AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

Formes presque déployées des groupes de Kac-Moody sur des corps quelconques

S.C.D. - U.H.P.
NANCY 1
SCIENCES
BIBLIOTHÈQUE

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 9 septembre 1999 à 14h
Salle de conférences – Institut Élie Cartan Nancy

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré – Nancy I

(Spécialité Mathématiques pures)

par

Bertrand RÉMY

Composition du jury

Président :	Jean-Louis CLERC	Professeur à l'Université Henri Poincaré - Nancy I
Rapporteurs :	Jean-Yves HÉE	Professeur à l'Université de Picardie (Amiens)
	Peter ABRAMENKO	Professeur à l'Université de Bielefeld (Allemagne)
Examinateurs :	Marc BOURDON	Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré Nancy I
	Guy ROUSSEAU	Professeur à l'Université Henri-Poincaré Nancy I (Directeur de thèse)

Institut Élie Cartan Nancy

Il s'agit de se prêter au jeu traditionnel des remerciements. J'ai un peu tardé à le faire pour une raison simple: ce que je vais écrire est complètement sincère et l'idée d'un oubli ou d'une maladresse m'a longtemps arrêté.

Cette thèse de doctorat a été conduite sous la direction de Guy ROUSSEAU. Je tiens tout d'abord à le remercier pour sa compétence, sa patience et sa tolérance à l'égard de mes maladresses, tout au long de l'éboration de ce travail. Je voudrais surtout dire que le problème dont il est question a été résolu par lui en caractéristique 0. Je suis encore étonné de l'abnégation dont il a fait preuve en confiant ce sujet à un de ses étudiants en thèse.

Je suis très honoré que Jean-Louis CLERC – notre chef d'équipe – ait accepté de présider mon jury. C'est l'occasion de dire combien je suis heureux de travailler au sein de l'équipe d'Analyse Harmonique. Il y règne une atmosphère appréciable de tolérance alors que les intérêts scientifiques y sont si variés. Merci en particulier à Nicole BARDY, Pierre-Yves GAILLARD, Dominique MANCHON pour leur cours de DEA ou leur attention à mon travail.

Être rapporteur est j'imagine une tâche difficile, surtout quand on fait preuve du sérieux de Peter ABRAMENKO et Jean-Yves HÉE. Au premier, je dois une visite stimulante au Sonderforschungsbereich 343 (Bielefeld); au second, une série de commentaires fructueux qui j'espère ne s'arrêtera pas là.

Je suis redevable envers beaucoup de mathématiciens de l'opportunité d'exposer mes travaux, d'un soutien bienveillant et bien sûr de conversations mathématiques enrichissantes. Merci à Herbert ABELS, Jean-Philippe ANKER, Marc BURGER, Frédéric HAGLUND, Hendryk VAN MALDEGHEM, Shahar MOZES, Thomas MÜLLER, Pierre PANSU, Frédéric PAULIN... c'est probablement ici que je commets le plus d'oublis.

Marc BOURDON et Emmanuel PEDON sont des amis: tout est dit.

Il va être question d'immeubles. J'ai plaisir à me rappeler que je dois à Jean-Marie DIDRY d'avoir très tôt aimé faire opérer des groupes sur des géométries.

Enfin, je n'oublie pas les personnes grâce à qui le travail au laboratoire est agréable ou tout simplement possible. Je pense à Mmes Patricia GEORGES et Chantal LECOMTE pour le secrétariat, à Mmes Raymonde MICHEL, Nathalie PIÉRACHE et Isabelle ZGANIC pour la bibliothèque, et à Didier GEMMERLÉ pour son secours quand l'informatique censée nous simplifier la vie nous la complique si affreusement.

Présentation Générale. Historique

Nous allons présenter les grandes idées et théories qui vont intervenir dans ce travail. Les objets dont il sera question proviennent souvent de généralisations de situations classiques (algébriques, de dimension finie, ...). Pour chacune de ces notions, on choisit le point de vue sur lequel s'est appuyée la généralisation. Il n'est pas en général le premier considéré chronologiquement, c'est la raison pour laquelle le terme «historique» dans le titre est un peu abusif.

Théorie de Kac-Moody

Précisons d'abord que pour ce qui est de la théorie de Kac-Moody, notre propos sera centré sur les groupes. La théorie des algèbres de Lie du même nom connaît des développements spectaculaires et des applications très diverses, mais ici elle interviendra toujours comme un instrument d'étude.

Il arrive qu'à force de travailler sur un objet défini par des propriétés intrinsèques, on finisse par le dévisser complètement. C'est d'une certaine façon ce qui est arrivé aux algèbres de Lie et groupes algébriques semi-simples déployés, dans le sens où l'on connaît depuis les années 60 une présentation de chacune de ces deux structures. Un théorème de Steinberg définit par générateurs et relations les groupes algébriques semi-simples déployés simplement connexes, alors qu'un théorème de Serre fait la même chose pour les algèbres de Lie semi-simples déployées. En outre, on classifie algèbres de Lie et groupes semi-simples déployés (à isogénie près pour les groupes), par un même type de matrice entière caractérisé par une série d'axiomes bien identifiés: les matrices de Cartan. Rétrospectivement, c'est-à-dire sans aucun scrupule chronologique, on peut voir ces deux théorèmes et la classification comme les points sur lesquels les généralisations s'articulent. Les algèbres de Lie et groupes de Kac-Moody sont des généralisations en dimension infinie des algèbres de Lie et groupes dont on vient de parler. Ils sont aujourd'hui définis par une présentation qui imite les cas classiques, à ceci près qu'on assouplit certains axiomes des matrices de Cartan, pour considérer la classe des matrices de Cartan généralisées. Cette classe est, de beaucoup, plus large que la classe précédente des matrices de Cartan (qui se caractérisent parmi elles comme matrices de Cartan généralisées de type fini).

Les algèbres de Kac-Moody ont été construites au même moment par V. Kac et R. Moody vers 1968. Les motivations du premier auteur sont expliquées dans l'introduction de son livre ([Kac90]), mais elles sont aujourd'hui largement dépassées par les applications de cette théorie. Le second auteur cite les domaines où ces algèbres de Lie se sont révélées utiles ([Moo-Pia95], introduction p.xi), notamment les équations différentielles, les formes modulaires et les groupes finis (travaux sur le Monstre et la conjecture de moonshine, par R. Borcherds), la combinatoire, la théorie des singularités, la physique mathématique ...

Comme annoncé, les groupes de Kac-Moody sont maintenant définis par analogie avec le théorème de présentation de Steinberg. Cette construction est due à J. Tits, dans un article

qui jette aussi les bases des combinatoires adaptées à leur étude ([Tit87]). La difficulté de ce type de construction est de montrer que la présentation considérée ne s'effondre pas, *i.e.*, qu'on ne définit pas le groupe trivial. Pour montrer cela, on fait classiquement opérer le groupe sur un espace approprié, et c'est là qu'apparaissent les immeubles dont on reparlera plus loin. La construction de J. Tits fournit non seulement des groupes en retournant le théorème de Steinberg, mais aussi propose un contexte axiomatique fonctoriel qui généralise une autre approche des groupes algébriques, celle des schémas en groupes. La théorie de Chevalley-Demazure n'est pas complètement reprise dans le sens où l'on ne dispose pas de structures algébro-géométriques de dimension infinie. Cependant, il est montré dans [Tit87] que les foncteurs-groupes définis par générateurs et relations répondent au moins sur la « catégorie » des corps au problème axiomatique fonctoriel suggéré par la généralisation des résultats d'existence et unicité des schémas de Chevalley-Demazure.

On ne peut terminer une présentation des groupes de Kac-Moody sans rendre compte de deux séries de travaux importants. Tout d'abord, avant la définition de J. Tits, V. Kac et D. Peterson avaient porté très loin l'étude des groupes de Kac-Moody en caractéristique 0. Ces groupes sont définis essentiellement comme groupes d'automorphismes des algèbres de Kac-Moody. Parmi les résultats frappants, on peut citer la mise en évidence de la combinatoire de systèmes de Tits, de plusieurs structures algébro-géométriques, l'étude des variétés de Schubert généralisées ... Par ailleurs, O. Mathieu ([Mat88]) a défini un ind-schéma en groupes à partir d'une étude très fine en caractéristique p de variétés de Schubert associées à une matrice de Cartan généralisée. Il obtient une très belle généralisation de la formule des caractères classique (prouvée déjà par V. Kac dans le cas symétrisable). Pourtant, relier ce groupe aux combinatoires qu'on peut légitimement attendre des groupes de Kac-Moody semble un problème difficile.

Immeubles

Venons-en maintenant aux espaces qu'on a déjà évoqués pour la preuve du non effondrement des groupes de Kac-Moody. Il s'agit des immeubles, dont le champ d'application est beaucoup plus vaste que ce qu'on vient de dire laisse supposer. Une façon d'introduire la notion d'immeuble consiste à faire la même observation que le géomètre G.D. Mostow: « (...), Jacques Tits has succeeded in carrying out the Erlangen program in reverse. » ([Mos73], p.120). Et en effet, une certaine continuité peut être mise en évidence par exemple entre le livre d'Emil Artin *Geometric algebra* ([Art57]) et la théorie des immeubles, sous l'égide du programme de Felix Klein. On peut d'ailleurs aussi bien voir un immeuble comme l'espace qui permet de définir un groupe en passant au groupe d'automorphismes, que comme l'espace associé à un groupe donné (possédant une combinatoire remarquable sur laquelle on reviendra) pour le dévisser. On insiste souvent sur la seconde possibilité parce que les deux familles célèbres d'immeubles la privilégient. Il ne faut pourtant pas oublier que les immeubles étaient conçus au départ comme le cadre géométrique qui permettrait de définir de manière unifiée les groupes de Lie simples, et leurs analogues sur les corps quelconques. Entre temps, Cl. Chevalley construisit les groupes et les schémas en groupes qui portent son nom et réalisent l'unification cherchée ([Che55] et [Che61]).

Retenons donc la préoccupation géométrique à l'origine des immeubles, qui explique l'ambiguïté permanente entre les immeubles – qu'on définit comme des structures combinatoires — et leurs

réalisations géométriques. Nous allons à présent décrire les applications marquantes des deux classes les plus populaires des immeubles, en supposant une certaine familiarité avec le vocabulaire de ces structures.

Les immeubles sphériques, *i.e.*, à groupe de Weyl fini, sont trop souvent relégués à un rôle rétrospectif. Ce sont à quelques exceptions près les immeubles associés aux groupes algébriques semi-simples isotropes. Les immeubles sphériques sont connus pour leur classification, qui contient celle des groupes précités. On sait aussi qu'ils admettent une réalisation sphérique dont la topologie permet de réinterpréter la remarquable représentation de Steinberg ([Cur-Leh-Tit80]). Cela dit, les immeubles sphériques ont permis une vaste généralisation du théorème de la géométrie projective. Formulée comme un résultat de dévissage des morphismes d'immeubles, cette généralisation intervient dans la preuve de très beaux résultats de rigidité, comme celle des espaces localement symétriques prouvée par G.D. Mostow ([Mos73]), avant même la parution en ouvrage de la classification des immeubles sphériques. Toutes ces applications sont déjà citées dans l'intervention de J. Tits au Congrès international des mathématiciens de Vancouver ([Tit74a]). Enfin, dans une perspective de révision de la classification des groupes finis simples, il existe une école qui cherche à attacher à chacun de ces groupes une géométrie de type immeuble.

L'utilité des immeubles affines (encore appelés euclidiens) est peut-être plus reconnue. On les présente souvent commme les analogues $\mathfrak{p}$-adiques des espaces symétriques riemanniens non compacts. En ce sens, il justifient pleinement le rôle de retournement d'Erlangen qu'on attribue à la théorie des immeubles. Plusieurs points justifient cela. Il y a tout d'abord le travail de F. Bruhat et J. Tits concernant les groupes réductifs sur les corps locaux: la théorie de Bruhat-Tits développée sur plusieurs articles épais et denses ([Bru-Tit72] et [Bru-Tit84] notamment). Les résultats de cette théorie sont des analogues frappants de la théorie classique des groupes de Lie semi-simples. Par exemple, la détermination des classes de conjugaison des sous-groupes compacts maximaux est effectuée, et des décompositions de Cartan et d'Iwasawa sont mises en évidence. Les méthodes utilisées font intervenir de manière cruciale les immeubles affines en question, et généralisent même des arguments classiques, notamment en matière de courbure négative pour laquelle est proposée un analogue purement métrique. Ainsi le lemme de point fixe de Bruhat-Tits peut-il être utilisé sur un espace symétrique riemannien archimédien pour prouver la conjugaison des sous-groupes compacts maximaux du groupe de Lie associé. Au passage, on retrouve la dichotomie entre le rang supérieur qui entre dans le cadre de la courbure négative ou nulle, et le rang 1 (espaces hyperboliques et arbres homogènes ou semi-homogènes) qui sont à courbure strictement négative. Un autre argument en faveur de l'analogie est par exemple le résultat de B. Kleiner et B. Leeb qui montre la rigidité de Pansu des quasi-isométries ([Kle-Lee97]), partagée par les espaces symétriques et les immeubles affines en rang supérieur.

On peut légèrement nuancer la présentation des immeubles affines comme espaces symétriques $\mathfrak{p}$-adiques par deux remarques. Tout d'abord, des immeubles affines existent sans être des immeubles de Bruhat-Tits, c'est-à-dire associés à un groupe réductif sur un corps local. C'est le cas en dimension 2 par exemple, où il existe une profusion d'immeubles triangulaires qui n'admettent pas de groupe d'automorphismes assez gros pour être de Bruhat-Tits. Ces espaces ont malgré cela une géométrie riche (existence d'un bord qui permet la classification en rang supérieur) et admettent des actions discrètes intéressantes. Il existe par exemple un critère géométrique pour discuter la propriété (T) de Kazhdan pour un groupe discret cocompact d'isométries d'immeubles triangulaires non nécessairement Bruhat-Tits ([Pan98]). L'autre argument est qu'il existe dans certains cas d'autres espaces susceptibles d'être les analogues des

espaces symétriques $\mathfrak{p}$-adiques. D'ailleurs, P. Schneider et U. Stuhler écrivent ([Sch-Stu97], introduction p.97): «The Bruhat-Tits building X of a connected reductive group G over a nonarchimedian local field K is a rather intringuing G-space. (...) One might consider X not quite as a full analogue of a real symmetric space but as a kind of skeleton of such an analogue.» P. Schneider et U. Stuhler font partie des spécialistes d'une autre variété d'espaces symétriques $\mathfrak{p}$-adiques («espaces symétriques de Drinfeld» , voir [Bou-Car91], première partie, pour le cas de GL_2). Actuellement, ces espaces existent pour les groupes classiques. L'immeuble du groupe en question intervient malgré tout dans la combinatoire du recollement qui les définit. Je ne suis pas en mesure d'en dire davantage sur ce point, si ce n'est qu'il semble se dessiner un partage des rôles, qui n'a pas lieu dans le cas archimédien.

Combinatoire des groupes abstraits

La combinatoire des groupes abstraits est un volet indispensable au développement de techniques immobilières pour étudier certains groupes, en particulier les groupes algébriques semi-simples sur les corps quelconques (immeubles de Tits, sphériques) et les corps locaux (immeubles de Bruhat-Tits, euclidiens). La démarche se présente de la façon suivante. La construction de l'immeuble convenable passe par la mise en évidence dans le groupe étudié d'une structure combinatoire particulière appelée système de Tits. En fait, dans les cas précités et dans le cas Kac-Moody qui va nous intéresser, on s'empresse de définir un raffinement plus ou moins poussé et ajusté à la situation précise dans laquelle on s'est placé. Précisément, pour les groupes algébriques réductifs isotropes sur un corps quelconque, on a intérêt à considérer la structure de donnée radicielle génératrice ([Bru-Tit72], section (6.1)), et pour les corps locaux, le raffinement utile est celui des données radicielles valuées ([Bru-Tit72], section (6.2)) ou celui des systèmes de Tits affines ([Bru-Tit72], chapitre 2).

Quoi qu'il en soit, l'avantage qu'on trouve à travailler sur des combinatoires abstraites est qu'elles couvrent des situations très générales, et permettent des raisonnements uniformes. Prenons le cas des données radicielles valuées des groupes réductifs sur les corps locaux. Cette situation de théorie des groupes abstraits est le cadre naturel pour prouver les décompositions d'Iwasawa et de Cartan qu'on a déjà évoquées. Mais surtout, c'est dès ce contexte combinatoire qu'on a un dictionnaire entre les combinatoires de groupes et les immeubles vus comme complexes simpliciaux ou systèmes de chambres. Cela permet de jouer ensuite sur la réalisation géométrique de l'immeuble abstrait, en fonction des questions auxquelles on veut répondre. Par exemple, si on regarde un groupe réductif et si on veut connaître la situation précise de ses tores, on a intérêt à définir une réalisation géométrique élargie par rapport au cas des groupes semi-simples. Les modifications auxquelles il faut procéder n'auront lieu qu'au niveau du recollement par lequel la plupart du temps on définit la réalisation géométrique d'un immeuble.

Pour ce qui est de la théorie de Kac-Moody, un certain nombre de raffinements adaptés aux propriétés de ces groupes ont été proposés. Tout d'abord, ces groupes possèdent bien une combinatoire de systèmes de Tits, et cette combinatoire se singularise essentiellement par quelques points qu'on aura l'occasion de préciser. Par exemple, leur étude est à l'origine de la notion de système de Tits jumelé, parce qu'on a coexistence de deux BN-paires qui ne se déduisent pas l'une de l'autre par automorphisme intérieur s'il s'agit de «vrais» groupes de

Kac-Moody (associés à des matrices de Cartan généralisées non de type fini). En vertu du dictionnaire classique entre immeubles et BN-paires, on travaille donc sur deux exemplaires d'un même immeuble, reliés par une relation d'opposition qui s'interprète elle aussi en termes de combinatoire dans le groupe. Un autre façon de voir l'opposition entre deux immeubles d'un groupe de Kac-Moody consiste à introduire un jumelage (ou une codistance) entre ces immeubles. Un second point marquant concernant la combinatoire des groupes de Kac-Moody est qu'il font apparaître des groupes de Weyl infinis. La présence d'un jumelage dans ces groupes est d'ailleurs souvent interprétée comme palliatif à la non-finitude des groupes de Weyl (isomorphes) des deux BN-paires jumelées. Une autre conséquence du fait que les groupes de Weyl sont infinis est le fait qu'on aura besoin de plusieurs réalisations géométriques pour un même immeuble de jumelage de Kac-Moody, l'une rendant des services métriques, l'autre permettant des raisonnements de convexité.

Descente dans les immeubles

On peut encore citer un avantage à manipuler le plus possible des combinatoires abstraites de groupes. Pour cela, il faut parler des problèmes de descente, qui constituent la principale question de ce travail. Convenons d'appeler *descente* en théorie des groupes la mise en évidence d'une permanence de structure combinatoire en passant aux points rationnels d'une $\mathbf{K}$-forme. On vient de dire que pour la théorie des groupes algébriques réductifs ou des groupes réductifs sur les corps locaux, il existait des raffinements poussés de la structure de BN-paire. Ceci permet de formuler de manière concise un des principaux résultats de la théorie de Borel-Tits et de la théorie de Bruhat-Tits respectivement. Soit G un groupe algébrique réductif connexe défini sur un corps $\mathbf{K}$, de groupe dérivé $\mathbf{K}$-isotrope et de tore $\mathbf{K}$-déployé maximal S. Alors, la théorie de Borel-Tits affirme que les (points rationnels des) groupes radiciels relatifs à S et le(s) (points rationnels du) centralisateur de S forment une combinatoire de donnnée radicielle génératrice pour (les points rationnels de) G. De façon similaire, on peut résumer un des principaux résultats de la théorie de Bruhat-Tits en termes de valuations de données radicielles génératrices, mais les hypothèses – sur les extensions de corps notamment – sont beaucoup plus techniques (voir [Bru-Tit84], introduction p.9). C'est surtout pour cette dernière théorie qu'il est important de faire intervenir un espace géométrique tel que l'immeuble associé.

La philosophie générale de ce genre de travail est la suivante. On se met dans des conditions d'extension de corps suffisamment favorables pour que l'action galoisienne sur le groupe déployé (ou quasi-déployé) rende bien compte des problèmes de rationalité. Ici interviennent éventuellement des questions de séparabilité, de ramification etc... Ensuite, on en déduit une action compatible sur l'immeuble. Il s'agit alors de mettre en évidence une structure combinatoire sur le groupe des points rationnels en le faisant opérer sur le lieu des points Galois-fixes de l'immeuble, en montrant que ce lieu de points fixes est encore un immeuble, précisément l'immeuble de la combinatoire des points rationnels. En somme, un résultat combinatoire et un résultat géométrique s'épaulent et sont prouvés conjointement. Ce résumé non mathématique est en quelque sorte le modèle sur lequel on veut étudier les $\mathbf{K}$-formes des groupes de Kac-Moody.

Arguments pour la théorie de Kac-Moody générale

Finissons cette présentation en justifiant la raison pour laquelle il est utile de considérer les groupes de Kac-Moody dans toute leur généralité, et pas seulement la sous-classe des groupes affines. Ces derniers groupes sont plus familiers parce qu'ils admettent une interprétation matricielle, et parce que la théorie de Bruhat-Tits suggère les résultats. Cela dit, comme le remarque J. Tits, la théorie de Kac-Moody générale est le contexte dans lequel on doit étudier les variétés de Schubert ([Tit88]). C'est une justification renforcée par les travaux d'O. Mathieu ([Mat88]) qui a levé toute restriction sur le type de matrice de Cartan généralisée pour laquelle la formule des caractères des algèbres de Kac-Moody est valide.

On va surtout s'intéresser à un autre aspect des groupes de Kac-Moody, qui est celui des specimens d'immeubles qu'ils permettent de produire. Considérons la théorie des groupes hyperboliques de M. Gromov comme un autre retournement du programme d'Erlangen, dans le sens où il identifie une classe de groupes auxquels on peut attacher un espace sur lequel le groupe va opérer de manière remarquable. Dans ce cas et contrairement aux théories déjà évoquées, il n'y a pas de combinatoire intermédiaire dans le groupe, la démarche est plus directement géométrique. Or, parmi les espaces hyperboliques au sens de M. Gromov, il est possible de définir des espaces métriques qui représentent géométriquement des immeubles, qu'on appelle logiquement immeubles hyperboliques. Ces immeubles ont la particularité d'apparaître comme recollement d'espaces hyperboliques. Un tel espace hyperbolique, ou plus exactement un pavage par un polyèdre de Poincaré, constitue le modèle des appartements. Ceci dissocie la dimension d'un tel immeuble (celle d'un appartement) de son rang (celui du groupe de pavage), d'après les belles propriétés de la géométrie hyperbolique.

Il existe, comme dans le cas des immeubles affines triangulaires, une profusion d'immeubles hyperboliques pour certaines conditions de dimension et de link fixées (voir [Gab-Pau98]). Cela ôte définitivement tout espoir de recouvrir cette classe d'espaces métriques par des constructions de type Kac-Moody. On proposera cependant à titre d'exemple à la fin de ce travail un résultat constructif, cas particulier d'une remarque faite parallélement à cette thèse. En outre, en dimension supérieure on peut espérer que les constructions de type Kac-Moody pour produire des immeubles hyperboliques sont moins lacunaires. À condition bien entendu de s'autoriser toutes les matrices de Cartan généralisées et pas seulement celles de type affine.

LE PROBLÈME, LES DIFFICULTÉS ET LES CHOIX

Passons maintenant aux questions posées, qu'on formule ainsi.

PROBLÈME. — *Soit $\overline{\mathbf{K}}/\mathbf{K}$ une extension de corps, avec $\overline{\mathbf{K}}$ algébriquement clos.*
Soit $\mathcal{D}$ une donnée radicielle de Kac-Moody, qui définit un groupe $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\overline{\mathbf{K}})$.

1. *Proposer une définition convenable des $\mathbf{K}$-formes du groupe de Kac-Moody déployé $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\overline{\mathbf{K}})$. Prendre notamment en compte la fonctorialité vérifiée par ces groupes.*
2. *Définir une classe de $\mathbf{K}$-formes qui se prête à une étude immobilière.*
3. *Prouver un théorème de descente galoisienne des $\mathbf{K}$-formes précédentes, en mettant en évidence sur le groupe des points rationnels la même combinatoire de* donnée radicielle jumelée *que pour les groupes déployés.*

Cet énoncé appelle quelques définitions qui se préciseront au cours de la description de la démarche effectuée. (Disons d'emblée que les données radicielles jumelées constituent la combinatoire la plus fine adaptée à l'étude des groupes de Kac-Moody.) Cette description se fait dans le sens inverse de la rédaction qui est proposée ici, c'est-à-dire en commençant par présenter ce qu'il était naturel de vouloir faire pour l'étude des $\mathbf{K}$-formes, les difficultés rencontrées, enfin les solutions choisies à chaque fois. Les choix étant faits, il a fallu passer par une longue étude préliminaire des groupes déployés avant d'attaquer le problème des groupes tordus. Cette étude préliminaire occupe en fait la majeure partie de ce travail.

Absence de structure algébro-géométrique. Représentation adjointe

Revenons à présent aux $\mathbf{K}$-formes. L'approche qu'on est immédiatement tenté d'adopter est d'imiter la théorie de Borel-Tits pour les groupes de Kac-Moody qui «sont» des groupes réductifs de dimension infinie. Le problème immédiat est que dans le cas Kac-Moody, on ne dispose pas d'une structure algébro-géométrique – autrement dit d'une algèbre de fonctions régulières – sur laquelle faire porter les hypothèses de rationalité. C'est d'emblée une différence profonde. Le palliatif à ce manque est la mise en place et l'utilisation d'une représentation naturelle d'un groupe de Kac-Moody, qu'on appelle adjointe car elle généralise la représentation du même nom en dimension infinie. Cette représentation est étudiée au chapitre 9, sa propriété essentielle est sa fonctorialité compatible à la fonctorialité des groupes de Kac-Moody. L'usage d'une telle représentation n'est rétrospectivement pas surprenante, puisque c'est de cette façon que les schémas de Chevalley adjoints sont munis d'une structure algébro-géométrique.

Définition non intrinsèque de certains sous-groupes remarquables

Le second problème est celui de se mettre dans les conditions d'une étude des $\mathbf{K}$-formes grâce à la géométrie des immeubles du jumelage associé. On sait que les ensembles sous-jacents à ces immeubles sont les quotients G/B_+ et G/B_-. B_+ et B_- sont les sous-groupes de Borel standard du groupe de Kac-Moody, ils sont définis au moyen des générateurs et relations de G, et les sous-groupes de Borel généraux ne sont rien d'autre par définition que leurs conjugués.

Pour obtenir des actions galoisiennes convenables, il faut s'assurer qu'elles vont bien respecter la classe des sous-groupes de Borel, qui est définie par conjugaison, donc non intrinséquement. La solution proposée pour cette difficulté est de passer par les sous-groupes de Cartan définis comme sous-groupes d'image diagonalisable par la représentation adjointe, et maximaux pour cette propriété. Cette définition est plus propre à assurer la stabilité sous Galois de la classe de sous-groupes qu'elle définit, il reste ensuite à utiliser le théorème de conjugaison des bases de la théorie de Kac-Moody. Les sous-groupes de Cartan sont étudiés à la fin du chapitre 10.

Courbure négative et classes de sous-groupes algébriques

Pour ce faire, on met en place un raisonnement qui sera réutilisé dans la descente. Il consiste à faire usage du théorème de point fixe de Bruhat-Tits dans chacun des deux immeubles du jumelage, et à enchaîner un raisonnement de groupes algébriques ensuite. L'usage de la courbure négative au sens métrique est rendu possible par une réalisation métrique remarquable, construite par M. Davis et G. Moussong. Ces considérations sont exposées au chapitre 4. Pour faire intervenir la théorie des groupes algébriques, on doit travailler encore un peu. À proprement parler, les sous-groupes du groupe de Kac-Moody ne jouissent pas d'une structure de groupe algébrique, mais on leur attache un morphisme de groupes abstraits par restriction de la représentation adjointe. On peut d'ailleurs voir cette flèche comme une représentation adjointe. Son intérêt est que son image est un groupe algébrique, et qu'elle quotiente peu. Un point crucial pour la mise en place de ces flèches est la décomposition de Lévi vérifiée par les groupes considérés, et qui est prouvée géométriquement au chapitre 6.

Hypothèses galoisiennes

Il reste à préciser les hypothèses galoisiennes. Travailler sur les immeubles sous-entend que l'on raisonne sur des actions de groupes de Galois. Il s'agit donc de s'assurer que cette action rend bien compte de la situation des extensions de corps. Cela implique qu'il faut considérer des extensions séparables. Dans la théorie classique, on a recours à deux théorèmes très forts qui s'enchaînent pour assurer le déploiement d'un groupe réductif sur une extension séparable finie de son corps de base. Un théorème de Grothendieck montre qu'un tore maximal défini sur le corps de base existe (sans hypothèse de réductivité d'ailleurs), et un théorème de Cartier montre que le déploiement d'un tore maximal dans un groupe réductif suffit au déploiement du groupe lui-même. En théorie de Kac-Moody, de tels résultats ne sont pas disponibles. On doit donc faire l'hypothèse de déploiement sur la clôture séparable du corps de définition de la forme. Par le raisonnement du paragraphe précédent, on se ramène au théorème de Grothendieck pour mettre en place un appartement stable sous Galois, ce qui permet de faire les raisonnements géométriques du chapitre 12.

Hypothèses techniques et **K***-formes presque déployées*

La définition et l'étude des **K**-formes des groupes de Kac-Moody font l'objet de tout le chapitre 11. Dans cette partie, apparaissent de nombreuses hypothèses techniques qui permettent d'étudier les actions galoisiennes correspondantes. On a qualifié les deux premières séries de conditions de préalgébricité et d'algébricité. La distinction est purement formelle, parce qu'on a besoin de dérouler un certain nombre de propriétés des formes préalgébriques avant de formuler la condition d'algébricité. Un certain nombre de ces conditions est superflu dans des cas favorables bien connus de la théorie des algèbres de Kac-Moody, celui d'une base de racines

libre par exemple. Il reste une autre hypothèse à faire, qui est celle de presque déploiement. La nécessité de cette hypothèse a été reconnue par G. Rousseau dans l'étude des formes de groupes de Kac-Moody en caractéristique 0. Elle requiert le respect des signes des classes de conjugaison des sous-groupes de Borel positifs et négatifs.

Le résultat

On peut maintenant formuler le résultat de descente, modulo une dernière préparation. On reparlera beaucoup des données radicielles jumelées (entières) dans la suite de ce travail puisqu'il s'agit du raffinement formalisé pour l'étude des groupes de Kac-Moody. Plutôt que de donner précisément les axiomes de cette combinatoire – détaillés aux sous-sections (1.5.1) et (6.2.5) – il est préférable pour l'instant de dire qu'il s'agit de l'analogue pour la situation Kac-Moody des données radicielles valuées de la théorie de Bruhat-Tits.

THÉORÈME. — *Soit G un $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody presque déployé, déployé sur la fermeture séparable $\mathbf{K}_s$ et de jumelage $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$. On note $G(\mathbf{K})$ le groupe des points rationnels correspondant et on se fixe une standardisation rationnelle $(\mathbf{A}_{\mathbf{K}}, F^\natural, -F^\natural)$. Alors, $\big(G(\mathbf{K}), (V_{a^\natural})_{a^\natural \in \Delta^{re}_{\mathbf{K}}}, Z(\mathbf{K})\big)$ est une donnée radicielle jumelée entière et le lieu de points fixes $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$ est une représentation géométrique du jumelage abstrait de cette combinatoire.*

Ce théorème figure à la sous-section (12.4.3) sous une première version, son volet géométrique – attendu en vertu de la philosophie générale des descentes dans les immeubles – est énoncé à la sous-section suivante (12.4.4). Tel quel, il s'agit du théorème (12.6.3), raffinement de (12.4.3) destiné à ressembler davantage à la théorie de Borel-Tits comme elle est exposée dans [Bru-Tit72], section (6.1). On illustrera au chapitre 13 ce résultat en fabriquant des arbres jumelés semi-homogènes dans des immeubles hyperboliques, au moyen d'une forme quasi-déployée sur un corps fini.

Courbure et convexité. Deux réalisations géométriques

Avant de passer au descriptif détaillé de ce travail suivant l'ordre du plan de rédaction, il est utile de faire une dernière remarque qui va permettre de parler un peu de la première partie. Deux notions géométriques de base jouent un rôle essentiel dans la manipulation des immeubles jumelés qui va suivre. Il s'agit de la courbure et de la convexité, mais contrairement à ce qui se passe dans la théorie de Bruhat-Tits, il n'existe pas, semble-t-il, de réalisation d'immeuble unique permettant l'exploitation de ces deux notions simultanément.

La courbure est l'ingrédient qui permet d'utiliser le lemme de point fixe de Bruhat-Tits ([Bru-Tit72], section (3.2)). Comme on l'a déjà dit, ce lemme est utilisé pour se ramener à des arguments de groupes algébriques. C'est surtout la possibilité de son utilisation qui est à discuter. Les arguments qui justifient cela relèvent de considérations métriques introduites par Alexandrov, et considérablement développées par M. Gromov. Au chapitre 4, on introduira très rapidement ce vocabulaire pour citer les principales applications de la réalisation métrique de Davis-Moussong d'un immeuble. Cette réalisation fait d'un immeuble un espace CAT(0), c'est-à-dire à courbure négative en un sens métrique proche de la propriété (CN) de [Bru-Tit72].

La convexité est une autre notion simple mais essentielle pour ce qui va suivre. Elle privilégie une autre réalisation géométrique des immeubles, élaborée à partir d'une autre réalisation géométrique du groupe de Weyl de l'immeuble, vu comme groupe de Coxeter. Un corollaire de

cette approche, qui suit l'exposé de Bourbaki et les travaux d'E. Vinberg, est la possibilité de faire des raisonnements de finitude locale à l'intérieur du double cône sur lequel sont modelés les appartements jumelés.

ORGANISATION DU TRAVAIL

Passons maintenant à un résumé des différentes sections de ce travail. Le découpage en deux parties distingue le travail sur des objets abstraits (tels que les combinatoires de groupes, les réalisations géométriques d'immeubles) des raisonnements de plus en plus algébriques concernant les groupes de Kac-Moody (groupes algébriques, extensions de corps...). L'intérêt de la première partie est la grande généralité dans laquelle on peut énoncer les résultats. Cela permet en quelque sorte de «boucler la boucle» au terme de la descente, en attribuant au groupe de points rationnels toutes les propriétés prouvées abstraitement.

Le chapitre 1 essaie de faire le point sur les différentes combinatoires envisageables sur les groupes de Kac-Moody, sans parler de ces groupes. La combinatoire la plus fine est celle des données radicielles jumelées, introduites par J. Tits. On montre qu'elle implique toutes les autres, notamment les BN-paires jumelées qui permettront de mettre en place les immeubles jumelés du groupe, et les systèmes de Tits raffinés qui fournissent de nombreuses décompositions avec écritures uniques. On peut comparer toutes ces combinatoires, mais une de ces comparaisons nécessite des considérations élaborées d'ensembles ordonnés qu'on repousse au chapitre 3.

Le chapitre 2 met en place tout le vocabulaire des immeubles. Il est maintenant classique que deux points de vue permettent de parler des immeubles, les systèmes d'appartements et les systèmes de chambres. On a besoin des deux pour parler des immeubles jumelés. La notion de jumelage permet de généraliser des raisonnements concernant les immeubles sphériques. La propriété de Moufang est un raffinement qui va aussi dans ce sens. On présentera ces deux points, ainsi que le dictionnaire qui permet de passer des immeubles abstraits aux combinatoires de groupes, et inversement.

Le chapitre 3 est purement technique. Il développe tout un vocabulaire autour des ensembles ordonnés et des amalgames de groupes, défini dans un un article de J. Tits. La terminologie est suggestive, puisqu'elle emprunte tout son lexique à la topologie algébrique. L'article de J. Tits en question a été écrit dans un contexte combinatoire moins fin que celui des données radicielles jumelées. Suivant une remarque de P. Abramenko, on a repris ces arguments d'ensembles ordonnés pour prouver des résultats plus forts, en prenant en compte cette combinatoire apparue ultérieurement.

Dans le chapitre 4, on présente les notions métriques qui permettent les raisonnements de courbure négative dans les immeubles. Le contenu de ce chapitre apparaît dans la thèse de G. Moussong et dans un article de M. Davis. Les notions clés sont les espaces métriques géodésiques, l'inégalité CAT(χ)... On met aussi en place un procédé général de recollement qui permet de définir diverses réalisations géométriques des immeubles, non nécessairement métriques.

Le chapitre 5 présente l'autre réalisation géométrique des immeubles dont on aura besoin, celle qui privilégie les raisonnements de convexité. Il faut pour cela revenir à la géométrie des groupes de Coxeter, introduite dans un chapitre de Bourbaki et développée par E. Vinberg.

On peut de cette façon construire la réalisation conique des immeubles et des jumelages. Cette réalisation permet de définir des parties privilégiées dans un jumelage, les parties équilibrées qui réapparaîtront dès la preuve du second type de décomposition de Lévi au chapitre suivant. On définit aussi des objets relatifs utiles à la descente.

Jusqu'à présent, les immeubles n'étaient pas supposés associés à des groupes. À partir du chapitre 6, le jumelage considéré sera par hypothèse associé à un groupe, rapidement supposé muni d'une donnée radicielle jumelée. Le but est de mettre en évidence des décompositions de Lévi pour deux classes de sous-groupes, précisément les sous-groupes paraboliques et les fixateurs de parties équilibrées. Les arguments de convexité et de projection jouent ici un rôle essentiel. On a besoin de deux hypothèses techniques clairement vérifiées par les groupes de Kac-Moody.

Le chapitre 7 présente non seulement les algèbres de Kac-Moody, mais aussi des objets à partir desquels on peut définir à la fois des algèbres de Lie et des foncteurs-groupes. On sait l'importance des considérations de poids et de graduations dans l'étude des algèbres de Kac-Moody. D'ailleurs, la construction classique de ces algèbres de Lie est menée de telle sorte que les termes de la graduation s'interprètent comme des poids sous l'action d'une sous-algèbre de Cartan. Les algèbres de Kac-Moody sont présentées ici dans un contexte qui permet de parler de degré sans poids. L'idée est que pour certains groupes de Kac-Moody, il apparaîtra une graduation abstraite dont la graduation par les poids sera un quotient beaucoup moins fin. On mettra aussi en place les $\mathbf{Z}$-formes considérées par J. Tits pour définir les foncteurs-groupes de Kac-Moody.

Dans le chapitre 8, on présente les groupes de Kac-Moody tels qu'ils sont définis dans l'article de J. Tits ([Tit87]), c'est-à-dire comme valeurs de foncteurs-groupes qu'on appellera foncteurs de Tits. On met en évidence la double filiation (Chevalley-Demazure et Steinberg) dont ils sont issus. Suivant le résultat principal de cet article, on peut considérer une version constructive (par générateurs et relations) des groupes de Kac-Moody sur les corps. On optera systématiquement pour le point de vue des foncteurs de Tits constructifs. Le résultat de départ pour la définition de ces foncteurs est un résultat d'intégralité de Chevalley, dont on fournira une preuve au moyen de la représentation adjointe au chapitre suivant. On vérifiera enfin que ces groupes vérifient toutes les combinatoires abstraites définies au premier chapitre, y compris les hypothèses techniques pour les décompositions de Lévi du chapitre 6.

Le chapitre 9 met en place la représentation adjointe des groupes de Kac-Moody, et contient la preuve de la fonctorialité de cette dernière. La preuve de l'existence de cette représentation est essentiellement l'enchaînement d'un calcul à la Steinberg et la reprise plus concrète d'un argument de calcul différentiel algébrique sur des $\mathbf{Z}$-schémas en groupes affines, qui figurait dans [Tit87]. On a déjà dit que cette représentation est utilisée comme palliatif à l'absence d'une structure algébro-géométrique globale sur un groupe de Kac-Moody. Ce chapitre se conclut sur une étude du noyau et de l'image de la représentation adjointe sur les corps.

Le chapitre 10 est le premier à faire apparaître des arguments de groupes algébriques. On commence par discuter ce qu'apporte la nature Kac-Moody du jumelage d'un tel groupe. Ensuite, on étudie des classes de sous-groupes de plus en plus particulières. D'abord, on adapte un argument de V. Kac et D. Peterson qui fournit une condition nécessaire et suffisante – lue sur la représentation adjointe – pour qu'un sous-groupe fixe un point sphérique de l'immeuble de chaque signe. C'est un premier lien entre les deux espaces sur lesquels on fait opérer le groupe

pour le dévisser. Ensuite, on met en évidence une classe de sous-groupes qui peuvent être vus comme des groupes algébriques, à quotient torique près et par restriction de la représentation adjointe. On montre enfin que les sous-groupes de Cartan peuvent être définis en termes de représentation adjointe, ce qui permettra de rectifier les automorphismes de Galois associés aux formes.

Dans le chapitre 11, on attaque finalement le problème des **K**-formes des groupes de Kac-Moody. Le point essentiel est de discerner les conditions à requérir, analogues des propriétés classiques des groupes algébriques. Ces conditions décrivent le comportement des formes vis-à-vis des automorphismes de Galois. On parle d'elles comme conditions de préalgébricité et d'algébricité. Cette dernière s'appuie sur une interprétation heuristique de l'extension des scalaires de la **Z**-forme de l'algèbre enveloppante, comme algèbre des distributions supportées à l'origine, si une structure algébro-géomértrique existait. Enfin, la condition de presque déploiement apparaît pour pouvoir définir des automorphismes galoisiens sur chacun des deux immeubles du jumelage. La dernière section de ce chapitre tend vers une application du lemme de Bruhat-Tits au groupe de Galois vu comme groupe d'isométries des immeubles, cruciale pour la descente.

Le chapitre 12 est la descente galoisienne proprement dite, effectuée au moyen des deux immeubles. La convexité est à nouveau un argument essentiel. On montre successivement l'existence de points fixes sous Galois dans les deux immeubles, d'un appartement jumelé Galois-stable, on prouve un théorème de conjugaison rationnelle, et on développe un vocabulaire des **K**-objets immobiliers. La terminologie ne fait que suggérer que le lieu des points Galois-fixes est un immeuble. Avant cela, il faut mettre petit à petit en évidence la structure de donnée radicielle jumelée sur le groupe des points rationnels, en passant par une combinatoire plus faible.

Dans le chapitre 13, on se consacre à la construction théorique de **K**-formes de groupes de Kac-Moody. Il apparaît qu'il est en fait plus réaliste de définir les formes par les actions de Galois qu'elles induisent. On étudie ensuite la classe des **K**-formes quasi-déployées pour lesquelles on prouve un analogue du théorème de Lang. Ce théorème affirme que les groupes de Kac-Moody presque déployés sur les corps finis sont automatiquement quasi-déployés. L'intérêt des formes quasi-déployées est qu'on peut les construire facilement, et c'est ce qu'on fait sur un groupe de Kac-Moody défini sur un corps fini et dont les immeubles sont hyperboliques. C'est l'occasion de construire des arbres jumelés semi-homogènes, et de présenter de beaux specimens d'immeubles hyperboliques dont les appartements sont isomorphes à un pavage du plan hyperbolique.

Première Partie

DONNÉES RADICIELLES JUMELÉES

1. Combinatoire des groupes

1.1. Axiomatique et propriétés des BN-paires
1.2. Combinatoire dissymétrique des BN-paires raffinées
1.3. BN-paires jumelées
1.4. Données B-radicielles
1.5. Données radicielles jumelées
1.6. Récapitulatif des comparaisons. Pathologies

2. Immeubles (jumelés) abstraits

2.1. Deux types de combinatoire
2.2. Complexes de Coxeter
2.3. Immeubles comme systèmes de chambres
2.4. Immeubles comme systèmes d'appartements
2.5. Raffinements de la notion d'immeuble
2.6. Automorphismes d'immeubles. Immeubles de groupes

3. Ensembles ordonnés et amalgames de groupes

3.1. Catégories d'ensembles ordonnés
3.2. Simple connexité
3.3. Domaines fondamentaux et amalgames
3.4. Immeubles du point de vue des ensembles ordonnés
3.5. Théorèmes d'amalgame et d'intersection pour les données radicielles jumelées

4. Courbure négative dans les immeubles généraux

4.1. Quelques notions métriques
4.2. Réalisations géométriques des immeubles
4.3. Réalisations métriques des immeubles
4.4. Courbure négative dans les immeubles minces
4.5. Courbure négative dans les immeubles
4.6. Théorème de point fixe de Bruhat-Tits

5. Géométrie conique des jumelages

5.1. Géométrie conique des groupes de Coxeter
5.2. Intérieur du cône de Tits. Finitude locale
5.3. Géométrie conique des jumelages
5.4. Convexité et parties équilibrées dans les jumelages
5.5. Objets immobiliers relatifs à un sous-espace générique

6. Décompositions de Lévi dans les données radicielles jumelées

6.1. Immeubles de groupes
6.2. Décomposition de Lévi des sous-groupes paraboliques
6.3. Fixateurs de deux facettes sphériques de signes opposés
6.4. Fixateurs de parties équilibrées

Seconde Partie

FONCTEURS DE TITS, GROUPES DE KAC-MOODY DÉPLOYÉS ET PRESQUE DÉPLOYÉS

7. Algèbres de type Kac-Moody

7.1. Données radicielles de Kac-Moody
7.2. Algèbres (graduées) triangulaires déployées
7.3. Algèbres de Kac-Moody
7.4. Automorphismes et $\mathbf{Z}$-formes

8. Foncteurs de Tits. Groupes de Kac-Moody

8.1. Prédécesseurs
8.2. Présentation axiomatique
8.3. Foncteur de Tits constructif
8.4. Combinatoire des groupes de Kac-Moody. Applications

9. Représentation adjointe des foncteurs de Tits

9.1. Ordres grignotants sur les parties nilpotentes. Complétions
9.2. Groupes de sommes formelles
9.3. Interprétation du résultat d'intégralité de Chevalley-Tits
9.4. Représentation du groupe $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{Z})$
9.5. Fonctorialité de la représentation adjointe
9.6. Noyau et image de la représentation adjointe sur les corps

10. Groupes de Kac-Moody déployés en caractéristique quelconque

10.1. Immeubles de Kac-Moody
10.2. Petits sous-groupes des groupes de Kac-Moody
10.3. Sous-groupes algébriques des groupes de Kac-Moody
10.4. Sous-groupes de Cartan et appartements jumelés

11. K-formes des foncteurs de Tits

11.1. Généralités sur les formes des groupes de Kac-Moody
11.2. Propriétés des **K**-formes. **K**-formes algébriques
11.3. **K**-Formes presque déployées des groupes de Kac-Moody

12. Descente galoisienne

12.1. Hypothèse de descente. K-sous-groupes
12.2. Existence d'appartements stables sous le groupe de Galois
12.3. Théorèmes de conjugaison rationnelle
12.4. Descente galoisienne
12.5. **K**-sous-groupes réductifs et petits sous-jumelages
Application aux tores **K**-déployés
12.6. Donnée radicielle jumelée entière d'un groupe de Kac-Moody presque déployé

13. Constructions de formes. Actions galoisiennes Formes quasi-déployées Descente dans un immeuble hyperbolique

13.1. Construction théorique d'une K-forme restreinte aux extensions
à partir d'une action galoisienne
13.2. Formes quasi-déployées
13.3. Construction d'un arbre jumelé semi-homogène dans un immeuble hyperbolique
13.4. Une descente qui dégénère

PREMIÈRE PARTIE

DONNÉES RADICIELLES JUMELÉES

1. Combinatoire des groupes

Dans ce chapitre, on dresse l'inventaire des combinatoires envisagées pour l'étude des groupes de Kac-Moody. Comme pour d'autres situations, les *systèmes de Tits* doivent être considérés comme le point de départ des raffinements adaptés à la situation (voir par exemple les *données radicielles valuées* pour les groupes réductifs sur les corps locaux dans [Bru-Tit72] et [Bru-Tit84]). On dispose de toute une gradation de raffinements, éventuellement non comparables. Cela provient des origines de ces travaux. V. Kac et D. Peterson d'une part, J. Tits de l'autre ont contribué à l'étude abstraite de ces groupes. V. Kac et D. Peterson ont proposé une combinatoire dissymétrique qui aboutit à de nombreuses décompositions avec écriture unique ([Kac-Pet84]). J. Tits a proposé une série de combinatoires graduellement raffinées en mettant en évidence les propriétés qu'on obtient dans chaque cas ([Tit87], [Tit89] et [Tit90], enfin [Tit92]). Une comparaison de tous les types de combinatoire est établie à la fin. Une référence faisant aussi une synthèse de certaines combinatoires introduites par J. Tits est [Abr97], chapitre 1.

1.1. Axiomatique et propriétés des BN-paires

La structure de BN-paire forme l'axiomatique de base de la combinatoire des groupes algébriques réductifs isotropes sur un corps. La théorie de Borel-Tits assure que le groupe des points rationnels possède une structure de ce type. Nous allons énoncer les propriétés générales des BN-paires simples, avant de mettre en place quelques raffinements ajustés pour la théorie de Kac-Moody dans les sections suivantes.

1.1.1. Axiomes

Pour tout ce qui concerne la section (1.1), les démonstrations des résultats peuvent être trouvées dans l'exposé classique [Bou81], section (IV.2).

DÉFINITION. — *On appelle* système de Tits *un quadruplet (G, B, N, S), où G est un groupe, B et N sont deux sous-groupes de G et S est une partie de $W := N/(B \cap N)$, le tout satisfaisant aux axiomes suivants.*

(BN1) $G = \langle B \cup N \rangle$ *et* $(B \cap N) \triangleleft N$.
(BN2) S *est formé d'éléments d'ordre deux et engendre* W.

(BN3) *Pour tous w de W et s de S, on a $sBw \subset BwB \cup BswB$.*
(BN4) *Pour tout s de S, on a $sBs \not\subset B$.*

Le couple (B, N) constitue une BN-paire dans G. W est appelé le groupe de Weyl *de la BN-paire. La BN-paire est dite* saturée *si $\bigcap_{w \in W} wBw^{-1} = B \cap N$. On note $H := B \cap N$.*

Prouver qu'un groupe réductif sur un corps algébriquement clos possède une BN-paire constitue une partie conséquente de la théorie de ces groupes. Du reste, une partie des propriétés déduites formellement de ces axiomes doit être prouvée avant cette vérification.

1.1.2. Propriétés

Le premier résultat est une décomposition globale du groupe G.

THÉORÈME. — *On a $G = BWB$, et l'application qui attache à tout w de W la double classe BwB établit une bijection entre W et l'ensemble des doubles classes modulo B.*

$$G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$$

On parle de décomposition de Bruhat. □

Le deuxième résultat met en évidence un système de Coxeter.

THÉORÈME. — *Le couple (W, S) est un système de Coxeter, et on a en outre*

$$BswB = BsBwB \quad \text{si et seulement si} \quad \ell(sw) > \ell(w).$$

□

Le troisième résultat explicite une structure de treillis pour l'ensemble des sous-groupes de G qui contiennent B. Dans le cas des groupes réductifs, on retrouve aussi un théorème de Chevalley selon lequel un sous-groupe de Borel est égal à son normalisateur.

THÉORÈME. — (i) *Pour toute partie X de S, la réunion de doubles classes $G_X := BW_XB$ avec $W_X := \langle s \mid s \in X \rangle$, est un sous-groupe de G engendré par les doubles classes BsB pour s dans X.*
(ii) *L'application $X \mapsto BW_XB$ établit une bijection croissante de l'ensemble des parties de S sur l'ensemble des sous-groupes de G contenant B, compatible aux intersections.*
(iii) *Soit g dans G et soit X une partie de S. Alors, si gBg^{-1} est dans G_X, g est nécessairement dans G_X.* □

Enfin, on a des relations précises et analogues sur une plus vaste classe de sous-groupes. On peut même étudier les relations d'incidence de ces sous-groupes.

DÉFINITION. — *Un* sous-groupe parabolique *de G est un sous-groupe qui contient un conjugué de B. Un* sous-groupe parabolique standard *de G est un sous-groupe qui contient B, qui est donc de la forme BW_XB.*

Pour la normalisation des sous-groupes paraboliques:

THÉORÈME. — *Soit P un sous-groupe de G.*

(i) *Pour que P soit parabolique il faut et il suffit qu'il existe une partie X de S telle que P soit conjugué de G_X.*
(ii) *Soient X et X' des parties de S, et g, g' des éléments de G tels que $P = gG_Xg^{-1} = g'G_{X'}g'^{-1}$. Alors, $X = X'$ et $g'g^{-1}$ est dans P.* □

Pour les intersections:

THÉORÈME. — (i) *Soient P et P' deux sous-groupes paraboliques de G d'intersection parabolique, et soit g dans G tel que gPg^{-1} est dans P'. Alors g est dans P' et P est inclus dans P'.*
(ii) *Deux sous-groupes paraboliques distincts d'intersection parabolique ne peuvent être conjugués.*
(iii) *Si Q et Q' sont deux sous-groupes paraboliques contenus dans un même sous-groupe P, alors tout élément qui conjugue Q sur Q' est dans P.*
(iv) *Tout sous-groupe parabolique est égal à son normalisateur.*
(v) *L'intersection de deux sous-groupes paraboliques de G contient toujours un conjugué de H.* □

La structure de BN-paire forme la combinatoire minimale de tous les groupes que l'on va considérer. Il existe toute une zoologie des raffinements possibles de ces axiomes. Nous allons les décrire successivement. La comparaison de ces structures n'est pas nécessairement immédiate. Par exemple, celle de *donnée radicielle jumelée* implique toutes les autres, mais un point de la preuve de ce fait sera reporté à un chapitre ultérieur concernant les techniques sur les ensembles ordonnés.

1.2. Combinatoire dissymétrique des BN-paires raffinées

La première direction de raffinement consiste à gérer des groupes analogues aux sous-groupes des radicaux unipotents de sous-groupes de Borel dans le cas algébrique réductif. Les *BN-paires raffinées* – *refined Tits systems* en anglais – introduites par V. Kac et D. Peterson développent minutieusement ce point de vue ([Kac-Pet84]).

1.2.1. Axiomes

Hormis la décomposition $B_+ = H \ltimes U_+$ posée en axiome, un autre fait remarquable concernant cette combinatoire est qu'elle est dissymétrique (dans sa formulation initiale). C'est un inconvénient pour rendre compte de la situation très riche des groupes de Kac-Moody. C'est un avantage pour ce qui est de la transmission de cette structure aux sous-groupes paraboliques.

DÉFINITION. — *Une structure de BN-*paire raffinée *est un sextuplet (G, N, U_+, U_-, H, S) qui vérifie les axiomes suivants:*

(RT1) *G est un groupe dont N, U_+, U_- sont des sous-groupes. G est engendré par N et U_+. H est distingué dans N et normalise U_+ et U_-. S est une partie de $W := N/H$ formée d'éléments d'ordre 2 qui engendrent W.*

(RT2) *Pour chaque s de S, on pose $U_s := U_+ \cap s^{-1}U_-s$.*

On a alors pour tout w de W et s de S:

(RT2a) $s^{-1}U_s s \neq \{1\}$ *et* $s^{-1}(U_s \setminus \{1\})s \subset U_s s H U_s$.

(RT2b) $w^{-1}U_s w \subset U_+$ *ou* $w^{-1}U_s w \subset U_-$.

(RT2c) $U_+ = U_s(U_+ \cap s^{-1}U_+ s)$.

(RT3) *Si u_- dans U_-, u_+ dans U_+ et n dans N sont tels que $u_- n u_+ = 1$, alors $u_- = u_+ = n = 1$.*

*On dit en outre que (G, N, U_+, U_-, H, S) est une BN-*paire raffinée symétrique *si on a:*

(SRT) *(G, N, U_+, U_-, H, S) et (G, N, U_-, U_+, H, S) sont des BN-paires raffinées.*

On introduit le sous-groupe B_+ qui est par définition engendré par les sous-groupes H et U_+, et qui se décompose en produit semi-direct par le premier et le dernier axiome: $B_+ = H \ltimes U_+$. On appelle *grosse cellule* la partie U_+HU_- (ou U_-HU_+ suivant les cas) de G.

1.2.2. BN-paire associée

La première chose à faire est bien entendu de vérifier qu'on est bien dans une situation comparable à celle des BN-paires. Le lemme suivant l'assure; il en résulte aussitôt que (W, S) est un système de Coxeter.

LEMME. — *Si (G, N, U_+, U_-, H, S) est une BN-paire raffinée, alors:*

(i) $B_+ \cap N = H$.

(ii) *Pour tout s de S, on a $sB_+s \neq B_+$.*

(iii) *Pour w dans W et s dans S, alors:*

ou bien $w^{-1}U_s w \subset U_+$ *et* $(sw)^{-1}U_s sw \subset U_-$

ou bien $w^{-1}U_s w \subset U_-$ *et* $(sw)^{-1}U_s sw \subset U_+$

(iv) *Pour w dans W et s dans S, on a:*

$$sB_+w \subset B_+sw(w^{-1}U_s w) \text{ et } sB_+w \subset B_+sw \cup B_+w(ws)^{-1}U_s ws.$$

Référence. [Kac-Pet84], lemme (3.1) p.175. Le lemme (3.2), p.178 de [Kac-Pet84] précise le troisième point. Le premier cas a lieu quand $\ell(ws) > \ell(w)$, le second cas quand $\ell(ws) < \ell(w)$. □

Dès lors, on peut chercher à donner des versions plus précises de certains résultats valables pour les BN-paires.

1.2.3. Décomposition de Bruhat raffinée

On peut donner non seulement une version plus fine de la décomposition de Bruhat, mais aussi des résultats très précieux d'écriture unique.

PROPOSITION. — *Soit (G, N, U_+, U_-, H, S) une BN-paire raffinée. Alors:*

(i) $G = \bigsqcup_{n \in N} U_+ n U_+$. *On parle de* décomposition de Bruhat raffinée.
(ii) *Pour tout w de W, la double classe de Bruhat se décompose de la façon suivante avec écriture unique.*

$$B_+ w B_+ = U_+(wH)(U_+ \cap w^{-1} U_- w).$$

(iii) $G = U_+ U_- N$.
(iv) *Si w et w' sont deux éléments de W avec $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$, alors on a les décompositions suivantes avec unicité d'écriture.*

(iv a) $U_- \cap (ww')^{-1} U_+ ww' = \left[(w')^{-1}(U_- \cap w^{-1} U_+ w) w'\right] \left[(U_- \cap (w')^{-1} U_+ w')\right]$.
(iv b) $U_+ \cap (ww')^{-1} U_- ww' = \left[(w')^{-1}(U_+ \cap w^{-1} U_- w) w'\right] \left[U_+ \cap (w')^{-1} U_- w'\right]$.
(iv c) $U_+ \cap w'^{-1} U_+ w' = \left[(w')^{-1}(U_+ \cap w^{-1} U_- w) w'\right] \left[U_+ \cap (ww')^{-1} U_+ ww'\right]$.

(v) $$\bigcap_{w \in W} w U_- w^{-1} = \{1\}.$$

Référence. [Kac-Pet84], proposition (3.2) p.180 et corollaire (3.4) p.181. □

Puisque l'on va prendre l'habitude de décomposer les doubles classes de Bruhat avec un groupe simplifié à gauche plutôt qu'à droite, on va reformuler les résultats les plus utiles avec cette convention d'écriture.

DÉFINITION. — *Pour tout w de W et tout signe ϵ, on note $U_{\epsilon w} := U_\epsilon \cap w U_{-\epsilon} w^{-1}$.*

Cette définition est en accord avec la définition de U_s précédente puisque s est d'ordre 2.

COROLLAIRE. — (i) *Pour tout w de W, on a $B_+ w B_+ = U_w(wH)U_+$ avec unicité d'écriture.*
(ii) *Pour tous w et w' de W avec $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$, on a $U_{ww'} = U_w(wU_{w'}w^{-1})$, avec unicité d'écriture.*

Démonstration. Il suffit de passer à l'inverse dans les points (ii) et (iv b) précédents. □

Le cas $w' = 1$ et w^{-1} quelconque dans W de (iv c) fournit la décomposition

$$\forall w \in W \quad U_+ = (U_+ \cap w U_+ w^{-1})(U_+ \cap w U_- w^{-1}).$$

Cette égalité peut s'interpréter en termes de grosse cellule. Ainsi

$$\forall w \in W \quad w U_+ w^{-1} = (w U_+ w^{-1} \cap U_+)(w U_+ w^{-1} \cap U_-) \subset U_+ U_- (\subset U_+ H U_-).$$

1.2.4. Décomposition de Birkhoff raffinée

La décomposition de Birkhoff est un outil essentiel dans l'étude (géométrique) des groupes de Kac-Moody. Dans le cas d'un groupe de Weyl fini, ce n'est pas un fait nouveau, puisqu'il se déduit de la décomposition de Bruhat par multiplication par le plus grand élément du groupe de Weyl de la BN-paire.

PROPOSITION. — *Si (G, N, U_+, U_-, H, S) est une BN-paire raffinée, alors*

(i) $G = \bigsqcup_{n \in N} U_- n U_+$. *On parle de* décomposition de Birkhoff raffinée.
(ii) *Pour tout w dans W, on a décomposition avec écriture unique de chaque double classe de Birkhoff.*

$$U_- w B_+ = U_-(wH)(U_+ \cap w^{-1} U_+ w).$$

(iii) $G = U_- U_+ N$.

Référence. [Kac-Pet84], proposition (3.3) p.181. □

1.2.5. Sous-groupes gradués

À partir de ces décompositions, et dans le cas d'une BN-paire raffinée symétrique, on peut encore prouver quelques résultats abstraits qui s'appuient sur la notion de *sous-groupe gradué*, encore due à V. Kac et D. Peterson ([Kac-Pet84], p.190).

DÉFINITION. — *Soit (G, N, U_+, U_-, H, S) une BN-paire raffinée. Un sous-groupe F de G est dit* gradué *si pour tout u_+ dans U_+, tout h dans H et tout u_- dans U_- tels que $u_+ h u_-$ soit dans F, on a en fait u_+, u_- et h dans F.*

Par hypothèse, N normalise H. Sous une condition concrètement vérifiable, on peut prouver que N est le normalisateur de H dans G:

PROPOSITION. — *Soit (G, N, U_+, U_-, H, S) une BN-paire raffinée symétrique.*

(i) *Si F est un sous-groupe gradué de G qui contient N et qui vérifie $F \cap U_s = \{1\}$ pour tout s de S, alors $F = N$*
(ii) *Si en outre la BN-paire raffinée symétrique vérifie la condition suivante:*

$$\text{(CENT)} \qquad \forall s \in S \quad Z_{U_s}(H) = \{1\},$$

alors le normalisateur de H dans G est précisément N.

Démonstration. Il s'agit d'une adaptation abstraite d'un argument de Kac et Peterson concernant l'étude de leur groupe complexe ([Kac-Pet84], proposition (4.5)).

Preuve de (i). 1. Montrons d'abord que N normalise $F \cap U_+$.
Il suffit pour cela de montrer que pour tout s de S, on a $s(F \cap U_+)s^{-1} \subset F \cap U_+$. On se donne donc un élément n_s qui relève s modulo H, et u dans $F \cap U_+$. Alors, d'après (1.2.3), $n_s u n_s^{-1} = v_+ v_-$ avec v_+ dans $U_+ \cap n_s U_+ n_s^{-1}$ et v_- dans $U_- \cap n_s U_+ n_s^{-1}$. Mais n_s et u sont deux éléments de F, par conséquent $v_+ v_-$ est dans F. Et puisque F est gradué, on a séparément $v_+ \in F$ et $v_- \in F$. Ceci implique $v_- = 1$ car $U_s \cap F = \{1\}$. On a donc $n_s u n_s^{-1} = v_+ \in F \cap U_+$.

2. D'après la proposition (1.2.3)(v) pour la BN-paire raffinée «négative» , on a

$$F \cap U_+ \subset \bigcap_{w \in W} w(F \cap U_+)w^{-1} \subset \bigcap_{w \in W} w U_+ w^{-1} = \{1\}.$$

On se donne g un élément de F, qu'on peut toujours écrire $g = u_+ u_- n$ d'après (1.2.3)(ii), avec n dans N, u_+ dans U_+ et u_- dans $U_- \cap n U_+ n^{-1}$. Déjà n est dans F, par conséquent $u_+ u_-$

est dans F. Puisque F est gradué, u_+ et u_- sont séparément dans F, et en particulier $u_+ = 1$ par la première ligne. Mais $n^{-1}u_-n$ est dans $U_+ \cap F$ et vaut donc 1 lui aussi. On a donc bien $g = n$, qui est dans N.

Preuve de (ii). Donnons-nous un élément f à la fois dans $F = N_G(H)$ et dans la grosse cellule U_-HU_+, qu'on peut peut donc écrire de manière unique $f = u_-hu_+$. On va montrer que ces conditions impliquent que u_+ et u_- centralisent séparément H, ce qui montrera que F est gradué. Comme $U_s \cap F = \{1\}$, d'après $Z_{U_s}(H) = \{1\}$ (pour tout s), on sera alors dans les conditions d'application de (i).
Pour cela, on se donne h' dans H et on part de l'égalité $u_+ = (u_-h)^{-1}f$. Le commutateur $[u_+, h']$ vaut donc

$$u_+h'u_+^{-1}h'^{-1} = (u_-h)^{-1}fh'f^{-1}(u_-h)h'^{-1}.$$

Puisque H normalise U_+ et U_-, cet élément est dans $HU_- \cap U_+ = \{1\}$. □

1.2.6. Transmission de la structure aux sous-groupes paraboliques

Voici un dernier résultat, permis par la nature dissymétrique des BN-paires raffinées.

LEMME. — *Soit (G, N, U_+, U_-, H, S) une BN-paire raffinée. Alors, pour toute partie J de S, le sextuplet $(P_{J,+} := B_+W_JB_+, W_JH, U_+, U_- \cap P_{J,+}, H, J)$, est une BN-paire raffinée.*

Démonstration. $P_{J,+}$ est un groupe qui contient W_JH, U_+, $U_- \cap P_{J,+}$. (Pour le premier sous-groupe, considérer la décomposition de Bruhat $P_{J,+} = B_+W_JB_+$). H est distingué dans W_JH (car il l'est dans N), normalise U_+, U_- et $P_{J,+}$, donc U_+ et $U_- \cap P_{J,+}$. Les éléments de J sont d'ordre 2, puisqu'ils sont dans S. Ceci vérifie (RT1).
(RT2a), (RT2c) et (RT3) sont vraies dans G, donc dans $P_{J,+}$.
Pour s dans J, $P_{J,+}$ contient $B_+sB_+ = (U_+ \cap sU_-s^{-1})sHU_+$, donc $(U_+ \cap sU_-s^{-1})$. Ainsi, $U_+ \cap s^{-1}(U_- \cap P_{J,+})s = U_+ \cap sU_-s^{-1} = U_+ \cap s^{-1}U_-s = U_s$. D'où l'alternative (RT2b), d'après celle de G. □

1.2.7. Multiplication des doubles classes

On sait que pour une BN-paire (G, B, N, S) ordinaire, on a la disjonction de cas suivante. Soient w dans W et s dans S.

> Si on a addition des longueurs, *i.e* si $\ell(ws) = \ell(w) + 1$, alors $BwBsB = BwsB$.
> Sinon, on a $\ell(ws) = \ell(w) - 1$, et $BwBsB = BwB \sqcup BwsB$.

Nous pouvons préciser cette alternative dans le second cas, ce qui montre abstraitement que comme dans le cas algébrique, le produit de deux cellules de Bruhat est « génériquement » dans la cellule de plus grande dimension modulo B.

PROPOSITION. — *Soient w dans W et s dans S. On se donne g dans B_+wB_+ (respectivement h dans B_+sB_+), qu'on écrit de manière unique $g = u_wn_wtu$ (respectivement $h = u_sn_st'u'$) avec les appartenances suggérées par les notations et le corollaire* (1.2.3)(i). *Alors, gh appartient à la double classe de longueur $\inf\{\ell(w); \ell(ws)\}$ si et seulement si $\ell(ws) < \ell(w)$ et uu_s est dans $U_+ \cap sU_+s^{-1}$.*

Démonstration. 1. On a $gh = u_w w(t(uu_s)t^{-1})s((s^{-1}ts)t')u'$. On peut toujours écrire $t(uu_s)t^{-1} = v_s v'_s$ avec v_s dans U_s et v'_s dans $U_+ \cap sU_+s^{-1}$. D'où $gh = u_w w v_s sb$ avec b dans B_+.
Puisque H normalise U_+ et U_- et est distingué dans N, il est clair que toute conjugaison par un élément de H stabilise les décompositions $U_+ = (U_+ \cap zU_-z^{-1})(U_+ \cap zU_+z^{-1})$ pour chaque z de W. Ainsi, uu_s est dans $U_+ \cap sU_+s^{-1}$ si et seulement si $v_s = 1$.

2. On sait que si $\ell(ws) > \ell(w)$, on a $B_+wB_+sB_+ = B_+wsB_+$. On retrouve cela grâce au corollaire (1.2.3)(ii), qui assure que $(U_+ \cap wU_-w^{-1}).wU_sw^{-1} = U_+ \cap wsU_-(ws)^{-1}$.
On a donc $gh = u_w w v_s w^{-1} wsb \in (U_+ \cap wsU_-(ws)^{-1})wsB_+ = B_+wsB_+$.

3. Il y a alternative dans le cas $\ell(ws) < \ell(w)$, autrement dit quand $\ell(wss) > \ell(ws)$.
Si v_s vaut 1, on utilise à nouveau le même corollaire qui permet d'écrire $U_w = U_{ws}wsU_s(ws)^{-1}$, et donc $u_w \in U_{ws}wsU_s(ws)^{-1}$. On obtient alors $gh \in U_{ws}wsB_+$. (On descend en dimension modulo B_+).
Si $v_s \neq 1$, en choisissant n_s relevant s modulo H, il vient $n_s^{-1}v_s n_s \in U_{-s} \setminus \{1\} \subset U_s n_s H U_s$ par (RT2a).
D'où $gh \in u_w n_w v_s n_s B_+ \subset u_w n_w n_s U_s n_s B_+ = u_w n_w U_{-s} n_w^{-1} n_w B_+$. Mais la condition sur les longueurs implique que $wU_{-s}w^{-1} \subset U_+$. On a donc $gh \in B_+wB_+$. □

1.3. *BN*-paires jumelées

Une autre direction de raffinement de la combinatoire des BN-paires consiste à postuler la coexistence de deux BN-paires dans un même groupe et une compatibilité entre celles-ci. Cette structure peut apparaître commme un enrichissement apportant peu de propriétés supplémentaires. En réalité, sa contrepartie immobilière est le point de départ de l'étude des jumelages. Les références pour toute cette section sont [Abr97] et [Tit92].

1.3.1. Axiomes

Dès que l'on manipule des structures jumelées, il apparaît en indice le signe + ou -. ϵ désignera toujours l'un de ces signes.

DÉFINITION. — *Soient (G, B_+, N, S) et (G, B_-, N, S) deux BN-paires de même groupe de Weyl. Plus précisément on suppose l'égalité $B_+ \cap N = B_- \cap N$, on note H la valeur commune et $W := N/H$. On dit que (G, B_+, B_-, N, S) est une BN-paire* jumelée *si on a en outre*

(BNJ1) *Pour tout w de W, tout s de S, et tout signe ϵ, avec $\ell(ws) < \ell(w)$,*

$$B_\epsilon wB_{-\epsilon}sB_{-\epsilon} = B_\epsilon wsB_{-\epsilon}.$$

(BNJ2) *Pour tout s de S, $B_+s \cap B_- = \varnothing$.*

On peut facilement fabriquer une BN-paire jumelée à partir d'une BN-paire simple pourvu que celle-ci soit sphérique. Si on note w_0 l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl d'une telle BN-paire (G, B, N, S), alors $(G, B, w_0Bw_0^{-1}, N, S)$ est une BN-paire jumelée.

1.3.2. Décomposition de Birkhoff

La décomposition qui suit est moins précise que celle de (1.2.4). Elle apparaît pourtant sous des hypothèses plus faibles, qui ont déjà une contrepartie immobilière.

PROPOSITION. — *Soit (G, B_+, B_-, N, S) une BN-paire jumelée. Alors, pour chaque signe ϵ, l'application*

$$\begin{aligned} \beta_\epsilon : W &\to B_\epsilon \setminus G / B_{-\epsilon} \\ w &\mapsto B_\epsilon w B_{-\epsilon} \end{aligned}$$

est une bijection.

Référence. On renvoie à [Abr97], lemme 1 p.13, qui prouve au passage les résultats intermédiaires suivants.

$$B_\epsilon w B_{-\epsilon} s B_{-\epsilon} \subset B_\epsilon \{w; ws\} B_{-\epsilon} \text{ pour tout } w \text{ de } W, \ s \text{ de } S.$$

$$B_\epsilon w \cap B_{-\epsilon} = \varnothing \text{ pour tout } w \text{ non trivial de } W.$$

□

C'est la décomposition de G obtenue qu'on appelle *décomposition de Birkhoff* de G en *doubles classes de Birkhoff*, quel que soit l'ordre des signes.

1.4. Données B-radicielles

Les structures qui suivent (jusqu'à la fin) apparaissent d'emblée comme plus précises puisqu'elles sont indexées par l'ensemble des racines d'un système de Coxeter. C'est donc une combinatoire plus détaillée qui est définie dès les axiomes. En pratique, ce fait implique souvent que pour vérifier les axiomes d'une telle structure, on doit d'abord mettre en évidence un système de Coxeter. D'où des démonstrations par étapes puisqu'on ne peut faire l'économie d'une preuve de structure de type BN-paire pour disposer d'un groupe de Weyl (voir l'exemple des groupes de lacets, [Rém99b]). La référence pour cette axiomatique est [Tit87], section 5.

1.4.1. Racines d'un système de Coxeter

On part d'un système de Coxeter (W, S), dont on note $\ell : W \to \mathbf{N}$ la fonction longueur associée.

DÉFINITION. — (i) *Pour chaque s de S, la partie $\alpha_s := \{w \in W \mid \ell(sw) > \ell(w)\}$ est une* racine simple *de (W, S).*
(ii) *Les* racines *de W sont les transformés $w\alpha_s (\subset W)$ des racines simples, pour w dans W. On note $\Phi = \Phi(W)$ l'ensemble des racines de W.*
(iii) *Une racine est dite* positive *si elle contient* 1, négative *sinon. On note Φ_+ (respectivement Φ_-) l'ensemble des racines positives (respectivement négatives).*
(iv) *Pour toute racine $\alpha = w\alpha_s$ on note $-\alpha$ son complémentaire. C'est encore une racine – puisqu'il s'agit de $ws\alpha_s$ – qu'on appelle l'*opposée *de α.*

On peut aussi introduire un peu de vocabulaire pour les parties de racines.

DÉFINITION. — (i) *Un ensemble de racines Ψ est dit* prénilpotent *si on peut trouver un élément w et un élément z de W tels que $w\Psi \subset \Phi_+$ et $z\Psi \subset \Phi_-$. Autrement dit, si on peut trouver un élément w et un élément z de W tels que l'intersection des racines de Ψ (respectivement des opposées des racines de Ψ) contient w^{-1} (respectivement z^{-1}).*
(ii) *Pour une paire $\{\alpha;\beta\}$ prénilpotente de racines, on note*

$$[\alpha;\beta] := \{\gamma \in \Phi \mid \gamma \supset \alpha \cap \beta \text{ et } -\gamma \supset (-\alpha) \cap (-\beta)\}.$$

On note aussi $[\alpha;\beta[:= [\alpha;\beta] \setminus \{\beta\}$, $]\alpha;\beta] := [\alpha;\beta] \setminus \{\alpha\}$ et $]\alpha;\beta[:= [\alpha;\beta] \setminus \{\alpha;\beta\}$.
(iii) *Un ensemble de racines est dit* convexe *s'il est précisément l'ensemble des racines contenant une partie non vide donnée de W et disjointes d'une autre partie non vide donnée de W.*
(iv) *Un ensemble de racines est dit* clos *s'il contient $[\alpha;\beta]$ dès qu'il contient les deux racines α et β.*
(v) *Un ensemble de racines est dit* nilpotent *s'il est prénilpotent et clos.*

Parmi les ensembles convexes intéressants, on peut définir pour chaque w de W l'ensemble Φ_w des racines positives rendues négatives par w. $\Phi_w = \Phi_+ \cap w^{-1}\Phi_-$. On a $\Phi_s = \{\alpha_s\}$ pour tout s de S. Ce point et le lemme suivant se trouvent dans [Tit87], proposition 3 (i), p.564-565.

LEMME/DÉFINITION. — *Soit $w = s_1.s_2...s_{\ell(w)}$ une écriture réduite d'un élément de W. Pour chaque $i \geq 1$, on note $w_i := s_1...s_i$ et $\beta_i := w_{i-1}\alpha_{s_i}$. On convient que w_0 vaut 1. Alors $\{\beta_i\}_{1\leq i\leq \ell(w)}$ est exactement $\Phi_{w^{-1}}$. La numérotation ainsi obtenue sur cet ensemble est appelée* l'ordre cyclique *de $\Phi_{w^{-1}}$ associé à l'écriture réduite de w.* □

On verra au chapitre suivant que ce vocabulaire s'adapte au langage des immeubles, en particulier des immeubles minces que sont les complexes de Coxeter, (2.2.6).

1.4.2. Axiomes

Passons maintenant à la définition proprement dite des données B-radicielles ([Tit87], section 5).

DÉFINITION. — *Soient G un groupe et (W,S) un système de Coxeter. On suppose que G contient une famille $(B_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ de sous-groupes, et on note*

$$B_+ := \langle B_\alpha \mid \alpha \in \Phi_+\rangle,\ B_- := \langle B_\alpha \mid \alpha \in \Phi_-\rangle, \text{ et } H := \bigcap_{\alpha\in\Phi} B_\alpha.$$

On dit que $\left(G, (B_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\right)$ est une donnée B-radicielle *si les axiomes suivants sont vérifiés.*

(DR0) *Les sous-groupes B_α engendrent G.*
(DR1) *Pour toute paire prénilpotente $\{\alpha;\beta\}$ de racines, il existe un ordre $(\alpha = \beta_1, \beta_2, ... \beta_m)$ sur $[\alpha;\beta]$ tel que le produit interne $B_{\beta_1}.B_{\beta_2}... B_{\beta_m}$ soit un groupe.*
(DR2) *Pour tout s de S, $B_{\alpha_s} \cap B_{-\alpha_s} = H$.*
(DR3) *Pour tout s de S, le groupe B_{α_s} possède deux doubles classes dans le groupe qu'il engendre avec $B_{-\alpha_s}$.*
(DR4) *Pour tout s de S, il existe un élément dans $\langle B_{\alpha_s}, B_{-\alpha_s}\rangle$ qui conjugue B_β sur $B_{s\beta}$ pour toute β de Φ.*
(DR5) *Pour tout s de S, $B_{\alpha_s} \not\subset B_-$ et $B_{-\alpha_s} \not\subset B_+$.*

Par la suite, nous allons citer les diverses propriétés des groupes à donnée B-radicielle. Il n'est déjà plus anodin de prouver que ce système d'axiomes donne naissance à des BN-paires. La démonstration de ce fait (et du fait qu'elles sont jumelées) est parallèle à celle d'un autre gros résultat, à savoir le théorème d'amalgame qui prouve une présentation «à la Steinberg» des groupes de ce type. Finissons en introduisant un groupe nécessaire à toute mise en évidence de BN-paire. On conserve G un groupe muni d'une donnée radicielle.

DÉFINITION. — *Pour tout s de S, on choisit un élément $\tilde{s}$ dans $\langle B_{\alpha_s}, B_{-\alpha_s}\rangle$ qui conjugue B_β sur $B_{s\beta}$ pour toute β de Φ. On note N le sous-groupe de G engendré par les $\tilde{s}$ et H.*

REMARQUE. — D'après (DR3) et (DR4), B_{α_s} (resp. $B_{-\alpha_s}$) est son propre normalisateur dans $\langle B_{\alpha_s}, B_{-\alpha_s}\rangle$. Vu (DR2), l'élément $\tilde{s}$ est donc unique modulo H. Ainsi, N est indépendant des choix faits.

1.4.3. Premières propriétés

Nous rassemblons ici deux lemmes consécutifs dans l'article de J. Tits [Tit87] pour prouver les résultats annoncés précédemment.

LEMME. — (i) *Pour tout w de W, on peut trouver un élément n_w de N qui conjugue B_β sur $B_{w\beta}$ pour toute racine β de Φ.*
(ii) *Pour deux racines distinctes α et α' de Φ, $B_\alpha \neq B_{\alpha'}$.*
(iii) *Il existe un unique épimorphisme de groupes $\nu : N \twoheadrightarrow W$ tel que pour tout n de N, on ait $nB_\beta n^{-1} = B_{\nu(n)\beta}$ pour toute racine β. En outre, le noyau de ν est précisément H.*
(iv) *Pour toute racine positive α et tout s de S, on a $B_\alpha B_{\alpha_s}\tilde{s} \subset B_{\alpha_s}\tilde{s}B_+$.*

Référence. [Tit87], lemme 3 p.563 et lemme 4 p.564. □

1.4.4. Sous-groupes associés à un élément du groupe de Weyl. Doubles classes

Cette série de propriétés prouve des résultats assez proches de ceux obtenus pour les BN-paires raffinées. Cependant, il faut remarquer qu'on n'a pas le même type de résultat d'écriture unique sous les hypothèses d'une donnée B-radicielle. La différence essentielle vient de ce qu'on ne définit pas des petits sous-groupes intéressants de la même façon. Logiquement, dans le cadre des BN-paires raffinées, les sous-groupes intéressants de U_+ sont définis comme intersection de U_+ et d'un conjugué par n dans N de U_-; alors que la combinatoire des données B-radicielles, indexée par Φ, conduit à définir les groupes à partir des sous-groupes B_α. Ainsi, pour les BN-paires raffinées, on obtient des résultats d'écriture unique «à grande échelle» (au niveau des doubles classes de Birkhoff ou de Bruhat), alors qu'ici on va écrire de manière unique des sous-groupes associés à des parties finies de racines. Commençons par la définition des groupes intéressants.

PROPOSITION/DÉFINITION. — *Pour tout w de W, le produit $B_w := B_{\beta_1}.B_{\beta_2}...\ B_{\beta_m}$ pour l'ordre cyclique associé à une écriture réduite de w, est un groupe. Il ne dépend pas de l'écriture réduite choisie, puisque c'est le groupe engendré par les B_{β_i}. On pose $B_1 := H$.*

Référence. [Tit87], proposition 3 (ii) p.564. □

Il est clair par définition que B_w est inclus dans $B_+ \cap wB_-w^{-1}$; on verra qu'il y a en fait égalité, en (1.4.6). Comme annoncé, on possède des résultats d'écriture unique des B_w, et d'écriture plus économique pour les doubles classes.

PROPOSITION. — *Soit w dans W, pour lequel on conserve les notations précédentes.*

(i) *Si B'_{β_i} désigne un ensemble de représentants de $H \setminus B_{\beta_i} = \{Hb \mid b \in B_{\beta_i}\}$ pour chaque i, l'application produit*

$$H \times B'_{\beta_1} \times ... \times B'_{\beta_m} \to B_w$$

est bijective.
(ii) *En posant $B^*_{\beta_i} := (B_{\beta_i} - H) \cup \{1\}$ pour chaque i, on a*

$$B_+wB_+ = B^*_{\beta_1}B^*_{\beta_2}... B^*_{\beta_m}wB_+ = B_wwB_+.$$

(iii) *Les quadruplets (G, B_+, N, S) et (G, B_-, N, S) sont des BN-paires.*
(iv) *Soient w dans W et s dans S tels que $\ell(sw) \geq \ell(w)$. Alors*

$$B_w \cap B_-sB_- = \varnothing.$$

(v) *Pour chaque s de S, on a $\langle B_{\alpha_s}, B_{-\alpha_s}\rangle = B_{\alpha_s} \sqcup B_{\alpha_s}\tilde{s}B_{\alpha_s} = B_{-\alpha_s} \sqcup B_{-\alpha_s}\tilde{s}B_{-\alpha_s}$.*
(vi) *Pour tout w de W, $B_w \cap B_- = H$.*
(vii) *Pour tout s de S, $B_+ = B_{\alpha_s}.(B_+ \cap sB_+s^{-1})$.*

Démonstration. Les trois premiers points sont prouvés dans [Tit87]. Il s'agit des résultats [Tit87], proposition 3 (iii) et (iv) p.564 et proposition 4 (i) p.566.

Preuve de (iv). Supposons au contraire que l'intersection n'est pas vide. Alors, on peut trouver un élément bsb' dans B_w avec b, b' dans B_-. On obtient donc $w^{-1}bsb'w \in B_-$, ce qui implique que B_- apparaît dans la décomposition en doubles classes négatives de $B_-w^{-1}B_-sB_-wB_-$. On peut donc trouver une sous-expression w' de w^{-1} qui vérifie $w'sw = 1$, et donc $\ell(w') = \ell(sw) > \ell(w)$. D'où la contradiction.

Preuve de (v). Il suffit de voir que $\tilde{s}$ n'est pas dans B_{α_s}. C'est immédiat, sinon on aurait $B_{-\alpha_s} = sB_{\alpha_s}s^{-1} \subset B_+$, impossible par (DR5). L'autre cas est complètement symétrique.

Preuve de (vi). C'est immédiat d'après [Tit87], théorème 2(i) p.567 qui assure que $B_w \cap B_-$ est dans $B_+ \cap B_- = H$.

Preuve de (vii). Classiquement ([Hum75], lemme C p.178), S est caractérisé par le fait que $B_+ \cup B_+sB_+$ est un groupe. Ici, la double classe associée à s s'écrit plus simplement $B^*_{\alpha_s}sB_+$ par (ii), donc $B_+ \cup B^*_{\alpha_s}sB_+$ est un groupe. Ceci fournit l'inclusion $s^{-1}B_+s \subset B_+ \cup B^*_{\alpha_s}sB_+$. Mais $B_{\alpha_s} \setminus H$ est inclus dans $B_{-\alpha_s}sB_{-\alpha_s}$ par (v) et (DR2), ce qui permet d'écrire $s^{-1}B_+s \subset B_+ \cup B_{-\alpha_s}sB_{-\alpha_s}sB_+ = B_+ \cup B_{-\alpha_s}B_+$. En reconjuguant par s, on a $B_+ \subset sB_+s^{-1} \cup B^*_{\alpha_s}sB_+s^{-1}$. On a terminé puisque B_{α_s} est dans B_+. □

Vu la symétrie des axiomes de définition des données B-radicielles, on a bien entendu des résultats complètement symétriques pour les racines et les doubles classes de signe opposé. Nous allons maintenant citer deux résultats importants: le théorème d'amalgame et la comparaison avec les BN-paires jumelées. Ces résultats sont artificiellement dissociés l'un de l'autre. Les démonstrations sont conjointes. On ne les reproduira pas, puisque nous allons prouver un résultat analogue pour les données radicielles jumelées, qui, lui, ne semble pas apparaître dans la littérature.

1.4.5. Théorème d'amalgame

Outre son intérêt propre, ce théorème est essentiel dans la théorie des groupes de Kac-Moody, puisqu'il est l'ingrédient principal de la preuve d'unicité de ces groupes sur les corps. La partie concernant les sous-groupes B_+ et B_- est reportée à la conclusion du chapitre concernant les ensembles ordonnés. (Pour la définition d'amalgame, voir la sous-section (5.3.1)).

THÉORÈME. — *Soit $\left(G, (B_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\right)$ une donnée B-radicielle. On désigne par $\tilde{G}$ la limite inductive du système formé des inclusions*

$$H \subset B_\alpha \subset B_{[\alpha;\beta]} \text{ pour chaque paire prénilpotente de racines } \{\alpha;\beta\}$$

$$\text{et } H \subset B_{\pm\alpha_s} \subset \langle B_{\alpha_s}, B_{-\alpha_s}\rangle \text{ pour tout } s \text{ dans } S.$$

On identifie chaque groupe B_α avec son image dans $\tilde{G}$, et on note s' l'image de $\tilde{s}$ dans $\tilde{G}$. Alors, le noyau de l'épimorphisme canonique $\tilde{G} \twoheadrightarrow G$ est le plus petit sous-groupe normal de $\tilde{G}$ contenant les éléments de la forme $s'bs'^{-1}b'^{-1}$ avec b dans B_β et $b' = \tilde{s}b\tilde{s}^{-1}$ dans $B_{s\beta}$.

Référence. [Tit87], théorème 2 (iii) p.567. □

1.4.6. BN-paire jumelée associée. Théorème d'intersection

Dès (1.4.4), il ne manquait plus que l'axiome (BNJ1) des BN-paires jumelées pour mettre en évidence cette structure. Cependant, la preuve de cette assertion n'étant pas une trivialité, on a préféré respecter l'ordre logique. En revanche, une fois ce point prouvé, on a en plus la saturation de la BN-paire jumelée.

THÉORÈME. — (i) *Si $\left(G, (B_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\right)$ est une donnée B-radicielle, alors avec les notations usuelles, le quintuplet (G, B_+, B_-, N, S) est une BN-paire jumelée. En outre, cette BN-paire est* saturée *au sens où $H = B_+ \cap B_-$.*
(ii) *Pour tout élément w de W, on a $B_w = B_+ \cap wB_-w^{-1}$.*

Référence. [Tit87], proposition 4 (ii) p.566 pour (BNJ1), corollaire 1 p.569 pour (BNJ2) et théorème 2 (i) p.567 pour le second point. □

1.5. Données radicielles jumelées

Il s'agit de la structure combinatoire la plus fine dans la veine des généralisations des BN-paires pour les groupes de Kac-Moody. Que cette structure implique les autres n'est à nouveau pas une trivialité. Par exemple, les BN-paires raffinées symétriques et les données B-radicielles

sont des généralisations indépendantes. Pourtant, il semble que pour prouver l'implication (DRJ) $\Rightarrow$ (SRT), on ne puisse pas faire l'économie de la preuve de l'autre implication (DRJ) $\Rightarrow$ (DR).

1.5.1. Axiomes

Les données radicielles jumelées constituent comme les données B-radicielles une combinatoire indexée par les racines d'un système de Coxeter.

DÉFINITION. — *Soit G un groupe possédant une famille de sous-groupes $(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ (indexée par le système de racines d'un groupe de Coxeter W), et contenant un sous-groupe H normalisant chaque sous-groupe U_α. On note U_+ (respectivement U_-) le sous-groupe engendré par les sous-groupes U_α pour α dans Φ_+ (respectivement Φ_-). On dit que le triplet $\left(G,(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi},H\right)$ est une* donnée radicielle jumelée (de type (W,S)) *si les conditions suivantes sont vérifiées.*

(DRJ0) *Pour toute racine α, on a $U_\alpha \neq \{1\}$.*
(DRJ1) *Pour toute paire prénilpotente de racines $\{\alpha;\beta\}$, le groupe des commutateurs $[U_\alpha,U_\beta]$ est inclus dans le groupe $U_{]\alpha;\beta[}$ engendré par les racines de $]\alpha;\beta[$.*
(DRJ2) *Pour tout s de S et tout u de $U_{\alpha_s}\setminus\{1\}$, il existe u' et u'' dans $U_{-\alpha_s}$ tels que $m(u) := u'uu''$ conjugue U_β sur $U_{s\beta}$ pour toute racine β.*
En outre, pour tous u et v de $U_{\alpha_s}\setminus\{1\}$, $m(u)H = m(v)H$.
(DRJ3) *Pour tout s de S, $U_{\alpha_s}\not\subset U_-$ et $U_{-\alpha_s}\not\subset U_+$.*
(DRJ4) *$G = H\langle U_\alpha \mid \alpha\in\Phi\rangle$.*

Les sous-groupes U_α sont appelés les sous-groupes radiciels *de G. Pour toute partie nilpotente ψ de racines, on note U_ψ le sous-groupe engendré par les sous-groupes radiciels U_α pour α dans ψ.*

Ces axiomes diffèrent légèrement de ceux de [Tit92] – axiomes (RGD) – ou de [Abr97]. J. Tits suppose que H est l'intersection des normalisateurs des U_α (ce qui sera prouvé en (1.5.3)), mais son axiome 3 est moins restrictif. P. Abramenko propose un axiome 3 légèrement plus restrictif, dont on verra en fait qu'il est vérifié (voir le théorème d'intersection (3.5.3) suggéré par lui-même). En outre, l'écriture $m(u)$ est abusive dans le sens où elle indique que cet élément ne dépend que de u. C'est en fait le cas puisque le couple (u',u'') est unique ([Tit92], p.257 ligne 31). Pour être correct, il faudrait donc énoncer les axiomes avec $u'uu''$, sans le raccourci de notation $m(u)$ qu'on justifierait seulement par la suite.

1.5.2. Premières propriétés

Les résultats qui suivent ont tous un intérêt technique. Le premier lemme fournit des résultats d'intersection et de dévissage pour des petits sous-groupes de U_ϵ. On désigne par B_+ (respectivement B_-) le sous-groupe HU_+ (respectivement HU_-).

LEMME. — (i) *Pour tout s de S, on a $U_{\alpha_s}\cap B_- = \{1\}$ et $U_{-\alpha_s}\cap B_- = \{1\}$.*
(ii) *Pour toute racine α, le sous-groupe B_α engendré par H et U_α s'écrit $B_\alpha = H\ltimes U_\alpha$.*
(iii) *Pour tout w de W, le produit $U_w := U_{\beta_1}.U_{\beta_2}\ldots U_{\beta_m}$ pour l'ordre cyclique sur $\Phi_{w^{-1}}$ associé à une écriture réduite de w (voir (1.4.1)), est un groupe. Il ne dépend pas de l'écriture réduite choisie, puisque c'est le groupe engendré par les U_{β_i}. On pose $U_1 := \{1\}$.*

REMARQUE. — On verra en (3.5.4) que $U_w = U_+ \cap wB_-w^{-1}$.

Démonstration. Preuve de (i). Supposons qu'on ait u dans $U_{\alpha_s} \cap B_- \setminus \{1\}$. Alors, l'élément $m(u)$ défini par (DRJ2) est dans B_- (d'où son écriture $m(u) = u_-h$).
On regarde alors $m(u)U_{-\alpha_s}m(u)^{-1}$. D'une part, c'est $U_{-s\alpha_s} = U_{\alpha_s}$, mais c'est aussi $u_-U_{-\alpha_s}u_-^{-1}$ donc inclus dans U_-. Ceci donnerait $U_{\alpha_s} \subset U_-$, impossible par (DRJ3).

Preuve de (ii). Par ce qui précède, c'est évident pour une racine simple. En général, on conjugue par un élément de W judicieux en utilisant le fait que $m(u)$ normalise H.

Preuve de (iii). On fait une récurrence sur la longueur de w, la longueur 1 étant triviale. On se donne une écriture réduite $w = s_1.s_2...s_{m+1}$ dans W. Alors, $ws_{m+1} = s_1.s_2...s_m$ est une écriture réduite, et les ordres cycliques sur $\phi_{s_{m+1}w^{-1}}$ et $\phi_{w^{-1}}$ sont compatibles.
Par hypothèse de récurrence, le produit interne $U_{ws_{m+1}} := \prod_{i=1}^{m} U_{\beta_i}$ est un groupe.
Il suffit donc de montrer $U_{\beta_{m+1}}(\prod_{i=1}^{m} U_{\beta_i}) = (\prod_{i=1}^{m} U_{\beta_i})U_{\beta_{m+1}}$. En itérant l'axiome (DRJ1), on obtient:

$$U_{\beta_{m+1}}(\prod_{i=1}^{m} U_{\beta_i}) \subset U_{\beta_1}\left(U_{]\beta_1;\beta_{m+1}[}.U_{\beta_2}.U_{]\beta_2;\beta_{m+1}[}U_{\beta 3}...U_{\beta_m}\right)U_{\beta_{m+1}}$$

Par hypothèse de récurrence et grâce aux inclusions $]\beta_i;\beta_{m+1}[\subset \{\beta_2;...;\beta_m\}$, la parenthèse centrale est dans $U_{\beta_2}.U_{\beta_3}...U_{\beta_m}$. □

1.5.3. Donnée B-radicielle associée

La comparaison entre donnée radicielle jumelée et donnée B-radicielle est un résultat plutôt facile, qui repose sur un lemme concernant les racines dont nous reportons la preuve à la section sur les systèmes de Coxeter (2.2.6).

PROPOSITION. — *Si $\left(G, (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}, H\right)$ est une donnée radicielle jumelée, $\left(G, (HU_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\right)$ est une donnée B-radicielle.*

Démonstration. Déjà les B_α engendrent G puisque $G = H\langle U_\alpha \mid \alpha \in \Phi\rangle$, ce qui prouve (DR0).
L'axiome (DR2) provient du lemme (1.5.2)(i) et (ii), en particulier $H = \bigcap_{\alpha\in\Phi} B_\alpha$.
L'axiome (DR4) provient directement de (DRJ2) et du fait que pour tout u dans $U_{\alpha_s} \setminus \{1\}$, $m(u)$ normalise H.
L'axiome (DR5) provient du lemme (1.5.2)(i).
Pour prouver (DR3), il suffit de montrer que $(\langle H, U_{\pm\alpha_s}\rangle, HU_{\alpha_s}, N_s := H \cup m(u)H, m(u)H)$ est une BN-paire pour u dans $U_{\alpha_s}\setminus\{1\}$, et $m(u)$ défini comme en (DRJ2). $\langle H, U_{\pm\alpha_s}\rangle$ est clairement engendré par HU_{α_s} et N_s, et $m(u)$ normalise H. C'est (BN1). N_s/H est engendré par $m(u)H$ qui est d'ordre deux. C'est (BN2). Il est clair que $m(u)HU_{\alpha_s}m(u)^{-1} = HU_{-\alpha_s} \not\subset HU_{\alpha_s}$. C'est (BN4). (BN3) est également vérifié car par (DRJ2), pour tout élément non trivial v de $U_{-\alpha_s}$, il existe v' et v'' de U_{α_s} tels que $v'vv''$ relève s modulo H. Ainsi, $v'vv''$ est dans $m(u)H$, et donc $U_{-\alpha_s}\setminus\{1\} \subset U_{\alpha_s}m(u)HU_{\alpha_s}$. On a bien $m(u)HU_{\alpha_s}m(u)^{-1} \subset HU_{\alpha_s} \cup HU_{\alpha_s}m(u)HU_{\alpha_s}$, qui est

le seul calcul non évident pour vérifier (BN3). Pour (DR3), on conclut par la décomposition de Bruhat.
Il reste alors (DR1). Par le même raisonnement qu'en (1.5.2)(iii) pour définir U_w, on peut définir $U_{[\alpha;\beta]} := U_{\gamma_0}.U_{\gamma_1}...U_{\gamma_m}$ avec l'ordre du corollaire (2.2.6). Ainsi, $HU_{\gamma_0}.HU_{\gamma_1}...HU_{\gamma_m} = HU_{[\alpha;\beta]}$ est un groupe. □

COROLLAIRE. — (i) *Le sous-groupe H est précisément $\bigcap_{\alpha\in\Phi} N_G(U_\alpha)$. De plus, $N_G(U_+) = B_+$ et $N_G(U_-) = B_-$.*
(ii) *Pour tout w de W, on a*

$$B_w = H \ltimes U_w \text{ et } U_w \cap B_- = \{1\},$$

où B_w est le sous-groupe défini dans le cadre de la donnée B-radicielle $\left(G, (HU_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\right)$.

REMARQUE. — Cette donnée B-radicielle fournit également un groupe N associé à la situation.

Démonstration. Preuve de (i). $\bigcap_{\alpha\in\Phi} N_G(U_\alpha)$ normalise U_+ et U_-. On a donc $\bigcap_{\alpha\in\Phi} N_G(U_\alpha) \subset N_G(U_+) \cap N_G(U_-)$. $N_G(U_+)$ contient B_+ donc est un parabolique standard. En fait, puisque tout élément du groupe de Weyl envoie au moins une racine simple sur une racine négative, $N_G(U_+)$ est exactement B_+. On a de même $N_G(U_-) = B_-$. Ainsi, $\bigcap_{\alpha\in\Phi} N_G(U_\alpha) \subset B_+ \cap B_- = H$, (1.4.6). L'autre inclusion est évidente par définition.

Preuve de (ii). Pour toute racine α, on sait que $B_\alpha = H \ltimes U_\alpha$. Il suffit donc d'appliquer la proposition (1.4.4)(i). Pour le second point, (1.4.4)(vi) assure que $U_w \cap B_- \subset H$. Or, $U_w \cap H = \{1\}$ par ce qui précède. □

REMARQUE. — Le premier point justifie qu'on notera désormais $\left(G, (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\right)$ toute donnée radicielle jumelée, en omettant le H.

1.5.4. BN-paire raffinée symétrique associée

Ce théorème est probablement le plus important parmi les résultats de comparaison. La technique de démonstration est une adaptation de la preuve du théorème d'amalgame et d'intersection pour les données radicielles. Elle fait appel à des notions qui sortent du cadre de ce qu'on a présenté pour l'instant, puisqu'on a besoin d'ensembles ordonnés construits à partir d'immeubles. Un point de la démonstration – le théorème (3.5.4) – sera donc rejeté au chapitre 3 traitant de cette technique. Moyennant quoi on prouvera:

THÉORÈME. — *Soit $\left(G, (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\right)$ une donnée radicielle jumelée indexée par un système de Coxeter (W, S). Alors, (G, N, U_+, U_-, H, S) est une BN-paire raffinée symétrique de groupe de Weyl W. De plus, avec les notations de* (1.2.1), *on a $U_s = U_{\alpha_s}$ pour tout s de S.*

La démonstration de ce théorème fait usage d'un lemme qu'on peut prouver dès à présent, mais qui ne servira qu'au chapitre 3, précisément en (3.5.1).

LEMME. — *Pour tout w et tout ordre cyclique sur $\Phi_{w^{-1}}$, le groupe U_w est limite inductive du système d'inclusions des sous-groupes U_{β_j} et $U_{[\beta_k;\beta_l]}$ pour j, k et l dans $\{1;2;...\ell(w)\}$.*

Démonstration. Ce lemme, en remplaçant la lettre U par la lettre B, est le lemme 5 p.567 de [Tit87]. A. Chosson ([Cho97], section (2.5) lemme 9 p.37) a détaillé cette preuve. C'est à partir de cette version qu'on a travaillé.

On fait une récurrence sur la longueur m de w, le cas $m = 1$ étant trivial. Notons X la limite inductive qu'on veut identifier à U_w. On munit $\psi := \Phi_{w^{-1}}$ de l'ordre associé à l'écriture réduite $w = s_1.s_2...s_{m+1}$. $\psi = \{\beta_1;\beta_2;...\beta_{m+1}\}$.

1. Plongements

On pose $\psi' := \psi \setminus \{\beta_{m+1}\}$. Il est clair qu'il s'agit de l'ensemble $\Phi_{s_{m+1}w^{-1}}$ et que l'ordre induit par ψ est l'ordre cyclique associé à l'écriture réduite $ws_{m+1} = s_1.s_2...s_m$. On pose aussi $\psi'' := \psi \setminus \{\beta_1\}$ et $\psi''' := \psi' \setminus \{\beta_1\}$. On a $\psi'' = s_1\Phi_{(s_2...s_{m+1})^{-1}}$ et $\psi''' = s_1\Phi_{(s_2...s_m)^{-1}}$, avec compatibilité des ordres comme pour ψ'. Pour les trois ensembles de racines, on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence, qui permet de voir $U_{\psi'}$ (respectivement $U_{\psi''}$, $U_{\psi'''}$) le sous-groupe engendré par les groupes radiciels indexés par ψ' (respectivement ψ'', ψ''') comme limite d'un sous-système du système qui définit X. D'où des plongements

$$\phi' : U_{\psi'} \hookrightarrow X, \quad \phi'' : U_{\psi''} \hookrightarrow X, \quad \phi''' : U_{\psi'''} \hookrightarrow X,$$

auxquels s'ajoutent les injections évidentes

$$\phi_i : U_{\beta_i} \hookrightarrow X, \quad \phi_{[\beta_h,\beta_k]} : U_{[\beta_h,\beta_k]} \hookrightarrow X.$$

Il est clair qu'on a les égalités de restrictions:

$$\phi' \mid_{U_{\psi'''}} = \phi''', \quad \phi'' \mid_{U_{\psi'''}} = \phi''',$$

$$\phi_{[\beta_h,\beta_k]} \mid_{U_{\beta_i}} = \phi_i \text{ lorsque } \beta_i \in [\beta_h;\beta_k],$$

$$(0)\ \phi_{[\beta_1;\beta_{m+1}]} \mid_{U_{\beta_i}} = \phi' \mid_{U_{\beta_i}} \text{ lorsque } 1 \leq i \leq m \text{ et que } \beta_i \in [\beta_1;\beta_{m+1}].$$

2. Écriture simplifiée de X

On va montrer qu'on peut écrire X comme le produit interne $\phi_1(U_{\beta_1})\phi''(U_{\psi''})$. Pour cela, il suffit de montrer que ce produit interne est un groupe. On part de quatre relations entre produits internes dans le groupe U_w.

$$(1)\quad U_{[\beta_1;\beta_{m+1}]} \subset U_{\beta_{m+1}}U_{\psi'},$$
$$(2)\quad U_{\psi''} = U_{\beta_{m+1}}U_{\psi'''},$$
$$(3)\quad U_{\psi'} = U_{\psi'''}U_{\beta_1} = U_{\beta_1}U_{\psi'''},$$
$$(4)\quad U_{\beta_1}U_{\beta_{m+1}} \subset U_{[\beta_1;\beta_{m+1}]}.$$

La dernière inclusion est évidente, le reste se justifie comme pour la définition des groupes U_w en (1.5.2)(iii). On applique $\phi_{[\beta_1;\beta_{m+1}]}$ à (1) et (4) pour obtenir (1') et (4'), et ϕ'' et ϕ' à (2) et (3) pour obtenir (2') et (3') (grâce aux égalités de restrictions).

$$(1')\quad \phi_{[\beta_1;\beta_{m+1}]}(U_{[\beta_1;\beta_{m+1}]}) \subset \phi_{m+1}(U_{\beta_{m+1}})\phi'(U_{\psi'}),$$
$$(2')\quad \phi''(U_{\psi''}) = \phi_{m+1}(U_{\beta_{m+1}})\phi'''(U_{\psi'''}),$$
$$(3')\quad \phi'(U_{\psi'}) = \phi'''(U_{\psi'''})\phi_1(U_{\beta_1}) = \phi_1(U_{\beta_1})\phi'''(U_{\psi'''}),$$
$$(4')\quad \phi_1(U_{\beta_1})\phi_{m+1}(U_{\beta_{m+1}}) \subset \phi_{[\beta_1;\beta_{m+1}]}(U_{[\beta_1;\beta_{m+1}]}).$$

(2') et (4') donnent $\phi_1(U_{\beta_1})\phi''(U_{\psi''}) \subset \phi_{[\beta_1;\beta_{m+1}]}(U_{[\beta_1;\beta_{m+1}]})\phi'''(U_{\psi'''})$.
(1') et (3') donnent
$\phi_{[\beta_1;\beta_{m+1}]}(U_{[\beta_1;\beta_{m+1}]}) \subset \phi_{m+1}(U_{\beta_{m+1}})\phi'''(U_{\psi'''})\phi_1(U_{\beta_1}) = \phi_{m+1}(U_{\beta_{m+1}})\phi_1(U_{\beta_1})\phi'''(U_{\psi'''})$.
On obtient donc bien $\phi_1(U_{\beta_1})\phi''(U_{\psi''}) \subset \phi''(U_{\psi''})\phi_1(U_{\beta_1})$.

3. Injectivité

Notons $s : X \twoheadrightarrow U_w$ l'épimorphisme canonique. Il ne reste plus qu'à montrer qu'il est injectif. Prenons un élément dans son noyau, qu'on peut écrire $\phi_1(u_1)\phi''(u'')$ par ce qui précède. Par la propriété universelle de la limite inductive, $s \circ \phi_1$ est l'identité de U_{β_1} et $s \circ \phi''$ celle de $U_{\psi''}$. On a donc $u_1 u'' = 1$, d'où $u_1 \in U_{\beta_1} \cap U_{\psi''}$. En conjuguant par s_1, on voit que $s_1 u_1 s_1^{-1}$ est dans $U_{-\beta_1} \cap U_{s_2 \ldots s_{m+1}}$, donc vaut 1, par le corollaire (1.5.3)(ii). □

Nous allons faire la démonstration du théorème de comparaison en utilisant le théorème d'intersection (3.5.4).

Démonstration. Par symétrie des hypothèses, il suffit de prouver qu'on obtient une BN-paire raffinée. On pose

$$U_+ := \langle U_\alpha \mid \alpha \in \Phi_+ \rangle, \quad U_- := \langle U_\alpha \mid \alpha \in \Phi_- \rangle,$$

$$H := \bigcap_{\alpha \in \Phi} N_G(U_\alpha), \text{ et } N := \langle H, m(u) \mid u \in U_{\alpha_s} \setminus \{1\}, s \in S \rangle.$$

D'après (1.5.3) et (1.4.6), (G, HU_+, HU_-, N, S) est une BN-paire jumelée.

1. *Vérification de* (RT1). G est un groupe de sous-groupes N, U_+, U_-. Toute racine négative est transformée par W d'une racine simple, par conséquent U_- est dans $\langle U_+, N \rangle$. Donc d'après l'axiome (DRJ4), on a bien $G = \langle U_+, N \rangle$. H est distingué dans N puisque c'est le noyau de l'épimorphisme $\nu : N \to W$. H normalise séparément les groupes radiciels, donc U_+ et U_-. Il est clair qu'on peut voir S comme $S := \{m(u) \mid u \in U_{\alpha_s} \setminus \{1\}, s \in S\}H/H$, ce qui justifie les derniers points.

2. *Vérification de* (RT3). On se donne u_+ dans U_+, u_- dans U_- et n dans N tels que $u_+ n u_- = 1$. Déjà, par la décomposition de Birkhoff, cela implique que $n = h$ est dans H. Les intersections $HU_+ \cap U_- = HU_- \cap U_+ = \{1\}$ font voir tout d'abord que $u_+^{-1} = hu_-$, puis h et u_- valent 1. C'est ici qu'on utilise (3.5.4).

3. *Vérification de* (RT2). Le théorème d'intersection permet de voir que $U_{\alpha_s} = U_+ \cap sU_-s^{-1}$. Le point (RT2b) est alors évident. La première partie de (RT2a) découle de (DRJ0), la seconde provient de l'application de (DRJ2) pour un élément non trivial de $U_{-\alpha_s}$ comme dans la vérification de (RD3) en (1.5.3). Pour le point (RT2c), on applique (1.4.4)(vii).
(RT3) permet de voir qu'on a en fait $U_+ = (U_+ \cap sU_+s^{-1})(U_+ \cap sU_-s^{-1})$. C'est ici qu'on utilise (3.5.4). □

1.6. Récapitulatif des comparaisons. Pathologies

Nous allons clore ce chapitre en récapitulant les comparaisons de structures combinatoires et en montrant que d'autres résultats qu'on peut espérer en faisant une traduction combinatoire de propriétés concernant les groupes réductifs ne sont pas nécessairement vrais.

1.6.1. Une dernière comparaison

La proposition qui suit montre qu'il ne manque que la symétrie pour pouvoir intégrer les BN-paires raffinées aux structures jumelées.

PROPOSITION. — *Si (G, N, U_+, U_-, H, S) est une BN-paire raffinée symétrique, (G, HU_+, HU_-, N, S) est une BN-paire jumelée.*

Démonstration. Pour l'axiome (BNJ1), on se donne w dans W et s dans S, avec $\ell(ws) < \ell(w)$. Il suffit de voir que $wB_{-\epsilon}sB_{-\epsilon}$ est dans $B_\epsilon wsB_{-\epsilon}$. D'après la proposition (1.2.3), on sait que $B_{-\epsilon}sB_{-\epsilon} = (U_{-\epsilon} \cap sU_\epsilon s^{-1})sB_{-\epsilon}$. Ainsi, $wB_{-\epsilon}sB_{-\epsilon} = w(U_{-\epsilon} \cap sU_\epsilon s^{-1})w^{-1}wsB_{-\epsilon}$. Or, d'après la précision de la référence de (1.2.2), l'hypothèse $\ell(sw^{-1}) < \ell(w^{-1})$ pour la BN-paire raffinée $(G, N, U_{-\epsilon}, U_\epsilon, H, S)$ implique $w(U_{-\epsilon} \cap sU_\epsilon s^{-1})w^{-1} \subset U_\epsilon$. On a donc bien $wB_{-\epsilon}sB_{-\epsilon} \subset U_\epsilon wsB_{-\epsilon} = B_\epsilon wsB_{-\epsilon}$. L'axiome (BNJ2) est évident par (RT3). □

1.6.2. Tableau récapitulatif. Remarque terminologique

On peut résumer les comparaisons effectuées dans le tableau suivant.

$$\begin{array}{lccc} & \text{Données radicielles jumelées} & \Rightarrow & BN\text{-paires raffinées symétriques} \\ \text{COMPARAISON.—} & \Downarrow & & \Downarrow \\ & \text{Données } B\text{-radicielles} & \Rightarrow & BN\text{-paires jumelées} \end{array}$$

La seule implication laissée en suspens est – nous l'avons déjà dit – la première implication horizontale. Pour une remontée partielle de celle-ci on peut d'ailleurs prouver:

PROPOSITION. — *Soit une BN-paire raffinée symétrique (G, N, U_+, U_-, H, S). Alors, les transformés par N des sous-groupes $U_\epsilon \cap s^{-1}U_{-\epsilon}s$ ($\epsilon = \pm$), vérifient les axiomes* (DRJ0), (DRJ2), (DRJ3) *et* (DRJ4) *des données radicielles jumelées. On parlera donc encore de groupes radiciels. De plus, U_+ (respectivement U_-) est bien le sous-groupe engendré par les groupes radiciels indexés par les racines positives (respectivement négatives).*

Démonstration. Le travail essentiel est de passer à une combinatoire indexée par un groupe de Coxeter. Nous allons utiliser deux autres résultats de Kac et Peterson que nous citons ici *ad hoc* parce qu'ils ne réapparaîtront pas (voir [Kac-Pet84], corollaire (3.2)(i) et proposition (3.4)).

Dans une BN-paire raffinée symétrique (G, N, U_+, U_-, H, S), pour s, t dans S et z dans W, on a

$$U_+ \cap tU_-t^{-1} = z^{-1}(U_+ \cap sU_-s^{-1})z \Leftrightarrow zt = sz \text{ et } \ell(sz) > \ell(z), \text{ et}$$

U_- est engendré par les sous-groupes $w^{-1}U_s w$ pour s dans S, w dans W et $\ell(sw) < \ell(w)$.

1. On définit les groupes radiciels. D'abord, on pose $U_{\alpha_s} := U_+ \cap sU_-s^{-1}$ et $U_{-\alpha_s} := U_- \cap sU_+s^{-1}$. Ensuite, si α est une racine qui s'écrit $\alpha = w\alpha_s$, on pose $U_\alpha := wU_{\alpha_s}w^{-1}$. C'est cette définition qu'il faut justifier puisque l'écriture de la racine n'est pas unique. Il suffit de

considérer le cas où $\alpha_t = w\alpha_s$ avec s, t dans S et w dans W. Ceci implique deux choses: $sw^{-1} = w^{-1}t$ et $w\alpha_s > 0$. La dernière remarque fournit classiquement dans les groupes de Coxeter $\ell(sw^{-1}) > \ell(w^{-1})$. En appliquant la première référence à $z = w^{-1}$, on obtient alors $U_+ \cap tU_-t^{-1} = (w^{-1})^{-1}(U_+ \cap sU_-s^{-1})w^{-1}$, soit $U_{\alpha_t} = wU_{\alpha_s}w^{-1}$.

2. On peut alors vérifier facilement les axiomes annoncés.
(DRJ0) provient du second point de (RT2a) en conjuguant par s. De même, (DRJ2) provient du second point de (RT2a) et de la définition des groupes radiciels. (DRJ3) provient de (RT3) qui implique même $U_+ \cap U_- = \{1\}$. Enfin, il s'agit de voir (DRJ4). D'après (RT2a), on sait déjà que N est inclus dans le sous-groupe engendré par U_+, U_- et H. Ce sous-groupe est (d'après la seconde référence pour U_+ et U_-) dans le sous-groupe engendré par H et les sous-groupes radiciels: $N \subset \langle H, (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\rangle$. D'après (RT1) et la seconde remarque pour U_+, $G = \langle N, U_+\rangle = \langle N, (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi+}\rangle = \langle H, (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\rangle$. □

Les données radicielles jumelées introduites ici sont les généralisations directes pour un W quelconque des *données radicielles* de Bruhat et Tits, [Bru-Tit72] p.107, introduites pour W fini. Le qualificatif *jumelé* apparaît donc superflu; il rappelle cependant que l'on pourra introduire un jumelage pour les immeubles correspondants.

On sait d'ailleurs que les immeubles sphériques sont automatiquement jumelés. Il y a des variantes des données radicielles jumelées (qui diffèrent essentiellement par l'axiome (DRJ1)) quand on peut indexer les groupes U_α par un système de racines en un sens plus classique, voir (6.2.4) et (6.2.5).

Les données B-radicielles donnent aussi lieu à des jumelages; pour être des données radicielles jumelées, il leur manque l'existence d'une décomposition $B_\alpha = HU_\alpha$, c'est-à-dire essentiellement la *propriété de Moufang*.

1.6.3. Une pathologie

Nous terminons par une mise en garde. On a généralisé et on va généraliser des résultats prouvés par Kac et Peterson sur le groupe de Kac-Moody complexe qu'ils ont défini. Certains résultats ont été ou seront même prouvés dans un cadre abstrait (pas seulement pour des valeurs de foncteurs de Tits, mais pour des données radicielles jumelées par exemple). Pourtant, une propriété ne tient pas, alors qu'on pourrait croire ne pas en être loin. Il s'agit du calcul de centralisateur du «tore maximal» d'un groupe de Kac-Moody. Sa non validité empêchera notamment de définir les facteurs de Lévi comme centralisateurs de sous-tores du tore associé à la décomposition de Lévi.
Voici un contre-exemple concret. On peut montrer que les groupes de lacets sont des groupes de Kac-Moody, ce qui valide le contre-exemple qu'on propose ([Rém99b]). Plus précisément, considérons le groupe $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{K}[t, t^{-1}])$, pour un corps $\mathbf{K}$. Par des calculs directs, on peut voir que G est le groupe de Kac-Moody $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{K})$ pour la donnée radicielle de Kac-Moody adjointe minimale associée à la matrice affine de type $\widetilde{A}_{n-1}$ et que le tore maximal T de G est le groupe des matrices diagonales à coefficients dans $\mathbf{K}^\times$ et de déterminant 1. Alors, $Z_G(T)$ est le groupe des matrices diagonales à coefficients monomiaux de déterminant 1, qui contient strictement T. (Pour voir cela, il suffit de faire le test classique sur les matrices de transvection, et de constater que les inversibles de $\mathbf{K}[t, t^{-1}]$ sont les monômes non nuls.)

2. Immeubles (jumelés) abstraits

On veut résumer ici la théorie de base des immeubles abstraits. Il ne sera pas question de réalisation géométrique. La définition de structures jumelées oblige à considérer les deux approches des immeubles, à savoir les *systèmes d'appartements* et les *systèmes de chambres*. Ceci implique de faire des préliminaires adaptés à chacun des points de vue. Là encore, on présente des raffinements orientés vers l'étude des groupes de Kac-Moody, mais avec un intérêt propre. On parlera de *jumelage* et de *condition de Moufang*. Enfin, on fera le lien entre les immeubles et les structures combinatoires de groupes présentées au chapitre précédent. Les références pour les immeubles simples sont [Bro89], [Ron89] et [Gar97]. Pour la théorie jumelée, on peut se reporter à [Tit89], [Tit90], [Tit92] et le deuxième chapitre de [Abr97].

2.1. Deux types de combinatoire

On peut choisir essentiellement deux types de combinatoire pour introduire la notion d'immeuble. La première – historiquement plus ancienne – est celle des complexes simpliciaux (étiquetés), la seconde celle des systèmes de chambres. Dans cette section, on expose seulement les définitions préliminaires. La notion d'*immeuble* n'apparaîtra qu'en (2.3). La référence pour les complexes simpliciaux est l'appendice du chapitre I de [Bro89], celle pour les systèmes de chambres est le chapitre 1 de [Ron89] et celle pour les complexes de chambres étiquetés est le chapitre 3 de [Gar97].

2.1.1. Complexes simpliciaux. Complexes de chambres étiquetés

Les complexes simpliciaux sont des objets assez familiers. Nous nous bornons à rappeler quelques définitions.

DÉFINITION. — *Un* complexe simplicial abstrait *d'ensemble de sommets $\mathcal{V}$ (pour $\mathcal{V}$ un ensemble) est un ensemble $\mathcal{I}$ de parties de $\mathcal{V}$ qu'on appelle* simplexes *(ou* facettes*), qui possède les propriétés suivantes:*

(i) *Chaque singleton $\{v\}$ pour v dans $\mathcal{V}$ est un simplexe.*
(ii) *Chaque partie d'un simplexe est un simplexe, une telle partie étant appelée une* face *du simplexe initial.*

Le rang *d'un simplexe est le cardinal de cette partie de sommets. Le* corang *d'une face dans un simplexe est la différence des rangs des simplexes.*

C'est une définition qui privilégie la notion de sommets, alors que celle qui suit met en valeur la relation de face.

DÉFINITION. — *Un* complexe simplicial *est un ensemble ordonné non vide $(\mathcal{I}, \leq)$ qui vérifie les propriétés suivantes.*

(i) *Pour A et B dans $\mathcal{I}$, il existe un plus grand minorant commun à A et B dans Δ.*
(ii) *Pour tout A de Δ, l'ensemble $\mathcal{I}_{\leq A}$ des minorants de A est en bijection ordonnée avec l'ensemble des parties d'un ensemble.*

Une façon d'envisager l'enrichissement de cette structure consiste à parler des *complexes de chambres*, qui se rapprochent de l'intuition géométrique en introduisant les *galeries*.

DÉFINITION. — (i) *Un complexe simplicial est un* complexe de chambres *si tout simplexe est contenu dans un simplexe maximal – une* chambre *– et si pour toute paire* $\{x; y\}$ *de chambres, il existe une suite* $x = x_1, x_2, \ldots x_n = y$ *de chambres consécutivement* adjacentes, *i.e telle que* x_i *et* x_{i+1} *ont un simplexe de codimension 1 – une* cloison *– en commun.*
(ii) *Une telle suite s'appelle une* galerie. *Une galerie est dite* bégayante *si elle comporte deux termes consécutifs égaux. La* longueur *d'une galerie est le nombre de termes moins* 1 *de cette suite finie. Une galerie est dite* minimale *si elle est de longueur minimale parmi celles qui relient ses extrémités.*
(iii) *Le* diamètre *d'un complexe de chambres est la borne supérieure des longueur de ses galeries.*

Enfin, on peut requérir une condition d'étiquetage.

DÉFINITION. — (i) *Un* étiquetage *d'un complexe de chambres au-dessus d'un ensemble* S *est une application de l'ensemble des sommets vers* S *telle que la restriction de cette application à chaque chambre établisse une bijection entre la chambre et* S. *L'image d'un simplexe par cette application (respectivement le complémentaire dans* S *de cette image) est son* type *(respectivement* cotype*).*
(ii) *Dans ce cas, deux chambres adjacentes sont dites* s-adjacentes *(pour* s *dans* S*), si la bijection d'une des chambres avec* S *induit une bijection de la cloison commune avec* $S \setminus \{s\}$.

On peut poser des conditions pour avoir des flèches entre ces structures.

DÉFINITION. — (i) *Une* flèche simpliciale *entre deux complexes simpliciaux* $\mathcal{I}$ *et* $\mathcal{I}'$ *est une application de l'ensemble des sommets de* $\mathcal{I}$ *vers celui de* $\mathcal{I}'$ *qui envoie simplexe sur simplexe. Un telle flèche est dite* non dégénérée *si elle respecte les rangs des simplexes.*
(ii) *Un* morphisme *de complexes de chambres est une application simpliciale qui envoie une chambre sur une autre en préservant les corangs des faces.*
(iii) *Un* morphisme strict *(ou* étiqueté*) de complexes de chambres étiquetés au-dessus d'un même ensemble* S *est un morphisme de complexes de chambres qui pour tout* s *de* S*, envoie toute paire de chambres* s*-adjacentes sur une paire du même type.*
(iv) *Un* morphisme cohérent *de complexes de chambres étiquetés au-dessus d'un même ensemble* S *est un morphisme de complexes de chambres tel que pour tout* s *de* S*, il existe* t *dans* S *tel que toute paire de chambres* s*-adjacentes s'envoie sur une paire de chambres* t*-adjacentes.*

On peut réinterpréter la notion de complexe étiqueté au moyen des morphismes puisqu'il est clair qu'un complexe de chambres $\mathcal{I}$ est étiqueté par un ensemble S si et seulement s'il existe un morphisme de complexes de chambres entre $\mathcal{I}$ et l'ensemble des parties de S. On peut aussi avoir besoin de développer une étude locale de ces complexes. L'*étoile* est la notion combinatoire adaptée.

DÉFINITION. — *L'*étoile *d'un simplexe dans un complexe simplicial est l'ensemble des simplexes qui le contiennent. C'est un complexe simplicial pour la relation de face induite. Pour un simplexe* A*, on le note* $\mathrm{lk}(A)$.

Il nous reste à formuler un argument très simple et récurrent dans la théorie des immeubles, qu'on appelle *argument standard d'unicité*, voir [Gar97], section (3.2).

LEMME. — *Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}'$ deux complexes de chambres tels que toute cloison de $\mathcal{I}'$ est face d'au plus deux chambres. On fixe une chambre c de $\mathcal{I}$, et on se donne $f : \mathcal{I} \to \mathcal{I}'$ et $g : \mathcal{I} \to \mathcal{I}'$ deux morphismes qui coïncident sur c et qui envoient une galerie non bégayante sur une galerie non bégayante. Alors, $f = g$.*

Démonstration. On part d'une galerie non bégayante issue de c: $(c = c_0, c_1, ...c_n = d)$. On suppose que f et g coïncident sur les chambres d'indice inférieur à $i+1$. Alors fc_i et fc_{i+1} sont deux chambres adjacentes, de cloison commune $fc_i \cap fc_{i+1}$. Cette cloison est aussi $gc_i \cap gc_{i+1} = f(c_i \cap c_{i+1})$ parce que f et g coïncident sur c_i. Il n'y a par hypothèse qu'une seule autre chambre partageant cette cloison avec fc_i. Puisque les deux galeries images sont non bégayantes, on a nécessairement $fc_{i+1} = gc_{i+1}$. On conclut en remarquant que par définition, toute chambre peut être connectée à c par une galerie. □

Remarquons que si $\mathcal{I}'$ est réduit à une chambre, on obtient le même résultat en remplaçant la condition sur les galeries par la condition f et g non dégénérées.

2.1.2. Systèmes de chambres

Il s'agit de l'autre façon d'aborder les immeubles. Les *systèmes de chambres* (à ne pas confondre en général avec les complexes de chambres précédemment introduits) possèdent une définition très large, presque naïve...

DÉFINITION. — *Un* système de chambres *sur un ensemble S est un ensemble $\mathcal{I}$ muni d'une relation d'équivalence par élément s de S, relation qu'on appelle* s-adjacence. *Les éléments de $\mathcal{I}$ sont appelés les* chambres; *on parle de chambres* s-adjacentes *(ou* adjacentes*) si elles sont équivalentes par la relation d'indice s (ou par une des relations).*

L'exemple essentiel de système de chambres est le suivant: si G est un groupe, B un sous-groupe, et $(P_s)_{s \in S}$ est une famille de sous-groupes contenant B, on peut munir $\mathcal{I} := G/B$ d'une structure de système de chambres sur S en décrétant gB s-adjacente à hB si et seulement si $gP_s = hP_s$ (ce qui a un sens puisque pour tout s de S, on a l'inclusion $P_s \supset B$). On peut aussi définir les morphismes de systèmes de chambres.

DÉFINITION. — (i) *Un* morphisme strict *de systèmes de chambres indexés par le même ensemble S est une application $\mathcal{I} \to \mathcal{I}'$ qui respecte la relation de s-adjacence pour chaque s de S. On parle d'*isomorphisme strict *s'il s'agit d'une application bijective, d'*automorphisme strict *si de plus les ensembles but et source coïncident.*
(ii) *Un* morphisme cohérent *de systèmes de chambres indexés par le même ensemble S est une application $\mathcal{I} \to \mathcal{I}'$ telle que pour tout s de S, il existe t dans S tel que toute paire de chambres s-adjacentes s'envoie sur une paire de chambres t-adjacentes. On parle d'*isomorphisme cohérent *s'il s'agit d'une application bijective, d'*automorphisme cohérent *si de plus les ensembles but et source coïncident.*

2.1.3. Notions communes relatives aux galeries

Les galeries sont des objets qui apparaissent dans les deux types d'objets qu'on vient de décrire. Ce qui légitime cette première série de définitions communes, relatives à la *connexité*.

DÉFINITION. — *$\mathcal{I}$ désigne un complexe de chambres étiqueté par S ou système de chambres au-dessus de S.*

(i) *Pour J une partie de S, on appelle J-*galerie *une suite de chambres telles que deux consécutives d'entre elles sont s-adjacentes pour s dans J.*
(ii) *Une partie est dite J-*connexe *si deux chambres de cette partie sont toujours reliées par une J-galerie. Elle est dite* connexe *si elle est S-connexe.*
(iii) *Dans le cas d'un système de chambres, les composantes J-connexes de $\mathcal{I}$ sont appelés* les résidus de type J *de $\mathcal{I}$. En particulier, les chambres sont des résidus (de type $\varnothing$).*
(iv) *La* distance numérique (ou entière) *entre deux chambres est la longueur d'une galerie minimale les joignant.*

On peut aussi parler de *convexité*.

DÉFINITION. — (i) *Si R et R' sont deux résidus de $\mathcal{I}$ (système de chambres), on dit qu'une galerie est* tendue *de R à R' si elle est de longueur minimale parmi les galeries d'une chambre de R à une chambre de R'.*
(ii) *Si F et F' sont des facettes d'un complexe de chambres $\mathcal{I}$, on dit qu'une galerie est* tendue *de F à F' si elle est de longueur minimale parmi les galeries d'une chambre contenant F à une chambre contenant F'.*
(iii) *Un ensemble non vide de chambres de $\mathcal{I}$ (système de chambres ou complexe de chambres étiqueté) est dit* convexe *s'il contient toutes les chambres figurant dans les galeries tendues d'une chambre à une autre de cette partie*

REMARQUE. — Les notions que l'on vient de définir pour les systèmes ou complexes de chambres coïncident en fait par la correspondance entre ces deux structures (2.4.5).

2.2. Complexes de Coxeter

Il existe dans un immeuble des sous-ensembles privilégiés auxquels on essaie systématiquement de se ramener. Ces sous-ensembles qui constituent en quelque sorte des tranches d'immeuble, sont appelés des *appartements*. Leur combinatoire est régie par l'action d'un groupe de Coxeter W. Le complexe de Coxeter de W est précisément la structure combinatoire que l'on attache à chaque appartement d'un immeuble de groupe de Weyl W.

2.2.1. Le complexe de Coxeter d'un système de Coxeter

On part d'un système de Coxeter (W, S) attaché à la matrice de Coxeter $M = [m_{st}]_{s,t\in S}$.

$$W := \langle s \mid (st)^{m_{st}} \rangle$$

Au titre d'immeuble, le *complexe de Coxeter* associé va cumuler les deux structures présentées dans la section précédente. On peut tout d'abord le présenter comme un système de chambres. Dans ce cas, le complexe de Coxeter n'est rien d'autre qu'un cas particulier de l'exemple de complexe de chambres de (2.1.2).

DÉFINITION. — *Le* complexe de Coxeter *associé à (W, S) est le système de chambres d'ensemble de chambres W, et tel que pour chaque s-adjacence ($s \in S$), la partition associée est formée des paires $\{w; ws\}$. On note $\Sigma(W, S)$ le complexe ainsi obtenu.*

Une propriété importante des complexes de Coxeter est l'existence d'une *fonction distance* sur $\Sigma(W, S)$, qu'on retrouvera comme axiome dans la définition des immeubles généraux.

DÉFINITION. — (i) *La* W-distance *sur $\Sigma(W, S)$ est l'application*

$$d : \Sigma(W, S) \times \Sigma(W, S) \to W$$
$$(w, w') \mapsto w^{-1}w'.$$

(ii) *La* distance entière *$d_{\mathbf{N}}(w, w')$ de la chambre w à la chambre w' est la longueur de l'élément $d(w, w')$ de W relativement au système de générateurs canoniques S de W.*

Une présentation alternative consiste à mettre en évidence un complexe simplicial. Précisément, le fait que l'ensemble qu'on va proposer possède une structure simpliciale demande un certain travail sur les groupes de Coxeter. Voici la définition.

LEMME/DÉFINITION. — *Le* complexe de Coxeter *de (W, S) est ensemblistement $\{wW_J \mid w \in W, J \subset S\}$. C'est un complexe simplicial pour la relation d'inclusion renversée. C'est un complexe de chambres d'ensemble de chambres les singletons $\{w\}$ pour w dans W. Un étiquetage naturel est fourni en décrétant le simplexe wW_J de* type *J, i.e., de* cotype *$S \setminus J$.*

Référence. [Cho97]ou [Bro89], p.58-59, à l'inversion du type et du cotype près. □

Le complexe simplicial de la seconde présentation n'est rien d'autre que l'ensemble des résidus du système de chambres de la première présentation. La facette wW_J est le J-résidu de la chambre w. C'est ainsi que l'on passera d'un point de vue à l'autre. La notion de s-adjacence coïncide avec la définition initiale puisque les s-cloisons du second point de vue sont les classes $w\langle s\rangle$. On note toujours $\Sigma(W, S)$ ce complexe simplicial.

2.2.2. Groupes d'automorphismes

L'étude des automorphismes est importante parce qu'elle est à la base d'arguments d'unicité dans la définition de certaines flèches entre appartements dans un immeuble.

LEMME. — (i) *Les endomorphismes cohérents de $\Sigma(W, S)$ sont en bijection avec les couples (ϕ', ϕ'') où ϕ' est une application de W dans lui-même et ϕ'' est une permutation de S, le tout vérifiant $\phi'(ws) = \phi'(w)$ ou $\phi'(w)\phi''(s)$ pour tout w de W et tout s de S.*
(ii) *L'action de W par translations à gauche fournit un plongement de W dans le groupe des automorphismes de $\Sigma(W, S)$ préservant le type, c'est-à-dire stricts.*
(iii) *Le groupe* $\mathrm{Diag}(W, S)$ *des automorphismes de diagramme du système de Coxeter $\Sigma(W, S)$ est naturellement isomorphe au groupe des automorphismes cohérents qui fixent la chambre standard.*
(iv) $\mathrm{Diag}(W, S)$ *normalise W dans le groupe des automorphismes cohérents de $\Sigma(W, S)$. W opère simplement transitivement sur les chambres de $\Sigma(W, S)$. Par conséquent, on a*

$$\mathrm{Aut}\big(\Sigma(W, S)\big) \cong W \rtimes \mathrm{Diag}(W, S).$$

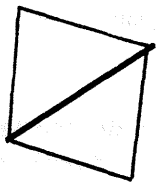
Référence. [Bro89], (III.3) p.63-66. □

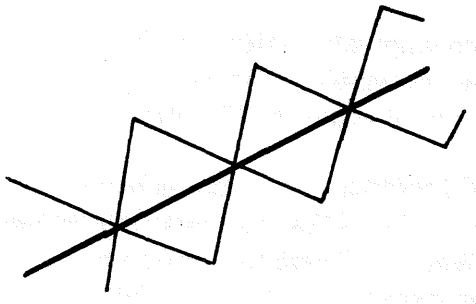
2.2.3. Murs et réflexions

Les murs et les réflexions sont des objets qu'il est commode de définir au niveau des complexes de Coxeter. Ils constituent le principal moyen de faire de la géométrie pour étudier les groupes de Coxeter.

DÉFINITION. — (i) *Une* réflexion *est un conjugué d'un générateur canonique de* S.
(ii) *Le* mur *d'une réflexion est l'ensemble des simplexes de* $\Sigma(W,S)$ *fixés par la réflexion. Le mur attaché à une réflexion* r *sera noté* M_r.
(iii) *Une galerie* $(c_0, c_1, \ldots\ c_n)$ traverse *un mur* M_r *s'il existe un indice* i *tel que la réflexion* r *intervertit les chambres* c_i *et* c_{i+1}.

Dessin.





Le dessin de gauche est là pour rappeler qu'une cloison est la réunion de deux chambres adjacentes. Le dessin de droite représente donc un mur. Voici un lemme sur les traversées de murs et les galeries minimales, qui va permettre de définir les *racines* de $\Sigma(W,S)$.

LEMME. — (i) *Une galerie minimale traverse au plus une fois n'importe quel mur.*
(ii) *Étant donnés deux chambres* c *et* d *et un mur* M, *la parité du nombre de traversées de* M *par une galerie de* c *vers* d *ne dépend que des chambres et du mur.*

Référence. [Ron89], lemme (2.5) p.13. □

2.2.4. Racines et pliages

On va retrouver ici sous forme plus géométrique la notion de racine d'un système de Coxeter. Passons d'abord par une définition intermédiaire. On se fixe un mur M_r correspondant à une réflexion r. On veut justifier qu'on peut partitionner le complexe $\Sigma(W,S)$ en deux sous-ensembles complémentaires. Pour cela, on fait un choix de chambre, et on decrète qu'une chambre est *paire* ou *impaire* suivant la parité du nombre de traversées de M_r par les galeries de c vers d. (Ceci est justifié par le lemme précédent.)

DÉFINITION. — *La parité définie ci-dessus partitionne* W *en deux parties de chambres, qu'on appelle* racines. *On dit que ces racines sont l'*opposée *l'une de l'autre. La paire de racines obtenue est notée* $\{\pm\alpha_r\}$, *en référence à la réflexion qui définit le mur.*

On peut préciser la correspondance entre les racines, les réflexions et les murs.

PROPOSITION. — (i) *On se donne α une racine et c et d deux chambres adjacentes, telles que c est dans α et d dans $-\alpha$. Alors, on peut décrire α de la façon suivante.*

$$\alpha = \{x \in W \mid d_{\mathrm{N}}(x, c) < d_{\mathrm{N}}(x, d)\}.$$

(ii) *Les ensembles des paires de racines opposées, des murs et des réflexions sont tous les trois en bijection.*

Référence. [Ron89], proposition (2.6) p.14. □

DÉFINITION. — *Le* bord *d'une racine α est le mur associé à la paire $\{\pm\alpha\}$. On le note $\partial\alpha$. On note r_α la réflexion qui lui est associée.*

Il existe une classe d'applications du complexe de Coxeter dans lui-même, contractantes pour les galeries (qui permet donc de traiter les questions de convexité).

DÉFINITION. — *Soit α une racine du complexe de Coxeter $\Sigma(W, S)$.*
L'application ρ_α qui attache à une chambre c la chambre c ou $r_\alpha(c)$ suivant que c est dans α ou dans $-\alpha$ est un morphisme strict de système de chambres. On l'appelle pliage *suivant α.*

Justification. Le seul cas où la conservation des adjacences est éventuellement non immédiate, est celui où deux chambres sont adjacentes par une cloison du mur. Mais alors, elles ont même image. □

LEMME. — *Un pliage est une application* contractante, *c'est-à-dire qu'elle diminue la longueur entière des galeries.*

Démonstration. Dès qu'une galerie traverse le mur $\partial\alpha$, son image bégaie au niveau de la traversée. □

2.2.5. Convexité et projection

Il est naturel de se demander si les objets qu'on a définis sont convexes. Cette première série de résultats traite le cas des racines.

PROPOSITION. — (i) *Les racines d'un complexe de Coxeter sont convexes.*
(ii) *Soient c et d deux chambres. Soit $(c = c_0, c_2, \ldots c_m = d)$ une galerie minimale joignant c à d. On désigne par β_i la racine contenant c_i sans contenir c_{i+1} (pour i de 0 à $m-1$).*
Alors, les racines β_i sont toutes distinctes et sont précisément toutes les racines contenant c sans contenir d. En particulier, il y a $d_{\mathrm{N}}(c, d)$ telles racines.
(iii) *Si c et d sont deux chambres, alors une chambre de $\Sigma(W, S)$ apparaît dans une galerie minimale de c à d si et seulement si elle est appartient à toutes les racines contenant simultanément c et d.*

Référence. [Ron89], lemme (2.6) p.14 pour le premier point, proposition (2.5) p.15 pour le deuxième et proposition (2.8) p.16 pour le troisième. □

Remarquons que si c et d sont deux chambres de $\Sigma(W,S)$, on peut toujours écrire l'une comme transformée de l'autre par un élément de W. Par exemple $d = wc$. Dans ce cas, $d_{\mathrm{N}}(c,d)$ vaut $\ell(w)$. Les théorèmes de projection sont des outils fondamentaux dans bien des situations (espaces de Hilbert, preuve par Serre du théorème de point fixe de Bruhat-Tits pour les immeubles affines). Ici aussi, on peut proposer un analogue combinatoire de ce type de résultat.

THÉORÈME. — *Soient $w \in W$ une chambre et R un résidu de $\Sigma(W,S)$. Il existe une chambre de R plus proche de w, que l'on note* $\mathrm{proj}_R w$. *Pour toute chambre de R, il existe une galerie minimale de cette chambre vers w qui passe par* $\mathrm{proj}_R w$.

Référence. [Ron89], théorème (2.9) p.16. □

Le corollaire de ce théorème est un résultat positif concernant la convexité d'un autre objet défini précédemment.

