AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

UFR Sciences et Techniques Mathématiques Informatique Automatique
École Doctorale IAE+M – DFD Automatique et Production automatisée

S.C.D. - U.H.P. BIBLIOTHÈQUE NANCY 1 SCIENCES

THÈSE

présentée pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré – Nancy 1
(Spécialité Automatique)

par

Didier AUBRY

Contribution à la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires

soutenue publiquement le 11 juin 1999 devant la commission d'examen :

Président :	D. SAUTER	Professeur, CRAN, Université Henri Poincaré, Nancy I
Rapporteurs :	G. BORNARD	Directeur de recherche, CNRS, LAG, Grenoble
	D. DOCHAIN	Professeur, CESAME, Université Catholique de Louvain
Examinateurs :	M. DAROUACH	Professeur, CRAN, Université Henri Poincaré, Nancy I
	G. SALLET	Professeur, INRIA Projet CONGE, Université de Metz
	M. BOUTAYEB	Maître de Conférences, CRAN, Université Henri Poincaré, Nancy I

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
CRAN - CNRS UPRES-A 7039

à mes chers parents,

à la mémoire de mon grand-père,

Remerciements

L'ensemble des travaux présentés dans cette thèse a été effectué au Centre de Recherche de Nancy (CRAN) au sein de l'équipe Analyse et Commande des Systèmes (ACS) de Longwy (CRAN CNRS UPRES-A 7039) dirigée par Monsieur le Professeur Mohamed DAROUACH, sous la responsabilité scientifique de Monsieur Mohamed BOUTAYEB, Maître de Conférences dans l'équipe CRAN-ACS.

Je remercie les membres du jury qui me font l'honneur de participer à l'examen de ce travail :

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Mohamed DAROUACH, professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy I, responsable de l'équipe ACS au CRAN, pour m'avoir accueilli dans son laboratoire, m'avoir encouragé tout au long de ma thèse et m'avoir permis de réaliser ce travail dans d'excellentes conditions et dans un cadre scientifique d'une grande qualité.

Que Monsieur Guy BORNARD, Directeur de Recherche au Laboratoire d'Automatique de Grenoble (LAG), trouve ici l'expression de mes sincères remerciements pour m'avoir fait l'honneur de juger ce travail, pour le temps qu'il m'a consacré comme rapporteur de ce mémoire et pour les remarques constructives qu'il m'a faites.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur Denis DOCHAIN, maître de recherches à l'Université Catholique de Louvain, membre du "Center for Systems Engineering and Applied Mechanics" (CESAME), pour l'attention qu'il a accordé à ce travail et pour sa présence en tant que rapporteur dans ce jury.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Monsieur Dominique SAUTER, professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy I, responsable de l'équipe DIALOGS au CRAN, pour l'honneur qu'il me fait en participant à l'examen de travail et en présidant ce jury.

Que Monsieur Gauthier SALLET, professeur à l'Université de Metz, responsable du Projet CONGE à l'INRIA, trouve ici l'expression de mes sincères remerciements pour sa présence dans ce jury.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur Mohamed BOUTAYEB, mon *"coencadrant"*, maître de conférences à l'Université Henri Poincaré, Nancy I, membre de l'équipe ACS au CRAN, pour m'avoir, dès le départ, aiguiller vers la théorie de l'observation non linéaire et avoir, par la suite, continuellement suivi ce travail. Pour ses qualités, tant humaines que scientifiques, pour ses conseils et les orientations précieuses qu'il m'a toujours prodigué, pour sa perpétuelle bonne humeur et son soutien : qu'il trouve ici l'expression de mes plus sincères remerciements.

Que l'ensemble de mes amis et collègues du laboratoire, à savoir les *"anciens"* : Michel, Hugues, Roland, Edouard, Christophe, Jean-Yves et Jean-Michel, les *"(ex)-thésards"* : Eric, Woihida, Iulia, Harouna, Jean-Michel, Yvon et Fabien, les *"petits nouveaux"* : Yasmina et Kheir Eddine, sachent que leur aide, leur disponibilité, leur amitié et l'excellente ambiance que chacun contribue à créer dans l'équipe rentrent pour une part importante dans l'aboutissement de ce travail.

Un grand merci aux membres de "l'équipe de nuit" (les personnes concernées se reconnaîtront ...) parmi laquelle je me suis immiscé ces derniers temps, pour l'aide et les encouragements qu'ils m'ont apportés lors de la rédaction de ce manuscrit et lors de la préparation de ma soutenance[1].

Je tiens également à remercier Madame Nadine PETIT, notre adorable secrétaire, pour sa disponibilité, sa gentillesse et l'aide précieuse qu'elle m'a apporté tout au long de ma thèse.

Je ne pourrai oublier d'exprimer toute ma reconnaissance à Messieurs Jean-Luc PREUD'HOMME et Michel BORDET, ingénieurs au sein de l'équipe ACS, pour leur disponibilité et leur nombreux "dépannages" informatiques.

Mes remerciements vont également à l'ensemble du personnel du département GEII et de l'IUT de Longwy, à son "ancien" directeur Monsieur Bernard GAYRAL, à son "nouveau" directeur Monsieur Philippe PIERROT qui a également été mon tuteur durant mon monitorat de l'enseignement supérieur, et à Monsieur Gilbert GILSON, chef du département GEII.

Pour finir, je ne remercierai jamais assez ceux qui comptent le plus à mes yeux, à savoir ma famille et en particulier mes parents qui m'ont toujours soutenu et permi de réaliser l'essentiel de mes études. Enfin, j'aurai une pensée émue pour Lionel, mon ami, avec qui j'ai débuté ma vie de thésard et qui nous a quitté depuis.

1. Un merci de dernière minute à Iulia pour m'avoir remplacé dans mes fonctions d'enseignant les jours précédant ma soutenance, et à Yasmina pour son aide précieuse pendant les répétitions et les dernières impressions de ce document.

Table des matières

Symboles, notations et abbréviations xvii

Introduction 1

1 Rappels et généralités 7

1.1 Sur la stabilité des systèmes dynamiques 7

1.1.1 Cas des systèmes temps-continu 7

1.1.2 Cas des systèmes temps-discret 10

1.2 Sur l'observabilité des systèmes dynamiques 11

1.2.1 Cas des systèmes temps-continu 11

1.2.2 Entrées universelles et systèmes uniformément observables 15

1.2.3 Cas des systèmes temps-discret 19

1.3 Observateur : formulation 21

1.4 Conclusion 23

2 Observation des systèmes non linéaires : un état de l'art 25

2.1 Introduction 25

2.2 Observateurs des systèmes LTI 26

2.3 Observateurs des systèmes LTV et affines en l'état 26

2.3.1 Cas des systèmes LTV 27

2.3.2 Cas des systèmes affines en l'état 27

2.4 Observateurs des systèmes non linéaires 29

2.4.1 Observateurs à dynamique de l'erreur linéaire 29

2.4.1.1 Linéarisation exacte de l'erreur d'observation 29

2.4.1.2 Linéarisation au premier ordre de l'erreur d'observation . . . 33

2.4.1.2.1 Observateur de Luenberger étendu 33

2.4.1.2.2 Linéarisation étendue et pseudo-linéarisation 36

2.4.1.2.3 Observateur de Ciccarella *et al.* 40
2.4.2 Observateurs à grand gain 43
2.4.2.1 Approche de Thau et ses extensions 43
2.4.2.2 Synthèse d'observateurs des systèmes uniformément observables et U-uniformément observables 45
2.4.2.2.1 Approche de Gauthier *et al.* . Cas mono-sortie . . . 46
2.4.2.2.2 Approche de Bornard *et al.* . Cas multi-sorties . . . 48
2.4.2.2.3 Observateurs des systèmes U-uniformément observables 51
2.4.3 Observateurs à modes glissants 52
2.4.4 Observateurs sur horizon glissant 55
2.4.4.1 Minimisation d'un critère quadratique 55
2.4.4.2 Approche algébrique. Méthode de Newton 58
2.5 Conclusion 60

3 Observateurs de type Kalman Etendu **63**
3.1 Introduction 63
3.2 Observateurs de type Kalman pour les systèmes LTV temps-discret 64
3.2.1 Formulation de l'observateur 65
3.2.2 Analyse de convergence 66
3.2.3 Application aux systèmes affines en l'état 69
3.3 Observateurs de type Kalman étendu pour les systèmes non linéaires 70
3.3.1 OKE : approche de Deza *et al.* 70
3.3.2 OKE : approche de Reif *et al.* 73
3.3.3 Sur la synthèse d'OKE pour les systèmes non linéaires temps-discret . 75
3.3.3.1 Formulation de l'observateur 75
3.3.3.2 Analyse de convergence 77
3.3.3.3 Sur la synthèse des matrices de pondération de l'observateur et exemple 87
3.3.4 Conclusion 92
3.4 Observateurs d'ordre réduit pour les systèmes non linéaires 94
3.4.1 Position du problème 94
3.4.2 OKE d'ordre réduit : première approche 95
3.4.2.1 Formulation de l'observateur 95

3.4.2.2 Analyse de convergence 96
3.4.3 OKE d'ordre réduit : deuxième approche 103
3.4.3.1 Formulation de l'observateur 103
3.4.3.2 Analyse de convergence 105
3.4.4 Conclusion 107
3.5 Observateur pour les systèmes non linéaires singuliers 109
3.5.1 Formulation de l'observateur 109
3.5.2 Analyse de convergence 112
3.5.3 Conclusion 116
3.6 Estimation séparée de l'état et des biais des systèmes non linéaires 117
3.6.1 Introduction 117
3.6.2 Formulation de l'estimateur global 118
3.6.3 Formulation de l'estimateur séparé 119
3.6.3.1 Analogie approche globale/approche décentralisée 120
3.6.3.2 Analyse de convergence 121
3.6.3.3 Sur le choix des matrices de pondération de l'estimateur et exemple 126
3.6.4 Conclusion 129
3.7 Conclusion 129

4 Applications-Simulations **131**
4.1 Identification des modèles Hammerstein MISO 132
4.1.1 Introduction 132
4.1.2 Modèles Hammerstein MISO : description 132
4.1.3 OKE modifié : simulations et commentaires 135
4.1.4 Conclusion 137
4.2 Application à l'observation d'une machine asynchrone 141
4.2.1 Introduction 141
4.2.2 Description du procédé et modélisation 141
4.2.3 OKE modifiés d'ordres plein et réduit 144
4.2.3.1 OKE d'ordre plein 144
4.2.3.2 OKE d'ordre réduit 145
4.2.3.3 Simulations et commentaires 146
4.2.4 Estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues 147

4.2.4.1 Présentation du problème 147
4.2.4.2 Simulations et commentaires 149
4.2.5 Estimation séparée de l'état et des biais 151
4.2.5.1 Présentation du problème 151
4.2.5.2 Simulations et commentaires 152
4.2.6 Conclusion 153
4.3 Application au problème de trajectographie passive 155
4.3.1 Introduction 155
4.3.2 Modélisation 155
4.3.3 OKE avec pseudo-mesures et OKE à gain modifié 157
4.3.3.1 OKE avec pseudo-mesures 157
4.3.3.2 OKE à gain modifié 158
4.3.4 Simulations et commentaires 160
4.3.5 Conclusion 162
4.4 Application à l'observation de bioprocédés 164
4.4.1 Etude d'un bioréacteur de base 164
4.4.1.1 Modélisation 164
4.4.1.2 OKE modifié : simulations et commentaires 165
4.4.2 Etude d'un bioréacteur à culture mixte 168
4.4.2.1 Modélisation 168
4.4.2.2 OKE séparé état/biais : simulations et commentaires 171
4.4.3 Conclusion 172
4.5 Application à un robot SCARA. Résultats expérimentaux 174
4.5.1 Description et modélisation du système 174
4.5.2 Estimation séparée état/paramètres 176
4.5.3 Conclusion 178
4.6 Conclusion 178

Conclusion générale et perspectives **181**

A Eléments d'algèbre **185**
A.1 Rappels d'algèbre linéaire 185
A.1.1 Normes vectorielles et matricielles 185
A.1.2 Inverses et pseudo-inverses 186

A.1.3 Quelques définitions et résultats 186
A.2 Rappels d'algèbre de Lie 187

B Sur la bornitude de la covariance de l'erreur d'estimation du filtre de Kalman appliqué à un système LTV **189**

Bibliographie **205**

Table des figures

1.1 *Observateur : schéma de principe.* 22

3.1 *Etats simulés (−) et estimés. OKE modifié (− −) et OKE classique (− ·)* . . 93
3.2 *Observateur d'ordre réduit : schéma de principe.* 95
3.3 *Etats simulés (−) et estimés (− −).* 128
3.4 *Biais simulés (−) et estimés (− −).* 129

4.1 *Modèle Hammerstein MISO.* 133
4.2 *Convergence de la norme de l'erreur d'estimation de l'état. OKE modifié. Initialisation 1.* 138
4.3 *Convergence de la norme de l'erreur d'estimation de l'état. OKE classique. Initialisation 1.* 138
4.4 *Convergence de la norme de l'erreur d'estimation de l'état. OKE modifié. Initialisation 2.* 138
4.5 *Convergence de la norme de l'erreur d'estimation de l'état. OKE classique. Initialisation 2.* 139
4.6 *Evolution des paramètres a_{ij} réels (- -) et estimés (—). OKE modifié. Initialisation 1.* 139
4.7 *Evolution des paramètres b_{ij} réels (- -) et estimés (—). OKE modifié. Initialisation 1.* 139
4.8 *Evolution des paramètres g_{1i} réels (- -) et estimés (—). OKE modifié. Initialisation 1.* 140
4.9 *Evolution des paramètres g_{2i} réels (- -) et estimés (—). OKE modifié. Initialisation 1.* 140
4.10 *Evolution des paramètres g_{3i} réels (- -) et estimés (—). OKE modifié. Initialisation 1.* 140
4.11 *Etats simulés (−) et estimés : OKE d'ordre plein modifié (− −) et classique (− ·).* 148
4.12 *Etats simulés (−) et estimés : OKE d'ordre réduit modifié (− −) et classique (− ·).* 149
4.13 *Etats simulés (−) et estimés (− −). OKE pour les systèmes singuliers.* . . . 150
4.14 *Etats (biais) simulés (−) et estimés (− −). OKE découplé modifié.* 153

4.15 *Biais simulés (−) et estimés (− −). OKE découplé classique.* 154
4.16 *Schéma de guidage et angles mesurés.* 156
4.17 *Etats simulés (−) et estimés : OKE avec pseudo-mesures (− ·), OKE à gain modifié (· · ·) et OKE modifié (− −).* 163
4.18 *Schéma du bioréacteur de base.* 164
4.19 *Entrée et sortie simulées. Modèle de Monod.* 167
4.20 *Etats simulés (−) et estimés : OKE modifié (− −) et OKE classique (− ·). Modèle de Monod.* 167
4.21 *Entrée et sortie simulées. Modèle de Haldane.* 168
4.23 *Principes d'évolution des populations cellulaires.* 168
4.22 *Etats simulés (−) et estimés : OKE modifié (− −) et OKE classique (− ·). Modèle de Haldane.* 169
4.24 *Etats simulés (−) et estimés (− −).* 173
4.25 *Biais simulés (−) et estimés (− −).* 173
4.26 *Schéma du robot SCARA plan.* 174
4.27 *Entrée et sortie réelles du système.* 177
4.28 *Etat et paramètres estimés.* 178
4.29 *Validation croisée du modèle estimé $\hat{\theta}$.* 179

Symboles, notations et abréviations

Ensembles, classes de fonctions

$\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}\}$	ensemble des nombres {entiers, relatifs, réels},
$\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}\}^+$	ensembles des nombres {entiers, relatifs, réels} positifs,
$\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}\}^*$	ensembles des nombres {entiers, relatifs, réels} privés de l'élément 0,
$\mathbb{R}^n$	espace réel euclidien de dimension n,
$\mathbb{R}^{n\times p}$	ensemble des matrices réelles de dimension $n \times p$,
$\subset$	inclusion d'un espace dans un autre,
$\mathcal{B}_r$	ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|x\| \leq r$, $r \geq 0$,
$\in$	appartenance d'un élément à un espace,
$\mathcal{C}^1$	classe des fonctions continûment différentiable,
$\mathcal{C}^\infty$	classe des fonctions indéfiniment continûment différentiables ou lisses (*smooth*).

Algèbre linéaire

I_n (I)	matrice identité de dimension $n \times n$ (resp. de dimension appropriée),
0_n (0)	matrice nulle de dimension $n \times n$ (resp. de dimension appropriée),
M^{-1}	inverse de $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (avec $\det(M) \neq 0$),
M^T (M^{-T})	transposée de $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$ (resp. de l'inverse de $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$),
$M^\dagger$	pseudo-inverse de Moore-Penrose de $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, avec $MM^\dagger M = M$,
$M > 0$ $(M \geq 0)$	matrice M symétrique définie (resp. semi-définie) positive,
$M > N$ $(M \geq N)$	$M - N > 0$ (resp. $M - N \geq 0$), pour M et N symétriques $\in \mathbb{R}^{n\times n}$,
$\lambda(M)$	ensemble des valeurs propres de $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
$\lambda_{\max}(M)$ $(\lambda_{\min}(M))$	valeur propre maximale (resp. minimale) de $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
$\sigma(M)$	ensemble des valeurs singulières de $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$, avec $\sigma_i(M) = \sqrt{\lambda_i(MM^T)}$,
$\sigma_{\max}(M)$ $(\sigma_{\min}(M))$	valeur singulière maximale (resp. minimale) de $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$,
$\det(M)$	déterminant de $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
$\mathrm{rang}(M)$	rang de $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$,
$\mathrm{tr}(M)$	trace de $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
$\mathrm{spec}(M)$	spectre de $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, avec $\mathrm{spec}(M) = \{\lambda_i \mid 1 \leq i \leq n\}$,
$\mathrm{cd}(M)$	nombre de conditionnement de $M \in \mathbb{R}^{n\times p}$, avec $\mathrm{cd}(M) = \sigma_{\max}(M)/\sigma_{\min}(M)$,

$\underset{i=1,\ldots,n}{\text{diag}}\ (m_i)$	matrice diagonale d'éléments diagonaux $m_i \in \mathbb{R}^n$,
$\underset{i=1,\ldots,n}{\text{bloc-diag}}(M_i)$	matrice bloc-diagonale d'éléments diagonaux $M_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
$\text{span}(v_1, \ldots, v_n)$	sous-espace vectoriel généré par l'ensemble des combinaisons linéaires du n-uplet de vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$,
$\|v\|$	norme euclidienne d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$,
$\|M\|$	norme euclidienne d'une matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Algèbre de Lie (voir annexe A)

$\mathscr{L}_f h$	dérivée de Lie d'une fonction h le long d'un champ de vecteurs f,
$\mathscr{L}_f^k h$	dérivée de Lie itérée k fois,
$[f, g]$	crochet de Lie de deux champs de vecteurs f et g,
$\text{ad}_f^k g$	crochet de Lie itéré k fois.

Opérateurs et notations

$\mathscr{E}\{.\}$	espérance mathématique,
$\text{cov}\{.\}$	covariance ou moment centré d'ordre 2,
$x_k\ (x(t))$	vecteur d'état à l'instant courant,
$u_k\ (u(t))$	vecteur des entrées à l'instant courant,
$y_k\ (y(t))$	vecteur des sorties à l'instant courant,
$f(x_k, u_k)$	modèle dynamique du système,
$h(x_k, u_k)$	modèle de sortie du système,
$\hat{x}_{k/k-1}$	vecteur d'état courant prédit à un pas,
$\hat{x}_k\ (\hat{x}_{k/k})$	vecteur d'état courant estimé (resp. filtré),
$\mathcal{W}^o\ (\mathcal{W}^c)$	grammien d'observabilité (resp. de commandabilité),
$\mathcal{O}$	matrice d'observabilité,
$\mathcal{O}^e$	matrice d'observabilité "estimée",
$M(i,:)\ (M(:,i))$	$i^{\text{ième}}$ ligne (resp. $i^{\text{ième}}$ colonne) de $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\delta_{j,k}$	symbole de Kronecker, $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$
e_j	vecteur unitaire, $e_j = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}^T$, l'unité se situant en $j^{\text{ième}}$ position.

Abbréviations

ARE	*Algebraic Riccati Equation* - Equation algébrique de Riccati,
EDP	*Partial Differential Equation* - Equation aux Dérivée Partielles,
FK	*Kalman Filter* - Filtre de Kalman,
FKE	*Extended Kalman Filter* - Filtre de Kalman Etendu,
LTI	*Linear Time Invariant* - Linéaire Temps Invariant,
LTV	*Linear Time Varying* - Linéaire Temps Variant,
MISO	*Multi Input Single Output* - Multi Entrées Simple Sortie,
MIMO	*Multi Input Multi Output* - Multi Entrées Multi Sorties,
OKE	*Extended Kalman Observer* - Observateur de Kalman Etendu,
SISO	*Single Input Single Output* - Simple Entrée Simple Sortie.

Introduction

La demande sans cesse grandissante en terme de qualité et de productivité des systèmes industriels a contraint l'homme à automatiser de plus en plus ses outils de production. Afin d'assurer une conduite optimale des procédés industriels, la majorité des techniques de commande (placement de pôles, commande optimale, commande linéarisante, ...) requiert une connaissance complète ou partielle de l'état du système à réguler. Sur le plan pratique, cette hypothèse s'avère inconcevable dans la plupart des cas. Plusieurs raisons à cela: d'une part, les variables d'état n'ont pas toujours une signification physique et leur mesure directe se révèle impossible à réaliser, d'autre part, lorsqu'un état existe physiquement, sa mesure peut être délicate à effectuer d'un point de vue technique (les capteurs nécessaires peuvent ne pas être disponibles ou de précision insuffisante) et enfin, sur le plan économique, il est souvent appréciable d'installer un minimum de capteurs de façon à réduire les coûts d'instrumentation du processus à automatiser.

Par conséquent, dès qu'une stratégie de commande (ou de diagnostic) requiert l'utilisation de variables d'état non mesurées, il est indispensable de reconstruire (complètement ou partiellement) le vecteur d'état du système. Sous certaines conditions, ce problème peut être résolu en introduisant en parallèle un système dynamique auxiliaire, appelé *observateur* ou *estimateur d'état* dont la tâche sera de fournir une estimation (asymptotique ou exponentielle) du vecteur d'état du système étudié en fonction des informations disponibles sur ce même système, à savoir les mesures des grandeurs d'entrée et de sortie et le modèle dynamique du procédé.

La synthèse de tels capteurs logiciels retient l'attention de nombreux chercheurs depuis plus de trois décennies. Dans un premier temps, la recherche s'est orientée de façon naturelle vers l'estimation de l'état des systèmes linéaires. Une solution optimale a été développée par Luenberger dans un cadre déterministe et Kalman dans un contexte stochastique. Ces algorithmes sont encore largement utilisés de nos jours mais, les systèmes linéaires ne couvrant qu'un faible pourcentage des procédés industriels, des solutions spécifiquement non linéaires ont rapidement été envisagées. En dépit d'une littérature surabondante sur le sujet (principalement dans le cas temps-continu), le problème de la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires n'a été que partiellement résolu et demeure un axe de recherche régulièrement exploré.

De nouveaux problèmes sont apparus avec l'émergence des techniques d'observation non linéaires. Ces difficultés sont essentiellement liées aux différences structurelles existant entre systèmes linéaires et non linéaires. En particulier, il est connu que l'observabilité des systèmes non linéaires n'est, dans la plupart des cas, qu'un résultat local et dépend de surcroît des entrées du système. Cette propriété contraste avec le cas linéaire où tout système observable l'est globalement et indépendamment des entrées (application du critère de Kalman pour l'observabilité par exemple). Ainsi, la définition "linéaire" de l'observabilité n'est plus

suffisante pour la synthèse d'observateurs non linéaires. Pour pallier à ce problème, plusieurs définitions de l'observabilité des systèmes non linéaire ont été introduites (observabilité locale (resp. globale) faible (resp. forte), espace d'observation, observabilité au sens du rang, ...). Certaines notions d'observabilité étant liées à la nature même des entrées, une classification rigoureuse de ces dernières a été réalisée : entrées universelles, régulièrement persistantes ou singulières. Dans cet esprit, certains auteurs se sont attachés à caractériser les systèmes, suivant la nature de leurs entrées. Les classes des systèmes uniformément observables (qui ne possèdent pas d'entrées singulières) et U-uniformément observables ont ainsi été introduites [WIL77, GAU81, GAU94]. Ces systèmes sont ou peuvent se mettre sous une forme canonique d'observabilité, via un changement de coordonnées local. Le rappel de ces différents concepts d'observabilité dans les cas temps-continu et temps-discret sera le thème du **premier Chapitre** de ce mémoire.

Les notions d'observabilité en non linéaire étant définies, nous consacrerons le **deuxième Chapitre** de ce mémoire à une revue bibliographique sur les différentes techniques d'estimation non linéaires. Pour ce faire, nous classerons les différentes méthodes existantes en quatre groupes principaux, à savoir les techniques de linéarisation exacte ou approchée de l'erreur d'observation, les observateurs à erreur non linéaire (incluant notamment les observateurs à grand gain), les observateurs à modes glissants et enfin les estimateurs d'état sur horizon glissant.

Pour commencer, nous présenterons la classe des estimateurs à erreur d'observation linéaire. Cette approche est née avec le souci de nombreux chercheurs d'étendre directement les techniques d'estimation linéaires aux systèmes non linéaires. L'observateur est alors synthétisé, soit sur la base d'une linéarisation exacte du système par injection de sortie ou immersion, soit sur la base d'une linéarisation approchée du système autour d'un point (ensemble) d'équilibre ou le long d'une trajectoire estimée. Toutefois, nous verrons que plusieurs doutes ont été émis, d'une part, sur l'applicabilité de la première stratégie, d'autre part, et ce malgré une très large utilisation en pratique, sur les garanties de convergence de la seconde.

La recherche s'est ensuite orientée vers des solutions spécifiquement non linéaires en considérant le système sur toute sa gamme de fonctionnement. Cette approche est fondée essentiellement sur les algorithmes d'estimation de type "grand gain" introduits par Thau en 1973 [THA73]. L'idée avancée est d'utiliser des gains d'observateurs suffisamment importants de façon à dominer les non linéarités (plus précisément la constante de Lipschitz de ces dernières) dans la dynamique non linéaire de l'erreur d'observation. La synthèse de ces observateurs est réalisée indifféremment dans les coordonnées initiales (sous certaines hypothèses structurelles du système) ou dans les bases canoniques associées aux systèmes uniformément observables où U-uniformément observables.

Nous poursuivrons avec la présentation des observateurs à structure variable. Cette méthode consiste à utiliser de grands gains d'observateur de façon à faire "glisser" l'erreur d'observation vers un hyperplan de commutation sur lequel l'erreur d'observation est linéaire et exponentiellement stable. Cette approche ne requiert pas une connaissance exacte des non linéarités du système pour la synthèse de l'observateur et permet, le cas échéant, de prendre en compte d'éventuelles incertitudes de modèle.

Enfin, l'étude des estimateurs sur horizon glissant viendra clore ce chapitre. De nombreux chercheurs portent un intérêt grandissant à cette approche dont l'objectif n'est plus de fournir

des solutions analytiques, comme précédemment, mais des solutions numériques issues d'algorithmes de minimisation, en transformant le problème classique d'estimation dynamique en la résolution, au sens des moindres carrés, d'un système d'équations non linéaires.

Après avoir passé en revue une grande partie des approches disponibles pour la synthèse d'observateurs des systèmes non linéaires temps-continu et temps-discret, le **troisième Chapitre** de ce mémoire sera consacré à l'étude de la classe importante des estimateurs non linéaires utilisant le formalisme du filtre de Kalman étendu. Cette approche est à classer parmi les techniques de linéarisation approchée de l'erreur d'observation et consiste essentiellement à imiter le filtre de Kalman pour les systèmes linéaires en linéarisant, à chaque instant, le système étudié le long des trajectoires estimées. En dépit d'une très large utilisation en pratique, la convergence de cette catégorie d'estimateurs n'a toujours pas été démontrée (au sens global !) et demeure un sujet de recherche ouvert et d'un grand intérêt.

Dans ce chapitre, après avoir démontré la convergence exponentielle globale du filtre de Kalman en tant qu'observateur pour les systèmes linéaires temps-variant, nous apporterons une preuve de la convergence du filtre de Kalman étendu (FKE) utilisé en tant qu'observateur (autrement appelé observateur de Kalman étendu (OKE)) pour les systèmes non linéaires temps-discret. Notre approche repose, d'une part sur les résultats antérieurs de Deyst et Price [DEY68] qui ont démontré la bornitude de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation sous les conditions d'observabilité et de commandabilité complètes uniformes et, d'autre part sur une nouvelle technique de linéarisation "exacte" au premier ordre du système étudié. Cette méthode consiste à paramétrer l'analyse de convergence de l'observateur en introduisant des matrices diagonales inconnues modélisant les différents résidus d'ordre supérieur ou égal à deux, issus de la linéarisation au premier ordre du système. Ce paramétrage nous permettra de donner des conditions suffisantes de convergence de l'observateur et d'établir les connections étroites entre le choix de certaines matrices de pondération (traditionnellement les covariances des bruits de système et de mesures dans un cadre stochastique) et l'amélioration des performances de l'observateur (vitesse de convergence et domaine d'attraction).

Nous étendrons ensuite cette approche à la synthèse d'observateurs de type-Kalman étendu d'ordre réduit pour les systèmes non linéaires temps-discret. Notre approche concernera la classe des systèmes à mesures linéaires. Des conditions suffisantes d'existence des observateurs synthétisés seront établies et, comme dans le cas d'ordre plein, nous démontrerons à quel point le choix de certaines matrices de pondération est important pour améliorer de façon significative les performances des algorithmes proposés.

Puis, comme il existe un certain nombre de situations où les systèmes ne sont pas réguliers (existence de contraintes algébriques ou présence d'entrées inconnues), nous passerons, dans une troisième partie, à la synthèse d'un observateur de type Kalman étendu pour la classe des systèmes non linéaires singuliers temps-discret à mesures linéaires. De même que dans les parties précédentes, nous établirons des conditions suffisantes d'existence de l'observateur via l'introduction d'une matrice diagonale inconnue modélisant les différents résidus issus de la linéarisation au premier ordre du système.

Enfin, nous développerons et étudierons la convergence d'un estimateur séparé état/biais ou état/paramètres de type Kalman étendu pour les systèmes non linéaires temps-discret. Les biais ou paramètres inconnus seront supposés constants. Après avoir démontré analytiquement l'équivalence entre l'estimateur séparé proposé et l'observateur de Kalman étendu

global (lorsque le vecteur d'état est augmenté par le vecteur des biais inconnus), nous énoncerons des conditions suffisantes d'existence de l'estimateur. Les conditions de convergence sont peu restrictives et obtenues en utilisant la technique de linéarisation "exacte" au premier ordre introduite dans les parties précédentes. En outre, le rôle fondamental joué par certaines matrices de pondération dans l'amélioration des performances de l'estimateur sera démontré.

Dans le **quatrième Chapitre**, la validité et l'applicabilité de notre approche pour la synthèse d'estimateurs de type-Kalman étendu seront démontrées, d'abord par le biais de simulations numériques sur des problèmes et systèmes régulièrement étudiés dans la littérature, puis sur des données réelles issues d'un procédé test du laboratoire.

La première application sera la résolution d'un problème d'identification non linéaire. Le système étudié est représenté sous la forme d'un modèle Hammerstein MISO. Cette modélisation consiste à mettre en série un système dynamique linéaire avec une caractéristique non linéaire statique. Ce problème étant difficilement abordable par les techniques d'estimation non linéaires classiques (dont le FKE standard), nous synthétiserons un OKE en accord avec la théorie établie en Chapitre 3 et démontrerons à quel point le choix des matrices de pondération est important pour améliorer la convergence de l'observateur. Les cas de mauvaises conditions initiales de l'observateur et de caractéristiques non linéaires d'ordres élevés seront étudiés.

La seconde application traitera le problème de l'observation d'une machine asynchrone. Nous chercherons dans un premier temps à estimer les flux rotoriques et la vitesse angulaire du rotor à partir des mesures des courants statoriques. Les algorithmes utilisés seront les OKEs d'ordre plein et d'ordre réduit. Afin d'estimer d'éventuels défauts de capteurs, nous appliquerons ensuite l'OKE pour les systèmes non linéaires singuliers dans le cadre de l'estimation conjuguée de l'état et des entrées inconnues. Enfin, certains paramètres du moteur étant susceptibles de varier dans le temps (résistance rotorique, couple de charge), l'estimateur état/biais de type Kalman étendu sera appliqué à l'estimation séparée de l'état et d'éventuels biais ou paramètres inconnus du système. Les différents algorithmes seront testés en simulation et en boucle ouverte.

L'application suivante abordera un problème fréquemment étudié dans la littérature, à savoir celui de la trajectographie passive. Ce problème consiste à estimer les éléments cinématiques (position, vitesse, accélération) d'une cible se déplaçant dans un espace tridimensionnel à partir des mesures des angles d'azimut et d'élévation effectuées depuis un "observateur" mobile. Ce système est caractérisé par une forte inobservabilité et par une inadéquation avec la plupart des techniques d'estimation non linéaires classiques. Après avoir présenté les différentes techniques d'estimation traditionnellement appliquées à ce problème (OKE avec pseudo-mesures et OKE à gain modifié), nous montrerons qu'un réglage judicieux des matrices de pondération de l'OKE classique (pourtant jugé peu performant sur ce problème dans la littérature) apporte une solution tout à fait pertinente au problème.

Puis, dans une quatrième partie, différentes simulations sur des procédés biotechnologiques seront menées. Nous nous intéresserons dans un premier temps à l'estimation simultanée des concentrations (en biomasse et en substrat) et des lois cinétiques d'un bioréacteur de base décrivant la croissance d'un unique micro-organisme sur un substrat. Ensuite, nous passerons à l'étude d'un bioréacteur à culture mixte décrivant la croissance de deux po-

pulations cellulaires issues de la même souche mais de sensibilités opposées par rapport à l'adjonction d'un agent inhibiteur extérieur.

Enfin, notre étude ne saurait être complète sans une validation expérimentale sur des données réelles. Dans une dernière phase, notre approche pour la synthèse d'OKE sera donc validée sur un problème d'estimation séparée de l'état et des paramètres d'un robot expérimental plan. Ce système constitue l'un des procesus pilotes du laboratoire.

Finalement, nous concluons notre travail par un résumé des principales contributions de ce mémoire à la théorie de l'observation des systèmes non linéaires et par quelques perspectives de recherches futures.

Chapitre 1

Rappels et généralités

Ce chapitre a essentiellement pour objectif de présenter quelques rappels mathématiques indispensables à toute stratégie d'observation et nécessaires à la compréhension de ce mémoire. L'étendue de ces notions se limite aux définitions de stabilité (asymptotique, exponentielle ou au sens de Lyapunov) et d'observabilité (grammien d'observabilité, espace d'observation, observabilité au sens du rang, ...). Le rôle fondamental joué par les entrées dans l'étude de l'observabilité de modèles non linéaires est mis en avant, les concepts d'entrées universelles et de systèmes uniformément observables sont introduits.

1.1 Sur la stabilité des systèmes dynamiques

Dans cette partie, nous rappelons quelques concepts fondamentaux sur la stabilité des systèmes dynamiques temps-continu et temps-discret. Par définition, l'analyse de la stabilité d'un système dynamique revient à étudier son comportement (sa trajectoire) lorsque son état initial est proche d'un point d'équilibre. Cette opération devient particulièrement délicate lorsque le modèle est non linéaire. De nombreux artifices sont cependant donnés dans la littérature [NIJ90, VID93]. Nous présenterons ici les principales définitions de stabilité asymptotique, de stabilité exponentielle et de stabilité (exponentielle) au sens de Lyapunov.

1.1.1 Cas des systèmes temps-continu

Considérons l'ensemble des systèmes non linéaires non autonomes décrits par l'équation dynamique :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ est continue. Nous désignons par x_e un point d'équilibre de (1.1) tel que $f(x_e, t) = 0$, $\forall\, t \geq t_0$, et par $\chi(t, t_0, x_0)$ la solution à l'instant $t \geq t_0$ du système (1.1) initialisée au point x_0 à l'instant t_0.

Comme les définitions qui suivent ne seront utilisées que dans le but d'analyser la dynamique d'erreurs d'observation, nous nous limiterons à l'étude de la stabilité de (1.1) autour de l'unique point d'équilibre que constitue l'origine $x_e = 0$.

Définition 1.1 (Stabilité) *On dit que l'origine est un point d'équilibre stable au sens de Lyapunov pour (1.1) si toute trajectoire initialisée dans un voisinage de $x_e = 0$ à t_0 en reste suffisamment proche pour tout $t \geq t_0$, autrement dit si, pour tout $\varepsilon > 0$ et $t_0 \geq 0$, il existe un scalaire positif $\delta(\varepsilon, t_0)$ tel que :*

$$\|x_0\| < \delta(\varepsilon, t_0) \quad \Rightarrow \quad \|\chi(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon \quad \forall\, t \geq t_0 \tag{1.2}$$

On dit que l'origine est instable dans le cas contraire. ▼

Définition 1.2 (Attractivité) *On dit que l'origine est un point d'équilibre attractif pour (1.1) s'il existe un scalaire strictement positif $\eta(t_0)$ tel que :*

$$\|x_0\| < \eta(t_0) \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to \infty} \chi(t, t_0, x_0) = 0 \quad \forall\, t \geq t_0 \tag{1.3}$$

Lorsque $\eta(t_0) \to \infty$, on dit que l'origine est globalement attractive. ▼

Le concept d'attractivité signifie simplement que toute trajectoire du système convergera bien, après un certain temps et de possibles larges excursions, vers son état d'équilibre. On remarque qu'un système attractif n'est pas nécessairement stable au sens de la Définition 1.1. On introduit alors la notion de stabilité asymptotique qui garantit que l'état du système converge vers son état d'équilibre sans trop s'en éloigner.

Définition 1.3 (Stabilité asymptotique) *On dit que l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement (resp. globalement asymptotiquement) stable si elle est stable et attractive (resp. globalement attractive).* ▼

Dans les définitions précédentes, si les bornes δ et η ne dépendent pas de l'instant initial t_0, on parlera de stabilité uniforme, d'attractivité uniforme et stabilité asymptotique (globale) uniforme. En remplaçant la convergence asymptotique dans (1.3) par une convergence exponentielle, on obtient une propriété plus forte que la stabilité asymptotique :

Définition 1.4 (Stabilité exponentielle) *On dit que l'origine est un point d'équilibre localement exponentiellement stable pour (1.1) s'il existe des constantes α et β strictement positives telles que :*

$$\|\chi(t, t_0, x_0)\| \leq \alpha \exp(-\beta(t - t_0)) \quad \forall\, t \geq t_0 \text{ et } \forall\, x_0 \in \mathcal{B}_r \tag{1.4}$$

Lorsque $\mathcal{B}_r = \mathbb{R}^n$, on dit que l'origine est globalement exponentiellement stable. ▼

L'utilisation des définitions précédentes, pour démontrer la stabilité du système (1.1) autour de l'un de ses points d'équilibre, requiert la résolution explicite de l'équation différentielle $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$. Ce calcul est très difficile voire impossible dans la plupart des cas. La théorie de Lyapunov (méthode directe) sur la stabilité permet de s'affranchir de ce dernier calcul. Cette méthode consiste à définir une fonction particulière avec des propriétés appropriées dont l'existence garantit le type de stabilité désiré.

Définition 1.5 *Soit $V(x,t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue. V est dite propre définie positive si :*

i. $\forall\, t \in \mathbb{R}^+,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0 \quad V(x,t) > 0,$

ii. $\forall\, t \in \mathbb{R}^+, \quad V(x,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,$

iii. $\forall\, t \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{\|x\| \to \infty} V = \infty.$

▼

Définition 1.6 (Fonction de Lyapunov) *Une fonction $V(x,t)$ de classe $\mathcal{C}^1$ est une fonction de Lyapunov locale (respectivement globale) au sens large pour le système différentiel (1.1) si elle est propre définie positive et s'il existe un voisinage de l'origine $\mathcal{V}_0$ tel que $\forall\, x \in \mathcal{V}_0$ (respectivement $x \in \mathbb{R}^n$) :*

$$\dot{V}(x,t) = \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}\right)^T f(x,t) \leq 0$$

Si $\dot{V}(x,t) < 0$, V est appelée fonction de Lyapunov au sens strict pour (1.1). ▼

Définition 1.7 (Méthode directe de Lyapunov) *Si le système différentiel (1.1) admet une fonction de Lyapunov locale au sens large (respectivement au sens strict) alors l'origine est un point d'équilibre localement stable (respectivement asymptotiquement stable).*

Ce résultat peut être validé globalement $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$. ▼

Définition 1.8 (Stabilité exponentielle) *L'origine de (1.1) est localement exponentiellement stable s'il existe des constantes $\alpha, \beta, \gamma > 0$, $p \geq 0$, et une fonction $V(x,t) : \mathcal{V}_0 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que, $\forall\, x \in \mathcal{V}_0$:*

i. $\alpha\|x\|^p \leq V(x,t) \leq \beta\|x\|^p,$

ii. $\dot{V}(x,t) < -\gamma V(x,t).$

Si $\mathcal{V}_0 = \mathbb{R}^n$, l'origine de (1.1) est globalement exponentiellement stable. ▼

Définition 1.9 (Théorème inverse (Massera)) *Tout système de classe $\mathcal{C}^1$ localement (respectivement globalement) asymptotiquement stable admet une fonction de Lyapunov locale (respectivement globale) au sens strict.* ▼

Nous avons énoncé, ci-avant, quelques résultats de stabilité utilisés dans la suite de ce mémoire pour analyser la stabilité des différents algorithmes d'observation. Le lecteur pourra se référer à [VID93] pour une synthèse plus complète.

Remarque 1.1 *En choisissant la fonction de Lyapunov candidate $V(x) = x^T P x$, $P > 0$, la classe des systèmes linéaires temps invariant (LTI), $\dot{x}(t) = Ax(t)$, est globalement exponentiellement stable en $x = 0$ si et seulement si P est la solution définie positive de l'équation $A^T P + PA = -Q$, pour une matrice Q définie positive donnée.* ▼

1.1.2 Cas des systèmes temps-discret

Les définitions précédentes restent valables pour les systèmes non linéaires non autonomes temps-discret de la forme :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, k) \\ x_{k_0} &= x_0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ est continue. Nous supposons que l'origine est l'unique point d'équilibre de (1.5) tel que $f(0,k) = 0, \forall\, k \geq k_0 \geq 0$.

Soit $\chi(k, k_0, x_0)$ la solution à l'instant $k \geq k_0$ du système (1.5) issue du point x_0 à l'instant k_0. Contrairement au cas temps-continu, χ est facilement calculable et l'on a :

$$\begin{aligned} &\chi(k, k_0, x_0) = x_k \\ &\chi(k+1, k, x_k) = x_{k+1} = f(\chi(k, k_0, x_0), k) && \forall\, x_k \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, k \geq k_0 \geq 0 \\ &\chi(k_0, k_0, x_0) = x_0 && \forall\, x_0 \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, k_0 \geq 0 \end{aligned}$$

Les définitions 1.1 à 1.3 sont ici directement transposables. Il convient cependant d'apporter les définitions suivantes concernant la notion de stabilité exponentielle.

Définition 1.10 (Stabilité exponentielle) *On dit que l'origine est un point d'équilibre localement exponentiellement stable pour (1.5) s'il existe des constantes $\alpha > 0$ et $0 < \rho < 1$ telles que :*

$$\|\chi(k, k_0, x_0)\| \leq \alpha \|x_0\| \rho^{k-k_0} \qquad \forall\, k \geq k_0 \geq 0,\ \forall\, x_0 \in \mathcal{B}_r \tag{1.6}$$

Lorsque $\mathcal{B}_r = \mathbb{R}^n$, l'origine est globalement exponentiellement stable. ▼

Théorème 1.1 (Stabilité exponentielle) *L'origine de (1.5) est un point d'équilibre localement exponentiellement stable s'il existe une fonction propre définie positive $V(x_k, k)$: $\mathcal{B}_r \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $V(0,k) = 0$, et des constantes $\alpha, \beta > 0$ et $0 < \gamma < 1$ telles que $\forall\, x_0 \in \mathcal{B}_r$ et $\forall\, k \geq k_0 \geq 0$:*

i. $\alpha \|x_k\|^2 \leq V(x_k, k) \leq \beta \|x_k\|^2$,

ii. La suite de Lyapunov $\{V(x_k, k)\}_{k=k_0,\ldots}$ est strictement décroissante c.-à-d. :

$$\begin{aligned} \Delta V(x_k, k) &= V(\chi(k+1, k, x_k), k+1) - V(x_k, k) \\ &= V(x_{k+1}, k+1) - V(x_k, k) \leq -\gamma V(x_k, k). \end{aligned}$$

■

En effet, à partir de la propriété *ii.*, on a $\Delta V(x_{k-1}, k-1) \leq -\gamma V(x_{k-1}, k-1)$ et on montre que :

$$\begin{aligned} & V(x_k, k) \leq (1-\gamma) V(x_{k-1}, k-1) \\ \Rightarrow \quad & V(x_k, k) \leq (1-\gamma)^{k-k_0} V(x_0, k_0) \end{aligned}$$

Soit, en utilisant l'inégalité *i.*:

$$\|x_k\| \leq \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\|x_0\|(1-\gamma)^{(k-k_0)/2}$$

$$\Rightarrow \quad \|\chi(k,k_0,x_0)\| \leq \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\|x_0\|(1-\gamma)^{(k-k_0)/2} \quad \forall\, k \geq k_0 \geq 0,\ \forall\, x_0 \in \mathcal{B}_r$$

d'où la stabilité exponentielle locale de l'origine de (1.5).

Remarque 1.2 *En choisissant la fonction de Lyapunov candidate $V(x_k) = x_k^T P x_k$, $P > 0$, la classe des systèmes LTI, $x_{k+1} = Ax_k$, est globalement exponentiellement stable en 0 si et seulement si P est la solution définie positive de l'équation $A^T PA - P = -Q$, pour une matrice Q définie positive donnée.* ▼

1.2 Sur l'observabilité des systèmes dynamiques

Préalablement à toute stratégie d'observation d'un système dynamique, il est nécessaire de s'assurer que l'état de ce dernier est effectivement observable à partir des informations antérieures sur l'entrée et la sortie. L'étude de l'observabilité du système apporte une solution à ce problème. A la différence des systèmes linéaires, l'observabilité des systèmes non linéaires est intrinsèquement liée aux entrées et aux conditions initiales. Lorsqu'un système non linéaire est observable, il se peut qu'il possède des entrées qui le rendent inobservable (entrées singulières) et annihilent toute stratégie d'observation. Dans cette section, après un rappel de quelques concepts fondamentaux sur l'observabilité, nous introduirons les notions d'entrées universelles et de systèmes uniformément observables, qui permettent d'éviter les problèmes de singularité liés aux entrées.

1.2.1 Cas des systèmes temps-continu

Considérons le système non linéaire autonome:

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t)) \tag{1.7a}$$

$$y(t) = h(x(t)) \tag{1.7b}$$

où $u(t) = (u_1(t),\ldots,u_m(t))^T \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ et $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Pour tout entrée $u \in \mathbb{R}^m$ constante, $f_u(x) = f(x,u)$[1] constitue un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ et les h_i, $i = 1,\ldots,p$, composantes de h sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$.

Dénotons $\chi_u(t,t_0,x_0)$ la solution à l'instant t du système (1.7), soumis à la commande u et issue de la condition initiale x_0 à l'instant t_0.

Dans le domaine non linéaire, il existe plusieurs façons de définir la notion d'observabilité. Nous rappelons ici la définition donnée par Hermann et Krener [HER77] en lien avec le concept d'indistinguabilité des états.

1. Afin d'alléger les différentes écritures mathématiques, nous omettrons régulièrement le temps t dans la suite de ce mémoire.

Définition 1.11 (Indistinguabilité, [HER77]) *Deux états distincts x_0, $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ sont dits indistinguables si, pour tout $t \in]t_0, T[$, $T < \infty$ et pour toute entrée admissible $u : [t_0, t] \mapsto \mathbb{R}^m$, les trajectoires $h(\chi_u(t, t_0, x_0))$ et $h(\chi_u(t, t_0, \bar{x}_0))$, respectivement associées à x_0 et $\bar{x}_0$, sont identiques sur leur domaine de définition commun.*

Dans le cas contraire, x_0 et $\bar{x}_0$ sont dits distinguables. ▼

Définition 1.12 (Observabilité) *Le système dynamique (1.7) est dit observable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si l'ensemble des états indistinguables de x_0 ne contient que x_0.*

Si cette propriété est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, le système est dit observable. ▼

Ce dernier concept constitue un concept global d'observabilité, pour lequel il est parfois nécessaire d'engendrer des trajectoires $h(\chi_u(t, t_0, x_0))$ et $h(\chi_u(t, t_0, \bar{x}_0))$ suffisamment éloignées de x_0. En limitant les différentes trajectoires dans un voisinage de x_0, nous définissons la notion d'observabilité locale.

Définition 1.13 (Observabilité locale, [HER77]) *Le système dynamique (1.7) est dit localement observable en un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ s'il existe un voisinage $\mathcal{V}_{x_0}$ de x_0 tel que pour tout $\bar{x}_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$, x_0 et $\bar{x}_0$ sont distinguables, les trajectoires $h(\chi_u(t, t_0, x_0))$ et $h(\chi_u(t, t_0, \bar{x}_0))$ restant dans $\mathcal{V}_{x_0}$.*

Si cette propriété est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, le système est dit localement observable. ▼

Les auteurs dans [HER77, SON84] ont montré que, lorsqu'il s'agit de différencier un état initial de ses voisins, il est possible d'affaiblir la propriété d'observabilité locale.

Définition 1.14 (Observabilité locale faible, [SON84]) *Le système dynamique (1.7) est dit localement faiblement observable en un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si, pour chaque voisinage $\mathcal{V}_{x_0}$ de x_0, il existe un voisinage $\tilde{\mathcal{V}}_{x_0}$ de x_0 contenu dans $\mathcal{V}_{x_0}$ tel que l'ensemble des états dans $\tilde{\mathcal{V}}_{x_0}$ qui sont indistinguables de x_0, pour toute trajectoire $h(\chi_u(t, t_0, \bar{x}_0)) \in \mathcal{V}_{x_0}$ avec $\bar{x}_0 \in \tilde{\mathcal{V}}_{x_0}$, ne contient que x_0.*

Le système dynamique (1.7) est dit localement faiblement observable s'il est localement faiblement observable en x pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. ▼

L'observabilité locale faible signifie simplement que tous les états suffisamment proches de x_0 en sont distinguables, les différentes trajectoires associées restant dans un voisinage de x_0.

L'exemple suivant illustre facilement ces derniers concepts :

Exemple 1.1 ([HER77]) *Soit le système :*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \qquad\qquad x \in \mathbb{R},\ u \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}^2 \\ y_1 &= \cos x \\ y_2 &= \sin x \end{aligned}$$

Ce système est localement faiblement observable, mais n'est pas observable. En effet, il est facile de voir que les points x_0 et $x_k = x_0 + 2k\pi$ sont indistinguables $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

Vérifier l'observabilité de (1.7) par l'intermédiaire des définitions précédentes, demande la résolution explicite de l'équation différentielle $\dot{x} = f(x,u)$. On a noté que ce calcul est très difficile voire impossible. Il est possible d'éviter ce problème en introduisant une condition de rang similaire au cas LTI. Cette condition est évidemment de nature locale, et s'appuie sur le fait que le comportement de la fonction de sortie h, dans un proche voisinage d'un point nominal (x_0, t_0), est défini par la fonction elle-même et ses dérivées successives au point (x_0, t_0) (théorème de Taylor). Autrement dit, il suffit de tester l'injectivité d'une application particulière entre les conditions initiales et les dérivées successives de la sortie. On définit alors le concept d'espace d'observation.

Définition 1.15 (Espace d'observation) *L'espace d'observation $\mathcal{O}(h)$ du système non linéaire (1.7) est le plus petit sous-espace vectoriel contenant les observations h_i et fermé par différentiation de Lie le long de tous les éléments de $\mathcal{F} = \{f_u(.),\ u \in \mathbb{R}^m\}$ c.-à-d. tous les champs de vecteurs correspondants à des entrées constantes :*

$$\mathcal{O}(h)(x) = \text{span}\left\{\mathcal{L}_{f_{u_k}}\mathcal{L}_{f_{u_{k-1}}}\ldots\mathcal{L}_{f_{u_1}}h_i(x) \mid 1 \leq i \leq p,\ k \geq 1,\ u_1,\ldots,u_k \in \mathbb{R}^m,\ x \in \mathbb{R}^n\right\} \tag{1.8}$$

où $\mathcal{L}_{f_{u_j}}h_i$ est la dérivée de Lie de la fonction h_i le long du champ de vecteurs f_{u_j}. ▼

Définition 1.16 (Observabilité au sens du rang)
Le système dynamique (1.7) est dit observable au sens du rang en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si :

$$\dim \mathrm{d}\mathcal{O}(h)(x_0) = n \tag{1.9}$$

où $\mathrm{d}\mathcal{O}(h)(x_0) = \{\mathrm{d}\psi(x_0),\ \psi \in \mathcal{O}(h)\}$.

Le système (1.7) est observable au sens du rang s'il l'est pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Si le système (1.7) est observable au sens du rang en x_0, alors il est localement faiblement observable en x_0 ([HER77]). ▼

La condition d'observabilité au sens du rang (1.9) est une condition *suffisante* mais non *nécessaire* pour s'assurer de l'observabilité d'un système dynamique non linéaire comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.2 ([XIA88b]) *Soit le système,*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^2 \ \text{ et } \ y \in \mathbb{R} \\ \dot{x}_2 &= x_2 \\ y &= x_1^3 + x_2^5 \end{aligned}$$

Comme $x_1 = \sqrt[3]{(5y - \dot{y})/2}$ et $x_2 = \sqrt[5]{(\dot{y} - 3y)/2}$, ce système est observable au sens de Hermann et Krener, mais n'est pas observable au sens du rang en $x = 0$ (car $\mathcal{O}(h)(x) = \text{span}\left\{x_1^3 + x_2^5, 3x_1^3 + 5x_2^5 \mid x \in \mathbb{R}^2\right\}$ d'où $\dim \mathrm{d}\mathcal{O}(h)(0) \neq 2$).

Dans le cas particulier des systèmes LTI :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{1.10a}$$
$$y(t) = Cx(t) \tag{1.10b}$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$, on remarque que $f(x,u) = Ax + Bu = f(x) + g(x)u$ avec $f(x) = Ax$, $g_k(x) = b_k$ et $h_i(x) = c_i x$ où b_k et c_i représentent respectivement les $k^{\text{ième}}$ et $i^{\text{ième}}$ lignes des matrices B et C.
On démontre que :

$$\mathscr{L}_f^j h_i(x) = c_i A^j x \qquad \text{et} \qquad \mathscr{L}_{g_k}\mathscr{L}_f^j h_i(x) = c_i A^j g_k$$

D'où :

$$\mathrm{d}\mathcal{O}(h)(x_0) = \mathrm{Im}\left[C^T \quad (CA)^T \quad \ldots \quad (CA^{n-1})^T\right]^T$$

Par conséquent, le système (1.10) est localement observable si le rang de la matrice :

$$\left[C^T \quad (CA)^T \quad \ldots \quad (CA^{n-1})^T\right]^T$$

est égal à n. Cette condition est plus connue sous le nom de critère de Kalman pour l'observabilité.

Pour les systèmes LTI, l'observabilité ne dépend ni des entrées appliquées au système, ni des conditions initiales : *l'observabilité locale implique l'observabilité globale.*

Dans une dernière partie, intéressons nous à l'étude de l'observabilité des systèmes linéaires temps variant (LTV) pour lesquels il est utile d'introduire le concept de grammien d'observabilité.
Considérons le système :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{1.11a}$$
$$y(t) = C(t)x(t) \tag{1.11b}$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$.

Définition 1.17 (Observabilité complète) *Le système (1.11) est dit complètement observable s'il existe $T > 0$ et $t_0 > 0$ tels que pour tout $t \geq t_0$, le grammien d'observabilité :*

$$\mathcal{W}^o(t, t+T) = \int_t^{t+T} \phi^T(\tau, t) C^T(\tau) C(\tau) \phi(\tau, t)\, \mathrm{d}\tau \tag{1.12}$$

est défini positif. $\phi(\tau, t)$ représente la matrice de transition du système homogène associé à (1.11) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\phi(\tau, t) = A(\tau)\phi(\tau, t) \tag{1.13}$$
$$\phi(t, t) = I_n$$

▼

Physiquement, le grammien d'observabilité $\mathcal{W}^o(t, t+T)$ quantifie l'information fournie par la sortie sur l'intervalle de temps $[t, t+T]$. On remarque que la condition d'observabilité complète n'est pas suffisante pour estimer l'état de (1.11). En effet, $\mathcal{W}^o(t, t+T)$ peut être défini positif tout en s'approchant de zéro. Dans ce cas, l'information fournie par la sortie n'est plus suffisante pour reconstruire l'état du système. Nous sommes alors amenés à introduire la notion d'observabilité complète uniforme.

Définition 1.18 (Observabilité complète uniforme, [BOR89]) *Le système (1.11) est dit complètement uniformément observable s'il existe $T > 0$, $\eta > 0$ et $t_0 > 0$ tels que pour tout $t \geq t_0$:*

$$\mathcal{W}^o(t, t+T) \geq \eta I_n > 0 \tag{1.14}$$

▼

1.2.2 Entrées universelles et systèmes uniformément observables

L'étude de l'observabilité des systèmes non linéaires, comme nous l'avons présentée précédemment, ne fait pas apparaître le rôle des entrées. En effet, alors que l'observabilité des systèmes LTI et LTV ne dépend pas des entrées, ce n'est plus le cas pour les systèmes non linéaires. Il existe des entrées particulières rendant ces systèmes inobservables. L'exemple suivant illustre cette propriété :

Exemple 1.3 *Considérons un système bilinéaire de la forme :*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u x_2 \qquad x \in \mathbb{R}^2,\ u \in \mathbb{R} \quad et \quad y \in \mathbb{R} \\ \dot{x}_2 &= 0 \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Il est clair que ce système est observable pour toute entrée $u(t) = k$, $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Cependant, l'entrée $u(t) = 0$ ne pourra distinguer deux états distincts $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T$ et $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{pmatrix}^T$ tels que $x_1 = \bar{x}_1$ et $x_2 \neq \bar{x}_2$, les sorties $h(\chi_0(t, 0, x))$ et $h(\chi_0(t, 0, \bar{x}))$ étant identiques pour tout $t \geq 0$.

Il convient, dès lors, de réaliser une certaine "classification" des entrées. Pour cela, nous introduisons les notions d'entrées universelles et singulières.

Définition 1.19 (Entrée universelle) *Une entrée est dite universelle pour le système (1.7) sur un intervalle de temps $[t_0, T]$ si, pour tout couple d'états initiaux distincts x_0 et $\bar{x}_0$, il existe $t \in [t_0, T]$ tel que $h(\chi_u(t, t_0, x_0)) \neq h(\chi_u(t, t_0, \bar{x}_0))$. Une entrée universelle distingue les états x_0 et $\bar{x}_0$.*

Toute entrée d'un système LTI est une entrée universelle. ▼

Définition 1.20 (Entrée singulière) *Toute entrée non universelle est dite singulière.* ▼

Il est montré dans [SUS79] que tout système non linéaire analytique observable admet des entrées universelles.

Pour les systèmes affines en l'état, l'universalité des entrées peut être étudiée facilement à l'aide du grammien d'observabilité [BOR93].

Considérons le système affine en l'état :

$$\dot{x}(t) = A(u(t))x(t) + B(u(t)) \tag{1.15a}$$
$$y(t) = C(u(t))x(t) \tag{1.15b}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$.

Le grammien d'observabilité associé à (1.15) est donné par la matrice symétrique :

$$\mathcal{W}^o(u, t, t+T) = \int_t^{t+T} \phi_u^T(\tau, t) C(u)^T C(u) \phi_u(\tau, t)\, \mathrm{d}\tau \tag{1.16}$$

où $\phi_u(\tau, t)$ est la matrice de transition du système homogène associé à (1.15) vérifiant :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\phi_u(\tau, t) = A(u)\phi_u(\tau, t) \tag{1.17}$$
$$\phi_u(t, t) = I_n$$

Définition 1.21 *Une entrée $u(t)$ est universelle pour le système (1.15) s'il existe $T > 0$, $t_0 > 0$ tels que pour tout $t \geq t_0$:*

$$\sigma_{\min}(\mathcal{W}^o(u, t, t+T)) > 0$$

$\sigma_{\min}(\mathcal{W}^o(u, t, t+T))$ est appelé indice d'universalité sur $[t, t+T]$. ▼

Il est montré dans [BOR93] que les entrées universelles ne suffisent pas à assurer la convergence d'un observateur pour (1.15). Cette remarque s'appuie sur le fait qu'une entrée universelle $u(t)$ décalée dans le temps peut perdre son universalité. Dans cette configuration, certains états du système devenant indistinguables, une perturbation se produisant sur l'un de ces derniers n'influencera pas la sortie $y(t)$ et l'observateur ne pourra "réagir" à cette perturbation. Pour remédier à ce problème et garantir une excitation suffisante du système, il est nécessaire d'introduire la notion de persistance régulière des entrées :

Définition 1.22 *Considérons le système affine en l'état (1.15). Une entrée $u(t)$ est dite régulièrement persistante s'il existe $t_0 > 0$, $T > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour tout $t \geq t_0$:*

$$\sigma_{\min}(\mathcal{W}^o(u, t, t+T)) > \alpha$$

Une entrée régulièrement persistante est universelle. ▼

α mesure le degré d'universalité, c'est à dire la proximité de $u(t)$ par rapport à d'éventuelles entrées singulières. Le fait de minorer le grammien d'observabilité $\mathcal{W}^o$ signifie simplement que l'entrée $u(t)$ n'est pas trop proche d'une mauvaise entrée.

L'étude de l'universalité des entrées permet d'établir une classe particulièrement intéressante de systèmes observables sur l'ensemble des entrées admissibles : les *systèmes uniformément observables.*

Définition 1.23 (Observabilité uniforme) *Un système est dit uniformément observable ou observable pour toute entrée si, pour tout $t \in [t_0, T]$, toute entrée admissible $u : [t_0, t] \to \mathbb{R}^m$, est une entrée universelle sur $[t_0, t]$.* ▼

Définition 1.24 (Observabilité uniforme locale) *Un système est dit localement uniformément observable si, pour tout $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_x$ de x tel que le système restreint à ce voisinage est uniformément observable.* ▼

Ces systèmes ont été caractérisés à l'origine par Williamson [WIL77] dans le cas bilinéaire, puis par Gauthier *et al.* [GAU81, GAU92] dans le cas non linéaire mono-sortie affine en la commande.

Théorème 1.2 ([WIL77]) *Tout système bilinéaire de la forme :*

$$\dot{x} = (A + uN)x \tag{1.18a}$$
$$y = Cx \tag{1.18b}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}$ et A, N, C sont des matrices réelles de dimensions appropriées, est uniformément observable s'il existe un changement de coordonnées $z = Px$ tel que (1.18) puisse être transformé sous la forme canonique observable :

$$\dot{z} = (\bar{A} + u\bar{N})z \tag{1.19a}$$
$$y = \bar{C}z \tag{1.19b}$$

où

$$\bar{A} = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}, \quad \bar{N} = PNP^{-1} = \begin{pmatrix} n_{11} & 0 & \dots & 0 \\ n_{21} & n_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n_{n1} & n_{n2} & \dots & n_{nn} \end{pmatrix},$$
$$\bar{C} = CP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

■

Théorème 1.3 ([GAU81]) *Tout système non linéaire mono-sortie affine en la commande de la forme :*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{1.20a}$$

$$y = h(x) \tag{1.20b}$$

où $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}$, f *et* g *sont des applications suffisamment différentiables* (Ω *: domaine de définition de l'état,* U *: ensemble des entrées admissibles*), *est localement uniformément observable s'il existe un difféomorphisme :*

$$\begin{aligned} \Phi : \ & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ & x \mapsto z = \Phi(x) = \left(h(x), \mathscr{L}_f h(x), \ldots, \mathscr{L}_f^{n-1} h(x)\right)^T \end{aligned}$$

qui transforme (1.20) sous la forme canonique observable :

$$\dot{z} = Az + \gamma(z) + \psi(z)u \tag{1.21a}$$

$$y = Cz \tag{1.21b}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & & 1 \\ 0 & & \ldots & & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma_n(z_1, \ldots, z_n) \end{pmatrix}, \quad \psi(z) = \begin{pmatrix} \psi_1(z_1) \\ \psi_2(z_1, z_2) \\ \vdots \\ \psi_n(z_1, \ldots, z_n) \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\gamma_n(z) = \mathscr{L}_f^n h(\Phi^{-1}(z))$ *et* $\psi_i(z) = \mathscr{L}_g \mathscr{L}_f^{i-1} h(\Phi^{-1}(z))$ $(i = 1, \ldots, n)$. ■

Remarque 1.3 *Tout système LTI est uniformément observable.* ▼

Une telle classification pour les systèmes non affines en la commande pose beaucoup plus de problèmes. Une solution a été apportée récemment dans [GAU94, BUS96] en introduisant la notion de U-uniforme observabilité. Ce concept est fondé sur des considérations physiques et notamment sur le fait que les entrées ne peuvent pas prendre n'importe quelle valeur.

Définition 1.25 (U-uniforme observabilité)
Un système est dit U*-uniformément observable si et seulement si toute entrée* $u : [0, T] \to U$ *est universelle sur* $[0, T]$ *pour tout* $T > 0$.

De même, il sera dit localement U*-uniformément observable si et seulement si, pour tout* $x \in \Omega$, *il existe un voisinage* $\mathcal{V}_x$ *de* x *tel que le système restreint à ce voisinage est* U*-uniformément observable.* ▼

Le résultat suivant généralise alors le théorème 1.3 :

Théorème 1.4 ([GAU94, BER98])
Tout système non linéaire mono-sortie localement U*-uniformément observable se met sous la forme canonique observable suivante :*

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_i \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, u) \\ \vdots \\ f_i(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, u) \\ \vdots \\ f_n(x, u) \end{pmatrix} \tag{1.22a}$$

$$y = f_0(x_1, u) \tag{1.22b}$$

où $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ *et* $y \in Y \subset \mathbb{R}$ *et*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}(x_1, \ldots, x_{i+1}, u) \neq 0 \quad \textit{pour} \quad i = 0, \ldots, n-1 \quad \textit{et} \quad \forall (x, u) \in \Omega \times U$$

■

Ce résultat a été étendu à certaines classes de systèmes non linéaires multi-sorties dans [BUS96].

1.2.3 Cas des systèmes temps-discret

Dans cette section, nous étendons les concepts d'observabilité cités précédemment, à la classe des systèmes non linéaires temps-discret décrits par le couple d'équations :

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) \tag{1.23a}$$
$$y_k = h(x_k) \tag{1.23b}$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k = (u_{1k}, \ldots, u_{mk})^T \in \mathbb{R}^m$ et $y_k \in \mathbb{R}^p$. Pour tout entrée $u_k \in \mathbb{R}^m$ constante, $f_{u_k}(x_k) = f(x_k, u_k)$ est un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ et les h_i, $i = 1, \ldots, p$, composantes de h sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$.

Désignons par $U_{[k,k+N-1]}$ une séquence de N entrées admissibles :

$$U_{[k,k+N-1]} = \begin{pmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+N-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times N}$$

Soit $\chi_{U_{[0,k-1]}}(k, 0, x_0)$ la solution à l'instant $k \geq 0$ du système (1.23) soumis à la commande $U_{[0,k-1]}$ et issue de la condition initiale x_0 à l'instant $k = 0$.

Définition 1.26 ([NIJ82]) *Deux états distincts* $x_0, \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *sont dits distinguables si, pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *et toute séquence d'entrées admissibles* $U_{[0,k-1]}$, *les trajectoires* $h(\chi_{U_{[0,k-1]}}(k, 0, x_0))$ *et* $h(\chi_{U_{[0,k-1]}}(k, 0, \bar{x}_0))$ *sont différentes sur leur domaine de définition commun. Dans ce cas, on dit que* $U_{[0,k-1]}$ *distingue les points* x_0 *et* $\bar{x}_0$.

Le système non linéaire (1.23) est dit observable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *si l'ensemble des états indistinguables de* x_0 *ne contient que* x_0. ▼

Nous remarquons que la définition précédente requiert un test infini qui est irréalisable en pratique. Il semble alors intéressant d'introduire le concept suivant de N-observabilité forte.

Définition 1.27 (N-observabilité forte, [NIJ82])

- *Le système non linéaire (1.23) est dit N-fortement observable ou N-observable en temps fini en* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *si, pour tout* $k = 0, \ldots, N$ *et toute séquence d'entrées admissibles* $U_{[0,k-1]}$, $h(\chi_{U_{[0,k-1]}}(k, 0, x_0)) = h(\chi_{U_{[0,k-1]}}(k, 0, \bar{x}_0))$, $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, *implique* $x_0 = \bar{x}_0$. *Dans ce cas, on dit que* $U_{[0,N-1]}$ *est une entrée universelle pour (1.23) sur* $[0, N-1]$.

- *Le système non linéaire (1.23) est dit N-localement fortement observable en* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *s'il existe un voisinage* $\mathcal{V}_{x_0}$ *de* x_0 *tel que pour tout* $\bar{x}_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$, *tout* $k = 0, \ldots, N$ *et toute séquence d'entrées admissibles* $U_{[0,k-1]}$, $h(\chi_{U_{[0,k-1]}}(k, 0, x_0)) = h(\chi_{U_{[0,k-1]}}(k, 0, \bar{x}_0))$ *implique* $x_0 = \bar{x}_0$.

- *Si ces propriétés sont vraies pour tout* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *le système (1.23) est dit (N-localement) N-fortement observable.* ▼

Une condition d'observabilité plus forte que la N-observabilité en temps fini peut être également définie.

Définition 1.28 (Observabilité uniforme) *Le système dynamique (1.23) est dit N-uniformément observable en* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *si, pour tout* $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, *tout* $k = 0, \ldots, N$ *et toute séquence d'entrée admissible* $U_{[0,k]}$, *il existe un entier* $N \in [n-1, \infty)$ *et une fonction* $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *tels que :*

$$\sum_{k=0}^{N} \left\| h(\chi_{U_{[0,k]}}(k, 0, x_0)) - h(\chi_{U_{[0,k]}}(k, 0, \bar{x}_0)) \right\| \geq \alpha(\|x_0 - \bar{x}_0\|)$$

où la fonction α *est continue, croissante avec* $\alpha(0) = 0$.

Le système (1.23) est N-uniformément observable s'il l'est pour tout $x_k \in \mathbb{R}^n$. ▼

Cette condition est une version temps-discret plus faible que celle donnée dans [MIC95] (rappelée en section 2.4.4.1).

A l'instar du cas temps-continu, l'observabilité du système (1.23) peut être vérifiée par une condition de rang très simple :

Définition 1.29 (Observabilité au sens du rang) *Le système dynamique (1.23) est dit observable au sens du rang en* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *si :*

$$\dim \mathrm{d}\mathcal{O}(h)(x_0) = n \tag{1.24}$$

où l'espace d'observation $\mathcal{O}(h)(x_k)$ *est défini par :*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(h)(x_k) = \mathrm{span}\,\{h_i(x_k), h_i \circ f_{u_{1k}}(x_k), \ldots, h_i \circ f_{u_{1k}} \circ \ldots \circ f_{u_{lk}}(x_k) \mid 1 \leq i \leq p, \\ u_{1k}, \ldots, u_{lk} \in \mathbb{R}^m,\ x_k \in \mathbb{R}^n\} \end{aligned} \tag{1.25}$$

avec

$$\mathrm{d}\mathcal{O}(h)(x_0) = \{\mathrm{d}\psi(x_0),\ \psi \in \mathcal{O}(h)\}.$$

Le système (1.23) est observable au sens du rang s'il l'est pour tout $x_k \in \mathbb{R}^n$.

Si le système (1.23) est observable au sens du rang en $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *alors il est localement fortement observable en* $\bar{x}_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$ *([SON79]).*

Si le système (1.23) est localement fortement observable, alors la condition d'observabilité au sens du rang est vérifiée sur un ouvert Ω *de* $\mathbb{R}^n$. ▼

Dans le cas des systèmes LTV et affines en l'état, l'observabilité complète uniforme et la persistance régulière des entrées sont facilement vérifiables en utilisant la notion de grammien d'observabilité.

Définition 1.30 ([MOO80]) *Le système LTV, $x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k$, $y_k = C_k x_k$ où $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$, $y_k \in \mathbb{R}^p$, est dit uniformément complètement observable s'il existe un réel $\beta > 0$ et des entiers $N, k_0 > 0$ tels que pour tout $k \geq k_0$:*

$$\mathcal{W}^o_{[k,k+N]} = \sum_{i=k}^{k+N} \phi^T_{[i,k]} C_i^T C_i \phi_{[i,k]} \geq \beta I_n \tag{1.26}$$

avec $\phi_{[i,k]} = A_{i-1} A_{i-2} \ldots A_k$ pour $i > k$, et $\phi_{[k,k]} = I_n$. ▼

Définition 1.31 *Considérons le système affine en l'état, $x_{k+1} = A(u_k)x_k + B(u_k)$, $y_k = C(u_k)x_k$. La séquence d'entrées $U_{[k,k+N]}$ est dite régulièrement persistante sur $[k, k+N]$ s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :*

$$\sigma_{\min}(\mathcal{W}^o_{U_{[k,k+N]}}) \geq \alpha \tag{1.27}$$

avec

$$\mathcal{W}^o_{U_{[k,k+N]}} = \sum_{i=k}^{k+N} \phi^T_{U_{[i,k]}} C(u_i)^T C(u_i) \phi_{U_{[i,k]}} \tag{1.28}$$

et $\phi_{U_{[i,k]}} = A(u_{i-1})A(u_{i-2}) \ldots A(u_k)$ pour $i > k$, et $\phi_{U_{[k,k]}} = I_n$. ▼

La classe des systèmes non linéaires temps-discret U-uniformément observables – introduite initialement par Gauthier et Kupka [GAU94] dans le cas temps-continu – a été caractérisée récemment par Benamor *et al.* dans [BEN97a, BEN97b].

1.3 Observateur : formulation

Un observateur $\mathcal{O}$ est par définition un système dynamique qui, à partir des informations passées et courantes sur les entrées et sorties d'un système $\mathcal{S}$, permet d'en reconstruire asymptotiquement (resp. exponentiellement) localement (resp. globalement) l'état. Le schéma de principe d'un tel système est donné par la Figure 1.1.

Puisque les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés essentiellement dans le cas temps-discret, nous donnerons la définition suivante :

Définition 1.32 (Observateur) *Considérons deux systèmes dynamiques :*

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k) \\ y_k = h(x_k, u_k) \end{cases}$$

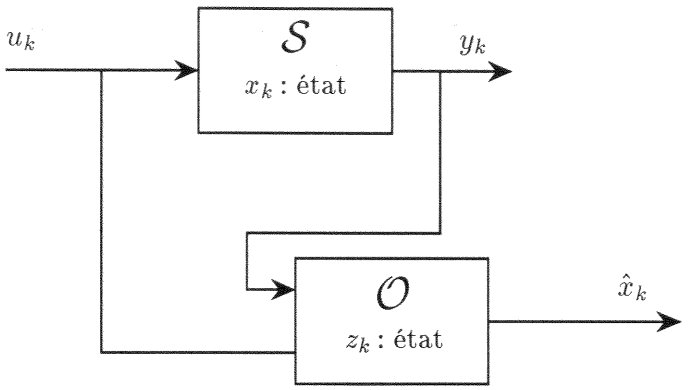


Figure 1.1: *Observateur: schéma de principe.*

où $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$, $y_k \in \mathbb{R}^p$, *et:*

$$(\mathcal{O}) \begin{cases} z_{k+1} = l(z_k, y_k, u_k) \\ \hat{x}_k = m(z_k, y_k, u_k) \end{cases}$$

où $z_k \in \mathbb{R}^s$, $l : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ *et* $m : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Soient $\chi^x_{U_{[k_0,k-1]}}(k, k_0, x_0)$ *et* $\chi^z_{U_{[k_0,k-1]},Y_{[k_0,k-1]}}(k, k_0, z_0)$ *les solutions de ces systèmes à l'instant* k *et issues des points* x_0 *et* z_0 *à l'instant initial* $k = k_0$. *Pour simplifier, on notera* $x_k = \chi^x_{U_{[k_0,k-1]}}(k, k_0, x_0)$ *et* $z_k = \chi^z_{U_{[k_0,k-1]},Y_{[k_0,k-1]}}(k, k_0, z_0)$, *on a alors* $\hat{x}_k = m(z_k, h(x_k, u_k), u_k)$.

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées:

i. $\hat{x}_0 = x_0 \quad \Rightarrow \quad \hat{x}_k = x_k$ *pour tout* $k \geq k_0$ *et toute séquence d'entrées admissibles,*

ii. Il existe un voisinage ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *de l'origine tel que:*

$$\hat{x}_0 - x_0 \in \Omega \quad \Rightarrow \quad \|\tilde{x}_k\| = \|x_k - \hat{x}_k\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

alors le système $\mathcal{O}$ *est un observateur asymptotique (local) pour le système* $\mathcal{S}$.

Si $\|x_k - \hat{x}_k\|$ *tend exponentiellement vers zéro lorsque* $k \to \infty$, *le système* $\mathcal{O}$ *est dit observateur exponentiel de* $\mathcal{S}$.

Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^n$, *le système* $\mathcal{O}$ *est dit observateur global de* $\mathcal{S}$.

Selon que la dimension s *de* $\mathcal{O}$ *est égale ou inférieure à la dimension* n *de* $\mathcal{S}$, *le système* $\mathcal{O}$ *est dit observateur d'ordre plein ou observateur d'ordre réduit de* $\mathcal{S}$. ▼

Afin de satisfaire la condition *i.*, il est courant de choisir, d'une part pour fonction de sortie $m(.,.,.)$ la fonction identité de sorte que $\hat{x}_k = z_k$, $\forall\, k \geq k_0$, d'autre part d'adopter le choix suivant pour $l(.,.,.)$ (structure de type Luenberger-Kalman):

$$l(\hat{x}_k, y_k, u_k) = f(\hat{x}_k, u_k) + K(\hat{x}_k, y_k, u_k)(y_k - h(\hat{x}_k, u_k))$$

Lorsque $\hat{x}_0 = x_0$, on a $y_0 = h(\hat{x}_0, u_0)$ et l'on démontre par récurrence que $\hat{x}_k = x_k$, $\forall\, k \geq k_0$.

La quasi totalité des algorithmes d'estimation fait ensuite face au même problème, à savoir déterminer un gain $K(\hat{x}_k, y_k, u_k)$ garantissant la convergence de l'observateur, c'est à dire satisfaisant la condition *ii.* de la définition précédente. Ce problème sera le thème du chapitre suivant.

1.4 Conclusion

Ce premier chapitre a été consacré essentiellement à quelques rappels sur des concepts fondamentaux relatifs à la stabilité et à l'observabilité des systèmes dynamiques non linéaires temps-continu et temps-discret.

Pour cette classe générale de systèmes, nous avons vu que la notion d'observabilité dépend fortement du type d'entrées appliquées, de "mauvaises" entrées ou entrées singulières pouvant rendre le système inobservable. L'existence de "bonnes" entrées ou entrées universelles nous a permis de définir une classe intéressante de systèmes "observables pour toute entrée". La définition d'un observateur est venue clore ce chapitre.

Chapitre 2

Observation des systèmes non linéaires : un état de l'art

2.1 Introduction

Si, pour les systèmes linéaires, une solution au problème de la synthèse d'observateurs a été apportée dans les années 1960-70 par Luenberger dans un environnement déterministe, et Kalman dans un environnement stochastique, il n'existe pas, à ce jour, d'approche universelle pour la construction d'observateurs des systèmes non linéaires. Ce problème reste ouvert et de nombreux travaux y sont régulièrement consacrés, donnant naissance à un large éventail d'algorithmes d'estimation.

Chronologiquement, il convient de différencier plusieurs approches. La première solution envisagée a été d'adapter les techniques linéaires au cas non linéaire en linéarisant l'erreur d'observation selon deux stratégies : de façon exacte par changement de base ou de façon approchée par linéarisation au premier ordre autour d'un point de fonctionnement ou d'une trajectoire. Toutefois, plusieurs doutes ont été émis, d'une part sur l'applicabilité de la première stratégie, d'autre part et ce malgré une très large utilisation en pratique, sur les garanties de convergence de la seconde. La recherche s'est ensuite orientée vers des solutions spécifiquement non linéaires en considérant le système sur toute sa gamme de fonctionnement. Cette approche englobe notamment les classes des observateurs à grand gain et des observateurs à structure variable. Toutefois, en dépit d'un intérêt certain, nous remarquons que ces techniques ne s'adressent qu'à des classes particulières de systèmes qui ne rendent pas systématique la synthèse de l'observateur. Dernièrement, les solutions analytiques ont été quelque peu délaissées au profit de solutions numériques matérialisées par la classe des estimateurs sur horizon glissant, cette approche ouvrant, semble-t-il, des perspectives de recherches intéressantes.

L'objectif de ce chapitre est, après un rappel succinct sur l'observation des systèmes linéaires LTI, LTV et affines en l'état, de passer en revue les différentes techniques d'observation des systèmes non linéaires en exposant, d'une part le principe de base de ces algorithmes et en s'efforçant, d'autre part de dégager leurs principaux avantages et inconvénients, aussi bien au niveau performances que simplicité de mise en œuvre.

2.2 Observateurs des systèmes LTI

Comme nous l'avons mentionné précédemment, il existe une solution simple et optimale au problème de l'observation des systèmes linéaires donnée par les estimateurs de type Luenberger-Kalman. Le principe de l'estimateur de Luenberger est fondé sur les techniques linéaires de placement de pôles [LUE66, LUE71], alors que l'estimateur de Kalman, dualisant les résultats de commande optimale, s'appuie sur la résolution d'une équation de Riccati [KAL60, KAL61, JAZ70].

Considérons un système LTI :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Lw(t) \qquad x(t_0) = x_0 \tag{2.1a}$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t) \tag{2.1b}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$. $w(t) \in \mathbb{R}^r$ et $v(t) \in \mathbb{R}^p$ sont des bruits blancs gaussiens, de moyennes nulles et de covariances respectives Q et R. Les matrices A, B, C et L ont des dimensions appropriées.

Un estimateur de type Luenberger-Kalman pour (2.1) est de la forme :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(t)(y(t) - C\hat{x}(t)) \qquad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0 \tag{2.2}$$

La dynamique de l'erreur d'observation $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ s'écrit :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - K(t)C)\tilde{x}(t) - K(t)v(t) + Lw(t) \tag{2.3}$$

Dans un environnement déterministe (i.e. $w(t) = v(t) = 0$), l'approche de Luenberger utilise les techniques linéaires de placement de pôles et consiste, de ce fait, à choisir le gain d'observateur K constant de façon à placer les valeurs propres de la matrice $A - KC$ dans un secteur du demi-plan complexe gauche.

