.1) then the following conditions on the equation (1.0.1) are equivalent:*

(1) *u-pathwise uniqueness holds.*
(2) *Joint u-uniqueness in law holds for the equation (1.0.1) and there exists a solution $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t), P', W', u')$ such that $\mathfrak{Law}_P(u) = \mathfrak{Law}_{P'}(u')$ and (u', W')-pathwise uniqueness holds.*

(3) *Joint u-uniqueness in law holds for the equation (1.0.1) and there exists a solution* $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}'_t), P', W', u')$ *such that* $\mathfrak{Law}_{P'}(u')$ *coincides with* $\mathfrak{Law}_P(u)$ *and* u' *is* $(u'(0), W')_{P'}$*-adapted.*

We close this section by a straightforward comparison of joint uniqueness in law and uniqueness in law.

Theorem 1.11. *The following conditions are equivalent for the equation (1.0.1):*

- ▷ *Joint uniqueness in law holds.*
- ▷ *Uniqueness in law holds and joint u-uniqueness in law holds for every solution* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P, W, u)$.

EQUIVALENT CONCEPTS OF SOLUTIONS

Theorem 1.12. *Let* f *be a progressively measurable process in* X, g *a progressively measurable process in* $L_2(U_0, X)$, (S_t) *a strongly continuous semigroup of linear operators on* X *generated by* A, W *a* Q*-Wiener process and* u *a progressively measurable* X*-valued process. Let also* $P\left[\int_0^T \|f(s)\| + \|g(s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds < \infty\right] = 1$. *Then*

$$\text{(a)} \qquad P\left[u(t) = S_t u(0) + \int_0^t S_{t-s} f(s)\, ds + \int_0^t S_{t-s} g(s)\, dW_s\right] = 1$$

for every $t \leq T$ *if and only if* u *has a predictable modification with almost all trajectories in* $L^1(0,T;X)$ *such that* $P\left[\int_0^t u(s)\, ds \in D(A)\right] = 1$ *and*

$$\text{(c)} \qquad P\left[u(t) = u(0) + A\int_0^t u(s)\, ds + \int_0^t f(s)\, ds + \int_0^t g(s)\, dW_s\right] = 1$$

for every $t \leq T$.

In either case

(1) *the process* $t \mapsto R_\lambda u(t)$ *has a modification which is a norm continuous semimartingale for every* λ *from the resolvent set of* A.

(2) *the process* $t \mapsto \langle x^*, u(t)\rangle$ *has a modification which is a continuous semimartingale for every* $x^* \in D(A^*)$. *In particular there exists a sequence* $x_n^* \in D(A^*)$ *which separates points of* X *such that* $t \mapsto \langle x_n^*, u(t)\rangle$ *is continuous for every* $n \in \mathbb{N}$.

Theorem 1.13. *Let* f *be a progressively measurable process in* X, g *a progressively strongly measurable process in* $L(U_0, X)$, (S_t) *a strongly continuous semigroup of linear operators on* X *generated by* A, W *a* Q*-Wiener process and* u *a progressively*

measurable X-valued process. Let also $P\left[\int_0^T \|f(s)\| + \|g(s)\|^2_{L(U_0,X)}\, ds < \infty\right] = 1$ *and* $P\left[\int_0^t \|S_{t-s}g(s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds < \infty\right] = 1$ *for every* $t \le T$. *Then*

$$\text{(a)} \qquad P\left[u(t) = S_t u(0) + \int_0^t S_{t-s} f(s)\, ds + \int_0^t S_{t-s} g(s)\, dW_s\right] = 1$$

holds for every $t \le T$ *if and only if* u *satisfies*

$$\text{(b)} \qquad P\left[\int_0^T \int_0^T |\langle x^*(t,s), u(s)\rangle|\, ds\, dt < \infty\right] = 1$$

for every measurable bounded function $x^* : [0,T] \times [0,T] \to X^*$ *and*

$$\text{(c)} \quad P\left[\langle x^*, u_t\rangle = \langle x^*, u_0\rangle + \int_0^t \langle A^* x^*, u_s\rangle\, ds + \int_0^t \langle x^*, f_s\rangle\, ds + \int_0^t g_s^* x^*\, dW_s\right] = 1$$

for every $t \le T$, $x^* \in D(A^*)$.

Moreover, in either case, the conclusion (2) of Theorem 1.12 holds and u *has a predictable modification.*

IDEAS OF THE PROOFS

Theorem 1.1 as well as Theorem 1.2 are consequences of the following general phenomenon. In both, and many other cases, there exists a time sequence of measurable functions $(R_t : t \le T)$ such that $P[u(t) = R_t(u(0), W)] = 1$ for every $t \le T$ (Lemma 1.E). This means that the solution u depends only on the initial value and on the corresponding trajectory of the Wiener process. Moreover this dependence comes through the measurable transformations (R_t). Now it is enough to prove that whenever we take a filtered probability space $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}_t), \bar{P}, \bar{W})$ with a Q-Wiener process $\bar{W}$ and an initial μ-distributed random variable $\bar{u}_0$ then the process $\bar{u}(t) = R_t(\bar{u}_0, \bar{W})$ completes the family $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}_t), \bar{P}, \bar{W}, \bar{u})$ to be a strong solution starting from $\bar{u}_0$.

If we are in the situation of Theorem 1.1 then joint uniqueness in law implies pathwise uniqueness. Indeed, if $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, (\bar{\mathcal{F}}_t), \bar{P}, \bar{W}, \bar{v})$ were another solution starting from $\bar{u}_0$ then, by the joint uniqueness in law, we would have

$$\bar{P}\left[\bar{v}(t) = R_t(\bar{v}(0), \bar{W})\right] = \bar{P}\left[\bar{u}(t) = R_t(\bar{u}(0), \bar{W})\right] = 1$$

for every $t \le T$. But $\bar{P}[\bar{v}(0) = \bar{u}(0)] = 1$ thus $\bar{P}\left[\bar{v}(t) = R_t(\bar{u}(0), \bar{W}) = \bar{u}(t)\right] = 1$ for every $t \le T$.

In the situation of Theorem 1.2 we must prove the uniqueness of the joint solution measure on the space of functions. Suppose that $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, (\mathcal{F}_t^i), P^i, W^i, u^i)$, $i = 1, 2$ are two solutions. Then, by pathwise uniqueness, we have $u^i(t) = R_t(u^i(0), W^i)$, $t \leq T$, $i = 1, 2$ and we see that to show the equality of the joint solution measures $\mathfrak{Law}_{P^i}(u^i, W^i)$, $i = 1, 2$ it suffices to show the equality of $\mathfrak{Law}_{P^i}(u^i(0), W^i)$, $i = 1, 2$ since (R_t) are measurable transformations. But $u^i(0)$ is $\mathcal{F}_0^i$-measurable thus P^i-independent of W^i hence $\mathfrak{Law}_{P^i}(u^i(0), W^i) = \mu \otimes \mathfrak{Law}_{P^i}(W^i)$. But $\mathfrak{Law}_{P^1}(W^1) = \mathfrak{Law}_{P^2}(W^2)$ because W^1, W^2 have the same covariance Q.

In the proof of Thm 1.3 and Thm 1.4 we use sort of "inversion formula" to express the intervening Wiener process in terms of the solution u whose distributions are supposed to coincide. We wish to write $W = \int g^{-1}(s)\, du$ for $u = \int g(s)\, dW$ but unfortunately, in our case we must proceed in steps using approximations given by measurable selectors (Theorem 1.8.8).

Theorem 1.5 is based on the Girsanov theorem (Proposition 1.7.1) and relies heavily (as well as all results in this chapter) on the fact that solutions of (1.0.1) are completely determined by the joint distribution $\mathfrak{Law}(u, W)$ of the solving process u and the Wiener process W. More precisely, if $(\Omega^1, \mathcal{F}^1, (\mathcal{F}_t^1), P^1, W^1, u^1)$ satisfies (1.0.1), (1.0.2) and u^1 is $(\mathcal{F}_t^1)$-progressively measurable (we do not assume any kind of path continuity of u^1) and $(\Omega^2, \mathcal{F}^2, (\mathcal{F}_t^2), P^2, W^2, u^2)$ is a filtered probability space with a Q-Wiener process W^2 and $(\mathcal{F}_t^2)$-progressively measurable process u^2 such that

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1(t_i), W^1(t_i, h_j) : i, j\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(u^2(t_i), W^2(t_i, h_j) : i, j\right)$$

for every partition $0 = t_0 < \cdots < t_n \leq T$ and every finite number of vectors $h_1, \ldots, h_m$ in U then $(\Omega^2, \mathcal{F}^2, (\mathcal{F}_t^2), P^2, W^2, u^2)$ satisfies (1.0.1) and (1.0.2) which is but a summary of Theorem 1.6.

This chapter is quite comprehensive and the lengthy proofs often split into separate parts. In order to facilitate the reading and for easier orientation we include the structure of the rest of this chapter:

Preliminary results and notations

Section 1.1 Cylindrical Wiener process 37
Section 1.2 Radonifying mappings and the space U_0 39
Section 1.3 Stochastic integral 42
Section 1.4 A convergence result 48
Section 1.5 Burkholder inequality 49
Section 1.6 Fubini's theorem, Proof of Theorem 1.12 and 1.13 51
Section 1.7 Girsanov-Novikov theorem 55
Section 1.8 Distribution of random integrals and measurable selectors ... 55
▷ Distribution of random Bochner integrals 55
▷ Distribution of stochastic integrals 57
▷ Distribution of measurable selectors 60

Proofs

Section 1.9 Proofs of Theorem 1.3 and 1.4 61
Section 1.10 Proof of Theorem 1.5 and 1.6 71
Section 1.11 Preliminaries to proof of Theorem 1.1 and 1.2 73
Section 1.12 Proof of Thm 1.2, 1.12.1, Lemma 1.A, 1.B, 1.C, 1.D, 1.E ... 75
Section 1.13 Proof of Theorem 1.1 80
Section 1.14 Proofs of Theorem 1.8, 1.9 and 1.10 81
Used notation 83
References 83

PRELIMINARY RESULTS AND NOTATIONS

1.1 Cylindrical Wiener process

A classical stochastic process u in a separable Banach space X is a mapping from $[0,T] \times \Omega$ to X such that the restrictions $u_t : \Omega \to X$ are measurable for all $t \leq T$. On the other hand, sometimes it is convenient to generalize this notion to a larger class of objects - the cylindrical processes. From the probabilistic point of view they are two-parameter real processes $(u(t,x^*) : t \leq T, x^* \in X^*)$ where the first variable corresponds to the time while the second to the elements of the topological dual space X^*. Moreover we want the linearity in the x^* variable. The motivation for this object is the following. Suppose that we are given a classical process $(u(t) : t \leq T)$ in X. Then $u(t,x^*) = \langle x^*, u(t)\rangle$ is a cylindric process - it represents the decomposition of a classical process into coordinates. The greatest advantage of the cylindrical processes is that we can define a cylindrical Wiener process of a non-nuclear covariance operator and a stochastic integral with respect to it.

Definition 1.1.1. Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space and $(M(x^*) : x^* \in X^*)$ a family of real processes on $[0,T]$ such that $P[M_t(ax^* + y^*) = aM_t(x^*) + M_t(y^*)] = 1$ for every $t \in [0,T]$, $a \in \mathbb{R}$, $x^* \in X^*$, $y^* \in X^*$. Then M is called *a cylindric process.*

Definition 1.1.2. We say that a cylindrical process $M = (M(x^*) : x^* \in X^*)$ on $[0,T]$ is *representable* provided there exists a stochastic process u in X defined on $[0,T]$ such that $P[\langle x^*, u_t\rangle = M_t(x^*)] = 1$ for all $t \leq T$ and $x^* \in X^*$. Then we say that u is *a representation* of M and, obviously, u is unique up to modification.

Definition 1.1.3. Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space with a filtration $(\mathcal{F}_t)$ and $\sigma \geq 0$. Then a continuous real $(\mathcal{F}_t)$-adapted process W on $[0,T]$ is called *a Wiener process with the covariance* σ^2 provided

- $P[W_0 = 0] = 1$
- $\sigma(W_t - W_s)$ is P-independent of $\mathcal{F}_s$ whenever $0 \leq s < t \leq T$
- $\mathfrak{Law}_P(W_t - W_s) = \mathcal{N}(0, (t-s)\sigma^2)$ whenever $0 \leq s < t \leq T$.

In case $\sigma^2 = 1$ we say W is *a standard Wiener process.*

Definition 1.1.4. Let U be a separable Hilbert space. A cylindrical process $W = (W(u) : u \in U)$ on $[0,T]$ on $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ is called *a cylindrical Wiener process* provided that $(W_t(u) : t \leq T)$ is an $(\mathcal{F}_t)$-Wiener process with covariance possibly depending on u (Def. 1.1.3) for every $u \in U$ and there exists a positive constant c such that $EW_T^2(u) \leq c^2 \|u\|_U^2$, $u \in U$. *A covariance operator* of W is the unique operator $Q \in L(U)$, $Q^* = Q$, $Q \geq 0$ such that

$$EW_t(x)W_s(y) = s \langle Qx, y \rangle_U = \langle W(x), W(y) \rangle (s)$$

for every $0 \leq s < t \leq T$, $x \in U$, $y \in U$ where $s \mapsto \langle W(x), W(y) \rangle (s)$ is the cross-variation process associated to $W(x)W(y)$.

Proof of the existence of Q. The mapping $(x,y) \mapsto EW_T(x)W_T(y)$ is a real bounded symmetric positive bilinear form on $U \times U$ so there exists a bounded symmetric positive operator Q on U satisfying $EW_T(x)W_T(y) = T \langle Qx, y \rangle_U$ for all $x, y \in U$:

$$EW_t(x)W_s(y) = EE[W_t(x)/\mathcal{F}_s]W_s(y) = EW_s(x)W_s(y) =$$

$$= \frac{1}{4} E \left(W_s^2(x+y) - W_s^2(x-y) \right) = \frac{s}{4T} E \left(W_T^2(x+y) - W_T^2(x-y) \right) =$$

$$= s \langle Qx, y \rangle_U = \frac{1}{4} \left(\langle W(x+y) \rangle_s - \langle W(x-y) \rangle_s \right) = \langle W(x), W(y) \rangle_s .$$

□

Now we will show that there exists a filtered probability space with a cylindrical Wiener process with given covariance operator Q:

Claim 1.1.5. Let $Q \in L(U)$, $Q^* = Q$, $Q \geq 0$. Then there exists a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ with a complete filtration $(\mathcal{F}_t)$ and a cylindrical Wiener process $W = (W(u) : u \in U)$ on $[0,T]$ with the covariance operator Q.

Proof: Choose an orthonormal basis $(u_k : k)$ in U and a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ with a complete filtration $(\mathcal{F}_t)$ in $\mathcal{F}$ which carries independent standard real Wiener processes $(\beta^k : k)$. Then define the real Wiener processes $W(u) = \sum_k \langle Q^{1/2}u, u_k \rangle_U \beta^k$ for $u \in U$ where the sum converges uniformly in t in $L^2(\Omega)$. The family $(W(u) : u \in U)$ is a cylindrical Wiener process on U with the covariance operator Q. □

Now we will show what is the connection between the cylindrical Wiener process and the classical Wiener process. We know that the covariance operator of a Gaussian measure on a separable Hilbert space is necessarily nuclear, consequently every classical Wiener process is of nuclear covariance. The following theorem says that a cylindrical Wiener process is representable (Def. 1.1.2) if and only if the covariance operator is nuclear, and in that case the representation is a classical Wiener process.

Theorem 1.1.6. *Let W be a cylindrical Wiener process on $[0,T]$ with a covariance operator Q. Then W has a continuous representation if and only if Q is nuclear. In that case the representation is a U-valued Wiener process with covariance Q.*

Proof: Let $(u_k : k)$ be an orthonormal basis in U. Then the sum $\sum_k W(u_k)u_k$ converges in $L^2(\Omega, C([0,T],U))$ if and only if $\sum_k \left\|Q^{1/2}u_k\right\|^2$ is convergent due to the Doob maximal inequality. So there is only to prove that the representation (when Q is nuclear) is a Wiener process. The fact that the increments are centered Gaussian follows immediately from the explicit formula $\sum_k W(u_k)u_k$ and the independence of the increments from Lévy's characterization theorem applied on the martingale $(W(u_k) : k \leq N)$. □

1.2 Radonifying mappings and the space U_0

The reason for the following definition is that we will work with Wiener processes of arbitrary covariance operator and as we will see later the only important information (regarding stochastic integration) is in the reproducing kernel space U_0 which is continuously embedded in U.

Definition 1.2.1. Since $Q \in L(U)$ is a non-negative operator we may define the square root $Q^{1/2} \in L(U)$ and $Q^{-1/2} : \mathrm{Rng}\left(Q^{1/2}\right) \to U$ defined as the inverse mapping of the one-to-one restriction $Q^{1/2}|_D : D \to \mathrm{Rng}(Q^{1/2})$ where $D = (\mathrm{Ker}\, Q^{1/2})^{\perp}$ is the orthogonal complement of $\mathrm{Ker}\, Q^{1/2}$ in U. We also define the separable Hilbert space $U_0 = \mathrm{Rng}(Q^{1/2}) \subseteq\subseteq U$ with the inner product

$$\langle g_1, g_2\rangle_0 = \left\langle Q^{-1/2}g_1, Q^{-1/2}g_2\right\rangle_U, \quad g_1 \in U_0, \quad g_2 \in U_0.$$

Now the mapping $Q^{1/2} : (D, \|.\|_U) \to (U_0, \|.\|_0)$ is an isometry.

Before we state some useful properties where the space U_0 intervenes we shall recall the definition of a *radonifying* operator. We know that the class of Hilbert-Schmidt operators is the state space for processes which we integrate with respect to a Wiener process in the Hilbertian case. If we want to pass to Banach spaces the class of radonifying operators appears. The following theorem is a synthesis of results due to Itô, Nisio, Fernique, Hoffmann-Jørgensen and Kwapień.

Theorem 1.2.2. Let $(\eta_n : n \in \mathbb{N})$ be a sequence of real independent identically distributed centered Gaussian random variables, $(x_n : n \in \mathbb{N})$ a sequence in a separable Banach space Y. Let $0 < p < \infty$ and denote $s_k = \sum_{n=1}^k \eta_n x_n$, $k \in \mathbb{N}$. Then the following statements are equivalent:

- ▷ The sequence $(s_k : k \in \mathbb{N})$ converges in L^p.
- ▷ The sequence $(s_k : k \in \mathbb{N})$ converges in norm almost surely.
- ▷ There exists a Borel probability measure ν on Y such that $\mathfrak{Law}(\langle x^*, s_k\rangle) \to \mathfrak{Law}_\nu(x^*)$ weakly in the space of measures for every $x^* \in Y^*$.

In the third case, the measure ν is the distribution of the limit.

If, moreover, Y does not contain any subspace linearly homeomorphic to c_0 (e.g. a reflexive space) then the above conditions are also equivalent to the following condition:

- ▷ The sequence $(s_k : k \in \mathbb{N})$ is bounded in L^p.

For the proof see Chapter V in [ChTV]. □

Definition 1.2.3. Let U be a separable Hilbert space and (ξ_n) a sequence of independent standard Gaussian random variables defined on a probability space Ω. An operator $A \in L(U,X)$ is called *radonifying* provided that the series $\sum_n \xi_n Au_n$ converges in $L^2(\Omega,X)$ for some orthonormal basis (u_n) in U. We denote $L_2(U,X)$ the space of radonifying operators and $\|A\|^2_{L_2(U,X)} = E\,\|\sum_n \xi_n Au_n\|^2_X$. We also write $\|A\|_{L_2(U,X)} = \infty$ for $A \notin L_2(U,X)$.

It seems that the definition of $L_2(U,X)$ and $\|A\|_{L_2(U,X)}$ depends on the choice of the orthonormal basis (u_n) and (ξ_n) but in fact, it does not. Once $\sum_n \xi_n Au_n$ converges in $L^2(\Omega,X)$ it converges for all choices of orthonormal bases in U and for all choices of independent standard Gaussian random variables due to Theorem 1.2.2 because we already know that the probability distribution $\mathfrak{Law}\,(\sum_n \xi_n Au_n)$ is the Borel centered Gaussian measure on X with covariance $AA^* \in L(X^*,X)$ hence - independent of (u_n) and (ξ_n) and $\|A\|^2_{L_2(U,X)} = \int_X \|x\|^2\, d\mathcal{N}(0,AA^*)$. Another consequence of Theorem 1.2.2 is that $A \in L_2(U,X)$ if and only if $\mathcal{N}(0,AA^*)$ exists as a Borel measure on X. For further details see [ChTV].

The following Proposition is a handy tool for verification whether a composition of two operators is a radonifying operator provided either of them is. Indeed, we see that L_2 is an operator ideal. Moreover one can easily show, using Pietsch's factorisation, that every p-summing operator is already radonifying (e.g. [LP]). Proposition 1.2.4 is due to W. Linde & A. Pietsch but our proof is based on Kahane's contraction principle. We note that $L_2(U,X)$ is an operator ideal even if X contains c_0 (e.g. [Ba]).

Proposition 1.2.4. Suppose that X does not contain any subspace linearly homeomorphic to c_0 and let $A \in L\,(U,X)$. Then the following conditions are equivalent.

(1) $A \in L_2(U,X)$.

(2) There exists $K \in [0,\infty)$ such that if $(\eta_n : n \in \mathbb{N})$ is a sequence of real standard Gaussian random variables then

$$(*) \qquad E\left\|\sum_{k=1}^n \eta_k Ah_k\right\|^2 \le K^2 \sup\left\{\sum_{k=1}^n \langle h,h_k\rangle^2 : \|h\| \le 1\right\}$$

for every $h_1,\dots,h_n$ in U.

In either case $\|A\|_{L_2(U,X)}$ is the minimal K such that (*) holds.

Proof: (2) implies (1) by Theorem 1.2.2. Suppose that (1) holds. Take arbitrary vectors $h_1,\dots,h_n$ in U and an arbitrary orthonormal set $e_1,\dots,e_n$ in U which contains $h_1,\dots,h_n$ in its linear span. The left hand side is now of the form

$$E\left\|\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n \eta_k f_{kl} Ae_l\right\|^2$$

where $f_{kl} = \langle h_k, e_l\rangle$ is an $n\times n$-matrix. We can decompose (f_{kl}) into a matrix product $B_{n\times n}D_{n\times n}C_{n\times n}$ where B and C are unitary and D is diagonal. If we set $\xi = B^*\eta$, $\theta = C^*\xi$, $y_i = \sum_{l=1}^n c_{il}Ae_l$ then the left hand side equals

$$E\left\|\sum_{i=1}^n d_{ii}\xi_i y_i\right\|^2 \le \max\left\{d_{ii}^2 : i \le n\right\} E\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i y_i\right\|^2 = \|(f_{kl})\|^2\, E\left\|\sum_{l=1}^n \theta_l Ae_l\right\|^2$$

by the contraction principle (e.g. V.4, Proposition 4.1, [ChTV]) because ξ and θ are $\mathcal{N}(0, I_n)$-distributed. But $\|(f_{kl})\|^2 = \sup\left\{\sum_{i=1}^n \langle h, h_i\rangle^2 : \|h\| \le 1\right\}$. If we took $h_i = 0$ for $m < i \le n$ we would have

$$E\left\|\sum_{k=1}^m \eta_k A h_k\right\|^2 \le E\left\|\sum_{l=1}^n \theta_l A e_l\right\|^2 \sup\left\{\sum_{k=1}^m \langle h, h_k\rangle^2 : \|h\| \le 1\right\},$$

consequently

$$E\left\|\sum_{k=1}^m \eta_k A h_k\right\|^2 \le \|A\|^2_{L_2(U,X)} \sup\left\{\sum_{k=1}^m \langle h, h_k\rangle^2 : \|h\| \le 1\right\}$$

as n tends to ∞. □

Now we are going to give a series of simple propositions which tend to say that $\left(L_2(U,X), \|\ \|_{L_2(U,X)}\right)$ is a separable Banach space and in case that X is a Hilbert space it coincides isometrically with the Hilbert-Schmidt operators. Moreover the point (5) in the following Proposition is the key to verify whether an $L_2(U,X)$-valued mapping is Borel measurable or not.

Proposition 1.2.5. Suppose that $A \in L(U,X)$ is radonifying. Then

(1) $\|A\|_{L(U,X)} \le \|A\|_{L_2(U,X)}$.
(2) $L_2(U,X)$ is a linear space and $\|\ \|_{L_2(U,X)}$ is a norm.
(3) $u \otimes x \in L_2(U,X)$ for all $u \in U$, $x \in X$, $\|u \otimes x\|_{L_2(U,X)} = \|u\|_U \|x\|_X$ and the finite-dimensional operators are dense in $L_2(U,X)$, consequently $L_2(U,X)$ is separable.
(4) $\|\ \|_{L_2(U,X)}$ is complete.
(5) the Borel σ-algebra on the separable Banach space $L_2(U,X)$ is generated by the mappings $L_2(U,X) \to X : A \mapsto Au$, $u \in U$.
(6) $L_2(U,X)$ is a strongly measurable subset of $L(U,X)$.

Proof: 1. The measure $\mu = \mathfrak{Law}\left(\sum_n \xi_n A u_n\right)$ is Gaussian and centered on X and $\mu\{x : \langle x^*, x\rangle \in B\} = \mathcal{N}(0, \|A^* x^*\|_U^2)(B)$ for every $x^* \in X^*$, $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$. Thus $\|A^* x^*\|_U \le \|A\|_{L_2(U,X)}$ for every $\|x^*\| \le 1$.

2. and 3. are obvious.

4. If (A_m) is $\|\ \|_{L_2(U,X)}$-Cauchy then it converges to $A \in L(U,X)$ in the uniform operator topology due to (1) and $\sum_n \xi_n A u_n$ coincides with the limit of $\sum_n \xi_n A_m u_n$ in $L^2(\Omega, X)$ due to Theorem 1.2.2.

5. The mapping $A \mapsto Au$ is continuous for every $u \in U$ by (1) thus Borel measurable. On the other hand, if we denote σ the σ-algebra generated by the mappings $A \mapsto Au$, $u \in U$ and we fix $B \in L_2(U,X)$ then the real mapping $A \mapsto E\left\|\sum_k \xi_k (Au_k - Bu_k)\right\|_X^2$ is σ-measurable. Hence every ball in $L_2(U,X)$ belongs to σ which makes the end of the proof because $L_2(U,X)$ is separable.

6. $L_2(U,X) = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{m=n}^\infty \left\{A \in L(U,X) : E\left\|\sum_{j=n}^m \xi_j A u_j\right\|^2 \le \frac{1}{k}\right\}$ due to the completeness of $L^2(\Omega; X)$. □

Now we are ready to return to Definitions 1.2.1 and 1.2.3 and state a few simple observations which take the space U_0 into account.

Note 1.2.6. Let $A : U_0 \to X$ be a linear mapping and $B \in L(U, X)$. Then

(1) $\|A\|_{L(U_0,X)} = \left\|AQ^{1/2}\right\|_{L(U,X)}$

(2) $\|A\|_{L_2(U_0,X)} = \left\|AQ^{1/2}\right\|_{L_2(U,X)}$

(3) $\|A^*x^*\|_{U_0} = \left\|\left(AQ^{1/2}\right)^* x^*\right\|_U$ for every $x^* \in X^*$ provided $A \in L(U_0, X)$.

(4) $B|_{U_0} \in L_2(U_0, X)$ and $\|B\|_{L_2(U_0,X)} \leq \|B\|_{L(U,X)}\sqrt{\operatorname{Tr} Q}$ provided $Q \in L(U)$ is nuclear.

(5) $\overline{U_0}^U = D$.

Proof: (1), (2) and (3) are direct consequences of the definitions and of the fact that $Q^{1/2}$ is an isometric isomorphism between D and U_0.

(4) Since $Q^{1/2}$ is Hilbert-Schmidt the series $\sum_k \xi_k Q^{1/2} u_n$ converges in $L^2(\Omega, U)$. Hence $\sum_k \xi_k B Q^{1/2} u_n$ converges in $L^2(\Omega, X)$ and the estimation follows immediately.

(5) $\overline{U_0}^U = \overline{\operatorname{Rng}(Q^{1/2})}^U = \overline{\operatorname{Rng}(Q^{1/2})^*}^U = (\operatorname{Ker} Q^{1/2})^\perp = D$. □

1.3 Stochastic integral

One of the reasons for including the construction of the stochastic integral was its straightforward Itô style - we have dropped the necessity of auxiliary spaces and embeddings (e.g. [DZ], [B], [B1], [B2] or [BG]) which, later on, made all manipulations more transparent. None the less, we have arrived to the habitual stochastic integral whose properties we summarize at the end.

Let us consider a filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P, W)$ with a Q-$(\mathcal{F}_t)$-Wiener process on U and X a 2-smooth Banach space (Def. 1.3.1).

Step 1.

Since W is not necessarily a process in U we can not define the X-valued random variable $A(W_t)$ for every $A \in L(U, X)$ but we can do so for A finite dimensional (i.e. $Au = \sum_{k=1}^n \langle u, u_k \rangle x_k$ for some $u_k \in U$, $x_k \in X$) in the following way:

$$AW_t = \sum_{k=1}^n W_t(u_k) x_k.$$

We can easily see that $\langle x^*, AW_t \rangle = W_t(A^*x^*)$ hence the definition of AW_t is independent of the expansion of A and the definition of AW_t coincides with the composition $A(W_t)$ provided W is a U-valued process (i.e. in the case when the covariance Q is nuclear).

Step 2. (elementary integral)

Now we are going to integrate simple finite dimensional valued processes. Let ψ be a process with values in $L(U, X)$ such that $\psi(t) = \sum_{j=1}^m A_{ij} I_{F^{ij}}$ for $t_i < t \leq t_{i+1}$, $i \leq n$ for some partition $0 = t_1 < \cdots < t_{n+1} = T$, $(F^{ij} : j \leq m)$ an $\mathcal{F}_{t_i}$-decomposition of Ω and A_{ij}, $i \leq n$, $j \leq m$ finite dimensional operators in $L(U, X)$. Then the process

$$t \mapsto \int_0^t \psi \, dW = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (A_{ij} W_{t \wedge t_{i+1}} - A_{ij} W_{t \wedge t_i}) I_{F^{ij}}$$

is a norm continuous L^2-martingale in X and

$$\left\langle x^*, \int_0^t \psi \, dW \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \int_0^t I_{F^{ij}} I_{(t_i, t_{i+1}]} \, dW(A_{ij} x^*).$$

This definition is classical and one can define $\int_s^t \psi \, dW$, $0 \leq s \leq t$ in the same spirit as well.

Before we proceed to Step 3 we recall some properties and examples of 2-smooth Banach spaces.

Definition 1.3.1. A Banach space X is called 2-*smooth* provided there exists an equivalent norm $\| \ \|$ and a constant $c \geq 2$ such that $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + c\|y\|^2$ for every $x \in X$, $y \in X$.

We note that there are other equivalent definitions, for instance in terms of asymptoticity of the modulus of smoothness of the norm due to P. Assouad, T. Figiel, J. Hoffmann-Jørgensen, G. Pisier (e.g. [P]) or in terms of martingale estimation [A], [P]. We chose this definition 1.3.1 because one can easily show by C^2-smoothness of $\| \ \|^\beta$, $\beta > 2$ that $L^p(\mu)$ spaces with arbitrary positive, not necessarily σ-finite measures μ are 2-smooth for every $2 \leq p < \infty$. Obviously, by the parallelogram, every Hilbert space is 2-smooth and closed subspaces and products of 2-smooth spaces are 2-smooth hence Sobolev spaces $W^{k,p}$ are 2-smooth for $2 \leq p < \infty$, $k \geq 0$. Also, if A generates a holomorphic semigroup on a 2-smooth Banach space then the domains of fractional powers $D(-A)^\alpha$, $\alpha \geq 0$ with the graph norm are 2-smooth since they are isometric isomorphs of X. Another observation reveals that a 2-smooth Banach space X is uniformly smooth hence X is reflexive.

The following simple observation was made by P. Assouad [A] and it is the key to the forthcoming construction.

Lemma 1.3.2. Let X be a 2-smooth Banach space. Then there exists a constant C such that

$$E \|M_n\|^2 \leq C \sum_{k=1}^{n} E \|M_k - M_{k-1}\|^2, \ 1 \leq n \leq N$$

holds for every L^2-martingale $(M_k, \mathcal{F}_k : k = 0, \ldots, N)$, $M_0 = 0$.

Proof: Let $\eta_2 \in L^2$, $\mathcal{A}$ a sub-σ-algebra and denote $\eta_1 = E[\eta_2 | \mathcal{A}]$. Then

$$E\|2\eta_1 - \eta_2\|^2 + E\|\eta_2\|^2 \leq 2E\|\eta_1\|^2 + cE\|\eta_2 - \eta_1\|^2$$

by 2-smoothness and

$$\|\eta_1\|^2 = \|E[2\eta_1 - \eta_2 | \mathcal{A}]\|^2 \leq E\left[\|2\eta_1 - \eta_2\|^2 | \mathcal{A}\right].$$

Hence $E\|\eta_2\|^2 \leq E\|\eta_1\|^2 + cE\|\eta_2 - \eta_1\|^2$ and the result comes by induction, applied step by step, on the martingale M. The constant c may change after returning to the original norm. □

Step 3. (Burkholder inequality)
There exist constants C_p, $0 < p < \infty$ such that the following estimation holds for every ψ of the form we have considered in Step 2:

$$E \sup \left\{ \left\| \int_0^s \psi \, dW \right\|^p : s \leq t \right\} \leq C_p E \left(\int_0^t \left\| \psi Q^{1/2} \right\|^2_{L_2(U,X)} \, ds \right)^{\frac{p}{2}} . \tag{1.3.2}$$

The proof for p different from 2 will be postponed until (1.5.1). The left hand side of (1.3.2) is majorated by $4E \left\| \int_0^t \psi \, dw \right\|^2$ due to Doob's inequality and this can be further majorated by $4C \sum_{i=1}^n E \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi \, dW \right\|^2$ by Lemma 1.3.2. To finish the proof we will refer to the following Lemma.

Lemma 1.3.3. Let $p > 0$. Then there exists $c_p > 0$ such that

$$E \left\| \sum_{i=1}^n (A_i(W_t) - A_i(W_s)) I_{F^i} \right\|^p = (t-s)^{\frac{p}{2}} \sum_{i=1}^n E I_{F_i} \int_X \|x\|^p \, d\mathcal{N}(0, A_i Q A_i^*) \leq$$

$$\leq c_p (t-s)^{\frac{p}{2}} \sum_{i=1}^n E I_{F_i} \|A_i Q^{1/2}\|^p_{L_2(U,X)}$$

for every $A_i \in L(U,X)$, $i \leq n$ finite dimensional, $s < t$ and $(F_i : i \leq n)$ an $\mathcal{F}_s$-decomposition of Ω.

Proof: Since $(F^i : i \leq n)$ is a decomposition of Ω we can exchange the order of the sum and the norm in the left hand side term. More over $AW_t - AW_s$ is stochastically independent of $\mathcal{F}_s$ so we only have to show that $E \|AW_t - AW_s\|^p = (t-s)^{\frac{p}{2}} \int_X \|x\|^p \, d\mathcal{N}(0, AQA^*)$ for $A \in L(U,X)$ finite dimensional. But this is obvious since the distribution of $AW_t - AW_s$ is Gaussian centered on X with covariance $(t-s)AQA^*$. The second inequality follows from the fact that, for every p, q positive, there exists a positive constant a such that $\left(\int_X \|x\|^p \, d\nu \right)^{\frac{1}{p}} \leq a \left(\int_X \|x\|^q \, d\nu \right)^{\frac{1}{q}}$ for every Gaussian centered probability measure ν on X which is a consequence of the Fernique theorem (e.g. [Ba]). □

Step 4. (stochastic L^2-integral)
Having the Burkholder inequality for $p = 2$ we can define the norm continuous X-valued L^2-martingale $t \mapsto \int_0^t \psi \, dW$ for a progressively measurable $L_2(U_0, X)$-valued random process ψ satisfying $E \int_0^T \|\psi(s)\|^2_{L_2(U_0,X)} \, ds < \infty$ as a limit of integrals of simple processes with values in finite dimensional operators of $L(U,X)$ in the space $L^2(\Omega; C([0,T]; X))$ as we have done in Step 2. We recall Note 1.2.6 (2) in view of the right hand side of (1.3.2) where $\left\| \psi Q^{1/2} \right\|^2_{L_2(U,X)} = \|\psi\|^2_{L_2(U_0,X)}$ appears. The values of ψ outside of $U_0 = \operatorname{Rng} Q^{1/2}$ are not important in this estimation thus we consider the more "appropriate" space $L_2(U_0, X)$. The only thing we must show now is existence of simple processes ψ_n of the form we have considered in Step 2 which satisfy $\lim_{n\to\infty} E \int_0^T \|\psi_n(s) - \psi(s)\|^2_{L_2(U_0,X)} \, ds = 0$. To do it we are going to use the following simple but useful Lemma:

Lemma 1.3.4. Let Y be a separable Banach space and Y_0 its countable dense subset. Then there exist a sequence of simple mappings $F_n : Y \to Y_0$ such that $\|F_n(y) - y\|_Y \searrow 0$ for every $y \in Y$. In particular we can take $Y = L_2(U_0, X)$ and Y_0 some dense countable subset of finite dimensional operators in $L(U, X)$.

Proof: Enumerate $\{z_1, z_2, \dots\}$ the dense set Y_0 and define

$$t_n(y) = \min\{i \le n : \|y - z_i\| = \min\{\|y - z_j\| : j \le n\}\}.$$

The functions $F_n(y) = z_{t_n(y)}$, $y \in Y$, $n \in \mathbb{N}$ have clearly this property. Regarding the particular case we already know by Proposition 1.2.5 (3) that finite dimensional operators of $L(U_0, X)$ are dense in $L_2(U_0, X)$ so we must only show that every $h_0 \otimes_{L(U_0,X)} x$, $h_0 \in U_0$, $x \in X$ can be approximated by some $h \otimes_{L(U,X)} x$, $h \in U$, $x \in X$. But $\langle Qh, h_0\rangle_{U_0} = \langle Q^{1/2}h, Q^{-1/2}h_0\rangle_U = \langle h, Q^{1/2}Q^{-1/2}h_0\rangle_U = \langle h, h_0\rangle_U$ by definition of U_0 and selfadjointness of $Q^{1/2}$. Hence the restriction of $h \otimes_{L(U,X)} x \in L(U, X)$ to U_0 is $h \otimes_{L(U,X)} x|_{U_0} = Qh \otimes_{L(U_0,X)} x \in L(U_0, X)$ and

$$\left\|h \otimes_{L(U,X)} x - h_0 \otimes_{L(U_0,X)} x\right\|_{L_2(U_0,X)} =$$

$$= \left\|Qh \otimes_{L(U_0,X)} x - h_0 \otimes_{L(U_0,X)} x\right\|_{L_2(U_0,X)} =$$

$$= \|Qh - h_0\|_{U_0} \|x\|_X = \left\|Q^{1/2}h - Q^{-1/2}h_0\right\|_U \|x\|_X$$

where we used Proposition 1.2.5 (3). Now given $h_0 \in U_0$ we can always find $h \in U$ such that $\left\|Q^{1/2}h - Q^{-1/2}h_0\right\|_U$ is arbitrarily small because U_0 is dense in D and $Q^{-1/2}h_0 \in D$ by Note 1.2.6 (5). □

Our process ψ is measurable from $([0, T] \times \Omega, \mathcal{P}_T)$ to $L_2(U_0, X)$ where $\mathcal{P}_T$ denotes the σ-algebra of progressively measurable sets. Hence, by the particular case of Lemma 1.3.4, $F_n\psi$ are simple progressively measurable processes with values in finite dimensional operators of $L(U, X)$ such that $E\int_0^T \|F_n\psi(s) - \psi(s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds \searrow 0$ by the Lebesgue theorem. Since each $F_n\psi$ is of the form $\sum_{k=1}^m B_k I_{C_k}$ where $(C_k : k \le m)$ is a $\mathcal{P}_T$-decomposition of $[0, T] \times \Omega$ and B_k is finite dimensional in $L(U, X)$ we must show that each I_{C_k} can be approximated by simple real processes in $L^2([0, T] \times \Omega)$ but this is a well known fact (e.g. [KS]).

Remark 1.3.5. Take a progressively measurable $L_2(U_0, X)$-valued process ψ such that $E\int_0^T \|\psi(s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds < \infty$. In view of Step 2 and ψ_n considered therein the processes

$$\eta_n(t) = \left\langle x^*, \int_0^t \psi_n\, dW \right\rangle^2 - \int_0^t \left\|\left(\psi_n(s)Q^{1/2}\right)^* x^*\right\|^2_U ds$$

are real martingales for every $n \in \mathbb{N}$ and $x^* \in X^*$. Thus, if

$$\lim_{n\to\infty} E\int_0^T \|\psi_n(s) - \psi(s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds = 0$$

then $\eta_n(t)$ converge to

$$\left\langle x^*, \int_0^t \psi \, dW \right\rangle^2 - \int_0^t \left\| \left(\psi(s) Q^{1/2} \right)^* x^* \right\|_U^2 ds$$

in $L^1(\Omega)$ for every $t \leq T$ because of Proposition 1.2.5 (1), consequently the process $t \mapsto \int_0^t \|\psi^*(s)x^*\|_{U_0}^2 \, ds$ is the quadratic variation process of

$$t \mapsto \left\langle x^*, \int_0^t \psi \, dW \right\rangle$$

due to Note 1.2.6 (3). Analogously one can show that if Y is another 2-smooth Banach space, ϕ a progressively measurable $L_2(U_0, Y)$-valued process such that

$$E \int_0^T \|\phi(s)\|_{L_2(U_0,Y)}^2 \, ds < \infty$$

then $t \mapsto \int_0^t \langle \psi^*(s)x^*, \phi^*(s)y^* \rangle_{U_0} \, ds$ is the cross variation process associated to the real martingales

$$t \mapsto \left\langle x^*, \int_0^t \psi \, dW \right\rangle \quad \text{and} \quad t \mapsto \left\langle y^*, \int_0^t \phi \, dW \right\rangle, \quad x^* \in X^*, \quad y^* \in Y^*.$$

Summary of Step 4. We have constructed a continuous X-valued L^2-martingale $t \mapsto \int_0^t \psi \, dW$ as a limit in $L^2(\Omega; C([0,T]; X))$ for a progressively measurable process ψ with values in $L_2(U_0, X)$ and so the Burkholder inequality (1.3.2) holds with $p = 2$. The mapping $\psi \mapsto \int \psi \, dW$ is linear by construction.

Step 5. (general case)

Now we will finish the construction of the stochastic integral by extending it to progressively measurable $L_2(U_0, X)$-valued processes ψ with P-almost all trajectories in $L^2([0,T]; L_2(U_0, X))$ by the classical "localization" procedure. One defines the stopping times

$$t_n^* = \min \left\{ t \leq T : \int_0^t \|\psi(s)\|_{L_2(U_0,X)}^2 \, ds \geq n \right\}$$

with values in $[0,T]$ and then puts $\int_0^t \psi \, dW = \int_0^t I_{[0,t_n^*]} \psi \, dW$ on $[0, t_n^*]$. The process $t \mapsto \int_0^t \psi \, dW$ is a continuous local martingale in X. Yet, for the sake of correctness, we must first show:

Lemma 1.3.6. Let τ be a stopping time and ψ a progressively measurable process with values in $L_2(U_0, X)$ such that $E\int_0^T \|\psi(s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds < \infty$. Then we have $\int_0^{t\wedge\tau} \psi\, dW = \int_0^t I_{[0,\tau]}(s)\psi(s)\, dW$ for every $t \le T$.

Proof: Suppose that ψ is a bit more complicated than in Step 2, namely of the type $\sum_{k=1}^n f_k A_k$ where $(f_k : k \le n)$ are bounded real progressively measurable processes and $(A_k : k \le n)$ finite dimensional operators from $L(U, X)$. Then, by a simple convergence argument and the second formula in Step 2, we have

$$\left\langle x^*, \int_0^t \psi\, dW \right\rangle = \sum_{k=1}^n \int_0^t g_k\, dW(A_k^* x^*)$$

for every $t \le T$ and $x^* \in X^*$. Hence the claim holds for ψ of this type by the properties of real stochastic integrals. Now it suffices to take an approximating sequence ψ_n of simple processes from Step 2 such that

$$\lim_{n\to\infty} E\int_0^T \|\psi_n - \psi\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds = 0$$

and the proof is complete by using the Burkholder inequality (1.5.1) for $p = 2$. □

Summary of Step 5. We have extended the stochastic integral to progressively measurable processes ψ with values in $L_2(U_0, X)$ which satisfy

$$P\left[\int_0^T \|\psi(s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds < \infty\right] = 1.$$

The continuous X-valued process $t \mapsto \int_0^t \psi\, dW$ is a local martingale and

$$\int_0^{t\wedge\tau} \psi\, dW = \int_0^t I_{[0,\tau]}(s)\psi(s)\, dW \tag{1.3.6}$$

for every stopping time τ and time $t \le T$. Moreover, if Y is another 2-smooth Banach space, ϕ a progressively measurable $L_2(U_0, Y)$-valued process such that

$$P\left[\int_0^T \|\phi(s)\|^2_{L_2(U_0,Y)}\, ds < \infty\right] = 1$$

then $t \mapsto \int_0^t \langle \psi^*(s)x^*, \phi^*(s)y^*\rangle_{U_0}\, ds$ is the cross variation process associated to the real local martingales $t \mapsto \left\langle x^*, \int_0^t \psi\, dW\right\rangle$ and $t \mapsto \left\langle y^*, \int_0^t \phi\, dW\right\rangle$, $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$.

Example 1.3.7. Let ψ be a progressively measurable $L_2(U_0, X)$-valued process with almost all trajectories in $L^2(0,T; L_2(U_0,X))$ and $h \in U$. Then

- $\phi(s,\omega) = h \otimes_{L(U,\mathbb{R})} 1$ is a constant process in $L_2(U_0, \mathbb{R})$.
- the restriction of ϕ to U_0 belongs to $L(U_0, \mathbb{R}) = U_0^*$ thus can be identified with $Qh \in U_0$.
- $\phi^*(s,\omega) = Qh \in L(\mathbb{R}, U_0)$.
- $\int_0^t \phi(s)\, dW = \int_0^t Qh\, dW = W_t(h)$.
- $t \mapsto \int_0^t \langle x^*, \psi(s)Qh\rangle\, ds$ is the cross variation process of $t \mapsto \left\langle x^*, \int_0^t \psi\, dW \right\rangle$ and $t \mapsto W_t(h)$, $x^* \in X^*$.

1.4 A convergence result

Proposition 1.4.1. Let ψ, ψ_n, $n \in \mathbb{N}$ be a sequence of $L_2(U_0, X)$-valued progressively measurable processes with P-almost all trajectories in $L^2([0,T]; L_2(U_0,X)))$ such that $\int_0^T \|\psi_n(s) - \psi(s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds$ converges to 0 in probability. Then

$$\sup\left\{\left\|\int_0^s \psi_n\, dW - \int_0^s \psi\, dW\right\| : s \le T\right\} \to 0$$

in probability as well.

The proof is based on the following simple inequality: Denote

$$A(t) = \sup\left\{\left\|\int_0^s \psi\, dW\right\|^2 : s \le t\right\}, \quad B(t) = C_2 \int_0^t \|\psi(s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds.$$

Then A and B are continuous processes and

$$EA(\tau) \le EB(\tau) \tag{1.4.1}$$

for every stopping time $\tau \le T$. Now the claim follows from Lenglart's inequality (e.g. 1.4.15 and 1.4.17 in [KS]).

Proof: Define t_n^* as in Step 5 of the previous section. Then we have $EA(\tau) = \lim EA(\tau \wedge t_n^*)$ as A is continuous and nondecreasing and

$$EA(\tau \wedge t_n^*) \le E\sup\left\{\left\|\int_0^s I_{[0,\tau\wedge t_n^*]}\psi\, dW\right\|^2 : s \le T\right\} \le C_2 E \int_0^{\tau\wedge t_n^*} \|\psi(s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds$$

by (1.5.1) for $p = 2$ which we may apply as $E\int_0^T \left\|I_{[0,\tau\wedge t_n^*]}\psi\right\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds < \infty$. □

Remark 1.4.2. Let ψ be progressively measurable $L_2(U_0, X)$-valued processes with P-almost all trajectories in $L^2([0,T]; L_2(U_0, X)))$. Then, by Step 4 and 5, there exists a sequence ψ_n, $n \in \mathbb{N}$ of simple processes that we have considered in Step 2 such that $\int_0^T \|\psi_n(s) - \psi(s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds$ converges to 0 in probability.

1.5 Burkholder inequality

There exist constants C_p, $0 < p < \infty$ such that

$$E \sup\left\{\left\|\int_0^s \psi\, dW\right\|^p : s \le t\right\} \le C_p E\left(\int_0^t \|\psi\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds\right)^{\frac{p}{2}} \tag{1.5.1}$$

for every progressively measurable $L_2(U_0, X)$-valued process ψ with trajectories in the space $L^2([0,T]; L_2(U_0, X))$.

We have already proven (1.5.1) in the case $p = 2$ in Step 3 and 4 of the previous section. The case $0 < p < 2$ follows from (1.4.1) by e.g. IV, Prop. 4.7 in [RY] so we are only to prove the case $2 < p < \infty$. To do so take ψ as in Step 2 of the previous section and define $M_i = \int_0^{t_i} \psi\, dW$, $M = \max\{\|M_i\| : i \le n+1\}$, $S_i = \left(\sum_{j\le i} \left\|\int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi\, dW\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ and $B_i = \int_0^{t_i} \|\psi(s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds$, $i \le n+1$. These discrete processes are adapted to the filtration $(\mathcal{F}_{t_i} : i \le n+1)$ since ψ is $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-measurable on the interval $(t_{i-1}, t_i]$. Thus, taking $\lambda > 0$, $\beta > 1$ and $0 < \delta < \beta - 1$, we get the following $(\mathcal{F}_{t_i})$-stopping times: $\tau_1 = \min\{t_i : \|M_i\| > \lambda\beta\}$, $\tau_2 = \min\{t_i : \|M_i\| > \lambda\}$ and $\sigma = \min\{t_i : S_i \vee B_{i+1} > \delta\lambda\}$ where $\min\emptyset = T$. It is easy to see that the set

$$A_1 = [M > \lambda\beta, S_{n+1} \le \delta\lambda, B_{n+1} \le \delta\lambda]$$

is a subset of

$$A_2 = [\|M_{\tau_1\wedge\sigma} - M_{\tau_2\wedge\sigma}\| \ge \lambda(\beta - \delta - 1)]$$

since $\sigma = T$ and $\|M_{\tau_2}\| \le S_{\tau_2} + \lambda \le \lambda\delta + \lambda$ on A_1. Another look reveals that

$$\int_0^T \|\psi(s)\|^2 I_{[\tau_2\wedge\sigma < s \le \tau_1\wedge\sigma]}\, ds = I_{[M>\lambda]} \int_0^T \|\psi(s)\|^2 I_{[\tau_2\wedge\sigma < s \le \tau_1\wedge\sigma]}\, ds \le$$

$$\le I_{[M>\lambda]} \int_0^\sigma \|\psi(s)\|^2\, ds \le I_{[M>\lambda]}\delta^2\lambda^2.$$

Hence, by Chebyshev's inequality and (1.5.1) with $p = 2$ we get

$$P(A_1) \le P(A_2) \le \frac{1}{\lambda^2(\beta-\delta-1)^2} E\left\|I_{[\tau_2\wedge\sigma < s \le \tau_1\wedge\sigma]}\psi\, dW\right\|^2 \le$$

$$\le \frac{C_2}{\lambda^2(\beta-\delta-1)^2} E\int_0^T \|\psi(s)\|^2 I_{[\tau_2\wedge\sigma < s \le \tau_1\wedge\sigma]}\, ds \le \frac{\delta^2\lambda^2 C_2}{\lambda^2(\beta-\delta-1)^2} P[M > \lambda].$$

So we have

$$P[M > \lambda\beta] \leq \frac{\delta^2 C_2}{(\beta-\delta-1)^2} P[M > \lambda] + P[S_{n+1} > \lambda\delta] + P[B_{n+1} > \lambda\delta]$$

and integrating both sides with respect to $p\lambda^{p-1}\,d\lambda$ over $(0,\infty)$ we arrive at

$$\frac{EM^p}{\beta^p} \leq \frac{\delta^2 C_2}{(\beta-\delta-1)^2} EM^p + \frac{1}{\delta^p} E \sum_{j=1}^{n} \left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \psi\, dW \right\|^p +$$

$$+\frac{1}{\delta^p} E \left(\int_0^T \|\psi(s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds \right)^{\frac{p}{2}}.$$

Now

$$E \left\| \int_{t_j}^{t_{j+1}} \psi\, dW \right\|^p \leq c_p E \left\| \psi_{t_{j+1}} \right\|^p_{L_2(U_0,X)} (t_{j+1}-t_j)^{\frac{p}{2}}$$

by Lemma 1.3.3 so we get

$$EM^p \leq C_p E \left(\int_0^T \|\psi(s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds \right)^{\frac{p}{2}}$$

due to the fact that the $l^p(\mathbb{N})$-norm is smaller or equal than the norm of $l^2(\mathbb{N})$ ($2 \leq p < \infty$). We obtain (1.5.1) by refining the partition $0 = t_1 < \cdots < t_{n+1}$. To finish the proof take ψ such that the right hand side of (1.5.1) is finite. We are going to construct a sequence ψ_n of simple processes (Step 2 of the previous section) such that

$$\lim_{n\to\infty} E \left(\int_0^T \|\psi_n(s) - \psi(s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds \right)^{\frac{p}{2}} = 0.$$

The procedure goes in the same line as in Step 4 of the previous section: We take the simple processes $F_n\psi$ having $\|F_n\psi - \psi\|_{L_2(U_0,X)} \searrow 0$ on $[0,T]\times\Omega$. Thus

$$E \left(\int_0^T \|\psi_n(s) - \psi(s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds \right)^{\frac{p}{2}} \searrow 0$$

by the Lebesgue theorem. But now we can follow the considerations of Step 4 in view of the following inequality

$$E \left(\int_0^T \|F_n\psi(s) - \psi_n(s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds \right)^{\frac{p}{2}} \leq c_T E \int_0^T \|F_n\psi(s) - \psi_n(s)\|^p_{L_2(U_0,X)}\, ds$$

namely one approximates the intervening real bounded processes by simple real processes in $L^p([0,T]\times\Omega)$ instead of $L^2([0,T]\times\Omega)$. Thus we see that $\int \psi_n\, dW$ is Cauchy in $L^p(\Omega; C([0,T];X))$ and the limit L is majorated by the right hand side of (1.5.1). On the other hand, the limit $L = \int \psi\, dW$ because $\int \psi_n\, dW$ converges to $\int \psi\, dW$ in $C([0,T];X)$ in probability by Proposition 1.4.1. □

1.6 Fubini's theorem

Let $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P, W)$ be a probability filtered space with a Q-Wiener process W on U and let us denote $\Omega_T = [0,T]\times\Omega$, $\mathcal{P}_T$ the σ-algebra of progressively measurable subsets of $[0,T]\times\Omega$ and $ds\otimes P$ the product of the Lebesgue measure and P. We will write shortly $L^2(\Omega_T)$ for the space $L^2((\Omega_T, ds\otimes P); L_2(U_0,X))$.

Proposition 1.6.1. Let $(Y,\mathcal{Y},\mu)$ be a finite measure space and $\psi : \Omega_T\times Y \to L_2(U_0,X)$ a $\mathcal{P}_T\otimes\mathcal{Y}$-measurable mapping such that $\int_Y \|\psi(y)\|_{L^2(\Omega_T)}\, d\mu < \infty$. Then

(1) $\int_Y \psi(y)\, d\mu$ is a progressively measurable process in $L^2(\Omega_T)$.

(2) $\int_0^T \psi(y)\, dW$ has an $\mathcal{F}_T\otimes\mathcal{Y}$-measurable version $m : \Omega\times Y \to X$ such that $P\left[m(y) = \int_0^T \psi(y)\, dW\right] = 1$ for μ-almost all $y\in Y$.

(3) $P\left[\int_Y m(y)\, d\mu = \int_0^T \left(\int_Y \psi(y)\, d\mu\right) dW\right] = 1$.

Proof: (1) follows from the following inequality: Let f be a nonnegative $\mathcal{P}_T\otimes\mathcal{Y}$-measurable function on $\Omega_T\times Y$. Then

$$\sqrt{\int_{\Omega_T}\left(\int_Y f\, d\mu\right)^2 ds\otimes P} \le \int_Y \|f(y)\|_{L^2(\Omega_T,\mathbb{R})}\, d\mu \tag{1.6.1}$$

because $\left(\int_Y f(a,y)\, d\mu\right)^2 = \int_{Y\times Y} f(a,y_1)f(a,y_2)\, d\mu\otimes\mu$ and we get (1.6.1) by the Schwarz inequality. Now suppose that m in (2) exists. Then by taking Ω instead of Ω_T in (1.6.1) we get

$$\sqrt{E\left(\int_Y \|m(y)\|\, d\mu\right)^2} \le \int_Y \sqrt{E\,\|m(y)\|^2}\, d\mu \le \sqrt{C_2}\int_Y \|\psi(y)\|_{L^2(\Omega_T)}\, d\mu \tag{1.6.2}$$

by the Burkholder inequality (1.5.1). Hence $\int_Y m(y)\, d\mu$ is defined P-almost everywhere. Now take ψ_n satisfying the assumption of the proposition such that the sequence of the integrals $\int_Y \|\psi_n(y)-\psi(y)\|_{L^2(\Omega_T)}\, d\mu$ converges to zero. Then there exists a subsequence $(n_k : k\in\mathbb{N})$ such that

(a) $\int_0^T \psi_{n_k}(y)\, dW \to \int_0^T \psi(y)\, dW$ in $L^2(\Omega;X)$ for μ-almost all $y\in Y$.

(b) $\int_0^T \left(\int_Y \psi_n(y)\, d\mu\right) dW \to \int_0^T \left(\int_Y \psi(y)\, d\mu\right) dW$ in $L^2(\Omega;X)$ for μ-a.e. $y\in Y$.

(a) and (b) follow from the Burkholder inequality (1.5.1) as $\|\psi_{n_k}(y)-\psi(y)\|_{L^2(\Omega_T)} \to 0$ μ-almost everywhere (case a) and (b) due to (1.6.1). Let us introduce the set $\mathcal{D}$ of all

$\mathcal{P}_T \otimes \mathcal{Y}$-measurable $L_2(U_0, X)$-valued processes ψ with $\int_Y \|\psi(y)\|_{L^2(\Omega_T)}\, d\mu < \infty$ such that there exists an m satisfying (2) and (3). It is easy to see that $\mathcal{D}$ is a linear space and if we found $\psi_n \in \mathcal{D}$ such that $\int_Y \|\psi_n(y) - \psi(y)\|_{L^2(\Omega_T)}\, d\mu \to 0$ then we would finish the proof. Indeed, take the corresponding functions m_n. Then the sequence $(m_n : n \in \mathbb{N})$ is Cauchy in $L^1(\Omega \times Y; X)$ due to (1.6.2) (after having applied the Jensen inequality) and ψ belongs to $\mathcal{D}$ due to (a) and (b). Now we will show how to construct the approximating sequence ψ_n. First consider mappings F_n on $L_2(U_0, X)$ as in Lemma 1.3.4. The simple functions $F_n\psi$ take values in finite dimensional operators of $L(U, X)$. Moreover $\|F_n\psi(y) - \psi(y)\|_{L^2(\Omega_T)} \searrow 0$ for μ-almost all $y \in Y$ by the Lebesgue theorem hence $\int_Y \|F_n\psi(y) - \psi(y)\|_{L^2(\Omega_T)}\, d\mu \searrow 0$ and if $F_n\psi \in \mathcal{D}$, $n \in \mathbb{N}$ then $\psi \in D$. Now, to show that $F_n\psi \in \mathcal{D}$, we will take advantage of the fact that each $F_n\psi$ is bounded in $L_2(U_0, X)$ and $\int_Y \|\phi_n(y) - \phi(y)\|_{L^2(\Omega_T)}\, d\mu \to 0$ if and only if $\int_{\Omega_T \times Y} \|\phi_n - \phi\|_{L_2(U_0,X)}\, ds \otimes dP \otimes d\mu \to 0$ for ϕ_n uniformly bounded in $L_2(U_0, X)$. So as $F_n\psi$ is of the form $\sum_{k=1}^m I_{C_k} B_k$ where $(C_k : k \leq m)$ is a $\mathcal{P}_T \otimes \mathcal{Y}$-decomposition of $\Omega_T \times Y$ and B_k, $k \leq m$ are finite dimensional operators in $L(U, X)$ we conclude that $F_n\psi \in \mathcal{D}$ provided $I_{C_k} B_k \in \mathcal{D}$ due to linearity of $\mathcal{D}$. Another reduction shows that this is true if $I_{C_k^1 \times C_k^2} B_k \in \mathcal{D}$ for every $C_k^1 \in \mathcal{P}_T$, $C_k^2 \in \mathcal{Y}$ as I_{C_k} can be approximated by $I_{C_k^0}$ in $L^1(\Omega_T \times Y)$ where C_k^0 is a disjoint union of sets of the type $C_k^1 \times C_k^2$. Finally, as $I_{C_k^1}$ is a progressively measurable process, it can be approximated by simple uniformly bounded real processes in $L^1(\Omega_T)$ so we will finish the proof by showing that $I_{(s,t] \times C_s \times C_k^2} B_k \in \mathcal{D}$ for $s < t$, $C_s \in \mathcal{F}_s$ but this is obvious. $\square$

Example 1.6.2. Let $g : [0, T] \times \Omega \to L_2(U_0, X)$ such that $\langle x_n^*, g(h_k)\rangle : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ is progressively measurable for $x_n^* \in X^*$, $h_k \in U_0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ where $(x_n^* : n)$ separates points in X and $(h_k : k \in \mathbb{N})$ is dense or orthonormal in U_0. Then g is progressively measurable by Proposition 1.2.5 (5).

