**UNIVERSITÉ DE NANCY I**

**Département de Mathématique**

*INSTITUT ELIE CARTAN*

Unité associée au C.N.R.S. 750

NANCY

*THÈSE*

Présentée pour obtenir le grade de

*DOCTEUR*

par

KHALID KOUFANY

A.M.S. Subject Classification : 06E05, 22E10, 22E15, 32M15, 53C30.

**Mots clefs** : Algèbre de Jordan euclidienne, cône symétrique, domaine symétrique de type tube, espace symétrique de type Cayley, espace symétrique causal, semi-groupe de Lie, semi-groupe d' OL'SHANSKIĬ.

Titre :

# SEMI–GROUPE DE LIE ASSOCIÉ À UNE ALGÈBRE DE JORDAN EUCLIDIENNE

Soutenance le 21 octobre 1993 devant la Commission d'Examen :

| | | |
|---|---|---|
| Président | PIERRE EYMARD | Nancy I |
| Rapporteurs | JACQUES FARAUT | Paris VI |
| | SIDDHARTHA SAHI | Rutgers, USA |
| Examinateurs | JEAN–PHILIPPE ANKER | Nancy I |
| | PHILIPPE BOUGEROL | Paris VI |
| | HUBERT RUBENTHALER | Louis Pasteur |
| Directeur de thèse | JEAN–LOUIS CLERC | Nancy I |

À la mémoire de mon père,

à ma très chère mère,

& à tous les miens.

En signe d'amour et de reconnaissance.

## REMERCIEMENTS

Je voudrais d'abord exprimer ma profonde reconnaissance à Jean-Louis CLERC sous la direction duquel ce travail a été effectué. Ses conseils judicieux et sa grande expérience tant sur le plan mathématique que sur le plan humain ainsi que son allant permanent et sa disponibilité, m'ont été très profitables depuis mon arrivée à Nancy.

Toute ma gratitude également à Pierre EYMARD qui me fait l'honneur de présider le Jury.

Je suis particulièrement reconnaissant à Jacques FARAUT et Siddhartha SAHI d'avoir bien voulu prendre connaissance de ce travail et en être les rapporteurs.

Je remercie vivement Jean–Philippe ANKER, Philippe BOUGEROL et Hubert RUBENTHALER qui m'ont fait le grand plaisir de juger ce travail en participant au Jury.

J'ai bénéficié du traditionnel Séminaire Nancy–Strasbourg pour élargir mes connaissances, particulièrement sur les $G/H$ de type hermitien durant l'année 91/92, qu'il me soit permis de remercier tous les orateurs.

De nombreuses personnes de l'Institut Elie Cartan m'ont manifesté d'une manière ou d'une autre leur soutien, que toutes soient assurées de ma reconnaissance.

Je tiens enfin à remercier les membres du Club TEX pour m'avoir initier au POSTSCRIPT et au TEX.

TABLE DES MATIÈRES

# INTRODUCTION

# INTRODUCTION

Soit $V$ un espace vectoriel sur un coprs $\mathbb{K}$. On dit que $V$ est une algèbre de Jordan s'il existe une application bilinéaire $(x,y) \longmapsto x \cdot y$ de $V \times V$ dans $V$ vérifiant :

$$x \cdot y = y \cdot x,$$

$$x^2 \cdot (x \cdot y) = x \cdot (x^2 \cdot y).$$

La théorie des algèbres de Jordan est née à partir du travail fondamental de *Pascual* JORDAN, *John* VON NEUMANN et *Eugène* WIGNER, (*cf.* P. JORDAN, J.V. NEUMANN & E. WIGNER. — *On the algebraic generalization of the quantum mecanical formalism*, Ann. of Math. (2) 36, 1934, 29-64), dans une tentative d'exprimer algébriquement les fondements de la mécanique quantique.

Le nom *"Algèbre de Jordan"* a été introduit pour la première fois par Adrein A. ALBERT, (*cf.* A.A. ALBERT. — *On Jordan algebras of linear transformations*, Tran. Amer. Math. Soc. 59, 1946, 524–555), mais, en fait, l'étude initiale de ces objets date de 1933, (*cf.* P. JORDAN. — *Über Verallagemeinerungmoglichkeiten der Formalismus der Quantenmechanick*, Nachr. Ges. Wiss. Gottingen 1933, 209-214). Lors d'une visite aux U.S.A, après la deuxième guerre mondiale, P. Jordan a été surpris d'apprendre que ses systèmes de r-nombres ("*Systems of r-numbers*") s'appelaient désormais algèbres de Jordan, (*cf.* L.J. PAIGE. — *Jordan Algebras* , Studies in Modern Algebra. Volume 2, M.A.A and Prentice Hall, A.A. Albert editor, 1963, 144–186).

Les développements ultérieurs de la théorie doivent beaucoup à l'école Américaine dont les principaux représentants furent A. A. ALBERT et N. JACOBSON qui ont développé beaucoup plus le côté algébrique, sans trop s'occuper de ses applications. Et c'est qu'au début des années 60 que M. KOECHER a pu donner les premières applications de ces objets à l'analyse et la géométrie. En effet il a developpé la géométrie des cônes symétriques, des domaines complexes de type tube, (*cf.* KOECHER [**52**], BRAUN-KOECHER [**5**]), et des domaines bornés symétriques (*cf.* Koecher [**57**]) en utilisant la théorie des algèbres de Jordan, approche tout à fait neuve par rapport à celle de E. Cartan et Harish-Chandra, basée sur la théorie des groupes de Lie semi-simples, pour traiter ces domaines.

L'approche de KOECHER a l'avantage d'être pleine d'inspirations et relativement simple par rapport à l'approche des groupes de Lie semi-simples, et bien que la première méthode marche pour les domaines de dimension infinie et que la deuxième ne marche pas, elles sont tout de même équivalentes par la construction de KOECHER-TITS (*cf.* MCCRIMMON [**73**], SATAKE [**101**] ou TITS [**107**]).

Cette théorie connaît actuellement un grand développement et ses applications touchent non seulement la physique mais beaucoup plus l'analyse, la géométrie, et bien d'autres domaines (*cf.* MCCRIMMON [**73**]) et même la génétique! (*cf.* MICALI & OUATTARA [**74**]).

L'origine de ce travail est le semi-groupe

$$\mathcal{H} := \{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \mid D \text{ inversible, et } \; CD^t, D^tB \text{ positives}\}$$

des matrices hamiltonniennes du groupe symplectique réel $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) := \{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R}) \mid BA^t, A^tC \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R}) \text{ et } A^tD - C^tB = I\}$, déjà introduit, dans le cadre du calcul stochastique et dans un contexte différent, par Wojtkowski (*cf.* [**115**], [**116**]) et dont Bougerol (*cf.* [**4**]) a montré que ses éléments sont des contractions pour la distance géodésique du cône des matrices symétriques définies positives.

Notre point de départ est de donner, à ce semi-groupe, une interprétation en terme d'algèbre de Jordan :

Muni du produit (*produit de Jordan*)

$$A \cdot B = \frac{AB + BA}{2},$$

l'algèbre associative $V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ est donc une algèbre de Jordan euclidienne dont le cône symétrique associé est le cône $\Omega := \mathrm{Sym}^+(n, \mathbb{R})$ des matrices symétriques définies positives. Dans ce cas le groupe $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ n'est autre que le groupe des automorphismes holomorphes du domaine tube

$$T_\Omega = \{X + iY \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{C}) \mid Y \in \mathrm{Sym}^+(n, \mathbb{R})\},$$

associé à l'algèbre de Jordan $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$.

Si $g = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ et $X \in T_\Omega$, alors

$$g \cdot X = (AX + B)(CX + D)^{-1},$$

et nous avons la

PROPOSITION 1. —

$$\mathcal{H} = \{g \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \mid g \cdot \Omega \subset \Omega\}.$$

Pour démontrer cette proposition nous avons besion de quelques résultats intermédiaires.

Remarquons tout d'abord que si $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ alors (*cf.* WOJTKOWSKI **[166]** par exemple) les propriétés suivantes sont équivalentes :

($i$) $A$ est inversible, et $BA^t$ et $A^tC$ sont symétriques positives.

($ii$) $D$ est inversible, et $CD^t$ et $D^tB$ sont symétriques positives.

Donc le semi-groupe $\mathcal{H}$ peut s'écrire de deux façons différentes :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \mid D \text{ inversible, et } \; CD^t, D^tB \text{ positives}\} \\ &= \{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \mid A \text{ inversible, et } \; BA^t, A^tC \text{ positives}\}. \end{aligned}$$

Donc si $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^{t^{-1}} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ D^{-1}C & I \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{t^{-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ce qui veut dire que

$$\mathcal{H} \subset Q^+ H^o_{\mathbb{C}} Q^- \text{ et}$$

$$\mathcal{H} \subset Q^- H^o_{\mathbb{C}} Q^+,$$

où

$$Q_{\mathbb{C}}^{+} = \{\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})\},$$
$$Q_{\mathbb{C}}^{-} = \{\begin{pmatrix} I & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})\} \text{ et}$$
$$H_{\mathbb{C}} = \{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{t^{-1}} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{C})\}.$$

LEMME 2. — *Si $P$ et $R$ sont deux matrices symétriques positives alors $PR$ n'a que des valeurs propres réelles positives.*

*Démonstration.* — Supposons que $P$ est définie positive, alors

$$P^{-\frac{1}{2}} P R P^{\frac{1}{2}} = P^{\frac{1}{2}} R P^{\frac{1}{2}},$$

donc $PR$ est conjugquée à une matrice symétriques positive, et par densite de l'ensemble des matrices symétriques définies positives on a le résultat.

□

LEMME 3. — *Le semi-groupe $\mathcal{H}$ de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ est fermé.*

*Démonstration.* — En effet si $\left(\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{H}$ qui converge vers $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$, alors il est clair que $CD^t$ et $D^tB$ sont des matrices symétriques positives. Il suffit donc de démontrer que $D$ est inversible.

Supposons le contraire, c-à-d qu'il existe un vecteurs non nul $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $Dx_0 = 0$. Comme $A^tD - C^tB = I$, nous avons

$$C^t B x_0 = -x_0. \qquad (*)$$

Or

$$A_n^{-1} B_n = A_n^{-1} (B_n A_n^t) A^{t}{}_{n}^{-1},$$

donc $A_n^{-1}B_n$ est une matrice symétrique positive, et comme $C_n^t A_n$ est aussi symétrique positive, alors, d'après le lemme 2, ${}^tC_nB_n$ n'a que des valeurs propres réelles positives, il en est même alors pour la matrice $C^tB$, ce qui contredit $(*)$. Ainsi la matrice $D$ est inversible et par suite le semi-groupe $\mathcal{H}$ est fermé.

$\square$

*Démonstration de la proposition* 1. — Soit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ et $X \in \Omega$. Les matrices $P := BD^{-1}$ et $Q := D^{-1}C$ sont symétriques positives car

$$BD^{-1} = D^{t^{-1}}D^tBD^{-1} \qquad \text{et} \qquad D^{-1}C = D^{-1}CD^tD^{t^{-1}}.$$

D'autre part

$$CX + D = DQX + D = D(QX + I), \tag{$**$}$$

et comme $X \in \Omega$, il existe une matrice inversible $M$ et une matrice diagonale $\widetilde{D}$ à éléments diagonaux positifs, tels que

$$X^{-1} = M^tM \qquad \text{et} \qquad Q = M^t\widetilde{D}M,$$

donc la matrice

$$QX + I = M^t(\widetilde{D} + I)M^{t^{-1}}$$

a des valeurs propres supérieures à 1, ce qui prouve qu'elle est inversible et par suite, d'après $(**)$, la matrice $CX + D$ est aussi inversible.

Pour voir que $(AX + B)(CX + D)^{-1} \in \Omega$, l'idée est de décomposer l'élément $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ dans $Q^-H^o_{\mathbb{C}}Q^+$ au lieu de le décomposer dans $Q^+H^o_{\mathbb{C}}Q^-$.

Comme ci-dessus, les matrices $E = A^{-1}B$ et $F = CA^{-1}$ sont symétrique positives, donc $X+E$ et $(A(X+E)A^t)^{-1}+F$ sont symétriques définies positives. Or

$$(AX + B)(CX + D)^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot X = \left((A(X + E)A^t)^{-1} + F\right)^{-1}.$$

Donc $(AX+B)(CX+D)^{-1} \in \Omega$.

Réciproquement, soit $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$, tel que $g \cdot \Omega \subset \Omega$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $X_n$ la matrice $(n \times n)$ définie par

$$X_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Alors $X_n \in \Omega$, pout tout $n$, et $X_n \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{} 0$.

Montrons que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X_n \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AX_n + B \\ C & CX_n + D \end{pmatrix}$$

est un élément de $\mathcal{H}$, *i.e.* :

$(i)$ $CX_n + D$ inversible,

$(ii)$ $(CX_n + D)^t (AX_n + B) \in \overline{\Omega}$, et

$(iii)$ $C(CX_n + D)^t \in \overline{\Omega}$.

Ceci nous permettra, en faisant $n \longrightarrow +\infty$, d'affirmer que $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$.

Comme $X_n \in \Omega$, alors $CX_n + D$ est inversible. De plus $(AX+B)(CX+D)^{-1} \in \Omega$, donc $(CX_n + D)^t (AX_n + B) \in \overline{\Omega}$, puisque

$$(CX_n+D)^t(AX_n+B) = (CX_n+D)^t(AX_n+B)(CX_n+D)^{-1}(CX_n+D).$$

Il reste alors à démontrer que $C(CX_n + D)^t \in \overline{\Omega}$. Ceci revient à démontrer que $(CX_n + D)^{-1}C \in \overline{\Omega}$ car $C(CX_n+D)^t = (CX_n + D)(CX_n + D)^{-1}C(CX_n + D)^t$.

Supposons que la matrice symétrique $(CX_n + D)^{-1}C$ n'appartient pas à $\overline{\Omega}$, alors elle admet au moins une valeur propre négative. Soit $\lambda_0$ cette valeur propre et soit $v_0$ le vecteur propre correspondant. Notons par $T$ le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}v_0$. Alors $T \in \overline{\Omega}$, et pour tout $t \geq 0$, nous devons avoir

$$\begin{pmatrix} A & AX_n + B \\ C & CX_n + D \end{pmatrix} \cdot (tT) \in \overline{\Omega}.$$

Soit $t > -\frac{1}{\lambda_0}$, comme $CX_n+D$ est inversible, la matrice $\begin{pmatrix} A & AX_n+B \\ C & CX_n+D \end{pmatrix}$ se décompose sous la forme :

$$\begin{pmatrix} I & (AX_n+B)(CX_n+D)^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (CX_n+D)^{t^{-1}} & 0 \\ 0 & (CX_n+D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ (CX_n+D)^{-1}C & I. \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A & AX_n+B \\ C & CX_n+D \end{pmatrix} \cdot (tT) &= (CX_n+D)^{t^{-1}}(tT)\big((CX_n+D)C(tT)+I\big)^{-1}(CX_n+D)^{-1} \\ &= (CX_n+D)^{t^{-1}}\Big[(tT)\big((CX_n+D)^{-1}C(tT)+I\big)^{-1} + \\ &\qquad (CX_n+D)^t(AX_n+B)\Big](CX_n+D)^{-1},\end{aligned}$$

et donc forcément la matrice $M := (tT)\big((CX_n+D)^{-1}C(tT)+I\big)^{-1} + (CX_n+D)^t(AX_n+B)$ est un élément de $\overline{\Omega}$, en particulier $v_0^t M v_0 \geq 0$. Or

$$v_0^t M v_0 = \frac{t}{t\lambda_0+1} + v_0^t(CX_n+D)^t(AX_n+B)v_0.$$

Donc, pour $t$ assez proche de $-\frac{1}{\lambda_0}$, le scalaire $v_0^t M v_0$ est négatif. Ceci contredit le fait que la matrice $M$ doit être positive, et par suite l'hypothèse que nous avons fait plus haut est fausse.

Ainsi $(CX_n+D)^{-1}C \in \overline{\Omega}$, et finalement $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$.

$\square$

Nous venons alors de voir que le semi-groupe $\mathcal{H}$ s'interprète en termes d'algèbre de Jordan comme le semi-groupe des automorphismes holomorphes du demi-plan supérieur (domaine tube) qui stabilisent par leur action le cône symétrique associé à l'algèbre de Jordan en question.

La première question qui se pose d'une façon naturelle est la suivante : Comment peut-on généraliser ces resultats à une algèbre de Jordan euclidienne (de dimension finie) quelconque ?

Nous allons répondre à cette question en donnant un aperçu général des résultats de ce travail.

Soit $V$ est une algèbre de Jordan euclidienne de dimension finie $n$, de rang $r$ et soit $\Omega$ le cône symétrique associé. $T = V + i\Omega$ est un espace symétrique hermitien (dit de type tube). Soit $\mathcal{D}$ le domaine borné symétrique, image de $T_\Omega$ par la transformée de Cayley correspondante, notée $c$. Notons par ${}^cG$ (respectivement $G$) la composante neutre du groupe des automorphismes holomorphes de $T_\Omega$ (respectivement de $\mathcal{D}$). La composante neutre, $G(\Omega)$, du groupe des automorphismes de $V$ qui préservent $\Omega$ est un sous groupe de ${}^cG$. Soit $G_{\mathbb{C}}$ le groupe de Lie simplement connexe associé à l'algèbre complexifiée de l'algèbre de Lie de ${}^cG$.

Dans le chapitre 2, nous explicitons, en termes d'algèbre de Jordan, les conjugaisons de $G_{\mathbb{C}}$ relativement aux deux formes réelles ${}^cG$ et $G$, (*cf.* II.2.6). Soit respectivement $\tau$ et $\sigma$ ces deux conjugaisons. Nous considérons ensuite le semi-groupe $\Gamma$, naturellement associé à $V$, défini par

$$\Gamma := \{g \in {}^cG \mid g \cdot \Omega \subset \Omega\},$$

et les ensembles

$$\Gamma^+ := \{t_v \mid v \in \overline{\Omega}\} \quad \text{et}$$
$$\Gamma^- := \{\widetilde{t}_v \mid v \in \overline{\Omega}\},$$

où $t_v$ est la translation de $T_\Omega$ par le vecteur $v$ et $\widetilde{t}_v$ est la transformation de $T_\Omega$ définie par $\widetilde{t}_v(z) = (\mathrm{Id} + z \,\square\, v)^{-1} \cdot z$, avec $z \,\square\, v = L(zv) + [L(z), L(v)]$.

Nous montrons que $\Gamma^+$ et $\Gamma^-$ sont deux sous semi-groupes du semi-groupe $\Gamma$ vérifiant $\Gamma^- = \sigma(\Gamma^+)$ en explicitant les produits entre les éléments des trois parties de $\Gamma$ ; $G(\Omega)$, $\Gamma^+$ et $\Gamma^-$, (*cf.* II.3.1, II.3.2, et II.3.6). Nous montrons ensuite que $\Gamma$ est une partie de l'ouvert dense $Q^+_{\mathbb{C}} H^o_{\mathbb{C}} Q^-_{\mathbb{C}}$ de $G_{\mathbb{C}}$, (*cf.* II.3.8). Ces resultats (intermédiaires) nous permettent alors de monter que le semi-groupe $\Gamma$ est tel que $\Gamma \cap \Gamma^{-1} = G(\Omega)$ et qu'il se décompose en trois blocs (décomposition à la Harish-Chandra), $\Gamma = \Gamma^+ G(\Omega) \Gamma^-$, (*cf.* II.3.9). A la fin de ce chapitre, nous montrons, d'une façon infinitésimale, que les éléments de $\Gamma$ sont des contractions relativement à la metrique riemannienne du cône $\Omega$, (*cf.* II.4.1).

Dans le chapitre 3 nous considérons le domaine de type tube $R_\Omega = iV + \Omega$ et nous lui appliquons, via quelques changements d'ordre technique, la même étude faite pour le domaine $T_\Omega$ dans le chapitre 2. En particulier si ${}^{c'}G$ désigne la composante neutre du groupe des automorphismes holomorphes de $R_\Omega$, alors nous décrivons d'une façon très simple (en terme d'algèbre de Jordan) la conjugaison $\eta$ de $G_{\mathbb{C}}$ par rapport à ${}^{c'}G$, (*cf.* III.1.3). Nous montrons ensuite que $({}^cG, G(\Omega))$ est une paire symétrique dont l'involution est $\eta$, (cf. III.1.4). Cet espace symétrique est déjà apparu dans les travaux d' Ólafsson et Øersted, qu'ils appellent *espace symétrique de type Cayley*, sans que le contexte algèbre de Jordan soit présent, (*cf.* Ólafsson [**86**], [**87**], Ólafsson & Øersted [**88**], [**91**]).

$C = \overline{\Omega} + \sigma(\overline{\Omega})$ est un cône convexe fermé de $\mathfrak{q}$ (sous espace de $\mathfrak{g}(T_\Omega) = \mathrm{Lie}\,{}^cG$ correspondant à la valeur propre $-1$ de $\eta$) invariant par $G(\Omega)$. Nous montrons au théorème III.2.4 que le semi-groupe $\Gamma$ vérifie la décomposition d' Ol'shanskiĭ, plus précisement, $\Gamma = G(\Omega)\exp(C)$. A la fin de ce chapitre nous montrons que $\Gamma$ est une forme réelle du semi-groupe holomorphe d' Ol'shanskiĭ associé au domanie $\mathcal{D}$, $\Xi := \{g \in G_{\mathbb{C}} \mid g \cdot \mathcal{D} \subset \mathcal{D}\}$, plus précisement, $\Gamma = c'\Xi c'^{-1} \cap {}^cG$, où $c'$ est la transformée de Cayley associée au domaine $R_\Omega$, (*cf.* III.3.3).

