AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

U.F.R S.T.M.I.A. Université de Nancy I

Ecole Doctorale I.A.E+M. D.F.D Mathématiques.

THESE

présentée à

l'Université de Nancy I

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Nancy I

Option Mathématiques Pures

par

Nicole BARDY-PANSE

Systèmes de racines infinis

Soutenue publiquement le 14 Janvier 1993 devant le jury composé de MM.

P. Eymard	Président	Professeur à l'Université de Nancy I
O. Mathieu	Rapporteur	Professeur à l'Université de Paris 7
R. Moody	Rapporteur	Professeur à l'Université d'Alberta; Canada
J. Tits	Rapporteur	Professeur au collège de France
J.L. Clerc	Examinateur	Professeur à l'Université de Nancy I
H. Rubenthaler	Examinateur	Professeur à l'Université de Strasbourg
G. Rousseau	Directeur de thèse	Professeur à l'Université de Nancy I

A mon père,

&

A Hervé.

Remerciements

Je souhaite tout d'abord exprimer ma profonde reconnaissance à Guy ROUSSEAU pour avoir guidé cette thèse ainsi que pour sa grande disponibilité. Il m'a beaucoup aidée en sachant motiver les différentes étapes de ces travaux et la nécessité de la grande généralité dans laquelle les résultats devaient être obtenus.

Je suis très honorée que MM O.MATHIEU, MOODY et TITS aient été rapporteurs de ma thèse, je les en remercie vivement. A la suite d'une suggestion de J.TITS, un index des notations et des définitions a été ajouté au document.

Je voudrais exprimer toute ma gratitude à M. P.EYMARD pour avoir accepté de présider le jury et pour m'avoir encouragée à entreprendre ce travail.

Enfin, je suis très heureuse de la présence de MM J.L.CLERC et H.RUBENTHALER dans mon jury.

Je remercie tous ceux qui m'ont apporté leur aide pour la rédaction de cette thèse en m'initiant à "l'art" de la frappe en TEX, et enfin tous les membres du département de maths qui m'ont permis de travailler dans une atmosphère particulièrement agréable.

Introduction

Vers 1890, dans leur étude de la structure des algèbres de Lie semi-simples complexes, Killing et Cartan utilisent de façon essentielle, certaines formes linéaires (sur une "sous algèbre de Cartan" $\mathfrak{h}$ d'une telle algèbre $\mathfrak{g}$) qu'ils nomment "racines" (parce qu'elles apparaissent comme les racines de $det(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x - T)$ considérées comme des fonctions de $x \in \mathfrak{h}$).

La classification des algèbres de Lie semi-simples complexes se ramène à celles des "systèmes de racines associés" qui elle même se réduit à la détermination de certaines matrices à coefficients entiers (matrices de Cartan). Les systèmes de racines considérés pour cela, sont dits ici de type fini et réduits; une présentation axiomatique en est donnée dans [Bbki, Lie chap.VI].

La présentation de Serre, par générateurs et relations permet de retrouver à partir d'une matrice de Cartan, l'algèbre de Lie semi-simple complexe correspondante.

L'étude des systèmes de racines des algèbres de Lie semi-simples réelles a fait apparaître les systèmes de racines de type fini non réduits c'est à dire dans lesquels pour certaines racines α, 2α est encore une racine.

Kac et Moody introduisent indépendamment en 1968 de nouvelles algèbres, dites maintenant de Kac-Moody, qui constituent une généralisation des algèbres semi-simples en dimension infinie; pour l'étude de ces algèbres va apparaître une nouvelle notion de racine : les racines imaginaires.

La construction de l'algèbre de Kac-Moody est une généralisation de la construction de Serre à partir des générateurs de Chevalley.

La matrice $A = (a_{ij})_{(i,j)\in I^2}$ est à présent supposée de Cartan généralisée (on dira ici de Kac-Moody) c'est à dire que I est un ensemble fini non vide et que l'on a :

$$\begin{cases} a_{ij} \in \mathbb{Z} & \forall (i,j) \in I^2 \\ a_{ii} = 2 & \forall i \in I \\ a_{ij} \leq 0 & \forall i \neq j \\ a_{ij} = 0 \Longleftrightarrow a_{ji} = 0 \end{cases}$$

Considérons alors une réalisation libre R, c'est à dire un espace vectoriel $\mathfrak{h}$ sur un corps $\bar{K}$, $\Pi^{\vee} := \{\alpha_i^{\vee}\,;\ i \in I\}$ libre dans $\mathfrak{h}$ et $\Pi := \{\alpha_i\,;\ i \in I\}$ libre dans $\mathfrak{h}^*$ et telles que $< \alpha_i, \alpha_j^{\vee} > = a_{ji}$ pour tous i et j dans I.

Ceci permet de construire l'algèbre $\widetilde{\mathfrak{g}}\ (A, R)$ définie par les générateurs $\{\mathfrak{h},\ e_i,\ f_i\,;\ (i \in I)\}$ vérifiant les relations :

$$\begin{cases} [h, h'] = 0 \\ [h, e_i] = \alpha_i(h) e_i \\ [h, f_i] = -\alpha_i(h) f_i \\ [e_i, f_j] = \delta_{ij} \alpha_i^{\vee} \end{cases}$$

puis le quotient de cette algèbre par le plus grand idéal intersectant $\mathfrak{h}$ non trivialement qui est l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$.

$\mathfrak{h}$ s'injecte dans $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}(A)$ et agit de façon $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$ diagonalisable et l'on a :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{où} \quad Q := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i$$

De plus chaque sous-espace radiciel $\mathfrak{g}_\alpha$ (pour $\alpha \neq 0$) est de dimension finie, et le système de racines est alors :

$$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \{\alpha \in Q \setminus \{0\}\,; \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}\}\ .$$

On constate que $\Delta = \Delta_+ \sqcup \Delta_-$ où $\Delta_+ := \Delta \cap (\bigoplus_{i \in I} \mathbb{N}\alpha_i) = -\Delta_-$.

Dans cette étude, grâce à la théorie des sl_2-modules, il est facile de constater que pour tout $i \in I$, il existe une involution r_i du système de racines et on peut encore considérer r_i comme une réflexion sur $\mathfrak{h}$ et donc définir, comme dans le cas classique le groupe de Weyl W engendré par ces réflexions ($(W, \{r_i\}_{i \in I})$ est encore un système de Coxeter). Mais dans ce cas, si on note $\Delta^{\mathrm{re}} := W\Pi$, alors $\Delta^{\mathrm{re}} \subset \Delta$ mais l'égalité n'est vraie que si l'algèbre considérée est en fait une algèbre semi-simple (donc de dimension finie). Les racines de $\Delta \setminus \Delta^{\mathrm{re}}$ sont alors dites "imaginaires" et on note $\Delta^{\mathrm{im}} = \Delta \setminus \Delta^{\mathrm{re}}$.

Cependant, dans ce cadre d'étude, le système de racines est encore bien connu. Les racines imaginaires qui interviennent peuvent, dans ce cas, être caractérisées par le fait que si α est une telle racine, $n\alpha$ est encore une racine pour tout n entier non nul alors que les racines réelles ne sont pas multipliables.

Dans le cas où la matrice est de plus “symétrisable”, $\mathfrak{g}$ est exactement le quotient de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ par l'idéal engendré par les premiers membres des relations de Serre (toujours vérifiées par les générateurs de Chevalley). Dans ce cas particulier, il est possible d'introduire une forme bilinéaire symétrique (qui généralise la forme de Killing) et la caractérisation de la nature des racines est alors facile :

$$\alpha \in \Delta^{\mathrm{re}} \Longleftrightarrow (\alpha, \alpha) > 0$$

$$\alpha \in \Delta^{\mathrm{im}} \Longleftrightarrow (\alpha, \alpha) \leq 0$$

Considérons à présent une autre situation (développée dans [B$_3$R]), conduisant à des systèmes de racines. K est un corps de caractéristique 0 et $\bar{K}$ désigne sa cloture algébrique. Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est une K-forme de l'algèbre de Kac-Moody $\mathfrak{g}(A)$ définie sur $\bar{K}$ si et seulement si les deux algèbres $\mathfrak{g}(A)$ et $\mathfrak{g} \otimes_K \bar{K}$ sont isomorphes et on peut alors considérer (en fixant un tel isomorphisme) l'action K-linéaire du groupe de Galois de $[\bar{K}, K]$ sur $\mathfrak{g}(A)$.

Les sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}(A)$ sont les sous-algèbres complètement résolubles maximales (cf [PK]), les sous-algèbres de Borel standards étant $\mathfrak{b}^{\varepsilon} := \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha \in \Delta_{\varepsilon}} \mathfrak{g}_{\alpha})$ où $\varepsilon = \pm$.

Dans le cas où A est “indécomposable”, et si l'algèbre $\mathfrak{g}(A)$ n'est pas de dimension finie, elle admet deux classes de sous-algèbres de Borel non conjuguées par automorphisme intérieur (chacune contenant une sous-algèbre de Borel standard).

Les sous-algèbres paraboliques sont les sous-algèbres de $\mathfrak{g}(A)$ conjuguées par un automorphisme intérieur à une sous-algèbre (dite parabolique standard de type J) $\mathfrak{p}^{\varepsilon} := \mathfrak{b}^{\varepsilon} \oplus (\oplus_{\alpha \in \Delta_{-\varepsilon}(J)} \mathfrak{g}_{\alpha})$ où $\Delta_{\varepsilon}(J) := \Delta \cap \oplus_{i \in J} \mathbb{N}(\varepsilon \alpha_i)$.

Dans la suite, on suppose A indécomposable et $\mathfrak{g}(A)$ de dimension infinie.

Si $\mathfrak{g}$ est une K-forme de $\mathfrak{g}(A)$, deux cas sont possibles :

- L'action du groupe préserve chaque classe de conjugaison de sous-algèbres de Borel ou, ce qui est encore équivalent, il existe une sous-algèbre parabolique propre définie sur K (dans ce cas la K-forme est dite *presque déployée*).

- L'action du groupe échange les deux classes de Borel (la K-forme est alors dite *presque anisotrope*).

Dans le cas presque déployé, on démontre qu'il existe une sous-algèbre torique déployée maximale $\mathfrak{t}_K$ de $\mathfrak{g}_K$ (c'est à dire diagonalisable pour l'action adjointe dans $\mathfrak{g}_K$ et maximale pour cette propriété), une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_K$ de $\mathfrak{g}_K$, une sous algèbre de Borel $\mathfrak{b}^{\varepsilon}$

de $\mathfrak{g}(A)$ et une sous algèbre parabolique $\mathfrak{p}^\epsilon_K$ définie sur K et contenant $\mathfrak{t}_K$ minimale telles que :

$$(*) \quad \mathfrak{t} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}^\epsilon \subset \mathfrak{p}^\epsilon \text{ où on note de façon générale } X := X_K \otimes_K \bar{K} .$$

Si G est le groupe associé à l'algèbre $\mathfrak{g}(A)$, le groupe Γ agit sur G et on note G_K l'ensemble des points fixes sous cette action. Alors, on démontre que G_K agit transitivement sur les paires $(\mathfrak{t}_K, \mathfrak{p}_K)$ du type précédent.

Dans une telle situation, $\mathfrak{p}$ est forcément de type fini, c'est à dire que le Levi $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{p}$, qui est l'algèbre dérivée du centralisateur de $\mathfrak{t}$, est une sous-algèbre semi-simple. En particulier le groupe de Weyl $W(\mathfrak{l})$ est fini et agit transitivement sur les sous-algèbres de Borel satisfaisant à (*).

Considérons alors $\gamma \in \Gamma := \text{Gal}\ ([\bar{K}; K])$, il est clair que $\gamma(\mathfrak{b}^\epsilon)$ satisfait encore à (*), et par suite, il existe $w_\gamma \in W(\mathfrak{l})$ tel que $\gamma w_\gamma(\mathfrak{b}^\epsilon) = \mathfrak{b}^\epsilon$, en posant $\gamma^* := \gamma \circ w_\gamma$ pour tout γ, on définit une action de Γ sur la base Π correspondant à $\mathfrak{b}^\epsilon$, donc Γ agit comme un groupe d'automorphismes de diagramme par son action étoile.

Dans le cas quasi déployé (où $\mathfrak{b}^\epsilon$ est définie sur K), $\gamma^* = \gamma$ pour tout γ.

Toujours avec les notations précédentes, pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, on considère α' sa restriction à la sous algèbre $\mathfrak{t}$. Le système de racines relatives est alors $\Delta' := \{\alpha' \neq 0\,;\ \alpha \in \Delta\}$. L'étude abstraite de Δ' se fait grâce à des quotients de Δ, le premier correspondant à la recherche du système de racines de la forme quasi déployée (qui existe toujours) et le second à l'action du groupe de Weyl du Levi $\mathfrak{l}$; (ces études abstraites sont développées ici au chapitre VI). Dans le système de racines relatif de ces formes presque déployées, une racine réelle peut admettre un double et il existe des racines imaginaires, mais l'aspect nouveau est que, dans ce cadre d'étude, il existe des racines imaginaires simples.

Considérons en effet l'exemple suivant :

La matrice de Cartan généralisée $A = (a_{ij})$ où $1 \leq i \leq 11$, $1 \leq j \leq 11$ est définie par $a_{10,11} = a_{11,10} = a_{5,10} = a_{10,5} = a_{5,11} = a_{11,5} = -1$, $a_{i,i+1} = -1$ si $i \notin \{9, 11\}$, $a_{i,i-1} = -1$ si $i \notin \{10, 1\}$ et les autres coefficients nuls alors il existe (d'après les résultats de Ben Messaoud [B$_3$R]) une $\mathbb{R}$-forme presque déployée de l'algèbre de Kac-Moody complexe $\mathfrak{g}(A)$ pour laquelle $\Gamma.1 = \{1, 9\}$, $\Gamma.10 = \{10, 11\}$ et où le $\mathfrak{l}$ est la sous algèbre engendrée par les e_i et f_i pour $i \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Alors $\Delta' := \Delta'^{\text{re}} \cup \Delta'^{\text{im}}$ avec $\Delta'^{\text{re}} = \{\pm\alpha'_1, \pm 2\alpha'_1\}$ et :
$\Delta'^{\text{im}} = \{\pm(m\alpha'_1 + p\alpha'_{10})\,;\ p \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq m \leq 2p\}$ en particulier $\mathbb{N}^*\alpha'_{10} \subset \Delta'$ donc α'_{10} est une racine simple imaginaire.

Néanmoins, dans le cas des K-formes presque déployées des algèbres de Kac-Moody construites à partir d'une réalisation libre de A, les bases des systèmes de racines relatifs sont encore libres et il est aussi à noter que dans le cas d'une racine simple imaginaire, tout multiple entier de cette racine est encore une racine.

Parallèlement, Borcherds étudie dans [B], les algèbres de Kac-Moody généralisées (que nous nommerons ici algèbres de Kac-Moody-Borcherds). A partir d'une matrice de "Cartan généralisée généralisée" (dite ici de Borcherds normalisée), c'est à dire vérifiant seulement :

$$\begin{cases} a_{ij} \in \mathbb{R} & \forall (i,j) \in I^2 \\ a_{ii} \in \{2\} \cup \mathbb{R}_- & \forall i \in I \\ a_{ij} \in \mathbb{Z} & \text{si } a_{ii} = 2 \\ a_{ij} \leq 0 & \forall i \neq j \\ a_{ij} = 0 \Longleftrightarrow a_{ji} = 0 \end{cases}$$

il construit de façon analogue à Kac et Moody, une algèbre dont le système de racines admet des racines imaginaires dans la base (correspondant aux α_i pour i tels que $a_{ii} \leq 0$) cependant il est clair qu'aucun multiple d'une telle racine n'est encore une racine.

Si $\alpha \in \Delta_+$ et si α_i est une racine simple imaginaire, si $\alpha + \alpha_i$ a un support connexe, alors $\alpha + \mathbb{N}\alpha_i \subset \Delta$. Les racines imaginaires simples peuvent alors être caractérisées par cette propriété puisque les autres induisent une réflexion et que les chaînes $(\alpha + \mathbb{Z}\alpha_i) \cap \Delta$ sont bornées si α_i est réelle.

Dans le cas symétrisable où il se place, Borcherds obtient des résultats analogues à ceux précédemment obtenus pour les algèbres de Kac-Moody(caractérisation de $\mathfrak{g}(A)$ par les relations de Serre et lien entre la nature des racines et le signe de (α, α)), (voir aussi [K; 11.13]).

Enfin, Moody et Pianzola, dans [MP], développent une étude plus axiomatique des systèmes de racines (ou plus exactement des ensembles des racines réelles des systèmes de racines) et montrent la nécéssité de ne pas se restreindre au cas où la base du système est libre car cette propriété ne peut pas être stable par passage aux sous systèmes.

Le but à atteindre dans cette thèse était donc de trouver une axiomatique englobant tous ces systèmes de racines et donc en particulier stable par passage aux sous-systèmes en un sens bien sûr à définir mais qui devait être compatible à la notion de Moody et Pianzola (c'est à dire stable sous les réflexions par rapport aux racines réelles qu'il contient) mais aussi à la notion de système clos, et si possible moins exigeant. En effet en complétant comme Moody et Pianzola, un système de racines réelles avec des racines imaginaires, on voulait trouver effectivement un système de racines.

Il a donc fallu considérer dans les études précédentes des cas où la base n'est pas libre (réalisation quelconque d'une matrice) et ceci nous a bien sûr amené (dans les passages aux quotients qui traduisent, de façon abstraite, l'étude des systèmes de racines relatifs) à devoir considérer pour les racines imaginaires des ensembles quelconques de multiples.

Dans le cas des racines réelles, on doit donc admettre éventuellement certains doubles des racines simples, dans le cas imaginaire il ne devrait y avoir a priori pas de restriction, cependant, pour pouvoir utiliser des méthodes de récurrence, on a dû imposer aux ensembles $N_i \subset \mathbb{Q}$ (associés aux racines simples $(\alpha_i)_{i \in I}$ et tels que le système de racines est engendré par $\cup_{i \in I} N_i \alpha_i$) de ne pas admettre 0 pour borne inférieure. Cette axiomatique est donc développée ici et les définitions essentielles en sont données au chapitre IV, elle semble englober toutes les notions de systèmes de racines connus actuellement sauf celle développée par J.Y.Hée pour les groupes de Kac-Moody-Rée qu'il construit.

Le chapitre I est consacré à l'étude détaillée des systèmes de racines des algèbres de Kac-Moody-Borcherds. Intéressant en tant qu'exemple introductif à la notion et illustrant certaines propriétés des racines imaginaires, il sera également utilisé comme outil au chapitre II.

Nous construisons au chapitre II, un système de racines à base libre de façon abstraite, en introduisant la possibilité de multiples d'éléments de la base. Il faut bien sûr déterminer et établir les propriétés nécéssaires à la suite, et la principale difficulté est la non-existence (a priori) d'une algèbre admettant un tel ensemble pour système de racines. Nous avons donc généralisé un résultat déjà établi pour les systèmes de racines des algèbres de Kac-Moody, à savoir une caractérisation de ces systèmes par des propriétés abstraites pour établir les conditions à imposer et sous l'hypothèse d'existence, l'unicité d'un tel système. Et c'est ensuite par sa construction explicite que nous en démontrons l'existence.

Au chapitre III, nous introduisons une notion de coracine pour les racines imaginaires, dans le but de généraliser les résultats obtenus dans le cas symétrisable pour les algèbres de Kac-Moody grâce à la forme bilinéaire et en particulier :

$$(\alpha, \alpha) \leq 0 \Longleftrightarrow \alpha \in \Delta^{\mathrm{im}}$$

$$\alpha \in \Delta_+,\ \beta \in \Delta_+ \setminus \mathbb{Q}\alpha\,, \quad (\alpha, \beta) < 0 \Longrightarrow \alpha + \beta \in \Delta\ .$$

Nous décrivons alors les différents choix possible pour les coracines.

Le chapitre IV est consacré à l'axiomatique des système générateurs de racines (notion analogue aux réalisations), les hypothèses alors nécessaires sont

- celles déjà décrites sur les ensemble de multiples (nécessaires dès le chapitre II);

- des hypothèses techniques permettant de montrer qu'aucune combinaison linéaire à coefficients entiers positifs des racines de la base n'est nulle.

Cela est suivi d'une approche géométrique (qui n'est qu'une petite généralisation des résultats de Moody et Pianzola) qui n'est elle basée que sur les racines réelles du système.

Nous vérifions, au chapitre V, la stabilité par passage aux sous-systèmes (pour une définition suffisament large de la notion de sous-système), puis nous démontrons la conjugaison des bases par $\pm W$ dans le cas indécomposable et sous de nouvelles hypothèses (notées (A) et (BN)).

Enfin, le chapitre VI est consacré au passage aux quotients qui correspondent (dans l'étude abstraite) aux passages d'un système de racines d'une algèbre de Kac-Moody aux systèmes de racines de K-formes de cette algèbre. Une version simplifiée de ces résultats, suffisante pour l'étude des systèmes de racines relatifs des formes presque déployées des algèbres de Kac-Moody figure déjà dans [B_3R]; nous y avons également effectué un certains nombres de calculs précis de tels quotients (pour toutes les formes réelles presque déployées des algèbres affines).

I

Système de racines d'une algèbre de Kac-Moody-Borcherds

1. Algèbres de Kac-Moody-Borcherds

On considère K_1, un corps totalement ordonné (ce sera souvent $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$), on note K_{1+}(resp. K_{1-}) l'ensemble des éléments positifs (resp. négatifs) ou nuls de K_1.

1.1. Matrices de Borcherds

Définition

Une matrice $A = (a_{ij})$; $(i,j) \in I^2$, I ensemble d'indices fini ou dénombrable est dite *de Borcherds (générale)* si elle vérifie les propriétés suivantes :

(B1) $a_{ij} \in K_1$ pour tout $(i,j) \in I^2$.

(B2) $a_{ij} \in K_{1-}$ pour tout $(i,j) \in I^2$ tel que $i \neq j$.

(B3) Si $a_{ii} > 0$ on dira que $i \in I_{\text{re}}$, et que i est *réel*, alors pour tout $j \in I$, on a $\dfrac{2a_{ij}}{a_{ii}} \in \mathbb{Z}$.
Si $a_{ii} \leq 0$ on dira que $i \in I_{\text{im}}$, et que i est *imaginaire.*

(B4) Si $a_{ij} = 0$, alors $a_{ji} = 0$.

Remarques :

1) Les matrices étudiées par Borcherds, dans [Bo1] sont symétriques et vérifient ces propriétés.

2) La matrice sera dite *de Borcherds normalisée* si de plus, A vérifie :

(B5) pour tout $i \in I_{\text{re}}$, $a_{ii} = 2$.

On a alors $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, pour $i \in I_{\text{re}}$ et pour tout $j \in I$.

Si A est une matrice de Borcherds générale, on lui associe la matrice de Borcherds normalisée $A' = (a'_{ij})$ où $a'_{ij} = \dfrac{2a_{ij}}{a_{ii}}$, si $i \in I_{\mathrm{re}}$, et $a'_{ij} = a_{ij}$, si $i \in I_{\mathrm{im}}$.

3) Si I_{im} est vide et A vérifie (B5), A est une matrice *de Kac Moody* (ou encore *de Cartan généralisée*). La matrice de Borcherds A est dite *symétrisable* (resp. *de Cartan*) s'il existe des coefficients positifs ε_i tels que si on pose $b_{ij} = \varepsilon_i a_{ij}$, la matrice $B = (b_{ij})$ est symétrique (resp. symétrique définie positive et A vérifie (B5)); on peut alors supposer les $\varepsilon_i \in \mathbb{Q}_+^*$ pour $i \in I_{\mathrm{re}}$. Une matrice de Cartan est une matrice de Kac-Moody.

4) Une matrice carrée sera dite *décomposable* si il existe une partition $I = I_1 \sqcup I_2$ de I en deux ensembles non vides, telle que $a_{ij} = a_{ji} = 0$ dès que $i \in I_1$ et $j \in I_2$. Dans le cas contraire, la matrice est dite *indécomposable.*

5) Si A est une matrice de Borcherds normalisée, on lui associe un *diagramme de Dynkin* ainsi construit :

A tout $i \in I$, on associe un point, indexé par i, et auprès duquel on fait figurer le coefficient a_{ii} si ce dernier est négatif (ou nul).

Si et seulement si $a_{ij} \neq 0$, on lie les sommets i et j du diagramme. Plus précisément, si i et j sont deux éléments de I_{re}, on a $a_{ij}a_{ji} \in \mathbb{N}$ et on utilise les conventions de Kac, [K; 4.7]; si $a_{ij}a_{ji} \leq 4$ et $|a_{ij}| \geq |a_{ji}|$, les deux sommets sont liés par $|a_{ij}|$ segments, et ceux-ci sont munis d'une flèche dirigée vers i si $|a_{ij}| > 1$. Si $a_{ij}a_{ji} > 4$, ou, si l'un des deux au moins n'est pas dans I_{re}, on les lie par un trait gras au dessus duquel on note $|a_{ij}|$ près de i et $|a_{ji}|$ près de j.

Il est clair qu'une matrice de Borcherds normalisée est indécomposable si et seulement si son diagramme de Dynkin est un graphe connexe.

1.2. Classification

Comme dans [K; chap 4], on peut établir une classification des *matrices de Vinberg* (c'est à dire des matrices A vérifiant (B1), (B2) et (B4)), d'ordre fini n et qui, de plus, sont indécomposables. Introduisons comme Kac, la notation : pour $v \in K_1^n$, $v \geq 0$ (resp. $v > 0$) si et seulement si toutes ses coordonnées sont positives (resp. strictement positives).

Alors, sous les hypothèses précédentes, A et sa transposée A^t sont simultanément et exclusivement dans une des situations suivantes;

(Fin) $\det(A) \neq 0$; il existe $u > 0$ tel que $Au > 0$;
$Av \geq 0$ implique $v > 0$ ou $v = 0$;
A et A^t sont alors dites *de type fini.*

(Aff) $\det(A) = 0$; il existe $u > 0$ tel que $Au = 0$;
$Av \geq 0$ implique $Av = 0$;
A et A^t sont alors dites *de type affine.*

(Ind) Il existe $u > 0$ tel que $Au < 0$;

$Av \geq 0$, $v \geq 0$ implique $v = 0$;

A et A^t sont alors dites *de type indéfini.*

Il est en particulier intéressant de remarquer que (Fin), (Aff), (Ind), sont caractérisées par l'existence du vecteur u donné dans cette classification.

Démonstration.

Notons $V = K_1^m$, la démonstration de Kac repose sur le "lemme fondamental" démontré par Vinberg [V], dans le cas où $\mathbb{R}$ est le corps considéré.

Montrons qu'il est encore valable dans le cas d'un corps totalement ordonné quelconque. Il s'agit de montrer que si $v_1, \ldots, v_n$ sont des éléments de V tels que

$$(*) \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i = 0 \text{ et } \lambda_i \in K_{1+} (\forall i \in \{1\ldots n\}) \Longrightarrow \lambda_i = 0 \ (\forall i \in \{1\ldots n\}) ;$$

alors il existe une forme linéaire définie sur V strictement positive sur les v_i.

Montrons ce résultat par récurrence sur n, pour $m \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

Si $n = 1$, la propriété $(*)$ implique $v_1 \neq 0$ donc l'existence de μ ne pose aucun problème pour $m \in \mathbb{N}^*$.

Supposons le résultat établi au rang $n - 1$.

Soit alors n vecteurs de V vérifiant l'hypothèse $(*)$, il est clair qu'aucun de ces vecteurs n'est nul. Soit alors $C := \sum_{i=1}^{i=n-1} K_{1+} v_i$.

- Si le vecteur v_n est dans le cône C, le résultat est immédiat par hypothèse de récurrence.
- Sinon $v_n \notin C$ ce qui implique $K_{1+} v_n \cap C = \{0\}$, de plus par $(*)$, on a nécessairement $K_{1-} v_n \cap C = \{0\}$; donc $C \cap K_1 v_n = \{0\}$ et la dimension m est supérieure ou égale à 2.

On considère alors $V' := V / K_1 v_n$, et on note $v'_1, \ldots, v'_{n-1}$ les classes des v_i. Une relation linéaire $\sum_{i=1}^{i=n-1} \lambda_i v'_i = 0$ à coefficients positifs dans K_1, implique :
$\sum_{i=1}^{i=n-1} \lambda_i v_i \in C \cap K v_n = \{0\}$ et donc par $(*)$ la nullité de tous les λ_i.

Par hypothèse de récurrence, il existe dans V' une forme linéaire μ_1 strictement positive sur chacun des v'_i pour $i \in \{1 \ldots n-1\}$. On note encore $\mu_1 \in V^*$ la forme linéaire sur V nulle sur $K v_n$, et induisant μ_1 lors du passage au quotient.

Soit alors $\mu_2 \in V^*$, telle que $\mu_2(v_n) > 0$, et $\lambda := sup_{i \in \{1 \ldots n-1\}} \{ (\frac{-\mu_2(v_i)}{\mu_1(v_i)}), 1 \}$ alors $\mu := \lambda \mu_1 + \mu_2$ convient.

La suite de la démonstration est analogue à celle de Vinberg [V] reproduite par Kac [K, 4,3].

Remarques :

1) Si A est une matrice de Borcherds normalisée indécomposable de type fini (resp. de type affine), il s'agit d'une matrice de Cartan (resp. une matrice de Kac-Moody affine usuelle (ie. *affine réelle*) ou la matrice nulle d'ordre 1 dite *affine imaginaire*).

2) Si l'un des a_{ii} est strictement négatif, la matrice est de type indéfini. Il est clair en effet que l'existence d'un vecteur tel que ceux caractérisant les cas affines et finis est alors impossible.

3) Multiplier une ligne ou une colonne d'une matrice de Vinberg par un scalaire strictement positif ne change pas le type de cette matrice. En particulier A et sa normalisée A' (définie en 1.1.2) sont de même type. On dira aussi qu'une matrice de Borcherds indécomposable A est de type affine réelle (resp. affine imaginaire) si A' l'est.

4) Une matrice de Vinberg indécomposable d'ordre infini A sera dite de type
profini : (ou affine infini [K; 7.11]) si toute sous matrice principale de A d'ordre fini est de type fini;
proindéfini : sinon. Dans ce cas il existe une sous matrice principale de A de type indéfini.

5) Une matrice de Vinberg d'ordre fini n, décomposable sera dite de type :

- *fini, affine, indéfini* : si chacune de ses composantes est de ce type;

A partir de la classification des matrices de Vinberg indécomposables, on obtient la caractérisation de ces trois cas par :

type fini : il existe dans K_1^n un élément $u > 0$ tel que $Au > 0$;

type affine : il existe dans K_1^n un élément $u > 0$ tel que $Au = 0$;

type indéfini : il existe dans K_1^n un élément $u > 0$ tel que $Au < 0$;

- *semi affine* : si ses composantes sont de type affine ou fini;
- *infini* : si ses composantes sont de type affine ou indéfini.

6) On indiquera plus tard (3.3) dans un cadre plus général, la classification des matrices de Borcherds (normalisées) indécomposables de type fini, affine ou profini.

1.3. Réalisation d'une matrice A de Borcherds sur une extension K de K_1

Une *réalisation* associée à une telle matrice est un quadruplet ($\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}^\wedge$, Π, $\Pi^\wedge$) tel que $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}^\wedge$ sont deux K-espaces vectoriels munis d'une dualité $<,>$; $\Pi^\wedge = \{\alpha_i^\wedge / i \in I\}$ une famille d'éléments de $\mathfrak{h}$ et $\Pi = \{\alpha_i / i \in I\}$ une famille d'éléments de $\mathfrak{h}^\wedge$ vérifiant $< \alpha_j, \alpha_i^\wedge >= a_{ij}$.

Pour $i \in I_{re}$, on note $\alpha_i^\vee = (2/a_{ii})\alpha_i^\wedge$, qui est égal à $\alpha_i^\wedge$ si la matrice est normalisée.

Remarques :

1) Une réalisation est dite *de Kac* si de plus, $|I| = n < \infty$, les parties Π et $\Pi\check{}$ sont libres, si l désigne le rang de A, la relation $n - l = \dim\mathfrak{h} - n$ est vérifiée et enfin si $\mathfrak{h}\check{} = \mathfrak{h}^*$ (le dual de $\mathfrak{h}$), cf [K; 1.1].

2) Si I est fini, il existe une unique réalisation de Kac à isomorphisme (non forcément unique) près.

Démonstration.

On peut en effet construire une telle réalisation. Supposons A d'ordre n et de rang l. Quitte à effectuer une permutation de I c'est à dire une permutation simultanée sur les lignes et les colonnes de A, on peut supposer que les l premières lignes de la matrice sont linéairement indépendantes .

On considère alors la matrice C d'ordre $n \times (2n - l)$ telle que :
si $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, avec A_1 d'ordre $l \times n$ et $\mathrm{rg}A_1 = l$, alors $C = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & I_{n-l} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{rg}C = n$.

On pose $\mathfrak{h} = K^{2n-l}$ et $\mathfrak{h}\check{}$ son espace dual,

Π l'ensemble des n premières formes coordonnées de $\mathfrak{h}$ (indépendantes dans $\mathfrak{h}^*$),

$\Pi\check{}$ les vecteurs correspondant aux n lignes de C, indépendantes puisque $rgC = n$.

On a évidemment $\alpha_j(\alpha\check{_i}) = a_{ij}$. Il s'agit donc d'une réalisation de Kac de A.

Pour établir l'unicité d'une telle réalisation sur K, montrons que si $R = (\mathfrak{h}, \mathfrak{h}\check{}, \Pi, \Pi\check{})$ est une réalisation de Kac de A, elle est isomorphe à celle qui vient d'être construite.

On sait que $\mathfrak{h}\check{} = \mathfrak{h}^*$, et, $\dim\, \mathfrak{h} = 2n - l$. On conserve l'ordre précédemment choisi sur I, Π est, par hypothèse, libre dans $\mathfrak{h}\check{}$, on peut donc la compléter en une base $\{\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_{2n-l}\}$. On a alors :

$$(<\alpha_j, \alpha\check{_i}, >) = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ A_2 & D \end{pmatrix}$$

Cette matrice est d'ordre maximal, c'est à dire n, car si on identifie $\mathfrak{h}$ et K^{2n-l} grâce à la base choisie dans $\mathfrak{h}^*$, les vecteurs lignes sont les $\alpha\check{_i}$ donc sont indépendants.

A_1 étant de rang l, en remplaçant éventuellement, pour $i \geq n+1$, α_i par $\alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\alpha_j$, on peut supposer sans changer la réalisation que $B = 0$. Le rang étant inchangé, il est clair alors que la matrice D' obtenue à la place de D est inversible et ainsi, quitte à remplacer α_i, pour $i \geq n+1$ par $\sum_{j=n+1}^{2n-l} \mu_{ij}\alpha_j$, on peut supposer (sans changer de réalisation) que $D = Id_{n-l}$.

□

3) Il existe une réalisation de A, pour laquelle Π et $\Pi\check{}$ sont libres, et la dualité non dégénérée; une telle réalisation sera dite ***libre***.

Démonstration.

L'idée est la même que précédemment, on considère la matrice d'ordre $|I| \times 2|I|$, $C = (\,A \quad I_{|I|}\,)$ On pose alors $\mathfrak{h} = (K^{2|I|})^*$ et $\mathfrak{h}\check{} = K^{2|I|}$.
Π est l'ensemble des $|I|$ premières formes coordonnées sur $\mathfrak{h}\check{}$ et $\Pi\check{}$ celui des $|I|$ lignes de la matrice C qui sont évidemment indépendantes.

□

1.4. L'algèbre $\widetilde{\mathfrak{g}}$ (A, R)

Si K est une extension de K_1, à partir d'une réalisation R quelconque sur K, de A matrice de Borcherds normalisée à coefficients dans le corps K_1, il est possible d'introduire, comme Kac, l'algèbre de Lie $\widetilde{\mathfrak{g}}(A,R)$ sur K définie par les générateurs $\{\mathfrak{h},\, e_i,\, f_i\,;\ (i \in I)\}$ vérifiant les relations :

$$\begin{cases} [h,h'] = 0 \\ [h,e_i] = \alpha_i(h)e_i \\ [h,f_i] = -\alpha_i(h)f_i \\ [e_i,f_j] = \delta_{ij}\alpha\check{}_i \end{cases}$$

Remarques :

1) La dualité $<,>$ induit une application φ de $\mathfrak{h}\check{}$ dans $\mathfrak{h}^*$; on note $[\alpha]$ l'image de α par φ .

2) On note $\widetilde{Q}$ le $\mathbb{Z}$-module libre $\widetilde{Q} = \oplus_{i\in I}\mathbb{Z}\alpha_i$; $\widetilde{Q}_+ = \oplus_{i\in I}\mathbb{N}\alpha_i$; $\widetilde{Q}_- = -\widetilde{Q}_+$; dans $\mathfrak{h}\check{}$ on a le $\mathbb{Z}$-module $Q = \sum_{i\in I}\mathbb{Z}\alpha_i$ et dans $\mathfrak{h}^*$, $[Q] = \sum_{i\in I}\mathbb{Z}[\alpha_i]$. Enfin on note $Q\check{} = \sum_{i\in I}\mathbb{Z}\alpha\check{}_i$; $Q\check{}_{K_1} = \sum_{i\in I}K_1\alpha\check{}_i$; (qui sont contenus dans $\mathfrak{h}$) et $\widetilde{Q}\check{}_{K_1} = \oplus_{i\in I}K_1\alpha\check{}_i$. Pour tous ces ensembles l'ajout de $*$ en exposant signifie que l'on retire 0. De même, l'ajout de K en indice à $\widetilde{Q}$, Q, $[Q]$, $Q\check{}$, ou $\widetilde{Q}\check{}$ (dans ce dernier cas K remplace K_1) signifie que l'on tensorise ces objets par K.

3) Les propriétés éventuelles suivantes de la réalisation pourraient être intéressantes en particulier dans (2.1) et au chapitre IV :

(R1) $[\alpha_i] \neq 0$ pour tout $i \in I$.

(R2) $\alpha\check{}_i \neq 0$ pour tout $i \in I$.

(R3) $\mathfrak{h}\check{}$ s'injecte dans $\mathfrak{h}^*$.

(R4) Π est une base de $\mathfrak{h}\check{}$.

(R5) $[Q]$ est un $\mathbb{Z}$-module libre qui admet pour base une famille libre de $\mathfrak{h}^*$.

4) Si $\alpha \in \widetilde{Q}_K$ (resp. $\widetilde{Q}_K^{\,\hat{}}$), on définit :
le support S_α de α comme l'ensemble des indices $i \in I$ tels que la composante de α suivant α_i (resp. $\alpha_i^{\,\hat{}}$) soit non nulle.
La hauteur de α, comme la somme des coefficients de cette décomposition unique de α. Cette dernière notion n'est importante que lorsque $\alpha \in \widetilde{Q}_\pm$ (resp. $\widetilde{Q}_\pm^{\,\hat{}}$).

5) Il est clair que l'application $e_i \mapsto -f_i\,; \quad f_i \mapsto -e_i\,; \quad h \mapsto -h$, se prolonge en un automorphime de l'algèbre $\widetilde{\mathfrak{g}}$ qui est une involution notée $\tilde{\omega}$.

6) Si $J \subset I$ et si $A = (a_{ij})$; $(i,j) \in I^2$, on note :
$A(J)$, la matrice extraite de A en ne conservant que les lignes et colonnes dont les indices sont dans J; c'est une matrice de Borcherds générale (resp. normalisée) si A en est une;
$\widetilde{Q}(J) = \oplus_{i \in J} \mathbb{Z}\alpha_i$, et on définit aussi de façon évidente $\widetilde{Q}_+(J)$ et $\widetilde{Q}_-(J)$.

Lemme 1.4.1.

Soit A matrice de Borcherds et $R = (\mathfrak{h}, \mathfrak{h}\hat{}, \Pi, \Pi\hat{})$ une réalisation de A.

a) L'application évidente de $\oplus_{i\in I} Ke_i \oplus \mathfrak{h} \oplus_{i\in I} Kf_i \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}} = \widetilde{\mathfrak{g}}(A)$ est injective. On note V_1 son image. On identifie $\mathfrak{h}$ et les générateurs e_i et f_i à leurs images. $\mathfrak{h}$ est une sous algèbre commutative de $\widetilde{\mathfrak{g}}$.

b) La sous algèbre $\widetilde{\mathfrak{n}}_+$ (resp. $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$) engendrée par les e_i (resp. par les f_i) est isomorphe à l'algèbre de Lie libre sur les générateurs e_i (resp. f_i).

c) $\tilde{\omega}(\widetilde{\mathfrak{n}}_+) = \widetilde{\mathfrak{n}}_- \quad \tilde{\omega}(\widetilde{\mathfrak{n}}_-) = \widetilde{\mathfrak{n}}_+ \quad \tilde{\omega}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.

d) $\widetilde{\mathfrak{g}} = \widetilde{\mathfrak{n}}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \widetilde{\mathfrak{n}}_-$ (somme vectorielle d'espaces qui ne sont pas des idéaux).

e) En imposant e_i de degré α_i, f_i de degré $-\alpha_i$ et tout élément de $\mathfrak{h}$ de degré 0, on obtient une graduation d'algèbre de Lie de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ par $\widetilde{Q}$:
$\widetilde{\mathfrak{g}} = \oplus_{\alpha \in \widetilde{Q}} \widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha$, pour laquelle on a :
$\widetilde{\mathfrak{g}}_0 = \mathfrak{h} \qquad \widetilde{\mathfrak{n}}_+ = \oplus_{\alpha \in \widetilde{Q}_+} \widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha \qquad \widetilde{\mathfrak{n}}_- = \oplus_{\alpha \in \widetilde{Q}_-} \widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha$

En particulier, si $\widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha \neq \{0\}$, on a nécessairement, $\alpha \in \widetilde{Q}_+^* \sqcup \widetilde{Q}_-^* \sqcup \{0\}$. Lorsque, de plus, $\alpha \neq 0$, α est alors appelée racine de $(\widetilde{\mathfrak{g}}; \mathfrak{h})$.
$\widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha$ est contenu dans l'espace propre $\widetilde{\mathfrak{g}}_{[\alpha]}$ de $\mathfrak{h}$ de poids $[\alpha] \in \mathfrak{h}^*$.
Pour tout $\alpha \in \widetilde{Q} \setminus \{0\}$ $\dim \widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha$ est finie et $\tilde{\omega}(\widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha) = \widetilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha}$.
Pour $i \in I$ on a $\widetilde{\mathfrak{g}}_{\alpha_i} = Ke_i$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_{-\alpha_i} = Kf_i$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_{m\alpha_i} = \{0\}$ si m est différent de -1, 0 ou 1.

f) Il existe un unique idéal $\mathfrak{r}$ (resp. $\mathfrak{r}_1$) de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ maximal parmi les idéaux gradués d'intersection nulle avec $\mathfrak{h}$ (resp V_1). $\mathfrak{r}$ (resp. $\mathfrak{r}_1$) s'écrit comme la somme directe des idéaux $\mathfrak{n}_+ \cap \mathfrak{r}$ et $\mathfrak{n}_- \cap \mathfrak{r}$ (resp. $\mathfrak{n}_+ \cap \mathfrak{r}_1$ et $\mathfrak{n}_- \cap \mathfrak{r}_1$).

Démonstration.

1) Démontrons simultanément b) et c). Soit $\mathfrak{L}$ l'algèbre de Lie libre engendrée par $\{\mathfrak{h}, e_i, f_i; \quad (i \in I)\}$; soit $V = \oplus_{i \in I} K v_i$, on note T(V), l'algèbre tensorielle de V. Cette algèbre admet $\{(v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_d})/(i_1, i_2, \cdots, i_d) \in I^d; d \in \mathbb{N}\}$ pour base vectorielle sur K.

Soit λ une forme linéaire quelconque sur $\mathfrak{h}$.

Posons $\rho : \ \{\mathfrak{h}, e_i, f_i; (i \in I)\} \longrightarrow \operatorname{End} T(V)$, où les endomorphismes de l'ensemble image $\rho(\{\mathfrak{h}, e_i, f_i; \quad (i \in I)\})$ sont définis sur la base précédente de $T(V)$ par ;

α) $\forall i \in I \qquad \rho(f_i)(v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_d}) = (v_i \otimes v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_d})$

β) $\forall h \in \mathfrak{h}$ on pose par récurrence sur d;

$\rho(h)(1) = \lambda(h).1$, et si $d \geq 1$

$\rho(h)(v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_d}) = -\alpha_{i_1}(h)(v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_d}) + v_{i_1} \otimes \rho(h)(v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_d})$.

γ) $\forall i \in I$, toujours par récurrence sur d, on pose;

$\rho(e_i)(1) = 0$, et si $d \geq 1$

$\rho(e_i)(v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_d}) = \delta_{i,i_1} \rho(\alpha\,\hat{i})(v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_d}) + v_{i_1} \otimes \rho(e_i)(v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_d})$

Par la propriété universelle de $\mathfrak{L}$, ρ se prolonge à $\mathfrak{L}$ en un endomorphisme d'algèbres de Lie ($\operatorname{End} T(V)$ étant munie du crochet de Lie [A,B] =AB-BA). En fait, ρ induit une représentation de $\tilde{\mathfrak{g}}$. En effet, on vérifie facilement (cf [K; 1.2]) que les relations suivantes sont vérifiées :

$\rho([h, h']) = 0$, et $\rho(\lambda h + \mu h') = \lambda \rho(h) + \mu \rho(h')$

(pour tous h, h' dans $\mathfrak{h}$ pour $(\lambda, \mu) \in K^2$);

$\rho([e_i, f_i] - \alpha\,\hat{i}) = 0$, pour tout i dans I;

Et, pour tout i dans I, et h dans $\mathfrak{h}$

$\rho([h, e_i] - \alpha_i(h) e_i) = 0$, $\rho([h, f_i] + \alpha_i(h) f_i) = 0$.

On note alors $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ (resp. $\tilde{\mathfrak{n}}_-$), la sous algèbre de $\tilde{\mathfrak{g}}$ engendrée par les images des e_i (resp. des f_i) par la projection π de $\mathfrak{L}$ sur $\tilde{\mathfrak{g}}$. On définit un isomorphisme K linéaire θ de $\oplus_{i \in I} K f_i$ sur V en posant; $\theta(f_i) = v_i$.

On peut supposer $T(V) \subset \operatorname{End} T(V)$ grâce à l'injection g qui, à $x \in T(V)$, associe l'endomorphisme de $T(V)$ défini par $y \longrightarrow x.y = x \otimes y$. g est un endomorphisme d'algèbres de Lie ($T(V)$ est une algèbre associative, ce qui induit un crochet de Lie). $\forall\, a \in T(V) \quad \rho \circ \pi(f_i).a = v_i.a = g_{v_i}(a)$; autrement dit $\rho \circ \pi(f_i) = v_i$, en tant qu'élément de End $T(V)$.

$\rho(\tilde{\mathfrak{n}}_-)$ est, par conséquent, inclus dans la sous algèbre de Lie de $T(V)$ engendrée par les v_i (c'est à dire l'algèbre de Lie libre $\mathfrak{L}(V)$ engendrée par V). On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\oplus_{i\in I}Kf_i \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\pi"'] & V \arrow[d, "i"'] \\
\widetilde{\mathfrak{n}}_- \arrow[r, "\rho"] & \mathfrak{L}(\mathrm{V})
\end{tikzcd}$$

(où i désigne l'injection canonique).

$\pi_{|\oplus_{i\in I}Kf_i}\circ\theta^{-1} : V \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{n}}_-$ est linéaire donc se prolonge en un unique homomorphisme d'algèbres de Lie $\rho_2 : \mathfrak{L}(\mathrm{V}) \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{n}}_-$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\theta^{-1}"] \arrow[d, "i"'] & \oplus_{i\in I}Kf_i \arrow[d, "\pi"'] \\
\mathfrak{L}(\mathrm{V}) \arrow[r, "\rho_2"] & \widetilde{\mathfrak{n}}_-
\end{tikzcd}$$

On vérifie que $\rho_2\circ\rho(\pi(f_i)) = \pi(f_i)$. Or $\rho_2\circ\rho$ est un homomorphime d'algèbres de Lie et $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ est engendrée par les $\pi(f_i)$ donc $\rho_2\circ\rho = \mathrm{Id}_{\widetilde{\mathfrak{n}}_-}$ et, de même $\rho\circ\rho_2 = \mathrm{Id}_V$.
Par conséquent, $\pi_{|\,\oplus_{i\in I}Kf_i} = \rho^{-1}\circ i\circ\theta$ est injective. En particulier, on peut identifier les f_i et leurs images dans $\widetilde{\mathfrak{g}}$, et on a ainsi établi que $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ est isomorphe à l'algèbre de Lie libre engendrée par les f_i pour $i\in I$.

Il est clair que $\tilde{\omega}(\widetilde{\mathfrak{n}}_+) = \widetilde{\mathfrak{n}}_-$ (où $\widetilde{\mathfrak{n}}_+$ désigne la sous algèbre de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ engendrée par les e_i) et $\tilde{\omega}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ d'où c). $\tilde{\omega}$ induit un isomorphisme entre les deux algèbres $\widetilde{\mathfrak{n}}_+$ et $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$, puisque $\tilde{\omega}$ est un automorphisme de $\widetilde{\mathfrak{g}}$. $\mathfrak{L}(V)$ est donc isomorphe à $\widetilde{\mathfrak{n}}_+$. Or, par l'isomorphisme $e_i \mapsto v_i$, on peut identifier V et $\oplus_{i\in I}Ke_i$.

On a finalement $-\pi_{|\oplus_{i\in I}Ke_i} = \tilde{\omega}\circ\pi_{|\oplus_{i\in I}Kf_i}\circ\psi$ où $\psi : \oplus_{i\in I}Ke_i \longrightarrow \oplus_{i\in I}Kf_i$ est K linéaire et telle que : $e_i \longrightarrow f_i$. Par suite, $\pi_{|\oplus_{i\in I}Ke_i}$ est injective, ce qui établit b).

2) Montrons a) : Considérons à présent, $\pi : \mathfrak{h} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}}$.
$h\in\ker\pi \Longrightarrow \rho(\pi(h)) = 0 \Longrightarrow \rho(\pi(h))1 = 0 \Longrightarrow \lambda(h)1 = 0 \Longrightarrow \lambda(h) = 0$, puisque K est de caractéristique nulle. Dans la construction de la représentation, on pouvait choisir arbitrairement $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ sans changer π, par suite, il vient, $h = 0$.
$\mathfrak{h}$ s'injecte dans $\widetilde{\mathfrak{g}}$, il est donc possible de l'identifier à son image. Pour établir a), il reste à montrer que la somme est effectivement directe.