Example 1.6.3. Let (S_t) be a continuous semigroup of linear operators on X generated by A, W a Q-Wiener process and $g : [0, T] \times \Omega \to L_2(U_0, X)$ a progressively measurable process such that $P\left[\int_0^T \|g(s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds < \infty\right] = 1$. Denote $G(t) = \int_0^t g\, dW$ and $C(t) = \int_0^t S_{t-s} g(s)\, dW$. Then

(1) C has an $(\mathcal{F}_t)$-predictable modification such that $C(\omega) \in L^2(0, T; X)$ P-almost surely.

(2) $P\left[\int_0^t C(r)\, dr \in D(A)\right] = 1$ and $P\left[A\int_0^t C(r)\, dr = C(t) - G(t)\right] = 1$ for every $t \leq T$.

Proof: To simplify the notation we will extend the operator-valued function S to negative times by $0 \in L(X)$.

First suppose that

$$E\int_0^T \|g(s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds < \infty.$$

Fix $t \in [0, T]$ and define $\psi_t(s, \omega, r) = S_{r-s} g(s, \omega)$ for $s \leq t$, $r \leq t$. Then, by Proposition 1.6.1, there exists a $\mathbb{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$-measurable function $m_t : [0, t] \times \Omega \to X$ such that $P[m_t(r) = C(r)] = 1$ for almost all $r \in [0, t]$ and $m_t(\omega) \in L^2(0, t; X)$ for all $\omega \in \Omega$.

Next take λ from the resolvent set of A and define $\psi(s,\omega,r) = S_{r-s}AR_\lambda g(s,\omega)$, $s \le t$, $r \le t$. Then ψ satisfies the assumptions of Proposition 1.6.1 with $Y = [0,t]$ and we have $(s,\omega) \mapsto \int_Y \psi\, dr = S_{t-s}R_\lambda g(s,\omega) - R_\lambda g(s,\omega)$, $P\,[m(r) = AR_\lambda m_t(r)] = 1$ for almost all $r \le t$ because

$$(*) \qquad AR_\lambda = \lambda R_\lambda - I_X$$

is bounded and $AR_\lambda \int_0^t m_t(r)\,dr = \int_0^t m(r)\,dr = R_\lambda C(t) - R_\lambda G(t)$ P-almost everywhere but $\operatorname{Rng} R_\lambda = D(A)$ and, due to (*), $P\left[\int_0^t m_t(r)\,dr \in D(A)\right] = 1$. Thus

$$P\left[A\int_0^t m_T(r)\,dr = A\int_0^t m_t(r)\,dr = C(t) - G(t)\right] = 1.$$

Moreover the process $t \mapsto \int_0^t m_T(r)\,dr$ is continuous and adapted as

$$P\left[\int_0^t m_T(r)\,dr = \int_0^t m_t(r)\,dr\right] = 1$$

for every $t \le T$ so

$$t \mapsto \begin{cases} A\int_0^t m_T(r)\,dr & \int_0^t m_T(r)\,dr \in D(A) \\ 0 & \int_0^t m_T(r)\,dr \notin D(A) \end{cases}$$

is predictable because $D(A)$ is a Borel set in X and $A : D(A) \to X$ is Borel measurable. Consequently, C has a predictable modification. The general case follows directly from (1), (2) by localization of Step 5: Define

$$t_n^* = \inf\left\{t \le T : \int_0^t \|g(s)\|^2_{L_2(U_0,X)}\, ds \ge n\right\}$$

and $g_n(s,\omega) = g(s,\omega)I_{[0,t_n^*(\omega)]}(s)$. Then the processes $C_n(t) = \int_0^t S_{t-s}g_n(s)\,dW_s$, $G_n(t) = \int_0^t g_n\,dW$ satisfy (1), (2). The set of (t,ω) where C_n is convergent is predictable and the limit is predictable as well. But this limit is a modification of C because $C_n(t)$ converges P-almost surely for every $t \le T$ as $P[t_n^* = T] \nearrow 1$ and $P\,[C_n(t) = C(t), t_n^* = T] = 1$ for every $t \le T$. □

Example 1.6.4. Let (S_t) be a continuous semigroup of linear operators on a separable reflexive Banach space X generated by A, W a Q-Wiener process, $g : [0,T] \times \Omega \to L(U_0,X)$ a progressively measurable process with respect to the strong σ-algebra on $L(U_0,X)$. Further suppose that $P\left[\int_0^T \|g(s)\|^2_{L(U_0,X)}\, ds < \infty\right] = 1$ and denote $G_{x^*}(t) = \int_0^t g^*x^*\,dW$, $C_{x^*}(t) = \int_0^t g^*(s)S^*_{t-s}x^*\,dW$ for $x^* \in X^*$, $t \le T$. Then

(1) C_{x^*} has an $(\mathcal{F}_t)$-predictable modification such that $C_{x^*}(\omega) \in L^2(0,T)$ P-almost surely for every $x^* \in X^*$.

(2) C_{x^*} is a continuous process and $P\left[\int_0^t C_{A^*x^*}(s)\,ds = C_{x^*}(t) - G_{x^*}(t)\right] = 1$ for every $t \le T$ provided $x^* \in D\,(A^*)$.

Proof: C_{x^*} is a real adapted process which is continuous in probability by Proposition 1.4.1. Thus (1) is a consequence of Proposition I.3.2, [DZ]. Next suppose that $E\int_0^T \|g(s)\|^2_{L(U_0,X)}\,ds < \infty$. Then (2) follows immediately from Proposition 1.6.1 and the general case can be obtained in the same way as in Example 1.6.3 but this time with $t_n^* = \inf\left\{t \le T : \int_0^t \|g(s)\|^2_{L(U_0,X)}\,ds \ge n\right\}$, $g_n(s,\omega) = g(s,\omega)I_{[0,t_n^*(\omega)]}(s)$. □

Proof of Theorem 1.12. If we define $y_1(t) = S_t u(0)$ then $A\int_0^t y_1(s)\,ds = y_1(t) - u(0)$. The process $y_2(t) = \int_0^t S_{t-s}f(s)\,ds$ is obviously norm continuous, adapted and, by classical Fubini's theorem, $A\int_0^t y_2(s,\omega)\,ds = y_2(t,\omega) - \int_0^t f(s,\omega)\,ds$ for every ω satisfying $\int_0^T \|f(s,\omega)\|\,ds < \infty$. Thus, by Example 1.6.3, the predictable process $y_3(t) = \int_0^t S_{t-s}g(s)\,dW$ satisfies $A\int_0^t y_3(s)\,ds = y_3(t) - \int_0^t g(s)\,dW$ almost everywhere, (a) implies (b) because $u(t) = y_1(t)+y_2(t)+y_3(t)$ almost everywhere and (1), (2) obviously hold. On the other hand, if (b) holds, define $h(t) = y_1(t)+y_2(t)+y_3(t)-u(t)$. Then $h(t) = A\int_0^t h(s)\,ds$ almost everywhere for every $t \le T$. Thus, computing $\int_0^r \langle x^*, S_{r-t}h(t)\rangle\,dt$, $x^* \in D(A^*)$ by classical Fubini's theorem, we get $\int_0^r h(s,\omega)\,ds = 0$ for every $r \le T$ and almost all ω. But $t \mapsto \langle x^*, h(t,\omega)\rangle$ is continuous for almost all ω for every choice of $x^* \in D(A^*)$ thus $h(t,\omega) = 0$ on $[0,T]$ for almost all ω because X is reflexive and $D(A^*)$ is norm dense in X^*. □

Proof of Theorem 1.13. (a) implies (b) and (c): In fact, we will prove a little more. (a) implies that

$$\langle x^*, u_t\rangle = \langle x^*, S_t u_0\rangle + \int_0^t \langle x^*, S_{t-s}f_s\rangle\,ds + \int_0^t g_s^* S_{t-s}^* x^*\,dW_s \tag{1.13.a}$$

for every $x^* \in X^*$ and this equality already implies (b) and (c). Thus we need not suppose that X is 2-smooth whatsoever - X might be separable reflexive and (1.13.a) should hold. The process $t \mapsto \langle x^*, u(t)\rangle$ has a predictable modification for every $x^* \in X^*$ by Example 1.6.4 hence u has a predictable modification by Corollary 1.11.2. Now fix $x^* \in D(A^*)$ and define $y_3'(t) = \int_0^t g_s^* S_{t-s}^* A^* x^*\,dW_s$. Then, proceeding along Theorem 1.12, (c) follows from Example 1.6.4. To show (b) define the predictable processes $v_n(t) = \int_0^t S_{t-s}g_n(s)\,dW_s$, $n \in \mathbb{N}$ and $v(t) = \int_0^t S_{t-s}g(s)\,dW_s$ with g_n from Example 1.6.4. Then, by Proposition 1.6.1, $P\left[\int_0^T \int_0^T |\langle x^*(t,s), v_n(s)\rangle|\,ds\,dt < \infty\right] = 1$. But $P\left[v_n(t)I_{[t_n^*=T]} = v(t)I_{[t_n^*=T]}\right] = 1$ for every $t \le T$ and $P[t_n^* = T] \nearrow 1$ thus (b) holds as $t \mapsto S_t u(0) + \int_0^t S_{t-s}f(s)\,ds$ is norm-continuous.

(b) and (c) imply (a): Define $h(t) = u(t) - S_t u(0) - \int_0^t S_{t-s}f(s) - \int_0^t S_{t-s}g(s)\,dW_s$. Then, by the first part of the proof, h can be chosen predictable satisfying (b) and $P\left[\langle x^*, h(t)\rangle = \int_0^t \langle A^*x^*, h(s)\rangle\,ds\right] = 1$ for every $t \le T$, $x^* \in D(A^*)$. Thus, computing $\int_0^r \langle S_{r-t}^* x^*, h(t)\rangle\,dt$ by Fubini's theorem, we get that $P[h(t) = 0] = 1$ for every $t \le T$. □

1.7 The Girsanov-Novikov theorem

Proposition 1.7.1. Let $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P, W)$ be a filtered probability space with a Q-Wiener process W on U, ϕ a progressively measurable process with values in U_0 satisfying $E \exp\left(\int_0^T \|\phi(s)\|_{U_0}^2 \, ds\right) < \infty$ and ψ a progressively measurable process with values in $L_2(U_0, X)$ such that $P\left[\int_0^T \|\psi(s)\|_{L_2(U_0,X)}^2 \, ds\right] = 1$. Then

(1) $M_t = \exp\left(-\int_0^t \phi \, dW - \frac{1}{2}\int_0^t \|\phi(s)\|_{U_0}^2 \, ds\right)$ is a P-martingale on $[0,T]$.

(2) $\widetilde{W}_t(h) = W_t(h) + \int_0^t \langle \phi(s), h\rangle_U \, ds$, $t \le T$, $h \in U$ is a $\widetilde{P}$-Q-Wiener process on U with $\widetilde{P}(F) = \int_F M_T \, dP$.

(3) $\int_0^t \psi \, d\widetilde{W} = \int_0^t \psi \, dW + \int_0^t \psi(s)\phi(s) \, ds$ almost everywhere for every $t \le T$.

(4) if $(Y, \mathcal{Y})$ is a measurable space and $\xi : \Omega \to Y$ an $\mathcal{F}_0$-measurable random variable then $\mathfrak{Law}_{\widetilde{P}}(\xi) = \mathfrak{Law}_P(\xi)$.

Proof: The proof goes along the classical Girsanov and Novikov theorem (e.g. [RY]). Hence (1) follows from the fact that the quadratic variation process of $t \mapsto \int_0^t \phi \, dW$ is $t \mapsto \int_0^t \|\phi(s)\|_{U_0}^2 \, ds$ due to Remark 1.3.5. Here we use the isometrical isomorphism between $L_2(U_0, \mathbb{R})$ and U_0. Using the same arguments as in Remark 1.3.5 we can show that $t \mapsto \int_0^t \langle \phi(s), Qh\rangle_{U_0} \, ds$ is the cross variation process associated to $t \mapsto \int_0^t \phi \, dW$ and $t \mapsto W_t(h)$. But $\langle \phi(s), Qh\rangle_{U_0} = \langle \phi(s), h\rangle_U$ whence (2). If we take $\psi = I_{(s,t]} I_{F_s} h \otimes x$ for some $0 \le s < t \le T$, $F_s \in \mathcal{F}_s$, $h \in U$, $x \in X$ then (3) obviously holds. Due to linearity, (3) holds for simple ψ that we have considered in Step 2 of the previous section as well. If ψ is general we can find a sequence $(\psi_n : n \in \mathbb{N})$ of simple processes of Step 2 such that $\int_0^T \|\psi_n(s) - \psi(s)\|_{L_2(U_0,X)}^2 \, ds \to 0$ in probability ($\widetilde{P}$ as well as P) by Remark 1.4.2 and the final equality is just the limiting argument of Proposition 1.4.1. The claim (4) is a consequence of (1). □

Remark. The measures $\widetilde{P}$, P are absolutely continuous with respect to each other so their null sets coincide as well as $\widetilde{P}$-convergence and P-convergence, consequently the integrals in (3) do not depend on $\widetilde{P}$, resp. P due to Proposition 1.4.1.

1.8 Distribution of random integrals and measurable selectors

The goal of this section is to show a sufficient condition on a process u and a Q-Wiener process W to be a solution. More precisely we are going to prove that if the distributions of (u, W) and (v, B) coincide on the space of functions and (v, B) is a solution then so is (u, W).

In the last part we have modified the selection theorem of [KRN] to open set mappings with the gain of distribution preserving selectors.

Distribution of random Bochner integrals

Lemma 1.8.1. Let $(Y, \mathcal{Y})$ be a measurable space, ξ^i a Y-valued random variable and $(f_j^i(t) : t \le T)$, $j \le N$ real bounded measurable processes on $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, P^i)$, $i = 1, 2$ such that

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(f_j^1(r_l), \xi^1 : j \le N, l \le m\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(f_j^2(r_l), \xi^2 : j \le N, l \le m\right)$$

for every partition $0 = r_0 < \cdots < r_m \leq T$ in D^* for some $D^* \subseteq [0,T]$ of Lebesgue measure T. Then

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(\int_0^{t_k} f_j^1(s)\,ds, \xi^1 : k,j\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(\int_0^{t_k} f_j^2(s)\,ds, \xi^2 : k,j\right)$$

for every partition $0 = t_0 < \cdots < t_n \leq T$.

Proof: First let ξ^i be real bounded, $N = 1$ and $0 < t \leq T$ fixed. We are going to show that the Fourier transforms of the $\mathbb{R}^2$-valued random vectors $\left(\int_0^t f^i(s)\,ds, \xi^i\right)$ do not depend on i thus they must coincide. Define $g^i(s) = \sqrt{-1}\left(af^i(s) + \frac{b}{t}\xi^i\right)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\Omega^i} \exp\left(\int_0^t g^i(s)\,ds\right) dP^i = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^t \cdots \int_0^t \left(\int_{\Omega^i} g^i(s_1)\ldots g^i(s_k)\,dP^i\right) ds_1 \ldots ds_k$$

by Fubini's theorem.

Now the general case can be proven by repeated application of the previous case: Fix a partition $0 = t_0 < \cdots < t_n \leq T$, $J \leq N$, $K \leq n$ and suppose that

$$\mathfrak{Law}_{P^i}\left(\int_0^{t_k} f_{j_1}^i(s)\,ds, f_j^i(r_l), \xi^i : k \leq K, j_1 \leq J, j \leq N, l \leq m\right)$$

are equal for $i = 1,2$ for every choice of $0 = r_0 < \cdots < r_m \leq T$ in D^*. Set $\eta^i = \left(\int_0^{t_k} f_{j_1}^i(s)\,ds, f_j^1(r_l), \xi^1 : k \leq K, j_1 \leq J, j \leq N, l \leq m\right)$, $i = 1,2$ and fix a measurable set A in the state space of η^i. Then $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(f_{j_0}^1(r_l^*), I_{[\eta^1 \in A]} : l \leq M\right)$ coincides with $\mathfrak{Law}_{P^2}\left(f_{j_0}^2(r_l^*), I_{[\eta^2 \in A]} : l \leq M\right)$ for every partition $0 = r_0^* < \cdots < r_M^* \leq T$ in D^* and $j_0 \leq N$ hence $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(\int_0^t f_{j_0}^1(s)\,ds, I_{[\eta^1 \in A]}\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(\int_0^t f_{j_0}^2(s)\,ds, I_{[\eta^2 \in A]}\right)$ for every $t \leq T$, $j_0 \leq N$ and A by the first part of the proof which is, indeed, the induction step. □

Corollary 1.8.2. Suppose that $\left(f^i(t) : t \leq T\right)$ is a $[0,\infty]$-valued measurable process on $\left(\Omega^i, \mathcal{F}^i, P^i\right)$, $i = 1,2$ such that $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(f^1(r_l) : l \leq m\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(f^2(r_l) : l \leq m\right)$ for every partition $0 = r_0 < \cdots < r_m \leq T$ in D^*. Then $P^1\left[\int_0^T f^1(s)\,ds < \infty\right] = P^2\left[\int_0^T f^2(s)\,ds < \infty\right]$.

Proof: The bounded measurable processes $t \mapsto f_n^i(t) = \max\left\{f^i(t), n\right\}$ satisfy the assumption of Lemma 1.8.1. Thus $P^1\left[\int_0^T f_n^1(s)\,ds \leq \Delta\right] = P^2\left[\int_0^T f_n^2(s)\,ds \leq \Delta\right]$ for every $\Delta \in \mathbb{R}$ and we have $P^1\left[\int_0^T f^1(s)\,ds \leq \Delta\right] = P^2\left[\int_0^T f^2(s)\,ds \leq \Delta\right]$ by Lévy's theorem. The claim now follows by letting Δ tend to infinity. □

Theorem 1.8.3. *Let $(Y, \mathcal{Y})$ be a measurable space, ξ^i a Y-valued random variable and $\left(f_j^i(t) : t \leq T\right)$, $j \leq N$ X-valued measurable processes on $\left(\Omega^i, \mathcal{F}^i, P^i\right)$, $i = 1, 2$ satisfying*

(1) $P^1\left[\int_0^T \left\|f_j^1(s)\right\| \, ds < \infty\right] = P^2\left[\int_0^T \left\|f_j^2(s)\right\| \, ds < \infty\right] = 1$ *for every* $j \leq N$.

(2) $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(f_j^1(r_l), \xi^1 : j \leq N, l \leq m\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(f_j^2(r_l), \xi^2 : j \leq N, l \leq m\right)$ *for every partition* $0 = r_0 < \cdots < r_m \leq T$ *in* D^* *for some* $D^* \subseteq [0, T]$ *of Lebesgue measure* T.

Then

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(\int_0^{t_k} f_j^1(s)\, ds, \xi^1 : k, j\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(\int_0^{t_k} f_j^2(s)\, ds, \xi^2 : k, j\right)$$

for every partition $0 = t_0 < \cdots < t_n \leq T$.

Proof: First suppose that $X = \mathbb{R}$ and define the real functions

$$h_m(r) = \operatorname{sgn}(r) \max\{|r|, m\}, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Then, by Lemma 1.8.1, the measures

$$\mathfrak{Law}_{P^i}\left(\int_0^{t_k} h_m\left(f_j^i(s)\right)\, ds, \xi^i : k \leq n, j \leq N\right)$$

are equal for $i = 1, 2$ for every $m \in \mathbb{N}$ and the claim follows by letting m tend to infinity by Lebesgue's theorem. To prove the general case choose a sequence $(x_l^* : l \in \mathbb{N})$ in X^* which separates points of X. Then, by an application of the previous case, we get the equality of the measures

$$\mathfrak{Law}_{P^i}\left(\int_0^{t_k} \left\langle x_l^*, f_j^i(s)\right\rangle\, ds, \xi^i : k \leq n, l \leq L, j \leq N\right)$$

for $i = 1, 2$ for every $L \in \mathbb{N}$. But this is already equivalent to the conclusion of the theorem as $(x_l^* : l \in \mathbb{N})$ generates the Borel σ-algebra on X. □

Remark 1.8.4. Notice that the probabilities appearing in condition (1) are, under assumptions of the theorem, always equal by Corollary 1.8.2. Moreover, by obvious modification of the proof, the theorem holds true even if some of f^n's were $[0, \infty]$-valued.

Distribution of stochastic integrals

Lemma 1.8.5. Let $(Y, \mathcal{Y})$ be a measurable space, ξ^i a Y-valued random variable, B_m^i, $m \leq M$ real $(\mathcal{F}_t^i)$-Wiener processes and $\left(g_j^i(t) : t \leq T\right)$, $j \leq N$ $(\mathcal{F}_t^i)$-progressively measurable bounded processes on $\left(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \left(\mathcal{F}_t^i\right), P^i\right)$, $i = 1, 2$ such that

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(g_j^1(r_l), B_m^1(r_l), \xi^1 : j, l, m\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(g_j^2(r_l), B_m^2(r_l), \xi^2 : j, l, m\right)$$

for every partition $0 = r_0 < \cdots < r_m \leq T$ in D^* for some $D^* \subseteq [0,T]$ of Lebesgue measure T. Then

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(\int_0^{t_k} g_j^1\, dB_m^1, \xi^1 : k,j,m\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(\int_0^{t_k} g_j^2\, dB_m^2, \xi^2 : k,j,m\right)$$

for every partition $0 = t_0 < \cdots < t_n \leq T$.

Proof: First suppose that all processes g_j^i are, in addition, continuous and $D^* = [0,T]$. Then

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(\int_0^{t_k} g_{jL}^1\, dB_m^1, \xi^1 : k,j,m\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(\int_0^{t_k} g_{jL}^2\, dB_m^2, \xi^2 : k,j,m\right)$$

for approximations $g_{jL}^i(t) = \sum_{l=1}^{L} g_j^i(r_{l-1}) I_{(r_{l-1},r_l]}(t)$ with a subdivision $0 = r_0 < \cdots < r_L = T$ of $(t_k : k \leq n)$. The claim now follows by letting the subdivisions' norm tend to zero. In the general case consider the continuous uniformly bounded processes

$$g_{jL}^i(t) = L \int_{\max\{t-\frac{1}{L},0\}}^{t} g_j^i(s)\, ds = L\left(\int_0^t g_j^i(s)\, ds - \int_0^{\max\{t-\frac{1}{L},0\}} g_j^i(s)\, ds\right).$$

We have $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(g_{jL}^1(r_l), B_m^1(r_l), \xi^1 : j,l,m\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(g_{jL}^2(r_l), B_m^2(r_l), \xi^2 : j,l,m\right)$ for every partition $0 = r_0 < \cdots < r_m \leq T$ by Lemma 1.8.1. In fact, we should consider partitions in D^* but the intervening processes are continuous and D^* is dense in $[0,T]$. Thus, by the previous case,

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(\int_0^{t_k} g_{jL}^1\, dB_m^1, \xi^1 : k,j,m\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(\int_0^{t_k} g_{jL}^2\, dB_m^2, \xi^2 : k,j,m\right)$$

and the general claim follows by letting L tend to 0 as a sequence because $g_{jL}^i \to g_j^i$ $dt \otimes P^i$-almost everywhere on $[0,T] \times \Omega^1$. □

Theorem 1.8.6. *Let $(Y, \mathcal{Y})$ be a measurable space, ξ^i a Y-valued random variable, W^i a Q-Wiener process on U and $\left(g_j^i(t) : t \leq T\right)$, $j \leq N$ $L_2(U_0, X)$-valued $\left(\mathcal{F}_t^i\right)$-progressively measurable processes on $\left(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \left(\mathcal{F}_t^i\right), P^i\right)$, $i = 1,2$ satisfying*

(1)

$$P^1\left[\int_0^T \left\|g_j^1(s)\right\|_{L_2(U_0,X)}^2\, ds < \infty\right] = P^2\left[\int_0^T \left\|g_j^2(s)\right\|_{L_2(U_0,X)}^2\, ds < \infty\right] = 1$$

for every $j \leq N$.

(2)

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(g_j^1(r_l), W_{r_l}^1(h_k), \xi^1 : j,l,k\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(g_j^2(r_l), W_{r_l}^2(h_k), \xi^2 : j,l,k\right)$$

for every $h_k \in U$, $k \leq K$ and every partition $0 = r_0 < \cdots < r_m \leq T$ in D^* for some $D^* \subseteq [0,T]$ of Lebesgue measure T.

Then

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(\int_0^{t_k} g_j^1\, dW^1, \xi^1 : k, j\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(\int_0^{t_k} g_j^2\, dW^2, \xi^2 : k, j\right)$$

for every partition $0 = t_0 < \cdots < t_n \leq T$.

Proof: We will start by taking the simple approximation $F_n : L_2(U_0, X) \to L(U, X)$, $n \in \mathbb{N}$ with values in finite dimensional operators of $L(U, X)$ as in Lemma 1.3.4 such that $\|F_n A - A\|_{L_2(U_0,X)} \searrow 0$ for every $A \in L_2(U_0, X)$. Thus each F_n is of the form $\sum_{k=1}^m I_{C_k} B_k$ where $(C_k : k \leq m)$ is a measurable decomposition of $L_2(U_0, X)$ and $B_k \in L(U, X)$ are finite dimensional. If we put $g_{jn}^i = F_n g_j^i$, we will have

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^T \left\|g_j^i(s) - g_{jn}^i(s)\right\|_{L_2(U_0,X)}^2 ds = 0$$

P^i-almost everywhere, $i = 1, 2$. Moreover

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(g_{jn}^1(r_l), W_{r_l}^1(h_k), \xi^1 : j, l, k\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(g_{jn}^2(r_l), W_{r_l}^2(h_k), \xi^2 : j, l, k\right)$$

for every $h_k \in U$, $k \leq K$ and every partition $0 = r_0 < \cdots < r_m \leq T$ in D^*. So, if we showed that the measures

$$(**) \qquad \mathfrak{Law}_{P^i}\left(\left\langle x_l^*, \int_0^{t_k} g_{jm}^i\, dW^i\right\rangle, \xi^i : l \leq L, k \leq n, j \leq N\right)$$

are equal for $i = 1, 2$ for every $m \in \mathbb{N}$, $L \in \mathbb{N}$ and some sequence $(x_l^* : l \in \mathbb{N})$ which separates points of X (hence generates the Borel σ-algebra of X) we would prove the claim of the theorem using (*) and Proposition 1.4.1 because (**) implies

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(\int_0^{t_k} g_{jm}^1\, dW^1, \xi^1 : k, j\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(\int_0^{t_k} g_{jm}^2\, dW^2, \xi^2 : k, j\right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

But each g_{jn}^i is of the form $\sum_{k=1}^m I_{[g_j^i \in C_k]} B_k$ and, recalling the proof of Lemma 1.3.6, we have $\left\langle x^*, \int_0^t g_{jn}^i\, dW^i\right\rangle = \sum_{k=1}^m \int_0^t I_{[g_j^i \in C_k]}\, dW^i(B_k^* x^*)$. Thus (**) follows from Lemma 1.8.5. □

Remark 1.8.7. Notice that the probabilities appearing in condition (1) are, under assumptions of the theorem, always equal by Corollary 1.8.2. Moreover, to verify the condition (2), one should take advantage of Proposition 1.2.5 (5).

Distribution of measurable selectors

Proposition 1.8.8. Let $\left(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \left(\mathcal{F}_t^i\right), P^i\right)$, $i = 1, 2$ be filtered probability spaces, $\mathbb{X}$ a Polish space, $(Y, \mathcal{Y})$ a measurable space, G a nonempty open set in $\mathbb{R}$, D^* a nonempty subset of $[0, T]$ and $\xi^i : \Omega^i \to Y$, $i = 1, 2$ measurable mappings. Let $H^i : [0, T] \times \Omega^i \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ satisfy:

(1) the mapping $[0, T] \times \Omega^i \to \mathbb{R} : (t, \omega) \mapsto H^i(t, \omega, y)$ is $\left(\mathcal{F}_t^i\right)$-progressively measurable for every $y \in \mathbb{X}$, $i = 1, 2$.

(2) the mapping $\mathbb{X} \to \mathbb{R} : y \mapsto H^i(t, \omega, y)$ is continuous for every $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega^i$, $i = 1, 2$.

(3) $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(H^1(t_j, y_k), \xi^1 : j, k\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(H^2(t_j, y_k), \xi^2 : j, k\right)$ for every finite subset $\{t_0, \ldots, t_n\}$ of D^* and for every $y_1, \ldots, y_m$ in $\mathbb{X}$.

(4) the set $\left\{y : H^i(t, \omega, y) \in G\right\}$ is nonempty for every $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega^i$, $i = 1, 2$.

Then there exist $\left(\mathcal{F}_t^i\right)$-progressively measurable $\mathbb{X}$-valued processes s^i such that

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(s^1(t_j), \xi^1 : j\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(s^2(t_j), \xi^2 : j\right)$$

for every $t_0, \ldots, t_n$ in D^* and $H^i\left(t, \omega, s^i(t, \omega)\right)$ belongs to $\overline{G}$.

Proof: Suppose that $d < 1$ is a complete metric on $\mathbb{X}$ and choose $r_1, r_2, \ldots$ a countable dense subset of $\mathbb{X}$. Define $G^i(t, \omega) = \left\{y : H^i(t, \omega, y) \in G\right\}$ and construct a sequence of $\left(\mathcal{F}_t^i\right)$-progressively measurable $\mathbb{X}$-valued processes s_n^i in such a way that

(a) $d\left(s_{n-1}^i(t, \omega), s_n^i(t, \omega)\right) < 2^{-n+1}$ for every $n > 0$ and $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega^i$, $i = 1, 2$.

(b) $d\left(s_n^i(t, \omega), G^i(t, \omega)\right) < 2^{-n}$ for every $n \geq 0$ and $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega^i$, $i = 1, 2$.

(c) $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(s_n^1(t_j), H^1\left(t_j, y_k\right), \xi^1 : j, k\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(s_n^2(t_j), H^2\left(t_j, y_k\right), \xi^2 : j, k\right)$ for every $t_0, \ldots, t_m$ in D^*, $y_1, \ldots, y_M$ in $\mathbb{X}$ and $n \geq 0$.

First set $s_0^i(t, \omega)$ identically equal to r_0 and then, proceeding by induction, assuming that (a), (b) and (c) hold for some s_{n-1}^i, $i = 1, 2$, $n \geq 1$, we define the sets $A_j^i = \left\{(t, \omega) : d\left(r_j, s_{n-1}^i(t, \omega)\right) < 2^{-n+1}\right\} \cap \left\{(t, \omega) : d\left(r_j, G^i(t, \omega)\right) < 2^{-n}\right\}$, $j \geq 0$, $i = 1, 2$ which are $\left(\mathcal{F}_t^i\right)$-progressively measurable because

$$\left\{(t, \omega) : d\left(r_j, G^i(t, \omega)\right) < 2^{-n}\right\} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \left\{(t, \omega) : H^i\left(t, \omega, r_l\right) \in G, d\left(r_j, r_l\right) < 2^{-n}\right\}.$$

Moreover $\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j^i = [0, T] \times \Omega^i$, $i = 1, 2$ by the assumption (b). Thus defining $s_n^i = r_j$ on $A_j^i \setminus \bigcup_{l<j} A_l^i$ for $j \geq 0$ and $i = 1, 2$ we complete the induction step and now it suffices to take s^i as the limit of s_n^i. $\square$

1.9 Proofs of Theorem 1.3 and 1.4

Proof of Theorem 1.3

We will start with the following Lemma:

Lemma 1.9.1. Under the assumptions of Theorem 1.3 let $\left(\Omega^1, \mathcal{F}^1, \left(\mathcal{F}_t^1\right), P^1, W^1, u^1\right)$ be another solution of (1.0.1) such that $\mathfrak{Law}_P(u) = \mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1\right)$. Further suppose that $\xi : \Omega \to Y$, $\xi^1 : \Omega^1 \to Y$ are some random variables where $(Y, \mathcal{Y})$ is some measurable space. Let also x_i, resp. x_i^1, $i \leq n$ be $(\mathcal{F}_t)$, resp. $\left(\mathcal{F}_t^1\right)$ progressively measurable processes in X_1^* such that

(1) $P\left[\int_0^T \left\|g^*(s, u(s))\, x_i(s)\right\|_{U_0}^2 ds < \infty\right] = 1$ for every $i \leq n$.

(2) $\mathfrak{Law}_P\left(u(t_j), x_i(s_j), \xi : i, j\right) = \mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1(t_j), x_i^1(s_j), \xi^1 : i, j\right)$ for every finite sequence $t_0, \ldots, t_m$ and $s_0, \ldots, s_m$ in D^* where D^* is a subset of $[0, T]$ of Lebesgue measure T.

Then

$$\mathfrak{Law}_P\left(u(t_j), \xi, \int_0^{t_j} g^*(s, u(s))\, x_i(s)\, dW_s : i, j\right) =$$

$$= \mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1(t_j), \xi^1, \int_0^{t_j} g^*\left(s, u^1(s)\right) x_i^1(s)\, dW_s^1 : i, j\right)$$

for every $0 = t_0 < \cdots < t_m \leq T$.

Remark. Observe that (2) in Lemma 1.9.1 is equivalent with

$$\mathfrak{Law}_P\left(u(t_j), x_i(s_j), \xi : i, j\right) = \mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1(t_j), x_i^1(s_j), \xi^1 : i, j\right)$$

for every $t_0, \ldots, t_m$ in $[0, T]$ and $s_0, \ldots, s_m$ in D^* by the assumption (1.0.3). Indeed, (1.0.3) implies existence of a continuous modification of $t \mapsto \langle x^*, u_t \rangle$ for every $x^* \in D(A^*)$ (Theorem 1.13) and $D(A^*)$ separates points in X_1, consequently it generates the Borel σ-algebra in X ! So given $0 = t_0 < \ldots, t_m \leq T$ we find some $t_j^k \in D^*$ such that $t_j^k \to t_j$ and extend the equality of the intervening laws to $t_0, \ldots, t_m$ by the above mentioned continuity.

Proof: We must realize that (1.0.3) holds for u^1 as well as

$$P^1\left[\int_0^T \left\|g^*\left(s, u^1(s)\right) x_i^1(s)\right\|_{U_0}^2 ds < \infty\right] = 1$$

for every $i \leq n$ by Corollary 1.8.2 (having supposed (1) and (2) in Lemma 9.1) hence we can apply Theorem 1.13 (together with the remark included in the proof) to obtain

$$\int_0^t g^*(s, u_s)\, R_\lambda^* y^*\, dW_s = \langle y^*, R_\lambda u_t \rangle - \langle y^*, R_\lambda u_0 \rangle - \int_0^t \langle y^*, A R_\lambda u_s + R_\lambda f(s, u_s) \rangle\, ds$$

for every $y^* \in X_1^*$ where $R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$ for some λ in the resolvent set of the generator A of (S_t) in X_1. Similarly, we get analogous equation for u^1. Now suppose that all x_i, x_i^1, $i \leq n$ are bounded, norm continuous and $D^* = [0,T]$. Fix a partition $(t_j : j)$ of $[0,T]$ and define $x_{iLm}(t) = \sum_{l=0}^{L-1} F_m x_i(r_l) I_{(r_l, r_{l+1}]}(t)$, $x_{iLm}^1(t) = \sum_{l=0}^{L-1} F_m x_i^1(r_l) I_{(r_l, r_{l+1}]}(t)$ for some subdivision $0 = r_0 < \cdots < r_L = T$ of $(t_j : j)$ where F_m are the simple approximations of identity from Lemma 1.3.4 applied on the separable space X_1^*. Then the claim of the Theorem is true for $R_\lambda^* x_{iLm}$ and $R_\lambda^* x_{iLm}^1$ by Theorem 1.8.3 because

$$\int_0^t g^*(s, u_s)\, R^* x_{iLm}\, dW_s =$$

$$= \sum_{l=0}^{L-1} \left\langle F_m x_i(r_l), R u_{t \wedge r_{l+1}} - R u_{t \wedge r_l} \right\rangle - \int_0^t \left\langle x_{iLm}, A R u_s + R f(s, u_s) \right\rangle ds$$

and analogously for x_{iLm}^1. If we pass to the limit with m tending to infinity we get the claim for $x_{iL}(t) = \sum_{l=0}^{L-1} x_i(r_l) I_{(r_l, r_{l+1}]}(t)$ and $x_{iL}^1(t) = \sum_{l=0}^{L-1} x_i^1(r_l) I_{(r_l, r_{l+1}]}(t)$ by Proposition 1.4.1. Apparently we let the subdivision's norm tend to zero as L tends to infinity and the claim of Lemma holds for $R_\lambda^* x_i$, $R_\lambda^* x_i^1$ by another application of Proposition 1.4.1. In the second step we will suppose that x_i, x_i^1 are bounded and D^* has Lebesgue measure T. Consider

$$y_{iL}(t) = L \int_{\max\left\{t - \frac{1}{L}, 0\right\}}^{t} x_i(s)\, ds = L \left(\int_0^t x_i(s)\, ds - \int_0^{\max\left\{t - \frac{1}{L}, 0\right\}} x_i(s)\, ds \right)$$

and analogously y_{iL}^1 where the integral is taken in the Banach space X_1^*. We know that $\mathfrak{Law}_P\left(u(t_j), y_{iL}(t_j) : i,j\right) = \mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1(t_j), y_{iL}^1(t_j) : i,j\right)$ for every $0 = t_0 < \cdots < t_m \leq T$ by Theorem 1.8.3 thus, referring to the first part of the proof we conclude that the claim of Lemma holds true for $R_\lambda^* y_{iL}$, $R_\lambda^* y_{iL}^1$, consequently it holds for $R_\lambda^* x_i$, $R_\lambda^* x_i^1$ by Proposition 1.4.1 as y_{iL}, resp y_{iL}^1 converge in norm to x_i, resp. x_i^1 $dt \otimes P$, resp. $dt \otimes P^1$-almost everywhere (e.g. [DU]). On the other hand, $\lambda R_\lambda^* x^* \to x^*$ for every $x^* \in X_1^*$ as λ tends to infinity because X_1 is reflexive (consequently A^* is a generator of a C_0-semigroup on X_1^*) so the claim of Lemma holds for x_i, x_i^1 as well by letting λ tend to infinity by the uniform boundedness of x_i and x_i^1. Finally, to cover the general case, cut the processes into $x_{im} = x_i I_{[\|x_i\| \leq m]}$ and $x_{im}^1 = x_i^1 I_{[\|x_i^1\| \leq m]}$. The claim of Lemma holds for x_{im}, x_{im}^1 by the previous part of the proof and

$$\int_0^T \left\| g^*(s, u(s))\, x_i - g^*(s, u(s))\, x_{im} \right\|_{U_0}^2 ds =$$

$$= \int_0^T I_{[\|x_i\| > m]} \left\| g^*(s, u(s))\, x_i \right\|_{U_0}^2 ds \xrightarrow{P-a.e.} 0.$$

Since the same reasoning holds in the analogous case the proof is completed. □

Lemma 1.9.2. Under the assumptions of Theorem 1.3 let $\left(\Omega^1, \mathcal{F}^1, \left(\mathcal{F}_t^1\right), P^1, W^1, u^1\right)$ be another solution of (1.0.1) such that $\mathfrak{Law}_P(u) = \mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1\right)$. Further suppose that $\xi : \Omega \to Y$, $\xi^1 : \Omega^1 \to Y$ are some random variables where $(Y, \mathcal{Y})$ is some measurable space such that $\mathfrak{Law}_P\left(u(t_j), \xi : j\right) = \mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1(t_j), \xi^1 : j\right)$ for every $0 = t_0 < \cdots < t_m \leq T$ in D^* where D^* is a subset of $[0,T]$ of Lebesgue measure T. Let $p(t,x) \in L(U_0)$ denote the orthogonal projection in U_0 onto the closed subspace $(\operatorname{Ker} g(t,x))^{\perp}$. Then $p : [0,T] \times X \to L(U_0)$ is strongly measurable and

$$\mathfrak{Law}_P\left(u(t_j), \xi, \int_0^{t_j} p\left(s, u(s)\right) h_i \, dW_s : i, j\right) =$$

$$= \mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1(t_j), \xi^1, \int_0^{t_j} p\left(s, u^1(s)\right) h_i \, dW_s^1 : i, j\right)$$

for every $0 = t_0 < \cdots < t_m \leq T$ and $h_1, \ldots, h_n$ in U_0.

Proof: We will begin with the strong measurability of p. Fix $h \in U_0$ and let $a_0, a_1, a_2, \ldots$ be a dense subset in U_0 with $a_0 = 0$. In this way we can define

$$\delta_\epsilon(t,x) = \inf\left\{\|h - a_i\|_{U_0} : \|g(t,x)a_i\|_{X_1} < \epsilon, i = 0, 1, \ldots\right\} =$$

$$= \inf\left\{\|h - a\|_{U_0} : \|g(t,x)a\|_{X_1} < \epsilon\right\}$$

for $(t,x) \in [0,T] \times X$ and $q_{\epsilon,m}(t,x) = a_i$, $(t,x) \in [0,T] \times X$ where i is the least index in $\{0, 1, \ldots\}$ such that $\|h - a_i\|_{U_0} < \delta_\epsilon(t,x) + \frac{1}{m}$ and $\|g(t,x)a_i\|_{X_1} < \epsilon$. Both $\delta_\epsilon(t,x)$ and $q_{\epsilon,m}(t,x)$ are obviously measurable. But

$$\|q_{\epsilon,m} - q_{\epsilon,n}\|_{U_0}^2 \leq 2\left(\delta_\epsilon + \frac{1}{m}\right)^2 + 2\left(\delta_\epsilon + \frac{1}{n}\right)^2 - 4\delta_\epsilon^2$$

by the parallelogram. So $q_{\epsilon,m}$ converges to some measurable q_ϵ in U_0 and we have $\|h - q_\epsilon(t,x)\|_{U_0} = \delta_\epsilon(t,x)$ and $\|g(t,x)(q_\epsilon(t,x))\|_{X_1} \leq \epsilon$ for every $(t,x) \in [0,T] \times X$. Now let $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$ and, using the parallelogram rule once again, we get

$$\|q_{\epsilon_1} - q_{\epsilon_2}\|_{U_0}^2 \leq 2\delta_{\epsilon_1}^2 + 2\delta_{\epsilon_2}^2 - 4\delta_{\epsilon_2}^2.$$

But $\epsilon \mapsto \delta_\epsilon(t,x)$ is nonincreasing on $(0,\infty)$ and bounded by

$$\delta(t,x) = \inf\left\{\|h - a\|_{U_0} : \|g(t,x)a\|_{X_1} = 0\right\}$$

for every $(t,x) \in [0,T] \times X$ so q_ϵ converges to some measurable $q : [0,T] \times X \to U_0$ as ϵ tends to zero and we have $\|h - q(t,x)\|_{U_0} \leq \delta(t,x)$ and $\|g(t,x)(q(t,x))\|_{X_1} = 0$ for every $(t,x) \in [0,T] \times X$, consequently $\|h - q(t,x)\|_{U_0} = \delta(t,x)$. Hence $q(t,x)$ is the orthogonal projection of h onto $\operatorname{Ker} g(t,x)$, therefore $(t,x) \mapsto p(t,x)h = h - q(t,x)$ is measurable.

Now we can proceed to show the second assertion. Realize that $\operatorname{Rng} g^*(t,x)$ is dense in $(\operatorname{Ker} g(t,x))^\perp = \operatorname{Rng} p(t,x)$ for every $(t,x) \in [0,T] \times X$ so define

$$H(t,\omega,x_1^*,\dots,x_n^*) = \sum_{i=1}^n \|g^*(t,u(t,\omega))\,x_i^* - p(t,u(t,\omega))\,h_i\|_{U_0}$$

on $[0,T] \times \Omega \times (X_1^*)^n$ and

$$H^1(t,\omega,x_1^*,\dots,x_n^*) = \sum_{i=1}^n \left\|g^*\left(t,u^1(t,\omega)\right)x_i^* - p\left(t,u^1(t,\omega)\right)h_i\right\|_{U_0}$$

on $[0,T] \times \Omega^1 \times (X_1^*)^n$ for the fixed $h_1,\dots,h_n$ in U_0. Now we can apply Proposition 1.8.8 to get progressively measurable processes x_{im}, x_{im}^1, $i \le n$ in X_1^* such that

- ▷ $\mathfrak{Law}_P(u(t_j),\xi,x_{im}(s_j) : j,i) = \mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1(t_j),\xi^1,x_{im}^1(s_j) : j,i\right)$ for every partition $t_0,\dots,t_N$ in D^* and every $s_0,\dots,s_N$ in D^*.
- ▷ $\sum_{i=1}^n \|g^*(t,u(t,\omega))\,x_{im} - p(t,u(t,\omega))\,h_i\|_{U_0} \le \frac{1}{m}$ everywhere on $[0,T] \times \Omega$.
- ▷ $\sum_{i=1}^n \left\|g^*\left(t,u^1(t,\omega)\right)x_{im}^1 - p\left(t,u^1(t,\omega)\right)h_i\right\|_{U_0} \le \frac{1}{m}$ everywhere on $[0,T]\times\Omega^1$.

for every $m \in \mathbb{N}$. But now we are exactly in the situation of Lemma 1.9.1 and the claim of Lemma 1.9.2 is proven as we let m tend to infinity by Proposition 1.4.1. □

Proof of Theorem 1.3. First we remark that the set of one-to-one operators from $L(U_0,X_1)$ is strongly measurable. Indeed, both U_0 and X_1 are separable reflexive hence a linear bounded operator $B \in L(U_0,X_1)$ is one-to-one if and only if the range of its adjoint operator B^* is norm dense in U_0, i.e. $\inf\{\|B^*x_k^* - h_j\| : k \in \mathbb{N}\} = 0$ for every $j \in \mathbb{N}$ where $(x_k^* : k)$, resp. $(h_j : j)$ are norm dense countable subsets of X_1^*, resp. U_0. As a consequence we get that if $\left(\Omega^1,\mathcal{F}^1,\left(\mathcal{F}_t^1\right),P^1,W^1,u^1\right)$ is another solution of (1.0.1) such that $\mathfrak{Law}_P(u) = \mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1\right)$ then

$$dt \otimes P^1\left\{(s,\omega) : g\left(s,u^1(s,\omega)\right) \text{ is not one-to-one in } L(U_0,X_1)\right\} = 0.$$

As a corollary of Lemma 1.9.2 we get that, given $h \in U$, $p(s,u(s,\omega))\,Qh = Qh$ for $dt\otimes P$-almost all $(s,\omega) \in [0,T]\times\Omega$ as well as $p\left(s,u^1(s,\omega)\right)Qh = Qh$ for $dt\otimes P^1$-almost all $(s,\omega) \in [0,T] \times \Omega^1$ thus

$$P\left[\int_0^t p(s,u(s))\,Qh\,dW = \int_0^t Qh\,dW = W_t(h)\right] = 1$$

for every $t \in [0,T]$ by Example 1.3.7 and analogous equality holds for (u^1,W^1). Hence Lemma 1.9.2 yields the proof of Theorem 1.3. □

Proof of Theorem 1.4

We will start with an auxiliary lemma referring once again to the notation of the section 1.11:

Lemma 1.9.3. Let (S_t) be a C_0-semigroup of linear bounded operators on $L(X_1)$ with X_1 reflexive and suppose that the equation (1.0.1) with $\mu = \delta_{x_0}$ is unique in law among the solutions satisfying (1.0.3) and (1.0.4), for some $x_0 \in X$ fixed. Let $S_t x_0 \in X$ for every $t \in (0,T]$. Then the σ-algebra $\sigma(u_t : t \leq T)$ is independent of $\mathcal{G}_0$ for every solution $(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t), P, u, W)$ of (1.0.1), (1.0.3), (1.0.4) starting from $x_0 \in X$.

Proof: In compliance with the notation of the section 1.11 (preceding the proof of Theorem 1.1 and 1.2) we fix an orthonormal basis $(h_k^* : k \in \mathbb{N})$ in U and write W_{dec} for the continuous $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$-valued process $(W(h_k^*) : k \in \mathbb{N})$. We also fix some sequence $(x_k^* \in X_1^* : k \in \mathbb{N})$ in $D(A^*)$ which separates points in X_1 (consequently in X) denoting $e : X \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ the continuous embedding $x \mapsto (\langle x_k^*, x\rangle : k \in \mathbb{N})$ and the extended (Borel measurable) inverse $e^{-1} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to X$ where $e^{-1}(y) = 0$ for $y \notin \text{Rng}(e)$ (see Lemma 1.11.1). The remark included in the proof of Theorem 1.13 ensures a continuous modification of the $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$-valued process $t \mapsto (eu_t, W_{\text{dec}}(t))$ hence there exists a mapping (kernel) $k : \Omega \times \mathbb{B}(\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}) \to [0,1]$ such that

(a) $\Omega \to [0,1] : \omega \mapsto k(\omega, V)$ is $\mathcal{G}_0$-measurable for every $V \in \mathbb{B}(\mathfrak{C} \times \mathfrak{C})$.
(b) $\mathbb{B}(\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}) \to [0,1] : V \mapsto k(\omega, V)$ is a probability measure for every $\omega \in \Omega$.
(c) $\int_{G_0} k_\omega(V)\, dP = \int_{G_0} I_V(eu, W_{\text{dec}})\, dP$ for every $G_0 \in \mathcal{G}_0$ and $V \in \mathbb{B}(\mathfrak{C} \times \mathfrak{C})$.

To simplify the notation we will write

$$\pi^i : \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to C\left([0,T], \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) : (g_1, g_2) \mapsto g_i, \quad i = 1, 2.$$

The existence of k is guaranteed by e.g. Corollary 3.3 in [Ed] as $C\left([0,T], \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ is a Polish space. The equality (c) can be now rewritten as

$$(*) \qquad \int_{G_0} k\left(\omega, [(\pi^1, \pi^2) \in V]\right)\, dP(\omega) = \int_{G_0} I_V(eu, W_{\text{dec}})\, dP.$$

The space $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ endowed with the filtration $(\mathbb{B}_t \otimes \mathbb{B}_t)_{t \in [0,T]}$ in $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$ is a filtered measurable space and π^1, π^2 are adapted continuous $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$-valued processes. Firstly we will show that

$$B_t(h) = \begin{cases} \sum_k \langle h_k^*, h\rangle_U\, \pi_k^2(t) & \text{on } V_h^t \\ 0 & \text{out of } V_h^t \end{cases} \qquad h \in U,\ t \leq T$$

where

$$V_h = \left\{(t, g_1, g_2) \in [0,T] \times \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} : \sum_k \langle h_k^*, h\rangle_U\, \pi_k^2(t, g_1, g_2) \text{ is convergent}\right\} =$$

$$= \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{(t, g_1, g_2) \in [0,T] \times \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} : \left|\sum_k \langle h_k^*, h\rangle_U\, \pi_k^2(t, g_1, g_2)\right| \leq \frac{1}{j}\right\}$$

defines a cylindrical Q-$(\mathbb{B}_t \otimes \mathbb{B}_t)$-Wiener process on $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ under the probability measure k_ω for P-almost all $\omega \in \Omega$. To this end fix $N \in \mathbb{N}$, $0 \leq s < t \leq T$, $A \in \mathbb{B}_s \otimes \mathbb{B}_s$, $B \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^N)$ and denote $Y^N = (\pi_1^2, \ldots, \pi_N^2)$. Then $(*)$ yields that

$$k_\omega\left(A \cap [Y_t^N - Y_s^N \in B]\right) = k_\omega(A)\mathcal{N}\left(0, (t-s)\left[\left\langle Q^{1/2}h_i^*, Q^{1/2}h_j^*\right\rangle\right]_{i,j}\right)(B)$$

for P-almost all ω. But since $\mathbb{B}_s \otimes \mathbb{B}_s$ and $\mathbb{B}(\mathbb{R}^N)$ are countably generated we have that there exists some set, say $G_1 \in \mathcal{G}_0$, such that Y^N is an $\mathbb{R}^N$-valued k_ω-$(\mathbb{B}_t \otimes \mathbb{B}_t)$-Wiener process for every $N \in \mathbb{N}$ and $\omega \in G_1$. As a consequence we have that $\sum_k \langle h_k^*, h\rangle_U \pi_k^2(t)$ is a sum of sign-invariant random variables hence it converges in measure (under k_ω) if and only it converges k_ω-almost surely (for $\omega \in G_1$). So, given $h \in U$, we get that $k_\omega[V_h^t] = 1$ for every $t \leq T$ and every $\omega \in G_1$. Passing to the limit in $(*)$ we get

$(**)$

$$\int_\Omega k\left(\omega, [(\pi^1, B_{t_1}h_1, \ldots, B_{t_m}h_m) \in V]\right) dP(\omega) = \int_\Omega I_V(eu, W_{t_1}h_1, \ldots, W_{t_m}h_m)\, dP.$$

for every $t_1, \ldots, t_m$ in $[0,T]$, $h_1, \ldots, h_m$ in U and $V \in \mathbb{B} \otimes \mathbb{B}(\mathbb{R}^m)$.

Now fix $t \in (0,T]$. We are going to show that

(aa) $$k_\omega\left[\int_0^T \left\|f(r, e^{-1}\pi_r^1)\right\|_{X_1} + \left\|g(r, e^{-1}\pi_r^1)\right\|_{L(U_0,X_1)}^2 dr < \infty\right] = 1$$

(aa) $$k_\omega\left[\int_0^T M_1(f(r, e^{-1}\pi_r^1)) + M_2(g(r, e^{-1}\pi_r^1))\, dr < \infty\right] = 1$$

and second that

(bb) $$k_\omega\left[e^{-1}\pi_t^1 = S_t e^{-1}\pi_0^1 + \int_0^t S_{t-r}f(r, e^{-1}\pi_r^1)\, dr + \int_0^t S_{t-r}g(r, e^{-1}\pi_r^1)\, dB_r\right] = 1$$

(cc) $$k_\omega[e^{-1}\pi_0^1 = x_0] = 1$$

for every ω from some, say $G_2 \subseteq G_1$, $G_2 \in \mathcal{G}_0$, $P(G_2) = 1$. The fact that (aa) and (cc) hold for P-almost all ω follows immediately from $(*)$ and Proposition 1.9.4. To show that (bb) holds denote

$$O = \left\{(r,y) \in [0,t] \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : S_{t-r}g(r, e^{-1}y) \in L_2(U_0, X)\right\}$$

and

$$\psi : [0,t] \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (r,y) \mapsto S_{t-r}g(r, e^{-1}y)I_O(r,y).$$

Choosing $\varphi_1(r,y) = I_O(r,y)$ in Proposition 1.9.4 we get that

$$\text{(dd)} \qquad k_\omega\left[\int_0^t I_O(r,\pi_r^1)\,dr = t\right] = 1, \qquad \text{(ee)} \quad k_\omega\left[\pi_t^1 \in \operatorname{Rng} e\right] = 1$$

for P-almost all $\omega \in \Omega$ by (*). We can introduce, as in the remark following Lemma 1.3.4, the simple approximations $F_n : L_2(U_0,X) \to L(U,X)$ such that each F_n takes only finitely many values - moreover all of them are finite dimensional operators in $L(U,X)$, and $\|F_n(B) - B\|_{L_2(U_0,X)} \searrow 0$ for every $B \in L_2(U_0,X)$. Consider an equidistant partition $0 = t_0 < \cdots < t_k = t$ and define the measurable mappings from $\mathfrak{C}$ to $L_2(U_0,X)$ as in Proposition 1.9.4:

$$Z_i(y) = \begin{cases} \frac{m}{t}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi(r,y_r)\,dr & \text{if } \int_0^t \|\psi(r,y_r)\|^2_{L_2(U_0,X)}\,dr < \infty \\ 0 & \text{if } \int_0^t \|\psi(r,y_r)\|^2_{L_2(U_0,X)}\,dr = \infty \end{cases}$$

and

$$Z_t(y) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \le t \le t_1 \\ Z_i(y) & \text{for } t_i < t \le t_{i+1},\ i = 1,\dots,m-1. \end{cases}$$

Realize that Z (depending on m) is a predictable process with values in $L_2(U_0,X)$ and so is $(Z_t(\pi^1))$. Now the composition process $t \mapsto F_n \circ Z_t(y)$ is piecewise constant and takes only finitely many values - all of them finitedimensional operators in $L(U,X)$. It is easy to verify that

$$\text{(3*)} \quad \int_{G_1} k\left(\omega, \left[(\pi^1, \int_0^t F_n Z_r(\pi^1)\,dB_r) \in V\right]\right) dP = \int_\Omega I_V(eu, \int_0^t F_n Z_r(eu)\,dW_r)\,dP$$

for every $V \in \mathbb{B}\otimes\mathbb{B}(X)$ as both stochastic integrals are elementary and are defined exclusively by Borel compositions - (3*) then holds by (**) by straightforward manner. In deed, the left hand side integral in (3*) is considered only on G_1 as we know that $P(G_1) = 1$ (so it can be exchanged with Ω) and B is a Q-Wiener process under k_ω only for $\omega \in G_1$. Now, letting n tend to infinity, we obtain

$$\text{(4*)} \quad \int_{G_2}\left(\int_{\mathfrak{C}} \varphi(\pi^1, \int_0^t Z_r(\pi^1)\,dB_r)\,dk_\omega\right) dP = \int_\Omega \varphi(eu, \int_0^t Z_r(eu)\,dW_r)\,dP$$

for every bounded continuous function $\varphi : \mathfrak{C}\times X \to \mathbb{R}$ as

$$\int_0^t F_n Z_r(\pi^1)\,dB_r \to \int_0^t Z_r(\pi^1)\,dB_r$$

in measure (under k_ω) for every $\omega \in G_2$ by (aa), where $\int_0^t Z_r(\pi^1)\,dB_r$ depends on ω and is defined only for $\omega \in G_1$. In the last step we recall the dependence of Z on m and let m tend to infinity to get

$$\text{(5*)} \quad \int_{G_2} k\left(\omega, \left[(\pi^1, \int_0^t \psi(r,\pi_r^1)\,dB_r) \in V\right]\right) dP = \int_\Omega I_V(eu, \int_0^t \psi(r,eu_r)\,dW_r)\,dP$$

by the same argumentation as in the previous step. Now we apply (dd) to get

$$\int_{G_2} k\left(\omega, \left[(\pi^1, \int_0^t S_{t-r} g(r, e^{-1}\pi_r^1)\, dB_r) \in V\right]\right) dP =$$

$$= \int_\Omega I_V(eu, \int_0^t S_{t-r} g(r, u_r)\, dW_r)\, dP$$

which, together with Proposition 1.9.4, implies (bb). Now we can find a set $G_3 \subseteq G_1$, $G_3 \in \mathcal{G}_0$ such that (aa), (bb), (cc) and (ee) hold for every $\omega \in G_3$ and every $t \in J$ where J is some countable dense subset of $[0,T]$. We claim that the process $t \mapsto e^{-1}\pi_t^1$ is a solution under k_ω of (1.0.1), (1.0.3) and (1.0.4) with the initial condition x_0. To this end, choose $\omega \in G_3$ and define

$$v_t = S_t x_0 + \int_0^t S_{t-s} f(s, e^{-1}\pi_s^1)\, ds + \int_0^t S_{t-s} g(s, e^{-1}\pi_s^1)\, dB_s$$

under k_ω. As we remarked in the proof of Theorem 1.13, the process $t \mapsto v_t$ is an X-valued process predictable in X_1 with respect to the k_ω-augmentation of $(\mathbb{B}_t \otimes \mathbb{B}_t)$ in $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$, hence predictable in X (all summands belong to X) and $t \mapsto e(v_t)$ has a continuous modification. But $k_\omega\left[v_t = e^{-1}\pi_t^1\right] = 1$ for every $t \in J$ by (aa). This implies that $k_\omega\left[e(v_t) = \pi_t^1\right] = 1$ for every $t \in J$ by (ee). In consequence, $k_\omega\left[e(v_t) = \pi_t^1\right] = 1$ for every $t \in [0,T]$ by continuity of both ev and π^1. Therefore $k_\omega\left[v_t = e^{-1}\pi_t^1\right] = 1$ for every $t \in [0,T]$ as v takes values in X whence the claim. In particular,

$$P\left[u_{t_i} \in B_i, i \le n\right] = k_\omega\left[e^{-1}\pi_{t_i} \in B_i, i \le n\right] = k_\omega\left[\pi_{t_i} \in e[B_i], i \le n\right]$$

for every $\omega \in G_3$, $t_1, \ldots, t_n$ in $[0,T]$ and $B_1, \ldots, B_n$ in $\mathbb{B}(X)$ where the first equality holds by uniqueness in law. Given $G \in \mathcal{G}_0$, $G \subseteq G_3$ we get

$$P(G)P\left[u_{t_i} \in B_i, i \le n\right] = \int_G k_\omega\left[\pi_{t_i} \in e[B_i], i \le n\right] dP = P\left[G \cap \left[u_{t_i} \in B_i, i \le n\right]\right]$$

by (*) so the independence of $\sigma(u_t : 0 \le t \le T)$ on $\mathcal{G}_0$ has just been shown. □

Proposition 1.9.4. Let $\varphi_1 : [0,T] \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to [0,\infty]$ and $\varphi_2 : [0,T] \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to Y$ be measurable functions where Y is some separable Banach space. Then, for some $0 \le a < b \le T$, the mappings

$$\mathfrak{C} \to [0,\infty] : y \mapsto \int_a^b \varphi_1(r, y_r)\, dr$$

$$\mathfrak{C} \to Y : y \mapsto \begin{cases} \int_a^b \varphi_2(r, y_r)\, dr & \text{if } \int_0^T \|\varphi_2(r, y_r)\|_Y\, dr < \infty \\ 0 & \text{if } \int_0^T \|\varphi_2(r, y_r)\|_Y\, dr = \infty \end{cases}$$

are Borel measurable.