COROLLAIRE. — *Toute galerie minimale entre chambres d'un même J-résidu est une J-galerie. En particulier, les résidus sont convexes.*

Démonstration. [Ron89], lemme (2.10) p.17. □

2.2.6. Signe des racines. Paires prénilpotentes de racines

La notion de paire prénilpotente de racines apparaît quand il s'agit d'indexer des structures combinatoires raffinant les BN-paires. Il s'agit de voir que ce qu'on avait défini alors comme système de racines d'un groupe de Coxeter en (1.4.1) coïncide avec ce qu'on vient de faire. (α_s était définie par $\alpha_s := \{w \in W \mid \ell(sw) > \ell(w)\}$). Cette correspondance est établie par la proposition (2.2.4). En effet, on a la suite d'équivalences:

$$z \in w\alpha_s \Leftrightarrow w^{-1}z \in \alpha_s \Leftrightarrow \ell(sw^{-1}z) > \ell(sw^{-1})$$

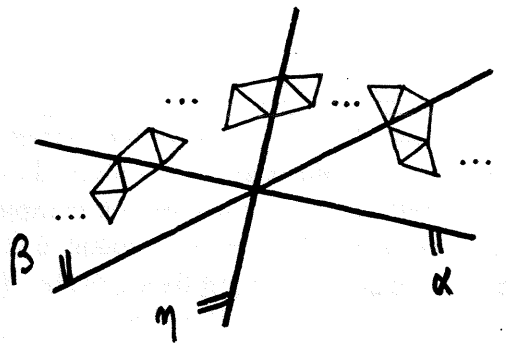
$$\Leftrightarrow \ell(z^{-1}ws) > \ell(z^{-1}w) \Leftrightarrow d_{\mathrm{N}}(z,w) < d_{\mathrm{N}}(z,ws),$$

ce qui signifie que z appartient à la racine définie par la paire de racines adjacentes $\{w; ws\}$. On peut alors énoncer le lemme utile à la comparaison entre donnée radicielle jumelée et donnée B-radicielle (1.5.3).

LEMME. — *Soient $\{\alpha;\beta\}$ une paire prénilpotente de racines, et $\underline{c}$ une galerie minimale traversant $\partial\alpha$ avant $\partial\beta$ (on suppose que le début de la galerie est dans $\alpha \cap \beta$, ce qui oriente les traversées). Alors $\partial\alpha$ est le premier mur parmi les $\partial\eta$ pour η dans $[\alpha;\beta]$ à être traversé par $\underline{c}$. $\partial\beta$ est le dernier.*

Démonstration. On écrit $\underline{c} = (c_1, c_2, \ldots c_N)$. Pour tout indice $n < N$, l'hypothèse implique que dès que α contient la chambre c_n, β la contient également. Soit γ la première racine de $[\alpha;\beta]$ telle que $\underline{c}$ traverse $\partial\gamma$, et soit n tel que $c_n \in \gamma$ et $c_{n+1} \in -\gamma$. Si $\gamma \neq \alpha$, alors c_{n+1} est encore dans α donc dans β. Ainsi, c_{n+1} est dans $\alpha \cap \beta$ sans être dans γ, ce qui contredit le fait que γ est dans $[\alpha;\beta]$. L'assertion portant sur β se prouve de la même façon en remplaçant les racines par leurs opposées. □

Dessin.



COROLLAIRE. — (i) *Soit Ψ une partie convexe de racines. Alors, les éléments de Ψ peuvent être ordonnés en une suite $(\gamma_0, \gamma_1, \dots \gamma_m)$ de telle sorte que $[\gamma_i, \gamma_j] \subset \{\gamma_i, \gamma_{i+1}, \dots \gamma_j\}$ pour $1 \leq i \leq j \leq m$.*
(ii) *Soit $\{\alpha; \beta\}$ une paire prénilpotente de racines. Alors, les éléments de $[\alpha; \beta]$ peuvent être ordonnés en une suite $(\gamma_0 = \alpha, \gamma_1, \dots \gamma_m = \beta)$ de telle sorte que $[\gamma_i, \gamma_j] \subset \{\gamma_i, \gamma_{i+1}, \dots \gamma_j\}$ pour $1 \leq i \leq j \leq m$.*

Démonstration. On choisit une chambre appartenant à l'intersection des racines de Ψ, une autre dans l'intersection des opposées et enfin une galerie minimale reliant la première à la seconde. On numérote les racines dans l'ordre de traversée des murs correspondants. Alors, le lemme précédent assure qu'on a la propriété voulue. Le second cas est identique. □

Les ordres ainsi obtenus coïncident avec les ordres cycliques quand l'ensemble convexe est une $\Phi_{w^{-1}}$ pour w dans W et qu'on a une écriture réduite de w: il suffit de prendre la galerie minimale reliant 1 à w correspondant à cette écriture. Nous allons maintenant passer aux immeubles généraux, en présentant successivement les deux points de vue préliminaires.

2.3. Les immeubles comme systèmes de chambres

Ce point de vue est historiquement le plus récent. Il est particulièrement bien adapté à la construction de la réalisation métrique à courbure négative généralisée dont on a besoin pour les théorèmes de conjugaison et la descente galoisienne des groupes de Kac-Moody. La référence pour la définition des immeubles en termes de W-distance est [Tit92].

2.3.1. W-distance

Les axiomes des immeubles comme systèmes de chambres font intervenir une distance à valeurs dans un groupe de Coxeter de matrice M, semblable à celle qu'on a définie dans le cas des complexes de Coxeter.

DÉFINITION. — *Soit (W, S) un système de Coxeter. Un* immeuble de type (W, S) (ou de type M) *est un couple $(\mathcal{I}, d)$ où $\mathcal{I}$ est un ensemble et d est une application W-*distance $d : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \to W$ *qui vérifie pour tous x et y de $\mathcal{I}$ les conditions suivantes, en notant $w = d(x, y)$ pour faire court.*

(IM1) *$w = 1$ si et seulement si $x = y$.*
(IM2) *Si z dans $\mathcal{I}$ vérifie $d(y, z) = s$ pour s dans S, alors $d(x, z)$ vaut ws ou w.*
En outre, si $\ell(ws) > \ell(w)$, alors $d(x, z)$ vaut ws.
(IM3) *Pour tout s de S, il existe z dans $\mathcal{I}$ tel que $d(y, z) = s$ et $d(x, z) = ws$.*

Il est clair qu'en décrétant deux éléments de $\mathcal{I}$ *s-adjacents* si et seulement s'ils sont égaux ou à distance s, on fait de $\mathcal{I}$ un système de chambres au-dessus de S, d'où l'emploi dès à présent de tout le vocabulaire de cette combinatoire. À l'évidence, un complexe de Coxeter pour sa W-distance est un immeuble. Les complexes de Coxeter forment une classe très particulière d'immeuble (dits *minces*), comme le suggère la définition suivante. (On notera que d'après (IM3), une cloison est contenue dans au moins deux chambres).

DÉFINITION. — *Un immeuble est dit* mince *(ou* fin*) si pour chaque s de S, les classes d'équivalence de s-adjacence (i.e., les résidus correspondant aux cloisons) comportent exactement deux chambres. Il est dit* épais *si ces résidus comportent toujours strictement plus de deux chambres.*

Ces deux espèces d'immeubles sont complémentaires l'une de l'autre. Un point essentiel est que les immeubles épais contiennent de nombreux immeubles minces qu'on appelle des *appartements*. Une grande partie des propriétés des immeubles provient de l'étude des morphismes de systèmes de chambres d'un immeuble dans un complexe de Coxeter ou dans l'autre sens. Enfin, on trouvera de plus petits immeubles épais dans un immeuble épais ambiant, à savoir les résidus.

REMARQUE. — Notons en outre que nos immeubles sont des immeubles au sens de [Ron89], notamment des systèmes de chambres connexes au-dessus de S. Pour voir cela, on définit une structure de système de chambres (connexe) en déclarant deux chambres s-adjacentes si et seulement si elles sont égales ou à W-distance s. La W-distance au sens ci-dessus se retrouve alors à partir de cette structure. En effet, la W-distance d'une chambre c à une chambre d est l'élément de W associé à une (en fait, toute) galerie minimale de c vers d. La vérification du fait que cette application est une W-distance au sens de [Ron89], (3.1) p.27, est facile dès lors qu'on a introduit la notion de *type* d'une galerie.

2.3.2. Relèvements des isométries. Appartements

Commençons en étudiant les flèches des parties de complexes de Coxeter à valeurs dans un immeuble épais, et en particulier les relèvements de ces applications à tout le complexe de Coxeter.

DÉFINITION. — (i) *Un* morphisme strict *entre immeubles de même type (W,S) est une application qui envoie une paire de chambres s-adjacentes sur des chambres s-adjacentes pour tout s de S.*
(ii) *Un* morphisme cohérent *entre immeubles de type M est une application d'un tel immeuble vers un autre, tel que pour tout s de S, il existe t dans S tel que toute paire de chambres s-adjacentes soit envoyée sur une paire de chambres t-adjacentes.*

REMARQUE. — 1. Ces définitions sont des cas particuliers de celles données en (2.1.2).

2. Une isométrie (pour les W-distances) entre immeubles de même type (W,S) est un morphisme strict. La réciproque est vraie si l'application est bijective.

THÉORÈME. — *Toute isométrie d'une partie du complexe de Coxeter $\Sigma(W,S)$ dans un immeuble $(\mathcal{I},d)$ de type (W,S) se relève en une isométrie de $\Sigma(W,S)$ dans $(\mathcal{I},d)$.*

Référence. [Ron89], théorème (3.6) p.31. □

Une conséquence de ce théorème est qu'il y a beaucoup de parties de $\mathcal{I}$ isométriques à $\Sigma(W,S)$.

DÉFINITION. — *Un* appartement *de $(\mathcal{I},d)$ est une image isométrique de $\Sigma(W,S)$ dans $(\mathcal{I},d)$. Une* racine *de $(\mathcal{I},d)$ est une racine d'un de ses appartements.*

Avec ce vocabulaire, une conséquence du théorème s'énonce ainsi.

COROLLAIRE. — *Deux chambres d'un immeuble sont toujours contenues dans un même appartement.* □

2.3.3. Rétractions et convexité dans les immeubles

Nous allons maintenant définir une classe de flèches orientées dans l'autre sens, *i.e.*, de l'immeuble sur un de ses appartements. Ces applications ont la vertu d'être contractantes, et donc de permettre de traiter les problèmes de convexité. Partons de la remarque suivante. Une isométrie $\alpha : \Sigma(W,S) \to (\mathcal{I},d)$ est entièrement déterminée par la donnée de son image globale $\alpha(W)$ et dans cette image, de l'image de la chambre 1. C'est évident puisque l'identité est le seul automorphisme strict à fixer la chambre 1 (ou toute autre chambre). Ceci justifie la définition des *rétractions.*

DÉFINITION. — *Soit c une chambre dans un appartement $\mathbf{A} = \alpha(W)$. La* rétraction sur $\mathbf{A}$ centrée en c *est l'application $\rho_{\mathbf{A},c} := \alpha \circ d(c,-)$. C'est un morphisme strict de $(\mathcal{I},d)$ sur $(\mathbf{A},d)$, et puisque α est une isométrie, $\rho_{\mathbf{A},c}\,|_{\mathbf{A}}$ est l'identité de $\mathbf{A}$.*

Voici donc les propriétés de convexité et de projection.

THÉORÈME. — (i) *Si $\mathbf{A}$ est un appartement contenant une chambre c et un simplexe σ, toute galerie tendue de c vers σ est contenue dans $\mathbf{A}$. En particulier, $\mathbf{A}$ est convexe.*
(ii) *Si σ est un simplexe de $(\mathcal{I},d)$ et c est une chambre, il existe un unique chambre dans le résidu de σ plus proche de c. On la note* $\mathrm{Proj}_\sigma c$.

Référence. [Ron89], théorème (3.8) et corollaire (3.9) p.33. □

2.3.4. Résidus

Nous terminons en présentant un autre type d'inclusion d'immeuble dans un autre.

PROPOSITION. — *Tout J-résidu de l'immeuble $(\mathcal{I},d)$ est un immeuble de type (W_J,J).*

Référence. [Ron89], théorème (3.5) p.30. □

Un problème suggéré par cette proposition dans le cadre d'une étude de groupe sera le suivant. Comment exploiter cette stabilité de structure pour l'étude des sous-groupes raisonnables du groupe ambiant? On pense dans le cas Bruhat-Tits, aux réductions modulo l'uniformisante des structures entières attachées aux facettes, qui ont pour immeuble le résidu de cette facette. Pour les groupes à donnée radicielle jumelée, on retrouvera ce type de considération avec les décompositions de Lévi.

2.4. Les immeubles comme systèmes d'appartements

Les systèmes d'appartements forment l'autre point de vue pour la combinatoire des immeubles. Cette approche est caractérisée par la présence d'une donnée supplémentaire – le *système d'appartements* précisément – qui n'est pas une donnée canonique (sauf dans le cas sphérique). Jointe au fait qu'on a dans les cas classiques (et dans le cas Kac-Moody comme on le verra) des résultats dictionnaires entre sous-groupes de Cartan et appartements d'un système, cette remarque enrichit les techniques immobilières de théorie des groupes.

2.4.1. Systèmes d'appartements

DÉFINITION. — *Un* immeuble *est un complexe simplicial $\mathcal{I}$ qui peut être recouvert par la réunion d'une famille de sous-complexes Σ – les* appartements *– vérifiant:*

(I0) *Chaque appartement est un complexe de Coxeter.*
(I1) *Deux simplexes quelconques de $\mathcal{I}$ sont toujours contenus dans un appartement.*
(I2) *Si Σ et Σ' sont deux appartements contenant deux simplexes fixés A et B de $\mathcal{I}$, il existe un isomorphisme $\Sigma \xrightarrow{\sim} \Sigma'$ fixant $A \cup B$.*

Toute collection $\mathcal{A}$ de sous-complexes de $\mathcal{I}$ vérifiant les trois axiomes précédents est appelée système d'appartements *de $\mathcal{I}$. Les simplexes d'un immeuble seront appelés ses* facettes.

Une première étape dans l'étude des immeubles de ce point de vue est de montrer l'équivalence de quelques variantes de l'axiome (I2). En fait, on peut prouver.

PROPOSITION. — *En présence des autres axiomes,* (I2) *peut être remplacé par:*

(I2′) *Si Σ et Σ' sont deux appartements contenant un simplexe A et une chambre C de $\mathcal{I}$, il existe un isomorphisme $\Sigma \xrightarrow{\sim} \Sigma'$ fixant $A \cup C$;*

ou encore par:

(I2″) *Si Σ et Σ' sont deux appartements contenant une chambre C de $\mathcal{I}$, il existe un isomorphisme $\Sigma \xrightarrow{\sim} \Sigma'$ fixant tous les simplexes que Σ et Σ' ont en commun.*

Référence. [Bro89], p.77. □

Un autre affaiblissement des axiomes est possible *a priori*. Il concerne l'axiome (I0). En fait, si on fait l'hypothèse d'épaisseur de l'immeuble (*i.e* si on suppose que chaque cloison est toujours dans plus de deux chambres), il suffit alors de supposer que les appartements sont des complexes de chambres minces. On montre alors que les autres axiomes impliquent que les appartements sont nécessairement des systèmes de Coxeter ([Bro89], p.97).

2.4.2. Étiquetabilité. Matrice de Coxeter des appartements

Un immeuble $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ est un complexe de chambres. C'est une conséquence immédiate de l'axiome (I1), et du fait que les appartements sont eux-mêmes des complexes de chambres. Il est à remarquer qu'on n'a fait aucune hypothèse d'étiquetabilité. C'est à nouveau une conséquence (plus subtile) des axiomes. Ce fait rattache cette version des immeubles à la section (2.1.1).

THÉORÈME. — (i) *Un immeuble $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ est un complexe de chambres étiquetable. On peut en outre supposer que les isomorphismes de* (I2) *entre appartements préservent les types.*
(ii) *À partir de chaque appartement, on peut déterminer de manière naturelle une matrice de Coxeter. Pour un appartement Σ, il suffit de poser pour tous s, t de S, $m_{st} := \mathrm{diam}_\Sigma\big(\mathrm{lk}(A)\big)$ pour une facette quelconque de type $\{s;t\}$.*
(iii) *La matrice M ainsi obtenue dépend seulement du système d'appartements, et chaque appartement est isomorphe comme système de chambres étiqueté au complexe de Coxeter attaché à M.*

Référence. [Bro89], proposition 1 et proposition 2 p.78. □

On peut alors définir les flèches entre immeubles en ce sens.

DÉFINITION. — (i) *Un* morphisme strict *entre immeubles au sens des systèmes d'appartements est un morphisme strict des complexes de chambres étiquetés correspondants.*
(ii) *Un* morphisme cohérent *entre immeubles au sens des systèmes d'appartements est un morphisme cohérent des complexes de chambres étiquetés correspondants.*

Sous la formulation du théorème, M dépend encore éventuellement du système d'appartements. Il faut développer la théorie des rétractions comme à la section suivante pour voir qu'il n'en est rien. Enfin, on peut prouver un résultat de transmission de structure aux étoiles, analogue à celui concernant les résidus dans les systèmes de chambres.

PROPOSITION. — *Si $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ est un immeuble, toute étoile de facette est un immeuble, de système d'appartements l'ensemble des traces d'appartements sur cette étoile.*

Référence. [Bro89], proposition 3 p.79. □

2.4.3. Rétractions

Une théorie des rétractions peut être développée dans le cadre des systèmes d'appartements. Elle permet là aussi de traiter les problèmes de convexité. Puisque la matrice de Coxeter était définie en termes de diamètre d'étoile de facettes, on obtient que cette matrice ne dépend pas du système d'appartements. Cette invariance est l'ébauche d'un passage des systèmes d'appartements vers les systèmes de chambres puisque ces derniers sont définis à partir de la donnée d'un système de Coxeter.

PROPOSITION. — *Pour chaque appartement Σ de $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$, il existe un morphisme strict de complexes de chambres étiquetés de $\mathcal{I}$ sur Σ de restriction à Σ l'identité de Σ.*

Référence. [Bro89], proposition 1 p.85. □

Ceci a pour conséquence le fait qu'on peut souvent se restreindre à un appartement pour mesurer des distances, et la définition de la matrice de Coxeter d'un immeuble indépendamment de son système d'appartements.

COROLLAIRE. — (i) *La distance numérique entre deux chambres d'un immeuble, c'est-à-dire la longueur d'une galerie minimale les joignant, est égale à la distance numérique calculée dans n'importe quel appartement les contenant.*
(ii) *Le diamètre d'un immeuble est le diamètre d'un quelconque de ses appartements.*
(iii) *La matrice de Coxeter des appartements d'un immeuble ne dépend que de cet immeuble. Pour tous s, t de S, son coefficient m_{st} est le diamètre de toute étoile de facette de type $\{s;t\}$.*

Référence. [Bro89], corollaire 1 p.85 et corollaire 2 p.86. □

On a pour l'instant utilisé le fait qu'on pouvait rétracter de manière compatible aux structures un immeuble sur un appartement, mais on n'a pas encore formalisé cette possibilité. En effet, la simple donnée d'un appartement sur lequel on veut effectuer une rétraction ne lève pas toutes les indéterminations.

PROPOSITION/DÉFINITION. — *Pour chaque donnée d'une chambre C dans un appartement Σ, il existe un morphisme strict de complexes de chambres étiquetés de $\mathcal{I}$ vers Σ caractérisé par le fait qu'il fixe la chambre C et établit un isomorphisme de tout appartement contenant C vers Σ. On note cette application $\rho_{\Sigma,C}$ et on l'appelle* rétraction sur Σ centrée en C.

Les rétractions jouissent des propriétés suivantes.

PROPOSITION. — (i) *La préimage par $\rho_{\Sigma,C}$ de toute face de C est réduite à cette face elle-même.*
(ii) *$\rho_{\Sigma,C}$ préseve la distance de toute chambre à C. Autrement dit, pour toute chambre D, $d(C, \rho_{\Sigma,C}(D)) = d(C, D)$.*
(iii) *$\rho_{\Sigma,C}$ est précisément l'unique morphisme (strict) de systèmes de chambres étiquetés $\mathcal{I} \to \Sigma$ qui fixe C et préserve les distances à cette chambre.*

Référence. [Bro89], proposition 2 p.86. □

2.4.4. Le système complet d'appartements

Un autre fait intéressant est l'existence d'un plus grand système d'appartements, et d'une caractérisation de ses appartements.

THÉORÈME/DÉFINITION. — (i) *Dans un immeuble $\mathcal{I}$, la réunion quelconque de systèmes d'appartements est encore un système d'appartements. Il existe donc un plus grand système d'appartements, qu'on appelle* système complet d'appartements.
(ii) *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-complexe Σ de $\mathcal{I}$ soit un appartement du système complet, est qu'il possède l'une des propriétés suivantes.*
(iia) *Il existe un isomorphisme étiqueté de Σ sur le complexe de Coxeter $\Sigma(W, S)$*
(iib) *Σ est mince et convexe.*

Référence. [Bro89], théorème p.87 et remarque p.88. □

En fait, dans le cas d'un immeuble sphérique (*i.e.*, à groupe de Weyl fini), cette question est caduque en vertu du résultat qui suit.

THÉORÈME. — *Si $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ est un immeuble sphérique, alors $\mathcal{A}$ est nécessairement le système complet d'appartements. L'ensemble des chambres d'un appartement quelconque peut en outre être décrit comme la réunion des galeries minimales entre deux de ses chambres à distance maximale.*

Référence. [Bro89], théorème 1 p.93. □

2.4.5. Répartition des rôles

On sait former un système de chambres à partir d'un complexe de chambres étiqueté et vice-versa si le système est connexe.

Si $(\mathcal{I}, \mathcal{V})$ est un complexe de chambres étiqueté par S, son *système de chambres associé* est l'ensemble des chambres où l'on définit la s-adjacence de deux chambres par le fait qu'elles possèdent en commun une cloison de type $S \setminus \{s\}$.

Si $\mathcal{I}$ est un système de chambres connexe au-dessus de S, on définit un complexe de chambres étiqueté par S de la façon suivante. Si R et R' sont des résidus de type J et J' respectivement, on dit qu'ils sont de *cotype* $S \setminus J$ et $S \setminus J'$ respectivement, et on définit un complexe simplicial à partir des résidus pour la relation de face:

$$R' \text{ est une face de } R \text{ si et seulement si } R' \supset R \text{ et } J' \supset J.$$

Les conditions dans lesquelles ces constructions sont réciproques l'une de l'autre sont techniques, et de toutes façons remplies par les immeubles. (On retourne au point de départ en faisant une construction puis l'autre).

DÉFINITION. — *Si F est une facette d'un immeuble (vu comme complexe simplicial), on note $R(F)$ le résidu associé dans le point de vue système de chambres.*
Si R est un résidu d'un immeuble (vu comme système de chambres), on note $F(R)$ la facette associée dans le point de vue complexe simplicial.

On a mis en évidence des propriétés tout à fait parallèles des immeubles dans les deux axiomatiques. On peut maintenant passer à la comparaison des deux approches. Pour énoncer les résultats, précisons qu'on dira – conformément à l'intuition géométrique simpliciale – qu'un appartement contient la facette $F(R)$ s'il contient une chambre du résidu R.

THÉORÈME. — (i) *Si $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ est un immeuble de système d'appartements $\mathcal{A}$ et de système de Coxeter (W, S), le système de chambres associé est un immeuble de type (W, S).*
(ii) *Si $\mathcal{I}$ est un immeuble de type (W, S), l'ensemble des sous-systèmes de chambres isomorphes à $\Sigma(W, S)$, vu comme ensemble de sous-complexes simpliciaux du complexe de chambres associé à $\mathcal{I}$), fait de ce dernier un immeuble muni de son système complet d'appartements.*
Le type d'une facette est le cotype de son résidu et vice-versa.

Démonstration. Preuve de (i). [Ron89], théorème (3.11) p.34.

Preuve de (ii). L'axiome (I0) est vérifié par définition.
Si A et B sont deux simplexes, on choisit une chambre dans chacun des deux résidus associés et on applique le corollaire (2.3.2) pour vérifier (I1).
Puisque ces deux premiers axiomes sont vérifiés, on peut se contenter de prouver l'affaiblissement (I2″) d'après (2.4.1). Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}'$ sont deux appartements contenant une chambre c et une facette $F(R)$, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}'$ contiennent tous les deux une chambre de R. Par convexité, ils contiennent $\mathrm{proj}_{F(R)}c$ tous les deux. La rétraction $\rho_{\mathbf{A},c}$ établit un isomorphisme $\mathbf{A} \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}'$ qui fixe c et $\mathrm{proj}_{F(R)}c$. □

Il est inutile d'espérer une belle correspondance entre les deux points de vue, puisque le système d'appartements associé à un système de chambres est automatiquement le système complet, ce qui n'est pas le cas en général. De toutes façons, on manipulera des immeubles pour lesquels les deux aspects auront une présentation assez concrète (ces immeubles sont formés à partir de groupes). Un système d'appartements sera en outre prescrit par la situation jumelée (*appartements admissibles*). *Grosso modo*, la répartition des rôles est la suivante.

Les systèmes de chambres sont adaptés à l'introduction de la codistance qui définit les jumelages, et de la réalisation métrique qui permet les raisonnements de courbure négative. Les systèmes d'appartements permettent de faire de la théorie des groupes avec des résultats dictionnaires entre sous-groupes de Cartan et appartements, et parce qu'on peut faire des raisonnements de convexité géométrique (et non plus combinatoire) grâce à une réalisation géométrique convenable.

2.5. Raffinements de la notion d'immeuble

Dans cette section, les immeubles que l'on va considérer sont définis comme systèmes de chambres. On peut envisager deux raffinements (adaptés à la théorie de Kac-Moody). L'un concerne la possibilité de mettre en relation deux immeubles de même type, au moyen d'une application *codistance* jouissant de propriétés analogues à celles des fonctions W-distances des immeubles. Les axiomes introduits permettent la gestion d'une combinatoire plus fine que celle d'une BN-paire ordinaire. L'autre raffinement – la *propriété de Moufang* – permet de traduire géométriquement l'existence de sous-groupes radiciels dans un groupe opérant sur un immeuble. Elle se formule indépendamment de toute considération de jumelage, mais en théorie de Kac-Moody, ces deux conditions seront vérifiées simultanément.

2.5.1. Jumelages

Les jumelages formalisent la notion de chambres opposées en introduisant une nouvelle application à valeurs dans un groupe de Coxeter.

DÉFINITION. — *Soient $(\mathcal{I}_+, d_+)$ et $(\mathcal{I}_-, d_-)$ deux immeubles de type (W, S). Une W-codistance pour ces deux immeubles est une application*

$$d^* : (\mathcal{I}_+ \times \mathcal{I}_-) \cup (\mathcal{I}_- \times \mathcal{I}_+) \to W$$

qui vérifie les trois conditions suivantes pour tout signe ϵ et toutes chambres x_ϵ de $\mathcal{I}_\epsilon$ et $y_{-\epsilon}$, $y'_{-\epsilon}$ de $\mathcal{I}_{-\epsilon}$.

(JU1) $d^*(y_{-\epsilon}, x_\epsilon) = d^*(x_\epsilon, y_{-\epsilon})^{-1}$.
(JU2) *Si* $d^*(x_\epsilon, y_{-\epsilon}) = w$ *et* $d_{-\epsilon}(y_{-\epsilon}, y'_{-\epsilon}) = s \in S$ *avec* $\ell(ws) < \ell(w)$, *alors* $d^*(x_\epsilon, y'_{-\epsilon}) = ws$.
(JU3) *Si* $d^*(x_\epsilon, y_{-\epsilon}) = w$ *alors pour tout* s *de* S, *il existe* $z_{-\epsilon}$ *dans* $\mathcal{I}_{-\epsilon}$ *tel que* $d_{-\epsilon}(y_{-\epsilon}, z_{-\epsilon}) = s$ *et* $d^*(x_\epsilon, z_{-\epsilon}) = ws$.

Tout triplet $\big((\mathcal{I}_+, d_+), (\mathcal{I}_-, d_-), d^*\big)$ *vérifiant ces propriétés est appelé* jumelage *de type* (W, S).

On peut alors généraliser la notion de chambres opposées.

DÉFINITION. — *Deux chambres x_ϵ et $x_{-\epsilon}$ de signes opposés dans un jumelage, sont dites* opposées *si elles sont à codistance* 1, *i.e si* $d^*(x_\epsilon, x_{-\epsilon}) = 1$.

En fait, la seule relation d'opposition permet de retrouver la codistance, d'après [Abr97], remarque 3 p.23-24.

LEMME. — *(i) Si* $d^*(x_\epsilon, y_{-\epsilon}) = w$ *et* $d_{-\epsilon}(y_{-\epsilon}, z_{-\epsilon}) = s$, *alors* $d^*(x_\epsilon, z_{-\epsilon}) \in \{w; ws\}$.
(ii) Soient x_ϵ et $y_{-\epsilon}$ des chambres de $\mathcal{I}_\epsilon$ et $\mathcal{I}_{-\epsilon}$ respectivement. La codistance $d^*(x_\epsilon, y_{-\epsilon})$ est l'unique élément de longueur minimale de $\{d_{-\epsilon}(x_{-\epsilon}, y_{-\epsilon}) \mid x_{-\epsilon}$opposée à $y_{-\epsilon}\}$.

Référence. [Abr97], remarque 3 p.23-24. □

Comme dans le cas de la combinatoire des groupes, on peut voir que les structures jumelées sont des généralisations du cas sphérique. Ainsi, si W est un groupe de Coxeter sphérique de plus grand élément w_0, si $(\mathcal{I}, d)$ est un immeuble de type W, on fabrique naturellement un jumelage de la façon suivante. On se donne deux exemplaires de l'immeuble. Au premier est attribué conventionnellement le signe $+$, au second le signe $-$ (d'où les notations $\mathcal{I}_+$ et $\mathcal{I}_-$). On note $d_+ := d$ et $d_- := w_0 d(-,-) w_0$. Alors, d_- est encore une W-distance sur $\mathcal{I}_-$, et l'application d^* définie par $w_0 d$ sur $\mathcal{I}_+ \times \mathcal{I}_-$ et par $d w_0$ sur $\mathcal{I}_- \times \mathcal{I}_+$ est une W-codistance.

2.5.2. Appartements admissibles

Pour une paire d'immeubles, l'existence d'une codistance qui en fait un jumelage suggère un choix naturel d'ensemble d'appartements dans chacun des immeubles. À partir de ces appartements, on peut définir la notion d'*appartement jumelé.*

DÉFINITION. — *Soient c_+ et c_- deux chambres opposées d'un jumelage $\big((\mathcal{I}_+, d_+), (\mathcal{I}_-, d_-), d^*\big)$.*

(i) *L'*appartement admissible de signe ϵ *associé à c_+ et c_- est:*

$$\mathbf{A}_\epsilon(c_+, c_-) := \{x_\epsilon \in \mathcal{I}_\epsilon \mid d^*(c_{-\epsilon}, x_\epsilon) = d_\epsilon(c_\epsilon, x_\epsilon)\}.$$

(ii) *L'*appartement jumelé *associé à c_+ et c_- est:*

$$\mathbf{A}(c_+, c_-) := \mathbf{A}_\epsilon(c_\epsilon, c_{-\epsilon}) \sqcup \mathbf{A}_{-\epsilon}(c_\epsilon, c_{-\epsilon}).$$

(iii) *On note $\mathcal{A}_\epsilon$ l'ensemble des $\mathbf{A}_\epsilon(c_+, c_-)$ pour c_+ et c_- parcourant les paires de chambres opposées du jumelage. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des appartements jumelés $\mathbf{A}(c_+, c_-)$ pour c_+ et c_- parcourant les paires de chambres opposées du jumelage.*

Ce qui justifie cette terminologie est le lemme suivant.

LEMME. — (i) *Chaque $\mathbf{A}_\epsilon(c_\epsilon, c_{-\epsilon})$ est un complexe de Coxeter de type (W, S).*
(ii) *Deux chambres de signe ϵ sont toujours contenues dans un appartement de $\mathcal{A}_\epsilon$.*

Référence. [Abr97], lemme 2 (i) p.24. □

2.5.3. Propriétés des appartements jumelés

Les appartements jumelés d'un jumelage possèdent des propriétés assez proches de celles des appartements d'un immeuble.

PROPOSITION. — (i) *Pour toute paire de chambres de signes opposés, il existe un appartement jumelé de $\mathcal{A}$ les contenant. Cet appartement est unique si les deux chambres sont opposées.*
(ii) *La restriction de la codistance à tout appartement jumelé fait de celui-ci un jumelage pour les distances restreintes.*
(iii) *Pour tout appartement admissible de signe ϵ, il existe un unique appartement admissible – son* jumeau *– de signe opposé tel que leur réunion soit un appartement jumelé. Ainsi, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_+$ et $\mathcal{A}_-$ sont en bijection.*

Référence. [Abr97], lemme 2 p.24. □

2.5.4. La propriété de Moufang

La propriété de Moufang est une autre généralisation qui concerne les immeubles simples (non nécessairement jumelés). Elle est apparue rétrospectivement comme outil fondamental dans la classification des immeubles sphériques de rang supérieur ou égal à 3 ([Tit74b]). Elle semble donc s'imposer comme une condition nécessaire pour des résultats de classification de certaines classes d'immeubles.

DÉFINITION. — *Un immeuble $(\mathcal{I}, d)$ de type (W, S) est dit* de Moufang *s'il existe une famille $(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi(W)}$ d'automorphismes (stricts) de $(\mathcal{I}, d)$ – indexés par l'ensemble $\Phi(W)$ des racines d'un appartement $\mathbf{A}$ – qui vérifient les conditions suivantes.*

(MO1) *Pour toute racine α et toute chambre c de α dans le résidu d'une cloison de $\partial\alpha$, le groupe U_α fixe toutes les chambres de α et est simplement transitif sur les chambres du résidu privé de c.*

(MO2) *Pour toute paire prénilpotente de racines $\{\alpha;\beta\}$, le groupe des commutateurs $[U_\alpha, U_\beta]$ est inclus dans le groupe engendré par les racines de $]\alpha;\beta[$.*

(MO3) *Pour tout élément u de $U_\alpha \setminus \{1\}$, il existe u' et u'' dans $U_{-\alpha}$ tels que $m(u) := u'uu''$ stabilise $\mathbf{A}$ en intervertissant α et son opposée.*

(MO4) *Pour tout u de $U_\alpha \setminus \{1\}$ et toute racine β, l'élément $m(u)$ conjugue U_β sur $U_{m(u)\beta}$.*

Référence. [Ron89], p.74. □

Un problème soulevé par la condition de Moufang est par exemple la non-unicité de la famille d'automorphismes qu'elle fait intervenir. Pour ce qui est du problème d'existence, le cas des immeubles affines est intéressant. La non vérification de la condition de Moufang par les immeubles affines n'empêche pas leur classification en rang supérieur ou égal à 4.

2.6. Automorphismes d'immeubles. Immeubles de groupes

Il s'agit maintenant de mettre en place des résultats établissant un dictionnaire (éventuellement partiel) entre les structures combinatoires des groupes possédant au moins une BN-paire et les structures d'immeubles. Le point de vue des chambres du côté immobilier est préféré à celui des appartements.

2.6.1. Liens de base. Actions fortement transitives

On va établir une correspondance entre les structures de base des deux côtés, à savoir entre BN-paire et immeuble. Il est d'abord commode d'introduire la définition d'action *fortement transitive* d'un groupe d'automorphismes sur un immeuble.

DÉFINITION. — *Un groupe d'automorphismes G d'un immeuble $(\mathcal{I}, d)$ est dit* fortement transitif *relativement à un appartement $\mathbf{A}$ de $\mathcal{I}$ s'il vérifie les deux conditions suivantes.*

(FT1) *Pout tout w de W, G est transitif sur les paires de chambres à distance w.*

(FT2) *Le stabilisateur de $\mathbf{A}$ dans G est transitif sur les chambres de $\mathbf{A}$.*

Dans le contexte des systèmes d'appartements, il existe une autre version de la forte transitivité, où l'on requiert la transitivité sur les couples (C, Σ) avec $C \subset \Sigma$ inclusion d'une chambre dans un appartement. La définition mise en avant est plus faible donc plus intéressante. Dans le cas sphérique, en vertu de la description de l'unique système d'appartements, il est clair que ces définitions sont équivalentes. Voici le procédé de fabrication d'immeuble à partir d'une BN-paire.

THÉORÈME. — *Pour toute BN-paire (G, B, N, S) de groupe de Weyl W, l'application $d : G/B \times G/B \to W$ qui attache au couple (gB, hB) l'élément w tel que $g^{-1}h$ est dans la double classe de Bruhat BwB, fait de $(G/B, d)$ un immeuble de type (W, S).*
Pour s dans S, la relation de s-adjacence $\sim_s$ se lit:

$$gB \sim_s hB \Leftrightarrow g^{-1}h \in B\langle s\rangle B.$$

G opérant par translations à gauche, est un groupe fortement transitif d'automorphismes de $(G/B, d)$. N stabilise l'appartement $\{wB\}_{w\in W}$, B est le stabilisateur de la chambre B de cet appartement.

Référence. [Ron89], théorème (5.3) p.58. □

C'est dans le trajet inverse que l'hypothèse de forte transitivité apparaît comme condition.

THÉORÈME. — *Soit G un groupe d'automorphismes de l'immeuble épais $(\mathcal{I}, d)$ de type (W, S), fortement transitif pour l'appartement $\mathbf{A}$. On se donne c une chambre de $\mathbf{A}$, et on note N le stabilisateur de $\mathbf{A}$, B le stabilisateur (ou fixateur) de c. Alors, (G, B, N, S) est une BN-paire, saturée par construction (i.e, N est précisément le stabilisateur de l'appartement $\mathbf{A}$).*

Référence. [Ron89], théorème (5.2) p.57. □

On va maintenant raffiner la correspondance.

2.6.2. Cas jumelé

On peut tout d'abord examiner la situation des combinatoires jumelées.

DÉFINITION. — (i) *Un* morphisme de jumelage *est une application de la réunion des immeubles du premier jumelage vers la réunion des immeubles du second, qui envoie un immeuble de signe donné sur l'immeuble du même signe par un morphisme d'immeuble, et qui respecte l'opposition des chambres. On parle de* morphisme de jumelage strict (respectivement cohérent) *si les applications pour chaque signe sont des morphismes stricts (respectivement cohérent)s. On a donc des notions évidentes d'*isomorphismes, *d'*automorphismes.
(ii) *Un groupe d'automorphismes de jumelage est* fortement transitif *s'il est transitif sur les paires de chambres opposées.*

REMARQUE. — Un isomorphisme strict de jumelages respecte distances et codistance. Profitons-en pour adopter désormais la convention suivante.

CONVENTION. — *Tout morphisme d'immeubles ou de jumelages est supposé strict par défaut d'indication supplémentaire.*

Les propriétés essentielles des actions fortement transitives sont résumées comme suit.

PROPOSITION. — *Soit G un groupe d'automorphismes fortement transitif d'un jumelage $\big((\mathcal{I}_+, d_+), (\mathcal{I}_-, d_-), d^*\big)$. Alors:*

(i) *G opère transitivement sur $\mathcal{A}_+$, $\mathcal{A}_-$ et $\mathcal{A}$.*
(ii) *Pour tout appartement jumelé $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_+, \mathbf{A}_-)$, les stabilisateurs dans G de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_+$ ou $\mathbf{A}_-$ sont égaux et opèrent transitivement sur les chambres de $\mathbf{A}_+$ (respectivement de $\mathbf{A}_-$).*
(iii) *Tout isomorphisme entre deux appartements jumelés provient d'un automorphisme du jumelage.*

Référence. [Abr97], lemme 4 p.29. □

Nous passons maintenant aux résultats dictionnaires.

PROPOSITION. — (i) *Si G est un groupe d'automorphismes fortement transitif d'un jumelage $\big((\mathcal{I}_+, d_+), (\mathcal{I}_-, d_-), d^*\big)$, avec $\mathcal{I}_+$ et $\mathcal{I}_-$ épais, la donnée d'une paire $\{c_+; c_-\}$ de chambres opposées donne naturellement naissance à une BN-paire jumelée (saturée) (G, B_+, B_-, N, S) avec B_ϵ stabilisateur de la chambre c_ϵ et N stabilisateur de l'appartement jumelé $\mathbf{A}(c_+, c_-)$ qu'elles déterminent.*
(ii) *Réciproquement, si (G, B_+, B_-, N, S) est une BN-paire jumelée, les immeubles associés aux BN-paires positives et négatives associées, peuvent être munis d'une codistance grâce à la décomposition de Birkhoff, en posant $d^*(gB_\epsilon, hB_{-\epsilon}) = w$, avec w défini par $g^{-1}h \in B_\epsilon w B_{-\epsilon}$.*

Référence. [Abr97], p.28-29. □

Pour ce qui est d'une axiomatique intermédiaire entre les BN-paires jumelées et les données radicielles jumelées comme les données B-radicielles, on peut obtenir des résultats eux aussi intermédiaires, comme un théorème de présentation (ou d'amalgame) qui montre l'unicité des groupes de Kac-Moody ([Tit87], théorème 2 p.567). Remarquons que dans les démonstrations de ces résultats, les immeubles interviennent alors de façon indispensable. En effet, on fait usage des propriétés des immeubles pour définir des ensembles ordonnés convenables, en l'occurrence simplement connexes ([Tit86], voir aussi le chapitre suivant).

2.6.3. La condition de Moufang

La condition de Moufang correspond *grosso modo* à la possibilité de faire intervenir de petits groupes d'automorphismes opérant simplement transitivement sur les chambres à distance donnée (dans W) d'une chambre fixée à l'avance. On met cette propriété en parallèle avec la possibilité d'introduire l'équivalent de groupes radiciels dans une donnée de combinatoire des groupes. Voici par exemple un avant-goût des résultats sur les groupes qu'on peut prouver géométriquement grâce aux immeubles.

On se donne $(\mathcal{I}, d)$ un immeuble possédant la propriété de Moufang pour une famille $(U_\alpha)_{\alpha \in \Phi}$ de groupes d'automorphismes (stricts). On a alors la propriété suivante.

LEMME. — *Un groupe radiciel U_α fixe toutes les chambres possédant une cloison dans $\alpha \setminus \partial\alpha$.*

Référence. [Ron89], proposition (6.14) p.74. □

On peut dans ce cas attacher à chaque élément w de W un groupe U_w d'automorphismes qui permet une description plus fine de l'action d'un groupe fortement transitif sur un immeuble.

THÉORÈME/DÉFINITION. — *Soit $(\mathcal{I}, d)$ un immeuble de Moufang de type (W, S).*

(i) *Pour tout w de W, on note $U_w := \prod_{i=1}^{\ell(w)} U_{\beta_i}$ le produit interne fait sur les racines contenant 1 mais pas w dans l'ordre cyclique associé à une écriture réduite de w. Alors, U_w est un groupe qui ne dépend que de w.*
(ii) *U_w opère simplement transitivement sur les chambres à distance w de c.*
(iii) *Pour toute BN-paire (G, B, N, S) obtenue à partir d'un groupe fortement transitif d'automorp tel que B est le fixateur de c, et N est le stabilisateur de $\mathbf{A}$, une chambre à distance w de c s'écrit de manière unique $u_w w(c)$ avec u_w dans U_w.*

Référence. [Ron89], définition p.75 et théorème (6.15) p.76. □

On a ainsi un dévissage des doubles classes analogue à celui des BN-paires raffinées, mais obtenu par voie géométrique.

2.6.4. Jumelage d'un groupe à donnée radicielle jumelée

Puisque les données radicielles jumelées constituent la combinatoire la plus riche, il est naturel de se demander si les immeubles associés cumulent toutes les propriétés présentées. La réponse est positive. Tout d'abord, on sait qu'à une donnée radicielle jumelée est associée naturellement une donnée B-radicielle (1.5.3) et donc une BN-paire jumelée (1.4.6). Ceci se joue uniquement au niveau des groupes, et se combine à la construction de (2.6.2), pour produire un jumelage. La présence des groupes radiciels incite à tester la validité de la propriété de Moufang.

PROPOSITION. — *Soit $\left(G, (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\right)$ une donnée radicielle jumelée. La BN-paire jumelée associée définit un jumelage sur lequel G opère fortement transitivement. En outre, la famille des groupes radiciels $(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ fait de l'immeuble positif (respectivement négatif) du jumelage un immeuble de Moufang.*

Démonstration. Il ne reste plus qu'à voir la propriété de Moufang. Les axiomes (MO2) et (MO4) sont immédiatement vérifiés puisqu'ils ne nécessitent pas de traduction géométrique.

Pour les deux autres axiomes, on va revenir à la description des immeubles du jumelage associé à (G, HU_+, HU_-, N, S). L'appartement standard $\mathbf{A}_+$ de l'immeuble positif $\{gHU_+\}_{g\in G}$ est $\{wHU_+\}_{w\in W}$, à l'intérieur duquel on trouve les racines opposées $\{wHU_+\}_{w\in\alpha}$ et $\{wHU_+\}_{w\in-\alpha}$ pour chaque α de Φ. G opère par translation à gauche sur cet ensemble.

Traitons d'abord le cas de (MO1). Par définition, pour toute racine α positive, U_α fixe la chambre canonique HU_+. Par conséquent, en conjuguant par W, on voit que pour toute racine α et toute chambre c dans cette racine, U_α fixe c.

Ces descriptions font voir aussi que les éléments u', u'' et $m(u)$ définis dans l'axiome (DRJ2) conviennent pour la vérification de (MO3). Soit $c = zHU_+$ une chambre de α dans le résidu $R(\pi)$ d'une cloison de $\partial\alpha$ pour une racine $\alpha \subset \mathbf{A}$. On peut supposer le résidu de type s: $R(\pi) \cap \mathbf{A} = \{z; zs\}$. On écrit la racine α sous la forme $\alpha = w\alpha_t$ avec w dans W et t dans S. On a donc $s_\alpha z = zs$ puisque s_α fixe π (π est dans $\partial\alpha$). On a alors:

$$R(\pi) \setminus \{c\} = \{gHU_+ \mid d(zHU_+, gHU_+) = s\}$$
$$= \{gHU_+ \mid z^{-1}g \in HU_+sHU_+\} = \{gHU_+ \mid g \in zU_{\alpha_s}sHU_+\}.$$

La dernière égalité provient de l'écriture des doubles classes dans une donnée radicielle (1.4.4) combinée au dévissage par définition $B_\alpha = HU_\alpha$. Finalement

$$R(\pi) \setminus \{c\} = \{gHU_+ \mid g \in (zU_{\alpha_s}z^{-1})zsHU_+\}.$$

Remarquons d'abord que parce que $s_\alpha z = zs$, on a $z\alpha_s = \alpha$ et donc $zU_{\alpha_s}z^{-1} = U_\alpha$. Ceci fait voir que U_α opère transitivement sur $R(\pi) \setminus \{c\}$. Pour voir que l'action est en fait libre, on se donne u et u' dans $U_\alpha = zU_{\alpha_s}z^{-1}$ tels que $(zuz^{-1})zsHU_+ = (zu'z^{-1})zsHU_+$. On a alors $s^{-1}u^{-1}u'sHU_+ = HU_+$, ce qui implique que $s^{-1}u^{-1}u's$ est dans $HU_+ \cap U_{-\alpha_s}$. Cette intersection vaut $\{1\}$ d'après le lemme (1.5.2)(i), donc $u = u'$. □

2.6.5. Programme de généralisation

La condition de Moufang est vérifiée par les immeubles des jumelages associés aux groupes à donnée radicielle jumelée. Elle semble raisonnable (en tout cas nécessaire) dans le cadre des problèmes de classification, dans une veine qui généraliserait celle qui concerne les immeubles sphériques ([Tit74b]).
Nous nous intéressons à un autre problème, à savoir la généralisation de résultats vrais pour les immeubles de Moufang sphériques. La généralisation consiste à remplacer «sphérique» par «jumelé» . Voici les résultats qu'on va prouver, énoncés encore dans le cadre sphérique.

Soit $(\mathcal{I}, d)$ un immeuble de Moufang de type sphérique (W, S). On note G le groupe engendré par les groupes U_α dans le groupe des automorphismes de l'immeuble. On fixe un appartement $\mathbf{A}$ et une chambre c par rapport à laquelle se définit toute la combinatoire des racines. Ainsi, Φ_+ désigne les racines qui contiennent c. On note $U := \langle U_\alpha \mid \alpha \in \Phi_+\rangle$. Pour toute facette F, de résidu associé $R(F)$, on note $\Phi(F)$ l'ensemble des racines de $\mathbf{A}$ qui contiennent F dans leur bord. On désigne par B le fixateur de c dans G, et par H le sous-groupe de G fixant $\mathbf{A}$ chambre par chambre. Enfin, on note $M(F) := \langle H, U_\alpha \mid \alpha \in \Phi(F)\rangle$, et $U(F) := \langle U_\alpha \mid \alpha \supset R(F) \cap \mathbf{A}\rangle$. Alors, on a des décompositions de type Lévi.

THÉORÈME. — (i) *Le sous-groupe B admet une décomposition en produit semi-direct*

$$B = H \ltimes U.$$

(ii) *Le fixateur $P(F)$ de F dans G admet une décomposition en produit semi-direct*

$$P(F) = M(F) \ltimes U(F).$$

Référence. [Ron89], théorème (6.17) p.77 et théorème (6.18) p.78. □

Même si le premier point est un cas particulier du second, on les a distingués puisqu'ils correspondent à deux temps de la démonstration. On prouvera la généralisation pour un groupe possédant une donnée radicielle jumelée. Le premier point sera démontré dès le chapitre suivant (c'est un sous-produit de la mise en évidence d'une BN-paire raffinée symétrique à partir d'une donnée radicielle jumelée). Le second réapparaît au chapitre 6, et concerne les sous-groupes paraboliques sphériques, ou bien tous les sous-groupes paraboliques, à condition de requérir un léger renforcement de l'axiome (DRJ1). Cet axiome plus restrictif est quoi qu'il en soit vérifié par les groupes de Kac-Moody, d'où la décomposition de Lévi de tous les sous-groupes paraboliques dans le cas Kac-Moody (6.2).

3. Ensembles ordonnés et amalgames de groupes

L'usage de la topologie pour faire de la théorie des groupes est déjà ancien. Dans la présentation qui suit, la géométrie proprement dite disparaît. On rentre dans des considérations ensemblistes, en maintenant le vocabulaire de la topologie algébrique pour étudier des catégories d'ensembles ordonnés. Ce point de vue et les résultats d'amalgame de groupes remontent au livre de J.-P. Serre sur les arbres et SL_2 ([Ser77]). Sous cette forme, ce chapitre doit tout à J. Tits ([Ti86]). Cet article a été minutieusement reconsidéré par A. Chosson ([Cho97]) qui a détaillé les démonstrations et a explicité l'application de [Ti86] à la structure de donnée B-radicielle. On développe enfin une remarque de P. Abramenko pour obtenir un théorème d'intersection plus fin dans le cas des données radicielles jumelées ([Abr97], remarque 2 p.15). La référence originelle pour tout ce chapitre est [Tit86]. Ce chapitre peut entièrement être vu comme l'adaptation aux données radicielles jumelées des raisonnements détaillés de [Cho97].

3.1. Catégories d'ensembles ordonnés

Dans cette section, nous mettons en place le cadre d'étude des ensembles ordonnés. Il est catégorique, construit de telle sorte qu'il suggère des analogies avec les présentations abstraites de la topologie algébrique (Référence: [Tit86]).

3.1.1. Catégorie O des ensembles ordonnés

Voici la « catégorie » que nous allons étudier. Pour être plus correct, il faudrait comme d'habitude introduire le langage des univers.

DÉFINITION. — (i) *O est la catégorie définie comme suit. Ses objets sont les ensembles ordonnés $(A, \leq)$. Ses flèches sont les applications croissantes $f : (A, \leq) \to (B, \leq)$ qui jouissent en outre de la propriété suivante qu'on appellera* bijectivité descendante*:*

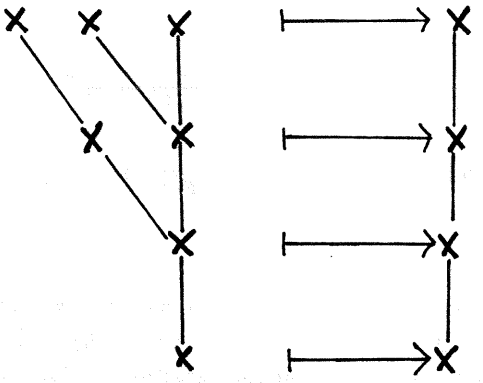
$$\text{Pour tout } a \text{ de } A, \text{ la restriction de } f \text{ à } \{x \in A \mid x \leq a\}$$
$$\text{établit une bijection de cet ensemble sur } \{y \in B \mid y \leq f(a)\}.$$

On décompose de manière évidente la bijectivité descendante en surjectivité descendante *et* injectivité descendante.
(ii) *Les* isomorphismes *sont les flèches bijectives, la bijection réciproque étant automatiquement un isomorphisme.*
(iii) *Une partie B d'un objet de O est dite* pleine *si elle vérifie*

$$\forall b \in B \quad \forall a \in A \quad a \leq b \Rightarrow a \in B,$$

autrement dit, si l'inclusion $B \subset A$ est une flèche de O.

Dessin.



Voici une illustration d'application. On utilisera constamment la possibilité de représenter un ensemble ordonné par un graphe. Deux éléments comparables distincts étant reliés par une arête, le plus grand sera toujours au-dessus de l'autre. On voit que la condition sur les flèches laisse encore la possibilité de ramifier en montant. De plus, le graphe source peut être reproduit à plusieurs exemplaires à la même hauteur (seules les fibres grossissent).

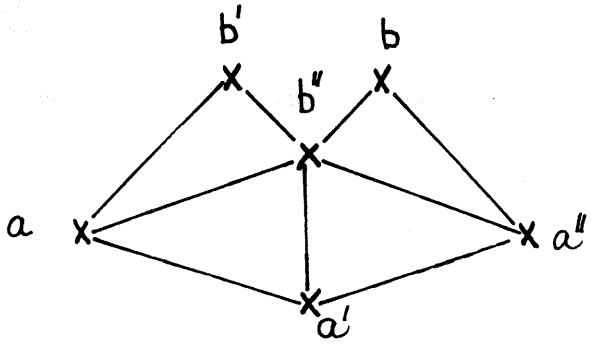
3.1.2. Chemins. Connexité. Homotopie

Il s'agit des premières notions analogues à celles de la topologie algébrique.

DÉFINITION. — *Soit $(A, \leq)$ un objet de O.*

(i) *Un* chemin tracé dans *A est une suite finie $(a_0, a_1, \ldots a_n)$ d'éléments de A succesivement comparables: pour tout i, on a toujours $a_i \leq a_{i+1}$ ou $a_{i+1} \leq a_i$. Le premier élément est le* début *du chemin, le dernier en est la* fin. *Le début et la fin d'un chemin sont les* extrémités *de ce chemin.*
(ii) *A est dit* connexe *s'il est non vide et si quels que soient a et b des éléments de A, il existe toujours un chemin de début a et de fin b.*
(iii) *Une* homotopie élémentaire *sur un chemin $(a_0, a_1, \ldots a_n)$ tracé dans A est une opération sur ce chemin qui consiste à intercaler ou supprimer un élément de A dans la suite finie pour produire un chemin de mêmes extrémités. Une* homotopie *d'un chemin à un autre est une suite d'homotopies élémentaires du premier chemin pour obtenir l'autre. Deux tels chemins sont dits* homotopes.

Dessin. $[(a, a', a'', b) \sim (a, b'', a', a'', b) \sim (a, b', b'', a', a'', b) \sim (a, b', b'', a'', b) \sim (a, b', b'', b)]$



Deux chemins homotopes ont par définition même début et même fin. Il est clair que l'homotopie établit une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins de début et de fin fixés.

3.1.3. Revêtements

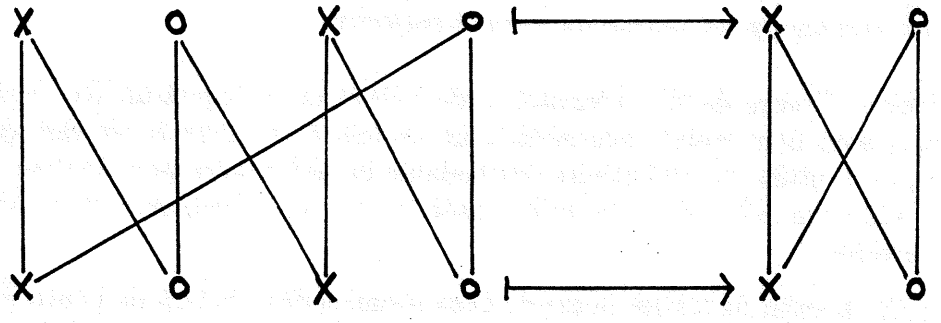
Un *revêtement* est un intermédiaire entre une flèche quelconque et un isomorphisme de O.

DÉFINITION. — *Une flèche $p : E \to B$ de O est un* revêtement *si elle vérifie la condition suivante, qu'on appellera* bijectivité ascendante.

Pour tout a de A, la restriction de f à $\{x \in E \mid x \geq a\}$
établit une bijection de cet ensemble sur $\{y \in B \mid y \geq p(a)\}$.

*E est appelé l'*espace total, *B la* base *du revêtement. On décomposera de manière analogue la bijectivité ascendante en* surjectivité *et* injectivité ascendantes.

Dessin.



3.1.4. Catégorie pointée $(O, *)$. Revêtements universels pointés

Le fait de pointer la catégorie permet de poser correctement le problème qui définit les revêtements universels, et de parler de relèvement de chemins.

DÉFINITION. — (i) *$(O, *)$ est la catégorie définie comme suit. Ses objets sont les couples $(A, *)$ où A est un objet de O ordonné par $\leq$, et $*$ est un élément de A. Ses flèches sont les flèches de O qui envoient l'élément distingué de la source sur l'élément distingué du but. Les* isomorphismes *sont les flèches bijectives.*
(ii) *Un* revêtement universel *est une flèche $\pi : (E, *) \to (B, *)$ de $(O, *)$ qui donne un revêtement à espace total connexe dans O (par le foncteur d'oubli naturel de $(O, *)$ vers O) et qui vérifie le problème suivant.*

Pour tout revêtement pointé $p : (E', *) \to (B, *)$,
il existe une flèche $\pi' : (E, *) \to (E', *)$ telle que $\pi = p \circ \pi'$.

Il n'est pas très long de prouver le résultat utile suivant.

LEMME. — *Avec les notations de la définition précédente, la flèche de factorisation π' est automatiquement un revêtement.*

Démonstration. On se donne x dans E et y' dans E' plus grand que $\pi'(x)$. On a $p(y') \geq (p \circ \pi')(x) = \pi(x)$, donc il existe y dans E, $y \geq x$, préimage de $p(y')$ par π. On a $\pi'(y) \geq \pi'(x)$ et $p(\pi'(y)) = \pi(y) = p(y')$. Comme p est un revêtement, par injectivité ascendante $\pi'(y) = y'$. Ceci prouve la surjectivité ascendante de π'. L'injectivité ascendante de π' est évidente, puisque les restrictions correspondantes de $p \circ \pi'$ sont injectives. □

3.1.5. Relèvements

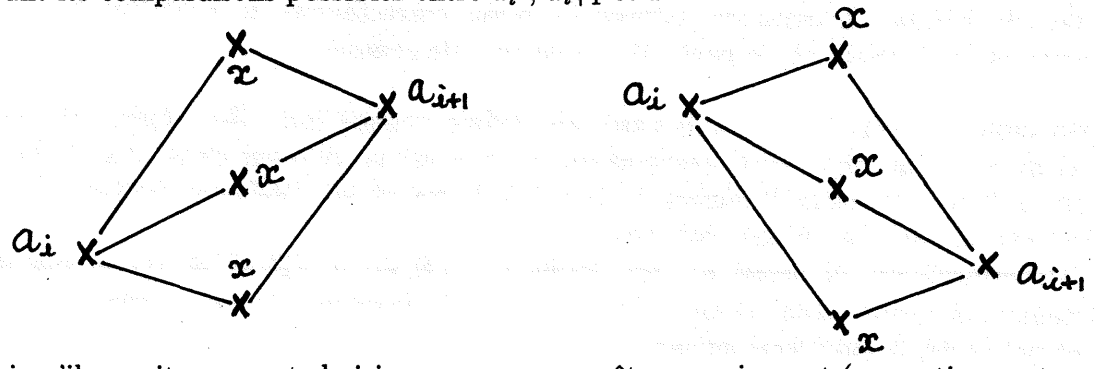
Le petit résultat qui suit montre que l'analogie avec la topologie algébrique n'est pas seulement une affaire de définition. L'image d'un chemin n'est autre que la suite des images des points du chemin initial.

LEMME. — *Soient $p : E \to B$ un revêtement et x un élément de E. Alors:*

(i) *Pour tout chemin de début $p(x)$ dans B, il existe un unique chemin de début x dans E et qui le relève.*
(ii) *Deux relèvements de même début de chemins homotopes sont homotopes.*
(iii) *Soient C un ensemble connexe de O, c un élément de C, et g, g' deux flèches de C vers E. Si g et g' coïncident sur c et vérifient $g \circ f = g' \circ f$, alors $g = g'$.*
(iv) *Si B est connexe, p est automatiquement surjective.*

Démonstration. Preuve de (i). L'existence du relèvement se construit de proche en proche. Si x_i et x_{i+1} sont deux points successifs d'un chemin tracé dans B, suivant que $x_i \geq x_{i+1}$ ou $x_i \leq x_{i+1}$, on utilise la surjectivité descendante ou ascendante pour trouver une préimage pour x_{i+1}. L'unicité relève des injectivités ascendantes ou descendantes et se prouve aussi de proche en proche.

Preuve de (ii). Il suffit de traiter le cas de deux chemins déduits l'un de l'autre par une homotopie élémentaire, et par exemple une insertion. Supposons qu'on passe ainsi de $(..., a_i, a_{i+1}, ...)$ à $(..., a_i, x, a_{i+1}, ...)$, et que $(..., b_i, b_{i+1}, ...)$ est un relèvement du premier chemin. Il y a 6 cas suivant les comparaisons possibles entre a_i , a_{i+1} et x.



Quoi qu'il en soit , on peut choisir a_i ou a_{i+1} pour être un minorant (respectivement majorant) commun aux trois points. Par bijectivité ascendante (respectivement descendante), il existe un unique élément z dans E dans la même position vis-à-vis de b_i et b_{i+1} que x vis-à-vis de a_i et a_{i+1}. Le relèvement de $(..., a_i, x, a_{i+1}, ...)$ est donc nécessairement $(..., b_i, z, b_{i+1}, ...)$, qui est clairement homotope à $(..., b_i, b_{i+1}, ...)$.

Preuve de (iii). On se donne d dans C que par connexité on peut toujours relier à c par un chemin Γ. $g\Gamma$ et $g'\Gamma$ relèvent tous les deux $(f \circ g)\Gamma$ et $(f \circ g')\Gamma$ et ont même début. Ainsi $g\Gamma = g'\Gamma$ et $g(d) = g'(d)$.

(iv) résulte directement de (i). □

On peut encore en tirer une information sur la flèche π' de factorisation dans la définition d'un revêtement universel.

SCHOLIE. — *Avec les notations de la définition précédente, la flèche de factorisation π' est nécessairement unique.*

Démonstration. C'est une conséquence directe du point (iii) du lemme. □

3.1.6. Existence de revêtements universels pointés

La démonstration de ce résultat met à l'épreuve la plupart des notions introduites précédemment, elle est complètement analogue à la démonstration topologique classique.

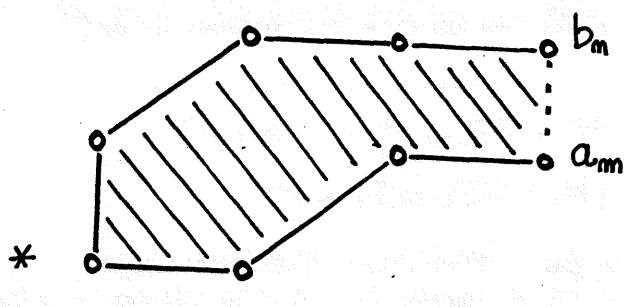
THÉORÈME. — *Tout objet $(A,*)$ de $(O,*)$ admet un revêtement universel unique à unique isomorphisme près.*

Démonstration. L'unicité résulte aussitôt du corollaire précédent. Construisons maintenant un revêtement universel. On considère l'ensemble des classes d'homotopie de chemins tracés dans A, de début $*$, qu'on note $\tilde{A}$. On pointe cet ensemble par la classe du chemin constant $\overline{(*)}$. Remarquons d'abord que la fin d'une classe d'homotopie de tels chemins est bien définie, comme fin d'un quelconque représentant. On notera par $\sim$ une relation d'homotopie entre deux chemins.

1. Définition du candidat comme objet de $(O,*)$

On introduit sur $(\tilde{A},\overline{(*)})$ la relation binaire suivante. On décrète qu'une classe d'homotopie $\overline{\Gamma}$ est supérieure à une autre $\overline{\Gamma}'$ si et seulement s'il existe un élément x de A, un représentant $(*,b_1,...b_n)$ de la première classe, un représentant $(*,a_1,...a_m)$ de la seconde tels que $(*,b_1,...b_n)$ soit homotope à $(*,a_1,...a_m,x)$, avec $x \geq a_m$. Une autre façon de voir les choses consiste à remarquer que $\overline{\Gamma} \geq \overline{\Gamma}'$ si et seulement si pour tout représentant $(*,b_1,...b_n)$ de $\overline{\Gamma}$ et tout représentant $(*,a_1,...a_m)$ de $\overline{\Gamma}'$, on a $b_n \geq a_m$ et $(*,b_1,...b_n) \sim (*,a_1,...a_m,b_n)$.

Dessin.



Les hachures limitées par deux chemins indiquent que ces chemins sont homotopes. Cette relation est évidemment réflexive. Elle est antisymétrique. Pour voir cela, on se donne $\overline{\Gamma}$ et $\overline{\Gamma}'$ dans $\tilde{A}$, représentées par $(*,b_1,...b_n)$ et $(*,a_1,...a_m)$ respectivement. $\overline{\Gamma} \geq \overline{\Gamma}'$ dit que $b_n \geq a_m$ et $(*,b_1,...b_n) \sim (*,a_1,...a_m,b_n)$. Si on suppose en outre que $\overline{\Gamma}' \geq \overline{\Gamma}$, on obtient alors $a_m \geq b_n$, d'où l'égalité $a_m = b_n$, qui donne en reportant dans la première homotopie $(*,b_1,...b_n) \sim (*,a_1,...a_m,a_m) \sim (*,a_1,...a_m)$, soit $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}'$. L'examen de la transitivité se règle de manière plus visuelle, par exemple sur un dessin.
On a donc bien défini une relation d'ordre sur $\tilde{A}$, ce qui en fait un objet de O.

2. Connexité de $\tilde{A}$

Il suffit de remarquer que pour tout chemin $(*, a_1, \dots a_m)$, on a $\overline{(*, a_1, \dots a_m)} \geq \overline{(*, a_1, \dots a_{m-1})}$ ou $\overline{(*, a_1, \dots a_m)} \leq \overline{(*, a_1, \dots a_{m-1})}$ suivant que a_m est supérieur ou inférieur à a_{m-1}. On peut donc relier toute classe au point base $\overline{(*)}$.

3. Flèche $e : (\tilde{A}, \overline{(*)}) \to (A, *)$

En vertu de la remarque initiale, on voit que l'application $e : (\tilde{A}, \overline{(*)}) \to (A, *)$ qui attache à toute classe la fin d'un de ses représentants, est bien définie. Il s'agit ici de voir que e est une flèche de O, et même un revêtement. Le respect de l'ordre est évident. Prouvons l'injectivité descendante. Supposons que l'on ait $\overline{(*, a_1, \dots a_m)} \geq \overline{(*, b_1, \dots b_n)}$, $\overline{(*, a_1, \dots a_m)} \geq \overline{(*, b'_1, \dots b'_{n'})}$ et $b_n = b'_{n'}$. Puisque $a_m \geq b_n = b'_{n'}$, on peut écrire la suite d'homotopies

$$(*, b_1, \dots b_n) \sim (*, b_1, \dots b_n, a_m, b'_{n'}) \sim (*, a_1, \dots a_m, b'_{n'}) \sim (*, b'_1, \dots b'_{n'})$$

qui prouve l'injectivité descendante. La surjectivité descendante vient de ce que si on se donne une classe $\overline{(*, a_1, \dots a_m)}$ et $x \leq a_m$, alors $e\big(\overline{(*, a_1, \dots a_m, x)}\big) = x$. La bijectivité ascendante se prouve de façon tout à fait analogue.

4. Propriété de factorisation

On se donne un revêtement $f : (B, *) \to (A, *)$. Il s'agit de trouver une flèche $e_B : (\tilde{A}, \overline{(*)}) \to (B, *)$ telle que $e = f \circ e_B$. En attachant à chaque classe $\overline{\Gamma}$ la fin d'un relèvement dans B d'un représentant de $\overline{\Gamma}$, qu'on note $e_B(\Gamma)$, on définit une application e_B qui vérifie $e = f \circ e_B$. Cette application est bien définie puisque les relevés de deux chemins homotopes sont homotopes, donc de même fin. Il reste à montrer que e_B est une flèche de $(O, *)$. Supposons que $\overline{\Gamma} \leq \overline{\Gamma}'$. On peut écrire $\overline{\Gamma}' = \overline{(*, a_1, \dots a_{m+1})}$ et $\overline{\Gamma} = \overline{(*, a_1, \dots a_m)}$ avec $a_{m+1} \geq a_m$. Si $(*, b_1, \dots b_{m+1})$ est le relevé de $(*, a_1, \dots a_{m+1})$, par unicité $(*, b_1, \dots b_m)$ est celui de $(*, a_1, \dots a_m)$. On a alors $b_m = e_B(\overline{\Gamma}) \leq e_B(\overline{\Gamma}') = b_{m+1}$ car $a_{m+1} \geq a_m$. Ceci montre que e_B est croissante.
On se donne deux classes $\overline{\Gamma}$ et $\overline{\Gamma}'$ inférieures toutes deux à une troisième $\overline{\Delta}$, et dont les relevés dans B ont même fin. On choisit un relevé pour chacune de ces classes: $f^*\Gamma$ pour $\overline{\Gamma}$, $f^*\Gamma'$ pour $\overline{\Gamma}'$ et $f^*\Delta$ pour $\overline{\Delta}$. Puisque $e_B(\overline{\Delta})$ est un majorant commun de $e_B(\overline{\Gamma})$ et de $e_B(\overline{\Gamma}')$, on peut écrire la suite d'homotopies

$$f^*\Gamma' \sim (f^*\Gamma', e_B(\overline{\Delta}), e_B(\overline{\Gamma})) \sim (f^*\Delta, e_B(\overline{\Gamma}))$$
$$\sim (f^*\Gamma, e_B(\overline{\Delta}), e_B(\overline{\Gamma})) \sim f^*\Gamma.$$

Ceci donne $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}'$ en transformant par f. D'où l'injectivité descendante.
On se donne maintenant un relevé $f^*\Gamma$ de chemin dans A et un élément y inférieur à $e_B(\overline{\Gamma})$. Alors, la classe du chemin $f\big(f^*\Gamma, y\big)$ est une préimage de y par e_B. Ceci prouve la surjectivité descendante et achève la démonstration du théorème. □

3.1.7. Universalité et point base

Le fait d'être universel pour un revêtement ne dépend pas du point base.

LEMME. — *Soit $\pi : E \to B$ un revêtement. S'il existe x dans E tel que $\pi : (E, x) \to (B, \pi(x))$ soit un revêtement universel, alors pour tout y de E, $\pi : (E, y) \to (B, \pi(y))$ est un revêtement universel.*

Démonstration. On se donne y dans E.

1. On suppose pour l'instant que x et y sont comparables et par exemple que y est supérieur à x. On se donne également un revêtement $p : (C, z) \to (B, p(z))$. On a $p(z) = \pi(y) \geq \pi(x)$. Par conséquent, $\pi(x)$ admet une unique préimage z_x par p vérifiant $z_x \leq z$, et $p_x : (C, z_x) \to (B, \pi(x))$ est encore un revêtement pour lequel on peut appliquer la propriété de factorisation, qui fournit $\pi_x : (E, x) \to (C, z_x)$ tel que $\pi = p_x \circ \pi_x$. Il suffit alors de montrer que $\pi_x(y) = z$ pour justifier qu'on a une factorisation avec y cette fois comme point base. Or $\pi_x(x) = z_x \leq \pi_x(y)$ et $p(\pi_x(y)) = p(z)$. Puisque p est un revêtement, par bijectivité ascendante $\pi_x(y) = z$.

2. On a traité le cas $y \geq x$. Le cas symétrique est analogue. On a donc montré le résultat quand on passe de x à un point comparable. Le cas général s'en déduit par connexité. □

3.2. Simple connexité

On présente ici la simple connexité comme une propriété catégorique, avant de la relier à des considérations de chemins.

3.2.1. Simple connexité

C'est le revêtement universel et sa propriété de définition qui permettent d'introduire la notion de simple connexité.

DÉFINITION. — *Un ensemble ordonné $(A, \leq)$ est dit* simplement connexe *si l'application identité I_A associée est un revêtement universel.*

La formulation de cette définition est justifiée par le lemme (3.1.7).

REMARQUE.— Un objet simplement connexe est automatiquement connexe.

3.2.2. Universalité d'un revêtement et simple connexité de l'espace total

Cette proposition montre que la définition de simple connexité peut être élargie à une propriété de factorisation plus large.

PROPOSITION. — *Soit un revêtement $\pi : E \to B$ de O. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'espace total E est simplement connexe.*
(ii) *Pour tout x de E, le revêtement pointé $\pi : (E, x) \to (B, \pi(x))$ est universel.*
(iii) *Il existe un x de E tel que le revêtement pointé $\pi : (E, x) \to (B, \pi(x))$ est universel*

Démonstration. Déjà, l'équivalence entre le deuxième et le troisième point est prouvée en (3.1.7).

Montrons que (i) implique (ii). On se donne un revêtement $\pi : (E, x) \to (B, \pi(x))$ à espace total simplement connexe. Il est suffisant de montrer la propriété de factorisation pour un revêtement universel $\pi' : (E', x') \to (B, \pi(x))$. D'abord, on applique la propriété de factorisation du revêtement universel π' vis-à-vis du revêtement π: on sait qu'il existe $\phi : (E', x') \to (E, x)$ telle que $\pi' = \pi \circ \phi$. Du reste, ϕ est un revêtement d'après le lemme (3.1.4). Ceci permet d'appliquer la propriété de factorisation du revêtement I_E (universel par simple connexité de E) vis-à-vis de ϕ. On obtient ainsi un revêtement $\psi : (E, x) \to (E', x')$ qui vérifie $\phi \circ \psi = I_E$. Finalement, on a $\pi' \circ \psi = (\pi \circ \phi) \circ \psi = \pi \circ I_E = \pi$.

Montrons que (iii) implique (i). On suppose le revêtement $\pi : (E, x) \to (B, \pi(x))$ universel. On se donne $p : (E', x') \to (E, x)$ un revêtement, qui fournit $\pi \circ p : (E', x') \to (B, \pi(x))$ un autre revêtement. On utilise alors la propriété universelle de π vis-à-vis de ce dernier, ce qui introduit un revêtement $\phi : (E, x) \to (E', x')$, tel que $\pi = \pi \circ (p \circ \phi)$. Mais par unicité d'après le lemme (3.1.5), on a nécessairement $p \circ \phi = I_E$. Ainsi tout revêtement $p : (E', x') \to (E, x)$ factorise I_E de manière unique, ce qui prouve que E est simplement connexe. □

3.2.3. Isomorphisme à partir d'un revêtement

Le lemme qui suit permet de découper la preuve de ce qu'une flèche est un isomorphisme en deux vérifications indépendantes.

LEMME. — *Soit $\pi : E \to B$ un revêtement à espace total E connexe. Si B est simplement connexe, π est un isomorphisme.*

Démonstration. D'abord, on pointe π par un point x quelconque de E. Puisque B est simplement connexe, $I_B : (B, \pi(x)) \to (b, \pi(x))$ se factorise à travers π pour un unique revêtement ϕ. $I_B = \pi \circ \phi$ implique déjà que π est surjectif. Mais ϕ est un revêtement par le corollaire (3.1.5) et E est connexe, par conséquent ϕ est surjective par (3.1.5) (iv). Il en résulte que π est injective. □

3.2.4. Simple connexité et homotopie

L'homotopie triviale des chemins est aussi un critère attendu et peut-être plus concret de simple connexité.

PROPOSITION. — *Soit A un ensemble ordonné connexe contenant le point a. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *A est simplement connexe.*
(ii) *Tout chemin tracé dans A, de début et de fin a est homotope au chemin constant (a).*
(iii) *Deux chemins quelconques de début a et de même fin sont homotopes.*

Démonstration. On va revenir à la construction concrète du revètement universel au-dessus de (A, a). On considère donc le revêtement universel $e : (\tilde{A}, \overline{(a)}) \to (A, a)$. Il est clair qu'on a

$$A \text{ est simplement connexe} \iff e \text{ est un isomorphisme.}$$

L'implication directe est justifiée par (3.2.3). L'implication réciproque par (3.2.2). Le reste en découle puisque la préimage de tout point b de A est l'ensemble des classes d'homotopie de chemins partant de a, arrivant en b et tracés dans A. □

Remarquons enfin qu'un ensemble de O possédant un plus grand ou plus petit élément est nécessairement simplement connexe puisqu'il suffit pour chaque chemin d'extrémités égales, d'intercaler cet élément entre chaque terme de la suite pour réaliser une homotopie sur le chemin constant.

3.3. Domaines fondamentaux et amalgames

La technique des domaines fondamentaux – qui permet de prouver des résultats de présentation de groupes opérant sur un graphe – est déjà assez ancienne. Pour comparer, on peut par exemple se reporter à la preuve par J.-P. Serre du théorème de Nagao décrivant $\mathrm{SL}_2(\mathbf{K}[t])$ ([Ser77], théorème 6 p.118).

3.3.1. Amalgames

Commençons par rappeler la définition d'un amalgame de groupes. On est encore dans un cadre catégorique.

DÉFINITION. — *Soit G un groupe. Soit $\mathcal{H}$ une famille de sous-groupes de G. On dit que G est* amalgame *des sous-groupes de la famille $\mathcal{H}$ si l'homomorphisme canonique qui va de la limite du système inductif formé des inclusions entre éléments de $\mathcal{H}$ vers G, est un isomorphisme.*

Le problème que l'on se pose est alors le suivant: étant donné un groupe G, peut-on trouver un système de sous-groupes de G (beaucoup) plus simples dont l'amalgame reconstitue G? Un exemple de groupes permettant de répondre positivement à cette question est celui des groupes de Coxeter, qui sont par définition amalgames des sous-groupes $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ correspondant aux générateurs canoniques et de ceux des sous-groupes diédraux engendrés par deux générateurs canoniques qui sont finis.

REMARQUE.— Avant de passer à la définition des domaines fondamentaux, rappelons que la limite de tout sous-système d'un système inductif formé d'inclusions, s'injecte naturellement dans la limite du système ambiant. Cette remarque sera utilisée assez fréquemment.

3.3.2. Domaine fondamental

Les domaines fondamentaux constituent la notion géométrique (au sens de O) adaptée au problème d'amalgame de certains groupes.

DÉFINITION. — *Soient A un objet de O et G un groupe opérant sur A par automorphismes. Alors, une partie F de A est un* domaine fondamental *pour l'action de G si on a:*

(DF1) *Si a est un élément de F plus grand qu'un élément b dans A, alors b est dans F;*
(DF2) *$A = G.F$;*
(DF3) *L'orbite sous G d'un élément a de F ne rencontre F qu'en a.*

Les deux derniers axiomes sont familiers à qui connaît la définition des domaines fondamentaux géométriques. Le premier est adapté à la situation de la catégorie O, il exprime la plénitude du domaine fondamental.

3.3.3. Un revêtement

On se place dans la situation où un groupe G opère sur un ensemble ordonné A par automorphismes de O, en y possédant un domaine fondamental F. Cette simple situation permet de construire un système inductif intéressant de sous-groupes de G, indexé par F. Il suffit de partir de la remarque suivante.

Si dans A on a $b \leq a$, avec a dans F, on sait d'abord que b est dans F d'après (DF1). Mais si en outre g dans G fixe a, on a $g.b \leq g.a = a$ qui est dans $G.\{b\} \cap F = \{b\}$ par (DF3). Ainsi, $b \leq a$ implique $b \in F$ et $G_a \subset G_b$.

On adopte alors la série de notations qui suit. Pour toute comparaison $b \leq a$ d'éléments de F, on note $\iota_{ab} : G_a \to G_b$ l'inclusion de fixateurs correspondante. $\tilde{G}$ est l'amalgame des fixateurs G_a pour a dans F, relativement aux inclusions ι_{ab} pour $b \leq a$, et $\pi : \tilde{G} \to G$ est l'application canonique associée. Enfin, on note Ψ_a l'application canonique $G_a \to \tilde{G}$, dont on désigne l'image par $\tilde{G}_a$. L'homomorphisme composé $\pi \circ \Psi_a$ est l'injection canonique de G_a dans G.

CONSTRUCTION. — *On note $\tilde{A}$ l'ensemble $\bigsqcup_{a \in F} \tilde{G}/\tilde{G}_a$. On ordonne $\tilde{A}$ par*

$$g\tilde{G}_a \geq g'\tilde{G}_b \quad \Leftrightarrow \quad a \geq b \quad \text{et} \quad g^{-1}g' \in \tilde{G}_b.$$

Pour éviter les confusions, on désignera par $\tilde{a}$ l'ensemble $\tilde{G}_a$ quand il s'agira d'un élément de $\tilde{A}$. Cette construction permet de définir une flèche α dans O.

$$\alpha : \tilde{A} \to A$$
$$g\tilde{a} \mapsto \alpha(g\tilde{a}) := \pi(g).a$$

Justification. 0. Il est clair que la relation $\geq$ sur $\tilde{A}$ est une relation d'ordre.

1. La flèche α est bien définie. En effet, si g et g' sont deux éléments de $\tilde{G}$ tels que $g\tilde{a} = g'\tilde{a}$, alors $g^{-1}g'$ est dans $\tilde{G}_a$, soit $\pi(g)^{-1}\pi(g')$ est dans G_a. Ainsi $\pi(g).a = \pi(g').a$. Il reste à montrer qu'on a bien défini une flèche de O.

2. α est croissante

Si $g\tilde{a} \geq g'\tilde{b}$, on a par définition $a \geq b$ et $g\tilde{G}_b = g'\tilde{G}_b$. Puisque G est un groupe d'automorphismes de l'ordre de A, on a

$$\pi(g).a \geq \pi(g).b = \pi(g'g'^{-1}g).b = \pi(g')\pi(g'^{-1}g).b = \pi(g').b.$$

La dernière égalité provenant de $g'^{-1}g \in \tilde{G}_b$. Finalement, on a bien $\alpha(g\tilde{a}) \geq \alpha(g\tilde{b})$.

3. Injectivité descendante

On se met dans la situation où $g\tilde{a}$ majore simultanément $g'\tilde{a}'$ et $g''\tilde{a}''$, et où $\pi(g').a' = \pi(g'').a''$. On a alors $a' = \pi(g'^{-1}g'').a'' \leq \pi(g'^{-1}g'').a = a$, a' est dans $G.a'' \cap F$ qui est réduit à $\{a''\}$ d'après (DF3). Ainsi, $a' = a''$ et $g''.\tilde{a}'' = g''.\tilde{a}' = g''(g'^{-1}g'')^{-1}.\tilde{a}' = g'.\tilde{a}'$.

4. Surjectivité descendante

On part d'un élément b de A inférieur à $\alpha(g\tilde{a}) = \pi(g).a$. L'élément $a' := \pi(g^{-1}).b$ est inférieur à a donc dans F. $g\tilde{a}'$ est alors clairement une préimage de b pour α, inférieure à $g\tilde{a}$. □

Nous allons maintenant étudier la flèche α à ce niveau de généralité, pour déduire des propriétés relatives à $\tilde{A}$ à partir de celles de F.

THÉORÈME. — *Soit G un groupe opérant sur un ensemble ordonné A par automorphismes de O, en y possédant un domaine fondamental F. Alors, la construction précédente possède les propriétés suivantes.*

(i) *α est un revêtement.*
(ii) *$\tilde{A}$ est connexe dès que F l'est.*
(iii) *$\tilde{A}$ est simplement connexe dès que F l'est.*

Démonstration. Preuve de (i). On commence par se donner $g\tilde{a}$ majorant commun à $g'\tilde{a}'$ et $g''\tilde{a}''$, ces deux derniers points vérifiant en outre $\pi(g').a' = \pi(g'').a''$. On a alors

$$\pi(g'^{-1}g'').a'' = a' \in F \cap Ga'' = \{a''\},$$

ce qui implique que a' vaut a''. On a alors $g^{-1}g' \in \tilde{G}_{a'}$, $g^{-1}g'' \in \tilde{G}_{a'} = \tilde{G}_{a''}$, et on obtient donc $g'^{-1}g'' \in \tilde{G}_{a'}$. Ceci implique $g'\tilde{a}' = g''\tilde{a}''$, donc l'injectivité ascendante de α.

On se donne maintenant un élément b de A supérieur à $\alpha(g\tilde{a}) = \pi(g).a$. D'après l'axiome (DF2), on sait déjà que b s'écrit $b = g''.a'$ pour g'' dans G et a' dans F. En écrivant $a' \geq g''^{-1}\pi(g).a$, on en déduit que $g''^{-1}\pi(g).a$ est dans $G.a \cap F$, donc qu'il vaut a. Ainsi $g''^{-1}\pi(g)$ est dans G_a et $a' \geq a$. On pose alors $g' := g\Psi_a(\pi(g)^{-1}g'')$ et on s'intéresse à $g'\tilde{a}'$. Déjà $\alpha(g'\tilde{a}') = \pi\big(g\Psi_a(\pi(g)^{-1}g'')\big).a' = g''.a' = b$. Ainsi $g'\tilde{a}'$ est une préimage pour b. Qu'elle se situe bien par rapport à $g\tilde{a}$ vient de ce que $g'^{-1}g = \Psi_a(\pi(g)^{-1}g'')^{-1}$ est dans $\tilde{G}_a$.

Preuve de (ii). L'application de F vers $\tilde{F} := \{\tilde{a} \mid a \in F\}$ qui attache à a l'élément $\tilde{a}$, est par construction de $\tilde{A}$ un isomorphisme de O. À ce titre $\tilde{F}$ est connexe, et on peut parler de sa composante connexe $\tilde{A}'$ dans $\tilde{A}$, à savoir l'ensemble des points de $\tilde{A}$ reliables à un élément de $\tilde{F}$. Alors, pour tout élément a de F, on a $\tilde{G}_a.\tilde{A}' \subset \tilde{A}'$, et puisque les $\tilde{G}_a$ engendrent $\tilde{G}$, $\tilde{G}.\tilde{A}' \subset \tilde{A}'$. On obtient finalement

$$\tilde{A}' = \tilde{G}.\tilde{A}' \supset \tilde{G}.\tilde{F} = \tilde{A}.$$

Ceci montre que $\tilde{A}' = \tilde{A}$, et donc que $\tilde{A}$ est connexe.

Preuve de (iii). 0. Cette preuve est plus longue que les précédentes. D'après (3.2.2), il suffit de montrer que α est un revêtement universel. Pour cela, on se donne un revêtement universel $\alpha_0 : A_0 \to A$, pour lequel on veut mettre en évidence la factorisation de définition des revêtements universels. On suppose que α_0 atteint F, ce qui est toujours possible en translatant F par un élément convenable de G, d'après (DF2). Enfin, on choisit une composante connexe F_0 de $\alpha_0^{-1}(F)$. On procède comme suit.

1. La restriction de α_0 à F_0 établit un isomorphisme entre cet ensemble et F, de réciproque β.
2. Grâce aux propriétés universelles des revêtements, on construit une action de $\tilde{G}$ sur A_0.
3. On définit une flèche de factorisation candidate à partir de β et de l'action de $\tilde{G}$, et on vérifie qu'elle convient.

1. Montrons que F_0 est une partie pleine de A_0.
Soit a un élément de F_0 et b un élément de A_0 qui lui est inférieur. Alors $\alpha_0(b) \leq \alpha_0(a)$ implique que $\alpha_0(b)$ est dans F, donc que b est dans $\alpha_0^{-1}(F)$, et finalement dans F_0 puisqu'il

est comparable à a. Ainsi, l'inclusion de F_0 dans A_0 est un morphisme de O, ce qui montre que la restriction de α_0 à F_0 est un morphisme de O, au titre de composé de morphismes. Si en outre, on se donne un élément y de F supérieur à un élément $\alpha_0(a)$ (a dans F_0), on sait qu'il existe une unique préimage x de A_0 pour α_0 (qui est un revêtement), supérieure à a, donc comparable à a et dans F_0. Ceci établit que $\alpha_0 \mid_{F_0}$ est en fait un revêtement. D'après (3.2.3), par connexité de F_0 et simple connexité de F, c'est un isomorphisme entre F_0 et F. On note $\beta : F \cong F_0$ sa réciproque.

2. Soit a un élément de F, qui fournit un revêtement pointé $\alpha_0 : (A_0, \beta(a)) \to (A, a)$. Si g est un élément de G_a, alors l'automorphisme g de A se relève en un unique automorphisme $\gamma_{a,g}$ de A_0 tel que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} (A_0, \beta(a)) & \xrightarrow{\alpha_0} & (A, a) \\ {\scriptstyle \gamma_{a,g}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ (A_0, \beta(a)) & \xrightarrow[\alpha_0]{} & (A, a) \end{array}$$

Ce diagramme s'obtient en appliquant la propriété de revêtement universel de α_0 au revêtement $g^{-1} \circ \alpha_0$. L'unicité de la flèche de factorisation assure d'ailleurs que si g et g' sont dans G_a, alors $\gamma_{a,gg'} = \gamma_{a,g} \circ \gamma_{a,g'}$. Puisque A_0 est simplement connexe, d'après (3.2.3), $\gamma_{a,g}$ est l'unique automorphisme de A_0 fixant $\beta(a)$ et faisant commuter le diagramme ci-dessus. D'où pour chaque a de F, un morphisme

$$\begin{aligned} \gamma_a : G_a &\to \mathrm{Aut}(A_0, \beta(a)) \\ g &\mapsto \gamma_{a,g}, \end{aligned}$$

où $\mathrm{Aut}(A_0, \beta(a))$ désigne les automorphismes de A_0 qui fixent $\beta(a)$. Il reste à justifier que ces flèches permettent de faire de A_0 un $\tilde{G}$-espace. Pour cela, il suffit de montrer que pour une comparaison $b \leq a$ dans F, on a $\gamma_a = \gamma_b \circ \iota_{ab}$. On se donne donc g dans G_a. On cherche à calculer $\alpha_0\big(\gamma_{a,g}(\beta(b))\big)$. On obtient

$$\alpha_0\big(\gamma_{a,g}(\beta(b))\big) = g.\alpha_0(\beta(b)) = g.b = b.$$

Par conséquent par injectivité descendante de α_0, on obtient $\gamma_{a,g}(\beta(b)) = \beta(b)$ puisque ces deux éléments sont inférieurs à $\beta(a) = \gamma_{a,g}(\beta(a))$. Ainsi, $\gamma_{a,g}$ fixe $\beta(b)$ et vérifie $\alpha_0 \circ \gamma_{a,g} = \iota_{ab} \circ \alpha_0$, c'est donc $\gamma_{b,\iota_{ab}(g)}$, et on a finalement $\gamma_a = \gamma_b \circ \iota_{ab}$. Ceci montre que la collection de flèches $\gamma_a : G_a \to \mathrm{Aut}(A_0, \beta(a))$ pour a dans F est compatible au système inductif qui définit $\tilde{G}$. On obtient ainsi une flèche

$$\begin{aligned} \gamma : \tilde{G} &\to \mathrm{Aut}(A_0) \\ g &\mapsto \gamma_g, \end{aligned}$$

qui définit une action de $\tilde{G}$ sur A_0. En outre, on a tout fait pour que, pour tout g de $\tilde{G}$, on ait

$$\pi(g) \circ \alpha_0 = \alpha_0 \circ \gamma_g.$$

3. On définit alors la flèche

$$\alpha' : \tilde{A} \to A_0$$
$$g\tilde{a} \mapsto \gamma_g(\beta(a)).$$

Cette définition a un sens. En effet, si $g\tilde{a} = g'\tilde{a}'$, on sait que $a = a'$ et donc $\beta(a) = \beta(a')$, ainsi que $g^{-1}g' \in \tilde{G}_a$. Alors, par définition, on a $\gamma_{g^{-1}g'} = \gamma_{a,\pi(g^{-1}g')}$ donc $\gamma_{g^{-1}g'}(\beta(a)) = \beta(a)$, soit $\gamma_g(\beta(a)) = \gamma_{g'}(\beta(a)) = \gamma_{g'}(\beta(a'))$.

La factorisation $\alpha = \alpha_0 \circ \alpha'$ étant évidente, il reste à montrer que α' est bien une flèche de O.

α' est croissante. En effet, $g\tilde{a} \leq g'\tilde{a}'$ implique $a \leq a'$, $g^{-1}g' \in \tilde{G}_a$ et donc $\gamma_{g^{-1}g'}(\beta(a)) = \beta(a)$, ainsi que $\beta(a) \leq \beta(a')$. Finalement

$$\alpha'(g\tilde{a}) = \gamma_g(\beta(a)) = \gamma_{g'}(\beta(a)) \leq \gamma_{g'}(\beta(a')) = \alpha'(g'\tilde{a}')).$$

Prouvons maintenant l'injectivité descendante. On se donne $g\tilde{a}$ majorant commun de $g'\tilde{a}'$ et de $g''\tilde{a}''$ tels que $\gamma_{g'}(\beta(a')) = \gamma_{g''}(\beta(a''))$. D'après la dernière remarque de 2, on a $\pi(g').a' = \pi(g'').a''$, et puisque F est un domaine fondamental $a' = a''$. D'où encore $\tilde{a}' = \tilde{a}''$ et $\tilde{G}_{a'} = \tilde{G}_{a''}$. En outre, de $g^{-1}g' \in \tilde{G}_{a'}$ et $g'g'' \in \tilde{G}_{a''}$, on tire $g'^{-1}g'' \in \tilde{G}_{a'}$, ce qui donne $g'.\tilde{a}' = g''.\tilde{a}''$.

Il ne reste plus qu'à vérifier la surjectivité descendante de α'. On se donne y dans A_0 inférieur à $\gamma_g(\beta(a)) = \alpha'(g\tilde{a})$. Il s'agit de trouver une préimage à ce point pour α', inférieure à $g\tilde{a}$. En appliquant α_0 à $y \leq \gamma_g(\beta(a))$, on obtient $\alpha_0(y) \leq \pi(g).a$ ou encore $\pi(g)^{-1}.\alpha_0(y) \leq a$. Ainsi $\pi(g)^{-1}.\alpha_0(y)$ est dans F. On peut l'écrire $\pi(g)^{-1}.\alpha_0(y) = a'$ pour a' dans F, inférieur à a. Mais $g\tilde{a}'$ est un élément de $\tilde{A}$, inférieur à $g\tilde{a}$. Il ne reste donc plus qu'à montrer que c'est une préimage de y pour α'. Déjà $\alpha'(g\tilde{a}') \leq \alpha'(g\tilde{a})$, donc y et $\alpha'(g\tilde{a}')$ sont tous deux majorés par $\alpha'(g\tilde{a})$. Enfin

$$\alpha_0\big(\alpha'(g\tilde{a}')\big) = (\alpha_0 \circ \alpha')(g\tilde{a}) = \alpha(g\tilde{a}) = \pi(g).a',$$

ce qui vaut $\alpha_0(y)$ par définition de a'. Par injectivité descendante de α_0, on a bien $\alpha'(g\tilde{a}') = y$. □

3.3.4. Application

Le corollaire de la proposition précédente est le résultat attendu de présentation de groupe.

COROLLAIRE. — *Soit G un groupe opérant sur un ensemble ordonné A par automorphismes de O, en y possédant un domaine fondamental F simplement connexe. Alors, l'ensemble ordonné A est simplement connexe si et seulement si G est l'amalgame des fixateurs G_a pour a dans F relativement aux inclusions ι_{ab} pour $b \leq a$.*

Démonstration. Il est clair que prouver le corollaire revient à prouver que α est un isomorphisme si et seulement si π en est un.

1. Supposons que π est un isomorphisme. Il s'agit de montrer que α est un isomorphisme, autrement dit qu'il est injectif et surjectif. Si $g\tilde{a}$ et $g'\tilde{a}'$ sont tels que $\pi(g)a = \pi(g')a'$, on sait que puisque F est un domaine fondamental et que $a \in G.a' \cap F$, $a' = a$. On a en outre $\pi(g^{-1}g') \in G_a$, donc par injectivité de π, $g^{-1}g' \in \tilde{G}_a$. Ainsi, $g\tilde{a} = g'\tilde{a} = g'\tilde{a}'$. La surjectivité de π montre que G est engendré par les groupes G_a, $a \in F$. Comme F est connexe, on en déduit aussitôt que A est connexe et donc que α est surjectif.

2. Supposons que α est un isomorphisme. Montrons d'abord l'injectivité de π. Pour cela, on se donne g dans $\tilde{G}$, avec $\pi(g) = 1$. Ceci implique que, pour tout a de F, $\pi(g).a = a$, soit

$\alpha(g\tilde{a}) = g\alpha(\tilde{a})$. Par injectivité de α, on obtient donc $g \in \bigcap_{a \in F} \tilde{G}_a$. Comme la restriction de π à un $\tilde{G}_a$ quelconque est injective, l'hypothèse $\pi(g) = 1$ implique finalement $g = 1$.
Montrons la surjectivité de π. Soit g un élément de G. On choisit un élément a de F, et on regarde son transformé $g.a$. Par surjectivité de α, on sait qu'il s'écrit $g.a = \alpha(g'\tilde{a}') = \pi(g').a'$, avec a' dans F et g' dans $\tilde{G}$. À nouveau parce que F est un domaine fondamental, on a $a = a'$. Ainsi, $\pi(g')^{-1}g$ appartient à $G_a = \pi(\tilde{G}_a)$, et finalement g est dans $\pi(g')^{-1}\pi(\tilde{G}_a) \subset \pi(G)$. □

Jusqu'à la fin de ce chapitre, nous allons appliquer les résultats précédents à des ensembles dérivés des immeubles. Les énoncés vont devenir de plus en plus concrets au fur et à mesure de la progression, pour aboutir aux théorèmes dont les démonstrations ont été laissées en suspens dans les chapitres sur les groupes de Kac-Moody et la théorie combinatoire des groupes. À savoir, les théorèmes d'amalgame et d'intersection (nécessaire à la comparaison entre structure de donnée radicielle jumelée et de BN-paire raffinée symétrique).

3.4. Immeubles du point de vue des ensembles ordonnés

Il s'agit dans cette section de construire à partir d'un immeuble un ensemble ordonné qui contienne encore la plupart des informations et propriétés relatives à cette structure, tout en étant simplement connexe au sens précédent. Ainsi, tout revêtement de source connexe et de but cet ensemble sera un isomorphisme d'ensembles ordonnés. Le découpage de la preuve du théorème de cette section est dû à A. Chosson ([Cho97]).

3.4.1. L'ensemble ordonné attaché à un immeuble

Rappelons qu'un groupe de Coxeter est l'amalgame du système de ses sous groupes finis engendrés par un ou deux générateurs canoniques. Cette remarque est à mettre en parallèle avec la définition qui suit.

DÉFINITION. — *Soit $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ un immeuble de matrice de Coxeter $M = [m_{st}]_{s,t \in S}$. On note $(\mathcal{I}, \mathcal{A})_{\text{ord}}$ l'ensemble des simplexes de types de cardinal 0, 1 ou encore 2 si le type est sphérique. C'est un ensemble ordonné pour la relation d'inclusion.*

Avant de prouver la simple connexité de $(\mathcal{I}, \mathcal{A})_{\text{ord}}$, on a encore besoin de deux résultats préliminaires.

3.4.2. Un critère technique de simple connexité

Ce résultat est le dernier de la section relevant purement de la catégorie O.

LEMME. — *Soit I un ensemble ordonné contenant le point a, et un sous-ensemble A. On se donne en outre une collection $\mathcal{B}$ de sous-ensembles de I, pleins, simplement connexes, et qui vérifient les trois points suivants.*

(i) *Deux éléments quelconques de I sont toujours contenus dans un élément de $\mathcal{B}$.*
(ii) *Si B est un élément de $\mathcal{B}$ contenant a et si d est un élément de $A \cap B$, alors tout chemin commençant par a et finissant en d, dont les points sont contenus dans A sauf peut-être a, de longueur minimale pour cette propriété, est tracé nécessairement dans B.*

(iii) *Pour tout d de I et tout B de $\mathcal{B}$ contenant d, l'ensemble des majorants de d dans $A \cap B$ est connexe non vide.*

Alors, sous ces conditions, I est simplement connexe.

Démonstration. D'après le critère homotopique (3.2.4), il suffit de montrer que tout lacet $\Gamma = (a = a_0, a_1, \ldots a_n, a_{n+1} = a)$ est homotope au lacet constant (a).

1. Nous allons procéder à une première réduction, qui permet de supposer que Γ est tracé dans A, au point extrémité a près.
Pour chaque indice $i \geq 1$, il existe d'après (i) un élément B_i de $\mathcal{B}$ qui contient $\sup\{a_{i-1}, a_i\}$. En outre, d'après (iii), on peut trouver pour ces mêmes indices des éléments m_i dans A tels que m_i majore a_{i-1} et a_i. Pour chaque indice $i \leq n$, il existe à nouveau par (i), un élément C_i de $\mathcal{B}$ qui contient $\sup\{m_{i+1}, m_i\}$, et donc a_i par plénitude. L'ensemble $\{x \in A \cap C_i \mid x \geq a_i\}$ est connexe par (iii), et contient m_i et m_{i+1} par construction. Il existe donc un chemin de m_i vers m_{i+1} tracé dans $A \cap C_i$: on note ce chemin Γ_i. On finit la réduction en montrant que les chemins Γ et $a\Gamma_1\Gamma_2 \ldots \Gamma_n a$ sont homotopes. On prouve ce dernier point de proche en proche. Par exemple, les chemins $a_n\Gamma_n a$ et $a_n a$ ont mêmes extrémités et sont tracés dans $\{x \in A \cap C_n \mid x \geq a_n\}$ qui est simplement connexe; ils sont donc homotopes. Ainsi, $a_n\Gamma_n a \sim a_n a$, et on a

$$a\Gamma_1 \ldots \Gamma_n a \sim a\Gamma_1 \ldots \Gamma_{n-1} a_n \Gamma_n a \sim a\Gamma_1 \ldots \Gamma_{n-1} a_n a.$$

En itérant, on obtient que $a\Gamma_1 \ldots \Gamma_n a$ est homotope à Γ, et en considérant plutôt le premier chemin, on obtient la réduction annoncée.

2. On se donne donc un chemin $\Gamma = (a = a_0, a_1, \ldots a_n, a_{n+1} = a)$, tracé dans A au point a près.
Pour chaque indice i compris entre 1 et n, on choisit un chemin Λ_i tracé de a vers a_i dans A (au point a près) et de longueur minimale. On pose enfin $\Lambda_0 = \Lambda_{n+1} := (a)$. Fixons pour l'instant un indice i compris entre 1 et n. On peut choisir B dans $\mathcal{B}$ contenant a et $\sup\{a_{i-1}, a_i\}$, donc les trois points a, a_i et a_{i-1} par plénitude. Par le point (ii), les chemins Λ_i et Λ_{i-1} sont donc tracés dans B, qui est simplement connexe. Ceci montre que pour tout $i \geq 1$, on a finalement $\Lambda_{i-1} a_i \sim \Lambda_i$.
Une récurrence simple montre que pour tout i, $\Gamma \sim \Lambda_i a_{i+1} \ldots a_n a$. Pour $i = 0$ on a en fait l'égalité, et l'hérédité de la propriété provient justement de $\Lambda_{i-1} a_i \sim \Lambda_i$. Finalement, $\Gamma \sim \Lambda_{n+1} a = (a, a) \sim a$. □

Nous appliquerons ce lemme au cas où I est $(\mathcal{I}, \mathcal{A})_{\text{ord}}$, a est une chambre de $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$, A est l'ensemble des chambres et cloisons de $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$, et $\mathcal{B}$ est l'ensemble des traces sur $(\mathcal{I}, \mathcal{A})_{\text{ord}}$ des appartements de $\mathcal{A}$. Remarquons que les facettes sphériques de codimension 2 n'apparaissent qu'à travers ce dernier ensemble.
On se contente de reformuler un lemme prouvé au moment des considérations de convexité dans les immeubles (théorème (2.3.3)). Il correspond à la vérification du second point technique du lemme précédent dans la situation décrite par la remarque. L'aménagement majeur consiste à présenter les galeries (suites de chambres adjacentes) (chambre, chambre, ...) comme des chemins de $(\mathcal{I}, \mathcal{A})_{\text{ord}}$ de la forme (chambre, cloison, chambre, cloison, ...), où la cloison intercalée est la facette commune aux deux chambres adjacentes de la suite initiale. Une référence est [Cho97], proposition (1.3).

LEMME. — *Si* $\mathbf{A}$ *est un appartement de* $\mathcal{I}$*, contenant la chambre* c *et la chambre ou cloison* d*, alors tout chemin de* c *vers* d *tracé dans* A *et de longueur minimale est tracé en fait dans* $\mathbf{A}$. □

3.4.3. Simple connexité de l'ensemble ordonné

On peut enfin énoncer le résultat qui nous intéresse.

THÉORÈME. — *Soit* $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ *un immeuble au sens des systèmes d'appartements. Alors, l'ensemble ordonné associé* $(\mathcal{I}, \mathcal{A})_{\mathrm{ord}}$ *est simplement connexe.*

On commence par un lemme qui établit le résultat pour les immeubles minces.

LEMME. — *Soit* $\Sigma(W, S)$ *un complexe de Coxeter, que l'on voit comme complexe simplicial. Alors, l'ensemble* $\Sigma(W, S)_{\mathrm{ord}}$ *ordonné par l'inclusion renversée est simplement connexe.*

Démonstration. On va invoquer le critère du domaine fondamental (3.3.4), dans le sens «amalgame implique simple connexité» . En effet, W est par définition amalgame de ses sous-groupes $\langle s \rangle$, et $\langle s, t \rangle$ quand ils sont finis. Il est de plus clair que $F := \{\{1\}; \langle s \rangle; \langle s, t \rangle \mid s, t \in S\}$ est un domaine fondamental pour l'action par translations à gauche sur $\Sigma(W, S)_{\mathrm{ord}}$. Il ne reste donc plus qu'à montrer que F est simplement connexe. Mais ceci est clair, puisque $\{1\}$ est un plus grand élément de F. □

Passons maintenant à la preuve du théorème.

Démonstration. Il suffit de vérifier le critère technique, pour les ensembles suivants.

I est $(\mathcal{I}, \mathcal{A})_{\mathrm{ord}}$, $\mathcal{B}$ est l'ensemble des traces d'appartements sur $(\mathcal{I}, \mathcal{A})_{\mathrm{ord}}$, A est la réunion des chambres et cloisons de $(\mathcal{I}, \mathcal{A})$ et c est une chambre quelconque.

Les points préliminaires de ce critère sont vérifiés: les traces d'appartements sur $(\mathcal{I}, \mathcal{A})_{\mathrm{ord}}$ sont clairement pleines, elles sont simplement connexes par le lemme précédent. La condition (i) est un axiome de définition des immeubles par les systèmes d'appartements. On a vu que la condition (ii) paraphrase la convexité des appartements. La condition (iii) dit que l'on doit vérifier que dans la trace d'un appartement sur $(\mathcal{I}, \mathcal{A})_{\mathrm{ord}}$, l'ensemble des facettes contenant une facette de corang ≤ 2 est connexe: cela résulte de (2.3.4). □

La section suivante se fixe pour objectif des résultats de théorie des groupes. On y prouve les théorèmes d'amalgame et d'intersection.

3.5. Théorèmes d'amalgame et d'intersection pour les groupes à donnée radicielle jumelée

Tous les résultats annoncés concernent les groupes à donnée radicielle jumelée, notamment les groupes de Kac-Moody obtenus par évaluation du foncteur de Tits constructif sur un corps. Les théorèmes d'amalgame répondent au type de problème posé à la fin de (3.3.1) en concernant les sous-groupes de Borel de G, et les sous-groupes «unipotents maximaux» de ces derniers. Une

conséquence de ce résultat est le théorème d'unicité des groupes de Kac-Moody sur les corps (qui justifie *a posteriori* l'emploi d'une présentation à la Steinberg du foncteur constructif). Le théorème d'intersection clôt la vérification de la comparaison entre donnée radicielle jumelée et BN-paire raffinée symétrique: on vérifie la dernière condition du jeu d'axiomes de la seconde structure combinatoire (essentiellement l'unicité d'écriture dans la grosse cellule). Le théorème d'amalgame est dû à J. Tits ([Tit87], théorème 2 p.567), l'idée du second est suggérée par P. Abramenko ([Abr97], remarque 2 p.15).

3.5.1. Préparatifs

On se donne un groupe G muni d'une donnée radicielle jumelée $\left(G;(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\right)$ indexée par Φ le système de racines d'un groupe de Coxeter W. Dans le groupe G, on s'intéresse au système constitué par les sous-groupes radiciels U_α et les sous-groupes $U_{[\alpha;\beta]}$ engendrés par les ensembles nilpotents de racines $[\alpha;\beta]$ associés aux paires prénilpotentes de racines $\{\alpha;\beta\}$. On adopte la définition suivante.

DÉFINITION. — *$\tilde{U}$ désigne le groupe obtenu par amalgame du système précédent. On note $\pi:\tilde{U}\to U$ la flèche canonique associée.*

Une première remarque consiste à invoquer le lemme (1.5.4) pour voir que pour chaque élément w de W, les sous-groupes U_w définis en (1.5.2) s'injectent naturellement dans $\tilde{U}$. Ceci parce qu'ils sont limites inductives des sous-systèmes correspondant aux racines de $\Phi_+\cap w\Phi_-$. Rappelons que ces sous-groupes sont définis comme produits (dans un ordre cyclique associé à une écriture réduite de w) des groupes radiciels attachés aux racines de $\Phi_+\cap w\Phi_-$.

On cherche maintenant à définir une flèche entre ensembles ordonnés, dont on montrera d'abord qu'elle est un revêtement, puis un isomorphisme. L'ensemble ordonné but est construit à partir de l'immeuble négatif $(\mathcal{I}_-,\mathcal{A}_-)$ du jumelage associé à G: c'est $(\mathcal{I}_-,\mathcal{A}_-)_{\mathrm{ord}}$ avec les notations de la section précédente. ($\mathcal{A}_-$ est le système d'appartements négatifs admissibles.) On le munit d'une action de $\tilde{U}$ par $\tilde{u}.F=\pi(\tilde{u})F$ pour toute facette de $(\mathcal{I}_-,\mathcal{A}_-)_{\mathrm{ord}}$ et tout élément $\tilde{u}$ de $\tilde{U}$, ce qui a un sens puisque $\pi(\tilde{u})$ est dans G, par conséquent est un automorphisme de $(\mathcal{I}_-,\mathcal{A}_-)$ qui conserve les types et donc stabilise $(\mathcal{I}_-,\mathcal{A}_-)_{\mathrm{ord}}$ dans $\mathcal{I}_-$.

L'ensemble source, lui, n'est pas directement défini par des considérations immobilières. On dira qu'un élément d'un translaté wW_J d'un sous-groupe de Coxeter fini (J sphérique) est *J-antiréduit* s'il est l'unique élément de longueur maximale dans sa classe modulo W_J. On suppose que dans l'écriture de chaque classe wW_J avec J sphérique, on a choisi w J-antiréduit. Ainsi, tout élément z de wW_J s'écrit de manière unique $z=wv$ avec v dans W_J et $\ell(w)=\ell(z)+\ell(v)$ ($v=w^{-1}z$). Ce fait classique est le lemme 5 de [Cho97], par exemple.

L'ensemble qui nous intéresse sera noté A_U. Il s'agit de l'ensemble des couples $(\tilde{u}U_w,wW_I)$ où $\tilde{u}$ est un élément de $\tilde{U}$, I est une partie dont le type est de cardinal 0, 1 ou encore 2 si ce type est sphérique, et w est l'élément I-antiréduit de wW_I. Pour un couple de cet ensemble, on peut trouver plus géométrique de voir les translatés wW_I comme des facettes de l'appartement standard, $\tilde{u}U_w$ comme un élément de $\tilde{U}/U_w$, où U_w est un groupe qui fixe cette facette.

On définit ainsi un objet de O pour la relation d'ordre suivante.

$$(\tilde{u}U_w,wW_I)\leq(\tilde{v}U_z,zW_J)\quad\Leftrightarrow\quad wW_I\supset zW_J\quad\text{et}\quad\tilde{u}U_w=\tilde{v}U_w$$

Cette relation se justifie parce que l'inclusion $wW_I \supset zW_J$ implique que z est dans wW_I. Or, w est I-antiréduit, par conséquent $\ell(w) = \ell(z) + \ell(z^{-1}w)$ et donc U_z est un sous-groupe de U_w (d'après la définition de ces groupes en (1.5.2)). La première condition de comparaison donne un sens à la seconde.
Nous pouvons désormais définir la flèche de O qui est au centre de la démonstration des deux théorèmes.

PROPOSITION/DÉFINITION. — *L'application $\nu : A_U \to (\mathcal{I}_-, \mathcal{A}_-)_{\mathrm{ord}}$ qui attache au couple $(\tilde{u}U_w, wW_I)$ la facette sphérique négative $\pi(\tilde{u})wB_-W_IB_-$ est bien définie et $\tilde{U}$-équivariante. C'est une flèche de la catégorie O des ensembles ordonnés.*

Justification. Signalons d'abord qu'on utilisera indifféremment la notation $B_-W_JB_-$ ou $-F_J$ suivant qu'on adopte le point de vue «BN-paire» ou «immeuble» .

1. La flèche ν est bien définie

En effet, si on choisit un autre élément $\tilde{u}'$ dans $\tilde{u}U_w$, on sait qu'il existe u_w dans U_w tel que $\tilde{u}' = \tilde{u}u_w$. Comme $w^{-1}U_w w \subset U_-$, on a

$$\pi(\tilde{u}')wB_-W_JB_- = \pi(\tilde{u}')w(w^{-1}u_w w)B_-W_JB_- = \pi(\tilde{u})wB_-W_JB_-.$$

2. ν est croissante

Partons d'une comparaison $(\tilde{u}U_w, wW_J) \geq (\tilde{u}'U_{w'}, w'W_{J'})$ dans A_U.
Par définition, $wW_J \subset w'W_{J'}$ et $\tilde{u}'U_{w'} = \tilde{u}U_{w'}$. Ainsi w est dans $w'W_{J'}$, on peut donc l'écrire $w = w'w''$ avec w'' dans $W_{J'}$ et $\ell(w) = \ell(w') - \ell(w'')$. Alors:

$$\nu(\tilde{u}U_w, wW_J) = \pi(\tilde{u})\big(w'w''(-F_J)\big) \supset \pi(\tilde{u})\big(w'w''(-F_{J'})\big) = \pi(\tilde{u})w'(-F_{J'}) = \nu(\tilde{u}'U_{w'}, w'W_{J'}).$$

3. Injectivité descendante de ν

On suppose qu'on est dans la situation suivante

$$\begin{array}{ccc} & (\tilde{u}U_w, wW_J) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ (\tilde{u}'U_{w'}, w'W_{J'}) & & (\tilde{u}''U_{w''}, w'W_{J''}) \end{array}$$

avec $\nu(\tilde{u}'U_{w'}, w'W_{J'}) = \nu(\tilde{u}''U_{w''}, w'W_{J''})$. Les deux comparaisons fournissent les deux égalités

$$\pi(\tilde{u}')w'(-F_{J'}) = \pi(\tilde{u})w'(-F_{J'}) \quad \text{et} \quad \pi(\tilde{u}'')w''(-F_{J''}) = \pi(\tilde{u})w''(-F_{J''}),$$

qui combinées à l'égalité des images donnent $\pi(\tilde{u})w'(-F_{J'}) = \pi(\tilde{u})w''(-F_{J''})$, soit $w'(-F_{J'}) = w''(-F_{J'})$. Cette égalité de facettes implique en particulier qu'elles ont même type, d'où $J' = J''$, et même $w'W_{J'} = w''W_{J''} = w''W_{J'}$. Comme w' et w'' sont tous deux J'-antiréduits, on a $w' = w''$, ce qui prouve l'égalité $(\tilde{u}'U_{w'}, w'W_{J'}) = (\tilde{u}''U_{w''}, w'W_{J''})$ car d'après les comparaisons, on a $\tilde{u}'U_{w'} = \tilde{u}U_{w'} = \tilde{u}''U_{w'}$.

4. Surjectivité descendante de ν

On part de $(\tilde{u}U_w, wW_J)$ d'image la facette $\pi(\tilde{u})w(-F_J)$, et on se donne un simplexe $g(-F_{J'})$ de $(\mathcal{I}_-, \mathcal{A}_-)_{\text{ord}}$ inférieur à cette facette

$$g(-F_{J'}) \subset \pi(\tilde{u})w(-F_J).$$

On veut montrer que ce simplexe est image par ν d'un élément de A_U inférieur à $(\tilde{u}U_w, wW_J)$. On note w' l'élément J'-antiréduit de $wW_{J'}$. Un candidat naturel pour être préimage du simplexe est $\pi(\tilde{u})w'(-F_{J'})$. (Il est inférieur à $\pi(\tilde{u})w(-F_J)$ car $w'W_{J'} = wW_{J'} \supset wW_J$). Remarquons d'abord que $g(-F_{J'})$ et $\pi(\tilde{u})w'(-F_{J'})$ sont deux facettes de type J' contenues dans $\pi(\tilde{u})w(-F_J)$. Elles sont donc égales. Ainsi, $\pi(\tilde{u})w'(-F_{J'})$ est une préimage car

$$\nu(\tilde{u}U_{w'}, w'W_{J'}) = \pi(\tilde{u})w'(-F_{J'}) = \pi(\tilde{u})w(-F_{J'}).$$

□

3.5.2. Le revêtement

Passons au résultat essentiel qui relève encore de la théorie des ensembles ordonnés.

THÉORÈME. — *L'application $\nu : A_U \to (\mathcal{I}_-, \mathcal{A}_-)_{\text{ord}}$ est un revêtement au sens des ensembles ordonnés. En outre, A_U est connexe. Par conséquent, ν est un isomorphisme.*

Démonstration. 1. Connexité de A_U

Pour cela, il suffit de montrer qu'on peut relier tout élément $(\tilde{u}U_w, wW_J)$ à $(\{1\}, \{1\})$ par un chemin tracé dans A_U. Déjà, $(\tilde{u}U_w, wW_J) \leq (\tilde{u}U_w, \{w\})$. De plus, si w est différent de 1, il existe s tel que $w = w's$ avec $\ell(w') < \ell(w)$. Ceci peut s'interpréter comme le fait que w est $\{s\}$-antiréduit. Comme en outre $U_{w'} \subset U_w$, on a donc les comparaisons suivantes.

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{u}U_w, \{w\}) & & (\tilde{u}U_{w'}, \{w'\}) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & (\tilde{u}U_w, w\langle s\rangle) & \end{array}$$

En itérant à partir d'une expression réduite de w, on relie l'élément de départ à $(\tilde{u}, \{1\})$.
Il reste à relier $(\{\tilde{u}\}, \{1\})$ à $(\{1\}, \{1\})$. Tout élément de $\tilde{U}$ s'écrit $u_1.u_2...u_m$ avec u_i dans U_{w_i} pour un élément w_i de W. On remarque alors que $u_1.u_2...u_mU_m = u_1.u_2...u_{m-1}U_m$, ce qui permet d'appliquer le raisonnement précédent pour relier $(u_1.u_2...u_m, \{1\})$ et $(u_1.u_2...u_mU_m, \{w_m\})$, et $(u_1.u_2...u_{m-1}U_m, \{w_m\})$ et $(u_1.u_2...u_{m-1}, \{1\})$. Ceci permet finalement de relier $(u_1.u_2...u_m, \{1\})$ et $(u_1.u_2...u_{m-1}, \{1\})$. On termine en itérant.

2. Surjectivité ascendante de ν

On se donne un simplexe $g(-F_{J'})$ de $(\mathcal{I}_-, \mathcal{A}_-)_{\text{ord}}$ contenant la facette $\pi(\tilde{u})w(-F_J) = \nu(\tilde{u}U_w, wW_J)$. On lui cherche une préimage par ν. Déjà, $\pi(g^{-1}\tilde{u})w(-F_J)$ est incluse dans $-F_{J'}$ et est de type J. C'est donc $-F_J$, et $g^{-1}\pi(\tilde{u})w$ est dans $B_-W_JB_-$. D'après les propriétés d'écriture des doubles classes dans les groupes à données radicielles jumelées, on peut écrire $g = \pi(\tilde{u})wu_{-w''}n_{w''}b_-$, avec w'' dans W_J, $n_{w''}$ relevant w'' modulo H, $u_{-w''}$ dans $U_{-w''} := U_- \cap w''U_+w''^{-1}$ et b_- dans

B_-. Alors, $g(-F_{J'}) = \pi(\tilde{u})(wu_{-w''}w^{-1})(ww'')(-F_{J'})$. Si on note w' l'élément J'-antiréduit de $ww''W_{J'}$, on a: $g(-F_{J'}) = \pi(\tilde{u})(wu_{-w''}w^{-1})w'(-F_{J'}) = \nu(\tilde{u}\tilde{u}''U_{w'}, w'W_{J'})$, en posant $\tilde{u}'' := wu_{-w''}w^{-1}$. Ainsi, $(\tilde{u}\tilde{u}''U_{w'}, w'W_{J'})$ est une préimage de $g(-F_{J'})$, il ne reste donc plus qu'à montrer que $(\tilde{u}\tilde{u}''U_{w'}, w'W_{J'}) \geq (\tilde{u}U_w, wW_J)$. Ce qui revient à prouver que $wu_{-w''}w^{-1}$ est dans U_w. L'inclusion $wU_{-w''}w^{-1} \subset wU_-w^{-1}$ est claire. Il suffit de montrer $wU_{-w''}w^{-1} \subset U_+$. Or, $U_{-w''} = \langle U_\alpha \mid \alpha \in \Phi_- \cap w''\Phi_+ \rangle$. On est donc ramené à $w(\Phi_- \cap w''\Phi_+) \subset \Phi_+$. Puisque w est J-antiréduit, on a pour tout s de J, $\ell(ws) < \ell(w)$, soit $w(-\alpha_s) > 0$. Par conséquent, $w\Phi_{-J} \subset \Phi_+$, et *a fortiori* on a $wU_{-w''}w^{-1} \subset U_+$.

3. Injectivité ascendante de ν

On se place dans la situation suivante:

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{u}''U_{w''}, w''W_{J''}) & & (\tilde{u}'U_{w'}, w'W_{J'}) \\ \searrow & & \swarrow \\ & (\tilde{u}U_w, wW_J) & \end{array}$$

avec $\nu(\tilde{u}''U_{w''}, w''W_{J''}) = \nu(\tilde{u}'U_{w'}, w'W_{J'})$.
Ceci nous donne: $\pi(\tilde{u}'')w''(-F_{J''}) = \pi(\tilde{u}')w'(-F_{J'}) \supset \pi(\tilde{u})w(-F_J)$. En regardant les types des facettes, on a déjà: $J' = J'' \subset J$. Ensuite, si on remarque que $B_-wB_-W_KB_-$ est formé de doubles classes indexées par des éléments de wW_K, on peut tirer de l'égalité $B_-w'B_-W_{J'}B_- = B_-w''B_-W_{J''}B_-$ que $w'W_{J'} \cap w''W_{J''} \neq \varnothing$, et donc l'égalité de ces classes. Finalement, puisque w' et w'' sont tous deux J'-antiréduits, on a $w' = w''$, égalité qu'on utilisera de façon systématique dès à présent. Il reste à montrer que $\tilde{u}''U_{w''} = \tilde{u}'U_{w'}$, alors qu'on sait déjà grâce aux comparaisons en hypothèse, que $\tilde{u}''U_w = \tilde{u}'U_w$. On va finir en examinant chacun des cas possibles dans l'inclusion $J \supset J'$. Le cas $\#J = \#J'$ implique directement $w = w'$ et est alors immédiat. On travaille donc sous l'hypothèse $\#J' < \#J$, ce qui implique $\#J' \leq 1$. L'inclusion $wW_J \supset w'W_{J'}$ permet d'écrire $w = w'y$ avec $\ell(w) = \ell(w') + \ell(y)$, pour y dans W_J. On peut alors décomposer U_w en $U_w = U_{w'}w'U_yw'^{-1}$, ce qui permet d'écrire $\pi(\tilde{u}''^{-1}\tilde{u}') = u_{w'}w'u_yw'^{-1}$ avec les appartenances évidentes. Par hypothèse, on a $\pi(\tilde{u}''^{-1}\tilde{u}')(-w'F_{J'}) = -w'F_{J'}$. Ceci implique que u_y est dans $B_-W_{J'}B_-$, et on veut montrer que quoi qu'il en soit cela donne $u_y \in B_-$, et finalement $u_y = 1$. En effet, par le corollaire (1.5.3)(ii), on aura $u_y \in U_y \cap B_- = \{1\}$.

Le cas $\#J' = 0$ est réglé par la remarque qu'on vient de faire.
Si $\#J' = 1$, soit $J' = \{s\}$, u_y est dans $B_- \sqcup B_-sB_-$. On utilise à nouveau le fait que w est J-antiréduit, en l'appliquant cette fois à $w's$, pour obtenir $\ell(w) = \ell(w's) + \ell(sy) (= \ell(w') + \ell(y))$. Maintenant, w' $\{s\}$-antiréduit permet d'écrire $\ell(w's) < \ell(w')$, ce qui donne $\ell(sy) > \ell(y)$. Cette dernière inégalité implique $U_y \cap B_-sB_- = \varnothing$ par (1.4.4), puis $u_y \in B_-$ et donc à nouveau $u_y = 1$. Dans tous les cas, $\pi(\tilde{u}''^{-1}\tilde{u}') = u_{w'} \in U_{w'}$, donc on a bien $(\tilde{u}''U_{w''}, w''W_{J''}) = (\tilde{u}'U_{w'}, w'W_{J'})$. □

Nous finissons par de la théorie des groupes.

3.5.3. Théorèmes d'amalgame

Nous rassemblons deux résultats d'amalgame démontrés par J. Tits (théorème 2 de [Tit87] p.567 et [Tit86] proposition 5 p.380). L'idée d'appliquer ces raisonnements aux données radicielles jumelées est évoquée par P. Abramenko ([Abr97], remarque 2 p.15).

THÉORÈME. — (i) *Soit G un groupe muni d'une donnée B-radicielle $\left(G, (B_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\right)$. Soit ϵ un signe. Avec les notations habituelles, B_ϵ est l'amalgame de ses sous-groupes B_α et $B_{[\alpha;\beta]}$ pour α racine de signe ϵ et $\{\alpha;\beta\}$ paire prénilpotente de racines de signe ϵ.*

(ii) *Soit G un groupe muni d'une donnée radicielle jumelée $\left(G, (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\right)$. Soit ϵ un signe. Avec les notations habituelles, U_ϵ est l'amalgame de ses sous-groupes U_α et $U_{[\alpha;\beta]}$ pour α racine de signe ϵ et $\{\alpha;\beta\}$ paire prénilpotente de racines de signe ϵ.*

Démonstration. Preuve de (i). La démonstration est la preuve initiale de J. Tits des théorèmes d'amalgame (avec pour objectif les théorèmes d'unicité des groupes de Kac-Moody). Pour cela, il faut prendre comme ensemble source non pas A_U, mais l'ensemble A_B des couples $(\tilde{b}B_w, wW_J)$ définis et ordonnés de façon similaire. Les raisonnements et notations sont complètement analogues à ce qu'on a fait, en remplaçant la lettre U par B.

Preuve de (ii). On utilise le fait que ν est un isomorphisme $\tilde{U}$-équivariant, pour comparer les stabilisateurs d'éléments échangés par ν. Ainsi, on obtient

$$\forall w \in W \quad \pi^{-1}(U_+ \cap wB_-w^{-1}) = U_w,$$

en constatant l'égalité des stabilisateurs de $(U_w, w\{1\})$ dans A_U et de son image wB_- dans $(\mathcal{I}_-, \mathcal{A}_-)$. Pour $w = 1$, on a $\pi^{-1}(U_+ \cap B_-) = \{1\}$, ce qui implique que π est injective. C'est donc un isomorphisme. □

Signalons que par des méthodes analogues, on peut prouver que dans le cas d'une donnée radicielle jumelée, U_+ est l'amalgame des sous-groupes U_w pour le système d'inclusions $U_w \supset U_{w'}$ quand $\ell(w) = \ell(w') + \ell(w'^{-1}w)$ (ce qu'on note $w \geq w'$) ([Tit86], proposition 3 p.376). Ce résultat avait été conjecturé par V. Kac et D. Peterson ([Kac-Pet84]).

3.5.4. Théorème d'intersection

Rappelons sous forme de théorème ce qui manquait en (1.5.4) pour montrer qu'une donnée radicielle jumelée donne naturellement naissance à une BN-paire raffinée symétrique.

THÉORÈME. — *Si G est un groupe muni d'une donnée radicielle jumelée $\left(G; (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\right)$, alors avec les notations habituelles, on a pour tout w de W, $U_+ \cap wB_-w^{-1} = U_w$, et en particulier $HU_+ \cap U_- = HU_- \cap U_+ = \{1\}$.*

Démonstration. Dès lors qu'on sait que π est un isomorphisme $\tilde{U} \cong U$, il suffit de revenir à la preuve du théorème précédent, notamment à l'assertion

$$\forall w \in W \quad \pi^{-1}(U_+ \cap wB_-w^{-1}) = U_w.$$

On finit en appliquant π. □

COROLLAIRE. — *$H = HU_+ \cap HU_-$ est le fixateur dans G de l'appartement jumelé standard* **A**. □

4. Courbure négative dans les immeubles généraux

La courbure négative est un argument célèbre et crucial dans la théorie des immeubles de Bruhat-Tits pour les systèmes de Tits affines ([Bru-Tit72], section (3.2)). L'idée d'imiter les raisonnements qui s'ensuivent pour des situations de type Kac-Moody remonte d'une certaine façon à un article de V. Kac et D. Peterson ([Kac-Pet87]), mais la courbure négative elle-même est absente de cette référence, remplacée par une fonction convexe sur le cône de Tits. Que l'on puisse disposer de la courbure négative dans les immeubles généraux provient de résultats plus récents, qui suivent une approche à la Gromov. Cela découle essentiellement de la thèse de G. Moussong ([Mou88]). La présentation de ce travail est l'occasion de parler de réalisations géométriques générales (non nécessairement métriques) des immeubles au moyen de *structures-miroirs* – traduction littérale du terme *mirror-structure* de [Dav83].

4.1. Quelques notions métriques

On va exposer ici toutes les notions métriques qui nous seront utiles, courbure exceptée. Il s'agit essentiellement d'étudier la version métrique des complexes cellulaires: les cellules sont des polytopes découpés dans les variétés riemanniennes simplement connexes à courbure constante de référence (sphères, espaces euclidiens et hyperboliques). Des références pour cette section sont par exemple [Mou88], [Bri91] et [Pau91].

4.1.1. Complexes métriques. Polyèdres métriques par morceaux

Définissons d'abord les espaces métriques de référence. Pour n un entier et χ un nombre réel, M^n_χ désigne la n-sphère $(\frac{1}{\sqrt{\chi}})S^n$ si $\chi > 0$, l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ si $\chi = 0$ et l'espace hyperbolique (réel) $(\frac{1}{\sqrt{-\chi}})H^n$ si $\chi < 0$. Conformément à la tradition riemannienne, $\frac{\pi}{\sqrt{\chi}}$ et ses multiples valent ∞ dès que $\chi \leq 0$.

DÉFINITION. — *Un* polytope *(ou une* cellule*) de M^n_χ est une partie compacte non vide obtenue comme intersection finie de demi-espaces de M^n_χ, et de diamètre inférieur à $\frac{\pi}{2\sqrt{\chi}}$. On parle de* simplexe *quand on intersecte $n+1$ demi-espaces limités par des hyperplans en position générale dans un espace de dimension n.*

Référence. [Pau91], définition (3.1) p.329. □

À cette définition, sont immédiatement associées les notions de *face*, d'*hyperplan d'appui*, de *bord*, d'*intérieur* et de *dimension*. Bien entendu, l'ensemble des faces d'un simplexe forme un complexe simplicial fini abstrait. On va maintenant travailler sur des recollements de tels polytopes, ce qui nous fera parler de *polyèdres*.

DÉFINITION. — *On fixe un nombre réel* χ.

(i) *Un* polyèdre M_χ par morceaux *consiste en la donnée d'une collection* $\{C\}_{C\in E}$ *de polytopes de* M^n_χ *(*n *variant dans* $\mathbf{N}$*) et d'une relation d'équivalence* $\sim$ *sur* $\bigsqcup_{C\in E} C$ *telle que*

Deux points d'un même polytope ne sont jamais équivalents.
Pour tous B *et* C *dans* E*, la partie* $\mathcal{D}_{B,C} := \{x\in B \mid \exists y\in C \quad x\sim y\}$
est une réunion de faces de B.
La restriction de $\sim$ *à* $B\times C$ *est le graphe d'un homéomorphisme de* $\mathcal{D}_{B,C}$ *sur* $\mathcal{D}_{C,B}$
qui établit des isométries entre faces.

On note $\mathrm{Fo}(K)$ *l'ensemble des classes d'isométrie des polytopes de la collection considérée, et on l'appelle l'ensemble des* formes *de cellules.*

(ii) *On parle de* polyèdre métrique par morceaux *si on ne spécifie pas la courbure de référence. En revanche, quand* χ *vaut* -1 *(respectivement* 0, 1*) on parle de* polyèdre hyperbolique *(respectivement* euclidien, sphérique*) par morceaux. On pourra aussi omettre l'expression «par morceaux» .*

Référence. [Pau91], définition (3.4) p.329. □

On fera systématiquement l'abus d'appeler polyèdre M_χ par morceaux l'espace quotient obtenu par recollement. Les *cellules* seront les images dans ce quotient des faces des polytopes recollés.

REMARQUE.— Une précision s'impose. Nous allons invoquer plusieurs fois des théorèmes de M. Bridson issus de [Bri91]. Dans cet article, ces résultats sont prouvés dans le cadre plus restreint *a priori* où les cellules sont des simplexes. En fait, on se ramène à cette situation sans grande difficulté par le procédé de *subdivision barycentrique* cellule par cellule ([Pau91], p.333-334).

4.1.2. Pseudo-métrique des chemins

On part d'un polyèdre métrique par morceaux qu'on désigne par P.

DÉFINITION. — *Une* ligne polygonale *dans* P *est une application* $f : [a;b] \to P$ *telle qu'il existe une subdivision* $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = b$ *pour laquelle* $f([t_i;t_{i+1}])$ *est inclus dans une cellule pour tout* i *et telle que la restriction* $f\,|_{[t_i;t_{i+1}]}$ *est une géodésique de la cellule.*

La *longueur* d'une ligne polygonale est la somme des longueurs pour une subdivision comme ci-dessus. La métrique d'une cellule est celle qu'elle hérite de l'espace dans lequel elle a été découpée. On va définir une application $d : P^2 \to \mathbf{R}_+$, symétrique et vérifiant trivialement l'inégalité triangulaire, sans être nécessairement une métrique.

DÉFINITION. — *La* pseudo-distance *entre deux points* x *et* y *de* P *est la borne inférieure des longueurs des lignes polygonales joignant* x *à* y.

Référence. [Pau91], p.336-337. □

Il manque un certain nombre de propriétés à d pour faire de P un espace métrique agréable à manipuler. Notamment: la séparation, la complétude et l'existence de géodésiques.

4.1.3. Géodésiques. Systole. Espace géodésique

Définissons quelques notions qui ne sont pas propres aux polyèdres métriques.

DÉFINITION. — (i) *Une* géodésique *dans un espace métrique (X, d) est une isométrie $f : I \to X$ pour I segment de $\mathbf{R}$ muni de sa métrique usuelle.*
(ii) *Une* géodésique locale *est une application $f : I \to X$ d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ dans X, telle que pour tout t de I, il existe $\epsilon > 0$ pour lequel $f|_{[t-\epsilon;t+\epsilon]}$ est une géodésique.*
(iii) *Une* géodésique fermée *de longueur ℓ est une isométrie du cercle $(\frac{\ell}{2\pi})S^1$ dans X.*
(iv) *La* systole *d'un espace métrique est la borne inférieure des longueurs positives de géodésiques fermées dans X.*
(v) *Un espace métrique (X, d) est un* espace géodésique *si pour tous x et y de X, il existe une géodésique de longueur $d(x, y)$ joignant x à y.*

Référence. [Pau91] p.345 pour les géodésiques et la systole, p.324 pour les géodésiques locales, et p.317 pour les espaces géodésiques. □

Les notions qui suivent sont plus étroitement liées aux polyèdres métriques.

4.1.4. Link. Joint. Cône. Suspension

On reprend P un polyèdre métrique par morceaux. À chaque face F de P, on va associer un polyèdre sphérique par morceaux. Commençons par les links dans les polytopes.

DÉFINITION. — *Si C désigne un polytope métrique découpé dans M^n_χ, et F une face de C de centre x, le* link $\mathrm{lk}(F, C)$ *de F dans C est l'ensemble des germes en 0 de géodésiques locales valant x en 0, à valeurs dans C pour des valeurs suffisamment petites, et orthogonales à F en x.*

Tout autre point intérieur de F définirait le même espace, et $\mathrm{lk}(F, C)$ est une cellule sphérique sans paire de points antipodaux ([Mou88], chapitre 1). Le cas des polyèdres métriques par morceaux est traité par recollement.

DÉFINITION. — *Le* link $\mathrm{lk}(F, P)$ *d'une cellule F dans P est le polyèdre sphérique par morceaux obtenu en recollant les links $\mathrm{lk}(F, C)$ pour C une cellule de P contenant F, le long des links $\mathrm{lk}(F, F')$ de F dans les faces F' communes à ces cellules, et contenant F.*

Référence. Pour des compléments sur ces définitions techniques, on peut se reporter à [Pau91], p.331-332 pour les links dans les polytopes et p.335 pour les links dans les polyèdres métriques par morceaux. □

On peut enfin définir une version métrique des cônes et suspensions dans le cas des polyèdres sphériques par morceaux.

DÉFINITION. — *Soient m et n deux entiers. On fait coexister les sphères S^{m-1} et S^{n-1} dans $\mathbf{R}^{m+n}$ comme intersections de la sphère-unité S^{m+n-1} avec deux sous-espaces orthogonaux $\mathbf{R}^m$ et $\mathbf{R}^n$.*

(i) *Le* joint *de deux cellules sphériques $B \subset S^{m-1}$ et $C \subset S^{n-1}$ est la trace sur S^{m+n-1} du cône engendré par B et C. On le note $B \star C$. Si C est le point 1 de S^0, on parle de* cône au-dessus de B, *qu'on note $B \star 1 = 1 \star B$.*
(ii) *La* suspension d'ordre n *d'une cellule sphérique $B \subset S^{m-1}$ est la trace sur S^{m+n-1} du cône engendré par B et S^{n-1}. On la note $B \star S^{n-1}$.*

(iii) *Le* cône *ou la* suspension d'ordre n *d'un polyèdre sphérique* P *est le polyèdre obtenu en effectuant cette opération sur chaque cellule et en conservant les mêmes données de recollement. On les note* $1 \star P$ *et* $S^{n-1} \star P$ *respectivement.*

Référence. Ces notions sont introduites dans [Mou88]. Voir la fin du chapitre 1 pour le cas des polytopes, et la fin du chapitre 2 pour celui des polyèdres sphériques par morceaux. □

REMARQUE.— On peut vérifier que le joint est une opération commutative et associative à isométrie près, et que puisqu'on a $S^{n+1} = S^0 \star S^n$, la suspension d'ordre n s'obtient par itération de la suspension d'ordre 1.

4.1.5. Métrique, complétude et géodésiques des polyèdres

Nous passons maintenant à l'énoncé du théorème principal sur les propriétés des polyèdres métriques par morceaux, courbure exceptée. Ce théorème est dû à M. Bridson, il est remarquable qu'il ne requiert aucune hypothèse de finitude (ou compacité) locale au sens des complexes cellulaires.

THÉORÈME. — *Soit* P *un polyèdre métrique par morceaux dont l'ensemble des formes de cellules* $\mathrm{Fo}(K)$ *est fini. Alors, sur chaque composante connexe de* P*, la pseudo-métrique des distances est une distance qui fait de* P *un espace géodésique complet.*

Référence. [Pau91], théorème (3.6) p.338. □

Ce théorème fournit en outre une description des géodésiques locales: il s'agit des applications $f : I \to P$ telles qu'en tout point t de I, les germes de géodésiques $f\,|_{[t-\epsilon;t]}$ et $f\,|_{[t;t+\epsilon]}$ soient à distance angulaire supérieure ou égale à π dans le link de $f(t)$ dans P.

4.2. Réalisation géométrique des immeubles

Cette section sera utile aussi bien aux sections suivantes qu'au chapitre 5 qui traite de géométrie conique des immeubles. En effet, on va traiter ici les généralités géométriques non métriques des recollements, avant de revenir au problème de la courbure négative dans les immeubles. Dans tout ce qui suit, $(\mathcal{I}, d)$ désigne un immeuble de type M pour une matrice de Coxeter M indexée par S un ensemble fini.

4.2.1. Structures-miroirs et recollement des chambres

Les *structures-miroirs* fournissent un moyen très général et très souple d'attacher des espaces topologiques à un immeuble. Elles sont introduites dans [Dav83] comme généralisation d'objets étudiés par E. Vinberg ([Vin71]).

