



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

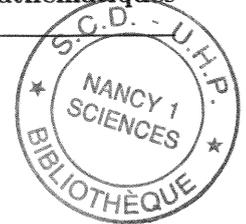
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



UFR S.T.I.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques



Etude de processus stochastiques non linéaires

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 10 juin 1997

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré – Nancy I
(Spécialité Mathématique)

par

Sophie WANTZ-MÉZIÈRES

Composition du jury

Président et Rapporteur : Dominique LEPINGLE, professeur à l'université d'Orléans
Rapporteur : Zhan SHI, maître de conférence à l'université de Paris VI
Directeur de Thèse : Bernard ROYNETTE, professeur à l'université de Nancy I
Examineurs : Jean BERTOIN, professeur à l'université Pierre et Marie Curie, Paris VI
Michel EMERY, directeur de recherche C.N.R.S., Strasbourg
Rémi LEANDRE, directeur de recherche C.N.R.S., Nancy I
Denis TALAY, directeur de recherche I.N.R.I.A., Sophia-Antipolis

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma gratitude à Monsieur Bernard ROYNETTE . C'est lui qui le premier m'a fait prendre goût aux Probabilités et qui m'a initié à la recherche . Je le remercie pour la patience et la grande disponibilité dont il a fait preuve à mon égard, ainsi que pour ses conseils et encouragements qui m'ont été indispensables pour mener à terme cette thèse .

Mes remerciements vont ensuite à Messieurs Dominique LEPINGLE et Zhan SHI qui ont accepté d'être rapporteurs pour cette thèse . L'intérêt qu'ils ont porté à mon travail m'a beaucoup honorée .

Messieurs Jean BERTOIN, Michel EMERY et Rémi LEANDRE me font l'honneur de participer à ce jury et je les en remercie .

Je remercie également Monsieur Denis TALAY d'avoir accepté de faire partie de ce jury . Je lui suis particulièrement reconnaissante de l'attention qu'il m'a toujours manifesté tout au long de mon travail de recherche et de ses encouragements . Il m'a chaleureusement accueilli à l'INRIA de Sophia-Antipolis pour me faire profiter des compétences du projet Omega, et je l'en remercie .

De manière générale, je remercie l'ensemble du corps enseignant de la Faculté des Sciences de Nancy I pour la qualité de la formation qu'il m'a donné, ainsi que tous les membres de l'équipe de Probabilités et Statistiques de l'Institut Elie Cartan pour leur soutien et leur gentillesse . C'est aussi grâce à eux que j'ai pu mener à bien ce travail . Je remercie tout particulièrement Monsieur Pierre VALLOIS pour ses conseils et ses encouragements, ainsi que Monsieur Saïd BENACHOUR qui m'a initié aux Equations aux Dérivées Partielles .

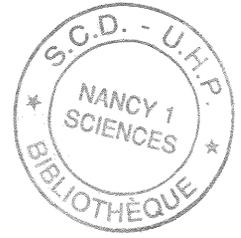
Je souhaite aussi remercier Mademoiselle Mireille BOSSY . Elle m'a fait profiter de ses connaissances en programmation numérique avec beaucoup de gentillesse et de patience .

Enfin je remercie ma famille et mes amis chers pour leur affection et leur soutien . Grâce à eux, j'ai trouvé jour après jour la volonté et l'énergie nécessaires à la réalisation de ce travail . Je remercie en particulier Olivier à qui je dédie cette thèse .

Table des matières

Introduction	1
1 Phénomène d'instabilité pour l'équation de Burgers bidimensionnelle	5
1.1 Introduction	7
1.2 Démarche heuristique	11
1.3 L'E.D.P. liée à (E_2)	13
1.3.1 Recherche de l'E.D.P.	13
1.3.2 Résolution de l'E.D.P. (F_2)	14
1.3.3 Propriétés de la solution u de (F_2)	26
1.4 Résolution de l'E.D.S. (E_2)	35
1.5 Phénomène d'instabilité	40
1.6 Simulation numérique	49
1.6.1 Généralités	49
1.6.2 Application à notre problème	54
2 Comportement des temps d'atteinte d'une diffusion fortement rentrante	67
2.1 Introduction	69
2.2 Démonstration du théorème 1.1	72
2.3 Démonstration du théorème 2.3 (première classe de fonctions propres)	80
2.4 Démonstration du théorème 2.7 (seconde classe de fonctions propres)	86
3 Processus stochastique non linéaire réfléchi auto-stabilisant	89
3.1 Introduction	91
3.1.1 Avant-propos	91
3.1.2 Notre problème	96

3.2	Existence et unicité de la mesure stationnaire	98
3.2.1	L'équation satisfaite par la densité	98
3.2.2	Résultat d'existence pour la mesure stationnaire	99
3.2.3	Résultat d'unicité pour la mesure stationnaire	105
3.3	Convergence vers la mesure stationnaire dans le cas symétrique	109
3.3.1	Résultats préliminaires	109
3.3.2	Théorème de convergence	115
3.4	Convergence dans le cas non symétrique	121
3.5	Deux cas particuliers	129
3.5.1	Le cas $\beta(x) = x^3$	129
3.5.2	Le cas $\beta(x) = x^5$	134
3.6	Extension de l'hypothèse (H_2)	139
3.7	Simulation numérique	144
3.7.1	Cas libre	144
3.7.2	Cas réfléchi	149
4	Etude d'une impulsion brownienne	159
4.1	Introduction	161
4.2	Equivalences en loi	166
4.2.1	Equivalence en loi de (E_1)	166
4.2.2	Convergence en loi de Y_T^ε	169
4.3	Loi de Y_T	172
4.4	Quelques exemples	175



Introduction

Les processus stochastiques ont été introduits pour modéliser et étudier des phénomènes aléatoires dont on trouve une grande variété en chimie, physique, mécanique des fluides, propagation des ondes . Ils sont également beaucoup utilisés en économie financière pour modéliser le cours d'une action ou la valeur d'un portefeuille .

En temps discret, un phénomène aléatoire est décrit mathématiquement par une suite d'observations qui sont des variables aléatoires (v.a.). En temps continu, l'étude d'un phénomène aléatoire est plus compliquée : il est modélisé par une famille de v.a. indexées par le temps . La suite des observations est dans ce cas la trajectoire d'un processus stochastique . Voici la définition qu'en donnent D. Revuz et M. Yor :

Définition (Revuz-Yor) Soient T un ensemble, (E, \mathcal{E}) un espace mesurable . Un processus stochastique indexé par T , prenant ses valeurs dans (E, \mathcal{E}) , est une famille d'applications $(X_t)_{t \in T}$ mesurables d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans (E, \mathcal{E}) , lequel est alors appelé espace d'état . L'ensemble T représente le temps .

Les processus les mieux étudiés sont sans doute ceux qui sont solution d'une équation différentielle stochastique (E.D.S.) . La notion d'E.D.S. prend ses origines avec Itô en 1951, et depuis lors a été considérablement développée par de nombreux auteurs . C'est un outil très puissant pour représenter un grand nombre de processus stochastiques .

Nous nous sommes intéressés dans cette thèse à l'étude de différents processus stochastiques, qui nous ont été fournis par des problèmes physiques concrets ou par une littérature abondante sur le sujet . Nous avons étudié des processus stochastiques non linéaires caractérisés par une E.D.S. dont ils sont solution . Le caractère non linéaire, pris au sens de Mac Kean, réside dans le fait que la loi de la solution intervient dans les coefficients (dérive, diffusion) de l'équation .

D'une part, nous savons dans certains cas extraire des informations sur la densité du processus stochastique : l'équation aux dérivées partielles (E.D.P.) ou intégral-différentielle à laquelle elle satisfait, et parfois même sa forme explicite . Ceci nous permet d'en déduire des informations sur le processus lui-même .

D'autre part, la théorie de la propagation du chaos nous autorise à considérer certaines E.D.S. comme la limite d'un système de particules en interaction . Avec ce point de vue, nous pouvons simuler numériquement le système de particules associé à l'E.D.S. afin d'approximer le processus stochastique solution . Nous avons effectué des simulations nu-

mériques par cette méthode particulière pour différentes classes d'E.D.S. . Celles-ci ont été rendues possibles grâce au projet OMEGA entre l'équipe de Probabilités de l'Institut Elie Cartan et l'I.N.R.I.A. de Sophia-Antipolis, au sein duquel j'ai fait l'apprentissage des méthodes numériques de simulation et j'ai eu accès à des machines parallèles performantes .

Comme le titre de ma thèse l'indique, il s'agit de l'étude de différents processus stochastiques non linéaires . Chaque chapitre est indépendant des autres et pourra par conséquent être lu séparément . J'ai choisi de présenter mes travaux dans un ordre chronologique .

Le premier chapitre traite d'un phénomène d'instabilité pour l'équation de Burgers bidimensionnelle . Nous inspirant d'une étude unidimensionnelle, nous considérons une E.D.S. en dimension deux :

$$\begin{cases} X_t^i = B_t^i + \int_0^t a_i(X_s) u(s, X_s) ds, & i = 1, 2 \\ X_0^i = 0, & i = 1, 2 \\ \text{la densité de } X_t \text{ est } u(t, \cdot), & t > 0 \end{cases} \quad (1)$$

avec $\vec{a} = (a_1, a_2)$ défini par :

$$a_i(x_1, x_2) = \frac{x_i}{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}}, \quad i = 1, 2.$$

La solution est un processus stochastique bidimensionnel dont la densité est l'unique solution de l'E.D.P. suivante appelée équation de Burgers bidimensionnelle :

$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{2} \Delta u = \operatorname{div}(u^2 \vec{a}) \\ \lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = \delta_0 \end{cases} \quad (2)$$

Une bonne connaissance de la densité u , solution de (2), nous permet de résoudre l'équation (1) .

Puis nous étudions un phénomène d'instabilité: nous introduisons un petit paramètre dans le terme de diffusion de (1) et nous le faisons tendre vers zéro . Nous observons alors que la solution fluctue autour d'un ensemble infini de points adhérents que nous déterminons explicitement .

Nous avons effectué des simulations numériques pour les E.D.S. associées aux équations de Burgers en dimension un et deux . Nous verrons que celles-ci nous permettent, plus ou moins bien, de vérifier les résultats théoriques .

Les chapitres 2 et 3 regroupent des travaux réalisés en collaboration avec une autre doctorante Mădălina Deaconu .

Dans le chapitre 2, nous nous sommes intéressés à une classe de processus stochastiques unidimensionnels solutions de l'E.D.S. (ordinaire, i.e. linéaire) :

$$X_t^y = y + B_t - \frac{1}{2} \int_0^t u(X_s^y) ds \quad (3)$$

avec une fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 telle que u tend vers l'infini à l'infini, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u} < +\infty$ et d'autres conditions sur u et ses dérivées première et seconde. Le processus stochastique solution de (3) revient rapidement vers l'origine car la dérive $-u$ de l'équation est "fortement rentrante".

Nous définissons le temps d'atteinte d'un point x tel que $0 \leq x \leq y$, pour le processus (ou temps de retour du processus en un point x), par :

$$T_x^y = \inf \{t \geq 0; X_t^y = x\}. \quad (4)$$

Et nous étudions le comportement asymptotique de la transformée de Laplace de ce temps d'atteinte lorsque l'on fait tendre le point de départ vers l'infini. Nous verrons que la difficulté réside dans le fait que l'on ne sait pas expliciter les fonctions propres associées au générateur infinitésimal de X^y . Nous exhiberons deux formes de fonctions propres.

Le chapitre 3 concerne l'étude d'un processus stochastique non linéaire réfléchi dans un intervalle compact de \mathbb{R} . Considérons l'E.D.S. :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_t = X_0 + B_t - \frac{1}{2} \int_0^t \beta * u(s, X_s) ds - k_t \\ \mathbb{P}(X_t \in dx) = u(t, dx), X_t \in [-1, 1], t \geq 0 \\ |k|_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{-1,1\}}(X_s) d|k|_s \\ k_t = \int_0^t n(X_s) d|k|_s \end{array} \right. \quad (5)$$

avec $\beta : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant certaines hypothèses. C'est une équation différentielle stochastique réfléchie selon A.S. Sznitman dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Nous montrons l'existence et l'unicité d'une mesure stationnaire pour ce processus, en utilisant pour cela des techniques de point fixe.

Nous établissons également la convergence en loi du processus vers la mesure stationnaire, pour β ayant une certaine forme. Les démonstrations seront différentes selon que la donnée initiale est une v.a. symétrique ou non. Nous établirons un résultat de comparaison en loi et utiliserons quelques résultats de théorie spectrale. Dans le cas d'une v.a. non symétrique, nous serons de plus conduits à établir un principe de symétrisation.

Nous donnons ensuite des résultats obtenus par simulation numérique, dans le cas réfléchi étudié ici et dans le cas d'un problème similaire libre. Cela nous permet de comparer ces deux situations et d'évaluer la portée de la réflexion.

Le chapitre 4 traite d'un problème qui nous a été posé dans le cadre d'un contrat du projet OMEGA avec E.D.F. . Il s'agit d'un problème rencontré lors de la simulation numérique d'équations d'évolution modélisant un phénomène de mécanique des fluides . Les fonctions dérive et diffusion étant calculées par ailleurs, il apparaît qu'elles peuvent atteindre de très grandes valeurs en certains points, ce qui rend la simulation impossible en ces points .

Nous nous sommes pour l'instant restreint à la situation dans laquelle le terme de diffusion peut atteindre des valeurs très grandes au point zéro, et nous l'avons modélisé par une partie régulière et une partie singulière représentée par une fonction indicatrice . Nous étudions donc l'E.D.S. :

$$\begin{cases} X_t^\varepsilon = \int_0^t \phi\left(\frac{1}{\varepsilon^2} X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon\right) ds \\ Y_t^\varepsilon = y + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{[0, \varepsilon^2]}(X_s^\varepsilon) dB_s + \int_0^t \sigma(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon) d\tilde{B}_s + \int_0^t b(X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon) ds \end{cases} \quad (6)$$

où ϕ est une fonction strictement positive et minorée . Nous notons :

$$T^\varepsilon = \inf \{t \geq 0; X_t^\varepsilon = \varepsilon^2\}. \quad (7)$$

Notre but est de faire tendre ε vers zéro pour étudier le voisinage du point où la première composante X atteint le niveau zéro . Nous résolvons le problème rencontré lors de la simulation en faisant effectuer un saut au processus (X, Y) au point $(0, Y)$, selon la loi limite de $Y_{T^\varepsilon}^\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Le travail de ce chapitre se résume donc à déterminer cette loi limite . Nous verrons qu'elle est en fait indépendante de ε , et nous la déterminerons par le biais d'un processus stochastique unidimensionnel solution d'une E.D.S. simple .

Chapitre 1

Phénomène d'instabilité pour l'équation de Burgers bidimensionnelle

1.1 Introduction

Avant-Propos

Nous allons étendre un résultat unidimensionnel de B. Roynette et P. Vallois concernant l'équation de Burgers, en passant à la dimension deux. Ils étudient dans [RV] une classe d'équations différentielles stochastiques non linéaires unidimensionnelles, de diffusion ε , où ε est un petit paramètre positif, et de dérive faisant intervenir la densité du processus (d'où la non linéarité de l'E.D.S.) élevée à une puissance strictement positive :

$$\begin{cases} X_t^\varepsilon = \varepsilon B_t + \int_0^t f(s, X_s^\varepsilon) ds \\ X_t^\varepsilon \text{ admet } u_\varepsilon(t, \cdot) \text{ comme densité, } (0 < t \leq 1) \end{cases}$$

avec $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f = f_1$ ou f_2 , avec f_1 et f_2 les fonctions définies par :

$$\begin{aligned} f_1(t, x) &= u^{q-1}(t, x) \text{ pour } q > 1, \\ f_2(t, x) &= \pm \operatorname{sgn}(x) u(t, x). \end{aligned}$$

Les auteurs montrent que l'adhérence en norme höldérienne de $(X_t^\varepsilon)_{0 \leq t \leq 1}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ est p.s. égale à un ensemble infini de fonctions continues qu'ils déterminent exactement. On peut citer également pour cette équation un travail de B. Jourdain (cf. [J1]) qui établit l'existence d'une solution unique au problème de martingales associé, ainsi qu'un résultat de propagation du chaos pour cette solution faible.

Lorsque $f = f_1$ et $q = 2$, la densité u_ε du processus est à la puissance 1 dans la diffusion ; c'est le cas le plus sympathique car la densité est connue et elle est auto-similaire (cf. [H]). On connaît l'existence et l'unicité d'une solution de :

$$\begin{cases} X_t^\varepsilon = \varepsilon B_t + \gamma \int_0^t u_\varepsilon(s, X_s^\varepsilon) ds \\ X_0^\varepsilon = 0 \\ X_t^\varepsilon \text{ admet } u_\varepsilon(t, \cdot) \text{ comme densité } (0 < t \leq 1) \end{cases} \quad (E_1)$$

d'après A.S. Sznitman et S.R.S. Varadhan (cf. [SzV]) qui établissent l'existence et l'unicité de la solution d'un système multidimensionnel d'équations avec un temps local sur une hypersurface non régulière. Dans [Sz2], Sznitman montre également la propagation du chaos pour ce système.

La propagation du chaos pour l'équation unidimensionnelle de Burgers a été aussi étudiée par Calderoni-Pulvirenti et Kotani-Osada. Ils ont considéré presque simultanément ce problème de deux manières différentes : P. Calderoni et M. Pulvirenti (cf. [CP]) approximativement les masses de Dirac qui apparaissent dans la dérive du système de particules en interaction modérée associé (dont notre solution sera la limite), S. Kotani et H. Osada (cf. [KO]) étudient analytiquement les lois marginales des processus de diffusion en considérant leur générateur.

On détermine, par une méthode devenue maintenant classique, l'E.D.P. satisfaite par la densité u_ε du processus X^ε solution de (E_1) :

$$\begin{cases} (u_\varepsilon)_t + 2\gamma u_\varepsilon (u_\varepsilon)_x = \frac{\varepsilon^2}{2} (u_\varepsilon)_{xx} \\ u_\varepsilon(t, x) dx \xrightarrow{t \searrow 0} \delta_0 \end{cases} \quad (F_1)$$

Cette E.D.P. est appelée équation de Burgers car c'est l'équation (à des constantes multiplicatives près) introduite par J.M. Burgers en 1948 comme modèle mathématique de la turbulence (cf. [Bu]). Il s'intéresse au mouvement d'un fluide et écrit un modèle mathématique plus simple que celui considéré en hydrodynamique. Puis il étudie les propriétés des solutions de ce système et les compare aux propriétés connues du phénomène physique qu'est la turbulence.

Dans un domaine infini, il décrit le mouvement d'un fluide par l'équation :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2v \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

où ν est une constante physique du modèle. Il étudie ensuite une solution typique de cette équation, de la forme :

$$v = \frac{V(\eta)}{\sqrt{t-t_0}} \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{y-y_0}{\sqrt{t-t_0}}.$$

C'est notre solution autosimilaire, avec V vérifiant l'équation :

$$\nu V' = V^2 - \frac{1}{2} \eta V,$$

et dont une approximation peut s'écrire :

$$V \simeq \frac{C}{4} \left\{ 1 - \tanh \frac{C(\eta - C)}{4\nu} \right\}$$

où C est une constante d'intégration.

B. Roynette et P. Vallois établissent pour cette E.D.S. (E_1) dans laquelle ils ont introduit un paramètre $\gamma > 0$, un phénomène d'instabilité :

Théorème 1.1 (Roynette-Vallois)

Soit $A^\gamma = \{\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+; \phi(t) = c\sqrt{t}, 0 \leq c \leq 2\sqrt{\gamma}\}$. Pour la topologie höldérienne d'indice α ($0 < \alpha < \frac{1}{2}$), l'ensemble des points adhérents des fonctions X^ε , solutions de (E_1) , quand $\varepsilon \rightarrow 0$, est p.s. égal à A^γ .

Ils compliquent ensuite un peu le problème en choisissant $f = f_2$. Avec cette fonction, on a l'E.D.S. :

$$\begin{cases} Y_t^\varepsilon = \varepsilon B_t + \delta \int_0^t \operatorname{sgn}(Y_s^\varepsilon) v_\varepsilon^\delta(s, Y_s^\varepsilon) ds \\ Y_0^\varepsilon = 0 \\ Y_t^\varepsilon \text{ admet } v_\varepsilon^\delta(t, \cdot) \text{ comme densité } (0 < t \leq 1) \end{cases} \quad (E_1^\delta)$$

avec $\delta = \pm 1$.

Dans ce cas, l'E.D.P. satisfaite par la densité v_ε^δ est une équation de Burgers signée :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} (x v_\varepsilon^\delta)' - 2(\delta \operatorname{sgn}(x)) v_\varepsilon^\delta(x) (v_\varepsilon^\delta)'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2} (v_\varepsilon^\delta)''(x) = 0 \\ -2(\delta v_\varepsilon^\delta(0))^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} (v_\varepsilon^\delta(0_+) - v_\varepsilon^\delta(0_-)) = 0 \end{cases} \quad (F_1^\delta)$$

Les auteurs établissent enfin le résultat suivant :

Théorème 1.2 (Roynette-Vallois)

Soit $A = \{\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; \phi(t) = C\sqrt{t}, -\sqrt{2} \leq C \leq \sqrt{2}\}$.

- (i) Pour $\delta = -1$, pour tout $t \in [0, 1]$, Y_t^ε converge p.s. vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$.
- (ii) Pour $\delta = 1$, l'ensemble des points adhérents de Y^ε , quand $\varepsilon \rightarrow 0$, est, pour la topologie höldérienne d'indice α ($0 < \alpha < \frac{1}{2}$), p.s. égal à A .

Notre problème

Nous nous proposons ici de considérer le même type de problème, c'est-à-dire un phénomène d'instabilité, pour une équation différentielle stochastique bidimensionnelle liée à une équation de Burgers bidimensionnelle. Nous nous inspirerons fortement des méthodes utilisées dans [RV]. On trouve également des méthodes similaires dans [Ro1] pour une autre forme d'E.D.S.

Nous considérons l'équation différentielle stochastique en dimension 2 suivante :

$$(E_2) \begin{cases} X_t^i = B_t^i + \int_0^t a_i(X_s) u(s, X_s) ds, & i = 1, 2 \\ X_0 = 0 \\ \text{la densité de } X_t \text{ est } u(t, \cdot) \quad (t > 0) \end{cases}$$

où $\{(B_t) = (B_t^1, B_t^2)\}_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien linéaire bidimensionnel issu de zéro (c'est-à-dire $(B_t^i)_{t \geq 0}$, pour $i = 1, 2$, sont des mouvements browniens linéaires unidimensionnels issus de zéro et indépendants entre eux),

et la fonction $a_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} (i = 1, 2)$ définie par :

$$a_i(x_1, x_2) = \frac{x_i}{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}}$$

Le plan de notre étude sera le suivant :

Une première partie de ce travail est consacrée à la résolution de l'E.D.P. (E_2). Nous allons tout d'abord regarder d'où provient cette équation (paragraphe 1.2). Elle est obtenue heuristiquement comme le "processus non linéaire" associé à un système de particules en interaction .

Notre but sera ensuite de résoudre cette E.D.S. . Pour cela, nous remarquons qu'elle possède deux inconnues : le processus X et sa densité u . La méthode que nous utilisons ici consiste à séparer ces deux inconnues . Nous exhibons l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la fonction $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$(F_2) \begin{cases} u_t - \frac{1}{2} \Delta u = -\operatorname{div}(u^2 \vec{a}) \\ \lim_{t \searrow 0} u(t, x) = u_0 \end{cases}$$

où $u_0 = \delta_0$ est la masse de Dirac en zéro . C'est une équation aux dérivées partielles de type Burgers . La partie 1.3 est consacré à son étude . Nous montrerons qu'elle admet une unique solution positive (dans le paragraphe 1.3.1), et établirons quelques propriétés importantes de sa solution (dans 1.3.2). Celles-ci nous permettront ensuite d'établir, dans la partie 1.4, un théorème d'existence et d'unicité de l'E.D.S. (E_2) .

La deuxième partie de ce travail est l'étude d'un phénomène d'instabilité (partie 1.5) . On prend un petit paramètre $\varepsilon > 0$ et on note :

$$(E_2^\varepsilon) \begin{cases} X_t^{\varepsilon,i} = \varepsilon B_t^i + \int_0^t a_i(X_s^\varepsilon) u^\varepsilon(s, X_s^\varepsilon) ds, \quad i = 1, 2 \\ X_0^{\varepsilon,i} = 0, \quad i = 1, 2 \\ u^\varepsilon \text{ est la densité de } X^\varepsilon \end{cases}$$

avec les a_i et B^i définis comme précédemment .

La densité u^ε satisfait, de manière analogue au cas où $\varepsilon = 1$, à une E.D.P. du même type que (F_2), qui possède également une unique solution positive . Ainsi (E_2^ε) possède une unique solution X^ε et notre but est d'étudier le comportement de X^ε quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Nous établissons un théorème d'instabilité à la limite, au sens où nous montrerons que la solution de l'E.D.S. fluctue autour d'un ensemble de points adhérents .

Puis nous réalisons des simulations numériques qui nous permettront de vérifier les théorèmes de convergence lorsque le petit paramètre ε tend vers zéro .

Chaque fois qu'il sera possible d'adapter nos démonstrations au cas plus général d'équations d -dimensionnelles, nous le ferons .

1.2 Démarche heuristique

Nous nous plaçons pour l'instant dans le domaine \mathbb{R}^d car la dimension ne modifie en rien les arguments utilisés .

Considérons un système de N particules dont les positions dans \mathbb{R}^d sont données par le système suivant :

Soit $(b_{i,j})_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq d}$ une matrice $N \times d$ de fonctions $b_{i,j}$ régulières, d'intégrale égale à un et de support contenu dans un petit compact contenant l'origine .

Soient $B^{1,j}, \dots, B^{N,j}$ ($j = 1, \dots, d$) N mouvements browniens linéaires, de dimension d , issus de zéro et indépendants les uns des autres .

On se donne $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^N)$ la solution du système d'équations N - dimensionnel :

$$\begin{cases} dX_t^{i,j} = dB_t^{i,j} + \frac{1}{N} \sum_{k \neq i, k=1}^N a_j(X_t^k) b_{i,j}(X_t^i - X_t^k) dt & i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, d \\ X_0^i = 0 & i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (2.1)$$

X_t^i représente la position à l'instant t de la particule numéro i (parmi N) .

Intuitivement, d'après (2.1), la particule $n^\circ i$ subit une action de translation de la part de la $k^{\text{ième}}$ particule si celle-ci est suffisamment proche de la $i^{\text{ième}}$ particule pour que $X_t^i - X_t^k$ soit dans le support de b_i . On remarque également la symétrie de (2.1) qui nous permet de déduire que toutes les particules ont même loi .

Agrandissons maintenant le système de particules en faisant tendre N vers $+\infty$ et regardons l'évolution d'une seule particule, par exemple la première .

Nous allons utiliser la théorie de propagation du chaos développée par Sznitman, cf [Sz], qui va nous permettre de considérer notre processus solution de l'équation (E_2) comme la limite en propagation du chaos d'une suite de systèmes de particules de la forme (2.1) . De tels résultats n'ont pas été démontrés dans ce cas, mais il ne paraît pas difficile, modulo quelques modifications mineures, de les adapter à notre situation . Par exemple, B. Jourdain, dans [J2], établit un résultat de propagation du chaos pour une équation de Burgers généralisée (d -dimensionnelle) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{q+1} \frac{\partial (u^{q+1})}{\partial x}$$

avec $q \geq 1$.

Nous supposons la propagation du chaos établie dans notre cas . De manière heuristique, nous supposons, à cause de la normalisation en $\frac{1}{N}$, que l'action d'une particule seule ne va plus compter et qu'il faudra donc s'intéresser à l'action globale des $N - 1$ autres particules sur la première . Cette action est remplacée par l'action d'une particule fictive qui a pour densité de présence la densité commune des $N - 1$ particules .

On obtient alors, pour la particule n° 1 :

$$\begin{cases} dX_t^{1,j} = dB_t^{1,j} + \left(\int_{\mathbf{R}^d} b_{1,j}(X_t^1 - x) a_j(x) u(t, x) dx \right) dt, & j = 1, \dots, d \\ X_0^1 = 0 \\ \text{la densité de } X_t^1 \text{ est } u(t, \cdot) \quad (t > 0) \end{cases} \quad (2.2)$$

Pour la fonction b , on choisit maintenant :

$$b_{i,j} = \delta_{0,j}$$

(2.2) devient alors :

$$dX_t^{1,j} = dB_t^{1,j} + (a_j(X_t^1) u(t, X_t^1)) dt.$$

D'où notre E.D.S. (E_2) :

$$(E_2) \begin{cases} dX_t^i = dB_t^i + a_i(X_t) u(t, X_t) dt, & i = 1, \dots, d \\ X_0 = 0 \\ \text{la densité de } X_t \text{ est } u(t, \cdot) \quad (t > 0) \end{cases}$$

Nous allons à présent étudier cette E.D.S. . Remarquons qu'elle possède deux inconnues : le processus d -dimensionnel $X = (X^1, \dots, X^d)$ et sa densité u .

1.3 L'E.D.P. liée à (E_2)

Pour résoudre l'E.D.S. (E_2) , on sépare les deux inconnues X et u : c'est-à-dire que l'on introduit l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la densité u ; et après l'avoir résolue, on remplace u par la solution obtenue dans (E_2) qui devient alors une E.D.S. ordinaire non homogène avec une singularité à l'origine . Nous sommes alors capables de l'étudier .

1.3.1 Recherche de l'E.D.P.

Soit (X, u) une solution de l'E.D.P. (E_2) dans \mathbb{R}^d . Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 , à support compact . Nous utilisons une méthode devenue maintenant classique pour caractériser la densité en déterminant l'équation à laquelle elle satisfait .

Appliquons la formule d'Itô à $f(X_t)$:

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} f(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(X_s) d \langle X^i, X^j \rangle_s$$

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} f(X_s) dB_s^i + \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} f(X_s) a_i(X_s) u(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(X_s) ds$$

On prend l'espérance des deux côtés de cette dernière égalité :

$$E[f(X_t)] = f(0) + \sum_{i=1}^d E \left[\int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} f(X_s) a_i(X_s) u(s, X_s) ds \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d E \left[\int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(X_s) ds \right]$$

Et sachant que u est la densité de X :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) u(t, x) dx = f(0) + \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} (f(x)) a_i(x) u^2(s, x) ds dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} [f(x)] u(s, x) ds dx$$

Après intégration par parties, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) u(t, x) dx = f(0) - \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i(x) u^2(s, x)] ds dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t f(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} [u(s, x)] ds dx$$

Enfin on dérive par rapport au temps :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) u_t(t, x) dx = - \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i(x) u^2(t, x)] dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} [u^2(t, x)] dx$$

On en déduit l'E.D.P. vérifiée par u :

$$u_t = - \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i u^2] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (u);$$

et puisque $X_0 = 0$, $\lim_{t \searrow 0} u(t, x) = \delta_0$.

On a obtenu l'équation de Burgers d -dimensionnelle :

$$(F_2) \begin{cases} u_t - \frac{1}{2} \Delta u = -\operatorname{div}(u^2 \vec{a}) \\ \lim_{t \searrow 0} u(t, x) = \delta_0 \end{cases}$$

1.3.2 Résolution de l'E.D.P. (F_2)

Nous allons à présent résoudre l'E.D.P. (F_2) obtenue. Nous démontrons dans ce paragraphe le théorème suivant, avec $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des mesures bornées dans \mathbb{R}^d :

Théorème 3.1 *Pour une donnée initiale $u_0 \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$, l'E.D.P. (F_2) admet une solution positive $u \in C^0([0, +\infty[; \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d))$. Si $u_0 = \delta_0$, la solution est unique.*

Démonstration du théorème 3.1 : Comme le suggère l'énoncé, nous allons établir ce résultat en fonction de la nature de la condition initiale. Ceci nous amène à examiner trois cas, qui formeront les trois parties de la démonstration :

- Si $u_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, nous établissons l'existence et l'unicité de la solution de (F_2) , d'abord localement sur un intervalle de temps fini, puis nous l'étendons à $t \in]0, +\infty[$.

- Si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on obtient l'existence et l'unicité de la solution grâce à une approximation de la donnée initiale par une suite de fonctions du type précédent.

- Si $u_0 \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$, on obtient par la même méthode d'approximation l'existence d'une solution de (F_2) . Mais nous ne savons établir l'unicité que dans le cas particulier : $u_0 = \delta_0$.

PREMIER CAS : $u_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

On cherche des solutions de (F_2) , $u :]0, +\infty[\rightarrow L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$
 $t \rightarrow u(t)$

telles que $u(0, \cdot) = u_0$.

(i) Nous allons tout d'abord établir l'existence d'une solution locale unique de l'équation (F_2) .

a) (F_2) étant de la forme :

$$\begin{cases} u_t - \frac{1}{2} \Delta u = -\operatorname{div}(u^2 \vec{a}) \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot), \end{cases}$$

considérons l'équation sans second membre associée :

$$(3.1) \begin{cases} u_t - \frac{1}{2} \Delta u = 0 \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot) \end{cases}$$

On sait que le noyau de la chaleur, noté G , vérifie cette équation. Donc, pour $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, toute solution u de (3.1) est de la forme :

$$u(t, \cdot) = G(t, \cdot) * u_0(\cdot),$$

avec :

$$G(t, x) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right).$$

b) Soient w et v solutions respectives des équations :

$$\begin{cases} w_t - \frac{1}{2} \Delta w = \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} g_i \\ w(0) = 0 \end{cases}$$

où $g_i = -u^2 a_i$, et

$$\begin{cases} v_t - \frac{1}{2} \Delta v = 0 \\ v(0) = u_0 \end{cases}$$

Alors, par le principe de superposition, $u = w + v$ vérifie (F_2) avec :

$$v(t, \cdot) = (G(t) * u_0)(\cdot)$$

$$\begin{aligned} w(t, \cdot) &= \int_0^t G(t-s, \cdot) * \left(\sum_{i=1}^d \frac{\partial g_i}{\partial x_i}(s) \right) ds \\ &= \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} G(t-s, \cdot) * g_i(s) ds \\ &= - \int_0^t \nabla G(t-s, \cdot) * [u^2(s, \cdot) a(\cdot)] ds \end{aligned}$$

Ceci nous conduit, pour $T > 0$ et $u_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, à chercher les solutions $u \in C^0([0, T[, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d))$ de (F_2) satisfaisant à l'équation :

$$u(t, \cdot) = (G(t) * u_0)(\cdot) - \int_0^t \nabla G(t-s, \cdot) * [u^2(s, \cdot) a(\cdot)] ds \quad (3.2)$$

Posons $E := C^0([0, T[, L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d))$. Muni de la norme $\| \cdot \|_E$ décrite par :

$$\| u \|_E = \sup_{0 \leq t \leq T} (\| u(t, \cdot) \|_{L^1} + \| u(t, \cdot) \|_{L^\infty}), \quad \forall u \in E,$$

E est un espace de Banach.

On introduit l'opérateur \mathcal{A} défini sur l'espace E par :

$$\mathcal{A}v(\cdot) = (G(t) * u_0)(\cdot) - \int_0^t \nabla G(t-s, \cdot) * [a(\cdot) v^2(s, \cdot)] ds, \quad \forall v \in E.$$

★ Vérifions que \mathcal{A} est à valeurs dans E : Soit $u \in E$. Les propriétés suivantes du noyau de la chaleur G sont classiques, nous ne les démontrons donc pas :

Lemme 3.2 *Il existe des constantes positives C et C_0 telles que :*

$$\begin{aligned} \| G(t, \cdot) \|_{L^1} &\leq 1, \\ \| G(t, \cdot) \|_{L^\infty} &\leq \frac{C_0}{t^{\frac{d}{2}}}, \\ \| G(t, \cdot) \|_{L^p} &\leq \frac{C}{t^{\frac{d}{2}(1-\frac{1}{p})}} \quad \forall 1 < p < \infty, \\ \| \nabla G(t, \cdot) \|_{L^1} &\leq \frac{C_0}{\sqrt{t}}, \\ \| \nabla G(t, \cdot) \|_{L^p} &\leq \frac{C}{t^{\frac{d}{2}(1-\frac{1}{p})+\frac{1}{2}}} \quad \forall p > 1. \end{aligned}$$

Donc, en utilisant le théorème de Young, on obtient :

$$\| \mathcal{A}u(t, \cdot) \|_{L^1} \leq \| G(t, \cdot) \|_{L^1} \| u_0 \|_{L^1} + \int_0^t \| \nabla G(t-s, \cdot) \|_{L^1} \| a(\cdot) u^2(s, \cdot) \|_{L^1} ds.$$

Et puisque $\| a \|_{L^\infty} \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \| \mathcal{A}u(t, \cdot) \|_{L^1} &\leq \| u_0 \|_{L^1} + \int_0^t \frac{C_0}{\sqrt{t-s}} \| u^2(s, \cdot) \|_{L^1} ds \\ \| \mathcal{A}u(t, \cdot) \|_{L^1} &\leq \| u_0 \|_{L^1} + 2C_1 \sqrt{t} \| u \|_E^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

De même :

$$\| \mathcal{A}u(t, \cdot) \|_{L^\infty} \leq \| u_0 \|_{L^\infty} + 2C_1 \sqrt{t} \| u \|_E^2. \quad (3.4)$$

Si on pose

$$\|u\|_{1,\infty} := \|u\|_{L^1} + \|u\|_{L^\infty},$$

des deux inégalités (3.3) et (3.4), on tire :

$$\|\mathcal{A}u(t, \cdot)\|_{1,\infty} \leq \|u_0\|_{1,\infty} + 4C_1 \sqrt{t} \|u\|_E^2.$$

Donc :

$$\|\mathcal{A}u\|_E \leq \|u_0\|_E + 4C_1 \sqrt{T} \|u\|_E^2 < +\infty.$$

On en déduit que $\mathcal{A}u \in E$.

★ *Montrons que \mathcal{A} est une contraction dans une boule de E :* On se restreint au sous-ensemble de E suivant : $E_R := \{u \in E; \|u\|_E \leq R\}$ avec $R < +\infty$ fixé (et quelconque pour le moment). Nous notons $\|\cdot\|_{E_R}$ la norme sur E_R définie comme la norme sur E . Par la même technique que précédemment, on a :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}u(t, \cdot) - \mathcal{A}v(t, \cdot)\|_{L^1} &\leq \int_0^t \|\nabla G(t-s, \cdot)\|_{L^1} \|a\|_{L^\infty} \|u^2 - v^2\|_{E_R} ds \\ &\leq \int_0^t \frac{C_0}{\sqrt{t-s}} 2R \|u - v\|_{E_R} ds \\ &\leq 4RC_1 \sqrt{t} \|u - v\|_{E_R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}u(t, \cdot) - \mathcal{A}v(t, \cdot)\|_{L^\infty} &\leq \int_0^t \|\nabla G(t-s, \cdot)\|_{L^1} \|a\|_{L^\infty} \|u^2 - v^2\|_{L^\infty} ds \\ &\leq \int_0^t \frac{C_0}{\sqrt{t-s}} 2R \|u - v\|_{E_R} ds \\ &\leq 4RC_1 \sqrt{t} \|u - v\|_{E_R} \end{aligned}$$

D'où :

$$\|\mathcal{A}u(t, \cdot) - \mathcal{A}v(t, \cdot)\|_{1,\infty} \leq 8RC_1 \sqrt{t} \|u - v\|_{E_R}.$$

- On choisit $R = 2 \|u_0\|_{1,\infty}$, d'où :

$$\|\mathcal{A}u(t, \cdot) - \mathcal{A}v(t, \cdot)\|_{1,\infty} \leq C_2 \|u_0\|_{1,\infty} \sqrt{t} \|u - v\|_{E_R}.$$

- On choisit T tel que

$$C_2 \|u_0\|_{1,\infty} \sqrt{T} \leq \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire :

$$T \leq \left[\frac{1}{2C_2 \|u_0\|_{1,\infty}} \right]^2 = T^*.$$

Alors, puisque $t \in [0, T[$:

$$\|\mathcal{A}u - \mathcal{A}v\|_{E_R} \leq \frac{1}{2} \|u - v\|_{E_R}.$$

On a montré que l'opérateur \mathcal{A} est contractant dans E_R pour $0 \leq t < T < T^*$. On sait donc qu'il existe un point fixe unique u de \mathcal{A} . Celui-ci est solution de l'E.D.P. (F_2) dans E_R , pour $t \in [0, T^*]$.

★ *Obtenons un peu de régularité*: Le point fixe $u \in L^p([0, T^*] \times \mathbb{R}^d)$, $\forall 1 < p < \infty$ et $a \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, donc:

$$u^2 \bar{a} \in C^0([0, T^*], L^p(\mathbb{R}^d)), \forall 1 < p < \infty$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(u^2 a_j) \in C^0([0, T^*], W^{-1,p}(\mathbb{R}^d)), \forall 1 < p < \infty.$$

On utilise un résultat de régularité de Ladyzhenskaya (cf [L], ch.V, p.187) pour en déduire que:

$$\begin{aligned} u &\in C^0(]0, T^*], W^{1,p}(\mathbb{R}^d)), \quad \forall 1 < p < \infty, \\ u &\in C^0([0, T^*], L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)). \end{aligned}$$

A ce stade, nous avons montré l'existence et l'unicité d'une solution locale de (F_2) . Il faut donc prolonger cette solution à $[0, +\infty[$.

(ii) Nous étendons à présent sur $[0, +\infty[$ la solution locale obtenue sur $[0, T^*]$.

Pour les arguments que nous allons utiliser dans la suite, nous avons besoin de régulariser la fonction $a = (a_i)_{1 \leq i \leq d}$.

On se donne un petit paramètre $\varepsilon > 0$ et on définit:

$$a_i^\varepsilon(X) = \frac{X^i}{\|X\| + \varepsilon}, \quad \forall 1 \leq i \leq d.$$

Cette fonction régularisée vérifie: $a^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Remplaçons donc a par a^ε et g par $g^\varepsilon = -(u^\varepsilon)^2 a^\varepsilon$ dans l'équation (F_2) . Nous obtenons l'E.D.P. "régularisée":

$$(F^\varepsilon) \begin{cases} u_t^\varepsilon - \frac{1}{2} \Delta u^\varepsilon = \sum_{i=1}^d \frac{\partial g_i^\varepsilon}{\partial x_i} \\ u^\varepsilon(0, \cdot) = u_0(\cdot) \end{cases}$$

Par similitude avec le (i), il y a existence et unicité d'une solution u^ε de (F^ε) sur l'intervalle de temps fermé $[0, T^*]$. Cette solution vérifie, d'après Ladyzhenskaya:

$$u^\varepsilon \in C^0(]0, T^*]; W^{1,p}(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0, T^*]; L^p(\mathbb{R}^d)). \quad (3.5)$$

De même, on peut établir l'existence d'une solution unique sur un intervalle voisin, par exemple sur $[T^* - \eta, 2T^* - \eta]$. Il suffit donc de recoller les morceaux. Pour cela, il faut montrer que:

$$\exists C > 0; \quad \sup_{0 \leq t \leq T^*} \|u^\varepsilon(t, \cdot)\|_{1,\infty} \leq C, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

On cherche donc à majorer :

$$\int |u^\varepsilon(t, x)| dx = \int u^\varepsilon(t, x) \cdot \operatorname{sgn}(u^\varepsilon(t, x)) dx.$$

Considérons la fonction sgn_η , fonction régularisée de la fonction sgn , telle que :

- sgn_η soit de classe C^1 sur \mathbb{R} ,
- $\operatorname{sgn}_\eta \rightarrow \operatorname{sgn}$ quand $\eta \rightarrow 0$ p.p.,
- $|\operatorname{sgn}_\eta| \leq 1, \quad \forall \eta,$
- $\exists K > 0; \quad 0 \leq \operatorname{sgn}'_\eta \leq \frac{K}{\eta}, \quad \forall \eta.$

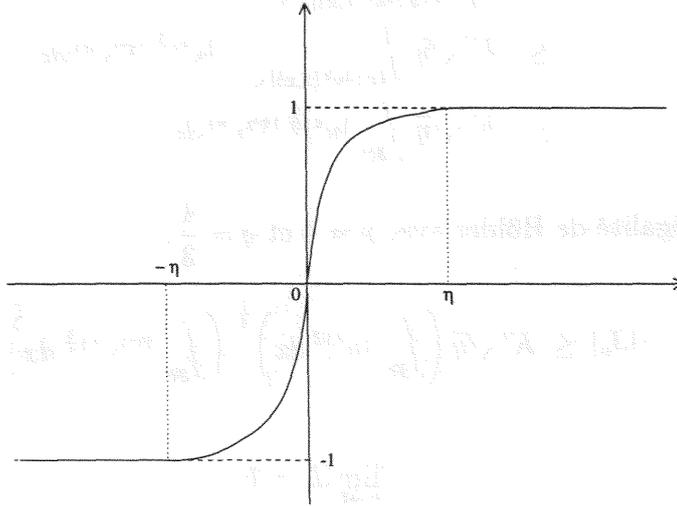


FIG. 1.1: Fonction sgn_η

D'après (3.5), il est légitime, grâce à a^ε , de multiplier par $\operatorname{sgn}_\eta(u^\varepsilon)$ les deux membres de (F^ε) et d'intégrer :

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_i^\varepsilon \operatorname{sgn}_\eta(u^\varepsilon) dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \Delta u^\varepsilon \operatorname{sgn}_\eta(u^\varepsilon) dx = \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial g_i(u^\varepsilon)}{\partial x_i} \operatorname{sgn}_\eta(u^\varepsilon) dx.$$

En intégrant par parties la deuxième intégrale du membre de gauche et celle du membre de droite, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_i^\varepsilon \operatorname{sgn}_\eta(u^\varepsilon) dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u^\varepsilon|^2 \operatorname{sgn}'_\eta(u^\varepsilon) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} g(u^\varepsilon) \nabla(u^\varepsilon) \operatorname{sgn}'_\eta(u^\varepsilon) dx.$$

La dérivée de la fonction sgn_η étant positive, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_i^\varepsilon \operatorname{sgn}_\eta(u^\varepsilon) dx \leq - \int_{\mathbb{R}^d} g(u^\varepsilon) \nabla(u^\varepsilon) \operatorname{sgn}'_\eta(u^\varepsilon) dx. \quad (3.6)$$

Posons

$$\begin{aligned} J_\eta &:= \int_{\mathbf{R}^d} g(u^\varepsilon) \nabla(u^\varepsilon) \operatorname{sgn}'_\eta(u^\varepsilon) dx \\ &= \int_{\{x; |u^\varepsilon(t,x)| < \eta\}} g(u^\varepsilon) \nabla(u^\varepsilon) \operatorname{sgn}'_\eta(u^\varepsilon) dx. \end{aligned}$$

Or $|g(u)| \simeq |u|^2$ car $g = -u^2 a$, et $|\operatorname{sgn}'_\eta(x)| \leq \frac{K}{\eta}$. Donc :

$$\begin{aligned} |J_\eta| &\leq \frac{K}{\eta} \int_{\{x; |u^\varepsilon(t,x)| < \eta\}} |g(u^\varepsilon)| |\nabla u^\varepsilon| dx \\ &\leq \frac{K'}{\eta} \int_{\{x; |u^\varepsilon(t,x)| < \eta\}} |u^\varepsilon|^2 |\nabla u^\varepsilon| dx \\ &\leq \frac{K'}{\eta} \int_{\{x; |u^\varepsilon(t,x)| < \eta\}} |u^\varepsilon|^{1+\frac{1}{2}} |u^\varepsilon|^{\frac{1}{2}} |\nabla u^\varepsilon| dx \\ &\leq K' \sqrt{\eta} \int_{\{x; |u^\varepsilon(t,x)| < \eta\}} |u^\varepsilon|^{\frac{1}{2}} |\nabla u^\varepsilon| dx \\ &\leq K' \sqrt{\eta} \int_{\mathbf{R}^d} |u^\varepsilon|^{\frac{1}{2}} |\nabla u^\varepsilon| dx. \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Hölder avec $p = 4$ et $q = \frac{4}{3}$:

$$|J_\eta| \leq K' \sqrt{\eta} \left(\int_{\mathbf{R}^d} |u^\varepsilon|^2 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla u^\varepsilon|^{\frac{4}{3}} dx \right)^{\frac{3}{4}}.$$

Donc

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} J_\eta = 0.$$

On fait tendre η vers 0 dans (3.6), on a donc :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}^d} u_t^\varepsilon \operatorname{sgn}_\eta(u^\varepsilon) dx \leq 0,$$

$$\text{i.e.} \quad \int_{\mathbf{R}^d} u_t^\varepsilon \operatorname{sgn}(u^\varepsilon) dx \leq 0.$$

On applique à présent le lemme suivant, que nous démontrerons en fin de paragraphe :

Lemme 3.3 Pour $u \in W^{1,1}([0, T] \times \mathbb{R}^d)$, on a :

$$\frac{d}{dt} \int |u(t, x)| dx = \int \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \operatorname{sgn}(u(t, x)) dx.$$

Alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}^d} |u^\varepsilon(t, x)| dx \leq 0.$$

On en déduit que :

$$\|u^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^1} \leq \|u_0\|_{L^1}. \quad (3.7)$$

On procède de même pour la norme dans L^∞ : on pose $m = \|u_0\|_{L^\infty}$ et on multiplie (F^ε) , d'abord par $(u^\varepsilon - m)^+$, puis par $(u^\varepsilon + m)^+$. En appliquant le principe du maximum, on obtient :

$$\|u^\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty} \leq \|u_0\|_{L^\infty}. \quad (3.8)$$

D'après (3.7) et (3.8), on a donc :

$$\|u^\varepsilon(t, \cdot)\|_{1,\infty} \leq \|u_0\|_{1,\infty} \text{ et } \|u^\varepsilon\|_E \leq C.$$

Pour finir, faisons tendre ε vers 0 pour retrouver la solution u .

★ Nous avons montré que u^ε est borné dans $L^1([0, T^*] \times \mathbb{R}^d) \cap L^\infty([0, T^*] \times \mathbb{R}^d)$, donc dans tout $L^p([0, T^*] \times \mathbb{R}^d)$ pour $1 \leq p \leq \infty$. On peut donc extraire une sous-suite qui converge faiblement vers u quand $\varepsilon \rightarrow 0$ dans tout $L^p([0, T^*] \times \mathbb{R}^d)$ pour $1 < p < \infty$. Nous noterons encore (u^ε) cette sous-suite par souci de simplicité.

On sait que u^ε vérifie (F^ε) , et on veut montrer que sa limite u vérifie l'équation (F_2) . On s'intéresse donc à la différence :

$$u_t^\varepsilon - u_t - \frac{1}{2}(\Delta u^\varepsilon - \Delta u) + \operatorname{div}((u^\varepsilon)^2 \vec{a}^\varepsilon) - \operatorname{div}(u^2 \vec{a}).$$

Soit une fonction-test $\varphi \in \mathcal{D}([0, T^*[\times \mathbb{R}^d)$. Nous étudions la limite, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, de :

$$B_\varepsilon = \langle (u^\varepsilon - u)_t, \varphi \rangle - \frac{1}{2} \langle \Delta(u^\varepsilon - u), \varphi \rangle + \langle \operatorname{div}((u^\varepsilon)^2 \vec{a}^\varepsilon - u^2 \vec{a}), \varphi \rangle.$$

Grâce à la convergence faible, les deux premiers termes de B_ε convergent vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Regardons le dernier terme :

$$\begin{aligned} |\langle \operatorname{div}((u^\varepsilon)^2 \vec{a}^\varepsilon - u^2 \vec{a}), \varphi \rangle| &= |\langle (u^\varepsilon)^2 \vec{a}^\varepsilon - u^2 \vec{a}, \varphi' \rangle| \\ &= |\langle (u^\varepsilon)^2 (\vec{a}^\varepsilon - \vec{a}), \varphi' \rangle + \langle ((u^\varepsilon)^2 - u^2) \vec{a}, \varphi' \rangle| \end{aligned} \quad (3.9)$$

Puisque $(u^\varepsilon)^2$ est borné, et $\|\vec{a}^\varepsilon - \vec{a}\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$, le premier terme converge vers 0.

On peut écrire le deuxième terme du second membre de (3.9) sous la forme :

$$\langle [(u^\varepsilon)^2 - u^2] \vec{a}, \varphi' \rangle = \int [(u^\varepsilon)^2 - u^2] \vec{a} \varphi'.$$

Nous avons vu que u et u^ε appartiennent à $W_{loc}^{1,p}$. Cet espace s'injectant de façon compacte dans L_{loc}^p , l'intégrale sur les compacts converge vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Donc B_ε converge vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

De plus, $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$. Nous avons donc montré que, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, la solution u^ε de (F^ε) converge vers une solution u de (F_2) .

★ On a vu que $\int |u^\varepsilon(t, x)| dx \leq C$. Par compacité, on a la convergence p.p. de u^ε vers u . Donc en utilisant le lemme de Fatou, on obtient :

$$\int |u(t, x)| dx \leq C.$$

★ Puisque $\sup_{0 \leq t \leq T^*} \|u^\varepsilon\|_\infty \leq C$, de même on a :

$$\sup_{0 \leq t \leq T^*} \|u\|_\infty \leq C.$$

On en conclut que :

$$\|u\|_E \leq C.$$

Ceci achève la première partie de la démonstration, c'est-à-dire l'existence et l'unicité d'une solution de (F_2) quand $u_0 \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

DEUXIÈME CAS : $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Nous approximons la donnée initiale u_0 par une suite $\{u_{0,n}\} \subset L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $u_{0,n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} u_0$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Soit u_n la solution de l'équation (F_2) avec donnée initiale $u_{0,n}$ que nous notons (F_n) :

$$(F_n) \begin{cases} (u_n)_t - \frac{1}{2} \Delta u_n = -\operatorname{div}(u_n^2 \vec{a}) \\ u_n(0, \cdot) = u_{0,n}(\cdot) \end{cases}$$

D'après la première partie, celle-ci vérifie la propriété de contraction dans L^1 :

$$\|u_n(t, \cdot) - u_m(t, \cdot)\|_{L^1} \leq \|u_{0,n}(t, \cdot) - u_{0,m}(t, \cdot)\|_{L^1}.$$

Ainsi $\{u_n\}$ est une suite de Cauchy dans $C([0, \infty[, L^1(\mathbb{R}^d))$, donc elle converge dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ vers $u \in C([0, \infty[, L^1(\mathbb{R}^d))$. Il est clair que $u(0, x) = u_0(x)$ et que l'on peut passer à la limite dans (F_n) , donc u vérifie (F_2) . La propriété de contraction dans L^1 s'étend à ces solutions, on a donc unicité de la solution.

On peut dans cette situation établir un résultat plus fort de régularité de la solution : u appartient à $L^p([0, \infty[\times \mathbb{R}^d)$ pour $p < p^*$, avec p^* à déterminer. Pour cela, on cherche une constante C_t telle que :

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^p} \leq C_t.$$

Or, d'après (3.2), en utilisant le théorème de Young et le lemme 3.2, on obtient :

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_{L^p} &\leq \|G(t)\|_{L^p} \|u_0\|_{L^1} + \int_0^t \|\nabla G(t-s)\|_{\frac{p}{p-1}} \|a(\cdot) u^2(s, \cdot)\|_{\frac{p}{2}} ds \\ &\leq \frac{K}{t^{\frac{d}{2}(1-\frac{1}{p})}} + \int_0^t \frac{K'}{(t-s)^{\frac{d}{2}(1-\frac{p-1}{p})+\frac{1}{2}}} \|u(s, \cdot)^2\|_{\frac{p}{2}} ds \\ &\leq \frac{K}{t^{\frac{d}{2}(1-\frac{1}{p})}} + \int_0^t \frac{K'}{(t-s)^{\frac{d}{2p}+\frac{1}{2}}} \|u(s, \cdot)\|_{L^p}^2 ds \end{aligned}$$

L'intégrale du membre de droite convergeant lorsque $p < d$, on peut appliquer le lemme de Gronwall qui nous donne :

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^p} \leq C_t.$$

Donc $u \in C^0([0, +\infty], L^p(\mathbb{R}^d))$, $\forall p < p^* = d$.

TROISIÈME CAS : $u_0 \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$.

On approxime u_0 par une suite $\{u_{0,n}\} \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $u_{0,n} \rightarrow u_0$ quand $n \rightarrow +\infty$ dans $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$.

On note comme dans ce cas précédent u_n la solution de (F_n) (équation (F_2) avec donnée initiale $u_{0,n}$). On a vu dans la deuxième partie qu'alors :

$$u_n \in C^0([0, \infty[, L^1(\mathbb{R}^d)) \cap C^0([0, \infty[, L^p(\mathbb{R}^d)) \text{ pour } p < d,$$

et elle vérifie la propriété de contraction dans L^1 . Donc $\{u_n\}$ est une suite de Cauchy dans $C^0([0, \infty[, L^1(\mathbb{R}^d))$, sa limite u appartient à $C^0([0, \infty[, \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d))$. On fait tendre n vers $+\infty$ dans (F_n) , on en déduit que u est solution de (F_2) . Nous avons établi l'existence d'une solution de (F_2) .

L'unicité dans ce cas n'est pas triviale. En utilisant la même technique que M. Escobedo, J.L. Vasquez et E. Zuazua dans [EVZ], nous l'établissons dans le cas où u_0 est la masse de Dirac en 0. Dans ce cas, les densités sont radiales, c'est ce qui nous permet de démontrer l'unicité, contrairement au cas plus général d'une mesure bornée. Il n'apparaît, pas à notre connaissance, dans la littérature sur les E.D.P., que l'on sache résoudre ce problème.