Dans le chapitre 4 nous considérons l'ensemble $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_\mathcal{S} := \{(z, w) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mid \det(z - w) \neq 0\}$, où $\mathcal{S}$ est la frontiére de Šilov du domaine $\mathcal{D}$ et "det" est la "norme" de Koecher. Nous montrons que le noyau de Bergman de $\mathcal{D}$ se prolonge à $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_\mathcal{S}$, (*cf.* IV.1.4), que le groupe $G$ opère sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_\mathcal{S}$, (*cf.* IV.2.1) et que cette action est transitive, (*cf.* IV.4.2). Nous en déduisons que ${}^cG/G(\Omega)$ est un espace symétrique causal difféomorphe à $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_\mathcal{S}$, que $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ est une compactification de cet espace et que la (seule) orbite ouverte dense est $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_\mathcal{S}$. Nous montrons enfin, THESE Khalid KOUFANY

La page 17 est manquante dans l'original

# CHAPITRE

# I

## CHAPITRE 1

# CÔNES SYMÉTRIQUES ET ALGÈBRES DE JORDAN

Tous les résultats de ce chapitre dont nous avons omit la démonstration sont expliqués d'une façon très simple dans l'excellent livre (en préparation) de FARAUT & KORANYI : *Analysis on symmetric cones* [**16**], voir aussi [**5**], [**13**], [**58**] et [**59**] .

## I.1. CÔNES SYMÉTRIQUES

**1.1. Cônes convexes.** — Soit $E$ un espace euclidien réel de dimension finie dont le produit scalaire est noté par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

DÉFINITIONS 1.1.1. — Un sous ensemble $C$ de $E$ est dit un *cône* si pour tout $x \in C$ et pour tout $\lambda > 0$ , $\lambda x \in C$.

Un sous ensemble $S$ de $E$ est dit *convexe* si pour tout $x, y \in S$ et pour tout$\lambda \in ]0,1[$ , $\lambda x + (1-\lambda)y \in S$.

On en déduit qu'un sous ensemble $C$ de $E$ est un *cône convexe* si et seulement si pour tout $x, y \in C$ et pour tout $\lambda, \mu > 0$ , $\lambda x + \mu y \in C$.

Dans la suite $C$ désignera un cône convexe fermé de $E$.

Soit $C^\circ$ l'interieur de $C$ et $C - C$ le sous ensemble $\{x - y \mid x, y \in C\}$ . On dira que $C$ est *propre* si $C \cap (-C) = \{0\}$.

LEMME 1.1.2. — *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $C^\circ \neq \emptyset$

(ii) $C$ *contient une base de* $E$

(iii) $C - C = E$.

Un cône vérifiant l'une de ces propriétés est appelé *générateur.*

Soit

$$C^\sharp := \{y \in E \mid \langle x, y \rangle \geq 0,\ \forall x \in C\}.$$

Il est clair que $C^\sharp$ est un cône convexe fermé. $C^\sharp$ est appelé *cône dual* de $C$. Ce cône dual vérifie certaines propriétés qui se résument dans la

PROPOSITION 1.1.3. —

*a.* $(C^\sharp)^\sharp = C$

*b.* $(C^\sharp - C^\sharp)^\perp = C \cap (-C)$

*c.* $(C^\sharp)^\circ = \{y \in E \mid \langle x, y \rangle > 0,\ \forall x \in C - \{0\}\}$

*d. les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*i*) $C$ *est propre,* *i.e.* $C \cap (-C) = \{0\}$

(*ii*) $(C^\sharp)^\circ \neq \emptyset$

(*iii*) $C$ *est pointu,* *i.e. il existe* $y \in E$ *tel que* $\langle x, y \rangle > 0, \quad \forall x \in C - \{0\}$.

DÉFINITION 1.1.4. — Soit $\Omega$ un cône convexe ouvert non vide. On dira que $\Omega$ est *propre* si son adhérence $\overline{\Omega}$ est propre, *i.e.* $\overline{\Omega} \cap (-\overline{\Omega}) = \{0\}$.

Le cône dual ouvert de $\Omega$ est défini par :

$$\Omega^* := \{y \in E \mid \langle x, y \rangle > 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega} - \{0\}\}.$$

LEMME 1.1.5. — *On a*

$$\Omega^* = \big((\overline{\Omega})^\sharp\big)^\circ.$$

*Démonstration.* — Soient $y \in \left((\overline{\Omega})^\sharp\right)^\circ$ et $x \in \overline{\Omega} - \{0\}$. Pour $t$ assez petit, $y + tx$ appartient à $(\overline{\Omega})^\sharp$ et donc $\langle y + tx, x\rangle \geq 0$ ou encore $\langle y, x\rangle + t\|x\|^2 \geq 0$, on en déduit que $\langle y, x\rangle > 0$ et que $y \in \Omega^*$.

Inversement, si $y \in \Omega^*$ alors $\langle x, y\rangle > 0$ pour tout $x \in \overline{\Omega} - \{0\}$. Soit $t$ assez petit, on a $\langle x, y + tx\rangle = \langle x, y\rangle + t\|x\| > 0$ donc $y + tx \in (\overline{\Omega})^\sharp$, et par suite $y \in \left((\overline{\Omega})^\sharp\right)^\circ$. □

LEMME 1.1.6. — *Si $W$ est un cône convexe de $E$ alors $W^\circ$ et $\overline{W}$ le sont aussi. Si de plus $W^\circ \neq \emptyset$ alors*

$$(\overline{W})^\circ = W^\circ \qquad \text{et} \qquad \overline{(W^\circ)} = \overline{W}.$$

Des lemmes 1.1.2, 1.1.5, 1.1.6 et de la proposition 1.1.3 on déduit le théorème des bipôlaires pour un cône convexe ouvert

PROPOSITION 1.1.7. — *Pour tout cône convexe ouvert $\Omega$*

$$(\Omega^*)^* = \Omega.$$

DÉFINITION 1.1.8. — Un cône ouvert convexe est dit *auto-adjoint* si $\Omega^* = \Omega$.

REMARQUE 1.1.9. — Un tel cône est propre.

**1.2. Cônes symétriques.** — Le groupe $G(\Omega)$ des automorphismes du cône ouvert convexe $\Omega$ est défini par :

$$G(\Omega) = \{g \in \mathrm{GL}(E) \mid g(\Omega) = \Omega\},$$

où $\mathrm{GL}(E)$ est le groupe des automorphismes linéaires de $E$.

$G(\Omega)$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(E)$, donc un groupe de Lie.

DÉFINITION 1.2.1. — Un cône ouvert convexe $\Omega$ est dit *homogène* s'il est homogène sous l'action naturelle de son groupe d'automorphismes $G(\Omega)$ . $\Omega$ est dit *symétrique* si il est homogène et auto-adjoint.

PROPOSITION 1.2.2. — *Soit $\Omega$ un cône ouvert symétrique $E$, alors $\Omega$ est un espace riemannien symétrique.*

*Démonstration.* — En effet sur $\Omega$ on peut définir une métrique riemannienne par

$$G_x(u,v) = D_u D_v \log \varphi(x)$$

où $\varphi$ est "la fonction caractéristique de $\Omega$" définie par

$$\varphi(x) = \int_\Omega e^{-\langle x,y \rangle} dy.$$

où $dy$ est la mesure euclidienne de $V$.

Pour chaque $x$ de $\Omega$ on définit le point $x^*$ par

$$x^* = -\nabla \log \varphi(x),$$

où $\nabla f(x)$ est le gradient de $f$ au point $x$.

L'application $x \longmapsto x^*$ est une involution isométrique de $\Omega$ qui admet un unique point fixe qu'on notera $e$. Comme $G(\Omega)$ est transitif sur $\Omega$, on montre que pour chaque $y$ de $\Omega$ il existe une involution isométrique dont $y$ est un point fixe isolé.

Soit $G(\Omega)^o$ la composante connexe neutre de $G(\Omega)$ et $O(V)$ le groupe orthogonal de $V$. On montre que le stabilisateur du point $e$ dans $G(\Omega)$, respectivement dans $G(\Omega)^o$, est de la forme

$$G(\Omega)_e = G(\Omega) \cap O(V),$$

respectivement

$$G(\Omega)^o_e := K = G \cap O(V).$$

Pour chaque $g$ dans $G(\Omega)$ on pose

$$\theta(g) = g^{t^{-1}},$$

alors $\theta$ est une involution de Cartan de $G(\Omega)$ et on a

$$K = \{g \in G \mid \theta(g) = g\}.$$

□

## I.2. AlGÈBRES DE JORDAN

**2.1. Définition et exemples.** — Toutes les définitions et résultats que nous annoncerons ci-dessous dans le cas réel sont semblables dans le cas complexe.

DÉFINITION 2.1.1. — Une *algèbre de Jordan* V sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une application bilinéaire $(x, y) \mapsto xy$ de $V \times V$ dans $V$ vérifiant pour chaque $x, y$ de $V$

$$(J.1) \qquad xy = yx,$$

et

$$(J.2) \qquad x(x^2y) = x^2(xy).$$

REMARQUE 2.1.2. — Les algèbres de Jordan sont donc des algèbres commutatives mais en général elles ne sont pas associatives. La propriété $(J.2)$ traduit une "associativité faible" dans le sens où si $x$ est un élément de $V$ alors la sous-algèbre $\mathbb{R}[x]$ est associative.

Pour un élément $x$ de $V$, soit $L(x)$ l'endomorphisme de $V$ défini par :

$$L(x)y = xy.$$

La propriètè $(J.2)$ est équivalente à la suivante :

$$(J.2)' \qquad [L(x), L(x^2)] = 0.$$

où $[,]$ est le crochet de l'algèbre de Lie $\mathrm{End}(V)$.

EXEMPLES 2.1.3. —

1) Soit $A$ une algèbre associative sur $\mathbb{R}$, on peut définir sur $A$ une structure d'algèbre de Jordan en définissant un nouveau produit (*produit de Jordan*) par :

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx). \tag{2.1.3.1}$$

C'est le cas de l' algèbre $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$.

2) Soit $A$ une algèbre associative sur $\mathbb{R}$, et $V$ un sous-espace vectoriel de $A$ tel que pour tout $x \in V$ on ait $x^2 \in V$, alors $V$ muni du produit (2.1.3.1) est une algèbre de Jordan. En effet si $x$ et $y$ sont deux éléments de $V$ alors

$$x \circ y = \frac{1}{4}((x+y)^2 - (x-y)^2) \in V.$$

C'est le cas des algèbres $V = \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ si on prend pour $A$ l'algèbre des matrices $M(n, \mathbb{R})$.

3) Soit $W$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et B une forme bilinéaire symétrique sur $W \times W$. Sur l'espace vectoriel $V = \mathbb{R} \times W$ on définit le produit suivant

$$(\lambda, u)(\mu, v) = (\lambda\mu + B(u, v), \lambda v + \mu u).$$

$V$ muni de ce produit est alors une algèbre de Jordan. En effet $(J.1)$ découle directement du fait que la forme $B$ est symétrique. Pour vérifier $(J.2)$ on prend $x = (\lambda, u)$ élément de $V$ et on écrit

$$x^2 = (\lambda^2 + B(u, u), 2\lambda u). \tag{2.1.3.2}$$

Posons $T = L\big((0,u)\big)$, alors

$$L(x) = \lambda I + T,$$
$$L(x^2) = (\lambda^2 + B(u,u))I + 2\lambda T.$$

Donc $L(x)$ et $L(x^2)$ appartiennent à la sous-algèbre commutative engendrée par $I$ et $T$, et par suite $[L(x), L(x^2)] = 0$.

REMARQUE 2.1.4. — L'algèbre considerée dans l'exemple 3) a la même construction que les algèbres de Jordan considérées dans l'exemple 2). En effet $V = \mathbb{R} \times W$ peut être considéré comme un sous-espace de l'algèbre de Çlifford construite à partir de $B$. Donc toutes les algèbres de Jordan vues dans les trois exemples ci-dessus proviennent des algèbres associatives. Il existe par ailleurs d'autres algèbres de Jordan qui ne proviennent pas d'une algèbre associative, ce sont les algèbres de Jordan exceptionnelles, comme l'algèbre d'Albert $\mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})$ (*cf.* POSTNIKOV [**98**]).

**2.2. Trace et déterminant.** — Soit $V$ une algèbre de Jordan de dimension finie sur $\mathbb{R}$ admettant un élément unité $e$, et soit $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Pour un élément $x$ de $V$ on note

$$\mathbb{R}[x] := \{p(x) \mid p \in \mathbb{R}[X]\}.$$

C'est une sous-algèbre commutative et associative de $V$, et on a

$$\mathbb{R}[x] \simeq \mathbb{R}[X]/\mathcal{J}(x),$$

où $\mathcal{J}(x)$ est l'idéal défini par

$$\mathcal{J}(x) := \{p \in \mathbb{R}[X] \quad | \quad p(x) = 0\}.$$

Puisque $e, x, x^2, \cdots, x^n$, pour $n$ assez grand ($n > \dim(V)$) sont linéairement dépendants, l'idéal $\mathcal{J}(x)$ est différent de $\{0\}$, et comme $\mathbb{R}[X]$ est un anneau principal, $\mathcal{J}(x)$ est engendré par un polynôme (unitaire) $p_x$ appelé le *polynôme minimal* de $x$.

Pour un élément $x$ de $V$ soit $m(x)$ le degré de son polynôme minimal. On a

$$m(x) = \min\{k > 0 \mid (e, x, x^2, \cdots, x^k) \text{ sont linéairement dépendants}\}.$$

$m(x)$ est borné (par $\dim(V)$ par exemple) lorsque $x$ varie dans $V$. Soit alors

$$r := \max\{m(x) \mid x \in V\}.$$

DÉFINITION 2.2.1. — Le nombre $r$ est apellé le *rang* de l'algèbre de Jordan $V$. Un élément $x$ de $V$ est dit *régulier* si $m(x) = r$.

PROPOSITION 2.2.2. — *L'ensemble des éléments réguliers est un ouvert dense dans $V$. Il existe des polynômes $a_1, a_2, \cdots, a_r$ sur $V$ tels que pour tout élément régulier $x$ de $V$ on ait*

$$p_x(\lambda) = \lambda^r - a_1(x)\lambda^{r-1} + a_2(x)\lambda^{r-2} + \cdots + (-1)^r a_r(x).$$

*Les polynômes $a_1, a_2, \cdots, a_r$ sont uniques et chaque polynôme $a_j$ est homogène de degré $j$.*

DÉFINITION 2.2.3. — Le coefficient $a_1(x)$ est appelé la *trace* de $x$, et on le note $\mathrm{tr}(x)$.

Le coefficient $a_r(x)$ est appelé le *déterminant* de $x$, et on le note $\det(x)$.

REMARQUES 2.2.4. — L'application det n'est pas en général multiplicative. C'est le cas, par exemple, de l'algèbre $V = W \times \mathbb{R}$ de l'exemple 3) 2.1.3. En effet si $x = (\lambda, u)$ alors $\det(x) = \lambda^2 - B(u, u)$, et elle n'est pas multiplicative.

Nous réservons les notations $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{Det}(A)$ pour la trace et le déterminant d'un endomorphisme $A$ de $V$.

PROPOSITION 2.2.4. — *Pour tout $v$ de $V$, et pour tout $x, y$ dans $\mathbb{R}[v]$,*

$$\det(xy) = det(x)det(y).$$

COROLLAIRE 2.2.5. — *On a* $\mathrm{tr}(e) = r$ *et* $\det(e) = 1$.

DÉFINITION 2.2.6. — Un élément $x$ de $V$ est dit *inversible* s'il existe un élément $y$ de $\mathbb{R}[x]$ tel que $xy = e$.

REMARQUES 2.2.7. — 1) Soit $y_1$ et $y_2$ deux éléments de $\mathbb{R}[x]$ tels que $xy_1 = xy_2 = e$, alors $y_1(xy_2) = y_1 e = y_1$, et $(y_1 x)y_2 = ey_2 = y_2$. Puisque l'algèbre $\mathbb{R}[x]$ est associative, $y_1 = y_2$. On en déduit que si $x$ est inversible, il existe un unique élément $y$ dans $\mathbb{R}[x]$ tel que $xy = e$. L'élément $y$ est appelé l'*inverse* de $x$ et on note $y = x^{-1}$.

2) L'égalité $xy = e$ n'implique pas que $y$ est l'inverse de $x$. Le fait que $x$ soit inversible n'implique pas non plus que l'opérateur $L(x)$ est inversible. Il suffit pour cela de prendre $V = \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})$ et de considérer les éléments

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & -1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas $x$ est inversible et $x^{-1} = x$. D'autre part $x \circ y = e$, mais $y$ n'est pas un élément de $\mathbb{R}[x]$ pour $a \neq 0$. De plus $L(x)$ n'est pas inversible puisque $L(x)z = 0$.

**2.3. Représentation quadratique d'une algèbre de Jordan.** — Soit $V$ une algèbre de Jordan de dimension finie sur $\mathbb{R}$ d'élément unité $e$.

Pour $x$ dans $V$ on pose

$$P(x) := 2L(x)^2 - L(x^2).$$

L'application $P$ est appelée *représentation quadratique* de $V$. L'application bilinéaire associée est donnée par

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \frac{1}{2} D_y P(x) \\ &= \frac{1}{2}\big(P(x+y) - P(x) - P(y)\big). \end{aligned}$$

ou encore

$$P(x,y) = L(x)L(y) + L(y)L(x) - L(xy).$$

EXEMPLE 2.3.1. — Pour l'algèbre de Jordan $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ on a

$$P(x)y = xyx,$$

et donc

$$P(xyx) = P(x)P(y)P(x),$$

ou encore

$$P(P(x)y) = P(x)P(y)P(x).$$

On verra ci-dessous que cette dernière formule est vraie pour toute algèbre de Jordan de dimension finie qui admet une unité.

PROPOSITION 2.3.2. —

(*i*) *Un élément $x$ de $V$ est inversible si et seulement si $P(x)$ est inversible. Dans ce cas*

$$\begin{aligned} P(x)x^{-1} &= x, \\ P(x)^{-1} &= P(x^{-1}). \end{aligned}$$

(*ii*) *La différentielle de l'application* $x \longmapsto x^{-1}$ *est* $-P(x^{-1})$, *i.e.*

$$D_v(x^{-1}) = -P(x^{-1})v.$$

(*iii*) *Si* $x$ *et* $y$ *sont inversibles, alors* $P(x)y$ *est inversible et on a*

$$\big(P(x)y\big)^{-1} = P(x^{-1})y^{-1}.$$

(*iv*) *Pour tout* $x$ *et* $y$ *dans* $V$

$$P\big(P(x)y\big) = P(x)P(y)P(x).$$

## I.3. ALGÈBRES DE JORDAN EUCLIDIENNE

**3.1 Algèbres de Jordan euclidienne.** — Dans la suite nous ne considérons que les algèbres de Jordan réelles de dimension finie, avec unité.

DÉFINITION 3.1.1. — Une algèbre de Jordan $V$ sur $\mathbb{R}$ est dite *euclidienne* s'il existe sur $V$ un produit scalaire noté $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ vérifiant pour tout $x$, $y$, $z$ dans $V$

$$\langle L(z)x, y\rangle = \langle x, L(z)y\rangle. \tag{3.1.2}$$

EXEMPLES 3.1.3. — 1) $\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ est une algèbre de Jordan euclidienne. En effet la forme bilinéaire $\mathrm{tr}(xy)$ est définie positive et vérifie la condition (3.1.2).

2) L'algèbre $V = \mathbb{R} \times W$ considérée dans l'exemple (2.1.3), 3) est une algèbre de Jordan euclidienne. En effet la forme bilinéaire

$$\langle(\lambda, u), (\mu, v)\rangle = \lambda\mu + B(u, v),$$

est définie positive et vérifie la condition (3.1.2).

DÉFINITIONS 3.1.4. — Un élément $c$ de $V$ est dit *idempotent* si $c^2 = c$. Soient $c_1, \cdots, c_k$ des éléments de $V$, on dira que $\{c_1, c_2, \cdots, c_k\}$ est un *système complet d'idempotents* si

$$c_i^2 = c_i,$$

$$c_i c_j = 0 \text{ si } i \neq j,$$

$$c_1 + \cdots + c_k = e.$$

REMARQUE 3.1.5. — Deux éléments idempotents $c$ et $d$ de $V$ sont orthogonaux si et seulement si $cd = 0$. En effet si $cd = 0$ alors

$$\langle c, d\rangle = \langle c^2, d\rangle = \langle c, cd\rangle = 0,$$

donc ils sont orthogonaux. La réciproque se montre en utilisant la décomposition de Peirce (*cf.* **3.4** ci-dessous) de $d$ relativement à $c$.

Ceci justifie donc la deuxième partie de la définition (3.1.4)

DÉFINITION 3.1.6. — Un idempotent est dit *primitif* s'il est non nul et s'il ne peut s'écrire comme somme de deux idempotents orthogonaux non nuls.

PROPOSITION 3.1.7. — (*théorème de la décomposition spectrale*)

*Soit $V$ une algèbre de Jordan euclidienne de rang $r$. Pour chaque $x$ dans $V$ il existe un système complet d'idempotents primitifs $\{c_1, \cdots, c_r\}$ et il existe des nombres réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ tels que*

$$x = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j c_j. \tag{3.1.8}$$

*De plus* $\det(x) = \prod_{i=1}^{r} x_i$ *et* $\operatorname{tr}(x) = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j$.

REMARQUE 3.1.9. — Nous déduisons de cette proposition qu'un système complet d'idempotents primitifs admet exactement $r$ éléments où $r$ est le rang de $V$.

Les nombres $\lambda_j$ sont appelés *valeurs propres* de $x$ et la décomposition (3.1.8) est dite *décomposition spectrale* de $x$.

PROPOSITION 3.1.10. — *Soit $V$ une algèbre de Jordan sur $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*i*) *$V$ est euclidienne.*

(*ii*) $x^2 + y^2 = 0 \Longrightarrow x = y = 0$.

(*iii*) *la forme bilinéaire symétrique* $\mathrm{tr}(xy)$ *est définie positive.*

(*iv*) *la forme bilinéaire symétrique* $\mathrm{Tr}(L(xy))$ *est définie positive.*

Une algèbre de Jordan vérifiant la propriété (ii) de cette proposition est dite *formellement réelle.* Donc les algèbres de Jordan euclidiennes sont exactement les algèbres de Jordan formellement réelles.