DÉFINITION. — (i) *Une* structure-miroir *(pour M) est la donnée d'un espace topologique X et d'un sous-espace fermé X_s par élément de S. On la note $\big(X,(X_s)_{s\in S}\big)$.*
(ii) *Pour tout x de X, on appelle* type *de x la partie $J(x)$ de S définie par $J(x) := \{s \in S \mid x \in X_s\}$.*
(iii) *Pour toute partie J de S, on définit le sous-espace fermé $X_J := \bigcap_{s\in J} X_s$.*
(iv) *Le* recollement *$X(\mathcal{I})$ attaché à l'immeuble $\mathcal{I}$ et à la structure-miroir $\big(X,(X_s)_{s\in S}\big)$ est le quotient topologique*

$$X(\mathcal{I}) := \frac{\mathcal{I}\times X}{\sim},$$

où $\mathcal{I}$ est muni de la topologie discrète et $\sim$ est donnée par $(c,x)\sim(d,y)$ si et seulement si $x=y$ et $d(c,d)$ est dans $W_{J(x)}$. On parle aussi de réalisation géométrique *de $\mathcal{I}$ associée à $\big(X,(X_s)_{s\in S}\big)$.*
On note $[c,x]$ la classe du couple (c,x), et $\pi_{\mathcal{I}}$ la projection canonique de $\mathcal{I}\times X$ sur $X(\mathcal{I})$.

On notera aussi $\sim_{\mathcal{I}}$ la relation d'équivalence s'il y a risque de confusion.

4.2.2. Flèches et facettes

Cette façon de recoller des exemplaires d'une structure-miroir prend aussi en charge les flèches combinatoires.

LEMME/DÉFINITION. — *Tout morphisme strict $\alpha : (\mathcal{I},d)\to(\mathcal{I}',d')$ d'immeubles de type M donne naturellement naissance à un morphisme continu $X(\alpha) : X(\mathcal{I})\to X(\mathcal{I}')$ appelé* réalisation géométrique *de α. Si α est un morphisme cohérent, le morphisme continu $X(\alpha)$ est défini dès qu'il existe un homéomorphisme α^* de X sur lui-même tel que $\alpha^*(X_s)=X_{\alpha^*(s)}$ si α transforme la s-adjacence en $\alpha^*(s)$-adjacence.*

Justification. Soient c et d des chambres de $\mathcal{I}$ et x et x' dans X. On a

$$(c,x)\sim_{\mathcal{I}}(d,x') \iff x=x' \text{ et } d(c,d)\in W_{J(x)}.$$

Le second point de la partie droite de l'équivalence exprime l'existence d'une J-galerie de c vers d. Une J-galerie étant envoyée sur une $\alpha^*(J)$-galerie par un morphisme d'immeubles de type M (2.3.2), on peut définir $X(\alpha)$ par $X(\alpha)([c,x]) := [\alpha(c),\alpha^*(x)]$. Si α est strict, on choisit évidemment $\alpha^* = \mathrm{id}_X$. On obtient ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}\times X & \xrightarrow{\alpha\times\alpha^*} & \mathcal{I}'\times X \\ {\scriptstyle\pi_{\mathcal{I}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_{\mathcal{I}'}} \\ X(\mathcal{I}) & \xrightarrow{X(\alpha)} & X(\mathcal{I}'). \end{array}$$

Pour la partie topologique de l'assertion, on se donne un fermé F de $X(\mathcal{I}')$, ce qui signifie que $(\pi_{\mathcal{I}'})^{-1}(F)$ est un fermé de $\mathcal{I}'\times X$. Autrement dit, $(\pi_{\mathcal{I}'})^{-1}(F)$ est de la forme

$$\bigcup_{d\in\mathcal{I}'}(\{d\}\times F_d),$$

avec F_d fermé de X pour toute chambre d de $\mathcal{I}'$. $(\pi_{\mathcal{I}})^{-1}\big(X(\alpha)^{-1}(F)\big)$ est donc

$$(\alpha\times\alpha^*)^{-1}\Big(\bigcup_{d\in\mathcal{I}'}(\{d\}\times F_d)\Big).$$

C'est $\bigcup_{c\in\mathcal{I}}(\{c\}\times(\alpha^*)^{-1}(F_{\alpha(c)}))$, qui est fermé. Ainsi, $X(\alpha)^{-1}(F)$ est fermé, et $X(\alpha)$ est continu.
□

On voit facilement qu'on définit ainsi un foncteur de la catégorie des immeubles de type M vers celle des espaces topologiques. On peut aussi définir les chambres et facettes géométriques.

LEMME/DÉFINITION. — (i) *Pour toute chambre c de $\mathcal{I}$, la partie $X(c) := \{[c,x] \mid x\in X\}$ est un sous-espace fermé homéomorphe à X qu'on appelle la* chambre géométrique fermée *associée à c.*
(ii) *Pour toute partie J de S pour laquelle il existe x dans X avec $J(x) = J$, l'ensemble $\{[c,x] \mid x\in X_J\}$ est un sous-espace fermé de $X(c)$, homéomorphe à X_J, qu'on appelle* facette géométrique fermée de type J. *On dit dans ce cas que les facettes de type J ou le type J sont* représentés *dans $X(\mathcal{I})$.*
(iii) *L'ensemble des points de type J dans une facette fermée de type J est appelé* facette géométrique ouverte de type J. *On parle de* chambre *si le type est $\varnothing$.*

Justification. Par définition, l'ensemble des couples de $\mathcal{I}\times X$ équivalents à (c,x) est

$$\{(d,x) \mid d\in\mathcal{I}, d(c,d)\in W_{J(x)}\}.$$

Déjà, la relation d'équivalence $\sim$ est définie de telle sorte que

$$\iota_c : X \to X(\mathcal{I})$$
$$x \mapsto [c,x]$$

est injective. Si F est un fermé de $X(\mathcal{I})$, on écrit comme précédemment $\pi_{\mathcal{I}}^{-1}(F) = \bigcup_{c\in\mathcal{I}}(\{c\}\times F_c)$, qui est un fermé saturé de $\mathcal{I}\times X$. Ainsi, $\iota_c^{-1}(F) = F_c$ est un fermé, et donc ι_c est continue. Il reste à voir que ι_c est fermée. Pour cela, il suffit de voir que si F est un fermé de X, le saturé de $\{c\}\times F$ l'est dans $\mathcal{I}\times X$. Or, ce saturé s'écrit $\bigcup_{J\subset S}\Big(\bigcup_{d,d(c,d)\in W_J}(\{d\}\times(F\cap X_J))\Big)$. Sur chaque exemplaire de chambre, est une réunion finie de fermés. □

On prendra bien garde au fait que tous les types de facettes ne sont pas nécessairement représentés.

4.2.3. Appartements et rétractions

La réalisation géométrique des flèches permet de traiter le cas des appartements et rétractions combinatoires.

LEMME/DÉFINITION. — (i) *Si $\alpha : W \to \mathcal{I}$ est une isométrie combinatoire définissant un appartement $\mathbf{A} = \alpha(W)$, alors $X(\alpha)$ établit un homéomorphisme de $X(W)$ sur son image dans $X(\mathcal{I})$, qu'on appellera* appartement géométrique *et qu'on notera $X(\mathbf{A})$.*
(ii) *On a $X(\mathbf{A}) = \bigcup_{c \in \mathbf{A}} X(c)$.*
(iii) *Si ρ est une rétraction combinatoire sur $\mathbf{A}$, sa réalisation géométrique est une rétraction topologique.*

Justification. (ii) est évident par définition de la réalisation géométrique des flèches, et (iii) provient de la fonctorialité de cette même opération.
On va justifier (i). On sait déjà que $X(\alpha)$ est continue. Elle est injective car pour tous w ,w' de W et x, x' de X, on a

$$X(\alpha)[w,x] = X(\alpha)[w',x'] \Leftrightarrow [\alpha(w),x] = [\alpha(w'),x']$$

$$\Leftrightarrow x = x', d(\alpha(w),\alpha(w')) \in W_{J(x)} \Leftrightarrow x = x', w^{-1}w' \in W_{J(x)},$$

ce qui équivaut encore à $[w,x] = [w',x']$.

Il reste à montrer que l'application est fermée. Soit F un fermé de $X(W)$. On a $\pi_W^{-1}(F) = \bigcup_{w \in W}(\{w\} \times F_w)$ qui est un fermé saturé. $\pi_{\mathcal{I}}^{-1}\big(X(\alpha)(F)\big)$ est le saturé F_{sat} dans $\mathcal{I} \times X$ de $\bigcup_{w \in W}(\{\alpha(w)\} \times F_w)$. Soit c une chambre de $\mathcal{I}$, il s'agit de déterminer $F_{\text{sat}} \cap \{c\} \times X$. Plus précisément, on se donne J une partie de S et on regarde $(\{c\} \times X_J) \cap F_{\text{sat}}$. Ceci vaut $\{c\} \times \bigcup_{\substack{w \in W \\ d(\alpha(w),c) \in W_J}} (F_w \cap X_J)$. Mais si w et w' sont tels que $d(\alpha(w),c) \in W_J$ et $d(\alpha(w'),c) \in W_J$, alors $w^{-1}w'$ est dans W_J; et donc, puisque $\bigcup_{w \in W}(\{w\} \times F_w)$ est saturé, $F_w \cap X_J = F_{w'} \cap X_J$. Ainsi, $\bigcup_{\substack{w \in W \\ d(\alpha(w),c) \in W_J}} (F_w \cap X_J)$ est un fermé. Puisque S est fini, $F_{\text{sat}} \cap \{c\} \times X$ est fermé. □

On notera en pratique $\mathbf{A}$ au lieu de $X(\mathbf{A})$ si le choix de la réalisation géométrique est clair.

4.2.4. Lecture géométrique du système de chambres

Pour qu'une réalisation géométrique soit acceptable, il est nécessaire de pouvoir y lire ce qui fait de $\mathcal{I}$ un immeuble, à savoir les s-adjacences. On a déjà vu en (4.2.2) que toutes les facettes ne sont pas nécessairement représentées. Ceci justifie qu'il faut requérir la représentation du type $\{s\}$ pour chaque s de S. Dans ce cas, les facettes géométriques correspondantes seront bien entendu appelées *cloisons géométriques.*

LEMME. — *Si chaque type $\{s\}$ pour s dans S est représenté dans la réalisation géométrique $X(\mathcal{I})$, alors pour toute paire de chambres c et c' de $\mathcal{I}$, on a l'équivalence*

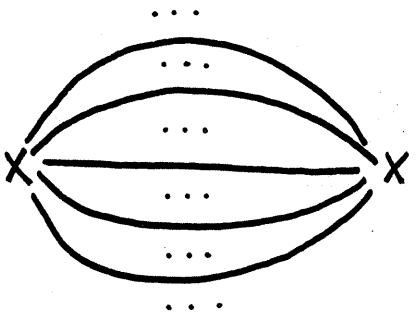
c et c' sont s-adjacentes $\iff$ $X(c)$ et $X(c')$ s'intersectent suivant leurs s-cloisons.

Démonstration. L'implication directe est vraie sans hypothèse. En effet, si c et c' sont deux chambres à distance combinatoire s, on a

$$[c,x] = [c',x'] \Leftrightarrow x = x' \in X_s.$$

Ainsi, $X(c) \cap X(c') = \{[c,x] \mid x \in X_s\}$. Réciproquement, on peut par hypothèse se donner un point x_s tel que $J(x_s) = \{s\}$. Si $X(c) \cap X(c') = \{[c,x] \mid x \in X_s\}$, on a donc $[c,x_s] = [c',x_s]$ et alors $d(c,c') \in \{1;s\}$. □

REMARQUE.— On prendra bien garde au fait que la représentation de chaque type $\{s\}$ est une hypothèse plus forte que celle de l'existence d'un point dans X_s pour chaque $\{s\}$. Considérons le contre-exemple suivant. On veut représenter l'immeuble du groupe diédral infini $W = \mathbf{Z}/2 * \mathbf{Z}/2 = \langle s \rangle * \langle t \rangle$. Si on choisit la structure-miroir $X = [0;1]$ et $X_s = X_t = \{0;1\}$, alors l'espace de recollement est



Chaque segment est une chambre géométrique, bien plongée dans $X(W)$, mais on ne lit pas les adjacences individuellement.

4.2.5. Cas d'un complexe de Coxeter

Nous allons justement présenter quelques spécificités des réalisations géométriques des complexes de Coxeter généraux. Avec la technique des structures-miroirs, on retrouve les constructions de Vinberg. On se contente de citer ici un résumé des résultats marquants de [Vin] de ce point de vue.

THÉORÈME. — *On se donne un système de Coxeter (W,S) de type M avec S fini, et une structure-miroir $\big(X,(X_s)_{s\in S}\big)$. L'espace topologique associé est*

$$X(W) = \frac{W \times X}{\sim},$$

avec $(w,x) \sim (w',x') \iff x = x'$ *et* $w^{-1}w' \in W_{J(x)}$.

(i) *Si l'on identifie X avec la chambre $X(1)$, l'action de W sur $X(W)$ par $w[w',x] = [w',x]$ possède X comme domaine fondamental.*
(ii) *Si X est un complexe cellulaire, $X(W)$ en est un également, possédant X comme sous-complexe.*
(iii) *$X(W)$ possède la propriété universelle suivante.*

Pour tout espace topologique Y muni d'une action de W,
toute fonction $f : X \to Y$ vérifiant $sf(x) = f(x)$ pour tout s de S et x de X_s
s'étend de manière unique en une application continue équivariante $X(W) \to Y$.

(iv) *L'action de W sur $X(W)$ est propre si et seulement si tous les groupes d'isotropie sont finis.*

Référence. Le résumé de [Vin71] présenté ici est celui qui a été élaboré dans [Mou88], section 12. □

REMARQUE.— On peut ajouter à cette liste de propriétés un théorème de Davis qui montre que pour un modèle de chambre convenable, la réalisation géométrique $X(W)$ est contractile. La condition précise est que X soit séparé, contractile et tel que tous les groupes d'isotropie soient finis. C'est le corollaire (10.3) de [Dav83], qui s'énonce pour une variété différentielle, mais est applicable aux complexes cellulaires en vertu de la remarque suivant le théorème (13.5) du même article. Nous aurons besoin de ce résultat pour globaliser la propriété locale de courbure négative des complexes de Coxeter métriques, dans la première étape de démonstration de (4.4.5).

4.2.6. Cas des immeubles de groupes. Stabilisateurs et fixateurs

Dans le cas où l'immeuble est obtenu à partir d'un système de Tits (G, B, N, S) de groupe de Weyl de type M, on a automatiquement une action de G par homéomorphismes sur la réalisation $X(G/B)$ obtenue à partir de n'importe quelle structure-miroir. Cela provient de la fonctorialité de la réalisation géométrique. L'action d'un élément g sur un point de $X(G/B)$ est décrite par $g[hB, x] = [ghB, x]$ ($x \in X$, $h \in G$). Quand X permettra d'enrichir la structure de la réalisation géométrique $X(\mathcal{I})$, il s'agira bien sûr de vérifier la compatibilité de l'action de G. Pour l'instant, on peut malgré tout faire un calcul de fixateurs et stabilisateurs.

PROPOSITION. — (i) *Pour toute chambre $c = gB$ de $\mathcal{I}$, $X(c)$ est un domaine fondamental pour l'action de G sur $X(\mathcal{I})$.*
(ii) *Le fixateur dans G d'un point $[c, x]$ de $X(\mathcal{I})$ est un sous-groupe parabolique de G, de type le type $J(x)$. Précisément, le fixateur de $[hB, x] \in X(\mathcal{I})$ est $hBW_{J(x)}Bh^{-1}$.*
(iii) *Le stabilisateur d'une facette ouverte coïncide avec son fixateur.*

Démonstration. (i) et (iii) sont évidents par construction de la réalisation géométrique: (i) par choix du produit auquel on applique la relation d'équivalence de recollement, et (iii) par définition de la relation d'équivalence $\sim_{\mathcal{I}}$. En effet, $(gB, x) \sim_{\mathcal{I}} (hB, y)$ implique d'emblée $x = y$. Pour le point (ii), on se donne $[hB, x]$ un point de $X(\mathcal{I})$ et g un élément de G. $g[hB, x] = [hB, x]$ équivaut à $d(ghB, hB) \in W_{J(x)}$, ce qui est encore équivalent à $h^{-1}gh \in BW_{J(x)}B$. □

Nous nous intéresserons essentiellement à deux modèles de chambres. Un cône simplicial sera utilisé au chapitre 5. Pour l'instant, le modèle que nous considérons privilégie les considérations métriques.

4.3. Réalisations métriques des immeubles

La particularité de la réalisation métrique proposée est qu'elle représentera exclusivement les types sphériques. C'est une exigence qui nécessite quelques outils supplémentaires de géométrie sphérique. Enfin, ajoutons que pour appliquer le théorème de Bridson qui règle tous

les problèmes métriques hors courbure, l'hypothèse S fini est essentielle. Elle assure la finitude du nombre de formes de cellules.

4.3.1. Préparatifs sphériques

On sait former canoniquement la matrice de Coxeter associée à une matrice de Cartan généralisée, pour définir par exemple le groupe de Weyl d'un groupe de Kac-Moody. Dans notre situation, on s'intéresse au trajet inverse pour définir un substitut de matrice de Cartan qui a son intérêt pour construire une représentation du système de Coxeter. La matrice obtenue entre dans le cadre des *matrices presques négatives.* Le *nerf* de telles matrices est un polyèdre sphérique par morceaux, fini, qui sera utilisé pour des calculs ultérieurs de links.

DÉFINITION. — (i) *Une* matrice presque négative *est une matrice réelle symétrique dont les coefficients hors diagonale sont tous négatifs ou nuls.*
(ii) *La* matrice de Cartan *d'une matrice de Coxeter $M = [m_{st}]_{s,t\in S}$ est la matrice*

$$A(M) := [A_{st} := -\cos(\pi/m_{st})]_{s,t\in S}.$$

C'est une matrice presque négative.
(iii) *À toute matrice de Coxeter M indexée par S ou toute matrice presque négative A, sont associés l'espace vectoriel $V_S := \bigoplus_{s\in S} \mathbf{R}v_s$ et la forme bilinéaire symétrique B_S définie sur V_S par $B_S(v_s, v_t) := A_{st}$.*
(iv) *L'ensemble des parties sphériques de S (pour la matrice M ou la matrice A) sera noté* $\Pi(S)_{\text{sph}}$.

$$\Pi(S)_{\text{sph}} = \{J \subset S \mid \#W_J < \infty\} = \{J \mid B_J \text{ est un produit scalaire}\}.$$

(v) *Le* nerf *de M ou de A est le polyèdre sphérique par morceaux (fini) obtenu en recollant les cellules sphériques*

$$S_J := \{x = \textstyle\sum_{s\in J} x_s v_s \in V_J \mid x_s \geq 0,\ B_J(x,x) = 1\} \quad (J \in \Pi(S)_{\text{sph}} \setminus \{\varnothing\}),$$

le long des inclusions dans $\Pi(S)_{\text{sph}} \setminus \{\varnothing\}$. C'est un sous-espace topologique de V_S contenu dans $\{x \mid B_S(x,x) = 1\}$.

Justification. La forme bilinéaire introduite ici est à la base de la représentation des groupes de Coxeter que nous utiliserons dans le chapitre 5. Dans l'avant-dernier point, on utilise la caractérisation classique selon laquelle J est une partie sphérique si et seulement si B_J est un produit scalaire sur V_J (5.2.2). Ainsi, S_J est effectivement tracée dans une sphère-unité quand J est sphérique. □

REMARQUE.— Le cône engendré par le nerf de M est l'ensemble des vecteurs de V_S à coordonnées positives ou nulles et de support sphérique.

4.3.2. Blocs de Coxeter

Les *blocs de Coxeter* sont les polytopes euclidiens qui vont servir à définir le modèle métrique des chambres. Pour les construire, on va revenir à des considérations de groupes de réflexions finis. On se donne donc I une partie sphérique de S. On considère la réalisation géométrique de W_I qu'on a introduite dans la sous-section précédente pour l'ensemble S. On peut tout reprendre pour I, sachant que l'hypothèse sur I fait de la forme bilinéaire B_I sur V_I un produit

scalaire. On considère la base duale pour B_I de $\{v_s\}_{s\in I}$, qu'on note $\{u_s\}_{s\in I}$ ($B_I(v_s,u_t)=\delta_{st}$). La matrice de B_I dans $\{u_s\}_{s\in I}$ est $[A_{st}]^{-1}_{s,t\in I}$. On peut alors définir deux familles d'hyperplans de V_I, indexées par I, à savoir

$$H_s := \{B_I(u_s,-)=0\} \quad \text{et} \quad H'_s := \{B_I(u_s,-)=1\} \quad (s\in I).$$

On va définir un polytope combinatoirement isomorphe à un $\#I$-cube et dont les hyperplans d'appui sont les hyperplans de ces deux familles. Ceci justifie l'introduction des demi-espaces

$$D_s := \{B_I(u_s,-)>0\} \quad \text{et} \quad D'_s := \{B_I(u_s,-)<1\} \quad (s\in I).$$

DÉFINITION. — *Soit I une partie sphérique de S. Le* bloc de Coxeter *B_{W_I} est le polytope de V_I défini par*

$$B_{W_I} := (\bigcap_{s\in I} \overline{D}_s) \cap (\bigcap_{s\in I} \overline{D}'_s).$$

C'est le cube unité fermé construit sur la base des v_s.

B_{W_I} est d'emblée défini comme intersection de demi-espaces, on connaît donc toute sa combinatoire.

DÉFINITION. — *La* face *$F_{K\subset J}$ de B_{W_I} associée à l'inclusion de parties sphériques $K\subset J$, est le polytope euclidien*

$$F_{K\subset J} := B_{W_I} \cap (\bigcap_{s\in K} H'_s) \cap (\bigcap_{s\in I\setminus J} H_s).$$

On parle de face intérieure *si $K=\varnothing$,* extérieure *si $J=I$ et de* sommet *si $K=J$.*

On regroupe sous forme de lemme quelques calculs de links, où l'on fait appel essentiellement à la notion de nerf et à la technique de joint. Ces calculs ont été effectués par G. Moussong.

LEMME. — (i) *Le link de la face $F_{\varnothing\subset J}$ dans B_{W_I} est le link* $\mathrm{lk}(N(A_J^{-1}),N(A_I^{-1}))$ *du nerf $N(A_J^{-1})$ dans le nerf $N(A_I^{-1})$.*
(ii) *Le link de la face $F_{K\subset I}$ dans B_{W_I} est le nerf $N(A_K)$.*
(iii) *Le link* $\mathrm{lk}(F_{K\subset J},B_{W_I})$ *de la face $F_{K\subset J}=F_{\varnothing\subset J}\cap F_{K\subset I}$ dans B_{W_I} est le joint*

$$\mathrm{lk}(N(A_J^{-1}),N(A_I^{-1}))\star N(A_K).$$

Référence. Ces résultats sont justifiés dans la section 13 de [Mou88] où sont définis les blocs de Coxeter. □

4.3.3. Modèle métrique de chambre

La combinatoire explicite des B_{W_I} permet de passer au recollement qui définit le modèle de chambre de la réalisation métrique d'un immeuble de type M.

DÉFINITION. — *Le* modèle métrique de chambre *pour un immeuble de type M (d'ensemble d'indice S fini) est le polyèdre euclidien par morceaux obtenu par intersection dans V_S du cône engendré par le nerf de A_S avec les demi-espaces $\{B_S(u_s,-)\le 1\}$ ($s\in S$). On le note L.*

Justification. Soit v un vecteur de V_S dans le cône engendré par $N(A_S)$. Par définition de ce nerf, le support de v dans la base $\{v_s\}_{s\in I}$ est une partie sphérique I. On écrit $v = \sum_{s\in I} \lambda_s v_s$, avec $\lambda_s \geq 0$. La condition $B_S(u_s, v) \leq 1$ pour s dans S équivaut à $\lambda_s \leq 1$. Ainsi, v est dans l'intersection en question si et seulement si v est dans le bloc de Coxeter B_{W_I} plongé dans V_S. Enfin, ces blocs de Coxeter qui coexistent dans V_S sont recollés le long de faces sur lesquelles les métriques induites par B_S coïncident. □

REMARQUE.— Dans [Mou88], section 14, on définit aussi L par un recollement indexé par la subdivision barycentrique du nerf de M_S. Topologiquement, L est le cône au-dessus de la subdivision barycentrique du nerf de M_S.

Ce polyèdre est l'espace à partir duquel on va élaborer une structure miroir. On a

$$L = \bigcup_{I\in\Pi(S)_{\text{sph}}} B_{W_I}.$$

Pour chaque s de S, on définit L_s comme étant l'intersection de L avec l'hyperplan $B_S(u_s, -) = 1$. Cet ensemble est réunion de faces de blocs, c'est précisément la réunion des faces extérieures de blocs contenant le sommet $\{v_s\} = F_{\{s\}=\{s\}}$. Les *faces* de la chambre métrique L sont celles des blocs de Coxeter qui la forment. Elles correspondent aux inclusions de parties sphériques $K \subset J$. Pour une telle inclusion, on peut voir la face $F_{K\subset J}$ de L dans tout bloc B_{W_I} avec $I \supset J$. Un point x de $F_{K\subset J}$ est dans L_s si et seulement s'il est dans l'hyperplan $B_S(u_s, -) = 1$, ce qui revient à dire que s est dans K. On peut déterminer ainsi le type des points d'une chambre. Enfin, la description des faces du modèle métrique de chambre permet le calcul de link

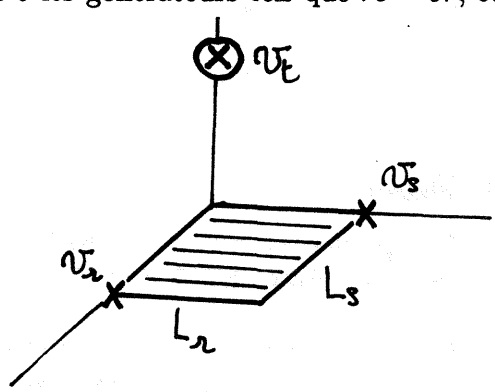
$$\text{lk}(F_{K\subset J}, L) = \text{lk}(N(A_J^{-1}), N(A_I^{-1})) \star N(A_K), \text{ ([Mou88], section 14).}$$

À titre d'exemple, considérons la matrice de Coxeter

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \infty \\ 2 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 1 \end{pmatrix}.$$

Cet exemple nous intéresse parce qu'il comporte le cas d'une simple commutation entre deux générateurs, et parce que le groupe associé W contient aussi un produit libre de deux groupes $\mathbf{Z}/2$. Tout cela se lira sur la réalisation métrique du complexe de Coxeter qu'on verra plus loin. Pour l'instant, voici le nerf, sa subdivision barycentrique et le modèle métrique de chambre de type M. (On note r et s les générateurs tels que $rs = sr$, et t le troisième).

Dessin. $[L_t = \{v_t\}]$



4.3.4. Réalisation métrique d'un immeuble

Dès lors qu'on dispose d'une structure-miroir, on peut procéder au recollement correspondant.

DÉFINITION. — *La* réalisation métrique *d'un immeuble $(\mathcal{I}, d)$ de type M est le recollement obtenu à partir de la structure-miroir du modèle métrique de chambre de type M. La notation $|\mathcal{I}|_{\text{mét}}$ remplacera systématiquement $L(\mathcal{I})$.*

Remarquons qu'il existe des points de type exactement $\{s\}$ (les points de faces $F_{\{s\}C-}$ par exemple) pour chaque s de S, si bien qu'on lit toutes les adjacences sur $|\mathcal{I}|_{\text{mét}}$. Il faut maintenant justifier la terminologie métrique en montrant qu'on obtient bien un polyèdre euclidien par morceaux. Pour former $|\mathcal{I}|_{\text{mét}}$, on procède en fait à un recollement en deux étapes. D'abord, on forme la chambre métrique L par un recollement de blocs B_{W_I} (I sphérique). Ensuite, on recolle des exemplaires de L le long de faces par une relation d'équivalence qui vérifie tous les axiomes d'un polyèdre euclidien par morceaux, à ceci près que les objets recollés ne sont plus des polytopes euclidiens, mais déjà des polyèdres euclidiens par morceaux. Ainsi, en effectuant le recollement en une fois, on obtient bien une relation d'équivalence vérifiant les axiomes d'un polyèdre euclidien par morceaux sur la somme $\coprod_{c\in\mathcal{I},I\in\Pi(S)_{\text{sph}}} \{c\}\times B_{W_I}$.

En outre, puisque S est fini, le nombre de type de cellules est fini, d'où la possibilité d'invoquer le théorème de Bridson (4.1.5). Résumons.

PROPOSITION. — *$|\mathcal{I}|_{\text{mét}}$ est un polyèdre euclidien par morceaux possédant un nombre fini de type de cellules, et à ce titre, c'est un espace géodésique complet.* □

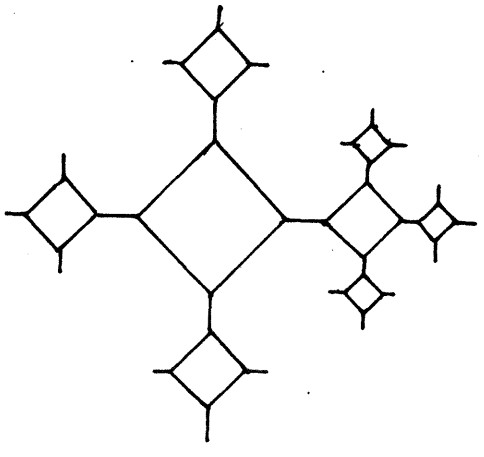
Il ne reste plus que le problème de la courbure à régler. Celui-ci est plus difficile que les précédents. Il nécessite l'examen séparé du cas des complexes de Coxeter, qui est le résultat principal de [Mou88].

4.3.5. Un dessin et deux exemples familiers

On va considérer quelques exemples de représentation métrique de groupe de Coxeter. Revenons un instant au cas de la matrice de Coxeter considéré en (4.3.3): $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \infty \\ 2 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 1 \end{pmatrix}$.

Voici le dessin correspondant, obtenu en développant le polyèdre euclidien par morceaux qui réalise métriquement le complexe de Coxeter associé.

Dessin.



On reconnaît *grosso modo* un arbre épaissi. Ce polyèdre ressemble à un arbre parce qu'il

contient un générateur qui n'entretient aucune relation avec les deux autres. Chaque paquet de quatre carrés correspond à l'étoile d'un groupe de Klein engendré par les conjugués de deux générateurs commutant l'un à l'autre.

Considérons maintenant le cas d'une matrice de Coxeter de type fini. Alors, L est un cube, les L_s en sont les faces extérieures. La réalisation métrique d'un appartement $|W|_{\text{mét}}$ est en bijection bilipschitzienne avec la boule unité de V_S. On obtient ainsi le cône au-dessus de la réalisation sphérique classique des immeubles de type fini. Dans [Dav90], M. Davis retrouve d'ailleurs cette réalisation (cas 2 du chapitre 10). Le fait que cette réalisation est le link du sommet de la réalisation $|\mathcal{I}|_{\text{mét}}$ vue comme cône, lui permet de montrer que les réalisations sphériques classiques sont CAT(1) ([Dav90], corollaire (11.6)).

Dans le cas affine irréductible, L est la réunion des intersections d'un cube avec les hyperplans de coordonnées. À une application bilipschitzienne près, ceci se déforme sur un simplexe de rang $\#S$, dont les L_s sont les cloisons. Ainsi, toujours à application bilipschitzienne près, $|W|_{\text{mét}}$ est un espace affine euclidien de dimension $\#S-1$, et $|\mathcal{I}|_{\text{mét}}$ est la réalisation géométrique de Bruhat-Tits ([Bru-Tit72]).

4.4. Courbure négative dans les immeubles minces

Nous pouvons maintenant passer aux problèmes de courbure généralisée. Il s'agit d'une notion purement métrique compatible aux définitions classiques de géométrie riemannienne, mais qui va surtout permettre de généraliser les arguments développés dans le cadre des immeubles de Bruhat-Tits. Cette section est consacrée à la mise en place du vocabulaire de la courbure des espaces géodésiques – l'inégalité CAT(χ) – et à l'exposition des arguments qui prouvent que la métrique des chemins sur le polyèdre euclidien par morceaux $|W|_{\text{mét}}$ en fait un espace CAT(0). Dans toute cette section, (W, S) désigne un système de Coxeter de matrice M, avec S fini.

4.4.1. Inégalité CAT(χ). Courbure négative

On se place dans le cadre d'un espace géodésique (X, d). Un *triangle* T dans un tel espace est la donnée de trois points x, y, z, et des trois segments géodésiques qui les relient deux à deux. Un *triangle de comparaison* T^* dans M^2_χ est un triangle x^*, y^*, z^* dont les longueurs des côtés sont les mêmes que celles de T. Pour tout t de $[0;1]$, on note p_t (respectivement p_t^*) le point de $[x;y]$ (respectivement $[x^*;y^*]$) à distance $td(x,y)$ de x (respectivement x^*). Enfin, d^* désigne la distance de M^2_χ.

DÉFINITION. — (i) *On dit que le triangle* T vérifie l'inégalité CAT(χ) *si on a pour tout* t *de* $[0;1]$

$$d(z,p_t) \leq d^*(z^*,p_t^*).$$

(ii) *L'espace* X *est dit* localement CAT(χ) *si autour de tout point de* X*, il existe un voisinage convexe dans lequel l'inégalité* CAT(χ) *est vérifiée par tous les triangles de périmètre inférieur ou égal à* $2\pi/\sqrt{\chi}$.
(iii) X *est dit* à courbure négative ou nulle *s'il existe* $\chi \leq 0$ *tel que* X *soit localement* CAT(χ).
(iv) X *est dit* CAT(χ) *si tous ses triangles de périmètre inférieur ou égal à* $2\pi/\sqrt{\chi}$ *vérifient l'inégalité* CAT(χ).

L'adjectif convexe du deuxième point est bien entendu à comprendre au sens des segments géodésiques. Nous allons maintenant dégager deux résultats métriques généraux invoqués pour prouver le caractère CAT(0) de la réalisation métrique d'un complexe de Coxeter.

4.4.2. Critère systolique de majoration de courbure

Ce premier critère s'intéresse au caractère localement CAT(χ) des complexes simpliciaux M_χ par morceaux (et donc aussi bien aux polyèdres M_χ par morceaux par subdivision barycentrique). C'est un théorème de M. Gromov.

THÉORÈME. — *Un polyèdre M_χ par morceaux dont l'ensemble des formes de cellules est fini, est localement* CAT(χ) *si la systole du link de chaque cellule dans le polyèdre est supérieure ou égale à 2π.*

Référence. C'est un des critères du théorème (3.15) de [Pau91]. □

4.4.3. Globalisation du caractère CAT(0)

Dans le cas de la courbure négative ou nulle, un critère de globalisation s'énonce en termes d'unicité des géodésiques. Pour ces résultats, on peut partir plus généralement d'un simple espace géodésique complet localement compact, et pas seulement d'un polyèdre. On procède par l'enchaînement suivant. On met d'abord en évidence une condition suffisante d'unicité des géodésiques, puis que cette unicité permet la globalisation.

THÉORÈME. — *Soit X un espace géodésique complet, localement compact, tel que tout point admette un voisinage dans lequel l'inégalité* CAT(χ) *est vérifiée.*

(i) *Si on a unicité des géodésiques entre deux points à distance strictement plus petite que $\pi/\sqrt{\chi}$ de X, X est un espace* CAT(χ).
(ii) *Si X est simplement connexe et si on peut supposer χ inférieur ou égal à 0, alors on a unicité des géodésiques entre deux points quelconques de X.*

Référence. Le premier point est extrait du théorème 7 de [Bal90], le second est extrait du théorème 14 de la même référence. □

En se limitant à la courbure négative ou nulle, il vient:

COROLLAIRE. — *Un espace géodésique complet localement compact, simplement connexe, à courbure négative ou nulle est un espace* CAT(0). □

4.4.4. Calculs de systole

Nous revenons maintenant à la réalisation métrique des complexes de Coxeter. Il s'agit de mettre en évidence les conditions d'application du résultat de majoration de la courbure. Les calculs qui suivent ont été effectués par G. Moussong. Voici le résultat principal.

PROPOSITION. — (i) *La systole du nerf d'une matrice presque négative est supérieure ou égale à* 2π.
(ii) *Si* A *est une matrice presque négative et si* B *est un simplexe de son nerf* $N(A)$, *alors la systole du link de* B *dans* $N(A)$ *est* $\geq 2\pi$, *car c'est un nerf de matrice presque négative.*
(iii) *Si un complexe sphérique fini* P *est de systole* $\geq 2\pi$, *sa suspension est de systole* $\geq 2\pi$. *Par itération de la suspension, pour toute sphère* S^k, *la suspension* $S^k \star P$ *est de systole* $\geq 2\pi$.

Référence. (i) est le résultat principal de la section 10 de [Mou88], précisément c'est la proposition (10.1). (ii) est le corollaire (10.2) de [Mou88]. La première assertion de (iii) est le corollaire (5.6) de [Mou88]. La seconde est une conséquence de la remarque (4.1.4). □

4.4.5. Inégalité CAT(0) dans les complexes de Coxeter

Nous pouvons maintenant rassembler les ingrédients déjà cités pour obtenir:

THÉORÈME. — *Si* (W, S) *est un système de Coxeter indexé par un ensemble* S *fini, la réalisation métrique* $|W|_{\text{mét}}$ *du complexe de Coxeter associé est un espace géodésique complet et* CAT(0).

Démonstration. On va donner un synopsis de démonstration de ce résultat qui occupe la majeure partie de la thèse [Mou88].

1. Topologie et métrique sans courbure

Remarquons que l'on sait déjà que $|W|_{\text{mét}}$ est un espace géodésique complet par le théorème de Bridson (4.1.5). Ensuite, le modèle métrique de chambre L est contractile, puisque topologiquement c'est le cône de la subdivision barycentrique du nerf de la matrice M (4.3.3). En fait, on est dans les hypothèses du théorème de Davis (corollaire (10.3) de [Dav83]) présenté en remarque en (4.2.5). Ainsi, $|W|_{\text{mét}}$ est contractile et il ne reste donc plus d'après (4.4.4) qu'à vérifier que $|W|_{\text{mét}}$ est à courbure négative – propriété locale, ce qui se fait par le critère systolique.

2. Calcul de link et de systole

On conclut par un calcul de link en justifiant sommairement les égalités. Soit $F_{K\subset J}$ une face de $|W|_{\text{mét}}$ donnée par l'inclusion de parties sphériques $K \subset J$. Il s'agit de calculer le link de $F_{K\subset J}$ dans $|W|_{\text{mét}}$. On a:

$$\text{lk}(F_{K\subset J}; |W|_{\text{mét}}) = \text{lk}(F_{K\subset J}; W_K.L)$$

$$= W_K.\text{lk}(F_{K\subset J}; L) = W_K\big(\text{lk}(N(A_J), N(A)) \star N(A_K^{-1})\big)$$

$$= \text{lk}(N(A_J), N(A)) \star \big(W_K.N(A_K^{-1})\big) = \text{lk}(N(A_J), N(A)) \star S^{\#K-1}.$$

La première égalité a lieu parce que W_K est le stabilisateur de $F_{K\subset J}$, la seconde parce que W opère par isométries de $|W|_{\text{mét}}$. La troisième est un calcul de link dans la chambre cité en (4.3.3). L'avant-dernière vient de ce que W_K stabilise et permute $\text{lk}(N(A_J), N(A))$. Enfin, la dernière égalité provient du fait que $N(A_K^{-1})$ est un domaine fondamental pour W_K dans la sphère $S^{\#K-1}$. Par (4.4.4), on sait que ces links sont de systole $\geq 2\pi$. □

4.5. Courbure négative dans les immeubles

On veut maintenant prouver que la réalisation métrique d'un immeuble est elle aussi CAT(0). La preuve de ce fait est due à M. Davis, qui reprend les étapes classiques de démonstration concernant le cas des immeubles de Bruhat-Tits pour les matrices de Coxeter affines. On conserve le système de Coxeter (W, S), avec S fini.

4.5.1. Rétractions et géodésiques

Nous allons citer ici les résultats préliminaires concernant les réalisations métriques de rétractions et les géodésiques ([Dav90]). Les démonstrations sont essentiellement les mêmes que celles de Bruhat et Tits pour le cas particulier des immeubles affines ([Bru-Tit72]).

LEMME. — *Soit $|\mathcal{I}|_{\text{mét}}$ la réalisation métrique d'un immeuble $(\mathcal{I}, d)$ de type M. Alors:*

(i) *Toute réalisation métrique de rétraction contracte les distances.*
(ii) *Il existe une unique géodésique entre deux points donnés de $|\mathcal{I}|_{\text{mét}}$.*
(iii) *Si ρ désigne la réalisation métrique de la rétraction sur l'appartement $\mathbf{A}$ centrée en la chambre c de $\mathbf{A}$, alors pour tout point x de c, et tout point y de $|\mathcal{I}|_{\text{mét}}$, on a $d(x, \rho y) = d(x, y)$.*

Référence. Le point (i) (respectivement (ii), (iii)) est le Lemme (11.2) (respectivement (11.3), (11.4)) de [Dav90]. □

4.5.2. Les immeubles métriques sont CAT(0)

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de ce chapitre.

THÉORÈME. — *Soit $(\mathcal{I}, d)$ un immeuble de type M. La réalisation métrique $|\mathcal{I}|_{\text{mét}}$ est un espace géodésique complet et* CAT(0). *Cette réalisation métrique de $(\mathcal{I}, d)$ est obtenue par recollement d'une structure miroir, où l'ensemble des facettes représentées est exactement celui des facettes sphériques.*

Démonstration. Dès lors qu'on a unicité des géodésiques dans un polyèdre euclidien par morceaux, on peut invoquer un résultat général de Bridson – le théorème (2.7) de [Bri91] – pour conclure. On peut aussi préférer une preuve immobilière plus classique exposée pour notre cas dans [Dav90], chapitre 11. □

Il est classique que la contraction géodésique implique la contractilité des espaces CAT(0).

COROLLAIRE. — *Au titre d'espace* CAT(0), *l'espace $|\mathcal{I}|_{\text{mét}}$ est contractile pour tout immeuble $(\mathcal{I}, d)$.*

Référence. [Bal90], théorème 14. □

Nous passons maintenant au théorème de point fixe dont l'usage sera crucial à deux endroits de l'étude des groupes de Kac-Moody.

4.6. Théorème de point fixe de Bruhat-Tits

Cette section expose le théorème qui est l'objectif de tout le chapitre. Il s'agit du théorème de point fixe de Bruhat-Tits dont la validité dépasse le cadre strict des immeubles. Commençons par la présentation d'une autre version de la courbure négative. Voici ce que nous appellerons *propriété de courbure négative* pour un espace métrique Y:

Pour tous points x et y de Y, il existe un point m de Y tel que pour tout z de Y

$$\text{(CN)} \quad d^2(z,m) \leq 1/2\big(d^2(z,x) + d^2(z,y)\big) - 1/4d^2(x,y).$$

Dans le cas de la réalisation métrique d'un immeuble, l'espace métrique est comme on l'a vu un polyèdre euclidien par morceaux. Sous l'hypothèse où l'ensemble d'indices S de la matrice de Coxeter est fini, $|\mathcal{I}|_{\text{mét}}$ possède un nombre fini de types de cellules. Ainsi, par un autre théorème de Bridson ([Bri91], théorème (2.7), p.375), les propriétés CAT(0) et (CN) sont équivalentes, ce qui légitime l'usage du théorème de Bruhat-Tits sous la forme générale qui suit.

La stratégie de preuve de ce théorème est la suivante. On va définir certains objets dans Y par une propriété métrique, d'où l'invariance de l'ensemble qu'ils forment. Si on arrive par ailleurs à montrer que cet ensemble est non vide réduit à un point, on aura obtenu un point fixe.

4.6.1. Rayon et centre de boule circonscrite

Y désigne pour l'instant un simple espace métrique.

DÉFINITION. — *Soit A une partie bornée non vide de Y.*

(i) *Pour tout point x de Y, on note* $r(x,A) := \sup_{a\in A} d(x,a)$.
(ii) *Le* rayon d'une boule circonscrite à A *est* $r(A) := \inf_{x\in Y} r(x,A)$.
(iii) *Un* centre de boule circonscrite à A *est un point x qui réalise le rayon d'une boule circonscrite, i.e., tel que* $r(x,A) = r(A)$.

4.6.2. Théorème de point fixe de Bruhat-Tits

Voici le théorème de point fixe qui généralise celui d'Élie Cartan (étudiant l'action d'un groupe compact sur une variété riemannienne simplement connexe à courbure négative).

THÉORÈME. — *Soit G un groupe d'isométries d'un espace métrique complet possédant la propriété de courbure négative* (CN). *Alors, si G stabilise une partie non vide bornée, il possède un point fixe.*

Par la remarque de début de section, ce théorème est conséquence de la version suivante – due à J.-P. Serre.

THÉORÈME. — *Toute partie bornée non vide d'un espace métrique complet possédant la propriété de courbure négative admet un unique centre de boule circonscrite.*

Démonstration. On se donne deux points x et y quelconques d'un tel espace métrique Y. On va mettre en place une majoration de $d(x,y)$ en fonction des quantités introduites précédemment. Grâce au point m de la propriété de courbure négative, on obtient en passant à la borne supérieure sur z dans A:

$$r^2(m,A) \leq 1/2\big(r^2(x,A) + r^2(y,A)\big) - 1/4d^2(x,y).$$

D'où, puisque $r(A) \leq r(m,A)$:

$$d^2(x,y) \leq 2\big(r^2(x,A) + r^2(y,A) - 2r^2(A)\big).$$

Appliquer cette inégalité à deux points qui réalisent le rayon d'une boule circonscrite prouve l'unicité du centre d'une boule circonscrite. L'appliquer à une suite d'éléments $(x_n)_{n\geq 0}$ tels que $r(x_n,A)$ tend vers $r(A)$ montre que cette suite est de Cauchy donc convergente. La limite est un centre de boule circonscrite. □

REMARQUE.— Pour la démonstration originale (différente de celle de J.-P. Serre), on pourra consulter [Ber90], tome 1, section (9.6) p.287-287, qui agrémente la preuve d'un dessin et d'une utile explication heuristique.

4.6.3. Fabrication d'isométries

Il reste donc à fabriquer des isométries de $|\mathcal{I}|_{\text{mét}}$ auxquelles appliquer ce théorème de point fixe. On pense bien sûr au cas d'un immeuble de groupe, pour lequel le groupe va opérer par isométries par simple fonctorialité de la réalisation métrique. Pour la descente galoisienne, on aura besoin de produire des isométries à partir d'automorphismes cohérents de l'immeuble combinatoire.

PROPOSITION. — *Soit $(\mathcal{I},d)$ un immeuble de type M dont on note $|\mathcal{I}|_{\text{mét}}$ la réalisation métrique.*

(i) *Si $(\mathcal{I},d)$ est obtenu à partir d'une BN-paire (G,B,N,S), le groupe G est un groupe d'isométries de $|\mathcal{I}|_{\text{mét}}$ via les réalisations métriques des éléments g de G.*
(ii) *Un groupe d'automorphismes cohérents de l'immeuble combinatoire $(\mathcal{I},d)$ opère naturellement par isométries sur $|\mathcal{I}|_{\text{mét}}$.*

Démonstration. Preuve de (ii). On note Γ le groupe d'automorphismes cohérents de $(\mathcal{I},d)$. Si σ est un automorphisme cohérent de $(\mathcal{I},d)$, σ induit une permutation σ^* de l'ensemble d'indices S. On obtient ainsi une action de Γ sur S par automorphismes de diagrammes.

1. Isométries de la chambre

Si J est une partie sphérique de S, σ^*J en est une également et σ^* induit un isomorphisme $W_J \to W_{\sigma^*J}$. La permutation σ^* de S induit donc une isométrie σ^* du modèle métrique de chambre L, vu comme troncation du cône engendré dans V_S par le nerf de M, parce qu'on a respect des restrictions de la forme bilinéaire qui fournit les produits scalaires sur les blocs de Coxeter. On peut aussi voir cette isométrie du polyèdre euclidien par morceaux L comme suit. On sait qu'une chambre est réunion de cellules euclidiennes convexes – les blocs de Coxeter B_{W_J}, pour J partie sphérique de S. Pour chaque partie J de type fini de S, σ^* désigne l'isométrie du bloc de Coxeter correspondant B_{W_J} sur le bloc de Coxeter $B_{W_{\sigma^*J}}$, qui envoie le point x de B_{W_J} de coordonnées $\{\mu_s\}_{s\in J}$ sur le point σ^*x de coordonnées $\{\mu_{\sigma^{*-1}s}\}_{s\in\sigma^*J}$. Or, $J(x)$ est la partie de S qui contient les éléments s tels que x est dans la cloison L_s de

type s, donc pour l'isométrie σ^* qu'on vient de définir, on a $\sigma^* J(x) = J(\sigma^* x)$. De cette façon, on obtient une permutation du système de flèches isométriques du recollement des blocs de Coxeter pour former L. On obtient ainsi naturellement une isométrie σ^* du modèle métrique de chambre, ce qui en vertu de (4.2.2) permet de définir une action, pour l'instant topologique, sur la réalisation métrique de l'immeuble.

2. Isométries de l'immeuble

Il reste à voir la conservation des distances. La réalisation $|\mathcal{I}|_{\text{mét}} = \dfrac{L \times \mathcal{I}}{\sim}$ est munie d'une structure euclidienne par morceaux, dont la métrique est la métrique des chemins. Ceci signifie que les géodésiques sont des lignes polygonales. Par convexité des blocs de Coxeter, les traces des géodésiques sur ces blocs sont des segments, que σ^* envoie isométriquement sur un segment d'un bloc isométrique. La longueur d'une géodésique étant la somme des longueurs (euclidiennes) de ces segments, σ^* envoie une géodésique sur une géodésique de même longueur. Ceci prouve que Γ opère sur $|\mathcal{I}|_{\text{mét}}$ par isométries. Ainsi, on obtient bien une action par isométries de Γ sur $|\mathcal{I}|_{\text{mét}}$.

Preuve de (i). Seule l'assertion métrique est nouvelle, par (4.2.6). Sa preuve est la même que celle du second point de la preuve précédente. □

5. Géométrie conique des jumelages

Il est question ici d'une réalisation géométrique, sans souci de courbure négative. L'intérêt de la géométrie qu'on va mettre en place est qu'on peut y faire des opérations géométriques élémentaires, telles que celles du calcul vectoriel ou la prise d'enveloppe convexe. Le modèle géométrique de chambre est un cône simplicial, découpé dans le cône de Tits du groupe de Weyl de l'immeuble. On revient sur la fabrication de ce cône, construit par exemple dans [Bou81]. On pourra en outre utiliser une propriété de finitude locale qui aura son intérêt pour la combinatoire de sous-groupes d'une donnée radicielle jumelée. Pour l'instant, tout ce qui est présenté dans ce chapitre est valable pour les immeubles et jumelages généraux.

5.1. Géométrie conique des groupes de Coxeter

Nous allons mettre en place ici la réalisation géométrique très classique d'un système de Coxeter (W, S) qui est construite chez N. Bourbaki. Il s'agit d'une représentation qui a la vertu de s'appliquer à n'importe quel groupe de Coxeter. Jusqu'à la fin de cette section, nous considérons un système de Coxeter (W, S) de matrice $M = [m(s,t)]_{s,t\in S}$. W_I désigne le sous-groupe standard de W engendré par I.

5.1.1. La représentation géométrique d'un système de Coxeter

Rappelons la présentation de W.

$$W = \langle s \mid (st)^{m(s,t)} = 1 \quad s,t \in S \quad m(s,t) < \infty \rangle.$$

On définit V le $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $\#S$, de base les symboles α_s pour s dans S.

$$V := \bigoplus_{s\in S} \mathbf{R}\alpha_s.$$

On considère la forme bilinéaire B de matrice $[-\cos(\frac{\pi}{m(s,t)})]_{s,t\in S}$ dans la base $\{\alpha_s\}_{s\in S}$.
Un examen de chaque plan $V_{s,t} := \mathbf{R}\alpha_s \oplus \mathbf{R}\alpha_t$ montre qu'en assignant à chaque s l'élément σ_s défini par $\sigma_s(\lambda) = \lambda - 2B(\alpha_s, \lambda)\alpha_s$, on construit un morphisme de groupes $\sigma : W \to \mathrm{GL}(V)$ tel que σ_{st} est d'ordre $m(s,t)$. Ce morphisme est injectif, c'est la raison pour laquelle on omettra le symbole σ pour faire agir W sur V.

Référence. Cette section (5.1) est intégralement contenue dans [Bou81], (V.4), à l'exception de ce qui concerne les racines, pour lesquelles on peut consulter [Hum90], (II.5). □

5.1.2. Racines

La représentation précédente σ permet de parler de racines. Les racines constituent un premier type d'objets qui rendent les raisonnements plus géométriques.

DÉFINITION. — (i) *Une* racine *de W est un vecteur $\alpha \in V$ de la forme $\alpha = w\alpha_s$ pour s dans S et w dans W. L'ensemble des racines est noté Φ, et est appelé le* système de racines *de W.*
(ii) *Les vecteurs de base α_s sont appelés les* racines simples.
(iii) *Les* racines positives *(respectivement* négatives*) – dont l'ensemble est noté Φ_+ (respectivement Φ_-) – sont les racines de W dont les coordonnées sont toutes positives (respectivement négatives) dans la base $\{\alpha_s\}_{s\in S}$. Pour signifier que la racine est positive (respectivement négative), on notera $\alpha > 0$ (respectivement $\alpha < 0$)*

La propriété remarquable suivante des systèmes de racines subsiste.

PROPOSITION. — *Soit Φ le système de racines d'un système de Coxeter (W, S). Alors:*

$$\Phi_+ = -\Phi_- \quad \text{et} \quad \Phi = \Phi_+ \sqcup \Phi_-.$$

Référence. [Hum90], théorème (II.5.4). □

Dans le cas où le groupe de Coxeter est le groupe de Weyl d'une donnée radicielle de Kac-Moody, Φ est en bijection avec l'ensemble Δ^{re} des racines réelles (7.1.4).

5.1.3. Longueur

On peut aussi parler de longueur dans ce contexte géométrique.

DÉFINITION. — *Soit w un élément de W. Alors, on note*

$$\Phi_w := \Phi_+ \cap w^{-1}\Phi_- \quad \text{et} \quad \Phi_{-w} := \Phi_- \cap w^{-1}\Phi_+.$$

L'introduction des racines permet de prouver la proposition qui suit.

PROPOSITION. — *Soient w dans W et s dans S.*

(i) *Si $\ell(ws) < \ell(w)$, alors $s(\Phi_w \setminus \{\alpha_s\}) = \Phi_{ws}$.*
(ii) *$\ell(w)$ est le nombre de racines positives rendues négatives par w, soit $\ell(w) = \#\Phi_w$.*
(iii) *On a les équivalences suivantes.*

$$\ell(ws) > \ell(w) \Leftrightarrow w.\alpha_s > 0.$$
$$\ell(ws) < \ell(w) \Leftrightarrow w.\alpha_s < 0.$$

Dans tous les cas, $\ell(ws) = \ell(w) \pm 1$.

Référence. [Hum90], théorème (II.5.6). □

REMARQUE.— À ce niveau, α_s est une notation qui correspond à deux objets puisqu'on a déjà utilisé ce symbole en (1.4.1). Définissons une application du système positif de racines au sens de (5.1.2) vers le système positif de racines au sens de (1.4.1) par $\alpha \mapsto A_\alpha := \{w \in W \mid w^{-1}\alpha > 0\}$. Pour $\alpha = \alpha_s$, $A_s = A_{\alpha_s}$ est la racine simple d'indice s au sens de (1.4.1). En effet, par la proposition qui précède,

$$A_s = \{w \mid w^{-1}\alpha_s > 0\} = \{w \mid \ell(w^{-1}s) > \ell(w^{-1})\} = \{w \mid \ell(sw) > \ell(w)\}.$$

Si $\beta = w\alpha$, alors

$$A_\beta = \{z \mid z^{-1}\beta > 0\} = \{z \mid z^{-1}w\alpha > 0\} = \{z \mid (w^{-1}z)^{-1}\alpha > 0\} = \{wt \mid t^{-1}\alpha > 0\} = wA_\alpha.$$

Enfin, toutes les parties de W à l'arrivée contiennent 1 puisqu'on part de racines positives. Ceci montre que l'application ainsi définie est bien à valeurs dans le système positif au sens de (1.4.1), et W-équivariante. On la prolonge aux deux systèmes de racines tout entiers en

posant $A_{-\alpha} := W \setminus A_\alpha$. L'application est surjective par W-équivariance. Pour voir qu'elle est injective, on remarque d'abord que l'image d'une racine positive contient 1, contrairement à celle d'une racine négative. Ensuite, on se ramène par W-équivariance à comparer les images de $\alpha \neq \alpha_s$ positives; et puisque α_s est la seule racine positive rendue négative par $s = s^{-1}$, s est dans A_α sans être dans A_s.

On reviendra sur cette identification, et sur d'autres vues entretemps, en (5.4.1).

5.1.4. Murs et demi-espaces des racines. Facettes et chambres

En toute généralité, il n'existe pas de produit scalaire sur V pour lequel l'action de W est unitaire. Un palliatif consiste à remplacer le produit scalaire par le crochet de dualité. On introduit pour cela la représentation contragrédiente $\sigma^* : W \to \mathrm{GL}(V^*)$. On note $\langle - \mid - \rangle$ le crochet de dualité entre V et V^*. Par définition, les actions de W sur V et V^* sont compatibles: pour f dans V^* et λ dans V, $\langle wf \mid w\lambda \rangle = \langle f \mid \lambda \rangle$. On définit une famille d'hyperplans $\mathcal{H}$ munie de bonnes propriétés de la façon suivante.

DÉFINITION. — (i) *Pour toute racine α de Φ, on note $\partial\alpha$ l'hyperplan* $\mathrm{Ker}(\alpha) \subset V^*$. *$\partial\alpha$ est le* mur *de la racine α. On désigne par $D(\alpha)$ son demi-espace positif $D(\alpha) := \{f \in V^* \mid \langle \alpha \mid f \rangle > 0\}$.*
(ii) *$\mathcal{H}$ est par définition l'ensemble des murs. C'est une famille indexée par Φ_+, stable par W puisque pour toute racine α et tout élément w de W, on a $w(\partial\alpha) = \partial(w\alpha)$.*
(iii) *Pour toute partie I de S, on note*

$$F_I := \bigcap_{s \in I} \partial\alpha_s \cap \bigcap_{s \in S \setminus I} D_{\alpha_s}.$$

F_I est la facette (ouverte) standard de type *I. La facette $F_\varnothing$ est notée C, elle est appelée la* chambre (ouverte) standard.
(iv) *De manière générale, une* facette (ouverte) *(respectivement* chambre (ouverte)*) est la transformée par un élément de W d'une facette (ouverte) (respectivement de la chambre (ouverte)) standard. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des facettes de W.*

REMARQUE.— Toutes les racines α de Φ vérifient $B(\alpha, \alpha) = 1$. Par conséquent, Φ ne peut contenir deux formes linéaires se déduisant l'une de l'autre par un scalaire strictement positif. Ainsi, $D(\alpha)$ détermine α dans Φ, d'où une correspondance W-équivariante

$$\{\alpha\}_{\alpha \in \Phi} \quad \longleftrightarrow \quad \{D(\alpha)\}_{\alpha \in \Phi}.$$

Le résultat suivant est immédiat.

LEMME/DÉFINITION. — *Pour I une partie de S, l'adhérence dans V^* d'une facette est décrite de la façon suivante.*

$$\overline{F}_I = \bigcap_{s \in I} \partial\alpha_s \cap \bigcap_{s \in S \setminus I} (D_{\alpha_s} \cup \partial\alpha_s) = \bigsqcup_{J \supset I} F_J.$$

$\overline{F}_I$ est appelée la facette fermée standard *de type I. Une* facette fermée *est une transformée de facette fermée standard par W.* □

F_I est l'unique facette de dimension maximale dans $\overline{F}_I$. Une facette ouverte est ouverte dans le sous-espace vectoriel de V^* qu'elle engendre; c'est même l'intérieur dans ce sous-espace vectoriel de son adhérence. Le passage à l'adhérence établit donc une bijection entre les facettes fermées et les facettes ouvertes.

5.1.5. Cône de Tits. Action du groupe de Coxeter

On commence par définir deux parties privilégiées de V^*, le terme de cône étant immédiatement justifié par le théorème qui suit.

DÉFINITION. — (i) *On définit $\overline{\mathcal{C}}$ comme étant la réunion des adhérences des chambres.*

$$\overline{\mathcal{C}} = \bigcup_{w \in W} w(\overline{C}) = \bigsqcup_{\substack{w \in W \\ I \subset S}} w(F_I).$$

$\overline{\mathcal{C}}$ est appelé le cône de Tits.
(ii) *$\mathcal{C}$ désigne l'ensemble des points de $\overline{\mathcal{C}}$ de fixateur fini.*

REMARQUE. — Les murs séparant un point de $\overline{C}$ d'un point de $w\overline{C}$ sont indexés par une partie de $\Phi_{w^{-1}}$; d'après (1.4.1), ils sont donc en nombre fini.

Les résultats concernant le cône de Tits et l'action de W sur celui-ci sont essentiellement résumés dans l'énoncé suivant.

THÉORÈME. — (i) *$\overline{\mathcal{C}}$ est un cône convexe, W-stable.*
(ii) *Soient w dans W, I et J des parties de S. Si $w(F_I) \cap F_J \neq \varnothing$, alors $I = J$ et w est un élément du sous-groupe spécial W_I. Ainsi, W_I est le stabilisateur et même le fixateur (point par point) de tout point de F_I.*
(iii) *$\overline{C}$ est un domaine fondamental pour l'action de W sur $\overline{\mathcal{C}}$: la W-orbite de tout point de $\overline{\mathcal{C}}$ rencontre $\overline{C}$ en exactement un point.*
(iv) *Chaque segment tracé dans $\overline{\mathcal{C}}$ rencontre un nombre fini de facettes ouvertes.*

Référence. [Bou81], section (V.4.6) p.96-97. □

Remarquons que la deuxième assertion de ce théorème permet de parler du type d'une facette non standard.

DÉFINITION. — (i) *Le* type *d'une facette du cône de Tits est le type de la facette standard (bien déterminée) dont elle est la transformée par un élément de W.*
(ii) *Une facette est dite* sphérique *(ou* de type fini*) si son type I est tel que W_I est fini.*

Justification. Si w et z sont deux éléments de W tels que wF et zF sont adhérentes à C ($wF = F_I$ et $zF = F_J$ pour des parties I et J de S), on a alors $F_J = (zw^{-1})wF = (zw^{-1})F_I$. Par ce qui précède, on a bien $I = J$. □

Une autre conséquence du théorème est que le fixateur d'une facette F est le sous-groupe engendré par les réflexions d'hyperplan un mur contenant F. Précisons.

DÉFINITION. — *Soit F une facette de $\overline{\mathcal{C}}$. On désigne par $\Phi^m(F)$ l'ensemble des racines dont leur mur contient F. Pour toute chambre D, on désigne par $\Phi(F)_D$ l'ensemble des racines dont leur mur contient F et dont le demi-espace contient D.*

À chaque facette, on a associé ainsi un système de racines.

LEMME. — *Pour toute facette F de $\overline{\mathcal{C}}$, l'ensemble $\Phi^m(F)$ est en bijection avec le système de racines du fixateur $W(F)$ de F.*

Démonstration. Déjà, on a clairement $\Phi^m(wF_I) = w\Phi^m(F_I)$. Il suffit donc de considérer une facette standard F_I. L'inclusion $V_I \subset V$ fournit un épimorphisme de W_I-modules $\pi_I : V^* \twoheadrightarrow V_I^*$, et V_I est la représentation géométrique de W_I pour la restriction de la forme bilinéaire. La préimage par π_I établit une bijection entre les racines de W_I dans V_I et les racines de V^* dont le mur contient F_I. □

5.2. Intérieur du cône de Tits. Finitude locale

La description de l'intérieur du cône de Tits pourrait se faire à partir des résultats généraux de Vinberg ([Vin71]), une fois prouvée l'identification de $\overline{\mathcal{C}}$ avec le recollement de la structure-miroir associée à la chambre standard. On va plutôt faire quelques raisonnements géométriques plus instructifs. On suppose le système générateur S fini.

5.2.1. Finitude locale

La première propriété de $\overline{\mathcal{C}}$ est l'existence pour chaque point de l'intérieur du cône de Tits d'un voisinage convexe test, dans le sens où celui-ci n'est pas rencontré par plus de murs que ceux qui contiennent le point. Ce résultat est une adaptation de [Moo-Pia95], proposition 12 p.447.

PROPOSITION. — *Soit x un point de l'intérieur de $\overline{\mathcal{C}}$.*

(i) *Il existe un ouvert convexe $B \subset \overline{\mathcal{C}}$ contenant x et possédant la propriété suivante.*

$$\text{(FL)} \qquad \forall \alpha \in \Phi \quad \partial\alpha \cap B \neq \varnothing \iff x \in \partial\alpha.$$

(ii) *Pour toute partie B comme précédemment et pour tout w de W,*

$$wB \cap B \neq \varnothing \iff w \in W_{\{x\}}.$$

(iii) *x est contenu dans un nombre fini de murs.*

Démonstration. Preuve de (i). On se donne I_1, ... $I_{\#S}$ des segments compacts portés par des directions linéairement indépendantes et contenant x en leur intérieur. D'après (5.1.5), chacun de ces segments est recouvert par un nombre fini de facettes ouvertes. Par convexité, chacune des facettes intervenant dans ces recouvrements trace sur les segments un point ou un segment ouvert. On numérote z_1, ... z_N les points ainsi obtenus. Les z_i sont les seuls points d'intersection des murs avec les segments I_1, ... $I_{\#S}$. Pour $1 \leq j \leq \#S$, on choisit un intervalle ouvert J_j contenant x et tel que x est éventuellement le seul z_i dans J_j. On a donc

$$x \in \partial\alpha \iff \partial\alpha \cap J_j \neq \varnothing \quad \forall j,$$

car x est le seul point d'intersection possible d'un J_j avec un mur qui ne contient pas J_j. On peut alors prendre comme ouvert test l'enveloppe convexe des intervalles J_j $(1 \leq j \leq \#S)$.

Preuve de (ii). On suppose qu'on a pour un élément w de W, $wx \neq x$. Il existe un hyperplan $\partial\alpha$ qui sépare x et wx (sinon x et wx seraient dans la même W-orbite et la même chambre en même temps). Par hypothèse, B et wB sont de part et d'autre de $\partial\alpha$.

Preuve de (iii). $\mathcal{H}$ étant une famille dénombrable d'hyperplans, on peut trouver un point intérieur y hors de tout mur contenant x. On peut en outre se donner une boule B centrée en x dont l'adhérence est contenue dans l'intérieur de $\overline{C}$. La droite (xy) coupe ∂B suivant deux points p et q eux aussi intérieurs. Ces points ne peuvent appartenir à un mur contenant x car x, y, p et q sont alignés. Ainsi, tout mur contenant x sépare p et q, ce qui impose que ces murs sont en nombre fini. □

Nous utiliserons de manière récurrente le corollaire immédiat suivant.

COROLLAIRE. — (i) *Un ouvert satisfaisant la condition* (FL) *est recouvert par un nombre fini de facettes.*
(ii) *Toute partie compacte incluse dans l'intérieur de $\overline{C}$ est recouverte par un nombre fini de facettes sphériques.*

Démonstration. Le premier point est évident puisque ces ouverts sont coupés par un nombre fini de murs. Pour le second, il suffit d'appliquer la propriété de Borel-Lebesgue à un recouvrement par des ouverts du type précédent. □

5.2.2. Condition de finitude globale

On va donner une condition nécessaire et suffisante de finitude de W, qui nous servira surtout à caractériser les points intérieurs du cône de Tits d'un système de Coxeter quelconque.

PROPOSITION. — *Soit (W, S) un système de Coxeter auquel on associe la forme bilinéaire B et le cône de Tits $\overline{C}$ comme précédemment. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *W est fini.*
(ii) *B est un produit scalaire.*
(iii) *Le cône de Tits $\overline{C}$ est V^* tout entier.*

Justification. La première équivalence est prouvée dans [Bou81], (V.4.8).
L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) est l'implication (b) $\Rightarrow$ (c) de [Hum90], théorème (6.4) p.133.
Réciproquement, si $\overline{C} = V^*$, 0 est un point intérieur. 0 est alors contenu dans un nombre fini de murs. Ceci implique qu'il y a un nombre fini de chambres dans le cône de Tits puisque celles-ci contiennent toutes l'origine dans leur adhérence. On conclut par simple transitivité de l'action de W sur les chambres. □

5.2.3. Caractérisation et description de l'intérieur du cône de Tits

Nous pouvons maintenant caractériser et décrire l'intérieur du cône de Tits. L'hypothèse « S fini » est répétée car elle utilisée pour adapter [Moo-Pia95], proposition 14 p.449 afin de prouver (i). Cependant, une étude sans cette hypothèse de finitude est effectuée dans [Hée91], (2.4.1) à (2.4.3) (où C et $\overline{C}$ sont notés U_0 et U respectivement).

THÉORÈME. — *Soit (W, S) un système de Coxeter, $\overline{C}$ son cône de Tits. On suppose S fini.*

(i) *Un point du cône de Tits est intérieur si et seulement si son fixateur est fini.*
(ii) *Ainsi, l'intérieur du cône de Tits n'est autre que C. C'est un cône convexe W-invariant.*
(iii) *Soient x et y dans $\overline{C}$, on a alors $[x; y] \subset \overline{C} \setminus C$ ou $]x; y[\subset C$.*

Démonstration. Preuve de (i). Pour l'implication directe, on se donne un ouvert contenant le point considéré et vérifiant la condition (FL). Le fait qu'un tel ouvert est rencontré par un nombre fini de murs montre que le point est dans l'adhérence d'un nombre fini de chambres, qui sont permutées par son fixateur. Par simple transitivité de W sur les chambres, on en déduit que ce fixateur est fini. L'implication réciproque est moins rapide. On se donne x un point de fixateur fini.

1. On peut supposer que x est dans une facette F_I standard et sphérique. L'inclusion $V_I \subset V$ fournit un épimorphisme de W_I-modules $\pi_I : V^* \twoheadrightarrow V_I^*$, et V_I est la représentation géométrique de W_I pour la restriction de la forme bilinéaire. On note $\overline{C}_I$ le cône de Tits correspondant. Par le critère de finitude, on a $\overline{C}_I = V_I^*$ et finalement $\pi_I^{-1}(\overline{C}_I) = V^*$. Ceci implique

$$(\star) \quad V^* = W_I.\overline{C}_I,$$

avec $C_I := \{\lambda \in V^* \mid \langle \lambda \mid \alpha_s \rangle > 0 \quad \forall s \in I\}$.

2. Soit maintenant s dans $S \setminus I$. Puisque x est dans F_I, on a $\langle x \mid \alpha_s \rangle > 0$, et donc comme pour tout w de W_I avec $wx = x$, $\langle x \mid w\alpha_s \rangle > 0$. Ainsi, x est dans $\bigcap_{w \in W_I, s \in S \setminus I} (w\alpha_s)^{-1}(\mathbf{R}_+^\times)$ qui est ouvert comme intersection finie d'ouverts.

3. Soit B une boule ouverte contenant x et incluse dans ce dernier ouvert, et y un autre point dans B. Déjà, par $(\star)$, il existe un élément w de W_I tel que wy est dans $\overline{C}_I$. Par ailleurs, le fait que y est dans B implique que $\langle wy \mid \alpha_s \rangle$ est strictement positif pour tous les indices s dans $S \setminus I$. Finalement, wy est dans l'adhérence de la chambre standard C. Par conséquent la boule B tout entière est dans le cône de Tits, et x est intérieur.

Preuve de (ii). D'après (i), seule la convexité est non immédiate. On se donne deux points x et y de $\mathcal{C}$ tels que $[x;y]$ rencontre $\overline{\mathcal{C}} \setminus \mathcal{C}$. Soit z dans $[x;y] \cap (\overline{\mathcal{C}} \setminus \mathcal{C}) =]x;y[\cap (\overline{\mathcal{C}} \setminus \mathcal{C})$. Puisque x et y sont dans le cône de Tits, ils sont séparés par un nombre fini de murs, donc le point z est contenu dans un nombre fini de murs et par conséquent dans l'adhérence d'un nombre fini de chambres: contradiction, par simple transitivité de W sur les chambres, avec le fait que le fixateur de z devrait être infini.

Preuve de (iii). D'après le point (ii), si $]x;y[\not\subset \mathcal{C}$, quitte à échanger x et y, il existe z dans $]x;y]$ tel que $[x;z] \subset \overline{\mathcal{C}} \setminus \mathcal{C}$. D'après (5.1.5)(iv), $[x;z]$ contient un segment non trivial contenu dans une facette ouverte non sphérique. Le fixateur de ce segment est donc infini, et il fixe $[x;y]$ tout entier. Par conséquent, on a $[x;y] \subset \overline{\mathcal{C}} \setminus \mathcal{C}$. □

5.2.4. Action du groupe de Coxeter

On peut finir en prouvant un résultat qui avec celui qui montre qu'une chambre est un domaine fondamental, complète la description de l'action du groupe W.

PROPOSITION. — *W opère proprement discontinûment sur l'intérieur du cône de Tits, i.e., pour toutes parties compactes K et L dans $\mathcal{C}$, $\{w \in W \mid wK \cap L \neq \varnothing\}$ est fini.*

Démonstration. On applique le corollaire (5.2.1) pour recouvrir chacun des compacts L et K par un nombre fini de facettes sphériques. La relation $wL \cap K \neq \varnothing$ implique que w envoie une facette sphérique intersectant L sur une facette sphérique intersectant K. Le nombre de tels w est fini car le stabilisateur d'une facette sphérique l'est. En traitant tous les couples de facettes intervenant dans le recouvrement de L et K, on aboutit au résultat. □

5.3. Géométrie conique des jumelages

On introduit ici la seconde réalisation géométrique des immeubles qu'on va utiliser. Son intérêt réside dans le fait que le modèle de chambre est un cône simplicial, découpé dans le cône de Tits précédemment étudié. Le fait que la chambre peut être vue comme une partie d'un **R**-espace vectoriel permettra des transports de structure vectorielle sur chaque réalisation géométrique d'appartement jumelé.

5.3.1. Recollement pour un immeuble simple

On va procéder au même recollement que pour la structure métrique, mais en choisissant d'autres modèles pour la chambre. On peut donc d'ores et déjà invoquer tous les résultats généraux de la section (4.2). On se donne une structure-miroir en prenant pour X l'adhérence de la chambre standard dans le cône de Tits et pour X_s la cloison fermée de type s pour chaque s de S.

DÉFINITION. — *Soit $(\mathcal{I}, d)$ un immeuble de type M auquel sont associés le groupe de Weyl W, et la représentation géométrique de celui-ci. On note C la chambre standard correspondante, et pour chaque s de S, $F_{\{s\}}$ la cloison de type s. La* réalisation conique *de l'immeuble $(\mathcal{I}, d)$ est le recollement obtenu à partir de la structure-miroir $\left(\overline{C}, (\overline{F}_{\{s\}})_{s\in S}\right)$. On la note $|\mathcal{I}|_{\mathrm{co}}$.*

Au titre de recollement de structures-miroir, ces réalisations possèdent des appartements, des chambres et des facettes au sens de sous-espaces topologiques fermés. En outre, on y lit les s-adjacences, puisque le modèle des chambres comporte des points de type exactement $\{s\}$. Ainsi, le système de chambres associé à cette réalisation est isomorphe à l'immeuble combinatoire. Il s'agit maintenant de montrer que les appartements peuvent être naturellement vus comme des cône convexes dans un **R**-espace vectoriel, ce qui autorise certaines opérations de calcul vectoriel ou affine. Pour cela, on revient au recollement pour un groupe de Coxeter.

PROPOSITION. — *Soit (W, S) un système de Coxeter.*

(i) *La factorisation de l'application*

$$\begin{aligned} W \times \overline{C} &\to V^* \\ (w, x) &\mapsto wx \end{aligned}$$

à travers $W \times \overline{C} \twoheadrightarrow |W|_{\mathrm{co}}$ établit un isomorphisme de systèmes de chambres entre $|W|_{\mathrm{co}}$ et le cône de Tits $\overline{C}$.
(ii) *En remplaçant $\overline{C}$ (respectivement $\overline{F}_{\{s\}}$) par l'ensemble $\overline{C}_{\mathrm{sph}} = \overline{C} \cap \mathcal{C}$ (respectivement $\overline{F}_{\{s\}} \cap \mathcal{C}$) de ses points sphériques, l'application de factorisation établit en outre un homéomorphisme entre la réalisation géométrique $|W|_{\mathrm{cs}}$ obtenue et l'intérieur $\mathcal{C}$ du cône de Tits.*

Démonstration. Le point (i) est une conséquence immédiate du théorème (5.1.5). L'assertion ensembliste du point (ii) est une conséquence du théorème (5.1.5) pour l'injectivité, et du théorème (5.2.3) pour la surjectivité. On s'attache maintenant à prouver l'assertion topologique. On appelle ϕ l'application citée dans l'énoncé et $\bar{\phi}$ sa factorisée, si bien qu'on obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W \times \overline{C}_{\text{sph}} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{C} \\ {\scriptstyle \pi_W}\downarrow & \nearrow \bar{\phi} & \\ |W|_{\text{cs}} & & \end{array}$$

Il s'agit de voir que $\bar{\phi}$ est un homéomorphisme.

1. Soit F un fermé de $\mathcal{C}$. On veut montrer que $\bar{\phi}^{-1}(F)$ est un fermé de $|W|_{\text{cs}}$. Pour cela, on regarde sa préimage par π_W.

$$\pi_W^{-1}\big(\bar{\phi}^{-1}(F)\big) = \phi^{-1}(F).$$

$\phi^{-1}(F)$ s'écrit $\bigcup_{w\in W} \big(\{w\} \times (F \cap \overline{C}_{\text{sph}})\big)$. C'est un fermé. Par définition de la topologie de $|W|_{\text{cs}}$, $\bar{\phi}^{-1}(F)$ est un fermé et $\bar{\phi}$ est continue.

2. Il reste à voir que $\bar{\phi}$ est ouverte. On se donne un ouvert $\overline{O}$ de $|W|_{\text{cs}}$. Son image réciproque est par définition de la forme $\bigcup_{w\in W} (\{w\} \times O_w)$ avec O_w ouvert dans $\overline{C}_{\text{sph}}$ pour tout w. On se donne maintenant un point x de $\bar{\phi}(\overline{O})$. La préimage de x par ϕ apparaît dans un nombre fini de $\{w\} \times O_w$. Précisément, si x est dans $w\overline{C}_{\text{sph}}$, sa préimage a exactement un point x_z dans chaque $\{z\} \times O_z$ avec z dans $wW_{J(x)}w^{-1}$ et la partie $J(x)$ est sphérique. Pour tout z dans $wW_{J(x)}w^{-1}$, il existe un rayon $r_z > 0$, tel que O_z contient la trace sur $w\overline{C}_{\text{sph}}$ de la boule de V^* centrée en x de rayon r_z. Si on note $r > 0$ le plus petit des rayons r_z, $\bar{\phi}(\overline{O})$ contient la boule de V^* centrée en x de rayon r. Ainsi, $\bar{\phi}$ est ouverte et c'est finalement un homéomorphisme. □

Ces flèches permettent d'identifier un appartement de $|\mathcal{I}|_{\text{co}}$ (respectivement $|\mathcal{I}|_{\text{cs}}$) avec le cône de Tits $\overline{\mathcal{C}}$ du groupe de Weyl de l'immeuble (respectivement son intérieur $\mathcal{C}$). Soient $\alpha, \alpha' : W \to \mathcal{I}$ deux isométries définissant le même appartement $\mathbf{A}$ comme leur image. Les réalisations géométriques $|\alpha|$ et $|\alpha'|$ sont des morphismes injectifs des systèmes de chambres géométriques. Ainsi, $|\alpha'|^{-1} \circ |\alpha|$ est un automorphisme du système de chambres $|W|_{\text{co}}$: c'est l'action d'un élément de W sur $|W|_{\text{co}}$. On obtient donc:

LEMME. — (i) *Deux morphismes injectifs de systèmes de chambres* $|W|_{\text{co}} \hookrightarrow |\mathcal{I}|_{\text{co}}$ *de même image se déduisent l'un de l'autre par composition à droite par un élément de* W.
(ii) *Étant donnée l'inclusion* $D \subset \mathbf{A}$ *d'une chambre dans un appartement de l'immeuble* $|\mathcal{I}|_{\text{co}}$, *il existe une unique identification de systèmes de chambres entre* $\overline{\mathcal{C}}$ *et* $\mathbf{A}$ *envoyant la chambre standard de* $\overline{\mathcal{C}}$ *sur* D. □

Nous utiliserons ces flèches pour faire des transports de structures vectorielles dans le cas jumelé.

5.3.2. Jumelages

On part maintenant d'un jumelage $\mathcal{J} = \big((\mathcal{I}_+, d_+), (\mathcal{I}_-, d_-), d^*\big)$. On sait depuis l'étude combinatoire de ces structures, que la codistance peut entièrement être reconstituée à partir de la simple notion d'opposition ([Abr97], remarque 3 p.23). Cette dernière se prête particulièrement bien aux interprétations géométriques. On part des représentations coniques $|\mathcal{I}_+|_{\text{co}}$ et $|\mathcal{I}_-|_{\text{co}}$. Une particularité de la représentation conique d'un immeuble $(\mathcal{I}, d)$ est que les chambres ont toutes un point en commun, à savoir $O = [c, O_{\overline{C}}]$ $(c \in \mathcal{I})$. On appelle ce point le *point origine* de l'immeuble. Ceci justifie les définitions suivantes.

DÉFINITION. — *La* réalisation conique *d'un jumelage* $\big((\mathcal{I}_+, d_+), (\mathcal{I}_-, d_-), d^*\big)$ *est le joint topologique* $|\mathcal{J}|_{\text{co}}$ *de* $|\mathcal{I}_+|_{\text{co}}$ *et* $|\mathcal{I}_-|_{\text{co}}$, *qui identifie les points origines des deux immeubles:*

$$|\mathcal{J}|_{\text{co}} = |\mathcal{I}_+|_{\text{co}} * |\mathcal{I}_-|_{\text{co}} .$$

Une facette *d'une réalisation conique de jumelage est l'image d'une facette de la réalisation d'un des immeubles. On dit que deux chambres de signes opposés sont* opposées *si elles représentent des chambres abstraites opposées.*

Il s'agit maintenant de réaliser géométriquement les appartements jumelés comme sous-espaces topologiques fermés, et de les munir de structures vectorielles. Un appartement jumelé combinatoire est déterminé par une paire de chambres opposées. On se donne une telle paire $\{c_\epsilon; c_{-\epsilon}\}$, qui définit $\mathbf{A}$ un appartement jumelé, dont on note $\mathbf{A}_+$ et $\mathbf{A}_-$ les parties positive et négative: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_+ \sqcup \mathbf{A}_-$. On se munit de deux exemplaires du groupe de Coxeter W qu'on note W_+ et W_-, et qu'on voit chacun comme un immeuble mince. Les distances correspondantes sont notées d_+ et d_-. La codistance d'un élément w_ϵ de W_ϵ à un élément $w_{-\epsilon}$ de $W_{-\epsilon}$ est définie par $d^*(w_\epsilon, w_{-\epsilon}) = w_\epsilon^{-1} w_{-\epsilon}$, et fait de $W_+ \sqcup W_-$ un jumelage. Enfin pour chaque signe ϵ, on désigne par α_ϵ l'isométrie

$$\begin{aligned} W_\epsilon &\to \mathbf{A}_\epsilon \\ w_\epsilon &\mapsto w_\epsilon c_\epsilon. \end{aligned}$$

Ceci fournit un morphisme injectif d'immeubles jumelés abstraits

$$\alpha := \alpha_+ \sqcup \alpha_- : W_+ \sqcup W_- \to \mathcal{I}_+ \sqcup \mathcal{I}_-.$$

Par ailleurs, on reprend la représentation géométrique de (W, S) dans l'espace vectoriel V, ce qui donne la chambre standard C, le cône de Tits $\overline{C}$, etc... Il est clair que $\overline{C} \cup -\overline{C}$ est un jumelage mince pour la relation d'opposition naturelle de V^*. On peut alors définir quelques applications. L'une est définie à partir du morphisme de jumelage α:

$$\mu_{\mathcal{J}} : (W_+ \sqcup W_-) \times \overline{C} \overset{\alpha \times 1_{\overline{C}}}{\hookrightarrow} (\mathcal{I}_+ \sqcup \mathcal{I}_-) \times \overline{C} \cong (\mathcal{I}_+ \times \overline{C}) \sqcup (\mathcal{I}_- \times \overline{C}) \twoheadrightarrow |\mathcal{I}_+|_{\text{co}} \sqcup |\mathcal{I}_-|_{\text{co}} \overset{\pi_*}{\twoheadrightarrow} |\mathcal{J}|_{\text{co}} .$$

Une autre est à valeurs dans V^*:

$$\begin{aligned} \phi : (W_+ \sqcup W_-) \times \overline{C} \cong (W_+ \times \overline{C}) \sqcup (W_- \times \overline{C}) &\to V^* \\ (w_\epsilon, x) &\mapsto \epsilon w_\epsilon x. \end{aligned}$$

Enfin, on note μ_W l'application obtenue comme $\mu_{\mathcal{J}}$ en raisonnant sur le jumelage mince $W_+ \sqcup W_-$

$$\mu_W : (W_+ \sqcup W_-) \times \overline{C} \cong (W_+ \times \overline{C}) \sqcup (W_- \times \overline{C}) \twoheadrightarrow |W_+|_{\text{co}} \sqcup |W_-|_{\text{co}} \overset{\pi_*}{\twoheadrightarrow} |W_+ \sqcup W_-|_{\text{co}} .$$

Ces flèches sont mises en relation les unes par rapport aux autres par le lemme suivant.

LEMME. — (i) *La factorisation de $\mu_{\mathcal{J}}$ à travers μ_W est un homéomorphisme entre $|W_+ \sqcup W_-|_{\mathrm{co}}$ et son image dans $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$ qui établit un morphisme de jumelages .*
(ii) *La factorisation de ϕ à travers μ_W est une bijection entre $|W_+ \sqcup W_-|_{\mathrm{co}}$ et $\overline{C} \cup -\overline{C}$ qui établit un isomorphisme de jumelages minces.*

Démonstration. Commençons par justifier ensemblistement les factorisations.

1. L'égalité $\mu_{\mathcal{J}}(w_\epsilon, x) = \mu_{\mathcal{J}}(w'_{\epsilon'}, x')$ implique ($\epsilon = \epsilon'$ et $[\alpha_\epsilon(w_\epsilon), x] = [\alpha_{\epsilon'}(w'_{\epsilon'}), x']$), ou $x = x' = O_{\overline{C}}$. On s'intéresse à la première condition, qui implique $x = x'$ et $d_\epsilon\big(\alpha_\epsilon(w_\epsilon), \alpha_\epsilon(w'_{\epsilon'})\big) = (w_\epsilon)^{-1} w'_{\epsilon'} \in W_{J(x)}$. Autrement dit, $\mu_{\mathcal{J}}(w_\epsilon, x) = \mu_{\mathcal{J}}(w'_{\epsilon'}, x')$ implique ($\epsilon = \epsilon'$, $x = x'$ et $(w_\epsilon)^{-1} w'_{\epsilon'} \in W_{J(x)}$) ou $x = x' = O_{\overline{C}}$, ce qui équivaut à $\mu_W(w_\epsilon, x) = \mu_W(w'_{\epsilon'}, x')$. D'où la première factorisation.

2. On a pour w_ϵ dans W_ϵ, $w'_{\epsilon'}$ dans $W'_{\epsilon'}$ et x, x' dans $\overline{C}$:

$$\phi(w_\epsilon, x) = \phi(w'_{\epsilon'}, x') \Leftrightarrow \epsilon w_\epsilon x = \epsilon' w'_{\epsilon'} x' \Leftrightarrow (\epsilon\epsilon')(w_\epsilon)^{-1} w'_{\epsilon'} x' = x.$$

Ceci équivaut à ($\epsilon = \epsilon'$ et $(w_\epsilon)^{-1} w'_{\epsilon'}$ est dans $W_{J(x)}$) ou $x = x' = O_{\overline{C}}$, par les propriétés de l'action de W sur le cône de Tits. D'où la seconde factorisation, et sa bijectivité.

L'assertion topologique est un passage au joint d'un fait prouvé pour les immeubles simples. Les assertions concernant le respect des adjacences et des codistances sont tautologiques par définition de la structure de jumelage sur les réalisations coniques. □

DÉFINITION. — *On note $|\alpha|_{\mathrm{co}}$ et on appelle* réalisation conique *de α la factorisation de $\mu_{\mathcal{J}}$ à travers μ_W. Son image est appelée la* réalisation conique *de l'appartement jumelé $\mathbf{A}$, qu'on désignera par $|\mathbf{A}|_{\mathrm{co}}$ (ou plus simplement par $\mathbf{A}$ si le contexte est explicite).*

Justification. Il est clair que l'image d'une telle factorisation est la réunion des réalisations des chambres de l'appartement jumelé combinatoire représenté.

$$|\mathbf{A}|_{\mathrm{co}} = \Big(\bigcup_{c_+ \in \mathbf{A}_+} |c_+|_{\mathrm{co}} \Big) \cup \Big(\bigcup_{c_- \in \mathbf{A}_-} |c_-|_{\mathrm{co}} \Big).$$

Ainsi, la réalisation de l'appartement jumelé est indépendante du choix du morphisme abstrait de jumelages qu'on réalise. □

On veut maintenant introduire la géométrie des cônes dans les réalisations d'appartement jumelé. Si on veut faire la même discussion que dans le cas d'un immeuble simple, il est commode d'introduire la notion de standardisation, valable aussi bien dans le contexte combinatoire que dans le contexte géométrique.

DÉFINITION. — (i) *Une* standardisation *dans un jumelage (ou dans une de ses réalisations) est un triplet $(\mathbf{A}, C, -C)$ où $\mathbf{A}$ est un appartement jumelé contenant les deux chambres opposées C et $-C$.*
(ii) *Une* identification vectorielle *de l'appartement jumelé $|\mathbf{A}|_{\mathrm{co}}$ est une bijection entre $|\mathbf{A}|_{\mathrm{co}}$ et $\overline{C} \cup -\overline{C}$ qui établit un isomorphisme de jumelages minces.*

Qu'il existe des identifications vectorielles provient du lemme précédent. On fait le même raisonnement que pour les immeubles simples pour obtenir:

LEMME. — (i) *Deux morphismes de jumelages minces* $|W|_{\mathrm{co}} \to |\mathcal{I}|_{\mathrm{co}}$ *de même image se déduisent l'un de l'autre par composition à droite par un élément de* W.
(ii) *Étant donnée une standardisation* $(\mathbf{A}, C, -C)$, *il existe une unique identification vectorielle entre* $\overline{C} \cup -\overline{C}$ *et* $|\mathbf{A}|_{\mathrm{co}}$ *envoyant la chambre standard de* $\overline{C}$ *sur* C. □

5.3.3. Enveloppe convexe. Extension vectorielle. Sous-espace générique

Pour toute cette sous-section, on se fixe un appartement jumelé $\mathbf{A}$ du jumelage $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$. On se donne une partie Ω de $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$ contenue dans $\mathbf{A}$. Les identifications de $\mathbf{A}$ avec un double cône $\overline{C} \cup -\overline{C}$ se déduisant les unes des autres par l'action linéaire d'un élément du groupe de Coxeter W, il est licite de poser les définitions suivantes.

DÉFINITION. — (i) *L'*extension vectorielle *de* Ω *dans l'appartement jumelé* $\mathbf{A}$ *est l'image par une identification vectorielle de la trace de l'espace vectoriel engendré par l'image réciproque de* Ω *dans* V^* *sur le cône double* $\overline{C} \cup -\overline{C}$. *On la note* $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(\Omega)$.
(ii) *L'*enveloppe convexe *de* Ω *dans l'appartement jumelé* $\mathbf{A}$ *est l'image par une identification vectorielle de la trace de l'enveloppe convexe de l'image réciproque de* Ω *dans* V^* *sur le cône double* $\overline{C} \cup -\overline{C}$. *On la note* $\mathrm{conv}_{\mathbf{A}}(\Omega)$.

On prendra garde au fait que ces définitions, si elles ne dépendent pas de l'identification vectorielle choisie, dépendent *a priori* de l'appartement jumelé ambiant. On montrera en fait un certain nombre de résultats affaiblissant cette dépendance.

DÉFINITION. — *Un* sous-espace générique *de la réalisation conique* $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$ *est un sous-espace de* $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$ *contenu dans un appartement jumelé et qui, pour une identification vectorielle, est la trace sur* $\overline{C} \cup -\overline{C}$ *d'un sous-espace vectoriel de* V^* *qui rencontre l'intérieur de ce double cône.*

Par définition, l'extension vectorielle d'une partie d'un appartement jumelé contenant un point intérieur est un sous-espace générique. On peut d'ores et déjà utiliser la finitude locale pour justifier qu'on peut engendrer un sous-espace générique avec la trace d'une facette bien choisie.

LEMME. — (i) *Soit* K *une partie convexe non vide de* $\mathcal{C}$, *ouverte dans son extension vectorielle. Alors, il existe une facette sphérique* F *telle que* $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(F \cap K) = \mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(K)$. F *est de trace ouverte sur* $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(K)$.
(ii) *Soient* x *et* y *deux points de même signe dans* $|\mathcal{I}_\epsilon|_{\mathrm{co}}$ $(\subset |\mathcal{J}|_{\mathrm{co}})$. *Alors, le segment* $[x; y]$ *tracé dans un appartement contenant* x *et* y *ne dépend que de ces deux points et est contenu dans tous les appartements les contenant.*
(iii) *Si* F *est une facette de type non sphérique, alors aucune facette de l'extension vectorielle de* F *dans* $\mathbf{A}$ *n'est sphérique.*

Démonstration. Preuve de (i). On choisit une facette F de dimension maximale parmi les facettes qui intersectent K. On choisit dans $K \cap F$ une famille libre maximale de $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(K)$. C'est nécessairement une base de $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(K)$ car tout point de F possède un voisinage qui ne rencontre que F et des facettes contenant F dans leur adhérence de dimension strictement supérieure. F est de trace ouverte sur $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(K)$ par convexité.

Preuve de (iii). Toute facette F' de $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(F)$ est fixe sous le stabilisateur, infini, de F. Ainsi, F' ne peut être sphérique.

Preuve de (ii). La justification de ce point est exactement la même que dans le cas affine, les arguments étant l'existence des segments dans le modèle des appartements et l'usage des réalisations géométriques de rétractions (voir [Bro90], preuve du théorème (6.3.A)) □

La conséquence du second point de ce lemme est que l'on peut définir indépendamment de tout choix d'appartement l'enveloppe convexe d'une partie contenue dans une moitié de signe donné d'un appartement jumelé de $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$.

DÉFINITION. — *Si Ω est une partie de $|\mathcal{I}_\epsilon|_{\mathrm{co}}$ contenue dans une moitié de signe donné d'un appartement jumelé de $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$, on note* $\mathrm{conv}(\Omega)$ *l'enveloppe convexe de Ω.*

5.4. Convexité et parties équilibrées dans les jumelages

Les raisonnements de convexité seront utilisés de manière systématique dans ce qui va suivre. Ils permettent une approche géométrique de propriétés combinatoires déjà vues. Un préliminaire à cet usage de la géométrie consiste donc à vérifier des compatibilités entre définitions combinatoires et géométriques.

5.4.1. Traduction géométrique d'objets combinatoires

Puisque les définitions géométrique et combinatoire de l'adjacence coïncident, on a maintenant une représentation plus géométrique des galeries. Il reste à reconsidérer la définition des racines et à identifier facettes et résidus.

PROPOSITION. — (i) *Pour $J \subset S$, le J-résidu de la facette standard $F_J \subset \overline{C}$ est exactement l'ensemble des chambres qui contiennent F_J dans leur adhérence.*
(ii) *Pour s dans S, les chambres D dans $D_{\alpha_s} \cap C$ sont celles qui vérifient*

$$d_{\mathrm{N}}(C, D) < d_{\mathrm{N}}(sC, D).$$

(iii) *Plus généralement, la racine $\alpha = w\alpha_s$ peut être définie combinatoirement comme la réunion des chambres D qui vérifient $d_{\mathrm{N}}(wC, D) < d_{\mathrm{N}}(wsC, D)$, et le résidu associé à une facette n'est autre que l'ensemble des chambres auxquelles F est adhérente dans $\overline{C}$. Cet ensemble est fini pour une facette sphérique.*

Démonstration. Preuve de (ii). Par simple transitivité de W sur les chambres, on peut toujours paramétrer celles-ci par les w dans W. Alors

$$d_{\mathrm{N}}(C, wC) < d_{\mathrm{N}}(sC, wC) \Leftrightarrow \ell(w) < \ell(sw) \Leftrightarrow \ell(w^{-1}) < \ell(w^{-1}s)$$

$$\Leftrightarrow w^{-1}\alpha_s > 0 \Leftrightarrow w^{-1}\alpha_s \supset C \Leftrightarrow \alpha_s \supset wC.$$

Preuve de (i). Le résidu de F_I est l'ensemble des chambres atteintes par une galerie partant de C et dont le mot associé est dans W_I. Puisque W_I fixe F_I, toutes les chambres du résidu contiennent F_I dans leur adhérence. Réciproquement, soit D une chambre telle que $\overline{D}$ contient F_I. On peut écrire $D = wC$. Puisque $\overline{D} \cap \overline{C} \supset F_I$, il existe deux facettes ouvertes standard F_J et F_K telles que $F_J \cap wF_K \supset F_I$. Ceci implique que $F_I = F_J = F_K$ et que $w \in W_I$, donc que $\overline{D}$ est dans la composante I-connexe $\overline{C}$.

Preuve de (iii). Il suffit de se ramener à des objets standard par un élément de W judicieux. □

Cette proposition met en évidence une nouvelle correspondance W-équivariante:

$$\{\alpha\}_{\alpha\in\Phi} \quad \longleftrightarrow \quad \{D(\alpha)\cap\mathcal{C}\}_{\alpha\in\Phi}.$$

On peut récapituler toutes les définitions qu'il est possible d'adopter.

LEMME/DÉFINITION. — *Dans le cas d'un système de Coxeter (W,S), il y a bijection W-équivariante entre plusieurs ensembles qui porteront tous le nom de* système de racines *de W. Précisément, s'identifient les ensembles suivants.*

(i) *Les moitiés de W définies par la condition de longueur de* (1.4.1).
(ii) *Les formes linéaires de l'espace V dans le dual duquel on définit le cône de Tits* (5.1.1).
(iii) *Les demi-espaces positifs de ces formes, contenus dans le dual V^** (5.1.4).
(iv) *Les traces de ces demi-espaces sur le cône de Tits* (5.4.1).

Justification. Cela provient directement des remarques de (5.1.3), (5.1.4) et de la proposition ci-dessus □

Géométriquement, ces identifications s'interprètent grâce à la simple transitivité de W sur les chambres, qui permet de paramétrer celles-ci par W. En effet, à une racine-forme linéaire est attachée la moitié de W correspondant aux chambres sur lesquelles la forme est positive; autrement dit, la moitié de W contenue dans le demi-espace positif de la forme.

5.4.2. Lecture géométrique de propriétés combinatoires

Nous avons déjà remarqué que dans le cas Kac-Moody, Φ était le système des racines réelles Δ^{re} (les racines imaginaires sont les racines qui contiennent un cône de signe fixé en évitant complètement celui de signe opposé). La généralisation se poursuit de manière plus serrée en particulier en matière de propriétés des ensembles de racines. On peut à nouveau parler de parties prénilpotentes, closes et nilpotentes (1.4.1).

LEMME. — (i) *Soit Ψ une partie de l'ensemble Φ des racines; alors l'intersection des racines de Ψ contient une chambre si et seulement si elle contient un ouvert non vide de $\mathcal{C}$. Ainsi, une partie de racines Ψ est prénilpotente dès que $\bigcap_{\alpha\in\Psi}\alpha$ contient un ouvert non vide de $\mathcal{C}$ et un ouvert non vide de $-\mathcal{C}$.*
(ii) *Soient α et β deux racines distinctes et non opposées. Alors, elles ont des murs distincts qui découpent $\mathcal{C}$ en au moins trois composantes connexes. Ainsi, des quatre paires de racines formées par α ou son opposée et β ou son opposée, deux au moins sont prénilpotentes.*

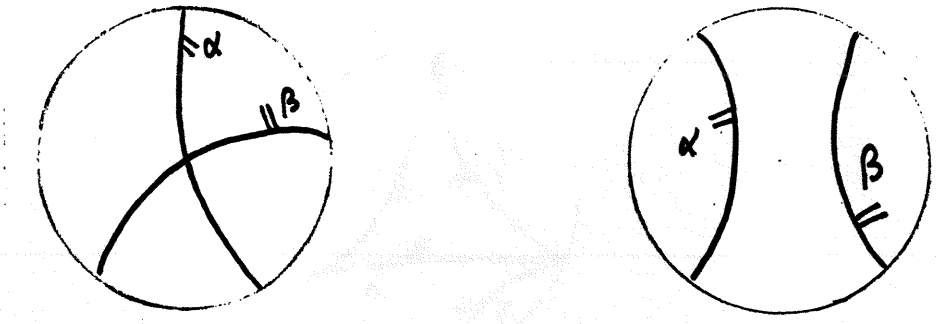
Démonstration. Le premier point est évident par (5.2.1).

Preuve de (ii). Les murs correspondant à des racines simples sont des hyperplans génériques. Puisque $\mathcal{C}$ est W-stable, tous les murs sont des hyperplans génériques qui découpent $\mathcal{C}$ en deux composantes connexes. On distingue alors deux situations.

Ou bien $\partial\alpha$ et $\partial\beta$ se coupent à l'intérieur $\mathcal{C}$ du cône de Tits, auquel cas les traces sur $\mathcal{C}$ des quatre composantes connexes de $\mathcal{C}\setminus(\partial\alpha\cup\partial\beta)$ sont chacune non vides dans $\mathcal{C}$ et donc contiennent une chambre. Toutes les paires sont prénilpotentes.

Ou bien $\partial\alpha\cap\partial\beta$ est hors de $\mathcal{C}$ et seules trois de quatre composantes connexes de $\mathcal{C}\setminus(\partial\alpha\cup\partial\beta)$ sont non vides. On a malgré tout deux paires de racines prénilpotentes. □

Dessin.

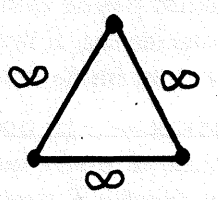


REMARQUE.— La sous-section précédente (5.4.1) a résumé des identifications W-équivariantes entre définitions de racines. On doit cependant faire attention à un point. Le point de vue des formes linéaires pour les racines peut conduire à quelques erreurs. Par exemple, si $\{\alpha;\beta\}$ est une paire prénilpotente de racines, $[\alpha;\beta]$ défini en (1.4.1) est éventuellement plus gros que l'ensemble des racines combinaisons linéaires à coefficients positifs de α et β (vues comme formes linéaires). Cette subtilité a déjà été remarquée (voir [Tit90], (I.1.3)).

DÉFINITION.— *Soit $\{\alpha;\beta\}$ une paire prénilpotente de racines, alors $[\alpha;\beta]_{\text{lin.}}$ désigne l'ensemble des racines combinaisons linéaires à coefficients positifs de α et β, vues comme formes linéaires.*

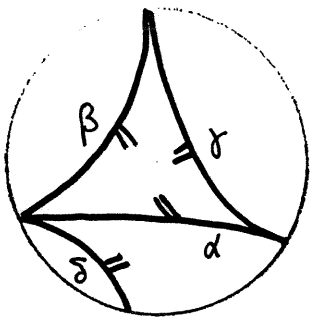
On définit aussi *mutatis mutandis* les ensembles $[\alpha;\beta[_{\text{lin.}}$, $]\alpha;\beta]_{\text{lin.}}$ et $]\alpha;\beta[_{\text{lin.}}$.

On peut fournir un exemple de stricte inclusion de $[\alpha;\beta]_{\text{lin.}}$ dans $[\alpha;\beta]$ qui provient de la théorie de Kac-Moody, ce qui élimine tout espoir de voir la situation s'améliorer dans ce cadre plus particulier. Comme dans l'exemple de J. Tits précité, il est de nature hyperbolique. Considérons la matrice de Cartan généralisée $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Son groupe de Weyl associé (7.1.4) est le groupe de Coxeter de diagramme



On préfère la représentation du système de racines de W par le pavage d'un triangle idéal du plan hyperbolique $\mathbf{H}^2$ – *i.e.*, un triangle dont les sommets sont sur le bord $\partial\mathbf{H}^2 = \mathbf{S}^1$ – plutôt que par le cône de Tits. On introduit alors la base de racines $\{\alpha;\beta;\gamma\}$ définie par le dessin suivant.

Dessin.



Une quatrième racine δ est définie par $\delta := r_\alpha(\beta) = \beta + 2\alpha$. Alors, δ et $-\gamma$ définissent une paire prénilpotente de racines, et α est dans $[-\gamma;\delta]$ sans être combinaison linéaire de ces racines vues comme formes linéaires.

REMARQUE. — On peut quand même montrer que $[\alpha;\beta]_{\text{lin.}} = [\alpha;\beta]$ dès que $\partial\alpha \cap \partial\beta \cap \mathcal{C} \neq \varnothing$.

L'éventualité d'une inclusion stricte $[\alpha;\beta]_{\text{lin.}} \subsetneq [\alpha;\beta]$ suggère un renforcement de l'axiome (DRJ1) des données radicielles jumelées, qui consiste à substituer $]\alpha;\beta[_{\text{lin.}}$ à $]\alpha;\beta[$. Cet axiome plus fort sera utilisé pour les décompositions de Lévi en (6.2); il est, lui, systématiquement vérifié par les groupes de Kac-Moody.

5.4.3. Enclos et parties closes

Pour ce qui est des analogies entre la combinatoire et la géométrie, on peut réserver un sort particulier à la notion de convexité. On reprend ici point par point l'introduction des notions de *parties closes* et d'*enclos* faite dans [Bru-Tit72], p.40-41. On commence par donner des définitions concernant des sous-ensembles rencontrant une chambre, ce qui permet de se placer aussi bien dans un appartement que dans un immeuble épais. Dans le cas d'ensembles ne rencontrant pas de chambre, il faudra travailler sur des parties contenues dans un appartement. Dans tous les cas, il faut raisonner dans un immeuble simple, autrement dit dans la réalisation conique d'un immeuble de signe fixé du jumelage considéré.

DÉFINITION. — (i) *Soit Ω une partie de $|\mathcal{I}_\epsilon|_{\text{co}}$ rencontrant au moins une chambre. On dit que Ω est* close *si, quelle que soit $(C_0, C_1, \ldots C_m)$ une galerie tendue d'une chambre C_0 rencontrant Ω à une facette F renontrant Ω, on a $\overline{C}_k \subset \Omega$ pour $0 \leq k \leq m$.*
(ii) *L'*enclos *d'une partie Ω rencontrant une chambre est la plus petite partie close de $|\mathcal{I}_\epsilon|_{\text{co}}$ contenant Ω. On le note* $\text{cl}(\Omega)$.

Les mêmes définitions s'appliquent aux parties de $|\mathbf{A}_\epsilon|_{\text{co}}$rencontrant une chambre. Une partie close rencontrant une chambre est la réunion des adhérences des chambres qui la rencontrent, et l'ensemble de ces chambres est connexe (2.1.3). La seconde définition est donc justifiée par le fait qu'une intersection de parties closes contenant une même chambre est encore close.

LEMME. — (i) *Les adhérences des racines et des résidus sont closes.*
(ii) *L'enclos de deux chambres opposées (i.e., à distance maximale) dans un résidu sphérique est l'adhérence de ce résidu.*

Justification. (i) est conséquence de la première remarque et du théorème de convexité combinatoire (2.2.5). (ii) provient du fait qu'un résidu d'un complexe de Coxeter est un complexe de Coxeter pour son stabilisateur, et que dans un complexe de Coxeter fini, toute chambre est dans une galerie minimale reliant deux chambres opposées fixées à l'avance. □

Le résultat suivant va permettre de travailler sur des parties dont on suppose qu'elles sont contenues dans un appartement (de signe fixé), mais qui ne rencontrent plus nécessairement de chambre.

PROPOSITION. — (i) *Soient C et C' deux chambres de $|\mathbf{A}_\epsilon|_{\mathrm{co}}$. L'enclos de $\Omega = C \cup C'$ est égal à l'intersection des adhérences des racines qui contiennent $C \cup C'$.*
(ii) *L'enclos d'une partie Ω de $|\mathbf{A}_\epsilon|_{\mathrm{co}}$ rencontrant une chambre de $|\mathbf{A}_\epsilon|_{\mathrm{co}}$ est égal à l'intersection des adhérences des racines qui la contiennent.*

Démonstration. Puisque les racines sont closes, on a évidemment

$$\bigcap_{\alpha \supset \Omega} \overline{\alpha} \supset \mathrm{cl}(\Omega),$$

dans les deux cas. Il reste à prouver les inclusions réciproques. Nous noterons $\underline{\Omega}$ l'ensemble des chambres qui contiennent un point de Ω.

Preuve de (i). On se donne une chambre C'' dans $\bigcap_{\alpha \supset C \cup C'} \alpha$. On peut écrire $C' = wC$, $C'' = w'C$ et $C' = w''C''$ pour w, w' et w'' uniques dans W. Ceci implique déjà que $w = w''w'$ et donc que $\ell(w) \leq \ell(w') + \ell(w'')$. Soit enfin β une racine. Si β contient C et pas C'', alors elle ne peut contenir C' par hypothèse sur C''. Pour la même raison, si β contient C' et pas C'', elle ne peut contenir C. Ceci prouve

$$\{\beta \in \Phi \mid \beta \supset C, -\beta \supset C''\} \cup \{\beta \in \Phi \mid \beta \supset C'', -\beta \supset C'\} = \{\beta \in \Phi \mid \beta \supset C, -\beta \supset C'\}.$$

De plus, une racine β ne peut contenir simultanément C et C' sans contenir C'', donc

$\{\beta \in \Phi \mid \beta \supset C, -\beta \supset C''\} \cap \{\beta \in \Phi \mid \beta \supset C'', -\beta \supset C'\} = \varnothing$. D'où:

$$\{\beta \in \Phi \mid \beta \supset C, -\beta \supset C''\} \sqcup \{\beta \in \Phi \mid \beta \supset C'', -\beta \supset C'\} = \{\beta \in \Phi \mid \beta \supset C, -\beta \supset C'\}.$$

Or, dans les complexes de Coxeter, on a

$$\ell(w) = \#\{\beta \in \Phi \mid \beta \supset C, -\beta \supset C'\}, \quad \ell(w') = \#\{\beta \in \Phi \mid \beta \supset C, -\beta \supset C''\},$$
$$\text{et} \quad \ell(w'') = \#\{\beta \in \Phi \mid \beta \supset C'', -\beta \supset C'\}.$$

Par conséquent les longueurs s'ajoutent, $\ell(w) = \ell(w') + \ell(w'')$, et on peut concaténer une galerie minimale de C à C'' et une galerie minimale de C'' à C' pour obtenir une galerie minimale de C à C'' passant par C''. Donc C'' est bien dans l'enclos de la réunion des deux chambres C et C'.

Preuve de (ii). Si x et y sont deux point de Ω, $\mathrm{cl}(\Omega)$ contient l'enclos d'une paire de chambres fermées dont l'une contient x et l'autre y. Par le raisonnement précédent, on sait déjà que ce type d'enclos est convexe. Donc, un enclos en général est convexe, et puisque c'est une réunion de chambres, c'est un cône convexe dont les faces sont portées par des racines. Par conséquent, c'est une intersection de racines, d'où l'inclusion réciproque. □

On peut élargir un peu l'application de la notion de partie close pourvu qu'on reste dans un appartement.

DÉFINITION. — (i) *L'*enclos *d'une partie Ω de $|\mathbf{A}_\epsilon|_{\mathrm{co}}$ est l'intersection des adhérences des racines qui contiennent Ω. On le note* $\mathrm{cl}(\Omega)$.
(ii) *Une telle partie Ω est dite* close *si elle est égale à son enclos.*

Il apparaît maintenant qu'une partie de $|\mathbf{A}_\epsilon|_{\mathrm{co}}$ est close si et seulement si elle est convexe et réunion d'adhérences de facettes. C'est en ce sens qu'on peut parler de discrétisation de la convexité.

5.4.4. Parties équilibrées. Parties de racines associées

L'intérêt des parties que nous allons définir est qu'en passant au fixateur dans un jumelage de groupe de Kac-Moody, on définit des groupes algébriques (10.3).

DÉFINITION. — *Une* partie équilibrée *de $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$ est une partie contenue dans un appartement jumelé, rencontrant les deux cônes de Tits opposés, et recouverte par un nombre fini de facettes sphériques.*

On associe à ce type de partie des ensembles de racines.

DÉFINITION. — *Soit Ω une partie équilibrée dans un appartement jumelé $\mathbf{A}$, qui détermine un système de racines. Alors, on définit les ensembles de racines suivants.*

(i) $\Phi^u(\Omega) := \{\alpha \in \Phi \mid \alpha \text{ est positive non identiquement nulle sur } \Omega\}$.
(ii) $\Phi^m(\Omega) := \{\alpha \in \Phi \mid \alpha \text{ est identiquement nulle sur } \Omega\}$.
(iii) $\Phi(\Omega) := \{\alpha \in \Phi \mid \alpha \text{ est positive sur } \Omega\}$.
(iv) *Si D est une chambre, on pose* $\Phi^m(\Omega)_D := \{\alpha \in \Phi^m(\Omega) \mid \alpha \supset D\}$.

De manière générale, l'indice $_D$ sera remplacé par $_+$ si D est la chambre standard. Compte tenu de l'identification entre formes linéaires et traces sur $\mathcal{C}$ de demi-espaces, on a aussi des définitions géométriques de ces ensembles.

$$\Phi^u(\Omega) = \{\alpha \in \Phi \mid \overline{\alpha} \supset \Omega \quad \partial\alpha \not\supset \Omega\},$$

$$\Phi^m(\Omega) = \{\alpha \in \Phi \mid \partial\alpha \supset \Omega\},$$

$$\text{et} \quad \Phi(\Omega) = \{\alpha \in \Phi \mid \overline{\alpha} \supset \Omega\} = \Phi^u(\Omega) \sqcup \Phi^m(\Omega).$$

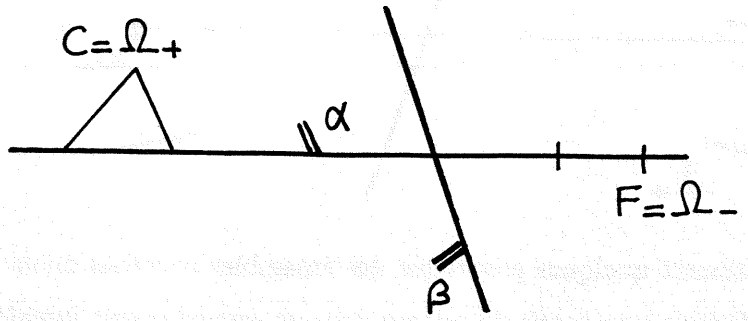
Remarquons que les racines étant des réunions de facettes, on peut remplacer une partie équilibrée par la réunion des facettes qui l'intersectent quand il s'agit de travailler sur les parties de racines associées.

Enfin, plutôt que de travailler dans un appartement jumelé, c'est-à-dire dans la réunion de deux cônes de Tits opposés, on préfère se ramener au seul cône positif. Ainsi, au lieu de parler de racine qui contient simultanément deux facettes de signes opposés, on parlera de racine séparant deux facettes positives. *α sépare au sens large* une partie Ω' de $\overline{\mathcal{C}}$ d'une autre Ω'', si $\overline{\alpha}$ contient Ω' alors que $-\overline{\alpha}$ contient Ω''. *α sépare* Ω' de Ω'' si elle sépare au sens large cette partie de l'autre et si une (seule) des deux parties a éventuellement des points dans le mur $\partial\alpha$.

DÉFINITION. — *Soit $\Omega \subset \mathbf{A}$ une partie équilibrée. On note Ω_+ (respectivement Ω_-) l'ensemble des points de Ω dans le cône de Tits positif (respectivement des opposés des points de Ω dans le cône négatif).*

$\Phi^u(\Omega)$ est l'ensemble des racines qui séparent Ω_+ de Ω_-; $\Phi(\Omega)$ est formé de celles qui les séparent au sens large.

Dessin. $[C = \Omega_+,\ F = \Omega_-,\ \alpha \in \Phi^m(\Omega),\ \beta \in \Phi^u(\Omega)]$



5.4.5. Propriétés des racines associées à une partie équilibrée

Nous rassemblons ici quelques résultats utiles pour la preuve de la décomposition de Lévi des fixateurs de parties équilibrées dans un jumelage de groupe. Commençons par une construction et un lemme géométriques.

CONSTRUCTION. — *Soit Ω une partie équilibrée dans un appartement jumelé* **A**, *qui est réunion de facettes (nécessairement sphériques et en nombre fini). Pour chaque facette de Ω_+ (respectivement Ω_-), on choisit un point et on appelle x_+ (respectivement x_-) l'isobarycentre du système ainsi obtenu. On note F_+ (respectivement F_-) la facette ouverte contenant x_+ (respectivement x_-). C_+ (respectivement C_-) désigne la fin (respectivement le début) d'une galerie tendue de F_- à F_+. D_+ est l'opposée de C_+ dans le résidu de F_+, D_- est l'opposée de C_- dans F_-.*

Justification. x_+ et x_- sont des points intérieurs de $\overline{C}$ car C est convexe, par conséquent F_+ et F_- sont sphériques et on a bien une notion d'opposition dans leurs résidus. □

LEMME. — *Dans la situation de la construction, pour toute racine α de $\Phi^u(\Omega)$, α contient D_+ et $-\alpha$ contient D_-. En outre, la droite (x_-x_+) est transverse au mur $\partial\alpha$.*

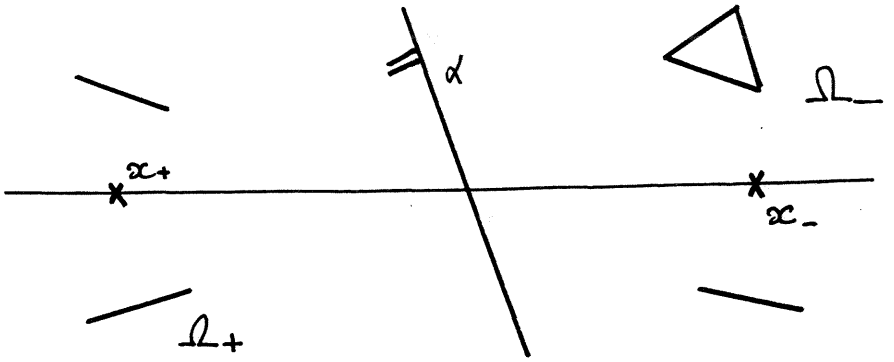
Démonstration. On se donne α une racine de $\Phi^u(\Omega)$. Par définition de $\Phi^u(\Omega)$, $\alpha \sqcup \partial\alpha$ contient chacune des facettes de Ω_+, et par convexité le point x_+. $\alpha \sqcup \partial\alpha$ étant une réunion de facettes, cette partie contient F_+ tout entière. Symétriquement, on voit que $-\alpha \sqcup \partial\alpha$ contient la facette F_-. On peut alors distinguer deux cas.

Ou bien x_+ est dans α, alors α, réunion de facettes, contient F_+ et tout son résidu, notamment D_+.

Ou bien x_+ est dans $\partial\alpha$. Alors, puisque chacune des facettes de Ω_+ est dans $\alpha \sqcup \partial\alpha$, nécessairement Ω_+ tout entier est dans $\partial\alpha$. Dans ce cas, par définition de $\Phi^u(\Omega)$, $-\alpha$ contient une facette de Ω_-, donc x_- et finalement le résidu de F_-. D'où $-\alpha \supset D_-$. Or, C_+ est la projection sur F_+ de la chambre C_-, donc il existe une galerie minimale de C_- à D_+ passant par C_+. Si $-\alpha$ contenait D_+, comme elle est close, elle contiendrait aussi C_+, donc l'enclos de C_+ et D_+ qui contient F_+: impossible. Finalement, on a aussi $\alpha \supset D_+$.
En faisant le même raisonnement pour le résidu de F_- et en opposant les signes des racines et des indices, on prouve que $-\alpha$ contient D_-.

On a vu que si $\partial\alpha$ contient x_ϵ, alors il contient Ω_ϵ. Puisque α ne peut contenir tout Ω, la droite (x_-x_+) doit être transverse au mur $\partial\alpha$. □

Dessin.



On peut détailler maintenant quelques propriétés des ensembles précédemment définis.

PROPOSITION. — *Ω désigne une partie équilibrée dans un appartement jumelé* **A**.

(i) *Soient α dans $\Phi^u(\Omega)$, β dans $\Phi(\Omega)$ et γ dans $[\alpha;\beta]$. Alors, γ est dans $\Phi^u(\Omega)$ ou vaut β.*
(ii) *$\Phi^u(\Omega)$ est un ensemble nilpotent de racines.*
(iii) *$\Phi^m(\Omega)$ est en bijection avec un système de racines de groupe de Coxeter fini. Plus précisément, il existe des facettes sphériques F pour lesquelles $\Phi^m(\Omega) = \Phi(F)$.*
(iv) *Pour toute racine α de $\Phi^u(\Omega)$ et toute racine β de $\Phi^m(\Omega)$, la paire $\{\alpha;\beta\}$ est prénilpotente, et la partie $]\alpha;\beta[$ est dans $\Phi^u(\Omega)$.*
(v) *$\Phi(\Omega)$ est un ensemble fini de racines.*
(vi) *Pour toute chambre C, la partie $\Phi^m(\Omega)_C$ est convexe. C'est un système positif du système de racines $\Phi^m(\Omega)$ de groupe de Coxeter fini.*

Démonstration. Puisque racines et murs sont réunions de facettes, ils contiennent nécessairement les facettes qu'ils intersectent. On peut donc remplacer Ω par la réunion des facettes que Ω intersecte, ce qui nous place dans la situation de la construction.

Preuve de (i). Déjà, $\overline{\alpha} \supset \Omega$ et $\overline{\beta} \supset \Omega$ impliquent $\overline{\gamma} \supset \overline{\alpha} \cap \overline{\beta} \supset \Omega$, soit $\gamma \in \Phi(\Omega)$. On se donne maintenant une facette F de Ω dans $\alpha \setminus \partial\alpha$, ce qui est possible car α est dans $\Phi^u(\Omega)$. α contient alors tout le résidu sphérique de F dans **A**. On a en outre $\overline{\beta} \supset \Omega$, donc β contient au moins la moitié de ce même résidu. Puisque γ contient $\alpha \cap \beta$, elle la contient elle aussi. Si elle ne contient pas de chambre supplémentaire dans $R(F) \cap \mathbf{A}$, on a $\gamma = \beta$; sinon F n'est pas dans le mur de γ, tout le résidu de F dans **A** est dans γ par convexité (2.2.5), et γ est dans $\Phi^u(\Omega)$.

Preuve de (ii). Le lemme précédent montre que les racines de $\Phi^u(\Omega)$ contiennent toutes la chambre D_+. Symétriquement, les opposées des racines de $\Phi^u(\Omega)$ contiennent toutes D_-. D'où la prénilpotence de $\Phi^u(\Omega)$. $\Phi^u(\Omega)$ est clos par le point qui précède.

Preuve de (iii). Par définition d'une partie équilibrée, $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(\Omega)$ est un sous-espace générique. En appliquant le lemme (5.3.3) à une boule de $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(\Omega) \cap C$, on obtient bien une facette sphérique relativement ouverte dans $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(\Omega)$. Si une racine contient F en son mur, elle contient l'espace vectoriel engendré donc $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(\Omega)$. Réciproquement, un mur contenant Ω et donc $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(\Omega)$, intersecte la facette F et donc la contient. On conclut grâce au lemme (5.1.5).

Preuve de (iv). β est dans $\Phi^m(\Omega)$, ainsi $\partial\beta$ contient x_+ et x_-, donc les facettes ouvertes F_+ et F_-. Ainsi, β contient la moitié des chambres de chacun des deux résidus correspondants. α contient D_+ donc au moins la moitié du résidu de F_+ dans **A**, qui ne peut être la moitié complémentaire de la trace de β sur ce résidu, car $\alpha \neq \pm\beta$. On fait le même raisonnement

autour de la facette F_-, en opposant les signes des racines. Finalement, α et β ont une chambre commune dans le résidu de F_+, $-\alpha$ et $-\beta$ ont une chambre commune dans celui de F_-, et la paire $\{\alpha;\beta\}$ est prénilpotente. Le second point découle de (i).

Preuve de (v). C'est une conséquence immédiate de (ii) et (iii).

Preuve de (vi). On se donne une facette F comme dans (iii). On projette la chambre C sur F, et on note D l'opposée dans le résidu de F de la projection. Alors, si α est une racine de $\Phi^m(\Omega)$ qui contient C, elle contient aussi $\mathrm{proj}_F C$ puisqu'elle est close et qu'il existe une galerie tendue de C à $\mathrm{proj}_F C$. Elle ne peut contenir en même temps D, car elle contiendrait l'enveloppe convexe de $\mathrm{proj}_F C$ et D, et donc F. Or, F est dans $\partial\alpha$ par définition de $\Phi^m(\Omega)$. Inversement, toute racine α qui contient $\mathrm{proj}_F C$ et non D est dans $\Phi(F) = \Phi^m(\Omega)$, puisqu'une galerie tendue entre D et $\mathrm{proj}_F C$ reste dans le résidu de F, et contient C puisqu'on peut prolonger une telle galerie en une galerie tendue de D à C. Ainsi, $\Phi^m(\Omega)_C$ est convexe, et c'est la partie positive de $\Phi(F) = \Phi^m(\Omega)$ définie par la chambre opposée à D. □

5.5. Objets immobiliers relatifs à un sous-espace générique

Nous allons maintenant définir des objets relatifs à la donnée d'un sous-espace générique (de la réalisation conique) d'un jumelage. On transpose tout le lexique immobilier à cette situation, sans pour autant que cela signifie qu'une facette relative soit la facette d'un immeuble *a priori*. On se donne donc $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$ la réalisation conique d'un jumelage. Dans tout ce qui suit, on désigne par $\mathbf{A}^\natural$ un sous-espace générique de $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$ contenu dans un appartement jumelé $\mathbf{A}$.

5.5.1. Facettes, racines, murs relatifs

L'intérêt de ce vocabulaire apparaît par exemple pour les groupes de Kac-Moody, dans le cadre de la descente galoisienne de leurs formes presque déployées (chapitre 12). Dans cette section, les racines de Φ sont vues indifféremment comme des formes linéaires ou comme des sous-ensembles d'appartements.

DÉFINITION. — *Soit $\mathbf{A}^\natural$ un sous-espace générique de la réalisation conique $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$, contenu dans un appartement jumelé $\mathbf{A}$. On voit $\mathbf{A}$ comme double cône dans V^*.*

(o) *$L^\natural$ désigne le sous-espace vectoriel de V^* engendré par $\mathbf{A}^\natural$.*
(i) *Une* racine relative *de $\mathbf{A}^\natural$ est la restriction à $L^\natural$ d'une racine de Φ. Si α est la racine dont on prend la restriction, on notera $\alpha^\natural$ la racine relative obtenue.*
(ii) *Un* demi-appartement relatif *de $\mathbf{A}^\natural$ est la trace sur $\mathbf{A}^\natural$, supposée non vide, du demi-espace positif d'une racine de $\mathbf{A}$. Si α est la racine (vue comme demi-espace) dont on prend la trace, on notera $D(\alpha^\natural)$ le demi-appartement relatif obtenu.*
(iii) *Un* mur relatif *de $\mathbf{A}^\natural$ est la trace, supposée distincte de $\mathbf{A}^\natural$, d'un mur de $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{A}^\natural$. Si $\partial\alpha$ est le mur dont on prend la trace, on notera $\partial\alpha^\natural$ le mur relatif obtenu.*
(iv) *Si α est une racine de Φ, on dira que $D(\alpha^\natural)$ et $\partial\alpha^\natural$ sont les demi-appartement relatif et mur relatif* associés *à la racine relative $\alpha^\natural$.*
(v) *Une* facette relative *de $\mathbf{A}^\natural$ est la trace, supposée non vide, d'une facette de $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{A}^\natural$. On parle de* facette relative sphérique *si elle est obtenue à partir d'une facette sphérique.*

On distingue parmi ces objets relatifs, les objets réels des imaginaires, en référence à la situation classique. Les objets réels sont ceux qui interviennent dans la combinatoire des groupes de points rationnels des **K**-formes presque déployées des groupes de Kac-Moody par exemple.

DÉFINITION. — (i) *Une racine relative de* $\mathbf{A}^\natural$ *est dite* réelle *si son mur contient une facette relative sphérique.* $\Delta^\natural$ *désigne l'ensemble des racines relatives réelles de* $\mathbf{A}^\natural$.
(ii) *Un demi-appartement relatif de* $\mathbf{A}^\natural$ *est dit* réel *si son mur contient une facette relative sphérique.* $\Phi^\natural$ *désigne l'ensemble des demi-appartements relatifs réels de* $\mathbf{A}^\natural$.
(iii) *Une facette relative de* $\mathbf{A}^\natural$ *est dite* réelle *si son extension vectorielle est intersection de murs relatifs réels.*

REMARQUES. — 1. Dire qu'un mur contient une facette relative sphérique revient à dire qu'il rencontre l'intérieur du cône de Tits.

2. Il est clair qu'une facette relative sphérique est réelle.

3. L'application $\Delta^\natural \to \Phi^\natural$, $\alpha^\natural \mapsto D(\alpha^\natural)$ est bien définie et surjective; elle peut ne pas être injective (si $\Delta^\natural$ n'est pas réduit).

L'existence d'une facette sphérique F de trace $F^\natural$ relativement ouverte dans $\mathbf{A}^\natural$ – lemme (5.3.3)(ii) – justifie la définition qui suit.

DÉFINITION. — (i) *Une* chambre relative *de* $\mathbf{A}^\natural$ *est une facette relative dont l'extension vectorielle dans* $\mathbf{A}$ *est égale à* $\mathbf{A}^\natural$.
(ii) *Une* cloison relative *de* $\mathbf{A}^\natural$ *est une facette relative dont l'extension vectorielle dans* $\mathbf{A}$ *est de codimension un dans* $\mathbf{A}^\natural$.

REMARQUE. — Une chambre relative est sphérique – lemme (5.3.3)(iii) – et donc réelle, mais une cloison n'est pas nécessairement réelle.

Ces dernières notions permettent de définir les *demi-appartements relatifs simples* pour un choix de chambre relative de référence.

DÉFINITION. — *Pour un choix de chambre relative* $F^\natural$ *dans* $\mathbf{A}^\natural$, *on note* $\Pi^\natural$ *l'ensemble des demi-appartements relatifs réels dont le mur relatif contient une cloison relative dans l'adhérence de* $F^\natural$. *On parle de* demi-appartements relatifs simples *de* $\mathbf{A}^\natural$ *(pour le choix de* $F^\natural$ *comme chambre relative standard). Les racines relatives correspondantes sont appelées* racines relatives simples.

5.5.2. Enveloppes convexes de parties équilibrées

Un sous-espace générique est la réunion en général infinie de facettes relatives. La prise d'enveloppe convexe permet de se ramener à une partie équilibrée pour définir géométriquement les racines relatives, les murs relatifs et même l'espace générique tout entier.

LEMME. — *Soit* $D(\alpha^\natural)$ *un demi-appartement relatif d'un sous-espace générique* $\mathbf{A}^\natural$ *(contenu dans l'appartement jumelé* $\mathbf{A}$*). On suppose* $\alpha^\natural$ *réelle, alors:*

(i) *Il existe une chambre relative* $F^\natural$ *de* $\mathbf{A}^\natural$, *incluse dans* $D(\alpha^\natural)$ *et contenant dans son adhérence une cloison relative sphérique* $E^\natural$ *incluse dans le mur relatif* $\partial\alpha^\natural$.
(ii) *Pour un tel choix de chambre et de cloison relatives de* $\mathbf{A}^\natural$, *le mur relatif* $\partial\alpha^\natural$ *est l'enveloppe convexe dans* $\mathbf{A}$ *de* $E^\natural$ *et* $-E^\natural$, *l'adhérence du demi-appartement relatif* $\overline{D(\alpha^\natural)}$ *est l'enveloppe convexe fermée dans* $\mathbf{A}$ *de* $F^\natural$ *et* $-E^\natural$.

$$\overline{\mathrm{conv}}_{\mathbf{A}}(F^\natural \cup -E^\natural) = \overline{D(\alpha^\natural)} \quad \text{et} \quad \mathrm{conv}_{\mathbf{A}}(E^\natural \cup -E^\natural) = \partial\alpha^\natural.$$

REMARQUES. — 1. Le même argument que celui qu'on va développer pour prouver ce lemme montre que $\mathbf{A}^\natural$ est l'enveloppe convexe de la réunion d'une de ses chambres relatives et de son opposée.

2. Ainsi, à prise d'adhérence près, murs et racines relatifs réels sont des enveloppes convexes de parties équilibrées.

Donnons tout de suite un peu de vocabulaire avant de passer à la preuve.

DÉFINITION. — *On dira d'une chambre relative $F^\natural$ et d'une cloison relative réelle $E^\natural$ vérifiant*

$$\overline{\mathrm{conv}}_{\mathbf{A}}(F^\natural \cup -E^\natural) = \overline{D(\alpha^\natural)} \quad \text{et} \quad \mathrm{conv}_{\mathbf{A}}(E^\natural \cup -E^\natural) = \partial\alpha^\natural,$$

qu'elles définissent (dans $\mathbf{A}$) *le demi-appartement relatif réel $D(\alpha^\natural)$.*

Démonstration. Preuve de (i). Par le lemme (5.3.3), en choisissant une boule de $\partial\alpha^\natural$, on peut trouver une facette E, nécessairement sphérique, telle que $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(E^\natural) = \partial\alpha^\natural$. On prend ensuite une boule $B^\natural$ de $\mathbf{A}^\natural$ centrée en un point de $E^\natural$, suffisamment petite pour être contenue dans le résidu de E. À nouveau par le lemme (5.3.3), il existe une facette F de trace ouverte dans $D(\alpha^\natural) \cap B^\natural$. F contient E dans son adhérence puisque $B^\natural$ est dans le résidu de F.

Preuve de (ii). Il est clair que dans un espace vectoriel, l'enveloppe convexe de la réunion d'un cône générateur et de son opposé, est l'espace tout entier. Ceci justifie le premier point concernant le mur relatif. Ainsi, $\mathrm{conv}_{\mathbf{A}}(\overline{F}^\natural \cup -E^\natural)$ contient déjà $\partial\alpha^\natural$ et un vecteur v qui pointe vers $D(\alpha^\natural)$ et complète une base de $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(\partial\alpha^\natural)$ en une base de $\mathbf{A}^\natural$. Par conséquent, $\overline{\mathrm{conv}}_{\mathbf{A}}(F^\natural \cup -E^\natural) = \overline{\mathrm{conv}}_{\mathbf{A}}(\partial\alpha^\natural \cup \mathbf{R}_+^\times v) = \overline{D(\alpha^\natural)}$. □

5.5.3. Partie de racines associée à une racine relative réelle

À une racine relative, peut être associée une partie de racines (au sens initial) de $\mathbf{A}$.

DÉFINITION. — *Soit $\alpha^\natural$ une racine relative quelconque du sous-espace générique $\mathbf{A}^\natural$ de l'appartement jumelé $\mathbf{A}$. Alors $\Phi_{\alpha^\natural}$ désigne l'ensemble des racines de $\mathbf{A}$ dont la trace sur $\mathbf{A}^\natural$ vaut $D(\alpha^\natural)$.*

$$\Phi_{\alpha^\natural} := \{\beta \in \Phi \mid D(\beta) \cap \mathbf{A}^\natural = D(\alpha^\natural)\}.$$

Dans la situation d'un jumelage de groupe, on va pouvoir associer à une racine relative réelle, un groupe radiciel relatif, en vertu du résultat suivant.

LEMME. — *Si $\alpha^\natural$ est une racine relative réelle, la partie de racines $\Phi_{\alpha^\natural}$ est nilpotente.*

Démonstration. On se donne une chambre et une cloison relatives qui définissent $D(\alpha^\natural)$: $\overline{F}^\natural \supset E^\natural$. Soit β une racine de $\Phi_{\alpha^\natural}$. Déjà, $\partial\beta^\natural$ contient $E^\natural$. Puisqu'un mur est une réunion de facettes, $\partial\beta$ contient E puisqu'il l'intersecte. Pour la même raison, l'inclusion $F^\natural \subset \beta^\natural$ implique que β contient la facette F et donc tout son résidu. Soit D une chambre de ce résidu. On vient de montrer que β était dans $\Phi^m(E^\natural \cup -E^\natural)_D$ qui est une partie nilpotente. Donc $\Phi_{\alpha^\natural}$ est une partie prénilpotente. Enfin, on peut voir aussi $\Phi_{\alpha^\natural}$ comme l'ensemble des racines nulles sur $\partial\alpha^\natural$ et positives sur $D(\alpha^\natural)$. C'est un ensemble clos. □

6. Décompositions de Lévi dans les données radicielles jumelées

On se place maintenant dans la situation où les immeubles considérés proviennent de groupes. En fait, on va très vite considérer le cas d'une donnée radicielle jumelée. Il s'agit de mettre en évidence des décompositions de Lévi, au sens combinatoire du terme. On peut le faire pour deux classes de sous-groupes. D'une part, les sous-groupes paraboliques possèdent une décomposition de Lévi. Cela provient de la généralisation d'un raisonnement de V. Kac et D. Peterson pour les groupes de Kac-Moody complexes, une fois qu'on a fait une remarque simple sur la combinatoire des systèmes de racines des groupes de Coxeter. Il faut néanmoins requérir un axiome légèrement plus fort que l'axiome du commutateur des données radicielles jumelées, si on veut dévisser les sous-groupes paraboliques non sphériques (6.2). D'autre part, beaucoup de groupes fixant des points dans les immeubles de chaque signe se décomposent également (ce qui au passage permettra de les voir comme des groupes algébriques dans le cas Kac-Moody). La démonstration de la décomposition de Lévi dans ce cas est plus géométrique que dans le précédent. Dans tous les cas, les interprétations géométriques sont intéressantes.

6.1. Immeubles de groupes

On va compléter la description des réalisations coniques de jumelages dans le cas où ceux-ci proviennent d'un groupe c'est-à-dire d'une BN-paire jumelée, voire d'une donnée radicielle jumelée. On se donne donc pour l'instant une BN-paire jumelée (G, B_+, B_-, N, S) à laquelle est associé le jumelage $\mathcal{J} = \big((\mathcal{I}_+, d_+), (\mathcal{I}_-, d_-), d^*\big)$. La réalisation géométrique de $\mathcal{J}$ systématiquement utilisée dans ce chapitre sera la réalisation conique $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$.

6.1.1. Action du groupe

On a ensemblistement $\mathcal{I}_+ = G/B_+$ et $\mathcal{I}_- = G/B_-$. Soient $C_+ = g_+B_+$ et $C_- = g_-B_-$ deux chambres opposées. Par définition de la codistance dans ce cas, on a $g_+^{-1}g_- = b_+b_-$, pour b_ϵ dans B_ϵ. Soit encore $g_+b_+ = g_-b_-^{-1}$. En notant g cette valeur commune, il vient $gB_+ = g_+B_+$ et $gB_- = g_-B_-$. Ce raisonnement purement combinatoire montre que les paires de chambres opposées sont toutes de la forme $\{gB_+; gB_-\}$ pour un même élément g de G. Comme c'est à partir de ces paires que sont définis les appartements jumelés, on voit que l'ensemble des appartements jumelés est $\{g\mathbf{A}\}_{g\in G}$ où $\mathbf{A}$ est l'appartement jumelé standard $\mathbf{A} = \{wB_+\}_{w\in W} \sqcup \{wB_-\}_{w\in W}$. Ainsi les appartements de la réalisation conique du jumelage se déduisent les uns des autres par l'action d'un élément de G.

Soit $\overline{C} \cup -\overline{C} \xrightarrow{\sim} g\mathbf{A}$ une identification vectorielle pour l'appartement $g\mathbf{A}$. Alors, pour tout élément h de G, l'application composée $\overline{C} \cup -\overline{C} \xrightarrow{\sim} g\mathbf{A} \xrightarrow{h} hg\mathbf{A}$ est à nouveau une identification vectorielle qui est unique à isomorphisme linéaire près, d'après le lemme (5.3.1). Cette remarque justifie les assertions telles que la transformée de l'extension vectorielle (respectivement l'enveloppe convexe) d'une partie d'un appartement jumelé est l'extension vectorielle (respectivement l'enveloppe convexe) de la transformée de la partie (dans l'appartement jumelé transformé). On résume cela en disant que l'action de g est *vectorielle* (respectivement *respecte*

les barycentres). On peut aussi utiliser ce qui a déjà été fait à la section (4.2) et qui concerne les calculs de stabilisateurs ou fixateurs de points ou de facettes. Dans la réalisation conique, toutes les facettes combinatoires sont représentées. Par conséquent, tous les sous-groupes paraboliques apparaissent comme fixateur d'un point ou d'une facette de l'immeuble.

6.1.2. Action des sous-groupes paraboliques

On va justement s'intéresser à l'action d'un sous-groupe parabolique sur l'immeuble.

LEMME. — *Soit F une facette dans un jumelage $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$ provenant d'une BN-paire jumelée. Alors, $P(F)$ opère transitivement sur les appartements contenant F, et donc sur les extensions vectorielles de cette facette.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas d'une facette standard F_I. On se donne $\mathbf{A}' = g\mathbf{A}$ un appartement contenant F_I. Alors, $g^{-1}(F_I)$ est une facette de type I de l'appartement $\mathbf{A}$, elle peut être ramenée sur F_I par un élément de W: il existe n dans N tel que $ng^{-1}(F_I) = F_I$. D'où: ng^{-1} fixe F_I. On en déduit que g vaut pn avec p dans $P(F_I)$, et donc que $\mathbf{A}' = p\mathbf{A}$ est un transformé par $P(F_I)$ de $\mathbf{A}$. □

6.1.3. Définition géométrique de certains sous-groupes remarquables

Pour obtenir une famille plus riche de sous-groupes de G, nous supposons désormais que la BN-paire jumelée et le jumelage $\mathcal{J} = \big((\mathcal{I}_+, d_+), (\mathcal{I}_-, d_-), d^*\big)$ proviennent d'une donnée radicielle jumelée $\big(G, (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\big)$ pour G. Nous nous donnons une facette F de $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$ contenue dans un appartement jumelé $\mathbf{A}$. La donnée de cet appartement jumelé détermine un système de racines, et donc une famille de sous-groupes radiciels.