Nous devons à présent nous restreindre à la dimension deux. On pose :

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{et} \quad u(t, x_1, x_2) = \tilde{u}(t, \rho).$$

Alors, \tilde{u} vérifie l'équation :

$$\tilde{u}_t = \frac{1}{2} \tilde{u}_{\rho\rho} + \frac{1}{2\rho} \tilde{u}_\rho - \frac{1}{\rho} \tilde{u}^2 + 2\tilde{u} \tilde{u}_\rho. \quad (3.10)$$

Par souci de simplicité, nous noterons encore \tilde{u} par u .

Nous approchons la masse de Dirac par valeurs supérieures et par valeurs inférieures, par deux suites $\{u_{0,n}\}$ et $\{\bar{u}_{0,n}\}$ appartenant à $L^1(\mathbb{R}^d)$ et à support compact contenu dans un intervalle ouvert $] -r, r[$ avec $r > 0$. Considérons u_n et \bar{u}_n les solutions de (F_2) avec données initiales respectives $u_{0,n}$ et $\bar{u}_{0,n}$. Elles appartiennent à $C^0([0, +\infty[; L^1(\mathbb{R}^d))$ et convergent respectivement vers u et \bar{u} .

Nous introduisons les primitives :

$$v_n(t, \rho) = \int_0^\rho u_n(t, y) y dy \quad \text{et} \quad \bar{v}_n(t, \rho) = \int_0^\rho \bar{u}_n(t, y) y dy.$$

D'après (3.10), elles vérifient l'équation aux dérivées partielles :

$$v_t = \frac{1}{2} v_{\rho\rho} - \frac{1}{2} \frac{v_\rho}{\rho} - \frac{v^2}{\rho}. \quad (3.11)$$

Nous notons M la masse de la donnée initiale u_0 :

$$M := \int u_0(t, y) y dy.$$

Nous remarquons que les masses de u_n et \bar{u}_n convergent, lorsque n converge vers $+\infty$, vers M . Donc, on peut trouver deux suites $\{\varepsilon_n\}$ et $\{\varepsilon'_n\}$ qui convergent vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$ telles que les masses de u_{ε_n} et $\bar{u}_{\varepsilon'_n}$ soient égales. Nous pouvons supposer aussi que leurs données initiales sont de support inclus dans $] -r, r[$.

Nous notons :

$$u_n = u_{\varepsilon_n} \quad \text{et} \quad \bar{u}_n = \bar{u}_{\varepsilon'_n}$$

et v_n et \bar{v}_n les primitives correspondantes.

Puisque $v_n \rightarrow M$ et $\bar{v}_n \rightarrow M$ quand $n \rightarrow +\infty$, on en déduit facilement que :

$$v_n(0, x - 2r) \leq \bar{v}_n(0, x) \leq v_n(0, x + 2r).$$

On applique le principe du maximum, d'où :

$$v_n(t, x - 2r) \leq \bar{v}_n(t, x) \leq v_n(t, x + 2r), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d.$$

On passe à la limite quand $n \rightarrow +\infty$:

$$v(t, x - 2r) \leq \bar{v}(t, x) \leq v(t, x + 2r), \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d.$$

Et, puisque r est arbitraire, on en conclut que :

$$v = \bar{v} \text{ dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d,$$

d'où : $u = \bar{u}$.

Ceci achève la démonstration du théorème 3.1.

Démonstration du lemme 3.3 : $u \in C^0([0, T], L^1(\mathbb{R}^+))$ donc $\int |u(t, x)| dx \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$.

Avec une fonction-test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$, on a :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt} \int |u(t, x)| dx, \varphi \right\rangle &= - \left\langle \int |u(t, x)| dx, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle \\ &= - \left\langle \int u(t, x) \operatorname{sgn}(u(t, x)) dx, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle \\ &= - \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\langle \int u(t, x) \operatorname{sgn}_\eta(u(t, x)) dx, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle \end{aligned}$$

Nous nous intéressons au dernier terme :

$$\begin{aligned} \left\langle \int u(t, x) \operatorname{sgn}_\eta(u(t, x)) dx, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle &= - \left\langle \frac{d}{dt} \int u(t, x) \operatorname{sgn}_\eta(u(t, x)) dx, \varphi \right\rangle \\ &= - \left\langle u_t(t, x) \operatorname{sgn}_\eta(u(t, x)) dx, \varphi \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \int u(t, x) \operatorname{sgn}'_\eta(u(t, x)) u_t(t, x) dx, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

Notons $A_\eta = \langle \int u(t, x) \operatorname{sgn}'_\eta(u(t, x)) u_t(t, x) dx, \varphi \rangle$,

alors :

$$\begin{aligned} |A_\eta| &= \left\langle \int_{\{x; |u(t,x)| < \eta\}} u(t, x) \operatorname{sgn}'_\eta(u(t, x)) u_t(t, x) dx, \varphi \right\rangle \\ &\leq \left\langle \int_{\{x; |u(t,x)| < \eta\}} \eta \frac{K}{\eta} |u_t(t, x)| dx, \varphi \right\rangle \\ &\leq \left\langle \int_{\{x; |u(t,x)| < \eta\}} K |u_t(t, x)| dx, \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

pour les mêmes raisons que dans la démonstration du théorème 3.1 .

D'autre part :

$$\left\langle \int_{\{x; |u(t,x)| < \eta\}} u_t(t, x) dx, \varphi \right\rangle \leq \|\varphi\|_{L^\infty} \int_0^T \int_{\{x; |u(t,x)| < \eta\}} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right| dx dt$$

Et d'après le théorème de Saks (cf. [Sa], ch. IV, th 7.4), on en déduit que :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} A_\eta = 0.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt} \int |u(t, x)| dx, \varphi \right\rangle &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\{ \left\langle \int u_t(t, x) \operatorname{sgn}_\eta(u(t, x)) dx, \varphi \right\rangle + A_\eta \right\} \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\langle \int u_t(t, x) \operatorname{sgn}_\eta(u(t, x)) dx, \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle \int u_t(t, x) \operatorname{sgn}(u(t, x)) dx, \varphi \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+) \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du lemme 3.3 .

1.3.3 Propriétés de la solution u de (F_2)

Nous allons établir dans cet alinea quelques propriétés de la solution u de (F_2) que nous venons d'introduire. Elles sont regroupées dans le théorème suivant. Nous nous restreignons pour plus de facilité à la dimension 2.

Théorème 3.4 Soit u l'unique solution positive de l'E.D.P. (F_2) avec donnée initiale $u_0 = \delta_0$. Alors :

1. $\int_{\mathbb{R}^2} u(t, x) dx = 1, \quad \forall t > 0,$

2. Il existe une fonction $w(t, x)$ à décroissance exponentielle en $x = \pm\infty$ et telle que

$$u(t, x) \leq \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} w\left(t, \frac{x}{t^{\frac{1}{3}}}\right),$$

3. Il existe une constante C positive telle que

$$\forall t > 0, \quad \|u(t, \cdot)\|_{\infty} \leq \frac{C}{t^{\frac{2}{3}}},$$

4. Pour tout $t_0 > 0$, il existe $k(t_0)$ tel que

$$\forall t \geq t_0, \quad \|u_{x_i}(t, \cdot)\|_{\infty} \leq k(t_0), \quad i = 1, 2.$$

où u_{x_i} est la dérivée de u par rapport à sa $i^{\text{ème}}$ variable d'espace.

Démonstration du théorème 3.4 : Nous la ferons dans le cas $d = 2$.

a) Soit u l'unique solution de (F_2) . En dimension deux, la densité u dépend de trois variables : la variable temps et deux variables d'espace. Nous allons tout d'abord la transformer en une solution radiale :

$$u(t, x, y) = v(t, r) \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.8)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right) \\ u_t &= v_t \\ \Delta v &= \frac{1}{r} v_r + v_{rr} \\ \operatorname{div}(u^2 \vec{a}) &= \frac{1}{r} v^2 + 2v v_r \end{aligned}$$

Et l'équation (F_2) devient :

$$v_t - \frac{1}{2} v_{rr} - \frac{1}{2r} v_r = -\frac{1}{r} v^2 - 2v v_r. \quad (3.9)$$

b) Nous allons à présent chercher une solution de la forme :

$$v(t, r) = \frac{1}{t^{2\alpha}} w\left(t, \frac{r}{t^\alpha}\right). \quad (3.10)$$

On considère l'opérateur différentiel L défini par :

$$Lv = v_t - \frac{1}{2} v_{rr} - \frac{1}{2r} v_r + \frac{1}{r} v^2 + 2v v_r.$$

D'après (3.10), en notant w_z la dérivée de w par rapport à sa seconde variable, on a :

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{-2\alpha}{t^{2\alpha+1}} w + \frac{1}{t^{2\alpha}} w_t - \frac{r}{t^{2\alpha}} \frac{\alpha}{t^{\alpha+1}} w_z \\ v_r &= \frac{1}{t^{3\alpha}} w_z \\ v_{rr} &= \frac{1}{t^{4\alpha}} w_{zz} \end{aligned}$$

D'où :

$$Lv = -\frac{2\alpha}{t^{2\alpha+1}} w + \frac{1}{t^{2\alpha}} w_t - \frac{\alpha r}{t^{3\alpha+1}} w_z - \frac{1}{2t^{4\alpha}} w_{zz} - \frac{1}{2rt^{3\alpha}} w_z + \frac{1}{rt^{4\alpha}} w^2 + \frac{2}{t^{5\alpha}} w w_z.$$

Posons $\xi = \frac{r}{t^\alpha}$, alors

$$v(t, r) = \frac{1}{t^{2\alpha}} w(t, \xi).$$

Et

$$Lv = \frac{1}{t^{2\alpha}} w_t + \left\{ -\frac{2\alpha}{t^{2\alpha+1}} w + \frac{1}{\xi} \frac{1}{t^{5\alpha}} w^2 - \xi \frac{\alpha}{t^{2\alpha+1}} w_z - \frac{1}{2\xi} \frac{1}{t^{4\alpha}} w_z + \frac{2}{t^{5\alpha}} w w_z - \frac{1}{2t^{4\alpha}} w_{zz} \right\}$$

Nous allons annuler l'expression entre accolades . Puis nous montrerons que :

(i) $w_t \geq 0$,

(ii) $v \geq 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0} v(t, r) dr = \delta_0$,

(iii) $\sup_{0 \leq t \leq 1} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} w(t, \xi) < +\infty$.

ce qui entraînera que $Lv \geq 0$. Le principe du maximum nous donnera alors : $u \leq v$ et on en déduira le (2) du théorème .

On s'intéresse donc à l'équation :

$$-\frac{2\alpha}{t^{2\alpha+1}} w + \frac{1}{\xi} \frac{1}{t^{5\alpha}} w^2 - \xi \frac{\alpha}{t^{2\alpha+1}} w_z - \frac{1}{2\xi} \frac{1}{t^{4\alpha}} w_z + \frac{2}{t^{5\alpha}} w w_z - \frac{1}{2t^{4\alpha}} w_{zz} = 0.$$

Pour la simplifier, on choisit α tel que $2\alpha + 1 = 5\alpha$, c'est-à-dire : $\alpha = \frac{1}{3}$.

On a donc :

$$-\frac{2}{3} \frac{1}{t^{\frac{5}{3}}} w + \frac{1}{\xi} \frac{1}{t^{\frac{5}{3}}} w^2 - \frac{\xi}{3} \frac{1}{t^{\frac{5}{3}}} w_z - \frac{1}{2\xi} \frac{1}{t^{\frac{4}{3}}} w_z + \frac{2}{t^{\frac{5}{3}}} w w_z - \frac{1}{2} \frac{1}{t^{\frac{4}{3}}} w_{zz} = 0.$$

En multipliant les deux membres cette égalité par $\xi t^{\frac{5}{3}}$, on a :

$$\begin{aligned} -\frac{2\xi}{3} w + w^2 - \frac{\xi^2}{3} w_z - \frac{t^{\frac{1}{3}}}{2} w_z + 2\xi w w_z - \frac{\xi t^{\frac{1}{3}}}{2} w_{zz} &= 0 \\ -\frac{1}{3} (\xi^2 w)' + (\xi w^2)' - \frac{t^{\frac{1}{3}}}{2} (\xi w_z)' &= 0 \\ \frac{t^{\frac{1}{3}}}{2} w' + \frac{1}{3} \xi w &= w^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Résolvons cette équation différentielle par la méthode de variation de la constante :

★ L'équation sans second membre associée est :

$$\frac{t^{\frac{1}{3}}}{2} w' + \frac{1}{3} \xi w = 0.$$

Elle a pour solution :

$$w(t, \xi) = C(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{3t^{\frac{1}{3}}}}.$$

★ On fait varier la constante $C(\xi)$, ainsi (3.11) devient :

$$\frac{t^{\frac{1}{3}}}{2} C'(\xi) = C^2(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{3t^{\frac{1}{3}}}}.$$

On en déduit :

$$C(\xi) = \frac{1}{\frac{2}{t^{\frac{1}{3}}} \int_{\xi}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{3t^{\frac{1}{3}}}} du + \gamma}$$

où γ est une constante ne dépendant pas de ξ . Alors, la solution de (3.11) est :

$$w(t, \xi) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{3t^{\frac{1}{3}}}}}{\frac{2}{t^{\frac{1}{3}}} \int_{\xi}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{3t^{\frac{1}{3}}}} du + \gamma}. \quad (3.12)$$

Ou, si on note $\psi(x) := \int_x^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$:

$$w(t, \xi) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{3t^{\frac{1}{3}}}}}{\frac{\sqrt{6}}{t^{\frac{1}{6}}} \psi\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\xi}{t^{\frac{1}{6}}}\right) + \gamma}. \quad (3.13)$$

Reste le choix de γ à faire de façon à ce que la fonction w ainsi définie satisfasse aux trois conditions (i), (ii) et (iii) décrites précédemment. Si ces trois propriétés sont vérifiées, le principe du maximum nous permettra de dire que v ayant la forme (3.10) est une solution pour l'opérateur L , ce qui prouvera le théorème annoncé.

Choix de γ : Posons $C(t) = t^{\frac{1}{6}}$ ($\lim_{t \rightarrow 0} C(t) = 0$) et introduisons cette notation dans l'expression de w :

$$w(C, \xi) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{3C^2}}}{\frac{\sqrt{6}}{C} \psi\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\xi}{C}\right) + \gamma}. \quad (3.14)$$

On peut établir le résultat suivant:

Lemme 3.5

Soit $k: [0, 1] \rightarrow [k_0^2, k_1^2]$ tel que: $\star k(0) = k_0^2$ avec $\int_0^{k_0} \frac{\xi}{3} d\xi = 1$

$\star k$ est une fonction croissante et continue.

Soit:

$$w(C, \xi) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{3C^2}}}{\frac{\sqrt{6}}{C} \psi\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\xi}{C}\right) + \exp\left(-\frac{k(C)}{3C^2}\right)}. \quad (3.15)$$

Alors:

1. $\sup_{0 < C \leq 1} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} w(C, \xi) < +\infty$,
2. $\lim_{C \rightarrow 0} w(C, \xi) = \mathbb{1}_{[0, k_0]}(\xi) \frac{\xi}{3}$,
3. $\lim_{C \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} w(C, \xi) d\xi = 1$.

Démonstration du lemme 3.5:

Montrons déjà le (1): puisque $k(C) \leq k_1^2$, on a:

$$w(C, \xi) \leq \frac{e^{-\frac{\xi^2}{3C^2}}}{\frac{\sqrt{6}}{C} \psi\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\xi}{C}\right) + e^{-\frac{k_1^2}{3C^2}}}. \quad (3.16)$$

- Si $\xi \leq 0$, d'après (3.16) on a:

$$w(C, \xi) \leq \frac{e^{-\frac{\xi^2}{3C^2}}}{\frac{\sqrt{6}}{C} \psi(0)} \leq C \frac{e^{-\frac{\xi^2}{3C^2}}}{\psi(0)} \leq K$$

car $C \leq 1$ si $0 \leq t \leq 1$.

- Si $\xi > k_1$, on a: $w(C, \xi) \leq \frac{e^{-\frac{\xi^2}{3C^2}}}{e^{-\frac{k_1^2}{3C^2}}} \leq e^{-\frac{1}{3C^2}(\xi^2 - k_1^2)} \leq 1$.

- Si $0 \leq \xi \leq k_1$, puisque $\forall \xi \geq 0, \exists 0 < \beta_1 < \beta_2$ tels que :

$$\beta_1 \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \leq \psi(\xi) \leq \beta_2 \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

on a :

$$w(C, \xi) \leq \frac{e^{-\frac{\xi^2}{3C^2}}}{\frac{\sqrt{6}}{C} \psi\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\xi}{C}\right)} \leq \frac{C \sqrt{1 + \frac{2\xi^2}{3C^2}}}{\sqrt{6} \beta_1} \leq K.$$

Ceci démontre le (1) . Les deux autres points se démontrent de la même manière, en utilisant le théorème de la convergence dominée pour le (3) .

Choix de k :

On pose $k(C) = k_0^2 (1 + 2\lambda C)$.

En notant :

$$\rho(C) := C e^{-\frac{k_0^2(1+2\lambda C)}{3C^2}},$$

on a :

$$w(C, \xi) = \frac{C e^{-\frac{\xi^2}{3C^2}}}{\sqrt{6} \psi\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\xi}{C}\right) + \rho(C)}. \quad (3.17)$$

Lemme 3.6 Avec ce choix de $k(C)$, et pour λ assez grand, on a :

$$\frac{\partial w}{\partial C}(C, \xi) \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Démonstration du lemme 3.6 :

Dérivons w ainsi exprimé ((3.17)) par rapport à C :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial C} = & \frac{1}{\left[\sqrt{6} \psi\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\xi}{C}\right) + \rho(C)\right]^2} \cdot \left[\left(e^{-\frac{\xi^2}{3C^2}} + C \frac{\xi^2}{3} \frac{2}{C^3} e^{-\frac{\xi^2}{3C^2}} \right) \left(\sqrt{6} \psi\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\xi}{C}\right) + \rho(C) \right) \right. \\ & \left. - C e^{-\frac{\xi^2}{3C^2}} \left(\sqrt{6} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\xi}{C^2} e^{-\frac{\xi^2}{3C^2}} + \rho'(C) \right) \right] \end{aligned}$$

Posons $B := \frac{e^{-\frac{\xi^2}{3C^2}}}{\left[\sqrt{6} \psi\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\xi}{C}\right) + \rho(C)\right]^2}$.

Alors :

$$\frac{\partial w}{\partial C} = B \cdot \left[\left(1 + \frac{2\xi^2}{3C^2} \right) \left(\sqrt{6} \psi\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\xi}{C}\right) + \rho(C) \right) - \frac{2\xi}{C} e^{-\frac{\xi^2}{3C^2}} - C \rho'(C) \right].$$

Posons $y := \frac{\xi}{C} \geq 0$, alors :

$$\frac{\partial w}{\partial C} = B \cdot \left[\left(1 + \frac{2}{3}y^2\right) \left(\sqrt{6}\psi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}y\right) + \rho(C)\right) - 2y e^{-\frac{y^2}{3}} - C\rho'(C) \right].$$

Il nous suffit donc de voir que

$$H(y) := (3 + 2y^2) \left(\sqrt{6}\psi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}y\right) + \rho(C)\right) - 6y e^{-\frac{y^2}{3}} - 3C\rho'(C)$$

est positif pour tout y et C assez petit .

Soit

$$H_1(y) := \sup_C \{3C\rho'(C) - (3 + 2y^2)\rho(C)\}.$$

On cherche tout d'abord une majoration de ce supremum .

Lemme 3.7 Pour λ assez grand :

$$\sup_{C < \eta} \{3C\rho'(C) - (3 + 2y^2)\rho(C)\} \leq \gamma(\eta) e^{-\frac{y^2}{3} - |y|}, \quad \forall y.$$

où $\gamma(\eta) \rightarrow 0$ quand $\eta \rightarrow 0$.

Démonstration du lemme 3.7 : Calculons explicitement $3C\rho'(C) - (3 + 2y^2)\rho(C)$.

D'après la définition de $\rho(C)$, on a :

$$\rho'(C) = e^{-\frac{k_0^2(1+2\lambda C)}{3C^2}} \left\{ 1 + \frac{2\lambda k_0^2}{3C} + \frac{2k_0^2}{3C^2} \right\}$$

On a alors, en notant $\alpha := \frac{k_0^2}{3}$:

$$\sup_{C < \eta} [3C\rho'(C) - (3 + 2y^2)\rho(C)] = \sup_{C < \eta} \left\{ \frac{2k_0^2}{C} + 2\lambda k_0^2 - 2y^2 C \right\} e^{-\frac{k_0^2(1+2\lambda C)}{3C^2}}.$$

Ce sup est atteint en un point C tel que $\frac{2k_0^2}{C} + 2\lambda k_0^2 - 2y^2 C \geq 0$, c'est-à-dire tel que :

$$C \leq \frac{3\lambda\alpha + \sqrt{36\lambda^2\alpha^2 + 48\alpha y^2}}{4y^2}.$$

On en déduit que :

$$\sup_{C < \eta} [3C\rho'(C) - (3 + 2y^2)\rho(C)] \leq \sup_{\{C : \frac{1}{C} \geq \frac{4y^2}{3\lambda\alpha + \sqrt{36\lambda^2\alpha^2 + 48\alpha y^2}}\}} e^{-\frac{\alpha}{C^2}(1 + \frac{3\lambda C}{2})}.$$

$$\sup_{C < \eta} e^{-\frac{\alpha\lambda}{2C}} \left[\frac{6\alpha}{C} + 3\lambda\alpha \right]$$

Puisque

$$\sup_{\lambda > 1} \sup_{C < \eta} e^{-\frac{\alpha \lambda}{2C}} \left[\frac{6\alpha}{C} + 3\lambda\alpha \right] := \gamma(\eta) \rightarrow 0 \text{ quand } \eta \rightarrow 0,$$

on a :

$$\sup_{C < \eta} \left[3C \rho'(C) - (3 + 2y^2) \rho(C) \right] \leq \gamma(\eta) \exp \left\{ -\frac{\alpha 16 y^4}{(3\lambda\alpha + \sqrt{36\lambda^2\alpha^2 + 48\alpha y^2})^2} - \frac{\frac{3\alpha}{2} \lambda 4 y^2}{3\lambda\alpha + \sqrt{36\lambda^2\alpha^2 + 48\alpha y^2}} \right\}.$$

Mais il est clair que :

$$-\frac{\alpha 16 y^4}{(3\lambda\alpha + \sqrt{36\lambda^2\alpha^2 + 48\alpha y^2})^2} - \frac{\frac{3\alpha}{2} \lambda 4 y^2}{3\lambda\alpha + \sqrt{36\lambda^2\alpha^2 + 48\alpha y^2}} \geq \frac{y^2}{3} + |y| - K$$

dès que λ est assez grand . Ceci démontre le lemme 3.7 .

Il reste à voir que, pour $C < \eta$:

$$\bar{H}(y) = (3 + 2y^2) \sqrt{6} \psi \left(\sqrt{\frac{2}{3}} y \right) - 6y e^{-\frac{y^2}{3}} - \gamma(\eta) e^{-\frac{y^2}{3} - |y|}$$

est strictement positif pour tout y réel (en fait, il suffit de l'observer pour $y \geq 0$) .

$$\text{Posons } l(y) := \left\{ \sqrt{6} \psi \left(\sqrt{\frac{2}{3}} y \right) - \frac{6y}{3 + 2y^2} e^{-\frac{y^2}{3}} \right\} - \gamma(\eta) \frac{1}{3 + 2y^2} e^{-\frac{y^2}{3} - |y|}.$$

$\lim_{y \rightarrow \infty} l(y) = 0$ et $l(0) > 0$, donc il suffit de montrer que $l'(y) < 0$, $\forall y \geq 0$.

$$\begin{aligned} l'(y) &= e^{-\frac{y^2}{3}} \left\{ -2 - \frac{18 - 12y^2}{(3 + 3y^2)^2} + \frac{4y^2}{3 + 2y^2} \right\} + \gamma(\eta) \left\{ \frac{4y}{(3 + 2y^2)^2} + \frac{2y + 3}{3(3 + 2y^2)} \right\} e^{-\frac{y^2}{3} - y} \\ &= e^{-\frac{y^2}{3}} \left\{ \frac{-36}{(3 + 2y^2)^2} + \gamma(\eta) e^{-y} \frac{4y^3 + 6y^2 + 18y + 9}{3(3 + 2y^2)^2} \right\} \end{aligned}$$

Ceci prouve que l est décroissante pour η assez petit, et achève la démonstration du lemme 3.6 qui montre que $Lv \geq 0$. On a établi le (i) cherché (cf. p. 27) .

Il reste à montrer les points (ii) et (iii) . Montrons que $v \geq 0$:

$$\xi = \frac{r}{t^{\frac{1}{3}}} \text{ donc } v(t, r) = \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} w(t, \frac{r}{t^{\frac{1}{3}}}).$$

D'où :

$$v(t, r) = \frac{e^{-\frac{r^2}{3t}}}{2 \int_r^\infty e^{-\frac{v^2}{3t}} dv + \gamma} \quad (3.18)$$

ou

$$v(t, r) = \frac{e^{-\frac{r^2}{3t}}}{\sqrt{6t} \psi\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{r}{\sqrt{t}}\right) + \gamma}. \quad (3.19)$$

Il est clair que $v \geq 0$.

Montrons à présent que $\lim_{t \rightarrow 0} \int v(t, r) dr = \delta_0$:

Avec $C(t) = t^{\frac{1}{6}}$, on a :

$$w(C, \xi) = \frac{C e^{-\frac{\xi^2}{3C^2}}}{\sqrt{6} \psi\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\xi}{C}\right) + e^{-\frac{k_0^2(1+2\lambda C)}{3C^2}}}. \quad (3.20)$$

En utilisant la majoration de la queue de la gaussienne, on obtient :

$$\psi\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\xi}{C}\right) \sim_{C \rightarrow 0} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{C}{\xi} e^{-\frac{\xi^2}{3C^2}}.$$

Donc : $w(C, \xi) \sim_{C \rightarrow 0} \frac{\xi}{3}$. De plus, si $|\xi| < \sqrt{3}$, la fonction $w(C, \xi)$ converge au voisinage de $C = 0$. Donc :

$$\lim_{C \rightarrow 0} w(C, \xi) = \frac{\xi}{3} \mathbb{1}_{\{0 < \xi < \sqrt{3}\}}.$$

On peut alors conclure par :

$$\lim_{t \rightarrow 0} v(t, r) = \delta_0(r).$$

Montrons le (iii) : $\sup_{0 < C \leq 1} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} w(t, \xi) < +\infty$.

Pour $0 < C \leq 1$, $e^{-\frac{\xi^2}{3C^2}} \leq e^{-\frac{\xi^2}{3}}$. Pour ξ grand, fixons un ξ_1 et supposons que $\xi > \xi_1$, alors :

$$e^{-\frac{\xi^2}{3C^2}} \leq e^{-\frac{\xi_1^2}{3}} = K_1 < +\infty.$$

D'autre part, le dénominateur D de w défini en (3.20) étant strictement positif,

$$w(t, \xi) \leq \frac{K_1}{D} = K < +\infty.$$

On a donc montré ce que l'on voulait.

Ceci nous permet d'établir les points (1) et (2) du théorème.

c) On vient de voir que $\sup_{0 < C \leq 1} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} w(t, \xi) < +\infty$, donc :

$$\|v(t, \cdot)\|_{\infty} \leq \frac{K}{t^{\frac{2}{3}}}, \quad \forall t > 0.$$

D'où le (3).

d) Le point (4) provient de résultats généraux sur les opérateurs paraboliques quasi-linéaires, l'opérateur L étant uniformément elliptique grâce au terme Δu ; cf. [LSU] p. 417 et suivantes.

Donc :

$$\forall t_0 > 0, \exists k(t_0) \text{ tel que } \forall t \geq t_0, \quad \|u_{x_i}(t, \cdot)\|_{\infty} \leq k(t_0)$$

où u_{x_i} est la dérivée de u par rapport à sa $i^{\text{ième}}$ variable espace.

Ceci achève la démonstration du théorème 3.4.

1.4 Résolution de l'E.D.S. (E_2)

Maintenant que nous avons résolu l'E.D.P. (F_2) satisfaite par la densité, nous sommes en mesure d'établir le résultat suivant :

Théorème 4.1 *L'E.D.S. (E_2) possède une solution faible unique .*

Démonstration du théorème 4.1 :

a) Existence

Nous l'établissons en dimension d , celle-ci n'intervenant pas dans les calculs .

Soit $\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ une fonction régulière, croissante, nulle sur un voisinage de zéro et valant 1 pour t plus grand qu'un certain t_0 . Soit par ailleurs la solution u de l'E.D.P. (F_2) .

Considérons l'E.D.S. suivante :

$$(E^\gamma) \begin{cases} X_t^{\gamma,i} = B_t^i + \int_0^t \gamma(s) a_i(X_s^\gamma) u(s, X_s^\gamma) ds \\ X_0^{\gamma,i} = 0 \quad i = 1, \dots, d; 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Les coefficients de cette E.D.S. étant bornés et boréliens ($b_i(X_s) = a_i(X_s) u(s, X_s) \gamma(s)$ et $\sigma_{ij}(X_s) = 1$), et la matrice $(a_{ij})_{i,j} = \mathbb{1}_{d \times d}$ étant uniformément définie positive (avec les notations classiques des coefficients d'une E.D.S.), (E^γ) admet une solution unique . On peut voir ceci en utilisant l'approche du problème des martingales de Stroock et Varadhan, cf. par exemple [KS] p. 327 (4.32) .

D'autre part, notons $\| \cdot \|_\alpha$ la norme höldérienne d'indice α sur $[0, 1]$. Alors pour tout $i = 1, \dots, d$, puisque $|\gamma| \leq 1$, $\| a \|_\infty \leq 1$ et d'après le (3) du théorème 3.4, on a :

$$\begin{aligned} \| X^{\gamma,i} \|_\alpha &\leq \| B^i \|_\alpha + \sup_{t,t'} \frac{1}{|t-t'|^\alpha} \left| \int_t^{t'} \gamma(s) a_i(X_s^\gamma) u(s, X_s^\gamma) ds \right| \\ &\leq \| B^i \|_\alpha + \sup_{t,t'} \frac{1}{|t-t'|^\alpha} \int_t^{t'} \frac{C}{s^{\frac{2}{3}}} ds \\ &\leq \| B^i \|_\alpha + 3C \sup_{t,t'} \frac{|t'^{\frac{1}{3}} - t^{\frac{1}{3}}|}{|t-t'|^\alpha} \\ &\leq \| B^i \|_\alpha + 3C \sup_{t,t'} \frac{|t-t'|^{\frac{1}{3}}}{|t-t'|^\alpha} \end{aligned}$$

Ainsi, pour $\alpha < \frac{1}{3}$, $X^{\gamma,i}$ varie dans une partie bornée de l'espace des fonctions höldériennes d'indice α , donc dans une partie compacte des fonctions höldériennes d'indice α' avec $\alpha' < \alpha < \frac{1}{3}$.

Soit maintenant une suite (γ_n) de fonctions ayant les mêmes propriétés que γ et telle que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = \mathbb{1}_{]0, +\infty]}$. Chaque E.D.S. (E^{γ_n}) possède une unique solution, que nous notons X^{γ_n} .

On peut extraire de $(X^{\gamma_n})_n$ une sous-suite convergente en norme höldérienne vers un processus X , puisque nous avons montré plus haut que X^{γ_n} est relativement compacte en norme höldérienne. Evidemment, la sous-suite extraite converge uniformément. Il existe donc X tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_t^{\gamma_n} = X_t, \forall t$.

On a alors $(\forall t \in [0, T])$, où on note encore γ_n la sous-suite extraite):

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n(s) a_i(X_s^{\gamma_n}) u(s, X_s^{\gamma_n}) = a_i(X_s) u(s, X_s)$,
- puisque $|\gamma_n(s) a_i(X_s^{\gamma_n}) u(s, X_s^{\gamma_n})| \leq \frac{C}{s^3}$, on peut appliquer le théorème de Lebesgue qui nous donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \gamma_n(s) a_i(X_s^{\gamma_n}) u(s, X_s^{\gamma_n}) ds = \int_0^t a_i(X_s) u(s, X_s) ds.$$

Ces deux points étant vrais pour $i = 1, \dots, d$, ils établissent que X est solution de l'E.D.S. (E_2) . On a donc montré l'existence d'au moins une solution de (E_2) .

b) Unicité

Nous l'établissons en dimension 2. Soient $((X^{k,i})_{i=1,2}, u^k), k = 1, 2$, deux solutions de l'E.D.S. (E_2) avec donnée initiale δ_0 . Dans le paragraphe 1.3, nous avons établi l'unicité de la densité u , solution de (F_2) . On a donc l'égalité : $u^1 = u^2 = u$. On veut montrer que les processus X^1 et X^2 sont égaux. Ces processus étant bidimensionnels, nous raisonnons sur leur module et leur argument. Nous notons respectivement ρ et θ le module et l'argument d'un processus X :

$$X_t = \rho_t e^{i\theta_t} \iff \begin{cases} \rho_t = \sqrt{(X_t^1)^2 + (X_t^2)^2} \\ \theta_t = \arctan\left(\frac{X_t^2}{X_t^1}\right) \end{cases}$$

Intéressons-nous tout d'abord aux modules ρ^1 et ρ^2 respectifs des processus X^1 et X^2 . On a :

$$\begin{aligned} |\rho_t^1 - \rho_t^2| &= \sqrt{(X_t^{1,1} - X_t^{2,1})^2 + (X_t^{1,2} - X_t^{2,2})^2} \\ &\leq |X_t^{1,1} - X_t^{2,1}| + |X_t^{1,2} - X_t^{2,2}| \end{aligned} \quad (4.1)$$

Or :

$$X_t^{1,i} - X_t^{2,i} = \int_0^t \{a_i(X_s^1) u(s, X_s^1) - a_i(X_s^2) u(s, X_s^2)\} ds \quad (i = 1, 2).$$

Supposons qu'il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $X_{t_0}^{1,i} = X_{t_0}^{2,i}, i = 1, 2$ (d'où : $\rho_{t_0}^1 = \rho_{t_0}^2$), et désignons par $\|\cdot\|_{\alpha, [t_0-\eta, t_0+\eta]}$ la norme höldérienne d'indice α d'une fonction sur l'intervalle $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$.

Nous allons utiliser le fait que l'origine est un point polaire . En effet, si nous considérons la fonction

$$\varphi(x_1, x_2) = \log(x_1^2 + x_2^2),$$

il est clair que $L\varphi \geq 0$, avec L le générateur de X , et que 0 est un pôle de φ . Donc les trajectoires de reviennent jamais en zéro .

Pour éliminer la singularité en zéro (dûe à la fonction a_i), nous nous plaçons sur un petit intervalle $[t, t']$ ne contenant pas 0, donc les distances entre l'origine et les deux trajectoires sont strictement positives . La fonction $a_i(\cdot)u(t, \cdot)$, pour $i = 1, 2$, est donc lipschitzienne et on a :

$$\|X^{1,i} - X^{2,i}\|_{\alpha, [t_0-\eta, t_0+\eta]} \leq \sup_{t, t' \in [t_0-\eta, t_0+\eta]} \frac{1}{|t - t'|^\alpha} \int_t^{t'} |a_i(X_s^1)u(s, X_s^1) - a_i(X_s^2)u(s, X_s^2)| ds.$$

Puisque $X_{t_0}^1 = X_{t_0}^2$, et d'après le (4) du théorème 3.4 :

$$\begin{aligned} \|X^{1,i} - X^{2,i}\|_{\alpha, [t_0-\eta, t_0+\eta]} &\leq \sup_{t, t' \in [t_0-\eta, t_0+\eta]} k(t_0) \frac{1}{|t - t'|^\alpha} \int_t^{t'} |X_s^1 - X_s^2| ds \\ &\leq k(t_0) \eta^\alpha \|X^1 - X^2\|_{\alpha, [t_0-\eta, t_0+\eta]} \sup_{t, t'} \frac{|t - t'|}{|t - t'|^\alpha} \\ &\leq \varepsilon(t_0, \eta) \|X^1 - X^2\|_{\alpha, [t_0-\eta, t_0+\eta]}, \end{aligned}$$

où $\lim_{\eta \rightarrow 0} \varepsilon(t_0, \eta) = 0$. De (4.1), on déduit :

$$\|\rho^1 - \rho^2\|_{\alpha, [t_0-\eta, t_0+\eta]} \leq 2\varepsilon(t_0, \eta) \|X^1 - X^2\|_{\alpha, [t_0-\eta, t_0+\eta]}.$$

Ainsi, pour η assez petit,

$$\|\rho^1 - \rho^2\|_{\alpha, [t_0-\eta, t_0+\eta]} = 0$$

et :

$$\rho^1 = \rho^2 \text{ sur } [t_0 - \eta, t_0 + \eta].$$

On itère cet argument et on en déduit que :

$$\text{si } \rho_{t_0}^1 = \rho_{t_0}^2 \text{ pour un } t_0 > 0, \text{ alors } \rho_t^1 = \rho_t^2, \forall t. \quad (4.2)$$

De plus, le module $(\rho_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Markov satisfaisant à l'E.D.S. suivante (obtenue en appliquant la formule d'Itô à $\rho_t = \sqrt{(X_t^1)^2 + (X_t^2)^2}$) :

$$d\rho_t = \frac{X_t^1 dB_t^1 + X_t^2 dB_t^2}{\rho_t} + \left(u(t, X_t) + \frac{1}{2\rho_t}\right) dt \quad (4.3)$$

$$= dW_t + \left(v(t, \rho_t) + \frac{1}{2\rho_t}\right) dt$$

où $\frac{X_t^1 B_t^1 + X_t^2 B_t^2}{\rho_t} = W_t$ est un mouvement brownien réel, et v désigne la densité de la solution de (E_2) sous sa forme radiale (cf. section 1.3.3) .

On en déduit l'équation satisfaite par la densité du module, que nous notons d :

$$d_t - \frac{1}{2} d_{\rho\rho} + \left[\left(v + \frac{1}{2\rho}\right) d\right]_\rho = 0. \quad (4.4)$$

où d_ρ et $d_{\rho\rho}$ désignent les dérivées première et seconde de d par rapport à sa variable d'espace ρ . On peut écrire la densité du module en fonction de la densité du processus, c'est-à-dire :

$$d(t, x) = 2\pi \rho v(t, \rho).$$

Ainsi, en remplaçant d par cette formule dans l'E.D.P. (4.4), on retrouve l'E.D.P. radiale vérifiée par v : l'équation (3.9). Celle-ci ayant une solution unique, on en déduit que l'équation (4.4) a également une solution unique, ce qui signifie qu'il y a unicité en loi pour le module solution de l'E.D.S. (4.3). Les v.a. $(\rho^1 \vee \rho^2)$ et $(\rho^1 \wedge \rho^2)$ étant solutions de cette E.D.S., elles ont donc même loi, et sont égales d'après (4.2). Alors les modules ρ^1 et ρ^2 sont égaux : $\rho_t^1 = \rho_t^2, \forall t \geq 0$.

Examinons à présent leur argument θ^1 et θ^2 . Nous allons voir qu'ils ont même loi. En effet, appliquons la formule d'Itô à $\theta_t = \arctan\left(\frac{X_t^2}{X_t^1}\right)$:

$$\begin{aligned} \arctan\left(\frac{X_t^2}{X_t^1}\right) &= \arctan\left(\frac{X_s^2}{X_s^1}\right) - \int_s^t \frac{X_r^2}{(X_r^1)^2 + (X_r^2)^2} dX_r^1 + \int_s^t \frac{X_r^1}{(X_r^1)^2 + (X_r^2)^2} dX_r^2 \\ &\quad - \int_s^t \frac{X_r^1 X_r^2}{[(X_r^1)^2 + (X_r^2)^2]^2} d\langle X^1 \rangle_r + \int_s^t \frac{X_r^1 X_r^2}{[(X_r^1)^2 + (X_r^2)^2]^2} d\langle X^2 \rangle_r \\ \arctan\left(\frac{X_t^2}{X_t^1}\right) &= \arctan\left(\frac{X_s^2}{X_s^1}\right) - \int_s^t \frac{X_r^2}{(X_r^1)^2 + (X_r^2)^2} \left[dB_r^1 + \frac{X_r^1}{\sqrt{(X_r^1)^2 + (X_r^2)^2}} u(r, X_r^1) dr \right] \\ &\quad + \int_s^t \frac{X_r^1}{(X_r^1)^2 + (X_r^2)^2} \left[dB_r^2 + \frac{X_r^2}{\sqrt{(X_r^1)^2 + (X_r^2)^2}} u(r, X_r^2) dr \right] \\ &\quad - \int_s^t \frac{X_r^1 X_r^2}{[(X_r^1)^2 + (X_r^2)^2]^2} dr + \int_s^t \frac{X_r^1 X_r^2}{[(X_r^1)^2 + (X_r^2)^2]^2} dr \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\theta_t = \theta_s + \int_s^t \frac{X_r^1 dB_r^2 - X_r^2 dB_r^1}{(X_r^1)^2 + (X_r^2)^2}. \quad (4.5)$$

Donc l'argument $(\theta_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien changé de temps d'après le théorème de Dubins-Schwartz :

$$\theta_t - \theta_s = \beta \int_s^t \frac{1}{(\rho_r)^2} dr,$$

avec $(\beta_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard unidimensionnel, celui-ci étant indépendant du module $(\rho_t)_{t \geq 0}$ car le produit scalaire des mouvements browniens décrivant θ et ρ est nul (cf. (4.3) et (4.5)).

Nous aurons donc :

$$\theta_t^1 - \theta_s^1 = \beta^1 \int_s^t \frac{1}{(\rho_r^1)^2} dr \quad \text{et} \quad \theta_t^2 - \theta_s^2 = \beta^2 \int_s^t \frac{1}{(\rho_r^2)^2} dr$$

avec β^1 et β^2 deux mouvements browniens indépendants . Donc les arguments $\theta_t^1 - \theta_s^1$ et $\theta_t^2 - \theta_s^2$ ont même loi, pour tout $t \geq s$, à s fixé .

Ainsi les processus $(X_t^1; t \geq s)$ et $(X_t^2; t \geq s)$ ont même loi pour tout $s \geq 0$. Leur loi de probabilité coïncident donc sur la filtration engendrée par les X après l'instant s : $\mathcal{F}_s = \sigma\{X_u; u \geq s\}$, pour tout s . Or puisque $X_0 = 0$ et $\sigma\{X_u; u \geq 0\} \subset \left(\bigvee_{s \geq 0} \mathcal{F}_s\right)$, les lois coïncident sur $\left(\bigvee_{s \geq 0} \mathcal{F}_s\right)$. Donc $(X_t^1; t \geq 0)$ et $(X_t^2; t \geq 0)$ ont même loi, ce qui démontre l'unicité de la solution de (E_2) et achève la démonstration du théorème 4.1 .

1.5 Phénomène d'instabilité

Dans cette partie, nous nous intéressons au processus $(X_t^\varepsilon)_{t \geq 0}$ solution de l'équation différentielle stochastique :

$$(E_2^\varepsilon) \begin{cases} X_t^{\varepsilon,i} = \varepsilon B_t^i + \int_0^t a_i(X_s^\varepsilon) u^\varepsilon(s, X_s^\varepsilon) ds, & i = 1, 2 \\ X_0^{\varepsilon,i} = 0, & i = 1, 2 \\ u^\varepsilon \text{ est la densité de } X^\varepsilon \end{cases}$$

où ε est un petit paramètre strictement positif, $\{B_t = (B_t^1, B_t^2)\}_{t \geq 0}$, est un mouvement brownien bidimensionnel issu de zéro, et

$$a_i(x_1, x_2) = \frac{x_i}{\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}}.$$

Notre but est de regarder comment se comporte X^ε lorsque l'on fait tendre ε vers 0 .

Ce que nous avons vu dans la partie 1.3 pour l'équation (E_2) s'applique aussi à l'équation (E_2^ε) : la densité u^ε du processus X^ε vérifie l'E.D.P. :

$$(F_2^\varepsilon) \begin{cases} u_t^\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta u^\varepsilon = -\operatorname{div}((u^\varepsilon)^2 \vec{a}) \\ \lim_{t \rightarrow 0} u^\varepsilon(t, x) dx = \delta_0 \end{cases}$$

et cette E.D.P. admet une solution unique .

Pour étudier cette solution, on procède comme dans la démonstration du théorème 3.4 . On transforme la densité u^ε de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(t, x, y) &= v^\varepsilon(t, r) \quad \text{avec } r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} w^\varepsilon(t, \xi) \quad \text{avec } \xi = \frac{r}{t^{\frac{1}{3}}} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Par la même méthode, on exhibe une équation satisfaite par une sursolution w^ε :

$$-\frac{1}{3} \xi w^\varepsilon + (w^\varepsilon)^2 - \frac{\varepsilon^2}{2} t^{\frac{1}{3}} (w^\varepsilon)' = 0.$$

Et on calcule explicitement sa solution :

$$w^\varepsilon(t, \xi) = \frac{\varepsilon t^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{6}} \frac{e^{-\frac{\xi^2}{3\varepsilon^2 t^{\frac{1}{3}}}}}{\psi\left(\frac{\xi}{\varepsilon t^{\frac{1}{6}}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) + \frac{\sqrt{2\pi}}{2\varepsilon^2 t^{\frac{1}{3}} - 1}}. \quad (5.2)$$

Elle vérifie :

- **P1** w^ε est de classe C^∞ , positive, d'intégrale égale à 1 et décroît exponentiellement à l'infini .
- **P2** $\sup_{\xi} w^\varepsilon(t, \xi) = C_\varepsilon$ et $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} C_\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{3}}$.
- **P3** $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w^\varepsilon(t, \xi) = \frac{\xi}{3} \mathbb{1}_{\{0 < \xi < \sqrt{6}\}}$ et cette convergence est uniforme sur $]\delta, \sqrt{6} - \delta]$, $\forall \delta > 0$.

On note

$$w_0(t, \xi) := \frac{\xi}{3} \mathbb{1}_{\{0 \leq \xi \leq \sqrt{6}\}} .$$

D'après (5.1) :

$$u^\varepsilon(t, x, y) \leq v^\varepsilon(t, r) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{6}t} \frac{e^{-\frac{r^2}{3\varepsilon^2 t}}}{\psi\left(\frac{r}{\varepsilon\sqrt{t}} \sqrt{\frac{2}{3}}\right) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\exp\left(\frac{2}{\varepsilon^2 t^{\frac{1}{3}}}\right) - 1}} , \quad (5.3)$$

On en déduit, avec

$$v_0(t, r) = \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} w_0\left(t, \frac{r}{t^{\frac{1}{3}}}\right) = \frac{r}{3t} \mathbb{1}_{\{0 \leq r \leq \sqrt{6}t^{\frac{1}{3}}\}} ,$$

et le fait que cette fonction soit une sous-solution, que u^ε a la même limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, c'est-à-dire :

$$u_0(t, x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(t, x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{3t} \mathbb{1}_{\{0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{6}t^{\frac{1}{3}}\}} .$$

Raisonnons heuristiquement à l'aide d'un résultat classique de la théorie des grandes déviations (cf. [A] ch. 3) que nous rappelons dans le lemme suivant :

Lemme 5.1 *Considérons l'E.D.S. $X_t^\varepsilon = \varepsilon B_t + \int_0^t b_\varepsilon(s, X_s^\varepsilon) ds$.*

Si on suppose que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_\varepsilon = b_0$ uniformément , le processus X_t^ε converge vers la solution de :

$$\begin{cases} \dot{Z}_t = b_0(t, Z_t) \\ Z_0 = 0 . \end{cases}$$

Ce résultat ne s'applique pas ici car il n'y a pas convergence uniforme . Sinon, la limite X de X^ε , quand $\varepsilon \rightarrow 0$, serait solution de l'équation :

$$\begin{cases} \dot{X}_t^i = a_i(X_t) u_0(t, X_t^1, X_t^2), & i = 1, 2 \\ X_0^i = 0, & i = 1, 2 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} \dot{X}_t^i = \frac{X_t^i}{3t} \mathbb{1}_{\{0 \leq \sqrt{(X_t^1)^2 + (X_t^2)^2} \leq \sqrt{6}t^{\frac{1}{3}}\}}, & i = 1, 2 \\ X_0^i = 0, & i = 1, 2 \end{cases}$$

La résolution de ce système différentiel nous donne :

$$X_t^i = C_i t^{\frac{1}{3}} \mathbb{1}_{\{0 \leq \sqrt{(X_t^1)^2 + (X_t^2)^2} \leq \sqrt{6}t^{\frac{1}{3}}\}}, \quad i = 1, 2. \quad (5.4)$$

Cette solution vérifie bien la condition initiale . La présence de la fonction indicatrice entraîne : $0 \leq C_1^2 + C_2^2 \leq 6$.

Nous venons de voir qu'heuristiquement, l' "équation limite" possède une infinité de solutions qui sont toutes de la forme (5.4) . On peut donc se demander comment va réellement se comporter, lorsque ε décroît vers 0, le processus X^ε solution de (E_2^ε) , par rapport à cet ensemble de "solutions limites" établi de manière heuristique . La réponse à cette question est le :

Théorème 5.2

Soit $A = \{\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2; \phi(t) = (C_1 t^{\frac{1}{3}}, C_2 t^{\frac{1}{3}}), 0 \leq C_1^2 + C_2^2 \leq 6\}$.

Pour la topologie höldérienne d'indice $\alpha < \frac{1}{3}$, l'ensemble des points adhérents des vecteurs X^ε , solutions de (E_2^ε) , quand $\varepsilon \rightarrow 0$, est p.s. égal à A .

Démonstration du théorème 5.2 : Elle se fera en sept étapes, les six premières constituant des résultats préliminaires permettant de conclure dans la dernière (g) .

a) Soit $C_\alpha^0 := \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; \limsup_{\delta \rightarrow 0} \sup_{|t-s| \leq \delta} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha} = 0 \right\}$.

Muni de $\|g\|_\alpha := \sup_{0 \leq t, s \leq 1} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha}$, $(C_\alpha^0, \|\cdot\|_\alpha)$ est un espace de Banach .

Pour $i = 1, 2$, on a :

$$\begin{aligned} \|X^{\varepsilon, i}\|_{\alpha'} &\leq \varepsilon \|B^i\|_{\alpha'} + \sup_{0 \leq t, t' \leq 1} \frac{1}{|t-t'|^{\alpha'}} \int_t^{t'} u^\varepsilon(s, X_s^\varepsilon) a_i(X_s^\varepsilon) ds \\ &\leq \varepsilon \|B^i\|_{\alpha'} + \sup_{0 \leq t, t' \leq 1} \frac{1}{|t-t'|^{\alpha'}} \int_t^{t'} \|a_i\|_\infty \frac{C}{s^{\frac{2}{3}}} ds \\ &\quad \text{(d'après le (3) du théorème 3.4, valable pour } u \text{ et } u^\varepsilon) \\ &\leq \varepsilon \|B^i\|_{\alpha'} + \sup_{0 \leq t, t' \leq 1} 3C \frac{|t-t'|^{\frac{1}{3}}}{|t-t'|^{\alpha'}} \\ &\leq \varepsilon \|B^i\|_{\alpha'} + 3C \quad \text{si } \alpha' < \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donc $X^{\varepsilon, i}$ ($i = 1, 2$) varie dans une partie bornée de C_α^0 , et donc dans une partie compacte de C_α^0 pour $0 < \alpha < \alpha' < \frac{1}{3}$.

b) L'application $]0, 1] \rightarrow (\mathcal{C}_\alpha^0)^2$, $0 < \alpha < \frac{1}{3}$ est continue.
 $\varepsilon \rightarrow X^\varepsilon$

En effet, soient $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $(\varepsilon_n)_n$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \varepsilon_0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} X^{\varepsilon_n, i} = \bar{X}^i$ dans \mathcal{C}_α^0 , pour $i = 1, 2$. Alors il est clair que \bar{X} est solution de (E^{ε_0}) , et donc $\bar{X} = X^{\varepsilon_0}$. L'application est continue.

c) Montrons que :

$$0 \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|X_t^\varepsilon\|}{t^{\frac{1}{3}}} \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|X_t^\varepsilon\|}{t^{\frac{1}{3}}} \leq 2\sqrt{6}, \quad (5.5)$$

avec $\|X_t^\varepsilon\| := \sqrt{(X_t^{\varepsilon,1})^2 + (X_t^{\varepsilon,2})^2}$.

Appliquons la formule d'Itô au carré de la norme :

$$\begin{aligned} (X_t^{\varepsilon,1})^2 + (X_t^{\varepsilon,2})^2 &= \varepsilon \left\{ 2 \int_0^t X_s^{\varepsilon,1} dB_s^1 + 2 \int_0^t X_s^{\varepsilon,2} dB_s^2 + 2t \right\} \\ &+ 2 \int_0^t \frac{(X_s^{\varepsilon,1})^2}{\sqrt{(X_s^{\varepsilon,1})^2 + (X_s^{\varepsilon,2})^2}} u^\varepsilon(s, X_s^\varepsilon) ds + 2 \int_0^t \frac{(X_s^{\varepsilon,2})^2}{\sqrt{(X_s^{\varepsilon,1})^2 + (X_s^{\varepsilon,2})^2}} u^\varepsilon(s, X_s^\varepsilon) ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (X_t^{\varepsilon,1})^2 + (X_t^{\varepsilon,2})^2 &= 2\varepsilon \left\{ \int_0^t X_s^{\varepsilon,1} dB_s^1 + \int_0^t X_s^{\varepsilon,2} dB_s^2 + t \right\} \\ &+ 2 \int_0^t \sqrt{(X_s^{\varepsilon,1})^2 + (X_s^{\varepsilon,2})^2} u^\varepsilon(s, X_s^\varepsilon) ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (X_t^{\varepsilon,1})^2 + (X_t^{\varepsilon,2})^2 &= 2\varepsilon \left\{ \int_0^t X_s^{\varepsilon,1} dB_s^1 + \int_0^t X_s^{\varepsilon,2} dB_s^2 + t \right\} \\ &+ 2 \int_0^t \sqrt{(X_s^{\varepsilon,1})^2 + (X_s^{\varepsilon,2})^2} \frac{1}{s^{\frac{2}{3}}} w^\varepsilon\left(s, \frac{\sqrt{(X_s^{\varepsilon,1})^2 + (X_s^{\varepsilon,2})^2}}{s^{\frac{1}{3}}}\right) ds. \end{aligned}$$

On passe à la limite supérieure quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et on pose

$$f(t) := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{(X_t^{\varepsilon,1})^2 + (X_t^{\varepsilon,2})^2}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} (f(t))^2 &\leq 2 \int_0^t f(s) \frac{1}{s^{\frac{2}{3}}} \sqrt{\frac{2}{3}} ds \quad \text{cf P2,} \\ \sup_{0 \leq u \leq t} f^2(u) &\leq 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \sup_{0 \leq u \leq t} f(u) \int_0^t \frac{ds}{s^{\frac{2}{3}}}, \\ \sup_{0 \leq u \leq t} f^2(u) &\leq 2 \sqrt{\frac{2}{3}} 3t^{\frac{1}{3}} \sup_{0 \leq u \leq t} f(u). \end{aligned}$$

On simplifie :

$$\sup_{0 \leq u \leq t} f(u) \leq 2\sqrt{6}t^{\frac{1}{3}},$$

donc

$$f(t) \leq 2\sqrt{6}t^{\frac{1}{3}}.$$

On en déduit la troisième inégalité de (5.5). Les deux autres sont évidentes.

d) On établit le lemme suivant :

Lemme 5.3 Soit $0 < t_0 < 1$, et soit une suite (ε_n) telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$

et $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_{t_0}^{\varepsilon_n, i}|}{t_0^{\frac{1}{3}}} = \delta < 2\sqrt{6}$, pour $i = 1, 2$.

Alors :

$$\forall s \in]0, 1], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{X_{t_0}^{\varepsilon_n, i}}{t_0^{\frac{1}{3}}} - \frac{X_s^{\varepsilon_n, i}}{s^{\frac{1}{3}}} \right) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Démonstration du lemme 5.3 :

(i) Pour $i = 1, 2$, puisque $\|X^{\varepsilon, i}\|_\alpha \leq k$, on a : $|X_{t_0}^{\varepsilon, i} - X_s^{\varepsilon, i}| \leq k|t_0 - s|^\alpha$, et donc :

$$\left| \frac{|X_{t_0}^{\varepsilon, i}|}{t_0^{\frac{1}{3}}} - \frac{k|t_0 - s|^\alpha}{t_0^{\frac{1}{3}}} \right| \leq \left| \frac{X_s^{\varepsilon, i}}{s^{\frac{1}{3}}} \frac{s^{\frac{1}{3}}}{t_0^{\frac{1}{3}}} \right| \leq \frac{|X_{t_0}^{\varepsilon, i}|}{t_0^{\frac{1}{3}}} + \frac{k|t_0 - s|^\alpha}{t_0^{\frac{1}{3}}}.$$

On en déduit l'existence d'un voisinage $V(t_0)$ de t_0 tel que :

$$\forall s \in V(t_0), \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_s^{\varepsilon_n, i}|}{s^{\frac{1}{3}}} < \delta' < 2\sqrt{6}, \quad i = 1, 2.$$

(ii) On applique la formule d'Itô pour $s \in V(t_0)$:

$$\frac{X_{t_0}^{\varepsilon_n, i}}{t_0^{\frac{1}{3}}} = \frac{X_s^{\varepsilon_n, i}}{s^{\frac{1}{3}}} + \varepsilon_n \int_s^{t_0} \frac{dB_r}{r^{\frac{1}{3}}} + \int_s^{t_0} \frac{1}{r^{\frac{1}{3}}} \left(a_i(X_r^{\varepsilon_n}) u^{\varepsilon_n}(r, X_r^{\varepsilon_n}) - \frac{X_r^{\varepsilon_n, i}}{3r} \right) dr.$$

Or $a_i(X_r^{\varepsilon_n}) u^{\varepsilon_n}(r, X_r^{\varepsilon_n}) \rightarrow \frac{X_r^i}{3r}$ quand $n \rightarrow \infty$ (cf P3).