Proof of Theorem 1.4. Denote $q : [0,T] \times X \to L(U_0)$, $q(t,x)$ the orthogonal projection in U_0 onto the closed subspace $\operatorname{Ker} g(t,x)$. Then q is strongly measurable by Lemma 1.9.2. Next consider a solution $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P, W, u)$ of (1.0.1), (1.0.3), (1.0.4) starting from x_0 and extend the stochastic base (by product extension of probability spaces) so that there exist Q-$(\mathcal{F}_t)$-Wiener processes B and C in such a way that B, C and (u, W) are independent. Further denote

$$w_t(h) = \int_0^t p(s,u_s)Qh\,dW_s + \int_0^t q(s,u_s)Qh\,dB_s$$

and

$$v_t(h) = \int_0^t p(s,u_s)Qh\,dC_s + \int_0^t q(s,u_s)Qh\,dW_s$$

for $h \in U$. Then

$$\langle w(h_1), w(h_2)\rangle_t = \langle v(h_1), v(h_2)\rangle_t = \int_0^t \langle p(s,u_s)Qh_1, p(s,u_s)Qh_2\rangle_{U_0} +$$

$$+ \langle q(s,u_s)Qh_1, q(s,u_s)Qh_2\rangle_{U_0}\,ds = t\,\langle Qh_1, Qh_2\rangle_{U_0} = t\left\langle Q^{1/2}h_1, Q^{1/2}h_2\right\rangle_U$$

by independence of W, B and C. Thus w and v are Q-$(\mathcal{F}_t)$-Wiener processes. Moreover $\langle w(h_1), v(h_2)\rangle_t = \int_0^t \langle p(s,u_s)Qh_1, q(s,u_s)Qh_2\rangle_{U_0}\,ds = 0$ which, by Lévy's theorem, implies that

- ▷ $a_t - a_s$ is independent of $\mathcal{F}_s$
- ▷ $a_t^1 - a_s^1$ is independent of $a_t^2 - a_s^2$

for every $0 \le s < t \le T$ where $a = (a^1, a^2)$, $a^1 = (w(h_1), \dots, w(h_m))$ and $a^2 = (v(\tilde{h}_1), \dots, v(\tilde{h}_n))$ with $h_1, \dots, h_m, \tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_n$ belonging to U. This means that the σ-algebra $\sigma(w_t(h) - w_s(h))$ is independent of $\mathcal{G}_s = \mathcal{F}_s \vee \sigma(v_r(\tilde{h}) - v_s(\tilde{h}) : r \ge s, \tilde{h} \in U) = \mathcal{F}_s \vee \sigma(v_r(\tilde{h}) : r \ge 0, \tilde{h} \in U)$. Hence w is a Q-$(\mathcal{G}_t)$-Wiener process. Now, if ψ is a $(\mathcal{F}_t)$-simple process (as we have considered in Step 1 of the construction of the stochastic integral) then one verifies

(a) $$\int_0^t \psi_s\,dw_s = \int_0^t \psi_s p(s,u_s)\,dW_s + \int_0^t \psi_s q(s,u_s)\,dB_s$$

(b) $$\int_0^t \psi_s\,dv_s = \int_0^t \psi_s p(s,u_s)\,dC_s + \int_0^t \psi_s q(s,u_s)\,dW_s$$

directly by definition. The density argument yields that the above equalities hold for every $(\mathcal{F}_t)$-progressively measurable process ψ satisfying $P\left[\int_0^t \|\psi_s\|^2_{L_2(U_0,X)}\right] = 1$ by

the construction of the stochastic integral and by the ideal property of $L_2(U_0, X)$ as shown in Proposition 1.2.4, particularly

$$\|\psi_s p(s,u_s)\|_{L_2(U_0,X)} \leq \|\psi_s\|_{L_2(U_0,X)} \|p(s,u_s)\|_{L(U_0)} \leq \|\psi_s\|_{L_2(U_0,X)}$$

and analogously with $q(s,u_s)$. In consequence, taking $\psi_s = S_{t-s}g(s,u_s)$, we get

$$\int_0^t S_{t-s}g(s,u_s)\,dw_s = \int_0^t S_{t-s}g(s,u_s)p(s,u_s)\,dW_s = \int_0^t S_{t-s}g(s,u_s)\,dW_s$$

by (a), and since the stochastic integral $\int_0^t S_{t-s}g(s,u_s)\,dw_s$ is the same taken under the filtration $(\mathcal{F}_t)$ or $(\mathcal{G}_t)$ we conclude that $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{G}_t), P, w, u)$ is a solution of (1.0.1), (1.0.3) and (1.0.4) starting from x_0 hence u is independent of $\mathcal{G}_0$ by Lemma 1.9.3. In particular, $\sigma(u_t : 0 \leq t \leq T)$ is independent of $\sigma(v_t(h) : t \geq 0, h \in U)$ and this is the crucial point of the proof. Indeed, consider another solution $(\Omega^1, \mathcal{F}^1, (\mathcal{F}_t^1), P^1, u^1, W^1)$ of (1.0.1), (1.0.3) and (1.0.4) such that $\mathfrak{Law}_P(u) = \mathfrak{Law}_{P^1}(u^1)$ on the extended space (as we did in the beginning of this proof) so that it supports two Q-$(\mathcal{F}_t^1)$-Wiener processes B^1 and C^1 in such a way that B^1, C^1 and (u^1, W^1) are independent. We define u^1 and v^1 in the same way as we defined u and v to get that $\sigma(u_t^1 : 0 \leq t \leq T)$ is independent of $\sigma(v_t^1(h) : t \geq 0, h \in U)$. But this implies that $\mathfrak{Law}_P(u,v) = \mathfrak{Law}_{P^1}(u^1, v^1)$, consequently

$$\text{(c)} \quad \mathfrak{Law}_P\left(u_{t_j}, \int_0^{t_j} q(s,u_s)\,h_i\,dv_s : i,j\right) = \mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1_{t_j}, \int_0^{t_j} q(s,u^1_s)\,h_i\,dv^1_s : i,j\right)$$

for every $0 = t_0 < \cdots < t_m \leq T$ and $h_1, \ldots, h_n$ in U_0 by Theorem 1.8.6. But $\int_0^t q(s,u_s)h\,dv_s = \int_0^t q(s,u_s)h\,dW_s$ and $\int_0^t q(s,u^1_s)h\,dv^1_s = \int_0^t q(s,u^1_s)h\,dW^1_s$ by (b) hence, incorporating this fact to (c) and applying Lemma 1.9.2 we obtain

$$\mathfrak{Law}_P\left(u_{t_j}, \int_0^{t_j} q(s,u_s)\,h_i\,dW_s, \int_0^{t_j} p(s,u_s)\,h_i\,dW_s : i,j\right) =$$

$$= \mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1_{t_j}, \int_0^{t_j} q(s,u^1_s)\,h_i\,dW^1_s, \int_0^{t_j} p(s,u^1_s)\,h_i\,dW^1_s : i,j\right)$$

for every $0 = t_0 < \cdots < t_m \leq T$ and $h_1, \ldots, h_n$ in U_0 which, in particular, means that

$$\mathfrak{Law}_P\left(u_{t_j}, W_{t_j}(\tilde{h}_i) : i,j\right) = \mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1_{t_j}, W^1_{t_j}(\tilde{h}_i) : i,j\right)$$

for every $0 = t_0 < \cdots < t_m \leq T$ and $\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_n$ in U as $\int_0^t Q\tilde{h}\,dW = W_t(\tilde{h})$ and $\int_0^t Q\tilde{h}\,dW^1 = W^1_t(\tilde{h})$ for every $\tilde{h} \in U$ by Example 1.3.7. □

1.10 Proofs of Theorem 1.5 and 1.6

Before we start with details we are going to recall a version of Lévy's theorem:

Proposition 1.10.1. Let us consider a filtered probability space $\left(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \left(\mathcal{F}_t^i\right), P^i\right)$ with a d-dimensional continuous local $\left(\mathcal{F}_t^i\right)$-martingale M^i, $M_0^i = 0$ defined on $[0,T]$ and an $(\mathcal{F}_0)$-measurable random variable ξ^i with values in a measurable space $(Y, \mathcal{Y})$, $i = 1,2$. Suppose that the cross-variation $(d \times d)$-matrix $V_{jk}(t) = \left(\left\langle M_j^i, M_k^i \right\rangle_t\right)$ is deterministic, independent of i and $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(\xi^1\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(\xi^2\right)$. Then

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(M_j^1(t_k), \xi^1 : j \le d, k \le n\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(M_j^2(t_k), \xi^2 : j \le d, k \le n\right)$$

for every partition $0 = t_0 < \cdots < t_n = T$.

Proof: The classical Lévy characterization theorem implies that $\sigma\left(M_t^i - M_s^i\right)$ is P^i-independent of $\mathcal{F}_s^i$ for every $0 \le s < t \le T$, $i = 1,2$ and $\mathfrak{Law}_{P^i}\left(M_t^i - M_s^i\right) = \mathcal{N}\left(0, V_t - V_s\right)$. In particular we have equality of the marginal measures

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(M_j^1(t_k) : j,k\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(M_j^2(t_k) : j,k\right)$$

and P^i-independence implies

$$\mathfrak{Law}_{P^i}\left(M_j^i(t_k), \xi^i : j,k\right) = \mathfrak{Law}_{P^i}\left(M_j^i(t_k) : j,k\right) \otimes \mathfrak{Law}_{P^i}\left(\xi^i\right).$$

□

Proof of Theorem 1.5. Let $\left(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \left(\mathcal{F}_t^i\right), P^i, W^i, u^i\right)$ be a filtered probability space with a Q-Wiener process W^i and u^i, $i = 1,2$ a progressively measurable process satisfying (1.0.6), (1.0.7). It will be convenient in the sequel to extend the operator valued function S to nonpositive times by $0 \in L(X_1, X)$ to obtain a strongly measurable family of operators in $L(X_1, X)$ on the real line. So, if we define the stopping times

$$\tau_k^i = T \wedge \min\left\{t \le T : \int_0^t \left\|f\left(s, u^i(s)\right)\right\|_{U_0}^2 ds \ge k\right\}, \quad i = 1,2$$

then $M^i(t) = \exp\left(-\int_0^{t\wedge\tau_k^i} f\left(s, u^i(s)\right) dW^i - \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_k^i} \left\|f\left(s, u^i(s)\right)\right\|_{U_0}^2 ds\right)$, $i = 1,2$ is a P^i-martingale by Proposition 1.7.1. Following Proposition (1.7.1) further on we define a new measure $\widetilde{P}^i(F) = \int_F M_T^i \, dP^i$ on $\mathcal{F}^i$ and a family of nonrandom strongly measurable $L(U_0, X)$-valued processes $\psi^t(s) = S_{t-s}g(s)$, $t \le T$ such that $\psi^t(s) \in L_2(U_0, X)$ for almost all $s \le T$. Indeed, $L_2(U_0, X)$ is a strongly measurable subset of $L(U_0, X)$ by Proposition 1.2.5 (6) so we can define the stochastic integral of ψ^t in the nonambiguous way as $\int \phi^t \, dW$ with whichever $L_2(U_0, X)$-valued progressively measurable process ϕ^t which coincides with $\psi^t \, dt \otimes P$-almost everywhere. Then $\widetilde{W}_t^i(h) = W_t^i(h) + \int_0^t \left\langle f\left(s, u^i(s)\right), h\right\rangle_U I_{[0,\tau_k^i]}(s) \, ds$, $t \le T$, $h \in U$ is a Q-$\left(\mathcal{F}_t^i\right)$-Wiener process on U with respect to $\widetilde{P}^i$ and

$$\int_0^r \psi^t \, d\widetilde{W}^i = \int_0^r \psi^t \, dW^i + \int_0^r \psi^t(s) f\left(s, u^i(s)\right) I_{[0,\tau_k^i]}(s) \, ds \tag{1.10.1}$$

almost everywhere for every $r \le T$ and $t \le T$ by Proposition 1.7.1. Now the mutual cross variation processes of the real local $\left(\mathcal{F}_t^i, \widetilde{P}^i\right)$-martingales $\widetilde{W}^i(h_1)$, $\widetilde{W}^i(h_2)$, $\left\langle x_1^*, \int \psi^t \, d\widetilde{W}^i \right\rangle$ and $\left\langle x_2^*, \int \psi^t \, d\widetilde{W}^i \right\rangle$ are nonrandom and independent of i for every choice of $h_1 \in U$, $h_2 \in U$, $x_1^* \in X$, $x_2^* \in X$ by Summary of Step 5 and Example 1.3.7 hence the probability measures

$$\mathfrak{Law}_{\widetilde{P}^i}\left(\left\langle x_j^*, \int_0^{t_n} \psi^{t_n} \, d\widetilde{W}^i \right\rangle, \widetilde{W}_{t_n}^i h_m, u^i(0) : j, n, m\right)$$

are equal for $i = 1, 2$ by Proposition 1.10.1 for every partition $0 = t_0 < \dots t_N \le T$, $x_1^*, \dots, x_J^*$ in X^* and $h_1, \dots, h_M$ in U, consequently the measures

$$\mathfrak{Law}_{\widetilde{P}^i}\left(\int_0^{t_n} \psi^{t_n} \, d\widetilde{W}^i, \widetilde{W}_{t_n}^i h_m, u^i(0) : n, m\right) \tag{1.10.2}$$

coincide for $i = 1, 2$ since $u^1(0)$, $u^2(0)$ have the same law. The process

$$z^i(t) = \begin{cases} S_t u^i(0) + \int_0^t \psi^t \, d\widetilde{W}^i, & 0 < t \le T \\ u^i(0), & t = 0 \end{cases}$$

has a predictable modification $u^i(t) - \int_0^t S_{t-s} g(s) f\left(s, u^i(s)\right) I_{(\tau_k^i, T]}(s) \, ds$ for $i = 1, 2$ by (1.10.1) and, due to (1.10.2), we get

$$\mathfrak{Law}_{\widetilde{P}^1}\left(z^1(t_n), \widetilde{W}_{t_n}^1 h_m : n, m\right) = \mathfrak{Law}_{\widetilde{P}^2}\left(z^2(t_n), \widetilde{W}_{t_n}^2 h_m : n, m\right)$$

for every partition $0 = t_0 < \dots t_N \le T$ and $h_1, \dots, h_M$ in U. Denote the auxiliary process $e^i(t) = \int_0^t \left\| f\left(s, z^i(s)\right) \right\|_{U_0}^2 ds$, $t \le T$, $i = 1, 2$. Then, by Remark 1.8.4, $\mathfrak{Law}_{\widetilde{P}^1}\left(z^1(t_n), \widetilde{W}_{t_n}^1 h_m, e^1(t_n) : n, m\right) = \mathfrak{Law}_{\widetilde{P}^2}\left(z^2(t_n), \widetilde{W}_{t_n}^2 h_m, e^2(t_n) : n, m\right)$ and $\mathfrak{Law}_{\widetilde{P}^1}\left(z^1(t_n), \widetilde{W}_{t_n}^1 h_m, \tau_k^1 : n, m\right) = \mathfrak{Law}_{\widetilde{P}^2}\left(z^2(t_n), \widetilde{W}_{t_n}^2 h_m, \tau_k^2 : n, m\right)$ since the process z^i coincides with $u^i \, dt \otimes \widetilde{P}^i$-almost everywhere on $\left[0, \tau_k^i\right]$ by definition of z^i thus $\left[\tau_k^i \le \Delta\right] = \left[\inf\left\{\max\left\{e^i(q) - k, 0\right\} : q \in \mathbb{Q} \cap [0, \Delta]\right\} = 0\right]$ modulo a $\widetilde{P}^i$-negligible set for every $0 \le \Delta < T$ which is already sufficient for the equality of the measures above. Now, as we have observed, $l^i(t) = f\left(t, z^i(t)\right) I_{[0, \tau_k^i]}(t) = f\left(t, u^i(t)\right) I_{[0, \tau_k^i]}(t)$ $dt \otimes \widetilde{P}^i$-almost everywhere on $[0, T] \times \Omega^i$ so the measures

$$\mathfrak{Law}_{\widetilde{P}^i}\left(z^i(t_n), \widetilde{W}_{t_n}^i h_m, l^i(t_n), \int_0^{t_n} l^i(s) \, ds : n, m\right)$$

are equal for $i = 1, 2$ for every partition $0 = t_0 < \dots < t_N \le T$ and $h_1, \dots, h_M$ in U by Theorem 1.8.3, consequently

$$\mathfrak{Law}_{\widetilde{P}^1}\left(z^1(t_n), W_{t_n}^1 h_m, l^1(t_n) : n, m\right) = \mathfrak{Law}_{\widetilde{P}^2}\left(z^2(t_n), W_{t_n}^2 h_m, l^2(t_n) : n, m\right)$$

since $W_t^i h = \widetilde{W}_t^i h - \left\langle \int_0^t l^i(s)\,ds, h \right\rangle_U$ for every $t \le T$ and $h \in U$ by the definition of $\widetilde{W}^i$. Finally $\mathfrak{Law}_{\widetilde{P}^i}\left(z^i(t_n), W_{t_n}^i h_m, \int_0^T l^i\,dW^i, \int_0^T \|l^i(s)\|_{U_0}^2\,ds : n,m\right)$ are equal for $i=1,2$ by Theorem 1.8.3 and 1.8.6 and as $M^i(T) = \exp\left(-\int_0^T l^i\,dW^i - \frac{1}{2}\int_0^T \|l^i(s)\|_{U_0}^2\,ds\right)$ we get that $\mathfrak{Law}_{\widetilde{P}^i}\left(z^i(t_n), W_{t_n}^i h_m, M^i(T) : n,m\right)$ are equal for $i=1,2$. But this implies $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(z^1(t_n), W_{t_n}^1 h_m : n,m\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(z^2(t_n), W_{t_n}^2 h_m : n,m\right)$ by the definition of the measure $\widetilde{P}^i$. Now, realizing that $z^i(t) = z_k^i(t) \to u^i(t)$ P^i-almost everywhere, the claim follows by letting k tend to infinity. □

Proof of Theorem 1.6. Fix $t \in (0,T]$, set $S_0 = 0 \in L(X_1, X)$ and define the processes $\eta_1^i(s) = S_{t-s} f\left(s, u^i(s)\right)$, $\theta_2^i(s) = S_{t-s} g\left(s, u^i(s)\right)$, $s \le t$, $i = 1,2$. Then η_1^i is measurable with values in X and θ_2^i is $(\mathcal{F}_t^i)$-progressively measurable with values in $L(U_0, X)$ such that $\eta_2^i \in L_2(U_0, X)$ $ds \otimes P^i$-almost everywhere. Since $L_2(U_0, X)$ is a strongly measurable subset of $L(U_0, X)$ by Proposition 1.2.5 (6) we define the $(\mathcal{F}_t^i)$-progressively measurable $L_2(U_0, X)$-valued process $\eta_2^i = \theta_2^i I_{\left[\theta_2^i \in L_2(U_0, X)\right]}$, $i = 1,2$, having preserved $P^i\left[\eta_2^i(s) = S_{t-s} g(s, u^i(s))\right] = 1$, $i = 1,2$ for almost all $s \le T$. Hence the measures $\mathfrak{Law}_{P^i}\left(u^i(t), u^i(0), \eta_1^i(r_l), \eta_2^i(r_l), W_{r_l}^i h_k : l,k\right)$ are equal for $i = 1,2$ for every $h_1, \ldots, h_m$ in U and every partition $0 = r_0 < \cdots < r_L \le T$ in some set $D^* \subseteq [0,T]$ of Lebesgue measure T. Thus, by Corollary 1.8.2, we see that (1.0.2) holds for u^2. Moreover we conclude that $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1(t), S_t u^1(0), \int_0^t \eta_1^1(s)\,ds, \int_0^t \eta_2^1\,dW^1\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(u^2(t), S_t u^2(0), \int_0^t \eta_1^2(s)\,ds, \int_0^t \eta_2^2\,dW^2\right)$ by Theorem 1.8.3 and 1.8.6 so

$$1 = P^1\left[u^1(t) = S_t u^1(0) + \int_0^t S_{t-s} f\left(s, u^1(s)\right)\,ds + \int_0^t S_{t-s} g\left(s, u^1(s)\right)\,dW^1\right] =$$

$$= P^2\left[u^2(t) = S_t u^2(0) + \int_0^t S_{t-s} f\left(s, u^2(s)\right)\,ds + \int_0^t S_{t-s} g\left(s, u^2(s)\right)\,dW^2\right].$$

□

1.11 Preliminaries to proofs of Theorem 1.1 and 1.2

Before we proceed to the proofs of Theorem 1.1 and Theorem 1.2 we will make a simple but important observation on a bi-Borel embedding of a separable reflexive Banach space into $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (Lemma 1.11.1). More precisely, we will want to re-establish the results of Yamada and Watanabe for mild solutions (1.0.1) in 2-smooth Banach spaces. The proof in the finite dimensional case relies on the disintegration of the joint solution measure on the Polish state space of continuous functions which is associated to the trajectories of the solutions. But, unlike to the finite dimensional case, we do not know in general whether the solutions are norm continuous. So it is not possible to consider $C\left([0,T]; X\right)$ as the state space for the trajectories although we need some Polish space for the disintegration theory whatsoever. On the other hand we know

that, in many cases (e.g. Theorem 1.13), there exists a sequence $(x_n^* : n \in \mathbb{N})$ in X^* which separates points of X such that $t \mapsto \langle x_n^*, u(t)\rangle$ is a continuous process. So one way out is to consider the solutions with the above, sort of weak continuity property, and $C\left([0,T];\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$ as the state space for the natural coordinate decomposition of the trajectory. We are also going to use the following notation:

- $\mathfrak{C} = C\left([0,T],\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)$, $\mathbb{B} = \mathbb{B}\left(C\left([0,T],\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)\right)$.
- $\pi_t : C\left([0,T],\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : f \mapsto f(t)$, $t \leq T$.
- $\varphi_t : C\left([0,T],\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) \to C\left([0,T],\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) : \varphi_t(f)(s) = f(t \wedge s)$, $t \leq T$.
- $\phi_t : C\left([0,T],\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) \to C\left([0,T],\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) : \phi_t(f)(s) = f\left((t+s)\wedge T\right) - f(t)$, $t \leq T$.
- $\mathbb{B}_t = \mathbb{B}\left(C\left([0,T],\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)\right) = \sigma(\pi_s : s \leq t)$, $t \leq T$.

One can easily verify that the Borel σ-algebra $\mathbb{B}\left(C\left([0,T],\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)\right)$ coincides with $\sigma(\pi_s : s \leq T)$ so the mappings $\varphi_t : (\mathfrak{C},\mathbb{B}_t) \to (\mathfrak{C},\mathbb{B})$, $\phi_t : (\mathfrak{C},\mathbb{B}) \to (\mathfrak{C},\mathbb{B})$ are measurable and $\mathbb{B}_t\left(C\left([0,T],\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right)\right) = \sigma(\varphi_t)$, $t \leq T$. Next we denote

- $\Omega^* = X \times \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$
- $\mathcal{F}^* = \mathbb{B}(X) \otimes \mathbb{B} \otimes \mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$
- $\mathcal{F}_t^* = \mathbb{B}(X) \otimes \mathbb{B}_t \otimes \mathbb{B}_t \otimes \mathbb{B}_t$

and if ν is a measure on $(\Omega^*,\mathcal{F}^*)$ we will write $\mathcal{F}_t^\nu = \mathcal{F}_t^* \vee \sigma\{N \in \mathcal{F}^* : \nu(n) = 0\}$ for the ν-augmentation of $\mathcal{F}_t^*$ in $\mathcal{F}^*$. **We fix an orthonormal basis $(h_k^* : k \in \mathbb{N})$ in U throughout this section** and if W is a Q-Wiener process on U then we denote

- $t \mapsto W_{\mathrm{dec}}(t) = (W_t(h_k^*) : k \in \mathbb{N})$ the continuous process in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ and
- $\mathcal{W} = \mathfrak{Law}\left(W_{\mathrm{dec}}\right)$ its distribution on $(\mathfrak{C},\mathbb{B})$ which depends only on Q.

Finally let μ be a probability Borel measure on X then we denote

- $\mathcal{G}_t^{\mu\otimes\mathcal{W}} = \mathbb{B}(X) \otimes \mathbb{B}_t \vee \sigma\{N \in \mathbb{B}(X) \otimes \mathbb{B} : \mu \otimes \mathcal{W}(N) = 0\}$ the augmentation of $\mathbb{B}(X) \otimes \mathbb{B}_t$ in $\mathbb{B}(X) \otimes \mathbb{B}$ with respect to $\mu \otimes \mathcal{W}$

and, to shorten the notation, we will write

- $x : \Omega^* \to X : (a,b,c^1,c^2) \mapsto a$.
- $w : \Omega^* \to \mathfrak{C} : (a,b,c^1,c^2) \mapsto b$.
- $y^i : \Omega^* \to \mathfrak{C} : (a,b,c^1,c^2) \mapsto c^i$, $i = 1,2$.

A decomposition result is discussed next:

Lemma 1.11.1. Let X be a separable reflexive Banach space (e.g. 2-smooth) and $(x_n^* : n \in \mathbb{N})$ a sequence in X^* which separates points of X. Then the image $\operatorname{Rng} e$ of the one-to-one mapping $e : X \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x \mapsto (\langle x_n^*, x\rangle : n \in \mathbb{N})$ is a Borel subset in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ and the extended inverse $e^{-1} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to X$, $e^{-1}(y) = 0$ for $y \notin \operatorname{Rng} e$ is Borel measurable.

Proof: The system $\mathcal{S} = \left\{B \subseteq X : e[B] \text{ is Borel measurable in } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right\}$ contains closed balls and X as these are weakly σ-compact and e is continuous with respect to the weak topology in X. Hence $\mathcal{S}$ is a σ-algebra whence the claim. □

Corollary 1.11.2. Let $(Y,\mathcal{Y})$ be a measurable space, $\left(\Omega^i,\mathcal{F}^i,\left(\mathcal{F}_t^i\right),P^i,\xi^i,\eta^i\right)$, $i = 1,2$ two filtered probability spaces where ξ^1 is a $\left(\mathcal{F}_t^1\right)$-predictable X-valued process, $\xi^2 = \left(\xi_n^2 : n \in \mathbb{N}\right)$ a family of real $\left(\mathcal{F}_t^2\right)$-predictable processes and η^i, $i = 1,2$ some Y-valued random variables. Suppose that

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(\left\langle x_m^*, \xi^1(t_n)\right\rangle, \eta^1 : m,n\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(\xi_m^2(t_n), \eta^2 : m,n\right)$$

for every partition $0 = t_0 < \cdots < t_N \leq T$, every $x_1^*, \ldots, x_M^*$, $M \in \mathbb{N}$ and $N \in \mathbb{N}$ where $(x_n^* : n \in \mathbb{N})$ is some sequence in X^* which separates points of X. Then there exists a predictable X-valued process ξ on $\left(\Omega^2, \mathcal{F}^2, \left(\mathcal{F}_t^2\right), P^2\right)$ such that

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(\xi^1(t_n), \eta^1 : n\right) = \mathfrak{Law}_{P^2}\left(\xi(t_n), \eta^2 : n\right)$$

for every partition $0 = t_0 < \cdots < t_N \leq T$ and $t \mapsto \langle x_n^*, \xi(t)\rangle$ is a modification of $t \mapsto \xi_n^2(t)$, $n \in \mathbb{N}$.

Proof: Consider the mapping e associated to $(x_n^* : n \in \mathbb{N})$ and define $\xi = e^{-1}\left(\xi^2\right)$. Then ξ is a predictable process in X because ξ^2 is predictable in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ and e^{-1} is measurable. Moreover

$$P^2\left[e\left(\xi(t)\right) = \xi^2(t)\right] = P^2\left[e\left(e^{-1}\xi^2(t)\right) = \xi^2(t)\right] = P^1\left[e\left(e^{-1}\xi^1(t)\right) = \xi^1(t)\right] = 1$$

for every $t \leq T$ and the equality of the laws follows from the fact that $(x_n^* : n \in \mathbb{N})$ generates the Borel σ-algebra on X. □

1.12 Proof of Theorem 1.2

In fact, we are going to prove a more general statement. Theorem 1.2 is its immediate consequence.

Theorem 1.12.1. *Let μ be a Borel probability measure on X, $(\Omega, \mathcal{F}, P, W, u)$ a solution of (1.0.1) satisfying (1.0.2) and let $(x_n^* : n \in \mathbb{N})$ be a sequence in X^* which separates points of X such that the processes $t \mapsto \langle x_n^*, u(t)\rangle$ have continuous adapted modifications. Then there exists a probability measure P^* on $(\Omega^*, \mathcal{F}^*)$, a Q-$\left(\mathcal{F}_t^{P^*}\right)$-Wiener process W^* and $\left(\mathcal{F}_t^{P^*}\right)$-predictable X-valued processes Z^1, Z^2 such that*

$$\left(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \left(\mathcal{F}_t^{P^*}\right), P^*, W^*, Z^i\right)$$

satisfies (1.0.1), (1.0.2) and the processes $t \mapsto \left\langle x_n^*, Z^i(t)\right\rangle$ have continuous adapted modifications, $i = 1, 2$. Moreover

(1) $P^*\left[Z^1(0) = Z^2(0)\right] = 1$.

(2) $\mathfrak{Law}_{P^*}\left(Z^1, W^*\right) = \mathfrak{Law}_{P^*}\left(Z^2, W^*\right) = \mathfrak{Law}_P\left(u, W\right)$.

(3) *if we knew that $P^*\left[Z^1(t) = Z^2(t)\right] = 1$ for t from some dense subset of $[0, T]$ then there would exist a mapping $\widetilde{R} : X \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ measurable in the following way*

$$\widetilde{R} : \left(X \times \mathfrak{C}, \mathcal{G}_t^{\mu \otimes W}\right) \to \left(\mathfrak{C}, \mathbb{B}_t\right), \quad t \leq T$$

such that, whenever $\left(\Omega^1, \mathcal{F}^1, \left(\mathcal{F}_t^1\right), P^1, W^1, u_0^1\right)$ is a filtered probability space with a Q-$\left(\mathcal{F}_t^1\right)$-Wiener process W^1 and an $\mathcal{F}_0^1$-measurable random variable u_0^1 with distribution $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(u_0^1\right) = \mu$, defining the predictable process $u^1(t) = e^{-1}\pi_t \widetilde{R}(u_0^1, W_{\text{dec}}^1)$, the family $\left(\Omega^1, \mathcal{F}^1, \left(\mathcal{F}_t^1\right), P^1, W^1, u^1\right)$ is a strong solution of (1.0.1) satisfying (1.0.2) with the initial condition u_0^1 and $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1, W^1\right) = \mathfrak{Law}_P\left(u, W\right)$.

We will start the proof of Theorem 1.12.1 by recalling one of the versions of the classical theorem on disintegration of measures. See Corollary 3.3 in [Ed] for the proof.

Proposition 1.12.2. Let Z be a Polish space, $(H, \mathcal{H})$ a measurable space and q a probability measure on $\mathcal{H} \otimes \mathbb{B}(Z)$. Then there exists a kernel $q : H \times \mathbb{B}(Z) \to [0,1]$ such that

(1) the mapping $H \to [0,1] : h \mapsto q(h, F)$ is $\mathcal{H}$-measurable for every $F \in \mathbb{B}(Z)$.
(2) the mapping $\mathbb{B}(Z) \to [0,1] : F \mapsto g(h, F)$ is a probability measure.
(3) $q(B \times F) = \int_B q(h, F)\, dq_1(h)$ for every $B \in \mathcal{H}$, $F \in \mathbb{B}(Z)$ where $q_1(B) = q(B \times Z)$, $B \in \mathcal{H}$ is the marginal measure of q.

Proof of Theorem 1.12.1. Let e be the mapping associated to $(x_n^* : n \in \mathbb{N})$ by Lemma 1.11.1. Then the modification of the random vector $(u(0), W_{\text{dec}}, eu - eu(0))$ takes values in $X \times \mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ by assumption of the theorem. Next consider the measure

$$\mathfrak{Law}_P\,(u(0), W_{\text{dec}}, eu - eu(0)) \qquad \text{on} \qquad \mathbb{B}(X) \otimes \mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$$

and denote q^t its restriction to $\mathbb{B}(X) \otimes \mathbb{B}_t \otimes \mathbb{B}$, $t \leq T$. By Proposition 1.12.2, there exist the corresponding kernels $q^t : X \times \mathfrak{C} \times \mathbb{B} \to [0,1]$, $t \leq T$ where we take $(H, \mathcal{H}) = (X \times \mathfrak{C}, (X) \otimes \mathbb{B}_t)$, $t \leq T$ and $Z = \mathfrak{C}$. The measure P^* is then defined by

$$P^*(B) = \int\limits_{X \times \mathfrak{C}} \left(\int\limits_{\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}} q^T_{(x,w)} \otimes q^T_{(x,w)} \left(B^{(x,w)} \right) \right) d\mu \otimes \mathcal{W}(x,w), \quad B \in \mathcal{F}^* \tag{1.12.1}$$

where $B^{(x,w)} = \left\{ (y^1, y^2) : (x, w, y^1, y^2) \in B \right\}$ is the cut-set in $(x,w) \in X \times \mathfrak{C}$, the solutions Z^i are defined as

$$Z^i(t, x, w, y^1, y^2) = x + e^{-1} y^i(t) \tag{1.12.2}$$

and the Q-Wiener process as

$$W^*_{x,w,y^1,y^2}(h) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle h, h_k^* \rangle_U \, w_k, \quad h \in U \tag{1.12.3}$$

where the sum is taken in $L^2\left((\Omega^*, \mathcal{F}^* P^*), C[0,T] \right)$ and $w = (w_k : k \in \mathbb{N}) \in \mathfrak{C}$.

Proof of the first part of Theorem 1.12.1 (in sequence of lemmas)

Lemma 1.A. Let $t \leq T$. Then $\sigma\left(\phi_t(W_{\text{dec}})\right)$ is P-independent of $\mathcal{F}_t$. In particular

(1) $\sigma\left(u(0), \varphi_t(W_{\text{dec}}), \varphi_t\left(eu - eu(0)\right)\right)$ is P-independent of $\sigma\left(\phi_t(W_{\text{dec}})\right)$.
(2) $\mathbb{B}_t$ is $\mathcal{W}$-independent of $\sigma\left(\phi_t\right)$ on $(\mathfrak{C}, \mathbb{B})$.
(3) $\mathfrak{Law}_P\left(u(0), W_{\text{dec}}\right) = \mu \otimes \mathcal{W}$.
(4) $\mu \otimes \mathcal{W}$ is the q_1^t-marginal of q^t, $t \leq T$ from Proposition 1.12.2.

Proof: The process $B = \left(W\left(h_1^*\right), \ldots, W\left(h_N^*\right)\right)$ is an N-dimensional $(\mathcal{F}_t)$-Wiener process with covariance $\left(\left\langle Q^{1/2} h_i^*, Q^{1/2} h_j^* \right\rangle_U \right)_{ij}$ so, by Lévy's characterization theorem, the σ-algebra $\sigma\left(B(r) - B(t) : r \in [t,T]\right)$ is P-independent of $\mathcal{F}_t$ for every $N \in \mathbb{N}$ hence so is $\sigma\left(W_{\text{dec}}(r) - W_{\text{dec}}(t) : r \in [t,T]\right)$. The claim (1) holds because

$$\sigma\left(u(0), \varphi_t(W_{\text{dec}}), \varphi_t\left(eu - eu(0)\right)\right) \subseteq \mathcal{F}_t,$$

(2) because $\mathbb{B}_t = \sigma\left(\varphi_t\right)$ and (3) and (4) are obvious. $\square$

Lemma 1.B. Let $t \leq T$, $A \in \mathbb{B}$, $F \in \mathcal{F}_t^{P^*}$ and $B = X \times \phi_t^{-1}[A] \times \mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$. Then $P^*(B \cap F) = P^*(B)P^*(F)$.

Proof: First we are going to prove that

$$\mu \otimes \mathcal{W}\left\{(x,w) \in X \times \mathfrak{C} : q^t(x,w,F_t) = q^T(x,w,F_t)\right\} = 1. \tag{1.B.1}$$

for every $F_t \in \mathbb{B}_t$. To do so fix $G_1 \in \mathcal{B}X$ and define

$$\mathcal{D} = \left\{ G \in \mathbb{B} : \int\limits_{G_1 \times G} q^t(x,w,F_t)\, d\mu \otimes \mathcal{W}(x,w) = q^T(G_1 \times G \times F_t) \right\}.$$

It is easy to see that $\mathcal{D}$ is a Dynkin class and if we showed that it contains all sets of the type $\varphi_t^{-1}[G_2] \cap \phi_t^{-1}[G_3]$ for all $G_2 \in \mathbb{B}$, $G_3 \in \mathbb{B}$ we would know that $\mathcal{D}$ is all of $\mathbb{B}$. Thus

$$\int\limits_{G_1 \times \left(\varphi_t^{-1}[G_2] \cap \phi_t^{-1}[G_3]\right)} q^t(x,w,F_t)\, d\mu \otimes \mathcal{W}(x,w) =$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{C}} \underbrace{\left(\int\limits_X I_{G_1}(x) q^t(x,w,F_t)\, d\mu(x) \right) I_{G_2}(\varphi_t(w))}_{\mathbb{B}_t\text{-measurable}} \underbrace{I_{G_3}(\phi_t(w))}_{\sigma(\phi_t)\text{-measurable}} d\mathcal{W}(w)$$

by Fubini's theorem. But $\mathbb{B}_t$ is $\mathcal{W}$-independent of $\sigma(\phi_t)$ by Lemma 1.A (2) so

$$= \left(\int\limits_{G_1 \times \varphi_t^{-1}[G_2]} q^t(x,w,F_t)\, d\mu \otimes \mathcal{W}(x,w) \right) \mathcal{W}\left(\phi_t^{-1}[G_3]\right) =$$

$$= \mathfrak{Law}_P\left(u(0), W_{\text{dec}}, eu - eu(0)\right)\left(G_1 \times \varphi_t^{-1}[G_2] \times F_t\right) \mathfrak{Law}_P\left(W_{\text{dec}}\right)\left(\phi_t^{-1}[G_3]\right)$$

and since $F_t = \varphi_t^{-1}[V_0]$ for some $V_0 \in \mathbb{B}$ we get

$$= P\left[\left(u(0), \varphi_t(W_{\text{dec}}), \varphi_t(eu - eu(0))\right) \in G_1 \times G_2 \times V_0\right] P\left[\phi_t(W_{\text{dec}}) \in G_3\right] =$$

$$= \mathfrak{Law}_P\left(u(0), W_{\text{dec}}, eu - eu(0)\right)\left(G_1 \times \left(\varphi_t^{-1}[G_2] \cap \phi_t^{-1}[G_3]\right) \times F_t\right).$$

Finally we infer that $\int_V q^t(x,w,F_t)\, d\mu \otimes \mathcal{W}(x,w) = \int_V q^T(x,w,F_t)\, d\mu \otimes \mathcal{W}(x,w)$ for every $V \in \mathbb{B}(X) \otimes \mathbb{B}$ whence (1.B.1).

Now we will turn to the proof of Lemma 1.B: Fix $U_1 \in \mathbb{B}(X)$, $U_2 \in \mathbb{B}_t$, $U_3 \in \mathbb{B}_t$, $U_4 \in \mathbb{B}_t$ and define $C = U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4$. Then

$$P^*(C \cap B) = \int\limits_{X \times \mathfrak{C}} I_{U_1}(x) I_{U_2}(w) I_A(\phi_t(w))\, q^T(x,w,U_3)\, q^T(x,w,U_4)\, d\mu \otimes \mathcal{W}(x,w)$$

and, by (1.B.1), we have

$$= \int\limits_{X\times\mathfrak{C}} I_{U_1}(x) I_{U_2}(w) I_A(\phi_t(w))\, q^t(x,w,U_3)\, q^t(x,w,U_4)\; d\mu \otimes \mathcal{W}(x,w).$$

Using Fubini's theorem we continue

$$= \int\limits_{\mathfrak{C}} \underbrace{\left(\int\limits_X I_{U_1}(x) q^t(x,w,U_3)\, q^t(x,w,U_4)\; d\mu(x) \right)}_{\mathbb{B}_t\text{-measurable}} I_{U_2}(w) \underbrace{I_A(\phi_t w)}_{\sigma(\phi_t)\text{-measurable}} \; d\mathcal{W}(w)$$

but

$$= \underbrace{\int\limits_{X\times\mathfrak{C}} I_{U_1}(x) I_{U_2}(w) q^1(x,w,U_3)\, q^t(x,w,U_4)\; d\mu \otimes d\mathcal{W}(x,w)\, P^*(B)}_{P^*(C)}$$

due to Lemma 1.A (2). So far we have proven that $P^*(F\cap B) = P^*(F)P^*(B)$ for every $F \in \mathbb{B}(X)\otimes\mathbb{B}_t\otimes\mathbb{B}_t\otimes\mathbb{B}_t = \mathcal{F}_t^*$ but the same is obviously true for every $F \in \mathcal{F}_t^{P^*}$. □

Lemma 1.C. The processes Z^i, $i=1,2$, defined in (1.12.2), are $\left(\mathcal{F}_t^{P^*}\right)$-predictable, W^* defined in (1.12.3) is a Q-$\left(\mathcal{F}_t^{P^*}\right)$-Wiener process and (1) and (2) in Theorem 1.12.1 hold. Particularly $\left(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \left(\mathcal{F}_t^{P^*}\right), P^*, W^*, Z^i\right)$ satisfies (1.0.1), (1.0.2) for $i=1,2$ by Theorem 1.6.

Proof: First we must realize that, by the definition of the measure P^*, we have

$$\mathfrak{Law}_{P^*}\left(x,w,y^i\right) = \mathfrak{Law}_P\left(u(0), W_{\text{dec}}, eu - eu(0)\right). \tag{1.12.4}$$

So $\mathfrak{Law}_{P^*}\left(W^*_{\text{dec}}, ex+y^i\right) = \mathfrak{Law}_P\left(W_{\text{dec}}, eu\right)$, $i=1,2$ and, by Corollary 1.11.2, we get that

$$P^*\left[y^i(t) \in \operatorname{Rng} e\right] = 1, \quad t \le T, \tag{1.12.5}$$

Z^i, $i=1,2$ are predictable in X and

(1.12.6)

$$\mathfrak{Law}_{P^*}\left(Z^i(t_j), W^*_{t_j}(h^*_k) : j\le n, k\le K\right) = \mathfrak{Law}_P\left(u(t_j), W_{t_j}(h^*_k) : j\le n, k\le K\right),$$

$i=1,2$ for every partition $0=t_0<\cdots<t_n\le T$ and every $K\in\mathbb{N}$. Denoting $B = \left(W(h^*_1),\ldots,W(h^*_N)\right)$ the continuous N-dimensional $(\mathcal{F}_t^*)$-adapted process we see that $\mathfrak{Law}_{P^*}\left(B_t - B_s\right)$ is the N-dimensional centered Gaussian measure with covariance $\left(\left\langle Q^{1/2}h^*_i, Q^{1/2}h^*_j\right\rangle_U\right)_{ij}$ and, by Lemma 1.B, we have that $\sigma\left(B_t - B_s\right)$ is $\mathcal{F}_t^{P^*}$-independent. Thus we conclude that B is an N-dimensional $\left(\mathcal{F}_t^{P^*}\right)$-Wiener process for every $N\in\mathbb{N}$, consequently, as

$$E_{P^*}\left\| \sum_{k=m}^{n} \langle h, h^*_k\rangle_U\, W^*(h^*_k) \right\|^2_{C([0,T])} \le$$

$$\leq 4T \sum_{k=m}^{n} \sum_{l=m}^{n} \langle h, h_k^* \rangle_U \left\langle Q^{1/2} h_k^*, Q^{1/2} h_l^* \right\rangle_U \langle h, h_l^* \rangle_U =$$

$$= 4T \left\| Q^{1/2} \left(\sum_{k=m}^{n} \langle h, h_k^* \rangle_U \, h_k^* \right) \right\|_U^2$$

by the Doob inequality, the series (1.12.3) is convergent and defines a Q-$(\mathcal{F}_t^{P^*})$-Wiener process while (2) in Theorem 1.12.1 follows from (1.12.6) by the linearity of W^* and by that fact that the linear span of $(h_k^* : k \in \mathbb{K})$ is dense in U. We also have, by definition of P^*, that $P^* \left[y^i(0) = 0 \right] = 1$, $i = 1, 2$ whence (1) in Theorem 1.12.1.

Proof of the second part of Theorem 1.12.1 (in sequence of lemmas)
Suppose that we know that $P^* \left[Z^1(t) = Z^2(t) \right] = 1$ for t from some dense subset of $[0, T]$. Then, by the definition of Z^i (1.12.2) and by (1.12.5), there is

$$1 = P^* \left[y^1 = y^2 \right] = P^* \left[X \times \mathfrak{C} \times D \right] = \int_{X \times \mathfrak{C}} q^T_{(x,w)} \otimes q^T_{(x,w)}(D) \, d\mu \otimes \mathcal{W}(x, w)$$

where $D = \left\{ (y^1, y^2) \in \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} : y^1 = y^2 \right\}$ is the diagonal of $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$. So the set $M = \left\{ (x, w) : q^T_{(x,w)} \otimes q^T_{(x,w)}(D) = 1 \right\} \in \mathbb{B}(X) \otimes \mathbb{B}$ is of $\mu \otimes \mathcal{W}$-measure 1 and, by Fubini's theorem, $q^T_{(x,w)}$ must be a Dirac measure for every $(x, w) \in M$. Denoting $k(x, w) \in \mathfrak{C}$, $(x, w) \in M$ the corresponding mass point we have $[k \in B] = [q^T(B) = 1] = [q^t(B) = 1]$ modulo a $\mu \otimes \mathcal{W}$-zero set for every $F_t \in \mathbb{B}_t$ by (1.B.1). Hence k, extended by 0 out of M, is $\left(X \times \mathfrak{C}, \mathcal{G}_t^{\mu \otimes \mathcal{W}} \right) \to (\mathfrak{C}, \mathbb{B}_t)$ measurable for every $t \leq T$. The proof of the second part of Theorem 1.12.1 will now follow from Lemma 1.D and Lemma 1.E.

Lemma 1.D. Writing $t \mapsto \widetilde{R}_t(x, w) = ex + k_t(x, w) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ we have that

(1.D.1) $\widetilde{R} : \left(X \times \mathfrak{C}, \mathcal{G}_t^{\mu \otimes \mathcal{W}} \right) \to (\mathfrak{C}, \mathbb{B}_t)$ is measurable for every $t \leq T$

(1.D.2) $\mathfrak{Law}_P \left(eu, W_{\text{dec}} \right) = \mathfrak{Law}_{\mu \otimes \mathcal{W}} \left(\widetilde{R}, \widetilde{w} \right)$ on $\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$

(1.D.3) $\mu \otimes \mathcal{W} \left\{ (x, w) : \pi_0 \widetilde{R}(x, w) = ex \right\} = 1$

where $\widetilde{w} : (X, \mathfrak{C}) \to \mathfrak{C} : (x, w) \mapsto w$.

Proof: (1.D.1) is obviously true so we will show (1.D.2) and (1.D.3):

$$P^*(B) = \int_M \delta_{k(x,w)} \otimes \delta_{k(x,w)}(B^{(x,w)}) \, d\mu \otimes \mathcal{W}(x, w) =$$

$$= \mu \otimes \mathcal{W} \left\{ (x, w) : (x, w, k(x, w), k(x, w)) \in B \right\}$$

by the definition of P^* (1.12.1) for every $B \in \mathcal{F}^*$. So (1.D.2) follows from (1.12.4). As for (1.D.3), observe that $1 = P \left[\pi_0 \left(eu - eu(0) \right) = 0 \right] = P^* \left\{ (x, w, y^1, y^2) : y^1(0) = 0 \right\}$ so the claim follows from the first part of the proof. □

Lemma 1.E. Let μ be a Borel probability measure on X, $(\Omega, \mathcal{F}, P, W, u)$ a solution of (1.0.1) satisfying (1.0.2) and let $(x_n^* : n \in \mathbb{N})$ be a sequence in X^* which separates points of X such that the processes $t \mapsto \langle x_n^*, u(t)\rangle$ have continuous adapted modifications. Let also $\widetilde{R} : X \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ be a function satisfying (1.D.1), (1.D.2) and (1.D.3) of Lemma 1.D. Then, whenever $\left(\Omega^1, \mathcal{F}^1, \left(\mathcal{F}_t^1\right), W^1, u_0^1\right)$ is a filtered probability space with a Q-$\left(\mathcal{F}_t^1\right)$-Wiener process W^1 and an $\mathcal{F}_0^1$-measurable random variable u_0^1 with distribution $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(u_0^1\right) = \mu$, the family $\left(\Omega^1, \mathcal{F}^1, \left(\mathcal{F}_t^1\right), W^1, u^1\right)$, where $u^1(t) = e^{-1}\pi_t \widetilde{R}(u_0^1, W_{\mathrm{dec}}^1)$ is a predictable process, is a strong solution of (1.0.1) satisfying (1.0.2) with the initial condition u_0^1 and $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1, W^1\right) = \mathfrak{Law}_P\left(u, W\right)$.

Proof: First of all one must realize that $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(u_0^1, W_{\mathrm{dec}}^1\right) = \mu \otimes \mathcal{W}$ by Lemma 1.A so, if we denote $\mathcal{H}_t$ the P^1-augmentation of $\sigma\left(u_0^1, \pi_s W_{\mathrm{dec}}^1 : s \le t\right)$ then $\mathcal{H}_t \subseteq \mathcal{F}_t^1$, the mapping $\left(u_0^1, W_{\mathrm{dec}}^1\right) : \left(\Omega^1, \mathcal{H}_t\right) \to \left(X \times \mathfrak{C}, \mathcal{G}_t^{\mu\otimes\mathcal{W}}\right)$ is clearly measurable and u^1 is $(\mathcal{H}_t)$-predictable. Moreover

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1(t_j), W_{\mathrm{dec}}^1 : j\right) = \mathfrak{Law}_{P^1}\left(e^{-1}\pi_{t_j}\widetilde{R}\left(u_0^1, W_{\mathrm{dec}}^1\right), W_{\mathrm{dec}}^1 : j\right) =$$

$$= \mathfrak{Law}_{\mu\otimes\mathcal{W}}\left(e^{-1}\pi_{t_j}\widetilde{R}, \widetilde{w} : j\right) = \mathfrak{Law}_P\left(e^{-1}\pi_{t_j} eu, W_{\mathrm{dec}}\right) = \mathfrak{Law}_P\left(u(t_j), W_{\mathrm{dec}}\right),$$

by the assumption (1.D.2), consequently

$$\mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1(t_j), W_{t_j}^1(h_k^*) : j \le n, k \le K\right) = \mathfrak{Law}_P\left(u(t_j), W_{t_j}(h_k^*) : j \le n, k \le K\right)$$

for every partition $0 = t_0 < \cdots < t_n \le T$ and every $K \in \mathbb{N}$. But since $(h_k^* : k \in \mathbb{N})$ spans densely in U we get the above equality with arbitrary h_k's due to linearity of W, W^1. Hence $\left(u^1, W^1\right)$ satisfies (1.0.1), (1.0.2). We have that

$$\mathfrak{Law}_P\left(eu(t)\right) = \mathfrak{Law}_{\mu\otimes\mathcal{W}}\left(\pi_t\widetilde{R}\right), \qquad t \le T$$

by (1.D.2) so, using Corollary 1.11.2, we see that $\mu \otimes \mathcal{W}\left[\pi_t\widetilde{R} \in \operatorname{Rng} e\right] = 1$ and

$$P^1\left[u^1(0) = u_0^1\right] = P^1\left[e^{-1}\pi_0\widetilde{R}\left(u_0^1, W_{\mathrm{dec}}^1\right) = u_0^1\right] =$$

$$= \mu \otimes \mathcal{W}\left\{(x, w) : e^{-1}\pi_0\widetilde{R}(x, w) = x\right\} = \mu \otimes \mathcal{W}\left\{(x, w) : \pi_0\widetilde{R}(x, w) = ex\right\} = 1$$

by (1.D.3). □

1.13 Proof of Theorem 1.1

The idea is, again, to construct a function $\widetilde{R}$ satisfying the assumptions of Lemma 1.E but firstly we will recall a fairly known fact on representations of "suitably" measurable functions. The proof can be found in [DM] 12-I-18.

Proposition 1.13.1. Let $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ be a measure space, $(Y, \mathcal{Y})$ a measurable space, $\mathcal{A}$ a sub-σ-algebra of $\mathcal{F}$, Z a Polish space, $f : \Omega \to Y$ an arbitrary function. Denote $\sigma(f)$ the σ-algebra generated by f and $\mathcal{A}^\nu = \mathcal{A} \vee \{N \in \mathcal{F} : \nu(N) = 0\}$ the ν-augmentation of $\mathcal{A}$ in $\mathcal{F}$.

(1) If $g : \Omega \to Z$ is a $\sigma(f)$-measurable mapping then there exists a measurable mapping $h : (Y, \mathcal{Y}) \to Z$ such that $g = hf$.
(2) If $g : \Omega \to Z$ is $\mathcal{A}^\nu$-measurable then there exists an $\mathcal{A}$-measurable function h such that $g = h$ ν-almost everywhere.

Theorem 1.13.2. *Let $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P, W, u)$ be a strong solution of (1.0.1), (1.0.2) such that $x_n^* \in X^*$, $n = 1, 2, \ldots$ separate points of X and the processes $t \mapsto \langle x_n^*, u(t)\rangle$, $n \in \mathbb{N}$ have continuous modifications. Then there exists a function $\widetilde{R}$ satisfying (1.D.1), (1.D.2) and (1.D.3) of Lemma 1.D, consequently the conclusions of Lemma 1.E hold.*

Proof: Denote $\mathcal{H}_t$ the P-augmentation of $\sigma(u(0), \pi_s W_{\text{dec}} : s \leq t)$. Then the mapping $eu : (\Omega, \mathcal{H}_t) \to (\mathfrak{C}, \mathbb{B}_t)$ is measurable for every $t \leq T$ by assumption. Consequently there exists a measurable mapping $\widetilde{R} : (X \times \mathfrak{C}, \mathbb{B}(X) \otimes \mathbb{B}) \to (\mathfrak{C}, \mathbb{B})$ as well as mappings $r_t : (X \times \mathfrak{C}, \mathbb{B}(X) \otimes \mathbb{B}_t) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ such that $P\left[\widetilde{R}(u(0), W_{\text{dec}}) = eu\right] = 1$ and $P[r_t(u(0), W_{\text{dec}}) = \pi_t eu] = 1$, $t \leq T$ by Proposition 1.13.1. But then

$$\mu \otimes \mathcal{W}\left[r_t = \pi_t \widetilde{R}\right] = P\left[r_t(u(0), W_{\text{dec}}) = \pi_t \widetilde{R}(u(0), W_{\text{dec}})\right] = 1, \quad t \leq T$$

so $\widetilde{R} : \left(X \times \mathfrak{C}, \mathcal{G}_t^{\mu \otimes \mathcal{W}}\right) \to (\mathfrak{C}, \mathbb{B}_t)$ for every $t \leq T$ by Lemma 1.A. □

Actual proof of Theorem 1.1. The strong existence follows immediately from Lemma 1.E so suppose that joint uniqueness in law holds for (1.0.1) and that we have a solution v of (1.0.1) on some filtered probability space $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}_t'), P', W')$. Then

$$P'\left[v(t) = e^{-1}\pi_t \widetilde{R}(v(0), W'_{\text{dec}})\right] = P\left[u(t) = e^{-1}\pi_t \widetilde{R}(u(0), W_{\text{dec}})\right] = 1, \qquad t \leq T$$

by the joint uniqueness in law and Theorem 1.13.2. Hence we see that (1.0.1) is pathwise unique. □

1.14 Proofs of Theorem 1.8, 1.9 and 1.10

We use the notation of section 1.11.

Proof of Theorem 1.8. (1) implies (2) and (3) by Theorem 1.2 while (3) implies (1) by Theorem 1.1. Suppose that (2) holds. Then the assumptions of Theorem 1.12.1 are satisfied with the original solution $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P, W, u)$ so if $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}_t'), P', W', u')$ is a solution then so is $(\Omega', \mathcal{F}', (\mathcal{F}_t'), P', W', v')$ where $v'(t) = e^{-1}\pi_t \widetilde{R}(u'(0), W'_{\text{dec}})$. Consequently we get

$$P'\left[u'(t) = e^{-1}\pi_t \widetilde{R}(u'(0), W'_{\text{dec}})\right] = P'\left[v'(t) = e^{-1}\pi_t \widetilde{R}(v'(0), W'_{\text{dec}})\right]$$

for every $t \leq T$ as (u', W') and (v', W') have the same law by joint uniqueness in law. The latter is equal 1 because $P'[u'(0) = v'(0)] = 1$ and the proof is complete. Whence pathwise uniqueness for (1.0.1). □

Proof of Theorem 1.9. (1) implies (2) by Theorem 1.12.1. Now suppose that (2) holds. Then (u, W)-pathwise uniqueness holds if and only if (u', W')-pathwise uniqueness holds so let $\left(\Omega^1, \mathcal{F}^1, \left(\mathcal{F}_t^1\right), P^1, W^1, u^1\right)$ be a solution of (1.0.1) such that $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1, W^1\right) = \mathfrak{Law}_{P'}\left(u', W'\right)$. Then $\left(\Omega^1, \mathcal{F}^1, \left(\mathcal{F}_t^1\right), P^1, W^1, v^1\right)$ is a solution of the equation (1.0.1) and $\mathfrak{Law}_{P^1}\left(v^1, W^1\right) = \mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1, W^1\right)$ with

$$v^1(t) = e^{-1}\pi_t \widetilde{R}\left(u^1(0), W^1_{\text{dec}}\right)$$

by Theorem 1.13.2. Moreover $P^1\left[u^1(0) = v^1(0)\right] = 1$ thus

$$P^1\left[u^1(t) = e^{-1}\pi_t \widetilde{R}\left(u^1(0), W^1_{\text{dec}}\right)\right] = P^1\left[v^1(t) = e^{-1}\pi_t \widetilde{R}\left(v^1(0), W^1_{\text{dec}}\right)\right] = 1$$

for every $t \leq T$, whence (1). □

Proof of Theorem 1.10. Suppose that (1) holds. Then the assumptions of Theorem 1.12.1 are satisfied with the original solution $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t\right), P, W, u\right)$ so consider another solution $\left(\Omega', \mathcal{F}', \left(\mathcal{F}'_t\right), P', W', v'\right)$ such that $\mathfrak{Law}_P\left(u\right) = \mathfrak{Law}_{P'}\left(v'\right)$. Then, by Theorem 1.12.1, $\left(\Omega', \mathcal{F}', \left(\mathcal{F}'_t\right), P', W', u'\right)$ is again a solution of (1.0.1) such that $\mathfrak{Law}_P\left(u, W\right) = \mathfrak{Law}_{P'}\left(u', W'\right)$ where

$$u'(t) = e^{-1}\pi_t \widetilde{R}\left(v'(0), W'\right), \quad t \leq T$$

is $\left(u'(0), W'\right)_{P'}$-adapted. But $P'\left[u'(t) = v'(t)\right] = 1$, $t \leq T$ by u-pathwise uniqueness as $P'\left[u'(0) = v'(0)\right] = 1$ whence joint u-uniqueness in law for (1.0.1) and (2) and (3) hold.

If (2) holds then the assumptions of Theorem 1.12.1 are satisfied with the original solution $\left(\Omega', \mathcal{F}', \left(\mathcal{F}'_t\right), P', W', u'\right)$ and we will show that it has the claimed properties. In deed, $\left(\Omega', \mathcal{F}', \left(\mathcal{F}'_t\right), P', W', v'\right)$ is a $\left(u'(0), W'\right)_{P'}$-adapted solution where $v'(t) = e^{-1}\pi_t \widetilde{R}\left(u'(0), W'\right)$, $t \leq T$. Moreover, by (u', W')-pathwise uniqueness, $P'[u'(t) = v'(t)]$ for every $t \leq T$.