L'approche optimale de Kalman se place, quant à elle, dans un environnement stochastique et fait appel aux propriétés statistiques des bruits, le gain de l'estimateur (2.2) s'écrivant :

$$K(t) = P(t)C^T R^{-1} \tag{2.4}$$

où $P(t)$ est la solution symétrique définie positive de l'équation de Riccati :

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T - P(t)C^T R^{-1} CP(t) + LQL^T \tag{2.5}$$

Cette équation résulte de la minimisation par rapport à $K(t)$ de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation $P(t) = \mathscr{E}\left(\tilde{x}(t)\tilde{x}(t)^T\right)$. La stabilité du filtre est liée à l'existence d'une solution stationnaire $P(\infty) = \lim_{t\to\infty} P(t)$ de l'équation (2.5) qui est assurée sous les conditions de détectabilité de la paire (A, C) et de stabilisabilité de la paire (A, Γ) avec $\Gamma\Gamma^T = LQL^T$.

2.3 Observateurs des systèmes LTV et affines en l'état

La construction d'observateurs pour ces classes particulières de systèmes a fait l'objet de multiples travaux tels [YüK71, IKE75] dans le cas LTV, ou [WIL77, FUN79] et [JAN93] dans le cas de systèmes affines en l'état (incluant notamment la classe intéressante des systèmes bilinéaires). Parmi toutes les approches proposées, une des plus simples à mettre en œuvre consiste à utiliser une version déterministe et temps-variant du filtre de Kalman (2.4)-(2.5). Nous nous limiterons à cette classe d'observateurs dans ce paragraphe.

2.3.1 Cas des systèmes LTV

Dans un premier temps, intéressons nous à la synthèse d'observateurs de type Kalman pour les systèmes LTV de la forme :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{2.6a}$$
$$y(t) = C(t)x(t) \tag{2.6b}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ et les matrices $A(t)$, $B(t)$ et $C(t)$ ont des dimensions appropriées.

D'après [BOR89, BOR93, JAN93], il est connu que la stabilité d'un observateur de type Kalman pour (2.6) est garantie sous la condition d'observabilité complète uniforme (cf. définition 1.18), et nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Théorème 2.1 ([BOR89]) *Si le système (2.6) est complètement uniformément observable et si les matrices $A(t)$ et $C(t)$ sont bornées, alors le système :*

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + P(t)C^T(t)R^{-1}(t)(y(t) - C(t)\hat{x}(t)) \tag{2.7}$$
$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t) + Q(t) \tag{2.8}$$

est un observateur exponentiel global pour (2.6) avec $P(t_0) = P_0 \geq 0$. $R(t)$ et $Q(t)$ sont des matrices bornées, respectivement définies et semi-définies positives dont les choix sont libres. ■

En général, les matrices de pondération $R(t)$ et $Q(t)$ sont choisies constantes parmi l'ensemble des matrices (semi-) définies positives : $R(t) = R > 0$ et $Q(t) = Q \geq 0$.

La démonstration de ce théorème s'appuie sur la fonction de Lyapunov candidate $V(\tilde{x}(t), t) = \tilde{x}^T(t)P^{-1}(t)\tilde{x}(t)$ ($\tilde{x}(t)$ est l'erreur d'observation) et utilise la propriété de bornitude de $P(t)$ sous la condition d'observabilité complète uniforme de (2.6).

Remarque 2.1 *En posant $S(t) = P^{-1}(t)$ et en remarquant que $\dot{S}(t) = -S(t)\dot{P}(t)S(t)$, une représentation équivalente de l'observateur (2.7)-(2.8) est donnée par :*

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\hat{x}(t) + B(t)u(t) + S^{-1}(t)C^T(t)R^{-1}(y(t) - C(t)\hat{x}(t)) \tag{2.9}$$
$$\dot{S}(t) = -S(t)A(t) - A^T(t)S(t) + C^T(t)R^{-1}C(t) - S(t)QS(t) \tag{2.10}$$

▼

2.3.2 Cas des systèmes affines en l'état

Dans [BOR89]-[BOR93], il est montré que les résultats précédents peuvent être étendus facilement à la classe des systèmes affines en l'état :

$$\dot{x}(t) = A(u(t))x(t) + B(u(t)) \tag{2.11a}$$
$$y(t) = C(u(t))x(t) \tag{2.11b}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$. Nous supposerons les applications $A(.)$, $B(.)$ et $C(.)$ continues par rapport à u.

Pour toute entrée u fixée et appartenant à l'ensemble des entrées admissibles, le système (2.11) devient un système LTV de la forme (2.6) indexé par l'espace des commandes :

$$\dot{x}(t) = A_u(t)x(t) + B_u(t) \tag{2.12a}$$
$$y(t) = C_u(t)x(t) \tag{2.12b}$$

Par analogie entre les définitions 1.18 et 1.22, il apparaît une propriété intéressante permettant d'étendre aux systèmes affines en l'état la synthèse d'observateurs de type Kalman :

Théorème 2.2 ([BOR89]) *Toute entrée régulièrement persistante appliquée au système (2.12) engendre un système LTV (2.6) complètement uniformément observable.* ■

Le résultat suivant est alors immédiat :

Théorème 2.3 *Soit le système (2.12) pour lequel les matrices $A_u(t)$, $B_u(t)$ et $C_u(t)$ sont uniformément bornées sur le domaine des entrées admissibles. Alors, pour toute entrée régulièrement persistante pour (2.12), le système :*

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_u(t)\hat{x}(t) + B_u(t) + S^{-1}(t)C_u^T(t)R^{-1}(y(t) - C_u(t)\hat{x}(t)) \tag{2.13}$$
$$\dot{S}(t) = -S(t)A_u(t) - A_u^T(t)S(t) + C_u^T(t)R^{-1}C_u(t) - S(t)QS(t) \tag{2.14}$$

est un observateur exponentiel global pour (2.12) avec $S(t_0) = S_0 \geq 0$. $R > 0$ et $Q \geq 0$ sont des matrices de pondération. ■

Dans [COU88, BOR89, BOR93], il est montré que l'observateur de Kalman (2.13)-(2.14) peut être vu comme un problème de minimisation d'un critère quadratique sur l'erreur de sortie. Sur la base de cette remarque, une modification intéressante de (2.13)-(2.14) (et donc du critère à minimiser) incluant un facteur d'oubli exponentiel a été développée. L'idée est d'estimer l'état initial x_0 en résolvant le problème de minimisation suivant :

$$\min_{\xi_0} e^{-\theta t}\left(e^{\theta t_0}\|\xi_0 - \hat{x}_0\|^2_{S_0} + \int_{t_0}^{t} e^{\theta\tau}\|y(\tau) - C_u(\tau)\phi_u(\tau, t_0)\xi_0\|^2_R \,\mathrm{d}\tau\right) \tag{2.15}$$

où S_0 et R sont des matrices strictement définies positives, $\theta > 0$, $\|x\|^2_{S_0} = x^T S_0 x$, $\|x\|^2_R = x^T Rx$ et $\phi_u(.,.)$ est la matrice de transition associée à la partie autonome de (2.11).

Si $\xi_0^\star$ désigne la solution unique du problème de minimisation (2.15), une estimation de l'état courant de (2.11) est donnée par :

$$\hat{x}(t) = \phi_u(t, t_0)\hat{x}_0 \qquad \forall\, t \geq t_0 \tag{2.16}$$
$$\hat{x}_0 = \xi_0^\star$$

En dérivant (2.16) par rapport au temps et après quelques simplifications, on obtient l'observateur de Kalman avec facteur d'oubli exponentiel suivant :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A_u(t)\hat{x}(t) + B_u(t) + S^{-1}(t)C_u^T(t)R^{-1}(y(t) - C_u(t)\hat{x}(t)) \tag{2.17}$$
$$\dot{S}(t) = -\theta S(t) - S(t)A_u(t) - A_u^T(t)S(t) + C_u^T(t)R^{-1}C_u(t) \tag{2.18}$$

Remarque 2.2 *L'introduction du facteur d'oubli exponentiel θ (initialement dû à Anderson et Moore [AND71]) nous permet de choisir, sans perte de généralité, $Q = 0$ dans la dynamique de l'équation de Riccati (2.14). C'est l'utilisation de ce facteur d'oubli qui nous permettra de démontrer la convergence exponentielle de l'observateur (2.17)-(2.18).* ▼

La convergence de cet observateur est assurée sous une condition de θ-stricte persistance des entrées de (2.12), rappelée dans la définition suivante [MOR92a] :

Définition 2.1 *Une entrée est θ-strictement persistante s'il existe $t_0 > 0$, $\underline{s} > 0$ tels que pour $\theta > 0$, $t \geq t_0$:*

$$S(t) \geq \underline{s} I_n$$

▼

On remarque que cette condition est moins restrictive que la régulière persistance des entrées, aussi toute entrée régulièrement persistante sera-t-elle θ-strictement persistante.

Le résultat suivant donne les conditions de stabilité de (2.17)-(2.18) :

Théorème 2.4 *Pour toute entrée θ-strictement persistante, le système (2.17)-(2.18) est un observateur exponentiel global pour (2.12) i.e. il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout $t \geq t_0$:*

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \kappa \exp(-\theta(t - t_0))$$

La valeur de la constante κ dépend de l'erreur d'estimation initial $x(t_0) - \hat{x}(t_0)$ ainsi que du minorant $\underline{s}$. ■

Des résultats similaires peuvent être établis dans le cas temps-discret, nous y reviendrons dans le chapitre suivant.

2.4 Observateurs des systèmes non linéaires

Les différences structurelles entre systèmes linéaires et non linéaires (sensibilité par rapport aux conditions initiales, aux entrées, ...) font qu'il n'existe pas, à l'heure actuelle, de méthode universelle pour la synthèse d'observateurs des systèmes non linéaires. Les nombreuses recherches menées sur ce sujet (voir [WAL87a, MIS89] pour des études de synthèse) ont cependant donné naissance à un large éventail d'algorithmes d'observation, que nous allons essayer de classer de façon non exhaustive dans la suite de ce chapitre. La différence sera faite entre les techniques de linéarisation (exactes ou approchées) de l'erreur d'observation, les observateurs à grand gain (dans la base initiale ou dans une base canonique observable), les observateurs à structure variable et enfin les estimateurs sur horizon glissant.

2.4.1 Observateurs à dynamique de l'erreur linéaire

2.4.1.1 Linéarisation exacte de l'erreur d'observation

Les techniques de linéarisation exacte (ou globale) de l'erreur d'observation utilisent les principes de base des méthodes de commande linéarisante des systèmes non linéaires et cherchent de ce fait *si il existe et comment définir un changement de coordonnées* transformant un système non linéaire en un système linéaire modulo une injection de sortie. Si un "bon" changement de coordonnées existe, l'utilisation d'un observateur de type Luenberger – corrigé par l'injection de sortie – suffira à estimer l'état du système dans la nouvelle

base et conduira à une dynamique linéaire de l'erreur d'observation. Les conditions sous lesquelles un tel changement de coordonnées existe ont été établies initialement par Krener et Isidori [KRE83] et étendues par la suite au cas multi-variables par Krener et Respondek [KRE85, RUD94]. Une version adaptative de ces résultats est donnée dans [MAR90] sous couvert que le vecteur des paramètres inconnus intervient linéairement dans la dynamique de l'équation d'état. Cette approche, dite géométrique, requiert l'intégration d'équations aux dérivées partielles, qui rendent les conditions d'existence de ces formes canoniques et leurs calculs souvent très difficiles à vérifier.

Parallèlement et indépendamment à ces travaux, Bestle et Zeitz [BES83] ont proposé, pour la classe des systèmes non linéaires non commandés mono-sortie, une solution constructive basée essentiellement sur des méthodes de synthèse linéaires alliant calculs algébriques et opérateurs différentiels. Les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de cette forme canonique ont été énoncées dans [LI87]. Plusieurs extensions de cette approche au cas des systèmes non linéaires commandés et multi-sorties sont données dans [ZEI87b, ZEI87a, BIR88], [KEL87, PHE91, PRO93] ou [XIA88a, XIA89]. Cette approche a été reprise par Ding *et al.* dans [DIN90] pour construire un observateur non linéaire robuste utilisant le principe des observateurs à entrées inconnues.

Considérons l'ensemble des systèmes non linéaires MIMO décrits par le couple d'équations :

$$\dot{x} = f(x,u) \qquad x(t_0) = x_0 \tag{2.19a}$$

$$y = h(x) \tag{2.19b}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ et, pour toute entrée u fixée, les applications $f(.,u)$ et $h(.)$ sont $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à leurs arguments. Nous supposons que le système (2.19) est localement observable au sens du rang avec les indices d'observabilité $\rho_i > 0$, $i = 1, \ldots, p$, $\sum_{i=1}^{p} \rho_i = n$.

Soit un état initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème de la linéarisation exacte de l'erreur d'observation consiste à rechercher (si ils existent) un voisinage $\mathcal{V}_{x_0}$ de x_0 et un difféomorphisme local :

$$z = \mathcal{F}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathcal{F}^{-1}(z) = \mathcal{W}(z) \tag{2.20}$$

tels que, dans les nouvelles coordonnées, le système (2.19) se réécrive sous la forme canonique observable :

$$\dot{z} = Az + a(y,u) = g(z,y,u) \tag{2.21a}$$

$$y = Cz \tag{2.21b}$$

avec

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix} \text{ avec } z_i = \begin{pmatrix} z_{i1} \\ \vdots \\ z_{i\rho_i} \end{pmatrix},$$

$$A = \underset{i=1,\ldots,p}{\text{bloc-diag}}\,(A_{\rho_i}) \quad \text{avec} \quad A_{\rho_i} = A_{\rho_i \times \rho_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \underset{i=1,\dots,p}{\text{bloc-diag}}\,(C_{\rho_i}) \quad \text{avec} \quad C_{\rho_i} = C_{1\times\rho_i} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans cette base, comme le terme non linéaire $a : h(\mathcal{V}_{x_0}) \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ ne dépend que des vecteurs connus des mesures y et des entrées u, il suffit d'injecter ce dernier dans la dynamique de l'observateur de façon à linéariser l'erreur d'observation. Un observateur pour (2.21) s'écrit alors :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + a(y,u) + K(y - C\hat{z}) \tag{2.22}$$

La dynamique de l'erreur d'observation $\tilde{z} = z - \hat{z}$ devient :

$$\dot{\tilde{z}} = (A - KC)\tilde{z}$$

et il suffit de choisir le gain K de façon à placer les valeurs propres de $A - KC$ dans un secteur du demi-plan complexe gauche pour garantir la stabilité du point d'équilibre $\tilde{x} = 0$.

On notera que l'estimation de l'état dans les coordonnées initiales s'obtient via la relation :

$$\hat{x} = \mathcal{W}(\hat{z})$$

Lorsqu'on utilise cette approche, le challenge consiste donc à déterminer les fonctions non linéaires $a(.,.)$ et $\mathcal{W}(.)$ permettant de se ramener à la forme canonique (2.21).
Pour des raisons de simplicité, nous analysons ce problème dans le cas sans entrée et démontrons la proposition suivante :

Proposition 2.1 ([BIR88, XIA89]) *Le système (2.19) peut être transformé en la forme canonique observable (2.21) si est seulement si $\mathcal{W}$ et a vérifient les relations suivantes :*

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{ij+1}} = \mathrm{ad}_f^j \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{i1}} \qquad i = 1,\dots,p;\ j = 1,\dots,\rho_i - 1 \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z}\frac{\partial a}{\partial z_{i\rho_i}} = \mathrm{ad}_f^{\rho_i}\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{i1}} \qquad i = 1,\dots,p \tag{2.24}$$

$$\mathscr{L}_f^{j-1}\frac{\partial h_k}{\partial x}\cdot\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{i1}} = \delta_{i,k}\delta_{j,\rho_i} \qquad i,k = 1,\dots,p;\ j = 1,\dots,\rho_i \tag{2.25}$$

où $\delta_{i,j}$ dénote le symbole de Kronecker, $\mathrm{ad}_f g$ représente le crochet de Lie de deux champs de vecteur f et g, et $\mathrm{ad}_f^k g$ la $k^{\text{ième}}$ itération de ce crochet (cf. Annexe A.2). ■

Démonstration.
Si la transformation (2.20) existe, les relations suivantes doivent être vérifiées :

$$f(x) = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} g(z,y) \tag{2.26}$$

$$h_i(\mathcal{W}(z)) = C_i z \qquad i = 1,\dots,p \tag{2.27}$$

où $C_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ est la $i^{\text{ième}}$ ligne de C, l'unité se situant en $(\sum_{i=1}^{p}\rho_i)^{\text{ième}}$ position.

En dérivant partiellement chacun des termes de (2.26) par rapport à z_{ij}, nous obtenons :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial z_{ij}} = \frac{\partial}{\partial z_{ij}}\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z}\right) g(z,y) + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z}\frac{\partial g(z,y)}{\partial z_{ij}}$$

En remarquant par la suite que :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial z_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{ij}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_{ij}}\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z}\right) g(z,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{ij}}\right)\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} g(z,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{ij}}\right) f(x)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z}\frac{\partial g(z,y)}{\partial z_{ij}} = \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{ij+1}} & i = 1,\dots,p;\ j = 1,\dots,\rho_i - 1 \\ \dfrac{\partial \mathcal{W}}{\partial z}\dfrac{\partial a}{\partial z_{i\rho_i}} & i = 1,\dots,p;\ j = \rho_i \end{cases}$$

nous démontrons que, déterminer une solution pour (2.26), revient à résoudre le système d'équations différentielles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{ij+1}} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{ij}} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{ij}}\right) f(x) \\ &= \mathrm{ad}_f \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{ij}} \qquad i = 1,\dots,p;\ j = 1,\dots,\rho_i - 1 \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z}\frac{\partial a}{\partial z_{i\rho_i}} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{i\rho_i}} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{i\rho_i}}\right) f(x) \\ &= \mathrm{ad}_f \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{i\rho_i}} \qquad i = 1,\dots,p \end{aligned} \tag{2.29}$$

Soit :

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{ij+1}} = \mathrm{ad}_f^j \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{i1}} \qquad i = 1,\dots,p;\ j = 1,\dots,\rho_i - 1$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z}\frac{\partial a}{\partial z_{i\rho_i}} = \mathrm{ad}_f^{\rho_i} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{i1}} \qquad i = 1,\dots,p$$

Il est alors possible d'exprimer la matrice jacobienne $\partial \mathcal{W}/\partial z$ en fonction des vecteurs de "départ" $\partial \mathcal{W}/\partial z_{11},\dots,\partial \mathcal{W}/\partial z_{p1}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} = \Bigg(&\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{11}} \ \mathrm{ad}_f \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{11}} \ \dots \ \mathrm{ad}_f^{\rho_1 - 1}\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{11}} \ \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{21}} \ \dots \ \mathrm{ad}_f^{\rho_2 - 1}\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{21}} \ \dots \\ &\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{p1}} \ \dots \ \mathrm{ad}_f^{\rho_p - 1}\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{p1}}\Bigg) \end{aligned} \tag{2.30}$$

Nous cherchons désormais à déterminer les vecteurs de "départ" $\partial \mathcal{W}/\partial z_{i1}$ $(i = 1,\dots,p)$. Pour ce faire, nous utilisons la relation d'équivalence (2.27). En dérivant partiellement chacun des termes de cette équation par rapport à z_{ij}, nous obtenons :

$$\frac{\partial h_k}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{ij}} = \delta_{i,k}\delta_{j,\rho_i} \qquad i,k = 1,\dots,p;\ j = 1,\dots,\rho_i$$

soit, en utilisant (2.28) et la formule de Leibniz (cf. annexe A.2) :

$$\mathscr{L}_f^{j-1}\frac{\partial h_k}{\partial x}.\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{i1}} = \delta_{i,k}\delta_{j,\rho_i} \qquad i,k = 1,\ldots,p;\ j = 1,\ldots,\rho_i$$

❑

Le système (2.19) étant observable au sens du rang, on démontre, à partir de (2.25), que les vecteurs de "départ" $\partial\mathcal{W}/\partial z_{i1}$ $(i = 1,\ldots,p)$ sont fonction de l'inverse de la matrice d'observabilité $\mathcal{O}(x)$ (cf. définition 1.16) :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{11}} \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{21}} \quad \ldots \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z_{p1}}\right) = \mathcal{O}^{-1}(x)C \tag{2.31}$$

Les vecteurs de "départ" $\partial\mathcal{W}/\partial z_{i1}$ connus, les expressions des applications a et $\mathcal{W}$ seront obtenues par intégration des équations aux dérivées partielles (2.24) et (2.30).

Les conditions nécessaires et suffisantes d'existence d'un difféomorphisme local $\mathcal{W}$ transformant (2.19) en la forme canonique observable (2.21) sont données dans [XIA89]. Dans le cas mono-sortie, des conditions analogues ont été établies récemment dans [KAZ95, KAZ98] en utilisant le théorème de Lyapunov auxiliaire, qui garantit l'existence et l'unicité de solutions analytiques pour une classe d'EDP. Un observateur de type Luenberger est construit dans les coordonnées d'origine sous la condition d'observabilité locale en $x = 0$.

Des résultats analogues à ceux de Bestle et Zeitz, ont été développés pour les systèmes commandés, en modifiant les différents opérateurs différentiels afin de tenir compte de la dépendance des champs de vecteurs f et g par rapport à u [ZEI87b, BIR88, XIA89]. Dans [LEE90, CHU90, LEE91], ou plus récemment dans [LIN95, LIL98], cette approche a été étendue au cas des systèmes non linéaires temps-discret. Toutefois, il est montré dans [CHU90] que l'existence d'une transformation d'état temps-continu linéarisant l'erreur d'observation d'un système, n'implique pas l'existence d'une telle transformation en temps-discret pour le même système.

Plusieurs extensions des techniques de linéarisation à une injection de sortie près des systèmes non linéaires ont été proposées dans la littérature. A ce titre, nous citerons les travaux de Hammouri *et al.* sur la "bilinéarisation" [HAM88, HAM92, HAM96] (voir également [BES96a]) à une injection de sortie près des systèmes non linéaires. L'introduction d'une forme canonique bilinéaire modulo une injection de sortie présente l'avantage de faire apparaître les problèmes d'inobservabilité liés aux entrées. Une transposition de ces techniques au cas des systèmes temps-discret est proposée dans [BES95, BES98].

Notons enfin que les techniques d'immersion d'un système non linéaire dans un système linéaire [LEV86], ou dans un système bilinéaire [CEL89] s'inscrivent parmi les méthodes de linéarisation exacte de l'erreur d'observation. On remarque cependant que cette approche, qui consiste, en fait, à rechercher une transformation non linéaire conservant l'application entrée/sortie et envoyant un système dynamique dans un autre, ne s'applique qu'à une classe limitée de systèmes.

2.4.1.2 Linéarisation au premier ordre de l'erreur d'observation

2.4.1.2.1 Observateur de Luenberger étendu

Comme nous l'avons démontré précédemment, les techniques de linéarisation exacte de l'erreur d'observation nécessitent l'intégration d'équations non linéaires aux dérivées partielles. Ce calcul est souvent délicat et n'est réalisable – analytiquement ou numériquement – que pour une classe restreinte de systèmes. Lorsque se posent de tels problèmes, l'utilisation de solutions approchées semble indispensable. Il a été montré récemment dans [BOR95, LYN97] que l'introduction de fonctions d'approximation B-splines permettait de s'acquitter de cette tâche. Une autre approche, développée antérieurement par Bestle et Zeitz [BES83] et généralisée dans [ZEI87b, BIR88], propose de calculer le gain de l'observateur, appelé *observateur de Luenberger étendu*, en linéarisant les différentes équations aux dérivées partielles le long des trajectoires estimées. Dans ce qui suit, nous présenterons succinctement cette méthode.

La structure de l'observateur de Bestle et Zeitz a d'abord été adoptée par Thau [THA73] puis reprise par Kou *et al.* [KOU75] pour l'appliquer à une classe de systèmes écrits sous forme canonique. Lorsque le système (2.19) (non commandé) est observable, un observateur de Luenberger s'écrit :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) + K(\hat{x})(y - h(\hat{x})) \tag{2.32}$$

où le gain $K(\hat{x})$ doit assurer la convergence asymptotique de l'erreur d'observation. Afin de déterminer $K(\hat{x})$, réécrivons (2.32) dans la base canonique observable :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + a(\hat{y}) + \left(\frac{\partial \mathcal{W}(\hat{z})}{\partial \hat{z}}\right)^{-1} K(\hat{x})C(z - \hat{z}) \tag{2.33}$$

Posons :

$$\overline{K}(\hat{z}) = \left(\frac{\partial \mathcal{W}(\hat{z})}{\partial \hat{z}}\right)^{-1} K(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \overline{K}_1(\hat{z}) \\ \vdots \\ \overline{K}_p(\hat{z}) \end{pmatrix}$$

et utilisons la structure bloc-diagonale de (2.21) pour sub-diviser le système (2.33) en i blocs de dimension ρ_i :

$$\dot{\hat{z}}_i = A_{\rho_i}\hat{z}_i + a_i(\hat{y}) + \overline{K}_i(\hat{z})C_{\rho_i}(z_i - \hat{z}_i) \qquad i = 1, \ldots, p \tag{2.34}$$

L'erreur d'observation correspondant au $i^{\text{ième}}$ sous-système s'écrit :

$$\dot{\tilde{z}}_i = A_{\rho_i}\tilde{z}_i + a_i(y) - a_i(\hat{y}) - \overline{K}_i(\hat{z})C_{\rho_i}(z_i - \hat{z}_i) \tag{2.35}$$

Le développement en séries de Taylor de a_i $(i = 1, \ldots, p)$ le long des trajectoires estimées $\hat{y}_i = \hat{z}_{i\rho_i}$ donne ensuite :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}}_i &= A_{\rho_i}\tilde{z}_i + \left(\frac{\partial a_i}{\partial \hat{z}_{i\rho_i}}\right)\tilde{z}_{i\rho_i} - \overline{K}_i(\hat{z})C_{\rho_i}\tilde{z}_i + O(\tilde{z}_{i\rho_i}^2) \\ &= \left(A_{\rho_i} - \left(\overline{K}_i(\hat{z}) - \frac{\partial a_i}{\partial \hat{z}_{i\rho_i}}\right)C_{\rho_i}\right)\tilde{z}_i + O\left((C_{\rho_i}\tilde{z}_i)^2\right) \end{aligned} \tag{2.36}$$

En omettant le terme résiduel $O\left((C_{\rho_i}\tilde{z}_i)^2\right)$ et en choisissant :

$$\overline{K}_i(\hat{z}) = L_i + \frac{\partial a_i}{\partial \hat{z}_{i\rho_i}} \tag{2.37}$$

la dynamique de l'erreur d'observation du $i^{\text{ième}}$ sous-système est linéaire :

$$\dot{\tilde{z}}_i = (A_{\rho_i} - L_i C_{\rho_i})\tilde{z}_i \tag{2.38}$$

et il suffit de choisir le gain $L_i = \begin{pmatrix} l_{i1} & l_{i2} & \dots & l_{i\rho_i} \end{pmatrix}^T$ de façon à placer les valeurs propres de la matrice $(A_{\rho_i} - L_i C_{\rho_i})$ dans un secteur du demi-plan complexe gauche.

D'une manière globale, l'observateur (2.33) sera localement convergent s'il existe i vecteurs L_i tels que :

$$\bigcup_i \text{spec}(A_{\rho_i} - L_i C_{\rho_i}) \in \mathbb{C}^{*-} \qquad i = 1, \dots, p$$

Dans les coordonnées initiales, notons enfin que les vecteurs $K_i(\hat{x})$ s'écrivent :

$$K_i(\hat{x}) = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \hat{z}} \left(L_i + \frac{\partial a_i}{\partial \hat{z}_{i\rho_i}} \right)$$

En utilisant les relations (2.28) et (2.30), le gain $K(\hat{x})$ de l'observateur (2.32) est donné par la relation :

$$\begin{aligned} K(\hat{x}) = \{ & [l_{11} + l_{12}\text{ad}_f + \dots + l_{1\rho_1}\text{ad}_f^{\rho_1 - 1} + \text{ad}_f^{\rho_1}] \left(\mathcal{O}^{-1}(\hat{x}) e_1 \right), \dots, \\ & [l_{p1} + l_{p2}\text{ad}_f + \dots + l_{p\rho_p}\text{ad}_f^{\rho_p - 1} + \text{ad}_f^{\rho_p}] \left(\mathcal{O}^{-1}(\hat{x}) e_p \right) \} \end{aligned} \tag{2.39}$$

où $e_j \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur unitaire.

Remarque 2.3 *La construction de l'observateur (2.32) ne nécessite pas le calcul formel de la fonction non linéaire $a(y)$ dans le base canonique. Cette approche permet donc de s'affranchir du calcul explicite de la forme canonique (2.21).* ▼

Remarque 2.4 *En généralisant l'équation de sortie (2.21b) sous la forme non linéaire :*

$$y = \begin{pmatrix} b_1(z_{1\rho_1}) \\ b_2(z_{1\rho_1}, z_{2\rho_2}) \\ \vdots \\ b_p(z_{1\rho_1}, \dots, z_{p\rho_p}) \end{pmatrix} = b(\bar{z}) \qquad \textit{avec} \quad \bar{z} = \begin{pmatrix} z_{1\rho_1} \\ z_{2\rho_2} \\ \vdots \\ z_{p\rho_p} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial b}{\partial \bar{z}} \neq 0$$

il est montré dans [ZEI87b, BIR88] que l'expression du gain d'observateur (2.39) peut être simplifiée analytiquement en prenant :

$$\begin{aligned} K(\hat{x}) = \Bigg\{ & [l_{11} + l_{12}\text{ad}_f + \dots + l_{1\rho_1}\text{ad}_f^{\rho_1 - 1} + \text{ad}_f^{\rho_1}] \left(\frac{\partial b_1}{\partial \hat{z}_{1\rho_1}} \mathcal{O}^{-1}(\hat{x}) e_1 \right), \dots, \\ & [l_{p1} + l_{p2}\text{ad}_f + \dots + l_{p\rho_p}\text{ad}_f^{\rho_p - 1} + \text{ad}_f^{\rho_p}] \left(\frac{\partial b_p}{\partial \hat{z}_{p\rho_p}} \mathcal{O}^{-1}(\hat{x}) e_p \right) \Bigg\} \left(\frac{\partial b}{\partial \hat{\bar{z}}} \right)^{-1} \end{aligned} \tag{2.40}$$

où les fonctions $\dfrac{\partial b_i}{\partial \hat{z}_{i\rho_i}} \neq 0$ $i = 1, \dots, p$ sont arbitrairement choisies de façon à simplifier le calcul des crochets de Lie $\text{ad}_f^i(.)$. ▼

2.4.1.2.2 Linéarisation étendue et pseudo-linéarisation

Lorsqu'il s'agit d'estimer l'état d'un système non linéaire, il s'avère souvent intéressant de linéariser au premier ordre le système directement dans la base d'origine.

A ce titre, considérons le système non linéaire MIMO :

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{2.41a}$$
$$y = h(x) \tag{2.41b}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, $f(.,.)$ et $g(.)$ sont des fonctions suffisamment différentiables par rapport à leurs arguments.

Définissons par $\mathcal{E}_{x,u}$ l'ensemble des points d'équilibre de (2.41) :

$$\mathcal{E}_{x,u} = \{(x,u) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \mid f(x,u) = 0\} \tag{2.42}$$

Soit (x_0, u_0) un élément de $\mathcal{E}_{x,u}$. Autour de ce point, le modèle linéarisé tangent de (2.41) s'écrit sous la forme :

$$\delta\dot{x} = F_0\delta x + G_0\delta u \tag{2.43a}$$
$$\delta y = H_0\delta x \tag{2.43b}$$

où $F_0 = \left.\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{x_0,u_0}$, $G_0 = \left.\dfrac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{x_0,u_0}$ et $H_0 = \left.\dfrac{\partial h(x)}{\partial x}\right|_{x_0}$.

En s'inspirant des techniques d'observation linéaires, il est aisé de construire un observateur de type Luenberger pour (2.43) :

$$\delta\dot{\hat{x}} = F_0\delta\hat{x} + G_0\delta u + K(\delta y - H_0\delta\hat{x}) \tag{2.44}$$

où le gain K permet de placer les pôles de la matrice $F_0 - KH_0$.
Un observateur non linéaire local pour (2.41) sera alors :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x},u) + K(y - h(\hat{x})) \tag{2.45}$$

où K a été calculé précédemment.

On voit apparaître ici la simplicité de mise en œuvre d'un tel observateur. Malheureusement, celui-ci n'est valable qu'autour d'un unique point de fonctionnement, et son utilisation devient vite problématique lorsque le système s'éloigne de l'état d'équilibre autour duquel le placement de pôles a été effectué.

Comme dans le cadre de la commande, ce problème peut être contourné en utilisant les techniques de linéarisation étendue ou de pseudo-linéarisation, introduites initialement dans [BAU86] et dans [REB84]. Afin d'élargir le domaine de convergence de l'observateur, la méthode de linéarisation étendue de Baumann et Rugh [BAU86] propose de garder invariant, par rapport à l'ensemble d'équilibre $\mathcal{E}_{x,u}$, les valeurs propres du linéarisé tangent de l'erreur d'observation. Dans ce but, la dynamique de l'observateur (2.45) n'est plus corrigée par le terme linéaire $K(y-h(\hat{x}))$ mais par une fonction non linéaire $g(y)-g(h(\hat{x}))$ où g est solution d'une équation différentielle. Les conditions suffisantes d'existence de g sont données dans [BAU86].

La seconde méthode, dite de pseudo-linéarisation et due à Reboulet et Champetier [REB84], a pour objectif quant à elle de linéariser le système (2.41), non plus autour d'un unique point d'équilibre, mais autour de l'ensemble d'équilibre $\mathscr{E}_{x,u}$. Une extension de cette approche au cas des systèmes non linéaires MIMO ainsi qu'un algorithme de synthèse de l'observateur ont été développés par Nicosia *et al.* dans [NIC89b, NIC90]. Leur méthode utilise des changements de base successifs pour réécrire le système d'origine sous une forme linéarisé, modulo une injection de la sortie et de sa dérivée première $\dot{y}$. Dans ce paragraphe, nous ne présenterons que cette dernière approche.

Considérons le système non linéaire (2.41). L'approche de Nicosia *et al.* consiste à rechercher s'il existe un changement de coordonnées $z = z(x)$ permettant de réécrire (2.41) sous la forme :

$$\dot{z} = Az + \phi(y, \dot{y}, u) + O^2 \tag{2.46a}$$
$$y = Cz \tag{2.46b}$$

où $\dot{y} = \mathscr{L}_f h(x)$ et la paire (C, A) est sous la forme canonique duale de Brunovsky munie des indices d'observabilité ρ_i $(i = 1, \ldots, p)$ (cf. annexe A).
Le terme résiduel O^2 contient tous les éléments d'ordre supérieur ou égal à deux, issus de la linéarisation de (2.41) par rapport à l'ensemble des points d'équilibre $\mathscr{E}_{x,u}$.

Soit $\mathscr{E}_x$ la projection dans l'espace d'état de l'ensemble d'équilibre $\mathscr{E}_{x,u}$:

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, u \in \mathbb{R}^m \mid f(x,u) = 0\} \tag{2.47}$$

On considère les hypothèses suivantes :

Hypothèse 2.1 *Il existe un changement de coordonnées $w = w(x)$ et une application $u_0(y)$ tels que :*

$$w_a(x) = h(x) \tag{2.48}$$
$$\mathscr{E}_{x,u} = \{(x,u) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \mid w_b(x) = 0;\ u = u_0(y)\} \tag{2.49}$$

où w_a et w_b désignent respectivement les p premières et les $n-p$ dernières composantes de w.

Hypothèse 2.2 *Le système (2.41) soumis à l'entrée $u = u_0(y)$ i.e. :*

$$\dot{x} = f(x, u_0(y)) = f_0(x) \tag{2.50a}$$
$$y = h(x) \tag{2.50b}$$
$$\dot{y} = \mathscr{L}_{f_0} h(x)$$

est localement observable au sens du rang pour tout $x \in \mathscr{E}_x$ (cf. définition 1.16).

Le résultat suivant donne les conditions d'existence de la forme canonique (2.46) pour le système (2.41) :

Théorème 2.5 ([NIC89b, NIC90])
Si les hypothèses 2.1 et 2.2 sont vérifiées, alors :

i. Il existe un changement de coordonnées $w = w(x)$ tel que, dans cette nouvelle base, (2.41) s'écrive sous la forme :

$$\dot{w} = A(y)w + B(y)u + a(y) + O^2 \tag{2.51a}$$

$$y = Cw \tag{2.51b}$$

où la paire $(C, A(y))$ est observable pour tout $y \in \mathbb{R}^p$,

ii. Il existe un changement de coordonnées $z = z(w)$ tel que la composition de $z = z(w)$ avec $w = w(x)$ transforme (2.41) en le système (2.46).

■

Esquisse de démonstration et synthèse de la forme canonique

Nous ne donnerons ici qu'une démonstration sommaire de chacune des propriétés de ce théorème en insistant toutefois – ce qui nous semble primordial – sur la méthode de construction de la fonction $\phi(y, \dot{y}, u)$ dans (2.46a).

Propriété i. Sous l'hypothèse (2.1), le changement de coordonnées $w = w(x)$ transforme (2.41) en :

$$\dot{w} = f_w(w, u) = \frac{\partial w(x)}{\partial x} f(x, u)\Big|_{x=w^{-1}(w)} \tag{2.52a}$$

$$y = h_w(w) = h(x)|_{x=w^{-1}(w)} = w_a \tag{2.52b}$$

Soit $\mathscr{E}_{w,u} = \{(w, u) \mid w_b = 0;\ u = u_0(y)\}$ l'ensemble des points d'équilibre de (2.52). Le développement en séries de Taylor de f_w autour de $\mathscr{E}_{w,u}$ donne :

$$\dot{w} = A(y)w + B(y)(u - u_0(y)) + O^2$$
$$y = Cw$$

où $A(y) = \begin{pmatrix} 0_{n\times p} & \frac{\partial f_w(w,u)}{\partial w_b}\Big|_{w_b=0, u=u_0(y)} \end{pmatrix}$, $B(y) = \frac{\partial f_w(w,u)}{\partial u}\Big|_{w_b=0, u=u_0(y)}$ et $C = \begin{pmatrix} I_p & 0 \end{pmatrix}$.

En choisissant $-B(y)u_0(y) = a(y)$, ce système coïncide avec (2.51), l'observabilité de la paire $(C, A(y))$ se démontrant assez facilement en utilisant les structures particulières des matrices C et $A(y)$.

Propriété ii. La démonstration de ce dernier point est basée sur l'existence et l'inversibilité de la transformation d'état y-dépendante :

$$z = Q(y)w + \alpha(y) \tag{2.53}$$

qui, lorsqu'on omet le terme O^2, permet de transformer le système (2.51) en le système (2.46) avec :

$$\phi(y, \dot{y}, u) = \Phi(y)\dot{y} + \eta(y, u) + \psi(y, \dot{y}, Rw) \tag{2.54}$$

où la matrice $R \in \mathbb{R}^{(n-p)\times n}$ est choisie de façon à ce que $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} C \\ R \end{pmatrix} = n$.

Dans (2.53), $Q(y)$ est une matrice non singulière vérifiant :

$$Q(y)A(y)Q(y)^{-1} = A + \Gamma(y)$$

avec $\Gamma(y) = \begin{pmatrix}\Gamma_1(y) & \dots & \Gamma_p(y)\end{pmatrix}$, $\Gamma_i(y) = \begin{pmatrix}0_{n\times(\rho_i-1)} & \gamma_i(y)_{n\times 1}\end{pmatrix}$. $\gamma_i(y)$ sont des vecteurs adéquats.

Le calcul des fonctions α, Φ, η et ψ s'effectue par changements de base successifs et ne sera pas détaillé dans ce qui suit, le lecteur pouvant se référer à [NIC89a] pour une démonstration complète. Définissons une matrice non singulière P vérifiant :

$$P = \begin{pmatrix}e_1 & \dots & e_{\sigma_1-1} & e_{\sigma_1+1} & \dots & e_{\sigma_p-1} & e_{\sigma_1} & e_{\sigma_p}\end{pmatrix}^T$$

où e_i représente la $i^{\text{ième}}$ colonne de la matrice identité de dimension n et $\sigma_i = \sum_{j=1}^{i} \rho_j$.
Le vecteur $\alpha(y)$ est alors donné par :

$$\alpha(y) = P^{-1}\begin{pmatrix}0\\ -\overline{Q}_3(y)y + y\end{pmatrix}$$

où $\overline{Q}_3(y)$ est issu du partitionnement suivant :

$$\overline{Q}(y) = PQ(y)\begin{pmatrix}C\\ R\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\overline{Q}_1(y) & \overline{Q}_2(y)_{(n-p)\times(n-p)}\\ \overline{Q}_3(y)_{p\times p} & 0\end{pmatrix}$$

En dernier lieu, les expressions de Φ, η et ψ sont données par :

$$\Phi_i(y) = \frac{\partial \alpha_i(y)}{\partial y} + y^T\frac{\partial Q_{Ai}(y)^T}{\partial y}$$

$$\eta(y,u) = \sum_{i=1}^{p}\gamma_i(y)y_i + Q(y)B(y)u - Q(y)A(y)Q(y)^{-1} + Q(y)a(y)$$

$$\psi_i(y,\dot{y},Rw) = \dot{y}^T\left(\frac{\partial Q_{Bi}(y)^T}{\partial y}\right)Rw \qquad i = 1,\dots,n$$

dans lesquelles Φ_i, ψ_i, Q_{Ai} et Q_{Bi} représentent respectivement les $i^{\text{ième}}$ lignes de Φ, ψ, Q_A et Q_B avec $Q(y)\begin{pmatrix}C\\ R\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}Q_A(y) & Q_B(y)\end{pmatrix}$. ❑

Finalement, lorsque les propriétés *i.* et *ii.* du théorème 2.5 sont vérifiées, un observateur approché pour (2.51) est donné par :

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + \phi(y,\dot{y},u) + K(y - C\hat{z}) \tag{2.55}$$

où le gain K est choisi de façon à placer le spectre de $A - KC$ dans un secteur du demi-plan complexe gauche.
La dynamique de l'erreur d'observation $\tilde{z} = z - \hat{z}$ s'écrit :

$$\dot{\tilde{z}} = (A - KC)\tilde{z} + O^2$$

On remarque que la stabilité de l'erreur d'observation n'est assurée que dans le cas où le reste O^2 tend vers zéro. Sur la base de cette remarque, le terme O^2 n'étant négligeable qu'autour de chacun des points de l'ensemble d'équilibre $\mathscr{E}_{x,u}$, seuls des résultats de convergence locaux seront garantis. Notons également que d'éventuelles perturbations ou erreurs de modélisation, ainsi que des non linéarités importantes conduiront rapidement à une instabilité de l'algorithme.

2.4.1.2.3 Observateur de Ciccarella *et al.*

L'idée de construire un observateur de type Luenberger à dynamique de l'erreur linéaire pour les systèmes non linéaires a été reprise récemment par Ciccarella *et al.* dans les cas temps-continu [CIC93a] (voir également [DAL97, JO97]) et temps-discret [CIC93b, CIC95]. Cette méthode ne nécessite aucun changement de coordonnées et assure la convergence asymptotique locale de l'erreur d'observation sous la condition d'observabilité uniforme. Nous ne nous intéresserons ici qu'à l'approche temps-discret s'appliquant à la classe des systèmes mono-sortie :

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) \tag{2.56a}$$
$$y_k = h(x_k) \tag{2.56b}$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$ et $y_k \in \mathbb{R}$.
Soient $U_{[k-n+1,k]} \in \mathbb{R}^{n.m}$ et $Y_{[k-n+1,k]} \in \mathbb{R}^n$ les séquences respectives de n entrées et n sorties passées :

$$U_{[k-n+1,k]} = \begin{pmatrix} u_k \\ \vdots \\ u_{k-n+2} \\ u_{k-n+1} \end{pmatrix}$$

$$Y_{[k-n+1,k]} = \begin{pmatrix} y_k \\ y_{k-1} \\ \vdots \\ y_{k-n+2} \\ y_{k-n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \circ f^{n-1}(x_{k-n+1}, U_{[k-n+1,k-1]}) \\ h \circ f^{n-2}(x_{k-n+1}, U_{[k-n+1,k-2]}) \\ \vdots \\ h \circ f^{1}(x_{k-n+1}, U_{[k-n+1,k-n+1]}) \\ h(x_{k-n+1}) \end{pmatrix}$$
$$= \Phi(x_{k-n+1}, U_{[k-n+1,k-1]})$$

où, pour un entier $j \geq 1$, $f^j(.,.)$ désigne la $j^{\text{ième}}$ composition de $f(.,.)$ avec elle-même :

$$f^j(x_k, U_{[k,k+j]}) = f(f^{j-1}(x_k, U_{[k,k+j-1]}), u_{k+j})$$
$$f^1(x_k, U_{[k,k]}) = f(x_k, u_k)$$

Le principe de cet observateur est fondé sur l'existence et l'inversibilité de l'application Φ entre un état passé x_{k-n+1} et une séquence de n mesures consécutives. L'observateur utilise les séquences $U_{[k-n+1,k]}$ et $Y_{[k-n+1,k]}$ de n entrées et n sorties passées pour estimer l'état x_{k-n+1} au début d'une fenêtre de n observations sous la condition d'observabilité uniforme du système sur ce même horizon.

L'estimation de l'état courant du système (2.56) est ensuite obtenue par $n-1$ compositions de la fonction f appliquée à l'état passé estimé $\hat{x}_{k-n+1}$ (c.-à-d. l'état courant de l'observateur).

On construit alors un estimateur de l'état du système (2.56) de la forme :

$$\xi_{k+1} = f(\xi_k, u_{k-n+1}) + \mathcal{O}^{-1}(f(\xi_k, u_{k-n+1}), U_{[k-n+2,k]}) \times \left\{ B(y_{k+1} - h \circ f^n(\xi_k, U_{[k-n+1,k]})) + K(y_{k-n+1} - h(\xi_k)) \right\} \tag{2.57a}$$
$$\hat{x}_k = f^{n-1}(\xi_k, U_{[k-n+1,k-1]}) \tag{2.57b}$$

pour $k \geq k_0 = n-1$.
Le gain K de l'observateur est choisi de façon à ce que $\text{spec}(A - KC) \subset \mathcal{D}(0,1)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. $\mathcal{O}(.,.)$ représente la matrice d'observabilité associée au système (2.56).

Le résultat suivant donne les conditions de convergence de (2.57) :

Théorème 2.6 ([CIC93b])
Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

i. Le système (2.56) est uniformément observable au sens du rang i.e. $\mathcal{O}(x,U) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,U)$ *est de rang plein* $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ *et* $\forall\, U \in \mathbb{R}^{n \times m}$,

ii. $\left\| f^{n-1}(\xi_{k_0}, U_{[0,n-2]}) - x_{k_0} \right\| < \delta$,

iii. Les applications h *et* $f^n \circ \Phi^{-1}$ *sont uniformément lipschitziennes pour tout* $\|u_k\| \leq M$,

alors le système dynamique (2.57) est un observateur asymptotique local pour (2.56). ■

Démonstration.
La démonstration de ce théorème utilise les changements de base $z_k = \Phi(x_{k-n+1}, U_{[k-n+1,k-1]}) = Y_{[k-n+1,k]}$ ($\Leftrightarrow x_{k-n+1} = \Phi^{-1}(z_k, U_{[k-n+1,k-1]})$) et $\hat{z}_k = \Phi(\xi_k, U_{[k-n+1,k-1]})$.
Il en résulte les systèmes suivants :

$$\begin{cases} z_{k+1} = Az_k + By_{k+1} \\ y_{k-n+1} = Cz_k \\ \hat{z}_{k+1} = \Phi(\xi_{k+1}, U_{[k-n+2,k]}) \end{cases} \tag{2.58}$$

Considérons la fonction de Lyapunov candidate $V_k = V(\tilde{z}_k, k) = \tilde{z}_k^T P \tilde{z}_k$, $\tilde{z}_k = z_k - \hat{z}_k$, où P désigne la solution définie positive de l'équation :

$$(A - KC)^T P (A - KC) - P = -Q < 0$$

et montrons que $\Delta V_k = V_{k+1} - V_k < 0$.

En utilisant (2.57a), la linéarisation de (2.58) autour de $f(\xi_k, u_{k-n+1})$ donne :

$$\begin{aligned} \hat{z}_{k+1} = {} & \Phi(f(\xi_k, u_{k-n+1}), U_{[k-n+2,k]}) + \left. \frac{\mathrm{d}\Phi(x, U_{[k-n+2,k]})}{\mathrm{d}x} \right|_{x = f(\xi_k, u_{k-n+1})} \times \\ & \mathcal{O}^{-1}(f(\xi_k, u_{k-n+1}), U_{[k-n+2,k]}) \left\{ B(y_{k+1} - h \circ f^n(\xi_k, U_{[k-n+1,k]})) \right. \\ & \left. + K(y_{k-n+1} - h(\xi_k)) \right\} + O \\ = {} & (A - KC)\hat{z} + By_{k+1} + Ky_{k-n+1} + O \end{aligned}$$

où, pour toute séquence d'entrées bornées et en utilisant l'hypothèse *iii.*, le reste O est majoré comme suit :

$$\|O\| \leq \beta \|z_k - \hat{z}_k\|^2$$

β dépend notamment des constantes de Lipschitz de h et $f^n \circ \Phi^{-1}$.

La dynamique de l'erreur d'observation $\tilde{z}_k = z_k - \hat{z}_k$ est alors linéaire modulo des termes résiduels d'ordre deux :

$$\tilde{z}_{k+1} = (A - KC)\tilde{z}_k + O(\|\tilde{z}_k\|^2)$$

et ΔV_k s'écrit :

$$\Delta V_k = -\tilde{z}_k^T Q \tilde{z}_k + O^T P \tilde{z}_{k+1} + \tilde{z}_{k+1}^T P O - O^T P O$$

Compte tenu du terme quadratique $-\tilde{z}_k^T Q \tilde{z}_k$, la convergence asymptotique de l'observateur est garantie localement par l'hypothèse *ii.* pour toute erreur d'observation initiale $\|\tilde{z}_{k_0}\| = \left\|\Phi(f^{n-1}(\xi_{k_0}, U_{[0,n-2]})) - \Phi(x_{k_0}, U_{[0,n-2]})\right\| \leq \gamma_\Phi \delta$. ❑

Exemple 2.1 *Considérons le système dynamique suivant :*

$$\begin{aligned}
x_{1k+1} &= a x_{2k}(2 + u_k) - a(x_{1k} + a x_{3k}) \\
x_{2k+1} &= a x_{2k} + (x_{1k} + x_{3k} + u_k)^2 \\
x_{3k+1} &= x_{1k} + a x_{3k} \\
y_k &= x_{3k}
\end{aligned}$$

On démontre que ce système est localement fortement observable $\forall x_k \in \mathbb{R}^3$ *pour tout* $a \neq 0$ *et* $u_k \neq -2$. *Sur la fenêtre d'observation* $[k-2, k]$, *les trois sorties prédites de ce système à partir de l'état initial* x_{k-2} *sont :*

$$Y_{[k-2,k]} = \Phi(x_{k-2}, U_{[k-2,k-1]}) = \begin{pmatrix} a x_{2k-2}(2 + u_{k-2}) \\ x_{1k-2} + a x_{3k-2} \\ x_{3k-2} \end{pmatrix}$$

En appliquant (2.57), un observateur pour ce système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \xi_{1k+1} \\ \xi_{2k+1} \\ \xi_{3k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\xi_{2k}(2 + u_{k-2}) - a(\xi_{1k} + a\xi_{3k}) \\ a\xi_{2k} + (\xi_{1k} + \xi_{3k} + u_{k-2})^2 \\ \xi_{1k} + a\xi_{3k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a(2 + u_{k-2}) & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times$$
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (y_{k+1} - a(a\xi_{2k} + (\xi_{1k} + \xi_{3k} + u_{k-2})^2)(2 + u_{k-1})) + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} (y_{k-2} - \xi_{3k}) \right\}$$

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{1k} &= a(a\xi_{2k} + (\xi_{1k} + \xi_{3k} + u_{k-2})^2)(2 + u_{k-1}) - a(a\xi_{2k}(2 + u_{k-2}) \\
&\quad - a(\xi_{1k} + a\xi_{3k}) + a(\xi_{1k} + a\xi_{3k})) \\
\hat{x}_{2k} &= a^2 \xi_{2k} + a(\xi_{1k} + \xi_{3k} + u_{k-2})^2 + (a\xi_{2k}(2 + u_{k-2}) \\
&\quad - a(\xi_{1k} + a\xi_{3k}) + \xi_{1k} + a\xi_{3k} + u_{k-1})^2 \\
\hat{x}_{3k} &= a\xi_{2k}(2 + u_{k-2})
\end{aligned}$$

pour $k \geq 2$.

On remarque que cette méthode n'est valable que dans le cas où l'algorithme est initialisé dans un voisinage (souvent restreint) de l'état initial réel. En outre, la construction de l'observateur devient vite problématique lorsque augmentent la complexité et la dimension des systèmes étudiés.

2.4.2 Observateurs à grand gain

Initialement introduite par Thau [THA73], l'approche "grand gain" pour la construction d'observateurs non linéaires s'applique à la classe des systèmes décomposables en une partie linéaire et en une partie non linéaire globalement (voire localement) lipschitzienne, de la forme :

$$\dot{x} = Ax + \phi(x, u) \tag{2.59a}$$
$$y = Cx \tag{2.59b}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état, des entrées et des sorties. Nous supposons que la paire (C, A) est détectable et que le champ de vecteurs $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est globalement lipschitzien par rapport à x, uniformément par rapport à u[1] :

$$\|\phi(x, u) - \phi(\hat{x}, u)\| \leq \gamma_\phi \|x - \hat{x}\| \qquad \forall\, x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n \text{ et } \forall\, u \in \mathbb{R}^m \tag{2.60}$$

Les techniques d'estimation "grand gain" s'appuient sur un comportement dominant de la partie linéaire de (2.59) et consistent, de ce fait, à fixer un gain d'observateur suffisamment important sur la partie linéaire de façon à éliminer l'effet de la constante de Lipschitz de la partie non linéaire dans la dynamique de l'erreur d'observation.

Un observateur de type Luenberger pour (2.59) prend la forme :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \phi(\hat{x}, u) + K(y - C\hat{x}) \tag{2.61}$$

La dynamique de l'erreur d'observation $\tilde{x} = x - \hat{x}$ est donnée par :

$$\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x} + \phi(x, u) - \phi(x - \tilde{x}, u) \tag{2.62}$$

Désormais, le challenge consiste à déterminer un gain d'observateur $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$ garantissant la stabilité de l'erreur $\tilde{x}$ en zéro.

2.4.2.1 Approche de Thau et ses extensions

La méthode de Thau [THA73], généralisée par Kou *et al.* [KOU75] et Banks [BAN81], donne une condition suffisante de stabilité asymptotique de l'erreur d'observation (2.62). Une version adaptative de leurs résultats est donnée dans [RAJ95, CHO97] pour la classe des systèmes possédant des paramètres inconnus, intervenant linéairement dans la dynamique de l'état.

1. Cette condition n'est satisfaite globalement que pour un nombre limité de systèmes physiques (en robotique par exemple). Dans le cas de non linéarités seulement localement lipschitziennes, il suffira de s'assurer que l'état reste uniformément borné.

Le résultat principal de [THA73] est illustré par le théorème suivant :

Théorème 2.7 ([THA73]) *Soient le système (2.59) et l'observateur (2.61). Si le gain K est choisi tel que :*

$$\gamma_\phi < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} \tag{2.63}$$

où $\lambda_{\max}(.)$ et $\lambda_{\min}(.)$ désignent respectivement les valeurs propres maximale et minimale de $(.)$, $P = P^T$ désigne la solution définie positive, pour une matrice $Q = Q^T$ définie positive donnée, de l'équation de Lyapunov :

$$(A - KC)^T P + P^T(A - KC) = -Q \tag{2.64}$$

alors l'erreur d'observation (2.62) est exponentiellement stable. ■

Démonstration.
Considérons la fonction de Lyapunov candidate $V = V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P \tilde{x}$.
La dérivée de cette dernière le long des trajectoires de (2.62) s'écrit :

$$\dot{V} = \tilde{x}^T((A - KC)^T P + P^T(A - KC))\tilde{x} + 2\tilde{x}^T P(\phi(x, u) - \phi(x - \tilde{x}, u))$$

Sous la condition de détectabilité de la paire (C, A), il existe un gain d'observateur K permettant de placer le spectre de la matrice $A - KC$ dans un secteur du demi-plan complexe gauche et, pour toute matrice $Q = Q^T > 0$, il existe une solution $P = P^T > 0$ à l'équation de Lyapunov (2.64).

En utilisant cette propriété et la condition (2.60), $\dot{V}$ se majore comme suit:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\tilde{x}^T Q \tilde{x} + 2\|\tilde{x}^T P\|\gamma_\phi\|\tilde{x}\| \\ &\leq (-\lambda_{\min}(Q) + 2\gamma_\phi \lambda_{\max}(P))\|\tilde{x}\|^2 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le principe de Rayleigh rappelé en annexe A.1.

Finalement, sous la condition (2.63), $\dot{V} \leq 0$ et la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation $\tilde{x}$ est établie. ❑

L'approche de Thau ne constitue en aucune manière une méthode de synthèse, mais permet simplement de vérifier la stabilité de l'observateur (2.61), *a postériori*, c'est à dire une fois le gain d'observateur K fixé. Pour un choix de K, on en déduit la classe des fonctions non linéaires f vérifiant la condition (2.63). Afin de valider cet observateur pour le plus grand nombre de fonctions non linéaires possibles, il convient dans un premier temps de rechercher la valeur optimale de la matrice Q maximisant le rapport $\lambda_{\min}(Q)/2\lambda_{\max}(P)$. La réponse est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.8 ([PAT80]) *Le rapport $\dfrac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)}$ est maximal pour $Q = I_n$.* ■

En règle générale, le choix d'un gain K satisfaisant la condition (2.63) est loin d'être trivial. A ce titre, l'approche intuitive qui consiste à décaler le plus possible le spectre de $A - KC$ vers la gauche dans le plan complexe est globalement fausse. On constate, en effet, qu'il n'existe pas de relation spécifique entre le spectre de $A - KC$ et $\lambda_{\max}(P)$. Ce dernier point est illustré par l'exemple suivant :

Exemple 2.2 ([RAG94]) *Considérons l'équation de Lyapunov (2.64) avec* $A-KC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$ *et* $Q = I_2$.
On a $P = \begin{pmatrix} 1/2 + \varepsilon^2/4 & -\varepsilon/4 \\ -\varepsilon/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ *d'où, pour tout* $\varepsilon \gg 1$, $\lambda_{\max}(P) \approx \frac{\varepsilon^2}{4}$ *mais il est facile de voir que* $\operatorname{spec}(A - KC) = \{1, 1\}\ \forall \varepsilon$. *Cet exemple montre que* $\lambda_{\max}(P)$ *peut être modifiée sans nécessairement affecter les valeurs propres de* $A - KC$.

En s'inspirant des techniques de filtrage $\mathcal{H}_\infty$, une méthode constructive a été proposée par Raghavan dans [RAG92, RAG94]. Une solution explicite du gain de l'observateur est donnée. Cette approche, basée sur la résolution d'une équation algébrique de Riccati, assure la stabilité asymptotique de l'erreur d'observation :

Théorème 2.9 ([RAG94]) *S'il existe un réel* $\varepsilon > 0$ *tel que l'EAR :*

$$AP + PA^T + P\left(\gamma_\phi^2 I_n - \frac{1}{\varepsilon} C^T C\right) P + (1 + \varepsilon) I_n = 0 \tag{2.65}$$

possède une solution P *symétrique définie positive, alors le gain d'observateur* $K = \frac{1}{2\varepsilon} P C^T$ *stabilise asymptotiquement la dynamique de l'erreur d'observation (2.62).* ■

La démonstration complète de ce théorème est donné dans [RAG94]. Le calcul du paramètre ε s'effectue par dichotomie.

Malheureusement, cette approche ne fonctionne pas pour toutes les paires (C, A) observables, et ne donne aucune indication sur les conditions que doit vérifier $A-KC$ afin d'assurer la convergence de l'observateur. Dans [RAJ93, RAJ98], Rajamani a établi récemment le lien étroit existant entre le conditionnement de $A - KC$ et la convergence de l'observateur (2.61). En particulier, l'auteur propose une solution numérique pour le calcul du gain de l'observateur par minimisation du rapport $\lambda_{\min}(A - KC)/\operatorname{cd}(T)$, où T est la matrice des vecteurs propres de $A - LC$ et $\operatorname{cd}(T)$ est le nombre de conditionnement de T. Malheureusement, il est montré que l'algorithme de minimisation est sous-optimal et ne converge que vers des minima locaux.

2.4.2.2 Synthèse d'observateurs des systèmes uniformément observables et U-uniformément observables

Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, que le choix du gain d'observateur K garantissant la stabilité de l'erreur d'observation (2.62) n'était pas chose évidente. En exploitant la propriété d'observabilité uniforme de certains systèmes (cf. section 1.2.2), les auteurs dans [BOR91, GAU92, BOR93] utilisent un changement de coordonnées pour se ramener à un système de la forme (2.59), muni de structures canoniques pour la paire (C, A)

et le champ de vecteurs ϕ. Dans la nouvelle base, la construction d'un observateur de type grand gain devient quasi systématique. L'application de cette classe d'observateurs à des procédés biologiques a été étudiée récemment par Bernard *et al.* dans [BER98]. Dans cette partie, nous présenterons l'observateur développé par Gauthier *et al.* [GAU92] et Bornard *et al.* [BOR91, BOR93] dans les cas mono-sortie et multi-sorties, et nous généraliserons d'une certaine manière ces résultats en donnant la structure d'un observateur pour les systèmes U-uniformément observables développé par Gauthier et Kupka dans [GAU94].

2.4.2.2.1 Approche de Gauthier *et al.* . Cas mono-sortie

Considérons le système non linéaire MISO :

$$\dot{\xi} = f(\xi) + g(\xi)u \tag{2.66a}$$
$$y = h(\xi) \tag{2.66b}$$

où $\xi \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}$.

Si le système (2.66) est localement uniformément observable, nous avons vu en section 1.2.2 que, au voisinage d'un point régulier, il existe un difféomorphisme :

$$x = \Phi(\xi) = \left(h(\xi), \mathscr{L}_f h(\xi), \ldots, \mathscr{L}_f^{n-1} h(\xi)\right)^T$$

définissant un nouveau système de coordonnées dans lequel (2.66) s'écrit :

$$\dot{x} = Ax + \gamma(x) + \Psi(x)u = Ax + \phi(x,u) \tag{2.67a}$$
$$y = Cx \tag{2.67b}$$

Les matrices A, C ainsi que les champs γ et Ψ sont définis dans le théorème 1.3.

Nous énonçons alors le théorème suivant :

Théorème 2.10 ([GAU92, BOR93]) *Considérons le système (2.67) et l'observateur (2.61). Si les conditions suivantes sont vérifiées :*

i. $u \in \mathcal{U}$ *un compact de* $\mathbb{R}^m$,

ii. Le champ ϕ *est globalement lipschitzien par rapport à* x, *uniformément par rapport à* $u \in \mathcal{U}$,

alors il existe $T_0 > 0$ *tel que, pour tout* T *vérifiant* $0 < T < T_0$, *le gain d'observateur* $K = K(T, L) = \Lambda^{-1}(T)L$ *avec*

$$\Lambda(T) = \begin{pmatrix} T & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & T^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & T^n \end{pmatrix} \quad et \quad L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$$

stabilise globalement exponentiellement la dynamique de l'erreur d'observation (2.62). ■

Démonstration.
La démonstration de ce théorème utilise les changements de coordonnées $\bar{x} = \Lambda(T)x$ et $\breve{x} = \Lambda(T)\hat{x}$ pour réécrire le système (2.67) et l'observateur (2.61) sous les formes suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = T^{-1}A\bar{x} + \Lambda(T)\phi(\Lambda^{-1}(T)\bar{x}, u) \\ y = T^{-1}C\bar{x} \end{cases}$$
$$\dot{\breve{x}} = T^{-1}A\breve{x} + \Lambda(T)\phi(\Lambda^{-1}(T)\breve{x}, u) + T^{-1}KC(\bar{x} - \breve{x})$$

La dynamique de l'erreur d'observation $\tilde{x} = \bar{x} - \breve{x}$ vérifie la relation :

$$\dot{\tilde{x}} = T^{-1}(A - LC)\tilde{x} + \Lambda(T)\Pi(\Lambda^{-1}(T)\tilde{x}, u) \tag{2.68}$$

où $\Pi(\Lambda^{-1}(T)\tilde{x}, u) = \phi(\Lambda^{-1}(T)\bar{x}, u) - \phi(\Lambda^{-1}(T)\breve{x}, u)$.

Considérons la fonction de Lyapunov candidate $V = V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T S\tilde{x}$, où la matrice S désigne la solution symétrique définie positive de l'équation de Lyapunov :

$$(A - LC)^T S + S(A - LC) + I = 0$$

En utilisant cette dernière relation, la dérivée de V le long des trajectoires de (2.68) donne :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -T^{-1}\tilde{x}^T\tilde{x} + 2\tilde{x}^T S\Lambda(T)\Pi(\Lambda^{-1}(T)\tilde{x}, u) \\ &\leq -T^{-1}\|\tilde{x}\|^2 + 2\lambda_{\max}(S)\gamma_\phi \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_{ij}T^{i-j}\|\tilde{x}\|^2 \end{aligned}$$

où γ_ϕ est la constante de Lipschitz associée au champ ϕ (respectivement au champ Π), χ_{ij} sont des paramètres binaires tels que $\chi_{ij} = 0$ si $\dfrac{\partial \phi_i}{\partial x_j} = 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ et $\chi_{ij} = 1$ autrement. D'après la structure triangulaire de ϕ (respectivement de Π), on montre que $\chi_{ij} = 1$ pour tout $i \geq j$ et on a alors $\chi_{ij}T^{i-j} < 1$ pour tout $T < 1$, d'où :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_{ij}T^{i-j} \leq n^2$$

$\dot{V}$ se majore alors comme suit :

$$\dot{V} \leq (-T^{-1} + 2\lambda_{\max}(S)\gamma_\phi n^2)\|\tilde{x}\|^2$$

soit, en utilisant le principe de Rayleigh (cf. annexe A) :

$$\dot{V} \leq -(\frac{T^{-1}}{\lambda_{\max}(S)} - 2\frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(S)}\gamma_\phi n^2)V$$

L'erreur d'observation $\tilde{x}$ est donc exponentiellement stable :

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \|\tilde{x}(0)\|\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \exp\left(-(\frac{T^{-1}}{2\lambda_{\max}(S)} - \frac{\lambda_{\max}(S)}{\lambda_{\min}(S)}\gamma_\phi n^2)t\right)$$

pour tout $T < \dfrac{\lambda_{\min}(S)}{2\lambda_{\max}(S)^2\gamma_\phi n^2} = T_0$, $t \geq 0$. ❑

Un choix judicieux du paramètre T et du gain L permettra de régler la vitesse de convergence de l'observateur. On remarque que le paramètre T permet d'éliminer l'effet de la constante de Lipschitz de la partie non linéaire dans (2.68), alors que la matrice de gain L sert à fixer la réponse dynamique de la partie linéaire.

Remarque 2.5 *Il s'agit bien ici d'un observateur à grand gain car l'emploi d'un paramètre T suffisamment petit (T^{-1} suffisamment grand) permet de masquer l'effet des non linéarités dans la synthèse de l'observateur.* ▼

Remarque 2.6 *Il est possible, à partir de l'observateur (2.61), de retrouver l'état dans les coordonnées initiales en utilisant l'application $\hat{\xi} = \Phi^{-1}(\hat{x})$, mais ce calcul est souvent difficile à réaliser. Nous remarquons qu'il suffit de connaître le jacobien $\left.\dfrac{\partial\Phi(\xi)}{\partial\xi}\right|_{\xi=\hat{\xi}}$ pour réécrire l'observateur dans les coordonnées initiales :*

$$\dot{\hat{\xi}} = f(\hat{\xi}) + g(\xi)u + \left(\left.\frac{\partial\Phi(\xi)}{\partial\xi}\right|_{\xi=\hat{\xi}}\right)^{-1}\Lambda^{-1}(T)L(y - C\hat{\xi})$$

▼

Remarque 2.7 *L'approche de Bornard et al. [BOR93] généralise d'une certaine manière celle de Gauthier et al. [GAU92], au sens où le gain de l'observateur $K(T, L) = \Lambda^{-1}(T)L$ offre deux paramètres de synthèse T et K, contre un seul pour la méthode de Gauthier et al. pour laquelle le gain s'écrit $K_\theta = S_\theta^{-1}C^T$, avec S_θ solution de l'équation de Lyapunov avec facteur d'oubli :*

$$\theta S_\theta + A^T S_\theta + S_\theta A - C^T C = 0$$

pour $\theta > \theta_0 > 0$. θ_0 dépend de la constante de Lipschitz de ϕ ainsi que des bornes sur u. On note qu'une solution analytique de S_θ est donnée par :

$$S_\theta(i,j) = \frac{(-1)^{i+j}C_{i+j-2}^{j-1}}{\theta^{i+j-1}}, \qquad i,j = 1,\ldots,n \qquad \text{avec } C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

d'où le caractère "grand gain" de l'observateur de Gauthier et al. pour θ grand. ▼

2.4.2.2.2 Approche de Bornard *et al.* . Cas multi-sorties

Les résultats précédents ont été généralisés au cas multi-sorties dans [BOR91]. Considérons l'ensemble des systèmes modélisables par la représentation MIMO :

$$\dot{\xi} = f(\xi) + g(\xi)u \tag{2.69a}$$

$$y = h(\xi) \tag{2.69b}$$

où $\xi \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$. Nous supposons que ce système est observable au sens du rang pour tout $\xi \in \Omega$ et que $u \equiv 0$ en constitue une entrée universelle (cf. section 1.2.2). Par conséquent, au voisinage d'un point régulier, il existe un difféomorphisme local :

$$x = \Phi(\xi) = \left(h_1(\xi), \mathscr{L}_f h_1(\xi), \dots, \mathscr{L}_f^{\rho_1 - 1} h_1(\xi), \dots, h_p(\xi), \mathscr{L}_f h_p(\xi), \dots, \mathscr{L}_f^{\rho_p - 1} h_p(\xi)\right)^T$$

définissant un nouveau système de coordonnées dans lequel le système (2.69) s'écrit :

$$\dot{x} = Ax + \gamma(x) + \varphi(x)u = \phi(x, u) \tag{2.70a}$$

$$y = Cx \tag{2.70b}$$

où

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \quad \text{avec} \quad x_k = \begin{pmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \\ \vdots \\ x_{k\rho_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho_k},$$

$$A = \underset{k=1,\dots,p}{\text{bloc-diag}}\,(A_{\rho_k}) \quad \text{avec} \quad A_{n_k} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho_k \times \rho_k},$$

$$C = \underset{k=1,\dots,p}{\text{bloc-diag}}\,(C_{\rho_k}) \quad \text{avec} \quad C_{\rho_k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times \rho_k},$$

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} \gamma_1(x) \\ \gamma_2(x) \\ \vdots \\ \gamma_p(x) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \gamma_k(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{\gamma}_k(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\gamma}_k(x) = \mathscr{L}_f^{\rho_k} h_k(\Phi^{-1}(x)),$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \\ \vdots \\ \varphi_p(x) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \varphi_k(x) = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_{k1}(x) \\ \bar{\varphi}_{k2}(x) \\ \vdots \\ \bar{\varphi}_{k\rho_k}(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\varphi}_{kj}(x) = \mathscr{L}_g \mathscr{L}_f^{j-1} h_k(\Phi^{-1}(x)).$$

Le p-uplet d'entiers $\{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p\}$ représente les indices d'observabilité de (2.70) avec $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_p \geq 0$, $\sum_{i=1}^{p} \rho_i = n$.

Le résultat suivant généralise au cas multi-sorties le théorème 2.10 :

Théorème 2.11 ([BOR91]-[BOR93]) *Soit un paramètre μ défini par $\mu_1 = 1$, $\mu_k = \mu_{k-1} + \rho_{k-1}$ pour $2 \leq k \leq p$ et soit $K = \underset{k=1,\dots,p}{\text{bloc-diag}}\left([K_{\rho_k}]_{\rho_k \times 1}\right)$ une matrice telle que les matrices $(A_{\rho_k} - K_{\rho_k} C_{\rho_k})$ sont Hurwitz.*
Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

i. Le champ ϕ est globalement lipschitzien par rapport à $x \in \Omega$, uniformément par rapport à $u \in \mathcal{U}$,

ii. Il existe deux ensembles d'entiers $\sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ *et* $\delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_p\}$ *avec* $\delta_i > 0$, *tels que :*

$$\sigma_{\mu_k+l} = \sigma_{\mu_k+l-1} + \delta_k \quad \text{pour } k = 1, \ldots, p \text{ et } l = 1, \ldots, \rho_k - 1, \tag{2.71}$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \not\equiv 0 \;\Rightarrow\; \sigma_i \geq \sigma_j \quad \text{pour } i, j = 1, \ldots, n,\ j \neq \mu_k \text{ et } k = 1, \ldots, p, \tag{2.72}$$

alors il existe $T_0 > 0$ *tel que, pour tout* T, $0 < T < T_0$, *le système dynamique :*

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \phi(\hat{\hat{x}}, u) + \Lambda^{-1}(T, \delta)K(y - C\hat{x}) \tag{2.73}$$

avec

$$\hat{\hat{x}}_j = \begin{cases} y_k & si\ j = \mu_k \\ \hat{x}_j & sinon \end{cases}$$

$$\Lambda(T, \delta) = \begin{pmatrix} T^{\delta_1}\Delta_1(T^{\delta_1}) & & \\ & \ddots & \\ & & T^{\delta_p}\Delta_p(T^{\delta_p}) \end{pmatrix} \text{ avec } \Delta_k(T^{\delta_k}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & T^{\delta_k} & \\ & & \ddots \\ & & T^{\delta_k(\rho_k-1)} \end{pmatrix}$$

est un observateur exponentiel pour le système (2.70). ■

La démonstration de ce théorème est méthodologiquement semblable à celle du théorème 2.10 et utilise la structure bloc-diagonale des systèmes étudiés [BOR91]. La fonction de Lyapunov candidate devient $V = \sum_{k=1}^{p} V_k$ avec $V_k = \tilde{x}_k^T S_{\rho_k} \tilde{x}_k$ où $\tilde{x}_k$ est l'erreur d'observation correspondante au $k^{\text{ième}}$ bloc, et S_{ρ_k} est la solution symétrique définie positive de l'équation de Lyapunov $(A_{\rho_k} - K_{\rho_k}C_{\rho_k})^T S_{\rho_k} + S_{\rho_k}(A_{\rho_k} - K_{\rho_k}C_{\rho_k}) + I_{\rho_k} = 0$.
Chaque dérivée $\dot{V}_k$ est alors majorée par $-T^{-\delta_k}\|\tilde{x}_k\|^2 + 2\|S_{\rho_k}\|\gamma_\phi \sum_{i=\mu_k}^{\mu_k+\rho_k-1} \sum_{j=1}^{n} \chi_{ij} T^{\sigma_i - \sigma_j} \|\tilde{x}_k\|^2$
où $\chi_{ij} = 0$ si $\dfrac{\partial \phi_i}{\partial z_j} = 0$ ou si $j = \mu_k$ et $\chi_{ij} = 1$ autrement. On démontre alors que $\chi_{ij} T^{\sigma_i - \sigma_j}$ pour tout $T < 1$, d'où $\sum_{i=\mu_k}^{\mu_k+\rho_k-1} \sum_{j=1}^{n} \chi_{ij} T^{\sigma_i - \sigma_j} < n\rho_k$.
Finalement, $\dot{V}$ est majorée par le terme $-(T^{-\underline{\delta}} - 2\gamma_\phi \overline{S} n^2)\|\tilde{x}\|^2$ avec $\overline{S} = \sup\left(\|S_{\rho_1}\|, \ldots, \|S_{\rho_p}\|\right)$ et $\underline{\delta} = \inf(\delta_1, \ldots, \delta_p)$, d'où le résultat de convergence.

Remarque 2.8

- *Les hypothèses structurelles ii. du théorème 2.11 conduisent à une structure triangulaire inférieure de chacun des blocs diagonaux de* $\partial\phi/\partial x$, *et définissent des couplages dans* ϕ *pour lesquels le système demeure uniformément localement observable.*

- *D'après la condition (2.71), le choix des ensembles* $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ *et* $\{\delta_1, \ldots, \delta_p\}$ *peut se réduire à celui de* $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ *et* $\{\delta_{\mu_1}, \ldots, \delta_{\mu_p}\}$, *l'ensemble des valeurs utiles à tester est ainsi fini (cf. [BOR93] pour un exemple illustrant les mécanismes des conditions (2.71) et (2.72)).*

- *A la différence du cas mono-sortie, la forme canonique observable des systèmes multi-sorties n'est pas unique et dépend du difféomorphisme choisi.* ▼

Remarque 2.9 *Comme dans le cas mono-sortie, cette approche offre plusieurs degrés de liberté pour la synthèse de l'observateur, et généralise de ce fait la méthode de Hammouri et al. [HAM94] ou Busawon [BUS96], où le gain d'observateur est choisi égal à* $S_\theta^{-1} C^T$ *avec* $C = \underset{i=1,\ldots,p}{\text{bloc-diag}}\,(C_{\rho_k})$ *et* $S_\theta^{-1} = \underset{k=1,\ldots,p}{\text{bloc-diag}}\left(\left[S_{\theta^{\delta_k}}^{-1}\right]_{\rho_k \times \rho_k}\right)$ *où les matrices* $S_{\theta^{\delta_k}}$ *sont les solutions symétriques définies positives des équations de Lyapunov avec facteur d'oubli exponentiel :*

$$\theta^{\delta_k} S_{\theta^{\delta_k}} + A_{\rho_k}^T S_{\theta^{\delta_k}} + S_{\theta^{\delta_k}} A_{\rho_k} - C_{\rho_k}^T C_{\rho_k} = 0 \qquad k = 1, \ldots, p$$
$$\theta^{\delta_k} > \theta_0 > 0$$

Cette approche n'offre que les paramètres de synthèse θ^{δ_k} *pour assurer la stabilité et fixer la vitesse de convergence de l'observateur.* ▼

Des résultats similaires ont été obtenus par Tornambè dans les cas mono-sortie [TOR89] et multi-sorties [TOR92]. Son observateur possède la même structure à plusieurs degrés de liberté que celui de Bornard *et al.* , mais assure uniquement une bornitude arbitrairement petite de l'erreur d'observation.

2.4.2.2.3 Observateurs des systèmes U-uniformément observables

En utilisant la forme canonique associée aux systèmes U-uniformément observables et définie par le théorème 1.3, Gauthier et Kupka [GAU94] ont proposé un observateur à grand gain de type Luenberger étendu à convergence exponentielle globale. Cette approche permet de s'affranchir de la condition d'affinité en la commande et généralise ainsi celle de Gauthier *et al.* [GAU92].

Théorème 2.12 ([GAU94]) *Considérons le système (1.22). Sous les hypothèses suivantes :*

i. Chaque fonction $f_i(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, u)$, $i = 1, \ldots, n-1$, *est globalement lipschitzienne par rapport à* $x_1, \ldots, x_i$, *uniformément par rapport à* u *et* x_{i+1},

ii. Il existe des réels α *et* β, $0 < \alpha < \beta < \infty$ *tels que :*

$$\alpha \leq \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, u) \leq \beta \quad \text{pour } i = 0, \ldots, n-1,$$

alors un observateur exponentiel global pour (1.22) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_i \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, u) \\ \vdots \\ f_i(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{i+1}, u) \\ \vdots \\ f_n(u, \hat{x}) \end{pmatrix} + \Delta_\theta K(f_0(x_1, u) - f_0(\hat{x}_1, u))$$

avec $\Delta_\theta = \begin{pmatrix} \theta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \theta^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \theta^n \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$ *pour un paramètre* $\theta > 0$. *La valeur du gain* K *dépend des bornes* α *et* β. ■

Une démonstration complète de ce résultat et une procédure de calcul du gain K sont données dans [GAU94] (voir lemme 4 p. 989).

2.4.3 Observateurs à modes glissants

L'utilisation de systèmes dynamiques à modes glissants, en tant qu'observateurs des systèmes non linéaires, a été étudiée initialement et indépendamment par Walcott *et al.* [WAL86] et Slotine *et al.* [SLO87]. Cette approche a depuis intéressé de nombreux chercheurs dans des environnements aussi bien déterministes [WAL87a, WAL87b, DAW92, WAT92, EDW94] que stochastiques [YAZ88, YAZ92, YAZ93].

Cette méthode consiste à utiliser de grands gains d'observateur de façon à faire "glisser" l'erreur d'observation vers un hyperplan de commutation, sur lequel l'erreur d'observation est linéaire et exponentiellement stable.

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x, u) \tag{2.74a}$$
$$y = Cx \tag{2.74b}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$, A, B et C sont des matrices réelles aux dimensions appropriées et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue en x modélisant indifféremment non linéarités et incertitudes du système.