Donc, puisque :

$$- a_i(X_r^{\varepsilon_n}) u^{\varepsilon_n}(r, X_r^{\varepsilon_n}) - \frac{X_r^{\varepsilon_n, i}}{3r} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty \quad (i = 1, 2)$$

$$\text{dès que } \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|X_r^{\varepsilon_n, i}|}{r^{\frac{1}{3}}} < \delta' < 2\sqrt{6},$$

$$- \varepsilon_n \int_s^{t_0} \frac{dB_r}{r^{\frac{1}{3}}} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty,$$

on en déduit :

$$\frac{X_{t_0}^{\varepsilon_n, i}}{t_0^{\frac{1}{3}}} - \frac{X_s^{\varepsilon_n, i}}{s^{\frac{1}{3}}} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Nous avons démontré le lemme .

e) On en déduit le lemme suivant :

Lemme 5.4

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|X_t^\varepsilon\|}{t^{\frac{1}{3}}} = 0 \quad ; \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|X_t^\varepsilon\|}{t^{\frac{1}{3}}} = 2\sqrt{6}.$$

Démonstration du lemme 5.4 :

(i) Soit $t < 0$ et

$$C_t(\omega) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|X_t^\varepsilon\|}{t^{\frac{1}{3}}}.$$

On a vu (cf c) que $C_t(\omega) \leq 2\sqrt{6}$. Et d'après le (d) : pour toute suite (ε_n) tendant vers 0 quand $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|X_s^{\varepsilon_n}\|}{s^{\frac{1}{3}}} - \frac{\|X_t^{\varepsilon_n}\|}{t^{\frac{1}{3}}} \right) = 0,$$

d'où :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|X_s^{\varepsilon_n}\|}{s^{\frac{1}{3}}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|X_t^{\varepsilon_n}\|}{t^{\frac{1}{3}}}.$$

Ainsi, p.s. :

$$\limsup_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \frac{\|X_s^{\varepsilon_n}\|}{s^{\frac{1}{3}}} = \limsup_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \frac{\|X_t^{\varepsilon_n}\|}{t^{\frac{1}{3}}} = C_t(\omega) = C_s(\omega).$$

Mais la variable aléatoire C_t est mesurable par rapport à la σ -algèbre \mathcal{F}_t engendrée par $\{B_s; s \leq t\}$. Donc C_t est mesurable par rapport à $\bigcap_{t>0} \mathcal{F}_t$, elle est donc p.s. constante.

On a $C_t(\omega) := C$.

(ii) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction bornée, continue et croissante. Pour une telle fonction f , on aura :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} f\left(\frac{\|X_t^\varepsilon\|}{t^{\frac{1}{3}}}\right) = f\left(\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|X_t^\varepsilon\|}{t^{\frac{1}{3}}}\right).$$

Et en appliquant le lemme de Fatou :

$$E \left[\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} f\left(\frac{\|X_t^\varepsilon\|}{t^{\frac{1}{3}}}\right) \right] \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} E \left[f\left(\frac{\|X_t^\varepsilon\|}{t^{\frac{1}{3}}}\right) \right].$$

On a donc :

$$f(C) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int f\left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{t^{\frac{1}{3}}}\right) \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} \omega^\varepsilon\left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{t^{\frac{1}{3}}}\right) dx_1 dx_2$$

$$f(C) \geq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \int f(\sqrt{y_1^2 + y_2^2}) w^\varepsilon(\sqrt{y_1^2 + y_2^2}) dy_1 dy_2.$$

On passe à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$f(C) \geq \int \int_{\{0 \leq \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \leq \sqrt{6}\}} f(\sqrt{y_1^2 + y_2^2}) \frac{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}{3} dy_1 dy_2.$$

Ceci étant vraie pour toute fonction f bornée croissante, on en déduit que $C \geq 2\sqrt{6}$.
Donc :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|X_t^\varepsilon\|}{t^{\frac{1}{3}}} = 2\sqrt{6}.$$

L'assertion relative à la limite inférieure se montre de la même façon .

f) Nous nous intéressons enfin à l'argument θ du processus X^ε :

$$X_t^\varepsilon = \rho_t e^{i\theta_t} \iff \begin{cases} \rho_t = \sqrt{(X_t^{\varepsilon,1})^2 + (X_t^{\varepsilon,2})^2} \\ \theta_t = \arctan\left(\frac{X_t^{\varepsilon,2}}{X_t^{\varepsilon,1}}\right) \end{cases}$$

Nous allons montrer que l'E.D.S. (E_2^ε) est invariante par rotation . On rappelle que :

$$(E_2^\varepsilon) \begin{cases} X_t^{\varepsilon,1} = \varepsilon B_t^1 + \int_0^t \frac{X_s^{\varepsilon,1}}{\sqrt{(X_s^{\varepsilon,1})^2 + (X_s^{\varepsilon,2})^2}} u^\varepsilon(s, X_s^\varepsilon) ds \\ X_t^{\varepsilon,2} = \varepsilon B_t^2 + \int_0^t \frac{X_s^{\varepsilon,2}}{\sqrt{(X_s^{\varepsilon,1})^2 + (X_s^{\varepsilon,2})^2}} u^\varepsilon(s, X_s^\varepsilon) ds \end{cases}$$

Considérons une rotation d'angle quelconque α . La matrice associée est :

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

L'image du processus X^ε solution de (E_2^ε) par cette rotation est :

$$\begin{cases} Y_t^{\varepsilon,1} = \varepsilon (\cos \alpha B_t^1 + \sin \alpha B_t^2) + \int_0^t \frac{\cos \alpha X_s^{\varepsilon,1} + \sin \alpha X_s^{\varepsilon,2}}{\sqrt{(X_s^{\varepsilon,1})^2 + (X_s^{\varepsilon,2})^2}} u^\varepsilon(s, X_s^\varepsilon) ds \\ Y_t^{\varepsilon,2} = \varepsilon (-\sin \alpha B_t^1 + \cos \alpha B_t^2) + \int_0^t \frac{-\sin \alpha X_s^{\varepsilon,1} + \cos \alpha X_s^{\varepsilon,2}}{\sqrt{(X_s^{\varepsilon,1})^2 + (X_s^{\varepsilon,2})^2}} u^\varepsilon(s, X_s^\varepsilon) ds \end{cases}$$

Posons : $\begin{cases} \tilde{B}_t^1 = \cos \alpha B_t^1 + \sin \alpha B_t^2 \\ \tilde{B}_t^2 = -\sin \alpha B_t^1 + \cos \alpha B_t^2 \end{cases}$

Alors \tilde{B}^1 et \tilde{B}^2 sont deux mouvements browniens indépendants .

Donc Y^ε est solution de :

$$\begin{cases} Y_t^{\varepsilon,1} = \varepsilon \tilde{B}_t^1 + \int_0^t \frac{Y_s^{\varepsilon,1}}{\sqrt{(Y_s^{\varepsilon,1})^2 + (Y_s^{\varepsilon,2})^2}} u^\varepsilon(s, Y_s^\varepsilon) ds \\ Y_t^{\varepsilon,2} = \varepsilon \tilde{B}_t^2 + \int_0^t \frac{Y_s^{\varepsilon,2}}{\sqrt{(Y_s^{\varepsilon,1})^2 + (Y_s^{\varepsilon,2})^2}} u^\varepsilon(s, Y_s^\varepsilon) ds \end{cases}$$

On remarque que le processus Y^ε , image de X^ε par une rotation d'angle quelconque, est encore solution de (E_2^ε) . Celle-ci admettant une unique solution, $X^\varepsilon = Y^\varepsilon$ et l'E.D.S. (E_2^ε) est invariante par rotation. On en déduit que la densité ne dépend pas de l'argument.

De plus, $\theta(t) \pmod{2\pi}$ est un processus récurrent. En effet, nous rappelons que la formule d'Itô appliquée à $\theta_t = \arctan\left(\frac{X_t^{\varepsilon,2}}{X_t^{\varepsilon,1}}\right)$ donne (cf. (4.3)) :

$$\theta_t = \theta_s + \varepsilon \int_s^t \frac{X_r^{\varepsilon,1} dB_r^2 - X_r^{\varepsilon,2} dB_r^1}{(X_r^{\varepsilon,1})^2 + (X_r^{\varepsilon,2})^2}.$$

Il est clair que

$$\int_s^t \frac{X_r^{\varepsilon,1} dB_r^2 - X_r^{\varepsilon,2} dB_r^1}{(X_r^{\varepsilon,1})^2 + (X_r^{\varepsilon,2})^2}$$

est un mouvement brownien avec changement de temps. L'argument $(\theta_t)_{t \geq 0}$ est donc un processus récurrent.

g) Nous pouvons à présent conclure :

(i) Soit Z , un processus adhérent de X^ε dans $(C_\alpha^0)^2$, alors il existe une suite (ε_n) telle que $X^{\varepsilon_n} \rightarrow Z$ en norme höldérienne lorsque $n \rightarrow +\infty$. En particulier, pour $i = 1, 2$ et $t = 1$,

$$X_1^{\varepsilon_n, i} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} Z_1^i.$$

D'après le lemme 5.3 :

$$\forall s, \frac{X_s^{\varepsilon_n, i}}{s^{\frac{1}{3}}} \rightarrow Z_1^i, \quad i = 1, 2.$$

On a vu (lemme 5.4) que $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \|X_1^\varepsilon\| = 2\sqrt{6}$, donc on a :

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} |X_1^\varepsilon| = 2\sqrt{6}.$$

Deux cas se présentent :

$$* \text{ Si } Z_1 < 2\sqrt{6}, \quad \forall s, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_s^{\varepsilon_n}}{s^{\frac{1}{3}}} = Z_1.$$

* Si $Z_1 = 2\sqrt{6}$, alors $\forall s, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_s^{\varepsilon_n}}{s^{\frac{1}{3}}} = 2\sqrt{6}$, sinon on aurait un s_0 tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_{s_0}^{\varepsilon_n}}{s_0^{\frac{1}{3}}} = \nu < 2\sqrt{6}$ et d'après le lemme 5.3, $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_1^{\varepsilon_n} = \nu < 2\sqrt{6}$, ce qui est absurde.

Donc :

$$\frac{Z_s^i}{s^{\frac{1}{3}}} = Z_1^i, \quad i = 1, 2.$$

Autrement dit, Z_s^i est de la forme $C_i s^{\frac{1}{3}}$. L'ensemble des points adhérents de X^ε est donc inclus dans A .

(ii) Soient $\phi \in A$ et $\delta = \phi(1) = (C_1, C_2)$.

Puisque $\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} |X_1^\varepsilon| = 2\sqrt{6}$, et que la densité ne dépend pas de l'argument, tout point du cercle de centre 0 et de rayon $2\sqrt{6}$ est un point adhérent. Mais l'argument du (i) montre que tout point adhérent Z vérifie :

$$\frac{Z_t^i}{t^{\frac{1}{3}}} = \delta^i, \quad i = 1, 2.$$

Donc : $Z \equiv \phi$. Ceci achève la démonstration du théorème 5.2.

1.6 Simulation numérique

1.6.1 Généralités

La simulation numérique des équations différentielles stochastiques est un sujet qui a donné lieu à de nombreux articles et quelques livres, et qui est encore en plein développement à l'heure actuelle. Le point de départ a été une extension d'un schéma de discrétisation bien connu pour les équations différentielles ordinaires: le schéma d'Euler. En 1955, Maruyama l'a adapté aux E.D.S. et de nombreux auteurs se sont ensuite penchés sur le sujet. Nous renvoyons aux articles de D. Talay ([T1] p. 148, et [T2]) et de E. Pardoux et D. Talay ([PT]) pour un exposé clair et détaillé des méthodes d'approximation pour les E.D.S. introduites jusqu'à présent. L'ouvrage de N. Bouleau et D. Lépingle ([BL]) passe en revue toutes les méthodes numériques de simulation pour des modèles stochastiques: simulation de processus aléatoires, d'équations différentielles stochastiques, du mouvement brownien, résolution de problèmes markoviens et méthode de Monte-Carlo.

Une E.D.S. peut être modélisée de deux façons différentes, selon que l'on interprète sa solution au sens d'Itô ou au sens de Stratonovich. En effet, une E.D.S. au sens d'Itô de forme générale:

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t \quad (6.1)$$

peut s'écrire aussi sous la forme de Stratonovich suivante:

$$dX_t = \tilde{b}(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) \circ dB_t \quad (6.2)$$

avec $\tilde{b} = b - \frac{1}{2} \sigma' \sigma$. C'est-à-dire, en dimension d :

$b: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$ et $\tilde{b}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini par:

$$\tilde{b}^i(t, x) = b^i(t, x) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^n \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \sigma_{kj}(t, x), \quad i = 1, \dots, n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dans le cas d'une E.D.S. générale

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) \xi_t,$$

si le bruit ξ_t est physiquement réalisable et régulier, la meilleure modélisation est celle de l'E.D.S. interprétée au sens de Stratonovich; si ξ_t est un bruit blanc, il vaut mieux interpréter l'E.D.S. au sens d'Itô. Dans les E.D.S. que nous voulons simuler, le bruit est un mouvement brownien, donc on est dans le second cas: nous interprétons les E.D.S. au sens d'Itô.

schémas de discrétisation

Pour approximer une E.D.S., nous pouvons la discrétiser en espace, ou en temps . Mais choisir ces deux discrétisations conduit à une méthode de chaînes de Markov finies introduite par Kushner en 1977 . Cette méthode requiert un très grand nombre d'informations, ce qui la rend très difficilement simulable . Nous nous contentons donc d'une discrétisation en temps . Le processus solution de l'E.D.S. est ainsi approximé sur un intervalle de temps fini par un processus discret .

Introduisons les notations suivantes qui nous serviront dans toute la suite :

On note (τ) une discrétisation de l'intervalle de temps $[0, T]$ sur lequel on souhaite simuler une E.D.S. : $(\tau) = \{t_k; k = 0, \dots, M\}$ où :

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_{M-1} < t_M = T . \quad (6.3)$$

On note Δt le pas de temps :

$$\Delta t = \frac{T}{M} = t_{k+1} - t_k, \quad \forall k = 0, \dots, M - 1 . \quad (6.4)$$

Remarque : Nous choisissons un pas de temps constant . Il existe des schémas de discrétisation où le pas de temps est aléatoire, mais en général on est quand même obligé de fixer une taille maximale du pas .

Il existe de nombreux schémas de discrétisation, les plus connus sont ceux d'Euler-Maruyama et de Milshtein . Ils sont exposés en détail avec la démonstration de leur vitesse de convergence dans la thèse d'O. Faure (cf. [Fa]) . Rappelons-les brièvement ici . Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ le processus d -dimensionnel solution de l'E.D.S. :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$$

avec $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien n -dimensionnel . Nous cherchons à l'approximer sur l'intervalle de temps $[0, T]$.

- Schéma d'Euler-Maruyama

$$\begin{cases} \bar{X}_0^M = X_0 \\ \bar{X}_{t_{k+1}}^M = \bar{X}_{t_k}^M + \sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}^M) \cdot (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) + b(t_k, \bar{X}_{t_k}^M) \Delta t, \quad k = 0, \dots, M - 1 \end{cases} \quad (6.5)$$

Le principal avantage de ce schéma est sa simplicité . En effet, il ne nécessite à chaque pas que la génération d'un accroissement de mouvement brownien, c'est-à-dire une v.a. gaussienne centrée de variance Δt .

Et il a une vitesse de convergence en $M^{-(\frac{1}{2} + \varepsilon)}$ avec $\varepsilon > 0$ petit . Considérons les hypothèses suivantes :

(H_1) b et σ sont lipschitziennes en x :

$$\exists K_1 > 0, \forall t \in [0, T], \forall x, y \in \mathbb{R}^n : |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K_1 |x - y|,$$

(H₂) b et σ sont à croissance linéaire, localement uniformément en t :

$$\exists K_2 > 0, \forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}^n : |\sigma(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 \leq K_2^2 (1 + |x|^2),$$

(H₃) $\exists p \geq 1; E |X_0|^{2p} < +\infty$,

(H₄) b et σ sont höldériennes en t :

$$\exists K_4 > 0, \exists \beta > 0 \forall s, t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}^n : |\sigma(t, x) - \sigma(s, x)| + |b(t, x) - b(s, x)| \leq K_4 |t - s|^\beta.$$

Théorème 6.1 (Faure)

(i) Sous les hypothèses (H₁) à (H₄), on a :

$$E \left(\sup_{t \in [0, T]} |X_t - \bar{X}_t^M|^{2p} \right) \leq C \Delta t^\gamma, \quad \text{avec } \gamma = p \inf(1, 2\beta),$$

(ii) Si de plus, $\exists p > 1$ vérifiant (H₃) et tel que $\gamma > 1$, alors il y a convergence p.s. quand $M \rightarrow +\infty$:

$$\sup_{t \in [0, T]} |X_t - \bar{X}_t^M| \rightarrow 0 \quad \text{p.s.},$$

(iii) Si de plus (H₃) est vérifiée pour tout p , et (H₄) est vérifiée pour $\beta \geq \frac{1}{2}$, alors

$$\forall \alpha < \frac{1}{2} :$$

$$M^\alpha \sup_{t \in [0, T]} |X_t - \bar{X}_t^M| \rightarrow 0 \quad \text{p.s. quand } M \rightarrow +\infty.$$

- Schéma de Milshtein

Il a été introduit en 1974 par G.N. Milshtein (cf. [M]) pour améliorer la vitesse de convergence quadratique du schéma d'Euler-Maruyama .

$$\begin{cases} \tilde{X}_0^M = X_0 \\ \tilde{X}_{t_{k+1}}^M = \tilde{X}_{t_k}^M + \sigma(t_k, \tilde{X}_{t_k}^M) \cdot (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) + \left\{ b(t_k, \tilde{X}_{t_k}^M) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d (\partial \sigma_j \sigma_j)(\tilde{X}_{t_k}^M) \right\} \cdot \Delta t \\ \quad + \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^d (\partial \sigma_j \sigma_l)(\tilde{X}_{t_k}^M) \cdot (B_{t_{k+1}}^{(j)} - B_{t_k}^{(j)}) \cdot (B_{t_{k+1}}^{(l)} - B_{t_k}^{(l)}) \end{cases} \quad (6.6)$$

$$\text{avec } \forall i, j, l \quad \partial \sigma_j \sigma_l = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_r} \sigma_{r,l}.$$

Ce schéma converge plus vite que le schéma précédent car tous les termes d'ordre $\mathcal{O}(\Delta t)$ du développement de Taylor apparaissent dans (6.6) . Il a une convergence en $M^{-(1+\varepsilon)}$.

Considérons les hypothèses :

(H₁) b et σ sont deux fois continûment dérivables avec des dérivées bornées,

(H₂) $\exists p > 0; E |X_0|^{4p} < +\infty$.

Théorème 6.2 (Faure)

(i) Sous les hypothèses (H_1) et (H_2) , on a :

$$\forall t \in [0, T], \quad E(|X_t - \tilde{X}_t^M|^{2p}) \leq C(\Delta t)^{2p},$$

$$E\left(\sup_{t_k \in [0, T]} |X_{t_k} - \tilde{X}_{t_k}^M|^{2p}\right) \leq C(\Delta t)^{2p-1},$$

(ii) Si de plus (H_2) est vrai pour tout p , alors :

$$\forall \alpha < 1, \quad M^\alpha \sup_{t_k \in [0, T]} |X_{t_k} - \tilde{X}_{t_k}^M| \rightarrow 0 \quad p.s. \text{ quand } M \rightarrow +\infty.$$

On peut se référer également à [T2] qui donne une convergence trajectorielle pour le schéma de Milshtein, et [Ro2] où on trouve la vitesse de convergence de ces deux schémas de discrétisation en norme Besov .

Il existe bien d'autres schémas de discrétisation, notamment ceux de Runge-Kutta (cf. [KP]) d'ordre supérieur à 1 (les schémas d'Euler-Maruyama et de Milshtein sont des schémas de Runge-Kutta d'ordre respectifs $\frac{1}{2}$ et 1) . Ceux-ci sont caractérisés par des puissances des accroissements browniens obtenus grâce à la formule stochastique de Taylor . On obtient des schémas d'ordre plus grand avec des approximations fortes de Taylor plus précises (on ajoute des intégrales stochastiques multiples qui contiennent des informations sur les trajectoires browniennes) . L'inconvénient de ces schémas de Runge-Kutta d'ordre supérieur à 1 est qu'ils ne sont pas facilement simulables .

Méthodes particulières

L'étendue actuelle des travaux sur les méthodes particulières stochastiques est décrit dans [TT] . On peut se référer également à la thèse de M. Bossy (cf. [Bo]) qui étudie la vitesse de convergence d'algorithmes particuliers stochastiques dans le cas de noyaux d'interaction réguliers et non réguliers, notamment pour l'équation de Burgers unidimensionnelle .

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 1.2 pour notre E.D.S. (E_2) , on peut dans certains cas représenter la solution d'une E.D.S. comme la limite, au sens de propagation du chaos, d'une suite de systèmes de particules en interaction modérée . La méthode particulière consiste à simuler l'évolution du système de particules associé, afin d'approximer la solution de l'E.D.S. . Nous allons exposer en détail cette méthode sur les E.D.S. que nous voulons simuler . Supposons pour l'instant que nous avons simulé un système de N particules $\{(X_t^{i,N})_{t \geq 0}, i = 0, \dots, N\}$.

Méthode de Monte-Carlo

Dans son livre, R.Y. Rubinstein ([Ru]) décrit en détail un grand nombre d'utilisations possibles de la méthode de Monte-Carlo . Elle nous servira essentiellement à calculer des

quantités de la forme :

$$u(t) := E f(X_t),$$

où $(X_t)_{t \geq 0}$ est le processus solution de (6.1). Grâce à une approximation $\{(X_t^{i,N})_{t \geq 0}, i = 0, \dots, N\}$ sur $[0, T]$ de ce processus, on est capable de calculer :

$$u^N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_t^{i,N}). \quad (6.7)$$

Cette formule est basée sur la loi forte de grands nombres pour la suite $f(X_t^{i,N})$; en effet :

$$u(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_t^{i,N}).$$

$u^N(t)$ est donc une approximation de Monte-Carlo de $u(t)$. Elle permet de calculer une espérance (valeur moyenne) grâce à une approximation effectuée avec un schéma de discrétisation classique.

Nous renvoyons à [TT] et [BT1], [BT2] pour les estimations de l'erreur commise en approximant $u(t)$ par $u^N(t)$ (c'est-à-dire $|u(t) - u^N(t)|$) dans les cas où la fonction f est régulière ou non.

Simulation de variables aléatoires

Pour la simulation d'un schéma d'Euler-Maruyama ou de Milshtein, la seule v.a. que nous aurons à générer est une gaussienne centrée (de variance Δt , pour l'accroissement du mouvement brownien entre deux temps consécutifs t_k et t_{k+1}). Nous aurons également besoin dans la suite, pour la simulation des E.D.S. réfléchies (dans le chapitre 3) de générer des v.a. exponentielles.

Nous trouvons dans les livres de R.Y. Rubinstein (cf. [Ru]) et A. Friedman (cf. [Fr]) un exposé assez complet des techniques utilisées pour la simulation des v.a. discrètes et continues. Chaque ordinateur, chaque langage de programmation possède un générateur de nombres aléatoires, qui fournit une valeur réelle aléatoire comprise entre 0 et 1, selon la loi uniforme sur $[0, 1]$. Nous ne rentrerons pas dans les détails des méthodes utilisées pour générer une v.a. uniforme, la plus courante est une méthode de congruence. On peut se référer à [Ru] pour de plus amples explications.

On peut donc facilement obtenir une suite de v.a. uniformes sur $[0, 1]$. La génération de toute v.a., discrète ou continue, utilise des v.a. uniformes. Nous exposons ici la méthode que nous utilisons pour générer des v.a. exponentielles et gaussiennes.

Si $U \sim \mathcal{U}_{[0,1]}$, alors X définie par

$$X = -\frac{1}{\lambda} \log U \quad (6.8)$$

est une v.a. de loi exponentielle de paramètre λ . En fait, générer des valeurs u_1, \dots, u_n selon la loi uniforme de U nous permet de calculer des valeurs x_1, \dots, x_n selon la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

La méthode la plus couramment utilisée pour générer des v.a. gaussiennes est la méthode de Box-Muller . Soient U_1 et U_2 deux v.a. indépendantes de loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$. Alors, avec Z_1 et Z_2 définies par :

$$\begin{cases} Z_1 = \sin(2\pi U_1) \cdot \sqrt{-2 \log U_2} \\ Z_2 = \sin(2\pi U_1 - \phi) \cdot \sqrt{-2 \log U_2} \end{cases} \quad (6.9)$$

le couple (Z_1, Z_2) suit une loi normale dans \mathbb{R}^2 d'espérance nulle et de matrice de covariance :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos \phi \\ \cos \phi & 1 \end{pmatrix}$$

En choisissant $\phi = \frac{\pi}{2}$, on obtient deux v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1.6.2 Application à notre problème

Nous allons simuler les E.D.S. introduites par B. Roynette et P. Vallois dans [RV] et citées dans l'introduction de ce chapitre (paragraphe 1.1) : (E_1) , (E_1^{+1}) , (E_1^{-1}) , ainsi que l'E.D.S. bidimensionnelle (E_2) .

Examinons en détail la méthode utilisée pour l'équation la plus simple (E_1) .

E.D.S. (E_1)

Commençons par rappeler que cette E.D.S. :

$$dX_t^\varepsilon = \varepsilon dB_t + \gamma u_\varepsilon(t, X_t^\varepsilon) dt$$

\Leftrightarrow

$$dX_t^\varepsilon = \varepsilon dB_t + \gamma \left(\int_{\mathbb{R}} \delta(X_t^\varepsilon - y) u_\varepsilon(t, y) dy \right) dt$$

provient du système de particules :

$$\begin{cases} dX_t^{i,\varepsilon,N} = \varepsilon dB_t^i + \gamma \left(\int_{\mathbb{R}} \delta(X_t^{i,\varepsilon,N} - y) \mu_t^{\varepsilon,N}(dy) \right) dt \\ X_0^{i,\varepsilon,N} = X_0^i \sim u_0 = \delta_0, \quad i = 1, \dots, N \end{cases}$$

où on a noté

$$\mu_t^{\varepsilon,N} := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{X_t^{j,\varepsilon,N}}$$

la mesure empirique de ce système de particules ($X_t^{i,\varepsilon,N}$ est la position de la $i^{\text{ème}}$ particule parmi N , à l'instant t , dans \mathbb{R}), le résultat de propagation du chaos nous disant que :

$$\mu_t^{\varepsilon,N}(\cdot) \xrightarrow{P} u_\varepsilon(t, \cdot) \quad \text{quand } N \rightarrow +\infty .$$

En pratique, nous ne pouvons pas simuler numériquement la masse de Dirac δ , il faut la régulariser par une fonction cut-off. Il existe plusieurs fonctions régularisantes de la masse de Dirac. Elles doivent satisfaire aux conditions suivantes :

Proposition 6.3 ξ est une fonction cut-off pour la masse de Dirac s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que :

- (i) $\int_{\mathbb{R}^n} \xi(x) dx = 1$,
- (ii) $\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \xi(x) dx = 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ avec $1 \leq \alpha \leq k-1$,
- (iii) $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^k |\xi(x)| dx < +\infty$.

En particulier, on peut choisir la transformée de Fourier de l'inverse d'une gaussienne standard, des B-splines, des fonctions radiales ... , voir sur ce sujet le cours de P.A. Raviart (cf. [Ra]), mais la forme la plus simple est une gaussienne. Une masse de Dirac en zéro δ_0 est en effet approchée par la fonction cut-off :

$$\phi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}. \quad (6.10)$$

C'est la fonction cut-off que nous utiliserons dans toutes nos simulations.

Remarque : en pratique, le choix du paramètre α est très délicat : trop petit, les fonctions ϕ_α consécutives deviennent trop disjointes et la courbe devient très irrégulière ; trop grand, ϕ_α n'est plus une approximation correcte de δ_0 .

On a :

$$\phi_\alpha \xrightarrow{(d)} \delta_0 \text{ quand } \alpha \rightarrow 0$$

donc "formellement"

$$X_{\phi_\alpha}^{i,\varepsilon,N} \rightarrow X^{i,\varepsilon,N} \text{ quand } \alpha \rightarrow 0$$

où $X_{\phi_\alpha}^{i,\varepsilon,N}$ est solution du système suivant (nous noterons $X^{i,\varepsilon,N}$ la solution de ce système dans la suite pour ne pas alourdir encore davantage les notations) :

$$\begin{cases} dX_t^{i,\varepsilon,N} = \varepsilon dB_t^i + \gamma \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \phi_\alpha(dX_t^{i,\varepsilon,N} - dX_t^{j,\varepsilon,N}) \right) dt \\ X_0^{i,\varepsilon,N} \sim \delta_0 \end{cases} \quad (6.11)$$

C'est le système qu'il nous faut donc simuler. Nous allons interpréter la solution de l'E.D.P. (F_1) associée à (E_1) comme la densité de la loi associée à un processus stochastique non linéaire. Nous allons tracer le graphe de la densité du processus solution de (E_1) : c'est la suite des couples $(X_T^{i,\varepsilon,N}, U_T^{i,\varepsilon})$ au temps final T , avec la densité $(U^{i,\varepsilon})_{i=1,\dots,N}$ donnée par :

$$\begin{cases} U_0^{i,\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} \\ U_t^{i,\varepsilon} = \frac{1}{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha} \sum_{j=1}^N \exp \left\{ -\frac{(X_t^{i,\varepsilon,N} - X_t^{j,\varepsilon,N})^2}{2\alpha^2} \right\}, \quad 0 < t \leq T \end{cases} \quad (6.12)$$

Toutes les quantités étant maintenant explicitement définies, nous sommes en mesure de simuler le système particulaire (6.11) et de dessiner le graphe de la densité (6.12) du processus solution .

Nous avons appliqué le schéma de discrétisation d'Euler-Maruyama (cf. (6.6)) à toutes nos E.D.S., le schéma de Milshtein (cf. (6.7)) lui étant égal dans notre situation car pour nos diverses E.D.S., le terme de diffusion est constant, le terme supplémentaire de (6.7) par rapport à (6.6) est donc nul . Ces simulations ont été programmées en mode parallèle, les méthodes particulières s'y prêtant assez bien étant donné le grand nombre de particules N . Le langage de programmation choisi a été le Fortran 77, sous PVM (Parallel Virtual Machine) . Les simulations ont été effectuées sur les machines du projet Omega situées à l'I.N.R.I.A. de Sophia-Antipolis .

Pour cette E.D.S. (E_1), nous connaissons (cf. [RV]) la formule explicite de la densité du processus solution :

$$u_\varepsilon(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} v_\varepsilon\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \quad (6.13)$$

avec

$$v_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{2\gamma} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}}{\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + k_\varepsilon}$$

$$k_\varepsilon = \frac{\sqrt{2\pi}}{e^{\frac{2\gamma}{\varepsilon^2}} - 1}$$

$$\psi(y) = \int_y^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Nous calculons cette densité exacte pour chaque particule $X^{i,\varepsilon,N}$, à l'instant final T afin de la comparer à la densité obtenue par approximation . Pour cela, nous utilisons une fonction prédéfinie :

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-u^2} du. \quad (6.14)$$

Avec cette fonction, la densité u_ε devient :

$$u_\varepsilon(t, x) = \frac{\varepsilon}{\gamma \sqrt{2\pi t}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2 t}}}{\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\varepsilon\sqrt{2t}}\right) + \frac{2}{e^{\frac{2\gamma}{\varepsilon^2}} - 1}}.$$

Le premier graphe nous permet de vérifier que la densité approchée (c'est-à-dire obtenue par simulation) correspond assez bien à la densité exacte donnée par (6.13) . Les paramètres sont : $N = 1500$, $T = 1$, $\Delta t = 0.01$, $\gamma = \frac{1}{4}$, $\varepsilon = 2$, $\alpha = 0.5$.

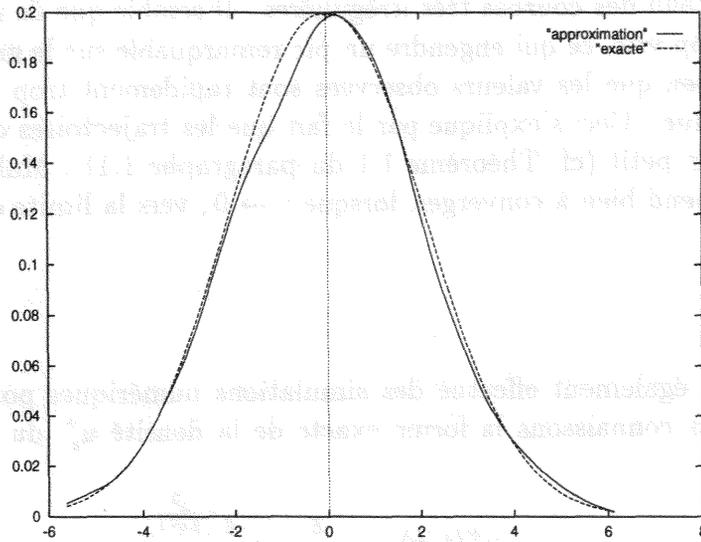


FIG. 1.2: Densité du processus solution de (E_1) avec $\gamma = \frac{1}{4}$

Nous savons (cf. [RV]) que la densité u_ε vérifie :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(t, x) = \frac{x}{2\gamma t} \mathbb{1}_{[0, 2\sqrt{\gamma t}[}(x) \quad (6.15)$$

Nous avons simulé l'E.D.S. (E_1) pour vérifier (6.15) dans notre cas (c'est-à-dire avec $\gamma = \frac{1}{4}$): $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(T, x) = \frac{2x}{T} \mathbb{1}_{[0, T[}(x)$.

Pour cela, nous effectuons plusieurs simulations successives en diminuant le paramètre ε . Sur le graphe suivant, nous avons tracé les densités approchées successives obtenues. Les densités exactes explosant pour ε petit, nous ne pouvons pas les dessiner.

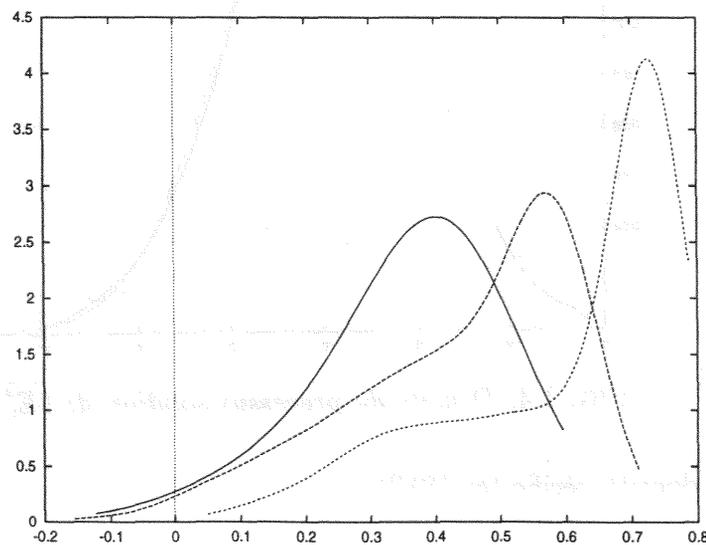


FIG. 1.3: Densité avec $\gamma = \frac{1}{4}$ et $\varepsilon = 0.5, 0.1, 0.05$

Nous avons obtenu des courbes très irrégulières . Il semble que de nombreuses particules se déplacent trop vite, ce qui engendre un pic remarquable sur le graphe de la densité du processus, si bien que les valeurs observées sont rapidement trop élevées par rapport à la forme attendue . Ceci s'explique par le fait que les trajectoires du processus sont très instables pour ε petit (cf. Théorème 1.1 du paragraphe 1.1) . Malgré cela, nous voyons que la densité tend bien à converger, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, vers la limite décrite ci-dessus .

E.D.S. (E_1^{+1})

Nous avons également effectué des simulations numériques pour l'E.D.S. (E_1^δ) avec $\delta = +1$. Nous connaissons la forme exacte de la densité u_ε^+ du processus solution de (E_1^{+1}) :

$$u_\varepsilon^+(t, x) = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2 t}}}{\psi\left(\frac{|x|}{\varepsilon\sqrt{t}}\right) + k_\varepsilon^+} \quad (6.16)$$

avec

$$k_\varepsilon^+ = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{e^{\frac{1}{\varepsilon^2}} - 1} .$$

Ceci nous permet de vérifier que la densité approchée obtenue est convenable . Pour le graphe suivant, les paramètres sont : $N = 1500$, $T = 1$, $\Delta t = 0.01$, $\varepsilon = 2$, $\alpha = 0.5$.

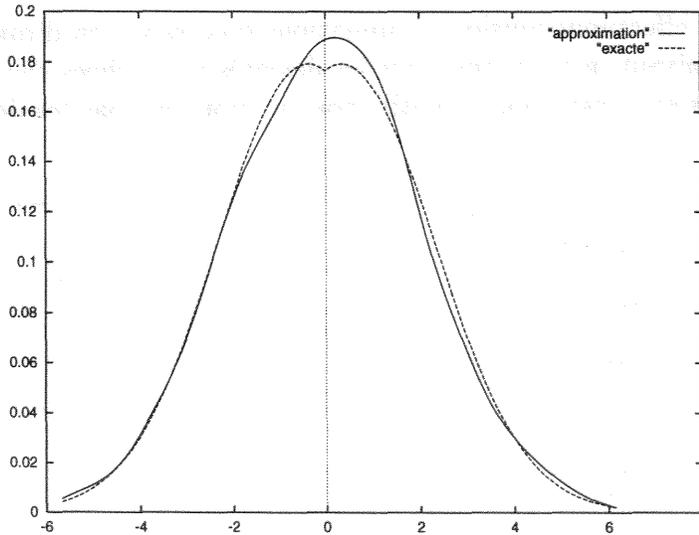


FIG. 1.4: Densité du processus solution de (E_1^{+1})

De plus, la densité vérifie (cf. [RV]) :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon^+(t, x) = \frac{|x|}{2t} \mathbb{1}_{\{|x| < \sqrt{2t}\}} . \quad (6.17)$$

Pour le vérifier numériquement, nous représentons, comme dans le cas précédent, sur un même graphe les densités approchées (obtenues par simulation) du processus pour des valeurs de ε de plus en plus petites, ce paramètre décroissant vers zéro.

Les résultats obtenus (figure 1.5) sont assez mauvais car le processus est très instable, toutefois on peut tout de même y discerner une convergence vers la forme attendue (6.17). On remarque que la forme théorique de la densité est relativement respectée dans le demi-plan $x \geq 0$. Par contre, on remarque que, plus ε diminue, plus les particules désertent les valeurs négatives : elles ont beaucoup plus tendance à devenir positives que négatives.

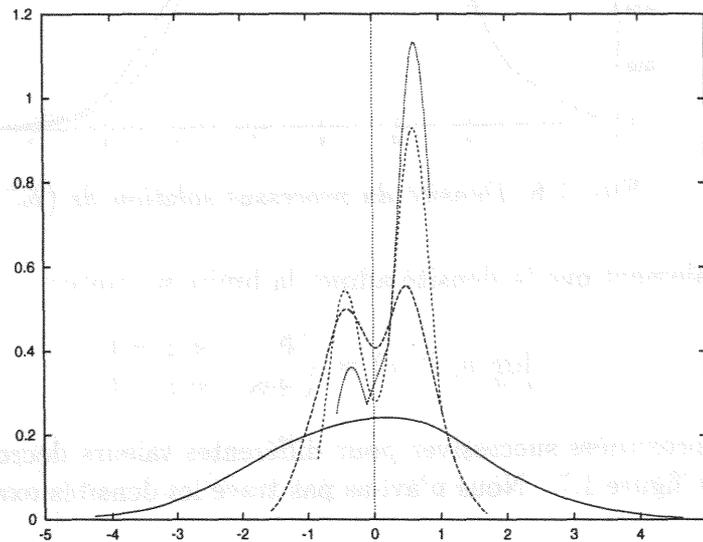


FIG. 1.5: Densité pour $\varepsilon = 1.5, 0.5, 0.3, 0.1$

E.D.S. (E_1^{-1})

Regardons à présent le cas où $\delta = -1$. Le processus solution de l'E.D.S. (E_1^{-1}) a pour densité la fonction suivante :

$$u_\varepsilon^-(t, x) = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2 t}}}{k_\varepsilon^- - \psi\left(\frac{|x|}{\varepsilon\sqrt{t}}\right)} \quad (6.18)$$

avec

$$k_\varepsilon^- = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon^2}}}.$$

La figure 1.6 représente la densité obtenue par simulation numérique, nous avons également tracé le graphe de la densité exacte (obtenue par calcul : (6.18)). Nous remarquons que les deux courbes sont très proches l'une de l'autre, avec un peu moins de régularité pour la densité approchée : ceci est dû à l'erreur d'approximation. Cette simulation a été réalisée avec les paramètres suivants : $N = 1500$, $T = 1$, $\Delta t = 0.01$, $\varepsilon = 2.5$, $\alpha = 0.5$.

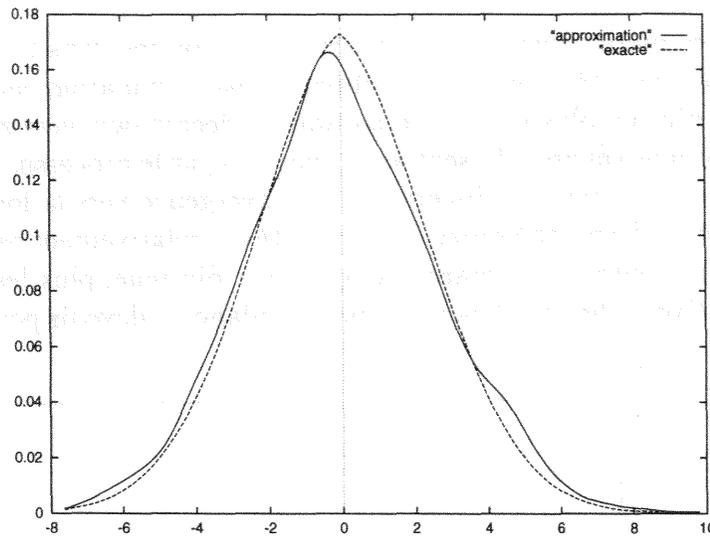


FIG. 1.6: Densité du processus solution de (E_1^{-1})

Vérifions également que la densité admet la limite suivante :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon^-(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (6.19)$$

Des densités approximées successives pour différentes valeurs décroissantes de ε sont regroupées dans la figure 1.7 . Nous n'avons pas tracé les densités exactes car pour ε petit, elles explosent .

Nous voyons bien sur cette figure que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, la densité du processus solution de (E_1^{-1}) converge vers la limite décrite en (6.19) . Ceci vérifie bien le fait que le processus converge vers zéro (cf. (i) du théorème 1.2) .

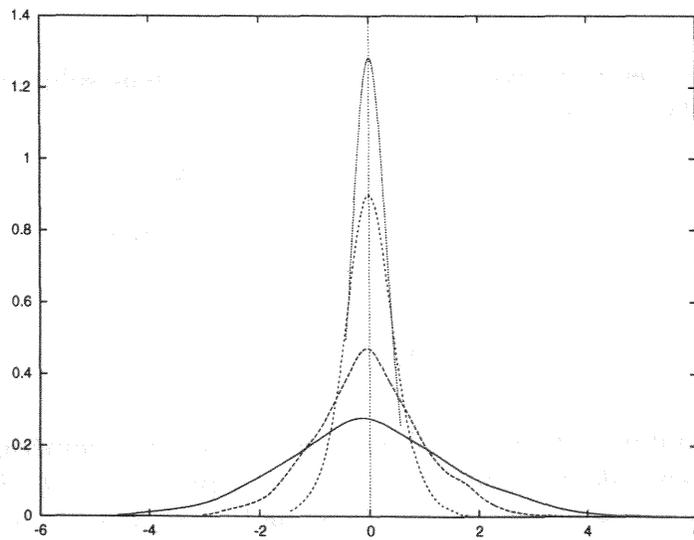


FIG. 1.7: Densité approchée avec $\varepsilon = 1.5, 1.0, 0.5, 0.25$

E.D.S. (E_2)

Nous avons également simulé numériquement l'E.D.S. bidimensionnelle (E_2) que nous avons étudiée dans ce chapitre. Les techniques utilisées sont les mêmes; passer à la dimension deux requiert quelques changements simples dans la programmation: la position des particules est repérée dans ce cas par un couple de deux coordonnées. Chacune d'elle satisfait à une E.D.S. non linéaire que nous pouvons simuler parallèlement.

Afin de rendre compte du phénomène d'instabilité décrit par le théorème 5.2, nous avons dessiné sur les graphes les positions finales des N particules, ce qui nous fournit une représentation de la densité de présence des particules après les avoir déplacées selon (E_2). La succession des trois graphes ci-dessous, pour lesquels tous les paramètres sont identiques sauf la diffusion ε que nous avons fait décroître, nous permet d'observer la création du phénomène d'instabilité.

Les paramètres communs à ces trois simulations sont: $N = 2000$, $T = 1$, $\Delta = 0.01$, $\alpha = 0.05$. Nous avons donné au paramètre de diffusion ε les valeurs décroissantes suivantes: 1, 0.1 et 0.01.

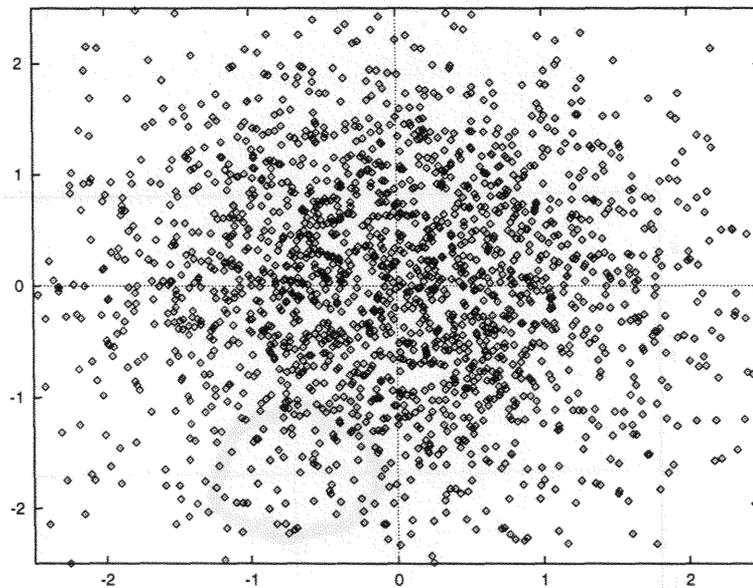


FIG. 1.8: Densité empirique finale des particules, avec $\varepsilon = 1$

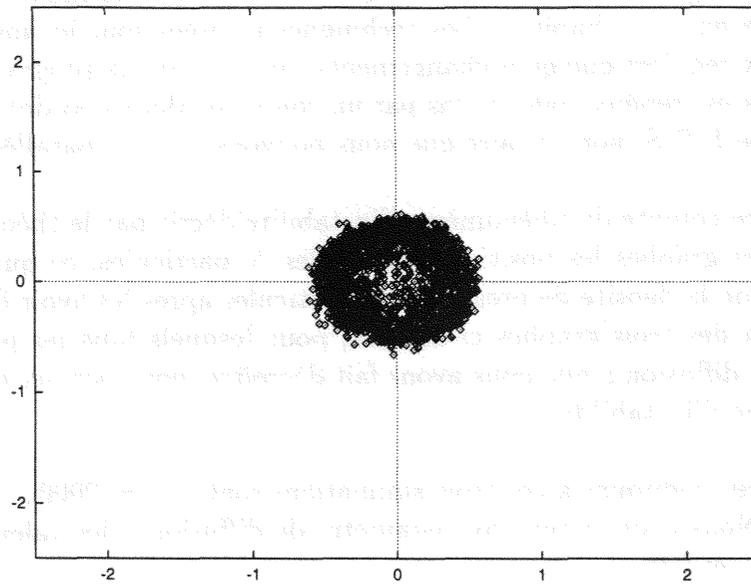


FIG. 1.9: Densité empirique finale des particules, avec $\varepsilon = 0.1$

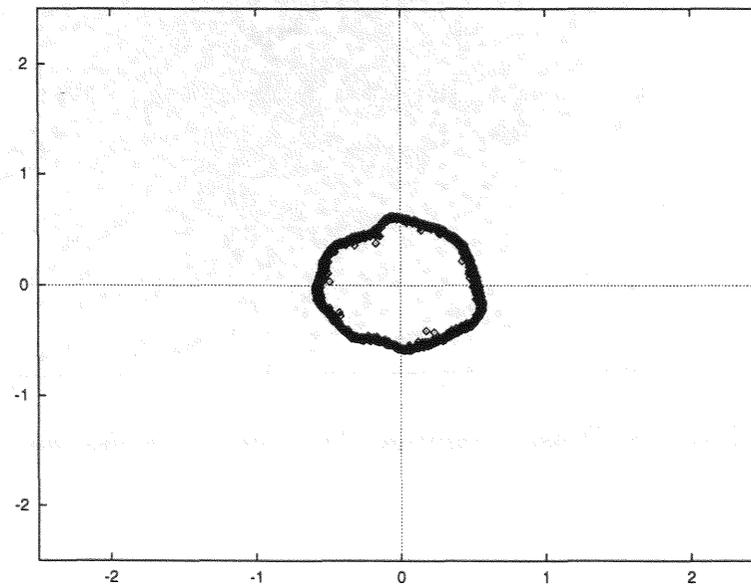


FIG. 1.10: Densité empirique finale des particules, avec $\varepsilon = 0.01$

Références

- [A] R. AZENCOTT, *Grandes déviations et applications*, Lecture Notes in Mathematics 774, 1978 .
- [BL] N. BOULEAU, D. LÉPINGLE, *Numerical methods for stochastic processes*, Wiley-Interscience, 1993 .
- [Bo] M. BOSSY, *Vitesse de convergence d'algorithmes particuliers stochastiques et application à l'équation de Burgers*, Thèse de l'Université de Provence, 1995 .
- [BT1] V. BALLY, D. TALAY, *The law of the Euler scheme for stochastic differential equations, I Convergence rate of the distribution function*, Probab. Theory Relat. Fields 104, p.43-60, 1996 .
- [BT2] V. BALLY, D. TALAY, *The law of the Euler scheme for stochastic differential equations, II Convergence rate of the density*, Monte Carlo Methods and Applications 2, p. 93-128, 1996 .
- [Bu] J.M. BURGERS, *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*, Adv. in applied mechanics 1, p. 171-199, 1948 .
- [CP] P. CALDERONI, M. PULVIRENTI, *Propagation of chaos for Burgers' equation*, Ann. Inst. Henri Poincaré 34-1, p. 85-97, 1983 .
- [EVZ] M. ESCOBEDO , J.L. VASQUEZ, E. ZUAZUA, *Asymptotic Behaviour and Source-Type Solutions for a Diffusion-Convection Equation*, Arch. Rational Mech. Anal. 124, p. 43-65, 1993 .
- [Fa] O. FAURE, *Simulation du mouvement brownien et des diffusions*, Thèse de l'Ecole nationale des ponts et chaussées, 1992 .
- [Fr] A. FRIEDMAN, *Stochastic differential equations and applications*, Academic Press, 1975 .
- [H] E. HOPF, *The partial differential equation $u_t + u u_x = \varepsilon u_{xx}$* , Comm. Pure and App. Math. 13, p. 201-230, 1950 .
- [J1] B. JOURDAIN, *Convergence of moderately interacting particle systems to a diffusion-convection equation*, Prépublication du laboratoire de Probabilités de l'Université Pierre et Marie Curie 360, 1996 .
- [J2] B. JOURDAIN, *Diffusions with a nonlinear irregular drift coefficient and probabilistic interpretation of generalized Burgers' equations*, Prépublication du laboratoire de Probabilités de l'Université Pierre et Marie Curie 377, 1996 .

- [KS] I. KARATZAS, S.E. SCHREVE, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Graduate Texts in Mathematics 113, Springer-Verlag, 1986 .
- [KO] S. KOTANI, H. HIROFUMI, *Propagation of chaos for the Burgers equation*, J. Math. Soc. Japan 37-2, p. 275-294, 1985 .
- [KP] P.E. KLOEDEN, E. PLATEN, *Numerical solutions of stochastic differential equations*, Springer, 1992 .
- [L] O. LADYZHENSKAYA, *The Boundary Value Problem of Mathematical Physics*, Applied Mathematical sciences, Springer-Verlag, 1985 .
- [LSU] O. LADYZHENSKAYA, V.A. SOLONNIKOV, N.N. URAL'CEVA, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs 23, AMS, Providence R.I., 1968 .
- [M] G.N. MILSHTAIN, *Approximate integration of stochastic differential equations*, Theory of Probability and Applications 19, p. 557-562, 1974 .
- [PT] E. PARDOUX, D. TALAY, *Discretization and simulation of stochastic differential equations*, Acta Applicandae Mathematica 3, p. 23-47, 1985 .
- [Ra] P.A. RAVIART, *An analysis of particle methods*, Lecture Notes in Math. n^o 1127, p. 243-324, 1985 .
- [Ro1] B. ROYNETTE, *Un phénomène d'instabilité pour l'équation différentielle stochastique non linéaire* $X_t^\varepsilon = \varepsilon B_t - \int_0^t u_x^\varepsilon(s, X_s^\varepsilon) ds$, Stochastics and Stochastics Reports 53, p. 175-194, 1995 .
- [Ro2] B. ROYNETTE, *Approximation en norme Besov de la solution d'une équation différentielle stochastique*, Stochastics and Stochastic Reports 49, p. 191-209, 1994 .
- [RV] B. ROYNETTE, P. VALLOIS, *Une classe d'équations différentielles stochastiques non linéaires*, Journal of Functionnal Analysis 130, p. 477-523, 1995 .
- [Ru] R.Y. RUBINSTEIN, *Simulation and the Monte-Carlo method*, Wiley series in probability and math. statistics, 1981 .
- [Sa] S. SAKS, *Theory of the integral*, Hafner publishing company, 1937 .
- [Sz1] A.S. SZNITMAN, *Topics in Propagation of chaos*, Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour XIX, Lecture Notes in Mathematics n^o 1464, Springer-Verlag, 1989 .

- [Sz2] A.S. SZNITMAN, *A propagation of chaos result for Burgers' equation*, Probab. Th. Rel. Fields 71, p. 581-613, 1986 .
- [SzV] A.S. SZNITMAN, S.R.S. VARADHAN, *A multidimensional process involving local time*, Probab. Th. Rel. Fields 71, p. 553-579, 1986 .
- [T1] D. TALAY, *Simulation of stochastic differential equations*, chapitre 3 dans *Probabilistic methods in applied physics* P. Kree et W. Wedig, Lecture Notes in Physics n^o 451, Springer-Verlag, 1995 .
- [T2] D. TALAY, *Résolution trajectorielle et analyse numérique des équations différentielles stochastiques*, Stochastics 9, p. 275-306, 1983 .
- [TT] D. TALAY, L. TUBARO, *Probability models for non linear partial differential equations*, First session of the CIME in Montecatini Terme, Lectures Notes in Math. n^o 1627, 1995 .
- [W] S. WANTZ, *Un phénomène d'instabilité pour l'équation de Burgers 2-dimensionnelle*, Prépublication de l'Institut Elie Cartan n^o 21, 1995 .

Chapitre 2

Comportement des temps d'attente d'une diffusion fortement rentrante

Chapitre 2

Comportement des temps d'atteinte d'une diffusion fortement rentrante

2.1 Introduction

Ce travail consiste à étudier le comportement asymptotique des temps d'atteinte pour une certaine diffusion fortement rentrante. Nous considérons un processus stochastique unidimensionnel partant d'un point fixe y réel, et solution d'une E.D.S. à dérive fortement rentrante, c'est-à-dire tendant vers $-\infty$ à l'infini, donc le terme de dérive "ramène" le processus vers l'origine lorsque celui-ci a tendance à s'éloigner vers l'infini.

Nous définissons le temps d'atteinte du processus en un point x tel que $0 \leq x \leq y$ (ou temps de retour du processus en un point x) et nous nous intéressons au comportement asymptotique de la transformée de Laplace de ce temps d'arrêt lorsque l'on fait tendre le point de départ vers l'infini. En d'autres termes, on considère le problème suivant : lorsqu'on fait partir le processus de l'infini, peut-il espérer rejoindre un point fixé et fini ?

Soit donc $(X_t^y; t \geq 0)$ la solution de l'EDS unidimensionnelle ordinaire

$$X_t^y = y + B_t - \frac{1}{2} \int_0^t u(X_s^y) ds \quad (E)$$

où $(B_t; t \geq 0)$ est un mouvement brownien unidimensionnel linéaire issu de zéro. En fait, nous ne nous intéressons au processus $(X_t^y; t \geq 0)$ que lorsqu'il séjourne dans \mathbb{R}_+ , puisque y est destiné à tendre vers l'infini, si bien que nous n'imposons les hypothèses suivantes que sur les valeurs prises par u sur \mathbb{R}_+ . On se désintéresse totalement du processus quand il est sur la demi-droite négative \mathbb{R}_- .

(H₁) • $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 , u et u' tendent vers l'infini à l'infini, u'' et $\frac{u'^2}{u}$ sont des $o(u)$ à l'infini et $u'' \leq \frac{u'^2}{u}$ en dehors d'un compact.