DÉFINITION. — *Soit F une facette dans un appartement jumelé $\mathbf{A}$ de $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$.*

(i) *$N(F)$ désigne le fixateur de la facette F dans N.*
(ii) *$M(F)$ désigne le fixateur de la facette F et de son opposée $-F$ dans $\mathbf{A}$.*
(iii) *Si $D = wC_\epsilon$ est une chambre de $\mathbf{A}$ de signe ϵ donné, $U(D)$ désigne $U(D) := n_w U_\epsilon n_w^{-1}$. Pour toute facette F, $U(F)$ est l'intersection des groupes $U(D)$ sur les chambres D de $\mathbf{A}$ qui contiennent F dans leur adhérence.*

Remarquons que ces notations sont ambigües dans la mesure où elles ne rendent pas compte du choix d'appartement jumelé fait pour donner ces définitions. En fait, ces dépendances seront fortement atténuées par la suite. On peut aussi donner d'autres définitions de ces sous-groupes.

LEMME. — (i) *$P(F)$ est engendré par H et les sous-groupes radiciels U_α pour les racines α contenant F dans leur adhérence.*
(ii) *$N(F)$ est le sous-groupe engendré par H et les éléments $m(u)$ pour u dans les sous-groupes radiciels indexés par les racines contenant F dans leur mur. Son quotient modulo H est le sous-groupe $W(F)$ de W engendré par les réflexions fixant F.*
(iii) *$M(F)$ est intersection de sous-groupes paraboliques opposés: $M(F) = P(F) \cap P(-F)$.*
(iv) *Si F est sphérique, le groupe $U(F)$ est intersection des deux sous-groupes $U(C')$ et $U(C'')$ pour C' et C'' deux chambres opposées dans le résidu de F.*

Démonstration. (iii) est évident puisque le fixateur d'une facette F' est précisément le sous-groupe parabolique $P(F')$. Le point (iv) a déjà été vu combinatoirement puisque dans une BN-paire raffinée, pour une partie sphérique I, le sous-groupe $U_+ \cap w_I U_+ w_I^{-1}$ est dans tous les sous-groupes $U_+ \cap wU_+w^{-1}$, avec w dans W_I et w_I élément de plus grande longueur dans W_I (voir (1.2.3) (iv) c).

Preuve de (i). En conjuguant par un élément de N, on se ramène à une facette standard F_I. On regarde la décomposition de Bruhat fine de $P(F_I)$.

$$P(F_I) = \bigsqcup_{w \in W_I} (U_+ \cap wU_-w^{-1}) wHU_+.$$

w est la classe modulo H d'un produit d'éléments $m(u)$ relevant les réflexions simples s de I. De tels $m(u)$ sont dans $U_{-\alpha_s} U_{\alpha_s} U_{-\alpha_s}$. Ainsi, compte tenu de (1.5.2) et (3.5.4), $P(F_I)$ est engendré par les U_α avec α positive et les $U_{\pm\alpha_s}$ avec s dans I. Les racines du second type contiennent F_I dans leur mur, celles du premier type contiennent la facette F_I dans leur adhérence puisqu'elles contiennent C. Ceci montre que $P(F_I)$ est dans le groupe engendré proposé. Réciproquement, $P(F_I)$ contient les U_{α_s} et les classes s pour s dans I. Par conséquent, il contient $U_{-\alpha_s} = sU_{\alpha_s}s^{-1}$ et plus généralement tous les $wU_{\alpha_s}w^{-1}$ avec w dans W_I, qui sont les groupes radiciels indexés par les racines contenant F_I dans leur mur. L'inclusion des autres groupes radiciels proposés est encore plus évidente puisque $P(F_I)$ contient U_+.

Preuve de (ii). N opère sur $\mathbf{A}$ via W son quotient modulo H, et H est le fixateur de $\mathbf{A}$. Ceci justifie la seconde assertion parce qu'on est ramené à des propriétés connues de l'action de W sur le cône de Tits. Pour chaque élément u non trivial de U_α, on sait que $m(u)$ relève modulo H la symétrie par rapport au mur $\partial\alpha$, et que le fixateur d'une facette F dans W est précisément le groupe engendré par les réflexions dont le mur contient F. □

6.1.4. Décomposition de l'action d'un sous-groupe «unipotent»

Nous finissons par un lemme qui décompose l'action de l'élément d'un groupe $U(F)$ pour une facette F d'un appartement jumelé $\mathbf{A}$. Il faut revenir tout d'abord à un peu de combinatoire des BN-paires raffinées, avec un lemme dû à Kac et Peterson. Pour cette raison, on conserve l'hypothèse selon laquelle le jumelage $\mathcal{J}$ provient d'une donnée radicielle jumelée $\big(G, (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\big)$.

LEMME. — *Soient w et w' des éléments de W. Alors, on a la décomposition suivante:*

$$U_+ \cap (ww')^{-1}U_+ww'$$
$$= (U_+ \cap (ww')^{-1}U_+ww' \cap w'^{-1}U_-w').(U_+ \cap (ww')^{-1}U_+ww' \cap w'^{-1}U_+w').$$

Démonstration. On a d'après (1.2.3):

$$(*) \quad U_+ = (U_+ \cap w'^{-1}U_-w').(U_+ \cap w'^{-1}U_+w'),$$

mais aussi:

$$w^{-1}U_+w = (w^{-1}U_+w \cap U_-).(w^{-1}U_+w \cap U_+).$$

En conjuguant par w'^{-1}, il vient:

$$(**) \quad (ww')^{-1}U_+ww' = \big((ww')^{-1}U_+ww' \cap w'^{-1}U_-w'\big).\big((ww')^{-1}U_+ww' \cap w'^{-1}U_+w'\big).$$

Soit u dans $U_+ \cap (ww')^{-1}U_+ww'$, alors $(*)$ et $(**)$ fournissent respectivement les décompositions: $u = v'v'' = u'u''$. On a alors $(v')^{-1}u' = v''(u'')^{-1}$. Or, $(w')^{-1}U_-w' \cap (w)'^{-1}U_+w' = (w')^{-1}(U_+ \cap U_-)w' = \{1\}$, donc on a $v' = u'$ et $v'' = u''$. □

Remarquons qu'aucune hypothèse de longueur n'est faite dans ce lemme. Un corollaire de ceci est le résultat suivant.

COROLLAIRE. — *Si F_I est une facette sphérique standard de $\mathcal{J}$ et si z est un élément de W, alors:*

$$U(F_I) = \big(U(F_I) \cap zU_+z^{-1}\big).\big(U(F_I) \cap zU_-z^{-1}\big).$$

Démonstration. On sait que $U(F_I) = U_+ \cap w_I^{-1}U_+w_I$, avec w_I élément de plus grande longueur de W_I. Donc il suffit de s'arranger pour avoir $ww' = w_I$ et $z = w'$, ce qui est réalisé avec $w = w_Iz^{-1}$ et $w' = z$. □

On paraphrase géométriquement ce corollaire avec ce qui suit.

SCHOLIE GÉOMÉTRIQUE. — *Soient F et F' deux facettes dans un appartement jumelé $\mathbf{A}$ d'un jumelage de groupe $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$, avec F sphérique. Alors, tout élément de $U(F)$ s'écrit $u = u'u''$, où u' et u'' sont tous deux dans $U(F)$ et u' fixe la facette F', alors que u'' fixe son opposée dans $\mathbf{A}$.*

Justification. Par conjugaison par un élément de N, on se ramène au cas où F est la facette standard sphérique F_I. Il suffit alors de choisir une chambre contenant F' dans son adhérence. On utilise le lemme en écrivant cette chambre sous la forme zC, pour z dans W. □

6.2. Décomposition de Lévi des sous-groupes paraboliques

La première classe de sous-groupes qui se distingue dans une BN-paire est bien entendu formée des sous-groupes paraboliques. Ces sous-groupes possèdent effectivement une décomposition de type Lévi dans le cadre des données radicielles jumelées, mais la preuve de ce fait n'est déjà pas une trivialité, au moins dans la mesure où la preuve de la décomposition des sous-groupes de Borel B_ϵ en produit semi-direct de H et U_ϵ met en œuvre la technique assez élaborée et abstraite des ensembles ordonnés. La démonstration des décompositions de Lévi dans les groupes de Kac-Moody a été faite par Kac et Peterson. Nous proposons ici une géométrisation et une généralisation au cas des données radicielles jumelées.

Nous nous donnons un groupe G muni d'une donnée radicielle jumelée $\big(G, (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\big)$ indexée par les racines d'un groupe de Coxeter W. Cette donnée s'accompagne immédiatement des objets habituels: B_+ et B_- les sous-groupes de Borel, H l'intersection des normalisateurs des sous-groupes radiciels, N le sous-groupe relevant le groupe de Weyl modulo H; mais aussi la réalisation conique $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$ du jumelage associé $\mathcal{J} = \big((\mathcal{I}_+, d_+), (\mathcal{I}_-, d_-), d^*\big)$.

Jusqu'à la fin du chapitre, nous allons faire un usage répété des résultats d'écriture unique de certains sous-groupes et de certaines parties des groupes à données radicielles jumelées, en les combinant à la décomposition de Birkhoff. Rappelons que nous avons les décompositions suivantes (avec écriture unique dans le membre de droite de chaque égalité).

$$B_\epsilon B_{-\epsilon} = U_\epsilon HU_{-\epsilon}, \qquad B_{-\epsilon}wB_\epsilon = (U_{-\epsilon} \cap wU_{-\epsilon}w^{-1})wHU_\epsilon,$$
$$B_\epsilon wB_\epsilon = (U_\epsilon \cap wU_{-\epsilon}w^{-1})wHU_\epsilon \quad \text{et} \quad U_\epsilon \cap wU_{-\epsilon}w^{-1} = \prod_{\alpha\in\epsilon\Phi_{w^{-1}}} U_\alpha,$$

pour tout signe ϵ, tout élément w de W et tout ordre cyclique sur la partie $\Phi_{w^{-1}} = \Phi_+ \cap w\Phi_-$. Les trois premières décompositions proviennent de (1.2.3) et (1.2.4), applicables à une donnée radicielle jumelée par (3.5.4) et (1.5.4). La dernière décomposition provient de (1.5.2)(iii) et (3.5.4).

Enfin, en nous référant à des parties de racines introduites en (5.4.2), nous ferons intervenir l'hypothèse de travail suivante, déjà évoquée alors.

(DRJ1)$_{\text{lin.}}$ Pour toute paire prénilpotente de racines $\{\alpha;\beta\}$, le groupe des commutateurs $[U_\alpha, U_\beta]$ est inclus dans le groupe $U_{]\alpha;\beta[_{\text{lin.}}}$ engendré par les racines de $]\alpha;\beta[_{\text{lin.}}$.

Cet axiome (DRJ1)$_{\text{lin.}}$ n'est rien d'autre qu'un renforcement de l'axiome (DRJ1) des données radicielles jumelées (1.5.1). Il est plus fort *a priori* en vertu de l'exemple hyperbolique de paire prénilpotente donné en (5.4.2).

6.2.1. Préliminaires combinatoires

Nous fixons une standardisation $(\mathbf{A}, C, -C)$ par rapport à laquelle toutes les racines et tous les signes seront définis. Nous allons prouver des résultats techniques concernant des groupes définis provisoirement, d'où la restriction aux seules facettes standard.

DÉFINITION. — *Soit F_J une facette standard de $\mathbf{A}$.*

(i) *$G(F_J)$ désigne le sous-groupe engendré par H et les sous-groupes radiciels indexés par $\Phi^m(F_J)$.*

$$G(F_J) = \langle H, (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi^m(F_J)}\rangle.$$

(ii) *$V(F_J)$ est le plus petit sous-groupe normal de U_+ contenant les sous-groupes radiciels U_α pour α dans $\Phi_+ \setminus \Phi^m(F_J)$.*
(iii) *On définit enfin $V_{J,+} := \langle U_\alpha \mid \alpha \in \Phi^m(F_J)_+\rangle$, et $U_{J,+} := M(F_J) \cap U_+$.*

Ces sous-groupes vont intervenir dans la décomposition de Lévi de $P(F_I)$ en s'identifiant aux sous-groupes remarquables définis géométriquement en (6.1.3). Pour l'instant, voici un énoncé préliminaire qui les distingue encore:

LEMME. — *Soient F_J une facette standard de l'appartement jumelé $\mathbf{A}$ de $|\mathcal{J}|_{\text{co}}$ et s dans J.*

(i) $U(F_J) \cap M(F_J) = \{1\}$.
(ii) *Pour toute racine α de $\Phi^m(F_J)_+ \setminus \{\alpha_s\}$ (respectivement $\Phi_+ \setminus \Phi^m(F_J)$), les intervalles $[\alpha;\alpha_s[_{\text{lin.}}$ et $[\alpha;-\alpha_s[_{\text{lin.}}$ sont dans $\Phi^m(F_J)_+ \setminus \{\alpha_s\}$ (respectivement $\Phi_+ \setminus \Phi^m(F_J)$).*
(iii) *Si F_J est sphérique, les mêmes assertions restent exactes en omettant les indices $_{\text{lin.}}$ dans les intervalles.*
(iv) *Si F_J est une facette sphérique ou si la donnée radicielle jumelée vérifie l'axiome* (DRJ1)$_{\text{lin.}}$, *alors $G(F_J)$ normalise $V(F_J)$.*

Les démonstrations proposées sont encore combinatoires et sont dues à Kac et Peterson modulo la généralisation au cas des données radicielles jumelées. Cette généralisation s'appuie sur le fait que si on se donne deux racines α, β distinctes et non opposées, sur les quatre paires $\{\pm\alpha;\pm\beta\}$, deux au moins sont prénilpotentes, d'après le lemme (5.4.2). Passons maintenant à la preuve du lemme.

Démonstration. Preuve de (i). D'après l'inclusion $M(F_J) \subset P(-F_J)$, il suffit de montrer que $P(-F_J) \cap U(F_J) = \{1\}$. On sait que l'intérêt de la structure de BN-paire raffinée est qu'elle se transmet aux sous-groupes paraboliques. Le sextuplet $\big(P(-F_J), N(F_J), U_-, P(-F_J) \cap U_+, T, J\big)$ possède donc une telle structure. Or dans ce cas, l'intersection des conjugués du second sous-groupe unipotent maximal par les éléments du groupe de Weyl est triviale, par (1.2.3) (v). Ceci s'écrit:

$$\bigcap_{w \in W_J} w\big(P(-F_J) \cap U_+\big)w^{-1} = \{1\},$$

soit $P(-F_J) \cap \bigcap_{w \in W_J} n_w U_+ n_w^{-1} = P(-F_J) \cap U(F_J) = \{1\}$.

Preuve de (ii). Remarquons d'abord que les deux ensembles $\Phi^m(F_J)_+ \setminus \{\alpha_s\}$ et $\Phi_+ \setminus \Phi^m(F_J)$ sont stables sous s, tandis que $s\alpha_s = -\alpha_s$. Ceci permet de se contenter de prouver les assertions

$$\begin{array}{l} \forall \alpha \in \Phi^m(F_J)_+ \setminus \{\alpha_s\} \quad [\alpha; \alpha_s[_{\text{lin.}} \subset \Phi^m(F_J)_+ \setminus \{\alpha_s\} \\ \text{et} \quad \forall \alpha \in \Phi_+ \setminus \Phi^m(F_J) \quad [\alpha; \alpha_s[_{\text{lin.}} \subset \Phi_+ \setminus \Phi^m(F_J), \end{array}$$

car le reste en découle en transformant par s les parties de racines en question. L'interprétation en termes de formes linéaires rend les assertions qui restent immédiates.

Preuve de (iii). La remarque préliminaire du point précédent reste valable en ommettant $_{\text{lin.}}$. On se donne α dans $\Phi^m(F_J)_+ \setminus \{\alpha_s\}$. Alors, $\alpha \cap \alpha_s$ contient la chambre standard C, et $(-\alpha) \cap (-\alpha_s)$ contient son opposée $w_J C$ dans le résidu de F_J dans $\mathbf{A}$ (ni α, ni α_s ne peut contenir F_J qui est dans le mur de chacune de ces racines). Ainsi, une racine β dans $[\alpha; \alpha_s]$ contient C et vérifie $-\beta \supset w_J C$, ce qui implique aussi $\partial\beta \supset F_J$. Ceci prouve la première assertion.

On se donne α dans $\Phi_+ \setminus \Phi^m(F_J)$. Alors, α contient le résidu de F_J dans $\mathbf{A}$. Ainsi, une racine β dans $[\alpha; \alpha_s]$ contient déjà l'intersection de α_s avec ce résidu. En particulier, β contient C: β est dans Φ_+. Si β ne contient pas plus que ce demi-résidu sphérique, son opposée contient $w_J C$, et β est dans $\Phi^m(F_J)$, tout en laissant la même trace que α_s sur $R(F_J)$. Ceci implique $\beta = \alpha_s$. Si β contient plus, par convexité elle contient tout le résidu, et donc n'est pas dans $\Phi^m(F_J)$, ce qui prouve la seconde assertion.

Preuve de (iv). Pour chaque s dans J, on note $G_s := G(F_{\{s\}}) = \langle H, U_\alpha \mid \alpha = \pm\alpha_s \rangle$. On fixe un tel s et on va montrer que G_s normalise $V(F_J)$, le résultat en découlera puisque s est quelconque dans J.

1. Présentation de $V(F_J)$ sous une forme adaptée

On définit

$$U := \langle uxu^{-1} \mid u \in U_{\alpha_s} \quad x \in U_\alpha \quad \alpha \in \Phi^m(F_J)_+ \setminus \{\alpha_s\} \rangle$$

et

$$V := \langle uxu^{-1} \mid u \in U_{\alpha_s} \quad x \in U_\alpha \quad \alpha \in \Phi_+ \setminus \Phi^m(F_J) \rangle.$$

Puisque $\Phi = (\Phi_+ \setminus \Phi^m(F_J)) \sqcup (\Phi^m(F_J)_+ \setminus \{\alpha_s\}) \sqcup \{\alpha_s\}$, U_+ est engendré par les groupes U, V et U_{α_s}, et même $U_+ = U_{\alpha_s}\langle U, V \rangle$. Ceci montre qu'on peut voir $V(F_J)$ comme le sous-groupe engendré par les éléments uvu^{-1} avec u dans U et v dans V.

2. Il suffit de montrer que G_s normalise U et V. Tout a été fait pour que U_{α_s} normalise ces sous-groupes. Par définition, $H = \bigcap_{\alpha \in \Phi} N_G(U_\alpha)$ normalise clairement U et V. On finit en

montrant que s normalise U et V. On se donne donc n dans $s = nH$, et on montre que n normalise U et V.

3. Normalisation de U par s. Partons d'un générateur uxu^{-1} avec u dans U_{α_s}, x dans U_α et α dans $\Phi^m(F_J)_+ \setminus \{\alpha_s\}$.

Premier cas: $\{\alpha_s;\alpha\}$ est prénilpotente. Alors, par l'axiome $(\mathrm{DRJ1})_{\mathrm{lin.}}$, uxu^{-1} est dans $U_{]\alpha;\alpha_s[_{\mathrm{lin.}}}.U_\alpha$. Or d'après (ii), $[\alpha;\alpha_s[_{\mathrm{lin.}}$ est dans $\Phi^m(F_J)_+ \setminus \{\alpha_s\}$, qui est stable par s. Ceci montre que $nuxu^{-1}n^{-1}$ s'écrit comme produit d'éléments de U_β, avec β dans $\Phi^m(F_J)_+ \setminus \{\alpha_s\}$, donc que c'est un élément de U. Dans le cas sphérique, le fait de pouvoir omettre les indices $_{\mathrm{lin.}}$ d'après (iii), permet d'utiliser l'axiome (DRJ1) sans recours à l'axiome plus fort $(\mathrm{DRJ1})_{\mathrm{lin.}}$.

Deuxième cas: $\{\alpha_s;\alpha\}$ n'est pas prénilpotente mais $u = 1$. Il suffit d'invoquer la stabilité sous s de l'ensemble de racines $\Phi^m(F_J)_+ \setminus \{\alpha_s\}$, sans distinction de cas.

Dernier cas: $\{\alpha_s;\alpha\}$ n'est pas prénilpotente et $u \neq 1$. D'après la remarque précédant la démonstration, la paire $\{-\alpha_s;\alpha\}$ est, elle, prénilpotente. Puisque $u \neq 1$, il existe u' et u'' dans $U_{-\alpha_s}$ tels que $m(u) := u'uu''$ est dans $s = nH$. On sait que $\{-\alpha_s;\alpha\}$ est prénilpotente, et par (ii) on a $]\alpha;-\alpha_s[\subset \Phi^m(F_J)_+ \setminus \{\alpha_s\}$. Ainsi, par l'axiome $(\mathrm{DRJ1})_{\mathrm{lin.}}$, $(u'')^{-1}xu''$ est dans $U_\alpha.U_{]\alpha;-\alpha_s[_{\mathrm{lin.}}}$. En outre, $v := n(u')^{-1}n^{-1}$ est dans $U_{s.(-\alpha_s)} = U_{\alpha_s}$ et $h := nm(u)$ est dans $s^2 = H$. Finalement

$$nuxu^{-1}n^{-1} = vh(u'')^{-1}xu''h^{-1}v^{-1} \in vU_\alpha.U_{]\alpha;-\alpha_s[_{\mathrm{lin.}}}v^{-1},$$

$nuxu^{-1}n^{-1}$ est bien dans U. Si F_J est sphérique, on peut faire le même raisonnement sans recours à $(\mathrm{DRJ1})_{\mathrm{lin.}}$ et en omettant les indices $_{\mathrm{lin.}}$.

Le cas de V se règle de la même façon, à partir des assertions des points (ii) et (iii) non encore utilisées (concernant $\Phi_+ \setminus \Phi^m(F_J)$). □

6.2.2. Décomposition de Lévi des sous-groupes paraboliques

Nous pouvons maintenant passer à la décomposition de Lévi des sous-groupes paraboliques. Il est à noter que la facette fixée n'est pas nécessairement sphérique (à condition de supposer l'axiome $(\mathrm{DRJ1})_{\mathrm{lin.}}$). Ce résultat n'est pas seulement un dévissage, mais propose aussi deux présentations différentes des groupes qui interviennent dans cette décomposition.

THÉORÈME. — *Soit $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$ le jumelage conique d'une donnée radicielle jumelée. Soient F une facette et $\mathbf{A}$ un appartement jumelé qui la contient. On note $-F$ la facette opposée à F dans $\mathbf{A}$. On suppose que F est une facette sphérique ou que la donnée radicielle jumelée vérifie l'axiome $(\mathrm{DRJ1})_{\mathrm{lin.}}$. Alors, $P(F)$ possède la décomposition suivante.*

$$P(F) = M(F) \ltimes U(F).$$

Chacun des groupes $M(F)$ et $U(F)$ possède une définition géométrique et une définition abstraite.

$M(F)$ est le fixateur de $F \cup -F$, et c'est aussi le groupe engendré par H et les sous-groupes U_α tels que le mur $\partial\alpha$ contient F.
$U(F)$ est l'intersection des groupes $U(D)$ pour les chambres D de $\mathbf{A}$ qui contiennent F dans leur adhérence, et c'est aussi pour toute chambre D dans le résidu de F, le plus petit sous-groupe normal de $U(D)$ contenant les sous-groupes radiciels U_α pour α contenant F.

En outre, pour toute chambre D dans le résidu de F, $M(F) \cap U(D)$ est le sous-groupe engendré par les groupes radiciels U_α tels que α contient D et $\partial\alpha$ contient F.

Démonstration. Il suffit une fois encore de prouver le résultat pour une facette standard.

1. Identifications de $U(F_J)$ à $V(F_J)$, de $V_{J,+}$ à $U_{J,+}$

D'après le lemme précédent, $G(F_J)$ normalise $V(F_J)$. Puisque $N(F_J)$ est dans $G(F_J)$ par le lemme (6.1.3), on a donc pour tout w de W_J

$$wV(F_J)w^{-1} = V(F_J) \subset wU_+w^{-1},$$

ce qui implique $V(F_J) \subset U(F_J)$. D'autre part, il est clair que pour toute racine positive α nulle sur F_J, U_α est inclus dans $P(F_J) \cap P(-F_J)$; d'où $V_{J,+} \subset U_{J,+}$. Enfin, $U(F_J) \cap U_{J,+}$ est inclus dans $U(F_J) \cap M(F_J)$, qui vaut $\{1\}$, d'après le lemme précédent. Comme $U_+ = V_{J,+}.V(F_J) \subset U_{J,+}.U(F_J) = U_+$, on a donc:

$$V_{J,+} = U_{J,+} \quad \text{et} \quad V(F_J) = U(F_J),$$

ce qui nous permet déjà d'oublier la lettre V pour les groupes provisoires.

2. Décomposition de Lévi

D'après l'écriture des doubles classes dans un groupe à donnée radicielle jumelée, on sait que $P(F_J)$ est engendré par les HU_α pour $\overline{\alpha} \supset F_J$. Puisque $G(F_J)$ normalise $U(F_J)$, on peut écrire $P(F_J) = G(F_J).U(F_J)$. De plus, $G(F_J) \cap U(F_J) \subset M(F_J) \cap U(F_J) = \{1\}$. Donc $P(F_J) = G(F_J).U(F_J)$ est en fait un produit semi-direct. Enfin, $M(F_J) \supset G(F_J)$ et $M(F_J) \cap U(F_J) = \{1\}$ impliquent un autre produit semi-direct: $P(F_J) = G(F_J) \ltimes U(F_J)$, et l'égalité $M(F_J) = G(F_J)$. □

Ce théorème généralise les résultats exposés dans le livre de M. Ronan sur les immeubles sphériques possédant la propriété de Moufang ([Ron89], théorème (6.18)), et la preuve des décompositions de Lévi dans le cas Kac-Moody en caractéristique 0 ([Kac-Pet84], proposition (4.6) p.195). Nous pouvons commencer à faire quelques interprétations géométriques qui vont rendre plus visuelles les preuves à suivre.

6.2.3. Compléments et interprétations immobilières

Les précisions que nous allons apporter consistent essentiellement à décrire l'action des groupes intervenant dans une décomposition de Lévi, à atténuer la dépendance en l'appartement choisi pour les définir et à mettre en évidence la transmission de la structure de donnée radicielle jumelée aux facteurs de Lévi.

PROPOSITION. — *On se place dans la même situation que celle du théorème précédent.*

(i) *Un appartement contenant F et $-F$ se déduit de $\mathbf{A}$ par l'action d'un élément de $M(F)$.*
(ii) *$M(F)$ est le fixateur de l'extension vectorielle de F dans $\mathbf{A}$. $\big(M(F), (U_\alpha)_{\alpha \in \Phi^m(F)}\big)$ est une donnée radicielle jumelée.*
(iii) *$U(F)$ opère simplement transitivement sur les extensions vectorielles de F (ou sur les facettes opposées) dans les appartements qui la contiennent. $U(F)$ ne dépend que de F et pas de $\mathbf{A}$.*
(iv) *Si F est une facette sphérique, la donnée de toute chambre C de même signe dans $\mathbf{A}$ fournit une décomposition de Birkhoff de $M(F)$ (et de $P(F)$) en doubles classes incluses dans celles de G pour le même choix de chambre. Toutes les chambres de même projection sur F conduisent à la même décomposition. Si F est positive et si w_F est l'élément de plus grande longueur de $W(F)$, la partie négative de la grosse cellule est $U(-D) \cap w_F U(D) w_F^{-1}$, avec $D = \mathrm{proj}_F C$.*

Démonstration. Preuve de (i). Sans nuire à la généralité du résultat, on suppose que F est la facette standard F_I. Soit $\mathbf{A}'$ un appartement qui contient $-F_I$. On sait par (6.1.2) que cet appartement s'écrit $\mathbf{A}' = p\mathbf{A}$ avec p dans $P(F_I)$. $p(-F_I)$ est une facette qui est opposée à F_I et qui est dans $\mathbf{A}'$ contenant $-F_I$: $p(-F_I)$ est nécessairement $-F_I$. Par conséquent, p fixe aussi $-F_I$, donc est en fait dans $M(F_I)$.

Preuve de (ii). Il est clair que le fixateur de l'extension vectorielle $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(F)$ est nécessairement dans $M(F)$ puisque F et $-F$ sont dans cette extension vectorielle. Réciproquement, H fixe l'appartement tout entier, et pour chaque racine α, le groupe radiciel U_α fixe le demi-espace $\alpha \sqcup \partial\alpha$. D'où l'inclusion réciproque.
Pour la structure de donnée radicielle jumelée, il est suffisant par conjugaison de considérer une facette standard F_I. Par le lemme (5.1.5), $\Phi^m(F_I)$ est en bijection naturelle avec le système de racines de W_I. Cette observation et le fait que $M(F_I)$ est engendré par H et les sous-groupes U_α pour α dans $\Phi^m(F_I)$, montrent que les propriétés de la donnée radicielle jumelée $\big(G, (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\big)$ font de $\big(M(F_I), (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi^m(F_I)}\big)$ une donnée radicielle jumelée.

Preuve de (iii). Soit $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}'}(F)$ une extension vectorielle de F dans un appartement $\mathbf{A}'$ qui la contient. On sait que $\mathbf{A}' = p\mathbf{A}$ pour un élément p de $P(F)$. D'après la décomposition de Lévi, $p = u.m$ avec m dans $M(F)$ et u dans $U(F)$. Donc, $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}'}(F) = u\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(F)$. (Une extension vectorielle s'envoie bien sur une extension vectorielle car les g opèrent vectoriellement d'appartement jumelé à appartement jumelé). Ceci montre que $U(F)$ agit transitivement sur les extensions vectorielles de F. L'intersection triviale $M(F) \cap U(F) = \{1\}$ implique que l'action est libre, puisque $M(F)$ est précisément le fixateur de $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(F)$.
Soit maintenant $\mathbf{A}'$ un autre appartement contenant F. Par (6.1.2), on sait qu'on peut le déduire de $\mathbf{A}$ par l'action d'un élément p qui fixe F. Ainsi, à partir de $\mathbf{A}'$, on définit le sous-groupe engendré par les conjugués par p des groupes radiciels de départ. Puisque ces sous-groupes sont tous deux distingués dans $P(F)$, ils coïncident.

Preuve de (iv). Remarquons d'abord que $\Phi^m(F)$ est $\Phi^m(F \cup -F)$. On peut donc appliquer (5.4.5)(vi) à $\Omega = F \cup -F$, ce qui fournit $\Phi^m(F)_D = \Phi^m(F \cup -F)_C$ par la preuve de cette référence. Cet ensemble ne dépend que de D.
$U(-D) \cap w_F U(D) w_F^{-1}$ est le produit interne dans tout ordre cyclique des $U_{-\alpha}$ pour α dans $\Phi^m(F)_D$, par (1.5.2)(iii) et (3.5.4). C'est en particulier le sous-groupe engendré par ces sous-groupes radiciels. $\big(M(F), (U_\alpha)_{\alpha\in\Phi^m(F)}\big)$ est une donnée radicielle jumelée indexée par le système de racines fini $\Phi^m(F)$, par (ii), et pour lequel $\Phi^m(F)_D$ est un système positif. La décomposition de Birkhoff de $M(F)$ s'écrit donc

$$M(F) = \bigsqcup_{w\in W(F)} \Big(\prod_{\alpha\in\Phi^m(F)_D} U_{-\alpha}\Big) w H \Big(\prod_{\alpha\in\Phi^m(F)_D} U_\alpha\Big)$$

$$= \bigsqcup_{w\in W(F)} \big(U(-D) \cap w_F U(D) w_F^{-1}\big) w H \big(U(D) \cap w_F U(-D) w_F^{-1}\big),$$

et on obtient celle de $P(F)$ en multipliant par $U(F)$. □

Le point (ii) met en évidence des petites données radicielles jumelées à l'intérieur d'un groupe possédant déjà cette structure. Cela incite à regarder le volet géométrique de cette mise en évidence. Voici tout d'abord deux définitions.

DÉFINITION. — *Soit* **A** *un appartement jumelé contenant les facettes opposées* F *(positive) et* $-F$ *(négative). On désigne* $F \cup (-F)$ *par* Ω.

(i) $\mathcal{J}_\Omega$ *est la réunion disjointe du résidu de* F *dans l'immeuble positif* $\mathcal{I}_+$, *et du résidu de* $-F$ *dans l'immeuble négatif* $\mathcal{I}_-$.
(ii) $|\mathcal{J}_\Omega|_{\mathrm{co}}$ *est la réunion des facettes ouvertes de* $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$ *contenues dans les chambres de* $\mathcal{J}_\Omega$ *et dont le type est inclus dans celui de* F.

Les objets ainsi définis sont tout logiquement liés au jumelage de $M(\Omega)$.

LEMME. — (i) $\mathcal{J}_\Omega$ *est un jumelage pour les* W*-distances et la codistance de* $\mathcal{J}$ *restreintes.*
(ii) $\mathcal{J}_\Omega$ *est isomorphe au jumelage de la donnée radicielle jumelée associée à* $M(\Omega)$.
(iii) *Les appartements jumelés de* $\mathcal{J}_\Omega$ *sont en bijection avec les appartements jumelés de* $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$ *contenant* Ω.

REMARQUES. — 1. Les deux définitions ont un sens dans un jumelage sans qu'il provienne d'un groupe, et le premier point de ce lemme est vrai dans cette situation plus générale.

2. $|\mathcal{J}_\Omega|_{\mathrm{co}}$ représente $\mathcal{J}_\Omega$ dans le sens où on lit géométriquement les s-adjacences, l'opposition ou la structure simpliciale de $\mathcal{J}_\Omega$ dans le gros jumelage $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$.

Démonstration. Preuve de (i). Il est connu que le résidu d'une facette est un immeuble (2.3.4). Les deux premiers axiomes d'un jumelage se restreignent trivialement; dans l'axiome d'existence (JU3), l'élément réalisant les deux contraintes de distance et codistance est dans la réunion des résidus, précisément d'après la contrainte de distance.

Preuve de (ii). On choisit dans **A** une chambre standard contenant F dans son adhérence, et on désigne par J le type de F. Cela définit pour chaque signe ϵ un sous-groupe de Borel dans $M(\Omega)$, qu'on note $B_\epsilon(\Omega)$. L'immeuble positif de $M(\Omega)$ est ensemblistement égal à $M(\Omega)/B_+(\Omega)$. Pour chaque $w \in W_J$, $M(\Omega)$ contient le sous-groupe U_w de G. Par unicité d'écriture dans les doubles classes (1.2.3) – appliquée à $M(\Omega)$, les chambres à distance $w \in W_J$ de la chambre standard $B_+(\Omega)$ sont en bijection avec U_w, qui d'après (1.5.2) et (3.5.4), est le le même dans G et dans $M(\Omega)$. La même remarque appliquée aux chambres à distance $w \in W_J$ de la chambre standard B_+ de $\mathcal{J}$ établit une bijection entre le résidu de F et l'immeuble positif de $M(\Omega)$, entre le résidu de $-F$ et l'immeuble négatif de $M(\Omega)$: il suffit de faire varier w et le signe. La coïncidence des relations d'adjacence et de l'opposition vient de ce que pour le choix d'une même chambre, les traces des décompositions de Bruhat et de la décomposition de Birkhoff de G sur $M(\Omega)$ sont les décompositions correspondantes de $M(\Omega)$.

Preuve de (iii). Ce point provient du fait qu'un appartement jumelé est entièrement déterminé par une paire de chambres opposées qu'il contient, (2.5.3)(i). Tout appartement jumelé de $\mathcal{J}_\Omega$ fournit une paire de chambres opposées dans $\mathcal{J}_\Omega$, donc une paire de chambres opposées dans $\mathcal{J}$, et finalement un appartement jumelé bien déterminé de $\mathcal{J}$ qui contient Ω. Deux appartements jumelés de $\mathcal{J}$ de même trace sur $\mathcal{J}_\Omega$ contiennent une même paire de chambres opposés, et sont donc égaux. □

REMARQUE. — Si on veut considérer le point de vue simplicial des facettes et des translatés de sous-groupes paraboliques standard, l'isomorphisme entre l'immeuble de la petite donnée radicielle jumelée (de signe ϵ) et l'immeuble résidu de ϵF est donné par:

$$gB_\epsilon(\Omega)W_K B_\epsilon(\Omega) \mapsto gB_\epsilon W_K B_\epsilon, \quad g \in M(\Omega), \quad K \subset \mathrm{type}(F).$$

6.2.4. Systèmes de racines entiers

Il s'agit maintenant de fournir une généralisation combinatoire, motivée par la condition $(\mathrm{DRJ1})_{\mathrm{lin.}}$ qui apparaît pour les décompositions de Lévi des sous-groupes paraboliques généraux. Ces considérations vont permettre de formuler plus précisément le théorème de descente (chapitre 12), qui concerne des groupes de Kac-Moody non déployés. L'idée est d'indexer la combinatoire d'une donnée radicielle jumelée par un système de racines où le point de vue des formes linéaires est privilégié, car plus précis que la géométrie des demi-cônes de Tits. On va autoriser la coexistence de racines proportionnelles; précisément, on va travailler avec des racines doubles.

DÉFINITION. — (i) *Une* prébase de racines *est un quadruplet* $\mathcal{B} = (S, V, (\alpha_s)_{s\in S}, (r_s)_{s\in S})$ *où* S *est un ensemble,* V *est un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel,* $(\alpha_s)_{s\in S}$ *est une base de* V *et* r_s *est une réflexion de vecteur* α_s*, i.e., il existe une forme linéaire* φ_s *sur* V *qui vaut 2 sur* α_s *et qui définit* r_s *par* $r_s(v) = v - \varphi_s(v)\alpha_s$ *pour tout* v.
(ii) *La* matrice de Cartan *de* $\mathcal{B}$ *est la matrice* $A := [A_{st} := \varphi_s(\alpha_t)]_{s,t\in S}$.
(iii) *Le* groupe de Weyl *de* $\mathcal{B}$ *est le groupe de Coxeter* W *défini par la présentation*

$$W := \langle s \mid (st)^{m_{st}} \rangle,$$

où m_{st} *est l'ordre de* $r_s \circ r_t$ *comme automorphisme linéaire de* V.
(iv) W *opère sur* V *via la représentation* $\rho : s \mapsto r_s$*, et les* racines *de* $\mathcal{B}$ *sont les éléments de l'ensemble* $\Phi := \{w(\alpha_s) := \rho(w)(\alpha_s) \mid w \in W, s \in S\}$.

REMARQUES. — 1. Dans le cas d'une matrice de Cartan entière, le réseau $\bigoplus_{s\in S} \mathbf{Z}\alpha_s$ est stable sous l'action de W, et par conséquent contient Φ.

2. Il peut être utile de travailler sur des quadruplets $(S, V, (\alpha_s)_{s\in S}, (r_s)_{s\in S})$ où (α_s) est simplement une famille libre de V. On se ramène alors à une prébase en considérant le sous-espace vectoriel engendré par cette famille.

3. De nombreux auteurs ont proposé des axiomatiques de systèmes de racines infinis. Une comparaison s'impose, d'autant plus qu'on va se servir de résultats de deux de ces références. R. Moody et A. Pianzola dans [Moo-Pia95] ont considéré des systèmes qui admettent une géométrie dont on s'est inspiré pour la section (5.2), et qui permettent de définir des sous-systèmes avec permanence de structure. La notion de prébase telle qu'elle est présentée ci-dessus est due à J.-Y. Hée, qui la définit dans un cadre plus général. Les références pour les prébases (et bases) de racines sont [Hée90] et [Hée91], où l'on travaille sur des anneaux commutatifs totalement ordonnés. On va se servir de certains points de ces articles pour faire un lien avec le chapitre 5. Enfin, N. Bardy dans [Bar96] définit une axiomatique très générale qui autorise l'usage des coracines, et permet de manipuler des racines imaginaires simples. Nous n'aurons pas besoin de cela, et comme pour le travail de J.-Y. Hée, nous ne considérerons qu'un cas bien particulier obéissant à cette axiomatique. Cette référence sera pourtant sollicitée dans le résultat de descente, pour décrire finement le groupe des points rationnels d'un groupe de

Kac-Moody presque déployé. Elle fournit en effet un résultat important de passage au quotient, qu'on utilisera à la sous-section (12.6.2).

Si Ψ est une partie de V, on note Ψ_+ la partie des éléments de Ψ à coordonnées toutes positives ou nulles dans la base $(\alpha_s)_{s\in S}$. On note Ψ_- l'opposée de Ψ_+. La condition qui fait une base d'une prébase est la généralisation d'une propriété bien connue des systèmes de racines finis.

DÉFINITION. — (i) *Une prébase de racines $\mathcal{B}$ est une* base de racines *si sa matrice de Cartan est entière et si $\Phi = \Phi_+ \cup \Phi_-$.*
(ii) *Un* système de racines entier (pour $\mathcal{B}$) *est une partie Ψ de V, stable sous l'action de W, contenue dans $\bigcup_{\alpha\in\Phi} \mathbf{R}^*_+\alpha$, et telle que pour tout s, la partie $\Psi \cap \mathbf{R}^*_+\alpha_s$ soit égale à $N_s\alpha_s$, avec $N_s = \{1\}$ ou $\{1;2\}$. Si 2 appartient à N_s, on impose de plus que pour tout t de S, on ait $A_{st} := \varphi_s(\alpha_t) \in 2\mathbf{Z}$.*
(iii) *Le système de racines entier est dit* réduit *si N_s vaut $\{1\}$ pour tout s.*

REMARQUES. — 1. Pour un système de racines entier Ψ, on a $\Psi \supset \Phi$, avec égalité si et seulement si Ψ est réduit.

2. Comme on l'a déjà dit, la situation bien particulière dans laquelle on se place permet d'utiliser les deux sources de résultats [Hée91] et [Bar96]. Nous reviendrons plus en détail sur l'axiomatique de N. Bardy en (7.1.4). C'est en revanche ici que nous utilisons les résultats de J.-Y. Hée pour recoller au chapitre 5. Notons que notre définition de base pose en hypothèse d'être réduit et à matrice de Cartan entière, contrairement à cette référence. Tout d'abord, [Hée91], proposition (2.13)(b) p.83 montre que si $\mathcal{B}$ est une base de racines, la représentation ρ de W est fidèle. On peut aussi associer un cône à $\mathcal{B}$, défini de la même façon qu'en (5.1) et qui possède logiquement les mêmes propriétés que le cône du chapitre 5 ([Hée91], sections I et J, p.93-96). On parlera encore de *cône de Tits*. Par exemple, la chambre fondamentale est l'intersection des adhérences des demi-espaces positifs des racines de la base du quadruplet $\mathcal{B}$, et le cône est la réunion des translatés par W de cette chambre. Puisque W est simplement transitif sur les chambres ([Hée91], (2.43)(a) p.95), on obtient une bijection W-équivariante entre les chambres des deux cônes, qui échange les chambres standard. En outre, la même caractérisation des chambres dans un demi-cône radiciel donné en fonction de la longueur ([Hée91], (2.40)(a) p.93) permet de faire le même raisonnement que dans la remarque (5.1.3) pour obtenir une identification W-équivariante de ces demi-cônes avec les racines abstraites de W (1.4.1). Finalement, on a une identification W-équivariante entre les demi-cônes radiciels pour les deux définitions.

On pourrait envisager d'appliquer tout le vocabulaire de (1.4.1) concernant les parties de racines abstraites. De cette façon, deux racines positivement proportionnelles auraient le même comportement. En fait, on dispose d'une notion d'intervalle de racines plus adaptée, qui suggère aussi une modification de la définition des parties closes. On conserve $\mathcal{B}$ une base de racines, et Ψ un système de racines entier pour $\mathcal{B}$.

DÉFINITION. — (i) *Étant données deux racines α et β de Ψ, on définit les* intervalles entiers *suivants.*

$$[\alpha;\beta]_{\mathbf{N}} := (\mathbf{N}\alpha + \mathbf{N}\beta) \cap \Psi \text{ et }]\alpha;\beta[_{\mathbf{N}} := [\alpha;\beta]_{\mathbf{N}} \setminus \{\alpha;\beta\}.$$

*On parle d'*intervalle entier fermé *pour le premier, d'*intervalle entier ouvert *pour le second.*

(ii) *On définit aussi mutatis mutandis les ensembles* $]\alpha;\beta]_{\mathbf{N}}$ *et* $[\alpha;\beta[_{\mathbf{N}}$.
(iii) *La notion de prénilpotence, elle, n'est pas modifiée: si* φ *est une partie de* Ψ, *on dit que* φ *est* prénilpotente *s'il existe* w *et* z *dans* W, *tels que* $w\varphi \subset \Psi_+$ *et* $z\varphi \subset \Psi_-$.
(iv) *Une partie de racines est* **N**-close *(respectivement* **N**-nilpotente*) si elle est stable par addition (respectivement et prénilpotente).*
(v) *Si* φ *est une partie de* Ψ, *on note* $\varphi_{\mathrm{nd}} := \{\alpha \in \varphi \mid \alpha/2 \notin \varphi\}$ *l'ensemble des racines* non divisibles *de* φ.

Ces définitions appellent la convention suivante.

CONVENTION. — *Sauf mention expresse du contraire, dans un système de racines entier, on privilégiera systématiquement les notions ci-dessus par rapport à celles des sections précédentes, notamment celle d'intervalle au sens de* (1.4.1).

REMARQUE. — Comme en (5.4.2), on peut voir qu'on a l'inclusion $]\alpha;\beta[_{\mathbf{N}} \subset]\alpha;\beta[$, et que cette inclusion peut être stricte. Une partie close est en particulier automatiquement **N**-close. Ces deux remarques font voir qu'il y a plus de parties **N**-closes que de parties closes, et donc qu'exiger des conditions portant sur les parties **N**-closes est plus contraignant que les exiger sur les parties closes. C'est ce qui va se passer pour la combinatoire de groupe suivante.

6.2.5. Données radicielles jumelées entières

On se donne une base de racines $\mathcal{B}$ de système associé Φ, et Ψ un système de racines entier.

DÉFINITION. — *Soit* G *un groupe possédant une famille de sous-groupes* $(U_\alpha)_{\alpha\in\Psi}$ *indexée par le système de racines entier* Ψ, *et contenant un sous-groupe* H *normalisant chaque sous-groupe* U_α. *On note* U_+ *(respectivement* U_-*) le sous-groupe engendré par les sous-groupes* U_α *pour* α *dans* Ψ_+ *(respectivement* Ψ_-*). On dit que le triplet* $\big(G,(U_\alpha)_{\alpha\in\Psi},H\big)$ *est une* donnée radicielle jumelée entière (de type $(\mathcal{B},\Psi)$) *si les conditions suivantes sont vérifiées.*

(DRJE0) *Pour toute racine* α, *on a* $U_\alpha \neq \{1\}$. *En outre, pour toute* α *dont le double est dans* Ψ, *on requiert* $U_{2\alpha} \subsetneq U_\alpha$.

(DRJE1) *Pour toute paire prénilpotente de racines* $\{\alpha;\beta\}$, *le groupe des commutateurs* $[U_\alpha,U_\beta]$ *est inclus dans le groupe engendré par les sous-groupes* U_γ, *pour* γ *dans* $]\alpha;\beta[_{\mathbf{N}}$.

(DRJE2) *Pour tout* s *de* S *et tout* u *de* $U_{\alpha_s} \setminus \{1\}$, *il existe* u' *et* u'' *dans* $U_{-\alpha_s}$ *tels que* $m(u) := u'uu''$ *conjugue* U_β *sur* $U_{s\beta}$ *pour toute racine* β. *En outre, pour tous* u *et* v *de* $U_{\alpha_s} \setminus \{1\}$, *on requiert* $m(u)H = m(v)H$; *et si* u *est dans* $U_{2\alpha_s}$, u' *et* u'' *peuvent être choisis dans* $U_{-2\alpha_s}$.

(DRJE3) *Pour tout* s *de* S, *on a* $U_{\alpha_s} \not\subset U_-$ *et* $U_{-\alpha_s} \not\subset U_+$.

(DRJE4) $G = H\langle U_\alpha \mid \alpha\in\Psi\rangle$.

Les sous-groupes U_α *sont appelés les* sous-groupes radiciels *de* $\big(G,(U_\alpha)_{\alpha\in\Psi},H\big)$.

REMARQUES. — 1. D'après la section précédente, l'ensemble des racines Φ de $\mathcal{B}$ est W-isomorphe au système de racines du groupe de Weyl W de $\mathcal{B}$. Par conséquent, si $\big(G,(U_\alpha)_{\alpha\in\Psi},H\big)$ est une donnée radicielle jumelée entière (de type $(\mathcal{B},\Psi)$), on voit facilement que $\big(G,(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi},H\big)$ est une donnée radicielle jumelée (de type (W,S)). Cette donnée radicielle jumelée vérifie en outre l'axiome $(\mathrm{DRJ1})_{\mathrm{lin.}}$, d'après l'inclusion $]\alpha;\beta[_{\mathbf{N}} \subset]\alpha;\beta[$ et l'axiome (DRJE1).

2. Cette définition est une généralisation directe au cas des systèmes de racines infinis des données radicielles génératrices de [Bru-Tit72], section (6.1) p.107-116. En effet si Ψ est

fini, l'axiome (DR6) de [Bru-Tit72] résulte de (3.5.4); et les autres axiomes sont clairement semblables. La recherche d'une généralisation de [Bru-Tit72], proposition (6.1.6) p.111 conduit d'ailleurs au lemme suivant.

LEMME. — *Pour toute partie* **N***-nilpotente* φ *de racines, pour tout ordre sur* φ*, l'application produit*

$$\prod_{\alpha\in\varphi_{\mathrm{nd}}} U_\alpha \longrightarrow U_\varphi$$

est bijective.

Démonstration. On sera amené à faire ce raisonnement dans le cadre des groupes de Kac-Moody (9.2.3), au moyen de notions et d'un lemme qui s'appliquent à notre cas. Précisément, la notion de *hauteur* permet de définir un *ordre grignotant* sur toute partie **N**-nilpotente, *cf.* (9.1.2). On obtient alors par l'axiome (DRJE1) une suite centrale comme en (9.2.3), qui permet d'appliquer le lemme (8.3.1) qui fait conclure. □

6.3. Fixateurs de deux facettes sphériques de signes opposés

Nous allons étudier une autre classe de sous-groupes qui cette fois fait intervenir de manière cruciale la coexistence de deux BN-paires opposées dans un groupe à donnée radicielle jumelée. La situation pour toute cette section est la suivante. On conserve le groupe G muni de sa donnée radicielle jumelée $\big(G,(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi}\big)$. I et J sont des parties sphériques de S. w est un élément de W. On fixe une standardisation $(\mathbf{A},C,-C)$ pour $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$. On considère la facette standard F_I de type I, et wF_J et $-wF_J$ deux facettes opposées dans $\mathbf{A}$ de type J. Ω désigne la réunion $\Omega = F_I \cup -wF_J$.

Nous aurons besoin en outre de la propriété suivante, portant sur la donnée radicielle jumelée en question.

(NILP) *Pour toute partie nilpotente* φ *de racines, pour tout ordre sur* φ*, l'application produit* $\prod_{\alpha\in\varphi} U_\alpha \longrightarrow U_\varphi$ *est bijective.*

Cette propriété est vérifiée par les groupes de Kac-Moody déployés (8.3.1), et plus généralement par les groupes à donnée radicielle jumelée entière, en vertu du lemme (6.2.5).

Notre objectif est à présent de dévisser $\mathrm{Fix}(\Omega) = P(F_I)\cap P(-w.F_J)$ en une décomposition de Lévi.

6.3.1. Groupes associés à une partie équilibrée

Voici des définitions valables pour toute partie équilibrée de $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$, et qui seront mises à contribution dans la section suivante.

DÉFINITION. — *Soit Ω une partie équilibrée du jumelage géométrique $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$, contenue dans l'appartement jumelé* $\mathbf{A}$.

(i) *$U(\Omega)$ désigne le sous-groupe engendré par les sous-groupes radiciels U_α indexés par les racines α de $\Phi^u(\Omega)$.*
(ii) *$M(\Omega)$ désigne le sous-groupe engendré par H et les sous-groupes radiciels U_α indexés par les racines α de $\Phi^m(\Omega)$.*
(iii) *$N(\Omega)$ désigne le sous-groupe engendré par H et les $m(u)$ pour u parcourant $U_\alpha \setminus \{1\}$ et α parcourant $\Phi^m(\Omega)$.*

Énonçons quelques propriétés faciles de ces groupes.

LEMME. — *Soit Ω une partie équilibrée du jumelage géométrique $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$, contenue dans l'appartement jumelé* $\mathbf{A}$. *Alors:*

(i) *Sous l'hypothèse* (NILP), *pour tout ordre sur $\Phi^u(\Omega)$, l'application produit*

$$\prod_{\alpha\in\Phi^u(\Omega)} U_\alpha \longrightarrow U(\Omega)$$

est bijective.
(ii) *$M(\Omega)$ est le fixateur de l'extension vectorielle $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(\Omega)$. Il est muni de la donnée radicielle jumelée $\big(M(\Omega),(U_\alpha)_{\alpha\in\Phi^m(\Omega)}\big)$.*
(iii) *$N(\Omega)$ est le fixateur de Ω ou $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(\Omega)$ dans N; il est contenu dans $M(\Omega)$.*

Démonstration. Preuve de (i). C'est une conséquence directe du fait que $\Phi^u(\Omega)$ est un ensemble nilpotent de racines, et de l'hypothèse d'introduction.

Preuve de (ii). D'après (5.3.3), on peut choisir une facette F dont la trace sur $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(\Omega)$ est un ouvert relatif de $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(\Omega)$, ce qui implique déjà que $\Phi^m(\Omega) = \Phi^m(F)$. En outre, $M(\Omega)$ n'est autre que $M(F)$, et le fixateur de $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(\Omega)$ n'est autre que le fixateur de $F \cup -F$. D'où $M(\Omega) = \mathrm{Fix}\big(\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(\Omega)\big)$, et la structure de donnée radicielle jumelée provient de l'identification avec $M(F)$ pour lequel ce résultat a déjà été prouvé (6.2.3).

Preuve de (iii). N opère linéairement sur $\mathbf{A}$, donc le fixateur dans N de Ω est aussi le fixateur de $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(\Omega)$ dans N. En outre, N envoie facette sur facette; par conséquent, c'est le fixateur dans N de la facette F de la preuve du point (ii). Il suffit alors d'appliquer (6.1.3) puisque $\Phi^m(\Omega) = \Phi^m(F)$ et $M(\Omega) = M(F)$. □

6.3.2. Un lemme sur les sous-groupes paraboliques sphériques

Le résultat qui suit est de nature purement combinatoire. Il utilise les résultats d'écriture unique précités.

LEMME. — *Soient C une chambre et F une facette sphérique de même signe, contenues dans l'appartement jumelé* $\mathbf{A}$. *Sous l'hypothèse* (NILP), *il existe un ordre sur la partie $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\varphi}$ des groupes radiciels contenus dans $U(C)\cap P(-F)$, pour lequel l'application produit $\prod_{\alpha\in\varphi} U_\alpha \to U(C)\cap P(-F)$ est bijective. En particulier, cette intersection est engendrée par les groupes radiciels qu'elle contient.*

Démonstration. On peut supposer que C est la chambre standard et on peut écrire $F = zF_K$ avec K partie sphérique de S, z dans W. Alors:

$$U_+ \cap P(-zF_K) = z\big(z^{-1}U_+z \cap P(-F_K)\big)z^{-1}.$$

On s'intéresse à $z^{-1}U_+z \cap P(-F_K)$. On sait que $z^{-1}U_+z$ est dans la grosse cellule, *i.e* dans la double classe de Birkhoff $U_+.H.U_-$. En effet, $z^{-1}U_+z$ s'écrit $(z^{-1}U_+z \cap U_+).(z^{-1}U_+z \cap U_-)$, avec unicité d'écriture (1.2.3). Ceci implique que $P(-F_K)$ et $z^{-1}U_+z$ se rencontrent uniquement dans la grosse cellule. Par conséquent, vu la décomposition de Birkhoff du sous-groupe parabolique $P(-F_K)$ (6.2.3), on a

$$z^{-1}U_+z \cap P(-F_K) = \big((z^{-1}U_+z \cap U_+).(z^{-1}U_+z \cap U_-)\big) \cap \big((w_K U_- w_K^{-1} \cap U_+).H.U_-\big),$$

où w_K désigne l'élément de plus grande longueur dans le groupe fini W_K. Par unicité d'écriture dans la grosse cellule, cette intersection est nécessairement

$$(z^{-1}U_+z \cap U_+ \cap w_K U_- w_K^{-1}).(z^{-1}U_+z \cap U_-).$$

Finalement:

$$U(C) \cap P(-F) = \big(zU_+z^{-1} \cap U_+ \cap zn_K U_-(zn_K)^{-1}\big).(U_+ \cap zU_-z^{-1}).$$

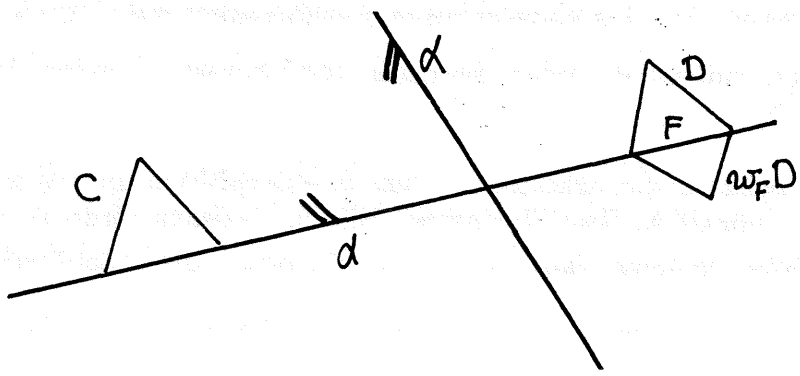
Par l'hypothèse (NILP), on peut ordonner $\Phi_{(zw_k)^{-1}}$ en commençant par toutes les racines qui restent positives par z^{-1}, ce qui permet d'écrire $zU_+z^{-1} \cap U_+ \cap zn_K U_-(zn_K)^{-1}$ comme produit interne des groupes radiciels qu'il contient. Pour $U_+ \cap zU_-z^{-1}$, c'est une application immédiate de (NILP) à la partie convexe donc nilpotente $\Phi_{z^{-1}}$. □

La preuve de ce lemme a fourni simultanément une description des racines intervenant dans le produit interne.

SCHOLIE GÉOMÉTRIQUE. — *On suppose l'hypothèse* (NILP) *vérifiée. Soient C une chambre et F une facette de même signe contenues dans l'appartement jumelé* **A**. *Alors, chaque choix de chambre D dans le résidu de F fournit une description géométrique des racines α pour lesquelles $U_\alpha \subset U(C) \cap P(-F)$:*

ou bien α contient la chambre C et $-\alpha$ contient D.
ou bien α contient $C \cup D$, et $-\alpha$ contient la chambre $w_F D$ opposée à D dans le résidu de F.

Dessin.



Justification. On a vu en effet dans la preuve:

$$U(C) \cap P(-F) = (zU_+z^{-1} \cap U_+ \cap zn_K U_-(zn_K)^{-1}).(U_+ \cap zU_-z^{-1}).$$

Or, on sait que $\left(zU_+z^{-1} \cap U_+ \cap zn_K U_-(zn_K)^{-1}\right) = \prod_{\Phi_{(zw_K)^{-1}} \cap z\Phi_+} U_\alpha,$

et que $U_+ \cap zU_-z^{-1} = \prod_{\alpha \in \Phi_+ \cap z\Phi_-} U_\alpha.$

Il suffit de se rappeler que pour tout w dans W et tout signe ϵ, $\alpha \in \Phi_+ \cap w\Phi_\epsilon$ signifie $\alpha \supset C$ et $\epsilon\alpha \supset wC$. Cette traduction géométrique porte sur la chambre zC. Tout autre élément de zW_K, c'est-à-dire toute autre chambre du résidu de F aurait fait aboutir à une description analogue. □

6.3.3. Décomposition brute

Le résultat qui suit est une décomposition de type Birkhoff du groupe considéré. Cette décomposition est d'ailleurs un outil essentiel de démonstration.

LEMME. — *On suppose l'hypothèse* (NILP) *vérifiée. Soit Ω une partie d'un appartement jumelé* **A** *constitué d'une facette sphérique positive F_I et d'une facette sphérique négative $-wF_J$. Alors, on peut faire un choix de chambre standard dans le résidu de F_I pour avoir:*

$$\mathrm{Fix}(\Omega) = \big(U_- \cap P(F_I)\big).\big(N(F_I) \cap N(wF_J)\big).\big(U_+ \cap P(-wF_J)\big).$$

On a toute liberté *a priori* dans le choix d'une chambre standard, puisque le groupe que l'on cherche à dévisser est une intersection de sous-groupes paraboliques qui sont définis sans recours à une chambre ou un appartement standard.

Démonstration. 1. Projection et convexité

On considère une galerie tendue de F_I vers wF_J de début C dans le résidu de F_I et de fin D dans celui de wF_J. Par définition, C (respectivement D) est la projection sur F_I (respectivement sur wF_J) de D (respectivement de C). On choisit C comme chambre standard, ce qui détermine U_+ et U_-. D'après (6.3.2), on a $P(F_I) \cap U_- = \langle U_\alpha \mid \alpha \not\supset C \quad \partial\alpha \supset F_I \rangle$. On veut montrer que $P(F_I) \cap U_-$ est en fait dans $P(-wF_J)$.
Puisque $P(F_I) \cap U_-$ est engendré les sous-groupes radiciels qu'il contient, il suffit de prouver que tout sous-groupe radiciel dans $P(F_I) \cap U_-$ est aussi dans $P(-wF_J)$. Soit α une racine qui vérifie $\alpha \not\supset C$ et $\partial\alpha \supset F_I$. Alors α ne contient pas D, sinon elle contiendrait par convexité $C = \mathrm{proj}_{F_I}(D)$, puisque α contient toutes les galeries minimales entre les chambres qu'elle contient. Dans ce cas,

ou bien aucune chambre de wF_J n'est dans α, et alors $-\alpha \supset wF_J$;
ou bien il existe une chambre D' de wF_J dans α, et alors $\partial\alpha \supset wF_J$.

Dans les deux cas, U_α est dans $P(-wF_J)$, d'après la description des groupes radiciels engendrant les sous-groupes paraboliques.

2. Décomposition brute

On se donne g un élément de $\mathrm{Fix}(\Omega)$. Par hypothèse, g est dans $P(F_I)$. Donc, il s'écrit par la décomposition de Birkhoff de $P(F_I)$ (pour la chambre C) $g = u_-nu_+$, avec u_- dans $U_- \cap P(F_I)$, n dans $N(F_I)$ et u_+ dans U_+. D'après ce qui précède, u_- est dans $U_- \cap$

$P(F_I) \subset P(-wF_J)$. Donc nu_+ est également dans $P(-wF_J)$. Ceci implique: $n_w^{-1}nu_+n_w = (n_w^{-1}nn_w).(n_w^{-1}u_+n_w) \in P(-F_J)$. Or, on a $n_w^{-1}u_+n_w = v_+.v_-$ pour v_- dans U_- et donc dans $P(-F_J)$, et v_+ dans $n_w^{-1}U_+n_w \cap U_+$ (remarque (1.2.3)). Par conséquent, $n_w^{-1}nn_wv_+$ est dans $P(-F_J)$. D'après la décomposition de Birkhoff de $P(-F_J)$, $n_w^{-1}.n.n_w$ est dans le groupe de Weyl $n_w^{-1}N(F_J)n_w$ de $P(-F_J)$. Nécessairement, v_+ est lui aussi dans $P(-F_J)$, et finalement u_+ est dans $P(-wF_J)$. □

On vient de prouver une décomposition suffisante pour répondre à des questions de finitude. $\mathrm{Fix}(\Omega)$ est engendré par H et un nombre fini de sous-groupes radiciels. Elle n'aide pourtant pas à comprendre précisément la structure combinatoire de $\mathrm{Fix}(\Omega)$.

6.3.4. Décomposition de Lévi

Soit Ω une partie équilibrée de **A**. Nous appelons *décomposition de Lévi* du groupe abstrait $\mathrm{Fix}(\Omega)$ une décomposition en produit semi-direct $\mathrm{Fix}(\Omega) = M(\Omega) \ltimes U(\Omega)$, où $M(\Omega)$ est un sous-groupe possédant une donnée radicielle jumelée et $U(\Omega)$ est un sous-groupe nilpotent engendré par des sous-groupes radiciels. Dans le cas Kac-Moody où l'on dispose d'une représentation adjointe, on verra qu'on a bien une décomposition de Lévi au sens des radicaux unipotents et des sous-groupes réductifs. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de décomposition de Lévi.

THÉORÈME. — *On suppose l'hypothèse* (NILP) *vérifiée. Soit Ω une partie d'un appartement jumelé* **A**, *constituée d'une facette sphérique positive F_I et d'une facette sphérique négative $-wF_J$. Alors, le fixateur de Ω possède la décomposition suivante.*

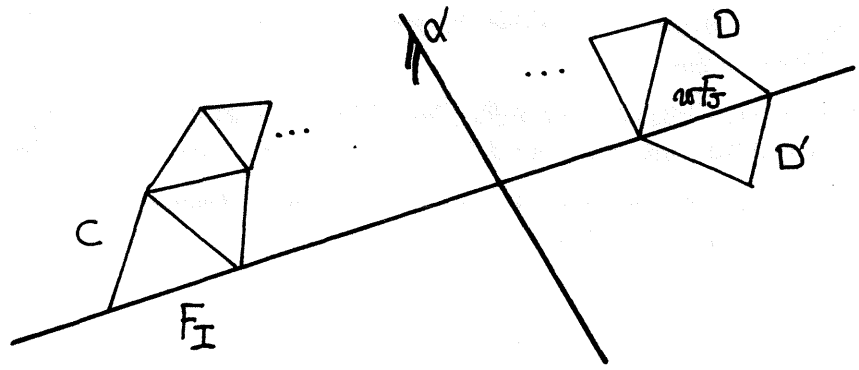
$$\mathrm{Fix}(\Omega) = M(\Omega) \ltimes U(\Omega).$$

$M(\Omega)$ est appelé le facteur de Lévi *de* $\mathrm{Fix}(\Omega)$ *relativement à* **A**. *La décomposition s'appelle la* décomposition de Lévi *de* $\mathrm{Fix}(\Omega)$ *relativement à* **A**.

REMARQUE.— Les propriétés concernant $M(\Omega)$ et $U(\Omega)$ et évoquées ci-dessus ont déjà été démontrées en (6.3.1) dans le cas d'une partie équilibrée quelconque.

Démonstration. On conserve la galerie tendue de D (contenant wF_J dans son adhérence) à C (contenant F_I dans son adhérence). Nous sommes dans un cas particulier de la construction de (5.4.5), où l'on n'a pas à prendre d'isobarycentre puisque $\Omega = F_I \cup -wF_J$ est formée de deux facettes sphériques, avec $\Omega_+ = F_I$ et $\Omega_- = wF_J$. On sait d'ores et déjà que pour toute racine α de $\Phi^u(\Omega)$, $-\alpha$ contient l'opposée $D' = ww_JD$ de D dans le résidu sphérique de wF_J. C'est précisément D' que nous choisissons pour chambre standard. Toutes les racines de $\Phi^u(\Omega)$ sont alors négatives.

Dessin.



1. Déjà, $M(\Omega)$ (respectivement $U(\Omega)$) est inclus dans $\mathrm{Fix}(\Omega)$ car H (éventuellement) et cha-

cun des groupes radiciels qui l'engendrent est dans les deux sous-groupes paraboliques qu'on intersecte pour former $\mathrm{Fix}(\Omega)$.

2. $M(\Omega)$ normalise $U(\Omega)$

En effet, partons de u un élément de U_α pour α dans $\Phi^u(\Omega)$. Pour toute racine β de $\Phi^m(\Omega)$, $\{\alpha;\beta\}$ est une paire prénilpotente de racines (5.4.5). On peut donc appliquer l'axiome du commutateur des données radicielles jumelées, pour obtenir

$$u_\beta U_\alpha u_\beta^{-1} \subset U_\alpha . U_{]\alpha;\beta[}, \quad \text{avec} \quad]\alpha;\beta[\subset \Phi^u(\Omega),\ (5.4.5)(\mathrm{iv}).$$

Ainsi, $u_\beta U_\alpha u_\beta^{-1}$ est dans $U(\Omega)$. Ceci prouve que chacun des groupes U_α (pour α dans $\Phi^m(\Omega)$) normalise $U(\Omega)$. Enfin, H normalise tout groupe radiciel par définition.

3. $M(\Omega)$ et $U(\Omega)$ s'intersectent trivialement

D'après la décomposition de Birkhoff de $M(\Omega)$ relativement à la chambre D', l'intersection $M(\Omega) \cap U(\Omega)$ est dans la grosse cellule de $M(\Omega)$. On a donc

$$M(\Omega) \cap U(\Omega) \quad \subset \quad \Big(\prod_{\Phi^m(\Omega)_{D'}} U_\alpha . H . \prod_{\Phi^m(\Omega)_{D'}} U_{-\alpha} \Big) \cap \Big(\prod_{\Phi^u(\Omega)} U_\alpha \Big).$$

Cette dernière intersection est dans $U(-D')$, et vaut donc

$$\Big(\prod_{\Phi^m(\Omega)_{D'}} U_{-\alpha} \Big) \cap \Big(\prod_{\Phi^u(\Omega)} U_\alpha \Big),$$

qui est triviale par unicité d'écriture dans $U(-D')$. En effet, l'élément de plus grande longueur dans le fixateur de Ω dans W envoie le produit de gauche dans $U(D')$ et laisse celui droite dans $U(-D')$.

4. $M(\Omega)$ et $U(\Omega)$ engendrent $\mathrm{Fix}(\Omega)$

On part de la décomposition brute:

$$\mathrm{Fix}(\Omega) = P(F_I) \cap P(-wF_J) = \big(U_- \cap P(F_I)\big).\big(N(F_I) \cap N(wF_J)\big).\big(U_+ \cap P(-wF_J)\big)$$

pour la chambre standard de (6.3.3). On va regarder un par un les sous-groupes en facteur. Commençons par le sous-groupe de N en nous donnant n dans $N(F_I) \cap N(wF_J)$. Ainsi, n stabilise l'appartement jumelé $\mathbf{A}$, en y opérant vectoriellement. Puisqu'il fixe point par point Ω, il fixe point par point l'extension vectorielle $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(\Omega)$. Donc n est dans $M(\Omega)$ (6.3.1), et $N(F_I) \cap N(wF_J)$ est dans $M(\Omega)$. Enfin, d'après la scholie (6.3.2), les deux autres sous-groupes du produit sont produits de groupes radiciels U_α avec α contenant au moins une chambre de F_I et $-\alpha$ contenant au moins une chambre de wF_J. De telles racines sont dans $\Phi(\Omega)$. □

6.4. Fixateurs de parties équilibrées

Nous pouvons à présent traiter le cas général des fixateurs de parties équilibrées du jumelage géométrique $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$. L'intérêt de cette classe de sous-groupes est qu'elle fournira dans le cas Kac-Moody une large classe de groupes qu'on pourra munir d'une structure de groupe algébrique. Pour l'instant, dans tout ce qui suit, Ω désigne une partie équilibrée de $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$, contenue dans un appartement jumelé $\mathbf{A}$.

6.4.1. Décomposition de Lévi

Les fixateurs de parties équilibrées possèdent comme dans le cas particulier de la section précédente, une décomposition de Lévi définie au moyen des mêmes sous-groupes.

THÉORÈME. — *On suppose l'hypothèse* (NILP) *vérifiée. Soit Ω une partie équilibrée de $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$ contenue dans un appartement jumelé* $\mathbf{A}$. *Alors, le fixateur de Ω possède la décomposition suivante.*

$$\mathrm{Fix}(\Omega) = M(\Omega) \ltimes U(\Omega).$$

$M(\Omega)$ peut à la fois être vu comme le fixateur de l'extension vectorielle $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(\Omega)$ et le groupe engendré par H et les sous-groupes radiciels (relatifs à $\mathbf{A}$*) indexés par les racines dont le mur contient Ω.*
$U(\Omega)$ est le produit interne des groupes radiciels indexés par les racines positives non identiquement nulles sur Ω (dans un ordre quelconque).

$M(\Omega)$ est appelé le facteur de Lévi *de* $\mathrm{Fix}(\Omega)$ *relativement à* $\mathbf{A}$. *Ce produit semi-direct s'appelle la* décomposition de Lévi *de* $\mathrm{Fix}(\Omega)$ *relativement à* $\mathbf{A}$.

Démonstration. Vu l'action de G sur $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$, il suffit de raisonner sur des parties Ω de $\mathbf{A}$, réunions finies de $n \geq 2$ facettes sphériques (avec au moins une facette de chaque signe). On procède en fait à une adaptation des étapes de la section précédente, ce qui permet une démonstration du résultat par récurrence sur le nombre n de facettes formant Ω. L'hypothèse de récurrence (H_n) est la décomposition telle qu'elle s'énonce dans le théorème pour les parties équilibrées qui sont réunion de n facettes. La preuve de (H_2) fait l'objet de la section (6.3). Il s'agit de montrer l'implication $(H_n) \Rightarrow (H_{n+1})$. On se donne Ω_0 une partie équilibrée réunion de n facettes de $\mathbf{A}$ et F une facette, qu'on suppose positive pour fixer les idées.

1. Géométrie

On va à nouveau raisonner dans le seul cône positif $\mathcal{C} \subset \mathbf{A}$, en considérant $(\Omega_0)_+$ la réunion des facettes positives de Ω_0 et $(\Omega_0)_-$ celle des opposées des facettes négatives. Comme en (5.4.5), on peut choisir un point dans chaque facette de $(\Omega_0)_+$ et prendre l'isobarycentre, ce qui fournit un point x_+ de $\mathcal{C}$. On fait la même chose avec $(\Omega_0)_-$ pour obtenir x_-. On avait vu que la droite (x_-x_+) était transverse au mur de chaque racine de $\Phi^u(\Omega_0)$. Ceci montre que la demi-droite ouverte d'origine x_- portée par (x_-x_+) ne contenant pas x_+, est dans $\bigcap_{\alpha\in\Phi^u(\Omega_0)} -\alpha$. Ainsi $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(\Omega) \cap \bigcap_{\alpha\in\Phi^u(\Omega_0)} -\alpha$ est non vide. On choisit donc une chambre relative $F_0^\natural$ du sous-espace générique $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(\Omega_0)$, contenue dans cette intersection de racines, et on note F_0 la facette telle que $F_0^\natural = F_0 \cap \mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(\Omega_0)$. On considère alors une galerie tendue de F_0 à F, de début C_0 (avec $\overline{C_0} \supset F_0$) et de fin D (avec $\overline{D} \supset F$).

2. $U(C_0) \cap \mathrm{Fix}(\Omega_0)$ est le produit interne des groupes radiciels qu'il contient

En effet, par hypothèse de récurrence, $\mathrm{Fix}(\Omega_0)$ possède une décomposition de Lévi:

$$\mathrm{Fix}(\Omega_0) = M(\Omega_0) \ltimes U(\Omega_0).$$

En outre, on sait que $M(\Omega_0)$ est aussi $M(F_0)$. On dispose donc d'une décomposition de Birkhoff par rapport à C_0:

$$M(F_0) = (\prod_{\Phi^m(F_0)_{C_0}} U_\alpha) H (\prod_{\Phi^m(F_0)_{C_0}} U_{-\alpha}) \sqcup \dots$$

Les termes non explicités sont indexés par un élément non trivial de $W(F_0)$, et appartiennent à des doubles classes de Birkhoff de G (pour C_0) disjointes de la grosse cellule. On obtient ainsi une décomposition de $\mathrm{Fix}(\Omega_0)$:

$$\mathrm{Fix}(\Omega_0) = (\prod_{\Phi^m(F_0)_{C_0}} U_\alpha) H (\prod_{\Phi^m(F_0)_{C_0}} U_{-\alpha}) U(\Omega_0) \sqcup \dots$$

qu'on appellera *décomposition de Birkhoff de* $\mathrm{Fix}(\Omega_0)$. On peut dire la même chose pour les termes de cette décomposition que pour ceux de la précédente car $U(\Omega_0)$ est tout entier dans $U(-C_0)$, précisément par choix et définition de C_0 comme chambre standard. Par conséquent, $U(C_0) \cap \mathrm{Fix}(\Omega_0)$ ne rencontre que la double classe de Birkhoff qu'on a explicitée. Par unicité d'écriture, on a finalement:

$$(*) \quad U(C_0) \cap \mathrm{Fix}(\Omega_0) = \prod_{\alpha \in \Phi^m(F_0)_{C_0}} U_\alpha.$$

3. $U(C_0) \cap \mathrm{Fix}(\Omega_0)$ est inclus dans $P(F)$

L'extension vectorielle V_0 de la facette F_0 dans $\mathbf{A}$ est l'intersection des murs qui contiennent F_0. Par $(*)$, il suffit de montrer que chacun des groupes U_α pour α dans $\Phi^m(F_0)_{C_0}$ est dans $P(F)$. On se donne donc une telle racine α. On peut alors distinguer deux cas. Si F est dans V_0, alors une racine dans $\Phi^m(F_0)$ contient automatiquement F, auquel cas U_α est dans $M(F)$ et *a fortiori* dans $P(F)$. Sinon, puisque V_0 est une réunion de facettes, on a $V_0 \cap F = \varnothing$. Nécessairement α contient F, car si tel n'était pas le cas, on aurait $-\alpha \sqcup \partial\alpha \supset F$: puisque $-\alpha$ est close, elle contiendrait aussi la projection $\mathrm{proj}_{F_0} D = C_0$, ce qui est exclu par définition de $\Phi^m(F_0)_{C_0}$.

4. Décomposition brute $\mathrm{Fix}(\Omega) = \big(U(C_0) \cap \mathrm{Fix}(\Omega)\big).N(\Omega).\big(U(-C_0) \cap \mathrm{Fix}(\Omega)\big)$

Soit g dans $\mathrm{Fix}(\Omega) = P(F) \cap \mathrm{Fix}(\Omega_0)$. g possède une écriture relative à la décomposition de Birkhoff de $\mathrm{Fix}(\Omega_0)$: $g = u_+ n u_-$. Par ce qui précède, u_+ (et donc nu_-) est dans $P(F) \cap \mathrm{Fix}(\Omega_0)$. On peut écrire la facette F comme transformée wF_J d'une facette standard ($F_J \subset \overline{C}_0$). On choisit n_w dans N relevant w modulo H. Alors $n_w n u_- n_w^{-1}$ est dans $P(F_J)$, soit $n_w n n_w^{-1} n_w u_- n_w^{-1}$ est dans $P(F_J)$. On peut toujours écrire $n_w u_- n_w^{-1} = v_- v_+$, avec v_- dans $U(-C_0)$ et v_+ dans $U(C_0)$. Ainsi, $n_w n n_w^{-1} v_-$ est dans $P(F_J)$. En outre, par la décomposition de Birkhoff pour ce sous-groupe parabolique, on doit avoir $n_w n n_w^{-1}$ dans $P(F_J)$. Ceci impose que n est dans $N(F)$ et v_- dans $P(F_J)$. Finalement, n et u_- sont tous les deux dans $P(F)$ et donc dans $\mathrm{Fix}(\Omega_0) \cap P(F)$.

5. $U(-C_0) \cap \mathrm{Fix}(\Omega)$ est produit interne des groupes radiciels qu'il contient

Pour finir exactement comme en (6.3.4), il reste à voir que $U(-C_0) \cap \mathrm{Fix}(\Omega)$ est produit interne des groupes radiciels qu'il contient. On commence par regarder $U(-C_0) \cap \mathrm{Fix}(\Omega_0)$, on intersectera ensuite avec $P(F)$. On considère à nouveau la décomposition de Birkhoff de $\mathrm{Fix}(\Omega_0)$:

$$\mathrm{Fix}(\Omega_0) = (\prod_{\Phi^m(F_0)_{C_0}} U_\alpha) H (\prod_{\Phi^m(F_0)_{C_0}} U_{-\alpha}) U(\Omega_0) \sqcup \ldots,$$

qui fournit déjà $U(-C_0) \cap \mathrm{Fix}(\Omega_0) = (\prod_{\Phi^m(F_0)_{C_0}} U_{-\alpha}) U(\Omega_0)$, ce qui vaut encore

$$(\prod_{\Phi^m(F_0)_{C_0}} U_{-\alpha})(\prod_{\Phi^u(\Omega_0)} U_\alpha).$$

On veut voir que $\varphi := -\Phi^m(F_0)_{C_0} \sqcup \Phi^u(\Omega_0)$ est une partie nilpotente de racines. φ est contenue dans $\Phi(\Omega_0)$ pour laquelle on peut utiliser (5.4.5). Aucune racine de φ ne contient C_0 par construction. Il s'agit de voir que les racines de φ ont une chambre en commun. Pour cela, on fait le même type de construction qu'en 1. pour obtenir cette fois une chambre relative $(F_0')^\natural$ dans $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(\Omega) \cap \bigcap_{\alpha \in \Phi^u(\Omega_0)} \alpha$. On tend une galerie de C_0 à F_0', de fin D', et on appelle C_0' l'opposée de D' dans le résidu sphérique de F_0'. Par construction, on sait déjà que toute racine α de $\Phi^u(\Omega_0)$ contient C_0'. On se donne alors α dans $-\Phi(F_0)^m_{C_0}$. $-\alpha$ contient C_0, donc D' par convexité. Puisque $\partial\alpha$ coupe F_0, $-\alpha$ ne peut contenir aussi l'opposée C_0'. Ainsi, c'est la racine α qui contient C_0'. On vient donc de montrer que toute racine de φ contient C_0'; autrement dit, φ est prénilpotente. φ est également close. En effet, si α et β sont dans $\Phi^u(\Omega_0)$ (respectivement $-\Phi^m(F_0)_{C_0}$), $[\alpha;\beta]$ reste dans cette partie parce qu'elle est close, d'après (5.4.5)(ii) (respectivement (5.4.5)(vi)). Le cas mixte où α est dans $-\Phi^m(F_0)_{C_0}$ et β dans $\Phi^u(\Omega_0)$ est reglé par (5.4.5)(i).

Par (NILP), on peut ordonner φ de façon à avoir

$$U(-C_0) \cap \mathrm{Fix}(\Omega_0) = \Big(\prod_{\substack{\alpha \in \varphi \\ \alpha \sqcup \partial\alpha \supset F}} U_\alpha\Big).\Big(\prod_{\substack{\alpha \in \varphi \\ -\alpha \supset F}} U_\alpha\Big).$$

En intersectant avec $P(F)$, il vient

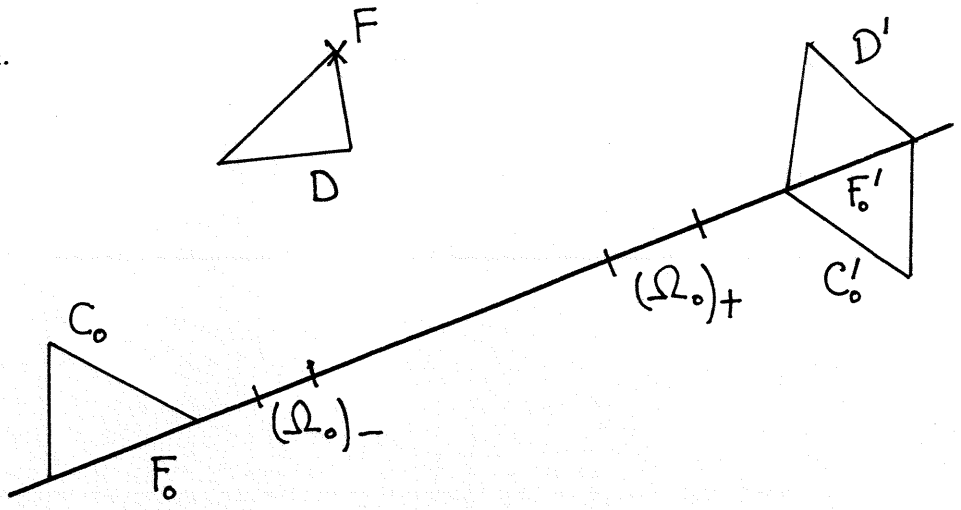
$$U(-C_0) \cap \mathrm{Fix}(\Omega) = \Big(\prod_{\substack{\alpha \in \varphi \\ \alpha \sqcup \partial\alpha \supset F}} U_\alpha\Big),$$

et toutes les racines intervenant dans le produit sont dans $\Phi(\Omega)$.

6. Décomposition de Lévi

À ce stade, on peut raisonner comme en (6.3.4) à partir de la décomposition brute. Pour toute racine α dans $\Phi^u(\Omega)$ (respectivement $\Phi^m(\Omega)$) U_α fixe Ω. Par conséquent, $U(\Omega)$ (respectivement $M(\Omega)$) est dans $\mathrm{Fix}(\Omega)$ (respectivement car H est clairement dans $\mathrm{Fix}(\Omega)$).
$M(\Omega)$ normalise $U(\Omega)$ pour la même raison qu'au point 2. de la démonstration de (6.3.4). Comme au point 3. de cette référence, on voit que l'intersection $M(\Omega) \cap U(\Omega)$ est dans $U(-C_0)$, et que finalement elle est triviale.
La décomposition brute montre que $N(\Omega)$ est dans $\mathrm{Fix}(\Omega)$. Le point 3. montre que $U(C_0) \cap \mathrm{Fix}(\Omega) = U(C_0) \cap \mathrm{Fix}(\Omega_0)$ est produit de groupes radiciels indexés par des racines de $\Phi(\Omega)$. Le point 5. montre la même chose pour $U(-C_0) \cap \mathrm{Fix}(\Omega)$. □

Dessin.



COROLLAIRE. — *Sous l'hypothèse* (NILP), *pour toute partie équilibrée* Ω *de* $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$ *contenue dans l'appartement jumelé* $\mathbf{A}$, $\mathrm{Fix}(\Omega)$ *est le fixateur de l'enveloppe convexe* $\mathrm{conv}_{\mathbf{A}}(\Omega)$.

Démonstration. Puisque $\mathrm{conv}_{\mathbf{A}}(\Omega)$ contient Ω, il suffit de montrer que $\mathrm{Fix}(\Omega)$ fixe l'enveloppe convexe $\mathrm{conv}_{\mathbf{A}}(\Omega)$. Déjà, $M(\Omega)$ fixe l'extension vectorielle de Ω dans $\mathbf{A}$, qui contient $\mathrm{conv}_{\mathbf{A}}(\Omega)$. Soit maintenant U_α un groupe radiciel avec α dans $\Phi^u(\Omega)$. Par définition de la partie de racines, on a $\alpha \sqcup \partial\alpha \supset \Omega$, et par convexité $\alpha \sqcup \partial\alpha \supset \mathrm{conv}_{\mathbf{A}}(\Omega)$. On a fini puisque U_α fixe $\alpha \sqcup \partial\alpha$. □

6.4.2. Exemple relatif

Voici un exemple d'illustration de la décomposition de Lévi d'un fixateur de partie équilibrée. Le résultat sera utile à la descente des groupes de Kac-Moody. La situation que l'on considère est l'inclusion d'un sous-espace générique $\mathbf{A}^\natural$ dans l'appartement jumelé $\mathbf{A}$ de $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$. On se donne en outre $\alpha^\natural$ une racine relative réelle par rapport à $\mathbf{A}^\natural$, de demi-appartement relatif associé $D(\alpha^\natural)$. On sait (5.5.2) qu'on peut se donner une chambre relative $F^\natural$ et une cloison relative réelle $E^\natural$ qui lui est adhérente, vérifiant en outre:

$$\overline{D(\alpha^\natural)} = \overline{\mathrm{conv}}_{\mathbf{A}}(F^\natural \cup -E^\natural) \quad \text{et} \quad \partial\alpha^\natural = \mathrm{conv}_{\mathbf{A}}(E^\natural \cup -E^\natural).$$

La réunion $\Omega^\natural := F^\natural \cup -E^\natural$ est une partie équilibrée dans $\mathbf{A}$. On regarde son fixateur. D'une part, on sait que c'est le fixateur de $\mathrm{conv}_{\mathbf{A}}(\Omega^\natural)$, d'où $\mathrm{Fix}(\Omega^\natural) = \mathrm{Fix}(D(\alpha^\natural))$. D'autre part, il existe une décomposition de Lévi de $\mathrm{Fix}(\Omega^\natural)$, relativement à $\mathbf{A}$:

$$\mathrm{Fix}(\Omega^\natural) = M(\Omega^\natural) \ltimes U(\Omega^\natural).$$

$M(\Omega^\natural)$ est le fixateur de l'extension vectorielle de $\Omega^\natural$. Cette extension vectorielle contient une chambre relative, donc est le sous-espace générique $\mathbf{A}^\natural$. Ainsi, $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(\Omega^\natural) = \mathbf{A}^\natural$ et $M(\Omega^\natural)$ est le fixateur de $\mathbf{A}^\natural$. Par ailleurs, $U(\Omega^\natural)$ est égal au groupe $U\big(\mathrm{conv}_{\mathbf{A}}(\Omega^\natural)\big) = U(D(\alpha^\natural))$. Ce sous-groupe est le produit interne dans un ordre quelconque des groupes radiciels indexés par la partie nilpotente de racines $\Phi_{\alpha^\natural}$. On peut résumer tout cela dans le lemme suivant.

LEMME. — *Le fixateur de tout demi-appartement relatif réel* $D(\alpha^\natural)$ *de* $\mathbf{A}^\natural$ *est le produit semi-direct du fixateur de* $\mathbf{A}^\natural$ *et du sous-groupe* $U(D(\alpha^\natural))$, *produit interne (dans tout ordre) des groupes radiciels indexés par les racines de* $\mathbf{A}$ *de trace* $D(\alpha^\natural)$ *sur* $\mathbf{A}^\natural$. □

SECONDE PARTIE

FONCTEURS DE TITS, GROUPES DE KAC-MOODY DÉPLOYÉS ET PRESQUE DÉPLOYÉS

7. Algèbres de type Kac-Moody

Il s'agit de présenter les algèbres de Lie de Kac-Moody, en les voyant presque exclusivement comme les objets à intégrer pour obtenir les groupes qui nous intéressent. Autrement dit, il ne sera pas question de détailler les propriétés et utilisations remarquables de ces algèbres de Lie. On a besoin de deux séries de préliminaires. L'une concerne les *données radicielles de Kac-Moody* et *matrices de Cartan généralisées* qui conditionnent la combinatoire de tous les objets définis en théorie de Kac-Moody, groupes inclus. L'autre axiomatise deux types d'algèbres de Lie auxquels nous aurons affaire, en soulignant le rôle des poids et graduations. Pour le cas particulier des algèbres de Kac-Moody, on met en évidence des $\mathbf{Z}$-formes et des automorphismes dont l'existence est cruciale pour les définitions des groupes de Kac-Moody. La référence pour les algèbres de Kac-Moody classiques est [Kac90]; des généralisations utiles sont présentées dans [Moo-Pia95]. Des constructions d'objets en amont de la mise en place de ces algèbres de Lie sont effectuées dans [Tit87] et [Tit88].

Dans tout ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne un corps de caractéristique 0.

7.1. Données radicielles de Kac-Moody

Nous commençons par définir des objets qui seront utiles aussi bien à la définition des algèbres de Lie que des groupes de Kac-Moody. Les deux définitions préliminaires vont donner naissance à un vocabulaire identique, à des constructions parallèles et ayant chacune son utilité. La comparaison des notions sera faite à la fin. Les deux sous-sections qui suivent sont présentées par exemple dans [Tit88]. Les objets «libres» de Kac-Moody sont introduits et étudiés en détail dans [Kac90]. On verra en (7.1.4) qu'il est utile de voir ces objets libres comme des cas (très) particuliers de l'axiomatique de N. Bardy ([Bar96]).

7.1.1. Matrice de Cartan généralisée. Donnée radicielle de Kac-Moody

Les *matrices de Cartan généralisées* forment l'ingrédient essentiel de la définition d'une *donnée radicielle de Kac-Moody*. À partir d'une matrice de ce type, on peut élaborer le vocabulaire des objets radiciels libres.

DÉFINITION. — *Une* matrice de Cartan généralisée *est une matrice entière* $A = [A_{st}]_{s,t\in S}$ *qui vérifie:*

(i) *Pour tout* s *de* S, A_{ss} *vaut* 2.
(ii) *Pour tous* $s \neq t$ *de* S, A_{st} *est négatif ou nul.*
(iii) *Pour tous* s *et* t *de* S, A_{st} *est nul si et seulement si* A_{ts} *l'est.*

On dit que A *est* symétrisable *(respectivement est une* matrice de Cartan*) si elle est en outre produit d'une matrice diagonale et d'une matrice symétrique (respectivement symétrique définie positive).*

Les données radicielles de Kac-Moody vont paramétrer la construction des groupes de Kac-Moody, ou plus précisément des foncteurs de Tits constructifs.

DÉFINITION. — *Une* donnée radicielle de Kac-Moody *est un quintuplet*

$$\mathcal{D} = \big(S, A, \Lambda, (c_s)_{s\in S}, (h_s)_{s\in S}\big),$$

où S *est un ensemble indexant une matrice de Cartan généralisée* A, Λ *est un* $\mathbf{Z}$*-module libre (dont on note* $\Lambda^\vee$ *le* $\mathbf{Z}$*-dual) et les éléments* c_s *de* Λ *et* h_s *de* $\Lambda^\vee$ *sont en outre assujettis aux relations suivantes.*

$$\langle c_s \mid h_t\rangle = A_{ts} \quad \text{pour tous } s \text{ et } t \text{ de } S.$$

Si A *est une matrice de Cartan, on parlera plutôt de* donnée radicielle de Chevalley-Demazure.

7.1.2. Quelques specimens

Pour A matrice de Cartan généralisée fixée, on peut distinguer quelques données radicielles de Kac-Moody remarquables.

La *donnée radicielle libre universelle* $\mathcal{D}^A_{\mathrm{un}}$ est obtenue en considérant les $\mathbf{Z}$-modules $\Lambda := \bigoplus_{s\in S} \mathbf{Z}u_s \oplus \bigoplus_{s\in S} \mathbf{Z}v_s$ et $\Lambda^\vee := \bigoplus_{s\in S} \mathbf{Z}u_s{}^\vee \oplus \bigoplus_{s\in S} \mathbf{Z}v_s{}^\vee$, mis en dualité par la matrice définie par blocs $\begin{pmatrix} I_{\#S} & A \\ 0 & I_{\#S} \end{pmatrix}$ et pour lesquels on pose $c_s := u_s$ et $h_s := v_s{}^\vee$. Dans ce cas, ces deux familles de vecteurs sont libres.

La *donnée radicielle adjointe minimale* $\mathcal{D}^A_{\mathrm{min}}$ est obtenue en considérant le $\mathbf{Z}$-module $\Lambda := \bigoplus_{s\in S} \mathbf{Z}e_s$, la base duale $(e_s{}^\vee)_{s\in S}$ de $\Lambda^\vee$, pour lesquels on pose $c_s := e_s$ et $h_s := \sum_{t\in S} A_{st}e_t{}^\vee$.

La *donnée radicielle adjointe maximale* $\mathcal{D}^A_{\mathrm{max}}$ est obtenue en considérant le $\mathbf{Z}$-module $M := \bigoplus_{s\in S} \mathbf{Z}e_s$, la base duale $(e_s{}^\vee)_{s\in S}$ de $M^\vee$, pour lesquels on pose $c_t := \sum_{s\in S} A_{st}e_s$, $\Lambda := \sum_{s\in S} \mathbf{Z}c_s$ et $h_s := e_s{}^\vee|_\Lambda$.

La *donnée radicielle simplement connexe* $\mathcal{D}^A_{\mathrm{sc}}$ est obtenue en considérant le $\mathbf{Z}$-module $\Lambda := \bigoplus_{s\in S} \mathbf{Z}e_s$, la base duale $(e_s{}^\vee)_{s\in S}$ de $\Lambda^\vee$, pour lesquels on pose $c_s := \sum_{t\in S} A_{ts}e_t$ et $h_s := e_s{}^\vee$.

La terminologie pour les deux dernières données radicielles de Kac-Moody s'inspire de celle concernant les groupes semi-simples déployés adjoints et simplement connexes (au sens des groupes algébriques) déterminés par une matrice de Cartan A et un corps $\mathbf{K}$.

Pour toute donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D} = \big(S, A, \Lambda, (c_s)_{s\in S}, (h_s)_{s\in S}\big)$, on notera $\mathrm{ad}(\mathcal{D})$ la donnée radicielle de Kac-Moody obtenue en remplaçant Λ par le réseau Λ^{ad} engendré par $\{c_s\}_{s\in S}$ et en considérant les restrictions des h_s à Λ^{ad}; en particulier, $\mathrm{ad}(\mathcal{D}^A_{\mathrm{sc}}) = \mathcal{D}^A_{\max}$ et $\mathrm{ad}(\mathcal{D}^A_{\mathrm{un}}) = \mathcal{D}^A_{\min}$. On parlera de *donnée radicielle adjointe* pour toute donnée radicielle de Kac-Moody obtenue de cette façon à partir d'une autre donnée radicielle de Kac-Moody.

7.1.3. Groupes de Weyl et système de racines d'une donnée radicielle de Kac-Moody

On peut associer tout un vocabulaire et des notations à la donnée radicielle $\mathcal{D}$.

DÉFINITION. — (i) $\Pi := \{c_s\}_{s\in S}$ *est la* base *de* $\mathcal{D}$; $\Pi^\vee := \{h_s\}_{s\in S}$ *en est* la cobase.
(ii) $Q(\mathcal{D}) := \sum_{s\in S} \mathbf{Z}c_s \subset \Lambda$ *est le* réseau radiciel *de* $\mathcal{D}$. *On notera aussi* $Q(\mathcal{D})_+ := \sum_{s\in S} \mathbf{N}c_s \subset \Lambda$.
(iii) $Q(\mathcal{D})^\vee := \sum_{s\in S} \mathbf{Z}h_s \subset \Lambda$ *est le* réseau des coracines *de* $\mathcal{D}$.

On peut définir un groupe d'automorphismes $\mathbf{Z}$-linéaires, engendré par des involutions fixant un hyperplan.

DÉFINITION. — (i) *Le* groupe de Weyl $\overline{W}$ *de* $\mathcal{D}$ *est le groupe des automorphismes* $\mathbf{Z}$*-linéaires de* Λ *engendré par les* $\bar{s} \in \mathrm{Aut}(\Lambda)$ *pour:* $\bar{s} : c \mapsto c - \langle c \mid h_s\rangle c_s$ $(s \in S)$.
Le système de racines (réelles) *de* $\mathcal{D}$ *est la partie* Σ *de* $Q(\mathcal{D})$ *définie par* $\Sigma := \overline{W}.\Pi$, *ses éléments sont appelés les* racines (réelles) *de* $\mathcal{D}$.
(ii) *Le* groupe de Weyl dual $\overline{W}^\vee$ *de* $\mathcal{D}$ *est le groupe des automorphismes* $\mathbf{Z}$*-linéaires de* $\Lambda^\vee$ *engendré par les* $\bar{s}^\vee \in \mathrm{Aut}(\Lambda^\vee)$ *pour:* $\bar{s}^\vee : h \mapsto h - \langle c_s \mid h\rangle h_s$ $(s \in S)$.
Le système de coracines (réelles) *de* $\mathcal{D}$ *est la partie* $\Sigma^\vee$ *de* $Q(\mathcal{D})^\vee$ *définie par* $\Sigma^\vee := \overline{W}^\vee.\Pi^\vee$, *ses éléments sont appelés les* coracines (réelles) *de* $\mathcal{D}$.

Une pathologie possible associée à cette définition est la possibilité d'obtenir un système de racines fini, alors que le système de racines de l'algèbre de Kac-Moody correspondante est infini. C'est par exemple le cas des matrices affines qui peuvent participer à des données radicielles de Kac-Moody où ni la base ni la cobase ne sont libres (voir le cas de la donnée radicielle de Kac-Moody de $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K}[t, t^{-1}])$ dans [Rém99b]).

7.1.4. Système de racines (à base) libre d'une matrice de Cartan généralisée

Parallèlement à ce qu'on vient de faire, on peut introduire des objets ne dépendant que de A, notamment un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\bigoplus_{s\in S} \mathbf{Q}a_s$ (respectivement $\bigoplus_{s\in S} \mathbf{Q}a_s{}^\vee$) sur les symboles a_s (respectivement $a_s{}^\vee$), contenant le réseau

$$Q := \bigoplus_{s\in S} \mathbf{Z}a_s \text{ (respectivement } Q^\vee := \bigoplus_{s\in S} \mathbf{Z}a_s{}^\vee).$$

DÉFINITION. — (i) *Q est appelé le* réseau radiciel *de A, $Q^\vee$ le* réseau des coracines.
(ii) *Le* groupe de Weyl *de la matrice de Cartan généralisée A est le groupe de Coxeter*

$$W := \langle s \mid (st)^{m_{st}} = 1 \rangle,$$

pour m_{st} valant $2, 3, 4, 6$ ou ∞ suivant que $A_{st}A_{ts}$ vaut $0, 1, 2, 3$ ou strictement plus que 3.
(iii) *W opère sur Q par $s.a_t = a_t - A_{st}a_s$, ce qui permet de définir le* système de racines (à base) libre *Δ^{re} de A par $\Delta^{re} := W.\{a_s\}_{s\in S}$. W opère sur $Q^\vee$ par $s.a_t{}^\vee = a_t{}^\vee - A_{ts}a_s{}^\vee$.*

Justification. On va voir que Δ^{re} est précisément le système de racines d'une $\mathbf{Q}$-algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ attachée à une donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D}$, et justifier l'existence des actions de W sur Q et $Q^\vee$ du point (iii).

Les objets Q, W, ... trouvent leur origine dans le contexte des *algèbres de Kac-Moody classiques*. Les algèbres de Kac-Moody classiques sont définies en plusieurs temps. On s'intéresse ici à la première étape. On se donne $A = [A_{st}]_{s,t\in S}$ une matrice de Cartan généralisée. On commence par construire une *réalisation*, c'est-à-dire un triplet $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ vérifiant des conditions très proches des axiomes d'une donnée radicielle de Kac-Moody. En fait, la principale différence est que $\mathfrak{h}$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel, ce qui permet de parler de dimension et de requérir $\#S - \mathrm{rang}A = \dim_{\mathbf{Q}}\mathfrak{h} - \#S$. Cela dit, on demande en outre:

$$\Pi \text{ est une partie libre du dual } \mathfrak{h}^*,$$

$$\Pi^\vee \text{ est une partie libre de } \mathfrak{h},$$

$$\text{et} \quad \forall s,t\in S \quad \langle a_s{}^\vee \mid a_t \rangle = A_{st}.$$

Le point de départ de la construction de ces algèbres de Lie est qu'un tel triplet existe, à isomorphisme non unique près ([Kac90], proposition (1.1) p.2). Cette construction, d'emblée sur le corps $\mathbf{Q}$, permet malgré tout de faire exister dans le dual $\mathfrak{h}^*$ le réseau radiciel Q précédemment introduit. On définit alors un groupe d'automorphismes linéaires $W(A)$ de $\mathfrak{h}^*$, engendré par les $\#S$ transformations $r_s : \lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda \mid a_s{}^\vee \rangle a_s$. Chaque r_s est clairement d'ordre 2, mais c'est un fait non trivial que $W(A)$ vérifie la condition d'échange ([Kac90], lemme (3.11) p.39) et est en fait le groupe de Coxeter W de la définition ci-dessus pour le système de générateurs $\{r_s\}_{s\in S}$ ([Kac90], proposition (3.13) p.41). Pour prouver ces propriétés, on a recours à des considérations géométriques qui font intervenir un cône dans $\mathfrak{h}_{\mathbf{R}} := \mathfrak{h} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$. C'est à ce stade qu'on retrouve le cône de Tits du chapitre 5. En effet, le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $Q \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ n'est autre que le $\mathbf{R}$-espace vectoriel V du chapitre 5, et le cône de Tits dans V^* est le quotient par l'orthogonal $Q^\perp$ de Q du cône de Tits X de [Kac90], p.39:

$$X/Q^\perp \cong \overline{\mathcal{C}}.$$

On peut donc mettre en bijection Φ et Δ^{re} dans le cas d'un groupe de Coxeter qui est le groupe de Weyl d'une matrice de Cartan généralisée – voir (5.1.2). On verra que ce lien permettra d'utiliser des propriétés combinatoires riches sur Δ^{re}, issues d'interprétations en termes d'espaces-poids.

Le travail sur les racines peut tout à fait être effectué sur les coracines, et justifier l'action de W sur $Q^\vee$. Les représentations obtenues sont contragrédientes l'une de l'autre. Un lien entre ces deux constructions est la possibilité de définir la *coracine $a^\vee$ associée* à une racine a, en posant $a^\vee := wa_s{}^\vee$ si $a = wa_s$. On peut montrer que cette définition ne dépend pas de l'écriture $a = wa_s$. □

REMARQUE. — Passons maintenant aux systèmes de racines à base libre au sens de [Bar96]. On vient de relier les objets libres aux algèbres de Kac-Moody, c'est-à-dire à la référence [Kac90]. Il s'avère que ces algèbres de Lie rentrent dans le cadre des algèbres de Kac-Moody-Borcherds de [Bar96], chapitre 1. Pour ces algèbres de Lie, on sait en vertu de [Bar96], proposition (1.2.13) p.36 que le système de racines vérifie les axiomes des systèmes de racines à base libre ([Bar96], section (2.2) p.52), et donc ceux des *systèmes générateurs de racines* ([Bar96], section (4.1) p.79). On est en fait dans le cas où il n'y a pas de racine imaginaire dans la base, et où le système de racines est réduit, c'est-à-dire que la seule relation de proportionnalité non triviale possible entre racines est l'opposition.

On peut résumer une partie de la justification et de la remarque de la façon suivante.

SCHOLIE. — *Soient A une matrice de Cartan généralisée indexée par S, Q le réseau des racines contenu dans l'espace $\mathfrak{h}^*$ de la réalisation de Kac de A, et $V := Q \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$. Pour chaque s de S, on définit une réflexion r_s de V par $\lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda \mid a_s^\vee \rangle a_s$ (en particulier $r_s.a_t = a_t - A_{st}a_s$). Alors, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_A := (S, V, (a_s)_{s\in S}, (r_s)_{s\in S})$ est une base de racines au sens de* (6.2.4)*; Δ^{re} en est le système de racines, W en est le groupe de Weyl.*

Il s'impose alors d'adopter la série de conventions suivante.

CONVENTION. — *Travailler en théorie de Kac-Moody implique les conventions suivantes.*

1. On convient de remplacer la lettre Φ par le symbole Δ^{re} et toutes les lettres grecques désignant des racines par des lettres romaines.

2. On fera systématiquement usage du vocabulaire et des notations des bases de racines et des systèmes de racines entiers (6.2.4)*. Ainsi, sauf mention expresse du contraire, les intervalles associés à une paire de racines $\{a;b\}$ sont les suivants.*

$$[a;b]_{\mathbf{N}} := (\mathbf{N}a + \mathbf{N}b) \cap \Delta^{re} \text{ et }]a;b[_{\mathbf{N}} := [a;b]_{\mathbf{N}} \setminus \{a;b\},$$
$$[a;b[_{\mathbf{N}} := [a;b]_{\mathbf{N}} \setminus \{b\} \text{ et }]a;b]_{\mathbf{N}} := [a;b]_{\mathbf{N}} \setminus \{a\}.$$

Une illustration de cette convention est par exemple que la réflexion relative à la racine a sera notée s_a. On va maintenant s'intéresser à la notion de décomposabilité intervenant dans le théorème de conjugaison des bases (7.4.2).

DÉFINITION. — (i) *Une partie de racines $\Xi \subset \Delta^{re}$ est dite* décomposable *si elle admet une partition non triviale $\Xi = \Xi' \sqcup \Xi''$, de telle sorte que pour toute paire a, b de racines avec $a \in \Xi'$ et $b \in \Xi''$, on ait $s_a.b = b$ (et $s_b.a = a$). Dans le cas contraire et si Ξ est non vide, elle est dite* indécomposable.
(ii) *Les* composantes connexes *de S sont les ensembles de sommets des composantes connexes du diagramme de Dynkin du groupe de Weyl W. On désigne par $\Pi_0(S)$ l'ensemble des composantes connexes de S.*
(iii) *On désigne par $\Pi_0(S)_{\mathrm{nsph}}$ l'ensemble des composantes connexes de $\Pi_0(S)$ non sphériques et par $\Pi_0(S)_{\mathrm{sph}} := \Pi_0(S) \setminus \Pi_0(S)_{\mathrm{nsph}}$ l'ensemble des composantes connexes sphériques de S.*
(iv) *Si J est une composante connexe de S, on note $\Delta^{re}(J)$ l'ensemble des racines de Δ^{re} combinaisons linéaires des a_s pour s dans J.*

Le résultat qui suit est facile et attendu.

LEMME. — (i) *Si J est une composante connexe de S, alors $\Delta^{re}(J)$ est une partie indécomposable de racines.*
(ii) *On a la décomposition suivante:*

$$\Delta^{re} = \bigsqcup_{J\in\Pi_0(S)} \Delta^{re}(J),$$

et toute partie indécomposable de Δ^{re} est incluse dans une partie $\Delta^{re}(J)$ avec J dans $\Pi_0(S)$.

Démonstration. Tout d'abord, si J est une composante connexe de S et si on note W_J le sous-groupe de W engendré par les s de J, alors la décomposition de W en produit direct $W = \prod_{J\in\Pi_0(S)} W_J$ et la définition de la décomposabilité impliquent que $W.\{a_s\}_{s\in J} = W_J.\{a_s\}_{s\in J} = \Delta^{re}(J)$.

Preuve de (i). Supposons au contraire que $\Delta^{re}(J)$ se décompose non trivialement en $\Xi = \Xi' \sqcup \Xi''$ comme dans la définition de décomposabilité. $\{a_s\}_{s\in J}$ qui est indécomposable est dans une des deux parties, par exemple Ξ'. Alors $W_J.\{a_s\}_{s\in J} \subset \Xi'$, ce qui implique $\Delta^{re}(J) = \Xi'$, qui est impossible.

Preuve de (ii). Par la remarque préliminaire, on a

$$\Delta^{re} = W.\Big(\bigsqcup_{J\in\Pi_0(S)} \{a_s\}_{s\in J}\Big) = \bigsqcup_{J\in\Pi_0(S)} W.\{a_s\}_{s\in J}$$

$$= \bigsqcup_{J\in\Pi_0(S)} W_J.\{a_s\}_{s\in J} = \bigsqcup_{J\in\Pi_0(S)} \Delta^{re}(J).$$

La seconde assertion provient de ce que pour deux parties J et J' distinctes dans $\Pi_0(S)$, on a

$$\forall a\in\Delta^{re}(J) \quad \forall b\in\Delta^{re}(J') \quad s_a b = b \quad \text{et} \quad s_b a = a.$$

□

On verra aussi la notion de *base* qui permettra la définition des sous-groupes de Borel des groupes de Kac-Moody (7.4.2). On va d'ailleurs s'intéresser dans les chapitres suivants à la combinatoire de sous-groupes radiciels et de certaines sous-algèbres qui peuvent toujours être indexés par des parties de l'ensemble des racines réelles d'un système à base libre Δ^{re}.

7.1.5. Lien entre les deux constructions. Applications caractère et cocaractère

Il s'agit à présent de relier ces deux constructions, celle associée à la donnée radicielle de Kac-Moody et celle – libre – dépendant seulement de la matrice de Cartan généralisée. On a évidemment des flèches canoniques

$$\begin{array}{rcl} c : Q \twoheadrightarrow Q(\mathcal{D}) & \text{et} & h : Q^\vee \twoheadrightarrow Q(\mathcal{D})^\vee \\ a_s \mapsto c_s & \text{et} & a_s{}^\vee \mapsto h_s, \end{array}$$

avec lesquelles s'expriment le lien cherché.

LEMME. — (i) *Il existe un unique morphisme de groupes surjectif:* $\tau : W \twoheadrightarrow \overline{W}$ *determiné par* $\tau(s) = \bar{s}$, *pour tout* s *de* S. *Pour tout* w *de* W, *le diagramme suivant commute.*

$$\begin{array}{ccc} Q & \overset{c}{\twoheadrightarrow} & Q(\mathcal{D}) \\ {\scriptstyle w}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau(w)} \\ Q & \overset{c}{\twoheadrightarrow} & Q(\mathcal{D}) \end{array}$$

(ii) *Il existe un unique morphisme de groupes surjectif:* $\tau^\vee : W \twoheadrightarrow \overline{W^\vee}$ *determiné par* $\tau(s)^\vee = \bar{s}^\vee$, *pour tout* s *de* S. *Pour tout* w *de* W, *le diagramme suivant commute.*

$$\begin{array}{ccc} Q^\vee & \overset{h}{\twoheadrightarrow} & Q(\mathcal{D})^\vee \\ {\scriptstyle w}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau(w)^\vee} \\ Q^\vee & \overset{h}{\twoheadrightarrow} & Q(\mathcal{D})^\vee \end{array}$$

(iii) *Pour toutes* a *et* b *dans* Δ^{re}, *on a* $\langle a \mid b^\vee \rangle = \langle c(a) \mid h(b^\vee) \rangle$.

(iv) *Pour tout* w *dans* W, *tout* λ *dans* Λ *et tout* h *dans* $\Lambda^\vee$, *on a* $\langle \tau(w)\lambda \mid \tau^\vee(w)h \rangle = \langle \lambda \mid h \rangle$.

Démonstration. (iii) est évidente sur les racines simples par définition des appariements pour les réalisations et pour les données radicielles de Kac-Moody; elle est donc vraie en général par bilinéarité.

Preuve de (i). L'unicité d'une éventuelle flèche τ est évidente, puisque S engendre W. Si s et t sont dans S, on a dans Q $s.a_t = a_t - A_{st}a_s$, alors que dans $Q(\mathcal{D})$ $\bar{s}.c_t = c_t - \langle c_t \mid h_s \rangle c_s$. Or, $\langle c_t \mid h_s \rangle$ vaut A_{st} par définition de $\mathcal{D}$. En itérant, on obtient donc

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall t \in S \quad s_1 \ldots . s_n a_t = \textstyle\sum_{s \in S} \lambda_s a_s \Rightarrow \bar{s}_1 \ldots . \bar{s}_n c_t = \sum_{s \in S} \lambda_s c_s.$$

D'où l'existence de τ et la commutativité du diagramme proposé.

(ii) se prouve exactement de la même façon.

Preuve de (iv). On peut se ramener à des vecteurs des bases de définition de $Q(\mathcal{D})$ et $Q(\mathcal{D})^\vee$ par bilinéarité, et à un générateur s de W, par définition de W. Soient donc s, t, u dans S. Alors:

$$\langle \tau(s)c_t \mid \tau^\vee(s)h_u \rangle = \langle c_t - \langle c_t \mid h_s \rangle c_s \mid h_u - \langle c_s \mid h_u \rangle h_s \rangle$$

$$= \langle c_t \mid h_u \rangle - \langle c_t \mid h_s \rangle \langle c_s \mid h_u \rangle - \langle c_s \mid h_u \rangle \langle c_t \mid h_s \rangle + 2\langle c_t \mid h_s \rangle \langle c_s \mid h_u \rangle = \langle c_t \mid h_u \rangle.$$

□

DÉFINITION. — *L'application canonique c (respectivement h) ci-dessus est appelée* application caractère *(respectivement* application cocaractère*) de la donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D}$. On notera c_a l'élément $c(a)$ de Λ attaché à une racine a de Δ^{re}, et on l'appellera le* caractère associé à a. *On notera h_a l'élément $h(a^\vee)$ de $\Lambda^\vee$ attaché à une racine a de Δ^{re}, et on l'appellera le* cocaractère associé à a.

On résume partiellement la situation par le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccc} Q & \overset{c}{\twoheadrightarrow} & Q(\mathcal{D}) & \subset \Lambda \\ \cup & & \cup & \\ \Delta^{re} & \overset{c}{\twoheadrightarrow} & \Sigma & \subset \Lambda. \end{array}$$

7.2. Algèbres de Lie (graduées) triangulaires déployées

Dans cette section, nous définissons rapidement le cadre général dans lequel on va définir les algèbres de Kac-Moody. Il s'agit de définir deux types d'algèbres de Lie, l'une possédant une décomposition graduée plus exploitable que l'autre. Ces notions sont comparables mais non équivalentes. Les algèbres de Kac-Moody que l'on va définir rentrent dans le cadre de la forme faible, mais au prix d'une extension en degré 0, on peut retrouver la forme forte, qui fournira la combinatoire agréable des systèmes de racines classiques. Les références pour ces algèbres de Lie sont [Moo-Pia95], notamment les chapitres 2 et 4, et [Rou96].

7.2.1. Algèbres de Lie triangulaires déployées

Voici la version forte des algèbres de Lie qui nous intéressent.

DÉFINITION. — *Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une* algèbre de Lie triangulaire déployée *s'il existe un triplet $(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$ de sous-algèbres de Lie et une anti-involution σ de $\mathfrak{g}$, qui vérifient la série d'axiomes suivante.*

(TD1) *On a la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_-$, avec $\mathfrak{h}$ commutative.*

(TD2) *$\mathfrak{g}_+$ est non triviale,* ad$\mathfrak{h}$*-stable et se décompose en espaces-poids sous $\mathfrak{h}$,*

$$\mathfrak{g}_+ = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\lambda.$$

(TD3) *σ est l'identité sur $\mathfrak{h}$ et envoie $\mathfrak{g}_+$ sur $\mathfrak{g}_-$.*

(TD4) *Il existe des éléments $\{a_j\}_{j \in J}$ dans $\mathfrak{h}^*$ linéairement indépendants tels que:*

$$\forall \lambda \in \mathfrak{h}^* \quad (\mathfrak{g}_+)_\lambda \neq \{0\} \Rightarrow \lambda \in \Big(\bigoplus_{j \in J} \mathbf{N} a_j\Big) \setminus \{0\}.$$

On notera Q le $\mathbf{Z}$-module $\bigoplus_{j \in J} \mathbf{Z} a_j$, $Q_+ := \big(\bigoplus_{j \in J} \mathbf{N} a_j\big) \setminus \{0\}$, et on appellera Q le réseau radiciel *de $\mathfrak{g}$. On dit en outre que $\mathfrak{g}$ est* régulière *si $\mathfrak{g}_a$ est de dimension finie pour tout a de Q_+.*

7.2.2. Décomposition en espaces-poids. Vocabulaire

On commence par une décomposition en espaces-poids qui suggère quelques définitions.

PROPOSITION. — *On a la décomposition en espaces-poids:*

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{a \in Q} \mathfrak{g}_a,$$

avec $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$, *et* $\sigma\mathfrak{g}_a = \mathfrak{g}_{-a}$ *pour tout* a *de* $Q_+ \cup -Q_+ \cup \{0\}$. □

Introduisons maintenant un peu de vocabulaire. Pour ce qui est des sous-algèbres et des involutions:

DÉFINITION. — (i) σ *est appelée l'*anti-involution de Chevalley, *son opposée* ω *est l'*involution de Chevalley *de* $\mathfrak{g}$.
(ii) $\mathfrak{h}$ *est appelée la* sous-algèbre de Cartan *de* $\mathfrak{g}$.
(iii) $\mathfrak{b}_+ := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_+$ *(respectivement* $\mathfrak{b}_- := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_-$*) est appelée la* sous-algèbre de Borel positive *(respectivement* négative*) de* $\mathfrak{g}$.

Pour ce qui est des racines:

DÉFINITION. — (i) *Une forme linéaire* λ *de* $\mathfrak{h}^*$ *d'espace-poids correspondant non trivial est appelée une* racine *(pour* $\mathfrak{h}$*). On note* Δ *l'ensemble des racines, nécessairement contenu dans* Q. *On pose aussi* $\Delta_+ := Q_+ \cap \Delta$ *et* $\Delta_- := -Q_+ \cap \Delta$.
(ii) *L'application*

$$\mathrm{ht} : Q \to \mathbf{Z}$$

$$\textstyle\sum_j m_j a_j \mapsto \sum_j m_j$$

est appelée hauteur.

Dans cette situation, il n'est pas question d'introduire une notion de racine réelle ou imaginaire. On pourrait encore citer quelques propriétés faciles des algèbres de Lie triangulaires déployées. Ainsi, le produit d'une famille de telles algèbres de Lie et d'une famille d'algèbres abéliennes est encore une algèbre de Lie triangulaire déployée. De plus, l'algèbre de Lie déduite d'une algèbre de Lie triangulaire déployée par extension des scalaires est encore une telle algèbre de Lie. Enfin, ces algèbres de Lie jouissent d'une théorie des représentations avancée, avec la possibilité de faire une théorie du plus haut poids et d'introduire une catégorie $\mathcal{O}$ de Bernstein-Gelfand-Gelfand ([Moo-Pia95], chapitre 6 ou [Rou96]).

7.2.3. Algèbres de Lie graduées triangulaires déployées

Voici la version faible des algèbres de Lie qui nous intéressent, et qui est étudiée dans [Rou96].

DÉFINITION. — *Une* algèbre de Lie graduée triangulaire déployée *est une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *pour laquelle il existe un ensemble* J *et une* $\mathbf{Z}^{(J)}$*-graduation*

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\underline{m} \in \mathbf{Z}^{(J)}} \mathfrak{g}_{\underline{m}},$$

vérifiant la série d'axiomes suivante.

(GTD1) $\mathfrak{g}_0$ *est abélienne.*

(GTD2) $\mathfrak{g}$ *n'est pas réduite à* $\mathfrak{g}_0$*, l'action adjointe de tout élément* X *de* $\mathfrak{g}_0$ *sur chaque* $\mathfrak{g}_{\underline{m}}$ *est scalaire de rapport* $\underline{m}(X)$*, et il existe pour chaque* j *de* J*, une forme linéaire* s_j *de* $\mathfrak{g}_0^*$*, de telle sorte que* $\underline{m}(X) = \sum_j m_j s_j(X)$ *pour* $\underline{m}$ *dans* $\mathbf{Z}^{(J)}$*.*

(GTD3) *Il existe une anti-involution* σ *de* $\mathfrak{g}$ *qui vaut l'identité sur* $\mathfrak{g}_0$ *et envoie* $\mathfrak{g}_{\underline{m}}$ *sur* $\mathfrak{g}_{-\underline{m}}$*.*

(GTD4) *Pout tout* $\underline{m}$ *de* $\mathbf{Z}^{(J)}$*,* $\mathfrak{g}_{\underline{m}} \neq \{0\}$ *implique que* $\underline{m}$ *est dans* $\mathbf{N}^{(J)}$ *ou dans* $-\mathbf{N}^{(J)}$*.*

On note $\mathfrak{g}_+$ *(respectivement* $\mathfrak{g}_-$*) la somme des* $\mathfrak{g}_{\underline{m}}$ *(respectivement* $\mathfrak{g}_{-\underline{m}}$*) pour* $\underline{m}$ *dans* $\mathbf{N}^{(J)}$*.* $\mathfrak{g}$ *est en outre dite* régulière *si chaque* $\mathfrak{g}_{\underline{m}}$ *est de dimension finie.*

La différence notable entre ces algèbres de Lie et les algèbres de Lie triangulaires déployées est que la graduation de ces dernières paramètre exactement les espaces-poids, alors que dans le cas gradué triangulaire déployé, deux espaces de degrés différents peuvent être de poids identiques. Autrement dit, il n'y a pas moyen de les distinguer du point de vue de l'action adjointe (diagonale) de $\mathfrak{g}_0$.

7.2.4. Extension triangulaire déployée d'une algèbre de Lie graduée

Il est facile de voir qu'une algèbre triangulaire déployée est une algèbre graduée triangulaire déployée, les notions de régularité se transmettant parfaitement. La réciproque est fausse, mais il existe un moyen de définir une algèbre triangulaire déployée à partir d'une algèbre graduée triangulaire déployée en modifiant l'algèbre de Lie de départ seulement en degré 0. Commençons par citer un résultat facile sur les dérivations des algèbres graduées.

LEMME. — *Soit* $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\underline{m} \in \mathbf{Z}^{(J)}} \mathfrak{g}_{\underline{m}}$ *une algèbre graduée triangulaire déployée. Alors pour chaque indice* j *de* J*, l'application*

$$\delta_j : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$
$$\textstyle\sum_{\underline{m}} X_{\underline{m}} \mapsto \sum_{\underline{m}} m_j X_{\underline{m}}$$

est une dérivation de $\mathfrak{g}$*.* □

On va définir une extension au moyen de ces dérivations. Notons $\underline{D}$ l'espace vectoriel $\bigoplus_{j \in J} \mathbf{K}\delta_j$ qu'on voit comme une algèbre de Lie abélienne, et $\widehat{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \rtimes \underline{D}$ l'algèbre de Lie obtenue en étendant le crochet de $\mathfrak{g}$ par $[X, \delta_j] := -\delta_j X$.

PROPOSITION. — *Soit* $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\underline{m} \in \mathbf{Z}^{(J)}} \mathfrak{g}_{\underline{m}}$ *une algèbre graduée triangulaire déployée. Alors, l'algèbre de Lie* $\widehat{\mathfrak{g}}$ *définie comme ci-dessus est une algèbre triangulaire déployée pour le triplet* $(\widehat{\mathfrak{h}}, \widehat{\mathfrak{g}_+}, \widehat{\mathfrak{g}_-})$ *et l'anti-involution* $\widehat{\sigma}$ *définis par:*

$$\widehat{\mathfrak{h}} := \mathfrak{h} \oplus \underline{D}, \quad \widehat{\mathfrak{g}_+} := \mathfrak{g}_+ \quad \text{et} \quad \widehat{\mathfrak{g}_-} := \mathfrak{g}_-,$$

$\widehat{\sigma}$ *étant le prolongement de* σ *par l'identité sur* $\underline{D}$*. Il existe en outre une bijection naturelle entre les degrés de la graduation de* $\mathfrak{g}$ *et ceux de* $\widehat{\mathfrak{g}}$*, qui établit une identification entre termes de degrés non nuls correspondants.* $\widehat{\mathfrak{g}}$ *est régulière si et seulement si* $\mathfrak{g}$ *l'est.*

Démonstration. Les axiomes (TD1) et (TD3) sont trivialement vérifiés. Considérons maintenant un terme homogène $\mathfrak{g}_{\underline{m}}$ et donnons-nous H dans $\widehat{\mathfrak{h}}$. Ce dernier élément s'écrit par définition $H = H_0 + \sum_{j \in J} \lambda_j \delta_j$ pour H_0 dans $\mathfrak{h}$ et λ_j dans $\mathbf{K}$. Alors, H opère scalairement sur $\mathfrak{g}_{\underline{m}}$ par la valeur propre $\underline{m}(H_0) + \sum_{j \in J} \lambda_j m_j$, autrement dit $\sum_{j \in J} m_j (s_j(H_0) + \lambda_j)$. On continue à noter s_j la forme linéaire sur $\widehat{\mathfrak{h}}$ déduite de s_j par prolongement par 0 sur $\underline{D}$. On note δ_j^* le prolongement par 0 sur $\mathfrak{g}_0$ du vecteur δ_j^* de la base duale de $\{\delta_j\}_{j \in J} \in \underline{D}^J$. En posant $a_j := s_j + \delta_j^*$ pour chaque j, on obtient une famille libre de $\widehat{\mathfrak{h}}^*$, et l'observation précédente permet de vérifier les axiomes (TD2) et (TD4) pour ces formes linéaires. La transmission de la régularité est évidente. □

REMARQUE. — Avec les notations de la démonstration, la bijection annoncée dans la proposition n'est autre que

$$\mathbf{Z}^J \leftrightarrow \widehat{\mathfrak{h}}^* \qquad (m_j)_{j \in J} \leftrightarrow \sum_{j \in J} m_j (s_j + \delta_j^*).$$

7.3. Algèbres de Kac-Moody

Nous en venons à la définition des algèbres de Kac-Moody proprement dites. Comme nous verrons ces algèbres essentiellement comme les objets à intégrer pour obtenir des groupes, on préfère les définir entièrement par générateurs et relations. On réserve le terme d'*algèbre de Kac-Moody classique* aux algèbres de Lie définies en termes de réalisation, pour lesquelles la première étape de construction a été résumée en (7.1.4). Pour ces dernières, la référence est bien sûr [Kac90], référence à laquelle on peut de toutes façons se ramener pour étudier les algèbres de Kac-Moody introduites par J. Tits dans [Tit87].

7.3.1. Algèbres de Kac-Moody

Puisque moralement ces algèbres sont des objets infinitésimaux attachés à des groupes, il est préférable de définir une algèbre de Lie par type de donnée radicielle.

DÉFINITION. — *Soit* $\mathcal{D} = \left(S, A, \Lambda, (c_s)_{s\in S}, (h_s)_{s\in S}\right)$ *une donnée radicielle de Kac-Moody. L'*algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ de type $\mathcal{D}$ *sur* $\mathbf{K}$ *est l'algèbre de Lie engendrée par* $\mathfrak{g}_0 := \Lambda^\vee \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{K}$ *et les ensembles* $\{e_s\}_{s\in S}$ *et* $\{f_s\}_{s\in S}$ *soumis aux relations suivantes.*

$$[h, e_s] = \langle c_s, h\rangle e_s \quad \text{et} \quad [h, f_s] = -\langle c_s, h\rangle f_s \ \text{ pour } h \text{ dans } \mathfrak{g}_0, \quad [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = 0,$$
$$[e_s, f_s] = -h_s \otimes 1, \quad [e_s, f_t] = 0 \ \text{ pour } s \neq t \text{ dans } S,$$
$$(\mathrm{ad} e_s)^{-A_{st}+1} e_t = (\mathrm{ad} f_s)^{-A_{st}+1} f_t = 0 \quad \text{«relations de Serre»} .$$

La présence du signe $-$ dans la relation $[e_s, f_s] = -h_s \otimes 1$ est tout à fait arbitraire. On parle de *convention de Tits.*

Dans le cas d'une donnée radicielle simplement connexe (*i.e.*, quand $\Lambda^\vee = \bigoplus_{s\in S} \mathbf{Z} h_s$), on notera plutôt $\mathfrak{g}_A$ cette algèbre de Lie. Pour une matrice de Cartan généralisée symétrisable, $\mathfrak{g}_A$ n'est autre que l'algèbre dérivée $[\mathfrak{g}(A), \mathfrak{g}(A)]$ de l'algèbre de Kac-Moody classique $\mathfrak{g}(A)$ associée à A. C'est le théorème de Gabber-Kac ([Kac90], théorème (9.11) p.159), qu'on résume par l'égalité $\mathfrak{g}_A = [\mathfrak{g}(A), \mathfrak{g}(A)]$.

On note $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$. Par construction des algèbres de Lie définies par générateurs et relations, $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ est la $\mathbf{K}$-algèbre associative engendrée par les mêmes générateurs soumis aux mêmes relations que pour $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$. Si l'on reprend le réseau radiciel libre Q associé à A, l'homogénéité de ces relations permet de définir une Q-graduation sur $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ et donc sur $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$.

DÉFINITION. — (i) *On appelle* racine *un degré non nul de la* Q*-graduation de* $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ *qui apparaît dans la décomposition de* $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$. *On note* Δ *l'ensemble des racines.*
(ii) *Pour tout élément* a *de* Q, *on note* $\left(\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}\right)_a$ *(respectivement* $\left(\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}\right)_a$*) le terme homogène de degré* a *dans* $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ *(respectivement* $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$*).*

Pour l'instant, on ne dispose que de la notion de racine de $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$, définie en termes de graduation tout à fait abstraite et sans distinction entre racines imaginaires et réelles.

7.3.2. Q-graduation abstraite et espaces-poids

Conservons les objets libres associés à A et mis en place en (7.1.4), notamment le réseau radiciel Q. On peut tout d'abord montrer que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ est une algèbre graduée triangulaire déployée.

LEMME. — $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ *est une algèbre graduée triangulaire déployée pour le réseau radiciel libre* Q, *de décomposition triangulaire*

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{D}} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_-,$$

où $\mathfrak{g}_+$ *(respectivement* $\mathfrak{g}_-$*) est la sous-algèbre de Lie engendrée par les éléments* e_s *(respectivement* f_s*) pour* s *dans* S. *L'involution de Chevalley est l'application* ω *caractérisée par* $e_s \mapsto f_s$, $f_s \mapsto e_s$ *et* $\omega\,|_{\mathfrak{g}_0} = -1_{\mathfrak{g}_0}$. *Pour* a *dans* Q, $\mathfrak{g}_0$ *opère sur le terme de degré* a *par le caractère associé* c_a.

Justification. La définition de l'involution ω est aisément justifiée. La décomposition triangulaire s'obtient par les mêmes calculs que pour le point a) du théorème (1.2) de [Kac90]. L'assertion portant sur le caractère associé provient directement des relations de définition. □

REMARQUE. — Si l'on pense maintenant à appliquer le procédé de fabrication d'une algèbre triangulaire déployée à partir d'une algèbre graduée triangulaire déployée (7.2.4), on obtient une $\mathbf{K}$-algèbre de Lie $\widehat{\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}} = \mathfrak{g}_{\mathcal{D}} \rtimes \underline{D}$ triangulaire déployée pour laquelle l'application $\mathbf{Z}$-linéaire

$$Q \to (\mathfrak{g}_0 \oplus \underline{D})^*$$

$$a_s \mapsto c_s + \delta_s^*$$

est injective. L'algèbre de Lie $\widehat{\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}}$ est l'algèbre de Kac-Moody associée à la donnée radicielle de Kac-Moody $\widehat{\mathcal{D}}$ obtenue à partir de $\mathcal{D}$ en remplaçant Λ par le dual de $\Lambda^{\check{}} \oplus \mathbf{Z}^{(S)}$ et c_s par $c_s + \delta_s^*$. Par exemple $\widehat{\mathcal{D}_{\mathrm{sc}}^A} = \mathcal{D}_{\mathrm{un}}^A$.

À partir de ceci, la Q-graduation de $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ peut se lire concrètement dans le sens où elle provient de la décomposition en espaces-poids de $\widehat{\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}}$. L'avantage de cette manipulation est qu'on peut appliquer à $\widehat{\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}}$ tous les raisonnements qui permettent la description d'un système de racines de l'algèbre de Kac-Moody classique $\mathfrak{g}(A)$. On pourra alors utiliser pour $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ les propriétés et la description combinatoires de ces systèmes.

7.4. Automorphismes et Z-formes

L'étude des automorphismes est un premier moyen d'envisager l'intégration des algèbres de Kac-Moody en groupes. On se contentera ici de montrer qu'on peut interpréter l'action du groupe de Weyl W en termes d'action d'automorphismes de $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ sur la Q-graduation. Ceci donne un sens à la double inclusion $Q \supset \Delta \supset \Delta^{re}$. Les $\mathbf{Z}$-formes interviendront de manière cruciale dans la définition de la représentation adjointe d'un foncteur de Tits. Elles apparaîtront au moment d'imposer une condition d'intégralité sur des algèbres de fonctions de groupes algébriques, en utilisant des techniques de calcul différentiel sur ces groupes.

7.4.1. Relèvement du groupe de Weyl. Double base d'un $\mathfrak{sl}_2$-triplet

Pour chaque s de S, la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ engendrée par e_s et f_s est de type A_1 et opère sur $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ par la représentation adjointe. En outre, les dérivations $\mathrm{ad}e_s$ et $\mathrm{ad}f_s$ sont localement nilpotentes dans les algèbres de Kac-Moody, ce qui donne un sens aux exponentielles $\exp\ \mathrm{ad}e_s$ et $\exp\ \mathrm{ad}f_s$. Pour tout s de S, on peut donc considérer l'automorphisme s^* de $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$:

$$s^* := \exp\ \mathrm{ad}e_s . \exp\ \mathrm{ad}f_s . \exp\ \mathrm{ad}e_s = \exp\ \mathrm{ad}f_s . \exp\ \mathrm{ad}e_s . \exp\ \mathrm{ad}f_s,$$

qui nous intéresse pour la raison suivante:

PROPOSITION. — (i) *Si W^* désigne le groupe engendré par les automorphismes s^* de $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$, l'application $s^* \mapsto s$ se relève en un unique homomorphisme surjectif $\nu : W^* \twoheadrightarrow W$.*
(ii) *Pour tout s de S et tout w^* de W^*, la paire d'éléments opposés $w^*(\{e_s; -e_s\})$ ne dépend que de la racine $\nu(w^*)(a_s)$ dans Q.*

Référence. On a résumé ici les raisonnements de la section (3.3) de [Tit87] (par la remarque (7.3.2), tout ce qui est dit en (3.3) sur les algèbres de Kac-Moody alors considérées s'applique aux algèbres $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ quelconques). □

7.4.2. Racines réelles et racines imaginaires

Sans hypothèse sur la donnée radicielle $\mathcal{D}$, $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ est une $\mathbf{K}$-algèbre de Lie graduée triangulaire déployée. La Q-graduation de $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ provient de la Q-graduation abstraite de l'algèbre $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$. Cette graduation abstraite n'a *a priori* pas d'autre propriété que ses compatibilités avec les structures de $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$. On sait qu'au moyen d'une extension par $\#S$ dérivations (décrétées en degré 0), on peut se ramener à une $\mathbf{K}$-algèbre de Lie triangulaire déployée $\widehat{\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}}$ possédant une graduation en espaces-poids identique à la graduation de départ (en degrés non nuls). La Q-graduation devient alors interprétable en termes d'action adjointe (diagonale) de la sous-algèbre abélienne formée des éléments de degré 0. Cette remarque justifie l'usage de la référence [Kac90], chapitre 4 pour décrire le système Δ associé à $\widehat{\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}}$ ou $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$, sauf que dans le second cas, on ne dispose que d'une Q-graduation abstraite d'algèbre de Lie. Ceci permet de reconnaître en l'inclusion $\Delta \subset Q$, l'inclusion dans le réseau radiciel du système de racines de l'algèbre de Kac-Moody classique $\mathfrak{g}(A)$ attachée à A. Puisque par ailleurs chaque élément w de W peut se relever en un automorphisme gradué w^* de $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$, et que $w^*\mathfrak{g}_a = \mathfrak{g}_{wa}$ pour tout a dans Q, on peut identifier Δ^{re} (qui est une partie du réseau radiciel abstrait de A) à une partie de Δ, ensemble des poids non triviaux de la $\mathbf{K}$-algèbre de Lie étendue $\widehat{\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}}$.

DÉFINITION. — (i) *Les* racines réelles *de $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ sont les degrés de la forme wa_s pour w dans W et s dans S. Leur ensemble est Δ^{re}.*
(ii) *On note Δ^{im} l'ensemble $\Delta \setminus \Delta^{re}$, dont les éléments sont appelés les* racines imaginaires.
(iii) *La paire de vecteurs opposés de $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ obtenue comme en (7.4.1) à partir de la racine réelle a est appelée* double base *associée à a, et est notée $E_a = \{\pm e_a\}$.*

Les doubles bases permettent de mettre en place la version Kac-Moody de la notion d'*épinglage* (8.3.1). Si ψ est une partie de racines, on note $\mathfrak{g}_\psi := \bigoplus_{c\in\psi} \mathfrak{g}_c$. Si ψ est $\mathbf{N}$-close, $\mathfrak{g}_\psi$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$. On peut enfin invoquer les caractérisations bien connues suivantes, qui distinguent radicalement les racines réelles des racines imaginaires.

PROPOSITION. — (i) *Si a est une racine imaginaire et r est un nombre rationnel tel que ra est dans le réseau Q, alors ra est une racine (imaginaire).*
(ii) *Si a est une racine réelle, alors $\Delta \cap \mathbf{Q}a = \{\pm a\} (\subset \Delta^{re})$.*

Référence. [Kac90], proposition (5.1) p.59 et proposition (5.5) p.63. □

On peut alors revenir à la notion de *base* d'un système de racines.

DÉFINITION. — *Une* base *de Δ^{re} est une partie $\{a'_j\}_{1\leq j\leq N}$ de Δ^{re} formée de vecteurs linéairement indépendants de Q, tels que toute racine a de Δ^{re} s'écrit $a = \epsilon \sum_{1\leq j\leq N} k_j a'_j$ où ϵ est un signe et k_j est dans $\mathbf{N}$ pour tout j.*

Grâce au fait qu'on peut voir Δ^{re} comme un système de racines d'une algèbre de Kac-Moody, on dispose aussi du théorème de conjugaison des bases.

THÉORÈME. — *Si Δ^{re} est indécomposable, toute base est transformée de $\pm\{a_s\}_{s\in S}$ par un élément de W.*

Référence. La propriété qui caractérise une base vis-à-vis des racines réelles est encore vérifiée pour l'ensemble de toutes les racines, ce qui permet de parler de *base* de Δ. On peut donc faire référence à [Kac90], proposition (5.9) p.66. □

REMARQUE. — Un cas particulièrement favorable est celui d'une donnée radicielle de Kac-Moody (à base) libre. Ceci correspond au cas où l'application caractère c est bijective:

$$Q \cong Q(\mathcal{D}) \subset \Lambda, \text{ soit } Q \subset \Lambda,$$

pour faire court. On fera systématiquement l'identification dans ce cas. On voit en outre que les groupes $\overline{W}$ et W sont isomorphes (par τ), d'où: $\overline{W} \cong W$ et $\Delta^{re} \cong \Sigma$. (On sait aussi que Δ est la fermeture de Δ^{re} dans Q pour une certaine condition, dite *condition de chaîne* – voir [Moo-Pia], section (5.8) p.464).