Nous faisons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 2.3 *La paire* (C, A) *est détectable, donc il existe une matrice* $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$ *permettant de placer les valeurs propres de* $(A - KC)$ *dans un secteur du demi-plan complexe gauche.*

Hypothèse 2.4 *La fonction* $f(.,.)$ *vérifie l'égalité :*

$$f(x, u) = P^{-1} C^T \xi(x, u) \tag{2.75}$$

où $\xi(x,u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *est une fonction inconnue mais bornée :*

$$\|\xi(x,u)\| \leq \rho(u) \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m \text{ et } t \geq 0 \tag{2.76}$$

et $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *est la solution définie positive de l'équation de Lyapunov :*

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) = -Q < 0 \tag{2.77}$$

pour une matrice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *donnée définie positive.*

Dénommons $\mathcal{S}_{\tilde{x}}$ la surface de commutation associée à l'erreur d'estimation $\tilde{x} = x - \hat{x}$:

$$\mathcal{S}_{\tilde{x}} = \ker(C\tilde{x}) = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^n \mid C\tilde{x} = 0\} \tag{2.78}$$

Nous pouvons à présent énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.13 ([WAL87b]-[WAL88]) *Supposons que le système non linéaire (2.74) vérifie les hypothèses 2.3 et 2.4, alors le système dynamique :*

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + S(\hat{x},u,y) + K(y - C\hat{x}) \tag{2.79}$$

avec

$$S(\hat{x},u,y) = \begin{cases} \dfrac{P^{-1}C^T C\tilde{x}}{\|C\tilde{x}\|}\rho(u) & si\ \ \tilde{x} \notin \mathcal{S}_{\tilde{x}} \\ 0 & si\ \ \tilde{x} \in \mathcal{S}_{\tilde{x}} \end{cases} \tag{2.80}$$

reconstruit globalement et exponentiellement l'état de (2.74).
$S(\hat{x},u,y)$ sera appelée fonction de commutation. ■

Démonstration.
En exploitant les relations (2.74a)-(2.74b), (2.79) et (2.80), la dynamique de l'erreur d'observation s'écrit :

$$\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x} + f(x,u) - \frac{P^{-1}C^T C\tilde{x}}{\|C\tilde{x}\|}\rho(u) \tag{2.81}$$

lorsque $\tilde{x} \notin \mathcal{S}_{\tilde{x}}$.
La démonstration fait appel à la fonction de Lyapunov candidate $V = V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P\tilde{x}$. En utilisant les égalités (2.75) et (2.77), la dérivée de V le long des trajectoires de (2.81) donne :

$$\dot{V}(\tilde{x}) = -\tilde{x}^T Q\tilde{x} + 2\tilde{x}^T C^T \xi(x,u) - 2\|C\tilde{x}\|\rho(u)$$

L'inégalité (2.76) permet de majorer $\dot{V}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\tilde{x}^T Q\tilde{x} + 2\|C\tilde{x}\|\rho(u) - 2\|C\tilde{x}\|\rho(u) = -\tilde{x}^T Q\tilde{x} \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q)\|C\tilde{x}\| \end{aligned}$$

Il vient alors que :

$$\dot{V} \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} V$$

en utilisant le principe de Rayleigh (cf. annexe A.1).
La convergence exponentielle de l'observateur (2.79) suit immédiatement :

$$\|\tilde{x}(t)\| \leq \|\tilde{x}(0)\| \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \exp\left(-\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} t\right) \qquad \forall\, t \geq 0$$

❑

On remarque que la synthèse de l'observateur (2.79) ne requiert pas la connaissance exacte du système, mais uniquement la valeur du majorant $\rho(u)$ sur les non linéarités ou incertitudes $f(x,u)$. Il apparaît clairement qu'un tel observateur s'avère robuste par rapport à d'éventuelles erreurs de modélisation bornées.

Cette méthode présente toutefois deux inconvénients majeurs. Le premier réside dans la difficulté de vérifier en pratique la contrainte structurelle (2.75) (ou *matching condition*), et ce notamment lorsque la fonction f modélise des incertitudes de modèle. On remarque que Slotine *et al.* dans [SLO87] n'utilisent pas cette condition, mais ils ne peuvent, en contrepartie, assurer la convergence globale de leur observateur.
Le second problème provient de la discontinuité de $S(\hat{x},u,y)$ sur la surface de commutation $C\tilde{x} = 0$, qui a pour conséquence l'apparition d'un régime oscillatoire à hautes fréquences (ou *chattering*) dans l'erreur d'observation. On note que ce phénomène peut être atténué en introduisant une limite de continuité de la fonction de commutation $S(\hat{x},u,y)$ dans le voisinage de $\tilde{x} = 0$ [WAL87b] :

$$S(\hat{x},u,y) = \begin{cases} \dfrac{P^{-1}C^T C\tilde{x}\rho(u)}{\|C\tilde{x}\rho(u)\|}\rho(u) & \text{si } \|C\tilde{x}\rho(u)\| > \varepsilon \\ \dfrac{P^{-1}C^T C\tilde{x}\rho(u)}{\varepsilon}\rho(u) & \text{si } \|C\tilde{x}\rho(u)\| \leq \varepsilon \end{cases}$$

avec $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.
Le seul problème est lié au choix de ε. On remarque que l'utilisation de cette dernière fonction de commutation n'assurera qu'une bornitude uniforme arbitrairement petite de l'erreur d'observation (la borne sur l'erreur dépendant du paramètre ε), contre une convergence exponentielle pour (2.80).

Remarque 2.10 *Un autre choix de S est proposé dans [DAW92] :*

$$S(\hat{x},u,y) = \frac{P^{-1}C^T C\tilde{x}\rho(u)^2}{\|C\tilde{x}\|\rho(u) + \varepsilon e^{-\beta t}}$$

où ε et β sont des scalaires positifs. Les auteurs démontrent que cette fonction de commutation garantit une convergence exponentielle globale de l'erreur d'observation. ▼

2.4.4 Observateurs sur horizon glissant

Le problème de la synthèse d'observateurs des systèmes non linéaires a été abordé récemment sous un angle différent en utilisant les techniques d'estimation sur fenêtre glissante [GRI90, MIC92, MOR94, MIC95, MOR95]. L'objectif de ces méthodes n'est plus de fournir des solutions analytiques, mais des solutions numériques issues d'algorithmes de minimisation, en transformant le problème classique d'estimation dynamique en la résolution, au sens des moindres carrés, d'un système d'équations non linéaires.

2.4.4.1 Minimisation d'un critère quadratique

Considérons le système non linéaire temps-continu suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{2.82a}$$
$$y(t) = h(x(t)) \tag{2.82b}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$. Nous faisons les hypothèses que $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m \in L_\infty$ l'ensemble des fonctions mesurables et localement bornées sur $\mathbb{R}^m$, et que les fonctions f et g sont localement lipschitziennes par rapport à leurs arguments avec $f(0,0) = 0$.

Pour tout état $x_1 \in \mathbb{R}^n$, nous désignons par $\chi_u(.,t,x_1)$ la solution du système (2.82) soumis à la commande u et passant par l'état x_1 à l'instant t.

Sur un horizon d'observation $[t-T, t]$, l'objectif de cette approche est de déterminer une estimation $x(t-T)$ de l'état en début d'horizon en minimisant un critère quadratique, qui est la somme des erreurs de prédiction de la sortie sur cet horizon [MIC92, MIC95] :

$$\min_{\hat{x}(t-T)} \int_{t-T}^{t} \|y(s) - h(\chi_u(s, t-T, \hat{x}))\|^2 \, \mathrm{d}s \tag{2.83}$$

où $y(.) = h(\chi_u(., 0, x_0))$ est la sortie mesurée du système.

Soit $\hat{x}^\star(t-T)$ la solution du problème de minimisation (2.83), une estimation de l'état courant du système (2.82) est obtenue à partir de (2.82a) via :

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \int_{t-T}^{t} f(x(s), u(s)) \, \mathrm{d}s \\ x(t-T) &= \hat{x}^\star(t-T) \end{aligned} \tag{2.84}$$

Le résultat suivant établit les conditions de convergence de cet algorithme :

Théorème 2.14 ([MIC95]) *Pour toute entrée admissible $u \in L_\infty$, si les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

i. Les fonctions f et g sont localement lipschitziennes par rapport à leurs arguments,

ii. Le système (2.82) est parfaitement connu et aucun bruit ne le perturbe,

iii. Le système (2.82) est uniformément observable sur $[t-T,t]$ *i.e. il existe un réel* $\gamma > 0$ *tel que pour toute paire d'états* $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}^n$ *:*

$$\int_{t-T}^{t} \|h(\chi_u(s,t,x_1)) - h(\chi_u(s,t,x_2))\|^2 \,\mathrm{d}s \geq \gamma \|x_1 - x_2\|^2 \tag{2.85}$$

alors l'observateur (2.83)-(2.84) est exponentiellement convergent. ■

La démonstration complète de ce théorème se trouve dans [MIC95] et ne sera pas détaillée dans ce qui suit. L'hypothèse *ii.* de parfaite connaissance du modèle et de bruit nul permet de s'assurer que le minimum du critère (2.83) est un minimum global, et que le vecteur d'état estimé convergera bien vers le vecteur d'état courant. Dans le cas contraire, l'algorithme reste stable mais le minimum du critère (2.83) n'est plus nécessairement la solution du problème d'observation, un biais apparaît sur les états observés. L'hypothèse *iii.* d'observabilté uniforme signifie simplement qu'il n'existe pas de paires d'états indistinguables sur la fenêtre temporelle $[t-T,t]$.

Toutefois, nous remarquons que les hypothèses de parfaite connaissance du modèle et d'absence de bruit sont très restrictives, et peuvent limiter l'utilisation pratique de tels observateurs.

Nous notons que cette approche peut être aisément transposée au cas temps-discret [ROB96, HEN97]. A ce titre, considérons le modèle stochastique suivant :

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + w_k \tag{2.86a}$$
$$y_k = h(x_k, u_k) + v_k \tag{2.86b}$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$ et $y_k \in \mathbb{R}^p$. $w_k \in \mathbb{R}^n$ et $v_k \in \mathbb{R}^p$ sont des bruits additifs sur le modèle et les mesures.

Sur une horizon de N observations, l'objectif est désormais d'estimer l'état $x_{k-N+1/k}$ et la séquence $w_{k-N+1/k}, \ldots, w_{k-1/k}$ par résolution du problème de minimisation :

$$\min_{\{\hat{x}_{k-N+1/k}, \hat{w}_{k-N+1/k}, \ldots, \hat{w}_{k-1/k}\}} \left\|\hat{x}_{k-N+1/k} - \hat{x}_{k-N+1/k-N}\right\|^2_{P^{-1}_{k-N+1/k-N}} + \sum_{i=k-N+1}^{k-1} \left\|\hat{w}_{i/k}\right\|^2_{Q^{-1}} + \sum_{i=k-N+1}^{k} \left\|y_i - h(\hat{x}_{i/k}, u_i)\right\|^2_{R^{-1}} \tag{2.87}$$

avec $\hat{x}_{i+1/k} = f(\hat{x}_{i/k}, u_i) + \hat{w}_{i/k}$, $\|x\|_{Q^{-1}} = x^T Q^{-1} x$ et $\|x\|_{R^{-1}} = x^T R^{-1} x$.

Les matrices de pondération R^{-1}, Q^{-1} et $P^{-1}_{k-N+1/k-N}$ représentent les inverses respectives des matrices de covariance des bruits w_k, v_k et de l'état initial estimé en début d'horizon $\hat{x}_{k-N+1/k-N}$.

Si $\{\hat{x}^\star_{k-N+1/k}, \hat{w}^\star_{k-N+1/k}, \ldots, \hat{w}^\star_{k-1/k}\}$ désigne la solution optimale du problème de minimisation (2.87), une estimation de l'état aux instants k_0+i, avec $k_0 = k-N+1$, est déterminée à partir de l'expression récursive :

$$\hat{x}_{k_0+i+1/k} = f(\hat{x}_{k_0+i/k}, u_{k_0+i}) + \hat{w}^\star_{k_0+i/k} \tag{2.88}$$

$$\hat{x}_{k_0/k} = \hat{x}^{\star}_{k_0/k}$$

Dans le cas des systèmes LTI stochastiques, $\hat{x}_{k-N+1/k-N}$ et $P^{-1}_{k-N+1/k-N}$ sont calculés à partir du prédicteur de Kalman et servent, à chaque instant, de conditions initiales pour le calcul de l'estimée courante [ROB96] :

$$\hat{x}_{k-N+1/k-N} = A\hat{x}_{k-N/k-N} + Bu_{k-N} \tag{2.89}$$
$$P^{-1}_{k-N/k-N} = P^{-1}_{k-N/k-N-1} + C^T R^{-1} C \tag{2.90}$$
$$P^{-1}_{k-N+1/k-N} = Q^{-1} - Q^{-1}A(P^{-1}_{k-N/k-N} + A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q^{-1} \tag{2.91}$$

où $\hat{x}_{k-N/k-N}$ est la solution du problème de minimisation à l'instant $k-N$ et $P_{k-N+1/k-N} = \mathrm{cov}(x_{k-N+1} - \hat{x}_{k-N+1/k-N})$.

Cette méthode reste valable dans le cas non-linéaire en utilisant le prédicteur de Kalman étendu, c.-à-d. (2.89)-(2.91) avec $A_{k-N} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_{k-N/k-N}, u_{k-N})$ et $C_{k-N+1} = \dfrac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_{k-N+1/k-N}, u_{k-N+1})$.

Cette approche permet également de prendre en compte une connaissance empirique (ordre de grandeur des variables d'état, des paramètres, ...) des systèmes étudiés grace à l'adjonction de contraintes physiques (sur l'état et les bruits) au problème de minimisation (2.87) :

$$\begin{aligned} v_{\min} \leq \hat{v}_{i/k} \leq v_{\max} \qquad & i = k-N+1, \ldots, k \\ x_{\min} \leq \hat{x}_{i/k} \leq x_{\max} \qquad & i = k-N+1, \ldots, k \\ w_{\min} \leq \hat{w}_{i/k} \leq w_{\max} \qquad & i = k-N+1, \ldots, k-1 \end{aligned}$$

Dans ce cas, il convient uniquement d'utiliser un algorithme de minimisation sous contraintes.

Lorsque le bruit d'état est négligeable et quand les mesures sont uniquement entachées d'un bruit blanc centré, l'expression de l'estimateur sur horizon glissant (2.87)-(2.88) est beaucoup plus simple, et se résume à estimer l'état au début de l'horizon d'observation, par minimisation du critère quadratique suivant sur l'erreur de sortie :

$$\min_{\hat{x}_{k-N+1/k}} \sum_{i=k-N+1}^{k} \left\| y_i - h(\hat{x}_{i/k}, u_i) \right\|^2 \tag{2.92}$$

Si $\hat{x}^{\star}_{k-N+1/k}$ est la solution du problème de minimisation (2.92), une estimation de l'état aux instants $k_0 + i$, avec $k_0 = k - N + 1$, est donnée par :

$$\hat{x}_{k_0+i+1/k} = f(\hat{x}_{k_0+i/k}, u_{k_0+i})$$
$$\hat{x}_{k_0/k} = \hat{x}^{\star}_{k_0/k}$$

Cet estimateur constitue en quelque sorte la version temps-discret de l'observateur (2.83)-(2.84).

En conclusion, lorsqu'il existe des méthodes d'optimisation adéquates pour minimiser les critères quadratiques (2.83), (2.87) ou (2.92), cette approche nous semble très intéressante car elle ne requiert ni linéarisation, ni structure particulière des systèmes étudiés. L'unique paramètre de réglage est la longueur N de l'horizon d'observation[2].

Nous remarquons cependant qu'aucune indication n'est donnée quant à la méthode d'optimisation à choisir pour assurer la convergence de l'observateur.

2.4.4.2 Approche algébrique. Méthode de Newton

Une autre méthode, développée dans [GRI90, MOR92b, MOR95] pour les systèmes temps-discret, consiste à ramener le problème de la synthèse d'observateurs sur horizon glissant en la résolution d'un système de N équations non linéaires par la méthode de Newton.

Considérons le système non linéaire (2.86) avec $w_k = 0$ et $v_k = 0$.
Soient $U_{[k-N+1,k]}$ et $Y_{[k-N+1,k]}$ les séquences respectives de N entrées et N sorties passées, et soit $\Phi(x_{k-N+1}, U_{[k-N+1,k]})$ la séquence de N sorties passées prédites, générées à partir de (2.86) pour un état initial x_{k-N+1} et par la séquence d'entrées $U_{[k-N+1,k]}$ i.e. :

$$U_{[k-N+1,k]} = \begin{pmatrix} u_{k-N+1} \\ u_{k-N+2} \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}, \quad Y_{[k-N+1,k]} = \begin{pmatrix} y_{k-N+1} \\ y_{k-N+2} \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

$$\Phi(x_{k-N+1}, U_{[k-N+1,k]}) = \begin{pmatrix} h(x_{k-N+1}, u_{k-N+1}) \\ h(f(x_{k-N+1}, u_{k-N+1}), u_{k-N+2}) \\ \vdots \\ h(f^{N-1}(x_{k-N+1}, U_{[k-N+1,k-1]}), u_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{k-N+1} \\ y_{k-N+2} \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

L'objectif de cette méthode est d'estimer l'état x_{k-N+1}, solution du système de N équations non linéaires suivant :

$$Y_{[k-N+1,k]} - \Phi(x_{k-N+1}, U_{[k-N+1,k]}) = 0 \tag{2.93}$$

Dans le cas où la matrice jacobienne $\partial\Phi/\partial x$ est carrée[3], l'algorithme de Newton apporte une solution itérative à ce problème :

$$\hat{x}^{i+1}_{k-N+1} = \hat{x}^{i}_{k-N+1} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(\hat{x}^{i}_{k-N+1}, U_k)\right)^{-1} (Y_k - \Phi(\hat{x}^{i}_{k-N+1}, U_k)) \tag{2.94}$$

où $U_k = U_{[k-N+1,k]}$ et $Y_k = Y_{[k-N+1,k]}$.

A partir de (2.94), nous définissons l'application :

$$\Theta^{U_k,Y_k}(z_k) = z_k + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}(z_k, U_k)\right)^{-1} (Y_k - \Phi(z_k, U_k)) \tag{2.95}$$

2. N représente le nombre minimum de mesures nécessaires pour reconstruire l'état d'un système. Dans [AEY81], il est montré que, génériquement, N peut être choisi égal à $2n+1$ où n est la dimension du système étudié.

3. Lorsque le système d'équations (2.93) possède plus d'équations que d'états (i.e. $Np > n$), l'inverse dans (2.94) sera remplacée par une pseudo-inverse.

Sur un horizon de N observations, une estimation de l'état courant de (2.86) est alors donnée par le système dynamique suivant [MOR95] :

$$z_{k+1} = \left(\Theta^{U_k,Y_k}\right)^{(d)}(f(z_k, u_{k-N})) \tag{2.96a}$$

$$\hat{x}_k = f^N(z_k, U_{[k-N,k-1]}) \tag{2.96b}$$

où $z_k \in \mathbb{R}^n$ et $\left(\Theta^{U_k,Y_k}\right)^{(d)}(.)$ désigne la $d^{\text{ième}}$ composition de $\Theta^{U_k,Y_k}(.)$ avec elle-même.

Les conditions suffisantes de convergence – quantifiant notamment le nombre minimum d d'itérations à effectuer et le domaine d'attraction de l'observateur (2.96) – ont été établies dans [GRI90, MOR95]. On note que seule une convergence asymptotique quasi-locale de l'algorithme est garantie.

Afin d'étendre le domaine de convergence de l'observateur (2.96), une version hybride continue-discrète de ce dernier a été développée dans [MOR92b, MOR95].
Considérons à nouveau le système (2.86) avec $w_k = v_k = 0$, et le système (2.93) de N équations. Si la matrice $\partial\Phi/\partial x$ est carrée, le système d'équations $Y_k - \Phi(x_{k+N-1}, U_k) = 0$ peut être résolu à l'aide de la méthode de Newton discrète munie d'un pas d'échantillonnage μ_i :

$$\hat{x}^{i+1}_{k+N-1} = \hat{x}^i_{k+N-1} + \mu_i \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(\hat{x}^i_{k+N-1}, U_k)\right)^{-1} (Y_k - \Phi(\hat{x}^i_{k+N-1}, U_k)) \tag{2.97}$$

Lorsque le pas d'échantillonnage μ_i devient infinitésimal, nous notons que la dynamique de l'équation (2.97) se rapproche de celle de l'équation différentielle :

$$\dot{\hat{x}}_{k+N-1} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(\hat{x}_{k+N-1}, U_k)\right)^{-1} (Y_k - \Phi(\hat{x}_{k+N-1}, U_k)) \tag{2.98}$$

$$\hat{x}_{k+N-1}(0) = \hat{x}^0_{k+N-1}$$

Dans ce cas, un observateur hybride continu-discret pour (2.86) est donné par le théorème suivant :

Théorème 2.15 ([MOR92b, MOR95]) *Sur un horizon de N observations et sous les hypothèses suivantes :*

i. Le système (2.86) est globalement N-uniformément observable et satisfait la condition de N-observabilité au sens du rang pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

ii. Les fonction f et h sont $\mathcal{C}^1$ avec $L = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, u\in\mathbb{R}^m} \left\|\frac{\partial f}{\partial x}(x,u)\right\| < \infty$,
$\beta = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, U\in\mathbb{R}^{m\times N}} \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,U)\right\| < \infty$ et $\alpha = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, U\in\mathbb{R}^{m\times N}} \left\|\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,U)\right)^{-1}\right\| < \infty$,

alors le système dynamique :

$$\dot{z}^-_k = K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}(z^-_k, U_k)\right)^{-1} (Y_k - \Phi(z^-_k, U_k)) \tag{2.99a}$$

$$z^-_k(kT) = z_{k-1}$$

$$z_k = f(z_k^-(kT), u_{k-N+1})$$
$$\hat{x}_k = f^{N-2}(z_k, U_{[k-N+2,k-1]}) \tag{2.99b}$$

est un observateur asymptotique global pour (2.86) si

$$K \geq \frac{1}{T}\log(2L\alpha\beta) \tag{2.100}$$

T est la période d'échantillonnage telle que $x_k = x(kT)$ et $x_{k+1} = x((k+1)T)$. ■

En général, les conditions de stabilité *i.* et *ii.* ne sont vérifiées que localement sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, d'où une convergence exponentielle locale de l'observateur (2.99).

A chaque itération, on remarque que l'observateur (2.96) demande le calcul explicite de la matrice Jacobienne $\partial\Phi/\partial x$. Cette opération étant souvent prohibitive au niveau temps de calcul, une version modifiée de la méthode de Newton, basée sur une mise à jour itérative de $\partial\Phi/\partial x$, est proposée dans [MOR95].

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, après un bref rappel sur l'observation des systèmes linéaires et affines en l'état, nous avons passé en revue une grande partie des approches disponibles pour la synthèse d'observateurs des systèmes non linéaires temps-continu et temps-discret. A ce titre, nous avons successivement présenté les techniques de linéarisation exacte et approchée de l'erreur d'estimation, les méthodes d'observation à grand gain pour des systèmes écrits indifféremment dans les coordonnées initiales ou dans une base canonique observable, les observateurs à structure variable et, en dernier lieu, les estimateurs sur horizon glissant. Il convient cependant de signaler que cette revue bibliographique n'est pas exhaustive, d'autres approches particulièrement intéressantes, mais difficiles à classer parmi les catégories d'estimateurs décrits précédemment peuvent être consultées dans [SCH85, HU91, TSI89, TSI90, ZIM94, XIA97] pour le cas temps-continu, et dans [SHA97] pour le cas temps-discret.

Bien que très performantes pour la plupart, il convient de porter un regard critique sur les techniques d'estimation décrites précédemment. D'une manière générale, nous remarquons que la plupart de ces méthodes : exception faite des estimateurs sur horizon glissant) ne s'appliquent qu'à des classes particulières de systèmes (systèmes affines en l'état ou en la commande, systèmes à mesures linéaires avec dérive localement ou globalement lipschitzienne ou bien systèmes pour lesquels une forme canonique observable existe par transformation d'état. En outre, les conditions d'existence des observateurs présentées sont en général restrictives (cf. techniques de linéarisation exacte de l'erreur d'observation) et, lorsqu'un observateur existe pour un système donné, la synthèse et la mise en œuvre de ce dernier s'avèrent souvent difficiles voire rédhibitoires.

Ces constatations nous ont conduit à aborder le problème de l'observation des systèmes non linéaires de la façon la plus générale et la moins restrictive possible. En partant de considérations pratiques, nous nous sommes orientés, de façon naturelle, vers la classe importante des estimateurs non linéaires utilisant le formalisme du filtre de Kalman étendu. Cette approche donne des résultats tout à fait satisfaisants, et ne semble pas posséder les inconvénients des méthodes citées précédemment. Toutefois, un problème récurrent lié à

l'utilisation de cette classe d'estimateurs est le fait qu'il n'existe que très peu de résultats relatifs quant à leur stabilité. Ce problème demeure un sujet de recherche ouvert et sera à l'origine des travaux présentés dans le chapitre suivant.

Nous terminerons par une phrase empruntée à F. Deza dans [DEZ91] résumant bien l'état actuel de la recherche sur la synthèse d'observateurs non linéaires et les axes vers lesquels il semble naturel de s'orienter : *"Pour observer un système non linéaire, nous disposons, d'une part de méthodes théoriques difficilement applicables, d'autre part de méthodes appliquées mais non justifiées théoriquement"*.

Chapitre 3

Observateurs de type Kalman Etendu

3.1 Introduction

Le filtre de Kalman étendu (FKE) ou observateur de Kalman étendu (OKE) dans un contexte déterministe est, sans le moindre doute, l'une des techniques d'estimation de l'état des systèmes non linéaires les plus fréquemment utilisées en pratique et trouve, à ce titre, application dans de nombreux domaines tels que le filtrage adaptatif [LJU79, GOO84], l'observation d'état [MIS89, SON95], la commande robuste [SAF80], le guidage de missiles [SPE81, SON85], ... Cette approche est à classer parmi les techniques de linéarisation au premier ordre de l'erreur d'observation et consiste essentiellement à imiter le filtre de Kalman pour les systèmes LTI en linéarisant, à chaque instant, le système étudié le long des trajectoires estimées. Le FKE s'adresse à une large classe de systèmes et ne semble pas posséder les inconvénients de la plupart des algorithmes présentés dans le chapitre précédent. Il est cependant connu que la stabilité de cet estimateur n'est généralement pas acquise et que seuls des résultats locaux de convergence sont garantis.

De nombreuses publications et ouvrages traîtent de la synthèse de ce filtre [JAZ70, AND79, CHE93], mais Ljung [LJU79], puis Ursin [URS80] ont été parmi les premiers auteurs à étudier les mécanismes de convergence du FKE dans le cadre de l'estimation conjuguée de l'état et des paramètres des systèmes LTI temps-discret. Un résultat global de convergence a été obtenu sous couvert de quelques modifications de l'algorithme. Une version temps-continu de leur approche est donnée dans [WOL93]. Plus récemment, Song et Grizzle [SON92, SON95] et La Scala *et al.* [LAS95] dans le cas non linéaire temps-discret, Deza *et al.* [DEZ91, DEZ92, DEZ93], Reif *et al.* [REI98, REI99b] et Fromion et Ferreres [FRO97] dans le cas non linéaire temps-continu ont repris le problème de l'étude de la convergence du FKE dans un cadre déterministe. Leurs travaux utilisent les résultats antérieurs de Deyst et Price [DEY68], Jazwinsky [JAZ70] ou Baras *et al.* [BAR88] sur la bornitude de la covariance de l'erreur d'estimation du filtre de Kalman appliqué aux systèmes LTV.

Ces résultats très encourageants sont directement à l'origine de nos travaux. Dans ce chapitre, après avoir démontré la convergence exponentielle globale du filtre de Kalman en tant qu'observateur des systèmes LTV, nous présenterons quelques résultats de stabilité d'observateurs de type Kalman étendu dûs à Deza *et al.* [DEZ92, DEZ93] et Reif *et al.* [REI98, REI99b] avant d'apporter une nouvelle preuve de la convergence de l'OKE pour les systèmes non linéaires temps-discret [BOU97a, BOU99]. Notre approche repose, d'une part sur les résultats antérieurs de Deyst et Price [DEY68] et Song et Grizzle [SON95], garantissant la stricte positivité et la bornitude de la solution P_k de l'équation de Riccati aux

différences sous la condition d'observabilité uniforme du système linéarisé le long des trajectoires estimées de l'OKE, d'autre part sur une nouvelle technique de linéarisation "exacte" au premier ordre récemment développée dans [BOU97d]. Cette méthode consiste à paramétrer l'analyse de convergence de l'OKE en introduisant des matrices diagonales inconnues (notées α_k et β_k) quantifiant les différents résidus d'ordre supérieur ou égal à deux, issus de la linéarisation au premier ordre du système. Un tel paramétrage nous permettra d'établir des conditions suffisantes de convergence de l'OKE et de démontrer le rôle fondamental (souvent délaissé à l'exception près de [DEZ92, DEZ93, REI98, REI99b]) joué par les matrices de pondérations Q_k et R_k (les covariances des bruits de système et de mesures dans le cas LTV stochastique) dans l'amélioration de la stabilité et des performances de l'OKE. Un réglage judicieux de ces matrices permettant d'étendre le domaine de convergence de l'observateur sera proposé.

Dans une seconde partie, nous passerons à la construction d'observateurs de type Kalman étendu d'ordre réduit pour les systèmes non linéaires temps-discret [AUB98b]. Notre approche concerne la classe des systèmes à mesures linéaires. L'analyse de la convergence des deux observateurs proposés suit une méthodologie semblable à celle de l'OKE d'ordre plein et est, de ce fait, fondée sur une linéarisation "exacte" au premier ordre du système. Nous donnerons des conditions suffisantes d'existence de ces observateurs et démontrerons, comme dans le cas d'ordre plein, à quel point le choix de certaines matrices de pondération est important pour améliorer les performances des OKE d'ordre réduit proposés.

Comme il existe des situations où les systèmes ne sont pas réguliers (existence de contraintes algébriques ou présence d'entrées inconnues), nous formulerons, dans une troisième partie, un observateur de type Kalman étendu pour la classe des systèmes non linéaires singuliers temps-discret à mesures linéaires [BOU97b]. Notre approche utilise la condition d'observabilité à l'infini du système étudié et traîte le cas où la matrice E peut être rectangulaire. De même que dans les parties précédentes, nous établirons des conditions suffisantes d'existence de cet observateur via l'introduction d'une matrice diagonale inconnue β_k modélisant les différents résidus issus de la linéarisation au premier ordre du système.

Enfin, nous développerons un estimateur séparé état/biais de type Kalman étendu pour les systèmes non linéaires temps-discret sujet à des biais constants [BOU97c, BOUa]. Après avoir démontrer analytiquement l'équivalence entre l'estimateur séparé état/biais proposé et l'OKE global (c.-à-d. lorsque le vecteur d'état est augmenté par le vecteur des biais inconnus), nous en étudierons la convergence et énoncerons des conditions suffisantes d'existence. Les conditions de convergence sont peu restrictives et obtenues en utilisant la technique de linéarisation "exacte" au premier ordre déjà décrite précédemment. En outre, nous montrerons que ces conditions dépendent explicitement du choix de certaines matrices de pondération (nommées Q_k^x, Q_k^b et R_{k+1}^x) lors de la synthèse de l'estimateur. Un exemple illustant cette propriété sera donné.

3.2 Observateurs de type Kalman pour les systèmes LTV temps-discret

Les résultats présentés dans cette partie constituent en quelque sorte la version temps-discret de ceux exposés en sections 2.3.1 et 2.3.2 et serviront de base à l'analyse future de la convergence d'observateurs de type Kalman étendu pour les systèmes non linéaires.

3.2.1 Formulation de l'observateur

Considérons le système LTV :

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \tag{3.1a}$$
$$y_k = C_k x_k \tag{3.1b}$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$ et $y_k \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement le vecteur d'état, d'entrée et de sortie à l'instant k. $(A_k)_{n\times n}$, $(B_k)_{n\times m}$ et $(C_k)_{p\times n}$ sont des matrices temps-variant.

Nous faisons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 3.1 *A_k est inversible et A_k, C_k sont uniformément bornées i.e. il existe $\bar{a}, \bar{c} > 0$ tels que :*

$$\bar{a} = \sup_{k\geq 0} \|A_k\| < \infty \quad et \quad \bar{c} = \sup_{k\geq 0} \|C_k\| < \infty$$

Au système déterministe (3.1), nous associons le système stochastique artificiel suivant :

$$\xi_{k+1} = A_k \xi_k + B_k u_k + G_k w_k \tag{3.2a}$$
$$y_k = C_k \xi_k + D_k v_k \tag{3.2b}$$

où $\xi_k \in \mathbb{R}^n$. $w_k \in \mathbb{R}^r$ et $v_k \in \mathbb{R}^s$ sont des bruits additifs blancs, mutuellement indépendants et de covariances unitaires. G_k et D_k sont des matrices dépendantes du temps, de dimensions respectives $n \times r$ et $p \times s$.

Pour estimer l'état de (3.2), nous introduisons l'estimateur à structure classique prédiction-correction suivant :

$$\hat{\xi}_{k+1} = \hat{\xi}_{k+1/k} + K_{k+1}(y_{k+1} - C_{k+1}\hat{\xi}_{k+1/k}) \tag{3.3}$$

où la prédiction $\hat{\xi}_{k+1/k} = A_k \hat{\xi}_k + B_k u_k$.
La dynamique de l'erreur d'estimation $\tilde{\xi}_k = \xi_k - \hat{\xi}_k$ est donnée par :

$$\tilde{\xi}_{k+1} = (A_k - K_{k+1}C_{k+1}A_k)\tilde{\xi}_k + (G_k - K_{k+1}C_{k+1}G_k)w_k - K_{k+1}D_{k+1}v_{k+1} \tag{3.4}$$

Le filtre de Kalman pour le système stochastique (3.2) que nous utiliserons par la suite en tant qu'observateur pour le système déterministe (3.1) résulte de la minimisation par rapport à $K_{k+1} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ de la covariance de l'erreur d'estimation $P_{k+1} = \mathscr{E}\{\tilde{\xi}_{k+1}\tilde{\xi}_{k+1}^T\}$ et est donné par[1] :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1}(y_{k+1} - C_{k+1}\hat{x}_{k+1/k}) \tag{3.5}$$
$$P_{k+1} = (I_n - K_{k+1}C_{k+1})P_{k+1/k} \tag{3.6}$$
$$= (P_{k+1/k}^{-1} + C_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} C_{k+1})^{-1} \tag{3.7}$$

1. Comme le système stochastique (3.2) est purement artificiel, nous remplaçons la variable d'état ξ_k par x_k sans aucune perte de généralité.

$$\hat{x}_{k+1/k} = A_k\hat{x}_k + B_k u_k \tag{3.8}$$
$$P_{k+1/k} = A_k P_k A_k^T + Q_k \tag{3.9}$$

avec

$$K_{k+1} = P_{k+1/k}C_{k+1}^T(C_{k+1}P_{k+1/k}C_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \tag{3.10}$$

où $P_0 = \mu I_n > 0$, $\hat{x}_{k+1}$ et $\hat{x}_{k+1/k}$ représentent l'estimation et la prédiction de l'état x_{k+1} à l'instant $k+1$. Dans un contexte stochastique, l'optimalité (au sens du maximum de vraisemblance) du filtre de Kalman pour le système (3.2) est garantie lorsque Q_k et R_{k+1} sont les covariances des bruits de système et de mesures (c.-à-d. $Q_k = G_k G_k^T$ et $R_{k+1} = D_{k+1}D_{k+1}^T$), P_{k+1} et $P_{k+1/k}$ dénotent les covariances des erreurs d'estimation et de prédiction. Dans le cadre déterministe de notre étude, Q_k et R_{k+1} représenteront des matrices de pondération dont le choix est libre (un choix usuel est $Q_k = \varepsilon_1 I_n$, $R_{k+1} = \varepsilon_2 I_p$ avec $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1$), P_{k+1} et $P_{k+1/k}$ seront appelées "pseudo-covariances" des erreurs d'estimation et de prédiction.

Remarque 3.1 *Par analogie avec le cas temps-continu (cf. sections 2.3.1 et 2.3.2), on démontre que l'observateur (3.5)-(3.10) est la solution du problème de minimisation :*

$$\min_{\{\xi_0,\hat{w}_0,\ldots,\hat{w}_i\}} \|\xi_0 - \hat{x}_0\|^2_{P_0^{-1}} + \sum_{i=1}^{k} \|\hat{w}_i\|^2_{Q_i^{-1}} + \sum_{i=1}^{k+1} \|y_i - C_i\xi_i\|^2_{R_i^{-1}} \tag{3.11}$$

avec $\xi_{i+1} = A_i\xi_i + B_i u_i + \hat{w}_i$, $P_0 = \mu I_n > 0$, $Q_i \geq \underline{q} I_n > 0$ *et* $R_i \geq \underline{r} I_p > 0$.

Lorsque $\{\xi_0^\star, \hat{w}_0^\star, \ldots, \hat{w}_i^\star\}$ *désigne la solution optimale du problème de minimisation (3.11), l'estimée* $\hat{x}_{k+1}$ *de l'état de (3.1) est le point final de la trajectoire* $\hat{x}_{i+1} = A_i\hat{x}_i + B_i u_i + \hat{w}_i^\star$ *avec* $\hat{x}_0 = \xi_0^\star$, *pour* $i = 0, \ldots, k$. ▼

3.2.2 Analyse de convergence

Soient $\tilde{x}_{k+1}$ et $\tilde{x}_{k+1/k}$ les erreurs d'estimation et de "prédiction" définies par :

$$\tilde{x}_{k+1} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1} \tag{3.12}$$
$$\tilde{x}_{k+1/k} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k} \tag{3.13}$$

Considérons la fonction de Lyapunov candidate $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{N}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$, $V(0,k) = 0$:

$$V_k = V(\tilde{x}_k, k) = \tilde{x}_k^T P_k^{-1} \tilde{x}_k \tag{3.14}$$

et montrons que la suite $\{V_k\}_{k\geq 0}$ est strictement décroissante, c.-à-d. qu'il existe un réel $\zeta \in]0,1[$ tel que :

$$V_{k+1} - V_k \leq -\zeta V_k \tag{3.15}$$

Préalablement à toute étude de convergence, comme la matrice P_k^{-1} utilisée pour générer la fonction de Lyapunov V_k est variante dans le temps, il convient de s'assurer de sa positivité et de sa bornitude afin de valider son choix dans (3.14). Soient $\mathcal{W}^c$ le grammien de commandabilité de la paire $(A_k, Q_k^{1/2})$ et $\mathcal{W}^o$ le grammien d'observabilité de la paire $(A_k, R_k^{-1/2}C_k)$ définis par :

$$\mathcal{W}^c_{[k-M,k]} = \sum_{i=k-M}^{k-1} \phi_{[k,i+1]} Q_i \phi_{[k,i+1]}^T \tag{3.16}$$

$$\mathcal{W}^o_{[k-M,k]} = \sum_{i=k-M}^{k} \phi^T_{[i,k]} C_i^T R_i^{-1} C_i \phi_{[i,k]} \tag{3.17}$$

pour un entier $M \geq 0$ et pour tout $k \geq M$ avec :

$$\phi_{[k,i]} = A_{k-1} A_{k-2} \dots A_i$$
$$\phi_{[i,k]} = \phi^{-1}_{[k,i]} \quad \text{et} \quad \phi_{[k,k]} = I_n$$

La bornitude de la matrice de covariance P_k est garantie par le lemme suivant :

Lemme 3.1 ([DEY68, SON95]) *Considérons la solution P_k de l'équation de Riccati aux différences (3.7). Si les matrices de pondération Q_k et R_{k+1} sont définies positives c.-à-d. $Q_k \geq \underline{q} I_n > 0$ et $R_{k+1} \geq \underline{r} I_p > 0$, et si le système (3.2) est uniformément complètement commandable et observable, c.-à-d. qu'il existe des nombres réels $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 > 0$ tels que :*

$$\alpha_1 I_n \geq \mathcal{W}^c_{[k-M,k]} \geq \alpha_2 I_n \qquad 0 < \alpha_2 \leq \alpha_1 < \infty \tag{3.18}$$
$$\beta_1 I_n \leq \mathcal{W}^o_{[k-M,k]} \leq \beta_2 I_n \qquad 0 < \beta_1 \leq \beta_2 < \infty \tag{3.19}$$

alors :

$$\underline{p} = \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2 \beta_2} \leq \|P_k\| \leq \frac{1 + \alpha_1 \beta_1}{\beta_1} = \bar{p} \tag{3.20}$$

pour $k \geq M$. ■

La démonstration de ce résultat important est donnée dans [DEY68, MCG73] et est rappelée en Annexe B.

Remarque 3.2 *A partir de (3.9) et (3.20), on montre que :*

$$\left\| P_{k/k-1} \right\| \leq \bar{p}\bar{a}^2 + \bar{q} = \nu$$

De la relation (3.7), il vient que $P_{k/k-1} \geq P_k$ et on obtient alors les bornes suivantes pour la matrice $P_{k/k-1}$:

$$\underline{p} \leq \left\| P_{k/k-1} \right\| \leq \nu$$

avec $0 < \underline{p} \leq \bar{p} \leq \nu < \infty$. ▼

Remarque 3.3 *En utilisant le problème dual de la commande optimale, la bornitude de la covariance de l'erreur d'estimation a également été démontrée par Baras et al. [BAR82, BAR88] dans le cas temps-continu. Ce résultat fait appel à des définitions sensiblement différentes (par rapport à (3.18)-(3.19)) des notions de commandabilité et détectabilité uniformes. On note que cette approche a été étendue par Song dans [SON92] au cas LTI discret.* ▼

La stricte positivité et la bornitude de P_k et $P_{k/k-1}$ étant établies, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.1 *Considérons le système déterministe (3.1) et le filtre de Kalman (3.5)-(3.10) pour le système stochastique (3.2). Sous les hypothèses 3.1, si le système (3.1) est complètement uniformément observable alors (3.5)-(3.10) est un observateur exponentiel global pour (3.1).* ■

Démonstration.
A partir de (3.9) et sous la condition d'inversibilité de la matrice A_k, nous avons :

$$A_k^{-1} P_{k+1/k} A_k^{-T} = P_k + A_k^{-1} Q_k A_k^{-T} \tag{3.21}$$

L'utilisation du lemme d'inversion matricielle (cf annexe A.1) permet d'inverser l'expression précédente et il vient que :

$$A_k^T P_{k+1/k}^{-1} A_k = P_k^{-1} - P_k^{-1}(P_k^{-1} + A_k^T Q_k^{-1} A_k)^{-1} P_k^{-1} \tag{3.22}$$

En l'absence de bruits et en utilisant (3.1a), (3.4), (3.5) et (3.8), les erreurs (3.12) et (3.13) s'écrivent :

$$\tilde{x}_{k+1} = (I_n - K_{k+1} C_{k+1}) \tilde{x}_{k+1/k} \tag{3.23}$$

$$\tilde{x}_{k+1/k} = A_k \tilde{x}_k \tag{3.24}$$

En substituant (3.24) dans (3.23) et (3.23) dans (3.14), nous avons :

$$V_{k+1} - V_k = \tilde{x}_k^T A_k^T (I_n - K_{k+1} C_{k+1})^T P_{k+1}^{-1} (I_n - K_{k+1} C_{k+1}) A_k \tilde{x}_k - \tilde{x}_k^T P_k^{-1} \tilde{x}_k \tag{3.25}$$

D'après (3.6), nous avons $P_{k+1/k}^{-1} = P_{k+1}^{-1}(I_n - K_{k+1} C_{k+1})$ et (3.25) se formule ainsi :

$$V_{k+1} - V_k = \tilde{x}_k^T A_k^T (P_{k+1/k}^{-1} - C_{k+1}^T K_{k+1}^T P_{k+1/k}^{-1}) A_k \tilde{x}_k - \tilde{x}_k^T P_k^{-1} \tilde{x}_k \tag{3.26}$$

A partir de (3.10), on démontre que $C_{k+1}^T K_{k+1}^T P_{k+1/k}^{-1} = C_{k+1}^T (C_{k+1} P_{k+1/k} C_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} C_{k+1}$ et (3.26) devient :

$$\begin{aligned} V_{k+1} - V_k &= \tilde{x}_k^T A_k^T P_{k+1/k}^{-1} A_k \tilde{x}_k - \tilde{x}_k^T P_k^{-1} \tilde{x}_k \\ &\quad - \tilde{x}_k^T A_k^T C_{k+1}^T (C_{k+1} P_{k+1/k} C_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} C_{k+1} A_k \tilde{x}_k \\ &\leq \tilde{x}_k^T A_k^T P_{k+1/k}^{-1} A_k \tilde{x}_k - \tilde{x}_k^T P_k^{-1} \tilde{x}_k \end{aligned} \tag{3.27}$$

En remplaçant (3.22) dans (3.27), il s'en suit que :

$$V_{k+1} - V_k \leq -\tilde{x}_k^T P_k^{-1} (P_k^{-1} + A_k^T Q_k^{-1} A_k)^{-1} P_k^{-1} \tilde{x}_k \tag{3.28}$$

Sous les hypothèses de bornitude de P_k, Q_k et A_k, la majoration suivante est alors immédiate :

$$\left\| A_k^T Q_k^{-1} A_k + P_k^{-1} \right\| \leq \left\| P_k^{-1} \right\| + \left\| Q_k^{-1} \right\| \|A_k\|^2 \leq \frac{1}{\underline{p}} + \frac{\bar{a}^2}{\underline{q}} = \frac{\underline{q} + \underline{p}\bar{a}^2}{\underline{q}\,\underline{p}} = \kappa$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{x}_k^T P_k^{-1} (A_k^T Q_k^{-1} A_k + P_k^{-1})^{-1} P_k^{-1} \tilde{x}_k \geq \frac{1}{\kappa} \left\| P_k^{-1} \tilde{x}_k \right\|^2$$

Comme $\left\| P_k^{-1} \tilde{x}_k \right\| \geq \frac{1}{\bar{p}} \|\tilde{x}_k\|$, on obtient :

$$V_{k+1} - V_k \leq -\frac{1}{\kappa \bar{p}^2} \|\tilde{x}_k\|^2 \tag{3.29}$$

En utilisant le principe de Rayleigh, nous avons l'inégalité :

$$\frac{1}{\bar{p}}\|\tilde{x}_k\|^2 \leq V_k \leq \frac{1}{\underline{p}}\|\tilde{x}_k\|^2 \tag{3.30}$$

Soit, à partir de (3.29) :

$$V_{k+1} - V_k \leq -\frac{\underline{p}}{\kappa\bar{p}^2}V_k \tag{3.31}$$

Comme $0 < \dfrac{\underline{p}}{\kappa\bar{p}^2} = \dfrac{\underline{p}^2\underline{q}}{\bar{p}^2(\underline{q}+\underline{p}\bar{a}^2)} < \dfrac{\underline{q}}{\underline{q}+\underline{p}\bar{a}^2} < 1$, en considérant les relations (3.30)-(3.31) et d'après le théorème 1.1, la dynamique de l'erreur d'observation est uniformément globalement exponentiellement stable et il vient que :

$$\|\tilde{x}_k\| \leq \sqrt{\frac{\bar{p}}{\underline{p}}}\|\tilde{x}_0\|\left(1 - \frac{\underline{p}}{\kappa\bar{p}^2}\right)^{(k-M)/2} \qquad \text{pour } k \geq M \tag{3.32}$$

❑

Remarque 3.4 *La propriété de régularité de A_k est toujours satisfaite pour les systèmes discrétisés par les méthodes usuelles (Euler, Runge-Kutta, ...). Nous remarquons cependant qu'il est possible de relaxer cette condition afin de démontrer la stabilité du filtre de Kalman pour les systèmes LTV [MOO80, BEN97a]. Nous reviendrons sur ce problème dans la suite de ce mémoire.* ▼

3.2.3 Application aux systèmes affines en l'état

Sur la base des résultats présentés dans le cas temps-continu en section 2.3.2, l'observateur de Kalman décrit précédemment peut être facilement étendu aux systèmes affines en l'état de la forme :

$$x_{k+1} = A(u_k)x_k + B(u_k) \tag{3.33a}$$
$$y_k = C(u_k)x_k \tag{3.33b}$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$,$u_k \in \mathbb{R}^m$ et $y_k \in \mathbb{R}^p$. Les applications $A(u_k)$, $B(u_k)$ et $C(u_k)$ sont supposées continues par rapport à u_k.

En remarquant que toute séquence d'entrées régulièrement persistantes, au sens de la définition 1.31, engendre un système LTV uniformément complètement observable, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.2 *Soit le système (3.33) pour lequel $A(u_k)$ est inversible et $A(u_k)$, $B(u_k)$ et $C(u_k)$ sont uniformément bornées sur le domaine des entrées admissibles. Alors, pour toute séquence d'entrées régulièrement persistantes pour (2.12), le système :*

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1}(y_{k+1} - C(u_{k+1})\hat{x}_{k+1/k}) \tag{3.34}$$
$$P_{k+1} = (I_n - K_{k+1}C)P_{k+1/k} \tag{3.35}$$

$$\hat{x}_{k+1/k} = A(u_k)\hat{x}_k + B(u_k) \tag{3.36}$$
$$P_{k+1/k} = A(u_k)P_kA^T(u_k) + Q_k \tag{3.37}$$

avec

$$K_{k+1} = P_{k+1/k}C(u_{k+1})^T(C(u_{k+1})P_{k+1/k}C(u_{k+1})^T + R_{k+1})^{-1} \tag{3.38}$$

est un observateur exponentiel global uniforme pour (3.33), avec $P_0 = \mu I_n > 0$, $Q_k \geq \underline{q} I_n > 0$ *et* $R_{k+1} \geq \underline{r} I_n > 0$. ■

La démonstration de ce résultat est analogue à celle du théorème 3.1.

3.3 Observateurs de type Kalman étendu pour les systèmes non linéaires

Dans cette section, nous proposons d'étendre la synthèse d'observateurs de type Kalman à la classe générale des systèmes non linéaires. Après une présentation succincte de quelques résultats importants sur la synthèse et l'analyse de convergence d'observateurs de type Kalman étendu (OKE) [DEZ91, DEZ92, DEZ93, REI98, REI99b], nous apportons une nouvelle preuve de la convergence de cette catégorie d'estimateur dans le cas temps-discret via l'introduction d'une nouvelle technique de linéarisation "exacte" au premier ordre du système le long des trajectoires estimées. Des conditions suffisantes d'existence de l'OKE sont établies et le rôle fondamental joué par les matrices de pondération Q et R dans l'amélioration de la stabilité et des performances de l'OKE est démontré. L'essentiel des résultats présentés a été publié dans [BOU97a, BOU99].

3.3.1 OKE : approche de Deza *et al.*

Nous présentons, dans un premier temps, l'observateur développé par Deza *et al.* [DEZ91, DEZ92, DEZ93]. Les auteurs utilisent le formalisme du filtre de Kalman étendu et démontrent qu'il existe un réglage des matrices de pondération Q et R permettant d'assurer la convergence exponentielle globale de cet estimateur. Leur méthode s'applique à une large classe de systèmes non linéaires MIMO à structure bloc-diagonale incluant notamment les systèmes observables pour toute entrée. Considérons un système écrit sous la forme canonique suivante :

$$\dot{x} = f(x,u) = A(x,u)x + B(x,u) \tag{3.39a}$$
$$y = (x_1, \ldots, x_{\rho_1+\ldots+\rho_{p-1}+1}) = Cx \tag{3.39b}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ et $\sum_{i=1}^{p} \rho_i = n$.
$A(x,u) = \text{bloc-diag}(A^1(x,u), \ldots, A^p(x,u))$ est une matrice bloc-diagonale où $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, $A^i(x,u)$ est une matrice de dimension $\rho_i \times \rho_i$ avec $\forall\, j,k \in \{1, \ldots, \rho_i\}$:

$$A^i_{j,k}(x,u) = \delta_{j+1,k}a^i_j(x,u)$$
$$a^i_j(x,u) = a^i_j(x_{\rho_1+\ldots+\rho_{i-1}+1}, \ldots, x_{\rho_1+\ldots+\rho_{i-1}+j}, u)$$

$B(x,u) = \text{bloc-diag}(B^1(x,u),\dots,B^p(x,u))$ est un vecteur où $\forall\, i \in \{1,\dots,p\}$, $B^i(x,u)$ est un vecteur de dimension ρ_i avec $\forall\, j \in \{1,\dots,\rho_i\}$:

$$B^i_j(x,u) = B^i_j(x_{\rho_1+\dots+\rho_{i-1}+1},\dots,x_{\rho_1+\dots+\rho_{i-1}+j},u).$$

Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 3.3 ([DEZ91, DEZ93]) *Considérons le système (3.39). Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

i. $\forall\, i \in \{1,\dots,p\}$ *et* $\forall\, j \in \{1,\dots,\rho_i\}$, *il existe* v^i_j *et* w^i_j *tels que :*

$$0 < v^i_j < a^i_j(x,u) < w^i_j \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, u \in \mathbb{R}^m,$$

ii. $A(x,u)$ *et* $B(x,u)$ *sont globalement lipschitz en* x, *uniformément en* u,

iii. x *et* u *sont bornés,*

alors, pour $\theta > 0$ *suffisamment grand, le système :*

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x},u) + S^{-1}C^TR^{-1}(y - C\hat{x}) \tag{3.40}$$

$$\dot{S} = -SQ_\theta S - f^{\star T}(\hat{x},u)S - Sf^\star(\hat{x},u) + C^TR_\theta^{-1}C \tag{3.41}$$

avec

$$f^\star(\hat{x},u) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x},u)$$

est un observateur exponentiel pour (3.39) si les matrices de pondération Q_θ *et* R_θ *sont choisies comme suit :*

- $Q_\theta = \theta\Delta^{-1}Q\Delta^{-1}$ *où* $Q > 0$ *et* Δ *est une matrice bloc-diagonale dont chaque bloc* Δ_i *de dimension* $\rho_i \times \rho_i$ *est donné par :*

$$\Delta_i = \theta^{\rho}i^{-1}\,\text{diag}(1, 1/\theta,\dots,1/\theta^{\rho}i^{-1})$$

- $R_\theta = \text{diag}(1/\theta^{\rho}1^{-1/2},\dots,1/\theta^{\rho}p^{-1/2})R\,\text{diag}(1/\theta^{\rho}1^{-1/2},\dots,1/\theta^{\rho}p^{-1/2})$ *avec* $R > 0$.

■

Esquisse de démonstration.
Soit $\tilde{x} = x - \hat{x}$ l'erreur d'observation. La démonstration de ce théorème est fondée sur la fonction de Lyapunov candidate $\tilde{x}^TS\tilde{x}$ et utilise les notations :

$$\begin{aligned}
\Gamma &= f(\hat{x},u) - f(x,u) - f^\star(\hat{x},u)\tilde{x} \\
&= B(\hat{x},u) - B(x,u) - B^\star(\hat{x},u)\tilde{x} + (A(\hat{x},u) - A(x,u))x - (A^\star(\hat{x},u)\tilde{x})\hat{x}, \\
\delta(t,\theta) &= \frac{1}{\theta}\Delta(f^\star(\hat{x},u) - A(\hat{x},u))\Delta^{-1}, \\
\tilde{S} &= \theta\Delta^{-1}S\Delta^{-1} \quad \text{et} \quad z = \Delta\tilde{x}
\end{aligned}$$

Il vient alors que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z^T\tilde{S}z) = -\theta z^T\tilde{S}Q\tilde{S}z + 2z^T\tilde{S}\Delta_\theta\Gamma - \theta(R^{-1/2}Cz)^2 \tag{3.42}$$

$$\dot{\tilde{S}} = \theta(-\tilde{S}Q\tilde{S} - (A(\hat{x},u) + \delta(t,\theta))^T\tilde{S} - \tilde{S}(A(\hat{x},u) + \delta(t,\theta)) + C^TR^{-1}C) \tag{3.43}$$

Sous les hypothèses *i.* à *iii.* et en utilisant les structures triangulaires des champs A et B (et donc de Γ), nous établissons facilement que :

$$\|\Delta\Gamma\| \leq p(1/\theta)\|z\| \tag{3.44}$$

où $p(1/\theta)$ est un polynôme en $1/\theta$ dépendant des constantes de Lipschitz de A et B et des bornes sur les entrées u.
Le terme positif dans (3.42) est alors majoré comme suit :

$$|z^T\tilde{S}\Delta_\theta\Gamma| \leq B(\tilde{S})p(1/\theta)z^T\tilde{S}z \tag{3.45}$$

où $B(\tilde{S}) = \sqrt{\dfrac{\lambda_{\max}(\tilde{S})}{\lambda_{\min}(\tilde{S})}}$ est un scalaire dépendant du temps qu'il convient désormais de borner.
En posant $\bar{S}(t) = \tilde{S}(t/\theta)$ et en considérant (3.43), nous avons :

$$\dot{\bar{S}} = -\bar{S}Q\bar{S} - (A(\hat{x},u) + \delta(t/\theta,\theta))^T\bar{S} - \bar{S}(A(\hat{x},u) + \delta(t/\theta,\theta)) + C^TR^{-1}C \tag{3.46}$$

Du fait de la structure bloc-triangulaire inférieure de $f^\star(\hat{x},u) - A(\hat{x},u)$, $\delta(t,\theta)$ converge uniformément en t vers zéro lorsque θ tend vers l'infini. Ainsi, sous les hypothèses *i.* à *iii.* et en utilisant les résultats standards sur les encadrements des solutions des équations de Riccati (ces résultats ont été présentés en section 3.2 et en annexe B dans le cas LTV temps-discret, et seront largement utilisés dans la suite de ce mémoire), il existe des réels $\theta_0 > 0$, $T \geq 0$ et $\underline{s}, \overline{s} > 0$ tels que $\forall\,\theta \geq \theta_0$, $\forall\, t \geq T$ [JAZ70] :

$$\underline{s}I_n \leq \bar{S} \leq \overline{s}I_n \tag{3.47}$$

De ce résultat, il vient que $B(\tilde{S}) \leq \sqrt{\dfrac{\overline{s}}{\underline{s}}}$ et il existe une constante $\lambda > 0$ telle que $\lambda\tilde{S} \leq \tilde{S}Q\tilde{S}$ $\forall\,\theta \geq \theta_0$, $\forall\, t \geq T$. Par conséquent, pour tout $t \geq T$, nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z^T\tilde{S}z) \leq -\left(\lambda\theta - 2\sqrt{\frac{\overline{s}}{\underline{s}}}p(1/\theta)\right)(z^T\tilde{S}z) \tag{3.48}$$

Finalement, en choisissant θ assez grand, nous avons $\lambda\theta - 2\sqrt{\dfrac{\overline{s}}{\underline{s}}}p(1/\theta) < 0$ et nous pouvons conclure à la stabilité exponentielle globale de l'erreur z (et donc de $\tilde{x}$) en vertu du théorème 1.8. ❑

L'approche de Deza *et al.* nous semble particulièrement intéressante dans le sens où les connections entre la convergence d'un observateur de type Kalman étendu et le choix des matrices de pondération Q_θ et R_θ ont été établies. C'est, à notre connaissance, l'un des premiers résultats de convergence de cette catégorie d'estimateurs pour une classe assez large de systèmes non linéaires MIMO.

3.3.2 OKE : approche de Reif *et al.*

En l'absence d'une forme canonique d'observabilité, la convergence de l'OKE reste à démontrer. Les observateurs développés par Reif *et al.* [REI96, REI98, REI99b] proposent une première solution locale à ce problème[2]. Sous couvert de quelques modifications de l'équation différentielle de Riccati de l'OKE classique, les auteurs ont étendu l'étude de la convergence de cet estimateur au cas de systèmes non linéaires généraux, et démontré dans quelle mesure le domaine de convergence de l'OKE pouvait être aggrandi.

Considérons un système non linéaire décrit par le couple d'équations :

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{3.49a}$$
$$y = h(x) \tag{3.49b}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$. Les fonctions non linéaires $f(.,.)$ et $h(.)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Pour observer l'état de ce système, les auteurs dans [REI98] construisent l'OKE suivant :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x},u) + PH(\hat{x})^T R^{-1}(y - h(\hat{x})) \tag{3.50}$$
$$\dot{P} = (F(\hat{x},u) + \alpha I_n)P + P(F^T(\hat{x},u) + \alpha I_n) - PH^T(\hat{x})R^{-1}H(\hat{x})P + Q \tag{3.51}$$

avec

$$F(\hat{x},u) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x},u) \quad \text{et} \quad H(\hat{x}) = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x})$$

où $\alpha > 0$ est un réel positif, $Q \geq \underline{q} I_n > 0$ et $R \geq \underline{r} I_p > 0$ sont des matrices de pondération constantes définies positives.

Soit $\tilde{x} = x - \hat{x}$ l'erreur d'observation. Comme f et h sont $\mathcal{C}^1$, les développements en série de taylor de ces fonctions en $\hat{x}$ donnent :

$$f(x,u) - f(\hat{x},u) = F(\hat{x},u)\tilde{x} + \varphi(x,\hat{x},u) \tag{3.52}$$
$$h(x) - h(\hat{x}) = H(\hat{x})\tilde{x} + \chi(x,\hat{x}) \tag{3.53}$$

où φ et χ sont des termes résiduels d'ordre supérieur ou égal à deux en $x - \hat{x}$.
L'idée avancée est alors d'étudier la dynamique de l'erreur d'observation "exacte" :

$$\dot{\tilde{x}} = (F(\hat{x},u) - PH^T(\hat{x})R^{-1}H(\hat{x}))\tilde{x} + \varphi(x,\hat{x},u) - PH^T(\hat{x})R^{-1}\chi(x,\hat{x}) \tag{3.54}$$

Les conditions de stabilité exponentielle locale du point d'équilibre $\tilde{x} = 0$ sont alors données par le théorème suivant :

Théorème 3.4 ([REI98]) *Considérons le système (3.49). Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

i. Il existe un réel positif $\bar{h} > 0$ tel que $\|H(\hat{x})\| \leq \bar{h}$, $\forall\, t \geq 0$,

ii. Il existe des réels positifs $\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\chi, \kappa_\varphi, \kappa_\chi > 0$ tels que :

$$\|\varphi(x,\hat{x},u)\| \leq \kappa_\varphi \|x - \hat{x}\|^2 \quad \textit{avec} \quad \|x - \hat{x}\| \leq \varepsilon_\varphi \tag{3.55}$$
$$\|\chi(x,\hat{x})\| \leq \kappa_\chi \|x - \hat{x}\|^2 \quad \textit{avec} \quad \|x - \hat{x}\| \leq \varepsilon_\chi \tag{3.56}$$

2. Une extension de cette approche au cas stochastique temps-discret a été proposée récemment dans [REI99a].

iii. La solution P de l'équation différentielle de Riccati (3.51) est bornée via :

$$\underline{p} I_n \leq P \leq \bar{p} I_n \quad \text{avec} \quad \underline{p}, \bar{p} > 0$$

alors l'EKO (3.50)-(3.51) est un observateur exponentiel local de l'état de (3.49). ■

Esquisse de démonstration.
La démonstration de ce théorème utilise la fonction de Lyapunov candidate $V = V(\tilde{x}, t) = \tilde{x}^T P^{-1} \tilde{x}$. En utilisant le fait que $\dot{P}^{-1} = -P^{-1}\dot{P}P^{-1}$ et l'équation (3.51), la dérivée de V le long des trajectoires de (3.54) s'écrit :

$$\dot{V} = -2\alpha \tilde{x}^T P^{-1} \tilde{x} - \tilde{x}^T (P^{-1} Q P^{-1} + H^T(\hat{x}) R^{-1} H(\hat{x})) \tilde{x} \tag{3.57}$$
$$+2\tilde{x}^T P^{-1} (\varphi(x, \hat{x}, u) - P H^T(\hat{x}) R^{-1} \chi(x, \hat{x})) \tag{3.58}$$

Sous les hypothèses *i.* à *iii.*, on démontre que :

$$\tilde{x}^T P^{-1} \varphi(x, \hat{x}, u) - \tilde{x}^T H^T(\hat{x}) R^{-1} \chi(x, \hat{x}) \leq \kappa \|\tilde{x}\|^3 \tag{3.59}$$

avec $\kappa = \dfrac{\kappa_\varphi}{\underline{p}} + \dfrac{\bar{h}\kappa_\chi}{\underline{r}}$ et pour tout $\|x - \hat{x}\| \leq \varepsilon$ où $\varepsilon = \min(\varepsilon_\varphi, \varepsilon_\chi)$.

En utilisant (3.58) ainsi que la propriété de bornitude de P, la majoration suivante est immédiate :

$$\dot{V} \leq -2\alpha V + \left(-\frac{\underline{q}}{\bar{p}^2} + 2\kappa \|\tilde{x}\| \right) \|\tilde{x}\|^2 \tag{3.60}$$

Par conséquent, pour $\|\tilde{x}\| \leq \bar{\varepsilon}$ où $\bar{\varepsilon} = \min(\varepsilon, \underline{q}/(4\kappa\bar{p}^2))$, $\dot{V}$ est majorée comme suit :

$$\dot{V} \leq -2\alpha V - \frac{\underline{q}}{2\bar{p}^2} \|\tilde{x}\|^2 \tag{3.61}$$

Pour tout $t \geq 0$, il vient que :

$$\dot{V} \leq -\left(2\alpha + \frac{\underline{q}\,\underline{p}}{2\bar{p}^2} \right) V \tag{3.62}$$

Finalement, nous concluons à la stabilité exponentielle locale de l'erreur d'observation en vertu du théorème 1.8. ❑

Le paramètre de réglage α permet de fixer arbitrairement et *a priori* la vitesse de convergence de l'OKE (3.50)-(3.51). Lorsque $\alpha = 0$, l'observateur (3.50)-(3.51) devient l'OKE classique dont les conditions locales de convergence sont également données par le théorème 3.4.

La stabilité exponentielle globale de l'équation différentielle (3.54) sera assurée lorsque les conditions (3.55) et (3.56) sont satisfaites $\forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$. Dans le cas contraire, seuls des résultats locaux de stablité sont garantis, et l'OKE (3.50)-(3.51) ne pourra tolérer de grandes erreurs d'initialisation. Les auteurs dans [REI98] ont cependant démontré, par le biais de simulations numériques, que le domaine de convergence de leur observateur est supérieur à celui de l'OKE classique.

En considérant la classe des systèmes non linéaires à mesures linéaires ($h(x) = Hx$ dans (3.49)), Reif *et al.* [REI99b] ont récemment proposé une variante de l'OKE (3.50)-(3.51) en lien avec les techniques de filtrage $\mathcal{H}_\infty$. L'équation de Riccati (3.51) s'écrit sous la forme :

$$\dot{P} = F(\hat{x}, u)P + PF^T(\hat{x}, u) - P(H^T R^{-1} H - \lambda^2 I_n)P + \mu^2 I_n \tag{3.63}$$

avec $P(0) > 0$. $\lambda \geq 0$ et $\mu \geq 0$ sont des scalaires positifs déterminés à l'aide d'un algorithme de recherche binaire.
La démonstration de la convergence de cet observateur est analogue – à quelques subtilités mathématiques près – à celle de l'OKE (3.50)-(3.51) et il est démontré qu'un tel paramétrage de l'équation de Riccati peut étendre de façon significative le domaine d'attraction de l'OKE.

3.3.3 Sur la synthèse d'OKE pour les systèmes non linéaires temps-discret

Dans cette partie, nous analysons les mécanismes de convergence de l'OKE pour les systèmes non linéaires temps-discret. Notre approche généralise d'une certaine façon celles de Deza *et al.* et Reif *et al.* dans le sens où nous nous appuyons sur une nouvelle technique de linéarisation exacte (prise en compte des termes φ et χ dans l'analyse de convergence), pour démontrer le rôle fondamental joué par les matrices de pondération Q_k et R_{k+1} dans l'amélioration des performances de l'OKE. Un réglage itératif de ces matrices est proposé.

3.3.3.1 Formulation de l'observateur

Considérons la classe générale des systèmes non linéaires décrits par le couple d'équations :

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) \tag{3.64a}$$
$$y_k = h(x_k, u_k) \tag{3.64b}$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$ et $y_k \in \mathbb{R}^p$. Les fonctions non linéaires $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ sont supposées de classe $\mathcal{C}^1$.

A ce système déterministe, nous associons le système stochastique virtuel suivant :

$$\xi_{k+1} = f(\xi_k, u_k) + G_k w_k \tag{3.65a}$$
$$y_k = h(\xi_k, u_k) + D_k v_k \tag{3.65b}$$

où $\xi_k \in \mathbb{R}^n$. $w_k \in \mathbb{R}^r$ et $v_k \in \mathbb{R}^s$ sont des bruits additifs blancs, mutuellement indépendants et de covariances unitaires. G_k et D_k sont des matrices temps-variant, de dimensions respectives $n \times r$ et $p \times s$.

Nous introduisons l'estimateur à structure de Luenberger-Kalman suivant :

$$\hat{\xi}_{k+1} = \hat{\xi}_{k+1/k} + K_{k+1}(y_{k+1} - h(\hat{\xi}_{k+1/k}, u_{k+1})) \tag{3.66}$$

où la prédiction $\hat{\xi}_{k+1/k} = f(\hat{\xi}_k, u_k)$.
La dynamique de l'erreur d'estimation $\tilde{\xi}_k = \xi_k - \hat{\xi}_k$ s'écrit :

$$\tilde{\xi}_{k+1} = f(\xi_k, u_k) - f(\hat{\xi}_k, u_k) - K_{k+1}(h(\xi_{k+1}, u_{k+1}) - h(\hat{\xi}_{k+1/k}, u_{k+1}))$$

$$-K_{k+1}D_{k+1}v_{k+1} + G_k w_k \tag{3.67}$$

Comme f et h sont $\mathcal{C}^1$, les développements en séries de Taylor de ces fonctions respectivement en $\hat{\xi}_k$ et en $\hat{\xi}_{k+1/k}$ donnent :

$$f(\xi_k, u_k) - f(\hat{\xi}_k, u_k) = F_k\tilde{\xi}_k + \varphi(\xi_k, \hat{\xi}_k, u_k) \tag{3.68}$$
$$h(\xi_{k+1}, u_{k+1}) - h(\hat{\xi}_{k+1/k}, u_{k+1}) = H_{k+1}\tilde{\xi}_{k+1/k} + \chi(\xi_{k+1}, \hat{\xi}_{k+1/k}, u_{k+1}) \tag{3.69}$$

avec

$$F_k = F(\hat{\xi}_k, u_k) = \frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi_k, u_k) \tag{3.70}$$

$$H_{k+1} = H(\hat{\xi}_{k+1/k}, u_{k+1}) = \frac{\partial h}{\partial \xi}(\hat{\xi}_{k+1/k}, u_{k+1}) \tag{3.71}$$

où $\varphi_k = \begin{pmatrix} \varphi_{1k} & \dots & \varphi_{nk} \end{pmatrix}^T$ et $\chi_{k+1} = \begin{pmatrix} \chi_{1k+1} & \dots & \chi_{pk+1} \end{pmatrix}^T$ représentent les termes résiduels d'ordre supérieur ou égal à deux en $\xi_k - \hat{\xi}_k$ et en $\xi_{k+1} - \hat{\xi}_{k+1/k}$.

L'insertion de (3.68) et (3.69) dans (3.67) donne :

$$\tilde{\xi}_{k+1} = (F_k - K_{k+1}H_{k+1}F_k)\tilde{\xi}_k + l_{k+1} + m_{k+1} \tag{3.72}$$

avec

$$l_{k+1} = (I_n - K_{k+1}H_{k+1})\varphi(\xi_k, \hat{\xi}_k, u_k) - K_{k+1}\chi(\xi_{k+1}, \hat{\xi}_{k+1/k}, u_{k+1}) \tag{3.73}$$
$$m_{k+1} = (G_k - K_{k+1}H_{k+1}G_k)w_k - K_{k+1}D_{k+1}v_{k+1} \tag{3.74}$$

En considérant (3.72) et en négligeant notamment le terme l_{k+1}, le filtre de Kalman étendu pour le système stochastique (3.65), que nous utiliserons en tant qu'observateur pour le système déterministe (3.64), est donné par [JAZ70] :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1}e_{k+1} \tag{3.75}$$
$$P_{k+1} = (I_n - K_{k+1}H_{k+1})P_{k+1/k} \tag{3.76}$$

$$\hat{x}_{k+1/k} = f(\hat{x}_k, u_k) \tag{3.77}$$
$$P_{k+1/k} = F_k P_k F_k^T + Q_k \tag{3.78}$$

avec

$$K_{k+1} = P_{k+1/k}H_{k+1}^T(H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \tag{3.79}$$
$$e_{k+1} = y_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1/k}, u_{k+1}) \tag{3.80}$$

où

$$F_k = F(\hat{x}_k, u_k) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_k, u_k) \tag{3.81}$$

$$H_{k+1} = H(\hat{x}_{k+1/k}, u_{k+1}) = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_{k+1/k}, u_{k+1}) \tag{3.82}$$

et $P_0 = \mu I_n > 0$. $\hat{x}_{k+1}$ et $\hat{x}_{k+1/k}$ représentent l'estimation et la "prédiction" de l'état x_{k+1} à l'instant $k+1$. P_{k+1} et $P_{k+1/k}$ sont les "pseudo-covariances" des erreurs d'estimation et de prédiction.

A l'instar du cas linéaire et bien que l'optimalité du filtre de Kalman étendu pour les systèmes non linéaires stochastiques ne soit pas démontrée, il est courant de choisir en pratique Q_k et R_{k+1} comme les matrices de covariance des bruits de système et de mesures : $Q_k = G_k G_k^T$ et $R_{k+1} = D_{k+1} D_{k+1}^T$. Ce choix n'est réellement valable que dans le cas où les trajectoires estimées évoluent dans un voisinage des trajectoires réelles (i.e. $l_{k+1} \approx 0$) et n'est évidemment pas unique. En particulier, lorsque le FKE est placé dans un contexte déterministe ($G_k G_k^T = 0$ et $D_k D_k^T = 0$), nous montrons que la synthèse de Q_k et R_{k+1} revêt un caractère primordial dans l'amélioration des performances de cet observateur (notamment en présence d'erreurs d'initialisation importantes). A ce titre, nous remarquons que plusieurs alternatives très intéressantes ont déjà été proposées dans [DEZ92, DEZ93, BOU97d, REI98, REI99b].

Remarque 3.5 *La forme récursive (3.75)-(3.82) en deux étapes prédiction/estimation avec relinéarisation du système entre deux mesures n'est pas l'unique représentation du FKE temps-discret. Une formulation en une unique étape d'estimation avec linéarisation du système autour de l'estimée courante peut également être utilisée [LJU79, GOO84] :*

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= f(\hat{x}_k, u_k) + K_k(y_k - h(\hat{x}_k, u_k)) \\ K_k &= F_k P_k H_k^T (H_k P_k H_k^T + R_k)^{-1} \\ P_{k+1} &= F_k P_k F_k^T + Q_k - K_k H_k P_k F_k^T \end{aligned}$$

avec

$$F_k = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_k, u_k) \quad et \quad H_k = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_k, u_k)$$

Il est signalé dans [LJU79] que ces deux formulations du FKE possèdent des propriétés de convergence similaires tout en ayant des performances et un comportement transitoire sensiblement différents. ▼

3.3.3.2 Analyse de convergence

Cette section est dédiée à l'analyse des mécanismes de convergence du FKE (3.75)-(3.82) dans un cadre déterministe. Il vient que $m_{k+1} = 0$ dans (3.72) et la dynamique de l'erreur d'estimation $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$ s'écrit :

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{x}_{k+1/k} - K_{k+1} e_{k+1} \tag{3.83}$$

avec

$$\tilde{x}_{k+1/k} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k} = f(x_k, u_k) - f(\hat{x}_k, u_k) \tag{3.84}$$

$$e_{k+1} = h(x_{k+1}, u_{k+1}) - h(\hat{x}_{k+1/k}, u_{k+1}) \tag{3.85}$$

Une approche classique pour étudier la convergence de l'observateur de Kalman étendu consiste à imiter celle de l'observateur de Kalman pour les systèmes LTV (cf. section 3.2) en utilisant une approximation au premier ordre de $\tilde{x}_{k+1/k}$ et e_{k+1} :

$$\tilde{x}_{k+1/k} \approx F_k \tilde{x}_k \tag{3.86}$$

$$e_{k+1} \approx H_{k+1} \tilde{x}_{k+1/k} \tag{3.87}$$

où sont négligés les termes résiduels φ_k et χ_{k+1}.

Lorsque les trajectoires estimées $\hat{x}_{k+1/k}$ et $\hat{x}_k$ évoluent dans un voisinage des trajectoires réelles x_{k+1} et x_k, $k \geq 0$, ces approximations sont correctes (i.e. $\varphi_k, \chi_{k+1} \longrightarrow 0$) et la stabilité de l'OKE est assurée sous couvert du même type d'hypothèses que dans le théorème 3.1. Dans le cas contraire, cette approche n'est malheureusement plus concevable et il convient de mener une analyse de convergence rigoureuse sans aucune approximation en prenant en compte les résidus de linéarisation φ_k et χ_{k+1} i.e. :

$$\tilde{x}_{k+1/k} = F_k \tilde{x}_k + \varphi(x_k, \hat{x}_k, u_k) \tag{3.88}$$

$$e_{k+1} = H_{k+1} \tilde{x}_{k+1/k} + \chi(x_{k+1}, \hat{x}_{k+1/k}, u_{k+1}) \tag{3.89}$$

La prise en compte des résidus φ_k et χ_{k+1} dans l'étude de la convergence de l'OKE est délicate et conduit à des conditions d'existence locales et souvent très restrictives [SON95, REI98, REI99b].

Afin de s'affranchir de ces difficultés tout en menant une analyse de convergence rigoureuse sans aucune approximation, nous introduisons le paramétrage suivant [BOU97d, BOU99] :

$$\tilde{x}_{k+1/k} = \beta_k F_k \tilde{x}_k \tag{3.90}$$

$$\alpha_{k+1} e_{k+1} = H_{k+1} \tilde{x}_{k+1/k} \tag{3.91}$$

où

$$\beta_k = \underset{i=1,\ldots,n}{\text{diag}} \, (\beta_{ik}) = \underset{i=1,\ldots,n}{\text{diag}} \, (\beta_i(x_k, \hat{x}_k, u_k))$$

$$\alpha_{k+1} = \underset{j=1,\ldots,p}{\text{diag}} \, (\alpha_{jk+1}) = \underset{j=1,\ldots,p}{\text{diag}} \, (\alpha_j(x_{k+1}, \hat{x}_{k+1/k}, u_{k+1}))$$

sont des matrices diagonales inconnues intrinsèquement liées aux résidus de linéarisation par les relations :

$$\varphi_i(x_k, \hat{x}_k, u_k) = (\beta_i(x_k, \hat{x}_k, u_k) - 1) F_{ik} \tilde{x}_k \tag{3.92}$$

$$\chi_j(x_{k+1}, \hat{x}_{k+1/k}, u_k) = (1 - \alpha_j(x_{k+1}, \hat{x}_{k+1/k}, u_{k+1})) e_{jk+1} \tag{3.93}$$

avec F_{ik} représentant la $i^{\text{ième}}$ ligne de F_k et e_{jk+1} est le $j^{\text{ième}}$ élément de e_{k+1}.