To show that (3) implies (1) consider a solution $\left(\Omega^1, \mathcal{F}^1, \left(\mathcal{F}_t^1\right), P^1, W^1, u^1\right)$ such that $\mathfrak{Law}_{P'}\left(u'\right) = \mathfrak{Law}_{P^1}\left(u^1\right)$. Then, by Theorem 1.13.2, $\left(\Omega^1, \mathcal{F}^1, \left(\mathcal{F}_t^1\right), P^1, W^1, v^1\right)$ is also a solution with the distribution $\mathfrak{Law}_{P'}\left(u'\right) = \mathfrak{Law}_{P^1}\left(v^1\right)$ where

$$v^1(t) = e^{-1}\pi_t \widetilde{R}\left(u^1(0), W^1\right), \qquad t \leq T.$$

But we know that

$$P^1\left[u^1(t) = e^{-1}\pi_t \widetilde{R}\left(u^1(0), W^1_{\text{dec}}\right)\right] = P^1\left[v^1(t) = e^{-1}\pi_t \widetilde{R}\left(v^1(0), W^1_{\text{dec}}\right)\right] = 1$$

for every $t \leq T$ by joint u-uniqueness in law and the fact that $P^1\left[u^1(0) = v^1(0)\right] = 1$. Whence u-pathwise uniqueness for (1.0.1). □

Used notation

$\mathbb{B}(X)$ ..... Borel σ-algebra on X
X^* ..... dual space to X
L^p ..... Lebesgue space of p-integrable functions
$E[f/\mathcal{A}]$ ..... conditional expectation
$\sigma\mathcal{S}$ ..... σ-hull over $\mathcal{S}$
$\sigma(f_\alpha : \alpha \in A)$ ..... σ-hull over $(f_\alpha : \alpha \in A)$
$\mathfrak{Law}_\mu(f)$ ..... distribution of f with respect to μ
$\langle M \rangle$, resp. $\langle M, N \rangle$ .... variation, resp. cross-variation process. [RY], Section IV.1
U_0 ..... Definition 1.2.1
$\mathcal{N}(x, Q)$ ..... Gaussian probability with mean x and covariance Q
$L(U, X)$ ..... linear bounded operators from U to X
$L_2(U, X)$ ..... Radonifying operators from U to X, Definition 1.2.3
$\mathcal{C}([0, T], Z)$ ..... continuous functions from $[0, T]$ to Z
$\mathcal{P}_T$ ..... σ-algebra of progressively measurable sets
e, e^{-1} 1.11.1
$\mathfrak{C}$ ..... Section 1.11
$\mathbb{B}$, $\mathbb{B}_t$ ..... Section 1.11
π_t ..... Section 1.11
φ_t ..... Section 1.11
ϕ_t ..... Section 1.11
$(\Omega^*, \mathcal{F}^*, (\mathcal{F}_t^*))$ ..... Section 1.11
$\mathcal{F}_t^\nu$ ..... Section 1.11
W_{dec} ..... Section 1.11
$\mathcal{W}$ ..... Section 1.11
$\mathcal{G}_t^{\mu \otimes \mathcal{W}}$ ..... Section 1.11

References

[A] Assouad, P.: *Espaces p-lisses et q-convexes, inégalités de Burkholder*, Sém. Maurey-Schwartz 1974-1975, Espaces L^p, Applications radonifiantes, Géom. des espaces de Banach, Exposé XV, 7p. (1975) École polytechnique Centre de Mathématiques, Paris

[Ba] Baxendale, P.: *Gaussian measures on function spaces*, Amer. J. Math., 98, 891-952, 1976

[B] Brzeźniak, Z.: *On stochastic convolution in Banach spaces and applications*, Stochastics and Stochastics Reports, Vol. 61. pp. 245-295, 1997

[B1] Brzeźniak, Z.: *Stochastic PDE in M-type 2 Banach Spaces*, BiBoS preprint, 1991

[B2] Brzeźniak, Z.: *Stochastic partial differential equations in M-type 2 Banach spaces*, Potential Analysis 4, 1995, 1-45, 1995

[BG] Brzeźniak, Z., Gątarek, D.: *Martingale solutions and invariant measures for stochastic evolution equations in Banach spaces*, Stoch. Processes Appl. 84, 187-226, 1999

[Ch] Cherny, A. S.: *On strong and weak uniqueness for stochastic differential equations* (Russian), Teor. Veroyatnost. i Primenen. 46 (2001), 483-497

[ChTV] Chobanyan, S. A., Tarieladze, V. I., Vakhania, N. N.: *Probability distributions on Banach spaces*, Reidel, Dortrecht, 1987

[ChM] Chojnowska-Michalik, A.: *Stochastic differential equations in Hilbert spaces*, Probability theory, Banach center publications , Vol. 5, 1979

[DZ] Da Prato, G., Zabczyk, J.: *Stochastic equations in infinite dimensions*, Cambridge University Press, Cambridge 1992

[DM] Dellacherie, C., Meyer, P. A.: *Probabilities and potential*, Vol A, North- Holland, Amsterdam 1978

[D] Dettweiler, E.: *Stochastic integration relative to Brownian motion on a general Banach space*, Doga-Tr. J. of Mathematics, 15, 6-44, 1991

[DU] Diestel, J., Uhl, J. J. Jr.: *Vector measures*, American Mathematical Society, Providence 1977

[Ed] Edgar, G. A.: *Disintegration of measures and the vector-valued Radon- Nikodym theorem*, Duke Math. J. 42(1975), 447–450

[En] Engelbert, H. J.: *On the theorem of T. Yamada and S. Watanabe*, Stochastics Stochastics Rep. 36(1991), 205–216

[J] Jacod, J.: *Weak and strong solutions of stochastic differential equations*, Stochastics 3(1980), 171–191

[KRN] Kuratowski, K., Ryll-Nardzewski, C.: *A general theorem on selectors*, Bull. Acad. Pol. Sc., 13, 397-403

[KS] Karatzas, I., Shreve, S.: *Brownian motion and stochastic calculus*, Springer-Verlag, New York 1988

[LP] Linde, W., Pietsch, A.: *Mappings of Gaussian cylindrical measures in Banach spaces*, Theory of probability and its applications, Vol. XIX, n. 3, 1974

[MP] Métivier, M., Pellaumail, J.: *Cylindrical stochastic integral*, Sém. de l'Université de Rennes, 1976

[N] Neidhardt, A. L.: *Stochastic integrals in 2-uniformly smooth Banach spaces*, University of Wisconsin, 1978

[P] Pisier, G.: *Martingales with values in uniformly convex spaces*, Israel Journal of Mathematics, 20, 3-4, 326-350, 1976

[P2] Pisier, G.: *Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces*, Probability and analysis, Varenna 1985, pp. 167-241, LNM 1206, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York

[RY] Revuz, D., Yor, M.: *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer - Verlag, Berlin 1991

[YW] Yamada, T., Watanabe, S.: *On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations*, J. Math. Kyoto Univ. 11(1971), 155–167

Chapter 2

BROWNIAN REPRESENTATIONS OF CYLINDRICAL LOCAL MARTINGALES, MARTINGALE PROBLEM AND STRONG MARKOV PROPERTY OF WEAK SOLUTIONS OF SPDEs IN BANACH SPACES

Abstract: This chapter deals with three issues. First we show a sufficient condition for a cylindrical local martingale to be a stochastic integral with respect to a cylindrical Wiener process. Secondly we state an infinite dimensional version of the martingale problem of Stroock and Varadhan, and finally we apply the results to show that a weak existence plus uniqueness in law for deterministic initial conditions for an abstract stochastic evolution equation in a Banach space implies the Markov property, and, in case of time homogeneous coefficients, the strong Markov property.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 60H15.

Keywords. Brownian representations, martingale problem, strong Markov property.

2.0 INTRODUCTION

The first part of this chapter is devoted to the study of Brownian representations of cylindrical local martingales. If W is a (cylindrical) Wiener process and g a progressively measurable integrable process with values in the space of linear bounded operators then the stochastic integral $M = \int g\, dW$ is a cylindrical local martingale with the quadratic variation process $\int gg^*\, ds$. The question is whether, provided M is a cylindrical local martingale with the above quadratic variation, there exists a Wiener process of given covariance such that M is the stochastic integral of the process g with respect to W, and the positive answer is in Theorem 2.1.2 for the general cylindrical case, and in Corollary 2.1.3 for the particular case where we consider the representations in 2-smooth Banach spaces which seem to be the most general spaces where stochastic integral with respect to Wiener processes exist. In particular, every Hilbert space is 2-smooth. We refer to Chapter 1 or [1] or [2] for details on stochastic integration in these spaces. The contribution of Theorem 2.1.2 is that we do not consider only Hilbert space local martingales (as in [3]) but also Banach space valued and, moreover, cylindrical martingales over a reflexive Banach space. The motivation for this generalization is that solutions of stochastic evolution equations in Banach spaces are no more semimartingales since generators of C_0-semigroups are unbounded operators. Yet, the solutions are still cylindrical semimartingales and then, as we will see in the second and the third part of this chapter, this generalization permits to develop the Stroock and Varadhan theory of martingale problems for rather general class of abstract stochastic evolution equations.

The second part deals with a stochastic evolution equation (2.2.1) in a 2-smooth separable Banach space X. In general, the solutions of this abstract equation need

not be norm continuous and so we cannot consider the space of X-continuous function on $[0,\infty)$ as the state space for the paths of the solutions on which we would like to formulate some sort of a martingale problem. Yet, the solutions are continuous for a certain topology weaker than the weak topology $\tau(X,X^*)$ on X by a theorem of Chojnowska-Michalik (Theorem 1.12 and Theorem 1.13 in Chapter 1, or [4] or [2]) which can be naturally embedded in the Fréchet space of real sequences $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, and so we consider the path-space $\overline{\Omega}$ of continuous functions from $[0,\infty)$ to $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. This, in fact, rather complicates the exposition since the embedding is not a homeomorphism. Anyway, we establish Theorem 2.3.2 which states sufficient and necessary conditions for a Borel probability measure on $\overline{\Omega}$ to be a law of a solution of the equation (2.2.1). The advantage of this theorem is that we work on one fixed probability space with one process and the objects of study are Borel probability measures which correspond in one-to-one way to martingale solutions (weak solutions in the probabilistic sense).

Having established Theorem 2.3.2 we formulate an infinite dimensional version of the martingale problem using the ideas of Stroock and Varadhan [5]. We show that if the equation (2.2.1) is well-posed, i.e. weak existence and uniqueness in law hold for deterministic initial conditions, then the Markov kernel is measurable (Corollary 2.4.8) and defines a Markov process (Theorem 2.5.1). As a by-product we get weak existence and uniqueness in law for general initial conditions for the equation (2.2.1) (Corollary 2.4.7). At this occasion we refer to Theorem 1.4 in Chapter 1 where is shown that provided the equation (2.2.1) is well-posed then joint uniqueness in law holds for deterministic initial conditions (i.e. the joint law of the solution and the driving Wiener process is unique).

In the third part of this chapter we consider the equation (2.2.1) and we suppose that solutions have norm continuous trajectories. This additional assumption enables us to return to the path space Ω of continuous functions from $[0,\infty)$ to X considered with the natural evaluation process $Y_t(\omega)=\omega(t)$, $t\geq 0$, $\omega\in\Omega$. And again, under the assumption of well-posedness of the equation (2.2.1), the process Y, together with the probability measures $(\mathbb{P}^{a,x} : a\geq 0, x\in X)$ corresponding to laws of the solutions departing at time a from $x\in X$, is a Markov, resp. strong Markov family (Thm 2.5.3, resp. Thm 2.5.4).

The proofs are given separately at the last section.

I would like to thank Marco Dozzi and Jan Seidler for suggesting me this problem, and to the Institute of Mathematics Elie Cartan in Nancy, France, and the Mathematical Institute of the Academy of Sciences in Prague for their material support.

2.1 BROWNIAN REPRESENTATIONS OF CYLINDRICAL MARTINGALES

Representations of martingales as stochastic integrals goes back to Doob [6] who showed a representation theorem for one-dimensional martingales. Its finite dimensional version can be found in Theorem 3.4.2 in [7], and a generalization to Hilbert space valued martingales in Theorem 8.2 in [3]. Our version covers all the preceding cases and, moreover, the cases where the martingales are Banach valued, or even cylindrical over a Banach space.

Notations and conventions

Throughout this chapter

- ▷ if nothing is assumed about a filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ we will suppose that $\mathcal{F}_0$ contains all $\mathbb{P}$-negligible sets of $\mathcal{F}$.
- ▷ we denote U a separable Hilbert space, X a separable reflexive Banach space, Q a symmetric nonnegative operator on U, $U_0 = \operatorname{Rng} Q^{1/2}$ the reproducing kernel space for Q with the inner product defined via

$$\langle u, v \rangle_{U_0} = \left\langle Q^{-1/2}u, Q^{-1/2}v \right\rangle \qquad u \in U_0,\ v \in U_0,$$

where $Q^{-1/2}$ is the inverse mapping to the restriction of $Q^{1/2}$ onto the orthogonal complement of $\operatorname{Ker} Q^{1/2}$ in U.

- ▷ given a filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$, we speak of *a cylindrical Q-$(\mathcal{F}_t)$-Wiener process* $W = (W(u) : u \in U)$ provided $W(u)$ is an $(\mathcal{F}_t)$-Wiener process on $[0, \infty)$ for every $u \in U$ and

$$\mathbb{E}\, W_s(u) W_t(v) = \langle Qu, v \rangle_U \min\{t, s\}$$

for every $s \geq 0$, $t \geq 0$, $u \in U$ and $v \in U$. This is a generalization of a U-valued Q-$(\mathcal{F}_t)$-Wiener process $\mathcal{W}$ for Q nuclear since then $W(u) = \langle \mathcal{W}, u \rangle_U$ is a Wiener process in our sense (see e.g. [8]).

- ▷ we denote $L(U, X)$ the space of linear bounded operators from U to X equipped by the σ-algebra generated by the mappings $B \mapsto Bu$ for every $u \in U$.
- ▷ we denote $R(U, X)$ the space of γ-radonifying operators from U to X and we recall that $R(U, X)$ is a separable Banach space whose Borel σ-algebra coincides with the σ-algebra generated by the mappings $B \mapsto Bu$ for every $u \in U$ (e.g. [9] or [2]). Hence if $(\Omega, \mathcal{F})$ is a measurable space, a mapping ξ from Ω to either $L(U, X)$ or $R(U, X)$ is measurable if and only if $\xi u : \Omega \to X$ is Borel measurable for every $u \in U$. We used the notation $L_2(U, X)$ instead of $R(U, X)$ in Chapter 1.

Definition 2.1.1. Let $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ be a filtered probability space, $a \geq 0$ and $M = (M(t) : t \geq a)$ an adapted process with continuous paths. Then we say that M is a local martingale provided there exist stopping times τ_n with values in $[a, \infty]$ such that $\lim \tau_n = \infty$ almost surely and $t \mapsto M(t \wedge \tau_n)$ is a bounded martingale on $[a, \infty)$ for every $n \in \mathbb{N}$.

Theorem 2.1.2. *Let $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ be a filtered probability space, g a progressively measurable $L(U_0, X)$-valued process such that*

$$\mathbb{P}\left[\int_0^T \|g_s\|^2_{L(U_0,X)}\, ds\right] = 1 \qquad \textit{for every} \quad T > 0$$

and $(M(x^*) : x^* \in D)$ a family of continuous local $(\mathcal{F}_t)$-martingales starting from zero where D is a dense subset of X^* such that $qx_1^* + x_2^* \in D$ for every $x_1^* \in D$, $x_2^* \in D$ and $q \in \mathbb{Q}$. We suppose that

- ▷ $\mathbb{P}\left[M_t(qx_1^* + x_2^*) = qM_t(x_1^*) + M_t(x_2^*)\right] = 1$, $t \geq 0$, $q \in \mathbb{Q}$, $x_1^* \in D$, $x_2^* \in D$.
- ▷ *the quadratic variation process is given by* $\langle M(x^*) \rangle = \int \|g^* x^*\|^2_{U_0}\, ds$, $x^* \in D$.

Let either condition be satisfied:

- ▷ *the operator $g(t,\omega)$ is injective for $dt \otimes \mathbb{P}$-almost all (t,ω).*
- ▷ *$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ supports an infinite number of independent standard real $(\mathcal{F}_t)$-Wiener processes, which are, altogether, independent of the process M.*

Then there exists a Q-$(\mathcal{F}_t)$-Wiener process W such that

$$M(x^*) = \int \langle x^*, g\cdot \rangle \, dW_s$$

for every $x^* \in D$. □

Theorem 2.1.2 has an immediate corollary. If X is a 2-smoothable Banach space or, in particular, a Hilbert space, and the process g satisfies an additional integral condition then we have an integral representation of the cylindrical process M.

Corollary 2.1.3. *In particular, if X is a 2-smoothable space, resp. a Hilbert space and*

$$\mathbb{P}\left[\int_0^T \|g_s\|^2_{R(U_0,X)} \, ds\right] = 1 \qquad \textit{resp.} \qquad \mathbb{P}\left[\int_0^T \|g_s\|^2_{HS(U_0,X)} \, ds\right] = 1$$

for every $T > 0$ then M has a representation $\mathcal{M}$ in X where

$$\mathcal{M} = \int g \, dW$$

and $M(x^*) = \langle x^*, \mathcal{M} \rangle$ for every $x^* \in D$.

2.2 THE STOCHASTIC EQUATION AND THE SETTINGS

Notations and conventions: From now on

- ▷ X will be, in addition, 2-smoothable.
- ▷ $\mathbb{B}(Z)$ stands for the Borel σ-algebra over a topological space Z and $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ is the Fréchet space of real sequences.
- ▷ if $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ is a probability space and $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ then $\mathcal{G}^{\mathbb{P}}$ is the smallest σ-algebra containing $\mathcal{G}$ and every $\mathbb{P}$-negligible set of $\mathcal{F}$ and we call $\mathcal{G}^{\mathbb{P}}$ *the $\mathbb{P}$-augmentation of $\mathcal{G}$ in $\mathcal{F}$*. A $\mathbb{P}$-augmentation of a filtration $(\mathcal{G}_t)$ in $\mathcal{F}$ is the filtration $(\mathcal{G}_t^{\mathbb{P}})$.
- ▷ if $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ is a probability space and ξ a measurable mapping from Ω to some measurable space Y then we denote $\mathfrak{Law}_{\mathbb{P}}(\xi)$ the law of ξ under $\mathbb{P}$.

Moreover we write

- ▷ $\pi_s : C([0,\infty), \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : f \mapsto f(s)$ for $s \in [0,\infty)$
- ▷ $\overline{\Omega} = C([0,\infty), \mathbb{R}^{\mathbb{N}})$
- ▷ $\overline{\mathcal{F}} = \mathbb{B}(C([0,\infty), \mathbb{R}^{\mathbb{N}})) = \sigma(\pi_s : s < \infty)$
- ▷ $\overline{\mathcal{F}}_t = \sigma(\pi_s : s \le t)$ for $t \in [0,\infty)$
- ▷ $\overline{\mathcal{F}}_{a,b} = \sigma(\pi_s : a \le s \le b)$ or $\overline{\mathcal{F}}_{a,\infty} = \sigma(\pi_s : s \ge a)$ for $0 \le a \le b < \infty$

Further we consider an infinitesimal generator A of a C_0-semigroup $(S_t : t \geq 0)$ on X. The adjoint operators $(S_t^* : t \geq 0)$ on the dual space X^* form a C_0-semigroup as well, and the adjoint operator A^* is its infinitesimal generator by Corollary 1.10.6 in [10] since X is reflexive. Thus we can fix a countable set $D = \{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ in the domain $D(A^*)$ of the adjoint operator A^* such that

- ▷ $qh_n + h_m \in D$ for every q rational, $n \in \mathbb{N}$ and $m \in \mathbb{N}$
- ▷ the set $\{(h_n, A^*h_n); n \in \mathbb{N}\}$ is dense in $\{(x^*, A^*x^*) : x^* \in D(A^*)\}$ in $X^* \times X^*$

since X^* is separable.

Definition 2.2.1. Each element of $x \in X$ can be mapped into $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ as $\vec{x} = (\langle h_n, x\rangle : n \in \mathbb{N})$ and it defines an injective mapping $e : X \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x \mapsto \vec{x}$. We denote $e^{-1} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to X$ the inverse of e extended by zero on $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus \operatorname{Rng} e$.

Proposition 2.2.2. *The mapping e is injective and continuous and maps Borel sets of X into Borel sets of $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. In particular e^{-1} is Borel measurable.*

Proof: The system of subsets of X whose image under e is a Borel set in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ contains closed balls and X as these are weakly σ-compact, and e is continuous with respect to the weak topology in X. Whence e maps Borel subsets of X into Borel subsets of $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. In view of this the inverse mapping e_{-1} of e is Borel measurable from the range of e onto X, and we will denote $e^{-1} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to X$ its Borel extension by zero on $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus \operatorname{Rng} e$. □

We also consider some measurable nonlinearities $F : [0,\infty) \times X \to X$, $G : [0,\infty) \times X \to L(U_0, X)$ and some auxiliary measurable mapping $J : [0,\infty) \times X \to [0,\infty]$ with the following property:

Whenever $a \geq 0$ and $v : [a,\infty) \to [0,\infty)$ and $w : [a,\infty) \to X$ are measurable such that

$$\int_a^t J(v_s, w_s)\, ds < \infty, \qquad t \geq a$$

then

$$\int_a^t \|w_s\|_X + \|F(v_s, w_s)\|_X + \|G(v_s, w_s)\|^2_{L(U_0,X)} + \|S_{t-s}G(v_s, w_s)\|^2_{R(U_0,X)}\, ds < \infty$$

for every $t \geq a$.

Let $a \geq 0$. We say that a 6-tuple $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, u)$ of a filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$, an Q-$(\mathcal{F}_t)$-Wiener process and a progressively measurable X-valued process $(u(t) : t \geq a)$ is *a solution* of the equation (with the coefficients J, F and G)

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t) + F(t, u(t)) + G(t, u(t))\, \dot{W} \tag{2.2.1}$$

on $[a, \infty)$ provided that

$$\mathbb{P}\left[\int_a^t J(s, u(s))\, ds < \infty\right] = 1, \qquad t \geq a \tag{2.2.2}$$

and

$$\mathbb{P}\left[u(t) = S_{t-a}u(a) + \int_a^t S_{t-s}F(s, u(s))\, ds + \int_a^t S_{t-s}G(s, u(s))\, dW\right] = 1 \tag{2.2.3}$$

holds for every $t \geq a$.

Remark 2.2.3. The equality (2.2.3) holds if and only if

$$\langle h_n, u(t)\rangle = \langle h_n, u(a)\rangle + \int_a^t \langle A^* h_n, u(s)\rangle\, ds + \int_a^t \langle h_n, F(s, u(s))\rangle\, ds + \tag{2.2.4}$$

$$+ \int_a^t \langle h_n, G(s, u(s))\cdot\rangle\, dW$$

holds almost surely for every $t \geq a$ and every $n \in \mathbb{N}$ by the theorem of Chojnowska-Michalik (Theorem 1.12 and Theorem 1.13 in Chapter 1).

Remark 2.2.4. In particular the $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$-valued process $t \mapsto \vec{u}(t \vee a)$ (Def. 2.2.1) has a continuous modification which takes values in $\overline{\Omega}$.

First example of the choice of J. Let $p \geq 2$ and $\frac{1}{p} < \alpha < 1$. Suppose that

$$\int_0^t \frac{\|S_s\|^2_{R(X)}}{s^{2\alpha}} < \infty \qquad t \geq 0.$$

Then we can set

$$J(s, x) = 1 + \|x\|_X + \|F(s, x)\|_X + \|G(s, x)\|^p_{L(U_0, X)} \qquad s \geq 0, \quad x \in X.$$

Proof:

$$\left[\int_0^t \left(\int_0^t v(s, r)\, dr\right) ds\right]^{1/2} \leq \int_0^t \left(\int_0^t v^2(s, r)\, ds\right)^{1/2} dr$$

holds for every nonnegative function v by Fubini's theorem so we fix some t positive and set $v(s, r) = (t - r)^{\alpha-1}(r - s)^{-\alpha}\|S_{t-s}g(s)\|_{R(U_0,X)}$ for $0 < s < r < t$ and zero otherwise for some $g : (0, t) \to L(U_0, X)$ measurable. Then

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \left(\int_0^t \|S_{t-s}g(s)\|^2_{R(U_0,X)}\, ds\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \int_0^t \frac{\|S_{t-r}\|_{L(X)}}{(t-r)^{(1-\alpha)}} \left(\int_0^r \frac{\|S_{r-s}\|^2_{R(X)}}{(r-s)^{2\alpha}} \|g(s)\|^2_{L(U_0,X)}\, ds \right)^{1/2} dr \leq$$

$$\leq \left(\int_0^t \frac{\|S_r\|^{p'}_{L(X)}}{r^{(1-\alpha)p'}}\, dr \right)^{1/p'} \left[\int_0^t \left(\int_0^r \frac{\|S_{r-s}\|^2_{R(X)}}{(r-s)^{2\alpha}} \|g(s)\|^2_{L(U_0,X)}\, ds \right)^{p/2} dr \right]^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\int_0^t \frac{\|S_r\|^{p'}_{L(X)}}{r^{(1-\alpha)p'}}\, dr \right)^{1/p'} \left(\int_0^t \frac{\|S_r\|^2_{R(X)}}{r^{2\alpha}}\, dr \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|g(r)\|^p_{L(U_0,X)}\, dr \right)^{1/p}$$

by Hölder's and Young's inequality. □

Second example of the choice of J. Let Q be a trace class operator on U and denote V the orthogonal complement of $\operatorname{Ker} Q^{1/2}$ in U with inherited norm from U. Then we can set

$$J(s,x) = \|x\|_X + \|F(s,x)\|_X + \|G(s,x)\|^2_{L(V,X)} \qquad s \geq 0, \quad x \in X.$$

Proof: Let $g \in L(V,X)$. Then $\|g\|_{L(U_0,X)} \leq \|g\|_{L(V,X)} \|Q^{1/2}\|_{L(U)}$ and

$$\|S_{t-s}g\|_{R(U_0,X)} = \|S_{t-s}gQ^{1/2}\|_{R(V,X)} \leq \|S_{t-s}\|_{L(X)} \|g\|_{L(V,X)} \|Q^{1/2}\|_{R(V)} =$$

$$= \|S_{t-s}\|_{L(X)} \|g\|_{L(V,X)} (\operatorname{Tr} Q)^{1/2}.$$

□

Third example of the choice of J. Let the diffusion operator G take values in the space of γ-radonifying operators $R(U_0,X)$. Then we can put

$$J(s,x) = \|x\|_X + \|F(s,x)\|_X + \|G(s,x)\|^2_{R(U_0,X)} \qquad s \geq 0, \quad x \in X.$$

Proof: Let $g \in L(U_0,X)$. Then

$$\|g\|_{L(U_0,X)} \leq \|g\|_{R(U_0,X)}$$

and

$$\|S_{t-s}g\|_{R(U_0,X)} \leq \|S_{t-s}\|_{L(X)} \|g\|_{R(U_0,X)}.$$

□

2.3 MARTINGALE THEOREM

In this section we will show a sufficient and necessary condition for existence of a solution $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, u)$ of the equation (2.2.1). Namely we formulate an infinite dimensional version of the martingale problem of Stroock and Varadhan.

Let $0 \leq a < \infty$ and denote

$$\tau_m(b) = \tau_m^a(b) = \inf\{s \geq a : |b(s)| \geq m\} \tag{2.3.1}$$

for a function $b : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ and $m \in \mathbb{N}$ with the convention that $\inf \emptyset = \infty$,

$$M_a = \bigcap_{t>a} \left\{ \omega \in \overline{\Omega} : \int_a^t J(s, e^{-1}\pi_s(\omega))\, ds < \infty \right\} \tag{2.3.2}$$

the real continuous processes defined on $\overline{\Omega}$

$$\begin{aligned} L_n(f)(t,\omega) = L_n^a(f)(t,\omega) = f(\pi_t^n(\omega)) - f(\pi_a^n(\omega)) - \\ - \int_a^t \dot{f}(\pi_s^n(\omega)) \left(\langle A^* h_n, e^{-1}\pi_s(\omega) \rangle + \langle h_n, F(s, e^{-1}\pi_s(\omega)) \rangle \right) ds - \\ - \frac{1}{2} \int_a^t \ddot{f}(\pi_s^n(\omega)) \left\| G^*(s, e^{-1}\pi_s(\omega)) h_n \right\|_{U_0}^2, \qquad t \geq a, \quad \omega \in M_a \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

$$L_n(f)(t,\omega) = L_n^a(f)(t,\omega) = 0, \qquad t \geq a, \quad \omega \in \overline{\Omega} \setminus M_a$$

where $\pi_s(\omega) = (\pi_s^j(\omega) : j \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, for $f \in C^2(\mathbb{R})$ and $n \in \mathbb{N}$, and finally the stopped processes

$$L_{nm}(f)(t,\omega) = L_{nm}^a(f)(t,\omega) = L_n^a(f)(t \wedge \tau_m(L_n^a(f)(\cdot,\omega)), \omega), \quad t \geq a, \quad \omega \in \overline{\Omega} \tag{2.3.4}$$

for $f \in C^2(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ and $m \in \mathbb{N}$.

Remark 2.3.1. The processes $L_n(f)$ and $L_{nm}(f)$ are continuous by the assumptions on the function J and $L_{nm}(f)$ is uniformly bounded. Moreover, if we suppose that a probability measure $\overline{\mathbb{P}}$ on $\overline{\mathcal{F}}$ is such that $\overline{\mathbb{P}}(M_a) = 1$. Then the random variables $L_n(f)(t)$ and $L_{nm}(f)(t)$ are measurable for the $\overline{\mathbb{P}}$-augmentation of the σ-algebra $\sigma(\pi_s : a \leq s \leq t)$ in $\overline{\mathcal{F}}$ for every $t \in [a, \infty)$, $f \in C^2(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ and $m \in \mathbb{N}$.

In view of Remark 2.2.4 and Remark 2.3.1 we see that the objects appearing in the following theorem are well defined. See Proposition 5.4.6, p. 315 in [7] for the finite dimensional case:

Theorem 2.3.2. *Let $0 \leq a < \infty$.*

1° *If $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, u)$ is a solution of the equation (2.2.1) on $[a, \infty)$ then the law $\overline{\mathbb{P}}$ of the process $t \mapsto \vec{u}(t \vee a)$ on $\overline{\mathcal{F}}$ satisfies*

$$\overline{\mathbb{P}}[M_a] = \overline{\mathbb{P}}[\pi_t \in \operatorname{Rng} e] = 1$$

for every $t \in [a, \infty)$ and the bounded processes $L_{nm}(f)$ are martingales on $[a, \infty)$ under $\overline{\mathbb{P}}$ with respect to the $\overline{\mathbb{P}}$-augmentation of the filtration $(\overline{\mathcal{F}}_t)$ in $\overline{\mathcal{F}}$ for every $f \in C^2(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}$ and $n \in \mathbb{N}$.

2° *There exists a countable set B of $C^\infty(\mathbb{R})$-functions with compact supports, independent of a, such that whenever $\overline{\mathbb{P}}$ is a measure on $\overline{\mathcal{F}}$ such that*

$$\overline{\mathbb{P}}[M_a] = \overline{\mathbb{P}}[\pi_a \in \operatorname{Rng} e] = \overline{\mathbb{P}}[\pi_t \in \operatorname{Rng} e] = 1$$

for almost every $t \in [a, \infty)$, and the bounded processes $L_{nm}(f)$ are martingales on $[a, \infty)$ under $\overline{\mathbb{P}}$ with respect to the $\overline{\mathbb{P}}$-augmentation of the filtration $(\overline{\mathcal{F}}_{a,t})$ in $\overline{\mathcal{F}}_{a,\infty}$ for every $f \in B$, $m \in \mathbb{N}$ and $n \in \mathbb{N}$, then there exists a solution $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, u)$ of the equation (2.2.1) such that $\overline{\mathbb{P}}$ coincides with the law of the process $t \mapsto \vec{u}(t \vee a)$ on $\overline{\mathcal{F}}_{a,\infty}$.

2.4 MAIN THEOREM AND ITS APPLICATIONS TO SPDEs

Definition 2.4.1. We denote $\mathbb{M}(Z)$ the Polish space of Borel probability measures on a Polish space Z, with the topology induced by the real bounded continuous functions on Z. Moreover, we will write $\mathbb{M} = \mathbb{M}(C([0, \infty), \mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$ and define the shift operator

$$\theta : \mathbb{R} \times C([0, \infty), \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \to C([0, \infty), \mathbb{R}^{\mathbb{N}}) : (y, f) \mapsto (f(s + y)^+ : s \geq 0).$$

Definition 2.4.2. Let $a \geq 0$ and $x \in X$. We say that the equation (2.2.1) is (a, x)-unique in law provided that whenever $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, (\mathcal{F}_t^i), \mathbb{P}^i, W^i, u^i)$, $i = 1, 2$ are two solutions of the equation (2.2.1) on $[a, \infty)$ such that $\mathbb{P}^1[u^1(a) = x] = \mathbb{P}^2[u^2(a) = x] = 1$ then $\mathfrak{Law}_{\mathbb{P}^1}\left(u^1(t_i) : i \leq k\right) = \mathfrak{Law}_{\mathbb{P}^2}\left(u^2(t_i) : i \leq k\right)$ for every finite times $t_1, \ldots, t_k$ in in $[a, \infty)$.

Definition 2.4.3. Let $a \geq 0$ and $x \in X$ be given and suppose that there exists a solution $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, u)$ of the equation (2.2.1) on $[a, \infty)$ such that $\mathbb{P}[u(a) = x] = 1$ and the equation (2.2.1) is (a, x)-unique in law. Then we say that *the equation (2.2.1) is (a, x)-well-posed.* Moreover we denote $P^{a,x}$ the law of the process $t \mapsto \vec{u}(t \vee a)$ on $\overline{\mathcal{F}}$ (Remark 2.2.4) and define $P(a, x, t, V) = \mathbb{P}[u(t) \in V]$ for $t \geq a$ and $V \in \mathbb{B}(X)$.

Theorem 2.4.4. *Let the coefficients J, F and G be time independent, i.e. $J(t, x) = J(x)$, $F(t, x) = F(x)$ and $G(t, x) = G(x)$ for every $t \geq 0$ and $x \in X$.*

- ▷ *If the equation (2.2.1) is (a, x)-well-posed for some $a \in [0, \infty)$ and $x \in X$ then the equation (2.2.1) is (b, x)-well-posed for every $b \in [0, \infty)$.*
- ▷ *If O is a Borel subset of X and (2.2.1) is $(0, x)$-well-posed for every $x \in O$ then the mapping $[0, \infty) \times O \to \mathbb{M} : (a, x) \mapsto P^{a,x}$ is Borel measurable.*

In either case $P^{b,x} = \mathfrak{Law}_{P^{a,x}}(\theta_{a-b})$ on $\overline{\mathcal{F}}$ for every $a \geq 0$, $b \geq 0$ and $x \in X$.

The following theorem is an infinite dimensional version of 6.7.4, p. 167 in [5].

Theorem 2.4.5. *Let E be a nonempty Borel subset of $[0,\infty)\times X$ and let the equation (2.2.1) be (a,x)-well-posed for every $(a,x)\in E$. Then the function $E\to\mathbb{M}:(a,x)\mapsto P^{a,x}$ is Borel measurable.*

Now we are coming to the essential theorem of this section. Its finite dimensional predecessor is due to Stroock and Varadhan Theorem 6.2.2, p. 146 in [5].

Theorem 2.4.6. *Let $a\geq 0$ and let O be a nonempty Borel subset of X. Let the equation (2.2.1) be (b,x)-well-posed for every $b\geq a$ and $x\in O$. Further suppose that there exists a solution $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),\mathbb{P},W,u)$ of the equation (2.2.1) on $[a,\infty)$ and denote P the law of the process $t\mapsto\vec{u}(t\vee a)$ on $\overline{\mathcal{F}}$ (Remark 2.2.4). Let $(\mathcal{G}_t)$ be a filtration in $\overline{\mathcal{F}}$ such that $\overline{\mathcal{F}}_t\subseteq\mathcal{G}_t\subseteq\overline{\mathcal{F}}_t^P$ for every $t\geq 0$, and let τ be an $[a,\infty)$-valued $(\mathcal{G}_t)$-stopping time. Assume that $P[\pi_\tau\in e[O]]=1$ and denote $r:\overline{\Omega}\times\overline{\mathcal{F}}\to\mathbb{R}$ a regular version of the conditional probability P with respect to $\mathcal{G}_\tau$. Then there exists a set N in $\mathcal{G}_\tau$, $P(N)=1$, $N\subseteq[\pi_\tau\in e[O]]$ such that*

$$r(\omega,V)=P^{\tau(\omega),e^{-1}(\pi_{\tau(\omega)}(\omega))}(V)$$

for every $V\in\overline{\mathcal{F}}_{\tau(\omega),\infty}$ and every $\omega\in N$.

Theorem 2.4.6 has two immediate corollaries. Corollary 2.4.7 is the weak existence and the uniqueness in law for general initial distribution and Corollary 2.4.8 is the measurability of the Markov kernel.

Corollary 2.4.7. *Let O be a Borel subset of X and μ a probability measure on $\mathbb{B}(X)$ such that $\mu(O)=1$. Suppose that the equation (2.2.1) is (a,x)-well-posed for every $a\geq 0$ and $x\in O$. Then*

- *there exists a solution $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),\mathbb{P},W,u)$ of the equation (2.2.1) on $[a,\infty)$ such that $\mathfrak{Law}_{\mathbb{P}}(u(a))=\mu$.*
- *whenever $(\Omega^k,\mathcal{F}^k,(\mathcal{F}_t^k),W^k,u^k)$, $k=1,2$ are two solutions of the equation (2.2.1) on $[0,\infty)$ such that $\mathfrak{Law}_{\mathbb{P}^1}\left(u^1(0)\right)=\mathfrak{Law}_{\mathbb{P}^2}\left(u^2(0)\right)=\mu$ then*

$$\mathfrak{Law}_{\mathbb{P}^1}\left(u^1(t_i):i\leq m\right)=\mathfrak{Law}_{\mathbb{P}^2}\left(u^2(t_i):i\leq m\right)$$

for every $t_1,\dots t_m$ in $[0,\infty)$.

Corollary 2.4.8. *Let O be a nonempty Borel subset of X and let the equation (2.2.1) be (a,x)-well-posed for every $a\geq 0$ and $x\in O$. Then the function*

$$(a,x,t)\mapsto P(a,x,t,V):\{(a,x,t):0\leq a\leq t<\infty,x\in O\}\to\mathbb{R}$$

is jointly measurable for every $V\in\mathbb{B}(X)$.

2.5 MARKOV AND STRONG MARKOV PROPERTY

- Let O be a non empty Borel subset in X and denote
  - $\mathcal{O}=\{C\in\mathbb{B}(X):C\subseteq O\}$
  - $\Omega=O^{[0,\infty)}=\{\omega:[0,\infty)\to O\}$
  - $Y_t:\Omega\to O:\omega\mapsto\omega(t)$, $t\geq 0$
  - $\mathcal{F}=\mathcal{O}^{[0,\infty)}=\sigma(Y_t:t\geq 0)$
  - $\mathcal{F}_t=\sigma(Y_s:s\leq t)$, $t\geq 0$

The following theorems are essentially applications of Theorem 2.4.6.

Theorem 2.5.1. *Let the equation (2.2.1) be (a,x)-well-posed for every $a \geq 0$ and $x \in O$. Further suppose that, for every $a \geq 0$, $x \in O$, there exists a solution*

$$(\Omega_{a,x}, \mathcal{F}_{a,x}, (\mathcal{F}_{a,x;t}), \mathbb{P}_{a,x}, W_{a,x}, u_{a,x})$$

of the equation (2.2.1) on $[a,\infty)$ such that $\mathbb{P}_{a,x}[u_{a,x}(a) = x] = 1$ and $\mathbb{P}_{a,x}[u_{a,x}(t) \in O] = 1$ for every $t \geq a$, and denote $\mathbb{P}^{a,x}$ the law of the process $t \mapsto u_{a,x}(t \vee a)$ on $\mathcal{F}$. Then $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), Y, (\mathbb{P}^{a,x})_{a \geq 0, x \in O})$ is a Markov family, i.e.

- ▷ *$[0,\infty) \times (O, \mathcal{O}) \to \mathbb{R} : (a,x) \mapsto \mathbb{P}^{a,x}(V)$ is jointly measurable for every $V \in \mathcal{F}$.*
- ▷ *If we denote $(\mathcal{H}_t)$ the $\mathbb{P}^{a,x}$-augmentation of the filtration $(\mathcal{F}_t)$ for $a \geq 0$, $x \in O$ fixed, and $b \leq c$ are fixed times in $[a,\infty)$ then $\mathbb{P}^{a,x}[Y_c \in V | \mathcal{H}_b] = \mathbb{P}^{b,Y_b}[Y_c \in V]$ $\mathbb{P}^{a,x}$-almost surely for every $V \in \mathbb{B}(O)$.*

• Let O be a subspace of X and consider norm $\|\cdot\|_O$ on O such that $(O, \|\cdot\|_O)$ is a separable Banach space continuously embedded in X and denote

- ▷ $Y_t : C([0,\infty), (O, \|\cdot\|_O)) \to O : \omega \mapsto \omega(t)$, $t \geq 0$
- ▷ $\Omega = C([0,\infty), (O, \|\cdot\|_O))$
- ▷ $\mathcal{F} = \mathbb{B}(C([0,\infty), (O, \|\cdot\|_O))) = \sigma(Y_t : t \geq 0)$
- ▷ $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s : s \leq t)$, $t \geq 0$

Remark 2.5.2. The assumption of the continuous injection of O into X implies that $\mathbb{B}(O) \subseteq \mathbb{B}(X)$ by chap. 3, par. 39, sect. IV, p. 487 in [11]. In particular, O is a Borel subset in X and $\mathbb{B}(O) = \mathcal{O} = \{C \in \mathbb{B}(X) : C \subseteq O\}$.

Theorem 2.5.3. *Let the equation (2.2.1) be (a,x)-well-posed for every $a \geq 0$ and $x \in O$. Further suppose that, for every $a \geq 0$, $x \in O$, there exists a solution*

$$(\Omega_{a,x}, \mathcal{F}_{a,x}, (\mathcal{F}_{a,x;t}), \mathbb{P}_{a,x}, W_{a,x}, u_{a,x})$$

of the equation (2.2.1) on $[a,\infty)$ such that $\mathbb{P}_{a,x}[u_{a,x}(a) = x] = 1$ and the paths of $u_{a,x}$ are continuous in $(O, \|\cdot\|_O)$, and denote $\mathbb{P}^{a,x}$ the law of the process $t \mapsto u_{a,x}(t \vee a)$ on $\mathbb{B}(C([0,\infty), (O, \|\cdot\|_O)))$. Then $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), Y, (\mathbb{P}^{a,x})_{a \geq 0, x \in O})$ is a Markov family, i.e.

- ▷ *$[0,\infty) \times (O, \mathcal{O}) \to \mathbb{R} : (a,x) \mapsto \mathbb{P}^{a,x}(V)$ is jointly measurable for every $V \in \mathcal{F}$.*
- ▷ *If we denote $(\mathcal{H}_t)$ the $\mathbb{P}^{a,x}$-augmentation of the filtration $(\mathcal{F}_t)$ for $a \geq 0$, $x \in O$ fixed, and $b \leq c$ are fixed times in $[a,\infty)$ then $\mathbb{P}^{a,x}[Y_c \in V | \mathcal{H}_b] = \mathbb{P}^{b,Y_b}[Y_c \in V]$ $\mathbb{P}^{a,x}$-almost surely for every $V \in \mathcal{O}$.*

Theorem 2.5.4. *Suppose that the coefficients J, F and G are time independent, i.e. $J(t,x) = J(x)$, $F(t,x) = F(x)$ and $G(t,x) = G(x)$ for every $t \geq 0$ and let the equation (2.2.1) be $(0,x)$-well-posed for every $x \in O$. Further suppose that, for every $x \in O$, there exists a solution $(\Omega_x, \mathcal{F}_x, (\mathcal{F}_{xt}), \mathbb{P}_x, W_x, u_x)$ of the equation (2.2.1) on $[0,\infty)$ such that $\mathbb{P}_x[u_x(0) = x] = 1$ and the paths of u_x are continuous in $(O, \|\cdot\|_O)$, and denote $\mathbb{P}^x$ the law of u on $\mathbb{B}(C([0,\infty), (O, \|\cdot\|_O)))$. Then $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), Y, (\mathbb{P}^x)_{x \in O})$ is a strong Markov family, i.e.*

- ▷ *$(O, \mathcal{O}) \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathbb{P}^x(V)$ is jointly measurable for every $V \in \mathcal{F}$.*
- ▷ *If we denote $(\mathcal{H}_t)$ the $\mathbb{P}^x$-augmentation of the filtration $(\mathcal{F}_t)$ for $x \in O$ fixed, and τ is an $(\mathcal{H}_t)$-stopping time then $\mathbb{P}^x[Y_{t+\tau} \in V | \mathcal{H}_\tau] = \mathbb{P}^{Y_\tau}[Y_t \in V]$ $\mathbb{P}^x$-almost surely for every $t \geq 0$, and $V \in \mathcal{O}$.*

2.6 THE DEMONSTRATIONS

2.6.1 PROOF OF THEOREM 2.1.2

First we will give a classical result on real local martingales. Then we recall the definition of a stochastic integral with respect to a cylindrical martingale and finally we conclude by the actual proof of Theorem 2.1.2.

The following proposition is an easy consequence of the Lenglart inequality 1.4.17, p. 30 or 1.5.25, p. 38 in [7]:

Proposition 2.6.1.1. Let $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ be a filtered probability space and $(M_n : n \in \mathbb{N})$ a sequence of real continuous local $(\mathcal{F}_t)$-martingales on $[0, \infty)$ starting from zero and, for every $\delta > 0$, $\Delta > \infty$ and $t > 0$, there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that whenever $m \geq n_0$ and $n \geq n_0$ then $\mathbb{P}[\langle M_n - M_m \rangle (t) \geq \delta] \leq \Delta$. Then there exists a continuous local martingale M such that $|M_n - M| + \langle M_n - M \rangle + |\langle M_n \rangle - \langle M \rangle|$ converges to zero in $C[0, \infty)$ in probability.

Corollary 2.6.1.2. The family of the local martingales $(M(x^*) : x^* \in D)$ from Theorem 2.1.2 can be extended for the indices $x^* \in X^* \setminus D$ such that

- ▷ $(M_t(x^*) : t \geq 0)$ is a local $(\mathcal{F}_t)$-martingale for each $x^* \in X^* \setminus D$.
- ▷ $\mathbb{P}\left[M_t(ax_1^* + x_2^*) = aM_t(x_1^*) + M_t(x_2^*)\right] = 1$, $t \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$, $x_1^* \in X^*$, $x_2^* \in X^*$.
- ▷ the quadratic variation process is given by $\langle M(x^*) \rangle = \int \|g^* x^*\|_{U_0}^2 \, ds$, $x^* \in X^*$.

Proof: If $x^* \in X^*$ and $(k_n \in D : n \in \mathbb{N})$ converges to x^* in X^* then $M(k_n)$ converges in probability in $C[0, \infty)$ to some limit $M(x^*)$ and the limit is independent of $(k_n : n \in \mathbb{N})$ by Proposition 2.6.1.1. Considering the unique extensions by the above limits for $x^* \in X^* \setminus D$ we have a family $(M(x^*) : x^* \in X^*)$ of continuous local martingales satisfying the claimed properties. □

Now we recall the construction and the elementary properties of the stochastic integral with respect to a cylindrical martingale with quadratic variation in the integral form.

Proposition 2.6.1.3 (stochastic integral). Suppose that $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ is a filtered probability space, H is a Hilbert space, $(N(h) : h \in H)$ is a family of local martingales starting from zero such that $\mathbb{P}[aN_t(h_1) + N_t(h_2) = N_t(ah_1 + h_2)] = 1$, $a \in \mathbb{R}$, $h_1 \in H$, $h_2 \in H$ and $t \geq 0$, $\int \|c^* h\|_{U_0}^2 \, ds$ is the quadratic variation process of $N(h)$, $h \in H$ where c is a progressively measurable process in $L(U_0, H)$ such that $\mathbb{P}[\int_0^t \|c(s)\|_{L(U_0,H)}^2 \, ds < \infty] = 1$ for every $t \geq 0$. Let $(\psi(t) : t \geq 0)$ be a progressively measurable H-valued process such that

$$\mathbb{P}\left[\int_0^t \|c_s^*(\psi_s)\|_{U_0}^2 \, ds < \infty\right] = 1 \qquad \text{for every} \quad t \geq 0.$$

Then the stochastic integral $\int \psi \, dN$ is a real local martingale.

Indication of the proof: Fix an orthonormal basis $(k_n : n \in \mathbb{N})$ in H and suppose that ψ is uniformly bounded. Then we define

$$\int \psi \, dN = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int \langle \psi, h_k \rangle \, dN(h_k)$$

where the sum is taken in $C[0,\infty)$ and converges in probability due to Proposition 2.6.1.1. For ψ general, define

$$\int \psi \, dN = \lim_{n\to\infty} \int I_{[\|\psi\|_X \le n]} \psi \, dN.$$

□

Remark 2.6.1.4. Let, in addition, ϕ be another progressively measurable H-valued process such that $\int_0^t \|c_s^*(\phi_s)\|_{U_0}^2 < \infty$ for every $t \ge 0$. Then the cross-variation process satisfies

$$\left\langle \int \psi \, dN, \int \phi \, dN \right\rangle (t) = \int_0^t \langle c^*(\psi), c^*(\phi) \rangle_{U_0} \, ds$$

for every $t \ge 0$.

The following remark can be easily proved using Proposition 2.6.1.1:

Remark 2.6.1.5. Let, in addition, K be a separable Hilbert space and ψ a progressively measurable process in $L(H,K)$ such that $\mathbb{P}[\int_0^t \|\psi c\|_{L(U_0,K)}^2 \, ds < \infty] = 1$ for every $t \ge 0$. Then $L(k) = \int \psi^* k \, dN$, $k \in K$ is a family of local martingales, and if ϕ is a progressively measurable process in K such that $\mathbb{P}[\int_0^t \|c^* \psi^* \phi\|_{U_0)}^2 \, ds < \infty] = 1$ for every $t \ge 0$ then

$$\int \phi \, dL = \int \psi^* \phi \, dN.$$

The Borel functional calculus will enter into the proof of Theorem 2.1.2. Here we point out one of its important features:

Proposition 2.6.1.6. Let us denote $L_s(U)$ the space of linear bounded symmetric operators on U equipped by the σ-algebra inherited from $L(U)$ (i.e. the σ-algebra generated by the mappings $B \mapsto Bu$ for every $u \in U$), and consider the Borel functional calculus on $L_s(U)$. Then the mapping $L_s(U) \to L_s(U) : B \mapsto f(B)$ is measurable for every locally bounded measurable function f.

Indication of the proof: The Borel functional calculus is given by the finite signed measures $\mu_{x,y}^B$ with the support in the spectrum of B, for $x \in X$, $y \in X$ and $B \in L_s(U)$ where

$$\langle f(B)x, y \rangle_X = \int_{-\infty}^{+\infty} f \, d\mu_{x,y}^B$$

for every locally bounded Borel measurable function f. The mapping $B \mapsto f(B)$ is measurable by definition for $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$ since then $f(B) = B^n$ and the rest follows by density of polynomials in $L^1(\sigma(B), \mu_{x,y}^B)$. □

Remark 2.6.1.7. Let $B \in L(U,H)$ where H is a Hilbert space and let f be a locally bounded Borel function. Then $Bf(B^*B)B^* = f_0(BB^*)$ where $f_0(t) = tf(t)$. Consequently, $f(B^*B) = 0$ provided B is injective.

Proof of Theorem 2.1.2: We consider the extension of M from Corollary 2.6.1.2.

Step 1. Let us first suppose that $X = X^*$ is a Hilbert space, the covariance operator Q is the identity operator on $U = U_0$ and there exists a cylindrical Wiener process $\overline{W}$ with identity covariance operator on U, independent of M. Further, decompose the interval $(0,\infty)$ into Borel sets $B_1, B_2, \dots$ such that each of them has a positive distance from the origin, and define the functions $\psi_i(t) = t^{-1}$ for $t \in B_i$ and $\psi_i(t) = 0$ for $t \in [0,\infty) \setminus B_i$, $i \in \mathbb{N}$, and $\psi_0(t) = 1$ for $t = 0$ and $\psi_0(t) = 0$ for $t > 0$. Let us also denote $C_i = I_{B_i}$, $i \in \mathbb{N}$, and $C_0 = \psi_0$. The process $(t,\omega) \mapsto g^*(t,\omega)g(t,\omega)$ is progressively measurable in $L(U)$ and takes values in the subspace of the symmetric operators. So we have, using the Borel functional calculus (Prop. 2.6.1.6), the $L(U)$-valued progressively measurable processes

$$(t,\omega) \mapsto \psi_i(g^*(t,\omega)g(t,\omega)), \quad (t,\omega) \mapsto C_i(g^*(t,\omega)g(t,\omega)), \quad i \geq 0.$$

The processes

$$W_i(u) = \int g\psi_i(g^*g)(u)\, dM, \quad i = 1,2,\dots \quad W_0(u) = \int \psi_0(g^*g)(u)\, \overline{W}$$

are real local martingales for every $u \in U$ by Proposition 2.6.1.3, and the cross-variation processes $\langle W_i(u_1), W_j(u_2)\rangle = 0$ for every $u_1 \in U$, $u_2 \in U$ and $0 \leq i < j$ since $g^*g\psi_j(g^*g) = C_j(g^*g)$ and $C_i(g^*g)C_j(g^*g) = 0$, and $\langle W_i(u)\rangle = \int \|C_i(g^*g)(u)\|_U^2\, ds$ for every $u \in U$ and $i \geq 0$ by Remark 2.6.1.4. Now

$$\sum_{i=0}^{\infty} \langle W_i(u)\rangle(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^t \|C_i(g^*g)(u)\|_U^2\, ds = \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^t \langle C_i(g^*g)(u), u\rangle_U\, ds =$$

$$= \int_0^t \langle u,u\rangle_U\, ds = t\|u\|_U^2$$

so $W(u) = \sum_{i=0}^{\infty} W_i(u)$ is convergent in $C[0,\infty)$ in probability for every $u \in U$ by Proposition 2.6.1.1, and $W = (W(u) : u \in U)$ is a cylindrical Wiener process on U with the identity covariance operator. On the other hand, to show that $M(h) = \int \langle h, g\cdot\rangle\, dW$ for every $h \in X^*$, it is obviously sufficient to verify that $\int \|g^*h\|_U^2\, ds$ is the cross-variation of $M(h)$ and $\int \langle h, g\cdot\rangle\, dW$. To carry out this, recalling Remark 2.6.1.5, we get that

$$\left\langle \int g^*h\, dW_i, M(h) \right\rangle = \left\langle \int g\psi_i(g^*g)g^*h\, dM, \int h\, dM \right\rangle =$$

$$= \int \langle g^*g\psi_i(g^*g)g^*h, g^*h\rangle_U\, ds$$

for $i = 1, 2, \dots$ by Remark 2.6.1.4, and

$$\left\langle \int g^* h \, dW_0, M(h) \right\rangle = \left\langle \int \psi_0(g^* g) g^* h \, d\overline{W}, M(h) \right\rangle = 0.$$

Since

$$\left\langle \sum_{i=0}^{N} \int g^* h \, dW_i - \int g^* h \, dW \right\rangle (t)$$

converges to zero for every $t \geq 0$ we arrive at

$$\left\langle \int \langle h, g\cdot \rangle \, dW, M(h) \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \int \langle C_i(g^* g) g^* h, g^* h \rangle_U \, ds =$$

$$= \int \|g^* h\|_U^2 \, ds - \int \langle C_0(g^* g) g^* h, g^* h \rangle_U \, ds$$

but $\langle C_0(g^* g) g^* h, g^* h \rangle_U = \langle g C_0(g^* g) g^* h, h \rangle_X = \langle C(gg^*) h, h \rangle_X = 0$ where $C(t) = tC_0(t) = 0$ by Remark 2.6.1.7.

Step 2. If the process g is injective $dt \otimes \mathbb{P}$-almost surely then we do not need the process $\overline{W}$ since then $C_0 = 0$ by Remark 2.6.1.7.

Step 3. If X is still a Hilbert space but the covariance operator Q is general then we consider $Q^{1/2}$, the square root of Q in $L(U)$, and K the orthogonal complement of $\operatorname{Ker} Q^{1/2}$ in U considered with the norm of U. The operator $gQ^{1/2}$ belongs to $L(K, X)$ and $\|g^* h\|_{U_0} = \|(gQ^{1/2})^* h\|_K$ for every $h \in X$ since $Q^{1/2} : K \to U_0$ is an isometry. Moreover, g is injective if and only if $gQ^{1/2}$ is. Applying the above result we get that

$$M(h) = \int \left\langle h, gQ^{1/2} \cdot \right\rangle d\widetilde{W} = \int \langle h, g\cdot \rangle \, dW, \qquad h \in X$$

for some cylindrical Wiener process $\widetilde{W}$ with the identity covariance on K. Finally, $W(u) = \widetilde{W}(Q^{1/2} u)$, $u \in U$ is the Q-Wiener process on U.

Step 4. Let X be a separable reflexive space. Chose some subset $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ of the unit sphere of X^* which separates points of X and define H as the completion of X in the norm $\|x\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |\langle x_n^*, x \rangle|^2$. Then the inclusion $j : X \to H$ is continuous and we apply the previous result on the processes $N(h) = M(j^* h)$, $h \in H$. The quadratic variation of $N(h)$ is then $\int \|(jg)^* h\|_{U_0}^2 \, ds$ and so there exists a Q-Wiener process W such that

$$M(j^* h) = N(h) = \int \langle h, jg\cdot \rangle \, dW = \int \langle j^* h, g\cdot \rangle \, dW, \qquad h \in H.$$

Consequently

$$M(x^*) = \int \langle x^*, g\cdot \rangle \, dW, \qquad x^* \in \operatorname{Rng} j^* \tag{2.6.1.1}$$

but $\operatorname{Rng} j^*$ is norm dense in X^* and so (2.6.1.1) holds for every $x^* \in X^*$. □

2.6.2 PROOF OF THEOREM 2.3.2

We will need the following Lemma which is a modification of Proposition 4.6, p. 315 in [7]:

Lemma 2.6.2.1. Let $0 \leq a < \infty$ and let $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ be a filtered probability space with a real continuous adapted process π and real progressively measurable processes b_1 and b_2 with locally integrable paths. Moreover suppose that the processes

$$M(t) = \pi(t) - \pi(a) - \int_a^t b_1(s)\, ds$$

and

$$Z(t) = \pi^2(t) - \pi^2(a) - 2\int_a^t \pi(s) b_1(s)\, ds - \int_a^t b_2(s)\, ds$$

are local martingales. Then

$$t \mapsto \int_a^t b_2(s)\, ds$$

is the quadratic variation of M.

Proof: The process π is a semimartingale so

$$\pi^2(t) = \pi^2(a) + 2\int_a^t \pi(s) b_1(s)\, ds + 2\int_a^t \pi(s)\, dM(s) + \langle M \rangle (t)$$

by Ito's formula. But then

$$Z(t) - \int_a^t \pi(s)\, dM(s) = \langle M \rangle (t) - \int_a^t b_2(s)\, ds.$$

The left hand side is a local martingale while the right hand side a process of bounded variation. Hence it is null everywhere. □

Proof of Theorem 2.3.2 1°: First we see that

$$\mathfrak{Law}_{\overline{\mathbb{P}}}\left(e^{-1}\pi_{r_i} : i \leq k\right) = \mathfrak{Law}_{\mathbb{P}}\left(u(r_i \vee a) : i \leq k\right) \tag{2.6.2.1}$$

for every $r_1, \ldots, r_k$ in $[0, \infty)$ so $\overline{\mathbb{P}}(M_a) = 1$ by (2.2.2) and $\overline{\mathbb{P}}[\pi_t \in \operatorname{Rng} e] = \mathbb{P}[\vec{u}(t) \in \operatorname{Rng} e] = 1$ for every $t \geq a$. Fix $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^2(\mathbb{R})$ and define the auxiliary process

$$\begin{aligned} Y(t) = f(\langle h_n, u(t)\rangle) - f(\langle h_n, u(a)\rangle) - \\ - \int_a^t \dot{f}(\langle h_n, u(s)\rangle)\left(\langle A^* h_n, u(s)\rangle + \langle h_n, F(s, u(s))\rangle\right) ds - \\ - \frac{1}{2}\int_a^t \ddot{f}(\langle h_n, u(s)\rangle)\, \|G^*(s, u(s)) h_n\|_{U_0}^2, \qquad t \geq a. \end{aligned}$$

Then

$$Y(t) = \int_a^t \dot{f}(\langle h_n, u(s)\rangle)\, \langle h_n, G(s,u(s))\cdot\rangle\, dW, \qquad t \geq a$$

by Ito's formula and

$$\mathfrak{Law}_{\overline{\mathbb{P}}}\left(e^{-1}\pi_{r_i}, L_n(f)(t_j) : i \leq k, j \leq k\right) = \mathfrak{Law}_{\mathbb{P}}\left(u(r_i \vee a), Y(t_j) : i \leq k, j \leq k\right)$$

for every $r_1, \ldots, r_k$ in $[0,\infty)$ and every $t_1, \ldots, t_k$ in $[a,\infty)$ by (2.6.2.1). The mapping τ_m in (2.3.1) is upper-semicontinuous from $C([a,\infty))$ to $[a,\infty]$ and so

$$\mathrm{stop} : C[a,\infty) \to C[a,\infty) : f \mapsto (f(t \wedge \tau_m(f)) : t \geq a)$$

is Borel measurable. Consequently,

$$\mathfrak{Law}_{\overline{\mathbb{P}}}\left(e^{-1}\pi_{r_i}, L_{nm}(f)(t_j) : i \leq k, j \leq k\right) =$$

$$= \mathfrak{Law}_{\mathbb{P}}\left(u(r_i \vee a), \mathrm{stop}\, Y(t_j) : i \leq k, j \leq k\right)$$

for every $r_1, \ldots, r_k$ in $[0,\infty)$ and every $t_1, \ldots, t_k$ in $[a,\infty)$, and so

$$\mathfrak{Law}_{\overline{\mathbb{P}}}\left(\pi_{r_i}, L_{nm}(f)(t_j) : i \leq k, j = 1,2\right) =$$

$$= \mathfrak{Law}_{\mathbb{P}}\left(\vec{u}(r_i \vee a), \mathrm{stop}\, Y(t_j) : i \leq k, j = 1,2\right)$$

for every $r_1, \ldots, r_k$ in $[0,\infty)$ and some $a \leq t_1 < t_2$, whence $L_{nm}(f)$ is a martingale on $[a,\infty)$ with respect to the $\overline{\mathbb{P}}$-augmentation of the filtration $(\mathcal{F}_t)$.