Soient, $n_+ \in \widetilde{\mathfrak{n}}_+$; $n_- \in \widetilde{\mathfrak{n}}_-$ et $h \in \mathfrak{h}$ tels que $n_+ + h + n_- = 0$, on a en particulier $\rho(n_+ + h + n_-)1 = 0$. Mais on a $\rho(h)1 = \lambda(h)$; n_+ est une combinaison linéaire de crochets successifs des e_i pour $i \in I$, donc $\rho(n_+)1 = 0$.

D'autre part, si T^d désigne l'ensemble des éléments homogènes de degré d de $T(V)$, on montre facilement que pour tout $i \in I$, $\rho(f_i)T^d \subset T^{d+1}$ et donc $\rho(f_i)T \subset \oplus_{d>0}T^d$. $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ étant engendrée par les f_i, il vient; $\rho(n_-)1 \in \oplus_{d>0}T^d$. Comme $\rho(h + n_-)1 = 0$, on en déduit que $\rho(h)1 = \lambda(h) = 0$ et $\rho(n_-)1 = 0$. On utilise alors à nouveau la possibilité d'un choix quelconque de λ et de l'injectivité de la restriction de ρ à $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$, pour conclure : $h = 0$ et $n_+ = 0$.

3) Pour démontrer d), on vérifie simplement que $\widetilde{\mathfrak{n}}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \widetilde{\mathfrak{n}}_+$ est une sous algèbre de Lie de $\widetilde{\mathfrak{g}}$, c'est à dire est stable par le crochet de Lie. Comme elle contient les générateurs de $\widetilde{\mathfrak{g}}$, on a ainsi l'égalité cherchée.

4) L'existence d'une graduation d'algèbre de Lie de $\mathfrak{L}$ par $\widetilde{Q}$ telle que le degré de e_i (resp. f_i), pour tout $i \in I$, soit α_i (resp. $-\alpha_i$), et le degré de tout élément de $\mathfrak{h}$ soit 0 est évidente. Il suffit pour établir l'existence de la graduation proposée de vérifier que les générateurs de l'idéal par lequel on quotiente, sont homogènes. Or, on a bien : deg $([h, f_i] + \alpha_i(h)f_i) = -\alpha_i$; deg $([e_i, f_i] - \alpha\check{}_i) = 0$; deg $([h, e_i] - \alpha_i(h)e_i) = \alpha_i$; deg $([h, h']) = 0$.

Cette graduation est bien sûr unique puisque entièrement déterminée par ses valeurs sur les générateurs de l'algèbre.

$\mathfrak{h} \subset \widetilde{\mathfrak{g}}_0$ par hypothèse sur la graduation.

$\widetilde{\mathfrak{n}}_+$ est engendrée, comme espace vectoriel, par les crochets itérés des e_i tels que $[e_{i_1}.....e_{i_n}] = [e_{i_1}, [e_{i_2}, [e_{i_3}, ...[e_{i_{n-1}}, e_{i_n}]..]]]$ (avec $n \geq 1$) qui est de degré $\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + ... + \alpha_{i_n}$ donc de degré non nul et appartenant à $\widetilde{Q}_+$.

On obtient par le même raisonnement que tous les éléments homogènes engendrant $\widetilde{\mathfrak{n}}_-$ ont un degré non nul, situé dans $\widetilde{Q}_-$.

d) permet alors d'expliquer les restrictions données dans e) sur les racines possibles.

Si $\alpha \in \widetilde{Q}_+$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha$ est engendrée par les $[e_{i_1}.....e_{i_n}]$ où $\alpha = \alpha_{i_1} + ... + \alpha_{i_n} = \sum n_j \alpha_j$. On a donc bien $\widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha \subset \widetilde{\mathfrak{g}}_{[\alpha]}$. De plus la décomposition est bien sûr unique, $\widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha$ est engendrée par au plus $t!$ (nombre de permutations possibles sur les e_i) générateurs donc est de dimension finie. Le résultat portant sur les espaces radiciels correspondant à une *racine simple* (ie du type α_i) et ses multiples est alors clair.

5) Considérons enfin $\{\mathfrak{J}_a\}_{a \in \mathfrak{A}}$ (resp. $\{\mathfrak{J}_b\}_{b \in \mathfrak{B}}$) l'ensemble des idéaux gradués de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ tels que $\mathfrak{J}_a \cap \mathfrak{h} = \{0\}$ (resp. $\mathfrak{J}_b \cap V = \{0\}$). Pour chacun de ces idéaux $\mathfrak{J}$ on a donc

$\mathfrak{I} = \oplus_{\alpha \in \widetilde{Q}} \mathfrak{I} \cap \widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha$ avec $\mathfrak{I} \cap \widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha = \{0\}$ pour $\alpha = 0$ (resp. et pour $\alpha = \pm\alpha_i$ $i \in I$); alors $\mathfrak{r} = \sum_{a \in \mathfrak{A}} \mathfrak{I}_a$ (resp. $\mathfrak{r}_1 = \sum_{b \in \mathfrak{B}} \mathfrak{I}_b$) est un idéal gradué de $\widetilde{\mathfrak{g}}$, intersecté trivialement par $\mathfrak{h}$ (resp. V_1), et, bien sûr maximal pour les propriétés précédentes.

Montrons enfin que si $\widetilde{\mathfrak{r}}$ est égal à $\mathfrak{r}$ ou $\mathfrak{r}_1$ alors $\mathfrak{r} = \mathfrak{r} \cap \widetilde{\mathfrak{n}}_+ \oplus \mathfrak{r} \cap \widetilde{\mathfrak{n}}_-$ Comme $\mathfrak{r}$ est gradué et ne rencontre $\mathfrak{h}$ que trivialement, il est clair qu'on a déjà établi cette somme vectorielle, reste à démontrer que les deux membres de cette somme sont des idéaux qui, de plus, commutent, ce qui se fait très facilement [K; 1.1].

□

1.5. L'algèbre de Kac-Moody-Borcherds

L'algèbre de Kac-Moody-Borcherds est alors définie comme le quotient de $\widetilde{\mathfrak{g}}(A, R)$ par l'idéal $\mathfrak{r}_1$ et est notée $\mathfrak{g}(A, R)$, ou parfois $\mathfrak{g}$ ou $\mathfrak{g}(A)$. Cette définition (avec $\mathfrak{r}_1$ au lieu de $\mathfrak{r}$) a été suggérée par Denis Berg.

Il est clair que V_1 s'injecte dans $\mathfrak{g}$, on peut ainsi identifier les e_i et les f_i avec leurs images.

Lemme 1.5.1.

$$\text{Si } a_{ij} = 0, \text{ alors dans } \mathfrak{g} \text{ on a } (\operatorname{ad} e_i)e_j = 0 \text{ et } (\operatorname{ad} f_i)f_j = 0 .$$

Démonstration.

Soit donc par hypothèse i et j dans I tels que $a_{ij} = 0$ (donc $a_{ji} = 0$), dans $\widetilde{\mathfrak{g}}$ on considère le sous-espace vectoriel $\mathfrak{J}$ de $\widetilde{\mathfrak{n}}_+$ engendré par des crochets itérés $[e_{i_1} ... e_{i_n}]$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, et $i_{n-1} = i$, $i_n = j$. Montrons que $\mathfrak{J}$ est un idéal de $\widetilde{\mathfrak{g}}$.

Il est clair que $\mathfrak{J}$ est stable sous l'action $\operatorname{ad}(e_i)$ pour tout $i \in I$, de même comme $[h, [e_{i_1} ... e_{i_n}]] = \sum_{l=1}^{l=n} \alpha_{i_l}(h)[e_{i_1} ... e_{i_n}]$, il est stable sous l'action adjointe de $\mathfrak{h}$.

Reste à étudier l'action des f_k, $k \in I$. On a grâce à Jacobi :

$$[f_k, [e_{i_1} ... e_{i_n}]] = \sum_{l=1}^{l=n} [e_{i_1}[e_{i_2}[..[e_{i_{l-1}}[[f_k, e_{i_l}], [e_{i_{l+1}} ... e_{i_n}]]]..]]] .$$

Il est immédiat que les termes de la somme correspondants à des indices $l < n - 1$ sont dans $\mathfrak{J}$, et seuls sont à regarder les cas $l = n - 1$ et $l = n$; mais alors dans chacun des cas, les deux termes $[[f_k, e_i], e_j]$ et $[e_i, [f_k, e_j]]$ sont nuls. En effet, considérons, par exemple le premier terme, si $k \neq i$ le résultat est immédiat, si $k = i$, alors le terme étudié est égal à $\alpha_j(\alpha\,\check{i})e_j = a_{ij}e_j = 0$.

$\mathfrak{J}$ est donc un idéal gradué d'intersection nulle avec V_1 (puisque ses générateurs sont des crochets itérés contenant tous obligatoirement e_i et e_j comme derniers termes), donc $\mathfrak{J}$ est contenu dans $\mathfrak{r}_1$, ce qui établit le lemme.

□

Proposition 1.5.2.

Soit A une matrice de Borcherds générale, indexée par I', R une réalisation donnée de A; et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Kac-Moody-Borcherds qui lui est associée.

a) Si J'_0 désigne l'ensemble des i tels que $\alpha_i^\vee = 0$ et F_0, l'ensemble de ceux qui sont tels que $e_i \in \mathfrak{r}$, on a $F_0 = J'_0$ et si $I = I' - F_0$ alors l'application canonique $\oplus_{i \in I} K e_i \oplus \mathfrak{h} \oplus_{i \in I} K f_i \longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}}(A,R)/\mathfrak{r}$ est injective. On identifiera les e_i pour $i \in I$ avec leurs images dans $\mathfrak{g}$.

En particulier, si $F_0 = \emptyset$, on a $\mathfrak{g}(A,R) = \tilde{\mathfrak{g}}(A,R)/\mathfrak{r}$.

b) $\tilde{\mathfrak{g}}(A,R)/\mathfrak{r} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$ où $\mathfrak{n}_+$ (resp. $\mathfrak{n}_-$) est engendrée par les e_i (resp. les f_i) pour $i \in I$.

$\mathfrak{g} = \tilde{\mathfrak{g}}(A,R)/\mathfrak{r}_1 = (\tilde{\mathfrak{g}}(A,R)/\mathfrak{r}) \oplus \left(\oplus_{i \in F_0}(K e_i \oplus K f_i)\right)$ où le facteur de droite est un idéal commutatif de $\mathfrak{g}$ qui commute à $\mathfrak{n}_+$ et à $\mathfrak{n}_-$, mais peut-être pas à $\mathfrak{h}$.

c) $\tilde{\omega}$ passe au quotient en une involution ω de $\tilde{\mathfrak{g}}(A,R)/\mathfrak{r}$ telle que $\omega(\mathfrak{n}_+) = \mathfrak{n}_-$; $\omega(\mathfrak{n}_-) = \mathfrak{n}_+$; $\omega(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$; $\omega_{|\mathfrak{h}} = -Id_{\mathfrak{h}}$.

Démonstration.

$\mathfrak{r}_1$ est d'intersection triviale avec $\mathfrak{h}$, il est donc clair que $\mathfrak{h}$ s'injecte dans $\mathfrak{g}$. $\tilde{\mathfrak{g}}(A,R)/\mathfrak{r}$ (resp. $\mathfrak{g}$) étant le quotient de $\tilde{\mathfrak{g}}$ par un idéal gradué, $\tilde{\mathfrak{g}}(A,R)/\mathfrak{r}$ (resp. $\mathfrak{g}$) est une algèbre graduée. L'assertion a) est alors en grande partie évidente. Pour démontrer que $F_0 \subset J'_0$, considérons i tel que $e_i \in \mathfrak{r}$; $\mathfrak{r}$ étant un idéal, $[e_i, f_i] \in \mathfrak{r} \cap \mathfrak{h}$ et donc $\alpha_i^\vee = 0$, donc $i \in J'_0$.

Montrons à présent que $F_0 = J'_0$, considérons alors $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_1 + \sum_{i \in J'_0}(K e_i \oplus K f_i)$.

Soit $i \in J'_0$, on a $a_{ij} = 0$ pour tout $j \in I$ mais ceci implique (lemme 1.5.1) que e_i et f_i commutent dans $\mathfrak{g}$ aux autres générateurs de cette algèbre. $\mathfrak{r}_2$ est donc un idéal de $\tilde{\mathfrak{g}}$. De plus, la définition de $\mathfrak{r}_2$ permet de voir facilement qu'il s'agit d'un idéal gradué qui intersecte $\mathfrak{h}$ trivialement puisqu'il ne contient pas d'éléments de degré 0. Grâce à la maximalité de l'idéal $\mathfrak{r}$, on a l'inclusion $\mathfrak{r}_2 \subset \mathfrak{r}$ ce qui établit $F_0 = J'_0$.

$\tilde{\omega}$ stabilise $\mathfrak{r}_1$ car de par sa définition elle stabilise V_1, donc conserve la propriété d'être intersecté trivialement par $\mathfrak{h}$, en tant qu'automorphisme d'algèbre de Lie, transforme un idéal gradué en un idéal gradué, la seconde assertion du a) vient facilement grâce à la la propriété caractéristique de $\mathfrak{r}_1$. Par le résultat précédemment établi, et grâce à ω ; on peut identifier les e_i et les f_i, pour $i \in I$, avec leurs images dans $\mathfrak{g}$.

On a montré de plus que $\mathfrak{r} = \mathfrak{r} \cap \widetilde{\mathfrak{n}}_+ \oplus \mathfrak{r} \cap \widetilde{\mathfrak{n}}_-$. Par suite, la décomposition $\mathfrak{g} = \widetilde{\mathfrak{n}}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \widetilde{\mathfrak{n}}_-$ passe, elle aussi, au quotient en donnant b) car si $v \in \widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha$ où α a une coordonnée non nulle suivant α_i pour un $i \in F_0$, il est clair que $\widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha \subset \mathfrak{r}$. En effet on a vu qu'une famille génératrice de $\widetilde{\mathfrak{g}}_\alpha$ est formée des $[e_{i_1}.....e_{i_n}]$ où $\sum \alpha_{i_j} = \alpha$ mais on sait que $e_i \in \mathfrak{r}$ est dans ce crochet itéré donc tout générateur de ce type est dans $\mathfrak{r}$.

$\square$

2. Système de racines d'une algèbre de Kac-Moody-Borcherds

2.1. Etude de relations entre éléments de $\mathfrak{g}$

D'après la proposition 1.5.2 si $F_0 \neq \emptyset$ on a

$$\mathfrak{g} = \widetilde{\mathfrak{g}}(A,R)/\mathfrak{r}_1 = (\widetilde{\mathfrak{g}}(A,R)/\mathfrak{r}) \oplus (\oplus_{i \in F_0}(Ke_i \oplus Kf_i))$$

c'est à dire que $\mathfrak{g}$ est la somme d'un idéal commutatif et de l'algèbre de Kac-Moody-Borcherds obtenue en considérant la matrice $A(I - F_0)$ et la réalisation immédiatement déduite de celle considérée. De plus, l'action de $\widetilde{\mathfrak{g}}(A,R)/\mathfrak{r}$ sur l'idéal commutatif est très simple.

On supposera dans la suite que la réalisation de la matrice, donnée vérifie l'hypothèse (R2) de 1.4.3 c'est à dire est telle que $F_0 = \emptyset$, et est indexée par I. De plus, changer $\alpha_i^\vee$ en $c_i \alpha_i^\vee$ avec $c_i > 0$, ne change ni $\widetilde{\mathfrak{g}}$, ni $\mathfrak{r}$. Par conséquent, quitte à remplacer, pour $i \in I_{re}$, $\alpha_i^\vee$ par $(2/a_{ii})\alpha_i^\vee$ (c'est à dire A par A'), **on peut supposer que la matrice est de Borcherds normalisée, ce qu'on fera dans la suite de ce chapitre.**

On établit, comme Borcherds, les résultats suivants :

Proposition 2.1.1.

a) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ *satisfait à :*

$$(\mathrm{ad}\, e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0, \qquad (\mathrm{ad}\, f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0 \qquad (\forall i \in I_{re})$$

$$(\mathrm{ad}\, e_i) e_j = 0, \qquad (\mathrm{ad}\, f_i) f_j = 0, \qquad (\forall i \in I \,\mathrm{et}\, a_{ij} = 0)$$

b) La graduation de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ *par* $\widetilde{Q}$ *passe au quotient en une graduation de* $\mathfrak{g}(A)$*;* $\mathfrak{g} = \oplus_{\alpha \in \widetilde{Q}} \mathfrak{g}_\alpha$ *de* $\mathfrak{g}$*. On note* $\widetilde{\Omega} = \Delta(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{h})$ *l'ensemble des* $\alpha \neq 0$, $\alpha \in \widetilde{Q}$ *tels que* $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ *et on l'appelle* *système de racines à base libre de* $\mathfrak{g}(A)$. *On a alors :*

$$\widetilde{\Omega} \subset \widetilde{Q}_+ \sqcup \widetilde{Q}_-, \qquad \widetilde{\Omega}_+ = \widetilde{\Omega} \cap \widetilde{Q}_+, \qquad \widetilde{\Omega}_- = \widetilde{\Omega} \cap \widetilde{Q}_-, \qquad \widetilde{\Omega}_+ = -\widetilde{\Omega}_-$$

c) Pour tout $\alpha \in \widetilde{\Omega}$, *dim* $\mathfrak{g}_\alpha$ *est finie et* $\omega(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$. *Si* $\beta \in \widetilde{\Omega}_+ \setminus \{\alpha_i\}$ *alors* $(\beta + \mathbb{Z}\alpha_i) \cap \widetilde{\Omega} \subset \widetilde{\Omega}_+$ *et de plus* $\mathbb{N}\alpha_i \cap \widetilde{\Omega}_+ = \{\alpha_i\}$.

d) Si $a \in \mathfrak{n}_+ = \oplus_{\alpha \in \widetilde{\Omega}_+} \mathfrak{g}_\alpha$ *est tel que* $[a\,,\, f_i] = 0$ *pour tout* $i \in I$ *alors* $a = 0$.

e) le support d'une racine est connexe.

Remarques :

1)Pour $i \in I_{\mathrm{re}}$ les relations

$$(\mathrm{ad}\, e_i)e_j = 0, \qquad (\mathrm{ad}\, f_i)f_j = 0, \qquad (\text{pour tout } j \text{ tel que } a_{ij} = 0)$$

se déduisent des premières relations de (1).

2) Dans [Bo1] Borcherds démontre que, dans le cas d'une matrice A symétrique (si la dualité est un produit bilinéaire symétrique non dégénéré), les relations du a) caractérisent $\mathfrak{r}$ (voir également [K; chap 13]).

3) L'hypothèse de maximalité de $\mathfrak{r}$ est essentielle pour démontrer d), par contre, pour a), b), c), e) et tous les résultats qui vont suivre (sauf la remarque suivante), on peut considérer le quotient $\mathfrak{g}_1$ de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ par un idéal gradué inclus dans $\mathfrak{r}$ et contenant l'idéal engendré par :

$$(\mathrm{ad}\, e_i)^{1-a_{ij}} e_j, \quad (\mathrm{ad}\, f_i)^{1-a_{ij}} f_j \quad (\forall i \in I_{\mathrm{re}})$$
$$(\mathrm{ad}\, e_i)e_j, \quad (\mathrm{ad}\, f_i)f_j, \quad (\forall i \in I_{\mathrm{im}} \text{ et } a_{ij} = 0)$$

4) D'après d) le centre de $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{c} = \{h \in \mathfrak{h} / \alpha_i(h) = 0 \quad (\forall i \in I)\}$ (puisque le centre d'une algèbre de Lie graduée est un idéal gradué). On montre encore ce résultat sans utiliser d) (donc aussi pour $\mathfrak{g}_1$) sous l'hypothèse (R4) de 1.4.3.

5) On note Ω l'image de $\widetilde{\Omega}$ dans $\mathfrak{h}\hat{}$ par l'application additive de $\widetilde{Q}$ dans $\mathfrak{h}\hat{}$ qui envoie α_i sur α_i. Alors $[\Omega] \cup \{0\}$ est l'ensemble des poids de $\mathfrak{h}$ dans la représentation adjointe. On étudiera plus tard la structure de Ω sous certaines hypothèses (voir 2.3.5 ainsi que le chapitre IV).

Démonstration.

D'après les lemmes précédents, on connait des familles génératrices des espaces radiciels, il est clair que b) est vrai. De même la seconde partie de a) résulte de (1.5.1).

Démontrons c), on sait que toute racine est située dans $\widetilde{Q}_+ \sqcup \widetilde{Q}_-$, par suite si $\alpha \in \widetilde{\Omega}_+ \setminus \mathbb{N}\alpha_i\,, \quad (\alpha + \mathbb{Z}\alpha_i) \cap \widetilde{\Omega} \subset \widetilde{\Omega}_+$

Pour établir e) notons I_1 une composante connexe non vide du support de la racine α et I_2 son complémentaire dans le support,

$$\forall i \in I_1, \quad \forall j \in I_2, \quad \alpha_i(\alpha\,\check{_j}) = 0 \quad \alpha_j(\alpha\,\check{_i}) = 0 \ .$$

La sous algèbre $\mathfrak{g}_1$ engendrée par les e_i, pour $i \in I_1$, commute donc à la sous algèbre $\mathfrak{g}_2$ engendrée par les e_i, pour $i \in I_2$.

$\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$ est donc une sous algèbre, de plus $\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$ est contenu dans (et en fait égal à) la somme des sous espaces radiciels $\mathfrak{g}_\beta$ où $\beta \in (\widetilde{\Omega} \cap \widetilde{Q}_+(I_1)) \sqcup (\widetilde{\Omega} \cap \widetilde{Q}_+(I_2))$ et de son intersection avec $\mathfrak{h}$. $\mathfrak{g}_\alpha$ est dans l'algèbre engendrée par $\mathfrak{g}_1$ et$\mathfrak{g}_2$ donc α est forcément parmi les racines précédemment citées, donc, comme on a supposé $I_1 \neq \emptyset$, on a $\alpha \in \widetilde{Q}(I_1)$ et $I_2 = \emptyset$.

Pour établir d), considérons comme Kac la graduation principale de type $\mathbf{1}$, pour laquelle pour tout entier relatif non nul j, $\mathfrak{g}_j(\mathbf{1}) = \oplus_{\alpha/\, ht\alpha = j}\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_0(\mathbf{1}) = \mathfrak{h}$.

Soit alors $a \in \mathfrak{n}_+ = \oplus_{j>0}\mathfrak{g}_j(\mathbf{1})$ tel que $[a, f_i] = 0$, quitte à considérer ses différentes composantes, on peut supposer que a est un élément homogène, pour tout $i \in I$, il est clair que $[a, \mathfrak{g}_{-1}(\mathbf{1})] = 0$.

Posons alors, $V = \{ \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} (\mathrm{ad}\mathfrak{g}_1(\mathbf{1}))^i (\mathrm{ad}\mathfrak{h})^j a \}$, c'est un sous espace vectoriel de $\mathfrak{n}_+$. Il est visiblement invariant sous l'action de $\mathfrak{g}_1(\mathbf{1})$ et celle de $\mathfrak{h}$.

Montrons qu'il est également invariant sous $\mathrm{ad}\mathfrak{g}_{-1}(\mathbf{1})$ c'est à dire que pour tout $i \in I$, il faut $[f_i, V] \subset V$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, montrons, par récurrence sur $k \geq 0$ que :

$$[f_i, (\mathrm{ad}\mathfrak{g}_1(\mathbf{1})^k (\mathrm{ad}\mathfrak{h})^j a] \in V$$

- Pour $k = 0$, $[f_i, (\mathrm{ad}\mathfrak{h})^j a] = 0$, se démontre aisément, par récurrence sur j, grâce à l'identité de Jacobi.

- Pour $k \geq 1$, pour tout $v \in \mathfrak{g}_1(\mathbf{1})$,

$$\begin{aligned}[f_i, (\mathrm{ad}v)(\mathrm{ad}\mathfrak{g}_1(\mathbf{1})^{k-1}(\mathrm{ad}\mathfrak{h})^j a] =& [[f_i, v], (\mathrm{ad}\mathfrak{g}_1(\mathbf{1})^{k-1}(\mathrm{ad}\mathfrak{h})^j a] \\ &+ [v, [f_i, (\mathrm{ad}\mathfrak{g}_1(\mathbf{1})^{k-1}(\mathrm{ad}\mathfrak{h})^j a]]\end{aligned}$$

Le premier terme du second membre est dans V car $[f_i, v] \in \mathfrak{h}$, le second l'est par hypothèse de récurrence.

V est donc, si $a \neq 0$ un idéal gradué (on a supposé a homogène) de $\mathfrak{g}$ inclus dans $\mathfrak{n}_+$ donc ne rencontrant pas $\mathfrak{h}$, contredisant ainsi l'hypothèse de maximalité de $\mathfrak{r}$. Ce qui établit d).

Montrons enfin la première partie de a). On a supposé que la matrice A est de Borcherds normalisée, on a alors de façon évidente le résultat suivant :
Pour i dans I_{re}, si on pose $\mathfrak{g}_{(i)} = Ke_i \oplus Kf_i \oplus K\alpha\,\hat{\imath}$, alors $\mathfrak{g}_{(i)}$ est une algèbre de Lie isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$, on a en effet le $\mathfrak{sl}_2$-triplet standard $\{\, e_i, f_i, \alpha\,\hat{\imath}\,\}$.

On pose alors, pour un i dans I_{re}, et pour $j \in I \setminus \{i\}$, $\theta_{ij} = (\mathrm{ad} f_i)^{1-a_{ij}} f_j$.

$\mathfrak{g}$ est un $\mathfrak{g}_{(i)}$ module pour l'action adjointe, on note U le $\mathfrak{g}_{(i)}$-module engendré par f_i.
On a $[\alpha\,\hat{\imath}, f_j] = -a_{ij} f_j$; $[e_i, f_j] = 0$ car $\alpha_i - \alpha_j \notin \widetilde{Q}_+ \sqcup \widetilde{Q}_-$.
Grâce à l'identification précédente du $\mathfrak{sl}_2$-triplet de $\mathfrak{g}_{(i)}$, on voit que f_j, est un vecteur de plus haut poids de la représentation considérée. D'après [Kac; 3.2] ;

$[e_i, \theta_{ij}] = (1 - a_{ij})(a_{ij} - 1 + a_{ij} + 1)(\mathrm{ad} f_i)^{-a_{ij}} = 0$; de plus, si $k \notin \{\, i, j\,\}$, $[e_k, \theta_{ij}] = 0$ car $-\alpha_j - (1 - a_{ij})\alpha_i + \alpha_k \notin \widetilde{Q}_+ \sqcup \widetilde{Q}_-$, enfin, $[e_j, \theta_{ij}] \in \widetilde{\mathfrak{g}}_{1-a_{ij}\alpha_i} = \{0\}$ si $a_{ij} \neq 0$, si $a_{ij} = 0$, on utilise c). Finalement, on établit grâce à d) que $\theta_{ij} = 0$.

□

Corollaire 2.1.2.

Si $i \in I_{\mathrm{re}}$, $\mathrm{ad}e_i$ et $\mathrm{ad}f_i$ sont localement nilpotents sur $\mathfrak{g}$.

□

Lemme 2.1.3.

Pour tout i dans I, on pose $\mathfrak{g}_{(i)} = Ke_i \oplus Kf_i \oplus K\alpha\,\hat{\imath}$.

a) Si $a_{ii} = 0$ $\quad [\mathfrak{g}_{(i)}, \mathfrak{g}_{(i)}] = K\alpha\,\hat{\imath} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{(i)})$

On a supposé $\alpha\,\hat{\imath} \neq 0$, donc $K\alpha\,\hat{\imath} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{(i)})$ et $\mathfrak{g}_{(i)}$ est isomorphe à l'algèbre d'Heisenberg.

b) Sinon, $\mathfrak{g}_{(i)}$ est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$, on a dans $\mathfrak{g}_{(i)}$, le $\mathfrak{sl}_2$-triplet standard : $\{e_i\,; (2/a_{ii})f_i\,; (2/a_{ii})\alpha\,\hat{\imath}\}$.

Démonstration.

immédiat.

□

Corollaire 2.1.4.

Soit $i \in I_{\mathrm{re}}$.

$\mathfrak{g}$ se décompose en somme directe de sous modules $\mathfrak{g}_{(i)}$-irréductibles de dimensions finies.

Si $\alpha \in \widetilde{\Omega}_+ \setminus \{\alpha_i\}$, $\{\alpha + k\alpha_i,\, k \in \mathbb{Z}\} \cap \widetilde{\Omega} = [\alpha - p\alpha_i \ldots \alpha + q\alpha_i] \subset \widetilde{\Omega}_+$ où p et q sont dans $\mathbb{N}$ et $p - q = (2/a_{ii}) < \alpha, \alpha\,\hat{\imath} > = < \alpha, \alpha\,\hat{\imath} >$ (puisque la matrice est supposée normalisée).

Si $\alpha \in \widetilde{\Omega}_+$, *et* $\alpha + \alpha_i \notin \widetilde{\Omega}_+$ *alors* $< \alpha, \alpha\check{_i} > \geq 0$

Si $\alpha \in \widetilde{\Omega}_+ \setminus \{\alpha_i\}$ *et* $\alpha - \alpha_i \notin \widetilde{\Omega}_+$ *alors* $< \alpha, \alpha\check{_i}, > \leq 0$

Démonstration.

Considérons $\mathfrak{g}_{\mathrm{re}}$ l'algèbre engendrée par les e_i f_i où $i \in I_{\mathrm{re}}$ $(a_{ii} = 2)$. On sait qu'un sous-espace radiciel $\mathfrak{g}_\alpha$ où $\alpha \in \widetilde{Q}_+$ est engendré par les crochets itérés $[e_{i_1}...e_{i_n}]$ tels que $\sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{i_j} = \alpha$. On en déduit que $\mathfrak{g}_{\mathrm{re}} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{re}} \oplus (\oplus_{\widetilde{\Omega} \cap \widetilde{Q}(I_{re})} \mathfrak{g}_\alpha)$.

$\mathfrak{g}_{\mathrm{re}}$ est l'algèbre de Kac-Moody associée à la matrice $A(I_{\mathrm{re}})$ et à sa réalisation $(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{re}}, \mathfrak{h}\check{}, \Pi_{\mathrm{re}}, \Pi\check{}_{\mathrm{re}})$, où $\Pi_{\mathrm{re}} = \Pi \cap \widetilde{Q}(I_{\mathrm{re}})$.

En effet, pour chaque $i \in I_{\mathrm{re}}$, on a supposé $a_{ii} = 2$, donc $(e_i, f_i, \alpha\check{_i})$ est le $\mathfrak{sl}_2$ triplet obtenu dans le lemme précédent.

$\mathfrak{g}_{\mathrm{re}}$ est une algèbre engendrée par $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{re}}$, les e_i f_i, pour $i \in I_{\mathrm{re}}$, qui vérifient les relations :

$$\begin{cases} [h, h'] = 0 \\ [h, e_i] = \alpha_i(h) e_i \\ [h, f_i] = -\alpha_i(h) f_i \\ [e_i, f_i] = \delta_{ij} \alpha\check{_i} \\ (\mathrm{ad} e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0 \\ (\mathrm{ad} f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0 \end{cases}$$

de plus on a d'après le lemme 2.11 d) , si $a \in \oplus_{\alpha \in \widetilde{\Omega} \cap \widetilde{Q}_+(I_{\mathrm{re}})} \mathfrak{g}_\alpha$, et si $[a, f_i] = 0$ pour tout $i \in I_{\mathrm{re}}$, alors $a = 0$; ce qui permet d'établir la minimalité de $\mathfrak{g}_{\mathrm{re}}$ parmi les algèbres dans lesquelles les relations précédentes sont vérifiées. Ce qui, [R. prop A2], prouve que dans $\mathfrak{g}_{\mathrm{re}}$ il n'existe pas d'idéal gradué d'intersection triviale avec $\mathfrak{h}$.

On peut alors utiliser la notion, introduite par Kac, de *$\mathfrak{g}_{\mathrm{re}}$-module intégrable.*

On vérifie alors facilement que $\mathfrak{g}(A, R)$ est un tel $\mathfrak{g}_{\mathrm{re}}$-module, c'est à dire que pour la représentation adjointe, l'action de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{re}}$ est diagonalisable, et que les e_i , f_i, pour $i \in I_{\mathrm{re}}$ sont localement nilpotents. Le corollaire est alors une application évidente de [K; 3.6].

□

2.2. Le groupe de Weyl

Définition.

Le groupe de Weyl est le sous-groupe W de $\mathrm{Aut}\mathfrak{h} \times \mathrm{Aut}\widetilde{Q} \times \mathrm{Aut}\mathfrak{h}\check{}$, engendré par les éléments $R_i = (r\check{_i}, r_i, \rho_i)$ pour $i \in I_{\mathrm{re}}$ où les actions des coordonnées de R_i sont données par;

$r\check{_i}(h) = h - [\alpha_i](h)\alpha\check{_i}$ $\forall h \in \mathfrak{h}$ où pour une compatibilité des notations avec la suite, on note $\alpha\check{_i} = \alpha\check{_i}$.

$r_i(\alpha) = \alpha - [\alpha](\alpha_i^\vee)\alpha_i = \alpha - <\alpha, \alpha_i^\vee> \alpha_i \quad \forall \alpha \in \widetilde{Q}$

$\rho_i(h) = h - <h, \alpha_i,> = h - [h](\alpha_i^\vee)\alpha_i \quad \forall h \in \mathfrak{h}\hat{}$

Remarque :

$r_i^\vee$ ne stabilise pas nécessairement $\oplus_{i \in I}\mathbb{Z}\alpha_i^\vee$, il faut et il suffit pour cela que la transposée de A soit également une matrice de Borcherds, car sinon il existe $j \in I_{\rm re}$ et $i \in I$ tel que $-a_{ij} \notin \mathbb{N}$.

Il apparait immédiatement que $\widetilde{Q}(I_{\rm re})$ est stable sous l'action de W et que :

$$\forall w \in W \qquad (w - Id)(\mathfrak{h}\hat{}) \subset Q(I_{\rm re}) \otimes_{\mathbb{Z}} K$$
$$(w - Id)(\mathfrak{h}) \subset Q\check{}(I_{\rm re}) \otimes_{\mathbb{Z}} K$$
$$(w - Id)(\widetilde{Q}) \subset \widetilde{Q}(I_{\rm re})$$

pour les actions évidentes de W sur $\mathfrak{h}\hat{}$, $\mathfrak{h}$ et $\widetilde{Q}$.

A partir du corollaire 2.1.4 on montre facilement que :

Proposition 2.2.1.

$\widetilde{\Omega}$ est invariant sous l'action du groupe de Weyl.

□

De même, il est clair, à partir de la condition $\alpha \in \widetilde{\Omega} \Longrightarrow \alpha \in \widetilde{Q}_+ \sqcup \widetilde{Q}_-$, que :

Proposition 2.2.2.

Soit $\alpha \in \widetilde{\Omega}_+$, si $i \in I_{\rm re}$ et $r_i(\alpha) \in \widetilde{\Omega}_-$ alors $\alpha = \alpha_i$.

□

Au vu du corollaire 2.1.2, on peut définir, pour $i \in I_{\rm re}$

$$\tau_i = \exp(\mathrm{ad}\, e_i) \exp(\mathrm{ad}\,(-f_i)) \exp(\mathrm{ad}\, e_i)$$

On obtient ainsi un automorphisme de $\mathfrak{g}$.

Proposition 2.2.3.

1) $\tau_{i|\mathfrak{h}} = r_i^\vee, \quad \tau_i(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{r_i(\alpha)}$

2) Si π est une représentation intégrable de $\mathfrak{g}_{\rm re} + \mathfrak{h}$ on a $r_i^\pi(V_\lambda) = V_{r_i^*(\lambda)}$ si

r_i^π = exp (πe_i) exp $(-\pi f_i)$ exp (πe_i) = exp (πf_i) exp $(-\pi e_i)$ exp (πf_i) et si r_i^* est défini comme $r_i^\vee$ ci-dessus en remplaçant $\mathfrak{h}\hat{}$ par $\mathfrak{h}^*$.

Démonstration.

La démonstration du second résultat est donnée dans [K; 3.8].

Pour le premier point, considérons $U = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_{\alpha+n\alpha_i}$. U est stable sous l'action de $\mathrm{ad}e_i$ et de $\mathrm{ad}f_i$. On a alors $\tau_i(\mathfrak{g}_\alpha) \subset \tau_i(\mathfrak{g}_{[\alpha]}) \cap U = \mathfrak{g}_{[r_i^{\vee *}(\alpha)]} \cap U = \mathfrak{g}_{r_i(\alpha)}$.

τ_i étant un automorphisme de l'algèbre agissant comme une involution sur l'ensemble des sous-espaces radiciels, on obtient l'égalité $\tau_i(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{r_i(\alpha)}$.

τ_i fixe les éléments h de $\mathfrak{h}$ tels que $\alpha_i(h) = 0$, et comme $\tau_i(\alpha_i^\vee) = -\alpha_i^\vee$ (calcul facile) on a $\tau_{i|\mathfrak{h}} = r_i^\vee$.

□

Lemme 2.2.4.

Si, pour $w \in W$, on a dans $\widetilde{Q}$, $\quad w\alpha_i = \alpha_j$ alors $w\alpha_i^\vee = \alpha_j^\vee$.

Démonstration.

Supposons donc $w\alpha_i = \alpha_j$ avec $i \neq j$, on déduit de $w\alpha_i - \alpha_i \in \widetilde{Q}(I_{\mathrm{re}})$ que i et j sont dans I_{re}. Considérons alors une décomposition de w suivant la famille des générateurs R_i, $w = R_{i_1} \dots R_{i_n}$.

On a $\tau_{i_1} \dots \tau_{i_n}[\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{-\alpha_i}] = [\mathfrak{g}_{w(\alpha_i)}, \mathfrak{g}_{-w(\alpha_i)}] = [\mathfrak{g}_{\alpha_j}, \mathfrak{g}_{-\alpha_j}] = [Ke_j, Kf_j] = K\alpha_j^\vee$

et donc $\tau_{i_1} \dots \tau_{i_n}{}_{|\mathfrak{h}}(\alpha_i^\vee) = r_{i_1}^\vee \dots r_{i_n}^\vee(\alpha_i^\vee) \in K\alpha_j^\vee$.

De plus, $\alpha_i(\alpha_i^\vee) = (w(\alpha_i))(w(\alpha_i^\vee)) = 2$, ce qui implique $w(\alpha_i^\vee) = \alpha_j^\vee$.

□

Définition

W étant engendré par les R_i, si un elément quelconque w de W, w s'écrit $R_{i_1} \dots R_{i_n}$, on dira qu'il s'agit d'une *décomposition de longueur n de w.*

On appellera *décomposition réduite de w*, une de celles pour lesquelles le minimum des longueurs possibles est atteint.

Lemme 2.2.5 Condition d'échange.

Si $w \in W$ admet pour décomposition $w = R_{i_1} \dots R_{i_n}$, et si $w(\alpha_i) \in \widetilde{Q}_-$, alors il existe un indice $s \in \{1 \dots t\}$ tel que

$$wR_i = R_{i_1} \dots R_{i_{s-1}} R_{i_{s+1}} \dots R_{i_t}$$

Démonstration.

Comme $\alpha_i \in \widetilde{Q}_+$ et $w(\alpha_i) \in \widetilde{Q}_-$, il existe un plus grand indice i_s pour lequel $R_{i_s+1} \dots R_{i_t}(\alpha_i) \in \widetilde{Q}_+$ et $R_{i_s} R_{i_s+1} \dots R_{i_t}(\alpha_i) \in \widetilde{Q}_-$.

D'après la proposition 2.2.2, $R_{i_s+1} \dots R_{i_t}(\alpha_i) = \alpha_{i_s}$, on pose alors $w' = R_{i_s+1} \dots R_{i_t}$. Le lemme précédent impose alors $w'(\alpha\,\hat{i}) = (\alpha\,\hat{i_s})$. On a donc dans W, $w' R_i w'^{-1} = R_{i_s}$ d'où

$$R_{i_s+1} \dots . R_{i_t} R_i = R_{i_s} \dots R_{i_t}$$

Le résultat anoncé étant alors immédiat.

□

On déduit de ce qui précède :

Lemme 2.2.6.

Pour tout $w \in W$, on désigne par $l(w)$ la longueur d'une décomposition réduite de w, si $i \in I_{\text{re}}$ on a

$l(wR_i) < l(w) \Longleftrightarrow w(\alpha_i) \in \widetilde{Q}_- \Longleftrightarrow l(wR_i) = l(w) - 1$;

$l(wR_i) > l(w) \Longleftrightarrow w(\alpha_i) \in \widetilde{Q}_+ \Longleftrightarrow l(wR_i) = l(w) + 1$;

$l(wR_i) = l(w)$ *est impossible.*

Démonstration.

Dans le lemme précédent, on a montré la réciproque de la première assertion.

Si $w(\alpha_i) \in \widetilde{Q}_+$, on a $wR_i(\alpha_i) \in \widetilde{Q}_-$ donc $l(w) = l(wR_i^2) < l(wR_i)$, ce qui démontre la réciproque de la deuxième assertion, ainsi que la troisième. Le reste du lemme est alors évident.

□

Proposition 2.2.7.

Le groupe de Weyl est isomorphe au groupe de Coxeter défini par générateurs et relations :

$$W = \langle r_i \,,\, (i \in I_{\text{re}}) \,/\, (r_i r_j)^{m_{ij}} = \text{Id} \quad \text{si} \ \ m_{ij} < \infty \,\rangle$$

où, si λ désigne $a_{ij}a_{ji}$, les coefficients m_{ij} sont donnés par:

$$m_{ii} = 1 \text{ et si } i \neq j$$

$$m_{ij} = 2 \Longleftrightarrow \lambda = 0$$

$$m_{ij} = 3 \Longleftrightarrow \lambda = 1$$

$$m_{ij} = 4 \Longleftrightarrow \lambda = 2$$

$$m_{ij} = 6 \Longleftrightarrow \lambda = 3$$

$$m_{ij} = \infty \Longleftrightarrow \lambda \geq 4$$

Remarque :

Le groupe de Weyl est donc entièrement défini par son graphe de Coxeter qui est sous-jacent au graphe de Dynkin de A restreint à I_{re} (c'est à dire obtenu en abandonnant les flèches et les nombres et en remplaçant les liaisons doubles munies de deux flèches opposées ou quadruples par des traits gras).

Démonstration.

D'après [Bbki, Lie IV], lorsque dans un groupe engendré par un ensemble $\mathfrak{s}$ d'éléments d'ordre deux, la condition d'échange est vérifiée, le groupe est le groupe défini par les générateurs que sont les éléments de $\mathfrak{s}$ et les relations vérifiées entre les éléments de $\mathfrak{s}$ deux à deux, ainsi que la relation $R^2 = I$ pour chaque élément de $\mathfrak{s}$.

Dans le cas de W, il ne nous reste donc plus qu'à étudier les ordres des éléments R_iR_j pour i et j distincts dans I_{re}.

Calculons d'abord l'ordre de la restriction de R_iR_j à $\mathbb{Z}\alpha_i \oplus \mathbb{Z}\alpha_j$.

Dans la base $\{\alpha_i, \alpha_j\}$, la matrice de l'action de R_iR_j est

$$\begin{pmatrix} -1 + a_{ij}a_{ji} & a_{ij} \\ -a_{ji} & -1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme P caractéristique a donc ses coefficients dans $\mathbb{Z}$, on le plonge dans $\mathbb{C}[X]$. On note λ le produit $a_{ij}a_{ji}$.

Si $\lambda > 4$, P n'admet pas de racines réelles donc 1 et -1 ne sont pas valeurs propres; l'ordre de la restriction, et donc de l'automorphisme R_iR_j est infini.

Si $\lambda = 4$, 1 est valeur propre double, R_iR_j est conjuguée à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui est d'ordre infini.

De même, grâce au calcul des valeurs propres on a

Si $\lambda = 3$, l'ordre de la restriction est 6;

Si $\lambda = 2$, l'ordre de la restriction est 4;

Si $\lambda = 1$, l'ordre de la restriction est 3;

Si $\lambda = 0$, l'ordre de la restriction est 2.

Montrons à présent que l'ordre de R_iR_j est toujours égal à l'ordre m_{ij} de sa restriction à $V_{ij} = \mathbb{Z}\alpha_i \oplus \mathbb{Z}\alpha_j$.

On peut supposer que $m_{ij} < \infty$ sans quoi il n'y a rien à démontrer. Par suite, on a $\lambda \neq 4$ et la matrice d'ordre deux obtenue précédemment est inversible.

Ainsi $\{\alpha\,\hat{}_i|_{V_{ij}}, \alpha\,\hat{}_j|_{V_{ij}}\}$ engendre $V_{ij}{}^*$. Donc, dans $\widetilde{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} K$ ou $\widetilde{Q}$, l'ordre de R_iR_j est m_{ij} puisque :
$\widetilde{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} K = V_{ij} \otimes K \oplus \{\delta \in \widetilde{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} K \,/\, \alpha\,\hat{}_i(\delta) = \alpha\,\hat{}_j(\delta) = 0\}$ et le second facteur de cette décomposition est stable par R_i et R_j.

Enfin on repète un raisonnement analogue pour $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}\hat{}$, puisque , comme $\lambda \neq 4$, $\{\alpha_i, \alpha_j\}$ et $\{\alpha\,\hat{}_i, \alpha\,\hat{}_j\}$ sont libres.

□

Remarque :

Comme la démonstration de la proposition précédente n'a utilisé que l'action de W sur $\widetilde{Q}$, l'image de W dans $\mathrm{Aut}\,(\widetilde{Q})$ est définie par les mêmes générateurs et relations donc est isomorphe à W. On peut considérer W comme un sous-groupe de $\mathrm{Aut}\,(\widetilde{Q})$ agissant sur $\mathfrak{h}$ et sur $\mathfrak{h}\hat{}$.

Par contre W n'est pas toujours un sous-groupe de $\mathrm{GL}\,(\mathfrak{h}\hat{})$. C'est cependant vrai si on suppose que pour tous $\alpha \in \widetilde{\Omega}_+$ et $\beta \in \widetilde{\Omega}_-$, les images dans $\mathfrak{h}\hat{}$ (pour l'application additive de $\widetilde{Q}$ dans $\mathfrak{h}\hat{}$ qui envoie α_i sur α_i) sont distinctes et non nulles, car alors on peut démontrer un analogue de 2.2.2 dans $\mathfrak{h}\hat{}$ (voir 9.4).

2.3. Propriétés du système de racines

Proposition 2.3.1.

$\widetilde{\Omega}$ vérifie les propriétés suivantes;

(SR1) $\widetilde{\Omega} \subset \widetilde{Q}\,;\, \widetilde{\Omega} = (\widetilde{\Omega} \cap \widetilde{Q}_+) \sqcup (\widetilde{\Omega} \cap \widetilde{Q}_-)$ et si $\widetilde{\Omega}_+ = \widetilde{\Omega} \cap \widetilde{Q}_+$ et $\widetilde{\Omega}_- = \widetilde{\Omega} \cap \widetilde{Q}_-$ alors $\widetilde{\Omega}_+ = -\widetilde{\Omega}_-$

(SR2) $\forall i \in I, \quad \mathbb{Q}_+\alpha_i \cap \widetilde{\Omega} = \{\alpha_i\}$;

(SR3) $\forall i \in I_{\mathrm{re}},\ \forall \alpha \in \widetilde{\Omega}_+ \setminus \mathbb{N}\alpha_i$,
$\{\alpha + k\alpha_i,\ k \in \mathbb{Z}\} \cap \widetilde{\Omega} = [\alpha - p\alpha_i, \ldots, \alpha + q\alpha_i] \subset \widetilde{\Omega}_+$ *où p et q sont dans $\mathbb{N}$ et vérifient* $p - q = \,<\alpha, \alpha\,\hat{}_i>\, = \,<\alpha, \alpha\check{}_i>$.

(SR4) $\forall i \in I_{\mathrm{im}},\ \forall \alpha \in \widetilde{\Omega}_+ \setminus \mathbb{Q}_+\alpha_i$,

(i) $<\alpha, \alpha\,\hat{}_i>\, < 0 \Longleftrightarrow \alpha + \mathbb{N}\alpha_i \subset \widetilde{\Omega}_+$;

(ii) $<\alpha,\alpha\,\check{i}> = 0 \Longrightarrow \alpha+\alpha_i \notin \widetilde{\Omega}_+$;

(SR5) $\forall\alpha \in \widetilde{\Omega}_+ \setminus \bigsqcup_{i\in I} \mathbb{Q}_+\alpha_i$, *il existe* $i \in I$ *tel que :* $\alpha-\alpha_i \in \widetilde{\Omega}$.

Démonstration.

Les propriétés (SR1),(SR2),(SR3) ont déjà été démontrées en 2.1.1 et 2.1.4.

Pour établir (SR5), soit $\alpha \in \widetilde{\Omega}_+\setminus\Pi$, l'espace radiciel $\mathfrak{g}_\alpha$ n'est pas réduit à l'élément nul et est engendré par des crochets itérés des e_i. Soit un tel crochet itéré non nul $[e_{i_1}\dots e_{i_n}]$ avec $\sum_{j=1}^{j=n}\alpha_{i_j} = \alpha$, il est donc clair que le crochet $[e_{i_2}\dots e_{i_n}]$ n'est pas nul et que donc $\mathfrak{g}_{\alpha-\alpha_{i_1}} \neq \{0\}$, c'est à dire que $\alpha-\alpha_{i_1}$ est encore une racine.

Remarque :

Si on a quotienté par $\mathfrak{r}$, on peut être plus précis :
Considérons $\alpha \in \widetilde{\Omega}_+ \setminus \Pi$, on peut trouver un vecteur v_α non nul dans l'espace radiciel $\mathfrak{g}_\alpha$. D'après le 2.1.1.d), si $[v_\alpha, f_i] = 0$, pour tout i dans I, alors le vecteur est nul, ce qui contredit notre hypothèse. On peut donc trouver $i \in I$ tel que $[v_\alpha, f_i]$ est un vecteur non nul, l'espace radiciel $\mathfrak{g}_{\alpha-\alpha_i}$ n'est donc pas réduit au vecteur nul et par suite $\alpha-\alpha_i$ est encore une racine .