Remarque 3.6 *Le paramétrage (3.90)-(3.91) permet de quantifier la qualité de l'approximation au premier ordre (3.86)-(3.87). Si $\mathcal{V}_{x_{k+1}}$ et $\mathcal{V}_{x_k}$ désignent des voisinages des états réels x_{k+1} et x_k, deux cas de figure sont à distinguer :*

i. $\hat{x}_k \in \mathcal{V}_{x_k}$ et $\hat{x}_{k+1/k} \in \mathcal{V}_{x_{k+1}}$ i.e. les approximations (3.86)-(3.87) sont correctes, alors :

$$\beta_k \approx I_n$$

$$\alpha_{k+1} \approx I_p$$

ii. $\hat{x}_k \notin \mathcal{V}_{x_k}$ *et* $\hat{x}_{k+1/k} \notin \mathcal{V}_{x_{k+1}}$ *i.e. les approximations (3.86)-(3.87) ne sont plus correctes, alors :*

$$\beta_k \neq I_n$$
$$\alpha_{k+1} \neq I_p$$

L'introduction des matrices β_k *et* α_{k+1} *est la clef de voûte de notre approche. Ce paramétrage nous permet, d'une part de mener une étude de convergence rigoureuse sans aucune approximation alors qu'une linéarisation au premier ordre du système est utilisée, d'autre part et nous le verrons dans la suite de ce mémoire, d'établir le rôle fondamental joué par les matrices de pondération* Q_k *et* R_{k+1} *dans l'amélioration des performances de l'OKE.* ▼

Remarque 3.7 *Pour les systèmes linéaires et affines en l'état, nous avons* $\alpha_{k+1} = I_p$ *et* $\beta_k = I_n$, $\forall\, k \geq 0$. ▼

Considérons à présent la fonction de Lyapunov candidate $V : B_r \times \mathbb{N}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$, $V(0,k) = 0$:

$$V_k = V(\tilde{x}_k, k) = \tilde{x}_k^T P_k^{-1} \tilde{x}_k \tag{3.94}$$

Le résultat suivant donne des conditions suffisantes de stricte décroissance de la suite $\{V_k\}_{k\geq 0}$:

Lemme 3.2 *Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

i. La matrice instrumentale $\alpha_{k+1} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ *satisfait :*

$$\bar{\alpha}_{k+1} = \max_{j=1,\dots,p} |\alpha_{jk+1} - 1| \leq \sqrt{\frac{\sigma_{\min}(R_{k+1})}{\sigma_{\max}(H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + R_{k+1})}} = \Pi_{k+1}^{\alpha} \tag{3.95}$$

avec $0 < \bar{\alpha}_{k+1} < \infty$,

ii. Il existe un réel $\zeta \in]0,1[$ *tel que la matrice instrumentale* $\beta_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *satisfasse :*

$$\bar{\beta}_k = \max_{i=1,\dots,n} |\beta_{ik}| \leq \sqrt{\frac{(1-\zeta)\sigma_{\min}(F_k P_k F_k^T + Q_k)}{(\sigma_{\max}(F_k))^2 \sigma_{\max}(P_k)}} = \Pi_k^{\beta} \tag{3.96}$$

avec $0 < \bar{\beta}_k < \infty$,

alors la séquence de Lyapunov $\{V_k\}_{k\geq 0}$ *est strictement décroissante.* ■

Démonstration.
A partir de (3.79) et (3.76), nous avons les relations classiques :

$$K_{k+1} = P_{k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \tag{3.97}$$
$$P_{k+1}^{-1} = P_{k+1/k}^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \tag{3.98}$$

Par la suite, en substituant (3.97) dans (3.83), et (3.83) dans (3.94), la fonction de Lyapunov V_{k+1} s'écrit :

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= \tilde{x}_{k+1}^T P_{k+1}^{-1} \tilde{x}_{k+1} \\ &= \tilde{x}_{k+1/k}^T P_{k+1}^{-1} \tilde{x}_{k+1/k} - \tilde{x}_{k+1/k}^T H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} e_{k+1} - e_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \tilde{x}_{k+1/k} \\ &\quad + e_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} P_{k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} e_{k+1} \end{aligned} \tag{3.99}$$

En utilisant (3.98), (3.99) devient :

$$\begin{aligned} V_{k+1} = V_{k+1/k} &+ \tilde{x}_{k+1/k}^T H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \tilde{x}_{k+1/k} - \tilde{x}_{k+1/k}^T H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} e_{k+1} \\ &- e_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} \tilde{x}_{k+1/k} + e_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1} P_{k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} e_{k+1} \end{aligned} \tag{3.100}$$

où

$$V_{k+1/k} = \tilde{x}_{k+1/k}^T P_{k+1/k}^{-1} \tilde{x}_{k+1/k}$$

L'utilisation du paramétrage (3.90)-(3.91) permet de réécrire V_{k+1} et $V_{k+1/k}$ sous les formes non approximées :

$$\begin{aligned} V_{k+1} &= V_{k+1/k} + e_{k+1}^T (\alpha_{k+1} R_{k+1}^{-1} \alpha_{k+1} - \alpha_{k+1} R_{k+1}^{-1} - R_{k+1}^{-1} \alpha_{k+1} \\ &\quad + R_{k+1}^{-1} H_{k+1} P_{k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1}) e_{k+1} \end{aligned} \tag{3.101}$$

$$V_{k+1/k} = \tilde{x}_k^T F_k^T \beta_k (F_k P_k F_k^T + Q_k)^{-1} \beta_k F_k \tilde{x}_k \tag{3.102}$$

Nous savons que la séquence de Lyapunov $\{V_k\}_{k \geq 0}$ est strictement décroissante si il existe un réel $\zeta \in]0,1[$ tel que :

$$V_{k+1} - (1-\zeta) V_k \leq 0$$

c'est à dire si, en retranchant $(1-\zeta)V_k$ de chaque coté dans (3.101), nous avons :

$$\begin{aligned} V_{k+1} - (1-\zeta) V_k = V_{k+1/k} &+ e_{k+1}^T (\alpha_{k+1} R_{k+1}^{-1} \alpha_{k+1} - \alpha_{k+1} R_{k+1}^{-1} - R_{k+1}^{-1} \alpha_{k+1} \\ &+ R_{k+1}^{-1} H_{k+1} P_{k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1}) e_{k+1} - (1-\zeta) V_k \leq 0 \end{aligned} \tag{3.103}$$

soit, en utilisant (3.102) :

$$\begin{aligned} V_{k+1} - (1-\zeta) V_k = & e_{k+1}^T (\alpha_{k+1} R_{k+1}^{-1} \alpha_{k+1} - \alpha_{k+1} R_{k+1}^{-1} - R_{k+1}^{-1} \alpha_{k+1} \\ & + R_{k+1}^{-1} H_{k+1} P_{k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1}) e_{k+1} \\ & + \tilde{x}_k^T \left(F_k^T \beta_k (F_k P_k F_k^T + Q_k)^{-1} \beta_k F_k - (1-\zeta) P_k^{-1} \right) \tilde{x}_k \leq 0 \end{aligned} \tag{3.104}$$

Une condition suffisante pour satisfaire (3.104) est que le couple d'inégalités matricielles suivantes soit vérifié :

$$\alpha_{k+1} R_{k+1}^{-1} \alpha_{k+1} - \alpha_{k+1} R_{k+1}^{-1} - R_{k+1}^{-1} \alpha_{k+1} + R_{k+1}^{-1} H_{k+1} P_{k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \leq 0 \tag{3.105}$$

$$F_k^T \beta_k (F_k P_k F_k^T + Q_k)^{-1} \beta_k F_k - (1-\zeta) P_k^{-1} \leq 0 \tag{3.106}$$

Nous remarquons qu'une simple factorisation de (3.105) permet de réécrire :

$$(\alpha_{k+1} - I_p) R_{k+1}^{-1} (\alpha_{k+1} - I_p) - R_{k+1}^{-1} + R_{k+1}^{-1} H_{k+1} P_{k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} \leq 0 \tag{3.107}$$

soit, en utilisant (3.79) et (3.97),

$$(\alpha_{k+1} - I_p)R_{k+1}^{-1}(\alpha_{k+1} - I_p) - R_{k+1}^{-1}(I_p - H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^T(H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}) \leq 0 \quad (3.108)$$

La substitution de l'identité :

$$I_p = (H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^T + R_{k+1})(H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}$$

dans (3.108) entraîne :

$$(\alpha_{k+1} - I_p)R_{k+1}^{-1}(\alpha_{k+1} - I_p) - R_{k+1}^{-1}R_{k+1}(H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}) \leq 0 \quad (3.109)$$

Finalement, en utilisant (3.109), la stricte décroissance de la séquence $\{V_k\}_{k\geq 0}$ est assurée sous les conditions suivantes :

$$(\alpha_{k+1} - I_p)R_{k+1}^{-1}(\alpha_{k+1} - I_p) - (H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \leq 0 \quad (3.110)$$

$$F_k^T\beta_k(F_kP_kF_k^T + Q_k)^{-1}\beta_kF_k - (1-\zeta)P_k^{-1} \leq 0 \quad (3.111)$$

Pour démontrer l'existence de (3.110)-(3.111), nous utilisons à présent les conditions de stabilité (3.95)-(3.96). Comme $(\alpha_{k+1} - I_p)$ et β_k sont des matrices diagonales, nous avons $\max_{j=1,\dots,p} |\alpha_{jk+1} - 1| = \sigma_{\max}(\alpha_{k+1} - I_p)$ et $\max_{i=1,\dots,n} |\beta_{ik}| = \sigma_{\max}(\beta_k)\ \forall k$ et, à partir de (3.95)-(3.96), il vient que :

$$(\sigma_{\max}(\alpha_{k+1} - I_p))^2 \leq \frac{\sigma_{\min}(R_{k+1})}{\sigma_{\max}(H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^T + R_{k+1})}$$

$$(\sigma_{\max}(\beta_k))^2 \leq \frac{(1-\zeta)\sigma_{\min}(F_kP_kF_k^T + Q_k)}{(\sigma_{\max}(F_k))^2\sigma_{\max}(P_k)}$$

En utilisant le fait que $\sigma_{\min}(M) = \dfrac{1}{\sigma_{\max}(M^{-1})}$ pour toute matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible, les inégalités suivantes sont immédiates :

$$(\sigma_{\max}(\alpha_{k+1} - I_p))^2\sigma_{\max}(R_{k+1}^{-1}) \leq \sigma_{\min}((H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}) \quad (3.112)$$

$$(\sigma_{\max}(\beta_k))^2(\sigma_{\max}(F_k))^2\sigma_{\max}((F_kP_kF_k^T + Q_k)^{-1}) \leq (1-\zeta)\sigma_{\min}(P_k^{-1}) \quad (3.113)$$

D'après les propriétés sur la valeur singulière maximale (équivalente à la norme matricielle induite, cf. annexe A), nous montrons que :

$$\sigma_{\max}((\alpha_{k+1} - I_p)R_{k+1}^{-1}(\alpha_{k+1} - I_p)) \leq (\sigma_{\max}(\alpha_{k+1} - I_p))^2\sigma_{\max}(R_{k+1}^{-1}) \quad (3.114)$$

$$\sigma_{\max}(F_k^T\beta_k(F_kP_kF_k^T + Q_k)^{-1}\beta_kF_k) \leq (\sigma_{\max}(\beta_k))^2(\sigma_{\max}(F_k))^2\sigma_{\max}((F_kP_kF_k^T + Q_k)^{-1}) \quad (3.115)$$

Finalement, à partir de (3.112)-(3.113) et (3.114)-(3.115), il vient que :

$$\sigma_{\max}((\alpha_{k+1} - I_p)R_{k+1}^{-1}(\alpha_{k+1} - I_p)) \leq \sigma_{\min}((H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}) \quad (3.116)$$

$$\sigma_{\max}(F_k^T\beta_k(F_kP_kF_k^T + Q_k)^{-1}\beta_kF_k) \leq (1-\zeta)\sigma_{\min}(P_k^{-1}) \quad (3.117)$$

En utilisant le fait que $\sigma_{\max}(M) \leq \sigma_{\min}(N) \Rightarrow M \geq N$ pour toutes matrices M et N symétriques définies positive (cf. proposition A.2 en annexe A), l'existence de (3.116)-(3.117) implique l'existence de (3.110)-(3.111) et donc la stricte décroissance de la séquence de Lyapunov $\{V_k\}_{k\geq 0}$. ❑

Remarque 3.8 *Dans le cas non linéaire mono-sortie, α_{k+1} et R_{k+1} sont des scalaires et la condition suffisante de stabilité (3.95) devient :*

$$|\alpha_{k+1} - 1| \leq \sqrt{R_{k+1}(H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}} \tag{3.118}$$

avec $\sqrt{R_{k+1}(H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}} < 1, \forall\, R_{k+1} > 0.$ ▼

Remarque 3.9 *Pour les systèmes linéaires et affines en l'état, comme $\alpha_{k+1} = I_p$ et $\beta_k = I_n$, $\forall\, k \geq 0$, les inégalités (3.110)-(3.111) s'écrivent :*

$$(H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \geq 0 \tag{3.119}$$
$$(F_kP_kF_k^T + Q_k)^{-1} \leq (1-\zeta)(F_kP_kF_k^T)^{-1} \tag{3.120}$$

En utilisant le fait que $1 - \zeta < 1$ et à partir de (3.120), il vient que :

$$F_kP_kF_k^T \leq (1-\zeta)(F_kP_kF_k^T + Q_k) \leq F_kP_kF_k^T + Q_k$$

On remarque alors que la stricte décroissance de la fonction de Lyapunov V_k est garantie lorsque $R_{k+1} > 0$ et $Q_k \geq 0$. ▼

Malheureusement, le fait d'assurer la stricte décroissance de la séquence de Lyapunov $\{V_k\}_{k\geq 0}$ ne suffit pas à garantir la convergence de l'OKE (3.75)-(3.82). Il convient en effet de faire des hypothèses supplémentaires en lien avec l'observabilité locale du système (3.64) garantissant la bornitude de P_k. Pour des raisons de simplicité d'écriture, nous indexons les fonctions non linéaires f et g par rapport à l'espace des commandes de la façon suivante : $f(x_k, u_k) = f_{u_k}(x_k)$ et $h(x_k, u_k) = h_{u_k}(x_k)$.

La stabilité locale du point d'équilibre $\tilde{x}_k = 0$ est alors donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.5 *Si les conditions (3.95)-(3.96) et les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

i. Le système (3.64) est N-uniformément localement observable au sens du rang, i.e. il existe un entier $N \geq 1$ tel que la matrice d'observabilité :

$$\mathcal{O}_{[k,k+N-1]}(x_k) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_{u_k}}{\partial x}(x_k) \\ \dfrac{\partial h_{u_{k+1}}}{\partial x}(x_{k+1})\dfrac{\partial f_{u_k}}{\partial x}(x_k) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial h_{u_{k+N-1}}}{\partial x}(x_{k+N-1})\dfrac{\partial f_{u_{k+N-2}}}{\partial x}(x_{k+N-2})\cdots\dfrac{\partial f_{u_k}}{\partial x}(x_k) \end{pmatrix} \tag{3.121}$$

est de rang n pour tout $x_k \in \mathcal{X}$ un compact de $\mathbb{R}^n$ et pour toute séquence d'entrées admissibles $U_{[k,k+N-1]} = (u_k, \ldots, u_{k+N-1}) \in \mathcal{U}$ un compact de $\mathbb{R}^{m\times N}$,

ii. F_k *est inversible,* F_k *et* H_k *sont uniformément bornées* $\forall\, k$,

alors l'erreur d'observation est localement exponentiellement stable en zéro. ■

Avant de démontrer ce théorème, il est nécessaire de donner quelques résultats préliminaires liant observabilité de (3.64) et observabilité de ce même système linéarisé le long des trajectoires estimées de l'OKE. Pour ce faire, nous faisons appel aux résultats présentés en section 3.2 sur l'observabilité uniforme des systèmes LTV.

D'après (3.17) et (3.19), nous savons que le système LTV (3.1) est complètement uniformément observable s'il existe des réels $\beta_1, \beta_2 > 0$ et un entier $M \geq 0$ tels que pour tout $k \geq M$:

$$\beta_1 I_n \leq \mathcal{W}^o_{[k-M,k]} = \sum_{i=k-M}^{k} \phi^T_{[i,k]} C_i^T R_i^{-1} C_i \phi_{[i,k]} \leq \beta_2 I_n \qquad 0 < \beta_1 \leq \beta_2 < \infty \quad (3.122)$$

où le grammien d'observabilité $\mathcal{W}^o_{[k-M,k]}$ peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^o_{[k-M,k]} = &\left((A_{k-1}\dots A_{k-M})^{-T} C^T_{k-M} \quad (A_{k-1}\dots A_{k-M+1})^{-T} C^T_{k-M+1} \quad \dots \quad C_k^T\right) \times \\ &\begin{pmatrix} R^{-1}_{k-M} & & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & & R_k^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{k-M}(A_{k-1}\dots A_{k-M})^{-1} \\ C_{k-M+1}(A_{k-1}\dots A_{k-M+1})^{-1} \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.123)$$

En utilisant (3.123) et en supposant que $A_k^T A_k > \kappa I_n > 0$, $\forall\, k \geq M$, il existe des réels $\eta_1, \eta_2 > 0$ tels que la condition d'observabilité (3.122) soit équivalente à la condition suivante :

$$\eta_1 I_n \leq \mathcal{O}^{ltv^T}_{[k-M,k]} \operatorname{diag}\left(R^{-1}_{k-M}, \dots R_k^{-1}\right) \mathcal{O}^{ltv}_{[k-M,k]} \leq \eta_2 I_n \qquad 0 < \eta_1 \leq \eta_2 < \infty \quad (3.124)$$

où la matrice d'observabilité $\mathcal{O}^{ltv}_{[k-M,k]}$ s'écrit :

$$\mathcal{O}^{ltv}_{[k-M,k]} = \begin{pmatrix} C_{k-M} \\ C_{k-M+1}A_{k-M} \\ \vdots \\ C_k A_{k-1}\dots A_{k-M} \end{pmatrix} \quad (3.125)$$

Afin d'appliquer la condition d'observabilité (3.124) au système (3.64) linéarisé le long des trajectoires de l'EKO (3.75)-(3.82), nous exprimons la matrice d'observabilité $\mathcal{O}^{ltv}_{[k-N+1,k]}$[3] en fonction des matrices jacobiennes $\partial f/\partial x$ et $\partial h/\partial x$ calculées le long des trajectoires estimées $\hat{x}_i$, $i = k-M, \dots, k-1$, et $\hat{x}_{j/j-1}$, $j = k-M, \dots, k$:

$$\mathcal{O}^e_{[k-M,k]} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_{u_{k-M}}}{\partial x}(\hat{x}_{k-M/k-M-1}) \\ \dfrac{\partial h_{u_{k-M+1}}}{\partial x}(\hat{x}_{k-M+1/k-M}) \dfrac{\partial f_{u_{k-M}}}{\partial x}(\hat{x}_{k-M}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial h_{u_k}}{\partial x}(\hat{x}_{k/k-1}) \dfrac{\partial f_{u_{k-1}}}{\partial x}(\hat{x}_{k-1}) \dots \dfrac{\partial f_{u_{k-M}}}{\partial x}(\hat{x}_{k-M}) \end{pmatrix}$$

3. Dans cette section et dans la suite de ce mémoire, la notation $\mathcal{O}^e_{[i,j]}$ symbolisera la dépendance de la matrice d'observabilité $\mathcal{O}_{[i,j]}$ par rapport aux estimées de l'OKE.

$$= \begin{pmatrix} H_{k-M} \\ H_{k-M+1}F_{k-M} \\ \vdots \\ H_kF_{k-1}F_{k-2}\dots F_{k-M} \end{pmatrix} \tag{3.126}$$

En choisissant $M = N-1$, lorsque les estimées $\hat{x}_i$ et $\hat{x}_{j/j-1}$ sont identiques aux états réels x_i et x_j, $i = k-N+1,\dots,k-1$, $j = k-N+1,\dots,k$, on montre que $\mathcal{O}^e_{[k-N+1,k]} = \mathcal{O}_{[k-N+1,k]}(\hat{x}_{k-N+1})$ où $\mathcal{O}_{[k-N+1,k]}(\hat{x}_{k-N+1})$ est la matrice d'observabilité du système (3.64) évaluée au point $\hat{x}_{k-N+1}$. Par conséquent, si le système (3.64) est observable au sens du rang, ce même système linéarisé le long des trajectoires de l'OKE satisfera la condition d'observabilité (3.124) lorsque les estimées $\hat{x}_i$ et $\hat{x}_{j/j-1}$ évoluent dans un voisinage des états réels x_i et x_j. Le résultat suivant formalise ce raisonnement :

Lemme 3.3 *Si le système (3.64) est N-uniformément observable au sens du rang pour tout $x_k \in \mathcal{X}$ un compact de $\mathbb{R}^n$ et si les estimées $\hat{x}_i$ et $\hat{x}_{j/j-1}$ sont suffisamment "proches" des états réels x_i et x_j ($i = k-N+1,\dots,k-1$ et $j = k-N+1,\dots,k$), alors le linéarisé tangent de (3.64) le long des trajectoires de l'OKE (3.75)-(3.82) est localement uniformément observable, i.e. il existe des réels $\gamma_1, \gamma_2, \varepsilon > 0$ et un entier $N \geq 1$ tels que, pour tout $k \geq N-1$:*

$$\gamma_1 I_n \leq \mathcal{O}^{e^T}_{[k-N+1,k]} \operatorname{diag}\left(R^{-1}_{k-N+1},\dots R^{-1}_k\right) \mathcal{O}^e_{[k-N+1,k]} \leq \gamma_2 I_n \qquad 0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 < \infty \tag{3.127}$$

pour tout $\hat{x}_i \in \mathcal{X}$ tel que $\|x_i - \hat{x}_i\| \leq \varepsilon$, $i = k-N+1,\dots,k-1$, pour tout $\hat{x}_{j/j-1} \in \mathcal{X}$ tel que $\left\|x_j - \hat{x}_{j/j-1}\right\| \leq \varepsilon$, $j = k-N+1,\dots,k$ et pour toute séquence d'entrées admissibles $U_{[k-N+1,k]} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{m\times N}$. ■

La démonstration de ce résultat est donnée dans [SON95].

Preuve du théorème 3.5

D'après le lemme 3.3, sous les hypothèses *ii.* du théorème 3.5 et sous la condition de N-uniforme observabilité au sens du rang de (3.64), pour tout $\hat{x}_k, \hat{x}_{k/k-1} \in \mathcal{X}$ tels que $\|x_k - \hat{x}_k\| \leq \varepsilon$ et $\left\|x_k - \hat{x}_{k/k-1}\right\| \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $k \geq N-1$, le linéarisé tangent de (3.64) le long des trajectoires de l'OKE satisfait la condition d'observabilité (3.124) pour tout $k \geq N-1$:

$$\gamma_1 I_n \leq \sum_{i=k-N+1}^{k} \phi^{e^T}_{[i,k-N+1]} C_i^T R_i^{-1} C_i \phi^e_{[i,k-N+1]} \leq \gamma_2 I_n \tag{3.128}$$

où $\phi^e_{[k,i]} = F_{k-1}F_{k-2}\dots F_i$.
Comme le sous-ensemble $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ est compact, pour tout $k \geq N-1$, il vient que :

$$\alpha_1 I_n \geq \sum_{i=k-N+1}^{k-1} \phi^e_{[k,i+1]} Q_i \phi^{e^T}_{[k,i+1]} \geq \alpha_2 I_n \tag{3.129}$$

D'après [DEY68] (voir également en Annexe B), nous démontrons que la matrice P_k solution de l'équation de Riccati aux différences (3.76) est uniformément bornée pour $k \geq N-1$:

$$\underline{p} I_n \leq P_k \leq \bar{p} I_n \qquad 0 < \underline{p} \leq \bar{p} < \infty$$

En utilisant la propriété de bornitude de P_k et le principe de Rayleigh, il vient que :

$$\frac{1}{\bar{p}}\|\tilde{x}_k\|^2 \leq V_k \leq \frac{1}{\underline{p}}\|\tilde{x}_k\|^2 \qquad k \geq N-1$$

Sous les conditions de stabilité (3.95)-(3.96), nous avons :

$$V_k - V_{k-1} \leq -\zeta V_{k-1}$$

Soit, pour tout $k \geq N-1$:

$$\begin{aligned} V_k &\leq (1-\zeta)^{k-N+1} V_0 \\ &\leq \frac{1}{\underline{p}}\|\tilde{x}_0\|^2 (1-\zeta)^{k-N+1} \end{aligned}$$

D'où,

$$\|\tilde{x}_k\| \leq \sqrt{\frac{\bar{p}}{\underline{p}}}\|\tilde{x}_0\|(1-\zeta)^{(k-N+1)/2}$$

et la convergence de l'erreur d'observation $\tilde{x}_k$ vers zéro est assurée pour tout $k \geq N-1$. ❑

Remarque 3.10 *Il est possible de s'affranchir de l'hypothèse d'inversibilité de la matrice F_k faite dans le théorème 3.5. Toutefois, cette condition étant nécessaire pour démontrer l'existence d'un majorant sur $\left\|P_k^{-1}\right\|$ (cf. Annexe B), nous montrons que seule une convergence asymptotique de l'algorithme sera garantie. En effet, sous la condition d'observabilité locale (3.127), nous avons dans ce cas $\left\|P_k^{-1}\right\| \geq \bar{p}^{-1} > 0$. Lorsque la séquence de Lyapunov $\{V_k\}_{k\geq 0}$ est strictement décroissante, il vient alors que :*

$$0 \leq \bar{p}^{-1}\|\tilde{x}_k\|^2 \leq V_k \leq (1-\zeta)^{k-N+1} V_0$$

$\Leftrightarrow$

$$0 \leq \bar{p}^{-1} \lim_{k\to\infty} \|\tilde{x}_k\|^2 \leq \lim_{k\to\infty} V_k \leq \lim_{k\to\infty} (1-\zeta)^{k-N+1} V_0 = 0$$

et nous avons finalement :

$$\lim_{k\to\infty} \|\tilde{x}_k\| = 0 \qquad \forall\, k \geq N-1$$

▼

Remarque 3.11 *Dans le cas autonome et mono-sortie, si $N = n$ la dimension du système et si ce dernier est observable au sens du rang, alors l'application*

$$z_k = \Phi(x_k) = \left(h(x_k), h \circ f(x_k), \ldots, h \circ f^{n-1}(x_k)\right)^T$$

est un difféomorphisme local définissant un système de coordonnées dans lequel le système (3.64) s'écrit sous la forme canonique observable :

$$z_{1k+1} = z_{2k}$$

$$\vdots \tag{3.130a}$$

$$\begin{aligned} z_{(n-1)k+1} &= z_{nk} \\ z_{nk} &= \varphi(z_{1k}, z_{2k}, \dots, z_{nk}) \\ y_k &= z_{1k} \end{aligned} \tag{3.130b}$$

Dans cette nouvelle base, le linéarisé tangent du système (3.130) satisfait la condition d'observabilité uniforme (3.127) pour tout k, i.e. $\mathcal{O}^e_{[k-n+1,k]} = I_n$, ce qui n'est pas nécessairement le cas dans la base initiale. Cette remarque souligne la dépendance de l'OKE et de la condition d'observabilité uniforme (3.127) par rapport au système de coordonnées dans lequel nous travaillons. ▼

Remarque 3.12 (Analogie OKE/Observateur de Newton)
Considérons le système (3.64) dans lequel la sortie $y_k \in \mathbb{R}^p$ est remplacée par les N sorties passées $Y_k = Y_{[k-N+1,k]} \in \mathbb{R}^{p\times N}$:

$$Y_k = \begin{pmatrix} y_{k-N+1} \\ \vdots \\ y_{k-1} \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{u_{k-N+1}} \circ (f^{-(N-1)}_{U_{[k-N+1,k-1]}}(x_k) \\ \vdots \\ h_{u_{k-1}} \circ f^{-1}_{u_{k-1}}(x_k) \\ h_{u_k}(x_k) \end{pmatrix} = \Phi(x_k, U_k)$$

où $U_k = U_{[k-N+1,k]} = (u_{k-N+1}, \dots, u_k)$ et f^{-j} représente la $j^{ième}$ composition de la fonction inverse f^{-1} avec elle-même. Nous supposons que ce système est N-uniformément localement observable (i.e. $\operatorname{rang} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x_k, U_k) = n$) $\forall\, x_k \in \mathcal{X}$ un compact de $\mathbb{R}^n$.
Appliquons l'OKE (3.75)-(3.82) à ce système avec $H_{k+1} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(\hat{x}_{k+1/k}, U_{k+1})$ et $e_{k+1} = Y_{k+1} - \Phi(\hat{x}_{k+1/k}, U_{k+1})$. En choisissant $R_{k+1} = \varepsilon_1 I_{p\times N}$, $Q_k = \varepsilon_2 I_n$ et en utilisant la relation (3.98), la matrice de covariance $P_{k+1/k}$ et le gain K_{k+1} de l'OKE s'écrivent :

$$\begin{aligned} P_{k+1/k} &= F_k P_k F_k^T + \varepsilon_2 I_n \\ &= F_k (P^{-1}_{k/k-1} + \frac{1}{\varepsilon_1} H_k^T H_k)^{-1} F_k^T + \varepsilon_2 I_n \\ &= \varepsilon_1 F_k (\varepsilon_1 P^{-1}_{k/k-1} + H_k^T H_k)^{-1} F_k^T + \varepsilon_2 I_n \end{aligned}$$

et

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + \varepsilon_1 I_{p\times N})^{-1}$$

Lorsque $\varepsilon_1 \to 0$, on a $P_{k+1/k} = \varepsilon_2 I_n$ d'où $K_{k+1} = \varepsilon_2 H_{k+1}^T (\varepsilon_2 H_{k+1} H_{k+1}^T)^{-1} = H_{k+1}^{-1}$. L'OKE se réduit alors à la forme :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + H^{-1}_{k+1}(Y_{k+1} - \Phi(\hat{x}_{k+1/k}, U_{k+1})) \tag{3.131}$$

$$\hat{x}_{k+1/k} = f_{u_k}(\hat{x}_k) \tag{3.132}$$

qui n'est rien d'autre que l'observateur de Newton sur horizon glissant (2.96) itéré une seule fois ($d = 1$). ▼

Remarque 3.13 *Le paramétrage (3.90)-(3.91) peut également être utilisé afin de démontrer la convergence de l'OKE pour les systèmes non linéaires temps-continu (cf. l'observateur de Reif et al. avec $\alpha = 0$ en section 3.3.2). Dans ce cas, il convient de substituer aux relations (3.52)-(3.53) c.-à-d. :*

$$f(x,u) - f(\hat{x},u) = F(\hat{x},u)\tilde{x} + \varphi(x,\hat{x},u)$$
$$h(x,u) - h(\hat{x},u) = H(\hat{x},u)\tilde{x} + \chi(x,\hat{x},u)$$

les expressions "exactes" :

$$f(x,u) - f(\hat{x},u) = \beta(x,\hat{x},u)F(\hat{x},u)\tilde{x}$$
$$h(x,u) - h(\hat{x},u) = \alpha(x,\hat{x},u)H(\hat{x},u)\tilde{x}$$

où

$$\varphi_i(x,\hat{x},u) = (\beta_i(x,\hat{x},u) - 1)F_i(\hat{x},u)\tilde{x} \qquad i = 1,\ldots,n$$
$$\chi_j(x,\hat{x},u) = (\alpha_j(x,\hat{x},u) - 1)H_j(\hat{x},u)\tilde{x} \qquad j = 1,\ldots,p$$

Comme en section 3.3.2, la démonstration de convergence fait appel à la fonction de Lyapunov candidate $V(\tilde{x},t) = \tilde{x}^T P^{-1}\tilde{x}$ où $P(t)$ est uniformément bornée. Les connections entre les choix de $Q(t)$ et $R(t)$ et l'extension du domaine d'attraction de l'OKE peuvent être établies aisément. ▼

3.3.3.3 Sur la synthèse des matrices de pondération de l'observateur et exemple

De l'analyse quantitative des conditions suffisantes (3.95)-(3.96) de convergence de l'OKE, il ressort que le choix des matrices de pondération R_{k+1} et Q_k est fondamental pour étendre le domaine d'attraction et améliorer les performances de cet observateur.

Contrairement à l'OKE standard [SON95] dont la convergence n'est assurée que dans le cas où α_{k+1} et β_k (modélisant les différentes erreurs de linéarisation) sont proches de la matrice identité, l'approche que nous proposons garantit la convergence de l'OKE pour toutes matrices α_{k+1} et β_k bornées respectivement par Π^{α}_{k+1} et Π^{β}_{k}. Afin d'autoriser des erreurs de linéarisation importantes (en particulier à l'initialisation de l'algorithme) tout en satisfaisant les conditions de stabilité (3.95)-(3.96), notre objectif dans cette section est de construire les matrices de pondération R_{k+1} et Q_k de façon à étendre au maximum les bornes Π^{α}_{k+1} et Π^{β}_{k}.

Lorsque la convergence de l'OKE est assurée (notamment par un choix judicieux de R_{k+1} et Q_k à l'initialisation et pendant la phase transitoire de convergence), alors $\alpha_{k+1} \to I_p$ et $\beta_k \to I_n$, les approximations (3.86)-(3.87) deviennent correctes, l'analyse de stablité devient analogue à celle présentée en section 3.2 pour le cas LTV et le rôle joué par R_{k+1} et Q_k devient second (il suffit uniquement d'en garantir la bornitude et la positivité).

• Sur le choix de Q_k

Nous analysons dans un premier temps la condition suffisante de stabilité (3.96).
Comme F_k et P_k sont uniformément bornées, et $F_k P_k F_k^T$ et Q_k sont symétriques strictement définies positives, on démontre que :

$$\Pi^{\beta}_{k} = \sqrt{\frac{(1-\zeta)\sigma_{\min}(F_k P_k F_k^T + Q_k)}{(\sigma_{\max}(F_k))^2 \sigma_{\max}(P_k)}} \geq \sqrt{\frac{(1-\zeta)\sigma_{\min}(Q_k)}{(\sigma_{\max}(F_k))^2 \sigma_{\max}(P_k)}}$$

A partir de cette inégalité, il est facile de voir que l'amplitude du majorant Π_k^β évoluera proportionnellement à celle (en norme) de la matrice de pondération Q_k.

Sur la base de cette remarque, un choix judicieux *mais non unique* de $Q_k > 0$ est le suivant :

$$Q_k = \gamma e_k^T e_k I_n + \varepsilon I_n \tag{3.133}$$

où $e_k = y_k - h(\hat{x}_{k/k-1}, u_k)$. $\gamma \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ sont des scalaires fixés par l'utilisateur.

Dans la plupart des cas (en particulier lorsque sont conjuguées mauvaises initialisations de l'observateur et non linéarités importantes de f et h), le paramètre de synthèse γ doit être choisi suffisament "grand" de façon à étendre Π_k^β. Le second paramètre $\varepsilon \in]0,1[$ ne sert qu'à éviter tout problème d'instabilité numérique en assurant la positivité de Q_k.

L'originalité de (3.133) réside dans l'utilisation du terme $\gamma e_k^T e_k > 0$ en lien avec l'erreur de sortie qui permet de contrôler automatiquement l'amplitude de la borne Π_k^β en fonction de e_k (amplifiée par le paramètre de synthèse γ). En effet, lorsque la trajectoire estimée est éloignée de la trajectoire courante (en particulier à l'initialisation de l'algorithme), le terme $\gamma e_k^T e_k$ dans Q_k et donc le majorant Π_k^β sont "grands", la condition (3.96) est remplie et le domaine de convergence de l'observateur est étendu. D'un autre côté, lorsque l'observateur converge vers la trajectoire courante du système, on a $\beta_k \approx I_n$, le terme $\gamma e_k^T e_k$ tend alors vers zéro et l'observateur proposé devient l'OKE classique avec $Q_k = \varepsilon I_n$.

• Sur le choix de R_{k+1}

Nous analysons désormais la condition de stabilité (3.96). Il apparaît clairement que le choix de $R_{k+1} > 0$ est d'une importance capitale pour "étendre" le majorant Π_{k+1}^α et donc satisfaire (3.96).
Compte-tenu de la structure de Π_{k+1}^α, c.-à-d. :

$$\Pi_{k+1}^\alpha = \sqrt{\frac{\sigma_{\min}(R_{k+1})}{\sigma_{\max}(H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + R_{k+1})}}$$

une approche intuitive consiste à choisir R_{k+1} suffisamment "grand" devant $H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T$. On remarque, cependant, qu'une pondération importante de l'OKE par le terme R_{k+1} peut considérablement diminuer la vitesse de convergence de l'algorithme (car le gain K_{k+1} tend rapidement vers zéro).

Un choix judicieux *mais non unique* de $R_{k+1} > 0$ représentant un excellent compromis entre vitesse de convergence et stabilité de l'algorithme est :

$$R_{k+1} = \lambda H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + \varepsilon I_p \tag{3.134}$$

où $P_{k+1/k}$ est la solution de l'équation (3.78), $\lambda \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ sont des scalaires fixés par l'utilisateur.

D'une manière générale, il est facile de montrer que $\Pi_{k+1}^\alpha \in]0,1[$ quel que soit le choix de $R_{k+1} > 0$, alors qu'il semble possible "d'étendre à souhait" le majorant Π_k^β par un choix judicieux de Q_k.

En utilisant la propriété de localité de l'OKE proposé (e_k est bornée), nous remarquons que les structures indiquées pour Q_k et R_{k+1} garantissent la bornitude de ces matrices de pondération $\forall\, k$. Cette propriété est fondamentale pour assurer la bornitude de la matrice P_{k+1} solution de l'équation de Riccati aux différences (3.76) (et donc de $P_{k+1/k}$) sous les conditions d'observabilité et de commandabilité complètes uniformes du système (3.64) linéarisé le long des trajectoires de l'OKE.

Les structures que nous proposons pour Q_k et R_{k+1} sont donc très simples dans le sens où seulement deux paramètres de synthèse γ et λ doivent être sélectionnés afin d'élargir suffisament les bornes Π_{k+1}^{α} et Π_k^{β} dans (3.95)-(3.96), et étendre ainsi le domaine de convergence de l'OKE. Comme notre approche – bien que locale – concerne une large classe de système non linéaires, nous notons qu'il est très difficile de donner une valeur *a priori* de ces paramètres. De nombreux critères de sélection rentrent en compte (conditions initiales, signaux d'entrée, non linéarités de f et h) et, en pratique, il convient de mener plusieurs expériences avant d'obtenir une valeur pertinente de γ et λ. Nous avons appliqué cette approche avec succès à de nombreux exemples de la littérature et, d'après notre expérience, γ et λ sont compris dans les intervalles $[0, 10^{15}]$ et $[0, 5]$.

• Sur l'implantation pratique de l'OKE

Comme α_{jk+1} et β_{ik} sont des paramètres inconnus (qui dépendent de nombreux facteurs tels que les conditions initiales, le degré de non linéarité de f et h ou les signaux d'entrée), il apparaît clairement que les conditions (3.95)-(3.96) de stricte décroissance de la séquence de Lyapunov $\{V_k\}_{k>0}$ ne peuvent pas être vérifiées *a priori* $\forall\, x_k - \hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$.
En revanche, l'OKÉ étant de nature locale, les paramètres α_{ik+1} et β_{jk} sont bornés (par $0 < \bar{\alpha}_{k+1} < \infty$ et $0 < \bar{\beta}_k < \infty$ dans (3.95)-(3.96)) et nous remarquons qu'il est tout à fait concevable d'obtenir une estimation *a priori* et réaliste des bornes $\bar{\alpha}_{k+1}$ et $\bar{\beta}_k$ pour un état initial réel et un état initial estimé donnés. Pour ce faire, il convient de faire appel au savoir-faire pratique de l'ingénieur qui permet, dans bien des cas, d'avoir une idée de l'ordre de grandeur de l'état des systèmes physiques observés (courants, flux, vitesse dans les machines électriques, concentrations dans les bioprocédés, positions et vitesses en robotique, ...). L'utilisation des fonctions analytiques f et g nous permettant, par la suite, d'évaluer $\bar{\alpha}_{k+1}$ et $\bar{\beta}_k$ via les relations (3.90)-(3.91).

Nous terminerons ce paragraphe par quelques remarques relatives aux conditions *i.* et *ii.* du théorème 3.5 (assurant la bornitude de F_k, H_k et P_k) :

- Il suffit de s'assurer de la bornitude de F_k, H_k et P_k récursivement et un pas à l'avance [SON95] en veillant, cependant, à ce que les bornes sur ces matrices puissent être choisies indépendamment du temps k. Pour déterminer les bornes sur F_k, H_k et P_k, nous traîtons séparément les cas où $0 \leq k < N-1$ et $k \geq N-1$. Cette division de l'horizon d'observation est imposée par les $N-1^{\text{ièmes}}$ itérations nécessaires à la construction de la condition de N-uniforme observabilité.

  Nous considérons tout d'abord la phase transitoire $0 \leq k < N-1$. En utilisant les relations (3.98) et (3.78), il vient que $P_{k+1} = (P_{k+1/k} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1})^{-1} > 0$ si $P_{k+1/k} > 0$ c.-à-d. si $P_k > 0$ (car $Q_k \geq 0$), les bornes sur P_k, F_k et H_k sont alors obtenues en calculant, à chaque itération, les valeurs propres minimale et maximale de P_k et les valeurs singulières maximales de F_k et H_k pour $0 \leq k < N-1$.

Par la suite, lorsque $k \geq N-1$, la bornitude de P_k est assurée par le lemme 3.3 pour $N-1 \leq i \leq k-1$ et $N-1 \leq j \leq k$ tant que $\|x_i - \hat{x}_i\| \leq \varepsilon$ et $\left\|x_j - \hat{x}_{j/j-1}\right\| \leq \varepsilon$, les bornes sur F_k et H_k découlent quant-à-elle de la compacité de $\mathcal{X}$ et du fait que $\hat{x}_k, \hat{x}_{k/k-1} \in \mathcal{X}$.

- En pratique, la condition de N-uniforme observabilité au sens du rang du système (3.64) peut être vérifiée, dans un premier temps, de manière littérale par un test de rang sur $\mathcal{O}_{[k-N+1,k]}$ définie en (3.121) puis, si cette première opération échoue, de manière numérique par un test de rang sur $\mathcal{O}^e_{[k-N+1,k]}$ définie en (3.126), $k \geq N-1$.
- Enfin, nous remarquons que l'horizon N de construction de la condition de N-uniforme observabilité n'est pas obligatoirement constant. En effet, il suffit de déterminer à chaque itération un entier $N_k \geq 1$ tel que :

$$\operatorname{rang} \mathcal{O}^e_{[k-N_k+1,k]} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} H_{k-N_k+1} \\ H_{k-N_k+2}F_{k-N_k+1} \\ \vdots \\ H_k F_{k-1} F_{k-2} \dots F_{k-N_k+1} \end{pmatrix} = n \qquad (3.135)$$

A chaque itération, l'entier $N_k \geq 1$ peut ainsi être déterminé par des tests de rang successifs sur les matrices H_k, $\begin{pmatrix} H_{k-1} \\ H_k F_{k-1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} H_{k-2} \\ H_{k-1}F_{k-2} \\ H_k F_{k-1} F_{k-2} \end{pmatrix}$, ...

Exemple 3.1 *Afin d'illustrer les résultats établis précédemment et notamment le rôle fondamental joué par les matrices de pondération Q_k et R_{k+1} dans l'amélioration des performances de l'OKE (3.75)-(3.82), nous considérons un système non linéaire temps-discret décrit par (3.64a)-(3.64b) avec :*

$$f(x_k, u_k) = \begin{pmatrix} x_{2k} \\ -x_{3k}x_{1k} - x_{4k}x_{2k} + x_{5k}u_k \\ x_{3k} \\ x_{4k} \\ x_{5k} \end{pmatrix}$$

$$h(x_k, u_k) = x_{1k}x_{2k}$$

où x_3, x_4 et x_5 représentent en fait des paramètres inconnus constants. Nous appliquons l'OKE (3.75)-(3.82) à ce système avec :

$$F_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{x}_{3k} & -\hat{x}_{4k} & -\hat{x}_{1k} & -\hat{x}_{2k} & u_k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H_{k+1} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{2k+1/k} & \hat{x}_{1k+1/k} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Il est facile de voir que $\det(F_k) = \hat{x}_{3k}$, F_k est donc inversible $\forall\, k \geq 0$ sur tout sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^5$ tel que $\hat{x}_{3k} \neq 0$. Les tests de bornitude de F_k et H_{k+1} ainsi que la vérification

de la condition de N-uniforme observabilité (bornitude de P_{k+1}) se font récursivement et numériquement.

Compte-tenu de la structure de F_k et H_{k+1}, l'introduction du paramétrage (3.90)-(3.91) mène aux expressions suivantes des matrices instrumentales β_k et α_{k+1}, $\forall\, k \geq 0$,

$$\beta_k = \mathrm{diag}(1, \beta_{2k}, 1, 1, 1) \quad avec \quad \beta_{2k} = \frac{f_2(x_k, u_k) - f_2(\hat{x}_k, u_k)}{F_{2k}(x_k - \hat{x}_k)}$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{H_{k+1}(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k})}{e_{k+1}}$$

Le calcul explicite de β_k et α_{k+1} n'est pas requis en pratique, nous ne le donnons ici qu'à titre indicatif.

Nous avons simulé cet observateur, dans un premier temps en ajustant judicieusement les matrices de pondération Q_k et R_{k+1} (relations (3.133) et (3.134)) de façon à satisfaire les conditions de convergence (3.95) et (3.96), dans un second temps en utilisant la configuration classique de l'OKE (i.e. $Q_k = \varepsilon_1 I_n$ et $R_{k+1} = \varepsilon_2 I_p$ avec $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1$).
Les conditions initiales sont :

$$x_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0.3 \\ 1.1 \\ 2.4 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad et \quad P_0 = I_5$$

L'entrée est $u_k = 5 + 2\sin(0.15k) + 2\sin(0.2k)$ et les matrices de pondération Q_k et R_{k+1} sont définies comme suit :

- *OKEM*[4] *:*

$$Q_k = (y_k - \hat{x}_{1k/k-1}\hat{x}_{2k/k-1})^2 I_5 + 10^{-3} I_5$$
$$R_{k+1} = 0.5 H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + 10^{-3}$$

- *OKEC*[5] *:*

$$Q_k = 10^{-3} I_5, \quad R_{k+1} = 10^{-3}$$

Les résultats des simulations sont illustrés par les figures 3.1(a) à 3.1(e). Chaque figure laisse apparaître trois dynamiques : celle du système, celle de l'OKE modifié et celle de l'OKE classique. En présence de mauvaises conditions initiales, le rôle important joué par les matrices de pondération Q_k et R_{k+1} dans l'amélioration de la convergence de l'OKE est clairement visible. Ce résultat est flagrant au niveau de l'estimation des états x_3 à x_5 (représentant des paramètres) où, à la différence de l'OKE classique, les trajectoires estimées de l'OKE modifié convergent vers les valeurs nominales des paramètres.

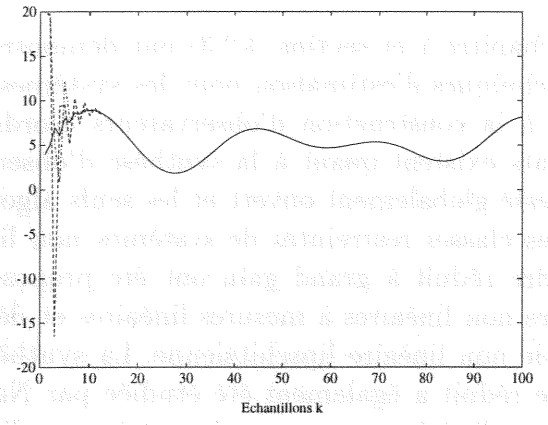
4. Observateur de Kalman Etendu Modifié
5. Observateur de Kalman Etendu Classique

3.3.4 Conclusion

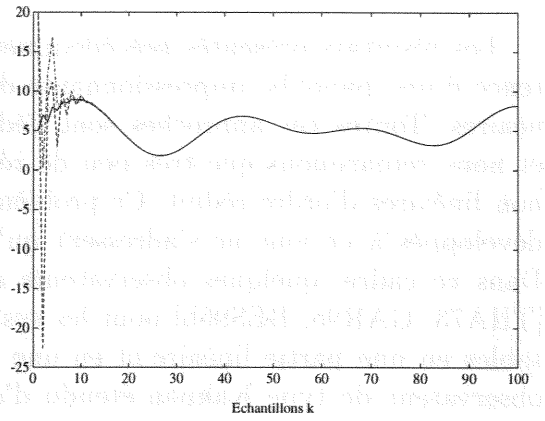
Dans cette partie, nous avons proposé une approche innovante pour la démonstration de la convergence du filtre de Kalman étendu, utilisé en tant qu'observateur des systèmes non linéaires temps-discret déterministes. L'utilisation d'une nouvelle technique de linéarisation "exacte" au premier ordre, et l'introduction des matrices instrumentales β_k et α_{k+1} nous ont permis d'établir des conditions suffisantes peu restrictives de stabilité locale de l'erreur d'observation. En particulier, il a été démontré que la convergence de l'OKE, même "mal initialisé", peut être assurée par un choix judicieux des matrices de pondération Q_k et R_{k+1} de l'observateur.

En outre, il a été démontré que la vérification de la bornitude de la pseudo-covariance P_k de l'erreur d'estimation – qui est nécessaire pour assurer la convergence de l'observateur – peut être réduite à un simple test d'observabilité du système linéarisé le long des trajectoires estimées de l'OKE. Cette condition d'observabilité du système linéarisé est liée à des propriétés d'observabilité du système non linéaire d'origine. Grâce à cette relation, il a été démontré que la stabilité de l'erreur d'observation est assurée lorsque le système est N-uniformément localement observable au sens du rang, et lorsqu'un choix judicieux des matrices de pondération de l'observateur est effectué. L'efficacité et l'intérêt de notre approche pour la synthèse de l'OKE ont été illustrés par un exemple numérique sur un problème non linéaire d'estimation combinée de l'état et des paramètres.

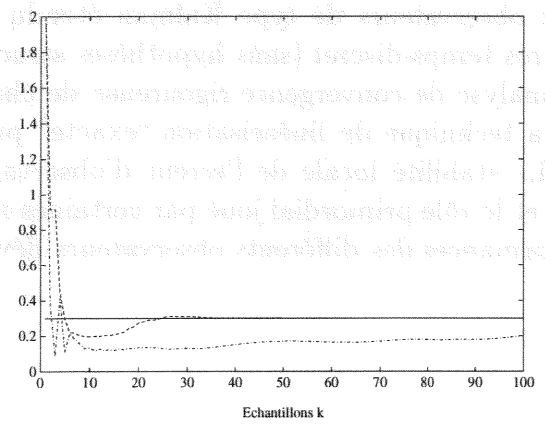
Les résultats présentés dans cette section ont apporté une des premières bases théoriques pour la démonstration de la stabilité de ce filtre approché, largement utilisé en pratique mais avec très peu de garanties de convergence.



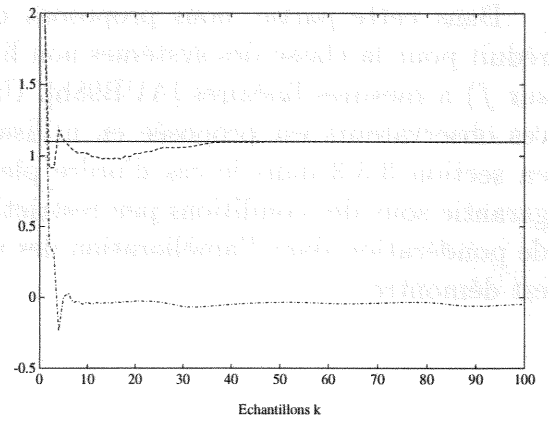
(a) x_{1k} et $\hat{x}_{1k}$



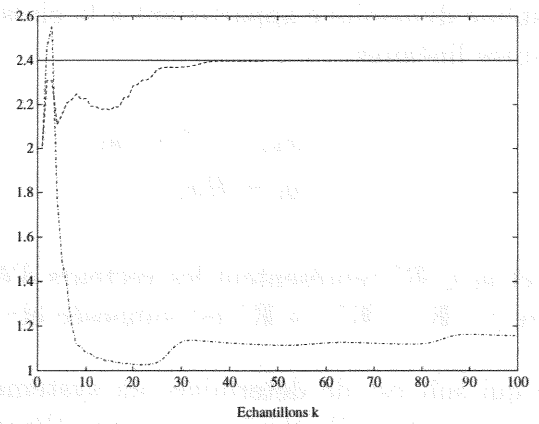
(b) x_{2k} et $\hat{x}_{2k}$



(c) x_{3k} et $\hat{x}_{3k}$



(d) x_{4k} et $\hat{x}_{4k}$



(e) x_{5k} et $\hat{x}_{5k}$

Figure 3.1: *Etats simulés (−) et estimés. OKE modifié (− −) et OKE classique (− ·)*

3.4 Observateurs d'ordre réduit pour les systèmes non linéaires

Les résultats présentés précédemment (chapitre 2 et section 3.2.3) ont démontré l'existence d'une panoplie impressionnante de techniques d'estimation pour les systèmes non linéaires. Toutes ces approches sont dédiées à la construction d'observateurs d'ordre plein et nous remarquons que très peu de résultats existent quant à la synthèse d'observateurs non linéaires d'ordre réduit. Ce problème reste globalement ouvert et les seuls algorithmes développés à ce jour ne s'adressent qu'à des classes restreintes de systèmes non linéaires. Dans ce cadre, quelques observateurs d'ordre réduit à grand gain ont été proposés dans [THA73, GAR95, BES96b] pour les systèmes non linéaires à mesures linéaires et décomposables en une partie linéaire et en une partie non linéaire lipschitzienne. La synthèse d'un observateur de type Kalman étendu d'ordre réduit a également été étudiée par Nagpal et Sims [NAG88] pour une classe de systèmes non linéaires temps-continu où les non linéarités ne sont fonction que de la partie réduite de l'état que l'on désire estimer.

Dans cette partie, nous proposons deux observateurs de type Kalman étendu d'ordre réduit pour la classe des systèmes non linéaires temps-discret (sans hypothèses structurelles sur f) à mesures linéaires [AUB98b]. Une analyse de convergence rigoureuse de chacun de ces observateurs est proposée en utilisant la technique de linéarisation "exacte" présentée en section 3.3.3 dans le cas d'ordre plein. La stabilité locale de l'erreur d'observation est garantie sous des conditions peu restrictives et le rôle primordial joué par certaines matrices de pondération dans l'amélioration des performances des différents observateurs développés est démontré.

3.4.1 Position du problème

Considérons un système dynamique appartenant à la classe des systèmes non linéaires à temps-discret et à mesures linéaires :

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) \tag{3.136a}$$
$$y_k = Hx_k \tag{3.136b}$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$ et $y_k \in \mathbb{R}^p$ représentent les vecteurs d'état, des entrées et des sorties. La fonction non linéaire $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est supposée être de classe $\mathcal{C}^1$.

Notre but dans ce qui suit est de déterminer un système dynamique auxiliaire $\mathcal{O}_r$ de dimension réduite $n-p$ permettant d'estimer un vecteur d'état réduit $z_k = Lx_k$ représentant une combinaison linéaire de l'état de (3.136). Ce système, appelé observateur d'ordre réduit, devra assurer la stabilité locale de l'erreur d'observation $\tilde{z}_k = z_k - \hat{z}_k$ en zéro (cf. figure 3.2).

Nous proposons deux approches pour la construction du système $\mathcal{O}_r$. Celles-ci diffèrent dans la manière d'aborder le problème et dans l'analyse de la convergence de l'observateur. Nous verrons que la deuxième méthode est une généralisation de la première.

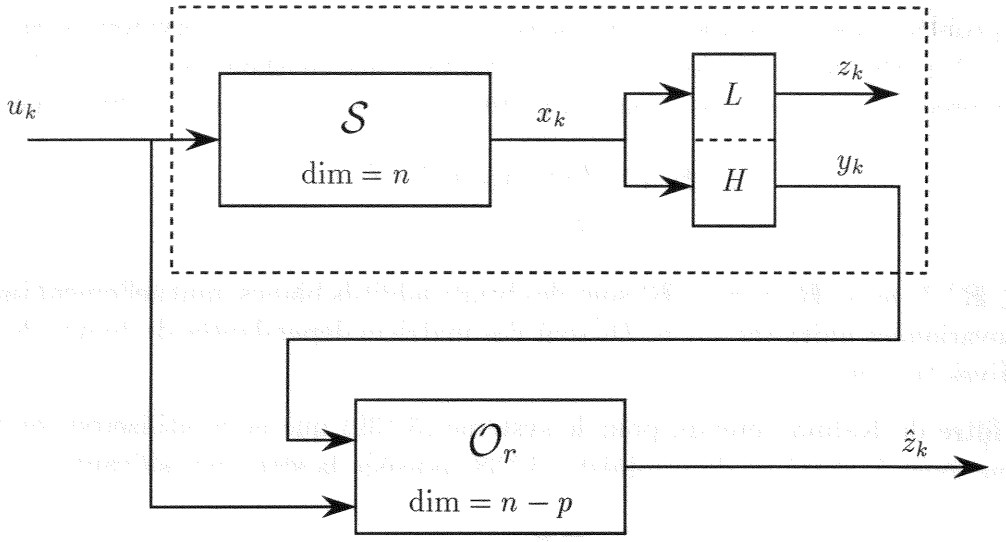


Figure 3.2: *Observateur d'ordre réduit : schéma de principe.*

3.4.2 OKE d'ordre réduit : première approche

3.4.2.1 Formulation de l'observateur

Dans un premier temps et sans perte de généralité, nous considérons que les p premières variables d'état sont directement mesurées et nous cherchons à reconstruire les $n-p$ variables restantes. Les matrices H et L sont alors de la forme :

$$H = \begin{pmatrix} I_p & 0 \end{pmatrix}$$
$$L = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons ainsi décomposer le système (3.136) de la façon suivante :

$$x_{1k+1} = f_1(x_{1k}, x_{2k}, u_k) \tag{3.137a}$$
$$x_{2k+1} = f_2(x_{1k}, x_{2k}, u_k) \tag{3.137b}$$
$$y_k = x_{1k} \tag{3.137c}$$

où $x_{1k} \in \mathbb{R}^p$ et $x_{2k} \in \mathbb{R}^{n-p}$ représentent respectivement la partie mesurée et la partie non mesurée de l'état x_k, $f_1(x_{1k}, x_{2k}, u_k) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \end{pmatrix} \times f(x_k, u_k)$ et $f_2(x_{1k}, x_{2k}, u_k) = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} \times f(x_k, u_k)$.
Dans le cas général où $y_k = Hx_k$ est une combinaison linéaire de l'état, on note qu'il existe toujours une transformation d'état linéaire $\zeta_k = Tx_k$ telle que $HT^{-1} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \end{pmatrix}$ [O'R83].

Nous nous intéressons uniquement à la dynamique de la partie non mesurée x_{2k} de (3.137) et scindons ce système de la façon suivante :

$$x_{2k+1} = f_2(x_{2k}, x_{1k}, u_k) \tag{3.138a}$$
$$y_k = f_1(x_{2k-1}, x_{1k-1}, u_{k-1}) \tag{3.138b}$$

où la variable d'état x_{1k} est directement mesurée et est interprétée comme une entrée connue pour (3.138).

Le problème est désormais réduit à la construction d'un observateur pour le système (3.138a)-(3.138b) de dimension $n-p$. En adoptant une méthodologie semblable à celle des sections précédentes, nous associons au système (3.138) le système stochastique artificiel :

$$\xi_{k+1} = f_2(\xi_k, x_{1k}, u_k) + G_k w_k \tag{3.139a}$$
$$y_k = f_1(\xi_{k-1}, x_{1k-1}, u_{k-1}) + D_{k-1} v_{k-1} \tag{3.139b}$$

où $\xi_k \in \mathbb{R}^{n-p}$. $w_k \in \mathbb{R}^r$ et $v_k \in \mathbb{R}^s$ sont des bruits additifs blancs, mutuellement indépendants et de covariances unitaires. G_k et D_k sont des matrices dépendantes du temps de dimensions respectives $(n-p) \times r$ et $p \times s$.

Le filtre de Kalman étendu pour le système (3.139) que nous utiliserons en tant qu'observateur pour le système déterministe (3.138) possède la structure suivante :

$$\hat{x}_{1k+1} = y_{k+1} \tag{3.140}$$
$$\hat{x}_{2k+1} = f_2(\hat{x}_{2k}, x_{1k}, u_k) + K_k e_k \tag{3.141}$$

où

$$K_k = F_k^{22} P_k F_k^{12^T} (F_k^{12} P_k F_k^{12^T} + R_k)^{-1} \tag{3.142}$$
$$P_{k+1} = F_k^{22} P_k F_k^{22^T} + Q_k - K_k F_k^{12} P_k F_k^{22^T} \tag{3.143}$$

avec

$$e_k = f_1(x_{2k}, x_{1k}, u_k) - f_1(\hat{x}_{2k}, x_{1k}, u_k) \tag{3.144}$$
$$F_k^{22} = F^{22}(\hat{x}_{2k}, x_{1k}, u_k) = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}_{2k}, x_{1k}, u_k) \tag{3.145}$$
$$F_k^{12} = F^{12}(\hat{x}_{2k}, x_{1k}, u_k) = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}_{2k}, x_{1k}, u_k) \tag{3.146}$$

et $P_0 = \mu I_{n-p} > 0$, $\hat{x}_{2k+1}$ est l'estimation de la partie non mesurée de l'état à l'instant $k+1$ et P_k représente la "pseudo-covariance" de l'erreur d'estimation $\tilde{x}_{2k}$. $R_k > 0$ et $Q_k \geq 0$ sont des matrices de pondération dont le choix sera détaillé ultérieurement.

3.4.2.2 Analyse de convergence

Comme R_k et Q_k sont les matrices de covariance de bruits de mesure et d'état purement artificiels, nous choisissons $Q_k = 0$ dans la suite de ce paragraphe. Afin d'analyser les mécanismes de convergence de l'observateur (3.140)-(3.146), l'idée est de se ramener, après quelques manipulations linéaires sur l'observateur d'ordre réduit (3.140)-(3.146), à la structure classique de l'OKE (3.75)-(3.82).

Dans un premier temps, nous faisons l'hypothèse de régularité de la matrice jacobienne F_k^{22} :

Hypothèse 3.2 *F_k^{22} est une matrice inversible uniformément bornée $\forall\, k$.*

En utilisant l'expression (3.142) du gain de l'observateur, la relation (3.143) devient :

$$P_{k+1} = F_k^{22} P_k F_k^{22^T} - F_k^{22} P_k F_k^{12^T} (F_k^{12} P_k F_k^{12^T} + R_k)^{-1} F_k^{22} P_k F_k^{22^T}$$

Sous l'hypothèse 3.2, cette dernière équation s'écrit :

$$P_{k+1} = F_k^{22} P_k F_k^{22^T} - F_k^{22} P_k F_k^{22^T} F_k^{22^{-T}} F_k^{12^T} (F_k^{12} F_k^{22^{-1}} F_k^{22} P_k F_k^{22^T} F_k^{22^{-T}} F_k^{12^T} + R_k)^{-1} F_k^{12} F_k^{22^{-1}} F_k^{22} P_k F_k^{22^T}$$

En notant $P_{k+1/k} = F_k^{22} P_k F_k^{22^T}$, il vient alors que :

$$P_{k+1} = P_{k+1/k} - P_{k+1/k}\Theta_k^T(\Theta_k P_{k+1/k}\Theta_k^T + R_k)^{-1}\Theta_k P_{k+1/k}$$

où

$$\Theta_k = F_k^{12} F_k^{22^{-1}}$$

De la même manière, sous l'hypothèse 3.2, le gain K_k se réécrit sous la forme :

$$K_k = P_{k+1/k}\Theta_k^T(\Theta_k P_{k+1/k}\Theta_k^T + R_k)^{-1}$$

et la matrice de "covariance" P_{k+1} devient :

$$P_{k+1} = (I_{n-p} - K_k\Theta_k)P_{k+1/k}$$

avec $P_{k+1/k} = F_k^{22} P_k F_k^{22^T}$.

Une fois ces transformations préliminaires opérées, nous remarquons que l'observateur (3.140)-(3.146) s'écrit sous une forme analogue à l'OKE d'ordre plein :

$$\hat{x}_{1k+1} = y_{k+1} \tag{3.147}$$
$$\hat{x}_{2k+1} = \hat{x}_{2k+1/k} + K_k e_k \tag{3.148}$$
$$P_{k+1} = (I_{n-p} - K_k\Theta_k)P_{k+1/k} \tag{3.149}$$

$$\hat{x}_{2k+1/k} = f_2(\hat{x}_{2k}, x_{1k}, u_k) \tag{3.150}$$
$$P_{k+1/k} = F_k^{22} P_k F_k^{22^T} \tag{3.151}$$

avec

$$K_k = P_{k+1/k}\Theta_k^T(\Theta_k P_{k+1/k}\Theta_k^T + R_k)^{-1} \tag{3.152}$$
$$e_k = f_1(x_{2k}, x_{1k}, u_k) - f_1(\hat{x}_{2k}, x_{1k}, u_k) \tag{3.153}$$

où $\Theta_k = F_k^{12} F_k^{22^{-1}}$, F_k^{22} et F_k^{12} sont définies par (3.145) et (3.146).

Nous démontrons ainsi qu'étudier la convergence de l'observateur (3.140)-(3.146) revient à étudier celle de l'observateur (3.147)-(3.153).
Soit $\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k$ l'erreur d'estimation telle que :

$$\tilde{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{1k+1} \\ \tilde{x}_{2k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x}_{2k+1/k} - K_k(f_1(x_{2k}, x_{1k}, u_k) - f_1(\hat{x}_{2k}, x_{1k}, u_k)) \end{pmatrix} \tag{3.154}$$

avec

$$\tilde{x}_{2k+1/k} = f_1(x_{2k}, x_{1k}, u_k) - f_1(\hat{x}_{2k}, x_{1k}, u_k) \tag{3.155}$$

A la place d'utiliser les approximations classiques de f_2 et f_1 au premier ordre c.-à-d. :

$$\tilde{x}_{2k+1/k} \approx F_k^{22}\tilde{x}_{2k} \tag{3.156}$$
$$e_k \approx F_k^{12}\tilde{x}_{2k} \tag{3.157}$$

où, sous l'hypothèse 3.2, l'équation (3.157) est équivalente à :

$$e_k \approx F_k^{12}F_k^{22^{-1}}\tilde{x}_{2k+1/k} = \Theta_k\tilde{x}_{2k+1/k} \tag{3.158}$$

nous utilisons la technique de linéarisation exacte présentée en section 3.3.3 et paramétrons l'analyse de convergence de l'observateur (3.147)-(3.153) à l'aide de matrices diagonales inconnues $\beta_k \in \mathbb{R}^{(n-p)\times(n-p)}$ et $\alpha_k \in \mathbb{R}^{p\times p}$ modélisant les différents résidus de linéarisation de la façon suivante :

$$\tilde{x}_{2k+1/k} = \beta_k F_k^{22}\tilde{x}_{2k} \tag{3.159}$$
$$\alpha_k e_k = \Theta_k\tilde{x}_{2k+1/k} \tag{3.160}$$

L'utilisation du paramétrage (3.159)-(3.160) nous permet d'établir des conditions suffisantes de stabilité du point d'équilibre $\tilde{x}_{2k} = 0$:

Théorème 3.6 ([AUB98b]) *Sous l'hypothèse 3.2, si les conditions suivantes sont satisfaites :*

i. La matrice $\alpha_k \in \mathbb{R}^{p\times p}$ vérifie la condition :

$$\bar{\alpha}_k = \max_{j=1,\dots,p} |\alpha_{jk} - 1| \leq \sqrt{\frac{\sigma_{\min}(R_k)}{\sigma_{\max}(\Theta_k P_{k+1/k}\Theta_k^T + R_k)}} = \Pi_k^\alpha \tag{3.161}$$

avec $0 < \bar{\alpha}_k < \infty$,

ii. Il existe un réel $\zeta \in]0,1[$ tel que la matrice $\beta_k \in \mathbb{R}^{(n-p)\times(n-p)}$ vérifie la condition :

$$\bar{\beta}_k = \max_{i=1,\dots,n-p} |\beta_{ik}| \leq \sqrt{\frac{(1-\zeta)\sigma_{\min}(P_{k+1/k})}{\sigma_{\max}(P_{k+1/k})}} = \Pi_k^\beta \tag{3.162}$$

avec $0 < \bar{\beta}_k < \infty$,

iii. Le système (3.138) linéarisé le long des trajectoires de l'EKO d'ordre réduit (3.140)-(3.146) est N-localement uniformément observable i.e. il existe des réels $\gamma_1, \gamma_2, \varepsilon > 0$ et un entier $N \geq 1$ tels que pour tout $k \geq N$:

$$\gamma_1 I_{n-p} \leq \mathcal{O}_{[k-N+1,k]}^{e^T}\,\mathrm{diag}(R_{k-N+1}^{-1}, \dots, R_k^{-1})\mathcal{O}_{[k-N+1,k]}^{e} \leq \gamma_2 I_{n-p} \tag{3.163}$$

avec $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 < \infty$ *et*

$$\mathcal{O}^e_{[k-N+1,k]} = \begin{pmatrix} F^{12}_{k-N+1} \\ F^{12}_{k-N+2}F^{22}_{k-N+1} \\ \vdots \\ F^{12}_k F^{22}_{k-1} F^{22}_{k-2} \dots F^{22}_{k-N+1} \end{pmatrix} \tag{3.164}$$

pour tout $\hat{x}_{2i} \in \mathcal{X}_2$ *un compact de* $\mathbb{R}^{n-p}$ *tel que* $\|x_{2i} - \hat{x}_{2i}\| \leq \varepsilon$, $x_{2i} \in \mathcal{X}_2$, $i = k-N+1, \dots, k$, *et pour toute séquence d'entrées admissibles* $U_{[k-N+1,k]} = (u_{k-N+1}, \dots, u_k) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{m \times N}$ *et* $X_{1[k-N+1,k]} = (x_{1k-N+1}, \dots, x_{1k}) \in \mathcal{X}_1 \subset \mathbb{R}^{p \times N}$,

iv. F^{22}_k *est inversible et* F^{12}_k, F^{22}_k *sont uniformément bornées pour tout* $\hat{x}_{2k} \in \mathcal{X}_2$ *et toute séquence d'entrées admissibles* $\forall\, k \geq 0$,

alors $\lim_{k\to\infty} \|x_{2k} - \hat{x}_{2k}\| = 0$ *et le système (3.147)-(3.153) (resp. (3.140)-(3.146)) est un observateur asymptotique local pour (3.136).* ■

Démonstration.
La démonstration de ce théorème est méthodologiquement semblable à celle du théorème 3.5. Considérons la fonction de Lyapunov $V(\tilde{x}_{2k}, k) : \mathcal{B}_\varepsilon \times \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}^+$:

$$V_k = V(\tilde{x}_{2k}, k) = \tilde{x}^T_{2k} P^{-1}_k \tilde{x}_{2k} \tag{3.165}$$

et démontrons dans un premier temps la stricte décroissance de la suite $\{V_k\}_{k\geq 0}$ c.-à-d. qu'il existe $\zeta \in]0,1[$ tel que :

$$V_{k+1} - V_k \leq -\zeta V_k \tag{3.166}$$

En utilisant conjointement les relations classiques $P^{-1}_{k+1} = P^{-1}_{k+1/k} + \Theta^T_k R^{-1}_k \Theta_k$ et $K_k = P_{k+1}\Theta^T_k R^{-1}_k$, les équations (3.151), (3.152) et le paramétrage (3.156)-(3.157), l'inégalité (3.166) devient :

$$\begin{aligned} V_{k+1} - (1-\zeta)V_k = {} & e^T_k(\alpha_k R^{-1}_k \alpha_k - \alpha_k R^{-1}_k - R^{-1}_k \alpha_k + R^{-1}_k \Theta_k P_{k+1} \Theta^T_k R^{-1}_k) e_k \\ & + \tilde{x}^T_{2k}(F^{22^T}_k \beta_k P^{-1}_{k+1/k} \beta_k F^{22}_k - (1-\zeta)P^{-1}_k)\tilde{x}_{2k} \leq 0 \end{aligned} \tag{3.167}$$

Pour satisfaire (3.167), il suffit que les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$\alpha_k R^{-1}_k \alpha_k - \alpha_k R^{-1}_k - R^{-1}_k \alpha_k + R^{-1}_k \Theta_k P_{k+1} \Theta^T_k R^{-1}_k \leq 0 \tag{3.168}$$

$$F^{22^T}_k \beta_k P^{-1}_{k+1/k} \beta_k F^{22}_k - (1-\zeta)P^{-1}_k \leq 0 \tag{3.169}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} & (\alpha_k - I_p) R^{-1}_k (\alpha_k - I_p) \leq R^{-1}_k - R^{-1}_k \Theta_k P_{k+1} \Theta^T_k R^{-1}_k \\ & \beta_k P^{-1}_{k+1/k} \beta_k \leq (1-\zeta)\left(F^{22}_k P^{-1}_k F^{22^T}_k\right)^{-1} \end{aligned}$$

soit, en utilisant l'identité $I_p = (\Theta_k P_{k+1/k} \Theta^T_k + R_k)(\Theta_k P_{k+1/k} \Theta^T_k + R_k)^{-1}$:

$$(\alpha_k - I_p) R^{-1}_k (\alpha_k - I_p) \leq (\Theta_k P_{k+1/k} \Theta^T_k + R_k)^{-1} \tag{3.170}$$

$$\beta_k P_{k+1/k}^{-1} \beta_k \leq (1-\zeta) P_{k+1/k}^{-1} \tag{3.171}$$

Afin de s'assurer de l'existence de (3.170)-(3.171), nous utilisons à présent les conditions de stabilité (3.161)-(3.162). Comme $(\alpha_k - I_p)$ et β_k sont des matrices diagonales, on démontre à partir de (3.161)-(3.162) que :

$$(\sigma_{\max}(\alpha_k - I_p))^2 \leq \frac{\sigma_{\min}(R_k)}{\sigma_{\max}(\Theta_k P_{k+1/k} \Theta_k^T + R_k)}$$
$$(\sigma_{\max}(\beta_k))^2 \leq \frac{(1-\zeta)\sigma_{\min}(P_{k+1/k})}{\sigma_{\max}(P_{k+1/k})}$$

$\Leftrightarrow$

$$(\sigma_{\max}(\alpha_k - I_p))^2 \sigma_{\max}(R_k^{-1}) \leq \sigma_{\min}((\Theta_k P_{k+1/k} \Theta_k^T + R_k)^{-1})$$
$$(\sigma_{\max}(\beta_k))^2 \sigma_{\max}(P_{k+1/k}^{-1}) \leq (1-\zeta)\sigma_{\min}(P_{k+1/k}^{-1})$$

Comme

$$\sigma_{\max}((\alpha_k - I_p) R_k^{-1} (\alpha_k - I_p)) \leq (\sigma_{\max}(\alpha_k - I_p))^2 \sigma_{\max}(R_k^{-1})$$
$$\sigma_{\max}(\beta_k P_{k+1/k}^{-1} \beta_k) \leq (\sigma_{\max}(\beta_k))^2 \sigma_{\max}(P_{k+1/k}^{-1})$$

on montre que :

$$\sigma_{\max}((\alpha_k - I_p) R_k^{-1} (\alpha_k - I_p)) \leq \sigma_{\min}((\Theta_k P_{k+1/k} \Theta_k^T + R_k)^{-1}) \tag{3.172}$$
$$\sigma_{\max}(\beta_k P_{k+1/k}^{-1} \beta_k) \leq (1-\zeta)\sigma_{\min}(P_{k+1/k}^{-1}) \tag{3.173}$$

D'après la proposition A.2, l'existence de (3.172)-(3.173) implique l'existence de (3.170)-(3.171) et donc la stricte décroissance de la suite de Lyapunov $\{V_k\}_{k \geq 0}$.

Finalement, en utilisant l'hypothèse *iii.* d'observabilité uniforme du système linéarisé le long des trajectoires de l'OKE d'ordre réduit (3.140)-(3.146) et l'hypothèse *iv.* d'inversibilité de F_{2k} et de bornitude uniforme de F_k^{12} et F_k^{22} (et donc de Θ_k), on démontre que P_k est uniformément bornée et il existe des constantes $0 < \underline{p} \leq \bar{p} < \infty$ telles que $\underline{p} I_{n-p} \leq P_k \leq \bar{p} I_{n-p}$ $\forall\, k \geq N-1$ (cf. [DEY68, SON95] et section 3.3.3.2).
Il vient alors que :

$$\frac{1}{\bar{p}} \|\tilde{x}_{2k}\|^2 \leq V_k \leq \frac{1}{\underline{p}} \|\tilde{x}_{2k}\|^2$$

Comme

$$\begin{aligned} V_k &\leq (1-\zeta) V_{k-1} \\ &\leq (1-\zeta)^{k-N+1} V_0 \end{aligned}$$

On en déduit la majoration :

$$\|\tilde{x}_{2k}\| \leq \sqrt{\frac{\bar{p}}{\underline{p}}} \|\tilde{x}_{20}\| (1-\zeta)^{(k-N+1)/2} \tag{3.174}$$

et l'on conclut à la stabilité locale de l'erreur d'observation (3.154) $\forall\, k \geq N-1$. ❑

Remarque 3.14 (Sur le choix de R_k) *Comme β_{ik} et α_{jk} sont des paramètres inconnus introduits pour quantifier les différentes erreurs de linéarisation induites par les approximations (3.156) et (3.158), il convient de choisir la matrice de pondération R_k de façon à "élargir" le plus possible le majorant Π_k^α et satisfaire ainsi (3.161). D'après la structure de Π_k^α, une approche intuitive consiste à choisir R_k suffisamment "grand" devant $\Theta_k P_{k+1/k}\Theta_k^T$. Comme dans le cas d'ordre plein, nous remarquons qu'une telle approche dans la construction de R_k peut sérieusement diminuer la vitesse de convergence de l'OKE d'ordre réduit (le gain K_k tend alors vers 0).*
Un choix judicieux mais non unique de $R_k > 0$ représentant un excellent compromis entre vitesse de convergence et stabilité de l'algorithme, est alors le suivant :

$$R_k = \lambda \Theta_k P_{k+1/k}\Theta_k^T + \varepsilon I_p \tag{3.175}$$

où λ et ε sont des scalaires strictement positifs fixés par l'utilisateur.
D'une manière générale, nous montrons que les majorants Π_k^α et Π_k^β sont bornés comme suit :

$$\begin{aligned} &\Pi_k^\alpha \in]0,1[\quad \forall\, R_k > 0 \\ &\Pi_k^\beta \in]0,1[\end{aligned}$$

▼

Remarque 3.15 *On remarque que la condition (3.163) d'observabilité uniforme du système (3.138) linéarisé le long des trajectoires de l'OKE d'ordre réduit (3.140)-(3.146) est garantie sous la condition de N-uniforme observabilité au sens du rang du système initial (3.136). Comme nous l'avons souligné dans le cas d'ordre plein, cette condition peut être vérifiée de façon littérale par un test de rang sur la matrice d'observabilité du système ou de façon numérique en vérifiant, à chaque itération, qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que la condition suivante soit satisfaite pour $k \geq N-1$:*

$$\operatorname{rang} \mathcal{O}^{e^*}_{[k-N+1,k]} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ F^{11}_{k-N+1} & F^{12}_{k-N+1} \\ F^{11}_{k-N+2}F^{11}_{k-N+1} + F^{12}_{k-N+2}F^{21}_{k-N+1} & F^{11}_{k-N+2}F^{12}_{k-N+1} + F^{12}_{k-N+2}F^{22}_{k-N+1} \\ \vdots & \vdots \\ \times & \times \end{pmatrix} = n$$

où les partitionnements $H = \begin{pmatrix} I_p & 0 \end{pmatrix}$ et $F_k = \begin{pmatrix} F_k^{11} & F_k^{12} \\ F_k^{21} & F_k^{22} \end{pmatrix}$ ont été utilisés.

Comme le rang de la matrice $\mathcal{O}^{e^*}_{[k-N+1,k]}$ n'est pas altéré par des opérations linéaires sur les lignes, il vient que :

$$\operatorname{rang} \mathcal{O}^{e^\#}_{[k-N+1,k]} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ \times & F^{12}_{k-N+1} \\ \times & F^{12}_{k-N+2}F^{22}_{k-N+1} \\ \vdots & \vdots \\ \times & F^{12}_k F^{22}_{k-1} \cdots F^{22}_{k-N+1} \end{pmatrix} = n$$

où $\mathcal{O}^{e^\#}(3,:) = \mathcal{O}^{e^*}(3,:) - F^{11}_{k-N+2}F^{11}_{k-N+1} \times \mathcal{O}^{e^*}(1,:) - F^{11}_{k-N+2} \times \mathcal{O}^{e^*}(2,:)$[6], *les* $N-3$ *lignes restantes étant construites suivant la même stratégie. Nous démontrons finalement que la condition* $\text{rang}\, \mathcal{O}^{e^*}_{[k-N+1,k]} = n$ *implique :*

$$\text{rang}\, \mathcal{O}^{e}_{[k-N+1,k]} = \text{rang} \begin{pmatrix} F^{12}_{k-N+1} \\ F^{12}_{k-N+2}F^{22}_{k-N+1} \\ \vdots \\ F^{12}_{k}F^{22}_{k-1}\ldots F^{22}_{k-N+1} \end{pmatrix} = n - p$$

▼

Remarque 3.16 *L'hypothèse de régularité de* F_{2k} *et quelques manipulations linéaires nous ayant permis d'obtenir une structure analogue pour l'OKE d'ordre réduit (3.140)-(3.146) et l'OKE d'ordre plein (3.75)-(3.82), on note une certaine similitude entre les conditions de stabilité de ces deux observateurs. Toutefois, contrairement au cas linéaire voire non linéaire avec contraintes structurelles sur f [BES96b], il semble impossible de comparer analytiquement les performances (domaine d'attraction, vitesse de convergence) de l'OKE d'ordre plein et de l'OKE d'ordre réduit.* ▼

Remarque 3.17 *Considérons la classe des systèmes LTI :*

$$\begin{pmatrix} x_{1k+1} \\ x_{2k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u_k = Ax + Bu$$
$$y_k = x_{1k} = Cx$$

où $x_{1k} \in \mathbb{R}^p$ *et* $x_{2k} \in \mathbb{R}^{n-p}$ *représentent respectivement les* p *premières variables d'état mesurées et les* $n-p$ *dernières variables d'état non mesurées. Une représentation équivalente de ce système s'obtient facilement :*

$$x_{2k+1} = A_{21}y_k + A_{22}x_{2k} + B_2u_k$$
$$y_k = A_{11}y_{k-1} + A_{12}x_{2k-1} + B_1u_{k-1}$$

L'application de l'OKE (3.140)-(3.146) à ce dernier modèle dynamique permet d'observer l'état x_{2k+1} *:*

$$\hat{x}_{2k+1} = A_{22}\hat{x}_{2k} + A_{21}y_k + B_2u_k + K_k(y_{k+1} - A_{12}\hat{x}_{2k} - A_{11}y_k - B_1u_k)$$

Nous démontrons facilement que la stabilité de l'observateur est assurée sous la condition de détectabilité de la paire (A_{22}, A_{12}) *(donc de la paire* (C, A)*) et il existe une solution stationnaire à l'équation de Riccati aux différences (3.149):*

$$P = A_{22}PA_{22}^T - A_{22}PA_{12}^T(A_{12}PA_{12}^T + R)^{-1}A_{12}PA_{22}^T$$

avec $P_0 > 0$ *et* $R > 0$*. Le gain de l'observateur s'écrit alors :*

$$K = A_{22}PA_{12}^T(A_{12}PA_{12}^T + R)^{-1}$$

▼

6. $\mathcal{O}(i,:)$ représente la $i^{\text{ième}}$ ligne de la matrice $\mathcal{O}$.

3.4.3 OKE d'ordre réduit : deuxième approche

La première approche présentée pour la synthèse d'observateurs de type Kalman étendu d'ordre réduit pour les systèmes non linéaires est fondée sur une structure particulière des matrices H et L. En supposant $Q_k = 0$ dans la formulation de l'OKE d'ordre réduit proposé, nous avons présenté une analyse de convergence méthodologiquement semblable à celle de l'OKE d'ordre plein. Malheureusement, le fait de supposer $Q_k = 0$ peut s'avérer relativement restrictif et limiter, par la même occasion, les performances de l'observateur. Dans cette partie, nous généralisons cette approche au cas où H et L sont quelconques et étudions l'influence des matrices de pondération Q_k et R_k sur la convergence de l'OKE d'ordre réduit proposé.

3.4.3.1 Formulation de l'observateur

Considérons le système non linéaire temps-discret et à mesures linéaires (3.136). Nous cherchons à estimer le vecteur d'état réduit $z_k = Lx_k$, une combinaison linéaire de l'état de (3.136) avec $\dim(z_k) = n - p$.

Nous faisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.3 *$L \in \mathbb{R}^{(n-p)\times n}$ est telle que $\begin{pmatrix} L \\ H \end{pmatrix}$ est inversible.*

Sous l'hypothèse 3.3, il existe $N_1 \in \mathbb{R}^{n\times(n-p)}$ et $N_2 \in \mathbb{R}^{n\times p}$ telles que :

$$\begin{pmatrix} L \\ H \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \end{pmatrix} \tag{3.176}$$

Il vient que :

$$x_k = \begin{pmatrix} L \\ H \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} z_k \\ y_k \end{pmatrix} = N_1 z_k + N_2 y_k \tag{3.177}$$

En multipliant chacun des membres de (3.136a) par $\begin{pmatrix} L \\ H \end{pmatrix}$, on obtient le "nouveau" système dynamique :

$$z_{k+1} = L\bar{f}(z_k, y_k, u_k) \tag{3.178a}$$
$$y_k = H\bar{f}(z_{k-1}, y_{k-1}, u_{k-1}) \tag{3.178b}$$

où $\bar{f}(z_k, y_k, u_k) = f(N_1 z_k + N_2 y_k, u_k)$.

A ce système déterministe, nous associons le système stochastique artificiel suivant :

$$\xi_{k+1} = L\bar{f}(\xi_k, y_k, u_k) + G_k w_k \tag{3.179a}$$
$$y_k = H\bar{f}(\xi_{k-1}, y_{k-1}, u_{k-1}) + D_{k-1} v_{k-1} \tag{3.179b}$$

où $\xi_k \in \mathbb{R}^{n-p}$. $w_k \in \mathbb{R}^r$ et $v_k \in \mathbb{R}^s$ sont des bruits additifs blancs, mutuellement indépendants et de covariances unitaires. G_k et D_k sont des matrices dépendantes du temps de dimensions respectives $(n-p) \times r$ et $p \times s$.