**3.2. Cônes des carrés d'une algèbre de Jordan euclidienne.** — Soit $V$ une algèbre de Jordan euclidienne d'élément unité $e$.

PROPOSITION 3.2.1. — *Soit $x$ un élément de $V$. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(*i*) *Il existe $y$ dans $V$ tel que $x = y^2$.*

(*ii*) *$L(x)$ est positif i.e. $\langle L(x)z, z\rangle \geq 0$ pour tout $z \in V$.*

(*iii*) *Les valeurs propres de $x$ sont positives.*

(*iv*) *Pour tout $z$ de $V$ on a $\langle x, z^2\rangle \geq 0$.*

Soit $Q$ l'ensemble des carrés de $V$ :

$$Q := \{x^2 \mid x \in V\}.$$

$Q$ est un cône de $E$. Le cône dual $Q^\sharp$ est donné par :

$$Q^\sharp = \{y \in V \mid \forall x \in V, \langle y, x^2\rangle \geq 0\}.$$

$Q^\sharp$ est un cône convexe fermé, et comme

$$\langle y, x^2 \rangle = \langle L(y)x, x \rangle,$$

nous avons

$$Q^\sharp = \{y \mid L(y) \text{ est positif}\}.$$

On en déduit, d'après la proposition (3.2.1), que $Q = Q^\sharp$. Donc $Q$ est un cône convexe fermé et auto-adjoint de $V$.

Notons $\Omega$ l'intérieur de $Q$. D'apres les lemmes (1.1.5) et (1.1.6), $\Omega$ est un cône convexe ouvert et auto-adjoint, et nous avons la

PROPOSITION 3.2.2. — *Soit $x$ un élément de $V$. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(*i*) *$x$ est dans $\Omega$.*

(*ii*) *Il existe $y$ dans $V$ tel que $x = \exp(y)$.*

(*iii*) *L'opérateur $L(x)$ est défini positif.*

(*iv*) *Les valeures propres de $x$ sont strictement positives.*

(*v*) *$\langle x, z^2 \rangle > 0$ pour tout $z \in V$.*

On peut aussi montrer (*cf.* [**16**]) que $\Omega$ est la composante connexe de $e$ dans l'ouvert $V^\times$ des éléments inversibles de $V$.

On rappelle que $G(\Omega)$ est le groupe des transformations linéaires inversibles de $V$ qui conservent $\Omega$.

LEMME 3.2.3. — *L'application $x \longmapsto x^2$ est une bijection de $\Omega$ sur lui-même.*

*Démonstration.* — La surjectivité de l'application découle immédiatement de la définition de $\Omega$.

Soient $x_1$ et $x_2$ dans $\Omega$ tel que $x_1^2 = x_2^2$. Alors $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$. Or $x_1 + x_2$ est dans $\Omega$, donc d'après (3.2.2) $L(x_1 + x_2)$ est inversible, par suite $x_1 - x_2 = 0$.

□

Soit $x$ un élément de $\Omega$ et notons $x^{\frac{1}{2}}$ son antécédent dans $\Omega$ par l'application ci-dessus, *i.e.* $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x$. Comme $x^{\frac{1}{2}}$ est dans $\Omega$, $P(x^{\frac{1}{2}})$ est un élément de $G(\Omega)$, et on a

$$P(x^{\frac{1}{2}})e = (x^{\frac{1}{2}})^2 = x.$$

Ainsi $\Omega$ est transitif sous l'action de $G(\Omega)$, et par suite $\Omega$ est un cône symétrique.

**3.3. Algèbre de Jordan associée à un cône symétrique.** — Soit $\Omega$ un cône symétrique d'un espace euclidien $V$, $G(\Omega)$ le groupe des automorphismes de $\Omega$, $G(\Omega)^o$ la composante connexe de $G(\Omega)$ et $K = G(\Omega)^o \cap O(V)$.

Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $G(\Omega)^o$ et $\mathfrak{k}$ celle de $K$. Soit

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} \tag{3.3.1}$$

la décomposition de $\mathfrak{g}$ relativement à l'involution de Cartan $\theta$, on a

$$\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \mid X^t = -X\},$$

et

$$\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \mid X^t = X\}.$$

Comme dans le paragraphe **1.2** proposition (1.2.2) on choisit un élément $e \in \Omega$ dont le stabilisateur est $K$.

LEMME 3.3.2. — *L'application*

$$\begin{aligned} \psi \ : \ \mathfrak{p} &\longrightarrow \quad V \\ X &\longmapsto \quad X \cdot e \end{aligned}$$

*est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

*Démonstration.* — Soit $X \in \mathfrak{p}$ tel que $X \cdot e = 0$. $X$ est alors dans $\mathfrak{k}$ et d'après la décomposition (3.3.1) de $\mathfrak{g}$, $X = 0$. Donc si $V' = \{X \cdot e \mid X \in \mathfrak{p}\}$ alors $V' \simeq \mathfrak{p}$ et par suite $\dim V' = \dim \mathfrak{p}$ . Or les deux variétés $\Omega$ et $G(\Omega)^o/K$ sont isomorphes, donc leurs espaces tangents à $e$ sont isomorphes *i.e.* $V \simeq \mathfrak{p}$. On en déduit que $\dim V = \dim \mathfrak{p}$ et par suite $\dim V = \dim V'$ d'où $V = V'$

$\square$

Notons $L$ l'application réciproque de $\psi$. Si $x$ est dans $V$, $L(x)$ est l'unique élément de $\mathfrak{p}$ tel que

$$L(x)e = x.$$

THÉORÈME 3.3.2. — *Soit $\Omega$ un cône symétrique de $V$. Alors $V$ muni du produit*

$$xy = L(x)y, \qquad (x, y \in V)$$

*est une algèbre de Jordan euclidienne, d'élément unité $e$ et on a*

$$\begin{aligned} \Omega &= \exp V \\ &= \operatorname{int}\{x^2 \mid x \in V\} \end{aligned}$$

*Conclusion.* — L'ensemble des carrés d'une algèbre de Jordan euclidienne est un cône convexe fermé et son intérieur est un cône symétrique, et tout cône symétrique peut être obtenu de cette façon. Ce dernier point est dû à Koecher et Vinberg (*cf.* KOECHER **[52]** et VINBERG **[111]**).

**3.4. Décomposition de Peirce.** — Soit $V$ une algèbre de Jordan euclidienne de dimension $n$ et de rang $r$.

Si $c$ est un idempotent de $V$ alors $L(c)$ est solution de l'équation

$$2X^3 - 3X^2 + X = 0,$$

qui admet $1, \frac{1}{2}$ et 0 comme racines simples . Donc $L(c)$ est diagonalisable et ses seules valeurs propres possibles sont $1, \frac{1}{2}$ et 0. On en déduit que $V$ se décompose comme somme de sous-espaces propres

$$V = V(c, 1) \oplus V(c, \frac{1}{2}) \oplus V(c, 0).$$

Cette décomposition s'appelle *décomposition de Peirce* de $V$ relativement à l'idempotent $c$.

Soit maintenant $\{c_1, \cdots, c_r\}$ un système complet d'idempotents primitifs,

$$c_i c_j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$
$$c_i^2 = c_i$$
$$c_1 + \cdots c_r = e.$$

Puisque les opérateurs $L(c_i)$ commutent, ils sont diagonalisables dans la même base.

Considérons les sous-espaces de $V$

$$V_{ii} = V(c_i, 1) = \mathbb{R}c_i,$$
$$V_{ij} = V(c_i, \frac{1}{2}) \cap V(c_j, \frac{1}{2}) \qquad \text{si} \quad i \neq j.$$

Théorème 3.4.1. — ( *Koecher*)

(*i*) *L'algèbre de Jordan $V$ se décompose comme somme directe orthogonale*

$$V = \bigoplus_{i \leq j} V_{ij}. \tag{3.4.2}$$

(*ii*)

$$
\begin{aligned}
&V_{ij}V_{ij} \subset V_{ii} + V_{jj},\\
&V_{ij}V_{jk} \subset V_{ik}, \quad \text{si} \quad i \neq j,\\
&V_{ij}V_{kl} = \{0\} \quad \text{si} \quad \{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset.
\end{aligned}
$$

(*iii*) *Si $V$ est simple alors pour tout $1 \leq j \leq k \leq r$, $V_{jk} \neq \{0\}$ et*

$$n = r + \frac{d}{2}r(r-1),$$

*où $d$ est la dimension commune des sous-espaces $V_{jk}$.*

La décomposition (3.4.2) est dite *décompostion de Braun-Koecher* de $V$ relativement au système $\{c_1, \cdots, c_r\}$.

**3.5. Groupe structurel.** — Introduisons les notations :

$$x \,\square\, y = L(xy) + [L(x), L(y)],$$

et

$$
\begin{aligned}
\{x,y,z\} &= (x \,\square\, y)z\\
&= P(x,z)y = (xy)z + x(yz) - y(xz).
\end{aligned}
$$

Notons $g^t$ le transposé d'un élément $g$ de $\mathrm{GL}(V)$.

DÉFINITION 3.5.1. — Le *groupe structurel* $\mathrm{Str}(V)$ de $V$ est le groupe des éléments $g$ de $GL(V)$ tel que pour tout $x, y, z \in V$ on ait

$$g\{x,y,z\} = \{gx, {g^t}^{-1}y, gz\}. \tag{3.5.2}$$

(3.5.2) est équivalente à chacune des proprieté suivantes :

$$P(gx, gy) = gP(x,y)g^t. \tag{3.5.3}$$

$$P(gx) = gP(x)g^t. \tag{3.5.4}$$

$$g(x \,\square\, y)g^{-1} = (gx) \,\square\, (g^{t^{-1}} y). \tag{3.5.5}$$

PROPOSITION 3.5.6. —

$$\mathrm{Str}(V) = G(\Omega) \times \{\pm \mathrm{Id}\}.$$

PROPOSITION 3.5.7. — *Soit $g \in \mathrm{Str}(V)$. Pour tout $x \in V$,*

$$(gx) \quad \text{est inversible} \Longleftrightarrow x \quad \text{est inversible}$$

*et on a*

$$(gx)^{-1} = g^{t^{-1}} x^{-1}.$$

**I.4. AlGÈBRES DE JORDAN ISOTYPIQUES.** — Soit $V$ une algèbre de Jordan sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui admet une unité $e$. Fixons $v \in V$ et posons

$$x \perp_v y = P(x, y)v = x(yv) + y(xv) - (xy)v. \tag{4.1.1}$$

PROPOSITION 4.2. —

(*i*) *Muni du produit* (4.1.1), *$V$ est une algèbre de Jordan qu'on note $V_v$.*

(*ii*) *Si $v$ est inversible alors $V_v$ admet un élément unité qui est $v^{-1}$.*

*(iii) Si $v$ est inversible et $V$ est euclidienne alors $V_v$ est euclidienne.*

*Démonstration.* — (*cf.* BRAUN-KOECHER [**5**])

Si on note $L_v$ et $P_v$ la multiplication (à gauche ou à droite) et la représentation quadratique associée à $V_v$, alors

$$L_v(x) = v \,\Box\, x$$

$$P_v(x) = P(v)P(x).$$

# CHAPITRE II

# CHAPITRE 2

## LE SEMI-GROUPE $\Gamma$ ASSOCIÉ AU CÔNE $\Omega$

RÉSUMÉ. — Soit $V$une algèbre de Jordan euclidienne de dimension finie $n$, de rang $r$, $\Omega$ le cône symétrique associé et dont le produit scalaire est $\langle x, y\rangle = \mathrm{tr}(xy)$. Nous donnons quelques rappels sur le domaine tube $T_\Omega$, le domaine borné associé $\mathcal{D}$ et sur leurs groupes d'automorphismes holomorphes. Nous explicitons ensuite, en termes d'algèbre de Jordan, les conjugaisons de $G_{\mathbb{C}}$ par rapport à ces deux formes réelles. Enfin nous considérons le semi-groupe $\Gamma$, naturellement associé à $V$, formé des automorphismes holomorphes du domaine tube $T_\Omega$ qui stabilisent le cône $\Omega$. Nous démontrons que ce semi-groupe admet une décomposition en trois blocs (décomposition à la Harish-Chandra) et que ses éléments sont des contractions pour la métrique riemannienne de $\Omega$.

**II.1. Domaine tube.** — Soit $V^{\mathbb{C}} = V + iV$ le complexifié de $V$ (en tant qu'espace vectoriel). On étend le produit de $V$ $\mathbb{C}$-linéairement à $V^{\mathbb{C}}$ et il est facile de voir que $V^{\mathbb{C}}$ muni de ce produit est une algèbre de Jordan sur $\mathbb{C}$. Le produit scalaire $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ de $V$ s'étend en une forme hermitienne sur $V^{\mathbb{C}}$ :

$$\langle z, w\rangle = \mathrm{tr}(z\overline{w}).$$

Soit

$$T_\Omega = V + i\Omega,$$

le domaine tube au dessus de $\Omega$ dans $V^{\mathbb{C}}$, où $\Omega$ est le cône symétrique associé à $V$.

THÉORÈME II.1.1. — *$T_\Omega$ est un domaine symétrique .*

*Démonstration.* — (*cf.* [**16**] ou [**59**]).

Posons

$$D(p) := \{z \in V^{\mathbb{C}} \mid z + ie \text{ inversible}\}$$
$$D(c) := \{w \in V^{\mathbb{C}} \mid e - w \text{ inversible}\},$$

et, pour tout $z$ dans $D(p)$, $w$ dans $D(c)$

$$p(z) = (z - ie)(z + ie)^{-1},$$
$$c(w) = i(e + w)(e - w)^{-1}.$$

LEMME II.1.2. — *$p$ est une bijection holomorphe de $D(p)$ sur $D(c)$, et $c$ est son inverse. De plus $\overline{T_\Omega} \subset D(p)$.*

*Démonstration.* — (*cf.* [**16**]).

$c$ est appelée *transformée de Cayley* (relative à $T_\Omega$), elle généralise la transformation de Cayley classique qui envoie le demi-plan supérieur sur le disque unité.

Posons

$$\mathcal{S} :=\{z \in V \mid z \text{ inversible, et } \overline{z} = z^{-1}\},$$
$$G(\mathcal{S}) :=\{g \in \mathrm{GL}(V^{\mathbb{C}}) \mid g\mathcal{S} = \mathcal{S}\}.$$

$G(\mathcal{S})$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(V^{\mathbb{C}})$, donc un groupe de Lie.
Notons $U$ la composante neutre de $G(\mathcal{S})$.
Pour $z \in V^{\mathbb{C}}$, l'endomorphisme $z \,\square\, \overline{z}$ est hermitien. On définit alors

$$|z| = \|z \,\square\, \overline{z}\|^{\frac{1}{2}} := \sup_{\|w\| \leq 1} \sqrt{(w|w)_z},$$

où $(.|.)_z$ désigne la forme bilinéaire hermitienne positive $(w_1|w_2)_z = \langle (w_1 \square \overline{w_2})z, z\rangle$.

La fonction $z \longmapsto |z|$ est une norme sur $V^{\mathbb{C}}$, invariante par le groupe $G(\mathcal{S})$.

Pour tout $z$ de $V^{\mathbb{C}}$ il existe $u \in U$, et des $\lambda_j \geq 0$ tel que

$$z = u\left(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j c_j\right),$$

où $\{c_1, \cdots, c_r\}$ est un système complet d'idempotents primitifs de $V$. En particulier

$$|z| = \sup \lambda_j.$$

Le réel $|z|$ est appelé *norme spectrale* de $z$, (*cf.* **[16]**).

On définit le domaine $\mathcal{D}$ comme la boule unité ouverte de $V^{\mathbb{C}}$ pour cette norme spectrale :

$$\mathcal{D} := \{z \in V^{\mathbb{C}} \mid |z| < 1\}.$$

REMARQUES II.1.3. — 1) Puisque la norme spectrale est invariante par $G(\mathcal{S})$, le domaine $\mathcal{D}$ est invariant sous l'action de $G(\mathcal{S})$.

2) Pour tout réel $\theta$, l'application $z \longmapsto e^{i\theta}z$ est un élément du groupe $G(\mathcal{S})$, donc $\mathcal{D}$ est un *domaine circulaire*, *i.e.* $e^{i\theta}z \in \mathcal{D}$, $\forall z \in \mathcal{D}$ et $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

PROPOSITION II.1.4. — *Le domaine $\mathcal{D}$ admet les propriétés suivantes*

(*i*) $\mathcal{D} = \{z \in V^{\mathbb{C}} \mid I - z \square \overline{z} \gg 0\}$

(*ii*) $\mathcal{D} = \{z \in V^{\mathbb{C}} \mid I - P(z)P(\overline{z}) \gg 0\}$

(*iii*) *$\mathcal{D}$ est la composante connexe de 0 dans l'ensemble*

$$\{z \in V^{\mathbb{C}} \mid I - 2z \square \overline{z} + P(z)P(\overline{z}) \gg 0\}$$

(*iv*) $\mathcal{D} = p(T_\Omega)$.

*Démonstration.* — (*cf.* [**16**]).

On montre aussi, (*cf.* [**16**]), que $\mathcal{S} = \overline{p(V)}$ et que c'est le *frontière de Bergman-Šilov* du domaine $\mathcal{D}$, c-à-d que $\mathcal{S}$ est le plus petit ensemble fermé de la frontière topologique $\partial\mathcal{D}$ tel que

$$\max_{z\in\overline{\mathcal{D}}}|f(z)| = \max_{z\in\mathcal{S}}|f(z)|,$$

pour toute fonction $f$ continue sur $\overline{\mathcal{D}}$ et holomorphe sur $\mathcal{D}$

**II.2. Description des groupes $G(T_\Omega)$ et $G(\mathcal{D})$, de leurs algèbres de Lie et conjugaisons.** — Une application biholomorphe de $T_\Omega$ (respectivement de $\mathcal{D}$) dans lui même sera dite un automorphisme holomorphe de $T_\Omega$ (respectivement de $\mathcal{D}$).

Le groupe d'automorphismes holomorphes de $T_\Omega$ (respectivement de $\mathcal{D}$) sera noté par $G(T_\Omega)$ (respectivement par $G(\mathcal{D})$).

D'après un résultat de Myers–Steenrod, le groupe des isométries de $\mathcal{D}$ par rapport à la métrique de Bergman, muni de la topologie de la convergence compacte uniforme, est un groupe de Lie. Puisque $G(\mathcal{D})$ est un sous-groupe fermé du groupe des isométries, on a le résultat, du à H.Cartan, que $G(\mathcal{D})$ est un groupe de Lie (pour la même topologie).

Puisque $\mathcal{D} = p(T_\Omega)$ et que $p = c^{-1}$ est une bijection holomorphe,

$$G(T_\Omega) = cG(\mathcal{D})c^{-1}.$$

$G(T_\Omega)$ est aussi un groupe de Lie.

Soit

$$G(\mathcal{D})_0 := \{g \in G(\mathcal{D}) \mid g(0) = 0\}.$$

Proposition II.2.1. — (*cf.* [**16**])

$$G(\mathcal{D})_0 = G(\mathcal{S}).$$

*Démonstration.* — Soit $g$ un élément de $G(\mathcal{S})$. Puisque $\mathcal{D}$ est l'ensemble des $z$ dans $V^{\mathbb{C}}$ tel que $|z| < 1$ et que la norme $|\quad|$ est invariante par $G(\mathcal{S})$, $g$ est dans $G(\mathcal{D})$. Et comme $g$ est linéaire, $g \in G(\mathcal{D})_0$.

Soit, inversement, $g$ un élément de $G(\mathcal{D})_0$, *i.e.* $g$ est un automorphisme holomorphe de $\mathcal{D}$ et $g(0) = 0$. Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et considérons l'application $h_\beta(z) = e^{i\beta}z$. Si $g_\beta = h_{-\beta} \circ g^{-1} \circ h_\beta \circ g$, alors $g_\beta$ est un automorphisme holomorphe de $\mathcal{D}$, car $\mathcal{D}$ est un domaine circulaire. De plus $g_\beta(0) = 0$ et $g'_\beta(0) = \mathrm{Id}$. Une variante du lemme de Schwartz pour les domaines symétriques bornés, (*cf.* [**16**]), nous permet de voir que $g_\beta$ est l'identité, c-à-d

$$g \circ h_\beta = h_\beta \circ g,$$

ou encore

$$g(e^{i\beta}z) = e^{i\beta}g(z), \quad \forall z \in \mathcal{D}.$$

Considérons le développement en série entière de $g$ au voisinage de 0

$$g(z) = \sum_{\alpha \geq 0} a_\alpha z^\alpha.$$

On doit donc avoir

$$e^{i\beta} \sum_{\alpha \geq 0} a_\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha \geq 0} a_\alpha e^{i|\alpha|\beta} z^\alpha.$$

Donc d'après l'unicité des coefficients on a $a_\alpha e^{i|\alpha|\beta} = e^{i\beta}a_\alpha$ pour tout $\beta$ et tout $\alpha$. Ceci n'est possible que si $|\alpha| = 1$ ou bien $a_\alpha = 0$. Donc $g(z) = \sum_{|\alpha|=1} a_\alpha z^\alpha$, par suite $g$ est linéaire, et d'après la définition de la frontière de Bergman-Šilov, $g$ stabilise $\mathcal{S}$.

$\square$

Soit $g$ un élément de $G(\Omega)$, alors $g$ opère sur $T_\Omega$ par

$$z \longmapsto gz = gx + igy, \quad z = x + iy,$$

on peut donc considérer $G(\Omega)$ comme un sous-groupe de $G(T_\Omega)$.

Pour $v \in V$, la translation

$$t_v : z \longmapsto z + v$$

est un automorphisme holomorphe de $T_\Omega$. Notons $Q^+$ le sous-groupe de $G(T_\Omega)$ formé par ces translations.