Reste enfin à établir (SR4). Considérons $i \in I_{\text{im}}$, et $\alpha \in \widetilde{\Omega}_+ \setminus \mathbb{N}\alpha_i$, on note S_α le support de α; on sait que $a_{ii} \leq 0$ donc il est clair que $<\alpha,\alpha\check{i}> = 0$ signifie que la réunion $\{i\} \cup S_\alpha$ n'est pas connexe; par connexité des supports des racines (cf 2.1.1.e) $\alpha+\alpha_i$ ne peut alors pas être dans $\widetilde{\Omega}$.

L'assertion *(ii)* est alors évidente.

Pour montrer l'assertion *(i)*, il suffit, par récurrence, de prouver que :
$<\alpha,\alpha\,\check{i}> < 0 \Longrightarrow \alpha+\alpha_i \in \widetilde{\Omega}_+$. Supposons donc à présent, $<\alpha,\alpha\,\check{i}> < 0$ et $\alpha+\alpha_i \notin \widetilde{\Omega}$, alors :

$\alpha\,\check{i} \in [\mathfrak{g}_{\alpha_i}, \mathfrak{g}_{-\alpha_i}]\setminus\{0\}$, $\exists v_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha\setminus\{0\} \Longrightarrow [\alpha\,\check{i}, v_\alpha] = \alpha(\alpha\,\check{i})v_\alpha \neq 0$,
donc $[[e_i,f_i],v_\alpha] \neq 0$ ce qui par Jacobi implique que $[e_i,v_\alpha]$ et $[f_i,v_\alpha]$ ne sont pas simultanément nuls. Si, comme on l'a supposé $\alpha+\alpha_i \notin \widetilde{\Omega}$ alors $\alpha-\alpha_i \in \widetilde{\Omega}_+$.
$\oplus_{k=-\infty}^{0}\mathfrak{g}_{\alpha+k\alpha_i}$ est un $\mathfrak{g}_{(i)}$-module et comme : $\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}_+ \sqcup \widetilde{\Omega}_-$,

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \;/\; \mathfrak{g}_{\alpha-(k_0+p)\alpha_i} = \{0\}\ \ (\forall p \in \mathbb{N}^*),\ \mathfrak{g}_{\alpha-p\alpha_i} \neq \{0\}\ \ (\forall p \in \{0..k_0\}).$$

Considérons le $\mathfrak{g}_{(i)}$-module de dimension finie : $U = \oplus_{k=-k_0}^{0}\mathfrak{g}_{\alpha+k\alpha_i}$.
Si $a_{ii} \neq 0$, d'après la théorie des représentations de dimension finie de $\mathfrak{sl}_2$,
$(\alpha-k_0\alpha_i)(2\alpha\,\check{i}/a_{ii}) = -\alpha(2\alpha\,\check{i}/a_{ii})$ et donc $(\alpha-k_0\alpha_i)(\alpha\,\check{i}) = -\alpha(\alpha\,\check{i}) > 0$ ce qui est impossible car $\alpha-k_0\alpha_i \in \widetilde{Q}_+$ et $i \in I_{\text{im}}$.

Dans le cas $a_{ii} = 0$, U est un espace vectoriel de dimension finie, on choisit une base dans chaque $\mathfrak{g}_{\alpha - p\alpha_i}$ pour p entre 0 et k_0.

ad $\alpha\,\check{_i}$ agit sur les sous espaces radiciels par $(\alpha - p\alpha_i)(\alpha\,\check{_i}) = \alpha(\alpha\,\check{_i})$ sur chaque élément. Ainsi

ad $\alpha\,\check{_i} = \alpha(\alpha\check{_i})I_U$ et d'autre part, ad e_i ad f_i-ad f_i ad e_i =ad $\alpha\,\check{_i}$

On en déduit que la trace de l'opérateur considéré doit être nulle, ce qui contredit l'hypothèse $\alpha(\alpha\,\check{_i}) < 0$, puisque le corps est de caractéristique nulle.

Dans les deux cas, on a bien obtenu une contradiction, ce qui démontre le résultat cherché.

□

En vue d'une généralisation ultérieure de la notion de systèmes de racines, on établit à présent un résultat (basé sur un raisonnement de Kac, [K; 5.3]) plus général que celui utile dans ce chapitre.

On considère A, une matrice de Borcherds générale indexée par I, R, une réalisation libre de A et pour $i \in I$ des sous-ensembles M_i de $\mathbb{Q}_+$ tels que :

Si $i \in I_{\mathrm{re}}$, $M_i = \mathbb{N}$;

Si $i \in I_{\mathrm{im}}$, M_i contient 0 et 1, $M_i \setminus \{0\}$ admet 3/4 pour minorant et M_i est stable pour l'addition.

Sous ces hypothèses, $M_{i,ind}$, désignera l'ensemble des éléments indécomposables par l'addition de $M_i \setminus \{0\}$, tout élément de $M_i \setminus \{0\}$ est somme d'éléments de $M_{i,ind}$ et $1 \in M_{i,ind}$; on note alors :

$$K = \{\, \alpha \in \oplus_{i\in I} M_i\alpha_i \setminus (\cup_{i\in I_{\mathrm{im}}} M_i\alpha_i)\ ; S_\alpha \text{ est connexe et } < \alpha, \alpha\,\check{_i} > \leq 0\ (\forall i \in I)\}$$

et on obtient :

Proposition 2.3.2.

Si Ψ est une partie de $\oplus_{i\in I} M_i\,\alpha_i$ telle que :

$\forall i \in I,\ M_{i,ind}\,\alpha_i \subset \Psi$

(SR3b) $\forall i \in I_{\mathrm{re}},\ \forall \alpha \in \Psi \setminus \mathbb{Z}\alpha_i$

$\{\alpha + k\alpha_i \,/ - < \alpha, \alpha\check{_i} > \leq k \leq 0\} \subset \Psi$ si $< \alpha, \alpha\check{_i} > \geq 0$;

$\{\alpha + k\alpha_i \,/ - < \alpha, \alpha\check{_i} > \geq k \geq 0\} \subset \Psi$ si $< \alpha, \alpha\check{_i} > \leq 0$;

(C') $\forall i \in I_{\mathrm{im}},\ \forall \alpha \in \Psi \setminus M_i\alpha_i,\ < \alpha, \alpha\check{_i} > < 0 \Longrightarrow \alpha + M_i\,\alpha_i \subset \Psi$.

Alors, avec les notations précédentes :

$\forall \alpha \in K,\ \exists i \in I,\ \exists m_i \in M_{i,ind}\ /\ \alpha - m_i\alpha_i \in \Psi, < \alpha - m_i\alpha_i, \alpha\,\check{_i} > < 0$

et K est inclus dans Ψ.

Remarque :

Le même résultat est encore valable si on remplace $\mathbb{Q}$ par un corps ordonné archimédien K_2 contenu dans un même corps ordonné que K_1.

Démonstration.

1) Il suffit de montrer qu'il existe $i \in I$ et $m_i \in M_{i,ind}$ tels que $\alpha - m_i\alpha_i \in \Psi$ puisque :
- si α_i est réelle, $< \alpha - \alpha_i, \alpha_i^\vee > = < \alpha, \alpha_i^\vee > - a_{ii}$ or par hypothèse $< \alpha, \alpha_i^\vee > \leq 0$ et $a_{ii} > 0$.
- si $i \in I_{\text{im}}$ par hypothèse on sait que $\alpha - m_i\alpha_i$ est dans Ψ donc est un élément de $Q_{\mathbb{Q}}$ à coordonnées toutes positives ou nulles alors par connexité du support de α, $\alpha = (\alpha - m_i\alpha_i) + m_i\alpha_i$, soit $i \in S_{\alpha - m_i\alpha_i}$ et celui-ci n'est pas réduit à $\{i\}$ par hypothèse sur les éléments de K, soit il lui est lié; dans les deux cas, on a clairement $< \alpha - m_i\alpha_i, \alpha_i^\vee > < 0$.

De plus cela implique de façon évidente par (SR3b) ou par (C') la seconde assertion puisqu'alors $\alpha \in \Psi$.

2) Supposons donc $\alpha \in K$ et $\alpha = \sum_{i\in I} n_i\alpha_i$
Considérons $\Psi_\alpha = \{ \delta \in \Psi \,/\, \delta = \sum\limits_{i\in I} p_i\alpha_i$ avec $n_i - p_i \in M_i$ et $\delta \neq \alpha \}$. Par hypothèse $\forall i \in I$, $M_{i,ind}\alpha_i \subset \Psi$ et donc $\Psi_\alpha \neq \emptyset$.

L'image par la fonction hauteur de Ψ_α est un ensemble borné de $\mathbb{Q}_+$ qui admet donc une borne supérieure μ dans $\mathbb{R}$. Soit $\beta \in \Psi_\alpha$ dont la hauteur est dans $[\mu - 1/2, \mu]$. Supposons $\beta = \sum\limits_{i\in I} p_i\alpha_i$.
On veut démontrer :

$$(*)\ \exists i \in I,\ \exists m_i \in M_{i,ind} \text{ tels que : } \beta = \alpha - m_i\alpha_i\ .$$

On suppose ceci faux.

a) Montrons que ceci implique l'égalité des supports. Il est clair que $S_\beta \subset S_\alpha$.
Si $S_\beta \neq S_\alpha$, on considère une racine simple α_i dans $S_\alpha \setminus S_\beta$ liée au support de β, (elle existe par connexité de S_α).
Par hypothèse $< \beta, \alpha_i^\vee > < 0$, donc (SR3b) et (C') impliquent que $\beta + n_i\alpha_i \in \Psi$, pour tout $n_i \in M_{i,ind}$ la négation de $(*)$ et la maximalité de β entrainent alors une contradiction avec l'hypothèse $i \in S_\alpha \setminus S_\beta$ puisque la coordonnée de α suivant i est dans $M_i \setminus \{0\}$. On en déduit l'égalité des supports.

b) Considérons alors le sous-ensemble de S_α :

$$R = \{ i \in S_\alpha \} \setminus \{ j \,/\, n_j = p_j \} = \{ i \in S_\alpha \,/\, p_i \leq n_i - 3/4 \}$$
$$= \{ i \in S_\alpha \,/\, \exists m_i \in M_i \setminus \{0\} \,; p_i = n_i - m_i \}.$$

On a supposé $\beta \neq \alpha$ donc $R \neq \emptyset$. On veut démontrer que $R \neq S_\alpha$, c'est à dire qu'il existe $i \in S_\alpha$ pour lequel $n_i = p_i$.

Supposons le contraire, le support de α n'étant pas réduit à un élément, l'hypothèse $R = S_\alpha$ implique que pour tout élément j du support pour tout $m_j < n_j - p_j$ et $m_j \in M_{j\,\mathrm{ind}}$, $\beta + m_j\alpha_j \leq \alpha$, et $\beta + m_j\alpha_j \neq \alpha$ (à cause de la négation de (*)) donc $\alpha_j + \beta \notin \Psi$, par maximalité de β ce qui implique $< \beta, \alpha\,\hat{j} > \not< 0$ pour tout $j \in S_\beta$.

On en déduit que $A(S_\beta)\beta \geq 0$ et donc $A(S_\beta)$ qui est indécomposable (par connexité de S_β) est de type fini ou affine.

D'autre part,

$A(S_\beta)\alpha \leq 0$ car $\alpha \in K$ ce qui interdit l'éventualité $A(S_\beta)$ de type fini. Donc $A(S_\beta)$ est de type affine et grâce au théorème de classification on a :

$A(S_\beta)\beta \geq 0 \Longrightarrow A(S_\beta)\beta = 0$

$A(S_\beta)\alpha \leq 0 \Longrightarrow A(S_\beta)\alpha = 0$

α et β sont tous deux des multiples positifs de la racine imaginaire positive minimale δ du système de racines $\Delta(A(S_\beta))$ de l'algèbre de Kac-Moody associée à $A(S_\beta) : \alpha = n\delta$, $\beta = m\delta$ avec $0 < m < n$.

Les hypothèses faites sur Ψ montrent qu'il contient l'ensemble $\Delta(A(S_\beta))_+^{\mathrm{re}}$ des racines réelles positives de $\Delta(A(S_\beta))$ et on sait, d'après (SR5) dans $\Delta(A(S_\beta))$ et le fait que $\Delta(A(S_\beta))^{\mathrm{im}} = \mathbb{Z}^*\delta$, qu'il existe une racine γ telle que $m\delta \leq \gamma \leq n\delta$ (au sens où les inégalités sont vérifiées coordonnées par coordonnées), comme γ est réelle, elle est différente de $\beta = m\delta$ et $\alpha = n\delta$; ce qui contredit donc la "maximalité" de β.

c) On peut alors considérer une composante connexe F de R, qui est alors par connexité du support de α, liée à $S_\alpha \setminus R = \{i \in S_\alpha;\ n_i = p_i\}$. On note i_0 un indice de F suivant lequel une telle liaison existe. D'après la définition de R et les conditions (SR3b) ou (C') on a :

$$\forall i \in F,\ < \beta, \alpha\,\hat{i} > \geq 0\ .$$

On pose $\beta' = \sum_{i\in F} p_i\alpha_i$ et on a :

$$< \beta', \alpha\,\hat{i} > = < \beta, \alpha\,\hat{i} > - \sum_{j\notin F} p_j < \alpha_j, \alpha\,\hat{i} > \geq 0\ \ (\forall i \in F)$$

$$< \beta', \alpha\,\hat{i_0} > = < \beta, \alpha\,\hat{i_0} > - \sum_{j\notin F} p_j < \alpha_j, \alpha\,\hat{i_0} > > 0$$

En effet, comme $i \in F$, on sait que $< \alpha_j, \alpha\,\hat{i} > \leq 0$, pour tout $j \notin F$, et qu'il existe $j \in F$ tel que $< \alpha_j, \alpha\,\hat{i_0} > < 0$. Comme β' est un élément dont toutes les coordonnées sont strictement positives suivant F, la propriété précédente implique :

$A(F)$ est de type fini.

Si d'autre part on considère $\gamma = \sum_{i \in F}(n_i - p_i)\alpha_i$, on a :

$$< \gamma, \alpha_i^{\vee} > = < \alpha - \beta, \alpha_i^{\vee} > \quad (\forall i \in R)$$

car F est une composante connexe du support R de $\alpha - \beta$, suivant laquelle les coordonnées de $\alpha - \beta$ et de γ coincident.

Pour i dans F, on a $< \alpha, \alpha_i^{\vee} > \leq 0$ et $< \beta, \alpha_i^{\vee} > \geq 0$, ce qui implique :

$$< \gamma, \alpha_i^{\vee} > \leq 0 \ (\forall i \in F)$$

Toutes les coordonnées de γ dans $Q(F)$ sont strictement positives donc

la matrice $A(F)$ ne peut pas être de type fini

D'où la contradiction cherchée.

d) Par suite, pour tout α élément de K, on peut trouver $i \in I$ et $n_i \in M_i^*$ tel que $\alpha - n_i\alpha_i \in \Psi$.

□

Dans le contexte actuel, notons alors :

$$K = \{ \alpha \in \widetilde{Q}_+ \setminus (\cup_{i \in I_{\mathrm{im}}})\mathbb{Z}\alpha_i \ ; \ S_\alpha \text{ est connexe et } < \alpha, \alpha_i^{\vee} > \leq 0 \ (\forall i \in I)\}$$

Proposition 2.3.3.

On obtient la structure de $\widetilde{\Omega}$

$$\widetilde{\Omega} = W\Pi_{\mathrm{re}} \cup \pm W\Pi_{\mathrm{im}} \cup \pm WK$$

Démonstration.

En appliquant la proposition (2.3.2) à $\Psi = \widetilde{\Omega}_+$ avec $M_i = \mathbb{N}$ pour tout i, on obtient immédiatement le résultat important $K \subset \widetilde{\Omega}$.

D'après la stabilité de $\widetilde{\Omega}$ sous W, on a déjà l'inclusion $W\Pi \cup -W\Pi_{\mathrm{im}} \cup \pm WK \subset \widetilde{\Omega}$. Il reste à montrer que toute racine positive est conjuguée à un élément de la base ou de K. Pour cela, il suffit de remarquer que d'après la proposition 2.2.2, si un élément de $\widetilde{\Omega}_+$ n'est pas conjugué à un élément de la base, alors son orbite sous W est incluse dans $\widetilde{Q}_+$.

On peut alors considérer un élément de hauteur minimale de cette orbite. On montre alors facilement que cet élément est dans K.

□

De façon immédiate, on en déduit que :

Corollaire 2.3.4.

Le système de racines $\widetilde{\Omega}$ de la donnée radicielle associée à l'algèbre de Kac-Moody-Borcherds ne dépend pas de la réalisation, il est aussi le même que celui de toute algèbre $\mathfrak{g}_1$ construite comme dans la remarque 2.1.1. 3).

Les systèmes de racines $[\Omega]$ et Ω, associé à cette algèbre dépendent des réalisations mais sont les mêmes pour $\mathfrak{g}_1$.

□

Corollaire 2.3.5.

On considère les systèmes de racines Ω et $[\Omega]$.

Toute racine s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients entiers tous de même signe, des racines simples. Si $\alpha = \sum_{i \in I} n_i \alpha_i$ est une décomposition telle que dans $\widetilde{Q}$ on ait, $\sum_{i \in I} n_i \alpha_i \in \widetilde{\Omega}$, on dira qu'il s'agit d'une "bonne décomposition".

Les systèmes de racines ainsi considérés vérifient tous deux; les conditions déduites des conditions de chaines (SR3) ou (SR3b) et (SR4), en particulier ils sont stables sous l'action du groupe de Weyl;

Si α est une racine réelle et β une autre racine $[\beta, \beta \pm \alpha, \ldots r_\alpha(\beta)]$ est dans le système si β n'est pas proportionnelle à α.

Si α_i est une racine imaginaire simple et β une autre racine positive (au sens où il existe une "bonne décomposition" de α dans $\sum_{i \in I} \mathbb{N}\alpha_i$), si $< \beta, \alpha\check{_i} > < 0$ alors $\beta + \mathbb{N}\alpha_i$ est inclus dans le système.

Les deux systèmes vérifient (SR5), si lorsqu'on écrit, $\alpha \in \Omega_+$, cela signifie qu'elle est positive au sens précédent.

□

II

Construction de systèmes de racines à bases libres

3. Matrices de Borcherds relatives

K_1 désigne toujours un corps totalement ordonné, fixé dans la suite.

3.1. Définitions

Une matrice de Borcherds générale à coefficients dans K_1, $A = (a_{ij})$, où $(i,j) \in I^2$, d'ensemble d'indices I fini ou dénombrable, sera dite *de Borcherds relative* si elle vérifie les propriétés : (B1); (B2); (B3); (B4) de 1.1, ainsi que :

(B5') $i \in I_{\mathrm{re}} \Longrightarrow a_{ii} \in \{1, 2\}$;

On définit alors une partition de I par :

$$a_{ii} = 1 \Longleftrightarrow i \in I_2;$$

$$a_{ii} = 2 \Longleftrightarrow i \in I_1;$$

$$a_{ii} < 0 \Longleftrightarrow i \in I_-;$$

$$a_{ii} = 0 \Longleftrightarrow i \in I_0;$$

On a alors $I_{\mathrm{re}} = I_1 \sqcup I_2$ et $I_{\mathrm{im}} = I_0 \sqcup I_-$.

Une telle matrice sera dite *de Kac-Moody relative* si, de plus, tous ses coefficients sont des entiers (cf [B_3R] où l'on trouvera la justification de ce genre de définition)

Si $I_{\mathrm{im}} = \emptyset$ et si A est de type fini, elle sera appelée *matrice de Cartan relative.*

Dans le cas des matrices de Borcherds relatives, on a $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ si $i \in I_1$ et en général $2a_{ij} \in \mathbb{Z}$ si $i \in I_2$. Le cas des matrices de Borcherds relatives telles que $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ si $i \in I_{\mathrm{re}}$ est particulièrement intéressant (cf 4.1).

La matrice de Borcherds normalisée associée à A, $B(A)$ est déduite de A en multipliant par deux tous les coefficients d'une ligne indexée par i si $i \in I_2$, autrement dit ses coefficients b_{ij} vérifient $b_{ij} = 2a_{ij}$ si $i \in I_2$, et $b_{ij} = a_{ij}$ sinon.

Diagramme de Dynkin

Si A est une matrice de Borcherds relative, on lui associe un *diagramme de Dynkin* ainsi construit :

A tout $i \in I$, on associe un point, indexé par i, et auprès duquel on fait figurer a_{ii} si ce dernier est négatif ou nul, ou une croix si $a_{ii} = 1$.

Si, et seulement si $a_{ij} \neq 0$, on lie les sommets i et j du diagramme.

Plus précisément, si i et j sont deux éléments de I_{re}, on utilise les conventions de Kac, [K; 4.7]; si $b_{ij}b_{ji} \leq 4$ et $|b_{ij}| \geq |b_{ji}|$, les deux sommets sont liés par $|b_{ij}|$ segments, et ceux-çi sont munis d'une flèche dirigée vers i si $|b_{ij}| > 1$. Si $b_{ij}b_{ji} > 4$, ou, si l'un des deux au moins n'est pas dans I_{re}, on les lie par un trait gras au dessus duquel on note $|b_{ij}|$ près de i et $|b_{ji}|$ près de j.

Le diagramme de Dynkin de A est donc celui de la matrice normalisée $B(A)$ en affectant, de plus, les sommets correspondants aux éléments de I_2 d'une croix.

Comme pour une matrice de Borcherds normalisée, A est indécomposable (cf 1.1) si et seulement si son diagramme de Dynkin est un graphe connexe.

3.2. Matrice de Kac-Moody associée, Groupe de Weyl

Etant donnée une matrice de Borcherds relative, on lui associe une matrice de Kac-Moody, notée $K(A)$, définie par :

$K(A) = (b_{ij})_{(i,j)\in I_{re}^2}$ où $b_{ij} = 2a_{ij}/a_{ii} \in \mathbb{Z}$, autrement dit $K(A) = B(A(I_{\text{re}})) = B(A)(I_{\text{re}})$.
On introduit des symboles α_i, $\alpha\,\hat{i}$ pour $i \in I$; $\Pi = \{\alpha_i \,/\, i \in I\}$ et $\Pi\hat{} = \{\alpha\,\hat{i} \,/\, i \in I\}$.

Si $J \subset I$, on notera dans la suite :

$$\Pi(J) = \{\alpha_i \,/\, i \in J\}\,; \quad Q(J) = \bigoplus_{i\in J} \mathbb{Z}\alpha_i\,; \quad Q_{\mathbb{Q}}(J) = \bigoplus_{i\in J} \mathbb{Q}\alpha_i\,;$$
$$Q\hat{}(J) = \bigoplus_{i\in J} \mathbb{Z}\alpha\,\hat{i} \quad Q_{\hat{\mathbb{Q}}}(J) = \bigoplus_{i\in J} \mathbb{Q}\alpha\,\hat{i} \quad Q_{\hat{K_1}}(J) = \bigoplus_{i\in J} K_1\alpha\,\hat{i} \quad Q_K(J) = \oplus_{i\in J} K\alpha_i$$

Lorsque $J = I$, (I) ne sera pas nécessairement indiqué.

On a donc une réalisation $(Q_{\mathbb{Q}}, Q_{\hat{\mathbb{Q}}}, \Pi, \Pi\hat{})$ de A sur $\mathbb{Q}$, pour la dualité entre Q_K et $Q_{\hat{K}}$ telle que $a_{ji} = <\alpha_i, \alpha\,\hat{j}>$.

Le signe $+$ (resp .$-$) en indice de ces ensembles (ou d'une partie de l'un d'eux) signifiera que l'on ne considère que les éléments dont les coordonnées sont positives ou nulles (resp. négatives ou nulles).

Comme au chapitre I, on définit *le support* (resp. *la hauteur*) d'un élément appartenant à l'un des ensembles précédents, comme l'ensemble des $i \in I$, tels que sa coordonnée suivant α_i (ou $\alpha\,\hat{}_i$) soit non nulle (resp. la somme de ses coordonnées).

Si $i \in I_{\mathrm{re}}$, on appellera *coracine de* α_i l'élément de $Q\check{}(I_{\mathrm{re}})$:

$$\alpha\check{}_i = 2\alpha\,\hat{}_i / a_{ii} \ .$$

ainsi $\alpha\check{}_i = \alpha\,\hat{}_i$ si $i \in I_1$, $\alpha\check{}_i = 2\alpha\,\hat{}_i$ si $i \in I_2$ et $< \alpha_j, \alpha\check{}_i >= b_{ij}$ pour tout $(i,j) \in I_{\mathrm{re}}^2$.

On définit un élément de $\mathrm{GL}(Q_{K_1})$ (qui stabilise $Q_{\mathbb{Q}}$, Q et $Q(I_{\mathrm{re}})$), d'ordre deux en posant, sous les hypothèses précédentes,

$$r_i(\alpha) = \alpha - < \alpha, \alpha\check{}_i > \alpha_i \text{ pour tout } \alpha \in Q_{\mathbb{Q}} \ .$$

De même, pour $i \in I_{\mathrm{re}}$ en posant pour tout $\alpha\,\hat{} \in Q\,\hat{}_{K_1}$

$$r\,\hat{}_i(\alpha\,\hat{}) = \alpha\,\hat{} - < \alpha_i, \alpha\,\hat{} > \alpha\check{}_i, \quad \text{on a } r\,\hat{}_i \in \mathrm{GL}\ (Q\,\hat{}_{K_1}) \ .$$

En général r_i ne stabilise pas $Q\,\hat{}$ (ni $Q\check{}(I_{\mathrm{re}})$) par contre il stabilise $Q\,\hat{}_{\mathbb{Q}}(I_{\mathrm{re}})$ puisque $2a_{ji} \in \mathbb{Z}$ dès que $j \in I_{\mathrm{re}}$.

Proposition 3.2.1.

Le sous groupe de $GL(Q_{K_1})$ *(resp. de* $GL(Q\,\hat{}_{K_1})$*) engendré par les* r_i *(resp. par les* $r\,\hat{}_i$*) pour* $i \in I_{\mathrm{re}}$ *est isomorphe au groupe de Coxeter :*

$$W = \langle r_i \,/\, (r_i r_j)^{m_{ij}} = \mathrm{Id} \ \text{ si } \ m_{ij} < \infty \rangle$$

où, si λ *désigne* $b_{ij}b_{ji}$*, les coefficients* m_{ij} *sont donnés par:*
$m_{ii} = 1$*; et si* $i \neq j$ *:*

$$m_{ij} = 2 \Longleftrightarrow \lambda = 0;$$
$$m_{ij} = 3 \Longleftrightarrow \lambda = 1;$$
$$m_{ij} = 4 \Longleftrightarrow \lambda = 2;$$
$$m_{ij} = 6 \Longleftrightarrow \lambda = 3;$$
$$m_{ij} = \infty \Longleftrightarrow \lambda \geq 4.$$

(l'ordre de $r_i r_j$ *étant l'ordre de sa restriction à* $\mathbb{Z}\alpha_i + \mathbb{Z}\alpha_j$*.)*

Remarques :

1) Dans la suite, via l'isomorphisme qui se déduit de ce résultat, on pourra identifier $r_i\hat{}$ à r_i.

2) Le groupe de Weyl est donc celui attaché classiquement à la matrice de Kac-Moody $K(A)$ et son action sur $Q(I_{\mathrm{re}})$ est l'action usuelle.

Démonstration.

L'ordre de $r_i r_j$ sur Q_{K_1} est égal à celui de sa restriction à $\mathbb{Z}\alpha_i \oplus \mathbb{Z}\alpha_j$ c'est à dire m_{ij} comme ci-dessus ([Hée 1] ou 2.2.7). La proposition se ramène alors à un résultat classique en théorie de Kac-Moody pour la restriction de W à $Q(I_{\mathrm{re}})$ en considérant $K(A)$ (cf n° 2.2).

□

On définit comme au chapitre précédent la longueur d'un élément de W. Il est facile de démontrer que W stabilise $Q(I_{\mathrm{re}})$, et que :

$$\forall w \in W\,,\ (w - Id_Q)(Q) \subset Q_{I_{\mathrm{re}}}$$

$$r_i(Q_{\mathbb{Q},+}) \cap Q_{\mathbb{Q},-} = \mathbb{Q}_-\alpha_i\ .$$

La matrice $K(A)$ étant à coefficients dans $\mathbb{Z}$, on déduit de l'article de Hée ([Hée 1; II 12 (a)]) que $(Q(I_{\mathrm{re}}), \Pi(I_{\mathrm{re}}), \{r_i,\ (i \in I_{\mathrm{re}})\})$ est ce qu'il appelle *une base de racines sur* $\mathbb{Z}$, il en est de même de $(Q\check{}(I_{\mathrm{re}}), \Pi\check{}, \{r_i,\ (i \in I_{\mathrm{re}})\})$, où $Q\check{} = \bigoplus_{i\in I_{\mathrm{re}}} \mathbb{Z}\alpha_i\check{}$ et $\Pi\check{} = \{\alpha\check{}\ /\ \alpha \in \Pi(I_{\mathrm{re}})\}$.

Grâce à la connaissance des systèmes de racines des algèbres de Kac-Moody [K; 5.4] on a alors :

Si on note :

$K(I_{\mathrm{re}}) = \{\alpha \in Q_+(I_{\mathrm{re}}) \backslash \sqcup_{j\in I} \mathbb{N}\alpha_j\ /\ <\alpha, \alpha_i\check{}> \leq 0\,(\forall i \in I_{\mathrm{re}})$ et le support de α est connexe$\}$

Lemme 3.2.2.

Le système de racines à base libre de l'algèbre de Kac-Moody associée à $K(A)$ *est* $\Phi = W\Pi(I_{\mathrm{re}}) \cup \pm WK(I_{\mathrm{re}})$.

□

Lemme 3.2.3.

Soit $w \in W$ de longueur l et $w = r_{i_1} ... r_{i_l}$ une décomposition réduite de w alors :

a) $r_{i_1} ... r_{i_{l-1}}(\alpha_{i_l}) \in Q_+(I_{re})$

b) Si, comme Hée, on note $S_w = \{ \alpha \in Q^*_{\mathbb{Q},+} \,/\, w(\alpha) \in Q_{\mathbb{Q},-} \}$ on a :

$$S_w = \mathbb{Q}^*_+ \{\alpha_{i_l}, r_{i_l}(\alpha_{i_{l-1}}), ..., r_{i_l} ... r_{i_2}(\alpha_{i_1})\}$$

c) L'ensemble des i tels que r_i apparaisse dans une décomposition réduite de w ne dépend pas de la décomposition réduite considérée. On l'appellera support de w.

Démonstration.

La possibilité d'utiliser les résultats établis par Hée est justifiée par la remarque faite précédemment : $(Q, \Pi(I_{re}), \{r_i\,;\, i \in I_{re}\})$, est ce qu'il appelle *une base de racines.* On déduit donc a) et b) de [Hée 1; II 9 et II 23], d'ailleurs a) est classique.

Pour c) on peut se référer au problème des mots dans un système de Coxeter tel qu'il est traité dans [Br].

□

Lemme 3.2.4.

On considère dans Q (resp. $Q_{\mathbb{Q}}$)

$$A = \{ \alpha \in Q_+ \,/\, w(\alpha) - \alpha \in \sum_{i \in I_{re}} \mathbb{N}\alpha_i, \forall w \in W \}$$

$$A_{\mathbb{Q}} = \{ \alpha \in Q_{\mathbb{Q},+} \,/\, w(\alpha) - \alpha \in \sum_{i \in I_{re}} \mathbb{Q}_+ \alpha_i, \forall w \in W \}$$

$$B = \{ \alpha \in Q_+ \,/\, < \alpha, \alpha_i^\vee > \leq 0 \,,\ \forall i \in I_{re} \}$$

$$B_{\mathbb{Q}} = \{ \alpha \in Q_{\mathbb{Q},+} \,/\, < \alpha, \alpha_i^\vee > \leq 0 \,,\ \forall i \in I_{re} \}$$

On a alors

$$A = B \qquad A_{\mathbb{Q}} = B_{\mathbb{Q}} \,.$$

De plus si $\alpha \in A_{\mathbb{Q}}$ et $w \in W$ sont tels que $w(\alpha) \in A_{\mathbb{Q}}$, alors $w(\alpha) = \alpha$ et w s'écrit comme un produit d'éléments r_i pour des $i \in I_{re}$ tels que $< \alpha, \alpha_i^\vee > = 0$.

N.B: On a le résultat analogue en remplaçant $\mathbb{Q}$ par K_1.

Démonstration.

Il est clair que si α et $w(\alpha)$ sont simultanément dans $A_{\mathbb{Q}}$ alors $\alpha = w(\alpha)$.

L'inclusion $A_{\mathbb{Q}} \subset B_{\mathbb{Q}}$ est claire :

Si $\alpha \in A_{\mathbb{Q}}$ et si $i \in I_{\text{re}}$ alors $r_i(\alpha) - \alpha = - < \alpha, \check{\alpha_i} > \alpha_i \in \sum_{i \in I_{\text{re}}} \mathbb{Q}_+ \alpha_i$ et donc $< \alpha, \alpha_i > \leq 0$.

Remarque :

Notons que pour obtenir ce résultat on utilise essentiellement la propriété :

$$\forall i \in I_{\text{re}} \quad \mathbb{Q}_- \alpha_i \cap \sum_{j \in I_{\text{re}}} \mathbb{Q}_+ \alpha_j = \{0\}$$

Démontrons l'inclusion contraire : Soit $\alpha \in B_{\mathbb{Q}}$, prouvons par récurrence sur $l(w)$ que :

$$w(\alpha) - \alpha \in \sum_{i \in I_{\text{re}}} \mathbb{Q}_+ \alpha_i \ .$$

Si $l(w) = 0$, le résultat est évident.

Si $l(w) = 1, \exists i \in I_{\text{re}}$ tel que $w = r_i$, alors : $w(\alpha) - \alpha = - < \alpha, \check{\alpha_i} > \alpha_i \in \mathbb{Q}_+ \alpha_i$ et donc appartient à $\sum_{i \in I_{\text{re}}} \mathbb{Q}_+ \alpha_i$. De plus $w(\alpha) = \alpha$ si et seulement si $< \alpha, \check{\alpha_i} > = 0$.
Supposons que si $w \in W$, $l(w) \leq l - 1$, $l \in \mathbb{N}^*$, $w(\alpha) - \alpha \in \sum_{i \in I_{\text{re}}} \mathbb{Q}_+ \alpha_i$.

Soit alors $w \in W$ tel que $l(w) = l$, et $w = r_{i_1} ... r_{i_l}$ une décomposition réduite de w,
$w(\alpha) - \alpha = (r_{i_1} ... r_{i_{l-1}}(\alpha) - \alpha) + r_{i_1} ... r_{i_{l-1}}(r_{i_l}(\alpha) - \alpha)$

$\qquad = (r_{i_1} ... r_{i_{l-1}}(\alpha) - \alpha) + r_{i_1} ... r_{i_{l-1}}(- < \alpha, \check{\alpha_{i_l}} > \alpha_{i_l})$

$r_{i_1} ... r_{i_{l-1}}(\alpha) - \alpha \in \sum_{i \in I_{\text{re}}} \mathbb{Q}_+ \alpha_i$ par hypothèse de récurrence;

$r_{i_1} ... r_{i_{l-1}}(- < \alpha, \check{\alpha_{i_l}} > \alpha_{i_l}) \in \sum_{i \in I_{\text{re}}} \mathbb{Q}_+ \alpha_i$ par minimalité de la décomposition (lemme 3.2.3) et l'hypothèse sur α. De plus alors $w(\alpha) = \alpha$ si et seulement si $r_{i_1} \dots r_{i_{l-1}}(\alpha) = \alpha$ et $< \alpha, \check{\alpha_{i_l}} > = 0$ d'où le résultat anoncé.

Le résultat est alors évident en ce qui concerne A et B puisque ce sont exactement les intersections respectives de $A_{\mathbb{Q}}$ et $B_{\mathbb{Q}}$ avec Q.

$\square$

3.3. Groupe de Weyl et classification des matrices de Kac-Moody relatives

Rappelons alors les résultats établis par Hée [Hée 1; II 17]

Proposition 3.3.1.

Si i et j sont dans I_{re}, si w est un élément de W tels que :

$$w(\alpha_i) = \alpha_j$$

Il existe un entier naturel $n \leq l(w)$, une suite $\{w_h\}_{h \leq n}$ d'éléments de $W \setminus \{1\}$, et deux suites $\{i_h\}_{h \leq n+1}, \{j_h\}_{h \leq n}$ dans I_{re} tels que :

$w = w_n ... w_1 \quad l(w) = \sum_{h \leq n} l(w_h)$

$i_1 = i \qquad i_{n+1} = j$

$w_h(\alpha_{i_h}) = \alpha_{i_{h+1}}, i_h \neq j_h, i_{h+1} \in \{i_h, j_h\}, w_h \in \langle r_{i_h}, r_{j_h} \rangle$

$m_{i_h, j_h} < \infty$ *et* $l(w_h) = m_{i_h, j_h} - 1$ *avec de plus :*

Si $m_{i_h, j_h} = 2n_h$, $i_{h+1} = i_h$ *et* $w_h = r_{j_h}(r_{i_h} r_{j_h})^{n_h - 1}$

Si $m_{i_h, j_h} = 2n_h + 1$, $i_{h+1} = j_h$ *et* $w_h = (r_{i_h} r_{j_h})^{n_h}$

□

Lemme 3.3.2.

Soit $w \in W$, si $w(\alpha_i) = \mu \alpha_j$ avec $\mu \in \mathbb{N}^*$ alors : $\mu = 1$,

a) si i et j sont distincts $i \in I_1, j \in I_1$, et ils peuvent être connectés dans le diagramme de Dynkin par un chemin formé de liaisons simples entre des éléments de I_1.

b) $w(\alpha\,\hat{i}) = \alpha\,\hat{j}$.

Démonstration.

Comme W stabilise Q et α_i est indivisible dans Q, il est clair que $\mu = 1$.

D'après ce qui a été vu avant, si $i \in I_{\text{im}}$, $w(\alpha_i) - \alpha_i \in Q(I_{re})$, donc l'hypothèse implique dans ce cas que $i = j$. D'après 3.2.4, $w = r_{i_1} ... r_{i_l}$ avec $< \alpha_i, \alpha\,\hat{i_k} > = 0$, pour tous ces entiers. La matrice A possède la propriété de symétrie combinatoire, par suite $< \alpha_{i_k}, \alpha\,\hat{i} >$ est également nul et donc $w(\alpha\,\hat{i}) = \alpha\,\hat{i}$.

Supposons dorénavant i et j dans I_{re}.

On sait que $< w(\alpha_h), w(\alpha\,\hat{i}) > = < \alpha_h, \alpha\,\hat{i} >$, en particulier les deux éléments i et j sont simultanément dans l'une des parties I_1 ou I_2. On peut utiliser la proposition précédente, or dans le cas qui nous intéresse on sait que $m_{i,j} \in \{2, 3, 4, 6, \infty\}$.

Si $i \neq j$, $w_{i_h}(\alpha_{i_h}) = \alpha_{i_h}$, implique que l'apparition de w_{i_h} dans la décomposition de w, n'intervient pas dans l'action de w sur α_i. Considérons alors dans la suite des i_h les éléments correspondants aux derniers termes des familles de termes consécutifs égaux, maximales, on note J le sous-ensemble de $\{1...n\}$ ainsi obtenu.

Alors $w(\alpha_i) = w_{i_{j_1}}...w_{i_{j_l}}(\alpha_i)$ où j_h parcourt J.

Sous ces hypothèses, $i_{j_h} \neq i_{j_{h+1}}$ donc $m_{i_{j_h},j_{j_h}}$ est impair est par suite égal à 3. On en déduit que $b_{ij}b_{ji} = 1$ donc $b_{ij} = a_{ij} = b_{ji} = a_{ji} = 1$

D'où le résultat anoncé au niveau du diagramme de Dynkin.

La conjugaison des coracines est alors évidente.

Reste à voir que si $w(\alpha_i) = \alpha_i$ avec $i \in I_{\mathrm{re}}$, on a le même résultat avec les coracines. Mais ceci résulte du résultat dans les algèbres de Kac-Moody démontré au chapitre I (2.2.4).

□

Classification des matrices de Kac-Moody relatives indécomposables (MRI)

Les MRI de type fini sont les matrices de Cartan (cf [K; IV table Fin]) et la matrice déduite de celle correspondant au système B_n en divisant la dernière ligne par 2, le système correspondant étant BC_n; son diagramme est :

Les MRI de type affine sont les matrices de type affine usuelles (cf [K; IV table Aff] ainsi que celles dont les diagrammes de Dynkin sont :

1) $A_1^{(1)\times}$ 

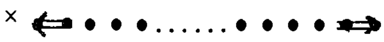
2) $A_1^{(1)\times\times}$ 

3) $A_{2n}^{(2)\times}(n \geq 2)$ 

4) $A_2^{(2)\times}$ 

5) $C_2^{(1)\times}$ 

6) $B_l^{(1)\times}$ $(l \geq 3)$ 

7) $D_{n+1}^{(2)\times}$ $(n \geq 2)$ 

8) $D_{n+1}^{(2)\times\times}$ $(n \geq 2)$ 

9) $Z_0^{(1)}$ 

Cette classification se déduit facilement de la classification des matrices de Kac-Moody affines de 1.2.1 et 3.1. Elle correspond (sauf pour $Z_0^{(1)}$) à la classification des échelonnages de Bruhat et Tits [BR T1; Br T2], cf [$\mathrm{B_3R}$]. D'ailleurs $Z_0^{(1)}$ est le seul cas de matrice de Borcherds indécomposable affine imaginaire.

Les MRI de type profini sont celles qui ont pour diagrammes de Dynkin :

1) A_∞ 

2) $A_{+\infty}$ 

3) B_∞ 

4) C_∞ 

5) BC_∞ 

Cette classification résulte de 3.1 et de l'exercice 4.14 de [K].

3.4. Coracines

Corollaire 3.4.1.

Si $\alpha = w(\alpha_i)$, alors $w(\alpha_i^\vee)$ ne dépend que de α (et pas de la racine simple ni de l'élément du groupe de Weyl).

Dans ce cas, si $i \in I_{\mathrm{re}}$, il en est de même de $w(\alpha_i^\vee)$ qui sera appelé coracine de α et notée $\alpha^\vee$.

Si $i \in I_{\mathrm{im}}$, $w(\alpha_i^\vee)$ sera appelé la coracine de $w(\alpha_i)$.

Démonstration.

D'après ce qui précède :

$$w(\alpha_i) = w'(\alpha_j) \Longrightarrow w^{-1}w'(\alpha_j) = \alpha_i \Longrightarrow w^{-1}w'(\alpha_j^\vee) = \alpha_i^\vee \, .$$

et dans ce cas i et j sont dans la même partie de I.

□

Lemme 3.4.2 .

Si $i \in I$, et si $w \in W$, alors :

$$S_{w(\alpha_i)} = S_{w(\alpha\check{_i})} \ .$$

Démonstration.

1) Supposons tout d'abord $i \in I_{\text{re}}$, et utilisons les résultats de Hée. $\Phi = W\Pi(I_{\text{re}})$ est l'ensemble des racines associé à la base de racines $(Q(I_{\text{re}}), \Pi(I_{\text{re}}), \{r_i, (i \in I_{\text{re}})\})$, il en est de même de $\Phi\check{} = W\Pi\check{}$ où $\Pi\check{} = \{\alpha\check{_i} \ / \ i \in I_{\text{re}}\}$ associé à $(Q\check{}, \Pi\check{}, \{r_i, (i \in I_{\text{re}})\})$, (c'est aussi les ensembles de racines réelles des algèbres de Kac-Moody associées à $K(A)$ et à la transposée de $K(A)$ dans le cas de réalisations libres.)

Si J est une partie de I_{re}, Hée a établi [Hée ; II 15] que $\Phi(J) = \Phi \cap Q(J) = W(J).\Pi(J)$ (resp. $\Phi\check{}(J) = W(J).\Pi\check{}(J)$) donc est l'ensemble des racines associé à la base de racines $(Q(J), \Pi(J), \{r_i, (i \in J)\})$ (resp. $(Q\check{}(J), \Pi\check{}(J), \{r_i, (i \in J\}))$.

On a alors, si le support de α est J, $\alpha \in Q(J) \cap \Phi$ et donc $\alpha\check{} \in Q\check{}(J) \cap \Phi\check{}$ ce qui implique $S_{\alpha\check{}} \subset S_\alpha$. De même, si le support de $\alpha\check{}$ est J, $\alpha\check{} \in Q\check{}(J) \cap \Phi\check{}$ alors $\alpha \in Q(J) \cap \Phi$ et on a ainsi l'inclusion contraire. Ceci établit le résultat cherché puisque $\alpha = w(\alpha_i) \Longrightarrow \alpha\check{} = w(\alpha_i\check{})$, qui est proportionnel à $w(\alpha\check{_i})$.

2) Si $i \in I_{\text{im}}$, on sait que $w(\alpha_i) - \alpha_i \in Q(I_{\text{re}})$, de même $w(\alpha\check{_i}) - \alpha\check{_i} \in Q_{\hat{\mathbb{Q}}}(I_{\text{re}})$ et en fait on doit démontrer que ces deux éléments ont même support.

Considérons une décomposition de longueur minimale de w, $w = r_{i_1} \ldots r_{i_n}$,

$$\begin{aligned} w(\alpha_i) - \alpha_i &= \sum_{k \leq n} r_{i_1} \ldots r_{i_k}(\alpha_i) - r_{i_1} \ldots r_{i_{k-1}}(\alpha_i) \\ &= \sum_{k \leq n} r_{i_1} \ldots r_{i_{k-1}}(- < \alpha_i, \alpha\check{_{i_k}} > \alpha_{i_k}) \end{aligned}$$

Or, comme $i \in I_{\text{im}}$, on a évidemment $< \alpha_i, \alpha\check{_{i_k}} > \leq 0$, et par hypothèse de minimalité sur la décomposition on a selon (3.2.3) :

$$r_{i_1} \ldots r_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}) \in Q_+ \ .$$

$w(\alpha_i) - \alpha_i$ est la somme de tels éléments, son support est donc la réunion des supports des $r_{i_1} \ldots r_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})$ qui ne sont pas affectés d'un coefficient nul. On obtient bien sûr une décomposition tout à fait analogue de $w(\alpha\check{_i}) - \alpha\check{_i}$ dans $Q_{\hat{\mathbb{Q}}}$. On sait, d'après 1) que :

$$S_{r_{i_1} \ldots r_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})} = S_{r_{i_1} \ldots r_{i_{k-1}}(\alpha\check{_{i_k}})}$$

De plus la matrice vérifiant la propriété de symétrie combinatoire, les coefficients des termes $r_{i_1}...r_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})$ et $r_{i_1}...r_{i_{k-1}}(\alpha\check{\ }_{i_k})$ dans les deux décompositions sont simultanément nuls ou strictement positifs. Ce qui démontre l'égalité des supports.

□

Lemme 3.4.3.

Si $i \in I$, $w \in W$ et $w(\alpha_i) \geq 0$ alors $w(\alpha\check{\ }_i) \geq 0$

Remarque :

Comme au 1.1 $u \geq 0$ signifie que ses coordonnées dans les bases choisies sont toutes positives ou nulles.

Démonstration.

En effet, il résulte de la caractérisation de S_w (3.2.3) et de son équivalent dans $Q\check{\ }(I_{\mathrm{re}})$, qu'un élément positif de $W\Pi(I_{\mathrm{re}})$ a une coracine positive, et réciproquement.

Pour α_i avec $i \in I_{\mathrm{im}}$, le résultat est clair en introduisant dans $Q\check{_{K_1}}$ les parties :

$$A\check{_{K_1}} = \{\alpha \in Q\check{_{K_1}}{}_+ \,/\, w(\alpha) - \alpha \in \sum_{i \in I_{\mathrm{re}}} K_{1+}\alpha_i, \forall w \in W\}$$

$$B\check{_{K_1}} = \{\alpha \in Q\check{_{K_1}}{}_+ \,/\, <\alpha, \alpha_i> \leq 0\,,\ \forall i \in I_{\mathrm{re}}\}$$

On a encore $A\check{_{K_1}} = B\check{_{K_1}}$ et $\alpha_i \in A\check{\ }$, ce qui implique le résultat.

□

Lemme 3.4.4.

Si $\{i,j\} \subset I_{\mathrm{re}}$, $w \in W$ et si $\alpha = w(\alpha_j) \in Q_+$,

$$<\alpha, \alpha\check{_i}> < 0 \Longleftrightarrow <\alpha_i, \alpha\check{\ }> < 0$$

Démonstration.

D'après [Hée 1; II 13], si $\alpha = w(\alpha_j)$, l'élément $r_\alpha = w r_j w^{-1}$ est bien défini, c'est à dire ne dépend pas de la décomposition de α considérée.

$r_\alpha(\alpha\check{_i}) = \alpha\check{_i} - <\alpha, \alpha\check{_i}> \alpha\check{\ }$, avec $\alpha\check{\ } = w(\alpha\check{_j})$. Il est clair que

$$j \in I_1 \Longrightarrow \alpha\check{\ } = w(\alpha\check{_j});$$

$$j \in I_2 \Longrightarrow \alpha\check{\ } = w(2\alpha\check{_j}).$$

Les hypothèses $i \in I_{re}$ et $\alpha \in Q_+$, $< \alpha, \alpha_i^\vee > < 0$, entrainent que α ne peut pas être proportionnelle à α_i. On a donc :

$$< \alpha, \alpha_i^\vee > \leq 0 \Longleftrightarrow r_\alpha(\alpha_i^\vee) \in Q_+^\vee \Longleftrightarrow r_\alpha(\alpha_i) \in Q_+ \Longleftrightarrow < \alpha_i, \alpha^\vee > \leq 0$$

Il reste à voir que si l'un des deux termes est nul, les deux le sont, mais ceci résulte trivialement du lemme 3.3.2 appliqué à $w = r_\alpha$.

□

Lemme 3.4.5.

Si α et β sont dans $W(\Pi(I_{re}))$, $< \alpha, \beta^\vee >$ et $< \beta, \alpha^\vee >$ sont de même signe au sens strict.

Démonstration.

Si $\beta = -\alpha$ alors $\beta^\vee = -\alpha^\vee$ car alors $\beta = r_\alpha(\alpha)$. On peut donc supposer que α et β ne sont pas proportionnelles, que $\beta = w(\alpha_i)$. On a alors facilement le résultat à l'aide du lemme précédent.