Proof of Theorem 2.3.2 2°: Let B be a countable set of $C^\infty(\mathbb{R})$-functions with compact support such that it contains functions $f_k^1(t) = t = f^1(t)$ and $f_k^2(t) = t^2 = f^2(t)$ for $|t| \leq k$, $k \in \mathbb{N}$, and let $\overline{\mathbb{P}}$ be the assumed probability measure on $\overline{\mathcal{F}}$ in 2° for the set B that we have just specified. Let also $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t), \widetilde{\mathbb{P}})$ be a filtered probability space with countably many independent real Brownian motions $(\beta^k : k \in \mathbb{N})$ and define $\Omega = \overline{\Omega} \times \widetilde{\Omega}$, $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}} \otimes \widetilde{\mathcal{F}}$, $\mathbb{P} = \overline{\mathbb{P}} \otimes \widetilde{\mathbb{P}}$ and $\mathcal{F}_t$ the $\mathbb{P}$-augmentation of the filtration $(\overline{\mathcal{F}}_{a,t\vee a} \otimes \widetilde{\mathcal{F}}_t)$ in $\mathcal{F}$. Now fix $n \in \mathbb{N}$ and $m \in \mathbb{N}$. Then $L_{nm}(f_k^i)$ are bounded martingales on $[a,\infty)$ for $\overline{\mathbb{P}}$ with respect to the $\overline{\mathbb{P}}$-augmentation of the filtration $(\overline{\mathcal{F}}_{a,t})$, for $k \in \mathbb{N}$, $i = 1,2$ and so are the killed processes

$$(t, \overline{\omega}) \mapsto L_{nm}(f_k^i)(t \wedge \tau_k(\pi^n(\cdot, \overline{\omega})), \overline{\omega})$$

where τ_k was defined in (2.3.1). But

$$L_{nm}(f_k^i)(t \wedge \tau_k(\pi^n(\cdot,\overline{\omega})), \overline{\omega}) = L_{nm}(f^i)(t \wedge \tau_k(\pi^n(\cdot,\overline{\omega})), \overline{\omega})$$

and $\tau_k(\pi^n(\cdot,\overline{\omega})) \to \infty$ so the processes $L_{nm}(f^i)$, $i = 1,2$ are bounded martingales on $[a,\infty)$ as well, therefore $L_n(f^i)$, $i = 1,2$ are local martingales on $[a,\infty)$. Define $M(h_n) = L_n(f^1)$ and $Z_n(t) = L_n(f^2)$. Then

$$\langle M(h_n)\rangle(t) = \int_a^t \left\|G^*(s, e^{-1}\pi(s))h_n\right\|_{U_0}^2 ds$$

by Lemma 2.6.2.1. Now, whenever $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ and q is a rational number, there exists $l \in \mathbb{N}$ such that $qh_n + h_m = h_l$ as $D = \{h_j : j \in \mathbb{N}\}$ was supposed to be additive and rationally homogeneous. Having the choice of m, n, l and q, we have, by assumptions, that $\overline{\mathbb{P}}[\pi(t) \in \operatorname{Rng} e]$ for almost every $t \geq a$. In particular, $\langle h_k, e^{-1}\pi(r)\rangle = \pi^k(r)$ almost surely for every $k \in \mathbb{N}$ and some dense countable set $r \geq a$. Apparently, $q\pi^n(t) + \pi^m(t) = \pi^l(t)$ for every $t \geq a$ almost everywhere by continuity of the processes. Consequently, $\overline{\mathbb{P}}[M_t(qh + k) = qM_t(h) + M_t(k)] = 1$ for every $t \geq a$, $q \in \mathbb{Q}$, $h \in D$ and $k \in D$, and

$$\langle M(h)\rangle(t) = \int_a^t \left\|G^*(s, e^{-1}\pi(s))h\right\|_{U_0}^2 \, ds$$

for every $h \in D$. We are ready to extend the objects onto the product space Ω. To this end, define the processes $N(h)(t, \overline{\omega}, \widetilde{\omega}) = M(h)(t \vee a, \overline{\omega})$, $\Pi(t, \overline{\omega}, \widetilde{\omega}) = \pi(t, \overline{\omega})$ and $w_k(t, \overline{\omega}, \widetilde{\omega}) = \beta_k(t, \widetilde{\omega})$ for $t \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$ and $(\overline{\omega}, \widetilde{\omega}) \in \Omega$. The process N inherits the linearity of M, $N(h)$ is a local martingale on $[0, \infty)$ for the filtration $(\mathcal{F}_t)$ and

$$\langle N(h)\rangle(t) = \int_0^t \left\|I_{[a,\infty)}(s)G^*(s, e^{-1}\Pi(s))h\right\|_{U_0}^2 \, ds.$$

The processes $(w_k : k \in \mathbb{N})$ are independent $(\mathcal{F}_t)$-Wiener processes independent of $\sigma(N(h) : h \in D)$, so we can apply Theorem 2.1.2 obtaining a Q-$(\mathcal{F}_t)$-Wiener process W such that

$$N_t(h) = \int_0^t \left\langle h, I_{[a,\infty)}G(s, e^{-1}\Pi(s))\cdot\right\rangle dW, \qquad h \in D,$$

or equivalently

$$\left\langle e^{-1}\Pi(t), h\right\rangle = \left\langle e^{-1}\Pi(a), h\right\rangle + \int_a^t \left(\left\langle A^*h, e^{-1}\Pi(s)\right\rangle + \left\langle h, F(s, e^{-1}\Pi(s))\right\rangle\right) ds +$$

$$+ \int_a^t \left\langle h, G(s, e^{-1}\Pi(s))\cdot\right\rangle dW$$

for every $h \in D$, $t = a$ and almost every $t \geq a$ as $\mathbb{P}[\Pi(t) \in \operatorname{Rng} e] = 1$ for $t = a$ and almost every $t \geq a$. If we define the $(\mathcal{F}_t)$-predictable process

$$u(t) = S_{t-a}e^{-1}\Pi(a) + \int_a^t S_{t-s}F(s, e^{-1}\Pi(s))\, ds + \int_a^t S_{t-s}G(s, e^{-1}\Pi(s))\, dW$$

for $t \geq a$ then

$$\langle u(t), h\rangle = \langle e^{-1}\Pi(a), h\rangle + \int_a^t \left(\langle A^*h, e^{-1}\Pi(s)\rangle + \langle h, F(s, e^{-1}\Pi(s))\rangle\right) ds +$$

$$+ \int_a^t \langle h, G(s, e^{-1}\Pi(s))\cdot\rangle \, dW$$

for every every $t \geq a$ and every $h \in D$ by the theorem of Chojnowska-Michalik (Thm 1.12 and Thm 1.13 in Chapter 1), so $\mathbb{P}[e^{-1}\Pi(t) = u(t)] = 1$ for $t = a$ and almost every $t \geq a$. Consequently,

$$u(t) = S_{t-a}u(a) + \int_a^t S_{t-s}F(s, u(s))\, ds + \int_a^t S_{t-s}G(s, u(s))\, dW$$

and $\mathbb{P}[\Pi(t) = \vec{u}(t)] = 1$ for every $t \geq a$ by continuity of Π and $\vec{u}$. □

2.6.3 PROOFS OF THEOREM 2.4.4 AND THEOREM 2.4.5

Lemma 2.6.3.1. Let O be a Borel subset of X and let the equation (2.2.1) be $(0, x)$-well-posed for every $x \in O$ (Def. 2.4.3). Then the mapping $O \to \mathbb{M} : x \mapsto P^{0,x}$ is Borel measurable.

Proof: The mapping

$$\mathbb{M} \to \mathbb{R} : \mu \mapsto \int_{\overline{\Omega}} \varphi \, d\mu$$

is Borel measurable for every bounded or $[0, \infty]$-valued measurable function $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$,

$$K = M_0 \cap [\pi_0 \in \operatorname{Rng} e] \cap \left\{\omega \in \overline{\Omega} : dt\,\{s \in [0, \infty) : \pi_s(\omega) \notin \operatorname{Rng} e\} = 0\right\}$$

is a Borel set since the third set is measurable by Fubini's theorem. Further let V_1 be the set of all those measures μ for which

$$\int_C L_{nm}(f)(t)\, d\mu = \int_C L_{nm}(f)(s)\, d\mu$$

for every C in some countable subset generating $\overline{\mathcal{F}}_s$ for every $0 \leq s < t$ in $\mathbb{Q}$, every $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ and $f \in B$ where B is the countable subset of $C^2(\mathbb{R})$ introduced in Theorem 2.3.2 2°. Then V_1 is a Borel set and $V_2 = \{\mu : \mu(K) = 1\} \cap V_1$ is the Borel set of all probability measures μ which satisfy

$$\mu(M_0) = \mu[\pi_0 \in \operatorname{Rng} e] = \mu[\pi_t \in \operatorname{Rng} e] = 1$$

for almost every $t \geq 0$, and render the bounded processes $L_{nm}(f)$ martingales with respect to the μ-augmentation of the filtration $(\overline{\mathcal{F}}_t)$ for every $f \in B$. Now

$$X \xrightarrow{e} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{j} \mathbb{M}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) \xleftarrow{i} \mathbb{M}$$

where e was defined in Def. 2.2.1, $j : y \mapsto \delta_y$ is a homeomorphism, and $i : \mu \mapsto \mathfrak{Law}_\mu(\pi_0)$ is continuous. By this scheme we get that

$$V_3 = i^{-1}[j[e[O]]] = \{\mu : \text{ there exists } x \in O \text{ such that } \mu[\pi_0 = \vec{x}] = 1\}$$

is a Borel set by Prop. 2.2.2. Consequently,

$$V = V_2 \cap V_3 = \{\mu \in V_2 : \text{ there exists } x \in O \text{ such that } \mu[e^{-1}\pi_0 = x] = 1\}$$

is a Borel set and the mapping i is injective on V. Indeed. Let μ_1 and μ_2 be two elements of V such that $i(\mu_1) = i(\mu_2) = \delta_{\vec{x}}$ for some $x \in O$. Then there exist two solutions $(\Omega^k, \mathcal{F}^k, (\mathcal{F}_t^k), \mathbb{P}^k, W^k, u^k)$, $k = 1, 2$ of the equation (2.2.1) on $[0, \infty)$ such that $\mathfrak{Law}_{\mathbb{P}^k}\left(e(u^k)\right) = \mu_k$ for $k = 1, 2$ on $\overline{\mathcal{F}}$ by Theorem 2.3.2 2°. But then $\mathbb{P}^k[u^k(0) = x] = 1$ for $k = 1, 2$ and so, by $(0, x)$-uniqueness, we get that $\mu_1 = \mu_2$. Therefore $i : V \to \mathbb{M}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ is a continuous injection and so is the mapping $j^{-1}i : V \to e[O]$. In fact, $j^{-1}i$ is a bijection from V to $e[O]$ by Theorem 2.3.2 1° due to the well-posedness of the equation (2.2.1) on O. In particular, $j^{-1}i[C]$ is a Borel set in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ for every Borel subset C of V by chap. 3, par 39, sect. IV, p. 487 in [11] and so $i^{-1}j : e[O] \to \mathbb{M}$ is Borel measurable. Eventually, $i^{-1}je : O \to \mathbb{M}$ is Borel measurable. □

Proof of Theorem 2.4.4. Fix $y \geq -a$ and consider the shift operator θ_y (Def. 2.4.1).

Step 1: Let μ be a probability measure on $\overline{\mathcal{F}}$ such that $\mu(M_{a+y}) = \mu[\pi_s \in \operatorname{Rng} e] = 1$ for every $s \in [a+y, \infty)$ and let the processes $L_{nm}^{a+y}(f)$ be martingales on $[a+y, \infty)$ under μ with respect to the μ-augmentation of the filtration $(\overline{\mathcal{F}}_{a+y,t})$ for every $f \in C^2(\mathbb{R})$. Then $\theta_y^{-1}[M_a] = M_{a+y}$ and $L_{nm}^{a+y}(t+y, \omega) = L_{nm}^a(f)(t, \theta_y(\omega))$ for every $\omega \in M_{a+y}$ and $t \geq a$ since the coefficients J, F and G do not depend on time. If we define $\nu = \mathfrak{Law}_\mu(\theta_y)$ then $\nu(M_a) = \mu(\theta_y^{-1}[M_a]) = \mu(M_{a+y}) = 1$, $\nu[\pi_s \in \operatorname{Rng} e] = \mu[\pi_{s+y} \in \operatorname{Rng} e] = 1$ for every $s \in [a, \infty)$. Further

$$\int_{\overline{\Omega}} I_{\Gamma_1}(\pi_{s_1}(\omega)) \dots I_{\Gamma_k}(\pi_{s_1}(\omega)) L_{nm}^a(f)(t, \omega)\, d\nu =$$

$$= \int_{\overline{\Omega}} I_{\Gamma_1}(\pi_{s_1+y}(\omega)) \dots I_{\Gamma_k}(\pi_{s_1+y}(\omega)) L_{nm}^a(f)(t, \theta_y(\omega))\, d\mu =$$

$$= \int_{\overline{\Omega}} I_{\Gamma_1}(\pi_{s_1+y}(\omega)) \dots I_{\Gamma_k}(\pi_{s_1+y}(\omega)) L_{nm}^{a+y}(f)(t+y, \omega)\, d\mu$$

for every $s_1, \dots, s_k$ and t in $[a, \infty)$, and $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ in $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Whence the processes $L_{nm}^a(f)$ are martingales on $[a, \infty)$ under ν with respect to the ν-augmentation of the filtration $(\overline{\mathcal{F}}_{a,t})$ for every $f \in C^2(\mathbb{R})$.

Step 2: Let $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), W, u)$ be a solution of the equation (2.2.1) on $[a+y, \infty)$ with $\mathbb{P}[u(a+y) = x] = 1$ and denote μ the law of the process $t \mapsto \vec{u}(t \vee (a+y))$. Then μ satisfies the assumptions of Step 1 by Theorem 2.3.2 1°. Applying Theorem 2.3.2 2° on ν we get a solution $(\Omega^1, \mathcal{F}^1, (\mathcal{F}^1_t), W^1, u^1)$ of the equation (2.2.1) on $[a, \infty)$ with $\mathbb{P}^1[u^1(a) = x] = 1$.

Step 3: Let the equation (2.2.1) be (a, x)-unique in law. Let $(\Omega^k, \mathcal{F}^k, (\mathcal{F}^k_t), W^k, u^k)$, $k = 1, 2$ be two solutions of the equation (2.2.1) on $[a+y, \infty)$ with $\mathbb{P}^k[u^k(a+y) = x] = 1$, $k = 1, 2$ and denote μ^k the law of the process $t \mapsto \vec{u}^k(t \vee (a+y))$, $k = 1, 2$. Then μ^k satisfy the assumptions of Step 1 by Theorem 2.3.2 1°. Applying Theorem 2.3.2 2° on ν^k we get two solution $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, (\mathcal{F}_{kt}), W_k, u_k)$, $k = 1, 2$ of the equation (2.2.1) on $[a, \infty)$ such that ν^k coincides with the law of the process $t \mapsto \vec{u}_k(t \vee a)$ on $\overline{\mathcal{F}}_{a,\infty}$ for $k = 1, 2$. In particular, $\mathbb{P}_k[u_k(a) = x] = 1$ for $k = 1, 2$, and so, by (a, x)-uniqueness in law, $\nu^1 = \nu^2$ on $\overline{\mathcal{F}}_{a,\infty}$. Consequently, $\mu^1 = \mu^2$ on $\overline{\mathcal{F}}_{a+y,\infty}$. Whence $(a+y, x)$-uniqueness in law.

Step 4: Let the equation (2.2.1) be $(0, x)$-well-posed for every $x \in O$. Then $O \to \mathbb{M} : x \mapsto P^{0,x}$ is Borel measurable by Lemma 2.6.3.1. Moreover, $P^{a,x} = \mathfrak{Law}_{P^{0,x}}(\theta_{-a})$ by Step 2. Whence $[0, \infty) \times O \to \mathbb{M} : x \mapsto P^{a,x}$ is Borel measurable. Indeed. The mapping $\theta : \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ is jointly measurable. Consider a continuous bounded function φ on $\overline{\Omega}$. Then the mapping

$$(a, x) \mapsto \int\limits_{\overline{\Omega}} \varphi \, dP^{a,x} = \int\limits_{\overline{\Omega}} \varphi \circ \theta_{-a} \, dP^{0,x}$$

is continuous in a for fixed x, and measurable in x for fixed a. The joint measurability of such a function then follows, for instance, from Caratheodory's conditions. □

Let us consider the following auxiliary equation:

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt}(t) = \widetilde{A}\widetilde{u}(t) + \widetilde{F}(\widetilde{u}(t)) + \widetilde{G}(\widetilde{u}(t))\dot{W} \tag{2.6.3.1}$$

on the space $\widetilde{X} = \mathbb{R} \times X$ with a complete separable 2-smooth norm

$$\left\| \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\|^2_{\widetilde{X}} = |u_1|^2 + \|u_2\|^2_X, \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \widetilde{X},$$

the C_0-semigroup

$$\widetilde{S}_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ S_t u_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \widetilde{X}, \quad t \geq 0$$

with the infinitesimal generator

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Dom}(\widetilde{A}) = \mathbb{R} \times D(A),$$

the nonlinearities

$$\widetilde{F}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ F(u_1^+, u_2) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \widetilde{X}$$

$$\widetilde{G}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ G(u_1^+, u_2)\xi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \widetilde{X}, \quad \xi \in U_0,$$

and the function

$$\widetilde{J}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = |u_1| + J(u_1^+, u_2), \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \widetilde{X}.$$

Solutions of the equation (2.6.3.1) are characterized by the following Lemma where we write (u_1, u_2) instead of the vertical vector notation:

Lemma 2.6.3.2. Let $a \geq 0$, $x \in X$ and $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W)$ a filtered probability space with a Q-$(\mathcal{F}_t)$-Wiener process W. Let also (u_1, u_2) be a progressively measurable $\widetilde{X}$-valued process on $[a, \infty)$ with $\mathbb{P}[u_1(a) = a] = 1$ and $\mathbb{P}[u_2(a) = x] = 1$. Then $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, (u_1, u_2))$ is a solution of (2.6.3.1) on $[a, \infty)$ if and only if

▷ $\mathbb{P}[u_1(t) = t] = 1$ for every $t \geq a$.
▷ $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, u_2)$ is a solution of (2.2.1) on $[a, \infty)$.

Moreover, the equation (2.6.3.1) is $(a, (a, x))$-unique in law if and only if the equation (2.2.1) is (a, x)-unique in law.

Corollary 2.6.3.3. Let $a \geq 0$ and $x \in X$. Then the equation (2.6.3.1) is $(a, (a, x))$-well-posed if and only if the equation (2.2.1) is (a, x)-well-posed.

Proof of Theorem 2.4.5. The equation (2.6.3.1) is $(r, (a, x))$-well-posed for every $r \geq 0$ and $(a, x) \in E$ by Corollary 2.6.3.3. Thus. Denote $\tilde{e} : \widetilde{X} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ an embedding for the setting of the equation (2.6.3.1) as in Def. 2.2.1, and, provided $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, \widetilde{u} = (u_1, u_2))$ is a solution of the equation (2.6.3.1) on $[a, \infty)$ with $\mathbb{P}[\widetilde{u}(a) = (a, x)] = 1$, denote $P^{a,(a,x)}$ the law of the process $t \mapsto \tilde{e}(\widetilde{u}(t \vee r))$ on $\overline{\Omega}$ as in Def. 2.4.3. The mapping $E \to \mathbb{M} : (a, x) \mapsto P^{a,(a,x)}$ is Borel measurable by Theorem 2.4.4. But

$$P^{a,x}[\pi_{t_1} \in \Gamma_1, \ldots, \pi_{t_k} \in \Gamma_k] = \mathbb{P}\left[u_2(t_1 \vee a) \in e^{-1}[\Gamma_1], \ldots, u_2(t_k \vee a) \in e^{-1}[\Gamma_k]\right] =$$

$$= \mathbb{P}\left[\widetilde{u}(t_1 \vee a) \in \mathbb{R} \times e^{-1}[\Gamma_1], \ldots, \widetilde{u}_2(t_k \vee a) \in \mathbb{R} \times e^{-1}[\Gamma_k]\right] =$$

$$= \mathbb{P}\left[\tilde{e}(\widetilde{u}(t_1 \vee a)) \in \tilde{e}\left[\mathbb{R} \times e^{-1}[\Gamma_1]\right], \ldots, \tilde{e}(\widetilde{u}_2(t_k \vee a)) \in \tilde{e}\left[\mathbb{R} \times e^{-1}[\Gamma_k]\right]\right] =$$

$$= P^{a,(a,x)}\left[\pi_{t_1} \in \tilde{e}\left[\mathbb{R} \times e^{-1}[\Gamma_1]\right], \ldots, \pi_{t_k} \in \tilde{e}\left[\mathbb{R} \times e^{-1}[\Gamma_k]\right]\right]$$

holds for every $t_1, \ldots, t_k$ in $[0, \infty)$ and $\Gamma_1, \ldots \Gamma_k$ in $\mathbb{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ by Lemma 2.6.3.2. Whence $E \to \mathbb{M} : (a, x) \mapsto P^{a,x}$ is Borel measurable. □

2.6.4 PROOF OF THEOREM 2.4.6

Step 1:

First we realize that $P(M_a) = P[\pi_s \in \operatorname{Rng} e] = 1$ for every $s \geq a$ and the processes $L^a_{nm}(f)$, $f \in C^2(\mathbb{R})$ are martingales on $[a, \infty)$ under P with respect to the P-augmentation of the filtration $(\overline{\mathcal{F}}_t)$ by Theorem 2.3.2 1°. Now let $a \leq s \leq t$ and $C \in \overline{\mathcal{F}}_s$ be arbitrary. We have

$$\int\limits_{C_1 \cap [\tau \leq s]} \left(\int\limits_C L^a_{nm}(f)(t)\, dr(\omega) \right) dP(\omega) = \int\limits_{C \cap C_1 \cap [\tau \leq s]} L^a_{nm}(f)(t)\, dP(\omega) =$$

$$= \int\limits_{C \cap C_1 \cap [\tau \leq s]} L^a_{nm}(f)(s)\, dP(\omega) = \int\limits_{C_1 \cap [\tau \leq s]} \left(\int\limits_C L^a_{nm}(f)(s)\, dr(\omega) \right) dP(\omega)$$

for every $C_1 \in \mathcal{G}_\tau$ since $C_1 \cap [\tau \leq s] \in \mathcal{G}_s \cap \mathcal{G}_\tau$, $\mathcal{G}_s \subseteq \overline{\mathcal{F}}^P_s$ and the martingale property of $L^a_{nm}(f)$. In particular

$$I_{[\tau \leq s]}(\omega) \int\limits_C L^a_{nm}(f)(t)\, dr(\omega) = I_{[\tau \leq s]}(\omega) \int\limits_C L^a_{nm}(f)(s)\, dr(\omega) \tag{2.6.4.1}$$

P-almost everywhere.

Step 2:

Considering the countable set B from Theorem 2.3.2 2° and the fact that every $\overline{\mathcal{F}}_s$ is generated by some countable algebra $\mathcal{A}_s$, we can find a set $N_1 \in \mathcal{G}_\tau$, $P(N_1) = 1$ such that (2.6.4.1) holds for every $C \in \mathcal{A}_s$, $f \in B$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $\omega \in N_1$ and $s \leq t$ in $[a, \infty) \cap \mathbb{Q}$. We can suppose as well that $r(\omega, M_a) = 1$ for every $\omega \in N_1$ since $P(M_a) = 1$. Now we see that, given $\omega \in N_1$,

$$\int\limits_C L^a_{nm}(f)(t)\, dr(\omega) = \int\limits_C L^a_{nm}(f)(s)\, dr(\omega)$$

holds for every $\tau(\omega) \leq s < t$, $C \in \overline{\mathcal{F}}_s$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ and $f \in B$ by the continuity of the processes $L^a_{nm}(f)$. Moreover, $L^a_{nm}(f)$ are adapted to the $r(\omega)$-augmentation of the filtration $(\overline{\mathcal{F}}_{a,t})$ since $r(\omega, M_a) = 1$. Altogether we have just gotten that

$$(L^a_{nm}(f)(t) - L^a_{nm}(f)(\tau(\omega)) : t \geq \tau(\omega))$$

are uniformly bounded martingales under $r(\omega)$ on $[\tau(\omega), \infty)$ with respect to the $r(\omega)$-augmentation of the filtration $(\overline{\mathcal{F}}_{a,t})$ for every $\omega \in N_1$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ and $f \in B$. The same is, of course, true for the stopped process

$$(L^a_{nm}(f)(t \wedge \sigma_k) - L^a_{nm}(f)(\tau(\omega)) : t \geq \tau(\omega))$$

by the optional stopping theorem for the $(\overline{\mathcal{F}}^{r(\omega)}_{a,t})$-stopping time

$$\sigma_k = \inf\{s \geq \tau(\omega) : |L^{\tau(\omega)}_n(f)(s)| \geq k\} = \tau^{\tau(\omega)}_k(L^{\tau(\omega)}_n(f))$$

by definition in (2.3.1). But, still with an $\omega \in N_1$ fixed,

$$L^a_{nm}(f)(t \wedge \sigma_k) - L^a_{nm}(f)(\tau(\omega)) = I_{[\tau^a_m(L^a_n(f)) \geq \tau(\omega)]} L^{\tau(\omega)}_{nk}(t \wedge \tau^a_m(L^a_n(f)))$$

on the set M_a by definition. Hence, letting m tend to infinity, we get that the processes

$$(L^{\tau(\omega)}_{nk}(t) : t \geq \tau(\omega))$$

are uniformly bounded martingales under $r(\omega)$ on $[\tau(\omega), \infty)$ with respect to the $r(\omega)$-augmentation of the filtration $(\overline{\mathcal{F}}_{a,t})$ for every $\omega \in N_1$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ and $f \in B$.

Step 3:
We already know that $r(\omega, M_a) = 1$ for every $\omega \in N_1$. Define the set

$$V_a = \left\{ \omega \in \overline{\Omega} : \int_a^\infty I_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \setminus \operatorname{Rng} e}(\pi_s(\omega))\, ds = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \omega \in \overline{\Omega} : \pi_s(\omega)) \in \operatorname{Rng} e \text{ for a.e. } s \geq a \right\}.$$

Then $P(V_a) = 1$ by Theorem 2.3.2 1°. Hence, there exists a set $N_2 \in \mathcal{G}_\tau$, $P(N_2) = 1$ such that $r(\omega, V_a) = 1$ for every $\omega \in N_2$.

Step 4:
There exists a set $N_3 \in \mathcal{G}_\tau$, $P(N_3) = 1$ such that $r\left(\omega, [\pi_{\tau(\omega)}(\omega) = \pi_{\tau(\omega)}]\right) = 1$ for every $\omega \in N_3$ by the elementary proprieties of r and the fact that $\overline{\mathcal{F}}_t \subseteq \mathcal{G}_t$, $t \geq 0$ (hence $(\omega, \omega_0) \mapsto \pi_{\tau(\omega)}(\omega) - \pi_{\tau(\omega)}(\omega_0)$ is $\mathcal{G}_\tau \otimes \overline{\mathcal{F}}$-measurable), and $\pi_{\tau(\omega)}(\omega) \in e[O]$ for every $\omega \in N_3$ by the assumptions of Theorem 2.4.6. So, given $\omega \in N = N_1 \cap N_2 \cap N_3$,

$$r\left(\omega, [\pi_{\tau(\omega)} \in \operatorname{Rng} e]\right) \geq r\left(\omega, [\pi_{\tau(\omega)} = \pi_{\tau(\omega)}(\omega)]\right) = 1$$

and so there exists a solution $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, (\widetilde{\mathcal{F}}_t), \widetilde{\mathbb{P}}, \widetilde{W}, v)$ of the equation (2.2.1) on $[\tau(\omega), \infty)$ such that the law of the process $t \mapsto \vec{v}(t \vee \tau(\omega))$ coincides with $r(\omega)$ on $\overline{\mathcal{F}}_{\tau(\omega),\infty}$ by Theorem 2.3.2 2°. In particular, $\widetilde{\mathbb{P}}[v(\tau(\omega) = e^{-1}\pi_{\tau(\omega)}(\omega))] = 1$ and so $r(\omega) = P^{\tau(\omega), e^{-1}(\pi_{\tau(\omega)}(\omega))}$ on $\overline{\mathcal{F}}_{\tau(\omega),\infty}$ since the equation (2.2.1) is $(\tau(\omega), e^{-1}\pi_{\tau(\omega)}(\omega)))$-unique in law by assumption. □

2.6.5 PROOFS OF THE COROLLARIES

Proof of Corollary 2.4.7. Define

$$P(V) = \int_O P^{a,x}(V)\, d\mu(x) \qquad V \in \overline{\mathcal{F}}$$

in view of Thm 2.4.5. Then, apparently, $P(M_a) = P[\pi_s \in \operatorname{Rng} e] = 1$ for every $s \geq a$ and

$$\int_C L^a_{nm}(t)\, dP = \int_C L^a_{nm}(s)\, dP$$

for every $C \in \overline{\mathcal{F}}_s$, $a \leq s \leq t$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ and $f \in C^2(\mathbb{R})$ by Theorem 2.3.2 1°. Whence there exists a solution $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), W, u)$ of the equation (2.2.1) on $[a, \infty)$ such that $\mathfrak{Law}_{\mathbb{P}}(\vec{u}(\cdot \vee a)) = P$ by Theorem 2.3.2 2°. In particular, $\mathfrak{Law}_{\mathbb{P}}(u(a)) = \mu$. For the second part of the corollary denote P_k the laws of the processes $t \mapsto e(u^k(t))$ on $\overline{\mathcal{F}}$ for $k = 1, 2$ by Remark 2.2.4. Then $P_1 = P_2$ on $\overline{\mathcal{F}_0}$ and $P_1|\overline{\mathcal{F}}_0 = P_2|\overline{\mathcal{F}}_0$ by Theorem 2.4.6. Consequently $P_1 = P_2$. □

Proof of Corollary 2.4.8. The mapping

$$(a, x) \mapsto \int_{\overline{\Omega}} \varphi(\pi_t)\, P^{a,x}, \quad \text{resp.} \quad t \mapsto \int_{\overline{\Omega}} \varphi(\pi_t)\, P^{a,x}$$

is measurable by Theorem 2.4.5, resp. continuous for every $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to [0, 1]$ continuous. Hence it is jointly measurable since it satisfies the Caratheodory condition. The joint measurability then holds for every φ bounded, e.g. $\varphi = I_{e[V]}$ for $V \in \mathbb{B}(X)$. □

Proof of Theorem 2.5.1 and Theorem 2.5.3. We have

$$\mathbb{P}^{a,x}[Y_{t_1} \in \Gamma_1, \ldots, Y_{t_m} \in \Gamma_m] = \mathbb{P}_{a,x}[u_{a,x}(t_1) \in \Gamma_1, \ldots, u_{a,x}(t_m) \in \Gamma_m] =$$

$$= P^{a,x}[\pi_{t_1 \vee a} \in e[\Gamma_1], \ldots, \pi_{t_m \vee a} \in e[\Gamma_m]]$$

for every $a \geq 0$, $x \in O$, $t_1, \ldots, t_m$ in $[0, \infty)$ and every $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ in $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{B}(X)$. Whence the measurability of $(a, x) \to \mathbb{P}^{a,x}$ by Theorem 2.4.5.

Next, fixing $0 \leq a \leq b \leq c$ and $x \in O$, denote r a regular version of the conditional probability $P^{a,x}$ with respect to $\overline{\mathcal{F}}_b$ then

$$r(\omega, [\pi_c \in e[\Gamma]]) = P^{b, e^{-1}(\pi_b(\omega))}[\pi_c \in e[\Gamma]] \qquad P^{a,x}\text{-a.e.}$$

for every $\Gamma \in \mathcal{O}$ by Theorem 2.4.6. So. If $0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_m \leq b$ and $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m, \Gamma$ belong to $\mathcal{O}$ then

$$\mathbb{P}^{a,x}[Y_{s_1} \in \Gamma_1, \ldots, Y_{s_m} \in \Gamma_m, Y_c \in \Gamma] =$$

$$= \mathbb{P}_{a,x}[u_{a,x}(s_1 \vee a) \in \Gamma_1, \ldots, u_{a,x}(s_m \vee a) \in \Gamma_m, u_{a,x}(c) \in \Gamma] =$$

$$= P^{a,x}[\pi_{s_1} \in e[\Gamma_1], \ldots, \pi_{s_m} \in e[\Gamma_m], \pi_c \in e[\Gamma]] =$$

$$= \int\limits_{\overline{\Omega}} I_{e[\Gamma_1]}(\pi_{s_1}(\omega)) \dots I_{e[\Gamma_m]}(\pi_{s_m}(\omega)) P^{b,e^{-1}(\pi_b(\omega))}[\pi_c \in e[\Gamma]]\, dP^{a,x}(\omega) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_{a,x}} I_{\Gamma_1}(u_{a,x}(s_1 \vee a)) \dots I_{\Gamma_m}(u_{a,x}(s_m \vee a)) P^{b,u_{a,x}(b)}[\pi_c \in e[\Gamma]]\, d\mathbb{P}_{a,x} =$$

$$= \int\limits_{\Omega} I_{\Gamma_1}(Y_{s_1}) \dots I_{\Gamma_m}(Y_{s_m}) P^{b,Y_b}[\pi_c \in e[\Gamma]]\, d\mathbb{P}^{a,x}$$

by definition. Whence

$$\mathbb{P}^{a,x}[Y_c \in \Gamma | \mathcal{H}_b] = P^{b,Y_b}[\pi_c \in e[\Gamma]] = P^{b,Y_b}[Y_c \in \Gamma].$$

□

Proof of Theorem 2.5.4. We have

$$\mathbb{P}^x[Y_{t_1} \in \Gamma_1, \dots, Y_{t_m} \in \Gamma_m] = \mathbb{P}_x[u_x(t_1) \in \Gamma_1, \dots, u_x(t_m) \in \Gamma_m] =$$

$$= P^{0,x}[\pi_{t_1} \in e[\Gamma_1], \dots, \pi_{t_m} \in e[\Gamma_m]]$$

for every $x \in O$, $t_1, \dots, t_m$ in $[0, \infty)$ and every $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ in $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{B}(X)$ by Remark 2.5.2. Whence the measurability of $x \to \mathbb{P}^x$ by Theorem 2.4.4.

(a) Fixing an $x \in O$, denote $\mathcal{G}_t$ the $P^{0,x}$-augmentation of $\overline{\mathcal{F}}_t$, $t \geq 0$,

$$i : C([0, \infty), (O, \|\cdot\|_O)) \to C\left([0, \infty), \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) : \omega \mapsto (e(\omega(t)) : t \geq 0)$$

the continuous injection and its Borel pseudoinverse

$$j : C\left([0, \infty), \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right) \to C([0, \infty), (O, \|\cdot\|_O)) : \overline{\omega} \mapsto \begin{cases} i^{-1}(\overline{\omega}) & \overline{\omega} \in \operatorname{Rng} i \\ 0 & \overline{\omega} \in (\operatorname{Rng} i)^c \end{cases}$$

Indeed. j is Borel measurable by chap. 3, par. 39, sect. IV, p. 487 in [11].

(b) $\mathfrak{Law}_{\mathbb{P}^x}(i) = P^{0,x}$ on $\overline{\mathcal{F}}$ and $\mathfrak{Law}_{P^{0,x}}(j) = \mathbb{P}^x$ on $\mathcal{F}$. Particularly $P^{0,x}(\operatorname{Rng} i) = 1$.

(c) $j^{-1}[Y_t \in \Gamma] \cap \operatorname{Rng} i = [\pi_t \in e[\Gamma]] \cap \operatorname{Rng} i$ for every $\Gamma \in \mathcal{O}$ and $t \geq 0$, so $j^{-1}[C] \in \mathcal{G}_t$ for every $C \in \mathcal{F}_t$ and, consequently, for every $C \in \mathcal{H}_t$ by **(b)**, $t \geq 0$.

(d) $i^{-1}[\pi_t \in \Gamma] = [e(Y_t) \in \Gamma]$ for every $\Gamma \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ and $t \geq 0$, so $i^{-1}[C] \in \mathcal{H}_t$ for every $C \in \overline{\mathcal{F}}_t$ and, consequently, for every $C \in \mathcal{G}_t$, $t \geq 0$.

(e) Defining $\overline{\tau}(\overline{\omega}) = \tau(j(\overline{\omega}))$, $\overline{\omega} \in \overline{\Omega}$ then $\overline{\tau}$ is a $(\mathcal{G}_t)$-stopping time by **(c)**.

(f) The mapping $i : (\Omega, \mathcal{H}_\tau) \to (\overline{\Omega}, \mathcal{G}_{\overline{\tau}})$ is measurable by **(d)** and $j : (\overline{\Omega}, \mathcal{G}_{\overline{\tau}}) \to (\Omega, \mathcal{H}_\tau)$ is measurable by **(c)**.

(g) If we denote $r : \overline{\Omega} \times \overline{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}$ a regular version of the conditional probability $P^{0,x}$ with respect to $\mathcal{G}_{\overline{\tau}}$ then there exists a set $N \in \mathcal{G}_{\overline{\tau}}$, $P(N) = 1$ such that $\pi_{\overline{\tau}(\overline{\omega})}(\overline{\omega}) \in e[O]$ and $r(\overline{\omega}) = P^{\overline{\tau}(\overline{\omega}), e^{-1}(\pi_{\overline{\tau}(\overline{\omega})}(\overline{\omega}))}$ on $\overline{\mathcal{F}}_{\overline{\tau}(\overline{\omega}),\infty}$ for every $\overline{\omega} \in N$ by Theorem 2.4.6.

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

(i) The function $R : \Omega \times \mathcal{F} \to \mathbb{R} : (\omega, V) \mapsto r(i(\omega), j^{-1}[V])$ is $\mathcal{H}_\tau$-measurable in the first variable by **(f)**. Moreover, R is a regular version of the conditional probability $\mathbb{P}^x$ with respect to $\mathcal{H}_\tau$. Indeed. Let $C \in \mathcal{H}_\tau$ and $V \in \mathcal{F}$. Then

$$\int_C R(\cdot, V)\, d\mathbb{P}^x = \int_{[j \in C]} r(i(j(\cdot)), j^{-1}[V])\, dP^{0,x} = \int_{[j \in C]} r(\cdot, j^{-1}[V])\, dP^{0,x} =$$

$$= P^{0,x}\left[j^{-1}[C \cap V]\right] = \mathbb{P}^x(V \cap C)$$

by **(b)** and **(f)**.

(j) Since $P^{0,x}(\operatorname{Rng} i) = 1$ the set $N_1 = \{\overline{\omega} : r(\overline{\omega}, \operatorname{Rng} i) = 1\} \in \mathcal{G}_{\overline{\tau}}$ satisfies $P^{0,x}(N_1) = 1$ and the set $N_2 = \{\omega : R(\omega, [\tau(\omega) = \tau]) = 1\} \in \mathcal{H}_\tau$ satisfies $\mathbb{P}^x(N_2) = 1$ by the elementary properties of conditional probabilities. So,

$$R(\omega, [Y_{t+\tau} \in \Gamma]) = R(\omega, [Y_{t+\tau(\omega)} \in \Gamma]) = r(i(\omega), j^{-1}[Y_{t+\tau(\omega)} \in \Gamma]) =$$

$$= r(i(\omega), j^{-1}[Y_{t+\tau(\omega)} \in \Gamma] \cap \operatorname{Rng} i) = r(i(\omega), [\pi_{t+\tau(\omega)} \in e[\Gamma]] \cap \operatorname{Rng} i) =$$

$$= r(i(\omega), [\pi_{t+\tau(\omega)} \in e[\Gamma]]) = P^{\tau(\omega), e^{-1}(\pi_{\tau(\omega)}(i(\omega)))}[\pi_{t+\tau(\omega)} \in e[\Gamma]] =$$

$$= P^{0, e^{-1}(\pi_{\tau(\omega)}(i(\omega)))}[\pi_{t+\tau(\omega)} \circ \theta_{-\tau(\omega)} \in e[\Gamma]] = P^{0, e^{-1}(\pi_{\tau(\omega)}(i(\omega)))}[\pi_t \in e[\Gamma]] =$$

$$= P^{0, Y_{\tau(\omega)}(\omega)}[\pi_t \in e[\Gamma]] = P^{0, Y_{\tau(\omega)}(\omega)}([\pi_t \in e[\Gamma]] \cap \operatorname{Rng} i) =$$

$$= P^{0, Y_{\tau(\omega)}(\omega)}(j^{-1}[Y_t \in \Gamma] \cap \operatorname{Rng} i) = P^{0, Y_{\tau(\omega)}(\omega)}[j^{-1}[Y_t \in \Gamma]] = \mathbb{P}^{Y_{\tau(\omega)}(\omega)}[Y_t \in \Gamma]$$

by **(c)**, **(g)** and Theorem 2.4.4 for every $\Gamma \in \mathbb{B}(O)$, $\omega \in i^{-1}[N \cap N_1] \cap N_2 \in \mathcal{H}_\tau$ and $\mathbb{P}^x[i^{-1}[N \cap N_1] \cap N_2] = 1$ by **(b)** and **(f)**. □

2.7 REFERENCES

[1] Brzeźniak, Z.: On stochastic convolution in Banach spaces and applications. Stochastics and Stochastics Reports 61(1997), 245–295.

[2] Ondreját, M.: Uniqueness for stochastic evolution equations in Banach spaces, to appear.

[3] Da Prato, G.; Zabczyk, J.: Stochastic equations in infinite dimensions. Cambridge University Press, Cambridge 1992.

[4] Chojnowska-Michalik, A.: Stochastic differential equations in Hilbert spaces. Probability theory, Banach center publications, PWN, Warsaw 5(1979), 53–74.

[5] Stroock, D. V.; Varadhan, S. R. S.: Multidimensional diffusion processes. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 233, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

[6] Doob, J. L.: Stochastic processes. J. Wiley & Sons, New York, 1953.

[7] Karatzas, I.; Shreve, S.: Brownian motion and stochastic calculus. Springer-Verlag, New York 1988.

[8] Métivier, M.; Pellaumail, J.: Stochastic integration. Academic Press, New York-London-Toronto, Ont., 1980.

[9] Neidhardt, A. L.: Stochastic integrals in 2-uniformly smooth Banach spaces. University of Wisconsin, 1978.

[10] Pazy, A.: Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Applied Mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New York, 1983.

[11] Kuratowski, K.: Topology, Vol. 1. Academic Press, New York and London; Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw 1966.

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHEQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

Chapitre 3

EXISTENCE DE SOLUTIONS GLOBALES DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION HYPERBOLIQUES STOCHASTIQUES PAR RAPPORT A UN PROCESSUS DE WIENER SPATIALEMENT HOMOGÈNE

Résumé: Nous étudions des équations semilinéaires hyperboliques de seconde ordre par rapport à un processus de Wiener spatialement homogène. Des conditions suffisantes en termes de fonctions de Lyapunov entraînant l'existence de solutions globales sont trouvées. En plus, nous démontrons que les solutions du problème de Cauchy propagent à vitesse finie. En particulier, les résultats d'existence sont applicables aux équations avec des nonlinéarités polynomiales.

2000 *MSC classement.* 60H15.

Mots-clés: Équations hyperboliques stochastiques, processus de Wiener spatialement homogène

3.0 INTRODUCTION

Considérons une équation semilinéaire hyperbolique stochastique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t) = \mathcal{A}u(t) + f(u(t)) + g(u(t))\,\dot{W}, \qquad u(0) = u_0, \qquad u_t(0) = v_0 \tag{3.0.1}$$

sur un domaine D dans $\mathbb{R}^d$ avec un processus de Wiener en dimension infinie W. Nous allons considérer le problème de Cauchy pour (3.0.1), à savoir le cas où $D = \mathbb{R}^d$, ainsi que le problème sur un domaine borné de classe C^2 avec la condition de Dirichlet ou de Neumann. On suppose que $\mathcal{A}$ est un opérateur différentiel uniformément elliptique de second ordre et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que les opérateurs de Nemytski associés sont localement Lipschitz entre des espaces de Sobolev convenables. Le processus de Wiener W est supposé spatialement homogène de mesure spectrale finie. Le sujet des équations aux dérivées partielles stochastiques par rapport à un processus de Wiener spatialement homogène a attiré beaucoup d'intérêt récemment; nous recommandons au lecteur le travail [Pes1] pour un résumé de la littérature existante et les références.

Ce travail part de l'article de S. Peszat [Pes] dont les résultats entraînent, en particulier, que (3.0.1) possède une unique solution globale dès que f et g sont globalement Lipschitz. Néanmoins, si l'on abandonne l'hypothèse de lipschitzianité globale il n'est pas exclu que les solutions de (3.0.1) n'existent que localement jusqu'à un temps d'explosion. Un exemple d'une équation d'ondes semilinéaire stochastique avec des solutions explosantes, et des conditions suffisantes pour l'existence de solutions globales du problème de Cauchy pour l'équation d'ondes nonlinéaire ($\mathcal{A} = \Delta$) par rapport à un bruit spatialement nonhomogène peuvent être trouvés dans le travail de P.-L. Chow (voir [Chow]).

Dans ce chapitre, nous envisageons de trouver des conditions suffisamment générales sur f et g pour que les solutions de (3.0.1) vivent globalement. Ensuite, dans le cas du problème de Cauchy, nous montrons que les solutions propagent à vitesse finie, et en fin nous présentons des conditions suffisantes sur f, g et la mesure spectrale μ pour que les solutions de (3.0.1) aient une meilleure régularité et, par conséquent, soient les solutions fortes au sens des EDP.

Nos démonstrations sont basées essentiellement sur des techniques des fonctions de Lyapunov. La procédure est connue dans la théorie des EDP où elle est provenue de motivations physiques : quand un système admet une quantité conservée (par exemple l'énergie) alors elle peut servir de fonction de Lyapunov et l'explosion en temps fini est exclue. Le lecteur peut trouver une belle introduction à la théorie des équations d'ondes abstraites dans le livre [Reed]. Les preuves de nonexplosion reposent sur des techniques de fonctions de Lyapunov et ont été appliquées à des équations différentielles stochastiques par R. Khasminskii dans les années soixante (voir son livre [K]); quant aux résultats récents dans cette direction nous référons aux travaux [Na], [Ta] ou [Thi] et leurs références. Les articles [Na1], [Ma-Ma], [M-W] et [KST] traitent également le sujet de nonexplosion des équations stochastiques de deuxième ordre et ils sont particulièrement liés à ce travail. Les preuves de nonexplosion fondées sur les fonctions de Lyapunov pour les équations aux dérivées partielles stochastiques ont été utilisées dans [D-M] au cas parabolique et dans [B-M-S] au cas de l'équation des poutres stochastiques. Le travail [Chow] est également dédié aux équations d'ondes stochastiques. L'article [M-M] traite l'existence et l'unicité de la solution de l'équation d'ondes dans $\mathbb{R}^2$ avec le drift polynomial et la diffusion bornée et globalement Lipschitz; en revanche, les hypothèses sur la covariance spatiale du bruit consideré sont moins restrictives que les nôtres.

Ce chapitre commence par un résumé sur les opérateurs différentiels uniformément elliptiques de deuxième ordre soit sur $\mathbb{R}^d$ soit sur un domaine borné D dans $\mathbb{R}^d$ avec la condition au bord de Dirichlet ou de Neumann. Nous rappelons ensuite la définition et quelques propriétés essentielles d'un processus de Wiener spatialement homogène sur $\mathbb{R}^d$. Puis nous spécifions les équations d'évolution stochastiques en question et nous définissons les notions de solutions. Ensuite nous étudions la propriété de propagation finie des solutions locales en temps de notre équation sur $\mathbb{R}^d$ (voir le Théorème 3.2.4). Les deux sections suivantes sont consacrées à la recherche des conditions suffisantes pour l'existence des solutions globales (voir le Théorème 3.3.2), à leur régularité améliorée (voir le Théorème 3.4.2) et en fin à des exemples particuliers. Les démonstrations sont données séparément dans la dernière section.

Les conditions entraînant l'existence de solutions globales présentées dans cette section ne sont pas du tout nécessaires et leur affaiblissement sera élaboré dans le quatrième Chapitre.

Je voudrais exprimer mes remerciements à Marco Dozzi, Jan Seidler et Bohdan Maslowski pour leur influence positive, beaucoup de discussions et suggestions, et à l'Institut Élie Cartan à Nancy et l'Institut des Mathématiques de l'Académie des Sciences à Prague pour leur soutien matériel.

3.1 NOTATIONS ET RAPPELS

- ▷ Nous désignerons $\mathrm{BUC}^k(D)$ l'espace des fonctions de classe C^k sur le domaine D dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont uniformément bornées et uniformément continues sur D.
- ▷ Toute filtration dans ce chapitre sera *complète*, à savoir, si $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ est une base stochastique, alors $\mathcal{F}_0$ doit contenir tout ensemble F de la tribu $\mathcal{F}$ dont la probabilité $\mathbb{P}(F) = 0$.
- ▷ Si z est une variable aléatoire vectorielle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et z est à valeurs dans un espace de fonctions complexes sur le domaine D, on dit que la variable aléatoire z est *réelle* si la parti imaginaire $\mathrm{Im}\, z(\omega) = 0$ presque partout sur D pour tout ω.

Bien que nous nous intéressons aux solutions réelles de l'équation (3.0.1), nous allons travailler dans les espaces de fonctions complexes à cause de la disponibilité de la théorie spectrale et de la théorie d'interpolation dans le cadre complexe.

L'opérateur différentiel $\mathcal{A}$ sera de la forme

$$\mathcal{A}\varphi = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + c(x)\varphi(x). \tag{3.1.1}$$

Si D est un domaine borné dans $\mathbb{R}^d$ avec la frontière de classe C^2, alors le domaine $D(\mathcal{A})$ contiendra exactement toutes les fonctions φ de $W^{2,2}(D)$ dont la trace sur ∂D satisfait à l'une des conditions au bord:

1. (Dirichlet) $\varphi = 0$ sur ∂D.
2. (Neumann) $\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial\varphi}{x_j}\nu_i = \gamma\varphi$ sur ∂D pour un $\gamma \in \mathrm{BUC}^1(D)$.

Nous rappelons que $\nu(x)$ est le vecteur unitaire de la normale extérieure à ∂D au point $x \in \partial D$.

Si $D = \mathbb{R}^d$ alors $D(\mathcal{A}) = W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$.

En tout cas, la matrice réelle symétrique $\{a_{ij}\}$ appartient à $\mathrm{BUC}^2(D)$, le vecteur réel $\{b_i\}$ à $\mathrm{BUC}^1(D)$ et c n'est qu'une fonction bornée, réelle et mesurable sur D. En plus, nous réclamons la condition de l'ellipticité uniforme

$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} a_{ij}(x)y_i y_j \geq C\sum_{i=1}^{d} y_i^2, \qquad x \in D,\ y \in \mathbb{R}^d,$$

où C est une constante strictement positive et si nous considérons la condition au bord de Neumann nous aurons besoin de supposer (en plus) que

$$C > \alpha^+ \| \mathrm{Tr} \|^2_{L(W^{1,2}(D),L^2(D))} \quad \text{où} \quad \alpha = \sup\{\gamma(x) : x \in \partial D\}$$

et $\mathrm{Tr} : W^{1,2}(D) \to L^2(\partial D)$ est l'opérateur de trace.

- ▷ Sous les hypothèses ci-dessus, l'opérateur $\mathcal{A}$, dans tous les trois cas, est **sectoriel** sur $L^2(D)$ et $c\|u\|_{W^{2,2}(D)} \leq \|u\|_{L^2(D)} + \|\mathcal{A}u\|_{L^2(D)}$ vaut pour un $c > 0$ et tout $u \in D(\mathcal{A})$ d'après [Lun, Chapitre 3].

Maintenant nous pouvons introduire l'opérateur auxiliaire

$$A\varphi = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)\right) + \left(c(x) - \widetilde{C}\right)\varphi(x)$$

avec $D(A) = D(\mathcal{A})$ et une constante $\widetilde{C}$ telle que

- ▷ $\widetilde{C} > \operatorname{ess\,sup} c$ si $D = \mathbb{R}^d$ ou si D est borné et $\mathcal{A}$ est considéré avec la condition au bord de Dirichlet.
- ▷ $\widetilde{C} > \operatorname{ess\,sup} c + \alpha^+ \|\operatorname{Tr}\|^2_{L(W^{1,2}(D),L^2(\partial D))}$ si D est borné et nous considérons la condition au bord de Neumann.

L'opérateur A est, sous les hypothèses ci-dessus, autoadjoint et strictement négatif sur $L^2(D)$ (voir [Lun, Chapitre 3]). En plus, comme

$$C_3\,\|\varphi\|^2_{W^{1,2}(D)} \leq \langle -A\varphi, \varphi\rangle_{L^2(D)} = \|\varphi\|^2_{D(-A)^{1/2}} \leq C_4\|\varphi\|^2_{W^{1,2}(D)}, \quad \varphi \in D(A)$$

pour des constantes positives C_3, C_4, nous concluons que $D(-A)^{1/2}$ est un espace fermé dans $W^{1,2}(D)$. En effet,

- ▷ $D(-A)^{1/2} = W^{1,2}_0(D)$ si $D = \mathbb{R}^d$.
- ▷ $D(-A)^{1/2} = W^{1,2}_0(D)$ si D est borné et nous considérons l'opérateur $\mathcal{A}$ avec la condition au bord de Dirichlet.
- ▷ $D(-A)^{1/2} = W^{1,2}(D)$ si D est borné et nous considérons l'opérateur $\mathcal{A}$ avec la condition au bord de Neumann.

Les deux premières égalités sont faciles à démontrer. La troisième peut être déduite de [Lun, Théorème 3.2.3, Corollaire 2.2.3, Proposition 2.2.2, Proposition 1.2.3 et Proposition 2.2.15] car

$$W^{2s,2}(D) = D_A(s,2) \subseteq D_A(s,\infty) = (L^2(D), D(A))_{s,\infty} \subseteq (L^2(D), D(A))_{1/2,1} =$$

$$= D_A(1/2,1) \subseteq D(-A)^{1/2}$$

pour $1/2 < s \leq 3/4$ et $W^{2s,2}(D)$ est dense dans $W^{1,2}(D)$. La dernière propriété dont on aura besoin dans la suite est l'inégalité suivante (voir [Lun, Chapitre 3]):

$$C_3\|\varphi\|_{W^{2,2}(D)} \leq \|A\varphi\|_{L^2(D)} = \|\varphi\|_{D(A)} \leq C_4\|\varphi\|_{W^{2,2}(D)}, \qquad \varphi \in D(A)$$

qui dit que la norme de $W^{2,2}(D)$ est équivalente à la norme graphe sur l'espace de Hilbert $D(A)$, à savoir, à la norme induite par le produit scalaire

$$\langle \varphi_1, \varphi_2\rangle_{D(A)} = \langle A\varphi_1, A\varphi_2\rangle_{L^2(D)}, \qquad \varphi_1 \in D(A), \quad \varphi_2 \in D(A).$$

La raison d'introduire l'opérateur A est qu'il est plus beau et plus facile à travailler avec, dû aux faits qu'il est autoadjoint et négatif. D'autant plus que l'échelle des domaines des puissances fractionnaires $D(\omega_0 - \mathcal{A})^\alpha = D(-A)^\alpha$ et les normes graphe sont équivalentes (voir [Hen, Thm 1.4.6]) pour ω_0 suffisamment grand et $\alpha \in [0,1]$.

Le processus W est un processus gaussien sur une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ à valeurs dans l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^d$ et satisfaisant aux conditions suivantes

- ▷ Le processus réel $\langle W_t, \psi \rangle$ est un processus de Wiener par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ pour tout ψ de l'espace de Schwartz sur $\mathbb{R}^d$.
- ▷ Il existe une distribution tempérée Γ (appelée *la corrélation spatiale de* W) telle que

$$\mathbb{E}\,\langle W_s, \varphi \rangle \langle W_t, \psi \rangle = \min\{s,t\}\,\langle \Gamma, \varphi * \psi_s \rangle$$

où $\psi_s(x) = \psi(-x)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Puisque Γ doit être une distribution définie positive, il existe une seule mesure positive symétrique tempérée μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que Γ soit la transformée de Fourier de μ. La mesure μ est appelée *la mesure spectrale de* W. Dans le travail [P-Z], les auteurs ont montré que l'espace autoreproduisant de W (noté H_w) peut être caractérisé comme

$$H_w = \{\widehat{\psi\mu} : \psi \in L^2(\mathbb{R}^d, \mu, \mathbb{C}), \overline{\psi(x)} = \psi(-x), x \in \mathbb{R}^d\}$$

et

$$\left\langle \widehat{\psi_1\mu}, \widehat{\psi_2\mu} \right\rangle_{H_w} = \int_{\mathbb{R}^d} \psi_1 \overline{\psi_2}\, d\mu.$$

En particulier, si $\mu(\mathbb{R}^d) < \infty$ alors Γ est une fonction bornée uniformément continue, H_w est contenu dans l'espace des fonctions réelles bornées uniformément continues sur $\mathbb{R}^d$ comme on verra plus généralement dans le Lemme 3.1.1 et, par [P-Z1],

$$\langle W_t, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{W}(t,x)\varphi(x)\, dx$$

où $(\mathcal{W}(t,x) : t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d)$ est un champ aléatoire tel que

- ▷ $(\mathcal{W}(t,x) : t \geq 0)$ est un processus de Wiener par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.
- ▷ l'application $(t,x,\omega) \mapsto \mathcal{W}(t,x,\omega)$ est mesurable et continue en t.
- ▷ $\mathbb{E}\,\mathcal{W}(t,x)\mathcal{W}(s,y) = (t \wedge s)\Gamma(x-y)$ pour tout $t \geq 0$, $s \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ et $y \in \mathbb{R}^d$.

Nous avons la modification suivante du Lemme 2.2 dans [Pes] qui permet de définir *l'opérateur de multiplication* qui va apparaître dans l'équation stochastique. Nous rappelons que $\mathrm{BUC}^l(\mathbb{R}^d)$ est la notation pour l'espace de Banach des functions de $C^l(\mathbb{R}^d)$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre l sont bornées et uniformément continues sur $\mathbb{R}^d$, muni de la norme

$$\|\varphi\|_{\mathrm{BUC}^l} = \sum_{|\alpha| \leq l} \sup\left\{|D^\alpha \varphi(x)| : x \in \mathbb{R}^d\right\}.$$

Lemme 3.1.1. *Soit $k \geq 0$ un entier, D un domaine dans $\mathbb{R}^d$ et soit*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(1 + \|y\|^2\right)^k \, d\mu(y) < \infty.$$

Alors H_w est inclus dans $\mathrm{BUC}^k(\mathbb{R}^d)$ avec injection continue, et il existe une constante C telle que l'application

$$W^{k,2}(D) \times H_w \to W^{k,2}(D) : (u, \xi) \mapsto u\xi$$

est un opérateur bilinéaire continu et, en plus, Hilbert-Schmidt dans la deuxième coordonnée, à savoir

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|u\xi_j\|^2_{W^{k,2}(D)} \leq C\|u\|^2_{W^{k,2}(D)}$$

pour tout $u \in W^{k,2}(D)$ et toute base orthonormée $(\xi_j : j \in \mathbb{N})$ dans H_w.

Remarque 3.1.2. Sous l'hypothèse du Lemme 3.1.1 tout élément $u \in W^{k,2}(D)$ définit un opérateur de multiplication $\xi \mapsto u\xi$ de H_w dans $W^{k,2}(D)$ qui est Hilbert-Schmidt.

L'équation aux dérivées partielles stochastique (3.0.1) se décompose en un système de deux équations de premier ordre

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}(t) &= v(t) \\ \frac{dv}{dt}(t) &= \mathcal{A}u(t) + f(u(t)) + g(u(t))\,\dot{W}. \end{aligned}$$

Il est convenable de considérer l'espace de Hilbert produit $E = D(-A)^{1/2} \times L^2(D)$ avec le produit scalaire

$$\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle_E = \left\langle (-A)^{1/2} u_1, (-A)^{1/2} u_2 \right\rangle_{L^2(D)} + \langle v_1, v_2 \rangle_{L^2(D)}$$

pour $(u_1, v_1) \in E$, $(u_2, v_2) \in E$ et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}, \qquad D(M) = D(A) \times D(-A)^{1/2}. \tag{3.1.2}$$

L'opérateur M est une somme d'un opérateur antiautoadjoint $(u, v) \mapsto (v, Au)$ et d'un opérateur borné $(u, v) \mapsto (0, \mathcal{A}u - Au)$. Or, M est un générateur infinitésimal d'un C_0-groupe $(S_t : t \in \mathbb{R})$ sur E d'après [Pazy, Chapitre 3]. Notre système de deux équations a alors la forme

$$\frac{dz}{dt}(t) = Mz(t) + F(z(t)) + G(z(t))\,\dot{W} \tag{3.1.3}$$

où $z = (u, v) \in E$,

$$F\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(\operatorname{Re} u) \end{pmatrix} \in E, \qquad G(u,v)\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ g(\operatorname{Re} u)\xi \end{pmatrix} \in E$$

pour $\xi \in H_w$, $(u,v) \in E$ où G est défini au sens de la Remarque 3.1.2. Les fonctions f et g seront choisies de telle sorte (voir les Propositions 3.3.1 et 3.4.1) que $f(\operatorname{Re} u)$ et $g(\operatorname{Re} u)$ appartiennent à $L^2(D)$ pour tout $u \in D(-A)^{1/2}$ et donc la définition ci-dessus est correcte.

Étant donnée une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W)$ avec un processus de Wiener spatialement homogène de mesure spectrale μ et une condition initiale réelle z_0 à valeurs dans E mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_0$, un processus $(z(t) : t \geq 0)$ à valeurs dans E progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ est *une solution mild* de (3.1.3) s'il satisfait à

$$z(t) = S_t z_0 + \int_0^t S_{t-s} F(z(s))\, ds + \int_0^t S_{t-s} G(z(s))\, dW, \quad t \geq 0, \tag{3.1.4}$$

en supposant implicitement l'existence des intégrales. Si, en plus, le processus $(z(t) : t \geq 0)$ est à valeurs dans $D(M)$, les trajectoires du processus $(Mz(t) : t \geq 0)$ sont localement intgrables dans E et

$$z(t) = z_0 + \int_0^t Mz(s)\, ds + \int_0^t F(z(s))\, ds + \int_0^t G(z(s))\, dW, \quad t \geq 0, \tag{3.1.5}$$

alors z est appelé *une solution forte.*

Nous remarquons que si l'équation (3.1.5) vaut alors l'équation (3.1.4) vaut aussi dû au théorème de Chojnowska-Michalik (voir les Théorèmes 1.12 et 1.13 du premier chapitre ou [ChM]).

Les espaces de Hilbert dans lesquels nous travaillons sont tous complexes à cause de la théorie spectrale, la théorie des semigroupes, la théorie d'interpolation et la théorie des espaces de puissances fractionnaires dont nous nous servons. Néanmoins, nous sommes intéressés surtout à des solutions réelles, à savoir, à des processus solutions z tels que $z(t,\omega) \in \mathbb{R}$ presque partout sur le domaine D pour tout (t,ω). Nous rappelons que tout espace de Hilbert complexe $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ est, en fait, un espace de Hilbert réel en même temps si nous le considérons avec la partie réelle du produit scalaire original, à savoir $(H, \operatorname{Re}\langle\ ,\ \rangle)$. Remarquons que cette convention n'influence pas la norme. Ce phénomène sera utilisé pour l'intégration stochastique qui est naturellement conçue entre des espaces de Hilbert réels. Plus précisément, si Ψ est un processus dans l'espace des opérateurs Hilbert-Schmidt $HS(H_w, (E, \mathbb{C}))$ alors l'intégrale stochastique

$$\int \Psi\, dW$$

est construite pour Ψ en tant que processus à valeurs dans $HS(H_w, (E, \mathbb{R}))$. Nous soulignons que si un proceesus z satisfait à l'équation (3.1.4) alors le processus conjugué complexe $\overline{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$ y satisfait aussi. Or, si $z_0(\omega)$ est réel pour tout ω et l'unicité trajectorielle vaut pour l'équation (3.1.4) (par exemple si les coefficients sont Lipschitz sur tout ensemble borné dans E) alors $z = \overline{z}$ et, par conséquent z est réel. Dans ce chapitre, nous n'allons considérer que des conditions initiales **réelles**.

3.2 VITESSE FINIE DE PROPAGATION DES SOLUTIONS

Il est bien connu que le principe du maximum fort ne vaut pas pour les équations hyperboliques de deuxième ordre sur $\mathbb{R}^d$. Au contraire, les solutions propagent à vitesse finie. Nous allons démontrer, effectivement, que ceci est vrai même si on perturbe ces équations par un processus de Wiener spatialement homogène. D'abord nous faisons la définition suivante dont la justification sera reportée à la section 3.5:

Definition 3.2.3. Une famille d'ensembles fermés non vides $(K_t : t \geq 0)$ dans la fermeture du domaine D est appelée *une évolution de support* si elle vérifie aux hypothèses suivantes

- ▷ $\bigcap\{K_t : t > s\} = K_s$ pour tout $s \geq 0$
- ▷ $S_t z \in E_{t+s}$ pour tout $z \in E_s$, $t \geq 0$, $s \geq 0$

où

$$E_t = \{(u, v) \in E : \text{le support essentiel de } u \text{ et } v \text{ est contenu dans } K_t\}$$

sont des sous-espaces fermés croissants continus à droite dans E et $(S_t : t \in \mathbb{R})$ est le C_0-groupe défini dans (3.1.2). Nous disons qu'une évolution de support $(K_t : t \geq 0)$ est *compacte* si K_t est compact dans $\mathbb{R}^d$ pour tout $t \geq 0$. En fin, nous remarquons que $K_t = \overline{D}$, $t \geq 0$ est une évolution de support qui est compacte si D est borné. Or, une évolution de support existe toujours.