L'objectif est de construire un estimateur de l'état du système réduit (3.179). La dynamique de l'estimateur étudié est de la forme :

$$\hat{\xi}_{k+1} = L\bar{f}(\hat{\xi}_k, y_k, u_k) + K_k(y_{k+1} - H\bar{f}(\hat{\xi}_k, y_k, u_k)) \tag{3.180}$$

Soit $\tilde{\xi}_k$ l'erreur d'estimation telle que :

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_{k+1} &= \xi_{k+1} - \hat{\xi}_{k+1} \\ &= (L - K_k H)\bar{F}_k\tilde{\xi}_k + l_k + m_k\end{aligned} \tag{3.181}$$

avec

$$\begin{aligned} l_k &= (L - K_k H)\varphi(\xi_k, \hat{\xi}_k, y_k, u_k) \\ m_k &= G_k w_k - K_k D_k v_k \\ \bar{F}_k &= \bar{F}(\hat{\xi}_k, y_k, u_k) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \xi}(\hat{\xi}_k, y_k, u_k)\end{aligned}$$

où φ_k désigne des termes résiduels d'ordre supérieur ou égal à deux en $\xi_k - \hat{\xi}_k$ issus de la linéarisation de $\bar{f}$ en $\hat{\xi}_k$.
Le gain K_k de l'estimateur de type Luenberger-Kalman (3.180) résulte de la minimisation (en occultant le terme l_k dans (3.181)) de la matrice de covariance de l'erreur d'estimation $P_{k+1} = \mathscr{E}\{\tilde{\xi}_{k+1}\tilde{\xi}_{k+1}^T\}$:

$$K_k = L\bar{F}_k P_k \bar{F}_k^T H^T (H\bar{F}_k P_k \bar{F}_k^T H^T + R_k)^{-1} \tag{3.182}$$

Il vient alors que :

$$P_{k+1} = (L - K_k H)\bar{F}_k P_k \bar{F}_k^T L^T + Q_k \tag{3.183}$$

En utilisant (3.182), (3.183) s'écrit sous la forme :

$$P_{k+1} = L\bar{F}_k(P_k - P_k\bar{F}_k^T H^T(H\bar{F}_k P_k \bar{F}_k^T H^T + R_k)^{-1} H\bar{F}_k P_k)\bar{F}_k^T L^T + Q_k$$

Soit, à l'aide du lemme d'inversion matricielle (cf annexe A.1) :

$$P_{k+1} = L\bar{F}_k(P_k^{-1} + \bar{F}_k^T H^T R_k^{-1} H\bar{F}_k)^{-1}\bar{F}_k^T L^T + Q_k \tag{3.184}$$

Finalement, le filtre de Kalman étendu pour le système (3.179) que nous utilisons en tant qu'observateur pour le système déterministe (3.178) est donné par :

$$\hat{z}_{k+1} = L\bar{f}(\hat{z}_k, y_k, u_k) + K_k e_k \tag{3.185}$$

où

$$K_k = L\bar{F}_k P_k \bar{F}_k^T H^T (H\bar{F}_k P_k \bar{F}_k^T H^T + R_k)^{-1} \tag{3.186}$$

$$P_{k+1} = L\bar{F}_k(P_k^{-1} + \bar{F}_k^T H^T R_k^{-1} H\bar{F}_k)^{-1}\bar{F}_k^T L^T + Q_k \tag{3.187}$$

et

$$e_k = H(\bar{f}(z_k, y_k, u_k) - \bar{f}(\hat{z}_k, y_k, u_k)) \tag{3.188}$$

$$\bar{F}_k = \bar{F}(\hat{z}_k, y_k, u_k) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(\hat{z}_k, y_k, u_k) \tag{3.189}$$

avec $P_0 = \mu I_{n-p} > 0$. $R_k > 0$ et $Q_k \geq 0$ sont des matrices de pondération dont le choix est arbitraire.

L'estimation de l'état dans la base initiale s'obtient facilement à partir de la relation :

$$\hat{x}_{k+1} = N_1\hat{z}_{k+1} + N_2 y_{k+1} \tag{3.190}$$

3.4.3.2 Analyse de convergence

Nous analysons désormais la stabilité du point d'équilibre $\tilde{z}_k = 0$ dans un contexte déterministe ($m_k = 0$ dans (3.181)). Nous verrons que la convergence locale de l'OKE d'ordre réduit (3.185)-(3.189) est assurée sous la condition d'observabilité uniforme de (3.178) et lorsque les matrices de pondération Q_k et R_k sont judicieusement choisies.

En soustrayant z_{k+1} de chaque côté dans (3.185) et en utilisant conjointement (3.178) et (3.188), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\tilde{z}_{k+1} &= z_{k+1} - \hat{z}_{k+1} \\ &= L(\bar{f}(z_k y_k, u_k) - \bar{f}(\hat{z}_k, y_k, u_k)) - K_k H(\bar{f}(z_k, y_k, u_k) - \bar{f}(\hat{z}_k, y_k, u_k)) \\ &= \Xi_k(\bar{f}(z_k, y_k, u_k) - \bar{f}(\hat{z}_k, y_k, u_k)) \end{aligned} \tag{3.191}$$

où $\Xi_k = \big(L - K_k H\big)$.

A ce stade de l'analyse, nous utilisons la technique de linéarisation exacte décrite dans les sections précédentes pour réécrire (3.191) sous la forme :

$$\tilde{z}_{k+1} = \Xi_k \beta_k \bar{F}_k \tilde{z}_k \tag{3.192}$$

en lieu et place de l'approximation classique au premier ordre :

$$\tilde{z}_{k+1} \approx \Xi_k \bar{F}_k \tilde{z}_k$$

$\beta_k = \mathrm{diag}_{i=1,\dots,n}(\beta_{ik}) = \mathrm{diag}_{i=1,\dots,n}(\beta_i(z_k, \hat{z}_k, y_k, u_k))$ est une matrice diagonale inconnue dont les éléments diagonaux β_{ik} sont intrinsèquement reliés aux résidus de linéarisation φ_k par la relation :

$$\varphi_i(z_k, \hat{z}_k, y_k, u_k) = (\beta_i(z_k, \hat{z}_k, y_k, u_k) - 1)\bar{F}_{ik}\tilde{z}_k \tag{3.193}$$

où $\bar{F}_{ik}$ $(i = 1, \dots, n)$ représente la $i^{\text{ième}}$ ligne de $\bar{F}_k$.

Le paramétrage (3.192) étant effectué, des conditions suffisantes de convergence de l'OKE d'ordre réduit (3.185)-(3.189) sont données par le théorème suivant :

Théorème 3.7 *Si les conditions suivantes sont vérifiées :*

i. Il existe un réel $\zeta \in]0,1[$ *tel que la matrice* β_k *vérifie la relation :*

$$\begin{aligned}\bar{\beta}_k &= \max_{i=1,\dots,n} |\beta_{ik}| \\ &\leq \sqrt{\frac{(1-\zeta)\sigma_{\min}(L\bar{F}_k(P_k^{-1} + \bar{F}_k^T H^T R_k^{-1} H \bar{F}_k)^{-1}\bar{F}_k^T L^T + Q_k)}{(\sigma_{\max}(\Xi_k)\sigma_{\max}(\bar{F}_k))^2 \sigma_{\max}(P_k)}} = \Pi_k^{\beta} \end{aligned} \tag{3.194}$$

avec $0 < \bar{\beta}_k < \infty$,

ii. Le système (3.178) linéarisé le long des trajectoires de l'OKE d'ordre réduit (3.185)-(3.189) est N-localement uniformément observable, i.e. il existe des réels $\gamma_1, \gamma_2, \varepsilon > 0$ *et un entier* $N \geq 1$ *tels que pour tout* $k \geq N$ *:*

$$\gamma_1 I_{n-p} \leq \mathcal{O}^{e^T}_{[k-N+1,k]} \mathrm{diag}(R_{k-N+1}^{-1}, \dots, R_k^{-1}) \mathcal{O}^{e}_{[k-N+1,k]} \leq \gamma_2 I_{n-p}$$

(3.195)

où $0 < \gamma_1, \gamma_2 < \infty$ *et*

$$\mathcal{O}^e_{[k-N+1,k]} = \begin{pmatrix} H\bar{F}_{k-N+1} \\ H\bar{F}_{k-N+2}L\bar{F}_{k-N+1} \\ \vdots \\ H\bar{F}_k L\bar{F}_{k-1}L\bar{F}_{k-2}\ldots L\bar{F}_{k-N+1} \end{pmatrix} \tag{3.196}$$

pour tout $\hat{z}_i \in \mathcal{Z}$ *un compact de* $\mathbb{R}^{n-p}$ *tel que* $\|z_i - \hat{z}_i\| \leq \varepsilon$, $z_i \in \mathcal{Z}$, $i = k-N+1, \ldots, k$ *et toute séquence d'entrées/sorties admissibles* $U_{[k-N+1,k]} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{m\times N}$ *et* $Y_{[k-N+1,k]} \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^{p\times N}$,

iii. $L\bar{F}_k$ *est inversible et* $\bar{F}_k$ *est uniformément bornée pour tout* $\hat{z}_k \in \mathcal{Z}$ *et toute séquence d'entrées/sorties admissibles,*

alors $\lim_{k\to\infty} \|z_k - \hat{z}_k\| = 0$ *et le système (3.185)-(3.189) est un observateur asymptotique local pour (3.178).* ■

Démonstration.
Considérons la fonction de Lyapunov $V(\tilde{z}_k, k) : \mathcal{B}_\varepsilon \times \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}^+$:

$$V_k = V(\tilde{z}_k, k) = \tilde{z}_k^T P_k^{-1} \tilde{z}_k \tag{3.197}$$

et démontrons la stricte décroissance de la suite $\{V_k\}_{k\geq 0}$ c.-à-d. qu'il existe $\zeta \in]0,1[$ tel que :

$$V_{k+1} - V_k \leq -\zeta V_k \tag{3.198}$$

En substituant (3.192) dans (3.197) et (3.197) dans (3.198), il vient que :

$$V_{k+1} - (1-\zeta)V_k = \tilde{z}_k^T(\bar{F}_k^T\beta_k\Xi_k^T P_{k+1}^{-1}\Xi_k\beta_k\bar{F}_k - (1-\zeta)P_k^{-1})\tilde{z}_k \leq 0 \tag{3.199}$$

Pour satisfaire (3.199) et ainsi démontrer la stricte décroissance de la séquence $\{V_k\}_{k\geq 0}$, il suffit que l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$\bar{F}_k^T\beta_k\Xi_k^T P_{k+1}^{-1}\Xi_k\beta_k\bar{F}_k \leq (1-\zeta)P_k^{-1} \tag{3.200}$$

Comme β_k est une matrice diagonale, on démontre, à partir de la condition (3.194), que :

$$(\sigma_{\max}(\beta_k)\sigma_{\max}(\Xi_k)\sigma_{\max}(\bar{F}_k))^2\sigma_{\max}((L\bar{F}_k(P_k^{-1} + \bar{F}_k^T H^T R_k^{-1} H\bar{F}_k)^{-1}\bar{F}_k^T L^T + Q_k)^{-1}) \leq (1-\zeta)\sigma_{\min}(P_k^{-1})$$

En utilisant le fait que :

$$\sigma_{\max}(\bar{F}_k^T\beta_k\Xi_k^T(L\bar{F}_k(P_k^{-1} + \bar{F}_k^T H^T R_k^{-1} H\bar{F}_k)^{-1}\bar{F}_k^T L^T + Q_k)^{-1}\Xi_k\beta_k\bar{F}) \leq (\sigma_{\max}(\beta_k)\sigma_{\max}(\Xi_k)\sigma_{\max}(\bar{F}_k))^2\sigma_{\max}((L\bar{F}_k(P_k^{-1} + \bar{F}_k^T H^T R_k^{-1} H\bar{F}_k)^{-1}\bar{F}_k^T L^T + Q_k)^{-1})$$

et en substituant (3.187), on montre finalement que :

$$\sigma_{\max}(\bar{F}_k^T\beta_k\Xi_k^T P_{k+1}^{-1}\Xi_k\beta_k\bar{F}) \leq (1-\zeta)\sigma_{\min}(P_k^{-1}) \tag{3.201}$$

D'après la proposition A.2, l'existence de (3.201) implique l'existence de (3.200) et donc la stricte décroissance de la suite de Lyapunov $\{V_k\}_{k\geq 0}$.

Finalement, sous les hypothèses *ii.* et *iii.*, on démontre qu'il existe des constantes $0 < \underline{p} \leq \bar{p} < \infty$ telles que $\underline{p} I_{n-p} \leq P_k \leq \bar{p} I_{n-p}$ $\forall\, k \geq N-1$ [DEY68, SON95].
Il vient alors que :

$$\frac{1}{\bar{p}}\|\tilde{z}_k\|^2 \leq V_k \leq \frac{1}{\underline{p}}\|\tilde{z}_k\|^2$$

Comme $V_k \leq (1-\zeta)V_{k-1}$, la majoration suivante est immédiate :

$$\|\tilde{z}_k\| \leq \sqrt{\frac{\bar{p}}{\underline{p}}}\|\tilde{z}_0\|(1-\zeta)^{(k-N+1)/2} \tag{3.202}$$

et l'on conclut à la stabilité locale de l'erreur d'observation (3.154) $\forall\, k \geq N-1$. ❑

Remarque 3.18 (Sur la synthèse des matrices de pondération Q_k et R_k)
Nous analysons quantitativement la condition suffisante de convergence (3.194). Comme les variables β_{ik} sont des paramètres inconnus, éventuellement grands, leurs valeurs dépendant de nombreux facteurs comme les conditions initiales, le degré de non linéarité de f ou les signaux d'entrée/sortie, il est clair que nous nous devons de choisir les matrices de pondération Q_k, et à un degré moindre R_k, de façon à étendre au maximum la borne supérieure Π_k^β sur $\bar{\beta}_k$ dans (3.194).
Comme $\bar{F}_k$, P_k (et donc Ξ_k) sont uniformément bornées, un choix simple de Q_k et R_k pour satisfaire (3.194) et assurer la convergence de l'algorithme est le suivant :

$$Q_k = \gamma e_k^T e_k I_{n-p} + \varepsilon I_{n-p} \tag{3.203}$$
$$R_k = \lambda H \bar{F}_k P_k \bar{F}_k^T H^T + \varepsilon I_p \tag{3.204}$$

où $e_k = H(\bar{f}(z_k, y_k, u_k) - \bar{f}(\hat{z}_k, y_k, u_k))$.
$\gamma \geq 0$, $\lambda \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ sont des scalaires positifs fixés par l'utilisateur, ε est introduit afin d'assurer la stricte positivité et la régularité des matrices Q_k et R_k.

A l'instar du cas d'ordre plein, l'idée avancée est de contrôler adaptativement l'amplitude (en norme) de Q_k et R_k (et donc celle de la borne Π_k^β) en fonction de l'erreur de sortie e_k de façon à satisfaire (3.194) $\forall\, \bar{\beta}_k$. Il est, bien entendu, très difficile de donner une valeur a priori des paramètres γ et λ. Ces derniers sont en fait déterminés à l'aide d'un algorithme de recherche binaire en s'appuyant éventuellement sur une connaissance empirique du système physique étudié (estimation de la borne $\bar{\beta}_k$). En particulier, il semble judicieux de choisir γ suffisamment "grand" lorsque sont conjuguées mauvaises conditions initiales et non linéarités importantes du système. ▼

3.4.4 Conclusion

Dans cette section, nous avons proposé deux observateurs d'ordre réduit pour les systèmes non linéaires temps-discret à mesures linéaires. Tous deux sont fondés sur le formalisme du filtre de Kalman étendu. Nous nous sommes intéressés plus particulièrement aux mécanismes

de convergence des algorithmes proposés en introduisant un nouveau paramétrage de l'analyse de la convergence de cette catégorie d'estimateurs linéarisés au premier ordre.

Cette approche nous a permis, d'une part de dégager des conditions suffisantes d'existence des observateurs présentés, d'autre part d'établir les liens étroits existants entre le choix de certaines matrices de pondération (nommées Q_k et R_k) et l'amélioration des performances (élargissement du domaine d'attraction, amélioration de la vitesse de convergence) des algorithmes proposés.

3.5 Observateur pour les systèmes non linéaires singuliers

Il existe un certain nombre de situations où l'utilisation d'un modèle d'état régulier ne suffit pas à représenter le comportement dynamique d'un système donné. Une modélisation sous forme singulière (autrement appelée implicite, généralisée ou algébro-différentielle) semble alors appropriée. Les systèmes singuliers sont particulièrement adaptés pour décrire le comportement de systèmes à entrées inconnues ou de systèmes décrits conjointement par des équations différentielles et des équations (contraintes) algébriques : modèles mathématiques de circuits électriques, de procédés biologiques, systèmes interconnectés de grandes dimensions, systèmes mécaniques avec contraintes holonomiques ou non-holonomiques, systèmes de robotique avec contraintes cinématiques, ...

Dans le cas LTI, le problème de la commande et de l'observation des systèmes singuliers a été étudié de manière intensive ces vingt dernières années (voir par exemple [LUE77, VER86, DAI89, LEW90, LEW92, SHI92, MüL93, DAR95]). A contrario, le cas non linéaire est souvent délaissé et nous notons que très peu de travaux traitent le problème de la synthèse d'observateurs des systèmes non linéaires singuliers. Dans [KAP95], Kaprelian et Turi ont proposé une technique de linéarisation étendue pour construire un observateur des systèmes non linéaires singuliers lorsque la matrice E est carrée. Leurs résultats ont été généralisés au cas où E peut être rectangulaire dans [BOU94, BOU95a]. Shields dans [SHI96, SHI97b, SHI97a] utilise la décomposition en valeurs singulières du système non linéaire singulier initial pour construire des observateurs temps-discret et temps-continu. Dans [BOU94, SHI96, SHI97b, SHI97a], nous remarquons que la convergence de l'observateur est assurée lorsque le champ de vecteur f est globalement lipschitzien.

Dans cette section, nous présentons un observateur pour les systèmes non linéaires singuliers temps-discret en utilisant la structure classique de l'OKE [BOU97b]. En paramétrant l'analyse de convergence de l'observateur grâce à la technique de linéarisation "exacte" au premier ordre décrite dans les sections précédentes, des conditions suffisantes de stabilité de l'erreur d'observation sont établies et l'accent est mis sur le rôle primordial joué par certaines matrices de pondération dans l'amélioration des performances de l'observateur. Un réglage empirique de ces matrices est proposé.

3.5.1 Formulation de l'observateur

Considérons un système non linéaire singulier temps-discret décrit par le couple d'équations :

$$Ex_{k+1} = f(x_k, u_k) \tag{3.205a}$$

$$y_k = Hx_k \tag{3.205b}$$

où E et H sont des matrices d'éléments réels de dimensions $q \times n$ et $p \times n$ avec $\text{rang}(E) = r$, $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$ et $y_k \in \mathbb{R}^p$ sont les vecteurs d'état, des entrées et des sorties. Nous supposons que la fonction non linéaire $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^q$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque 3.19 *Le modèle (3.205) constitue bien une représentation unifiée des systèmes dynamiques non linéaires (à mesures linéaires). Cependant, plusieurs cas sont à distinguer*

selon le rang *de* E *:*

- *Si* $\text{rang}(E) = r = q = n$, *alors* E *est inversible et (3.205) est un système non linéaire "standard" ou explicite,*
- *Si* $\text{rang}(E) = r = n < q$, *alors (3.205a) est décomposable en équations différentielles et en équations algébriques, et (3.205) est un système non linéaire "standard" avec des contraintes algébriques non linéaires,*
- *Si* $\text{rang}(E) = r = q < n$, *alors (3.205) est un système non linéaire "standard" à dynamiques partielles (prise en compte d'entrées inconnues par exemple),*
- *Si* $\text{rang}(E) = r$ *avec* $r < q$ *et* $r < n$, *alors (3.205) est un système non linéaire "standard" à dynamiques partielles avec des contraintes algébriques non linéaires.* ▼

Dans ce qui suit, nous proposons de reconstruire l'état de ce système à l'aide d'un observateur de type Kalman étendu sous une condition de rang classique dans l'étude des systèmes singuliers. Le résultat principal est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.8 ([BOU97b]) *Si la condition suivante (observabilité à l'infini) est vérifiée :*

$$\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} = n \tag{3.206}$$

alors un observateur de type Kalman étendu pour (3.205) est donné par :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} e_{k+1} \tag{3.207}$$

$$P_{k+1} = (I - K_{k+1} H) P_{k+1/k} \tag{3.208}$$

$$\hat{x}_{k+1/k} = \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^{\dagger} \begin{bmatrix} f(\hat{x}_k, u_k) \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \tag{3.209}$$

$$P_{k+1/k} = A F_k P_k F_k^T A^T + Q_k \tag{3.210}$$

avec

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} H^T (H P_{k+1/k} H^T + R_{k+1})^{-1} \tag{3.211}$$

$$e_{k+1} = y_{k+1} - H \hat{x}_{k+1/k} \tag{3.212}$$

et

$$F_k = F(\hat{x}_k, u_k) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_k, u_k) \tag{3.213}$$

$$A = \left(\begin{bmatrix} E^T & H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \right)^{-1} E^T \tag{3.214}$$

où $\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^{\dagger} = \left(\begin{bmatrix} E^T & H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} E^T & H^T \end{bmatrix}$ *représente la pseudo-inverse de Moore-Penrose à gauche de* $\begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}$, $P_0 = \mu I_n > 0$, Q_k *et* R_{k+1} *sont des matrices de pondération définies positives dont la synthèse sera détaillée ultérieurement.* ■

Démonstration.
Sous la condition (3.206), le vecteur d'état x_{k+1} se réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \left(\begin{bmatrix} E^T & H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} E^T & H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \right) x_{k+1} \\ &= \left(\begin{bmatrix} E^T & H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \right)^{-1} (E^T E x_{k+1} + H^T H x_{k+1}) \\ &= \left(\begin{bmatrix} E^T & H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} E^T & H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E x_{k+1} \\ H x_{k+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.215}$$

En substituant (3.205a) et (3.205b) dans (3.215), nous obtenons le système dynamique régulier :

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^{\dagger} \begin{bmatrix} f(x_k, u_k) \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \tag{3.216a}$$

$$y_k = H x_k \tag{3.216b}$$

A ce système déterministe, nous associons le système stochastique artificiel :

$$\xi_{k+1} = \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^{\dagger} \begin{bmatrix} f(\xi_k, u_k) \\ y_{k+1} \end{bmatrix} + G_k w_k \tag{3.217a}$$

$$y_k = H \xi_k + D_k v_k \tag{3.217b}$$

où $\xi_k \in \mathbb{R}^n$. $w_k \in \mathbb{R}^r$ et $v_k \in \mathbb{R}^s$ sont des bruits additifs blancs, mutuellement indépendants et de covariances unitaires. G_k et D_k sont des matrices dépendant du temps, de dimensions respectives $n \times r$ et $p \times s$.

Nous cherchons désormais à construire un filtre de type Kalman étendu pour (3.217). La dynamique de l'estimateur étudié est de la forme :

$$\hat{\xi}_{k+1} = \hat{\xi}_{k+1/k} + K_{k+1}(y_{k+1} - H\hat{\xi}_{k+1/k}) \tag{3.218}$$

où, en utilisant le vecteur de prédiction généralisé $E\hat{\xi}_{k+1/k} = f(\hat{\xi}_k, u_k)$ et l'équation de sortie (3.217b), la "prédiction" $\hat{\xi}_{k+1/k}$ est donnée par :

$$\hat{\xi}_{k+1/k} = \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^{\dagger} \begin{bmatrix} f(\hat{\xi}_k, u_k) \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \tag{3.219}$$

Soient $\tilde{\xi}_{k+1}$ et $\tilde{\xi}_{k+1/k}$ les vecteurs d'erreur d'estimation et de prédiction tels que :

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_{k+1} &= \xi_{k+1} - \hat{\xi}_{k+1} \\ &= (I_n - K_{k+1}H)\tilde{\xi}_{k+1/k} - K_{k+1}v_{k+1} + w_k \end{aligned} \tag{3.220}$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_{k+1/k} &= \xi_{k+1} - \hat{\xi}_{k+1/k} \\ &= \left(\begin{bmatrix} E^T & H^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix} \right)^{-1} (E^T E \xi_{k+1} + H^T y_{k+1}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(\begin{bmatrix}E^T & H^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E\\H\end{bmatrix}\right)^{-1}(E^TE\hat{\xi}_{k+1}+H^Ty_{k+1})\\
&=\left(\begin{bmatrix}E^T & H^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E\\H\end{bmatrix}\right)^{-1}E^T(f(\xi_k,u_k)-f(\hat{\xi}_k,u_k))\\
&=A(f(\xi_k,u_k)-f(\hat{\xi}_k,u_k))\\
&=A(F_k\tilde{\xi}_k+\varphi(\xi_k,\tilde{\xi}_k,u_k))
\end{aligned}
\tag{3.221}
$$

où A et F_k sont définies par (3.214) et (3.213) et φ_k représente les termes résiduels d'ordre supérieur ou égal à deux en $\xi_k - \hat{\xi}_k$ issus de la linéarisation de f en $\hat{\xi}_k$.

En négligeant φ_k et en insérant (3.221) dans (3.220), le gain K_{k+1} de l'estimateur (3.218) résulte de la minimisation de la matrice de covariance $P_{k+1} = \mathscr{E}\{\tilde{\xi}_{k+1}\tilde{\xi}_{k+1}^T\}$.
Les équations obtenues sont alors celles du filtre de Kalman étendu classique muni de la "prédiction" $\hat{\xi}_{k+1/k} = \begin{bmatrix}E\\H\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}f(\hat{\xi}_k,u_k)\\y_{k+1}\end{bmatrix}$ et de l'équation de Riccati aux différences $P_{k+1/k} = AF_kP_kF_k^TA^T + Q_k$. L'utilisation de ce filtre en tant qu'observateur pour le système déterministe (3.216) (ou (3.205)) donne l'algorithme (3.207)-(3.214). ❑

3.5.2 Analyse de convergence

Ce paragraphe est consacré à l'analyse des mécanismes de convergence de l'observateur (3.207)-(3.214) dans un contexte déterministe (i.e. $G_kG_k^T = 0$ et $D_kD_k^T = 0$). En imitant les précédentes études de stabilité de l'OKE, nous paramétrons l'analyse de convergence à l'aide d'une matrice diagonale inconnue β_k modélisant les différents résidus de linéarisation de f pour établir des conditions suffisantes de convergence de l'algorithme.

Soient $\tilde{x}_{k+1}$ et $\tilde{x}_{k+1/k}$ les erreurs d'estimation et de "prédiction" définies par :

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_{k+1} &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}\\
&= (I_n - K_{k+1}H)\tilde{x}_{k+1/k}
\end{aligned}
\tag{3.222}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}_{k+1/k} &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k}\\
&= A(f(x_k,u_k) - f(\hat{x}_k,u_k))
\end{aligned}
\tag{3.223}
$$

Au lieu d'utiliser l'approximation classique au premier ordre $f(x_k,u_k) - f(\hat{x}_k,u_k) \approx F_k\tilde{x}_k$, nous paramétrons l'analyse de convergence de l'observateur à l'aide d'une matrice diagonale $\beta_k = \mathrm{diag}_{i=1,\ldots,n}(\beta_{ik}) = \mathrm{diag}_{i=1,\ldots,n}(\beta_i(x_k,\hat{x}_k,u_k))$ modélisant les différents résidus de linéarisation φ_k pour obtenir l'expression exacte :

$$
f(x_k,u_k) - f(\hat{x}_k,u_k) = \beta_kF_k\tilde{x}_k \tag{3.224}
$$

Les substitutions successives de (3.224) dans (3.223) et de (3.223) dans (3.222) mènent à la dynamique de l'erreur d'observation suivante :

$$
\tilde{x}_{k+1} = (I_n - K_{k+1}H)A\beta_kF_k\tilde{x}_k \tag{3.225}
$$

Les conditions suffisantes de stabilité locale du point d'équilibre $\tilde{x}_k = 0$ sont données par le résultat suivant :

Théorème 3.9 *Si les conditions suivantes sont satisfaites :*

i. Il existe un réel $\zeta \in]0,1[$ tel que la matrice instrumentale β_k vérifie la condition :

$$\bar{\beta}_k = \max_{i=1,\dots,n} |\beta_{ik}| \leq \sqrt{\frac{(1-\zeta)\sigma_{\min}(P_{k+1/k} + P_{k+1/k}H^T R_{k+1}^{-1} H P_{k+1/k})}{(\sigma_{\max}(F_k)\sigma_{\max}(A))^2 \sigma_{\max}(P_k)}} = \Pi_k^{\beta} \tag{3.226}$$

avec $0 < \bar{\beta}_k < \infty$,

ii. Le système (3.216) linéarisé le long des trajectoires de l'OKE (3.207)-(3.214) est N-localement uniformément observable i.e. il existe des réels $\gamma_1, \gamma_2, \varepsilon > 0$ et un entier $N \geq 1$ tels que pour tout $k \geq N$:

$$\gamma_1 I_n \leq \mathcal{O}^{e^T}_{[k-N+1,k]} \operatorname{diag}(R^{-1}_{k-N+1}, \dots, R_k^{-1}) \mathcal{O}^{e}_{[k-N+1,k]} \leq \gamma_2 I_n \tag{3.227}$$

où $0 < \gamma_1, \gamma_2 < \infty$ et

$$\mathcal{O}^{e}_{[k-N+1,k]} = \begin{pmatrix} H \\ HAF_{k-N+1} \\ \vdots \\ HAF_{k-1}AF_{k-2}\dots AF_{k-N+1} \end{pmatrix} \tag{3.228}$$

pour tout $\hat{x}_i \in \mathcal{X}$ un compact de $\mathbb{R}^n$ tel que $\|x_i - \hat{x}_i\| \leq \varepsilon$, $x_i \in \mathcal{X}$, $i = k-N+1, \dots, k-1$, et pour toute séquence d'entrées admissibles $U_{[k-N+1,k-1]} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{m\times(N-1)}$,

iii. La matrice AF_k est inversible et uniformément bornée pour tout $\hat{x}_k \in \mathcal{X}$ et toute séquence d'entrées admissibles,

alors $\lim_{k\to\infty} \|x_k - \hat{x}_k\| = 0$ et le système (3.147)-(3.153) est un observateur asymptotique local pour (3.136). ■

Démonstration.
Considérons la fonction de Lyapunov candidate $V(\tilde{x}_k, k) : \mathcal{B}_\varepsilon \times \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}^+$:

$$V_{k+1} = \tilde{x}_{k+1}^T P_{k+1}^{-1} \tilde{x}_{k+1} \tag{3.229}$$

où $\tilde{x}_{k+1}$ est définie par (3.225) et démontrons qu'il existe un réel $\zeta \in]0,1[$ tel que

$$V_{k+1} - V_k \leq -\zeta V_k \tag{3.230}$$

En substituant (3.225) dans (3.229), l'inégalité (3.230) devient :

$$\begin{aligned} V_{k+1} - (1-\zeta)V_k = \tilde{x}_k^T F_k^T \beta_k A^T (I_n - K_{k+1}H)^T P_{k+1}^{-1} (I_n - K_{k+1}) A \beta_k F_k \tilde{x}_k \\ -(1-\zeta)\tilde{x}_k^T P_k^{-1} \tilde{x}_k \leq 0 \end{aligned} \tag{3.231}$$

A partir de (3.208), nous avons :

$$(I_n - K_{k+1}) = P_{k+1}P_{k+1/k}^{-1}$$

et il vient alors que :

$$V_{k+1} - (1-\zeta)V_k = \tilde{x}_k^T(F_k^T\beta_k A^T(P_{k+1/k}^{-1}P_{k+1}P_{k+1/k}^{-1})A\beta_k F_k - (1-\zeta)P_k^{-1})\tilde{x}_k \leq 0 \tag{3.232}$$

En utilisant (3.232), la stricte décroissance de la séquence de Lyapunov $\{V_k\}_{k\geq 0}$ est assurée si :

$$F_k^T\beta_k A^T(P_{k+1/k}^{-1}P_{k+1}P_{k+1/k}^{-1})A\beta_k F_k \leq (1-\zeta)P_k^{-1} \tag{3.233}$$

Pour garantir l'existence de (3.233), nous utilisons désormais la condition suffisante de stabilité (3.226). Comme β_k est une matrice diagonale, on démontre à partir de (3.226) que :

$$(\sigma_{\max}(\beta_k))^2 \leq \frac{(1-\zeta)\sigma_{\min}(P_{k+1/k} + P_{k+1/k}H^T R_{k+1}^{-1} H P_{k+1/k})}{(\sigma_{\max}(F_k)\sigma_{\max}(A))^2\sigma_{\max}(P_k)}$$

$\Leftrightarrow$

$$(\sigma_{\max}(\beta_k)\sigma_{\max}(F_k)\sigma_{\max}(A))^2\sigma_{\max}(P_{k+1/k} + P_{k+1/k}H^T R_{k+1}^{-1} H P_{k+1/k})^{-1} \leq (1-\zeta)\sigma_{\min}(P_k^{-1}) \tag{3.234}$$

En utilisant la relation usuelle $P_{k+1}^{-1} = P_{k+1/k}^{-1} + H^T R_{k+1}^{-1} H$, on démontre d'un autre côté que :

$$\begin{aligned}(P_{k+1/k} + P_{k+1/k}H^T R_{k+1}^{-1} H P_{k+1/k})^{-1} &= P_{k+1/k}^{-1}(P_{k+1/k}^{-1} + H^T R_{k+1}^{-1} H)^{-1} P_{k+1/k}^{-1} \\ &= P_{k+1/k}^{-1}P_{k+1}P_{k+1/k}^{-1}\end{aligned} \tag{3.235}$$

Le remplacement de (3.235) dans (3.234) donne :

$$(\sigma_{\max}(\beta_k)\sigma_{\max}(F_k)\sigma_{\max}(A))^2\sigma_{\max}(P_{k+1/k}^{-1}P_{k+1}P_{k+1/k}^{-1}) \leq (1-\zeta)\sigma_{\min}(P_k^{-1})$$

Comme,

$$\begin{aligned}&\sigma_{\max}(F_k^T\beta_k A^T(P_{k+1/k}^{-1}P_{k+1}P_{k+1/k}^{-1})A\beta_k F_k) \\ &\qquad \leq (\sigma_{\max}(\beta_k)\sigma_{\max}(F_k)\sigma_{\max}(A))^2\sigma_{\max}(P_{k+1/k}^{-1}P_{k+1}P_{k+1/k}^{-1})\end{aligned}$$

on montre que :

$$\sigma_{\max}(F_k^T\beta_k A^T(P_{k+1/k}^{-1}P_{k+1}P_{k+1/k}^{-1})A\beta_k F_k) \leq (1-\zeta)\sigma_{\min}(P_k^{-1}) \tag{3.236}$$

D'après la proposition A.2, l'existence de (3.236) implique l'existence de (3.233) et donc la stricte décroissance de la suite de Lyapunov $\{V_k\}_{k\geq 0}$.

Finalement, en utilisant l'hypothèse *ii.* d'observabilité du système linéarisé le long des trajectoires de l'observateur (3.207)-(3.214) et l'hypothèse *iii.* d'inversibilité et de bornitude

uniforme de AF_k, on démontre qu'il existe des constantes $0 < \underline{p} \leq \bar{p} < \infty$ telles que $\underline{p} I_n \leq P_k \leq \bar{p} I_n$, $\forall\, k \geq N-1$. Il vient que :

$$\frac{1}{\bar{p}}\|\tilde{x}\|^2 \leq V_k \leq \frac{1}{\underline{p}}\|\tilde{x}\|^2$$

Dès lors, en utilisant le fait que $V_k \leq (1-\zeta)V_{k-1}$, la majoration suivante est immédiate :

$$\|\tilde{x}_k\| \leq \sqrt{\frac{\bar{p}}{\underline{p}}}\|\tilde{x}_0\|(1-\zeta)^{(k-N+1)/2} \tag{3.237}$$

et l'on conclut à la stabilité locale de l'erreur d'observation (3.225). ❑

Remarque 3.20 (Sur la synthèse des matrices de pondération Q_k et R_{k+1})
Lorsque la trajectoire estimée $\hat{x}_k$ de l'observateur tend vers la trajectoire actuelle x_k du système, la matrice β_k tend vers l'identité et il est facile de démontrer que la condition (3.233) de stricte décroissance de la séquence de Lyapunov $\{V_k\}_{k\geq 0}$ est satisfaite. En effet, (3.233) devient dans ce cas :

$$(AF_k)^T(P_{k+1/k} + P_{k+1/k}H^T R_{k+1}^{-1} H P_{k+1/k})^{-1} AF_k \leq (1-\zeta)P_k^{-1}$$

Soit, sous la condition d'inversibilité de AF_k :

$$\begin{aligned} AF_k P_k (AF_k)^T &\leq (1-\zeta)(P_{k+1/k} + P_{k+1/k}H^T R_{k+1}^{-1} H P_{k+1/k}) \\ &\leq P_{k+1/k} + P_{k+1/k}H^T R_{k+1}^{-1} H P_{k+1/k} \end{aligned}$$

En utilisant (3.210), on obtient finalement l'inégalité :

$$-Q_k \leq P_{k+1/k}H^T R_{k+1}^{-1} H P_{k+1/k}$$

qui est vérifiée lorsque $Q_k \geq 0$ et $R_{k+1} > 0$.

D'un autre côté, lorsque nous sommes en présence d'erreurs d'initialisation ou de non linéarités importantes du système, la borne $\bar{\beta}_k$ est inconnue, éventuellement "grande" et nous remarquons alors que le choix de la matrice de pondération Q_k, et à un degré moindre R_{k+1}, est fondamental pour élargir le majorant Π_k^β et ainsi, vérifier la condition de stabilité 3.226. En effet, en utilisant (3.210) et le fait que F_k et P_k sont bornées, on démontre facilement que :

$$\begin{aligned} \Pi_k^\beta = \sqrt{\frac{(1-\zeta)\sigma_{\min}(P_{k+1/k} + P_{k+1/k}H^T R_{k+1}^{-1} H P_{k+1/k})}{(\sigma_{\max}(F_k)\sigma_{\max}(A))^2 \sigma_{\max}(P_k)}} &\geq \sqrt{\frac{(1-\zeta)\sigma_{\min}(P_{k+1/k})}{(\sigma_{\max}(F_k)\sigma_{\max}(A))^2 \sigma_{\max}(P_k)}} \\ &\geq \sqrt{\frac{(1-\zeta)\sigma_{\min}(Q_k)}{(\sigma_{\max}(F_k)\sigma_{\max}(A))^2 \sigma_{\max}(P_k)}} \end{aligned}$$

Par conséquent, il est clair que l'amplitude de Π_k^β évoluera proportionnellement à celle (en norme) de Q_k.

Un choix simple empirique mais non unique de Q_k est alors le suivant :

$$Q_k = \gamma e_k^T e_k I_n + \varepsilon I_n \tag{3.238}$$

où $\gamma \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ sont des scalaires fixés par l'utilisateur.
A l'instar des OKE d'ordre plein et réduit proposés, l'idée avancée ici est de contrôler automatiquement l'amplitude (en norme) de Q_k (et donc de Π_k^β) en fonction de l'erreur de sortie e_k.

La construction de R_{k+1} apparaît moins importante que celle de Q_k mais nous continuons à choisir :

$$R_{k+1} = \lambda H P_{k+1/k} H^T + \varepsilon I_p \tag{3.239}$$

où $\lambda \geq 0$ est un paramètre de synthèse fixé par l'utilisateur. ▼

3.5.3 Conclusion

Dans cette section, nous avons présenté un observateur pour les systèmes non linéaires temps-discret singuliers à mesures linéaires. L'algorithme développé s'applique au cas général où E peut être rectangulaire et s'appuie sur le formalisme du filtre de Kalman étendu sous la condition d'observabilité à l'infini. Des conditions suffisantes de convergence ont été établies. Un réglage judicieux des matrices de pondération de l'observateur a finalement été proposé.

3.6 Estimation séparée de l'état et des biais des systèmes non linéaires

3.6.1 Introduction

L'utilisation des techniques d'observation présentées précédemment requiert une connaissance précise des modèles étudiés. Or, cette hypothèse s'avère peu réaliste en pratique où la plupart des modèles font apparaître des paramètres sujets à des biais, c'est à dire déviant d'une quantité inconnue autour de leur valeur nominale (résistance rotorique dans les machines électriques, coefficients de transfert de chaleur dans les processus chimiques, ...). Dans ce cas, l'utilisation des valeurs nominales des paramètres dans une stratégie d'observation induit des erreurs d'estimation inacceptables ou, dans le pire des cas, une instablité de l'algorithme. Il convient alors de réactualiser le modèle à chaque instant en estimant conjointement l'état et les biais (paramètres) inconnus. Une approche naturelle consiste à augmenter le vecteur d'état par le vecteur des biais inconnus et à observer le système ainsi étendu. Cette méthode est intéressante lorsque le nombre de biais est faible devant la dimension du système mais devient vite prohibitive en terme de capacité de calcul lorsque de multiples biais apparaissent. Afin d'éviter ce problème, Friedland [FRI69, FRI78] proposa d'estimer de façon découplée l'état et les biais des systèmes LTI stochastiques. Depuis, de nombreuses extensions prenant en compte biais aléatoires [IGN90, ALO93, HSI99] ou entrées inconnues [KEL96] ont été développées.

A notre connaissance, le cas non linéaire semble, une nouvelle fois, délaissé : très peu de travaux traitent de l'estimation combinée (et encore moins découplée) de l'état et des biais des systèmes non linéaires [SHR74, MEN76, CAG83]. Les algorithmes existants utilisent principalement le formalisme du filtre de Kalman étendu et sont, de ce fait, confrontés au problème récurrent lié à l'utilisation de ce filtre, à savoir, en démontrer la convergence. Ces estimateurs présentent notamment une très forte sensibilité par rapport à d'éventuelles mauvaises conditions initiales, ou biais d'amplitudes importantes. Récemment, Zhou *et al.* [ZHO93, ZHA96, ZHO97] ont proposé une modification intéressante de l'équation de Riccati aux différences (incluant un facteur d'oubli) du FKE appliqué à l'algorithme d'estimation de Friedland. L'intérêt de cette approche est démontré au travers d'exemples numériques mais auncune démonstration de convergence n'est apportée alors qu'un nombre important de paramètres de synthèse doit être sélectionné.

L'objectif, dans cette section, sera de formuler et d'analyser les mécanismes de convergence d'un estimateur de type Kalman étendu, découplé état/biais, pour les systèmes non linéaires temps-discret sujets à des bias constants [BOU97c, BOUb, BOUa]. L'utilisation de la technique de linéarisation "exacte" au premier ordre, présentée en section 3.3.3 nous permettra, d'une part d'établir des conditions suffisantes de convergence de l'algorithme, d'autre part de démontrer le rôle fondamental joué par certaines matrices de pondération, nommées Q_k^x, R_{k+1}^x et R_{k+1}^b, dans l'amélioration de la stabilité et des performances de l'estimateur proposé. La synthèse de ces matrices sera analysée et un choix simple, basé sur la sélection de quelques paramètres de synthèse, sera proposé.

3.6.2 Formulation de l'estimateur global

Considérons un système non linéaire temps-discret sujet à des biais constants décrit pour le couple d'équations :

$$x_{k+1} = f(x_k, b, u_k) \tag{3.240a}$$
$$y_k = h(x_k, u_k) \tag{3.240b}$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$, $u_k \in \mathbb{R}^m$, $y_k \in \mathbb{R}^p$ et $b \in \mathbb{R}^q$ représente un biais constant, i.e. $b_{k+1} = b_k \; \forall k \geq 0$. Nous supposons que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est continûment différentiable par rapport à x_k et à b et que $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ est continûment différentiable par rapport à x_k.

La méthode d'estimation globale consiste à augmenter le vecteur d'état x_k par le vecteur des biais b_k et à formuler un observateur pour le système ainsi étendu. A partir de (3.240), il vient que :

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_k, b_k, u_k) \\ b_k \end{pmatrix} \tag{3.241a}$$
$$y_k = h(x_k, u_k) \tag{3.241b}$$

Dès lors, en suivant une méthodologie analogue à celle des sections précédentes et en associant au système (3.241) le système stochastique virtuel suivant :

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_k, b_k, u_k) \\ b_k \end{pmatrix} + G_k w_k \tag{3.242a}$$
$$y_k = h(x_k, u_k) + D_k v_k \tag{3.242b}$$

où $w_k \in \mathbb{R}^r$ et $v_k \in \mathbb{R}^s$ sont des bruits additifs blancs, mutuellement indépendants et de covariances unitaires, G_k et D_k sont des matrices dépendant du temps, de dimensions respectives $(n+q) \times r$ et $p \times s$; le filtre de Kalman étendu pour le système (3.242) que nous utilisons en tant qu'observateur pour le système (3.241) s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ \hat{b}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{k+1/k} \\ \hat{b}_{k+1/k} \end{pmatrix} + K_{k+1} e_{k+1} \tag{3.243}$$
$$P_{k+1} = (I_{n+q} - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1/k} \tag{3.244}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{k+1/k} \\ \hat{b}_{k+1/k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\hat{x}_k, \hat{b}_k, u_k) \\ \hat{b}_k \end{pmatrix} \tag{3.245}$$
$$P_{k+1/k} = F_k P_k F_k^T + Q_k \tag{3.246}$$

où

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \tag{3.247}$$
$$e_{k+1} = y_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1/k}, u_{k+1}) \tag{3.248}$$

avec

$$F_k = F(\hat{x}_k, \hat{b}_k, u_k) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_k, \hat{b}_k, u_k) & \dfrac{\partial f}{\partial b}(\hat{x}_k, \hat{b}_k, u_k) \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \tag{3.249}$$

$$H_{k+1} = H(\hat{x}_{k+1/k}, u_{k+1}) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_{k+1/k}, u_{k+1}) \quad 0 \right) \tag{3.250}$$

et $P_0 = \mu I_{n+q} > 0$. Q_k et R_{k+1} sont des matrices de pondération définies positives dont le choix est libre. La démonstration de la convergence de cet observateur est analogue à celle de l'OKE pour les systèmes non linéaires, présentée en section 3.3.3.

Le principal inconvénient de cette approche réside dans le fait même de devoir augmenter le vecteur d'état par le vecteur des biais, l'OKE construit étant de dimension $n + q$. Cette stratégie d'estimation semble donc effective lorsque le nombre de biais est faible devant la dimension du système, mais devient vite problématique en terme de capacité de calcul, lorsqu'elle s'applique à des systèmes de grande dimension, ou sujets à des biais multiples. Afin d'éviter ce problème et de limiter les risques d'instabilité numériques inhérents à toute implantation physique de cet observateur (en particulier pour les systèmes mal conditionnés), il convient de séparer l'estimation de l'état de celle des biais, en appliquant une stratégie d'observation en deux étapes partiellement découplées [FRI69].

3.6.3 Formulation de l'estimateur séparé

Considérons le système déterministe (3.241). L'algorithme d'estimation proposé consiste à estimer séparemment et séquenciellement l'état et les biais de (3.241) par l'intermédiaire de deux systèmes dynamiques de dimensions respectives n et q.

- **Estimation de l'état**

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K^x_{k+1} e_{k+1} \tag{3.251}$$
$$K^x_{k+1} = S_{k+1} L_{k+1} \tag{3.252}$$
$$P^x_{k+1/k} = \begin{pmatrix} F^x_k & F^b_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^x_k & P^{xb}_k \\ P^{xb^T}_k & P^b_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{x^T}_k \\ F^{b^T}_k \end{pmatrix} + Q^x_k \tag{3.253}$$
$$P^x_{k+1} = P^x_{k+1/k} - K^x_{k+1} S^T_{k+1} \tag{3.254}$$

- **Estimation des biais**

$$\hat{b}_{k+1} = \hat{b}_{k+1/k} + K^b_{k+1} e_{k+1} \tag{3.255}$$
$$K^b_{k+1} = V_{k+1} L_{k+1} \tag{3.256}$$
$$P^b_{k+1/k} = P^b_k + Q^b_k \tag{3.257}$$
$$P^b_{k+1} = P^b_{k+1/k} - K^b_{k+1} V^T_{k+1} \tag{3.258}$$

avec

$$L_{k+1} = (H^x_{k+1} P^x_{k+1/k} H^{x^T}_{k+1} + R^x_{k+1})^{-1} \tag{3.259}$$
$$S_{k+1} = P^x_{k+1/k} H^{x^T}_{k+1} \tag{3.260}$$
$$V_{k+1} = P^{xb^T}_{k+1/k} H^{x^T}_{k+1} \tag{3.261}$$
$$P^{xb}_{k+1/k} = F^x_k P^{xb}_k + F^b_k P^b_k + Q^{xb}_k \tag{3.262}$$
$$P^{xb}_{k+1} = P^{xb}_{k+1/k} - K^x_{k+1} V^T_{k+1} \tag{3.263}$$

et

$$F_k^x = F^x(\hat{x}_k, \hat{b}_k, u_k) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}_k, \hat{b}_k, u_k), \quad F_k^b = F^b(\hat{x}_k, \hat{b}_k, u_k) = \frac{\partial f}{\partial b}(\hat{x}_k, \hat{b}_k, u_k) \tag{3.264}$$

$$H_{k+1}^x = H^x(\hat{x}_{k+1/k}, u_{k+1}) = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_{k+1/k}, u_{k+1}) \tag{3.265}$$

où $\hat{x}_{k+1/k}$, $\hat{b}_{k+1/k}$ et e_{k+1} sont définies par les relations (3.245) et (3.248). Les "pseudo-covariances" P_{k+1}^x, P_{k+1}^b, P_{k+1}^{xb}, $P_{k+1/k}^x$, $P_{k+1/k}^b$ et $P_{k+1/k}^{xb}$ sont symétriques définies positives et initialisées comme suit : $P_0^x = \mu^x I_n$, $P_0^b = \mu^b I_q$ et $P_0^{xb} = 0$ avec $\mu^x, \mu^b > 0$. Q_k^x, Q_k^b, Q_k^{xb} et R_{k+1}^x sont des matrices de pondération définies positives dont la synthèse sera détaillée ultérieurement.

3.6.3.1 Analogie approche globale/approche décentralisée

Afin de faciliter l'étude de la convergence de l'estimateur découplé état/biais (3.251)-(3.265), nous démontrons, d'abord, que ce dernier est analytiquement équivalent à l'OKE global (3.243)-(3.250).

Pour ce faire, nous notons que l'agrégation des relations (3.252), (3.256), (3.259), (3.260) et (3.261) permet de réécrire les gains d'observateur K_{k+1}^x et K_{k+1}^b sous la forme :

$$\begin{pmatrix} K_{k+1}^x \\ K_{k+1}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{k+1/k}^x & P_{k+1/k}^{xb} \\ P_{k+1/k}^{xb^T} & P_{k+1/k}^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{k+1}^{x^T} \\ 0 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} H_{k+1}^x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{k+1/k}^x & P_{k+1/k}^{xb} \\ P_{k+1/k}^{xb^T} & P_{k+1/k}^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{k+1}^{x^T} \\ 0 \end{pmatrix} + R_{k+1}^x \right)^{-1} \tag{3.266}$$

De même, les équations (3.253), (3.257) et (3.262) nous donnent :

$$\begin{pmatrix} P_{k+1/k}^x & P_{k+1/k}^{xb} \\ P_{k+1/k}^{xb^T} & P_{k+1/k}^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_k^x & F_k^b \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_k^x & P_k^{xb} \\ P_k^{xb^T} & P_k^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_k^x & F_k^b \\ 0 & I_q \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} Q_k^x & Q_k^{xb} \\ Q_k^{xb^T} & Q_k^b \end{pmatrix} \tag{3.267}$$

Et en dernier lieu, à partir de (3.254), (3.258) et (3.263), nous avons :

$$\begin{pmatrix} P_{k+1}^x & P_{k+1}^{xb} \\ P_{k+1}^{xb^T} & P_{k+1}^b \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{k+1}^x \\ K_{k+1}^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{k+1}^x & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} P_{k+1/k}^x & P_{k+1/k}^{xb} \\ P_{k+1/k}^{xb^T} & P_{k+1/k}^b \end{pmatrix} \tag{3.268}$$

Adoptons désormais les notations suivantes :

$$K_{k+1} = \begin{pmatrix} K_{k+1}^x \\ K_{k+1}^b \end{pmatrix} \tag{3.269}$$

$$P_{k+1} = \begin{pmatrix} P_{k+1}^x & P_{k+1}^{xb} \\ P_{k+1}^{xb^T} & P_{k+1}^b \end{pmatrix} \tag{3.270}$$

$$P_{k+1/k} = \begin{pmatrix} P_{k+1/k}^x & P_{k+1/k}^{xb} \\ P_{k+1/k}^{xb^T} & P_{k+1/k}^b \end{pmatrix} \tag{3.271}$$

$$F_k = \begin{pmatrix} F_k^x & F_k^b \\ 0 & I_q \end{pmatrix} \tag{3.272}$$

$$H_{k+1} = \begin{pmatrix} H_{k+1}^x & 0 \end{pmatrix} \tag{3.273}$$

$$Q_k = \begin{pmatrix} Q_k^x & Q_k^{xb} \\ Q_k^{xb^T} & Q_k^b \end{pmatrix} \tag{3.274}$$

En utilisant les notations (3.269) à (3.274), on remarque que les équations (3.266), (3.267) et (3.268) correspondent aux équations de propagation (3.247), (3.245) et (3.244) de l'OKE global.

3.6.3.2 Analyse de convergence

Soient $\tilde{x}_{k+1}$, $\tilde{x}_{k+1/k}$ les erreurs d'estimation et de prédiction de l'état et $\tilde{b}_{k+1}$ l'erreur d'estimation des biais :

$$\tilde{x}_{k+1} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1} \tag{3.275}$$

$$\tilde{x}_{k+1/k} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k} \tag{3.276}$$

$$\tilde{b}_{k+1} = b - \hat{b}_{k+1} \tag{3.277}$$

En utilisant les relations (3.275) à (3.277) ainsi que (3.251), (3.255) et (3.269), la dynamique de l'erreur d'estimation $\begin{pmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{b}_k \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{k+1} \\ \tilde{b}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{k+1/k} \\ \tilde{b}_k \end{pmatrix} + K_{k+1} e_{k+1} \tag{3.278}$$

où les erreurs $\tilde{x}_{k+1/k}$ et e_{k+1} vérifient :

$$\tilde{x}_{k+1/k} = f(x_k, b, u_k) - f(\hat{x}_k, \hat{b}_k, u_k) \tag{3.279}$$

$$e_{k+1} = h(x_{k+1}, u_{k+1}) - h(\hat{x}_{k+1/k}, u_{k+1}) \tag{3.280}$$

Les linéarisations respectives de f autour des estimées $\hat{x}_k$ de l'état et $\hat{b}_k$ des biais, et de h autour de la prédiction $\hat{x}_{k+1/k}$ donnent :

$$\tilde{x}_{k+1/k} = F_k^x \tilde{x}_k + F_k^b \tilde{b}_k + \varphi(x_k, \hat{x}_k, b, \hat{b}_k, u_k) \tag{3.281}$$

$$e_{k+1} = H_{k+1}^x \tilde{x}_{k+1/k} + \chi(x_{k+1}, \hat{x}_{k+1/k}, u_{k+1}) \tag{3.282}$$

Afin de mener une étude de convergence rigoureuse sans aucune approximation, nous utilisons la technique de linéarisation exacte détaillée dans les sections précédentes et introduisons, de ce fait, des matrices diagonales inconnues β_k^x et α_{k+1}^x permettant de prendre en compte les résidus de linéarisation φ_k et χ_{k+1}. $\tilde{x}_{k+1/k}$ et e_{k+1} s'écrivent alors sous les formes exactes :

$$\tilde{x}_{k+1/k} = \beta_k^x (F_k^x \tilde{x}_k + F_k^b \tilde{b}_k) \tag{3.283}$$

$$\alpha_{k+1}^x e_{k+1} = H_{k+1}^x \tilde{x}_{k+1/k} \tag{3.284}$$

en lieu et place des approximations usuelles aux premier ordre suivantes :

$$\tilde{x}_{k+1/k} \approx F_k^x \tilde{x}_k + F_k^b \tilde{b}_k \tag{3.285}$$

$$e_{k+1} \approx H^x_{k+1}\tilde{x}_{k+1/k} \tag{3.286}$$

où les termes résiduels φ_k et χ_{k+1} sont négligés.

Considérons, à présent, la fonction de Lyapunov candidate $V : B_r \times \mathbb{N}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$, $V(0,k) = 0$:

$$V_{k+1} = V(\begin{pmatrix}\tilde{x}_{k+1}\\ \tilde{b}_{k+1}\end{pmatrix}, k+1) = \begin{pmatrix}\tilde{x}_{k+1}\\ \tilde{b}_{k+1}\end{pmatrix}^T P^{-1}_{k+1}\begin{pmatrix}\tilde{x}_{k+1}\\ \tilde{b}_{k+1}\end{pmatrix} \tag{3.287}$$

et recherchons sous quelles conditions la suite $\{V_k\}_{k\geq 0}$ est strictement décroissante.
En utilisant les notations (3.269) à (3.274) et à partir de (3.266) et (3.268), nous notons que les relations suivantes sont immédiates:

$$K_{k+1} = P_{k+1}H^T_{k+1}R^{x^{-1}}_{k+1} \tag{3.288}$$

$$P^{-1}_{k+1} = P^{-1}_{k+1/k} + H^T_{k+1}R^{x^{-1}}_{k+1}H_{k+1} \tag{3.289}$$

De la substitution de (3.288) dans (3.278) et de (3.278) dans (3.287), il vient que:

$$\begin{aligned} V_{k+1} = &\begin{pmatrix}\tilde{x}_{k+1/k}\\ \tilde{b}_k\end{pmatrix}^T P^{-1}_{k+1}\begin{pmatrix}\tilde{x}_{k+1/k}\\ \tilde{b}_k\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\tilde{x}_{k+1/k}\\ \tilde{b}_k\end{pmatrix}^T H^T_{k+1}R^{x^{-1}}_{k+1}e_{k+1}\\ &-e^T_{k+1}R^{x^{-1}}_{k+1}H_{k+1}\begin{pmatrix}\tilde{x}_{k+1/k}\\ \tilde{b}_k\end{pmatrix} + e^T_{k+1}R^{x^{-1}}_{k+1}H_{k+1}P_{k+1}H^T_{k+1}R^{x^{-1}}_{k+1}e_{k+1} \end{aligned} \tag{3.290}$$

L'introduction de (3.289) dans (3.290) entraîne:

$$\begin{aligned} V_{k+1} = V_{k+1/k} &+ \begin{pmatrix}\tilde{x}_{k+1/k}\\ \tilde{b}_k\end{pmatrix}^T H^T_{k+1}R^{x^{-1}}_{k+1}H_{k+1}\begin{pmatrix}\tilde{x}_{k+1/k}\\ \tilde{b}_k\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\tilde{x}_{k+1/k}\\ \tilde{b}_k\end{pmatrix}^T H^T_{k+1}R^{x^{-1}}_{k+1}e_{k+1}\\ &-e^T_{k+1}R^{x^{-1}}_{k+1}H_{k+1}\begin{pmatrix}\tilde{x}_{k+1/k}\\ \tilde{b}_k\end{pmatrix} + e^T_{k+1}R^{x^{-1}}_{k+1}H_{k+1}P_{k+1}H^T_{k+1}R^{x^{-1}}_{k+1}e_{k+1} \end{aligned} \tag{3.291}$$

avec

$$V_{k+1/k} = \begin{pmatrix}\tilde{x}_{k+1/k}\\ \tilde{b}_k\end{pmatrix}^T P^{-1}_{k+1/k}\begin{pmatrix}\tilde{x}_{k+1/k}\\ \tilde{b}_k\end{pmatrix} \tag{3.292}$$

En utilisant la forme partitionnée $H_{k+1} = \begin{pmatrix}H^x_{k+1} & 0\end{pmatrix}$ ainsi que le paramétrage (3.283)-(3.284), V_{k+1} et $V_{k+1/k}$ se réécrivent de la façon suivante:

$$\begin{aligned} V_{k+1} = V_{k+1/k} &+ e^T_{k+1}(\alpha^x_{k+1}R^{x^{-1}}_{k+1}\alpha^x_{k+1} - \alpha^x_{k+1}R^{x^{-1}}_{k+1} - R^{x^{-1}}_{k+1}\alpha^x_{k+1}\\ &+R^{x^{-1}}_{k+1}H^x_{k+1}P^x_{k+1}H^{x^T}_{k+1}R^{x^{-1}}_{k+1})e_{k+1} \end{aligned} \tag{3.293}$$

$$V_{k+1/k} = \begin{pmatrix}\tilde{x}_k\\ \tilde{b}_k\end{pmatrix}^T F^T_k\begin{pmatrix}\beta^x_k & 0\\ 0 & I_q\end{pmatrix}(F_kP_kF^T_k + Q_k)^{-1}\begin{pmatrix}\beta^x_k & 0\\ 0 & I_q\end{pmatrix}F_k\begin{pmatrix}\tilde{x}_k\\ \tilde{b}_k\end{pmatrix} \tag{3.294}$$

Nous savons que la suite de Lyapunov V_k, $k \geq 0$, est strictement décroissante s'il existe un réel $\zeta \in]0,1[$ tel que:

$$V_{k+1} - V_k \leq -\zeta V_k$$

soit, en utilisant (3.293) et (3.294) :

$$V_{k+1} - (1-\zeta)V_k = e_{k+1}^T(\alpha_{k+1}^x R_{k+1}^{x^{-1}}\alpha_{k+1}^x - \alpha_{k+1}^x R_{k+1}^{x^{-1}} - R_{k+1}^{x^{-1}}\alpha_{k+1}^x + R_{k+1}^{x^{-1}}H_{k+1}^x P_{k+1}^x H_{k+1}^{x^T} R_{k+1}^{x^{-1}})e_{k+1} + \begin{pmatrix}\tilde{x}_k \\ \tilde{b}_k\end{pmatrix}^T \left(F_k^T \begin{pmatrix}\beta_k^x & 0 \\ 0 & I_q\end{pmatrix} \times (F_k P_k F_k^T + Q_k)^{-1} \begin{pmatrix}\beta_k^x & 0 \\ 0 & I_q\end{pmatrix} F_k - (1-\zeta)P_k^{-1}\right)\begin{pmatrix}\tilde{x}_k \\ \tilde{b}_k\end{pmatrix} \leq 0 \quad (3.295)$$

Une condition suffisante pour satisfaire (3.295) est que le couple d'inégalités suivantes soit vérifié :

$$\alpha_{k+1}^x R_{k+1}^{x^{-1}}\alpha_{k+1}^x - \alpha_{k+1}^x R_{k+1}^{x^{-1}} - R_{k+1}^{x^{-1}}\alpha_{k+1}^x + R_{k+1}^{x^{-1}}H_{k+1}^x P_{k+1}^x H_{k+1}^{x^T} R_{k+1}^{x^{-1}} \leq 0 \quad (3.296)$$

$$F_k^T \begin{pmatrix}\beta_k^x & 0 \\ 0 & I_q\end{pmatrix} (F_k P_k F_k^T + Q_k)^{-1} \begin{pmatrix}\beta_k^x & 0 \\ 0 & I_q\end{pmatrix} F_k - (1-\zeta)P_k^{-1} \leq 0 \quad (3.297)$$

En utilisant la démonstration de l'OKE pour les systèmes non linéaires (présentée en section 3.3.3), une simple technique de factorisation et la relation (3.288), nous pouvons réécrire l'inégalité (3.296) sous la forme suivante (cf. équations (3.107) à (3.109) en section 3.3.3) :

$$(\alpha_{k+1}^x - I_p)R_{k+1}^{x^{-1}}(\alpha_{k+1}^x - I_p) - (H_{k+1}^x P_{k+1/k}^x H_{k+1}^{x^T} + R_{k+1}^x)^{-1} \leq 0 \quad (3.298)$$

Les conditions suffisantes de stabilité du point d'équilibre $\begin{pmatrix}\tilde{x}_k \\ \tilde{b}_k\end{pmatrix} = 0$ sont alors données par le théorème suivant :

Théorème 3.10 *Si les conditions suivantes sont vérifiées :*

i. La matrice instrumentale $\alpha_{k+1}^x \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisfait :

$$\bar{\alpha}_{k+1}^x = \max_{j=1,\dots,p} |\alpha_{jk+1}^x - 1| \leq \sqrt{\frac{\sigma_{\min}(R_{k+1}^x)}{\sigma_{\max}(H_{k+1}^x P_{k+1/k}^x H_{k+1}^{x^T} + R_{k+1}^x)}} = \Pi_{k+1}^\alpha \quad (3.299)$$

avec $0 < \bar{\alpha}_{k+1}^x < \infty$,

ii. Il existe un réel $\zeta \in]0,1[$ tel que la matrice instrumentale $\beta_k^x \in \mathbb{R}^{p\times p}$ satisfasse :

$$\bar{\beta}_k^x \leq \sqrt{\frac{(1-\zeta)\sigma_{\min}(F_k P_k F_k^T + Q_k)}{(\sigma_{\max}(F_k))^2 \sigma_{\max}(P_k)}} = \Pi_k^\beta \quad (3.300)$$

avec $0 < \bar{\beta}_k^x = \max_{i=1,\dots,n}(|\beta_{ik}^x|, 1) < \infty$,

iii. Le système augmenté (3.241) linéarisé le long des trajectoires de l'estimateur découplé (3.251)-(3.265) est N-localement uniformément observable i.e. il existe des réels $\gamma_1, \gamma_2, \varepsilon > 0$ et un entier $N \geq 1$ tels que pour tout $k \geq N$:

$$\gamma_1 I_{n+q} \leq \mathcal{O}_{[k-N+1,k]}^{e^T} \operatorname{diag}(R_{k-N+1}^{x^{-1}}, \dots, R_k^{x^{-1}})\mathcal{O}_{[k-N+1,k]}^e \leq \gamma_2 I_{n+q} \quad (3.301)$$

où $0 < \gamma_1, \gamma_2 < \infty$ *et*

$$\mathcal{O}^e_{[k-N+1,k]} = \begin{pmatrix} H_{k-N+1} \\ H_{k-N+2}F_{k-N+1} \\ \vdots \\ H_kF_{k-1}F_{k-2}\dots F_{k-N+1} \end{pmatrix} \tag{3.302}$$

pour tout $\hat{x}_i \in \mathcal{X}$ *un compact de* $\mathbb{R}^n$ *tel que* $\|x_i - \hat{x}_i\| < \varepsilon$, $x_i \in \mathcal{X}$, $i = k-N+1,\dots,k-1$, *tout* $\hat{x}_{j/j-1} \in \mathcal{X}$ *tel que* $\left\|x_j - \hat{x}_{j/j-1}\right\| < \varepsilon$, $x_j \in \mathcal{X}$, $j = k-N+1,\dots,k$, *tout* $\hat{b}_i \in \Omega$ *un compact de* $\mathbb{R}^q$ *tel que* $\left\|b_i - \hat{b}_i\right\| < \varepsilon$, $b_i \in \Omega$, $i = k-N+1,\dots,k-1$ *et toute séquence d'entrées admissibles* $U_{[k-N+1,k]} = (u_{k-N+1},\dots,u_k) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{m\times N}$,

iv. F_k *est inversible et* F_k, H_k *sont uniformément bornées pour tout* $\hat{x}_k \in \mathcal{X}$, *tout* $\hat{x}_{k/k-1} \in \mathcal{X}$, *tout* $\hat{b}_k \in \Omega$ *et toute séquence d'entrées admissibles,*

alors $\lim_{k\to\infty} \|x_k - \hat{x}_k\| = 0$ *et* $\lim_{k\to\infty} \|b - \hat{b}_k\| = 0$ *et le système (3.251)-(3.265) est un estimateur local découplé de l'état et des biais du système initial (3.240).* ■

Démonstration.
Afin de vérifier les conditions (3.298) et (3.297), garantissant la stricte décroissance de la suite V_k, $k \geq 0$, nous utilisons dans un premier temps les hypothèses (3.299) et (3.300). Comme $(\alpha^x_{k+1} - I_p)$ et β^x_k sont des matrices diagonales, nous montrons à partir de (3.299) et (3.300) que :

$$(\sigma_{\max}(\alpha^x_{k+1} - 1))^2\sigma_{\max}(R^{-1}_{k+1}) \leq \sigma_{\min}((H^x_{k+1}P^x_{k+1/k}H^{x^T}_{k+1} + R_{k+1})^{-1}) \tag{3.303}$$

$$\left(\sigma_{\max}\begin{pmatrix}\beta^x_k & 0 \\ 0 & I_q\end{pmatrix}\right)^2 (\sigma_{\max}(F_k))^2\sigma_{\max}((F_kP_kF_k^T + Q_k)^{-1}) \leq (1-\zeta)\sigma_{\min}(P_k^{-1}) \tag{3.304}$$

En utilisant les inégalités :

$$\sigma_{\max}((\alpha^x_{k+1} - 1)R^{-1}_{k+1}(\alpha^x_{k+1} - 1)) \leq (\sigma_{\max}(\alpha^x_{k+1} - 1))^2\sigma_{\max}(R^{-1}_{k+1})$$

$$\sigma_{\max}\left(F_k^T\begin{pmatrix}\beta^x_k & 0 \\ 0 & I_q\end{pmatrix}(F_kP_kF_k^T + Q_k)^{-1}\begin{pmatrix}\beta^x_k & 0 \\ 0 & I_q\end{pmatrix}F_k\right)$$

$$\leq \left(\sigma_{\max}\begin{pmatrix}\beta^x_k & 0 \\ 0 & I_q\end{pmatrix}\right)^2 (\sigma_{\max}(F_k))^2\sigma_{\max}((F_kP_kF_k^T + Q_k)^{-1})$$

nous montrons, à partir de (3.303) et (3.304), que :

$$\sigma_{\max}((\alpha^x_{k+1} - 1)R^{-1}_{k+1}(\alpha^x_{k+1} - 1)) \leq \sigma_{\max}((H^x_{k+1}P^x_{k+1/k}H^{x^T}_{k+1} + R_{k+1})^{-1}) \tag{3.305}$$

$$\sigma_{\max}\left(F_k^T\begin{pmatrix}\beta^x_k & 0 \\ 0 & I_q\end{pmatrix}(F_kP_kF_k^T + Q_k)^{-1}\begin{pmatrix}\beta^x_k & 0 \\ 0 & I_q\end{pmatrix}F_k\right) \leq (1-\zeta)\sigma_{\min}(P_k^{-1}) \tag{3.306}$$

L'existence de (3.305)-(3.306) implique l'existence de (3.303)-(3.304) et donc la stricte décroissance de la suite de Lyapunov V_k au sens où :

$$V_{k+1} - V_k \leq -\zeta V_k \tag{3.307}$$

Finalement, sous les hypothèses *iv.* du théorème 3.10 et sous la condition d'observabilité uniforme (3.301) du système (3.241) linéarisé le long de la trajectoire de l'estimateur (3.251)-(3.265), la bornitude de la matrice P_k est garantie (cf. section 3.3.3 et [DEY68, SON95]) et il existe $0 < \underline{p} \leq \bar{p} < \infty$ tels que, pour $k \geq N-1$:

$$\underline{p} I_{n+q} \leq P_k \leq \bar{p} I_{n+q}$$

A partir de (3.307) et en utilisant la bornitude de P_k, il vient que :

$$\begin{aligned} V_{k+1} &\leq (1-\zeta)^k V_0 \\ &\leq \frac{1}{\underline{p}} \left\| \begin{matrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{b}_0 \end{matrix} \right\|^2 (1-\zeta)^{k-N+1} \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\frac{1}{\bar{p}} \left\| \begin{matrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{b}_k \end{matrix} \right\|^2 \leq V_k$, la majoration suivante est immédiate :

$$\left\| \begin{matrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{b}_k \end{matrix} \right\| \leq \sqrt{\frac{\bar{p}}{\underline{p}}} \left\| \begin{matrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{b}_0 \end{matrix} \right\| (1-\zeta)^{(k-N+1)/2} \tag{3.308}$$

et la convergence de l'erreur d'estimation $\begin{pmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{b}_k \end{pmatrix}$ vers zéro est assurée pour $k \geq N-1$. ❑

Remarque 3.21 *Comme nous l'avons démontré en section 3.3.3, la condition d'observabilité (3.301) est garantie localement sous la condition de N-observabilité au sens du rang du système augmenté (3.241). Toutefois, l'observabilité du système initial (3.240) n'implique pas l'observabilité du système augmenté (3.241) et l'on note que cette dernière condition impose généralement des restrictions sur le nombre de biais ou paramètres identifiables. L'inobservabilité de (3.240) ou la non identifiabilité de certains biais apparaissent implicitement au travers de la condition d'observabilité (3.301). En effet, en utilisant les structures partitionnées* $F_k = \begin{pmatrix} F_k^x & F_k^b \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ *et* $H_{k+1} = \begin{pmatrix} H_{k+1}^x & 0 \end{pmatrix}$, *la matrice d'observabilité* $\mathcal{O}^e_{[k-N+1,k]}$ *s'écrit :*

$$\mathcal{O}^e_{[k-N+1,k]} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}^x_{[k-N+1,k]} & \mathcal{O}^b_{[k-N+1,k]} \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathcal{O}^x_{[k-N+1,k]} = \begin{pmatrix} H^x_{k-N+1} \\ H^x_{k-N+2} F^x_{k-N+1} \\ \vdots \\ H^x_k F^x_{k-1} \dots F^x_{k-N+1} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{O}^b_{[k-N+1,k]} = \begin{pmatrix} 0 \\ H^x_{k-N+2} F^b_{k-N+1} \\ \vdots \\ H^x_k \left(F^x_{k-1} \dots F^x_{k-N+2} F^b_{k-N+1} + F^x_{k-1} \dots F^x_{k-N+3} F^b_{k-N+2} + \dots + F^b_{k-1} \right) \end{pmatrix}$$

Si le système initial (3.240) n'est pas observable ou si certains biais (ou paramètres) ne sont pas "excités" de façon persistante, alors $\operatorname{rang}(\mathcal{O}^x_{[k-N+1,k]}) < n$ *ou* $\operatorname{rang}(\mathcal{O}^b_{[k-N+1,k]}) < q$ *et la*

condition d'observabilité (3.301) n'est pas vérifiée. En particulier, on remarque que, lorsqu'un état partant d'une condition initiale nulle, n'est pas commandable, alors tout biais multipliant uniquement cet état ne sera pas identifiable. Dans ce cas, la colonne correspondant à ce biais dans F_k^b est nulle et nous avons $\text{rang}(\mathcal{O}^b_{[k-N+1,k]}) < q$. ▼

Remarque 3.22 *L'analyse de la convergence – à ce jour non établie – des algorithmes d'estimation séparée état/biais, proposés dans [CAG83] et [ZHO93] et qui ne sont que des extensions de l'algorithme de Friedland en utilisant le formalisme de filtre de Kalman étendu, peut être développée en utilisant la technique de linéarisation "exacte" proposée.* ▼

Remarque 3.23 *L'approche proposée récemment par Haessig et Friedland dans [HAE98] sur l'estimation séparée état/biais des systèmes LTI via l'utilisation de filtres de Kalman d'ordre réduit, peut être étendue au cas non linéaire déterministe en combinant les OKE d'ordre réduit proposés en section 3.4 et l'OKE séparé développé dans cette section.* ▼

3.6.3.3 Sur le choix des matrices de pondération de l'estimateur et exemple

A l'instar de l'étude de la convergence de l'OKE classique présentée en section 3.3.3, il ressort, dans l'analyse précédente, que le choix des matrices de pondération Q_k^x, Q_k^b et R_{k+1}^x est fondamental pour assurer la convergence de l'estimateur séparé (3.251)-(3.265).

Cette remarque est dûe explicitement à l'introduction du paramétrage (3.283)-(3.284) qui, en quantifiant la validité et la pertinence de la linéarisation au premier ordre du système (3.241) le long des trajectoires estimées, nous a permis de déduire les conditions suffisantes (3.299)-(3.300) de convergence de l'estimateur séparé.

Par opposition à l'OKE classique dont la convergence n'est assurée que dans le cas où β_k^x et α_{k+1}^x sont proches de la matrice identité, la convergence de l'estimateur séparé proposé (dont nous rappellons qu'il est équivalent à l'OKE classique) est assurée pour l'ensemble des matrices β_k^x et α_{k+1}^x bornées respectivement par $\Pi_k^\beta = \sqrt{\dfrac{(1-\zeta)\sigma_{\min}(F_k P_k F_k^T + Q_k)}{(\sigma_{\max}(F_k))^2 \sigma_{\max}(P_k)}}$ et $\Pi_{k+1}^\alpha = \sqrt{\dfrac{\sigma_{\min}(R_{k+1}^x)}{\sigma_{\max}(H_{k+1}^x P_{k+1/k}^x H_{k+1}^{x^T} + R_{k+1}^x)}}$.

En cas d'erreurs de linéarisation importantes (en particulier à l'initialisation de l'algorithme), il convient de construire les matrices de pondération Q_k^x, Q_k^b et R_{k+1}^x de façon à étendre au maximum les bornes Π_{k+1}^α et Π_k^β, et à satisfaire ainsi les conditions de convergence (3.299)-(3.300).

Par analogie avec l'OKE classique, un choix simple de Q_k^x, Q_k^b et R_{k+1}^x représentant un excellent compromis entre stabilité et vitesse de convergence de l'estimateur est alors :

$$Q_k^x = \gamma^x e_k^T e_k I_n + \varepsilon^x I_n \tag{3.309}$$

$$Q_k^b = \gamma^b e_k^T e_k I_q + \varepsilon^b I_q \tag{3.310}$$

$$R_{k+1}^x = \lambda H_{k+1}^x P_{k+1/k}^x H_{k+1}^{x^T} + \delta I_p \tag{3.311}$$

où $e_k = y_k - f(\hat{x}_{k/k-1}, u_k)$.
$\gamma^x \geq 0$, $\gamma^b \geq 0$ et $\lambda \geq 0$ sont des scalaires positifs suffisamment "grands" en cas de mauvaises initialisations de l'algorithme ou de non linéarités importantes des fonctions f et h.

$\varepsilon^x > 0$, $\varepsilon^b > 0$ et $\delta > 0$ sont des scalaires suffisamment "petits" devant $\gamma^x e_k^T e_k$, $\gamma^b e_k^T e_k$ et $\lambda H_{k+1}^x P_{k+1/k}^x H_{k+1}^{x^T}$ introduits pour assurer la stricte positivité des matrices Q_k^x, Q_k^b et R_{k+1}^x.

Les remarques, formulées au paragraphe 3.3.3.3, sur les moyens de vérifier en pratique les conditions de convergence de l'OKE demeurent évidemment valables pour l'algorithme d'estimation proposé dans la présente section.

Exemple 3.2 *Considérons le système non linéaire temps-discret suivant :*

$$\begin{aligned} x_{1k+1} &= (\theta_1 + b_1)(x_{1k}^2 + x_{2k}^2 x_{3k}) + 0.1u_k \\ x_{2k+1} &= (\theta_2 + b_2)(x_{2k}^2 + x_{1k}) + 0.05u_k \\ x_{3k+1} &= -x_{2k}(x_{1k}x_{3k} + 1) \\ y_k &= x_{1k}x_{2k} \end{aligned}$$

où b_1 et b_2 sont des biais quantifiant une dérive constante des paramètres θ_1 et θ_2 autour de leurs valeurs nominales $\theta_1 = -0.5$ et $\theta_2 = -0.1$. Afin d'estimer séparément le vecteur d'état $x_k = \begin{pmatrix} x_{1k} & x_{2k} & x_{3k} \end{pmatrix}^T$ et le vecteur des biais $b_k = \begin{pmatrix} b_{1k} & b_{2k} \end{pmatrix}^T$, nous appliquons l'estimateur découplé état/biais (3.251)-(3.265) avec :

$$F_k^x = \begin{pmatrix} 2\hat{x}_{1k}(\theta_1 + \hat{b}_{1k}) & 2\hat{x}_{2k}\hat{x}_{3k}(\theta_1 + \hat{b}_{1k}) & \hat{x}_{2k}^2(\theta_1 + \hat{b}_{1k}) \\ (\theta_2 + \hat{b}_{2k}) & 2\hat{x}_{2k}(\theta_2 + \hat{b}_{2k}) & 0 \\ -\hat{x}_{2k}\hat{x}_{3k} & -(\hat{x}_{1k}\hat{x}_{3k} + 1) & -\hat{x}_{2k}\hat{x}_{1k} \end{pmatrix}$$

$$F_k^b = \begin{pmatrix} \hat{x}_{1k}^2 + \hat{x}_{2k}^2\hat{x}_{3k} & 0 \\ 0 & \hat{x}_{2k}^2 + \hat{x}_{1k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_{k+1}^x = \begin{pmatrix} \hat{x}_{2k+1/k} & \hat{x}_{1k+1/k} & 0 \end{pmatrix}$$

Nous supposons que les biais b_1 et b_2, tous deux d'amplitude 0.2, interviennent respectivement aux instants $k = 100$ et $k = 300$. Les conditions initiales sont :

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -0.5 \end{pmatrix} \quad \hat{b}_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$P_0^x = 10^{10} I_3, \quad P_0^b = 10^{10} I_2, \quad P_0^{xb} = 0$$

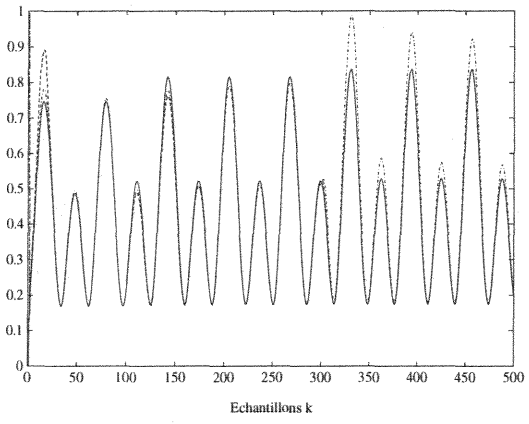
L'entrée est $u_k = 5 + 2\sin(0.1k) - 3\cos(0.2k)$ et les matrices de pondération Q_k^x, Q_k^b et R_{k+1}^x sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} Q_k^x &= 10^{10} e_k^2 I_3 + 10^{-3} I_3 \\ Q_k^b &= 10^{10} e_k^2 I_2 + 10^{-3} I_2 \\ R_{k+1}^x &= H_{k+1}^x P_{k+1/k}^x H_{k+1}^{x^T} + 10^{-3} \end{aligned}$$

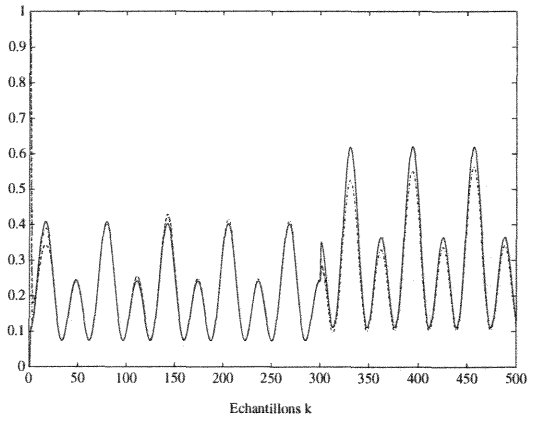
où $e_k = y_k - \hat{x}_{1k+1/k}\hat{x}_{2k+1/k}$.