□

4. Systèmes de racines à bases libres

4.1 Généralités

On suppose donnée une matrice de Borcherds relative, indexée par $I = I_1 \sqcup I_2 \sqcup I_0 \sqcup I_-$ partition définie comme précédemment.

Définition 1.

Pour tout $i \in I$ on suppose donnée une partie N_i de $\mathbb{Q}_+^*$, de plus petit élément 1, ou ne contenant pas sa borne inférieure, mais minorée par 3/4 et contenant 1, et telle que :

Si $i \in I_2$, alors $N_i = \{1, 2\}$

Si $i \in I_1$, alors $N_i = \{1\}$

Si $i \in I$ et $j \in I_{re}$, alors $N_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$ (en particulier, cela impose $a_{ji} \in \mathbb{Z}$).

On note $N_{i,ind}$, l'ensemble des éléments indécomposables de N_i (ie les éléments p de N_i qui ne s'écrivent pas comme somme d'éléments de N_i), et M_i le plus petit sous ensemble de $\mathbb{Q}_+$ qui contient 0 et N_i et qui est stable par l'addition (on a donc $M_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$ pour $j \in I_{re}$). On a $1 \in N_{i,\mathrm{ind}}$ et $N_{i,\mathrm{ind}} = M_{i,\mathrm{ind}}$ (avec les notations de 2.3.2).

Définition 2.

On appellera alors système de racines à base libre $\Pi = \{\alpha_i\}_{i\in I}$, associé à A et aux N_i un ensemble Δ (dont les éléments sont appelés des racines), qui vérifie les propriétés suivantes :

(SR1b) $\Delta \subset Q_{\mathbb{Q}}$; $\Delta = \Delta_+ \sqcup \Delta_-$ où $\Delta_+ = \Delta \cap Q_{\mathbb{Q},+} = -\Delta_- = -(\Delta \cap Q_{\mathbb{Q},-})$;

(SR2b) $\forall i \in I, \quad \mathbb{Q}_+\alpha_i \cap \Delta = N_i\alpha_i$;

(SR3b) $\forall i \in I_{\rm re}$, $\forall \alpha \in \Delta \setminus \mathbb{Z}\alpha_i$,
$\{\alpha + k\alpha_i \,/ -<\alpha,\alpha_i^\vee> \leq k \leq 0\} \subset \Delta$ si $<\alpha,\alpha_i^\vee> \geq 0$;

$\{\alpha + k\alpha_i \,/ -<\alpha,\alpha_i^\vee> \geq k \geq 0\} \subset \Delta$ si $<\alpha,\alpha_i^\vee> \leq 0$;

(SR4b) $\forall i \in I_{\rm im}$, $\forall \alpha \in \Delta_+ \setminus \mathbb{Q}_+\alpha_i$,
$<\alpha,\alpha_i^\vee> < 0 \Longleftrightarrow \alpha + M_i\alpha_i \subset \Delta_+$;
$<\alpha,\alpha_i^\vee> = 0 \Longrightarrow \alpha + n_i\alpha_i \notin \Delta_+ \quad (\forall n_i \in N_{i,ind})$;

(SR5b) $\forall \alpha \in \Delta_+ \setminus \bigsqcup_{i\in I} \mathbb{Q}_+\alpha_i$, il existe $i \in I$ et $n_i \in N_{i,ind}$ tels que :
$\alpha - n_i\alpha_i \in \Delta$;

Remarques :

1) D'après (SR1b) si $\alpha \in \Delta$ alors $-\alpha \in \Delta$. D'après (SR1b) et (SR3b) Δ est stable par r_i pour $i \in I_{\rm re}$.

2) *Diagramme de Dynkin associé*
A un tel système de racines à base libre, on associe le diagramme de Dynkin de la matrice de Borcherds relative A, auquel on ajoute encore les ornements suivants :

Pour un sommet correspondant à un indice i imaginaire, on note en indice l'ensemble N_i, s'il n'est pas réduit à $\{1\}$.

3) L'hypothèse $N_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$ peut être remplaçée dans ce n° 4, par une hypothèse un peu moins forte qui est $N_i(2a_{ji}/a_{jj}) \subset \mathbb{Z}$ néanmoins elle est nécessaire dans le n° 5 (à partir de 5.3), c'est à dire pour l'existence du système de racines.

4) A partir des propriétés (SR1b), (SR2b), (SR5b), il est aisé de voir que si un tel système existe, il est inclus dans $\pm\bigoplus_{i\in I} M_i\alpha_i$. De plus $M_i \setminus \{0\}$ admet la même borne inférieure que N_i, est engendré par $N_{i,ind}$ pour l'addition. Et il est clair enfin que $\bigoplus_{i\in I} \pm M_i\alpha_i$ est stable sous l'action de W (si $j \in I_{\rm re}$, $M_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$).

Démonstration.

En effet, grâce à (SR1b), et (SR5b), si α est dans $Q_{\mathbb{Q}}$ et dans le système de racines à base libre, il existe une suite finie $\{i_j\}_{j\leq n}$, $(n \in \mathbb{N})$ d'éléments de I, telle que : pour tout $k \leq n$, $\alpha - n_{i_1}\alpha_{i_1} .. - n_{i_k}\alpha_{i_k}$ est encore dans $Q_{\mathbb{Q}}$ est dans le système de racines et telle que $\alpha - n_{i_1}\alpha_{i_1} .. - n_{i_k}\alpha_{i_n}$ est proportionnel à une racine de la base. D'où le résultat.

5) L'hypothèse $N_j a_{ij} \subset \mathbb{Z}$ pour $i \in I_{\text{re}}$, et la remarque précédente assurent que pour tout $\alpha \in \Delta, <\alpha, \alpha_i^{\vee}> \in \mathbb{Z}$, $\forall i \in I_{\text{re}}$, ainsi $r_i(\alpha) \in \alpha + \mathbb{Z}\alpha_i$ et l'ensemble décrit en (SR3b) qui est appelé la "α_i-chaîne" de α à $r_i(\alpha)$ contient $r_i(\alpha)$, de plus il coïncide avec la α_i-chaîne de $r_i(\alpha)$ à α.

6) Sous l'hypothèse (SR1b); (SR3b) est équivalente à la condition:

(SR3) (également appelée *condition de chaînes réelles*) (cf 2.3.1)
$\forall i \in I_{\text{re}}$, $\forall \alpha \in \Delta_+ \backslash \mathbb{N}\alpha_i$ alors $\{\alpha+k\alpha_i \,/\, k \in \mathbb{Z}\} \cap \Delta = \{\alpha - p\alpha_i, ..., \alpha+q\alpha_i\} \subset Q_+$
où p et q sont dans $\mathbb{N}$ et $p - q = <\alpha, \alpha_i^{\vee}>$.

Démonstration.

L'implication (SR3) $\Longrightarrow$ (SR3b) est évidente. Pour montrer la réciproque, considérons l'ensemble S tel que $\{\alpha+k\alpha_i \,/\, k \in \mathbb{Z}\} \cap \Delta = \{\alpha+k\alpha_i, k \in S\}$. Par (SR1b), il est clair que cette intersection étant nécessairement incluse dans $Q_{\mathbb{Q},+}$, S est un ensemble minoré de $\mathbb{Z}$ donc S admet un plus petit élément noté $-p$. On a donc $\alpha - p\alpha_i \in \Delta$ mais alors (SR3b) implique $r_i(\alpha + p\alpha_i) = \alpha + (<\alpha, \alpha_i^{\vee}> + p)\alpha_i \in \Delta$ et $\{-p, -p+1, ..., p - <\alpha, \alpha_i^{\vee}>\} \subset S$ car $<\alpha, \alpha_i^{\vee}> \in \mathbb{Z}$, cf remarque 5).

Si il existe un élément $q > p - <\alpha, \alpha_i^{\vee}>$ dans S, l'image par r_i de $\alpha + q\alpha_i$ est également dans Δ, donc, $\alpha - (<\alpha, \alpha_i^{\vee}> + q)\alpha_i \in \Delta = \Delta_+ \sqcup \Delta_-$, ce qui implique $-(<\alpha, \alpha_i^{\vee}> + q) \in S$, avec $-(<\alpha, \alpha_i^{\vee}> + q) < -p$, et donc contredit la caractérisation de p.

On obtient alors aisément tous les résultats de (SR3b).

7) Si $i \in I_{\text{im}}$, $<\alpha_i, \alpha_i^{\vee}> \leq 0$ donc si $\alpha \in \Delta_+$ on a $<\alpha, \alpha_i^{\vee}> \leq 0$. Ainsi $<\alpha, \alpha_i^{\vee}> < 0 \iff \exists n_i \in N_{i,\text{ind}}; \alpha + n_i\alpha_i \in \Delta_+$ et la seconde assertion de (SR4b) est une équivalence.

8) On verra (en 5.2.3 et 5.5.1) que tout $\alpha \in \Delta$ a un support S_α connexe. L'hypothèse $<\alpha, \alpha_i^{\vee}> = 0$ équivaut donc à $S_\alpha \cup \{i\}$ disconnexe et implique donc $\alpha + n_i\alpha_i \notin \Delta_+$, $\forall n_i \in M_i$.

9) On dira toujours que α_i est une "racine simple" cependant lorsque N_i n'est pas inclus dans $[1, \infty[$, α_i n'est pas bien déterminée par la demi-droite $\mathbb{Q}_+\alpha_i$.

10) On notera enfin qu'il sera possible de considérer dans une orbite sous W, l'élément de plus petite hauteur puisque si $\alpha \in \oplus_{i\in I} M_i\alpha_i$, pour tout w dans le groupe de Weyl, $w(\alpha) - \alpha$ est dans $Q(I_{\text{re}})$.

11) Il serait possible dans ces définitions et les résultats qui vont suivre de remplacer $\mathbb{Q}$ par un corps ordonné archimédien K_2 contenu dans un même corps ordonné que K_1.

Motivation de ces définitions

D'après 2.3.1, le système de racines à base libre d'une algèbre de Kac-Moody-Borcherds est du type indiqué avec $N_i = \{1\}$ pour tout i. Dans [B3R], on a rencontré de tels systèmes de racines avec $N_i = \mathbb{N}^*$ pour $i \in I_{\mathrm{im}}$. Dans [B; A 2.7] et [B-R], on trouve des systèmes avec $I = I_0$ réduit à un élément et l'ensemble correspondant $N_i = \{n \in \mathbb{N} / n$ non multiple de $s\}$ pour un certain entier s.

La définition précédente est donc une généralisation naturelle. On verra d'ailleurs en 5.5.3 que beaucoup de ces systèmes de racines sont des sytèmes Ω associés à une algèbre de Kac-Moody-Borcherds.

En ce qui concerne N_i :

- les raisonnements par récurrence sur la hauteur des racines nécessitent que 0 ne soit pas adhérent à N_i, on a donc supposé par normalisation que $1 \in N_i$ et $N_i \subset [3/4, +\infty[$.

- On aurait pu imposer : "N_i contient sa borne inférieure (dans $\mathbb{R}$)", ou "N_i n'a pas de points d'acccumulation dans $\mathbb{R}$" ou même "N_i est à dénominateurs bornés" (c'est toujours le cas s'il existe un $j \in I_{\mathrm{re}}$ tel que $a_{ji} \neq 0$ et c'est vérifié dans la plupart des applications), cela aurait eu l'avantage que α_i soit bien déterminé pour tout i. Malheureusement cela aurait compliqué les théorèmes de passage au quotient et aux sous-systèmes que l'on démontrera.

4.2. Résultat d'unicité

Théorème 4.2.1.

Sous les hypothèses précédentes, si, pour une famille de $\{N_i\}_{i \in I_{\mathrm{im}}}$ donnée, il existe un système de racines à base libre alors il est unique. De plus, lorsqu'un tel système Δ existe, il est le plus petit sous-ensemble Ω de $Q_{\mathbb{Q}}$ qui vérifie (SR1b), (SR2b), (SR3b) et (SR4b).

N.B : S'il existe ce système est noté $\Delta(A, \{N_i\}_{i \in I_{\mathrm{im}}})$.

Démonstration.

Considérons l'ensemble $\mathfrak{F}$ des sous-ensembles Γ de Q qui vérifient simultanément (SR1b), (SR2b), (SR3b), (SR4b). On note Ω l'intersection de tous les éléments de $\mathfrak{F}$. L'hypothèse d'existence d'un système de racines donnée dans ce théorème implique $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Montrons que $\Omega \in \mathfrak{F}$.

Ω vérifie (SR1b) : si $\alpha \in \Omega$ alors $\alpha \in \Gamma$, pour tous les $\Gamma \in \mathfrak{F}$ sous-ensembles de $Q_{\mathbb{Q}}$ qui vérifient tous (SR1b), par suite, $-\alpha \in \Gamma$ pour tout $\Gamma \in \mathfrak{F}$ donc $-\alpha \in \Omega$, le reste vient de même de façon évidente.

Ω vérifie (SR2b) : $N_i\alpha_i$ est l'intersection de Γ et de $\mathbb{Q}_+\alpha_i$, pour tous les éléments de $\mathfrak{F}$ donc $\Omega \cap \mathbb{Q}_+\alpha_i = N_i\alpha_i$.

Ω vérifie (SR3b) : Tous les Γ vérifient (SR3b), donc tous les éléments de $\mathfrak{F}$ contiennent la α_i-chaîne liant α à $r_i(\alpha)$ si α n'est pas proportionnelle à α_i. Le résultat est donc bien vérifié dans Ω.

Ω vérifie (SR4b) : Si $i \in I_{\text{im}}$ et α dans Ω_+ non proportionnelle à α_i, dans chaque Γ de $\mathfrak{F}$, on a

$$< \alpha, \alpha_i^{\vee} > < 0 \Longrightarrow \alpha + M_i\alpha_i \subset \Gamma_+$$

$$< \alpha, \alpha_i^{\vee} > = 0 \Longrightarrow \alpha + n_i\alpha_i \notin \Gamma_+ \quad \forall n_i \in N_{i\,\text{ind}}$$

et ceci pour tout Γ dans $\mathfrak{F}$. Par suite;

$$< \alpha, \alpha_i^{\vee} > < 0 \Longrightarrow \alpha + M_i\alpha_i \subset \Omega_+;$$

$$< \alpha, \alpha_i^{\vee} > = 0 \Longrightarrow \alpha + n_i\alpha_i \notin \Omega_+ \quad \forall n_i \in N_{i\,\text{ind}} \;;$$

Il apparait donc que $\Omega \in \mathfrak{F}$.

Supposons à présent l'existence d'un système Δ vérifiant de plus (SR5b).
Comme Δ vérifie les 4 premières propriétés donc est un élément de $\mathfrak{F}$, il est clair que $\Omega \subset \Delta$. Montrons l'inclusion contraire.
On considère $\mathfrak{F}'$ l'ensemble des parties de $Q_{\mathbb{Q}}$ qui vérifient les cinq propriétés du théorème (par hypothèse, cet ensemble n'est pas vide). Il est clair que $\Omega \subset \Gamma$ pour tout $\Gamma \in \mathfrak{F}'$.

Montrons qu'en réalité $\Omega = \Gamma$ pour tout Γ dans $\mathfrak{F}'$, ce qui établira le résultat cherché.

Supposons au contraire qu'il existe $\Delta \in \mathfrak{F}'$, qui ne soit pas inclus dans Ω. Par (SR1b), qui est vérifié par les deux ensembles, il existe un élément β de Δ_+ qui n'est pas dans Ω_+. L'ensemble des valeurs de la hauteur sur les éléments de $\Delta_+ \setminus \Omega_+$ admet une borne inférieure h_0 dans $\mathbb{R}$. Soit alors un élément α de $\Delta_+ \setminus \Omega_+$ tel que $h(\alpha) - h_0 < 1/2$. (la hauteur étant comme précédemment la somme des coefficients de α dans la base des α_i).

Par hypothèse, Δ vérifie (SR5b), par suite il existe $i \in I$ et $n_i \in N_{i,ind}$ tel que $\alpha - n_i\alpha_i \in \Delta_+$. Le coefficient de α suivant α_i est nécessairement strictement positif et α n'étant pas proportionnel à α_i. De plus, il en est de même de $\alpha - n_i\alpha_i$, cet élément est forcément (par minimalité de α) dans Ω puisque $n_i \geq 3/4$, mais on sait que Ω vérifie les quatre premières propriétés du théorème, en conséquence :

a) Si $i \in I_{\text{im}}$.

a.1) Si $< \alpha - n_i\alpha_i, \alpha_i^{\vee} > < 0$ alors, par (SR4b) dans Ω, $\alpha - n_i\alpha_i + n_i\alpha_i = \alpha \in \Omega$

a.2) Si $< \alpha - n_i\alpha_i, \alpha_i^{\vee} > \geq 0$ (donc est nul puisque $\alpha - n_i\alpha_i \in \Delta_+$) alors, par (SR4b) dans Δ on a $\alpha - n_i\alpha_i + n_i\alpha_i \notin \Delta$.

Dans les deux cas, on a une contradiction avec l'hypothèse $\alpha \in \Delta \setminus \Omega$.

b) Si $i \in I_{re}$. Grâce à (SR3b), la α_i-chaîne liant $\alpha - \alpha_i$ à son image sous r_i est incluse dans les deux systèmes. Notre hypothèse $\alpha \notin \Omega$ implique donc $< \alpha - \alpha_i, \alpha_i^\vee > \geq 0$. Mais alors $r_i(\alpha) \in \Delta_+$ et est de hauteur strictement inférieure à α puisque $r_i(\alpha) = \alpha - (< \alpha - \alpha_i, \alpha_i^\vee > + < \alpha_i, \alpha_i^\vee >)\alpha_i = \alpha - (< \alpha - \alpha_i, \alpha_i^\vee > +2)\alpha_i$ d'où une contradiction avec la caractérisation de α puisque par (SR3b) dans Ω, $r_i(\alpha)$ n'est pas non plus un élément de Ω.

Par suite, un tel élément α ne peut exister et donc $\Delta = \Omega$.

□

Remarque :

Si un ensemble Δ' vérifie les mêmes hypothèses que ci-dessus en remplaçant toutefois dans (SR4b) et (SR5b) $N_{i,\text{ind}}$ pour $i \in I_{\text{im}}$, par un sous-ensemble S_i non vide de M_i, alors la démonstration ci-dessus montre encore que Δ' est égal à Ω. D'ailleurs le Δ que l'on va construire vérifie cette hypothèse (SR4b) modifiée (cf 4.1 Rq 8 ou 5.4.1).

Théorème 4.2.2.

Si pour tout i dans I, on a $N_i \subset \mathbb{N}$, et si on suppose encore l'existence du système de racines à base libre, il est inclus dans tous les sous-ensembles de Q contenant Π et qui vérifient (SR1) (dont l'énoncé donné en 2.3.1 est identique à (SR1b) mais dans Q), (SR2b), (SR3b), (SR4b). (c'est donc le plus petit d'entre eux.)

Remarque Si $N_i \subset \mathbb{N}$ on a donc $N_{i,\text{ind}} = \{1\}$ et $M_i = \mathbb{N}$ et ainsi les hypothèses (SR4) de 2.3.1 et (SR4b) (resp. (SR5) de 2.3.1 et (SR5b)) sont équivalentes.

Démonstration.

On sait déjà que sous les hypothèses de ce théorème, le système est inclus dans Q (voir Rq 4. n° 4.1). La démonstration est alors essentiellement la même que celle du théorème précédent.

On considère cette fois $\mathfrak{F}$ l'ensemble des sous-ensembles Γ de Q qui vérifient simultanément (SR1), (SR2b), (SR3b), (SR4b). On note encore Ω l'intersection de tous les éléments de $\mathfrak{F}$ (toujours non vide par l'hypothèse).
On a de même $\Omega \in \mathfrak{F}$, et si $\mathfrak{F}'$ désigne à présent l'ensemble des parties de Q qui vérifient les cinq premières propriétés du théorème (par hypothèse, cet ensemble n'est pas vide). Il est clair que $\Omega \subset \Gamma$ pour tout $\Gamma \in \mathfrak{F}'$.

L'inclusion contraire se démontre comme précédemment.

□

Corollaire 4.2.3.

Si $\Delta(A, \{N_i\}_{i\in I_{\mathrm{im}}})$ *existe, alors pour toute partie* J *de* I *le système à base libre* $\Delta(A(J), \{N_i\}_{i\in I_{\mathrm{im}}\cap J})$ *existe également, plus précisément :*

$$\Delta(A(J), \{N_i\}_{i\in I_{\mathrm{im}}\cap J}) = \Delta(A, \{N_i\}_{i\in I_{\mathrm{im}}}) \cap Q_{\mathbb{Q}}(J)$$

Démonstration.

La démonstration est facile, il suffit de vérifier que l'intersection considérée possède bien les propriétés exigées.

□

4.3. Conséquence pour le système $\widetilde{\Omega}$ de racines d'une algèbre

Dans le cas d'une algèbre de Kac-Moody-Borcherds, il est clair que $\widetilde{\Omega} \subset \widetilde{Q}$ est un système de racines à base libre au sens 4.1 de $\widetilde{Q}$ pour $N_i = \{1\}$ pour tout $i \in I$.
On déduit alors du théorème 4.2.1 le résultat suivant :

Corollaire 4.3.1.

Le système de racines $\widetilde{\Omega}$ *est entièrement caractérisé par les propriétés énoncées en 2.3.1. C'est à dire que* $\widetilde{\Omega}$ *est le système de racines à base libre au sens de 4.1 associé à la matrice de Borcherds normalisée et aux ensembles* $N_i = \{1\}$ *pour tout* $i \in I$.

□

5 Construction d'un système de racines à base libre

5.1 Premiers résultats d'inclusions

Soit A une matrice de Borcherds relative, et pour $i \in I$, N_i vérifiant les hypothèses de 4.1. Si le système de racines à base libre associé à A et aux N_i existe on le notera en général :

$$\Delta(A, \{N_i\}_{i\in I_{\mathrm{im}}}) .$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité sur les données, on simplifiera les notations en le notant Δ.

On a vu en remarque 1 de 4.1 que le système de racines est stable sous l'action du groupe de Weyl, par suite :

Proposition 5.1.1.

$$W(\Pi(I_{\mathrm{re}})) \cup 2W(\Pi(I_2)) \cup \pm W(\cup_{i \in I_{\mathrm{im}}} N_i \alpha_i) \subset \Delta \ .$$

□

On sait de plus que $\Delta \subset \pm \bigoplus_{i \in I} M_i \alpha_i$, posons alors :

$$K' = \{\, \alpha \in \oplus_{j \in I} M_j \alpha_j \setminus \sqcup_{i \in I}(\mathbb{Q}_+)\alpha_i \ ; \ S_\alpha \text{ est connexe et } < \alpha, \alpha\check{_i} > \ \leq 0 \ (\forall i \in I_{\mathrm{re}}) \,\}.$$

Dans la suite, on pose :

$$\Psi = W(\Pi(I_{\mathrm{re}})) \cup W(2\Pi(I_2)) \cup \pm W(\cup_{i \in I_{\mathrm{im}}} N_i \alpha_i) \cup \pm W(K') \ .$$

On verra (5.5.1) que Ψ est en fait le Δ cherché.

5.2 Premières propriétés de Ψ

Lemme 5.2.1.

Ψ vérifie (SR1b) et de plus

$$\Psi = W(\Pi(I_{\mathrm{re}})) \sqcup W(2\Pi(I_2)) \sqcup \pm W(\cup_{i \in I_{\mathrm{im}}} N_i \alpha_i) \sqcup \pm W(K') \ .$$

Démonstration.

$K' \sqcup (\cup_{i \in I_{\mathrm{im}}} N_i \alpha_i) \subset A_{\mathbb{Q}} = B_{\mathbb{Q}}$ d'après 3.2.4, donc $W(K' \sqcup (\cup_{i \in I_{\mathrm{im}}} N_i \alpha_i)) \subset Q_{\mathbb{Q},+}$. De plus l'élément de plus petite hauteur d'une orbite sous l'action de Wde l'ensemble $W(K' \sqcup (\cup_{i \in I_{\mathrm{im}}} N_i \alpha_i))$ est dans $A_{\mathbb{Q}}$ et est l'unique élément de $A_{\mathbb{Q}}$ de cette orbite. D'où les réunions disjointes (vu 3.3.2).

D'autre part, on sait que si $\Phi = W(\Pi(I_{\mathrm{re}}))$ alors $\Phi = \Phi_+ \sqcup \Phi_-$, avec $\Phi_- = -\Phi_+$, ceci grâce à 3.3.2 et 2.3.1. Il est clair que la propriété est encore vraie pour $W(2\Pi(I_2))$, d'où le lemme.

□

Remarque

Dans le cas où $N_i \subset \mathbb{N}$, $M_i = \mathbb{N}$ et donc (SR1) est vrai dans Q.

Lemme 5.2.2.

Ψ vérifie (SR2b), c'est à dire :

$$\Psi \cap \mathbb{Q}_+ \alpha_i = N_i \alpha_i$$

Démonstration.

Pour tout α élément de $K' \cup (\cup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i)$ on a $w(\alpha) - \alpha \in \bigoplus_{i \in I_{\text{re}}} \mathbb{Q}_+ \alpha_i$. Par suite, $W(\alpha)$ ne rencontre $\mathbb{Q}_+ \alpha_i$ que si $i \in I_{\text{im}}$ et $\alpha \in N_i \alpha_i$. L'image par W d'une racine simple réelle est dans $Q(I_{\text{re}})$ donc :

$$\text{si } i \in I_{\text{im}} \quad \Psi \cap \mathbb{Q}_+ \alpha_i = N_i \alpha_i$$

D'autre part $W(\Pi(I_{\text{re}})) \cap \mathbb{Q}_+ \alpha_i = W(\Pi(I_{\text{re}})) \cap \mathbb{N} \alpha_i$, et si, pour n entier $w(\alpha_i) = n \alpha_j$ alors $w^{-1}(\alpha_j) = \alpha_i / n \in Q$, implique $n = 1$. De même $2w(\alpha_i) = n\alpha_j$ avec $i \in I_2$ implique $n = 2$ (et même $i = j$ d'après 3.3.2).

□

Lemme 5.2.3.

Le support de chacun des éléments de Ψ (par abus provisoire de langage nous parlerons de racines) est connexe.

Démonstration.

Remarquons que :

1) si $\beta \in W(K' \cup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i) \setminus (K' \cup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i)$, il existe un indice $i \in I_{\text{re}}$ tel que $< \beta, \alpha_i^\vee > > 0$ (ceci car on a vu en 3.2.4 que l'intersection d'une orbite sous W et de $B_{\mathbb{Q}} = A_{\mathbb{Q}}$ contient au plus un élément).

2) De même, si $\alpha \in Q_+$ et $\alpha \in W(\Pi(I_{\text{re}}) \cup 2\Pi(I_2)) \setminus (\Pi(I_{\text{re}}) \cup 2\Pi(I_2))$, il est clair que $\alpha \notin A$ car son orbite n'est pas contenue dans Q_+ et donc on peut également trouver $i \in I_{\text{re}}$ tel que $< \alpha, \alpha_i^\vee > > 0$.

On démontre alors le lemme par récurrence sur la hauteur de l'élément considéré dans son orbite. Le résultat est trivialement vrai pour les éléments proportionnels aux "racines simples" et pour les éléments de K', qui sont les éléments de hauteur minimale dans leurs orbites.

Considérons alors $\beta \in \Psi_+ \setminus (K' \cup_{i \in I} N_i \alpha_i)$, d'après ce qui précède, on sait qu'il existe $i \in I_{\text{re}}$ tel que $< \beta, \alpha_i^\vee > > 0$. Par suite $r_i(\beta)$ qui est dans Ψ_+ est de hauteur inférieure strictement à celle de β. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $r_i(\beta)$ et on sait donc que son support est connexe.

On sait enfin que $< r_i(\beta), \alpha_i^\vee > < 0$ et que le support de β est la réunion du support de $r_i(\beta)$ et de $\{i\}$ qui d'après l'inégalité précédente sont liés. La connexité du support de β résulte alors trivialement de la connexité de celui de $r_i(\beta)$ et du lien entre celui-ci et i.

□

5.3. Les conditions de chaînes réelles

Proposition 5.3.1.

Pour $i \in I_{\mathrm{re}}$; *si* $\alpha \in W(K' \cup_{j\in I_{\mathrm{im}}} N_j\alpha_j) \subset Q_{\mathbb{Q},+}$,

si $< \alpha, \alpha_i^\vee > \geq 0$, $\{\alpha + k\alpha_i \,/\, - < \alpha, \alpha_i^\vee > \leq k \leq 0\} \subset \Psi$;

si $< \alpha, \alpha_i^\vee > \leq 0$, $\{\alpha + k\alpha_i \,/\, - < \alpha, \alpha_i^\vee > \geq k \geq 0\} \subset \Psi$;

Plus précisément ces chaînes sont contenues dans $W(K' \cup (\cup_{j\in I_{\mathrm{im}}} N_j\alpha_j))$.

Démonstration.

1) Démontrons tout d'abord ce résultat pour un élément de $K' \cup_{j\in I_{\mathrm{im}}} N_j\alpha_j$.

Dans ce cas $< \alpha, \alpha_i^\vee > \leq 0$, si $< \alpha, \alpha_i^\vee > = -p$, où p est un entier positif, il est clair que $\alpha + k\alpha_i$ est dans K' pour tout k entier positif strictement inférieur à la partie entière de $p/2$, notée $\mathrm{E}(p/2)$. On en déduit donc immédiatement que

$$\{\alpha + k\alpha_i\,;\ 0 \leq k \leq \mathrm{E}(p/2)\} \subset \Psi_+ \,.$$

Par stabilité de Ψ sous l'action de W, l'image de cette chaîne par r_i est aussi dans Ψ. Or, $r_i(\alpha + k\alpha_i) = \alpha + (p-k)\alpha_i$ et $\mathrm{E}(p/2) \leq p - \mathrm{E}(p/2) \leq \mathrm{E}(p/2) + 1$. On en déduit donc que la α_i-chaîne de α à $r_i(\alpha)$ est entièrement incluse dans Ψ.

2) Pour un élément α de $W(K' \cup_{j\in I_{\mathrm{im}}} N_j\alpha_j)$, montrons que :

$$\text{pour } i \in I_{\mathrm{re}}\,,\ < \alpha, \alpha_i^\vee > < 0 \Longrightarrow \alpha + \alpha_i \in W(K' \cup_{i\in I_{\mathrm{im}}} N_i\alpha_i)\,.$$

Pour cela, montrons tout d'abord que sous ces hypothèses, $W(\alpha + \alpha_i) \subset Q_{\mathbb{Q},+}$, c'est à dire :

$$(\forall w \in W)\ (\forall \alpha \in W(K' \cup_{i\in I_{\mathrm{im}}} N_i\alpha_i))\ (\forall i \in I_{\mathrm{re}})$$

$$(< \alpha, \alpha_i^\vee > < 0) \Longrightarrow (w(\alpha + \alpha_i) \in Q_{\mathbb{Q},+})\,.$$

Nous allons établir ce résultat par récurrence sur $l(w)$.

- Si $l(w) = 0$ le résultat est évident puisqu'il s'agit de la somme de termes positifs.

- Supposons le résultat vrai pour $l(w) < n$ où n est un entier strictement positif.

- Soit alors w de longueur n dans W, et considérons $w = r_{i_1}...r_{i_n}$, une décomposition réduite de w.

Supposons qu'il existe α dans $W(K' \cup_{i\in I_{\text{im}}} N_i\alpha_i)$ et $i \in I_{\text{re}}$, tels que $< \alpha, \alpha\check{_i} > < 0$ et $w(\alpha + \alpha_i) \notin Q_{\mathbb{Q},+}$.

On sait d'après ce qui précède que $w(\alpha) \in \mathbb{Q}_{\mathbb{Q},+}$ et que $w(\alpha_i) \in \Phi_+ \cup \Phi_-$.

L'hypothèse précédente implique donc que $w(\alpha_i) \in \Phi_-$.

D'après le lemme 3.2.3, il existe $k \in \{1...n\}$ tel que $r_{i_{k+1}}...r_{i_n}(\alpha_i) = \alpha_{i_k}$.

Mais $\beta = r_{i_{k+1}}...r_{i_n}(\alpha) \in W(K' \cup_{i\in I_{\text{im}}} N_i\alpha_i)$ et si $k < n$, et si on pose $r_{i_1}...r_{i_k} = w'$, alors $l(w') < l(w)$ et donc par l'hypothèse de récurrence, on doit avoir :

$$< \alpha, \alpha\check{_i} > = < \beta, \alpha_{i_k} > < 0 \Longrightarrow w'(\beta + \alpha_{i_k}) \in Q_{\mathbb{Q},+}$$

ce qui contredit notre hypothèse.

On a donc $k = n$, $\alpha_i = \alpha_{i_n}$ et

$$\begin{aligned} w(\alpha + \alpha_i) &= r_{i_1}...r_{i_n}(\alpha + \alpha_i) \\ &= r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(\alpha) + (- < \alpha, \alpha\check{_i} > -1)\, r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(\alpha_{i_n}) \end{aligned}$$

Le premier terme de la somme est positif car α a toute son orbite sous W incluse dans $Q_{\mathbb{Q},+}$.

Le coefficient du second est positif : $< \alpha, \alpha\check{_i} > \leq -1$ d'après la remarque 5 de 4.1.

Enfin le second terme est lui aussi positif par le lemme 3.2.3.

On obtient bien une contradiction avec l'hypothèse initiale et donc le résultat est encore vrai pour w de longueur n.

Montrons à présent que, toujours sous les hypothèses de cette partie 2),

$$(\forall w \in W) \quad S_{w(\alpha+\alpha_i)} \text{ est connexe .}$$

On sait déjà que les supports de $w(\alpha)$ et de $w(\alpha_i)$ le sont et sont liés puisque, par hypothèse $< w(\alpha), w(\alpha\check{_i}) > = < \alpha, \alpha\check{_i} > < 0$.

- Si ces deux éléments sont positifs, on a le résultat cherché via le lemme 3.4.2.

- Reste le cas à nouveau où $w(\alpha_i) \in Q_{\mathbb{Q},-}$, on considère alors $r_{w(\alpha_i)} = wr_iw^{-1}$, on a :

$$r_{w(\alpha_i)}(w(\alpha)) = w(\alpha) - < w(\alpha), w(\alpha\check{_i}) > w(\alpha_i) \in Q_{\mathbb{Q},+} \ .$$

car α a son orbite incluse dans $Q_{\mathbb{Q},+}$.

De plus :

$$r_{w(\alpha_i)}(w(\alpha)) = w(\alpha) - < w(\alpha), w(\alpha_i\check{}) > w(\alpha_i) \in \Psi$$

donc son support est connexe et l'égalité :

$$w(\alpha) + w(\alpha_i) = r_{w(\alpha_i)}(w(\alpha)) + (1+ < w(\alpha), w(\alpha_i\check{}) >) w(\alpha_i)$$

permet d'étabir la connexité du support de cet élément puisque : $r_{w(\alpha_i)}(w(\alpha)) \in Q_{\mathbb{Q},+}$; le scalaire $(1+ < w(\alpha), w(\alpha_i\check{} >)$ est négatif ou nul, $w(\alpha_i) \in Q_{\mathbb{Q},-}$ et que les supports sont liés puisque $< r_{w(\alpha_i)} w(\alpha), w(\alpha_i\check{}) > = < w(\alpha), -w(\alpha_i\check{}) > > 0$.

Terminons alors la démonstration du résultat intermédiaire (2).

En considérant dans $W(\alpha + \alpha_i)$, l'élément de hauteur minimale, il est clair qu'on obtient un élément de $K' \cup_{i \in I_{\text{im}}} \mathbb{Q}_+ \alpha_i$. Reste à montrer qu'il n'est pas dans $\cup_{j \in I_{\text{im}}} (\mathbb{Q}_+ \setminus N_j)\alpha_j$. Supposons $w(\alpha + \alpha_i) \in \mathbb{Q}_+ \alpha_j$ avec $j \in I_{\text{im}}$. Alors $w(\alpha + \alpha_i) = q\alpha_j$ avec $q \in \mathbb{Q}_+$ et $w \in W \Longrightarrow w(\alpha) = q\alpha_j - w(\alpha_i)$. Ce qui implique de façon évidente $w(\alpha_i) \in Q_-$ et donc (d'après 3.4.3) $< \alpha_j, w(\alpha_i\check{}) > > 0$ puisque $w(\alpha_i\check{}) \in Q_{\hat{K_1},-}$ et le support de $w(\alpha)$ est connexe.

On a alors :

$$\begin{aligned} 0 > < \alpha, \alpha_i\check{} > &= < w(\alpha), w(\alpha_i\check{}) > \\ &= < q\alpha_j, w(\alpha_i\check{}) > - < w(\alpha_i), w(\alpha_i\check{}) > \\ &= < q\alpha_j, w(\alpha_i\check{}) > -2. \end{aligned}$$

On sait de plus que $< \alpha, \alpha_i\check{} > \in \mathbb{Z}$ et $w(\alpha_i) \in Q_-$, on a donc nécessairement $< q\alpha_j, w(\alpha_i\check{}) > = 1$. Par suite, $r_{w(\alpha_i)}(q\alpha_j) = q\alpha_j - w(\alpha_i) = w(\alpha)$ ce qui implique, par unicité de l'intersection avec $A_{\mathbb{Q}}$ de l'orbite d'un élément de $A_{\mathbb{Q}}$ que $\alpha = q\alpha_j$, d'où nécessairement $q \in N_j$.

3) Montrons à présent que la α_i chaîne de α à $r_i(\alpha)$ est incluse dans $W(K' \cup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i)$. Montrons par récurrence sur la hauteur dans une orbite sous W que le résultat est vrai pour tout élément de $W(K' \cup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i)$.

Si γ est un élément de $W(K' \cup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i)$, qui est de hauteur minimale dans son orbite, le résultat est déjà démontré puisqu'il s'agit alors d'un élément de $K' \cup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i$.

Supposons le résultat vrai pour tout élément de $W(K' \cup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i)$, de hauteur $h < n$ où $n > 1$ (n n'est pas nécessairement entier).

Supposons $\gamma \in W(K' \cup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i) \setminus (K' \cup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i)$, et $h(\gamma) = n$, on a alors les trois cas possibles :

a) $< \gamma, \alpha_i\check{} > > 0, \Longrightarrow h(r_i(\gamma)) < h(\gamma)$ et le résultat est immédiat puisque par hypothèse de récurrence appliquée à $r_i(\gamma)$, on sait que la chaîne de $r_i(\gamma)$ à son image γ est dans Ψ.

b) $<\gamma,\alpha_i^\vee>=0$, le résultat est alors trivial.

c) $<\gamma,\alpha_i^\vee><0 \Longrightarrow \gamma+\alpha_i \in W(K' \cup_{i\in I_{\rm im}} N_i\alpha_i)$, d'après le résultat intermédiaire établi précédemment. De plus, $<\gamma+k\alpha_i,\alpha_i^\vee><0$ pour tout entier k compris strictement entre 0 et la partie entière de $(-<\gamma,\alpha_i^\vee>/2)$, (notée $\mathrm{E}(-<\gamma,\alpha_i^\vee>/2)$). Donc par une récurrence immédiate sur le résultat précédent :

$$\gamma+k\alpha_i \in W(K' \cup_{i\in I_{\rm im}} N_i\alpha_i) \subset \Psi, \quad (\forall k \in [0,\mathrm{E}(-<\gamma,\alpha_i^\vee>/2)[\cap \mathbb{Z}) .$$

Grâce à la stabilité de Ψ sous l'action de r_i on obtient :

$$\gamma+(-<\gamma,\alpha_i^\vee>-k)\alpha_i \in W(K' \cup_{i\in I_{\rm im}} N_i\alpha_i) \subset \Psi, \quad (\forall k \in [0,\mathrm{E}(-<\gamma,\alpha_i^\vee>/2)[\cap \mathbb{Z})$$

Et comme

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(-<\gamma,\alpha_i^\vee>/2)-1 &\leq (-<\gamma,\alpha_i^\vee>-\mathrm{E}(-<\gamma,\alpha_i^\vee>/2)-1)\\ &\leq \mathrm{E}(-<\gamma,\alpha_i^\vee>/2),\end{aligned}$$

on obtient toute la chaîne cherchée.

□

Proposition 5.3.2.

Pour $i \in I_{\rm re}$;
Si $\alpha \in W(\Pi \cup 2\Pi(I_2)) \setminus \mathbb{N}\alpha_i$,

$$\{\alpha+k\alpha_i \,/ -<\alpha,\alpha_i^\vee> \leq k \leq 0\} \subset \Psi \text{ si } <\alpha,\alpha_i^\vee> \geq 0;$$
$$\{\alpha+k\alpha_i \,/ -<\alpha,\alpha_i^\vee> \geq k \geq 0\} \subset \Psi \text{ si } <\alpha,\alpha_i^\vee> \leq 0.$$

Démonstration.

Pour des raisons de symétrie, il suffit évidemment de considérer le cas $\alpha \in Q_+$. On démontre alors à nouveau le résultat intermédiaire :

Pour $i \in I_{\rm re}$, si $\alpha \in W(\Pi\cup 2\Pi(I_2))\setminus\mathbb{N}\alpha_i$, si $\alpha+\alpha_i \notin W(\Pi\cup 2\Pi(I_2))$, et si$<\alpha,\alpha_i^\vee><0$ alors $W(\alpha+\alpha_i) \subset Q_+$ et le support de chacun de ses éléments est connexe.

1) Comme pour la proposition précédente, on établit par récurrence sur la longueur de w :

$$\forall i \in I_{\rm re},\ \forall w \in W,\ \forall \alpha \in (W(\Pi)\cap Q_+)\setminus \mathbb{N}\alpha_i \text{ tel que } \alpha+\alpha_i \notin W(\Pi \cup 2\Pi(I_2))$$

$$(<\alpha,\alpha_i^\vee><0) \Longrightarrow (w(\alpha+\alpha_i) \in Q_{\mathbb{Q},+} \text{ et } S_{w(\alpha+\alpha_i)} \text{ est connexe }) .$$

$\forall i \in I_{\mathrm{re}}$, $\forall w \in W$, $\forall \beta \in (W(2\Pi(I_2)) \cap Q_+ \setminus \mathbb{N}\alpha_i)$ tel que $\beta + \alpha_i \notin W(\Pi \cup 2\Pi(I_2))$

$$(< \beta, \alpha_i^\vee > < 0) \Longrightarrow (w(\beta + \alpha_i) \in Q_{\mathbb{Q},+} \text{ et } S_{w(\beta+\alpha_i)} \text{ est connexe }).$$

Si $l(w) = 0$, $\forall \alpha \in (W(\Pi \cup 2\Pi(I_2)) \cap Q_+) \setminus \mathbb{N}\alpha_i$, si $< \alpha, \alpha_i^\vee > < 0$, il est clair que le support est connexe et que l'élément considéré est bien dans Q_+.

Admettons les deux propriétés vraies lorsque $l(w) < n$ où n est un entier strictement positif.

Considérons alors $w \in W$ de longueur n et supposons un $i \in I_{\mathrm{re}}$ tel qu'il existe un élément α dans $(W(\Pi) \cap Q_+) \setminus \mathbb{N}\alpha_i$ (resp. $\beta \in (W(2\Pi(I_2)) \cap Q_+) \setminus \mathbb{N}\alpha_i$), tel que $< \alpha, \alpha_i^\vee > < 0$ et pour lequel $\alpha + \alpha_i$ n'est pas dans $W(\Pi \cup 2\Pi(I_2)) \cap Q_+$, et ne vérifie pas $w(\alpha + \alpha_i)$ (resp. $w(\beta + \alpha_i)$) appartient à $Q_{\mathbb{Q},+}$ et $S_{w(\alpha+\alpha_i)}$ (resp. $S_{w(\beta+\alpha_i)}$) est connexe.
On sait que pour tout w' dans W, $\{w'(\alpha), w'(\beta), w'(\alpha_i)\} \subset \Phi_+ \sqcup \Phi_-$.
Comme $< \alpha, \alpha_i^\vee > < 0$ (resp. $< \beta, \alpha_i^\vee > < 0$), il est clair que si les deux éléments de la somme sont dans la même partie de Φ le support de la somme est connexe et que si de plus ils sont tous deux dans Φ_+, on a tout le résultat cherché.

Donc l'hypothèse précédente implique que l'un au moins des deux termes est dans Φ_-. Considérons $w = r_{i_1}...r_{i_n}$, une décomposition réduite de w, il existe un plus petit indice i_k, $k \geq 1$ tel que $r_{i_k}...r_{i_n}\{\alpha, \alpha_i\} \cap \Phi_- \neq \emptyset$ (resp. $r_{i_k}...r_{i_n}\{\beta, \alpha_i\} \cap \Phi_- \neq \emptyset$).

D'après le lemme 3.2.3, il est clair que comme α (resp. β) n'est pas proportionnel à α_i les deux racines ne sont pas envoyées simultanément dans Φ_- et donc l'intersection précédente est réduite à un élément.
On est alors dans l'un des cas suivants :

a) $\alpha_{i_k} = r_{i_{k+1}}...r_{i_n}(\alpha_i)$, on pose $\alpha' = r_{i_{k+1}}...r_{i_n}(\alpha)$ (resp. $\beta' = r_{i_{k+1}}...r_{i_n}(\beta)$).
b) $\alpha_{i_k} = r_{i_{k+1}}...r_{i_n}(\alpha)$, on pose $\alpha' = r_{i_{k+1}}...r_{i_n}(\alpha_i)$.
c) $2\alpha_{i_k} = r_{i_{k+1}}...r_{i_n}(\beta)$, on pose alors $\alpha' = r_{i_{k+1}}...r_{i_n}(\alpha_i)$.

(Tous les éléments introduits ici étant positifs par hypothèse de minimalité de k.)

D'après le lemme 3.4.5, pour les éléments conjugués aux racines simples réelles on a :

$$< \alpha, \alpha_i^\vee > < 0 \Longleftrightarrow < \alpha_i, \alpha^\vee > < 0$$

Dans les deux premiers cas, on peut donc affirmer que $< \alpha', \alpha_{i_k}^\vee > < 0$ (resp. $< \beta', \alpha_{i_k}^\vee > < 0$ et que $\alpha' + \alpha_{i_k}$ (resp. $\beta' + \alpha_{i_k}$) n'est pas un élément de $(\Pi \cup 2\Pi(I_2))$.

Laissons provisoirement le cas c) de coté.

Si $k \neq n$ on a une contradiction avec l'hypothèse de récurrence puisque si $w' = r_{i_1}...r_{i_k}$ la longueur de w' est strictement inférieure à n alors que $w'(\alpha' + \alpha_{i_k})$ (resp. $w'(\beta' + \alpha_{i_k})$) ne vérifie pas $w(\alpha' + \alpha_{i_k}) \in Q_{\mathbb{Q},+}$ et $S_{w(\alpha'+\alpha_{i_k})}$ est connexe .

Donc on a $k = n$, et par hypothèse,

$$w(\alpha + \alpha_i) \notin Q_{\mathbb{Q},+} \text{ ou } S_{w(\alpha+\alpha_i)} \text{ n'est pas connexe}$$

$$(\text{resp. } w(\beta + \alpha_i) \notin Q_{\mathbb{Q},+} \text{ ou } S_{w(\beta+\alpha_i)} \text{ n'est pas connexe }) .$$

Dans le cas b)

$$\begin{aligned} r_{i_1}...r_{i_n}(\alpha + \alpha_i) &= r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(-\alpha + \alpha_i - < \alpha_i, \alpha\check{} > \alpha) \text{ puisque } \alpha_{i_n} = \alpha. \\ &= r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(\alpha + \alpha_i) - (2+ < \alpha, \alpha_i\check{} >) r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(\alpha_{i_n}) \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence $r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(\alpha+\alpha_i) \in Q_+$ est à un support connexe, d'autre part $(2+ < \alpha, \alpha_i\check{} >) \leq 0$ car $< \alpha, \alpha_i\check{} > \neq -1$ puisque $\alpha + \alpha_i \notin W(\Pi \cup 2\Pi(I_2))$. Enfin, par minimalité de la décomposition de w, on sait que $r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(\alpha_{i_n}) \in Q_+$.

Ces remarques imposent $r_{i_1}...r_{i_n}(\alpha + \alpha_i) \in Q_+$ et il apparait de même que le support de cet élément doit être connexe puisque :

$$< r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(\alpha + \alpha_i), r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(\alpha_{i_n}\check{}) > = < \alpha + \alpha_i, \alpha_{i_n}\check{} > = 2+ < \alpha_i, \alpha\check{} > \leq 0$$

car $< \alpha_i, \alpha\check{} > < 0$ (3.4.5) et est $\neq -1$ puisque $\alpha + \alpha_i \notin W(\Pi \cup 2\Pi(I_2))$. Le cas où ce facteur est nul étant trivial dans la formule précédente.

Dans le cas a)

$$\begin{aligned} r_{i_1}...r_{i_n}(\alpha + \alpha_i) &= r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(-\alpha_i + r_i(\alpha)) \text{ avec } \alpha_i = \alpha_{i_n} \\ &= r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(\alpha - < \alpha, \alpha_i\check{} > \alpha_i - \alpha_i) \\ &= r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(\alpha) + (- < \alpha, \alpha_i\check{} > -1) r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(\alpha_i) \end{aligned}$$

mais $< \alpha, \alpha_i\check{} > \leq -2$ puisque $\alpha + \alpha_i$ n'est pas dans $W(\Pi \cup 2\Pi(I_2))$ et par hypothèse de minimalité de $k = n$ on a $r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(\alpha) > 0$, et par minimalité de la décomposition de w, $r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(\alpha_i) > 0$. On en déduit que $r_{i_1}...r_{i_n}(\alpha + \alpha_i)$ est un élément positif dont le support est connexe puisque $< r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(\alpha), r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(\alpha_i\check{}) > = < \alpha, \alpha_i\check{} > < 0$. (On aurait pu dans cette démonstration du cas a) remplacer α par β.)

Dans les deux cas a) et b), on obtient une contradiction avec les hypothèses faites, ce qui établit le résultat cherché.

Supposons de plus $\alpha \in W(\Pi)$, considérons alors l'élément de $W(\alpha + \alpha_i)$, de plus petite hauteur, par ce qui précède, il est clair qu'il s'agit d'un élément de $K' \cap Q(I_{re})$ donc $\alpha + \alpha_i \in \Psi$.