Supposons que les nonlinéarités $F : E \to E$ et $G : E \to HS(H_w, E)$ sont bornées sur des ensembles bornés dans E. Si τ_m est un temps d'arrêt strictement positif par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ alors l'ensemble $[0, \tau_m)$ est progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ dans $[0, \infty) \times \Omega$ et un processus z à valeurs dans E défini sur $[0, \tau_m)$ progressivement mesurable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ est appelé *une solution locale* de (3.1.4) si

- ▷ $\mathbb{P}[z(0) = z_0] = 1$
- ▷ les trajectoires de z sont continues sur $[0, \tau_m)$ dans E
- ▷ toute trajectoire de z est nonbornée sur $[0, \tau_m)$ si $\tau_m < \infty$
- ▷ le processus $t \mapsto z(t \wedge \sigma_R)$ résout (3.1.4) presque partout sur $[0, \sigma_R)$ pour tout $R > 0$ où $\sigma_R = \inf\{t < \tau_m : \|z(t)\|_E \geq R\}$, à savoir, les trajectoires *d'une modification continue* du processus

$$t \mapsto z(t \wedge \sigma_R) - S_t z_0 - \int_0^t S_{t-s} F(z(s \wedge \sigma_R))\, ds - \int_0^t S_{t-s} G(z(s \wedge \sigma_R))\, dW$$

sont nulles sur $[0, \sigma_R)$ presque sûrement, ou, d'une manière équivalente, pour des C_0-groupes,

$$S_{-t}z(t \wedge \sigma_R) = z_0 + \int_0^t S_{-s}F(z(s \wedge \sigma_R))\, ds + \int_0^t S_{-s}G(z(s \wedge \sigma_R))\, dW$$

pour tout $t \in [0, \sigma_R)$ presque sûrement.

Si $F : E \to E$ et $G : E \to HS(H_w, E)$ sont Lipschitz sur des ensembles bornés dans E alors, par la méthode standarde de localisation des nonlinéarités (voir la preuve du Théorème 3.2.4), **il existe une unique solution réelle locale de l'équation (3.1.4)**. Nous rappelons que $HS(H_w, E)$ est l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt linéaires de H_w dans E et nous considérons le cas $D = \mathbb{R}^d$:

Théorème 3.2.4. *Soient les opérateurs de Nemytski $F : E \to E$ et $G : E \to HS(H_w, E)$ (définis dans (3.1.3)) Lipschitz sur des ensembles bornés, $f(0) = g(0) = 0$ et soit la mesure spectrale μ finie. Étant donnée une condition initiale réelle z_0 à valeurs dans E mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_0$, considérons l'unique solution locale réelle $(z_t = (u_t, v_t) : t < \tau_m)$ à trajectoires continues dans E jusqu'à un temps d'arrêt τ_m. Ensuite, soit $(K_t(\omega) : t \geq 0)$ une évolution de support pour tout $\omega \in \Omega$ telle que le support essentiel de $u(0, \omega)$ et $v(0, \omega)$ est contenu dans $K_0(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Alors il existe un ensemble $N \in \mathcal{F}_0$, $\mathbb{P}(N) = 1$ tel que $u(t, \omega)$ et $v(t, \omega)$ ont les supports essentiels contenus dans $K_t(\omega)$ pour tout $0 \leq t < \tau_m(\omega)$ et $\omega \in N$.* □

3.3. EXISTENCE DE SOLUTIONS "MILD" GLOBALES

Avant d'énoncer le théorème nous allons présenter des conditions suffisantes pour que l'opérateur de Nemytski associé à une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit Lipschitz sur des ensembles bornés de $W^{1,2}(D)$ dans $L^2(D)$. d est la dimension de $\mathbb{R}^d$.

On référera aux hypothèses suivantes par (LL,d) signifiant "localement Lipschitz".

- ▷ Si $d = 1$ alors nous voulons que h soit localement Lipschitz.
- ▷ Si $d = 2$ alors nous voulons que h soit de classe C^1 et $|\dot{h}(x)| \leq C(1 + |x|^s)$, $x \in \mathbb{R}$ pour un $s \geq 1$.
- ▷ Si $d \geq 3$ alors nous voulons que h soit de classe C^1 et $|\dot{h}(x)| \leq C(1+|x|^{2/(d-2)})$, $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 3.3.1. *Soit l'une des conditions suivantes satisfaite:*

- ▷ *les hypothèses (LL,d) valent et le domaine D est borné.*
- ▷ *les hypothèses (LL,d) valent, $D = \mathbb{R}^d$ et $h(0) = 0$.*

Alors l'opérateur de Nemytski agit de $W^{1,2}(D)$ dans $L^2(D)$ et il est Lipschitz sur des ensembles bornés, à savoir $h(\varphi) \in L^2(D)$ quel que soit $\varphi \in W^{1,2}(D)$ et, étant donné $R > 0$, il existe une constante C_R telle que $\|h(\varphi_1) - h(\varphi_2)\|_{L^2(D)} \leq C_R \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W^{1,2}(D)}$ vaut pour tous $\varphi_1 \in W^{1,2}(D)$, $\varphi_2 \in W^{1,2}(D)$ tels que $\|\varphi_i\|_{W^{1,2}(D)} \leq R$, $i = 1, 2$. □

Nous définissons

$$V(z) = l\left(\frac{1}{2}\|z\|_E^2 + \int_D L(\operatorname{Re} u)\,dx\right), \qquad z = (u,v) \in E \tag{3.3.1}$$

pour une fonction $l : (\Delta_\theta, \infty) \to (0,\infty)$ telle que

- ▷ l appartient à $C^2(\Delta_\theta, \infty)$
- ▷ $\lim_{x\to\infty} l(x) = \infty$
- ▷ $\dot{l}(x) > 0$, $x > \Delta_\theta$
- ▷ $x\dot{l}(x) \le Cl(x)$, $x \ge \delta_\theta$ pour une constante positive C
- ▷ $x^2 \max\{\ddot{l}(x), 0\} \le Cl(x)$, $x \ge \delta_\theta$ pour une constante positive C

où L est la fonction primitive de $-f$, à savoir $L(0) = 0$ et $\dot{L}(x) + f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ et $\Delta_\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$-\infty < \Delta_\theta < \delta_\theta = \inf\left\{\frac{\theta}{2}\|u\|^2_{D(-A)^{1/2}} + \int_D L(\operatorname{Re} u)\,dx : u \in D(-A)^{1/2}\right\} \tag{3.3.2}$$

où $0 \le \theta < 1$ est un paramètre.

Théorème 3.3.2. *Supposons que f et g satisfont aux hypothèses de la Proposition 3.3.1, supposons que la mesure spectrale μ est finie et que (3.3.2) vaut avec un paramètre $0 \le \theta < 1$. Soit, en plus, f de classe C^1 et $\mathbb{E}\,V(z_0) + \mathbb{E}\,\|z_0\|_E^2 < \infty$ où z_0 est une condition initiale. Ensuite supposons que*

$$\|g(u)\|^2_{L^2(D)} \le m\left(\frac{1}{2}\|u\|^2_{D(-A)^{1/2}} + \int_D L(u)\,dx - \Delta_\theta\right) \tag{3.3.3}$$

vaut pour une constante positive m quel que soit $u \in D(-A)^{1/2}$ réel. Il existe alors une unique solution "mild" globale réelle z de l'équation (3.1.4) avec la condition initiale z_0 et une constante positive C_0 indépendante de la solution telle que

$$\mathbb{E}\,V(z(t\wedge\tau)) \le e^{C_0 t}\mathbb{E}\,V(z_0) \tag{3.3.4}$$

vaut pour tout $t \ge 0$ et tout temps d'arrêt τ. □

3.4 EXISTENCE DE SOLUTIONS FORTES GLOBALES

Ici nous commençons par une délimitation d'une classe de fonctions dont l'opérateur de Nemytski associé est Lipschitz de $W^{2,2}(D)$ dans $W^{1,2}(D)$ sur des ensembles bornés. Nous rappelons que d est la dimension de $\mathbb{R}^d$.

On référera aux hypothèses suivantes par (LL2,d) signifiant "localement Lipschitz".

- ▷ Si $d \le 3$ alors nous voulons que h soit de classe C^2.
- ▷ Si $d = 4$ alors nous voulons que h soit de classe C^2 et $|\ddot{h}(x)| \le C(1 + |x|^s)$, $x \in \mathbb{R}$ pour un $s \ge 1$.
- ▷ Si $d = 5$ alors nous voulons que h soit de classe C^2 et $|\ddot{h}(x)| \le C(1 + |x|)$, $x \in \mathbb{R}$.
- ▷ Si $d = 6$ alors nous voulons que h soit de classe C^2 et $|\ddot{h}(x)| \le C$, $x \in \mathbb{R}$.
- ▷ Si $d \ge 7$ alors nous voulons que $h(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$ pour des constantes a, b.

Proposition 3.4.1. *Supposons que les hypothèses (LL2,d) sont satisfaites, et soit* $h(0) = 0$ *si* $D = \mathbb{R}^d$. *Alors*

- ▷ *l'opérateur de Nemytski associé à la fonction* h *agit de* $W^{2,2}(D)$ *dans* $W^{1,2}(D)$, *et il est Lipschitz sur des ensembles bornés, à savoir,* $h(\varphi) \in W^{1,2}(D)$ *quel que soit* $\varphi \in W^{2,2}(D)$, *et, étant donné* $R > 0$, *il existe une constante* C_R *telle que* $\|h(\varphi_1) - h(\varphi_2)\|_{W^{1,2}(D)} \leq C_R \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W^{2,2}(D)}$ *pour tous* $\varphi_1 \in W^{2,2}(D)$, $\varphi_2 \in W^{2,2}(D)$ *tels que* $\|\varphi_i\|_{W^{2,2}(D)} \leq R$, $i = 1, 2$.
- ▷ *Si* D *est borné,* $u \in W^{2,2}(D) \cap W_0^{1,2}(D)$ *et* $h(0) = 0$, *alors* $h(u) = 0$ *sur* ∂D. *En particulier, si nous considérons l'opérateur* $\mathcal{A}$ *soit sur* $\mathbb{R}^d$ *soit sur* D *borné avec la condition de Dirichlet au bord, alors l'opérateur de Nemytski agit de* $D(A)$ *dans* $D(-A)^{1/2}$ *et il est Lipschitz sur les ensembles bornés car* $D(-A)^{1/2} = W_0^{1,2}(D)$ *dans ces cas-ci. Pareil pour* $\mathcal{A}$ *avec la condition de Neumann au bord car* $D(-A)^{1/2} = W^{1,2}(D)$.

Théorème 3.4.2. *Supposons que* f *et* g *satisfont aux hypothèses (LL2,d) et soit, en plus,*

(a) $f(0) = g(0) = 0$ *si* $D = \mathbb{R}^d$.

(b) $f(0) = g(0) = 0$ *et* $\sum_{j=1}^d \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} = b_i$ *sur* ∂D *pour tout* $1 \leq i \leq d$ *si* D *est borné, et nous considérons l'opérateur* $\mathcal{A}$ *avec la condition de Dirichlet au bord.*

Supposons que (3.3.2) vaut avec un paramètre $0 \leq \theta < 1$. *Soit la condition initiale* z_0 *réelle et à valeurs dans* $D(M)$ *et soit* $\mathbb{E}\,\|z_0\|_{D(M)}^2 + \mathbb{E}\,V(z_0) < \infty$. *Supposons que la mesure spectrale* μ *satisfait à*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(1 + \|x\|^2\right) d\mu(x) < \infty.$$

Supposons que g *vérifie la condition (3.3.3) du Théorème 3.3.2 et qu'il existe une constante* $m > 0$ *telle que, pour tout* $z = (u, v)$ *réel dans* $D(M)$,

$$\|f(u)\|_{W^{1,2}(D)} \leq m \left(1 + \|u\|_{W^{2,2}(D)}\right) (1 + V(z)) \tag{3.4.1}$$

$$\|g(u)\|_{W^{1,2}(D)}^2 \leq m \left(1 + \|u\|_{W^{2,2}(D)}^2\right) (1 + V(z)).$$

Il existe alors une solution forte globale réelle z *de l'équation (3.1.5) avec la condition initiale* z_0 *et une constante positive* C_0 *indépendante de la condition initiale telle que (3.3.4) vaut pour tout* $t \geq 0$ *et tout temps d'arrêt* τ.

Remarque. La condition (b) dans le Théorème 3.4.2 est nécessaire pour que $\mathcal{A} - A$ envoie les éléments de $D(A)$ dans $D(-A)^{1/2}$.

3.5 EXEMPLES ET COMMENTAIRES

Évolution de support compacte I (Déf. 3.2.3): Considérons l'opérateur

$$\mathcal{A}\varphi(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(x) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + c(x)\varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d$$

sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ avec $b_1, \ldots, b_d$, c dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et soit K_0 un compact dans $\mathbb{R}^d$. Si nous définissons

$$K_t = \{x + y : x \in K_0, |y| \leq t\}, \qquad t > 0$$

alors $(K_t : t \geq 0)$ est une évolution de support compact pour le C_0-groupe engendré par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration: Il est connu que si $z_0 = (u_0, v_0)$ est un couple de deux fonctions appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support compact, alors la solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \qquad u(0) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0) = v_0$$

est une fonction appartenant à $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ et

$$T_t(z_0) = (u(t), \frac{\partial u}{\partial t}(t))$$

où $(T_t : t \in \mathbb{R})$ est le C_0-groupe engendré par le générateur infinitésimal

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| < r\}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $r \geq 0$. Si $u_0 = v_0 = 0$ sur $B(x,r)$, alors $u(t) = v(t) = 0$ sur $B(x, r-t)$ pour tout $t \in [0,r]$ par l'unicité de solutions classiques de l'équation d'ondes (voir par exemple [Evans, Chapitre 7.2.4]). Cette propriété peut être facilement généralisée par la régularisation. Effectivement, si $z \in E$ s'annule presque partout dans $B(x,r)$ alors $T_t z$ s'annule presque partout dans $B(x, r-t)$. Maintenant fixons $s \geq 0$, $t > 0$, $z \in E_s$ et supposons que K_{t+s} est disjoint de $B(x,r)$ pour un $x \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$. Alors K_s est disjoint de $B(x, r+t)$ et donc $T_t z$ s'annule sur $B(x,r)$. Or, $T_t z \in E_{t+s}$. Nous voyons que $(K_t : t \geq 0)$ est une évolution de support compact pour le C_0-groupe $(T_t : t \in \mathbb{R})$. Si nous perturbons le générateur infinitésimal de $(T_t : t \in \mathbb{R})$ par un opérateur linéaire borné $M_1 : E \to E$ tel que $M_1[E_t] \subseteq E_t$ pour tout $t \geq 0$, alors $(K_t : t \geq 0)$ est une évolution de support compact pour le C_0-group engendré par $M_0 + M_1$ d'après [Pazy, Chapitre 3]. En particulier,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{A} - \Delta & 0 \end{pmatrix}$$

a cette propriété. □

Évolution de support compact II (Déf. 3.2.3): En cas d'un opérateur différentiel uniformément elliptique de deuxième ordre général

$$\mathcal{A}\varphi = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1} b_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + c(x)\varphi(x)$$

sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ avec $a_{ij} \in \mathrm{BUC}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $b_1, \ldots, b_d, c$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ nous pouvons construire une évolution de support de façon analogue à l'exemple précédent en nous référant au résultat dans [Evans, Chapitre 7.2.4]; mais, cette fois-ci, les compacts de l'évolution de support $(K_t : t \geq 0)$ ont une forme donnée par les solutions d'une équation aux dérivées partielles de premier ordre.

Fonction l (Thm 3.3.2, Thm 3.4.2): Des exemples des fonctions l appartenant à $C^2(\Delta_\theta, \infty)$ satisfaisant aux hypothèses dans (3.3.1) sont, par exemple, $l(x) = (x - \Delta_\theta)^a$, $a > 0$ ou $l(x) = \log(x + 1 - \Delta_\theta)$. Si l satisfait aux hypothèses dans (3.3.1), alors il existe un prolongement $l_0 \in C^2(\mathbb{R})$ tel que $\dot{l}_0 > 0$ sur $\mathbb{R}$ et $l_0 = l$ sur $[\delta_\theta, \infty)$.

Finitude de δ_θ (Thm 3.3.2, Thm 3.4.2): Définissons

$$\delta = \inf\{\|(-A)^{1/2}u\|^2_{L^2(D)} : u \in D(-A)^{1/2}, \|u\|_{L^2(D)} = 1\} = \inf\sigma(-A). \tag{3.5.1}$$

Alors δ est positif car l'opérateur auxiliaire A est autoadjoint et strictement négatif et peut être aussi grand qu'on veut selon le choix de $\widetilde{C}$ dans la définition de A qui, lui-même, peut être arbitrairement grand du commencement. Si

$$\frac{\theta\delta}{2}x^2 + L(x) \geq C_*, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{3.5.2}$$

vaut pour une constante réelle C_* si D est borné, ou pour $C_* = 0$ si $D = \mathbb{R}^d$, alors δ_θ est fini. En particulier, soit $R_1 \geq 0$, $R_2 \geq 0$, $L(x) \geq 0$ pour $x \notin [-R_1, R_2]$ et soit l'une des deux conditions satisfaite:

- ▷ D est bornée.
- ▷ $D = \mathbb{R}^d$, f appartient à C^1 et $\dot{f}(x) \leq \delta\theta$ pour tout $-R_1 \leq x \leq R_2$.

Alors $\delta_\theta > -\infty$.

Condition de croissance pour g dans (3.3.3) dans Thm 3.3.2 et Thm 3.4.2: Si (3.5.2) vaut alors nous pouvons mettre $\Delta_\theta = -1$ quand $D = \mathbb{R}^d$ et $\Delta_\theta = (C_* - 1)\lambda^d(D)$ quand D est borné, où C_* intervient dans (3.5.2) et λ^d est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Alors (3.3.3) vaut si

$$|g(x)|^2 \leq m\left(\frac{\delta}{2}x^2 + L(x) + C_0\right), \qquad x \in \mathbb{R}$$

vaut pour une constante m et avec $C_0 = 0$ si $D = \mathbb{R}^d$ et $C_0 = 1 - C_*$ si D est borné.

Condition de croissance pour g et f dans (3.4.1) du Thm 3.4.2: Nous rappelons que $D(-A)^{1/2} = W_0^{1,2}(D)$ si $D = \mathbb{R}^d$ ou si D est borné et $\mathcal{A}$ est considéré avec la condition de Dirichlet au bord. Si D est borné et $\mathcal{A}$ est considéré avec la

condition de Neumann au bord alors $D(-A)^{1/2} = W^{1,2}(D)$. Soit (3.5.2) valable avec un paramètre $0 \leq \theta < 1$ et mettons $\Delta_\theta = -1$ quand $D = \mathbb{R}^d$ ou $\Delta_\theta = (C_* - 1)\lambda^d(D)$ quand D est borné où C_* intervient dans (3.5.2) et λ^d est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Notons $c_0 = \inf\{\|u\|^2_{D(-A)^{1/2}} : \|u\|_{L^\infty(D)} = 1\}$ si $d = 1$ et distinguons les cas particuliers suivants:

Si $d = 1$ et s'il existe une constante a telle que

$$|\dot{f}(x)| + |\dot{g}(x)|^2 \leq al\left(c_0 x^2/2 + \delta_\theta\right) \tag{3.5.3}$$

vaut pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors (3.4.1) vaut.

Si D est borné dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geq 1$ et $\mathcal{A}$ est considéré avec la condition de Dirichlet au bord, supposons que

$$|\dot{f}(x)|^\gamma \leq a\left[1 + |x|^{r_1} + \left(\frac{\delta}{2}|x|^2 + L(x) - C_*\right)\right] \tag{3.5.4}$$

et

$$|\dot{g}(x)|^\gamma \leq a\left[1 + |x|^{r_2} + \left(\frac{\delta}{2}|x|^2 + L(x) - C_*\right)\right] \tag{3.5.5}$$

où a, r_1, r_2 et γ sont tels que $x^{r_1/(2\gamma)} + x^{r_2/\gamma} \leq cl(x)$ pour tout $x \geq 0$ et une constante $c > 0$, et

- ▷ $2 \leq r_i$ pour $i = 1, 2$ et $\gamma = 2$ quand $d = 1$.
- ▷ $2 \leq r_i$ pour $i = 1, 2$ et $2 < \gamma < \infty$ quand $d = 2$.
- ▷ $2 \leq r_i \leq 2d/(d-2)$ pour $i = 1, 2$ et $\gamma = d$ quand $d \geq 3$.

Alors (3.4.1) vaut.

Si $d \geq 1$ et $D = \mathbb{R}^d$ ou D est borné dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{A}$ est considéré avec la condition de Neumann au bord, supposons que (3.5.4) et (3.5.5) sont satisfaits. En plus, nous supposerons que (3.3.3) vaut et que $x \leq cl(x)$ pour tout $x \geq 0$ et une constante c, et

$$xf(x) \leq \delta x^2 + r_1|x|^{r_1}$$

pour tout $|x| \geq R$ où R est une constante positive fixée. Alors (3.4.1) vaut.

Indication des démonstrations: Soient $h \in C^1(\mathbb{R})$ et $u \in W^{2,2}(D)$ alors

$$\nabla(h(u)) = \dot{h}(u)\nabla u$$

et

$$\|h(u)\|^2_{W^{1,2}(D)} = \|h(u)\|^2_{L^2(D)} + \|\dot{h}(u)\nabla u\|^2_{L^2(D)}.$$

Étant donné $p_1, \ldots, p_k \in [\gamma, \infty]$, nous avons

$$\left\|\sum_{i=1}^k v_i \nabla u\right\|_{L^2(D)} \leq \sum_{i=1}^k \|v_i\|_{L^{p_i}(D)} \|\nabla u\|_{L^{2p_i/(p_i-2)}(D)} \leq$$

$$\leq C\|u\|_{W^{2,2}(D)} \sum_{i=1}^k \|v_i\|_{L^{p_i}(D)}$$

pour toutes fonctions $v_1, \ldots, v_k$ où $\gamma = 2$ quand $d = 1$, $\gamma > 2$ quand $d = 2$ et $\gamma = d$ quand $d \geq 3$ grâce au théorème de Sobolev. Or, si $|\dot{h}(x)| \leq \sum_{i=1}^{k} v_i(x)$ il suffit d'estimer $\|v_i(u)\|_{L^{p_i}(D)}$. Quant à la deuxième partie nous utilisons

$$\|f(u) - f(0)\|^2_{L^2(D)} \leq \int_0^1 \int_D |\dot{f}(tu)|^2 |u|^2 \, dx \, dt$$

et le fait qu'il existe une constante $\tilde{c} > 0$ telle que

$$1 + |tx|^{r_1} + \frac{\delta}{2}|tx|^2 + L(tx) - C_* \leq \tilde{c}\left(1 + |x|^{r_1} + \frac{\delta}{2}|x|^2 + L(x) - C_*\right)$$

pour tout $0 \leq t \leq 1$ et $x \in \mathbb{R}$. □

Exemple 1. Considérons le problème de Cauchy pour l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - au|u|^{p-1} + b|u|^q \dot{W} \qquad \text{sur} \quad \mathbb{R}^d \tag{3.5.6}$$

avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ sur une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W)$ avec un processus de Wiener spatialement homogène de mesure spectrale finie et une condition initiale $(u(0), u_t(0))$ à valeurs dans $W^{1,2}(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)$ mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_0$. Supposons que $1 \leq q \leq (p+1)/2$ quand $d = 1$ ou $d = 2$, et $1 \leq q \leq (p+1)/2 \leq 2$ quand $d = 3$. Alors, par le Théorème 3.3.2, l'équation (3.5.6) a une unique solution à trajectoires continues dans $W^{1,2}(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)$.

Si, en plus, $u(0, \omega)$ et $u_t(0, \omega)$ ont le support essentiel contenu dans une boule B_R dans $\mathbb{R}^d$ pour tout ω et un $R > 0$ alors les deux composantes de la solution $u(t, \omega)$ et $u_t(t, \omega)$ ont le support essentiel contenu dans B_{R+t} pour tout $t \geq 0$ et $\omega \in \Omega$.

Exemple 2. Considérons le problème de Cauchy pour l'équation (3.5.6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - au^{2m+1} + bu^n \dot{W} \qquad \text{sur} \quad \mathbb{R}^d \tag{3.5.7}$$

avec $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq m + 1$, sur une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W)$ avec un processus de Wiener spatialement homogène W de mesure spectral μ vérifiant à

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|^2) \, d\mu < \infty \tag{3.5.8}$$

et une condition initiale $(u(0), u_t(0))$ à valeurs dans $W^{2,2}(\mathbb{R}^d) \times W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_0$. Supposons que $d \leq 3$, et $m = 1$ uniquement si $d = 3$. Alors, par le Théorème 3.4.2, l'équation (3.5.7) a une unique solution à trajectoires continues dans $W^{2,2}(\mathbb{R}^d) \times W^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ qui propagent à vitesse finie comme dans l'Exemple 1.

Exemple 3. Considérons le problème de bord de Neumann pour l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - f(u) + g(u)\,\dot{W} \qquad \text{sur} \quad D \tag{3.5.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(t) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial D \quad \text{pour} \quad t \geq 0$$

où D est un domaine borné de classe C^2 dans $\mathbb{R}^d$ et f, resp. g est un pôlynome d'ordre $2m+1$ de signe positif au terme principal, resp. d'ordre n, et $n \leq m+1$. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W)$ une base stochastique avec un processus de Wiener spatialement homogène W de mesure spectrale finie et une condition initiale $(u(0), u_t(0))$ à valeurs dans $W^{1,2}(D) \times L^2(D)$ mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_0$. Supposons que $d \leq 3$, et $m = 1$ si $d = 3$. Alors, par le Théorème 3.3.2, l'équation (3.5.9) a une unique solution à trajectoires continues dans $W^{1,2}(D) \times L^2(D)$.

Example 4. Considérons le problèm de bord de Dirichlet pour l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u - f(u) + g(u)\,\dot{W} \qquad \text{sur} \quad D \tag{3.5.10}$$

$$u(t) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial D \quad \text{pour} \quad t \geq 0$$

où D est un domaine borné de classe C^2 dans $\mathbb{R}^d$ et f, resp. g est un pôlynome d'ordre $2m+1$ de signe positif au terme principal, resp. d'ordre n, et $n \leq m+1$. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W)$ une base stochastique avec un processus de Wiener spatialement homogène W de mesure spectrale μ vérifiant (3.5.8), et une condition initiale $(u(0), u_t(0))$ à valeurs dans $(W^{2,2}(D) \cap W_0^{1,2}(D)) \times W_0^{1,2}(D)$ mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_0$. Supposons que $d \leq 3$, et $m = 1$ si $d = 3$. Alors, par le Théorème 3.4.2, l'équation (3.5.10) a une unique solution à trajectoires continues dans

$$(W^{2,2}(D) \cap W_0^{1,2}(D)) \times W_0^{1,2}(D).$$

3.6 DÉMONSTRATIONS

Preuve du Théorème 3.2.4. Les nonlinéarités F et G étant Lipschitz sur des ensembles bornés il existe une solution locale en temps $(z_t = (u_t, v_t) : 0 \leq t < \tau_m)$ à trajectoires continues dans E où τ_m est le temps d'arrêt de l'explosion positif, à savoir,

$$\limsup_{t \to \tau_m} \|z_t\|_E = \infty, \qquad \text{sur} \quad [\tau_m < \infty].$$

Définissons

$$\tau_R(\omega) = \inf\{t \geq 0 : \|z(t,\omega)\|_E \geq R\}, \qquad \omega \in \Omega$$

le premier temps de sortie de la boule de rayon R dans E, la fonction continue

$$a_R(r) = \begin{cases} 1 & r < R \\ 2 - r/R & R \leq r \leq 2R \\ 0 & r > 2R \end{cases}$$

et $F_R(z) = a_R(\|z\|)F(z)$ et $G_R(z) = a_R(\|z\|)G(z)$, $z \in E$, $R > 0$. Alors $F_R : E \to E$ et $G_R : E \to HS(H_w, E)$ sont globalement Lipschitz. Si nous pouvions montrer l'énoncé du théorème pour la solution z_R correspondant à l'équation avec les nonlinéarités F_R et G_R à la place de F et G avec la condition initiale

$$z_{0,R}(\omega) = \begin{cases} z_0(\omega) & \text{quand } \|z_0(\omega)\|_E \leq R \\ 0 & \text{quand } \|z_0(\omega)\|_E > R \end{cases}$$

nous aurions démontré le théorème également pour la solution locale z grâce à l'unicité trajectorielle:

$$z(t,\omega) = z_R(t,\omega), \qquad 0 \leq t < \tau_R(\omega), \quad \omega \in [\|z_0\|_E \leq R].$$

Notons $(E_t(\omega) : t \geq 0)$ les espaces associés à l'évolution de support $(K_t(\omega) : t \geq 0)$, $\omega \in \Omega$ comme dans la Définition 3.2.3, et définissons Y l'espace des processus adaptés φ dont les trajectoires sont continues dans E, issues de $z_{0,R}$ et tel que

- ▷ $\varphi(t,\omega) \in E_t(\omega)$ pour tout $t \geq 0$ et $\omega \in \Omega$.
- ▷ $\mathbb{E} \sup\{\|\varphi(t)\|_E^3 : t \leq T\} < \infty$ pour tout $T > 0$.

Cet espace muni des pseudonormes

$$p_n(\varphi) = \left(\mathbb{E} \sup\{\exp(-tC_n)\|\varphi(t)\|_E : t \leq n\}^3\right)^{1/3}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

où $(C_n : n \in \mathbb{N})$ sont des constantes convenables, est complet et l'application

$$O(\varphi)(t) = S_t z_{0,R} + \int_0^t S_{t-s}F_R(\varphi_s)\,ds + \int_0^t S_{t-s}G_R(\varphi_s)\,dW, \qquad t \geq 0$$

est contractive sur Y. Or, si nous montrons que O envoi Y dans Y alors il existera un unique point fixe qui ne serait apparemment rien d'autre que z_R et la démonstration serait achevée.

Discutons chacun des termes séparément:

$$S_t z_{0,R}(\omega) \in E_t(\omega)$$

pour tout $\omega \in \Omega$ par la Définition 3.2.3. Ensuite, fixons $t > 0$. Alors le support essentiel de $F(\varphi(s,\omega)) = (0, f(\operatorname{Re}\varphi(s,\omega)))$ ne peut pas être plus grand que le support essentiel de $\varphi(s,\omega)$ qui est contenu dans $K_s(\omega)$ par définition car $f(0) = 0$. Par conséquent, le support essentiel de $F_R(\varphi(s,\omega))$ est contenu dans $K_s(\omega)$ aussi. Au total, la trajectoire

$$s \mapsto S_{t-s}F_R(\varphi(s,\omega)), \qquad 0 \leq s \leq t$$

vit dans le sous-espace fermé $E_t(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$ et donc l'intégrale de Bochner

$$\int_0^t S_{t-s}F_R(\varphi(s,\omega))\,ds \in E_t(\omega).$$

Il nous reste le terme stochastique. Apparemment, le support essentiel de $g(\varphi(s,\omega))$ est contenu dans $K_s(\omega)$ car $g(0) = 0$. Nous avons déjà vu dans les préliminaires (voir le Lemme 3.1.1) que si la mesure spectrale μ est finie alors l'espace autoreproduisant H_w est contenu dans l'espace des fonctions bornées uniformément continues et l'opérateur de multiplication est défini par multiplication des fonctions point par point. Or, le support essentiel de $g(\mathrm{Re}\,\varphi(s,\omega))\xi$ est contenu dans $K_s(\omega)$ et de même pour $G_R(\varphi(s,\omega))\xi$ pour tout $\xi \in H_w$. Par conséquent, la trajectoire

$$s \mapsto S_{t-s}G(\varphi(s,\omega)), \qquad 0 \leq s \leq t$$

vit dans $HS(H_w, E_t(\omega))$ pour tout $\omega \in \Omega$. Alors

$$\int_0^t S_{t-s}G_R(\varphi)\, dW(\omega) \in E_t(\omega)$$

pour presque tout ω par le Lemme 3.6.6. En résumant, étant donné $t \geq 0$, nous obtenons

$$O_t(\varphi)(\omega) \in E_t(\omega)$$

pour presque tout ω. Ensuite nous savons de [DP-Z] que la trajectoire

$$t \mapsto O(\varphi)(t,\omega)$$

est continue dans E et, comme

$$E_s(\omega) = \bigcap_{t>s} E_t(\omega)$$

pour tout $\omega \in \Omega$ par définition, nous obtenons que $O(\varphi)(\omega) \in Y$ pour presque tout $\omega \in \Omega$. Une modification éventuelle sur un ensemble négligable pour la mesure $\mathbb{P}$ nous permet de conclure. □

Discussion 3.6.1 (sur preuves suivantes). Nous allons faire la première partie de la démonstration du Théorème 3.3.2 et du Thórème 3.4.2 simultanément car la méthode est la même. La seule différence est qu'elle se fait dans des espaces différents. Les suites des deux démonstrations seront ensuite effectuées séparément.

Sous les hypothèses du Théorème 3.3.2 les opérateurs de Nemytski $F : E \to E$ et $G : E \to HS(H_w, E)$ sont Lipschitz sur des ensembles bornés dans E. Au cas du Théorème 3.4.2 les opérateurs de Nemytski $F : D(M) \to D(M)$, $G : D(M) \to HS(H_w, D(M))$ sont Lipschitz sur des ensembles bornés dans $D(M)$. Ici $D(M) = D(A) \times D(-A)^{1/2}$ est l'espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle z_1, z_2\rangle_{D(M)} = \langle Au_1, Au_2\rangle_{L^2(D)} + \left\langle (-A)^{1/2}v_1, (-A)^{1/2}v_2 \right\rangle_{L^2(D)}$$

pour $z_1 = (u_1, v_1) \in D(M)$, $z_2 = (u_2, v_2) \in D(M)$ et la norme de $D(M)$ est équivalente à la norme graphe

$$\|z\|^2_{\mathbf{graph}} = \|z\|^2_E + \|Mz\|^2_E$$

où $z = (u, v) \in D(M)$. La théorie générale des C_0-groupes entraîne que

$$S_t[D(M)] = D(M), \qquad t \in \mathbb{R},$$

et la restriction $S_t|_{D(M)}$ est un C_0-groupe sur $D(M)$ de générateur infinitésimal M restreint à $D(M^2)$.

Ces faits entraînent l'existence d'une solution mild locale $(z_t = (u_t, v_t) : t < \tau_m)$ dans E (pour le Théorème 3.3.2) ou dans $D(M)$ (pour le Théorème 3.4.2) où τ_m est le temps d'arrêt d'explosion positif (et il est différent dans chacun des cas). Notons

$$\tau_R(\omega) = \inf\{t \geq 0 : \|z(t,\omega)\|_E \geq R\}, \qquad \omega \in \Omega \qquad \text{pour le Théorème 3.3.2}$$

ou

$$\tau_R(\omega) = \inf\{t \geq 0 : \|z(t,\omega)\|_{D(M)} \geq R\}, \qquad \omega \in \Omega \qquad \text{pour le Théorème 3.4.2}$$

le premier temps de sortie de la boule de rayon R dans E, resp. dans $D(M)$ et $\sigma_R = \tau_R \wedge \tau$ où τ est un temps d'arrêt arbitraire. Nous allons démontrer l'inégalité suivante:

Proposition 3.6.2. Sous les hypothèses et les conventions faites dans la Discussion 3.6.1 ci-dessus l'inégalité suivante vaut:

$$\mathbb{E}\,V(z_{t\wedge\sigma_R}) \leq \mathbb{E}\,V(z_0) + \tag{3.6.1}$$

$$+\mathbb{E}\int_0^t i\left(\frac{1}{2}\|z_{s\wedge\sigma_R}\|_E^2 + \int_D L(u_{s\wedge\sigma_R})\,dx\right)\max\{\langle Bu(s_{s\wedge\sigma_R}), v(s_{s\wedge\sigma_R})\rangle_{L^2(D)}, 0\}\,ds +$$

$$+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^t i\left(\frac{1}{2}\|z_{s\wedge\sigma_R}\|_E^2 + \int_D L\left(u_{s\wedge\sigma_R}\right)\,dx\right)\|g\left(u_{s\wedge\sigma_R}\right)\|_{HS(H_w,L^2(D))}^2\,ds +$$

$$+\frac{1}{2}\mathbb{E}\int_0^t \max\left\{\ddot{i}\left(\frac{1}{2}\|z_{s\wedge\sigma_R}\|_E^2 + \int_D L\left(u_{s\wedge\sigma_R}\right)\,dx\right), 0\right\}\times$$

$$\times\|v_{s\wedge\sigma_R}\|_{L^2(D)}^2\|g\left(u_{s\wedge\sigma_R}\right)\|_{HS(H_w,L^2(D))}^2\,ds, \qquad t \geq 0$$

où B est l'opérateur différentiel de premier ordre $B = \mathcal{A} - A$ pour le Théorème 3.3.2 ainsi que pour le Théorème 3.4.2 □

Preuve du Thm 3.3.2 et la première partie de la preuve du Thm 3.4.2. Les considérations qui suivent sont communes pour le Théorème 3.3.2 et pour le Théorème 3.4.2:

En majorant les termes dans (3.6.1) on obtient

$$\mathbb{E}\,V(z_{t\wedge\sigma_R}) \leq \mathbb{E}\,V(z_0) + C_0\int_0^t \mathbb{E}\,V(z_{s\wedge\sigma_R})\,ds \qquad t \geq 0$$

pour une constante C_0 par les hypothèses sur l, $\dot{l}$ et $\ddot{l}$, l'hypothèse (3.3.3), le Lemme 3.1.1 et le fait que $|x-\Delta_\theta|\dot{l}(x)+(x-\Delta_\theta)^2\max\{\ddot{l}(x),0\}\le C_1 l(x)$ pour $x\ge\delta_\theta$ et une constante C_1. Par conséquent, grâce au Lemme de Gronwall, nous concluons que

$$\mathbb{E}\,V(z_{t\wedge\sigma_R})\le e^{C_0 t}\mathbb{E}\,V(z_0). \tag{3.6.2}$$

En ce moment nous interromprons la ligne de la preuve du Théorème 3.4.2 (dont la reprise suivra) et nous terminons la preuve du Théorème 3.3.2:

Maintenant nous sommes prêts à montrer $\mathbb{P}[\tau_m<\infty]=0$. Pour voir cela nous mettons $\tau(\omega)=\infty$, $\omega\in\Omega$ (le choix du temps d'arrêt τ a été arbitraire comme nous avons remarqué dès le commencement). Nous avons

$$\frac{1-\theta}{2}\|z\|_E^2+\delta_\theta\le\frac{1}{2}\|z\|_E^2+\int_D L(\operatorname{Re}u)\,dx$$

pour tout $z=(u,v)\in E$ alors

$$l\left((1-\theta)R^2/2+\delta_\theta\right)\le V(z_{t\wedge\sigma_R})\qquad\text{on}\qquad[\tau_R\le t]$$

puisque l est croissant et $R\le\|z_{\tau_R}\|_E=\|z_{t\wedge\sigma_R}\|_E$ sur l'ensemble $[\tau_R\le t]$. Or,

$$l\left((1-\theta)R^2/2+\delta_\theta\right)\mathbb{P}\,[\tau_R\le t]\le\mathbb{E}\,V(z_{t\wedge\sigma_R})\le e^{C_0 t}\mathbb{E}\,V(z_0)$$

par (3.6.2) et en faisant tendre R vers l'infini nous obtenons

$$\mathbb{P}\,[\tau_m\le t]=\lim_{R\to\infty}\mathbb{P}\,[\tau_R\le t]=0.$$

Comme le temps t est arbitraire on a terminé. L'inégalité (3.3.4) et une conséquence immédiate de (3.6.2) par le Lemme de Fatou. □

Avant de passer à la deuxième partie de la preuve du Théorème 3.4.2 nous allons énoncer encore une proposition. Pour cela nous allons utiliser une autre fonction de Lyapunov:

$$V_0(z)=k\left(\frac{1}{2}\|z\|_{D(M)}^2\right)$$

pour une fonction $k:[0,\infty)\to[0,\infty)$ telle que

- ▷ k appartient à $C^2([0,\infty))$.
- ▷ $\dot{k}(x)\ge 0$, $x\ge 0$.

Ensuite nous définissons $\delta=\inf\{\|(-A)^{1/2}\varphi\|_{L^2(D)}^2:\|\varphi\|_{L^2(D)}=1\}=\inf\sigma(-A)$.

La démonstration de la proposition suivante est essentiellement la même que celle de la Proposition 3.6.2. Nous rappelons les conventions de la Discussion 3.6.1, surtout le fait que $(z_t=(u_t,v_t):0\le t<\tau_m)$ est la solution mild locale dans $D(M)$,

$$\tau_R(\omega)=\inf\{t\ge 0:\|z(t,\omega)\|_{D(M)}\ge R\},\qquad\omega\in\Omega$$

est le premier temps de sortie de la boule de rayon R dans $D(M)$ et $\sigma_R=\tau_R\wedge\tau$ où τ est un temps d'arrêt fixé.

Proposition 3.6.3. Sous les hypothèses du Théorème 3.4.2 l'inégalité

$$\mathbb{E}\, V_0(z_{t\wedge\sigma_R}) \le \mathbb{E}\, V_0(z_0)+ \tag{3.6.3}$$

$$+\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\mathbb{E}\int_0^t \dot{k}\left(\frac{1}{2}\left\|z_{s\wedge\sigma_R}\right\|^2_{D(M)}\right)\times$$

$$\times\|v_{s\wedge\sigma_R}\|_{D(-A)^{1/2}}\|Bu_{s\wedge\sigma_R}+f(u_{s\wedge\sigma_R})\|_{D(-A)^{1/2}}\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\mathbb{E}\int_0^t \dot{k}\left(\frac{1}{2}\left\|z_{s\wedge\sigma_R}\right\|^2_{D(M)}\right)\|g(u_{s\wedge\sigma_R})\|^2_{HS(H_w,D(-A)^{1/2})}\,ds+$$

$$+\left(1+\frac{1}{\delta^2}\right)\mathbb{E}\int_0^t \max\left\{\ddot{k}\left(\frac{1}{2}\left\|z_{s\wedge\sigma_R}\right\|^2_{D(M)}\right),0\right\}\times$$

$$\times\left\|v_{s\wedge\sigma_R}\right\|^2_{D(-A)^{1/2}}\left\|g\left(u_{s\wedge\sigma_R}\right)\right\|^2_{HS(H_w,D(-A)^{1/2})}\,ds, \qquad t\ge 0$$

vaut avec l'opérateur différentiel de premier ordre $B=\mathcal{A}-A$.

Deuxième partie de la preuve du Théorème 3.4.2. Choisissons pour k la fonction $\log(1+x)$. Nous voyons que le dernier terme dans (3.6.3) n'intervient pas car $\ddot{k}$ est négative. Ensuite nous appliquons (3.4.1) pour voir que la première intégrale à droite peut être majorée par

$$\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\mathbb{E}\int_0^t Cm\left(1+V(z_{s\wedge\sigma_R})\right)\,ds$$

par le Lemme 3.1.1 où C est une constante positive. Donc (3.6.3) mène à

$$\mathbb{E}\, V_0(z_{t\wedge\sigma_R}) \le \mathbb{E}\, V_0(z_0)+\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\int_0^t Cm\left(1+e^{C_0 s}\right)\,ds, \qquad t\ge 0 \tag{3.6.4}$$

par (3.6.2), et nous concluons de façon classique: Notons r_t le côté droit de (3.6.4) et en prenant $\tau(\omega)=\infty$ pour tout $\omega\in\Omega$ (le temps d'arrêt τ était arbitraire, comme nous avons déjà remarqué, dès le commencement) nous obtenons

$$k(R^2/2)\le k\left(\frac{1}{2}\|z_{t\wedge\sigma_R}\|^2_{D(M)}\right)=V_0(z_{t\wedge\sigma_R}) \qquad \text{sur} \qquad [\sigma_R\le t]=[\tau_R\le t].$$

Or, $k(R^2/2)\mathbb{P}\left[\tau_R\le t\right]\le r_t$ pour tout $R>0$. Faisant tendre R vers l'infini nous avons

$$\mathbb{P}\left[\tau_m\le t\right]=\lim_{R\to\infty}\mathbb{P}\left[\tau_R\le t\right]=0$$

et puisque le temps t a été choisi de façon arbitraire nous clorons la démonstration en constatant que la solution z est globale. L'estimation (3.3.4) est une conséquence immédiate de (3.6.2) par le Lemme de Fatou. □

Preuve de la Proposition 3.6.2. Quant à cette démonstration nous allons suivre surtout [B-M-S] et nous n'allons présenter que le cas du Théorème 3.4.2. En cas du Théorème 3.3.2 il faut lire E au lieu de $D(M)$. Nous définissons

$$a(t) = I_{[0,\sigma_R)}(t)F(z_{t\wedge\sigma_R}), \qquad b(t) = I_{[0,\sigma_R)}(t)G(z_{t\wedge\sigma_R}), \qquad t \geq 0.$$

Le processus a est alors à valeurs dans $D(M)$, b est à valeurs dans $HS(H_w, D(M))$ et les deux sont progressivement mesurables et uniformément bornés. En plus, en définissant les approximations de Yosida du générateur infinitésimal M (défini dans (3.1.2)) dans $D(M)$

$$M_n = nM\,(n - M)^{-1}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

nous considérons les processus

$$z_n(t) = S_t^n z(0) + \int_0^t S_{t-s}^n a(s)\,ds + \int_0^t S_{t-s}^n b(s)\,dW, \qquad t \geq 0, \qquad n \in \mathbb{N}$$

à valeurs dans $D(M)$ où $(S_t^n : t \in \mathbb{R})$ est le C_0-groupe dans E engendré par M_n dont la restriction à $D(M)$ est un C_0-groupe sur $D(M)$. Les processus z_n satisfont (automatiquement) à

$$z_n(t) = z(0) + \int_0^t M_n z_n(s)\,ds + \int_0^t a(s)\,ds + \int_0^t b(s)\,dW, \qquad t \geq 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque M_n sont des opérateurs linéaires bornés tant sur E que sur $D(M)$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \sup_{0\leq t\leq T\wedge\sigma_R} \|z_n(t) - z(t)\|_{D(M)}^2 = 0, \qquad T > 0$$

par [B-M-S] ou la Proposition 7.3 dans [DP-Z]. Maintenant nous pouvons calculer $V(z_n)$ en utilisant la formule d'Ito qui est, sous nos hypothèses, applicable, pour arriver à

$$V(z_n(t\wedge\sigma_R)) = V(z_0) + \int_0^{t\wedge\sigma_R} \dot{V}(z_n(s))\,(M_n z_n(s) + a(s))\,ds +$$

$$+ \int_0^{t\wedge\sigma_R} \dot{V}(z_n(s))b(s)\,dW + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\sigma_R} \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{V}(z_n(s))\,(b(s)\xi_k, b(s)\xi_k)\,ds$$

où $(\xi_k : k \in \mathbb{N})$ est une base orthonormée dans H_w. Après avoir calculé toutes les expressions nous obtenons

$$V(z_n(t\wedge\sigma_R)) = V(z_0) + \int_0^{t\wedge\sigma_R} \dot{l}\left(\frac{1}{2}\|z_n(s)\|_E^2 + \int_D L(u_n(s))\,dx\right)\times$$

$$\times \operatorname{Re}\left(\langle z_n(s), M_n z_n(s) + a(s)\rangle_E - \int_D f(u_n) M_n^1 z_n(s)\,dx\right) ds +$$

$$+ \int_0^{t\wedge\sigma_R} \dot{V}(z_n(s)) b(s)\,dW +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\sigma_R}\sum_{k=1}^{\infty} \dot{l}\left(\frac{1}{2}\|z_n(s)\|_E^2 + \int_D L(u_n(s))\,dx\right)\|g(u_n(s))\xi_k\|_{L^2(D)}^2\,ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\sigma_R}\sum_{k=1}^{\infty} \ddot{l}\left(\frac{1}{2}\|z_n(s)\|_E^2 + \int_D L(u_n(s))\,dx\right)\langle v_n(s), g(u_n(s))\xi_k\rangle_{L^2(D)}^2\,ds$$

où $z_n = (u_n, v_n)$, $M_n z = (M_n^1 z, M_n^2 z) \in D(M) \subseteq E$ et nous rappelons que $\dot{L} = -f$. Définissons les approximations de Yosida N_n de l'opérateur $N : D(M) \to E$,

$$N = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix},$$

à savoir, $N_n = nN(n-N)^{-1}$. Alors les opérateurs N_n sont tous dissipatifs sur E et donc

$$\operatorname{Re}\langle z_n(s), M_n z_n(s)\rangle_E \leq \operatorname{Re}\langle z_n(s), (M_n - N_n) z_n(s)\rangle_E,$$

la suite $(\|M_n - N_n\|_{L(E)})_n$ est bornée et $\|M_n z - N_n z - (M-N)z\|_E$ converge vers zéro par le Lemme 3.6.5 car $M-N$ est borné sur E. Ce fait, ensemble avec la nonnégativité de $\dot{l}$, entraîne ce que nous pouvons majorer la première intégrale à droite par

$$\int_0^{t\wedge\sigma_R} \dot{l}\left(\frac{1}{2}\|z_n(s)\|_E^2 + \int_D L(u_n(s))\,dx\right)\times \tag{3.6.5}$$

$$\times\left(\langle z_n(s), M_n z_n(s) - N_n z_n(s) + a(s)\rangle_E - \int_D f(u_n) M_n^1 z_n(s)\,dx\right) ds.$$

Comme $\|M_n^1(u,v) - v\|_{L^2(D)}$ converge vers zéro quel que soit $(u,v) \in E$ par le Lemme 3.6.4 nous pouvons passer à la limite en probabilité dans (3.6.5) obtenant

$$\int_0^{t\wedge\sigma_R} \dot{l}\left(\frac{1}{2}\|z(s)\|_E^2 + \int_D L(u(s))\,dx\right)\times$$

$$\times \left(\langle z(s), (M-N)z(s) + a(s) \rangle_E - \int_D f(u)v(s)\,dx \right) ds =$$

$$= \int_0^{t\wedge\sigma_R} i \left(\frac{1}{2}\|z(s)\|_E^2 + \int_D L(u(s))\,dx \right) \langle z(s), (M-N)z(s) \rangle_E \, ds =$$

$$= \int_0^{t\wedge\sigma_R} i \left(\frac{1}{2}\|z(s)\|_E^2 + \int_D L(u(s))\,dx \right) \langle v(s), Bu(s) \rangle_{L^2(D)} \, ds$$

par définition de a, mettant $B = \mathcal{A} - A$ qui est un opérateur différentiel de premier ordre continu de $D(-A)^{1/2}$ dans $L^2(D)$. Les autres termes convergent en probabilité aussi. Nous obtenons

$$V(z(t\wedge\sigma_R)) \le V(z_0) + \int_0^{t\wedge\sigma_R} \dot{V}(z(s))b(s)\,dW +$$

$$+ \int_0^{t\wedge\sigma_R} i \left(\frac{1}{2}\|z(s)\|_E^2 + \int_D L(u(s))\,dx \right) \langle v(s), Bu(s) \rangle_{L^2(D)} \, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{t\wedge\sigma_R} \sum_{k=1}^{\infty} i \left(\frac{1}{2}\|z(s)\|_E^2 + \int_D L(u(s))\,dx \right) \|g(u(s))\xi_k\|_{L^2(D)}^2 \, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{t\wedge\sigma_R} \sum_{k=1}^{\infty} \ddot{i} \left(\frac{1}{2}\|z(s)\|_E^2 + \int_D L(u(s))\,dx \right) \langle v(s), g(u(s))\xi_k \rangle_{L^2(D)}^2 \, ds$$

et, par conséquent,

$$V(z(t\wedge\sigma_R)) \le V(z_0) + \int_0^{t\wedge\sigma_R} \dot{V}(z(s))G(z(s))\,dW + \tag{3.6.6}$$

$$+ \int_0^{t\wedge\sigma_R} i \left(\frac{1}{2}\|z(s)\|_E^2 + \int_D L(u(s))\,dx \right) \langle Bu(s), v(s) \rangle_{L^2(D)} \, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{t\wedge\sigma_R} i \left(\frac{1}{2}\|z(s)\|_E^2 + \int_D L(u(s))\,dx \right) \|g(u(s))\|_{HS(H_w, L^2(D))}^2 \, ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{t\wedge\sigma_R} \max \left\{ \ddot{i} \left(\frac{1}{2}\|z(s)\|_E^2 + \int_D L(u(s))\,dx \right), 0 \right\} \times$$

$$\times \|v(s)\|_{L^2(D)}^2 \|g(u(s))\|_{HS(H_w, L^2(D))}^2 \, ds$$

et (3.6.1) est démontré. □

Preuve de la Proposition 3.6.3. La démonstration est fondée sur la même idée que nous venons d'utiliser dans la preuve de la Proposition 3.6.2; donc nous procéderons plus vite ici. Nous définissons les processus a, b, z_n et les opérateurs linéaires bornés M_n, N_n de même façon que dans la démonstration de la Proposition 3.6.2. Alors nous avons également

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \sup_{0\le t\le T\wedge\sigma_R} \|z_n(t) - z(t)\|^2_{D(M)} = 0, \qquad T > 0.$$

Maintenant nous pouvons calculer $V_0(z_n)$ en nous servant de la formule d'Ito pour arriver à

$$V_0(z_n(t\wedge\sigma_R)) = V_0(z_0) + \int_0^{t\wedge\sigma_R} \dot{V}_0(z_n(s))\,(M_n z_n(s) + a(s))\,ds +$$

$$+ \int_0^{t\wedge\sigma_R} \dot{V}_0(z_n(s))b(s)\,dW + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\sigma_R} \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{V}_0(z_n(s))\,(b(s)\xi_j, b(s)\xi_j)\,ds$$

où $(\xi_j : j \in \mathbb{N})$ est une base orthonormée dans H_w. Si nous calculons toutes les expressions nous obtenons

$$V_0(z_n(t\wedge\sigma_R)) = V_0(z_0) + \int_0^{t\wedge\sigma_R} \dot{k}\left(\frac{1}{2}\|z_n(s)\|^2_{D(M)}\right)\langle z_n(s), M_n z_n(s) + a(s)\rangle_{D(M)}\,ds +$$

$$+ \int_0^{t\wedge\sigma_R} \dot{V}_0(z_n(s))b(s)\,dW + \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\sigma_R} \sum_{j=1}^{\infty} \dot{k}\left(\frac{1}{2}\|z_n(s)\|^2_E\right)\|(0, g(u_n(s))\xi_j)\|^2_{D(M)}\,ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\sigma_R} \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{k}\left(\frac{1}{2}\|z_n(s)\|^2_E\right)\langle z_n(s), (0, g(u_n(s))\xi_j)\rangle^2_{D(M)}\,ds$$

où $z_n = (u_n, v_n)$. Ensuite, comme les processus qui interviennent sont tous à valeurs fonctions réelles, nous avons

$$\langle z_n(s), M_n z_n(s)\rangle_{D(M)} \le \langle z_n(s), (M_n - N_n) z_n(s)\rangle_{D(M)}$$

par la dissipativité de N_n sur $D(M)$. La suite $(\|M_n - N_n\|_{L(D(M))})_n$ est bornée et $\|M_n z - N_n z - (M - N)z\|_{D(M)}$ converge vers zéro par le Lemme 3.6.5 car $M - N$ est borné sur $D(M^2) = D(N^2)$. Ceci, ensemble avec la nonnégativité de $\dot{k}$, entraîne la majoration de la première intégrale à droite par

$$\int_0^{t\wedge\sigma_R} \dot{k}\left(\frac{1}{2}\|z_n(s)\|^2_{D(M)}\right)\langle z_n(s), M_n z_n(s) - N_n z_n(s) + a(s)\rangle_{D(M)}\,ds$$

qui converge en probabilité vers

$$\int_0^{t\wedge\sigma_R} \dot{k}\left(\frac{1}{2}\|z(s)\|^2_{D(M)}\right)\langle z(s),(M-N)z(s)+a(s)\rangle_{D(M)}\,ds.$$

Les autres termes convergent en probabilité aussi. Or, en notant $B=\mathcal{A}-A$, nous avons

$$V_0(z(t\wedge\sigma_R))\le V_0(z_0)+\int_0^{t\wedge\sigma_R}\dot{k}\left(\frac{1}{2}\|z(s)\|^2_{D(M)}\right)\langle z(s),(0,Bu(s)+f(u_s))\rangle_{D(M)}\,ds+$$

$$+\int_0^{t\wedge\sigma_R}\dot{V}_0(z(s))b(s)\,dW+\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\sigma_R}\sum_{j=1}^{\infty}\dot{k}\left(\frac{1}{2}\|z(s)\|^2_E\right)\|(0,g(u_s)\xi_j)\|^2_{D(M)}\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\sigma_R}\sum_{j=1}^{\infty}\ddot{k}\left(\frac{1}{2}\|z(s)\|^2_E\right)\langle z(s),(0,g(u_s)\xi_j)\rangle^2_{D(M)}\,ds.$$

(3.6.3) est entraîné par le fait que

$$\left|\langle z,(0,y)\rangle_{D(M)}\right|=\left|\langle v,y\rangle_{L^2(D)}+\left\langle(-A)^{1/2}v,(-A)^{1/2}y\right\rangle_{L^2(D)}\right|\le$$

$$\le\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\|v\|_{D(-A)^{1/2}}\|y\|_{D(-A)^{1/2}},\qquad z=(u,v)\in D(M),\quad y\in D(-A)^{1/2}$$

comme $\delta\|\varphi\|^2_{L^2(D)}\le\|(-A)^{1/2}\varphi\|^2_{L^2(D)}$ pour tout $\varphi\in D(-A)^{1/2}$ par définition. □

Preuve du Lemme 3.1.1. Soit $\xi\in H_w$ représenté par $\xi=\widehat{\psi\mu}$ pour un $\psi\in L^2(\mu)$. La mesure μ est finie, alors la distribution tempérée ξ est représentée par une fonction réelle (notée toujours ξ)

$$\xi(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\exp\left(-i\langle x,y\rangle\right)\psi(y)\,d\mu(y),\qquad x\in\mathbb{R}^d.$$

En ce qui concerne le premier énoncé, $\xi\in\mathrm{BUC}^k(\mathbb{R}^d)$ et

$$D^\alpha\xi(x)=\int_{\mathbb{R}^d}(-iy)^\alpha\exp\left(-i\langle x,y\rangle\right)\psi(y)\,d\mu(y),\qquad x\in\mathbb{R}^d$$

pour tout multiindex $|\alpha|\le k$. Si nous prenons un $u\in W^{k,2}(D)$, le produit $u\xi$ appartient à $W^{k,2}(D)$. Fixons deux multiindices α et β tels que $|\alpha|+|\beta|\le k$. Alors

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\| D^\alpha u D^\beta \xi_j \right\|^2_{L^2(D)} = \sum_{j=1}^{\infty} \int_D \left| D^\alpha u(x) D^\beta \xi_j(x) \right|^2 dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_D |D^\alpha u(x)|^2 \left| \int_{\mathbb{R}^d} (-iy)^\beta \exp\left(-i \langle x, y \rangle\right) \psi_j(y)\, d\mu(y) \right|^2 dx =$$

$$= \int_D |D^\alpha u(x)|^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left| \left\langle (-i\cdot)^\beta \exp\left(-i \langle x, \cdot \rangle\right), \psi_j \right\rangle_{L^2(\mu)} \right|^2 dx \leq$$

$$\leq \int_D |D^\alpha u(x)|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left| (-iy)^\beta \exp\left(-i \langle x, y \rangle\right) \right|^2 d\mu(y)\, dx \leq$$

$$\leq \|u\|^2_{W^{k,2}(D)} \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 + |y|^k\right)^2 d\mu(y)$$

par l'inégalité de Bessel où $(\xi_j = \widehat{\psi_j \mu} : j \in \mathbb{N})$ est une base orthonormée dans H_w. Par conséquent, $(\psi_j : j \in \mathbb{N})$ est orthonormée dans $L^2(\mu)$. Or, il existe une constante C indépendante de u telle que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|u \xi_j\|^2_{W^{k,2}(D)} \leq C \|u\|^2_{W^{k,2}(D)}.$$

□

Lemme 3.6.4. Soit X un espace de Banach, et soit C un opérateur sectoriel avec $\omega_0 = \sup\{\mathrm{Re}\,\sigma(C)\}$ et $X^\alpha = D(\omega - C)^\alpha$ pour un $\omega > \omega_0$. Alors ils existent des constantes K_α, $0 \leq \alpha \leq 1$ telles que

$$\|\lambda C(\lambda^2 - C)^{-1}\|_{L(X^\alpha, X)} \leq K_\alpha \lambda (1 + |\omega|)(\lambda^2 - \omega + 1)^{-\alpha}, \qquad \lambda^2 \geq \omega.$$

Preuve: Notons $B = C - \omega$. Alors

$$(-B)^\alpha (\lambda - B)^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} (-B)^\alpha e^{-Bt}\, dt, \qquad \lambda \geq 0$$

et nous obtenons

$$\|(-B)^\alpha (\lambda - B)^{-1}\|_{L(X)} \leq c_\alpha (\lambda + 1)^{\alpha - 1}, \qquad \lambda \geq 0$$

pour tout $0 < \alpha < 1$ et des constantes c_α, car

$$\|(-D)^\alpha e^{-Dt}\|_{L(X)} \leq c_\alpha e^{-\delta t} t^{-\alpha} \qquad t \geq 0$$

pour une constante $\delta > 0$ par [Pazy, Chapitre 2, Théorème 6.13]. Ensuite

$$\|\lambda C(\lambda^2 - C)^{-1}\|_{L(X^\alpha, X)} \leq$$

$$\|\lambda B(\lambda^2 - \omega - B)^{-1}(-B)^{-\alpha}\|_{L(X)} + \|\lambda\omega(\lambda^2 - \omega - B)^{-1}(-B)^{-\alpha}\|_{L(X)} \leq$$

$$\|\lambda(-B)^{1-\alpha}(\lambda^2 - \omega - B)^{-1}\|_{L(X)} + \|\lambda\omega(\lambda^2 - \omega - B)^{-1}(-B)^{-\alpha}\|_{L(X)} \leq$$

$$C_{1-\alpha}\lambda(\lambda^2 - \omega + 1)^{-\alpha} + \|(-B)^{-\alpha}\|_{L(X)}\lambda|\omega|(\lambda^2 - \omega + 1)^{-1}$$

$$K_\alpha\lambda(1 + |\omega|)(\lambda^2 - \omega + 1)^{-\alpha}, \qquad \lambda^2 \geq \omega.$$

□

Lemme 3.6.5. Soit X un espace de Banach, G_1 et G_2 deux générateurs infintésimaux de C_0-semigroupes avec $D(G_1) = D(G_2)$ tels que l'opérateur $G = G_1 - G_2$ est borné sur X. Définissons les approximations de Yosida

$$G_i^\lambda = \lambda G_i(\lambda - G_i)^{-1}, \qquad i = 1, 2.$$

Alors

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \|G_1^\lambda - G_2^\lambda\|_{L(X)} < \infty$$

et

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|G_1^\lambda x - G_2^\lambda x - Gx\|_X = 0, \qquad x \in X.$$

Preuve: $G_1^\lambda - G_2^\lambda = \lambda^2(\lambda - G_2)^{-1}G(\lambda - G_1)^{-1}$. □

Lemme 3.6.6. Soit $E(\omega)$ un sous-espace fermé dans E pour tout $\omega \in \Omega$, $T > 0$ et ψ un processus progressivement mesurable à valeurs dans $HS(H_w, E)$ tel que

$$\mathbb{P}\left[\int_0^T \|\psi(s)\|^2_{HS(H_w,E)} < \infty\right] = 1$$

et $\psi(s,\omega)\xi \in E(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, $\xi \in H_w$ et $s \leq T$. Alors

$$\int_0^T \psi(s)\, dW(\omega) \in E(\omega)$$

pour presque tout $\omega \in \Omega$.