L'application

$$s : z \longmapsto -z^{-1}$$

est un automorphisme holomorphe involutif de $T_\Omega$, donc un élément de $G(T_\Omega)$. Posons

$$Q^- = s \circ Q^+ \circ s.$$

C'est un sous-groupe de $G(T_\Omega)$ formé par les éléments de la forme

$$z \longmapsto (z^{-1} - v)^{-1}, \qquad v \in V.$$

$Q^+$ et $Q^-$ sont deux sous-groupes abéliens de $G(T_\Omega)$ isomorphes à l'espace vectoriel $V$.

Comme $c^{-1}(ie) = 0$ et $G(\mathcal{D})_0 = G(\mathcal{S})$, $cG(\mathcal{S})c^{-1}$ est le sous-groupe d'isotropie $G(T_\Omega)_{ie}$ et on a

PROPOSITION II.2.2. — (*cf.* [**16**])

$$G(T_\Omega) = Q^+ G(\Omega) G(T_\Omega)_{ie}.$$

*Démonstration.* — Soit $g$ un élément de $G(T_\Omega)$ et soit $z = g(ie) = x + iy$. Comme $y$ est dans $\Omega$, il existe un élément $h$ de $G(\Omega)$ tel que $y = h(e)$. Posons $k = h^{-1} \circ t_x^{-1} \circ g$, donc $k(ie) = ie$, et par suite $k \in G(T_\Omega)_{ie}$ et $g = t_x \circ h \circ k \in Q^+ G(\Omega) G(T_\Omega)_{ie}$.

$\square$

Téorème II.2.3. — *$G(T_\Omega)$ est engendré par $G(\Omega)$, $Q^+$ et $s$.*

*Démonstration.* — (*cf.* [**16**]).

Notons $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ (respectivement $\mathfrak{g}(\mathcal{D})$) l'algèbre de Lie de $G(T_\Omega)$ (respectivement $G(\mathcal{D})$), et $\mathfrak{g}(\Omega)$ l'algèbre de Lie de $G(\Omega)$.

Nous avons

$$\mathfrak{g}(T_\Omega) = \mathrm{Ad}(c)\mathfrak{g}(\mathcal{D}).$$

Si $X \in \mathfrak{g}(T_\Omega)$, on note $\widetilde{X}$ le champ de vecteurs holomorphe dans $T_\Omega$, correspondant à $X$, défini par :

$$\widetilde{X}f(z) = \frac{d}{dt}f(g_t(z))_{|t=0}, \quad f \in \mathcal{C}^1(T_\Omega),$$

où $g_t$ est le sous-groupe à un paramètre associé à $X$. On peut aussi écrire

$$\widetilde{X}f(z) = \mathrm{D}f(z)(X(z)).$$

Soit $\widetilde{\mathfrak{g}}(T_\Omega)$ l'algèbre de Lie de ces champs de vecteurs. $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}(T_\Omega)$ sont isomorphes et cet isomorphisme est donné par

$$X \in \mathfrak{g}(T_\Omega) \longmapsto \widetilde{X} \in \widetilde{\mathfrak{g}}(T_\Omega).$$

Lemme II.2.4. — (*cf.* [**16**])
*$u\dfrac{\partial}{\partial z}$, $Tz\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $P(z)v\dfrac{\partial}{\partial z}$ sont les champs de vecteurs holomorphes correspondants aux sous-groupes à un paramètre sur $T_\Omega$ :*

$$z \longmapsto z + tu,$$

$$z \longmapsto \exp(tT)z,$$

$$z \longmapsto (z^{-1} - tv)^{-1},$$

*où* $T \in \mathfrak{g}(\Omega)$ *et* $u, v \in V$.

*Démonstration.* — Soit $u$ un élément de $V$. L'application

$$n_t : z \longmapsto z + tu$$

est un sous-groupe à un paramètre dans $Q^+$, et si on lui associe le champ de vecteurs $\widetilde{X}$, alors

$$\begin{aligned}\widetilde{X} f(z) &= \frac{d}{dt} f(z + tu)_{|t=0}, \\ &= u \frac{\partial}{\partial z} f(z).\end{aligned}$$

Donc

$$X(z) = u \frac{\partial}{\partial z}.$$

Soit $T$ un élément de $\mathfrak{g}(\Omega)$. L'application

$$h_t : z \longmapsto \exp(tT)z$$

est un sous-groupe à un paramètre dans $G(\Omega)$, et si on lui associe le champ de vecteurs $\widetilde{X}$, alors

$$\begin{aligned}\widetilde{X} f(z) &= \frac{d}{dt} f(\exp(tT)z)_{|t=0}, \\ &= (Tz) \frac{\partial}{\partial z} f(z).\end{aligned}$$

Donc

$$X(z) = (Tz) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Soit $v$ un élément de $V$. L'application

$$\overline{n}_t : z \longmapsto (z^{-1} - tv)^{-1}$$

est un sous-groupe à un paramètre dans $Q^-$. De plus, d'après 2.3.2 chapitre 1, si $w$ est dans $V$, $D_w(s(z)) = P(z^{-1})w$. Donc, si $\widetilde{X}$ est le champ de vecteurs associé à $\overline{n}_t$,

$$\begin{aligned}\widetilde{X}f(z) &= \frac{d}{dt}f((z^{-1}-tv)^{-1})_{|t=0},\\ &= \frac{d}{dt}f(s\circ n_t\circ s(z))_{|t=0},\\ &= (P(z)v)\frac{\partial}{\partial z}f(z).\end{aligned}$$

Ainsi

$$X(z) = (P(z)v)\frac{\partial}{\partial z}.$$

□

Notons par $(u, T, v)$ ($u, v \in V$ et $T \in \mathfrak{g}(\Omega)$) le vecteur tangent $u+T+p_v$ associé au champ de vecteurs $u\frac{\partial}{\partial z} + (Tz)\frac{\partial}{\partial z} + (P(z)v)\frac{\partial}{\partial z}$, où l'on a défini l'application $p_v$ par $p_v(z) = P(z)v$, et soit $\mathfrak{L}$ l'ensemble de ces vecteurs tangents.

TÉORÈME II.2.5. — (*Koecher, Tits*)

*(i) $\mathfrak{L}$ est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ du groupe $G(T_\Omega)$ et on a*

$$\mathfrak{g}(T_\Omega) = \mathfrak{g}(T_\Omega)_{-1} \oplus \mathfrak{g}(T_\Omega)_0 \oplus \mathfrak{g}(T_\Omega)_1,$$

*avec $\mathfrak{g}(T_\Omega)_{-1} = V$, $\mathfrak{g}(T_\Omega)_0 = \mathfrak{g}(\Omega)$ et $\mathfrak{g}(T_\Omega)_1 = \{p_v \mid v \in V\}$.*

*(ii) Le crochet de $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ est donné par*

$$[X, X'] = (Ta' - T'a, 2a'\square b + [T, T'] - 2a\square b', {}^tT'b - {}^tTb'),$$

*où $X = (a, T, b)$ et $X' = (a', T', b')$.*

*(iii) L'application*

$$\theta : (a, T, b) \longmapsto (b, -{}^tT, a)$$

*est une involution de Cartan de* $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ *telle que* $\theta\mathfrak{g}(T_\Omega)_\nu = \mathfrak{g}(T_\Omega)_{-\nu}$, *pour* $\nu = 0, \pm 1$.

(*iv*) $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ *est semi-simple hermitienne.*

(*iiv*) *la forme de Killing de* $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ *est donnée par*

$$B(X, X') = B_0(T, T') + 2\mathrm{Tr}(T \circ T') - 4\mathrm{Tr}(a \,\square\, b') - 4\mathrm{Tr}(a' \,\square\, b),$$

*où* $X = (a, T, b)$, $X' = (a', T', b')$ *et où* $B_0$ *denote la forme de Killing* $\mathfrak{g}(\Omega)$.

*Démonstration.* — Pour (i) *cf.* **[16]**, **[57]** ou **[101]**, pour (ii) et (iiv) *cf.* **[57]** ou **[101]** pour (iii) *cf.* **[3]**, **[45]** ou **[101]** et pour (iv) *cf.* [ **57**] ou **[101]**.

Posons

$$\mathfrak{q}^+ = \mathfrak{g}(T_\Omega)_{-1}, \quad \mathfrak{q}^- = \mathfrak{g}(T_\Omega)_1 \quad \text{et} \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{g}(T_\Omega)_0,$$

alors

$$\mathfrak{g}(T_\Omega) = \mathfrak{q}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}^-, \tag{2.5.1}$$

et

$$\mathfrak{q}^\pm = \mathrm{Lie}\, Q^\mp \ \text{ et } \ \mathfrak{h} = \mathrm{Lie}\, G(\Omega).$$

Notons $G$ (respectivement ${}^cG$) la composante connexe neutre de $G(\mathcal{D})$ (respectivement $G(T_\Omega)$), alors ${}^cG = cGc^{-1}$.

Soit $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ l'algèbre complexifiée de $\mathfrak{g}(\mathcal{D})$ (donc de $\mathfrak{g}(T_\Omega)$), et notons $G_\mathbb{C}$ le groupe de Lie simplement connexe associé à $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. $G$ et ${}^cG$ sont deux formes réelles de $G_\mathbb{C}$. Nous allons donné ici une formulation explicite (en termes d'algèbre de Jordan) des conjugaisons de $G_\mathbb{C}$ par rapport à ces deux formes réelles.

Considérons les transformations (antiholomorphes) suivantes

$$j(z) = (\overline{z})^{-1} \qquad \forall z \in V_{\mathbb{C}}^{\times}$$

et

$$^{c}j(z) = \overline{z} \qquad \forall z \in V_{\mathbb{C}},$$

où le symbole $^{-}$ désigne le conjugaison complexe dans $V_{\mathbb{C}}$, et posons, pour tout élément $g$ de $G_{\mathbb{C}}$,

$$\tau(g) = \operatorname{int}(^{c}j)g = {}^{c}j \circ g \circ {}^{c}j$$

et

$$\sigma(g) = \operatorname{int}(j)g = j \circ g \circ j.$$

$\tau$ et $\sigma$ sont deux involutions de $G_{\mathbb{C}}$, et notons par les mêmes symboles les involutions correspondantes dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, *i.e.*

$$\tau = \operatorname{Ad}(^{c}j) \qquad \text{et} \qquad \sigma = \operatorname{Ad}(j).$$

Il est claire que l'ensemble des points de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ fixés par l'involution $\tau$ est $\mathfrak{g}(T_{\Omega})$. Remarquons maintenant que

$$^{c}j = c \circ j \circ c^{-1},$$

donc en transportant $\tau$ par la transformée de Cayley nous en déduisons que

$$\operatorname{Ad}(c)^{-1} \circ \tau \circ \operatorname{Ad}(c) = \sigma$$

est la conjugaison de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ par rapport à $\mathfrak{g}(\mathcal{D})$. D'où la

Proposition II.2.6. — *Les conjugaisons de $G_{\mathbb{C}}$ par rapport à $G$ et $^{c}G$ sont respectivement $\sigma = \operatorname{int}(j)$ et $\tau = \operatorname{int}(^{c}j)$.*

EXEMPLE II.2.7. — Dans le cas de l'algèbre de Jordan à une dimension $\mathbb{R}$, le cône symétrique est $\Omega = ]0, +\infty[$, le domaine tube $T_\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$, le demi-plan de Poincaré, le domaine borné correspondant est le disque unité, ${}^cG = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, $G = \mathrm{PSU}(1,1)$, $G_\mathbb{C} = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, la transformée de Cayley $c$ est représentée par la matrice

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix},$$

et pour tout élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ nous avons

$$\begin{aligned} \tau \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= {}^cj_o \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ {}^cj_o \\ &= \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}, \\ \sigma \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= j_o \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ j_o \\ &= \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \\ \theta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où $j_o$ et ${}^cj_o$ sont les applications définies dans $\mathbb{C}$ par $j_o(z) = \bar{z}$ et ${}^cj_o(z) = \bar{z}^{-1}$.

REMARQUE II.2.8. — L'involution de Cartan $\theta$ de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ commute aux involutions $\tau$ et $\sigma$, de plus nous avons $i\mathfrak{z}(\mathfrak{g}(T_\Omega)) \subset \mathfrak{g}(\mathcal{D})$, où $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}(T_\Omega))$ désigne le centre de $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ . Donc (dans le langage d' Ol'shanskiĭ) $\mathfrak{g}(\mathcal{D})$ est une *forme réelle régulière* de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, (*cf.* FARAUT [14] et OL'SHANSKIĬ [**92**]).

**II.3. Le semi-groupe** $\Gamma$. — Considérons le semi-groupe $\Gamma$ des éléments $g$ de ${}^cG$ qui se prolongent par continuité à $\Omega$ et tel que $g(\Omega) \subset \Omega$. Nous écrivons pour simplifier

$$\Gamma := \{g \in {}^cG \mid g(\Omega) \subset \Omega\}. \tag{3.1.1}$$

Remarquons tout d'abord que $G(\Omega) \subset \Gamma$ et que si $g \in \Gamma$, alors $g(\overline{\Omega}) \subset \overline{\Omega}$, où $\overline{\Omega}$ est l'adhérence du cône $\Omega$. De plus si $b \in \overline{\Omega}$, la translation

$$t_b : z \longmapsto z + b, \qquad z \in T_\Omega$$

est un élément de $\Gamma$.

Définissons les transformations rationnelles $\widetilde{t}_b, b \in \overline{\Omega}$, par

$$\widetilde{t}_b : z \longmapsto (\mathrm{Id} + z \,\square\, b)^{-1} z, \qquad z \in T_\Omega.$$

Notons

$$\Gamma^+ := \{g \in {}^cG \mid g = t_v, v \in \overline{\Omega}\},$$

et

$$\Gamma^- := \{g \in {}^cG \mid g = \widetilde{t}_v, v \in \overline{\Omega}\}.$$

LEMME II.3.1. — *Pour tout élément $v$ de $\overline{\Omega}$, nous avons l'égalité d'applications rationnelles*

$$\widetilde{t}_v = j \circ t_v \circ j \tag{3.1.2}$$

*là où elles sont définies.*

*Démonstration.* — Soit $z$ un élément inversible de $V^{\mathbb{C}}$ tel que $z^{-1} + v$ soit inversible, alors l'égalité (3.1.2) est équivalente à la suivante

$$(z^{-1} + v)^{-1} = (\mathrm{Id} + z \,\square\, v)^{-1} z. \tag{3.1.3}$$

Montrons tout d'abord (3.1.3) pour $z = e$, *i.e.*

$$(e^{-1} + v)^{-1} = (\mathrm{Id} + L(v))^{-1} e. \tag{3.1.4}$$

Pour cela il suffit de le vérifier pour $v \in \overline{\Omega}$, $|v| < 1$. Soit alors $v \in \overline{\Omega}$ tel que $|v| < 1$. Les séries $\sum_{n\geq 0}(-1)^n L(v)^n$ et $\sum_{n\geq 0}(-1)^n v^n$ sont convergentes et convergent respectivement vers $(\mathrm{Id} + L(v))^{-1}$ et $(e + v)^{-1}$.

Or

$$\Big(\sum_{n\geq 0}(-1)^n L(v)^n\Big) \cdot e = \sum_{n\geq 0}(-1)^n L(v)^n \cdot e = \sum_{n\geq 0}(-1)^n v^n,$$

donc $(e + v)^{-1} = (\mathrm{Id} + L(v))^{-1} \cdot e$, d'où l'égalité (3.1.4).

Soit maintenant $z$ un élément de $V_{\mathbb{C}}^{\times}$ (*) tel que $z^{-1} + v$ soit inversible, et considérons l'algèbre isotypique $V_{z^{-1}}^{\mathbb{C}}$ (*cf.* I.4 au chapitre 1). $V_{z^{-1}}^{\mathbb{C}}$ est une algèbre de Jordan d'unité $z$. Dans cette algèbre l'égalité (3.1.4) devient

$$(z^{-1} + v)^{-1} = (\mathrm{Id} + L_z(v))^{-1} z,$$

et comme $L_z(v \quad \square \quad) = z \quad v$ nous avons

$$(z^{-1} + v)^{-1} = (\mathrm{Id} + z \,\square\, v)^{-1} z.$$

$\square$

Corollaire II.3.2. — *Nous avons*

$$\Gamma^- = j \circ \Gamma^+ \circ j,$$

*donc* $\Gamma^+$ *et* $\Gamma^-$ *sont deux sous semi-groupes du semi-groupe* $\Gamma$.

*Démonstration.* — C'est une conséquence immédiate du lemme II.3.1, du fait que $j$ est un automorphisme involutif antiholomorphe de $T_\Omega$ qui

(*) $V_{\mathbb{C}}^{\times}$ désigne l'ouvert des éléments inversibles de l'algèbre de Jordan $V_{\mathbb{C}}$.

stabilise $\Omega$, et que si $g \in G(T_\Omega)$ alors $j \circ g \circ j$ est un automorphisme holomorphe de $T_\Omega$, donc un élément de $G(T_\Omega)$.

$\square$

LEMME II.3.3. — *Soient $x, y \in \overline{\Omega}$, alors l'opérateur*

$$Q(x,y) = \mathrm{Id} + 2x \,\Box\, y + P(x)P(y) \tag{3.3.1}$$

*est inversible et appartient à $G(\Omega)$.*

*Démonstration.* — Supposos que $x \in \Omega$, il existe alors un élément $g$ de $G(\Omega) \subset \mathrm{Str}(V)$ tel que $g(e) = x$, donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Id} + 2x \,\Box\, y + P(x)P(y) &= g(\mathrm{Id} + 2L({}^t gy) + P({}^t gy))g^{-1}, \\ &= gP(e + {}^t gy)g^{-1}. \end{aligned}$$

Comme ${}^t gy \in \overline{\Omega}$, $e + {}^t gy$ est inversible . Nous en déduisons alors que $P(e + {}^t gy)$ est inversible, il en est de même pour $Q(x,y)$. De plus l'opérateur $Q(x,y)$ appartient à $G(\Omega)$, et ses valeurs propres sont $\geq 1$. Soit maintenant $x \in \overline{\Omega}$ alors il est limite d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\Omega$. Comme ci-dessus, pour chaque $x_n$ l'operateur $Q(x_n, y)$ est dans $G(\Omega)$ et toutes ses valeurs propres sont $\geq 1$ et donc à la limite toutes les valeurs propres de $Q(x,y)$ sont $\geq 1$. On en déduit que $Q(x,y)$ est inversible et qu'il appartient à $G(\Omega)$.

$\square$

Posons pour $x, y \in \overline{\Omega}$,

$$x^y := Q(x,y)^{-1}(x + P(x)y). \tag{3.3.2}$$

D'après le lemme précédent l'élément $x^y$ est bien défini. C'est ce qui corréspond à l'élément $-i(ix)^{(iy)}$ dans les notations de LOOS (*cf.* [**70**] et

[**71**]), où $(ix)^{(iy)}$ est ce qu'il appelle le *quasi-inverse* de l'élément $(ix, iy)$ dans la paire de Jordan $(V^{\mathbb{C}}, V^{\mathbb{C}})$.

LEMME II.3.4. — *Soit $x, y \in V$ alors*

(*i*) $P(x)(y \square x) = (x \square y)P(x)$.

(*ii*) *Pour tout entier $k \geq 0$,*

$$P(x)P(y)(x \square y)^k x = (x \square y)^{k+2} x.$$

(*iii*) *Si* $\mathrm{Id} + x \square y$ *est inversible alors*

$$(\mathrm{Id} + x \square y)^{-1}(\mathrm{Id} + 2x \square y + P(x)P(y))(\mathrm{Id} + x \square y)^{-1} x = x.$$

*Démonstration.* — (i) Par un calcul direct, en utilisant les propriétés du triple produit $\{a, b, c\} = P(a, c)b$, on montre que si $x$ et $y$ sont deux éléments de $V$ alors $P(x)(y \square x) = (x \square y)P(x)$.

(ii) Soit $k$ un entier positif et supposons que :

$$(\mathcal{H}R) \qquad P(x)P(y)(x \square y)^k x = (x \square y)^{k+2} x.$$

A l'odre $k + 1$ nous avons

$$\begin{aligned} P(x)P(y)(x \square y)^{k+1} x &= P(x)P(y)(x \square y)(x \square y)^k x \\ &= P(x)(y \square x)P(y)(x \square y)^k x && \text{d'après (i)} \\ &= (x \square y)P(x)P(y)(x \square y)^k x && \text{d'après (i)} \\ &= (x \square y)(x \square y)^{k+2} x && \text{d'après } \mathcal{H}\text{R} \\ &= (x \square y)^{k+3} x. \end{aligned}$$

D'où (ii) puisque $(\mathcal{H}.R)$ est verifiée pour $k = 0$ d'après (i).

(iii) Supposons que $\mathrm{Id} + x \square y$ est inversible, alors $(\mathrm{Id} + x \square y)^{-1} = \sum_o^{+\infty}(-1)^k (x \square y)^k$, par suite en utilisant (ii) nous avons $(\mathrm{Id} + 2x \square y + P(x)P(y))(\mathrm{Id} + x \square y)^{-1} x = (\mathrm{Id} + 2x \square y + P(x)P(y)) \sum_0^{+\infty}(-1)^k (x \square y)^k x =$

$\sum_0^{+\infty}(-1)^k(x\,\square\,y)^k x+2\sum_0^{+\infty}(-1)^k(x\,\square\,y)^{k+1}x+\sum_0^{+\infty}(-1)^k(x\,\square\,y)^{k+2}x =$ $(\mathrm{Id} + x\,\square\,y)x$, d' où (iii).

$\square$

Lemme II.3.5. — *Soient $x, y \in \overline{\Omega}$, alors l'opérateur* $\mathrm{Id} + x\,\square\,y$ *est inversible et $x^y \in \overline{\Omega}$. Plus précisément nous avons*

$$x^y = \widetilde{t}_y(x). \tag{3.5.1}$$

*Démonstration.* — Soit $x, y \in \overline{\Omega}$ alors en procédant comme dans le lemme II.3.3 nous montrons que $\mathrm{Id}+x\,\square\,y$ est inversible. Le reste du lemme découle immédiatement du lemme II.3.4.