Traitons alors le cas c), comme par cette hypothèse $i_k \in I_2$, on a $\alpha_{i_k}^{\check{}} = 2\alpha_{i_k}^{\hat{}}$, donc $< \alpha', \alpha_{i_k}^{\check{}} > \in -2\,\mathbb{N}^*$

De plus, α' est dans $W(\Pi)$ et on a $< \alpha', \alpha_{i_k}^{\check{}} > < 0$, donc d'après le résultat établi dans les cas a) et b) , $\beta + \alpha_{i_k}$ est dans Ψ, est positif, et a un support connexe.

- Si $\alpha' + \alpha_{i_k} \in W(K')$, $\quad < \alpha' + \alpha_{i_k}, \alpha_{i_k}^{\check{}} > = < \alpha', \alpha_{i_k}^{\check{}} > +2 \leq 0$

On a alors deux cas possibles :

1) $< \alpha' + \alpha_{i_k}, \alpha_{i_k}^{\check{}} > = 0$ mais alors $r_{i_k}(\alpha') = \alpha' + 2\alpha_{i_k}$, ce qui contredit l'hypothèse $\beta + \alpha_i \notin W(\Pi \cup 2\Pi(I_2))$.

2) $< \alpha' + \alpha_{i_k}, \alpha_{i_k}^{\check{}} > < 0$ ce qui implique $\alpha' + 2\alpha_{i_k} \in \Psi$ à cause de la proposition 5.3.1, donc $\beta + \alpha_i \in \Psi$.

- Si $\alpha' + \alpha_{i_k} \in W(\Pi \cup 2\Pi(I_2))$, on a forcément $< \alpha', \alpha_{i_k}^{\check{}} > < -2$ puisque par hypothèse $\alpha' + 2\alpha_{i_k} \notin W(\Pi \cup 2\Pi(I_2))$. Par suite $< \alpha' + \alpha_{i_k}, \alpha_{i_k}^{\check{}} > < 0$

Alors si $\alpha' + \alpha_{i_k} \in W(\Pi)$, le résutat vient par a) ou b).

Si $\alpha' + \alpha_{i_k} \in 2W(\Pi(I_2))$, pour ne pas contredire l'hypothèse de récurrence, on doit encore avoir $k = n$ donc $\beta = 2\alpha_{i_n}, \alpha' = \alpha_i$, et on a :

$$\begin{aligned}
r_{i_1}...r_{i_n}(\beta + \alpha_i) &= r_{i_1}...r_{i_n}(\alpha' + 2\alpha_{i_n}) \\
&= r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(\alpha' - 2\alpha_{i_n} - < \alpha', \alpha_{i_n}^{\check{}} > \alpha_{i_n}) \\
&= r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(\alpha' + 2\alpha_{i_n}) - (4 + < \alpha', \alpha_{i_n}^{\check{}} >) r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(\alpha_{i_n})
\end{aligned}$$

On a encore :

$r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(\alpha' + 2\alpha_{i_n}) \in Q_+$ et de support connexe par hypothèse de récurrence,

$(4 + < \alpha', \alpha_{i_n}^{\check{}} >) \leq 0$ par parité de $< \alpha', \alpha_{i_n}^{\check{}} >$,

$r_{i_1}...r_{i_{n-1}}(\alpha_{i_n}) \in Q_+$ par hypothèse de minimalité de la décomposition de w.

On démontre comme précédemment en considérant l'élément de hauteur minimale de $W(\beta + \alpha_i)$ qui est un élément de K', que $\beta + \alpha_i \in \Psi$.

2) On termine alors la démonstration de la proposition en démontrant par récurrence sur la hauteur de α que la α_i-chaîne de α à $r_i(\alpha)$ est incluse dans Ψ.

Si $\alpha = \alpha_j$, avec $j \in I_{re}$, notons $-p = < \alpha, \alpha_i^{\check{}} >$.

- Si $p = 0$ ou 1, le résultat est immédiat.

- Sinon $< \alpha, \alpha_i^{\check{}} > \leq 2$ par suite, $< \alpha + \alpha_i, \alpha_i^{\check{}} > \leq 0$.

Si $< \alpha_i, \alpha^{\check{}} > \leq -2$, l'élément $\alpha + \alpha_i$ est dans K' et, d'après la propositon 5.3.1, la α_i-chaîne de $\alpha + \alpha_i$ à son image par r_i est dans Ψ, pour obtenir le résultat cherché il suffit de remarquer qu'on peut compléter cette chaîne en celle de α à $r_i(\alpha)$ puisqu'il est évident par stabilité de Ψ sous W que $r_i(\alpha) \in \Psi$.

Si $< \alpha_i, \alpha^{\check{}} > = -1$, $\alpha + \alpha_i = r_\alpha(\alpha_i)$ est évidemment dans Ψ.

Sinon $< \alpha_i, \alpha_j^{\check{}} > = 0$, mais alors $< \alpha_j, \alpha_i^{\check{}} > = 0$ et le cas est déjà traité.

On obtient ainsi le résultat pour tout élément de Π.

Supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée pour tout élément α de hauteur strictement inférieure à n, où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

Supposons alors que α vérifie les hypothèses de la proposition et est de hauteur n.

- Si $< \alpha, \check{\alpha_i} > > 0$, on a le résultat en appliquant l'hypothèse de récurrence à $r_i(\alpha)$.
- Si $< \alpha, \check{\alpha_i} > \in \{0, -1\}$, il n'y a rien à démontrer.
- Si $< \alpha, \check{\alpha_i} > < -1$, on sait par ce qui précède que $\alpha + \alpha_i \in \Psi$.

Si $\alpha + \alpha_i \in W(K')$ le résultat est immédiat :

Grâce à la proposition 5.2.4, on a la chaîne de $\alpha + \alpha_i$ à son image et on la complète par $r_i(\alpha)$.

Si $\alpha + \alpha_i \in W(\Pi(I_{\text{re}}) \cup 2\Pi(I_2))$, $< \alpha + \alpha_i, \check{\alpha_i} > = -p$ $(p \in \mathbb{N})$.

Par une récurrence immédiate sur le résultat intermédiaire,

$(\forall k \in [0, \mathrm{E}(p/2)[\cap\mathbb{Z})$, $< \alpha + k\alpha_i, \check{\alpha_i} > < 0$

donc $\alpha + k\alpha_i \in \Psi$ $(\forall k \in [0, \mathrm{E}(p/2)] \cap \mathbb{Z})$

Toujours grâce à la stabilité de Ψ sous r_i, on complète la chaîne.

5.4. Les conditions de chaines imaginaires

Proposition 5.4.1.

Ψ vérifie (SR4b) plus précisément :

$\forall i \in I_{\text{im}}, \forall \alpha \in \Delta_+ \setminus \mathbb{Q}_+\alpha_i$,

(i) $< \alpha, \alpha\,\hat{_i} > < 0 \Longleftrightarrow \alpha + M_i\alpha_i \subset \Psi_+$;

(ii) $< \alpha, \alpha\,\hat{_i} > = 0 \Longrightarrow \alpha + n_i\alpha_i \notin \Psi_+$ $(\forall n_i \in M_i)$;

Démonstration.

(i) Considérons $i \in I_{\text{im}}$ et $\alpha \in \Psi_+ \setminus \mathbb{Q}_+$, montrons que si $< \alpha, \alpha\,\hat{_i} > < 0$ alors $\alpha + M_i\alpha_i \subset \Psi$.

L'hypothèse impose de façon évidente (par connexité de S_α et lemme 3.4.2) la connexité du support des éléments de $\alpha + M_i\alpha_i$

1) Si $\alpha \in K' \cup (\cup_{j \in I_{\text{im}} \setminus \{i\}} N_j\alpha_j)$, $\alpha + n\alpha_i \in K'$ $(\forall n \in M_i^* := M_i \setminus \{0\})$, et on a le résultat.

2) Si $\alpha = \alpha_j \in \Pi(I_{\text{re}})$ et $n_i \in N_i$,

$< \alpha_j + n_i\alpha_i, \alpha\,\hat{_i} > < 0$,

$< \alpha_j + n_i\alpha_i, \check{\alpha_j} > = 2+ < n_i\alpha_i, \check{\alpha_j} > < 2$ par “symétrie” de la matrice (axiomes B2 et B4) et est dans $\mathbb{Z}$ (car $N_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$) ;

a) Si ce dernier est négatif ou nul $\alpha_j + n_i\alpha_i \in K'$ et le résultat vient par 1)

b) S'il est égal à 1, $n_i a_{ji} = -1$ et $r_j(n_i\alpha_i) = n_i\alpha_i + \alpha_j \in \Psi$. De plus pour $n_i' \in M_i^*$, on a $< \alpha_j + (n_i + n_i')\alpha_i, \alpha\,\hat{_i} > \leq 0$ et $< \alpha_j + (n_i + n_i')\alpha_i, \check{\alpha_j} > \leq 0$.

Donc $\alpha_j + (n_i + n'_i)\alpha_i \in K'$ d'où résultat .

3) Montrons à présent que si $\alpha \in W(K' \cup (\cup_{j\in I_{\text{im}}} N_j\alpha_j)) \setminus \mathbb{Q}_+\alpha_i$;

$$(<\alpha, \alpha\check{}_i> < 0) \Longrightarrow (\alpha + n_i\alpha_i \in W(K')) \quad (\forall n_i \in M_i^*)$$

On sait en effet que pour tout élement $w \in W$, $w(n_i\alpha_i)$ et $w(\alpha)$ sont dans $\bigoplus_{i\in I} M_i\alpha_i$ et que le support de $w(n_i\alpha_i) + w(\alpha)$ est connexe. Considérons l'élément de hauteur minimale de $W(\alpha + n_i\alpha_i)$, il est clair qu'il s'agit d'un élément de $K' \cup (\cup_{j\in I_{\text{im}}} \mathbb{Q}_+\alpha_j)$.

Supposons $\alpha + n_i\alpha_i = w(k\alpha_j), k \in \mathbb{Q}_+$ et $j \in I_{\text{im}}$ alors il est clair que nécessairement $i = j$. Par suite $\alpha = w(k\alpha_i) - n_i\alpha_i = (k - n_i)\alpha_i + v$ où $v \in \sum_{j\in I_{\text{re}}} \mathbb{Q}_+\alpha_j$. L'élément de $K' \cup (\cup_{j\in I_{\text{im}}} N_j\alpha_j)$, β auquel α est conjugué est donc dans $\mathbb{Q}_+\alpha_i \oplus \sum_{j\in I_{\text{re}}} \mathbb{Q}_+\alpha_j$, mais alors si $\alpha := w'(\beta)$, $w^{-1}(n_i\alpha_i) + w^{-1}w'(\beta) = k\alpha_i$ impose que les deux termes du membre de gauche qui sont positifs soient proportionnels à α_i : $w^{-1}(n_i\alpha_i) = \mu\alpha_i$ et $w^{-1}w'(\beta) = \nu\alpha_i$ avec μ et ν dans $\mathbb{Q}_+^*$. Alors $w'(\beta) = \nu w(\alpha_i) = (\nu/\mu)n_i\alpha_i \in \mathbb{Q}_+\alpha_i$; ce qui est exclus par hypothèse sur β. Ceci permet d'obtenir 3).

4) Si $\alpha = 2\alpha_j$ avec $j \in I_2$ et $n_i \in N_i$, on sait que $< n_i\alpha_i, \alpha\check{}_j > < 0$ par les axiomes B2 et B4 sur la matrice et qu'il est pair car $j \in I_2$ et $N_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$.
$< \alpha_j + n_i\alpha_i, \alpha\check{}_j > = 2+ < n_i\alpha_i, \alpha\check{}_j > \leq 0$, on est dans le cas a) de 2) donc $n_i\alpha_i + \alpha_j \in K'$

a) Si $< n_i\alpha_i, \alpha\check{}_j > \leq -4 \quad 2\alpha_j + n_i\alpha_i \in K'$ et on a le résultat grâce au cas 1).

b) Si $< n_i\alpha_i, \alpha\check{}_j > = -2$ alors $n_i a_{ji} = -1$ et $r_j(n_i\alpha_i) = n_i\alpha_i + 2\alpha_j \in W(\Pi(I_{\text{im}}))$ de plus pour $n'_i \in M_i^*, < (n_i + n'_i)\alpha_i + 2\alpha_j, \alpha\check{}_j > \leq 0$, donc $(n_i + n'_i)\alpha_i + 2\alpha_j \in K'$ d'où le résultat.

5) α) $\forall \beta \in W(K' \cup (\cup_{j\in I_{\text{im}}} N_j\alpha_j)) \setminus \mathbb{Q}_+^*\alpha_i$ on a d'après 3)

$$< \beta, \alpha\check{}_i > < 0 \Longrightarrow \beta + M_i\alpha_i \subset \Psi \ .$$

β) Si $\beta \in W(\Pi(I_{\text{re}}))$ et $< \beta, \alpha\check{}_i > < 0$, on sait (3.4.2) que :

$$< \beta, \alpha\check{}_i > < 0 \Longrightarrow < \alpha_i, \beta\check{} > < 0$$

et pour tout $n_i \in N_i$, $< n_i\alpha_i, \beta\check{} > \in \mathbb{Z}$, de plus par la proposition 5.3.1,

$$\{n_i\alpha_i + k\beta \ , k \in \mathbb{Z} \cap [0, - < n_i\alpha_i, \beta\check{} >]\} \subset \Psi \ .$$

γ) Si $\beta \in W(2\Pi(I_2))$ et $< \beta, \alpha\check{}_i > < 0$

$$< \beta, \alpha\check{}_i > < 0 \Longrightarrow < n_i\alpha_i, (\beta/2)\check{} > \in -2\mathbb{N}$$

Dans les deux cas on a ainsi $\beta + n_i\alpha_i \in \Psi$, pour $n_i \in N_i$.
De plus, il est clair que $n_i\alpha_i + \beta$ ne peut appartenir qu'à $W(K' \cup (\cup_{j\in I_{\text{im}}} N_j\alpha_j))$ car son support contient un élément imaginaire et le résultat cherché vient par le cas α).

(ii) Montrons à présent que si $i \in I_{\text{im}}$ et $n_i \in M_i^*$:

$$\alpha \in \Psi_+ \setminus \mathbb{Q}_+\alpha_i \quad \alpha + n_i\alpha_i \in \Psi \text{ alors } < \alpha, \alpha\hat{}_i > < 0 .$$

Ceci est évident puisqu'on a montré la connexité du support de $\alpha + n_i\alpha_i$ sous ces hypothèses et que de plus la racine simple considérée est imaginaire. (Il est nécessaire de supposer $\alpha \notin \mathbb{Q}_+\alpha_i$ pour le cas $i \in I_0$).

Ce qui achève la démonstration de la proposition.

□

5.5. Existence des systèmes de racines

Théorème 5.5.1.

Si A est une matrice de Borcherds relative et si les ensembles N_i vérifient les hypothèses de 4.1. Le système de racines à base libre associé existe et on a encore :

$$\Delta(A, \{N_i\}_{i\in I}) = \Psi = W(\Pi(I_{\text{re}})) \sqcup W(2\Pi(I_2)) \sqcup \pm W(\cup_{i\in I_{\text{im}}} N_i\alpha_i) \sqcup W(K') .$$

Démonstration.

Il reste à montrer que Ψ vérifie (SR5b). Pour un élément de Δ non proportionnel à une racine simple et qui n'est pas dans K' le résultat est clair grâce à la condition sur les chaines réelles; pour un élément de K', il résulte de la proposition (2.3.2) qui s'applique à Ψ, puisque (SR3) et (SR3b) sont équivalents sous l'hypothèse (SR1b) (cf 4.1) et puisque par ailleurs (C') résulte de (SR4b). On en déduit donc que pour tout élément α de K', il existe $i \in I$ et $n_i \in N_{i\,\text{ind}}$ tel que $\alpha - n_i\alpha_i \in \Psi$.

□

Corollaire 5.5.2.

Soit A une matrice de Borcherds relative, I son ensemble d'indices et $I := I_{\text{re}} \cup I_{\text{im}}$ la partition qui lui est associée par 1.1. A la matrice A, on associe la matrice de Kac-Moody relative C définie par :

$$(\forall i \in I_{\mathrm{re}})\ (\forall j \in I)\ c_{ij} = a_{ij}$$
$$(\forall i \in I_{\mathrm{im}})\ (\forall j \in I)\ c_{ij} = 0 \Longleftrightarrow a_{ij} = 0$$
$$c_{ij} = -1 \quad \text{sinon}$$

Alors, si $\{N_i\}_{i \in I_{\mathrm{im}}}$ sont des parties de $\mathbb{Q}$ vérifiant les hypothèses habituelles, dans $Q_{\mathbb{Q}} = \oplus_{i \in I} \mathbb{Q}\alpha_i$, les sytèmes de racines à bases libres $\Delta(A, \{N_i\}_{i \in I_{\mathrm{im}}})$ et $\Delta(C, \{N_i\}_{i \in I_{\mathrm{im}}})$ sont égaux.

Démonstration.

D'après les structures des deux systèmes de racines, il suffit évidemment de démontrer que les deux ensembles K correspondant à chacune des matrices (disons K_A et K_C) sont égaux. En effet, vu la construction de la matrice C à partir de A, la matrice de Kac-Moody associée à A ($K(A)$ cf 3.2) coïncide avec celle associée à C, par suite les groupes de Weyl associés sont les mêmes.

En ce qui concerne les ensembles K_A et K_C :

la condition de connexité du support est la même dans les deux cas (puisque aux coefficients près les diagrammes de Dynkin des deux matrices sont les mêmes),

les conditions $< \alpha, \alpha_i^\vee > \leq 0$ coïncident elles aussi puisque les lignes correspondant à un indice réel sont les mêmes dans les deux matrices. Ce qui établit l'égalité cherchée.

□

Exemple 5.5.3.

Soit A une matrice de Kac-Moody relative, d'ensemble d'indices I. On suppose que $I_{\mathrm{re}} = I_1$.

Ainsi pour tout $i \in I_{\mathrm{re}}$ on a $N_i = \{1\}$ et on pose dans ce cas $S_i = N_i$;

Pour $i \in I_0$, on prend $N_i = S_i$ quelconque vérifiant les hypothèses de 4.1;

Pour $i \in I_-$, on prend une partie S_i de $\mathbb{Q}_+^*$ de plus petit élément 1 ou ne contenant pas de plus petit élément mais incluse dans $[3/4, +\infty[$ et contenant 1 (et vérifiant $S_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$ pour $j \in I_{\mathrm{re}}$). On définit alors N_i comme l'ensemble réunion de N_i et des éléments de $\mathbb{Q}_+^*$ de la forme $n = \sum_{j=1}^{h} n_j s_j$ avec $h \geq 2$, $n_j \in \mathbb{N}^*$ et $s_j \in S_j$, les s_j étant tous différents.

On prend alors comme nouvel ensemble d'indices $S = \sqcup_{i \in I} \{i\} \times S_i$, et la matrice $B = (b_{h,l})$ telle que si $h = (i, s_i)$ et $l = (j, s_j)$ $b_{h,l} = s_j a_{ij}$

Si $(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}^\vee, \Pi, \Pi^\vee)$ est une réalisation libre de A, on en fait une réalisation de B en posant $\alpha_h = s_i \alpha_i$ et $\alpha_{\hat{h}} = \alpha_{\hat{i}}$ si $h = (i, s_i)$. Alors le système de racines non libre Ω de l'algèbre de Borcherds correspondante est le système à base libre $\Delta(A, \{N_i\})$.

En effet, on peut considérer le système à base libre $\widetilde{\Omega}$ de l'algèbre de Borcherds puis son image dans $\mathfrak{h}^{\hat{}}$ par l'application additive qui envoie α_h sur α_h (où h parcourt S) et qui est équivariante pour l'action de W. On sait que $\widetilde{\Omega} = W(\pm \cup_{h \in S} \alpha_h) \cup W(\pm \widetilde{K})$ où $\widetilde{K}$ est l'ensemble des éléments α de $\sum_{h \in S} \mathbb{N}\alpha_h$, qui ont un support connexe non réduit à un élément et tels que $< \alpha, \alpha\,\hat{h} > < 0$ pour tout h. Or d'après l'hypothèse sur la réalisation, l'image de $\widetilde{K}$ est exactement la réunion de l'ensemble des éléments α de $\sum_{h \in S} \mathbb{N}\alpha_h$, qui ont un support connexe non réduit à un élément et tels que $< \alpha, \alpha\,\hat{h} > < 0$ pour tout h et des $N_i\alpha_i$, l'image de la base est $\cup_{i \in I} S_i \alpha_i$. Par équivariance de l'application de projection, on obtient l'égalité cherchée.

Remarque 5.5.4.

Supposons la matrice de Borcherds relative A à coefficients dans $\mathbb{Q}$ d'ordre $|I| \geq 2$ fini et indécomposable (ainsi que des ensembles N_i quelconques (contenant 1) pour $i \in I_{\mathrm{im}}$). Alors le vecteur u intervenant dans les trois types de la classification de 1.2 est à coefficients dans $\mathbb{Q}_+^*$ et on peut supposer que ses coefficients sont dans $\mathbb{N}^*$ et premiers entre eux.

On note $u = (u_i)_{i \in I}$ et $\delta = \sum_{i \in I} u_i \alpha_i$, alors

- Pour le cas indéfini, δ est une racine imaginaire positive de support I et contenue dans K', plus précisément $< \delta, \alpha\,\hat{i} > < 0$ pour tout $i \in I$.

- Pour le cas affine, δ est une racine imaginaire positive (la plus petite) de support I et contenue dans K', plus précisément $< \delta, \alpha\,\hat{i} >= 0$ pour tout $i \in I$.

- Pour le cas fini, sauf dans le cas A_2, δ n'est pas une racine, la plus grande racine μ d'un système de type fini vérifiant seulement $A\mu \geq 0$ et $A\mu \neq 0$.

Remarque :

Cependant l'existence de μ vérifiant ces deux conditions suffit à caractériser le cas du type fini.

III

Coracines des racines imaginaires dans le cas libre

Dans ce chapitre, on suppose donnés A une matrice de Borcherds relative indexée par I ainsi que, pour $i \in I_{\mathrm{im}}$ des sous-ensembles N_i de $\mathbb{Q}_+$ vérifiant les hypothèses données en 4.1. On considère le système de racines à base libre associé $\Delta(A, \{N_i\}_{i \in I})$ qu'on notera Δ.

6. Notion de cônes radiciels duaux

6.1. Définitions et résultats utiles

Les éléments de Π seront, comme toujours, appelés *racines simples*, les éléments de $W(\Pi(I_{\mathrm{re}} \cap 2\Pi(I_2)))$, *racines réelles*, les autres éléments de Δ, *racines imaginaires.* Dans la suite, pour alléger les notations on pose :

$$K_c = K' \cup (\cup_{i \in I_{\mathrm{im}}} N_i \alpha_i)$$

Parties de I

Si J est une partie de I et si le type de $A(J)$ est défini (ce qui n'est pas toujours vrai dans le cas décomposable), celui-ci sera également *le type de* J.

Il est clair qu'un sous ensemble connexe J de I contenant un $i \in I_{\mathrm{im}}$ est de type indéfini ou éventuellement affine imaginaire si J est réduit à un élément de I_0.

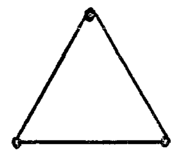
De plus deux parties connexes de I seront dites *liées* si leur réunion est connexe.

Racines et supports

Une racine réelle n'a pas nécessairement un support de type fini.

Exemple :

Dans le cas $A_3^{(1)}$, de diagramme de Dynkin représenté ci-contre :
La racine $\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = r_3(r_2(\alpha_1))$ est une racine réelle de support de type affine.



(De même une racine conjuguée à une racine de type affine n'a pas nécessairement un support de type affine.)

Par contre, il résultera de 6.2.1 qu'une racine imaginaire ne peut avoir qu'un support de type indéfini ou affine. En effet, si $\alpha \in \Delta_{\mathrm{im}+}$, elle est conjuguée sous l'action de W à un élément de K_c, β, et le support de β est inclus dans celui de α.

Pour une racine α on notera FS_α *la fermeture du support* c'est à dire l'ensemble des $i \in I$ qui sont dans le support ou qui lui sont liés.

Parties de la base

On notera $\Pi^{\mathrm{re}}; \Pi^{\mathrm{im}}; \Pi_1; \Pi_2; \Pi_0; \Pi_-$ les intersections de Π et de $Q_{\mathbb{Q}}(I_{\mathrm{re}})$; $Q_{\mathbb{Q}}(I_{\mathrm{im}})$; $Q_{\mathbb{Q}}(I_1)$; $Q_{\mathbb{Q}}(I_2)$; $Q_{\mathbb{Q}}(I_0)$; $Q_{\mathbb{Q}}(I_-)$; elles sont indexées par I_{re}, I_{im}, I_1, I_2, I_0, I_-.

6.2. Propriétés des éléments de K_c

Proposition 6.2.1.

Soit $i \in I_{\mathrm{re}}$, $w \in W$ et $\alpha \in K_c$

$$((l(w) < l(r_iw)) \Longrightarrow (h(w(\alpha)) \leq h(r_iw(\alpha)),\ S_{w(\alpha)} \subset S_{r_iw(\alpha)})$$

$$(h(w(\alpha)) < h(r_iw(\alpha))) \Longrightarrow (l(w) < l(r_iw))$$

Sous ces hypothèses, on a $S_{w(\alpha)} \neq S_{r_iw(\alpha)}$ si et seulement si $i \notin S_{w(\alpha)}$ mais est lié à $S_{w(\alpha)}$ et alors $S_{r_iw(\alpha)} = S_{w(\alpha)} \cup \{i\}$.

Démonstration.

D'après (3.2.3), $l(r_i w) = l(w^{-1} r_i) > l(w) = l(w^{-1}) \iff w^{-1}(\alpha_i) \in \Delta_+$.
Ce qui implique $< \alpha, w^{-1}(\alpha\check{_i}) > \leq 0$ ce qui permet d'établir $h(w(\alpha)) \leq h(r_i w(\alpha))$ ainsi que l'inclusion des supports.

Si $h(w(\alpha)) < h(r_i w(\alpha))$, on a $< \alpha, w^{-1}(\alpha\check{_i}) > < 0$ donc $w^{-1}(\alpha_i) \in \Delta_+$, ce qui entraine le résultat proposé.

Sous ces hypothèses, on a $r_i w(\alpha) = w(\alpha) - < \alpha, w^{-1}(\check{\alpha_i}) > \alpha_i$, et les deux termes de cette somme sont positifs, on a donc facilement la dernière assertion.

□

Remarques :

1) On a déjà vu que si $\alpha \in K_c$, $w \in W$, on a $S_\alpha \subset S_{w(\alpha)}$. Plus précisément, il résulte de la proposition que si $w = r_{i_1} \ldots r_{i_n}$ est une décomposition réduite de w, $S_{w(\alpha)} \subset S_\alpha \cup \{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_n}\}$.

2) Il est clair à partir de ce résultat, et de 4.2.3, que si J est une partie de I alors l'ensemble des racines réelles (resp. imaginaires) de $\Delta(A(J), \{N_i\}_{i \in J \cap I_{\mathrm{im}}})$ est l'ensemble des racines réelles (resp. imaginaires) de $\Delta(A, \{N_i\}_{i \in I_{\mathrm{im}}})$ qui sont dans $Q_{\mathbb{Q}}(J)$. En effet, étant donné la structure des systèmes de racines, il suffit de vérifier que $(WK') \cap Q_{\mathbb{Q}}(J) = W(J)K'(J)$ (où $K'(J)$ est défini comme K' mais à partir des α_i pour $i \in J$). En fait, le résultat pouvait également être démontré en utilisant les résutats de Hée, qui permettent d'établir l'égalité des ensembles de racines réelles.

Proposition 6.2.2.

Soit α une racine appartenant à K_c. Si S_α désigne toujours le support de α et si on pose :

$$Z_\alpha = \{\, i \in S_\alpha \;/\; < \alpha, \alpha\check{_i} > = 0 \,\},$$

alors seuls les cas suivants sont possibles :

a) $S_\alpha = Z_\alpha$ et est de type affine, α est alors proportionnelle à la racine imaginaire positive minimale de $\Delta(A(S_\alpha))$ ou à la "racine simple" α_i si $S_\alpha = \{i\}$.

b) Z_α est une partie de I_{re} qui est de type fini (non nécessairement connexe) ou vide, donc strictement incluse dans le support.

Démonstration.

Considérons α, l'élément précité, il est clair que S_α n'est pas de type fini puisque $\Delta(S_\alpha)$ possède une racine imaginaire.
Par construction, $Z_\alpha \subset S_\alpha$.

1) Si $Z_\alpha = S_\alpha$, dans $Q(S_\alpha)$, on a :

$$\alpha \in Q(S_\alpha), \quad \alpha > 0, \qquad A(S_\alpha)\alpha = 0$$

par suite, $A(S_\alpha)$ est nécessairement de type affine et comme dans ce cas on sait que le corang de la matrice est 1, on a immédiatement le résultat annoncé. De plus il est clair que si α est un élément de K_c de support affine, on a $S_\alpha = Z_\alpha$.

2) Sinon, il existe un élément i de S_α tel que $< \alpha, \alpha\hat{_i} > < 0$, puisque α est dans K_c. Supposons alors $Z_\alpha \neq \emptyset$ (cas où il n'y a rien à montrer). On peut considérer T une composante connexe de Z_α. Par connexité de S_α, il existe $k \in T$ lié à $S_\alpha \setminus Z_\alpha$. Si $\alpha = \sum_{i \in S_\alpha} n_i \alpha_i$, on pose $\beta = \sum_{i \in T} n_i \alpha_i$, on a alors :

$$\forall i \in T \quad < \alpha, \alpha\hat{_i} >= 0 =< \alpha - \beta, \alpha\hat{_i} > + < \beta, \alpha\hat{_i} >$$

mais, $\alpha - \beta$ est un élément de $Q_{\mathbb{Q}}(S_\alpha \setminus T)$ qui est strictement positif et pour tout $t \in T$ on a évidemment $< \alpha - \beta, \alpha\hat{_t} > \leq 0$ et $< \alpha - \beta, \alpha\hat{_k} > < 0$ ce qui implique dans l'égalité ci-dessus $< \beta, \alpha\hat{_k} > > 0$ et $< \beta, \alpha\hat{_t} > \geq 0$ pour tout $t \in T$.

Par suite, dans $Q_{\mathbb{Q}}(T)$, β est un élément strictement positif et $A(T)\beta \geq 0$ et n'est pas nul. $A(T)$ est donc de type fini.

Le support de α est évidemment une partie finie de I, Z_α est bien réunion d'un nombre fini de composantes connexes de type fini.

$\square$

Définition 6.2.3.

Si S est une partie finie et connexe de I et Z une partie de S, on notera :

$$K_{(S,Z)} = \{ \alpha \in K_c \,/\, S_\alpha = S \text{ et } Z_\alpha = Z \} \ .$$

$$K\hat{}_{(S,Z)} = \{ \alpha\hat{} \in Q\hat{}_{K_1,+} \,;\, S_{\alpha\hat{}} = S \,,\, Z_{\alpha\hat{}} = Z \ \text{ et } \ < \alpha_i, \alpha\hat{} > \leq 0 \ (\forall i \in I) \} \ .$$

où $Z_{\alpha\hat{}} = \{ i \in S_{\alpha\hat{}} \ ; \ < \alpha_i, \alpha\hat{} >= 0 \}$.

$\Delta_1 = W(\Pi_1)$ est formé des *racines réelles positives non divisibles non multipliables.*

$\Delta_2 = W(\Pi_2)$ des *racines réelles non divisibles, multipliables.*

$2\Delta_2 = W(2\Pi_2)$ des *racines réelles divisibles, non multipliables.*

$\Delta_0 = W(\cup_L \pm K_{(L,L)})$ où L parcourt les parties connexes de type affine de I, est l'ensemble *des racines imaginaires affines* (au sens général) .

$\Delta_{(-)} = W(\cup_{(S,Z)} \pm K_{(S,Z)})$ où (S, Z) parcourt l'ensemble des couples tels que S est une partie de I finie et connexe et de type indéfini et Z une partie de type fini ou vide de S, l'ensemble des *racines imaginaires de type indéfini.*

D'après 6.2.2, Δ est la réunion disjointe de Δ_1, Δ_2, $2\Delta_2$, Δ_0 et $\Delta_{(-)}$; de plus, $K_{(S,Z)}$ est non vide si et seulement si on est dans l'un des cas définissant Δ_0 et $\Delta_{(-)}$.

D'après les résultats ci-dessus et 5.5.4, Δ contient une composante connexe de type indéfini ou proindéfini si et seulement $\Delta_- \neq \emptyset$.

6.3. Le cône radiciel dual associé

Dans le début de ce numéro (jusqu'en 6.3.3) on considère Z une partie de type fini (ou vide) de I.

Par hypothèse Z est de type fini et donc le groupe $W(Z)$ est fini. De plus α est fixe sous l'action de ce groupe.

Dans $Q_{\mathbb{Q}}$, on pose :

$$(\forall i \in I) \quad \alpha_i^1 = \left(\frac{1}{|W(Z)|}\right) \sum_{w\in W(Z)} w(\alpha_i)$$

Si on note $J'(i)$ la composante connexe de $Z \cup \{i\}$ contenant i, et $J(i) := J'(i) \cap Z$, alors $J(i)$ est la réunion des composantes connexes de Z liées à i, et on a :

$$\alpha_i^1 = \left(\frac{1}{|W(J(i))|}\right) \sum_{w\in W(J(i))} w(\alpha_i) \ .$$

Lemme 6.3.1.

Pour tout $i \in I$; $\alpha_i^1 \neq 0 \iff i \notin Z$

Démonstration.

Ceci est clair puisque, si $i \notin Z$, $w(\alpha_i) \in \Delta_+$ pour tout $w \in W$, et si $i \in Z$:

$$\alpha_i^1 = \left(\frac{1}{|W(Z)|}\right) \sum_{w\in W(Z)} w(\alpha_i) = \left(\frac{1}{2|W(Z)|}\right) \sum_{w\in W(Z)} (w(\alpha_i) + wr_i(\alpha_i))$$

□

Si $\alpha = \sum_{i\in S} n_i\alpha_i$ est un élément de $K_{(S,Z)}$ (où S est une partie de I contenant Z), il est fixe sous l'action de $W(Z)$ et on a :

$$\begin{aligned}\alpha = \sum_{i\in S} n_i\alpha_i &= \left(\frac{1}{|W(Z)|}\right) \sum_{i\in S} n_i\Big(\sum_{w\in W(Z)} w(\alpha_i)\Big) \\ &= \sum_{i\in S\setminus Z} n_i(\alpha_i^1)\end{aligned}$$

Dans $Q_{\hat{K_1}}$, on pose également :

$$\forall i \in S \setminus Z, \quad \tilde{\alpha_i} = \sum_{w \in W(Z)} w(\alpha\,\hat{_i})$$
$$= \Big(|W(J)| \alpha\,\hat{_i} + \sum_{w \in W(J(i))} (w(\alpha\,\hat{_i}) - \alpha\,\hat{_i}) \Big) . \frac{|W(Z)|}{|W(J(i))|}$$

(La dernière décomposition montrant que les coordonnées de $\tilde{\alpha_i}$ sont positives ou nulles).

Lemme 6.3.2.

La matrice $A^{(1)}$ dont les coefficients sont :
$< \alpha_j, \tilde{\alpha_i} > = < \alpha_j^1, \tilde{\alpha_i} > = < \alpha_j^1, \alpha\,\hat{_i} >$ pour $i, j \in I \setminus Z$, est une matrice de Vinberg. Son coefficient $< \alpha_j, \tilde{\alpha_i} >$ est entier si $i \in I_{re}$. De plus $< \alpha_i, \tilde{\alpha_i} > > 0$ (resp. $= 0$, < 0) si et seulement si $J'(i)$ est de type fini (resp. affine, indéfini).

Démonstration.

Si i et j sont tous les deux dans $I \setminus Z$ et $i \neq j$, $< \alpha_j^1, \tilde{\alpha_i} > = < \alpha_j, \tilde{\alpha_i} > \in K_{1-}$.
De plus, il est clair sur sa formule de définition que $\tilde{\alpha_i}$ est fixe sous l'action de $W(Z)$, donc, si $j \in Z$, $< \alpha_j, \tilde{\alpha_i} > = 0$.

Dans le calcul de $A^t(J'(i))\tilde{\alpha_i}$ (où A^t désigne la transposée de A) seule la coordonnée $< \alpha_i, \tilde{\alpha_i} >$ n'est pas nécessairement nulle et donc détermine le signe (au sens large) de $A^t(J'(i))\,\tilde{\alpha_i}$.

1) Si $A^t(J'(i))$ est de type fini, comme $\tilde{\alpha_i}$ est positif, et non nul on a forcément $< \alpha_i, \tilde{\alpha_i} > > 0$. (De plus, i est forcément un indice réel donc pour tout $w \in W(J(i))$, $w(\alpha\,\hat{_i})$ est à coefficients entiers, donc $< \alpha_i, \tilde{\alpha_i} > \in \mathbb{N}^*$.)

2) Si $A^t(J'(i))$ est de type affine, en considérant $\tilde{\alpha_i}$ et son opposé, on voit que nécessairement $< \alpha_i, \tilde{\alpha_i} > = 0$.

3) Si $A^t(J'(i))$ est de type indéfini, si on suppose $A^t(\{i\} \cup J)\tilde{\alpha_i} \geq 0$, on a de même une absurdité, donc $< \alpha_i, \tilde{\alpha_i} > < 0$.

Notons que de plus si $i \neq j$ pour i et j dans $S \setminus Z$,

$$\begin{aligned}
(< \alpha_j, \tilde{\alpha_i} > = 0) &\Longrightarrow ((\forall w \in W(Z)) < \alpha_j,\ w(\tilde{\alpha_i}) > = 0) \\
&\Longrightarrow ((\forall w \in W(Z))\ j \text{ n'est pas lié à } S_{w(\alpha\,\hat{_i})}) \\
&\Longrightarrow ((\forall w \in W(Z))\ j \text{ n'est pas lié à } S_{w(\alpha_i)}) \text{ (cf 3.4.2)} \\
&\Longrightarrow ((\forall w \in W(Z)) \ < \alpha_i, w^{-1}(\alpha\,\hat{_j}) > = 0) \\
&\Longrightarrow (< \alpha_i, \tilde{\alpha_j} > = 0)
\end{aligned}$$

On a ainsi bien établi que $A^{(1)}$ est une matrice de Vinberg et les dernières assertions sont déjà démontrées ou évidentes.

□

Lemme 6.3.3.

Soit S une partie finie de I contenant Z.

Si $A(S)$ est indécomposable *alors* $A^{(1)}(S \setminus Z)$ *est indécomposable;*

Si $A(S)$ est de type indéfini *alors* $A^{(1)}(S \setminus Z)$ *est de type indéfini.*

Démonstration.

1) Supposons au contraire l'existence d'une partition de $S \setminus Z = I_1 \sqcup I_2$ telle que pour tout $i \in I_1, j \in I_2$ $< \alpha_i^1, \alpha_j^{\sim} >= 0$. Par connexité de S, on peut trouver $i_1 \in I_1$, $i_2 \in I_2$, tels que dans $\{i_1\} \cup Z \cup \{i_2\}$, i_1 et i_2 soient dans une même composante connexe, plus précisément il existe une partie connexe L de Z liée à i_1 et à i_2.

Par un raisonnement par l'absurde, on voit facilement qu'il existe $w \in W(L)$ tel que le support de $w(\alpha\,\hat{}_{i_2})$ soit $L \cup \{i_2\}$ (si le support d'un élément n'est pas toute la composante connexe on trouve un indice qui est lié à ce support sans être dedans l'image par la réflexion correspondante donne un élément de support plus grand). Par suite, pour un tel w, $< \alpha_{i_1}, w(\alpha_{i_2}^{\sim}) > < 0$ ce qui contredit notre hypothèse initiale $< \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}^{\sim} >= 0$.

2) On sait par hypothèse que $A(S)$ et sa transposée sont de type indéfini, donc il existe dans $Q_{\hat{K_1}}(S)$ un vecteur strictement positif v, tel que $A^t(S)v < 0$.
Considérons alors $v^{\sim} = \sum_{w \in W(Z)} w(v)$, on a facilement :

$$v = \sum_{i \in S} n_i \alpha_i \Longrightarrow v^{\sim} = \sum_{i \in S} n_i \alpha_i^{\sim} .$$

Les n_i étant tous strictement positifs, le vecteur $v^{\sim}$est strictement positif dans $\bigoplus_{i \in S \setminus Z} K_1 \alpha_i^{\sim}$, et pour tout j dans $S \setminus Z$, $< \alpha_j, v^{\sim} > = < \alpha_j^1, v^{\sim} > =< \alpha_j^1, v > < 0$ puisque α_j^1 est un élément positif non nul de $Q_{\mathbb{Q}}(S)$. Par suite, on a montré que $A^{(1)}(S \setminus Z) v^{\sim} < 0$, ce qui prouve que cette matrice est de type indéfini.

N.B : Il est clair que de plus, si $i \in Z$, $< \alpha_i, v^{\sim} >= 0$, $v^{\sim}$est donc un élément de $K\hat{}_{(S,Z)}$ qui ne peut donc être vide.

□

Proposition 6.3.4.

Si (S, Z) est un couple de parties de I tel que : S est finie et connexe, Z est une partie de S,

$$K_{(S,Z)} \neq \emptyset \Longleftrightarrow K\hat{}_{(S,Z)} \neq \emptyset$$

Démonstration.

D'après (6.2.2), si S est de type fini le résultat est évident puisque les deux cônes sont vides. De même, on traite facilement le cas affine.

Si S est de type indéfini et $K_{(S,Z)} \neq \emptyset$, alors Z est de type fini et il est clair que dans la démonstration précédente du 2) (cf le N.B) pour tout $i \in Z$ on a $< \alpha_i, \tilde{v} > = 0$ ce qui montre que $K\hat{}_{(S,Z)}$ n'est pas vide.

La réciproque se montre de façon tout à fait analogue.

□

Corollaire 6.3.5.

Si (S, Z) est un couple de sous-ensembles de I vérifiant les hypothèses de la proposition 6.3.4,

$K_{(S,Z)} \neq \emptyset \iff (S, Z)$ vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- La partie S est de type affine et $S = Z$;
- La partie S est de type indéfini et Z est vide ou de type fini, éventuellement non connexe.

Démonstration.

L'implication $\Longrightarrow$ est claire à partir de 6.2.2.

L'implication $\Longleftarrow$ résulte de la démonstration précédente puisque l'hypothèse d'existence de l'élément v n'était basée que sur l'hypothèse "S est de type indéfini", on peut toujours à partir de v, construire $\tilde{v}$ fixe sous l'action de $W(Z)$ si Z est fini. Le cas affine se traite facilement.

6.4. Définition des cônes duaux

Proposition 6.4.1.

Si (S, Z) et (L, J) sont deux couples vérifiant les hypothèses de 6.3.4, et si w et w' sont deux éléments de W,

$$w(K_{(L,J)}) \cap w'(K_{(S,Z)}) = \emptyset, \quad w(K\hat{}_{(L,J)}) \cap w'(K\hat{}_{(S,Z)}) = \emptyset,$$

sauf si $(S, Z) = (L, J)$ et $w^{-1}w'$ fixe $K_{(L,J)}$ et $K\hat{}_{(L,J)}$.

N.B : On établit au passage le résultat intéressant suivant :

Si $\alpha\hat{} \in K\hat{}_{(S,Z)}$ et si $w \in W$ est tel que $w(\alpha\hat{}) = \alpha\hat{}$ alors $w \in W((I \setminus FS_\alpha) \cup Z_\alpha)$, ainsi que le résultat analogue pour $K_{(S,Z)}$.

Démonstration.

1) Dans la démonstration du lemme 3.4.3, on a introduit les ensembles $A\hat{}$ et $B\hat{}$; si $\alpha\hat{} \in K\hat{}_{(S,Z)}$, on a encore la caractérisation de $\alpha\hat{}$ comme unique élément de hauteur minimale de son orbite, et donc :

$$< \alpha_i, w(\alpha\hat{}) > \leq 0 \quad (\forall i \in I_{re}) \implies w(\alpha\hat{}) = \alpha\hat{}.$$

Supposons $w(K\hat{}_{(L,J)}) \cap w'(K\hat{}_{(S,Z)}) \neq \emptyset$ alors $K\hat{}_{(L,J)} \cap w^{-1}w'(K\hat{}_{(S,Z)}) \neq \emptyset$, or un élément α de cette intersection est, d'après la remarque précédente fixe par $w^{-1}w'$, donc il est clair que cela implique l'égalité des deux couples.

2) Soit $\alpha\hat{} \in K\hat{}_{(S,Z)}$ et $w \in W$ tel que $w(\alpha\hat{}) = \alpha\hat{}$. Considérons une décomposition minimale de w, $w = r_{i_1}...r_{i_n}$, on voit facilement (3.2.4) que pour tout k entre 1 et n, $r_{i_k}(\alpha) = \alpha$. Par suite, $< \alpha, \alpha\hat{}_{i_k} >= 0$ ce qui prouve que $i_k \in (I \setminus FS_\alpha) \cup Z_\alpha$et ainsi w fixe point par point $K_{(S,Z)}$ et $K\hat{}_{(S,Z)}$.
(On a évidemment le même résultat dans $Q_{\mathbb{Q}}$.)

3) Revenons à la situation du 1), alors $w^{-1}w' \in W((I \setminus FS_\alpha) \cup Z_\alpha)$, et donc fixe tout élément de $K_{(S,Z)}$.

□

Corollaire 6.4.2.

Soit $\alpha \in K_c$, si C désigne le cône $wK_{(S_\alpha,Z_\alpha)}$, alors le cône $wK\hat{}_{(S_\alpha,Z_\alpha)}$ dépend uniquement de C et non du choix de w ou de α.
Il est licite de poser : $C\hat{} = wK\hat{}_{(S_\alpha,Z_\alpha)}$ *et :*

C et $C\hat{}$ sont alors appelés *cônes duaux*

Démonstration.

Elle est immédiate par ce qui précède.

□

7. Coracines

7.1. Propriétés des cônes duaux

Proposition 7.1.1.

Soient α et β deux éléments de K_c,

a) $< \alpha, K\hat{}_{(S_\beta,Z_\beta)} > \subset K_{1-}$;

b) $< \alpha, K\hat{}_{(S_\beta,Z_\beta)} > \cap K^*_{1-} \neq \emptyset \Longrightarrow < \alpha, K\hat{}_{(S_\beta,Z_\beta)} > \subset K^*_{1-}$.

Démonstration.

a) Par hypothèse α est dans K_c, et le cône $K\hat{}_{(S_\beta,Z_\beta)}$ est formé d'éléments positifs donc a) est évident.

b) Si $< \alpha, K\hat{}_{(S_\beta,Z_\beta)} > \cap K^*_{1-} \neq \emptyset$, il existe $\gamma\hat{} \in K\hat{}_{(S_\beta,Z_\beta)}$ tel que $< \alpha, \gamma\hat{} > < 0$, par suite le support de α rencontre $FS_{\gamma\hat{}} \setminus Z_{\gamma\hat{}}$, qui est égal à $FS_{\delta\hat{}} \setminus Z_{\delta\hat{}}$ pour tout δ du cône $K\hat{}_{(S_\beta,Z_\beta)}$, ce qui montre que $< \alpha, K\hat{}_{(S_\beta,Z_\beta)} >$ ne rencontre pas $\{0\}$.

□

Proposition 7.1.2.

Sous les hypothèses de la proposition précédente :
Si $\beta\hat{}$ est un élément quelconque de $K\hat{}_{(S_\beta,Z_\beta)}$,

$< \alpha, \beta\hat{} >= 0 \Longleftrightarrow$ les supports de α et de β sont disjoints
ou α et β sont proportionnelles
de rapport dans $\mathbb{Q}_+$ et de type affine.

Démonstration.

Si $< \alpha, \beta\hat{} >= 0$ on a $< \alpha, K\hat{}_{(S_\beta,Z_\beta)} >= \{0\}$ ce qui implique que le support de α est inclus dans la réunion de $I \setminus FS_\beta$ et Z_β qui sont deux parties non liées de I.

Si β n'est pas de type affine, Z_β est de type fini, ce qui implique que S_α (qui ne peut pas être de type fini car $\alpha \in K_c$) est forcément par connexité inclus dans $I \setminus FS_\alpha$. On en déduit que S_α et S_β sont disjoints.

Si β est de type affine,

- si $S_\alpha \subset S_\beta$, on a $S_\alpha = S_\beta$ (car S_α n'est pas de type fini) et les deux racines sont nécessairement affines proportionnelles car $K_{(S_\alpha,S_\alpha)} \subset \mathbb{Q}_+\alpha$;
- sinon, $S_\alpha \subset I \setminus FS_\alpha$ et S_α et S_β ne peuvent être liés.

La réciproque de ces deux assertions est claire.

□

7.2. Choix d'une coracine

Si $a \in K_1$, sgn(a) signifiera 0 si a est nul, + (resp. $-$) si a est strictement positif (resp. négatif).

Proposition 7.2.1.

Soit α une racine imaginaire positive, on sait qu'elle est conjuguée, sous l'action de W à un unique élément γ de K_c. Si $\alpha = w(\gamma)$, $\alpha \in w(K_{(S_\gamma, Z_\gamma)})$, notons $C(\alpha)$ ce cône et $C\hat{}(\alpha) = wK\hat{}_{(S_\gamma, Z_\gamma)}$ son dual au sens de 6.4.2.
Si $\beta \in \Delta_+$ est donné, et $\delta\hat{}$ quelconque dans $C\hat{}(\alpha) = C\hat{}$, alors : sgn($< \beta, \delta\hat{} >$) ne dépend pas du choix de $\delta\hat{}$ et si $\beta \in \Delta_+^{\text{im}}$, le scalaire $< \beta, \delta\hat{} >$ est toujours négatif ou nul.

Démonstration.