(H₂) • $\int_0^{+\infty} \frac{1}{u} < +\infty$

Un exemple simple d'une telle fonction est $u(x) = x^\gamma$ avec $\gamma > 1$.

On ne sait rien sur la fonction u dans \mathbb{R}_- mais on pourrait la modifier sur cette demi-droite pour obtenir le caractère localement lipschitzien et rentrant de $-u$. Alors l'équation (E) possède une unique solution forte.

Soit $T_x^y = \inf \{t \geq 0; X_t^y = x\}$ avec $0 \leq x \leq y$. Notre résultat principal décrivant le comportement de la transformée de Laplace de ce temps d'arrêt est :

Théorème 1.1 *Il existe un compact K de \mathbb{R}_+ et deux constantes*

$0 < C_1 < C_2 < \infty$ tels que, pour tout $x \notin K$, $x \geq 0$:

i) Pour tout $\alpha > 0$ tel que $u(x) \geq C_2 \alpha^{\frac{1}{2}}$, on a : $\forall y \geq x$, $E(\exp \alpha T_x^y) < \infty$.

De plus : $\sup_{y \geq x} E(\exp \alpha T_x^y) < \infty$ et $\lim_{y \rightarrow \infty} E(\exp \alpha T_x^y)$ existe.

ii) Pour tout $\alpha > 0$ tel que $u(x) \leq C_1 \alpha^{\frac{1}{2}}$, on a : $\forall y \geq x$, $E(\exp \alpha T_x^y) = \infty$.

iii) Pour tout $\alpha > 0$, on a :

$1 \geq \limsup_{y \rightarrow \infty} E(\exp -\alpha T_x^y) = \liminf_{y \rightarrow \infty} E(\exp -\alpha T_x^y) = k(\alpha, x) > 0$.

C_2 (resp. C_1) peut être choisie arbitrairement proche et plus grande que $2\sqrt{2}$ (resp. arbitrairement proche et plus petite que $\sqrt{2}$).

Remarque 1.2 : Revenons à notre exemple, $u(x) = x^\gamma$ avec $\gamma > 1$. Dans ce cas, l'E.D.S. (E) devient :

$$X_t^y = y + B_t - \frac{1}{2} \int_0^t (X_s^y)^\gamma ds.$$

Le théorème 1.1 implique donc que $E[\exp \alpha T_x^y]$ existe pour $\alpha > 0$ et x de l'ordre de $\alpha^{\frac{1}{2\gamma}}$. Cet ordre est optimal. Si $x \geq C \alpha^{\frac{1}{2\gamma}}$ (avec C une constante positive), l'espérance est finie, sinon elle est infinie.

Remarque 1.3 : Examinons le cas particulier du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, c'est à dire $u(x) = bx$, $b > 0$:

$$X_t = y + B_t - b \int_0^t X_s ds.$$

L'hypothèse (H_1) est vérifiée, mais pas (H_2). Nous allons voir que cela a une importance capitale.

Dans [GNRS] (p. 402 formule 12), Giorno, Nobile, Ricciardi et Sacerdote donnent une forme explicite de la densité du temps de retour en zéro d'un processus de diffusion unidimensionnel homogène (en temps) caractérisé par une dérive A_1 et une variance A_2 données par :

$$\begin{cases} A_1(z) = \frac{a}{z} + bz \\ A_2(z) = \sigma^2 \end{cases}$$

Soient $x < y$ et $T_x^y = \inf \{t; X_t > x / X_0 = y\}$ le premier temps de retour en x partant de y . La densité de la v.a. T_x^y est notée :

$$g(x, t | y) = \frac{\partial}{\partial t} P(T_x^y < t).$$

Dans le cas $x = 0$ et $a = 0$ avec $b > 0$, on a alors :

$$g(0, t | y) = \frac{2 e^{2bt}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left(\frac{y}{\sigma}\right) \left(\frac{-b}{1 - e^{2bt}}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{by^2}{\sigma^2(1 - e^{2bt})}\right)$$

D'où, avec $\sigma = 1$:

$$g(0, t | y) \sim \frac{2 b^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} y e^{-bt} \exp(-by^2 e^{-2bt}) \quad \text{lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

Donc :

$$E[e^{|\alpha| T_0^y}] \sim k \int_0^\infty y e^{(|\alpha| - b)t} \exp(-by^2 e^{-2bt}) dt \quad \text{lorsque } t \rightarrow +\infty.$$

Choisissons $|\alpha| < b$ de telle façon que cette intégrale soit convergente quand $t \rightarrow +\infty$, on a donc :

$$E_y[e^{|\alpha| T_0^y}] < +\infty.$$

D'autre part, sur l'ensemble $\{t \geq \frac{\log y}{b}\}$, on voit facilement que :

$$\int_0^{\infty} e^{|\alpha|t} g(0, t | y) dt \geq \frac{k e^{-b}}{b - |\alpha|} y^{\frac{|\alpha|}{b}} \rightarrow +\infty \text{ lorsque } y \rightarrow +\infty.$$

Donc :

$$\sup_y E_y [e^{|\alpha|T_0^y}] = +\infty.$$

Ainsi, l'hypothèse (H_2) est-elle tout à fait essentielle à notre résultat .

Le but de ce travail est de démontrer le théorème 1.1 . Heuristiquement, ce résultat s'explique par le caractère fortement rentrant de $-u$.

Nous commencerons la démonstration de notre résultat dans le paragraphe 2.2, et étudierons en détail deux situations différentes révélées par notre étude aux paragraphes 2.3 et 2.4 .

2.2 Démonstration du théorème 1.1

On cherche à estimer la vitesse de retour en un point x du processus partant de y , pour $y \geq x \geq 0$ donnée par : T_x^y . Notre but est donc de calculer $E(\exp \alpha T_x^y)$. Pour cela, nous aurons besoin des fonctions propres du générateur infinitésimal de X^y :

$$L := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - u \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

On rappelle que, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe C^2 ,

$$M_t^{y,f} := f(X_t^y) \exp \left(- \int_0^t \frac{L f}{f}(X_s^y) ds \right); \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

est une martingale locale (cf [RY] Prop.(1.6) p. 271, ou [KS] Problème (4.3) p. 313). Aussi est-il classique que l'étude de $E(\exp \alpha T_x^y)$, pour x fixé assez grand, passe par celle des fonctions propres de L , donc des solutions de :

$$f''(z) - u(z)f'(z) = \alpha f(z) \quad (\alpha \in \mathbb{R}, z \geq x) \quad (P_\alpha)$$

Nous résolvons notre problème à une constante près : la constante $\frac{1}{2}$ a disparu dans l'expression (P_α) pour simplifier nos calculs, mais elle est prise en compte dans les constantes intervenant dans notre résultat.

Remarque 2.1 : On peut citer l'article de Schäl (cf. [S]) qui utilise le même argument de martingale pour obtenir la transformée de Laplace du temps d'atteinte de zéro pour un processus avec sauts positifs partant d'un niveau positif.

Un cas particulier (sans sauts) du problème traité par Schäl est l'E.D.S. (E) avec $u(x) = c$, c'est-à-dire :

$$X_t = \sigma B_t - ct.$$

Soit le temps d'arrêt $\tau_x := \inf \{t > 0; x + X_t = 0\}$, avec $x > 0$. Il montre qu'il existe deux constantes $0 < m, M < +\infty$ telles que :

$$\frac{x}{m} < E(\tau_x) < \frac{x}{M},$$

et sous certaines hypothèses :

$$E[\exp -\psi_{\tau_x}(\alpha)] = e^{-\alpha x},$$

avec ψ donnée par $\psi(\alpha) := c\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2$.

Ceci donne un résultat pour notre problème liée à l'E.D.S. (E) dans une situation non couverte par notre étude, la fonction $u(x) = c$ ne vérifiant pas nos hypothèses (H_1) et (H_2) .

Nous allons chercher des solutions de (P_α) sous la forme :

$$f_\alpha(z) = \left(\exp \int_x^z \frac{\varphi_\alpha(y)}{u(y)} dy \right) \frac{\exp \int_x^z u(y) dy}{u(z)} \quad (2.2)$$

avec une fonction φ_α à déterminer . On remarque que dès que φ_α est bornée, l'hypothèse (H_2) assure l'existence d'une limite finie de $\int_x^z \frac{\varphi_\alpha}{u}(y) dy$ quand $z \rightarrow +\infty$.

Pour déterminer quel type de fonction peut convenir pour φ_α , on cherche l'équation satisfaite par φ_α . Des calculs élémentaires nous donnent le résultat suivant .

Lemme 2.2 f_α est solution de (P_α) si et seulement si φ_α est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$S_\alpha(\varphi_\alpha, x) = \varphi_\alpha'(x) \quad (D_\alpha)$$

où :

$$S_\alpha(g, x) = 3g \frac{u'}{u}(x) + u''(x) - 2 \frac{u'^2}{u}(x) - g^2 \frac{1}{u}(x) + (\alpha - g) u(x) . \quad (2.3)$$

Démonstration du lemme 2.2: f_α est solution de (P_α) si et seulement si $\frac{Lf_\alpha}{f_\alpha} = \alpha$.

Calculons donc $\frac{Lf_\alpha}{f_\alpha}$:

$$\begin{aligned} f_\alpha' &= \left(\frac{\varphi_\alpha}{u} - \frac{u'}{u} + u \right) f_\alpha \\ f_\alpha'' &= \left\{ \left(\frac{\varphi_\alpha}{u} - \frac{u'}{u} + u \right)^2 + \left(\frac{\varphi_\alpha}{u} \right)' - \left(\frac{u'}{u} \right)' + u' \right\} f_\alpha \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} Lf_\alpha &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\varphi_\alpha}{u} - \frac{u'}{u} + u \right) \left(\frac{\varphi_\alpha}{u} - \frac{u'}{u} \right) + \left(\frac{\varphi_\alpha}{u} \right)' - \left(\frac{u'}{u} \right)' + u' \right] f_\alpha, \\ 2 \frac{Lf_\alpha}{f_\alpha} &= \left(\frac{\varphi_\alpha}{u} - \frac{u'}{u} + u \right) \left(\frac{\varphi_\alpha}{u} - \frac{u'}{u} \right) + \left(\frac{\varphi_\alpha}{u} \right)' - \left(\frac{u'}{u} \right)' + u'. \end{aligned}$$

(La constante 2 en facteur de $\frac{Lf_\alpha}{f_\alpha}$ vient du fait que l'on a omis la constante $\frac{1}{2}$ dans (P_α) .)

Donc l'équation $2 \frac{Lf_\alpha}{f_\alpha} = \alpha$ équivaut à :

$$\left(\frac{\varphi_\alpha}{u} - \frac{u'}{u} + u \right) \left(\frac{\varphi_\alpha}{u} - \frac{u'}{u} \right) + \left(\frac{\varphi_\alpha}{u} \right)' - \left(\frac{u'}{u} \right)' + u' = \alpha.$$

On cherche à exprimer φ_α' .

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_\alpha' u - u' \varphi_\alpha}{u^2} &= \alpha - u' + \left(\frac{u'}{u} \right)' - \left(\frac{\varphi_\alpha}{u} - \frac{u'}{u} + u \right) \left(\frac{\varphi_\alpha}{u} - \frac{u'}{u} \right) \\ &= \alpha + \left(\frac{u'}{u} \right)' - \left(\frac{\varphi_\alpha}{u} - \frac{u'}{u} \right)^2 - \varphi_\alpha. \end{aligned}$$

D'où l'équation satisfaite par φ_α :

$$\varphi'_\alpha = 3\varphi_\alpha \frac{u'}{u} + u'' - 2\frac{u'^2}{u} - \frac{\varphi_\alpha^2}{u} + (\alpha - \varphi_\alpha)u =: S_\alpha(\varphi_\alpha, \cdot).$$

Ce qui établit notre lemme.

Afin de déterminer l'allure de la fonction φ_α qui nous renseignera sur la fonction propre f_α définie par (2.2), résolvons l'équation $S_\alpha(y, x) = 0$:

$$3y \frac{u'}{u} + u'' - 2\frac{u'^2}{u} - \frac{y^2}{u} + (\alpha - y)u = 0.$$

En multipliant cette équation par $-u$, on trouve une équation du second degré en y :

$$y^2 + y(u^2 - 3u') + 2u'^2 - u''u - \alpha u^2 = 0.$$

Pour que cette équation ait des racines réelles, on doit imposer

$$\Delta = u^4 \left(1 - 6\frac{u'}{u^2} + \frac{u'^2}{u^4} + 4\frac{u''}{u^3} + 4\frac{\alpha}{u^2} \right) \geq 0.$$

D'après les équivalents de l'hypothèse (H_1) , Δ se comporte comme

$$\Delta \simeq u^4 \left(1 - \varepsilon + \frac{4\alpha}{u^2} \right).$$

On en déduit la condition suivante pour avoir des racines :

$$\begin{cases} \bullet & \alpha \geq 0 \text{ et } x \text{ assez grand} \\ \text{ou} & \\ \bullet & \alpha < 0 \text{ et } x \text{ est tel que } u(x) \geq \overline{C}_2 |\alpha|^{\frac{1}{2}}, \text{ avec } \overline{C}_2 > 2 \end{cases} \quad (C)$$

(On note \overline{C}_2 la constante dans le cas où on néglige le facteur $\frac{1}{2}$ pour simplifier les calculs .

Revenant au problème initial, on aura : $C_2 > 2\sqrt{2}$.)

Nous verrons que cette condition (C), selon qu'elle est ou non vérifiée, détermine deux classes de fonctions propres .

Désignons par Γ_α^+ (resp. $\Gamma_\alpha^-, \Gamma_\alpha^0$) le sous-ensemble de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ défini par :

$$\Gamma_\alpha^+ : = \{(x, y) ; x \geq 0, S_\alpha(y, x) > 0 \text{ (resp. } < 0, = 0)\}.$$

avec S_α définie par (2.3) . Désignons par Δ_x la droite verticale de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ passant par $(x, 0)$, pour y voir plus clair, se référer à la figure 2.1 du paragraphe 2.3 . On a alors les faits suivants :

• $\Delta_x \cap \Gamma_\alpha^+$ est soit vide, soit un compact non vide . Cette dichotomie nous amènera à distinguer deux sortes de fonctions propres (voir plus loin).

• $\Delta_x \cap \Gamma_\alpha^0$ est, pour x assez grand, constitué de deux points : x_1 et x_2 , avec $x_1 > x_2$. x_1 est la plus grande racine de l'équation $S_\alpha(y, x) = 0$. Calculons sa valeur :

$$2x_1 = -(u^2 - 3u') + u^2 \sqrt{1 - 6 \frac{u'}{u^2} + \frac{u'^2}{u^4} + 4 \frac{u''}{u^3} + 4 \frac{\alpha}{u^2}}.$$

Donc :

$$2x_1 = -u^2 + 3u' + u^2 \left\{ 1 - 3 \frac{u'}{u^2} + \frac{u'^2}{2u^4} + 2 \frac{u''}{u^3} + 2 \frac{\alpha}{u^2} - \frac{1}{8} \left(-6 \frac{u'}{u^2} + \frac{u'^2}{u^4} + 4 \frac{u''}{u^3} + 4 \frac{\alpha}{u^2} \right)^2 + o \left(-6 \frac{u'}{u^2} + \frac{u'^2}{u^4} + 4 \frac{u''}{u^3} + 4 \frac{\alpha}{u^2} \right) \right\}$$

$$2x_1 \sim 2\alpha + 2 \frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{2u^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{36u'^2}{u^2} + \frac{16\alpha^2}{u^2} - \frac{24\alpha u'}{u^2} \right)$$

En utilisant le fait que $u'(x) \rightarrow_{x \rightarrow \infty} \infty$ et $u'' \leq 2 \frac{u'^2}{u}$ en dehors d'un compact (cf. (H_1)), on obtient la forme suivante : $x_1 = \alpha - \varepsilon_\alpha(x)$ avec $\varepsilon_\alpha(x) > 0$ et $\varepsilon_\alpha(x) \rightarrow_{x \rightarrow \infty} 0$.

• Pour x assez grand, $\Gamma_\alpha^+ \cap \{(z, y); z \geq x, y \in \mathbb{R}\} =: \Gamma_\alpha^{+,x}$ (remplie en pointillée sur la figure 2.1) est une région absorbante pour l'équation (D_α) , i.e. : si φ est une solution de (D_α) , avec $\varphi(x) = s$ et $(x, s) \in \Gamma_\alpha^{+,x}$, alors φ est définie sur $[x, \infty[$ et $(z, \varphi(z)) \in \Gamma_\alpha^{+,x}$ pour tout $z \geq x$.

Nous différencions à présent les deux cas induits par la condition (C) .

a) Plaçons nous ici dans le cas où la condition (C) est vérifiée. Cela se traduit par : $\Delta_x \cap \Gamma_\alpha^+ \neq \emptyset$. On a alors ce résultat, que nous montrerons dans le paragraphe suivant :

Théorème 2.3 Dans le cas où la condition (C) est vérifiée, définissons une fonction f par :

$$f(z) := \frac{\exp \int_x^z u(y) dy}{u(z)} \left[\exp \left(\int_x^\infty \frac{\varphi_1}{u} + \int_x^z \frac{\varphi_2}{u} \right) - \exp \left(\int_x^\infty \frac{\varphi_2}{u} + \int_x^z \frac{\varphi_1}{u} \right) \right], \quad (2.4)$$

pour $z \geq x$, avec φ_1 et φ_2 deux solutions de l'équation D_α sur l'intervalle $[x, +\infty[$, telles que, pour $s > \alpha$ et $s' > \alpha$ fixés, $\varphi_1(x) = s$, $\varphi_2(x) = s'$ et $\varphi_1 \geq \varphi_2$ (cf. figure 2.1, paragraphe 2.3). Alors f est une fonction propre de L et $\lim_{z \rightarrow +\infty} f(z)$ existe et est strictement positive.

Nous sommes avec ce théorème en mesure d'établir la formule suivante de la vitesse de rappel. On rappelle que T_x^y le temps de retour en x partant de y , pour $x \leq y$. On a alors :

Théorème 2.4 Lorsque (C) est vérifiée, on a pour tout $y > x$:

$$E_y(e^{-\alpha T_x^y}) = \frac{f(y)}{f(x)} \quad (2.5)$$

avec la fonction propre f de L définie par (2.4).

Démonstration du Théorème 2.4 : La condition (C) étant composée de deux cas, nous allons les traiter séparément .

(i) On suppose $\alpha < 0$ et $u(x) \geq \overline{C}_2 |\alpha|^{\frac{1}{2}}$. Soit z tel que $x < y < z$. On a, en appliquant le fait que $M_t^{y,f}$ donnée par (2.1) est une martingale locale et en notant $\mathbb{1}$ la fonction indicatrice :

$$f(y) = E_y(f(X_t) e^{|\alpha|t} \mathbb{1}_{t < T_x^y \wedge T_z^y}) + f(x) E_y(e^{|\alpha|T_x^y} \mathbb{1}_{T_x^y < t \wedge T_z^y}) + f(z) E_y(e^{|\alpha|T_z^y} \mathbb{1}_{T_z^y < t \wedge T_x^y}) \quad (2.6)$$

Quand $t \rightarrow \infty$, d'après le théorème de la convergence monotone, on a pour les deux derniers termes du membre de droite de (2.6) :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} f(x) E_y(e^{|\alpha|T_x^y} \mathbb{1}_{T_x^y < t \wedge T_z^y}) &= f(x) E_y(e^{|\alpha|T_x^y} \mathbb{1}_{T_x^y < T_z^y}) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} f(z) E_y(e^{|\alpha|T_z^y} \mathbb{1}_{T_z^y < t \wedge T_x^y}) &= f(z) E_y(e^{|\alpha|T_z^y} \mathbb{1}_{T_z^y < T_x^y}). \end{aligned}$$

Pour le premier terme du membre de droite de (2.6), on remarque :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(X_t) e^{|\alpha|t} \mathbb{1}_{t < T_x^y \wedge T_z^y} = 0 \quad \text{p.s.} \quad (2.7)$$

Montrons que cette famille est équiintégrable en t . Pour cela, il suffit de voir qu'elle est bornée dans L^p , avec $p > 1$. Récrivons la relation (2.6) avec une fonction propre g de l'opérateur L (donc vérifiant le théorème 2.3 : g est positive et finie) associée à la valeur propre α' telle que $\alpha' < \alpha < 0$. On obtient :

$$g(y) \geq E_y(g(X_t) e^{|\alpha'|t} \mathbb{1}_{t < T_x^y \wedge T_z^y}) \geq C E_y(e^{|\alpha'|t} \mathbb{1}_{t < T_x^y \wedge T_z^y})$$

puisque g est minorée. D'où, f étant également bornée :

$$E_y(f^{\frac{\alpha'}{\alpha}}(X_t) e^{|\alpha|t} \mathbb{1}_{t < T_x^y \wedge T_z^y}) \leq E_y(f^{\frac{\alpha'}{\alpha}}(X_t) e^{|\alpha'|t} \mathbb{1}_{t < T_x^y \wedge T_z^y}) \leq C' E_y(e^{|\alpha'|t} \mathbb{1}_{t < T_x^y \wedge T_z^y}) \leq C'' g(y).$$

Donc la famille $\{f(X_t) e^{|\alpha|t} \mathbb{1}_{t < T_x^y \wedge T_z^y}\}_t$ est bornée dans $L^{\frac{\alpha'}{\alpha}}$ avec $\frac{\alpha'}{\alpha} > 1$. Elle est donc équiintégrable. Ainsi, d'après (2.7) :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_y(f(X_t) e^{|\alpha|t} \mathbb{1}_{t < T_x^y \wedge T_z^y}) = 0.$$

Ce qui nous donne, quand on fait tendre t vers $+\infty$ dans (2.6) :

$$f(y) = f(x) E_y(e^{|\alpha|T_x^y} \mathbb{1}_{T_x^y < T_z^y}) + f(z) E_y(e^{|\alpha|T_z^y} \mathbb{1}_{T_z^y < T_x^y}).$$

On fait à présent tendre z vers $+\infty$, et par la même méthode d'équiintégrabilité, on montre que :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} E_y(e^{|\alpha|T_z^y} \mathbb{1}_{T_z^y < T_x^y}) = 0.$$

On conclut par (2.5) dans ce premier cas :

$$E_y(e^{\alpha|T_x^y|}) = \frac{f(y)}{f(x)}.$$

(ii) Supposons à présent $\alpha > 0$ et x assez grand . Ce cas est beaucoup plus simple car $f(X_{t \wedge T_x^y} e^{-\alpha(t \wedge T_x^y)})$ est une martingale bornée . Il suffit donc d'appliquer le théorème d'arrêt :

$$E_y(f(X_{t \wedge T_x^y}) e^{-\alpha(t \wedge T_x^y)}) = f(y)$$

et de faire tendre t vers $+\infty$:

$$E_y(e^{-\alpha T_x^y}) = \frac{f(y)}{f(x)}.$$

Ceci achève la démonstration du théorème 2.4 .

On a alors : $\lim_{y \rightarrow +\infty} E_y(e^{-\alpha T_x^y}) = \frac{C(\alpha)}{f(x)}$, d'après les deux derniers théorèmes . Les points (i) et (iii) du théorème 1.1 en découlent aisément .

Corollaire 2.5 *Pour tout x en dehors d'un compact K , il existe un $\alpha > 0$ tel que, pour tout $r > 0$ et uniformément en $y \geq x$, on a :*

$$P(T_x^y > r) \leq C(x) e^{-\alpha r}.$$

Démonstration du Corollaire 2.5 : On applique l'inégalité de Tchebychev dans les deux cas suivants :

(i) $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} P(T_x^y > r) &= P(e^{\alpha T_x^y} > e^{\alpha r}) \\ &\leq e^{-\alpha r} \frac{f(y)}{f(x)} \\ &\leq C(x) e^{-\alpha r} \text{ uniformément en } y. \end{aligned}$$

(ii) $\alpha < 0$

$$\begin{aligned} P(T_x^y > r) &= P(e^{-\alpha T_x^y} > e^{-\alpha r}) \\ &\leq \frac{E(\exp |\alpha| T_x^y)}{\exp(|\alpha| r)} \\ &\leq e^{-|\alpha| r} \frac{f(y)}{f(x)} \\ &\leq C(x) e^{-|\alpha| r} \text{ uniformément en } y. \end{aligned}$$

Corollaire 2.6 *Sous l'une des deux conditions : $\alpha > 0$, x en dehors d'un compact K et $\alpha < 0$, $u(x) \geq \overline{C}_2 |\alpha|^{\frac{1}{2}}$, les lois des v.a. T_x^y convergent étroitement, quand $y \rightarrow +\infty$, vers une loi de probabilité ν telle que $\int_0^\infty e^{-\alpha z} \nu(dz) < \infty$.*

Démonstration du Corollaire 2.6 : Pour la démonstration, on se place dans le cas $\alpha > 0$ et x assez grand . Soit Q_x^y la loi de la v.a. T_x^y . Montrons qu'alors la famille $(Q_x^y)_y$ est tendue et monotone .

Pour montrer que la famille est tendue, il suffit de voir que :

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ il existe un compact } K_\varepsilon \text{ tel que } \sup_y Q_x^y(K_\varepsilon^c) \geq \varepsilon .$$

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit le compact $K_\varepsilon = [0, M_\varepsilon]$ avec M_ε assez grand . On a alors (cf. Corollaire 2.5) :

$$Q_x^y(K_\varepsilon^c) = P(T_x^y > M_\varepsilon) \leq c e^{-\alpha M_\varepsilon} \leq \varepsilon .$$

Donc la famille $(Q_x^y)_y$ est tendue . Et on voit facilement d'après la définition de T_x^y que la famille $(Q_x^y)_y$ est monotone : elle est croissante .

La famille étant tendue et monotone, on sait qu'il existe une loi de probabilité ν telle que

$$\int_0^\infty e^{-\alpha z} \nu(dz) < +\infty$$

et telle que Q_x^y converge vers ν quand $y \rightarrow +\infty$. Ceci établit notre corollaire .

b) On se place à présent en dehors du domaine d'application de la condition (C), c'est-à-dire lorsque $\alpha < 0$ et $|\alpha| > 1$. Nous montrerons dans le paragraphe 2.4 qu'alors :

Théorème 2.7 *Lorsque la condition (C) n'est pas vérifiée, une fonction propre de L peut être écrite sous la forme :*

$$f(z) := \left(\exp \int_{x_1}^z \frac{\varphi(y)}{u(y)} dy \right) \frac{\exp \int_{x_1}^z u(y) dy}{u(z)}, \quad (2.8)$$

avec un point x_1 tel que $u(x_1) \leq \overline{C}_1 |\alpha|^{\frac{1}{2}}$, et une fonction φ solution de (D_α) vérifiant :

$$\text{- pour } z \geq x_1, \quad \varphi(z) \leq \rho |\alpha| - u^2(z) \quad (\rho < 1)$$

$$\text{- pour } z \leq x_1, \quad \varphi(z) \geq \frac{|\alpha|}{z - x_0}, \quad (\text{voir figure 2.2, paragraphe 2.4}) .$$

Par les mêmes arguments d'équitégrabilité que dans la démonstration du théorème 2.3, on en déduit que : $E(\exp \alpha T_{x_0}^y) = +\infty$, avec $u(x_0) < C_1 |\alpha|^{\frac{1}{2}}$, ce qui est le point (ii) du théorème 1.1 avec $C_1 = \sqrt{2} \overline{C}_1$ pour revenir à notre problème initial . Notre résultat principal est donc établi .

Remarque 2.8 L'hypothèse (H_2) : $\int^{+\infty} \frac{1}{u} < +\infty$, sous laquelle notre théorème 1.1 est vrai, est précisément celle qui assure l'ultracontractivité du semigroupe associé à X^y par rapport à une mesure de probabilité liée à une primitive de u (cf. [KKR]) .

En effet, en reprenant les notations utilisées dans [KKR], soit $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de

2.2. Démonstration du théorème 1.1

classe C^2 telle que $v' = u$. On pose $\mu(x) := e^{-v(x)}$ la mesure de densité par rapport à la mesure de Lebesgue et on lui associe l'opérateur Δ^μ défini par :

$$\Delta^\mu := \frac{1}{2}(f'' - u f').$$

C'est le générateur infinitésimal associé à notre E.D.S. (E). Le semi-groupe associé $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ d'opérateurs est alors un semi-groupe de contractions dans $L^p(\mu)$, $\forall 1 \leq p \leq \infty$ (i.e. $\|T_t^\mu f\|_{p,\mu} \leq \|f\|_{p,\mu}$). Tout opérateur T_t^μ est symétrique, positif et vérifie $T_t^\mu 1 = 1$. Kavian, Kerkycharian et Roynette montrent alors que sous les hypothèses : v est convexe à l'infini et $\int^\infty \frac{d\sigma}{u(\sigma)} < +\infty$, le semi-groupe $(T_t^\mu)_{t \geq 0}$ est ultracontractif, c'est-à-dire T_t^μ est un opérateur borné de $L^1(\mu)$ dans L^∞ , $\forall t > 0$.

Nous allons achever la démonstration du théorème 1.1 en prouvant les théorèmes 2.3 et 2.7.

2.3 Démonstration du théorème 2.3 (première classe de fonctions propres)

On se place dans la situation où la condition (C) est satisfaite. Supposons $\alpha < 0$ et $u(x) \geq \overline{C}_2 |\alpha|^{\frac{1}{2}}$ (le cas $\alpha > 0$ et x assez grand se traite de manière analogue).

Commençons par remarquer que la fonction constante α est une sursolution de l'équation (D_α) pour x assez grand. En effet d'après (2.3):

$$S_\alpha(\alpha, x) = 3\alpha \frac{u'(x)}{u(x)} + u''(x) - 2 \frac{u'^2(x)}{u(x)} - \frac{\alpha^2}{u(x)} \leq 0$$

avec l'hypothèse $u'' \leq 2 \frac{u'^2}{u}$ et puisque $\alpha < 0$. Alors $-S_\alpha(\alpha, x) \geq 0$, ce qui signifie que α est une sursolution de (D_α) .

Soit $s > \alpha$. Nous désignons par φ la solution de (D_α) définie sur l'intervalle $[x, \infty[$ et telle que $\varphi(x) = s$. Il est alors clair que:

- $\sup_{z \geq x} |\varphi(z)| \leq k$, car la région $\Gamma_\alpha^{+,x}$ est absorbante pour toute solution de (D_α) ;
- et $\lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = \alpha$.

Ce dernier point résulte du fait que φ est croissante dès que $(z, \varphi(z)) \in \Gamma_\alpha^+ \cup \Gamma_\alpha^0$ et $S_\alpha(\varphi, x) = 0$ donc φ se rapproche en croissant de Γ_α^0 . De plus, on a vu que $x_1 \rightarrow_{x \rightarrow \infty} \alpha$, ce qui nous permet d'en déduire que la limite de $\varphi(z)$, lorsque z tend vers $+\infty$, est égale à α . La fonction φ est donc de la forme suivante:

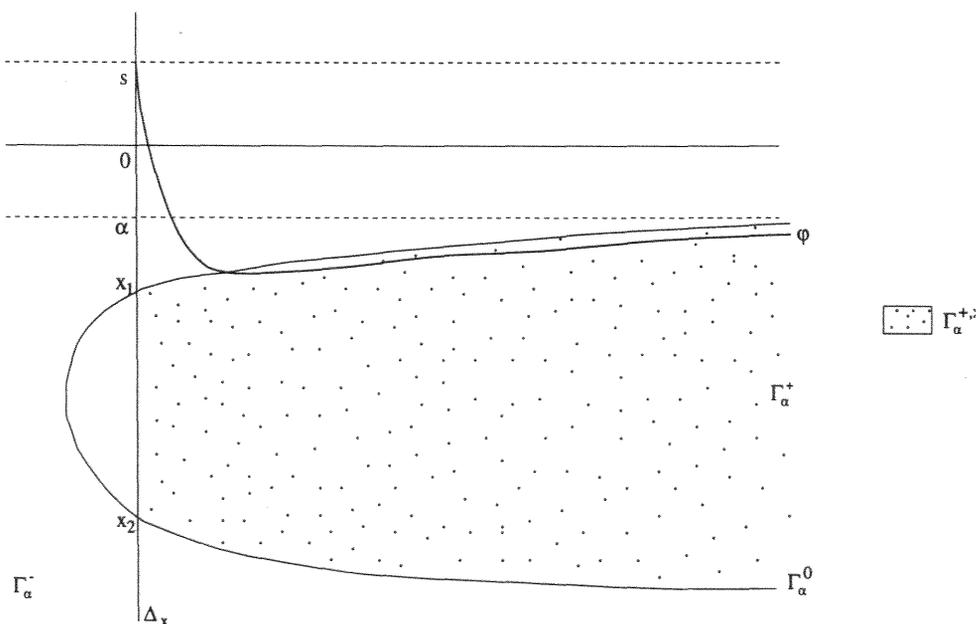


FIG. 2.1: Première classe de fonctions propres

2.3. Démonstration du théorème 2.3 (première classe de fonctions propres)

Soient alors φ_1 et φ_2 deux fonctions du même type que φ , avec $\varphi_1 \geq \varphi_2$, et soit, pour $z \geq x$, la fonction f définie comme dans l'énoncé du théorème 2.3 :

$$f(z) := \frac{\exp \int_x^z u(y) dy}{u(z)} \left[\exp \left(\int_x^\infty \frac{\varphi_1}{u} + \int_x^z \frac{\varphi_2}{u} \right) - \exp \left(\int_x^\infty \frac{\varphi_2}{u} + \int_x^z \frac{\varphi_1}{u} \right) \right]$$

Démonstration du théorème 2.3: On note

$$v(z) := \int_x^z u(y) dy \quad \text{et} \quad h(z) := \int_x^z \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{u}(y) dy.$$

φ_1 et φ_2 étant des solutions de (D_α) , on a par soustraction :

$$(\varphi_1 - \varphi_2)' = -(\varphi_1 - \varphi_2) \left[u - 3 \frac{u'}{u} + \frac{1}{u} (\varphi_1 + \varphi_2) \right].$$

D'où, par intégration et puisque $\varphi_1 - \varphi_2$ ne s'annule pas, on déduit :

$$(\varphi_1 - \varphi_2)(z) = C u^3(z) \exp[-v(z) - h(z)]. \quad (3.9)$$

f étant une combinaison linéaire de deux fonctions propres de la forme (2.2), de valeur propre α , est elle-même une fonction propre de valeur propre α . Ecrivons la sous la forme :

$$f(z) = \exp \left(\int_x^\infty \frac{\varphi_1}{u} + \int_x^z \frac{\varphi_2}{u} \right) \left(1 - \exp \int_z^\infty \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{u} \right) \frac{e^{v(z)}}{u(z)}. \quad (3.10)$$

Or $(\varphi_2 - \varphi_1) \leq 0$, donc $f(z) \geq 0$ pour tout $z \geq x$.

Notons :

$$\gamma(z) := \exp \left(\int_x^\infty \frac{\varphi_1}{u} + \int_x^z \frac{\varphi_2}{u} \right)$$

et

$$g(z) := 1 - \exp \int_z^\infty \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{u}.$$

Il est évident que $\gamma(z)$ a une limite quand z tend vers l'infini, égale à $\exp \int_x^\infty \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{u}$.

D'autre part :

$$g(z) = \int_z^\infty \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{u} + o \left(\int_z^\infty \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{u} \right). \quad (3.11)$$

En effet, $(\varphi_1 - \varphi_2)(z) \rightarrow_{z \rightarrow \infty} 0$ d'après (3.9), on peut donc encadrer l'intégrale par deux fonctions k_1 et k_2 , qui convergent vers zéro, c'est-à-dire :

$$k_1 \leq \int_z^\infty \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{u} \leq k_2,$$

ce qui nous autorise à faire le développement limité de l'exponentielle au voisinage de l'origine.

Calculons alors $\int_z^\infty \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{u}(y) dy$:

$$\int_z^\infty \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{u}(y) dy = \int_z^\infty C u^2(y) e^{-v(y)-h(y)} dy \quad \text{d'après (3.9).}$$

Or :

$$\begin{aligned} h(z) &= \int_x^z \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{u}(y) dy \\ &= \int_x^\infty \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{u}(y) dy - \int_z^\infty \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{u}(y) dy \\ &= C - \int_z^\infty \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{u}(y) dy, \end{aligned}$$

et $|\int_z^\infty \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{u}(y) dy| \leq 2k |\int_z^\infty \frac{1}{u(y)} dy| \rightarrow_{z \rightarrow \infty} 0$, cf. (H₂).

Donc $h(z) = C + o\left(\frac{1}{z}\right)$. On en déduit que :

$$\int_z^\infty \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{u}(y) dy = \int_z^\infty \tilde{C}(y) u^2(y) e^{-v(y)} dy$$

car $\lim_{z \rightarrow \infty} e^{o\left(\frac{1}{z}\right)} = 1$, on peut donc rentrer cette exponentielle dans la constante.

Il reste à évaluer $\int_z^\infty u^2(y) e^{-v(y)} dy$. On a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_z^\infty u^2(y) e^{-v(y)} dy &= - \int_z^\infty u(y) [e^{-v(y)}]' dy \\ &= u(z) e^{-v(z)} + \int_z^\infty \frac{u'(y)}{u(y)} u(y) e^{-v(y)} dy \\ &= u(z) e^{-v(z)} + \frac{u'(z)}{u(z)} e^{-v(z)} + \int_z^\infty e^{-v(y)} \left(\frac{u'}{u}(y)\right)' dy \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_z^\infty u^2(y) e^{-v(y)} dy = u(z) e^{-v(z)} + e^{-v(z)} o\left(\frac{1}{z}\right). \quad (3.12)$$

Finalement, on a, en utilisant l'estimation (3.12) dans (3.11) :

$$g(z) = u(z) e^{-v(z)} + e^{-v(z)} o\left(\frac{1}{z}\right).$$

On déduit de (3.10) que :

$$\begin{aligned} f(z) &= \gamma(z) \left(u(z) e^{-v(z)} + e^{-v(z)} o\left(\frac{1}{z}\right) \right) \frac{e^{v(z)}}{u(z)} \\ &= \gamma(z) \left(1 + \frac{1}{u(z)} o\left(\frac{1}{z}\right) \right). \end{aligned}$$

Et donc :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = C \exp \int_x^\infty \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{u}(y) dy$$

Ainsi, on a montré que f est positive et admet une limite strictement positive à l'infini. Ceci démontre le théorème 2.3.

2.3. Démonstration du théorème 2.3 (première classe de fonctions propres)

De plus, on peut établir une majoration des moments d'ordre p des temps d'atteinte ; et pour $p = 1$, on a une estimation optimale .

Théorème 3.1

i) Pour tout $p \geq 1$, il existe une constante $C_p < \infty$ telle que :

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} u(x) E[(T_x^{x+h})^p] \leq h C_p, \quad (3.13)$$

ii) Pour $p = 1$, cette estimation est optimale : il existe deux constantes $C < \infty$ et $C' < \infty$ telles que :

$$h C' \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} u(x) E(T_x^{x+h}) \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} u(x) E(T_x^{x+h}) \leq h C. \quad (3.14)$$

Démonstration du théorème 3.1 :

(i) Pour démontrer le (i), nous supposons $\alpha < 0$ et $u(x) \geq \overline{C}_2 |\alpha|^{\frac{1}{2}}$ avec $\overline{C}_2 > 2$. La fonction f définie par (2.4) étant solution de (P_α) , elle vérifie :

$$f'' - u f' = \alpha f.$$

En intégrant le membre de gauche de cette égalité contre la mesure de probabilité $\mu(z) = e^{-v(z)}$, on obtient d'une part :

$$\begin{aligned} \int_x^\infty (f'' - u f')(z) e^{-v(z)} dz &= [f'(z) e^{-v(z)}]_x^\infty + \int_x^\infty (u f')(z) e^{-v(z)} dz \\ &\quad - \int_x^\infty (u f')(z) e^{-v(z)} dz \\ &= -f'(x) e^{-v(x)}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\int_x^\infty (f'' - u f')(z) e^{-v(z)} dz = \alpha \int_x^\infty f(z) e^{-v(z)} dz.$$

D'où :

$$\alpha \int_x^\infty f(z) e^{-v(z)} dz = -f'(x) e^{-v(x)}.$$

α étant négatif et f positive, nécessairement $f'(x) \geq 0$, donc f est croissante . On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= |\alpha| e^{v(x)} \int_x^\infty f(z) e^{-v(z)} dz \\ &\leq |\alpha| \|f\|_\infty e^{v(x)} \int_x^\infty [-e^{-v(z)}]' \frac{1}{u(z)} dz \\ &\leq |\alpha| \|f\|_\infty \frac{1}{u(x)} - |\alpha| \|f\|_\infty e^{v(x)} \int_x^\infty e^{-v(z)} \frac{u'}{u^2}(z) dz \\ &\leq |\alpha| \|f\|_\infty \frac{1}{u(x)}. \end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité sur $[x, x+h]$, puisque f est croissante, on obtient :

$$f(x+h) - f(x) \leq |\alpha| \|f\|_\infty \int_x^{x+h} \frac{1}{u(z)} dz.$$

Or, on sait d'après le théorème 2.4 que :

$$E(e^{|\alpha| T_x^{x+h}}) = \frac{f(x+h)}{f(x)} = \frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} + 1.$$

Donc, avec le développement limité de l'exponentielle, on obtient :

$$\frac{|\alpha|^p E[(T_x^{x+h})^p]}{p!} \leq C(x) |\alpha| \|f\|_\infty \int_x^{x+h} \frac{1}{u(z)} dz, \quad \forall p \geq 1$$

où $C(x) = \frac{1}{f(x)}$, ainsi $\lim_{x \rightarrow \infty} C(x) \|f\|_\infty = 1$.

Alors :

$$E[(T_x^{x+h})^p] \leq C' p! |\alpha|^{1-p} \int_x^{x+h} \frac{1}{u(z)} dz, \quad \forall p \geq 1.$$

Donc, u étant croissante pour x assez grand, on peut majorer l'intégrale pour obtenir :

$$u(x) E[(T_x^{x+h})^p] \leq h C_p, \quad \forall p \geq 1.$$

On a établi le (i) du théorème.

(ii) On se place maintenant dans la situation : $\alpha > 0$ et x assez grand. D'après le théorème 2.4, on a :

$$E(e^{-\alpha T_x^{x+h}}) = \frac{f(x+h)}{f(x)} \geq 1 - \alpha E(T_x^{x+h}).$$

Et comme dans le cas précédent, on peut montrer que :

$$f'(x) e^{-v(x)} = -\alpha \int_x^\infty f(z) e^{-v(z)} dz.$$

Puisque $\alpha > 0$, $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante. D'autre part, f reste toujours bornée et on a :

$$|f'(x)| \geq \frac{\alpha C'}{u(x)}$$

donc

$$f'(x) \leq -\frac{\alpha C'}{u(x)}.$$

On intègre sur $[x, x+h]$ et on tient compte du fait que f est décroissante, on obtient :

$$f(x) - f(x+h) \geq C' \alpha \int_x^{x+h} \frac{1}{u(z)} dz.$$

2.3. Démonstration du théorème 2.3 (première classe de fonctions propres)

D'où :

$$E(e^{-\alpha T_x^{x+h}}) = \frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} + 1 \leq 1 - \alpha C' \int_x^{x+h} \frac{1}{u(z)} dz.$$

On en déduit que :

$$E(T_x^{x+h}) \geq C' h \frac{1}{u(x)}.$$

Et en appliquant (3.13) avec $p = 1$, on a l'autre inégalité, ce qui nous donne (3.14). Ceci achève la preuve du théorème 3.1.

2.4 Démonstration du théorème 2.7 (seconde classe de fonctions propres)

Rappelons que dans ce cas, la condition (C) n'est pas vérifiée, ce qui équivaut à : $\alpha < 0$ et $|\alpha| > 1$. Faisons trois remarques :

i) La fonction ψ_1 , définie par : $\psi_1(z) := \rho |\alpha| - u^2(z)$, avec $\rho < 1$, est une sursolution de (D_α) pour z en dehors d'un compact, i.e. :

$$\psi_1'(z) - S_\alpha(\psi_1, z) \geq 0.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \psi_1'(z) - S_\alpha(\psi_1, z) &= u u' + \left(\frac{2u'^2}{u} - u'' \right) + \rho^2 \frac{|\alpha|^2}{u} + |\alpha| \left\{ u(1 + \rho) - \frac{3\rho u'}{u} \right\} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

avec les hypothèses car $\left(u(1 + \rho) - \frac{3\rho u'}{u} \right) \geq 0$ en dehors d'un compact.

ii) Soient une constante $\overline{C}_1 < 1$ et des points x_1 tel que $u(x_1) \leq \overline{C}_1 |\alpha|^{\frac{1}{2}}$ et $x_0 = x_1 - k$ ($k > \frac{1}{\rho - \overline{C}_1^2}$). Soit ψ_2 définie sur $]x_0, x_1]$ par :

$$\psi_2(z) := \frac{|\alpha|}{z - x_0}.$$

Alors, ψ_2 est une sursolution de (D_α) . En effet, vérifions que

$$\begin{aligned} \psi_2'(z) - S_\alpha(\psi_2, z) &\geq 0. \\ \psi_2'(z) - S_\alpha(\psi_2, z) &= -\frac{|\alpha|}{(z - x_0)^2} - \frac{3|\alpha|}{z - x_0} \frac{u'}{u} + \left(\frac{2u'^2}{u} - u'' \right) + \frac{|\alpha|^2}{(z - x_0)^2 u} \\ &\quad + \left(\frac{|\alpha|}{z - x_0} - \alpha \right) u \\ &\geq \frac{|\alpha|}{z - x_0} \left(-\frac{3u'}{u} + u \right) \end{aligned}$$

≥ 0
en dehors d'un compact car $\frac{u'}{u} \rightarrow 0$.

iii) On peut choisir \overline{C}_1 (aussi proche de 1 que l'on veut) telle que : $\psi_2(x_1) \leq \psi_1(x_1)$, c'est-à-dire :

$$\frac{|\alpha|}{x_1 - x_0} \leq \rho |\alpha| - u^2(x_1)$$

2.4. Démonstration du théorème 2.7 (seconde classe de fonctions propres)

$$(\rho - \overline{C_1}^2) \geq \frac{1}{x_1 - x_0} = \frac{1}{k}$$

Ceci justifie notre choix de la constante k : $k > \frac{1}{\rho - \overline{C_1}^2}$.

On fixe maintenant un point s tel que $\psi_2(x_1) \leq s \leq \psi_1(x_1)$. Et on note φ la solution de (D_α) vérifiant $\varphi(x_1) = s$. Définissons φ sur son intervalle maximal de définition.

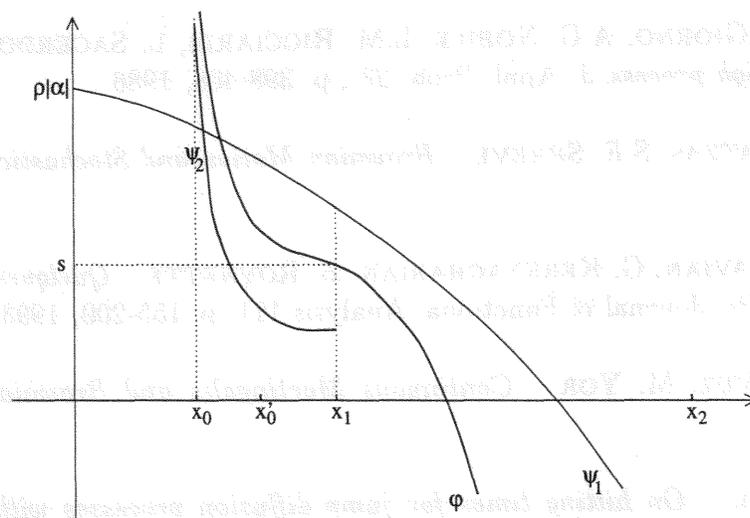


FIG. 2.2: Deuxième classe de fonctions propres

On a donc :

$$\text{- pour } z \geq x_1, \quad \varphi(z) \leq \rho |\alpha| - u^2(z) \quad (4.15)$$

$$\text{- pour } z \leq x_1, \quad \varphi(z) \geq \frac{|\alpha|}{z - x_0} \quad (4.16)$$

On définit :

$$f(z) := \left(\exp \int_{x_1}^z \frac{\varphi(y)}{u(y)} dy \right) \frac{\exp \int_{x_1}^z u(y) dy}{u(z)}.$$

avec la fonction φ ainsi définie.

Alors, il est clair, d'après (4.15) et (4.16), que la fonction f est solution de (P_α) et :

• f est définie sur $[x'_0, x_2]$ (avec x'_0 proche de x_0 , $x_0 < x'_0 < x_1$ et x_2 éventuellement égal à $+\infty$), de classe C^2 sur $]x'_0, x_2[$ et telle que :

$$\bullet f(x'_0) = f(x_2) = 0 \quad (x_0 \leq x'_0 \leq x_1 < x_2 \leq \infty).$$

On a ainsi construit une fonction propre de l'opérateur L de la forme (2.8) donnée dans le théorème 2.7.

Références

[DW1] M. DEACONU, S. WANTZ *Comportement des temps d'atteinte d'une diffusion fortement rentrante*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 322, Série I, p. 757-762, 1996 .

[DW2] M. DEACONU, S. WANTZ *Comportement des temps d'atteinte d'une diffusion fortement rentrante*, Prépublication de l'Institut Elie Cartan 38, 1996 .

[GNRS] V. GIORNO, A.G. NOBILE, L.M. RICCIARDI, L. SACERDOTE *Some remarks on the Rayleigh process*, J. Appl. Prob. 23 , p. 398-408, 1986 .

[KS] I. KARATZAS, S.E. SHREVE *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, 1991 .

[KKR] O. KAVIAN, G. KERKYACHARIAN, B. ROYNETTE *Quelques remarques sur l'ultracontractivité*, Journal of Functional Analysis 111, p. 155-200, 1993 .

[RY] D. REVUZ, M. YOR *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer Verlag, 1991 .

[S] M. SCHÄL *On hitting times for jump-diffusion processes with past-dependent local characteristics*, Stochastic Processes and Applications 47, p. 131-142, 1993 .

Chapitre 3

Processus stochastique non linéaire réfléchi auto-stabilisant

Chapitre 3

Processus stochastique non linéaire réfléchi auto-stabilisant

3.1 Introduction

3.1.1 Avant-propos

Cas libre

Un problème similaire dans le cas libre, c'est-à-dire sur \mathbb{R} tout entier, a été précédemment étudié par Saïd Bénachour, Bernard Roynette, Denis Talay et Pierre Vallois dans [BRTV] et [BRV].

Etant donnée une fonction $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

- β est impaire et non décroissante,
- β est localement lipschitzienne et à croissance polynomiale, i.e.

$$\exists c > 0, r \in \mathbb{N}^*; |\beta(x) - \beta(y)| \leq |x - y|(c + |x|^r + |y|^r), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

- de plus, β est convexe, i.e.

$$\exists \beta_1 > 0, \beta_0 \in \mathbb{R} ; \beta(x) - \beta(y) \geq \beta_1(x - y) + \beta_0, \quad \forall x \geq y,$$

considérons l'E.D.S. :

$$\begin{cases} X_t = X_0 + B_t - \frac{1}{2} \int_0^t \beta * u(s, X_s) ds, & \forall t \geq 0 \\ \mathbb{P}(X_t \in dx) = u(t, dx) \end{cases} \quad (EL)$$

avec $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien unidimensionnel standard . Elle possède une unique solution sous ces hypothèses .

Les auteurs lui associent un système de particules, le système limite vérifiant la propriété de propagation du chaos .

Il s'intéressent ensuite au comportement asymptotique du processus solution . Ils établissent un résultat d'existence d'une mesure stationnaire sous les mêmes hypothèses (avec β convexe) et un résultat d'unicité si de plus la fonction β s'écrit sous la forme :

$$\beta(x) = \tilde{\beta}(x) + \alpha x$$

où $\tilde{\beta}$ est une fonction impaire et croissante, lipschitzienne et à croissance linéaire, et $\alpha > 0$. Ils obtiennent enfin la convergence en loi du processus $(X_t)_{t \geq 0}$, solution de (EL), quand $t \rightarrow +\infty$, vers la probabilité invariante .

Nous nous intéressons ici au cas réfléchi dans un intervalle compact de \mathbb{R} . Nous avons choisi l'intervalle $[-1, 1]$ pour plus de simplicité, mais ce que nous allons développer ici sera valable également dans le cas d'un intervalle compact non symétrique . Nous utilisons les mêmes techniques développées par S. Benachour, B. Roynette, D. Talay et P. Vallois mais le fait de se placer dans un compact permet d'affaiblir les hypothèses sur β (nous n'avons plus besoin de la convexité de β) et de simplifier les démonstrations .

Cas réfléchi : cadre général

Nous donnons dans ce paragraphe un certain nombre de références concernant les E.D.S. réfléchies. Cette liste est loin d'être exhaustive, elle constitue simplement un bref aperçu des travaux sur le sujet que nous avons rencontré au cours de nos recherches. Nous nous intéresserons tout d'abord aux équations ordinaires qui ont été étudiées selon deux approches principales, données ici dans l'ordre chronologique : le problème de Skorokhod (formulation forte) et le problème des martingales (formulation faible). Puis nous passerons aux équations non linéaires.

Le cas des E.D.S. réfléchies linéaires au sens de Mac Kean, c'est-à-dire où la loi de la v.a. n'intervient pas dans les coefficients de l'équation, a été abondamment étudié. Pressenti par Skorokhod en 1961 (cf. [Sk1], [Sk2]), le problème de l'existence et l'unicité de la solution d'une E.D.S. réfléchie linéaire a été repris ensuite par Mac Kean qui en 1969 (cf. [McK]) démontre le résultat unidimensionnel de Skorokhod. Puis Tanaka (cf. [T]) en 1979 étend ce résultat au cas multidimensionnel dans un domaine convexe. En 1987, Saisho (cf. [Sa]) affaiblit cette hypothèse sur le domaine en établissant un résultat d'existence et d'unicité de la solution dans un domaine pouvant en un certain sens être approximé par des domaines réguliers, plus précisément le domaine doit satisfaire aux conditions uniformes de sphère extérieure et de cône intérieur. On peut se référer également à Lions et Sznitman, cf [LS], qui étudient ce problème dans le cas multidimensionnel.

Les E.D.S. réfléchies ont également été étudiées sous la forme de problèmes de martingales, par exemple par Stroock et Varadhan en 1971 (cf. [SV]) qui se placent dans un sous-ensemble ouvert G de \mathbb{R}^d défini par :

$$G = \{x \in \mathbb{R}^d; \phi(x) > 0\} \text{ et } \partial G = \{x \in \mathbb{R}^d; \phi(x) = 0\},$$

où ϕ est une fonction bornée dont les deux premières dérivées sont continues et bornées dans \mathbb{R}^d et telle que $|\nabla\phi| \geq 1$ sur ∂G . Ils établissent l'existence et l'unicité de la solution pour des processus de diffusion avec des coefficients continus non dégénérés, satisfaisant des conditions au bord avec des dérivées obliques lipschitziennes.

L'équivalence entre le problème des martingales et des E.D.S. avec conditions au bord a été étudiée par N. El Karoui (cf. [K]) qui a établi en 1975 le résultat suivant :

Théorème 1.1 (N. El Karoui) : *Les deux propositions suivantes sont équivalentes si a_{11} est minoré.*

(i) *Il existe une solution P au problème des martingales partant de x à l'instant 0, c'est-à-dire il existe un processus A_t croissant, continu, \mathcal{F}_t^0 -mesurable, ne chargeant que ∂G tel que :*

$$\begin{aligned} & - \mathbb{P}(X_0 = x) = 1, \\ & - \forall f \in C_0^2(\overline{G}), \quad C_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s) ds - \int_0^t \Gamma f(X_s) dA_s \\ & \text{est une } P\text{-martingale;} \end{aligned}$$

- (ii) Il existe : - un espace de probabilité complet $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{G}}_t, \hat{P})$
 - un processus croissant continu \hat{A}_t localement intégrable,
 - un \hat{P} -mouvement brownien issu de 0 d -dimensionnel $\hat{\beta}_t$,
 - un \hat{P} -mouvement brownien issu de 0 $(d-1)$ -dimensionnel,
 indépendant du précédent, $\hat{\beta}_t$,

tels que le système suivant ait au moins une solution \hat{Z}_t , \hat{P} -p.s. continue, à valeurs dans \hat{G} :

$$\begin{cases} \hat{Z}_0 = x \\ \int_0^t \mathbf{1}_{\partial G}(\hat{Z}_s) d\hat{A}_s = \hat{A}_t \\ \hat{Z}_t = x + \int_0^t \sigma(\hat{Z}_s) d\hat{\beta}_s + \int_0^t b(\hat{Z}_s) ds + \int_0^t \gamma(\hat{Z}_s) d\hat{A}_s + \int_0^t \tilde{\sigma}(\hat{Z}_s) d\hat{\beta}_{\hat{A}_s} \end{cases}$$

avec $\sigma \sigma^* = a$, $\tilde{\sigma} \tilde{\sigma}^* = \alpha$.

On peut citer également d'autres travaux sur ce sujet :

- Ikeda (cf. [I]) s'intéresse aux E.D.S. deux-dimensionnelles avec conditions au bord de type Ventzell.
- Watanabe (cf. [W1], [W2]) montre l'existence et l'unicité des solutions d'E.D.S. réfléchies avec des coefficients lipschitziens, dans le semi-espace \mathbb{R}_+^n .
- Nakao et Shiga (cf. [NS]) en 1972 étudient des E.D.S. à coefficients continus et avec des conditions au bord dont le terme de second ordre est non dégénéré.
- El Karoui et Chaleyat-Maurel (cf. [KCM]) s'inspirent d'un problème de réflexion déterministe sur \mathbb{R}_+ : Soit $y \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Le couple (z, k) , où $z, k \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est solution du problème de réflexion associé à y (PBR(y)) si :

(i) $z = y + k$

(ii) $z \geq 0$

(iii) k est une fonction croissante telle que $k(0) = 0$ et $\int_0^t z(s) dk(s) = 0$.