7.4.3. Z-formes dans l'algèbre enveloppante

Cette sous-section est un résumé des pages 555 à 559 de [Tit87]. On appellera **Z**-*forme* d'une **C**-algèbre $\mathcal{A}$ un sous-anneau $\mathcal{A}_{\mathbf{Z}}$ pour lequel l'application canonique $\mathcal{A}_{\mathbf{Z}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C} \to \mathcal{A}$ est un isomorphisme. Notre but est de mettre en place quelques **Z**-formes qui existent dans l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$. Les calculs qui justifient l'existence de ces objets sont semblables à ceux qui permettent de construire les groupes de Chevalley. On verra ensuite des propriétés d'écriture unique, mais pour l'instant on introduit les générateurs des **Z**-formes à construire, qui se présentent comme des puissances divisées des générateurs de $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$.
Pour tout élément de $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ et tout entier n de **N**, l'écriture $u^{[n]}$ désigne la puissance divisée $(n!)^{-1}u^n$ et l'écriture $\binom{u}{n}$ désigne l'élément $(n!)^{-1}u(u-1)...(u-n+1)$.

DÉFINITION. — (i) *Pour tout s de S, on désigne par $\mathcal{U}_{\{s\}}$ (respectivement $\mathcal{U}_{\{-s\}}$) le sous-anneau $\sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{Z}e_s^{[n]}$ (respectivement $\sum_{n\in\mathbf{N}} \mathbf{Z}f_s^{[n]}$) de $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$.*
(ii) *$\mathcal{U}_0$ désigne le sous-anneau de $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ engendré par les éléments de degré 0 de la forme $\binom{h}{n}$ pour h parcourant $\Lambda^\vee$ et n dans* **N**.
(iii) *$\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ est le sous-anneau de $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ engendré par $\mathcal{U}_0$ et les $\mathcal{U}_{\{s\}}$ et $\mathcal{U}_{\{-s\}}$ pour s dans S.*
(iv) *$\mathcal{U}_{\Delta_+}$ (respectivement $\mathcal{U}_{\Delta_-}$) désigne le sous-anneau de $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ engendré par les $\mathcal{U}_{\{s\}}$ (respectivement $\mathcal{U}_{\{-s\}}$) pour s dans S.*
(v) *On désigne par $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}^+$ l'idéal de $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ obtenu par $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}^+ := \mathfrak{g}_{\mathcal{D}}\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}} \cap \mathcal{U}_{\mathcal{D}}$.*

Il existe des formules classiques concernant les éléments qu'on a définis. Précisément, d'après [Bou75] (12.5), on a:

$$\binom{h}{m} e_s^{[n]} = e_s^{[n]} \binom{h + nc_s(h)}{m} \quad \text{et} \quad \binom{h}{m} f_s^{[n]} = f_s^{[n]} \binom{h - nc_s(h)}{m}.$$

Ces formules et l'usage d'une graduation sur $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ permettent de montrer:

PROPOSITION. — (i) *$\mathcal{U}_{\Delta_+}$ est une* **Z**-*forme de $\mathcal{U}\mathfrak{g}_+$. $\mathcal{U}_{\Delta_-}$ est une* **Z**-*forme de $\mathcal{U}\mathfrak{g}_-$.*
(ii) *$\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ est une* **Z**-*forme de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$.*

Référence. [Tit87], section (4.4), notamment proposition 2 p.556. □

On peut aussi voir des $\mathbf{Z}$-algèbres de Lie dans $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$.

DÉFINITION. — *On désigne par $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ la $\mathbf{Z}$-algèbre de Lie obtenue en intersectant la $\mathbf{Z}$-forme $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ et l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$: $\mathcal{L}_{\mathcal{D}} := \mathcal{U}_{\mathcal{D}} \cap \mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$.*

Pour toute racine réelle a de Δ^{re}, le choix d'un des deux vecteurs de la double base $E_a = \{\pm e_a\}$ définit le même sous-$\mathbf{Z}$-module de $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$

$$\mathcal{U}_{\{a\}} := \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{Z} e_a^{[n]}.$$

La formule classique

$$\frac{(\mathrm{ad}x)^n}{n!}.u = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^{n-i}}{(n-i)!}.u.\frac{x^i}{i!},$$

valable pour tous u dans $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ et x dans $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$, montre que $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ est stable par tout $\frac{(\mathrm{ad}e_s)^n}{n!}$ ou $\frac{(\mathrm{ad}f_s)^n}{n!}$ pour s dans S et n dans $\mathbf{N}$. Ainsi, $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ est stable par chacun des automorphismes $\exp \mathrm{ad}e_s$, $\exp \mathrm{ad}f_s$ et s^*. Ceci montre que $\mathcal{U}_{\{a\}}$ est en fait un sous-anneau de $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$. L'automorphisme $w^* := s_1^* s_2^* ... s_{\ell(w)}^*$ est le même pour toute écriture réduite $w = s_1 s_2 ... s_{\ell(w)}$, ce qui justifie les dernières notations:

$$\mathcal{U}_w := \mathcal{U}_{\Delta_+} \cap w^* \mathcal{U}_{\Delta_-} \quad \text{et} \quad \mathcal{U}_\epsilon^{(s)} := \mathcal{U}_{\Delta_\epsilon} \cap s^* \mathcal{U}_{\Delta_\epsilon}.$$

On peut finir en évoquant les graduations et filtrations de $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$. Les sous-$\mathbf{Z}$-algèbres de Lie ainsi définies héritent une graduation de celle de $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$. En outre, $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ hérite une filtration de la filtration d'algèbre enveloppante de $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$.

DÉFINITION. — (i) *On note $\mathcal{U}_a$ la composante homogène de degré $a \in Q$ dans $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$.*
(ii) *On note $\mathcal{L}_a$ la composante homogène de degré $a \in \Delta$ dans $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$. $\mathcal{L}_0 := \Lambda^\vee$ désigne la composante de degré 0 de $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$.*
(iii) *Pour toute partie $\mathbf{N}$-nilpotente ψ de racines réelles, on note $\mathcal{L}_\psi := \bigoplus_{c \in \psi} \mathcal{L}_c$ la $\mathbf{Z}$-algèbre de Lie engendrée par les doubles bases E_c pour c dans ψ.*

Ceci fournit les décompositions graduées

$$\mathcal{U}_{\mathcal{D}} = \bigoplus_{a \in Q} \mathcal{U}_a \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{\mathcal{D}} = (\bigoplus_{a \in \Delta} \mathcal{L}_a) \oplus \mathcal{L}_0.$$

7.4.4. Écritures uniques

Les écritures uniques auront un intérêt pratique quand il s'agira de faire un peu de calcul différentiel sur des groupes algébriques.

PROPOSITION. — (i) *L'application produit $\mathcal{U}_{\Delta_+} \otimes \mathcal{U}_0 \otimes \mathcal{U}_{\Delta_-} \to \mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ est bijective.*
(ii) *Pour tout s de S, les applications produit $\mathcal{U}_{\{s\}} \otimes \mathcal{U}_+^{(s)} \to \mathcal{U}_{\Delta_+}$ et $\mathcal{U}_+^{(s)} \otimes \mathcal{U}_{\{s\}} \to \mathcal{U}_{\Delta_+}$ sont bijectives.*
(iii) *Pour tout w de W et tout ordre cyclique $\{b_1; b_2; ... b_{\ell(w)}\}$ sur $\Delta_{w^{-1}}$, les applications produit $\mathcal{U}_{\{b_1\}} \otimes ... \otimes \mathcal{U}_{\{b_{\ell(w)}\}} \to \mathcal{U}_w$ et $\mathcal{U}_{\{b_{\ell(w)}\}} \otimes ... \otimes \mathcal{U}_{\{b_1\}} \to \mathcal{U}_w$ sont bijectives.*

Référence. [Tit87], proposition 2 p.556 et lemme 1 p.558. □

La détermination de toutes ces **Z**-formes à partir de puissances divisées suggère une comparaison avec le calcul différentiel algébrique. On aura l'occasion de voir l'anneau $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ comme l'anneau des distributions supportées à l'origine du foncteur $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$. Cette analogie est actuellement heuristique pour le gros objet $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$, mais elle sera justifiée pour les groupes unipotents de dimension finie associés aux parties **N**-nilpotentes de racines (9.3.2).

7.4.5. Extension des scalaires

Nous avons parlé pour l'instant d'algèbres et d'algèbres de Lie sur un corps **K** de caractéristique 0, mais le fait de disposer de **Z**-formes permet maintenant de définir des objets analogues à ceux qu'on a vus sur des anneaux arbitraires.

CONVENTION. — *Pour tout anneau R et tout sous-anneau (respectivement sous-**Z**-algèbre de Lie) $\mathcal{A}$ de la **Z**-forme $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$, on note $\mathcal{A}_R$ la R-algèbre (respectivement R-algèbre de Lie) obtenue à partir de $\mathcal{A}$ par extension des scalaires de **Z** à R. Si $\mathcal{A}$ est un sous-objet gradué ou filtré de $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$, $\mathcal{A}_R = \mathcal{A} \otimes_{\mathbf{Z}} R$ est munie de la graduation ou filtration naturelle pour laquelle les scalaires de R sont de degré 0.*

Conformément à cette convention, on note $(\mathcal{U}_a)_R$ la composante homogène de degré $a \in Q$ de $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_R$. On note $(\mathcal{L}_a)_R$ le terme de degré a de $(\mathcal{L}_{\mathcal{D}})_R$ dans la Q-graduation. On a donc:

$$(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_R = \bigoplus_{a \in Q} (\mathcal{U}_a)_R \quad \text{et} \quad (\mathcal{L}_{\mathcal{D}})_R = \bigoplus_{a \in \Delta} (\mathcal{L}_a)_R.$$

Finissons avec la notion de *support*.

DÉFINITION. — *Soit M une partie de $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_R$. Le* support *de M est l'ensemble des degrés qui apparaissent dans la décomposition en termes homogènes de tous les vecteurs de M. On le note* supp M *ou* $\mathrm{supp}_Q M$. *Le* support *d'un vecteur v est le support de $\{v\}$.*

S.C.D. - U.H.P.
NANCY 1
SCIENCES
BIBLIOTHÈQUE



8. Foncteurs de Tits. Groupes de Kac-Moody

On présente ici une étude et une construction de foncteurs effectuée par J. Tits dans le but de généraliser la construction des schémas de Chevalley-Demazure au cas de la théorie de Kac-Moody. Le point de départ est la construction des groupes algébriques réductifs sur un corps algébriquement clos, ou plus généralement déployés sur un corps quelconque. L'objet le plus important pour ce qui nous intéresse est le *foncteur de Tits constructif* $\mathcal{G}_{\mathcal{D}}$ qui répond sur les corps au problème posé axiomatiquement. C'est sur les valeurs de ce foncteur qu'on va mettre en évidence les propriétés combinatoires attendues qui font le lien avec la première partie purement abstraite. La référence principale pour ce chapitre est l'article [Tit87]. L'exposé au Séminaire Bourbaki [Tit88] peut aussi s'avérer utile.

8.1. Prédécesseurs

Chacun des prédécesseurs présentés est à l'origine d'un aspect de la construction des groupes de Kac-Moody sur des anneaux arbitraires.

8.1.1. Points des schémas de Chevalley-Demazure

Des deux aspects de la théorie des schémas en groupes (géométrique et fonctoriel), c'est le second qui est développé: on ne définira plus un schéma, mais un foncteur de la catégorie des anneaux dans celle des groupes. Le résultat fondamental de M. Demazure ([Dem65], théorème (3.6.4) p.399) s'énonce comme une équivalence de catégories, précisément entre celle des données radicielles épinglées et celle des schémas en groupes (affines) réductifs déployés et épinglés. Ce résultat général sans plus de précision incite déjà à élaborer la théorie des groupes de Kac-Moody en attachant un foncteur en groupes à chaque donnée radicielle de Kac-Moody. Cela dit, on peut citer un résultat plus particulier.

THÉORÈME. — (i) *À tout groupe réductif complexe $G_{\mathbf{C}}$, on peut associer un schéma en groupes affine $\mathcal{G}_{\mathrm{CD}}$ lisse et connexe sur* $\mathbf{Z}$, *qui vérifie* $\mathcal{G}_{\mathrm{CD}}(\mathbf{C}) = G_{\mathbf{C}}$.
(ii) *Tout* $\mathbf{Z}$*-schéma en groupes affine* $\mathcal{G}$ *réductif (lisse et connexe), qui possède un tore maximal et qui vaut* $G_{\mathbf{C}}$ *sur* $\mathbf{C}$ *est isomorphe à* $\mathcal{G}_{\mathrm{CD}}$ *(au sens des* $\mathbf{Z}$*-schémas en groupes).*

Référence. [Dem65], corollaire (5.1.3) p.407. Le tore évoqué dans le point (ii) est automatiquement déployé car défini sur $\mathbf{Z}$, *cf.* [Dem65], (1.4.4). □

De ce théorème, on retient la caractérisation des foncteurs de Chevalley-Demazure par leur propriété de déploiement et par leur valeur sur le corps des nombres complexes. Ces observations conduisent à l'approche axiomatique des foncteurs de Tits, à ceci près qu'il faut trouver un analogue de la structure algébrique complexe. D'où l'introduction d'une représentation adjointe complexe – axiome (KMG5), qu'on étendra au chapitre 9 en une représentation fonctorielle.

8.1.2. Générateurs et relations pour les groupes de Chevalley

Parallèlement à la présentation algébro-géométrique des schémas en groupes réductifs déployés, on peut aussi aborder le sujet de façon plus concrète, à condition de se limiter aux corps. On se donne une algèbre de Lie simple sur $\mathbf{C}$ (ou déployée simple sur $\mathbf{Q}$). Nous ne reviendrons pas sur la construction des schémas de Chevalley associés à $\mathfrak{g}$ (voir pour cela [Hum72], chapitre VII pour le volet abstrait, et [Che61] pour la construction schématique). On fixe une base de Chevalley de $\mathfrak{g}$ qui détermine classiquement une $\mathbf{Z}$-forme $\mathcal{U}_{\mathbf{Z}}$ de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ et permet de définir un sous-groupe à un paramètre unipotent par racine de $\mathfrak{g}$. Ces sous-schémas sont obtenus en exponentiant la représentation adjointe. Nous nous limitons à la citation de deux résultats sur les groupes de Chevalley. Le premier est un calcul de commutateur fait par Chevalley lui-même et qui sera ultérieurement généralisé aux groupes de Kac-Moody. Le second est à la base de la définition de ces groupes. Voici le théorème de Chevalley.

THÉORÈME. — *Soit $\{a;b\}$ une paire de racines non opposées. Pour chaque racine c, e_c est le vecteur correspondant de la base de Chevalley qu'on a choisie. On fixe un ordre quelconque sur $[a;b]_{\mathbf{N}}$ et on note $N := \{(i,j) \in \left(\mathbf{N} \setminus \{0\}\right)^2 \mid ia + jb \in]a;b[\}$. Alors, il existe des entiers C_{ij}^{ab} ne dépendant que de a, b et de l'ordre induit sur N, tels que dans $\mathcal{U}_{\mathbf{Z}}[[t,u]]$ on ait:*

$$[\exp(te_a), \exp(ue_b)] = \prod_{(i,j)\in N} \exp(t^i u^j C_{ij}^{ab} e_{ia+jb}),$$

le produit se faisant dans l'ordre précité. En outre, l'entier c_{11} est indépendant de l'ordre et vaut la constante de structure définie par: $[e_a, e_b] = c_{ab}\ e_{a+b}$.

Référence. [Ste68], lemme 15 p.22. □

REMARQUE. — Dans ce cas – celui d'un système de racines fini et réduit, le théorème met en évidence l'axiome (DRJE1) de (6.2.5) pour les groupes de Chevalley.

Voici le résultat de Steinberg sur lequel s'appuie (modulo généralisation) la définition des foncteurs de Tits constructifs.

THÉORÈME. — *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple non de type A_1 et $\mathbf{K}$ un corps. Pour toute racine a de $\mathfrak{g}$ et tout élément t de $\mathbf{K}$, on introduit le symbole $\overline{x}_a(t)$. Soit $\overline{G}$ le groupe abstrait défini par les générateurs $\overline{x}_a(t)$ et les relations*

$$\overline{x}_a(t).\overline{x}_a(u) = \overline{x}_a(t+u)\ (t,u \in \mathbf{K}),$$

$$[\overline{x}_a(t), \overline{x}_b(u)] = \prod_{(i,j)\in N} \overline{x}_{ia+jb}(C_{ij}^{ab} t^i u^j)\ (t,u \in \mathbf{K}),$$

$$\bar{h}_a(t).\bar{h}_a(u) = \bar{h}_a(tu)\ (t,u \in \mathbf{K}^\times),$$

où les C_{ij}^{ab} sont les entiers de la formule du commutateur pour un choix de base de Chevalley, où $\bar{h}_a(t)$ vaut $\overline{n}_a(t).\overline{n}_a(-1)$ avec $\overline{n}_a(t)$ défini par $\overline{n}_a(t) := \overline{x}_a(t).\overline{x}_{-a}(-t^{-1}).\overline{x}_a(t)$. Enfin, $\overline{Z}$ désigne le centre de $\overline{G}$.

Alors, $\overline{G}/\overline{Z}$ est isomorphe au groupe de Chevalley adjoint sur $\mathbf{K}$ associé à $\mathfrak{g}$.

Référence. [Car72], théorème (12.1.1) p.190. □

La restriction sur le type de l'algèbre provient de problèmes de dégénérescence sur les petits corps. Il faudra tenir compte de cela pour la définition des axiomes des groupes de Kac-Moody. On produit donc ici un groupe semi-simple déployé sur un corps comme un groupe abstrait: c'est tout l'intérêt de l'énoncé puisqu'en théorie de Kac-Moody, on a affaire à des foncteurs et non plus à des schémas.

8.1.3. Automorphismes d'une algèbre de Kac-Moody

Venons-en maintenant à la construction d'un groupe de Kac-Moody. Pour cela, on peut bien entendu penser à intégrer une algèbre de Kac-Moody en regardant son groupe d'automorphismes. Ce point de vue a permis de mettre en évidence de nombreuses propriétés qu'on pouvait espérer généraliser des groupes algébriques à la théorie de Kac-Moody. On peut citer une partie des résultats de Kac et Peterson obtenus dans cette situation.

• Définition de plusieurs algèbres de fonctions (topologiques), chacune possédant une propriété classique: l'une fournit un théorème à la Peter-Weyl, l'autre définit une structure de groupe de dimension infinie à la Shafarevich (voir [Kac-Pet83] p.162-163).

• Définition intrinsèque et conjugaion des sous-groupes de Cartan et de Borel.

• Définition de la structure combinatoire des BN-paires raffinées, dont on s'est déjà largement servi.

Il ne faut pourtant pas oublier que cette approche utilise les algèbres de Lie de manière essentielle, ce qui limite la validité de certains raisonnements à la caractéristique 0. En outre, la définition des algèbres de fonctions précitées fait un usage essentiel de la théorie des représentations, notamment de considérations de plus haut poids.

8.2. Présentation axiomatique

Nous abordons maintenant le problème des groupes de Kac-Moody à proprement parler, du point de vue axiomatique. On sait que l'on cherche un foncteur-groupe sur la catégorie des anneaux. On notera un tel foncteur $\mathcal{G}$: $\mathbf{Z}$-alg $\to$ Gr. La question est de savoir quelles conditions imposer pour généraliser la théorie des groupes réductifs déployés et obtenir une famille bien déterminée de foncteurs (un par type de donnée radicielle de Kac-Moody si l'on veut être conforme à l'équivalence de catégories de Demazure dans le cas des matrices de Cartan).

8.2.1. Les systèmes considérés

On peut penser aux caractérisations des schémas de Chevalley-Demazure pour les prolonger au cas Kac-Moody. De cette approche, on retient le rôle de la valeur du foncteur sur $\mathbf{C}$ et du déploiement du tore maximal. On veut aussi pouvoir reconnaître dans le groupe de Kac-Moody des sous-groupes isomorphes à SL_2 et des tores déployés. Pour une donnée radicielle $\mathcal{D} = \left(S, A, \Lambda, (c_s)_{s\in S}, (h_s)_{s\in S}\right)$ fixée, on note $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\Lambda$ le foncteur des points $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}-\mathrm{alg}}(\mathbf{Z}[\Lambda], -)$ du schéma tore déployé de groupe de caractères Λ. Pour tout élément h de $\Lambda^\vee$ et tout élément r inversible dans un anneau R, r^h est l'élément de $\mathcal{T}(R)$ défini par $\lambda \mapsto r^{h(\lambda)}$. Enfin, on verra SL_2 comme un foncteur-groupe. Les considérations qui précèdent incitent à regarder des systèmes de la forme

$$\mathcal{F} = \big(\mathcal{G}, (\varphi_s)_{s\in S}, \eta\big),$$

où $\mathcal{G}$ est un foncteur-groupe, $(\varphi_s)_{s\in S}$ est une famille de morphismes fonctoriels $\varphi_s : \mathrm{SL}_2 \to \mathcal{G}$ et η est un morphisme fonctoriel $\mathcal{T}_\Lambda \to \mathcal{G}$. On conserve ces notations pour toute la section.

8.2.2. Axiomes d'un foncteur de Tits: première série

Voici une première liste d'axiomes destinés à caractériser les foncteurs de Tits.

DÉFINITION. — *On dit qu'un foncteur-groupe $\mathcal{G} : \mathbf{Z} - \mathrm{alg} \to \mathrm{Gr}$ participant à un système $\mathcal{F} = \big(\mathcal{G}, (\varphi_s)_{s\in S}, \eta\big)$ comme ci-dessus est un* foncteur de Tits, *s'il vérifie la série d'axiomes suivante.*

(KMG1) *Pour tout corps $\mathbf{K}$, $\mathcal{G}(\mathbf{K})$ est engendré par les images des $\varphi_s(\mathbf{K})$ $(s \in S)$ et de $\eta(\mathbf{K})$.*

(KMG2) *Pour tout anneau R, l'homomorphisme $\eta(R)$ est injectif.*

(KMG3) *Pour tout s de S et tout r de R, on a l'égalité* $\varphi_s \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} = \eta(r^{h_s})$.

(KMG4) *Si ι est l'injection d'un anneau R dans un corps $\mathbf{K}$, alors l'homomorphisme $\mathcal{G}(\iota) : \mathcal{G}(R) \to \mathcal{G}(\mathbf{K})$ est injectif.*

(KMG5) *Il existe un homomorphisme $\mathrm{Ad} : \mathcal{G}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}_A)$ dont le noyau est dans $\eta\big(\mathcal{T}(\mathbf{C})\big)$, et qui vérifie:*

$$\forall c\in\mathbf{C} \qquad \mathrm{Ad}[\varphi_s \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}] = \exp \mathrm{ad} c e_s, \quad \mathrm{Ad}[\varphi_s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}] = \exp \mathrm{ad}(-c f_s),$$

$$\forall t\in\mathcal{T}(\mathbf{C}) \qquad \mathrm{Ad}\big(\eta(t)\big)(e_s) = t(c_s)e_s, \quad \mathrm{Ad}\big(\eta(t)\big)(f_s) = -t(c_s)f_s.$$

Référence. [Tit87], p.545. □

À partir de ces axiomes, un premier résultat d'unicité sur les corps peut être démontré, pourvu qu'on ajoute une restriction pour éviter d'éventuelles dégénérescences des groupes radiciels dans le centre.

8.2.3. Axiomes d'un foncteur de Tits: seconde série

En exigeant cette nouvelle série d'axiomes, on a par contre le théorème d'unicité sur les corps qui nous intéresse.

DÉFINITION. — *Soit $\mathcal{G}$ un foncteur de Tits appartenant à un système $\mathcal{F} = \big(\mathcal{G}, (\varphi_s)_{s\in S}, \eta\big)$, et pour lesquels on dispose de deux sous-foncteurs-groupes $\mathfrak{U}_+$ et $\mathfrak{U}_-$. La seconde série d'axiomes d'un foncteur de Tits est la suivante.*

(KMG6) *Le groupe $\mathfrak{U}_+(\mathbf{C})$ (respectivement $\mathfrak{U}_-(\mathbf{C})$) est le groupe dérivé du stabilisateur dans $\mathcal{G}(\mathbf{C})$ de la sous-algèbre engendrée par $\{e_s\}_{s\in S}$ (respectivement $\{f_s\}_{s\in S}$) pour l'action «adjointe» de l'axiome* (KMG5).

(KMG7) *Si $\rho : R \to \mathbf{K}$ est l'injection d'un anneau dans un corps, si ϵ est un signe, $\mathfrak{U}_\epsilon(R)$ est la préimage par $\mathcal{G}(\rho)$ de $\mathfrak{U}_\epsilon(\mathbf{K})$.*

(KMG8) *Le groupe $\mathfrak{U}_\pm(\mathbf{K})$ est pronilpotent pour tout corps $\mathbf{K}$.*

(KMG9) *Pour tout corps $\mathbf{K}$ et tout s de S, le noyau de $\varphi_s(\mathbf{K}) : \mathrm{SL}_2(\mathbf{K}) \to \mathcal{G}(\mathbf{K})$ est central dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{K})$.*

Référence. [Tit87], p.553 □

De manière générale, nous noterons $\mathcal{G}_{\mathcal{D}}$ un foncteur vérifiant la série complète des axiomes (KMG) pour une donnée radicielle $\mathcal{D}$.

8.3. Foncteur de Tits constructif

Ici, on va construire pour chaque donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D}$ un *foncteur de Tits constructif* $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$ qui répond aux exigences axiomatiques précédentes, au moins sur la catégorie des corps. La démonstration de ce fait n'est pas accessible directement après la définition de $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$, on a besoin d'un travail préliminaire de nature combinatoire. Le plan général de construction de ces foncteurs est le suivant. (On met en évidence séparément les parties concernant les tores et les sous-groupes radiciels.)

1. Le foncteur torique a déjà été présenté, il s'agit du foncteur des points $\mathcal{T}_\Lambda$ de Spec $\mathbf{Z}[\Lambda]$.

2. La partie concernant les sous-groupes radiciels implique la construction d'un foncteur-groupe auxiliaire dit *foncteur de Steinberg* St_A, dont l'obtention demande un peu plus de travail et notamment la généralisation du résultat d'intégralité de Chevalley (8.1.2) sur lequel nous reviendrons pour construire la représentation adjointe de $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$.

3. L'étape finale d'amalgame de St_A et $\mathcal{T}_\Lambda$ fera appel à des relations de définition de trois types, qui gèrent les relations que l'on veut voir entretenues par les deux foncteurs.

8.3.1. Groupes unipotents attachés à certaines parties de racines

Il s'agit de voir pour l'instant qu'à toute partie $\mathbf{N}$-nilpotente ψ de racines, on peut naturellement attacher un $\mathbf{Z}$-schéma en groupes $\mathfrak{U}_\psi$. La présentation de ce résultat est l'occasion de citer un lemme relevant purement de la théorie des groupes abstraits, et auquel nous ferons systématiquement référence sous le nom de *lemme de Tits.*

LEMME. — *Soit X un groupe et $(X_1, ...X_m)$ un système générateur de sous-groupes. On suppose que X possède une série centrale $X = Z_1 \supset Z_2 \supset ... \supset Z_h \supset Z_{h+1} = \{1\}$ telle que pour tout j de $\{1; ...h\}$, on ait l'encadrement $Z_j \subset X_{i(j)}.Z_{j+1}$ pour un indice $i(j)$ dans $\{1; ...m\}$. Alors:*

(i) *Pour toute permutation σ de $\{1; ...m\}$, l'application produit*

$$X_{\sigma 1} \times ... \times X_{\sigma m} \to X$$

est surjective.
(ii) *Si cette application est injective pour une permutation, elle l'est pour toutes.*

Référence. [Tit87], lemme 2 p.559. □

Ce lemme est un outil essentiel de la démonstration du résultat qui va suivre. Pour chaque racine réelle a, on désigne par $\mathfrak{U}_a$ le $\mathbf{Z}$-schéma en groupes isomorphe à $\mathbf{G}_a$ d'algèbre de Lie $\mathcal{L}_a = \mathbf{Z}e_a$, pour e_a dans la double base $E_a = \{\pm e_a\}$. Le choix d'un vecteur e de la double base fournit l'isomorphisme $\exp_e : \mathbf{G}_a \xrightarrow{\sim} \mathfrak{U}_a$ défini par $r \mapsto \exp(re)$, et dont l'application tangente envoie 1 sur e.
Si ψ est une partie $\mathbf{N}$-close de racines, on désigne par $\mathfrak{g}_\psi$ la sous-algèbre de Lie engendrée par les sous-algèbres radicielles $\mathfrak{g}_a$ pour a dans ψ, qui est aussi la somme directe de ces sous-algèbres de Lie. Ceci détermine un groupe algébrique complexe U_ψ, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\psi$.
$\mathfrak{U}_a$ et U_ψ sont déterminés à unique isomorphisme près. Ceci mis en place, voici le résultat qui généralise le théorème d'intégralité de Chevalley, *i.e.*, le calcul de commutateur (8.1.2).

PROPOSITION. — *Pour toute partie* $\mathbf{N}$*-nilpotente de racines* ψ*, il existe un unique* $\mathbf{Z}$*-schéma en groupes* $\mathfrak{U}_\psi$ *contenant les* $\mathbf{Z}$*-schémas* $\mathfrak{U}_c$ *pour* c *dans* ψ *et dont la fibre générique – plutôt: la valeur en* $\mathbf{C}$ *– est le groupe complexe* U_ψ *d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}_\psi$*. En outre, l'application produit*

$$\prod_{c\in\psi} \mathfrak{U}_c \to \mathfrak{U}_\psi$$

est un isomorphisme de $\mathbf{Z}$*-schémas pour tout ordre sur* ψ*.*

Référence. [Tit87], proposition 1 p.547. □

REMARQUE. — Concrètement, ce résultat montre que la formule du premier résultat de (8.1.2) se généralise à toute paire prénilpotente de racines $\{a;b\}$, avec l'intervalle $[a;b]_{\mathbf{N}}$ défini en (6.2.4) ou (7.1.4) (voir [Tit87] p.549 pour une formulation plus précise de ce résultat, sur lequel on reviendra).

L'idée de la démonstration est de partir de l'algèbre de Hopf des fonctions du groupe complexe U_ψ et d'en définir une $\mathbf{Z}$-forme en imposant une condition d'intégralité «par dualité» , au moyen d'une $\mathbf{Z}$-forme de l'algèbre des distributions supportées à l'origine de U_ψ. Nous aurons l'occasion de revenir sur cette proposition, pour laquelle nous aurons besoin d'une démonstration plus concrète que celle de la référence, afin de mettre en place la représentation adjointe d'un foncteur de Tits constructif (section (9.2)).

8.3.2. Foncteur de Steinberg

Dans la construction qui va suivre, on spécialise le résultat précédent aux ensembles $\mathbf{N}$-nilpotents $[a;b]_{\mathbf{N}}$ associés aux paires prénilpotentes de racines $\{a;b\}$. Remarquons que cette définition ne dépend en fait que de la matrice de Cartan généralisée de la donnée radicielle de Kac-Moody.

DÉFINITION. — *En associant à chaque anneau* R *l'amalgame de la famille des groupes* $\mathfrak{U}_c(R)$ *et* $\mathfrak{U}_{[a;b]_{\mathbf{N}}}(R)$ *ordonnée par les relations d'appartenance de racines, on définit un foncteur-groupe. On note* St *(ou* St_A*) ce foncteur et on l'appelle* foncteur de Steinberg *associé à la matrice de Cartan généralisée* A*.*

REMARQUE. — Puisque les flèches de l'amalgame en question sont des injections, les groupes du système inductif s'injectent dans St_A et on les identifie à leur image.

L'identification précédente (8.3.1) de $\mathfrak{U}_a$ au foncteur $R \mapsto \{\exp(re_a)\}_{r\in R}$ permet de définir des automorphismes w^* de St_A indexés par le groupe de Weyl W. Précisément, pour w dans w, w^* envoie $\mathfrak{U}_a$ sur $\mathfrak{U}_{wa}$ par

$$w^*.\{\exp(re_a)\}_{r\in R} = \{\exp(rw^*e_a)\}_{r\in R},$$

pour tout anneau R, et où w^* dans le second membre désigne l'automorphisme de $\mathcal{U}_\mathcal{D}$ correspondant (7.4.1). On obtient ainsi une action du groupe W^* de (7.4.1) sur St_A, car W^* agit sur l'ensemble $\bigcup_{a\in\Delta^{re}} \{\pm e_a\}$.

Enfin, le foncteur de Steinberg ne gère que la combinatoire des groupes radiciels (indexés par le système des racines réelles libre de A). Ceci justifie l'amalgame avec le tore $\mathcal{T}_\Lambda$ qu'on a défini précédemment.

8.3.3. Construction finale. Groupes de Kac-Moody

Nous pouvons à présent définir le foncteur de Tits constructif $\widetilde{\mathcal{G}_\mathcal{D}}$ qui cette fois va dépendre de la donnée radicielle de Kac-Moody tout entière. Pour faire court, on note $\mathfrak{U}_s$ (respectivement $\mathfrak{U}_{-s}$) le $\mathbf{Z}$-groupe $\mathfrak{U}_{a_s}$ (respectivement $\mathfrak{U}_{-a_s}$), et x_s (respectivement x_{-s}) l'isomorphisme $\mathbf{G}_a \xrightarrow{\sim} \mathfrak{U}_s$ (respectivement $\mathbf{G}_a \xrightarrow{\sim} \mathfrak{U}_{-s}$) induit par le choix de e_s (respectivement f_s) dans $\mathfrak{g}_{a_s}$ (respectivement $\mathfrak{g}_{-a_s}$). On pose $\tilde{s}(r) := x_s(r)x_{-s}(r^{-1})x_s(r)$ pour r inversible dans un anneau R.

DÉFINITION. — *Pour chaque anneau R, on définit le groupe $\widetilde{\mathcal{G}_\mathcal{D}}(R)$ comme le quotient du produit libre $St_A(R) * \mathcal{T}_\Lambda$ au-dessus des relations suivantes.*

$$tx_s(r)t^{-1} = x_s(t(a_s)r) \qquad (t\in\mathcal{T}_\Lambda(R), r\in R);$$
$$\tilde{s}(r)t\tilde{s}(r)^{-1} = s(t) \qquad (s\in S, t\in\mathcal{T}_\Lambda(R), r\in R^\times);$$
$$\tilde{s}(r^{-1}) = \tilde{s}r^{h_s} \qquad (s\in S, r\in R^\times);$$
$$\tilde{s}u\tilde{s}^{-1} = s^*(u) \qquad (s\in S, u\in\mathfrak{U}_c(R), c\in\Delta^{re}).$$

On définit ainsi un foncteur-groupe qu'on note $\widetilde{\mathcal{G}_\mathcal{D}}$ et qu'on appelle foncteur de Tits constructif. *La valeur d'un foncteur de Tits sur un corps sera appelée un* groupe de Kac-Moody (déployé).

REMARQUE. — L'avant-dernière relation n'est pas exactement celle de [Tit87]. On a procédé à une légère modification. Considérons le cas de SL_2 qu'on voit comme un groupe de Kac-Moody. Les générateurs de l'algèbre de Lie correspondante sont avec la convention de Tits:

$$e_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad h_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cela fournit l'expression des générateurs suivante.

$$x_s(r) = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{-s}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad r^{h_s} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix},$$

pour r parcourant R un anneau, et avec r inversible dans le dernier paramétrage. Calculons alors les éléments relevant la réflexion relative à la racine. $n_s(r) = x_s(r)x_{-s}(r^{-1})x_s(r)$ vaut $\begin{pmatrix} 0 & r \\ -r^{-1} & 0 \end{pmatrix}$. Au lieu d'avoir la relation $n_s r^{h_s} = n_s(r)$, on a $n_s r^{h_s} = n_s(r^{-1})$. En effet,

$$n_s r^{h_s} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & r^{-1} \\ -r & 0 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, les calculs pour définir la représentation adjointe (9.5.2) suggèrent aussi de remplacer $\tilde{s}(r) = \tilde{s}r^{h_s}$ par $\tilde{s}(r^{-1}) = \tilde{s}r^{h_s}$.

Dans une certaine mesure, ces foncteurs résolvent le problème qu'on s'est posé à la section précédente: ils résolvent les axiomes (KMG) au moins sur les corps et sont les seuls à le faire (8.4.2). Puisqu'on se limitera à des valeurs de ces foncteurs sur des corps, on pourra utiliser cette solution constructive au problème axiomatique.

On note encore de la même manière les images dans $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$ des sous-groupes de $\underset{\sim}{St}_A$ et $\mathcal{T}_\Lambda$. Pour a dans Δ^{re} et e_a dans E_a, on note $\exp_{e_a}$ l'isomorphisme de $\mathbf{G}_a$ dans $\mathfrak{U}_a \subset \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$, *cf.* (9.6.1).

8.3.4. Terminologie des sous-groupes

Pour cette partie, on fixe un corps $\mathbf{K}$ et une donnée radicielle de Kac-Moody qui détermine un groupe de Kac-Moody $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{K})$. Nous allons définir des analogues des sous-groupes particulièrement utiles à l'étude des groupes réductifs en dimension finie, à ceci près qu'on évite le problème de conjugaison de ces sous-groupes.

DÉFINITION. — *Soit G un groupe de Kac-Moody obtenu par évaluation d'un foncteur de Tits sur un corps: $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{K})$.*

(i) *Le groupe $T := \mathcal{T}_\Lambda(\mathbf{K})$ est appelé* sous-groupe de Cartan standard *de G. Chacun de ses conjugués est appelé* sous-groupe de Cartan *de G.*

(ii) *Le sous-groupe engendré par les sous-groupes $U_s := \mathfrak{U}_s(\mathbf{K})$ (respectivement $U_{-s} := \mathfrak{U}_{-s}(\mathbf{K})$) sera noté U_+ (respectivement U_-).*

(iii) *Le sous-groupe engendré par T et les sous-groupes U_s (respectivement et les sous-groupes U_{-s}) est appelé* sous-groupe de Borel standard positif *(respectivement négatif) de G. Il est noté B_+ (respectivement B_-). Tout conjugué de B_ϵ est appelé* sous-groupe de Borel de signe *ϵ de G.*

Le vocabulaire des parties décomposables du système libre de racines d'une matrice de Cartan généralisée permet de mettre en place une classe plus large de sous-groupes que celle des sous-groupes de Borel positifs et négatifs.

DÉFINITION. — (i) *À chaque partie J de $\Pi_0(S)$ et chaque signe ϵ, on associe le sous-groupe $U_{J,\epsilon}$ de U_ϵ défini par:*

$$U_{J,\epsilon} := \langle U_c \mid a \in \Delta^{re}(J)_\epsilon \rangle.$$

(ii) *Pour chaque famille $\underline{\epsilon} = (\epsilon_J)_{J \in \Pi_0(S)_{\mathrm{nsph}}} \in \{\pm\}^{\Pi_0(S)_{\mathrm{nsph}}}$, on définit le* sous-groupe de Borel standard $B_{\underline{\epsilon}}$ de signe $\underline{\epsilon}$ *par:*

$$B_{\underline{\epsilon}} := T.\Big(\prod_{J \in \Pi_0(S)_{\mathrm{nsph}}} U_{J,\epsilon_J}\Big).\Big(\prod_{J \in \Pi_0(S)_{\mathrm{sph}}} U_{J,+}\Big).$$

Un conjugué d'un tel sous-groupe est appelé sous-groupe de Borel (de signe $\underline{\epsilon}$).

La raison pour laquelle il n'y a pas de choix à faire pour les composantes connexes sphériques est bien sûr qu'il existe un élément de G qui oppose toutes les racines du système correspondant.

8.4. Combinatoire des groupes de Kac-Moody. Applications

Nous allons relier la construction des foncteurs de Tits aux considérations combinatoires abstraites de la première partie. Le point-clé est de reconnaître une donnée radicielle jumelée. Il s'ensuit qu'on peut alors appliquer tous les résultats concernant cette combinatoire. Pour marquer une différence avec la situation purement abstraite, on convient d'employer systématiquement le symbole Δ^{re} – agrémenté d'éventuels indices – au lieu de Φ pour désigner des parties de racines, et des lettres romaines minuscules (même dans le cadre des immeubles) pour désigner les racines elles-mêmes (c'est la convention (7.1.4)).

8.4.1. Structure combinatoire des groupes de Kac-Moody

La mise en évidence d'une donnée radicielle jumelée est un résultat fondamental, qui est à la base de l'étude des groupes de Kac-Moody. Commençons par une définition technique.

DÉFINITION. — *On appelle corps* assez gros *pour la donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D}$, un corps $\mathbf{K}$ tel que le groupe de Kac-Moody $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{K})$ vérifie la condition*

$$\text{(CENT)} \qquad \forall s \in S \quad Z_{U_s}(T) = \{1\}.$$

Que cette condition n'est pas une grosse contrainte provient du petit lemme suivant.

LEMME. — *Si K est un corps à plus de 3 éléments, il est assez gros pour toute donnée radicielle de Kac-Moody.*

Démonstration. Pour tout groupe radiciel, on regarde le commutateur d'un élément non trivial de ce sous-groupe et d'un élément non trivial $h_a(\lambda)$ du sous-groupe à un paramètre multiplicatif indexé par la racine du groupe radiciel. D'après les relations de définition qui décrivent la conjugaison par T des groupes radiciels, $h_a(\lambda)$ opère par λ^2 sur U_a. L'hypothèse faite sur le corps implique que son groupe des carrés n'est pas trivial. Il suffit de prendre λ de carré non trivial pour voir qu'aucun élément de U_a ne centralise T. □

REMARQUES. — 1. Le corps à deux éléments n'est pas assez gros car alors $T = \{1\}$.

2. Sous les mêmes hypothèses, on a aussi par la démonstration ci-dessus que $Z_{U_s}(T') = \{1\}$, où T' est l'intersection de T avec l'image de $St_A(\mathbf{K})$. En effet, d'après les relations de (8.3.3), $h_a(\lambda) = \lambda^{h_a}$ est dans l'image de $St_A(\mathbf{K})$.

Venons-en maintenant à la combinatoire.

PROPOSITION. — *Soit G un groupe de Kac-Moody obtenu par évaluation d'un foncteur de Tits sur un corps: $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{K})$, où $\mathcal{D}$ est une donnée radicielle de Kac-Moody. Pour chaque racine a, on note $U_a := \mathfrak{U}_a(\mathbf{K})$ le groupe correspondant, et T l'évaluation du foncteur tore déployé $\mathcal{T}$ sur $\mathbf{K}$. Alors:*

(i) $\big(G, (U_a)_{a\in\Delta^{re}}, T\big)$ *est une donnée radicielle jumelée entière.*
(ii) *T est l'intersection des normalisateurs des U_a.*
(iii) *Si $\mathbf{K}$ est assez gros pour $\mathcal{D}$, le normalisateur de T dans G est N.*

Démonstration. Preuve de (i). L'axiome (DRJE4) provient de la définition même du foncteur de Tits constructif $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$. (DRJE2) est une conséquence directe des relations de définition de $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$. Pour (DRJE1), on utilise en plus des relations le fait que le système de racines entier associé à une matrice de Cartan généralisée est réduit (7.1.4). Pour vérifier les deux axiomes (DRJE0) et (DRJE3) – qu'on peut voir comme des hypothèses de non dégénérescence, on utilise la représentation adjointe qu'on construira au chapitre 9. C'est possible puisque la définition de cette représentation ne dépend que de la définition du foncteur constructif $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$, et pas de sa combinatoire. De ce point de vue, (DRJE0) est le premier point du lemme (9.6.1) avec le fait que le système de racines est réduit, alors que (DRJE3) est contenu dans le second point.

Preuve de (ii). C'est une reformulation d'un résultat combinatoire, précisément le corollaire (1.5.3)(i).

Preuve de (iii). Il suffit d'utiliser la proposition (1.2.5)(ii). □

La combinatoire de donnée radicielle jumelée fournit une paire d'immeubles jumelés pour chaque groupe de Kac-Moody. On parlera d'*immeubles* et de *jumelages de Kac-Moody.*

LEMME. — *Pour un corps* $\mathbf{K}$ *fixé, deux données radicielles de Kac-Moody de même matrice de Cartan généralisée donnent lieu au même jumelage d'immeubles abstraits, via les groupes de Kac-Moody associés.*

Démonstration. Outre le corps $\mathbf{K}$, on se donne $\mathcal{D} = \left(S, A, \Lambda, (c_s)_{s\in S}, (h_s)_{s\in S}\right)$ qui définit le groupe $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{K})$. On a une flèche canonique $\widetilde{\Lambda} := \bigoplus_{s\in S} \mathbf{Z}\tilde{c}_s \twoheadrightarrow \mathrm{ad}(\Lambda) \hookrightarrow \Lambda$, $\tilde{c}_s \mapsto c_s$, qui se traduit par un morphisme de tores algébriques $\mathcal{T}_\Lambda \to \mathcal{T}_{\widetilde{\Lambda}}$. En faisant le produit libre avec le foncteur de Steinberg de part et d'autre de la flèche, on obtient un morphisme de groupes abstraits $\mathcal{T}_\Lambda * St_A \to \mathcal{T}_{\widetilde{\Lambda}} * St_A$, qui donne lieu à un morphisme de groupes de Kac-Moody, d'après leurs relations de définition:

$$\varphi : G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{K}) \to \overline{G} := \widetilde{\mathcal{G}}_{\mathcal{D}^A_{\min}}(\mathbf{K}).$$

Ce morphisme échange les sous-groupes de Borel standard de signe fixé, et les éléments – notés $\tilde{s}$ en (8.3.3) – relevant le groupe de Weyl modulo le sous-groupe de Cartan standard (en respectant les indices de S). Notons B_ϵ le sous-groupe de Borel standard de signe ϵ de G, $\overline{B}_\epsilon$ celui de $\overline{G}$. On a échange des doubles classes de Bruhat pour chaque signe, si bien que le noyau de φ est dans le sous-groupe de Cartan standard T de G. En effet:

$$\mathrm{Ker}\varphi \subset \varphi^{-1}(\overline{B}_+) \cap \varphi^{-1}(\overline{B}_-) = B_+ \cap B_- = T.$$

Par unicité d'écriture dans les doubles classes pour chacun des deux groupes (1.2.3), l'ensemble des chambres à distance $w \in W$ de la chambre standard positive est en bijection avec $U_w w$. Puisque U_w s'intersecte trivialement avec T (corollaire (1.5.3)(ii)), φ induit une bijection $G/B_+ \xrightarrow{\sim} \overline{G}/\overline{B}_+$. En faisant la même remarque pour le signe $-$, on voit que les ensembles sous-jacents aux immeubles sont en bijection, et le respect des s-adjacences (respectivement de la codistance) provient du respect des décompositions de Bruhat (respectivement de la décomposition de Birkhoff). □

8.4.2. Unicité sur les corps

Avant de citer les deux versions du théorème d'unicité des foncteurs de Tits sur les corps, introduisons quelques notations. Pour tout anneau R, $\widetilde{\mathfrak{U}}_+(R)$ désignera le sous-groupe de $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(R)$ engendré par les $\mathfrak{U}_s(R)$ pour s dans S, $\widetilde{\mathfrak{U}}_-(R)$ le sous-groupe engendré par les $\mathfrak{U}_{-s}(R)$. Enfin, x_+ (respectivement x_-) est le morphisme fonctoriel $\mathbf{G}_a \to \mathrm{SL}_2$ qui attache à tout élément r d'un anneau R la matrice $\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (respectivement $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -r & 1 \end{pmatrix}$).

THÉORÈME. — *Soit $\mathcal{F} = \big(\mathcal{G}_{\mathcal{D}}, (\varphi_s)_{s\in S}, \eta\big)$ un système satisfaisant les cinq premiers axiomes de la série* (KMG) *pour une donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D}$. Alors:*

(i) *Il existe une unique transformation naturelle $\pi : \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}} \to \mathcal{G}_{\mathcal{D}}$ du foncteur de Tits constructif vers $\mathcal{G}_{\mathcal{D}}$, telle que le morphisme fonctoriel $\mathcal{T}_\Lambda \to \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$ composé avec π est η et le morphisme fonctoriel composé $\mathbf{G}_a \to \mathfrak{U}_{\pm s} \to \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}} \to \mathcal{G}_{\mathcal{D}}$ vaut $\varphi_s \circ x_\pm$.*
(ii) *Si $\mathbf{K}$ est un corps, $\pi(\mathbf{K})$ est un isomorphisme à moins qu'il existe un indice s de S pour lequel $\varphi_s\big(\mathrm{SL}_2(\mathbf{K})\big)$ est dans $\pi\big(\widetilde{\mathfrak{U}}_+(\mathbf{K})\big)$ ou dans $\pi\big(\widetilde{\mathfrak{U}}_-(\mathbf{K})\big)$.*

Référence. [Tit87], théorème 1 p.553. □

Si on veut à coup sûr un isomorphisme sur les corps, il faut exiger la totalité des axiomes qu'on a formulés.

THÉORÈME. — *Soit $\mathcal{F} = \big(\mathcal{G}_{\mathcal{D}}, (\varphi_s)_{s\in S}, \eta\big)$ un système satisfaisant tous les axiomes de la série* (KMG) *pour une donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D}$. Alors:*

(i) *Pour tout anneau R, on a les inclusions $\pi\big(\widetilde{\mathfrak{U}}_+(R)\big) \subset \mathfrak{U}_+(R)$ et $\pi\big(\widetilde{\mathfrak{U}}_-(R)\big) \subset \mathfrak{U}_-(R)$.*
(ii) *Pour tout corps $\mathbf{K}$, l'application $\pi(\mathbf{K})$ est un isomorphisme.*

Référence. [Tit87], théorème 1′ p.553. □

REMARQUE. — D'après J. Tits ([Tit87], point b) p.554), il existe un foncteur $\mathcal{F}$ satisfaisant tous les axiomes (KMG); pour le construire, la $\mathbf{Z}$-forme de l'algèbre enveloppante du chapitre 9 ne suffit pas. En particulier, pour (KMG2), il faut utiliser des modules à plus haut poids. Il résulte donc du théorème précédent que $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$ vérifie tous les axiomes au moins sur les corps.

8.4.3. Caractères et cocaractères

Nous terminons la présentation des groupes de Kac-Moody par une remarque élémentaire qui permet d'interpréter les réseaux de la donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D}$ en termes de caractères et de cocaractères.

DÉFINITION. — (i) *On note $X^*(T)_{\mathrm{abs}}$ le* groupe de caractères *de T, i.e., le groupe des homomorphismes de groupes abstraits de T dans le groupe multiplicatif $\mathbf{K}^\times$.*
(ii) *On note $X_*(T)_{\mathrm{abs}}$ le* groupe des cocaractères *de T, i.e., le groupe des homomorphismes de groupes abstraits du groupe multiplicatif $\mathbf{K}^\times$ dans T.*

$X^*(T)_{\mathrm{abs}}$ est bien sûr un groupe pour la multiplication point par point:

$$\forall c, c' \in X^*(T)_{\mathrm{abs}} \quad \forall t \in T \quad (c.c')(t) = c(t)c'(t).$$

$X_*(T)_{\mathrm{abs}}$ est un groupe pour la composition à égal paramètre:

$$\forall \lambda\check{}, \mu\check{} \in X_*(T)_{\mathrm{abs}} \quad \forall k \in \mathbf{K}^\times \quad (\lambda\check{}.\mu\check{})(k) = \lambda\check{}(k)\mu\check{}(k).$$

Ceci étant dit, on a le petit résultat suivant.

LEMME. — *On suppose le corps* $\mathbf{K}$ *infini, alors:*

(i) *Le groupe additif* Λ *de* $\mathcal{D}$ *s'injecte naturellement dans* $X^*(T)_{\mathrm{abs}}$.
(ii) *Le groupe additif* $\Lambda\check{}$ *de* $\mathcal{D}$ *s'injecte naturellement dans* $X_*(T)_{\mathrm{abs}}$.

REMARQUES. — 1. Pour un corps quelconque, on a toujours des homomorphismes, mais ils ne peuvent être injectifs pour une simple raison de cardinalité.

2. Ces deux homomorphisme sont N-équivariants, d'après la deuxième relation de (8.3.3).

Justification. Le sous-groupe de Cartan standard est défini par: $T := \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}-\mathrm{alg}}(\mathbf{K}[\Lambda], \mathbf{K})$, c'est-à-dire qu'on peut voir un élément t de T comme une application

$$t : \mathbf{K}[\Lambda] \to \mathbf{K}$$

$$\delta_\lambda \mapsto t(\delta_\lambda),$$

où $\{\delta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ est la base naturelle de la $\mathbf{K}$-algèbre du groupe Λ. On a nécessairement $t(\delta_\lambda) \in \mathbf{K}^\times$ pour tout λ dans Λ et tout t dans T, puisque $t(\delta_\lambda).t(\delta_{-\lambda}) = t(\delta_\lambda.\delta_{-\lambda}) = t(1) = 1_{\mathbf{K}}$. (On vient presque de redémontrer l'identité fonctorielle bien connue $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}-\mathrm{alg}}(\mathbf{Z}[\Lambda], -) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}}(\Lambda, -) \circ \mathbf{G}_m$). Enfin, rappelons qu'à tout élément $\lambda\check{}$ de $\Lambda\check{}$, et à tout k de $\mathbf{K}^\times$, on attache l'élément $k^{\lambda\check{}}$ de T défini par: $k^{\lambda\check{}}(\delta_\lambda) = k^{\langle\lambda|\lambda\check{}\rangle}$.

Preuve de (i). Pour chaque élément λ, considérons l'application

$$\underline{\lambda} : T \to \mathbf{K}^\times$$

$$t \mapsto \underline{\lambda}(t) := t(\delta_\lambda).$$

C'est un caractère car $\underline{\lambda}(tt') = (tt')(\delta_\lambda) = t(\delta_\lambda).t'(\delta_\lambda) = \underline{\lambda}(t).\underline{\lambda}(t')$. En outre, l'application $\lambda \mapsto \underline{\lambda}$ est compatible aux lois de groupes: $\underline{\lambda+\mu}(t) = t(\delta_{\lambda+\mu}) = t(\delta_\lambda).t(\mu) = \underline{\lambda}(t).\underline{\mu}(t) = (\underline{\lambda}\underline{\mu})(t)$. D'où un morphisme: $\Lambda \to X^*(T)_{\mathrm{abs}}$.
Supposons maintenant que l'élément λ fournisse un caractère $\underline{\lambda}$ trivial. On a donc pour tout t de T, $\underline{\lambda}(t) = t(\delta_\lambda) = 1$. En testant sur les éléments $k^{\lambda\check{}}$, il vient que pour tout $\lambda\check{}$ et pour tout $k \in \mathbf{K}$, on a $k^{\langle\lambda|\lambda\check{}\rangle} = 1$, et donc pour tout $\lambda\check{}$, $\langle\lambda \mid \lambda\check{}\rangle$ vaut 0. Ceci implique que λ est trivial dans Λ.

Preuve de (ii). Il s'agit du même type de vérification, le tout étant de donner l'application d'identification. À chaque élément $\lambda\check{}$ de $\Lambda\check{}$, on attache le cocaractère $\{k^{\lambda\check{}}\}_{k\in\mathbf{K}^\times}$. On obtient ainsi un morphisme de groupes injectif

$$\Lambda\check{} \to X_*(T)_{\mathrm{abs}}$$

$$\lambda\check{} \mapsto \{k^{\lambda\check{}}\}_{k\in\mathbf{K}^\times}$$

qui fournit le plongement désiré. □

DÉFINITION. — *Un* caractère (respectivement cocaractère) algébrique *du sous-groupe de Cartan standard T de G est un caractère (respectivement cocaractère) provenant du réseau Λ (respectivement $\Lambda^\vee$).*

Cette notion permet de décrire le centre d'un groupe de Kac-Moody.

LEMME. — *Le centre du groupe $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{K})$ est l'intersection des noyaux de caractères algébriques d'un sous-groupe de Cartan de G.*

Démonstration. Si g est dans $Z(G)$, il centralise donc normalise chacun des deux sous-groupes de Borel positif et négatif. Puisque ces groupes sont égaux à leur normalisateur (propriété classique des systèmes de Tits), g est dans $B_+ \cap B_-$ qui vaut T. Le fait d'être dans tous les noyaux de caractères s'impose alors d'après les relations entretenues entre les sous-groupes radiciels et le sous-groupe de Cartan. La réciproque est justifiée par le fait que le tore est commutatif et que G est engendré par le tore et les sous-groupes radiciels. □

8.4.4. Comportement vis-à-vis des extensions de corps

Si $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ est une extension de corps, par définition du foncteur de Tits constructif $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$, on a l'inclusion $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{K}) \subset \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{E})$.

CONVENTION. — *On se place dans le cas où la donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D}$ est fixée, et où le corps de base varie parmi les extensions d'un corps fixé $\mathbf{K}$. Pour chaque extension de corps $\mathbf{E}/\mathbf{K}$, on adoptera alors les conventions suivantes.*

(i) *$G(\mathbf{E})$ désigne le groupe $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{E})$. Si H est un sous-groupe remarquable (c'est-à-dire défini en (8.3.4)) de $G(\mathbf{E})$, l'ecriture $H(\mathbf{E})$ indique que ce sous-groupe est défini à partir du corps $\mathbf{E}$.*
(ii) *$\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E})$ est l'immeuble de signe ϵ du groupe $G(\mathbf{E})$. $\mathcal{J}(\mathbf{E})$ en est le jumelage.*
(iii) *L'absence de parenthèse pour indiquer un corps signifie que les groupes sont obtenus à partir d'une clôture algébrique $\overline{\mathbf{K}}$ de $\mathbf{K}$.*

On a alors le résultat facile suivant.

LEMME. — *Soit $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ une extension de corps.*

(i) *La décomposition de Bruhat associée au sous-groupe de Borel standard de signe ϵ $B_\epsilon(\mathbf{K})$ de $G(\mathbf{K})$ est la trace sur $G(\mathbf{K})$ de la décomposition de Bruhat associée au sous-groupe de Borel standard de signe ϵ $B_\epsilon(\mathbf{E})$ de $G(\mathbf{E})$. En particulier, tout sous-groupe parabolique standard de signe et type fixés de $G(\mathbf{K})$ est trace sur $G(\mathbf{K})$ du sous-groupe parabolique de $G(\mathbf{E})$ de mêmes signe et type.*
(ii) *La décomposition de Birkhoff standard de $G(\mathbf{K})$ est la trace sur $G(\mathbf{K})$ de la décomposition de Birkhoff standard de $G(\mathbf{E})$.*
(iii) *Le tore standard $T(\mathbf{K})$ de $G(\mathbf{K})$ est la trace du tore standard $T(\mathbf{E})$ sur $G(\mathbf{K})$.*
(iv) *Pour tout signe ϵ, on a $U_\epsilon(\mathbf{K}) = G(\mathbf{K}) \cap U_\epsilon(\mathbf{E})$.*
(v) *Un groupe radiciel de $G(\mathbf{K})$ est la trace sur $G(\mathbf{K})$ d'un groupe radiciel de $G(\mathbf{E})$.*

Démonstration. Commençons par remarquer que pour tout s de S, l'élément $\tilde{s}$ défini en (8.3.3) est dans $G(\mathbf{K})$. Ainsi, le groupe $\widetilde{W}$ que ces éléments engendrent est inclus dans $G(\mathbf{K})$ et relève modulo $T(\mathbf{K})$ (respectivement $T(\mathbf{E})$) le groupe de Weyl de $G(\mathbf{K})$ (respectivement $G(\mathbf{E})$). Ces groupes de Weyl sont naturellement isomorphes.

Preuve de (i). Pour tout $\tilde{w}$ de $\widetilde{W}$, on a $\tilde{w} \in G(\mathbf{K})$ et $B_\epsilon(\mathbf{K}) \subset B_\epsilon(\mathbf{E})$.
D'où $B_\epsilon(\mathbf{K}) w B_\epsilon(\mathbf{K}) \subset B_\epsilon(\mathbf{E}) w B_\epsilon(\mathbf{E}) \cap G(\mathbf{K})$ pour tout w. Par décomposition de Bruhat pour $G(\mathbf{K})$, on en fait égalité.

(ii) se prouve comme (i).

Preuve de (iii). D'après (8.4.1) et (3.5.4), on a

$$\begin{aligned} T(\mathbf{K}) &= B_\epsilon(\mathbf{K}) \cap B_{-\epsilon}(\mathbf{K}) = (B_\epsilon(\mathbf{E}) \cap G(\mathbf{K})) \cap (B_{-\epsilon}(\mathbf{E}) \cap G(\mathbf{K})) \\ &= (B_\epsilon(\mathbf{E}) \cap B_{-\epsilon}(\mathbf{E})) \cap G(\mathbf{K}) = T(\mathbf{E}) \cap G(\mathbf{K}). \end{aligned}$$

Preuve de (iv). Déjà $G(\mathbf{K}) \cap U_\epsilon(\mathbf{E}) = U_\epsilon(\mathbf{E}) \cap B_\epsilon(\mathbf{E}) \cap G(\mathbf{K}) = U_\epsilon(\mathbf{E}) \cap B_\epsilon(\mathbf{K})$. Si g est dans cette intersection, on peut l'écrire $g = tu$, avec t dans $T(\mathbf{K})$ et u dans $U_\epsilon(\mathbf{K})$. Alors gu^{-1} est dans $T(\mathbf{K}) \cap U_\epsilon(\mathbf{E}) \subset T(\mathbf{E}) \cap U_\epsilon(\mathbf{E})$. Cette dernière intersection est triviale par (8.4.1) et (3.5.4), et finalement $g = u$.

Preuve de (v). Il suffit de traiter le cas d'une racine simple, le cas général s'en déduisant par conjugaison par un $\tilde{w}$ dans $G(\mathbf{K})$. On a d'après (1.5.4):

$$\begin{aligned} U_s(\mathbf{E}) \cap G(\mathbf{K}) &= (U_+(\mathbf{E}) \cap \tilde{s}^{-1} U_-(\mathbf{E}) \tilde{s}) \cap G(\mathbf{K}) = (U_+(\mathbf{E}) \cap G(\mathbf{K})) \cap (\tilde{s}^{-1} U_-(\mathbf{E}) \tilde{s} \cap G(\mathbf{K})) \\ &= U_+(\mathbf{K}) \cap \tilde{s}^{-1} (U_-(\mathbf{E}) \cap G(\mathbf{K})) \tilde{s} = U_+(\mathbf{K}) \cap \tilde{s}^{-1} U_-(\mathbf{K}) \tilde{s} = U_s(\mathbf{K}), \end{aligned}$$

et on peut faire le même raisonnement en opposant les signes.

9. Représentation adjointe des foncteurs de Tits

La représentation adjointe va servir de substitut à une structure algébrique globale sur les foncteurs de Tits. Ce n'est pas très étonnant puisque dans le cas classique, les représentations ont historiquement constitué le moyen de munir les groupes de Chevalley d'une structure de schéma en groupes algébrique ([Che61]). Vu la définition par amalgame des foncteurs de Tits constructifs, on doit revenir pour construire cette représentation à une interprétation plus concrète de certains passages de la construction des foncteurs $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$. On introduit notamment des groupes de sommes formelles. On obtient ainsi une représentation linéaire fonctorielle, qui une fois évaluée sur le corps des nombres complexes, fait le lien entre les constructions de J. Tits ([Tit87] par exemple) et de V. Kac et D. Peterson ([Kac-Pet84] par exemple).

Aucun usage de combinatoire des groupes, et notamment de (8.4.1), n'est fait avant la dernière sous-section (9.6.2). Pour tout anneau R, R-alg désignera la «catégorie» des R-algèbres.

9.1. Ordres grignotants sur les parties N-nilpotentes. Complétion

Cette section ne fait que rappeler quelques notations, et introduit une notion d'ordre sur des parties **N**-nilpotentes de racines, commode pour la combinatoire des groupes unipotents que l'on va construire. On fixe une donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D} = \big(S, A, \Lambda, (c_s)_{s\in S}, (h_s)_{s\in S}\big)$, à laquelle est associée l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ définie par générateurs et relations (7.3.1).

9.1.1. Algèbres de Lie. Algèbres enveloppantes. Z-formes

Le seul but ici est de rappeler quelques notations éventuellement déjà utilisées (7.4.3). L'algèbre enveloppante $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ possède une **Z**-forme $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ mise en évidence en (7.4.3). On note $\mathcal{L}_{\mathcal{D}} := \mathcal{U}_{\mathcal{D}} \cap \mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ la **Z**-algèbre de Lie obtenue par intersection de la **Z**-forme avec l'algèbre de Kac-Moody. Si ψ est une partie de racines, on note $\mathfrak{g}_\psi := \bigoplus_{c\in\psi} \mathfrak{g}_c$. Si ψ est **N**-close, $\mathfrak{g}_\psi$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$. On définit alors le sous-anneau $\mathcal{U}_\psi$ de $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ par $\mathcal{U}_\psi := \mathcal{U}_{\mathcal{D}} \cap \mathcal{U}\mathfrak{g}_\psi$. On désigne par $\mathcal{U}_0$ l'anneau engendré par les éléments $\binom{\lambda^\vee}{n}$ pour $\lambda^\vee$ un élément de $\Lambda^\vee$ le **Z**-dual de Λ et n un entier, et on a $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_{\mathcal{D}} \cap \mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$.

9.1.2. Ordres grignotants sur les parties N-nilpotentes de racines

Les ordres grignotants vont permettre de prouver l'existence d'écritures adéquates dans les groupes unipotents que l'on va définir.

DÉFINITION. — *Soit ψ une partie* **N***-close de racines. On dit qu'un ordre total $\psi = \{c_1; \dots c_m\}$ sur ψ est* grignotant *s'il vérifie la propriété*

$$c_k = c_i + c_j \Rightarrow k < \inf\{i, j\}.$$

On a alors le résultat facile et très utile suivant.

LEMME. — *Toute partie* **N***-nilpotente de racines admet un ordre grignotant.*

Justification. Soit ψ une telle partie. En appliquant un élément du groupe de Weyl convenable, on se ramène au cas où ψ est formée de racines positives. Dans ce cas, on dispose d'une notion de hauteur, et il suffit de ranger les racines de ψ par ordre décroissant pour cette quantité, les racines de même hauteur étant rangées dans un ordre arbitraire. □

REMARQUE. — L'interprétation géométrique est la même que dans le cas des systèmes de racines affines (où ce type d'ordre a été initialement défini), à savoir que pour tout j, la demi-droite $\mathbf{R}_+ c_j$ est une génératrice extrémale du cône positif convexe engendré par les racines inférieures ou égales (*i.e.*, n'est pas dans le cône engendré par les racines strictement inférieures).

9.1.3. Complétions et extensions des scalaires

Notons $Q_+ := \bigoplus_{s\in S} \mathbf{N} a_s$. Alors $\mathcal{U}\mathfrak{g}_+$ est graduée par Q_+ et son complété $\widehat{\mathcal{U}\mathfrak{g}_+}$ pour cette graduation (et l'ordre défini par la hauteur sur Q_+) est la $\mathbf{C}$-algèbre formée des sommes formelles $\sum_{a\in Q_+} u_a$ avec $u_a \in \left(\mathcal{U}\mathfrak{g}_+\right)_a$ pour a dans Δ_+. $\mathcal{U}_{\Delta_+}$ est un sous-anneau de $\mathcal{U}\mathfrak{g}_+$ qui hérite une graduation de celle de $\mathcal{U}\mathfrak{g}_+$. Son complété est l'anneau $\widehat{\mathcal{U}_{\Delta_+}}$ des sommes formelles $\sum_{a\in Q_+} u_a$ avec $u_a \in \left(\mathcal{U}_{\Delta_+}\right)_a$ pour a dans Δ_+.

Si ψ est une partie **N**-nilpotente de racines, on note $\widehat{\mathcal{U}_\psi}$ l'anneau formé des sommes formelles $\sum_{a\in Q_+} u_a$ avec $u_a \in \left(\mathcal{U}_\psi\right)_a$ pour a dans ψ.Si $w \in W$ est tel que $w\psi \subset \Delta_+^{re}$, alors $w^*\widehat{\mathcal{U}_\psi}$ est l'adhérence de $w^*\mathcal{U}_\psi$ dans $\widehat{\mathcal{U}_{\Delta_+}}$.

Si ψ est une partie **N**-close de racines, et si R est un anneau, on note $\left(\mathcal{U}_\psi\right)_R$ (respectivement $\left(\widehat{\mathcal{U}_\psi}\right)_R$) la R-algèbre $\mathcal{U}_\psi \otimes_{\mathbf{Z}} R$ (respectivement $\left(\widehat{\mathcal{U}_\psi}\right)\hat{\otimes}_{\mathbf{Z}} R$); le produit tensoriel complété $\hat{\otimes}_{\mathbf{Z}}$ est pris relativement à la filtration naturelle de $\widehat{\mathcal{U}_\psi}$ en sous-$\mathbf{Z}$-modules libres.

Si $\varphi : R \to R'$ est une flèche de $\mathbf{Z}-$alg, on identifie naturellement $\left(\mathcal{U}_\psi\right)_{R'}$ à $\left(\mathcal{U}_\psi\right)_R \otimes_R R'$, et $\left(\widehat{\mathcal{U}_\psi}\right)_{R'}$ à $\left(\widehat{\mathcal{U}_\psi}\right)_R \hat{\otimes}_R R'$.

9.2. Groupes de sommes formelles

Dans cette section, on va définir pour chaque partie **N**-nilpotente ψ de racines un foncteur en groupes $\mathfrak{U}_\psi$ défini sur la catégorie des anneaux. Il se construit comme groupe multiplicatif de sommes formelles engendré par des exponentielles. Tout le travail consiste à dévisser ces foncteurs en groupes pour montrer qu'il s'agit de foncteurs des points de schémas en groupes de type fini sur $\mathbf{Z}$ (précisément des schémas obtenus par descente de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{Z}$ par J. Tits, pour prouver l'analogue du résultat d'intégralité de Chevalley). Avant de commencer, on fait une fois pour toutes un choix de vecteur e_c (c'est-à-dire de signe) dans la double base E_c de chaque racine réelle c.

9.2.1. Les foncteurs en groupes $\mathfrak{U}_\psi$

On oublie temporairement que la notation $\mathfrak{U}_\psi$ désigne déjà des foncteurs-groupes, d'après (8.3.1). On va introduire d'autres foncteurs-groupes notés de la même façon, et on identifiera les deux définitions en (9.3.3).

DÉFINITION. — *ψ désigne une partie* **N***-nilpotente de racines.*

(i) *On note $\mathfrak{U}_\psi(\mathbf{Z})$ le sous-groupe de $(\widehat{\mathcal{U}_\psi})^\times$ engendré par les sommes formelles $\exp(re_c)$ pour r dans* **Z** *et c racine de ψ.*
(ii) *Étant donné un anneau R, on note $\mathfrak{U}_\psi(R)$ le sous-groupe de $(\widehat{\mathcal{U}_\psi})^\times_R$ engendré par les sommes formelles $\exp(re_c) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \otimes e_c^{[n]}$, pour r dans R et c racine de ψ.*
(iii) *De cette façon, on définit un foncteur en groupes $R \mapsto \mathfrak{U}_\psi(R)$ sur la catégorie* **Z**−alg *des anneaux, qu'on note $\mathfrak{U}_\psi$. Si $\varphi : R \to R'$ est une flèche de* **Z**−alg, *la flèche $\mathfrak{U}_\psi(\varphi)$ est la flèche induite par l'extension des scalaires relativement à φ entre $(\widehat{\mathcal{U}_\psi})^\times_R$ et $(\widehat{\mathcal{U}_\psi})^\times_{R'}$, elle envoie $\exp(re_c) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \otimes e_c^{[n]}$ sur $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(r)^n \otimes e_c^{[n]}$ pour tout r de R.*

9.2.2. Calculs à la Steinberg

Voici un célèbre calcul de commutateur, présenté dans une version formelle, mais qui sera spécialisé à l'usage. Il généralise le résultat énoncé en (8.1.2). Par rapport à la situation classique, les modifications apportées pour le cas Kac-Moody sont mineures.

LEMME. — *Soit $\{a; b\}$ une paire prénilpotente de racines réelles distinctes. On fixe un ordre quelconque sur $[a; b]_{\mathbf{N}} = (\mathbf{N}a + \mathbf{N}b) \cap \Delta^{re}$, et on note*

$$N := \{(i, j) \in \big(\mathbf{N} - \{0\}\big)^2 \mid ia + jb \in]a; b[_{\mathbf{N}}\},$$

qui est ainsi ordonné. Alors, il existe des entiers C_{ij}^{ab} ne dépendant que de a, b et de l'ordre choisi, tels que dans $\mathcal{U}_{[a;b]_{\mathbf{N}}}[[t, u]]$ on ait

$$[\exp(te_a), \exp(ue_b)] = \prod_{(i,j)\in N} \exp(t^i u^j C_{ij}^{ab} e_{ia+jb}),$$

le produit se faisant dans l'ordre préassigné. En outre, l'entier C_{11}^{ab} est indépendant de l'ordre et vaut la constante de structure C_{ab} de la **Z***-algèbre de Lie $\mathcal{L}_{[a;b]_{\mathbf{N}}}$ définie par $[e_a, e_b] = C_{ab}\, e_{a+b}$.*

Démonstration. 1. On va se servir de deux graduations de $\mathcal{U}_{[a;b]_{\mathbf{N}}}[[t, u]]$.
La première – que nous appellerons *graduation globale* – attribue à t (respectivement u) le degré $-a$ (respectivement $-b$) et à e_c le degré c pour toute racine $[a; b]_{\mathbf{N}}$: on obtient une graduation par les racines de $(\mathbf{N}a + \mathbf{N}b) \cap \Delta^{re}$.
La seconde est tout simplement la graduation comme somme formelle en t et u; nous parlerons à son sujet de *degré* en t,u.
Pour $\underline{c} = (c_{ij})_{(i,j)\in N}$, on note la somme formelle:

$$f_{\underline{c}}(t, u) := [\exp(te_a), \exp(ue_b)].\Big(\prod_{(i,j)\in N} \exp(-c_{ij} t^i u^j e_{ia+jb})\Big),$$

le produit se faisant dans l'ordre inverse de celui de l'énoncé. On va utiliser également les identités suivantes.

$$t\frac{d}{dt}\exp(te_c) = t.e_c\exp(te_c) \quad \text{(dérivation)},$$

$$\exp(ue_c)\cdot(te_d) = \big(\exp(\mathrm{ad}ue_c).(te_d)\big).\exp(ue_c) \quad \text{(commutation)},$$

$$\exp(\mathrm{ad}ue_c).(te_d) = te_d + tuC_{c,d}e_{d+c} + tu^2C_{cd}C_{c,c+d}e_{d+2c} + \ \ldots \quad \text{(exponentielle de l'adjointe)}.$$

Les C_{cd} sont les constantes de structure évoquées dans l'énoncé. Cette dernière somme est finie car d est une racine réelle, et donc $\mathrm{ad}e_d$ est une dérivation localement nilpotente.

2. Le résultat dit essentiellement qu'il existe $\underline{c} = (c_{ij})_{(i,j)\in N} \in \mathbf{Z}^N$ tel que $f_{\underline{c}}(t,u) = 1$. Pour cela, il suffit de trouver $\underline{c} = (c_{ij})_{(i,j)\in N} \in \mathbf{Z}^N$ tel que

$$t\frac{d}{dt}f_{\underline{c}}(t,u) = 0,$$

car on aura

$$f_{\underline{c}}(t,u) = f_{\underline{c}}(0,u) = 1.$$

Partons donc de $\underline{c} = (c_{ij})_{(i,j)\in N} \in \mathbf{Z}^N$. On a:

$$t\frac{d}{dt}f_{\underline{c}}(t,u) = te_a f_{\underline{c}}(t,u)$$

$$+ \exp(t\cdot e_a).\exp(ue_b).(-te_a).\exp(-te_a).\exp(-ue_b).\prod_{(i,j)\in N}\exp(-c_{ij}t^iu^je_{ia+jb})$$

$$+ \sum_{(k,l)\in N}[\exp(te_a),\exp(ue_b)].\prod_{ia+jb>ka+lb}\exp(-c_{ij}t^iu^je_{ia+jb}).(-c_{kl}kt^ku^le_{ka+lb}).\ \ldots$$

$$\ldots\ .\prod_{ia+jb\le ka+lb}\exp(-c_{ij}t^iu^je_{ia+jb}).$$

3. Examinons de plus près la deuxième famille de termes.

$$\exp(te_a).\exp(ue_b).(-te_a).\exp(-te_a).\exp(-ue_b).\prod_{(i,j)\in N}\exp(-c_{ij}t^iu^je_{ia+jb})$$

$$= \exp(te_a).(-te_a - C_{ba}tue_{a+b} - \ldots).\exp(ue_b).\exp(-te_a).\exp(-ue_b).\prod_{(i,j)\in N}\exp(-c_{ij}t^iu^je_{ia+jb})$$

$$= (-te_a - \exp(\mathrm{ad}te_a).C_{ba}tue_{a+b} + R).[\exp(te_a),\exp(ue_b)].\prod_{(i,j)\in N}\exp(-c_{ij}t^iu^je_{ia+jb}),$$

où R est formé de termes de degré 0 pour la graduation globale, sans intervention de $\underline{c}$, de degré $k+l>2$ en t,u. Finalement, le groupe de termes considéré donne

$$-te_a.f_{\underline{c}}(t,u) - C_{ba}tue_{a+b}.f_{\underline{c}}(t,u) + R'.f_{\underline{c}}(t,u),$$

où R' vérifie les mêmes conditions que R.

4. Pour le dernier groupe de termes, on utilise les règles de commutation et de l'exponentielle de l'adjointe pour placer les monômes $-c_{kl}kt^ku^le_{ka+lb}$ à gauche des produits. De cette façon, on crée des termes secondaires de degré en t,u supérieurs. On peut faire ainsi remonter tous les monômes (les derniers finissent par commuter puisque les chaînes de racines sont finies). Cette manipulation ne produit pas de terme de degré en t,u inférieur à celui de tu; par conséquent, dans $t\frac{d}{dt}f_{\underline{c}}(t,u)$, le terme de plus petit degré en t,u est $(-C_{ba}-c_{11})tue_{a+b}$. Ceci impose pour avoir $t\frac{d}{dt}f_{\underline{c}}(t,u)=0$ de poser $C_{11}^{ab}=-C_{ba}=C_{ab}$.

5. De manière générale, on obtient une écriture:

$$t\frac{d}{dt}f_{\underline{c}}(t,u) = A.f_{\underline{c}}(t,u),$$

avec A dans $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}[[t,u]]$ homogène de degré 0 pour la graduation globale, soit

$$A=\sum_{k,l\geq 1}\left(-c_{kl}+P_{kl}(c_{ij})\right)t^ku^le_{ka+lb}.$$

Les calculs se faisant entre vecteurs de la $\mathbf{Z}$-forme, les coefficients des polynômes sont entiers. Par homogénéité globale, les seuls coefficients non nuls dans P_{kl} concernent les cas $i+j<k+l$. Ceci permet de calculer par récurrence les c_{ij} par des formules polynômiales à coefficients entiers, à partir d'une valeur initiale entière. D'où la famille $\underline{c}\in\mathbf{Z}^N$. □

9.2.3. Écritures uniques

Un fait remarquable concernant les groupes obtenus est que tout élément peut s'écrire comme produit d'exponentielles où chaque racine apparaît exactement une fois et dans un ordre préassigné une fois pour toutes. Cette écriture est unique.

LEMME. — *Soient ψ une partie $\mathbf{N}$-nilpotente de racines, R un anneau et $\psi=\{c_1;\dots c_m\}$ un ordre quelconque sur ψ. Alors l'application produit:*

$$\prod_{i=1}^{m}\mathfrak{U}_{c_i}(R)\longrightarrow\mathfrak{U}_{\psi}(R)$$

$$\left(\exp(r_ie_{c_i})\right)_{1\leq i\leq m}\mapsto\prod_{i=1}^{m}\exp(r_ie_{c_i})$$

est une bijection. On obtient ainsi une bijection de R^m sur $\mathfrak{U}_{\psi}(R)$.

Démonstration. 1. On fixe un ordre grignotant $\psi = \{c_1; \dots c_m\}$, et on note $\psi_j := \{c_1; \dots c_j\}$ pour j compris entre 1 et m. Enfin, pour $1 \leq l \leq m$, $\mathfrak{U}_l(R)$ désigne $\mathfrak{U}_{\psi_l}(R)$
Vu l'ordre et les relations de commutation du lemme précédent, il apparaît que pour tous j et k entre 1 et m, on a

$$[\mathfrak{U}_j(R), \mathfrak{U}_k(R)] \subset \mathfrak{U}_{\inf\{j;k\}-1}(R).$$

Par conséquent, la chaîne d'inclusions

$$\{1\} \subset \mathfrak{U}_1(R) \subset \mathfrak{U}_2(R) \subset \dots \subset \mathfrak{U}_{m-1}(R) \subset \mathfrak{U}_\psi(R),$$

est une série centrale dans $\mathfrak{U}_\psi(R)$. En outre pour tout $j \leq m$, $\mathfrak{U}_j(R) = \mathfrak{U}_{j-1}(R).\mathfrak{U}_{c_j}(R)$. On est donc dans les conditions d'application du lemme de Tits (8.3.1). Il vient dans un premier temps que les applications produit associées à chaque ordre sont surjectives.

2. D'après ce même lemme, il suffit de voir l'injectivité sur un ordre quelconque. Grâce à un élément de W, on peut raisonner dans $\left(\widehat{\mathcal{U}_{\Delta_w}}\right)_R$, sur lequel on choisit un ordre cyclique $\Delta_w = \{b_1; \dots b_l\}$. Si l'application produit associée n'était pas injective, on aurait pour deux m-uplets $(r_1; \dots r_m)$ et $(r'_1; \dots r'_m)$:

$$\exp(r_1 e_{c_1}). \dots . \exp(r_2 e_{c_2}) \dots . \exp(r_m e_{c_m}) = \exp(r'_1 e_{c_1}). \dots . \exp(r'_2 e_{c_2}) \dots . \exp(r'_m e_{c_m}).$$

Mais, par (7.4.4) on a

$$\mathcal{U}_{\Delta_w} \cong \bigotimes_{i=1}^{l} \mathcal{U}_{b_i},$$

donc pour une troncation suffisamment large du produit des exponentielles, on obtient $r_i = r'_i$ pour tous les paramètres. □

9.2.4. Expressions formelles du produit et du passage à l'inverse

Le but est de mettre en évidence une structure de $\mathbf{Z}$-schéma sur les foncteurs construits en termes de sommes formelles. Avec le résultat précédent, on dispose au mieux d'une structure de variété. Il faut regarder de plus près la multiplication et le passage à l'inverse pour mettre en évidence leur algébricité.

LEMME. — *Soit $\psi = \{c_1; \dots c_m\}$ une partie $\mathbf{N}$-nilpotente de racines sur laquelle on a fixé un ordre grignotant. Alors:*

(i) *Il existe des polynômes à coefficients entiers $\{P_i(t_1, \dots t_m, u_1, \dots u_m)\}_{1 \leq i \leq m}$ tels que l'on ait dans $\mathcal{U}_\psi[[t_1, \dots t_m, u_1, \dots u_m]]$:*

$$\prod_{i=1}^{m} \exp(t_i e_{c_i}). \prod_{i=1}^{m} \exp(u_i e_{c_i}) = \prod_{i=1}^{m} \exp\big(P_i(t_1, \dots t_m, u_1, \dots u_m) e_{c_i}\big).$$

(ii) *Il existe des polynômes à coefficients entiers $\{Q_i(t_1, \dots t_m)\}_{1 \leq i \leq m}$ tels que l'on ait dans $\mathcal{U}_\psi[[t_1, \dots t_m]]$:*

$$\left(\prod_{i=1}^{m} \exp(t_i e_{c_i})\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{m} \exp\big(Q_i(t_1, \dots t_m) e_{c_i}\big).$$

Démonstration. 1. On peut faire la remarque préliminaire suivante: vu l'ordre choisi et les relations de commutations et si z_k, z_l sont des variables formelles, $[\exp(z_k e_{c_k}), \exp(z_l e_{c_l})]$ est un produit d'exponentielles d'indices strictement inférieurs à $\inf\{k;l\}$ et de paramètres des monômes entiers en z_k, z_l.

2. Pour $m \in \mathbf{N}$, on définit l'assertion (A_m):

«*Pour tout ordre grignotant* $\psi = \{c_1; \dots c_m\}$ *sur une partie* $\mathbf{N}$*-nilpotente* ψ,
pour tout entier N *de* $\mathbf{N}$,
pour toute application $j : \{1; \dots N\} \to \{1; \dots m\}$,
pour tout produit $\Pi := \prod_{i=1}^{N} \exp(t_i e_{c_{j(i)}})$,
il existe des polynômes entiers $\{P_i(t_1, \dots t_N)\}_{1 \leq i \leq m}$ *tels que l'on ait dans* $\mathcal{U}_\psi[[t_1, \dots t_N]]$*:*

$$\Pi = \prod_{i=1}^{m} \exp\big(P_i(t_1, \dots t_N) e_{c_i}\big) \text{»} .$$

On va prouver que (A_m) est vraie pour tout m par récurrence sur m. (A_1) l'est trivialement (le polynôme est la somme des variables formelles). Pour montrer que (A_m) implique (A_{m+1}), on considère le produit

$$\Pi_{m+1} = \prod_{i=1}^{M} \exp(t_i e_{c_{j(i)}}) \quad (M \in \mathbf{N}).$$

En appliquant la relation du commutateur, on peut décaler vers la droite toutes les exponentielles d'indice $m+1$, quitte à faire apparaître comme facteurs des exponentielles d'indices strictement inférieurs. En itérant le procédé, on obtient l'écriture

$$\Pi_{m+1} = \Pi_m . \exp\Big(\big(\sum_{j(i)=m+1} t_i \big) e_{c_{m+1}} \Big),$$

avec Π_m produit de la forme évoquée dans l'assertion (A_m). Or, l'ensemble $\{c_1; \dots c_m\}$ est $\mathbf{N}$-nilpotent et l'ordre induit par celui de ψ est grignotant. On est donc dans les hypothèses de (A_m), on peut réécrire Π_m pour prouver (A_{m+1}).

3. Ceci prouve (i) et aussi (ii) en écrivant

$$\Big(\prod_{i=1}^{m} \exp(t_i e_{c_i}) \Big)^{-1} = \prod_{i=1}^{m} \exp(-t_{m-i} e_{c_{m-i}}).$$

□

9.2.5. $\mathfrak{U}_\psi$ comme Z-schéma en groupes

Il est à présent possible de mettre en évidence la structure de $\mathbf{Z}$-schéma des foncteurs $\mathfrak{U}_\psi$.

PROPOSITION. — *Soit ψ une partie $\mathbf{N}$-nilpotente de racines. Le foncteur en groupes $\mathfrak{U}_\psi$ est le foncteur des points d'un schéma en groupes affine sur $\mathbf{Z}$, lisse et connexe, d'algèbre de Hopf $A_\mathbf{Z}$ de type fini sur $\mathbf{Z}$, et d'algèbre de Lie la sous-algèbre entière $\mathcal{L}_\psi$ de la $\mathbf{Z}$-forme $\mathcal{U}_\mathcal{D}$.*

REMARQUE. — En particulier, $\mathfrak{U}_\psi(\mathbf{C})$ est un groupe algébrique lisse, connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\psi$; c'est donc le groupe U_ψ de (8.3.1).

Démonstration. On choisit un ordre grignotant $\psi = \{c_1; \dots c_m\}$.

1. On définit $A_\mathbf{Z}$ comme anneau par:

$$A_\mathbf{Z} := \mathbf{Z}[T_1, \dots T_m] \cong \bigotimes_{i=1}^{m} \mathbf{Z}[T_i].$$

Convenons des identifications $A_\mathbf{Z} \otimes A_\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}[T_1, \dots T_m, U_1, \dots U_m]$ et $1 \otimes \dots T_i \otimes 1 \leftrightarrow T_i$. On va munir $A_\mathbf{Z}$ d'une structure d'algèbre de Hopf par les formules suivantes:

$$\Delta(T_i) := P_i(T_1 \otimes \dots T_m \otimes U_1 \otimes \dots U_m)$$
$$\text{et} \quad S(T_i) := Q_i(T_1 \otimes \dots T_m).$$

Les P_i et Q_i sont les polynômes que l'on obtient par le lemme précédent avec l'ordre qu'on s'est fixé. On veut montrer que $\Delta : A_\mathbf{Z} \to A_\mathbf{Z} \otimes A_\mathbf{Z}$ et $S : A_\mathbf{Z} \to A_\mathbf{Z}$ sont la comultiplication et l'antipode de la structure qu'on cherche. Pour l'instant, en posant symboliquement $f^{-1} := f \circ S$ (respectivement $f.g := (f \otimes g) \circ \Delta$) pour f,g dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}-\mathrm{alg}}(A_\mathbf{Z}, R)$, on obtient une application $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}-\mathrm{alg}}(A_\mathbf{Z}, R)^2 \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}-\mathrm{alg}}(A_\mathbf{Z}, R)$ (respectivement une loi interne dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}-\mathrm{alg}}(A_\mathbf{Z}, R)$).

2. Soit R un anneau. On a

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}-\mathrm{alg}}(A_\mathbf{Z}, R) \xrightarrow{\sim} R^m$$
$$f \mapsto \big(\varphi(T_1), \dots f(T_m)\big).$$

En composant avec

$$R^m \xrightarrow{\sim} \mathfrak{U}_\psi(R)$$
$$(r_1, \dots r_m) \mapsto \prod_{i=1}^{m} \exp(r_i e_{c_i}),$$

on obtient une bijection

$$\tau_R : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}-\mathrm{alg}}(A_\mathbf{Z}, R) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{U}_\psi(R)$$
$$\varphi \mapsto \prod_{i=1}^{m} \exp(f(T_i) e_{c_i}).$$

Ceci définit une collection de bijections $(\tau_R)_{R \in \mathbf{Z}-\mathrm{alg}}$. Si $\varphi : R \to R'$ est une flèche de $\mathbf{Z} - \mathrm{alg}$, on voit facilement que:

$$\mathfrak{U}_\psi(\varphi) \circ \tau_R = \tau'_R \circ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}-\mathrm{alg}}(A_\mathbf{Z}, \varphi),$$

ce qui prouve que la collection $(\tau_R)_{R \in \mathbf{Z}-\mathrm{alg}}$ est un isomorphisme de foncteurs de $\mathbf{Z} - \mathrm{alg}$ vers la catégorie des ensembles.

3. Soient f,g dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}-\mathrm{alg}}(A_{\mathbf{Z}}, R)$. D'une part:

$$\tau_R(f).\tau_R(g) = \Big(\prod_{i=1}^{m} \exp\big(f(T_i)\big)e_{c_i}\Big).\Big(\prod_{i=1}^{m} \exp\big(g(T_i)\big)e_{c_i}\Big),$$

ce qui vaut par le lemme (9.2.4):

$$\prod_{i=1}^{m} \exp\Big(P_i\big(f(T_1),\dots f(T_m), g(T_1),\dots g(T_m)\big)e_{c_i}\Big).$$

D'autre part, pour $i \in \{1;\dots m\}$:

$$(f.g)(T_i) = (f \otimes g)\Delta(T_i) = P_i\big(f(T_1),\dots f(T_m), g(T_1),\dots g(T_m)\big).$$

Donc par définition de τ_R:

$$\tau_R(f.g) = \prod_{i=1}^{m} \exp\big((f.g)(T_i)e_{c_i}\big)$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \exp\Big(P_i\big(f(T_1),\dots f(T_m), g(T_1),\dots g(T_m)\big)e_{c_i}\Big).$$

On en conclut que $\tau_R(f.g) = \tau_R(f).\tau_R(g)$. De la même façon, on voit que $\tau_R(f)^{-1} = \tau_R(f^{-1})$. Donc, pour tout anneau R, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}-\mathrm{alg}}(A_{\mathbf{Z}}, R)$ est un groupe; $A_{\mathbf{Z}}$ est bien une algèbre de Hopf pour l'antipode et la comultiplication proposées. $\mathfrak{U}_\psi$ s'identifie donc à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}-\mathrm{alg}}(A_{\mathbf{Z}}, -)$ qui est le foncteur des points de Spec $A_{\mathbf{Z}}$.

4. On peut donc utiliser les nombres duaux de Cartier pour calculer l'algèbre de Lie de $\mathfrak{U}_\psi$. Si $\mathbf{Z}[\epsilon] = \mathbf{Z}[X]/X^2$, et si on note $\varphi_\epsilon : \mathbf{Z}[\epsilon] \to \mathbf{Z}$ l'application de réduction modulo ϵ, alors:

$$\mathrm{Lie}\ \mathfrak{U}_\psi = \mathrm{Ker}\big(\mathfrak{U}_\psi(\varphi_\epsilon)\big),$$

d'après [Dem-Gab70], (II.4.1.2) ou [Wat79], théorème (12.2) p.93. On cherche donc le sous-groupe de $\big(\widehat{\mathcal{U}_\psi}\big)_{\mathbf{Z}[\epsilon]}$ des produits d'exponentielles (à paramètres dans $\mathbf{Z}[\epsilon]$) qui valent 1 modulo ϵ. Ceci impose en fait aux paramètres d'être dans $\epsilon\mathbf{Z}$. En effet, partons d'un élément de $\mathfrak{U}_\psi(\mathbf{Z}[\epsilon])$:

$$\Pi = \prod_{i=1}^{m} \exp\big((a_i + b_i\epsilon)e_{c_i}\big) = \prod_{i=1}^{m} \exp(a_i e_{c_i}).\exp(b_i \epsilon e_{c_i}).$$

D'après la formule du commutateur de Steinberg (9.2.2) et la relation $\epsilon^2 = 0$, le groupe engendré par les exponentielles à paramètres entiers normalise le groupe engendré par les exponentielles à paramètres des multiples entiers de ϵ. Donc, il existe un produit d'exponentielles à paramètres des multiples entiers de ϵ tel que:

$$\Pi = \prod_{i=1}^{m} \exp(a_i e_{c_i}).\Pi'$$

Π' vaut 1 modulo ϵ, donc Π vaut 1 modulo ϵ si et seulement si $\prod_{i=1}^{m} \exp(a_i e_{c_i})$ vaut 1, *i.e* si les paramètres entiers a_i sont nuls, d'après (9.2.3). En outre, pour c et d des racines de $[a;b]_{\mathbf{N}}$ et r, r' des entiers, on a: $\exp(r\epsilon e_c) = 1 + r\epsilon e_c$ et $\exp(r\epsilon e_c).\exp(r'\epsilon e_d) = 1 + \epsilon(re_c + r'e_d)$. Par conséquent, on obtient l'isomorphisme de $\mathbf{Z}$-modules:

$$\mathcal{L}_\psi \cong \text{Lie } \mathfrak{U}_\psi$$

$$x \mapsto 1 + \epsilon x$$

La détermination du crochet se fait également de manière fonctorielle, par [Dem-Gab70], II (4.4.2) ou [Wat79], p.94. Si on pose $\mathbf{Z}[u,v] := \mathbf{Z}[X,Y]/(X^2,Y^2)$, alors le crochet de $1+\epsilon x$ et de $1+\epsilon y$ s'identifie par l'isomorphisme précédent au terme en uv dans le commutateur $[1+ux, 1+vy]$, calculé dans $(\widehat{\mathcal{U}_\psi})_{\mathbf{Z}[u,v]}$. D'après le calcul de Steinberg (9.2.2) et la reconnaissance du coefficient C_{11}^{ab} comme constante de structure de $\mathcal{L}_\psi$, on voit que les crochets sont respectés par l'isomorphisme. □

9.3. Interprétation du résultat d'intégralité de Chevalley-Tits

Il est désormais possible d'interpréter le résultat d'intégralité obtenu par J. Tits, pour montrer que les groupes qu'il obtient par descente de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{Z}$ au moyen de l'algèbre des distributions sont les schémas obtenus à la fin de la section qui précède.

9.3.1. Algèbre des distributions

La référence pour le calcul différentiel sur les groupes algébriques est [Dem-Gab70], II 4. Notons A l'algèbre d'un schéma en groupes $\mathcal{G}$ (de type fini sur un anneau k) et I l'idéal d'augmentation. Δ (respectivement S, ε) est la comultiplication (respectivement l'antipode, la coünité) de l'algèbre de Hopf A. Par définition, l'algèbre des distributions sur $\mathcal{G}$ (supportées à l'origine) est

$$\text{Dist}_e\ \mathcal{G} := \bigcup_{n\geq 0} (A/I^{n+1})^*.$$

La convolution $\delta * \delta'$ de deux distributions δ, δ' est donnée par la formule

$$\delta * \delta' := (\delta \otimes \delta')\Delta,$$

qui fait de Dist $\mathcal{G}$ une algèbre associative, unitaire (d'unité ε), munie de la filtration suggérée par la définition, mais non commutative en générale. Lie $\mathcal{G}$ est une sous-algèbre de Lie de $\text{Dist}_e\ \mathcal{G}$. Par la propriété universelle de $\mathcal{U}(\text{Lie } \mathcal{G})$, on obtient un morphisme de k-algèbres:

$$c : \text{Dist}_e\ \mathcal{G} \to \mathcal{U}(\text{Lie } \mathcal{G}).$$

Le résultat suivant dû à Cartier, est très classique ([Dem-Gab70], (II.6.1)).

THÉORÈME. — *Si k est un corps de caractéristique 0, alors $\mathcal{G}$ est lisse (dim $\mathcal{G}$ = dim* Lie $\mathcal{G}$*), et c est un isomorphisme.* □

Le résultat qui nous intéresse est un calcul qui intervient dans la preuve du théorème de Cartier. Supposons pour l'instant que k est un corps quelconque. On a $A = k \oplus I$ (ε est la réduction modulo I), et puisque A est de type fini sur k, I/I^2 est un k-espace vectoriel de dimension finie. On fait le choix d'une base: $I/I^2 = \bigoplus_{i=1}^{M} kx_i$, ce qui fournit automatiquement la base duale μ_i de Lie $\mathcal{G}$ (qui peut être vue comme $(I/I^2)^*$). En composant à droite par l'application $\pi : A \to I/I^2$ qui envoie $k.1$ sur 0 et qui projette I sur I/I^2, on obtient une famille $(\bar{\mu}_i := \mu_i \circ \pi)_{1 \leq i \leq M}$ de distributions nulles sur I^2. Les opérateurs différentiels invariants à gauche associés sont les $D_i := (id \otimes \bar{\mu}_i)\Delta$, qui sont en l'occurence des dérivations ([Wat79], section (12.1) p.92 ou [Dem-Gab70], II (4.6)). Voici le calcul qui amorce une preuve du théorème de Cartier et que pour notre part nous voyons comme outil de descente de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{Z}$.

LEMME. — *Étant donné le choix des x_i comme base de I/I^2, on note encore x_i des représentants dans I. Pour tout monôme $x_{\underline{a}} := x_1^{a_1}. \ldots .x_M^{a_M}$ indexé par $\underline{a} = (a_1, \ldots a_M)$ et tout opérateur $D_{\underline{b}} := \prod_{i=1}^{M} D_i^{b_i}$ indexé par $\underline{b} = (b_1, \ldots b_M)$, avec $\sum_i a_i \geq \sum_j b_j$, on a:*

$$D_{\underline{b}}(x_{\underline{a}}) \equiv 0 \pmod{I},$$

à moins que $\underline{a} = \underline{b}$, auquel cas:

$$D_{\underline{a}}(x_{\underline{a}}) \equiv \prod_{i=1}^{M} a_i! \pmod{I}.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que la règle de Leibniz implique que pour toute dérivation D et tout entier n positif, on a $D(I^n) \subset I^{n-1}$. Il s'ensuit que dès que $y \equiv z \pmod{I^n}$, alors $D(y) \equiv D(z) \pmod{I^{n-1}}$. Notons aussi qu'on a tout fait pour que $D_j(x_i) \equiv \delta_{ij} \pmod{I}$. Partons d'un multi-indice $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_M)$, avec $n = \sum_i a_i$, auquel on associe le monôme $x_1^{a_1}. \ldots .x_M^{a_M}$ qu'on note $P(x)$ pour faire court.
On a $D_i(P(x)) = \sum_j \frac{\partial P}{\partial X_j}(x) D_i(x_j)$. Cette expression est dans I^{n-1} et vaut $\frac{\partial P}{\partial X_i}(x)$ modulo I^n. En appliquant successivement les dérivations qui composent $D_{\underline{b}}$, on en déduit que la seule possibilité d'obtenir une quantité non nulle modulo I, est que $\underline{a} = \underline{b}$. Dans ce cas, on a un seul terme non nul modulo I qui est $\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{a_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial X_M}\right)^{a_M} P$ □

Ce calcul montre que si k est de caractéristique 0, $\mathrm{Dist}_e\, \mathcal{G}$ admet alors pour base sur k les puissances divisées d'une base de Lie $\mathcal{G}$. Dans ce qui va suivre, nous allons spécialiser ces définitions au groupe algébrique complexe $\mathfrak{U}_\psi(\mathbf{C})$, dont la variété sous-jacente est un espace affine de dimension $\# \psi$, ce qui rend complètement explicite l'isomorphisme $\mathrm{Dist}_e\, \mathfrak{U}_\psi(\mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}\mathfrak{g}_\psi$, car on connaît A, I et tous les modules I^n.

9.3.2. Condition d'intégralité

Nous allons maintenant suivre la descente effectuée par J. Tits ([Tit87], section (4.8)), de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{Z}$ du groupe algébrique complexe intégrant $\mathfrak{g}_\psi$, en la rendant plus concrète puisque nous avons maintenant une description de ce groupe sous la forme $\mathfrak{U}_\psi(\mathbf{C})$ (9.2.5). On fixe un ordre quelconque sur ψ. On sait que A est l'algèbre $\bigotimes_{1 \leq i \leq m} \mathbf{C}[T_i]$ (où $m = \#\psi$) qu'on identifie

aux polynômes $\mathbf{C}[T_1, \ldots T_m]$ en envoyant le tenseur simple $1 \otimes \ldots 1 \otimes T_i \otimes 1 \ldots 1$ sur T_i. De la sorte, on voit que I est l'idéal des polynômes nuls en 0, et que I^{n+1} est formé des polynômes dont tous les monômes sont de degré global au moins égal à $n+1$. Les quotients A/I^{n+1} s'identifient aux polynômes de degré global inférieur ou égal à n. En particulier, Lie $\mathfrak{U}_\psi(\mathbf{C})$ admet pour base sur $\mathbf{C}$, la famille des formes linéaires $(\mu_i)_{1 \leq i \leq m}$ où μ_i attache 1 à T_i et 0 aux autres monômes. La puissance divisée d'ordre n de μ_i est dans le cas d'un espace affine

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial T_i}\right)^n \mid_{T_i=0}$$

Par ailleurs, en composant à gauche par l'isomorphisme $\mathcal{U}\mathfrak{g}_\psi \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}(\text{Lie } \mathfrak{U}_\psi)$, on obtient un isomorphisme $\mathcal{U}\mathfrak{g}_\psi \xrightarrow{\sim} \text{Dist}_e\, \mathfrak{U}_\psi(\mathbf{C})$ qui envoie $e_{c_i}^{[n]}$ sur $\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial T_i}\right)^n \mid_{T_i=0}$: c'est la description des distributions dans le cas qui nous intéresse, en termes de sous-anneaux de la $\mathbf{Z}$-forme $\mathcal{U}_\mathcal{D}$. D'où:

LEMME. — *La condition d'intégralité sur les fonctions $f \in A$ définie de la façon suivante:*

$$\forall \delta \in \mathcal{U}_\psi \quad \delta.f \in \mathbf{Z},$$

se lit aussi:

« f est à coefficients entiers dans la base des monômes en T_i: $f \in \bigotimes_{1 \leq i \leq m} \mathbf{Z}[T_i]$. »

□

9.3.3. Identification des schémas $\mathfrak{U}_\psi$

J. Tits définit les foncteurs $\mathfrak{U}_\psi$ comme foncteurs des points de Spec $A_\mathbf{Z}$ où $A_\mathbf{Z}$ est l'ensemble des fonctions de A qui vérifient la condition d'intégralité. On a en fait:

PROPOSITION. — *La définition de $\mathfrak{U}_\psi$ par la condition d'intégralité et celle comme foncteur en groupes de sommes formelles* (9.2.1) *coïncident. Ainsi, les foncteurs $\mathfrak{U}_\psi$ de* (8.3.1) *et* (9.2.5) *coïncident.*

Démonstration. Par le lemme précédent, les anneaux de fonctions $A_\mathbf{Z}$ coïncident. J. Tits définit la comultiplication (respectivement l'antipode) comme restriction à $A_\mathbf{Z}$ de la comultiplication (respectivement de l'antipode) complexe. La comultiplication de A est l'application obtenue par extension des scalaires relativement à $\mathbf{Z} \subset \mathbf{C}$ à partir de la comultiplication de $A_\mathbf{Z}$. Si on se restreint de nouveau à $A_\mathbf{Z}$, on retrouve la comultiplication initiale, à valeurs dans $A_\mathbf{Z} \otimes A_\mathbf{Z}$, définie en termes de sommes formelles. On fait le même raisonnement pour l'antipode pour constater que les structures coïncident. □

En conséquence, on notera $u_{a_s}(r)$ ou encore $u_s(r)$ l'image de $\exp(re_s)$ dans l'amalgame qui définit le foncteur de Steinberg $St(R)$ pour tout anneau R et tout élément r de R.

9.4. Représentation du groupe $\widetilde{\mathcal{G}_\mathcal{D}}(\mathbf{Z})$

On dispose désormais d'une approche concrète des groupes radiciels qui fournissent par amalgame le foncteur de Steinberg. L'idée est de représenter ces sous-groupes séparément dans un premier temps, puis de passer à la limite. Ensuite, il s'agira de représenter le tore et de vérifier les relations qui le mettent en cause. La mise en évidence de la fonctorialité de la représentation adjointe a été reportée à une section ultérieure pour alléger la rédaction.

9.4.1. Représentation des groupes radiciels $\mathfrak{U}_{[a;b]_{\mathbf{N}}}(\mathbf{Z})$

Partons d'une paire prénilpotente de racines réelles $\{a;b\}$. Pour définir une représentation de $\mathfrak{U}_{[a;b]_{\mathbf{N}}}(\mathbf{Z})$, on considère la représentation ad : $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}} \to \mathrm{End}(\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}})$, que l'on restreint à la source à $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{[a;b]_{\mathbf{N}}})$ pour obtenir $\mathrm{ad}_{[a;b]_{\mathbf{N}}} : \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{[a;b]_{\mathbf{N}}}) \to \mathrm{End}(\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}})$. Par ailleurs, la formule:

$$\frac{(\mathrm{ad}x)^n}{n!}.u = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{x^{n-i}}{(n-i)!}.u.\frac{x^i}{i!},$$

valable pour tous u dans $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ et x dans $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$, montre que la restriction de l'action par $\mathrm{ad}_{[a;b]_{\mathbf{N}}}$ à $\mathcal{U}_{[a;b]_{\mathbf{N}}}$ stabilise $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ en respectant la filtration héritée de celle de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$. En notant $\mathrm{End}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})$ (respectivement $\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})$) les endomorphismes (respectivement les automorphismes) d'anneau de $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ qui respectent sa filtration et son idéal $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}^{+}$, on obtient un morphisme d'anneaux:

$$\mathrm{ad}_{[a;b]_{\mathbf{N}},\mathbf{Z}} : \mathcal{U}_{[a;b]_{\mathbf{N}}} \to \mathrm{End}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})$$

$$e_c^{[n]} \mapsto \frac{(\mathrm{ad}e_c)^n}{n!}.$$

Les racines c de $[a;b]_{\mathbf{N}}$ sont réelles, donc les $\mathrm{ad}e_c$ sont localement $\mathbf{N}$-nilpotents. On peut donc étendre le morphisme à la source en:

$$\widehat{\mathrm{ad}_{[a;b]_{\mathbf{N}},\mathbf{Z}}} : \widehat{\mathcal{U}_{[a;b]_{\mathbf{N}}}} \to \mathrm{End}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}).$$

En se restreignant aux inversibles, on obtient enfin un morphismes de groupes:

$$(\widehat{\mathrm{ad}_{[a;b]_{\mathbf{N}},\mathbf{Z}}})^{\times} : (\widehat{\mathcal{U}_{[a;b]_{\mathbf{N}}}})^{\times} \to \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}).$$

Une dernière restriction au sous-groupe $\mathfrak{U}_{[a;b]_{\mathbf{N}}}(\mathbf{Z}) \subset (\widehat{\mathcal{U}_{[a;b]_{\mathbf{N}}}})^{\times}$ permet d'obtenir une représentation de groupes qu'on note $\mathrm{Ad}_{[a;b]_{\mathbf{N}},\mathbf{Z}}$. Finalement:

LEMME. — *Étant donnée une paire prénilpotente de racines réelles $\{a;b\}$, il existe un morphisme de groupes*

$$\mathrm{Ad}_{[a;b]_{\mathbf{N}},\mathbf{Z}} : \mathfrak{U}_{[a;b]_{\mathbf{N}}}(\mathbf{Z}) \to \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}),$$

entièrement caractérisé par le fait qu'il attache à $\exp(re_c)$ l'automorphisme $\exp(r\mathrm{ad}e_c)$ pour tous r dans $\mathbf{Z}$ et c dans $[a;b]_{\mathbf{N}}$. □

9.4.2. Représentation de $St(\mathbf{Z})$

Nous conservons la paire de racines précédente. Pour c dans $[a;b]_{\mathrm{N}}$, il est évident que l'application:

$$\mathrm{Ad}_{c,\mathbf{Z}} : \mathfrak{U}_c(\mathbf{Z}) \to \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})$$
$$\exp(re_c) \mapsto \exp(r\mathrm{ad}e_c)$$

est un morphisme de groupes qui est la composée de l'inclusion $\mathfrak{U}_c(\mathbf{Z}) \subset \mathfrak{U}_{[a;b]_{\mathrm{N}}}(\mathbf{Z})$ et de la représentation $\mathrm{Ad}_{[a;b]_{\mathrm{N}},\mathbf{Z}}$. On obtient donc un morphisme du système inductif qui définit $St(\mathbf{Z})$ dans $\mathrm{Ad}_{[a;b]_{\mathrm{N}},\mathbf{Z}}$, par conséquent le résultat suivant en passant à la limite:

LEMME. — *Il existe un morphisme de groupes*

$$\mathrm{Ad} : St(\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})$$

entièrement caractérisé par $\mathrm{Ad}\big(u_c(r)\big) = \exp(r\mathrm{ad}e_c)$ *pour toute racine réelle* c *et tout* r *entier.* □

9.4.3. Autres relations de définition de $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{Z})$

Il n'a pas encore été question de la partie torique du groupe $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{Z})$. Il est évident qu'en posant pour tout élément torique $h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}-\mathrm{alg}}(\mathbf{Z}[\Lambda], \mathbf{Z}) = \mathcal{T}(\mathbf{Z})$:

$$\mathrm{Ad}(h).e_a := \langle c_a \mid h\rangle e_a \quad \text{et} \quad \mathrm{Ad}(h)\,|_{\mathcal{U}_0} := \mathrm{id}_{\mathcal{U}_0},$$

on définit un morphisme de groupes

$$\mathcal{T}(\mathbf{Z}) \to \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}),$$

qu'on désigne également par Ad. On désigne aussi par Ad le morphisme représentant le produit libre de $St(\mathbf{Z})$ et de $\mathcal{T}(\mathbf{Z})$:

$$\mathrm{Ad} : St(\mathbf{Z}) * \mathcal{T}(\mathbf{Z}) \to \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}).$$

En fait, comme attendu, on a:

PROPOSITION. — *Il existe un morphisme de groupes*

$$\mathrm{Ad} : \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}),$$

qui est entièrement caractérisé par:

pour tout s *dans* S, *pour tout élément* r *de* $\mathbf{Z}$, *pour tout* h *de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}-\mathrm{alg}}(\mathbf{Z}[\Lambda], \mathbf{Z})$, *pour toute racine réelle* a,
$\mathrm{Ad}\big(u_{a_s}(r)\big)$ *est l'automorphisme unipotent* $\exp(\mathrm{ad}e_s)$, *et* $\mathrm{Ad}_R(h)$ *est l'automorphisme diagonal fixant* $\Lambda^\vee$ *et attachant* $\langle c_a \mid h\rangle e_a$ *à* e_a.

Démonstration. Nous ferons la même vérification pour un anneau de base quelconque dans la preuve du lemme (9.5.2). □

9.5. Fonctorialité de la représentation adjointe

Nous avons prouvé pour l'instant l'existence d'un morphisme de groupes

$$\mathrm{Ad} : \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})$$

On peut voir en fait $\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})$ comme l'évaluation en $\mathbf{Z}$ d'un foncteur en groupes sur la catégorie des anneaux qu'on désignera abusivement par la même notation $\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})$. Il faut donc maintenant relever la représentation Ad en une transformation naturelle du même nom. C'est un travail qui ne présente pas de difficulté spéciale, mais qui a été repoussé dans une section à part pour éviter d'alourdir d'une vérification supplémentaire les raisonnements pas-à-pas précédents .

9.5.1. Le foncteur $\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})$

Ce foncteur se définit de la façon suivante: à tout anneau R, on associe le groupe $\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_R$ des R-automorphismes de la R-algèbre $\mathcal{U}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathbf{Z}} R$ qui respectent sa filtration (qui provient de celle de $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$) et son idéal $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}^{+} \otimes_{\mathbf{Z}} R$. On se donne $\varphi : R \to R'$ une flèche de $\mathbf{Z} - \mathrm{alg}$, qui permet de voir R' comme une R-algèbre. Si f est un automorphisme de $\mathcal{U}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathbf{Z}} R$, $\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})(\varphi).f$ est l'automorphisme de $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathbf{Z}} R) \otimes_R R' \cong \mathcal{U}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathbf{Z}} R'$ défini par extension des scalaire relativement à φ, qu'on note pour faire court $\varphi_* f$. Si $\phi : R' \to R''$ est une autre flèche de $\mathbf{Z} - \mathrm{alg}$, on a: $(\phi \circ \varphi)_* f = \phi_*(\varphi_* f)$, ce qui se lit pour tout automorphisme f de $\mathcal{U}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathbf{Z}} R$:

$$\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})(\phi\circ\varphi).f = \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})(\phi)\big(\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})(\varphi).f\big) = \big(\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})(\phi)\circ\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})(\varphi)\big).f$$

Autrement dit:

$$\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})(\phi \circ \varphi) = \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})(\phi) \circ \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})(\varphi).$$

Donc, $\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})$ est bien un foncteur en groupes.

On peut faire le même travail à partir de $\mathrm{End}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})$, et définir un foncteur de la catégorie des anneaux vers elle-même. De cette façon, pour une flèche $\varphi : R \to R'$ de $\mathbf{Z} - \mathrm{alg}$ et pour un endomorphisme $f = r \otimes f_{\mathbf{Z}}$ avec $f_{\mathbf{Z}} \in \mathrm{End}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})$ et $r \in R$, on a: $\varphi_* f = \varphi(r) \otimes f_{\mathbf{Z}}$. Nous pouvons maintenant préciser ce que nous entendons par mise en évidence de la fonctorialité de Ad. Il s'agit de relever le morphisme $\mathrm{Ad} : \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{Z}) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})$ en une transformation naturelle de foncteurs, c'est-à-dire de construire une famille de flèches

$$\Big(\mathrm{Ad}_R : \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(R) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_R\Big)_{R \in \mathbf{Z}-\mathrm{alg}},$$

indexée par les anneaux et telle que pour toute flèche $\varphi : R \to R'$ le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(R) & \xrightarrow{\mathrm{Ad}_R} & \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_R \\ {\scriptstyle \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\varphi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})(\varphi)} \\ \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(R') & \xrightarrow{\mathrm{Ad}_{R'}} & \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{R'} \end{array}$$

9.5.2. Construction des morphismes Ad_R

Il suffit de reprendre la construction de $\mathrm{Ad}_{\mathbf{Z}}$ en faisant une extension des scalaires de $\mathbf{Z}$ à R à chaque étape. Soit $\{a;b\}$ une paire prénilpotente de racines. Le morphisme d'anneaux:

$$\mathrm{ad}_{[a;b]_{\mathbf{N}},\mathbf{Z}} : \mathcal{U}_{[a;b]_{\mathbf{N}}} \to \mathrm{End}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})$$

fournit naturellement un morphisme de R-algèbres:

$$\mathrm{ad}_{[a;b]_{\mathbf{N}},R} : \left(\mathcal{U}_{[a;b]_{\mathbf{N}}}\right)_R \to \mathrm{End}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_R$$

$$e_c^{[n]} \otimes r \mapsto \frac{(\mathrm{ad}e_c)^n}{n!} \otimes r^n,$$

si bien qu'il existe un morphisme de groupes

$$(\widehat{\mathrm{ad}_{[a;b]_{\mathbf{N}}}})_R^{\times} : (\widehat{\mathcal{U}_{[a;b]_{\mathbf{N}}}})_R^{\times} \to \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_R$$

qui, restreint aux exponentielles, donne

$$\left(\mathrm{Ad}_{[a;b]_{\mathbf{N}}}\right)_R : \mathfrak{U}_{[a;b]_{\mathbf{N}}}(R) \to \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_R.$$

Ces morphismes étant compatibles aux inclusions $\mathfrak{U}_c(R) \subset \mathfrak{U}_{[a;b]_{\mathbf{N}}}(R)$, on obtient par passage à la limite un morphisme $St(R) \to \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_R$. D'autre part, grâce à la formule:

$$\forall h \in \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{alg}}(R[\Lambda], R) \qquad \mathrm{Ad}_R(h)(e_c \otimes r) = \langle c_a \mid h \rangle e_a \otimes r,$$

et en imposant en outre de fixer point par point les vecteurs de $\left(\mathcal{U}_0\right)_R$,

on définit une représentation:

$$\mathcal{T}(R) \to \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_R,$$

et donc une flèche:

$$St(R) * \mathcal{T}(R) \to \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_R.$$

Il s'agit ensuite de voir que les relations de (8.3.3) qui définissent $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$ à partir de $St * \mathcal{T}$, opèrent trivialement par ce morphisme.

PROPOSITION. — *Pour tout anneau R, il existe un morphisme:*

$$\mathrm{Ad}_R : \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(R) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_R$$

caractérisé par:

$$\mathrm{Ad}_R\big(u_a(r)\big) = \exp(\mathrm{ad}e_a \otimes r) = \sum_{n\geq 0} \frac{(\mathrm{ad}e_a)^n}{n!} \otimes r^n,$$

$$\mathrm{Ad}_R\big(\mathcal{T}(R)\big) \text{ fixe } \big(\mathcal{U}_0\big)_R \quad \text{et} \quad \mathrm{Ad_R(h)(e_a \otimes r)} = \langle \mathrm{c_a} \mid \mathrm{h}\rangle(\mathrm{e_a} \otimes \mathrm{r}),$$

pour tout h dans $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{alg}}(R[\Lambda], R)$, pour toute racine réelle a et tout r dans R.

Démonstration. 1. Relation tore-groupes radiciels

Soient s dans S, a une racine réelle, r un élément de R, et h dans $\mathcal{T}(R)$. Alors:

$$\mathrm{Ad}\big(h.u_{a_s}(r).h^{-1}\big)(e_a) = \mathrm{Ad}\big(h.u_{a_s}(r)\big)\big(\langle c_a \mid h\rangle^{-1} e_a\big)$$

$$= \mathrm{Ad}(h)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \langle c_a \mid h\rangle^{-1} r^n \frac{(\mathrm{ad}e_s)^n}{n!} e_a\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle c_a \mid h\rangle^{-1} r^n \langle c_s \mid h\rangle^n \langle c_a \mid h\rangle \frac{(\mathrm{ad}e_s)^n}{n!} e_a.$$

Cette expression est par définition $\mathrm{Ad}\big(u_{a_s}(\langle c_s \mid h\rangle r)\big)(e_a)$. Donnons-nous maintenant $\lambda^\vee$ dans $\Lambda^\vee$, et vérifions que $\mathrm{Ad}\big(h.u_{a_s}(r).h^{-1}\big)$ et $\mathrm{Ad}\big(u_{a_s}(\langle c_s \mid h\rangle r)\big)$ coïncident sur $\lambda^\vee$. On a:

$$\mathrm{Ad}\big(h.u_{a_s}(r).h^{-1}\big)(\lambda^\vee) = \mathrm{Ad}\big(h.u_{a_s}(r)\big)(\lambda^\vee) = \mathrm{Ad}(h)(\lambda^\vee + \langle c_s \mid \lambda^\vee\rangle e_s) = \lambda^\vee + \langle c_s \mid \lambda^\vee\rangle\langle c_s \mid h\rangle e_s,$$

ce qui vaut exactement $\mathrm{Ad}\big(u_{a_s}(\langle c_s \mid h\rangle r)\big)\lambda^\vee$.

2. Relation normalisateur du tore-tore

Rappelons que pour r dans $R^\times$ et s dans S, on définit $\tilde{s}(r) = n_s(r) := u_{a_s}(r).u_{-a_s}(r^{-1}).u_{a_s}(r)$, que $\tilde{s} = n_s$ est par définition $n_s(1)$, et que W opère sur $\mathcal{T}(R) = \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{alg}}(R[\Lambda], R)$ via son action sur Λ. Remarquons en outre que par définition en (7.4.1),

$$\mathrm{Ad}(n_s) = \exp(\mathrm{ad}(e_s)).\exp(\mathrm{ad}(f_s)).\exp(\mathrm{ad}(e_s))$$

est l'automorphisme s^* qui relève s. Donnons-nous enfin h dans $\mathcal{T}(R)$. Il suffit de comparer $\mathrm{Ad}(n_s.h.n_s^{-1})$ et $\mathrm{Ad}(s.h)$; en effet, la relation impliquant $n_s(r)$ résultera alors du point 3. ci-dessous.

Déjà, il est clair que ces deux automorphismes fixent $\Lambda^\vee$. Il suffit donc de les comparer sur les vecteurs e_a pour toute racine réelle a.

$$\mathrm{Ad}(n_s.h.n_s^{-1})(e_a) = \big(\mathrm{Ad}(n_s) \circ \mathrm{Ad}(h)\big)(\pm e_{s^{-1}.c}) = \mathrm{Ad}(n_s)\big(\langle s^{-1}.c_a \mid h\rangle \pm e_{s^{-1}.a}\big)$$

$$= \langle s^{-1}.c_a \mid h\rangle \mathrm{Ad}(n_s)(\pm e_{s^{-1}.a}) = \langle s^{-1}.c_a \mid h\rangle \pm \pm e_a = \langle s^{-1}.c_a \mid h\rangle e_a,$$

ce qui est précisément $\mathrm{Ad}(s.h)e_a$. Les signes $\pm$ reflètent le fait que les automorphismes w^* échangent des doubles bases de vecteurs opposés. L'indétermination sur les signes est compensée puisqu'on fait intervenir un tel automorphisme et son inverse.

3. Relation normalisateur du tore-normalisateur du tore

Soit r un élément inversible de R. Soient s un élément de S et a une racine réelle. Alors:

$$\mathrm{Ad}\big(n_s(r)\big)(e_a) = \sum_{m\geq 0} r^m \frac{(\mathrm{ad}e_s)^m}{m!}\Big(\sum_{l\geq 0} r^{-l}\frac{(\mathrm{ad}f_s)^l}{l!}\big(\sum_{k\geq 0} r^k \frac{(\mathrm{ad}e_s)^k}{k!}(e_a)\big)\Big)$$

$$= \sum_{p\geq 0} r^p \Big(\sum_{k+m-l=p} \frac{(\mathrm{ad}e_s)^m}{m!}.\frac{(\mathrm{ad}f_s)^l}{l!}.\frac{(\mathrm{ad}e_s)^k}{k!}(e_a)\Big).$$

$\sum_{k+m-l=p} \frac{(\mathrm{ad}e_s)^m}{m!}.\frac{(\mathrm{ad}f_s)^l}{l!}.\frac{(\mathrm{ad}e_s)^k}{k!}(e_a)$ est le terme de degré $a+pa_s$ de $\mathrm{Ad}(n_s).e_a$. Il est donc non nul seulement si $a+pa_s = s.a$, autrement dit si $p = -\langle c_a \mid h_s\rangle$. Finalement, $\mathrm{Ad}\big(n_s(r)\big)(e_a) = r^{-\langle c_a|h_s\rangle}\mathrm{Ad}(n_s).e_a$. Enfin, si $\lambda^\vee$ est un élément de $\Lambda^\vee$, on a:

$$\mathrm{Ad}\big(n_s(r)\big).\lambda^\vee = \sum_{p\geq 0} r^p \Big(\sum_{k+m-l=p} \frac{(\mathrm{ad}e_s)^m}{m!}.\frac{(\mathrm{ad}f_s)^l}{l!}.\frac{(\mathrm{ad}e_s)^k}{k!}(\lambda^\vee)\Big).$$

$\sum_{k+m-l=p} \frac{(\mathrm{ad}e_s)^m}{m!}.\frac{(\mathrm{ad}f_s)^l}{l!}.\frac{(\mathrm{ad}e_s)^k}{k!}(\lambda^\vee)$ est le terme de degré pa_s de $\mathrm{Ad}(n_s)(\lambda^\vee)$. Il est donc non nul seulement si $pa_s = 0$, donc $\mathrm{Ad}\big(n_s(r)\big).\lambda^\vee = \mathrm{Ad}(n_s).\lambda^\vee = \big(\mathrm{Ad}(n_s)\circ\mathrm{Ad}(r^{-h_s})\big).\lambda^\vee$. La dernière égalité a lieu puisque par définition de Ad, $\mathrm{Ad}\big(\mathcal{T}(R)\big)$ fixe $\Lambda^\vee$.

4. Relation normalisateur du tore-groupes radiciels

Le dernier type de relation à vérifier est $\mathrm{Ad}\big(n_s.u_a(r).n_s^{-1}\big) = \mathrm{Ad}\big(s^* u_a(r)\big)$ pour toute racine réelle a et tout entier r. C'est tautologique par la remarque déjà faite: $\mathrm{Ad}(n_s) = s^*$. □

9.5.3. Fonctorialité

On fixe maintenant une flèche $\varphi : R \to R'$, et on veut vérifier la commutativité du diagramme de 9.5.2. Il suffit pour cela de vérifier la commutativité du diagramme sur les générateurs de $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(R)$, à savoir les $u_{a_s}(r)$, $u_{-a_s}(r)$ et h, pour s dans S, r dans R et h dans $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{alg}}(R[\Lambda], R)$. Commençons par les éléments unipotents. On a:

$$\big(\mathrm{Ad}_{R'} \circ \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\varphi)\big).u_{a_s}(r) = \mathrm{Ad}_{R'}\Big(u_{a_s}\big(\varphi(r)\big)\Big) = \sum_{n\geq 0} \big(\varphi(r)\big)^n \otimes \frac{(\mathrm{ad}\ e_s)^n}{n!}.$$

Cette application est l'extension relativement à φ de $\mathrm{Ad}_R\big(u_{a_s}(r)\big)$, c'est-à-dire:

$$\big(\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})(\varphi) \circ \mathrm{Ad}_R\big)\big(u_{a_s}(r)\big).$$

On obtient ainsi la commutativité sur les $u_{a_s}(r)$ et *mutatis mutandis* sur les $u_{-a_s}(r)$. Passons maintenant aux h dans $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{alg}}(R[\Lambda], R)$. $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\varphi).h$ est le morphisme

$$R'[\Lambda] \to R'$$
$$\lambda \mapsto \varphi(\langle \lambda \mid h\rangle).$$

Donc $\big(\mathrm{Ad}_{R'} \circ \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\varphi)\big)(h)$ est l'automorphisme défini par

$$\Big(\big(\mathrm{Ad}_{R'} \circ \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\varphi)\big)(h)\Big)(e_a) = \langle c_a \mid \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\varphi).h\rangle e_a = \varphi(\langle c_a \mid h\rangle)e_a,$$

pour toute racine réelle a, et qui fixe $\big(\mathcal{U}_0\big)_{R'}$. Par ailleurs, $\mathrm{Ad}_R(h)$ est défini par:

$$\mathrm{Ad}_R(h)e_a = \langle c_a \mid h\rangle e_a \text{ et } \mathrm{Ad}_R(h) \text{ fixe } \big(\mathcal{U}_0\big)_R.$$

$\big(\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})(\varphi) \circ \mathrm{Ad}_R\big).h$ est l'automorphisme déduit de $\mathrm{Ad}_R(h)$ par extension des scalaires relativement à φ. C'est l'automorphisme diagonal qui fixe $\big(\mathcal{U}_0\big)_{R'}$, et tel que pour toute racine réelle a, $\Big(\big(\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})(\varphi) \circ \mathrm{Ad}_R\big)(h)\Big)(e_a) = \varphi(\langle c_a \mid h\rangle)(e_a)$. Ceci achève la vérification sur les éléments h de $\mathcal{T}(R)$. On vient de prouver:

THÉORÈME. — *Il existe une transformation naturelle*

$$\mathrm{Ad} : \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}),$$

caractérisée par:

$$\mathrm{Ad}_R\big(u_a(r)\big) = \exp(\mathrm{ad}e_a \otimes r) = \sum_{n\geq 0} \frac{(\mathrm{ad}e_a)^n}{n!} \otimes r^n,$$

$$\mathrm{Ad}_R\big(\mathcal{T}(R)\big) \text{ fixe } \big(\mathcal{U}_0\big)_R \quad \text{et} \quad \mathrm{Ad_R(h)(e_a \otimes r)} = \langle \mathrm{c_a} \mid \mathrm{h}\rangle(\mathrm{e_a} \otimes \mathrm{r}),$$

pour tout anneau R, pour tout h dans $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{alg}}(R[\Lambda], R)$, pour toute racine réelle a et tout r dans R. □

Par analogie avec la situation classique, on parlera donc de *représentation adjointe.*

DÉFINITION. — *La transformation naturelle* Ad *est appelée la* représentation adjointe *du foncteur de Tits* $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$.

9.6. Noyau et image de la représentation adjointe sur les corps

On finit la définition et l'étude de la représentation adjointe par une courte section, qui montre essentiellement que sur les corps, le noyau de la représentation adjointe est le centre du groupe de Kac-Moody.

9.6.1. Lemme de fidélité

Le résultat suivant n'utilise que les relations de définition de $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$ et Ad, et permet de prouver des axiomes combinatoires en (8.4.1).

LEMME. — *Soient $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{K})$ un groupe de Kac-Moody défini sur le corps $\mathbf{K}$, et $\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}}$ la représentation de groupe associée.*

(i) *Pour toute racine a et tout sous-espace vectoriel V $\mathrm{Ad}U_a$-stable et contenant e_{-a}, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}} \circ \exp_{e_a} |_V) = \{1\}$ et l'image de cette représentation est un sous-groupe unipotent à un paramètre de $\mathrm{GL}(V)$. En particulier, la restriction de $\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}}$ à chaque groupe radiciel est injective et $\exp_{e_a} : \mathbf{K} \to U_a$ est un isomorphisme.*

(ii) *Pour toute racine positive a, on a*

$$U_{-a} \cap B_+ = \{1\} \quad \text{et} \quad U_{-a}B_+ \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}}) = B_+ \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}}).$$

L'assertion obtenue en opposant les signes est bien sûr vraie également.

Démonstration. Preuve de (i). Cela découle de la formule

$$\forall k \in \mathbf{K} \quad \mathrm{Ad}\big(u_a(k)\big).e_{-a} = e_{-a} + k[e_a, e_{-a}] + v_a,$$

où $v_a = k^2\big(\frac{e_a^2}{2}e_{-a} - e_a e_{-a} e_a + e_{-a}\frac{e_a^2}{2}\big)$ est le terme de Q-degré a de l'expression.

Preuve de (ii). On part d'un élément g de $U_{-a} \cap B_+$ et d'un vecteur v de $(\mathcal{L}_b)_{\mathbf{K}}$ pour b dans $\Delta \cup \{0\}$. Alors, $\mathrm{Ad}g.v - v$ est dans $\bigoplus_{c \in b - na, n \in \mathbf{N}\setminus\{0\}} (\mathcal{L}_c)_{\mathbf{K}}$ et dans $\bigoplus_{c \in b + Q_+} (\mathcal{L}_c)_{\mathbf{K}}$, suivant le groupe dans lequel on voit g. Cette intersection est contenue dans

$$\bigoplus_{d \in Q_+ \setminus \{0\}} (\mathcal{L}_{b-d})_{\mathbf{K}} \cap \bigoplus_{d \in Q_+} (\mathcal{L}_{b+d})_{\mathbf{K}},$$

qui est triviale. Ainsi, pour tout v homogène $\mathrm{Ad}g.v = v$, et finalement g est dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}}) \cap U_{-a} = \{1\}$ par (i). Ceci prouve la première assertion.

Pour la seconde, on se donne u_{-a} dans U_{-a} et b_+ dans B_+ tels que $u_{-a}b_+$ est dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}})$. On reprend alors la première partie du raisonnement qui précède. On regarde $\mathrm{Ad}u_{-a}^{-1}.v = \mathrm{Ad}b_+.v$. Par la Q-graduation, $\mathrm{Ad}u_{-a}^{-1}.v = v$, u_{-a} est dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}})$, soit $u_{-a} = 1$ par (i). □

9.6.2. Noyau et image de la représentation adjointe

En revanche, la détermination du noyau sans restriction de source utilise (8.4.1).

PROPOSITION. — *Soit G un groupe de Kac-Moody $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{K})$ pour un corps $\mathbf{K}$ et une donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D}$. Alors, le noyau de la représentation adjointe $\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}}$ est le centre de G (qui est aussi l'intersection des noyaux des caractères algébriques $\bigcap_{c \in \Lambda} \mathrm{Ker}\, c$) et son image est un sous-groupe du groupe de Kac-Moody adjoint attaché à la donnée radicielle de Kac-Moody $\mathrm{ad}(\mathcal{D})$ (7.1.2), avec égalité si $\mathbf{K}$ est algébriquement clos.*

Démonstration. 1. Réduction aux composantes connexes

Pour chaque composante connexe J de S, on définit le sous-groupe:

$$G_J := \langle U_a \mid a \in \Delta^{re}(J) \rangle.$$

Par les relations de définition de $St(\mathbf{K})$, pour deux parties distinctes J et K de $\Pi_0(S)$, les éléments de G_J commutent à ceux de G_K. En outre, la définition de la représentation adjointe $\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}}$ fait voir aussi que G_J opère trivialement sur les vecteurs e_s, f_s pour s dans K, et leurs puissances divisées. Enfin, tout élément g de G peut s'écrire $g = t.\prod_{J \in \Pi_0(S)} g_J$ avec t dans T, et g_J dans G_J. Si maintenant on suppose que g est dans le noyau de $\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}}$, alors, d'après ce qu'on vient de remarquer, pour toute J de $\Pi_0(S)$, tg_j est dans $\mathrm{Ker}\ (\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}}|_{TG_J})$.

2. Cas indécomposable

Comme en (8.4.1), on peut voir que $\big(TG_J, (U_a)_{a \in \Delta^{re}(J)}, T\big)$ est une donnée radicielle jumelée de groupe de Weyl W_J irréductible. On raisonne pour l'instant dans le système de Tits $(TG_J, B_{J,+} := TU_{J,+}, N_J, J)$ où N_J relève modulo T le groupe W_J. Par [Bou81] (IV.2.7),

lemme 2 p.30, on voit que $B_{J,+}\mathrm{Ker}\ (\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}}|_{TG_J})$ vaut TG_J ou $B_{J,+}$. On va montrer que ce sous-groupe est nécessairement $B_{J,+}$, ce qui montrera que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}}|_{TG_J})$ est dans $B_{J,+}$.

Faisons donc l'hypothèse $B_{J,+}.\mathrm{Ker}\ (\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}}|_{TG_J}) = TG_J$. Soit s dans J. Alors:

$$U_{-a_s}B_{J,+} = (U_{-a_s}B_{J,+}) \cap (\mathrm{Ker}\ (\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}}|_{TG_J})),$$

d'où $U_{-a_s}B_{J,+} \subset B_{J,+}$ par (9.6.1)(ii), ou encore $U_{-a_s} \subset B_{J,+}$. Alors $U_{-a_s} = U_{-a_s} \cap B_{J,+} = \{1\}$ par (9.6.1)(ii), ce qui contredit (9.6.1)(i). Nécessairement $\mathrm{Ker}\ (\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}}|_{TG_J}) \subset B_{J,+}$. Le même raisonnement pour le signe $-$ montre par intersection que le noyau étudié est dans T.

3. Conclusion. Image

Le point précédent fait voir que pour toute J de $\Pi_0(S)$, on a $tg_J \in T$, et donc que g est dans T. Finalement, $\mathrm{Ker}\ (\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}})$ est inclus dans T. Sa description comme intersection de noyaux de caractères est alors immédiate. Pour ce qui est de l'image de $\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}}$, le groupe $\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}}(T)$ est un quotient de T, abstraitement isomorphe à un sous-groupe du tore dont le groupe des caractères est le sous-$\mathbf{Z}$-module Λ^{ad} de Λ engendré par les caractères c_s, $s \in S$. Il y a égalité si $\overline{\mathbf{K}}$ est algébriquement clos. $\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}}(G)$ est ainsi isomorphe à un sous-groupe de la valeur sur $\mathbf{K}$ du foncteur de Tits attaché à la donnée radicielle de Kac-Moody adjointe $\mathrm{ad}(\mathcal{D})$ (7.1.2), avec égalité si $\overline{\mathbf{K}}$ est algébriquement clos. □

10. Groupes de Kac-Moody déployés en caractéristique quelconque

L'objet de ce chapitre est de présenter quelques propriétés importantes des groupes de Kac-Moody déployés, c'est-à-dire des valeurs des foncteurs de Tits sur les corps. Après des préliminaires concernant les «sous-tores» ou la géométrie des appartements jumelés, on présente des familles de sous-groupes intéressants, en procédant du général au particulier. La première famille est celle des *petits sous-groupes*, aussi bien caractérisés par l'action du groupe de Kac-Moody sur l'immeuble jumelé que par l'action adjointe. La seconde famille fournit une classe assez large de sous-groupes qui admettent une structure algébrique, à quotient torique près. Enfin, on proposera une nouvelle définition des sous-groupes de Cartan, plus intrinsèque, en montrant sa compatibilité à la terminologie initiale. Une source d'inspiration pour ce chapitre est l'article [Kac-Pet87], à ceci près qu'on a tout fait pour évacuer la fonction distance convexe sur le cône de Tits, afin de la remplacer par des considérations de courbure négative. Enfin, la démonstration de l'existence des groupes réductifs dans [Spr80] (chapitre 12) est à l'origine de la mise en place de la structure algébrique d'un fixateur de partie équilibrée, effectuée dans la section (10.3).

10.1. Immeubles de Kac-Moody

Nous nous donnons une donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D} = \big(S, A, \Lambda, (c_s)_{s\in S}, (h_s)_{s\in S}\big)$, un corps $\mathbf{K}$ sur lequel nous évaluons le foncteur de Tits «constructif» $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$. On note $G := \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{K})$ le groupe obtenu. On sait que le fait de choisir un corps $\mathbf{K}$ comme anneau de base permet d'obtenir une structure de donnée radicielle jumelée directement issue des générateurs du foncteur de Tits (8.4.1). Mais puisqu'on a une idée plus précise du groupe, il est naturel d'attendre un enrichissement de la famille des objets géométriques intéressants dans la réalisation conique $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$. C'est le cas, étant donné par exemple qu'on va pouvoir lire la situation des sous-groupes diagonalisables (connexes) et donner une interprétation des racines géométriques plus étroitement liée aux sous-groupes unipotents à un paramètre et au caractère associé. Nous allons procéder à divers aménagements, qui sont plus lisibles si on les fait en deux temps, une première étape consistant à travailler avec des espaces vectoriels sur le corps $\mathbf{Q}$.

$\mathbf{A}$ et T désignent les appartement jumelé et sous-groupes de Cartan standard associés à la définition de G.

10.1.1. Aménagement de l'appartement jumelé sur le corps des nombres rationnels

On suppose dans cette sous-section et la suivante que le corps $\mathbf{K}$ est *infini*.

Nous partons d'une donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D} = \big(S, A, \Lambda, (c_s)_{s\in S}, (h_s)_{s\in S}\big)$. Le problème éventuel est que la famille des racines simples de $\mathcal{D}$ n'est pas nécessairement $\mathbf{Z}$-libre dans Λ. Par conséquent, le cône positif associé dans $\Lambda^{\vee}\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{R}$ peut être vide. Pour éviter cet inconvénient, nous allons procéder à un aménagement de Λ, tout d'abord sur $\mathbf{Q}$.

On considère le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\Lambda_{\mathbf{Q}} := \Lambda \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ et son sous-espace $Q(\mathcal{D}) = \sum_{s \in S} \mathbf{Q} c_s$. On fait le choix d'un supplémentaire $F_{\mathbf{Q}}$ de ce sous-espace dans $\Lambda_{\mathbf{Q}}$.

$$\Lambda_{\mathbf{Q}} = F_{\mathbf{Q}} \oplus \textstyle\sum_{s \in S} \mathbf{Q} c_s.$$

Considérons enfin le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de base les symboles a_s pour s dans S, et la flèche canonique $\pi := c \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} : \bigoplus_{s \in S} \mathbf{Q} a_s = Q \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \twoheadrightarrow \sum_{s \in S} \mathbf{Q} c_s$, tensorisée par $\mathbf{Q}$ de l'application caractère (7.1.5). On a $\pi(Q) \subset \Lambda$.

On note $V_{\mathbf{Q}}$ le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $V_{\mathbf{Q}} := \bigoplus_{s \in S} \mathbf{Q} a_s \oplus F_{\mathbf{Q}}$ et $\pi : V_{\mathbf{Q}} \twoheadrightarrow \Lambda_{\mathbf{Q}}$ le prolongement de l'application précédente par l'identité sur $F_{\mathbf{Q}}$.

C'est dans le dual $V_{\mathbf{Q}}^*$ que nous allons définir un nouveau cône que nous appelons par abus momentané *cône de Tits*. On note $\underline{W}$ le groupe d'automorphismes linéaires de $V_{\mathbf{Q}}$ engendré par les transformations $\tau_s : \lambda \mapsto \lambda - \langle h_s \mid \pi(\lambda) \rangle a_s$ pour s parcourant S. Le groupe $\underline{W}$ est naturellement isomorphe au groupe de Weyl W_A de la matrice de Cartan généralisée A. Il suffit de faire référence aux mêmes résultats qu'en (7.1.4). Ainsi, on peut reprendre toute la construction du cône de Tits en remplaçant le corps de base par $\mathbf{Q}$ et les espaces en dualité par $V_{\mathbf{Q}}$ et $V_{\mathbf{Q}}^*$, tant qu'il n'est pas question de topologie. Enfin, par définition de la structure algébrique sur $T = \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}\text{-alg}}(\mathbf{K}[\Lambda], \mathbf{K})$, Λ est le groupe des caractères algébriques de T, et $\Lambda^{\vee}$ est son groupe des cocaractères.