Les résultats des simulations sont présentés sur les figures 3.3 et 3.4. Les états et biais réels sont représentés en trait plein et les états et biais estimés en trait pointillé.
A titre indicatif et afin d'illustrer l'importance du choix des matrices de pondération Q_k^x, Q_k^b et R_{k+1}^x, nous avons également simulé l'estimateur découplé (3.251)-(3.265) en adoptant

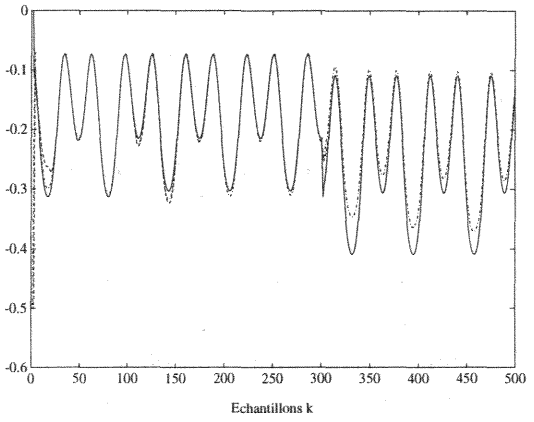
les choix classiques suivants: $Q_k^x = 10^{-3} I_3$, $Q_k^b = 10^{-3} I_2$ *et* $R_{k+1}^x = 10^{-3}$ *(réponses en trait discontinu* $(- \cdot)$*). Lorsque les matrices* Q_k^x, Q_k^b *et* R_{k+1}^x *sont judicieusement choisies, la convergence de l'algorithme est rapide (même lorsqu'un ou plusieurs biais apparaissent), alors qu'il est facile de constater que les estimations sont biaisées dans une configuration classique de l'OKE. Sur la figure 3.4, il convient de noter l'influence mutuelle qu'exerce l'apparition d'un biais sur l'estimation du second biais et la très bonne "réaction" de notre estimateur à ce phénomène.*



(a) x_{1k} et $\hat{x}_{1k}$

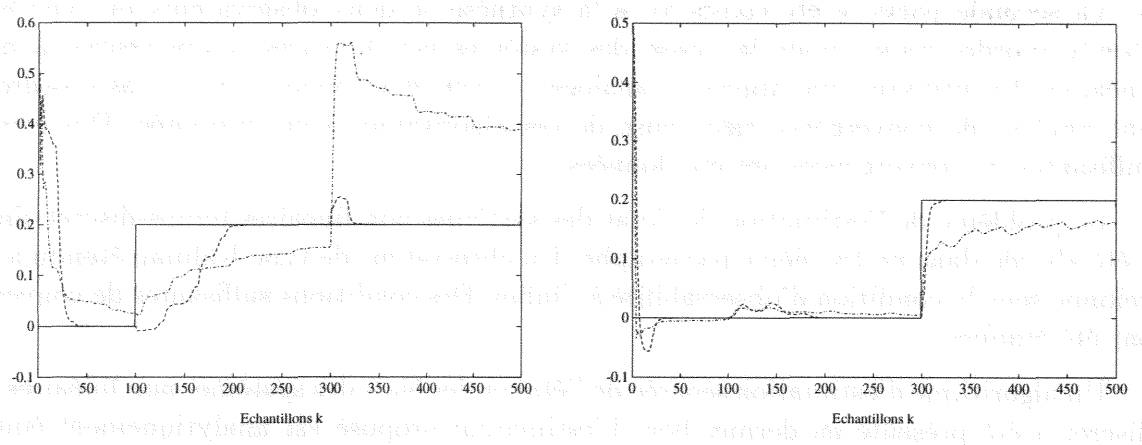


(b) x_{2k} et $\hat{x}_{2k}$



(c) x_{3k} et $\hat{x}_{3k}$

Figure 3.3: *Etats simulés* $(-)$ *et estimés* $(- -)$.



(a) b_{1k} et $\hat{b}_{1k}$ (b) b_{2k} et $\hat{b}_{2k}$

Figure 3.4: *Biais simulés (—) et estimés (– –).*

3.6.4 Conclusion

Dans ce paragraphe, un estimateur séparé de l'état et des biais des systèmes non linéaires a été développé. Cet estimateur est mathématiquement équivalent à l'OKE pour le système étendu (c.-à-d. lorsque le vecteur d'état est augmenté par le vecteur des biais), mais se révèle nettement moins prohibitif en terme de capacité de calcul.
Une analyse de convergence rigoureuse, sans aucune approximation, de l'algorithme a été développée. Notre approche peut être utilisée pour générer des systèmes de détection de défauts et de diagnostic des systèmes non linéaires et ouvre de ce fait des perspectives de recherches très intéressantes.

3.7 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la synthèse et à l'analyse des mécanismes de convergence d'estimateurs non linéaires utilisant le formalisme du filtre de Kalman étendu.

Dans une première partie, après avoir démontré la convergence exponentielle globale du filtre de Kalman, utilisé en tant qu'observateur pour les systèmes LTV, nous avons proposé une nouvelle preuve de la convergence de l'observateur de type Kalman étendu pour les systèmes non linéaires temps-discret. Notre approche s'adresse à l'ensemble des systèmes non linéaires de classe $\mathcal{C}^1$, et diffère en ce sens de la plupart de celles proposées jusqu'ici dans la littérature où la convergence de l'OKE n'est démontrée que pour des classes restreintes de systèmes (systèmes modifiables ou observables pour toute entrée).
Notre méthode repose sur une technique de linéarisation "exacte" au premier ordre du système étudié. Celle-ci consiste à paramétrer l'analyse de convergence de l'OKE à l'aide de matrices diagonales inconnues (β_k et α_{k+1}) permettant de quantifier le degré de linéarité du modèle. Des conditions suffisantes de convergence ont été établies en lien avec ce paramétrage. Les connections entre les choix de certaines matrices de pondération (Q_k et R_{k+1}) et l'amélioration des performances (vitesse de convergence et domaine d'attraction) de l'OKE ont été démontrées.

La seconde partie a été consacrée à la synthèse de deux observateurs de type Kalman étendu d'ordre réduit pour la classe des systèmes non linéaires temps-discret à mesures linéaires. En utilisant une approche analogue à celle développée dans le cas d'ordre plein, une analyse de convergence rigoureuse de ces algorithmes a été proposée. Des conditions suffisantes de convergences ont été données.

Le problème de l'estimation de l'état des systèmes non linéaires temps-discret singuliers a été abordé dans un troisième paragraphe. Un observateur de type Kalman étendu a été développé sous la condition d'observabilité à l'infini. Des conditions suffisantes de convergences ont été établies.

Un algorithme d'estimation séparée de l'état et des biais des systèmes non linéaires temps-discret a été présenté en dernier lieu. L'estimateur proposé est analytiquement équivalent à l'OKE appliqué au système étendu, lorsque le vecteur d'état est augmenté par le vecteur des biais. En suivant une méthodologie analogue à celle utilisée pour démontrer la convergence de l'OKE classique, des conditions suffisantes peu restrictives de convergence ont été données. De l'analyse quantitative de ces conditions, il est ressorti qu'il existe un réglage pertinent des matrices de pondération Q_k^x, Q_k^b et R_k^x de l'observateur permettant d'améliorer significativement la convergence de l'erreur d'estimation.

Dans un dernier chapitre, nous allons vérifier, sur quelques applications, le bien fondé de notre approche pour la synthèse d'observateurs approchés de type Kalman étendu.

Chapitre 4

Applications-Simulations

Dans ce chapitre, nous allons démontrer la validité et l'applicabilité de notre approche pour la synthèse d'estimateurs de type Kalman étendu. Dans ce but, nous mènerons plusieurs types de simulations et expérimentations en prenant soin, dans la plupart des cas, de comparer les résultats obtenus avec ceux fournis par le filtre de Kalman étendu classique.

Dans une première partie, l'observateur de Kalman étendu modifié, présenté en section 3.3.3, sera testé en simulation sur un problème d'identification de systèmes non linéaires MISO représentés sous forme de modèles Hammerstein. Le problème analysé et la classe de modèles étudiés ne pouvant être traités par les techniques d'estimation non linéaire temps-discret présentées en Chapitre 2, nous pourrons juger de l'applicabilité de l'OKE sur ce problème et démontrerons, dans le même temps, le rôle fondamental joué par les matrices de pondération Q_k et R_{k+1} dans l'amélioration des performances de l'observateur.

Dans une seconde phase, une série de tests sera effectuée sur une machine asynchrone. Le modèle de sortie étant linéaire, nous nous attacherons à estimer l'état de ce système en appliquant successivement l'OKE modifié d'ordre plein (section 3.3.3), l'OKE modifié d'ordre réduit (section 3.4.2), et l'OKE pour les systèmes non linéaires singuliers (section 3.5) utilisé dans le cadre de l'estimation simultanée de l'état et d'éventuelles entrées inconnues perturbant le système. D'autre part, sachant que certains paramètres du modèle sont susceptibles de varier dans le temps, l'estimateur état/biais développé en section 3.6.3 sera appliqué à l'estimation séparée de l'état et d'éventuels biais ou paramètres inconnus du système.

Ensuite, l'OKE modifié sera appliqué à un problème de trajectographie passive. Ce système est caractérisé par une forte inobservabilité, et par une inadéquation avec la plupart des techniques d'estimation non linéaire classiques (cf. Chapitre 2). Nous montrerons, par le biais de simulations, que l'approche proposée pour la synthèse d'OKE (principalement au niveau du réglage des matrices de pondération de l'observateur) permet d'améliorer significativement la convergence de cet estimateur jugé peu performant dans la littérature. Des comparaisons seront effectuées avec les techniques d'estimation utilisées habituellement pour résoudre ce problème (OKE avec pseudo-mesures et OKE à gain modifié).

Dans une quatrième partie, différents tests sur des bioprocédés seront réalisés. Les premières simulations seront dédiées à l'estimation simultanée des concentrations (en biomasse et en substrat) et des lois cinétiques d'un bioréacteur de base, décrivant la croissance d'un unique micro-organisme sur un substrat. Par la suite, nous nous intéresserons à l'estimation séparée de l'état et des biais d'un bioréacteur à culture mixte, décrivant la croissance de deux

populations cellulaires issues de la même souche, mais de sensibilité opposée par rapport à l'adjonction d'un agent inhibiteur extérieur.

Enfin, notre étude ne saurait être complète sans une validation expérimentale sur des données réelles. Dans une dernière phase, notre approche pour la synthèse d'OKE sera donc validée sur un problème d'estimation séparée de l'état et des paramètres d'un robot expérimental de type SCARA.

4.1 Identification des modèles Hammerstein MISO

4.1.1 Introduction

La modélisation et l'identification des systèmes dynamiques est, sans aucun doute, un des thèmes de recherche les plus fréquemment explorés jusqu'à nos jours (voir [LJU83, SöD89] pour des ouvrages de synthèse). La majorité des résultats existants sont fondés sur une représentation linéaire des systèmes. Cette hypothèse est souvent réductrice, les processus physiques étant pour la plupart de nature non linéaire, ils ne peuvent pas, en effet, être correctement représentés sur toute leur gamme de fonctionnement par des modèles linéaires. Compte-tenu des comportements relativement hétérogènes des systèmes non linéaires, nous remarquons qu'il n'existe pas, à l'heure actuelle, de représentation universelle de tels systèmes. Les représentations les plus fréquemment étudiées sont les modèles de type Hammerstein, Wiener ou Wiener-Hammerstein. Ces derniers se composent de systèmes dynamiques linéaires en série avec des caractéristiques non-linéaires statiques.

L'identification de tels systèmes a retenu l'attention de nombreux chercheurs (cf. [BIL82, HAB90, BAI98, BOU96] et les références de ces papiers). Nous distinguons généralement trois approches : l'une, dite itérative [NAR66], une autre, non itérative [CHA71], qui consiste essentiellement à transformer la représentation non linéaire en une forme linéaire en paramètres pour appliquer, par la suite, les méthodes d'identification linéaires classiques. Enfin, une dernière approche fondée sur les techniques d'estimation étendues [KOR87, BOU95b]. Nous remarquons que la convergence de la première approche n'est pas garantie, alors que la seconde introduit un certain degré de redondance dans l'estimation des différents paramètres. Les méthodes d'identification récursives étendues semblent surmonter ces problèmes, mais seule une convergence locale est assurée. Dans ce paragraphe, nous verrons que l'OKE, utilisé dans le cadre de l'identification des modèles non linéaires de type Hammerstein, s'insère dans cette catégorie de méthodes. Nous montrerons également, en accord avec les résultats théoriques établis en section 3.3.3, comment améliorer les performances de cet estimateur en présence des mauvaises conditions initiales ou de non linéarités importantes des différentes caractéristiques non linéaires.

4.1.2 Modèles Hammerstein MISO : description

Par définition, un modèle Hammerstein est composé d'un système linéaire en série avec une caractéristique non-linéaire statique (cf. figure 4.1 dans le cas MISO).

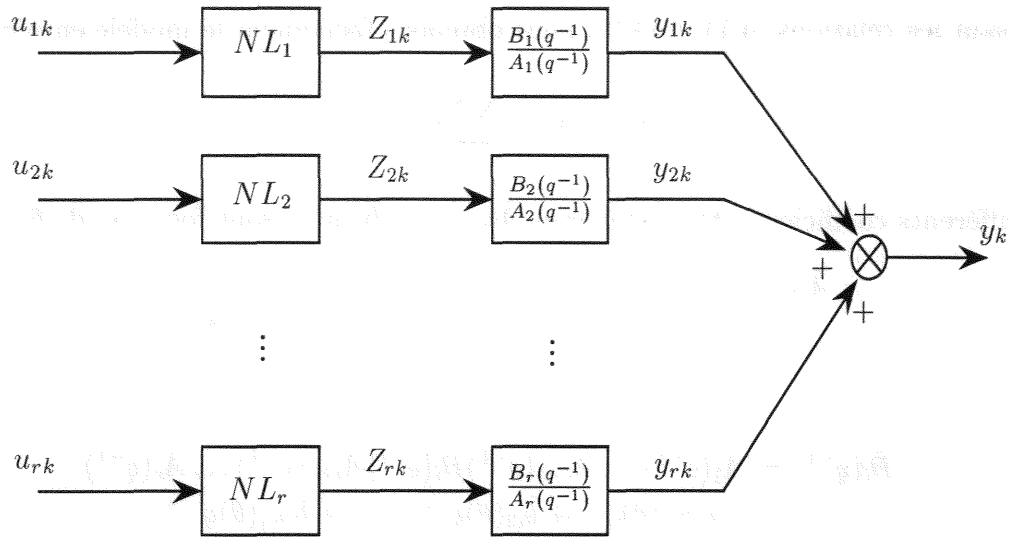


Figure 4.1: *Modèle Hammerstein MISO.*

Dans le cas MISO, la sortie y_k à l'instant k est la somme des sorties auxiliaires non mesurées y_{ik} $(i = 1, \ldots, r)$:

$$y_k = \sum_{i=1}^{r} y_{ik} \tag{4.1}$$

où chaque variable y_{ik} est le produit du transfert linéaire $\dfrac{B_i(q^{-1})}{A_i(q^{-1})}$ et de la caractéristique non linéaire statique Z_{ik} :

$$y_{ik} = \frac{B_i(q^{-1})}{A_i(q^{-1})} Z_{ik} \tag{4.2}$$

Les polynômes $A_i(q^{-1})$ et $B_i(q^{-1})$ sont donnés par :

$$A_i(q^{-1}) = 1 + a_{i1}q^{-1} + a_{i2}q^{-2} + \ldots + a_{in_i}q^{-n_i}$$
$$B_i(q^{-1}) = b_{i0} + b_{i1}q^{-1} + b_{i2}q^{-2} + \ldots + b_{im_i}q^{-m_i}$$

et les caractéristiques non linéaires Z_{ik} par,

$$Z_{ik} = g_{i1}u_{ik} + g_{i2}u_{ik}^2 + \ldots + g_{is_i}u_{ik}^{s_i}$$

où q^{-1} représente l'opérateur retard.
Nous supposons que les ordres n_i, m_i et s_i $(i = 1, \ldots, r)$ sont connus, que les fonctions de transfert $\dfrac{A_i(q^{-1})}{B_i(q^{-1})}$ sont stables et, sans perte de généralité, que $b_{i0} = 1 \ \forall\, i \in \{1, \ldots, r\}$ (cf. [BOU95b] pour une justification de cette hypothèse).

Notons $\theta \in \mathbb{R}^l$, $l = \sum_{i=1}^{r}(n_i + m_i + s_i)$, le vecteur des paramètres à estimer :

$$\theta = \left(a_{11} \ldots a_{1n_1} \ldots a_{r1} \ldots a_{rn_r} \quad b_{11} \ldots b_{1m_1} \ldots b_{r1} \ldots b_{rm_r} \quad g_{11} \ldots g_{1s_1} \ldots g_{r1} \ldots b_{rs_r}\right)^T$$

En utilisant les relations (4.1) et (4.2), nous obtenons facilement le modèle entrée-sortie :

$$\bar{A}(q^{-1})y_k = \sum_{i=1}^{r} \bar{B}_i(q^{-1})Z_{ik} \tag{4.3}$$

où les différents coefficients des polynômes $\bar{A}(q^{-1})$ et $\bar{B}_i(q^{-1})$ sont fonction de θ :

$$\begin{aligned}\bar{A}(q^{-1}) &= A_1(q^{-1})A_2(q^{-1})\dots A_r(q^{-1}) \\ &= 1 + \bar{a}_1(\theta)q^{-1} + \bar{a}_2(\theta)q^{-2} + \dots + \bar{a}_{\bar{n}}(\theta)q^{-\bar{n}}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\bar{B}_i(q^{-1}) &= A_1(q^{-1})\dots A_{i-1}(q^{-1})B_i(q^{-1})A_{i+1}(q^{-1})\dots A_r(q^{-1}) \\ &= 1 + \bar{b}_{i1}(\theta)q^{-1} + \bar{b}_{i2}(\theta)q^{-2} + \dots + \bar{b}_{i\bar{m}_i}(\theta)q^{-\bar{m}_i}\end{aligned}$$

Les ordres $\bar{n}$ et $\bar{m}_i$ sont donnés par :

$$\begin{aligned}\bar{n} &= n_1 + n_2 + \dots + n_r \\ \bar{m}_i &= n_1 + \dots + n_{i-1} + m_i + n_{i+1} + \dots + n_r\end{aligned}$$

En réécrivant, à présent, (4.3) sous la représentation entrée-sortie équivalente suivante :

$$y_k = -\bar{a}_1(\theta)y_{k-1} - \dots - \bar{a}_{\bar{n}}(\theta)y_{k-\bar{n}} + \sum_{i=1}^{r} \bar{B}_i(q^{-1})Z_{ik} \tag{4.4}$$

nous cherchons désormais à identifier le vecteur des paramètres θ. Comme nous l'avons souligné en introduction, de nombreuses techniques d'identification permettent de résoudre ce problème dans la littérature. Toutefois, afin de valider expérimentalement une partie des résultats théoriques établis dans le Chapitre 3, nous proposons ici d'identifier le vecteur des paramètres inconnus θ dans (4.4) en utilisant l'OKE modifié (3.75)-(3.82) développé en section 3.3.3.
Pour ce faire, nous exprimons le modèle entrée-sortie (4.4) dans l'espace d'état en choisissant comme vecteur d'état le vecteur des paramètres constants θ. Il vient alors que :

$$x_{k+1} = x_k = \theta_k \tag{4.5a}$$

$$y_k = h(x_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-\bar{n}}, u_k) \tag{4.5b}$$

où $x_k \in \mathbb{R}^l$, $y_k \in \mathbb{R}$ et $u_k = (u_{1k}\dots u_{1k-\bar{m}_1} \ \dots \ u_{rk}\dots u_{rk-\bar{m}_r})^T \in \mathbb{R}^{\bar{m}_1+\dots+\bar{m}_r+r}$ représente le vecteur des entrées.

Comme $x_{k+1} = x_k$, nous avons $F_k = I_l$ et l'OKE (3.75)-(3.82) s'écrit :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + K_{k+1}(y_{k+1} - h(\hat{x}_k, y_k, \dots, y_{k-\bar{n}+1}, u_k)) \tag{4.6}$$

$$K_{k+1} = (P_k + Q_k)H_{k+1}^T(H_{k+1}(P_k + Q_k)H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1} \tag{4.7}$$

$$P_{k+1} = (I_l - K_{k+1}H_{k+1})(P_k + Q_k) \tag{4.8}$$

avec

$$H_{k+1} = H(\hat{x}_k, y_k, \dots, y_{k-\bar{n}+1}, u_{k+1}) = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_k, y_k, \dots, y_{k-\bar{n}+1}, u_{k+1}) \tag{4.9}$$

où $P_0 = \mu I_l > 0$. Q_k et R_{k+1} sont des matrices de pondération définies positives, dont le choix doit être effectué en accord avec les remarques émises au paragraphe 3.3.3.3.
Un réglage judicieux est alors :

$$Q_k = \gamma(y_k - h(\hat{x}_{k-1}, y_{k-1}, \dots, y_{k-\bar{n}}, u_k))^2 I_l + \varepsilon I_l \tag{4.10}$$

$$R_{k+1} = \lambda H_{k+1}(P_k + Q_k)H_{k+1}^T + \delta \tag{4.11}$$

où $\gamma, \lambda \geq 0$ et $\varepsilon, \lambda > 0$ sont des paramètres fixés par l'utilisateur.

Nous analysons, à présent, les conditions suffisantes de convergence de l'algorithme (4.6)-(4.9) énoncées en théorème 3.5. Dans cette configuration de l'OKE, l'introduction du paramétrage (3.90)-(3.91) donne $\beta_k = I_l$, $\forall\, k \geq 0$, l'inégalité (3.111) (une des conditions de stricte décroissance de la séquence de Lyapunov V_k) est alors vérifiée pour tout $Q_k \geq 0$. D'un autre côté, il est clair que le paramètre $\alpha_{k+1} \in \mathbb{R}$ est inconnu (la valeur de ce dernier dépend notamment des signaux d'entrée u_{k+1} et de sortie $y_k, \dots, y_{k-\bar{n}+1}$) et il convient d'effectuer un réglage judicieux de la matrice de pondération R_{k+1} de façon à étendre le plus possible la borne $\Pi_k^\alpha = \sqrt{R_{k+1}(H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}}$ sur α_{k+1} (cf. paragraphe 3.3.3.3).

Enfin, puisque $F_k = I_l$, nous notons que la condition (3.127), d'observabilité uniforme du système linéarisé le long des trajectoires de l'OKE, est équivalente ici à la condition d'excitabilité persistante classique dans les problèmes d'identification non linéaire. Cette remarque s'appuie sur le fait que, $\forall\, k \geq N-1$:

$$\mathcal{O}^e_{[k-N+1,k]} = \begin{pmatrix} H_{k-N+1} \\ H_{k-N+2}F_{k-N+1} \\ \vdots \\ H_kF_{k-1}F_{k-2}\dots F_{k-N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{k-N+1} \\ H_{k-N+2} \\ \vdots \\ H_k \end{pmatrix}$$

4.1.3 OKE modifié : simulations et commentaires

Pour ces simulations, nous traitons l'identification d'un modèle Hammerstein à trois entrées et une sortie, décrit par la relation :

$$y_k = \frac{B_1(q^{-1})}{A_1(q^{-1})}Z_{1k} + \frac{B_2(q^{-1})}{A_2(q^{-1})}Z_{2k} + \frac{B_3(q^{-1})}{A_3(q^{-1})}Z_{3k} \tag{4.12}$$

Les fonctions de transfert $\dfrac{B_i(q^{-1})}{A_i(q^{-1})}$ sont données par,

$$\frac{B_1(q^{-1})}{A_1(q^{-1})} = \frac{1 + b_{11}q^{-1}}{1 + a_{11}q^{-1} + a_{12}q^{-2}}$$

$$\frac{B_2(q^{-1})}{A_2(q^{-1})} = \frac{1 + b_{21}q^{-1} + b_{22}q^{-2}}{1 + a_{21}q^{-1} + a_{22}q^{-2}}$$

$$\frac{B_3(q^{-1})}{A_3(q^{-1})} = \frac{1}{1 + a_{31}q^{-1} + a_{32}q^{-2}}$$

et les caractéristiques non linéaires statiques Z_{ik} par,

$$Z_{1k} = g_{11}u_{1k} + g_{12}u_{1k}^2 + g_{13}u_{1k}^3 + g_{14}u_{1k}^4 + g_{15}u_{1k}^5$$

$$Z_{2k} = g_{21}u_{2k} + g_{22}u_{2k}^2 + g_{23}u_{2k}^3 + g_{24}u_{2k}^4$$
$$Z_{3k} = g_{31}u_{3k} + g_{32}u_{3k}^2 + g_{33}u_{3k}^3 + g_{34}u_{3k}^4$$

Le vecteur des paramètres à estimer est :

$$\theta = (a_{11}\ a_{12}\ a_{21}\ a_{22}\ a_{31}\ a_{32}\ b_{11}\ b_{21}\ b_{22}\ g_{11}\ \ldots \\ g_{15}\ g_{21}\ \ldots\ g_{24}\ g_{31}\ \ldots\ g_{34})^T \in \mathbb{R}^{22}$$

La formulation du modèle Hammerstein (4.12) dans l'espace d'état donne :

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k = \theta \\
y_k &= h(x_k, y_{k-1}, y_{k-2}, y_{k-3}, y_{k-4}, y_{k-5}, y_{k-6}, u_{1k}, u_{2k}, u_{3k}) \\
&= -\bar{a}_1(\theta)y_{k-1} - \bar{a}_2(\theta)y_{k-2} - \bar{a}_3(\theta)y_{k-3} - \bar{a}_4(\theta)y_{k-4} - \bar{a}_5(\theta)y_{k-5} - \bar{a}_6(\theta)y_{k-6} \\
&\quad + Z_{1k} + \bar{b}_{11}(\theta)Z_{1k-1} + \bar{b}_{12}(\theta)Z_{1k-2} + \bar{b}_{13}(\theta)Z_{1k-3} + \bar{b}_{14}(\theta)Z_{1k-4} + \bar{b}_{15}(\theta)Z_{1k-5} \\
&\quad + Z_{2k} + \bar{b}_{21}(\theta)Z_{2k-1} + \bar{b}_{22}(\theta)Z_{2k-2} + \bar{b}_{23}(\theta)Z_{2k-3} + \bar{b}_{24}(\theta)Z_{2k-4} + \bar{b}_{25}(\theta)Z_{2k-5} \\
&\quad + \bar{b}_{26}(\theta)Z_{2k-6} + Z_{3k} + \bar{b}_{31}(\theta)Z_{3k-1} + \bar{b}_{32}(\theta)Z_{3k-2} + \bar{b}_{33}(\theta)Z_{3k-3} + \bar{b}_{34}(\theta)Z_{3k-4}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
&\bar{a}_1(\theta) = a_{31} + a_{21} + a_{11}, \quad \bar{a}_2(\theta) = a_{32} + (a_{21} + a_{11})a_{31} + a_{22} + a_{11}a_{21} + a_{12}, \\
&\bar{a}_3(\theta) = (a_{21} + a_{11})a_{32} + (a_{22} + a_{11}a_{21} + a_{12})a_{31}a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}, \\
&\bar{a}_4(\theta) = (a_{22} + a_{11}a_{21} + a_{12})a_{32} + (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})a_{31} + a_{12}a_{22}, \\
&\bar{a}_5(\theta) = (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21})a_{31} + a_{12}a_{22}a_{31}, \quad \bar{a}_6(\theta) = a_{12}a_{22}a_{32}, \\
&\bar{b}_{11}(\theta) = a_{31} + a_{21} + b_{11}, \quad \bar{b}_{12}(\theta) = a_{32} + a_{21}a_{31} + a_{22} + b_{11}(a_{31} + a_{21}), \\
&\bar{b}_{13}(\theta) = a_{21}a_{32} + a_{22}a_{31} + b_{11}(a_{32} + a_{21}a_{31} + a_{22}), \\
&\bar{b}_{14}(\theta) = a_{22}a_{32} + b_{11}(a_{21}a_{32} + a_{22}a_{31}), \quad \bar{b}_{15}(\theta) = b_{11}a_{22}a_{32}, \\
&\bar{b}_{21}(\theta) = b_{21} + a_{31} + a_{11}, \quad \bar{b}_{22}(\theta) = b_{22} + b_{21}(a_{31} + a_{11}) + a_{32} + a_{11}a_{31} + a_{12}, \\
&\bar{b}_{23}(\theta) = b_{22}(a_{31} + a_{11}) + b_{21}(a_{32} + a_{11}a_{31} + a_{12}) + a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31}, \\
&\bar{b}_{24}(\theta) = b_{22}(a_{32} + a_{11}a_{31} + a_{12}) + b_{21}(a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31}) + a_{12}a_{32}, \\
&\bar{b}_{25}(\theta) = b_{22}(a_{11}a_{32} + a_{12}a_{31}) + b_{21}a_{12}a_{32}, \quad \bar{b}_{26}(\theta) = b_{22}a_{12}a_{32}, \\
&\bar{b}_{31}(\theta) = a_{21} + a_{11}, \quad \bar{b}_{32}(\theta) = a_{22} + a_{11}a_{21} + a_{22}, \\
&\bar{b}_{33}(\theta) = a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}, \quad \bar{b}_{34}(\theta) = a_{12}a_{22}.
\end{aligned}$$

Lors des simulations, les valeurs numériques des différents paramètres sont données dans le tableau 4.1.

a_{11}	0.37	b_{11}	0.75	g_{11}	3.50	g_{21}	1.20	g_{31}	2.00
a_{12}	0.55	b_{21}	0.60	g_{12}	-5.70	g_{22}	6.80	g_{32}	-1.80
a_{21}	0.65	b_{22}	0.45	g_{13}	-3.00	g_{23}	-2.50	g_{33}	7.00
a_{22}	0.90			g_{14}	1.00	g_{24}	0.20	g_{34}	0.05
a_{31}	0.28			g_{15}	-4.40				
a_{32}	0.60								

Tableau 4.1: *Paramètres du modèle Hammerstein.*

Les signaux d'entrées u_{1k}, u_{2k} et u_{3k} sont des bruits blancs, de moyenne nulle et de variances respectives $\sigma_1 = 0.1$, $\sigma_2 = 0.5$ et $\sigma_3 = 0.3$.

Les conditions initiales du système, de l'observateur (4.6)-(4.9), ainsi que le paramétrage des matrices de pondération Q_k et R_{k+1} (cf. relations (4.10) et (4.11)) sont successivement :

- **Initialisation 1 et paramétrage de l'OKE modifié.**

$$x_0 = \theta$$
$$\hat{x}_0 = 0 \text{ : toutes les composantes de } \hat{x} \text{ sont initialisées à } 0$$
$$P_0 = 10^{10} I_{22}$$
$$\gamma = 10^{10}, \quad \lambda = 1, \quad \text{et} \quad \varepsilon = \delta = 10^{-3}$$

- **Initialisation 2 et paramétrage de l'OKE modifié.**

$$x_0 = \theta$$
$$\hat{x}_0 = 100 \text{ : toutes les composantes de } \hat{x} \text{ sont initialisées à } 100$$
$$P_0 = 10^{15} I_{22}$$
$$\gamma = 10^{15}, \quad \lambda = 5, \quad \text{et} \quad \varepsilon = \delta = 10^{-3}$$

Pour les deux initalisations de l'algorithme, nous avons réalisé une comparaison entre l'OKE modifié et l'OKE classique lorsque les matrices de pondération Q_k et R_{k+1} sont :

$$Q_k = 0.1 I_{22}$$
$$R_{k+1} = 0.1$$

Les résultats des simulations sont illustrés par les figures 4.2 à 4.10. Les figures 4.2 à 4.5 montrent l'évolution de la norme de l'erreur d'estimation $\|x_k - \hat{x}_k\|$ de l'OKE modifié et de l'OKE classique pour les deux jeux de conditions initiales, alors que l'évolution des différents paramètres estimés est représentée sur les figures 4.6 à 4.10 (uniquement pour l'OKE modifié dans le cas de l'initialisation 1).

Nous pouvons remarquer que la convergence de l'OKE modifié est assurée lorsque les matrices de pondération Q_k et R_{k+1} sont judicieusement choisies et ce, en dépit d'erreurs d'initialisation importantes ou de "fortes" non linéarités des caractéristiques Z_{ik} (les valeurs nominales des paramètres sont atteintes vers $k \approx 1400$ pour l'initialisation 1 et $k \approx 2500$ pour l'initialisation 2). D'un autre côté, il est clairement visible que la convergence de l'OKE classique n'est pas acquise.

4.1.4 Conclusion

Notre approche pour la synthèse d'observateurs de type Kalman étendu a été validée sur un problème d'identification non linéaire. Les comparaisons effectuées avec l'OKE classique ont confirmé les résultats théoriques développés dans le chapitre précédent, et ont notamment permis de mettre en évidence le rôle fondamental joué par les matrices de pondération Q_k et R_{k+1} dans l'amélioration des performances de l'observateur.

Un réglage judicieux et systématique de ces matrices a été proposé. La technique développée est très simple à mettre en œuvre, et ne requiert que le choix d'un minimum de paramètres de synthèse (γ et λ et à un degré moindre ε et δ dans (4.10)-(4.11)).

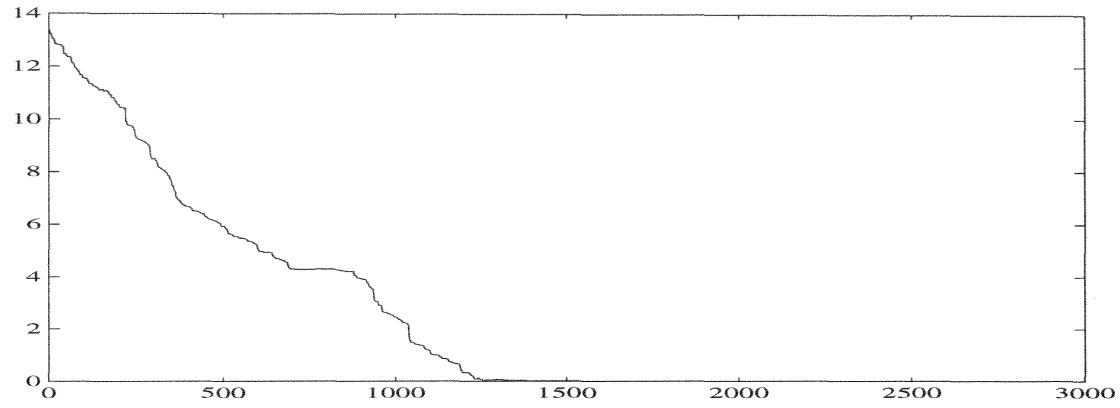


Figure 4.2: *Convergence de la norme de l'erreur d'estimation de l'état. OKE modifié. Initialisation 1.*

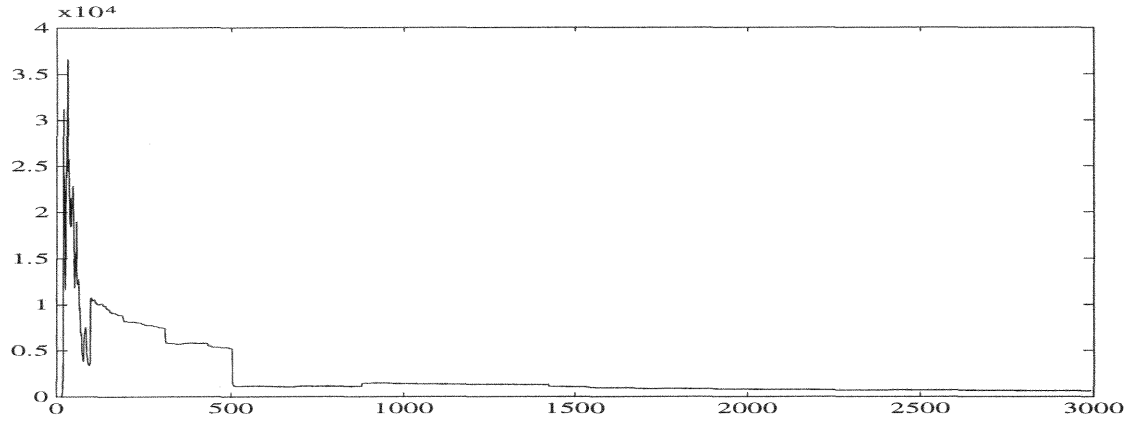


Figure 4.3: *Convergence de la norme de l'erreur d'estimation de l'état. OKE classique. Initialisation 1.*

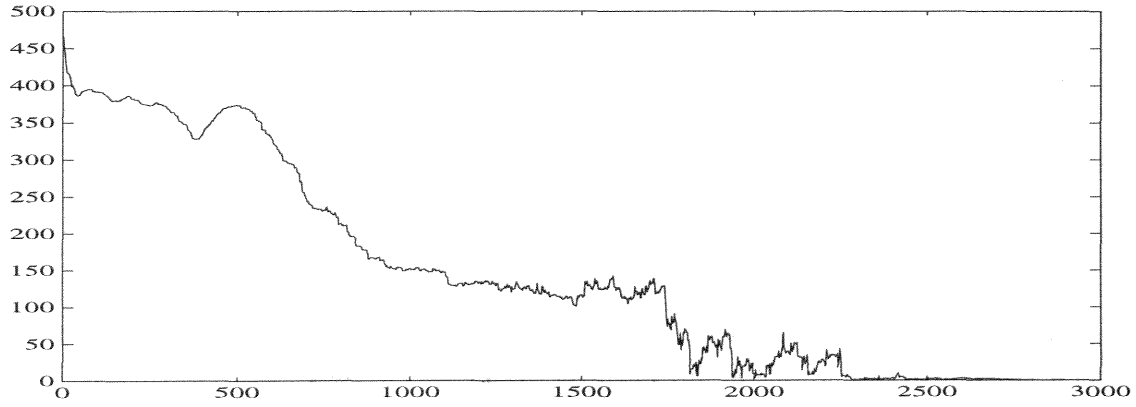


Figure 4.4: *Convergence de la norme de l'erreur d'estimation de l'état. OKE modifié. Initialisation 2.*

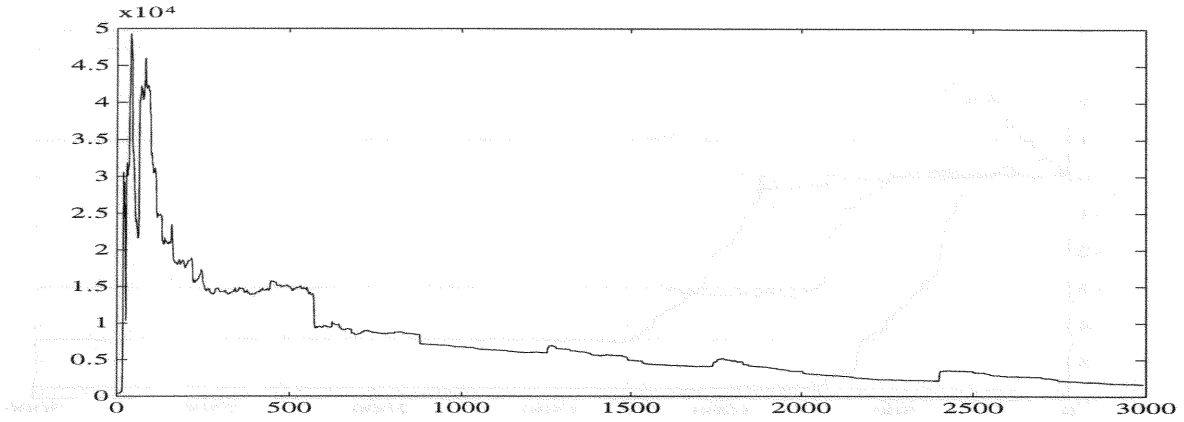


Figure 4.5: *Convergence de la norme de l'erreur d'estimation de l'état. OKE classique. Initialisation 2.*

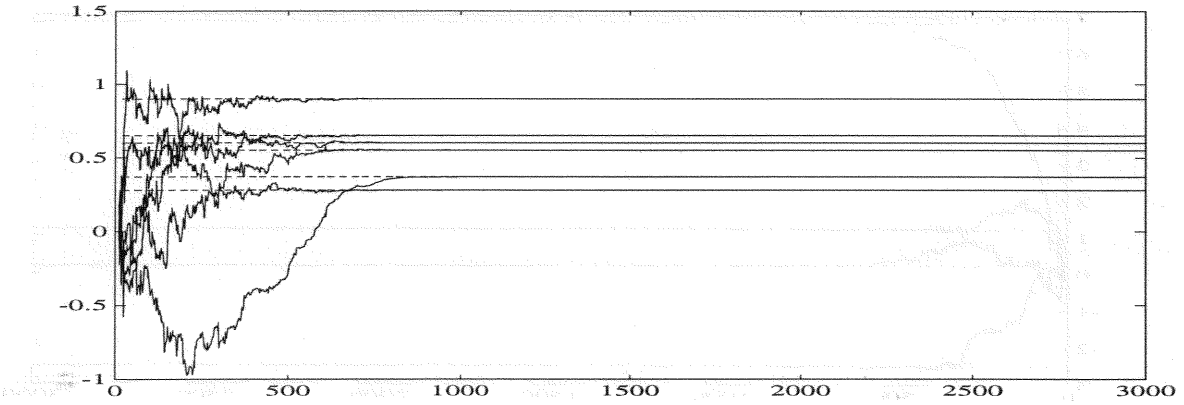


Figure 4.6: *Evolution des paramètres a_{ij} réels (- -) et estimés (—). OKE modifié. Initialisation 1.*

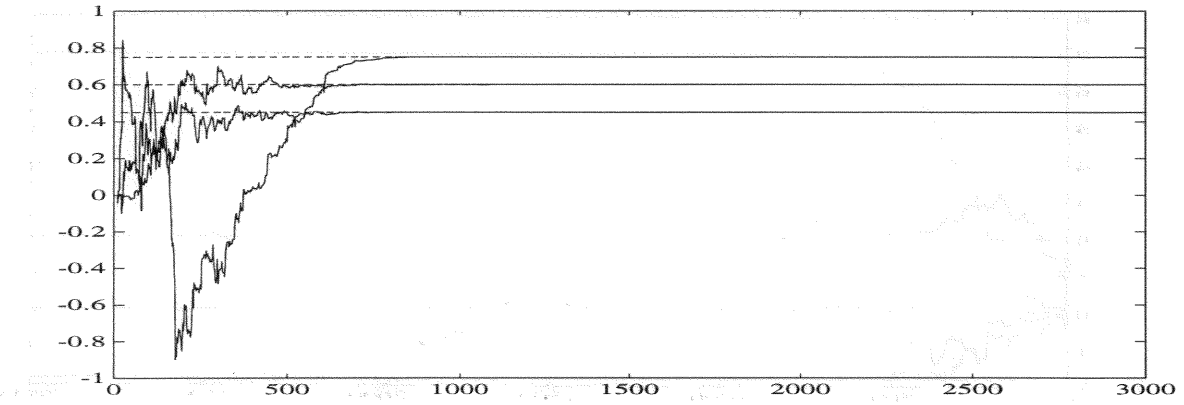


Figure 4.7: *Evolution des paramètres b_{ij} réels (- -) et estimés (—). OKE modifié. Initialisation 1.*

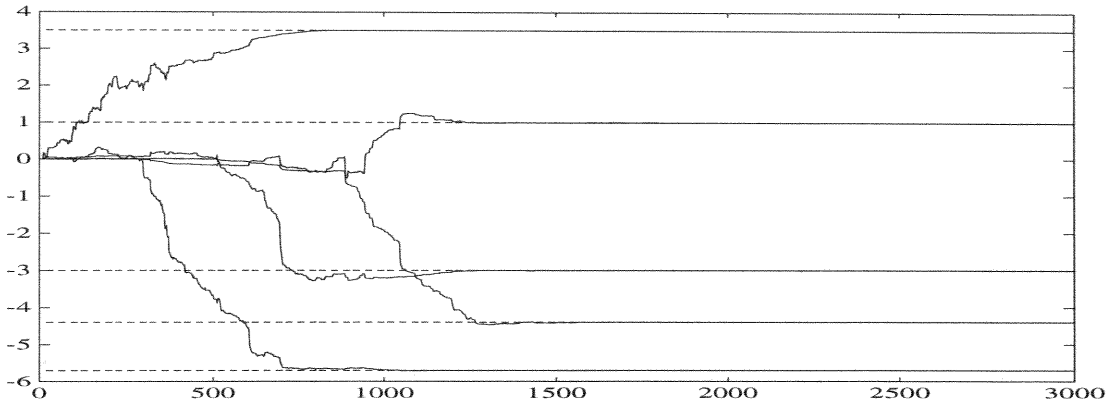


Figure 4.8: *Evolution des paramètres g_{1i} réels (- -) et estimés (—). OKE modifié. Initialisation 1.*

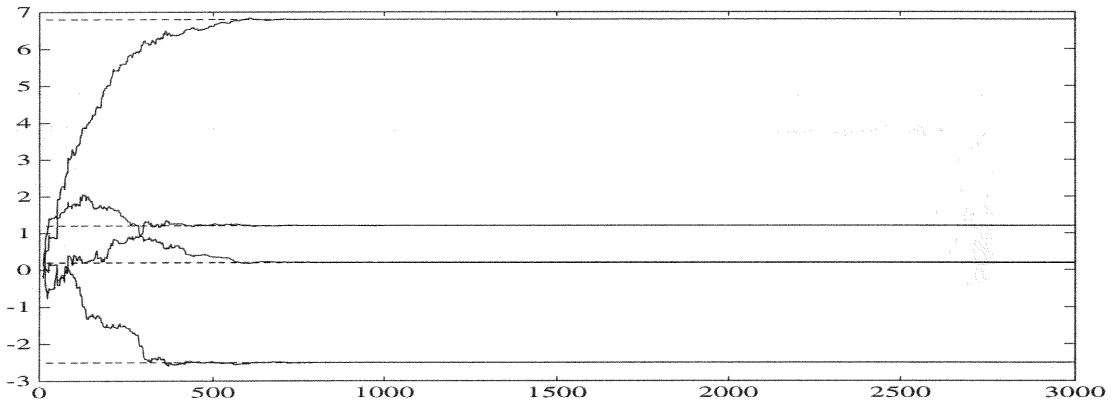


Figure 4.9: *Evolution des paramètres g_{2i} réels (- -) et estimés (—). OKE modifié. Initialisation 1.*

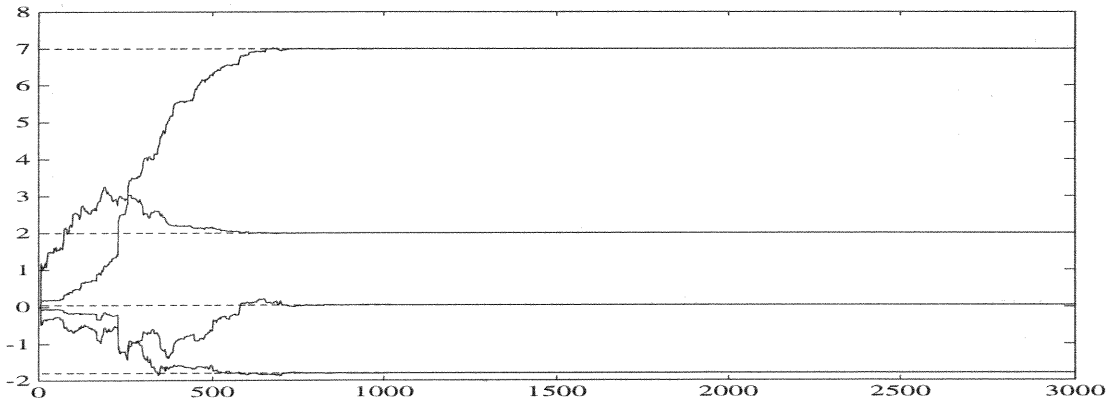


Figure 4.10: *Evolution des paramètres g_{3i} réels (- -) et estimés (—). OKE modifié. Initialisation 1.*

4.2 Application à l'observation d'une machine asynchrone

4.2.1 Introduction

Nous allons, dans ce paragraphe, appliquer les différents algorithmes d'estimation, développés en Chapitre 3, à l'observation d'une machine asynchrone. La commande de ce type de machines électriques a été intensivement étudiée ces dernières années et la littérature regorge de publications sur ce sujet. Parmi les algorithmes de commande classiques, nous citerons la commande vectorielle [MAR93], la commande linéarisante entrée/sortie [KIM90, Von94], les méthodes utilisant la propriété de passivité du système [ORT93] ou les approches fondées sur les perturbations singulières [DJE93]. Les variables régulées sont typiquement les flux statoriques et rotoriques ainsi que la vitesse angulaire du rotor.

Ces différentes lois de commandes requièrent la connaissance complète du vecteur d'état. Les flux n'étant généralement pas mesurés, plusieurs observateurs permettant de reconstruire ces variables (à partir des grandeurs mesurées qui sont les courants statoriques et la vitesse angulaire du rotor) ont été proposés. On y trouve notamment ceux issus de la théorie de l'estimation linéaire [VER88], les estimateurs de type Luenberger étendu [DAL93] ou bien encore le filtre de Kalman étendu [LAC89, SAL93]. Certains paramètres du moteur (couple de charge, résistance rotorique) pouvant être inconnus ou susceptibles de varier de façon significative au cours du temps, on remarque que les techniques de linéarisation exacte de l'erreur d'observation (cf. Chapitre 2), qui utilisent un changement de coordonnées dépendant de ces paramètres, ne sont pas adaptées à l'estimation de l'état de ce type de machines électriques.

Dans cette section et en accord avec les résultats théoriques développés au Chapitre 3, nous allons démontrer que les différents algorithmes d'estimation proposés, apportent une solution constructive à ce problème, tant au niveau de l'observation de l'état que de l'estimation d'éventuels paramètres ou entrées inconnus.

4.2.2 Description du procédé et modélisation

Un moteur à induction est composé d'un rotor n-phasé et d'un stator m-phasé, le rotor étant en court-circuit. Le stator est alimenté par des courants inducteurs déphasés de $2\pi/n$ dans le temps alors que les n bobines statoriques sont elles-mêmes déphasées de $2\pi/n$ dans l'espace. La variation de flux générée par le stator crée un courant induit rotorique déphasé de $2\pi/m$. Ceci occasionne des champs magnétiques statoriques et rotoriques tournant à des vitesses angulaires différentes, le couple délivré par le moteur est alors fonction du différentiel de vitesse entre les deux champs magnétiques. Cette propriété confère le caractère asynchrone à la machine. La valeur efficace du couple peut, par la suite, être modifiée en jouant sur le nombre de phases du stator et du rotor.

Dans ce paragraphe, nous étudierons uniquement un moteur à induction triphasé. Afin de réduire la complexité d'une représentation triphasée, un modèle à deux phases est utilisé [MAR93]. La dynamique de ce dernier est donnée par :

$$\begin{aligned} R_s I_{s\alpha} + \dot{\phi}_{s\alpha} &= U_{s\alpha} \\ R_s I_{s\beta} + \dot{\phi}_{s\beta} &= U_{s\beta} \qquad (4.13) \\ R_r I_{rd'} + \dot{\phi}_{rd'} &= 0 \\ R_r I_{rq'} + \dot{\phi}_{rq'} &= 0 \qquad (4.14) \end{aligned}$$

où R, I, ϕ et U_s représentent respectivement une résistance, un courant, un flux et une entrée tension appliquée au stator. Les indices s et r représentent le stator et le rotor, (α, β) désigne les composantes d'un vecteur écrit dans le repère stator fixe, (d', q') désigne les composantes d'un vecteur écrit dans un repère tournant à la vitesse $n_p\omega$, où n_p est le nombre de paires de pôles du moteur et ω est la vitesse angulaire du rotor.

Le modèle du moteur à induction peut se formuler indifféremment suivant des repères fixés par rapport au stator, au rotor ou au champs tournant. Dans le cadre de ce travail, nous ne nous intéresserons qu'au modèle exprimé dans le référentiel (α, β) lié au stator.

En définissant l'angle δ par :

$$\dot{\delta} = n_p\omega, \qquad \delta(0) = 0 \tag{4.15}$$

il est possible de transformer les vecteurs $(i_{rd'}, i_{rq'})$ et $(\phi_{rd'}, \phi_{rq'})$ dans le repère tournant (d', q') en $(i_{r\alpha}, i_{r\beta})$ et $(\phi_{r\alpha}, \phi_{r\beta})$ dans le repère fixe (α, β). On utilise, dans ce but, les relations :

$$\begin{pmatrix} I_{r\alpha} \\ I_{r\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{rd'} \\ I_{rq'} \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

$$\begin{pmatrix} \phi_{r\alpha} \\ \phi_{r\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{rd'} \\ \phi_{rq'} \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

En utilisant (4.15) et en substituant (4.16)-(4.17) dans (4.13)-(4.14), il vient que :

$$\begin{aligned} R_s I_{s\alpha} + \dot{\phi}_{s\alpha} &= U_{s\alpha} \\ R_s I_{s\beta} + \dot{\phi}_{s\beta} &= U_{s\beta} \\ R_r I_{r\alpha} + \dot{\phi}_{r\alpha} + n_p\omega\phi_{r\beta} &= 0 \\ R_r I_{r\beta} + \dot{\phi}_{r\beta} - n_p\omega\phi_{r\alpha} &= 0 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Sous quelques hypothèses simplificatrices (linéarité des circuits magnétiques, inductances mutuelles identiques, ...), les équation magnétiques sont données par [MAR93] :

$$\begin{aligned} \phi_{s\alpha} &= L_s I_{s\alpha} + M_{sr} I_{r\alpha} \\ \phi_{s\beta} &= L_s I_{s\beta} + M_{sr} I_{r\beta} \\ \phi_{r\alpha} &= M_{sr} I_{s\alpha} + L_r I_{r\alpha} \\ \phi_{r\beta} &= M_{sr} I_{s\beta} + L_r I_{r\beta} \end{aligned} \tag{4.19}$$

où L_s et L_r représentent respectivement les auto-inductances statorique et rotorique, M_{sr} est l'inductance mutuelle stator/rotor.

En éliminant $I_{r\alpha}$, $I_{r\beta}$ et $\phi_{s\alpha}$, $\phi_{s\beta}$ dans (4.18), et en utilisant (4.19), nous avons :

$$\begin{aligned} R_s I_{s\alpha} + \frac{M_{sr}}{L_r}\dot{\phi}_{r\alpha} + \left(L_s - \frac{M_{sr}}{L_r^2}\right)\dot{I}_{s\alpha} &= U_{s\alpha} \\ R_s I_{s\beta} + \frac{M_{sr}}{L_r}\dot{\phi}_{r\beta} + \left(L_s - \frac{M_{sr}}{L_r^2}\right)\dot{I}_{s\beta} &= U_{s\beta} \\ \frac{R_r}{L_r}\phi_{r\alpha} - \frac{R_r}{L_r}M_{sr} I_{s\alpha} + \dot{\phi}_{r\alpha} + n_p\omega\phi_{r\beta} &= 0 \\ \frac{R_r}{L_r}\phi_{r\beta} - \frac{R_r}{L_r}M_{sr} I_{s\beta} + \dot{\phi}_{r\beta} + n_p\omega\phi_{r\alpha} &= 0 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Le couple électro-mécanique produit par le moteur étant donné par :

$$T_e = \frac{n_p M_{sr}}{L_r}(\phi_{r\alpha} I_{s\beta} - \phi_{r\beta} I_{s\alpha})$$

la dynamique du rotor s'exprime sous la forme :

$$\dot{\omega} = \frac{n_p M_{sr}}{J L_r}(\phi_{r\alpha} I_{s\beta} - \phi_{r\beta} I_{s\alpha}) - \frac{F_v}{J}\omega - \frac{T_L}{J} \tag{4.21}$$

où J est le moment d'inertie de l'ensemble (charge + moteur), F_v est le coefficient de frottement visqueux de l'ensemble (charge + moteur) et T_L est le couple de charge.

En regroupant les équation électro-magnétiques (4.20) avec la dynamique du rotor (4.21), et en définissant les nouveaux paramètres :

$$\alpha = \frac{R_r}{L_r},\quad \sigma = 1 - \frac{M_{sr}^2}{L_s L_r},\quad \beta = \frac{M_{sr}}{\sigma L_s L_r},\quad \gamma = \frac{L_r^2 R_s + M_{sr}^2 R_r}{\sigma L_s L_r^2} \text{ et } \mu = \frac{n_p M_{sr}}{J L_r}$$

la dynamique du moteur à induction dans le repère fixe (α, β) lié au stator est :

$$\begin{aligned}
\dot{I}_{s\alpha} &= -\gamma I_{s\alpha} + \alpha\beta\phi_{r\alpha} + \beta n_p \omega \phi_{r\beta} + \frac{1}{\sigma L_s} U_{s\alpha} \\
\dot{I}_{s\beta} &= -\gamma I_{s\beta} + \alpha\beta\phi_{r\beta} - \beta n_p \omega \phi_{r\alpha} + \frac{1}{\sigma L_s} U_{s\beta} \\
\dot{\phi}_{r\alpha} &= \alpha M_{sr} I_{s\alpha} - \alpha\phi_{r\alpha} - n_p \omega \phi_{r\beta} \\
\dot{\phi}_{r\beta} &= \alpha M_{sr} I_{s\beta} - \alpha\phi_{r\beta} + n_p \omega \phi_{r\alpha} \\
\dot{\omega} &= \mu(\phi_{r\alpha} I_{s\beta} - \phi_{r\beta} I_{s\alpha}) - \frac{F_v}{J}\omega - \frac{T_L}{J}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Ce modèle est particulièrement bien adapté à la synthèse de lois de commande linéarisantes [Von93, Von94], la commande vectorielle classique nécessitant quant à elle la transformation des vecteurs $(I_{s\alpha}, I_{s\beta})$, $(\phi_{r\alpha}, \phi_{r\beta})$ dans un repère (d, q) tournant avec le vecteur des flux $(\phi_{r\alpha}, \phi_{r\beta})$.

Remarque 4.1 *La transformation, qui permet de représenter le modèle du moteur asynchrone dans un repère tournant (d, q), utilise les relations :*

$$\begin{pmatrix} I_{d\alpha} \\ I_{q\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\rho & \sin\rho \\ -\sin\rho & \cos\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{s\alpha} \\ I_{s\beta} \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} \phi_{d\alpha} \\ \phi_{q\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\rho & \sin\rho \\ -\sin\rho & \cos\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{r\alpha} \\ \phi_{r\alpha} \end{pmatrix}$$

où $\rho = (\arctan \phi_{r\beta}/\phi_{r\alpha})$.

Le modèle (4.22), réécrit dans un repère tournant (d, q), est alors [MAR93] :

$$\begin{aligned}
\dot{I}_{sd} &= -\gamma I_{sd} + \alpha\beta\phi_{rd} + n_p \omega I_{sq} + \alpha M_{sr}\frac{I_{sq}^2}{\phi_{rd}} + \frac{1}{\sigma L_s} U_{sd} \\
\dot{I}_{sq} &= -\gamma I_{sq} - \beta n_p \omega \phi_{rd} - \beta n_p \omega I_{sd} - \alpha M_{sr}\frac{I_{sd} I_{sq}}{\phi_{rd}} + \frac{1}{\sigma L_s} U_{sq} \\
\dot{\phi}_{rd} &= -\alpha\phi_{rd} + \alpha M_{sr} I_{sd} \\
\dot{\rho} &= n_p \omega + \alpha M_{sr}\frac{I_{sq}}{\phi_{rd}} \\
\dot{\omega} &= \mu \phi_{rd} I_{sq} - \frac{F_v}{J}\omega - \frac{T_L}{J}
\end{aligned}$$

▼

4.2.3 OKE modifiés d'ordres plein et réduit

4.2.3.1 OKE d'ordre plein

Nous allons, dans un premier temps, construire un observateur de type Kalman étendu d'ordre plein pour estimer l'état du moteur dans le repère fixe (α, β). Les mesures utilisées sont celles des courants statoriques $I_{s\alpha}$ et $I_{s\beta}$ [AUB98a]. La mesure de la vitesse angulaire ω étant, en règle générale, fortement entâchée de bruit, nous n'utiliserons pas cette sortie dans la suite de ce paragraphe. On note que cette hypothèse est en contradiction avec la plupart des travaux sur la synthèse d'observateurs pour ce type de machines électriques [VER88, Von93].

Afin d'appliquer l'OKE (3.75)-(3.82), nous approximons le modèle temps-continu (4.22) à l'aide de la méthode d'Euler. Soit τ la période d'échantillonnage et soient :

$$\begin{aligned} x_k &= \begin{pmatrix} x_{1k} & x_{2k} & x_{3k} & x_{4k} & x_{5k} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} I_{s\alpha k} & I_{s\beta k} & \phi_{r\alpha k} & \phi_{r\beta k} & \omega_k \end{pmatrix}^T \\ u_k &= \begin{pmatrix} u_{1k} & u_{2k} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} U_{s\alpha k} & U_{s\beta k} \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

les vecteurs d'état et de commande du système à l'instant courant k.

Une représentation temps-discrèt du modèle (4.22) est alors donnée par :

$$\begin{aligned} x_{1k+1} &= (1-\tau\gamma)x_{1k} + \tau\alpha\beta x_{3k} + \tau\beta n_p x_{5k} x_{4k} + \frac{\tau}{\sigma L_s} u_{1k} \\ x_{2k+1} &= (1-\tau\gamma)x_{2k} + \tau\alpha\beta x_{4k} - \tau\beta n_p x_{5k} x_{3k} + \frac{\tau}{\sigma L_s} u_{2k} \\ x_{3k+1} &= \tau\alpha M_{sr} x_{1k} + (1-\tau\alpha)x_{3k} - \tau n_p x_{5k} x_{4k} \\ x_{4k+1} &= \tau\alpha M_{sr} x_{2k} + (1-\tau\alpha)x_{4k} + \tau n_p x_{5k} x_{3k} \\ x_{5k+1} &= \tau\mu(x_{3k}x_{2k} - x_{4k}x_{1k}) + (1 - \frac{\tau F_v}{J})x_{5k} - \frac{\tau T_L}{J} \end{aligned} \tag{4.23}$$

où les courants statoriques x_{1k} et x_{2k} sont directement mesurés.

En réécrivant le modèle d'état (4.23) sous la forme usuelle :

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) \tag{4.24a}$$
$$y_k = Hx_k \tag{4.24b}$$

avec $x_k \in \mathbb{R}^5$, $u_k \in \mathbb{R}^2$ et $y_k \in \mathbb{R}^2$, nous synthétisons l'OKE suivant :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1}(y_{k+1} - H\hat{x}_{k+1/k}) \\ P_{k+1} &= (I_5 - K_{k+1}H)P_{k+1/k} \\ \hat{x}_{k+1/k} &= f(\hat{x}_k, u_k) \\ P_{k+1/k} &= F_k P_k F_k^T + Q_k \end{aligned}$$

avec

$$K_{k+1} = P_{k+1/k}H^T(HP_{k+1/k}H^T + R_{k+1})^{-1}$$

$$F_k = \begin{pmatrix} 1-\tau\gamma & 0 & \tau\alpha\beta & \tau\beta n_p\hat{x}_{5k} & \tau\beta n_p\hat{x}_{4k} \\ 0 & 1-\tau\gamma & -\tau\beta n_p\hat{x}_{5k} & \tau\alpha\beta & -\tau\beta n_p\hat{x}_{3k} \\ \tau\alpha M_{sr} & 0 & 1-\tau\alpha & -\tau n_p\hat{x}_{5k} & -\tau n_p\hat{x}_{4k} \\ 0 & \tau\alpha M_{sr} & \tau n_p\hat{x}_{5k} & 1-\tau\alpha & \tau n_p\hat{x}_{3k} \\ -\tau\mu\hat{x}_{4k} & \tau\mu\hat{x}_{2k} & \tau\mu\hat{x}_{3k} & -\tau\mu\hat{x}_{1k} & 1-\dfrac{\tau F_v}{J} \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $P_0 = \mu I_5 > 0$. En accord avec les remarques formulées au paragraphe 3.3.3.3, les matrices de pondération Q_k et R_{k+1} sont choisies comme suit :

$$Q_k = \gamma(y_k - H\hat{x}_{k/k-1})^T(y_k - H\hat{x}_{k/k-1})I_5 + \varepsilon I_5 \tag{4.25}$$

$$R_{k+1} = \lambda H P_{k+1/k} H^T + \delta I_2 \tag{4.26}$$

où les paramètres de synthèse $\gamma, \lambda \geq 0$ et $\varepsilon, \delta > 0$ sont fixés par l'utilisateur.

4.2.3.2 OKE d'ordre réduit

Compte tenu de la structure particulière du système (4.24) (mesures linéaires avec $H = (I_2 \quad 0)$), nous pouvons appliquer l'OKE d'ordre réduit développé en section 3.4. Pour ce faire, nous décomposons le vecteur d'état x_k en une partie mesurée $x_{1_k} = y_k$ et en une partie non mesurée x_{2_k}, de façon à réécrire (4.24) sous la forme équivalente :

$$x_{2_{k+1}} = f_2(x_{2_k}, y_k, u_k) \tag{4.27a}$$

$$y_{k+1} = f_1(x_{2_k}, y_k, u_k) \tag{4.27b}$$

avec

$$f_2(x_{2_k}, y_k, u_k) = \begin{pmatrix} \tau\alpha M_{sr} y_{1k} + (1-\tau\alpha)x_{2_{1k}} - \tau n_p x_{2_{3k}} x_{2_{2k}} \\ \tau\alpha M_{sr} y_{2k} + (1-\tau\alpha)x_{2_{2k}} + \tau n_p x_{2_{3k}} x_{2_{1k}} \\ \tau\mu(x_{2_{1k}} y_{2k} - x_{2_{2k}} y_{1k}) + (1-\dfrac{\tau F_v}{J})x_{2_{3k}} - \dfrac{\tau T_L}{J} \end{pmatrix}$$

$$f_1(x_{2_k}, y_k, u_k) = \begin{pmatrix} (1-\tau\gamma)y_{1k} + \tau\alpha\beta x_{2_{1k}} + \tau\beta n_p x_{2_{3k}} x_{2_{2k}} + \dfrac{\tau}{\sigma L_s} u_{1k} \\ (1-\tau\gamma)y_{2k} + \tau\alpha\beta x_{2_{2k}} - \tau\beta n_p x_{2_{3k}} x_{2_{1k}} + \dfrac{\tau}{\sigma L_s} u_{2k} \end{pmatrix}$$

où $x_{2_{ik}}$ représente la $i^{\text{ième}}$ composante du vecteur d'état x_{2_k}.

L'OKE d'ordre réduit (3.140)-(3.146) pour le système (4.27) est (cf. section 3.4.2) :

$$\hat{x}_{2_{k+1}} = f_2(\hat{x}_{2_k}, y_k, u_k) + K_k(f_1(x_{2_k}, y_k, u_k) - f_1(\hat{x}_{2_k}, y_k, u_k))$$

$$K_k = F_k^{22} P_k F_k^{12^T}(F_k^{12} P_k F_k^{12^T} + R_k)^{-1}$$

$$P_{k+1} = F_k^{22} P_k F_k^{22^T} - K_k F_k^{12} P_k F_k^{22^T}$$

où les matrices jacobiennes F_k^{22} et F_k^{12} sont données par :

$$F_k^{22} = \begin{pmatrix} 1-\tau\alpha & -\tau n_p\hat{x}_{2_{3k}} & -\tau n_p\hat{x}_{3_{2k}} \\ \tau n_p\hat{x}_{2_{3k}} & 1-\tau\alpha & \tau n_p\hat{x}_{2_{1k}} \\ \tau\mu y_{2k} & -\tau\mu y_{1k} & 1-\dfrac{\tau F_v}{J} \end{pmatrix}$$

$$F_k^{12} = \begin{pmatrix} \tau\alpha\beta & \tau\beta n_p \hat{x}_{2_{3k}} & \tau\beta n_p \hat{x}_{2_{2k}} \\ -\tau\beta n_p \hat{x}_{2_{3k}} & \tau\alpha\beta & -\tau\beta n_p \hat{x}_{2_{1k}} \end{pmatrix}$$

avec $P_0 = \mu I_3 > 0$. La construction de la matrice de pondération R_k est réalisée en accord avec la remarque 3.14 et il vient que :

$$R_k = \lambda F_k^{12} P_k F_k^{12^T} + \delta I_2 \tag{4.28}$$

où $\lambda \geq 0$ et $\delta > 0$.

4.2.3.3 Simulations et commentaires

La commande du moteur à induction (4.22) étant en dehors du propos de notre étude, nous avons simulé le modèle (4.23) en boucle ouverte dans le repère fixe (α, β) avec les entrées $u_{1k} = U_{s\alpha k} = 350\cos(0.15k)$ et $u_{2k} = U_{s\alpha k} = 300\sin(0.2k)$.

La période d'échantillonnge est $\tau = 0.5$ ms.

Les caractéristiques du modèle sont celles de la plate-forme d'essais de l'IRCyN Nantes intégrant le GdR PRC "Commande des Machines Electriques", à savoir, une machine asynchrone rotor à cage de type Leroy Somer LSFMV3 90L4 dont les différents paramètres sont donnés par le tableau 4.2 [AUB98a].

Résistance statorique	R_s	1.47	Ω
Résistance rotorique	R_r	0.79	Ω
Auto-inductance statorique	L_s	0.105	H
Auto-inductance rotorique	L_r	0.094	H
Inductance mutuelle stator/rotor	M_{sr}	0.094	H
Moment d'inertie (charge + moteur)	J	0.0256	$\text{Nm.rad}^{-1}.\text{s}^{-2}$
Coefficient de frottement visqueux (charge + moteur)	F_v	0.0029	$\text{Nm.rad}^{-1}.\text{s}^{-1}$
Couple de charge	T_l	10	Nm
Nombre de paires de pôles	p	2	

Tableau 4.2: *Paramètres moteur.*

Les conditions initiales du système, des observateurs d'ordres plein et réduit et le paramétrage des matrices de pondération (4.25)-(4.26) et (4.28) sont les suivants :

- **OKE d'ordre plein :**

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0\text{ A} \\ 0\text{ A} \\ 0\text{ Wb} \\ 0\text{ Wb} \\ 0\text{ rad/s} \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 100\text{ A} \\ 100\text{ A} \\ 3\text{ Wb} \\ 3\text{ Wb} \\ 100\text{ rad/s} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_0 = 10^5 I_5$$

$$\gamma = 10^5, \quad \lambda = 0.5, \quad \text{et} \quad \varepsilon = \delta = 10^{-3}$$

- **OKE d'ordre réduit :**

$$x_{2_0} = \begin{pmatrix} 0\text{ Wb} \\ 0\text{ Wb} \\ 0\text{ rad/s} \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_{2_0} = \begin{pmatrix} 10\text{ Wb} \\ 10\text{ Wb} \\ 200\text{ rad/s} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_0 = 10^5 I_3$$

$$\lambda = 0.5 \quad \text{et} \quad \delta = 10^{-3}$$

Les figures 4.11 et 4.12 montrent les résultats des simulations dans les cas d'ordre plein et réduit. Sur les figures 4.11(a) et 4.12(a) est représentée la norme de l'erreur d'estimation. Les figures 4.11(b)-(c)-(d) et 4.12(b) illustrent l'évolution des flux rotoriques et de la vitesse angulaire du rotor simulés et estimés.

Dans un but comparatif, nous avons également testé les OKE d'ordres plein et réduit proposés dans une configuration classique (avec $\gamma = \lambda = 0$ dans (4.25), (4.26) et (4.28)). Nous remarquons que les modifications apportées à l'OKE dans la construction des matrices de pondération Q_k et R_{k+1} nous permettent d'améliorer considérablement les performances de l'OKE tant au niveau vitesse de convergence (cf. figures 4.11(a) et 4.12(a)) que stabilité de l'algorithme (cf. figures 4.11(d) et 4.12(b)). Les résultats obtenus sont tout à fait en accord avec ceux établis en théorie dans les sections 3.3.3 et 3.4. Ces résultats sont, cependant, fortement liés au réglage des matrices de pondération (principalement γ et λ dans (4.25), (4.26) et (4.28)), et il conviendra, si l'on veut améliorer les différentes observations, d'affiner encore plus le choix des paramètres de synthèse γ et λ.

L'étape suivante consistera à valider les différents algorithmes sur des données réelles. Cette réalisation est prévue sur la plate-forme d'essais de l'IRCyN Nantes dans le cadre du PRC "Commande des Machines Electriques" dans quelques mois.

4.2.4 Estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues

4.2.4.1 Présentation du problème

Notre objectif, dans ce paragraphe, est d'appliquer l'OKE (3.207)-(3.214), synthétisé pour les systèmes non linéaires singuliers, à l'estimation simultanée de l'état et d'entrées inconnues de systèmes non linéaires modélisés sous la forme :

$$x_{k+1} = f(x_k, d_k, u_k) \tag{4.29a}$$
$$y_k = Cx_k + Nd_k \tag{4.29b}$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état et $d_k \in \mathbb{R}^d$ représentent le vecteur des entrées inconnues interprétées indifféremment comme des défauts ou des biais.

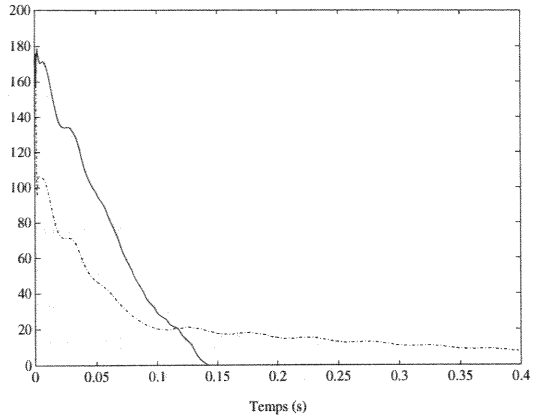
Pour estimer simultanément l'état et les entrées inconnues de (4.29), nous définissons le vecteur d'état augmenté $X_k = \begin{pmatrix} x_k & d_k \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n+d}$ de façon à transformer le système régulier (4.29) en la forme singulière :

$$EX_{k+1} = f(X_k, u_k) \tag{4.30a}$$
$$y_k = HX_k \tag{4.30b}$$

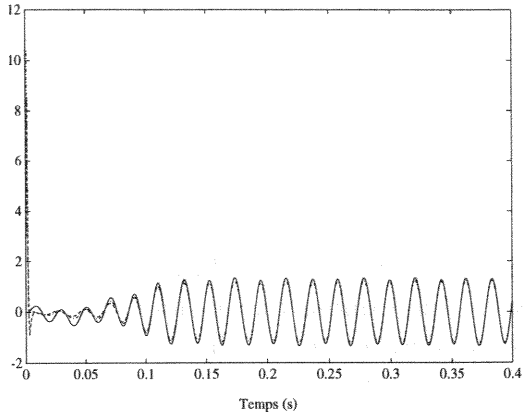
où $E = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times d} \end{bmatrix}$ et $H = \begin{bmatrix} C & N \end{bmatrix}$.

Nous considérons, à présent, le moteur à induction (4.23), et nous supposons que l'un des capteurs mesurant les courants statoriques est défaillant. L'équation de sortie est alors donnée par :

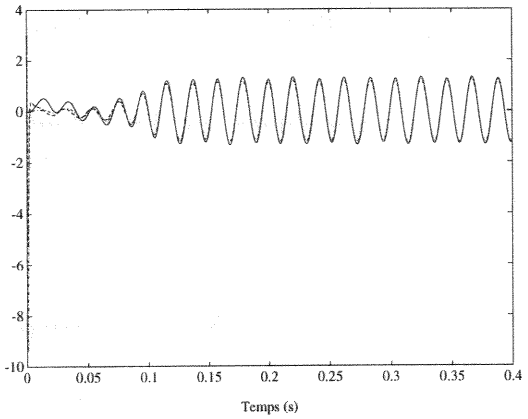
$$y_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d_k$$



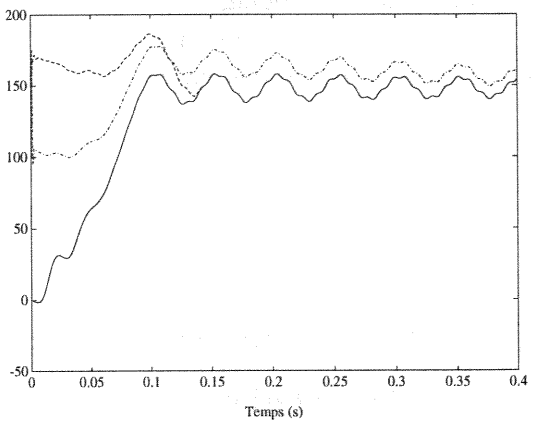
(a) $\|x - \hat{x}\|$



(b) Flux rotorique (x_3)



(c) Flux rotorique (x_4)



(d) Vitesse angulaire du rotor (x_5)

Figure 4.11: *Etats simulés (−) et estimés : OKE d'ordre plein modifié (− −) et classique (− ·).*

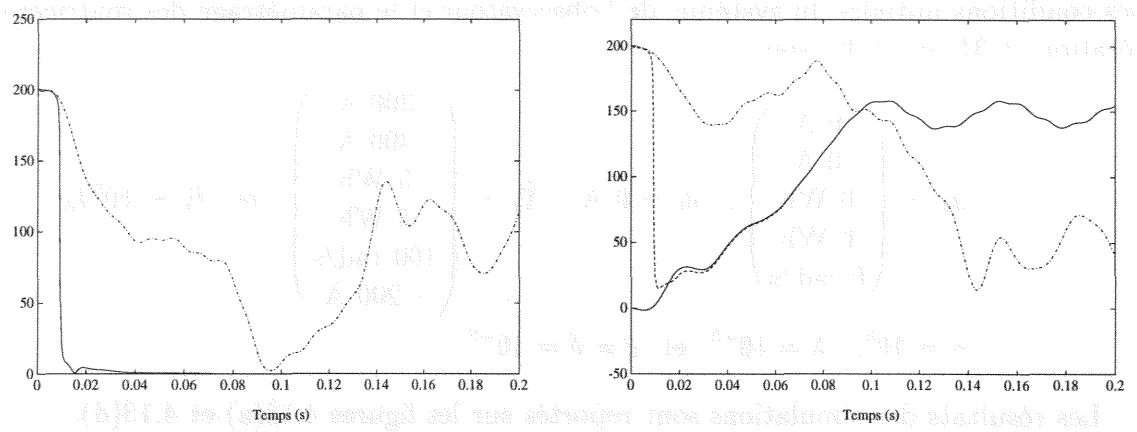
où $x_k \in \mathbb{R}^5$ et $d_k \in \mathbb{R}^1$.

En introduisant le vecteur d'état augmenté $X_k = \begin{pmatrix} x_k & d_k \end{pmatrix}^T$, il est facile de réécrire (4.24) sous la forme singulière (4.30) avec $E = \begin{bmatrix} I_5 & 0_{5\times 1} \end{bmatrix}$ et $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
L'OKE (3.207)-(3.214) pour le système augmenté singulier ainsi généré est :

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1} e_{k+1} \\
P_{k+1} &= (I_6 - K_{k+1} H) P_{k+1/k} \\
\hat{x}_{k+1/k} &= \begin{bmatrix} E \\ H \end{bmatrix}^{\dagger} \begin{bmatrix} f(\hat{x}_k, u_k) \\ y_{k+1} \end{bmatrix} \\
P_{k+1/k} &= A F_k P_k F_k^T A^T + Q_k
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
K_{k+1} &= P_{k+1/k} H^T (H P_{k+1/k} H^T + R_{k+1})^{-1} \\
e_{k+1} &= y_{k+1} - H \hat{x}_{k+1/k}
\end{aligned}$$



(a) $\|x - \hat{x}\|$ (b) Vitesse angulaire rotor (ω)

Figure 4.12: *Etats simulés (–) et estimés : OKE d'ordre réduit modifié (– –) et classique (– ·).*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_k = \begin{pmatrix} 1-\tau\gamma & 0 & \tau\alpha\beta & \tau\beta n_p \hat{X}_{5k} & \tau\beta n_p \hat{X}_{4k} & 0 \\ 0 & 1-\tau\gamma & -\tau\beta n_p \hat{X}_{5k} & \tau\alpha\beta & -\tau\beta n_p \hat{X}_{3k} & 0 \\ \tau\alpha M_{sr} & 0 & 1-\tau\alpha & -\tau n_p \hat{X}_{5k} & -\tau n_p \hat{X}_{4k} & 0 \\ 0 & \tau\alpha M_{sr} & \tau n_p \hat{X}_{5k} & 1-\tau\alpha & \tau n_p \hat{X}_{3k} & 0 \\ -\tau\mu \hat{X}_{4k} & \tau\mu \hat{X}_{2k} & \tau\mu \hat{X}_{3k} & -\tau\mu \hat{X}_{1k} & 1-\dfrac{\tau F_v}{J} & 0 \end{pmatrix}$$

et $P_0 = \mu I_6 > 0$. Les matrices de pondération Q_k et R_{k+1} sont choisies conformément à la remarque 3.20 émise en section 3.5 :

$$Q_k = \gamma e_k^T e_k I_6 + \varepsilon I_6 \tag{4.31}$$

$$R_{k+1} = \lambda H P_{k+1/k} H^T + \delta I_2 \tag{4.32}$$

où $e_k = y_k - H\hat{x}_{k/k-1}$ avec $\gamma, \lambda \geq 0$ et $\varepsilon, \delta > 0$.

4.2.4.2 Simulations et commentaires

Les paramètres du modèle simulé sont identiques à ceux utilisés précédemment (cf. tableau 4.2). Les entrées appliquées sont toujours $u_{1k} = 350\cos(0.15k)$ et $u_{2k} = 300\sin(0.2k)$.

La période d'échantillonnage est $\tau = 0.5$ ms.

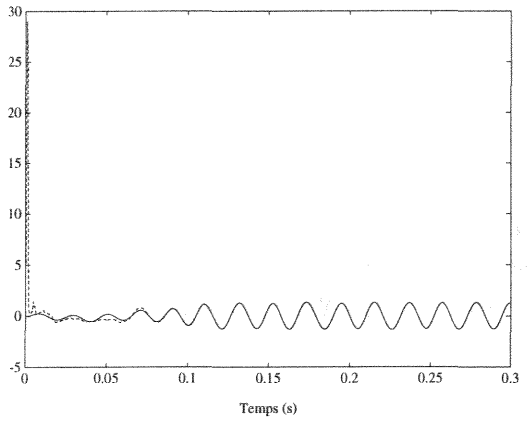
Nous supposons que le capteur mesurant le courant statorique x_{1k} devient défaillant au bout de 50 ms.

Les conditions initiales du système, de l'observateur et le paramétrage des matrices de pondération (4.31) et (4.32) sont :

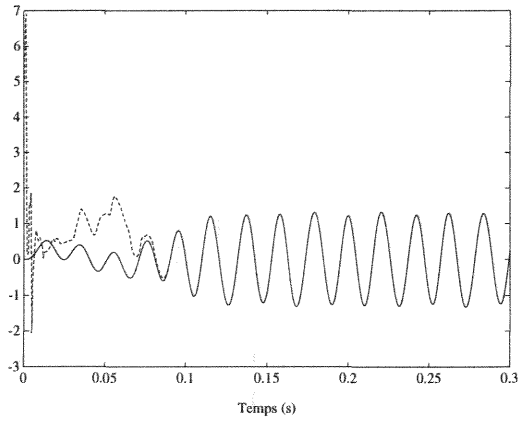
$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \text{ A} \\ 0 \text{ A} \\ 0 \text{ Wb} \\ 0 \text{ Wb} \\ 0 \text{ rad/s} \end{pmatrix}, \quad d_0 = 0 \text{ A}, \quad \hat{X}_0 = \begin{pmatrix} 300 \text{ A} \\ 300 \text{ A} \\ 5 \text{ Wb} \\ 5 \text{ Wb} \\ 100 \text{ rad/s} \\ -200 \text{ A} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_0 = 10^5 I_6$$

$$\gamma = 10^5, \quad \lambda = 10^{-3} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \delta = 10^{-3}$$

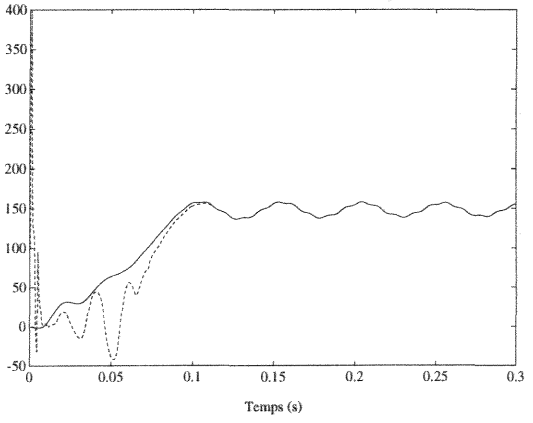
Les résultats des simulations sont reportés sur les figures 4.13(a) et 4.13(d).
En dépit de la défaillance d'un des capteurs et en présence de mauvaises conditions initiales, l'OKE pour les systèmes non linéaires singuliers que nous avons testé, a donné de très bons résultats en simulation. La convergence de l'algorithme est acquise au bout de 100 ms et une estimation simultanée du vecteur d'état x_k (cf. figures 4.13(a) à 4.13(c)) et de l'entrée inconnue d_k (cf. figures 4.13(d)) est obtenue.