$\square$

Lemme II.3.6. — *(i) $G(\Omega)$ normalise $\Gamma^+$ et $\Gamma^-$.*

*(ii) Si $x, y \in \overline{\Omega}$ alors*

$$\widetilde{t}_y \circ t_x = t_{x^y} \circ Q(x,y)^{-1} \circ \widetilde{t}_{y^x}. \tag{3.6.1}$$

*En particuler $\widetilde{t}_y \circ t_x$ appartient à $\Gamma$.*

*Démonstration.* — (i) Il est facile de voir que si $x \in \overline{\Omega}$ et $k \in G(\Omega)$,

$$k \circ t_x \circ k^{-1} = t_{kx} \quad \text{et} \quad k \circ \widetilde{t}_x \circ k^{-1} = \widetilde{t}_{k^{t-1})x}.$$

(ii) Pour montrer l'identité (3.6.1) il suffit de le faire sur le sous-ensemble ouvert dense des éléments $z$ de $V$ tel que $\mathrm{Id} + (x+z)\,\square\,y$ soit inversible. Ceci signifie dans le language de Loos que le couple $(ix+iz, iy)$ est quasi-inversible dans la paire de Jordan $(V_{\mathbb{C}}, V_{\mathbb{C}})$. D'après Loos [**70**] (§3) nous avons la relation suivante, entre les quasi-inverses $(ix+iz)^{(iy)}$, $(ix)^{(iy)}$ et $(iz)^{((iy)^{(ix)})}$,

$$(ix+iz)^{(iy)} = (ix)^{(iy)} + \left(\mathrm{Id} - 2(ix)\,\square\,(iy) + P(ix)P(iy)\right)^{-1}(iz)^{((iy)^{(ix)})}.$$

Nous en déduisons que

$$i((x+z)^y) = i(x^y) + Q(x,y)^{-1}(i(z^{(y^x)})),$$

ou encore

$$(x+z)^y = x^y + Q(x,y)^{-1}(z^{(y^x)}).$$

$\square$

Soit

$$\mathfrak{g}(T_\Omega)_\mathbb{C} = \mathfrak{q}_\mathbb{C}^+ \oplus \mathfrak{h}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{q}_\mathbb{C}^-$$

la complexifiée de la décomposition (2.5.1) et notons $Q_\mathbb{C}^+, H_\mathbb{C}$ et $Q_\mathbb{C}^-$ les sous-groupes analytiques de $G_\mathbb{C}$ correspondant respectivement à $\mathfrak{q}_\mathbb{C}^+, \mathfrak{h}_\mathbb{C}$ et $\mathfrak{q}_\mathbb{C}^-$.

$Q_\mathbb{C}^+ H_\mathbb{C}^o Q_\mathbb{C}^-$ est un ouvert dense dans $G_\mathbb{C}$ et tout élément $g$ de cet ouvert admet une unique décompostion (*décomposition de Harish Chandra*) :

$$g = g_+ h g_-, \tag{3.6.2}$$

où $g_\pm \in Q_\mathbb{C}^\pm$ et $h \in H_\mathbb{C}^o$.

L'action (*isométrique*) de $G$ sur $\mathcal{D}$ est définie par

$$\exp g(z) = (g \exp z)_+ \qquad g \in G(\mathcal{D}), z \in \mathcal{D},$$

où $()_+$ désigne la composante sur $Q_\mathbb{C}^+$.

Pour $(g,z) \in G_\mathbb{C} \times \mathfrak{p}^+$ tel que $g \exp z \in Q_\mathbb{C}^+ H_\mathbb{C}^o Q_\mathbb{C}^-$ on définit $g(z) \in \mathfrak{q}_\mathbb{C}^+$ par $\exp g(z) = (g \cdot \exp z)_+$.

Lorsque $g \exp z \in Q_\mathbb{C}^+ H_\mathbb{C}^o Q_\mathbb{C}^-$ on dira que l'*action holomorphe* $g(z)$ est définie.

LEMME II.3.7. — *Nous avons*

$$Q_{\mathbb{C}}^{\pm} \cap {}^cG = Q^{\pm},$$
$$H_{\mathbb{C}}^{o} \cap {}^cG = G(\Omega).$$

REMARQUES II.3.8. — 1) Si $x$ et $y$ sont deux idempotents orthogonaux de $V$, alors $t_x$ et $\widetilde{t}_y$ commutent, ceci est une conséquence du lemme II.3.6.

2) Nous savons, voir par exemple [**22**], [**101**] ou [**86**] que $G \subset Q_{\mathbb{C}}^{+} H_{\mathbb{C}}^{o} Q_{\mathbb{C}}^{-}$, mais ${}^cG$ n'est pas en général une partie de $Q_{\mathbb{C}}^{+} H_{\mathbb{C}}^{o} Q_{\mathbb{C}}^{-}$. C'est le cas, par exemple, de $\mathrm{PSU}(1,1)$ et $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Toutefois nous avons le

LEMME II.3.9. — *On a*

$$\Gamma \subset Q_{\mathbb{C}}^{+} H_{\mathbb{C}}^{o} Q_{\mathbb{C}}^{-}.$$

*Démonstration.* — Soit $g$ un élément de $\Gamma$, donc $z := g(0)$ est dans $\overline{\Omega} \subset \mathfrak{q}_{\mathbb{C}}^{+}$. Comme $Q_{\mathbb{C}}^{+}$ opère sur $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}^{+}$ par des translations, $(\exp(-z)g)(0) = \exp(-z)(z) = -z + z = 0$, donc $\exp(-z)g$ stabilise 0. Or le stabilisateur de 0 dans $G_{\mathbb{C}}$ est $H_{\mathbb{C}}^{o} Q_{\mathbb{C}}^{-}$, nous en déduisons alors que $g \in Q_{\mathbb{C}}^{+} K_{\mathbb{C}}^{o} Q_{\mathbb{C}}^{-}$.

□

THÉORÈME II.3.10. — *$\Gamma$ est un semi-groupe fermé de ${}^cG$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(*i*) $\Gamma = \Gamma^{+} G(\Omega) \Gamma^{-}$.

(*ii*) $\Gamma \cap \Gamma^{-1} = G(\Omega)$.

*Démonstration.* — (i) Il est clair que $\Gamma^{+} G(\Omega) \Gamma^{-} \subset \Gamma$.

Soit inversement $g$ un élément de $\Gamma$. D'après lemme II.3.9 et (3.6.2), $g$ se décompose sous la forme

$$g = g_{+} h g_{-}, \quad \text{où} \quad g_{\pm} \in Q_{\mathbb{C}}^{\pm} \quad \text{et} \quad h \in H_{\mathbb{C}}^{o}.$$

Il existe $v \in \mathfrak{q}_{\mathbb{C}}^{+}$ tel que $g_+ = \exp(v) = t_v$. Or $0 \in \overline{\Omega}$, donc $g \cdot 0 \in \overline{\Omega}$, par suite

$$\begin{aligned} g \cdot 0 &= (g_+ k g_-) \cdot 0 \\ &= g_+((kg_-) \cdot 0) \\ &= g_+ \cdot 0 \qquad\qquad \text{car} \quad hg_- \in H_{\mathbb{C}}^{o} Q_{\mathbb{C}}^{-} \\ &= v. \end{aligned}$$

Donc necéssairement $v \in \overline{\Omega}$, d'où $g_+ \in \Gamma^+$.

Nous avons $\tau(Q_{\mathbb{C}}^{\pm}) = Q_{\mathbb{C}}^{\pm}$ et $\tau(H_{\mathbb{C}}^{o}) = H_{\mathbb{C}}^{o}$, on en déduit que

$$\tau(t_v h g_-) = \tau(g) = g = t_v h g_-,$$

donc

$$t_v \tau(h) \tau(g_-) = t_v h g_-,$$

ou encore

$$\tau(h)\tau(g_-) = hg_-.$$

Et d'après l'unicité de la décomposition de l'élément $hg_-$, on a

$$\tau(h) = h \qquad \text{et} \qquad \tau(g_-) = g_-,$$

c-à-d

$$g_- \in Q_{\mathbb{C}}^{-} \cap {}^{c}G = Q^-,$$

et

$$h \in H_{\mathbb{C}}^{o} \cap {}^{c}G = G(\Omega).$$

Ainsi $h$ appartient à $G(\Omega)$ et $g_-$ appartient à $Q^-$, c-à-d, $g_- = \widetilde{t}_w$ où $w \in V$.

Montrons maintenant que $w \in \overline{\Omega}$. Il existe dans $V$ un système complet d'idempotents primitifs $\{c_1, \cdots, c_r\}$ et des réels $\lambda_1, \cdots \lambda_r$ tel que $w = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j c_j$ (*cf.* 3.1.7, chapitre 1 ). Supposons que $w \notin \overline{\Omega}$, nous pouvons alors supposer (par exemple) que $\lambda_1 < 0$.

Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t > -\frac{1}{\lambda_1}$. L'opérateur

$$\mathrm{Id} + tc_1 \square w = L(e + t\lambda_1 c_1)$$

est diagonalisable et ses valeurs propres $(1 + t\lambda_1, 1, \cdots, 1)$ ne sont pas nulles, il est donc inversible et

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id} + tc_1 \square w)^{-1}(tc_1) &= L(e + t\lambda_1 c_1)^{-1}(tc_1) \\ &= \frac{t}{1 + t\lambda_1} c_1.\end{aligned}$$

Comme $tc_1 \in \overline{\Omega}$, nous avons $g(tc_1) \in \overline{\Omega}$, mais

$$\begin{aligned}g(tc_1) &= t_v \circ h \circ \widetilde{t}_w(tc_1) \\ &= h((\mathrm{Id} + tc_1 \square w)^{-1}(tc_1)) + v \\ &= h(\frac{t}{1 + t\lambda_1} c_1) + v \\ &= h(\frac{t}{1 + t\lambda_1} c_1 + h^{-1}v),\end{aligned}$$

donc forcément $\frac{t}{1 + t\lambda_1} c_1 + h^{-1}v \in \overline{\Omega}$. Par suite nous devons avoir

$$\langle (\frac{t}{1 + t\lambda_1} c_1 + h^{-1}v) y, y \rangle \geq 0$$

pour tout $y \in V$ et en particulier pour $y = c_1$, donc

$$\begin{aligned}\langle (\frac{t}{1 + t\lambda_1} c_1 + h^{-1}v) c_1, c_1 \rangle &= \langle (\frac{t}{1 + t\lambda_1}) c_1, c_1 \rangle + \langle (h^{-1}v) c_1, c_1 \rangle \\ &= \frac{t}{1 + t\lambda_1} \langle c_1, c_1 \rangle + \langle (h^{-1}v) c_1, c_1 \rangle \geq 0.\end{aligned}$$

Comme $\langle (h^{-1}v) c_1, c_1 \rangle \geq 0$ car $h^{-1}v \in \overline{\Omega}$, et $\langle c_1, c_1 \rangle = \mathrm{tr}(c_1) = 1$ (*cf.* 2.2.5 , chapitre 1), nous avons $\frac{t}{1 + t\lambda_1} \geq 0$. En faisant $t \longrightarrow -\frac{1}{\lambda_1}$, $\frac{t}{1 + \lambda_1} \longrightarrow -\infty$, ce qui est absurde. Par suite $w \in \overline{\Omega}$ d'où (i) .

(ii) Soit $g \in \Gamma \cap \Gamma^{-1}$. D'après (i) il existe $x, y, v, w \in \overline{\Omega}$ et $h, k \in G(\Omega)$ tel que

$$g = t_v \circ k \circ \widetilde{t}_w = \widetilde{t}_{-y} \circ h \circ t_{-x}.$$

Comme dans le lemme II.3.6, nous montrons en posant $-y = b$ et $-x = a$, que

$$\begin{aligned} \widetilde{t}_b \circ h \circ t_a &= h \circ \widetilde{t}_{h^t b} \circ t_a \\ &= h \circ t_{a^d} \circ Q(a,d)^{-1} \circ \widetilde{t}_{d^a} \\ &= t_{ha^d} \circ h \circ Q(a,d)^{-1} \circ \widetilde{t}_{d^a} \end{aligned}$$

où $d = {}^t h b$, donc d'après l'unicité de la décomposition $Q^+_{\mathbb{C}} H^o_{\mathbb{C}} Q^-_{\mathbb{C}}$ nous avons

$$ha^d = v, \quad h \circ Q(a,d)^{-1} = k, \quad \text{et} \quad d^a = w.$$

D'après le lemme II.3.4, $ha^d$ et $d^a$ sont dans $-\overline{\Omega}$, donc $v, w \in \overline{\Omega} \cap -\overline{\Omega} = \{0\}$ et par suite $g = k$, d'où (ii).

□

**II.4. Contractions.** — Sur $\Omega$ on définit une métrique riemannienne en posant

$$\left(u|v\right)_x = \langle P(x)^{-1}u, v\rangle \tag{4.1.1}$$

où $x \in \Omega$ et $u, v$ sont des éléments de $V$ considéré comme l'espace tangent à $\Omega$ au point $x$. Remarquons que cette métrique est invariante par $G(\Omega)$.

PROPOSITION II.4.1. — *Les éléments du semi-groupe $\Gamma$ sont des contractions pour la métrique (4.1.1).*

*Démonstration.* — Soit $v \in \Omega$ et montrons que

$$\begin{aligned} t_v : \Omega &\longrightarrow \Omega \\ x &\longmapsto x + v \end{aligned}$$

est une contraction pour la métrique (4.1.1). Pour cela il suffit de démontrer que sa différentielle

$$D(t_v)x : T_x(\Omega) \longrightarrow T_{x+v}(\Omega)$$

vérifie $\|D(t_v)x\| < 1$. Comme $D(t_v)x = \mathrm{Id}$ et que $T_x(\Omega) = T_{x+v}(\Omega) = V$, ceci revient à démontrer que

$$\left(w|w\right)_{x+v} < \left(w|w\right)_x \qquad \forall w \in V \setminus \{0\}.$$

Soit alors $w \in V$, nous avons

$$\left(w|w\right)_{x+v} - \left(w|w\right)_x = \langle (P(x+v)^{-1} - P(x)^{-1})w, w\rangle.$$

Or il existe $g \in G(\Omega)$ et $y \in \Omega$ tel que $g(e) = v$ et $g(y) = x$, donc

$$\begin{aligned} P(x+v)^{-1} - P(x)^{-1} &= P(g(y+e))^{-1} - P(g(y))^{-1} \\ &= g^{t^{-1}}(P(y+e)^{-1} - P(y)^{-1})g^{-1}, \end{aligned}$$

car g $\in \mathrm{Str}(V)$. Par ailleurs, il existe un système complet d'idempotents primitifs $\{c_1, \cdots, c_r\}$ de $V$ et des réels $\lambda_j > 0$ pour tout $j = 1, \cdots, r$ tel que $y = \sum_{j=1}^r \lambda_j c_j$ . Par rapport à ce système $V$ se décompose (décomposition de Peirce *cf.* 3.4 chapitre 1) sous la forme

$$V = (\oplus_{j=1}^r \mathbb{R}c_j) \oplus (\oplus_{j<k} V_{jk}).$$

L'opérateur $P(y+e)^{-1} - P(y)^{-1}$ est diagonalisable et ses valeurs propres suivant les sous espaces $V_{jk}$ $(i \leq j)$ sont données par le tableau suivant

| | $\mathbb{R}c_i$ | $V_{jk}$ |
|---|---|---|
| $P(y+e)^{-1} - P(y)^{-1}$ | $(\frac{1}{\lambda_i+1})^2 - (\frac{1}{\lambda_i})^2$ | $\frac{1}{(\lambda_j+1)(\lambda_k+1)} - \frac{1}{\lambda_j\lambda_k}$ |

Puisque ces valeurs propres sont strictement négatives, $P(y+e)^{-1}-P(y)^{-1}$ est défini négatif, et par suite $P(x+v)^{-1}-P(x)^{-1}$ est défini négatif. Ainsi $t_v$ est une contraction stricte pour la métrique (4.1.1), ou encore

$$\big(D(t_v)w_1|D(t_v)w_2\big)_{v+x} < \big(w_1|w_2\big)_x,$$

pour tout $x \in \Omega$ et tout $w_1, w_2 \in V$.

Nous en déduisons que si $v$ est un élément de $\overline{\Omega}$ alors

$$\big(D(t_v)w_1|D(t_v)w_2\big)_{v+x} \leq \big(w_1|w_2\big)_x, \tag{4.1.2}$$

pour tout $x \in \Omega$ et tout $w_1, w_2 \in V$.

D'autre part, si $x \in \Omega$ alors $j(x) = x^{-1}$, et comme $D(x^{-1})v = -P(x)^{-1}v$, donc

$$\begin{aligned}\big(-P(x)^{-1}u|-P(x)^{-1}v\big)_{x^{-1}} &= \langle u, P(x)^{-1}v\rangle \\ &= \langle P(x)^{-1}u, v\rangle \\ &= \big(u|v\big)_x .\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Nous en déduisons grace à (3.1.2), (4.1.2) et (4.1.3) que si $v \in \overline{\Omega}$, alors

$$\big(D(\widetilde{t}_w)w_1|D(\widetilde{t}_w)w_2\big)_{\widetilde{t}_w(x)} \leq \big(w_1|w_2\big)_x,$$

pour tout $x \in \Omega$ et $w_1, w_2 \in V$. Comme la métrique $(\cdot|\cdot)_x$ est invariante par $G(\Omega)$ nous avons pour tout $g \in \Gamma$ et tout $x \in \Omega$

$$\big(D(g)u|D(g)v\big)_{g(x)} \leq \big(u|v\big)_x \qquad \forall u, v \in V.$$

$\square$

Remarque II.4.2. — Posons

$$\Gamma_1 = \{t_v h\widetilde{t}_w \ \mid \ h \in G(\Omega), v \in \Omega, w \in \overline{\Omega}\} \quad \text{et}$$

$$\Gamma_2 = \{t_v h\widetilde{t}_w \ \mid \ h \in G(\Omega), v \in \overline{\Omega}, w \in \Omega\}.$$

D'après le lemme II.3.6, $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ et $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sont des sous semi-groupes de $\Gamma$ et nous avons, pour tout $g \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ et tout $x \in \Omega$,

$$\big(D(g)u|D(g)v\big)_{g(x)} < \big(u|v\big)_x \qquad \forall u, v \in V.$$

# CHAPITRE III

## RELATION AVEC LE SEMI-GROUPE D' OL'SHANSKII

# CHAPITRE 3

## LIEN DE $\Gamma$ AVEC LE SEMI–GROUPE D' OL'SHANSKIĬ

RÉSUMÉ. — Nous reprenons, pour le domaine tube "droit" $iV + \Omega$ la même étude faite dans le chapitre II pour le domaine tube "supérieur" $V + i\Omega$. Nous explicitons ensuite, en termes d'algèbre de Jordan, la conjugaison de $G_{\mathbb{C}}$ par rapport au groupe d'automorphismes holomorphes de ce domaine. Nous montrons après que le semi-groupe $\Gamma$ vérifie la décomposition d' Ol'shanskiĭ et que c'est une forme réelle du semi-groupe holomorphe d' Ol'shanskiĭ associé au domaine borné $\mathcal{D}$.

**III.1. Le demi-plan droit $R_\Omega$.** — Nous reprenons ici les mêmes hypothèses du chapitre 2.

Soit $V$ une algèbre de Jordan Euclidienne de dimension $n$ de rang $r$ et $\Omega$ le cône symétrique associé. Notons $R_\Omega$ le domaine suivant

$$R_\Omega = iV + \Omega.$$

Pour étudier ce domaine nous allons suivre exactement la même démarche que pour le domaine $T_\Omega$ avec quelques modifications necéssaires.

Si $g \in G(\Omega)$ et $v \in V$, alors la transformation

$$z \longmapsto gz + iv$$

est un automorphisme holomorphe de $R_\Omega$, et le groupe de ces transformations opère transitivement sur $R_\Omega$.

Si $z \in R_\Omega$ alors $-iz \in T_\Omega$, donc $-iz$ est inversible (dans $V^{\mathbb{C}}$), et par suite $z$ est inversible.

L'application

$$z \longmapsto z^{-1}$$

est un automorphisme involutif holomorphe de $R_\Omega$, dont e est l'unique point fixe. D'où la

PROPOSITION III.1.1. — *$R_\Omega$ est un domaine symétrique.*

Posons

$$D(p') := \{z \in V^{\mathbb{C}} \mid z + e \text{ est inversible}\}$$

$$D(c') := \{z \in V^{\mathbb{C}} \mid e - z \text{ est inversible}\},$$

et, pour tout $z \in D(p')$, $w \in D(c')$,

$$p'(z) = (z - e)(z + e)^{-1}$$

$$c'(w) = (e + w)(e - w)^{-1}.$$

Nous avons

$$D(c') = D(c)$$

où $c$ est la transformée de Cayley associée au domaine $T_\Omega$ et

$$c = ic'.$$

L'application $p'$ est une bijection holomorphe de $D(p')$ sur $D(c')$, d'inverse l'application $c'$, et nous avons

$$p'(R_\Omega) = \mathcal{D},$$

où $\mathcal{D}$ est le domaine borné associé à $T_\Omega$ ( réalisation bornée de HARISH-CHANDRA de $T_\Omega$ ) introduit au chapitre 2.

Soit $G(R_\Omega)$ le groupe d'automorphismes holomorphes de $R_\Omega$ et soit ${}^{c'}G$ sa composante connexe neutre . Alors ${}^{c'}G$ est un groupe de Lie réel et nous avons

$$ {}^{c'}G = c' G {c'}^{-1}, \tag{1.1.1}$$

où $G$ est la composante neutre du groupe d'automorphismes holomorphes du domaine $\mathcal{D}$.

Notons $\mathfrak{g}(R_\Omega)$ l'algèbre de Lie de ${}^{c'}G$.