Puisqu'on a $Q \subset V_{\mathbf{Q}}$, on peut voir Δ^{re} comme une partie de $V_{\mathbf{Q}}$. Enfin, on note

$$\pi^* : \Lambda^{\vee}_{\mathbf{Q}} = \Lambda^{\vee} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q} \hookrightarrow V_{\mathbf{Q}}^*$$

l'application transposée de π.

DÉFINITION. — (i) *Dans le cas où l'élément a de $V_{\mathbf{Q}}$ est une racine de Δ^{re}, on note $\partial a_{\mathbf{Q}}$ l'hyperplan de $V_{\mathbf{Q}}^*$ qui vaut $\partial a_{\mathbf{Q}} := \mathrm{Ker}(a)$. $\partial a_{\mathbf{Q}}$ est appelé le* mur rationnel *de a.*
(ii) *Si S est un sous-tore de T, on note $X_*(S)$ son groupe de cocaractères algébriques, et $X_*(S)_{\mathbf{Q}}$ le tensorisé par $\mathbf{Q}$ de ce groupe. Le* sous-espace rationnel $\underline{L}(S)$ *de S est par définition l'orthogonal (au sens de la dualité) dans $V_{\mathbf{Q}}^*$ de l'image réciproque par π du sous-espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$ des caractères triviaux sur S. En notant $\Lambda(S) := \{c \in \Lambda \mid c|_S \equiv 1\}$, on a donc*

$$\underline{L}(S) := (\pi^*)^{-1}\big(X_*(S)_{\mathbf{Q}}\big).$$

La raison pour laquelle on est revenu momentanément à $\mathbf{Q}$ plutôt que de conserver $\mathbf{R}$ vient de la proposition suivante.

PROPOSITION. — *On conserve les notations et les choix précédents, à savoir la donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D} = \big(S, A, \Lambda, (c_s)_{s \in S}, (h_s)_{s \in S}\big)$, qui permet via Λ de mettre une structure de tore algébrique sur T, le supplémentaire $F_{\mathbf{Q}}$, la flèche π qu'on étend en application du même nom $\pi : V_{\mathbf{Q}} \to \Lambda_{\mathbf{Q}}$. On suppose toujours $\mathbf{K}$ infini.*

(i) *Les sous-tores de T sont en bijection croissante naturelle avec les sous-espaces vectoriels de $V_{\mathbf{Q}}^*$ inclus dans l'orthogonal $\mathrm{Im}(\pi^*)$ de $\mathrm{Ker}(\pi)$ au sens de la dualité.*
(ii) *Soit S un sous-tore de T de sous-espace rationnel associé $\underline{L}(S)$. Soit c une racine de Δ^{re}. Alors:*

$\pi(c)$ est trivial sur S si et seulement si le mur rationnel $\partial c_{\mathbf{Q}}$ contient $\underline{L}(S)$.

(iii) *Dans la même situation, si a et b sont deux racines de Δ^{re}, alors il existe des puissances non triviales de $\pi(a)$ et $\pi(b)$ qui coïncident sur S si et seulement si $\partial a_{\mathbf{Q}} \cap \underline{L}(S) = \partial b_{\mathbf{Q}} \cap \underline{L}(S)$.*

Remarquons que dès lors qu'on a fait un produit tensoriel sur $\mathbf{Q}$ pour pouvoir introduire un espace vectoriel supplémentaire, on a éliminé toute question de torsion, ce qui explique que le dictionnaire de (i) ne prend en charge que les sous-groupes diagonalisables connexes de T.

Démonstration. Preuve de (i). Soit S un sous-tore de T. On a $S = \Big(\bigcap_{c \in \Lambda(S)} \mathrm{Ker}(c) \Big)^{\circ}$.
Par définition $L(S)$ est $[\pi^{-1}(\Lambda(S))]^{\perp}$. Maintenant, si L est un sous-espace vectoriel de $V_{\mathbf{Q}}^*$, on lui associe un sous-tore $\underline{S}(L)$ de T de manière analogue: $\underline{S}(L) := \Big(\bigcap_{c \in \pi(L^{\perp}) \cap \Lambda} \mathrm{Ker}(c) \Big)^{\circ}$.

On obtient une application croissante $\underline{S}$ (respectivement $\underline{L}$) qui va de l'ensemble des sous-espaces de $V_{\mathbf{Q}}^*$ contenus dans $[\mathrm{Ker}(\pi)]^{\perp}$ vers l'ensemble des sous-tores de T (respectivement de l'ensemble des sous-tores de T vers celui des sous-espaces de $V_{\mathbf{Q}}^*$ contenus dans $[\mathrm{Ker}(\pi)]^{\perp} = \mathrm{Im}(\pi^*)$).
Il est clair que les applications $\underline{L}$ et $\underline{S}$ respectent les codimensions, et que $(\underline{L} \circ \underline{S})(L) \subset L$ et $(\underline{S} \circ \underline{L})(S) \subset S$. Par conséquent, par dimension (respectivement et par connexité), on a en fait des égalités à la place des deux dernières inclusions.

Preuve de (ii). Avec la notation $\Lambda(S)$, on a

$$\pi(c) \mid_S \equiv 1 \Leftrightarrow \pi(c) \in \Lambda(S) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(c) \supset \underline{L}(S) \Leftrightarrow \partial c_{\mathbf{Q}} \supset \underline{L}(S).$$

Preuve de (iii). Supposons que $\pi(a)$ et $\pi(b)$ élevées aux puissances non nulles m et n respectivement coïncident. Avec les identifications qui précèdent, on a $\mathrm{Ker}(ma - nb) \supset \underline{L}(S)$, et par conséquent:

$$\partial a_{\mathbf{Q}} \cap \underline{L}(S) = \partial a_{\mathbf{Q}} \cap \mathrm{Ker}(ma - nb) \cap \underline{L}(S) = \partial b_{\mathbf{Q}} \cap \mathrm{Ker}(ma - nb) \cap \underline{L}(S) = \partial b_{\mathbf{Q}} \cap \underline{L}(S).$$

Réciproquement, si $\partial a_{\mathbf{Q}} \cap \underline{L}(S) = \partial b_{\mathbf{Q}} \cap \underline{L}(S)$, alors a et b restreintes à $\underline{L}(S)$ sont des $\mathbf{Q}$-formes de même hyperplan. À ce titre, elles sont donc $\mathbf{Q}$-proportionnelles. Il existe donc m et n non nuls dans $\mathbf{Z}$ tels que $\mathrm{Ker}(ma - nb) \supset \underline{L}(S)$, soit $m\pi(a) - n\pi(b) \in \Lambda(S)$. En termes de caractères, cela signifie la trivialité de $\pi(a^m/b^n)$ sur S. □

10.1.2. Aménagement de l'appartement jumelé sur le corps des nombres réels

Le dictionnaire entre sous-tores et sous-espaces a lieu sur $\mathbf{Q}$. Si on veut continuer à faire des raisonnements topologiques dans les immeubles, il faut revenir au corps de base $\mathbf{R}$. On peut à nouveau faire référence aux mêmes résultats qu'en (7.1.4) pour munir le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $V_{\mathbf{R}} := V_{\mathbf{Q}}^* \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} = (F_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}) \oplus \bigoplus_{s \in S} \mathbf{R} a_s$ d'une action de W, d'où une chaîne d'inclusions:

$$V_{\mathbf{R}} \supset V_{\mathbf{Q}} \supset Q \supset \Delta^{re}.$$

Dans le dual de cet espace, on définit encore un cône de Tits $\overline{C}_{\mathrm{alg}}$, et on voit qu'un quotient de ce cône est le cône de Tits de la section (5.1). Précisément, comme en (7.1.4) on a:

$$\overline{\mathcal{C}}_{\mathrm{alg}}/Q^{\perp} \cong \overline{\mathcal{C}}.$$

L'ajout de ce $\mathbf{R}$-espace vectoriel $Q^{\perp}$ implique que le cône de Tits ne peut plus être propre; cela dit, on peut dans ce cône élargi rendre compte de la situation des sous-tores. Ces remarques justifient qu'on choisisse $\overline{\mathcal{C}}_{\mathrm{alg}} \cup -\overline{\mathcal{C}}_{\mathrm{alg}}$ comme modèle d'appartement jumelé dans certains cas.

DÉFINITION. — (i) $\overline{\mathcal{C}}_{\mathrm{alg}} \cup -\overline{\mathcal{C}}_{\mathrm{alg}}$ *est le* modèle algébrique *d'appartement jumelé standard pour* G.
(ii) *Un sous-espace vectoriel de* $V_{\mathbf{R}}^* := V_{\mathbf{Q}}^* \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$ *est dit* rationnel *s'il est défini par des formes linéaires de* $V_{\mathbf{Q}}$.
(iii) *Pour un sous-tore* S *de* T, *on note* $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(S)$ *la trace sur* $\mathbf{A} \cong \overline{\mathcal{C}}_{\mathrm{alg}} \cup -\overline{\mathcal{C}}_{\mathrm{alg}}$ *de l'espace vectoriel* $\underline{L}(S) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$. *On appelle* $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(S)$ *l'*extension vectorielle *de* S *dans* $\mathbf{A}$.
(iv) *On dit qu'un sous-tore* S *de* T *est* générique *si* $\underline{L}(S)$ *rencontre l'intérieur* $\mathcal{C}_{\mathrm{alg}}$ *du cône de Tits* $\overline{\mathcal{C}}_{\mathrm{alg}}$. *Alors,* $\underline{L}(S)$ *est engendré par* $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(S)$. *On dit dans ce dernier cas que* S *est* générique au sens large.

On peut immédiatement faire les redites suivantes:

PROPOSITION. — *Soit* S *un sous-tore générique au sens large de* T.

(i) *Il existe une bijection naturelle entre les sous-tores de* T *et les sous-espaces rationnels de l'espace ambiant* $V_{\mathbf{Q}}^* \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$ *dans lequel on construit l'appartement jumelé* $\mathbf{A}$ *attaché à* T.
(ii) *Pour une racine* c *de* Δ^{re}, $\pi(c)$ *est triviale sur* S *si et seulement si son mur* $\partial c := \partial c_{\mathbf{Q}} \otimes \mathbf{R}$ *contient l'extension vectorielle de* S.
(iii) *Étant données deux racines* a *et* b *de* Δ^{re}, *il existe des exposants* m *et* n *non nuls tels que* $\pi(a)^m$ *et* $\pi(b)^n$ *coïncident sur un sous-tore* S *si et seulement si* $\partial a \cap \mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(S) = \partial b \cap \mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(S)$.
□

On peut aussi ajouter que le cône de Tits relatif à la famille $\{a_s\}_{s \in S}$ de formes linéaires sur $V_{\mathbf{R}}$ possède toutes les propriétés énoncées pour le cône de Tits défini et étudié en (5.1) et (5.2).

10.1.3. Appartements jumelés comme lieux de points fixes

Par définition de ces objets en (8.3.4) et (5.3), G opère transitivement sur les sous-groupes de Cartan de G et sur les appartements jumelés de la réalisation conique $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$. Puisque N est le stabilisateur de l'appartement jumelé standard $\mathbf{A}$ (2.6.2), on a clairement:

$$\{\text{Appartements jumelés}\} \xrightarrow{\sim} G/N \quad \text{et} \quad \{\text{Sous-groupes de Cartan}\} \xrightarrow{\sim} G/N_G(T),$$

d'où une application

$$\{\text{Appartements jumelés}\} \twoheadrightarrow \{\text{ Sous-groupes de Cartan}\},$$

d'après l'inclusion $N \subset N_G(T)$. Cette application est obtenue de manière formelle. En fait, puisque N est le normalisateur de $\mathbf{A}$, il est clair que T est le fixateur de l'appartement jumelé standard. Par G-équivariance, on peut envisager un moyen plus concret d'attacher un sous-groupe de Cartan à un appartement, précisément le passage au fixateur. En outre, il est clair que la surjection précédente est un isomorphisme quand $N = N_G(T)$, ce qui est réalisé quand le corps $\mathbf{K}$ est assez gros pour la donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D}$ (8.4.1). Sous cette hypothèse, la réciproque de l'isomorphisme obtenu est tout aussi concrète.

PROPOSITION. — *Soit G un groupe de Kac-Moody obtenu par évaluation d'un foncteur de Tits sur un corps $\mathbf{K}$: $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{K})$, de tore standard T et d'appartement jumelé standard $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{K}$ est assez gros pour $\mathcal{D}$, alors:*

(i) *Les seules chambres stables (ou fixes) par T dans $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$ sont les chambres dans $\mathbf{A}$.*
(ii) *Le lieu des points fixes sous l'action de T dans $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$ est précisément $\mathbf{A}$: $(|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}})^T = \mathbf{A}$.*

Démonstration. ϵ désigne un signe (+ ou −).

Preuve de (i). Soit $g\overline{C}_\epsilon$ une chambre de $|\mathcal{I}_\epsilon|_{\mathrm{co}}$ (g est un élément de G et $\overline{C}_\epsilon$ est la chambre standard de signe ϵ). On sait qu'on peut écrire $g = u_w n_w b$ pour un certain w dans W, pour u_w dans $U_\epsilon \cap wU_{-\epsilon}w^{-1}$, n_w dans N relevant w modulo T et b dans B_ϵ, d'après la décomposition de Bruhat relativement à B_ϵ (1.2.3). On obtient donc $g\overline{C}_\epsilon = u_w n_w \overline{C}_\epsilon$. On sait déjà qu'il est équivalent de dire qu'une chambre est stable ou fixe sous l'action de G. Supposons donc que $g\overline{C}_\epsilon \subset (|\mathcal{I}_\epsilon|_{\mathrm{co}})^T$ est une chambre fixe sous T. Alors pour tout t dans T, $tu_w n_w \overline{C}_\epsilon = u_w n_w \overline{C}_\epsilon$. Regardons de plus près cette condition pour t dans T. On a $u_w^{-1} t u_w n_w \overline{C}_\epsilon = n_w \overline{C}_\epsilon$. Comme t fixe $\mathbf{A}$, on peut aussi écrire

$$u_w^{-1} t u_w n_w \overline{C}_\epsilon = (u_w^{-1} t u_w t^{-1}) t n_w \overline{C}_\epsilon = [u_w^{-1}, t] n_w \overline{C}_\epsilon = n_w \overline{C}_\epsilon,$$

où les crochets désignent le commutateur de deux éléments. Ceci implique que $[u_w^{-1}, t]$ est dans le fixateur de $n_w\overline{C}_\epsilon$ qui est $n_w B_\epsilon n_w^{-1}$. Or, $[u_w^{-1}, t]$ appartient à $U_\epsilon \cap wU_{-\epsilon}w^{-1}$, donc $n_w^{-1}[u_w^{-1}, t]n_w$ est dans $U_{-\epsilon} \cap B_\epsilon = \{1\}$. On en déduit que pour tout t dans T, le commutateur $[u_w^{-1}, t]$ est trivial. Autrement dit u_w est dans le centralisateur dans G de T. Or, ce centralisateur est dans N (8.4.1) et l'intersection $U_\epsilon \cap N$ est triviale, par (1.2.1)(RT3). On a donc: $u_w = 1$, soit $g\overline{C}_\epsilon = n_w\overline{C}_\epsilon \subset \mathbf{A}$.

Preuve de (ii). Il suffit de montrer que si x est dans $(|\mathcal{I}_+|_{\mathrm{co}})^T$, il est dans la partie positive de l'appartement jumelé $\mathbf{A}$, le cas négatif étant complètement analogue. Enfin, $|\mathcal{I}_+|_{\mathrm{co}}$ étant la réunion de ses facettes ouvertes, il suffit de montrer que toute facette positive fixe par T est dans $\mathbf{A}_+$. Soit donc $gF_I \subset (|\mathcal{I}_+|_{\mathrm{co}})^T$ une telle facette. On écrit $g = u_w n_w b$ comme précédemment, et $gF_I = u_w n_w F_I$. Considérons dans la partie $\mathbf{N}$-nilpotente de racines $\Delta_{w^{-1}} = \Delta_+^{re} \cap w\Delta_-^{re}$, la partie $\Delta_{w^{-1}}(F_I) := \{c \in \Delta_{w^{-1}} \mid w^{-1}(\partial c) \supset F_I\}$. $\Delta_{w^{-1}}(F_I)$ est l'ensemble des racines c pour lesquelles on a les inclusions $U_c \subset U_+$ et $n_w^{-1}U_c n_w \subset P(F_I) \cap U_-$. Pour des ordres quelconques sur $\Delta_w(F_I)$ et $\Delta_w \setminus \Delta_w(F_I)$, on peut écrire par (9.2.3):

$$U_w = \Big(\prod_{c \in \Delta_{w^{-1}} \setminus \Delta_{w^{-1}}(F_I)} U_c\Big).\Big(\prod_{c \in \Delta_{w^{-1}}(F_I)} U_c\Big),$$

d'où une écriture (unique) $u_w = vv'$ correspondante, qui est telle que $n_w^{-1} v n_w$ est dans $U(-F_I)$, et qui permet une nouvelle simplification:

$$u_w n_w F_I = v n_w (n_w^{-1} v n_w) F_I = v n_w F_I.$$

Il suffit alors de montrer que $v = 1$. Si tel n'était pas le cas, d'après l'hypothèse «$\mathbf{K}$ assez gros» , il existerait t dans T tel que $[v^{-1}, t] \neq 1$. En utilisant l'hypothèse $v n_w F_I \subset (|\mathcal{I}_+|_{\mathrm{co}})^T$, on aurait $tv n_w F_I = v n_w F_I$, d'où $[v^{-1}, t].n_w F_I = n_w F_I$. Autrement dit $[v^{-1}, t]$ serait dans $n_w P(F_I) n_w^{-1} \setminus \{1\}$, ce qui donnerait:

$$n_w^{-1}[v^{-1}, t] n_w \in \Big(P(F_I) \cap U(-F_I)\Big) \setminus \{1\},$$

impossible par décomposition de Lévi de $P(-F_I)$. □

On aurait pu traiter immédiatement le second cas qui comprend le premier, mais celui-ci procure un énoncé utilisable en termes de systèmes de chambres abstraits.

10.1.4. Fonctorialité de l'immeuble en fonction du corps

On se place dans la même situation qu'en (8.4.4), d'où l'adoption des conventions de cette sous-section. $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ est une extension de corps. $G(\mathbf{K})$ opère sur l'immeuble $\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E})$ via l'inclusion $G(\mathbf{K}) \subset G(\mathbf{E})$. Avec ces conventions, on peut formuler le résultat suivant.

LEMME. — *Soit $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ une extension de corps.*

(i) *Il existe pour chaque signe un morphisme d'immeubles strict naturel, injectif et $G(\mathbf{K})$-équivariant*

$$\iota_{\epsilon\,\mathbf{K}}^{\mathbf{E}} : \mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{K}) \to \mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E}).$$

En outre, les applications $\iota_{+\,\mathbf{K}}^{\mathbf{E}}$ et $\iota_{-\,\mathbf{K}}^{\mathbf{E}}$ respectent les codistances des jumelages $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ et $\mathcal{J}(\mathbf{E})$. Les applications ainsi définies font voir un immeuble comme sous-immeuble de l'autre. On convient d'identifier $\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{K})$ à son image dans $\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E})$.

(ii) *Les appartements admissibles du sous-immeuble $\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{K})$ de $\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E})$ sont des appartements admissibles de $\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E})$. Ce sont les $G(\mathbf{K})$-transformés de l'appartement standard $\mathbf{A}$.*

Démonstration. Preuve de (i). On définit $\iota_{\epsilon\,\mathbf{K}}^{\mathbf{E}}$ par $gB_\epsilon(\mathbf{K}) \mapsto gB_\epsilon(\mathbf{E})$.
C'est ensemblistement possible car g est dans $G(\mathbf{K})$ qui est inclus dans $G(\mathbf{E})$, et parce qu'on a $B_\epsilon(\mathbf{K}) \subset B_\epsilon(\mathbf{E})$ (8.4.4). Ces inclusions font d'ailleurs voir l'injectivité des applications qui nous intéressent.
Les systèmes de Tits de signe fixé ϵ relativement aux sous-groupes de Borel standard de $G(\mathbf{K})$ et $G(\mathbf{E})$ ont des groupes de Weyl isomorphes. La partie génératrice standard S de W est relevée modulo $T(\mathbf{E})$ par des éléments $\tilde{s}$ dans $G(\mathbf{K})$. Ainsi, pour tout s de S, la relation de s-adjacence de $\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{K})$ est la relation de s-adjacence sur $\iota_{\epsilon\,\mathbf{K}}^{\mathbf{E}}(\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{K}))$ induite par celle de $\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E})$. Pour ce qui est de la codistance, il suffit d'utiliser son interprétation en termes de décomposition de Birkhoff et (8.4.4)(ii).

Preuve de (ii). $\iota_{\epsilon\,\mathbf{K}}^{\mathbf{E}}$ établit un isomorphisme naturel entre l'appartement standard de $\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{K})$ et celui de $\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E})$, par $\tilde{s}B_\epsilon(\mathbf{K}) \mapsto \tilde{s}B_\epsilon(\mathbf{E})$. Ensuite, il suffit de remarquer que les appartements admissibles de $\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{K})$ sont les $G(\mathbf{K})$-tranformés de l'appartement standard, et d'invoquer l'équivariance de la flèche $\iota_{\epsilon\,\mathbf{K}}^{\mathbf{E}}$. □

En revanche, les immeubles diffèrent au niveau des chambres dans un résidu de cloison donné. Considérons le cas de la chambre standard, les autres résidus se déduisant de ceux de $B_\epsilon(\mathbf{K})$ par $G(\mathbf{K})$. On fixe s dans S. D'après la propriété de Moufang pour $\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{K})$ (2.5.4), les chambres de $\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{K})$ s-adjacentes à $B_\epsilon(\mathbf{K})$ sont les chambres $u\tilde{s}B_\epsilon(\mathbf{K})$, avec u dans $U_s(\mathbf{K})$. Elles sont en bijection avec $\mathbf{K}$. D'après cette même propriété pour le gros immeuble, les chambres de $\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E})$ s-adjacentes à $B_\epsilon(\mathbf{E}) = \iota_{\epsilon\,\mathbf{K}}^{\mathbf{E}}(B_\epsilon(\mathbf{K}))$ sont les chambres $v\tilde{s}B_\epsilon(\mathbf{E})$, avec v dans $U_s(\mathbf{E})$. Elles sont en bijection avec $\mathbf{E}$ et comptent parmi elles les chambres de $\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{K})$ s-adjacentes à $B_\epsilon(\mathbf{K})$.

Il reste à passer aux considérations géométriques.

LEMME. — *Soit $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ une extension de corps. Soit $\big(X, (X_s)_{s\in S}\big)$ une structure-miroir. Alors la réalisation géométrique $X(\iota_{\epsilon\,\mathbf{K}}^{\mathbf{E}})$ de $\iota_{\epsilon\,\mathbf{K}}^{\mathbf{E}}$ établit un homéomorphisme de $X(\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{K}))$ sur son image dans $X(\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E}))$.*

Démonstration. On sait déjà que $X(\iota_{\epsilon}^{\mathbf{E}}_{\mathbf{K}})$ est continue. Elle est injective. En effet:

$$X(\iota_{\epsilon}^{\mathbf{E}}_{\mathbf{K}})[gB_\epsilon(\mathbf{K}),x] = X(\iota_{\epsilon}^{\mathbf{E}}_{\mathbf{K}})[hB_\epsilon(\mathbf{K}),y] \Leftrightarrow [gB_\epsilon(\mathbf{E}),x] = [hB_\epsilon(\mathbf{E}),y]$$
$$\Leftrightarrow x = y \quad \text{et} \quad g^{-1}h \in B_\epsilon(\mathbf{E})W_{J(x)}B_\epsilon(\mathbf{E})$$

Or, $B_\epsilon(\mathbf{E})W_{J(x)}B_\epsilon(\mathbf{E}) \cap G(\mathbf{K}) = B_\epsilon(\mathbf{K})W_{J(x)}B_\epsilon(\mathbf{K})$ (8.4.4), par conséquent la dernière assertion équivaut à $[gB_\epsilon(\mathbf{K}),x] = [hB_\epsilon(\mathbf{K}),y]$.

Pour voir que $X(\iota_{\epsilon}^{\mathbf{E}}_{\mathbf{K}})$ est fermée, on procède comme pour (4.2.3)(i) □

On peut maintenant commencer à étudier des familles de sous-groupes de plus en plus proches de l'exemple familier des groupes algébriques.

10.2. Petits sous-groupes des groupes de Kac-Moody

Dans cette section, il est question de la classe des *petits sous-groupes*, à savoir des sous-groupes sur lesquels on va pouvoir utiliser des résultats de géométrie algébrique. On va aussi pour la première fois avancer un argument de courbure négative, même si la réalisation métrique d'un immeuble sera implicite dans les énoncés. On prouve l'équivalence de trois approches possibles des petits sous-groupes dans le cas d'un groupe de Kac-Moody. Dans le cas abstrait d'un groupe à donnée radicielle jumelée, seuls deux de ces critères prennent un sens (puisque le troisième implique l'algèbre de Lie du groupe). Ils sont reliés par le théorème de point fixe de Bruhat-Tits (4.6.2).

Dans toute cette section, on conserve le groupe G obtenu par l'évaluation d'un foncteur de Tits $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$ sur un corps $\mathbf{K}$, pour une donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D} = \big(S, A, \Lambda, (c_s)_{s\in S}, (h_s)_{s\in S}\big)$. $\mathbf{A}$ et T désignent les appartement jumelé et sous-groupes de Cartan standard associés à la définition de G.

10.2.1. Doubles classes et représentation adjointe

Le résultat qui suit est un premier lien entre deux propriétés de finitude, l'une vis-à-vis de la décomposition en doubles classes de Bruhat, l'autre vis-à-vis de la représentation adjointe. Au vocabulaire près, c'est un résultat de Kac et Peterson ([Kac-Pet87], théorème 1 p.121). Commençons par quelques définitions.

DÉFINITION. — *Soit H un sous-groupe du groupe de Kac-Moody G.*

(i) *H est dit* Ad*-localement fini si pour tout vecteur v de $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{K}}$, l'espace vectoriel* vect(Ad$H.v$) *engendré par* Ad$H.v$*, est de dimension finie sur $\mathbf{K}$.*

(ii) *H est dit* Ad*-diagonalisable s'il existe une base de $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{K}}$ dans laquelle l'action de H via* Ad *est diagonale.*

LEMME. — *Soit $\{g_j\}_{j\geq 0}$ une suite infinie d'éléments de G. On écrit chaque élément suivant sa décomposition de Bruhat $g_j = u_j n_j t_j v_j$, avec u_j dans $U_{\pm}$, n_j dans N et $b_j = t_j v_j$ dans $TU_{\pm} = B_{\pm}$. On suppose que deux indices distincts j et k fournissent toujours deux classes $w_j = n_j T$ et $w_k = n_k T$ distinctes dans W. Alors, il existe un Q-degré a et un vecteur v de $(\mathcal{U}_a)_{\mathbf{K}}$ tels que l'espace vectoriel engendré par $\bigcup_{j\geq 0}$ Ad$g_j.v$ soit de dimension infinie.*

Démonstration. Vu la symétrie des hypothèses, on se contente de prouver le résultat pour la BN-paire positive. Pour un vecteur v de $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{K}}$, on note $P_v := \bigcup_{j\geq 0} \mathrm{Ad}g_j.v$, et on suppose que la conclusion n'est pas vérifiée. On prendra tous les supports relativement à une base des puissances divisées des générateurs canoniques de $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$.

1. On peut déjà écrire:

$$\forall a \in Q \ \forall v \in (\mathcal{U}_a)_{\mathbf{K}} \quad \dim_{\mathbf{K}}(\text{vect } P_v) < \infty.$$

Ceci impose que pour tout a de Q et pour tout v de $(\mathcal{U}_a)_{\mathbf{K}}$, le cardinal du support de P_v est fini:

$$\forall a \in Q \ \forall v \in (\mathcal{U}_a)_{\mathbf{K}} \quad \#\mathrm{Supp}(\text{vect } P_v) < \infty.$$

On note $h(v)$ la hauteur minimale qui apparaît dans Supp(vect P_v). On a donc pour tout z de vect(P_v), $\mathrm{ht}(z) \geq h(v)$.

2. On se donne a dans Q, et v dans $(\mathcal{U}_a)_{\mathbf{K}} \setminus \{0\}$. On regarde d'abord $\mathrm{Ad}(n_j b_j).v$. Cet élément se décompose en somme de termes Q-homogènes parmi lesquels figure un terme non nul de degré $w_j a$. (Précisément, ce terme est $\langle c_a \mid t_j \rangle \mathrm{Ad}n_j.v$). On note h_j la hauteur minimale des degrés de supp$(\mathrm{Ad}n_j b_j.v)$. On vient de voir que $w_j a$ est dans cet ensemble, donc $\mathrm{ht}(w_j a) \geq h_j$.

3. On applique maintenant $\mathrm{Ad}u_j$ à $\mathrm{Ad}(n_j b_j).v$ pour obtenir $\mathrm{Ad}g_j.v$. $\mathrm{Ad}u_j$ est un automorphisme unipotent de $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{K}}$, qui opère comme l'identité plus un endomorphisme nilpotent qui augmente strictement les hauteurs. Donc tout terme de hauteur h_j dans $\mathrm{Ad}(n_j b_j).v$ est non annulé par $\mathrm{Ad}u_j$. Il existe ainsi des termes de hauteur h_j dans $\mathrm{Ad}g_j.v$, d'où $h_j \geq h(v)$ et finalement $\mathrm{ht}(w_j a) \geq h(v)$. C'est un minorant indépendant de j.

4. On voit donc que pour tout a de Q, il existe m dans $\mathbf{Z}$ tel que pour tout $j \geq 0$, on ait $\mathrm{ht}(w_j a) \geq m$. En faisant le même raisonnement pour le degré opposé $-a$, on obtient:

$$\forall a \in Q \ \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall j \geq 0 \ \ |\mathrm{ht}(w_j a)| \leq N.$$

Ceci limite à un ensemble fini le nombre d'images possibles par les w_j de la base $\{a_s\}_{s\in S}$: contradiction avec le fait que $\{w_j\}_{j\geq 0}$ est infini. □

10.2.2. Critères de petitesse

Nous pouvons maintenant passer à la définition des petits sous-groupes, qui se présente sous forme de trois critères équivalents. Le fait remarquable est que leur caractérisation peut s'énoncer – en théorie – aussi bien en termes d'action sur l'immeuble que de représentation adjointe, qui sont les deux actions que nous avons retenues pour l'étude des groupes de Kac-Moody.

THÉORÈME/DÉFINITION. — *Soit H un sous-groupe du groupe de Kac-Moody G. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *H est* Ad*-localement fini*
(ii) *H intersecte un nombre fini de doubles classes de Bruhat positives et négatives*
(iii) *H est contenu dans l'intersection des fixateurs de deux facettes sphériques de signes opposés du jumelage associé à G.*

Dans le cas où il vérifie l'une de ces conditions, on dit que H est un petit sous-groupe *de G.*

Il s'agit de la notion de sous-groupe *borné* et *antiborné* de Kac et Peterson ([Kac-Pet87], p.122 et p.127). Ne cherchant pas à faire référence à la bornologie d'une BN-paire, nous avons préféré la terminologie plus ramassée de petit sous-groupe.

10.2.3. Preuve des critères

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est un corollaire immédiat du lemme (10.2.1).

Preuve de (ii) $\Rightarrow$ (iii). On suppose que H est dans un nombre fini de doubles classes positives (et aussi dans un nombre fini de doubles classes négatives). Par le théorème de point fixe de Bruhat-Tits (4.6.2), H qui stabilise les immeubles positif et négatif du jumelage associé à G (en y opérant par des groupes bornés d'isométries), admet un point fixe x_ϵ dans la réalisation métrique de l'immeuble de signe ϵ. x_ϵ appartient à une unique facette ouverte F_ϵ qui est elle aussi fixe par définition de l'action de G sur une réalisation géométrique. On obtient donc:

$$H \subset \mathrm{Fix}(F_+ \cup F_-),$$

où les facettes sont sphériques par construction même de la réalisation métrique d'un immeuble. C'est l'assertion recherchée. (Par la décomposition de Birkhoff, ces facettes peuvent être vues comme parties d'un même appartement jumelé).

Preuve de (iii) $\Rightarrow$ (i). On suppose H inclus dans le fixateur d'une facette sphérique positive F_+, et d'une facette sphérique négative F_-. En conjuguant H – ce qui est inoffensif du point de vue de la notion de sous-groupe Ad-localement fini, on se ramène au cas où $F_+ = F_I$, $F_- = -wF_J$ pour I, J des parties de type fini de S, w un élément du groupe de Weyl W, et où $\mathbf{A}$ est l'appartement jumelé standard. On note $\Omega = F_I \cup -wF_J$. On a donc:

$$H \subset \mathrm{Fix}(\Omega).$$

On va utiliser la décomposition de Lévi de $\mathrm{Fix}(\Omega)$ relative à $\mathbf{A}$: $\mathrm{Fix}(\Omega) = M(\Omega) \ltimes U(\Omega)$.
Tous les groupes radiciels qui interviennent sont indexés par des racines réelles, donc opèrent par des exponentielles de $\mathrm{ad}e_c$. Dans le cas d'une racine c réelle, $\mathrm{ad}e_c$ est localement nilpotente. $U(\Omega)$ est le produit interne dans un ordre quelconque des groupes radiciels U_a, pour les racines a de $\mathbf{A}$ qui séparent strictement F_I et wF_J. Donc pour un élément v de $(\mathcal{U}_\mathcal{D})_\mathbf{K}$:

$$\mathrm{Ad}\, U(\Omega).v = \prod \mathcal{U}(\mathrm{ad}e_c).v$$

où $\mathcal{U}$ est le foncteur «algèbre enveloppante» et le produit est pris dans un ordre fixé sur les racines qui séparent strictement F_I et wF_J. L'espace vectoriel engendré par cette partie est donc de dimension finie dans $(\mathcal{U}_\mathcal{D})_\mathbf{K}$. Considérons maintenant le facteur de Lévi $M(\Omega)$. Ce groupe possède une décomposition de Bruhat en réunion de doubles classes $B_\Omega w B_\Omega$ pour w parcourant un groupe de Coxeter fini $W(\Omega)$ et B_Ω un groupe produit semi-direct de T et d'un groupe de la même forme que celle précédemment décrite pour $U(\Omega)$, puisque $\Delta(\Omega)_+$ est un ensemble $\mathbf{N}$-nilpotent de racines. Finalement, $\mathrm{vect}\big(\mathrm{Ad}\ \mathrm{Fix}(\Omega).v\big)$ est de dimension finie pour tout vecteur v de $(\mathcal{U}_\mathcal{D})_\mathbf{K}$. □

Pour les preuves des implications qui concernent la représentation adjointe, on a utilisé la description explicite de l'action des éléments du groupe G. Rappelons que l'équivalence entre (ii) et (iii) est vraie pour tout groupe possédant une BN-paire jumelée, l'implication difficile résultant du théorème de point fixe de Bruhat-Tits, l'autre de la décomposition de Bruhat d'un sous-groupe parabolique sphérique (indexée par un groupe de Coxeter fini).

10.3. Sous-groupes algébriques des groupes de Kac-Moody

Nous venons de voir que la courbure négative permettait de montrer qu'un sous-groupe d'un groupe de Kac-Moody possédant une propriété de finitude à l'égard de son action adjointe, était inclus dans le fixateur de deux facettes sphériques de signes opposés. C'est une première étape vers l'usage de théorèmes classiques sur les groupes algébriques pour prouver leurs analogues en théorie de Kac-Moody. Il reste maintenant à munir ces sous-groupes – les fixateurs de parties équilibrées – d'une structure de groupe algébrique. C'est l'objet de cette section. À proprement parler, ce ne sont pas directement les sous-groupes du groupe de Kac-Moody G qui posséderont une telle structure, mais leur image par une flèche abstraite naturellement obtenue à partir de la représentation adjointe de G, et à valeurs dans le groupe linéaire d'une sous-algèbre de Lie de dimension finie de l'algèbre de Kac-Moody (attachée à la donnée radicielle $\mathcal{D}$).

G désigne le groupe de Kac-Moody obtenu en évaluant le foncteur de Tits $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$ sur le corps $\mathbf{K}$. $\mathbf{A}$ et T désignent les appartement jumelé et sous-groupes de Cartan standard associés à la définition de G.

Rappelons (7.4.3) que $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ est la $\mathbf{Z}$-algèbre de Lie obtenue par intersection de l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ avec la $\mathbf{Z}$-forme $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$: $\mathcal{L}_{\mathcal{D}} := \mathfrak{g}_{\mathcal{D}} \cap \mathcal{U}_{\mathcal{D}}$, et qu'on a une décomposition radicielle

$$\mathcal{L}_{\mathcal{D}} = \mathcal{L}_0 \oplus (\bigoplus_{a \in \Delta} \mathcal{L}_a),$$

avec $\mathcal{L}_0 = \Lambda^\vee$. $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}$ désigne la $\mathbf{K}$-algèbre de Lie obtenue à partir de $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ par extension des scalaires de $\mathbf{Z}$ à $\mathbf{K}$.

Enfin, Ω désigne une partie équilibrée de $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$, contenue dans l'appartement jumelé standard $\mathbf{A}$.

10.3.1. La flèche abstraite Ad_Ω

Commençons par définir quelques sous-algèbres de Lie et sous-espaces de $\mathcal{L}_{\mathbf{K}}$ qui vont servir d'espaces de représentation. Modulo les changements de notations, nous avons déjà associé en (5.4.4) et (5.4.5) à une partie comme Ω les ensembles finis de racines suivants:

$$\Delta^m(\Omega) := \{a \in \Delta^{re} \mid \partial a \supset \Omega\},$$

$$\Delta^u(\Omega) := \{a \in \Delta^{re} \mid a \supset \Omega \quad \partial a \not\supset \Omega\}$$

$$\text{et} \quad \Delta(\Omega) := \{a \in \Delta^{re} \mid a \supset \Omega\} = \Delta^m(\Omega) \cup \Delta^u(\Omega).$$

DÉFINITION. — (i) $\mathfrak{p}(\Omega)_{\mathbf{K}}$ *est la* $\mathbf{K}$*-algèbre de Lie* $\mathfrak{p}(\Omega)_{\mathbf{K}} := (\Lambda^{\vee}\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{K}) \oplus \bigoplus_{a\in\Delta(\Omega)} (\mathcal{L}_a)_{\mathbf{K}}$.

On la voit comme $\mathbf{K}$*-structure de* $\mathfrak{p}(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}} := (\Lambda^{\vee}\otimes_{\mathbf{Z}}\overline{\mathbf{K}}) \oplus \bigoplus_{a\in\Delta(\Omega)} (\mathcal{L}_a)_{\overline{\mathbf{K}}}$.

(ii) $\mathfrak{m}(\Omega)_{\mathbf{K}}$ *est la* $\mathbf{K}$*-algèbre de Lie* $\mathfrak{m}(\Omega)_{\mathbf{K}} := (\Lambda^{\vee}\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{K}) \oplus \bigoplus_{a\in\Delta^m(\Omega)} (\mathcal{L}_a)_{\mathbf{K}}$.

On la voit comme $\mathbf{K}$*-structure de* $\mathfrak{m}(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}} := (\Lambda^{\vee}\otimes_{\mathbf{Z}}\overline{\mathbf{K}}) \oplus \bigoplus_{a\in\Delta^m(\Omega)} (\mathcal{L}_a)_{\overline{\mathbf{K}}}$.

(iii) $\mathfrak{u}(\Omega)_{\mathbf{K}}$ *est la* $\mathbf{K}$*-algèbre de Lie* $\mathfrak{u}(\Omega)_{\mathbf{K}} := \bigoplus_{a\in\Delta^u(\Omega)} (\mathcal{L}_a)_{\mathbf{K}}$.

On la voit comme $\mathbf{K}$*-structure de* $\mathfrak{u}(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}} := \bigoplus_{a\in\Delta^u(\Omega)} (\mathcal{L}_a)_{\overline{\mathbf{K}}}$.

REMARQUES. — 1. Ces trois $\mathbf{K}$-algèbres de Lie de dimension finie définissent des $\mathbf{K}$-structures sur les groupes linéaires associés $\mathrm{GL}(\mathfrak{p}(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$, $\mathrm{GL}(\mathfrak{m}(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$ et $\mathrm{GL}(\mathfrak{u}(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$.

2. Il est naturel de penser à $\mathfrak{p}(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$ comme l'algèbre de Lie de $\mathrm{Fix}(\Omega)$, bien que cet objet n'ait pas de sens en l'absence de structure algébrique sur $\mathrm{Fix}(\Omega)$.

3. Vu la définition de la représentation adjointe de G et la décomposition de Lévi de $\mathrm{Fix}(\Omega)$, il est clair que la restriction de Ad à $\mathrm{Fix}(\Omega)$ stabilise $\mathfrak{p}(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$.

On va maintenant définir un $\mathbf{K}$-espace vectoriel contenant les algèbres de Lie ci-dessus, et qui va permettre de définir les structures algébriques qui nous intéressent.

LEMME/DÉFINITION. — *Soit* $W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$ *le plus petit sous-*$\overline{\mathbf{K}}$*-espace vectoriel* Q*-gradué de* $(\mathcal{L}_{\mathcal{D}})_{\overline{\mathbf{K}}}$*, stable sous l'action adjointe de* $\mathrm{Fix}(\Omega)$*, contenant* $\mathfrak{p}(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$ *et dont le* Q*-support contient* $-\Delta^u(\Omega)$*. Alors,* $W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$ *est de dimension finie, son support est formé de degrés combinaisons linéaires entières de racines de* $\Delta(\Omega)$ *et* $-\Delta^u(\Omega)$*. On note* $W(\Omega)_{\mathbf{K}}$ *le* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel somme directe de* $\Lambda^{\vee}\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{K}$ *et des droites* Q*-homogènes indexées par les racines du support de* $W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$*;* $W(\Omega)_{\mathbf{K}}$ *est une* $\mathbf{K}$*-structure de* $W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$.

Démonstration. Cas particulier: la donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D}$ est libre. Dans ce cas, Q-graduation et graduation par les poids coïncident, et la somme

$$\mathrm{Vect}\Big(\sum_{c\in-\Delta^u(\Omega)} \mathrm{Ad}\big(\mathrm{Fix}(\Omega)\big)e_c\Big) + \mathfrak{p}(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$$

est Q-graduée car stable sous l'action adjointe de $\mathrm{Fix}(\Omega)$ et donc de T. D'après (10.2.2), le premier espace vectoriel est de dimension finie; par conséquent, c'est tout l'espace considéré qui est de dimension finie et stable sous l'action adjointe de $\mathrm{Fix}(\Omega)$. C'est donc $W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$, somme de droites Q-homogènes. Cela justifie la dernière assertion, celle concernant les degrés étant une conséquence directe du comportement de la Q-graduation vis-à-vis de l'action adjointe.

Cas d'une donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D}$ quelconque. On considère alors la donnée radicielle $\widehat{\mathcal{D}}$, aménagée en (7.3.2) afin de rendre les racines libres. Pour tout corps $\mathbf{E}$, $\widetilde{\mathcal{G}_{\widehat{\mathcal{D}}}}(\mathbf{E})$ contient $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{E})$ comme sous-groupe distingué, et $\widetilde{\mathcal{G}_{\widehat{\mathcal{D}}}}(\mathbf{E}) = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{E}).\widehat{T}(\mathbf{E})$, où $\widehat{T}(\mathbf{E})$ est le tore attaché à $\widehat{\mathcal{D}}$. Le fait de pouvoir considérer un groupe comme sous-groupe de l'autre provient

du même type de raisonnement que celui du début du second lemme (8.4.1); la normalisation provient de la description de l'action des éléments toriques par conjugaison dans les groupes (8.3.3). En outre, d'après sa décomposition Q-graduée, la $\mathbf{Z}$-algèbre de Lie $\mathcal{L}_{\widehat{\mathcal{D}}}$ contient $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ comme idéal; et $\widetilde{\mathcal{G}_{\widehat{\mathcal{D}}}}(\mathbf{E})$ opère par sa représentation adjointe sur $(\mathcal{L}_{\widehat{\mathcal{D}}})_{\mathbf{E}}$ en stabilisant $(\mathcal{L}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{E}}$. Ceci est conséquence de la description de l'action des éléments toriques par crochet dans les algèbres de Kac-Moody (7.3.1), et de la définition de l'action adjointe. Par le lemme (8.4.1), $\widetilde{\mathcal{G}_{\widehat{\mathcal{D}}}}(\overline{\mathbf{K}})$ possède le même jumelage que $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\overline{\mathbf{K}})$, et on note $\widehat{\mathrm{Fix}(\Omega)}$ le groupe analogue à $\mathrm{Fix}(\Omega)$. Par décomposition de Lévi, il contient $\mathrm{Fix}(\Omega)$ comme sous-groupe distingué. D'après le cas particulier du début, $\widehat{\mathrm{Fix}(\Omega)}$ stabilise l'analogue $\widehat{W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}}$ de $W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$ pour $\widehat{\mathcal{D}}$. Ainsi, $\widehat{\mathrm{Fix}(\Omega)}$ stabilise $\widehat{W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}} \cap (\mathcal{L}_{\mathcal{D}})_{\overline{\mathbf{K}}}$ qui vaut $W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$, et finalement $\mathrm{Fix}(\Omega)$ stabilise également ce dernier espace. Le reste des assertions se prouve comme dans le cas libre. □

REMARQUES. — 1. $W(\Omega)_{\mathbf{K}}$ définit une $\mathbf{K}$-structure sur $\mathrm{GL}\big(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}\big)$.

2. La raison pour laquelle on a défini $W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$ est que la présence d'éléments de Q-degrés dans $-\Delta^u(\Omega)$ permet d'injecter dans $\mathrm{GL}(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$ les sous-groupes radiciels indexés par $\Delta^u(\Omega)$, en vertu de (9.6.1)(i).

DÉFINITION. — Ad_Ω *désigne la représentation de* $\mathrm{Fix}(\Omega)$ *dans l'espace* $W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$, *obtenue par restriction de but et de source à partir de* Ad.

L'objectif est désormais d'étudier la flèche abstraite Ad_Ω, c'est-à-dire de déterminer son image et son noyau. On va montrer que l'image par Ad_Ω de $\mathrm{Fix}(\Omega)$ est un $\mathbf{K}$-sous-groupe fermé connexe de $\mathrm{GL}(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$, et que le noyau est un $\mathbf{K}$-sous-groupe du tore T. On ne cherche donc pas à munir $\mathrm{Fix}(\Omega)$ lui-même d'une structure algébrique, mais son image par une application qui quotiente peu d'un certain point de vue, c'est-à-dire par un sous-groupe de type multiplicatif. Cette restriction est inoffensive puisqu'on va se servir de Ad_Ω pour prouver des résultats de conjugaison des tores et d'existence de tores rationnels. Le fait que le noyau est dans T est en revanche essentiel. Nous allons procéder de la façon suivante.

1. Étude des sous-groupes unipotents de $\mathrm{GL}(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$ qui vont intervenir.
2. Étude de l'adhérence de Zariski $\overline{\mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big)}$ de $\mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big)$ dans $\mathrm{GL}(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$.
3. $\overline{\mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big)}$ est un groupe réductif, qui coïncide donc avec $\mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big)$, d'après le dévissage classique des groupes réductifs. Ceci implique en fait que $\mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big)$ est fermé dans $\mathrm{GL}(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$.

Introduisons donc la notation provisoire:

DÉFINITION. — $G(\Omega) := \overline{\mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big)} \subset \mathrm{GL}(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$.

Nous allons commencer à faire des raisonnements de groupes algébriques. C'est le moment de rappeler quelques conventions dans ce domaine.

CONVENTION. — *Si H est un groupe algébrique sur le corps $\mathbf{K}$ (*[Bor90], (AG.12.1) p.23 et (1.1) p.46*), pour toute extension $\mathbf{E}/\mathbf{K}$, on note $H(\mathbf{E})$ le groupe des points $\mathbf{E}$-rationnels de H, sauf pour $\overline{\mathbf{K}}$, où l'on pourra omettre les parenthèses.*

Les références pour les groupes algébriques sont [Bor90], [Hum75] et [Spr80]. Seul [Bor90] traite des questions de rationnalité. Seul [Spr80] prouve le théorème d'existence des groupes réductifs (théorème (12.1) p.274) dont on s'est inspiré pour mettre en évidence les structures algébriques qui nous intéressent.

10.3.2. Sous-groupes unipotents

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à des groupes unipotents. On sait (6.4.1) que $\mathrm{Fix}(\Omega)$ possède une décomposition de Lévi relativement à l'appartement jumelé $\mathbf{A}$, ou au tore T qui le fixe point par point:

$$\mathrm{Fix}(\Omega) = M(\Omega) \ltimes U(\Omega).$$

$U(\Omega)$ est unipotent dans le sens où ses éléments opèrent de façon unipotente via la représentation Ad. $M(\Omega)$ est un groupe possédant une donnée radicielle jumelée. Nous avons encore la liberté de choisir une chambre standard, dans l'appartement jumelé $\mathbf{A}$. On choisit la chambre standard C comme D_+ en (5.4.5). De la sorte, on a $U(\Omega) \subset U_+$, et on partage les racines de $\Delta^m(\Omega)$ en $\Delta^m(\Omega)_+ := \Delta^m(\Omega)_C$ et $\Delta^m(\Omega)_- := -\Delta^m(\Omega)_C$. On veut montrer que les sous-groupes abstraits de $\mathrm{GL}(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$ engendrés par $\mathrm{Ad}_\Omega\big(U(\Omega)\big)$ et $\mathrm{Ad}_\Omega\big(\langle U_a \mid a \in \Delta^m(\Omega)_+\rangle\big)$ sont fermés dans $\mathrm{GL}(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$. On note $V(\Omega)_+$ le sous-groupe de $\mathrm{Fix}(\Omega)$ engendré par les sous-groupes radiciels U_a pour a dans $\Delta^m(\Omega)_+$.

$$V(\Omega)_+ := \langle U_a \mid a \in \Delta^m(\Omega)_+\rangle \quad \text{et} \quad V(\Omega)_- := \langle U_a \mid a \in \Delta^m(\Omega)_-\rangle.$$

De manière générale, pour ψ une partie $\mathbf{N}$-close de $\Delta^m(\Omega)_+$ ou $\Delta^m(\Omega)_-$, on note

$$V(\Omega, \psi) := \langle U_a \mid a \in \psi\rangle.$$

PROPOSITION. — *Soit ψ une partie $\mathbf{N}$-close de $\Delta^m(\Omega)_+$ ou $\Delta^m(\Omega)_-$, pour Ω une partie équilibrée. Alors:*

(i) *La restriction $\mathrm{Ad}_\Omega : V(\Omega,\psi) \to \mathrm{GL}\big(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}\big)$ est injective.*
(ii) *$\mathrm{Ad}_\Omega\big(V(\Omega,\psi)\big)$ est un $\mathbf{K}$-sous-groupe algébrique de $\mathrm{GL}(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$, $\mathbf{K}$-isomorphe comme variété algébrique à l'espace affine de dimension $\#\psi$.*
(iii) *L'algèbre de Lie de $\mathrm{Ad}_\Omega\big(V(\Omega,\psi)\big)$ est isomorphe à $\bigoplus_{a\in\psi} \overline{\mathbf{K}} e_a$; précisément:*

$$\mathrm{Lie}\ \mathrm{Ad}_\Omega\big(V(\Omega,\psi)\big) = \bigoplus_{a\in\psi} \overline{\mathbf{K}}\ \mathrm{ad}e_a\,|_{W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}}.$$

Toutes les propriétés ci-dessus sont vraies en remplaçant ψ par une partie $\mathbf{N}$-close de $\Delta^u(\Omega)$, et $V(\Omega,\psi)$ par le sous-groupe de $U(\Omega)$ correspondant.

Démonstration. On raisonne sur $V(\Omega,\psi)$; les arguments pour le cas de $U(\Omega)$ sont identiques.

Par (9.6.1)(i), pour chaque racine $a\in\psi$, $\mathrm{Ad}_\Omega(U_a)$ est un sous-groupe unipotent à un paramètre fermé non trivial dans $\mathrm{GL}(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$. Il est défini sur $\mathbf{K}$, car la représentation adjointe n'implique que des relations entières. En appliquant le lemme de Tits (8.3.1) à ces sous-groupes, on voit que le sous-groupe abstrait qu'ils engendrent et qui est aussi $\mathrm{Ad}_\Omega\big(V(\Omega,\psi)\big)$, est le produit interne dans tout ordre préassigné de ces sous-groupes. Ce produit, au titre d'image de morphisme, est constructible, et donc fermé par [Bor90], proposition (1.3)(c) p.47. Il est défini sur $\mathbf{K}$ par [Bor90], proposition (2.2) p.57. En outre, l'application produit

$$\prod_{a\in\psi} \mathrm{Ad}_\Omega(U_a) \to \mathrm{Ad}_\Omega\big(V(\Omega,\psi)\big)$$

est non seulement une bijection, mais aussi un isomorphisme de variétés algébriques. En effet, si a est une racine indécomposable, on lit dans le produit la coordonnée suivant a d'un élément de $\mathrm{Ad}_\Omega\big(V(\Omega,\psi)\big)$ comme coefficient matriciel reperé en ligne par e_a et en colonne par un élément de $\Lambda^\vee \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{K}$. Si a est décomposable, il faut retirer à ce coefficient des expressions polynomiales en les coordonnées correspondant aux décompositions de a. L'inverse de l'application produit est donc polynomial, et on a prouvé le point (ii).

Le point (iii), qui est un calcul d'algèbre de Lie, provient d'un simple usage des nombres duaux de Cartier.

Le point (i) provient de l'application du lemme de Tits pour le même ordre à $\mathfrak{U}_\psi(\overline{\mathbf{K}})$ et $\mathrm{Ad}_\Omega\big(V(\Omega,\psi)\big)$ pour obtenir le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
\prod_{a\in\psi} \mathfrak{U}_a(\overline{\mathbf{K}}) = \prod_{a\in\psi} U_a & \xrightarrow{\sim} & \prod_{a\in\psi} \mathrm{Ad}_\Omega(U_a) \\
\wr\downarrow & & \wr\downarrow \\
\mathfrak{U}_\psi(\overline{\mathbf{K}}) = V(\Omega,\psi) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ad}_\Omega\big(V(\Omega,\psi)\big),
\end{array}$$

où les flèches verticales sont les applications produit. □

REMARQUE. — Dans cette démonstration, on prouve que $\mathfrak{U}_\psi(\mathbf{K})$ est un sous-groupe de $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{K})$ (et pas seulement de $St_A(\mathbf{K})$), isomorphe comme $\mathbf{K}$-groupe algébrique à son image par Ad_Ω.

10.3.3. Adhérence de l'image du facteur de Lévi

Nous allons maintenant étudier le sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$ engendré par $\mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big)$, qu'on a noté $G(\Omega)$. L'étude de $G(\Omega)$ est un moyen détourné de montrer que $\mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big)$ est fermé dans $\mathrm{GL}(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$. Nous allons en effet montrer que $G(\Omega)$ est réductif. Puisque ce faisant, on aura calculé entre temps son algèbre de Lie, on pourra l'identifier avec l'image abstraite du facteur de Lévi de $\mathrm{Fix}(\Omega)$ relativement à $\mathbf{A}$. Rappelons que S est le tore $\mathrm{Ad}_\Omega(T)$. La combinatoire de $M(\Omega)$ donne déjà une majoration de la dimension de $G(\Omega)$.

LEMME. — *$G(\Omega)$ est un $\mathbf{K}$-sous-groupe algébrique connexe de $\mathrm{GL}\big(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}\big)$ de dimension $\dim_{\overline{\mathbf{K}}} S + \#\Delta^m(\Omega)$. Son algèbre de Lie est donc*

$$\mathrm{Lie}\, G(\Omega) = \mathrm{Lie}\, S \oplus \bigoplus_{a\in\Delta^m(\Omega)} \overline{\mathbf{K}}\, \mathrm{ad}e_a.$$

Démonstration. S est un groupe de matrices diagonales sur $\mathbf{K}$, c'est un tore $\mathbf{K}$-déployé de $\mathrm{GL}(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$. $V(\Omega)_+$ et $V(\Omega)_-$ sont définis sur $\mathbf{K}$ par le lemme qui précède. $G(\Omega)$, engendré par ces trois sous-groupes, est donc défini sur $\mathbf{K}$ ([Bor90], proposition (2.2) p.57).
Abstraitement, on dispose de la décomposition en doubles classes de Bruhat de $M(\Omega)$ relative à la chambre standard C de (10.3.2):

$$M(\Omega) = \bigsqcup_{w\in W(\Omega)} V(\Omega)_+ n_w T V(\Omega)_+,$$

car $M(\Omega)$ est un groupe à donnée radicielle jumelée. En prenant son image par Ad_Ω, cette décomposition permet d'écrire $\mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big)$ comme réunion finie d'orbites sous l'action (bilatère) du groupe algébrique $SV(\Omega)_+ \times SV(\Omega)_+$ sur $\mathrm{GL}(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$. À ce titre, l'image d'une double classe est connexe et localement fermée, donc ouverte dans son adhérence.

Par ailleurs, $V(\Omega)_+ \cap n_w V(\Omega)_- n_w^{-1}$ est naturellement produit pour un ordre quelconque des sous-groupes radiciels qu'il contient. D'après la proposition (10.3.2) pour $\psi = \Delta^m(\Omega)_+ \cap -w\Delta^m(\Omega)_+$, on voit que $\mathrm{Ad}_\Omega\Big(V(\Omega)_+ \cap n_w V(\Omega)_- n_w^{-1}\Big)$ est un groupe algébrique de dimension $\#(\Delta^m(\Omega)_+ \cap -w\Delta^m(\Omega)_+) = \ell(w)$. On obtient donc pour chaque w de $W(\Omega)$ un morphisme dominant d'image ouverte:

$$\mathrm{Ad}_\Omega\Big(V(\Omega)_+ \cap n_w V(\Omega)_+ n_w^{-1}\Big) \times S \times \mathrm{Ad}_\Omega V(\Omega)_+ \to \overline{\mathrm{Ad}_\Omega\Big(V(\Omega)_+ n_w T V(\Omega)_+\Big)}$$
$$(v,t,v') \mapsto v n_w t v',$$

qui fournit une majoration de la dimension de l'adhérence de Zariski $\overline{\mathrm{Ad}_\Omega\Big(V(\Omega)_+ n_w T V(\Omega)_+\Big)}$, à savoir $\ell(w) + \dim_{\overline{\mathbf{K}}} S + \#\Delta^m(\Omega)_+$. Comme $G(\Omega) = \bigcup_{w\in W(\Omega)} \overline{\mathrm{Ad}_\Omega\Big(V(\Omega)_+ n_w T V(\Omega)_+\Big)}$, on en déduit

$$\dim_{\overline{\mathbf{K}}} G(\Omega) \leq \dim_{\overline{\mathbf{K}}} S + 2\#\Delta^m(\Omega)_+ = \dim_{\overline{\mathbf{K}}} S + \#\Delta^m(\Omega).$$

Or, on ne manipule que des sous-groupes d'un groupe linéaire sur un corps algébriquement clos, donc lisses, ce qui implique l'égalité entre dimensions des groupes et des algèbres de Lie correspondantes. Puisque $\mathrm{Lie}\, G(\Omega)$ contient déjà $\mathrm{Lie}\, S \oplus \bigoplus_{a\in\Delta^m(\Omega)} \overline{\mathbf{K}}\, \mathrm{ad}_a$, on en déduit que la majoration de $\dim_{\overline{\mathbf{K}}} G(\Omega)$ précédemment obtenue est une égalité. D'où également la décomposition de l'algèbre de Lie.

Enfin, une seule des orbites ci-dessus est de dimension $\dim_{\overline{\mathbf{K}}} S + \#\Delta^m(\Omega)$, donc cette orbite est ouverte, et comme elle est connexe, $G(\Omega)$ est connexe. □

Il reste à montrer que $G(\Omega)$ est réductif, alors que nous connaissons déjà son algèbre de Lie.

10.3.4. Trivialité du radical unipotent

On peut déjà exploiter la décomposition de Lie $G(\Omega)$ en remarquant que c'est une décomposition en espaces poids relativement à S. Il est clair que S est un tore maximal (sinon l'espace de poids 0 serait de dimension supérieure à $\dim_{\overline{\mathbf{K}}} S$). Un résultat préliminaire fondamental à tout dévissage de groupe réductif, est que le radical unipotent d'un groupe algébrique est égal

au radical unipotent de la composante neutre de l'intersection des sous-groupes de Borel qui contiennent un tore maximal fixé ([Hum75], théorème (26.1) p.158). C'est par cette façon de le calculer que nous allons montrer la trivialité du radical unipotent $R_u\big(G(\Omega)\big)$.

DÉFINITION. — *$I(S)$ désigne la composante neutre de l'intersection des sous-groupes de Borel qui contiennent S. $I(S) := \Big(\bigcap_{B\in\mathcal{B}^S} B\Big)^\circ$, où $^\circ$ désigne la composante neutre, et $\mathcal{B}^S$ l'ensemble des sous-groupes de Borel de $G(\Omega)$ contenant S.*

Naturellement, $I(S)$ est stable sous les conjugaisons par les éléments de S, par conséquent Lie $I(S)$ est stable sous l'action infinitésimale de S correspondante. Par complète réductibilité pour les tores, Lie $I(S)$ admet un supplémentaire S-stable, qu'on peut à nouveau décomposer en sous-espaces poids de S, d'où:

LEMME. — Lie $G(\Omega)$ *possède une décomposition S-stable*

$$\text{Lie } G(\Omega) = \text{Lie } I(S) \oplus \bigoplus_{c\in\psi} \overline{\mathbf{K}}\ \mathrm{ad}e_c$$

pour ψ une partie de $\Delta^m(\Omega)$. □

Il nous reste à montrer maintenant le résultat suivant:

PROPOSITION. — Lie $S =$ Lie $I(S)$, *donc $R_u\big(G(\Omega)\big) = \{1\}$, c'est-à-dire $G(\Omega)$ est réductif, de tore maximal S.*

Démonstration. Il est clair qu'on a Lie $S \subset$ Lie $I(S)$ puisqu'on a l'inclusion au niveau des groupes.

1. Tores singuliers

Pour c dans $\Delta^m(\Omega)_+$, on définit $S_c := (\mathrm{Ker}c)^\circ$, tore singulier de codimension 1 dans S. Dans $G(\Omega)$, son centralisateur $Z_c := Z_{G(\Omega)}(S_c)$ est connexe au titre de centralisateur de tore ([Hum75], théorème (22.3) p.140). Il contient les sous-groupes S, $\mathrm{Ad}_\Omega(U_c)$ et $\mathrm{Ad}_\Omega(U_{-c})$, donc le sous-groupe qu'ils engendrent, qui est connexe et surtout non résoluble (d'après les relations entre U_c et U_{-c}, c'est un groupe de rang semi-simple égal à 1). Ainsi, $Z_c \cap I(S)$ est strictement inclus dans Z_c car $I(S)$ est résoluble.

2. Algèbres de Lie de centralisateurs de tores

Pour des raisons de dimension, cette inclusion stricte implique

$$\text{Lie } \big(Z_c \cap I(S)\big) \subsetneq \text{Lie } Z_c.$$

Or, il est classique que l'algèbre de Lie du centralisateur d'un tore dans un sous-groupe algébrique H de $G(\Omega)$ coïncide avec les points fixes dans l'algèbre de Lie de H pour l'action infinitésimale du tore ([Hum75], proposition (18.4) p.119 ou [Bor90], corollaire (9.2) p.130). Pour $H = G(\Omega)$, cela donne:

$$\text{Lie } Z_c = \big(\text{Lie } G(\Omega)\big)^{S_c} = \text{Lie } S \oplus \overline{\mathbf{K}}\ \mathrm{ad}e_c \oplus \overline{\mathbf{K}}\ \mathrm{ad}e_{-c},$$

ce qui fait voir grâce à la connexité de Z_c que Z_c est précisément le sous-groupe engendré par S et $\mathrm{Ad}_\Omega(U_{\pm c})$. De même, pour $H = I(S)$, on obtient:

$$\mathrm{Lie}\ Z_{I(S)}(S_c) = \mathrm{Lie}\ \big(I(S) \cap Z_{G(\Omega)}(S_c)\big) = \big(\mathrm{Lie}\ I(S)\big)^{S_c}.$$

D'après l'inclusion stricte des algèbres de Lie, on a donc:

$$\big(\mathrm{Lie}\ I(S)\big)^{S_c} \underset{\neq}{\subset} \mathrm{Lie}\ S \oplus \overline{\mathbf{K}}\ \mathrm{ad}_{e_c} \oplus \overline{\mathbf{K}}\ \mathrm{ad}_{e_{-c}}.$$

3. Sous-algèbres radicielles

On sait que Lie S est inclus dans Lie $I(S)$. Puisque les espaces poids pour les racines sont de dimension 1, on a nécessairement pour un signe ϵ l'inclusion $\overline{\mathbf{K}}\ \mathrm{ad}_{e_{\epsilon c}} \subset \bigoplus_{d\in\psi} \overline{\mathbf{K}}\ \mathrm{ad}_{e_d}$. En fait, en appliquant la réflexion associée à c, on voit qu'on a $\{\pm c\} \subset \psi$. Puisque ceci est vrai pour toute racine, on a $\Delta^m(\Omega) = \psi$.

4. Conclusion

On a $\bigoplus_{c\in\Delta^m(\Omega)} \overline{\mathbf{K}}\ \mathrm{ad}_{e_c} = \bigoplus_{c\in\psi} \overline{\mathbf{K}}\ \mathrm{ad}_{e_c}$ et Lie $S \subset$ Lie $I(S)$, alors qu'on a deux décompositions:

$$\mathrm{Lie}\ G(\Omega) = \mathrm{Lie}\ S \oplus \bigoplus_{c\in\Delta^m(\Omega)} \overline{\mathbf{K}}\ \mathrm{ad}_{e_c} = \mathrm{Lie}\ I(S) \oplus \bigoplus_{c\in\psi} \overline{\mathbf{K}}\ \mathrm{ad}_{e_c}.$$

Ceci implique l'égalité: Lie $S =$ Lie $I(S)$, d'où la trivialité du radical unipotent de $G(\Omega)$. □

COROLLAIRE. — $\mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big)$ *est fermé dans* $\mathrm{GL}(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$. *C'est un* $\mathbf{K}$*-sous-groupe réductif et déployé sur* $\mathbf{K}$.

Démonstration. On sait que $G(\Omega)$ est un groupe $\mathbf{K}$-réductif de tore maximal déployé S et d'algèbre de Lie Lie $G(\Omega) =$ Lie $S \oplus \bigoplus_{c\in\Delta^m(\Omega)} \overline{\mathbf{K}}\ \mathrm{ad}_{e_c}$. Donc, il est engendré par S et les sous-groupes radiciels associés aux racines c par rapport à S qui sont précisément celles de $\Delta^m(\Omega)$. On peut même en donner une décomposition de Bruhat qui coïncide avec l'image par Ad_Ω de celle (abstraite) de $M(\Omega)$. D'où: $G(\Omega) = \mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big)$. □

10.3.5. Décomposition de Lévi de l'image de Ad_Ω

Nous nous intéressons maintenant à l'image du groupe $\mathrm{Fix}(\Omega)$ tout entier. D'après la décomposition de Lévi de $\mathrm{Fix}(\Omega)$, $\mathrm{Ad}_\Omega\big(\mathrm{Fix}(\Omega)\big)$ est engendré par $\mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big)$ et $\mathrm{Ad}_\Omega\big(U(\Omega)\big)$, le premier groupe normalisant le second.

On regarde $\mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big) \cap \mathrm{Ad}_\Omega\big(U(\Omega)\big)$. C'est un sous-groupe unipotent de $\mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big)$. À ce titre, il est dans le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel de ce groupe, et il est en outre stable sous $\mathrm{Ad}_\Omega T$, puisque $\mathrm{Ad}_\Omega\big(U(\Omega)\big)$ est stabilisé par $\mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big)$. D'après [Hum75], proposition (28.1) p.170, et puisque $\mathrm{LieAd}_\Omega\big(M(\Omega)\big) \cap \mathrm{LieAd}_\Omega\big(U(\Omega)\big)$ est triviale, on a $\mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big) \cap \mathrm{Ad}_\Omega\big(U(\Omega)\big) = \{1\}$. En résumé:

$$\mathrm{Ad}_\Omega\big(\mathrm{Fix}(\Omega)\big) = \mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big) \ltimes \mathrm{Ad}_\Omega\big(U(\Omega)\big),$$

et chacun des deux facteurs du produit semi-direct est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$. Cette décomposition ensembliste est un isomorphisme de groupes algébriques puisqu'on a la décomposition analogue pour les algèbres de Lie (cf [Spr80], corollaire (3.4.3) p.119-120). On vient donc de prouver:

PROPOSITION. — *L'image de la flèche* Ad_Ω *est un* **K***-sous-groupe algébrique connexe de* $\mathrm{GL}(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$*, qui possède une décomposition de Lévi, au sens des groupes algébriques.* □

10.3.6. Noyau torique de la flèche Ad_Ω et centre de $\mathrm{Fix}(\Omega)$

Le résultat qui suit va être essentiel pour la conjugaison des sous-groupes de Cartan d'un groupe de Kac-Moody.

PROPOSITION. — *Le noyau de* Ad_Ω *est un sous-groupe de* T*, c'est le centre de* $\mathrm{Fix}(\Omega)$*.*

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}_\Omega) = Z\big(\mathrm{Fix}(\Omega)\big) = \bigcap_{c\in\Delta(\Omega)} \mathrm{Ker}(c)\ \Big(\subset T\Big).$$

Pour la structure de tore **K***-déployé de* T *fournie par* $\mathbf{K}[\Lambda]$*,* $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}_\Omega)$ *est un* **K***-sous-groupe diagonalisable déployé.*

Démonstration. La dernière assertion est une conséquence immédiate des points précédents en vertu de [Bor90], proposition (8.2) p.111-112.

1. Noyau de Ad_Ω restreinte à $M(\Omega)$

D'après la construction de la structure algébrique sur $\mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big)$, on sait que $S\ltimes\mathrm{Ad}_\Omega\big(V(\Omega)_+\big)$ est un sous-groupe de Borel. On obtient donc une structure de BN-paire sur le groupe réductif $\mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big)$, qui fait de $\mathrm{Ad}_\Omega\,|_{M(\Omega)}$ un homomorphisme de groupes, qui envoie le sous-groupe de Borel de la première BN-paire sur celui de la seconde, et le sous-groupe N de la première dans le normalisateur de S, c'est-à-dire dans le sous-groupe N de la seconde BN-paire. Vu l'action des éléments non triviaux modulo T de N sur les sous-groupes radiciels, un élément non trivial du groupe de Weyl de $M(\Omega)$ s'envoie sur un élément non trivial du groupe de Weyl de $\mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big)$. Le noyau de Ad_Ω est donc nécessairement dans B qui est la seule double classe à être envoyée dans la double classe d'arrivée contenant le neutre. D'où $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}_\Omega)\subset B$, et en conjuguant par un élément de N qui relève le plus grand élément de $W(\Omega)$, on obtient $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}_\Omega)\subset T$.

2. Détermination du noyau sans restriction de but ou de source sur Ad_Ω

Soit g dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}_\Omega)$. D'après la décomposition de Lévi de $\mathrm{Fix}(\Omega)$, on peut écrire $g = m.u$ avec m dans $M(\Omega)$ et u dans $U(\Omega)$. Alors $\mathrm{Ad}_\Omega(m^{-1}) = \mathrm{Ad}_\Omega(u)$. Vu la compatibilité du crochet dans $(\mathcal{U}_\mathcal{D})_{\overline{\mathbf{K}}}$ avec la graduation par le réseau des poids, $\mathfrak{u}(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$ est clairement un idéal de $\mathfrak{p}(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$. En effet, $\Delta^u(\Omega)$ est un idéal de $\Delta(\Omega)$ au sens des parties de racines, c'est-à-dire: si a dans $\Delta^u(\Omega)$ et b dans $\Delta(\Omega)$ vérifient $a+b\in\Delta(\Omega)$, alors $a+b$ est en fait dans $\Delta^u(\Omega)$. Revenons à $\mathrm{Ad}_\Omega(m^{-1})$ et $\mathrm{Ad}_\Omega(u)$. On a pour tout v de $\mathfrak{m}(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$,

$$(\mathrm{Ad}_\Omega m^{-1} - I).v = (\mathrm{Ad}_\Omega(u) - I).v.$$

Mais d'après la définition de Ad_Ω à partir d'exponentielles de la représentation adjointe et la remarque qui précède, le premier membre de l'égalité est dans $\mathfrak{m}(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$, alors que le second est dans $\mathfrak{u}(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$, deux sous-espaces supplémentaires de $\mathfrak{p}(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$. Par conséquent, $\mathrm{Ad}_\Omega m^{-1}$ fixe point par point $\mathfrak{m}(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$.

Toute la construction de la structure algébrique de $\mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big)$ en considérant le groupe linéaire de $W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$ peut être reprise en remplaçant $W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$ par $\mathfrak{m}(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$ (il suffit de remplacer

Ω par $\Omega \cup -\Omega$). En particulier, on peut encore appliquer le raisonnement de 1, qui montre que le noyau de Ad_Ω restreinte à $M(\Omega)$ à la source et à $\mathrm{GL}\big(\mathfrak{m}(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}\big)$ au but, est dans T. Donc m^{-1} et m sont dans T.

On obtient alors une égalité entre un élément diagonal et un élément unipotent dans $\mathrm{GL}(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$: $\mathrm{Ad}_\Omega m^{-1} = \mathrm{Ad}_\Omega(u)$, qui implique la trivialité de chacun des deux membres. En particulier, $\mathrm{Ad}_\Omega(u) = 1$, alors que la proposition (10.3.2) montre que $\mathrm{Ad}_\Omega\,|_{V(\Omega)_+}$ est injective. Finalement, $u = 1$ et $g = m \in T$. Dès lors, il est clair que g est dans $\bigcap_{c \in \Delta(\Omega)} \mathrm{Ker}(c)$. On a en fait l'égalité

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Ad}_\Omega) = \bigcap_{c \in \Delta(\Omega)} \mathrm{Ker}(c),$$

d'après la description des Q-degrés apparaissant dans le support de $W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$ (10.3.1).

3. Détermination du centre

On va faire le même type de raisonnement au niveau des groupes plutôt que des algèbres de Lie pour déterminer le centre de $\mathrm{Fix}(\Omega)$. Soit g dans ce centre, qu'on peut à nouveau écrire par décomposition de Lévi, $g = mu$. Alors, pour tout élément m' de $M(\Omega)$, on a:

$$gm'g^{-1} = mum'u^{-1}m^{-1} = m', \text{ et donc } um'u^{-1}m'^{-1} = m^{-1}m'mm'^{-1}.$$

Or, $um'u^{-1}m'^{-1}$ est dans $U(\Omega)$ puisque $U(\Omega)$ est distingué dans $\mathrm{Fix}(\Omega)$. Par trivialité de l'intersection $U(\Omega) \cap M(\Omega)$, on en déduit que $m^{-1}m'mm'^{-1} = 1$. Ceci étant vrai pour tout m' de $M(\Omega)$, on obtient $m \in Z\big(M(\Omega)\big)$, et donc m est dans le centralisateur de T. Ceci implique que u centralise également T. Or, d'après l'écriture unique en produit d'éléments de sous-groupes radiciels dans $U(\Omega)$, il suffit que u soit différent de 1, pour pouvoir trouver t dans T tel que tut^{-1} soit différent de u. Cette remarque impose $u = 1$. On a donc $g = m \in T$, ce qui implique $Z\big(\mathrm{Fix}(\Omega)\big) \subset T$, d'où s'ensuit immédiatement la description en termes d'intersection de noyaux de caractères. □

REMARQUE. — Les trois sous-groupes $\mathrm{Ad}_\Omega\big(\mathrm{Fix}(\Omega)\big)$, $\mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big)$ et $\mathrm{Ad}_\Omega\big(U(\Omega)\big)$ sont tous définis sur $\mathbf{K}$. En outre, ils sont tous unirationnels sur $\mathbf{K}$ ([Bor90], (AG.13.7) p.29). $\mathrm{Ad}_\Omega\big(U(\Omega)\big)$ l'est trivialement, car $\mathbf{K}$-isomorphe à un espace affine. $\mathrm{Ad}_\Omega\big(M(\Omega)\big)$ l'est car c'est un $\mathbf{K}$-groupe réductif déployé (la grosse cellule est dense dedans). Enfin, $\mathrm{Ad}_\Omega\big(\mathrm{Fix}(\Omega)\big)$ est le produit comme variété des deux groupes précédents. Ceci implique que le groupe des points $\mathbf{K}$-rationnels de chacun de ces groupes est dense dès que le corps $\mathbf{K}$ est infini ([Bor90], (AG.13.7) p.29).

10.4. Sous-groupes de Cartan et appartements jumelés

On va proposer ici une définition intrinsèque des sous-groupes de Cartan. «Intrinsèque» est à entendre dans le sens où il s'agit d'une caractérisation vis-à-vis de la représentation adjointe. Le résultat principal est un théorème de conjugaison (10.4.2) qui assure la coïncidence de cette définition avec la précédente (8.3.4). On prouvera ensuite des résultats dictionnaires entre sous-classes de sous-groupes de Cartan et d'appartements jumelés de $|\mathcal{J}(\mathbf{K})|_{\mathrm{co}}$, avant d'en tirer une conséquence géométrique sur les enveloppes convexes.

On raisonne dans toute cette section sur un corps $\mathbf{K}$ infini. Ceci implique en particulier que $\mathbf{K}$ est assez gros pour $\mathcal{D}$ (8.4.1). Cette hypothèse sera régulièrement répétée.

10.4.1. Sous-groupes de Cartan – définition intrinsèque

DÉFINITION. — *Un* sous-groupe de Cartan **K**-déployé *du groupe de Kac-Moody* $G(\mathbf{K})$ *est un sous-groupe* Ad*-diagonalisable, maximal pour cette propriété. Si* **K** *est algébriquement clos, on omet le qualificatif «* **K***-déployé»* .

Le lemme suivant montre que $T(\mathbf{K})$ et tous ses conjugués sont des sous-groupes de Cartan **K**-déployés de $G(\mathbf{K})$ pour cette définition.

LEMME. — *Soit* $H(\mathbf{K}) \subset G(\mathbf{K})$ *un sous-groupe* Ad*-diagonalisable contenant* $T(\mathbf{K})$. *Alors* $H(\mathbf{K}) = T(\mathbf{K})$.

Démonstration. Déjà, $H(\mathbf{K})$ est dans le centralisateur dans $G(\mathbf{K})$ de $T(\mathbf{K})$. Il est en particulier dans le normalisateur $N_{G(\mathbf{K})}(T(\mathbf{K}))$ qui vaut $N(\mathbf{K})$ puisque **K** – infini – est assez gros pour $\mathcal{D}$ (8.4.1). Il stabilise donc les appartements standard positif et négatif $\mathbf{A}_+$ et $\mathbf{A}_-$, et leurs réalisations métriques modelées sur $|W|_{\text{mét}}$.
En outre, c'est un petit sous-groupe par Ad-diagonalisabilité (10.2.2), contenu dans un nombre fini de doubles classes positives ou négatives. Ses orbites dans les réalisations métriques des immeubles et des appartements standard du jumelage sont bornées. Par le théorème de point fixe de Bruhat-Tits pour $|W|_{\text{mét}}$, $H(\mathbf{K})$ fixe une facette sphérique F positive de $\mathbf{A}_+$, et son opposée $-F$ dans $\mathbf{A}_-$ par respect de la codistance. Ainsi, $H(\mathbf{K})$ est dans le centralisateur dans $M(F)(\mathbf{K})$ de $T(\mathbf{K})$. Comme $M(F)(\mathbf{K})$ est abstraitement isomorphe à un groupe réductif déployé sur **K** de tore maximal $T(\mathbf{K})$, on a $H(\mathbf{K}) = T(\mathbf{K})$. □

10.4.2. Conjugaison des sous-groupes de Cartan

La preuve du théorème suivant est exemplaire de la démarche qui sera suivie au cours de la première étape d'étude des formes des groupes de Kac-Moody (usage de la courbure négative dans un premier temps, puis de la théorie des groupes algébriques).

THÉORÈME. — *On suppose que le corps* **K** *est infini.*

Les sous-groupes de Cartan **K***-déployés du groupe de Kac-Moody* $G(\mathbf{K})$ *définis par la représentatio adjointe sont tous conjugués au tore standard* $T(\mathbf{K})$.

Démonstration. Partons de $H(\mathbf{K})$ un sous-groupe de Cartan **K**-déployé. $H(\mathbf{K})$ est en particulier abélien. Puisqu'il est Ad-diagonalisable, il est petit d'après le critère impliquant la représentation adjointe de $G(\mathbf{K})$ (10.2.2). Par conséquent, $H(\mathbf{K})$ est inclus dans le fixateur de deux facettes sphériques de signes opposés F_+ et F_-. On sait d'après la décomposition de Birkhoff, que ces facettes sont contenues dans un même appartement. Autrement dit, il existe g dans $G(\mathbf{K})$ (défini modulo $N(\mathbf{K})$) tel que $F_+ \cup F_- \subset g^{-1}\mathbf{A}$. Posons $\Omega := g(F_+ \cup F_-)$. Ω est la réunion de deux facettes sphériques de signes opposés de l'appartement standard $\mathbf{A}$. D'après ce qui précède, $gH(\mathbf{K})g^{-1}$ est un sous-groupe Ad-diagonalisable sur **K** de $\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{K})$. Par conséquent, $\mathrm{Ad}_\Omega(gHg^{-1})(\mathbf{K})$ est un sous-groupe abélien de matrices diagonalisables de $\mathrm{Ad}_\Omega\big(\mathrm{Fix}(\Omega)\big)(\mathbf{K})$. Son adhérence de Zariski dans $\mathrm{Ad}_\Omega\big(\mathrm{Fix}(\Omega)\big)(\mathbf{K})$ est donc un sous-groupe diagonalisable sur **K**. On peut donc écrire $\overline{\mathrm{Ad}_\Omega(gHg^{-1})}(\mathbf{K})$ comme produit

$$\big(\overline{\mathrm{Ad}_\Omega(gHg^{-1})}\big)(\mathbf{K})^\circ \times F,$$

avec F groupe fini abélien. Par conjugaison des tores maximaux $\mathbf{K}$-déployés ([Bor90], théorème (20.9) p.228 et note bibliographique), il existe g' dans $\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{K})$ tel que $\mathrm{Ad}_\Omega(g')$ conjugue $\left(\overline{\mathrm{Ad}_\Omega(gHg^{-1})}\right)(\mathbf{K})^\circ$ dans $\mathrm{Ad}_\Omega(T)(\mathbf{K})$. En passant aux images réciproques, sachant que le noyau de Ad_Ω est contenu dans $T(\mathbf{K})$ et est le centre de $\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{K})$, on obtient

$$g'gH(\mathbf{K})(g'g)^{-1} \subset T(\mathbf{K}) \times F',$$

pour un sous-groupe F' fini abélien qui commute à $T(\mathbf{K})$. On conclut alors par le même raisonnement que pour la preuve du lemme précédent (10.4.1): nécessairement $g'gH(\mathbf{K})(g'g)^{-1} = T(\mathbf{K})$. □

Ce théorème a l'intérêt de pouvoir établir une bonne correspondance entre le système d'appartements jumelés de $|\mathcal{J}(\mathbf{K})|_{\mathrm{co}}$ et une famille de sous-groupes du groupe de Kac-Moody qui possèdent une définition intrinsèque (contrairement aux appartements définis comme transformés de l'appartement standard $\mathbf{A}$).

10.4.3. Dictionnaire entre sous-groupes de Cartan et appartements

Il s'agit d'un simple corollaire du théorème précédent. On écrit ce résultat en toutes lettres pour souligner un premier lien entre les deux espaces sur lesquels on fait opérer G pour le dévisser, la $\mathbf{K}$-algèbre $\left(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\right)_{\mathbf{K}}$ et l'immeuble jumelé $\mathcal{J}(\mathbf{K})$ (et ses réalisations).

COROLLAIRE. — *On suppose que le corps $\mathbf{K}$ est infini.*

Les appartements jumelés de la réalisation conique du jumelage d'un groupe de Kac-Moody $G(\mathbf{K})$ sont en bijection naturelle avec les sous-groupes de Cartan $\mathbf{K}$-déployés du groupe $G(\mathbf{K})$. Pour attacher un appartement jumelé à un sous-groupe de Cartan $\mathbf{K}$-déployé, on considère le lieu des points fixes sous ce sous-groupe dans $|\mathcal{J}(\mathbf{K})|_{\mathrm{co}}$. Pour attacher un sous-groupe de Cartan $\mathbf{K}$-déployé à un appartement jumelé, on considère le fixateur dans $G(\mathbf{K})$ de cet appartement.

Démonstration. C'est une simple combinaison des faits suivants:

$$\mathrm{Fix}(g\mathbf{A}) = gT(\mathbf{K})g^{-1} \text{ (3.5.4)} \quad \text{et} \quad (|\mathcal{J}(\mathbf{K})|_{\mathrm{co}})^{gT(\mathbf{K})g^{-1}} = g\mathbf{A} \text{ (10.1.3)},$$

et de la description des sous-groupes de Cartan $\mathbf{K}$-déployés comme les conjugués $gT(\mathbf{K})g^{-1}$ pour g parcourant $G(\mathbf{K})$ (10.4.2). □

10.4.4. Autres interprétations immobilières: dictionnaires restreints

Nous disposons donc d'un dictionnaire global entre appartements jumelés de $|\mathcal{J}(\mathbf{K})|_{\mathrm{co}}$ et sous-groupes de Cartan $\mathbf{K}$-déployés (définis intrinséquement). Nous avons par ailleurs étudié dans le cadre plus abstrait et général des données radicielles jumelées, deux familles de sous-groupes particuliers, les sous-groupes paraboliques et les fixateurs de parties équilibrées. Dans le cas Kac-Moody, on peut restreindre le dictionnaire convenablement à ces deux classes de sous-groupes.

PROPOSITION. — *On suppose que le corps* $\mathbf{K}$ *est infini.*

(i) *Soit* F *une facette de* $|\mathcal{J}(\mathbf{K})|_{\mathrm{co}}$. *Alors, les sous-groupes de Cartan* $\mathbf{K}$*-déployés de* $G(\mathbf{K})$ *inclus dans* $P(F)(\mathbf{K})$ *sont en bijection avec les appartements jumelés qui contiennent* F *(par le dictionnaire naturel précédent).*
(ii) *Soit* Ω *une partie équilibrée de* $|\mathcal{J}(\mathbf{K})|_{\mathrm{co}}$. *Alors, les sous-groupes de Cartan* $\mathbf{K}$*-déployés de* $G(\mathbf{K})$ *inclus dans* $\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{K})$ *sont conjugués par* $\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{K})$, *ce sont les images réciproques par* Ad_Ω *des tores maximaux* $\mathbf{K}$*-déployés du groupe algébrique* $\mathrm{Ad}_\Omega\big(\mathrm{Fix}(\Omega)\big)(\mathbf{K})$. *Ils sont en bijection avec les appartements jumelés de* $|\mathcal{J}(\mathbf{K})|_{\mathrm{co}}$ *contenant* Ω.
(iii) $\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{K})$ *opère transitivement sur les appartements qui contiennent* Ω, *et* $U(\Omega)(\mathbf{K})$ *opère simplement transitivement sur les extensions vectorielles de* Ω.

Démonstration. Preuve de (i). Donnons-nous g dans $G(\mathbf{K})$ tel que $gT(\mathbf{K})g^{-1} \subset P(F)(\mathbf{K})$. Alors, en passant aux points fixes, on obtient:

$$g\mathbf{A} = (|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}})^{gT(\mathbf{K})g^{-1}} \supset (|\mathcal{J}(\mathbf{K})|_{\mathrm{co}})^{P(F)(\mathbf{K})} = F.$$

Réciproquement, si F est une facette de l'appartement jumelé $g\mathbf{A}$, alors son fixateur contient celui de $g\mathbf{A}$. Soit: $P(F)(\mathbf{K}) = \mathrm{Fix}(F)(\mathbf{K}) \supset \mathrm{Fix}(g\mathbf{A}) = gT(\mathbf{K})g^{-1}$. Ceci montre que le dictionnaire global entre appartements jumelés et sous-groupes de Cartan $\mathbf{K}$-déployés de $G(\mathbf{K})$ échange les sous-groupes de Cartan $\mathbf{K}$-déployés inclus dans $P(F)(\mathbf{K})$ et les appartements jumelés qui contiennent la facette F.

Preuve de (iii). Soit $\mathbf{A}'$ un appartement jumelé contenant Ω. Il existe g dans $G(\mathbf{K})$ tel que $\mathbf{A}' = g\mathbf{A}$. D'où, en passant au fixateur $gT(\mathbf{K})g^{-1} \subset \mathrm{Fix}(\Omega)$. Par le même raisonnement que pour la conjugaison des sous-groupes de Cartan $\mathbf{K}$-déployés, on voit que $\mathrm{Ad}_\Omega(gT(\mathbf{K})g^{-1})$ est un sous-groupe de Cartan $\mathbf{K}$-déployé – au sens des groupes algébriques – de $\mathrm{Ad}_\Omega\big(\mathrm{Fix}(\Omega)\big)(\mathbf{K})$. Il existe donc un élément $\bar{h} = \mathrm{Ad}_\Omega(h)$ pour h dans $\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{K})$ qui le conjugue sur $\mathrm{Ad}_\Omega(T)(\mathbf{K})$. Par image réciproque par Ad_Ω, on obtient $hgT(\mathbf{K})(hg)^{-1} = T$, soit $gT(\mathbf{K})g^{-1} = h^{-1}T(\mathbf{K})h$. En passant aux points fixes, on obtient $\mathbf{A}' = h'\mathbf{A}$ avec $h' = h^{-1} \in \mathrm{Fix}(\Omega)$. D'où la transitivité de l'action de $\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{K})$ sur les appartements jumelés contenant Ω.
Que l'action de $U(\Omega)(\mathbf{K})$ est simplement transitive sur les extensions vectorielles tracées dans les appartements jumelés qui contiennent Ω provient de ce que, pour un tel appartement jumelé $\mathbf{A}'$, le facteur de Lévi $M(\Omega)(\mathbf{K}) = \mathrm{Fix}\big(\mathrm{vect}_{\mathbf{A}'}(\Omega)\big)(\mathbf{K})$ s'intersecte trivialement avec $U(\Omega)(\mathbf{K})$.

Preuve de (ii). C'est le même argument de $G(\mathbf{K})$-équivariance du dictionnaire qu'en (i), qui permet de déduire (ii) de (iii). □

10.4.5. Enveloppes convexes de parties équilibrées

On isole dans une sous-section ce résultat qui est une conséquence immédiate de ce qui précède.

COROLLAIRE. — *Soient* $\mathbf{K}$ *un corps infini et* Ω *une partie équilibrée de* $|\mathcal{J}(\mathbf{K})|_{\mathrm{co}}$.

(i) *La prise d'enveloppe convexe de* Ω *dans n'importe quel appartement jumelé de* $|\mathcal{J}(\mathbf{K})|_{\mathrm{co}}$ *fournit le même résultat, qu'on notera* $\mathrm{conv}(\Omega)$.
(ii) $U(\Omega)(\mathbf{K})$ *ne dépend que de l'enveloppe convexe de* Ω *et pas de l'appartement jumelé contenant* Ω.

Démonstration. (i) vient de ce que $\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{K})$ est transitif sur les appartements contenant Ω tout en fixant l'enveloppe convexe de cette partie dans tout appartement jumelé. La seconde assertion de (ii) et donc (ii) tout entier en découlent. □

DÉFINITION. — *On écrira indifféremment* $U(\Omega)(\mathbf{K})$ *ou* $U\big(\mathrm{conv}(\Omega)\big)(\mathbf{K})$.
$\mathrm{conv}(\Omega)$ *s'appelle l'*enveloppe convexe *de* Ω, *sans référence à un appartement jumelé.*

11. K-Formes des foncteurs de Tits

Dans tout ce qui suit, nous nous donnons d'une part un corps $\mathbf{K}$, pour lequel on choisit une clôture algébrique $\overline{\mathbf{K}}$. $\mathbf{K}_s$ désigne la fermeture séparable de $\mathbf{K}$ dans cette clôture algébrique. D'autre part, $\mathcal{D}$ désigne une donnée radicielle de Kac-Moody, à partir de laquelle on définit le foncteur $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$. Pour tout corps intermédiaire $\mathbf{E}$ entre $\mathbf{K}$ et $\overline{\mathbf{K}}$, on note $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}/_{\mathbf{E}}$ la restriction de $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$ aux $\mathbf{E}$-algèbres. On note $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{K}}/\mathbf{K}) = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}_s/\mathbf{K})$ le groupe de Galois de l'extension algébrique $\overline{\mathbf{K}}/\mathbf{K}$. Le problème qui nous intéresse s'énonce de la façon suivante.

PROBLÈME. — *Pour l'extension de corps $\overline{\mathbf{K}}/\mathbf{K}$ (avec $\overline{\mathbf{K}}$ algébriquement clos), et une donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D}$, trouver des conditions d'étude raisonnables des $\mathbf{K}$-formes du groupe de Kac-Moody $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\overline{\mathbf{K}})$, c'est-à-dire des foncteurs $\mathbf{K}$-alg $\to$ Gr qui coïncident avec $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$ sur la catégorie des $\overline{\mathbf{K}}$-algèbres (ou plus simplement sur $\overline{\mathbf{K}}$).*

Une restriction très classique consiste à ne considérer que les formes pour lesquelles on dispose d'une bonne théorie galoisienne, de façon à raisonner en termes d'action d'un groupe de Galois. En pratique, on se limitera aux foncteurs définis sur la catégorie $\mathbf{K}$-ext des extensions de corps, et des séries de conditions d'étude supplémentaires apparaîtront au fur et à mesure, en portant justement sur l'action du groupe de Galois. Signalons tout de suite que certaines d'entre elles seront superflues dans des cas favorables comme celui d'une donnée radicielle de Kac-Moody à base libre par exemple.

On sait quelles conditions requérir dans la théorie relative classique des groupes réductifs algébriques. Une condition supplémentaire, propre à la situation Kac-Moody et qui nous fait parler exclusivement de *formes presque déployées* de ces groupes, en assurera par exemple l'isotropie. Ces formes ont été introduites et étudiées dans la série d'articles de G. Rousseau [Rou89], [Rou90] et [Rou94].

11.1. Généralités sur les formes des groupes de Kac-Moody

K-formes fonctorielles et préalgébriques

On va tout d'abord énoncer dans cette section des critères galoisiens de rationnalité, qui vont justifier une partie des approches choisies. Cela concerne tout ce qui relève de structures algébriques. On va aussi formuler le problème pour les foncteurs, ce qui permettra de définir les $\mathbf{K}$-formes préalgébriques.

11.1.1. Groupes et actions de Galois. K-formes d'une $\overline{\mathbf{K}}$-algèbre associative

Rappelons quelques faits à propos du groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{K}}/\mathbf{K}) = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}_s/\mathbf{K})$. Tout d'abord, ce groupe est un groupe topologique pour sa *topologie de Krull* c'est-à-dire provenant de la limite projective des groupes de Galois (finis) correspondant aux sous-extensions galoisiennes finies $\mathbf{E}/\mathbf{K}$, incluses dans $\mathbf{K}_s$. Concrètement, cela signifie qu'une action continue de Γ sur un ensemble discret M est caractérisée par le fait que tout point de M a un fixateur d'indice fini dans Γ.

$$M = \bigcup_{[\Gamma:U]<\infty} M^U.$$

(U désigne un sous-groupe distingué ouvert de Γ). Revenons aux $\mathbf{K}$-formes elles-mêmes, pour le problème le plus simple qu'on puisse imaginer, celui des espaces vectoriels. Ce cas est déjà instructif et exemplaire à bien des égards.

DÉFINITION. — (i) *Une* $\mathbf{K}$-forme *d'un* $\overline{\mathbf{K}}$*-espace vectoriel* V *est un sous-*$\mathbf{K}$*-espace vectoriel* $V_{\mathbf{K}}$ *tel que le morphisme naturel* $V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} \to V$ *est un isomorphisme de* $\overline{\mathbf{K}}$*-espaces vectoriels.*
(ii) *Les points de* $V_{\mathbf{K}}$ *sont appelés les* points rationnels sur $\mathbf{K}$ *de* V *pour la* $\mathbf{K}$*-forme* $V_{\mathbf{K}}$.
(iii) *Le morphisme* $\phi : V \to W$ *de* $\overline{\mathbf{K}}$*-espaces vectoriels possédant les* $\mathbf{K}$*-formes respectives* $V_{\mathbf{K}}$ *et* $W_{\mathbf{K}}$, *est dit* défini sur $\mathbf{K}$ *si* $\phi(V_{\mathbf{K}})$ *est inclus dans* $W_{\mathbf{K}}$.

Le point de vue qu'à terme nous adopterons est celui des actions de Galois. Si V est un $\overline{\mathbf{K}}$-espace vectoriel muni d'une $\mathbf{K}$-forme $V_{\mathbf{K}}$, l'isomorphisme naturel $V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} \cong V$ permet de faire opérer Γ semi-linéairement et continûment sur V, ou sur $V_{\mathbf{K}_s} = V_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}_s$. Tout élément σ de Γ agit par $\sigma(v \otimes k) = v \otimes \sigma(k)$ (pour v dans V); ainsi, $V_{\mathbf{K}}$ s'identifie à l'ensemble $V_{\mathbf{K}_s}^{\Gamma}$ des points Galois-fixes. On peut alors se demander dans quelle mesure une action de Galois (sous-entendue semi-linéaire et continue) permet de travailler avec une $\mathbf{K}$-forme. La réponse est dans les résultats classiques suivants.

PROPOSITION. — (i) *Si un* $\overline{\mathbf{K}}$*-espace vectoriel* V *possède une* $\mathbf{K}_s$*-forme* $V_{\mathbf{K}_s}$ *sur laquelle* Γ *opère semi-linéairement et continûment, alors l'ensemble des points fixes sous-Galois* $V_{\mathbf{K}} := V_{\mathbf{K}_s}^{\Gamma}$ *est une* $\mathbf{K}$*-forme de* V.
(ii) *Si* W *est un sous-*$\overline{\mathbf{K}}$*-espace vectoriel d'un* $\overline{\mathbf{K}}$*-espace vectoriel* V *possédant une* $\mathbf{K}$*-forme* $V_{\mathbf{K}}$, *alors* $W_{\mathbf{K}} := W \cap V_{\mathbf{K}}$ *est une* $\mathbf{K}$*-forme de* W *si et seulement si* $W_{\mathbf{K}_s} := W \cap V_{\mathbf{K}_s}$ *est une* $\mathbf{K}_s$*-forme de* W *et si* $W_{\mathbf{K}_s}$ *est stable sous l'action de* Γ *sur* W.
(iii) *Un morphisme* $\phi : V \to W$ *entre* $\overline{\mathbf{K}}$*-espaces vectoriels possédant respectivement* $V_{\mathbf{K}}$ *et* $W_{\mathbf{K}}$ *pour* $\mathbf{K}$*-formes, est défini sur* $\mathbf{K}$ *si et seulement s'il est* Γ*-équivariant et défini sur* $\mathbf{K}_s$.

Référence. [Bor90], (AG.11.1) et (AG.11.2) p.21-22. □

Finissons par la définition d'une $\mathbf{K}$-forme dans le cas d'une $\overline{\mathbf{K}}$-algèbre associative.

DÉFINITION. — *Soit* A *une* $\overline{\mathbf{K}}$*-algèbre associative. Une* $\mathbf{K}$-forme *de* A *est une* $\mathbf{K}$*-algèbre associative* $A_{\mathbf{K}}$ *telle que le morphisme naturel d'extension des scalaires* $A_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} \to A$ *est un isomorphisme de* $\overline{\mathbf{K}}$*-algèbres.*

On peut requérir des conditions supplémentaires (respect d'une filtration,...) qui entraîne dans le cas de l'existence d'une forme des propriétés supplémentaires pour l'action de Galois obtenue.

11.1.2. K-formes de $\overline{\mathbf{K}}$-foncteurs

Le cas des foncteurs est une variante compatible avec ce qui a déjà été vu.

DÉFINITION. — (i) *Étant donné un anneau R, un R-foncteur F est un foncteur de la catégorie des R-algèbres vers celle des ensembles, $F : R\text{-alg} \to \text{Ens}$. Un R-foncteur en groupes est un R-foncteur à valeurs dans la catégorie des groupes* Gr.
(ii) *Étant donnée une extension de corps $\mathbf{K}'/\mathbf{K}$, une* $\mathbf{K}$-forme *d'un $\mathbf{K}'$-foncteur F' est un $\mathbf{K}$-foncteur F telle qu'il existe un isomorphisme fonctoriel entre la restriction de F' à $\mathbf{K}'$-alg et F, soit $F/_{\mathbf{K}'} \cong F'$. En pratique, on identifiera ces foncteurs.*

Il existe une méthode abstraite pour obtenir d'une $\mathbf{K}$-forme d'un $\mathbf{K}'$-foncteur une «action» sur le foncteur de départ. Partons de la situation du second point de la définition, en conservant les notations F', F, $\mathbf{K}'$ et $\mathbf{K}$. Ce qu'on entend par action sur F' consiste en une action de $\Gamma' := \text{Gal}(\mathbf{K}'/\mathbf{K})$ sur les valeurs du foncteur F' sur les $\mathbf{K}'$-algèbres $R_{\mathbf{K}'}$ obtenues par extension des scalaires de $\mathbf{K}$ à $\mathbf{K}'$ à partir d'une $\mathbf{K}$-algèbre R ($R_{\mathbf{K}'} = \mathbf{K}' \otimes_{\mathbf{K}} R$), ces actions étant fonctoriellement liées les unes aux autres. On procède de la façon suivante.

1. Actions

Soit R une $\mathbf{K}$-algèbre. Pour tout σ de Γ', $\sigma \otimes 1_R$ est un isomorphisme de $\mathbf{K}$-algèbres:

$$\sigma \otimes 1_R : R_{\mathbf{K}'} \quad \tilde{\to} \quad R_{\mathbf{K}'}.$$

F peut donc s'évaluer dessus, ce qui permet d'obtenir le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} F(R_{\mathbf{K}'}) & \xrightarrow[F(\sigma\otimes 1_R)]{\sim} & F(R_{\mathbf{K}'}) \\ \| & & \| \\ F'(R_{\mathbf{K}'}) & \tilde{\to} & F'(R_{\mathbf{K}'}) \end{array}$$

On note σ la seconde flèche du diagramme (celle qui implique des valeurs de F'). On obtient ainsi une collection d'automorphismes de $F'(R_{\mathbf{K}'})$ indexée par Γ'. Par fonctorialité, on obtient bien une action de Γ' sur $F'(R_{\mathbf{K}'})$ (par automorphismes de groupes si F' est un foncteur en groupes).

2. Naturalité

Si $\phi : R \to R'$ est un morphisme de $\mathbf{K}$-algèbres, la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} R_{\mathbf{K}'} & \xrightarrow{1_{\mathbf{K}'}\otimes\phi} & R_{\mathbf{K}'} \\ {\scriptstyle \sigma\otimes 1_R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma\otimes 1_{R'}} \\ R'_{\mathbf{K}'} & \xrightarrow{1_{\mathbf{K}'}\otimes\phi} & R'_{\mathbf{K}'} \end{array}$$

pour chaque élément σ du groupe de Galois Γ', relie naturellement l'action de Γ' sur $F'(R_{\mathbf{K}'})$ à celle sur $F'(R'_{\mathbf{K}'})$. Il suffit pour cela d'évaluer F sur ce diagramme pour obtenir:

$$\begin{array}{ccc} F'(R_{\mathbf{K}'}) = F(R_{\mathbf{K}'}) & \xrightarrow{F(1_{\mathbf{K}'}\otimes\phi)} & F'(R_{\mathbf{K}'}) = F(R_{\mathbf{K}'}) \\ {\scriptstyle F(\sigma\otimes 1_R)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(\sigma\otimes 1_R)} \\ F'(R'_{\mathbf{K}'}) = F(R'_{\mathbf{K}'}) & \xrightarrow{F(1_{\mathbf{K}'}\otimes\phi)} & F'(R'_{\mathbf{K}'}) = F(R'_{\mathbf{K}'}) \end{array}$$

Finissons en donnant une idée du lien entre $\mathbf{K}$-formes de $\overline{\mathbf{K}}$-algèbres (commutatives) et $\mathbf{K}$-formes de $\overline{\mathbf{K}}$-foncteurs. On peut le voir en considérant le cas des schémas affines. En effet, étant donnée une $\overline{\mathbf{K}}$-algèbre associative et commutative A de $\mathbf{K}$-forme $A_{\mathbf{K}}$, le $\mathbf{K}$-foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}-\mathrm{alg}}(A_{\mathbf{K}}, -)$ qui est le foncteur des points du schéma affine Spec $A_{\mathbf{K}}$, est une $\mathbf{K}$-forme du $\overline{\mathbf{K}}$-foncteur $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbf{K}}-\mathrm{alg}}(A, -)$ qui est le foncteur des points de Spec A = Spec $A_{\mathbf{K}} \times_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}$. La théorie des formes et de la descente dans ce dernier cas est bien connue (au moins pour les schémas algébriques). Une partie des conditions sur les formes des groupes de Kac-Moody relève d'une généralisation de cette situation.

11.1.3. Formes des groupes de Kac-Moody: condition de préalgébricité

Venons-en précisément au sujet qui nous intéresse, les groupes de Kac-Moody. Nous conservons les corps $\mathbf{K}$, $\overline{\mathbf{K}}$ et $\mathbf{K}_s$. On notera G le groupe obtenu par évaluation du foncteur de Tits $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$ sur $\overline{\mathbf{K}}$. Rappelons qu'en construisant la représentation adjointe de $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$, nous avons bien pris soin de vérifier sa naturalité. C'est cette propriété que nous allons utiliser de manière essentielle. Nous pouvons reformuler provisoirement le problème des formes: il s'agit de déterminer une classe raisonnable de $\mathbf{K}$-formes du foncteur $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}/_{\overline{\mathbf{K}}} : \overline{\mathbf{K}}\text{-alg} \to \mathrm{Gr}$ (foncteur de Tits restreint aux $\overline{\mathbf{K}}$-algèbres), en faisant la part de ce qui relève de la généralisation des conditions de géométrie algébrique et des conditions propres aux groupes de Kac-Moody. Dans cette sous-section, nous nous intéressons à la façon de généraliser les conditions du premier type.

DÉFINITION. — (i) *Une* $\mathbf{K}$-forme fonctorielle *du groupe de Kac-Moody* G *est une* $\mathbf{K}$-*forme du foncteur* $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}/_{\overline{\mathbf{K}}}$.
(ii) *Une* $\mathbf{K}$-forme préalgébrique *du groupe de Kac-Moody* G *est un couple* $(\mathcal{G}, \mathcal{U}_{\mathbf{K}})$ *où* $\mathcal{G}$ *est une* $\mathbf{K}$-*forme fonctorielle de* G *et* $\mathcal{U}_{\mathbf{K}}$ *est une* $\mathbf{K}$-*forme de l'algèbre associative filtrée* $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\overline{\mathbf{K}}}$, *qui vérifie les conditions suivantes.*

(PRÉALG1) *La représentation adjointe est Galois-équivariante.*
(PRÉALG2) *La valeur de* $\mathcal{G}$ *sur toute inclusion de corps donne lieu à un plongement de groupes.*

REMARQUES. — 1. Comme en (9.4) et (9.5), on sous-entend dans le terme *filtré* que la $\mathbf{K}$-algèbre $\mathcal{U}_{\mathbf{K}}$ s'écrit $\mathcal{U}_{\mathbf{K}} = \mathbf{K} \oplus \mathcal{U}^+_{\mathbf{K}}$, où $\mathcal{U}^+_{\mathbf{K}}$ est une $\mathbf{K}$-forme de l'idéal $\mathcal{U}^+_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathbf{Z}} \overline{\mathbf{K}}$ de $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\overline{\mathbf{K}}}$.

2. La généralité du problème qu'on se pose n'est pas vraiment altérée si on se limite à la catégorie $\mathbf{K}$-ext des extensions de corps de $\mathbf{K}$ contenues dans $\overline{\mathbf{K}}$ et même dans $\mathbf{K}_s$. En effet, notre objectif est essentiellement le théorème de structure des points rationnels d'une $\mathbf{K}$-forme de groupe de Kac-Moody (12.4.3); et pour l'obtenir, on raisonne seulement sur les valeurs du

foncteur en groupes sur $\mathbf{K}$-ext. Ainsi, pour la suite de ce chapitre, la catégorie $\mathbf{K}$-alg peut être remplacée par $\mathbf{K}$-ext. Cette possibilité sera en fait une vraie contrainte quand il s'agira de construire des $\mathbf{K}$-formes de groupes de Kac-Moody (chapitre 13). En effet, c'est le point de vue des actions galoisiennes qui permettra de mettre en évidence quelques exemples.

EXEMPLE.— Le couple $(\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}/_{\mathbf{K}}, (\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{K}})$ est une $\mathbf{K}$-forme préalgébrique de G. On parlera de $\mathbf{K}$-*forme de Tits* ou de $\mathbf{K}$-*forme déployée*.

La condition de Galois-équivariance s'exprime ainsi. Pour tout σ dans $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}_s/\mathbf{K})$, et pour toute $\mathbf{K}$-algèbre R, on requiert la commutativité du diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(R_{\overline{\mathbf{K}}}) & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})(R_{\overline{\mathbf{K}}}) \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(R_{\overline{\mathbf{K}}}) & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})(R_{\overline{\mathbf{K}}}), \end{array}$$

avec $R_{\overline{\mathbf{K}}} := \overline{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{Z}} R$.

Il reste à expliciter un peu la seconde flèche σ du diagramme. Il s'agit d'automorphismes qui proviennent eux-aussi d'une $\mathbf{K}$-forme de foncteur. En effet, parler d'une $\mathbf{K}$-forme pour l'algèbre filtrée $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\overline{\mathbf{K}}}$, signifie qu'il existe une sous-$\mathbf{K}$-algèbre associative $\mathcal{U}_{\mathbf{K}}$ (filtrée pour la filtration induite) et telle que le morphisme d'extension des scalaires $\mathcal{U}_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}} \to (\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\overline{\mathbf{K}}}$ est un isomorphisme de $\overline{\mathbf{K}}$-algèbres filtrées. Montrons rapidement en quoi l'existence d'une telle algèbre assure l'existence d'une $\mathbf{K}$-forme pour le foncteur $\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})/_{\overline{\mathbf{K}}}$.

Partons de la $\mathbf{K}$-forme $\mathcal{U}_{\mathbf{K}}$ de $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\overline{\mathbf{K}}}$. On peut considérer le foncteur $\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathbf{K}})$ qui attache à chaque $\mathbf{K}$-algèbre R le groupe des automorphismes de $\mathbf{K}$-algèbres de $\mathcal{U}_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} R$ qui respectent la filtration héritée de celle de $\mathcal{U}_{\mathbf{K}}$. Pour toute $\overline{\mathbf{K}}$-algèbre $\overline{R}$, on a:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{R} &\cong \mathcal{U}_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} (\overline{\mathbf{K}} \otimes_{\overline{\mathbf{K}}} \overline{R}) \cong (\mathcal{U}_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}) \otimes_{\overline{\mathbf{K}}} \overline{R} \\ &\cong (\mathcal{U}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathbf{Z}} \overline{\mathbf{K}}) \otimes_{\overline{\mathbf{K}}} \overline{R} \cong \mathcal{U}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathbf{Z}} (\overline{\mathbf{K}} \otimes_{\overline{\mathbf{K}}} \overline{R}) \cong \mathcal{U}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathbf{Z}} \overline{R}. \end{aligned}$$

En passant aux automorphismes, on voit que pour toute $\overline{\mathbf{K}}$-algèbre $\overline{R}$, on a:

$$\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathbf{K}})(\overline{R}) = \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{R}) \cong \mathrm{Aut}_{filt}\Big((\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\overline{\mathbf{K}}} \otimes_{\overline{\mathbf{K}}} \overline{R}\Big) = \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})(\overline{R}),$$

ce qui fournit un isomorphisme fonctoriel entre $\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})/_{\overline{\mathbf{K}}}$ et $\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathbf{K}})/_{\overline{\mathbf{K}}}$. Par conséquent, on obtient bien une action de Galois sur $\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})/_{\overline{\mathbf{K}}}$, via celle sur $\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathbf{K}})/_{\overline{\mathbf{K}}}$ (au sens où Γ agit sur les valeurs du foncteur sur les algèbres de la forme $R \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}$ pour R une $\mathbf{K}$-algèbre). Plus concrètement, cette action se décrit de la façon suivante.

Si R est une $\mathbf{K}$-algèbre, si σ est dans Γ et si φ est un automorphisme filtré de $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\overline{\mathbf{K}}}$, alors σ opère sur $R_{\overline{\mathbf{K}}} := R \otimes_{\overline{\mathbf{K}}} \overline{\mathbf{K}}$. On obtient donc un automorphisme filtré semi-linéaire:

$$\sigma : \mathcal{U}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathbf{Z}} R_{\overline{\mathbf{K}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathbf{Z}} R_{\overline{\mathbf{K}}}.$$

Ainsi, les applications

$$\sigma : \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})(R_{\overline{\mathbf{K}}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})(R_{\overline{\mathbf{K}}})$$

$$\varphi \mapsto \sigma\varphi\sigma^{-1}$$

définissent une action de Galois sur le foncteur $\mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})/_{\overline{\mathbf{K}}}$.

On peut aussi définir les points sur une extension de $\mathbf{K}$ d'une telle $\mathbf{K}$-forme de groupe de Kac-Moody.

DÉFINITION. — *Soit* $\mathbf{E}$ *une sous-extension de* $\overline{\mathbf{K}}/\mathbf{K}$. *Soient* $(\mathcal{G},\mathcal{U}_{\mathbf{K}})$ *une* $\mathbf{K}$*-forme préalgébrique du groupe de Kac-Moody* $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\overline{\mathbf{K}})$. *Les éléments de* $\mathcal{G}(\mathbf{E})$ *sont appelés les* points rationnels sur $\mathbf{E}$. *En particulier, quand* $\mathbf{E}$ *est la clôture séparable* $\mathbf{K}_s$ *de* $\mathbf{K}$, *on parle de* points séparables; *quand* $\mathbf{E}$ *vaut* $\mathbf{K}$, *on parle simplement de* points rationnels *de* $\mathcal{G}$.

On peut citer un petit résultat qui exploite le fait qu'une $\mathbf{K}$-forme reproduit les inclusions de corps.

LEMME. — *Soit* $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ *une extension de corps avec* $\mathbf{E} \subset \overline{\mathbf{K}}$. *Alors, pour tout* $\mathbf{K}$*-isomorphisme* σ *de* $\overline{\mathbf{K}}$, *on a* $\sigma.\mathcal{G}(\mathbf{E}) = \mathcal{G}(\sigma\mathbf{E})$. *En particulier, si* $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ *est une extension normale,* $\mathcal{G}(\mathbf{E})$ *est un sous-groupe stable dans* $\mathcal{G}(\overline{\mathbf{K}})$ *sous l'action de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{K}}/\mathbf{K})$.

Justification. Il suffit d'appliquer $\mathcal{G}$ au diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbf{K}} & \xrightarrow{\sigma} & \overline{\mathbf{K}} \\ \cup & & \cup \\ \mathbf{E} & \xrightarrow{\sigma} & \sigma\mathbf{E}, \end{array}$$

et de se rappeler que $\mathcal{G}(\mathbf{E})$ et $\mathcal{G}(\sigma\mathbf{E})$ sont vus comme sous-groupes de $G = \mathcal{G}(\overline{\mathbf{K}})$ en vertu de (PRÉALG2), par évaluation de $\mathcal{G}$ sur les inclusions des corps correspondants dans $\overline{\mathbf{K}}$. □

11.1.4. Isomorphismes de formes

Le formalisme fonctoriel pour les $\mathbf{K}$-formes rend les définitions techniques mais est nécessaire pour la définition des extension de déploiement par exemple. On va justement introduire ici la notion d'isomorphisme de $\mathbf{K}$-formes préalgébriques.

DÉFINITION. — *Soient* $(\mathcal{G},\mathcal{U}_{\mathbf{K}})$ *et* $(\mathcal{G}',\mathcal{U}'_{\mathbf{K}})$ *deux* $\mathbf{K}$*-formes préalgébriques de* $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{K})$. *Soit* $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ *une extension de corps. On dit que* $(\mathcal{G},\mathcal{U}_{\mathbf{K}})$ *et* $(\mathcal{G}',\mathcal{U}'_{\mathbf{K}})$ *sont* isomorphes sur $\mathbf{E}$ (ou $\mathbf{E}$-isomorphes) *si les conditions suivantes sont vérifiées.*

(i) *Il existe un isomorphisme de* $\mathbf{E}$*-algèbres filtrées*

$$\varphi : \mathcal{U}_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}'_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{E}.$$

Il induit une transformation naturelle de $\mathbf{E}$*-foncteurs*

$$\varphi_{\mathrm{alg}} : \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{E}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}'_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{E}).$$

(ii) *Il existe un isomorphisme de* $\mathbf{E}$*-foncteurs en groupes*

$$\varphi_{\mathrm{gr}} : \mathcal{G}/_{\mathbf{E}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}'/_{\mathbf{E}}.$$

(iii) *On a commutativité du diagramme suivant de transformations naturelles.*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}/_{\mathbf{E}} & \xrightarrow{\varphi_{\mathrm{gr}}} & \mathcal{G}'/_{\mathbf{E}} \\ {\scriptstyle \mathrm{Ad}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ad}} \\ \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{E}) & \xrightarrow{\varphi_{\mathrm{alg}}} & \mathrm{Aut}_{filt}(\mathcal{U}'_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{E}) \end{array}$$

11.1.5. Exemple des K-formes déployées. Extensions de déploiement

La considération d'extensions intermédiaires permet aussi de parler de *déploiement*. Le fait que les foncteurs de Tits jouent le rôle des foncteurs des points des schémas (déployés) de Chevalley-Demazure en théorie de Kac-Moody justifie les définitions de *déploiement* adoptées.

DÉFINITION. — *Soit* $\mathbf{E}$ *une sous-extension de* $\overline{\mathbf{K}}/\mathbf{K}$. *Soient* $(\mathcal{G},\mathcal{U}_{\mathbf{K}})$ *une* $\mathbf{K}$*-forme préalgébrique du groupe de Kac-Moody* $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\overline{\mathbf{K}})$. *On dit que* $(\mathcal{G},\mathcal{U}_{\mathbf{K}})$ *est* déployée sur $\mathbf{E}$ *si* $(\mathcal{G},\mathcal{U}_{\mathbf{K}})$ *est* $\mathbf{E}$*-isomorphe à* $(\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}/_{\mathbf{E}}, (\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{E}})$. *On dit alors que* $\mathbf{E}$ *est une* extension de déploiement *de* $(\mathcal{G},\mathcal{U}_{\mathbf{K}})$.

Considérer une $\mathbf{K}$-forme déployée sur une extension intermédiaire entre $\mathbf{K}$ et la clôture algébrique $\overline{\mathbf{K}}$ implique la nécessité de spécifier systématiquement le corps sur lequel on évalue le foncteur de la $\mathbf{K}$-forme. On a recours pour cela aux conventions de (8.4.4), et on doit en introduire d'autres.

CONVENTION. — *Si* $(\mathcal{G},\mathcal{U}_{\mathbf{K}})$ *est une* $\mathbf{K}$*-forme de* $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\overline{\mathbf{K}})$ *d'extension de déploiement* $\mathbf{E}$, *l'identification fonctorielle entre* $\mathcal{G}/_{\overline{\mathbf{K}}}$ *et* $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}/_{\overline{\mathbf{K}}}$ *sera systématiquement l'identification induite par* $\mathcal{G}/_{\mathbf{E}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}/_{\mathbf{E}}$. *De même, l'identification entre* $\mathcal{U}_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \overline{\mathbf{K}}$ *et* $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\overline{\mathbf{K}}}$ *sera celle obtenue par extension des scalaires de* $\mathbf{E}$ *à* $\overline{\mathbf{K}}$ *à partir de l'isomorphisme* $\mathcal{U}_{\mathbf{K}} \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_{\mathcal{D}} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{E}$.

Cette convention a des conséquences sur les différentes actions galoisiennes que l'on va considérer. Puisqu'on identifie $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$ et $\mathcal{G}$ dès les $\mathbf{E}$-algèbres, l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{K}}/\mathbf{E})$ sur G est obtenue par l'évaluation de $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$ sur des flèches

$$R_{\overline{\mathbf{K}}} \to R_{\overline{\mathbf{K}}}$$
$$k \otimes v \mapsto \sigma(k) \otimes v,$$

pour R une $\mathbf{E}$-algèbre et σ un élément de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{K}}/\mathbf{E})$. Cette action se traduit simplement par l'action de ce groupe de Galois vu comme groupe d'automorphismes de corps et éventuellement d'algèbres, sur les paramètres des relations qui définissent $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$ (8.3.3). Par conséquent, tous les sous-groupes remarquables de G sont stables sous $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{K}}/\mathbf{E})$, et $G(\mathbf{E})$ est même fixe sous l'action de ce groupe. L'action intéressante de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{K}}/\mathbf{K})$ sur $G(\mathbf{E})$ dans cette situation est donc celle du quotient $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{K}}/\mathbf{K})/\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{K}}/\mathbf{E})$. Si l'extension $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ est galoisienne, c'est celle du groupe de Galois $\Gamma_{\mathbf{E}/\mathbf{K}} := \mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{K})$. On peut faire exactement les mêmes remarques *mutatis mutandis* concernant les formes de $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\overline{\mathbf{K}}}$.

11.2. Propriétés des K-formes préalgébriques. K-formes algébriqu

La situation pour toute cette section est la suivante, elle implique notamment l'usage des conventions (8.4.4) et (11.1.5).

SITUATION. — *On fixe un corps* $\mathbf{K}$, $\overline{\mathbf{K}}$ *une clôture algébrique de* $\mathbf{K}$, *et* $\mathcal{D}$ *une donnée radicielle de Kac-Moody.* $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ *est une extension avec* $\mathbf{E} \subset \overline{\mathbf{K}}$. *On se donne* $(\mathcal{G}, \mathcal{U}_{\mathbf{K}})$ *une* $\mathbf{K}$*-forme préalgébrique du groupe de Kac-Moody* $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\overline{\mathbf{K}})$, *dont* $\mathbf{E}$ *est une extension de déploiement. On suppose en outre que le corps* $\mathbf{E}$ *est infini et que l'extension* $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ *est normale.*

Justification. La raison pour laquelle on considère une extension intermédiaire est que l'on veut imiter la théorie rationnelle des $\mathbf{K}$-groupes réductifs isotropes ([Bor-Tit65] et [Bor90], chapitres 20 et 21). Dans cette situation, les $\mathbf{K}$-groupes réductifs sont déployés sur une extension finie séparable de $\mathbf{K}$. On va chercher à se placer dans ce contexte par hypothèse, et il s'agit de le formaliser. Enfin, ce qui explique que $\mathbf{E}$ est supposé infini est que l'on veut utiliser les résultats de conjugaison de (10.4); ce qui explique que $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ est supposée normale est que l'on veut que $G(\mathbf{E})$ soit stable sous $\Gamma := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{K}}/\mathbf{K})$ (11.1.3). En pratique au chapitre suivant, l'hypothèse de descente galoisienne (DCS) sera celle du déploiement sur la clôture séparable (12.1.1). Cette hypothèse rentre bien entendu dans ce cadre.

Revenons maintenant au contenu de cette section. On va voir que la condition de préalgébricité permet déjà de prouver un certain nombre de propriétés relatives notamment aux images de sous-groupes remarquables comme les sous-groupes de Cartan, les sous-groupes radiciels relatifs à un tel sous-groupe. Pourtant, cette hypothèse est insuffisante pour développer quelques points importants de l'étude d'une action galoisienne sur un groupe de Kac-Moody. En particulier, on veut être assuré qu'un sous-groupe de Borel est envoyé sur un sous-groupe de Borel par un automorphisme de Galois. On va donc requérir un lien assez étroit entre les automorphismes de Galois du groupe $G(\mathbf{E})$ et ceux de la $\mathbf{E}$-algèbre $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{E}}$. Pour cela, il faut ajouter une hypothèse qui s'énonce en termes de graduation abstraite de $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{E}}$, mais qui s'appuie sur

des analogies avec des considérations algébriques: cette algèbre est moralement vue comme l'algèbre des distributions supportées à l'origine de $G(\mathbf{E})$.

Répétons enfin une remarque de (11.1.3). *On peut se contenter de travailler sur des foncteurs-groupes définis sur la catégorie* $\mathbf{K}$-ext *des extensions de corps de* $\mathbf{K}$ *dans* $\overline{\mathbf{K}}$, *plutôt que sur celle des* $\mathbf{K}$-*algèbres.*

11.2.1. Q-graduation abstraite et représentation adjointe

Nous allons étudier la relation entre l'action adjointe de $G(\mathbf{E})$ et la Q-graduation de $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{E}}$, ce qui sera l'occasion de discuter la condition «$\mathcal{D}$ libre» . Pour l'instant $\mathcal{D}$ est une donnée radicielle de Kac-Moody quelconque. Par définition de l'action adjointe de $T(\mathbf{E})$ sur $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{E}}$, $\mathrm{Ad}T(\mathbf{E})$ est un groupe d'automorphismes diagonaux de $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{E}}$ (et de $(\mathcal{L}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{E}}$) dans une base provenant de la $\mathbf{Z}$-forme $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$, et son action préserve la Q-graduation. Pour ce qui est des sous-groupes radiciels, on a l'inclusion suivante.

$$\forall a \in \Delta^{re} \quad \forall b \in \Delta \quad \mathrm{Ad}U_a(\mathbf{E})\big((\mathcal{U}_b)_{\mathbf{E}}\big) \subset \oplus_{n\geq 0}(\mathcal{U}_{b+na})_{\mathbf{E}}.$$

On a même inclusion dans une somme finie par locale nilpotence des dérivations $\mathrm{ad}e_a$ ($a \in \Delta^{re}$). Par ailleurs, on peut décomposer $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{E}}$ et $(\mathcal{L}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{E}}$ en espaces-poids sous $T(\mathbf{E})$. Pour tout Q-degré a, $\mathrm{Ad}T(\mathbf{E})$ opère sur $(\mathcal{U}_a)_{\mathbf{E}}$ par le caractère algébrique associé $c_a \in \Lambda$, si bien que les caractères qui interviennent sous-forme d'un espace poids non nul dans $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{E}}$ sont les éléments de $Q(\mathcal{D})$. Pour tout caractère c de $Q(\mathcal{D})$, on note $\mathcal{U}(c)_{\mathbf{E}}$ l'espace-poids. On a:

$$(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{E}} = \bigoplus_{c\in Q(\mathcal{D})} \mathcal{U}(c)_{\mathbf{E}} \quad \text{et} \quad (\mathcal{L}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{E}} = \bigoplus_{c\in Q(\mathcal{D})} \mathcal{L}(c)_{\mathbf{E}},$$

avec $\mathcal{L}(c)_{\mathbf{E}} := \mathcal{U}(c)_{\mathbf{E}} \cap (\mathcal{L}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{E}}$. Si on veut pouvoir distinguer les termes de la Q-graduation de $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{E}}$ en fonction de l'action de $T(\mathbf{E})$, on est confronté au fait que $Q(\mathcal{D})$ est un quotient de Q. On sera pour ce faire amené à faire alors l'hypothèse «$\mathcal{D}$ libre» (*i.e.*, c injective).

Finissons en combinant l'étude de l'action adjointe et la caractérisation des deux types de racines de $(\mathcal{L}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{E}}$. Nous utiliserons pour cela la notion de support (7.4.5). On a alors:

LEMME. — *Soient a une racine de Δ^{re} et b une racine de Δ. On suppose que le support de $\mathrm{Ad}U_a(\mathbf{E})\big(\mathbf{E}e_b\big)$ contient 0. Alors, nécessairement les deux racines sont réelles et $a = -b$.*

Démonstration. On a:

$$\mathrm{Ad}U_a(\mathbf{E})\big(\mathbf{E}e_b\big) \subset \bigoplus_{n\geq 0} \mathbf{E}e_{b+na}.$$

Par conséquent, si 0 est dans le support de $\mathrm{Ad}U_a(\mathbf{E})\big(\mathbf{E}e_b\big)$, il existe n dans $\mathbf{N}$ tel que $b+na = 0$. Ceci prouve déjà que b est réelle: dans le cas contraire, on aurait $a = (-1/n)b \in \Delta^{im}$, d'après le premier point de la proposition (7.4.2). Enfin, les seuls multiples possibles de b sont 0 et $\pm b$ par le second point de la même proposition. On a donc nécessairement $n = -1$. □

Dans les deux sections qui suivent, on va étudier les images de sous-groupes «algébriques» particuli de G, qui ont en commun la propriété d'être caractérisable au moyen de la représentation adjointe.

11.2.2. Image d'un sous-groupe de Cartan. Automorphismes rectifiés

La caractérisation intrinsèque des sous-groupes de Cartan $\mathbf{E}$-déployés a déjà été vue (10.4). La propriété de stabilité suivante est donc quasiment immédiate:

PROPOSITION. — *Soit $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\overline{\mathbf{K}})$ un groupe de Kac-Moody, possédant une $\mathbf{K}$-forme préalgébrique, déployée sur une extension $\mathbf{E}/\mathbf{K}$, pour $\mathbf{E}$ un corps infini et $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ normale. Alors, un sous-groupe de Cartan $\mathbf{E}$-déployé $T(\mathbf{E})$ de $G(\mathbf{E})$ est envoyé sur un sous-groupe de Cartan $\mathbf{E}$-déployé de $G(\mathbf{E})$ par tout élément σ du groupe de Galois Γ. En particulier, pour tout élément σ de Γ, il existe un élément g de $G(\mathbf{E})$ (défini modulo $N(\mathbf{E})$) tel que $\left(\mathrm{int}g^{-1} \circ \sigma\right)$ stabilise $T(\mathbf{E})$ dans $G(\mathbf{E})$.*

Démonstration. D'après la commutativité du diagramme:

$$\begin{array}{ccc} G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{E}) & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & \mathrm{Aut}_{filt}\left(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\right)_{\mathbf{E}} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{E}) & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & \mathrm{Aut}_{filt}\left(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\right)_{\mathbf{E}}, \end{array}$$

il est clair que $\sigma(T(\mathbf{E}))$ opère diagonalement sur $\left(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\right)_{\mathbf{E}}$ dans une base image par σ de la base de diagonalisation issue de la construction de la $\mathbf{Z}$-forme $\mathcal{U}_{\mathcal{D}}$ (en choisissant une base quelconque de $\Lambda^\vee$). $\sigma(T(\mathbf{E}))$ est donc un sous-groupe de Cartan $\mathbf{E}$-déployé, et est égal à $gT(\mathbf{E})g^{-1}$pour un g convenable de $G(\mathbf{E})$, d'après le théorème (10.4.2), applicable parce que $\mathbf{E}$ est infini. □

On en tire quelques définitions techniques.

LEMME/DÉFINITION. — *Dans les mêmes conditions que la proposition précédente et avec les mêmes notations, on parlera de* rectification *de l'automorphisme σ par l'élément $g \in G(\mathbf{E})$. On notera $\bar{\sigma}$ l'automorphisme* $\mathrm{int}g^{-1} \circ \sigma$ *de $G(\mathbf{E})$, qu'on appellera* automorphisme rectifié. *On notera également $\bar{\sigma}$ l'automorphisme composé* $(\mathrm{Ad}g^{-1} \circ \sigma)$ *de la $\mathbf{E}$-algèbre $\left(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\right)_{\mathbf{E}}$. Les actions de $\bar{\sigma}$ sur $G(\mathbf{E})$ et $\left(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\right)_{\mathbf{E}}$ sont reliées par:*

$$\forall \sigma \in \Gamma \quad \forall g, h \in G(\mathbf{E}), \text{ avec } g \text{ rectifiant } \sigma \quad \forall v \in \left(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\right)_{\mathbf{E}} \quad \bar{\sigma}\left(\mathrm{Ad}h.v\right) = \mathrm{Ad}(\bar{\sigma}h).\bar{\sigma}v.$$

Justification. C'est un simple calcul qui utilise la commutativité du diagramme ci-dessus. Avec les notations de l'énoncé, on a:

$$\bar{\sigma}\big(\mathrm{Ad}h.v\big) = \big(\mathrm{Ad}g^{-1} \circ \sigma\big)\big(\mathrm{Ad}h.v\big) = \mathrm{Ad}g^{-1}\big(\sigma(\mathrm{Ad}h.v)\big),$$

ce qui vaut par commutativité du diagramme:

$$\mathrm{Ad}g^{-1}\big(\mathrm{Ad}(\sigma h).\sigma v\big) = \big(\mathrm{Ad}g^{-1} \circ \mathrm{Ad}\sigma h \circ \mathrm{Ad}g\big).\big((\mathrm{Ad}g^{-1} \circ \sigma).v\big)$$

$$= \mathrm{Ad}\big(\mathrm{int}g^{-1}(\sigma h)\big).(\mathrm{Ad}g^{-1} \circ \sigma)(v) = \mathrm{Ad}(\bar{\sigma}h).\bar{\sigma}v.$$

□

REMARQUE. — On rectifie les éléments du groupe de Galois individuellement. L'élément g qui rectifie $\sigma \in \Gamma$ est défini modulo $N(\mathbf{E})$ (8.4.1). Dans le cas d'une $\mathbf{K}$-forme presque déployée, on pourra requérir la stabilité d'un sous-groupe de Borel donné contenant $T(\mathbf{E})$. On fera ainsi un meilleur choix de g, alors défini modulo $T(\mathbf{E})$, ce qui permettra de définir des actions de Galois supplémentaires. Néanmoins, un premier avantage à manipuler des automorphismes rectifiés individuellement comme ci-dessus, est que $\bar{\sigma}$ stabilise la décomposition de $\big(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\big)_{\mathbf{E}}$ en espaces poids. Nous préciserons cette assertion en (11.2.4).

En outre, la rectification des automorphisme de Galois permet aussi de définir des automorphismes du groupe de Weyl W.

LEMME/DÉFINITION. — *Dans les mêmes conditions que le lemme précédent, un automorphisme rectifié $\bar{\sigma}$ induit un automorphisme de W, qu'on notera encore $\bar{\sigma}$. Les automorphismes obtenus à partir de deux rectifications différentes se déduisent l'un de l'autre par un automorphisme intérieur de W.*

Justification. Puisque $\mathbf{E}$ est infini, il est assez gros pour $\mathcal{D}$, ce qui donne déjà $N_{G(\mathbf{E})}(T(\mathbf{E})) = N(\mathbf{E})$ (8.4.1). Ceci implique à la fois que si $\bar{\sigma}$ stabilise $T(\mathbf{E})$, il stabilise son normalisateur $N(\mathbf{E})$ et opère sur le sous-quotient correspondant W, et que deux rectifications de σ stabilisant $N(\mathbf{E})$ se déduisent l'une de l'autre par un automorphisme intérieur int$n$, avec n dans $N(\mathbf{E})$. □

On peut traiter par le même type de raisonnement le cas des groupes radiciels.

11.2.3. Image des sous-groupes radiciels

La première étape pour prouver un résultat de stabilité des sous-groupes radiciels (par rapport à $T(\mathbf{E})$) consiste à mettre en évidence une caractérisation de ceux-ci. Comme pour les sous-groupes de Cartan, la preuve de la caractérisation fait usage dans un premier temps de courbure négative dans la réalisation métrique de l'immeuble, puis de raisonnements en termes de groupes algébriques. On raisonne d'abord sur $\overline{\mathbf{K}}$.

LEMME. — *On suppose que la donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D}$ est à base libre. Soit U un sous-groupe de G vérifiant:*

(i) *U est normalisé par T et TU est résoluble.*
(ii) *Il existe un élément u non trivial de U, tel que: $U \setminus \{1\} = \{tut^{-1}\}_{t\in T}$.*
(iii) *Pour tout sous-espace V de dimension finie de $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\overline{\mathbf{K}}}$ stable sous TU, la restriction de $\mathrm{Ad}U$ à V est incluse dans un sous-groupe unipotent à un paramètre de $\mathrm{GL}(V)$.*

Alors, U est un groupe radiciel relativement à T (il existe a dans Δ^{re} tel que $U = U_a$).

REMARQUE. — Réciproquement, un groupe radiciel par rapport à T vérifie les trois conditions ci-dessus, le point (iii) se vérifiant en filtrant V par les poids du sous-groupe à un paramètre associé à la coracine $a^\vee$.

Démonstration. On part d'un l'élément u provenant de (ii). D'après la décomposition de Bruhat relative à (B_+, N) (respectivement (B_-, N)), il existe n_+ (respectivement n_-) dans N tel que u est dans $B_+n_+B_+$ (respectivement $B_-n_-B_-$). T stabilise par conjugaison les doubles classes négatives et positives, on obtient donc

$$U \setminus \{1\} \subset B_+n_+B_+ \quad \text{et} \quad U \setminus \{1\} \subset B_-n_-B_-,$$

ce qui donne enfin

$$TU \subset B_+ \sqcup B_+n_+B_+ \quad \text{et} \quad TU \subset B_- \sqcup B_-n_-B_-.$$

TU est donc un petit sous-groupe (10.2.2). Il fixe une facette sphérique positive F_+ et une facette sphérique négative F_- des réalisations métriques des immeubles du jumelage. Chaque facette F_ϵ est notamment fixe sous T, on a donc (10.1.3):

$$F_+ \subset (|\mathcal{I}_+|_{\mathrm{co}})^T = \mathbf{A}_+ \quad \text{et} \quad F_- \subset (|\mathcal{I}_-|_{\mathrm{co}})^T = \mathbf{A}_-.$$

Notons $\Omega = F_+ \cup F_-$ la partie équilibrée de l'appartement jumelé standard qu'on obtient ainsi, et choisissons comme chambre standard la chambre C_+ du procédé (5.4.5), ce qui donne $\Delta^m(\Omega)_+ \cup \Delta^u(\Omega) \subset \Delta^{re}_+$.

$\mathrm{Ad}_\Omega(T)$ est Zariski-connexe, donc l'orbite $\{\mathrm{Ad}_\Omega(tUt^{-1})\}_{t\in T}$ dans $\mathrm{GL}(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}})$ qui contient $\mathrm{Ad}_\Omega(U) \setminus \{1\}$ l'est aussi. Finalement, $\mathrm{Ad}_\Omega(U)$ est connexe, et résoluble. Il est donc inclus dans un sous-groupe de Borel de $\mathrm{Ad}_\Omega\big(\mathrm{Fix}(\Omega)\big)$. D'après la décomposition de Lévi de $\mathrm{Fix}(\Omega)$, quitte à conjuguer par un élément de N, on peut supposer que $\mathrm{Ad}_\Omega(U)$ est dans un sous-groupe unipotent à un paramètre normalisé par T du sous-groupe de Borel

$$\mathrm{Ad}_\Omega\big(B_\Omega\big) := \mathrm{Ad}_\Omega\big(T. \prod_{a\in\Delta^m(\Omega)_+} U_a. \prod_{a\in\Delta^u(\Omega)} U_a\big).$$

Puisque la donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D}$ est à base libre, deux racines distinctes de cette partie de racines ont des caractères de T associés non proportionnels. C'est la condition (ii) de [Bor90], proposition (14.4) p.182. La condition (i) est immédiate. D'après ce résultat, $\mathrm{Ad}_\Omega(U)$ est un produit interne de groupes radiciels du sous-groupe de Borel $\mathrm{Ad}_\Omega\big(B_\Omega\big)$. Par le point (iii), c'est exactement un groupe radiciel. □

On peut maintenant énoncer le résultat cherché.

PROPOSITION. — *Soit G un groupe de Kac-Moody possédant une $\mathbf{K}$-forme préalgébrique, déployé sur une extension $\mathbf{E}/\mathbf{K}$, avec $\mathbf{E}$ infini et $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ normale. On suppose que la donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D}$ est à base libre. Soit σ un automorphisme de Galois de $G(\mathbf{E})$, rectifié en $\bar{\sigma}$ de telle sorte que $\bar{\sigma}T(\mathbf{E}) = T(\mathbf{E})$. Alors, $\bar{\sigma}$ envoie un sous-groupe radiciel (relatif à $T(\mathbf{E})$) sur un sous-groupe de $G(\mathbf{E})$ du même type.*

Démonstration. On vérifie d'abord les critères précédents pour un groupe $\bar{\sigma}U_a$ avec a dans Δ^{re}, c'est-à-dire sur $\overline{\mathbf{K}}$. Les deux premières conditions sont évidemment respectées, puisque T est stable sous $\bar{\sigma}$ et que $\bar{\sigma}$ est un automorphisme de groupe. Soit maintenant V un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\left(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\right)_{\overline{\mathbf{K}}}$ stable par $\bar{\sigma}\left(TU_a\right) = T\left(\bar{\sigma}U_a\right)$. Alors, $\overline{V} := \bar{\sigma}^{-1}\left(V\right)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\left(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\right)_{\overline{\mathbf{K}}}$ stable par TU_a. Par construction de Ad, U_a est inclus dans un sous-groupe unipotent à un paramètre de $\mathrm{GL}(\overline{V})$. En retransformant par $\bar{\sigma}$, il est clair que $\bar{\sigma}U_a$ est inclus dans un sous-groupe unipotent à un paramètre de $\mathrm{GL}(V)$. Cela règle le cas des groupes radiciels de G.

Pour les groupes $U_a(\mathbf{E})$, il suffit de remarquer que $G(\mathbf{E})$ est stable sous Γ, et que pour toute racine a de Δ^{re}, $U_a(\mathbf{K}) = G(\mathbf{E}) \cap U_a(\overline{\mathbf{K}})$. □

Ce dernier résultat suggère d'introduire la condition suivante.