1) Avec les notations, si $\delta\hat{} \in C\hat{}$ de l'énoncé, et si $\gamma\hat{} = w^{-1}(\delta\hat{}) \in w^{-1}C\hat{} = K\hat{}_{(S_\gamma, Z_\gamma)}$ on a :

$< \beta, \delta\hat{} > < 0 \overset{(a)}{\Leftrightarrow} < w^{-1}(\beta), \gamma\hat{} > < 0 \overset{(b)}{\Leftrightarrow} w^{-1}(\beta) \in \Delta_+$ et $S_{w^{-1}(\beta)} \cap (FS_\gamma \setminus Z_\gamma) \neq \emptyset$

$< \beta, \delta\hat{} > = 0 \overset{(a)}{\Leftrightarrow} < w^{-1}(\beta), \gamma\hat{} > = 0 \overset{(b)}{\Leftrightarrow} w^{-1}(\beta) \in \Delta$ et $S_{w^{-1}(\beta)} \cap (FS_\gamma \setminus Z_\gamma) = \emptyset$

$< \beta, \delta\hat{} > > 0 \overset{(a)}{\Leftrightarrow} < w^{-1}(\beta), \gamma\hat{} > > 0 \overset{(b)}{\Leftrightarrow} w^{-1}(\beta) \in \Delta_-$ et $S_{w^{-1}(\beta)} \cap (FS_\gamma \setminus Z_\gamma) \neq \emptyset$

Les trois équivalences (b) ne dépendent pas du choix de $\gamma\hat{}$ dans le cône dual $K\hat{}_{(S_\gamma, Z_\gamma)}$, et il s'agit donc de voir que les équivalences (a) ne dépendent pas du choix de w tel que $w(\gamma\hat{}) \in C\hat{}(\alpha)$. Mais alors d'après 6.4.1, $w \in W_\gamma = W((I \setminus FS_\gamma) \cup Z_\gamma)$ et il fixe le cône $K_{(S_\gamma, Z_\gamma)}$ et son dual point par point.

2) Si β est une racine imaginaire positive, on a $w^{-1}(\beta) \in \Delta_+$ pour tout w dans W et donc $< \beta, \delta\hat{} > \leq 0$.

□

Proposition 7.2.2.

Si β est une racine imaginaire, on considère $\beta\hat{} \in C\hat{}(\beta)$, alors β et $\beta\hat{}$ ont même support.

Remarque

On connait déjà le résultat analogue pour une racine réelle et sa coracine (cf. 3.4.2).

Démonstration.

On considère encore l'élément $\gamma \in K_c$ tel qu'il existe w tel que $\beta = w(\gamma)$.

On raisonne par récurrence sur la longueur de w.

Si $l(w) = 0$, le résultat est clair par définition du cône dual.

Supposons le résultat vrai si la longueur de w est inférieure ou égale à $n-1$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Considérons alors un élément w de W de longueur n, et $w = r_{i_1}...r_{i_n}$ une décomposition réduite de celui-ci.

Par hypothèse de récurrence $r_{i_2}...r_{i_n}(\gamma) = r_{i_1}w(\gamma)$ et $r_{i_1}w(\gamma\check{})$ ont même support, et d'après la proposition 6.2.1, il est clair que $S_{r_{i_1}w(\gamma)} \subset S_{w(\gamma)}$ avec inclusion stricte et $S_{w(\alpha)} = S_{r_i w(\alpha)} \cup \{i\}$ si et seulement si $i_1 \notin S_{w(\gamma)}$ mais lui est lié.

On en déduit facilement qu'il en est de même pour l'inclusion de $S_{r_{i_1}w(\gamma\check{})}$ dans $S_{w(\gamma\check{})}$.

D'où le résultat.

□

Définition 7.2.3.

Pour tout couple (S, Z) vérifiant les hypothèses de 6.3.4, on choisit arbitrairement un élément de $K\check{}_{(S,Z)}$.

Si $i \in I_{\mathrm{im}}$, pour le couple $(\{i\}, \emptyset)$ (ou $(\{i\}, \{i\})$ avec $i \in I_0$), on choisira comme élément $\alpha\check{}_i$. Ainsi la nouvelle définition est bien compatible avec la précédente.

Si α est un élément de $K_{(S,Z)}$, l'élément précédemment défini sera la coracine de α notée $\alpha\check{}$.

Si β est une racine imaginaire positive, il existe $w \in W$ tel que $w(\beta)$ est dans K_c donc dans un cône $K_{(S,Z)}$ sa coracine sera $(\beta)\check{} = w^{-1}(\alpha\check{})$, où $\alpha\check{} = (w(\beta))\check{}$ (on a vu en 6.4.1 que cet élément $\beta\check{}$ ne dépend pas du choix de w tel que $w(\beta) \in K_c$.)

Si α est une racine imaginaire négative, sa coracine sera $-(-\alpha)\check{}$.

D'après 6.2.3, α est une racine imaginaire de type affine (resp. indéfini) si et seulement si $< \alpha, \alpha\check{} > = 0$ (resp. $< \alpha, \alpha\check{} > < 0$).

Remarque :

Dans le cas du système de racines d'une algèbre de Kac-Moody pour une matrice A symétrisable, si α est une racine imaginaire, Kac ([K, 2.2]) établit que $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$ est de dimension un. On peut alors trouver un générateur $\alpha\check{}$ de cette droite tel qu'on ait les propriétés analogues à celles du corollaire 7.2.4.

Cet élément est un choix possible pour la coracine c'est à dire qu'il est bien situé dans le cône dual; ce choix permet une "bonne détermination" de la coracine. Pourtant, même dans le cas symétrisable, le cône dual n'est pas réduit à une demi-droite, un autre choix est donc possible.

Corollaire 7.2.4.

Si α est une racine imaginaire et β une racine quelconque,

$$< \alpha, \beta\check{} > = 0 \Longleftrightarrow < \beta, \alpha\check{} > = 0$$

$$< \alpha, \beta\check{} > . < \beta, \alpha\check{} > \geq 0$$

Remarque :

Le résultat analogue est déjà connu si les deux racines sont réelles (3.4.4).

Démonstration.

En conjuguant par $\pm W$, on se ramène au cas où $\alpha \in K_c$. Quitte à changer β en $-\beta$ on a de plus $\beta \in \Delta_+$. On utilise alors les équivalences démontrées à la proposition 7.2.1 (vu 7.2.2 et 3.4.2).

□

7.3. Application à l'étude du système de racines

Proposition 7.3.1.

Considérons la chambre de Weyl négative :

$$C_{\mathbb{Q}} = \{\alpha \in Q_{\mathbb{Q}} \ / \ < \alpha, \alpha_i\check{} > \leq 0 \ (\forall i \in I_{\mathrm{re}})\}$$

et le cône de Tits négatif :

$$X\check{} = \cup_{w \in W} wC_{\mathbb{Q}}$$

Alors on a :

$X\check{} = \{ \alpha \in Q_{\mathbb{Q}} / < \alpha, \beta\check{} > > 0$ *pour au plus un nombre fini de racines réelles positives* $\}$.

$X\check{}$ *est un cône convexe.*

Démonstration.

On note $X' = \{\alpha \in Q_{\mathbb{Q}} \ / \ < \alpha, \beta\check{} > > 0$ pour au plus un nombre fini de racines réelles positives $\}$.

Si α est un élément de $Q_{\mathbb{Q}}$, on note

$$M_\alpha = \{\beta \in \Delta_+^{\mathrm{re}}, \ / \ < \alpha, \beta\check{} > > 0\}$$

Avec cette définition, $\alpha \in X' \Longleftrightarrow |M_\alpha| < \infty$.

Si $\alpha \in C_{\mathbb{Q}}$, $|M_\alpha| = 0$ donc $B_{\mathbb{Q}} \subset X'$. Montrons que X' est stable sous l'action de W, ce qui établira l'inclusion $X \subset X'$.
Pour cela les générateurs r_i où $i \in I_{\text{re}}$ de W étant d'ordre deux, il suffit d'établir que $r_i(X') \subset X'$.
Soit α un élément de X', on a $< r_i(\alpha), \beta^{\check{}} > = < \alpha, r_i(\beta^{\check{}}) >$.
Or si β est une racine réelle positive son image par r_i est une racine positive si et seulement si $\beta \in (\Delta_+^{\text{re}} \setminus \{\alpha_i, 2\alpha_i\}) \cup \{-\alpha_i, -2\alpha_i\}$ et r_i induit une involution de cet ensemble.
Donc si $|M_\alpha|$ est fini, il en de même de $|M_{r_i(\alpha)}|$, et donc $r_i(\alpha) \in X'$.

Pour montrer l'inclusion contraire on raisonne par récurrence sur le nombre d'éléments de M_α où $\alpha \in X'$.
- Si $|M_\alpha| = 0$, $\alpha \in C_{\mathbb{Q}}$ donc est dans le cône de Tits.
- Supposons le résultat établi si le cardinal de M_α est strictement inférieur à n où $n \in \mathbb{N}^*$.
- Considérons alors α tel que $M_\alpha = n$, il existe au moins un élément réel de la base, α_i tel que $< \alpha, \alpha_i^{\check{}} > > 0$ (raisonnement par l'absurde immédiat)
D'après les remarques précédentes, $M_{r_i(\alpha)} = M_\alpha \setminus \{\alpha_i, 2\alpha_i\}$ d'où $|M_{r_i(\alpha)}| = |M_\alpha| - 2/a_{ii}$.
Par hypothèse de récurrence $r_i(\alpha) \in X\hat{}$ et par stabilité évidente du cône de Tits sous l'action de W, α est dans $X\hat{}$.

Il est évident sur la définition de X' que $X' = X$ est un cône convexe.
En effet si α et β sont dans X', et si $t \in \mathbb{Q}_+ \cap [0,1]$, si $\gamma \in \Delta_+^{\text{re}}$, on a :

$$< t\alpha + (1-t)\beta, \gamma^{\check{}} > > 0 \Longrightarrow \gamma \in M_\alpha \cup M_\beta \text{ donc}$$

$$M_{t\alpha+(1-t)\beta} \subset M_\alpha \cup M_\beta \Longrightarrow |M_{t\alpha+(1-t)\beta}| \leq |M_\alpha| + |M_\beta| < \infty,$$

et si $t \in \mathbb{Q}_+$, $M_{t\alpha} = M_\alpha$ donc $t\alpha \in X'$.

□

Proposition 7.3.2.

Si α et β sont deux racines imaginaires positives, alors :

$$< \alpha, \beta\hat{} > < 0 \Longrightarrow \alpha + \beta \in \Delta_+^{\text{im}}.$$

sauf s'il existe $w \in W$ et $i \in I$ tels que $w(\alpha)$ et $w(\beta)$ sont dans $N_i\alpha_i$.
N.B :Le cas exclus dans cette proposition est tel que $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*\beta$.

Remarque :

Le résultat analogue ($\alpha + \beta \in \Delta$)est déjà connu si l'une des deux racines est réelle (et sans autre condition sur α et β que $\alpha \in \mathbb{Q}\beta$) à cause de la condition de chaîne, de 7.2.4 et 3.4.4.

Démonstration.

On a montré que β, et $\beta\check{}$ ont même support et donc comme $< \alpha, \beta\check{} > < 0$, S_α et S_β sont liés. Il est clair que $K_c \subset C_{\mathbb{Q}}$ donc une racine imaginaire positive est un élément du cône de Tits.

Par convexité de ce cône, on a $\alpha + \beta \in X$, et donc par la proposition 7.3.1, il existe un élément w du groupe de Weyl, tel que $w(\alpha + \beta) \in C_{\mathbb{Q}}$.

Pour montrer que $\alpha + \beta$ est une racine, il suffit d'établir que cet élément est dans K_c. Il s'agit d'un élément de $R = \sum_{i \in I} M_i \alpha_i$ à coordonnées toutes positives ou nulles puisque $(W\alpha \cup W\beta) \subset \Delta_+^{\text{im}}$. De plus le support de cet élément est connexe, puisque

$$< w(\alpha), (w(\beta))\check{} > = < w(\alpha), w(\beta\check{}) > = < \alpha, \beta\check{} > < 0 .$$

Donc, sauf dans le cas où $w(\alpha)$ et $w(\beta)$ sont proportionnelles à une même racine simple, $w(\alpha + \beta) \in K_c$.

□

Proposition 7.3.3.

Si α et β sont deux racines imaginaires positives :

$$\alpha + \beta \in \Delta \Longrightarrow < \alpha, \beta\check{} > < 0 \text{ sauf si } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont } \mathbb{Q}\text{-proportionnelles et de type affine.}$$

Démonstration.

Considérons $w \in W$ et $\gamma \in K_c$ tels que $\beta = w(\gamma)$.

$\alpha + \beta \in \Delta \Longrightarrow w(\alpha + \beta) \in \Delta$, et donc les supports de $w(\alpha)$ et de γ sont forcément liés.

Par suite, il existe $i \in S_{w(\alpha)}$ tel que $< \alpha_i, \gamma\check{} > < 0$ (et donc $< w(\alpha), \gamma\check{} > < 0$), sauf dans le cas où le support de $w(\alpha)$ est inclus dans Z_γ.

Mais la racine α étant imaginaire, $S_{w(\alpha)}$ ne peut pas être de type fini (puisqu'il contient le support de la racine située dans K_c conjuguée à α).

Ainsi, soit les deux racines $w(\alpha)$ et γ ont même support $Z_\gamma = S_\gamma = S_{w(\alpha)}$ de type affine et donc α et β sont de type affine et proportionnelles avec un coefficient dans $\mathbb{Q}_+$, soit $< \alpha, \beta\check{} > < 0$.

□

IV

Systèmes générateurs de racines et systèmes de racines engendrés.

K désigne un corps de caractéristique 0, (resp. l'anneau des entiers).

8. Systèmes générateurs de racines, définitions

8.1. Définitions

Un *système générateur de racines* (en abrégé S.G.R.) sur K (resp sur $\mathbb{Z}$) est la donnée d'un 7-uplet $S = (A, V, V\hat{}, <,>, \Pi, \Pi\hat{}, \{N_i\}_{i\in I_{\mathrm{im}}})$ où :

(SGR1) A est une matrice de Borcherds relative, à coefficients dans $\mathbb{Q}$, indexée par $I \times I$;

(SGR2) V et $V\hat{}$ sont des K-modules libres (ie deux K-espaces vectoriels si $K \neq \mathbb{Z}$);

(SGR3) $<,>$ définie sur $V \times V\hat{}$, est une dualité entre ces deux K-modules. Pour $\alpha \in V\hat{}$ on note $[\alpha]$ l'image de α dans le dual V^* de V;

(SGR4) Pour chaque $i \in I_{\mathrm{im}}$, N_i est une partie de $\mathbb{Q}_+^*$ de plus petit élément 1 ou ne contenant pas sa borne inférieure dans $\mathbb{R}$ mais minorée par 3/4 et contenant 1, telle que pour tout $j \in I_{\mathrm{re}}$ et pour tout $i \in I$ on ait $N_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$ (en particulier $a_{ji} \in \mathbb{Z}$). Dans le cas où V est un $\mathbb{Z}$-module libre, on suppose de plus $N_i\alpha_i \subset V$.

(SGR5) $\Pi \subset V$, (appelée *la base*) $\Pi\hat{} \subset V\hat{}$, (*la cobase*), indexées par I et telles que pour tous i et j dans I, $< \alpha_j, \alpha\hat{}_i > = a_{ij}$.

(SGR6) Les conditions suivantes sont satisfaites :

a) Si J est une réunion finie de composantes connexes de I de type affine, alors un élément $u = \sum_{i\in J} n_i\alpha_i$ tel que $n_i \in \mathbb{N}^*$ pour tout $i \in J$, et pour lequel $A(J)u = 0$, n'est pas nul dans V.

b) Quelque soit $j \in I_{\mathrm{im}}$, $\alpha_i \notin \mathbb{Q}_+\alpha_j$ pour $i \neq j$.

Sous les hypothèses de SGR4, on note :

- Pour $i \in I_{\text{re}}$, $\quad N_i = \{1, 2/a_{ii}\}$;

- M_i, pour tout $i \in I$, la plus petite partie de $\mathbb{Q}_+$, contenant $N_i \cup \{0\}$ et stable sous l'addition.

Il est clair que $M_i^* := M_i \setminus \{0\}$ possède également les deux propriétés :

- 1 est le plus petit élément de M_i^* ou $1 \in M_i^*$ et $M_i^* \subset [3/4; +\infty[$ n'a pas de plus petit élément.

- $M_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$ si $j \in I_{\text{re}}$.

N.B : Comme pour chaque composante connexe J_k de type affine, la matrice $A(J_k)$ est de corang 1, l'hypothèse SGR6a) est équivalente à celle obtenue en supposant les n_i dans $\mathbb{Q}_+$ et d'après (1.2) ceci équivaut également si I est fini à l'existence d'une $\mathbb{Q}$-forme linéaire sur V prenant des valeurs strictement positives sur les éléments de l'ensemble : $E := \{\, v \in \sum_{i \in I} \mathbb{N}\alpha_i \,; < v, \alpha\hat{}_i > = 0 \ (\forall\, i \in I)\,\}$.

On considérera éventuellement les hypothèses intéressantes suivantes :

$$(\mathrm{Z}) \qquad \forall\, i \in I,\ \ \forall\, j \in I,\ \ N_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}\,.$$

Ceci implique en particulier que la matrice A est une matrice de Kac-Moody relative, c'est à dire que tous ses coefficients sont entiers.

$$(SGRN) \quad \text{Si } i \in I_{\text{im}},\ n_i \in N_i, \text{ et } n_i\alpha_i = \sum_{j \in S} n_j \alpha_j \ \text{ où } \ n_j \in M_j^* \ (\forall j \in S)$$
$$\text{et } S \subset I \ \text{ connexe alors } \ S = \{i\}\,.$$

On dira alors que le S.G.R. est *normalisé.*

On définit pour tout $i \in I$, P_i le sous-groupe additif de $\mathbb{Q}$ engendré par N_i (ou M_i) et on pose :

$$R = \sum_{i \in I} P_i\alpha_i\,; \quad R_+ = \sum_{i \in I} M_i\alpha_i\,;$$
$$Q = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i\,; \quad Q\hat{} = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i\,;$$
$$Q_{\text{re}} = \sum_{i \in I_{\text{re}}} \mathbb{Z}\alpha_i\,; \quad Q\hat{}_{\text{re}} = \sum_{i \in I_{\text{re}}} \mathbb{Z}\alpha\hat{}_i\,;$$

On définit encore $Q_{\mathbb{Q}}, Q_K, Q\hat{}_{\mathbb{Q}}, Q\hat{}_K$ comme les produits tensoriels des ensembles Q ou $Q\hat{}$ précédents par $\mathbb{Q}$ ou K dans V (ou dans $V \otimes \mathbb{Q}$ si $K = \mathbb{Z}$).

N.B : Contrairement aux conventions de notations précédentes R_+ qui est inclus dans l'ensemble des éléments de R s'écrivant comme combinaison positive des α_i, ne lui est pas forcément égal.

R est en dualité sur $\mathbb{Z}$ avec Q_{re}, c'est à dire $< \alpha, \alpha\check{} > \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in R$ et $\alpha\check{} \in \mathbb{Q}\check{}_{\mathrm{re}}$. Sous la condition (Z), ceci est encore vrai en remplaçant $Q\check{}_{\mathrm{re}}$ par $Q\check{}$.

Remarques :

1) Cette notion généralise celle d'ensemble de données radicielles de Moody et Pianzola [MP]. Les notions de bases de racines ou de générateurs de racines de Hée [Hée;1] sont analogues mais généralisent [MP] dans une autre direction.

2) Cette définition des S.G.R. n'est pas symétrique en V et $V\check{}$, il manque en particulier des ensembles $N\check{}_i$ et surtout l'équivalent de (SGR6).

3) Si on suppose qu'un $i \in I_{\mathrm{im}}$ est lié à un $j \in I_{\mathrm{re}}$ alors forcément N_i est à dénominateurs bornés. Sous cette hypothèse sur N_i (vérifiée dans la plupart des applications), N_i contient sa borne inférieure qui est donc 1. S'il en est ainsi pour tous les N_i, le sous $\mathbb{Z}$-module R de V est engendré par des éléments $(1/n_i)\alpha_i$ où n_i divise le plus petit multiple commun des dénominateurs des éléments de N_i (donc de M_i).

4) On a choisi à partir de ce chapitre de considérer plus particulièrement l'hypothèse (Z) (A à coefficients entiers; $N_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$ pour tout i et j). Cette hypothèse semble raisonnable en ce qu'elle recouvre les applications principales, par exemple la démonstration des résultats ultérieurs pour les systèmes de racines de formes presque déployées d'algèbres de Kac-Moody. Par contre, on admet toujours que N_i puisse ne pas contenir sa borne inférieure, ce qui ne peut alors arriver que si $a_{ij} = 0 \ \forall j \in I$, pour simplifier les résultats de stabilité par passage au quotient ou au sous-système, de cette notion que l'on verra aux chapitres V et VI.

D'autre part le système de racines que l'on va construire ne change pas si on multiplie une ligne imaginaire de la matrice par un élément de $\mathbb{Q}_+^*$, mais ceci ne permet pas de se ramener au cas où $N_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$ pour tout $j \in I$ (il faudrait en quelque sorte que les N_i soient à dénominateurs uniformément bornés).

5) Pour retrouver les systèmes de racines (non libres) des algèbres de Borcherds, on aurait pu abandonner (SGR6b) et considérer que $N_i = \{1\}$ ou $\mathbb{N}^*$ si $i \in I_{\mathrm{im}}$; mais cela nous aurait imposé que deux racines de la base Π puissent être $\mathbb{Q}$-colinéaires et même égales (cf 5.5.3).

On a préféré cette définition qui nécessite l'introduction des N_i au paragraphe 4. Elle exclut les racines simples $\mathbb{Q}$-colinéaires mais autorise que pour i et j dans I_{im}, α_i et α_j soient K-colinéaires.

Une autre définition aurait également été possible en remplaçant partout $\mathbb{Q}$ par un corps ordonné archimédien K_2 contenu dans K.

6) Si on supprime l'hypothèse (SGR6a), une racine de type imaginaire correspondant à une composante connexe de I peut être nulle, auquel cas, il est facile de voir sur chaque système de type affine que dans V, le système serait un système de type fini (voir les remarques concernant $Q\check{}$ en 9.1.3).

La normalisation (SGRN) permet en général de caractériser la base par le système de racines engendré. On peut d'ailleurs souvent trouver une nouvelle base et des nouveaux N_i qui seront normalisés et donneront quand même le même système de racines au sens de 8.5 (cf 10.3).

Il est clair que dans le cas où Π est libre, les hypothèses (SGR6a), (SGR6b) et (SGRN) sont vérifiées.

7) Si pour tout $i \in I$, N_i est réduit à $\{1\}$, un S.G.R. est une réalisation de la matrice A (de Borcherds normalisée) vérifiant les hypothèses supplémentaires SGR6b et SGR6a (donc en particulier (R1) de 1.4).

Certaines autres réalisations peuvent être considérées comme des S.G.R. (pour une autre matrice) : voir l'exemple 5.5.3. Il faut au moins $N_i = \{1\}$ pour tout $i \in I_{\mathrm{re}}$; c'est à dire A de Borcherds normalisée.

8.2. Morphismes de S.G.R. et extension des scalaires

Définition 8.2.1.

Soient deux systèmes générateurs de racines sur K, $S = (A, V, V\check{}, <,>, \Pi, \Pi\check{}, \{N_i\}_{i\in I_{\mathrm{im}}})$ et $S^1 = (A^1, V^1, V^{1}\check{}, <,>, \Pi^1, \Pi^{1}\check{}, \{N^1{}_j\}_{j\in I^1_{\mathrm{im}}})$. Un morphisme de S et S^1 est la donnée d'une application ϕ K-linéaire de V dans V^1 telle que :

(M1) $\forall j \in I$, $\exists j' \in I^1$, tel que $\phi(N_j\alpha_j) \subset N^1_{j'}\alpha^1_{j'}$, on note alors $k_j \in \mathbb{Q}^*_+$ tel que $\phi(\alpha_j) = k_j\alpha^1_{j'}$ et donc $k_jN_j \subset N^1_{j'}$;

(M2) $\forall i,j \in I, sgn(<\alpha_i, \alpha\check{}_j>) = sgn(<\alpha^1_{i'}, \alpha^1\check{}_{j'}>)$;

(Il résulte de cette condition que $(i \in I_{\mathrm{re}}) \Longrightarrow (i' \in I^1_{\mathrm{re}})$ et $(i \in I_{\mathrm{im}}) \Longrightarrow (i' \in I^1_{\mathrm{im}})$ car $i \in I_{\mathrm{im}} \Longleftrightarrow <\alpha_i, \alpha\check{}_j> \leq 0$ pour tout $j \in I$.)

(M3) $\forall i \in I_{\mathrm{re}}$; ${}^t\phi([\alpha^1\check{}_{i'}]) = k_i[\alpha\check{}_i]$.

En particulier pour $i \in I_{\mathrm{re}}$ et $j \in I$, $<\phi(\alpha_j), \phi(\alpha_i)\check{}> = <\alpha_j, \alpha\check{}_i>$.

Remarques :

1) L'application $i \mapsto i'$ induite par ϕ de I dans I^1 est bien déterminée par (M1) grâce à la condition (SGR6b), on la note encore ϕ. Elle vérifie $sgn(a^1_{\phi i,\phi j}) = sgn(a_{ij})$ $\forall i,j \in I$, et pour $i \in I_{\mathrm{re}}$ et $j \in I$, $(2k_i/a_{ii})a_{ij} = (2k_j/a^1_{\phi i,\phi i})a^1_{\phi i,\phi j}$.

2) $V^{\hat{}}$ n'est pas bien déterminé (même à isomorphisme près) par la classe d'isomorphisme de S. On peut supposer, par exemple, que $V^{\hat{}} = V^*$ ou que $V^{\hat{}} = \bigoplus_{i\in I} K\alpha\,\hat{i}$. On utilisera éventuellement ces deux possibilités.

De même à isomorphisme près $\alpha\,\hat{j}$ n'est pas bien déterminé par la classe d'équivalence de S.

Extension des scalaires 8.2.2.

Soit K' un corps contenant K, à partir d'un système générateur de racines sur K, on en définit un sur K' en posant $S_{K'} = S \otimes_K K' = (A, V \otimes_K K', V^{\hat{}} \otimes_K K', <,>, \Pi \otimes_K 1, \Pi^{\hat{}} \otimes_K 1, \{N_i\}_{i\in I_{\text{im}}})$. Il est clair que S vérifie (Z) si et seulement si $S_{K'}$ le vérifie. De même, on peut étendre les scalaires pour un morphisme de S.G.R.

8.3. Changement de corps (de base)

On suppose dans ce n° 8.3, que Π engendre l'espace vectoriel V.

Proposition 8.3.1.

S est isomorphe à un $S_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} K$ où $S_{\mathbb{Q}}$ est un système générateur de racines sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si l'espace vectoriel des relations linéaires entre les α_i est engendré par les relations linéaires à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

Remarque :

Si ce n'est pas le cas $S_{\mathbb{Q}} = (A, Q_{\mathbb{Q}}, Q\,\hat{_{\mathbb{Q}}}, <,>, \Pi, \Pi^{\hat{}}, \{N_i\})$ est un système générateur sur $\mathbb{Q}$ qui possède le même système de racines que S (au sens de 8.5 mais en tant que sous-ensemble d'un groupe) mais la considération de $S_{\mathbb{Q}}$ ne permet pas de connaître les relations linéaires "extraordinaires" (à coefficients dans K) entre les α_i.

Démonstration.

L'implication directe est évidente si un tel isomorphisme existe, on a nécessairement $Q_{K'} \approx Q \otimes_{\mathbb{Q}} K'$ d'où la nécessité de la condition.

Réciproquement notons $V_{\mathbb{Q}}$ le $\mathbb{Q}$-sous-espace vectoriel de V engendré par Π. Par hypothèse, on a un isomorphisme de $V_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} K$ sur V qui induit clairement un isomorphisme de $S_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} K$ sur S, où $S_{\mathbb{Q}} = (A, V_{\mathbb{Q}}, V^*_{\mathbb{Q}}, <,>, \Pi, \Pi\,\hat{_{\mathbb{Q}}}, \{N_i\}_{i\in I_{\text{im}}})$ où $\alpha\,\hat{i}_{\mathbb{Q}}$ est la restriction à $V_{\mathbb{Q}}$ de $\alpha\,\hat{i}$.

□

Proposition 8.3.2.

On suppose de plus la matrice A de rang fini.

Un S.G.R. $S_{\mathbb{Q}}$ sur $\mathbb{Q}$ est isomorphe à un $S_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ où $S_{\mathbb{Z}}$ est un S.G.R. sur $\mathbb{Z}$ si et seulement si :

1) $\forall j \in I \quad N_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$;

2) $R \cap (Q\check{})^{\perp}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre.

Remarque :

Il résulte de 1) et 2) que N_i est à dénominateurs bornés, pour tout $i \in I_{\text{im}}$. Cela est dû à 1) sauf pour $i \in I_0$ tel que $\{i\}$ soit une composante connexe de I, mais ce cas est réglé par 2).

Démonstration.

L'implication directe est encore facile à établir. Pour la réciproque, l'hypothèse 1) montre que par l'application linéaire $\phi : Q_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{Q}^I$ telle que $\phi(\alpha)_i =< \alpha, \alpha\check{}_i >$, on a $\phi(R) \subset \mathbb{Z}^I$. Par hypothèse, l'image est contenue dans un sous-espace de dimension finie N de $\mathbb{Q}^I$. Il existe une base $e_1, \ldots, e_N$ de ce sous-espace vectoriel et $\{1, \ldots, N\}$ deux à deux distincts dans I tels que la composante de e_i sur j soit $\delta_{i,j}$ pour j de 1 à N. Alors $\phi(R) \subset \mathbb{Z}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}e_N$ est un $\mathbb{Z}$-module libre. Comme par hypothèse $R \cap Ker\phi$ est un $\mathbb{Z}$-module libre, R est un $\mathbb{Z}$-module libre. Il est alors facile de construire $S_{\mathbb{Z}} = (A, R, R^*, <,>, \Pi, \Pi\check{}_{\mathbb{Z}}, \{N_i\}_{i \in I_{\text{im}}})$ qui convient.

□

8.4 Le groupe de Weyl et les racines réelles

Comme dans le cas des systèmes de racines à bases libres :
Si $i \in I_{\text{re}}$, on appellera *coracine de α_i* l'élément de $Q\check{}(I_{\text{re}})$:

$$\alpha_i^{\vee} = 2\alpha\check{}_i / a_{ii} \ .$$

On définit un élément de $\text{GL}(V)$ (qui stabilise $Q_{\mathbb{Q}}$, Q et $Q_{\text{re}} := Q(I_{\text{re}})$), d'ordre deux en posant, sous les hypothèses précédentes,

$$r_i(v) = v- < v, \alpha_i^{\vee} > v_i \text{ pour tout } v \in Q_{\mathbb{Q}} \ .$$

Le *groupe de Weyl W* est le sous-groupe de $\text{GL}(V)$ engendré par les r_i pour $i \in I_{\text{re}}$.

De même, pour $i \in I_{\text{re}}$, on définit $r\check{}_i \in \text{GL}(V\check{})$, d'ordre deux et stabilisant $Q\check{}_K$, $Q\check{}_{\mathbb{Q}}$ et $Q\check{}_{\text{re}}$ (ainsi que $Q\check{}$ si (Z) est vérifiée) en posant pour tout $v\check{} \in V\check{}$:

$$r\,\hat{}_i(v\hat{}) = v\hat{} - < \alpha_i, v\hat{} > \alpha_i^\vee\,.$$

Ces $r\,\hat{}_i$ pour $i \in I_{\mathrm{re}}$ engendrent un sous-groupe $W\hat{}$ de $\mathrm{GL}(V\hat{})$.

On définit $\Delta^{\mathrm{re}} = W(\Pi(I_{\mathrm{re}}) \cup 2\Pi(I_2))$, évidemment appelé *système de racines réelles de* S, et on a donc $Q_{\mathrm{re}} = \sum_{\alpha\in\Delta^{\mathrm{re}}} \mathbb{Z}\alpha$ et $Q\,\hat{}_{\mathrm{re}} = \sum_{\alpha\in\Delta^{\mathrm{re}}} \mathbb{Z}\alpha\hat{}$.

Il est clair que W, $W\hat{}$, Q, $Q\hat{}$, Q_{re}, $Q\,\hat{}_{\mathrm{re}}$, et Δ^{re} (ainsi que Δ que l'on va définir) ne changent pas par extension des scalaires.

8.5. Chaînes et système de racines engendré.

Si $\phi \in R_+$, on définit *la chaîne issue de* ϕ *de direction* α_i par :

$$\begin{aligned}
Ch(\phi,\alpha_i) &= \phi + M_i\alpha_i \text{ si } i \in I_{\mathrm{im}},\ < \phi, \alpha\,\hat{}_i >< 0 \text{ et } \phi \notin \mathbb{Q}\alpha_i \\
&= \{\phi\} \text{ si } < \phi, \alpha\,\hat{}_i > = 0 \text{ ou } \phi \in \mathbb{Q}\alpha_i \\
&= \{\phi, \phi + \alpha_i, \ldots, \phi + u\alpha_i\} \text{ si } i \in I_{\mathrm{re}},\ < \phi, \alpha_i^\vee > = -u \leq 0 \text{ et } \phi \notin \mathbb{Q}\alpha_i \\
&= \{\phi, \phi - \alpha_i, \ldots, \phi + u\alpha_i\} \text{ si } i \in I_{\mathrm{re}},\ < \phi, \alpha_i^\vee > = -u \geq 0 \text{ et } \phi \notin \mathbb{Q}\alpha_i
\end{aligned}$$

On construit alors par récurrence sur l'entier n, la suite de parties de $Q_{\mathbb{Q}}$.

$$\begin{aligned}
&\Delta_0(+) = \Pi_{\mathrm{re}} \cup 2\Pi_2 \cup (\cup_{i\in I_{\mathrm{im}}} N_i\alpha_i);\\
&\Delta_n(+) = \cup_{\alpha_i\in\Pi} \cup_{\phi\in\Delta_{n-1}(+)} Ch(\phi,\alpha_i);\\
&\Delta_n = \Delta_n(+) \cup (-\Delta_n(+)).
\end{aligned}$$

On montrera (9.3.1) que $\Delta_n(+) \subset R_+$ pour tout n, ce qui justifie cette définition par récurrence et montre que cette suite est croissante pour l'inclusion; on pourra ainsi considérer la réunion croissante de ces ensembles qui sera appelé *système de racines de* S et noté $\Delta(S)$.

Remarques :

1) On verra en 9.3.9 que $\Delta(S)$ ne dépend que de la classe de S à isomorphisme près.

2) On montrera en 10.3.3. sous une hypothèse supplémentaire que réciproquement $\Delta(S)$ et $\Delta(S)_+ = \cup\Delta_n(+)$ déterminent la base Π et les N_i (à une équivalence près s'il existe $i \in I$ tel que N_i n'a pas de plus petit élément).

3) On verra également en 9.3.4 que $\Delta(S)$ contient Δ^{re} et que $R = \sum_{\alpha\in\Delta(S)} \mathbb{Z}\alpha$.

9. Revêtement

9.1. Définition

Un *revêtement libre* du système S est un système générateur de racines $\widetilde{S} = (A, \widetilde{V}, \widetilde{V}\check{}$, $<,>, \widetilde{\Pi}, \widetilde{\Pi}\check{}, \{N_i\}_{i \in I_{\text{im}}})$ tel que :

- A et les N_i sont ceux définis pour S;
- $\widetilde{V}\check{} = V^*$ et $<,>$ est la dualité canonique;
- $\widetilde{\Pi}$, $\widetilde{\Pi}\check{}$ sont libres dans $\widetilde{V}$ et $\widetilde{V}\check{}$.

On définit dans $\widetilde{V}$, $\widetilde{\Delta}$ le système de racines à base libre associé à A et aux N_i (chapitre II), et on note avec des $\tilde{}$ toutes les notions introduites au chapitre II pour cette donnée. En particulier $\widetilde{\Delta} \subset \widetilde{Q}_{\mathbb{Q}}$.

Il existe alors deux applications K linéaires Ψ et $\Psi\check{}$ définies par :

$$\begin{aligned} \Psi \, : \, \widetilde{Q}_K &\longrightarrow \sum_{i \in I} K\alpha_i \subset V \\ \widetilde{\alpha}_i &\mapsto \alpha_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi\check{} \, : \, \widetilde{Q}\check{}_K &\longrightarrow \sum_{i \in I} K\alpha_i\check{} \subset V\check{} \\ \widetilde{\alpha}\check{}_i &\mapsto \alpha\check{}_i \end{aligned}$$

Remarque :

Il n'y a pas d'unicité du revêtement libre. Par contre $\widetilde{\Delta}$, $\widetilde{Q}_{\mathbb{Q}}$, $\widetilde{Q}_K$, $\widetilde{Q}\check{}_K$, Ψ et $\Psi\check{}$ sont bien déterminés par le S.G.R. S; en particulier $\widetilde{S}_{\mathbb{Q}} = (A, \widetilde{Q}_K, \widetilde{V}\check{}, <,>, \widetilde{\Pi}, \widetilde{\Pi}\check{}, \{N_i\}_{i \in I_{\text{im}}})$ est bien déterminé à isomorphisme près (on peut en particulier remplacer $\widetilde{V}\check{}$ par $\widetilde{Q}_K$ dans $\widetilde{S}_{\mathbb{Q}}$).

Lemme 9.1.1.

$$(\forall \alpha \in \widetilde{Q}_K) \quad (\forall \alpha\check{} \in \widetilde{Q}\check{}_K) \qquad <\alpha, \alpha\check{}> = <\Psi(\alpha), \Psi\check{}(\alpha\check{})>$$

En conséquence, Ψ est un morphisme du S.G.R. $\widetilde{S}_{\mathbb{Q}}$ dans le S.G.R. S.

Démonstration.

Ψ et $\Psi\check{}$ étant linéaires, il suffit de le vérifier pour les α_i (resp. les $\alpha\check{}_i$), pour lesquels c'est évident.

□

Proposition 9.1.2.

$$Ker\Psi \subset \{\beta \in \widetilde{Q}_K \;/ < \beta, \widetilde{\alpha}\,\hat{_j} > = 0 \; (\forall j \in I)\}$$

$$Ker\Psi\hat{} \subset \{\beta\hat{} \in \widetilde{Q}\,\hat{_K} \;/ < \widetilde{\alpha}_j, \beta\hat{} > = 0 \; (\forall j \in I)\}$$

Démonstration.

Les deux démonstrations étant analogues, on ne prouvera que la première assertion. Si $\Psi(\beta) = 0$, alors pour tout $i \in I$, on a évidemment $< \Psi(\beta), \alpha\,\hat{_i} > = 0$, mais alors par le lemme 9.1.1, on a $< \beta, \widetilde{\alpha}\,\hat{_i} > = 0$, d'où le résultat.

□

Proposition 9.1.3.

Si $Q_{\mathbb{Q},+} = \Psi(\widetilde{Q}_{\mathbb{Q},+}) = \sum_{i\in I} \mathbb{Q}_+ \alpha_i$ *et* $Q_{\mathbb{Q},-} = \Psi(\widetilde{Q}_{\mathbb{Q},-}) = \sum_{i\in I} \mathbb{Q}_- \alpha_i$ *alors on a les deux propriétés importantes :*

1) $Q_{\mathbb{Q},+} \cap Q_{\mathbb{Q},-} = \{0\}$.

2) Si $\sum_{i\in I} n_i\alpha_i = 0$ avec $n_i \in \mathbb{Q}_+$, pour tout $i \in I$, alors $n_i = 0$ pour tout i .

En particulier, $\Psi(\widetilde{\alpha}) \neq 0$, $(\forall \widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta})$*; et* $\Psi(\widetilde{\Delta}_+) \cap \Psi(\widetilde{\Delta}_-) = \emptyset$.

Remarque :

La relation 1) est valable en remplaçant $\mathbb{Q}$ par K supposé ordonné sous la condition suivante plus forte que SGR6a :

(SGRord) Si J est une réunion de composantes connexes de I de type affine, alors un élément $u = \sum_{i\in J} n_i\alpha_i$ tel que $n_i \in K_+^*$ pour tout $i \in J$ et pour lequel $A(J)u = 0$ n'est pas nul dans V.

Démonstration.

Supposons $\alpha = \sum_{i\in I} n_i\alpha_i$, $n_i \in \mathbb{Q}_+$ non tous nuls et $\beta = \sum_{i\in I} -p_i\beta_i$, pour $p_i \in \mathbb{Q}_+$, il faut montrer que $\alpha \neq \beta$. Posons $\widetilde{\alpha} = \sum_{i\in I} n_i\widetilde{\alpha}_i$, $\widetilde{\beta} = \sum_{i\in I} -p_i\widetilde{\alpha}_i$.
Si $\alpha = \beta$ alors $\Psi(\widetilde{\alpha}) = \Psi(\widetilde{\beta})$ ce qui implique $\widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta} \in \widetilde{Q}_{\mathbb{Q}+} \cap Ker\Psi$. Par suite, il existe $u = \widetilde{\alpha} - \widetilde{\beta} \geq 0$, $\neq 0$ tel que $Au = 0$.

D'après la classification cela implique que chaque composante connexe J de I rencontrant le support de u est une composante connexe de I de type affine, mais alors l'hypothèse (SGR6a) permet d'obtenir la contradiction cherchée puisqu'il existe un entier n tel que $nu \in Q$.

□

Remarque :

L'hypothèse (SGR6a) n'étant pas imposée dans $Q_{\hat{\mathbb{Q}}}$, si deux coracines $\widetilde{\alpha}\check{}$ et $\widetilde{\beta}\check{}$ diffèrent d'une combinaison linéaire de coracines de type affine correspondant à une composante de type affine de I, il peuvent avoir même image par $\Psi\check{}$, mais alors elles appartiennent à $\widetilde{\Delta}\check{}(J)$ (dont la définition est évidente) qui est de type affine, et sont des racines réelles, on sait alors que $\widetilde{\Delta}^{re}\check{}(J)$ est périodique de période proportionnelle à la racine imaginaire. Il est donc facile de déterminer dans chaque cas l'image des coracines réelles, on vérifie qu'elle est isomorphe à un système de type fini.

Exemple :

Dans le cas affine réel indécomposable, la racine imaginaire positive minimale δ est non nulle à cause de SGR6a, par contre on peut avoir $\delta\check{} = 0$; le système $\Delta\check{}$ est alors celui correspondant à X_n si Δ correspond à $X_n^{(1)}$ sauf dans les cas B_n et C_n qui sont échangés.

Comme dans [MP], on obtient les propriétés :

Corollaire 9.1.4.

$$\text{On a } : (\forall i \in I) \quad \mathbb{Q}_- \alpha_i \cap \sum_{j \in I} \mathbb{Q}_+ \alpha_j = \{0\}$$

et aussi la propriété d'intersection faible (P.I.F)

$$\text{(P.I.F)} \qquad \text{si } i \in I_{\text{re}},\ \mathbb{Q}_+ \alpha_i \cap \sum_{j \neq i} \mathbb{Q}_+ \alpha_j = \{0\}.$$

Remarque :

Si K est un corps ordonné, on a si $i \in I_{\text{re}}$, $K_+\alpha_i \cap \sum_{j\neq i} K_+\alpha_j = \{0\}$, par contre la première propriété qui est basée sur (9.1.3) donc en particulier sur (SGR6a), ne s'étend pas aussi facilement, il faut supposer pour obtenir ce résultat qu'aucune combinaison positive à coefficients dans K d'éléments de l'ensemble E du N.B de 8.1 n'est nulle, (ce qui est vrai sous l'hypothèse SGRord de 9.1.3 d'après 1.2).

Démonstration.

La première assertion résulte immédiatement de la proposition précédente.

Pour établir la seconde, supposons $n_i\alpha_i = \sum_{j\neq i} n_j\alpha_j$ avec tous les n_i positifs dans $\mathbb{Q}$ alors par la dualité, on a

$$n_i < \alpha_i, \alpha\check{_i} > = \sum_{j \neq i} n_j < \alpha_j, \alpha\check{_i} > \leq 0$$

ce qui entraine $i \in I_{\text{im}}$ ou $n_i = 0$.

□

9.2. Groupe de Weyl et racines réelles, lien avec le revêtement

Proposition 9.2.1.

Il existe un unique homomorphisme surjectif :

$$\begin{array}{ll} \sigma_1 \ : \widetilde{W} \longrightarrow W_{|Q} & \left(\text{resp.}\, \sigma_2 \ : \widetilde{W} \longrightarrow W^{\widehat{}}_{|Q^{\widehat{}}_{\mathbb{Q}}} \right) \\ \widetilde{r}_i \ \mapsto \ r_i & \qquad \widetilde{r}_i \ \mapsto \ r^{\widehat{}}_i \end{array}$$

qui fait de $\Psi \ : \widetilde{Q} \longrightarrow Q$ (resp. $\Psi^{\widehat{}} \ : \widetilde{Q}^{\widehat{}}_{\mathbb{Q}} \longrightarrow Q^{\widehat{}}_{\mathbb{Q}}$) une application $\widetilde{W}$ équivariante.

De plus, σ_1 est un isomorphisme.

Remarque :

C'est encore vrai si on remplace Q par $Q_{\mathbb{Q}}$ ou Q_K et de même de manière duale $Q^{\widehat{}}_{\mathbb{Q}}$ par $Q^{\widehat{}}_K$ (ou $Q^{\widehat{}}$ si (Z) est vérifiée). On verra à la proposition 9.4.5 qu'il existe un isomorphisme σ de $\widetilde{W}$ sur W pour lequel $\Psi : \widetilde{Q} \longrightarrow V$ est équivariante.

Démonstration.

On fait la démonstration de l'existence de l'homomorphisme surjectif (a) et de l'équivariance (b) pour Q. Pour $Q^{\widehat{}}_{\mathbb{Q}}$ le raisonnement est analogue. L'injectivité n'est elle valable que pour σ_1 puisqu'on a vu (en remarque au 9.1.3) qu'un système de coracines de type affine donc de groupe de Weyl infini, peut être envoyé sur un système de type fini.

On pose, comme dans l'énoncé de la proposition,

$\sigma_1 \ : \widetilde{W} \longrightarrow W_{|Q}$; $\widetilde{r}_i \ \mapsto \ r_{i|Q}$; $W_{|Q}$ désignant le sous groupe de $\mathrm{GL}(Q)$ engendré par les restrictions à Q des r_i pour $i \in I_{\text{re}}$). (on notera encore r_i ces restrictions.)

a) σ_1 est bien défini :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $j_1, j_2, \ldots, j_p$ des éléments de I_{re}, alors $\widetilde{w} = \widetilde{r}_{j_1}\widetilde{r}_{j_2}\ldots\widetilde{r}_{j_p} \in \widetilde{W}$. Pour tout $i \in I$ on sait que $\widetilde{w}(\widetilde{\alpha}_i) - \widetilde{\alpha}_i \in Q(I_{\text{re}})$, supposons que :

$$\widetilde{\alpha}_i - \widetilde{w}(\widetilde{\alpha}_i) = \sum_{j \in I_{\text{re}}} c_{ij}\widetilde{\alpha}_j \ \textit{avec}\ c_{ij} \in \mathbb{Z}\ .$$

Montrons par récurrence sur p, que sous ces hypothèses :

$$\alpha_i - r_{j_1} r_{j_2} \ldots r_{j_p}(\alpha_i) = \sum_{j \in I_{\text{re}}} c_{ij}\alpha_j\ .$$

- Si $p = 0$ c'est évident quelque soit i.
- Supposons le résultat démontré pour $p < n$ où n est un entier strictement positif.

- Soit alors $p = n$, on a :

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha}_i - \widetilde{w}(\widetilde{\alpha}_i) &= \sum_{j\in I_{re}} c_{ij}\widetilde{\alpha}_j\\ &=(\widetilde{\alpha}_i - \widetilde{r}_{j_1}(\widetilde{\alpha}_i)) + r_{j_1}(\widetilde{\alpha}_i - \widetilde{r}_{j_2}\dots\widetilde{r}_{j_p}(\widetilde{\alpha}_i))\\ &=\frac{2a_{j_1 i}}{a_{j_1 j_1}}\widetilde{\alpha}_{j_1} + \widetilde{r}_{j_1}(\sum_{j\in I_{re}} d_{ij}\widetilde{\alpha}_j)\end{aligned}$$

où $\widetilde{r}_{j_2}\dots\widetilde{r}_{j_p}(\widetilde{\alpha}_i) = \sum_{j\in I_{re}} d_{ij}\widetilde{\alpha}_j$.

Par hypothèse de récurrence sur p, on a $r_{j_2}\dots r_{j_p}(\alpha_i) = \sum_{j\in I_{re}} d_{ij}\alpha_j$, et donc :

$$\begin{aligned}\alpha_i - r_{j_1}r_{j_2}\dots r_{j_p}(\alpha_i) &=(\alpha_i - r_{j_1}(\alpha_i)) + r_{j_1}(\sum_{j\in I_{re}} d_{ij}\alpha_j)\\ &= <\alpha_i, \alpha\hat{_{j_1}}> \alpha_{j_1} + r_{j_1}(\sum_{j\in I_{re}} d_{ij}\alpha_j)\end{aligned}$$

On conclut facilement à l'égalité des coordonnées par l'hypothèse de récurrence et par 9.1.1, qui assure l'égalité : $<\alpha_i, \alpha\hat{_{j_1}}> = <\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}\hat{_{j_1}}> = 2a_{j_1 i}/a_{j_1 j_1}$.

Si $\widetilde{w} = \widetilde{r}_{j_1}\widetilde{r}_{j_2}\dots\widetilde{r}_{j_p}$, on pose $\sigma_1(\widetilde{w}) = r_{j_1}\dots r_{j_p}$, ceci est une bonne définition :

En effet, considérons, $id = \widetilde{r}_{j_1}\widetilde{r}_{j_2}\dots\widetilde{r}_{j_p}$ deux décompositions distinctes de l'identité, de longueurs respectives 0 et p dans $\widetilde{W}$.

$$\widetilde{r}_{j_1}\widetilde{r}_{j_2}\dots\widetilde{r}_{j_p}(\widetilde{\alpha}_i) = \widetilde{\alpha}_i \ (\forall i \in I) \Longrightarrow r_{j_1}r_{j_2}\dots r_{j_p}(\alpha_i) = \alpha_i, \ (\forall i \in I)$$

grâce à ce qui précède, ce qui implique évidemment que $\sigma_1(\widetilde{r}_{j_1}\widetilde{r}_{j_2}\dots\widetilde{r}_{j_p})$ est l'identité dans Q.