Elles l'étendent ensuite au cas stochastique des semi-martingales ; elles étudient le problème suivant :

$$\begin{cases} X_t = \eta_t + \int_0^t f(s, X_s) dM_s + \int_0^t g(s, X_s) dA_s + K_t \\ X_t \text{ est un processus adapté, continu et positif} \\ K_t \text{ est un processus croissant, adapté, nul en 0 et tel que } \int_0^\infty X_s dK_s = 0 \text{ p.s.} \end{cases}$$

avec M une martingale locale continue et A un processus continu à variation bornée.

- Bensoussan et Lions (cf. [BL]) résolvent ces équations dans un domaine régulier par une méthode de localisation.

Intéressons-nous à présent aux E.D.S. réfléchies non linéaires . Il existe de nombreux travaux sur ce sujet (on pourra voir par exemple les références données dans [S1]), mais le plus important nous paraît être le travail effectué par Sznitman en 1984 (cf. [S1]) . Il a étudié des E.D.S. non linéaires réfléchies de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_t = \left(\int \sigma(x_t, y) u_t(dy) \right) dB_t + \left(\int b(x_t, y) u_t(dy) \right) dt - dk_t \\ P(x_t \in dx) = u_t(dx), \quad x_t \in \bar{\Theta}, \quad t \geq 0 \\ |k|_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{x_s \in \partial\Theta\}} d|k|_s < \infty \\ k_t = \int_0^t n(x_s) d|k|_s \end{array} \right. \quad (E_S)$$

avec Θ un ouvert borné de \mathbb{R}^d , régulier au sens où sa frontière satisfait la condition uniforme "de sphère extérieure", i.e.

$$\exists c \geq 0; \forall x \in \partial\Theta, \forall x' \in \bar{\Theta}, \quad C\|x - x'\|^2 + n(x).(x - x') \geq 0;$$

$n(\cdot)$ le vecteur normal unitaire sortant à $\partial\Theta$; $\sigma_{i,j}(x, y)$ et $b_i(x, y)$, $i, j \in [1, d]$, des fonctions lipschitziennes et bornées sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. La donnée initiale x_0 est une v.a. à valeurs dans $\bar{\Theta}$, de loi u ; et $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien indépendant de x_0 , à valeurs dans $\bar{\Theta}$.

Il a montré que :

Théorème 1.2 (Sznitman) *Il existe un unique processus continu adapté x_t tel que :*

- $x_t \in \bar{\Theta}, \quad \forall t \geq 0$
- *il existe un processus continu adapté, à valeurs dans \mathbb{R}^d , à variation finie sur les intervalles bornés, de valeur 0 en 0, $(k_t)_{t \geq 0}$, tel que (E_S) soit vérifiée .*

Il établit également un résultat de propagation du chaos . Pour cela, il remarque tout d'abord que la loi sur $\mathcal{B} := \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \bar{\Theta}) \times \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ du couple $(x_t, k_t)_{t \geq 0}$ solution de (E_S) est aussi l'unique solution P du problème de martingale (σ, b, u) sur \mathcal{B} :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \circ P = u, \quad k_0 = 0 \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \\ \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad f(x_t + k_t) - f(x_0 + k_0) - \int_0^t \int_{\mathcal{B} \times \mathcal{B}} L f(\omega_s, x_s(\omega'), x_s(\omega'')) dP(\omega') dP(\omega'') ds \\ \quad \text{est une } P\text{-martingale} \\ \int_0^t d|k|_s < +\infty, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \forall t \geq 0 \\ k_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{x_s \in \partial\bar{\Theta}\}} d|k|_s, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \forall t \geq 0 \\ k_t = \int_0^t n(x_s) d|k|_s, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \forall t \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\text{avec } Lf(\bar{x}, x', x'') = \sum_{i,j} \frac{1}{2} (\sigma(x, x') \sigma(x, x'')^t)_{ij} f''_{ij}(x+k) + \sum_i b_i(x, x') f'_i(x+k),$$

$$\bar{x} = (x, k) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d.$$

Rappelons une définition permettant de comprendre ce que signifie la propagation du chaos :

Définition Etant donné un espace métrique séparable E et une distribution ν dans E , une suite (ν_n) de probabilités symétriques dans E^n est dite ν -chaotique si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nu_n(dx_1 \dots dx_n), f_1(x_1) \times \dots \times f_k(x_k) \rangle = \prod_{i=1}^k \langle \nu, f_i \rangle, \quad \forall f_1 \dots f_k \in C_b(E).$$

On peut se reporter à [S2] pour un cours détaillé sur la propagation du chaos .
Avec la caractérisation de la loi du couple $(x_t, k_t)_{t \geq 0}$, on a alors :

Théorème 1.3 (Sznitman) Soient $N \geq 1$, u_N une probabilité symétrique sur $\bar{\Theta}^N$.
Considérons la loi P_N du processus $(x^i, k^i)_{i \in [1, N]}$ défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_t^i = \frac{1}{N} \sum_j \sigma(x_t^i, x_t^j) dB_t^i + \frac{1}{N} \sum_j b(x_t^i, x_t^j) dt - dk_t^i, \quad x_t^i \in \bar{\Theta} \\ |k^i|_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{x_s^i \in \partial\bar{\Theta}\}} d|k^i|_s < +\infty \\ k_t^i = \int_0^t n(x_s^i) d|k^i|_s, \quad \forall i \in [1, N], t \in \mathbb{R}_+ \\ (x_0^i)_{i \in [1, N]} \text{ a pour loi } u_N \end{array} \right.$$

(les (B^i) sont des mouvements browniens indépendants à valeurs dans \mathbb{R}^d , qui sont indépendants des données initiales $(x_0^i)_{i \in [1, N]}$).

Supposons que les lois u_N sur $\bar{\Theta}^N$ sont u -chaotiques, alors P_N sur \mathcal{B}^N est P -chaotique, où P est l'unique solution du problème de martingale (σ, b, u) .

3.1.2 Notre problème

Présentation du problème

Soient $\beta : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction impaire, croissante et lipschitzienne ; et $(B_t ; t \geq 0)$ un mouvement brownien standard, unidimensionnel, issu de zéro .

Nous nous intéressons à l'équation différentielle stochastique réfléchie non linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_t = X_0 + B_t - \frac{1}{2} \int_0^t \beta * u(s, X_s) ds - k_t, \quad \forall t \geq 0 \\ P(X_t \in dx) = u(t, dx), \quad \forall t > 0 \\ X_t \in [-1, 1], \quad \forall t \geq 0 \\ |k|_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{-1,1\}}(X_s) d|k|_s \\ k_t = \int_0^t n(X_s) d|k|_s \end{array} \right. \quad (ER)$$

où on a noté par $|\cdot|$ la variation totale et par n le vecteur unitaire normal sortant aux bords de l'intervalle $[-1, 1]$, $n(x) = \text{sgn}(x) \cdot \mathbb{1}_{\{-1,1\}}(x)$.

$\beta * u$ désigne le produit de convolution de β avec u :

$$\beta * u(t, x) = \int_{-1}^1 \beta(x - y) u(t, dy) .$$

Cette E.D.S. a trois inconnues : le couple $(X_t, k_t)_{t \geq 0}$ et la famille de probabilités $(u(t, dy) ; t \geq 0)$. Avec les hypothèses satisfaites par β , si la densité u existe, on a l'existence et l'unicité du couple $(X_t, k_t)_{t \geq 0}$ solution de (ER) d'après le résultat de Sznitman exposé au paragraphe précédent .

Motivation heuristique

Soient un entier $N \geq 1$ et u_N une probabilité symétrique sur $[-1, 1]^N$. On définit le système de particules associé à l'E.D.S. (ER) par :

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t^i = dB_t^i - \frac{1}{2} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \beta(X_t^i - X_t^j) dt - dk_t^i \\ X_t^i \in [-1, 1], t \in \mathbb{R}_+ \\ |k^i|_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{-1,1\}}(X_s^i) d|k^i|_s < +\infty \\ k_t^i = \int_0^t n(X_s^i) d|k^i|_s, i \in [1, N] \\ (X_0^i)_{i \in [1, N]} \text{ de loi } u_N \end{array} \right. \quad (SPR)$$

avec N mouvements browniens indépendants $(B^i)_{1 \leq i \leq N}$ à valeurs dans \mathbb{R} , indépendants de la donnée initiale $(X_0^i)_{i \in [1, N]}$.

Comme pour (ER) , les hypothèses faites sur β nous donnent l'existence et l'unicité du couple $(X^i, k^i)_{i \in [1, N]}$ solution de (SPR) , et il y a de plus propagation du chaos, d'après le résultat de Sznitman (cf. [S1]) décrit précédemment.

Dans ce cas, X^i ($i \in [1, N]$) ne modélise pas la position d'une particule puisque la fonction β est croissante (quand deux particules s'éloignent, β augmente avec la distance entre les deux). En fait, X^i représente la charge d'une particule ionisée qui se trouve dans un milieu biologique ou chimique.

L'équation non linéaire (ER) peut ainsi modéliser le fonctionnement de certains systèmes biologiques appelés systèmes tampons avec consigne. En effet, d'une part les particules ne peuvent pas s'échapper d'une certaine région. Chaque fois qu'une particule atteint la frontière de cette région, elle est renvoyée à l'intérieur par l'action du processus (k) . D'autre part, l'action des autres particules agit comme une force de rappel vers un état d'équilibre. C'est donc un phénomène de régulation d'un paramètre biologique (par exemple la température du corps humain) dans une région fixée.

Le plan de notre travail est le suivant :

Nous allons dans le paragraphe 3.2 établir l'existence et l'unicité d'une mesure stationnaire pour le processus solution de l'E.D.S. réfléchi (ER) . Dans ce but, nous considérerons l'équation intégrale-différentielle satisfaite par la densité du processus (en 3.2.1), et nous en déduirons une forme implicite de la densité dans le cas stationnaire. Nous nous efforcerons ensuite de montrer son existence (en 3.2.2) et son unicité (en 3.2.3) pour laquelle nous verrons qu'il faut des hypothèses plus fortes sur la fonction β .

Nous nous intéressons ensuite à la convergence en loi du processus réfléchi vers la mesure stationnaire. Pour cela, nous avons besoin de résultats préliminaires assez généraux (en 3.3.1). Nous établissons la convergence en loi dans le cas d'une donnée initiale symétrique d'une part (en 3.3.2), et non symétrique d'autre part (en 3.3.3), sous les hypothèses sur β assurant l'unicité de la mesure stationnaire.

Nous examinons ensuite les cas de deux fonctions β pour lesquelles $\alpha = 0$. Ceci nous conduira à élargir nos hypothèses (au paragraphe 3.6).

3.2 Existence et unicité de la mesure stationnaire

Considérons l'équation différentielle stochastique unidimensionnelle non linéaire réfléchie :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_t = X_0 + B_t - \frac{1}{2} \int_0^t \beta * u(s, X_s) ds - k_t, \quad \forall t \geq 0 \\ P(X_t \in dx) = u(t, dx), \quad \forall t > 0 \\ X_t \in [-1, 1], \quad \forall t \geq 0 \\ |k|_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{-1,1\}}(X_s) d|k|_s \\ k_t = \int_0^t n(X_s) d|k|_s \end{array} \right. \quad (ER)$$

avec $(B_t; t \geq 0)$ un mouvement brownien réel issu de zéro, et où on a noté par $|\cdot|$ la variation totale et par n le vecteur normal unitaire sortant aux bornes de l'intervalle $[-1, 1]$, i.e. $n(x) = \text{sgn}(x) \cdot \mathbb{1}_{\{-1,1\}}(x)$.

On fait les hypothèses suivantes sur β :

(H₁) $\beta : [-2, 2] \mapsto \mathbb{R}$, impaire, croissante et lipschitzienne, c'est-à-dire il existe une constante C_β telle que

$$|\beta(x) - \beta(y)| \leq C_\beta |x - y|, \quad \forall x, y \in [-2, 2].$$

(H₂) $\beta(x) = \beta_0(x) + \alpha x$, avec β_0 une fonction vérifiant (H₁), et $\alpha > 0$ une constante assez grande dépendant de β_0 .

D'après (H₁), la fonction β est lipschitzienne et uniformément bornée, ce qui nous assure, d'après Sznitman (voir la section 1.1), l'existence et l'unicité du processus réfléchi $(X_t)_{t \geq 0}$ solution de l'EDS réfléchie (ER).

3.2.1 L'équation satisfaite par la densité

Soit $(X_t, t \geq 0)$ la solution unique de l'E.D.S. (ER). L'équation satisfaite par la densité de ce processus est obtenue de façon habituelle. Considérons une fonction test (au moins de classe C^2) f , à support dans $[-1, 1]$ et à valeurs réelles, telle que $f'(1) = f'(-1) = 0$. Alors, en appliquant la formule d'Itô à cette fonction, on a :

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \left(dB_s - \frac{1}{2} (\beta * u)(s, X_s) ds \right) \\ &\quad - \int_0^t f'(X_s) dk_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) ds. \end{aligned}$$

Avec la fonction test choisie et le fait que le processus k soit non nul seulement en -1 et 1, l'intégrale par rapport à k est nulle et on obtient, en prenant l'espérance :

$$E(f(X_t)) = f(X_0) - \frac{1}{2} E \left(\int_0^t f'(X_s) (\beta * u)(s, X_s) ds \right) + \frac{1}{2} E \left(\int_0^t f''(X_s) ds \right).$$

Puisque la densité de $(X_t)_{t \geq 0}$ est $u(t, \cdot)$ et en dérivant par rapport à t , on obtient :

$$\int_{-1}^1 f(x) u_t(t, x) dx = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f'(x) ((\beta * u)u)(t, x) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f''(x) u(t, x) dx,$$

où on a noté u_t la dérivée de u par rapport à t . Par la suite, les dérivations seront notées en indice de cette façon.

Après intégration par parties dans les termes de droite, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) u_t(t, x) dx &= -\frac{1}{2} [f(\beta * u)u]_{-1}^1 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) [(\beta * u)u]_x(t, x) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} [f u_x]_{-1}^1 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) u_{xx}(t, x) dx. \end{aligned}$$

On en déduit l'équation intégralo-différentielle avec conditions aux bords vérifiée par la densité u :

$$\begin{cases} u_{xx} + ((\beta * u)u)_x = u_t \\ [(\beta * u)u](t, 1) = -u_x(t, 1) \\ [(\beta * u)u](t, -1) = -u_x(t, -1) \end{cases}$$

Et quand on se place dans le cas stationnaire (où u ne dépend pas de t), nous avons :

$$\begin{cases} u_{xx} + ((\beta * u)u)_x = 0 \\ [(\beta * u)u](1) = -u_x(1) \\ [(\beta * u)u](-1) = -u_x(-1) \end{cases}$$

3.2.2 Résultat d'existence pour la mesure stationnaire

Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est une solution de (ER) et $\mu(x)dx$ est une mesure stationnaire pour ce processus, alors μ vérifie l'équation suivante au sens des distributions, avec des conditions aux bornes de l'intervalle que nous ne rappelons pas ici :

$$\mu'' + [(\beta * \mu)\mu]' = 0.$$

En intégrant cette équation avec ses conditions aux bords, on trouve la formule implicite pour μ :

$$\mu(x) = \frac{\exp\left(-\int_0^x (\beta * \mu)(y) dy\right)}{\lambda(\mu)} \quad (2.1)$$

avec la constante de normalisation :

$$\lambda(\mu) = \int_{-1}^1 \exp\left(-\int_0^x (\beta * \mu)(y) dy\right) dx. \quad (2.2)$$

Théorème 2.1 *Sous l'hypothèse (H_1) pour β , on a :*

- (i) *Il existe une fonction symétrique μ (i.e. $\mu(x) = \mu(-x)$, $\forall x \in [0, 1]$) qui soit une densité de probabilité et qui vérifie (2.1).*
- (ii) *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ l'unique solution de (ER) avec donnée initiale X_0 . Si μ est la densité de X_0 , alors le processus X est stationnaire (i.e. la densité de X_t est égale à μ pour tout $t \geq 0$).*

Démonstration du Théorème 2.1 :

(i) Considérons l'opérateur \mathcal{A} défini sur un espace convenable par :

$$\mathcal{A}\mu(x) := \frac{\exp\left(-\int_0^x (\beta * \mu)(y) dy\right)}{\lambda(\mu)}.$$

On remarque que si l'opérateur \mathcal{A} admet un point fixe, alors ce point fixe est une mesure stationnaire solution de (2.1). Nous allons utiliser une généralisation du théorème de Brouwer, dont nous rappellerons ci-dessous l'énoncé (cf. [DS] tome 1, p. 457), pour montrer que la restriction de \mathcal{A} à un sous-ensemble admet un point fixe.

Proposition 2.2 [Théorème de Brouwer] *Soient \mathcal{B} un espace de Banach, \mathcal{C} un sous-ensemble convexe et fermé de \mathcal{B} et une application \mathcal{A} telle que :*

- (i) $\mathcal{A} : \mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}$,
- (ii) \mathcal{A} est continue,
- (iii) $\overline{\mathcal{A}(\mathcal{C})}$ est compacte.

Alors \mathcal{A} admet un point fixe dans \mathcal{C} .

Introduisons les notations suivantes :

$$\text{soit } \mathcal{B} := \{f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}; \text{ paire, continue}\}, \quad (2.3)$$

un espace de Banach muni de la norme sup :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|.$$

Soit $M > 0$. On pose :

$$\mathcal{C}_M := \{f \in \mathcal{B}; f \geq 0; \int_{-1}^1 f(x) dx = 1; \sup_{x \in [-1, 1]} f(x) \leq M\}. \quad (2.4)$$

Pour tout $u \in \mathcal{C}_M$, on définit :

$$\mathcal{A}u(x) := \frac{1}{\lambda(u)} \exp\left(-\int_0^x (\beta * u)(y) dy\right) \quad (2.5)$$

avec $\lambda(u)$ donné par (2.2).

Il est évident que \mathcal{C}_M est un sous-ensemble fermé et convexe de \mathcal{B} . Vérifions les autres hypothèses de la proposition 2.2. Nous établissons tout d'abord un résultat qui nous sera utile dans la suite.

Lemme 2.3 *Soit u un élément de \mathcal{C}_M . Alors $\beta * u$ est une fonction impaire et :*

$$-C_\beta \leq \int_0^x (\beta * u)(y) dy \leq C_\beta, \quad \forall x \in [0, 1] \quad (2.6)$$

avec C_β la constante de Lipschitz de la fonction β .

Démonstration du lemme 2.3 : β étant impaire et u paire, on déduit facilement que $\beta * u$ est impaire.

Pour $x \in [0, 1]$, on a :

$$\beta * u(x) = \int_0^1 \beta(x+y) u(y) dy + \int_0^1 \beta(x-y) u(y) dy.$$

D'où, avec l'hypothèse (H_1) :

$$\begin{aligned} |\beta * u(x)| &\leq \int_0^1 |\beta(x+y) - \beta(y-x)| u(y) dy \\ &\leq 2C_\beta x \int_0^1 u(y) dy \\ &\leq C_\beta. \end{aligned}$$

En intégrant, on trouve :

$$-C_\beta \leq -C_\beta x \leq \int_0^x (\beta * u)(y) dy \leq C_\beta x \leq C_\beta,$$

d'où notre résultat. On peut remarquer que nous n'avons pas utilisé le fait que

$$\sup_{x \in [-1, 1]} u(x) \leq M.$$

Montrons à présent que l'ensemble \mathcal{C}_M est stable par \mathcal{A} ((i) proposition 2.2).

Lemme 2.4 *Il existe M (dépendant seulement de β) tel que l'on ait l'inclusion : $\mathcal{A}(\mathcal{C}_M) \subseteq \mathcal{C}_M$.*

Démonstration du lemme 2.4: Soit $u \in \mathcal{C}_M$. On a, par définition

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathcal{A}u(x) &= \frac{1}{\lambda(u)} \exp\left(-\int_0^{|x|} (\beta * u)(y) dy\right) \\ &\leq \frac{e^{C_\beta}}{\lambda(u)} \quad \text{cf. (2.6)}. \end{aligned}$$

Or, on peut majorer $\lambda(u)$ par:

$$\begin{aligned} \lambda(u) &= \int_{-1}^1 \exp\left(-\int_0^x (\beta * u)(y) dy\right) dx \\ &\geq \int_{-1}^1 \exp(-C_\beta) dx = 2e^{-C_\beta}, \quad \text{cf. (2.6)}. \end{aligned}$$

Alors

$$\sup_{x \in [-1,1]} |\mathcal{A}u(x)| \leq \frac{e^{2C_\beta}}{2}.$$

En choisissant $M \geq \frac{e^{2C_\beta}}{2}$ et puisque $\mathcal{A}u$ est une densité paire, on a $\mathcal{A}u \in \mathcal{C}_M$. D'où notre résultat.

Montrons le (ii) de la proposition 2.2:

Lemme 2.5 \mathcal{A} est un opérateur lipschitzien (donc continu).

Démonstration du lemme 2.5: Pour montrer que \mathcal{A} est lipschitzien, on décompose la différence $\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v)$ sous la forme:

$$(\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v))(x) = \frac{1}{\lambda(u)} \theta(x) + (\lambda(v) - \lambda(u)) W(x); \quad (2.7)$$

avec, pour $u, v \in \mathcal{C}_M$ et $x \in [-1, 1]$:

$$\theta(x) = \exp\left(-\int_0^x (\beta * u)(y) dy\right) - \exp\left(-\int_0^x (\beta * v)(y) dy\right). \quad (2.8)$$

et

$$W(x) = \frac{1}{\lambda(u)\lambda(v)} \exp\left(-\int_0^x (\beta * v)(y) dy\right). \quad (2.9)$$

1. Soit $x \in [0, 1]$. On a vu que:

$$\beta * u(x) = \int_0^1 [\beta(x+y) - \beta(y-x)] u(y) dy,$$

donc θ s'écrit :

$$\theta(x) = e^{-\varphi_u(x)} - e^{-\varphi_v(x)}$$

avec

$$\varphi_w(x) = \int_0^x \tilde{\beta}_w(y) dy \quad (2.10)$$

et

$$\tilde{\beta}_w(y) = \int_0^1 [\beta(y+z) - \beta(z-y)] w(z) dz \quad (2.11)$$

où $w = u$ ou v .

De l'inégalité: $|e^a - e^b| \leq \max(e^a, e^b) |a - b|$, pour tout a, b , on déduit :

$$\begin{aligned} |\theta(x)| &\leq \max(e^{-\varphi_u}, e^{-\varphi_v}) |\varphi_u(x) - \varphi_v(x)| \\ &\leq e^{C_\beta} \int_0^x H(y) dy \end{aligned}$$

où on a noté :

$$\begin{aligned} H(y) &= \left| \int_0^1 [\beta(y+z) - \beta(z-y)] (u(z) - v(z)) dz \right|; y \in [0, 1] \\ &\leq \int_0^1 |\beta(y+z) - \beta(z-y)| dz \quad \|u - v\|_\infty \\ &\leq 2 C_\beta \|u - v\|_\infty \end{aligned} \quad (2.12)$$

car, d'après (H_1) , on a :

$$|\beta(y+z) - \beta(z-y)| \leq 2y C_\beta \leq 2 C_\beta.$$

En intégrant, on obtient :

$$\begin{aligned} |\theta(x)| &\leq e^{C_\beta} 2 C_\beta x \|u - v\|_\infty \\ &\leq 2 C_\beta e^{C_\beta} \|u - v\|_\infty. \end{aligned} \quad (2.13)$$

2. On s'intéresse à W défini par (2.9). Nous avons vu dans la démonstration du lemme 2.4 que :

$$\lambda(w) \geq 2e^{-C_\beta}, \quad (w = u \text{ ou } v);$$

et, d'après (2.6), on déduit que :

$$0 \leq W(x) \leq \frac{e^{3C_\beta}}{4}; \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (2.14)$$

Or $\lambda(u) - \lambda(v) = \int_{-1}^1 \theta(x) dx$, donc avec l'inégalité (2.13) établie précédemment, on obtient :

$$|\lambda(u) - \lambda(v)| \leq 4 C_\beta e^{C_\beta} \|u - v\|_\infty. \quad (2.15)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}u(x) - \mathcal{A}v(x)| &\leq \frac{1}{|\lambda(u)|} |\theta(x)| + |W(x)| |\lambda(u) - \lambda(v)| \\ &\leq \frac{e^{C_\beta}}{2} 2 C_\beta e^{C_\beta} \|u - v\|_\infty + \frac{e^{3C_\beta}}{4} 4 C_\beta e^{C_\beta} \|u - v\|_\infty \\ &\leq C_\beta e^{2C_\beta} (e^{2C_\beta} + 1) \|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc :

$$\|\mathcal{A}u - \mathcal{A}v\|_\infty \leq C_\beta e^{2C_\beta} (e^{2C_\beta} + 1) \|u - v\|_\infty.$$

Ceci montre que l'application \mathcal{A} est lipschitzienne et en particulier continue .

Il reste à montrer que $\overline{\mathcal{A}(\mathcal{C}_M)}$ est compact. Puisque $\mathcal{A}(\mathcal{C}_M) \subset \mathcal{C}_M \subset \mathcal{B}$, d'après le théorème d'Ascoli, il suffit de voir que $\mathcal{A}(\mathcal{C}_M)$ est une famille équicontinue de fonctions . Cette condition est satisfaite si :

$$\sup_{u \in \mathcal{C}_M} \sup_{x \in [-1,1]} |(\mathcal{A}u)'(x)| < \infty. \quad (2.16)$$

En utilisant la définition de $\mathcal{A}u$, sa dérivée est donnée par :

$$(\mathcal{A}u)'(x) = -\frac{1}{\lambda(u)} (\beta * u)(x) \exp\left(-\int_0^x (\beta * u)(y) dy\right).$$

D'où :

$$|(\mathcal{A}u)'(x)| \leq \frac{C_\beta}{2} e^{2C_\beta},$$

donc (2.16) est vérifiée et $\overline{\mathcal{A}(\mathcal{C}_M)}$ est compact.

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer le théorème de Brouwer: il existe donc μ dans \mathcal{C}_M telle que $\mathcal{A}\mu = \mu$. Ce qui montre le (i) de notre théorème .

(ii) Puisque μ est le point fixe de \mathcal{A} , évidemment elle est de classe \mathcal{C}^1 et on voit facilement (en dérivant) qu'elle vérifie l'équation :

$$\mu'(x) = -(\beta * \mu)(x) \mu(x).$$

Supposons maintenant que $P(X_0 \in dx) = \mu(x) dx$. Alors :

$$P(X_t \in dx) = \mu(x) dx.$$

Ceci achève la démonstration du théorème 2.1 .

3.2.3 Résultat d'unicité pour la mesure stationnaire

Nous avons établi l'existence d'une mesure stationnaire pour l'équation (ER), étudions à présent son unicité. Notre résultat sera :

Théorème 2.6 *Sous l'hypothèse (H₂), il existe une constante α_{β_0} telle que, pour tout $\alpha \geq \alpha_{\beta_0}$, l'équation (2.1) admette au plus une solution.*

Pour démontrer ce théorème, nous considérons l'espace

$$\mathcal{D} := \left\{ \nu : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+ ; \int_{-1}^1 \nu(x) dx = 1, \nu(x) = \nu(-x), \forall x \in [-1, 1], \right. \\ \left. \text{et } \sup_{x \in [-1, 1]} \nu(x) < +\infty \right\}.$$

Nous allons utiliser un argument de contraction dans cet espace. Pour cela, nous avons besoin de la décomposition (H₂) de β qui induit le résultat préliminaire :

Lemme 2.7 *Soit u un élément de \mathcal{D} . Alors :*

$$(i) \quad \beta_0 * u(x) = \int_0^1 [\beta_0(x+y) - \beta_0(y-x)] u(y) dy, \quad \forall x \in [0, 1] \quad (2.17)$$

$$(ii) \quad \beta * u(x) = \beta_0 * u(x) + \alpha x \quad \text{et} \quad \beta * u(x) \geq \alpha x, \quad \forall x \in [0, 1] \quad (2.18)$$

Démonstration du lemme 2.7 :

(i) L'égalité (2.17) est évidente car β_0 vérifie les mêmes propriétés que β .

(ii) Puisque β admet la décomposition donnée dans (H₂), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \beta * u(x) &= \beta_0 * u(x) + \alpha \text{Id} * u(x) \\ &= \beta_0 * u(x) + \alpha \int_{-1}^1 (x-y) u(y) dy \\ &= \beta_0 * u(x) + \alpha x. \end{aligned}$$

D'autre part, β_0 est une fonction croissante sur $[0, 1]$ et en utilisant (i), il est facile de voir que $\beta_0 * u(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]$. D'où le résultat.

Démonstration du théorème 2.6 : Nous allons maintenant introduire un espace de Banach et une application définie sur cet espace, que nous vérifierons être une contraction. Soit donc μ une solution de l'équation (2.1). D'après (2.18), on a :

$$\mu(x) = \frac{1}{\lambda(\mu)} \exp\left(-\int_0^x (\beta * \mu)(y) dy\right) \leq \frac{1}{\lambda(\mu)} \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2}\right); \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (2.19)$$

On note :

$$\mathcal{D}_\alpha := \left\{ \nu : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}_+, \int_{-1}^1 \nu(x) dx = 1, \nu(x) = \nu(-x), \forall x \in [-1, 1], \right. \\ \left. \nu(x) \leq \frac{1}{\lambda(\nu)} \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2}\right) \right\} \quad (2.20)$$

et on munit cet espace de la norme \mathcal{N} :

$$\mathcal{N}(\nu) = \int_{-1}^1 (1 + |x|) \nu(x) dx, \quad \forall \nu \in \mathcal{D}_\alpha.$$

Il est clair que $\mu \in \mathcal{D}_\alpha$. Puisque \mathcal{A} est un opérateur de \mathcal{D}_α dans \mathcal{D} , l'idée de la preuve du théorème 2.6 est de montrer que, pour α assez grand, \mathcal{A} est une contraction, ce qui assure l'unicité du point fixe.

Pour cela, redécomposons $\mathcal{A}u - \mathcal{A}v$ sous la forme :

$$(\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v))(x) = \frac{1}{\lambda(u)} \theta(x) + (\lambda(v) - \lambda(u)) W(x),$$

avec θ et W définies respectivement par (2.8) et (2.9). Nous allons majorer successivement $\frac{1}{\lambda(u)}$, θ et W .

Lemme 2.8 *Il existe une constante ne dépendant que de β_0 , notée $K(\beta_0)$, telle que pour tout $u \in \mathcal{D}_\alpha$:*

$$\frac{1}{\lambda(u)} \leq \sqrt{\alpha} K(\beta_0), \quad \forall \alpha \geq 1. \quad (2.21)$$

Démonstration du lemme 2.8 : Puisque β_0 vérifie la même hypothèse (H_1) que β , on peut lui appliquer l'inégalité (2.6) :

$$\int_0^x \beta_0 * u(y) dy \leq C_{\beta_0}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

D'autre part, avec (2.18), et puisque $\beta * u$ est impaire, on a :

$$\begin{aligned} \lambda(u) &= 2 \int_0^1 \exp\left(-\int_0^x (\beta_0 * u)(y) dy - \frac{\alpha x^2}{2}\right) dx \\ &\geq 2 \int_0^1 \exp(-C_{\beta_0}) \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2}\right) dx. \end{aligned}$$

Avec le changement de variable $y = \sqrt{\alpha} x$, $\alpha \geq 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lambda(u) &\geq \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \exp(-C_{\beta_0}) \int_0^{\sqrt{\alpha}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\ &\geq \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \exp(-C_{\beta_0}) C \quad \text{avec } C = \int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \end{aligned}$$

On a donc le résultat du lemme 2.8 avec $K(\beta_0) = \frac{e^{C_{\beta_0}}}{2C}$.

Lemme 2.9 Soit $\theta : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction paire définie par :

$$\theta(x) = \exp\left(-\int_0^x (\beta * u)(y)dy\right) - \exp\left(-\int_0^x (\beta * v)(y)dy\right); \quad x \in [0, 1]$$

pour u et v appartenant à \mathcal{D}_α . Alors :

$$|\theta(x)| \leq C_{\beta_0} \frac{x^2}{2} \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2}\right) \mathcal{N}(u - v). \quad (2.22)$$

Démonstration du lemme 2.9: En utilisant (2.18), on a :

$$\theta(x) = e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} \theta_0(x),$$

avec θ_0 défini comme θ en remplaçant β par β_0 . Nous nous intéressons tout d'abord à θ_0 :

$$|\theta_0(x)| \leq \int_0^x H_0(y) dy \quad ; \quad x \in [0, 1]$$

où, comme dans la démonstration du lemme 2.5 :

$$\begin{aligned} H_0(y) &= \left| \int_0^1 (\beta_0(y+z) - \beta_0(z-y))(u(z) - v(z)) dz \right|, \quad y \in [0, 1] \\ &\leq \int_0^1 |\beta_0(y+z) - \beta_0(z-y)| |u(z) - v(z)| dz \\ &\leq 2C_{\beta_0} y \int_0^1 |u(z) - v(z)| dz = 2C_{\beta_0} y \int_0^1 \frac{(1+z)|u(z) - v(z)|}{1+z} dz \\ &\leq C_{\beta_0} y \mathcal{N}(u - v). \end{aligned}$$

Donc :

$$|\theta(x)| \leq C_{\beta_0} \frac{x^2}{2} \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2}\right) \mathcal{N}(u - v).$$

Remarque : On ne majore pas ici la puissance de x car elle nous sera utile dans la suite .

Lemme 2.10

(i) \mathcal{A} est un opérateur défini sur \mathcal{D}_α à valeurs dans \mathcal{D} .

(ii) Il existe $\alpha_{\beta_0} > 0, 0 < k_{\beta_0} < 1$ tels que pour tout $\alpha \geq \alpha_{\beta_0}$ et pour tous $u, v \in \mathcal{D}_\alpha$, on a :

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v)) \leq k_{\beta_0} \mathcal{N}(u - v). \quad (2.23)$$

Démonstration du lemme 2.10 : Avec la décomposition de $\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v)) &= \mathcal{N}\left(\frac{1}{\lambda(u)}\theta + (\lambda(v) - \lambda(u))W\right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda(u)}\mathcal{N}(\theta) + |\lambda(v) - \lambda(u)|\mathcal{N}(W). \end{aligned}$$

Majorons le premier terme du membre de droite :

$$\frac{1}{\lambda(u)}\mathcal{N}(\theta) \leq \sqrt{\alpha}K(\beta_0) \int_{-1}^1 (1+|x|)C_{\beta_0} \frac{x^2}{2} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} \mathcal{N}(u-v) dx \quad \text{cf. (2.21) et (2.22)}.$$

En posant $y = \sqrt{\alpha}x$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda(u)}\mathcal{N}(\theta) &\leq 2\sqrt{\alpha}K(\beta_0)C_{\beta_0}\mathcal{N}(u-v) \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\sqrt{\alpha}} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{\alpha}}\right) \frac{y^2}{2\alpha} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &\leq \frac{1}{\alpha}K(\beta_0)C_{\beta_0}\mathcal{N}(u-v) \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{\alpha}}\right) y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &\leq \frac{C}{\alpha}\mathcal{N}(u-v) \end{aligned}$$

avec C une constante universelle ne dépendant que de β_0 .

On procède de même pour le terme $|\lambda(v) - \lambda(u)|$:

$$\begin{aligned} |\lambda(v) - \lambda(u)| &= \left| \int_{-1}^1 \theta(x) dx \right| \\ &\leq C_{\beta_0}\mathcal{N}(u-v) \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} dx \quad \text{d'après (2.22)} \\ &\leq \frac{C_{\beta_0}}{\alpha^{\frac{3}{2}}}\mathcal{N}(u-v) \int_0^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{C}{\alpha^{\frac{3}{2}}}\mathcal{N}(u-v). \end{aligned}$$

Et pour W , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(W) &= \frac{1}{\lambda(u)\lambda(v)} \int_{-1}^1 (1+|x|) \exp\left(-\int_0^x (\beta * v)(y) dy\right) dx \\ &\leq \alpha K^2(\beta_0) \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\sqrt{\alpha}} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{\alpha}}\right) \exp\left(-\int_0^{\frac{y}{\sqrt{\alpha}}} (\beta * v)(z) dz\right) dy \\ &\leq \sqrt{\alpha}C. \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v)) \leq \frac{C}{\alpha}\mathcal{N}(u-v).$$

Avec α assez grand pour que $\frac{C}{\alpha} < 1$, \mathcal{A} est une contraction donc elle admet un unique point fixe. Ceci établit le théorème 2.6 .

3.3 Convergence vers la mesure stationnaire dans le cas symétrique

On se place déjà dans le cas symétrique : on suppose que X_0 est une variable aléatoire de loi symétrique, indépendante du mouvement brownien et à valeurs dans $[-1, 1]$.

On étudie le comportement asymptotique, lorsque $t \rightarrow \infty$, du processus réfléchi $(X_t; t \geq 0)$ solution de (ER) : on montre que, sous les hypothèses du théorème 2.6, c'est-à-dire β vérifiant (H_1) et (H_2) , le processus réfléchi converge en distribution vers l'unique mesure stationnaire μ , solution de (2.1).

3.3.1 Résultats préliminaires

Lemme de comparaison en loi

Nous établissons un lemme de comparaison en loi pour des E.D.S. réfléchies de forme plus générale que (ER) et recouvrant ce cas particulier.

On note par :

$$\mathcal{L}_{lip} := \{ b : \mathbb{R}_+ \times [-1, 1] \mapsto \mathbb{R} \text{ tel qu'il existe } C_b > 0, \text{ tel que} \\ \forall x, y \in [-1, 1], \forall t \geq 0, |b(t, x) - b(t, y)| \leq C_b |x - y| \}.$$

Pour $b \in \mathcal{L}_{lip}$, il existe une unique solution forte $X^{(b)}$ de l'équation différentielle stochastique ordinaire réfléchie :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_t^{(b)} = X_0 + B_t - \int_0^t b(s, X_s^{(b)}) ds - k_t, \quad t \geq 0 \\ X_t^{(b)} \in [-1, 1], \quad t \geq 0 \\ |k|_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{-1, 1\}}(X_s^{(b)}) d|k|_s \\ k_t = \int_0^t n(X_s^{(b)}) d|k|_s \end{array} \right. \quad (E_b)$$

avec $(B_t; t \geq 0)$ un mouvement brownien unidimensionnel tel que $B_0 = 0$, et X_0 une variable aléatoire \mathcal{F}_0 -mesurable de loi symétrique, à valeurs dans $[-1, 1]$, et indépendante du mouvement brownien. On peut pour s'en persuader consulter le théorème 1.1 de Sznitman cité au paragraphe 1.1.

On va considérer des fonctions b vérifiant de plus :

$$(\operatorname{sgn} x) b(t, x) \geq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in [-1, 1], x \neq 0. \quad (3.34)$$

On a alors le résultat suivant :

Lemme 3.11 Soient b et c deux fonctions, éléments de \mathcal{L}_{lip} , impaires, vérifiant (3.34) et :

$$(sgn x) (b(t, x) - c(t, x)) \geq 0 \text{ (resp. } \leq), \quad \forall t \geq 0, \forall x \in [-1, 1], x \neq 0. \quad (3.25)$$

Alors, pour toute fonction $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ paire et croissante sur $[0, 1]$, on a :

$$E_x[f(X_t^{(b)})] \leq E_x[f(X_t^{(c)})] \text{ (resp. } \geq), \quad \forall t \geq 0 \quad (3.26)$$

avec $X_0^{(b)} = X_0^{(c)} = X_0 = x$. En particulier, pour tout n entier :

$$E[(X_t^{(b)})^{2n}] \leq E[(X_t^{(c)})^{2n}] \text{ (resp. } \geq), \quad \forall t \geq 0.$$

Démonstration du lemme 3.11 : Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions définies sur $[-1, 1]$, à valeurs réelles, paires, croissantes sur $[0, 1]$, au moins de classe \mathcal{C}^2 , avec $f'_n(-1) = f'_n(1) = 0$, telle que la suite vérifie :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f.$$

Par exemple, on peut prendre pour f_n :

$$f_n(x) = \begin{cases} f(1) = f(-1) & \text{si } x \in \left[-1, -1 + \frac{1}{2n} \cup 1 - \frac{1}{2n}, 1\right] \\ \varphi_n(x) & \text{si } x \in \left[-1 + \frac{1}{2n}, -1 + \frac{1}{n} \cup 1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{2n}\right] \\ f(x) & \text{si } x \in \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] \end{cases}$$

avec $\varphi_n(x)$ choisie telle que $f_n(x)$ vérifie les propriétés requises.

a) On pose $v_n(t, x) := E_x[f_n(X_t^{(b)})]$
 $v(t, x) := E_x[f(X_t^{(b)})]$

avec $X_0 = x$.

On note $X_t^{(b,x)}$ le processus correspondant (solution de (E_b)) partant de x .

La loi de $-X_t^{(b,x)}$ étant identique à celle de $X_t^{(b,-x)}$ et f_n (respectivement f) étant paire, il est évident que $v_n(t, x)$ est paire en x pour tout entier n (respectivement $v(t, x)$).

En appliquant la formule d'Itô à $f_n(X_t^{(b)})$ et en passant à l'espérance, on obtient l'E.D.P. satisfaite par v_n :

$$(v_n)_t = \frac{1}{2}(v_n)_{xx} - b(v_n)_x. \quad (3.27)$$

Soit $(v_n)_x = \tilde{v}_n$. Dérivons (3.27) par rapport à x :

$$(\tilde{v}_n)_t = \frac{1}{2}(\tilde{v}_n)_{xx} - b_x \tilde{v}_n - b(\tilde{v}_n)_x. \quad (3.28)$$

3.3. Convergence vers la mesure stationnaire dans le cas symétrique

Sur $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$, 0 est solution de (3.28) et :

$$\begin{aligned}\tilde{v}_n(0, x) &= f'_n(x) \geq 0 \quad \text{car } f_n \text{ est croissante et } x \geq 0 \\ \tilde{v}_n(t, 1) &= \tilde{v}_n(t, 0) = \tilde{v}_n(t, -1) = 0.\end{aligned}$$

On peut donc appliquer un principe de comparaison (cf. [LSU], p. 15) et en déduire ainsi que :

$$(v_n)_x(t, x) \geq 0 \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1$$

et par un argument de symétrie :

$$(v_n)_x(t, x) \leq 0 \quad \text{si } -1 \leq x \leq 0.$$

b) Posons maintenant $w_n(t, x) = E_x[f_n(X_t^{(c,x)})]$

$$w(t, x) = E_x[f(X_t^{(c,x)})]$$

avec la même convention de notation pour $X_t^{(c,x)}$.

On a, en notant L^c le générateur infinitésimal du processus $X^{(c,x)}$:

$$L^c w_n(t, x) = (w_n)_t(t, x) - \frac{1}{2}(w_n)_{xx}(t, x) + c(t, x)(w_n)_x(t, x) = 0.$$

D'autre part, en appliquant à cet opérateur la fonction v_n définie auparavant, on déduit :

$$\begin{aligned}L^c v_n(t, x) &= (v_n)_t(t, x) - \frac{1}{2}(v_n)_{xx}(t, x) + c(t, x)(v_n)_x(t, x) \\ &= (v_n)_t(t, x) - \frac{1}{2}(v_n)_{xx}(t, x) + b(t, x)(v_n)_x(t, x) \\ &\quad + [c(t, x) - b(t, x)](v_n)_x(t, x) \\ &= [c(t, x) - b(t, x)](v_n)_x(t, x) \quad \text{d'après (a)} \\ &\leq 0 \quad \text{d'après l'hypothèse (3.25).}\end{aligned}$$

Nous avons donc montré que v_n est une sous-solution de $L^c h = 0$ et que w_n est une solution de cette équation. De plus, en $t = 0$:

$$v_n(0, x) = w_n(0, x) = f_n(x).$$

D'après le principe du maximum parabolique, on a :

$$v_n(t, x) \leq w_n(t, x).$$

On passe à la limite en appliquant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue pour obtenir :

$$v(t, x) \leq w(t, x).$$

Ceci démontre la proposition .

Celle-ci nous dit que si $x b(t, x) \geq x c(t, x)$ (c'est-à-dire dans un certain sens, la dérive b est plus forte que c), alors le processus $X^{(b)}$ est stochastiquement dominé par $X^{(c)}$.

Quelques résultats sur des semi-groupes linéaires

Nous allons dans cet alinéa compiler quelques résultats relatifs aux semi-groupes linéaires symétriques sur une variété compacte. Soit $b : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction impaire et croissante. Considérons l'opérateur :

$$\mathcal{L}_b f(x) = \frac{1}{2}[f''(x) - b(x) f'(x)]$$

et la densité de probabilité ν_b définie par :

$$\nu_b(x) = \frac{\exp\left(-\int_0^x b(y)dy\right)}{\int_{-1}^1 \exp\left(-\int_0^x b(y)dy\right)dx}. \quad (3.29)$$

Les propriétés suivantes sont classiques (et faciles à vérifier en intégrant par parties) : pour toutes fonctions f, g à support dans $[-1, 1]$ et à valeurs réelles, de classe C^2 , avec $f'(1) = f'(-1) = g'(1) = g'(-1) = 0$, on a :

$$\langle \mathcal{L}_b f, g \rangle_{\nu_b} = \langle f, \mathcal{L}_b g \rangle_{\nu_b}$$

$$\langle \mathcal{L}_b f, f \rangle_{\nu_b} = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f'^2(x) \nu_b(x) dx.$$

On en déduit que \mathcal{L}_b est le générateur d'un semi-groupe $(T_t^b; t \geq 0)$ markovien, symétrique par rapport à ν_b , contractant dans tous les espaces $L^p(\nu_b)$, $1 \leq p < \infty$.

Mais en fait nous avons beaucoup mieux dans notre cas. On a le résultat suivant :

Lemme 3.12 *Sous les hypothèses précédentes :*

- (i) *L'opérateur $(T_t^b; t \geq 0)$ est à trace (dans $L^2(\nu_b)$).*
- (ii) *Les valeurs propres de \mathcal{L}_b sont négatives, et la plus grande valeur propre non nulle est strictement négative (propriété de trou spectral).*
- (iii) *Le spectre de l'opérateur est discret.*

Démonstration du lemme 3.12 :

(i) Soit p_t la densité de T_t^b donnée, pour toute fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ appartenant à $L^2(\nu_b)$, par :

$$T_t^b f(x) = \int_{-1}^1 p_t(x, y) f(y) \nu_b(dy).$$

La densité p_t étant définie sur le compact $[-1, 1]$ et continue, elle est bornée. Donc, la condition :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |p_t(x, y)|^2 \nu_b(x) \nu_b(y) dx dy < \infty$$

est satisfaite. Et cette condition implique (cf. [DS] tome 2, p. 1083) que l'opérateur T_t^b est, pour tout $t > 0$, un opérateur de Hilbert-Schmidt (et donc un opérateur compact

3.3. Convergence vers la mesure stationnaire dans le cas symétrique

dans $L^2(\nu_b)$). Mais la composée de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt est à trace, donc l'opérateur T_t^b est à trace car :

$$T_t^b = T_{\frac{t}{2}}^b \circ T_{\frac{t}{2}}^b.$$

(ii) Nous avons vu que :

$$\langle \mathcal{L}_b f, f \rangle_{\nu_b} = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f'^2(x) \nu_b(x) dx.$$

Soient λ une valeur propre de \mathcal{L}_b et f_λ la fonction propre associée à λ . On a donc :

$$\langle \mathcal{L}_b f_\lambda, f_\lambda \rangle_{\nu_b} = \lambda \|f_\lambda\|_{L^2(\nu_b)}^2 = -\|f'_\lambda\|_{L^2(\nu_b)}^2.$$

D'autre part, on sait d'après l'inégalité de Poincaré (cf. [D] p. 25) que :

$$\int_{-1}^1 \frac{f^2(x)}{4d^2(x)} dx \leq \int_{-1}^1 f'^2(x) dx$$

avec $d(x) = \min\{|x-1|, |x+1|\}$. Mais d est majorée, il existe donc une constante $C > 0$ telle que :

$$\frac{1}{d^2(x)} \geq C.$$

D'où :

$$C \int_{-1}^1 f^2(x) dx \leq \int_{-1}^1 f'^2(x) dx.$$

En appliquant cette inégalité pour une fonction propre f_λ avec $\lambda \neq 0$, on a :

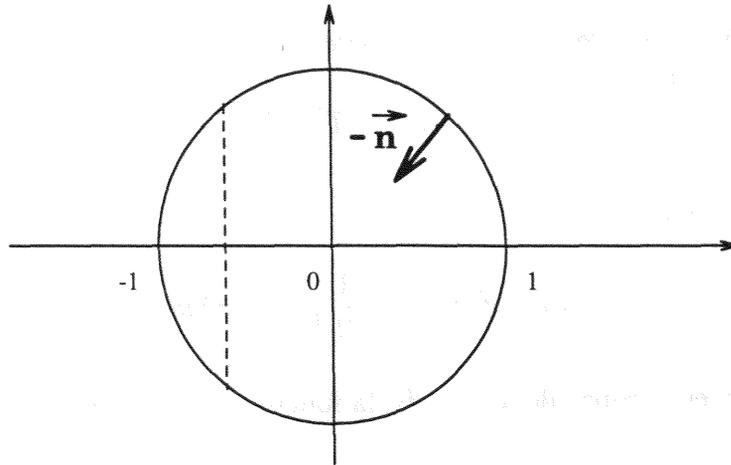
$$C \|f_\lambda\|_{L^2(\nu_b)}^2 \leq -\lambda \|f_\lambda\|_{L^2(\nu_b)}^2.$$

Donc $\lambda < 0$. Ce qui montre la propriété de trou spectral, cf. [B] p. 98.

(iii) Considérons un difféomorphisme défini sur l'intervalle $[-1, 1]$ et à valeurs dans le demi-cercle inférieur de diamètre $[-1, 1]$. Complétons ce demi-cercle en un cercle. On définit la projection du demi-cercle inférieur sur le demi-cercle supérieur, orthogonale au diamètre $[-1, 1]$.

On considère l'opérateur \mathcal{L}_b ordinaire défini sur ce cercle à l'aide du difféomorphisme précédemment construit. Son image par la projection est un processus de Markov : c'est notre processus réfléchi.

L'opérateur étant elliptique, on se restreint aux fonctions paires et de classe \mathcal{C}^2 , de dérivées nulles en -1 et 1 . Elles vérifient donc $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$, où \vec{n} est le vecteur normal sortant au cercle.



Ce qui implique que \mathcal{L}_b est un opérateur elliptique sur une variété compacte. Son spectre est donc discret. Ceci achève la démonstration du lemme 3.12.

On peut alors en déduire un résultat qui nous sera très utile par la suite.

Corollaire 3.13 Soit $b : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ impaire, croissante et appartenant à \mathcal{L}_{lip} . On note $X^{(b)}$ l'unique solution forte de (E_b) de donnée initiale $X_0^{(b)}$ admettant une densité θ par rapport à ν_b . Alors il existe $\lambda > 0$ et $C > 0$ tels que, pour toute fonction $g \in L^2(\nu_b)$, on ait :

$$\left| E_\theta(g(X_t^{(b)})) - \int_{-1}^1 g(x) \nu_b(x) dx \right| \leq C e^{-\lambda t} \|g\|_{L^2(\nu_b)}, \quad (3.30)$$

uniformément en θ .

Démonstration du corollaire 3.13: Soient $(0, -\lambda_1, -\lambda_2, \dots)$ le spectre de l'opérateur \mathcal{L}_b et les fonctions propres associées ($f_0 = 1, f_n, n \geq 1$). La fonction g appartenant à $L^2(\nu_b)$, elle admet la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n \geq 0} \langle g, f_n \rangle_{\nu_b} f_n(x) \\ &= \langle g, 1 \rangle_{\nu_b} + \sum_{n \geq 1} \langle g, f_n \rangle_{\nu_b} f_n(x). \end{aligned}$$

On a alors :

$$E_\theta(g(X_t^{(b)})) = \langle \theta, T_t g \rangle_{\nu_b}.$$

D'autre part, puisque $T_t f_n = e^{-\lambda_n t} f_n$ pour tout $n \geq 0$, on a :

$$E_\theta(g(X_t^{(b)})) = \langle g, 1 \rangle_{\nu_b} + \sum_{n \geq 1} \langle g, f_n \rangle_{\nu_b} e^{-\lambda_n t} \langle f_n, \theta \rangle_{\nu_b}.$$

Donc :

$$|E_\theta(g(X_t^{(b)})) - \langle g, 1 \rangle_{\nu_b}| \leq \sum_{n \geq 1} |\langle g, f_n \rangle_{\nu_b}| e^{-\lambda_n t} \|f_n\|_\infty.$$

3.3. Convergence vers la mesure stationnaire dans le cas symétrique

Notons que

$$\|f_n\|_\infty \leq e^{\lambda_n t_0} C(t_0) \|f_n\|_2$$

car, $p_{t_0}(x, y)$ étant borné, on a :

$$\begin{aligned} \|T_{t_0}^b f_n\|_\infty &= \int p_{t_0}(x, y) f_n(x) \nu_b(dx) \\ &\leq C(t_0) \|f_n\|_1 \\ &\leq C(t_0) \|f_n\|_2 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \sup_\theta |E_\theta(g(X_t^{(b)})) - \langle g, 1 \rangle_{\nu_b}| &\leq C \left(\sum_{n \geq 1} e^{-2\lambda_n(t-t_0)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \geq 1} \langle g, f_n \rangle_{\nu_b}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|g\|_{L^2(\nu_b)} e^{-\frac{\lambda_1 t}{2}} \left(\sum_{n \geq 1} e^{-\lambda_n(t-t_0)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|g\|_{L^2(\nu_b)} e^{-\frac{\lambda_1 t}{2}} \end{aligned}$$

car l'opérateur T^b est à trace . Ceci établit notre corollaire .

3.3.2 Théorème de convergence

Nous sommes maintenant en mesure d'établir notre résultat de convergence de la loi du processus réfléchi vers la mesure stationnaire :

Théorème 3.14 *Sous l'hypothèse (H_2) et l'hypothèse de symétrie de la donnée initiale X_0 , si $(X_t)_{t \geq 0}$ est le processus stochastique réfléchi solution de (ER) , alors $(X_t)_{t \geq 0}$ converge en loi, lorsque $t \rightarrow \infty$, vers l'unique mesure invariante $\mu(x) dx$.*

Remarque : Puisque X_0 est symétrique, on a : $E(X_0) = 0$. Et β étant impaire, on en déduit que :

$$E(X_t^{2i+1}) = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \forall t > 0. \quad (3.31)$$

Notations : On définit la fonction b en remarquant que l'équation (ER) :

$$\begin{cases} X_t = X_0 + B_t - \frac{1}{2} \int_0^t \beta * u(s, X_s) ds - k_t & \forall t \geq 0 \\ P(X_t \in dx) = u(t, dx) & \forall t > 0 \\ X_t \in [-1, 1] & \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (ER)$$

avec le processus $(k_t)_{t \geq 0}$ défini de manière habituelle, est équivalente à (E_b) avec :

$$b(t, x) = E[\beta(x - X_t)] = \beta * u(t, x) \quad (3.32)$$

car $u(t, \cdot)$ est la densité du processus $(X_t)_{t \geq 0}$.

On a alors les propriétés suivantes pour b (d'après celles de β):

(P₁) $x \mapsto b(t, x)$ est croissante en x .

(P₂) $b(t, -x) = -b(t, x)$, $x \in [-1, 1]$.

(P₃) b admet la décomposition $b(t, x) = E[\tilde{\beta}_x(X_t)]$ avec

$$\tilde{\beta}_x(y) = \frac{1}{2}[\beta(x-y) + \beta(x+y)], \quad y \in [-1, 1].$$

(P₄) $-C_\beta x \leq b(t, x) \leq C_\beta x$, $x \in [0, 1]$.

(P₅) $b(t, x) = E[\beta_0(x - X_t)] + \alpha x$.

(P₆) $|b(t, x) - b(t, y)| \leq C_\beta |x - y|$.

On définit :

$$\begin{aligned} \bar{b}_{t_0}(x) &:= \sup_{t \geq t_0} b(t, x); & \underline{b}_{t_0}(x) &:= \inf_{t \geq t_0} b(t, x), & x \in [0, 1] \\ \bar{b}_{t_0}(x) &:= -\bar{b}_{t_0}(-x); & \underline{b}_{t_0}(x) &:= -\underline{b}_{t_0}(-x), & x \in [-1, 0] \\ \bar{b}(x) &:= \limsup_{t \rightarrow \infty} b(t, x); & \underline{b}(x) &:= \liminf_{t \rightarrow \infty} b(t, x), & x \in [0, 1] \\ \bar{b}(x) &:= -\bar{b}(-x); & \underline{b}(x) &:= -\underline{b}(-x), & x \in [-1, 0]. \end{aligned}$$

On déduit les propriétés suivantes :

(P₇) \underline{b}_{t_0} , \bar{b}_{t_0} , \underline{b} , \bar{b} sont croissantes, impaires et uniformément lipschitziennes :

(P₈) Pour tout $t \geq t_0$,

$$\underline{b}_{t_0}(x) \leq b(t, x) \leq \bar{b}_{t_0}(x), \quad x \in [0, 1]$$

$$\bar{b}_{t_0}(x) \leq b(t, x) \leq \underline{b}_{t_0}(x), \quad x \in [-1, 0].$$

(P₉) Pour tout t_0 ,

$$-C_\beta \leq \underline{b}_{t_0}(x) \leq \bar{b}_{t_0}(x) \leq C_\beta, \quad x \in [0, 1]$$

$$-C_\beta \leq \underline{b}(x) \leq \bar{b}(x) \leq C_\beta, \quad x \in [0, 1].$$

Notons :

$$\bar{u}(x) = \nu_{\bar{b}}(x) = \frac{\exp\left(-\int_0^{|x|} \bar{b}(y) dy\right)}{\int_{-1}^1 \exp\left(-\int_0^{|x|} \bar{b}(y) dy\right) dx} \quad (3.33)$$

(et de même \underline{u} avec \bar{b} remplacé par \underline{b}).