Preuve: Le processus de Wiener W admet une décomposition

$$\langle W, \xi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} W_i \langle \xi, \xi_i\rangle_{H_w} \qquad \xi \in \mathbb{S}^*$$

où $(\xi_i : i \in \mathbb{N})$ est une base orthonormée dans H_w et $(W_i : i \in \mathbb{N})$ sont des processus de Wiener réels standards indépendants. Définissons $t_{n,j} = jT/n$ pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq j \leq n$ et $\psi_n(s,\omega) = 0$ pour $s \leq t_{n,1}$ et

$$\psi_n(s,\omega) = \frac{n}{T} \int_{t_{n,j-1}}^{t_{n,j}} \psi(r,\omega)\, dr, \qquad t_{n,j} < s < t_{n,j+1}$$

pour $1 \leq j \leq n-1$. Alors ψ_n est un processus en escalier tel que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \psi_n\, dW = \int_0^T \psi\, dW \qquad \text{en probabilité}$$

et

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \int_0^T \psi_n \xi_i\, dW_i = \int_0^T \psi_n\, dW \qquad \text{en probabilité.}$$

Comme $s \mapsto \psi_n(s,\omega)\xi_i$ est un processus simple à valeurs dans $E(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, l'intégrale stochastique est définie trajectoire par trajectoire et $\int_0^T \psi_n \xi_i\, dW_i(\omega) \in E(\omega)$ pour presque tout $\omega \in \Omega$. Or, la démonstration se termine en passant à la limite. □

3.7 BIBLIOGRAPHIE

[B-M-S] Brzeźniak, Z., Maslowski, B., Seidler, J.: *Stochastic Nonlinear Beam Equations*, manuscript in progress

[ChM] Chojnowska-Michalik, A.: *Stochastic differential equations in Hilbert spaces*, Probability Theory, Banach Center Publications, Vol. 5, 1979

[Chow] Chow, P.-L.: *Stochastic Wave Equations with Polynomial Nonlinearity*, The Annals of Applied probability, 2002, Vol. 12, No. 1, 361-381

[D-M] Dozzi, M., Maslowski, B.: *Nonexplosion of solutions to stochastic reaction diffusion equations*, Zeitschrift Angew. Math. Mech. 82 (2002), 745-751

[DP-Z] Da Prato, G., Zabczyk, J.: *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*, Cambridge University Press, 1992

[Evans] Evans, L. C.: *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, 19. AMS, Providence, RI, 1998

[Hen] Henry, D.: *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Mathematics 840, Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag. IV, 1981

[K] Khasminskii, R. Z.: *Stochastic stability of differential equations*, Sijthoff & Noordhoff, Alpen aan den Rijn 1980

[KST] Kolokoltsov, V. N., Schilling, R. L., Tyukov, A. E. *Transience and non-explosion of certain stochastic Newtonian systems*, Electron. J. Probab. 7 (2002), no. 19, 1-19

[Lun] Lunardi, A.: *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser, 1995

[M-M] Millet, A., Morien, P.-L., *On a nonlinear stochastic wave equation in the plane: existence and uniqueness of the solution*, Ann. Appl. Probab 11 (2001), no. 3, 922-951

[Ma-Ma] Mao, X., Markus, L., *Energy bounds for nonlinear dissipative stochastic differential equations with respect to semimartingales*, Stochastics Stochastics Rep. 37 (1991), 1-14

[M-W] Markus, L., Weerasinghe, A. *Stochastic non-linear oscilators*, Adv. in Appl. Probab. 25 (1993), 649-666

[Na] Narita, K. *Remarks on non explosion theorem for stochastic differential equations*, Kodai Math. J. 5 (1982), 395-401

[Na1] Narita, K. *Explosion time of second-order Ito processes*, J. Math. Anal. Appl. 104 (1984), 418-427

[Ond] Ondreját, M.: *Existence of global martingale solutions to stochastic hyperbolic equations driven by a spatially homogeneous Wiener process*, to appear

[Pazy] Pazy, A.: *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag New York, 1983

[Pes] Peszat, S.: *The Cauchy Problem for a Non Linear Stochastic Wave Equation in any Dimension*, J. Evol. Equ. 2 (2002), 383-394

[Pes1] Peszat, S.: *SPDEs driven by a homogeneous Wiener process*, SPDE and Applications (Levico, T. 2000, Da Prato and L. Tubaro, eds.), Marcel Dekker, New York 2001, pp. 417-427

[P-Z] Peszat, S., Zabczyk, J.: *Non Linear Stochastic Wave and Heat Equations*, Probability Theory Related Fields 116, No. 3, 421-443, 2000

[P-Z1] Peszat, S., Zabczyk, J.: *Stochastic evolution equations with a spatially homogeneous Wiener process* Stochastic Process. Appl. 72 (1997), no. 2, 187-204

[Reed] Reed, M.: *Abstract Non Linear Wave Equations*, LNM 507, Springer-Verlag, 1976

[Ta] Taniguchi, T. *On sufficient conditions for nonexplosion of solutions to stochastic differential equations*, J. Math. Anal. Appl. 153 (1990), 549-561

[Thi] Thieullen, M.: *Temps d'explosion d'équations différentielles stochastiques du type Doléans-Dade*, Ann. Inst. Henri Poincaré, 27 (1991), 549-557

Chapitre 4

EXISTENCE DE SOLUTIONS FAIBLES GLOBALES DES ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION HYPERBOLIQUES STOCHASTIQUES PAR RAPPORT A UN PROCESSUS DE WIENER SPATIALEMENT HOMOGÈNE

Résumé: Nous étudions des équations semilinéaires hyperboliques de second ordre par rapport à un processus de Wiener spatialement homogène. Des conditions suffisantes entraînant l'existence de solutions faibles globales sont données. En particulier, les résultats d'existence sont applicables aux équations avec des nonlinéarités continues.

2000 *MSC classement.* 60H15.

Mots-clés: Équations hyperboliques stochastiques, solutions faibles, processus de Wiener spatialement homogène

4.0 INTRODUCTION

Considérons une équation semilinéaire hyperbolique stochastique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t) = \mathcal{A}u(t) + f\left(u(t)\right) + g\left(u(t)\right)\dot{W}, \qquad u(0) = u_0, \qquad u_t(0) = v_0 \tag{4.0.1}$$

sur un domaine D dans $\mathbb{R}^d$ avec un processus de Wiener en dimension infinie W. Nous allons considérer le problème de Cauchy pour (4.0.1), à savoir le cas où $D = \mathbb{R}^d$, ainsi que le cas d'un domaine borné de classe C^2 avec la condition de Dirichlet ou de Neumann. On suppose que $\mathcal{A}$ est un opérateur différentiel uniformément elliptique de second ordre et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Le processus de Wiener W est supposé spatialement homogène de mesure spectrale finie. Le sujet des équations aux dérivées partielles stochastiques par rapport à un processus de Wiener spatialement homogène a attiré beaucoup d'intérêt récemment; nous recommandons au lecteur le travail [1] pour le résumé de la littérature existente et de références.

Ce travail part de l'article de S. Peszat [2] dont les résultats entraînent, en particulier, que (4.0.1) possède une unique solution globale dès que f et g sont globalement Lipschitz. Néanmoins, si l'on abandonne l'hypothèse de lipschitzianité globale il n'est pas exclu que les solutions de (4.0.1) n'existent que localement jusqu'à un temps d'explosion. Un exemple d'une équation d'ondes semilinéaire stochastique avec des solutions explosantes, et des conditions suffisantes pour l'existence de solutions globales du problème de Cauchy pour l'équation d'ondes nonlinéaire ($\mathcal{A} = \Delta$) par rapport à un bruit spatialement nonhomogène peuvent être trouvés dans le travail de P.-L. Chow (voir [3]).

Récemment, dans [4], l'auteur de ce travail a utilisé des techniques de fonctions de Lyapunov et les injections de Sobolev pour démontrer l'existence de solutions "mild" globales et des solutions fortes globales (au sens analytique) de l'équation (4.0.1) avec des fonctions f et g nonlipschitziennes, par exemple régulières de croissance polynomiale. En plus, dans le cas du problème de Cauchy, il a montré que les solutions propagent à vitesse finie, à savoir, si la vitesse de propagation des solutions classiques de l'équation dans $\mathbb{R}^d$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

est finie, alors la vitesse de propagation des trajectoires des solutions de l'équation (4.0.1) est également finie.

Ce travail a pour but de poursuivre l'étude en affaiblissant les hypothèses sur f et g pour que les solutions de (4.0.1) existent globalement, du moins comme les solutions faibles au sens de probabilité. Cela veut dire que nous allons présenter des conditions suffisantes sur f et g entraînant l'existence d'une famille de six membres $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, u)$ composée d'une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$, d'un processus de Wiener spatialement homogène W et d'un processus progressivement mesurable u résolvant l'équation (4.0.1). Malheureusement, nous ne pouvons pas assurer, en général, ni l'existence sur toute base stochastique contenant un processus de Wiener spatialement homogène, ni aucune sorte de l'unicité des solutions.

Nos démonstrations sont basées sur des techniques de fonctions de Lyapunov et des techniques de compacité. Étant donné des fonctions f et g, nous allons considérer leurs approximations globalement Lipschitz f_n et g_n et démontrer, à l'aide de fonctions de Lyapunov convenables, que les lois des solutions des équations associées à f_n et g_n sont tendues dans un certain espace de trajectoires. Le point d'accumulation de cette suite sera la loi d'une solution faible. Plus précisément, nous allons construire une base stochastique avec un processus de Wiener spatialement homogène et un processus suivant cette loi qui vont, ensemble, constituer une solution faible.

Le lecteur peut trouver une belle introduction à la théorie des équations d'ondes abstraites dans le livre [5]. Des démonstrations basées sur des techniques de fonctions de Lyapunov pour les équations aux dérivées partielles stochastiques ont été utilisé dans [6] pour le cas parabolique et dans [7] pour l'équation des poutres stochastique. Le travail [3] est également dédié aux équations d'ondes stochastiques. L'argument de compacité a été introduit dans [8] et il repose sur le théorème de représentation de Skorohod tel qu'il est exposé dans dans le Théorème 8.3 dans [9].

Ce chapitre commence par un résumé sur les opérateurs différentiels uniformément elliptiques de deuxième ordre soit sur $\mathbb{R}^d$ soit sur un domaine borné D dans $\mathbb{R}^d$ avec la condition au bord de Dirichlet ou de Neumann. Ensuite nous rappelons la définition et quelques propriétés essentielles d'un processus de Wiener spatialement homogène sur $\mathbb{R}^d$. Puis nous spécifions le cadre hilbertien dans lequel nous allons travailler et les équations d'évolution stochastiques en question et nous définissons les notions des solutions y compris *les solutions faibles*. Ensuite nous rappelons la propriété de propagation finie des solutions de l'équation (4.0.1) sur $\mathbb{R}^d$ (voir aussi le Théorème 3.2.4 dans le troisième Chapitre) dont nous aurons besoin dans la suite. La section suivante est la parti centrale de ce chapitre; nous présentons dans le Théorème 4.3.1

les conditions suffisantes en terme des fonctions f et g pour qu'il existe une solution faible globale de l'équation (4.0.1). Deux exemples illustrant ce théorème suivent. Les hypothèses sur f et g dans le Théorème 4.3.1 sont abstraites. Pour cette raison nous dédions la section suivante à une discussion plus explicite de chacune d'elles. La dernière partie de ce chapitre contient les preuves.

Je voudrais exprimer mes remerciements à Marco Dozzi, Jan Seidler et Bohdan Maslowski pour leur influence positive, beaucoup de discussions et suggestions, et à l'Institut Élie Cartan à Nancy et l'Institut des Mathématiques de l'Académie des Sciences à Prague pour leur soutien matériel.

4.1 NOTATIONS ET RAPPELS

- ▷ Nous désignerons $\mathrm{BUC}^k(D)$ l'espace des fonctions de classe C^k sur le domaine D dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont uniformément bornées et uniformément continues sur D.
- ▷ Toute filtration dans ce chapitre sera *complète*, à savoir, si $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ est une base stochastique, alors $\mathcal{F}_0$ doit contenir tout ensemble F de la tribu $\mathcal{F}$ dont la probabilité $\mathbb{P}(F) = 0$.
- ▷ Si z est une variable aléatoire vectorielle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et z est à valeurs dans un espace de fonctions complexes sur le domaine D, on dit que la variable aléatoire z est *réelle* si la partie imaginaire $\mathrm{Im}\, z(\omega) = 0$ presque partout sur D pour tout ω.

Bien que nous nous intéressons aux solutions réelles de l'équation (4.0.1), nous allons travailler dans les espaces de fonctions complexes à cause de la disponibilité de la théorie spectrale et de la théorie d'interpolation dans le cadre complexe.

L'opérateur différentiel $\mathcal{A}$ sera de la forme

$$\mathcal{A}\varphi = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + c(x)\varphi(x). \tag{4.1.1}$$

Si D est un domaine borné dans $\mathbb{R}^d$ avec la frontière de classe C^2, alors le domaine $D(\mathcal{A})$ contiendra exactement toutes les fonctions φ de $W^{2,2}(D)$ dont la trace sur ∂D satisfait à l'une des conditions au bord:

1. (Dirichlet) $\varphi = 0$ sur ∂D.
2. (Neumann) $\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial\varphi}{x_j}\nu_i = \gamma\varphi$ sur ∂D pour un $\gamma \in \mathrm{BUC}^1(D)$.

Nous rappelons que $\nu(x)$ est le vecteur unitaire de la normale extérieure à ∂D au point $x \in \partial D$.

Si $D = \mathbb{R}^d$ alors $D(\mathcal{A}) = W^{2,2}(\mathbb{R}^d)$.

En tout cas, la matrice réelle symétrique $\{a_{ij}\}$ appartient à $\mathrm{BUC}^2(D)$, le vecteur réel $\{b_i\}$ à $\mathrm{BUC}^1(D)$ et c n'est qu'une fonction bornée, réelle et mesurable sur D. En plus,

nous réclamons la condition de l'ellipticité uniforme

$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} a_{ij}(x)y_iy_j \geq C\sum_{i=1}^{d} y_i^2, \qquad x \in D,\, y \in \mathbb{R}^d$$

où C est une constante strictement positive et si nous considérons la condition au bord de Neumann nous aurons besoin de supposer (en plus) que

$$C > \alpha^+ \| \operatorname{Tr} \|^2_{L(W^{1,2}(D),L^2(D))} \quad \text{où} \quad \alpha = \sup\{\gamma(x) : x \in \partial D\}$$

et $\operatorname{Tr} : W^{1,2}(D) \to L^2(\partial D)$ est l'opérateur de trace.

- ▷ Sous les hypothèses ci-dessus, l'opérateur $\mathcal{A}$, dans tous les trois cas, est **sectoriel** sur $L^2(D)$ et $c\|u\|_{W^{2,2}(D)} \leq \|u\|_{L^2(D)} + \|\mathcal{A}u\|_{L^2(D)}$ vaut pour un $c > 0$ et tout $u \in D(\mathcal{A})$ d'après le Chapitre 3 dans [10].

Maintenant nous pouvons introduire l'opérateur auxiliaire

$$A\varphi = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)\right) + \left(c(x) - \widetilde{C}\right)\varphi(x)$$

avec $D(A) = D(\mathcal{A})$ et une constante $\widetilde{C}$ telle que l'hypothèse suivante à laquelle nous référerons dans la suite par (SN) signifiant *strictement négatif* soit satisfaite

- ▷ $\widetilde{C} > \operatorname{ess\,sup} c$ si $D = \mathbb{R}^d$ ou si D est borné et $\mathcal{A}$ est considéré avec la condition au bord de Dirichlet.
- ▷ $\widetilde{C} > \operatorname{ess\,sup} c + \alpha^+ \| \operatorname{Tr} \|^2_{L(W^{1,2}(D),L^2(\partial D))}$ si D est borné et nous considérons la condition au bord de Neumann.

L'opérateur A est, sous les hypothèses ci-dessus, autoadjoint et strictement négatif sur $L^2(D)$ (voir Chapitre 3 dans [10]). En plus, comme

$$C_3\,\|\varphi\|^2_{W^{1,2}(D)} \leq \langle -A\varphi, \varphi\rangle_{L^2(D)} = \|\varphi\|^2_{D(-A)^{1/2}} \leq C_4\|\varphi\|^2_{W^{1,2}(D)}, \quad \varphi \in D(A)$$

pour des constantes positives C_3, C_4 nous concluons que $D(-A)^{1/2}$ est un espace fermé dans $W^{1,2}(D)$. En effet,

- ▷ $D(-A)^{1/2} = W_0^{1,2}(D)$ si $D = \mathbb{R}^d$.
- ▷ $D(-A)^{1/2} = W_0^{1,2}(D)$ si D est borné et nous considérons l'opérateur $\mathcal{A}$ avec la condition au bord de Dirichlet.
- ▷ $D(-A)^{1/2} = W^{1,2}(D)$ si D est borné et nous considérons l'opérateur $\mathcal{A}$ avec la condition au bord de Neumann.

Les deux premières égalités sont faciles à démontrer. La troisième peut être déduite du Théorème 3.2.3, du Corollaire 2.2.3, de la Proposition 2.2.2, de la Proposition 1.2.3 et de la Proposition 2.2.15 dans [10] car

$$\begin{aligned} W^{2s,2}(D) = D_A(s,2) \subseteq D_A(s,\infty) = (L^2(D), D(A))_{s,\infty} \subseteq (L^2(D), D(A))_{1/2,1} = \\ = D_A(1/2,1) \subseteq D(-A)^{1/2} \end{aligned}$$

pour $1/2 < s \leq 3/4$ et $W^{2s,2}(D)$ est dense dans $W^{1,2}(D)$. La dernière propriété dont on aura besoin dans la suite est l'inégalité suivante (voir le Chapitre 3 dans [10]):

$$C_3\|\varphi\|_{W^{2,2}(D)} \leq \|A\varphi\|_{L^2(D)} = \|\varphi\|_{D(A)} \leq C_4\|\varphi\|_{W^{2,2}(D)}, \qquad \varphi \in D(A)$$

qui dit que la norme de $W^{2,2}(D)$ est équivalente à la norme graphe sur l'espace de Hilbert $D(A)$, à savoir, à la norme induite par le produit scalaire

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_{D(A)} = \langle A\varphi_1, A\varphi_2 \rangle_{L^2(D)}, \qquad \varphi_1 \in D(A), \quad \varphi_2 \in D(A).$$

En particulier, si D est borné alors $(\lambda - A)^{-1} : L^2(D) \to L^2(D)$ est compact car $W^{2,2}(D)$ est contenu de façon compacte dans $L^2(D)$ et donc $(-A)^{-\alpha}$ est compact pour tout $\alpha > 0$ puisque

$$(-A)^{-a} = \frac{\sin(\pi a)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-a}(\lambda - A)^{-1}\, d\lambda$$

quel que soit $0 < a < 1$ et $(-A)^{-a}(-A)^{-b} = (-A)^{-a-b}$ quel que soit $a > 0$, $b > 0$.

La raison d'introduire l'opérateur A est qu'il est plus beau et plus facile à travailler avec, dû aux faits qu'il est autoadjoint et négatif. D'autant plus que l'échelle des domaines des puissances fractionnaires $D(\omega_0 - \mathcal{A})^\alpha = D(-A)^\alpha$ et les normes graphe sont équivalentes (voir Thm 1.4.6 dans [11]) pour ω_0 suffisamment grand et $\alpha \in [0, 1]$.

Le processus W est un processus gaussien sur une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ à valeurs dans l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^d$ et satisfaisant aux conditions suivantes

- ▷ Le processus réel $\langle W_t, \psi \rangle$ est un processus de Wiener par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ pour tout ψ de l'espace de Schwartz sur $\mathbb{R}^d$.
- ▷ Il existe une distribution tempérée Γ (appelée *la corrélation spatiale de* W) telle que

$$\mathbb{E}\,\langle W_s, \varphi \rangle\, \langle W_t, \psi \rangle = \min\{s, t\}\, \langle \Gamma, \varphi * \psi_s \rangle$$

où $\psi_s(x) = \psi(-x)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Puisque Γ doit être une distribution définie positive, il existe une seule mesure positive symétrique tempérée μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que Γ soit la transformée de Fourier de μ. La mesure μ est appelée *la mesure spectrale de* W. Dans le travail [P-Z], les auteurs ont montré que l'espace autoreproduisant de W (noté H_w) peut être caractérisé comme

$$H_w = \{\widehat{\psi\mu} : \psi \in L^2(\mathbb{R}^d, \mu, \mathbb{C}), \overline{\psi(x)} = \psi(-x), x \in \mathbb{R}^d\}$$

et

$$\left\langle \widehat{\psi_1\mu}, \widehat{\psi_2\mu} \right\rangle_{H_w} = \int_{\mathbb{R}^d} \psi_1 \overline{\psi_2}\, d\mu.$$

En particulier, si $\mu(\mathbb{R}^d) < \infty$ alors Γ est une fonction bornée uniformément continue, H_w est contenu dans l'espace des fonctions réelles bornées uniformément continues sur $\mathbb{R}^d$ comme on verra plus généralement dans le Lemme 4.1.1 et, par [P-Z1],

$$\langle W_t, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{W}(t,x)\varphi(x)\,dx$$

où $(\mathcal{W}(t,x) : t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d)$ est un champ aléatoire tel que

- ▷ $(\mathcal{W}(t,x) : t \geq 0)$ est un processus de Wiener par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.
- ▷ l'application $(t,x,\omega) \mapsto \mathcal{W}(t,x,\omega)$ est mesurable et continue en t.
- ▷ $\mathbb{E}\,\mathcal{W}(t,x)\mathcal{W}(s,y) = (t \wedge s)\Gamma(x-y)$ pour tout $t \geq 0$, $s \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ et $y \in \mathbb{R}^d$.

Nous avons la modification suivante du Lemme 2.2 dans [2] ou du Lemme 3.1.1 dans le troisième Chapitre qui permet de définir *l'opérateur de multiplication* qui va apparaître dans l'équation stochastique. Nous rappelons que $\mathrm{BUC}(\mathbb{R}^d)$ est la notation pour l'espace de Banach des functions bornées uniformément continues sur $\mathbb{R}^d$, muni de la norme supremale.

Lemme 4.1.1. *Soit $\mu(\mathbb{R}^d) < \infty$. Alors H_w est inclus dans $\mathrm{BUC}(\mathbb{R}^d)$ avec injection continue, et il existe une constante C telle que l'application*

$$L^2(D) \times H_w \to L^2(D) : (u,\xi) \mapsto u\xi$$

est un opérateur bilinéaire continu et, en plus, Hilbert-Schmidt dans la deuxième coordonné, à savoir

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|u\xi_j\|^2_{L^2(D)} \leq C\|u\|^2_{L^2(D)}$$

pour tout $u \in L^2(D)$ et toute base orthonormée $(\xi_j : j \in \mathbb{N})$ dans H_w.

Remarque 4.1.2. Sous l'hypothèse du Lemme 4.1.1 tout élément $u \in L^2(D)$ définit un opérateur de multiplication $\xi \mapsto u\xi$ de H_w dans $L^2(D)$ qui est Hilbert-Schmidt.

Cadre hilbertien. Nous définissons $\mathcal{A}_0 = \omega_0 - \mathcal{A}$ sur $L^2(D)$ pour un $\omega_0 \in \mathbb{R}$ suffisament grand afin que $\sup \mathrm{Re}\,\sigma(\mathcal{A} - \omega_0) < 0$, et les espaces de Hilbert séparables

$$E(a,b) = D(\mathcal{A}_0^a) \times D(\mathcal{A}_0^b), \qquad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$$

munis des produits scalaires

$$\langle (u_1,v_1),(u_2,v_2)\rangle_{E(a,b)} = \langle u_1,u_2\rangle_{D(\mathcal{A}_0^a)} + \langle v_1,v_2\rangle_{D(\mathcal{A}_0^b)}$$

pour $(u_1,v_1) \in E(a,b)$, $(u_2,v_2) \in E(a,b)$, où $D(\mathcal{A}_0^{-c})$, $c \geq 0$, est l'espace de Hilbert fractionnaire séparable défini comme la complétion de $L^2(D)$ par rapport à la norme

$$\|u\|_{D(\mathcal{A}_0^{-c})} = \|\mathcal{A}_0^{-c}u\|_{L^2(D)}, \qquad u \in L^2(D),$$

et

$$D(\mathcal{A}_0^c) = \{\mathcal{A}_0^{-c}u : u \in L^2(D)\}$$

est l'espace de Hilbert séparable muni du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{D(\mathcal{A}_0^c)} = \langle \mathcal{A}_0^c u, \mathcal{A}_0^c v\rangle_{L^2(D)}\,.$$

La classe suivante d'espaces aura une importance particulière

$$E(a) = E(1/2+a, a) = D(\mathcal{A}_0^{1/2+a}) \times D(\mathcal{A}_0^a), \qquad a \in \mathbb{R}$$

et

$$E = E(0) = E(1/2, 0) = D(\mathcal{A}_0^{1/2}) \times L^2(D).$$

Ensuite, nous notons

$$F_\beta = E((1/2-\beta)\vee 0, -\beta) = \begin{cases} E(-\beta) & \text{if } 0 \le \beta \le \frac{1}{2} \\ E(0,-\beta) & \text{if } \beta > \frac{1}{2} \end{cases}$$

l'espace d'états pour la solution dans le Théorème 4.3.1. Observons que F_β est inclus dans $E(-\beta)$ avec injection continue. Définissons également l'opérateur

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1.2}$$

Alors $M = M_1 + M_2$ où

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathcal{A}-A & 0 \end{pmatrix}.$$

Maintenant M_1 défini sur $D(A) \times D(-A)^{1/2}$, est un opérateur antiautoadjoint sur l'espace de Hilbert $D(-A)^{1/2} \times L^2(D)$ muni du produit scalaire

$$\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2)\rangle_E = \left\langle (-A)^{1/2}u_1, (-A)^{1/2}u_2 \right\rangle_{L^2(D)} + \langle v_1, v_2\rangle_{L^2(D)}\,,$$

et M_2 est borné sur $D(-A)^{1/2} \times L^2(D)$. Donc M de domaine $E(1/2)$ est un générateur infinitésimal d'un C_0-groupe $(S_t : t \in \mathbb{R})$ sur E par le Chapitre 3 dans [14] et la section préliminaire car $D(-A)^{1/2} \times L^2(D) = E$, $D(A) \times D(-A)^{1/2} = E(1/2)$, et les normes respectives sont équivalentes. En effet, (S_t) est un C_0-groupe sur tout $E(a)$, $a \in \mathbb{R}$, et les opérateurs

$$N_a = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_0^a & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_0^a \end{pmatrix}$$

de domaine $E(a \vee 0)$ sont bornés sur E pour $a < 0$, inversibles sur E pour $a \ge 0$, et commutent avec M. Par conséquent, S_t commute avec N_a et c'est donc un C_0-groupe sur $E(a)$ pour tout a réel.

L'équation aux dérivées partielles stochastique (4.0.1) se décompose en un système de deux équations de premier ordre

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}(t) &= v(t)\\ \frac{dv}{dt}(t) &= \mathcal{A}u(t) + f(u(t)) + g(u(t))\,\dot{W},\end{aligned}$$

ou bien, dans la notation vectorielle,

$$\frac{dz}{dt}(t) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \mathcal{A} & 0 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ f(u(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ g(u(t)) \end{pmatrix} \dot{W}, \quad \text{où} \quad z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Fixons $\beta \geq 0$ et soit $L^p(D)$ inclus dans $D(\mathcal{A}_0^{-\beta})$ avec injection continue pour un $p \in [1, \infty)$. Définissons

$$F(z) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ f(\operatorname{Re} u) \end{pmatrix} & \text{si } z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in E(-\beta),\ u \in L^2(D) \text{ et } f(\operatorname{Re} u) \in L^p(D) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{autrement} \end{cases}$$

et, de façon analogue,

$$G(z)\xi = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ g(\operatorname{Re} u)\xi \end{pmatrix} & \text{si } z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in E(-\beta),\ u \in L^2(D) \text{ et } g(\operatorname{Re} u) \in L^2(D) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{autrement} \end{cases}$$

pour $\xi \in H_w$, vu la Remarque 4.1.2. Alors

$$F : E(-\beta) \to E(-\beta) \quad \text{et} \quad G : E(-\beta) \to HS(H_w, E(-\beta))$$

sont Borel measurable, où $HS(H_W, E(-\beta))$ désigne l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt linéaires de l'espace autoreproduisant H_w dans $E(-\beta)$ par le Lemme 4.1.1.

Notre système de deux équations s'écrit donc comme

$$\frac{dz}{dt}(t) = Mz(t) + F(z(t)) + G(z(t))\,\dot{W} \tag{4.1.3}$$

sur $E(-\beta)$.

Ayant fixés β et p comme ci-dessus, nous disons qu'une famille de six membres

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, z)$$

composée d'une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$, d'un processus de Wiener spatialement homogène W de mesure spectrale finie et d'un processus $z = (u, v)$ adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ à trajectoires continues dans F_β est *une solution faible* de (4.1.3) si

- ▷ $u(t, \omega)$ est réel quels que soient $\omega \in \Omega$ et $t \geq 0$
- ▷ $v(t, \omega)$ appartient à la fermeture par rapport à $D(\mathcal{A}_0^{-\beta})$ de la classe des fonctions réelles de $L^2(D)$ pour tout $\omega \in \Omega$ et $t \geq 0$

et, pour tout $t \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}\left[\int_0^t \|f(u(s))\|_{L^p(D)} + \|g(u(s))\|^2_{L^2(D)}\, ds < \infty\right] = 1$$

et

$$\mathbb{P}\left[z(t) = S_t z_0 + \int_0^t S_{t-s}F(z(s))\, ds + \int_0^t S_{t-s}G(z(s))\, dW\right] = 1. \tag{4.1.4}$$

Les espaces de Hilbert dans lesquels nous travaillons sont tous complexes à cause de la théorie spectrale, la théorie des semigroupes et la théorie des espaces fractionnaires qui ne sont pas disponibles dans le cas réel. Néanmoins, nous ne nous intéressons qu'aux solutions réelles, à savoir, aux processus solutions z où $z(t,\omega) \in \mathbb{R}$ presque partout sur le domaine D pour tout (t,ω). Nous rappelons que tout espace de Hilbert complexe $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ est, en effet, également un espace de Hilbert réel si nous le considérons avec la parti réelle du produit scalaire original, à savoir $(H, \operatorname{Re}\langle\ ,\ \rangle)$. Remarquons que cette convention n'influence pas la norme. Ce phénomène sera utilisé pour l'intégration stochastique qui est naturellement conçue entre des espaces de Hilbert réels. Plus précisément, si Ψ est un processus dans l'espace des opérateurs Hilbert-Schmidt $HS(H_w, (H, \mathbb{C}))$, alors l'intégrale stochastique

$$\int \Psi\, dW$$

est construite pour Ψ en tant que processus à valeurs dans $HS(H_w, (H, \mathbb{R}))$. Nous soulignons que si un proceesus z satisfait à l'équation (4.1.4) au cas $\beta = 0$, $p = 2$, alors le processus conjugué complexe $\overline{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$ y satisfait aussi. Or, si $z_0(\omega)$ est réel pour tout ω et l'unicité trajectorielle vaut pour l'équation (4.1.4) (par exemple si les fonctions f et g sont globalement Lipschitz), alors $z = \overline{z}$ et, par conséquent z est réel. Dans ce chapitre, nous n'allons considérer que des conditions initiales **réelles** comme on l'a déjà indiqué au commencement.

4.2 VITESSE FINIE DE PROPAGATION DES SOLUTIONS

Il est bien connu que le principe du maximum fort ne vaut pas pour les équations hyperboliques de deuxième ordre sur $\mathbb{R}^d$. Au contraire, les solutions propagent à vitesse finie. Nous avons déjà démontré que ceci est vrai même si on perturbe ces équations par un processus de Wiener spatialement homogène (voir le Théorème 3.2.4 dans le troisième Chapitre). La justification de la définition suivante sera reportée à la section 4.4.

Definition 4.2.1. Une famille d'ensembles fermés non vides $(K_t : t \geq 0)$ dans la fermeture du domaine D est appelée *une évolution de support* si elle vérifie aux hypothèses suivantes

- ▷ $\bigcap\{K_t : t > s\} = K_s$ pour tout $s \geq 0$
- ▷ $S_t z \in E_{t+s}$ pour tout $z \in E_s$, $t \geq 0$, $s \geq 0$

où

$$E_t = \{(u, v) \in E : \text{le support essentiel de } u \text{ et } v \text{ est contenu dans } K_t\}$$

sont des sous-espaces fermés croissants continus à droite dans E et $(S_t : t \in \mathbb{R})$ est le C_0-groupe défini dans (4.1.2). Nous disons qu'une évolution de support $(K_t : t \geq 0)$ est *compacte* si K_t est compact dans $\mathbb{R}^d$ pour tout $t \geq 0$. En fin, nous remarquons que $K_t = \overline{D}$, $t \geq 0$ est une évolution de support qui est compacte si D est borné. Or, une évolution de support existe toujours.

Nous rappelons que $HS(H_w, E)$ est l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt linéaires de H_w dans E, et nous considérons le cas $D = \mathbb{R}^d$. Pour la démonstration du théorème suivant voir la preuve du Théorème 3.2.4 dans le Chapitre 3:

Théorème 4.2.2. *Soient les opérateurs de Nemytski $F : E \to E$ et $G : E \to HS(H_w, E)$ (définis dans (4.1.3)) Lipschitz, $D = \mathbb{R}^d$, $f(0) = g(0) = 0$ et soit la mesure spectrale μ finie. Étant donné une condition initiale réelle z_0 à valeurs dans E mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_0$, considérons l'unique solution "mild" globale réelle $z = (u, v)$ à trajectoires continues dans E de l'équation (4.1.3) avec $p = 2$ et $\beta = 0$. Ensuite, soit $(K_t(\omega) : t \geq 0)$ une évolution de support pour tout $\omega \in \Omega$ telle que le support essentiel de $u(0, \omega)$ et $v(0, \omega)$ soit contenu dans $K_0(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Alors il existe un ensemble $N \in \mathcal{F}_0$, $\mathbb{P}(N) = 1$ tel que $u(t, \omega)$ et $v(t, \omega)$ ont les supports essentiels contenus dans $K_t(\omega)$ pour tout $t \geq 0$ et $\omega \in N$.* □

4.3 EXISTENCE DE SOLUTIONS FAIBLES GLOBALES

Nous allons nous intéresser à une relaxation éventuelle des hypothèses imposées sur f et g considérées dans [2] ou dans les Théorèmes 3.3.2 et 3.4.2 du Chapitre 3, entraînant l'existence des solutions globales. Nous voulons surtout affaiblir la régularité C^1 ou la lipschitziannité globale. Le prix que nous devrons payer pour cela sera que les méthodes présentées ne nous permettront d'obtenir que des solutions faibles globales. Nous référons le lecteur à la section 4.4 pour des cas particuliers des hypothèses abstraites suivantes:

Étant donné $0 \leq \alpha < \beta < \infty$ et $1 \leq p < \infty$, nous introduisons les trois hypothèses suivantes:

- (CE) Si $D = \mathbb{R}^d$ supposons qu'il existe une évolution de support compact $(K_t : t \geq 0)$ avec la famille des espaces $(E_t : t \geq 0)$ fermés dans E continus à droite associés (voir la Définition 4.2.1). Si D est borné alors nous considérons l'évolution de support compact triviale $K_t = \overline{D}$ et $E_t = E$, $t \geq 0$.
- (CA) L'espace E_t muni de la norme de $E(-\alpha)$ est contenu de façon compacte dans $E(-\beta)$ pour tout $t \geq 0$.
- (CP) $L^p(D)$ est inclus dans $D(\mathcal{A}_0^{-\alpha})$ avec injection continue.

Remarque. Si (CA) vaut alors, trivialement, l'espace E_t muni de la norme de E est contenu de façon compacte dans $E(-\beta)$ pour tout $t \geq 0$.

Remarque. Si D est borné alors $E(-\alpha)$ est contenu de façon compacte dans $E(-\beta)$ pour tout $t \geq 0$ et $0 \leq \alpha < \beta$ par la section préliminaire. Or, (CA) vaut pour tout $0 \leq \alpha < \beta$.

Remarque. Si (CP) vaut alors $L^p(D)$ est inclues dans $D(\mathcal{A}_0^{-\beta})$ avec injection continue car $D(\mathcal{A}_0^{-\alpha})$ est inclus dans $D(\mathcal{A}_0^{-\beta})$ avec injection continue qui est isomorphe à l'espace dual de $D(\mathcal{A}_0^{\beta})$ (voir la définition du drift F).

Ayant $0 \leq \alpha < \beta < \infty$, $1 \leq p < \infty$ comme ci-dessus nous considérons de nouveaux paramètres $\theta \in [0,1)$, $q > 2$, $1 \leq a < pq/2$ et une constante $\widetilde{C}$ satisfaisant à la condition (SN) de la section préliminaire, avec laquelle nous définissons l'opérateur A. Maintenant nous précisons la classe des fonctions f et g que nous allons considérer:

Définition (CF). On dit que les fonctions réelles f et g satisfont à l'hypothèse (CF) s'il existe des suites de fonctions globalement Lipschitz (f_n) et (g_n) telles que

- $f_n(0) = g_n(0) = 0$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$ si $D = \mathbb{R}^d$.
- f_n, resp. g_n converge vers f, resp. g uniformément sur les ensembles bornés dans $\mathbb{R}^d$.
- le paramètre $\theta \in [0,1)$ est tel que $\delta_\theta > -\infty$ où

$$\delta_\theta = \inf \left\{ \frac{\theta}{2} \|u\|^2_{D(-A)^{1/2}} + \int_D L_n(\operatorname{Re} u)\, dx : u \in D(\mathcal{A}_0^{1/2}), n \in \mathbb{N} \right\} \tag{4.3.1}$$

  où $L_n(0) = 0$, $\dot{L}_n(x) + f_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- ayant fixé une constante $\Delta_\theta \in (-\infty, \delta_\theta)$, il existe une fonction positive bornée m sur $[0,\infty)$ telle que

$$\lim_{r \to \infty} m(r) = 0 \tag{4.3.2}$$

et

$$\left(\int_{[|u| \geq r]} |f_n(u)|^p\, dx \right)^{1/a} + \int_{[|u| \geq r]} |g_n(u)|^2\, dx \leq \tag{4.3.3}$$

$$\leq m(r) \left(\frac{1}{2} \|u\|^2_{D(-A)^{1/2}} + \int_D L_n(u)\, dx - \Delta_\theta \right)$$

vaut quel que soit $u \in D(-A)^{1/2}$ réel, $r \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

Ensuite, vu la Définition (CF), nous définissons les fonctions de Lyapunov

$$V_n(z) = \left(\frac{1}{2} \|u\|^2_{D(-A)^{1/2}} + \frac{1}{2} \|v\|^2_{L^2(D)} + \int_D L_n(\operatorname{Re} u)\, dx - \Delta_\theta \right)^{q/2}, \quad z \in E \tag{4.3.4}$$

pour $n \in \mathbb{N}$ avec la convention $z = (u, v) \in E$.

Théorème 4.3.1. *Soient f, g deux fontions continues sur $\mathbb{R}$, soient $0 \leq \alpha < \beta < \infty$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \theta < 1$, $q > 2$, $1 \leq a < pq/2$ et $\widetilde{C}$ tels que les hypothèses (CA), (CE), (CP) et (CF) valent pour f, g,α, β, θ, q et a, et la constante $\widetilde{C}$ satisfait à l'hypothèse (SN) de la section préliminaire. Supposons que la mesure spectrale μ soit finie et ν soit une mesure de probabilité borélienne sur E telle que*

$$\nu\{z \in E_0 : z \text{ réel}\} = 1$$

où E_0 correspond à K_0 dans (CE), et

$$\sup_n \int_E V_n(x)\, d\nu(x) < \infty$$

avec V_n défini dans (4.3.4). Alors il existe une solution faible $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, z)$ de (4.1.3) dans $E(-\beta)$ avec les coefficients f et g où $z = (u, v)$ est un processus adapté, à trajectoires continues dans F_β, vérifiant

- ▷ $\mathbb{P}[z(0) \in E_0] = 1$ *et ν est la loi de $z(0)$*
- ▷ $E \sup_{s \leq t} \|z(t)\|_{F_\beta}^q + \mathbb{E}\, \|f(u(t))\|_{L^p(D)}^{\frac{pq}{2a}} + \mathbb{E}\, \|g(u(t))\|_{L^2(D)}^q \leq Ce^{Ct}$, $t \geq 0$

où C est une constante positive. En plus, $\mathbb{P}[z(t) \in \overline{E_t}^{F_\beta}] = 1$ quel que soit $t > 0$.

Exemple I. Considérons le problème de Cauchy dans $D = \mathbb{R}^3$ pour l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^3 b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u - u|u|^{r-1} + |u|^s \dot{W} \tag{4.3.5}$$

avec une (3×3)-matrice réelle symétrique et strictement positive (a_{ij}), des fonctions b_1, b_2, b_3 appartenant à $\mathrm{BUC}^1(\mathbb{R}^3)$, $c \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ et soit ν une mesure de probabilité borélienne sur $E = W^{1,2}(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$. Nous avons les possibilités suivantes:

• Quand $2 \leq 2s \leq r + 1 \leq 4$ alors l'équation a une unique solution globale à trajectoires continues dans E quel que soit la condition initiale à valeurs dans E mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_0$ (comme on l'a déjà montré dans le Thórème 3.3.2 dans le Chapitre 3).

Dans les autres cas nous supposons de plus que

$$\int_E \left\{ \|u\|_{W^{1,2}(D)}^q + \|v\|_{L^2(D)}^q + \|u\|_{L^{r+1}(D)}^{q(r+1)/2} \right\} d\nu(u, v) < \infty \tag{4.3.6}$$

et

$$\nu\{(u, v) \in E : \text{le support essentiel de } u \text{ et } v \text{ est contenu dans } K\} = 1$$

pour un ensemble compact K dans $\mathbb{R}^3$ et un q à préciser dans la suite.

• Quand $3 < r < 5$, $2 \leq 2s < r + 1$, $q > r$, $2 \geq 2\beta > r - 3$ alors il existe une solution faible $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, z)$ de l'équation (4.3.5) de loi initiale ν, telle que les trajectoires de z propagent à vitesse finie et sont continues dans $H^{1-\beta}(\mathbb{R}^3) \times H^{-\beta}(\mathbb{R}^3)$.

• Quand $5 \leq r$, $2 \leq 2s < r + 1$, $q > 6r/(r + 1)$, $2\beta > 3(r - 1)/(r + 1)$ alors il existe une solution faible $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, z)$ de l'équation (4.3.5) de loi initiale ν, telle que les trajectoires de z propagent à vitesse finie et sont continues dans $L^2(\mathbb{R}^3) \times H^{-\beta}(\mathbb{R}^3)$.

Exemple II. Considérons le problème de bord de Dirichlet ou de Neumann pour l'équation (4.0.1) avec l'opérateur $\mathcal{A}$ comme dans (4.1.1) sur un domaine borné D dans $\mathbb{R}^3$ de classe C^2. Soit $r \geq 1$ et soit f et g deux fonctions réelles continues telles que

$$0 < \liminf_{|x|\to\infty} \frac{-f(x)}{x|x|^{r-1}} \leq \limsup_{|x|\to\infty} \frac{-f(x)}{x|x|^{r-1}} < \infty$$

et

$$\limsup_{|x|\to\infty} \frac{|g(x)|}{|x|^{(r+1)/2}} = 0.$$

Ensuite, soit ν une mesure de probabilité borélienne sur E où $E = W_0^{1,2}(D) \times L^2(D)$ quand nous considérons le problème de bord de Dirichlet, ou $E = W^{1,2}(D) \times L^2(D)$ pour le problème de bord de Neumann, telle que (4.3.6) vaut avec un q à préciser dans la suite. Distinguons les trois cas suivants:

• Quand $1 \leq r \leq 3$, $q > 3$, $0 < 2\beta \leq 1$ alors il existe une solution faible $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, z)$ de l'équation (4.0.1) avec la condition initiale ν, telle que les trajectoires de z sont continues dans $D(\mathcal{A}_0^{1/2-\beta}) \times D(\mathcal{A}_0^{-\beta})$.

• Quand $3 < r < 5$, $q > r$, $2 \geq 4\beta > r - 3$ alors il existe une solution faible $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, z)$ de l'équation (4.0.1) avec la loi initiale ν, telle que les trajectoires de z sont continues dans $D(\mathcal{A}_0^{1/2-\beta}) \times D(\mathcal{A}_0^{-\beta})$.

• Quand $5 \leq r$, $q > 6r/(r+1)$, $4\beta > 3(r-1)/(r+1)$ alors il existe une solution faible $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, W, z)$ de l'équation (4.0.1) avec la loi initiale ν, telle que les trajectoires de z sont continues dans $L^2(D) \times D(\mathcal{A}_0^{-\beta})$.

4.4 EXEMPLES ET COMMENTAIRES

Évolution de support compact (Déf. 4.2.1): Considérons l'opérateur

$$\mathcal{A}\varphi(x) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + c(x)\varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d$$

sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ avec une $(d \times d)$-matrice réelle symétrique strictement positive (a_{ij}), des fonctions $b_1, \ldots, b_d$, c dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et soit K_0 un ensemble compact dans $\mathbb{R}^d$. Si nous définissons

$$K_t = \{x + y : x \in K_0, |T^{-1}y| \leq t\}, \qquad t > 0$$

où T est une $(d \times d)$-matrice réelle telle que $TT^* = (a_{ij})$, alors $(K_t : t \geq 0)$ est une évolution de support compacte pour le C_0-groupe (S_t) sur E (voir la section 3.5 dans le Chapitre 3 ou le Chapitre 7.2.4 dans [15].

Finitude de δ_θ dans (4.3.1): Notons

$$\delta = \inf\{\|(-A)^{1/2}u\|^2_{L^2(D)} : u \in D(-A)^{1/2}, \|u\|_{L^2(D)} = 1\} = \inf \sigma(-A). \tag{4.4.1}$$

Alors δ est positif car l'opérateur auxiliaire A est autoadjoint et négatif, et peut être aussi grand qu'on veut selon le choix de $\widetilde{C}$ dans la définition de A, qui lui-même, peut être arbitrairement grand dès le commencement. Si

$$\inf\left\{\frac{\theta\delta}{2}x^2 + L_n(x) : n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}\right\} \geq C_* \tag{4.4.2}$$

vaut pour une constante réelle C_* quand D est borné, ou $C_* = 0$ quand $D = \mathbb{R}^d$, alors $\delta_\theta > -\infty$.

Hypothèse (CA). Quand D est borné alors $0 \leq \alpha < \beta$ peut être choisi arbitrairement car $E_t = E$ quel que soit $t \geq 0$ et l'opérateur $\mathcal{A}_0^{-c} : L^2(D) \to L^2(D)$ est compact pour tout $c > 0$ d'après la discussion dans la section préliminaire de ce chapitre. Quand $D = \mathbb{R}^d$ alors il faut procéder plus attentivement:

> Supposons que les coefficients $\{a_{ij}\}$, $\{b_i\}$ et c de l'opérateur $\mathcal{A}$ sont de classe $\mathrm{BUC}^{2m}(\mathbb{R}^d)$ pour un entier $m \geq 1$. Alors (CA) vaut pour tout $0 \leq \alpha < \beta \leq m$.

Sous les hypothèses ci-dessus $-\mathcal{A}_0^m$ est un opérateur différentiel d'ordre $2m$, il est sectoriel dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ étant défini sur $W^{2m,2}(\mathbb{R}^d)$ et la norme graphe est équivalente à la norme de $W^{2m,2}(\mathbb{R}^d)$ grâce au Théorème 3.2.1 dans [10]. Cela veut dire que l'espace de puissance entière $D(\mathcal{A}_0^m) = W^{2m,2}(\mathbb{R}^d)$ et les normes sont équivalentes. Ensuite, $-\mathcal{A}_0$ est dissipatif et donc

$$D(\mathcal{A}_0^c) = [L^2(D), W^{2m,2}(\mathbb{R}^d)]_{c/m} = B^{2c}_{2,2}(\mathbb{R}^d) = W^{2c,2}(\mathbb{R}^d)$$

avec l'équivalence des normes pour tout $0 \leq c \leq m$ d'après le Théorème 4 dans [16], le Théorème 1.15.3 dans [17] et le Théorème 2.4.1 dans [17]. Maintenant, si $0 \leq c_1 < c_2$ et $R > 0$, alors il existe des constantes positives $K_1 < K_2$ telles que

$$K_1\|u\|_{W^{2c_i,2}(\mathbb{R}^d)} \leq \|u\|_{W^{2c_i,2}(B_{2R})} \leq K_2\|u\|_{W^{2c_i,2}(\mathbb{R}^d)}, \qquad i = 1, 2$$

quel que soit $R > 0$, et $u \in W^{2c_i,2}(\mathbb{R}^d)$, $i = 1, 2$ s'annulent en dehors de B_R où B_R est la boule dans $\mathbb{R}^d$ de rayon R. Soit u_n une suite bornée dans $W^{2c_2,2}(\mathbb{R}^d)$ telle que tout u_n est zéro en dehors de B_R. Alors il existe une sous-suite $\{n_k\}$ telle que u_{n_k} converge dans $W^{2c_1,2}(B_{2R})$ d'après le Théorème 4.10.2 dans [17]. Donc, u_{n_k} converge dans $W^{2c_1,2}(\mathbb{R}^d)$.

Faisons la convention qu'une fonction h dans $L^2(G)$ définit un élément dans l'espace dual $(W^{2c,2}(G))^*$, $c \geq 0$ par $v \mapsto \langle v, h\rangle_{L^2(G)}$. Nous savons que $D(\mathcal{A}_0^{-c})$ est l'espace dual de $D(\mathcal{A}_0^c)$. Soit donc $0 \leq c_1 < c_2 \leq m$, supposons que $u_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$ est bornée dans $D(\mathcal{A}_0^{-c_1})$ et que tout u_n s'annule en dehors d'une boule B_R. Alors u_n est bornée dans $(W^{2c_1,2}(B_R))^*$ qui est inclus dans $(W^{2c_2,2}(B_R))^*$ avec injection compacte par le théorème de Schauder et le Théorème 4.10.2 dans [17]. Or, $(u_{n_k})_k$ converge dans $(W^{2c_2}(B_R))^*$ pour une sous-suite $\{n_k\}$. Par conséquent, $(u_{n_k})_k$ converge dans $(W^{2c_2,2}(\mathbb{R}^d))^*$. □

Hypothèse (CP). Soit $1 < p \leq 2$ et $m \geq 1$ et supposons que

$$\frac{d}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) \leq \alpha \leq m.$$

Soient les coefficients $\{a_{ij}\}$, $\{b_i\}$, c de l'opérateur $\mathcal{A}$ de classe $\mathrm{BUC}^{2m}(D)$. Quand D est borné supposons que ∂D est de classe C^{2m}, et au cas où nous considérons le problème de bord de Neumann supposons que γ appartienne à $\mathrm{BUC}^{2m-1}(D)$. Alors $D(\mathcal{A}_0^\alpha)$ est inclus dans $L^{p'}(D)$ avec injection continue, $1/p + 1/p' = 1$.

Preuve: Sous les hypothèses ci-dessus $-\mathcal{A}_0^k$ est sectoriel étant défini sur $L_k = W^{2k,2}(\mathbb{R}^d)$ quand $D = \mathbb{R}^d$, ou sur

$$L_k = \left\{\varphi \in W^{2k,2}(D) : B\mathcal{A}_0^j\varphi = 0 \text{ sur } \partial D, j = 0, \ldots, k-1\right\}$$

pour $B\varphi = \varphi$ quand nous considérons le problème de bord de Dirichlet, ou

$$B\varphi = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} \nu_i a_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \gamma\varphi$$

quand le problème de bord de Neumann est considéré, quel que soit $k = 1, \ldots, m$. Effectivement, suivant [10] il est facile de vérifier que la "root condition" (3.2.2) vaut et également la "extended root condition" (3.2.3). La condition complémentaire (3.2.7) se réduit à l'inversibilité de la $(k \times k)$-matrice complexe

$$(\exp(2jl\pi i/k) : 0 \leq j < k, 0 \leq l < k)$$

mais elle est inversible en tant que cas particulier du déterminant de Vandermonde (Exercice 6.3.11, p. 168 dans [18]). Maintenant, comme les ensembles des résolventes de $\mathcal{A}_0^k$ et $\mathcal{A}_0^k|_{L_k}$ ne sont pas disjoints quel que soit $k \leq m$, nous concluons que $D(\mathcal{A}_0^k) = L_k$, $k \leq m$, et donc $D(\mathcal{A}_0^k)$ est un sous-espace fermé dans $W^{2k,2}(D)$ avec l'équivalence des normes quel que soit $1 \leq k \leq m$ par le Théorème 3.2.2 dans [10]. Or,

$$D(\mathcal{A}_0^\alpha) = [L^2(D), D(\mathcal{A}_0^m)]_{\alpha/m} \subseteq [L^2(D), W^{2m,2}(D)]_{\alpha/m} = B_{2,2}^{2\alpha}(D) \subseteq L^{p'}(D)$$

par le Théorème 4 dans [16] et les Théorèmes 1.15.3, 2.4.1, 4.3.1/2, 2.8.1 et 4.6.1 dans [17], et les inclusions sont continues. □

Fonctions f, g qui satisfont aux hypothèses dans (CF): Supposons que f et g sont continues (avec $f(0) = g(0) = 0$ quand $D = \mathbb{R}^d$), $\dot{L} + f = 0$ sur $\mathbb{R}^d$, $L(0) = 0$,

$$\limsup_{|x| \to \infty} \frac{f(x)}{x} < \infty, \tag{4.4.3}$$

$$\frac{\theta\delta}{2}x^2 + L(x) \geq C_* \qquad x \in \mathbb{R}$$

et

$$|f(x)|^p \le \widetilde{m}(x)\left(\frac{\delta}{2}x^2 + c|x|^s + L(x) + b_0\right), \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$|g(x)|^2 \le \widetilde{m}(x)\left(\frac{\delta}{2}x^2 + L(x) + b_0\right), \qquad x \in \mathbb{R}$$

valent pour δ défini dans (4.4.1), une constante positive c et $s \ge 2$ tel que $W^{1,2}(D)$ est inclus dans $L^s(D)$ avec injection continue, $C_* = b_0 = 0$ quand $D = \mathbb{R}^d$, ou $C_* \in \mathbb{R}$ et $b_0 = 1 - C_*$ quand D est borné dans $\mathbb{R}^d$, et où $\widetilde{m}$ est une fonction paire strictement positive continue telle que $\lim_{r\to\infty} \widetilde{m}(r) = 0$ et $\theta \in [0,1)$ est un paramètre. Nous remarquons que (4.4.3) entraîne que la fonction $Cx^2 + L(x)$ est décroissante dans un voisinage de $-\infty$, et croissante dans un voisinage de ∞, pour une grande constante C. Ensuite définissons la fonction $\mathbb{V}_q : E \to [0,\infty]$ comme

$$\mathbb{V}_q(z) = \left(\frac{1}{2}\|u\|^2_{D(-A)^{1/2}} + \frac{1}{2}\|v\|^2_{L^2(D)} + \int_{\mathbb{R}^d} L(\operatorname{Re} u)\,dx - c_*\right)^{q/2}$$

pour $z = (u,v) \in E$ avec $c_* = 0$ quand $D = \mathbb{R}^d$, ou $c_* = C_*\lambda(D)$ quand D est borné, notant $\lambda(D)$ la mesure de Lebesgue du domaine D. Maintenant nous allons distinguer trois cas:

Premier cas: Supposons que $D = \mathbb{R}^d$ et

$$-\delta(1-\theta) < \liminf_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Alors il existe des suites de fonctions réelles (f_n), resp. (g_n) de classe C^∞ à supports compacts dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément sur des ensembles compacts vers f, resp. g, $\delta_{\widetilde{\theta}} \ge 0$ pour un $0 \le \widetilde{\theta} < 1$ où $\delta_{\widetilde{\theta}}$ a été défini dans (4.3.1), (4.3.3) vaut pour $\Delta_{\widetilde{\theta}} = -1$ et pour tous a, q tels que $s \le 2a < pq$, et (4.4.2) vaut avec $C_* = 0$. Par conséquent, **l'hypothèse (CF) vaut.** En plus, pour tout $q > 0$ donné,

$$\|z\|_E^q + \sup_n V_n(z) \le c_q(\mathbb{V}_q(z) + 1)$$

vaut pour tout $z \in E$ et une constante $0 < c_q < \infty$.

Deuxième cas: Supposons que $D = \mathbb{R}^d$ et que f et g sont, en plus, localement Lipschitz. Alors il existe des suites de fonctions réelles $(\widetilde{f}_n)$, resp. $(\widetilde{g}_n)$ globalement Lipschitz aux supports compacts dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément sur des ensembles compacts vers f, resp. g, $\delta_{\widetilde{\theta}} \ge 0$ pour un $0 \le \widetilde{\theta} < 1$ où $\delta_{\widetilde{\theta}}$ a été défini dans (4.3.1), (4.3.3) vaut pour $\Delta_{\widetilde{\theta}} = -1$ et pour tous a, q tels que $s \le 2a < pq$, et (4.4.2) vaut avec $C_* = 0$. Par conséquent, **l'hypothèse (CF) vaut.** En plus, pour tout $q > 0$ donné,

$$\|z\|_E^q + \sup_n V_n(z) \le c_q(\mathbb{V}_q(z) + 1)$$

vaut pour tout $z \in E$ et une constante $0 < c_q < \infty$.

Troisième cas: Supposons que $D \subseteq \mathbb{R}^d$ est borné. Alors il existe des suites de fonctions réelles (f_n), resp. (g_n) de classe C^∞ à supports compacts dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément sur des ensembles compacts vers f, resp. g, $\delta_{\widetilde{\theta}} \geq (C_* - 1)\lambda(D)$ pour un $0 \leq \widetilde{\theta} < 1$ où $\delta_{\widetilde{\theta}}$ a été défini dans (4.3.1), (4.3.3) vaut pour $\Delta_{\widetilde{\theta}} = (C_* - 2)\lambda(D)$ et pour tous a, q tels que $s \leq 2a < pq$, et (4.4.2) vaut. Par conséquent, **l'hypothèse (CF) vaut.** En plus, pour tout $q > 0$ donné,

$$\|z\|_E^q + \sup_n V_n(z) \leq c_q(\mathbb{V}_q(z) + 1)$$

vaut pour tout $z \in E$ et une constante $0 < c_q < \infty$.