Il est clair que σ_1 est un homomorphisme surjectif.

b) Ψ est $(\widetilde{W}, \sigma_1(\widetilde{W}) = W_{|Q})$ équivariant.

$$\begin{aligned}\Psi(\widetilde{\alpha}_i) - \sigma_1(\widetilde{r}_{j_1}\widetilde{r}_{j_2}\dots\widetilde{r}_{j_p})(\alpha_i)\circ\Psi(\widetilde{\alpha}_i) &=\alpha_i - \sigma_1(\widetilde{r}_{j_1}\widetilde{r}_{j_2}\dots\widetilde{r}_{j_p})(\widetilde{\alpha}_i)\\ &=\alpha_i - r_{j_1}r_{j_2}\dots r_{j_p}(\alpha_i)\\ &=\sum_{j\in I_{re}} c_{ij}\alpha_j\\ &=\Psi(\widetilde{\alpha}_i - \widetilde{r}_{j_1}\widetilde{r}_{j_2}\dots\widetilde{r}_{j_p}(\widetilde{\alpha}_i))\end{aligned}$$

d'où le résultat par linéarité.

c) Enfin en ce qui concerne seulement σ_1, il résulte de 9.1.3 et de 3.2.3.b) qu'il est également injectif : Si $\widetilde{w} \in \widetilde{W}$ est tel que $\sigma_1(\widetilde{w}) = id$. Soit $\widetilde{w} = \widetilde{r}_{i_1}...\widetilde{r}_{i_n}$ une décomposition réduite de $\widetilde{w}$, on sait (3.2.3.b) que $n = |\{\alpha \in \widetilde{\Delta}_{+,nd} / \widetilde{w}(\alpha) \in \widetilde{\Delta}_-\}|$, or d'après les hypothèses $\Psi(S_{\widetilde{w}}) = \emptyset$ ce qui implique $S_{\widetilde{w}} = \emptyset$ et donc $\widetilde{w} = Id$.

Le résultat 9.1.3 n'est pas vrai dans Q_K cependant, comme les éléments de $\widetilde{W}_{Q_K}$ stabilisent Q, le résultat est encore vrai.

□

Lemme 9.2.2.

Si $i \in I_{\text{re}}$, *on a* $\Psi^{-1}(\mathbb{Q}_+ \alpha_i) \cap \widetilde{\Delta} = N_i \widetilde{\alpha}_i$.

Démonstration.

Soit $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}$, telle que $\Psi(\widetilde{\alpha}) = n_i \alpha_i$, avec $n_i \in \mathbb{Q}_+$. On sait que $\Psi(\widetilde{Q}_{\mathbb{Q},-}) \cap Q_{\mathbb{Q},+} = \{0\}$, donc l'hypothèse implique que $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}_+$.

Si $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}^{\text{im}}$, on sait que l'orbite sous $\widetilde{W}$, est formée de racines toutes positives, donc par équivariance de Ψ, $W n_i \alpha_i \in Q_{\mathbb{Q},+}$. Mais si on suppose que $j \in I_{\text{re}}$, alors $r_j(\alpha_j) \in Q_{\mathbb{Q},-} \backslash \{0\}$ donc n'est pas dans $Q_{\mathbb{Q},+}$, par suite i est forcément imaginaire.

Par suite $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}^{\text{re}}$, donc $\widetilde{\alpha} = \widetilde{w}\alpha_j$ (ou $2\widetilde{w}\alpha_j$) et $\Psi(\widetilde{r}_i \widetilde{\alpha}) \in Q_-$ donc $\widetilde{r}_i \widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}_-$ alors que $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}_+$ donc $\widetilde{\alpha}$ est proportionnelle à $\widetilde{\alpha}_i$ et est dans $\widetilde{\Delta}_+$, ce qui établit le résultat cherché.

□

Proposition 9.2.3.

L'application $\Psi \ : \ \widetilde{\Delta}^{\text{re}} \longrightarrow \Delta^{\text{re}}$ *est bijective, et* $\Psi^{-1}(\Delta^{\text{re}}) \cap \widetilde{\Delta} = \widetilde{\Delta}^{\text{re}}$.

Démonstration.

Par $\widetilde{W}$, $W_{|Q_{\mathbb{Q}}}$ équivariance de Ψ ; $\Psi(\widetilde{w}\widetilde{\alpha}_i) = w\alpha_i$ où $w = \sigma_1(\widetilde{w})$. On sait que σ_1 est surjectif donc il est clair que Ψ est surjective de $\widetilde{W}\widetilde{\alpha}_i$ sur $W\alpha_i$, donc en particulier de $\widetilde{\Delta}^{\text{re}}$ sur Δ^{re}. Par le corollaire 9.1.4, si $i \in I_{\text{re}}$ et $n_i \widetilde{w}\widetilde{\alpha}_i$ désigne une racine réelle quelconque de $\widetilde{\Delta}$, on a :

$$\begin{aligned} \Psi(n_i \widetilde{w}\widetilde{\alpha}_i) = \Psi(p_j \widetilde{w}'^{-1}\widetilde{\alpha}_j) &\Longleftrightarrow \Psi(n_i \widetilde{w}'^{-1}\widetilde{w}\widetilde{\alpha}_i) = p_j \alpha_j; \\ &\Longleftrightarrow \Psi(\widetilde{w}'^{-1}(n_i \widetilde{w}\widetilde{\alpha}_i)) = p_j \alpha_j; \end{aligned}$$

ce qui implique (d'après 9.2.2) $n_i \widetilde{w}'^{-1}\widetilde{w}\widetilde{\alpha}_i = p_j \widetilde{\alpha}_j$, et donc l'injectivité de l'application considérée.

Pour le second point, il suffit de remarquer qu'un élément de $\widetilde{\Delta}^{\text{re}}_+$ est caractérisé dans $\widetilde{\Delta}_+$ par le fait que son orbite sous W, rencontre $\widetilde{Q}_-$, on conclut par équivariance de Ψ et par le fait que $W.\alpha \cap Q_- \neq \emptyset$ pour tout $\alpha \in \Delta^{\text{re}}$.

□

9.3. Systèmes de racines

Si $\widetilde{S}$ est un revêtement de S, on construit de même que pour S au n° 8.5, $\widetilde{\Delta}_n$ pour tout entier n.

Lemme 9.3.1.

Pour tout entier n on a :

$$\widetilde{\Delta}_n \subset \Delta(A, \{N_i\}_{i \in I_{\text{im}}}) \text{ (noté } \widetilde{\Delta}\text{) et } \Delta_n(+) \subset \Psi(\widetilde{\Delta}_n(+)) \subset Q_{\mathbb{Q},+} \; .$$

Démonstration.

il est clair que $\widetilde{\Delta}_0 \subset \widetilde{\Delta}$, la récurrence sur n est alors immédiate grâce aux propriétés (SR2b), (SR3b) et (SR4b) de $\widetilde{\Delta}$ (cf 4.1). On a même plus précisément $\widetilde{\Delta}_n(+) \subset \widetilde{\Delta}_+$. Le deuxième résultat est tout aussi facilement obtenu par récurrence puisque, au rang 0 la propriété à vérifier est immédiate et que, grâce au lemme 9.1.1, on a aisément :
Si $\phi \in \Delta_n(+) \setminus \Delta_{n-1}$, par construction il existe un élément β et un indice $i \in I$ de Δ_{n-1} tel que $\phi \in Ch(\beta, \alpha_i)$ (cette chaîne n'étant pas réduite à β), auquel cas par hypothèse de récurrence il existe $\widetilde{\beta}$ dans $\widetilde{\Delta}_{n-1} \cap \Psi^{-1}(\beta)$, et $\widetilde{\beta}$ est tel que $< \widetilde{\beta}, \widetilde{\alpha}\,\check{_i} > = < \beta, \alpha\,\check{_i} >$ donc $Ch(\beta, \alpha_i) \subset \Psi(Ch(\widetilde{\beta}, \widetilde{\alpha}_i)) \subset \Psi(\widetilde{\Delta}_n)$.

□

Proposition 9.3.2.

$\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante pour l'inclusion, on pose :

$$\Delta(S) := \cup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n \; .$$

Démonstration.

On a l'inclusion $\Delta_n(+) \subset Q_{\mathbb{Q},+}$, démontrée au lemme précédent. Ainsi sur la définition de $\Delta_{n+1}(+)$, il est clair que $\Delta_n(+) \subset \Delta_{n+1}(+)$ et le résultat complet est immédiat grâce à l'inclusion $\Delta_n(-) = -\Delta_n(+) \subset -\Delta_{n+1}(+) \subset \Delta_{n+1}$.

□

Corollaire 9.3.3.

$$\Delta(S) \subset Q_{\mathbb{Q}} \; .$$

De plus, si $\Delta_+(S) = \Delta(S) \cap Q_{\mathbb{Q},+}$ et $\Delta_-(S) = \Delta(S) \cap Q_{\mathbb{Q},-}$ alors :

$$\Delta(S) = \Delta_+(S) \cup \Delta_-(S) \; .$$

Démonstration.

Cela résulte de la propriété (SR1b) de $\widetilde{\Delta}$ (cf 4.1), et du lemme 9.3.1, puisque $\Delta(S) \subset \Psi(\widetilde{\Delta})$.

□

Proposition 9.3.4.

$$\Delta^{re} \subset \Delta(S)\ .$$

Démonstration.

Elle est évidente, puisqu'il est facile de vérifier que $\Delta(S)$ est stable sous l'action de W grâce aux chaînes d'un élément à ses images par les r_i ($i \in I_{re}$). De plus Δ_0 contient $\Pi^{re} \cup 2\Pi_2$ et est contenu dans $\Delta(S)$ (avec toujours Π^{re} (resp. Π_2) l'ensemble des α_i pour $i \in I_{re}$ (resp. $i \in I_2$)).

□

Proposition 9.3.5.

Si $\widetilde{S}$ est un revêtement libre de S;

$$\Delta(\widetilde{S}) = \Delta(A, \{N_i\}_{i \in I_{\mathrm{im}}})\ .$$

(avec les notations du paragraphe 4)

Démonstration.

D'après 9.3.1, on a $\Delta_n(\widetilde{S}) \subset \Delta(A, \{N_i\}_{i \in I_{\mathrm{im}}})$ et donc $\Delta(\widetilde{S}) \subset \Delta(A, \{N_i\}_{i \in I_{\mathrm{im}}})$.

On a facilement $\Delta(\widetilde{S}) = \Delta_+(\widetilde{S}) \cup \Delta_-(\widetilde{S})$ où on a posé $\Delta_+(\widetilde{S}) = \Delta(\widetilde{S}) \cap \widetilde{Q}_{\mathbb{Q}+}$ et $\Delta_-(\widetilde{S}) = \Delta(\widetilde{S}) \cap \widetilde{Q}_{\mathbb{Q}-}$. De plus, il est clair que le système $\Delta(\widetilde{S})$ est le plus petit ensemble de $\widetilde{Q}_{\mathbb{Q},+} \cup \widetilde{Q}_{\mathbb{Q},-}$ contenant $\widetilde{\Pi}^{re} \cup (\cup_{i \in I_{\mathrm{im}}} N_i \widetilde{\alpha}_i) \subset \Delta(\widetilde{S})$ et vérifiant les trois propriétés suivantes :

- la stabilité sous $\widetilde{\alpha} \mapsto -\widetilde{\alpha}$,
- les conditions de chaînes réelles,
- (C) Pour tout $i \in I_{\mathrm{im}}$, pour tout $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}_+$ non proportionnelles à $\widetilde{\alpha}_i$, si $< \widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}\,\check{}_i > < 0$ alors $\widetilde{\alpha} + n_i \widetilde{\alpha}_i \in \Delta$ pour tout $n_i \in M_i$.

Comme $\widetilde{\Pi}^{re} \cup (\cup_{i \in I_{\mathrm{im}}} N_i \widetilde{\alpha}_i) \subset \Delta(\widetilde{S})$, on sait grâce à (C) et à la proposition 2.3.2, que $\widetilde{W}\widetilde{K}$ est inclus dans $\Delta(\widetilde{S})$ et par les deux premières propriétés rappelées il en est de même de $\widetilde{W}(\widetilde{\Pi}^{re} \cup \pm(\cup_{i \in I_{\mathrm{im}}} N_i \widetilde{\alpha}_i)) \cup \pm \widetilde{W}\widetilde{K}$. Ce qui établit l'inclusion contraire et donc l'égalité.

□

Proposition 9.3.6.

Si S désigne toujours un système générateur de racines et $\widetilde{S}$ un revêtement libre de S, alors :

$$\Delta(S) = \Psi(\Delta(\widetilde{S})) \ .$$

Si $\widetilde{\alpha} = \sum_{i \in I} n_i \widetilde{\alpha}_i \in \Delta(\widetilde{S})$ et $\alpha = \Psi(\widetilde{\alpha})$, on dira que $\sum_{i \in I} n_i \alpha_i$ est une "bonne décomposition" de α. On sait que le support de $\widetilde{\alpha}$ est connexe.

Démonstration.

D'après 9.3.1, il reste à prouver que $\Psi(\widetilde{\Delta}) \subset \Delta$. Grâce à 9.3.3, il suffit d'établir l'inclusion $\Psi(\widetilde{\Delta}_+) \subset \Delta_+$. On va montrer par "récurrence" sur $h(\widetilde{\beta})$ pour $\widetilde{\beta} \in \widetilde{\Delta}_+$ que $\Psi(\widetilde{\beta}) = \beta \in \Delta$.

D'après 9.2.3, on sait déjà que l'assertion est vraie pour $\widetilde{\beta} \in \widetilde{\Delta}^{\mathrm{re}}$. On peut donc supposer $\widetilde{\beta} \in \widetilde{\Delta}^{\mathrm{im}}_+$.

Si $h(\widetilde{\beta}) \leq 1$, alors $\widetilde{\beta} \in N_i \widetilde{\alpha}_i$ et le résultat est immédiat.

Supposons $h(\widetilde{\beta}) = n \in \mathbb{Q}_+$ et le résultat démontré pour toute racine de hauteur inférieure ou égale à $n - 3/4$.

si $\widetilde{\beta} \in \widetilde{\Delta}^{\mathrm{im}}_+$, il existe un élément du groupe de Weyl w tel que $w(\widetilde{\beta}) \in \widetilde{K}_c$ et on a $h(w(\widetilde{\beta})) \leq h(\widetilde{\beta})$ avec égalité si et seulement si $w(\widetilde{\beta}) = \widetilde{\beta}$ donc si et seulement si $\widetilde{\beta} \in \widetilde{K}_c$ et sinon $h(w(\widetilde{\beta})) \leq h(\widetilde{\beta}) - 1$.

Donc, si $\widetilde{\beta} \in \widetilde{\Delta}^{\mathrm{im}}_+ \setminus \widetilde{K}_c$, le résultat est par hypothèse de récurrence démontré pour l'élément de $\widetilde{K}_c$ conjugué sous W à $\widetilde{\beta}$ et le résultat est immédiat par équivariance de Ψ et par stabilité de Δ sous l'action de W.

Reste le cas où $\widetilde{\beta} \in \widetilde{K}_c$.

Si $\widetilde{\beta} \in N_i \widetilde{\alpha}_i$ pour un certain i, le résultat est clair.

Sinon, par 9.3.5 on sait que $\widetilde{\Delta}$ vérifie SR5b et donc il existe un indice j et un rationnel $n_j \in N_{j\,\mathrm{ind}}$ tels que $\widetilde{\beta} - n_j \widetilde{\alpha}_j \in \widetilde{\Delta}_+$, dans ce cas, on a $h(\widetilde{\beta} - n_j \widetilde{\alpha}_j) \leq h(\widetilde{\beta}) - 3/4$ et donc par hypothèse de récurrence on a $\Psi(\widetilde{\beta} - n_j \widetilde{\alpha}_j) = \beta - n_j \alpha_j \in \Delta_+$.

De plus, dans ces conditions, $< \widetilde{\beta} - n_j \widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}\,\check{}_j > < 0$:

- Si $j \in I_{\mathrm{re}}$, c'est clair car par hypothèse $\widetilde{\beta} \in \widetilde{K}_c$;

- Si $j \in I_{\mathrm{im}}$, cela résulte de la connexité des supports des éléments de $\widetilde{\Delta}$ puisque $\widetilde{\beta} \notin N_j \widetilde{\alpha}_j$ il admet au moins un autre indice dans son support.

En conséquence, sous les hypothèses précédentes, $\widetilde{\beta}$ n'est pas proportionnel à une racine simple et $< \widetilde{\beta} - n_j \widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}\,\check{}_j > < 0$ donc $\widetilde{\beta} - n_j \widetilde{\alpha}_j \notin \mathbb{Q}_+ \widetilde{\alpha}_j$ et $\widetilde{\beta} \in Ch(\widetilde{\beta} - n_j \widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}_j)$.

1) si $\beta - n_j \alpha_j \notin \mathbb{Q} \alpha_j$ alors $\beta \in Ch(\beta - n_j \alpha_j, \alpha_j)$, d'après la construction par chaînes de Δ.

2) si $\beta - n_j\alpha_j \in \mathbb{Q}\alpha_j$, (et $\widetilde{\beta} - n_j\widetilde{\alpha}_j \notin \mathbb{Q}\widetilde{\alpha}_j$) dans ce cas par 9.2.2, il est clair que $j \in I_{\mathrm{im}}$ (et $\beta - n_j\alpha_j = q\alpha_j$ n'est pas une bonne décomposition).

a) soit $\widetilde{\beta} - n_j\widetilde{\alpha}_j = m_k\widetilde{\alpha}_k$ pour $m_k \in N_k$ pour un certain k alors $< \alpha_k, \alpha\,\hat{j} >< 0$ ce qui implique $\beta \in Ch(m_k\alpha_k, \alpha_j)$ (car par SGR6b deux racines simples ne sont pas $\mathbb{Q}$-proportionnelles) et donc $\beta \in \Delta$.

b) soit $\beta - n_j\alpha_j$ n'est pas colinéaire à une racine simple mais est un élément de $\widetilde{K}_c$ puisque son image par Ψ est dans $\mathbb{Q}_+\alpha_j$. Il existe alors (par SR5b dans $\widetilde{\Delta}$) un indice k et un rationnel $m_k \in N_{k\,\mathrm{ind}}$ tels que $\widetilde{\beta} - n_j\widetilde{\alpha}_j - m_k\widetilde{\alpha}_k \in \widetilde{\Delta}_+$, et par le même argument que précédemment on a $< \widetilde{\beta} - n_j\widetilde{\alpha}_j - m_k\widetilde{\alpha}_k, \widetilde{\alpha}\,\hat{k} >< 0$. De plus $< \widetilde{\beta} - n_j\widetilde{\alpha}_j - m_k\widetilde{\alpha}_k, \widetilde{\alpha}\,\hat{j} > \leq 0$ car $\widetilde{\beta} - n_j\widetilde{\alpha}_j - m_k\widetilde{\alpha}_k$ est une racine positive et $j \in I_{\mathrm{im}}$. D'autre part $\Psi(\widetilde{\beta} - n_j\widetilde{\alpha}_j - m_k\widetilde{\alpha}_k) \in \Delta$ par récurrence.

α) si $< \widetilde{\beta} - n_j\widetilde{\alpha}_j - m_k\widetilde{\alpha}_k, \widetilde{\alpha}\,\hat{j} >< 0$ et si $\Psi(\widetilde{\beta} - n_j\widetilde{\alpha}_j - m_k\widetilde{\alpha}_k) \notin \mathbb{Q}\alpha_j$ alors $\beta - m_k\alpha_k \in Ch(\Psi(\widetilde{\beta} - n_j\widetilde{\alpha}_j - m_k\widetilde{\alpha}_k), \alpha_j)$ et, comme j est dans I_{im}, on a :
$< \widetilde{\beta} - m_k\widetilde{\alpha}_k, \widetilde{\alpha}\,\hat{k} > = < \widetilde{\beta} - n_j\widetilde{\alpha}_j - m_k\widetilde{\alpha}_k, \widetilde{\alpha}\,\hat{k} > + n_j < \widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}\,\hat{k} > < 0$ alors :

si $k \neq j$ on a $\beta \in Ch(\beta - m_k\alpha_k, \alpha_k)$ car β n'est pas $\mathbb{Q}$-proportionnel à α_k.

si $k = j$ on recommence le raisonnement du b) en remplaçant β par $\beta - m_k\alpha_k$ (c'est le même raisonnement mais avec $n_j \in M_j^*$ au lieu de $N_{j\,\mathrm{ind}}$). Cette boucle sera faite jusqu'à arriver au cas $j \neq k$ ce qui est possible car $\widetilde{\beta} \notin \mathbb{Q}\widetilde{\alpha}_i$ et que la hauteur descend d'au moins 3/4 à chaque fois.

β) si $< \widetilde{\beta} - n_j\widetilde{\alpha}_j - m_k\widetilde{\alpha}_k, \widetilde{\alpha}\,\hat{j} >$ est strictement négatif et $\Psi(\widetilde{\beta} - n_j\widetilde{\alpha}_j - m_k\widetilde{\alpha}_k) \in \mathbb{Q}\alpha_j$ alors $k = j$ et on recommence la boucle précédente jusqu'à arriver au cas $j \neq k$.

γ) si $< \widetilde{\beta} - n_j\widetilde{\alpha}_j - m_k\widetilde{\alpha}_k, \widetilde{\alpha}\,\hat{j} > = 0$, on a forcément $< \widetilde{\alpha}_k, \widetilde{\alpha}\,\hat{j} >< 0$ car comme $\beta \in \mathbb{Q}\alpha_j$, $< \widetilde{\beta} - n_j\widetilde{\alpha}_j, \widetilde{\alpha}\,\hat{j} >< 0$. De plus $\widetilde{\beta} - n_j\widetilde{\alpha}_j - m_k\widetilde{\alpha}_k$ a un support S qui n'est pas lié à j car $\widetilde{\beta} - n_j\widetilde{\alpha}_j - m_k\widetilde{\alpha}_k = \sum_{p\in S} n_p\widetilde{\alpha}_p$ avec $n_p > 0$ et $j \in I_{\mathrm{im}}$ donc l'hypothèse implique $< \widetilde{\alpha}_p, \widetilde{\alpha}\,\hat{j} > = 0$ pour tout $p \in S$ et en particulier on en déduit que $k \notin S$.

Or par hypothèse, $\beta - n_j\alpha_j \in \mathbb{Q}\alpha_j$ soit $q \in \mathbb{Q}$ tel que $\beta - n_j\alpha_j = q\alpha_j$ on a alors si $l \in S$, $< \sum_{p\in S} n_p\alpha_p, \alpha\,\hat{l} > = < q\alpha_j - n_k\alpha_k, \alpha\,\hat{l} >\ 0- < n_k\alpha_k, \alpha\,\hat{l} > \geq 0$. De plus, par connexité du support de $\widetilde{\beta}$ il existe dans S au moins un indice l lié à k et donc pour lequel $< \sum_{p\in S} n_p\alpha_p, \alpha\,\hat{l} > > 0$. D'après la caractérisation du type des matrices de Vinberg (cf 1.2), S est une partie de type fini de I. Par suite, la racine $\sum_{p\in S} n_p\alpha_p$ est une racine réelle.

Dans Δ, $m_k\alpha_k \in \Delta$ puisque $m_k \in N_k$, $n_j\alpha_j + m_k\alpha_k \in Ch(m_k\alpha_k, \alpha_j)$, de plus $< n_j\alpha_j + m_k\alpha_k, (\sum_{p\in S} n_p\alpha_p)\hat{} >< 0$ (cf 7.2.4), il existe un élément $w \in W$ tel que $w(\sum_{p\in S} n_p\alpha_p)$ est proportionnel à une racine simple réelle, par stabilité de Δ sous W, $w(n_j\alpha_j + m_k\alpha_k) \in \Delta$ et n'est pas proportionnel à $w(\sum_{p\in S} n_p\alpha_p)$ (puisque cette dernière est réelle) donc $w(n_j\alpha_j + m_k\alpha_k) + w(\sum_{p\in S} n_p\alpha_p) \in Ch(w(n_j\alpha_j + m_k\alpha_k), w(\sum_{p\in S} n_p\alpha_p))$

et le résultat cherché vient par stabilité de Δ sous l'action de W.

□

Corollaire 9.3.7.

$\Delta(S)$ est le plus petit sous ensemble de $Q_{\mathbb{Q}}$ contenant $N_i\alpha_i$ pour tout $i \in I$ et vérifiant les deux propriétés suivantes :

1) Si $\alpha \in \Delta(S)$ alors $-\alpha \in \Delta$; (propriété de symétrie)

2) Si $\alpha \in \Delta(S) \cap Q_{\mathbb{Q},+}$ et si $i \in I$, alors la α_i-chaîne issue de α : $Ch(\alpha, \alpha_i)$ est incluse dans $\Delta(S)$.

Démonstration.

évident par construction.

□

Remarque :

Supposons $\Pi = \Pi^{\text{re}}$, il résulte aussitôt de ce corollaire que $\Delta(S)$ est le plus petit sous-ensemble Ω de $Q_{\mathbb{Q}}$ contenant $\Delta^{\text{re}}(S)$ et tel que :

Pour tout $\alpha \in \Omega$ et tout $\beta \in \Delta^{\text{re}}$ non proportionnelles :

$$[\beta, r_\alpha(\beta)] = \{\beta, \beta \pm \alpha, \ldots, \beta - < \beta, \alpha\check{\ } > \alpha\} \subset \Omega$$

Corollaire 9.3.8.

$\Delta(S)$ vérifie les propriétés suivantes :

- $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$;
- $\forall i \in I_{\text{re}},\ \forall \alpha \in \Delta_+ \setminus \mathbb{Z}\alpha_i,\ \ Ch(\alpha, \alpha_i) \subset \Delta_+$;
- $\forall i \in I_{\text{im}}\ \forall \alpha \in \Delta_+ \setminus \mathbb{Q}\alpha_i,\ \ (< \alpha, \alpha_i\check{\ } >< 0) \Longrightarrow \alpha + n_i\alpha_i \in \Delta$ pour tout $n_i \in M_i$;
- $\forall \alpha \in \Delta_+ \setminus (\cup_{i \in I}\mathbb{Q}\alpha_i),\ \exists i \in I$ et $n_i \in N_{i,\text{ind}}$ tels que $\alpha - n_i\alpha_i \in \Delta_+$;
- $\forall i \in I_{\text{re}},\ \ \Delta \cap \mathbb{Q}_+\alpha_i = N_i\alpha_i$;
- $\forall i \in I_{\text{im}},\ \ N_i\alpha_i \subset \Delta \cap \mathbb{Q}_+\alpha_i$.

Démonstration.

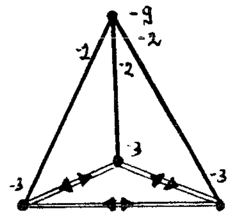
Immédiat par la proposition 9.3.3, le lemme 9.2.2 et les propriétés d'un système de racines à base libre (4.1).

□

Remarque :

Dans le cas d'une "racine simple" imaginaire l'ensemble des racines positives multiples de α_i n'est pas forcément réduit à $N_i\alpha_i$. Un autre multiple $q\alpha_i$ peut apparaître comme image par Ψ d'une racine imaginaire de $\widetilde{\Delta}$, dans ce cas, $q\alpha_i$ n'est pas une "bonne décomposition". Si, par exemple on considère la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & 2 & -3 \\ -2 & -2 & -2 & -9 \end{pmatrix} \text{ de diagramme de Dynkin}$$



On peut avoir dans V l'égalité : $(2/3)\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ (il suffit de prendre $V = \widetilde{Q}_K$ quotienté par cette relation) ainsi comme $k(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \in \widetilde{\Delta}^{\text{im}}$ pour tout entier non nul k, on a $(2k/3)\alpha_4 \in \Delta$. Et donc si on veut que le S.G.R. soit normalisé, il faut que $2k/3 \notin N_4$ $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$.

Proposition 9.3.9.

Soit ϕ un isomorphisme d'un S.G.R. $S = (A, V, V\hat{}, \Pi, \Pi\hat{}, \{N_i\}_{i\in I_{\text{im}}})$ sur un S.G.R. $S^1 = (A^1, V^1, V^1\hat{}, <,>^1, \Pi^1, \Pi^1\hat{}, \{N_j^1\}_{j\in I^1_{\text{im}}})$, alors l'isomorphisme ϕ de V sur V^1 échange $\Delta(S)$ et $\Delta(S^1)$.

Remarque :

Si Φ est un morphisme de S sur S^1 qui injecte Π dans Π^1 (donc $\widetilde{Q}$ dans $\widetilde{Q}^1$) alors $\Phi(\Delta(S)) \subset \Delta(S^1)$. Si Φ n'est pas injectif sur Π, il faut ajouter des conditions de compatibilités entre les N_i et les N_j^1.

Démonstration.

Par hypothèse, ϕ est un isomorphisme de S.G.R, par suite il induit une bijection de Π sur Π^1, ainsi qu'une bijection de I sur I^1 grâce à laquelle on peut identifier I et I^1, on a alors :

par (M1) $N_i = N_i^1$ et $k_i = 1$ pour tout $i \in I$; (ceci quitte à changer α_i et N_i si N_i n'a pas de plus petit élément, ce qui ne change pas $\Delta(S)$)

par (M2) $sgn(a_{ij}) = sgn(a^1_{ij})$ pour tout couple (i,j) d'éléments de I;

par (M3) $a_{ij} = a^1_{ij}$ pour tout $i \in I_{\text{re}}$.

Ainsi, il est clair que les matrices C et C^1 associées respectivement à A et A^1 dans la proposition 5.5.2 sont égales. Considérons alors des revêtements libres de V (resp. V^1) V et $\widetilde{V}^1$ et l'application $\widetilde{\phi}$ de $\widetilde{Q}$ dans $\widetilde{Q}^1$ qui envoie $\widetilde{\alpha}_i$ sur $\widetilde{\alpha}^1_{\phi i}$. Il est clair alors que

$\widetilde{\phi}(\Delta(A,\{N_i\})) = \widetilde{\phi}(\Delta(C,\{N_i\})) = \Delta(A^1,\{N_{\phi i}\})$ et que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Delta(A,\{N_i\}) & \xrightarrow{\widetilde{\phi}} & \Delta(C,\{N_i\}) \\ {\scriptstyle\Psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Psi^1} \\ \Delta(S) & \xrightarrow{\phi} & \Delta(S^1) \end{array}$$

est commutatif ce qui établit le résultat cherché.

□

La démonstration de la remarque est analogue. Si Φ induit une injection de Π dans Π^1, elle induit une injection de I dans I^1 et on peut encore identifier I et son image. On a alors $N_i \subset N_i^1$ et la matrice C est extraite de C^1 et donc :

$$\widetilde{\phi}(\Delta(A,\{N_i\}_{i\in I})) = \widetilde{\phi}(\Delta(C,\{N_i\}_{i\in I})) \subset \Delta(C^1,\{N_i^1\}_{i\in I^1}) = \Delta(A^1,\{N_{\phi i}\}_{i\in I^1})\ .$$

Si Φ n'est pas injective, les hypothèses de compatibilité à ajouter sont du genre de celles de l'exemple suivant :

Si l'ensemble I a deux éléments tels que $a_{11} = a_{22} = a_{12} = a_{21}$ et si $\Phi(\alpha_1) = \Phi(\alpha_2) = \alpha_1^1$ il faut que N_1^1 contienne la plus partie de $\mathbb{Q}$ contenant N_i pour $i \in \{1,2\}$ et stable sous l'addition.

9.4. Le groupe de Weyl

Lemme 9.4.1.

Si $\alpha \in \Delta_+(S)$, et $r_i(\alpha) \in \Delta_-(S)$ pour $i \in I_{\rm re}$, alors $\alpha \in N_i\alpha_i$.

Démonstration.

On connait le résultat analogue dans $\widetilde{\Delta}$, on conclut grâce à l'équivariance de Ψ et à la relation $\Psi(\widetilde{Q}_{\mathbb{Q},+}) \cap \Psi(\widetilde{Q}_{\mathbb{Q},-}) = Q_{\mathbb{Q},+} \cap Q_{\mathbb{Q},-} = \{0\}$ (9.1.3).

□

Lemme 9.4.2.

Si $i \in I$, si $w(n_i\alpha_i) = n_j\alpha_j$ avec $n_i \in N_i$ et $n_j \in N_j$, alors $w(\alpha\,\hat{i}) = \alpha\,\hat{j}$.

Démonstration.

Par W équivariance de Ψ, l'hypothèse s'écrit $\Psi(w(n_i\widetilde{\alpha}_i)) = n_j\alpha_j$.

Si $j \in I_{\mathrm{im}}$, cela implique $< w(\widetilde{\alpha}_i), \widetilde{\alpha}\,\hat{k} > \leq 0$ pour tout $k \in I$ et donc $w(n_i\widetilde{\alpha}_i)$ est dans l'intersection de $W(n_i\widetilde{\alpha}_i)$ avec $\widetilde{K}_c$ (qui est vide si $i \in I_{\mathrm{re}}$ et réduite à un élément d'après 3.2.4 si $i \in I_{\mathrm{im}}$). Ceci prouve que $w(n_i\widetilde{\alpha}_i) = n_i\widetilde{\alpha}_i$ et donc $i = j$ et w fixe $\widetilde{\alpha}_i$ ce qui implique $w \in \langle r_j; < \alpha_i, \alpha\,\hat{j} > = 0\rangle$. Il est alors clair que $w(\alpha\,\hat{i}) = \alpha\,\hat{i}$.

Si $j \in I_{\mathrm{re}}$, alors d'après 9.2.2, $w(n_i\widetilde{\alpha}_i) \in \widetilde{\Delta} \cap \Psi^{-1}(N_j\alpha_j) = N_j\widetilde{\alpha}_j$ et le résultat est alors connu (3.4.1).

□

Lemme 9.4.3.

Soient $i \in I_{\mathrm{re}}$, $t \in \mathbb{N}^*$, $i_1, i_2, \ldots, i_t$ dans I_{re}; tels que $r_{i_1} \ldots r_{i_t}(\alpha_i) \in \Delta_-^{\mathrm{re}}$, alors il existe un indice s vérifiant $1 \leq s \leq t$, tel que

$$r_{i_1} \ldots r_{i_t} r_i = r_{i_1} \ldots r_{i_{s-1}} r_{i_{s+1}} \ldots r_{i_t} \ .$$

Démonstration.

On pose pour tout $k \in \{1 \ldots t\}$, $\beta_k = r_{i_k} \ldots r_{i_t}(\alpha_i)$, $\beta_{t+1} = \alpha_i$ d'après les hypothèses, il existe un indice k tel que $\beta_h \in \Delta_+$ pour tout $h > k$ et $\beta_k \in \Delta_-$, de 9.1.3 on déduit que $\widetilde{r}_{i_k} \ldots \widetilde{r}_{i_t}(\widetilde{\alpha}_i)$ est dans $\widetilde{\Delta}_-$ et les $\widetilde{r}_{i_h} \ldots \widetilde{r}_{i_t}(\widetilde{\alpha}_i)$ dans $\widetilde{\Delta}_+$, d'après 3.3.2 on a alors $\widetilde{r}_{i_{k+1}} \ldots \widetilde{r}_{i_t}(\widetilde{\alpha}_i) \in \{\widetilde{\alpha}_{i_k}, 2\widetilde{\alpha}_{i_k}\}$, mais il s'agit d'une racine indivisible d'où l'égalité $\widetilde{r}_{i_{k+1}} \ldots \widetilde{r}_{i_t}(\widetilde{\alpha}_i) = \widetilde{\alpha}_{i_k}$ qui implique $r_{i_{k+1}} \ldots r_{i_t}(\alpha_i) = \alpha_{i_k}$.

Par le lemme 9.4.2, on sait qu'alors $r_{i_{k+1}} \ldots r_{i_t}(\alpha\,\hat{i}) = \alpha\,\hat{i_k}$, par suite pour tout $v \in V$, $r_{i_k}(v) = v - < v, r_{i_{k+1}} \ldots r_{i_t}(\alpha\,\hat{i}) > r_{i_{k+1}} \ldots r_{i_t}(\alpha_i) = w r_i w^{-1}$ en posant $w = r_{i_{k+1}} \ldots r_{i_t}$. Ceci étant vrai pour tout $v \in V$, on a dans $\mathrm{GL}(V)$:

$$\begin{aligned} r_{i_1} \ldots r_{i_{k-1}} r_{i_k} r_{i_{k+1}} \ldots r_{i_t} r_i &= r_{i_1} \ldots r_{i_{k-1}} w r_i w^{-1} r_{i_{k+1}} \ldots r_{i_t} r_i \\ &= r_{i_1} \ldots r_{i_{k-1}} r_{i_{k+1}} \ldots r_{i_t} r_i r_i \\ &= r_{i_1} \ldots r_{i_{k-1}} r_{i_{k+1}} \ldots r_{i_t}. \end{aligned}$$

□

Définition :

Si $w \in W$, on pose :

$$l(w) = min\{p \in \mathbb{N} \,/\, \exists (i_1, \ldots i_p) \in I_{\mathrm{re}}^p \,/\, w = r_{i_1} \ldots r_{i_p}\} \ .$$

On a alors $w \in W$, $l(w) = 0 \Longleftrightarrow w = id$.

Lemme 9.4.4.

Si $w \in W \setminus \{Id\}$, et $w = r_{i_1} \dots r_{i_p}$ où $p = l(w)$,

a) $i \in I_{\mathrm{re}}$ est tel que $l(wr_i) < l(w)$ si et seulement si $w(\alpha_i) \in \Delta_-(S)$;

b) $w(\alpha_{i_p}) \in \Delta_-(S)$.

Démonstration.

a) Par le lemme 9.4.3, $w(\alpha_i) \in \Delta_-(S) \Longrightarrow l(wr_i) < l(w)$. Supposons alors $w(\alpha_i) \in \Delta_+$ alors $wr_i(\alpha_i) \in \Delta_-(S)$ donc par ce qui précède $l(wr_ir_i) = l(w) < l(wr_i)$. D'où le résultat.

b) Par minimalité de la décomposition, on a forcément $l(w) > l(r_{i_1} \dots r_{i_{p-1}})$, on conclut grâce au a).

□

Proposition 9.4.5.

a) L'application ρ de W dans $W_{|Q_{\mathbb{Q}}}$ qui a tout élément du groupe de Weyl associe sa restriction à $Q_{\mathbb{Q}}$ est un isomorphisme.

b) Il existe un unique isomorphisme noté σ de $\widetilde{W}$ sur W pour laquelle Ψ est $(\widetilde{W}, W)$ équivariante.

Démonstration.

a) Soit w un élément de W qui induit l'identité sur $Q_{\mathbb{Q}}$. Alors pour tout $i \in I$, $w(\alpha_i) = \alpha_i$. Supposons la longueur de w non nulle $l(w) = p > 0$ et $w = r_{i_1} \dots r_{i_p}$ une décomposition réduite dans W, alors par (9.4.3) $w(\alpha_{i_p}) = \alpha_{i_p} \in Q_{\mathbb{Q},-} \cap Q_{\mathbb{Q},+}$ ce qui est absurde d'après 9.1.3, puisque $\alpha_{i_p} \neq 0$ ($< \alpha_{i_p}, \alpha\check{_{i_p}} > > 0$). Par suite $l(w) = 0$ c'est à dire $w = Id$, donc ρ est injective.

b) est alors immédiat par composition de σ_1 (9.2.1) et de ρ, on obtient l'isomorphisme cherché, son unicité étant évidente à partir de celle de σ_1.

□

Corollaire 9.4.6.

a) W est le groupe de Coxeter associé à la matrice de Cartan généralisée $K(A)$, obtenue à partir de A par le procédé décrit en 3.2.1;

b) Pour tout $w \in W$, $l(w) = |\{\alpha \in \Delta^{\mathrm{re}}_{\mathrm{nd},+} \ / \ w(\alpha) \in \Delta_-\}|$;

c) Si i et j sont deux indices réels $w(\alpha_i) = \pm\alpha_j \Longleftrightarrow wr_iw^{-1} = r_j$.

Démonstration.

a) Immédiat d'après l'existence de σ et le résultat pour $\widetilde{W}$.

b) Pour tout $w \in W$, $l(w) = l(\sigma^{-1}(w)) = |\{\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}^{\text{re}}_{+} \ / \ \Psi(\widetilde{\alpha}) \in \widetilde{\Delta}_{-}\}|$ mais on sait que ψ induit une bijection entre les racines réelles du revêtement et celles du système générateur de racines (9.2.3), ce qui permet de démontrer le résultat annoncé.

c) On démontre également ce point en utilisant (9.2.3) et le résultat analogue dans le revêtement puisque par une éventuelle composition par r_j on se ramène à utiliser le lemme **3.3.2**, qui prouve que $w(\widetilde{\alpha}_i) = \pm\widetilde{\alpha}_j$ implique $w(\widetilde{\alpha}\,\hat{}_i) = \pm\widetilde{\alpha}\hat{}_j$ ce qui établit l'implication directe, la réciproque étant triviale.

□

Corollaire 9.4.7.

a) Si $\alpha = w(\alpha_i)$ avec $i \in I_{\text{re}}$, alors $\alpha\hat{} = w(\alpha\,\hat{}_i)$ et $\alpha\check{} = \sigma_2(\sigma^{-1}(w))(\alpha\check{}_i)$ ne dépendent pas de la décomposition considérée.(en réalité grâce à l'isomorphisme σ_1 et à l'homomorphisme surjectif σ_2, on peut noter $w(\alpha\check{}_i) = \sigma_2(\sigma_1^{-1}(w))(\alpha\check{}_i)$.)

b) Pour tout $\alpha \in \Delta^{\text{re}}$, on définit une réflexion dans V en posant :
Pour tout $v \in V$, $r_\alpha(v) := v - \langle v, \alpha\check{} \rangle \alpha$.
Si $\alpha \in \{w(\alpha_i), 2w(\alpha_i)\}$, alors $r_\alpha = w^{-1} r_i w$, et on a :

$$W = \left\langle r_\alpha, ; \alpha \in \Delta^{\text{re}} \right\rangle .$$

Démonstration.

α étant une racine réelle son antécédent dans $\widetilde{\Delta}$ est unique (8.3.1), on le note $\widetilde{\alpha}$. Cette unicité et l'équivariance de Ψ impliquent l'égalité $\widetilde{\alpha} = \sigma^{-1}(w)(\widetilde{\alpha}_i)$ et donc par (3.4.1) $\widetilde{\alpha}\hat{} = \sigma^{-1}(w)(\widetilde{\alpha}\,\hat{}_i)$, ainsi $\Psi\check{}(\widetilde{\alpha}\hat{}) = \sigma_2(\sigma^{-1}(w))(\alpha\,\hat{}_i)$. Le reste est alors immédiat.

□

10. Structure du système de racines $\Delta(S)$

10.1. Les sous-systèmes $\Delta(J)$ avec $J \subset I$

On considère toujours le système générateur de racines défini sur K, $S = (A, V, V\hat{}, \langle,\rangle, \Pi, \Pi\hat{}, \{N_i\}_{i \in I_{\text{im}}})$.

Proposition 10.1.1.

Soit J une partie quelconque de I, alors :
$S_J = (A(J), V, V\check{}, <,>, \Pi(J), \Pi\check{}(J), \{N_i\}_{i \in I_{\text{im}} \cap J})$ *est un système générateur de racines, de groupe de Weyl* $W_J = < r_i\, ;\ (i \in I_{\text{re}} \cap J)\} >$, *de système de racines;*

$$\Delta(J) = \Psi(\widetilde{\Delta}(J)) = \{\alpha \in \Delta \,/\exists \widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta} \cap \widetilde{Q}(J)\ ; \Psi(\widetilde{\alpha}) = \alpha\}$$

En particulier $\Delta^{\text{re}}(J) = \Delta^{\text{re}} \cap (Q_+(J) \cup Q_-(J))$.

L'identité de V induit un morphisme de S.G.R : $S_J \longrightarrow S$.

De plus, si S vérifie la condition (Z) ou l'hypothèse (SGRN), il est clair qu'il en est de même pour S_J.

N.B : En général, l'égalité $\Delta^{\text{re}}(J) = \Delta^{\text{re}} \cap Q(J)$ est fausse, elle est cependant vérifiée dès que Π^{re} est libre (la démonstration étant basée sur la même récurrence). On a évidemment aussi, en général, $\Delta(J) \neq \Delta \cap Q_{\mathbb{Q}}(J)$. Si on considère par exemple la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & -4 & -1 \\ -1 & -4 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Alors on peut trouver une réalisation de A dans laquelle $\alpha_4 := -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ et donc il est clair que la racine α_4 est dans $Q(J)$ pour $J := \{1, 2, 3\}$.

Remarque :

On obtient d'autres sous-systèmes intéressants en considérant de même une partie J de I mais en choisissant des ensembles N'_j pour $j \in J$ seulement inclus dans les N_j définis pour le système (la démonstration étant analogue à celle faite ici).

Démonstration.

Il est clair en effet que S_J possède les propriétés requises pour être un système générateur de racines et que de plus $(A(J), \widetilde{V}, \widetilde{V}\check{}, <,>, \widetilde{\Pi}(J), \widetilde{\Pi}\check{}(J), \{N_i\}_{i \in I_{\text{im}} \cap J})$ est un revêtement de S_J. D'après le corollaire 4.2.3, $\widetilde{\Delta} \cap \widetilde{Q}_{\mathbb{Q}}(J)$ est le système de racines de $\widetilde{S}_J$, par la projection, on a le résultat dans V. En ce qui concerne les racines réelles, dans le revêtement libre, il est clair que $\widetilde{\Delta}^{\text{re}}(J) = \widetilde{\Delta}^{\text{re}} \cap \widetilde{Q}_{\mathbb{Q}}(J)$ (cf 4.2.3), une racine réelle de $\widetilde{\Delta} \cup \widetilde{Q}_{\mathbb{Q}}(J)$ donnant une racine réelle dans $\widetilde{\Delta}(J)$ (cf structure d'un système de racines à base libre). L'inclusion $\Delta^{\text{re}}(J) \subset \Delta^{\text{re}} \cap (Q_+(J) \cup Q_-(J))$ est évidente. Pour montrer la réciproque, on peut ne considérer que le cas des éléments $\alpha \in \Delta^{\text{re}} \cap Q_+(J)$ et on procède par récurrence sur la hauteur (définie comme la hauteur de l'unique élément $\widetilde{\alpha}$ de $\widetilde{\Delta}$ tel que $\Psi(\widetilde{\alpha}) = \alpha$). Si la hauteur est 1, le résultat est dû à (P.I.F) cf 9.1.4, sinon comme $\widetilde{\alpha}$ est réelle, il existe $i \in S_{\widetilde{\alpha}}$ tel que $< \widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}\check{}_i > > 0$ ce qui implique $i \in J$ et on se ramène à $r_i(\alpha)$, pour lequel on peut conclure par hypothèse de récurrence.

Les deux autres assertions sont immédiates.

□

10.2. Les coracines

Proposition 10.2.1.

Soit α une racine réelle on a :
Si β est une racine non proportionnelle à α alors $\{\beta, \beta \pm \alpha, \ldots, \beta - <\beta, \alpha\check{}> \alpha\} \subset \Delta$.

Démonstration.

On utilise le résultat analogue déjà établi dans $\widetilde{\Delta}$ (cf 4.1) pour une racine réelle simple et la stabilité de $\widetilde{\Delta}$ sous $\widetilde{W}$.

□

Proposition 10.2.2.

Si α est une racine imaginaire positive on note :

$$\zeta(\alpha) = \Psi^{-1}(\alpha) \cap \widetilde{\Delta} \text{ et } \zeta\hat{}(\alpha) = \{\widetilde{\beta}\hat{} \; / \; \widetilde{\beta} \in \zeta(\alpha)\} \; .$$

Si α et β sont toutes deux des racines imaginaires positives et si il n'existe pas d'élément w du groupe de Weyl tel que $w(\alpha)$ et $w(\beta)$ soient proportionnelles à une même "racine simple" α_i avec des coefficients dans N_i on a :

$$< \beta, \Psi\hat{}(\zeta\hat{}(\alpha)) > \neq \{0\} \Longrightarrow \beta + \alpha \in \Delta \; .$$

Démonstration.

Considérons $\widetilde{\beta}$ un élément de $\zeta(\beta)$. Sous les hypothèses de la proposition, il est clair qu'il existe au moins un élément $\widetilde{\gamma}\hat{}$ de $\zeta\hat{}(\alpha)$ tel que $< \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}\hat{} > \neq 0$. D'après 7.3.2, on a alors $\widetilde{\beta} + \widetilde{\gamma} \in \widetilde{\Delta}$ sauf dans le cas où $\widetilde{\beta}$ et $\widetilde{\gamma}$ sont conjuguées sous l'action d'un même élément du groupe de Weyl à un multiple d'une même "racine simple" imaginaire, et le résultat cherché vient par projection.

□

Proposition 10.2.3.

Si α est une racine réelle positive et β une racine imaginaire positive et si il existe $\widetilde{\beta}\hat{}$ un élément de $\zeta\hat{}(\beta)$ tel que $< \Psi^{-1}(\alpha), \widetilde{\beta}\hat{} > < 0$ alors $< \widetilde{\beta}, \Psi^{-1}(\alpha\hat{}) > < 0$ et donc $\beta + \alpha \in \Delta$.

Démonstration.

Immédiat d'après les propriétés du revêtement (cf 4.1 (SR3b) et 7.2.4).

□

Remarque :

Des trois propositions précédentes, il résulte que si α, β sont des racines positives telles que $\beta \notin \mathbb{Q}\alpha$ et si $< \alpha, \beta\check{} > < 0$ (pour un $\beta\check{} \in \Psi\check{}(\zeta\check{}(\beta))$ si β est imaginaire) alors $\alpha + \beta \in \Delta$. Si α et β sont imaginaires, la condition $\beta \notin \mathbb{Q}\alpha$ peut être affaiblie (10.2.2).

Lemme 10.2.4.

Si α est une racine imaginaire positive, il existe $w \in W$ et un élément $\widetilde{\alpha}$ de $\zeta(\alpha)$ tels que $w(\widetilde{\alpha}) \in \widetilde{K}_c$, et alors $w(\zeta(\alpha)) \subset \widetilde{K}_c$.

Pour un tel choix de w, $FS_{\widetilde{\beta}} \setminus Z_{\widetilde{\beta}}$ (cf 6.1 et 6.2.2) ne dépend pas du choix de $\widetilde{\beta}$ dans $\zeta(w(\alpha)) = w(\zeta(\alpha))$.

Démonstration.