Pour démontrer le théorème 3.14, nous allons effectuer des comparaisons en loi pour des E.D.S. ordinaires de la forme (E_b) avec pour dérive la limite supérieure et la limite inférieure de la fonction b . Et nous utiliserons la décomposition (P_3) de b due au fait que le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est symétrique.

Nous allons tout d'abord encadrer la fonction b par ses limite sup et limite inf.

Lemme 3.15

(i) Soit $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}_+$ paire et croissante sur $[0, 1]$, de classe \mathcal{C}^2 . Alors, il existe deux constantes positives C_1, C_2 telles que, pour tout $t \geq 2t_0$:

$$-C_1 e^{-\lambda t_0} + \int_{-1}^1 f(y) \nu_{\bar{b}_{t_0}}(y) dy \leq E[f(X_t)] \leq \int_{-1}^1 f(y) \nu_{\underline{b}_{t_0}}(y) dy + C_2 e^{-\lambda t_0}. \quad (3.34)$$

(ii) Et on a les inégalités suivantes :

$$\beta * \bar{u}(x) \leq \underline{b}(x) \leq b(t, x) \leq \bar{b}(x) \leq \beta * \underline{u}(x). \quad (3.35)$$

Démonstration du lemme 3.15 :

(i) Considérons les processus réfléchis \bar{X} et \underline{X} solutions des E.D.S. partant de t_0 et avec terme de dérive \bar{b}_{t_0} et \underline{b}_{t_0} suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{X}_t &= X_{t_0} + B_t - B_{t_0} - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \bar{b}_{t_0}(\bar{X}_s) ds - \bar{k}_t + \bar{k}_{t_0}; \quad t \geq t_0 \\ \underline{X}_t &= X_{t_0} + B_t - B_{t_0} - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \underline{b}_{t_0}(\underline{X}_s) ds - \underline{k}_t + \underline{k}_{t_0}; \quad t \geq t_0 \end{aligned}$$

avec \bar{k} défini par :

$$|\bar{k}|_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{-1, 1\}}(\bar{X}_s) d|\bar{k}|_s, \quad \bar{k}_t = \int_0^t n(\bar{X}_s) d|\bar{k}|_s$$

et $(\underline{k}_t)_{t \geq 0}$ défini de la même façon en remplaçant \bar{k} par \underline{k} et \bar{X} par \underline{X} .

Appliquons le lemme de comparaison en loi (lemme 3.11) avec une fonction f définie dans l'énoncé du lemme. Nous obtenons :

$$E[f(\bar{X}_t)] \leq E[f(X_t)] \leq E[f(\underline{X}_t)].$$

D'où, d'après le corollaire 3.13 :

$$-C \bar{k}_f e^{-\lambda(t-t_0)} + \int_{-1}^1 f(y) \nu_{\bar{b}_{t_0}}(y) dy \leq E[f(X_t)] \leq \int_{-1}^1 f(y) \nu_{\underline{b}_{t_0}}(y) dy + C' \underline{k}_f e^{-\lambda(t-t_0)} \quad (3.36)$$

avec

$$\bar{k}_f := \int_{-1}^1 f^2(y) \nu_{\bar{b}_{t_0}}(y) dy = \|f\|_{L^2(\nu_{\bar{b}_{t_0}})}^2$$

(et de même \underline{k}_f avec \underline{b}_{t_0} à la place de \bar{b}_{t_0}).

Il est facile de voir, grâce à (P_9) , que \bar{k}_f et \underline{k}_f sont finis. Et on choisit $t \geq 2t_0$ pour en déduire (3.34).

(ii) Soit $x \in]0, 1]$. On choisit $f = \tilde{\beta}_x$ dans (3.36). On a donc, avec la décomposition (P_3):

$$-C_1 e^{-\lambda(t-t_0)} + \int_{-1}^1 \tilde{\beta}_x(y) \nu_{\bar{b}_{t_0}}(y) dy \leq b(t, x) \leq \int_{-1}^1 \tilde{\beta}_x(y) \nu_{\underline{b}_{t_0}}(y) dy + C_2 e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

En passant à la limite sup et à la limite inf lorsque $t_0 \rightarrow +\infty$, on obtient, pour $x \in [0, 1]$:

$$\liminf_{t_0 \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \tilde{\beta}_x(y) \nu_{\bar{b}_{t_0}}(y) dy \leq \underline{b}(x) \leq b(t, x) \leq \bar{b}(x) \leq \limsup_{t_0 \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \tilde{\beta}_x(y) \nu_{\underline{b}_{t_0}}(y) dy.$$

Puisque $\bar{b}(x) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \bar{b}_{t_0}(x)$ et \bar{b}_{t_0} sont bornées, on a:

$$\liminf_{t_0 \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \tilde{\beta}_x(y) \nu_{\bar{b}_{t_0}}(y) dy = \int_{-1}^1 \tilde{\beta}_x(y) \nu_{\bar{b}}(y) dy = \beta * \bar{u}(x) \leq \underline{b}(x).$$

De même,

$$\bar{b}(x) \leq \beta * \underline{u}(x),$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Montrons notre résultat de convergence:

Démonstration du théorème 3.14: La preuve se fait en deux étapes. La première étape consiste à montrer que $b(t, \cdot)$ converge, quand $t \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que $\underline{b} = \bar{b}$. Pour cela, nous aurons besoin du lemme précédent. La deuxième étape consiste à identifier cette limite.

1. Nous avons besoin d'un résultat général.

Lemme 3.16 Soient c et d deux fonctions vérifiant les hypothèses: $c, d: [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ impaires, croissantes, appartenant à \mathcal{L}_{lip} , telles que

$$(\operatorname{sgn} x)(c(x) - d(x)) \geq 0, \forall x \in [-1, 1], x \neq 0.$$

Soit $f: [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction paire et croissante sur $[0, 1]$. On a alors:

$$\int_{-1}^1 f(y) \nu_c(y) dy \leq \int_{-1}^1 f(y) \nu_d(y) dy, \quad (3.37)$$

avec ν_c et ν_d définies par (3.29).

Démonstration du lemme 3.16: Nous appliquons le lemme de comparaison en loi aux processus $X^{(c)}$ et $X^{(d)}$ solutions respectives partant de zéro de (E_c) et (E_d) :

$$E[f(X_t^{(c)})] \leq E[f(X_t^{(d)})].$$

On déduit (3.37) en utilisant le corollaire 3.13 et en passant à la limite quand $t \rightarrow +\infty$.

3.3. Convergence vers la mesure stationnaire dans le cas symétrique

Appliquons le lemme 3.16 aux fonctions $\beta * \bar{u}$, \underline{b} , \bar{b} , $\beta * \underline{u}$ qui vérifient l'inégalité (3.35):

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 f(y) (\mathcal{A}\underline{u})(y) dy &= \int_{-1}^1 f(y) \nu_{\beta * \underline{u}}(y) dy \\
 &\leq \int_{-1}^1 f(y) \bar{u}(y) dy \\
 &\leq \int_{-1}^1 f(y) \underline{u}(y) dy \\
 &\leq \int_{-1}^1 f(y) \nu_{\beta * \bar{u}}(y) dy \\
 &= \int_{-1}^1 f(y) (\mathcal{A}\bar{u})(y) dy.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Soient $f(x) = 1 + |x|$ et

$$\mathcal{N}(w) := \int_{-1}^1 f(x) |w(x)| dx.$$

Avec l'inégalité (3.38) et cette notation, on a:

$$\mathcal{N}(\underline{u} - \bar{u}) \leq \mathcal{N}(\mathcal{A}\bar{u} - \mathcal{A}\underline{u}). \tag{3.39}$$

D'autre part à l'aide de (2.18), on peut montrer que:

$$\frac{\exp\left(-\int_0^x \beta * \bar{u}(y) dy\right)}{\int_{-1}^1 \exp\left(-\int_0^x \beta * \bar{u}(y) dy\right) dx} \leq \frac{1}{\lambda(\bar{u})} \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2}\right); \quad x \in [0, 1].$$

On en déduit, en utilisant (3.33) et (3.35), que:

$$\bar{u}(x) \leq \frac{1}{\lambda(\bar{u})} e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}; \quad x \in [0, 1],$$

d'où $\bar{u} \in \mathcal{D}_\alpha$. Avec les mêmes arguments: $\underline{u} \in \mathcal{D}_\alpha$.

On peut alors appliquer le lemme 2.10: il existe $k_\alpha < 1$ tel que:

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}\bar{u} - \mathcal{A}\underline{u}) \leq k_\alpha \mathcal{N}(\bar{u} - \underline{u}). \tag{3.40}$$

On déduit de (3.39) et (3.40) que $\underline{u} = \bar{u} =: \mu^*$, et avec (3.35): $\underline{b} = \bar{b} =: b^*$.

2. On veut montrer à présent que, pour toute fonction $f: [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ paire et croissante sur $[0, 1]$, on a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[f(X_t)] = \int_{-1}^1 f(x) \mu(x) dx \tag{3.41}$$

avec μ l'unique solution de (2.1).

D'après (3.35), on a: $b^* = \beta * \mu^*$. Alors μ^* vérifie (2.1):

$$\mu^*(x) = \frac{\exp - \int_0^{|x|} \beta * \mu^*(y) dy}{\lambda(\mu^*)}.$$

Et par unicité, $\mu^* = \mu$, c'est la mesure stationnaire .

De plus :

$$\begin{aligned} \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(y) \nu_{b_{t_0}}(y) dy &= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(y) \nu_{b_{t_0}}(y) dy \\ &= \int_{-1}^1 f(y) \mu(y) dy . \end{aligned}$$

Donc (3.41) est établi . On a montré que le processus réfléchi $(X_t)_{t \geq 0}$ converge en loi vers la mesure stationnaire $\mu(x) dx$.

3.4 Convergence dans le cas non symétrique

Nous nous plaçons maintenant dans le cas non symétrique i.e. où la donnée initiale X_0 est une v.a. non symétrique à valeurs dans $[-1, 1]$ et nous voulons montrer que le processus réfléchi converge en loi vers la mesure invariante dans ce cas également .

La loi de $(X_t)_{t \geq 0}$ ne sera plus symétrique et nous ne pouvons donc pas utiliser la décomposition (P_3) . Nous allons séparer la fonction b en une partie paire b_p et une partie impaire b_i :

$$b : = b_p + b_i \quad (4.42)$$

avec

$$b_p(t, x) : = \frac{b(t, x) + b(t, -x)}{2} = \frac{1}{2} E[\beta(x - X_t) - \beta(x + X_t)] \quad (4.43)$$

$$b_i(t, x) : = \frac{b(t, x) - b(t, -x)}{2} = \frac{1}{2} E[\beta(x - X_t) + \beta(x + X_t)]. \quad (4.44)$$

Pour montrer la convergence en distribution du processus réfléchi $(X_t)_{t \geq 0}$ vers la mesure invariante, nous allons établir une sorte de principe de symétrisation : pour toute fonction f impaire et croissante,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E[f(X_t)] = 0.$$

En particulier, puisque $y \mapsto \beta(x - y) - \beta(x + y)$ est impaire, on en déduira que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} b_p(t, x) = 0,$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E[X_t^{2i+1}] = 0; \quad i \in \mathbb{N}.$$

Il suffira donc, pour établir la convergence, de s'intéresser à la partie impaire de b à la limite .

Pour ce faire, nous introduisons deux processus auxiliaires ; notre démonstration sera basée sur des comparaisons entre ceux-ci et le processus $(X_t)_{t \geq 0}$. Considérons les deux processus réfléchis $(Y_t)_{t \geq 0}$ et $(Z_t)_{t \geq 0}$ associés à $(X_t)_{t \geq 0}$, définis par :

$$Y_t = X_0 + B_t - \frac{1}{2} \int_0^t b_i(s, Y_s) ds - k_t^Y \quad (4.45)$$

$$Z_t = B_t - \frac{1}{2} \int_0^t b_i(s, Z_s) ds - k_t^Z \quad (4.46)$$

avec

$$|k^Y|_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{-1,1\}}(Y_s) d|k^Y|_s, \quad k^Y_t = \int_0^t n(Y_s) d|k^Y|_s$$

et k^Z défini de la même manière en remplaçant Y par Z .

La dérive b_i vérifiant les hypothèses du théorème d'existence et d'unicité de Watanabe (cf. [W1]), c'est-à-dire elle est lipschitzienne et bornée, les processus $(Y_t)_{t \geq 0}$ et $(Z_t)_{t \geq 0}$ sont donc des processus linéaires bien définis .

On remarque que le processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ étant un processus de même loi que $(-Z_t)_{t \geq 0}$, on a : $E(Z_t) = 0$ et $E[(Z_t)^{2i+1}] = 0, \forall i \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0$. Ce qui n'est pas vérifié pour Y .

Deux premiers résultats nous permettront d'établir notre principe de symétrisation (lemme 4.19) . On compare successivement Y à Z et X à Y .

Lemme 4.17 Avec Y et Z définis ci-dessus, on a :

$$|Y_t - Z_t| \leq |X_0| e^{-\frac{\alpha t}{2}}; \quad t \geq 0. \quad (4.47)$$

Démonstration du lemme 4.17 :

- Le processus $(Y_t - Z_t)_{t \geq 0}$ est à variation bornée, on a donc :

$$|Y_t - Z_t| = |X_0| + \int_0^t \text{sgn}(Y_s - Z_s) \mathbb{1}_{\{Y_s \neq Z_s\}} d(Y_s - Z_s).$$

Etudions le signe de :

$$A(t) := - \int_0^t \text{sgn}(Y_s - Z_s) \mathbb{1}_{\{Y_s \neq Z_s\}} dk_s^Y + \int_0^t \text{sgn}(Y_s - Z_s) \mathbb{1}_{\{Y_s \neq Z_s\}} dk_s^Z.$$

Pour cela, nous décomposons $(k_t^Y)_{t \geq 0}$ sous la forme :

$$k_t^Y = k_t^{Y+} + k_t^{Y-},$$

avec :

$$k_t^{Y+} := \int_0^t \mathbb{1}_{\{Y_s = +1\}} dk_s^Y \quad \text{et} \quad k_t^{Y-} := \int_0^t \mathbb{1}_{\{Y_s = -1\}} dk_s^Y.$$

Donc :

$$- \int_0^t \text{sgn}(Y_s - Z_s) \mathbb{1}_{\{Y_s \neq Z_s\}} dk_s^Y = - \int_0^t \text{sgn}(Y_s - Z_s) \mathbb{1}_{\{Y_s \neq Z_s\}} dk_s^{Y+} - \int_0^t \text{sgn}(Y_s - Z_s) \mathbb{1}_{\{Y_s \neq Z_s\}} dk_s^{Y-}.$$

Sur l'ensemble $\{Y_s = +1\}$, $\text{sgn}(Y_s - Z_s)$ et dk_s^Y sont des quantités toutes les deux positives. Et elles sont toutes les deux négatives sur l'ensemble $\{Y_s = -1\}$. On en déduit que :

$$- \int_0^t \text{sgn}(Y_s - Z_s) \mathbb{1}_{\{Y_s \neq Z_s\}} dk_s^Y \leq 0,$$

Avec les mêmes arguments, on obtient :

$$\int_0^t \text{sgn}(Y_s - Z_s) \mathbb{1}_{\{Y_s \neq Z_s\}} dk_s^Z \leq 0.$$

Donc :

$$A(t) \leq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Ce qui nous donne :

$$|Y_t - Z_t| \leq |X_0| - \frac{1}{2} \int_0^t \operatorname{sgn}(Y_s - Z_s) \mathbb{1}_{\{Y_s \neq Z_s\}} [b_i(s, Y_s) - b_i(s, Z_s)] ds.$$

• D'autre part, d'après (P5), on a :

$$b_i(t, y) - b_i(t, z) = \alpha(y - z) + \frac{1}{2} E[\beta_0(y - X_t) - \beta_0(z - X_t)] - \frac{1}{2} E[\beta_0(y + X_t) - \beta_0(z + X_t)],$$

$$\forall y, z \in [-1, 1], \forall t \geq 0.$$

De plus, puisque β_0 est croissante, les deux derniers termes du membre de droite de l'égalité précédente sont positifs, d'où :

$$\operatorname{sgn}(y - z) \mathbb{1}_{\{y \neq z\}} [b_i(t, y) - b_i(t, z)] \geq \alpha |y - z|.$$

D'où :

$$|Y_t - Z_t| \leq |X_0| - \frac{\alpha}{2} \int_0^t |Y_s - Z_s| ds.$$

On applique le lemme de Gronwall pour trouver le résultat :

$$|Y_t - Z_t| \leq |X_0| e^{-\frac{\alpha t}{2}}.$$

Lemme 4.18 *Il existe une constante c dépendant de β et X_0 , telle que :*

$$E(|X_t - Y_t|) \leq c e^{-\frac{\alpha t}{2}}; \quad t \geq 0. \quad (4.48)$$

Démonstration du lemme 4.18 :

1. En introduisant les parties paire et impaire de la fonction b , on a :

$$|X_t - Y_t| \leq -\frac{1}{2} \int_0^t \psi(s) ds; \quad t \geq 0 \quad (4.49)$$

avec

$$\begin{aligned} \psi(t) &:= \operatorname{sgn}(X_t - Y_t) \mathbb{1}_{\{X_t \neq Y_t\}} [b(t, X_t) - b_i(t, Y_t)], \quad t \geq 0 \\ &= \operatorname{sgn}(X_t - Y_t) \mathbb{1}_{\{X_t \neq Y_t\}} [b_p(t, X_t) + b_i(t, X_t) - b_i(t, Y_t)] \quad \text{d'après (4.42)}. \end{aligned}$$

On pose :

$$\psi(t) := \psi_1(t) + \psi_2(t) + \psi_3(t).$$

On introduit artificiellement un terme de la forme de b_p avec X_t remplacé par Y_t , pour ensuite majorer chaque ψ_i séparément :

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &:= \operatorname{sgn}(X_t - Y_t) \mathbb{1}_{\{X_t \neq Y_t\}} [b_i(t, X_t) - b_i(t, Y_t)] \\ \psi_2(t) &:= \operatorname{sgn}(X_t - Y_t) \mathbb{1}_{\{X_t \neq Y_t\}} f(t, X_t) \\ \psi_3(t) &:= \operatorname{sgn}(X_t - Y_t) \mathbb{1}_{\{X_t \neq Y_t\}} [b_p(t, X_t) - f(t, X_t)] \\ f(s, t) &:= \frac{1}{2} E[\beta(x - Y_t) - \beta(x + Y_t)].\end{aligned}$$

2. Calculons

$$\begin{aligned}b_p(t, x) - f(t, x) &= \alpha [E(Y_t) - E(X_t)] + \frac{1}{2} E[\beta_0(x - X_t) - \beta_0(x - Y_t)] \\ &\quad + \frac{1}{2} E[\beta_0(x + Y_t) - \beta_0(x + X_t)].\end{aligned}$$

Considérons une v.a. X' de même loi que X et indépendante du couple (X, Y) . Alors :

$$\begin{aligned}|b_p(t, x) - f(t, x)| &\leq \alpha |E(Y_t) - E(X_t)| + \frac{1}{2} E[|\beta_0(x - X_t) - \beta_0(x - Y_t)|] \\ &\quad + \frac{1}{2} E[|\beta_0(x + Y_t) - \beta_0(x + X_t)|] \\ -E(\psi_3(t)) &\leq \alpha |E(Y_t) - E(X_t)| + \frac{1}{2} E[|\beta_0(X'_t - X_t) - \beta_0(X'_t - Y_t)|] \\ &\quad + \frac{1}{2} E[|\beta_0(X'_t + Y_t) - \beta_0(X'_t + X_t)|].\end{aligned}\tag{4.50}$$

3. De la même manière, on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(x - y) \mathbb{1}_{\{x \neq y\}} [b_i(t, x) - b_i(t, y)] &= \alpha |x - y| \\ &\quad + \frac{1}{2} E[\operatorname{sgn}(x - y) \mathbb{1}_{\{x \neq y\}} (\beta_0(x - X_t) - \beta_0(y - X_t))] \\ &\quad + \frac{1}{2} E[\operatorname{sgn}(x - y) \mathbb{1}_{\{x \neq y\}} (\beta_0(x + X_t) - \beta_0(y + X_t))] \\ &= \alpha |x - y| \\ &\quad + \frac{1}{2} E[|\beta_0(x - X'_t) - \beta_0(y - X'_t)|] \\ &\quad + \frac{1}{2} E[|\beta_0(x + X'_t) - \beta_0(y + X'_t)|].\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}E(\psi_1(t)) &= \alpha E(|X_t - Y_t|) + \frac{1}{2} E[|\beta_0(X_t - X'_t) - \beta_0(Y_t - X'_t)|] \\ &\quad + \frac{1}{2} E[|\beta_0(X_t + X'_t) - \beta_0(Y_t + X'_t)|].\end{aligned}\tag{4.51}$$

En réunissant (4.50) et (4.51), on déduit :

$$\begin{aligned} -E(\psi_3(t)) - E(\psi_1(s)) &\leq \alpha |E(X_t) - E(Y_t)| - \alpha E(|X_t - Y_t|) \\ &\leq \alpha E(|X_t - Y_t|). \end{aligned} \quad (4.52)$$

4. On a :

$$f(t, x) = -\alpha E(Y_t) + \frac{1}{2} E[\beta_0(x - Y_t) - \beta_0(x + Y_t)]$$

Donc, en utilisant le fait que β_0 est croissante et lipschitzienne, on obtient, avec X' une version indépendante de X :

$$\begin{aligned} -\psi_2(t) &= -\text{sgn}(X_t - Y_t) \mathbb{1}_{\{X_t \neq Y_t\}} \left(-\alpha E(Y_t) + \frac{1}{2} E[\beta_0(X'_t - Y_t) - \beta_0(X'_t + Y_t)] \right) \\ &\leq \alpha E(Y_t) - \frac{1}{2} E[\beta_0(X'_t - Y_t) - \beta_0(X'_t + Y_t)] \\ &\leq \alpha |E(Y_t)| + \frac{1}{2} \text{sgn}(Y_t) \mathbb{1}_{\{Y_t \neq 0\}} E[|\beta_0(X'_t - Y_t) - \beta_0(X'_t + Y_t)|] \\ &\leq \alpha |E(Y_t)| + \text{sgn}(Y_t) \mathbb{1}_{\{Y_t \neq 0\}} E[C_{\beta_0} |Y_t|] \\ &\leq (\alpha + C_{\beta_0}) |E(Y_t)| \end{aligned}$$

$$-E(\psi_2(t)) \leq (\alpha + C_{\beta_0}) |E(Y_t)|.$$

La dérive de l'E.D.S. vérifiée par Z étant impaire (b_i) et $Z_0 = 0$, alors le processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ a une loi symétrique, donc $E(Z_t) = 0$. Alors, d'après le lemme 4.17, on a :

$$|E(Y_t)| = |E(Y_t - Z_t)| \leq E(|Y_t - Z_t|) \leq E(|X_0|) e^{-\frac{\alpha t}{2}}.$$

Finalement, on obtient :

$$-E(\psi_2(t)) \leq C e^{-\frac{\alpha t}{2}}, \quad (4.53)$$

où C désigne une constante universelle qui change d'une ligne à l'autre.

5. En prenant l'espérance de (4.49) et en utilisant (4.52) et (4.53), on a :

$$E(|X_t - Y_t|) \leq \frac{1}{2} \int_0^t \left(\alpha E(|X_s - Y_s|) + C e^{-\frac{\alpha s}{2}} \right) ds.$$

On applique le lemme de Gronwall pour obtenir (4.48) :

$$E(|X_t - Y_t|) \leq C e^{-\frac{\alpha t}{2}}.$$

Nous allons à présent établir une inégalité entre les processus $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Z_t)_{t \geq 0}$ qui nous mènera au principe de symétrisation . Le point clé de la preuve sera le fait que le processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ est symétrique.

Lemme 4.19 Soit $h : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne, i.e. $|h(x) - h(y)| \leq C_h |x - y|$, $\forall x, y \in [-1, 1]$. Alors il existe une constante K dépendant de C_h et X_0 , telle que :

$$|E(h(X_t)) - E(h(Z_t))| \leq K e^{-\frac{\alpha t}{2}} ; \quad t \geq 0. \quad (4.54)$$

Si de plus h est une fonction impaire, on a le principe de symétrisation :

$$|E(h(X_t))| \leq K e^{-\frac{\alpha t}{2}} ; \quad t \geq 0, \quad (4.55)$$

en particulier :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} b_p(t, x) = 0 ; \quad x \in [-1, 1].$$

Démonstration du lemme 4.19 :

- On introduit le processus réfléchi $(Y_t)_{t \geq 0}$ de la façon suivante :

$$E(h(X_t)) - E(h(Z_t)) = E[h(X_t) - h(Y_t)] + E[h(Y_t) - h(Z_t)].$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} |E(h(X_t) - h(Y_t))| &\leq C_h E(|X_t - Y_t|) \\ &\leq C_h C e^{-\frac{\alpha t}{2}} \quad \text{d'après (4.48)}. \end{aligned}$$

D'autre part, avec le lemme 4.17, on obtient :

$$|h(Y_t) - h(Z_t)| \leq |X_0| C_h e^{-\frac{\alpha t}{2}}.$$

On en déduit l'inégalité (4.54) .

- Si de plus la fonction h est impaire, puisque le processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ est symétrique , on a : $E[h(Z_t)] = 0$, ce qui nous donne le principe de symétrisation (4.55) .

- Et le dernier point provient du fait que l'application $y \mapsto \beta(x - y) - \beta(x + y)$ est impaire .

Ceci achève la démonstration de notre lemme .

On peut alors établir notre résultat de convergence dans le cas non symétrique .

Théorème 4.20 Sous l'hypothèse (H_2) et dans le cas d'une donnée initiale X_0 quelconque (non symétrique), le processus réfléchi $(X_t)_{t \geq 0}$ converge en loi, quand $t \rightarrow +\infty$, vers l'unique mesure de probabilité invariante $\mu(x) dx$ solution de l'équation (2.1) .

Démonstration du théorème 4.20 : Notre preuve consiste à montrer que le processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ à dérive b_i converge en loi vers la mesure stationnaire ; et à utiliser ensuite le lemme précédent pour conclure sur un résultat de convergence pour le processus réfléchi $(X_t)_{t \geq 0}$. Nous allons écrire une inégalité du type (3.36) pour le processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ solution de (4.46). Pour cela, posons :

$$c(t, x) := b_i(t, x)$$

(puisque $\lim_{t \rightarrow +\infty} b_p = 0$, on examine la partie impaire).

Pour $t_0 > 0$, on définit \bar{c}_{t_0} , \underline{c}_{t_0} , \bar{c} et \underline{c} comme dans le cas symétrique. c est une fonction impaire vérifiant l'inégalité suivante :

$$-C_\beta x \leq c(t, x) \leq C_\beta x; \quad x \in [0, 1].$$

Par une approche similaire au lemme 3.15, on obtient, pour tout $t \geq t_0$:

$$-C_1 e^{-\lambda t_0} + \int_{-1}^1 f(y) \nu_{\bar{c}_{t_0}}(y) dy \leq E[f(Z_t)] \leq C_2 e^{-\lambda t_0} + \int_{-1}^1 f(y) \nu_{\underline{c}_{t_0}}(y) dy \quad (4.56)$$

avec $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}_+$ une fonction paire, croissante sur $[0, 1]$ et de classe C^2 .

Choisissons $f = \tilde{\beta}_x$ définie par (P_3) , pour $x \in [0, 1]$, et intéressons-nous à la borne supérieure (on peut faire de même pour la borne inférieure) dans (4.56) :

$$c(t, x) = b_i(t, x) = E[\tilde{\beta}_x(Z_t)] \leq c e^{-\lambda t_0} + \int_{-1}^1 \tilde{\beta}_x(y) \nu_{\underline{c}_{t_0}}(y) dy; \quad t \geq t_0$$

En passant à la limite sup quand $t_0 \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$\bar{c}(x) \leq \int_{-1}^1 \tilde{\beta}_x(y) \nu_{\underline{c}}(y) dy = \beta * \underline{u}(x)$$

avec les définitions (3.29) et (3.33) de $\nu_{\underline{c}}$ et \underline{u} .

Par symétrie, on a :

$$\beta * \bar{u}(x) \leq \underline{c}(x) \leq \bar{c}(x) \leq \beta * \underline{u}(x). \quad (4.57)$$

Comme dans la preuve du théorème 3.14, on en déduit que :

$$\bar{u} = \underline{u} =: \mu \quad \text{et} \quad \underline{c} = \bar{c} =: \beta * \mu.$$

En particulier, μ est une solution de (2.1) et on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} b_i(t, x) = \beta * \mu(x).$$

On peut alors appliquer notre principe de symétrisation (lemme 4.19) pour obtenir :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} b(t, x) = \beta * \mu(x).$$

En passant à la limite quand $t \rightarrow +\infty$ dans (4.56), on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E[f(Z_t)] = \int_{-1}^1 f(y) \mu(y) dy.$$

Alors, puisque le processus $(Z_t)_{t \geq 0}$ converge en loi vers $\mu(x) dx$, et par l'inégalité (4.54) du lemme 4.19 en passant à la limite quand $t \rightarrow +\infty$, on en déduit que $(X_t)_{t \geq 0}$ converge en loi vers $\mu(x) dx$. Ceci achève la preuve du théorème.

3.5 Deux cas particuliers

Nous avons établi la convergence en loi vers une mesure invariante unique dans le cas où la fonction β peut s'écrire sous la forme : $\beta(x) = \beta_0(x) + \alpha x$, avec $\alpha > 0$ grand et certaines conditions sur β_0 ((H_1)). Il y a des situations où nous savons prouver que l'on peut choisir $\alpha = 0$ et obtenir les mêmes résultats.

En effet, nous allons étudier deux cas particuliers de fonctions β ne vérifiant pas cette hypothèse (H_2) : $\beta(x) = x^3$ et $\beta(x) = x^5$ pour lesquels nous savons seulement pour l'instant qu'il existe une mesure stationnaire (l'hypothèse (H_2) n'étant pas requise pour ce résultat). Pour ces deux cas, on peut donc choisir $\alpha = 0$, en référence à (H_2). Nous allons montrer l'unicité de la mesure stationnaire dans le cas de ces deux fonctions, et la convergence en loi pour $\beta(x) = x^3$. Les techniques de démonstration seront différentes de ce qui précède : on utilisera la forme explicite de la mesure invariante.

3.5.1 Le cas $\beta(x) = x^3$

Evaluons :

$$\begin{aligned}\beta * u(t, x) &= E[\beta(x - X_t)] \\ &= E[(x - X_t)^3] \\ &= x^3 - 3m_1(t)x^2 + 3m_2(t)x - m_3(t)\end{aligned}$$

où les moments de $(X_t)_{t \geq 0}$ sont notés : $m_i(t) := E[X_t^i]$, $\forall i \geq 0$.

Dans ce cas, l'E.D.S. (ER) s'écrit :

$$X_t = X_0 + B_t - \frac{1}{2} \int_0^t \{X_s^3 - 3m_1(s)X_s^2 + 3m_2(s)X_s - m_3(s)\} ds - k_t^X.$$

Plaçons-nous dans le cas symétrique :

$$m_1(t) \equiv m_3(t) \equiv 0, \forall t \geq 0.$$

D'où :

$$\begin{cases} X_t = X_0 + B_t - \frac{1}{2} \int_0^t (X_s^3 + 3m_2(s)X_s) ds - k_t^X \\ m_2(t) = E(X_t^2) \\ |k^X|_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{-1,1\}}(X_s) d|k^X|_s; k_t^X = \int_0^t n(X_s) d|k^X|_s \end{cases} \quad (5.58)$$

S'il existe une mesure invariante μ , elle vérifiera, d'après (2.1) (avec la notation (3.29)), l'équation suivante :

$$\mu(x) = \frac{\exp - \left(\frac{x^4}{4} + 3m_2 \frac{x^2}{2} \right)}{\int_{-1}^1 \exp - \left(\frac{x^4}{4} + 3m_2 \frac{x^2}{2} \right) dx} = \nu_{\frac{x^4}{4} + 3m_2 \frac{x^2}{2}} \quad (5.59)$$

Lemme 5.21 *Le processus réfléchi $(X_t)_{t \geq 0}$ solution de (5.58) admet une unique mesure invariante symétrique $\mu(x) dx$ solution de (5.59) .*

Démonstration du lemme 5.21: Trouver dans ce cas une solution de l'équation (2.1) est équivalent à montrer l'existence de $m_2 \in \mathbb{R}_+$ tel que:

$$\psi(m_2) := \frac{\int_{-1}^1 x^2 \exp -\left(\frac{x^4}{4} + 3m_2 \frac{x^2}{2}\right) dx}{\int_{-1}^1 \exp -\left(\frac{x^4}{4} + 3m_2 \frac{x^2}{2}\right) dx} = m_2 .$$

Notons

$$\mu_i := \mu_i(m_2) := \int_{-1}^1 x^i \exp -\left(\frac{x^4}{4} + 3m_2 \frac{x^2}{2}\right) dx \quad (5.60)$$

$$\hat{\mu}_i := \frac{\mu_i}{\mu_0} . \quad (5.61)$$

Calculons la dérivée de ψ :

$$\psi'(m_2) = -\frac{3}{2} \left[\frac{\mu_4}{\mu_0} - \left(\frac{\mu_2}{\mu_0}\right)^2 \right] = -\frac{3}{2} [\hat{\mu}_4 - (\hat{\mu}_2)^2] .$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\psi'(m_2) < 0 .$$

De plus $\psi(0) > 0$, donc il existe un unique point fixe $m > 0$ pour ψ (i.e. $\psi(m_2) = m_2$) . Nous avons ainsi établi le lemme 5.21 .

Nous nous intéressons à présent à la convergence en loi dans le cas symétrique du processus réfléchi vers cette unique mesure stationnaire .

Théorème 5.22 *Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ le processus réfléchi solution de (5.58) dont la donnée initiale X_0 est une v.a. de loi symétrique à valeurs dans $[-1, 1]$. Soit $\mu(x) dx$ l'unique mesure invariante associée solution de (5.59) . Alors $(X_t)_{t \geq 0}$ converge en distribution, lorsque $t \rightarrow +\infty$, vers $\mu(x) dx$.*

Comme précédemment, on a:

$$m_{2i+1}(t) = E[X_t^{2i+1}] = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall t \geq 0;$$

et l' E.D.S. (ER) devient:

$$X_t = X_0 + B_t - \frac{1}{2} \int_0^t (X_s^3 + 3m_2(s) X_s) ds - k_t^X .$$

Nous avons besoin d'un résultat préliminaire .

Lemme 5.23 *La fonction $m_2(t)$ converge, quand $t \rightarrow +\infty$, vers m , l'unique point fixe de l'application ψ .*

Démonstration du lemme 5.23 :

1. On note :

$$\underline{m}_2(t_0) := \inf_{t \geq t_0} m_2(t); \quad \overline{m}_2(t_0) := \sup_{t \geq t_0} m_2(t)$$

et on définit :

$$\underline{m}_2 := \liminf_{t \rightarrow +\infty} m_2(t) = \sup_{t_0} \underline{m}_2(t_0); \quad \overline{m}_2 := \limsup_{t \rightarrow +\infty} m_2(t) = \inf_{t_0} \overline{m}_2(t_0).$$

Considérons le processus réfléchi $(Y_t)_{t \geq 0}$, solution de l' E.D.S. réfléchi :

$$Y_t = Y_{t_0} + B_t - B_{t_0} - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (Y_s^3 + 3 \underline{m}_2(s) Y_s) ds - (k_t^Y - k_{t_0}^Y) ; t \geq t_0 \quad (5.62)$$

Les applications $x \mapsto x^3 + 3 m_2(t) x$ et $x \mapsto x^3 + 3 \underline{m}_2(t_0) x$ ($x \geq 0, t \geq t_0$) vérifient les hypothèses du lemme 3.11 de comparaison en loi (i.e. lipschitziennes et positives pour $x \geq 0$) et

$$x^3 + 3 m_2(t) x \geq x^3 + 3 \underline{m}_2(t_0) x ; \quad x \geq 0, t \geq t_0.$$

On a donc, d'après (3.26) et (3.34) :

$$m_{2i}(t) = E(X_t^{2i}) \leq E(Y_t^{2i}) \leq c e^{-\lambda(t-t_0)} + \int_{-1}^1 x^{2i} \tilde{\nu}_{\underline{m}_2(t_0)}(x) dx ; t \geq t_0 \quad (5.63)$$

avec la notation (pour $a \in \mathbb{R}_+$) :

$$\tilde{\nu}_a(x) = \frac{\exp - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{3ax^2}{2} \right)}{\tilde{\lambda}(a)} \quad (5.64)$$

$$\tilde{\lambda}(a) = \int_{-1}^1 \exp - \left(\frac{x^4}{4} + \frac{3ax^2}{2} \right) dx \quad (5.65)$$

Dans (5.63), passons à la limite sup quand $t \rightarrow +\infty$. On obtient :

$$\overline{m}_{2i} \leq \int_{-1}^1 x^{2i} \tilde{\nu}_{\underline{m}_2}(x) dx .$$

De même, on a :

$$\underline{m}_{2i} \geq \int_{-1}^1 x^{2i} \tilde{\nu}_{\overline{m}_2}(x) dx .$$

En particulier (pour $i = 1$ et 2) :

$$\int_{-1}^1 x^2 \tilde{\nu}_{\overline{m}_2}(x) dx \leq \underline{m}_2 \leq \overline{m}_2 \leq \int_{-1}^1 x^2 \tilde{\nu}_{\underline{m}_2}(x) dx \quad (5.66)$$

$$\int_{-1}^1 x^4 \tilde{\nu}_{\bar{m}_2}(x) dx \leq \underline{m}_4 \leq \bar{m}_4 \leq \int_{-1}^1 x^4 \tilde{\nu}_{\underline{m}_2}(x) dx. \quad (5.67)$$

Par intégration par parties, on obtient (pour $a \in \mathbb{R}_+$):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^4 + 3ax^2) \tilde{\nu}_a(x) dx &= 1 - \frac{2}{\tilde{\lambda}(a)} \exp\left[-\left(\frac{1}{4} + \frac{3a}{2}\right)\right] \\ &= 1 - c(a) \end{aligned} \quad (5.68)$$

Puisque

$$\begin{aligned} \bar{m}_2 &\leq \int_{-1}^1 x^2 \tilde{\nu}_{\underline{m}_2}(x) dx \\ \bar{m}_4 &\leq \int_{-1}^1 x^4 \tilde{\nu}_{\underline{m}_2}(x) dx \end{aligned}$$

on a, avec (5.68):

$$\bar{m}_4 + 3 \underline{m}_2 \bar{m}_2 \leq \int_{-1}^1 (x^4 + 3 \underline{m}_2 x^2) \tilde{\nu}_{\underline{m}_2}(x) dx = 1 - c(\underline{m}_2).$$

Et par symétrie:

$$\underline{m}_4 + 3 \bar{m}_2 \underline{m}_2 \geq 1 - c(\bar{m}_2).$$

On a donc:

$$1 - c(\bar{m}_2) \leq \underline{m}_4 + 3 \underline{m}_2 \bar{m}_2 \leq \bar{m}_4 + 3 \bar{m}_2 \underline{m}_2 \leq 1 - c(\underline{m}_2). \quad (5.69)$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} c'(a) &= \frac{3 \exp\left[-\left(\frac{1}{4} + \frac{3a}{2}\right)\right] \int_{-1}^1 (x^2 - 1) \exp\left[-\left(\frac{x^4}{4} + \frac{3ax^2}{2}\right)\right] dx}{\left(\int_{-1}^1 \exp\left[-\left(\frac{x^4}{4} + \frac{3ax^2}{2}\right)\right] dx\right)^2} \\ c'(a) &\leq 0. \end{aligned}$$

On en déduit que: $c(\bar{m}_2) \leq c(\underline{m}_2)$.

Avec (5.69), on a alors: $c(\bar{m}_2) = c(\underline{m}_2) =: c_2$.

On en tire:

$$\bar{m}_4 = \underline{m}_4 = m_4$$

et

$$m_4 = 1 - c_2 - 3 \underline{m}_2 \bar{m}_2.$$

D'après (5.67) et (5.68), on a:

$$m_4 \leq \int_{-1}^1 x^4 \tilde{\nu}_{\underline{m}_2}(x) dx = 1 - c_2 - 3 \underline{m}_2 \int_{-1}^1 x^2 \tilde{\nu}_{\underline{m}_2}(x) dx.$$

On en déduit que :

$$\int_{-1}^1 x^2 \tilde{\nu}_{\underline{m}_2}(x) dx \leq \overline{m}_2.$$

(5.66) nous donne l'inégalité contraire, on a donc l'égalité :

$$\overline{m}_2 = \int_{-1}^1 x^2 \tilde{\nu}_{\underline{m}_2}(x) dx.$$

D'où :

$$m_4 = 1 - c_2 - 3 \underline{m}_2 \int_{-1}^1 x^2 \tilde{\nu}_{\underline{m}_2}(x) dx = \int_{-1}^1 x^4 \nu_{\underline{m}_2}(x) dx.$$

Par symétrie, on obtient :

$$\int_{-1}^1 x^4 \nu_{\underline{m}_2}(x) dx = \int_{-1}^1 x^4 \tilde{\nu}_{\overline{m}_2}(x) dx.$$

2. Montrons que cette dernière égalité implique $\underline{m}_2 = \overline{m}_2$. Soit φ une fonction, $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$\varphi(a) := \int_{-1}^1 x^4 \tilde{\nu}_a(x) dx$$

avec la notation (5.64). Calculons la dérivée de φ :

$$\varphi'(a) = -\frac{3}{2} \left[\int_{-1}^1 x^6 \tilde{\nu}_a(x) dx - \int_{-1}^1 x^4 \tilde{\nu}_a(x) dx \cdot \int_{-1}^1 x^2 \tilde{\nu}_a(x) dx \right].$$

Puisque $\tilde{\nu}_a(x) dx$ est une mesure de probabilité sur $[-1, +1]$, l'inégalité de Hölder implique que :

$$\varphi'(a) < 0,$$

φ est donc décroissante. Puisque $\varphi(\underline{m}_2) = \varphi(\overline{m}_2)$ (cf. 1), alors :

$$\overline{m}_2 = \underline{m}_2 =: m.$$

Ce qui achève la preuve du lemme.

Démonstration du théorème 5.22 : Nous allons montrer que pour les monômes d'exposant pair (c'est-à-dire les moments d'ordre pair de X), on a la convergence :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} m_{2p}(t) = \frac{\mu_{2p}(m)}{\mu_0(m)} = \hat{\mu}_{2p}(m) \quad (5.70)$$

avec les notations (5.60) et (5.61) et m l'unique point fixe de ψ (cf. lemme 5.23).

(5.66) est vraie pour $p = 1$: c'est le lemme 5.23.

Soit donc $p \geq 2$. En appliquant la propriété de Markov, on a, pour $t \geq t_0$:

$$m_{2p}(t) = E(X_t^{2p}) = E[E_{X_{t_0}}(X_{t-t_0}^{2p})],$$

on peut donc se restreindre aux processus partant de t_0 .

On note $(X_t^{\varepsilon\pm})_{t \geq 0}$ les processus solutions des E.D.S. linéaires :

$$X_t^{\varepsilon\pm} = X_{t_0} + B_t - \frac{1}{2} \int_0^t [(X_s^{\varepsilon\pm})^3 + 3(m \pm \varepsilon)X_s^{\varepsilon\pm}] ds - k_t^{\varepsilon\pm}.$$

Choisissons t_0 assez grand et $\varepsilon > 0$ petit pour que, pour $t \geq t_0$, on ait (d'après le lemme 5.23) :

$$m - \varepsilon \leq m_2(t) \leq m + \varepsilon.$$

Appliquons le lemme de comparaison en loi (lemme 3.11) avec $f(x) = x^{2p}$:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} E[(X_t^{\varepsilon+})^{2p}] \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} E(X_t^{2p}) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} E(X_t^{2p}) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} E[(X_t^{\varepsilon-})^{2p}]. \quad (5.71)$$

Utilisons maintenant le corollaire 3.13 avec la même fonction puissance. On obtient en passant à la limite quand $t \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[(X_t^{\varepsilon\pm})^{2p}] = \frac{\int_{-1}^1 x^{2p} \exp\left(-\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3(m \pm \varepsilon)x^2}{2}\right)\right) dx}{\int_{-1}^1 \exp\left(-\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3(m \pm \varepsilon)x^2}{2}\right)\right) dx} = \hat{\mu}_{2p}(m \pm \varepsilon),$$

cette limite étant uniforme par rapport à la loi initiale θ du processus. Ce qui nous donne, d'après (5.71) :

$$\hat{\mu}_{2p}(m + \varepsilon) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} E(X_t^{2p}) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} E(X_t^{2p}) \leq \hat{\mu}_{2p}(m - \varepsilon).$$

Or $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{\mu}_{2p}(m \pm \varepsilon) = \hat{\mu}_{2p}(m)$, ce qui prouve (5.70). Il reste à conclure.

Nous avons vu que les moments d'ordre impair sont nuls, et que ceux d'ordre pair convergent vers une quantité bornée. Les fonctions puissance formant une classe dense de l'espace des fonctions continues, on en déduit que la loi de $(X_t)_{t \geq 0}$ converge étroitement vers la mesure stationnaire $\mu(x) dx$.

3.5.2 Le cas $\beta(x) = x^5$

Nous notons encore :

$$m_i(t) := E[X_t^i] = \int_{-1}^1 x^i u(t, x) dx.$$

avec $u(t, \cdot)$ la densité du processus $(X_t)_{t \geq 0}$.

Alors :

$$E[\beta(x - X_t)] = x^5 - 5m_1(t)x^4 + 10m_2(t)x^3 - 10m_3(t)x^2 + 5m_4(t)x - m_5(t).$$

On se place dans le cas symétrique, donc l'E.D.S. (ER) devient :

$$\begin{cases} X_t = X_0 + B_t - \frac{1}{2} \int_0^t (X_s^5 + 10 m_2(s) X_s^3 + 5 m_4(s) X_s) ds - k_t^X \\ X_t \in [-1, 1], \quad \forall t \geq 0 \\ |k^X|_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{-1,1\}}(X_s) d|k^X|_s \\ k_t^X = \int_0^t n(X_s) d|k^X|_s \end{cases} \quad (5.72)$$

Si la mesure stationnaire existe, elle est de la forme :

$$\mu(x) = \frac{\exp - \left(\frac{x^6}{6} + \frac{5}{2} m_2 x^4 + \frac{5}{2} m_4 x^2 \right)}{\int_{-1}^1 \exp - \left(\frac{x^6}{6} + \frac{5}{2} m_2 x^4 + \frac{5}{2} m_4 x^2 \right) dx} \quad (5.73)$$

Définissons :

$$\psi_1(m_2, m_4) := \frac{\int_{-1}^1 x^2 \exp \left[- \left(\frac{x^6}{6} + \frac{5}{2} m_2 x^4 + \frac{5}{2} m_4 x^2 \right) \right] dx}{\int_{-1}^1 \exp \left[- \left(\frac{x^6}{6} + \frac{5}{2} m_2 x^4 + \frac{5}{2} m_4 x^2 \right) \right] dx}$$

$$\psi_2(m_2, m_4) := \frac{\int_{-1}^1 x^4 \exp \left[- \left(\frac{x^6}{6} + \frac{5}{2} m_2 x^4 + \frac{5}{2} m_4 x^2 \right) \right] dx}{\int_{-1}^1 \exp \left[- \left(\frac{x^6}{6} + \frac{5}{2} m_2 x^4 + \frac{5}{2} m_4 x^2 \right) \right] dx}$$

Lemme 5.24 : *Il existe une unique solution (m_2, m_4) au système*

$$\begin{cases} \psi_1(m_2, m_4) = m_2 \\ \psi_2(m_2, m_4) = m_4 \end{cases}$$

Cette solution nous fournit une unique mesure stationnaire pour l'E.D.S. (5.72) donnée par (5.73) .

Démonstration du lemme 5.24 : La démonstration se décompose en trois étapes . L'idée est la même que pour le cas $\beta(x) = x^3$: il s'agit d'établir l'existence du point fixe de deux applications .

1. On note

$$\begin{aligned} \mu_i &:= \mu_i(m_2, m_4) := \int_{-1}^1 x^i \exp \left[- \left(\frac{x^6}{6} + \frac{5}{2} m_2 x^4 + \frac{5}{2} m_4 x^2 \right) \right] dx \\ \hat{\mu}_i &:= \frac{\mu_i}{\mu_0} \end{aligned}$$

Les moments d'ordre impair étant nuls car nous nous sommes placés dans le cas symétrique, nous nous intéressons aux moments d'ordre pair. Calculons la dérivée du moment d'ordre $2i$ par rapport à m_2 et à m_4 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mu}_{2i}}{\partial m_2} &= \frac{\frac{\partial \mu_{2i}}{\partial m_2} \cdot \mu_0 - \mu_{2i} \cdot \frac{\partial \mu_0}{\partial m_2}}{\mu_0^2} \\ &= -\frac{5}{2} (\hat{\mu}_{2i+4} - \hat{\mu}_4 \hat{\mu}_{2i}) < 0 \quad \text{d'après Hölder.} \end{aligned}$$

De même :

$$\frac{\partial \hat{\mu}_{2i}}{\partial m_4} = -\frac{5}{2} (\hat{\mu}_{2i+2} - \hat{\mu}_2 \hat{\mu}_{2i}) < 0.$$

On en déduit que $\hat{\mu}_{2i}$ est décroissante en m_2 et en m_4 . On fixe $m_2 > 0$. Puisque $\hat{\mu}_2(m_2, \cdot)$ est décroissante, il existe un unique $m_4 = \varphi(m_2)$ tel que

$$\hat{\mu}_2(m_2, \varphi(m_2)) = m_2, \quad (5.74)$$

dès que $\hat{\mu}_2(m_2, 0) > m_2$; cela étant toujours vérifié car $m_2 \leq 1$.

De la même manière, il existe un unique $m_4 = \gamma(m_2)$ tel que

$$\hat{\mu}_4(m_2, \gamma(m_2)) = \gamma(m_2). \quad (5.75)$$

2. Nous avons montré que $\hat{\mu}_2$ et $\hat{\mu}_4$ admettent chacune un point fixe. Exploitions à présent ce résultat : nous allons établir l'existence d'un unique $m_2 > 0$ tel que $\gamma(m_2) = \varphi(m_2)$. Supposons qu'on a un tel $m_2 > 0$. Alors on a :

$$-\varphi'(m_2) > -\gamma'(m_2). \quad (5.76)$$

En effet, dérivons par rapport à m_2 les deux égalités (5.74) et (5.75) que l'on vient d'obtenir :

$$1 = \frac{\partial \hat{\mu}_2}{\partial m_2} + \frac{\partial \hat{\mu}_2}{\partial \varphi(m_2)} \cdot \varphi'(m_2)$$

$$\gamma'(m_2) = \frac{\partial \hat{\mu}_4}{\partial m_2} + \frac{\partial \hat{\mu}_4}{\partial \gamma(m_2)} \cdot \gamma'(m_2).$$

D'où :

$$\varphi'(m_2) = \left(\frac{\partial \hat{\mu}_2}{\partial \varphi(m_2)} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\partial \hat{\mu}_2}{\partial m_2} \right) = \left(\frac{\partial \hat{\mu}_2}{\partial m_4} \right)^{-1} (1 + \Delta) < 0$$

$$\text{avec } \Delta = -\frac{\partial \hat{\mu}_2}{\partial m_2} = \frac{5}{2} (\hat{\mu}_6 - \hat{\mu}_2 \hat{\mu}_4) > 0.$$

Et

$$\gamma'(m_2) = \frac{1}{1 - \frac{\partial \hat{\mu}_4}{\partial m_4}} \frac{\partial \hat{\mu}_4}{\partial m_2} = \frac{1}{1 + \Delta} \frac{\partial \hat{\mu}_4}{\partial m_2} < 0$$

avec $\Delta = -\frac{\partial \hat{\mu}_4}{\partial m_4} > 0$.

L'inégalité (5.76) est donc équivalente à :

$$(1 + \Delta)^2 \geq \left(\frac{\partial \hat{\mu}_2}{\partial m_4} \right) \times \left(\frac{\partial \hat{\mu}_4}{\partial m_2} \right).$$

Vérifions qu'elle est bien satisfaite .

En intégrant par parties μ_0 , on obtient :

$$\hat{\mu}_6 = 1 - 2 \exp - \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{2}(m_2 + m_4) \right) - 5 m_4 \hat{\mu}_2 - 10 m_2 \hat{\mu}_4$$

D'où :

$$\frac{\partial \hat{\mu}_6}{\partial m_2} = -5 m_4 \frac{\partial \hat{\mu}_2}{\partial m_2} - 10 m_2 \frac{\partial \hat{\mu}_4}{\partial m_2} - 10 \hat{\mu}_4 + 5 \exp \left[- \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{2}(m_2 + m_4) \right) \right]$$

$$\frac{\partial \hat{\mu}_6}{\partial m_4} = -5 m_4 \frac{\partial \hat{\mu}_2}{\partial m_4} - 5 \hat{\mu}_2 - 10 m_2 \frac{\partial \hat{\mu}_4}{\partial m_4} + 5 \exp \left[- \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{2}(m_2 + m_4) \right) \right].$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \hat{\mu}_4}{\partial m_2} &\leq -\frac{m_4}{2m_2} \Delta + \frac{1}{m_2} \hat{\mu}_4 \\ -\frac{\partial \hat{\mu}_2}{\partial m_4} &\leq -\frac{2m_2}{m_4} \Delta + \frac{1}{m_4} \hat{\mu}_2. \end{aligned}$$

D' où :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \hat{\mu}_2}{\partial m_4} \right) \times \left(\frac{\partial \hat{\mu}_4}{\partial m_2} \right) &\leq \left(-\frac{\hat{\mu}_2}{2m_2} \Delta + \Delta^2 + \frac{\hat{\mu}_4 \hat{\mu}_2}{m_2 m_4} - \frac{2 \hat{\mu}_4}{m_4} \Delta \right) \\ &\leq \left(1 - \frac{\Delta}{2} \right) (1 - 2\Delta) \quad \text{car } \hat{\mu}_4 = m_4 \text{ et } \hat{\mu}_2 = m_2 \\ &\leq (1 + \Delta)^2. \end{aligned}$$

Nous utilisons le lemme suivant pour conclure :

Lemme 5.25 Soient $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$, deux fonctions décroissantes de classe C^1 et telles que :

$$\{t \in [0, 1]; f(t) = g(t)\} \subset \{t \in [0, 1]; -f'(t) > -g'(t)\}.$$

Alors il existe au plus un t tel que $f(t) = g(t)$.

Avec (5.76), on en déduit alors qu'il existe un unique $m_2 > 0$ tel que $\gamma(m_2) = \varphi(m_2)$. On a donc établi l'existence d'un couple unique $(m_2, \gamma(m_2))$ solution du système :

$$\begin{cases} \psi_1(m_2, \gamma(m_2)) = m_2 \\ \psi_2(m_2, \gamma(m_2)) = \gamma(m_2). \end{cases}$$

Ceci nous montre qu'il existe une et une seule mesure stationnaire donnée par (5.73). Ceci achève la preuve du lemme 5.24.

3. Démonstration du lemme 5.25 :

Pour établir le résultat, posons $h(x) := f(x) - g(x)$.

Si $h(x) = 0$, alors $h'(x) > 0$ par hypothèse. Et alors $h(y) > 0$, $\forall y \in]x, x + \varepsilon]$ pour un $\varepsilon > 0$.

On se donne $t_1 < t_2$ tels que $h(t_1) = h(t_2) = 0$, et on définit

$$s := \inf \{u \in]t_1, t_2]; h(u) = 0\}.$$

On a $h(t_1) = h(s) = 0$ et, pour tout $u \in]t_1, s[$, $h(u) > h(t_1) = h(s) = 0$.

Par conséquent : $h'(s) \leq 0$, ce qui nous donne une contradiction, donc il existe un unique t tel que $h(t) = 0$.

3.6 Extension de l'hypothèse (H_2)

La section précédente nous conduit à essayer d'élargir la classe de fonctions de l'hypothèse (H_2).

Remarque : On peut établir des résultats similaires en remplaçant l'hypothèse $\alpha > 0$ grand par le fait que le processus X appartient à l'intervalle $[-\varepsilon, \varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$ petit.

En général, nos résultats (c'est-à-dire l'unicité de la mesure invariante et la convergence en loi du processus réfléchi vers celle-ci) seront valables également dans les situations où :

(H'_2) $\beta(x) = \beta_0(x) + \alpha x^\gamma$, avec $0 < \alpha < \alpha_0$ où $\alpha_0 < +\infty$ est grand, γ est un entier naturel impair non nul et β_0 vérifie (H_1).

Nous allons le vérifier pour la classe de fonctions :

$$\beta(x) = \beta_0(x) + \alpha x^3. \quad (6.77)$$

Nous verrons qu'à de nombreux endroits, il faut modifier quelque peu les calculs, mais nos méthodes de démonstration restent les mêmes. L'existence de la mesure stationnaire ne nécessitant pas une hypothèse de cette forme ((H_1) suffit), elle est encore valable dans ce cas. Nous allons donc nous intéresser à l'unicité de cette mesure et à la convergence en loi du processus réfléchi vers celle-ci.

a) Unicité de la mesure invariante

Établissons tout d'abord un résultat préliminaire.