LEMME III.1.2. — *La conjugaison de $G_\mathbb{C}$ par rapport à la forme réelle ${}^{c'}G$ est donne par*

$$\eta(g) := \mathrm{int}({}^{c'}j)(g) = {}^{c'}j \circ g \circ {}^{c'}j,$$

*où ${}^{c'}j$ est definie par ${}^{c'}j(z) = -\overline{z}$.*

*Démonstration.* — Dans le chapitre II, proposition II.2.6, nous avons montré que la conjugaison de $G_\mathbb{C}$ par rapport à $G$ est donnée par $\sigma = \mathrm{int}(j)$, où $j(z) = \overline{z}^{-1}$. D'après (1.1.1) la conjugaison de $G_\mathbb{C}$ par rapport à ${}^{c'}G$ est donc $\eta(g) = {c'}^{-1} \circ j \circ c' \circ g \circ {c'}^{-1} \circ j \circ c'$. Par suite pour terminer la démonstration du lemme il suffit de remarquer que

$${c'}^{-1} \circ j \circ c' \circ (z) = -\overline{z} = {}^{c'}j(z).$$

$\square$

LEMME III.1.3. — *Nous avons*

$$\mathfrak{h} := \mathfrak{g}(T_\Omega)^\eta = \mathfrak{g}(\Omega),$$

et
$$\mathfrak{q} := \mathfrak{g}(T_\Omega)^{-\eta} = (\mathfrak{g}(T_\Omega))_{-1} \oplus (\mathfrak{g}(T_\Omega))_1.$$

*Démonstration.* — Comme pour le domaine $T_\Omega$ on montre que $G(R_\Omega)$ est engendré par $G(\Omega)$, ${}^{c\prime}Q^+ := \{t_{iv} \mid v \in V\}$ et l'application $z \longmapsto z^{-1}$ et que $iu\frac{\partial}{\partial z}$, $Tz\frac{\partial}{\partial z}$ et $P(z)iv\frac{\partial}{\partial z}$ sont des champs de vecteurs holomorphes correspondants aux sous-groupes à un paramètre sur $R_\Omega$ :

$$z \longmapsto z + tiu,$$
$$z \longmapsto \exp(tT)z,$$
$$z \longmapsto \left(z^{-1} + tiv\right)^{-1},$$

où $T \in \mathfrak{g}(\Omega)$ et $u, v \in V$. On en déduit que

$$\mathfrak{g}(R_\Omega) = i\mathfrak{g}(T_\Omega)_{-1} \oplus \mathfrak{g}(\Omega) \oplus i\mathfrak{g}(T_\Omega)_1. \tag{1.3.1}$$

Donc

$$\mathfrak{g}(T_\Omega)^\eta = \mathfrak{g}(T_\Omega) \cap \mathfrak{g}(R_\Omega) = \mathfrak{g}(\Omega),$$

et par définition de $\eta$,

$$\mathfrak{g}(T_\Omega)^{-\eta} = (\mathfrak{g}(T_\Omega))_{-1} \oplus (\mathfrak{g}(T_\Omega))_1.$$

□

REMARQUE III.1.4. — Nous avons

$$\mathfrak{g}(R_\Omega) = \mathfrak{h} \oplus i\mathfrak{q}, \tag{1.3.2}$$

$\mathfrak{g}(R_\Omega)$ est alors le c-dual de $\mathfrak{g}(T_\Omega)$.

EXEMPLE III.1.5. — Reprenons l'exemple de l'algèbre de Jordan à une dimension $V = \mathbb{R}$ (*cf.* II.2.7). Dans ce cas $R_\Omega = \{ix + y \mid y > 0\}$, $c'$ est représentée par la matrice

$$c' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G(R_\Omega) = \{ \begin{pmatrix} a & ib \\ ic & d \end{pmatrix} \mid ad + bc = 1\},$$

et la conjugaison $\eta$ est telle que, si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \eta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= {}^{c'}\!j_o \circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ {}^{c'}\!j_o \\ &= \begin{pmatrix} \overline{a} & -\overline{b} \\ -\overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où ${}^{c'}\!j_o$ est l'application définie sur $\mathbb{C}$ par ${}^{c'}\!j_o(z) = -\overline{z}$.

La restriction de $\eta$ à $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ est donnée par

$$\begin{aligned} \eta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= \mathbb{R} H_1, \\ \mathfrak{q}^+ &= \mathbb{R} E_1, \\ \mathfrak{q}^+ &= \mathbb{R} E_{-1}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} H_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ E_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E_{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On remarque ici, en posant $T = \frac{1}{2}H_1$ et $X_0 = \frac{1}{2}(E_1 + E_{-1})$, que :

1) $\eta = \mathrm{Ad}(\exp(i\pi T))$,

2) $\eta$ est *de type Cayley, i.e.* que $\eta = \mathtt{C}^2$ où $\mathtt{C}$ est la transformée de Cayley définie par $\mathtt{C} = \mathrm{Ad}(\exp(\frac{i\pi}{2}X_0))$.

3) $\mathrm{ad}(T)$ a pour valeurs propres 0 et $\pm 1$,

$$\mathfrak{q}^{\pm} = \{X \in \mathrm{sl}(2, \mathbb{R}) \mid [T, X] = \pm X\},$$

et $T$ est le générateur de centre (à une dimension) de $\mathfrak{h}$.

$(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}), \eta)$ est donc un *espace symétrique de type Cayley.* Ces espaces sont introduits par Ólafsson et Ørsted (*cf.* [**33**], [**86**], [**87**], [**88**], [**90**] et [**91**]).

En utilisant la théorie des racines fortements orthogonales et par sl(2)-réduction on montre que les propriétés 1), 2), et 3) sont vraies pour la paire symétrique $(\mathfrak{g}(T_\Omega), \eta)$, voir pour cela [**33**], [**86**] ou [**91**]. Autrement dit $(\mathfrak{g}(T_\Omega), \eta)$ est un espace symétrique de type Cayley.

**III.2. Décomposition d' Ol'shanskiĭ du semi-groupe** $\Gamma$. — Soit $\mathfrak{l}$ une algèbre de Lie réelle simple hermitienne, et soit $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ l'algèbre complexifiée

$$\mathfrak{l}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{l} \oplus i\mathfrak{l}.$$

Soit $L_{\mathbb{C}}$ un groupe de Lie complexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$. Notons $\mu$ la conjugaison de $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ relativement à $\mathfrak{l}$ et soit $L$ un sous-groupe fermé de $L_{\mathbb{C}}$ tel que $(L_\mu)_o \subset L \subset L_\mu$.

Soit $W_o$ un cône convexe fermé propre et d'interieur non vide dans $\mathfrak{l}$ qui soit invariant par $\mathrm{Ad}(L)$, alors $W = iW_0$ est un cône convexe fermé dans $i\mathfrak{l}$ invariant par $\mathrm{Ad}(L)$.

Théorème III.2.1. — ( *Ol'shanskiĭ* )

(*i*) *Supposons que* $L$ *et* $L_{\mathbb{C}}$ *sont connexes, alors* $S = \exp(W)L$ *est un semi-groupe fermé de* $L_{\mathbb{C}}$ *tel que* $S \cap S^{-1} = L$.

*(ii) L'application* Exp *de* $i\mathfrak{l}$ *dans* $L_{\mathbb{C}}/L$, *définie par*

$$\mathrm{Exp}(X) = \exp(X)L$$

*est un difféomorphisme de* $W$ *sur* $\mathrm{Exp}(W)$.

*Démonstration.* — (*cf.* [**92**]).

DÉFINITION III.2.2. — La décomposition $S = \exp(W)L$ est appelée *décomposition d'Ol'shanskiĭ* du semi-groupe $S$.

Reprenons à présent les hypothèses et les notations de III.1, on a alors :

THÉORÈME III.2.3. — (*Ólafsson*)
*Si* $C_0$ *est un cône convexe fermé dans* $\mathfrak{q}$ *invariant par* $\mathrm{Ad}(G(\Omega))$ *alors :*

(*i*) $S = G(\Omega)\exp(C_0)$ *est un semi-groupe fermé de* ${}^cG$.

(*ii*) *L'application* Exp *de* $C_0 \times G(\Omega)$ *dans* ${}^cG$ *définie par*

$$\mathrm{Exp}(X, g) = \exp(X)g$$

*est un homéomorphisme de* $C_o \times G(\Omega)$ *sur* $S$.

*Démonstration.* — (*cf.* [**86**]).

Posons

$$C = \overline{\Omega} + \sigma(\overline{\Omega}).$$

$C$ est un cône convexe fermé dans $\mathfrak{q}$ et invariant par $\mathrm{Ad}(G(\Omega))$. Notons exp l'application exponentielle définie de $\mathfrak{g}(T_\Omega)$ dans $G(T_\Omega)$.

THÉORÈME III.2.4. — $\Gamma$ *est un semi-groupe de Lie vérifiant la décomposition d'Ol'shanskiĭ. Plus précisément :*

$$\Gamma = G(\Omega)\exp(C). \tag{2.4.1}$$

*Démonstration.* — D'après le théorème III.2.3, $G(\Omega)\exp(C)$ est un semi-groupe, donc $\Gamma \subset G(\Omega)\exp(C)$. Pour montrer l'inclusion réciproque il suffit de montrer que $\exp(C) \subset \Gamma$. Supposons démontré que pour tout $v \in \Omega$, $\exp(e + \sigma(v)) \in \Gamma$. Comme $G(\Omega)$ est transitif sur $\Omega$ et que l'action de $G(\Omega)$ sur $\mathfrak{q}$ est l'action adjointe, $\exp(u + \sigma(v)) \in \Gamma$ pour tout $u, v \in \Omega$. Puisque le semi-groupe $\Gamma$ est fermé nous avons $\exp(C) \subset \Gamma$, et par suite $G(\Omega)\exp(C) \subset \Gamma$. Pour $z, w \in V$ soit l'opérateur

$$B(z, w) = \mathrm{Id} - 2z\,\square\, w + P(z)P(w).$$

---

La démonstration du théorème III.2.4 s'achève par le lemme suivant :

LEMME III.2.5. — *Soit $v \in \Omega$, et soit $v = \sum_{k=1}^{r} \mu_k c_k$ sa décomposition spectrale, alors*

$$\begin{aligned}\exp(e + \sigma(v)) &= t_{v^{-\frac{1}{2}}\tanh v^{\frac{1}{2}}} \circ B(\tanh v^{\frac{1}{2}}, \tanh v^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \circ \widetilde{t}_{v^{\frac{1}{2}}\tanh v^{\frac{1}{2}}} \\ &\in \Gamma^+ G(\Omega)\Gamma^-\end{aligned}$$

*où* $\tanh v^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{r}(\tanh\sqrt{\mu_k})c_k$, $v^{\frac{1}{2}}\tanh v^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{r}(\sqrt{\mu_k}\tanh\sqrt{\mu_k})c_k$ *et* $v^{-\frac{1}{2}}\tanh v^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{r}(\frac{1}{\sqrt{\mu_k}}\tanh\sqrt{\mu_k})c_k$.

*Démonstration.* — Soit $v \in \Omega$, il existe un système complet d'idempotents primitifs $\{c_1, \cdots, c_r\}$ et des réels $\mu_k > 0$ tel que $v = \sum_{k=1}^{r}\mu_k c_k$. Pour chaque $k \in \{1, \cdots, r\}$ on définit l'homomorphisme

$$f_k : \quad \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \ {}^cG$$

par

$$\begin{aligned} f_k \quad \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\longmapsto \quad t_{\alpha c_k} = \exp(\alpha c_k) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} &\longmapsto \quad \widetilde{t}_{\alpha c_k} = j \circ t_{\alpha c_k} \circ j = \exp(\sigma(\alpha c_k)) \\ \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} &\longmapsto \quad B(c_k, (1-\mu)c_k), \end{aligned}$$

Nous avons, pour tout $k = 1, \cdots, r$

$$\begin{aligned}
\exp(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu_k & 0 \end{pmatrix}) &= \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\sqrt{\mu}_k & \frac{1}{\sqrt{\mu}_k}\mathrm{sh}\sqrt{\mu}_k \\ \sqrt{\mu}_k \mathrm{sh}\sqrt{\mu}_k & \mathrm{ch}\sqrt{\mu}_k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{\mu}_k}\tanh\sqrt{\mu}_k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{ch}\sqrt{\mu}_k} & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}\sqrt{\mu}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{\mu}_k \tanh\sqrt{\mu}_k & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En appliquons l'homomorphisme $f_k$ nous avons alors

$$\exp(c_k + \sigma(\mu_k c_k)) = t_{(\frac{1}{\sqrt{\mu}_k}\tanh\sqrt{\mu}_k)c_k} \circ B(c_k, (1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\sqrt{\mu}_k})c_k) \circ \widetilde{t}_{(\sqrt{\mu}_k \tanh\sqrt{\mu}_k)c_k}.$$

Lemme III.2.6. — *Pour tout $\mu \in \mathbb{R}$ et tout idempotent $c \in V$, nous avons*

$$B(c, (1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\mu})c)^2 = B((\tanh\mu)c, (\tanh\mu)c).$$

*Démonstration.* — En effet $B(c, (1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\mu})c)^2 = \mathrm{Id} - 4(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\mu})L(c) + 4(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\mu})^2 L^2(c) + 2(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\mu})^2 P(c) - 2(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\mu})^3 L(c)P(c) - 2(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\mu})^3 P(c)L(c) + (1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\mu})^4 P(c)$. Or $L(c)P(c) = P(c)L(c)$, et en appliquant la formule "*magique*" de $V$, *i.e.*

$$L(x^2 y) - L(x^2)L(y) = 2\{L(xy) - L(x)L(y)\}L(x)$$

(*cf.* [**3**], [**13**] ou [**16**]) à $x = y = c$, nous avons $P(c)L(c) = P(c)$. Donc, en écrivant $2L^2(c) = P(c) + L(c)$, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
B(c, (1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\mu})c)^2 &= \mathrm{Id} - 2(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}^2\mu})L(c) \\
&\quad + \left[4(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\mu})^2 - 4(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\mu})^3 + (1 - \frac{1}{\mathrm{ch}\mu})^4\right] P(c) \\
&= \mathrm{Id} - 2(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}^2\mu})L(c) + (1 - \frac{1}{\mathrm{ch}^2\mu})^2 P(c) \\
&= \mathrm{Id} - 2(\tanh^2\mu)L(c) + (\tanh^4\mu)P(c) \\
&= B((\tanh\mu)c, (\tanh\mu)c).
\end{aligned}$$

De plus l'opérateur symétrique $B(c,(1-\frac{1}{\operatorname{ch}_\mu})c)$ est positif, pour le voir il suffit de calculer ses valeurs propres dans la décomposition de Peirce par rapport à l'idempotent $c$, d'où le lemme III.2.6. $\square$

Ainsi, pour tout $j = 1, \cdots, r$, nous avons

$$\exp(c_k+\sigma(\mu_k c_k)) = t_{(\frac{1}{\sqrt{\mu}_k}\tanh\sqrt{\mu}_k)c_k} \circ B((\tanh\sqrt{\mu}_k)c_k,(\tanh\sqrt{\mu}_k)c_k)^{\frac{1}{2}} \circ \widetilde{t}_{(\sqrt{\mu}_k\tanh\sqrt{\mu}_k)c_k}.$$

Comme les idempotents $c_k$ sont deux à deux orthogonaux, les homomorphismes $f_k$ commutent, donc

$$\exp(e+\sigma(v)) = t_{v^{-\frac{1}{2}}\tanh v^{\frac{1}{2}}} \circ B(\tanh v^{\frac{1}{2}},\tanh v^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \circ \widetilde{t}_{v^{\frac{1}{2}}\tanh v^{\frac{1}{2}}}.$$

D'autre part les éléments $v^{-\frac{1}{2}}\tanh v^{\frac{1}{2}}$ et $v^{\frac{1}{2}}\tanh v^{\frac{1}{2}}$ sont dans $\Omega$. Nous en déduisons que $t_{v^{-\frac{1}{2}}\tanh v^{\frac{1}{2}}}$ et $\widetilde{t}_{v^{\frac{1}{2}}\tanh v^{\frac{1}{2}}}$ appartiennent respectivement à $\Gamma^+$ et $\Gamma^-$. De plus, $B(\tanh v^{\frac{1}{2}},\tanh v^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = P((e-\tanh v)^{\frac{1}{2}})$, donc c'est un élément de $G(\Omega)$ puisque $(e-\tanh v)$ appartient à $\Omega$.

$\square$

**III.3. Forme réelle du semi-groupe d' Ol'shanskiĭ.** — Notons $\mathrm{Cone}_{G(\Omega)}(\mathfrak{q})$ l'ensemble des cônes convexes, fermés, générateurs dans $\mathfrak{q}$ qui sont invariants par $\mathrm{Ad}(G(\Omega))$. D'après le théorème de Kostant-Vinberg, (*cf.* [**86**], [**92**] ou [**96**]), il existe un unique cône (à un signe près) $C_{\min}$ et un unique cône (à un signe près) $C_{\max}$ dans $\mathrm{Cone}_{G(\Omega)}(\mathfrak{q})$ tel que

$$C_{\min} \subset W \subset C_{\max},$$

pour tout cône $W$ dans $\mathrm{Cone}_{G(\Omega)}(\mathfrak{q})$. De plus

$$C^*_{\min} = C_{\max}.$$

D'après ØLAFSSON [**86**], nous avons les propriétés suivantes :

1) $\overline{\Omega}$ est (à un signe près) le seul cône convexe, fermé, propre et générateur de $\mathfrak{q}^+$, invariant par $\mathrm{Ad}(G(\Omega))$.

2) Les seuls cônes convexes, fermés propres et générateurs de $\mathfrak{q}$ qui sont invariants par $\mathrm{Ad}(G(\Omega))$ sont :

$$C_{\mathfrak{k}}, \quad -C_{\mathfrak{k}}, \quad C_{\mathfrak{p}}, \quad -C_{\mathfrak{p}},$$

où

$$C_{\mathfrak{k}} = \overline{\Omega} + \theta(\overline{\Omega})$$
$$C_{\mathfrak{p}} = \overline{\Omega} - \theta(\overline{\Omega}),$$

Ainsi

$$\mathrm{Cone}_{G(\Omega)}(\mathfrak{q}) = \{C_{\mathfrak{p}}, -C_{\mathfrak{p}}, C_{\mathfrak{k}}, -C_{\mathfrak{k}}\}.$$

De plus $C_{\mathfrak{p}}^{o} \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$ et $C_{\mathfrak{k}}^{o} \cap \mathfrak{k} \neq \emptyset$.

3) Si $W \in \mathrm{Cone}_{G(\Omega),\mathfrak{p}}(\mathfrak{q})$ alors $\overline{\mathrm{conv}(\mathrm{Ad}({}^{c}G)W)} \in \mathrm{Cone}_{{}^{c}G}(\mathfrak{g}(R_{\Omega}))$, où $\mathrm{Cone}_{G(\Omega),\mathfrak{p}}(\mathfrak{q})$ désigne l'ensemble des cônes $W$ de $\mathrm{Cone}_{G(\Omega)}(\mathfrak{q})$ tel que $W^{o} \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$.

Donc

$$\mathrm{Cone}_{G(\Omega),\mathfrak{p}}(\mathfrak{q}) = \{C_{p}, -C_{p}\}.$$

Par sl(2)-réduction, nous avons $\sigma(X) = -\theta(X)$, pout tout $X \in \mathfrak{q}^{+}$.

Donc $C_{\mathfrak{p}} = C := \overline{\Omega} + \sigma(\overline{\Omega})$ et c'est le cône maximal $C_{\mathrm{max}}$ de $\mathrm{Cone}_{G(\Omega),\mathfrak{p}}(\mathfrak{q})$.

THÉORÈME III.3.1. — ( *Ol'shanskiĭ* )

*Soit* $W$ *un cône convexe genérateur de* $i\mathfrak{q}$ *invariant par* $\mathrm{Ad}(G(\Omega))$ *tel que* $W^{o} \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$, *et soit* $\mathcal{W} = \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{Ad}({}^{c}G)(W))}$, *alors*

$$G(R_{\Omega}) \exp(\mathcal{W}) = \exp(\mathcal{W}) G(R_{\Omega})$$

*est un semi-groupe fermé dans* $G_{\mathbb{C}}$ *homéomorphe à* $G(R_{\Omega}) \times \mathcal{W}$.

*Démonstration.* — *cf.* ÓLAFSSON **[86]**, voir aussi DÖRR **[9]** et LAWSON **[68]**

THÉORÈME III.3.2. — ( *Ol'shanskiĭ* )

$$\{g \in G_{\mathbb{C}} \mid g \cdot \mathcal{D} \subset \mathcal{D}\} = G \exp(-i\mathcal{C}_{\max}),$$

*où* $\mathcal{C}_{\max}$ *est le cône maximal de de l'ensemble des cônes convexes, fermés générateurs de* $\mathfrak{g}(\mathcal{D})$ *invariants par* $G$.

*Démonstration.* — (*cf.* OL'SHANSKIĬ [**92**]).