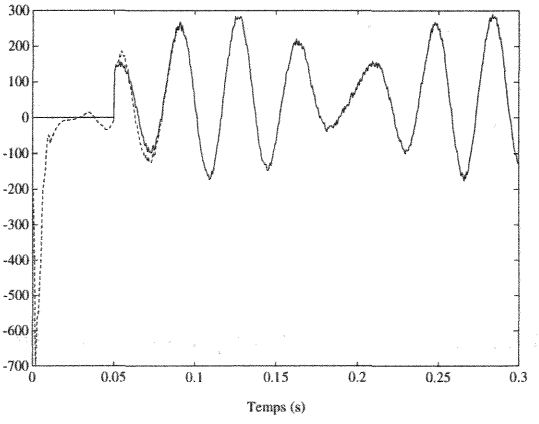
(a) Flux rotorique (x_3)



(b) Flux rotorique (x_4)



(c) Vitesse angulaire du rotor (x_5)



(d) Entrée inconnue (d)

Figure 4.13: *Etats simulés (–) et estimés (– –). OKE pour les systèmes singuliers.*

4.2.5 Estimation séparée de l'état et des biais

4.2.5.1 Présentation du problème

Comme nous l'avons souligné en introduction, certains paramètres de ce type de machines électriques sont susceptibles de varier de façon significative dans le temps. En particulier, le couple de charge est généralement inconnu et la résistance statorique peut fluctuer jusqu'à $\pm 50\%$ autour de sa valeur nominale à cause des variations de température du rotor [MAR93].

Dans ce paragraphe, nous considérons toujours le moteur à induction (4.23) et supposons, d'une part que la résistance statorique R_r dévie d'une constante ΔR_r autour de sa valeur nominale R_{rN}, d'autre part que le couple de charge constant T_l est inconnu. Nous allons ensuite, utiliser l'algorithme d'estimation séparée (3.251)-(3.265) pour estimer conjointement l'état et les paramètres ΔR_r et T_l de (4.23).

En tenant compte de ces différentes incertitudes paramétriques, le modèle complet du moteur asynchrone s'écrit :

$$\begin{aligned}
x_{1k+1} &= (1-\tau\gamma_k)x_{1k} + \tau\beta\alpha_k x_{3k} + \tau\beta n_p x_{5k} x_{4k} + \frac{\tau}{\sigma L_s} u_{1k} \\
x_{2k+1} &= (1-\tau\gamma_k)x_{2k} + \tau\beta\alpha_k x_{4k} - \tau\beta n_p x_{5k} x_{3k} + \frac{\tau}{\sigma L_s} u_{2k} \\
x_{3k+1} &= \tau M_{sr}\alpha_k x_{1k} + (1-\tau\alpha_k)x_{3k} - \tau n_p x_{5k} x_{4k} \\
x_{4k+1} &= \tau M_{sr}\alpha_k x_{2k} + (1-\tau\alpha_k)x_{4k} + \tau n_p x_{5k} x_{3k} \\
x_{5k+1} &= \tau\mu(x_{3k}x_{2k} - x_{4k}x_{1k}) + (1-\frac{\tau F_v}{J})x_{5k} - \frac{\tau b_{2k}}{J} \\
y_{1k} &= x_{1k} \\
y_{2k} &= x_{2k}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

où $\alpha_k = \dfrac{R_{rN}+b_{1k}}{L_r}$ et $\gamma_k = \dfrac{L_r^2 R_s + M_{sr}^2(R_{rN}+b_{1k})}{\sigma L_s L_r^2}$. $b_{k+1} = b_k = \begin{pmatrix}\Delta R_r & Tl\end{pmatrix}^T$ représente le vecteur des biais (paramètres) constants à estimer.

En notant le système (4.33) sous la forme :

$$x_{k+1} = f(x_k, b, u_k) \tag{4.34a}$$
$$y_k = h(x_k, u_k) = Hx_k \tag{4.34b}$$

nous synthétisons l'estimateur découplé (3.251)-(3.265) avec :

$$F_k^x = \begin{pmatrix}
1-\tau\hat{\gamma}_k & 0 & \tau\beta\hat{\alpha}_k & \tau\beta n_p\hat{x}_{5k} & \tau\beta n_p\hat{x}_{4k} \\
0 & 1-\tau\hat{\gamma}_k & -\tau\beta n_p\hat{x}_{5k} & \tau\beta\hat{\alpha}_k & -\tau\beta n_p\hat{x}_{3k} \\
\tau M_{sr}\hat{\alpha}_k & 0 & 1-\tau\hat{\alpha}_k & -\tau n_p\hat{x}_{5k} & -\tau n_p\hat{x}_{4k} \\
0 & \tau M_{sr}\hat{\alpha}_k & \tau n_p\hat{x}_{5k} & 1-\tau\hat{\alpha}_k & \tau n_p\hat{x}_{3k} \\
-\tau\mu\hat{x}_{4k} & \tau\mu\hat{x}_{2k} & \tau\mu\hat{x}_{3k} & -\tau\mu\hat{x}_{1k} & 1-\dfrac{\tau F_v}{J}
\end{pmatrix},$$

$$F_k^b = \begin{pmatrix} -\dfrac{\tau M_{sr}^2}{\sigma L_s L_r^2}\hat{x}_{1k} + \dfrac{\tau\beta}{L_r}\hat{x}_{3k} & 0 \\ -\dfrac{\tau M_{sr}^2}{\sigma L_s L_r^2}\hat{x}_{2k} + \dfrac{\tau\beta}{L_r}\hat{x}_{4k} & 0 \\ -\dfrac{\tau}{L_r}\hat{x}_{3k} + \dfrac{\tau M_{sr}}{L_r}\hat{x}_{1k} & 0 \\ -\dfrac{\tau}{L_r}\hat{x}_{4k} + \dfrac{\tau M_{sr}}{L_r}\hat{x}_{2k} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\tau}{J} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\hat{\alpha}_k = \dfrac{R_{rN} + \hat{b}_{1k}}{L_r}$ et $\hat{\gamma}_k = \dfrac{L_r^2 R_s + M_{sr}^2(R_{rN} + \hat{b}_{1k})}{\sigma L_s L_r^2}$.

Les matrices de pondération Q_k^x, Q_k^b, Q_k^{xb} et R_{k+1}^x sont choisies conformément aux remarques émises en section 3.6.3.3 et possèdent les structures temps-variants suivantes :

$$Q_k^x = \gamma^x e_k^T e_k I_5 + \varepsilon^x I_5 \tag{4.35}$$
$$Q_k^b = \gamma^b e_k^T e_k I_2 + \varepsilon^b I_2 \tag{4.36}$$
$$Q_k^{xb} = 0$$
$$R_{k+1}^x = \lambda H P_{k+1/k}^x H^T + \delta I_2 \tag{4.37}$$

où $e_k = y_k - H\hat{x}_{k/k-1}$. $\gamma^x, \gamma^b, \lambda \geq 0$ et $\varepsilon^x, \varepsilon^b, \delta > 0$ sont des paramètres à définir.

4.2.5.2 Simulations et commentaires

Les paramètres du moteur à induction simulé sont donnés par le tableau 4.2. Les entrées sont $u_{1k} = 350\cos(0.15k)$ et $u_{2k} = 300\sin(0.2k)$.

La période d'échantillonnge est $\tau = 0.5$ ms.

Nous supposons, d'une part que la résistance rotorique R_r dévie d'une constante $\Delta R_r = +2\ \Omega$ par rapport à sa valeur nominale $R_{rN} = 0.79\ \Omega$ au bout de 250 ms (soit plus de 250% par rapport à R_{rN}), d'autre part que le couple de charge T_l est inconnu mais constant (la valeur réelle étant de 10 Nm).

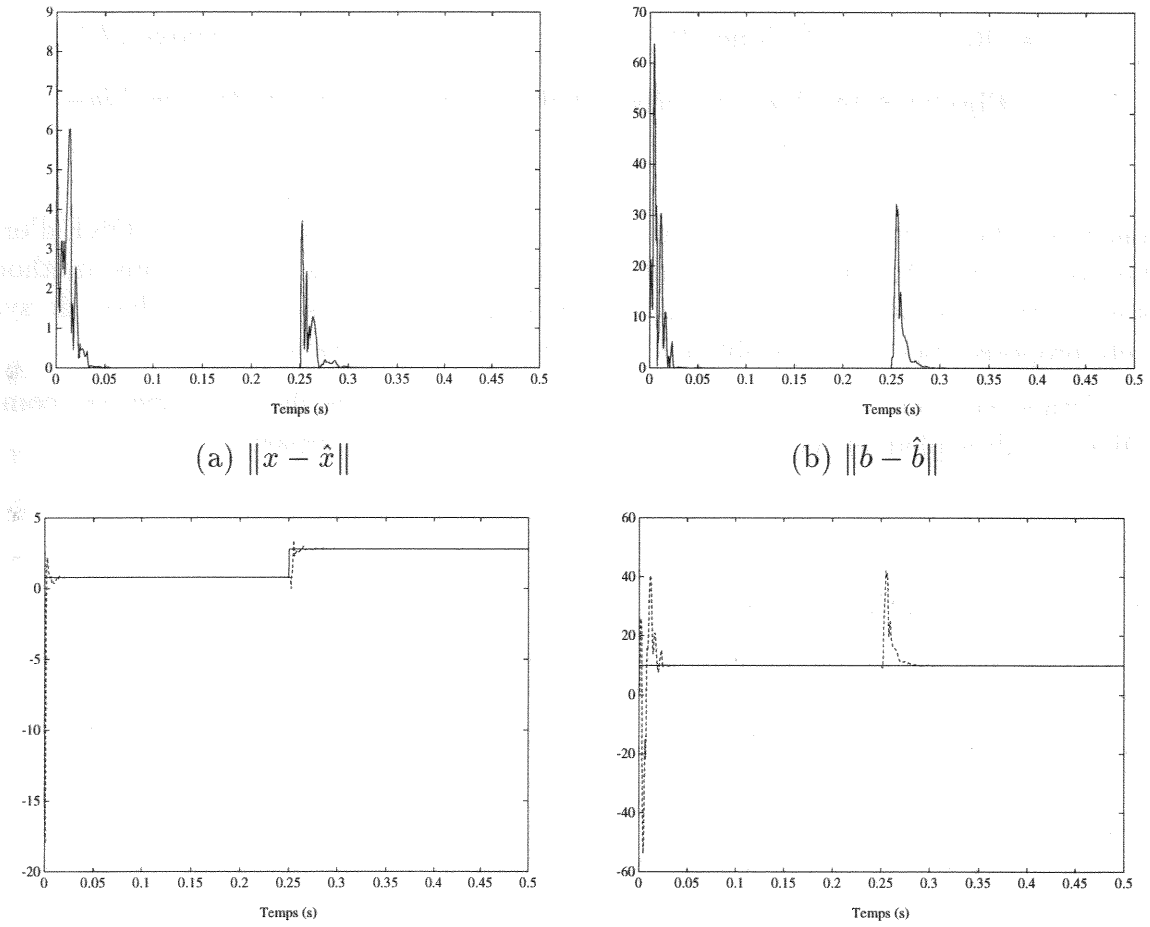
Pour cette simulation, les conditions initiales du système, de l'estimateur et le paramétrage des matrices de pondération (4.35), (4.36) et (4.37) sont :

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0\ \text{A} \\ 0\ \text{A} \\ 0\ \text{Wb} \\ 0\ \text{Wb} \\ 0\ \text{rad/s} \end{pmatrix}, \quad b_0 = b = \begin{pmatrix} 0\ \Omega \\ 10\ \text{Nm} \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 5\ \text{A} \\ 5\ \text{A} \\ 1\ \text{Wb} \\ 1\ \text{Wb} \\ 5\ \text{rad/s} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{b}_0 = \begin{pmatrix} 2\ \Omega \\ 0\ \text{Nm} \end{pmatrix}$$

$$P_0^x = 10^5 I_5, \quad P_0^b = 10^{10} I_2 \quad \text{et} \quad P_0^{xb} = 0$$
$$\gamma^x = 10^5, \quad \gamma^b = 10^{10}, \quad \lambda = 10^{-2} \quad \text{et} \quad \varepsilon^x = \varepsilon^b = \delta = 10^{-3}$$

Les résultats des simulations avec l'estimateur découplé état/biais sont illustrés par les figures 4.14 et 4.15. Les figures 4.14(a) et 4.14(b) représentent l'évolution de la norme des erreurs d'estimation de l'état et des biais, et les figures 4.14(c) et 4.14(d) font apparaître les trajectoires estimées de la résistance rotorique R_r et du couple de charge T_l.

Des simulations comparatives ont été réalisées avec le même estimateur séparé état/biais utilisant la configuration classique de l'OKE (avec $\gamma^x = \gamma^b = \lambda = 0$ dans (4.35), (4.36) et (4.37)). Les résultats des simulations sont en accord avec ceux établis en théorie au Chapitre 3, section 3.6, et démontrent qu'un réglage judicieux des matrices de pondération Q_k^x, Q_k^b et R_{k+1}^x permet d'améliorer significativement la convergence de l'algorithme. Ce résultat est clairement visible sur la figure 4.14 où, en dépit de mauvaises conditions initiales et d'une amplitude importante du biais sur R_r, la convergence de l'OKE modifié est assurée, alors que ce même observateur utilisé dans une configuration classique ne converge pas (cf. figure 4.15).



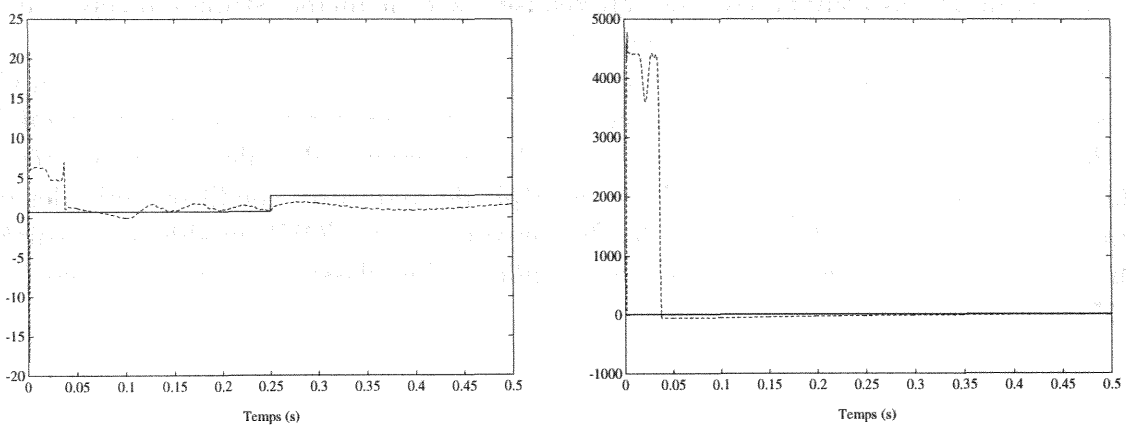
(a) $\|x - \hat{x}\|$ (b) $\|b - \hat{b}\|$

(c) Résistance rotorique (R_r) (d) Couple de charge (T_l)

Figure 4.14: *Etats (biais) simulés (—) et estimés (– –). OKE découplé modifié.*

4.2.6 Conclusion

L'approche proposée pour la synthèse d'observateurs de type Kalman étendu s'est avérée particulièrement performante sur la machine asynchrone étudiée. Les estimations obtenues



(a) Résistance rotorique (R_r) (b) Couple de charge (T_l)

Figure 4.15: *Biais simulés (−) et estimés (− −). OKE découplé classique.*

sont tout à fait pertinentes, tant au niveau de l'OKE d'ordre plein, que de l'OKE d'ordre réduit, ou que de l'OKE pour les systèmes non linéaires singuliers. En outre, une méthodologie pour l'estimation séparée de l'état et des biais (ou paramètres) de cette classe de systèmes a été proposée. Les résultats obtenus sont également satisfaisants.

L'étape suivante consistera à intégrer ces résultats dans des stratégies de commande (OKE d'ordres plein et réduit) ou de diagnostic (estimateur séparé).

4.3 Application au problème de trajectographie passive

4.3.1 Introduction

Le problème de la trajectographie passive consiste à estimer les éléments cinématiques (position, vitesse, accélération) d'un corps, appelé *cible*, se déplaçant dans un espace tridimensionnel (ou bidimensionnel) à partir des mesures des angles d'azimut et d'élévation effectuées depuis un "observateur" mobile. Cette technique est notamment utilisée à des fins militaires pour les systèmes de localisation de sous-marins par sonar [NAR81] ou bien pour les systèmes de guidage automatique de missiles [SON85].

Ce problème d'estimation s'insère parfaitement dans le cadre de notre étude. En effet, les méthodes d'observation non linéaires classiques (cf. Chapitre 2) s'avérant pour la plupart inefficaces, la technique d'estimation traditionnellement appliquée au problème de trajectographie passive est le filtre de Kalman étendu. Malheureusement, le caractère faiblement observable de ce système (certaines trajectoires de "l'observateur" mobile peuvent rendre le système inobservable [PAY89]) et les problèmes classiques liés à l'utilisation de ce filtre approché (sensiblité par rapport aux conditions initiales et aux non linéarités du système) dégradent considérablement les estimées obtenues. Pour résoudre ce problème, de nouveaux algorithmes dérivés du FKE comme le FKE avec pseudo-mesures [SPE81] ou le FKE à gain modifié [SON85, GAL91] ont été développés avec succès.

Dans ce paragraphe, après une brève description du système de trajectographie passive, nous présenterons les techniques d'estimation (FKE ou OKE avec pseudo-mesures et à gain modifié) habituellement utilisées pour résoudre ce problème. Ensuite nous montrerons, par le biais de simulations, que notre approche pour la synthèse d'OKE (notamment au niveau du réglage des matrices de pondération de l'observateur) permet d'améliorer significativement la convergence de cet estimateur, pourtant jugé peu performant dans la littérature. Des comparaisons seront effectuées avec les techniques d'estimation utilisées habituellement pour résoudre ce problème.

4.3.2 Modélisation

Dans un espace tridimensionnel, le problème du guidage automatique de missiles consiste à aiguiller un missile M, dont les éléments cinématiques sont connus, vers une cible C, à partir des mesures des angles d'azimut az et d'élévation el. Pour simplifier le modèle, nous supposerons que la cible se déplace à vecteur vitesse constant (cf. figure 4.16).

Dans le système de coordonnées cartésiennes[1], le vecteur d'état est composé des trois positions relatives $x_r = \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}^T$ et des trois vitesses relatives $v_r = \begin{pmatrix} v_X & v_Y & v_Z \end{pmatrix}^T$, le vecteur de commande étant constitué par les composantes de l'accélération du missile $u = a_M = \begin{pmatrix} a_{M_X} & a_{M_Y} & a_{M_Z} \end{pmatrix}^T$.
Le modèle d'état se met alors sous la forme [SON95] :

$$\dot{x} = Ax + Bu = f(x, u) \tag{4.38}$$

où $A = \begin{pmatrix} 0_3 & I_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0_3 \\ I_3 \end{pmatrix}$.

1. Ce système de coordonnées n'est pas unique, un système de coordonnées polaires modifiées a notamment été proposé par Aidala et Hammel dans [AID83].

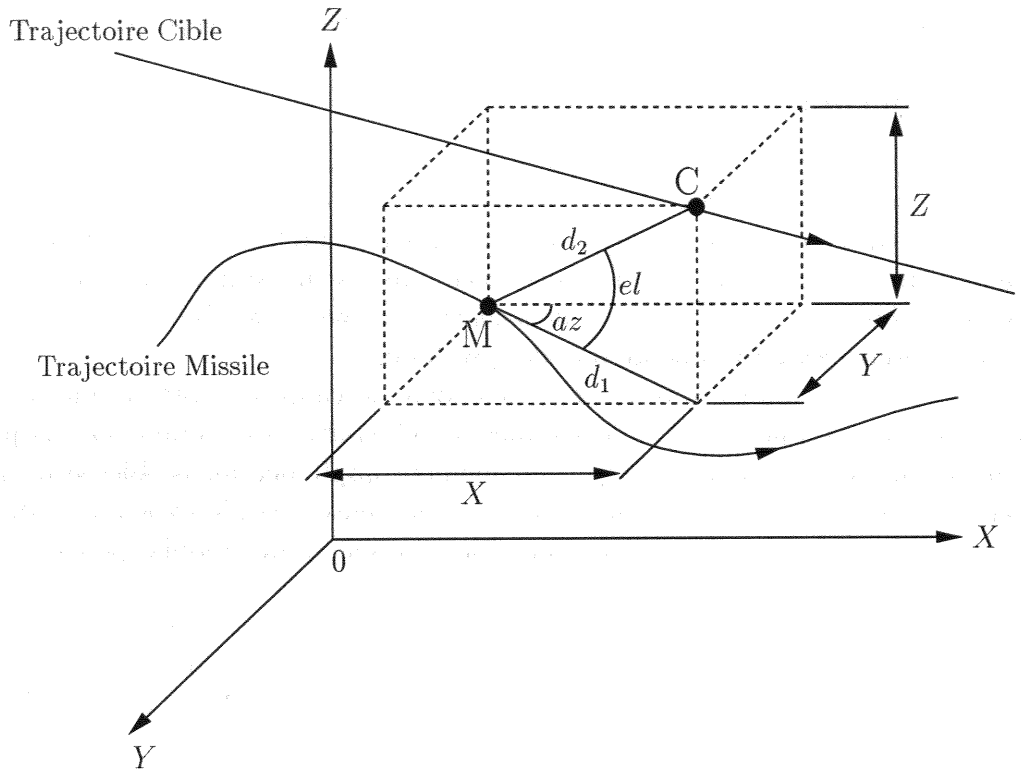


Figure 4.16: *Schéma de guidage et angles mesurés.*

Les mesures des angles d'azimut et d'élévation sont :

$$y_1 = az = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) = h_1(x) \tag{4.39}$$

$$y_2 = el = \arctan\left(\frac{-Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right) = h_2(x) \tag{4.40}$$

Remarque 4.2 *Dans le cas bidimensionnel, le vecteur d'état est* $x = \begin{pmatrix} X & Y & v_X & v_Y \end{pmatrix}^T$ *et le modèle d'état s'écrit :*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0_2 & I_2 \\ 0_2 & 0_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0_2 \\ I_2 \end{pmatrix} u$$

$$y = az = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$$

où $u = \begin{pmatrix} a_{M_X} & a_{M_Y} \end{pmatrix}^T$ *sont les composantes de l'accélération du missile.*

Si τ désigne la période d'échantillonnage, une discrétisation du modèle (4.38)-(4.40) donne le système :

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \tag{4.41}$$

$$\begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{Y_k}{X_k}\right) \\ \arctan\left(\frac{-Z_k}{\sqrt{X_k^2+Y_k^2}}\right) \end{pmatrix} = h(x_k) \tag{4.42}$$

où $A_k = \begin{pmatrix} I_3 & \tau I_3 \\ 0_3 & I_3 \end{pmatrix}$ et $B_k = \begin{pmatrix} \tau^2/2 I_3 \\ \tau I_3 \end{pmatrix}$.

Le schéma d'auto-guidage du missile M est issu de la théorie de la commande LQ et nécessite la connaissance complète du vecteur d'état [BRY69]. La synthèse d'un observateur constitue donc une étape indispensable.

Nous notons que les trajectoires entraînant l'inobservabilité de (4.41)-(4.42) ont été caractérisées dans [NAR81, PAY89]. Il est particulièrement facile de montrer que le système devient inobservable dès que l'accélération du missile est nulle. Toutefois, l'étude de l'observabilité de (4.41)-(4.42) étant en dehors du propos de notre étude, nous supposerons qu'il existe certaines trajectoires rendant le système régulièrement observable. Comme nous l'avons spécifié précédemment, la technique d'estimation traditionnellement appliquée à ce problème, est le filtre de Kalman étendu. Malheureusement, le caractère faiblement observable de ce système et la sensibilité numérique de ce filtre, par rapport à d'éventuelles erreurs de linéarisation importantes, dégradent considérablement les estimations obtenues.

Plusieurs solutions ont été envisagées pour pallier à ce problème. En particulier de nouveaux algorithmes, utilisant certaines propriétés structurelles des équations de sortie du système et dérivés du FKE comme le FKE avec pseudo-mesures [SPE81] ou le FKE à gain modifié [SON85, GAL91], ont été développés avec succès.

4.3.3 OKE avec pseudo-mesures et OKE à gain modifié

4.3.3.1 OKE avec pseudo-mesures

Considérons le modèle d'état (4.41) avec le vecteur des sorties $y_k = h(x_k)$. Par définition, il est possible de transformer chacune des mesures en pseudo-mesures s'il existe une fonction $z : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ et une matrice de fonctions $H : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{p \times n}$ telles que :

$$z(y_k) = H(y_k) x_k$$

Les pseudo-mesures ainsi générées sont affines en l'état. Puisque les équations d'état en (4.41) sont linéaires, nous obtenons finalement un système non linéaire affine en l'état, pour lequel il est aisé de construire un observateur de type Kalman étendu (cf. sections 3.2 et 3.2.3). Les équations de l'OKE avec pseudo-mesures s'écrivent :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1}(z(y_{k+1}) - H(y_{k+1})\hat{x}_{k+1/k}) \\ P_{k+1} &= (I_n - K_{k+1} H(y_{k+1})) P_{k+1/k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1/k} &= A_k \hat{x}_k + B_k u_k \\ P_{k+1/k} &= A_k P_k A_k^T + Q_k \end{aligned}$$

avec

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} H(y_{k+1})^T (H(y_{k+1}) P_{k+1/k} H(y_{k+1})^T + R_{k+1})^{-1}$$

où $P_0 = \mu I_n > 0$, $Q_k \geq 0$ et $R_{k+1} > 0$ sont des matrices de pondération définies positives dont le choix est libre.

Pour déterminer les pseudo-mesures $z(y_k)$, nous considérons les sorties du système (4.41)-(4.42) :

$$y_{1k} = \arctan\left(\frac{x_{2k}}{x_{1k}}\right)$$
$$y_{2k} = \arctan\left(\frac{-x_{3k}}{\sqrt{x_{1k}^2 + x_{2k}^2}}\right)$$

En utilisant quelques identités trigonométriques, on obtient les égalités :

$$x_{1k}\sin(y_{1k}) - x_{2k}\cos(y_{1k}) = 0$$
$$x_{1k}\cos(y_{1k})\sin(y_{2k}) + x_{2k}\sin(y_{1k})\sin(y_{2k}) + x_{3k}\cos(y_{2k}) = 0$$

à partir desquelles, il est aisé de construire les pseudo-mesures :

$$\begin{pmatrix} z_1(y_k) \\ z_2(y_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(y_{1k}) & -\cos(y_{1k}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(y_{1k})\sin(y_{2k}) & \sin(y_{1k})\sin(y_{2k}) & \cos(y_{2k}) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_k$$
$$= H(y_k)x_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

On remarque que les pseudo-mesures $z_i(y_k)$ sont nulles, $\forall\, k \geq 0$, le terme de correction dans l'OKE s'écrivant alors $-K_{k+1}H(y_{k+1})\hat{x}_{k+1/k}$.

Si $\mathcal{W}^o = \sum_{i=k}^{k+N} \phi_{[i,k]}^T H(y_i)^T H(y_i)\phi_{[i,k]} \geq \beta I_n > 0$ où $\phi_{[i,k]}$ est la matrice de transition de la partie homogène de (4.41), les conditions de convergence de l'OKE avec pseudo-mesures sont analogues à celles de l'OKE pour les systèmes non linéaires affines en l'état, et sont données par le théorème 3.2 en utilisant les résultats de stabilité de la section 3.2.

Lorsque l'OKE avec pseudo-mesures est utilisé dans un cadre stochastique en tant que filtre, il est démontré dans [SON85] que les estimées obtenues sont biaisées. Ceci provient du fait que le gain du filtre (qui tient compte des mesures jusqu'à l'instant $k+1$) est directement corrélé aux bruits de mesures à l'instant $k+1$.

4.3.3.2 OKE à gain modifié

Song et Speyer dans [SON85, SON86] ont proposé une alternative intéressante à ce problème en introduisant le concept de filtre de Kalman étendu à gain modifié. La solution consiste à modifier le gain du filtre de façon à n'utiliser que les mesures passées. La synthèse de leur estimateur fait appel à la notion de fonction modifiable (ou approximativement modifiable) qu'il convient de définir.

Définition 4.1 (Fonction modifiable, [SON85]) *Une fonction* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *est dite modifiable s'il existe une matrice de fonctions* $H : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{p\times n}$ *telle que :*

$$h(x) - h(\hat{x}) = H(h(x), \hat{x})(x - \hat{x})$$

▼

Définition 4.2 (Fonction approximativement modifiable, [SON85]) *Une fonction* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *est dite approximativement modifiable s'il existe des matrices de fonctions* $H : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{p\times n}$ *et* $\epsilon : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{p\times n}$ *telles que, pour tout* $x, \hat{x} \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ *:*

$$h(x) - h(\hat{x}) = (H(h(x), \hat{x}) + \epsilon(x, x - \hat{x}))(x - \hat{x})$$

avec $\lim_{\|x-\hat{x}\|\to 0} \|\epsilon(x, x - \hat{x})\|/\|H(h(x), \hat{x})\| \to 0.$ ▼

Pour formuler le FKE à gain modifié, nous associons au système déterministe (4.41)-(4.42), le système stochastique suivant :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + G_k w_k \\ y_k &= h(x_k) + D_k v_k \end{aligned}$$

où $w_k \in \mathbb{R}^r$ et $v_k \in \mathbb{R}^s$ sont des bruits additifs blancs, mutuellement indépendants et de covariances unitaires. G_k et D_k sont des matrices dépendant du temps de dimensions respectives $6 \times r$ et $2 \times s$.

Si la fonction non linéaire $h(.)$ est modifiable (ou approximativement modifiable), le FKE à gain modifié pour ce système s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1}(y_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1/k})) \\ P_{k+1} &= (I_n - K_{k+1} H(y_{k+1}, \hat{x}_{k+1/k}))P_{k+1/k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1/k} &= A_k \hat{x}_k + B_k u_k \\ P_{k+1/k} &= A_k P_k A_k^T + Q_k \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} K_{k+1} &= P_{k+1/k} H^{\star^T}(y_{k+1}, \hat{x}_{k+1/k})(H^\star(y_{k+1}, \hat{x}_{k+1/k}) P_{k+1/k} \times \\ &\quad H^{\star^T}(y_{k+1}, \hat{x}_{k+1/k}) + R_{k+1})^{-1} \\ h(x_{k+1}) - h(\hat{x}_{k+1/k}) &= H(y_{k+1}, \hat{x}_{k+1/k})(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1/k}) \\ H^\star(\hat{x}_{k+1/k}) &= \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_{k+1/k}) = H(h(\hat{x}_{k+1/k}), \hat{x}_{k+1/k}) \end{aligned}$$

où $Q_k = G_k G_k^T$ et $R_{k+1} = G_{k+1} G_{k+1}^T$.

La démonstration de la convergence de cet algorithme est donnée dans [SON85, SON86], et ne sera pas rappellée dans ce qui suit.

Etude de la modifiabilité de $h(x)$

Song et Speyer dans [SON85] ont démontré que la mesure de l'angle d'azimut appartient à la classe des fonctions modifiables, alors que la mesure de l'angle d'élévation est approximativement modifiable. En effet, à partir de (4.42), nous avons :

$$h(x_k) - h(\hat{x}_{k/k-1}) = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{Y_k}{X_k}\right) - \arctan\left(\frac{\hat{Y}_{k/k-1}}{\hat{X}_{k/k-1}}\right) \\ \arctan\left(\frac{-Z_k}{d_{1_k}}\right) - \arctan\left(\frac{-\hat{Z}_{k/k-1}}{\hat{d}_{1_{k/k-1}}}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{Y_k\hat{X}_{k/k-1} - X_k\hat{Y}_{k/k-1}}{X_k\hat{X}_{k/k-1} + Y_k\hat{Y}_{k/k-1}}\right) \\ \arctan\left(\frac{-Z_k\hat{d}_{1_{k/k-1}} + \hat{Z}_{k/k-1}d_{1_k}}{d_{1_k}\hat{d}_{1_{k/k-1}} + Z_k\hat{Z}_{k/k-1}}\right) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \arctan\alpha_k \\ \arctan\beta_k \end{pmatrix}$$

avec $d_{1_k} = \sqrt{X_k^2 + Y_k^2}$ et $\hat{d}_{1_{k/k-1}} = \sqrt{\hat{X}_{k/k-1}^2 + \hat{Y}_{k/k-1}^2}$.
En utilisant le fait que $\sin y_{1k} = Y_k/d_{1_k}$, $\cos y_{1k} = X_k/d_{1_k}$, $\sin y_{2k} = -Z_k/d_{2_k}$ et $\cos y_{2k} = d_{1_k}/d_{2_k}$ avec $d_{2_k} = \sqrt{X_k^2 + Y_k^2 + Z_k^2}$ (cf. figure 4.16), nous démontrons que :

$$\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{1_k} & 0 \\ 0 & D_{2_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{X}_{k/k-1}\sin y_{1k} - \hat{Y}_{k/k-1}\cos y_{1k} \\ \hat{d}_{1_{k/k-1}}\sin y_{2k} + \hat{Z}_{k/k-1}\cos y_{2k} \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

où

$$D_{1_k} = 1/(\hat{X}_{k/k-1}\cos y_{1k} + \hat{Y}_{k/k-1}\sin y_{1k})$$
$$D_{2_k} = 1/(\hat{d}_{1_{k/k-1}}\cos y_{2k} - \hat{Z}_{k/k-1}\sin y_{2k})$$

En ajoutant et en retranchant $D_{2_k}\sin y_{2k}/D_{1_k}$ à β_k dans l'équation (4.44), il vient que :

$$\beta_k = D_{2_k}(\hat{X}_{k/k-1}\cos y_{1k}\sin y_{2k} + \hat{Y}_{k/k-1}\sin y_{1k}\sin y_{2k}$$
$$+\hat{Z}_{k/k-1}\cos y_{2k} + \sin y_{2k}(\hat{d}_{1_{k/k-1}} - 1/D_{1_k}))$$

L'équation (4.44) s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{1_k} & 0 \\ 0 & D_{2_k} \end{pmatrix} H(y_k)\hat{x}_{k/k-1} + \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon(x_k, x_k - \hat{x}_{k/k-1}) \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

où $H(y_k)$ est définie par (4.43) et $\epsilon(x_k, x_k - \hat{x}_{k/k-1}) = D_{2_k}\sin y_{2k}(\hat{d}_{1_{k/k-1}} - 1/D_{1_k})$.

Finalement, le terme d'innovation $h(x_k) - h(\hat{x}_{k/k-1})$ s'écrit :

$$h(x_k) - h(\hat{x}_{k/k-1}) = -E_k H(y_k)(x_k - \hat{x}_{k/k-1}) + E_k \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon(x_k, x_k - \hat{x}_{k/k-1})/D_{2_k} \end{pmatrix} \tag{4.46}$$

où

$$E_k = \begin{pmatrix} (D_{1_k}\arctan\alpha_k)/\alpha_k & 0 \\ 0 & (D_{2_k}\arctan\beta_k)/\beta_k \end{pmatrix}$$

4.3.4 Simulations et commentaires

Nous allons désormais comparer les performances des algorithmes d'estimation décrits précédemment, avec celles de l'OKE muni d'un réglage pertinent des matrices de pondération Q_k et R_{k+1}. Nous nous plaçons dans un cadre d'étude déterministe. La structure de l'OKE (3.75)-(3.82), appliqué au système (4.41)-(4.42), est :

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K_{k+1}(y_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1/k}))$$

$$P_{k+1} = (I_6 - K_{k+1}H_{k+1})P_{k+1/k}$$
$$\hat{x}_{k+1/k} = A_k\hat{x}_k + B_k u_k$$
$$P_{k+1/k} = A_k P_k A_k^T + Q_k$$

avec

$$K_{k+1} = P_{k+1/k}H_{k+1}^T(H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}$$
$$H_{k+1} = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}_{k+1/k})$$

où $P_0 = \mu I_6 > 0$. Le choix des matrices de pondération Q_k et R_{k+1} est effectué en accord avec les remarques formulées en section 3.3.3.3 et il vient que :

$$Q_k = \gamma(y_k - h(\hat{x}_{k/k-1}))^T(y_k - h(\hat{x}_{k/k-1}))I_6 + \varepsilon I_6 \tag{4.47}$$
$$R_{k+1} = \lambda H_{k+1}P_{k+1/k}H_{k+1}^T + \delta I_2 \tag{4.48}$$

où les paramètres de synthèse $\gamma, \lambda \geq 0$ et $\varepsilon, \delta > 0$ sont fixés par l'utilisateur.

Nous supposons que la cible, se déplaçant au départ à vecteur vitesse constant, adopte une nouvelle trajectoire à vecteur vitesse constant au bout de 30 secondes (pour éviter le missile par exemple). Ce changement soudain de trajectoire de la cible (qui peut être interprété comme une perturbation) est introduit pour juger des performances de chacun des algorithmes d'estimation présentés ci-avant.

D'un autre côté, nous supposons que le missile, se déplaçant au départ à vecteur vitesse constant, enchaîne par la suite les phases d'accélération et les phases à vecteur vitesse constant de façon à alterner les périodes d'observabilité et d'inobservabilité du système.

La période d'échantillonnge est $\tau = 0.02$ s.

Les conditions initiales pour le système sont :

$$X_0 = 3000 \text{ m} \qquad v_{X_0} = 0 \text{ ms}^{-1}$$
$$Y_0 = 4000 \text{ m} \qquad v_{Y_0} = 2 \text{ ms}^{-1}$$
$$Z_0 = 2000 \text{ m} \qquad v_{Z_0} = 3 \text{ ms}^{-1}$$

Les conditions initiales pour les OKE avec pseudo-mesures et à gain modifié sont :

$$\hat{X}_0 = 1000 \text{ m} \qquad \hat{v}_{X_0} = 20 \text{ ms}^{-1}$$
$$\hat{Y}_0 = 6000 \text{ m} \qquad \hat{v}_{Y_0} = 20 \text{ ms}^{-1}$$
$$\hat{Z}_0 = 3000 \text{ m} \qquad \hat{v}_{Z_0} = 40 \text{ ms}^{-1}$$

avec

$$P_0 = 10^{15}I_6, \quad Q_k = Q = 10^{-3}I_6 \quad \text{et} \quad R_{k+1} = R = 10^{-3}I_2$$

Les conditions initiales pour l'OKE proposé ainsi que le paramétrage des matrices de pondération (4.47) et (4.48) sont :

$$\hat{X}_0 = 1000 \text{ m} \qquad \hat{v}_{X_0} = 20 \text{ ms}^{-1}$$

$$\hat{Y}_0 = 6000 \text{ m} \qquad \hat{v}_{Y_0} = 20 \text{ ms}^{-1}$$
$$\hat{Z}_0 = 3000 \text{ m} \qquad \hat{v}_{Z_0} = 40 \text{ ms}^{-1}$$

avec

$$P_0 = 10^{15} I_6$$
$$\gamma = 10^{15}, \quad \lambda = 3 \quad \text{et} \quad \varepsilon = \delta = 10^{-3}$$

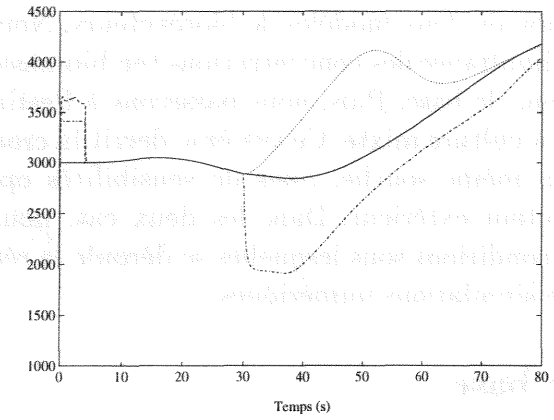
Les résultats des simulations sont illustrés par la figure 4.17(a) à 4.17(f). Chaque figure laisse apparaître les états simulés et estimés à l'aide des trois techniques d'estimation présentées précédemment, à savoir, l'OKE avec pseudo-mesures, l'OKE à gain modifié et l'OKE modifié proposé.

Dès que le système est observable (au bout de 4 secondes lors de nos simulations), nous remarquons que la convergence de chacun des algorithmes est assurée. Toutefois, contrairement à l'OKE modifié proposé, nous constatons que l'OKE avec pseudo-mesures et l'OKE à gain modifié ne peuvent "réagir" à un changement de vitesse soudain de la cible.

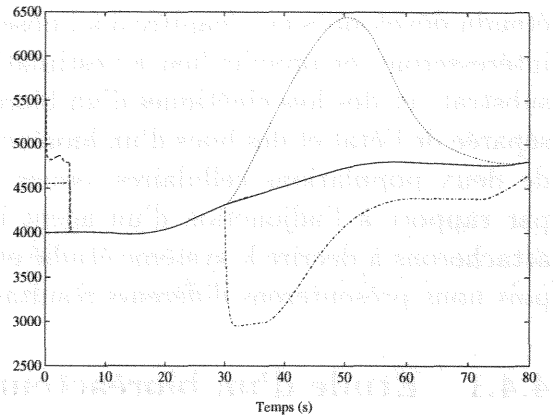
4.3.5 Conclusion

Le problème de la trajectographie passive a été étudié dans ce paragraphe. Ce système se caractérise par une forte inobservabilité et par une inadéquation avec la plupart des techniques d'observation non linéaires classiques. Notre approche pour la synthèse d'OKE a été comparée aux algorithmes d'estimation traditionnellement utilisés pour reconstruire les éléments cinématiques de la cible : l'OKE avec pseudo-mesures ou l'OKE à gain modifié. Les performances des trois observateurs testés sont analogues tant que la cible ne modifie pas sa trajectoire. Dans le cas contraire, nous avons pu remarquer que les estimations fournies par les OKE avec pseudo-mesures et à gain modifié étaient biaisées, alors que celles obtenues par l'OKE modifié demeuraient tout à fait correctes.

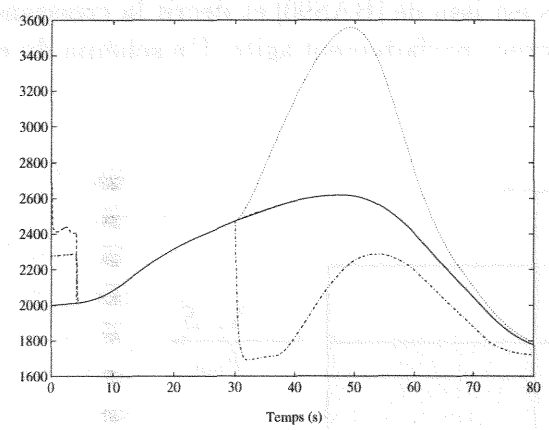
A l'instar des deux applications précédentes, ces résultats de simulation viennent confirmer l'importance du choix des matrices de pondération Q_k et R_{k+1} dans l'amélioration des performances de l'OKE.



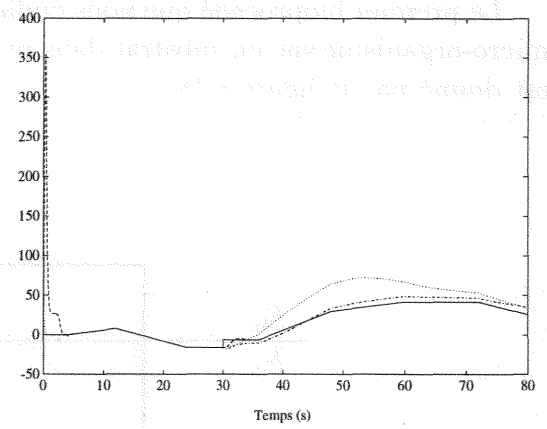
(a) X (m)



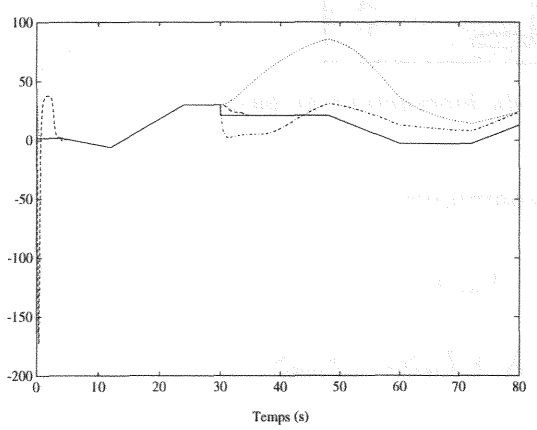
(b) Y (m)



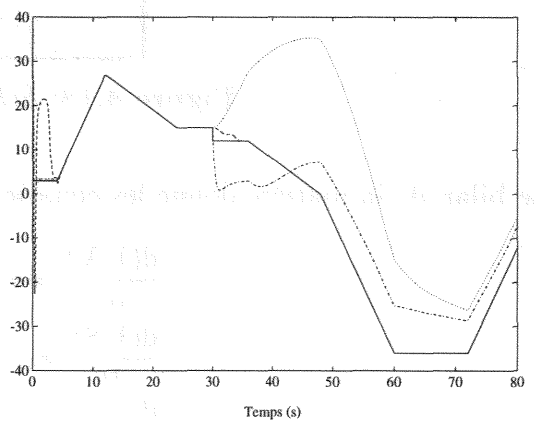
(c) Z (m)



(d) v_X (ms^{-1})



(e) v_Y (ms^{-1})



(f) v_Z (ms^{-1})

Figure 4.17: *Etats simulés (–) et estimés: OKE avec pseudo-mesures (– ·), OKE à gain modifié (· · ·) et OKE modifié (– –).*

4.4 Application à l'observation de bioprocédés

Dans cette section, nous allons appliquer une partie des estimateurs de type Kalman étendu développés en Chapitre 3 à l'observation de deux modèles de bioréacteurs. Nous nous intéresserons, en premier lieu, à l'estimation simultanée des concentrations (en biomasse et en substrat) et des lois cinétiques d'un bioréacteur de base. Puis, nous passerons à l'estimation séparée de l'état et des biais d'un bioréacteur à culture mixte. Ce système décrit la croissance de deux populations cellulaires, issues de la même souche, mais de sensibilités opposées par rapport à l'adjonction d'un agent inhibiteur extérieur. Dans les deux cas, nous nous attacherons à décrire le système étudié et les conditions sous lesquelles se déroule la réaction, puis nous présenterons différents résultats de simulations numériques.

4.4.1 Etude d'un bioréacteur de base

4.4.1.1 Modélisation

Le premier bioprocédé que nous éudierons est issu de [BAS90] et décrit la croissance d'un micro-organisme sur un substrat dans un réacteur parfaitement agité. Un schéma du procédé est donné par la figure 4.18.

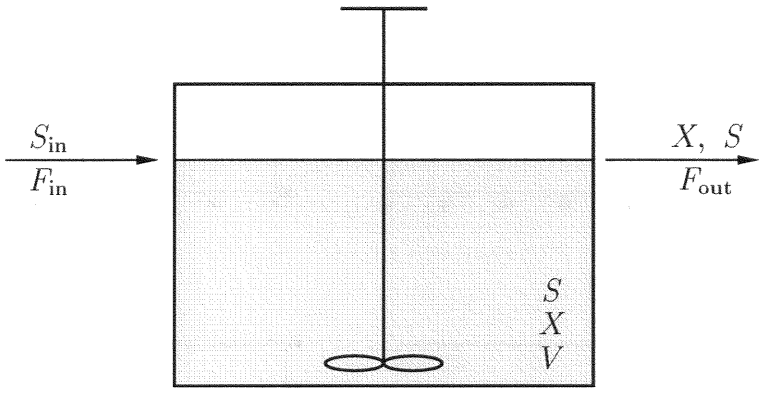


Figure 4.18: *Schéma du bioréacteur de base.*

Le bilan de la matière donne les équations dynamiques :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}(VX)}{\mathrm{d}t} &= \mu VX - F_{\text{out}}X \\
\frac{\mathrm{d}(VS)}{\mathrm{d}t} &= -k_1\mu VX + F_{\text{in}}S_{\text{in}} - F_{\text{out}}S \\
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= F_{\text{in}} - F_{\text{out}}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

où X et S représentent respectivement les concentrations en biomasse et en substrat dans le réacteur et dans le liquide de sortie, V est le volume de liquide contenu dans le réacteur, S_{in} est la concentration en substrat dans le liquide d'alimentation dont le débit est F_{in}, F_{out} est le débit du liquide de sortie, k_1 est le coefficient de rendement "consommation de substrat sur unité de biomasse" et le terme μ est appelé taux spécifique de croissance de la biomasse. Nous supposons que la réaction est continue ($F_{\text{in}} = F_{\text{out}} \Rightarrow \dot{V} = 0$), et que le volume et le

débit d'alimentation sont mesurés en ligne. Ceci permet de réduire le vecteur d'état à X et S. En choisissant comme variable d'entrée le taux de dilution $D = F_{\text{in}}/V$, le système (4.49) se réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} &= \mu X - DX \\ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= -k_1 \mu X + D(S_{\text{in}} - S) \end{aligned} \tag{4.50}$$

Nous supposons que la concentration en substrat dans le réacteur est la seule mesure disponible sur le procédé.

Si τ désigne la période d'échantillonnage, une discrétisation d'Euler du système (4.50) donne :

$$X_{k+1} = (1 + \tau\mu_k - \tau D_k)X_k$$

$$S_{k+1} = -\tau k_1 \mu_k X_k + (1 - \tau D_k)S_k + \tau S_{\text{in}} D_k \tag{4.51}$$

$$y_k = S_k \tag{4.52}$$

En règle générale, l'évolution des taux spécifiques de croissance est très délicate à caractériser et plusieurs lois d'évolution ont été formulées dans la littérature : Monod, Contois, Haldane, ... (voir [BAS90]). En pratique, compte tenu de la dynamique relativement lente de de ces variables, une approche intéressante consiste à estimer directement les lois cinétiques non modélisées en utilisant un observateur [BUS96, BUS97].

En adoptant cette stratégie d'estimation et en introduisant le vecteur d'état augmenté $x_k = \begin{pmatrix} X_k & S_k & \mu_k \end{pmatrix}^T$, notre objectif, dans le paragraphe suivant, sera d'estimer la concentration en biomasse X_k et le taux spécifique de croissance μ_k à partir de la mesure de la concentration en substrat du système.

4.4.1.2 OKE modifié : simulations et commentaires

En introduisant le vecteur d'état augmenté $x_k = \begin{pmatrix} X_k & S_k & \mu_k \end{pmatrix}^T$, le système (4.51)-(4.52) s'écrit :

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} X_{k+1} \\ S_{k+1} \\ \mu_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + \tau\mu_k - \tau D_k)X_k \\ -\tau k_1 \mu_k X_k + (1 - \tau D_k)S_k + \tau S_{\text{in}} D_k \\ \mu_k \end{pmatrix} = f(x_k, u_k) \tag{4.53}$$

$$y_k = S_k \tag{4.54}$$

et l'observateur de Kalman étendu modifié (3.75)-(3.82) pour ce système s'écrit :

$$\hat{x}_{k+1} = f(\hat{x}_k, u_k) + K_{k+1} e_{k+1}$$

avec

$$P_{k+1/k} = F_k P_k F_k^T + Q_k$$

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} H_{k+1}^T (H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + R_{k+1})^{-1}$$

$$P_{k+1} = (I_3 - K_{k+1} H_{k+1}) P_{k+1/k}$$

où

$$F_k = \begin{pmatrix} 1+\tau\hat{\mu}_k - \tau D_k & 0 & \tau\hat{X}_k \\ -\tau k_1\hat{\mu}_k & 1-\tau D_k & -\tau k_1\hat{X}_k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_{k+1} = y_{k+1} + \tau k_1\hat{\mu}_k\hat{X}_k - (1-\tau D_k)\hat{S}_k - \tau S_{\text{in}} D_k$$

et $P_0 = \mu I_3 > 0$. Les matrices de pondération Q_k et R_{k+1} sont construites en accord avec les remarques formulées en section 3.3.3.3, et il vient que :

$$Q_k = \gamma e_k^T e_k I_3 + \varepsilon I_3 \tag{4.55}$$

$$R_{k+1} = \lambda H P_{k+1/k} H^T + \delta \tag{4.56}$$

où les paramètres de synthèse $\gamma, \lambda \geq 0$ et $\varepsilon, \delta > 0$ restent à fixer.

Lors de nos simulations, la période d'échantillonnage est $\tau = 0.2$ h. Afin de générer les trajectoires simulées du système, nous avons successivement modélisé le taux spécifique de croissance μ_k par les lois de Monod et de Haldane.

La durée de l'expérience est de 200 heures. Les mesures disponibles sont entâchées d'un bruit blanc, centré et de variance 0.01.

- **Modèle de Monod.**

  Le taux de croissance spécifique de la biomasse est modélisé par l'expression suivante :

$$\mu_k = \frac{\mu_{\max} S_k}{K_M + S_k} \tag{4.57}$$

où le taux maximum de croissance est $\mu_{\max} = 0.33\ \text{h}^{-1}$, la constante de saturation (ou de Monod) est $K_M = 5$ g/l et le coefficient de rendement est $k_1 = 2$. La concentration en substrat dans le liquide d'alimentation est constante et donnée par $S_{\text{in}} = 5$ g/l, le taux de dilution est un signal carré représenté en figure 4.19(a).

Les conditions initiales du système, de l'observateur et le paramétrage des matrices de pondération (4.55) et (4.56) sont respectivement donnés par :

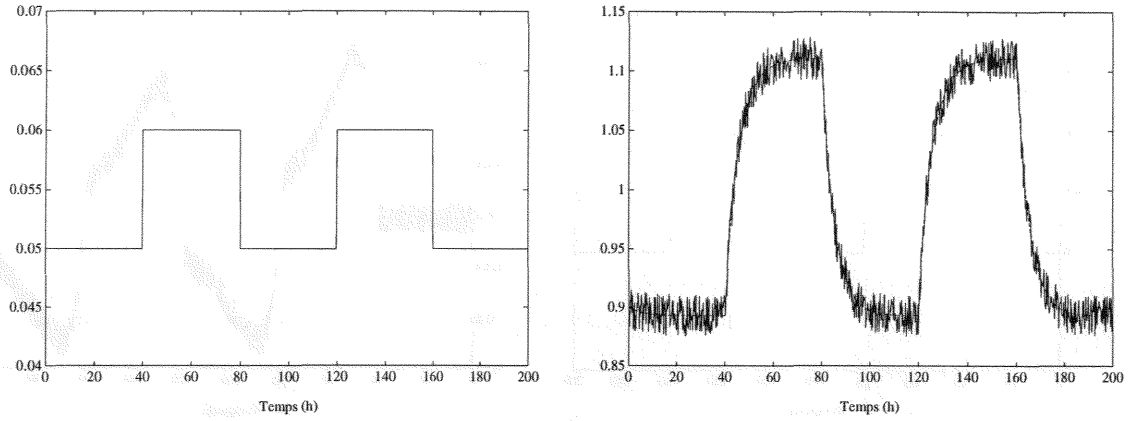
$$\begin{pmatrix} X_0 \\ S_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.05\ \text{g/l} \\ 0.90\ \text{g/l} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{X}_0 \\ \hat{S}_0 \\ \hat{\mu}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.00\ \text{g/l} \\ 2.00\ \text{g/l} \\ 0.06\ \text{h}^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_0 = 10^2 I_3$$

$$\gamma = 10^5, \quad \lambda = 0, \quad \varepsilon = 10^{-3} \quad \text{et} \quad \delta = 10^4$$

- **Modèle de Haldane.**

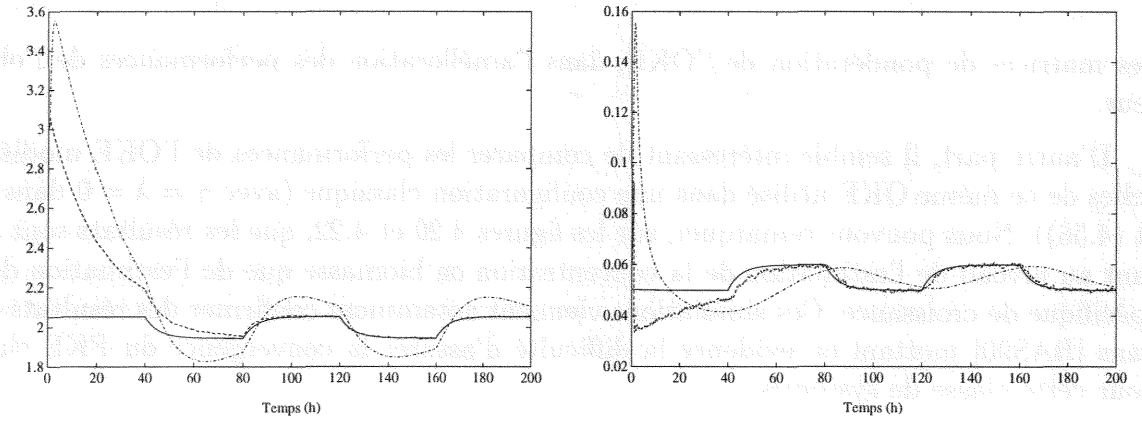
  Le taux de croissance spécifique de la biomasse est modélisé par l'expression suivante :

$$\mu_k = \frac{\mu_{\max} S_k}{K_M + S_k + S_k^2/K_I} \tag{4.58}$$



(a) Taux de dilution D (h^{-1}) (b) Concentration en substrat (g/l)

Figure 4.19: *Entrée et sortie simulées. Modèle de Monod.*



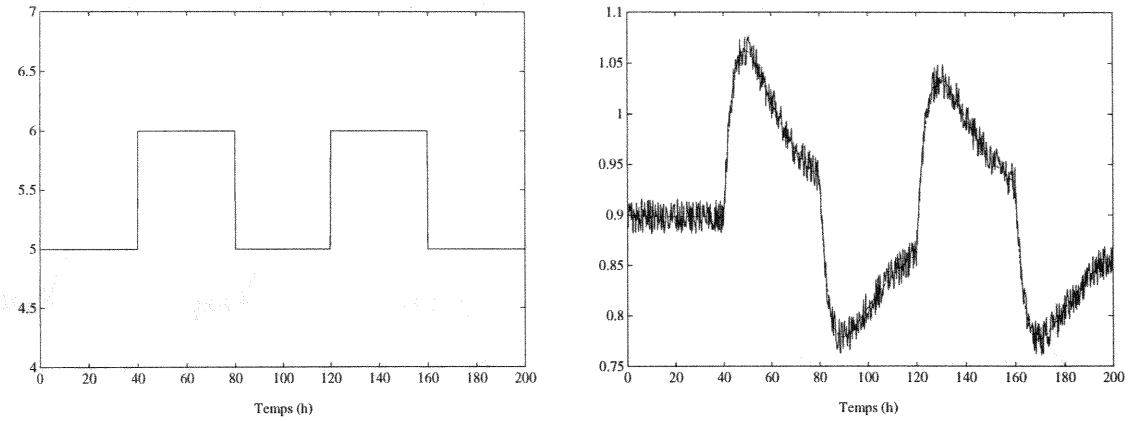
(a) Concentration en biomasse X (g/l) (b) Taux spécifique de croissance μ (h^{-1})

Figure 4.20: *Etats simulés (—) et estimés: OKE modifié (– –) et OKE classique (– ·). Modèle de Monod.*

où les valeurs de $\mu_{\max}$, K_M et k_1 restent inchangées par rapport à l'expérience précédente. Nous supposons que le taux de dilution reste constant, $D_k = 0.05$ h^{-1}, alors que la concentration en substrat dans le liquide d'alimentation, S_{in}, est un signal carré représenté en figure 4.21(a).

Les conditions initiales du système, de l'observateur et le paramétrage des matrices de pondération (4.55) et (4.56) ne sont pas modifiés par rapport au modèle de Monod.

Les résultats des simulations sont présentés sur les figures 4.20 et 4.22. Nous remarquons qu'un réglage judicieux des matrices de pondération Q_k et R_{k+1} lors de la synthèse de l'OKE, nous permet d'assurer la convergence de l'estimateur, en dépit de mesures fortement bruitées et de mauvaises initialisations de l'observateur, et même sans avoir la moindre connaissance sur les lois d'évolution du taux spécifique de croissance de la biomasse. Ces résultats expérimentaux viennent confirmer ceux établis en théorie au Chapitre 3, sur l'importance du choix



(a) Concentration en biomasse S_{in} (g/l)

(b) Concentration en substrat (g/l)

Figure 4.21: *Entrée et sortie simulées. Modèle de Haldane.*

des matrices de pondération de l'OKE, dans l'amélioration des performances de l'observateur.

D'autre part, il semble intéressant de comparer les performances de l'OKE modifié avec celles de ce même OKE utilisé dans une configuration classique (avec $\gamma = \lambda = 0$ dans (4.55) et (4.56)). Nous pouvons remarquer, sur les figures 4.20 et 4.22, que les résultats sont biaisés tant au niveau de l'estimation de la concentration en biomasse que de l'estimation du taux spécifique de croissance. Ces simulations viennent notamment confirmer des résultats établis dans [BAS90] mettant en évidence la difficulté d'assurer la convergence du FKE classique pour cette classe de systèmes.

4.4.2 Etude d'un bioréacteur à culture mixte

4.4.2.1 Modélisation

Le deuxième bioprocédé étudié est issu de [HOO86] et décrit la croissance, dans un même environnement, de deux populations cellulaires issues de la même souche. La croissance d'une espèce est inhibée par l'adjonction d'un agent extérieur, alors que la croissance de la seconde espèce a pour effet de rendre inactif ce même agent inhibiteur. La figure 4.23 représente les principes d'évolution de chacune des espèces.

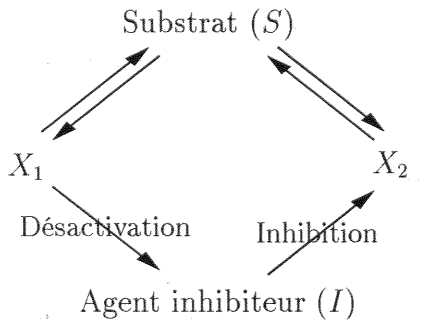
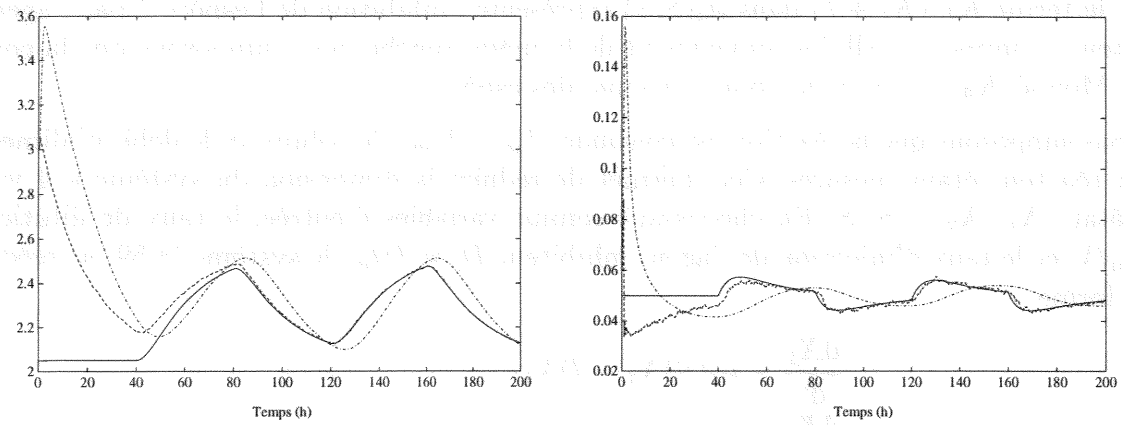


Figure 4.23: *Principes d'évolution des populations cellulaires.*



(a) Concentration en biomasse X (g/l)

(b) Taux spécifique de croissance μ (h^{-1})

Figure 4.22: *Etats simulés (−) et estimés: OKE modifié (− −) et OKE classique (− ·). Modèle de Haldane.*

Nous supposons que la réaction se produit dans un bioréacteur parfaitement agité (le schéma de ce dernier est semblable à celui représenté en figure 4.18), de volume constant V, contenant les populations de cellules résistantes de densité X_1 et de cellules sensibles à l'agent inhibiteur de densité X_2, un unique substrat de concentration S et un agent inhibiteur de concentration I. Le liquide d'alimentation, de débit F_{in}, injecte dans le réacteur le substrat de concentration S_{in} et l'agent inhibiteur de concentration I_{in}. Nous supposons qu'il est possible de contrôler la concentration de l'agent inhibiteur dans le liquide d'alimentation.
A partir des bilans de matière, le comportement dynamique de la croissance de chacune des espèces est donné par:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}t} &= \mu_1(S)X_1 - \frac{F_{\text{out}}}{V}X_1 \\
\frac{\mathrm{d}X_2}{\mathrm{d}t} &= \mu_2(S,I)X_2 - \frac{F_{\text{out}}}{V}X_2 \\
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= -pX_1I + \frac{F_{\text{in}}}{V}I_{\text{in}} - \frac{F_{\text{out}}}{V}I \\
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= -k_1\mu_1(S)X_1 - k_2\mu_2(S,I)X_2 + \frac{F_{\text{in}}}{V}S_{\text{in}} - \frac{F_{\text{out}}}{V}S \\
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= F_{\text{in}} - F_{\text{out}}
\end{aligned} \tag{4.59}$$

où k_1 et k_2 représentent les coefficients de rendement respectifs des espèces 1 et 2 par unité de substrat. Nous supposons que les cellules résistantes à l'agent inhibiteur désactivent ce dernier proportionnellement au terme pX_1I où p est un coefficient strictement positif. En outre, nous faisons l'hypothèse que les taux spécifiques de croissance $\mu_1(S)$ et $\mu_2(S,I)$ des espèces 1 et 2 suivent la loi de Monod:

$$\begin{aligned}
\mu_1(S) &= \frac{\mu_{1,\max}S}{K_M + S} \\
\mu_2(S,I) &= \frac{\mu_{2,\max}S}{K_M + S}\frac{K_I}{K_I + I}
\end{aligned}$$

où le terme $K_I/(K_I + I)$ dans $\mu_2(S, I)$ représente l'inhibition de l'espèce 2 par l'agent inhibiteur. Comme les cellules proviennent de la même souche, nous supposons que la constante de Monod K_M est la même pour chacune des espèces.

Nous supposons que la réaction est continue ($F_{\text{in}} = F_{\text{out}}$), le volume et le débit d'alimentation du réacteur étant mesurés. Ceci permet de réduire la dimension du système à 4 variables d'état : X_1, X_2, I et S. En choisissant comme variables d'entrée, le taux de dilution $D = F_{\text{in}}/V$ et le taux d'injection de l'agent inhibiteur $D_I = DI_{\text{in}}$, le système (4.59) se réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}t} &= \mu_1(S)X_1 - DX_1 \\
\frac{\mathrm{d}X_2}{\mathrm{d}t} &= \mu_2(S, I)X_2 - DX_2 \\
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= -pX_1I - DI + D_I \\
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= -k_1\mu_1(S)X_1 - k_2\mu_2(S, I)X_2 + DS_{\text{in}} - DS
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Nous supposons que les sorties disponibles sur le système sont la masse totale des deux espèces cellulaires et la concentration en substrat du bioréacteur :

$$y = \begin{pmatrix} X_1 + X_2 \\ S \end{pmatrix} \tag{4.61}$$

En désignant par τ la période d'échantillonnage, une discrétisation d'Euler donne pour le bioréacteur (4.60)-(4.61) le modèle suivant :

$$\begin{aligned}
x_{k+1} = \begin{pmatrix} X_{1k+1} \\ X_{2k+1} \\ I_{k+1} \\ S_{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1 + \tau\mu_{1k} - \tau D_k)X_{1k} \\ (1 + \tau\mu_{2k} - \tau D_k)X_{2k} \\ (1 - \tau pX_{1k} - \tau D_k)I_k + \tau D_{Ik} \\ -\tau k_1\mu_{1k}X_{1k} - \tau k_2\mu_{2k}X_{2k} + (1 - \tau D_k)S_k + \tau D_k S_{\text{in}} \end{pmatrix} \\
&= f(x_k, u_k) \qquad (4.62) \\
y_k &= \begin{pmatrix} X_{1k} + X_{2k} \\ S_k \end{pmatrix} \qquad (4.63)
\end{aligned}$$

où

$$\mu_{1k} = \mu_1(S_k) = \frac{\mu_{1,\max}S_k}{K_M + S_k}, \quad \text{et} \quad \mu_{2k} = \mu_2(S_k, I_k) = \frac{\mu_{2,\max}S_k}{K_M + S_k}\frac{K_I}{K_I + I_k}$$

Contrairement aux simulations présentées précédemment dans le cadre de l'estimation de l'état et des lois cinétiques d'un bioréacteur de base, nous supposons ici que les lois d'évolution des taux spécifiques de croissance des espèces 1 et 2 sont connues analytiquement.

Toutefois, un problème récurrent lors de l'analyse de tels bioprocédés est l'apparition de biais sur les paramètres $\mu_{1,\max}$ et $\mu_{2,\max}$. En effet, il est connu que ces termes sont sensibles à de nombreux paramètres comme le pH ou la température du bioréacteur.
Sur la base de cette remarque, notre objectif, dans ce qui suit, sera d'utiliser l'algorithme d'estimation séparée (3.251)-(3.265) pour estimer conjointement l'état et d'éventuels biais inconnus mais constants sur $\mu_{1,\max}$ et $\mu_{2,\max}$.

4.4.2.2 OKE séparé état/biais : simulations et commentaires

En tenant compte de ces incertitudes paramétriques, le modèle complet du bioprocédé est toujours donné par (4.62)-(4.63), mais avec :

$$\mu_{1k} = \mu_1(S_k, b_{1k}) = \frac{(\mu_{1,\max N} + b_{1k})S_k}{K_M + S_k},$$
$$\mu_{2k} = \mu_2(S_k, I_k, b_{2k}) = \frac{(\mu_{2,\max N} + b_{2k})S_k}{K_M + S_k}\frac{K_I}{K_I + I_k}$$

où $\mu_{1,\max N}$ et $\mu_{2,\max N}$ représentent les valeurs nominales des paramètres $\mu_{1,\max}$ et $\mu_{2,\max}$.

En notant le système sous la forme :

$$x_{k+1} = f(x_k, b, u_k)$$
$$y_k = h(x_k, u_k) = Hx_k$$

où $b_{k+1} = b_k$, nous synthétisons l'estimateur découplé (3.251)-(3.265) en adoptant les structures temps-variant suivantes pour les matrices de pondération Q_k^x, Q_k^b, Q_k^{xb} et R_{k+1}^x :

$$Q_k^x = \gamma^x e_k^T e_k I_4 + \varepsilon^x I_4 \tag{4.64}$$
$$Q_k^b = \gamma^b e_k^T e_k I_2 + \varepsilon^b I_2 \tag{4.65}$$
$$Q_k^{xb} = 0$$
$$R_{k+1}^x = \lambda H P_{k+1/k}^x H^T + \delta I_2 \tag{4.66}$$

où $e_k = y_k - H\hat{x}_{k/k-1}$, les paramètres de synthèse $\gamma^x, \gamma^b, \lambda \geq 0$ et $\varepsilon^x, \varepsilon^b, \delta > 0$ restant à définir.

La durée de l'expérience est de 200 heures, la période d'échantillonnage est $\tau = 0.1$ h, le taux de dilution et le taux d'injection de l'agent inhibiteur sont : $D_k = 0.3$ h^{-1} et $D_{Ik} = 0.002$ gl^{-1}h^{-1}. Les paramètres du modèle sont donnés par le tableau 4.3.

Maximum du taux de croissance - espèce 1	$\mu_{1,\max N}$	0.4	h^{-1}
Maximum du taux de croissance - espèce 2	$\mu_{2,\max N}$	0.5	h^{-1}
Constante de saturation	K_M	0.05	g/l
Constante d'inhibition	K_I	0.02	g/l
Coefficient de rendement - espèce 1	k_1	5	
Coefficient de rendement - espèce 2	k_2	6.7	
Concentration en substrat dans le liquide d'alim.	S_{in}	2	g/l
Taux de désactivation de l'inhibiteur	p	0.5	hr^{-1}g^{-1}

Tableau 4.3: *Paramètres du bioréacteur à culture mixte.*

Les simulations sont effectuées dans un cadre déterministe. Nous supposons, d'une part, que le paramètre $\mu_{1,\max}$ diminue de 10% par rapport à sa valeur nominale au bout de 20 heures, d'autre part, que le paramètre $\mu_{2,\max}$ diminue de 5% par rapport à sa valeur nominale au bout de 50 heures.

Les conditions initiales du système, de l'observateur et le paramétrage des matrices de pondération (4.64), (4.65) et (4.66) sont donnés par :

$$\begin{pmatrix} X_{10} \\ X_{20} \\ I_0 \\ S_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.20\ \text{g/l} \\ 0.10\ \text{g/l} \\ 0.01\ \text{g/l} \\ 0.20\ \text{g/l} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{X}_{10} \\ \hat{X}_{20} \\ \hat{I}_0 \\ \hat{S}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.40\ \text{g/l} \\ 0.30\ \text{g/l} \\ 0.05\ \text{g/l} \\ 0.40\ \text{g/l} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \hat{b}_{10} \\ \hat{b}_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05\ \text{h}^{-1} \\ 0\ \text{h}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$P_0^x = 10^{10} I_4, \quad P_0^b = 10^{10} I_2 \quad \text{et} \quad P_0^{xb} = 0$$

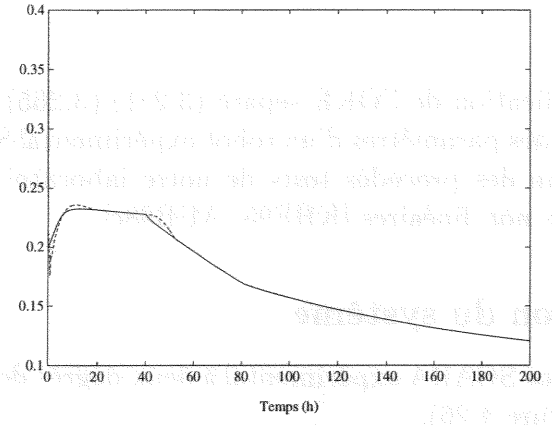
$$\gamma^x = 10^{10}, \quad \gamma^b = 10^{10}, \quad \lambda = 10^{-2}, \quad \text{et} \quad \varepsilon^x = \varepsilon^b = \delta = 10^{-3}$$

Les figures 4.24(a) à 4.24(d) illustrent conjointement l'évolution des trajectoires simulées du système (4.62)-(4.63) et des trajectoires estimées à l'aide de l'OKE séparé état/biais. Les paramètres $\mu_{1,\max}$ et $\mu_{2,\max}$ ainsi que leurs estimées sont présentés sur les figures 4.25(a) et 4.25(b).

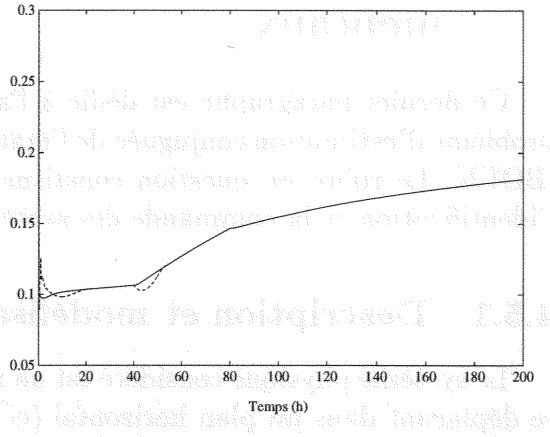
Les résultats des simulations démontrent, une fois de plus, la pertinence des réglages proposés pour les matrices de pondération Q_k^x, Q_k^b et R_{k+1}^x et viennent confirmer, de ce fait, les "bonnes" performances de notre approche pour la synthèse d'estimateurs de type Kalman étendu.

4.4.3 Conclusion

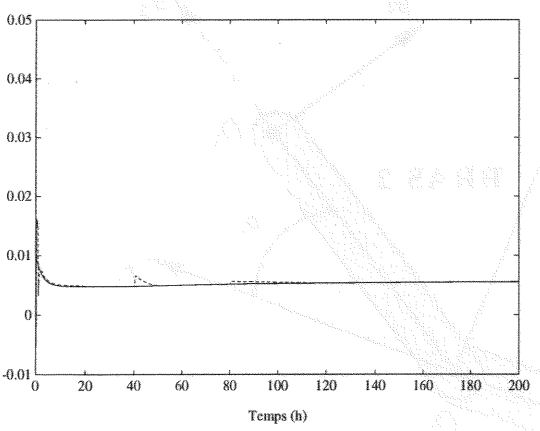
Dans cette partie, nous avons abordé le problème de l'observation de deux bioprocédés : le premier est un bioréacteur de base, décrivant la croissance d'un micro-organisme sur un substrat et le second est un bioréacteur à culture mixte, simulant la croissance de deux populations cellulaires de sensibilités opposées par rapport à l'adjonction d'un agent inhibiteur extérieur.
A travers ces deux applications, les performances de l'OKE d'ordre plein et de l'OKE séparé état/biais décrits au Chapitre 3, ont pu être démontrées. Les résultats obtenus sont très encourageants et confirment, une nouvelle fois, la validité de la méthodologie adoptée pour la synthèse des matrices de pondération des observateurs. Ces résultats pourraient être améliorés de façon significative en affinant le choix des paramètres de synthèse des observateurs.



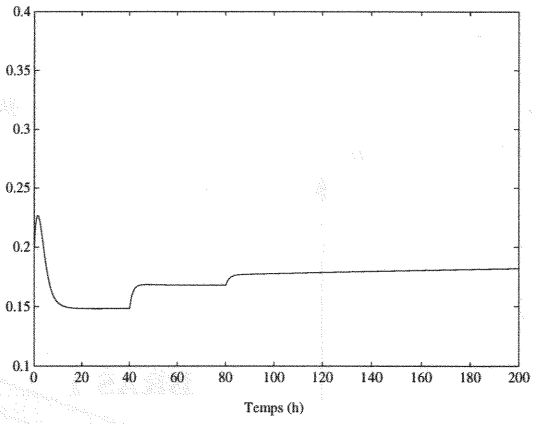
(a) Densité en cellules de type 1 X_1 (g/l)



(b) Densité en cellules de type 2 X_2 (g/l)

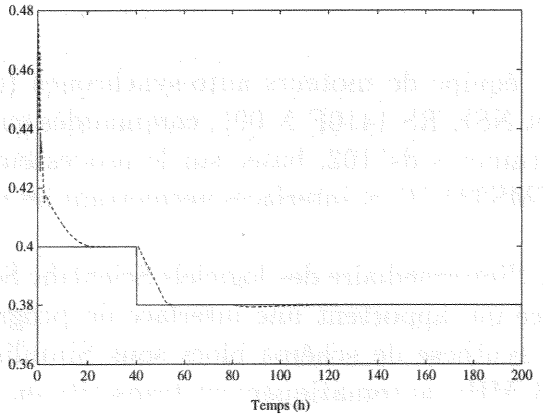


(c) Concentration en inhibiteur I (g/l)

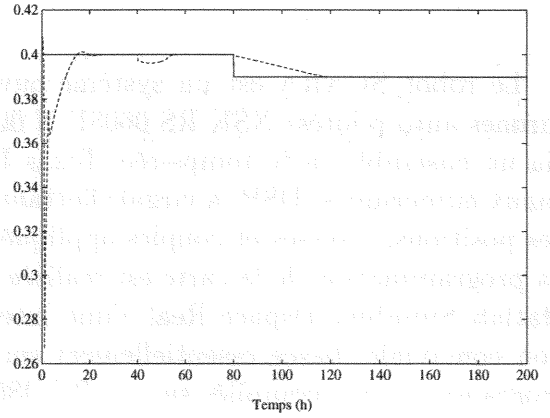


(d) Concentration en substrat S (g/l)

Figure 4.24: *Etats simulés (–) et estimés (– –).*



(a) $\mu_{1,\max}$



(b) $\mu_{2,\max}$

Figure 4.25: *Biais simulés (–) et estimés (– –).*

4.5 Application à un robot SCARA. Résultats expérimentaux

Ce dernier paragraphe est dédié à l'application de l'OKE séparé (3.251)-(3.265) sur un problème d'estimation conjuguée de l'état et des paramètres d'un robot expérimental SCARA [BOUb]. Le robot en question constitue l'un des procédés tests de notre laboratoire pour l'identification et la commande des systèmes non linéaires [KHE95, AUB98c].

4.5.1 Description et modélisation du système

Le système physique considéré est un robot SCARA expérimental à deux degrés de liberté se déplaçant dans un plan horizontal (cf. figure 4.26).

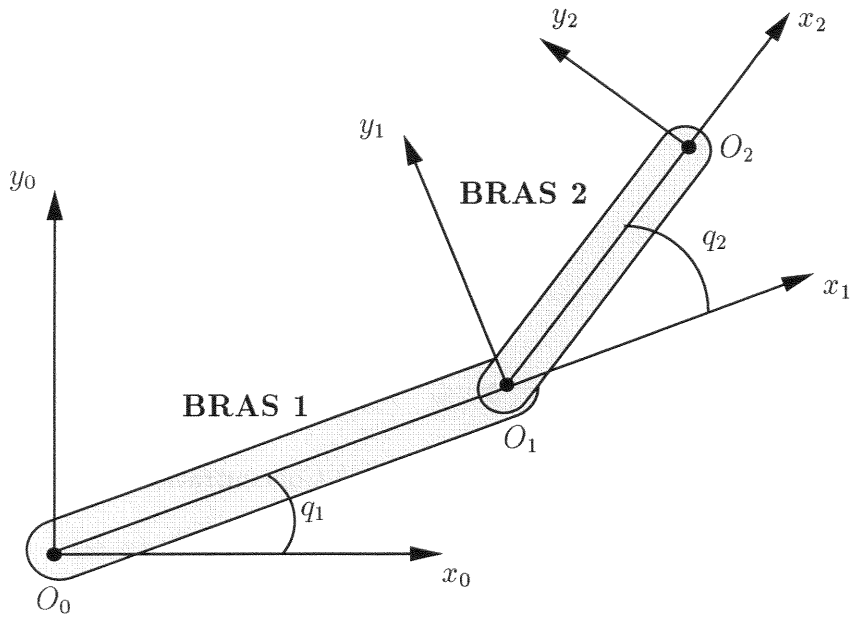


Figure 4.26: *Schéma du robot SCARA plan.*

Le robot SCARA est un système ouvert, équipé de moteurs auto-synchrones (ou synchrones auto-pilotés) NSK RS 0608F N 001 et NSK RS 1410F N 001, commandés en couple via un ensemble carte temps-réel Texas Instruments ds1102, basée sur le processeur de signaux numériques (DSP) à virgule flottante TMS320C31 et interfaces permettant les mesures des positions, vitesses et couples appliqués.
La programmation de la carte est réalisée par l'intermédiaire des logiciels Scientific Software Matlab/Simulink/Dspace Real Time Interface qui apportent une interface de programmation conviviale, basée essentiellement sur la synthèse de schéma blocs sous Simulink. Ces programmes sont compilés sur un PC 486-33 MHz, automatiquement transcrits en code C puis en fichiers objets, fichiers qui seront ensuite chargés dans la carte DSP via une liaison série et enfin exécutés.