Preuve:

Premier cas: Fixons $\delta_1 \in (\theta\delta, \delta)$ et trouvons des suites décroissantes (c_{1n}), (d_{1n}), (b_{2n}) et des suites croissantes (c_{2n}), (d_{2n}), (b_{1n}) telles que

$$d_{1n} < c_{1n} < b_{1n} < 0 < b_{2n} < c_{2n} < d_{2n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|c_{1n}|} + \frac{1}{|c_{2n}|} + |b_{1n}| + |b_{2n}| = 0,$$

$$\frac{f(b_{in})}{b_{in}} \leq \delta_1, \qquad \frac{f(c_{in})}{c_{in}} \leq \delta_1, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2$$

et définissons $a_{in} = \epsilon_i b_{in}$, $i = 1, 2$, $n \in \mathbb{N}$ pour une constante $\epsilon \in (0, 1)$ telle que

- $(1 - \epsilon)k_i < \delta$, $i = 1, 2$
- $2K_i + (1 - \epsilon)k_i < \delta(1 - \theta)$, $i = 1, 2$

où

$$k_i = \sup_n \frac{f(b_{in})}{b_{in}}, \qquad K_i = \sup_n \frac{L(b_{in})}{b_{in}^2}, \qquad i = 1, 2.$$

En plus, faisons le choix de telle sorte que

$$\sup\{\widetilde{m}(c_{in})/\widetilde{m}(x) : n \in \mathbb{N}, |c_{in} - x| \leq |c_{in} - d_{in}|, i = 1, 2\} < \infty$$

et

$$\sup\left\{\frac{|d_{in} - c_{in}|}{c_{in}^2}|f(c_{in})| : n \in \mathbb{N}, i = 1, 2\right\} < \infty.$$

Étant donné une fonction réelle h définissons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{h}_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq d_{1n} \\ h(c_{1n})\frac{d_{1n} - x}{d_{1n} - c_{1n}} & d_{1n} \leq x \leq c_{1n} \\ h(x) & c_{1n} \leq x \leq b_{1n} \\ h(b_{1n})\frac{x - a_{1n}}{b_{1n} - a_{1n}} & b_{1n} \leq x \leq a_{1n} \\ 0 & a_{1n} \leq x \leq a_{2n} \\ h(b_{2n})\frac{x - a_{2n}}{b_{2n} - a_{2n}} & a_{2n} \leq x \leq b_{2n} \\ h(x) & b_{2n} \leq x \leq c_{2n} \\ h(c_{2n})\frac{d_{2n} - x}{d_{2n} - c_{2n}} & c_{2n} \leq x \leq d_{2n} \\ 0 & d_{2n} \leq x \end{cases}$$

Choisissant pour h la fonction f, resp. g nous obtenons les suites $(\widetilde{f}_n)$, resp. $(\widetilde{g}_n)$ et il existe $\widetilde{o} \in (0, \delta/2)$, $\widetilde{O} > 0$ et $R > \delta$ tels que

$$\widetilde{o}x^2 \leq \frac{\delta}{2}x^2 + \widetilde{L}_n(x), \qquad \widetilde{L}_n(x) \leq \widetilde{O}\left(\frac{R}{2}x^2 + L(x)\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

où $\widetilde{L}_n$ est la fonction primitive de $-\widetilde{f}_n$, $\widetilde{L}_n(0) = 0$ et

$$|\widetilde{f}_n(x)|^p \leq M(x)\left(\frac{\delta}{2}x^2 + c|x|^s + \widetilde{L}_n(x)\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.4.4a}$$

$$|\widetilde{g}_n(x)|^2 \leq M(x)\left(\frac{\delta}{2}x^2 + \widetilde{L}_n(x)\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.4.4b}$$

pour une fonction paire continue positive M satisfaisant à

$$\lim_{r\to\infty} M(r) = 0.$$

En utilisant (4.4.4a) et (4.4.4b) nous arrivons aux fonctions f_n, g_n de classe C^∞ à supports compacts dans $\mathbb{R}$ par régularisation et on obtient

$$ox^2 \leq \frac{\delta}{2}x^2 + L_n(x), \qquad L_n(x) \leq O\left(\frac{R}{2}x^2 + L(x)\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

où $0 < o < \widetilde{o}$ et $\widetilde{O} < O$ sont des constantes fixées, L_n est la primitive de $-f_n$, $L_n(0) = 0$ et

$$|f_n(x)|^p \leq (M(x) + e^{-x^2})\left(\frac{\delta}{2}x^2 + c|x|^s + L_n(x)\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$|g_n(x)|^2 \leq (M(x) + e^{-x^2})\left(\frac{\delta}{2}x^2 + L_n(x)\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$\widetilde{f}_n$ et $\widetilde{g}_n$ ayant des supports compacts à distance positive de l'origine. □

Dans la suite, nous fixons $\delta_1 \in (\theta\delta, \delta)$ et choisissons des suites décroissantes (c_{1n}), (d_{1n}) et des suites croissantes (c_{2n}), (d_{2n}) telles que

$$d_{1n} < c_{1n} < 0 < c_{2n} < d_{2n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|c_{1n}|} + \frac{1}{|c_{2n}|} = 0,$$

$$\frac{f(c_{in}}{c_{in}} \leq \delta_1, \qquad n \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2,$$

$$\sup\{\widetilde{m}(c_{in})/\widetilde{m}(x) : n \in \mathbb{N}, |c_{in} - x| \leq |c_{in} - d_{in}|, i = 1, 2\} < \infty$$

et

$$\sup\left\{\frac{|d_{in}-c_{in}|}{c_{in}^2}|f(c_{in})| : n\in\mathbb{N}, i=1,2\right\}<\infty.$$

Étant donné une fonction réelle h définissons, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\widetilde{h}_n(x)=\begin{cases}0 & x\le d_{1n}\\ h(c_{1n})\frac{d_{1n}-x}{d_{1n}-c_{1n}} & d_{1n}\le x\le c_{1n}\\ h(x) & c_{1n}\le x\le c_{2n}\\ h(c_{2n})\frac{d_{2n}-x}{d_{2n}-c_{2n}} & c_{2n}\le x\le d_{2n}\\ 0 & d_{2n}\le x\end{cases} \tag{4.4.5}$$

et appliquons cette construction à $h=f$ et $h=g$ obtenant les suites $(\widetilde{f}_n)$ et $(\widetilde{g}_n)$. Ensuite notons $\widetilde{L}_n$ la fonction primitive de $-\widetilde{f}_n$ avec $\widetilde{L}_n(0)=0$. Maintenant nous procédons au second et au troisième cas:

Second cas: Il existe $\widetilde{o}\in(0,\delta/2)$ et $R>\delta$ tels que

$$\widetilde{o}x^2\le\frac{\delta}{2}x^2+\widetilde{L}_n(x),\qquad \widetilde{L}_n(x)\le\frac{R}{2}x^2+L(x),\qquad x\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N}$$

et

$$|\widetilde{f}_n(x)|^p\le M(x)\left(\frac{\delta}{2}x^2+c|x|^s+\widetilde{L}_n(x)\right),\qquad x\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N}$$

$$|\widetilde{g}_n(x)|^2\le M(x)\left(\frac{\delta}{2}x^2+\widetilde{L}_n(x)\right),\qquad x\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N}$$

pour une fonction paire continue positive M satisfaisant à

$$\lim_{r\to\infty}M(r)=0.$$

Troisième cas: Il existe $\widetilde{o}\in(0,\delta/2)$ et $R>\delta$ tels que

$$\widetilde{o}x^2+C_*\le\frac{\delta}{2}x^2+\widetilde{L}_n(x),\qquad \widetilde{L}_n(x)\le\frac{R}{2}x^2+L(x),\qquad x\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N}$$

où $\widetilde{f}_n$, $\widetilde{g}_n$ sont définies d'après (4.4.5), $\widetilde{L}_n$ est la primitive de $-\widetilde{f}_n$, $\widetilde{L}_n(0)=0$ et

$$|\widetilde{f}_n(x)|^p\le M(x)\left(\frac{\delta}{2}x^2+c|x|^s+\widetilde{L}_n(x)-C_*+1\right),\qquad x\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N}$$

$$|\widetilde{g}_n(x)|^2\le M(x)\left(\frac{\delta}{2}x^2+\widetilde{L}_n(x)-C_*+1\right),\qquad x\in\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N}$$

pour une fonction paire continue positive M satisfaisant à

$$\lim_{r\to\infty}M(r)=0.$$

Maintenant il suffit de régulariser les fonctions $\widetilde{f}_n$ et $\widetilde{g}_n$ pour arriver à des fonctions f_n, g_n de classe C^∞ aux supports compacts dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\widetilde{o}x^2 + C_* - 1 \leq \frac{\delta}{2}x^2 + L_n(x), \qquad L_n(x) \leq \frac{R}{2}x^2 + L(x) + 1, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

où L_n est la primitive de $-f_n$, $L_n(0) = 0$ et

$$|f_n(x)|^p \leq (M(x) + e^{-x^2}) \left(\frac{\delta}{2}x^2 + c|x|^s + L_n(x) - C_* + 1 \right), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$|g_n(x)|^2 \leq (M(x) + e^{-x^2}) \left(\frac{\delta}{2}x^2 + L_n(x) - C_* + 1 \right), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

□

4.5 PREUVE DU THÉORÈME 4.3.1

Tout d'abord nous remarquons que les opérateurs de Nemytski $F_n : E \to E$ et $G_n : E \to HS(H_w, E)$ associés à f_n et g_n dans (4.1.3) sont globalement Lipschitz. Choisissons une base stochastique auxiliaire $(\Omega^1, \mathcal{F}^1, (\mathcal{F}_t^1), \mathbb{P}^1, W^1)$ avec une variable aléatoire z_0 mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_0^1$ telle que

$$\mathbb{P}^1 [z_0 \in B] = \nu(B)$$

pour tout borélien B dans E, et nous avons donc des solutions globales z_n de (4.1.4) par rapport à un processus de Wiener spatialement homogène W^1 de mesure spectrale μ, avec les coefficients F_n et G_n, et avec la condition initiale z_0, vivant sur $(\Omega^1, \mathcal{F}^1, (\mathcal{F}_t^1), \mathbb{P}^1)$. Nous allons montrer que la suite des variables aléatoires z_n est tendue dans un certain espace polonais de trajectoires Y (à définir dans la suite), donc elle contient une sous-suite (que nous noterons, par abus de notation, toujours z_n) convergeant faiblement dans l'espace des mesures de probabilité boréliennes sur Y grâce au théorème de Prokhorov. Cette situation peut être modélisée sur un deuxième espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ par le théorème de Skorohod, à savoir, il existe des variables aléatoires z et $(\eta_n : n \in \mathbb{N})$ à valeurs dans Y définies sur Ω, telles que

$$\mathbb{P} [\eta_n \in B] = \mathbb{P}^1 [z_n \in B], \qquad n \in \mathbb{N}$$

pour tout borélien B dans Y et $\eta_n \to z$ dans Y presque partout pour $\mathbb{P}$. En fin, nous montrerons que $z = (u, v)$ résout l'équation (4.1.4) sur un certain prolongement de la base stochastique. Voici les détails:

Étape 1. Nous avons les inégalités uniformes suivantes

$$\sup_n \mathbb{E}\, V_n(z_n(t)) \le Ce^{Ct}, \qquad t \ge 0, \tag{4.5.1}$$

$$\sup_n \mathbb{E}\, \|f_n(u_n(t))\|^{\frac{pq}{2\alpha}}_{L^p(D)} \le Ce^{Ct}, \qquad t \ge 0 \tag{4.5.2}$$

$$\sup_n \mathbb{E}\, \|g_n(u_n(t))\|^q_{L^2(D)} \le Ce^{Ct}, \qquad t \ge 0, \tag{4.5.3}$$

$$\sup_n \left\{ \mathbb{E} \sup_{s \le t} \|z_n(s)\|^q_E \right\} \le Ce^{Ct}, \qquad t \ge 0 \tag{4.5.4}$$

pour une constante C.

Étape 2. Les solutions

$$z_n(t) = S_t z_0 + \int_0^t S_{t-s} F_n(z_n(s))\, ds + \int_0^t S_{t-s} G_n(z_n(s))\, dW^1_s, \qquad t \ge 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

peuvent s'écrire sous la forme

$$z_n(t) = R_1(z_0)(t) + R_2(f_n(u_n))(t) + R_3(y_n)(t), \qquad t \ge 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

où $R_1(z)(t) = S_t z$ envoie

$$R_1 : E_0 \to C([0,\infty), E(-\beta)),$$

$R_2(h)(t) = \int_0^t S_{t-s}(0, h(s))\, ds$ envoie (avec un $r > 1$ fixé)

$$R_2 : L^r_{\text{loc}}((0,\infty), D(\mathcal{A}_0^{-\alpha})_{\text{evol}}) \to C([0,\infty), E(-\beta)),$$

$R_3(h)(t) = \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} S_{t-s} h(s)\, ds$ envoie

$$R_3 : L^q_{\text{loc}}((0,\infty), E_{\text{evol}}) \to C([0,\infty), E(-\beta))$$

et

$$y_n(t) = \frac{\sin \gamma\pi}{\pi} \int_0^t (t-s)^{-\gamma} S_{t-s} G_n(z_n(s))\, dW^1.$$

avec $\frac{1}{q} < \gamma < \frac{1}{2}$ d'après [9]. Ici $L^r_{\text{loc}}((0,\infty), D(\mathcal{A}_0^{-\alpha})_{\text{evol}})$ est le sous-espace de toutes les fonctions u de $L^r_{\text{loc}}((0,\infty), D(\mathcal{A}_0^{-\alpha}))$ telles que $u(t) \in L^2(D)$ et qui s'annulent en dehors de K_t pour presque tout $t \ge 0$. De même, $L^q_{\text{loc}}((0,\infty), E_{\text{evol}})$ est le sous-espace

de toutes les fonctions z de $L^q_{\text{loc}}((0,\infty),E)$ telles que $z(t) \in E_t$ pour presque tout $t \geq 0$. Les deux espaces ci-dessus soient munis des topologies héritées des espaces les contenant.

Nous affirmons que tous les trois opérateurs R_1, R_2 et R_3 sont compacts dont la démonstration fera partie de la preuve de l'Étape 2. Rappelant la définition

$$F_\beta = E((1/2-\beta)\vee 0, -\beta)) = \begin{cases} E(-\beta) & \text{quand } 0 < \beta \leq \frac{1}{2} \\ E(0,-\beta) & \text{quand } \frac{1}{2} \leq \beta \end{cases}$$

nous posons

$$Y = C([0,\infty), F_\beta)$$

et affirmons que la suite z_n est tendue dans Y.

Étape 3. En référant au Théorème de Skorochod [9] nous pouvons trouver l'espace de probabilité mentionné $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec des variables aléatoires z et η_n, $n \geq 1$ à valeurs dans Y telles que la loi de z_n sous P^1 et la loi de η_n sous $\mathbb{P}$ coïncident sur la tribu borélienne sur Y quel que soit $n \in \mathbb{N}$, η_n converge vers z dans Y presque partout pour $\mathbb{P}$, et l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ soutient un nombre infini des processus de Wiener réels indépendants entre eux-mêmes et également indépendants de la suite (η_n), ce qui sera réclamé dans la suite pour la recherche des représentations browniennes (l'Étape 5). Nous soulignons que nous avons omis le passage à une sous-suite dans le théorème de Skorochod mais ceci n'a pas d'influence à la démonstration du Théorème 4.3.1. En plus, comme $Y_0 = C((0,\infty),E)$ est un espace polonais inclus dans Y avec injection continue, nous savons, grâce au Théorème 8.3.7 dans [19] que Y_0 est un borélien dans Y et comme $\mathbb{P}[\eta_n \in Y_0] = \mathbb{P}^1[z_n \in Y_0] = 1$, nous pouvons supposer que η_n prend ses valeurs dans Y_0 et la loi de z_n coïncide avec la loi de η_n sur la tribu borélienne sur l'espace polonais Y_0. Pourtant, η_n converge vers z dans Y (à savoir, dans l'espace supérieur).

Étape 4. Nous allons démontrer que le processus réel

$$t \mapsto N^n_t(x) = \langle \eta_n(t), x\rangle_{E(-\beta)} - \langle \eta_n(0), x\rangle_{E(-\beta)} - \int_0^t \langle \eta_n(s), M^*x\rangle_{E(-\beta)} -$$

$$- \int_0^t \langle F_n(\eta_n(s)), x\rangle_{E(-\beta)}\, ds$$

a la même loi borélienne sur $C[0,\infty)$ que le processus

$$t \mapsto \widetilde{N}^n_t(x) = \langle z_n(t), x\rangle_{E(-\beta)} - \langle z_0, x\rangle_{E(-\beta)} - \int_0^t \langle z_n(s), M^*x\rangle_{E(-\beta)} - \tag{4.5.5}$$

$$- \int_0^t \langle F_n(z_n(s)), x\rangle_{E(-\beta)}\, ds,$$

et

$$\widetilde{N}_t^n(x) = \int_0^t \langle G_n(z_n(s))\cdot, x\rangle_{E(-\beta)}\, dW^1 \qquad t \geq 0$$

par le théorème de Chojnowska-Michalik (voir le les Théorèmes 1.12 et 1.13 dans le premier Chapitre) quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in D(M^*)$ où M^* est l'opérateur adjoint du générateur infinitésimal du C_0-groupe (S_t) sur $E(-\beta)$. L'intégrale stochastique dans (4.5.5) est une $(\mathcal{F}_t^1)$-martingale $L^2(\Omega^1)$-intégrable de variation quadratique donnée par

$$t \mapsto \int_0^t \|G_n^*(z_n(s))x\|_{H_w}^2\, ds,$$

où $G_n^*(z) \in L(E(-\beta), H_w)$ est l'opérateur adjoint de $G_n(z) \in L(H_w, E(-\beta))$ pour tout $z \in E$. Par conséquent, $N^n(x)$ est une martingale par rapport à la filtration naturelle $\sigma(\eta_n)$ et de variation quadratique donnée par

$$t \mapsto \int_0^t \|G_n^*(\eta_n(s))x\|_{H_w}^2\, ds. \tag{4.5.6}$$

Étape 5. Nous avons

$$\mathbb{E}\sup_{s\leq t}\|z(s)\|_{F_\beta}^q + \mathbb{E}\,\|f(u(t))\|_{L^p(D)}^{\frac{pq}{2a}} + \mathbb{E}\|g(u(t))\|_{L^2(D)}^q \leq Ce^{Ct}, \qquad t \geq 0$$

pour une constante C. Si nous définissons maintenant le processus réel

$$t \mapsto N_t(x) = \langle z(t), x\rangle_{E(-\beta)} - \langle z(0), x\rangle_{E(-\beta)} - \int_0^t \langle z(s), M^*x\rangle_{E(-\beta)} -$$

$$- \int_0^t \langle F(z(s)), x\rangle_{E(-\beta)}\, ds$$

pour $x \in D(M^*)$ alors c'est une martingale par rapport à la filtration naturelle $\sigma(z)$ et de variation quadratique

$$t \mapsto \int_0^t \|G^*(z(s))x\|_{H_w}^2\, ds,$$

où $F : E(-\beta) \to E(-\beta)$ et $G : E(-\beta) \to L(H_w, E(-\beta))$ sont les nonlinéarités de l'équation (4.1.3). En plus, d'aprés le Théorème 2.1.2 dans le deuxième Chapitre, il

existe un processus de Wiener spatialement homogène W de mesure spectrale μ par rapport à la filtration $\sigma(z)$, qui représente N, à savoir

$$N_t(x) = \int_0^t \langle G(z(s))\cdot, x\rangle_{E(-\beta)}\, dW, \qquad t \geq 0$$

quel que soit $x \in D(M^*)$, ce qui signifie par définition que

$$\langle z(t), x\rangle_{E(-\beta)} = \langle z(0), x\rangle_{E(-\beta)} + \int_0^t \langle z(s), M^*x\rangle_{E(-\beta)}\, ds + \int_0^t \langle F(z(s)), x\rangle_{E(-\beta)}\, ds +$$

$$+ \int_0^t \langle G(z(s))\cdot, x\rangle_{E(-\beta)}\, dW, \qquad t \geq 0$$

quel que soit $x \in D(M^*)$. Or,

$$z(t) = S_t z(0) + \int_0^t S_{t-s}F(z(s))\, ds + \int_0^t S_{t-s}G(z(s))\, dW, \qquad t \geq 0$$

dans $E(-\beta)$ par le théorème de Chojnowska-Michalik.

Preuve de l'Étape 1: Soient $\tilde{f} \in C^1(\mathbb{R})$ globalement Lipschitz et soit $\tilde{g}$ globalement Lipschitz, avec $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0) = 0$ uniquement si $D = \mathbb{R}^d$. Soit $l_0 \in C^2(\mathbb{R})$ une fonction arbitraire telle que $l_0(x) > 0$ et $\dot{l}_0(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dot{\tilde{L}}(x) + \tilde{f}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{L}(0) = 0$. Notons $\tilde{z} = (\tilde{u}, \tilde{v})$ la solution de (4.1.4) dans E avec les coefficients $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ et la condition initiale z_0. Alors nous savons par (3.6.6) du troisième Chapitre que

$$V_0(\tilde{z}(t)) \leq V_0(z_0) + \int_0^t \dot{V}_0(\tilde{z}(s))\tilde{G}(\tilde{z}(s))\, dW + \tag{4.5.7}$$

$$+ \int_0^t \dot{l}_0\left(\frac{1}{2}\|\tilde{z}(s)\|^2_{D(-A)^{1/2}\times L^2(D)} + \int_D \tilde{L}(\tilde{u}(s))\, dx\right)\langle B\tilde{u}(s), \tilde{v}(s)\rangle_{L^2(D)}\, ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \dot{l}_0\left(\frac{1}{2}\|\tilde{z}(s)\|^2_{D(-A)^{1/2}\times L^2(D)} + \int_D \tilde{L}(\tilde{u}(s))\, dx\right)\|\tilde{g}(\tilde{u}(s))\|^2_{HS(H_w, L^2(D))}\, ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\sigma_R} \max\left\{\ddot{l}_0\left(\frac{1}{2}\|\tilde{z}(s)\|^2_{D(-A)^{1/2}\times L^2(D)} + \int_D \tilde{L}(\tilde{u}(s))\, dx\right), 0\right\} \times$$

$$\times \|\tilde{v}(s)\|^2_{L^2(D)}\, \|\tilde{g}(\tilde{u}(s))\|^2_{HS(H_w, L^2(D))}\, ds, \qquad t \geq 0$$

vaut pour

$$V_0(z) = l_0\left(\frac{1}{2}\|z\|^2_{D(-A)^{1/2}\times L^2(D)} + \int_D \tilde{L}(\operatorname{Re}\tilde{u})\,dx\right), \qquad z \in E$$

et $B = \mathcal{A} - A$. Mais les f_n ne sont que Lipschitz donc, étant donné $n \in \mathbb{N}$, pour obtenir (4.5.7) dans notre cas pour z_n, f_n, g_n, nous approximons f_n par une suite de fonctions h_m de classe C^∞ telles que $h_m(0) = f_n(0)$, h_m converge uniformément vers f_n sur $\mathbb{R}$ et $|h_m(x) - h_m(y)| \le C|x-y|$ quels que soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et une constante C indépendante de m. Cela se fait facilement à l'aide des convolutions de f_n et une suite de noyaux réguliers. Or, (4.5.7) entraîne

$$U_m(w_m(t)) \le U_m(z_0) + \int_0^t \dot{U}_m(w_m(s))G_n(w_m(s))\,dW^1 + \tag{4.5.8}$$

$$+\int_0^t \dot{l}_0\left[\frac{1}{2}\|w_m(s)\|^2_{D(-A)^{1/2}\times L^2(D)} + \int_D H_m(u_m(s))\,dx\right]\langle Bu_m(s), v_m(s)\rangle_{L^2(D)}\,ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \dot{l}_0\left(\frac{1}{2}\|w_m(s)\|^2_{D(-A)^{1/2}\times L^2(D)} + \int_D H_m(u_m(s))\,dx\right)\times$$

$$\times \|g_n(u_m(s))\|^2_{HS(H_w, L^2(D))}\,ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \max\left\{\ddot{l}_0\left(\frac{1}{2}\|w_m(s)\|^2_{D(-A)^{1/2}\times L^2(D)} + \int_D H_m(u_m(s))\,dx\right), 0\right\}\times$$

$$\times \|v_m(s)\|^2_{L^2(D)}\,\|g_n(u_m(s))\|^2_{HS(H_w, L^2(D))}\,ds$$

où H_m est la primitive de $-h_m$ telle que $H_m(0) = 0$,

$$U_m(z) = l_0\left(\frac{1}{2}\|z\|^2_{D(-A)^{1/2}\times L^2(D)} + \int_D H_m(\operatorname{Re} u)\,dx\right), \qquad z = (u,v) \in E$$

et $w_m = (u_m, v_m)$ est la solution de (4.1.4) avec les coefficients h_m, g et la condition initiale z_0. Ensuite, en définissant

$$V_n^1(z) = l_0\left(\frac{1}{2}\|z\|^2_{D(-A)^{1/2}\times L^2(D)} + \int_D L_n(\operatorname{Re} u)\,dx\right), \qquad z \in E$$

où L_n est la primitive de $-f_n$ telle que $L_n(0) = 0$, nous avons $H_m \to L_n$ uniformément sur tout ensemble compact dans $L^2(D)$ où $H_m(u) = \int_D H_m(\operatorname{Re} u)\,dx$ pour $u \in L^2(D)$ et L_n est défini de façon analogue. Par conséquent

$$\lim_{m\to\infty} |U_m(z) - V_n^1(z)| + \|\dot{U}_m(z) - \dot{V}_n^1(z)\|_{L(E)} = 0$$

quel que soit $z \in E$. Supposons (pour l'instant) que $\mathbb{E}\|z_0\|_E^3 < \infty$. Alors, en applicant la Proposition 7.3 dans [9], on obtient

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}\sup\{\|w_m(t) - z_n(t)\|_E^3 : t \le T\} = 0$$

quel que soit $T > 0$ où $z_n = (u_n, v_n)$ est la solution de (4.1.4) avec les coefficients f_n, g_n et la condition initiale z_0. Donc, il doit exister une sous-suite telle que

$$\lim_{k\to\infty} \sup\{\|w_{m_k}(t) - z_n(t)\|_E : t \le T\} = 0$$

$\mathbb{P}^1$-presque sûrement qui traduit (4.5.8) par le passage à la limite vers

$$V_n^1(z_n(t)) \le V_n^1(z_0) + \int_0^t \dot{V}_n^1(z_n(s))G_n(z_n(s))\,dW^1 + \tag{4.5.9}$$

$$+\int_0^t \dot{l}_0\left(\frac{1}{2}\|z_n(s)\|^2_{D(-A)^{1/2}\times L^2(D)} + \int_D L_n(u_n(s))\,dx\right)\langle Bu_n(s), v_n(s)\rangle_{L^2(D)}\,ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \dot{l}_0\left(\frac{1}{2}\|z_n(s)\|^2_{D(-A)^{1/2}\times L^2(D)} + \int_D L_n(u_n(s))\,dx\right)\times$$

$$\times \|g_n(u_n(s))\|^2_{HS(H_w,L^2(D))}\,ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \max\left\{\ddot{l}_0\left(\frac{1}{2}\|z_n(s)\|^2_{D(-A)^{1/2}\times L^2(D)} + \int_D L_n(u_n(s))\,dx\right), 0\right\}\times$$

$$\times \|v_n(s)\|^2_{L^2(D)}\,\|g_n(u_n(s))\|^2_{HS(H_w,L^2(D))}\,ds.$$

Afin de montrer (4.5.9), nous avons eu besoin de la condition $\mathbb{E}\|z_0\|_E^3 < \infty$. Pourtant, (4.5.9) vaut quel que soit la condition initiale z_0 mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_0^1$ puisque $F_n : E \to E$ et $G_n : E \to HS(H_w, E)$ sont globalement Lipschitz et donc l'unicité trajectorielle vaut pour (4.1.3). Cela veut dire que (4.5.9) vaut presque partout sur l'ensemble $[\|z_0\|_E \le R]$ quel que soit $R > 0$. Par conséquent, (4.5.9) vaut presque partout.

Maintenant considérons une fonction $l_0 \in C^2([\delta_\theta, \infty))$ où δ_θ a été défini dans (4.3.1) avec $l_0(x) > 0$, $\dot{l}_0(x) > 0$, $x\dot{l}_0(x) \le C_0 l_0(x)$, $\max\{\ddot{l}_0(x), 0\} \le C_0 l_0(x)$ pour tout $x \ge \delta_\theta$ et une constante C_0, et prolongeons-la à une fonction de classe $C^2(\mathbb{R})$ telle que $l_0(x) > 0$ et $\dot{l}_0(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Un tel prolongement existe toujours et, profitant des propriétés de f_n, g_n et de la fonction l_0, (4.5.9) devient

$$V_n^1(z_n(t)) \le V_n^1(z_0) + \int_0^t \dot{V}_n^1(z_n(s))G_n(z_n(s))\,dW^1 + C\int_0^t V_n^1(z_n(s))\,ds$$

pour tout $t \geq 0$ et une constante C indépendante de n par (4.3.3) et par le fait que

$$|x - \Delta_\theta| \dot{l}_0(x) + (x - \Delta_\theta)^2 \max\{\ddot{l}_0(x), 0\} \leq C_1 l_0(x)$$

quel que soit $x \geq \delta_\theta$ et une constante C_1. Le lemme de Gronwall dit que

$$\mathbb{E}\, V_n^1(z_n(t)) \leq e^{Ct} \mathbb{E}\, V_n^1(z_0), \qquad t \geq 0 \tag{4.5.10}$$

et

$$\sup_{s \leq t} l_0 \left(\frac{1-\theta}{2} \|z_n(s)\|^2_{D(-A)^{1/2} \times L^2(D)} + \delta_\theta \right) \leq \sup_{s \leq t} V_n^1(z_n(s)) \leq \tag{4.5.11}$$

$$\leq e^{Ct} \left(V_n^1(z_0) + \sup_{s \leq t} |J_n(s)| \right)$$

où $J_n(t) = \int_0^t \dot{V}_n^1(z_n(r)) G_n(z_n(r))\, dW^1$ est une martingale locale de processus de variation quadratique donnée par

$$\langle J_n \rangle_t = \int_0^t \left[\dot{l}_0 \left(\frac{1}{2} \|z_n(s)\|^2_{D(-A)^{1/2} \times L^2(D)} + \int_D L_n(u_n(s))\, dx \right) \|\varphi_n(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d, \mu)} \right]^2 ds$$

où

$$\varphi_n(s, \omega, y) = \int_D e^{i\langle y, x \rangle} g_n(u_n(s, \omega, x)) v_n(s, \omega, x)\, dx$$

avec $z_n = (u_n, v_n)$.

L'inégalité (4.5.10) appliquée à $l_0(x) = (x - \Delta_\theta)^{q/2}$ achève la démonstration de (4.5.1) qui, ensemble avec (4.3.3), entraîne (4.5.2) et (4.5.3). Ensuite nous appliquons (4.5.11) à la fonction $l_0(x) = (x - \Delta_\theta)^{q/4}$ et la fonctionelle correspondante

$$V_n^1(z) = \left(\frac{1}{2} \|z\|^2_{D(-A)^{1/2} \times L^2(D)} + \int_D L_n(\operatorname{Re} u)\, dx - \Delta_\theta \right)^{q/4}$$

pour démontrer (4.5.4), en obtenant, après avoir mis les deux côtés de l'inégalité (4.5.11) au carré,

$$\sup_{s \leq t} \left(\frac{1-\theta}{2} \|z_n(s)\|^2_{D(-A)^{1/2} \times L^2(D)} + \delta_\theta - \Delta_\theta \right)^{q/2} \leq e^{2Ct} \left(V_n(z_0) + \sup_{s \leq t} |J_n(s)|^2 \right).$$

Mais

$$\mathbb{E} \sup_{s \leq t} |J_n(s)|^2 \leq 4\mathbb{E}\, |J_n(t)|^2 = 4\mathbb{E}\, \langle J_n \rangle_t \leq c \int_0^t \mathbb{E}\, V_n(z_n(s))\, ds \leq c e^{ct}$$

pour une constante c par l'inégalité maximale de Doob, (4.3.3) et (4.5.1). Or,

$$\sup_n \left\{ \mathbb{E} \left(\frac{1-\theta}{2} \sup_{t \le T} \|z_n(t)\|^2_{D(-A)^{1/2} \times L^2(D)} + \delta_\theta - \Delta_\theta \right)^{q/2} \right\} \le Ce^{CT} < \infty, \quad T > 0$$

pour une constante C et (4.5.4) est démontré.

Preuve de l'Étape 2 (compacité):

Cas de R_1: Si $(x_m : m \in \mathbb{N})$ est une suite bornée dans E_0 alors il existe une sous-suite $(m_k : k \in \mathbb{N})$ telle que $(x_{m_k} : k \in \mathbb{N})$ converge vers un x dans $E(-\beta)$ car l'injection de E_0 dans $E(-\beta)$ est compacte d'après l'hypothèse (CA). Donc

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{t \le T} \|S_t x_{m_k} - S_t x\|_{E(-\beta)} = 0$$

puisque $(S_t : t \ge 0)$ est un C_0-groupe sur $E(-\beta)$. Donc R_1 est compact.

Cas de R_2: Soit $v_n \in L^r((0,T), D(\mathcal{A}_0^{-\alpha}))$ bornée, $v_n(t) \in L^2(D)$ de support essentiel dans K_t pour presque tout t. Notons $z_n(t) = \int_0^t S_{t-s}(0, v_n(s))\, ds$, $t \in [0,T]$. Nous devons démontrer qu'il existe une sous-suite (n_k) telle que $(z_{n_k} : k \in \mathbb{N})$ converge dans $C([0,T], E(-\beta))$. D'abord nous voyons que $(0, v_n(s)) \in E_s$ pour presque tout s. Donc, étant donné $t \in [0,T]$, $S_{t-s}(0, v_n(s)) \in E_t$ par la définition de $(E_t : t \ge 0)$. Par conséquent

$$z_n(t) = \int_0^t S_{t-s}(0, v_n(s))\, ds \in \overline{E_t}^{E(-\alpha)}.$$

Comme $(S_t : t \ge 0)$ est un C_0-groupe sur $E(-\alpha)$ nous obtenons que la suite $(z_n : n \in \mathbb{N})$ est uniformément bornée dans $C([0,T], E(-\alpha))$. Ensuite nous allons montrer que

$$\lim_{h \to 0} \sup\{\|z_n(t+h) - z_n(t)\|_{E(-\beta)} : t \le T, t+h \le T, n \in \mathbb{N}\} = 0 \tag{4.5.12}$$

qui, ensemble avec le fait que $\overline{E_T}^{E(-\alpha)}$ est inclus dans $E(-\beta)$ avec injection compacte ce qui n'est rien autre que l'hypothèse (CA), complète la preuve par le théorème d'Arzela-Ascoli. Donc il ne nous reste que (4.5.12). Notons

$$I = \{v : v \in L^2(D), \|v\|_{D(\mathcal{A}_0^{-\alpha})} \le 1, \text{ess-supp}\, v \in K_T\}$$

et

$$c(h) = \sup\{\|S_{t+h}(0,v) - S_t(0,v)\|_{E(-\beta)} : t \le T, v \in I\}.$$

Alors

$$\|z_n(t+h) - z_n(t)\|_{E(-\beta)} \le \left\| \int_t^{t+h} S_{t+h-s}(0, v_n(s))\, ds \right\|_{E(-\beta)} +$$

$$+ \left\| \int_0^t (S_{t+h-s}(0, v_n(s)) - S_{t-s}(0, v_n(s)))\, ds \right\|_{E(-\beta)} \le$$

$$\le K_T \int_t^{t+h} \|v_n(s)\|_{D(\mathcal{A}_0^{-\alpha})} + c(h) \int_0^t \|v_n(s)\|_{D(\mathcal{A}_0^{-\alpha})} \le K_T(h^{1-1/r} + c(h))$$

et $\lim c(h) = 0$ car h tends vers zéro d'après (CA).

Cas de R_3: Soit $h_n \in L^q((0,T),E)$ bornée, $h_n(t) \in E_t$ pour presque tout t. Notons $z_n(t) = \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} S_{t-s} h_n(s)\, ds$, $t \in [0,T]$. Nous devons montrer qu'il existe une sous-suite (n_k) telle que $(z_{n_k} : k \in \mathbb{N})$ converge dans $C([0,T],E(-\beta))$. D'abord nous voyons que, étant donné $t \in [0,T]$, $(t-s)^{\gamma-1} S_{t-s} h_n(s) \in E_t$ pour presque tout s par la définition de $(E_t : t \geq 0)$. Par conséquent,

$$z_n(t) = \int_0^t S_{t-s} h_n(s)\, ds \in E_t$$

et $(z_n : n \in \mathbb{N})$ est uniformément bornée dans $C([0,T],E)$ puisque $q\gamma > 1$. Ensuite nous allons montrer que

$$\lim_{h \to 0} \sup\{\|z_n(t+h) - z_n(t)\|_{E(-\beta)} : t \leq T, t+h \leq T, n \in \mathbb{N}\} = 0 \tag{4.5.13}$$

qui, ensemble avec le fait que E_T est inclus dans $E(-\beta)$ avec injection compacte, complète la preuve par le théorème d'Arzela-Ascoli. Donc il nous reste encore (4.5.13). Notons

$$c(h) = \sup\{\|S_{t+h} z - S_t z\|_{E(-\beta)} : t \leq T, z \in E_T, \|z\|_E \leq 1\}$$

et

$$a(h) = \left\{ \int_0^T \left[s^{\gamma-1} - (s+h)^{\gamma-1} \right]^{q/(q-1)} ds \right\}^{1-1/q}.$$

Alors

$$\|z_n(t+h) - z_n(t)\|_{E(-\beta)} \leq \left\| \int_t^{t+h} (t+h-s)^{\gamma-1} S_{t+h-s} h_n(s)\, ds \right\|_{E(-\beta)} +$$

$$+ \left\| \int_0^t \left((t+h-s)^{\gamma-1} S_{t+h-s} h_n(s) - (t-s)^{\gamma-1} S_{t+h-s} h_n(s) \right) ds \right\|_{E(-\beta)} \leq$$

$$+ \left\| \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} \left(S_{t+h-s} h_n(s) - S_{t-s} h_n(s) \right) ds \right\|_{E(-\beta)} \leq$$

$$\leq K_T \int_t^{t+h} (t+h-s)^{\gamma-1} \|h_n(s)\|_E + K_T \int_0^t \left[(t-s)^{\gamma-1} - (t+h-s)^{\gamma-1} \right] \|h_n(s)\|_E\, ds +$$

$$+ c(h) \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} \|h_n(s)\|_E \leq K_T (h^{\gamma-1/q} + a(h) + c(h))$$

et $\lim_{h \to 0} c(h) + a(h) = 0$ puisque E_T est inclus dans $E(-\beta)$ avec injection compacte.

Preuve de l'Étape 2 (tension): Fixant une suite positive $(a_m : m \in \mathbb{N})$, l'ensemble I de toutes les fonctions $u \in C([0,\infty), D(-A)^{1/2})$ telles que le support essentiel de $u(t)$ est contenu dans K_t pour tout $t \geq 0$ et qu'il existe une fonction $v \in C([0,\infty), L^2(D))$ vérifiant

$$u(t) = u(0) + \int_0^t v(s)\,ds \qquad \text{et} \qquad \sup_{t\leq m} \|(u(t), v(t))\|_E \leq a_m \text{ pour tout } m \in \mathbb{N},$$

est relativement compact dans $C([0,\infty), L^2(D))$ par le théorème d'Arzela-Ascoli car

$$\{x \in D(-A)^{1/2} : \|x\|_{D(-A)^{1/2}} \leq 1,\ \text{ess-supp } x \subseteq K_t\}$$

est relativement compact dans $L^2(D)$ quel que soit $t \geq 0$. Donc

$$\mathbb{P}^1\left[u_n \notin \overline{I}^{C([0,\infty),L^2(D))}\right] \leq \mathbb{P}^1 \bigcup_{m=1}^{\infty}\left[\sup_{t\leq m}\|z_n(t)\|_E > a_m\right] \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}^1\left[\sup_{t\leq m}\|z_n(t)\|_E > a_m\right] \leq \sum_{m=1}^{\infty} a_m^{-q}\mathbb{E}\sup_{t\leq m}\|z_n(t)\|_E^q \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Ce^{Cm}}{a_m^q}$$

par (4.5.4). Or, un bon choix de la suite $(a_m : m \in \mathbb{N})$ entraîne la tension de $(u_n : n \in \mathbb{N})$ dans $C([0,\infty), L^2(D))$.

Ensuite nous allons montrer la tension de $(z_n : n \in \mathbb{N})$ dans $C([0,\infty), E(-\beta))$. Pour faire cela, soit $r = pq/(2a)$, fixons une suite positive $(a_m : m \in \mathbb{N})$ et notons $I_1 = \{z \in E_0 : \|z\|_E \leq R\}$ pour un $R > 0$,

$$I_2 = \left\{h \in L^r_{\text{loc}}\left([0,\infty), D(\mathcal{A}_0^{-\alpha})_{\text{evol}}\right) : \int_0^m \|h(s)\|^r_{D(\mathcal{A}_0^{-\alpha})}\,ds \leq a_m, m \in \mathbb{N}\right\},$$

$$I_3 = \left\{h \in L^q_{\text{loc}}\left([0,\infty), E_{\text{evol}}\right) : \int_0^m \|h(s)\|^q_E\,ds \leq a_m, m \in \mathbb{N}\right\}$$

et

$$y_n(t) = \frac{\sin(\gamma\pi)}{\pi}\int_0^t (t-s)^{-\gamma} S_{t-s}G_n(z_n(s))\,dW^1.$$

Alors $D = R_1[I_1] + R_2[I_2] + R_3[I_3]$ est un ensemble relativement compact dans $C([0,\infty), E(-\beta))$ par la partie précédente de cette démonstration.

Donc

$$\mathbb{P}^1\left[z_n \notin \overline{D}^{C([0,\infty),E(-\beta))}\right] \leq \tag{4.5.14}$$

$$\leq \mathbb{P}^1\left([z_0 \notin I_1] \cup [f_n(u_n) \notin I_2] \cup [y_n \notin I_3]\right) \leq$$

$$\leq \mathbb{P}^1\left[\|z_0\|_E > R\right] + \mathbb{P}^1 \bigcup_{m=1}^{\infty}\left[\int_0^m \|f_n(u_n(s))\|^r_{D(\mathcal{A}_0^{-\alpha})}\, ds > a_m\right] +$$

$$+\mathbb{P}^1 \bigcup_{m=1}^{\infty}\left[\int_0^m \|y_n(s)\|^q_E\, ds > a_m\right]$$

si nous montrons que y_n (en tant qu'un processus défini à une modification près) a une modification mesurable (notée toujours y_n) qui satisfait, pour presque tout ω, à $y_n(t,\omega) \in E_t$ pour presque tout $t \geq 0$. Nous reviendrons à ce problème plus tard, et nous reprenons (4.5.14) dont le côté droit peut être majoré par

$$\leq \mathbb{P}^1\left[\|z_0\|_E > R\right] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a_m}\mathbb{E}\int_0^m \left(\|f_n(u_n(s))\|^r_{D(\mathcal{A}_0^{-\alpha})} + \|y_n(s)\|^q_E\right) ds \leq$$

$$\leq \mathbb{P}^1\left[\|z_0\|_E > R\right] + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{a_m}$$

avec une suite $(b_m : m \in \mathbb{N})$ indépendante de $(a_m : m \in \mathbb{N})$. D'où la tension de $(z_n : n \in \mathbb{N})$ dans $C([0,\infty), E(-\beta))$. Par conséquent, $(z_n : n \in \mathbb{N})$ est tendu dans Y. Mais il nous reste encore

(1) à identifier les constantes $(b_m : m \in \mathbb{N})$.
(2) à montrer que y_n admet une modification à trajectoires dans E_{evol}.

Preuve de (1):

$$\mathbb{E}\int_0^m \left(\|f_n(u_n(s))\|^r_{D(\mathcal{A}_0^{-\alpha})} + \|g_n(u_n(s))\|^q_{L^2(D)}\right) ds \leq$$

$$\leq C_1\mathbb{E}\int_0^m \left(\|f_n(u_n(s))\|^r_{L^p(D)} + \|g_n(u_n(s))\|^q_{L^2(D)}\right) ds \leq 2C_1 \int_0^m Ce^{Cs}\, ds = b_m$$

pour une constante C_1 car $L^p(D)$ est inclus dans $D(\mathcal{A}_0^{-\alpha})$ avec injection continue d'après l'hypothèse dans le Théorème 4.3.1, (4.5.2) et (4.5.3).

Preuve de (2): D'abord remarquons que

$$\lim_{s\to t} \mathbb{P}^1\left[\|y_n(s) - y_n(t)\|_E \geq \Delta\right] = 0$$

quels que soient $\Delta > 0$ et $t \geq 0$. Il existe donc une suite des nombres réels positifs $(\delta_k : k \in \mathbb{N})$ tels que

$$\mathbb{P}^1 \left[\|y_n(s) - y_n(t)\|_E \geq \frac{1}{k} \right] \leq 2^{-k}$$

lorsque $0 \leq s \leq k$, $0 \leq t \leq k$, $|t - s| \leq \delta_k$. Définissons une suite de processus mesurables à valeurs dans E par

$$x_k(t) = \sum_{j=0}^{\infty} y_n(j\delta_k) I_{[j\delta_k \leq t < (j+1)\delta_k]}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

$$x(t,\omega) = \lim_{k\to\infty} x_k(t,\omega)$$

lorsque la limite existe, et $x(t,\omega) = 0$ autrement. Alors x est un processus mesurable à valeurs dans E et $\mathbb{P}^1 [x(t) = y_n(t)] = 1$ quel que soit $t \geq 0$ car $x_k(t)$ converge vers $y_n(t)$ presque partout quel que soit $t \geq 0$. En plus, il existe un ensemble $J \in \mathcal{F}^1$, $\mathbb{P}^1(J) = 1$ tel que $x_k(t,\omega) \in E_t$ quels que soient $t \geq 0$, $\omega \in J$, $k \in \mathbb{N}$ et, fixant un $\omega \in J$,

$$\lim_{k\to\infty} x_k(t,\omega) = x(t,\omega)$$

pour presque tout $t \geq 0$, ce qui signifie que $x(t,\omega) I_J(\omega)$ est une modification mesurable de y_n dont les trajectoires appartiennent à $L^q_{\text{loc}}([0,\infty), E_{\text{evol}})$.

Preuve de l'Étape 4 et 5: Fixons $n \in \mathbb{N}$, $x \in D(M^*)$ et définissons deux applications auxiliaires B_1 et B_2 de $C([0,\infty), E)$ dans $C([0,\infty))$ par

$$B_1(z)(t) = \langle z(t), x \rangle_{E(-\beta)} - \langle z(0), x \rangle_{E(-\beta)} - \int_0^t \langle z(s), M^* x \rangle_{E(-\beta)}\, ds -$$

$$- \int_0^t \langle F_n(z(s)), x \rangle_{E(-\beta)}\, ds$$

$$B_2(z)(t) = \int_0^t \|G_n^*(z(s))x\|^2_{H_w}\, ds, \qquad t \geq 0.$$

Alors B_1 et B_2 sont continues, doncs boréliennes, car E est inclus dans $E(-\beta)$ avec injection continue. Donc la loi conjointe de $(\widetilde{N}^n(x), B_2(z_n), z_n)$ sous $\mathbb{P}^1$ coïncide avec la loi conjointe de $(N^n(x), B_2(\eta_n), \eta_n)$ sous $\mathbb{P}$ sur

$$\mathbb{B}(C([0,\infty)) \otimes \mathbb{B}(C([0,\infty)) \otimes \mathbb{B}(C([0,\infty)), E).$$

Ce fait a plusieurs conséquences:

(a) Le processus $N^n(x)$ est une martingale continue à valeurs dans $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ par rapport à la filtration $\sigma(\eta_n)$.

(b) Le processus $(N^n(x))^2 - B_2(\eta_n)$ est une martingale continue à valeurs dans $L^1(\Omega, \mathbb{P})$ par rapport à la filtration $\sigma(\eta_n)$.

Donc, $B_2(\eta_n)$ est le processus de variation quadratique de $N^n(x)$ par (a) et (b), et (4.5.6) est démontré. Pour montrer le reste, nous allons profiter des propriétés suivantes que nous démontrerons après. Fixons $x \in D(M^*)$.

(aa) $\mathbb{E} \sup_{s\le t} \|z(t)\|^q_{F_\beta} \le Ce^{Ct}$, $t \ge 0$

(bb) $\mathbb{E} \|f(u(t))\|^{\frac{pq}{2a}}_{L^p(D)} + \mathbb{E} \|g(u(t))\|^q_{L^2(D)} \le Ce^{Ct}$ quel que soit $t \ge 0$

(cc) $\mathbb{E} |N^n_t(x)|^q + \mathbb{E} |N_t(x)|^q \le Ce^{Ct}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \ge 0$

(dd) $\mathbb{E} \|f_n(\eta^1_n(t)) - f(u(t))\|^{\frac{pq}{2a}}_{L^p(D)}$ converge vers 0 lorsque $n \to \infty$ quel que soit $t \ge 0$

(ee) $\mathbb{E} \|g_n(\eta^1_n(t)) - g(u(t))\|^q_{L^2(D)}$ converge vers 0 lorsque $n \to \infty$ quel que soit $t \ge 0$

où $\eta_n = (\eta^1_n, \eta^2_n)$ et C est une constante positive.

Ensuite, toujours étant donné $x \in D(M^*)$,

$$|N^n_t(x) - N_t(x)| \le C_1 \sup_{s\le t} \|\eta_n(s) - z(s)\|_{F_\beta} + C_1 \int_0^t \left\|f_n(\eta^1_n(s)) - f(u(s))\right\|_{L^p(D)} ds$$

pour $t \ge 0$ fixé et une constante C_1. Le premier terme à droite converge vers zéro presque partout alors que le second dans $L^{pq/(2a)}(\Omega)$ par (4.5.2) et (dd). Donc le côté gauche converge vers zéro en probabilité. Comme $\sup_n \mathbb{E} |N^n_t(x) - N_t(x)|^q < \infty$ par (cc) nous savons que $\mathbb{E} |N^n_t(x) - N_t(x)|^2$ converge vers zéro car $q > 2$. Ensuite,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \left| \int_0^t \|G^*_n(\eta_n(s))x\|^2_{H_w} ds - \int_0^t \|G^*(z(s))x\|^2_{H_w} ds \right|^{q/2} = 0$$

par (4.5.3) et (ee). Donc nous pouvons montrer que $N(x)$ est une martingale pour la filtration $\sigma(z)$: Choisissons une fonction continue $\varphi : F^k \to [0,1]$. Alors

$$\mathbb{E}\, \varphi(z(s_1), \ldots, z(s_k)) N_t(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\, \varphi(\eta_n(s_1), \ldots, \eta_n(s_k)) N^n_t(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\, \varphi(\eta_n(s_1), \ldots, \eta_n(s_k)) N^n_s(x) = \mathbb{E}\, \varphi(z(s_1), \ldots, z(s_k)) N_t(x)$$

quels que soient $0 \le s < t$ et $\{s_1, \ldots, s_k\} \subseteq [0, s]$, et la méthode analogue peut être utilisée également pour montrer que

$$t \mapsto N^2_t(x) - \int_0^t \|G^*(z(s))x\|^2_{H_w} ds$$

est une martingale pour la filtration $\sigma(z)$. Il nous reste de montrer (aa) - (ee). Les estimations (aa), resp. (bb) sont une conéquence de (4.5.4), resp. (4.5.2) et (4.5.3) par le Lemme de Fatou. On a

$$\mathbb{E} |N^n_t(x)|^q = \mathbb{E} |\widetilde{N}^n_t(x)|^q \le C\mathbb{E} \left(\int_0^t \|g_n(u_n(s))\|^2_{L^2(D)} ds \right)^{q/2} \le Ce^{Ct}$$

par (4.5.5), l'inégalité de Burkholder (voir Lemma 7.2 in [9]), le Lemme 4.1.1 et (4.5.3), quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Donc (cc) est une conséquence du Lemme de Fatou car $N_t^n(x)$ converge vers $N_t(x)$ en probabilité comme nous venons de montrer ci-dessus. En ce qui concerne (dd) nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[|\eta_n^1(t,\omega)|<R]} \left|f_n(\eta_n^1(t,\omega)) - f(u(t,\omega))\right|^p \, dx = 0 \qquad \mathbb{P}\text{-presque partout}$$

pour $R > 0$ fixé car le support essentiel de $\eta_n^1(t,\omega)$ et $u(t,\omega)$ est contenu dans K_t pour presque tout $\omega \in \Omega$ où K_t est donné par (CE). Donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int\limits_{[|\eta_n^1(t)|<R]} \left|f_n(\eta_n^1(t)) - f(u(t))\right|^p \, dx \right)^{\frac{q}{2a}} = 0$$

par le théorème de Lebesgue et (bb). Ensuite

$$\int\limits_{[|\eta_n^1(t,\omega)|\geq R]} |f_n(\eta_n^1(t,\omega))|^p \, dx \leq m_R^a \left(\frac{1}{2}\|\eta_n(t,\omega)\|_E^2 + \int\limits_D L_n(\eta_n^1(s,\omega)) \, dx - \Delta_\theta \right)^a$$

quels que soient $t \geq 0$ et $\omega \in \Omega$ par (4.3.3). Par conséquent,

$$\mathbb{E}\left(\int\limits_{[|\eta_n^1(t)|\geq R]} |f_n(\eta_n^1(t))|^p \, dx \right)^{\frac{q}{2a}} \leq m_R^{\frac{q}{2}} \mathbb{E}\left(\frac{1}{2}\|\eta_n(t)\|_E^2 + \int\limits_D L_n(\eta_n^1(s)) \, dx - \Delta_\theta \right)^{\frac{q}{2}}$$

$$= m_R^{q/2} \mathbb{E}\, V_n(\eta_n(t)) = m_R^{q/2} \mathbb{E}\, V_n(z_n(t)) \leq m_R^{q/2} C e^{Ct}, \qquad t \geq 0$$

par (4.5.1). Maintenant

$$\int\limits_{[|\eta_n^1(t,\omega)|\geq R]} |f(u(t,\omega))|^p \, dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{[|\eta_n^1(t,\omega)-u(t,\omega)|\geq R/2]} |f(u(t,\omega))|^p \, dx + \int\limits_{[|u(t,\omega)|\geq R/2]} |f(u(t,\omega))|^p \, dx$$

où

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[|\eta_n^1(t,\omega)-u(t,\omega)|\geq R/2]} |f(u(t,\omega))|^p \, dx = 0 \qquad \mathbb{P}\text{-presque partout}$$

car $\|\eta_n^1(t,\omega) - u(t,\omega)\|_{L^2(D)}$ converge vers zéro presque partout et

$$\int\limits_D |f(u(t,\omega))|^p \, dx < \infty \qquad \mathbb{P}\text{-presque partout}$$

par (bb) qui, ensemble avec le théorème de Lebesgue, entraîne que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_{[|\eta_n^1(t)-u(t)|\geq R/2]} |f(u(t))|^p\,dx\right)^{\frac{q}{2a}} = 0.$$

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique - BP 11
54601 VILLERS-LES-NANCY Cédex

En résumant ces faits nous obtenons

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_D \left|f_n(\eta_n^1(t)) - f(u(t))\right|^p\,dx\right)^{\frac{q}{2a}} \leq$$

$$\leq C_1\left(m_R^{q/2}Ce^{Ct} + \mathbb{E}\left(\int_{[|u(t)|\geq R/2]} |f(u(t))|^p\,dx\right)^{\frac{q}{2a}}\right)$$

pour une constante C_1 et tout $R > 0$. Nous clorons la démonstration de (dd) en utilisant (4.3.2). La démonstration de (ee) est tout à fait analogue à celle de (dd). □

4.6 RÉFÉRENCES

[1] Peszat, S. SPDEs driven by a homogeneous Wiener process. *Stochastic Partial Differential Equations and Applications*; Trento, 2000; Da Prato, G., Tubaro, L., Eds.; Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 227; Dekker: New York, 2001; 417-427.

[2] Peszat, S. The Cauchy Problem for a Non Linear Stochastic Wave Equation in any Dimension. J. Evol. Equ. **2002**, *2*, 383-394.

[3] Chow, P.-L. Stochastic Wave Equations with Polynomial Nonlinearity. Ann. Appl. Probab. **2002**, *12* (1), 361-381.

[4] Ondreját, M. Existence of global mild and strong solutions to stochastic hyperbolic evolution equations driven by a spatially homogeneous Wiener process. *in press.*

[5] Reed, M. *Abstract Non Linear Wave Equations*; Lecture Notes in Mathematics 507; Springer-Verlag: Berlin-New York, 1976.

[6] Dozzi, M.; Maslowski, B. Non-explosion of solutions to stochastic reaction-diffusion equations. Z. Angew. Math. Mech. **2002**, *82*, 745-751.

[7] Brzeźniak, Z.; Maslowski, B.; Seidler, J. Stochastic Nonlinear Beam Equations. *in press.*

[8] Gątarek, D.; Goldys, B. On weak solutions of stochastic equations in Hilbert spaces. Stochastics Stochastics Reports **1994**, *46*, 41-51.

[9] Da Prato, G.; Zabczyk, J. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*; Encyclopedia of Mathematics and its Applications 44; Cambridge University Press: Cambridge, 1992.

[10] Lunardi, A. *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*; Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 16; Birkhäuser Verlag: Basel, 1995.

[11] Henry, D. *Geometric theory of semilinear parabolic equations*; Lecture Notes in Mathematics 840; Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg-New York, 1981.
[12] Peszat, S.; Zabczyk, J. Non Linear Stochastic Wave and Heat Equations. Probability Theory Related Fields **2000**, *116* (3), 421-443.
[13] Peszat, S.; Zabczyk, J. Stochastic evolution equations with a spatially homogeneous Wiener process. Stochastic Processes and Applications **1997**, *72* (2), 187-204.
[14] Pazy, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*; Applied Mathematical Sciences, 44; Springer-Verlag: New York, 1983.
[15] Evans, L. C. *Partial Differential Equations*; Graduate Studies in Mathematics, 19; AMS: Providence, RI, 1998.
[16] Kato, T. Fractional Powers of Dissipative Operators II. J. Math. Soc. Japan **1962**, *14*, 242-248.
[17] Triebel, H. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential operators*; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften: Berlin, 1978.
[18] Nomizu, K. *Fundamentals of Linear Algebra*; McGraw-Hill: New York, 1966.
[19] Cohn, D. L. *Measure theory*; Birkhäuser: Boston, 1980.
[20] Ondreját, M. Uniqueness for stochastic evolution equations in Banach spaces. *in press.*
[21] Chojnowska-Michalik, A. Stochastic differential equations in Hilbert spaces. *Probability Theory*; Papers, VIIth Semester, Stefan Banach Internat. Math. Center, Warsaw, 1976; Banach Center Publications; PWN: Warsaw, 1979, Vol. 5, 53-74.
[22] Ondreját, M. Brownian representations of cylindrical local martingales, martingale problem and strong Markov property of weak solutions of SPDEs in Banach spaces. *in press.*

Monsieur **ONDREJAT Martin**

DOCTORAT de l'UNIVERSITE HENRI POINCARE, NANCY 1

en MATHEMATIQUES

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER n° 829

Nancy, le 3 juillet 2003

Le Président de l'Université

UNIVERSITE HENRI POINCARÉ, NANCY 1 ★ LE PRESIDENT

Cl. BURLET

Université Henri Poincaré, Nancy I
24-30 rue Lionnois - B.P. 3069 - 54013 NANCY Cédex
Tél. : 03 83 68 20 00 - Fax : 03 83 68 21 00

Résumé : Ce travail comporte quatre chapitres sur les équations d'évolution semilinéaires stochastiques (EDPS) dans des espaces de Banach. Le premier chapitre traite des diverses notions d'unicité et d'existence (telles que l'unicité trajectorielle, l'unicité en loi, l'existence forte et faible) et des relations entre elles. Nous construisons d'une manière différente l'intégrale stochastique dans des espaces de Banach, et nous démontrons l'inégalité de Burkholder, le théorème de Fubini, le théorème de Chojnowska-Michalik et le théorème de Girsanov. Nous démontrons aussi des théorèmes de conservation de loi pour des intégrales de Bochner, des intégrales stochastiques et des sélecteurs mesurables. Le deuxième chapitre traite des représentations browniennes de martingales locales cylindriques banachiques et du problème de martingale en dimension infinie. Nous utilisons ces résultats pour démontrer le rôle de la notion de « bien-posé » et le fait que l'existence faible et l'unicité en loi de l'équation en question entraînent la propriété de Markov forte des solutions. Le troisième et le quatrième chapitre concernent des EDPS hyperboliques de second ordre par rapport à un processus de Wiener spatialement homogène. Plus précisément, nous donnons des conditions suffisantes sur les coefficients entraînant l'existence globale des solutions fortes et faibles, et nous démontrons que les solutions se propagent à vitesse finie.

Mots-clés : Équations aux dérivées partielles stochastiques, unicité abstraite, représentations browniennes, propriété de Markov forte, équations aux dérivées partielles stochastiques hyperboliques, processus de Wiener spatialement homogène.

Abstract: This work consists of four chapters on some aspects of stochastic semilinear evolution equations (SPDE) in Banach spaces. The first chapter deals with different notions of uniqueness and existence (such as pathwise uniqueness, uniqueness in law, strong and weak existence) and the relations between them. We present an alternative construction of the stochastic integral in Banach spaces and we prove Burkholder's inequality, Fubini's theorem, the Chojnowska-Michalik theorem and Girsanov's theorem. We prove distribution preserving theorems for Bochner integrals, stochastic integrals and measurable selectors as well. The second chapter regards the Brownian representations of local cylindrical martingales in Banach spaces and the martingale problem in infinite dimensions. We use these results for illustrating the role of the notion "well-posedness" and for showing that weak existence and uniqueness in law for the equation in question imply the strong Markov property of the solutions. The third and the fourth chapter treats second order hyperbolic SPDE's driven by a spatially homogeneous Wiener process. We present sufficient conditions on the coefficients for the equation to have global strong and weak solutions, and we prove that the solutions propagate at finite speed.

Key Words: Stochastic partial differential equations, abstract uniqueness, Brownian representations, strong Markov property, stochastic hyperbolic partial differential equations, spatially homogeneous Wiener process.

Abstrakt: Tato práce se skládá ze čtyř kapitol týkajících se několika aspektů stochastických semilineárních evolučních rovnic (SPDR) v Banachových prostorech. V první kapitole se zabýváme různými typy jednoznačností a existencí (např. jednoznačností po trajektoriích, slabou jednoznačností, silnou a slabou existencí) a vztahů mezi nimi. Konstruujeme alternativním způsobem stochastický integrál v Banachových prostorech a dokazujeme Burkholderovu nerovnost, Fubiniho větu, větu Chojnowské-Michalikové a Girsanovovu větu. Dále se zabýváme větami o zachování rozdělení pro Bochnerovy integrály, stochastické integrály a měřitelné selektory. Druhá kapitola se týká brownovských reprezentací lokálních cylindrických martingalů v Banachových prostorech a martingalového problému v nekonečné dimenzi. Výsledky nám umožňují ilustrovat roli pojmu „well-posedness", a také na základě nich dokazujeme, že slabá existence a slabá jednoznačnost SPDR implikuje markovskou vlastnost řešení. Třetí a čtvrtá kapitola je věnována hyperbolickým SPDR druhého řádu s perturbací prostorově stejnorodým Wienerovým procesem. Nacházíme obecné postačující podmínky na koeficienty rovnice pro existenci globálních silných a slabých řešení a dokazujeme, že řešení se šíří konečnou rychlostí.

Klíčová slova: Stochastické parciální diferenciální rovnice, abstraktní jednoznačnost, brownovské reprezentace, silná markovská vlastnost, stochastické hyperbolické parciální diferenciální rovnice, prostorově stejnorodý Wienerův proces.

2000 Mathematics Subject Classification: 60H15.