Notons $\Xi$ ce semi-groupe holomorphe appelé semi-groupe d' OL'SHANSKIĬ associé au domaine $\mathcal{D}$, *i.e.*

$$\Xi := \{g \in G_{\mathbb{C}} \mid g \cdot \mathcal{D} \subset \mathcal{D}\},$$

et posons

$$^{c'}\Xi := c' \, \Xi \, c'^{-1},$$

nous avons alors :

THÉORÈME III.3.3. —

$$^{c'}\Xi \cap {}^{c}G = \Gamma.$$

*Démonstration.* — D'après le théorème III.3.2,

$$\Xi = G \exp(-i\mathcal{C}_{\max}),$$

donc

$$^{c'}\Xi = {}^{c'}G \exp(-i\mathrm{Ad}(c')^{-1}\mathcal{C}_{\max}).$$

$\mathrm{Ad}(c')^{-1}\mathcal{C}_{\max}$ est le cône maximal de $\mathfrak{g}(R_\Omega)$ invariant par ${}^{c'}G$, donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(c')^{-1}\mathcal{C}_{\max} &= \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{Ad}({}^{c'}G)(i\mathcal{C}_{\max}))} \\ &= \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{Ad}({}^{c'}G)(iC))}. \end{aligned}$$

D'où

$$^{c'}\Xi = {}^{c'}G \exp(C),$$

par suite

$$\begin{aligned} ^{c'}\Xi \cap {}^{c}G &= {}^{c'}G \exp(C) \cap {}^{c}G \\ &= G(\Omega) \exp(C) \\ &= \Gamma. \end{aligned}$$

$\square$

REMARQUE III.3.4. — En reprenant la même démonstration que dans le lemme II.3.9 nous montrons que le semi-groupe d' OL'SHANSKIĬ $\Xi$ vérifie :

$$\Xi \subset Q_{\mathbb{C}}^{+} H_{\mathbb{C}}^{o} Q_{\mathbb{C}}^{-}.$$

# CHAPITRE IV

# CHAPITRE 4

# L'ESPACE SYMÉTRIQUE CAUSAL ASSOCIÉ AU SEMI-GROUPE $\Gamma$

RÉSUMÉ. — Nous montrons dans ce chapitre que ${}^cG/G(\Omega)$ est un espace symétrique causal équivariant à $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{S}} := \{(z,w) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mid \det(z-w) \neq 0\}$, où $\mathcal{S}$ est la frontière de Bergman-Šilov du domaine $\mathcal{D}$ et, donc au passage, que $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ est une compactification de cet espace symétrique. Nous montrons ensuite que le semi-groupe associé à l'ordre de ${}^cG/G(\Omega)$ est exactement $\Gamma$.

Soit $V$ une algèbre de Jordan Euclidienne de dimension finie $n$ et de rang $r$, $\Omega$ le cône symétrique associé et $T_\Omega = V + i\Omega$.

Rappelons que $\mathcal{D} = p(T_\Omega)$ est un domaine symétrique hermitien de type tube, et que $\mathcal{S} = \overline{p(V)}$ est sa frontière de Bergman-Šilov.

Le noyau de Bergman (normalisé) de $\mathcal{D}$ est donné par :

$$K_{\mathcal{D}}(z,w) = \operatorname{Det}\big(I - 2z \,\square\, \overline{w} + P(z)P(\overline{w})\big)^{-1}, \tag{0.0.1}$$

et il vérifie l'identité :

$$K_{\mathcal{D}}(g \cdot z, g \cdot w) = \operatorname{Det}(g'(z))K_{\mathcal{D}}(z,w)\overline{\operatorname{Det}(g'(w))}, \tag{0.0.2}$$

pour tout élément $g$ de $G$ et pour tout $z, w$ de $\mathcal{D}$, (*cf.* [**16**] ou [**59**]).

**IV.1. Prolongement de $K_{\mathcal{D}}(\cdot,\cdot)$ à $\mathcal{S}\times\mathcal{S}\backslash\mathcal{N}_{\mathcal{S}}$.** — Pour $z$ et $w$ éléments de $V^{\mathbb{C}}$ on pose :

$$B(z,w) = I - 2z\,\Box\, y + P(z)P(w).$$

LEMME IV.1.1. — *Pour tout $z, w$ inversibles dans $V^{\mathbb{C}}$ on a :*

$$P(z)P(z^{-1}-w) = I - 2z\,\Box\, w + P(z)P(w).$$

*Démonstration.* — Pour démontrer ce lemme nous avons besoin de quelques lemmes intermédiaires.

LEMME IV.1.2. — *Pour $x$ et $y$, éléments inversibles de $V^{\mathbb{C}}$ on a*

$$P(x)P(x^{-1}+y^{-1}) = P(x+y)P(y)^{-1}.$$

*Démonstration.* — (*cf.* [**3**] ou [**16**]).

D'après ce lemme nous avons

$$\begin{aligned} P(z)P(z^{-1}-w) &= P(z-w^{-1})P(w) \\ &= P(w^{-1}-z)P(w), \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

or

$$\begin{aligned} P(w^{-1}-z) &= P(w)^{-1} + 2P(w^{-1},-z) + P(z) \\ &= P(w)^{-1} - 2P(w^{-1},z) + P(z), \end{aligned}$$

donc, d'après (1.2.1),

$$P(z)P(z^{-1}-w) = I - 2P(w^{-1},z)P(w) + P(z)P(w).$$

Ainsi le lemme IV.1.1 découle immédiatement du

LEMME IV.1.3. — *Avec les mêmes hypothèses que dans (IV.1.1) on a*

$$P(w^{-1},z)P(w) = z\,\Box\, w.$$

*Démonstration.* — $w$ étant inversible, nous considérons l'algèbre de Jordan isotypique $V_w^{\mathbb{C}}$ associée a $w$, (*cf.* I.4 chapitre 1). Rappelons que le produit définit dans $V_w^{\mathbb{C}}$ est donné par :

$$x \perp_w y = P(x, y)w,$$

de plus nous avons

$$\begin{aligned} L_w(x) &= x \,\square\, w, \\ &\text{et} \\ P_w(x) &= 2L_w(x)^2 - L_w(x \perp_w x), \\ &= 2(x \,\square\, w)^2 - (P(x)w) \,\square\, w, \\ &= P(x)P(w). \end{aligned}$$

En polarisant la forme quadratique $P_w$, on trouve

$$P_w(x, y) = P(x, y)P(w).$$

Or $w^{-1}$ est l'élément unité de l'algèbre $V_w^{\mathbb{C}}$, donc

$$\begin{aligned} L_w(z) &= P_w(w^{-1}, z) \\ &= P(w^{-1}, z)P(w), \end{aligned}$$

et finalement on trouve

$$z \,\square\, w = P(w^{-1}, z)P(w).$$

$\square$

Notons $N$ la norme de Koecher définie par :

$$N(z) = \det(z),$$

pour tout $z$ dans $V^{\mathbb{C}}$, et posons

$$\mathcal{N}_{\mathcal{S}} := \{(z, w) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mid N(z - w) = 0\},$$

donc

$$\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{S}} = \{(z,w) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mid N(z-w) \neq 0\}.$$

LEMME IV.1.4. — *Le noyau de Bergman $K_{\mathcal{D}}(\cdot,\cdot)$ de $\mathcal{D}$ se prolonge à $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{S}}$.*

*Démonstration.* — Nous avons

$$K_{\mathcal{D}}(z,w) = \mathrm{Det}\big(B(z,\overline{w})\big)^{-1}.$$

Soit $(z,w)$ dans $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{S}}$, alors

$$N(z-w) \neq 0.$$

Donc $z-w$ est inversible, d'où

$$\mathrm{Det}P(z-w) \neq 0.$$

Or $z$ est un élément de $\mathcal{S}$ donc $z$ est inversible et $z^{-1} = \overline{z}$, par suite, d'après (IV.1.1),

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}B(z,\overline{w}) &= \mathrm{Det}P(z)\mathrm{Det}P(z^{-1} - \overline{w}) \\ &= \mathrm{Det}P(z)\mathrm{Det}\overline{P(z-w)} \qquad (1.4.1) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Ainsi $K_{\mathcal{D}}(\cdot,\cdot)$ se prolonge à $\mathcal{S}\times\mathcal{S}\setminus\mathcal{N}_{\mathcal{S}}$ et si on note $K(\cdot,\cdot)$ ce prolongement, alors pour chaque élément $(z,w)$ de $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{S}}$ nous avons

$$K(z,w) = \mathrm{Det}\big(B(z,\overline{w})\big)^{-1}.$$

$\square$

**IV.2. Action de $G$ sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{S}}$.** — D'après Bott/Koranyi (*cf.* [**60**]) $G$ opère sur la frontière de Šilov $\mathcal{S}$ du domaine $\mathcal{D}$. On définit alors l'action "diagonale" de $G$ sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ par :

$$g \cdot (z, w) = (g \cdot z, g \cdot w),$$

où $g$ et $(z, w)$ sont respectivement dans $G$ et $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$.

Lemme IV.2.1. — *Le groupe $G$ opère sur la variété $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{S}}$.*

*Démonstration.* — Pour $(z, w)$ dans $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ on pose :

$$N_{\mathcal{D}}(z, w) = (K_{\mathcal{D}}(z, w))^{-1} = \mathrm{Det} B(z, \overline{w}).$$

l'identité (0.0.2) s'écrit alors sous la forme :

$$N_{\mathcal{D}}(g \cdot z, g \cdot w) = (\overline{\mathrm{Det} g'(w)})^{-1} N_{\mathcal{D}}(z, w) (\mathrm{Det} g'(z))^{-1}. \tag{1.4.2}$$

pour tout $g$ dans $G$ et tout $(z, w)$ dans $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

Soit maintenant $g$ dans $G$ et $(z, w)$ dans $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{S}}$. Comme $G$ opère sur $\mathcal{S}$, $g \cdot z$ et $g \cdot w$ sont des éléments de $\mathcal{S}$.

L'identité (1.4.2) se prolonge à $\overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{D}}$, donc

$$N_{\mathcal{D}}(g \cdot z, g \cdot w) = (\overline{\mathrm{Det} g'(w)})^{-1} N_{\mathcal{D}}(z, w) (\mathrm{Det} g'(z))^{-1}.$$

Or, d'après (1.4.1), $N_{\mathcal{D}}(z, w) \neq 0$. Donc $N_{\mathcal{D}}(g \cdot z, g \cdot w) \neq 0$, et comme $g \cdot z$ appartient à $\mathcal{S}$, $\mathrm{Det} P(g \cdot z) \neq 0$, par suite, d'après (1.4.1) et (1.4.2), nous avons $\mathrm{Det} \overline{P(g \cdot z - g \cdot w)} \neq 0$, et finalement

$$N(g \cdot z - g \cdot w) \neq 0,$$

*i.e.* $g \cdot (z, w) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{S}}$. $\square$

Notons $G^{-e}$ (respectivement $G^{e}$) la composante neutre du stabilisateur de $-e$ (respectivement de $e$) dans le groupe $G$.

**IV.3. Caractérisation des sous groupes $G^{-e}$ et $G^e$.** — Rappelons que $c$ désigne la transformation de Cayley realive à $T_\Omega$ et que

$$cGc^{-1} = {}^cG.$$

LEMME IV.3.1. — *On a*

$$G^{-e} = c^{-1}\big(G(\Omega)Q^-\big)c \quad \text{et} \quad G^e = c^{-1}\big(G(\Omega)Q^+\big)c.$$

*Démonstration.* — Comme $c(-e) = 0$, et $cGc^{-1} = {}^cG$, le calcul de $G^{-e}$ se ramène au calcul de ${}^cG^0$ stabilisateur de 0 dans ${}^cG$.

Nous savons, (*cf.* II.2.4 et II.2.5 chapitre II), que $\mathfrak{g}(T_\Omega) = \mathfrak{q}^+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}^-$ et que si $X, Y$ et $Z$ sont des champs de vecteurs dans $\mathfrak{q}^+$, $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{q}^-$ respectivement, alors ils sont de la forme :

$$\begin{aligned} X(z) &= u \quad , \quad u \in V, \\ Y(z) &= T(z) \quad , \quad T \in \mathfrak{h} = V \square V, \\ Z(z) &= P(z)v \quad , \quad v \in V. \end{aligned}$$

Donc

$$\{X \in \mathfrak{g}(T_\Omega) \mid X(0) = 0\} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}^-,$$

d'où

$${}^cG^0 = G(\Omega)Q^-,$$

et par suite

$$G^{-e} = c^{-1}\big(G(\Omega)Q^-\big)c. \tag{3.1.1}$$

Soit $s$ la symétrie de $T_\Omega$ définie par

$$s(z) = -z^{-1}$$

pour tout $z$ dans $T_\Omega$. Soit

$$\widetilde{s} := c^{-1} \circ s \circ c : z \longmapsto -z.$$

$\widetilde{s}$ est une involution holomorphe définie sur $\mathcal{D}$ qui se prolonge à $\overline{\mathcal{D}}$. Notons encore $\widetilde{s}$ ce prolongement.

Soit $g$ un élément de $G^e$.

Nous avons $$g(e) = e$$

donc $$g \circ \widetilde{s}(-e) = \widetilde{s}(-e)$$

ou encore $$\widetilde{s} \circ g \circ \widetilde{s}(-e) = -e \qquad .$$

Or $\widetilde{s} \circ g \circ \widetilde{s}$ est un élément de $G$, donc $\widetilde{s} \circ g \circ \widetilde{s}$ apprtient à $G^{-e}$. Comme

$$Q^- = s \circ Q^+ \circ s.$$

nous en déduisons, en utilisant (3.1.1), que $g$ appartient à $c^{-1}\big(G(\Omega)Q^+\big)c$.

$\square$

**IV.4. L'action transitive de $G$ sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{S}}$.** — Posons

$$\mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_e := \{z \in \mathcal{S} \mid N(z - e) \neq 0\},$$

nous avons alors :

LEMME IV.4.1. — *$G^e$ opère transitivement sur $\mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_e$.*

*Démonstration.* — Soient $z, w$ deux éléments de $\mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_e$. Comme $\mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_e$ est une partie de $\mathcal{D}(c)$, $c(z)$ et $c(w)$ sont bien définis. De plus

$$\overline{c(z)} = c(z)\,, \qquad \text{car } z^{-1} = \overline{z}.$$

De même $\overline{c(w)} = c(w)$. On en déduit que $c(z)$ et $c(w)$ sont des éléments de $V$. Il existe alors un élément $h$ dans $G(\Omega)Q^+$ tel que

$$h(c(z)) = c(w),$$

ou encore

$$c^{-1} \circ h \circ c(z) = w.$$

et donc d'après le lemme IV.3.1 on a le résultat.

$\square$

LEMME IV.4.2. — *$G$ opère transitivement sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{S}}$.*

*Démonstration.* — Soit $(z, w)$ un élément de $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{S}}$. Comme $G$ opère transitivement sur $\mathcal{S}$ (*cf.* [**45**] ou [**60**]), il existe un élément $h_1$ de $G$ tel que $h_1(e) = z$. Donc

$$(z, w) = h_1((e, h_1^{-1}(w))).$$

Or $G$ opère sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{S}}$ (*cf.* IV.2.1), donc l'élément $(e, h_1^{-1}(w)$ appartient à $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{S}}$ . On en déduit que $h_1^{-1}(w))$ est un élément de $\mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_e$. D'après le lemme IV.4.1, il existe un élément $h_2$ de $G^e$ tel que

$$h_2(h_1^{-1}(w))(e) = -e,$$

donc

$$(z, w) = h_2 \circ h_1^{-1}(e, -e),$$

et $h_2 \circ h_1^{-1}$ appartient à $G$.

$\square$

THÉORÈME IV.4.3. — *(i) ${}^cG/G(\Omega)$ est un espace symétrique de type Cayley équivariant à $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{S}}$.*

*(ii) $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ est une compactification de l'espace symétrique ${}^cG/G(\Omega)$.*

*(iii) ${}^cG/G(\Omega)$ est un espace causal global et le semi-groupe associé à l'ordre de ${}^cG/G(\Omega)$ est exactement $\Gamma$.*

*Démonstration.* — (i) & (ii). D'après le lemme IV.3.1, le sous-groupe d'isotropie de $G$ au point $(e, -e)$ est

$$\begin{aligned} G^{(e,-e)} &= G^e \cap G^{-e} \\ &= c^{-1}(G(\Omega)N^+)c \cap c^{-1}(G(\Omega)N^-)c \\ &= c^{-1}G(\Omega)c. \end{aligned}$$

Or d'après III.1.4 chapitre III, $G(\Omega)$ est le sous-groupe des points de ${}^cG$ fixés par l'involution $\eta$, par suite $c^{-1}G(\Omega)c$ est le sous-groupe des points de $G$ fixés par l'involution $c^{-1} \circ \eta \circ c$. Ainsi ${}^cG/G(\Omega)$ et $G/c^{-1}G(\Omega)c$ sont deux espaces symétriques (difféomorphes). D'autre part le groupe $G$ opère transitivement sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{S}}$ (lemme IV.3.7) d'où le difféomorphisme

$$G/c^{-1}G(\Omega)c \overset{\varphi}{\cong} \mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{S}}.$$

Si $g \in {}^cG$ on pose $\operatorname{int}(c)g = c^{-1} \circ g \circ c$, alors l'application définie par $\psi = \operatorname{int}(c) \circ \varphi$,

$$\begin{aligned} \psi : {}^cG/G(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{S}} \\ gG(\Omega) &\longmapsto (c^{-1} \circ g \circ c(e), c^{-1} \circ g \circ c(-e)) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme équivariant, dans le sens où si $X \in \mathfrak{g}(T_\Omega)$ et $x \in {}^cG/G(\Omega)$, alors

$$\psi(\exp(X)x) = \exp(\operatorname{Ad}(c)X)\psi(x).$$

Le fait que ${}^cG/G(\Omega)$ est de type Cayley découle de III.1, chapitre III.

$\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ est une sous-variété algébrique compacte de $\overline{\mathcal{D}} \times \overline{\mathcal{D}}$, et l'ensemble $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{S}}$ est un ouvert dense de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$. Donc $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ est une compactification de l'espace symétriques ${}^cG/G(\Omega)$.

Enfin nous pouvons voir le fait que ${}^cG/G(\Omega)$ est un espace causal de deux manières. La première est que dans $\mathfrak{q}$ il ya un cône convexe fermé invariant par $\mathrm{Ad}(G(\Omega))$, (*cf.* III.3, chapitre III). La deuxième est que nous pouvons identifier l'espace tangent de ${}^cG/G(\Omega)$ à l'origine, moyennant le difféomorphisme $\psi$, à $V \times V$ qui contient évidemment un cône convexe fermé à savoir $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ et qu'à partir de ce cône on construit un champs de cônes convexes fermés.

(iii) Montrons que cette structure causale est globale, *i.e.* qu'il n'existe pas de courbe causale fermée non triviale dans ${}^cG/G(\Omega)$, condition nécessaire pour construire un ordre sur cet espace. Pour cela on pose :

$$\begin{aligned} \mathrm{Exp} : \mathfrak{q} &\longrightarrow {}^cG/G(\Omega) \\ X &\longmapsto (\exp(X)) \cdot x_0, \end{aligned}$$

et pour $g \in {}^cG$

$$\begin{aligned} \delta(g) : {}^cG/G(\Omega) &\longrightarrow {}^cG/G(\Omega) \\ hG(\Omega) &\longmapsto (gh)G(\Omega). \end{aligned}$$

Remarquons que la structure causale sur ${}^cG/G(\Omega)$ est *invariante* par ${}^cG$ *i.e.* que les transformations $\delta(g)$ sont causales.

Soit $\gamma : [0,1] \longrightarrow {}^cG/G(\Omega)$ une courbe causale fermée dans ${}^cG/G(\Omega)$. Puisque les $\delta(g)$ sont causales on peut supposer que $\gamma$ a son origine en $x_0$, *i.e.* $\gamma(0) = x_0$, or $x_0 \in \mathrm{Exp}(C)$ donc d'après "la réduction d'Ol'shanskiĭ", (*cf.* [**92**], lemmes 3.9 et 3.8) ou bien le théorème de Bony-Brezis, (*cf.* [**31**] théorème I.5.17), on peut supposer que $\gamma$ est tracée dans $\mathrm{Exp}(C)$, *i.e.* $\gamma(t) \in \mathrm{Exp}(C)$ pour tout $t \in [0,1]$.

Lemme IV.4.4. — (*Faraut*)
*L'application*

$$\mathrm{Exp}^{-1} : \mathrm{Exp}(C) \longrightarrow C$$

*est causale.*

*Démonstration.* — (*cf.* [**14**]).

D'après ce lemme $\mathrm{Exp}^{-1} \circ \gamma$ est une courbe causale dans $C$, et comme $\gamma$ est fermée $\mathrm{Exp}^{-1} \circ \gamma$ est fermée donc triviale et par suite $\gamma$ est triviale.

La structure causale de ${}^cG/G(\Omega)$ étant globale on peut définir un ordre partiel sur cet espace de la manière suivante :

$y \succeq x$ s'il existe une courbe causale dans ${}^cG/G(\Omega)$ dont $x$ est l'origine et $y$ est l'extrêmité.

Soit

$$\mathcal{K} := \{g \in {}^cG \mid g \cdot x_0 \succeq x_0\}$$

le semi-groupe associé à cet ordre et montrons que $\mathcal{K} = \Gamma$.

Soit $g \in \Gamma$ ; alors, d'après le théorème III.2.4, $g = \exp(X)h$ où $h \in G(\Omega)$ et $X \in C$. Soit $\gamma$ la courbe définie par

$$\begin{array}{rrcl} \gamma : & [0,1] & \longrightarrow & {}^cG/G(\Omega) \\ & t & \longmapsto & \exp(tX) \cdot x_0 \end{array} .$$

$\gamma$ est une courbe causale et nous avons $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = g \cdot x_0$, donc $g \cdot x_0 \succeq x_0$, et par suite $g$ est dans $\mathcal{K}$.

Récipoquement, soit $g \in \mathcal{K}$, il existe alors une courbe causale $\gamma : [0,1] \longmapsto {}^cG/G(\Omega)$ telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma(1) = g \cdot x_0$. Comme ci-dessus, on peut supposer que $\gamma(t) \in \mathrm{Exp}(C)$ pour tout $t$, donc $gx_0 \in \mathrm{Exp}(C)$, et par suite $g \cdot x_0 = (\exp X) \cdot x_0$ où $X \in C$, ou encore $g = (\exp X)h$ avec $h \in G(\Omega)$, d'où $g \in \Gamma$.

$\square$

REMARQUE IV.4.5. — Dans [44], KANEYUKI montre, par la méthode semi-simple, que $\mathcal{S} \times \overline{\mathcal{S}}$ est une compactification de $G/c^{-1}G(\Omega)c$. La méthode, basée sur la théorie des algébres de Jordan, que nous avons proposée ici est plus simple et a l'avantage de nous permettre de décrire avec précision l'image de ${}^cG/G(\Omega)$ dans sa compactification $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$, à savoir (la seule orbite ouverte dense) $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \setminus \mathcal{N}_{\mathcal{S}}$.