HYPOTHÈSE. — *Soit G un groupe de Kac-Moody possédant une $\mathbf{K}$-forme préalgébrique, déployé sur une extension $\mathbf{E}/\mathbf{K}$, avec $\mathbf{E}$ infini et $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ normale. On dit que G vérifie la condition* (SGR) *si pour tout automorphisme de Galois σ de $G(\mathbf{E})$, toute rectification en $\bar{\sigma}$ de telle sorte que $\bar{\sigma}T(\mathbf{E}) = T(\mathbf{E})$, $\bar{\sigma}$ envoie un sous-groupe radiciel (relatif à $T(\mathbf{E})$) sur un sous-groupe de $G(\mathbf{E})$ du même type.*

On suppose jusqu'à la fin cette condition vérifiée. Les automorphismes rectifiés stabilisent la famille des sous-groupes radiciels relatifs à $T(\mathbf{E})$. Comme pour W, ceci permet de définir une permutation – notée encore $\bar{\sigma}$ – de Δ^{re}. En fait, on va s'appliquer à construire d'autres permutations et automorphismes intéressants à partir des automorphismes rectifiés.

11.2.4. Caractères et cocaractères abstraits

La prochaine étape consiste à définir pour chaque automorphisme rectifié un automorphisme de Galois $\bar{\sigma}$ (respectivement $\bar{\sigma}^{\check{}}$) de $X^*(T(\mathbf{E}))_{\mathrm{abs}}$ (respectivement $X_*(T(\mathbf{E}))_{\mathrm{abs}}$). Partons donc d'un automorphisme rectifié $\bar{\sigma}$ du groupe $G(\mathbf{E})$ et de la $\mathbf{E}$-algèbre $\left(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\right)_{\mathbf{E}}$. On définit alors un automorphisme $\bar{\sigma}$ de $X^*(T(\mathbf{E}))_{\mathrm{abs}}$ de la façon suivante. Pour tout λ de $X^*(T(\mathbf{E}))_{\mathrm{abs}}$, $\bar{\sigma}\lambda$ est le caractère défini par:

$$\forall t \in T(\mathbf{E}) \quad (\bar{\sigma}\lambda)(t) = \sigma\left(\lambda(\bar{\sigma}^{-1}t)\right).$$

(σ est l'automorphisme évident de $\overline{\mathbf{K}}$). De la même façon, $\bar{\sigma}\check{\lambda}$ est le cocaractère de $X_*(T(\mathbf{E}))_{\mathrm{abs}}$ défini par:

$$\forall k \in \mathbf{E}^{\times} \quad (\bar{\sigma}\check{\lambda})(k) = \bar{\sigma}\left(\check{\lambda}(\sigma^{-1}k)\right).$$

Qu'on obtient bien des automorphismes de groupes provient du petit calcul suivant:

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda \quad \forall t \in T(\mathbf{E}) \quad \left(\bar{\sigma}(\lambda\mu)\right)(t) = \sigma\left((\lambda.\mu)(\bar{\sigma}^{-1}t)\right) = \sigma\left((\lambda \circ \bar{\sigma}^{-1})(t).(\mu \circ \bar{\sigma}^{-1})(t)\right)$$

$$= \sigma(\lambda \circ \bar{\sigma}^{-1})(t).\sigma(\mu \circ \bar{\sigma}^{-1})(t) = (\bar{\sigma}\lambda)(t).(\bar{\sigma}\mu)(t) = (\bar{\sigma}\lambda.\bar{\sigma}\mu)(t),$$

et du même calcul *mutatis mutandis* pour les cocaractères. On a en outre:

LEMME. — *Dans les mêmes conditions que la sous-section précédente, pour tout caractère c de $Q(\mathcal{D})$, on a:*

$$\bar{\sigma}\big(\mathcal{U}(c)_{\mathbf{E}}\big) = \mathcal{U}(\bar{\sigma}.c)_{\mathbf{E}}.$$

Ainsi, $\bar{\sigma}$ stabilise $Q(\mathcal{D})$ dans $X^*(T(\mathbf{E}))_{\mathrm{abs}}$.

Démonstration. Soit v dans $\mathcal{U}(c)_{\mathbf{E}}$. Alors, pour tout t de $T(\mathbf{E})$, on a:

$$\mathrm{Ad}t.\bar{\sigma}v = \bar{\sigma}\big(\bar{\sigma}^{-1}(\mathrm{Ad}t.\bar{\sigma}v)\big) = \bar{\sigma}(\mathrm{Ad}\bar{\sigma}^{-1}t.v) = \bar{\sigma}(\langle c \mid \bar{\sigma}^{-1}t\rangle v)$$

$$= \bar{\sigma}(\langle c \circ \bar{\sigma}^{-1} \mid t\rangle v) = \sigma(\langle c \circ \bar{\sigma}^{-1} \mid t\rangle)\bar{\sigma}v = \langle \bar{\sigma}.c \mid t\rangle \bar{\sigma}v$$

Par conséquent $\bar{\sigma}v$ est dans $\mathcal{U}(\bar{\sigma}.c)_{\mathbf{E}}$, d'où: $\bar{\sigma}\big(\mathcal{U}(c)_{\overline{\mathbf{K}}}\big) \subset \mathcal{U}(\bar{\sigma}.c)_{\mathbf{E}}$, et on a en fait l'égalité, car $\bar{\sigma}$ est un isomorphisme de $\big(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\big)_{\mathbf{E}}$. □

À ce stade, on sait définir à partir d'un automorphisme rectifié $\bar{\sigma}$, une permutation $\bar{\sigma}$ de Δ^{re} sur lui-même via les sous-groupes radiciels, un automorphisme additif $\bar{\sigma}$ de $X^*(T(\mathbf{E}))_{\mathrm{abs}}$ qui stabilise $Q(\mathcal{D})$ et un autre de $X_*(T(\mathbf{E}))_{\mathrm{abs}}$. On peut donc se demander ce qu'il en est de la Q-graduation abstraite, plus fine. En fait, ce point est précisément ce qui permet de compléter la définition des $\mathbf{K}$-formes préalgébriques pour parler de $\mathbf{K}$-*formes algébriques.*

11.2.5. K-formes algébriques

Nous pouvons maintenant passer à la définition des $\mathbf{K}$-formes algébriques d'un groupe de Kac-Moody. Ce qui distingue les $\mathbf{K}$-formes préalgébriques des $\mathbf{K}$-formes algébriques est une condition un peu technique qui implique la Q graduation, qu'on justifiera immédiatement après.

DÉFINITION. — *Soit $(\mathcal{G},\mathcal{U}_{\mathbf{K}})$ une $\mathbf{K}$-forme préalgébrique d'un groupe de Kac-Moody $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\overline{\mathbf{K}})$, déployée sur $\mathbf{E}$, avec $\mathbf{E}$ infini et $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ normale. On dit que $(\mathcal{G},\mathcal{U}_{\mathbf{K}})$ est une* $\mathbf{K}$-forme algébrique *s'il vérifie la condition* (SGR) (11.2.3)*, et si pour tout σ de Γ et toute rectification $\bar{\sigma}$ vérifiant $\bar{\sigma}T(\mathbf{E}) = T(\mathbf{E})$, on a:*

(ALG1) *$\bar{\sigma}$ respecte la décomposition en termes Q-homogènes de $\big(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\big)_{\mathbf{E}}$ et la permutation de Q induite – notée encore $\bar{\sigma}$ – vérifie la condition d'homogénéité suivante.*

$$\forall a \in \Delta^{re} \quad \forall n \in \mathbf{N} \qquad \bar{\sigma}(na) = n(\bar{\sigma}a).$$

(ALG2) *$\bar{\sigma}$ stabilise Λ dans $X^*(T(\mathbf{E}))_{\mathrm{abs}}$ et $\Lambda^{\vee}$ dans $X_*(T(\mathbf{E}))_{\mathrm{abs}}$.*

Pour faire court, on utilisera le terme de $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody (déployé sur $\mathbf{E}$) *pour parler d'une telle forme de groupe de Kac-Moody. Comme on l'a déjà dit en* (11.1.3)*, on peut se limiter à la catégorie* $\mathbf{K}$-ext *des extensions de corps de $\mathbf{K}$ dans $\overline{\mathbf{K}}$.*

REMARQUES. — 1. Cette définition ne dépend pas du choix de rectification des automorphismes σ. En effet, ces choix diffèrent d'un automorphisme intérieur int$n$ pour n dans $N(\mathbf{E})$, qui respecte clairement les conditions requises.

2. D'après le lemme précédent, on a pour tout a dans Q, $\bar{\sigma}(c_a) = c_{\bar{\sigma}(a)}$. En particulier, la condition de (ALG2) portant sur Λ est superflue si $\Lambda = Q(\mathcal{D})$.

3. La condition (SGR) requise d'emblée est probablement vérifiée par toute $\mathbf{K}$-forme préalgébrique, et on l'a en tout cas démontré pour celles à base de racines libres dans la donnée radicielle de Kac-Moody (11.2.3).

4. La démonstration du point (i) de la proposition qui suit montre que la condition d'homogénéité est superflue en caractéristique 0.

Justification. La justification proprement dite de la condition (ALG1) est la suivante. On sait qu'un automorphisme rectifié $\bar{\sigma}$ envoie un sous-groupe radiciel relatif à T sur un sous-groupe radiciel relatif à T. Supposons qu'il existe une structure algébrique sur le foncteur $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$, par exemple que $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$ est représentable par une algèbre de Hopf topologique, dont certains quotients par des idéaux de Hopf soient les algèbres de fonctions des groupes radiciels. Alors, pour a dans Δ^{re} et n dans $\mathbf{N}$, $\bigoplus_{j\leq n} \mathbf{E}\frac{e_a^j}{j!}$ est moralement l'espace des opérateurs différentiels d'ordre inférieur ou égal à n invariants à gauche et tangents à U_a. Pour une action galoisienne algébrique, il est raisonnable de demander que chaque automorphisme envoie un opérateur différentiel invariant à gauche tangent à un groupe radiciel sur un opérateur différentiel invariant à gauche tangent à l'image de ce sous-groupe, les ordres des opérateurs étant respectés. C'est ce que requiert la condition d'algébricité, puisque tout élément de $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{E}}$ est produit de puissances divisées correspondant aux racines simples, d'après l'isomorphisme naturel:

$$(\mathcal{U}_{\Delta_+})_{\mathbf{E}} \otimes (\mathcal{U}_0)_{\mathbf{E}} \otimes (\mathcal{U}_{\Delta_-})_{\mathbf{E}} \cong (\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{E}}.$$

Enfin, la condition (ALG2) portant sur Λ et $\check{\Lambda}$ permet de gérer les sous-tores algébriques. Elle dit qu'un sous-tore algébrique est envoyé sur un groupe du même type. □

À titre d'exemple, une $\mathbf{K}$-forme préalgébrique de $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\overline{\mathbf{K}})$ déployée sur $\mathbf{E}$ (infini), est une $\mathbf{E}$-forme algébrique de G.

Nous pouvons maintenant énoncer quelques propriétés.

PROPOSITION. — *Soit $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\overline{\mathbf{K}})$ un $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody déployé sur $\mathbf{E}$, avec $\mathbf{E}$ infini et $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ normale. Alors, l'automorphisme rectifié $\bar{\sigma}$ ($\bar{\sigma}T(\mathbf{E}) = T(\mathbf{E})$) de $G(\mathbf{E})$ possède les propriétés suivantes.*

(i) *$\bar{\sigma}$ est un automorphisme de groupe de Q. $\bar{\sigma}.(\mathcal{U}_0)_{\mathbf{E}} = (\mathcal{U}_0)_{\mathbf{E}}$ et $\bar{\sigma}(\check{\Lambda}_{\mathbf{E}}) = \check{\Lambda}_{\mathbf{E}}$.*
(ii) *$\bar{\sigma}$ stabilise Δ^{re} et Δ dans Q, et la permutation obtenue par restriction à Δ^{re} coïncide avec celle obtenue via les sous-groupes radiciels.*
(iii) *Pour toute racine réelle a et tout paramètre additif k de $\mathbf{E}$, on a $\bar{\sigma}(u_a(k)) = u_{\bar{\sigma}a}(k_a(\sigma k))$, où k_a est l'élément de $\mathbf{E}^\times$ défini par $\bar{\sigma}e_a = k_a e_{\bar{\sigma}a}$.*
(iv) *L'automorphisme $\bar{\sigma}$ du groupe de Weyl W envoie une réflexion sur une réflexion. Plus précisément, pour toute racine réelle a, la réflexion s_a par rapport au mur ∂a, est envoyée sur la réflexion $s_{\bar{\sigma}a}$ par rapport au mur $\partial(\bar{\sigma}a)$.*

(v) $\bar{\sigma}^{\check{}}$ *stabilise* $Q(\mathcal{D})^{\check{}}$ *dans* $X_*(T(\mathbf{E}))_{\mathrm{abs}}$. *Plus précisément, pour toute racine réelle* a, *le cocaractère* h_a *est envoyé sur le cocaractère* $h_{\bar{\sigma}(a)}$ *par* $\bar{\sigma}^{\check{}}$.

Démonstration. Preuve de (i). Commençons par la $\mathbf{Z}$-linéarité de $\bar{\sigma}$ sur Q. D'abord il est clair que $\bar{\sigma}(0) = 0$. Ensuite, on regarde les degrés des valeurs de $\bar{\sigma}$ sur des éléments test de la forme $\prod_{s\in S} \frac{{e_s}^{n_s}}{n_s!}\frac{{f_s}^{m_s}}{m_s!}$, pour n_s et m_s des entiers. Un tel élément est de Q-degré $\sum_{s\in S}(n_s - m_s)a_s$, le degré de son image est donc $\bar{\sigma}\big(\sum_{s\in S}(n_s - m_s)a_s\big)$. Mais puisque $\bar{\sigma}$ est un automorphisme d'algèbre et qu'il vérifie la condition d'homogénéité de (ALG1), le degré de son image est aussi $\sum_{s\in S}(n_s - m_s)\bar{\sigma}(a_s)$.
$\big(\mathcal{U}_0\big)_{\mathbf{E}}$ est caractérisé par la propriété suivante: soit v dans $\big(\mathcal{U}_0\big)_{\mathbf{E}}$, alors pour tout v' homogène, v et vv' sont homogènes de même degré. En transformant ces éléments test par l'automorphisme $\bar{\sigma}$, cette propriété est conservée. L'autre assertion provient du respect de la filtration par $\bar{\sigma}$.

Preuve de (ii) (Lien entre les automorphismes). Le respect de la filtration par $\bar{\sigma}$ montre que $\bar{\sigma}.\Delta = \Delta$. Pour Δ^{re}, on part de la remarque déjà faite:

$$\forall a\in\Delta^{re}\quad \forall b\in\Delta\quad \mathrm{Ad}U_a(\mathbf{E}).\big(\mathcal{L}_b\big)_{\mathbf{E}} \subset \bigoplus_{n\geq 0}\ \big(\mathcal{L}_{b+na}\big)_{\mathbf{E}},$$

formule à laquelle on peut appliquer l'automorphisme de $\mathbf{E}$-algèbre $\bar{\sigma}$:

$$\bar{\sigma}\Big(\mathrm{Ad}U_a(\mathbf{E}).\big(\mathcal{L}_b\big)_{\mathbf{E}}\Big) = \mathrm{Ad}(\bar{\sigma}U_a)(\mathbf{E}).\bar{\sigma}\big(\mathcal{L}_b\big)_{\mathbf{E}} \quad\subset \bigoplus_{n\geq 0}\ \bar{\sigma}\big(\mathcal{L}_{b+na}\big)_{\mathbf{E}}$$

Si on choisit au départ $a = -b(\in \Delta^{re})$, alors 0 est dans le support de $\mathrm{Ad}U_a(\mathbf{E})\big(\big(\mathcal{L}_b\big)_{\mathbf{E}}\big) = \mathrm{Ad}U_a(\mathbf{E})\big(\mathbf{E}e_b\big)$. Or, on vient de voir que $\bar{\sigma}\big(\Lambda^{\check{}}_{\mathbf{E}}\big) = \Lambda^{\check{}}_{\mathbf{E}}$, donc 0 est dans le support de $\mathrm{Ad}(\bar{\sigma}U_a)(\mathbf{E})\big(\mathbf{E}e_b\big)$. On sait que $\bar{\sigma}U_a(\mathbf{E})$ est un groupe radiciel relativement à $T(\mathbf{E})$ et que $\bar{\sigma}e_b$ est un vecteur homogène pour la Q-graduation. D'après le lemme (11.2.1), en notant $\bar{\sigma}a$ la racine réelle telle que $\bar{\sigma}U_a(\mathbf{E}) = U_{\bar{\sigma}a}(\mathbf{E})$, alors nécessairement $\bar{\sigma}e_b$ est en degré $-\bar{\sigma}a$, soit $\bar{\sigma}\big(\mathbf{E}e_{-a}\big) = \mathbf{E}e_{-\bar{\sigma}a}$. Cette formule est vraie pour toute racine réelle a. Elle relie l'automorphisme de $\mathbf{E}$-algèbre rectifié $\bar{\sigma}$ (membre de gauche) à l'automorphisme de groupe rectifié $\bar{\sigma}$ (membre de droite).

Preuve de (iii) (Paramètres additifs). Pour l'étude des paramètres, il faut raffiner la formule de l'action adjointe d'un groupe radiciel déjà utilisée:

$$\forall k\in\mathbf{E}\quad \mathrm{Ad}\big(u_a(k)\big).e_{-a} = e_{-a} + k[e_a, e_{-a}] + v_a,$$

où $v_a = k^2\big(\frac{e_a^2}{2}e_{-a} - e_a e_{-a} e_a + e_{-a}\frac{e_a^2}{2}\big)$ est le terme de Q-degré a de l'expression. On applique à nouveau l'automorphisme σ-semi-linéaire $\bar{\sigma}$ de la $\mathbf{E}$-algèbre de Lie $\big(\mathcal{L}_{\mathcal{D}}\big)_{\mathbf{E}}$, d'où:

$$\forall k\in\mathbf{E}\quad \mathrm{Ad}\big(\bar{\sigma}u_a(k)\big).\bar{\sigma}e_{-a} = \bar{\sigma}e_{-a} + \sigma k[\bar{\sigma}e_a, \bar{\sigma}e_{-a}] + \bar{\sigma}(v_a).$$

Puisque $\bar{\sigma}U_a(\mathbf{E}) = U_{\bar{\sigma}a}(\mathbf{E})$, pour k dans $\mathbf{E}$, il existe un paramètre k' – qu'on cherche à calculer – tel que $\bar{\sigma}u_a(k) = u_{\bar{\sigma}a}(k')$. Par ailleurs, d'après le point qui précède, on sait que $\bar{\sigma}\big(\overline{\mathbf{K}}e_a\big) = \mathbf{E}e_{\bar{\sigma}a}$, donc on peut écrire $\bar{\sigma}e_a = k_a e_{\bar{\sigma}a}$ pour un certain k_a de $\mathbf{E}^\times$. (Les racines réelles sont de

multiplicité 1 dans une algèbre de Kac-Moody). À partir de l'égalité $\mathrm{Ad}\big(\bar\sigma u_a(k)\big).\bar\sigma e_{-a} = \mathrm{Ad}\big(u_{\bar\sigma a}(k')\big).\bar\sigma e_{-a}$, on peut expliciter chacun des deux membres comme somme de termes Q-homogènes. Pour le premier, il suffit de reprendre ce qu'on vient de faire en remplaçant $\bar\sigma e_a$ par $k_a e_{\bar\sigma a}$:

$$\mathrm{Ad}\big(\bar\sigma u_a(k)\big).\bar\sigma e_{-a} = \bar\sigma e_{-a} + (\sigma k)k_a[e_{\bar\sigma a}, \bar\sigma e_{-a}] + \bar\sigma(v_a).$$

Pour le second, on revient à la définition de la représentation adjointe pour $\mathrm{Ad}\big(u_{\bar\sigma a}(k')\big)$:

$$\mathrm{Ad}\big(u_{\bar\sigma a}(k')\big).\bar\sigma e_{-a} = \bar\sigma e_{-a} + k'[e_{\bar\sigma a}, \bar\sigma e_{-a}] + v'_a.$$

Et en identifiant, on obtient bien $k' = (\sigma k)k_a$.

Preuve de (iv) (Réflexions). On va d'abord faire un retour sur les constantes k_a pour montrer que pour toute racine a de Δ^{re}, les constantes k_a et k_{-a} sont reliées par $k_a^{-1} = k_{-a}$. C'est un calcul dans SL_2. En effet, l'égalité

$$n_a(l) = u_a(l).u_{-a}(l^{-1}).u_a(l)$$

montre que $n_a(l)$ est dans $N(\mathbf{E}) \cap \langle U_a(\mathbf{E}), U_{-a}(\mathbf{E})\rangle$. D'où $\bar\sigma n_a(l) \in \bar\sigma N(\mathbf{E}) \cap \langle \bar\sigma U_a(\mathbf{E}), \bar\sigma U_{-a}(\mathbf{E})\rangle$. Or, $\bar\sigma N(\mathbf{E})$ est $N(\mathbf{E})$ puisque $N(\mathbf{E})$ est le normalisateur de $T(\mathbf{E})$ stable par $\bar\sigma$. Donc $\bar\sigma n_a(l)$ est dans $N(\mathbf{E}) \cap \langle U_{\bar\sigma a}(\mathbf{E}), U_{-\bar\sigma a}(\mathbf{E})\rangle$. Plus précisément,

$$\bar\sigma(n_a(k)) = u_{\bar\sigma a}(k_a(\sigma k)).u_{-\bar\sigma a}(k_{-a}(\sigma k)^{-1}).u_{\bar\sigma a}(k_a(\sigma k))$$

est dans $N(\mathbf{E}) \cap \langle U_{\bar\sigma a}(\mathbf{E}), U_{-\bar\sigma a}(\mathbf{E})\rangle$, ce qui impose $k_a^{-1} = k_{-a}$. Ainsi $\bar\sigma(n_a(k))$ vaut

$$(\bar\sigma u_a(k)).(\bar\sigma u_{-a}(k^{-1})).(\bar\sigma u_a(k)) = u_{\bar\sigma a}(k_a(\sigma k)).u_{-\bar\sigma a}(k_a^{-1}(\sigma k)^{-1}).u_{\bar\sigma a}(k_a(\sigma k)),$$

ce qui est $n_{\bar\sigma a}\big(k_a(\sigma k)\big)$, un élément qui relève modulo $T(\mathbf{E})$ la réflexion par rapport à $\partial(\bar\sigma a)$.

Preuve de (v) (Cocaractères). Partons d'un élément h de $Q(\mathcal{D})^\vee$ et de son cocaractère associé $\{k^h\}_{k\in\mathbf{E}^\times} \in X_*(T(\mathbf{E}))_{\mathrm{abs}}$. Il s'agit de montrer que l'image de ce cocaractère par l'automorphisme $\bar\sigma^\vee$ de $X_*(T)_{\mathrm{abs}}$ est encore un cocaractère associé à une coracine. Cette image est précisément

$$\bar\sigma^\vee.\{k^h\}_{k\in\mathbf{E}^\times} = \bar\sigma \circ \{(\sigma^{-1}k)^h\}_{k\in\mathbf{E}^\times} = \bar\sigma \circ \{k^h\}_{k\in\mathbf{E}^\times}.$$

Il suffit de traiter le cas où h est une coracine h_s pour s dans S, puisqu'on considère le groupe des cocaractères engendré par ces éléments. On va à nouveau utiliser certaines des relations de définition d'un groupe de Kac-Moody. À savoir (8.3.3):

$$\forall k \in \mathbf{E}^\times \quad \forall a' \in \Delta^{re} \quad k^{h_{a'}} = n_{a'}(k).n_{a'}(1)^{-1}$$

où $n_{a'}(l) = u_{a'}(l).u_{-a'}(l^{-1}).u_{a'}(l)$ pour tout l dans $\mathbf{E}^\times$. D'après le raisonnement qui précède, on a en effet:

$$\bar\sigma\big(k^{h_s}\big) = \bar\sigma\big(n_s(k)n_s(1)^{-1}\big) = n_{\bar\sigma a_s}((\sigma k)k_{a_s}).n_{\bar\sigma a_s}(k_{a_s})^{-1}$$

$$= (n_{\bar\sigma a_s}((\sigma k)k_{a_s}).n_{\bar\sigma a_s}(1)^{-1}).(n_{\bar\sigma a_s}(1).n_{\bar\sigma a_s}(k_{a_s})^{-1}) = ((\sigma k)k_{a_s})^{h_{\bar\sigma a_s}}.(k_{a_s}^{-1})^{h_{\bar\sigma a_s}} = (\sigma k)^{h_{\bar\sigma a_s}}.$$

Ceci prouve que $\bar\sigma^\vee\Big(\{k^{h_s}\}_{k\in\mathbf{E}^\times}\Big)$ est un cocaractère de $Q(\mathcal{D})^\vee$. □

Le caractère raisonnable de la condition qui distingue **K**-formes préalgébriques et algébriques est mis en évidence dans le cas d'une donnée radicielle de Kac-Moody libre.

11.2.6. Cas d'une donnée radicielle libre

On a déjà rencontré le cas où la donnée radicielle de Kac-Moody qui définit le groupe est à base de racines libre. Les simplifications résident dans le fait que la Q-graduation est interprétable en termes d'action adjointe (diagonale) de $T(\mathbf{E})$. Ceci permet d'écrire:

$$\left(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\right)_{\mathbf{E}}^{T(\mathbf{E})} = \left(\mathcal{U}_0\right)_{\mathbf{E}} \quad \text{et} \quad \left(\left(\mathcal{L}_{\mathcal{D}}\right)_{\mathbf{E}}\right)^{T(\mathbf{E})} = \check{\Lambda}_{\mathbf{E}}.$$

Du point de vue des actions de Galois, il y a aussi simplification.

PROPOSITION. — *Soit $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\overline{\mathbf{K}})$ un groupe de Kac-Moody possédant une **K**-forme préalgébrique déployée sur **E**, avec **E** infini et $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ normale. Si la donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D}$ est libre, G vérifie* (ALG1) *(et* (SGR)*, d'après* (11.2.3)*).*

Démonstration. On se donne σ un élément de Γ rectifié en $\bar{\sigma}$ pour avoir $\bar{\sigma}T(\mathbf{E}) = T(\mathbf{E})$. Le respect par $\bar{\sigma}$ des termes Q-homogènes – *i.e.*, $Q(\mathcal{D})$-homogènes – est prouvé dans le lemme (11.2.4). Pour la propriété d'homogénéité, on se donne une racine a de Δ^{re} qu'on peut identifier à son caractère $c_a \in \Lambda$. On se donne aussi un entier n de $\mathbf{N}$, et un vecteur v homogène pour $Q(\mathcal{D}) = Q$ de caractère associé nc_a. Il suffit alors de montrer que $\bar{\sigma}(v)$ est un vecteur-poids de caractère associé $n(\bar{\sigma}c_a)$, ce qui établira $\bar{\sigma}(nc_a) = n\bar{\sigma}c_a$. C'est un calcul du même acabit que pour (11.2.4). Soit t dans $T(\mathbf{E})$. Alors:

$$\mathrm{Ad}t.\bar{\sigma}(v) = \bar{\sigma}\big(\mathrm{Ad}(\bar{\sigma}^{-1}t).v\big) = \bar{\sigma}\big(\langle c_a \mid \bar{\sigma}^{-1}t\rangle v\big)$$

$$= \sigma(\langle c_a \mid \bar{\sigma}^{-1}t\rangle)^n\bar{\sigma}(v) = \langle \sigma \circ c_a \circ \bar{\sigma}^{-1} \mid t\rangle^n\bar{\sigma}(v) = \langle n\bar{\sigma}c_a \mid t\rangle\bar{\sigma}(v).$$

□

Nous pouvons maintenant passer à l'étude des sous-groupe de Borel, ce qui va permettre de se servir des techniques immobilières pour étudier les actions de Galois.

11.2.7. Sous-groupes de Borel sous une action de Galois algébrique

Hormis les sous-groupes de Cartan, il existe une autre classe de sous-groupes importante pour l'étude des groupes réductifs, et par extension des groupes de Kac-Moody, à savoir les sous-groupes de Borel. En théorie de Kac-Moody, la difficulté supplémentaire est que ces sous-groupes ne bénéficient pas d'une caractérisation praticable. La situation des sous-groupes de Cartan est par contre plus similaire au cas de la dimension finie. C'est pour cela qu'on va s'appuyer sur ces sous-groupes pour traiter la classe des sous-groupes de Borel, via le théorème de conjugaison des bases pour les systèmes de racines de Kac-Moody. Les propriétés des automorphismes de Galois vis-à-vis de cette notion sont les suivantes:

PROPOSITION. — *Soit $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\overline{\mathbf{K}})$ un $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody déployé sur $\mathbf{E}$, avec $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ normale et $\mathbf{E}$ infini. Soit σ un élément de G rectifié en $\bar{\sigma}$, d'où une permutation $\bar{\sigma}$ de Q.*

(i) *$\bar{\sigma}$ permute les composantes de la décomposition $\Delta^{re} = \bigsqcup_{J \in \Pi_0(S)} \Delta^{re}(J)$, d'où une permutation $\bar{\sigma}$ de $\Pi_0(S)$.*
(ii) *Pour toute partie J de $\Pi_0(S)$, $\bar{\sigma}(\{a_s\}_{s\in J})$ est une base de $\Delta^{re}(\bar{\sigma}J)$, par conséquent, il existe une suite de signes $\underline{\epsilon} = (\epsilon_J)_{J\in\Pi_0(S)_{\mathrm{nsph}}} \in \{\pm\}^{\Pi_0(S)_{\mathrm{nsph}}}$ et un élément w de W tels que*

$$\bar{\sigma}.\{a_s\}_{s\in S} = w.\bigsqcup_{J\in\Pi_0(S)} \{\epsilon_J a_s\}_{s\in J}$$

Démonstration. Preuve de (i). Remarquons d'abord que la permutation $\bar{\sigma}$ de Q stabilise Δ^{re} et vérifie

$$\forall a \in \Delta^{re} \quad \bar{\sigma}(s_a) = s_{\bar{\sigma}a}.$$

Ceci montre que si Ξ est une partie indécomposable de Δ^{re}, $\bar{\sigma}\Xi$ en est une également. Donc pour toute partie J de $\Pi_0(S)$, il existe une partie J' de $\Pi_0(S)$ telle que $\bar{\sigma}\Delta^{re}(J) \subset \Delta^{re}(J')$. Enfin, puisque $\bar{\sigma}\Delta^{re} = \Delta^{re}$, on a égalité.

Preuve de (ii). La première assertion concernant les bases provient de la $\mathbf{Z}$-linéarité de $\bar{\sigma}$ sur Q. La seconde assertion provient du théorème de conjugaison des bases (7.4.2). □

On peut maintenant énoncer le résultat de stabilité des sous-groupes de Borel avec la classe plus large de sous-groupes définie en (8.3.4).

COROLLAIRE. — *Soit $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\overline{\mathbf{K}})$ un $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody déployé sur $\mathbf{E}$, avec $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ normale et $\mathbf{E}$ infini. Soit σ un élément du groupe de Galois Γ et $\bar{\sigma}$ une rectification de façon à avoir $\bar{\sigma}T(\mathbf{E}) = T(\mathbf{E})$.*

(i) *Si S est connexe, l'image par $\bar{\sigma}$ d'un sous-groupe de Borel est un sous-groupe de Borel, avec éventuelle opposition de signe. (Il s'agit ici des sous-groupes de Borel positifs ou négatifs au sens restrictif des données radicielles jumelées).*
(ii) *En général, pour toute famille de signes $\underline{\epsilon}$, il existe une autre telle famille $\underline{\epsilon'}$ et un élément n de N tels que $\bar{\sigma}B_{\underline{\epsilon}} = nB_{\underline{\epsilon'}}n^{-1}$. Ainsi, un automorphisme de Galois envoie un sous-groupe de Borel sur un sous-groupe de Borel.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lien entre la permutation $\bar{\sigma}$ de Q et la permutation de sous-groupes radiciels provenant de l'automorphisme $\bar{\sigma}$ de $G(\mathbf{E})$. Pour revenir ensuite à l'automorphisme de Galois proprement dit, il suffit de composer par un automorphisme intérieur, ce qui est par définition des sous-groupes de Borel compatible au type de résultat qu'on veut prouver. □

Avec ce dernier résultat, on n'est pas loin d'avoir une action sur les immeubles du jumelage de G. Le dernier point délicat est qu'à cause des éventuelles oppositions de signe, les ensembles sous-jacents aux immeubles ne sont pas nécessairement stables. Ceci justifie l'introduction de la notion de **K**-*forme presque déployée.*

11.3. Formes presque déployées des groupes de Kac-Moody

Nous nous plaçons désormais dans la situation suivante.

SITUATION. — **K** *est un corps de clôture algébrique* $\overline{\mathbf{K}}$. **E** *est une extension normale de* **K** *incluse dans* $\overline{\mathbf{K}}$, *avec* **E** *corps infini.* $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\overline{\mathbf{K}})$ *est un* **K**-*groupe de Kac-Moody déployé sur* **E**.

Pour l'instant, les hypothèses d'action algébrique ont essentiellement utilisé l'action de Galois en termes d'action sur une algèbre associative (l'algèbre $(\mathcal{U}_{\mathcal{D}})_{\mathbf{E}}$). Nous pouvons maintenant passer à l'action sur les immeubles du jumelage $\mathcal{J}(\mathbf{E})$ du groupe de Kac-Moody $G(\mathbf{E})$, l'autre espace sur lequel on fait opérer $G(\mathbf{E})$ pour le dévisser. L'objectif principalement en vue pour cette partie est la mise en place des conditions d'application du théorème de point fixe de Bruhat-Tits (4.6.2), et une première interprétation pour un petit sous-groupe obtenu à partir de points fixes. Cette étape est essentielle pour la descente galoisienne à venir, pour laquelle on se placera dans le cas $\mathbf{E} = \mathbf{K}_s$.

Les conventions d'écriture de (8.4.4) et (11.1.3) sont en vigueur. Le **K**-groupe de Kac-Moody peut être supposé défini simplement sur la catégorie **K**-ext des extensions de corps de **K**. $(\mathbf{A}, C, -C)$ désigne la standardisation attachée aux sous-groupes (de Cartan et de Borel) standard de la définition du foncteur de Tits.

11.3.1. K-formes presque déployées. Action sur les ensembles sous-jacents aux immeubles

Nous allons maintenant passer à la définition des formes presque déployées. Cette définition fait intervenir une condition propre à la situation Kac-Moody. Par rapport aux groupes réductifs algébriques, une difficulté supplémentaire vient de ce que la théorie des sous-groupes de Borel n'est pas aussi riche. Par exemple, si m est le nombre de composantes connexes de type non sphérique de $\mathcal{D}$, il y a 2^m classes de conjugaison de sous-groupes de Borel à envisager. Or, les immeubles du jumelage sont définis à partir des seuls sous-groupes de Borel positifs et négatifs. D'où l'hypothèse suivante pour parler de **K**-*formes presque déployées.*

DÉFINITION. — *Soit* G *un* **K**-*groupe de Kac-Moody déployé sur* **E**, *avec* $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ *normale et* **E** *corps infini. On dit que* G *est* presque déployé (sur **K**) *s'il vérifie la condition suivante.*

(PRD) *L'action du groupe de Galois* Γ *de* $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ *stabilise la classe de conjugaison dans* $G(\mathbf{E})$ *des sous-groupes de Borel positifs (respectivement négatifs) de* $G(\mathbf{E})$.

À titre d'exemple, une $\mathbf{K}$-forme préalgébrique de $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\overline{\mathbf{K}})$ déployée sur $\mathbf{E}$ ($\mathbf{E}$ infini et $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ normale), est une $\mathbf{E}$-forme algébrique de G.

REMARQUE. — La condition ne dépend pas de $\mathbf{E}$, elle se vérifie sur $\overline{\mathbf{K}}$. Il suffit de faire le même raisonnement qu'à la fin de la preuve de la proposition (11.2.3).

On veut, dans les conditions de la définition, mettre en évidence une action naturelle du groupe de Galois Γ sur les immeubles $\mathcal{I}_+(\mathbf{E})$ et $\mathcal{I}_-(\mathbf{E})$. Partons d'un petit calcul et de quelques notations. Pour tout σ de Γ, on sait que $\sigma B_\epsilon(\mathbf{E})$ est un sous-groupe de Borel de signe ϵ. C'est-à-dire qu'il existe un élément g_σ dans $G(\mathbf{E})$ défini modulo $B_\epsilon(\mathbf{E})$, tel que $\sigma B_\epsilon(\mathbf{E}) = g_\sigma B_\epsilon(\mathbf{E}) g_\sigma^{-1}$. On fait un choix de tels g_σ pour tous les éléments σ. Puisqu'on a une action de Γ, pour σ et τ dans Γ, on peut calculer $(\tau\sigma)B_\epsilon(\mathbf{E})$ de deux façons. D'abord

$$(\tau\sigma)B_\epsilon(\mathbf{E}) = g_{\tau\sigma} B_\epsilon(\mathbf{E}) (g_{\tau\sigma})^{-1},$$

mais aussi

$$(\tau\sigma)B_\epsilon(\mathbf{E}) = \tau\big(g_\sigma B_\epsilon(\mathbf{E}) g_\sigma^{-1}\big) = \big(\tau(g_\sigma) g_\tau\big) B_\epsilon(\mathbf{E}) (\tau(g_\sigma) g_\tau)^{-1}.$$

Ceci permet d'obtenir une relation de cocycle modulo $B_\epsilon(\mathbf{E})$:

$$g_{\tau\sigma} B_\epsilon(\mathbf{E}) = \big(\tau(g_\sigma) g_\tau\big) B_\epsilon(\mathbf{E}).$$

Revenons à l'action de Γ sur les immeubles. On la définit par la formule suivante:

$$\forall \sigma \in \Gamma \quad \forall g \in G \quad \sigma\big(gB_\epsilon(\mathbf{E})\big) := \mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E})^{\sigma(gB_\epsilon(\mathbf{E})g^{-1})} = \mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E})^{\sigma(\mathrm{Fix}(gB_\epsilon))(\mathbf{E})}.$$

Cette définition ne fait pas apparaître les g_σ, ce qui prouve son caractère intrinsèque. Il vont réapparaître dans la vérification du fait qu'on a bien une action. Prenons en effet σ et τ deux éléments de Γ. Alors, pour g dans G, on a:

$$\tau\Big(\sigma\big(gB_\epsilon(\mathbf{E})\big)\Big) = \tau\big(\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E})^{\sigma(g) g_\sigma B_\epsilon(\mathbf{E}) (\sigma(g) g_\sigma)^{-1}}\big) = \tau\big(\sigma(g) g_\sigma B_\epsilon(\mathbf{E})\big),$$

$$= \tau\big(\sigma(g) g_\sigma\big) \tau(B_\epsilon(\mathbf{E})) = \tau\big(\sigma(g) g_\sigma\big) g_\tau B_\epsilon(\mathbf{E}) = (\tau\sigma)(g) \tau(g_\sigma) g_\tau B_\epsilon(\mathbf{E}),$$

ce qui vaut $(\tau\sigma)(g) g_{\tau\sigma} B_\epsilon(\mathbf{E})$ par la relation de cocycle, ce qui est encore $(\tau\sigma)\big(gB_\epsilon(\mathbf{E})\big)$.
On vient donc de définir une action de Γ sur $G(\mathbf{E})/B_+(\mathbf{E})$ (respectivement $G(\mathbf{E})/B_-(\mathbf{E})$), l'ensemble sous-jacent à l'immeuble $\mathcal{I}_+(\mathbf{E})$ (respectivement $\mathcal{I}_-(\mathbf{E})$). Il reste à vérifer un dernier point, à savoir la compatibilité entre l'action de $G(\mathbf{E})$ et celle de Γ sur ces ensembles. On se donne un élément σ de Γ et deux éléments g, h de $G(\mathbf{E})$. On s'intéresse à l'image par σ de $hgB_\epsilon(\mathbf{E})$. Celle-ci vaut $\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E})^{\sigma(hgB_\epsilon(\mathbf{E})(hg)^{-1})}$, ou encore moins intrinséquement: $\sigma(hg) g_\sigma B_\epsilon(\mathbf{E})$. Ce qui vaut $\sigma(h)\sigma(g) g_\sigma B_\epsilon(\mathbf{E}) = \sigma(h)\sigma\big(gB_\epsilon(\mathbf{E})\big)$. On peut résumer tout cela en s'exprimant en termes de chambres:

LEMME. — *Il existe naturellement une action de* Γ *sur l'ensemble* $G(\mathbf{E})/B_\epsilon(\mathbf{E})$ *sous-jacent à l'immeuble de signe* ϵ *du jumelage de* $G(\mathbf{E})$. *Cette action est définie de la façon suivante.*

Pour toute chambre D *de* $G(\mathbf{E})/B_\epsilon(\mathbf{E})$, *pour tout élement* σ *de* Γ, $\sigma(D) = \mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E})^{\sigma(\mathrm{Fix}(D))(\mathbf{E})}$.

Cette action est compatible à l'action de $G(\mathbf{E})$ *au sens suivant.*

Pour toute chambre D *de* $G(\mathbf{E})/B_\epsilon(\mathbf{E})$, *pour tout* σ *de* Γ, *et tout élément* g *de* $G(\mathbf{E})$,

$$\sigma(gD) = \sigma(g)(\sigma D).$$

□

Pour l'instant, on dispose seulement d'une action du groupe de Galois par permutations quelconques sur les chambres des immeubles. C'est la section suivante qui va mettre en évidence une certaine compatibilité aux structures d'immeuble.

11.3.2. Éléments de Galois comme automorphismes du jumelage. Action étoile

Il s'agit tout d'abord d'identifier le groupe de Galois à un groupe d'automorphismes des immeubles abstraits positifs et négatifs. Précisons qu'automorphismes est à entendre au sens d'automorphismes cohérents, c'est-à-dire sans respect individuel des adjacences, mais au sens d'un respect global de l'adjacence: deux chambres s-adjacentes sont envoyées sur une paire de chambres t-adjacentes pour un élément t de S, éventuellement distinct de s. Cette vérification se fait en plusieurs étapes.

LEMME/DÉFINITION. — *Soit* G *un* $\mathbf{K}$*-groupe de Kac-Moody presque déployé sur* $\mathbf{K}$, *déployé sur* $\mathbf{E}$, *avec* $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ *normale et* $\mathbf{E}$ *corps infini. On dispose d'une action de Galois sur l'ensemble* $G(\mathbf{E})/B_+(\mathbf{E})$ *(respectivement* $G(\mathbf{E})/B_-(\mathbf{E})$*) sous-jacent à l'immeuble* $\mathcal{I}_+(\mathbf{E})$ *(respectivement* $\mathcal{I}_-(\mathbf{E})$*). Alors:*

(i) *Pour tout élément* σ *de* Γ, *on peut choisir un élément* g_σ *de* $G(\mathbf{E})$ *(bien défini modulo* $T(\mathbf{E})$*) tel que l'automorphisme composé* $\sigma^* := (\mathrm{int}g_\sigma^{-1} \circ \sigma)$ *stabilise les sous-groupes standard* $B_+(\mathbf{E})$ *et* $B_-(\mathbf{E})$ *(et donc* $T(\mathbf{E})$*).*
(ii) *Les éléments* σ^* *définissent naturellement une action de* Γ *sur le groupe de Weyl* W *qui ne dépend pas du choix des éléments* g_σ *dans leur classe modulo* $T(\mathbf{E})$.
(iii) *L'action de* Γ *sur le groupe de Weyl* W *par les automorphismes* σ^* *est appelée* l'action étoile – action $*$ *pour faire court* – *de* Γ *sur* W *(relative à la standardisation* $(\mathbf{A}, C, -C)$*).*

REMARQUE. — L'automorphisme σ^* n'est rien d'autre qu'un automorphisme rectifié particulier. C'est en quelque sorte un meilleur choix de rectification.

Démonstration. Preuve de (i). On part d'un élément σ du groupe de Galois Γ. On sait déjà qu'il existe un élément g de $G(\mathbf{E})$ qui rectifie σ en $\bar{\sigma} = \mathrm{int}g^{-1} \circ \sigma$, automorphisme qui stabilise le tore standard T de G. Par ailleurs, puisqu'on s'est donné une $\mathbf{K}$-forme presque déployée, le groupe de Galois envoie un sous-groupe de Borel sur un sous-groupe de Borel (de même signe). Par conséquent, $\bar{\sigma}B_+(\mathbf{E})$ vaut $nB_+(\mathbf{E})n^{-1}$ pour un certain n dans $N(\mathbf{E})$. En fait, on peut aussi écrire $\bar{\sigma}B_-(\mathbf{E}) = nB_-(\mathbf{E})n^{-1}$. En effet, comme pour $B_+(\mathbf{E})$, on sait qu'il existe n' dans $N(\mathbf{E})$ tel que $\bar{\sigma}B_-(\mathbf{E}) = n'B_-(\mathbf{E})n'^{-1}$. Mais puisque $B_+(\mathbf{E}) \cap B_-(\mathbf{E}) = T(\mathbf{E})$, on a:

$$\bar{\sigma}B_+(\mathbf{E}) \cap \bar{\sigma}B_-(\mathbf{E}) = \bar{\sigma}\big(B_+(\mathbf{E}) \cap B_-(\mathbf{E})\big) = \bar{\sigma}T(\mathbf{E}) = T(\mathbf{E}).$$

Soit: $nB_+(\mathbf{E})n^{-1} \cap n'B_-(\mathbf{E})n'^{-1} = T(\mathbf{E})$ ou encore: $B_+(\mathbf{E}) \cap (n^{-1}n')B_-(\mathbf{E})(n^{-1}n')^{-1} = T(\mathbf{E})$. Vu l'action de $N(\mathbf{E})$ sur les groupes radiciels relatifs à $T(\mathbf{E})$, on a nécessairement $nT(\mathbf{E}) = n'T(\mathbf{E})$. On vient donc de mettre en évidence un élément gn de $G(\mathbf{E})$ qui rectifie σ en un automorphisme $\sigma^* := (\mathrm{int}gn)^{-1} \circ \sigma$ qui stabilise $T(\mathbf{E})$, $B_+(\mathbf{E})$ et $B_-(\mathbf{E})$. Soient maintenant h et h' deux éléments tels que $\mathrm{int}(h)^{-1} \circ \sigma$ et $\mathrm{int}(h')^{-1} \circ \sigma$ stabilisent $B_+(\mathbf{E})$ et $B_-(\mathbf{E})$. Alors:

$$\mathrm{int}(h^{-1}h')^{-1}B_+(\mathbf{E}) = (\mathrm{int}h^{-1}h')^{-1}\big((\mathrm{int}h^{-1} \circ \sigma)B_+(\mathbf{E})\big)$$

$$= \Big(\big(\mathrm{int}(h^{-1}h')^{-1}\big) \circ \big(\mathrm{int}(h)^{-1} \circ \sigma\big)\Big)B_+(\mathbf{E}) = \big(\mathrm{int}(h')^{-1} \circ \sigma\big)B_+(\mathbf{E}) = B_+(\mathbf{E}).$$

Ceci montre que $h^{-1}h'$ normalise $B_+(\mathbf{E})$. Or, par une propriété bien connue des BN-paires, on a $N_G(\mathbf{E})(B_+(\mathbf{E})) = B_+(\mathbf{E})$, d'où $h^{-1}h'$ est dans $B_+(\mathbf{E})$. De même, $h^{-1}h'$ appartient aussi à B_-. Finalement, cet élément est dans $T(\mathbf{E}) = B_+(\mathbf{E}) \cap B_-(\mathbf{E})$. En résumé, étant donné un élément σ de Γ, les éléments h de $G(\mathbf{E})$ qui rectifient l'action de σ de sorte que $\mathrm{int}(h^{-1}) \circ \sigma$ stabilise à la fois $B_+(\mathbf{E})$ et $B_-(\mathbf{E})$ existent, et sont tous dans la même classe modulo $T(\mathbf{E})$.

Preuve de (ii). On fait le choix pour tout σ d'un représentant g_σ de la classe de $G(\mathbf{E})/T(\mathbf{E})$ qui permet d'écrire:

$$\sigma B_\epsilon(\mathbf{E}) = \mathrm{int}(g_\sigma).B_\epsilon(\mathbf{E}) \quad (\epsilon = \pm).$$

Il s'agit de vérifier qu'on obtient bien une action sur le groupe de Weyl. Commençons par une remarque: si σ et τ sont deux éléments de Γ, pour chaque signe ϵ, on peut calculer de deux façons différentes $(\tau\sigma)\big(B_\epsilon(\mathbf{E})\big)$, Il s'agit du même calcul qu'en (11.3.1), modulo $T(\mathbf{E})$ cette fois. D'une part, le sous-groupe de Borel qu'on obtient est $g_{\tau\sigma}B_\epsilon(\mathbf{E})g_{\tau\sigma}^{-1}$ par ce qui précède appliqué directement à $\tau\sigma$. D'autre part, en faisant les rectifications en deux étapes, il vient:

$$(\tau\sigma)\big(B_\epsilon(\mathbf{E})\big) = \tau\big(g_\sigma B_\epsilon(\mathbf{E})g_\sigma^{-1}\big) = \tau(g_\sigma)g_\tau B_\epsilon(\mathbf{E})(\tau(g_\sigma)g_\tau)^{-1}.$$

Mais, d'après ce qui précède, $g_{\tau\sigma}T(\mathbf{E}) = \tau(g_\sigma)g_\tau T(\mathbf{E})$, cette relation de cocycle modulo $T(\mathbf{E})$ étant vraie pour pour toute paire $\{\tau;\sigma\}$ d'éléments de Γ. Soit $w = n_wT$ un élément du groupe de Weyl. Il est clair que chaque automorphisme σ^* de g fournit un automorphisme du groupe W par $\sigma^*w := \sigma^*\big(n_wT(\mathbf{E})\big) = (\sigma^*n_w)T(\mathbf{E})$. Cet automorphisme ne dépend pas de l'élément g_σ qui rectifie σ puisque celui-ci est bien déterminé modulo $T(\mathbf{E})$. Il reste à voir qu'on définit ainsi une action sur W. On se donne donc τ et σ deux éléments de Γ. On a, d'une part

$$\tau^*(\sigma^*w) = \tau^*\big(g_\sigma^{-1}\sigma(n_w)g_\sigma\big)\tau^*T(\mathbf{E}) = \tau^*\big(g_\sigma^{-1}\sigma(n_w)g_\sigma\big)T(\mathbf{E})$$

$$= \mathrm{int}g_\tau^{-1}\big(\tau(g_\sigma)^{-1}\big((\tau\sigma)(n_w)\big)\tau(g_\sigma)\big)T(\mathbf{E}) = \mathrm{int}\big(\tau(g_\sigma)g_\tau\big)^{-1}\Big(\big((\tau\sigma)(n_w)\big)T(\mathbf{E})\Big).$$

D'autre part:

$$(\tau\sigma)^*w = \big((\tau\sigma)^*n_w\big)T(\mathbf{E}) = \mathrm{int}g_{\tau\sigma}^{-1}\Big(\big((\tau\sigma)(n_w)\big)T(\mathbf{E})\Big).$$

Ces deux expressions coïncident par la relation de cocycle modulo $T(\mathbf{E})$. On a donc bien une action. □

On peut encore raffiner la description des actions qu'on a définies, à la fois sur les immeubles et sur le groupe de Weyl.

PROPOSITION. — (i) *L'action étoile de* Γ *sur* W *stabilise l'ensemble de générateurs* S *de* W*; autrement dit,* Γ *opère par automorphismes de diagramme (cohérents) du système de Coxeter* (W,S).
(ii) *L'action du groupe de Galois* Γ *sur l'immeuble* $\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E})$ *se fait par automorphismes cohérents. Précisément, toute paire* $\{C';C''\}$ *de chambres* s*-adjacentes pour* s *dans* S*, est envoyée sur une paire de chambres* $\sigma^* s$*-adjacentes.*

Avant de passer à la démonstration, complétons immédiatement le vocabulaire introduit autour de l'action étoile.

DÉFINITION. — (i) *L'action de* Γ *sur* S *déduite de celle sur le groupe de Weyl* W *est appelée* l'action $*$ *sur* S. *On note* Γ^* *le sous-groupe de* $\mathcal{S}_S$*, image du morphisme* $\Gamma \to \mathcal{S}_S$ *correspondant.*
(ii) *On appelera aussi* action $*$*, l'action de* Γ *sur* $Q = \bigoplus_{s\in S} \mathbf{Z}a_s$ *déduite de celle sur* S *ci-dessus.*

Démonstration. Preuve de (i). Pour chaque élément σ de Γ, on notera σ^* l'automorphisme de G composé: $\sigma^* := \mathrm{int}g_\sigma^{-1} \circ \sigma$. Pour la $\mathbf{E}$-algèbre $\left(\mathcal{U}_\mathcal{D}\right)_\mathbf{E}$, σ^* désignera l'automorphisme semi-linéaire $\sigma^* := \mathrm{Ad}g_\sigma^{-1} \circ \sigma$. Ces deux automorphismes sont liés l'un à l'autre par la formule:

$$\forall g\in G \quad \forall \sigma\in\Gamma \quad \forall v\in\left(\mathcal{U}_\mathcal{D}\right)_\mathbf{E} \qquad \sigma^*\left(\mathrm{Ad}g.v\right) = \mathrm{Ad}(\sigma^* g).\sigma^* v,$$

puisque σ^* n'est rien d'autre qu'un meilleur choix de rectification. On veut montrer que chaque automorphisme σ^* stabilise l'ensemble de générateurs S. Ce qui permet de vérifier cela est la caractérisation suivante. On sait que le sous-groupe $U_w(\mathbf{E}) := U_+(\mathbf{E}) \cap n_w^{-1}U_-(\mathbf{E})n_w$ pour w dans W et n_w relevant w modulo $T(\mathbf{E})$, possède une décomposition en écriture unique comme produit ordonné de $\ell(w)$ groupes radiciels relatifs à $T(\mathbf{E})$. s est donc caractérisé parmi les éléments de W par le fait qu'un seul groupe radiciel suffit à décrire tous les éléments de $U_s(\mathbf{E})$. Au titre d'automorphisme rectifié comme en (11.2.2), σ^* envoie un groupe radiciel relatif à T sur un groupe radiciel relatif à $T(\mathbf{E})$ (11.2.3). En outre, un tel sous-groupe indexé par une racine positive sera envoyé sur un sous-groupe du même type. Par conséquent $\sigma^* U_\epsilon(\mathbf{E}) = U_\epsilon(\mathbf{E})$, $(\epsilon = \pm)$, d'où: $\sigma^* U_w(\mathbf{E}) = U_+(\mathbf{E}) \cap \sigma^*(n_w)U_-(\mathbf{E})\sigma^*(n_w)^{-1}$. Dans le cas où w est un élément s de l'ensemble S de générateurs, on sait que $\sigma^* U_s(\mathbf{E})$ est un groupe radiciel, donc $U_+(\mathbf{E}) \cap \sigma^*(n_s)U_-(\mathbf{E})\sigma^*(n_s)^{-1}$ en est un également. Ceci implique que $\sigma^* n_s T(\mathbf{E})$ est dans S. Par conséquent, pour tout σ dans Γ, l'automorphisme σ^* stabilise bien S.

Preuve de (ii). Passons maintenant au problème des adjacences dans les immeubles. Si $hB_\epsilon(\mathbf{E})$ et $h'B_\epsilon(\mathbf{E})$ sont deux chambres s-adjacentes de $\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E})$, on a par définition $h^{-1}h' \in B_\epsilon(\mathbf{E})n_s B_\epsilon(\mathbf{E})$. Pour tout σ de Γ, il existe alors $t = \sigma^* s$ dans S tel que $\sigma^* n_s T(\mathbf{E}) = n_t T(\mathbf{E})$, donc $\sigma^* h^{-1}.\sigma^* h' = \sigma^*(h^{-1}h')$ appartient à $B_\epsilon(\mathbf{E})n_t B_\epsilon(\mathbf{E})$. Autrement dit, $\sigma^*\left(hB_\epsilon(\mathbf{E})\right)$ et $\sigma^*\left(h'B_\epsilon(\mathbf{E})\right)$ sont des chambres t-adjacentes, avec $t = \sigma^* s$. □

Les éléments de $G(\mathbf{E})$ lui-même sont des automorphismes stricts d'immeubles qui respectent toutes les adjacences. En oubliant la rectification par un élément de $G(\mathbf{E})$, on obtient donc une permutation σ de l'ensemble $G(\mathbf{E})/B_\epsilon(\mathbf{E})$ sous-jacent à chaque immeuble $\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E})$ pour chaque σ.

COROLLAIRE. — (i) *Les permutations σ de $G(\mathbf{E})/B_+(\mathbf{E})$ et $G(\mathbf{E})/B_-(\mathbf{E})$ ne respectent éventuellement pas les fonctions distance $d_\epsilon : \mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E}) \to W$, mais respectent les fonctions composées $\ell \circ d_\epsilon : \mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E}) \to \mathbf{N}$.*
(ii) *Pour ce qui est de la codistance, on a respect de $\ell \circ d^*$ mais pas de la codistance elle-même. En particulier, une paire de chambres opposées est envoyée sur une paire de chambres opposées par tout élément σ de Γ.*

REMARQUE. — Plus précisément, les applications d_+, d_- et d^* sont W-équivariantes pour les actions $*$ de Γ sur $\mathcal{I}_+(\mathbf{E}) \times \mathcal{I}_+(\mathbf{E})$, $\mathcal{I}_-(\mathbf{E}) \times \mathcal{I}_-(\mathbf{E})$, $\mathcal{I}_+(\mathbf{E}) \times \mathcal{I}_-(\mathbf{E}) \sqcup \mathcal{I}_-(\mathbf{E}) \times \mathcal{I}_+(\mathbf{E})$ et W.

Démonstration. Preuve de (i). On vient de voir que si $d_\epsilon(gB_\epsilon(\mathbf{E}), hB_\epsilon(\mathbf{E})) = w$, alors $d_\epsilon(\sigma^* gB_\epsilon(\mathbf{E}), \sigma^* hB_\epsilon(\mathbf{E})) = \sigma^* w$. Mais puisque $G(\mathbf{E})$ opère par isométries des distances combinatoires, on a:

$$d_\epsilon(\sigma g B_\epsilon, \sigma h B_\epsilon) = d_\epsilon(g_\sigma \sigma^*(gB_\epsilon), g_\sigma \sigma^*(hB_\epsilon)) = d_\epsilon(\sigma^* gB_\epsilon, \sigma^* hB_\epsilon) = \sigma^* w.$$

Preuve de (ii). C'est le même raisonnement en remplaçant les doubles classes de Bruhat par les doubles classes de Birkhoff. □

11.3.3. Groupe de Galois comme groupe d'isométries

C'est surtout la version métrique du résultat précédent qui nous intéresse, car bien que les adjacences ne soient pas respectées par le groupe de Galois, la métrique des chemins de la réalisation métrique de chaque immeuble va elle être conservée.

PROPOSITION. — *Soit G un $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody presque déployé sur $\mathbf{K}$, déployé sur $\mathbf{E}$, avec $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ normale et $\mathbf{E}$ corps infini. Alors, le groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{K})$ est un groupe d'isométries de la réalisation métrique $|\mathcal{I}_+(\mathbf{E})|_{\text{mét}}$ (respectivement $|\mathcal{I}_-(\mathbf{E})|_{\text{mét}}$) de l'immeuble positif (respectivement négatif) du jumelage de $G(\mathbf{E})$.*

Démonstration. On a tout fait pour se mettre dans les conditions d'application de la proposition (4.6.3) pour chacun des immeubles positif et négatif. □

Il reste maintenant à examiner le dernier volet des conditions d'application du théorème de point fixe de Bruhat-Tits, à savoir une condition d'action bornée.

11.3.4. Orbites finies sous Galois

Pour pouvoir appliquer le théorème de point fixe, la dernière condition à vérifier est que le groupe d'isométries considéré est borné. Nous allons voir que dans ce cas précis d'une action de Galois provenant d'une $\mathbf{K}$-forme presque déployée, les orbites sont bornées et même finies.

PROPOSITION. — *Soit G un $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody presque déployé sur $\mathbf{K}$, déployé sur $\mathbf{E}$, avec $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ normale et $\mathbf{E}$ corps infini. Alors le groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{K})$ opère sur les réalisations métriques des immeubles positifs et négatifs du jumelage par un groupe borné d'isométries. Plus précisément, l'orbite de tout point de $|\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E})|_{\text{mét}}$ sous Γ est finie.*

Démonstration. Il existe un sous-groupe V ouvert d'indice fini de Γ tel que V fixe une base donnée de $\Lambda^{\check{}}_{\mathbf{E}}$ et chaque vecteur e_s et f_s pour s dans S. Soit σ dans V, on regarde $\mathrm{Ad}(\sigma T(\mathbf{E}))$. C'est un sous-groupe de $\mathrm{Ad}G(\mathbf{E})$ formé d'automorphismes diagonaux dans une même base que $\mathrm{Ad}T(\mathbf{E})$, d'après la compatibilité entre les automorphismes rectifiés du groupe G et de la $\mathbf{E}$-algèbre $\left(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\right)_{\mathbf{E}}$. Par conséquent, $T(\mathbf{E})$ et $\sigma T(\mathbf{E})$ sont des sous-groupes Ad-diagonalisables de $G(\mathbf{E})$ relativement à une même base. Par maximalité, il coïncident (10.4.1). On a donc pour tout σ de V: $T(\mathbf{E}) = \sigma T(\mathbf{E})$. La stabilité de $T(\mathbf{E})$ sous σ pour tout σ de V, implique plusieurs points. D'abord, on a aussi $\sigma(N(\mathbf{E})) = N(\mathbf{E})$ pour tout σ de V, puisque $N(\mathbf{E})$ est le stabilisateur de $T(\mathbf{E})$ dans $G(\mathbf{E})$. On a donc directement – sans rectification – une action de σ sur le groupe de Weyl W. L'automorphisme σ est son propre rectifié, donc on peut utiliser la stabilité des groupes radiciels relatifs à $T(\mathbf{E})$ qui s'ensuit, et le fait que les automorphismes σ de $\left(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\right)_{\mathbf{E}}$ et $G(\mathbf{E})$ sont liés, dans le sens où ils induisent une même permutation des racines réelles. Ceci implique:

$$\forall \sigma \in V \quad \forall s \in S \quad \sigma U_{a_s}(\mathbf{E}) = U_{a_s}(\mathbf{E}) \quad \text{et} \quad \sigma U_{-a_s}(\mathbf{E}) = U_{-a_s}(\mathbf{E}).$$

Toujours parce que ces automorphismes sont liés et parce que $\sigma e_s = e_s$ et $\sigma f_s = f_s$ (et par conséquent: $k_{a_s} = k_{-a_s} = 1$ pour tout s de S avec les notations de (11.2.5)), on a donc:

$$\forall l \in \mathbf{E}^{\times} \quad \sigma(n_s(l)) = \sigma(u_{a_s}(l)).\sigma(u_{-a_s}(l^{-1})).\sigma(u_{a_s}(l)) = u_{a_s}(\sigma l).u_{-a_s}(\sigma l^{-1}).u_{a_s}(\sigma l) = n_s(\sigma l).$$

Autrement dit, $\sigma(n_s T(\mathbf{E})) = s$, et donc l'action sur W définie en (11.2.2) et (11.3.2) est triviale. Donc, pour chaque racine réelle $a = wa_s$ ($w \in W$, $s \in S$), le sous-groupe radiciel correspondant $U_a(\mathbf{E}) = n_w U_{a_s}(\mathbf{E}) n_w^{-1}$ est stable sous V. En particulier, on sait déjà que tout σ de V stabilise $B_+(\mathbf{E})$ et $B_-(\mathbf{E})$.

Fixons maintenant un point x de $|\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E})|_{\text{mét}}$. On veut montrer que l'orbite de x sous Γ est finie. Il suffit de montrer que toute chambre possède un nombre fini de transformées sous Γ dans $|\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E})|_{\text{mét}}$, puisque de chambre à chambre un automorphisme σ établit une isométrie naturellement définie par un automorphisme de diagramme σ^*. Partons donc d'une chambre de $|\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{E})|_{\text{mét}}$. On sait qu'on peut l'écrire $u_w.L$ pour $w \in W$ la distance combinatoire de cette chambre à la (réalisation de la) chambre standard L et pour u_w dans $U_w(\mathbf{E})$. On sait que pour tout σ dans V, $\sigma.L = L$, et qu'on peut écrire $u_w = u_{a_1}(k_1)u_{a_2}(k_2)...u_{a_{\ell(w)}}(k_{\ell(w)})$ avec k_i dans $\mathbf{E}$, pour chaque i. Puisque les automorphismes σ sont liés, on a d'après (11.2.5):

$$\sigma(u_w) = u_{a_1}(k_{a_1}(\sigma k_1))u_{a_2}(k_{a_2}(\sigma k_2))...u_{a_{\ell(w)}}(k_{a_{\ell(w)}}(\sigma k_{\ell(w)})),$$

et même $k_{a_i} = 1$ pour tout i d'après ce qui précède. Il existe donc un sous-groupe d'indice fini de Γ inclus dans V, tel que chacun des éléments $u_{a_i}(k_i)$ est fixe sous les éléments de U. Ceci prouve que la chambre $u_w.L$ a au plus $\#(\Gamma/U)(< \infty)$ transformées, et donc que l'orbite de tout point sous Galois est finie. □

REMARQUE. — On a également montré que l'action $*$ sur W ou Q ou $\Lambda^{\check{}}_{\mathbf{E}}$ est continue (son noyau est ouvert d'indice fini).

Cette proposition achève les préparatifs d'application du théorème de point fixe. La section suivante est en quelque sorte la première étape de la descente galoisienne.

11.3.5. Conséquence du théorème de point fixe de Bruhat-Tits

Le résultat est une application classique et simple, mais d'une importance capitale pour la mise en place de la descente galoisienne. Puisque dans les réalisations métriques des immeubles, seules les facettes de type sphériques sont représentées, il est logique d'appeler *partie équilibrée* de $|\mathcal{I}_+(\mathbf{E})|_{\text{mét}} \sqcup |\mathcal{I}_-(\mathbf{E})|_{\text{mét}}$ une partie rencontrant les moitiés positive et négative de cet espace, contenue dans les réalisations de deux appartements jumeaux et recouverte par un nombre fini de facettes (voir (5.4.4) pour la réalisation conique).

THÉORÈME. — *Soit G un $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody presque déployé sur $\mathbf{K}$, déployé sur $\mathbf{E}$, avec $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ normale et $\mathbf{E}$ corps infini.*

(i) *Il existe des points fixes sous Galois dans les immeubles métriques $|\mathcal{I}_+(\mathbf{E})|_{\text{mét}}$ et $|\mathcal{I}_-(\mathbf{E})|_{\text{mét}}$. Les facettes ouvertes les contenant sont donc stables sous Galois, ainsi que leur fixateur $\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{E})$ dans $G(\mathbf{E})$.*
(ii) *On suppose en outre que $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ est galoisienne. Pour toute partie équilibrée Ω fixe sous Galois, le groupe abstrait $\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{E})$ est stable sous Galois et le sous-espace vectoriel de dimension finie $W(\Omega)_{\mathbf{E}}$ est défini sur $\mathbf{K}$, ce qui confère à $\mathrm{GL}\big(W(\Omega)_{\mathbf{E}}\big)$ une structure de $\mathbf{K}$-groupe algébrique. La flèche $\mathrm{Ad}_\Omega : \mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{E}) \to \mathrm{GL}\big(W(\Omega)_{\mathbf{E}}\big)$ est Γ-équivariante, et l'image de Ad_Ω est un $\mathbf{K}$-sous-groupe de $\mathrm{GL}\big(W(\Omega)_{\mathbf{E}}\big)$.*

REMARQUES. — 1. Le second volet du théorème est non vide en vertu du premier. La réunion de deux points fixes de signes opposés est en effet une partie équilibrée, puisqu'on peut toujours trouver un appartement jumelé les contenant. Ce point (ii) est une version rationnelle de l'étude des flèches Ad_Ω commencée à la section (10.3) dans le cas déployé.

2. La preuve de (ii) montre aussi que l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}(\Omega)_{\mathbf{E}}$ est définie sur $\mathbf{K}$.

Démonstration. Preuve de (i). L'existence de points fixes de type sphérique pour chaque signe provient de l'application du théorème de point fixe pour Γ vu comme groupe d'isométries de $|\mathcal{I}_+(\mathbf{E})|_{\text{mét}}$ et $|\mathcal{I}_-(\mathbf{E})|_{\text{mét}}$, en vertu de (11.3.3) et (11.3.4).

Ensuite, la compatibilité entre l'action de Galois sur le groupe et sur l'immeuble fait conclure pour la partie concernant les groupes de l'énoncé. En effet, si g est dans le fixateur de F_ϵ, alors pour tout σ de Γ, on a: $\sigma(gF_\epsilon) = \sigma F_\epsilon$, et donc $\sigma(g)(\sigma F_\epsilon) = \sigma(g)F_\epsilon$, d'où: $\sigma(g)F_\epsilon = F_\epsilon$. Par conséquent, $\sigma(g)$ fixe encore F_ϵ, et on a donc la stabilité de $\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{E})$ sous Γ.

Preuve de (ii). On fait opérer un élément judicieux de $G(\mathbf{E})$ pour se ramener au cas où l'appartement $\mathbf{A}$ attaché à $T(\mathbf{E})$ contient Ω. L'espace vectoriel $W(\Omega)_{\mathbf{E}}$ que nous considérons est celui qui a été défini en (10.3.1), soit l'espace Q-gradué engendré par la somme

$$\mathrm{Vect}\Big(\sum_{c\in -\Delta^u(\Omega)} \mathrm{Ad}\big(\mathrm{Fix}(\Omega)\big)e_c\Big) + \mathfrak{p}(\Omega)_{\mathbf{E}}.$$

Donnons-nous σ dans Γ. $\sigma T(\mathbf{E})$ est un sous-groupe de Cartan de $G(\mathbf{E})$ inclus dans $\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{E})$. D'après l'étude des sous-groupes de Cartan de $\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{E})$ (10.4.4), il existe un élément g de $\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{E})$ tel que $\sigma T(\mathbf{E}) = gT(\mathbf{E})g^{-1}$. On peut donc rectifier σ par un élément de $\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{E})$, de façon à avoir $\bar{\sigma}T(\mathbf{E}) = T(\mathbf{E})$. Alors, un sous-groupe radiciel par rapport à $T(\mathbf{E})$ de $\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{E})$ va être envoyé sur un sous-groupe du même type par (SGR):

$$\forall a\in\Delta(\Omega) \quad \bar{\sigma}a\in\Delta(\Omega).$$

Or, les automorphismes $\bar{\sigma}$ de $\left(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\right)_{\mathbf{E}}$ et $G(\mathbf{E})$ sont liés, donc $\bar{\sigma}\mathbf{E}e_a = \mathbf{E}e_{\bar{\sigma}a}$, soit encore

$$(\mathrm{Ad}g^{-1} \circ \sigma)(\mathbf{E}e_a) = \mathbf{E}e_{\bar{\sigma}a}.$$

On a donc: $\sigma(\mathbf{E}e_a) = \mathrm{Ad}g(\mathbf{E}e_{\bar{\sigma}a})$. Et puisque g est dans $\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{E})$, d'après la définition de la représentation adjointe par des exponentielles de l'action adjointe d'algèbres de Lie, on a: $\sigma(\mathbf{E}e_a) = \mathrm{Ad}g.\mathbf{E}e_{\bar{\sigma}a} \subset \mathfrak{p}(\Omega)_{\mathbf{E}}$. Pour ce qui est de $\Lambda\check{}_{\mathbf{E}}$, on sait que $\bar{\sigma}$ respecte le terme de degré 0 de la Q-graduation. Donc $\bar{\sigma}\Lambda\check{}_{\mathbf{E}} = \Lambda\check{}_{\mathbf{E}}$, d'où $\sigma\Lambda\check{}_{\mathbf{E}} = \mathrm{Ad}g.\Lambda\check{}_{\mathbf{E}} \subset \mathfrak{p}(\Omega)_{\mathbf{E}}$. Cela prouve la stabilité sous Galois de $\mathfrak{p}(\Omega)_{\mathbf{E}}$. Pour la stabilité de $W(\Omega)_{\mathbf{E}}$, il reste à considérer le cas d'un terme Q-homogène v d'un élément de la forme $\mathrm{Ad}h.e_c$, avec c dans $-\Delta^u(\Omega)$ et h dans $\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{E})$. C'est un terme de la décomposition en termes Q-homogènes $\sum_i v_i$ de $\mathrm{Ad}h.e_c$. En appliquant $\bar{\sigma}$ à cette décomposition, on obtient

$$\textstyle\sum_i \bar{\sigma}(v_i) = \bar{\sigma}\big(\mathrm{Ad}h.e_c\big) = \mathrm{Ad}\big(g^{-1}\sigma(h)g\big)\bar{\sigma}(e_c)$$

$-\Delta^u(\Omega)$ est stable sous $\bar{\sigma}$ et $\sigma(h)$ est dans $\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{E})$, donc par respect de la Q-graduation par $\bar{\sigma}$, $\bar{\sigma}(v)$ est un terme Q-homogène d'un élément de $W(\Omega)_{\mathbf{E}}$. D'où $\sigma(v) = \mathrm{Ad}g.\bar{\sigma}(v) \in W(\Omega)_{\mathbf{E}}$.

Pour le corps de définition, il suffit d'appliquer les critères galoisiens classiques de rationnalité ([Bor90], (AG.14) p.29 ou [Ser94], (III.1.1) p.128), en constatant que $W(\Omega)_{\mathbf{E}}$ est Galois-stable dans $\left(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\right)_{\mathbf{E}}$ définie sur $\mathbf{K}$, avec $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ galoisienne.

La Γ-équivariance de la flèche Ad_Ω est évidente puisqu'elle est déduite de celle de Ad. Cette Γ-équivariance implique que l'image $\mathrm{Ad}_\Omega\big(\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{E})\big)$ est Galois-stable dans le $\mathbf{K}$-groupe $\mathrm{GL}\big(W(\Omega)_{\mathbf{E}}$ et le fait que $\mathrm{Ad}_\Omega\big(\mathrm{Fix}(\Omega)(\mathbf{E})\big)$ est défini sur $\mathbf{K}$, à nouveau par les critères galoisiens classiques de rationnalité. □

12. Descente galoisienne

Nous allons gérer la descente en termes d'actions du groupe de Galois. Pour pouvoir faire cela, il faut s'assurer que cette action ne fait pas perdre d'information, ce qui revient à se restreindre aux extensions séparables. En fait, la combinaison de deux théorèmes classiques sur les **K**-groupes réductifs assure que cette restriction est inutile dans le cas algébrique. Un théorème de Cartier affirme qu'un **K**-groupe réductif est déployé sur **K** dès qu'il possède un tore maximal déployé sur **K**. Enfin, un théorème de Grothendieck établit l'existence d'un tore défini sur **K** dans un tel groupe, qui va donc se déployer sur une extension séparable finie d'après la théorie des groupes diagonalisables.

On procède à une descente par voie géométrique (ou immobilière). Cela nécessite de nouvelles vérifications de compatibilités entre les actions de Galois et du groupe de Kac-Moody sur la réalisation – conique, cette fois – de l'immeuble jumelé. Les résultats intermédiaires comme les conjugaisons rationnelles sont énoncés dans le vocabulaire des immeubles. Le résultat final est une propriété de permanence de la structure de donnée radicielle jumelée entière (12.6.3), mais un corollaire de l'approche géométrique intermédiaire (12.4.3) est l'obtention de réalisations géométriques de nouveaux specimens d'immeubles jumelés presque déployés, à l'intérieur des immeubles jumelés déployés (12.4.4).

La référence pour ce chapitre est la paire d'articles de G. Rousseau [Rou89] et [Rou90], où est traité le cas de la caractéristique 0 et des groupes de Kac-Moody définis comme groupes d'automorphismes d'algèbres de Kac-Moody classiques.

Dans tout ce qui suit, $\overline{\mathbf{K}}$ désigne une clôture algébrique du corps **K**, et $\mathbf{K}_s$ la fermeture séparable de **K** dans $\overline{\mathbf{K}}$. On peut comme d'habitude se limiter aux **K**-groupes de Kac-Moody dont le foncteur en groupes est défini simplement sur la catégorie **K**-ext des extensions de corps de **K** dans $\overline{\mathbf{K}}$ ou $\mathbf{K}_s$.

12.1. Hypothèse de descente. K-sous-groupes

Revenons au cas des groupes de Kac-Moody, pour lesquels on veut justement trouver un analogue de la préparation à la descente précitée. Contrairement à ce qui se passe en dimension finie, nous devons faire l'hypothèse de déploiement sur la clôture séparable (hypothèse évidemment vide en caractéristique 0, sur les corps finis, et plus généralement sur les corps parfaits). Avant cela, il faut introduire un peu de vocabulaire supplémentaire sur les **K**-groupes de Kac-Moody et leurs sous-groupes.

12.1.1. Hypothèse de descente

Commençons par préciser une convention.

CONVENTION. — *Pour toute sous-extension* $\mathbf{E}/\mathbf{K}$, $G(\mathbf{E})$ *désignera le groupe des points* **E**-rationnels *de* G, *c'est-à-dire* $\mathcal{G}(\mathbf{E})$.

Cette convention fait simplement jouer un rôle secondaire à la notation $\mathcal{G}$ par rapport à la définition (11.1.3). Comme on l'a déjà dit, nous allons faire l'hypothèse de déploiement sur la fermeture séparable.

HYPOTHÈSE. — *Dans tout ce qui suit, $\mathcal{G}$ désignera un* $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody, *c'est-à-dire le foncteur d'une $\mathbf{K}$-forme algébrique $(\mathcal{G},\mathcal{U}_{\mathbf{K}})$, vérifiant les* conditions de descente *suivantes.*

(DCS1) *$\mathcal{G}$ est déployé sur la fermeture séparable $\mathbf{K}_s$ (de $\mathbf{K}$ dans $\overline{\mathbf{K}}$).*
(DCS2) *Pour toute sous-extension séparable $\mathbf{E}/\mathbf{K}$, $G(\mathbf{K}_s)^{\mathrm{Gal}(\mathbf{K}_s/\mathbf{E})} = G(\mathbf{E})$.*

REMARQUES. — 1. L'hypothèse (DCS1) permet d'appliquer les résultats du chapitre 11 avec $\mathbf{E} = \mathbf{K}_s$, ce que l'on va faire. En fait, on pourrait travailler à partir de n'importe quelle extension galoisienne $\mathbf{E}/\mathbf{K}$, avec $\mathbf{E}$ infini et déployant G.

2. L'hypothèse (DCS2) aurait plutôt sa place dans la définition des formes algébriques, mais j'ignore comment le prouver pour la forme déployée sans faire usage du théorème (12.4.3). La preuve de ce fait est donnée au lemme (13.2.4).

Nous allons maintenant adapter quelques arguments du chapitre 11 concernant les réalisations métriques $|\mathcal{I}_\epsilon|_{\text{mét}}$ ($\epsilon = \pm$), pour décrire l'action du groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}_s/\mathbf{K})$ sur $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\text{co}}$.

12.1.2. Action de Galois sur la réalisation conique du jumelage séparable

Nous nous plaçons désormais dans le cas où la $\mathbf{K}$-forme $(\mathcal{G},\mathcal{U}_{\mathbf{K}})$ du groupe de Kac-Moody considéré vérifie la condition (DCS). Alors, la description de l'action du groupe de Galois Γ sur $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\text{co}}$ est complètement calquée sur celle qu'on définit en (4.6.3) sur une réalisation métrique $|\mathcal{I}_\epsilon|_{\text{mét}}$ à partir d'un automorphisme cohérent. On va reprendre le raisonnement pour cette situation, au moins dans la première partie qui concerne les immeubles simples.

Précisons. On se donne un élément de Galois σ. On a dévissé l'action de σ dans le cas d'une forme presque déployée: on sait qu'en rectifiant l'automorphisme σ de G par un automorphisme intérieur, on obtient un automorphisme $\sigma^* = \mathrm{int}g_\sigma^{-1} \circ \sigma$ qui stabilise la standardisation $(\mathbf{A}, C, -C)$, en induisant un automorphisme de diagramme sur $\mathbf{A}_+$ et $\mathbf{A}_-$, préservant la codistance restreinte à $(\mathbf{A}_+ \times \mathbf{A}_-) \sqcup (\mathbf{A}_- \times \mathbf{A}_+)$. L'action de σ sur la réalisation conique de $\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{K}_s)$ est définie par $\sigma[gB_\epsilon(\mathbf{K}_s), x] = [\sigma(gB_\epsilon(\mathbf{K}_s)), \sigma^* x]$. On a tout fait pour que cette action soit bien définie et comme pour la réalisation métrique, on peut vérifier qu'on définit en fait une action du groupe de Galois tout entier sur $|\mathcal{I}_+(\mathbf{K}_s)|_{\text{co}}$ et $|\mathcal{I}_-(\mathbf{K}_s)|_{\text{co}}$ (voir (11.3.1) et (11.3.2)).

Passons maintenant aux vérifications propres à la situation jumelée, non nécessaires dans le cas métrique. Le fait que Γ fixe le point origine positif $[gB_+(\mathbf{K}_s), O_{\overline{C}}]$ et le point origine négatif $[gB_-(\mathbf{K}_s), O_{\overline{C}}]$ permet de passer au joint et d'obtenir une action de Γ sur $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\text{co}}$. On reprend l'espace vectoriel $V = \bigoplus_{s\in S} \mathbf{R}a_s$ dans le dual duquel est défini le cône de Tits $\overline{C}$. Rappelons que puisqu'on est dans le cas Kac-Moody, les lettres grecques sont systématiquement remplacées par des lettres latines. Ceci étant dit, on peut systématiquement renvoyer à (5.1) pour information sur le cône de Tits. Soit maintenant σ^* un automorphisme de diagramme, qu'on voit comme une permutation de S qui respecte les symétries du diagramme de Coxeter de (W, S). On définit σ l'automorphisme linéaire de V défini par la permutation des vecteurs de base $a_s \mapsto a_{\sigma^* s}$. Son automorphisme transposé stabilise le double cône $\overline{C} \cup -\overline{C}$, permutant

les chambres et les s-adjacences par l'automorphisme de diagramme σ^*. Ceci justifie qu'on désigne encore par σ^* l'automorphisme cohérent du jumelage mince $\overline{\mathcal{C}} \cup -\overline{\mathcal{C}}$ qu'on a ainsi obtenu. Enfin, l'automorphisme σ^* du groupe de Weyl W peut aussi se lire géométriquement sur $\overline{\mathcal{C}} \cup -\overline{\mathcal{C}}$. Il suffit de poser pour tout w de $W(\subset \mathrm{GL}(V^*))$: $\sigma^*(w) := \sigma^* w (\sigma^*)^{-1}$. On se donne maintenant une identification vectorielle:

$$\overline{\mathcal{C}} \cup -\overline{\mathcal{C}} \to g\ |\mathbf{A}|_{\mathrm{co}}$$

$$\epsilon w x \mapsto [g w B_\epsilon(\mathbf{K}_s), x],$$

pour un appartement $g\ |\mathbf{A}|_{\mathrm{co}}$ de $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$. On compose cette flèche avec la permutation σ de $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$ définie ci-dessus pour obtenir:

$$\overline{\mathcal{C}} \cup -\overline{\mathcal{C}} \to g\ |\mathbf{A}|_{\mathrm{co}} \to \sigma(g\ |\mathbf{A}|_{\mathrm{co}}) = \sigma(g) g_\sigma\ |\mathbf{A}|_{\mathrm{co}}$$

$$\epsilon w x \mapsto [g w B_\epsilon(\mathbf{K}_s), x] \mapsto [\sigma(g) g_\sigma \sigma^*(w) B_\epsilon(\mathbf{K}_s), \sigma^*(x)].$$

On obtient de cette façon un automorphisme cohérent d'immeubles jumelés minces, qui préserve l'opposition et permute les s-adjacences par l'automorphime de diagramme σ^*. Cet automorphisme se factorise à travers l'automorphisme géométrique σ^* défini précédemment sur $\overline{\mathcal{C}} \cup -\overline{\mathcal{C}}$ et l'application obtenue de $\overline{\mathcal{C}} \cup -\overline{\mathcal{C}}$ vers $\sigma(g\ |\mathbf{A}|_{\mathrm{co}})$ est l'identification vectorielle $\epsilon w x \mapsto [\sigma(g) g_\sigma w B_\epsilon(\mathbf{K}_s), x]$.

En résumé, pour chaque identification vectorielle $\overline{\mathcal{C}} \cup -\overline{\mathcal{C}} \to g\ |\mathbf{A}|_{\mathrm{co}}$ et chaque élément σ du groupe de Galois, on a le carré commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathcal{C}} \cup -\overline{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\sim} & g\ |\mathbf{A}|_{\mathrm{co}} \\ {\scriptstyle \sigma^*}\big\downarrow\wr & & \wr\big\downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ \overline{\mathcal{C}} \cup -\overline{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\sim} & \sigma(g\ |\mathbf{A}|_{\mathrm{co}}) \end{array}$$

où les flèches verticales sont des automorphismes cohérents d'immeubles jumelés minces, et les flèches horizontales sont des identifications vectorielles. On résume cela en disant que le groupe de Galois *opère vectoriellement* d'appartement jumelé à appartement jumelé.

12.1.3. K-sous-groupes

Nous pouvons enfin donner les définitions relatives aux **K**-sous-groupes, qui sont à nouveau justifiées par des critères galoisiens de rationnalité.

DÉFINITION. — (i) *Soit H un sous-groupe du groupe $G(\mathbf{K}_s)$ des points séparables de la* **K**-*forme presque déployée $(\mathcal{G}, \mathcal{U}_{\mathbf{K}})$, vérifiant* (DCS). *Alors, on dit que H est* défini sur **K** *(ou est un* **K**-sous-groupe*) s'il est stable par le groupe de Galois.*
(ii) *Un* **K**-*sous-groupe parabolique est un sous-groupe parabolique de $G(\mathbf{K}_s)$ stable sous Galois.*

REMARQUES. — 1. Un $\mathbf{K}$-sous-groupe parabolique est évidemment un $\mathbf{K}$-sous-groupe.

2. Notons immédiatement la différence entre être Galois-stable (c'est-à-dire stable sous l'action du groupe de Galois) et Galois-fixe (c'est-à-dire fixe sous l'action du groupe de Galois). Précisément:

DÉFINITION. — *Soit H un $\mathbf{K}$-sous-groupe de G. Alors, le* groupe des points rationnels *de H est le groupe des points Galois-fixes de $H(\subset G(\mathbf{K}_s))$. On le note $H(\mathbf{K})$.*

REMARQUES. — 1. Pour l'instant on n'a pas de moyen de savoir que certains $\mathbf{K}$-sous-groupes possèdent des points rationnels.

2. Ce choix de définition des points rationnels de sous-groupes est en accord avec la définition des points rationnels de G tout entier, en vertu de l'axiome (DCS2).

Nous allons commencer à dévisser l'action de Galois sur la réalisation conique du jumelage d'une forme presque déployée vérifiant la condition de descente (DCS).

12.2. Existence d'appartements stables sous le groupe de Galois

K-objets immobiliers

Expliquons d'abord en quoi l'existence d'appartements Galois-stables est précieuse pour ce qui va suivre. Partons de cette remarque: les raisonnements géométriques de descente font un usage permanent de la notion de convexité. En particulier, on a souvent besoin de justifier l'existence de points fixes sous Galois, et pour cela on prend un isobarycentre de l'enveloppe convexe de points fixes déjà mis en évidence. Ce raisonnement n'est possible que si on est sûr que le groupe de Galois opère affinement sur une partie possédant une structure vectorielle et contenant ces points. Étant donnés x et y deux points de $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$, un élément de Galois σ enverra en général un appartement jumelé $\mathbf{A}$ contenant x et y sur un autre possédant la même propriété, sans stabiliser $\mathbf{A}$ *a priori*. Dans cette situation, l'usage de la convexité est difficile. L'existence d'appartements jumelés Galois-stables contenant x et y l'autorise.

On va se ramener à un argument de rationnalité dans les groupes algébriques pour prouver ce point, ce qui permettra de définir les premiers $\mathbf{K}$-objets immobiliers nécessaires à la mise en place d'une structure d'immeuble à partir de $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$.

12.2.1. Existence d'appartements stables sous Galois

Commençons par une convention de notation.

NOTATION. — *Si $\Omega^\natural$ est une partie Galois-fixe de $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$, Ω désigne l'ensemble Galois-stable des facettes qui la recouvrent.*

Nous aurons besoin d'un résultat plus fort que celui cité dans la justification préliminaire, qui concernait seulement deux points fixes.

THÉORÈME. — *Soit $(\mathcal{G},\mathcal{U}_{\mathbf{K}})$ un $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody, déployé sur la clôture séparable $\mathbf{K}_s$, de jumelage géométrique associé $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$. Soit $\Omega^\natural$ une partie équilibrée de $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$ et fixe sous l'action du groupe de Galois Γ. Alors, il existe un appartement jumelé contenant Ω et (globalement) stable sous l'action du groupe de Galois.*

Démonstration. Pour utiliser des résultats concernant les groupes algébriques, nous allons bien sûr utiliser en permanence les dictionnaires entre sous-groupes de Cartan et appartements jumelés (10.4.4). La condition de descente (DCS) permet d'appliquer le théorème (11.3.5). Par conséquent, $W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$ ainsi que $\mathrm{GL}\big(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}\big)$ sont définis sur $\mathbf{K}$, et $\mathrm{Ad}_\Omega\big(\mathrm{Fix}(\Omega)\big)$ est un $\mathbf{K}$-sous-groupe de ce dernier (11.3.5). Par un théorème de Grothendieck, $\mathrm{Ad}_\Omega\big(\mathrm{Fix}(\Omega)\big)$ possède un tore maximal défini sur $\mathbf{K}$ ([Bor90], théorème (18.2) p.218). Ceci fournit un sous-groupe de Cartan Galois-stable et inclus dans $\mathrm{Ad}_\Omega\big(\mathrm{Fix}(\Omega)\big)$, et donc un appartement jumelé Galois-stable et contenant Ω par le dictionnaire précité (10.4.4). □

Répétons que l'intérêt essentiel de ce résultat est de pouvoir se ramener à l'inclusion de parties Galois-fixes dans des appartements Galois-stables, ce qui autorise des raisonnements géométriques puisque le groupe de Galois y opère vectoriellement.

12.2.2. K-objets immobiliers

Nous pouvons maintenant définir une série d'objets formés de points fixes sous Galois dans le jumelage géométrique $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$. Pour l'instant, les termes immobiliers employés sont purement suggestifs. Le point de départ est donné par la définition des $\mathbf{K}$-*appartements*.

DÉFINITION. — (i) *Un* $\mathbf{K}$-appartement *est un sous-espace de $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$ Galois-fixe générique, et maximal pour ces deux propriétés.*
(ii) *Le $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody G est dit* $\mathbf{K}$-isotrope *si son jumelage associé $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$ possède un sous-espace générique Galois-fixe.*

Le résultat qui précède montre que les $\mathbf{K}$-groupes de Kac-Moody déployés sur $\mathbf{K}_s$ sont $\mathbf{K}$-isotropes. En effet, le théorème de point fixe de Bruhat-Tits appliqué à chacun des deux immeubles assure l'existence de points Galois-fixes de type sphérique (11.3.5), d'où l'existence de parties équilibrées Galois-fixes et d'appartements Galois-stables qui les contiennent. Sur ces appartements, le groupe de Galois opère vectoriellement, il suffit donc de passer au lieu des points fixes dans ces appartements pour obtenir des sous-espaces génériques Galois-fixes. La mise en place de tous les autres $\mathbf{K}$-objets immobiliers découle de cela puisqu'on peut faire appel aux constructions de la section (5.5). La situation est cependant plus riche dans le sens où l'on disposera en général d'une collection de sous-espaces génériques Galois-fixes, et pas d'un seul tel sous-espace.

DÉFINITION. — (i) *Une* $\mathbf{K}$-facette *(respectivement* $\mathbf{K}$-facette sphérique*) est l'ensemble des points fixes d'une facette (respectivement facette sphérique) Galois-stable de $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$.*
(ii) *Une* $\mathbf{K}$-chambre *est une $\mathbf{K}$-facette sphérique d'adhérence maximale.*
(iii) *Une* $\mathbf{K}$-racine *d'un $\mathbf{K}$-appartement $\mathbf{A}_{\mathbf{K}}$ est une racine relative à $\mathbf{A}_{\mathbf{K}}$.*
(iv) *Un* $\mathbf{K}$-demi-appartement *d'un $\mathbf{K}$-appartement $\mathbf{A}_{\mathbf{K}}$ est un demi-appartement relatif à $\mathbf{A}_{\mathbf{K}}$. On notera donc $D(a^\natural)$ le $\mathbf{K}$-demi-appartement associé à une $\mathbf{K}$-racine $a^\natural$.*
(v) *Un* $\mathbf{K}$-mur *d'un $\mathbf{K}$-appartement $\mathbf{A}_{\mathbf{K}}$ est un mur relatif à $\mathbf{A}_{\mathbf{K}}$.*

REMARQUES. — 1. On verra plus tard (12.2.4) qu'une $\mathbf{K}$-facette d'adhérence maximale est une $\mathbf{K}$-chambre.

2. D'après (11.3.5) et la correspondance bijective entre facettes sphériques des deux réalisations (conique et métrique) d'un immeuble, il existe des $\mathbf{K}$-facettes sphériques dans les immeubles positif et négatif. En particulier, le théorème (12.2.1) est un résultat non vide.

Justification. Une $\mathbf{K}$-facette est un cône convexe non vide. La nature conique convexe découle directement de la définition de l'action de Γ (12.1.1). Pour justifier qu'une $\mathbf{K}$-facette est non vide, on remarque que sur une facette Galois-stable, Γ opère par permutations des types suivant l'action étoile. L'action se fait par un quotient fini de Γ (11.3.4). On construit un point fixe en prenant l'isobarycentre de l'orbite de n'importe quel point. Cette description des $\mathbf{K}$-facettes permet de parler de leur dimension. □

DÉFINITION. — *Soient $\mathbf{A_K}$ un $\mathbf{K}$-appartement et $\mathbf{A}$ un appartement jumelé qui le contient.*

(i) *Une $\mathbf{K}$-racine (respectivement un $\mathbf{K}$-demi-appartement) est* réel(le) *si son mur relatif est un sous-espace générique.*
(ii) $\Delta^{re}_{\mathbf{K}}(\mathbf{A_K})$ *(ou $\Delta^{re}_{\mathbf{K}}$ si le contexte est clair) désigne l'ensemble de ces $\mathbf{K}$-racines.*
(iii) $\Phi_{\mathbf{K}}(\mathbf{A_K})$ *(ou $\Phi_{\mathbf{K}}$ si le contexte est clair) désigne l'ensemble des $\mathbf{K}$-demi-appartements relatifs à $\mathbf{A_K}$ associés aux $\mathbf{K}$-racines réelles.*

On a un résultat dictionnaire immédiat.

LEMME. — *La prise de fixateur et le passage aux points fixes dans $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^{\Gamma}$ établissent une correspondance bijective $G(\mathbf{K})$-équivariante entre $\mathbf{K}$-sous-groupes paraboliques et $\mathbf{K}$-facettes.*
□

Donnons aussi un analogue rationnel des relations que peuvent entretenir deux $\mathbf{K}$-facettes de signes opposés.

DÉFINITION. — *Deux $\mathbf{K}$-facettes de signes opposés sont dites* géométriquement opposées *s'il existe un appartement jumelé dans lequel elles sont des parties opposées.*

D'après (10.4.4), cette condition ne dépend pas de l'appartement jumelé choisi pour les contenir. Montrons maintenant l'intérêt de combiner la notion de convexité avec l'existence d'appartements stables sous Galois.

12.2.3. Enveloppes convexes fixes sous Galois

Les parties intéressantes de points fixes de $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^{\Gamma}$ vont être définies à partir des opérations de calcul vectoriel qu'on sait effectuer dans un appartement jumelé. L'indépendance de l'enveloppe convexe de certaines parties de $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$ vis-à-vis de l'appartement jumelé choisi pour les contenir, permet de prouver quelques propriétés de convexité du lieu de points fixes $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^{\Gamma}$.

LEMME. — (i) *L'enveloppe convexe d'une partie équilibrée Galois-fixe est Galois-fixe.*
(ii) *L'enveloppe convexe d'une partie Galois-fixe contenue dans un appartement de signe fixé de* $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$*, est Galois-fixe.*
(iii) *Soit* $E^\natural$ *une* $\mathbf{K}$*-facette sphérique. Alors, la prise d'enveloppe convexe établit une bijection* $G(\mathbf{K})$*-équivariante entre les* $\mathbf{K}$*-facettes géométriquement opposées à* $E^\natural$ *et les extensions vectorielles Galois-fixes de* $E^\natural$*.*

Démonstration. Faisons la remarque préliminaire suivante. De manière générale, le barycentre de deux points dans un appartement jumelé $\mathbf{A}$ sera envoyé par un élément de Galois σ sur le barycentre des points images dans $\sigma\mathbf{A}$, pour les mêmes coefficients. Cela découle directement de la description de l'action de Galois sur $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$ d'appartement jumelé à appartement jumelé.

Preuve de (i). L'assertion est directement justifiée par la remarque précédente, parce que par (12.2.1) on peut supposer la partie considérée dans un appartement jumelé Galois-stable (les barycentres ne sortent pas de cet appartement jumelé, et y sont uniquement déterminés).

Preuve de (ii). La preuve repose à nouveau sur la remarque préliminaire, sachant que deux points de même signe de $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$ n'ont qu'un barycentre pour un système de coefficients donné.

Preuve de (iii). Il suffit de remarquer que puisque les $\mathbf{K}$-facettes sont des cônes convexes, l'enveloppe convexe et l'extension vectorielle de deux $\mathbf{K}$-facettes opposées coïncident. D'où la possibilité d'appliquer le premier point. □

12.2.4. Dimension commune des K-appartements

Le résultat qui suit est un premier indice de la transitivité de $G(\mathbf{K})$ sur l'ensemble des $\mathbf{K}$-appartements de $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$.

PROPOSITION. — *Soit* $(\mathcal{G},\mathcal{U}_\mathbf{K})$ *un* $\mathbf{K}$*-groupe de Kac-Moody, déployé sur la clôture séparable* $\mathbf{K}_s$*, de jumelage géométrique associé* $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$*. Alors:*

(i) *Deux* $\mathbf{K}$*-facettes sphériques de signes opposés sont toujours dans un même* $\mathbf{K}$*-appartement.*
(ii) *Il existe un entier* d *tel que:*

Une $\mathbf{K}$*-chambre de* $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$ *est une* $\mathbf{K}$*-facette de dimension* d*.*
Un $\mathbf{K}$*-appartement est un sous-espace générique de dimension* d *de* $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$*.*

Démonstration. Preuve de (i). Ces $\mathbf{K}$-facettes sphériques forment une partie équilibrée et fixe sous Galois, elles sont donc contenues dans un appartement Galois-stable (12.2.1). Leur extension vectorielle est un sous-espace générique fixe sous Galois, à ce titre contenu dans un $\mathbf{K}$-appartement.

Preuve de (ii). Soit d la dimension maximale d'une $\mathbf{K}$-chambre de $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$ et $F^\natural$ une chambre ayant cette dimension. Par l'application du théorème de point fixe (11.3.5), il existe une $\mathbf{K}$-facette sphérique $-(F')^\natural$ de signe opposé, et par le point précédent, il existe un $\mathbf{K}$-appartement $\mathbf{A}_\mathbf{K}$ contenant $F^\natural \cup -(F')^\natural$. On sait que $\mathbf{A}_\mathbf{K}$ contient une $\mathbf{K}$-chambre de dimension dim $\mathbf{A}_\mathbf{K}$, donc par maximalité dim $\mathbf{A}_\mathbf{K} = \dim F^\natural = d$.

Si au lieu de choisir une $\mathbf{K}$-facette quelconque, on se donne une $\mathbf{K}$-chambre de signe opposé, on prouve que toutes les $\mathbf{K}$-chambres de signe opposé à celui de $F^\natural$ ont pour dimension d.

Enfin, puisqu'un **K**-appartement est enveloppe convexe de toute paire de **K**-chambres opposées qu'il contient, tout **K**-appartement est de dimension d. □

COROLLAIRE. — (i) *Une* **K***-facette sphérique est une facette relative sphérique pour un* **K***-appartement de* $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$.
(ii) *Une* **K***-facette est dans l'adhérence d'une* **K***-facette sphérique, et donc d'une* **K***-chambre. En particulier, une* **K***-facette d'adhérence maximale est une* **K***-chambre.*

Démonstration. Le point (i) se déduit immédiatement de la proposition et de (12.2.2), remarque 2. Le point (ii) se déduit de (5.2.3) de la façon suivante. On se donne une autre **K**-facette, sphérique de même signe. On tend ensuite un segment d'un point de la **K**-facette à un point de l'autre. L'intérieur de ce segment est recouvert par un nombre fini de facettes sphériques, d'après (5.1.5) et (5.2.3)(iii), et il est Galois-fixe par (12.2.3). □

REMARQUE. — Le principe qu'illustrent ces propriétés est que dans cette situation, on va remplacer les termes «relatif à un sous-espace générique (donné)» (5.5) par le préfixe **K**-, qui exprime l'existence d'un **K**-appartement par rapport auquel un objet est relatif. Quand la donnée d'un **K**-appartement sera fixée, on emploiera l'exposant $^\natural$ au lieu de l'indice $_{\mathbf{K}}$ pour les **K**-objets immobiliers, ce qui évitera d'alourdir les notations quand on passera aux groupes de points rationnels définis à partir de ces parties de $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$. La substitution du symbole Δ^{re} à la lettre Φ pour les racines fournit alors les notations suivantes.

DÉFINITION. — (i) *Une* **K**-cloison *est une cloison relative dans un* **K***-appartement.*
(ii) *Soit* $E^\natural$ *une* **K***-cloison de* $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$. *Deux* **K***-chambres de même signe que* $E^\natural$ partagent $E^\natural$ *(ou sont dites* $E^\natural$-adjacentes*) si elles contiennent toutes deux* $E^\natural$ *dans leur adhérence.*

12.2.5. Cas des K-appartements et des K-racines

On peut bien sûr appliquer ces résultats aux **K**-appartements et **K**-racines, qu'on sait exprimer comme enveloppes convexes de parties équilibrées. La prise d'enveloppe convexe permet surtout d'établir une correspondance intéressante entre certaines **K**-chambres et certains **K**-appartements.

Soit $a^\natural$ une **K**-racine réelle d'un **K**-appartement $\mathbf{A}_{\mathbf{K}}$. On se donne une **K**-chambre positive $F^\natural$ et une **K**-cloison $E^\natural$ de $F^\natural$ qui définissent $D(a^\natural)$, au sens de (5.5.2). On note enfin $F^\natural_-$ l'opposée dans $\mathbf{A}_{\mathbf{K}}$ de la **K**-chambre positive de $\mathbf{A}_{\mathbf{K}}$ qui partage la **K**-cloison avec $F^\natural$. $F^\natural_-$ est une **K**-chambre de $D(a^\natural)$ dans la partie négative du double cône $\mathbf{A}_{\mathbf{K}}$. On va définir deux applications. L'une μ va de l'ensemble des **K**-chambres partageant $E^\natural$ avec $F^\natural$ distinctes de $F^\natural$ vers celui des **K**-appartements contenant $D(a^\natural)$. L'autre ν est définie dans le sens inverse. Partons d'une **K**-chambre $F^\natural_+$ partageant $E^\natural$ avec $F^\natural$ et distincte de $F^\natural$. Alors, il existe un **K**-appartement $\mathbf{A}'_{\mathbf{K}}$ qui contient les **K**-chambres $F^\natural_+$ et $F^\natural_-$. Déjà, $\mathbf{A}'_{\mathbf{K}}$ contient l'enveloppe convexe de $F^\natural_-$ et $E^\natural$, c'est-à-dire $D(a^\natural)$. Puisque $F^\natural_+$ est une **K**-chambre, on voit que $\mathbf{A}'_{\mathbf{K}}$ est l'enveloppe convexe de $F^\natural_-$ et de $F^\natural_+$, et finalement que $\mathbf{A}'_{\mathbf{K}}$ est bien déterminé par $F^\natural_+$ (et $a^\natural$). Ceci permet de définir l'application μ annoncée. L'application ν est définie plus simplement: elle attache à chaque **K**-appartement contenant $D(a^\natural)$ la **K**-chambre $F^\natural_+$ qui partage la **K**-cloison $E^\natural$ avec $F^\natural$. Il est clair que ces applications sont réciproques l'une de l'autre, d'où:

LEMME. — *Soit $D(a^\natural)$ le* **K***-demi-appartement réel défini par la* **K***-chambre $F^\natural$ et la* **K***-cloison réelle $E^\natural$ qui lui est adhérente. Alors, l'application qui attache à chaque* **K***-appartement contenant $D(a^\natural)$ la* **K***-chambre qui partage la* **K***-cloison $E^\natural$ avec $F^\natural$, établit une bijection entre les* **K***-appartements contenant $D(a^\natural)$ et les* **K***-chambres distinctes de $F^\natural$ contenant $E^\natural$ dans leur adhérence.* □

On va maintenant décrire l'action du groupe de points rationnels $G(\mathbf{K})$ sur le lieu de points fixes $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$. On conserve bien entendu l'hypothèse de déploiement sur la clôture séparable.

12.3. Théorèmes de conjugaison rationnelle

Cette section est consacrée à la preuve de certains théorèmes de conjugaison de sous-groupes Galois-stables sous l'action par conjugaison du groupe $G(\mathbf{K})$ des points rationnels du **K**-groupe de Kac-Moody G. Les raisonnements sont avant tout géométriques, c'est-à-dire qu'ils ont lieu dans le jumelage géométrique associé $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$ et qu'ils concernent les **K**-objets immobiliers correspondants.

12.3.1. Action du groupe des points rationnels sur le lieu de points fixes

Nous allons pour l'instant décrire l'action du groupe de points rationnels $G(\mathbf{K})$ sur le lieu $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$ des points fixes sous Galois du jumelage conique $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$.

THÉORÈME. — *Soit $(\mathcal{G},\mathcal{U}_{\mathbf{K}})$ un* **K***-groupe de Kac-Moody $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\overline{\mathbf{K}})$, de jumelage $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$. On suppose la condition* (DCS) *vérifiée.*

(i) *Pour toute* **K***-facette $E^\natural$, le groupe de points rationnels $U(E)(\mathbf{K})$ opère simplement transitivement sur les extensions vectorielles Galois-fixes de $E^\natural$.*
En particulier, pour toute **K***-chambre $F^\natural$, le groupe $U(F)(\mathbf{K})$ est simplement transitif sur les* **K***-appartements contenant $F^\natural$.*
(ii) *Pour toute partie équilibrée $\Omega^\natural$ Galois-fixe de $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$, le groupe de points rationnels $U(\Omega)_{\mathbf{K}}$ est simplement transitif sur les extensions vectorielles Galois-fixes de Ω.*
(iii) *Deux* **K***-facettes sphériques (de signes quelconques) sont toujours dans un même* **K***-appartement.*
(iv) *$G(\mathbf{K})$ opère transitivement sur les* **K***-appartements de $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$.*

Démonstration. D'abord, remarquons que l'assertion (iii) est vraie dans le cas de plusieurs **K**-facettes sphériques non toutes de même signe et contenues dans un même appartement jumelé, d'après la démonstration de (12.2.4)(i).

Preuve de (i). Soit $E^\natural$ une **K**-facette, et soient $V_{\mathbf{K}}$ et $V'_{\mathbf{K}}$ deux extensions vectorielles Galois-fixes de $E^\natural$. On note $E^\natural_-$ (respectivement $(E'_-)^\natural$ la **K**-facette opposée à $E^\natural$ dans $V_{\mathbf{K}}$ (respectivement $V'_{\mathbf{K}}$). Alors, E_- et E'_- sont deux facettes opposées à E, par conséquentd'après (6.2.3), il existe un élément u de $U(E)(\mathbf{K}_s)$ qui envoie E_- sur E'_-: $E'_- = uE_-$. Si σ est un élément de Galois, on a $(\sigma u)(\sigma E_-) = \sigma E'_-$. Puisqu'on était parti de **K**-facettes, on a $\sigma E_- = E_-$ et $\sigma E'_- = E'_-$, soit $\sigma u E_- = E'_-$; enfin, puisque l'action de $U(E)(\mathbf{K}_s)$ est libre sur les facettes

opposées à E, on obtient $\sigma u = u$. Ceci étant vrai pour tout élément de Galois σ, on a bien $u \in U(E)(\mathbf{K})$.
Pour le cas particulier des $\mathbf{K}$-chambres, il suffit de voir que l'extension vectorielle Galois-fixe d'une $\mathbf{K}$-chambre est un $\mathbf{K}$-appartement, ce qui est immédiat par un argument de dimension (12.2.4).

Preuve de (ii). C'est exactement le même raisonnement que précédemment en remplaçant les $\mathbf{K}$-facettes par des parties équilibrées Galois-fixes, le seul résultat sur le groupe G utilisé étant un argument de simple transitivité (10.4.4).

Preuve de (iii). Par la remarque préliminaire, il suffit de traiter le cas de deux facettes de même signe, et par symétrie il suffit de traiter le cas de deux $\mathbf{K}$-chambres $F^\natural$ et $E^\natural$ positives. Le tout est de prouver que ces deux $\mathbf{K}$-chambres font partie d'une partie équilibrée Galois-fixe: on fera alors passer un appartement jumelé Galois-stable par cette partie, et le lieu des points Galois-fixes dans cet appartement jumelé sera contenu dans un $\mathbf{K}$-appartement les contenant. Pour l'instant, on peut se donner un appartement jumelé $\mathbf{A}$ sans stabilité sous Galois *a priori* contenant $F^\natural \cup E^\natural$ (autrement dit $F \cup E$), et un appartement jumelé Galois-stable $\mathbf{A}'$ contenant seulement $F^\natural$ (en faisant intervenir un point sphérique Galois-fixe négatif quelconque). L'enveloppe convexe $\mathrm{conv}(F^\natural \cup E^\natural)$ étant Galois-fixe, la $\mathbf{K}$-chambre $E^\natural$ est nécessairement dans l'extension vectorielle $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(F^\natural)$, sinon $\mathrm{conv}(F^\natural \cup E^\natural)$ rencontrerait une facette dont la trace serait de dimension $> d$. On sait qu'il existe un élément u de $U(F)(\mathbf{K}_s)$ tel que $u.\mathrm{vect}_{\mathbf{A}'}(F) = \mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(F)$. Puisque $E^\natural$ est dans $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}}(F^\natural)$, on a l'inclusion $u^{-1}E^\natural \subset \mathrm{vect}_{\mathbf{A}'}(F^\natural)$. On note $D^\natural$ la partie opposée à $u^{-1}E^\natural$ dans $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}'}(F^\natural)$. $D^\natural$ est une $\mathbf{K}$-chambre parce que c'est une trace de facette, de dimension d, sur le $\mathbf{K}$-appartement $\mathrm{vect}_{\mathbf{A}'}(F^\natural)$.
Par la scholie (6.1.4), on peut décomposer l'élément u de $U(F)(\mathbf{K}_s)$ en $u = u'u''$, avec u', u'' dans $U(F)(\mathbf{K}_s)$, u' fixant D et u'' fixant $u^{-1}E$. On va montrer que $\mathbf{A}'' := u'\mathbf{A}'$ est un appartement jumelé contenant les $\mathbf{K}$-chambres positives $F^\natural$ et $E^\natural$, et la $\mathbf{K}$-chambre négative $D^\natural$, ce qui achèvera la démonstration par le raisonnement préliminaire. $\mathbf{A}'$ contient F (respectivement D), donc $u'\mathbf{A}'$ contient $u'F = F$ (respectivement $u'D = D$). Enfin, $\mathbf{A}'$ contient $u^{-1}E = (u'')^{-1}(u')^{-1}E$, mais $(u'')^{-1}(u')^{-1}E$ est $(u')^{-1}E$ par définition de u''. Par conséquent, $\mathbf{A}'' = u'\mathbf{A}'$ contient E.

Preuve de (iv). Étant donnés deux $\mathbf{K}$-appartements $\mathbf{A}_\mathbf{K}$ et $\mathbf{A}'_\mathbf{K}$, on peut choisir une $\mathbf{K}$-chambre positive dans chacun d'eux – $F^\natural$ pour $\mathbf{A}_\mathbf{K}$ et $(F')^\natural$ pour $\mathbf{A}'_\mathbf{K}$ – et faire passer un troisième $\mathbf{K}$-appartement $\mathbf{A}''_\mathbf{K}$ par celles-ci. On a terminé puisqu'il existe un élément de $U(F)(\mathbf{K})$ qui envoie $\mathbf{A}_\mathbf{K}$ sur $\mathbf{A}''_\mathbf{K}$, et un élément de $U(F')(\mathbf{K})$ qui envoie $\mathbf{A}''_\mathbf{K}$ sur $\mathbf{A}'_\mathbf{K}$. □

12.3.2. Standardisations rationnelles et déployées. Noyau K-anisotrope

Par analogie avec le cas déployé, on peut aussi définir une version rationnelle des standardisations.

DÉFINITION. — (i) *On parlera de* standardisation séparable *pour toute standardisation dans le jumelage* $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$.
(ii) *Une* standardisation rationnelle *de* $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$ *est un triplet* $(\mathbf{A}_\mathbf{K}, F^\natural, -F^\natural)$ *où* $\mathbf{A}_\mathbf{K}$ *est un* $\mathbf{K}$*-appartement, contenant les deux* $\mathbf{K}$*-chambres opposées* $F^\natural$ *et* $-F^\natural$.
(iii) *Une standardisation séparable* $(\mathbf{A}, C, -C)$ *et une standardisation rationnelle* $(\mathbf{A}_\mathbf{K}, F^\natural, -F^\natural)$ *sont dites* compatibles *si* $\mathbf{A}$ *est un appartement Galois-stable contenant le* $\mathbf{K}$*-appartement* $\mathbf{A}_\mathbf{K}$ *et si* $F^\natural$ *est dans l'adhérence de* C.

REMARQUES. — 1. L'existence de standardisation séparables et rationnelles compatibles est précisément le théorème (12.2.1) appliqué à la réunion de deux $\mathbf{K}$-chambres opposées.

2. Si l'on revient à la définition de l'action $*$ du groupe de Galois, on voit que puisque $\mathbf{A}$ est Galois-stable, il suffit de rectifier les éléments de Galois par des éléments du stabilisateur N de $\mathbf{A}$, définis modulo $B_+(\mathbf{K}_s) \cap B_-(\mathbf{K}_s) = T(\mathbf{K}_s)$. Autrement dit, seul le groupe de Weyl intervient pour la rectification de l'action de Galois.

Dans la théorie des $\mathbf{K}$-groupes algébriques réductifs, on fait intervenir le *noyau* $\mathbf{K}$*-anisotrope* d'un tel groupe. En voici un équivalent, défini en termes immobiliers.

DÉFINITION. — *Le* noyau $\mathbf{K}$-anisotrope *associé à une standardisation rationnelle* $(\mathbf{A}_\mathbf{K}, F^\natural, -F^\natural)$ *est le fixateur dans* G *du* $\mathbf{K}$*-appartement de cette standardisation. Il ne dépend que du* $\mathbf{K}$*-appartement* $\mathbf{A}_\mathbf{K}$*, et on le note* $Z(\mathbf{A}_\mathbf{K})$.

Puisque dans la standardisation rationnelle $(\mathbf{A}_\mathbf{K}, F^\natural, -F^\natural)$, le $\mathbf{K}$-appartement $\mathbf{A}_\mathbf{K}$ est l'extension vectorielle dans un appartement Galois-stable de la réunion $F^\natural \cup -F^\natural$, on peut voir le noyau $\mathbf{K}$-anisotrope $Z(\mathbf{A}_\mathbf{K})$ comme le facteur de Lévi (relatif à $\mathbf{A}_\mathbf{K}$) commun aux deux $\mathbf{K}$-sous-groupes paraboliques minimaux $\mathrm{Fix}(F^\natural)$ et $\mathrm{Fix}(-F^\natural)$. Ces décompositions de Lévi s'écrivent:

$$\mathrm{Fix}(F^\natural) = Z(\mathbf{A}_\mathbf{K}) \ltimes U(F) \quad \text{et} \quad \mathrm{Fix}(-F^\natural) = Z(\mathbf{A}_\mathbf{K}) \ltimes U(-F),$$

tous les facteurs étant définis sur $\mathbf{K}$.

Si on revient aux structures algébriques obtenues par restriction de la représentation adjointe, on retrouve la notion algébrique de $\mathbf{K}$-anisotropie.

LEMME. — *L'image de l'application* $\mathrm{Ad}_\Omega : Z(\mathbf{A}_\mathbf{K}) \to \mathrm{GL}\big(W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}\big)$*, avec* $\Omega^\natural = F^\natural \cup -F^\natural$*, est un groupe algébrique semi-simple anisotrope sur* $\mathbf{K}$.

REMARQUES. — 1. Dans ce cas précis, on a $W(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}} = \mathfrak{p}(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}} = \mathfrak{m}(\Omega)_{\overline{\mathbf{K}}}$.

2. L'image de Ad_Ω est essentiellement le semi-simplifié de $Z(\mathbf{A}_\mathbf{K})$, c'est lui qui est donc $\mathbf{K}$-anisotrope. Par contre, on verra (12.5.3) que le centre de $Z(\mathbf{A}_\mathbf{K})$ contient le sous-tore $\mathbf{K}$-déployé maximal standard de G. Ainsi, $Z(\mathbf{A}_\mathbf{K})$ n'est pas «$\mathbf{K}$-anisotrope au sens réductif» .

Démonstration. On est dans le cas où le fixateur de la partie équilibrée $\Omega^\natural$ est égal au facteur de Lévi (du reste bien déterminé par $F^\natural \cup -F^\natural$). On a déterminé son image, qui est un groupe algébrique défini sur $\mathbf{K}$ d'après la condition de déploiement sur la fermeture séparable. Par le calcul du noyau de Ad_Ω, c'est un $\mathbf{K}$-groupe réductif de centre trivial, donc un $\mathbf{K}$-groupe semi-simple adjoint. S'il n'était pas $\mathbf{K}$-anisotrope, il possèderait un $\mathbf{K}$-sous-groupe parabolique propre non trivial $\overline{P}$, de préimage par Ad_Ω un sous-groupe parabolique de $Z(\mathbf{A}_\mathbf{K})$ propre, et Galois-stable. Dans ce cas, $\mathrm{Ad}_\Omega^{-1}(\overline{P}).U(F)$ serait un sous-groupe parabolique de $G(\mathbf{K}_s)$ Galois-stable et strictement inclus dans $\mathrm{Fix}(F^\natural)(\mathbf{K}_s)$, ce qui est impossible par maximalité de $F^\natural$. □

12.3.3. Groupes radiciels rationnels

Fixons $\mathbf{A_K}$ un $\mathbf{K}$-appartement contenu dans un appartement jumelé Galois-stable $\mathbf{A}$. On voit $\mathbf{A}$ comme double cône dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $V^* = \big(\bigoplus_{s\in S} \mathbf{R}a_s\big)^*$, et $L^\natural$ est le sous-espace vectoriel de V^* engendré par $\mathbf{A_K}$. On part d'une $\mathbf{K}$-racine réelle $a^\natural = a\,|_{L^\natural}$, dont $D(a^\natural)$ est le $\mathbf{K}$-demi-appartement associé. On va adapter la discussion de (6.4.2) à notre situation. En particulier, on choisit une $\mathbf{K}$-chambre $F^\natural$ et une $\mathbf{K}$-cloison $E^\natural$ qui définissent $D(a^\natural)$, c'est-à-dire:

$$\overline{F}^\natural \supset E^\natural, \quad \overline{D(a^\natural)} = \overline{\mathrm{conv}}(F^\natural \cup -E^\natural) \quad \text{et} \quad \partial a^\natural = \mathrm{conv}(E^\natural \cup -E^\natural).$$

La réunion $\Omega^\natural := F^\natural \cup -E^\natural$ est une partie équilibrée dans $\mathbf{A}$. On regarde son fixateur. D'une part, on sait que c'est le fixateur de $\mathrm{conv}(\Omega^\natural)$ qui ne dépend que de $\Omega^\natural$ (10.4.5), d'où $\mathrm{Fix}(\Omega^\natural) = \mathrm{Fix}(D(a^\natural))$. D'autre part, il existe une décomposition de Lévi de $\mathrm{Fix}(\Omega^\natural)$, relativement à $\mathbf{A}$:

$$\mathrm{Fix}(\Omega^\natural) = M(\Omega^\natural) \ltimes U(\Omega^\natural).$$

Chacun des deux groupes de cette décomposition est Galois-stable. On sait que $M(\Omega^\natural)$ est le fixateur de l'extension vectorielle de $\Omega^\natural$. Cette extension vectorielle contient une $\mathbf{K}$-chambre, donc est le $\mathbf{K}$-appartement $\mathbf{A_K}$. Ainsi, $M(\Omega^\natural)$ est le fixateur de $\mathbf{A_K}$ (*i.e.*, le noyau $\mathbf{K}$-anisotrope attaché au $\mathbf{K}$-appartement $\mathbf{A_K}$). Par ailleurs, $U(\Omega^\natural)$ est égal au groupe $U\big(\mathrm{conv}(\Omega^\natural)\big)$. Mais l'enveloppe convexe de $\Omega^\natural$ est le $\mathbf{K}$-demi-appartement $D(a^\natural)$, donc $U(\Omega^\natural) = U(D(a^\natural))$. Ce sous-groupe est engendré par une partie nilpotente de racines de $\Delta^u(\Omega^\natural)$ dont on a vu qu'il s'agissait de $\Phi_{a^\natural} = \{b \in \Delta^{re} \mid D(b) \cap \mathbf{A_K} = D(a^\natural)\}$ (5.5.3). Puisque cette partie est stable sous Galois, $U(\Omega^\natural)$ est Galois-stable. On peut résumer tout cela dans le lemme suivant.

LEMME. — *Le fixateur de tout $\mathbf{K}$-demi-appartement réel $D(a^\natural)$ de $\mathbf{A_K}$ est le produit semi-direct du noyau $\mathbf{K}$-anisotrope de $\mathbf{A_K}$ et du sous-groupe $U(D(a^\natural))$ engendré par la partie nilpotente $\Phi_{a^\natural}$ des racines de Δ^{re} de trace $a^\natural$ sur $\mathbf{A_K}$.* □

Ces stabilités sous Galois vont permettre de définir des groupes de points rationnels. Pour ces définitions, on peut adopter le point de vue plus précis des $\mathbf{K}$-racines. Pour chaque $\mathbf{K}$-racine réelle $a^\natural$, l'ensemble $\{b \in \Delta^{re} \mid \exists \lambda \geq 1\ b^\natural = \lambda a^\natural\}$ est une partie de $\Phi_a^\natural$ Galois-stable; elle est donc prénilpotente. Elle est en outre $\mathbf{N}$-close, par conséquent on peut lui associer un sous-groupe unipotent de $G(\mathbf{K}_s)$.

DÉFINITION. — *Soit $a^\natural$ une $\mathbf{K}$-racine réelle.*

(i) *On désigne par $\Delta_a^\natural$ la partie $\mathbf{N}$-nilpotente Galois-stable de racines de Δ^{re}:*

$$\Delta_a^\natural = \{b \in \Delta^{re} \mid \exists \lambda \geq 1\ b^\natural = \lambda a^\natural\}.$$

(ii) *Le $\mathbf{K}$-groupe radiciel $U(a^\natural)$ associé à $a^\natural$ est le $\mathbf{K}$-groupe unipotent engendré par les groupes radiciels $U_b(\mathbf{K}_s)$ pour b dans $\Delta_a^\natural$. On note $V_{a^\natural}$ le groupe de ses points rationnels.*
(iii) *$U(D(a^\natural))(\mathbf{K}_s)$ est le $\mathbf{K}$-groupe radiciel associé au $\mathbf{K}$-demi-appartement réel $D(a^\natural)$. On note $V_{D(a^\natural)}$ le groupe de ses points rationnels.*

REMARQUE. — On verra en (12.5.4) que λ ne peut prendre que les valeurs 1 et 2.

$\{b|_{L^\natural}|\ D(b) \cap \mathbf{A_K} = D(a^\natural)\}$ est un quotient de $\Phi_a^\natural$. C'est donc un ensemble fini constitué de formes linéaires sur $L^\natural$, toutes colinéaires les unes aux autres par un nombre réel strictement positif.

DÉFINITION. — *On désigne par $a_0^\natural$ la forme linéaire restreinte de $\{b|_{L^\natural}|\ b \cap \mathbf{A_K} = D(a^\natural)\}$, telle que toutes les autres $\mathbf{K}$-racines $b^\natural = b|_{L^\natural}$ de cet ensemble en soient multiples par un nombre réel supérieur à 1.*

Ce choix interviendra quand il s'agira de construire un système de racines relatif, pour décrire la combinatoire de $G(\mathbf{K})$. Par construction de $a_0^\natural$, on a le résultat immédiat suivant.

LEMME. — $\Delta_{a_0^\natural} = \Phi_a^\natural$; *par conséquent* $U(D(a^\natural))(\mathbf{K}_s) = U(a_0^\natural)(\mathbf{K}_s)$ *et* $V_{D(a^\natural)} = V_{a_0^\natural}$. □

12.3.4. Propriété de Moufang rationnelle

Nous allons maintenant regarder l'action de $V_{a^\natural}$ sur $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$ et prouver une partie de ce qu'on pourrait appeler une *propriété de Moufang rationnelle.*

LEMME. — *Le groupe $V_{D(a^\natural)}$ opère simplement transitivement sur les $\mathbf{K}$-chambres contenant $E^\natural$ dans leur adhérence et distinctes de $F^\natural$. En outre, $V_{D(a^\natural)}$ est non trivial, et même $V_{a^\natural} \neq \{1\}$.*

Démonstration. On sait qu'on a une correspondance bijective entre les $\mathbf{K}$-chambres partageant la $\mathbf{K}$-cloison $E^\natural$ avec $F^\natural$ et distinctes de $F^\natural$, et les $\mathbf{K}$-appartements contenant le $\mathbf{K}$-demi-appartement relatif réel $D(a^\natural)$ défini par $F^\natural$ et $E^\natural$ (12.2.5). Soit $\mathbf{A}'_\mathbf{K}$ un tel $\mathbf{K}$-appartement. C'est une extension vectorielle Galois-fixe de la $\mathbf{K}$-chambre $(F_-)^\natural$ opposée à la chambre $(F_+)^\natural$ de $\mathbf{A_K}$ qui partage $E^\natural$ avec $F^\natural$. Par conséquent, il existe un unique v dans $U(F_-)(\mathbf{K})$ tel que $v\mathbf{A_K} = \mathbf{A}'_\mathbf{K}$ (12.3.1). Cet élément fixe $E^\natural$ (qui est l'opposé dans $\mathbf{A_K}$ et $\mathbf{A}'_\mathbf{K}$ d'une $\mathbf{K}$-facette adhérente à $(F_-)^\natural$) et donc $\overline{D(a^\natural)}$ (qui est l'enveloppe convexe fermée de $E^\natural$ et $(F_-)^\natural$): il est dans $V_{D(a^\natural)}$. Ainsi, $V_{D(a^\natural)}$ est transitif sur les $\mathbf{K}$-chambres proposées. Un élément de $V_{D(a^\natural)}$ fixant une quelconque de ces chambres est trivial par décomposition de Lévi, d'où la simple transitivité.

Pour la non trivialité de $V_{a^\natural}$ et donc de $V_{D(a^\natural)}$, on raisonne sur le groupe nilpotent $U(a^\natural)(\mathbf{K}_s)$, en considérant le dernier terme V de sa suite centrale descendante. C'est un groupe abélien non-trivial et Galois-stable, qu'on peut voir comme un $\mathbf{K}_s$-espace vectoriel sur lequel Γ opère semi-linéairement d'après (11.2.5)(iii). $V_{a^\natural}$ contient donc V^Γ qui est non trivial par un résultat classique. □

12.3.5. Diagramme de Tits

On peut conclure cette section par la construction de l'objet pressenti pour classer les $\mathbf{K}$-groupes de Kac-Moody presque déployés. Donnons-nous $(\mathbf{A}, C, -C)$ et $(\mathbf{A_K}, F^\natural, -F^\natural)$ une standardisation séparable et une standardisation rationnelle compatibles. Dans la théorie des groupes algébriques semi-simples définis sur $\mathbf{K}$, on sait que la classe de $\overline{\mathbf{K}}$-isomorphisme, l'action $*$ et le noyau $\mathbf{K}$-anisotrope classifient ces groupes ([Tit66]). Dans notre situation, on peut envisager de classifier les $\mathbf{K}$-formes algébriques $(\mathcal{G}, \mathcal{U}_\mathbf{K})$ des groupes de Kac-Moody

qui vérifient la condition de déploiement sur la clôture séparable (DCS). Cette classification se ferait en termes d'action de Galois sur le foncteur $\mathcal{G}$ et la $\mathbf{K}$-algèbre $\mathcal{U}_{\mathbf{K}}$, avec les mêmes invariants. Elle a été établie en caractéristique 0 par G. Rousseau – [Bac-Bar-Ben-Rou95], théorème (2.8) pour la question de l'unicité, et proposition (2.11) pour la question de l'existence par réduction au rang 1.

Cette remarque suggère de définir l'analogue du diagramme de Tits ([Tit66], [Bac-Bar-Ben-Rou95]) pour les groupes de Kac-Moody.

DÉFINITION. — *Soit G un $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody presque déployé vérifiant la condition* (DCS). *Le* diagramme de Tits (ou indice) *de G consiste en la donnée*

(i) *de sa «classe de $\overline{\mathbf{K}}$-isomorphisme» , c'est-à-dire la donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D}$ du groupe dont il est une forme;*
(ii) *de l'action $*$ du groupe de Galois sur $\mathcal{D}$;*
(iii) *du noyau $\mathbf{K}$-anisotrope de G.*

REMARQUE. — On entend par action $*$ la donnée de l'action de Γ sur la donnée radicielle de Kac-Moody par automorphismes de diagrammes, *i.e.*, par automorphismes $\mathbf{Z}$-linéaires de Λ stabilisant la base $\{c_s\}$ de $\mathcal{D}$, et la cobase $\{h_s\}$ (pour l'automorphisme de $\Lambda^\vee$ déduit par dualité), en induisant un même automorphisme du diagramme de Dynkin de A. On aura l'occasion de revenir sur ces notions en (13.2.3).

Les moyens de représenter un diagramme de Tits dans le cas des groupes algébriques semi-simples sont bien connus ([Tit66], [Sat71]). On «tord» le diagramme de Dynkin de façon à ce que les sommets d'une même orbite sous $*$ soient le plus proche possible, et on encercle les orbites contenues dans $S\backslash S_0$, où S_0 est le type du noyau $\mathbf{K}$-anisotrope. Une telle représentation fait perdre de l'information, sauf par exemple dans le cas d'une extension de déploiement quadratique. Pour un cas non classique, voir [Bac-Bar-Ben-Rou95], chapitre 6 p.83-94. Il s'agit des formes réelles presque déployées des algèbres de Kac-Moody affines.

12.4. Descente galoisienne

Nous pouvons aborder maintenant le résultat principal de ce chapitre, qui prouve que le groupe des points rationnels d'un $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody possède encore une donnée radicielle jumelée (associée à une standardisation rationnelle $(\mathbf{A}_{\mathbf{K}}, F^{\natural}, -F^{\natural})$). Cette structure combinatoire se définit à partir des $\mathbf{K}$-objets immobiliers qu'on a commencé à mettre en place et dont on a mis en évidence quelques propriétés. Une partie substantielle a déjà été faite à l'occasion de l'étude du lieu de points fixes $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^{\Gamma}$, mais on sait que pour parler de donnée radicielle jumelée, il faut disposer d'un système de Coxeter et de ses racines. C'est ce qu'on va dégager dans la première sous-section. Dans tout ce qui suit, $(\mathbf{A}_{\mathbf{K}}, F^{\natural}, -F^{\natural})$ est une standardisation rationnelle.

12.4.1. Groupe de Weyl relatif

Nous allons maintenant mettre en place le *groupe de Weyl relatif* d'un $\mathbf{K}$-appartement, qui va opérer sur les $\mathbf{K}$-racines correspondantes.

DÉFINITION. — *Soit* $(\mathbf{A_K}, F^\natural, -F^\natural)$ *une standardisation rationnelle de* $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$.

(i) *On désigne par* $N(\mathbf{K})$ *ou* $N(\mathbf{K})(\mathbf{A_K})$ *le stabilisateur dans* $G(\mathbf{K})$ *du* $\mathbf{K}$*-appartement* $\mathbf{A_K}$.
(ii) *On désigne par* $Z(\mathbf{K})$ *ou* $Z(\mathbf{K})(\mathbf{A_K})$ *le fixateur dans* $G(\mathbf{K})$ *du* $\mathbf{K}$*-appartement* $\mathbf{A_K}$.
(iii) *Le groupe quotient* $N(\mathbf{K})/Z(\mathbf{K})$, *noté* $W^\natural$, *est appelé le* groupe de Weyl relatif *de* $G(\mathbf{K})$. *C'est un groupe d'automorphismes de* $\mathbf{A_K}$.

REMARQUE. — $Z(\mathbf{K})$ n'est rien d'autre que le groupe des points rationnels du noyau $\mathbf{K}$-anisotrope de $\mathbf{A_K}$.

Justification. $G(\mathbf{K})$ opère transitivement sur les $\mathbf{K}$-appartements jumelés, par conséquent tous les groupes de Weyl relatifs sont isomorphes par conjugaison sous $G(\mathbf{K})$. Enfin, il est clair que $Z(\mathbf{K})$ est distingué dans $N(\mathbf{K})$, puisque $Z(\mathbf{K}) \subset N(\mathbf{K})$ est l'inclusion du fixateur dans le stabilisateur d'un même espace. □

Dans un premier temps, on veut montrer que $W^\natural$ est un groupe opérant sur le double cône $\mathbf{A_K}$, et qu'il est engendré par des réflexions, *i.e.*, des involutions qui intervertissent les demi-espaces de la $\mathbf{K}$-racine correspondante. Pour cela, on réinterprète l'action des $\mathbf{K}$-groupes radiciels.

PROPOSITION. — *Soit* $a^\natural$ *une* $\mathbf{K}$*-racine réelle de* $\mathbf{A_K}$. *Alors:*

(i) *Pour tout élément* v *non trivial de* $V_{D(a^\natural)}$, *il existe deux éléments* v' *et* v'' *de* $V_{-D(a^\natural)}$, *tels que* $m(v) := v'vv''$ *fixe* $\partial a^\natural$ *et intervertisse* $D(a^\natural)$ *et* $-D(a^\natural)$.
(ii) *La classe de* $m(v)$ *dans* $W^\natural$ *ne dépend pas du choix de* v *dans* $V_{D(a^\natural)}$, *et est d'ordre deux.*
(iii) *La classe de* $m(v)$ *dans* $W^\natural$ *est la restriction à* $\mathbf{A_K}$ *d'un élément stabilisant* $\mathbf{A_K}$ *du groupe de Weyl* W *de* $\mathbf{A}$.

Avant de passer à la preuve, introduisons tout de suite le vocabulaire suggéré par ces propriétés.

DÉFINITION. — *La classe de* $m(v)$ *dans* $W^\natural$ *est appelée la* réflexion relativement à $\partial a^\natural$, *et est notée* $r_{a^\natural}$. *On désigne par* $S^\natural$ *l'ensemble des réflexions relativement aux murs des* $\mathbf{K}$*-demi-appartements simples réels de* $\Pi^\natural$ (5.5.1).

Démonstration. Preuve de (i). On se donne $F^\natural$ et $(F')^\natural$ deux $\mathbf{K}$-chambres partageant la $\mathbf{K}$-cloison réelle $E^\natural$, avec $F^\natural$ dans $D(a^\natural)$, $(F')^\natural$ dans $-D(a^\natural)$ et $E^\natural$ dans $\partial a^\natural$. Puisque l'action de $V_{a^\natural}$ est libre, v non trivial envoie $(F')^\natural$ sur une $\mathbf{K}$-chambre distincte de $(F')^\natural$ et contenant $E^\natural$ dans son adhérence. Par conséquent, il existe v' dans $V_{-D(a^\natural)} \setminus \{1\}$ qui envoie $v(F')^\natural$ sur $F^\natural$. C'est le lemme (12.3.3) appliqué à $-D(a^\natural)$, $(F')^\natural$ et $u(F')^\natural$. Déjà, pour tout u de $V_{-D(a^\natural)}$, on a $v'vu(F')^\natural = v'v(F')^\natural = F^\natural$. On veut en outre un élément u de $V_{-D(a^\natural)}$ tel que $v'vuF^\natural = (F')^\natural$, ou encore $uF^\natural = v^{-1}(v')^{-1}(F')^\natural = v^{-1}(F')^\natural$. Mais on est assuré de l'existence d'une solution v'' par le lemme précédent pour $-D(a^\natural)$, $(F')^\natural$, $v^{-1}(F')^\natural$ puisque $v^{-1}(F')^\natural \neq F'$. Ainsi, $m(v)(F')^\natural = v'v(F')^\natural = F^\natural$ et $m(v)F^\natural = (v'v)(v''F^\natural) = (v'v)(v^{-1}(F')^\natural) = v'(F')^\natural = (F')^\natural$. Enfin, $m(v)$ fixe $\partial a^\natural$ car v, v' et v'' fixent ce $\mathbf{K}$-mur, et pour tout signe ϵ, l'interversion des $\mathbf{K}$-chambres $E^\natural$-adjacentes montre que $m(v)(\epsilon D(a^\natural)) = -\epsilon D(a^\natural)$ par connexité.

Preuve de (ii). Pour deux éléments v et v' de $V_{-D(a^\natural)}$, des éléments $m(v)$ et $m(v')$ opèrent vectoriellement sur $\mathbf{A_K}$ en fixant $\partial a^\natural$ et intervertissant $D(a^\natural)$ et son opposée. Ainsi, $m(v)m(v')^{-1}$ et $m(v)^2$ fixent $\mathbf{A_K}$ et sont donc dans $Z(\mathbf{K})$.

Preuve de (iii). $m(v)^{-1}$ transforme $\mathbf{A}$ en un autre appartement jumelé contenant $\mathbf{A_K}$. D'après (10.4.4), il existe z dans $Z(\mathbf{K}_s)$, tel que $zm(v)^{-1}$ stabilise $\mathbf{A}$, autrement dit est égal à un élément n dans N par (10.1.3). Ainsi, puisque z^{-1} fixe $\mathbf{A_K}$, $m(v) = n^{-1}z$ opère comme n^{-1} sur cet espace. □

Puisque les éléments $m(v)$ stabilisent $\mathbf{A_K}$ et envoient point sphérique sur point sphérique, il est clair que le groupe $W^\natural$ permute les $\mathbf{K}$-racines réelles relatives à ce $\mathbf{K}$-appartement. On va aussi montrer que $S^\natural$ engendre $W^\natural$. Si $F^\natural$ et la $\mathbf{K}$-cloison $E^\natural$ (incluse dans $\overline{F}^\natural$) définissent le $\mathbf{K}$-demi-appartement $D(a^\natural)$, alors $r_{a^\natural}F^\natural$ est la $\mathbf{K}$-chambre de $\mathbf{A_K}$ qui partage $E^\natural$ avec $F^\natural$. Ainsi, par le lemme (12.3.3), l'ensemble des $\mathbf{K}$-chambres qui partagent la $\mathbf{K}$-cloison $E^\natural$ avec $F^\natural$ est $\{vr_{a^\natural}F^\natural\}_{v\in V_{a^\natural}}$.

LEMME. — (i) *$W^\natural$ est engendré par $S^\natural$ et opère simplement transitivement sur les $\mathbf{K}$-chambres de signe fixé de $\mathbf{A_K}$.*
(ii) *Soit W le groupe de Weyl de $\mathbf{A}$. Soit W_1 (respectivement W_2) le stabilisateur (respectivement fixateur) de $\mathbf{A_K}$ dans W. Alors, comme groupe d'automorphismes de $\mathbf{A_K}$, on a $W^\natural = W_1/W_2$.*

Démonstration. Preuve de (i). D'abord, il est clair qu'un élément de $W^\natural$ qui fixe une $\mathbf{K}$-chambre de $\mathbf{A_K}$, fixe en fait tout le $\mathbf{K}$-appartement $\mathbf{A_K}$, puisqu'il y opère vectoriellement. L'action de $W^\natural$ est libre, il reste donc à montrer qu'elle est transitive. Outre la $\mathbf{K}$-chambre positive $F^\natural$ de la standardisation, on se donne une seconde $\mathbf{K}$-chambre $(F')^\natural$ et on trace un segment qui joint un point de $F^\natural$ à un point de $(F')^\natural$. Ce segment est une partie compacte convexe de l'intérieur du cône de Tits $\mathcal{C}$. Il est ainsi recouvert par un nombre fini de facettes sphériques. À chaque fois qu'il passe par un point d'une $\mathbf{K}$-facette de codimension ≥ 2, on peut déformer le segment en une petite ligne polygonale qui ne traverse que des $\mathbf{K}$-facettes de codimension ≤ 1. En étendant cette manipulation à tous les points de ce type, on obtient une ligne polygonale dans $\mathbf{A_K}$ qui définit une galerie rationnelle, au sens d'une suite $((F_0)^\natural, (E_1)^\natural, (F_1)^\natural, ...)$, avec $(E_i)^\natural$ $\mathbf{K}$-cloison partagée par les $\mathbf{K}$-chambres $(F_{i-1})^\natural$ et $(F_i)^\natural$. On raccourcit éventuellement cette suite en ôtant les bégaiements; on note $s_i^\natural$ la réflexion par rapport au $\mathbf{K}$-mur réel contenant la $\mathbf{K}$-cloison $(E_i)^\natural$, et $w_i^\natural$ l'élément de $W^\natural$ $w_i^\natural := s_{i-1}^\natural ... s_2^\natural s_1^\natural$, pour $i \geq 2$. On a tout fait pour avoir $w_i^\natural F^\natural = (F_{i-1})^\natural$, ce qui montre que $w_i^\natural s_i^\natural (w_i^\natural)^{-1}$ est une réflexion de $S^\natural$. En intercalant de tels $w_i^\natural$ et leurs inverses dans $w_{n+1}^\natural$, on voit que le sous-groupe de $W^\natural$ engendré par $S^\natural$ est transitif sur les $\mathbf{K}$-chambres positives. Le cas négatif est rigoureusement identique, et la simple transitivité fait voir que $W^\natural$ est engendré par $S^\natural$.