Nous nous intéressons à présent à la modélisation du système. Par définition, le modèle dynamique d'un robot décrit les relations entre les couples appliqués aux actionneurs et les

positions, vitesses et accélérations articulaires. En règle générale, ce dernier est calculé en utilisant les formalismes de Lagrange ou de Newton-Euler, et s'écrit ici sous la forme :

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= (p_1 + 2p_3\cos(q_2))\ddot{q}_1 + (p_2 + p_3\cos(q_2))\ddot{q}_2 - p_3\sin(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ &\quad -p_3\sin(q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\dot{q}_2 + f_1(\dot{q}_1) \qquad (4.67)\\ \Gamma_2 &= (p_2 + p_3\cos(q_2))\ddot{q}_1 + p_2\ddot{q}_2 + p_3\sin(q_2)\dot{q}_1^2 + f_2(\dot{q}_2) \qquad (4.68)\end{aligned}$$

où q_1 (rad), $\dot{q}_1$ (rad/s) et $\ddot{q}_1$ (rad/s^2) (resp. q_2, $\dot{q}_2$ et $\ddot{q}_2$) désignent respectivement la position, la vitesse et l'accélération du bras 1 (resp. du bras 2), Γ_1 (resp. Γ_2) est le couple actionneur du bras 1 (resp. du bras 2).
p_1 (kg.m^2), p_2 (kg.m^2) et p_3 (kg.m^2) représentent les paramètres inertiels de base du système. Ces derniers sont obtenus après regroupements paramétriques et dépendent de nombreux paramètres comme les masses, longueurs ou moments d'inertie des bras (voir [KHE95, DAW95] pour une modélisation détaillée du système), $f_1(\dot{q}_1)$ et $f_2(\dot{q}_2)$ désignant, quant à eux, les modèles des frottements.

Afin de faciliter l'implantation de l'algorithme d'estimation, notre étude ne portera que sur le bras 1 du robot, le bras 2 étant fixé dans une position constante $q_2 = \pi$ et jouant le rôle d'une charge de masse inconnue sur le premier axe.
Dans cette configuration, le modèle dynamique (4.67)-(4.68) se réduit à l'équation :

$$\Gamma_1 = (p_1 - 2p_3)\ddot{q}_1 + f_1(\dot{q}_1) \qquad (4.69)$$

où le modèle des frottements retenu est classique, et est donné par la relation :

$$f_1(\dot{q}_1) = f_{v1}\dot{q}_1 + f_{s1}\,\mathrm{sgn}(\dot{q}_1) \qquad (4.70)$$

où f_{v1} (Nm.s/rad) et f_{s1} (Nm) représentent les coefficients de frottement visqueux et sec (ou de Coulomb), $\mathrm{sgn}(\dot{q}_1)$ désigne la fonction "signe" définie par

$$\mathrm{sgn}(\dot{q}_1) = \begin{cases} 1 & \forall\, \dot{q}_1 \geq 0 \\ -1 & \forall\, \dot{q}_1 < 0 \end{cases}$$

En introduisant le vecteur d'état $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} q_1 & \dot{q}_1 \end{pmatrix}^T$ et le vecteur des paramètres constants $\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} p_1 - 2p_3 & f_{s1} & f_{v1} \end{pmatrix}^T$, nous obtenons à partir de (4.69) le système dynamique :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{\theta_1}(\Gamma_1 - \theta_2 x_2 - \theta_3\,\mathrm{sgn}(x_2)) \\ \dot{\theta} &= 0 \qquad (4.71)\end{aligned}$$

où la position du bras x_1 est directement mesurée.

En discrétisant le modèle précédent avec une période d'échantillonnage τ via la méthode d'Euler, nous obtenons finalement le modèle d'état temps-discret :

$$\begin{aligned}x_{1k+1} &= x_{1k} + \tau x_{2k} \\ x_{2k+1} &= x_{2k} + \frac{\tau}{\theta_{1k}}(\Gamma_{1k} - \theta_{2k}x_{2k} - \theta_{3k}\,\mathrm{sgn}(x_{2k})) \\ \theta_{k+1} &= \theta_k \qquad (4.72)\\ y_k &= x_{1k} \qquad (4.73)\end{aligned}$$

4.5.2 Estimation séparée état/paramètres

Dans ce paragraphe, nous considérons le système temps-discret (4.72)-(4.73), et nous appliquons l'estimateur (3.251)-(3.265) pour estimer séparément le vecteur d'état x_k et le vecteur des paramètres θ_k :

Estimation de l'état :

$$\begin{aligned}
&\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1/k} + K^x_{k+1}(y_{k+1} - \hat{x}_{1k} - \tau\hat{x}_{2k}) \\
&K^x_{k+1} = S_{k+1}L_{k+1} \\
&P^x_{k+1/k} = \begin{pmatrix} F^x_k & F^\theta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^x_k & P^{x\theta}_k \\ P^{x\theta^T}_k & P^\theta_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{x^T}_k \\ F^{\theta^T}_k \end{pmatrix} + Q^x_k \\
&P^x_{k+1} = P^x_{k+1/k} - K^x_{k+1}S^T_{k+1}
\end{aligned}$$

Estimation des paramètres :

$$\begin{aligned}
&\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + K^\theta_{k+1}(y_{k+1} - \hat{x}_{1k} - \tau\hat{x}_{2k}) \\
&K^\theta_{k+1} = V_{k+1}L_{k+1} \\
&P^\theta_{k+1/k} = P^\theta_k + Q^\theta_k \\
&P^\theta_{k+1} = P^\theta_{k+1/k} - K^\theta_{k+1}V^T_{k+1}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
&L_{k+1} = (H^x P^x_{k+1/k} H^{x^T} + R^x_{k+1})^{-1}, \quad S_{k+1} = P^x_{k+1/k}H^{x^T}, \quad V_{k+1} = P^{x\theta^T}_{k+1/k}H^{x^T} \\
&P^{x\theta}_{k+1/k} = F^x_k P^{x\theta}_k + F^\theta_k P^\theta_k + Q^{x\theta}_k, \quad P^{x\theta}_{k+1} = P^{x\theta}_{k+1/k} - K^x_{k+1}V^T_{k+1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
F^x_k &= \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 - \tau\hat{\theta}_{2k}/\hat{\theta}_{1k} \end{pmatrix} \\
F^\theta_k &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (-\tau/\hat{\theta}^2_{1k})(\Gamma_{1k} - \hat{\theta}_{2k}\hat{x}_{2k} - \hat{\theta}_{3k}\,\mathrm{sgn}(\hat{x}_{2k})) & -\tau\hat{x}_{2k}/\hat{\theta}_{1k} & -\tau\,\mathrm{sgn}(\hat{x}_{2k})/\hat{\theta}_{1k} \end{pmatrix} \\
H^x &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

où $P^x_0 = \mu^x I_2 > 0$, $P^\theta_0 = \mu^\theta I_3 > 0$ et $P^{x\theta}_0 = 0$.
Les choix des matrices de pondération Q^x_k, Q^θ_k, $Q^{x\theta}_k$ et R^x_{k+1} est effectué en accord avec la remarque 3.6.3.3 et il vient que :

$$Q^x_k = \gamma^x(y_k - \hat{x}_{1k-1} - \tau\hat{x}_{2k-1})^2 I_2 + \varepsilon^x I_2 \tag{4.74}$$

$$Q^\theta_k = \gamma^\theta(y_k - \hat{x}_{1k-1} - \tau\hat{x}_{2k-1})^2 I_3 + \varepsilon^\theta I_3 \tag{4.75}$$

$$Q^{x\theta}_k = 0$$

$$R^x_{k+1} = \lambda H P^x_{k+1/k} H^T + \delta \tag{4.76}$$

où les paramètres de synthèse $\gamma^x, \gamma^\theta, \lambda \geq 0$ et $\varepsilon^x, \varepsilon^\theta, \delta > 0$ restent à fixer.

La période d'échantillonnage est $\tau = 8$ ms, le couple actionneur appliqué au système est représenté en figure 4.27(a).

Les conditions initiales pour l'algorithme d'estimation séparée état/paramètres décrit précédemment sont :

$$\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 50 \text{ rad} \\ 20 \text{ rad/s} \end{pmatrix}, \quad \hat{\theta}_0 = \begin{pmatrix} 50 \text{ kg.m}^2 \\ 50 \text{ Nm.s/rad} \\ 50 \text{ Nm} \end{pmatrix}$$
$$P_0^x = 10^3 I_2, \quad P_0^\theta = 10^3 I_3 \text{ et } P_0^{x\theta} = 0$$

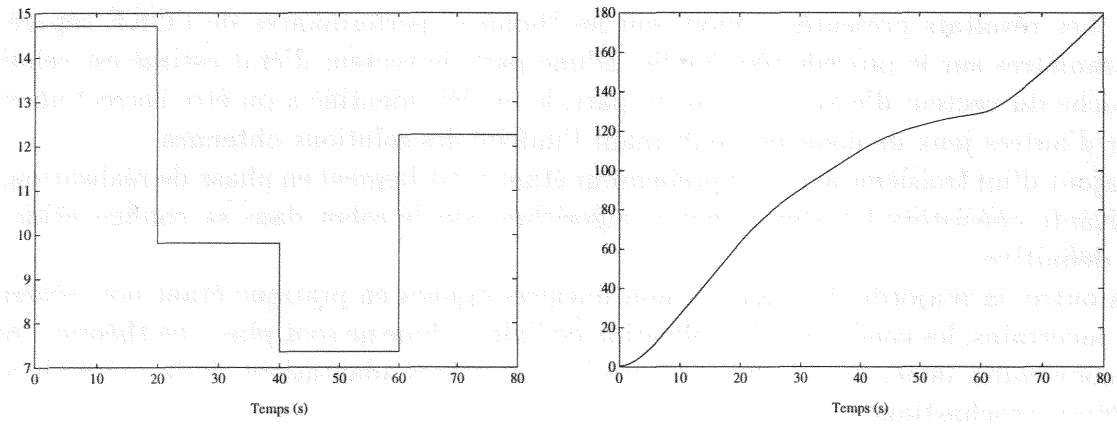
Le paramétrage des matrices de pondération (4.74), (4.75) et (4.76) est : $\gamma^x = \gamma^\theta = 10^3$, $\lambda = 10^{-3}$ et $\varepsilon^x = \varepsilon^\theta = \delta = 10^{-3}$.

Les résultats sont présentés sur les figures 4.28 et 4.29. La figure 4.28(a) illustre l'évolution de l'erreur d'estimation de la vitesse $\dot{q}_1$, la trajectoire réelle ayant été calculée par différentiation numérique, puis par filtrage de la position q_1 représentée par la figure 4.27(b). Afin de juger au mieux de l'amplitude, tout à fait acceptable, de l'erreur d'estimation en vitesse, nous avons omis le comportement transitoire de $\tilde{x}_2$ (l'erreur d'estimation initiale est en effet $\tilde{x}_2 \approx 20$ rad/s).

Les figures 4.28(b), (c) et (d) montrent l'évolution des paramètres estimés $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ et $\hat{\theta}_3$. Nous remarquons que la convergence de chacun de ces paramètres vers une valeur nominale est assurée en dépit d'erreurs de modélisation et de "mauvaises" initialisations de l'algorithme. Les valeurs nominales estimées de θ sont :

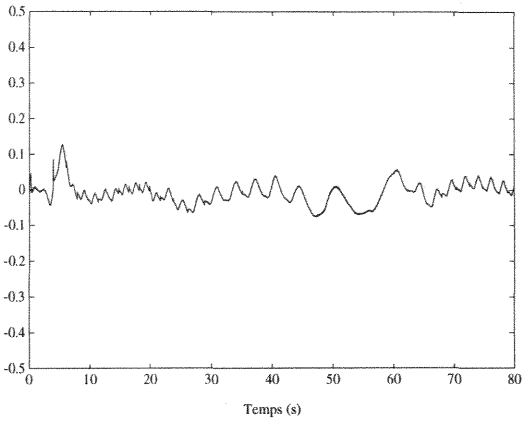
$$\hat{\theta}_1 = 9.031 \text{ kg.m}^2, \quad \hat{\theta}_2 = 1.956 \text{ Nm.s/rad} \text{ et } \hat{\theta}_3 = 6.128 \text{ Nm}$$

Enfin, dans une dernière étape de validation, nous avons réalisé une validation croisée du modèle sur une autre campagne de mesures. Le couple articulaire appliqué ainsi que les vitesses réelles et estimées sont présentés sur la figure 4.29. Les résultats confirment l'unicité de la solution obtenue lors de l'identification du vecteur des paramètres θ et viennent confirmer, de ce fait, les bonnes propriétés de convergence de l'algorithme.

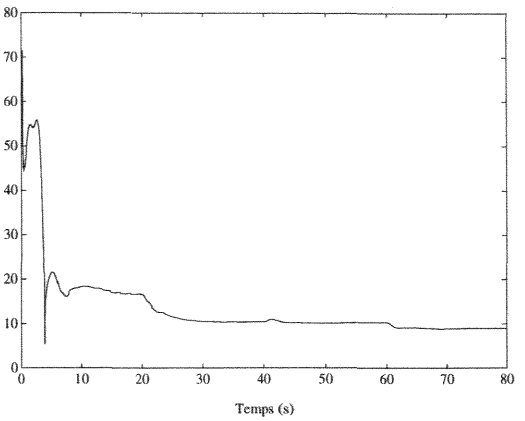


(a) Couple actionneur (Nm) (b) Position (rad)

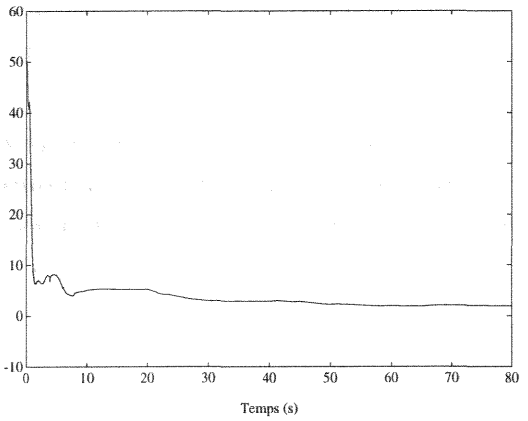
Figure 4.27: *Entrée et sortie réelles du système.*



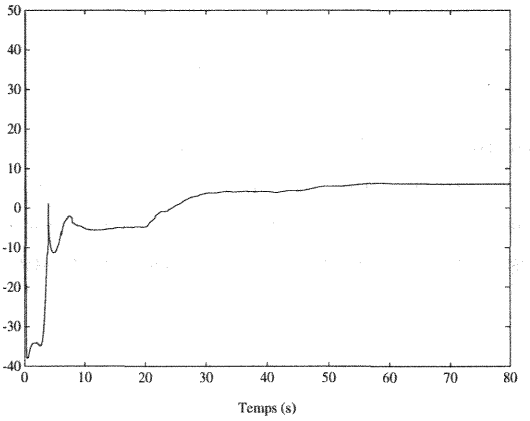
(a) Erreur $x_2 - \hat{x}_2$ (rad/s)



(b) Paramètre θ_1



(c) Paramètre θ_2



(d) Paramètre θ_3

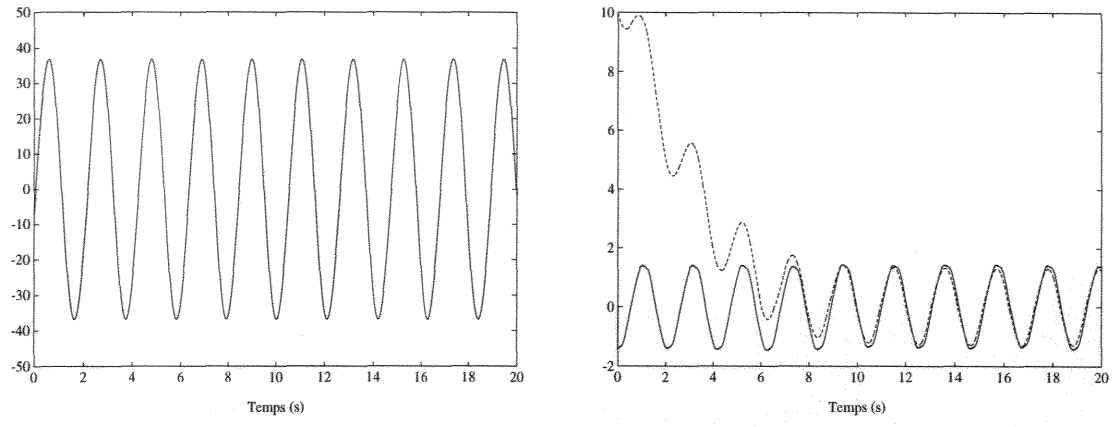
Figure 4.28: *Etat et paramètres estimés.*

4.5.3 Conclusion

Les résultats présentés démontrent les "bonnes" performances de l'OKE séparé état et paramètres sur le procédé réel étudié. D'une part, le vecteur d'état estimé est relativement proche du vecteur d'état réel, d'autre part, le modèle identifié a pu être correctement validé sur d'autres jeux de données, confirmant l'unicité des solutions obtenues.
L'ajoût d'un troisième axe avec préhenseur étant actuellement en phase de réalisation, l'étape suivante consistera à tester ce même algorithme sur le robot dans sa configuration globale et définitive.
En outre, la majorité des modèles non linéaires donnés en pratique étant non déterministes ou incertains, les conditions d'application de l'algorithme ne sont plus – en théorie – remplies. Il conviendra donc, dans le futur, de réaliser certaines adaptations de la méthode au cadre d'étude stochastique.

4.6 Conclusion

Les différentes applications/simulations menées dans ce chapitre nous ont permis de démontrer la validité et l'applicabilité de notre approche pour la synthèse d'estimateurs non



(a) Couple actionneur (Nm)

(b) Vitesse mesurée (−) et simulée (− −) (rad/s)

Figure 4.29: *Validation croisée du modèle estimé* $\hat{\theta}$.

linéaires de type Kalman étendu. Des problèmes et systèmes d'une grande hétérogénéité ont été abordés : identification des systèmes non linéaires MISO, application à l'observation d'une machine asynchrone, de bioréacteurs ou au problème de trajectographie passive, et enfin validation de la méthode sur des données réelles. De par ces applications, plusieurs propriétés de notre approche ont été mises en avant :

- L'influence du choix des matrices de pondération Q_k et R_{k+1} sur l'amélioration des performances de l'OKE (domaine d'attraction et vitesse de convergence) a été mise en évidence,
- Nous avons pu juger de la pertinence et de la simplicité des réglages proposés pour les matrices de pondération de l'OKE. Des comparaisons avec ce même estimateur dans une configuration classique ont été effectuées,
- Le grand champ d'application (systèmes non linéaires sous forme générale de classe $\mathcal{C}^1$) et la facilité d'implantation (linéarisation au premier ordre du système et choix d'un minimum de paramètres) de notre approche, ont été démontrés,

En conclusion, les résultats présentés sont venus confirmer l'intérêt de notre approche pour la synthèse d'estimateurs de type Kalman étendu et devraient étendre le champ d'application de cette classe d'estimateurs déjà fortement répandue dans le milieu industriel.

Conclusion générale et perspectives

Ce mémoire est le résultat d'un travail de recherche essentiellement théorique dédié à la synthèse d'estimateurs de l'état des systèmes non linéaires. Afin de situer au mieux notre apport par rapport aux travaux existants, un état de l'art sur la théorie de l'observation non linéaire a tout d'abord été proposé. Les contributions personnelles présentées par la suite abordent le problème de la synthèse et de l'analyse de la convergence d'estimateurs de type Kalman étendu pour les systèmes non linéaires temps-discret déterministes. Leurs applications à plusieurs systèmes régulièrement étudiés dans la littérature et connus pour leur inadéquation avec cette classe d'estimateurs sont également étudiées.

L'analyse des systèmes non linéaires tant au niveau de la commande que de l'observation posant de nombreux problèmes qui n'apparaissent pas dans le cas linéaire, nous avons été amenés, dans un premier chapitre, à présenter quelques rappels sur les principales définitions se rapportant à la stabilité et à l'observabilité des systèmes non linéaires, en insistant sur la notion d'observabilité qui, contrairement aux systèmes linéaires, dépend intrinsèquement des entrées du système. Les concepts d'entrées universelles et de systèmes uniformément observables ont été introduits.

Le second chapitre a été consacré à une revue bibliographique sur les différentes approches existantes pour la synthèse d'observateurs des systèmes non linéaires. Les cas temps-continu et temps-discret ont été considérés et une classification des différentes méthodes a été réalisée : la difference entre les techniques de linéarisation exacte ou approchée de l'erreur d'observation, les observateurs à erreur non linéaire, les observateurs à modes glissants et les estimateurs d'état sur horizon glissant, a été mise en évidence.

Nos contributions apparaissent dans le troisième chapitre de ce mémoire. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés à la synthèse et à l'analyse des mécanismes de convergence d'une classe particulière d'estimateurs utilisant le formalisme de filtre de Kalman étendu. Une nouvelle approche pour la démonstration de la convergence de cette catégorie d'estimateurs (qui sont régulièrement étudiés en pratique en dépit de peu de garanties de convergence) a été proposée. Plusieurs algorithmes ont été étudiés ou développés :

- Dans un premier temps, nous nous sommes penchés sur l'analyse de la convergence du filtre de Kalman étendu classique dans un contexte déterministe. Nos résultats sont basés sur la théorie de la stabilité au sens de Lyapunov. Après avoir démontré la convergence exponentielle globale du filtre de Kalman en tant qu'observateur pour les systèmes LTV, nous avons apporté une preuve de la convergence des observateurs de type Kalman étendu pour les systèmes non linéaires temps-discret. L'originalité de notre approche réside dans l'utilisation d'une nouvelle technique de linéarisation "exacte" au premier ordre du système étudié. Un nouveau paramétrage de l'analyse de la convergence de l'observateur (via l'introduction de matrices diagonales inconnues β_k et

α_{k+1}), nous a permis, non seulement, de donner des conditions suffisantes de convergence de l'observateur, mais aussi, d'établir le rôle fondamental joué par les matrices de pondérations Q_k et R_{k+1} dans l'amélioration des performances de l'observateur (vitesse de convergence et domaine d'attraction). Un réglage judicieux et simple de ces matrices a été proposé.

- Cette approche a ensuite été étendue à la synthèse d'OKE d'ordre réduit pour les systèmes non linéaires temps-discret et à la synthèse d'OKE d'ordre plein pour les systèmes non linéaires temps-discret singuliers. Seule la classe des systèmes non linéaires à mesures linéaires a été considérée. Une analyse de convergence rigoureuse de chacun des algorithmes a été effectuée et des conditions suffisantes d'existence des observateurs ont été données.

- Enfin, un estimateur séparé de l'état et des biais (ou paramètres) pour les systèmes non linéaires temps-discret a été développé. L'algorithme proposé est analytiquement équivalent à l'observateur de type Kalman étendu pour le système augmenté (lorsque le vecteur d'état est augmenté par le vecteur des biais inconnus). Les mécanismes de convergence de l'algorithme ont été analysés en utilisant la technique de linéarisation "exacte" au premier ordre introduite au début du chapitre. Des conditions suffisantes d'existence de l'estimateur ont été données.

Dans un dernier chapitre, nous avons appliqué notre approche pour la synthèse d'estimateurs de type Kalman étendu à plusieurs systèmes en prenant soin, dans la plupart des cas, de comparer les résultats obtenus avec ceux fournis par l'OKE classique (essentiellement au niveau du réglage des matrices de pondération de l'observateur). La première application traite le problème de l'identification d'un système non linéaire MISO représenté sous la forme d'un modèle Hammerstein. Les applications suivantes concernent respectivement l'observation d'une machine asynchrone, un problème de trajectographie passive et l'observation de bioprocédés. Enfin, la dernière application nous a permis de valider notre approche sur un processus réel dans le cadre de l'estimation séparée de l'état et des paramètres d'un robot plan SCARA. Notre approche s'est avérée particulièrement efficace sur les applications traitées.

Les résultats présentés dans ce mémoire ont apporté une base théorique pour l'étude de la convergence d'estimateurs non linéaires de type Kalman étendu et ont, de ce fait, ouvert plusieurs voies de recherche qu'il conviendrait d'explorer à plus ou moins long terme :

- Sur le plan méthodologique, le choix des matrices de pondération demeure intuitif et il serait intéressant d'en affiner encore plus la synthèse : définition de critères permettant un choix systématique des paramètres de synthèse des structures données ou définition de nouvelles structures de ces matrices,

- La plupart des modèles non linéaires donnés en pratique n'étant pas déterministes, l'extension de notre approche au cas stochastique constitue la suite logique de nos travaux. Ce sujet s'avère d'un grand intérêt et est actuellement à l'étude,

- Le principe de séparation n'étant pas vérifié pour les systèmes non linéaires, l'insertion des algorithmes d'estimation présentés au Chapitre 3 dans une boucle de régulation constitue, à notre avis, un thème de recherche très intéressant,

- Une généralisation des OKE d'ordre réduit et de l'OKE pour les systèmes non linéaires singuliers au cas de systèmes à mesures non linéaires peut être envisagée, de même que la synthèse d'OKE fonctionnels pour les systèmes non linéaires temps-discret,

- Enfin, l'utilisation de l'estimateur séparé état/biais, développé en section 3.6, dans une stratégie de diagnostic des systèmes non linéaires mérite également d'être approfondie.

Annexe A

Eléments d'algèbre

Cette annexe présente un rappel de quelques notions indispensables d'algèbre linéaire et d'algèbre de Lie [HOR87, GOL93, VID93].

A.1 Rappels d'algèbre linéaire

A.1.1 Normes vectorielles et matricielles

Une norme vectorielle (ou matricielle) est une fonction de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{R}^{m\times n}$) dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les relation suivantes :

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0 \tag{A.1}$$
$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \tag{A.2}$$
$$f(x+y) \leq f(x) + f(y) \tag{A.3}$$
$$f(\alpha x) \leq |\alpha|\, f(x), \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{A.4}$$

pour tout x, $y \in \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{R}^{m\times n}$).

Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, nous définissons la classe des p-normes :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad p = 1, 2, \ldots, \infty \tag{A.5}$$

à partir de laquelle nous obtenons les normes particulières :

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,, \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{x^T x} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|\,.$$

Pour toute matrice $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, nous définissons la classe des p-normes (ou normes induites) :

$$\|M\|_p = \max_{x\neq 0} \frac{\|Mx\|_p}{\|x\|_p} \qquad p = 1, 2, \ldots, \infty \tag{A.6}$$

Lorsque nous utilisons la norme induite d'une matrice (ou d'un vecteur), l'indice 2 est sous-entendu. La norme matricielle induite vérifie la relation :

$$\|M\| = \|M\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Mx\|_2}{\|x\|_2} = \lambda_{\max}(MM^T) \tag{A.7}$$

Les normes matricielles induites vérifient l'inégalité suivante :

$$\|MN\|_p \leq \|M\|_p \|N\|_p \qquad p = 1, 2, \ldots, \infty \tag{A.8}$$

A.1.2 Inverses et pseudo-inverses

Soit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M^\dagger$ est une pseudo-inverse de M si $MM^\dagger M = M$. On remarque qu'il existe une infinité de pseudo-inverses pour M sauf si celle-ci est non singulière. Dans ce cas, pseudo-inverse et inverse sont confondues : $M^\dagger = M^{-1}$.

Soit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M^\dagger$ est l'unique pseudo-inverse de Moore-Penrose si :

$$\begin{aligned} MM^\dagger M &= M \\ M^\dagger MM^\dagger &= M^\dagger \\ \left(MM^\dagger\right)^T &= MM^\dagger \\ \left(M^\dagger M\right)^T &= M^\dagger M \end{aligned}$$

Lemme d'inversion matricielle
Si les matrices réelles A, B, $(A - CBD)$ et $(A + CBD)$ sont carrées et inversibles, alors :

$$\begin{aligned} (A - CBD)^{-1} &= A^{-1} + A^{-1}C(B^{-1} - DA^{-1}C)^{-1}DA^{-1} \\ (A + CBD)^{-1} &= A^{-1} - A^{-1}C(B^{-1} + DA^{-1}C)^{-1}DA^{-1} \end{aligned}$$

A.1.3 Quelques définitions et résultats

Nous énonçons désormais quelques définitions et résultats classiques auxquels nous avons fait appel dans ce mémoire :

Proposition A.1 (Principe de Rayleigh) *Soit $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice hermitienne, alors la relation suivante est vérifiée :*

$$\lambda_{\min}(M)x^T x \leq x^T Mx \leq \lambda_{\max}(M)x^T x \tag{A.9}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposition A.2 (Relations sur les valeurs singulières) *Soient $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deux matrices carrées de mêmes dimensions, alors :*

- $\sigma_{\max}(MN) \leq \sigma_{\max}(M)\sigma_{\max}(N)$ (A.10)
- $\sigma_{\min}(MN) \geq \sigma_{\min}(M)\sigma_{\min}(N)$ (A.11)

- $\sigma_{\max}(M+N) \leq \sigma_{\max}(M) + \sigma_{\max}(N)$ (A.12)
- $\sigma_{\min}(M+N) \geq \sigma_{\min}(M) - \sigma_{\max}(N)$ (A.13)
- $\sigma_{\max}(M) \leq \sigma_{\min}(N) \quad \Rightarrow \quad M \leq N$ (A.14)

où $\sigma_{\max}(.)$ *(resp.* $\sigma_{\min}(.)$*) désigne la valeur singulière maximale (resp. minimale) de* $(.)$*.*
De plus, si M *est inversible, alors :*

$$\sigma_{\min}(M) = \frac{1}{\sigma_{\max}(M^{-1})} \tag{A.15}$$

Définition A.1 (Forme canonique duale de Brunovsky) *On dit qu'une paire* (C, A) *est sous la forme canonique duale de Brunovski avec les indices d'observabilité* ρ_i *(*$i = 1, \ldots, p$*),* $\sum_{i=1}^{p} \rho_i = n$*, si :*

$$A = \underset{i=1,\ldots,p}{\text{bloc-diag}}\,(A_{\rho_i}) \quad \textit{avec} \quad A_{\rho_i} = A_{\rho_i \times \rho_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \underset{i=1,\ldots,p}{\text{bloc-diag}}\,(C_{\rho_i}) \quad \textit{avec} \quad C_{\rho_i} = C_{1 \times \rho_i} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A.2 Rappels d'algèbre de Lie

On appelle *dérivée de Lie* de la fonction h le long du champ de vecteur f la fonction :

$$\mathscr{L}_f h(x) = \langle \mathrm{d}h, f \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i(x) \tag{A.16}$$

La $k^{\text{ième}}$ itération de cette dérivée de Lie le long du même champ de vecteur s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_f^k h &= \mathscr{L}_f^{k-1} \mathscr{L}_f^k h \\ \mathscr{L}_f^1 h &= \mathscr{L}_f h \\ \mathscr{L}_f^0 h &= h \end{aligned} \tag{A.17}$$

On défini le crochet de Lie de deux champs de vecteurs f et g par :

$$[f, g]_{(x)} = \mathrm{ad}_f g = \frac{\partial f}{\partial x} g - \frac{\partial g}{\partial x} f \tag{A.18}$$

La $k^{\text{ième}}$ itération de ce crochet s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_f^k g &= [f, \mathrm{ad}_f^{k-1} g] \\ \mathrm{ad}_f^1 g &= \mathrm{ad}_f g \\ \mathrm{ad}_f^0 g &= g \end{aligned} \tag{A.19}$$

La relation suivante, appelée formule de Leibniz, est vérifiée :

$$\mathscr{L}_{[f,g]} h = \langle \mathrm{d}h, [f, g] \rangle = \mathscr{L}_f \mathscr{L}_g h - \mathscr{L}_g \mathscr{L}_f h \tag{A.20}$$

On démontre également que :

$$\mathrm{d}\mathscr{L}_f h(x) = \mathscr{L}_f \, \mathrm{d}h(x) \tag{A.21}$$

Annexe B

Sur la bornitude de la covariance de l'erreur d'estimation du filtre de Kalman appliqué à un système LTV

Cette annexe, qui constitue la démonstration du lemme 3.1, présente un résultat primordial sur la bornitude de la covariance P_k de l'erreur d'estimation [DEY68, MCG73, AND80]. Considérons le système stochastique (3.2), le filtre de Kalman (3.5)-(3.10) associé à ce même système et définissons l'estimateur suivant :

$$\begin{aligned}\breve{x}_k &= \left(\sum_{i=k-N}^{k} \phi_{[i,k]}^T C_i^T R_i^{-1} C_i \phi_{[i,k]}\right)^{-1} \left(\sum_{i=k-N}^{k} \phi_{[i,k]}^T C_i^T R_i^{-1} y_i\right) \qquad k \geq N \geq 0 \\ &= \mathcal{W}_{[k-N,k]}^{o^{-1}} \left(\sum_{i=k-N}^{k} \phi_{[i,k]}^T C_i^T R_i^{-1} y_i\right) \end{aligned} \tag{B.1}$$

où $\breve{x}_k$ est une estimation de l'état courant x_k et $\mathcal{W}^o$ est le grammien d'observabilité de la paire $(A_k, R_k^{-1/2} C_k)$. Comme le filtre de Kalman (3.5)-(3.10) est un estimateur à variance minimale, il est clair que $\breve{P}_k = \mathrm{cov}\{x_k - \breve{x}_k\} \leq P_k = \mathrm{cov}\{x_k - \hat{x}_k\}$ où $\hat{x}_k$ est l'estimation optimale donnée par la filtre de Kalman (3.5)-(3.10).

A l'instant i, la sortie y_i s'exprime également sous la forme suivante :

$$y_i = C_i x_i + v_i = C_i \phi_{[i,k]} x_k + C_i \phi_{[i,k]} \sum_{j=i}^{k-1} \phi_{[k,j+1]} w_j + v_i \tag{B.2}$$

L'utilisation de (B.1) et (B.2) donne :

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}\{\breve{x}_k - x_k\} &= \mathrm{cov}\{\mathcal{W}_{[k-N,k]}^{o^{-1}} (\mathcal{W}_{[k-N,k]}^{o} x_k + \mathcal{W}_{[k-N,k]}^{o} \sum_{j=i}^{k-1} \phi_{[k,j+1]} w_j \\ &\quad + \sum_{i=k-N}^{k} \phi_{[i,k]}^T C_i^T R_i^{-1} v_i) - x_k\} \\ &= \mathrm{cov}\{\mathcal{W}_{[k-N,k]}^{o^{-1}} \sum_{i=k-N}^{k} \phi_{[i,k]}^T C_i^T R_i^{-1} v_i)\} + \mathrm{cov}\{\sum_{j=i}^{k-1} \phi_{[k,j+1]} w_j\} \end{aligned} \tag{B.3}$$

En additionnant le terme $\text{cov}\{\sum_{j=k-N}^{i-1} \phi_{[k,j+1]} w_j\} \geq 0$ dans la partie gauche de (B.3), on montre que :

$$P_k \leq \text{cov}\{\breve{x}_k - x_k\} \leq \text{cov}\{\mathcal{W}^{o^{-1}}_{[k-N,k]} \sum_{i=k-N}^{k} \phi^T_{[i,k]} C_i^T R_i^{-1} v_i)\} + \text{cov}\{\sum_{j=k-N}^{k-1} \phi_{[k,j+1]} w_j\}$$

$$= \mathcal{W}^{o^{-1}}_{[k-N,k]} + \mathcal{W}^{c}_{[k-N,k-1]} \leq \frac{1+\alpha_1\beta_1}{\beta_1} I_n \tag{B.4}$$

sous les conditions d'observabilité et de commandabilité uniformes de (3.2).

Considérons à présent la relation (3.7), $P_k^{-1} = P_{k/k-1}^{-1} + C_k^T R_k^{-1} C_k$ et, sous la condition d'inversibilité de A_k, définissons la matrice $L_k = A_k^{-T} P_k^{-1} A_k^{-1}$. A partir de (3.9), nous avons alors :

$$P_{k/k-1}^{-1} = (L_k^{-1} + Q_{k-1})^{-1} \tag{B.5}$$

$$L_k = A_k^{-T} P_{k/k-1}^{-1} A_k^{-1} + A_k^{-T} C_k^T R_k^{-1} C_k A_k^{-1} \tag{B.6}$$

Par analogie entre les équations (B.5)-(B.6) et (3.9)-(3.7), $P_{k/k-1}^{-1}$ peut être vue comme la covariance de l'erreur d'estimation du filtre de Kalman appliqué au système LTV :

$$\bar{\xi}_{k+1} = A_k^{-T} \bar{\xi}_k + A_k^{-T} C_k^T \bar{w}_k \tag{B.7a}$$

$$y_k = \bar{\xi}_k + \bar{v}_k \tag{B.7b}$$

où $\text{cov}\{\bar{w}_k\} = R_k^{-1}$ et $\text{cov}\{\bar{v}_k\} = Q_k^{-1}$.

En utilisant la même méthode que précédemment, on démontre facilement que :

$$P_{k/k-1}^{-1} \leq \left(\sum_{i=k-N}^{k} \phi_{[i,k]}^{-1} Q_{i-1} \phi_{[i,k]}^{-T} \right)^{-1} + \sum_{i=k-N}^{k-1} \phi_{[k,i+1]}^{-T} A_i^{-T} C_i^T R_i^{-1} C_i A_i \phi_{[k,i+1]}^{-1} \tag{B.8}$$

$\Leftrightarrow$

$$P_{k/k-1}^{-1} \leq \left(\sum_{i=k-N-1}^{k-1} \phi_{[k,i+1]} Q_i \phi_{[k,i+1]}^T \right)^{-1} + \sum_{i=k-N}^{k-1} \phi_{[i,k]}^T C_i^T R_i^{-1} C_i \phi_{[i,k]} \tag{B.9}$$

En additionnant $C_k^T R_k^{-1} C_k$ de chaque côté dans (B.9), il vient que :

$$P_k^{-1} \leq \mathcal{W}^{c^{-1}}_{[k-N,k-1]} + \mathcal{W}^{o}_{[k-N,k]} \leq \frac{1+\alpha_2\beta_2}{\beta_2} I_n \tag{B.10}$$

Finalement, en combinant (B.4) et (B.10), P_k est bornée comme suit :

$$\frac{\beta_2}{1+\alpha_2\beta_2} I_n \leq P_k \leq \frac{1+\alpha_1\beta_1}{\beta_1} I_n \tag{B.11}$$

Bibliographie

[AEY81] D. AEYELS. « On the number of samples necessary to achieve observability ». *Systems & Control Letters*, **1**, pp. 92–94, 1981.

[AID83] V. J. AIDALA et S. E. HAMMEL. « Utilization of Modified Polar Coordinates for Bearings-Only Tracking ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-28**(3), pp. 283–294, 1983.

[ALO93] A. T. ALOUANI, P. XIA, T. W. RICE, et W. D. BLAIR. « On the optimality of two-stage state estimation in the presence of random bias ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **38**, pp. 1279–1282, 1993.

[AND71] B. D. O. ANDERSON et J. B. MOORE. *Linear Optimal Control.* Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1971.

[AND79] B. D. O. ANDERSON et J. B. MOORE. *Optimal Filtering.* Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1979.

[AND80] B. D. O. ANDERSON et J. B. MOORE. « Detectability and stabilizability of time-varying discrete-time linear systems ». *SIAM Journal on Control and Optimization*, **19**(1), pp. 20–32, 1980.

[AUB98a] D. AUBRY, M. BOUTAYEB, et M. DAROUACH. « Observateurs de type Kalman étendu pour les systèmes non linéaires temps discret. Application à une machine asynchrone ». Dans *Colloque Inter-GDR, Thème Commande des Entraînements Electriques*, Paris, France, 1998.

[AUB98b] D. AUBRY, M. BOUTAYEB, et M. DAROUACH. « A reduced-order extended Kalman observer for nonlinear discrete-time systems ». Dans *Proc. 4th IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium (NOLCOS'98)*, pp. 263–269, Enschede, The Netherlands, 1998.

[AUB98c] D. AUBRY, V. JANYSZEK, P. PIERROT, M. ZASADZINSKI, et M. BOUTAYEB. « Robust reduced-order output feedback controller for robot manipulator. Experimental results ». Dans *Proc. 2nd International Conference on Applied Mathematics and Engineering Sciences (CIMASI'98)*, Casablanca, Marocco, 1998.

[BAI98] E. W. BAI. « A Optimal Two-Stage Identification Algorithm for Hammerstein-Wiener Nonlinear Systems ». *Automatica*, **34**(3), pp. 333–338, 1998.

[BAN81] S. P. BANKS. « A note on non-linear observers ». *International Journal of Control*, **34**(1), pp. 185–190, 1981.

[BAR82] J. S. BARAS et P. S. KRISHNAPRASAD. « Dynamic observers as asymptotic limits of recursive filters ». Dans *Proc. 21st IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1126–1127, Orlando, U.S.A., 1982.

[BAR88] J. S. BARAS, A. BENSOUSSAN, et M. R. JAMES. « Dynamic observers as asymptotic limits of recursive filters : special cases ». *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **48**(5), pp. 1147–1158, 1988.

[BAS90] G. BASTIN et D. DOCHAIN. *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*. Elsevier, Amsterdam, 1990.

[BAU86] W. T. BAUMANN et W. J. RUGH. « Feedback Control of Nonlinear Systems by Extended Linearization ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **31**(1), pp. 40–46, 1986.

[BEN97a] S. BENAMOR. « *Observation et commande des systèmes non linéaires temps-discret* ». Thèse de Doctorat, Université C. Bernard, Lyon I, 1997.

[BEN97b] S. BENAMOR, H. HAMMOURI, et F. COUENNE. « A Luenberger-like observer for discrete-time nonlinear systems ». Dans *Proc. 4th European Control Conference'97*, Bruxelle, Belgique, 1997.

[BER98] O. BERNARD, G. SALLET, et A. SCIANDRA. « Nonlinear Observers for a Class of Biological Systems : Application to Validation of a Phytoplanktonic Growth Model ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**(8), pp. 1056–1065, 1998.

[BES83] D. BESTLE et M. ZEITZ. « Canonical form observer design for non linear time-variable systems ». *International Journal of Control*, **38**, pp. 419–431, 1983.

[BES95] G. BESANÇON et G. BORNARD. « Time-varying linearization up to output injection of discrete-time nonlinear systems ». Dans *Proc. 3rd European Control Conference'95*, Rome, Italy, 1995.

[BES96a] G. BESANÇON, G. BORNARD, et H. HAMMOURI. « Observer Synthesis for a class of Nonlinear Control Systems ». *European Journal of Control*, **2**, pp. 176–192, 1996.

[BES96b] G. BESANÇON et H. HAMMOURI. « On uniform observation of nonuniformly observable systems ». *Systems & Control Letters*, **29**, pp. 9–19, 1996.

[BES98] G. BESANÇON, H. HAMMOURI, et S. BENAMOR. « State equivalence of discrete-time nonlinear control systems to state affine form up to input/ouput injection ». *Systems & Control Letters*, **33**, pp. 1–10, 1998.

[BIL82] S. A. BILLINGS et S. Y. FAKHOURI. « Identification of systems containing linear dynamic and static non-linear element ». *Automatica*, **18**(1), pp. 15–26, 1982.

[BIR88] J. BIRK et M. ZEITZ. « Extended Luenberger observer for nonlinear multi-variable systems ». *International Journal of Control*, **47**(6), pp. 1823–1836, 1988.

[BOR89] G. BORNARD, N. COUENNE, et F. CELLE. « Regularly persistent observers for bilinear systems ». *in New Trends in Nonlinear Control Theory, Lectures Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, Berlin, New York*, **122**, pp. 130–140, 1989.

[BOR91] G. BORNARD et H. HAMMOURI. « A high gain observer for a class of uniformly observable systems ». Dans *Proc. 30th IEEE Conference on Decision Control*, pp. 1494–1496, Brighton, England, 1991.

[BOR93] G. BORNARD, F. CELLE-COUENNE, et G. GILLES. « *Observabilité et observateurs* », Chapitre 3. Systèmes non linéaires. Tome 1 : Modélisation - Estimation, Masson, 1993.

[BOR95] S. A. BORTOFF et A. F. LYNCH. « Synthesis of Optimal Nonlinear Observers ». Dans *Proc. 34th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 95–100, New Orleans, U.S.A., 1995.

[BOUa] M. BOUTAYEB, D. AUBRY, et M. DAROUACH. « On separate-bias observers design for non-linear discrete-time systems ». en relecture à *IEEE Transactions on Automatic Control*.

[BOUb] M. BOUTAYEB, D. AUBRY, M. DAROUACH, et E. RICHARD. « On the states and parameters estimation of non-linear discrete-time systems. Design and experimental results ». acceptée à *8th IEEE International Conference on Control Applications*, Hawaii, U.S.A., 1999.

[BOU94] M. BOUTAYEB, M. DAROUACH, H. RAFARALAHY, et G. KRZAKALA. « Asymptotic observers for a class of non linear descriptor systems ». Dans *Proc. American Control Conference*, pp. 1440–1441, Baltimore, U.S.A., 1994.

[BOU95a] M. BOUTAYEB et M. DAROUACH. « Observers for non linear descriptor systems ». Dans *Proc. 34th IEEE Conference on Decision Control*, pp. 2369–2374, New Orleans, U.S.A., 1995.

[BOU95b] M. BOUTAYEB et M. DAROUACH. « Recursive identification method for MISO Wiener – Hammerstein model ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**(2), pp. 287–291, 1995.

[BOU96] M. BOUTAYEB, D. AUBRY, et M. DAROUACH. « A robust and recursive identification method for MISO hammerstein model ». Dans *Proc. UKACC International Conference on CONTROL'96*, pp. 239–243, Exeter, Angleterre, 1996.

[BOU97a] M. BOUTAYEB, D. AUBRY, et M. DAROUACH. « Robust observers design for a class of nonlinear discrete-time systems ». Dans *Proc. 4th European Control Conference'97*, Bruxelle, Belgique, 1997.

[BOU97b] M. BOUTAYEB, D. AUBRY, M. DAROUACH, et P. M. FRANK. « Observers design for nonlinear descriptor systems ». Dans *Proc. 15th IMACS World Congress*, Berlin, Allemagne, 1997.

[BOU97c] M. BOUTAYEB, D. AUBRY, P. M. FRANK, et J. Y. KELLER. « A separate-bias observer for nonlinear discrete-time systems ». Dans *Proc. IFAC Safeprocess'97*, Kingston Upon Hull, Angleterre, 1997.

[BOU97d] M. BOUTAYEB, H. RAFARALAHY, et M. DAROUACH. « Convergence analysis of the Extended Kalman Filter as an observer for non-linear discrete-time systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **42**(4), pp. 581–586, 1997.

[BOU99] M. BOUTAYEB et D. AUBRY. « A Strong Tracking Extended Kalman Observer for Nonlinear Discrete-Time Systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44**(8), pp. 1550–1556, 1999.

[BRY69] A. E. BRYSON et Y. C. HO. *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control.* Waltham, MA : Blaisdell, 1969.

[BUS96] K. BUSAWON. « *Sur les observateurs des systèmes non-linéaires et le principe de séparation* ». Thèse de Doctorat, Université C. Bernard, Lyon I, 1996.

[BUS97] K. BUSAWON, M. FARZA, et H. HAMMOURI. « Observer's synthesis for a class of nonlinear systems with application to state and parameter estimation in bioreactors ». Dans *Proc. 36th IEEE Conference on Decision Control*, pp. 5060–5061, San Diego, California, U.S.A., 1997.

[CAG83] A. K. CAGLAYAN et R. E. LANCRAFT. « A separate-bias identification and state estimation algorithm for non linear systems ». *Automatica*, **19**(5), pp. 561–570, 1983.

[CEL89] F. CELLE, J. P. GAUTHIER, D. KAZAKOS, et G. SALLET. « Synthesis of nonlinear observers : a harmonic-analysis approach ». *Mathematical Systems Theory*, **22**, pp. 291–322, 1989.

[CHA71] F. H. CHANG et R. LUUS. « A non-iterative method for identification using the Hammerstein model ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-16**, pp. 464–468, 1971.

[CHE93] G. CHEN. *Approximate Kalman filtering.* World Scientific Series in Approximations and Decompositions, 1993.

[CHO97] Y. M. CHO et R. RAJAMANI. « A Systematic Approach to Adaptive Observer Synthesis for Nonlinear Systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **42**(4), pp. 534–537, 1997.

[CHU90] S. T. CHUNG et J. W. GRIZZLE. « Sampled-data Observer Error Linearization ». *Automatica*, **26**(6), pp. 997–1007, 1990.

[CIC93a] G. CICCARELLA, M. Dalla MORA, et A. GERMANI. « A Luenberger-like observer for nonlinear systems ». *International Journal of Control*, **57**(3), pp. 537–556, 1993.

[CIC93b] G. CICCARELLA, M. Dalla MORA, et A. GERMANI. « Observers for discrete-time nonlinear systems ». *Systems & Control Letters*, **20**, pp. 373–382, 1993.

[CIC95] G. CICCARELLA, M. Dalla MORA, et A. GERMANI. « A robust observer for discrete-time nonlinear systems ». *Systems & Control Letters*, **24**, pp. 291–300, 1995.

[COU88] N. COUENNE. « *Synthèse d'observateurs de systèmes affines en l'état* ». Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1988.

[DAI89] L. DAI. *Singular Control Systems.* Lecture Notes in Control and Information Sciences (volume 118), Springer-Verlag, New York, 1989.

[DAL93] M. DALLA MORA, C. MANES, et F. PARASILITI. « A Field-Oriented Induction Motor Drive with a Nonlinear State Observer ». Dans *Proc. IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, volume 5, pp. 71–77, Le Touquet, France, 1993.

[DAL97] M. DALLA MORA, A. GERMANI, et C. MANES. « A state observer for nonlinear dynamical systems ». *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, **30**(7), pp. 4485–4496, 1997.

[DAR95] M. DAROUACH et M. BOUTAYEB. « Design of observers for descriptor systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**(7), pp. 1323–1327, 1995.

[DAW92] D. M. DAWSON, Z. QU, et J. C. CARROLL. « On the state observation and output feedback problems for nonlinear uncertain dynamic systems ». *Systems & Control Letters*, **18**, pp. 217–222, 1992.

[DAW95] D. M. DAWSON, M. M. BRIDGES, et Z. QU. *Nonlinear control of robotic systems for environmental waste and restoration.* Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1995.

[DEY68] J. J. DEYST et C. F. PRICE. « Conditions for asymptotic stability of the discrete minimum-variance linear estimator ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, pp. 702–705, 1968.

[DEZ91] F. DEZA. « *Contribution à la synthèse d'observateurs exponentiels. Aplication à un procédé industriel: les colonnes à distiller* ». Thèse de Doctorat, INSA Rouen, 1991.

[DEZ92] F. DEZA, E. BUSVELLE, J. P. GAUTHIER, et D. RAKOTOPARA. « High gain estimation for nonlinear systems ». *Systems & Control Letters*, **18**, pp. 295–299, 1992.

[DEZ93] F. DEZA, D. BOSSANNE, E. BUSVELLE, J. P. GAUTHIER, et D. RAKOTOPARA. « Exponential Observers for Nonlinear Systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **38**(3), pp. 482–484, 1993.

[DIN90] X. DING, P. M. FRANK, et L. GUO. « Nonlinear observer design via an extended observer canonical form ». *Systems & Control Letters*, **15**(4), pp. 313–322, 1990.

[DJE93] M. DJEMAI, J. HERNANDEZ, et J.P. BARBOT. « Nonlinear control with flux observer for a singularly perturbed induction motor ». Dans *Proc. 32th IEEE Conference on Decision Control*, San Antonio, Texas, 1993.

[EDW94] C. EDWARDS et S. K. SPURGEON. « On the development of discontinuous observers ». *International Journal of Control*, **59**(5), pp. 1211–1229, 1994.

[FRI69] B. FRIEDLAND. « Treatment of bias in recursive filtering ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-14**, pp. 359–367, 1969.

[FRI78] B. FRIEDLAND. « Note on separate-bias estimation ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **23**, pp. 735–738, 1978.

[FRO97] V. FROMION et G. FERRERES. « An incremental framework for the extended Kalman filter ». Dans *Proc. 4th European Control Conference*, Brussels, Belgium, 1997.

[FUN79] Y. FUNAHASHI. « Stable state estimators for bilinear systems ». *International Journal of Control*, **29**(2), pp. 181–188, 1979.

[GAL91] P. J. GALKOWSKI et M. A. ISLAM. « An alternative derivation of the modified gain function of Song and Speyer ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **36**(11), pp. 1323–1326, 1991.

[GAR95] R. A. GARCIA et C. E. D'ATTELLIS. « Trajectory tracking in non linear systems via non linear reduced-order observers ». *International Journal of Control*, **62**(3), pp. 685–715, 1995.

[GAU81] J. P. GAUTHIER et G. BORNARD. « Observability for any *u(t)* of a Class of Nonlinear Systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **26**(4), pp. 922–926, 1981.

[GAU92] J. P. GAUTHIER, H. HAMMOURI, et S. OTHMAN. « A Simple Observer for Nonlinear Systems: Application to Bioreactors ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **37**(6), pp. 875–880, 1992.

[GAU94] J. P. GAUTHIER et K. KUPKA. « Observability and observers for nonlinear systems ». *SIAM Journal on Control and Optimization*, **32**(4), pp. 975–994, 1994.

[GOL93] G. H. GOLUB et C. F. Van LOAN. *Matrix computations.* Baltimore, Maryland, The Johns Hopkins University Press, 1993.

[GOO84] G. C. GOODWIN et K. S. SIN. *Adaptive Filtering, Prediction and Control.* Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1984.

[GRI90] J. W. GRIZZLE et P. E. MORAAL. « Newton Observers and Nonlinear Discrete-time Control ». Dans *Proc. 29th IEEE Conference on Decision Control*, pp. 760–767, Honolulu, Hawaii, 1990.

[HAB90] R. HABER et H. UNBEHAUEN. « Structure identification of nonlinear dynamic systems. A survey on Input/Output approaches ». *Automatica*, **26**(4), pp. 651–677, 1990.

[HAE98] D. HAESSIG et B. FRIEDLAND. « Separate-Bias Estimation with Reduced-Order Kalman Filters ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**(7), pp. 983–987, 1998.

[HAM88] H. HAMMOURI et J. P. GAUTHIER. « Bilinearization up to output injection ». *Systems & Control Letters*, **11**, pp. 139–149, 1988.

[HAM92] H. HAMMOURI et J. P. GAUTHIER. « Global time-varying linearization up to output injection ». *SIAM Journal on Control and Optimization*, **30**(6), pp. 1295–1310, 1992.

[HAM94] H. HAMMOURI et J. C. MARQUÈS. *Observateurs des systèmes non linéaires. Application à l'observation d'une machine asynchrone.* Séminaire du 24 novembre, Compiègne, 1994.

[HAM96] H. HAMMOURI et M. KINNAERT. « A new procedure for time-varying linearization up to output injection ». *Systems & Control Letters*, **28**, pp. 151–157, 1996.

[HEN97] M. A. HENSON et D. E. SEBORG. *Nonlinear process control.* Prentice Hall, 1997.

[HER77] R. HERMANN et J. KRENER. « Nonlinear Controlability and Observability ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **22**(5), pp. 728–740, 1977.

[HOO86] K. A. HOO et J. C. KANTOR. « Global linearization and control of a mixed-culture bioreactor with competition and external inhibition ». *Mathematical Biosciences*, **82**, pp. 43–62, 1986.

[HOR87] R. A. HORN et C. R. JOHNSON. *Matrix analysis.* 2nd edition, Cambridge University Press, 1987.

[HSI99] C. S. HSIEH et F. G. CHEN. « Optimal Solution of the Two-Stage Kalman Estimator ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44**(1), pp. 194–199, 1999.

[HU91] X. HU. « On state observers for nonlinear systems ». *Systems & Control Letters*, **17**, pp. 465–473, 1991.

[IGN90] M. B. IGNANI. « Separate-bias Kalman estimator with bias state noise ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **35**, pp. 338–341, 1990.

[IKE75] M. IKEDA, H. MAEDA, et S. KODAMA. « Estimation and feedback in linear time-varying systems: A deterministic theory ». *SIAM Journal on Control*, **13**(2), pp. 304–326, 1975.

[JAN93] M. JANKOVIC. « A New Observer for a Class of Nonlinear Systems ». *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control*, **3**(2), pp. 225–246, 1993.

[JAZ70] A. H. JAZWINSKI. *Stochastic processes and filtering theory.* New York Academic, 1970.

[JO97] N. H. JO, J. JIN, S. JOO, et J. H. SEO. « Generalized Luenberger-like Observer for Nonlinear Systems ». Dans *Proc. American Control Conference*, pp. 2180–2183, Albuquerque, U.S.A., 1997.

[KAL60] R. E. KALMAN. « A new approach to linear filtering ». *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering*, **82**, pp. 35–45, 1960.

[KAL61] R. E. KALMAN et R. S. BUCY. « New results in linear filtering and prediction theory ». *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering*, **83**, pp. 95–108, 1961.

[KAP95] S. KAPRIELIAN et J. TURI. « An observer for a non linear descriptor system ». Dans *Proc. IEEE Conferrence on Decision and Control*, pp. 2369–2374, Tucson, Arizona, 1995.

[KAZ95] N. KAZANTZIS et C. KRAVARIS. « A nonlinear Luenberger-type observer with application to catalyst activity estimation ». Dans *Proc. American Control Conference*, pp. 312–317, Seattle, U.S.A., 1995.

[KAZ98] N. KAZANTZIS et C. KRAVARIS. « Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem ». *Systems & Control Letters*, **34**, pp. 241–247, 1998.

[KEL87] H. KELLER. « Non-linear observer design by transformation into a generalized observer canonical form ». *International Journal of Control*, **46**(6), pp. 1915–1930, 1987.

[KEL96] J. Y. KELLER, L. SUMMERER., et M. DAROUACH. « Extension of Friedland's bias filtering technique to discrete-time systems with unknown inputs ». *International Journal of Systems Sciences*, **27**(12), pp. 1219–1229, 1996.

[KHE95] M. F. KHELFI. « *Observateurs non linéaires – Application à la commande des robots manipulateurs* ». Thèse de Doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy, 1995.

[KIM90] D. I. KIM, I. J. HA, et M. S. KO. « Control of induction motors via feedback linearization with input-output decoupling ». *International Journal of Control*, **51**(4), pp. 863–883, 1990.

[KOR87] M. KORTMANN et H. UNBEHAUEN. « Identification methods for nonlinear MISO systems ». Dans *Proc. 10th IFAC World Congress'96*, pp. 233–238, Munich, Germany, 1987.

[KOU75] S. R. KOU, D. L. ELLIOTT, et T. J. TARN. « Exponential observers for nonlinear dynamic systems ». *Information and Control*, **29**, pp. 204–216, 1975.

[KRE83] A. J. KRENER et A. ISIDORI. « Linearization by output injection and nonlinear observers ». *Systems & Control Letters*, **3**, pp. 47–52, 1983.

[KRE85] A. J. KRENER et W. RESPONDEK. « Nonlinear observers with linearizable error dynamics ». *SIAM Journal on Control and Optimization*, **23**, pp. 197–216, 1985.

[LAC89] M. LACAVA, C. PICARDI, et F. RANIERI. « Application of the extended Kalman filter to parameter and state estimation of induction motors ». *International Journal of Modelling and Simulation*, **9**(3), pp. 85–89, 1989.

[LAS95] B. F. LASCALA, R. R. BITMEAD, et M. R. JAMES. « Conditions for Stability of the Extended Kalman Filter and Their Application to the Frequency Tracking Problem ». *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, **8**, pp. 1–26, 1995.

[LEE90] W. LEE et K. NAM. « Observer Design for Nonlinear Discrete-time Systems ». Dans *Proc. 29th IEEE Conference on Decision Control*, pp. 768–769, Honolulu, Hawaii, U.S.A., 1990.

[LEE91] W. LEE et K. NAM. « Observer design for autonomous discrete-time nonlinear systems ». *Systems & Control Letters*, **17**, pp. 49–58, 1991.

[LEV86] J. LEVINE et R. MARINO. « Nonlinear system immersion, observers and finite dimensional filters ». *Systems & Control Letters*, **7**, pp. 133–142, 1986.

[LEW90] F. L. LEWIS. « Geometric design techniques for observers in singular systems ». *Automatica*, **26**, pp. 411–415, 1990.

[LEW92] F. L. LEWIS. « A tutorial on the geometric analysis of linear time-invariant implicit systems ». *Automatica*, **268**, pp. 119–137, 1992.

[LI87] C. W. LI et L. W. TAO. « Observing non-linear time-variable systems through a canonical form observer ». *International Journal of Control*, **44**(6), pp. 1703–1713, 1987.

[LIL98] T. LILGE. « On Observer Design for Non-linear Discrete-Time Systems ». *European Journal of Control*, **4**(4), pp. 306–319, 1998.

[LIN95] W. LIN et C. I. BYRNES. « Remarks on linearization of discrete-time autonomous systems and nonlinear observer design ». *Systems & Control Letters*, **25**, pp. 31–40, 1995.

[LJU79] L. LJUNG. « Asymptotic behavior of the extended Kalman filter as a parameter estimator for linear systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **24**, pp. 36–50, 1979.

[LJU83] L. LJUNG. *Theory and practice of recursive identification.* MIT Press, 1983.

[LUE66] D. G. LUENBERGER. « Observers for Multivariable Systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **11**(2), pp. 190–197, 1966.

[LUE71] D. G. LUENBERGER. « An Introduction to Observers ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **16**(6), pp. 596–602, 1971.

[LUE77] D. G. LUENBERGER. « Dynamic equations in descriptor form ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-22**, pp. 312–321, 1977.

[LYN97] A. F. LYNCH et S. A. BORTOFF. « Non-linear observer design by approximate error linearization ». *Systems & Control Letters*, **32**, pp. 161–172, 1997.

[MAR90] R. MARINO. « Adaptive observers for single output nonlinear systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-35**(9), pp. 1054–1058, 1990.

[MAR93] R. MARINO, S. PERESADA, et P. VALIGI. « Adaptive Input-Output Linearizing Control of Induction Motors ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **38**(2), pp. 208–221, 1993.

[MCG73] T. P. MCGARTY. *Stochastic systems and state estmation.* John Wiley and Sons, 1973.

[MEN76] E. L. MENDEL. « Extension of Friedland's bias filter technique to a class of non linear systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **21**, pp. 296–299, 1976.

[MIC92] H. MICHALSKA et D. Q. MAYNE. « Moving horizon observers ». Dans *Proc. 1st IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium (NOLCOS'92)*, pp. 576–581, Bordeaux, France, 1992.

[MIC95] H. MICHALSKA et D. Q. MAYNE. « Moving Horizon Observers and Observers-Based Control ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**(6), pp. 995–1006, 1995.

[MIS89] E. A. MISAWA et J. K. HEDRICK. « Nonlinear Observers - A State of the Art Survey ». *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **111**, pp. 344–352, 1989.

[MüL93] P. C. MÜLLER et M. HOU. « On the Observer Design for Descriptor Systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **38**(11), pp. 1666–1671, 1993.

[MOO80] J. B. MOORE et B. D. O. ANDERSON. « Coping with singular transition matrices in estimation and control stability theory ». *International Journal of Control*, **31**(3), pp. 571–586, 1980.

[MOR92a] J. De Leon MORALES. « *Construction des observateurs pour les systèmes non linéaires et application aux procédés* ». Thèse de Doctorat, Université Claude Bermard, Lyon I, 1992.

[MOR92b] P. E. MORAAL et J. W. GRIZZLE. « Nonlinear Discrete-Time Observers using Newton and Broyden's Method ». Dans *Proc. American Control Conference*, pp. 3086–3090, Chicago, U.S.A., 1992.

[MOR94] P. E. MORAAL. « *Nonlinear Observer Design: Theory and Applications to Automotive Control* ». PhD thesis, University of Michigan, Ann Arbor, 1994.

[MOR95] P. E. MORAAL et J. W. GRIZZLE. « Observer design for nonlinear systems with discrete-time measurements ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**(3), pp. 395–404, 1995.

[NAG88] K. NAGPAL et C. SIMS. « Linearized Reduced-Order Filtering ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **33**(3), pp. 310–313, 1988.

[NAR66] K. S. NARENDRA et P. G. GALLMAN. « An iterative method for the identification of nonlinear systems using a hammerstein model ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-11**, pp. 546–560, 1966.

[NAR81] S. C. NARDONE et V. J. AIDALA. « Observability Criteria For Bearing-Only Target Motion Analysis ». *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic systems*, **AES-17**(2), pp. 162–166, 1981.

[NIC89a] S. NICOSIA et P.TOMEI. « High-gain observers in the state and parameter estimation of robots having elastic joints ». *Systems & Control Letters*, **13**(4), pp. 331–338, 1989.

[NIC89b] S. NICOSIA, P.TOMEI, et A. TORNAMBÈ. « An approximate observer for a class of nonlinear systems ». *Systems & Control Letters*, **12**, pp. 43–51, 1989.

[NIC90] S. NICOSIA, P.TOMEI, et A. TORNAMBÈ. « Observer-based control law for a class of nonlinear systems ». *Systems & Control Letters*, **51**(3), pp. 553–566, 1990.

[NIJ82] H. NIJMEIJER. « Observability of autonomous discrete-time nonlinear systems : a geometric approach ». *International Journal of Control*, **36**, pp. 862–874, 1982.

[NIJ90] H. NIJMEIJER et A. J. Van der SCHAFT. *Nonlinear Dynamical Control Systems.* Springer-Verlag, 1990.

[O'R83] J. O'REILLY. *Observers for linear systems.* Academic Press, London, 1983.

[ORT93] R. ORTEGA et G. ESPINOSA. « Torque regulation of induction motors ». *Automatica*, **29**(3), pp. 621–633, 1993.

[PAT80] R. V. PATEL et M. TODA. « Quantitative measures of robustness in multivariable systems ». Dans *Proc. American Control Conference*, pp. TP8–A, San Francisco, U.S.A., 1980.

[PAY89] A. N. PAYNE. « Observability problems for bearing-only tracking ». *International Journal of Control*, **49**(3), pp. 761–768, 1989.

[PHE91] A. R. PHELPS. « On constructing nonlinear observers ». *SIAM Journal on Control and Optimization*, **29**(3), pp. 516–534, 1991.

[PRO93] T. PH. PROYCHEV et R. L. MISHKOV. « Transformation of Nonlinear Systems in Observer Canonical Form With Reduced Dependency on Derivatives of the Inputs ». *Automatica*, **29**(2), pp. 495–498, 1993.

[RAG92] R. RAGHAVAN. « *Observers and compensators for nonlinear systems, with application to flexible-joint robots* ». PhD thesis, University of California, Berkeley, 1992.

[RAG94] R. RAGHAVAN et J. K. HEDRICK. « Observer design for a class of nonlinear systems ». *International Journal of Control*, **59**(2), pp. 515–528, 1994.

[RAJ93] R. RAJAMANI. « *Observers for nonlinear systems, with application to active automotive suspensions* ». PhD thesis, University of California, Berkeley, 1993.

[RAJ95] R. RAJAMANI et J. K. HEDRICK. « Adaptative Observers for Active Automotive Suspensions : Theory and Experiment ». *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **3**(1), pp. 86–93, 1995.

[RAJ98] R. RAJAMANI. « Observers for Lipschitz Nonlinear Systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**(3), pp. 397–401, 1998.

[REB84] C. REBOULET et C. CHAMPETIER. « A new method for linearizing nonlinear systems : the pseudolinearization ». *International Journal of Control*, **40**(4), pp. 631–638, 1984.

[REI96] K. REIF et R. UNBEHAUEN. « Linearisation along trajectories and the extended Kalman filter ». Dans *Proc. 13th IFAC World Congress'96*, pp. 509–514, San Francisco, U.S.A., 1996.

[REI98] K. REIF, F. SONNEMANN, et R. UNBEHAUEN. « An EKF-Based Nonlinear Observer with a Prescribed Degree of Stability ». *Automatica*, **34**(9), pp. 1119–1123, 1998.

[REI99a] K. REIF, S. GÜNTHER, E. YAZ, et R. UNBEHAUEN. « Stochastic Stablity of the Discrete-Time Extended Kalman Filter ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44**(4), pp. 714–729, 1999.

[REI99b] K. REIF, F. SONNEMANN, et R. UNBEHAUEN. « Nonlinear State Observation Using H_∞-Filtering Riccati Design ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44**(1), pp. 203–208, 1999.

[ROB96] D. G. ROBERTSON, J. H. LEE, et J. B. RAWLINGS. « A Moving Horizon-Based Approach for Least-Square Estimation ». *AIChE Journal*, **42**(8), pp. 2209–2224, 1996.

[RUD94] J. RUDOLPH et M. ZEITZ. « A block triangular nonlinear observer normal form ». *Systems & Control Letters*, **23**, pp. 1–8, 1994.

[SAF80] M. G. SAFONOV. *Stability and Robustness of Multivariable Feedback Systems.* MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1980.

[SAL93] L. SALVATORE, S. STASI, et L. TARCHIONI. « A New EKF-Based Algorithm for Flux Estimation in Induction Machines ». *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **40**(5), pp. 496–504, 1993.

[SCH85] A. J. Van der SCHAFT. « On nonlinear observers ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **30**(12), pp. 1254–1256, 1985.

[SöD89] T. SÖDERSTRÖM et P. STOICA. *System identification.* University Press, Cambridge, Prentice Hall, 1989.

[SHA97] J. S. SHAMMA et K. Y. TU. « Approximate Set-Valued Observers for Nonlinear Systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **42**(5), pp. 648–658, 1997.

[SHI92] D. N. SHIELDS. « Observers for descriptor systems ». *International Journal of Control*, **55**(1), pp. 249–256, 1992.

[SHI96] D. N. SHIELDS. « Observer design for discrete nonlinear descriptor systems ». Dans *Proc. UKACC International Conference on CONTROL'96*, pp. 831–836, Exeter, Angleterre, 1996.

[SHI97a] D. N. SHIELDS. « Application and design of observers for singular discrete-time bilinear descriptor systems ». Dans *Proc. 4th European Control Conference'97*, Bruxelle, Belgique, 1997.

[SHI97b] D. N. SHIELDS. « Observer design and detection for nonlinear descriptor systems ». *International Journal of Control*, **67**(2), pp. 153–168, 1997.

[SHR74] E. L. SHREVE et W. R. HEDRICK. « Separate bias and state estimation in a recursive second-order filter ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-19**, pp. 585–586, 1974.

[SLO87] J. J. SLOTINE, J. K. HEDRICK, et E. A. MISAWA. « On sliding observers for nonlinear systems ». *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **109**, pp. 245–252, 1987.

[SON79] E. D. SONTAG. « On the observability of polynomial systems: finite-time problems ». *SIAM Journal on Control and Optimization*, **17**, pp. 139–151, 1979.

[SON84] E. D. SONTAG. « A concept of local observability ». *Systems & Control Letters*, **5**, pp. 41–47, 1984.

[SON85] T. L. SONG et J. L. SPEYER. « A stochastic analysis of a modified gain Extended Kalman Filter with applications to estimation with bearings only measurements ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **30**(10), pp. 940–949, 1985.

[SON86] T. L. SONG et J. L. SPEYER. « The Modified Gain Extended Kalman Filter and Parameter Identification in Linear Systems ». *Automatica*, **22**(1), pp. 59–75, 1986.

[SON92] Y. SONG. « *Estimation and control in discrete-time nonlinear systems* ». PhD thesis, University of Michigan, Ann Arbor, 1992.

[SON95] Y. SONG et J. W. GRIZZLE. « The Extended Kalman Filter as a Local Asymptotic Observer for Discrete-time Nonlinear Systems ». *Journal of Mathematical Systems Estimation and Control*, **5**(1), pp. 59–78, 1995.

[SPE81] J. L. SPEYER et T. L. SPONG. « A comparison between pseudomeasurement and extended Kalman observer ». Dans *Proc. 20th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 324–329, 1981.

[SUS79] H. J. SUSSMANN. « Single-Input Observability of Continuous-Time Systems ». *Mathematical Systems Theory*, **12**, pp. 371–393, 1979.

[THA73] F.E. THAU. « Observing the state of non-linear dynamic systems ». *International Journal of Control*, **17**(3), pp. 471–479, 1973.

[TOR89] A. TORNAMBÈ. « Use of asymptotic observers having-high-gains in the state and parameter estimation ». Dans *Proc. 28th Conference on Decision and Control*, pp. 1791–1794, Tampa, U.S.A., 1989.

[TOR92] A. TORNAMBÈ. « High-gain observers for non-linear systems ». *International Journal of Systems Science*, **23**(9), pp. 1475–1489, 1992.

[TSI89] J. TSINIAS. « Observer design for nonlinear systems ». *Systems & Control Letters*, **13**(2), pp. 135–142, 1989.

[TSI90] J. TSINIAS. « Further results on the observer design problem ». *Systems & Control Letters*, **14**, pp. 411–418, 1990.

[URS80] B. URSIN. « Asymptotic Convergence Properties of the Extended Kalman Filter Using Filtered States Estimates ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **25**(6), pp. 1207–1211, 1980.

[VER86] M. H. VERHAGEN et P. Van DOOREN. « A reduced order observer for descriptor systems ». *Systems & Control Letters*, **6**, pp. 29–37, 1986.

[VER88] G. C. VERGHESE et S. R. SANDERS. « Observers for flux estimation in induction machines ». *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **35**(1), pp. 85–94, 1988.

[VID93] M. VIDYASAGAR. *Nonlinear systems analysis.* Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1993.

[Von93] T. VON RAUMER, J. M. DION, et L. DUGARD. « Applied nonlinear control of induction motors with flux observer ». Dans *Proc. IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, volume 5, pp. 84–89, Le Touquet, France, 1993.

[Von94] T. VON RAUMER, J. M. DION, L. DUGARD, et J. L. THOMAS. « Applied Nonlinear Control of an Induction Motor Using Digital Signal Processing ». *IEEE Transactions on Control, Systems and Technologies*, **2**(4), pp. 327–335, 1994.

[WAL86] B. L. WALCOTT et S. H. ZAK. « Observation of Dynamical Systems in the Presence of Bounded Nonlinearities/Uncertainties ». Dans *Proc. 25th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 961–966, Athènes, Dec. 1986.

[WAL87a] B. L. WALCOTT, M. J. CORLESS, et S. H. ZAK. « Comparative study of non-linear state-observation techniques ». *International Journal of Control*, **45**(6), pp. 2109–2132, 1987.

[WAL87b] B. L. WALCOTT et S. H. ZAK. « State Observation of Nonlinear Uncertain Dynamical Systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **32**(2), pp. 166–170, 1987.

[WAL88] B. L. WALCOTT et S. H. ZAK. « Combined observer-controller synthesis for uncertain dynamical systems with applications ». *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, **18**, pp. 88–104, 1988.

[WAT92] K. WATANABE, T. FUKUDA, et S. G. TZAFESTAS. « Sliding mode control and variable structure system observer as a dual problem for systems with nonlinear uncertainties ». *International Journal of Control*, **23**(11), pp. 1991–2001, 1992.

[WIL77] D. WILLIAMSON. « Observation of Bilinear Systems with Application to Biological Control ». *Automatica*, **13**, pp. 243–254, 1977.

[WOL93] D. G. De WOLF et D. M. WIBERG. « An Ordinary Differential Equation Technique for Continuous-Time Parameter Estimation ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **38**(4), pp. 514–528, 1993.

[XIA88a] X. H. XIA et W. B. GAO. « Non-linear observer design by observer canonical forms ». *International Journal of Control*, **47**(4), pp. 1081–1100, 1988.

[XIA88b] X. H. XIA et W. B. GAO. « On exponential observers for nonlinear systems ». *Systems & Control Letters*, **11**, pp. 319–325, 1988.

[XIA89] X. H. XIA et W. B. GAO. « Nonlinear observer design by observer error linearization ». *SIAM Journal on Control and Optimization*, **27**(1), pp. 199–216, 1989.

[XIA97] X. XIA et M. ZEITZ. « On nonlinear continuous observers ». *International Journal of Control*, **66**(6), pp. 943–954, 1997.

[YAZ88] E. YAZ. « Design of observers for nonlinear time-varying systems ». *International Journal of Systems Science*, **19**(4), pp. 583–587, 1988.

[YAZ92] E. YAZ. « Robust, exponentially fast state estimator for some nonlinear stochastic systems ». *International Journal of Systems Science*, **23**(4), pp. 557–567, 1992.

[YAZ93] E. YAZ. « Sliding mode observers for nonlinear models with unbounded noise and measurement uncertainties ». *Dynamics and Control*, **3**(3), pp. 217–235, 1993.

[YüK71] Y. Ö. YÜKSEL et J. J. BONGIORNO. « Observers for linear multivariable systems with applications ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **16**, pp. 603–613, 1971.

[ZEI87a] M. ZEITZ. « Comments on 'comparative study of non-linear state-observation tecniques' ». *International Journal of Control*, **46**(5), pp. 1861–1863, 1987.

[ZEI87b] M. ZEITZ. « The extended Luenberger observer for nonlinear systems ». *Systems & Control Letters*, **9**, pp. 149–156, 1987.

[ZHA96] Y. ZHANG, X. R. LI, X. YANG, et H. ZHANG. « Detection and Identification of Bias Faults in Nonlinear Systems ». Dans *Proc. 35th IEEE Conference on Decision Control*, pp. 638–639, Kobe, Japan, 1996.

[ZHO93] D. H. ZHOU, Y. X. SUN, Y. G. XI, et Z. J. ZHANG. « Extension of Friedland's separate-bias estimation to randomly time-varying bias of nonlinear systems ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, **38**(8), pp. 1270–1273, 1993.

[ZHO97] D. H. ZHOU, Z. ZHUANG, et P. M. FRANK. « Further extension of Friedland's separate-bias estimation algorithm to a class of nonlinear systems in the presence of colored noise ». Dans *Proc. 4th European Control Conference'97*, Bruxelle, Belgique, 1997.

[ZIM94] G. ZIMMER. « State observation by on-line minimization ». *International Journal of Control*, **60**(4), pp. 595–606, 1994.

université HENRI POINCARÉ
NANCY 1
FACULTE DES SCIENCES

Monsieur **AUBRY Didier**

DOCTORAT de l'UNIVERSITE HENRI POINCARE, NANCY-I

en AUTOMATIQUE

S.C.D. - U.H.P.
NANCY 1 SCIENCES
BIBLIOTHÈQUE

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER

Nancy, le 22 juillet 1993

Le Président de l'Université

Cl. BURLET

UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ, NANCY I
LE PRÉSIDENT

— Domaine Scientifique Victor Grignard - B.P. 239 - F 54506 VANDŒUVRE-LES-NANCY CEDEX FRANCE —
Tél. : 03 83 91 23 70 - International : (00 33) 3 83 91 23 70 - Fax : 03 83 91 23 42 - Adresse électronique : 3c-sciences@scadmin.u-nancy.fr

"CONTRIBUTION À LA SYNTHÈSE D'OBSERVATEURS POUR LES SYSTÈMES NON LINÉAIRES"

Résumé – L'objectif de cette thèse est l'étude et le développement de techniques d'observation des systèmes dynamiques non linéaires.

Après avoir rappelé quelques concepts fondamentaux sur la stabilité et l'observabilité des systèmes dynamiques, puis passé en revue les principales techniques d'observation existantes, nous nous sommes intéressés à la synthèse d'estimateurs de type Kalman étendu pour les systèmes non linéaires temps-discret. Dans ce contexte, nous avons proposé et étudié la convergence de plusieurs algorithmes : analyse de la convergence du filtre de Kalman étendu classique dans un cadre déterministe, synthèse et étude de la convergence d'observateurs de type Kalman étendu (OKE) d'ordre réduit, synthèse et étude de la convergence d'un OKE pour les systèmes non linéaires singuliers, et enfin synthèse et étude de la convergence d'un OKE séparé état-biais. Les algorithmes proposés sont simples à mettre en œuvre, fiables, et s'adressent à de larges classes de systèmes non linéaires. L'analyse de la stabilité de chacun d'entre eux repose sur une nouvelle technique de linéarisation "exacte" au premier ordre du système. La méthode consiste à paramétrer l'analyse de convergence par des matrices diagonales inconnues, modélisant les différents résidus issus de la linéarisation au premier ordre du système. L'introduction d'un tel paramétrage nous a permis de donner des conditions suffisantes de convergence, et d'établir les connections entre le choix de certaines matrices de pondération et l'amélioration des performances des estimateurs.

La validité et l'applicabilité de notre approche ont été démontrées, d'abord en simulation sur un problème d'identification non linéaire, puis sur des problèmes d'observation de procédés physiques tels que les machines asynchrones, les bioprocédés ou le problème de trajectographie passive, et enfin sur des données réelles dans le cadre de l'estimation séparée état-paramètres d'un robot expérimental SCARA.

Mots clés – Filtre de Kalman étendu, Observateurs non linéaires d'ordre plein et d'ordre réduit, Estimation séparée état-biais, Systèmes non linéaires temps-discret réguliers et singuliers, Analyse de convergence, Technique de linéarisation "exacte".

"CONTRIBUTION TO OBSERVERS DESIGN FOR NONLINEAR SYSTEMS"

Abstract – The aim of this thesis is the study and the development of observation techniques for nonlinear dynamical systems.

After recalling some basic definitions of stability and observability of dynamical systems, and giving a survey of the available state estimation techniques, we are interested in the problem of extended Kalman-type estimators design for nonlinear discrete-time systems. In this context, we have proposed and studied the convergence of several algorithms : convergence analysis of the classical extended Kalman filter in a deterministic context, design and convergence analysis of reduced-order extended Kalman-type observers (EKO), design and convergence analysis of an EKO for singular nonlinear systems and, finally, design and convergence analysis of a separate-bias EKO. The proposed algorithms are reliable, straightforward to implement and applicable to large classes of nonlinear systems. The stability analysis of each of them is based on a novel "exact" first order linearisation technique of the system. By the aid of this parametrisation, sufficient conditions to ensure convergence of the algorithms are estabished, and the connexions between the choice of some arbitrary weighting matrices and the performances improvement of the estimators are pointed out.

The validity and applicability of our approach have been shown, firstly through numerical simulations on a nonlinear identification problem, secondly through state estimation problems of physical processes like induction motors, bioprocesses or the bearings-only estimation problem, and finally, with real data through a combined states and parameters estimation problem of an experimental SCARA robot.

Keywords – Extended Kalman filter, Full and reduced-order nonlinear observers, Separate-bias estimation, Regular and singular discrete-time nonlinear systems, Convergence analysis, "Exact" linearisation technique.