# BIBLIOGRAPHIE

## BIBLIOGRAPHIE


[1] A.A. Albert. — On Jordan algebras of linear transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.* , t. **59**, 1946, p. 524–555.

[2] A.A. Albert. — A structure theory for Jordan algebras, *Ann. of Math.* , t. **48**, 1947, p. 546–567.

[3] H. Asano & S. Kaneyuki. — On compact generalized Jordan triple systems of the second kind, *Tokyo J. Math.* , t. **11**, 1988, p. 105–118.

[4] Ph. Bougerol. — Kalman filtring with random coefficients and contractions, *SIAM. J. Control and Optimization* , t. **31**, 1993, p. 942–959.

[5] H. Braun & M. Koecher. — *Jordan Algebren.* — Springer, 1975 .

[6] E. Cartan . — Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de $n$ variables complexes, *Abh. Math. Sem. Hamburg* , t. **11**, 1935, p. 116–162.

[7] J.-L. Clerc. — Fonction K de Bessel pour les algèbres de Jordan, *In harmonic analysis,* P. Eymard, J.-P. Pier *editors. Lecture Notes in Math.* , t. **1359**, 1988, p. 122–134.

[8] J.-L. Clerc . — Représentations d'une algèbre de Jordan, polynômes invariants et harmoniques de Stiefel, *J. Reine Angew. Math.* , t. **423**, 1992, p. 47–71.

[9] N. Dörr. — On Ol'shanskiĭ semigroup, *Math. Ann.* , t. **288**, 1990, p. 21–33.

[10] N. DÖRR. — Symmetric spaces and convex cones, *Sem. Sophus Lie. Darmstadt* , t. **1**, 1990, p. 65–72.

[11] A. EGGERT. — A short cours on the Lie theory of semigroups II. Lie semialgebras, *Sem. Sophus Lie. Darmstadt* , t. **1**, 1990, p. 41–46.

[12] J. FARAUT. — Algèbres de Volterra et transformation de Laplace sphérique sur certains espaces symétriques ordonnés, *Sym. Math.* , t. **29**, 1986, p. 183–196.

[13] J. FARAUT . — *Algèbres de Jordan et cônes symétriques.* — Ecole d'été du CIMPA, Université de Poitiers, 1989 .

[14] J. FARAUT. — Espaces symétriques ordonnés et algèbres de Volterra, *J. of Math. Soc. Japan* , t. **43, 1**, 1991, p. 133–146.

[15] J. FARAUT & A. KORANYI. — Function spaces and reproducing kernels on bounded symmetric domains, *J. Funct. Anal.* , t. **88**, 1990, p. 64–89.

[16] J. FARAUT & A. KORANYI. — *Analysis on symmetric cones.* — à paraitre, Oxford University Press.

[17] J. FARAUT , J. HILGERT & G. ÓLAFSSON. — *Harmonic analysis on ordered symmetric spaces.* — en préparation.

[18] S.G. GINDIKIN. — Analysis on homogeneous domains, *Russian Math. Surveys* , t. **19**, 1964, p. 1–89.

[19] HARISH-CHANDRA. — Representations of simple Lie groups, IV, *Amer. J. Math.* , t. **77**, 1955, p. 743–777.

[20] HARISH-CHANDRA. — Representations of simple Lie groups, V, *Amer. J. Math.* , t. **78**, 1956, p. 1–41.

[21] HARISH-CHANDRA. — Representations of simple Lie groups, VI, *Amer. J. Math.* , t. **78**, 1956, p. 564–628.

[22] S. HELGASON. — *Differential geometry, Lie group, and symmetric spaces.* — Academic Press, 1978.

[23] S. HELGASON. — *Groups and geometric analysis.* — Academic Press, 1984.

[24] J. HILGERT. — A note on Howe's oscillator semigroup, *Ann. Inst. Fourier Grenoble,* , t. **93, 3**, 1989, p. 663–688.

[25] J. HILGERT & K.H. HOFMANN. — Semigroups in Lie groups, semialgebras in Lie algebras, *Tran. Amer. Math. Soc.* , t. **288, 2**, 1985, p. 481–504.

[26] J. HILGERT & K.H. HOFMANN. — On Sophus Lie's fundamental theorem, *J. of Funct. Anal.* , t. **67**, 1986, p. 293–319.

[27] J. HILGERT & K.H. HOFMANN. — Classification of invariant cones in Lie algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.* , t. **19, 2**, 1988, p. 441–445.

[28] J. HILGERT & K.H. HOFMANN. — Compactly embedded Cartan algebras and invariant cones in Lie algebras, *Adv. in Math.* , t. **75**, 1989, p. 168–201.

[29] J. HILGERT & K.H. NEEB. — *Compression semigroups of open orbits in complex manifolds.* — Tech. Univ. Clausthal. Mathematik-Bericht 93/**4** , Juin 1993.

[30] J. HILGERT & K.H. NEEB. — *Compression semigroups of open orbits on real flag manifolds.* — Tech. Univ. Clausthal. Mathematik-Bericht 93/**5** , Août 1993.

[31] J. HILGERT, K.H. HOFMANN & J.D. LAWSON. — *Lie groups, convex cones, and semigroups.* — Oxford University Press, 1989.

[32] J. HILGERT & G. ÓLAFSSON. — *Analytic continuations of representations, the solvable case.* — à paraitre dans Jap. J. of Math..

[33] J. HILGERT, G. ÓLAFSSON & B. ØERSTED. — Hardy spaces on affine symmetric spaces, *J. reine angew. Math.* , t. **415**, 1991, p. 189–218.

[34] U. HIRZEBRUCH. — Halbräume und ihre holomorphen Automorphismen, *Math. Annalen* , t. **153**, 1964, p. 395–417.

[35] U.HIRZEBRUCH. — Der Min-Max-Satz von E. Fischer für Formula und reelle Jordan Algebren, *Math. Ann.* , t. **186**, 1970, p. 65–69.

[36] K.H. HOFMANN. — A short course on the Lie theory of semigroups I, *Sem. Sophus Lie. Darmstadt* , t. **1**, 1990, p. 33–40.

[37] R. HOWE. — The oscillator semigroup, *in "The Mathematical Heritage of Hermann Weyl", Proc. Symp. Pure Math.* , t. **48**, R. O. Wells Ed., AMS Providence, 1988, p. ..–...

[38] N. JACOBSON. — A theorem on the structure of Jordan algebras, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* , t. **42**, 1956, p. 140–147.

[39] N. JACOBSON. — *Structure and representations of Jordan algebras.* — A.M.S. Col. Publ. Rhode Island, Providence, 1968.

[40] F.D. JACOBSON & N. JACOBSON. — Classification and representations of semi-simple Jordan algebras, *Tran. Amer. Math. Soc.* , t. **65**, 1949 , p. 141–169.

[41] P. JORDAN. — *Über Verallagemeinerungmöglichkeiten der Formalismus der Quantenmechanick.* — Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1933 , p. 209–214.

[42] P. JORDAN, J.V. NEUMANN & E. WIGNER. — On algebraic generalization of the quantum mechanical formalism, *Ann. of Math.* , t. **36**, 1934, p. 29–64.

[43] S. KANEYUKI. — *Homogeneous bounded domains and Siegel domains.* — Lecture Notes in Math. **241**, Springer, 1971.

[44] S. KANEYUKI. — On orbit structure of compactifications of parahermitian symmetric spaces, *Japan. J. Math.* , t. **13**, 1987, p. 333–370.

[45] S. KANEYUKI. — *On the causal structures of the Shilov boundaries of symmetric bounded domains.* — Prospects in complex geometry, Proceedings, Katata/Kyoto, 1989, J. Noguchi, T. Ohsawa (Eds.), Lecture Notes in Math. **1468**, Springer, 1990⋆⋆.

[46] S. KANEYUKI. — Pseudo-hermitian symmetric spaces and Siegel domains over nondegenerate cones, *Hokkaido Math. J.*, , t. **20**, 1991, p. 213–239.

[47] M. KOECHER. — Positivitätsbereiche in $\mathbb{R}^n$, *Amer. J. Math.* , t. **79**, 1957, p. 575–596.

[48] M. Koecher. — Analysis in reellen Jordan Algebren, *Nach. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys.* , t. **Kl II a**, 1958, p. 67–74.

[49] M. Koecher. — Die Geodätischen von Positivitätsbereichen, *Math. Ann.* , t. **135**, 1958, p. 192–202.

[50] M. Koecher. — Beiträge zur einer Reduktionstheorie in Positivitätsbereichen, I, *Math. Ann.* , t. **141**, 1960, p. 384–432.

[51] M. Koecher. — On real Jordan algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.* , t. **68**, 1962, p. 374–377.

[52] M. Koecher. — *Jordan algebras and their applications.* — Lectures notes, Univ. of Minnesota, Minneapolis, 1962.

[53] M. Koecher. — Über eine Gruppe rationalen Abbildungen, *Inv. Math.* , t. **3**, 1967, p. 136–171.

[54] M. Koecher. — Imbedding of Jordan algebras into Lie algebras, I, *Amer. J. Math.* , t. **89**, 1967, p. 787–816.

[55] M. Koecher. — Imbedding of Jordan algebras into Lie algebras, II, *Amer. J. Math.* , t. **90**, 1968, p. 476–510.

[56] M. Koecher. — Gruppen und Lie algebren von rationalen Funktionen, *Math. Z.* , t. **109**, 1969, p. 349–392.

[57] M. Koecher. — *An elementary approch to bounded symmetric domains.* — Lectures notes, Rice University, 1969.

[58] A. Koranyi. — *Analyse harmonique sur les cônes symétriques.* — Publications de l'Inst. de Recherches Math. Avancées, Abidjan, 1987.

[59] A. Koranyi. — *Compex analysis and symmetric domains.* — Ecole d'été du CIMPA, Université de Poitiers, 1988.

[60] A. Koranyi & J.A. Wolf. — Realization of hermitian symmetric spaces as generalized half-planes, *Ann. of Math.* , t. **81**, 1965, p. 265–288.

[61] B. Kostant & S. Sahi. — *The Capelli identity, tube domains and the generalized Laplace transform.* — Preprint 1991.

[62] M. LASSALLE. — Les orbites d'un espace hermitien symétrique compact, *Invent. Math.* , t. **52**, 1979, p. 199–210.

[63] M. LASSALLE. — Une nouvelle réalisation des espaces hermitiens symétriques, *Bull. Soc. Math. France* , t. **111**, 1983, p. 181–192.

[64] M. LASSALLE. — Les équations de Hua d'un domaine borné symétrique de type tube, *Invent. Math.* , t. **77**, 1984, p. 129–161.

[65] M. LASSALLE. — Algèbre de Jordan et équations de Hua, *J. Funct. Anal.* , t. **65**, 1986, p. 243–272.

[66] M. LASSALLE. — Algèbres de Jordan et ensemble de Wallach, *Invent. Math.* , t. **89**, 1987, p. 375–393.

[67] J.D. LAWSON. — Ordred manifolds, invariant cone fields, and semigroups, *Forum Math.* , t. **1**, 1989, p. 273–308.

[68] J.D. LAWSON. — Polar and Ol'shanskiĭ decompositions, *Seminaire Sophus Lie* , t. **1, 2**, 1991, p. 163–173.

[69] O. LOOS. — *Symmetric spaces, I General theory, II Compact spaces and classification.* — Benjamin, 1969.

[70] O. LOOS. — *Jordan pairs.* — Lectures Notes in Math. **460**, Springer, 1974.

[71] O. LOOS. — *Bounded symmetric domains and Jordan pairs.* — Lectures notes, University of California, Irvine, 1977.

[72] H. MASS. — *Siegel's modular forms and Dirichlet series.* — Lectures Notes in Math. **216**, Springer, 1971.

[73] K. MCCRIMMON. — Jordan algebras and their applications, *Bull. Amer. Math. Soc.* , t. **84**, 1978, p. 612–627.

[74] A. MICALI & M. OUATTARA. — Sur les algèbres de Jordan génétiques, *Ann. Sci. Univ. Blaise Pascal, Clermont II, Sér. Math.* , t. **27**, 1991 , p. 193–227.

[75] C.C. MOORE. — Compactifications of symmetric spaces II. The Cartan domains, *Amer. J. Math.* , t. **86**, 1964, p. 358–378.

[76] K.H. NEEB. — Globality in semi-simple Lie groups, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* , t. **104**, 1990, p. 493–536.

[77] K.H. NEEB. — Semigroups in the universal covering group of SL(2), *Semigroup Forum* , t. **43**, 1991, p. 33–43.

[78] K.H. NEEB. — Conal orders on homogeneous spaces, *Invent. Math.* , t. **134**, 1991, p. 467–496.

[79] K.H. NEEB. — Monotone functions on symmetric spaces, *Math. Annalen* , t. **291**, 1991, p. 261–273.

[80] K.H. NEEB. — A short cours on the Lie theory of semigroups III. Globality of invariant wedges, *Sem. Sophus Lie. Darmstadt* , t. **1**, 1991, p. 47–54.

[81] K.H. NEEB. — The duality between subsemigroups of Lie groups and monotone functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* , t. **329**, 1992, p. 653–677.

[82] K.H. NEEB. — *Contraction semigroups and representations.* — à paraitre dans Forum Math..

[83] T. NOMURA. — Algebraically independent generators of invariant differential operators on a symmetric cone, *J. reine angew. Math.* , t. **400**, 1989, p. 122–133.

[84] T. NOMURA. — Algebraically independent generators of invariant differential operators on a bounded symmetric domain, *J. Math. Kyoto Univ.* , t. **31**, 1991, p. 265–279.

[85] T. OCHIAI. — A lemma on open convex cones, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* , t. **12**, 1966, p. 231–234.

[86] G. ÓLAFSSON. — *Causal symmetric spaces.* — (Thèse) , Math. Gotting. **15** 1990.

[87] G. ÓLAFSSON. — Symmetric spaces of Hermitian type, *Diff. Geom. and Appl.* , t. **1**, 1991, p. 195–233.

[88] G. ÓLAFSSON & B. ØERSTED. — The holomorphic discrete series for affine symmetric spaces, I, *J. Funct. Anal.* , t. **81**, 1988, p. 126–159.

[89] G. ÓLAFSSON & B. ØERSTED. — *Is these an orbit method for affine symmetric spaces ?.* — In : Ed. M. Duflo, N.V. Pedersen, M. Vergne : The orbit method in representation theory. Birkhäuser, 1990.

[90] G. ÓLAFSSON & B. ØERSTED. — The holomorphic discrete series of an affine symmetric space and representations with reproducing Kernels, *Trans. Ams. Math. Soc.* , t. **326**, 1991, p. 385–405.

[91] G. ÓLAFSSON & B. ØERSTED. — *Harmonic analysis on compactifications of a class of symmetric spaces.* — En préparation.

[92] G.I. OL'SHANSKIĬ. — Invariant cones in Lie algebras, Lie semigroups, and the holomorphic discrete series, *Funct. Anal. Appl.* , t. **15**, 1982 , p. 275–285.

[93] G.I. OL'SHANSKIĬ. — Convex cones in symmetric Lie algebras, Lie semigroups and invariant causal (order) structures on pseudo-Riemannian symmetric spaces, *Soviet Math. Dokl.* , t. **26**, 1982, p. 97–101.

[94] G.I. OL'SHANSKIĬ. — *Complex Lie semigroups, Hardy spaces and the Gelfand Gindikin program.* — En Russe, conference report, 1982 ; version anglaise = Centrum vor Winskunde en Informatica. Report AM-R9020. Octobre 1990.

[95] L.J. PAIGE. — *Jordan algebras.* — Studies in Modern Algebra, Volume **2**, M.A.A. and Prentice Hall, A.A. Albert editor, p. 144–186, 1963.

[96] S.M. PANEITZ. — Invariant convex cones and causality in semisimple Lie algebras and groups, *J. Func. Anal.* , t. **43**, 1981, p. 313–359.

[97] S.M. PANEITZ. — Determination of invariant convex cones in simple Lie algebras, *Arkiv. för Math.* , t. **21, 1**, 1983, p. 217–228.

[98] M POSTNIKOV. — *Leçons de géométrie. Groupes et algèbres de Lie.* — 1982, traduction française, Editions MIR, Moscou, 1985.

[99] S. SAHI. — The Capelli identity and unitary representations, *Compositio Math.* , t. **81**, 1990, p. 247–260.

[100] I. SATAKE. — Linear imbeddings of self-dual homogeneous cones, *Nagoya Math. J.* , t. **46**, 1972, p. 121–145.

[101] I. SATAKE. — *Algebraic structures of symmetric domains.* — Iwanami-Shoten and Princeton Univ. Press, 1980.

[102] I. SATAKE. — A formula in simple Jordan algebras, *Tôhoku math. J.* , t. **36**, 1984, p. 611–622.

[103] W. SCHMID. — Dïe randwerte holomorpher funktionen auf hermitesch symmetrischen räumen, *Inv. Math.* , t. **9**, 1969, p. 61–80.

[104] I.E. SEGAL. — *Mathematical cosmology and extragalactic astronomy.* — Academic Press, New York/London, 1976.

[105] R.J. STANTON. — Analytic extension of the holomorphic discret series, *Amer. J. of Math.* , t. **108**, 1986, p. 1411–1424.

[106] J. TITS. — Le plan projectif des octaves et les groupes de Lie exeptionnels, *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.* , t. **39**, 1955, p. 309–329.

[107] J. TITS. — Une classe d'algèbres de Lie en relation avec les algèbres de Jordan, *Indag. Math.* , t. **24**, 1962, p. 530–535.

[108] H. UPMEIER. — Jordan algebras and symmetric Siegel domains in banach spaces, *Math. Z.* , t. **157**, 1977, p. 157–200.

[109] H. UPMEIER. — Jordan algebras and harmonic analysis on symmetric spaces, *Amer. J. of math.* , t. **108**, 1986, p. 1–25.

[110] H. UPMEIER. — *Jordan algebras in analysis, operator theory and quantum mechanics.* — Regional conference series in mathematics, 1986.

[111] E.B. VINBERG. — Homogeneous cones, *Soviet Math. Dokl.* , t. **1**, 1960, p. 787–790.

[112] E.B. VINBERG. — The theory of convex homogeneous cones, *Trans. Moscow Math. Soc.* , t. **12**, 1963, p. 303–358.

[113] E.B. VINBERG. — The structure of the group of automorphisms of a homogeneous conex cone, *Trans. Moscow math. Soc.* , t. **13**, 1965, p. 63–93.

[114] E.B. VINBERG, S.G. GINDIKIN & PIATESKII-SHAPIRO. — Classification and canonical realization of complex bounded homogeneous domains, *Trudy Moskov. Math. Obsc.* , t. **12**, 1963, p. 359–388.

[115] M. WOJTKOWSKI. — Invariant families of cones and Lyapunov exponents, *Ergod. Theo. and Dyn. Sys.* , t. **5**, 1985, p. 145–161.

[116] M. WOJTKOWSKI. — Measure theoretic entropy of the system of hard spheres, *Ergod. Theo. and Dyn. Sys.* , t. **8**, 1988, p. 133–153.

[117] J.A. WOLF & A. KORANYI. — Generalized Cayley transformations of bounded symmetric domains, *Amer. J. of Math.* , t. **87**, 1965, p. 899–939.

# UNIVERSITE DE NANCY I

NOM DE L'ETUDIANT : Monsieur KOUFANY Khalid

NATURE DE LA THESE : DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I
en MATHEMATIQUES PURES

VU, APPROUVE ET PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 14 OCT. 1993 _ n° 390

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I

UNIVERSITE NANCY I
LE PRESIDENT
M. BOULANGE

ABSTRACT. — To any formal real Jordan algebra one may attach a symmetric cone. We choose to stady the sub-semigroup of elements of the conformal group which preserves the cone. We give two additional characterizations of this semigroup. The first characterization realizes the semigroup as the real points of the OL'SHANSKII semigroup which stabilizes the associated bounded symmetric domain. The second characterization conserns the symmetric space of Cayley type attaced to the Jordan algebra. This latter space imbeds in the product of two copies of the Šilov boundary of the bounded symmetric domain and we explicitly describe the image of this imbedding. This space is causal and we proove that the causal structure is global and the semigroup associated to the corresponding order is precisely the semigroup that we introduce. In addition to these characerizations, we also obtain two decompositions of this semigroup. The first decomposition is the "HARISH-CHANDRA" decomposition and we use it to proove that the semigroup is a semigroup of contraction with respect to the invariant Riemannian structure of the cone. The second decomposition is the so-called OL'SHANSKII decomposition.

RÉSUMÉ. — A une algèbre de Jordan euclidienne on associe un cône symétrique et nous étudions le semi-groupe des éléments du groupe conforme de l'algèbre de Jordan qui préservent ce cône symétrique. Pour cette étude nous réalisons le groupe conforme comme le groupe des automorphismes holomorphes du domaine tube agissant sur sa frontière distinguée. Nous démontrons pour ce semi-groupe une décomposition à la HARISH-CHANDRA et nous utilisons cette décomposition pour montrer que les éléments du semi-groupe sont des contractions pour la métrique reimannienne du cône symétrique. Nous montrons ensuite que le semi-groupe considéré vérifie la décomposition d' OL'SHANSKIĬ et nous en déduisons que c'est une forme réelle du semi-groupe holomorphe d' OL'SHANSKIĬ des applications holomorphes du domaine symétrique borné associé à l'algèbre de Jordan. Nous montrons enfin que l'espace symétrique de type Cayley associé à l'algèbre de Jordan est muni d'une structure causale globale et que le semi-groupe que nous avons introduit est exactement le semi-groupe associé à l'ordre de cet espace causal. De plus nous montrons que cet espace peut être réalisé comme un ouvert dense dans le produit cartésien de deux copies de la frontière de Šilov du domaine symétrique borné et nous donnons ainsi une caractérisation précise de la seule orbite dense.

MOTS CLEFS. — Algèbre de Jordan euclidienne, cône symétrique, domaine symétrique de type tube, espace symétrique de type Cayley, espace symétrique causal, semi-groupe de Lie, semi-groupe d' OL'SHANSKIĬ.