Lemme 2.7' Soit $u \in \mathcal{D}$ (défini au paragraphe 2.3). Alors :

$$(i) \quad \beta_0 * u(x) = \int_0^1 [\beta_0(x+y) - \beta_0(y-x)] u(y) dy, \quad \forall x \in [0, 1] \quad (6.78)$$

$$(ii) \quad \beta * u(x) = \beta_0 * u(x) + 3\alpha m_2(u)x + \alpha x^3 \quad \text{avec } m_2(u) = \int_{-1}^1 y^2 u(y) dy, \\ \text{et } \beta * u(x) \geq \alpha x^3, \quad \forall x \in [0, 1] \quad (6.79)$$

Le (i) est identique à celui du lemme 2.7, et le (ii) se déduit facilement de (H'_2) lorsque l'on se restreint à la classe de fonctions $u \in \mathcal{D}$. De manière évidente, on a :

$$0 \leq m_2(u) \leq 1 \quad (6.80)$$

Ceci nous sera très utile dans toute la suite.

Pour démontrer le théorème 2.6, nous allons comme précédemment introduire un espace de Banach et une contraction sur cet espace . On a ici, si μ est une solution de l'équation (2.1) :

$$\mu(x) = \frac{1}{\lambda(\mu)} \exp\left(-\int_0^x (\beta * \mu)(y) dy\right) \leq \frac{1}{\lambda(\mu)} \exp\left(-\frac{\alpha x^4}{4}\right); \forall x \in [0, 1].$$

On définit donc :

$$\mathcal{D}'_\alpha := \left\{ \nu : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}_+; \int_{-1}^1 \nu(x) dx = 1, \nu(x) = \nu(-x), \forall x \in [-1, 1], \right. \\ \left. \nu(x) \leq \frac{1}{\lambda(\nu)} \exp\left(-\frac{\alpha x^4}{4}\right) \right\} \quad (6.81)$$

et on le munit de la même norme :

$$\mathcal{N}(\nu) = \int_{-1}^1 (1 + |x|) \nu(x) dx, \quad \forall \nu \in \mathcal{D}'_\alpha.$$

Grâce à des majorations dues à l'inégalité (6.80), on obtient comme dans le paragraphe 2.3 le lemme 2.8 . Nous allons détailler la preuve de ce résultat afin de mettre en évidence les arguments supplémentaires utilisés, mais nous ne le ferons pas pour chaque résultat .

Démonstration du lemme 2.8 :

β_0 vérifiant (H_1) , on a :

$$\int_0^x \beta_0 * u(y) dy \leq C_{\beta_0}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

D'autre part, avec (6.79), on a :

$$\begin{aligned} \lambda(u) &= 2 \int_0^1 \exp\left[-\int_0^x \beta_0 * u(y) dy - \int_0^x 3\alpha m_2(u) y dy - \int_0^x \alpha y^3 dy\right] dx \\ &\geq 2 \int_0^1 e^{-C_{\beta_0}} e^{-\frac{\alpha x^4}{4}} e^{-3\alpha m_2(u) \frac{x^2}{2}} dx \\ &\geq 2 e^{-C_{\beta_0}} \int_0^1 e^{-\frac{\alpha x^4}{4}} e^{-3\alpha \frac{x^2}{2}} dx \quad \text{cf. (6.80)} \\ &\geq 2 e^{-C_{\beta_0}} \int_0^1 e^{-\frac{\alpha}{4}(x^2+3)^2} dx \cdot e^{\frac{9\alpha}{4}} \end{aligned}$$

Avec le changement de variable $y = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}(x^2 + 3)$ ($1 \leq \alpha \leq \alpha_0$), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \lambda(u) &\geq 2 e^{-C_{\beta_0}} \int_{3\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}^{4\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \frac{1}{\sqrt{y\sqrt{\frac{\alpha}{2}} - 3}} dy \cdot e^{\frac{9\alpha}{4}} \\ &\geq 2 e^{-C_{\beta_0}} \int_{3\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}^{4\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\alpha}} \cdot e^{\frac{9\alpha}{4}} \quad \text{car } 3\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \leq y \leq 4\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \text{ et } \alpha \geq 1 \\ &\geq 2 e^{-C_{\beta_0}} \frac{C}{\sqrt{2\alpha}} \quad \text{avec } C = \int_{3\sqrt{\frac{\alpha_0}{2}}}^{4\sqrt{\frac{\alpha_0}{2}}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \cdot e^{\frac{9\alpha}{4}} \end{aligned}$$

Ceci démontre le lemme 2.8 .

Avec la décomposition de $\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v)$ décrite par (2.7), (2.8) et (2.9), on établit :

Lemme 2.9'

$$|\theta(x)| \leq C_{\beta_0} \frac{x^2}{2} e^{-\frac{\alpha x^4}{4}} \mathcal{N}(u - v).$$

Démonstration du lemme 2.9' :

On a, d'après (6.79) :

$$\theta(x) = e^{-\frac{\alpha x^4}{4}} \tilde{\theta}_0(x)$$

avec

$$\tilde{\theta}_0(x) := \exp\left(-\int_0^x \beta_0 * u(y) dy - 3\alpha m_2(u) \frac{x^2}{2}\right) - \exp\left(-\int_0^x \beta_0 * v(y) dy - 3\alpha m_2(v) \frac{x^2}{2}\right).$$

Alors, d'après (6.80), on a,

- d'une part :

$$\exp\left(-\int_0^x \beta_0 * u(y) dy - 3\alpha m_2(u) \frac{x^2}{2}\right) \leq \exp\left(-\int_0^x \beta_0 * u(y) dy\right)$$

- d'autre part :

$$\exp\left(-\int_0^x \beta_0 * v(y) dy - 3\alpha m_2(v) \frac{x^2}{2}\right) \geq \exp\left(-\int_0^x \beta_0 * v(y) dy\right) \cdot \exp\left(-\frac{3\alpha x^2}{2}\right).$$

D'où :

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_0(x) &\leq \exp\left(-\int_0^x \beta_0 * u(y) dy\right) - \exp\left(-\int_0^x \beta_0 * v(y) dy\right) \cdot \exp\left(-\frac{3\alpha x^2}{2}\right) \\ &\leq \max\left\{1, e^{-\frac{3\alpha x^2}{2}}\right\} \cdot \theta_0(x) \\ &\leq \theta_0(x) \end{aligned}$$

avec θ_0 défini comme θ avec β_0 à la place de β .

La preuve se termine comme celle du lemme 2.9.

Lemme 2.10'

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v)) \leq \frac{C_{\beta_0}}{\alpha^{\frac{1}{4}}} \mathcal{N}(u - v).$$

Ce lemme se montre comme le lemme 2.10 avec le même type de majorations que celles utilisées dans la démonstration du lemme 2.8'.

On en déduit que pour α grand mais fini, \mathcal{A} est une contraction dans \mathcal{D}'_α , ceci établit l'unicité de la mesure stationnaire.

b) Convergence dans le cas symétrique

Plaçons nous dans le cas d'une v.a. X_0 de loi symétrique . Nous procédons comme dans le cas de (H_2) pour établir la convergence en loi du processus réfléchi vers l'unique mesure stationnaire . Les résultats préliminaires vus au paragraphe 3.1 sont encore valables ici car ils ne font pas intervenir l'hypothèse (H_2) .

Nous notons encore: $b(t, x) = E[\beta(x - X_t)] = \beta * u(t, x)$. Les propriétés (P_1) à (P_4) et (P_5) à (P_9) sont identiques . Seule (P_5) est modifiée :

$$(P'_5) \quad b(t, x) = E[\beta_0(x - X_t)] + 3\alpha x E(X_t^2) + \alpha x^3 .$$

C'est à cette décomposition que nous aurons affaire dans tous les calculs suivants . Pour obtenir les mêmes résultats que dans le cas précédemment étudié, nous nous servirons du fait que l'on est dans l'intervalle compact $[-1, 1]$, et nous majorerons les termes à la puissance 3 .

Le lemme 3.15 n'est en rien modifié lorsque l'on change la seconde hypothèse . Et le théorème 3.14 se démontre de la même manière avec le nouvel ensemble \mathcal{D}'_α .

c) Convergence dans le cas non symétrique

C'est dans cette situation que nous aurons le plus de changements à effectuer dans nos calculs pour parvenir à retrouver des résultats identiques (lemmes 4.17, 4.18, 4.19 et théorème 4.20) . Nous séparons la fonction b en parties paire et impaire (cf. (4.42), (4.43) et (4.44)) et introduisons les processus $(Y_t)_{t \geq 0}$ et $(Z_t)_{t \geq 0}$ définis par (4.45) et (4.46) respectivement .

Nous donnons en exemple la preuve du lemme 4.17, celle du lemme 4.18 se faisant de même en reprenant la preuve du paragraphe 3.4: des termes supplémentaires en puissance cubique apparaissent, soit nous les majorons, soit ils se compensent entre eux .

Démonstration du lemme 4.17 :

On a comme dans le cas précédent :

$$|Y_t - Z_t| \leq |X_0| - \frac{1}{2} \int_0^t \text{sgn}(Y_s - Z_s) \mathbb{1}_{\{Y_s \neq Z_s\}} [b_i(s, Y_s) - b_i(s, Z_s)] ds .$$

Or :

$$\begin{aligned} b_i(t, y) - b_i(t, z) &= \frac{1}{2} E[\beta_0(y - X_t) + \alpha(y - X_t)^3 + \beta_0(y + X_t) + \alpha(y + X_t)^3] \\ &\quad - \frac{1}{2} E[\beta_0(z - X_t) + \alpha(z - X_t)^3 + \beta_0(z + X_t) + \alpha(z + X_t)^3] \\ &= \frac{1}{2} E[\beta_0(y - X_t) - \beta_0(z - X_t)] + \frac{1}{2} E[\beta_0(y + X_t) - \beta_0(z + X_t)] \\ &\quad + \alpha(y^3 - z^3) + 3\alpha(y - z) E(X_t^2) \end{aligned}$$

β_0 est croissante, donc :

$$\operatorname{sgn}(y - z) [b_i(t, y) - b_i(t, z)] \geq \alpha |y^3 - z^3| + 3\alpha |y - z| E(X_t^2),$$

d'où :

$$\begin{aligned} |Y_t - Z_t| &\leq |X_0| - \frac{\alpha}{2} \int_0^t (|Y_s^3 - Z_s^3| + 3|Y_s - Z_s| E(X_s^2)) ds \\ &\leq |X_0| - \frac{\alpha}{2} \int_0^t (|Y_s - Z_s| + 3|Y_s - Z_s| E(X_s^2)) ds \\ &\quad \text{car } (a^3 - b^3) = (a - b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2) \\ &\leq |X_0| - \frac{\alpha}{2} \int_0^t |Y_s - Z_s| ds \quad \text{car } X_s \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

On en déduit le lemme 4.17 :

$$|Y_t - Z_t| \leq |X_0| e^{-\frac{\alpha t}{2}}.$$

Le lemme 4.19 et le théorème 4.20 se démontrent de la même manière que dans le cas précédemment étudié car ils utilisent les lemmes 4.17 et 4.18 et les résultats préliminaires.

Nous avons donc vu que l'on peut adapter nos calculs à la classe des fonctions de la forme (6.77). Pour passer à une puissance supérieure $\gamma = 5, \dots$, les calculs se compliquent encore mais en répétant les mêmes arguments, nous nous en sortons comme dans cette situation, ce qui nous permet de généraliser notre hypothèse (H_2) à (H'_2) .

3.7 Simulation numérique

Nous regroupons dans ce paragraphe quelques essais numériques que nous avons effectué pour ce problème dans le cas libre et dans le cas réfléchi . Ceux-ci nous permettent de vérifier la convergence des processus vers une mesure stationnaire et de comparer ces deux situations . Toutes les simulations numériques de ce chapitre ont été réalisées en mode séquentiel, et programmées en Fortran 77 .

3.7.1 Cas libre

Nous nous plaçons tout d'abord dans le cas libre, c'est-à-dire du processus existant dans tout \mathbb{R} . Rappelons notre E.D.S. dans ce cas :

$$\begin{cases} X_t = X_0 + B_t - \frac{1}{2} \int_0^t \beta * u(s, X_s) ds, & \forall t \geq 0 \\ \mathbb{P}(X_t \in dx) = u(t, dx) \end{cases} \quad (EL)$$

Nous avons vu dans l'Avant-Propos, paragraphe 3.1.1, que les hypothèses sur β , suffisantes pour l'existence d'une unique mesure stationnaire et la convergence en loi du processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ vers celle-ci, sont :

(HL₁) $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ impaire et croissante,

(HL₂) $\exists c > 0, r \in \mathbb{N}^*, \beta_1 > 0$ et $\beta_0 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$|\beta(x) - \beta(y)| \leq |x - y|(c + |x|^r + |y|^r) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\beta(x) - \beta(y) \geq \beta_1(x - y) + \beta_0 \quad \forall x \geq y,$$

(HL₃) Il existe $\tilde{\beta}$ vérifiant (HL₁) et (HL₂), et $\alpha > 0$, tels que : $\beta(x) = \tilde{\beta}(x) + \alpha x$.

Considérons des fonctions les plus simples possible : des monômes . Si β est un monôme d'ordre impair, elle vérifie (HL₁) et (HL₂) . Si $\tilde{\beta}$ est un monôme d'ordre impair, β défini par : $\beta(x) = \tilde{\beta}(x) + \alpha x$, vérifie (HL₃) .

Nous savons d'après [BRTV], que bien que les monômes x, x^3, x^5 ne vérifient pas l'hypothèse (HL₃), le processus solution de (EL) avec ces monômes pour la fonction β , et une donnée initiale X_0 symétrique, converge vers sa mesure invariante . Et dans le cas réfléchi, nous l'avons montré au paragraphe 3.6 .

Nous nous sommes limités, pour nos simulations, à des fonctions β qui sont des monômes d'ordre impair, ou de la forme décrite dans (HL₃) avec $\tilde{\beta}$ un monôme d'ordre impair . Nous présentons ici des essais numériques dans les deux situations (processus libre et processus réfléchi) avec les monômes : $\beta_1(x) = x, \beta_2(x) = x^3$ et la fonction $\beta_3(x) = x^3 + 2x$ vérifiant l'hypothèse (HL₃) . Pour des puissances supérieures, la méthode de simulation est la même et les résultats sont identiques .

a) Première fonction : $\beta_1(x) = x$.

Remarquons tout d'abord que, pour l'E.D.S. (EL):

$$\begin{aligned}\beta * u(s, x) &= \int_{\mathbf{R}} \beta(x - y) u(s, dy) \quad \text{par définition du produit de convolution} \\ &= E[\beta(x - X_s)] \quad \text{car } u \text{ est la densité de } X.\end{aligned}$$

Ici, on a donc :

$$\begin{aligned}\beta * u(s, x) &= E[x - X_s] \\ &= x - E[X_s]\end{aligned}$$

Et l'E.D.S. (EL) devient :

$$\begin{cases} X_t = X_0 + B_t - \frac{1}{2} \int_0^t (X_s - m(s)) ds \\ m(s) = E(X_s) \end{cases} \quad (EL_1)$$

En prenant l'espérance des deux côtés dans l'équation vérifiée par X_s , on obtient :

$$m(s) = m(0), \quad \forall s.$$

On a donc une E.D.S. linéaire que l'on sait résoudre explicitement. La solution est, cf. [BRTV], paragraphe I :

$$X_t = e^{-\frac{t}{2}} X_0 + m(0) (1 - e^{-\frac{t}{2}}) + e^{-\frac{t}{2}} \int_0^t e^{\frac{s}{2}} dB_s.$$

En particulier, $X_t - e^{-\frac{t}{2}} X_0$ est une v.a. gaussienne d'espérance $m(0)(1 - e^{-\frac{t}{2}})$ et de variance $\sigma(t)^2 = e^{-t} \int_0^t e^s ds = 1 - e^{-t}$. On en déduit que :

$$X_t \xrightarrow{(d)}_{t \rightarrow \infty} \mathcal{N}(m(0), 1),$$

avec $\mathcal{N}(m, \sigma)$ désignant une loi normale d'espérance m et de variance σ .

La mesure stationnaire ne dépend de la donnée initiale qu'à travers son espérance $m(0) = E(X_0)$. Si $m(0) = 0$, elle ne dépend pas de la loi de X_0 .

On veut donc observer, pour cette première fonction β_1 , que le processus stochastique, solution de (EL_1), converge en loi, lorsque $t \rightarrow \infty$, vers une mesure gaussienne. Nous allons simuler la densité de ce processus et vérifier que c'est bien une cloche gaussienne à partir d'un certain nombre d'itérations (la limite à l'infini n'étant pas accessible numériquement, on peut seulement l'approcher en augmentant le nombre d'itérations).

Pour notre simulation (cf. chapitre 1, section 6 pour des explications plus détaillées), nous avons appliqué le schéma de discrétisation le plus simple : celui d'Euler (cf. (6.6) chapitre 1). Nous avons donc simulé l'évolution d'un système de N particules représentées par $(\bar{X}_{t_k}^i, 0 \leq k \leq M, i = 1, \dots, N)$:

$$\begin{cases} \bar{X}_{t_0}^i = X_0 \\ \bar{X}_{t_{k+1}}^i = \bar{X}_{t_k}^i + (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) - \frac{1}{2} [\bar{X}_{t_k} - \bar{m}(t_k)] (t_{k+1} - t_k), \forall k = 0, \dots, M-1 \end{cases} \quad (7.1)$$

C'est une bonne approximation (lorsque le nombre de pas M est assez grand) de $(X_t)_{t \in [0, T]}$ sur un intervalle de temps $[0, T]$ subdivisé régulièrement par le pas de temps :

$$\Delta t = \frac{T}{M} = t_{k+1} - t_k, \quad \forall k = 0, 1, \dots, M-1,$$

c'est-à-dire

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_M = T.$$

Nous remarquons dans ce schéma que nous avons besoin à chaque itération de calculer $E(X_t)$. Or, si nous calculons cette espérance usuellement, notre terme de dérive va s'annuler. Une petite astuce nous permet de sortir de cette impasse : elle consiste à simuler parallèlement deux processus par le même schéma de discrétisation (7.1) et à échanger leurs espérances à chaque pas dans nos calculs. L'espérance se calcule aisément par la méthode de Monte-Carlo (cf. (6.7) chapitre 1) :

$$\bar{m}(t) = E(\bar{X}_t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{X}_t^i.$$

C'est une moyenne sur N expériences (il y a autant d'expériences que de particules). On simule donc $2N$ processus vérifiant (EL_1) par le schéma de discrétisation (7.1), et on trace le graphe de la densité (obtenue de manière habituelle) de l'un d'entre eux.

On connaît pour cette E.D.S. (EL_1) la loi explicite de la mesure stationnaire : c'est une loi normale d'espérance $m(0)$ et de variance 1. On peut donc également tracer le graphe de la mesure stationnaire exacte. Ceci nous permettra d'évaluer très facilement, par comparaison entre deux courbes, la validité de notre approximation.

b) Deuxième fonction : $\beta_2(x) = x^3$.

Nous nous plaçons dans le cas d'une donnée initiale symétrique, de façon à avoir la convergence en loi du processus vers sa mesure stationnaire. Dans ce cas, l'E.D.S. à simuler est :

$$\begin{cases} X_t = X_0 + B_t - \frac{1}{2} \int_0^t \{X_s^3 + 3m_2(s)X_s\} ds \\ m_s(t) = E(X_t^2) \end{cases} \quad (EL_2)$$

On procède de la même façon avec

$$\bar{m}_2(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{X}_t^i)^2.$$

On sait que le processus converge vers une mesure stationnaire, mais on ne sait pas ici quelle sera la forme de la mesure stationnaire .

c) Résultats obtenus pour β_1 et β_2

Nous avons choisi pour les simulations dans le cas des deux premières fonctions (les monômes x et x^3) une donnée initiale nulle (et donc trivialement symétrique) : $X_0 = 0$. Nous avons tracé la densité du processus . Voici les courbes obtenues avec les paramètres : $N = 10000, T = 1, \Delta t = 0.001$.

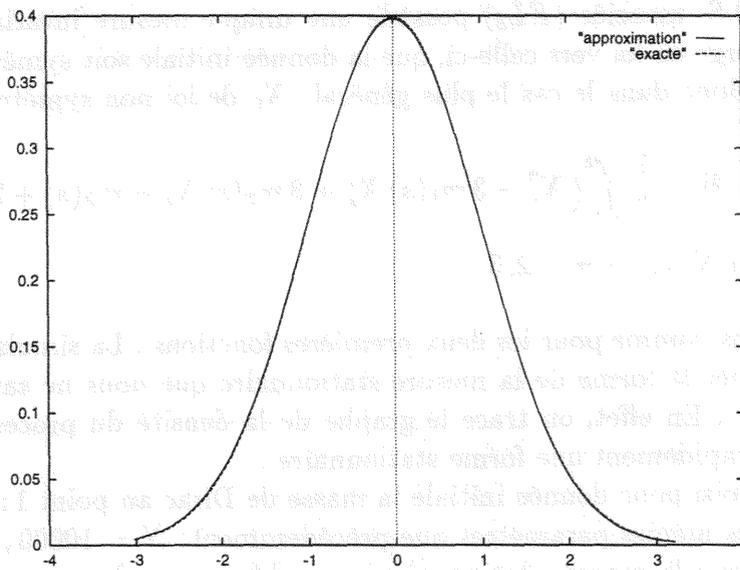


FIG. 3.1: Densité pour la première fonction β_1

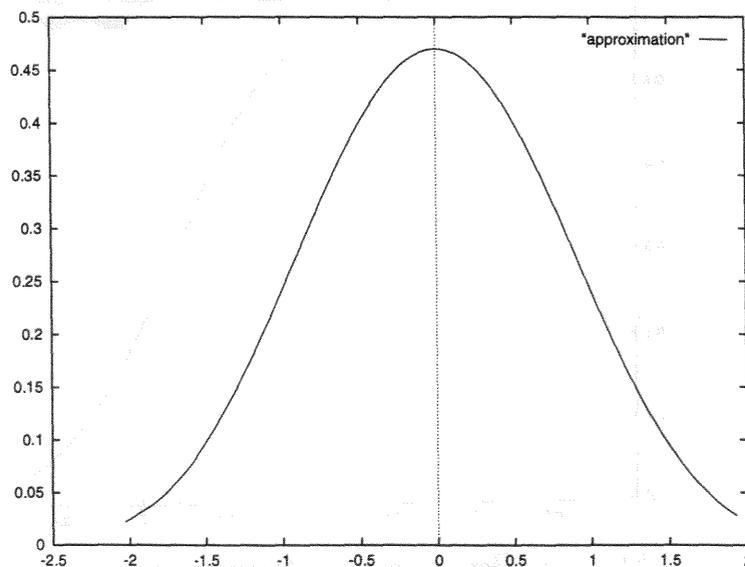


FIG. 3.2: Densité pour la deuxième fonction β_2

Dans le premier cas ($\beta_1(x) = x$), nous avons tracé une courbe exacte (en pointillés) et une courbe approchée (en trait plein). Au bout de $\frac{T}{\Delta t} = 1000$ itérations, la convergence est déjà bien vérifiée, les deux courbes se superposent presque parfaitement.

Dans le second cas ($\beta_2(x) = x^3$), on a observé qu'augmenter le nombre d'itérations ne modifie plus l'aspect de la courbe. On remarque que dans ce cas également le processus converge vers une mesure stationnaire de forme gaussienne (mais on sait que cette mesure stationnaire n'est pas une gaussienne).

d) troisième fonction : $\beta_3(x) = x^3 + 2x$

Cette fonction vérifiant les trois hypothèses de [BRTV] (pour (HL_3) : $\tilde{\beta}(x) = x^3$ et $\alpha = 2$), l'E.D.S. associée (EL_3) possède une unique mesure invariante, et le processus solution converge en loi vers celle-ci, que la donnée initiale soit symétrique ou non. Nous nous plaçons donc dans le cas le plus général : X_0 de loi non symétrique. Alors l'E.D.S. libre devient :

$$\begin{cases} X_t = X_0 + B_t - \frac{1}{2} \int_0^t \{ X_s^3 - 3m_1(s) X_s^2 + 3m_2(s) X_s - m_3(s) + 2X_s - 2m_1(s) \} ds \\ m_i(t) = E(X_t^i), \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (EL_3)$$

Nous procédons comme pour les deux premières fonctions. La simulation de cette E.D.S. va nous indiquer la forme de la mesure stationnaire que nous ne savons pas déterminer théoriquement. En effet, on trace le graphe de la densité du processus et on remarque qu'elle a très rapidement une forme stationnaire.

Nous avons choisi pour donnée initiale la masse de Dirac au point 1 : δ_1 . Voici le graphe obtenu avec les mêmes paramètres que précédemment : $N = 10000, T = 1, \Delta t = 0.001$. On remarque que la mesure stationnaire ressemble encore dans ce cas une à gaussienne, mais elle est centrée en 1. En effet, le problème est invariant par translation.

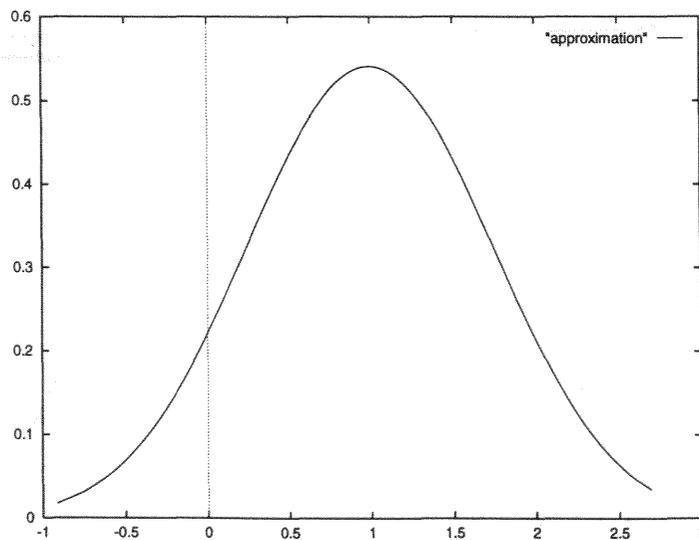


FIG. 3.3: Densité pour la troisième fonction β_3

3.7.2 Cas réfléchi

Depuis une dizaine d'année, des schémas de discrétisation pour des E.D.S. avec condition au bord ont été proposés par différents auteurs . Ce sont tous des modifications du schéma d'Euler-Maruyama pour les E.D.S. dans \mathbb{R}^d .

Kinkladze, Léplinge, Chitashvili et Lazrieva écrivent un schéma de discrétisation pour des E.D.S. réfléchies dans un demi-espace et étudient la convergence forte du schéma vers le processus . Słomiński considère un domaine convexe, ainsi que Anulova et Liptser (cf. [AL]) qui étudient la question de la convergence faible . Gerardi, Marchetti et Rosa (cf. [GMR]) résolvent le problème d'une manière assez différente : ils introduisent une discrétisation en espace (de type différence finie) du générateur associé à l'E.D.S. à simuler et montrent la convergence faible de la suite de processus de Markov à sauts purs ainsi construite .

Plus récemment, Costantini, Pacchiarotti et Sartoretto (cf. [CPS]) se sont attaqués au problème plus général d'un schéma de discrétisation pour l'espérance de certaines fonctionnelles de processus de diffusion réfléchi dans un domaine borné de \mathbb{R}^d .

Nous avons approximé des processus réfléchis , solutions de l'E.D.S. (ER) (cf. paragraphe 3.2.1) définie avec les fonctions respectives β_1, β_2 et β_3 .

Nous avons utilisé deux schémas de discrétisation différents pour les E.D.S. réfléchies . Il s'agit des schémas développés par Dominique Léplinge (cf. [L1] et [L2]) d'une part, et Leszek Słomiński (cf. [Sl2]) d'autre part . Détaillons ces schémas :

a) Schéma de Léplinge

Léplinge s'est inspiré d'un schéma décrit par Kinkladze en 1983 (cf. [K]) pour des E.D.S. dans un demi-espace avec réflexion au bord normale et instantanée . Ce schéma présentait l'inconvénient d'avoir une vitesse de convergence un peu moins rapide que dans le cas sans réflexion . Léplinge, dans [L1], l'améliore en obtenant une vitesse de convergence identique au schéma classique d'Euler-Maruyama (appelé plus souvent schéma d'Euler pour les E.D.S.) dans le cas libre .

Nous allons déjà écrire le schéma de Léplinge dans le cas d'une borne dans \mathbb{R}^m puis nous passerons au cas de deux bornes .

Considérons l' E.D.S. réfléchie (au sens de Skorokhod) dans le domaine $D = \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}_+$:

$$X_t^i = X_0^i + \sum_{j=1}^d \int_0^t f_j^i(X_s) dW_s^j + \int_0^t g_i(X_s) ds + K_t^i, \quad i = 1, \dots, d, t \in \mathbb{R}_+ \quad (7.2)$$

où $W_t = (W_t^1, \dots, W_t^d)$ est un processus de Wiener d -dimensionnel, et $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^d$ sont des fonctions lipschitziennes .

$X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$ est un processus réfléchi dans \bar{D} et $K_t = (K_t^1, \dots, K_t^d)$ est un processus

Soient U une v.a. de loi normale d'espérance 0 et de variance $(t \cdot \text{Id})$ dans \mathbb{R}^d , et V une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2t}$, indépendante de U .

Notons

$$Y := \frac{1}{2} \left\{ \langle a, U \rangle + ct + \sqrt{|a|^2 V + (\langle a, U \rangle + ct)^2} \right\}.$$

Alors :

$$(B_t, S_t) \stackrel{(d)}{\simeq} (U, Y).$$

Grâce à ce théorème, on peut simuler assez facilement un schéma qui sans cela serait très compliqué à cause du terme A_k . En effet, si on note U et V des v.a. indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(0, \Delta t \cdot \text{Id})$ et $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2\Delta t}\right)$ (\mathcal{N} et \mathcal{E} désignant les lois normale et exponentielle), on en déduit que :

$$A_k \stackrel{(d)}{\simeq} \frac{1}{2} \left[- \sum_{j=1}^d f_j^m(\hat{X}_{t_k}) \cdot (U_{t_{k+1}}^j - U_{t_k}^j) - g^m(\hat{X}_{t_k}) \cdot \Delta t \right. \\ \left. + \sqrt{\left(\sum_{j=1}^d f_j^m(\hat{X}_{t_k}) \cdot (U_{t_{k+1}}^j - U_{t_k}^j) + g^m(\hat{X}_{t_k}) \cdot \Delta t \right)^2 + \sum_{j=1}^d [f_j^m(\hat{X}_{t_k})]^2 \cdot V} \right].$$

Donc chaque nouvelle itération en temps nécessite la simulation de d v.a. gaussiennes centrées de variance Δt et d'une v.a. exponentielle de paramètre $\frac{1}{2\Delta t}$. Les v.a. de loi normale et exponentielle étant facilement simulables comme nous l'avons vu au paragraphe 1.7.1, ce schéma est tout à fait programmable.

Passons à présent au cas d'un processus stochastique réfléchi entre deux bornes α et β , $\alpha < \beta$. Lépingle (cf. [L2]) utilise le cas précédent et l'adapte à cette situation, améliorant ainsi le résultat de R.J. Chitashvili et N.L. Lazrieva qui obtenaient, cf. [CL], une vitesse de convergence un peu inférieure à $\frac{1}{2}$ avec un schéma de discrétisation qui paraissait difficilement simulable. Il suppose qu'il y a une très faible probabilité que le processus atteigne les deux bornes dans un intervalle de temps assez court, ce qui est intuitivement évident si l'on choisit un petit pas de temps. Nous nous restreignons pour l'instant au cas unidimensionnel d'une E.D.S. avec des conditions de bord en α et β .

Soient $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ tels que $\alpha < \bar{\alpha} < \bar{\beta} < \beta$.

Alors, pour $k = 0, 1, \dots, M-1$, on définit le schéma de discrétisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{X}_0 = X_0 \\ \hat{X}_{t_{k+1}} = \max \left\{ \alpha, \min \left\{ \beta, \hat{X}_{t_k} + g(\hat{X}_{t_k}) \cdot \Delta t + f(\hat{X}_{t_k}) \cdot (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \right. \right. \\ \left. \left. + \mathbb{1}_{\{\hat{X}_{t_k} < \bar{\alpha}\}} \max \{0, A_k - (\hat{X}_{t_k} - \alpha)\} - \mathbb{1}_{\{\hat{X}_{t_k} > \bar{\beta}\}} \max \{0, B_k + (\hat{X}_{t_k} - \beta)\} \right\} \right\} \end{array} \right\} \quad (7.3)$$

avec

$$A_k = \sup_{t_k \leq s \leq t_{k+1}} \{-g(\hat{X}_{t_k}) \cdot (s - t_k) - f(\hat{X}_{t_k}) \cdot (W_s - W_{t_k})\}$$

$$B_k = \sup_{t_k \leq s \leq t_{k+1}} \{g(\hat{X}_{t_k}) \cdot (s - t_k) + f(\hat{X}_{t_k}) \cdot (W_s - W_{t_k})\}$$

Et Lépingle a démontré le résultat de convergence suivant :

Théorème 7.3 (Lépingle) *Il existe une constante $C > 0$ indépendante de M , telle que :*

$$\sup_{k \in \{0, \dots, M\}} \|X_{t_k} - \hat{X}_{t_k}\|_2 \leq C(\Delta t)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme précédemment, la simulation est possible grâce à l'utilisation du théorème 7.2 pour le calcul de A_k et B_k . De plus, le choix de $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ est arbitraire ; on peut les choisir très proches de α et β respectivement pour avoir peu de termes correcteurs à calculer. Ce schéma de discrétisation s'étend au cas multidimensionnel avec la même vitesse de convergence.

b) Schéma de Słomiński

Dans [Sl1], Słomiński s'intéresse à l'existence et l'unicité de solutions fortes et faibles d'E.D.S. réfléchies d -dimensionnelles dans un domaine D de \mathbb{R}^d vérifiant deux conditions particulières (A) et (B), que nous décrivons ci-dessous, ainsi qu'à la question de la convergence en loi et en probabilité de solutions de telles équations.

Notons \mathcal{N}_x l'ensemble des vecteurs unitaires normaux et rentrants à ∂D , défini par

$$\mathcal{N}_x = \bigcup_{r>0} \mathcal{N}_{x,r}$$

avec $\mathcal{N}_{x,r} = \{n \in \mathbb{R}^d; |n| = 1, B(x - rn, r) \cap D = \emptyset\}$ ($B(z, r)$ est la boule fermée de centre z et de rayon r).

(A) Il existe une constante $r_0 > 0$ telle que $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_{x,r_0} \neq \emptyset, \forall x \in \partial D$.

(B) Il existe des constantes $\delta > 0, \beta \geq 1$ telles que, pour tout $x \in \partial D$, il existe un vecteur unitaire l_x vérifiant la propriété suivante :

$$\langle l_x, n \rangle \geq \frac{1}{\beta}, \quad \forall n \in \bigcup_{y \in B(x, \delta) \cap \partial D} \mathcal{N}_y,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^d .

Et dans [Sl2], il décrit deux schémas de discrétisation pour une E.D.S. réfléchie d -dimensionnelle. L'un est celui de Lépingle (nous n'en parlerons pas à nouveau ici) et l'autre a été étudié précédemment par Chitashvili et Lazrieva (cf. [CL]) dans $D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d-1}$.

Soit D un domaine de \mathbb{R}^d soit convexe, soit vérifiant les conditions (A) et (B). On note de plus la condition suivante :

(C) Il existe des constantes $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ telles que, pour tout $x \in \partial D$, on peut trouver $x_0 \in D$ telle que

$$B(x_0, \varepsilon) \subset D \text{ et } |x - x_0| \leq \delta.$$

(Condition uniforme de sphère intérieure)

Considérons la même E.D.S. réfléchie (7.2) dans \bar{D} , avec $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d$ des fonctions lipschitziennes et bornées dans \bar{D} .

Définissons le schéma d'approximation suivant, avec les notations précédentes :

pour $0 \leq i \leq m$, $0 \leq k \leq M - 1$,

$$\bar{X}_t = \begin{cases} X_0 & \text{si } t \in [0, t_1[\\ \left[\bar{X}_{t_{k-1}} + f(\bar{X}_{t_{k-1}})(W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) + g(\bar{X}_{t_{k-1}})(t_k - t_{k-1}) \right]_{\partial} & \text{si } t \in]t_{k-1}, t_k] \end{cases} \quad (7.4)$$

où $[x]_{\partial}$ est l'unique point de \bar{D} tel que $|x - [x]_{\partial}| = \text{dist}(x, \bar{D})$, c'est-à-dire le point de la frontière ∂D le plus proche de x si $x \notin \bar{D}$, ou x lui-même si $x \in \bar{D}$.

Słomiński a établi le résultat de convergence suivant :

Théorème 7.4 (Słomiński)

(i) Si D est convexe dans \mathbb{R}^d et vérifie la condition (C), alors :

$$M^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \sup_{t \leq q} |\bar{X}_t - X_t| \rightarrow 0 \quad \mathbb{P} - p.s., \forall \varepsilon > 0, \forall q \in \mathbb{R}_+.$$

(ii) Si D vérifie les conditions (A) et (B), alors :

$$M^{\frac{1}{4}-\varepsilon} \sup_{t \leq q} |\bar{X}_t - X_t| \rightarrow 0 \quad \mathbb{P} - p.s., \forall \varepsilon > 0, \forall q \in \mathbb{R}_+.$$

c) Application à notre problème

Appliquons ces deux algorithmes à notre processus réfléchi dans l'intervalle compact $[-1, 1]$. On obtient, en notant

$$\begin{aligned} b(t, X_t) &= E[\beta(x - X_t)] \\ &= \beta * u(t, X_t), \end{aligned}$$

les schémas de discrétisation suivants :

- d'après Lépingle (cf. (7.3)) : Soient $-1 < \bar{\alpha} < \bar{\beta} < +1$, pour tout $1 \leq k \leq M - 1$,

$$\begin{cases} \hat{X}_0 = X_0 \\ \hat{X}_{t_{k+1}} = \max \left\{ -1, \min \left\{ 1, \hat{X}_{t_k} + b(\hat{X}_{t_k}) \cdot \Delta t + (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \right. \right. \\ \left. \left. + \mathbb{1}_{\{\hat{X}_{t_k} < \bar{\alpha}\}} \max \{0, A_k - \hat{X}_{t_k} - 1\} - \mathbb{1}_{\{\hat{X}_{t_k} > \bar{\beta}\}} \max \{0, B_k + \hat{X}_{t_k} - 1\} \right\} \right\} \end{cases} \quad (7.5)$$

- d'après Słomiński (cf. (7.4)) :
pour tout $1 \leq k \leq M - 1$,

$$\begin{cases} \bar{X}_0 = X_0 \\ \bar{X}_{t_{k+1}} = \left\{ \bar{X}_{t_k} + (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) - \frac{1}{2} b(\bar{X}_{t_k}) \cdot \Delta t \right\} \mathbb{1}_{\{\bar{X}_{t_k} \in [-1, 1]\}} - \mathbb{1}_{\{\bar{X}_{t_k} < -1\}} + \mathbb{1}_{\{\bar{X}_{t_k} > 1\}} \end{cases} \quad (7.6)$$

En fait, cela revient à "ramener" artificiellement le processus dans $[-1, 1]$ lorsqu'il en sort, en le posant à l'endroit de la frontière le plus proche : -1 si $X_t < -1$ et $+1$ si $X_t > 1$. C'est le schéma de discrétisation le plus simple à programmer .

Nous avons fait des simulations de la densité des processus pour ces deux algorithmes et dans les cas respectifs des trois fonctions β_1 , β_2 et β_3 considérées dans le paragraphe précédent . Nous avons utilisé la méthode particulière décrite au paragraphe 6 du chapitre 1 . Comme pour l'équation de Burgers, nous avons simulé l'évolution d'un système de particules, chacune d'entre elles se comportant selon l'E.D.S. que l'on veut simuler . Lorsque le nombre de particules tend vers l'infini, nous obtenons la solution de notre E.D.S. .

Dans le cas réfléchi, on ne connaît pas explicitement la loi de la mesure stationnaire dans ces trois situations . Pour les deux fonctions β_2 et β_3 , on a établi la convergence en loi du processus vers une unique mesure stationnaire : nous avons étudié le cas lié à la fonction β_2 au paragraphe 3.5.1, et la fonction β_3 rentre dans le cadre de notre étude car elle vérifie (H_2) . Par contre, pour la première fonction, nous ne savons pas démontrer qu'il y a convergence vers la mesure stationnaire : nous sommes seulement capables d'établir l'existence et l'unicité d'une mesure stationnaire (par la même méthode que pour le cas de β_2 vu en 3.5.1) .

Nous allons observer que les processus vont encore tous converger en loi vers une mesure stationnaire de forme gaussienne : avec une bosse centrée au point de départ . Nous avons choisi pour toutes ces simulations de faire partir le processus de $X_0 = 0$. On remarque que la "bosse" est plus arrondie que dans le cas libre, où elle a plutôt la forme d'une cloche . En effet, les particules ne pouvant pas dépasser les bornes -1 et 1 , elles sont donc concentrées dans un intervalle plus réduit, ce qui explique la forme plus compacte de la densité .

Voici les graphes obtenus pour les trois fonctions, et avec les deux algorithmes différents (7.5) (celui de Lépingle) et (7.6) (celui de Słomiński) . Les paramètres correspondants à ces courbes sont : $N = 10000$, $T = 1$, $\Delta t = 0.001$.

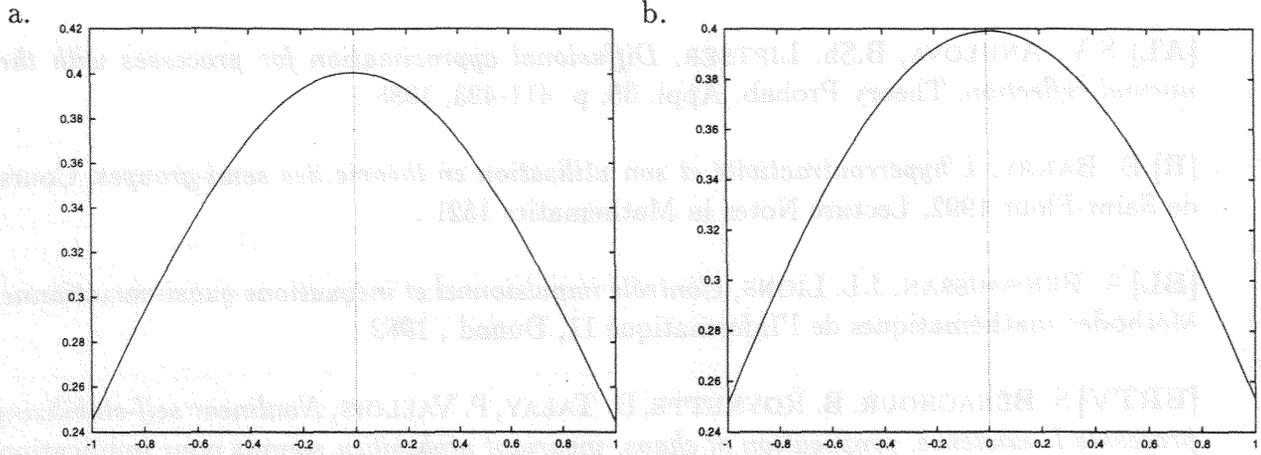


FIG. 3.4: Simulation de la densité pour β_1 avec les schémas a : (7.5) et b : (7.6)

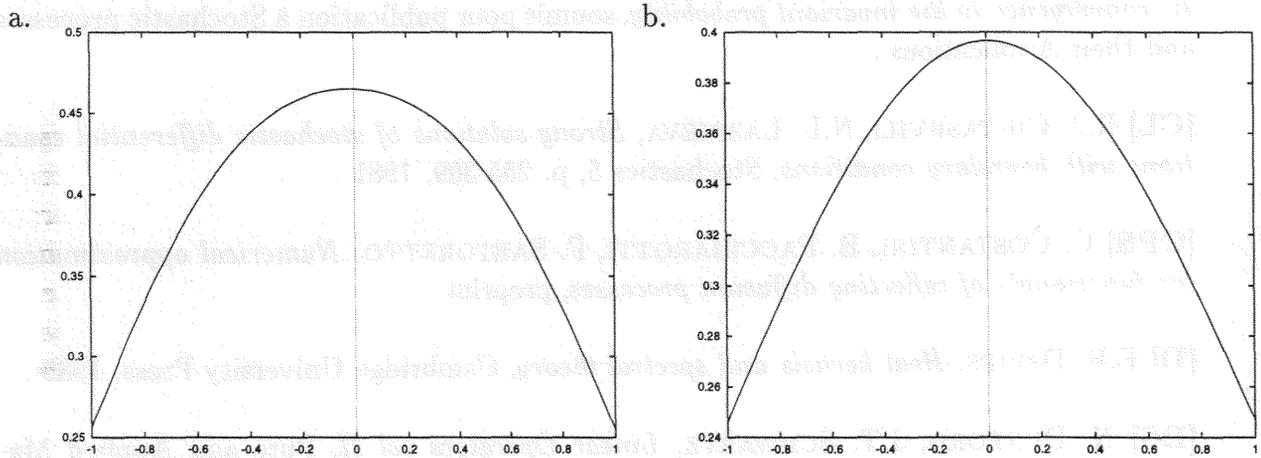


FIG. 3.5: Simulation de la densité pour β_2 avec les schémas a : (7.5) et b : (7.6)

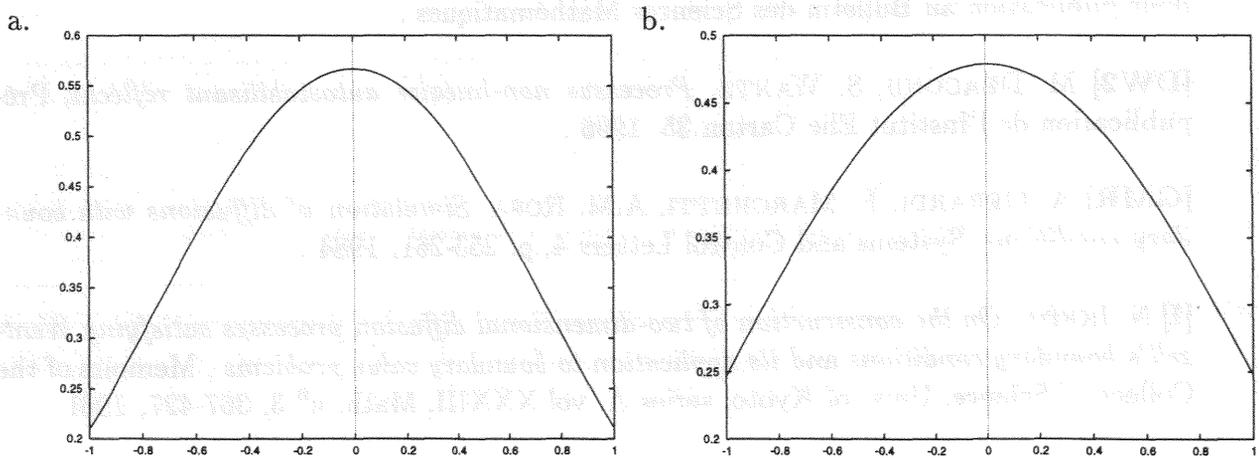


FIG. 3.6: Simulation de la densité pour β_3 avec les schémas a : (7.5) et b : (7.6)

Références

- [AL] S.V. ANULOVA, B.Sh. LIPTSER, *Diffusional approximation for processes with the normal reflection*, Theory Probab. Appl. 35, p. 411-423, 1988 .
- [B] D. BAKRY, *L'hypercontractivité et son utilisation en théorie des semi-groupes*, Cours de Saint-Flour 1992, Lecture Notes in Mathematics 1521 .
- [BL] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, *Contrôle impulsif et inéquations quasi-variationnelles*, Méthodes mathématiques de l'Informatique 11, Dunod , 1982 .
- [BRTV] S. BÉNACHOUR, B. ROYNETTE, D. TALAY, P. VALLOIS, *Nonlinear self-stabilizing processes I, existence, propagation of chaos, invariant probability*, soumis pour publication à Stochastic processes and their Applications .
- [BRV] S. BÉNACHOUR, B. ROYNETTE, P. VALLOIS, *Nonlinear self-stabilizing processes II, convergence to the invariant probability*, soumis pour publication à Stochastic processes and their Applications .
- [CL] R.J. CHITASHVILI, N.L. LAZRIEVA, *Strong solutions of stochastic differential equations with boundary conditions*, Stochastics 5, p. 255-309, 1981 .
- [CPS] C. COSTANTINI, B. PACCHIAROTTI, F. SARTORETTO, *Numerical approximation for functionals of reflecting diffusion processes*, preprint .
- [D] E.B. DAVIES, *Heat kernels and spectral theory*, Cambridge University Press, 1989 .
- [DS] N. DUNFORD, J.T. SCHWARTZ, *Linear Operators vol II*, Pure and Applied Mathematics 7, Interscience Publishers, 1963 .
- [DW1] M. DEACONU, S. WANTZ, *Processus non-linéaire autostabilisant réfléchi*, accepté pour publication au Bulletin des Sciences Mathématiques .
- [DW2] M. DEACONU, S. WANTZ, *Processus non-linéaire autostabilisant réfléchi*, Pré-publication de l'Institut Elie Cartan 35, 1996 .
- [GMR] A. GERARDI, F. MARCHETTI, A.M. ROSA, *Simulation of diffusions with boundary conditions*, Systems and Control Letters 4, p. 253-261, 1984 .
- [I] N. IKEDA, *On the construction of two-dimensional diffusion processes satisfying Wentzell's boundary conditions and its application to boundary value problems* , Memoirs of the College of Science, Univ. of Kyoto, series A, vol XXXIII, Math. n^o 3, 367-427, 1961 .

- [K] N. EL KAROUI, *Processus de réflexion dans \mathbb{R}^n* , Séminaire de Probabilité IX, Lecture Notes in Math. n° 465, Springer, Berlin, 1975 .
- [KCM] N. EL KAROUI, M. CHALEYAT-MAUREL, *Un problème de réflexion et ses applications au temps local et aux E.D.S. sur \mathbb{R}* , Société mathématique de France, Astérisque 52-53, p. 117-144, 1978 .
- [L1] D. LÉPINGLE, *Un schéma d'Euler pour des équations différentielles stochastiques réfléchies*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 316, Série I, p.601-605, 1993 .
- [L2] D. LÉPINGLE, *Euler scheme for reflected stochastic differential equations*, Mathematics and Computers in Simulation 38, p. 119-126, 1995 .
- [LSU] O. LADYZENSKAYA, V.A. SOLONNIKOV, N.N. URAL'CEVA, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs 23, AMS, Providence R.I., 1968 .
- [LS] P.L. LIONS, A.S. SZNITMAN, *Stochastic Differential Equations with Reflecting Boundary Conditions* , Comm. in Pure and Applied Math., vol XXXVII, 511-537 , 1984 .
- [McK] H.P. MAC KEAN, *Stochastic Integrals*, 1969 .
- [NS] S. NAKAO, T. SHIGA, *On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations with boundary conditions* , J. Math. Kyoto Univ., 12-3, 451-478, 1972 .
- [Sa] Y. SAISHO, *Stochastic differential equations for multi-dimensionnal domain with reflecting boundary*, Probab. Th. Rel. Fields 74, p. 455-477, 1987 .
- [Se] V. SESHADRI, *Exponential models, brownian motion, and independance*, The Canadian Journal of Statistics 16, p. 209-221, 1988 .
- [Sh] L.A. SHEPP, *The joint density of the maximum and its location for a Wiener process with drift*, J. Appl. Prob. 16, p. 423-427, 1979 .
- [Sk1] A.V. SKOROKHOD, *Stochastic equations for diffusion processes in a boundary region I*, Theory of Prob. and its Appl. I: vol. VI-3, p. 264-274, 1961 .
- [Sk2] A.V. SKOROKHOD, *Stochastic equations for diffusion processes in a boundary region II*, Theory of Prob. and its Appl. vol. VII-1, p. 3-23, 1961 .
- [SI 1] L. SŁOMIŃSKI, *On existence, uniqueness and stability of solutions of multidimensional SDE's with reflecting boundary conditions*, Ann. Inst. Henri Poincaré 29, p. 163-198, 1993 .

[S12] L. SŁOMIŃSKI, *On approximation of solutions of multidimensional SDE's with reflecting boundary conditions*, Stoch. Proc. and their Appl. 50, p. 197-219, 1994 .

[SV] D.W. STROOCK, S.R.S. VARADHAN, *Diffusion Processes with Boundary Conditions*, Comm. in Pure and Applied Math., vol XXIV, 147-225, 1971 .

[S1] A.S. SZNITMAN, *Nonlinear Reflecting Diffusion Process and the Propagation of Chaos and Fluctuations Associated* , JFA, 56, 311-336, 1984 .

[S2] A.S. SZNITMAN, *Topics in propagation of chaos*, Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour XIX, Lecture Notes in Mathematics 1464, p. 167-251, 1989 .

[T] H. TANAKA, *Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions in convex regions*, Hiroshima Math. J. 9, p. 163-177, 1979 .

[W1] S. WATANABE, *On stochastic differential equations for multi-dimensional diffusion processes with boundary conditions* , J. Math. Kyoto Univ., 11-1, 169-180, 1971 .

[W2] S. WATANABE, *On stochastic differential equations for multi-dimensional diffusion processes with boundary conditions II* , J. Math. Kyoto Univ., 11-3, 545-551 , 1971 .

Chapitre 4

Etude d'une impulsion brownienne

Chapitre 4

Etude d'une impulsion brownienne

4.1 Introduction

Nous nous intéressons à un problème concernant la simulation numérique des processus stochastiques. Celle-ci est maintenant bien connue; de nombreux schémas de discrétisation ont été décrits, la plupart étant des extensions de schémas pour les équations différentielles ordinaires. Pour tous ces schémas, la convergence vers le processus stochastique nécessite des hypothèses assez fortes sur les coefficients (dérive et diffusion) de l'E.D.S. dont le processus est solution. En général, on demande que les coefficients soient lipschitziens, et parfois de plus bornés.

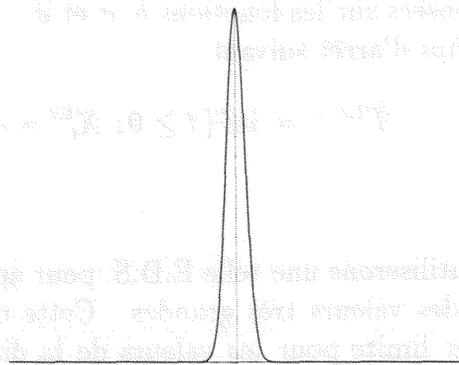
Nous nous sommes intéressés au cas assez particulier dans lequel la diffusion admet une "singularité" autour d'un point (ou plusieurs, cela ne fait que répéter le problème): elle varie brusquement et fortement. C'est le cas par exemple lorsque la diffusion σ ressemble localement à une densité gaussienne de petite variance. La diffusion n'est alors plus "lipschitzienne au voisinage de ce point"; les schémas de discrétisation classiques convergent avec des constantes de convergence qui sont très grandes. Nous allons voir comment simuler le processus dans cette situation.

Nous nous plaçons en dimension 2 et considérons une E.D.S. de la forme :

$$\begin{cases} X_t = \int_0^t \phi(X_s, Y_s) ds \\ Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma(X_s, Y_s) dB_s + \int_0^t b(X_s, Y_s) ds \end{cases}$$

avec $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien unidimensionnel issu de zéro, $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Supposons que la diffusion σ ait un comportement singulier autour d'un point, nous avons choisi l'origine. Elle est de la forme :



Nous simplifions ici le problème en séparant la diffusion en une partie singulière (nous avons choisi une singularité simple représentée par une fonction indicatrice: c'est une impulsion brownienne) et une partie régulière (que nous notons σ).

Nous considérons donc l'E.D.S. bidimensionnelle :

$$\begin{cases} X_t^{1,\varepsilon} = \int_0^t \phi\left(\frac{1}{\varepsilon^2} X_s^{1,\varepsilon}, Y_s^{1,\varepsilon}\right) ds \\ Y_t^{1,\varepsilon} = z + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\varepsilon^2]}(X_s^{1,\varepsilon}) dB_s + \int_0^t \sigma(X_s^{1,\varepsilon}, Y_s^{1,\varepsilon}) d\tilde{B}_s + \int_0^t b(X_s^{1,\varepsilon}, Y_s^{1,\varepsilon}) ds \end{cases} \quad (E_1)$$

avec $(B_t)_{t \geq 0}$ et $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ deux mouvements browniens unidimensionnels, issus de zéro et indépendants, $z \in \mathbb{R}$, un petit paramètre $\varepsilon > 0$ et les fonctions $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $b : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la condition de Lipschitz (et donc de croissance au plus linéaire), c'est-à-dire pour ϕ par exemple : il existe $K > 0$ tel que

$$|\phi(z) - \phi(z')| \leq K \|z - z'\|, \quad \forall z, z' \in \mathbb{R}^2, \quad (1.1)$$

ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution forte de (E_1) . On suppose de plus que les fonctions b et σ sont bornées et que ϕ est minorée, i.e.

$$\exists \eta > 0; \quad \phi(x, y) \geq \eta > 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.2)$$

Nous indiquons cette E.D.S. par 1 car nous montrerons par la suite qu'elle est équivalente en loi à une autre E.D.S. que nous indiquerons par 2.