Preuve de (ii). Par la première partie du point qui précède et le point (iii) de la proposition ci-dessus, on a déjà $W^\natural \subset W_1/W_2$. Un élément de W_1 permute les $\mathbf{K}$-chambres; et s'il en stabilise une, il la fixe point par point. Par la simple transitivité du point qui précède, on a donc l'inclusion réciproque. □

On obtient ainsi la transitivité de l'action de $G(\mathbf{K})$ sur les standardisations rationnelles de $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$.

COROLLAIRE. — *Le groupe $G(\mathbf{K})$ opère transitivement sur les standardisations rationnelles de $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de ce que $G(\mathbf{K})$ opère transitivement sur les $\mathbf{K}$-appartements de $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$ et que le groupe des points rationnels du stabilisateur d'un $\mathbf{K}$-appartement est transitif sur les $\mathbf{K}$-chambres de signe fixé, ces actions respectant l'opposition géométrique. □

Il ne reste plus qu'à montrer que le couple $(W^\natural, S^\natural)$ est un système de Coxeter, ce qui n'est pas évident à ce stade. On va à cette fin mettre en évidence une structure combinatoire sur $G(\mathbf{K})$ tout entier.

12.4.2. BN-paire raffinée symétrique relative

Rappelons qu'une BN-paire raffinée symétrique est une combinatoire très proche de la structure plus fine de donnée radicielle jumelée. On passe par cet intermédiaire pour justifier l'existence d'un système de Coxeter et de ses racines. On conserve la standardisation rationnelle $(\mathbf{A}_\mathbf{K}, F^\natural, -F^\natural)$.

DÉFINITION. — *Soit G un $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody presque déployé vérifiant la condition* (DCS). *Soit $(\mathbf{A}_\mathbf{K}, F^\natural, -F^\natural)$ une standardisation rationnelle du jumelage associé $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$. V_+ (respectivement V_-) désigne le groupe des points rationnels du $\mathbf{K}$-groupe $U(F)(\mathbf{K}_s)$ (respectivement $U(-F)(\mathbf{K}_s)$).*

Il ne manquait plus que ces sous-groupes pour définir la structure en question. Commençons par un lemme qui relie la définition déjà donnée des points rationnels de $\mathbf{K}$-groupes radiciels avec celle qui nous sera utile pour la vérification des axiomes de BN-paire raffinée symétrique.

LEMME. — *Soit $s^\natural = r_{a^\natural}$ la réflexion simple de $S^\natural$ associée à la $\mathbf{K}$-racine simple réelle $a^\natural$. Alors, le groupe $V_+ \cap s^\natural V_- (s^\natural)^{-1}$ est aussi le groupe des points rationnels $V_{D(a^\natural)}$ du $\mathbf{K}$-groupe $U(D(a^\natural))(\mathbf{K}_s)$.*

Démonstration. On note $E^\natural$ la $\mathbf{K}$-cloison adhérente à $F^\natural$ qui définit le $\mathbf{K}$-demi-appartement $D(a^\natural)$ dans $\mathbf{A}_\mathbf{K}$. On regarde l'intersection $U(F)(\mathbf{K}_s) \cap U(-s^\natural F)(\mathbf{K}_s)$. Elle vaut

$$U(F)(\mathbf{K}_s) \cap U(-s^\natural F)(\mathbf{K}_s) = \big(U(F)(\mathbf{K}_s) \cap U(-s^\natural F)(\mathbf{K}_s)\big) \cap \mathrm{Fix}(F \cup -s^\natural F)(\mathbf{K}_s)$$

puisque $U(F)(\mathbf{K}_s)$ fixe F et $U(-s^\natural F)(\mathbf{K}_s)$ fixe $-s^\natural F$. On peut écrire les décompositions de Lévi de $\mathrm{Fix}(F \cup -s^\natural F)(\mathbf{K}_s)$, $\mathrm{Fix}(F)(\mathbf{K}_s)$ et $\mathrm{Fix}(-s^\natural F)(\mathbf{K}_s)$. Soit:

$$\mathrm{Fix}(F \cup -s^\natural F)(\mathbf{K}_s) = Z(\mathbf{K}_s) \ltimes U(D(a^\natural))(\mathbf{K}_s),$$
$$\mathrm{Fix}(F)(\mathbf{K}_s) = Z(\mathbf{K}_s) \ltimes U(F)(\mathbf{K}_s),$$
$$\text{et} \quad \mathrm{Fix}(-s^\natural F)(\mathbf{K}_s) = Z(\mathbf{K}_s) \ltimes U(-s^\natural F)(\mathbf{K}_s).$$

En revenant à l'intersection précédente, on obtient $U(F)(\mathbf{K}_s) \cap U(-s^\natural F)(\mathbf{K}_s) = U(D(a^\natural))(\mathbf{K}_s)$ qui fournit l'identification annoncée en passant aux points fixes sous Galois. □

Voici enfin un premier théorème de structure de points rationnels.

THÉORÈME. — *Soit G un $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody presque déployé vérifiant la condition* (DCS). *On fixe $(\mathbf{A}_\mathbf{K}, F^\natural, -F^\natural)$ une standardisation rationnelle du jumelage associé $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$. Alors, $(G(\mathbf{K}), N(\mathbf{K}), V_+, V_-, Z(\mathbf{K}), S^\natural)$ est une BN-paire raffinée symétrique.*

Démonstration. Dans la série d'axiomes (RT1), seules les relations de normalisation et de génération posent éventuellement problème. $Z(\mathbf{K})$ est le fixateur du $\mathbf{K}$-appartement de la standardisation rationnelle $(\mathbf{A}_\mathbf{K}, F^\natural, -F^\natural)$, donc il est normalisé par le groupe $N(\mathbf{K})$ défini comme stabilisateur du même $\mathbf{K}$-appartement et il normalise les groupes V_+ et V_- définis comme fixateurs d'une partie de $\mathbf{A}_\mathbf{K}$. Il reste la propriété de génération $G(\mathbf{K}) = \langle N(\mathbf{K}), V_+\rangle$ (respectivement $G(\mathbf{K}) = \langle N(\mathbf{K}), V_-\rangle$) à montrer. Soit g un élément de $G(\mathbf{K})$. $gF^\natural$ est une $\mathbf{K}$-chambre positive, à ce titre est une $\mathbf{K}$-facette sphérique, donc il existe un $\mathbf{K}$-appartement $\mathbf{A}'_\mathbf{K}$ qui contient $F^\natural \cup gF^\natural$. Ce $\mathbf{K}$-appartement s'écrit $u\mathbf{A}_\mathbf{K}$ pour un élément u de V_+, d'où $u^{-1}gF^\natural \subset \mathbf{A}_\mathbf{K}$. Enfin, par transitivité de $N(\mathbf{K})$ sur les $\mathbf{K}$-chambres de $\mathbf{A}_\mathbf{K}$, il existe un élément n de $N(\mathbf{K})$ tel que $n^{-1}u^{-1}gF^\natural = F^\natural$. Ainsi, $n^{-1}u^{-1}g$ est dans le groupe $\mathrm{Fix}(F^\natural) \cap G(\mathbf{K}) = \mathrm{Fix}(F) \cap G(\mathbf{K}) = Z(\mathbf{K}) \ltimes V_+$. Finalement, $G = V_+N(\mathbf{K})V_+$. L'assertion pour le signe $-$ se prouve par le même raisonnement.

Vérification de (RT2). Remarquons tout d'abord que tout élément $w^\natural$ de $W^\natural$ transforme un groupe radiciel en un groupe radiciel, par définition géométrique de ces groupes. On a $w^\natural V_{D(a^\natural)}(w^\natural)^{-1} = U(w^\natural D(a^\natural)) \cap G(\mathbf{K})$, et une $\mathbf{K}$-racine réelle est envoyée sur une $\mathbf{K}$-racine réelle, car $N(\mathbf{K})$ opère vectoriellement sur $\mathbf{A}_\mathbf{K}$ en envoyant point sphérique sur point sphérique.

Pour l'assertion a), il suffit alors de se référer à (12.3.4) pour voir que $V_{D(a^\natural)} = V_+ \cap s^\natural V_-(s^\natural)^{-1}$ est non trivial, et de se référer à la proposition (12.4.1)(i) pour la seconde partie des vérifications.
Pour l'assertion b), il suffit de revenir à la remarque préliminaire et de voir que $V_{w^\natural D(a^\natural)}$ est dans V_+ ou V_- suivant que le $\mathbf{K}$-demi-appartement $w^\natural D(a^\natural)$ contient la $\mathbf{K}$-chambre standard $F^\natural$ ou non.
Pour l'assertion c), on se donne un élément v de V_+. On note $(F^\natural)' = s^\natural F^\natural$ la $\mathbf{K}$-chambre géométriquement $s^\natural$-adjacente à $F^\natural$ dans $\mathbf{A}_\mathbf{K}$. On regarde alors l'image par v de $(F^\natural)'$. Puisque $F^\natural \neq (F^\natural)'$, on a encore $vF^\natural \neq v(F^\natural)'$. Mais comme $F^\natural \cap (F^\natural)' \subset \partial a^\natural$, on a $vF^\natural \cap v(F^\natural)' \subset \partial a^\natural$. Par conséquent, il existe v' dans $V_{D(a^\natural)}$ tel que $v'^{-1}v(F^\natural)' = (F^\natural)'$. Ainsi, $v'^{-1}v$ est dans $V_+ \cap (s^\natural)^{-1}V_+s^\natural$.

Vérification de (RT3). On se donne v_+ dans V_+, v_- dans V_- et n dans $N(\mathbf{K})$ tels que $v_-nv_+ = 1$, soit $v_-^{-1} = nv_+$. On regarde l'image de $F^\natural$ par cet élément à deux écritures. v_-^{-1} va envoyer $F^\natural$ sur une $\mathbf{K}$-chambre opposée à $-F^\natural$ dans un $\mathbf{K}$-appartement contenant $-F^\natural \cup v_-^{-1}F^\natural$. Mais nv_+ envoie $F^\natural$ sur $nF^\natural$ qui est dans $\mathbf{A}_\mathbf{K}$, donc nécessairement $nF^\natural$ est opposée à $-F^\natural$ dans le $\mathbf{K}$-appartement $\mathbf{A}_\mathbf{K}$. Par conséquent, $nF^\natural$ est précisément $F^\natural$, et n fixe le $\mathbf{K}$-appartement $\mathbf{A}_\mathbf{K}$ tout entier: $n \in Z(\mathbf{K})$. On voit donc que nv_+ est dans $Z(\mathbf{K})V_+$ et v_- dans V_-. Comme $Z(\mathbf{K})V_+ \cap V_- = \{1\}$ par décomposition de Lévi de $P(F)$, on a finalement $v_- = nv_+ = 1$. Enfin, par la même décomposition de Lévi, on aboutit aussi à $n = v_+ = 1$. □

Ce résultat justifie que le couple $(W^\natural, S^\natural)$ est un système de Coxeter.

COROLLAIRE. — *$(W^\natural, S^\natural)$ est un système de Coxeter.* □

12.4.3. Théorème de structure des points rationnels

Nous allons maintenant énoncer le résultat de descente en termes de groupes, pour en faire ensuite un commentaire géométrique (12.4.4). On veut mettre en évidence une structure de donnée radicielle jumelée (1.5.1), et pour cela on considère le système de Coxeter $(W^\natural, S^\natural)$. On

prouvera une version plus fine qui mettra en évidence une donnée radicielle jumelée entière à la sous-section (12.6.3).

LEMME. — *La famille des* **K***-demi-appartements réels* $D(a^\natural)$ *de* $\mathbf{A_K}$ *est en bijection* $W^\natural$*-équivariante avec les racines abstraites de* $(W^\natural, S^\natural)$.

Démonstration. On montrera à la sous-section (12.6.1) que la **K**-chambre $F^\natural$ est un cône simplicial de $L^\natural$. La conséquence qui nous intéresse est que la famille des $a_0^\natural$ est libre dans $(L^\natural)^*$. À une nuance près, $\mathcal{B}^\natural = (S^\natural, (L^\natural)^*, (a_0^\natural), (s^\natural))$ est une prébase de racines au sens de J.-Y. Hée (6.2.4). En effet, l'action contragrédiente de $W^\natural$ sur $(L^\natural)^*$ fait de $W^\natural$ un groupe de réflexions. La nuance est que $(a_0^\natural)$ n'est qu'une famille libre de $(L^\natural)^*$ et pas une base. La restriction de la partition $\Delta^{re} = \Delta_+^{re} \sqcup \Delta_-^{re}$ à $L^\natural$ fait vérifier à $\mathcal{B}^\natural$ la condition qui fait d'une prébase une base de racines non pas au sens de (6.2.4), mais au sens de [Hée91], définition (2.2) p.80 que nous adopterons juste pour cette preuve. Ainsi, la partie positive de $\mathbf{A_K}$ découpée par les $D(a^\natural)$ est le cône de Tits de $W^\natural$ ([Hée91], sections I et J p.93-96). Enfin, la caractérisation des **K**-chambres dans un **K**-demi-appartement réel donné en fonction de la longueur, fournit l'identification cherchée ([Hée91], (2.40)(a) p.93). □

Ce petit résultat géométrique justifie que dans le théorème qui suit, on adopte le point de vue des **K**-demi-appartements réels de $\mathbf{A_K}$ pour travailler sur le système de racines $\Phi_{\mathbf{K}}$ de $W^\natural$. Ainsi, l'ensemble d'indices de la donnée radicielle jumelée est la famille $\Phi_{\mathbf{K}}$.

THÉORÈME. — *Soit* G *un* **K***-groupe de Kac-Moody presque déployé vérifiant la condition* (DCS). *On fixe* $(\mathbf{A_K}, F^\natural, -F^\natural)$ *une standardisation rationnelle du jumelage associé* $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$. *Alors,* $\big(G(\mathbf{K}), (V_{D(a^\natural)})_{D(a^\natural)\in\Phi_{\mathbf{K}}}, Z(\mathbf{K})\big)$ *est une donnée radicielle jumelée de type* $(W^\natural, S^\natural)$ *qui vérifie l'axiome* $(\mathrm{DRJ1})_{\mathrm{lin.}}$.

Démonstration. L'axiome du commutateur est le seul à ne pas être impliqué par la structure de système de Tits raffiné symétrique (1.6.2). Il suffit donc de prouver $(\mathrm{DRJ1})_{\mathrm{lin.}}$. On va reprendre pour cela la notion d'intervalle linéaire de (5.4.2).

On se donne donc $\{D(a^\natural); D(b^\natural)\}$ une paire de **K**-demi-appartements réels de $\Phi_{\mathbf{K}}$. Avec ce point de vue, les intervalles linéaires fermés et ouverts associés sont

$$[D(a^\natural); D(b^\natural)]_{\mathrm{lin.}} := \{D(c^\natural) \mid \exists \lambda, \mu \in \mathbf{R}_+ \quad c^\natural = \lambda a^\natural + \mu b^\natural\}$$
$$\text{et} \quad]D(a^\natural); D(b^\natural)[_{\mathrm{lin.}} := [D(a^\natural); D(b^\natural)]_{\mathrm{lin.}} \setminus \{D(a^\natural); D(b^\natural)\}.$$

Si on suppose maintenant $\{D(a^\natural); D(b^\natural)\}$ prénilpotente, il existe deux **K**-chambres positives $F_+^\natural$ et $F_-^\natural$ telles que

$$D(a^\natural) \cap D(b^\natural) \supset F_+^\natural \quad \text{et} \quad (-D(a^\natural)) \cap D(-b^\natural) \supset F_-^\natural.$$

On définit alors les parties de racines de Δ^{re} suivantes:

$$\Phi([D(a^\natural); D(b^\natural)]_{\mathrm{lin.}}) := \bigcup_{D(c^\natural)\in[D(a^\natural);D(b^\natural)]_{\mathrm{lin.}}} \Phi_{c^\natural}$$
$$\text{et} \quad \Phi(]D(a^\natural); D(b^\natural)[_{\mathrm{lin.}}) := \bigcup_{D(c^\natural)\in]D(a^\natural);D(b^\natural)[_{\mathrm{lin.}}} \Phi_{c^\natural}.$$

1. Étude des parties de racines

Soit c une racine d'une telle partie. $D(c^\natural)$ et *a fortiori* $D(c)$ contiennent F_+. Puisque $D(c)$ est réunion de facettes, elle contient d'ailleurs tout le résidu de F_+. Symétriquement, $-D(c)$ contient tout le résidu de F_-. Ceci prouve déjà que $\Phi([D(a^\natural);D(b^\natural)]_{\text{lin.}})$ et donc $\Phi(]D(a^\natural);D(b^\natural)[_{\text{lin.}})$ sont des parties prénilpotentes de racines. En outre, par définition des intervalles linéaires, on a les implications

$$c,d \in \Phi([D(a^\natural);D(b^\natural)]_{\text{lin.}}) \quad \Rightarrow \quad [c;d]_{\mathbf{N}} \subset \Phi([D(a^\natural);D(b^\natural)]_{\text{lin.}}), \text{ et}$$

$$c \in \Phi([D(a^\natural);D(b^\natural)]_{\text{lin.}}),\ d \in \Phi(]D(a^\natural);D(b^\natural)[_{\text{lin.}}) \quad \Rightarrow \quad]c;d[_{\mathbf{N}} \subset \Phi(]D(a^\natural);D(b^\natural)[_{\text{lin.}}),$$

ce qui montre que $\Phi(]D(a^\natural);D(b^\natural)[_{\text{lin.}})$ et $\Phi([D(a^\natural);D(b^\natural)]_{\text{lin.}})$ sont **N**-nilpotentes.

2. Groupes associés

Ce qui précède sur les parties de racines permet de définir les groupes $U_{\Phi([D(a^\natural);D(b^\natural)]_{\text{lin.}})}$ et $U_{\Phi(]D(a^\natural);D(b^\natural)[_{\text{lin.}})}$, et fournit les relations:

$$U_{\Phi(]D(a^\natural);D(b^\natural)[_{\text{lin.}})} \lhd U_{\Phi([D(a^\natural);D(b^\natural)]_{\text{lin.}})} \quad \text{et} \quad U_{\Phi(]D(a^\natural);D(b^\natural)[_{\text{lin.}})} \supset [U(D(a^\natural)),U(D(b^\natural))].$$

L'inclusion de la première assertion provient d'une simple inclusion de parties de racines. Le reste provient de la dernière remarque sur les parties de racines et de l'axiome (DRJE1) dans G pour les groupes radiciels indexés par des racines de $\Phi([D(a^\natural);D(b^\natural)]_{\text{lin.}})$. Comme $\Phi(]D(a^\natural);D(b^\natural)[_{\text{lin.}})$ est **N**-nilpotente, par le lemme (6.2.5) pour G, on peut écrire en choisissant un ordre adéquat sur cette partie:

$$U_{\Phi(]D(a^\natural);D(b^\natural)[_{\text{lin.}})} = \prod_{D(c^\natural)\in]D(a^\natural);D(b^\natural)[_{\text{lin.}}} U(D(c^\natural)) = \prod_{D(c^\natural)\in]D(a^\natural);D(b^\natural)[_{\text{lin.}}} \Big(\prod_{d\in\Phi_{c^\natural}} U_d\Big).$$

Soit maintenant g un élément du groupe des commutateurs $[V_{D(a^\natural)},V_{D(b^\natural)}]$. Au titre d'élément de $U_{\Phi(]D(a^\natural);D(b^\natural)[_{\text{lin.}})}$, g s'écrit $g = \prod_{D(c^\natural)\in]D(a^\natural);D(b^\natural)[_{\text{lin.}}} u_{D(c^\natural)}$. En outre, g est fixe sous le groupe de Galois Γ. Donc par unicité d'écriture, pour chaque **K**-demi-appartement réel $D(c^\natural)$, $u_{D(c^\natural)}$ est fixe sous Galois. Ainsi, $u_{D(c^\natural)}$ est dans $V_{D(c^\natural)}$ et g dans $\prod_{D(c^\natural)\in]D(a^\natural);D(b^\natural)[_{\text{lin.}}} V_{D(c^\natural)}$.

□

REMARQUES. — 1. Ce théorème implique déjà que nous pouvons faire usage d'une partie des propriétés combinatoires du chapitre 6: décompositions de Bruhat et décomposition de Birkhoff avec écriture unique, décomposition de Lévi pour les sous-groupes paraboliques.

2. L'étude des rapports de proportionnalité entre **K**-racines (12.5.4) montrera qu'on peut mettre en évidence les axiomes d'une donnée radicielle jumelée entière, pour être plus proche de la combinatoire de *donnée radicielle génératrice* de la théorie de Borel-Tits revue par F. Bruhat et J. Tits ([Bru-Tit72], section (6.1) p.107-116). Cela donnera droit au reste des décompositions du chapitre 6, même si le système de racines entier correspondant ne sera pas réduit.

12.4.4. Fabrication de jumelages presque déployés. Réalisation géométrique

Nous avons eu recours à des raisonnements géométriques pour aboutir à un résultat de descente énoncé en termes de combinatoire des groupes. On peut aussi adopter le point de vue des immeubles. Pour l'instant, on n'a pas mis en évidence une structure d'immeuble jumelé sur le lieu de points fixes $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$. Précisément, il faut voir cet espace comme une représentation géométrique particulière, la structure combinatoire de jumelage se déduisant en fait de la donnée radicielle jumelée associée à une standardisation rationnelle. À partir de cette combinatoire de groupe, on obtient un jumelage dont les immeubles de Moufang positif et négatif sont les ensembles $\{gZ(\mathbf{K})V_+\}_{g\in G(\mathbf{K})}$ et $\{gZ(\mathbf{K})V_-\}_{g\in G(\mathbf{K})}$. Leurs chambres seront appelées *chambres rationnelles abstraites*. Par transitivité de $G(\mathbf{K})$ sur les standardisations rationnelles de $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$, on voit que l'ensemble des $\mathbf{K}$-chambres de $(|\mathcal{I}_\epsilon(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$ est en bijection avec celui des chambres de l'immeuble abstrait de signe ϵ. L'application $gZ(\mathbf{K})V_\epsilon \mapsto \epsilon gF^\natural$ établit une bijection entre ces deux ensembles.

Il s'agit de voir qu'on peut lire les relations de $s^\natural$-adjacence et d'opposition abstraites sur l'espace $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$. Commençons par les adjacences, et pour cela donnons-nous $s^\natural$ dans $S^\natural$. Deux chambres rationnelles abstraites $gZ(\mathbf{K})V_+$ et $hZ(\mathbf{K})V_+$ sont $s^\natural$-adjacentes si par définition $g^{-1}h$ est dans $Z(\mathbf{K})V_+s^\natural Z(\mathbf{K})V_+$. La décomposition en écriture unique d'une double classe de Bruhat dans une donnée radicielle jumelée fait voir que cette condition est équivalente au fait que $g^{-1}h$ soit dans $V_{D(a^\natural)}s^\natural Z(\mathbf{K})V_+$.
Par $G(\mathbf{K})$-équivariance, il suffit de considérer le cas des $\mathbf{K}$-chambres standard, et par symétrie celui de $F^\natural$. Or, l'ensemble des $\mathbf{K}$-chambres de $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$ distinctes de $F^\natural$ et géométriquement $s^\natural$-adjacentes à $F^\natural$ (*i.e.*, partageant la $\mathbf{K}$-cloison $E^\natural$ avec $F^\natural$) est précisément $\{vs^\natural F^\natural\}_{v\in V_{D(a^\natural)}}$ par (12.3.3). Donc, la bijection globale entre les chambres rationnelles abstraites positives (respectivement négatives) et les $\mathbf{K}$-chambres positives (respectivement négatives) de $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$ respecte les $s^\natural$-adjacences individuellement.

Il reste à parler de la codistance, c'est-à-dire plus simplement de la relation d'opposition de deux $\mathbf{K}$-chambres. On va faire le même raisonnement que précédemment. Rappelons qu'on convient de dire que deux $\mathbf{K}$-chambres sont *géométriquement opposées* s'il existe un appartement jumelé les contenant dans lequel elles sont opposées. Par $G(\mathbf{K})$-équivariance et symétrie, il suffit de déterminer les $\mathbf{K}$-chambres de $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$ opposées à la $\mathbf{K}$-chambre positive standard $F^\natural$. Il y en a une par $\mathbf{K}$-appartement contenant $F^\natural$, autrement dit par extension vectorielle Galois-fixe de $F^\natural$. Par simple transitivité de $U(F)(\mathbf{K})$ sur cet ensemble (12.3.1), on voit donc que l'ensemble des $\mathbf{K}$-chambres de $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$ opposées à $F^\natural$ est précisément $\{v(-F^\natural)\}_{v\in U(F)(\mathbf{K})}$. Combinatoirement, la décomposition avec écriture unique de la grosse cellule de $\big(G(\mathbf{K}),(V_{a^\natural})_{D(a^\natural)\in\Delta^{re}_{\mathbf{K}}},Z(\mathbf{K})\big)$ est

$$(Z(\mathbf{K})V_-)(Z(\mathbf{K})V_+) = V_-Z(\mathbf{K})V_+,$$

ce qui montre que l'ensemble des chambres rationnelles abstraites combinatoirement opposées à $F^\natural$ est précisément $\{vZ(\mathbf{K})V_-\}_{v\in U(F)(\mathbf{K})}$. Les deux notions d'opposition coïncident bien et on a finalement montré le résultat suivant.

THÉORÈME. — *Soit $(\mathcal{G},\mathcal{U}_{\mathbf{K}})$ une $\mathbf{K}$-forme du groupe de Kac-Moody $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\overline{\mathbf{K}})$, déployé sur la fermeture séparable $\mathbf{K}_s$ et de jumelage $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$. On note $G(\mathbf{K})$ le groupe des points rationnels correspondant et on se fixe une standardisation rationnelle $(\mathbf{A}_{\mathbf{K}},F^\natural,-F^\natural)$, qui fournit une donnée radicielle jumelée $\big(G(\mathbf{K}),(V_{a^\natural})_{D(a^\natural)\in\Delta^{re}_{\mathbf{K}}},Z(\mathbf{K})\big)$. Alors, le lieu de points fixes*

$(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$ *est une représentation géométrique du jumelage abstrait de la donnée radicielle jumelée, au sens où l'on y lit géométriquement les relations de* $s^\natural$*-adjacence et d'opposition.* □

Il s'agit maintenant d'interpréter les résultats géométriques qu'on vient d'obtenir en termes de sous-groupes du **K**-groupe de Kac-Moody.

12.5. K-sous-groupes réductifs et petits sous-jumelages

Application aux tores K-déployés

Précisément, on veut obtenir l'analogue de la conjugaison des tores **K**-déployés maximaux pour les **K**-groupes algébriques. Pour cela, on va étudier les **K**-sous-groupes réductifs d'un **K**-groupe de Kac-Moody, ce qui généralisera l'étude du noyau **K**-anisotrope faite en (12.3.2). En outre, l'approche géométrique passe par une étude intéressante en soi des sous-jumelages de ces groupes, dont l'immeuble de chaque signe sera bien entendu sphérique. Un autre sous-produit de ce travail est la détermination des rapports de proportionnalité possibles entre racines relatives.

12.5.1. Structure algébrique des sous-groupes de Cartan. Tores K-déployés

On sait d'après la section (10.4) que tous les sous-groupes de Cartan de $G(\mathbf{K}_s)$ sont conjugués. Partant de cette remarque, on peut définir sur tout sous-groupe de Cartan une structure algébrique. Pour $T(\mathbf{K}_s)$ le tore standard, la structure est donnée au moyen du groupe abélien libre Λ par

$$T(\mathbf{K}_s) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}_s\text{-alg}}(\mathbf{K}_s[\Lambda], \mathbf{K}_s),$$

ce qui signifie que $\mathbf{K}_s[\Lambda]$ est l'algèbre des fonctions régulières sur $T(\mathbf{K}_s)$.

Pour un sous-groupe de Cartan $gT(\mathbf{K}_s)g^{-1}$, on définit une structure algébrique en posant que les caractères algébriques de ce groupe sont les caractères de $(\mathrm{int}g^{-1})^*\Lambda$, où * indique la précomposition. Cette structure est bien définie pour la raison suivante. Si h est un autre élément de $G(\mathbf{K}_s)$ tel que $gT(\mathbf{K}_s)g^{-1} = hT(\mathbf{K}_s)h^{-1}$, alors il existe n dans $N = N_{G(\mathbf{K}_s)}(T(\mathbf{K}_s))$ (10.1.3) tel que $g = hn$. Par conséquent:

$$(\mathrm{int}g^{-1})^*\Lambda = (\mathrm{int}(hn)^{-1})^*\Lambda = (\mathrm{int}n^{-1} \circ \mathrm{int}h^{-1})^*\Lambda = (\mathrm{int}h^{-1})^*\big((\mathrm{int}n^{-1})^*\Lambda\big) = (\mathrm{int}h^{-1})^*\Lambda.$$

Définition. — *Pour* $gT(\mathbf{K}_s)g^{-1}$ *un sous-groupe de Cartan muni de sa structure algébrique, on note* $\Lambda(gT(\mathbf{K}_s)g^{-1}) := (\mathrm{int}g^{-1})^*\Lambda$ *son groupe de caractères algébriques.*

Pour ces structures algébriques sur les sous-groupes de Cartan, les automorphismes intérieurs sont des isomorphismes de groupes algébriques, si bien que ces structures se déduisent de celle d'un quelconque des sous-groupes de Cartan. Cela permet, pour traiter simplement les **K**-structures, de partir d'un sous-groupe de Cartan défini sur **K**. On suppose donc que $T(\mathbf{K}_s)$ est défini sur **K**, ce qui implique par (11.2.5) que Λ est stable sous Galois.

LEMME. — (i) *Si $gT(\mathbf{K}_s)g^{-1}$ est défini sur $\mathbf{K}$, c'est-à-dire Galois-stable, alors sa structure algébrique est celle d'un tore défini sur $\mathbf{K}$.*
(ii) *Il y a bijection entre les sous-groupes de Cartan de $G(\mathbf{K}_s)$ définis sur $\mathbf{K}$ et les appartements jumelés Galois-stables de $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$. Cette bijection provient du dictionnaire de* (10.4) *(prise de points fixes et prise de fixateur).*

Démonstration. Preuve de (i). L'action de Γ sur les caractères (non nécessairement algébriques) c de $gT(\mathbf{K}_s)g^{-1}$ est donnée par $\sigma(c) := \sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$, pour σ dans Γ vu comme automorphisme de corps à gauche et comme automorphisme de $G(\mathbf{K}_s)$ restreint à $gT(\mathbf{K}_s)g^{-1}$ à droite. L'énoncé signifie que cette action de Galois stabilise les caractères algébriques de $gT(\mathbf{K}_s)g^{-1}$. Soit donc c un caractère algébrique de $gT(\mathbf{K}_s)g^{-1}$. Ce caractère s'écrit $c_0 \circ \mathrm{int}g^{-1}$, pour c_0 dans Λ. Soit σ dans Γ; par stabilité de $gT(\mathbf{K}_s)g^{-1}$ sous Γ, on a $\sigma(g)^{-1} = ng$ pour n dans $N = N_{G(\mathbf{K}_s)}(T(\mathbf{K}_s))$ (10.1.3). Alors:

$$\sigma(c) = (\sigma \circ c_0 \circ \sigma^{-1}) \circ (\sigma \circ \mathrm{int}g^{-1} \circ \sigma^{-1})$$
$$(\sigma \circ c_0 \circ \sigma^{-1}) \circ \mathrm{int}\sigma(g)^{-1} = [(\sigma \circ c_0 \circ \sigma^{-1}) \circ \mathrm{int}n^{-1}] \circ \mathrm{int}g^{-1}.$$

$(\sigma \circ c_0 \circ \sigma^{-1})$ est dans Λ d'après (11.2.5), et N stabilise Λ par les relations de définition des groupes de Kac-Moody déployés. Par conséquent, $(\sigma \circ c_0 \circ \sigma^{-1}) \circ \mathrm{int}n^{-1}$ est encore dans Λ et finalement $\sigma(c)$ est dans $\Lambda(gT(\mathbf{K}_s)g^{-1})$. La structure algébrique en question est donc bien une $\mathbf{K}$-structure.

Preuve de (ii). Il suffit de montrer que si un sous-groupe de Cartan T' est stable sous Galois, le lieu des points fixes sous T' l'est également, et inversement. C'est standard. □

On peut alors définir les tores $\mathbf{K}$-déployés de $G(\mathbf{K}_s)$ en utilisant les structures algébriques précédentes.

DÉFINITION. — (i) *Un* tore *de $G(\mathbf{K}_s)$ est un tore d'un sous-groupe de Cartan de $G(\mathbf{K}_s)$.*
(ii) *Un* tore $\mathbf{K}$-déployé *de $G(\mathbf{K}_s)$ est un sous-tore $\mathbf{K}$-déployé d'un sous-groupe de Cartan défini sur $\mathbf{K}$ de $G(\mathbf{K}_s)$.*

REMARQUE. — Dans le cas classique de dimension finie, un tore $\mathbf{K}$-déployé d'un $\mathbf{K}$-groupe réductif est contenu dans un tore maximal défini sur $\mathbf{K}$. Il suffit d'invoquer l'existence d'un tore maximal défini sur $\mathbf{K}$ dans le centralisateur du tore $\mathbf{K}$-déployé en question.

12.5.2. K-sous-groupes réductifs. Sous-jumelages rationnels associés

On se place maintenant dans la situation suivante. $\mathbf{A}$ est un appartement jumelé Galois-stable, E et $-E$ sont deux facettes sphériques Galois-stables opposées dans $\mathbf{A}$. On pose $\Omega := E \cup (-E)$. On s'intéresse aux structures de $\mathbf{K}$-groupe algébrique sur les groupes de la forme $\mathrm{Fix}(\Omega)$. On suppose, quitte à faire opérer $G(\mathbf{K})$, que la facette E est standard (sphérique) de type J.

$\mathbf{K}$-sous-groupes réductifs

$\Phi^m(E) = \Phi^m(\Omega)$ est un système de racines fini (5.1.5), $\{a_s\}_{s \in J}$ en est même une base. Ce sous-système définit une donnée radicielle de Chevalley-Demazure à partir de la donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D}$, à savoir $\mathcal{D}_J = \left(J, A|_{J \times J}, \Lambda, (c_s)_{s \in J}, (h_s)_{s \in J}\right)$, et par conséquent un $\mathbf{K}_s$-groupe réductif (déployé) $G_J(\mathbf{K}_s)$. Par les relations de définition d'un groupe de Kac-Moody (8.3.3) et la présentation d'un groupe réductif déployé ([Spr80], théorème (11.3.2) p.253), on a un morphisme surjectif de groupes abstraits

$$\varphi : G_J(\mathbf{K}_s) \twoheadrightarrow \mathrm{Fix}(\Omega).$$

La référence [Spr80] traite le cas des groupes réductifs sur un corps algébriquement clos, le cas déployé s'en déduit immédiatement. De part et d'autre de cette flèche, on a des groupes possédant une combinatoire «standard» de système de Tits jumelés, pour lesquelles φ échange sous-groupes de Borel de chaque signe, et groupes relevant le (même) groupe de Weyl. D'où le respect par φ des décompositions de Bruhat, le fait que le noyau de φ est dans le tore maximal standard de $G_J(\mathbf{K}_s)$ associé à la construction de celui-ci. Finalement, on est ramené à considérer la restriction de φ à ce tore, qui est injective par construction. φ est un isomorphisme de groupes abstraits, ce qui permet un transport de structure algébrique sur $\mathrm{Fix}(\Omega)$. Pour cette structure, le sous-groupe de Cartan $T(\mathbf{K}_s)$ et les sous-groupes radiciels relatifs à $T(\mathbf{K}_s)$ dans $\mathrm{Fix}(\Omega)$ – les sous-groupes $U_a(\mathbf{K}_s)$ pour a dans $\Phi^m(\Omega)$ – sont des sous-groupes fermés. Les automorphismes de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}_s/\mathbf{K})$ induits sur $\mathrm{Fix}(\Omega)$ opèrent sur ce groupe via un quotient fini d'après (11.3.4). Ils posent un problème de descente de corps de base, dont la solution fait de $\mathrm{Fix}(\Omega)$ un $\mathbf{K}$-groupe réductif ([Ser59], (V.4.20), corollaire 2 p.110). À la différence de $M(\Omega^\natural)(\mathbf{K}_s)$ qui désigne un groupe abstrait, $M(\Omega^\natural)$ désigne le $\mathbf{K}$-groupe réductif ainsi obtenu.

Les sous-groupes de Cartan de $M(\Omega)$ sont les sous-groupes de $G(\mathbf{K}_s)$ inclus dans $M(\Omega)$. En effet, ces derniers sous-groupes sont en bijection avec les appartements jumelés contenant Ω, sur lesquels $M(\Omega)$ est transitif (10.4.4); et $M(\Omega)$ est transitif sur ses tores maximaux. Ceci fournit une bijection entre famille de sous-groupes abstraits, mais les structures algébriques se correspondent par définition de celles-ci pour les tores des groupes de Kac-Moody. Ce dictionnaire est en outre Galois-équivariant, il respecte donc les $\mathbf{K}$-structures sur les tores.

Petits sous-jumelages rationnels

On peut utiliser la théorie de Borel-Tits pour décrire le groupe des points rationnels dans le cas où le semi-simplifié d'un $\mathbf{K}$-groupe réductif est isotrope. On va surtout s'attacher à exploiter géométriquement quelques-uns des renseignements que cette théorie procure ([Bor-Tit65]).

Le résidu de F (respectivement $-F$) dans $\mathcal{I}_+(\mathbf{K}_s)$ (respectivement $\mathcal{I}_-(\mathbf{K}_s)$) est un sous-immeuble de $\mathcal{I}_+(\mathbf{K}_s)$ (respectivement $\mathcal{I}_-(\mathbf{K}_s)$), et on sait que la réunion (disjointe) $\mathcal{J}_\Omega(\mathbf{K}_s)$ de ces deux résidus est le jumelage de $\mathrm{Fix}(\Omega)$. Une réalisation géométrique de ce jumelage $\mathcal{J}_\Omega(\mathbf{K}_s)$ dans $|\mathcal{J}|_{\mathrm{co}}$ est donnée par $|\,\mathcal{J}_\Omega(\mathbf{K}_s)\,|_{\mathrm{co}}$, la réunion des facettes contenant F ou $-F$ dans leur adhérence (qui est aussi la réunion des facettes contenues dans les chambres des résidus de F ou $-F$, et de type inclus dans celui de F). Tout ceci est un rappel des considérations abstraites de (6.2.3).

Dans notre situation, on considère des résidus stables sous le groupe de Galois, et le dictionnaire entre sous-groupes paraboliques de $M(\Omega)$ et facettes de $\mathcal{J}_\Omega(\mathbf{K}_s)$ se restreint en un dictionnaire entre $\mathbf{K}$-sous-groupes paraboliques de $M(\Omega)$ et $\mathbf{K}$-facettes dans $\mathcal{J}_\Omega(\mathbf{K}_s)$. Ainsi, $(|\,\mathcal{J}_\Omega(\mathbf{K}_s)\,|_{\mathrm{co}})^\Gamma$ est une réalisation géométrique du jumelage des points rationnels du $\mathbf{K}$-groupe réductif $M(\Omega)$.

Tore $\mathbf{K}$-déployé attaché à un $\mathbf{K}$-appartement

Si $\mathbf{A}_\mathbf{K}$ est un $\mathbf{K}$-appartement de $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$, on peut lui associer un tore $\mathbf{K}$-déployé de la façon suivante. On sait que le fixateur de $\mathbf{A}_\mathbf{K}$ est abstraitement isomorphe à un $\mathbf{K}$-groupe réductif de semi-simplifié $\mathbf{K}$-anisotrope, par le même raisonnement sur les $\mathbf{K}$-sous-groupes paraboliques qu'en (12.3.2). Par conséquent, ce groupe admet un unique tore $\mathbf{K}$-déployé maximal au sens algébrique, qui n'est autre que la partie déployée de la composante neutre de son centre. On le note $Z_d^0(\mathbf{A}_\mathbf{K})$. On voit que c'est un tore $\mathbf{K}$-déployé de $G(\mathbf{K}_s)$ en choisissant

un appartement jumelé Galois-stable qui contient $\mathbf{A_K}$, par (12.2.1) appliqué à une paire de $\mathbf{K}$-chambres opposées de $\mathbf{A_K}$. Ainsi, $Z_d^0(\mathbf{A_K})$ est un sous-tore $\mathbf{K}$-déployé du sous-groupe de Cartan Galois-stable correspondant. On définit ainsi une application

$$\{\mathbf{K}\text{-appartements}\} \to \{\text{Tores } \mathbf{K}\text{-déployés maximaux}\}$$

$$\mathbf{A_K} \mapsto Z_d^0(\mathbf{A_K})$$

qui est $G(\mathbf{K})$-équivariante (pour l'action de $G(\mathbf{K})$ par conjugaison sur les tores $\mathbf{K}$-déployés).

12.5.3. Tores K-déployés maximaux et K-appartements

On veut maintenant étudier la classe des sous-tores $\mathbf{K}$-déployés de $G(\mathbf{K}_s)$.

THÉORÈME. — *Soit G un $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody presque déployé vérifiant la condition* (DCS). *On fixe $(\mathbf{A_K}, F^\natural, -F^\natural)$ une standardisation rationnelle du jumelage associé $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$. Alors, tout tore $\mathbf{K}$-déployé est conjugué par un élément de $G(\mathbf{K})$ dans le groupe $Z_d^0(\mathbf{A_K})$, qui est la partie $\mathbf{K}$-déployée de la composante neutre du centre du noyau anisotrope associé à $(\mathbf{A_K}, F^\natural, -F^\natural)$. En particulier, $Z_d^0(\mathbf{A_K})$ est $\mathbf{K}$-déployé maximal et les tores $\mathbf{K}$-déployés maximaux sont conjugués par $G(\mathbf{K})$.*

Démonstration. On se donne un tore $\mathbf{K}$-déployé H, inclus comme sous-tore $\mathbf{K}$-déployé dans un sous-groupe de Cartan $T'(\mathbf{K}_s)$ défini sur $\mathbf{K}$. Alors, le groupe d'automorphismes cohérents Γ agit sur l'appartement associé $\mathbf{A}(T'(\mathbf{K}_s))$ par un quotient fini (11.3.4), en stabilisant l'ensemble des points sphériques; il fixe donc une paire de facettes sphériques opposées. Par transitivité de $G(\mathbf{K})$ sur les $\mathbf{K}$-chambres de $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$ et puisque toute $\mathbf{K}$-facette sphérique est par définition dans l'adhérence d'une $\mathbf{K}$-chambre, on suppose désormais que H fixe une $\mathbf{K}$-facette standard en le conjuguant par un élément de $G(\mathbf{K})$. Ainsi, H est dans le fixateur de deux $\mathbf{K}$-facettes standard opposées $E^\natural$ et $-E^\natural$, et ce fixateur contient le noyau $\mathbf{K}$-anisotrope associé à la standardisation rationnelle choisie. Il existe donc un élément de $\mathrm{Fix}(-E^\natural \cup E^\natural)(\mathbf{K})$ qui conjugue H dans $Z_d^0(\mathbf{A_K})$ par [Bor90], théorème (20.9) p.228. □

REMARQUE. — L'utilisation de la réalisation algébrique de l'immeuble de (10.1.1) et (10.1.2), permet d'obtenir un dictionnaire entre sous-espaces contenus dans les parties de la forme $\mathrm{Im}\pi^* \cap \mathcal{C}$ des appartements jumelés et sous-tores génériques. Ce dictionnaire échange les sous-espaces Galois-fixes et les tores $\mathbf{K}$-déployés. Cela doit permettre d'obtenir une démonstration immobilière du théorème précédent, sans faire usage d'un résultat algébrique tel que [Bor90], théorème (20.9) p.228, au moins dans le cas où il existe des sous-tores génériques. Ceci a d'ailleurs été effectué pour les algèbres de Kac-Moody dans [Rou89] et [Rou90].

Il reste à se rappeler le petit résultat combinatoire (1.2.5) pour prouver:

COROLLAIRE. — *L'application $G(\mathbf{K})$-équivariante*

$$\{\mathbf{K}\text{-appartements}\} \to \{\text{Tores } \mathbf{K}\text{-déployés maximaux}\}$$

qui attache à tout $\mathbf{K}$-appartement $\mathbf{A}'_\mathbf{K}$ de $(|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}})^\Gamma$ le tore $\mathbf{K}$-déployé maximal $Z_d^0(\mathbf{A}'_\mathbf{K})$ du $\mathbf{K}$-groupe réductif anisotrope associé (12.5.1), *est surjective. Elle est en outre bijective dès que la condition combinatoire* (CENT) *de* (1.2.5) *est vérifiée.* □

REMARQUE. — La condition (CENT) se vérifie par exemple sur l'action du noyau anisotrope du $\mathbf{K}$-appartement standard sur les groupes radiciels relatifs. En fait, avec la connaissance du système de racines, on doit pouvoir montrer que $\#\mathbf{K} \geq 4$ implique (CENT).

12.5.4. Racines relatives proportionnelles

Considérons la relation:

$$(\star) \quad a^\natural = \lambda b^\natural, \lambda > 0.$$

Elle implique d'emblée $D(a^\natural) = D(b^\natural)$, si bien qu'on peut se ramener à l'étude des $\mathbf{K}$-racines réelles passant par une $\mathbf{K}$-cloison (sphérique) donnée. Enfin, par transitivité de $G(\mathbf{K})$ sur les $\mathbf{K}$-chambres, on suppose sans perte de généralité que la $\mathbf{K}$-cloison qu'on considère est standard, de type J. On la note $E^\natural = (F_J)^\Gamma$, et on introduit son opposée $-E^\natural$ dans $\mathbf{A}_\mathbf{K}$, ainsi que la partie équilibrée Galois-fixe $\Omega^\natural := E^\natural \cup (-E^\natural)$. Le fixateur $M(\Omega^\natural)(\mathbf{K}_s)$ est un groupe réductif admettant une $\mathbf{K}$-structure pour laquelle le groupe de Galois Γ est transitif sur $\Phi_{a^\natural}$ d'une part et $-\Phi_{a^\natural}$ d'autre part: c'est un $\mathbf{K}$-groupe réductif de rang 1. $M(\Omega^\natural)$ contient T et $Z(G)$ comme $\mathbf{K}$-sous-groupes fermés. On va plutôt considérer le $\mathbf{K}$-groupe réductif $M(\Omega^\natural)/Z(G)$, de rang 1 lui aussi. Il admet $T/Z(G)$ comme sous-groupe de Cartan défini sur $\mathbf{K}$, dont la partie torique $\mathbf{K}$-déployée est un tore $\mathbf{K}$-déployé maximal qu'on appellera encore standard. Ce groupe $T/Z(G)$ a pour groupe de caractères $Q(\mathcal{D})$. Le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des points Galois-fixes du dual $\left(Q(\mathcal{D}) \otimes_\mathbf{Z} \mathbf{R}\right)^*$ est le tensorisé par $\mathbf{R}$ du groupe des cocaractères du tore $\mathbf{K}$-déployé maximal standard de $M(\Omega^\natural)/Z(G)$. On le note $(X_*^d)^\Gamma_\mathbf{R}$. La Γ-équivariance de l'application caractère permet de définir un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Q_\mathbf{R} & \xrightarrow{c} & Q(\mathcal{D})_\mathbf{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_\mathbf{R}|_{L^\natural} & \longrightarrow & Q(\mathcal{D})_\mathbf{R}|_{(X_*^d)^\Gamma_\mathbf{R}}, \end{array}$$

où la flèche supérieure horizontale est l'application caractère, et les flèches verticales sont des applications de restriction. La relation $(\star)$ implique que les caractères du tore $\mathbf{K}$-déployé maximal standard de $M(\Omega^\natural)/Z(G)$ sont proportionnels de rapport λ. Par le résultat classique sur les rapports de proportionnalité entre racines relatives, on obtient le premier point du résultat suivant; le second résultant de l'étude des groupes radiciels relatifs des $\mathbf{K}$-groupes réductifs ([Bor90], remarque (21.7) p.231-232).

LEMME. — (i) *Si $a^\natural$ est une $\mathbf{K}$-racine réelle, la seule $\mathbf{K}$-racine réelle proportionnelle à $a^\natural$ possible pour un rapport > 1, est $2a^\natural$.*
(ii) *$V_{a^\natural}$ est isomorphe à un groupe radiciel relatif de $\mathbf{K}$-groupe semi-simple; en particulier, $V_{2a^\natural} \lhd V_{a^\natural}$.* □

On va maintenant utiliser les techniques abstraites de passage au quotient des systèmes de racines ([Bar96], chapitre 6), pour raffiner la détermination de la combinatoire des points rationnels d'un groupe de Kac-Moody presque déployé.

12.6. Donnée radicielle jumelée entière d'un groupe de Kac-Moody presque déployé

Nous terminons ce chapitre par une courte section qui consiste à donner une description plus proche de la théorie de Borel-Tits des points rationnels d'un groupe de Kac-Moody presque déployé. La difficulté majeure consiste à définir l'objet qui va indexer la combinatoire de ce groupe.

Dans tout ce qui suit, on se donne G un $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody presque déployé vérifiant (DCS). On va travailler aussi sur une standardisation rationnelle $(\mathbf{A_K}, F^\natural, -F^\natural)$ et une standardisation séparable $(\mathbf{A}, C, -C)$ compatibles. Rappelons enfin qu'on voit $\mathbf{A}$ comme double cône dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $V^* = \left(\bigoplus_{s\in S} \mathbf{R}a_s\right)^*$, et que $L^\natural$ est le sous-espace vectoriel de V^* engendré par $\mathbf{A_K}$.

12.6.1. Géométrie du cône de Tits relatif

Reprenons d'abord un résultat géométrique de [Rou90] (remarque p.11).

LEMME. — *Soit $(\mathbf{A_K}, F^\natural, -F^\natural)$ une standardisation rationnelle. Alors:*

(i) *Le sous-espace vectoriel $L^\natural$ est défini par des équations complètement explicites à partir du diagramme de Tits. Précisément:*

$$L^\natural = \{x \in V^* \mid a_s(x) = 0 \ \forall s \in S_0 \text{ et } a_s(x) = a_t(x) \text{ pour } \Gamma^* s = \Gamma^* t\}.$$

(ii) *$\overline{F}^\natural$ est un cône simplicial de $L^\natural$ de dimension $d \geq \#S^\natural$. Plus précisément, ses $\mathbf{K}$-murs sont indexés par les orbites sous l'action $*$ de Γ sur $S \setminus S_0$, et ces $\mathbf{K}$-murs correspondent à des $\mathbf{K}$-racines réelles (i.e., sont génériques) si et seulement si la réunion de S_0 et de cette orbite est de type sphérique. L'ensemble de ces derniers murs est indexé par $S^\natural$.*

Démonstration. $\overline{F}^\natural$ est dans l'adhérence de la chambre standard C. On note S_0 le type de la facette standard contenant $F^\natural$. On a $F^\natural = F^\Gamma_{S_0}$ par définition. Pour chaque σ de Γ, on peut rectifier l'action de σ par $w \in W_{S_0}$ bien déterminé de façon à ce que $\tilde{\sigma} := w\sigma$ stabilise C. Chaque $\tilde{\sigma}$ opère affinement sur F_{S_0} par permutation des étiquettes suivant l'action $*$ de Γ sur S. En outre, $\overline{F}^\natural$ est décrit comme suit.

$$\overline{F}^\natural = \{x \in C \mid a_s(x) = 0 \ \forall s \in S_0 \text{ et } a_s(x) = a_t(x) \text{ pour } \Gamma^* s = \Gamma^* t\}.$$

Cela définit un cône de dimension $\#\dfrac{S \setminus S_0}{\Gamma^*}$ (un degré de liberté par orbite de $S \setminus S_0$ sous Γ^* d'après cette description). Par conséquent, on a $d = \#\dfrac{S \setminus S_0}{\Gamma^*}$ et l'autre description

$$\overline{F}^\natural = \{x \in \mathbf{A_K} \mid (a_s|_{L^\natural})(x) \geq 0 \quad \forall s \in S \setminus S_0\}$$

montre que $\overline{F}^\natural$ est l'intersection de d demi-espaces. $\overline{F}^\natural$ est donc un cône simplicial de $\mathbf{A}_\mathbf{K}$. $\#S^\natural$ est le nombre de $\mathbf{K}$-cloisons sphériques de $F^\natural$, alors que d est le nombre de toutes les $\mathbf{K}$-cloisons de cette $\mathbf{K}$-chambre, d'où l'inégalité. On a prouvé ainsi le point (ii), et le point (i) s'en déduit par linéarité puisque $F^\natural$ engendre $L^\natural$. □

REMARQUE. — La section (13.4) fournira un exemple d'inégalité stricte, où $\#S^\natural = 1$ et $d = 2$.

12.6.2. Système de racines entier relatif

Au début de la sous-section (12.4.3), on a utilisé des résultats concernant l'axiomatique de [Hée 91] pour décrire l'ensemble d'indices de la donnée radicielle jumelée relative. On prend cette fois pour point de départ l'axiomatique de [Bar96], afin de montrer que $\Delta^{re}_\mathbf{K}$ est un système de racines entier au sens de (6.2.4).

On a déjà remarqué en (7.1.4) que Δ^{re} était un système de racines à base libre, au sens de [Bar96], section (2.2) p.52-53, et ce avec $N_s = \{1\}$ pour tout s (Δ^{re} est réduit). La section 6 de la référence est tout entière consacrée à la prise de quotient des systèmes de racines infinis, et c'est ce type de résultat qui nous intéresse. Passer au quotient consiste à partir d'une action de groupe sur un système de racines (vues comme formes linéaires sur un espace vectoriel L), et à regarder l'ensemble des restrictions à l'espace des points fixes dans L sous l'action en question. Le but est de montrer que l'ensemble de ces restrictions de formes linéaires reste un système de racines.

Il faut pour cela procéder en deux temps, conformément à la démarche de la section 6 de [Bar96]. La première étape consiste à effectuer le quotient par la partie sphérique S_0, qui est le type de la facette contenant la $\mathbf{K}$-chambre $F^\natural$, ou encore le type du noyau $\mathbf{K}$-anisotrope. La seconde étape consiste à prendre le quotient par l'action $*$ du groupe de Galois. Dans notre cas, c'est-à-dire au terme des deux étapes, on obtiendra, d'après [Bar96] (6.1.3) et (6.2.1), une description des restrictions des racines de Δ^{re} au sous-espace vectoriel de V^* des points fixes sous l'action de $W(S_0) \rtimes \Gamma^*$. Mais d'après (12.6.1), ce sous-espace est $L^\natural$; on obtient autrement dit une description de $\Delta^{re}_\mathbf{K}$ comme système de racines au sens de [Bar96], section (2.2) p.52-53.

Première étape: quotient par la partie de type sphérique S_0.

Cette étape nécessite la vérification d'un certain nombre de conditions techniques – conditions (D) et (E) p.164, condition du lemme (6.2.6) p.168, de [Bar96]. Ces conditions portent sur la composante connexe $F(s)$ dans $S_0 \cup \{s\}$ de chaque s de $S \setminus S_0$. Dans [Bar96], il est précisé que ces conditions concernent les $F(s)$ de type sphérique, mais il résulte du raisonnement de (12.5.4) que la réunion d'une orbite de $\frac{S \setminus S_0}{\Gamma^*}$ et de S_0 participe à l'indice d'un groupe algébrique semi-simple de rang relatif 1. Par conséquent, il faut vérifier les trois conditions pour tous les $F(s)$, mais pour ce faire, il suffit de consulter la classification de [Tit66] (précisément la table II p.54-61). Les conditions (D) et (E) requièrent ([Bar96], p.164):

(D) que le coefficient $\mathrm{n}^0 s$ de la plus grande racine positive dans le système de type $F(s)$ soit ≤ 2;

(E) la stabilité de s sous l'automorphisme d'opposition induit par $-w_s$, où $-w_s$ est l'élément de plus grande longueur de $W_{F(s)}$.

On les vérifie effectivement sur les tables précitées. La troisième condition est plus technique et a elle aussi été vérifiée ([Bar96], remarque (b) p.169). On l'a déjà remarqué, les types $F(s)$

sont tous sphériques. Par conséquent, le résultat qui nous fait conclure est [Bar96], corollaire (6.2.9) p.169, qui décrit un système de racines réelles.

Seconde étape: quotient par l'action $*$.

Quotienter par l'action $*$ de Γ ne nécessite en revanche pas de vérification particulière, on applique les résultats de la section (6.1) de [Bar96]. Le résultat qui nous concerne est la proposition (6.1.6) p.158.

Récolte.

Pour décrire le résultat final, on peut être un peu plus précis. L'enchaînement des deux passages au quotient permet d'obtenir un *système générateur de racines*. C'est dans notre cas le septuplet

$$\big(A^\natural, (L^\natural)^*, L^\natural, \langle - \mid - \rangle, \{a_0^\natural\}, \{a_0^{\natural\vee}\}, \{N_{s^\natural}^\natural\}\big),$$

qu'on ne va pas expliciter complètement. Il vérifie les six axiomes de [Bar96], définition (4.1) p.79-80. $A^\natural$ est une *matrice de Kac-Moody relative* ([Bar96], définition (2.1) p.43). Cette matrice entière définit l'action d'un groupe de Coxeter $\underline{W}^\natural$ de la même façon qu'une matrice de Cartan généralisée définit l'action de son groupe de Weyl sur son réseau Q (7.1.4). On va le comparer au groupe de Weyl relatif $W^\natural$, qui est plus concret dans le sens où c'est un sous-quotient de $G(\mathbf{K})$.

De manière générale, on souligne provisoirement les objets provenant de la théorie de N. Bardy avant de les identifier à ceux qui existent déjà et qui leur correspondent. D'après le lemme (12.6.1)(ii), les racines simples $a_0^\natural$ sont les racines simples de [Bar96]. Fixons un $\mathbf{K}$-mur réel de la $\mathbf{K}$-chambre standard, et considérons les réflexions $s^\natural$ et $\underline{s}^\natural$ correspondantes pour les deux approches. D'après [Bar96] (6.1.4) et (6.2.5), $\underline{s}^\natural$ est dans W_1/W_2 qui est aussi $W^\natural$ (12.4.1), et $\underline{s}^\natural.s^\natural$ fixe la $\mathbf{K}$-chambre standard. Par simple transitivité, on obtient $\underline{s}^\natural = s^\natural$, et finalement $\underline{W}^\natural = W^\natural$. Il en résulte que les deux systèmes de racines (réelles) sont les mêmes.

Revenons alors au vocabulaire de J.-Y. Hée et de (6.2.4). La matrice de Cartan de la prébase $\mathcal{B}^\natural$ est la matrice de Cartan généralisée $K(A^\natural)$ de [Bar96], section (2.1). C'est une matrice entière qui vérifie l'implication

$$2 \in N_{s^\natural}^\natural \Rightarrow A_{s^\natural t^\natural} \in 2\mathbf{Z} \quad \forall t^\natural \in S^\natural.$$

Pour voir cela, il suffit d'utiliser l'axiome (SGR5) de [Bar96], section (4.1). Les axiomes des bases et systèmes de racines entiers sont alors conséquences des propriétés des systèmes de racines réelles des systèmes générateurs de racines pour une telle matrice. Résumons les points qui nous intéressent pour la combinatoire du groupe $G(\mathbf{K})$.

LEMME/DÉFINITION. — (i) $\mathcal{B}^\natural = (S^\natural, (L^\natural)^*, (a_0^\natural), (s^\natural))$ *est une base de racines, de système de racines associé* $\Phi_{\mathbf{K}}$.
(ii) $\Delta_{\mathbf{K}}^{re}$ *est un système de racines entier pour* $\mathcal{B}^\natural$.

On parlera à propos de $\Delta_{\mathbf{K}}^{re}$, *de* système de racines entier relatif *du* $\mathbf{K}$*-groupe de Kac-Moody presque déployé* G *(vérifiant* (DCS)*).* □

12.6.3. Donnée radicielle jumelée entière relative

Voici enfin le théorème de structure fin du groupe des **K**-points, qui prend en compte *via* le système $\Delta^{re}_{\mathbf{K}}$, les relations de proportionnalité entre **K**-racines réelles mises en évidence en (12.5.4) et l'intégralité des intervalles pour ces **K**-racines. On est ainsi plus proche des résultats du type «théorie de Borel-Tits» tels qu'ils sont énoncés par exemple dans [Bru-Tit72], exemple (6.1.3)(c) p.110.

THÉORÈME. — *Soit G un **K**-groupe de Kac-Moody presque déployé vérifiant la condition* (DCS). *On fixe $(\mathbf{A}_{\mathbf{K}}, F^\natural, -F^\natural)$ une standardisation rationnelle du jumelage associé $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$. Alors, $\big(G(\mathbf{K}), (V_{a^\natural})_{a^\natural\in\Delta^{re}_{\mathbf{K}}}, Z(\mathbf{K})\big)$ est une donnée radicielle jumelée entière de type $(\mathcal{B}^\natural, \Delta^{re}_{\mathbf{K}})$.*

Démonstration. Les groupes radiciels de $\{V_{a^\natural}\}_{a^\natural\in\Delta^{re}_{\mathbf{K}}}$ figurent dans la famille $\{V_{D(a^\natural)}\}_{D(a^\natural)\in\Phi_{\mathbf{K}}}$, avec le même signe. (DRJE3) découle de cette remarque et de (12.4.3), ainsi que (DRJE4). Pour le second point de (DRJE0), on a besoin en outre du lemme (12.5.4). L'axiome (DRJE2) est une conséquence de l'axiome (DRJ2), et de l'étude des **K**-sous-groupes réductifs de rang 1 de (12.5.4) pour le second point. Il reste l'axiome l'axiome du commutateur (DRJE1) pour lequel on peut adapter la preuve de (DRJ1) de (12.4.3).

Soient $\{a^\natural; b^\natural\}$ une paire prénilpotente de **K**-racines réelles de $\Delta^{re}_{\mathbf{K}}$, et $F^\natural_+$ et $F^\natural_-$ deux **K**-chambres positives telles que

$$D(a^\natural)\cap D(b^\natural)\supset F^\natural_+ \quad\text{et}\quad (-D(a^\natural))\cap D(-b^\natural)\supset F^\natural_-.$$

Comme pour (12.4.3), on définit les parties de racines de Δ^{re} suivantes:

$$\Delta([a^\natural; b^\natural]_{\mathbf{N}}) := \bigcup_{c^\natural\in[a^\natural;b^\natural]_{\mathbf{N},\mathrm{nd}}} \Delta_{c^\natural} \quad\text{et}\quad \Delta(]a^\natural; b^\natural[_{\mathbf{N}}) := \bigcup_{c^\natural\in]a^\natural;b^\natural[_{\mathbf{N},\mathrm{nd}}} \Delta_{c^\natural}.$$

Chaque partie $\Delta_{c^\natural}$ est **N**-nilpotente et Galois-stable, étudions les deux réunions.

1. Étude des parties de racines

Soit c une racine d'une telle partie. $D(c^\natural)$ et *a fortiori* $D(c)$ contiennent F_+. Puisque $D(c)$ est réunion de facettes, elle contient d'ailleurs tout le résidu de F_+. Symétriquement, $-D(c)$ contient tout le résidu de F_-. Ceci prouve déjà que $\Delta([a^\natural; b^\natural]_{\mathbf{N}})$ et donc $\Delta(]a^\natural; b^\natural[_{\mathbf{N}})$ sont des parties prénilpotentes de racines. En outre, par définition des intervalles entiers, on a les implications

$$c,d\in\Delta([a^\natural; b^\natural]_{\mathbf{N}}) \quad\Rightarrow\quad [c;d]_{\mathbf{N}}\subset\Delta([a^\natural; b^\natural]_{\mathbf{N}}),\text{ et}$$
$$c\in\Delta([a^\natural; b^\natural]_{\mathbf{N}}),\ d\in\Delta(]a^\natural; b^\natural[_{\mathbf{N}}) \quad\Rightarrow\quad]c;d[_{\mathbf{N}}\subset\Delta(]a^\natural; b^\natural[_{\mathbf{N}}),$$

ce qui montre que $\Delta(]a^\natural; b^\natural[_{\mathbf{N}})$ et $\Delta([a^\natural; b^\natural]_{\mathbf{N}})$ sont **N**-nilpotentes.

2. Groupes associés

Ce qui précède sur les parties de racines permet de définir les groupes $U_{\Delta([a^\natural;b^\natural]_{\mathbf{N}})}$ et $U_{\Delta(]a^\natural;b^\natural[_{\mathbf{N}})}$, et fournit les relations:

$$U_{\Delta(]a^\natural;b^\natural[_{\mathbf{N}})}\lhd U_{\Delta([a^\natural;b^\natural]_{\mathbf{N}})} \quad\text{et}\quad U_{\Delta(]a^\natural;b^\natural[_{\mathbf{N}})}\supset[U(a^\natural),U(b^\natural)].$$

L'inclusion de la première assertion provient d'une simple inclusion de parties de racines, le reste provient de la dernière remarque sur les parties de racines et de l'axiome (DRJE1) pour G appliqué aux paires de racines de $\Delta([a^\natural; b^\natural]_{\mathbf{N}})$. Comme $\Delta(]a^\natural; b^\natural[_{\mathbf{N}})$ est $\mathbf{N}$-nilpotente, en choisissant un ordre adéquat sur cette partie, on peut écrire par le lemme (6.2.5) pour G:

$$U_{\Delta(]a^\natural;b^\natural[_{\mathbf{N}})} = \prod_{c^\natural \in]a^\natural;b^\natural[_{\mathbf{N},\mathrm{nd}}} U(c^\natural) = \prod_{c^\natural \in]a^\natural;b^\natural[_{\mathbf{N},\mathrm{nd}}} (\prod_{d \in \Delta_{c^\natural}} U_d).$$

Soit maintenant g un élément du groupe des commutateurs $[V_{a^\natural}, V_{b^\natural}]$. Au titre d'élément de $U_{\Delta(]a^\natural;b^\natural[_{\mathbf{N}})}$, g s'écrit $g = \prod_{c^\natural \in]a^\natural;b^\natural[_{\mathbf{N}}} u_{c^\natural}$. En outre, g est fixe sous le groupe de Galois Γ. Donc par unicité d'écriture, pour chaque $\mathbf{K}$-racine $c^\natural$, $u_{c^\natural}$ est fixe sous Galois. Ainsi, $u_{c^\natural}$ est dans $V_{c^\natural}$ et g dans $\prod_{c^\natural \in]a^\natural;b^\natural[_{\mathbf{N}}} V_{c^\natural}$. Ceci prouve (DRJE1). □

13. Constructions de formes. Actions galoisiennes

Formes quasi-déployées

Descente dans un immeuble hyperbolique

Il s'agit de construire des formes de groupes de Kac-Moody qui rentrent dans le cadre de l'étude théorique faite dans les deux chapitres précédents. On va voir qu'il faut faire une restriction de catégorie pour faciliter la définition pratique de formes de groupes de Kac-Moody. Les foncteurs des formes préalgébriques cherchées (11.1.3) seront définis seulement sur la catégorie des extensions d'un corps $\mathbf{K}$ contenues dans une clôture séparable fixée $\mathbf{K}_s$, et pas sur toute la catégorie des $\mathbf{K}$-algèbres. Étant donné que seuls $\mathbf{K}$ et $\mathbf{K}_s$ interviennent dans la descente galoisienne du chapitre 12, cette restriction n'a aucune incidence en matière de production de groupes tordus et d'immeubles jumelés non déployés. De ce point de vue, l'étude des points rationnels s'apparente plus à la torsion abstraite telle qu'elle est effectuée dans [Ste68], qu'à une étude des points rationnels d'un groupe algébrique comme dans [Bor-Tit65] ou [Bor90]. Ce type de torsion a été déjà considéré par J.-Y. Hée dans le cas quasi-déployé ([Hée90]), sans recours à la géométrie des immeubles.

Après cette étude théorique, on s'intéressera à une classe plus particulière de formes, à savoir les *formes quasi-déployées*. On montrera qu'elles sont les seules possibles sur un corps fini, ce qui constitue une extension d'un théorème de S. Lang. On fournira aussi un procédé, pratique cette fois, de fabrication d'actions galoisiennes conduisant à de telles formes.

On obtiendra enfin un exemple illustrant le théorème de descente. On peut pour cela envisager des classes particulières de groupes de Kac-Moody. Pour éviter de produire des jumelages d'immeubles euclidiens déjà connus (en considérant des matrices de Cartan généralisées de type affine), on s'est placé dans le cadre des *immeubles hyperboliques*. On construit ainsi des espaces hyperboliques au sens de Gromov avec des propriétés remarquables qu'on ne fera qu'évoquer. Notre objectif principal sera de construire des arbres jumelés semi-homogènes pour une sous-famille de ces immeubles.

13.1. Construction théorique d'une K-forme restreinte aux extensions à partir d'une action galoisienne

On veut juste faire une remarque qui ramène en théorie la construction de $\mathbf{K}$-formes de groupes de Kac-Moody à celle d'actions de Galois compatibles sur les points séparables d'un foncteur de Tits constructif et sur l'extension des scalaires de $\mathbf{Z}$ à $\mathbf{K}_s$ de la $\mathbf{Z}$-forme de l'algèbre enveloppante correspondante.

La situation est donc la suivante.

SITUATION. — *On se donne une donnée radicielle de Kac-Moody* $\mathcal{D} = \big(S, A, \Lambda, (c_s)_{s\in S}, (h_s)_{s\in S}\big)$, *et un corps* $\mathbf{K}$ *dont on choisit une clôture séparable* $\mathbf{K}_s$. *On suppose qu'on dispose en outre d'une action de* $\Gamma := \mathrm{Gal}(\mathbf{K}_s/\mathbf{K})$ *sur* $G(\mathbf{K}_s) = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{K}_s)$, *et d'une action de* Γ *sur* $\big(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\big)_{\mathbf{K}_s}$ *respectant la filtration, de telle sorte que la représentation adjointe* $\mathrm{Ad}_{\mathbf{K}_s}$ *soit Galois-équivariante.*

La prise de points fixes fournit alors une $\mathbf{K}$-forme $\mathcal{U}_{\mathbf{K}} := \big(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\big)^{\Gamma}_{\mathbf{K}_s}$ de $\big(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\big)_{\mathbf{K}_s}$. Pour chaque extension $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ ($\mathbf{E}$ sera toujours supposé dans $\mathbf{K}_s$), on définit $\mathcal{G}(\mathbf{E}) := G(\mathbf{K}_s)^{\mathrm{Gal}(\mathbf{K}_s/\mathbf{E})}$. Cela fournit un foncteur en groupes défini sur la sous-catégorie pleine $\mathbf{K}$-ext de $\mathbf{K}$-alg formée des extensions de $\mathbf{K}$ contenues dans $\mathbf{K}_s$. Toutes les valeurs de ce foncteur sur les flèches de $\mathbf{K}$-ext sont par définition des inclusions de groupes (condition (PREALG2) restreinte à $\mathbf{K}$-ext). En outre, la représentation adjointe est Γ-équivariante par hypothèse. En résumé:

LEMME. — *Par le procédé ci-dessus, on produit à partir d'une action galoisienne convenable (voir situation), une* $\mathbf{K}$*-forme préalgébrique* $(\mathcal{G}, \mathcal{U}_{\mathbf{K}})$ *dont le foncteur est défini sur la catégorie* $\mathbf{K}$-ext *formée des extensions de* $\mathbf{K}$ *contenues dans* $\mathbf{K}_s$ □

À ce stade, on a donc fabriqué une $\mathbf{K}$-forme préalgébrique déployée sur la clôture séparable $\mathbf{K}_s$. Pour ce qui est du passage d'une $\mathbf{K}$-forme préalgébrique à une $\mathbf{K}$-forme algébrique, les conditions (ALG) ne portent que sur l'action de Galois. Il suffit donc de les requérir avec $\mathbf{E} = \mathbf{K}_s$ pour l'action de notre situation de départ, afin d'obtenir une $\mathbf{K}$-forme algébrique. La dernière étape consiste à vérifier la condition (DCS) pour obtenir une $\mathbf{K}$-forme sur laquelle pratiquer la descente galoisienne. Mais cette dernière condition est vérifiée par construction. Finalement:

PROPOSITION. — *On se place dans la situation ci-dessus, et on suppose que l'action de Galois vérifie en outre les conditions* (ALG). *Alors, le procédé ci-dessus donne naissance à une* $\mathbf{K}$*-forme algébrique qui vérifie la condition de descente galoisienne* (DCS). □

Ce procédé est utile pour se ramener à des situations pratiques d'actions galoisiennes, qui permettent concrètement de construire des groupes tordus, comme dans la section qui suit.

REMARQUE . — On connaît déjà un certain nombre de formes. En caractéristique 0, elles ont été étudiées via les groupes d'automorphismes des algèbres de Kac-Moody par G. Rousseau dans [Rou89] et [Rou90]. Cette étude aboutit dans [Bac-Bar-Ben-Rou95] à une classification théorique complète, analogue à la classification de J. Tits des groupes semi-simples en termes d'indice et de noyau anisotrope ([Tit66]). Une construction concrète des formes presque déployées d'algèbres de lacets y est présentée, et un tableau exhaustif des formes réelles presque déployées de ces algèbres de Lie est dressé. De son côté, J.-Y. Hée ([Hée90]) a étudié les torsions à la Steinberg, à la Ree-Suzuki, des groupes de Kac-Moody.

13.2. Formes quasi-déployées

Les $\mathbf{K}$*-formes quasi-déployées* fournissent des exemples de $\mathbf{K}$-forme presque déployées. Leur intérêt réside dans le fait qu'on peut les construire explicitement. Ainsi, pour $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ galoisienne, la simple donnée d'une action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{K})$ sur la matrice de Cartan

généralisée A de $\mathcal{D}$ par automorphismes de diagramme de Dynkin, permet de mettre en place une forme presque déployée. Dans le cas d'un corps fini, les valences de cet immeuble n'ont plus de raison d'être constantes. (Les valences sont les cardinaux des résidus des cloisons). On montre aussi une extension d'un théorème de Lang qui affirme que tout $\mathbf{K}$-groupe pour $\mathbf{K}$ un corps fini, est quasi-déployé.

13.2.1. Formes quasi-déployées

DÉFINITION. — *Une $\mathbf{K}$-forme algébrique de groupe de Kac-Moody est* quasi-déployée *si l'action de Galois associée stabilise une paire de sous-groupes de Borel opposés. Dans ce cas, le $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody correspondant est dit lui aussi* quasi-déployé *(sur $\mathbf{K}$).*

REMARQUES . — 1. Il est clair qu'un $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody quasi-déployé est automatiquement un $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody presque déployé puisque par définition tous les sous-groupes de Borel de signe fixé se déduisent les uns des autres par conjugaison.

2. Considérons le cas d'un $\mathbf{K}$-groupe algébrique réductif, qu'on voit aussi comme un groupe de Kac-Moody. On a déjà dit qu'il était déployé sur $\mathbf{K}_s$ (chapitre 12, introduction ou [Bor90], corollaire (18.8) p.222). Par conséquent, s'il est quasi-déployé au sens ci-dessus, le groupe de ses points séparables admet deux sous-groupes de Borel Galois-stables et donc définis sur $\mathbf{K}$. C'est la définition classique de quasi-déploiement. Réciproquement, supposons que ce groupe possède un sous-groupe de Borel B défini sur $\mathbf{K}$. On choisit un sous-groupe de Cartan T défini sur $\mathbf{K}$ dans le sous-groupe de Borel ([Bor90], théorème (18.2) p.218), ce qui revient à choisir un appartement Galois-stable. On appelle B_- le sous-groupe de Borel contenant T et s'intersectant avec B suivant T. Le transformé de B_- par tout automorphisme de Galois est un sous-groupe de Borel contenant T et s'intersectant avec B suivant T: c'est B_-. B_- est donc lui aussi stable sous Galois, et on retrouve notre définition d'après l'interprétation de l'opposition dans le cas algébrique.

Comme le suggère le raisonnement précédent, on a en fait le petit résultat suivant.

LEMME. — *Un $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody presque déployé – vérifiant la condition* (DCS) *– et possédant un sous-groupe de Borel Galois-stable, est quasi-déployé.*

Démonstration. On considère la chambre Galois-stable correspondante, qu'on peut toujours supposer contenue dans un appartement Galois-stable (12.2.1). Le respect de l'opposition par Galois implique que l'opposée de cette chambre dans l'appartement jumelé en question, est nécessairement Galois-stable. □

13.2.2. Théorème de Lang

Une autre compatibilité avec le cas algébrique est l'extension à notre situation d'un théorème de S. Lang ([Hum75], théorème (35.2) p.224).

THÉORÈME. — *Soit G un $\mathbf{K}$-groupe de Kac-Moody presque déployé vérifiant la condition* (DCS). *On suppose que $\mathbf{K}$ est un corps fini: $\mathbf{K} = \mathbf{F}_q$. Alors, G est quasi-déployé sur $\mathbf{F}_q$.*

Démonstration. On se donne une standardisation séparable $(\mathbf{A}, C, -C)$ et une standardisation rationnelle $(\mathbf{A}_{\mathbf{K}}, F^\natural, -F^\natural)$ adaptées.
On regarde le fixateur de $\Omega^\natural = F^\natural \cup -F^\natural$, qui est le noyau anisotrope associé à ces standardisations. Par le lemme (12.3.2), l'image $\mathrm{Ad}_\Omega(\mathrm{Fix}(\Omega^\natural))$ est un $\mathbf{F}_q$-groupe réductif sans sous-groupe parabolique propre défini sur $\mathbf{F}_q$. D'après le théorème de Lang classique, il admet aussi un sous-groupe de Borel défini sur $\mathbf{F}_q$. Ce n'est possible que si ce groupe est un tore. Le facteur de Lévi $\mathrm{Fix}(\Omega^\natural)$ de $\mathrm{Fix}(F^\natural)$ est donc un sous-groupe de Cartan défini sur $\mathbf{F}_q$. D'après sa description théorique (6.2.2), F n'est contenue dans aucun mur, autrement dit est une chambre. □

13.2.3. Actions galoisiennes quasi-déployées

Il s'agit de mettre en évidence une méthode plus concrète pour construire une action galoisienne, donc des groupes et immeubles tordus. Partons d'une donnée radicielle de Kac-Moody $\mathcal{D}$ dont le diagramme de Dynkin sera noté D.

DÉFINITION. — (i) *Un* automorphisme de diagramme *de la matrice de Cartan généralisée A de $\mathcal{D}$ est une permutation de son ensemble d'indices S qui induit un automorphisme du diagramme de Dynkin de A.*
(ii) *Un* automorphisme de diagramme *de $\mathcal{D}$ est un automorphisme $\mathbf{Z}$-linéaire de Λ qui stabilise la base $\{c_s\}$ de $\mathcal{D}$, et la cobase $\{h_s\}$ pour l'automorphisme de $\Lambda^\vee$ déduit par dualité, en induisant un même automorphisme de diagramme de A. On désigne par* $\mathrm{Diag}(\mathcal{D})$ *le groupe des automorphismes de diagramme de $\mathcal{D}$.*

REMARQUE . — Le diagramme de Dynkin d'une matrice de Cartan généralisée est défini par exemple dans [Kac90], (4.7) p.51.

On se place dans la situation suivante.

SITUATION. — *On dispose d'une extension galoisienne $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ pour laquelle il existe un morphisme*

$$\begin{aligned} * : \mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{K}) &\to \mathrm{Diag}(\mathcal{D}), \\ \sigma &\mapsto \sigma^*. \end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{E}/\mathbf{K}$ est galoisienne, $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{K})$ *est un quotient de* $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}_s/\mathbf{K})$*, d'où un prolongement $\Gamma \to \mathrm{Diag}(\mathcal{D})$, encore noté $*$.*

En fait, on veut voir:

PROPOSITION. — *Dans la situation ci-dessus, il existe une $\mathbf{K}$-forme algébrique quasi-déployée vérifiant la condition de descente galoisienne* (DCS) *et dont l'action $*$ est donnée par le morphisme $* : \Gamma \to \mathrm{Diag}(\mathcal{D})$.*

Démonstration. Il suffit de revenir à la définition des foncteurs de Tits constructifs et des extensions de $\mathbf{Z}$-formes d'algèbres enveloppantes. Les objets considérés étant définis par générateurs et relations, un automorphisme de diagramme de $\mathcal{D}$ induit un automorphisme $\mathbf{Q}$-linéaire de la $\mathbf{Q}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathcal{D}}$ par permutation de générateurs qui jouent des rôles symétriques. Celui-ci induit un automorphisme de son algèbre enveloppante, qui stabilise les puissances divisées des éléments radiciels associés aux racines simples et les éléments «binômiaux» formés à partir de $\Lambda^\vee$. Ce procédé peut être appliqué à l'image $\sigma*$ d'un élément de Galois σ de Γ. On obtient finalement un automorphisme semi-linéaire de $\left(\mathcal{U}_{\mathcal{D}}\right)_{\mathbf{K}_s}$ en faisant le produit tensoriel par l'automorphisme de corps σ. On obtient ainsi une action de Γ. C'est exactemment le même type de raisonnement pour le foncteur de Tits constructif, et l'équivariance de la représentation adjointe est immédiate. □

REMARQUES . — 1. Une situation favorable est par exemple le cas où la donnée radicielle du groupe de Kac-Moody est la donnée radicielle adjointe minimale ou la donnée radicielle simplement connexe (7.1.2). Un morphisme à valeurs dans le groupe des automorphismes de diagramme de la matrice A suffit alors à définir une action. Si on veut juste produire un immeuble tordu, c'est donc une de ces deux données radicielles de Kac-Moody qui est à considérer en priorité.

2. D'après (13.2.2), les formes presque déployées sur les corps finis des groupes de Kac-Moody sont déterminées par une donnée radicielle de Kac-Moody et un automorphisme de diagramme, puisque les extensions de corps finis sont cycliques.

13.2.4. Actions galoisiennes déployées

Un cas particulier d'action quasi-déployée est donné bien entendu par l'*action déployée*, qui est caractérisée par la trivialité du morphisme $*$. Si on applique le théorème de descente (12.4.3) à chaque extension séparable $\mathbf{E}/\mathbf{K}$, on peut déterminer les valeurs du foncteur $\mathbf{E} \mapsto \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{K}_s)^{\mathrm{Gal}(\mathbf{K}_s/\mathbf{E})}$ restreint à $\mathbf{K}$-ext. Par définition de l'action de Galois sur les générateurs du groupe de Kac-Moody, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{K}_s/\mathbf{E})$ opère trivialement sur $G(\mathbf{E})$ – soit $G(\mathbf{E}) \subset G(\mathbf{K}_s)^{\mathrm{Gal}(\mathbf{K}_s/\mathbf{E})}$ – et sur ses immeubles, vus comme sous-immeubles de $G(\mathbf{K}_s)$ (10.1.4). En particulier, l'appartement jumelé standard est Galois-fixe: c'est un $\mathbf{E}$-appartement, et la standardisation séparable est une standardisation rationnelle. Les sous-goupes radiciels relatifs associés ne sont autres que les valeurs sur $\mathbf{E}$ des groupes radiciels déployés; de même, $T(\mathbf{K}_s)^{\mathrm{Gal}(\mathbf{K}_s/\mathbf{E})} = T(\mathbf{E})$. Ainsi, par (12.4.3), on obtient l'autre inclusion $G(\mathbf{E}) \supset G(\mathbf{K}_s)^{\mathrm{Gal}(\mathbf{K}_s/\mathbf{E})}$, et (12.4.4) fait conclure que les immeubles de $G(\mathbf{E})$ sont exactement les points Galois-fixes sous $\mathrm{Gal}(\mathbf{K}_s/\mathbf{E})$ dans $|\mathcal{J}(\mathbf{K}_s)|_{\mathrm{co}}$. On a prouvé:

LEMME. — *Le foncteur-groupes associé à une action galoisienne déployée coïncide sur la catégorie* $\mathbf{K}$-ext *avec le foncteur de Tits constructif. Les jumelages de points fixes sont les jumelages associés aux valeurs de* $\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}$. □

REMARQUE . — Une autre façon de voir les choses pour le volet «groupes» consiste à dire que la forme déployée $(\widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}, \mathcal{U}_{\mathcal{D}})$ vérifie la condition (DCS) pour $\mathbf{K}$-ext.

13.3. Construction d'un arbre jumelé semi-homogène dans un immeuble hyperbolique

Nous allons maintenant considérer des exemples plutôt concrets d'immeubles de Kac-Moody. Ils appartiennent à une famille d'*immeubles hyperboliques* construite et étudiée sous un point de vue géométrique par M. Bourdon dans [Bou97]: les immeubles $I_{r,1+q}$. Ce sont les exemples les plus simples d'immeubles dont les appartements peuvent être vus comme des pavages d'espaces hyperboliques obtenus par le théorème de Poincaré (pour ce théorème, voir par exemple [Mas], théorème (IV.H.11)). Nous allons faire un bref survol de leurs très belles propriétés géométriques, qui incitent à les voir tantôt comme des analogues des espaces symétriques riemanniens de rang 1 non compacts, tantôt comme des analogues des produits d'arbres homogènes de même valence. Ce que l'on verra dans un premier temps, est que dès que la valence commune des cloisons d'un tel immeuble est un cardinal (fini) de droite projective, cet immeuble provient d'un groupe de Kac-Moody (sur un corps fini). En travaillant sur des corps finis, on obtient des réalisations métriques d'immeubles localement compactes qui cumulent une nature hyperbolique et une structure d'immeuble de Kac-Moody. On définira alors des formes quasi-déployées des groupes de Kac-Moody correspondants dont les immeubles associés formeront des arbres jumelés, qu'on peut choisir semi-homogènes.

13.3.1. Les immeubles hyperboliques $I_{r,1+q}$. Aspects géométriques

Dans cette sous-section, on se limite à une présentation géométrique des immeubles qui nous intéressent. Il n'est pas question de théorie de Kac-Moody. On choisit ici une définition des *immeubles hyperboliques de type R*, un peu plus restreinte que celle proposée dans [Gab-Pau98], dans le sens où les chambres sont compactes.

Immeubles hyperboliques. Existence et unicité des immeubles $I_{r,1+q}$

Notre préférence pour la définition de ces immeubles va logiquement à leur présentation géométrique.

DÉFINITION. — *Soit R un polyèdre hyperbolique de dimension n pavant $\mathbf{H}^n$. Un* immeuble hyperbolique de type R *est un polyèdre hyperbolique par morceaux, union d'une famille de sous-complexes qu'on appelle* appartements, *qui sont tous isomorphes à la cellulation de $\mathbf{H}^n$ par R et qui vérifient les axiomes d'incidence suivants.*

(i) *Par deux points passe toujours un appartement.*
(ii) *Si Σ et Σ' sont deux appartements, il existe un isomorphisme polyédral fixant $\Sigma \cap \Sigma'$.*

On ne s'intéressera plus qu'aux exemples suivants jusqu'à la fin.

PROPOSITION/DÉFINITION. — *Soient r et q des entiers, avec $r \geq 5$ et $q \geq 2$. Soit R le r-gone régulier à angles droits du plan hyperbolique $\mathbf{H}^2$. Alors, à isométrie près, il existe un unique 2-complexe cellulaire simplement connexe caractérisé par les propriétés suivantes.*

(i) *Ses 2-cellules sont isométriques à R, elles sont attachées par leurs arêtes et sommets, et deux 2-cellules ont au plus un sommet ou une arête en commun.*
(ii) *Le link de chaque sommet est le graphe bipartie complet à $(q+1)+(q+1)$ éléments.*

On le note $I_{r,1+q}$. C'est un immeuble hyperbolique dont les appartements sont isométriques à $\mathbf{H}^2$.

Référence. [Bou97], proposition (2.2.1). □

REMARQUES . — 1. La version non épaisse de cette définition est pour $q = 1$ le pavage de $\mathbf{H}^2$ par R donné par le théorème de Poincaré, et sur lequel sont modelés les appartements pour q quelconque ≥ 2.

2. Les réalisations de murs sont les géodésiques contenues dans le 1-squelette du complexe cellulaire.

Construction géométrique. Propriétés. Singularité

Il existe aussi un moyen géométrique de construire ces immeubles. Il est basé sur la méthode de *revêtement des complexes de groupes* mise au point par A. Hæfliger ([Hæ91]), qui est une généralisation en dimension supérieure de la théorie des *graphes de groupes* de J.-P. Serre ([Ser77], p.55). D. Gaboriau et F. Paulin ont identifié les conditions locales pour qu'un complexe de groupes admette un revêtement qui soit un immeuble hyperbolique ([Gab-Pau98]). Avec ce critère général, on montre l'existence de tous les immeubles $I_{r,1+q}$ pour $r \geq 5$ et $q \geq 2$. Une conséquence facile de la définition de ces immeubles est que ce sont des espaces CAT(-1), par conséquent hyperboliques au sens de Gromov.

Ces considérations concernent pour l'instant une classe beaucoup plus large d'immeubles. Les propriétés qui vont suivre sont en général prouvées seulement pour les immeubles $I_{r,1+q}$, ou éventuellement pour les *immeubles fuchsiens* définis dans [Bou98] et qui les généralisent. Elles justifient l'analogie citée en introduction avec les espaces symétriques riemanniens non compacts de rang 1. Précisément, le bord $\partial I_{r,1+q}$ est topologiquement identifié (éponge de Menger), les dimensions conforme et de Hausdorff du bord sont calculées pour tous les immeubles fuchsiens (et reliées à la fonction de croissance du groupe de pavage), la mise en place d'un birapport combinatoire est établie pour prouver une rigidité de type Mostow de ces espaces (on reviendra plus loin à la construction des réseaux cocompacts qui permet de formuler ce résultat). Enfin, la structure quasi-conforme du bord $\partial I_{r,1+q}$ est élucidée.

Référence. [Bou97] pour la rigidité de Mostow, le birapport combinatoire, le lien entre la dimension conforme et la dimension de Hausdorf; [Bou98] pour le lien avec la fonction de croissance du groupe de Weyl; et [Bou-Paj98] pour la structure quasi-conforme et des inégalités de Poincaré. □

Une première remarque s'impose si on commence à penser à la place de ces immeubles parmi les immeubles hyperboliques, ou vis-à-vis des immeubles de Kac-Moody. Le link d'un sommet d'immeuble hyperbolique est toujours la réalisation CAT(1) d'un immeuble sphérique. Dans le cas des immeubles $I_{r,1+q}$, il s'agit d'un graphe bipartie complet, autrement dit d'un 2-gone généralisé. Ces immeubles sphériques sont complètement «flexibles» dans le sens où ils échappent à la classification des immeubles sphériques et aux conditions imposées par le théorème de Feit-Higman ([Ron89], théorème (3.4) p.30). Ainsi, toutes les valences sont possibles. Cette remarque explique par exemple pourquoi on fabrique relativement peu d'immeubles $I_{r,1+q}$ en théorie de Kac-Moody, puisqu'en quelque sorte ces immeubles héritent leur place singulière parmi les immeubles hyperboliques de celle des immeubles de groupes finis de type Lie parmi les 2-gones généralisés.

La question des réseaux

La remarque ci-dessus est aussi illustrée en matière de production de réseaux dans les immeubles de ce type. Un avantage non évoqué encore de la méthode d'A. Hæfliger est qu'elle

fournit dans les cas favorables un résau cocompact en même temps que l'immeuble hyperbolique. En effet, un complexe de groupes est la donnée d'un polyèdre, d'un groupe par sommet de la subdivision barycentrique de ce polyèdre, d'une flèche par face de cette subdivision, ces flèches vérifiant des conditions de transition naturelles. Dans notre cas, le polyèdre est le r-gone régulier R, et la valeur $\pi/2$ des angles au sommet – ou encore le fait de requérir des 2-gones généralisés comme links aux sommets – permet un choix très large de groupes pour mettre en place un complexe de groupes dont le revêtement sera l'immeuble $I_{r,1+q}$ cherché. Cela explique la grande souplesse avec laquelle on peut fabriquer des réseaux cocompacts, et justifie la question de la rigidité de Mostow des $I_{r,1+q}$ déjà citée.

13.3.2. Immeubles $I_{r,1+q}$ du point de vue de la théorie de Kac-Moody

Faisons intervenir à présent la théorie de Kac-Moody. Deux questions s'imposent asez naturellement. La première est celle de la possibilité de construire des immeubles $I_{r,1+q}$ via les groupes de Kac-Moody, et donc de faire intervenir les $I_{r,1+q}$ dans un jumelage de Kac-Moody. La seconde est l'intérêt de cette construction le cas échéant.

Production des $I_{r,1+q}$ par les groupes de Kac-Moody

En fonction de la dernière discussion concernant les immeubles $I_{r,1+q}$ du point de vue géométrique, on peut s'attendre à ce que la construction de ces immeubles en théorie de Kac-Moody soit aussi lacunaire que la construction des immeubles de rang 2, à cause de la grande flexibilité des 2-gones généralisés. C'est le cas, mais la situation n'est pas pire, puisque dès que la valence est convenable, l'immeuble peut être vu comme partie d'un jumelage de Kac-Moody.

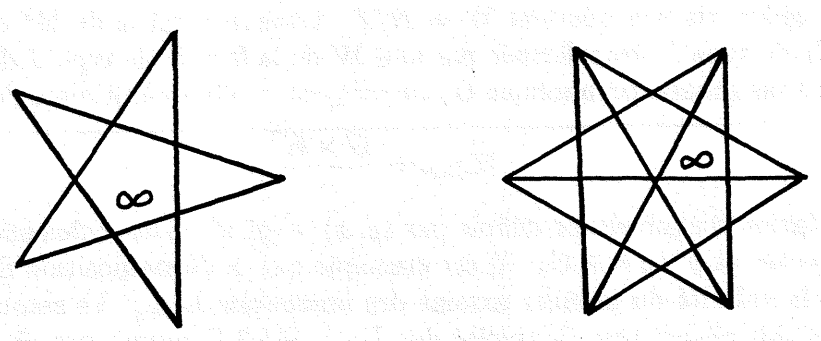
PROPOSITION. — *Soit $I_{r,1+q}$ un immeuble hyperbolique, avec $r \geq 5$ et $q \geq 2$. On suppose que q est une puissance première: $q = p^e$, avec p entier premier et $e \geq 1$. Alors, il existe un groupe de Kac-Moody $G(\mathbf{F}_q)$ dont les immeubles positifs et négatifs sont des $I_{r,1+q}$.*

Démonstration. 1. Déjà, pour la construction d'un immeuble abstrait, il suffit de revenir à la définition des foncteurs de Tits constructifs. La matrice de Coxeter $[M_{st}]_{s,t\in S}$ du groupe de Weyl se déduit de la matrice de Cartan généralisée par la règle (7.1.4)(ii). Autrement dit:

$$M_{ss} = 1 \text{ pour tout } s \text{ de } S,$$
$$\text{et pour } s \neq t \text{ dans } S, \quad A_{st}A_{ts} = 0 \rightsquigarrow M_{st} = 2,$$
$$A_{st}A_{ts} = 1 \rightsquigarrow M_{st} = 3, \quad A_{st}A_{ts} = 2 \rightsquigarrow M_{st} = 4,$$
$$A_{st}A_{ts} = 3 \rightsquigarrow M_{st} = 6, \quad A_{st}A_{ts} \geq 4 \rightsquigarrow M_{st} = \infty.$$

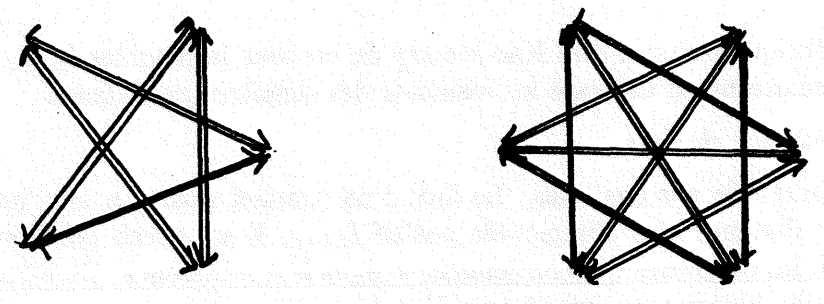
Dans le diagramme de Dynkin du pavage de Poincaré d'un r-gone régulier à angles droits de $\mathbf{H}^2$, n'apparaissent que des arêtes étiquetées par ∞, et la situation est la même vue de chaque sommet. Plus précisément, pour obtenir ce diagramme, il suffit de disposer r points régulièrement sur un cercle, et de relier chaque point à tous les autres par ∞, sauf à ses voisins avec lesquels il n'entretient aucune relation.

Dessin. (Pour $r = 5$ et $r = 6$.)



Ces diagrammes se relèvent donc en n'importe quel diagramme de Dynkin en remplaçant les arêtes par des flèches orientées, pourvu que ces flèches soient assez épaisses dans le sens où l'on ait $A_{st}A_{ts} \geq 4$. Pour un diagramme de Coxeter donné, on a donc une infinité de diagrammes de Dynkin possibles, dont voici deux exemples.

Dessin. (Pour $r = 5$ et $r = 6$.)



On a intérêt pour définir des formes quasi-déployées, à assurer le maximum de symétries à la matrice de Cartan généralisée. Choisissons donc de relever toute arête $\overset{\infty}{\text{———}}$ en une flèche $\Longleftrightarrow$.

Le corps est en fait imposé par la condition de valence. D'après la condition de Moufang (2.5.4), ce corps est nécessairement le corps fini $\mathbf{F}_q$. En choisissant ensuite une donnée radicielle de Kac-Moody de matrice de Cartan généralisée A – la donnée adjointe minimale par exemple (7.1.2) – on obtient un groupe de Kac-Moody $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{F}_q)$ dont les immeubles ont pour groupe de Weyl le groupe de pavage de $\mathbf{H}^2$ défini par R, et $1 + q$ pour valence aux cloisons.

2. Puisqu'on cherche ici un espace métrique, il faut procéder à un recollement pour obtenir une réalisation convenable. La technique qui suit est classique ([Lan96], lemme (9.1) p.87 ou [Bru-Tit72]), et on l'effectue pour l'immeuble de chaque signe ϵ. Précisément, on voit $\mathbf{H}^2$

comme réalisation géométrique du complexe de Coxeter associé au groupe de pavage W de R. $N \subset G$ y opère via son quotient $W = N/T$. Chaque point x de $\mathbf{H}^2$ est sur une facette sphérique wF_J de type J, transformée par $w \in W$ de la face F de type J du polygone R. On attache à x le sous-groupe parabolique $G_x := wP_{\epsilon,J}w^{-1}$. On définit alors l'espace cherché par

$$|\mathcal{I}_\epsilon|_{\text{hyp}} := \frac{G \times \mathbf{H}^2}{\sim},$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par $(g,x) \sim (g',x')$ si et seulement s'il existe n dans N tel que $x' = nx$ et $g^{-1}g'n \in G_x$. Il est classique que la décomposition de Bruhat de signe ϵ de G assure la validité du premier axiome des immeubles $I_{r,1+q}$. Le second est vérifié grâce aux propriétés des rétractions. L'unicité des $I_{r,1+q}$ (13.3.1) assure que chaque immeuble du jumelage est un tel immeuble. □

REMARQUES . — 1. On a fait de nombreux choix – notamment de relèvement, de donnée radicielle de Kac-Moody – mais on aboutit à une réalisation d'immeuble bien déterminée.

2. Les espaces métriques obtenus sont des réalisations qui ne représentent que les types sphériques.

NOTATION. — *L'ensemble d'indices de la matrice d'une Cartan généralisée comme ci-dessus est* $S = \mathbf{Z}/r$. *Les cloisons de la chambre standard* R *sont indexées par* $\mathbf{Z}/r$, *les sommets par les paires* $\{\bar{i};\overline{i+1}\}$. *On désigne par* $s_{\bar{i}}$ *l'inversion de* $\mathbf{H}^2$ *par rapport au mur portant la face de type* $\bar{i}$ *de* R. *On désigne par* $U_{\bar{i}}(\mathbf{F}_q)$ *le groupe radiciel correspondant à la racine simple d'indice* $\bar{i}$.

La nature «algébrique» c'est-à-dire Kac-Moody de certains immeubles $I_{r,1+q}$ permet de faire quelques interprétations en utilisant les résultats des chapitres précédents.

Link et décomposition de Lévi

Prenons par exemple le cas des links. Le link d'un sommet positif x est l'intersection d'une petite sphère de distance avec l'immeuble positif $I_{r,1+q}$. Il est décrit par l'intersection d'une telle sphère avec les chambres qui contiennent x dans leur adhérence. De cette façon, on peut retrouver le graphe bipartie complet à $(q+1)+(q+1)$ sommets.

Considérons l'appartement jumelé standard $\mathbf{A}$, c'est-à-dire les deux copies de $\mathbf{H}^2$ qui le représenter Regardons le sommet positif x_+ de type $\{\bar{i};\overline{i+1}\}$ de la chambre standard R. Le $\{\bar{i};\overline{i+1}\}$-résidu de la chambre standard positive est l'ensemble des chambres qui contiennent x_+ dans leur adhérence. Par respect du type par le groupe de Kac-Moody G, elles s'écrivent pR pour p dans $\mathrm{Fix}(x_+)$. Par décomposition de Bruhat de ce sous-groupe parabolique sphérique, ce résidu est formé de la chambre standard R, des q chambres de $U_{\bar{i}}(\mathbf{F}_q)s_{\bar{i}}R$, des q chambres $U_{\overline{i+1}}(\mathbf{F}_q)s_{\overline{i+1}}R$, et des q^2 chambres de $U_{\bar{i}}(\mathbf{F}_q)U_{\overline{i+1}}(\mathbf{F}_q)s_{\bar{i}}s_{\overline{i+1}}R$ ($s_{\overline{i+1}}$ commute à $s_{\bar{i}}$ et $U_{\overline{i+1}}(\mathbf{F}_q)$ commute à $U_{\bar{i}}(\mathbf{F}_q)$). Un autre façon de le décrire consiste à le voir comme orbite de R sous l'action du facteur de Lévi de $\mathrm{Fix}(x_+)$ associé à $\mathbf{A}$ puisque $U(x_+)$ est contenu dans le fixateur de R. Un tel facteur de Lévi est engendré par T, et deux paires de groupes radiciels correspondant à deux paires de racines opposées de $\mathbf{A}$, de murs orthogonaux (6.2.2). Ce groupe est un groupe réductif fini de type Lie $A_1 \times A_1$ sur $\mathbf{F}_q$, attaché à la matrice de Cartan d'indices $\{\bar{i};\overline{i+1}\}$, extraite de la matrice de Cartan généralisée A. À ce titre, son immeuble est bien un graphe bipartie complet à $(q+1)+(q+1)$ sommets.

Retour aux réseaux

Il existe un autre type de décomposition de Lévi (section (6.4)) qui a lui aussi un intérêt géométrique. En effet, si x_- est un point fixé dans l'immeuble négatif du jumelage, son fixateur $\mathrm{Fix}(x_-)$ va opérer proprement discontinûment sur l'immeuble positif, précisément par décomposition de Lévi des parties équilibrées. En effet, avec chaque point positif x_+, le point x_- forme par définition une partie équilibrée. Le fixateur de cette partie – qu'on voit comme fixateur de x_+ dans $\mathrm{Fix}(x_-)$ – possède une décomposition de Lévi, dont les deux facteurs sont des points de groupes algébriques sur $\mathbf{F}_q$, donc des groupes finis. En travaillant un peu plus, *i.e.*, en utilisant un critère de type Serre ([Ser77] p.116 ou [Bou98], proposition (1.D.2) pour notre cas) et une détermination de domaines fondamentaux combinatoires ([Abr97], lemme 6 p.32), on peut prouver:

THÉORÈME. — *On suppose que le cardinal q excède le nombre de côtés du polygone hyperbolique R: $q > \#\{\text{côtés de } R\}$. Alors,*

(i) *Le fixateur d'un point de l'immeuble négatif est un réseau (du groupe d'automorphismes Aut_+) de l'immeuble positif.*
(ii) *Le groupe de Kac-Moody G lui-même est un réseau du produit de groupes d'automorphismes $\mathrm{Aut}_+ \times \mathrm{Aut}_-$ des immeubles positifs et négatifs.*
Ces réseaux ne sont pas cocompacts.

Référence. [Rém99a], théorème (3.2.5). □

REMARQUES . — 1. En fait, le résultat prouvé dans [Rém99a] est plus général et s'applique à la réalisation de Davis de tout jumelage de Kac-Moody. En outre, l'hypothèse $q > \#\{\text{côtés de } R\}$ n'est pas optimale.

2. On obtient ainsi un réseau de covolume fini dans un espace hyperbolique au sens de Gromov. Il serait intéressant de construire par une méthode algébrique (Kac-Moody) des réseaux cocompacts, qui seraient ainsi des groupes Gromov-hyperboliques. J'ignore si ce problème admet une solution positive.

3. En revenant un instant au cas affine, on est tenté de voir les groupes de Kac-Moody sur des corps finis (assez gros pour l'instant) comme des généralisations de groupes $\{0;\infty\}$-arithmétiques pour les corps de fonctions ([Mar90], section (3.1) p.61). Ces groupes constitueraient donc une famille de groupes discrets sur lesquels tester des propriétés classiques concernant les réseaux (propriété (T) de Kazhdan, propriétés cohomologiques F_n et FP_n ([Abr97]), Gromov-hyperbolicité...). Leur intérêt est qu'ils ne proviennent pas de constructions classiques faisant intervenir les groupes de Lie p-adiques.

4. Cela incite réciproquement à interpréter la théorie de ces réseaux arithmétiques en théorie de Kac-Moody. C'est possible dans une certaine mesure, et c'est d'ailleurs l'objet du livre de P. Abramenko [Abr97].

13.3.3. Un arbre jumelé semi-homogène dans $I_{r,1+q}$

Passons maintenant à la définition d'exemples de formes, en termes d'action galoisienne conformément aux remarques de (13.1). Appelons dans cette sous-section Cox le diagramme de Coxeter du pavage hyperbolique de $\mathbf{H}^2$ par R.

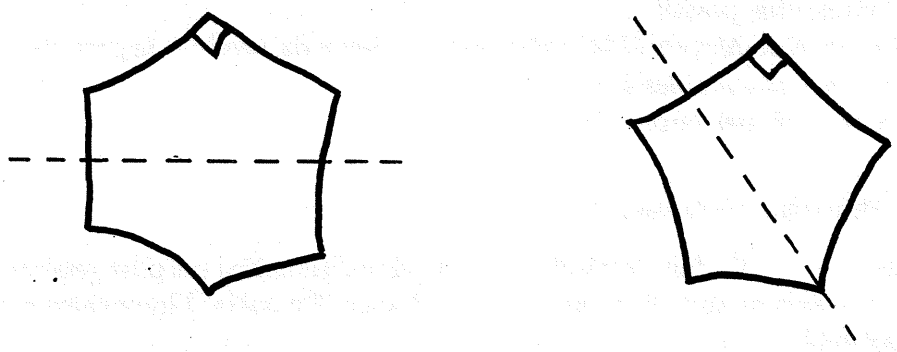
L'action galoisienne

Le diagramme Cox est toujours stable par permutation circulaire des sommets. Il est en outre symétrique par rapport à des réflexions suivants certains axes. On distingue deux cas suivant la parité de $r = \#\{\text{côtés de } R\}$.

1. r est impair. Cox est alors symétrique par rapport à tout axe passant à égale distance de deux sommets voisins et par le sommet opposé au segment en question.
2. r est pair. Cox est alors symétrique par rapport à tout axe joignant deux sommets opposés. Il est aussi symétrique par rapport à tout axe passant par les milieux de deux segments opposés.

On va exploiter les symétries par rapport aux axes. Rappelons qu'on a choisi de relever toutes les arêtes $\overset{\infty}{\text{———}}$ du diagramme de Coxeter en flèches $\Longleftrightarrow$ dans le diagramme de Dynkin, ce qui assure autant de symétrie à ce dernier qu'à Cox. L'ordre 2 des symétries nous restreint aux extensions $\mathbf{F}_{q^2}/\mathbf{F}_q$. C'est en fait la seule restriction d'après (13.2.3). Ainsi, étant donnée une réflexion qui stabilise le polyèdre R et une extension $\mathbf{F}_{q^2}/\mathbf{F}_q$, il existe toujours une action de Galois quasi-déployée de $\mathbf{Z}/2 = \mathrm{Gal}(\mathbf{F}_{q^2}/\mathbf{F}_q)$, qui stabilise l'appartement jumelé et les chambres standard, en induisant sur $\mathbf{H}^2$ l'inversion du pavage correspondante.

Dessins.



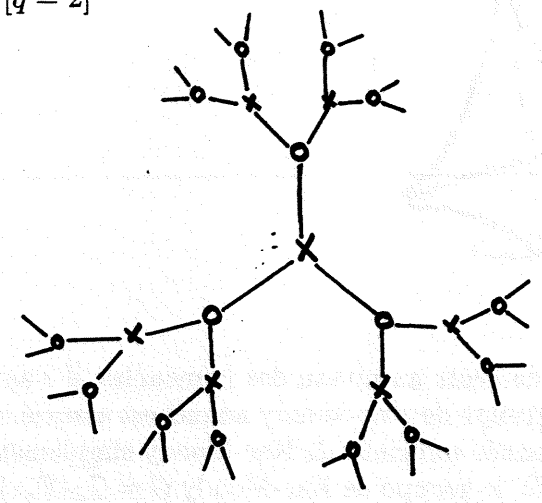
L'arbre jumelé semi-homogène

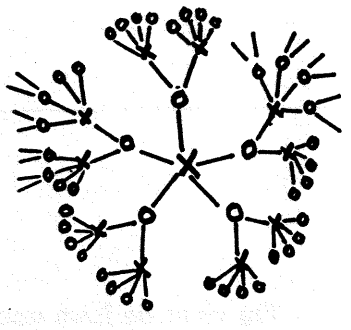
Dans tous les cas, le $\mathbf{F}_q$-appartement sera une droite découpée par les traces des murs. Le groupe de Weyl relatif est toujours le groupe diédral infini, et on a systématiquement affaire à des arbres pour les immeubles de points fixes. Par contre, la forme de la chambre (notamment la parité du nombre de ses côtés) n'est pas indifférente. On distingue deux sortes d'intersection de cloison de R avec le $\mathbf{F}_q$-appartement, ce qui donne lieu à deux calculs différents de valence.

Cas 1. Le $\mathbf{F}_q$-appartement coupe une arête. Le groupe Galois-stable correspondant est un groupe radiciel isomorphe à $\mathbf{F}_{q^2}$. Le groupe des points Galois-fixes est isomorphe à $\mathbf{F}_q$ et la valence est donc $1+q$.
Cas 2. Le $\mathbf{F}_q$-appartement passe par un sommet, il y a deux racines de murs orthogonaux qui laissent la même trace contenant R. Le groupe Galois-stable correspondant est un produit direct de deux exemplaires de $\mathbf{F}_{q^2}$ sur lequel $\mathbf{Z}/2$ opère par interversion et Frobenius. La valence au point d'intersection est $1+q\times q$.

On voit donc que dans le premier cas du dessin, on produira un arbre homogène de valence $1+q$, alors que dans le second cas, on obtiendra un arbre jumelé semi-homogène de valences $1+q$ et $1+q^2$.

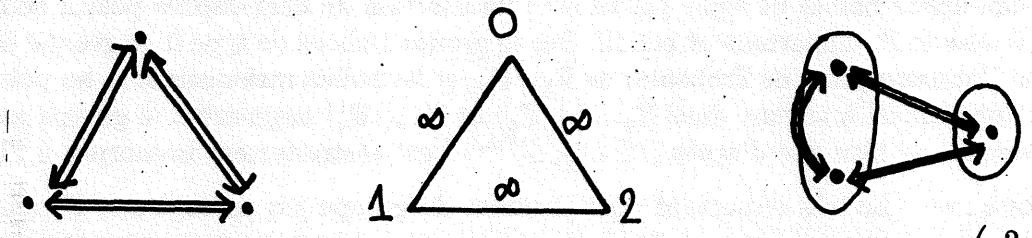
Dessins. $[q = 2]$





13.4. Une descente qui dégénère

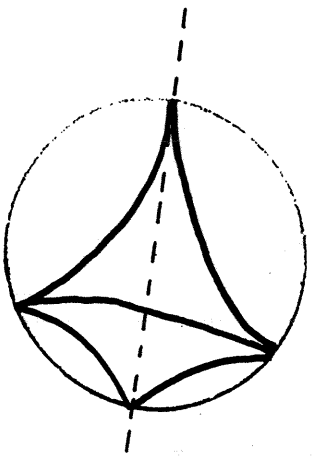
Finissons par la courte étude d'un cas où la prise de points rationnels va faire passer d'un groupe de Kac-Moody «de dimension infinie» à un groupe réductif. On va pour cela se donner un immeuble jumelé dont les appartements sont des plans hyperboliques pavés par un triangle idéal. Considérons le diagramme de Dynkin (premier dessin ci-dessous)



choisi pour sa symétrie. Il correspond à la matrice de Cartan généralisée $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, dont on note $\{0;1;2\}$ l'ensemble d'indices. Le diagramme de Coxeter associé est un triangle dont les côtés sont indexés par ∞ (deuxième dessin ci-dessus). Il existe donc bien une représentation hyperbolique du groupe de Coxeter par le pavage triangulaire idéal annoncé (c'est le triangle du contre-exemple de (5.4.2) concernant les intervalles de racines). On va maintenant considérer l'action quasi-déployée d'une extension quadratique $\mathbf{F}_{q^2}/\mathbf{F}_q$, qui opère par interversion des deux symétries étiquetées 1 et 2 (troisième dessin ci-dessus); autrement dit, l'action $*$ est donnée par le morphisme qui attache à l'élément non trivial de $\Gamma = \mathbf{Z}/2$ la transposition (12).

Par construction, l'appartement jumelé standard (deux copies de $\mathbf{H}^2$) est Galois-stable, ainsi que les deux chambres standard, qui subissent une symétrie par rapport à la médiatrice coupant le coté de type 0. Les $\mathbf{F}_q$-chambres standard sont donc ici de dimension 1 et le $\mathbf{F}_q$-appartement positif est un rayon du disque de Poincaré, qui traverse exactement deux chambres. Ainsi, le groupe de Weyl relatif n'est pas plus gros que $\mathbf{Z}/2$: l'immeuble obtenu par descente est sphérique. Au passage, on voit qu'on est bien dans le cas d'inégalité stricte annoncé en (12.4.3), c'est-à-dire où il existe une $\mathbf{K}$-cloison non sphérique.

Dessin.



On vient de faire une description de la descente au niveau des immeubles, il s'agit maintenant de voir comment elle se traduit sur un groupe de Kac-Moody auquel est associé le jumelage de départ. À partir de A, choisissons la donnée radicielle de Kac-Moody simplement connexe $\mathcal{D}$. D'après les relations de définition (8.3.3), le groupe de Kac-Moody $G = \widetilde{\mathcal{G}_{\mathcal{D}}}(\mathbf{F}_{q^2})$ est engendré par ses sous-groupes radiciels, et même par les sous-groupes radiciels indexés par les racines simples et leurs opposées.

Appliquons le théorème de descente (12.4.3). Il s'agit de déterminer les deux types d'objets qui interviennent dans la combinatoire de donnée radicielle jumelée. Le noyau anisotrope n'est autre que le sous-groupe de Cartan standard. Vu l'action de Galois sur le groupe de ses cocaractères, le groupe de ses points fixes est un tore $\mathbf{F}_q$-déployé de dimension 1. C'est le groupe associé au cocaractère h_0. Il n'y a qu'une $\mathbf{F}_q$-racine positive $a^\natural$, qui est non multiple. Le $\mathbf{F}_q$-demi-appartement de signe positif est l'intersection du demi-espace positif de la racine de type 0 avec le $\mathbf{F}_q$-appartement positif. Sur le groupe radiciel de type 0, le groupe de Galois opère par l'automorphise de Frobenius de $\mathbf{F}_{q^2}/\mathbf{F}_q$, et les points rationnels sont les points de ce sous-groupe radiciel à valeurs dans $\mathbf{F}_q$. $U_{a_0}(\mathbf{F}_q)$ et $U_{-a_0}(\mathbf{F}_q)$ engendrent le groupe associé au cocaractère h_0, si bien que d'après (12.4.3), $G^{\Gamma=\mathbf{Z}/2}$ est abstraitement isomorphe à $\mathrm{SL}_2(\mathbf{F}_q)$.

REMARQUE . — Le très important rapetissement du groupe par passage aux $\mathbf{K}$-points est à rapprocher du résultat sur les relations de commutation entre sous-groupes radiciels indexés par deux racines ne formant pas une paire prénilpotente ([Tit90], proposition 5). D'après cette proposition, le sous-groupe engendré par un telle paire est le produit libre des sous-groupes. Dans notre exemple, aucune paire de racines simples n'est prénilpotente, et il est clair que dans le produit libre de deux groupes U et V isomorphes, l'involution qui échange U et V n'a pas de point fixe non trivial.

INDEX DES DÉFINITIONS

Action étoile = action $*$: (11.3.2).
Adjacentes (chambres): (2.1.1).
Adjointe, adjointe minimale (donnée radicielle de Kac-Moody): (7.1.2).
Admissible (appartement): (2.5.2).
Algèbre de Kac-Moody: (7.3.1).
Algèbre de Kac-Moody classique: (7.3), introduction.
Algébrique (**K**-forme): (11.2.5).
Amalgame de groupes: (3.3.1).
Anti-involution de Chevalley: (7.2.2).
Appartement: (2.3.2), (2.4.1).
Appartement géométrique: (4.2.3).
Appartement jumelé: (2.5.2).
Argument standard d'unicité: (2.1.1).
Ascendante (bijectivité, injectivité, surjectivité): (3.1.3).

Base de racines: (6.2.4), (7.4.2).
Base d'un revêtement: (3.1.3).
Bégayante: (2.1.1).
Bloc de Coxeter: (4.3.2).
BN-paire: (1.1.1).
BN-paire jumelée: (1.3.1).
BN-paire raffinée: (1.2.1).
BN-paire raffinée symétrique: (1.2.1).
Bord d'une racine: (2.2.4).
$\mathcal{B}$-système de racines: (6.2.4).

Caractère algébrique: (8.4.3).
CAT(χ) (inégalité CAT(χ)): (4.4.1).
Cellule: (4.1.1).
Cellule d'un polyèdre: (4.1.1).
Centre de boule circonscrite: (4.6.1).
Chambre: (2.1.1), (2.1.2), (5.1.4).
Chemin dans un ensemble ordonné: (3.1.2).
Cloison: (2.1.1).
Close (partie de racines): (1.4.1).
Close (partie dans un immeuble): (5.4.3).
Cocaractère algébrique: (8.4.3).
Cohérent: (2.1.1), (2.1.2), (2.3.2), (2.4.2).
Complet (système complet d'appartements): (2.4.4).
Complexe de chambres: (2.1.1).
Complexe de Coxeter: (2.2.1).
Complexe simplicial: (2.1.1).

Cône de Tits: (5.1.5).
Connexité (au sens des galeries): (2.1.3).
Connexité (au sens des ensembles ordonnés): (3.1.2).
Convexe (partie de racines): (1.4.1).
Convexe (au sens des galeries): (2.1.3).
Corang: (2.1.1).
Courbure négative ou nulle (au sens des espaces métriques): (4.4.1).

Décomposable (partie de racines): (7.1.4).
Décomposition de Birkhoff: (1.3.2).
Décomposition de Birkhoff raffinée: (1.2.4).
Décomposition de Bruhat: (1.1.2).
Décomposition de Bruhat raffinée: (1.2.3).
Décomposition de Lévi: (6.4.1), (6.2.2).
Définition d'une racine relative réelle: (5.5.2).
Demi-espace d'une racine: (5.1.4).
Déployée (**K**-forme): (11.1.5).
Descendante (bijectivité, injectivité, surjectivité): (3.1.1).
Diagramme de Tits: (12.3.5).
Distance entière (ou numérique): (2.1.3), (2.2.1).
Domaine fondamental: (3.3.2).
Donnée B-radicielle: (1.4.2).
Donnée radicielle de Kac-Moody: (7.1.1).
Donnée radicielle jumelée: (1.5.1).
Donnée radicielle jumelée entière: (6.2.5).
Double base: (7.4.2).

Enclos: (5.4.3).
Ensembles ordonnés (catégorie O): (3.1.1).
Ensembles ordonnés pointés (catégorie $(O,*)$.): (3.1.4).
Enveloppe convexe: (5.3.3), (10.4.5).
Épais (immeuble): (2.3.1).
Équilibrée (partie équilibrée dans un immeuble jumelé): (5.4.4).
Espace total: (3.1.3).
Étiquetage: (2.1.1).
Extension vectorielle: (5.3.3).

Face: (2.1.1).
Face d'un bloc de Coxeter: (4.3.2).
Facette: (2.4.1), (5.1.4).
Facteur de Lévi: (6.4.1).
Foncteur de Steinberg: (8.3.2).
Foncteur de Tits: (8.2.2) et (8.2.3).
Foncteur de Tits constructif: (8.3.3).
Fonctorielle (**K**-forme): (11.1.3).
Fortement transitive (action sur un immeuble simple): (2.6.1).
Fortement transitive (action sur un immeuble jumelé): (2.6.2).

Galerie: (2.1.1), (2.1.3).

Géodésique (courbe géodésique): (4.1.3).
Géodésique (espace géodésique): (4.1.3).
Géodésique fermée: (4.1.3).
Géodésique locale: (4.1.3).
Géométriquement opposées (**K**-facettes): (12.2.2).
Gradué (sous-groupe): (1.2.5).
Graduée triangulaire déployée (algèbre de Lie): (7.2.3).
Grignotant (ordre): (9.1.2).
Groupe de caractères, de cocaractères: (8.4.3).
Groupe de Weyl: (1.1.1), (7.1.3), (7.1.4).
Groupe de Weyl relatif: (12.4.1).

Homotopie dans un ensemble ordonné: (3.1.2).

Imaginaire (racine): (7.4.2).
Immeuble au sens des systèmes de chambres: (2.3.1).
Immeuble au sens des systèmes d'appartements: (2.4.1).
Immeuble jumelé = jumelage: (2.5.1).
Indice: (12.3.5).
Intervalle de racines: (1.4.1).
Intervalle entier de racines: (6.2.4).
Intervalle linéaire de racines: (5.4.2).
Isométrie entre immeubles de type M ou (W, S): (2.3.2).

J-antiréduit: (3.5.1).
J-connexité: (2.1.3).
J-galerie: (2.1.3).
Joint: (4.1.4).
Jumeau: (2.5.3).
Jumelage: (2.5.1).

K-appartement: (12.2.2).
K-ext (catégorie): (11.1.3).
K-facette: (12.2.2).
K-forme d'une $\overline{\mathbf{K}}$-algèbre associative: (11.1.1).
K-forme d'un $\overline{\mathbf{K}}$-foncteur: (11.1.2).
K-forme algébrique: (11.2.5).
K-forme déployée: (11.1.5).
K-forme fonctorielle: (11.1.3).
K-forme préalgébrique: (11.1.3).
K-forme (algébrique) presque déployée: (11.3.1).
K-groupe radiciel: (12.3.3).
K-isotrope (**K**-groupe de Kac-Moody): (12.2.2).
K-mur: (12.2.2).
K-racine: (12.2.2).

Lemme de Tits: (8.3.1).
Libre universelle (donnée radicielle de Kac-Moody): (7.1.2).
Ligne polygonale: (4.1.2).

Link: (4.1.4).

Matrice de Cartan d'une matrice de Coxeter: (4.3.1).
Matrice de Cartan généralisée: (7.1.1).
Matrice presque négative: (4.3.1).
Mince (immeuble): (2.3.1).
Modèle métrique de chambre: (4.3.3).
Morphisme de systèmes de chambres: (2.1.2).
Morphisme d'immeubles de type M ou (W, S): (2.3.2).
Morphisme d'immeubles au sens des systèmes d'appartements: (2.4.2).
Morphisme de jumelages: (2.6.2).
Moufang (immeuble de Moufang): (2.5.4).
Mur: (2.2.3), (5.1.4).
Mur rationnel: (10.1.1).

N-close: (6.2.4).
N-nilpotente: (6.2.4).
Nerf: (4.3.1).
Nilpotent: (1.4.1).
Noyau **K**-anisotrope: (12.3.2).

Ordre cyclique: (1.4.1).
Opposées (chambres): (2.5.1).
Opposées (racines): (2.2.4).

Partager (une **K**-cloison): (12.2.4).
Petit sous-groupe: (10.2.2).
Plein: (3.1.1).
Pliage: (2.2.4).
Polyèdre euclidien, hyperbolique, sphérique par morceaux: (4.1.1).
Polyèdre métrique par morceaux: (4.1.1).
Polyèdre M_χ-par morceaux: (4.1.1).
Polytope: (4.1.1).
Préalgébrique (**K**-forme): (11.1.3).
Prébase de racines: (6.2.4).
Prénilpotente (partie de racines): (1.4.1).
Presque déployée (**K**-forme): (11.3.1).
Pseudo-distance des chemins: (4.1.2).

Racine: (1.4.1), (2.2.4), (5.4.1).
R-alg (catégorie): 9, introduction.
Rang: (2.1.1).
Rayon de boule circonscrite: (4.6.1).
Réalisation conique d'un immeuble simple: (5.3.1).
Réalisation conique d'un jumelage: (5.3.2).
Réalisation géométrique d'une structure-miroir: (4.2.1).
Réalisation géométrique d'un morphisme d'immeubles: (4.2.2).
Réalisation métrique d'un immeuble: (4.3.4).
Réduit: (6.2.5).

Réel (objet immobilier relatif): (5.5.1).
Réelle (racine): (7.4.2).
Réflexion: (2.2.3).
Relatif (objet immobilier): (5.5.1).
Représentation d'un type: (4.2.2).
Représentation adjointe: (9.5.3).
Réseau des coracines: (7.1.3).
Réseau radiciel: (7.1.3), (7.1.4).
Résidus: (2.1.3).
Rétraction: (2.3.3), (2.4.3).
Revêtement d'un ensemble ordonné: (3.1.3).
Revêtement universel pointé: (3.1.4).
R-foncteur: (11.1.2).

s-adjacence: (2.1.2).
Saturée (BN-paire): (1.1.1).
Saturée (BN-paire jumelée): (1.4.6).
Signe (d'une racine): (1.4.1).
Simplement connexe (donnée radicielle de Kac-Moody): (7.1.2).
Simplement connexe (ensemble ordonné): (3.2.1).
Simplexe: (2.1.1), (4.1.1).
Sous-algèbre de Borel: (7.2.2).
Sous-algèbre de Cartan: (7.2.2).
Sous-espace générique: (5.3.3).
Sous-espace rationnel: (10.1.1).
Sous-groupe de Borel: (8.3.4).
Sous-groupe de Cartan: (8.3.4), (10.4.1).
Sous-groupe radiciel: (1.5.1).
Standardisation: (5.3.2).
Standardisation rationnelle: (12.3.2).
Structure-miroir: (4.2.1).
Suspension: (4.1.4).
Système d'appartements: (2.4.1).
Système de chambres: (2.1.2).
Système de racines libre: (7.1.4).
Système de Tits: (1.1.1).
Systole: (4.1.3).

Tendue (galerie): (2.1.3).
Triangulaire déployée (algèbre de Lie): (7.2.1).
Traversée de mur: (2.2.3).
Type: (2.1.1), (2.1.3), (2.2.1), (2.4.5).

W-distance d'un complexe de Coxeter: (2.2.1).
W-distance d'un immeuble de type M ou (W, S): (2.3.1).

Z-forme: (7.4.3).

Index des Axiomes et Conditions

Axiomes (BN): (1.1.1).
Axiomes (RT): (1.2.1).
Condition (CENT): (1.2.5).
Axiomes (BNJ): (1.3.1).
Axiomes (DR): (1.4.2).
Axiomes (DRJ): (1.5.1).
Axiomes (IM): (2.3.1).
Axiomes (I), (I)′ et (I)″: (2.4.1).
Axiomes (JU): (2.5.1).
Axiomes (MO): (2.5.4).
Axiomes (FT): (2.6.1).
Axiomes (DF): (3.3.2).
Inégalité CAT(χ): (4.4.1).
Propriété (CN): (4.6), introduction.
Propriété (FL): (5.2.1).
Axiome $(\mathrm{DRJ1})_{\mathrm{lin.}}$: (6.2), introduction.
Axiomes (DRJE): (6.2.5).
Axiome (NILP): (6.3), introduction.
Axiomes (TD): (7.2.1).
Axiomes (GTD): (7.2.3).
Axiomes (KMG): (8.2.2) et (8.2.3).
Condition « $\mathbf{K}$ assez gros pour $\mathcal{D}$ » : (8.4.1).
Condition (PREALG): (11.1.3).
Condition (SGR): (11.2.3).
Condition (ALG): (11.2.5).
Condition (DCS): (12.1.2).

BIBLIOGRAPHIE

[Abr97] P. ABRAMENKO: *Twin buildings and applications to S-arithmetic groups.* Springer Lecture Notes in Mathematics 1641 (1996).

[Art57] E. ARTIN: *Geometric algebra.* Wiley-Interscience (1957).

[Bac-Bar-Ben-Rou95] V. BACK-VALENTE, N. BARDY-PANSE, H. BEN MESSAOUD, G. ROUSSEAU: *Formes presque déployées des algèbres de Kac-Moody: classification et racines relatives.* J. of algebra 171 (1995), p.43–96.

[Bal90] W. BALLMANN: *Singular spaces of non-positive curvature* (p.189-201 de *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov.* É. Ghys et P. de la Harpe éditeurs). Progress in Mathematics 83, Birkhäuser (1990).

[Bar96] N. BARDY: *Systèmes de racines infinis.* Mémoire de la SMF 65 (1996).

[Ber90] M. BERGER: *Géométrie.* Fernand Nathan (1990).

[Bor90] A. BOREL: *Linear algebraic groups.* Springer GTM 126 (1990).

[Bor-Tit65] A. BOREL, J. TITS: *Groupes réductifs.* Publications mathématiques de l'IHÉS 27 (1965), p.55-151.

[Bou81] N. BOURBAKI: *Groupes et algèbres de Lie* IV-VI. Masson (1981).

[Bou75] N. BOURBAKI: *Groupes et algèbres de Lie* VII-VIII. Hermann (1975).

[Bou97] M. BOURDON: *Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidité de Mostow.* GAFA 7 (1997), p.245-268.

[Bou98] M. BOURDON: *Sur les immeubles fuchsiens et leur type de quasi-isométrie.* Prépublications de l'Institut Élie Cartan (1998).

[Bou-Car91] J.-F. BOUTOT, H. CARAYOL: *Uniformisation p-adique des courbes de Shimura: les théorèmes de Cherednik et Drinfeld,* (p.45-149 de *Courbes modulaires et courbes de Shimura*). Astérisque 196-197 (1991).

[Bou-Paj97] M. BOURDON, H. PAJOT: *Poincaré inequalities and quasiconformal structure on the boundary of some hyperbolic buildings.* Prépublication MSRI (1997), à paraître aux Proceedings de l'AMS.

[Bri91] M. BRIDSON: *Geodesics and curvature in metric simplicial complexes.* (p.373-463 de *Group theory from a geometrical viewpoint.* É. Ghys, A. Hæfliger et A. Verjovsky éditeurs). World Scientific (1991).

[Bro89] K. BROWN: *Buildings.* Springer (1989).

[Bru-Tit72] F. BRUHAT, J. TITS: *Groupes réductifs sur un corps local I. Données radicielles valuées.* Publications mathématiques de l'IHÉS 41 (1972), p.5-251.

[Bru-Tit84] F. BRUHAT, J. TITS: *Groupes réductifs sur un corps local II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée.* Publications mathématiques de l'IHÉS 60 (1984), p.5-184.

[Car72] R. W. CARTER: *Simple groups of Lie type.* Wiley (1972).

[Che55] CL. CHEVALLEY: *Sur certains groupes simples.* Tôhoku Math. Journal (2) 7 (1966); p.14–66.

[Che61] CL. CHEVALLEY: *Certains schémas de groupes semi-simples.* Séminaire Bourbaki, exposé 219. Benjamin (1966).

[Cho97] A. CHOSSON: *Présentation des groupes de Kac-Moody, d'après J. Tits.* Mémoire de DEA de l'Université Paris VI (1997).

[Cur-Leh-Tit80] C.W. CURTIS, G.I. LEHRER, J. TITS: *Spherical buildings and the character of the Steinberg representation.* Inventiones Math. 58 (1980), p.201–210.

[Dav83] M. DAVIS: *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean spaces.* Annals of Mathematics 117 (1983), p.293-324.

[Dav90] M. DAVIS: *Buildings are* CAT(0). Preprint Ohio State University (1990), ou p.108-123 de *Geometry and cohomology in group theory.* P.H. Kropholler, G.A. Niblo, R. Stöhr éditeurs. LMS lecture note series 252 (1997).

[Dem65] M. DEMAZURE: *Schémas en groupes réductifs.* Bulletin de la Société Mathématique de France 93 (1965), p.369-413.

[Dem-Gab70] M. DEMAZURE, P. GABRIEL: *Groupes algébriques.* Masson/North Holland (1970).

[Gab-Pau98] D. GABORIAU, F. PAULIN: *Sur les immeubles hyperboliques.* Prépublication de l'Université d'Orsay (1998).

[Gar97] P. GARRETT: *Buildings and classical groups.* Chapman and Hall (1997).

[Hæ91] A. HÆFLIGER: *Complexes of groups and orbihedra.* (p.504-540 de *Group theory from a geometrical viewpoint.* É. Ghys, A. Hæfliger et A. Verjovsky éditeurs). World Scientific (1991).

[Hag-Pau98] F. HAGLUND, F. PAULIN: *Simplicité de groupes d'automorphismes d'espaces à courbure négative.* (p.181-248 de *The Epstein birthday schrift.* Geom. Topol. Monogr. 1) Geom. Topol., Coventry (1998).

[Hée90] J.-Y. HÉE: *Construction de groupes tordus en théorie de Kac-Moody.* Notes CRAS 310 (1990), p.77-80.

[Hée91] J.-Y. HÉE: *Systèmes de racines sur un anneau commutatif totalement ordonné.* Geometriae dedicata (1991), p.65-102.

[Hum72] J. HUMPHREYS: *Introduction to Lie algebras and representation theory.* Springer GTM 9 (1972).

[Hum75] J. HUMPHREYS: *Linear algebraic groups.* Springer GTM 21 (1975).

[Hum90] J. HUMPHREYS: *Reflection groups and Coxeter groups.* Cambridge University Press (1990).

[Kac90] V. KAC: *Infinite-dimensional Lie algebras.* Cambridge University Press (1990).

[Kac-Pet83] V. KAC, D. PETERSON: *Regular functions on some infinite-dimensional groups.* (p.141-166 de *Arithmetic and geometry.* M. Artin et J. Tate éditeurs). Progress in Mathematics 36, Birkhäuser (1983).

[Kac-Pet84] V. KAC, D. PETERSON: *Defining relations for certain infinite-dimensional groups.* Astérisque Hors-Série (1984), p.165-208.

[Kac-Pet87] V. KAC, D. PETERSON: *On geometric invariant theory for infinite-dimensional groups.* Springer Lecture Notes in Mathematics 1271 (1987), p.109-142.

[Kle-Lee97] B. KLEINER, B. LEEB: *Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidian buildings.* Publications mathématiques de l'IHÉS 86 (1997), p.115-197.

[Lan96] E. LANDVOGT: *A compactification of the Bruhat-Tits building.* Springer Lecture Notes in Mathematics 1619 (1996).

[Mar90] G.A. MARGULIS: *Discrete subgroups of semisimple Lie groups.* Springer (1990).

[Mas87] B. MASKIT: *Kleinian groups.* Springer (1987).

[Mat88] O. MATHIEU: *Formule des caractères pour les algèbres de Kac-Moody générales.* Astérisque 159-160 (1988).

[Moo-Pia95] R. MOODY, A. PIANZOLA: *Lie algebras with triangular decompositions.* Wiley-Interscience Publications (1995).

[Mos73] G.D. MOSTOW: *Strong rigidity of locally symmetric spaces.* Annals of Mathematics studies, Princeton University Press (1973).

[Mou88] G. MOUSSONG: *Hyperbolic Coxeter groups.* Doctoral dissertation, Ohio State University (1988).

[Pan98] P. PANSU: *Formules de Matsushima, de Garland et propriété (T) pour des groupes agissant sur des espaces symétriques ou des immeubles.* Bull. Soc. math. France 126 (1998), p.107-139.

[Pau91] F. PAULIN: *Construction of hyperbolic groups via hyperbolization of polyhedra.* (p.313-372 de *Group theory from a geometrical viewpoint.* É. Ghys, A. Hæfliger et A. Verjovsky éditeurs). World Scientific (1991).

[Rém99a] B. RÉMY: *Immeubles à courbure négative et théorie de Kac-Moody.* Nancy (1999).

[Rém99b] B. RÉMY: *Groupes de lacets algébriques: structure algébro-géométrique, formes presque déployées*, en préparation.

[Ron89] M. RONAN: *Lectures on buildings.* Academic press (1989).

[Rou89] G. ROUSSEAU: *Almost split* **K***-forms of Kac-Moody algebras.* Infinite-dimensional Lie algebras and groups, Marseille. Adv. Ser. in Math. Physics 7, World scientific publications (1989), p.70-85.

[Rou90] G. ROUSSEAU: *L'immeuble jumelé d'une forme presque déployée d'une algèbre de Kac-Moody.* Bulletin de la société mathématique de Belgique 42 (1990), p.673-694.

[Rou94] G. ROUSSEAU: *On forms of Kac-Moody algebras.* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 56, part 2, p.393-399 (1994).

[Rou96] G. ROUSSEAU: *Cours de DEA de 2ème niveau 1995-1996.* Nancy (1996).

[Sat71] I. SATAKE: *Classification theory of semi-simple algebraic groups.* Marcel Dekker (1971).

[Sch-Stu97] P. SCHNEIDER, U. STUHLER: *Repesentation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building.* Publications mathématiques de l'IHÉS 85 (1997), p.97-191.

[Ser59] J.-P. SERRE: *Groupes algébriques et corps de classes.* Hermann (1959).

[Ser77] J.-P. SERRE: *Arbres, amalgames,* SL_2. Astérisque 46 (1977).

[Ser94] J.-P. SERRE: *Cohomologie galoisienne.* Springer Lecture Notes in Mathematics 5 (édition de 1994).

[Spr80] T. SPRINGER: *Linear algebraic groups.* Progress in Mathematics 9, Birkhäuser (1980).

[Ste68] R. STEINBERG: *Lectures on Chevalley groups.* Yale mimeographed notes (1968).

[Tit66] J. TITS: *Classification of algebraic semisimple groups.* (p.33–62 de *Algebraic groups and discontinuous subgroups.* A. Borel et G.D. Mostow éditeurs). Proceedings of Symposia in Pure Mathematics (Boulder). AMS (1966).

[Tit74a] J. TITS: *On buildings and their applications.* Proceedings ICM Vancouver (1974), p.209-220.

[Tit74b] J. TITS: *Buildings of spherical type and finite BN-pairs.* Springer Lecture Notes in Mathematics 386 (1974).

[Tit81] J. TITS: *A local approach to buildings.* (p.519-547 de *The Geometric Vein. Coxeter Festschrift.* C. Davis, B. Grünbaum et F.A. Sherk éditeurs). Springer (1981), p.519-547.

[Tit86] J. TITS: *Ensembles ordonnés, immeubles et sommes amalgamées.* Bulletin de la Société Mathématique de Belgique 38 (1986), p.367-387.

[Tit87] J. TITS: *Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields.* Journal of Algebra 105 (1987), p.542-573.

[Tit88] J. TITS: *Groupes associés aux algèbres de Kac-Moody.* Séminaire Bourbaki, exposé 700, Astérisque 177-178 (1989), p.7-31.

[Tit89] J. TITS: *Théorie des groupes.* Résumé de cours, annuaire du Collège de France, année 88-89, p.81-95.

[Tit90] J. TITS: *Théorie des groupes.* Résumé de cours, annuaire du Collège de France, année 89-90, p.87-103.

[Tit92] J. TITS: *Twin buildings and groups of Kac-Moody type.* Lecture Notes of the LMS 165 (1992), p.249-286.

[Vin71] E. VINBERG: *Discrete linear groups generated by reflections.* Nauk. USSR, Ser. Mat. 35 (1971), p.1083-1119.

[Wat79] W. WATERHOUSE: *Introduction to affine group schemes.* Springer GTM 66 (1979).

université HENRI POINCARÉ
NANCY 1

FACULTÉ DES SCIENCES

S.C.D. - U.H.P.
NANCY 1
SCIENCES
BIBLIOTHÈQUE

Monsieur **REMY Bertrand**

DOCTORAT de l'UNIVERSITE HENRI POINCARE, NANCY-I

en MATHEMATIQUES PURES

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER

Nancy, le 20 SEP 1999 n° 257

Le Président de l'Université

UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ, NANCY
LE PRÉSIDENT
M. BURLET

Ce travail comporte deux parties.

La première partie est de nature combinatoire et géométrique. On y effectue l'étude abstraite d'une classe de groupes satisfaisant un certain nombre d'axiomes. Ces axiomes sont vérifiés par les groupes algébriques réductifs (isotropes) et par les groupes de Kac-Moody (déployés) par exemple. À chaque groupe est associé un jumelage d'immeubles qui permet de faire appel aux notions de convexité et de courbure négative (singulière). On y établit aussi des théorèmes d'amalgame et de décomposition de Lévi pour certains sous-groupes.

La seconde partie relève de la théorie de Kac-Moody. Il s'agit de formuler une théorie relative des groupes du même nom. Le but est d'obtenir un théorème de descente galoisienne, c'est-à-dire de mettre en évidence la permanence d'une structure combinatoire comme ci-dessus, par passage aux points rationnels. Les outils essentiels sont des arguments de groupes algébriques et l'usage d'une représentation adjointe, substitut fonctoriel d'une structure algébrique.

Mots-clés: *systèmes de Tits et raffinements, immeubles jumelés, courbure négative, convexité, théorie de Kac-Moody relative, groupes algébriques, descente galoisienne.*