Nous verrons au cours de notre étude pourquoi nous avons choisi les coefficients multiplicateurs $\frac{1}{\varepsilon}$ dans le terme d'impulsion brownienne $\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\varepsilon^2]}(X_s^{1,\varepsilon}) dB_s\right)$, et $\frac{1}{\varepsilon^2}$ dans l'équation de $X^{1,\varepsilon}$: ils conviennent bien pour utiliser les propriétés d'échelle.

Nous notons $\{Z_t^{1,\varepsilon} = (X_t^{1,\varepsilon}, Y_t^{1,\varepsilon})\}_{t \geq 0}$ le processus stochastique bidimensionnel démarrant de $Z_0^{1,\varepsilon} = (0, z)$ et solution de (E_1) , l'existence et l'unicité de la solution étant assurées par les hypothèses imposées sur les fonctions b , σ et ϕ .

Nous définissons le temps d'arrêt suivant :

$$T^{1,\varepsilon} := \inf\{t \geq 0; X_t^{1,\varepsilon} = \varepsilon^2\}. \quad (1.3)$$

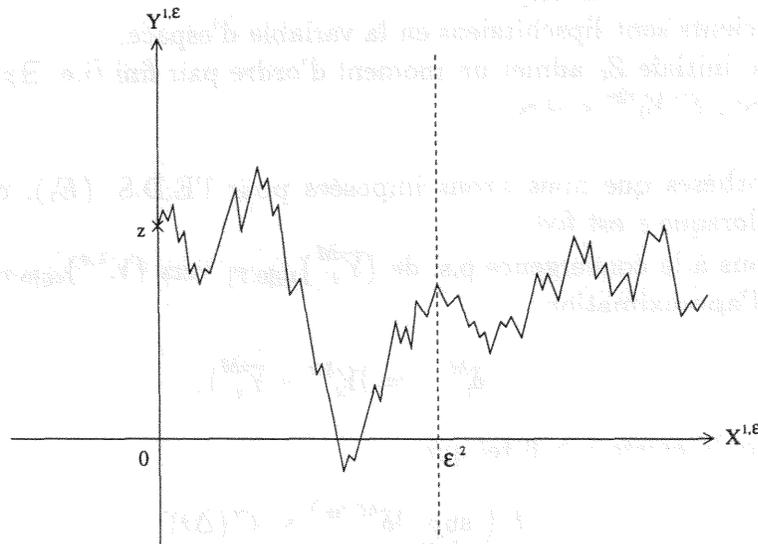
En pratique, nous utiliserons une telle E.D.S. pour approximer le cas où le coefficient de diffusion atteindra des valeurs très grandes. Cette modélisation nécessite donc l'introduction d'une valeur limite pour les valeurs de la diffusion au-dessus de laquelle on considéra que la fonction de diffusion se comporte comme nous l'avons décrit dans (E_1) .

Étudions tout d'abord grossièrement le comportement du processus $Z^{1,\varepsilon}$ solution de (E_1) .

Dans la bande $[0, \varepsilon^2] \times \mathbb{R}$ créée par la fonction indicatrice, la seconde composante $Y^{1,\varepsilon}$ est perturbée par un mouvement brownien supplémentaire facteur de $\frac{1}{\varepsilon}$. Raisonsnons à ε fixé. La première composante $X^{1,\varepsilon}$ ne peut qu'augmenter puisque la fonction ϕ est positive. Le processus $Z^{1,\varepsilon}$ démarré d'un point de l'axe des ordonnées, part donc vers la droite. On s'intéresse à sa loi lorsqu'il atteint la barrière formée par la droite $\{x = \varepsilon^2\}$.

Une fois sorti de la bande $[0, \varepsilon^2] \times \mathbb{R}$, la première composante va continuer à croître et la seconde composante a maintenant un comportement stochastique classique. Donc le processus $Z^{1,\varepsilon}$ continue son chemin vers la droite. Et le temps d'arrêt $T^{1,\varepsilon}$ sera le seul temps de sortie de la bande $[0, \varepsilon^2] \times \mathbb{R}$ pour ce processus.

Il est fini car la fonction ϕ étant positive, la composante $X^{1,\varepsilon}$ du processus part de l'origine et croît. Donc elle atteindra nécessairement en un temps fini la valeur ε^2 .



Notre motivation est la simulation numérique du processus limite de $Z^{1,\varepsilon}$, lorsque l'on fait tendre ε vers zéro :

$$Z_t^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_t^{1,\varepsilon}, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.4)$$

La simulation numérique du processus Z^1 donné par (1.4) n'est pas évidente à priori. Quel que soit le schéma de discrétisation classique choisi, on ne sait pas approximer $Z_{T^{1,\varepsilon}}^{1,\varepsilon}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. En effet, utilisons par exemple le schéma de discrétisation le plus simple, celui d'Euler, et approximations $Z^{1,\varepsilon}$.

Pour simuler le processus $Z^{1,\varepsilon} = (X^{1,\varepsilon}, Y^{1,\varepsilon})$ sur un intervalle de temps fixé $[0, T]$, on considère une subdivision régulière de cet intervalle: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$, de pas de discrétisation choisi constant (par souci de simplicité):

$$\Delta t = \frac{T}{M} = t_{k+1} - t_k, \quad \forall k = 0, 1, \dots, M-1.$$

Et on définit le schéma de discrétisation $\{\bar{Z}_{t_k}^M = (\bar{X}_{t_k}^M, \bar{Y}_{t_k}^M)\}$ par :

$$\begin{aligned}\bar{X}_0^M &= X_0, \quad \bar{Y}_0^M = Y_0 \\ \bar{X}_t^M &= \bar{X}_{t_k}^M + \phi\left(\frac{1}{\varepsilon^2} \bar{X}_{t_k}^M, \bar{Y}_{t_k}^M\right) \cdot (t - t_k), \quad \forall t \in]t_k, t_{k+1}] \\ \bar{Y}_t^M &= \bar{Y}_{t_k}^M + \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{1}_{[0, \varepsilon^2]}(\bar{X}_{t_k}^M) \cdot (B_t - B_{t_k}) + \sigma(\bar{X}_{t_k}^M, \bar{Y}_{t_k}^M) \cdot (\tilde{B}_t - \tilde{B}_{t_k}) \\ &\quad + b(\bar{X}_{t_k}^M, \bar{Y}_{t_k}^M) \cdot (t - t_k), \quad \forall t \in]t_k, t_{k+1}]\end{aligned}$$

On peut définir un tel schéma de discrétisation et établir la convergence de $\{\bar{Z}_t^M\}_{t \in [0, T]}$ vers $\{Z_t^{1, \varepsilon}\}_{t \in [0, T]}$, quand le nombre de pas M tend vers l'infini, à ε fixé .

En effet, il est classique pour établir la convergence, par exemple la convergence p.s., d'imposer les hypothèses suivantes sur les coefficients de l'E.D.S. que nous supposons homogènes (car c'est le cas ici) :

- les coefficients sont lipschitziens en la variable d'espace,
- la donnée initiale Z_0 admet un moment d'ordre pair fini (i.e. $\exists p \geq 1$;

$$E |X_0|^{2p} < +\infty, \quad E |Y_0|^{2p} < +\infty .$$

Avec les hypothèses que nous avons imposées pour l'E.D.S. (E_1) , ces deux conditions sont vérifiées lorsque ε est fixé .

Intéressons-nous à la convergence p.s. de $\{\bar{Y}_t^M\}_{t \in [0, T]}$ vers $\{Y_t^{1, \varepsilon}\}_{t \in [0, T]}$. On note l'erreur commise par l'approximation :

$$\delta_t^M : = |Y_t^{1, \varepsilon} - \bar{Y}_t^M| ,$$

et on montre qu'il existe $\gamma > 0$ tel que

$$E \left(\sup_{t \in [0, T]} |\delta_t^M|^{2p} \right) \leq C (\Delta t)^\gamma \quad (1.5)$$

pour en déduire que :

$$\sup_{t \in [0, T]} \delta_t^M \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0 \text{ p.s.} \quad (1.6)$$

Essayons à présent de passer à l'approximation du processus limite Z^1 . Quand on fait tendre ε vers zéro, les coefficients de notre E.D.S. (E_1) ne sont plus bornés puisque les coefficients majorants explosent quand $\varepsilon \rightarrow 0$, et il n'est donc plus possible d'établir une inégalité de la forme (1.5) .

On peut se référer à la thèse d'O. Faure, cf. [F], pour un exposé clair et complet des premiers schémas de discrétisation pour des E.D.S. : schémas d'Euler et de Milshtein . Ils sont brièvement rappelés dans le chapitre 1, section 1.6 .

Pour résoudre ce problème, nous allons approximer le processus Z^1 défini par (1.4) avec un schéma de discrétisation classique en dehors d'un petit voisinage du point $(0, Y^1)$. La limite, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, de la loi de $Y_{T^1, \varepsilon}^{1, \varepsilon}$ étant connue (c'est le sujet de ce travail), il suffit, lorsque X^1 arrive en zéro, d'approximer Y^1 grâce à cette loi. Ensuite, la simulation se poursuit normalement.

Le but de ce papier est donc de déterminer la limite, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, de la loi de $Y_{T^1, \varepsilon}^{1, \varepsilon}$.

Le plan de ce travail est le suivant : dans une première partie, nous allons, par des convergences en loi, nous ramener à un problème plus simple, où la loi cherchée ne dépend plus de ε . Nous verrons tout d'abord que dans l'E.D.S. (E_1) , seul le terme de l'impulsion brownienne joue un rôle lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on pourra donc se passer des deux autres termes : $\int_0^t \sigma(X_s^{1, \varepsilon}, Y_s^{1, \varepsilon}) d\tilde{B}_s$ et $\int_0^t b(X_s^{1, \varepsilon}, Y_s^{1, \varepsilon}) ds$. Puis, nous montrerons que le processus $Y_{T^1, \varepsilon}^{1, \varepsilon}$ dont nous cherchons à présent la loi, est équivalent en loi à Y_T , où Y est un mouvement brownien et T est le temps d'atteinte du niveau 1 pour le processus X associé à l'intégrale de Y , défini par : $X_t = \int_0^t \phi(X_s, Y_s) ds$.

Dans une partie suivante, nous déterminerons cette loi et nous terminerons cette étude par plusieurs exemples rentrant dans ce cadre.

4.2 Equivalences en loi

4.2.1 Equivalence en loi de (E_1)

Nous allons montrer que le processus $Z^{1,\varepsilon}$ solution de (E_1) est équivalent en loi à un processus $Z^{2,\varepsilon}$ solution d'une E.D.S. plus agréable à étudier, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

On considère l'E.D.S. bidimensionnelle :

$$\begin{cases} X_t^{2,\varepsilon} = \int_0^t \phi\left(\frac{1}{\varepsilon^2} X_s^{2,\varepsilon}, Y_s^{2,\varepsilon}\right) ds \\ Y_t^{2,\varepsilon} = z + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\varepsilon^2]}(X_s^{2,\varepsilon}) dB_s \end{cases} \quad (E_2)$$

avec les mêmes données que pour (E_1) : un mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$, une fonction $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ lipschitzienne et minorée, $z \in \mathbb{R}$, et $\varepsilon > 0$.

Et on définit :

$$T^{2,\varepsilon} := \inf \{ t \geq 0 ; X_t^{2,\varepsilon} = \varepsilon^2 \}. \quad (2.7)$$

Commençons par une remarque qui nous servira dans toute notre étude :

Remarque 2.1 : Par définition de $T^{i,\varepsilon}$ (pour $i = 1, 2$), on a :

$$\int_0^{T^{i,\varepsilon}} \phi\left(\frac{1}{\varepsilon^2} X_s^{i,\varepsilon}, Y_s^{i,\varepsilon}\right) ds = \varepsilon^2.$$

Puisque la fonction ϕ est minorée, d'après (1.2), on en déduit que :

$$\varepsilon^2 \geq \int_0^{T^{i,\varepsilon}} \eta ds = \eta T^{i,\varepsilon},$$

c'est-à-dire :

$$T^{i,\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon^2}{\eta}, \quad i = 1, 2. \quad (2.8)$$

On peut alors établir le lemme suivant :

Lemme 2.2 Soient $\{Z_t^{1,\varepsilon} = (X_t^{1,\varepsilon}, Y_t^{1,\varepsilon})\}_{t \geq 0}$ et $\{Z_t^{2,\varepsilon} = (X_t^{2,\varepsilon}, Y_t^{2,\varepsilon})\}_{t \geq 0}$ les processus solutions des E.D.S. respectives (E_1) et (E_2) . Alors :

$$Y_{T^{1,\varepsilon}}^{1,\varepsilon} - Y_{T^{2,\varepsilon}}^{2,\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{dans } L^2 \text{ et en loi.}$$

Démonstration du lemme 2.2: La quantité K désignera dans la suite une constante dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre.

a) Intéressons-nous tout d'abord aux deux premières composantes respectives $X^{1,\varepsilon}$ et $X^{2,\varepsilon}$.

$$X_t^{1,\varepsilon} - X_t^{2,\varepsilon} = \int_0^t \left\{ \phi\left(\frac{1}{\varepsilon^2} X_s^{1,\varepsilon}, Y_s^{1,\varepsilon}\right) - \phi\left(\frac{1}{\varepsilon^2} X_s^{2,\varepsilon}, Y_s^{2,\varepsilon}\right) \right\} ds.$$

Alors:

$$\begin{aligned} \sup_{s \leq t} |X_s^{1,\varepsilon} - X_s^{2,\varepsilon}| &\leq \int_0^t \left| \phi\left(\frac{1}{\varepsilon^2} X_s^{1,\varepsilon}, Y_s^{1,\varepsilon}\right) - \phi\left(\frac{1}{\varepsilon^2} X_s^{2,\varepsilon}, Y_s^{2,\varepsilon}\right) \right| ds \\ &\leq K \int_0^t \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2} |X_s^{1,\varepsilon} - X_s^{2,\varepsilon}| + |Y_s^{1,\varepsilon} - Y_s^{2,\varepsilon}| \right\} ds \\ &\quad \text{car } \phi \text{ est lipschitzienne} \\ &\leq K t \sup_{s \leq t} |Y_s^{1,\varepsilon} - Y_s^{2,\varepsilon}| + \frac{K}{\varepsilon^2} \int_0^t \sup_{u \leq s} |X_u^{1,\varepsilon} - X_u^{2,\varepsilon}| du \end{aligned}$$

On en déduit en appliquant le lemme de Gronwall:

$$\sup_{s \leq t} |X_s^{1,\varepsilon} - X_s^{2,\varepsilon}| \leq K t \sup_{s \leq t} |Y_s^{1,\varepsilon} - Y_s^{2,\varepsilon}| \exp\left(\frac{K t}{\varepsilon^2}\right)$$

En appliquant cette inégalité avec $t = T^{1,\varepsilon} \wedge T^{2,\varepsilon}$ et en utilisant la remarque 2.1, on obtient:

$$\sup_{s \leq T^{1,\varepsilon} \wedge T^{2,\varepsilon}} |X_s^{1,\varepsilon} - X_s^{2,\varepsilon}| \leq K \varepsilon^2 \sup_{s \leq T^{1,\varepsilon} \wedge T^{2,\varepsilon}} |Y_s^{1,\varepsilon} - Y_s^{2,\varepsilon}|. \quad (2.9)$$

En particulier, si $T^{1,\varepsilon} \wedge T^{2,\varepsilon} = T^{1,\varepsilon}$ (et on pourra faire le raisonnement symétrique si $T^{1,\varepsilon} \wedge T^{2,\varepsilon} = T^{2,\varepsilon}$), on a:

$$|X_{T^{1,\varepsilon}}^{2,\varepsilon} - \varepsilon^2| \leq K \varepsilon^2 \sup_{s \leq T^{1,\varepsilon} \wedge T^{2,\varepsilon}} |Y_s^{1,\varepsilon} - Y_s^{2,\varepsilon}|.$$

ϕ étant minorée (cf. (1.2)), on aura:

$$|T^{1,\varepsilon} - T^{2,\varepsilon}| \leq |\phi(T^{1,\varepsilon}) - \phi(T^{2,\varepsilon})| = |X_{T^{1,\varepsilon}}^{2,\varepsilon} - \varepsilon^2|.$$

D'où:

$$|T^{1,\varepsilon} - T^{2,\varepsilon}| \leq K \varepsilon^2 \sup_{s \leq T^{1,\varepsilon} \wedge T^{2,\varepsilon}} |Y_s^{1,\varepsilon} - Y_s^{2,\varepsilon}|. \quad (2.10)$$

Ceci nous conduit à regarder cette différence: $|Y_s^{1,\varepsilon} - Y_s^{2,\varepsilon}|$.

b) Considérons à présent les composantes $Y^{1,\varepsilon}$ et $Y^{2,\varepsilon}$.

On se place sur l'intervalle de temps $[0, T^{1,\varepsilon} \wedge T^{2,\varepsilon}]$. Dans ce cas, les deux premiers termes d'impulsion brownienne étant égaux, ils se compensent, d'où:

$$Y_{s \wedge T^{1,\varepsilon} \wedge T^{2,\varepsilon}}^{1,\varepsilon} - Y_{s \wedge T^{1,\varepsilon} \wedge T^{2,\varepsilon}}^{2,\varepsilon} = \int_0^{s \wedge T^{1,\varepsilon} \wedge T^{2,\varepsilon}} \sigma(X_u^{1,\varepsilon}, Y_u^{1,\varepsilon}) d\tilde{B}_u + \int_0^{s \wedge T^{1,\varepsilon} \wedge T^{2,\varepsilon}} b(X_u^{1,\varepsilon}, Y_u^{1,\varepsilon}) du.$$

On applique la formule d'Itô pour calculer $|Y_s^{1,\varepsilon} - Y_s^{2,\varepsilon}|^2$ et on utilise l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy et le fait que les fonctions b et σ sont bornées pour obtenir finalement :

$$E \left(\sup_{s \leq T^{1,\varepsilon} \wedge T^{2,\varepsilon}} |Y_s^{1,\varepsilon} - Y_s^{2,\varepsilon}|^2 \right) \leq C \varepsilon^2. \quad (2.11)$$

D'autre part, on a :

$$Y_{T^{1,\varepsilon}}^{1,\varepsilon} - Y_{T^{2,\varepsilon}}^{2,\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} (B_{T^{1,\varepsilon}} - B_{T^{2,\varepsilon}}) + \int_0^{T^{1,\varepsilon}} \sigma(X_s^{1,\varepsilon}, Y_s^{1,\varepsilon}) d\tilde{B}_s + \int_0^{T^{1,\varepsilon}} b(X_s^{1,\varepsilon}, Y_s^{1,\varepsilon}) ds.$$

On passe à l'espérance du carré : en développant le carré et en majorant comme précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned} E \left[(Y_{T^{1,\varepsilon}}^{1,\varepsilon} - Y_{T^{2,\varepsilon}}^{2,\varepsilon})^2 \right] &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} E (|T^{2,\varepsilon} - T^{1,\varepsilon}|) + K \varepsilon^2 \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} K \varepsilon^2 E \left[\sup_{s \leq T^{1,\varepsilon} \wedge T^{2,\varepsilon}} |Y_s^{1,\varepsilon} - Y_s^{2,\varepsilon}| \right] + K \varepsilon^2 \quad \text{avec (2.10)}. \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz et on utilise (2.11) . D'où :

$$E \left[(Y_{T^{1,\varepsilon}}^{1,\varepsilon} - Y_{T^{2,\varepsilon}}^{2,\varepsilon})^2 \right] \leq K \varepsilon + K \varepsilon^2 \rightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

On a donc montré que $Y_{T^{1,\varepsilon}}^{1,\varepsilon} - Y_{T^{2,\varepsilon}}^{2,\varepsilon}$ converge vers zéro dans L^2 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. On en déduit que $Y_{T^{1,\varepsilon}}^{1,\varepsilon} - Y_{T^{2,\varepsilon}}^{2,\varepsilon}$ converge en loi vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Ceci achève la preuve du lemme 2.2 .

De plus, on a :

$$X_{T^{1,\varepsilon}}^{1,\varepsilon} = X_{T^{2,\varepsilon}}^{2,\varepsilon} = \varepsilon^2.$$

Alors si $Z_{T^{1,\varepsilon}}^{1,\varepsilon}$ converge en loi, et la différence $Y_{T^{1,\varepsilon}}^{1,\varepsilon} - Y_{T^{2,\varepsilon}}^{2,\varepsilon}$ converge vers zéro dans L^2 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, $Z_{T^{2,\varepsilon}}^{2,\varepsilon}$ converge en loi vers la même limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Cela signifie que dans l'E.D.S. vérifiée par $Y^{1,\varepsilon}$:

$$Y_t^{1,\varepsilon} = z + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\varepsilon^2]}(\mathbf{X}_s^{1,\varepsilon}) d\mathbf{B}_s + \int_0^t \sigma(X_s^{1,\varepsilon}, Y_s^{1,\varepsilon}) d\tilde{B}_s + \int_0^t b(X_s^{1,\varepsilon}, Y_s^{1,\varepsilon}) ds,$$

seule l'impulsion brownienne (en caractères gras) est importante dans la bande $[0, \varepsilon^2] \times \mathbb{R}$; les deux derniers termes du membre de droite ne jouent aucun rôle lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. On étudiera donc plus volontiers l'E.D.S. (E_2) .

Une deuxième remarque va nous permettre de restreindre notre étude . Puisque l'on cherche à déterminer la loi de notre processus sur la droite $\{\varepsilon^2\} \times \mathbb{R}$, il suffit de l'étudier dans la bande $[0, \varepsilon^2] \times \mathbb{R}$, on peut donc éliminer la fonction indicatrice qui alourdit notre notation .

On en déduit que pour déterminer la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ de la loi de $Y_{T^1, \varepsilon}^{1, \varepsilon}$, il est équivalent de considérer l'E.D.S. bidimensionnelle suivante :

$$\begin{cases} X_t^\varepsilon = \int_0^t \phi\left(\frac{1}{\varepsilon^2} X_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon\right) ds \\ Y_t^\varepsilon = z + \frac{1}{\varepsilon} B_t \end{cases} \quad (E_3)$$

avec les mêmes hypothèses que pour (E_1) , et de chercher la limite, lorsque ε tend vers zéro, de la loi de Y^ε pris au temps d'arrêt :

$$T^\varepsilon := \inf \{ t \geq 0; X_t^\varepsilon = \varepsilon^2 \}. \quad (2.12)$$

4.2.2 Convergence en loi de $Y_{T^\varepsilon}^\varepsilon$

Considérons l'E.D.S. bidimensionnelle :

$$\begin{cases} X_t = \int_0^t \phi(X_s, Y_s) ds \\ Y_t = z + B_t \end{cases} \quad (E_4)$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien unidimensionnel issu de zéro, $z \in \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ les mêmes données que pour l'E.D.S. (E_3) .

Etablissons un premier résultat :

Lemme 2.3 *Considérons (X, Y) la solution de (E_4) , et l'E.D.S. suivante :*

$$\begin{cases} \tilde{X}_t^\varepsilon = \varepsilon^2 X_{\frac{t}{\varepsilon^2}} \\ \tilde{Y}_t^\varepsilon = z + B_{\frac{t}{\varepsilon^2}} \end{cases} \quad (E_5)$$

Alors la solution de (E_5) , $(\tilde{X}^\varepsilon, \tilde{Y}^\varepsilon)$, est solution en loi de (E_3) .

Démonstration du lemme 2.3 :

D'après (E_4) , on a :

$$\begin{aligned} X_{\frac{t}{\varepsilon^2}} &= \int_0^{\frac{t}{\varepsilon^2}} \phi(X_s, Y_s) ds \\ &= \int_0^t \phi\left(X_{\frac{v}{\varepsilon^2}}, Y_{\frac{v}{\varepsilon^2}}\right) dv \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \quad \text{avec le changement de variable } s = \frac{v}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\varepsilon^2 X_{\frac{t}{\varepsilon^2}} = \int_0^t \phi\left(X_{\frac{v}{\varepsilon^2}}, Y_{\frac{v}{\varepsilon^2}}\right) dv. \quad (2.13)$$

Or :

$$Y_{\frac{v}{\varepsilon^2}} = z + B_{\frac{v}{\varepsilon^2}} \stackrel{(d)}{\simeq} z + \frac{1}{\varepsilon} B_v = \tilde{Y}_v^\varepsilon,$$

donc les solutions de l'équation (2.13) auront même loi que celles de l'équation :

$$\varepsilon^2 X_{\frac{t}{\varepsilon^2}} = \int_0^t \phi\left(X_{\frac{v}{\varepsilon^2}}, z + \frac{1}{\varepsilon} B_v\right) dv. \quad (2.14)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t^\varepsilon &= \varepsilon^2 X_{\frac{t}{\varepsilon^2}} \\ &= \int_0^t \phi\left(X_{\frac{v}{\varepsilon^2}}, z + \frac{1}{\varepsilon} B_v\right) dv \quad \text{cf. (2.14)} \\ &= \int_0^t \phi\left(\frac{1}{\varepsilon^2} \tilde{X}_v^\varepsilon, z + \frac{1}{\varepsilon} B_v\right) dv. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ainsi, X^ε et \tilde{X}^ε vérifiant la même E.D.S. (cf. (E_3) et (2.15)), elles ont même loi :

$$X_t^\varepsilon \stackrel{(d)}{\simeq} \tilde{X}_t^\varepsilon \stackrel{(d)}{\simeq} \varepsilon^2 X_{\frac{t}{\varepsilon^2}}. \quad (2.16)$$

Ceci prouve le lemme 2.3 .

Ce résultat signifie que chercher à déterminer la loi de $Y_{T^\varepsilon}^\varepsilon$ est équivalent à considérer l'E.D.S. (E_5) et à chercher la loi de \tilde{Y}^ε au temps d'arrêt :

$$\tilde{T}^\varepsilon := \inf \{t \geq 0; \tilde{X}_t^\varepsilon = \varepsilon^2\}, \quad (2.17)$$

c'est-à-dire : $Y_{T^\varepsilon}^\varepsilon$ et $\tilde{Y}_{\tilde{T}^\varepsilon}^\varepsilon$ ont même loi limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

On définit :

$$T := \inf \{t \geq 0; X_t = 1\}, \quad (2.18)$$

où (X, Y) est solution de l'E.D.S. (E_4) .

On peut écrire \tilde{T}^ε sous la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{T}^\varepsilon &= \inf \{t \geq 0; \tilde{X}_t^\varepsilon = \varepsilon^2\} \\ &= \inf \{t \geq 0; \varepsilon^2 X_{\frac{t}{\varepsilon^2}} = \varepsilon^2\} \quad \text{cf. (2.16)} \\ &= \inf \{t \geq 0; X_{\frac{t}{\varepsilon^2}} = 1\} \end{aligned}$$

donc

$$X_{\frac{\tilde{T}^\varepsilon}{\varepsilon^2}} = 1.$$

Confronter les deux définitions de T et \tilde{T}^ε nous amène donc à :

$$\frac{\tilde{T}^\varepsilon}{\varepsilon^2} = T.$$

Alors :

$$\tilde{Y}_{\tilde{T}^\varepsilon}^\varepsilon = z + B_{\frac{\tilde{T}^\varepsilon}{\varepsilon^2}} = z + B_T.$$

Nous avons donc établi la proposition suivante, qui signifie que $Y_{T^\varepsilon}^\varepsilon$ a une loi indépendante de ε .

Proposition 2.4

$$Y_{T^\varepsilon}^\varepsilon \stackrel{(d)}{\approx} Y_T = z + B_T.$$

$$\begin{cases} Y_t = z + B_t \\ Y_{T^\varepsilon}^\varepsilon = z + B_{T^\varepsilon} \end{cases}$$

4.3 Loi de Y_T

Nous avons vu que pour résoudre notre problème, nous considérons l'E.D.S. (E_4) et nous cherchons à déterminer la loi de Y_T avec (X, Y) solution de (E_4) et T le temps d'arrêt défini par (2.18). Pour cela, nous associons à l'E.D.S. (E_4) un processus unidimensionnel $(R_t)_{t \geq 0}$ et nous allons montrer que certaines fonctionnelles du couple (t, R_t) sont égales en loi aux composantes X et Y du processus solution de (E_4) . La loi de Y_T sera alors égale à une fonctionnelle du processus $(t, R_t)_{t \geq 0}$ à l'instant 1.

Théorème 3.1 *Considérons l'E.D.S. bidimensionnelle (E_4) :*

$$\begin{cases} X_t = \int_0^t \phi(X_s, Y_s) ds \\ Y_t = z + B_t \end{cases}$$

avec $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien unidimensionnel issu de zéro, $z \in \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction lipschitzienne et minorée. Soit (s, f, g) une solution du système suivant, où on a noté par s_t la dérivée de s par rapport au temps, et s' , s'' les dérivées première et seconde de s par rapport à la variable d'espace :

$$\begin{cases} (s' \cdot f) \circ s^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \\ \frac{1}{2} f^2 s'' + g s' + s_t = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

avec $s : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bijective (à t fixé) et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Considérons alors l'E.D.S. unidimensionnelle suivante définie avec les fonctions précédentes f et g :

$$\begin{cases} dR_t = f(t, R_t) d\tilde{B}_t + g(t, R_t) dt \\ R_0 = z \end{cases} \quad (3.20)$$

avec $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien unidimensionnel issu de zéro, et z le nombre réel utilisé dans (E_4) . Si les fonctions f et g sont suffisamment régulières pour que cette E.D.S. ait une solution unique, alors on a :

$$Y_T \stackrel{(d)}{\simeq} s(1, R_1).$$

Démonstration du théorème 3.1 :

Nous considérons une E.D.S. ordinaire dont les coefficients f et g sont inconnus pour le moment, ils sont seulement supposés vérifier les conditions usuelles assurant l'existence et l'unicité d'une solution notée $(R_t)_{t \geq 0}$. Et on suppose que le processus démarre de z à l'instant initial. Soit donc :

$$R_t = z + \int_0^t f(s, R_s) dB_s + \int_0^t g(s, R_s) ds.$$

Nous nous intéressons au couple $(t, R_t)_{t \geq 0}$. Le générateur infinitésimal associé à ce processus est :

$$L = \frac{1}{2} f^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + g \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Soit s une fonction d'échelle pour cet opérateur différentiel ; $s : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 , telle que $s(t, \cdot)$ est bijective et $Ls = 0$.

On applique la formule d'Itô à cette fonction s . On obtient :

$$\begin{aligned} s(t, R_t) &= s(0, z) + \int_0^t \frac{\partial s}{\partial x}(u, R_u) f(u, R_u) dB_u + \int_0^t \frac{\partial s}{\partial x}(u, R_u) g(u, R_u) du \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial s}{\partial t}(u, R_u) du + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}(u, R_u) f^2(u, R_u) du. \end{aligned}$$

D'où, puisque s est une fonction d'échelle pour L :

$$s(t, R_t) = s(0, z) + \int_0^t \frac{\partial s}{\partial x}(u, R_u) f(u, R_u) dB_u.$$

C'est-à-dire, si on note

$$Z_t := s(t, R_t) :$$

$$\begin{aligned} Z_t &= s(0, z) + \int_0^t \left(\frac{\partial s}{\partial x} \cdot f \right) (u, R_u) dB_u \\ &= Z_0 + \int_0^t \left(\frac{\partial s}{\partial x} \cdot f \right) (s^{-1}(u, Z_u)) dB_u \\ &= Z_0 + \int_0^t c(u, Z_u) dB_u \quad \text{en posant } c := \left(\frac{\partial s}{\partial x} \cdot f \right) \circ s^{-1}. \end{aligned}$$

On définit :

$$A(t) = \int_0^t c^2(u, Z_u) du$$

$$\text{et } \tau(t) = A^{-1}(t) \text{ i.e. : } A(\tau(t)) = t. \quad (3.21)$$

On a alors :

$$Z_t = Z_0 + \beta_{A(t)},$$

avec $(\beta_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien unidimensionnel standard (d'après le théorème de Dubins-Schwartz, cf. [RY] Th.(1.6) p.173 par exemple).

D'où, à l'instant $\tau(t)$:

$$Z_{\tau(t)} = Z_0 + \beta_t. \quad (3.22)$$

D'autre part, on a défini τ par (3.21). En dérivant cette égalité et en supposant $c^2 > 0$, on obtient :

$$\tau'(t) = \frac{1}{c^2(\tau(t), Z_{\tau(t)})},$$

d'où :

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \int_0^t \frac{ds}{c^2(\tau(s), Z_{\tau(s)})} = \int_0^t \frac{ds}{c^2(\tau(s), Z_0 + \beta_s)} \quad \text{cf. (3.22)} \\ &= \int_0^t \phi(\tau(s), Z_0 + \beta_s) ds \end{aligned}$$

en notant

$$\phi(t, z) := \frac{1}{c^2(t, z)}.$$

Notons :

$$\begin{cases} X_t = \tau(t) \\ Y_t = Z_{\tau(t)} = s(0, z) + \beta_t \end{cases}$$

et considérons l'E.D.S. vérifiée par le couple (X_t, Y_t) , on remarque que c'est l'E.D.S. (E_4) :

$$\begin{cases} X_t = \int_0^t \phi(X_s, Y_s) ds \\ Y_t = s(0, z) + \beta_t \end{cases}$$

Alors, le temps d'atteinte du niveau 1 pour X peut s'écrire aussi :

$$T = \inf \{t \geq 0; \tau(t) = 1\}. \quad (3.23)$$

D'après (3.21) et (3.23), on a :

$$T = A(\tau(T)) = A(1). \quad (3.24)$$

Donc la loi de Y_T vaut :

$$Y_T = Z_{\tau(T)} = Z_1 \stackrel{(d)}{=} s(1, R_1).$$

On a obtenu la loi désirée .

En pratique, si on connaît la fonction ϕ et que l'on cherche la loi de Y_T avec (X, Y) solution de (E_4) , il faut résoudre le système suivant pour déterminer les fonctions c, s, f et g :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} c = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \\ c = (s' \cdot f) \circ s^{-1} \\ Ls = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (s' \cdot f) \circ s^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \\ \frac{1}{2} f^2 s'' + g s' + s_t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ϕ étant la seule donnée connue, on est en présence d'un système de deux équations à trois inconnues . On a donc une grande latitude dans le choix des fonctions s, f et g .

4.4 Quelques exemples

a) Martingale locale

On se donne une fonction $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant les hypothèses initiales ((1.1) et (1.2)) et une E.D.S. bidimensionnelle (E_4) dont on note (X, Y) la solution. Notre but est de déterminer la loi de Y_T avec T défini par (2.18).

Supposons que le couple $(t, R_t)_{t \geq 0}$ est dans son échelle naturelle, c'est-à-dire :

$$s(t, x) = x.$$

Pour résoudre ce problème, il nous faut donc trouver des fonctions f et g vérifiant le système d'équations (3.19) qui devient :

$$\begin{cases} f = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \\ g = 0. \end{cases}$$

On a donc une E.D.S. de la forme :

$$dR_t = \frac{1}{\sqrt{\phi(t, R_t)}} dB_t.$$

Sous des hypothèses convenables sur la fonction ϕ , cette E.D.S. unidimensionnelle admet une solution unique que nous notons $(R_t)_{t \geq 0}$. Alors, d'après le théorème 3.1, la loi de Y_T vaut :

$$Y_T \stackrel{(d)}{\simeq} s(1, R_1) = R_1 = z + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\phi(s, R_s)}} dB_s.$$

b) Mouvement brownien avec dérive

Nous considérons à présent le cas où le processus $(R_t)_{t \geq 0}$, solution d'une équation de la forme (3.20), est un mouvement brownien avec dérive.

Pour cela, posons : $f \equiv 1$.

Alors :

$$dR_t = dB_t + g(t, R_t) dt.$$

Nous allons voir que ce mouvement brownien avec dérive est associé à l'E.D.S. bidimensionnelle :

$$\begin{cases} X_t = \int_0^t \phi(X_s, Y_s) ds \\ Y_t = z + B_t \end{cases}$$

avec

$$\phi(x, y) = \frac{1}{y^2}.$$

Il est facile de se convaincre que ϕ vérifiera les hypothèses requises. En effet, si on note T_n le premier temps d'attente de n pour le mouvement brownien, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_n < T^\varepsilon) = 0.$$

On peut alors appliquer le théorème 3.1, et en déduire la fonction g et une fonction d'échelle s de l'opérateur différentiel associé à $(t, R_t)_{t \geq 0}$:

$$L = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + g(t, x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

En effet, on résoud :

$$\begin{cases} (s' \circ s^{-1})(t, x) = x & (4.25) \\ \frac{1}{2} s''(t, x) + g(t, x) s'(t, x) + s_t(t, x) = 0 & (4.26) \end{cases}$$

Remarquant que

$$s' \circ s^{-1} = \frac{1}{(s^{-1})'},$$

l'équation (4.25) nous donne :

$$s(t, x) = e^x.$$

Alors (4.26) devient :

$$\frac{1}{2} e^x + g(t, x) e^x = 0,$$

d'où :

$$g(t, x) \equiv -\frac{1}{2}.$$

On a donc obtenu :

$$R_t = z + B_t - \frac{t}{2}.$$

C'est un mouvement brownien partant de z et de dérive $-\frac{t}{2}$. On en arrive à la conclusion :

$$Y_T \stackrel{(d)}{\simeq} s(1, R_1) = \exp R_1 = e^{(z-\frac{1}{2})} e^{B_1}.$$

D'où la densité de Y_T :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(z - \frac{1}{2}\right) \exp\left(x - \frac{x^2}{2}\right).$$

c) Processus de Bessel

Nous allons étudier le cas où le processus $(R_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Bessel. Pour cela, on pose :

$$f \equiv 1,$$

et on sait que la fonction g sera de la forme :

$$g(t, x) = g(x) = \frac{C}{x},$$

avec C une constante à déterminer . C'est-à-dire, le processus $(R_t)_{t \geq 0}$ vérifie l'E.D.S. :

$$R_t = z + B_t + \int_0^t \frac{C}{R_s} ds.$$

Les calculs suivants expriment le fait que ce processus est lié à la résolution de l'E.D.S. bidimensionnelle :

$$\begin{cases} X_t = \int_0^t \phi(X_s, Y_s) ds \\ Y_t = z + B_t \end{cases}$$

lorsque

$$\phi(x, y) = \frac{1}{y^{2\alpha}} \text{ avec } \alpha \geq 0.$$

La même remarque que dans le cas précédent nous permet d'appliquer le théorème 3.1 avec cette fonction ϕ . Nous allons ajuster la constante C dans ce but . Par définition,

$$c(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\phi(t, x)}} = x^\alpha.$$

Il nous reste à résoudre le système suivant pour en déduire une fonction d'échelle, notée s , de l'opérateur L associé au couple $(t, R_t)_{t \geq 0}$:

$$L = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{C}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

$$\begin{cases} s' \circ s^{-1}(t, x) = x^\alpha \end{cases} \quad (4.27)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}(t, x) + \frac{C}{x} \frac{\partial s}{\partial x}(t, x) + \frac{\partial s}{\partial t}(t, x) = 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

Résolvons déjà (4.27) pour en tirer s : elle est équivalente à

$$[s^{-1}(t, x)]' = x^{-\alpha},$$

d'où :

$$s^{-1}(t, x) = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

et

$$s(t, x) = [x(1-\alpha)]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Alors, avec cette fonction s , de (4.28) on déduit :

$$g(x) = \frac{\alpha}{2(\alpha-1)} \frac{1}{x} \quad \left(\text{i.e. } C = \frac{\alpha}{2(\alpha-1)} \right).$$

On a obtenu :

$$R_t = z + B_t + \int_0^t \frac{\alpha}{2(\alpha-1)} \frac{1}{R_s} ds. \quad (4.29)$$

C'est l'équation d'un processus de Bessel de dimension $d = 1 + \frac{\alpha}{\alpha-1}$, sous la condition $d \geq 2$, c'est-à-dire $\alpha \geq 1$.

D'après le théorème 3.1, on a :

$$Y_T \stackrel{(d)}{\simeq} s(1, R_1) = [R_1(1-\alpha)]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Or, avec $\alpha \geq 0$, $\frac{1}{1-\alpha} \leq 0$ et $1-\alpha \leq 0$. Puisqu'un processus de Bessel est toujours positif, on choisit :

$$R_t \stackrel{(d)}{\simeq} -Bes_z^{1+\frac{\alpha}{\alpha-1}} \quad \text{avec } \alpha > 1,$$

c'est-à-dire $(R_t)_{t \geq 0}$ est l'opposé d'un processus de Bessel partant de z et de dimension $1 + \frac{\alpha}{\alpha-1}$ ($\alpha > 1$). On a alors :

$$Y_T \stackrel{(d)}{\simeq} \left\{ \frac{1}{R_1(1-\alpha)} \right\}^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Connaissant la densité d'un processus de Bessel, on en déduit celle de Y_T :

$$p(x) = \left(\frac{x}{z} \right)^{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)} - \frac{1}{2}} e^{-\frac{(x^2+z^2)}{2}} \frac{x}{[x(\alpha-1)]^{\frac{1}{\alpha-1}}} I_{\frac{\alpha}{2(\alpha-1)} - \frac{1}{2}}(xz),$$

où I_ν désigne la fonction de Bessel d'indice ν .

d) Processus associé à l'équation des milieux poreux

Considérons l'E.D.S. associé à l'équation des milieux poreux, cf. [BCRV] :

$$\begin{cases} dR_t = u^m(t, R_t) dB_t, R_0 = 0 \\ u(t, \cdot) \text{ est la densité de } R_t, t > 0 \\ m > 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

On connaît la densité u du processus $(R_t)_{t \geq 0}$, c'est la densité de Barenblatt-Pattle. Elle vaut :

$$u(t, x) = \frac{1}{t^\beta} \chi\left(\frac{x}{t^\beta}\right) = \frac{1}{t^\beta} \left\{ a_m^2 - \frac{1}{(2m+1)(m+1)} \frac{x^2}{t^{2\beta}} \right\}_+^{\frac{1}{2m}}, \quad (4.31)$$

avec

$$\beta = \frac{1}{2m+2}$$

$$a_m = \left\{ \frac{m^{\frac{1}{2}}}{[(2m+1)(m+1)]^{\frac{1}{2}} B\left(\frac{2m+1}{2m}, \frac{1}{2}\right)} \right\}^{\frac{m}{m+1}}$$

$$\gamma_m = a_m \left(\frac{(2m+1)(m+1)}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\chi(x) = a_m^{\frac{1}{m}} \left\{ 1 - \left(\frac{x}{\gamma_m} \right)^2 \right\}_+^{\frac{1}{2m}}$$

Ce processus des milieux poreux, solution de (4.30), correspond au processus solution de (3.20) du théorème 3.1. On cherche une fonction ϕ qui nous permettra de définir une E.D.S. bidimensionnelle de la forme (E_4) , et une fonction d'échelle s de l'opérateur associé au processus $(t, R_t)_{t \geq 0}$:

$$L = \frac{1}{2} u^{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Pour cela, il faut résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} (s' \cdot u^m) \circ s^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \\ \frac{1}{2} u^{2m} s'' + s_t = 0 \end{array} \right. \quad (4.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} u^{2m} s'' + s_t = 0 \end{array} \right. \quad (4.33)$$

On remarque que l'équation (4.33) est vérifiée en particulier pour $s(t, x) = x$. On peut en déduire ensuite la fonction ϕ de (4.32) :

$$\phi(x, y) = \frac{1}{u^{2m}(x, y)}.$$

En faisant attention aux zéros de u donnée par (4.31) ($u(t, x) > 0 \iff |x| < \gamma_m t^{\frac{1}{2m+2}}$), on peut écrire :

$$\phi(x, y) = \begin{cases} \frac{t^{\frac{m}{m+1}}}{\left\{ a_m^2 - \frac{m}{(2m+1)(m+1)} \frac{x^2}{t^{\frac{1}{m+1}}} \right\}_+} & \text{si } |y| < \gamma_m t^{\frac{1}{2m+2}} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.34)$$

Notons que le fait que ϕ puisse valoir $+\infty$ ne pose pas de problème : en effet, le mouvement brownien ne sortira pas avant un certain temps de l'intervalle $[-\gamma_m t^{\frac{1}{2m+2}}, \gamma_m t^{\frac{1}{2m+2}}]$.

Si on note :

$$T_b := \inf \{ t \geq 0 ; B_t(\omega) = b \},$$

on a, avec $b = \gamma_m t^{\frac{1}{2m+2}}$:

$$\mathbb{P}(T_b > \tau) > 0 \quad \forall \tau,$$

et on peut choisir τ aussi grand que l'on veut, par exemple $\tau = T$. Donc, on peut poser ϕ égale à l'infini en dehors de $[-\gamma_m t^{\frac{1}{2m+2}}, \gamma_m t^{\frac{1}{2m+2}}]$.

Avec cette fonction ϕ , considérons le couple (X, Y) solution de l'E.D.S. bidimensionnelle :

$$\begin{cases} X_t = \int_0^t \phi(X_s, Y_s) ds \\ Y_t = B_t. \end{cases}$$

Le théorème 3.1 nous permet de conclure :

$$Y_T \stackrel{(d)}{\simeq} s(1, R_1) = R_1.$$

D'où la densité de Y_T :

$$p(x) = \left\{ a_m^2 - \frac{m}{(2m+1)(m+1)} x^2 \right\}_+^{\frac{1}{2m}}.$$

e) Processus de Burgers

Nous choisissons à présent pour $(R_t)_{t \geq 0}$ le processus de Burgers en dimension un, cf. [RV], solution de l'E.D.S. unidimensionnelle :

$$\begin{cases} dR_t = dB_t + \frac{1}{4} u(t, R_t) dt \\ R_0 = 0 \\ R_t \text{ admet comme densité } u(t, \cdot), t > 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

Nous connaissons l'E.D.P. vérifiée par la densité u du processus, appelée équation de Burgers :

$$u_t + \frac{1}{2} u \cdot u_x = \frac{1}{2} u_{xx}, \quad (4.36)$$

avec u_t , u_x et u_{xx} les dérivées respectives de u par rapport au temps, et dérivées première et seconde par rapport à la variable d'espace x .

Cette E.D.P. admet une solution auto-similaire donnée par :

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad (4.37)$$

avec

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{2 e^{-\frac{x^2}{2}}}{\psi(x) + k} \\ \psi(x) &= \int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ k &= \frac{\sqrt{2\pi}}{e^{\frac{1}{2}} - 1} \quad (\text{de telle sorte que } \int_{\mathbf{R}} v(x) dx = 1). \end{aligned}$$

L'E.D.S. (4.35) n'est pas tout à fait celle étudiée par B. Roynette et P. Vallois dans [RV] : elle diffère d'une constante multiplicative ($\frac{1}{4}$ au lieu de $\frac{1}{2}$). Mais il suffit de reprendre les mêmes méthodes pour calculer l'E.D.P. vérifiée par la densité, et en déduire la forme auto-similaire de la densité.

On cherche à appliquer le théorème 3.1 afin d'obtenir la loi de Y_T . Les calculs qui suivent sont formels. Pour appliquer le théorème 3.1, on a besoin d'une fonction d'échelle s de l'opérateur différentiel

$$L = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t},$$

générateur infinitésimal de $(t, R_t)_{t \geq 0}$, et une fonction ϕ qui nous donnera l'E.D.S. (E_4) . Il faut donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} s' \circ s^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\phi}} \end{cases} \quad (4.38)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} s'' + \frac{1}{2} u s' + s_t = 0 \end{cases} \quad (4.39)$$

Nous allons tout d'abord résoudre (4.39) pour en déduire la fonction s . On la remplacera ensuite dans (4.38) pour obtenir ϕ . Nous remarquons que les équations vérifiées par s et u sont très ressemblantes (cf. (4.36) et (4.39)) :

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{2} u \cdot u_x - \frac{1}{2} u_{xx} \\ -s_t &= \frac{1}{2} u \cdot s_x + \frac{1}{2} s_{xx} \end{aligned}$$

Il suffit en fait de fixer un instant $T^* > 0$ et de poser

$$s(t, x) = u(T^* - t, -x) \quad (4.40)$$

pour voir que, si u vérifie (4.36), alors s vérifie (4.39) et réciproquement.

Puisque la fonction u est définie pour $t > 0$, et que l'on s'intéresse au processus Y pour $t \in [0, T]$, on définit s par (4.40) sur $[0, T^*] \times \mathbb{R}$ et on choisit :

$$T^* > A(1). \quad (4.41)$$

Cela est possible car

$$\begin{aligned} A(1) &= \int_0^1 \frac{1}{\phi(u, Z_u)} du, \quad \text{cf. (3.24)} \\ &\leq \frac{1}{\eta}, \quad \text{cf. (2.7)} \end{aligned}$$

Alors s est bien définie en T .

On obtient donc, grâce à (4.37), une formule explicite de s :

$$s(t, x) = \frac{2}{\sqrt{T^* - t}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(T^* - t)}}}{\psi\left(-\frac{x}{\sqrt{T^* - t}}\right) + k}. \quad (4.42)$$

Cette fonction s est bijective donc inversible sur les deux parties $[0, T^*[\times] - \infty, 0]$ et $[0, T^*[\times] [0, +\infty[$. Inversons-la sur chacune de ces deux parties et notons s^{-1} la fonction regroupant ses deux inverses, c'est-à-dire :

$$s^{-1}(t, x) = \begin{cases} s_1^{-1}(t, x) & \text{si } (t, x) \in [0, T^*[\times] - \infty, 0] \\ s_2^{-1}(t, x) & \text{si } (t, x) \in [0, T^*[\times] [0, +\infty[\end{cases}$$

On peut alors résoudre (4.38) en considérant séparément les deux parties. On obtient :

$$\phi(x, y) = \{s^{-1}(x, y)'\}^2,$$

cette fonction ayant deux écritures différentes selon la partie à laquelle appartient le couple (t, x) . On peut donc définir le processus bidimensionnel (X, Y) comme solution de l'E.D.S. :

$$\begin{cases} X_t = \int_0^t \phi(X_s, Y_s) ds \\ Y_t = B_t \end{cases}$$

Enfin le théorème 3.1 nous donne la loi de Y_T :

$$Y_T \stackrel{(d)}{\simeq} s(1, R_1) = \frac{2}{\sqrt{T^* - 1}} \frac{e^{-\frac{R_1^2}{2(T^* - 1)}}}{\psi\left(-\frac{R_1}{\sqrt{T^* - 1}}\right) + k},$$

où R_1 est le processus de Burgers pris à l'instant 1. La densité de R_1 étant $u(1, \cdot)$, on obtient la densité de Y_T :

$$p(x) = \frac{4}{\sqrt{T^* - 1}} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2} \frac{T^*}{T^* - 1}\right)}{\left\{\psi\left(-\frac{x}{\sqrt{T^* - 1}}\right) + k\right\} \left\{\psi(x) + k\right\}}.$$

f) E.D.S. avec bruit multiplicatif

Nous nous plaçons ici dans le cas d'un processus $(R_t)_{t \geq 0}$ solution d'une E.D.S. avec bruit multiplicatif, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} dR_t = a R_t dt + b R_t dB_t \\ R_0 = z \end{cases} \quad (4.43)$$

où $z \neq 0$, a et b sont des constantes telles que $b^2 \neq 2a$, et $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien unidimensionnel standard.

On sait que la solution de l'équation (4.43) vaut :

$$R_t = z \cdot \exp \left\{ \left(a - \frac{b^2}{2} \right) t + b B_t \right\}. \quad (4.44)$$

Nous cherchons à présent à quelle E.D.S. de la forme (E_4) le couple $(t, R_t)_{t \geq 0}$ pourra être associé. Pour cela, on cherche des fonctions ϕ et s solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} (s'(t, x) \cdot b x) \circ s^{-1}(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\phi(t, x)}} \end{array} \right. \quad (4.45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} b^2 x^2 s''(t, x) + a x s'(t, x) + s_t(t, x) = 0 \end{array} \right. \quad (4.46)$$

Résolvons tout d'abord (4.46) : pour simplifier, on va supposer que la fonction s est indépendante du temps :

$$s(t, x) = s(x).$$

Il faut donc résoudre :

$$\frac{1}{2} b^2 x^2 s''(x) + a x s'(x) = 0,$$

ce qui équivaut à :

$$[\ln s'(x)]' = \frac{s''(x)}{s'(x)} = -\frac{2a}{b^2} \frac{1}{x} = -\frac{2a}{b^2} [\ln x]'$$

D'où :

$$s'(x) = \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{2a}{b^2}},$$

et

$$s(x) = \frac{b^2}{b^2 - 2a} \left(\frac{1}{x} \right)^{\frac{2a}{b^2} - 1}. \quad (4.47)$$

Alors l'équation (4.45) devient :

$$\frac{1}{\sqrt{\phi(x)}} = b \left\{ \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{2a}{b^2} \right) x \right]^{\frac{b^2}{b^2 - 2a}}} \right\}^{\frac{2a - b^2}{b^2}} = \left(b - \frac{2a}{b} \right) x.$$

D'où :

$$\phi(x) = \left\{ \frac{1}{\left(b - \frac{2a}{b} \right) x} \right\}^2. \quad (4.48)$$

Avec l'hypothèse faite sur a et b , il suffit de supposer x majoré comme dans les situations (b), (c) et (d) pour que la fonction ϕ ainsi définie convienne. On peut alors définir le couple (X, Y) solution de l'E.D.S. :

$$\begin{cases} X_t = \int_0^t \phi(X_s, Y_s) ds \\ Y_t = z + B_t \end{cases}$$

et le théorème 3.1 nous donne :

$$Y_T \stackrel{(d)}{\simeq} s(1, R_1) = \frac{b^2}{b^2 - 2a} (R_1)^{1 - \frac{2a}{b^2}}.$$

On en déduit grâce à (4.44) la densité de Y_T :

$$p(x) = z^{1 - \frac{2a}{b^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{b^2}{b^2 - 2a} \exp \left\{ \left(a - \frac{b^2}{2} \right) \left(1 - \frac{2a}{b^2} \right) \right\} \exp \left\{ \left(b - \frac{2a}{b} \right) x - \frac{x^2}{2} \right\}.$$

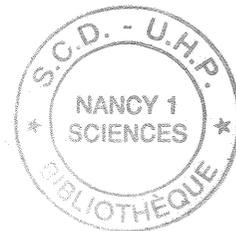
Problème ouvert Nous envisageons d'étendre notre résultat au cas d'une E.D.S. du même type :

$$\begin{cases} X_t = \int_0^t \phi(X_s, Y_s) ds \\ Y_t = Y_0 + \int_0^t \sigma(X_s, Y_s) dB_s + \int_0^t b(X_s, Y_s) ds \end{cases}$$

avec les fonctions dérive et diffusion (b et σ) ayant un comportement singulier autour d'un point, de même nature que celui décrit pour la fonction σ dans ce travail . Ceci permettrait de simuler numériquement de telles E.D.S. pour lesquelles la pratique fournit des fonctions dérive et diffusion pouvant atteindre de très grandes valeurs en un point .

Références

- [BCRV] S. BÉNACHOUR, P. CHASSAING, B. ROYNETTE, P. VALLOIS *Processus associés à l'équation des milieux poreux*, à paraître aux Annali della scuola normale di Pisa .
- [CLF] A. CHAMBERT-LOIR, S. FERMIGIER *Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 3*, Editions Masson, 1996 .
- [F] O. FAURE *Simulation du mouvement brownien et des diffusions*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1992 .
- [RV] B. ROYNETTE, P. VALLOIS *Instabilité de Certaines Equations Différentielles Stochastiques Non Linéaires*, Journal of Functional Analysis, vol. 130 n° 2, p. 477-523, 1995 .
- [RY] D. REVUZ, M. YOR *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer-Verlag, 1994 .



Nom: **WANTZ épouse MEZIERES**

Prénom: **Sophie**

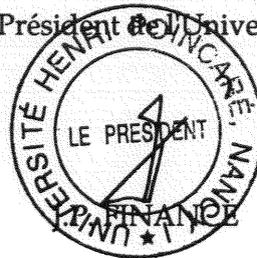
DOCTORAT de l'UNIVERSITE HENRI POINCARÉ, NANCY-I

en **MATHEMATIQUES**

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER

Nancy, le 23 JUIN 1997 UHP 057/97

Le Président de l'Université



Auteur : Sophie WANTZ-MEZIERES

Titre : ETUDE DE PROCESSUS STOCHASTIQUES NON LINEAIRES

Résumé : Notre étude porte sur les processus qui sont solutions d'équations différentielles stochastiques . Nous montrons un phénomène d'instabilité pour un processus bidimensionnel dont la densité vérifie une E.D.P. de type Burgers : la solution fluctue lorsque la diffusion tend vers zéro . Pour une E.D.S. ordinaire à dérive rentrante, nous étudions le comportement asymptotique des temps d'atteinte du processus en un point fixé lorsque l'on fait tendre le point de départ vers l'infini . Pour une seconde E.D.S. rentrante, non linéaire et réfléchié dans un intervalle réel, nous montrons que le processus converge en loi vers une unique mesure stationnaire . Nous résolvons également un problème de simulation pour un processus stochastique bidimensionnel constitué d'un processus unidimensionnel et d'une primitive liée à ce processus .

Mots-clefs : équations différentielles stochastiques - équations aux dérivées partielles - processus réfléchis - systèmes de particules en interaction

Title: STUDY OF NON LINEAR STOCHASTIC PROCESSES

Abstract : Our study deals with processes which are solutions of stochastic differential equations in which the law of the solution can interact . We establish an instability phenomena for a two-dimensional stochastic process which density verifies a P.D.E. of Burgers' type: the solution fluctuates when the diffusion tends to zero . For an ordinary S.D.E with inward drift, we study the asymptotic behaviour of hitting times for the process to a fixed point when the starting point goes to infinity . We consider another equation with inward drift which is more non linear and reflected in a real interval and we prove that the process tends in law to a unique stationary measure . We solve a simulation problem for a two-dimensional stochastic process composed of a one-dimensional process and an integral related to this process .

Key words : stochastic differential equations - partial differential equations - reflecting processes - interacting particles systems