Soient $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ deux éléments de $\zeta(\alpha)$ alors $\widetilde{\alpha}$ étant une racine imaginaire positive il existe un élément du groupe de Weyl w tel que $w(\widetilde{\alpha}) \in \widetilde{K}_c$. Par équivariance de Ψ on a

$$\begin{aligned} \Psi(\widetilde{\alpha}) = \Psi(\widetilde{\beta}) &\Longleftrightarrow \Psi(w(\widetilde{\alpha})) = \Psi(w(\widetilde{\beta})) \\ &\Longrightarrow < \Psi(w(\widetilde{\alpha})), \alpha\check{}_i > = < \Psi(w(\widetilde{\beta})), \alpha\check{}_i > \\ &\Longrightarrow < w(\widetilde{\alpha}), \widetilde{\alpha}\check{}_i > = < w(\widetilde{\beta}), \widetilde{\alpha}\check{}_i > \end{aligned}$$

Ce qui impose $w(\widetilde{\beta}) \in \widetilde{K}_c$.

□

Remarque :

Plus précisément avec les notations de 6.1 et 6.2.2 :

$$(I \setminus FS_{w(\widetilde{\alpha})}) \cup Z_{w(\widetilde{\alpha})} = (I \setminus FS_{w(\widetilde{\beta})}) \cup Z_{w(\widetilde{\beta})} = \{i \in I \,/ < w(\widetilde{\alpha}), \alpha\check{}_i > = 0\} \ .$$

Proposition 10.2.5.

Si α est une racine imaginaire et si $\zeta(\alpha)$ contient une racine imaginaire affine (au sens de 6.2.3) alors il n'est formé que de racines imaginaires affines.

On pourra donc ainsi parler du type d'une racine α imaginaire :

$$\begin{aligned} \alpha \text{ est de type affine } &\Longleftrightarrow \exists \widetilde{\alpha} \in \zeta(\alpha) \,/\, \widetilde{\alpha} \text{ est de type affine ;} \\ &\Longleftrightarrow \forall \widetilde{\alpha} \in \zeta(\alpha),\ \widetilde{\alpha} \text{ est de type affine .} \\ \alpha \text{ est de type indéfini } &\Longleftrightarrow \exists \widetilde{\alpha} \in \zeta(\alpha) \,/\, \widetilde{\alpha} \text{ est de type indéfini ;} \\ &\Longleftrightarrow \forall \widetilde{\alpha} \in \zeta(\alpha),\ \widetilde{\alpha} \text{ est de type indéfini.} \end{aligned}$$

Démonstration.

On peut supposer que la racine α est positive. Soit alors $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ deux éléments distincts de $\zeta(\alpha)$.

$$\exists \widetilde{w} \in \widetilde{W} \ / < \widetilde{w}(\widetilde{\alpha}), \widetilde{\alpha}\,\check{_i} > \leq 0 \ (\forall i \in I),$$
$$\text{alors} < \sigma(\widetilde{w})(\alpha), \alpha\,\check{_i} > \leq 0 \ (\forall i \in I)$$
$$\text{donc} < \widetilde{w}(\widetilde{\beta}), \widetilde{\alpha}\,\check{_i} > \leq 0 \ (\forall i \in I)$$

ce qui montre que $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ sont simultanément envoyés dans $\widetilde{K}_c$.

Le type d'une racine n'étant pas modifié par l'action d'un élément du groupe de Weyl, on peut supposer dans la suite que $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ sont dans $\widetilde{K}_c$.

Supposons $\widetilde{\alpha}$ de type affine, on sait qu'alors $S_{\widetilde{\alpha}} = Z_{\widetilde{\alpha}}$.

1) Si $S_{\widetilde{\beta}} \cap S_{\widetilde{\alpha}} \neq \emptyset$, d'après 10.2.4 $(I \setminus FS_{\widetilde{\beta}}) \cup Z_{\widetilde{\beta}} = (I \setminus FS_{\widetilde{\alpha}}) \cup Z_{\widetilde{\alpha}}$ mais $S_{\widetilde{\alpha}} = Z_{\widetilde{\alpha}}$ rencontre $S_{\widetilde{\beta}}$ donc $Z_{\widetilde{\beta}}$ et est connexe donc $S_{\widetilde{\alpha}} \subset Z_{\widetilde{\beta}}$. La partie $Z_{\widetilde{\beta}}$ n'est donc pas de type fini, on sait alors que $\widetilde{\beta}$ est nécessairement de type affine avec $S_{\widetilde{\beta}} = Z_{\widetilde{\beta}}$ donc les supports des deux éléments sont égaux (un support de type affine ne contient strictement que des parties de type fini). La racine $\widetilde{\beta}$ est donc de type affine.

2) Si $S_{\widetilde{\beta}} \cap S_{\widetilde{\alpha}} = \emptyset$. Supposons que $\widetilde{\beta}$ ne soit pas de type affine. Alors il existe $i \in S_{\widetilde{\beta}}$ tel que $< \widetilde{\beta}, \widetilde{\alpha}\,\check{_i} > < 0$ et donc $i \in FS_{\widetilde{\alpha}} \setminus S_{\widetilde{\alpha}}$ d'après (10.2.4). Par définition de $FS_{\widetilde{\alpha}}$, il existe $j \in S_{\widetilde{\alpha}}$ tel que $< \widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}\,\check{_j} > < 0$ mais alors $j \in Z_{\widetilde{\alpha}} \cap FS_{\widetilde{\beta}}$ donc $j \in Z_{\widetilde{\beta}} \subset S_{\widetilde{\beta}}$ car $Z_{\widetilde{\alpha}} = S_{\widetilde{\alpha}} \subset (I \setminus FS_{\widetilde{\beta}}) \cup Z_{\widetilde{\beta}}$ ce qui contredit l'hypothèse $S_{\widetilde{\alpha}} \cap S_{\widetilde{\beta}} = \emptyset$.

□

Remarque :

Considérons toujours $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ dans $\zeta(\alpha) \cap K_c$.

Dans le cas où $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ ont des supports égaux (affines), $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\beta}$ sont $\mathbb{Q}$-proportionnelles puisque Corang $(A(S_{\widetilde{\alpha}})) = 1$.

Sinon $S_{\widetilde{\alpha}} \cap S_{\widetilde{\beta}} = \emptyset$ et de plus $FS_{\widetilde{\alpha}} \cap S_{\widetilde{\beta}} = FS_{\widetilde{\beta}} \cap S_{\widetilde{\alpha}} = \emptyset$ (démonstration facile en reprenant 2). En particulier comme $\widetilde{\alpha}$ et $\widetilde{\alpha}\,\check{}$ ont même support, $FS_{\widetilde{\alpha}\check{}} \cap S_{\widetilde{\beta}} = \emptyset$ et on a : $< \widetilde{\beta}, \widetilde{\alpha}\,\check{} > = 0$.

Ainsi pour toute racine imaginaire affine α et tous $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ dans $\zeta(\alpha)$, on a $< \widetilde{\beta}, \widetilde{\alpha}\,\check{} > = 0$.

□

Proposition 10.2.6.

Si γ est une racine imaginaire, et si α est une racine quelconque de $\Delta(S)$, le signe de $< \alpha, \gamma\check{} >$ (au sens strict c'est à dire comme élément de $\{0, +, -\}$) ne dépend pas du choix de $\gamma\check{}$ dans $\Psi\check{}(\zeta\check{}(\gamma))$.

N.B : Dans la suite pour $\gamma \in \Delta^{\rm im}$, $\gamma\hat{}$ désignera toujours un élément de $\Psi\check{}(\zeta\check{}(\gamma))$ que l'on peut choisir de façon que $(w(\gamma))\hat{} = w(\gamma\hat{})$ pour tout $w \in W$ et pour tout $\gamma \in \Delta^{\rm im}$. La matrice étant à coefficients dans $\mathbb{Q}$ ce choix et celui de 7.2.3 peuvent être faits de façon que $\gamma\hat{} \in \Psi\check{}(\widetilde{Q}\check{}) \subset Q\check{}$. Cependant, il n'est pas sûr que l'on puisse avoir à la fois $\gamma\hat{} \in Q\hat{}$ et l'invariance par W; c'est le cas avec la condition (Z) ou au moins si la matrice A est à coefficients entiers (pour que $Q\hat{}$ soit stable par W) ou encore si $I_{\rm re}$ est fini.

Démonstration.

Soit $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\delta}$ deux éléments de $\zeta(\gamma)$. On peut supposer la racine γ positive et comme dans la démonstration précédente, (quitte à changer γ en un de ses conjugués), on peut supposer $\widetilde{\gamma}$ et $\widetilde{\delta}$ simultanément dans K_c . On peut de plus supposer que α est une racine positive (quitte à considérer $-\alpha$).

Supposons $\gamma\hat{} = \Psi\check{}(\widetilde{\gamma}\check{})$ et $\delta\hat{} = \Psi\check{}(\widetilde{\delta}\check{})$, soit $\widetilde{\alpha} \in \Psi^{-1}(\alpha) \cap \widetilde{\Delta}$, on a alors :

1) $< \alpha, \gamma\hat{} > < 0 \Leftrightarrow < \widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}\check{} > < 0 \Leftrightarrow S_{\widetilde{\alpha}} \cap (FS_{\widetilde{\gamma}} \setminus Z_{\widetilde{\gamma}}) \neq \emptyset$;

2) $< \alpha, \gamma\hat{} > = 0 \Leftrightarrow < \widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}\check{} > = 0 \Leftrightarrow S_{\widetilde{\alpha}} \cap (FS_{\widetilde{\gamma}} \setminus Z_{\widetilde{\gamma}}) = \emptyset$;

mais par (10.2.4) on sait que $FS_{\widetilde{\gamma}} \setminus Z_{\widetilde{\gamma}}$ ne dépend pas du choix de l'élément $\widetilde{\gamma}$ dans $\zeta(\gamma)$ ce qui montre que les deux scalaires $< \alpha, \gamma\hat{} >$ et $< \alpha, \delta\hat{} >$ sont de même signe.

□

10.3 Système générateur de racines normalisé

Soit $S = (A, V, V\check{}, <,>, \Pi, \Pi\check{}, \{N_i\}_{i \in I_{\rm im}})$ un système générateur de racines. On considère la condition suivante :

(BN) Il existe un corps totalement ordonné K_1, un élément $\varepsilon > 0$ de K_1 et une application $\mathbb{Q}$-linéaire θ de $Q_{\mathbb{Q}}$ dans K_1 telle que pour tout $i \in I$, $\theta(\alpha_i) > \varepsilon$ et $\theta(\alpha_i) < k_i\varepsilon$ pour un $k_i \in \mathbb{N}$.

θ est alors appelée une "hauteur".

N.B : 1) La dernière inégalité de (BN) est superflue lorsque K_1 est archimédien, c'est à dire est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

2) Quitte à changer ε, on peut transformer la dernière assertion sur θ en :

$$\forall \alpha \in \Delta_+, \exists k_\alpha \in \mathbb{N} \text{ tel que } \varepsilon < \theta(\alpha) < k_\alpha \varepsilon .$$

Ainsi, la condition (BN) ne dépend que de Δ_+ et non de la base Π.

3) Cette condition (BN) est une conséquence de l'hypothèse suivante :

(MP") Il existe une base $\{\gamma_j\}_{j \in J}$ de $Q_{\mathbb{Q}}$ telle que $\Pi \subset \oplus_{j \in J} \mathbb{N}\gamma_j$.

Les conditions (BN) et (MP") sont invariantes par isomorphisme de S.G.R.

Proposition 10.3.1.

Si S satisfait à l'hypothèse (BN), on peut extraire de $\cup_{i\in I_{\mathrm{im}}} N_i\alpha_i$ une partie Φ^{im} d'éléments α deux à deux non $\mathbb{Q}$-proportionnels et pour lesquels on peut définir des ensembles de rationnels $N(\alpha)$ de plus petit élément 1 ou sans plus petit élément, minoré par 3/4 et contenant 1 tels que $N(\alpha)\alpha \subset N_i\alpha_i$ pour un certain i et pour lesquels :

si $\Phi := \Phi^{\mathrm{im}} \cup \Pi^{\mathrm{re}}$ et $\Phi^\check{} = \{\alpha^\check{};\ \alpha \in \Phi\}$ (sachant que si $\alpha = n\alpha_i$, $(n \in \mathbb{Q}_+)$ alors $\alpha^\check{} = \alpha^\check{}_i$) et si A' est la matrice de $< \alpha, \beta^\check{} >$ pour α et β dans Φ alors :

$S' = (A', V, V^\check{}, <,>, \Phi, \Phi^\check{}, \{N(\alpha)\}_{\alpha\in\Phi^{\mathrm{im}}})$ est un système générateur de racines normalisé tel que $\Delta_+(S') = \Delta_+(S)$ et $\Delta^{\mathrm{re}}(S') = \Delta^{\mathrm{re}}(S)$.

Si S vérifie (Z) alors (S') aussi.

L'identité est un morphisme de S.G.R. de S' dans S.

Remarque :

Intuitivement on peut interpréter cette proposition de la manière suivante :

Par hypothèse, Π (avec N_i donné pour chaque $i \in I$) est une base du S.G.R. S donc il est clair que toute racine α de Δ qui n'est pas dans un $N_i\alpha_i$ admet une bonne décomposition du type $\sum n_j\alpha_j$ où on peut supposer tous les $n_j \in N_{j\,\mathrm{ind}}$ quitte à faire apparaître plusieurs fois une même racine simple.

Si une racine $n_i\alpha_i$ admet une bonne décomposition en fonction des éléments de $\cup_{j\in I} N_j\alpha_j \setminus \{n_i\alpha_i\}$, $n_i\alpha_i = \sum x_j\alpha_j$ alors on obtient une autre bonne décomposition de α ne faisant pas intervenir $n_i\alpha_i$ en remplaçant dans sa décomposition $n_i\alpha_i$ chaque fois qu'il apparaît par $\sum x_j\alpha_j$.

Cependant, on extrait la base de $\Pi^{\mathrm{re}} \cup (\cup_{i\in I_{\mathrm{im}}} N_i\alpha_i)$ (ou plus exactement de $\Pi^{\mathrm{re}} \cup (\cup_{i\in I_0} N_i\alpha_i) \cup (\cup_{i\in I_-} N_{i\,\mathrm{ind}}\alpha_i)$ car si $\alpha = n_i\alpha_i + m_i\alpha_i$ avec $m_i \in N_i$ et $n_i \in N_{i\,\mathrm{ind}}$ et si $n_i\alpha_i$ admet une bonne décomposition en fonction des éléments de $\cup_{j\in I} N_j\alpha_j \setminus \{n_i\alpha_i\}$ ceci ne donne pas une bonne décomposition de α si $i \in I_0$.

Par ailleurs cette remarque ne démontre pas la proposition car il faut extraire les éléments de la nouvelle base les uns après les autres (de peur que $n_i\alpha_i$ ait une bonne décomposition avant mais plus après) ce qui nécessite une récurrence que l'on va faire avec θ.

Démonstration.

On pose, si θ désigne une forme linéaire sur $Q_{\mathbb{Q}}$ vérifiant l'hypothèse (BN) :

$$K_n := \cup_{i\in I_{\mathrm{im}}} N_i\alpha_i \cap \theta^{-1}([0; (n+1)(\varepsilon/4)[) \ .$$

Par hypothèse $K_0 = K_1 = K_2 = \emptyset$ et la réunion des K_n est $\cup_{i\in I_{\mathrm{im}}} N_i\alpha_i$

On construit alors par récurrence deux suites croissantes : $\Phi^{(n)}$ (qui sera égal à $\Pi^{re} \cup (\Phi \cap (K_n)))$, ainsi que l'ensemble $N^{(n)}(\alpha)$ (qui sera égal à $N_\alpha \cap [0; (n+1)(\varepsilon/4)\theta(\alpha)[)$ pour chaque α dans $\Phi^{(n)} \cap \Delta^{im}$.

- Pour $n = 0$ on pose $\Phi^{(0)} := \Phi^{re} = \Pi^{re}$, pour ces éléments N_α est $\{1, 2\}$ si la racine est multipliable, et $\{1\}$ sinon.

- Supposons au rang n-1, connus $\Phi^{(n-1)}$ (au choix possible près) contenu dans $\Phi^{re} \cup K_{n-1}$ ainsi que, pour les éléments α de $\Phi^{(n-1)} \setminus \Phi^{re}$, les $N^{(n-1)}(\alpha)$ de plus petit élément 1 ou sans plus petit élément mais contenus dans $[3/4, \infty[$ et contenant 1.

Pour tout $\alpha \in \Phi^{(n-1)}$ on note $N^{(n-1)}(\alpha)_{\text{ind}}$ l'ensemble des éléments indécomposables pour l'addition de $N^{(n-1)}(\alpha)$ en particulier $N^{(n-1)}(\alpha)_{\text{ind}} = \{1\}$ si α est une racine réelle.

- Soit β dans $K_n \setminus K_{n-1}$, on dira que $\beta \in \Phi'^{(n)}$ si et seulement si β vérifie les deux propriétés suivantes :

a) β n'est $\mathbb{Q}$-proportionnel à aucune racine de $\Phi^{(n-1)}$;

b) Si $\alpha \in \Phi^{(n-1)}$ et $n_\alpha \in N^{(n-1)}(\alpha)_{\text{ind}}$ sont tels que $\beta - n_\alpha\alpha$ est une racine de $\Delta_+(S)$, on a forcément $< \beta - n_\alpha\alpha, \alpha\check{} > = 0$.

On construit alors $\Phi^{(n)} \setminus \Phi^{(n-1)} = \Phi^{(n)} \cap (K_n \setminus K_{n-1})$ de la façon suivante :

Pour tout élément β de $\Phi'^{(n)}$, on considère $R(\beta)$ l'ensemble des rationnels q tels que $q\beta$ soit encore dans $\Phi'^{(n)}$; il est clair que $R(\beta) \subset]3/4; 4/3[$. Si $R(\beta)$ a un plus petit élément q_1 on pose $\alpha = q_1\beta$, sinon on choisit un élément unique α dans $R(\beta)\beta$, et on dit que $\alpha \in \Phi^{(n)}$ avec $N^{(n)}(\alpha) = R(\alpha)$.

Si β n'est pas dans $\Phi'^{(n)}$, il n'intervient pas dans la construction de Φ.

Reste à définir $N^{(n)}(\alpha)$ pour un $\alpha \in \Phi^{(n-1)}$, c'est la réunion de $N^{(n-1)}(\alpha)$ et des rationnels q tels que $q\alpha$ est un élément de $K_n \setminus K_{n-1}$ qui vérifie b).

Si on pose finalement $\Phi := \cup_{n\in\mathbb{N}}\Phi^{(n)}$ et $N(\alpha) := \cup_{n\in\mathbb{N}}N_\alpha^{(n)}$ pour $\alpha \in \Phi$, alors il est clair que deux éléments de Φ ne peuvent pas être $\mathbb{Q}$-proportionnels et que $N(\alpha)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Q}_+$ qui admet 1 pour plus petit élément ou bien contient 1 et est contenu dans $[3/4; \infty[$ (et n'a pas de plus petit élément). De plus, pour tout $\alpha \in \Phi$, il existe un indice $i \in I$ tel que $N(\alpha)\alpha \subset N_i\alpha_i$.

Montrons qu'avec cette définition, S' est un système générateur de racines.

On note J l'ensemble des indices $i \in I$ tels que $N_i\alpha_i \cap \Phi \neq \emptyset$; pour $j \in J$, l'intersection $N_j\alpha_j \cap \Phi$ est réduite à un élément noté γ_j.

La base de S' est extraite de $\cup_{i\in I_{\text{im}}} N_i\alpha_i \cup \Pi_{re}$ donc la matrice A' est obtenue à partir de A de la manière suivante :

a) on efface les colonnes et les lignes correspondant aux $i \in I_{\text{im}} \setminus J$ (on verra que cela signifie que tout élément de $N_i\alpha_i$ a une bonne décomposition en fonction des autres).

b) on multiplie les colonnes conservées par le rationnel q tel que $q\alpha_i \in \Phi$.

Il est clair sur cette construction que la matrice ainsi obtenue est de Borcherds relative et à coefficient $< \alpha, \beta\check{} >$ rationnel et même entier si β est réel.

(SGR2) et (SGR3) sont vérifiés puisque par hypothèse S est un système de racines. On a remarqué lors de leur construction, que les parties $N(\alpha)$ contiennent 1, sont incluses dans $[3/4, \infty[$ et que leur plus petit élément est 1 s'il existe. D'autre part $N(\gamma_i) < \gamma_i, \gamma\check{_j} > \subset N_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$ pour $\gamma_i \in \Phi$ et $\gamma_j \in \Phi^{re}$ (resp. et $\gamma_j \in \Phi$ si S vérifie (Z)) ce qui établit (SGR4) (resp. et (Z)).

(SGR5) résulte du choix de A'.

Reste à établir (SGR6),

Tout élément de Φ et toute somme d'éléments de $\Phi^{re} \cup (\cup_{\alpha \in \Phi^{im}} N(\alpha)\alpha)$ est un élément non nul de $Q_{\mathbb{Q},+}$, on sait que $\Psi(\widetilde{Q}_{\mathbb{Q},+} \setminus \{0\}) \cap \{0\} = \emptyset$, ce qui permet d'établir a).

De plus, on a déjà vu que deux éléments de Φ ne sont jamais $\mathbb{Q}$-proportionnels ce qui établit b).

On a ainsi vérifié que S' est un système générateur de racines.

D'après (9.3.7), $\Delta(S')$ est le plus petit sous ensemble de $Q'_{\mathbb{Q}} = \sum_{j \in J} \mathbb{Q}\gamma_j$ symétrique, contenant $N(\gamma_j)\gamma_j$ pour tout $j \in J$ et tel que si $\alpha \in \Delta_+(S')$ et $\gamma_j \in \Phi$ alors la chaîne $Ch(\alpha, \gamma_j) \subset \Delta(S')$. Or $\Delta(S) \cap Q'_{\mathbb{Q}}$ vérifie ces trois propriétés (car chaque $N(\gamma_j)\gamma_j$ est dans un $N_i\alpha_i$) et donc $\Delta_+(S') \subset \Delta_+(S)$.

Reste à prouver que S' est un S.G.R. normalisé et que $\Delta_+(S) = \Delta_+(S')$.

1) Soit $\alpha \in \Phi^{im}$ tel que $n_\alpha \alpha = \sum_{s \in T} x_j \gamma_j$ pour $n_\alpha \in N(\alpha)$ et les x_j dans $M(\gamma_j) \setminus \{0\}$ (en reprenant les notations du chapitre des S.G.R. pour des $\gamma_j \in \Phi$) et $T \subset J$ connexe.

Si T n'est pas réduit à un point, par (2.3.2) appliqué à un revêtement de S', et grâce à 9.3.6, il existe $\gamma_k \in \Phi(S)$ et $n_{\gamma_k} \in N^1_{\gamma_k,\mathrm{ind}}$ tels que $\sum_{j \in T} n_j \gamma_j - n_{\gamma_k}\gamma_k \in \Delta(S') \subset \Delta(S)$ et tel que $< \sum_{j \in T} x_j \gamma_j - n_{\gamma_k}\gamma_k, \gamma\check{_k} > < 0$, ce qui contredit la construction de Φ et des $N(\gamma)$.

Par suite T est réduit à un point et $n_\alpha \alpha = x_j \gamma_j$ ce qui impose $\alpha = \gamma_j$ puisque deux éléments de Φ ne peuvent, par construction, pas être $\mathbb{Q}$-proportionnels.

Ceci prouve que S' est un système générateur de racines normalisé.

2) Supposons à présent l'existence d'un élément β de $\Delta(S)$ qui n'est pas dans $\Delta(S')$; comme $\Phi^{re} = \Pi^{re}$ on a clairement l'égalité des deux groupes de Weyl ainsi que l'égalité $\Delta(S)^{re} = W\Phi^{re} = \Delta^{re}(S')$, β est donc nécessairement imaginaire. Par symétrie des deux ensembles, on peut le supposer dans $\Delta(S)_+$. Supposons alors avoir choisi un élément de $\Delta(S)_+ \setminus \Delta(S')$ tel que $\theta(\beta)$ soit minimal à $\varepsilon/4$ près. Cet élément est évidemment dans $K_{\Delta(S)}$ (par minimalité dans son orbite sous W).

Par hypothèse, on sait que $\beta = \sum_{i\in T} m_i\alpha_i$, où $T \subset I$ est connexe, $m_i \in M_i^*$ et $m_i \in N_i$ si $T = \{i\}$.

1[er] cas : $T = \{i\}$, $\beta = n_i\alpha_i$ Si $i \in J$ et $n_i\alpha_i \in N(\gamma_i)\gamma_i$, c'est clair. Sinon il existe par construction de la base $k \in J$ et $m_k \in N(\gamma_k)_{\text{ind}}$ tels que $\beta - m_k\gamma_k \in \Delta_+(S)$ et $< \beta - m_k\gamma_k, \gamma\,\hat{k} > < 0$; par récurrence $\beta - m_k\gamma_k \in \Delta_+(S')$ et alors $\beta \in \Delta_+(S')$:

- Si $k \neq i$, γ_k et β ne sont pas $\mathbb{Q}$-proportionnelles et cela résulte des conditions de chaînes;
- Si $k = i$, $\beta - m_k\gamma_k \in \mathbb{Q}\alpha_i$ c'est donc un élément de $K(S')$ donc $\beta \in K(S')$ et par suite est dans $\Delta_+(S')$.

2[ème] cas : $|T| \geq 2$, on peut écrire $\beta = \sum_{k=1}^{k=l} n_k\alpha_{i_k}$ avec $n_k \in N_{i_k}^*$ et $\{i_1, \ldots, i_l\}$ connexe dans I et non réduit à un élément. D'après le premier cas $n_k\alpha_{i_k} = \sum_{j\in S_k} x_j\gamma_j$ avec S_k connexe dans J et $x_j \in M(\gamma_j) \setminus \{0\}$. La réunion des S_k est connexe car si i_a et i_b sont liés dans $I < \alpha_{i_a}, \alpha\,\hat{i_b} > < 0$ donc $\exists j \in S_a$ tels que $< \gamma_j, \alpha\,\hat{i_b} > < 0$ ainsi $< \alpha_{i_b}, \gamma\,\hat{j} > < 0$ et il existe $j' \in S_b$ tel que $< \gamma_{j'}, \gamma\,\hat{j} > < 0$. De plus cette réunion n'est clairement pas réduite à un seul élément. Ainsi β a une décomposition à support connexe non réduit à un élément sur Φ avec des coefficients dans les $M(\gamma_j)$, et comme $\beta \in K_{\Delta(S)}$ on a $\beta \in K_{\Delta(S')}$, d'où la contradiction.

□

Remarques 10.3.2.

1) En ce qui concerne la conservation des propriétés de la matrice :

Si A est de type fini, affine, indéfini ou profini, il en est de même de la nouvelle matrice obtenue. Par contre si A est de type proindéfini, la nouvelle matrice peut être de type proindéfini ou de type indéfini. Enfin si I est décomposable, le nouvel ensemble d'indices I' a le même nombre de composantes indécomposables qui ne sont pas réduites à un élément de type affine (composantes de type affine imaginaire) :

Si on considère une décomposition de la matrice A en sous-matrices indécomposables et la partition de I en parties non vides correspondante $I = \cup_{k=1}^{k=n} I_k$ où $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, si $i \in I_k$, α_i ne peut s'écrire comme une bonne décomposition d'éléments de $\Delta(I_p)$ pour $p \neq k$ que si α_i est une racine de type affine et si I_k est réduit à cet élément. Il est clair dans la construction de la nouvelle base, que si I_k n'est pas une composante connexe de type affine réduite à un élément, il lui correspond une composante connexe de I'. Et que réciproquement si I'_k est une composante connexe de I', il ne lui correspond qu'une seule composante dans I sauf dans le cas où I_k est de type affine.

Supposons alors la matrice A indécomposable :

A est de type fini (resp. affine, indéfini) si et seulement si il existe dans Q_+, un élément $u = \sum_{i\in I} u_i\alpha_i$ avec $u_i > 0$ pour tout i, tel que $Au > 0$ (resp. $Au = 0$, $Au < 0$) mais alors $u \in Q'_+$ et toutes ses coordonnées sont strictement positives et $A'u > 0$ (resp. $A'u = 0$,

$A'u < 0$) car $\gamma\,\check{\imath} \in Q_{\mathbb{Q},+}$.

Si A est de type profini, toutes les racines simples sont réelles et donc la normalisation ne change rien et $A = A'$ est de type profini (cet argument était également valable dans les cas des types fini et affine).

Si A est de type proindéfini, on peut extraire de A une matrice d'ordre fini et de type indéfini donc A' est de type indéfini ou proindéfini. Elle peut être de type indéfini. Considérons par exemple le cas où $\Pi := \{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ où $i \in I_-$ pour tout i et tels que :

- α_1 et α_2 sont linéairement indépendants et $a_{12} < 0$
- $\alpha_n := \alpha_1 + (n-1)\alpha_2$ pour tout $n > 2$.

Il est clair que Π' sera égal à $\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

2) Il est clair par le fait que $N(\alpha)\alpha \subset N_i\alpha_i$ pour un certain i que les propriétés "N_i à dénominateurs bornés", "N_i sans points d'accumulation" sont conservées, par contre, l'hypothèse "N_i de plus petit élément 1" n'est pas forcément conservée (si l'hypothèse "N_i sans points d'accumulation"n'est pas vérifiée).

Lemme 10.3.3.

On suppose vérifiée l'hypothèse (BN). Soit $\alpha \in \Delta$,

1) Si $\forall \beta \in \Delta, (\beta + \mathbb{Z}\alpha) \cap \Delta$ est bornée alors $\alpha \in \Delta^{re}$ ou $\alpha \in \pm N_i\alpha_i$ avec $a_{ij} = 0$ pour tout $j \neq i$.

2) Si $\alpha \in \Delta^{re}$ alors pour toute racine β de Δ, $(\beta + \mathbb{Z}\alpha) \cap \Delta$ est bornée et plus précisément, il existe deux entiers p et q positifs ou nuls tels que :

$$(\beta + \mathbb{Z}\alpha) \cap \Delta = [\beta - p\alpha, \ldots, \beta + q\alpha] \text{ avec } p - q = <\beta, \alpha^\vee> \ .$$

Démonstration.

Montrons tout d'abord 2). Quitte à conjuguer par W et à considérer $-\beta$ au lieu de β, on peut supposer que $\alpha = \alpha_i$ et que β est une racine positive non colinéaire à α. On sait que si $\beta + n\alpha_i \in \Delta$ alors $r_i(\beta + n\alpha_i) = \beta - (n + <\beta, \alpha_i^\vee>)\alpha_i \in \Delta$. Considérons alors la fonction "hauteur" θ qui vérifie (BN), il est clair que :

a) Pour $n > 0$ très grand, $\theta(\beta + n\alpha_i) > 0$ et $\theta(r_i(\beta + n\alpha_i)) < 0$;

b) Pour $n < 0$ très grand, $\theta(\beta + n\alpha_i) < 0$ et $\theta(r_i(\beta + n\alpha_i)) > 0$.

Traitons le cas où $\beta + n\alpha_i \in \Delta$, pour $n > 0$ très grand.

Il existe dans un revêtement $\widetilde{S}$ de S, une racine $\widetilde{\gamma}$ positive telle que $\Psi(\widetilde{\gamma}) = \beta + n\alpha_i$, par équivariance de Ψ, on a $\Psi(r_i(\widetilde{\gamma})) = r_i(\Psi(\widetilde{\gamma})) = r_i(\beta + n\alpha_i)$ mais dans $\widetilde{S}$, on sait que la racine $r_i(\widetilde{\gamma})$ est positive ce qui implique $\theta(r_i(\beta + n\alpha_i)) > 0$, d'où la contradiction cherchée.

Pour 1), considérons $\alpha \in \Delta^{\mathrm{im}}$ et qui n'est pas dans un $\pm N_i\alpha_i$ pour un i tel que $a_{ij} = 0$ pour tout $j \neq i$ (ie $\{i\}$ composante connexe de I). Alors, il y a deux cas à envisager :

- soit, il existe un $j \in I$ tel que $\alpha \notin \pm N_j\alpha_j$ et $< \alpha, \alpha_j^{\check{}} > \neq 0$ alors on peut supposer α positive et par 7.2.1 et 7.3.2 il est clair que l'intersection considérée (pour $\beta = \alpha_j$) ne peut être bornée;

- soit, α est une racine affine correspondant à une composante indécomposable de type affine réelle, on est donc ramené au cas des systèmes affines bien connus pour lesquels on sait que l'intersection considérée n'est jamais bornée.

□

Corollaire 10.3.4.

On suppose l'hypothèse (BN) vérifiée et on considère tous les S.G.R. $S_1 = (A_1, V, V^{\check{}}, <,>, \Pi_1, \Pi_1^{\check{}}, \{N_{1i}\}_{\alpha_i \in \Pi_1^{\mathrm{im}}})$ *tels que :*

1) $\Delta_+(S_1) = \Delta_+(S)$*, donc* $\Delta(S_1) = \Delta(S)$*;*

2) $\Delta^{\mathrm{re}}(S_1) = \Delta^{\mathrm{re}}(S)$

3) $\forall(\alpha,\beta) \in \Pi_1^{\mathrm{im}}$, $< \alpha, \beta^{\check{}} >$ *et* $< \alpha, \beta_1^{\check{}} >$ *sont de même signe (au sens strict).*

Un S.G.R normalisé satisfaisant ces propriétés existe (d'après 10.3.1) et est unique en ce sens que sa base Φ *et les ensembles* $N(\alpha)$ *sont uniques (au choix d'une constante près si* $N(\alpha)$ *n'a pas de plus petit élément); par contre la cobase* $\Phi^{\check{}}$ *n'est pas unique.*

De plus, l'ensemble $\cup_{\alpha\in\Phi} N(\alpha)\alpha$ *(qui est déterminé de façon unique) est inclus dans* $\cup_{\alpha\in\Pi_1} N_1(\alpha)\alpha$ *pour tout S.G.R.* S_1 *comme ci-dessus; c'est donc l'intersection de tous ces sous-ensembles de* Δ.

Remarque :

Nous démontrerons de plus en cours de démonstration, le résultat intéressant suivant :

Sous les trois hypothèses précédentes, $< \alpha, \beta^{\check{}} >$ et $< \alpha, \beta_1^{\check{}} >$ sont de même signe (au sens strict) pour toutes racines α et β de Δ et de plus sont égaux si la racine β est réelle.

Démonstration.

Commençons par démontrer le résultat énoncé en remarque.

1) Connaissant $\Delta_+(S)$ et $\Delta^{\mathrm{re}}(S)$ et l'application $\alpha \mapsto \alpha^{\check{}}$ pour $\alpha \in \Delta^{\mathrm{re}}$ d'après 10.3.3, le groupe de Weyl est connu et il est clair que les racines simples réelles sont nécessairement (d'après 3.2.3) les racines non divisibles qui induisent les réflexions r_α telles que $r_\alpha(\Delta_-) \cap \Delta_+ \subset \{\alpha, 2\alpha\}$; elles sont donc bien déterminées par $\Delta_+(S)$ et $\Delta^{\mathrm{re}}(S)$. D'autre part, si α est simple réelle $N(\alpha) = \{1,2\}$ ou $\{1\}$ selon que $2\alpha \in \Delta$ ou non.

2) Supposons alors α et β deux racines de Δ, on doit montrer que $< \alpha, \beta^{\check{}} >$ et $< \alpha, \beta_1^{\check{}} >$ sont de même signe (au sens strict), pour cela il est clair qu'on peut se

ramener au cas où les deux racines sont positives. Si la racine β est réelle, cela résulte immédiatement de ce qui précède. Si la racine α est réelle le résultat vient également par le même argument grâce à 7.2.4. reste le cas où les deux racines sont imaginaires positives. Grâce à l'action de W, on peut supposer $\beta \in \Psi_1(\widetilde{K}_{c_1})$ (ces notations indiquant qu'on considère un revêtement de S_1) il est clair alors que $\beta \in \Psi(\widetilde{K}_c)$, et la racine α reste imaginaire positive. On sait que dans ce cas $< \alpha, \beta\check{} >$ et $< \alpha, \beta\check{}_1 >$ sont négatifs ou nuls. On supposera que $\Pi_1 = \{\gamma_i\}_{i \in T}$ mais dans ce cas on n'a aucune relation d'inclusion entre les $N(\gamma_i)\gamma_i$ et les $N(\alpha)\alpha$.

Supposons $< \alpha, \beta\check{}_1 > < 0$ alors si $R \subset T$ et $\alpha \in Q_{1\mathbb{Q}+}(R)$ et y est à coordonnées strictement positives alors il existe un indice $r \in R$ tel que $< \gamma_r, \beta\check{}_1 > < 0$ ce qui implique par 7.2.4 $< \beta, \gamma\check{}_{r_1} > < 0$ et donc si $\beta \in Q_{1\mathbb{Q}+}(L)$ (avec $L \subset T$) et y est à coordonnées strictement positives alors il existe un indice $l \in L$ tel que $< \gamma_l, \gamma\check{}_{r_1} > < 0$ et donc, par 2) ou par l'égalité dans le cas des racines réelles, $< \gamma_l, \gamma\check{}_r > < 0$. Ceci implique $< \beta, \gamma\check{}_r > < 0$ car si γ_r est une racine réelle, le résultat cherché est connu et si γ_r est imaginaire l'hypothèse $< \gamma_l, \gamma\check{}_r > < 0$ suffit. Par 7.2.4 (dans S), on a alors $< \gamma_r, \beta\check{} > < 0$.

La racine β est dans $\Psi(\widetilde{K}_c)$, α s'écrit comme somme de racines γ positives de $\Delta(S)$ (donc telles que $< \gamma, \beta\check{} > \leq 0$), somme dans laquelle apparait γ_r (qui est telle que $< \gamma_r, \beta\check{} > < 0$) donc $< \alpha, \beta\check{} > < 0$. Ceci démontre le résutat énoncé en remarque.

3) Il est clair que dans la démonstration de 10.3.1 on pouvait remplacer dans la construction :

$$K_n := \cup_{i \in I_{\mathrm{im}}} N_i \alpha_i \cap \theta^{-1}([0; (n+1)(\varepsilon/4)[)$$

$$\text{par } K_n := K' \cap \theta^{-1}([0; (n+1)(\varepsilon/4)[)$$

où $K' := \{\alpha \in \Delta_+(S), < \alpha, \beta\check{} > \leq 0 \ (\forall \beta \in \Pi^{\mathrm{re}})\}$ est indépendant du S.G.R.S_1.

En effet $K' = \Psi(\widetilde{K}_c)$ et tout élément de $K' \setminus (\cup_{i \in I_{\mathrm{im}}} N_i \alpha_i)$ admet évidemment une bonne décomposition en fonction des éléments de Φ qui lui sont de "hauteur" θ inférieure (cf remarque 10.3.1). Plus précisément la proposition 2.3.2 (appliquée au revêtement de $\Delta(S')$) montre que pour $\beta \in K' \setminus (\cup_{i \in J_{\mathrm{im}}} N_i \alpha_i)$, il existe un indice j de I et un rationnel $n_j \in N_{j\,\mathrm{ind}}$ tels que $\alpha - n_j \gamma_j \in \Delta_+$ et $< \alpha - n_j \gamma_j, \gamma\check{}_j > < 0$, une telle racine β ne peut donc vérifier la condition b) qui définit $\Phi'^{(n)}$ et permet de construire Φ et les $N(\alpha)$ pour $\alpha \in \Phi$.

D'autre part, il est clair grâce au résultat démontré en remarque que les conditions a) et b) (critères de selection des éléments de la base dans la démonstration de 10.3.1)) sont indépendantes du S.G.R. S_1 vérifiant les trois hypothèses ci-dessus; on obtient donc le même Φ et les mêmes $N(\alpha)$ (à une constante près) à partir de chacun des S_1.

Ceci permet d'établir l'unicité de Φ et la deuxième assertion résulte de 10.3.1, puisqu'on a montré qu'on peut extraire $\cup_{\alpha\in\Phi}N(\alpha)\alpha$ de $\cup_{i\in I}N_i\alpha_i$.

□

Remarque 10.3.5

Si Π est fini alors la condition (BN) est vérifiée avec θ à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Si, de plus, l'axiome SGRord est vérifié, (BN) est vrai avec θ K-linéaire définie sur V et à valeurs dans K.

Démonstration.

La première assertion résulte de façon immédiate du "lemme fondamental" de 1.2 et de 9.1.3.

Si, de plus, l'axiome SGRord est vérifié, alors (cf remarque suivant la proposition 9.1.4) une combinaison à coefficients dans K positifs ou nuls des α_i nulle dans V est nécessairement à coefficients tous nuls. On conclut encore grâce à 1.2.

□

11. Géométrie d'un S.G.R.

Dans ce paragraphe, on suppose que K est un corps ordonné. D'après 8.3, l'étude du système de racines de tout S.G.R. peut se ramener à ce cas (avec même $K = \mathbb{Q}$ ou $K = \mathbb{R}$) quitte à ne considérer que $Q_{\mathbb{Q}}$ et non son plongement dans V.

Pour éviter certaines situations paradoxales, on sera amené aussi à supposer vérifié l'axiome SGRord de 9.1.3 (c'est automatique si $K = \mathbb{Q}$).

11.1 Généralités

Si $S = (A, V, V\check{}, <,>, \Pi, \Pi\check{}, \{N_i\}_{i\in I_{\mathrm{im}}})$ est un système générateur de racines, on considère dans sa classe d'isomorphisme le système, encore noté S tel que $V\check{} = (V)^*$.

Définition

Si $x \in V$, on considère :

$$H_x = \{v \in V^* / v(x) = < x, v > = 0\}$$
$$H_x^+ = \{v \in V^* / v(x) = < x, v > > 0\}$$
$$H_x^- = \{v \in V^* / v(x) = < x, v > < 0\}$$

On note $\mathcal{H}_\Delta = \{H_\alpha / \alpha \in \Delta_{\mathrm{re}}\}$.

Lemme 11.1.2.

Si α et β sont deux racines réelles

$$H_\alpha = H_\beta \Longleftrightarrow \beta \in \{\pm\alpha, \pm 2\alpha, \pm\alpha/2\} \cap \Delta^{\mathrm{re}}$$

donc $\mathcal{H}_\Delta = \{H_\alpha \,;\alpha \in \Delta^{\mathrm{re}}_{+,\mathrm{nd}}\}$, $\quad |\mathcal{H}_\Delta| = |\Delta^{\mathrm{re}}_{+,\mathrm{nd}}|$.

Démonstration.

Notons i l'injection de V dans V^{**}, il est clair que $i(\alpha) \neq 0$ puisque $i(\alpha)(\alpha\check{}) > 0$ (α est une racine réelle). Les deux hyperplans H_α et H_β sont les noyaux des deux formes linéaires $i(\alpha)$ et $i(\beta)$ et ne sont confondus que lorsque celles-ci sont proportionnelles. Par injectivité de i la proportionnalité de $i(\alpha)$ et $i(\beta)$ implique celle de α et β et l'appartenance à Δ permet de conclure grâce au corollaire (9.3.8).

□

On définit une relation d'équivalence entre les éléments de V^* relative à $\mathcal{H}_\Delta$ en posant :

$$x \approx y \Longleftrightarrow (\forall H \in \mathcal{H}_\Delta) \text{ l'une des conditions suivantes est réalisée}$$

1) x et y sont dans H;

2) x et y sont du même côté au sens strict de H;

ie. Si $H = H_\alpha$ pour $\alpha \in \Delta$, $< \alpha, x > < \alpha, y > > 0$.

Pour $x \in V^*$, on notera $\bar{x}$ sa classe d'équivalence dans le quotient $V^*/\mathcal{H}_\Delta$. Si x et y ne sont pas dans H ni du même côté au sens strict de H, on dira que H sépare (au sens strict) x et y.

Proposition 11.1.3.

$W\check{}$ est isomorphe à $\widetilde{W}$ donc à W. Dans la suite, on identifiera donc les trois groupes.

Démonstration.

$W\check{}$ est engendré par les $r\check{_i}$ d'ordre deux, il s'agit de démontrer que les relations entre les r_i et celles entre les $r\check{_i}$ sont les mêmes.

Supposons $r_{i_1} \dots r_{i_n} = Id_V$ (resp. $r\check{_{i_1}} \dots r\check{_{i_n}} = Id_{V\check{}} = (r\check{_{i_n}} \dots r\check{_{i_1}})^{-1}$), on a

$$(\forall \alpha \in V)\ (\forall x \in V^*) \quad < r_{i_1} \dots r_{i_n}(\alpha), x > = < \alpha, r\check{_{i_n}} \dots r\check{_{i_1}}(x) >$$

ce qui implique

$$(\forall \alpha \in V)\ (\forall x \in V^*) \quad < \alpha, x > = < \alpha, r\check{_{i_n}} \dots r\check{_{i_1}}(x) >$$

(resp .$< r_{i_1} \dots r_{i_n}(\alpha), x > = < \alpha, x >$) et donc par dualité des deux espaces :

$$(\forall x \in V^*),\ r\,\hat{i_n} \dots r\,\hat{i_1}(x) = x$$

(resp. $(\forall \alpha \in V),\ r_{i_1} \dots r_{i_n}(\alpha) = \alpha$)

$$\text{donc} \quad r\,\hat{i_n} \dots r\,\hat{i_1} = Id = r\,\hat{i_1} \dots r\,\hat{i_n}$$

(resp. $r_{i_1} \dots r_{i_n} = Id$)

□

Proposition 11.1.4.

W opère sur $V^*_{\text{reg}} := V^* \setminus (\cup_{H \in \mathcal{H}_\Delta} H)$, et sur le quotient $V^*/\approx_{\mathcal{H}_\Delta}$.

Démonstration.

On sait que W agit sur les racines réelles, soit w un élément du groupe de Weyl, alors on a :

$$\begin{aligned} wH_\alpha &= \{w(x) \,/ < \alpha, x > = 0, x \in V^*\} = \{x \in V^* \,/ < \alpha, w^{-1}(x) > = 0\} \\ &= \{x \in V^* \,/ < w(\alpha), (x) > = 0\} \\ &= H_{w(\alpha)} \end{aligned}$$

De plus si x et y sont du même côté de H_α, on a $< \alpha, x >< \alpha, y >> 0$ donc $< w(\alpha), w(x) >< w(\alpha), w(y) >> 0$, et ainsi $w(x)$ et $w(y)$ sont du même côté de H_α.

□

11.2. Les facettes

On définit dans $V\hat{}$:

La chambre fondamentale "ouverte" :

$$C_\emptyset = \{x \in V^* \,/ < \alpha_i, x > > 0\ (\forall i \in I_{\text{re}})\}$$

La chambre fondamentale "fermée":

$$\bar{C} = \{x \in V^* \,/ < \alpha_i, x > \geq 0\ (\forall i \in I_{\text{re}})\}$$

Les facettes fondamentales : Si $J \subset I_{\text{re}}$:

$$C_J = \{x \in \bar{C} \,/ < \alpha_i, x > = 0 \Leftrightarrow (i \in J)\}$$

Le cône de Tits "ouvert" :

$$\mathfrak{T}^\circ = \{x \in V^* \,/ < \alpha, x > > 0\ (\text{p.p.t.}\ \alpha \in \Delta^{\text{re}}_+)\}$$

Le cône de Tits "fermé" :

$$\mathfrak{T} = \{x \in V^* \,/ < \alpha, x > \geq 0 \text{ (p.p.t.} \, \alpha \in \Delta_+^{\mathrm{re}})\}$$

Tous ces ensembles sont clairement des cônes convexes.

On a déjà défini en 7.3.1 dans $\widetilde{Q}_{\mathbb{Q}}$ des ensembles analogues à $\bar{C}$ et $\mathfrak{T}$ mais pour un choix différent des signes.

Lemme 11.2.2.

a) $\bar{C} = \sqcup_{J \subset I_{\mathrm{re}}} C_J$;

b) *Si $J \subset I_{\mathrm{re}}$ et $C_J \neq \emptyset$ alors C_J est une classe d'équivalence pour la relation relative à $\mathcal{H}_\Delta$;*

c) *Les racines de Δ^{re} nulles sur C_J sont les racines réelles de $\Delta(J)$, en particulier :*

$$C_J \subset \mathfrak{T}^\circ \Longleftrightarrow J \text{ est de type fini.}$$

Démonstration.

a) est trivial;

c) Si $x \in C_J$, il est clair que $\{\alpha \in Q_+ \,/ < \alpha, x >= 0\}$ est $Q_+(J)$. Or d'après (10.1.1) $Q(J)_+ \cap \Delta^{\mathrm{re}} = \Psi(\widetilde{\Delta}_+^{\mathrm{re}}(J)) = \Delta_+^{\mathrm{re}}(J)$, le résultat en découle aussitôt.

b) Sous les hypothèses de la proposition, soit $x \in C_J$, si y est également dans cette facette on a :

$$(\forall \alpha \in \Delta_+^{\mathrm{re}}) \quad < \alpha, y > \geq 0 \text{ et } \Big(< \alpha, y > = 0 \Longleftrightarrow \alpha \in \Delta^{\mathrm{re}}(J) \Big)$$

Ce qui montre que x et y sont bien dans la même classe d'équivalence sous $\mathcal{H}_\Delta$, d'où $C_J \subset \bar{x}$.

Réciproquement si $y \in \bar{x}$ alors x et y sont simultanément dans H_{α_i} si $i \in J$ et sont du même côté au sens strict sinon, ce qui prouve que $y \in C_J$.

□

Remarque :

Il résulte de c) que dans le cas où $C_J \neq \emptyset$ alors $\forall i \in I_{\mathrm{re}} \setminus J$, $\alpha_i \notin Q(J)$ et dans ce cas on a $\Delta^{\mathrm{re}}(J) = \Delta^{\mathrm{re}} \cap Q(J)$ (cf 10.1.1).

Proposition 11.2.3.

Soient J et J' deux parties de I_{re} et $w \in W$. Si $(w(C_J)) \cap C_{J'} \neq \emptyset$ on a :

a) $J = J'$;

b) $w(C_J) = w(C_{J'}) = C_J = C_{J'}$;

c) $w \in W_J$.

Remarque :

Il est clair que W_J fixe C_J point par point, la proposition montre alors que W_J est exactement le stabilisateur de C_J.

Définition

Si $w \in W$, on dit que $w(C_J)$ s'il est non vide est *une facette* de type J et que $w(C_\emptyset)$ (resp. $w(\bar{C})$) est une chambre ouverte (resp. fermée).

Démonstration.

1) Soit $w \in W$ et $i \in I_{\mathrm{re}}$, si $l(r_i w) < l(w)$ alors pour tout x élément de la chambre fondamentale "fermée" $< \alpha_i, w(x) > \leq 0$.

En effet $l(r_i w) = l(w^{-1} r_i) < l(w) = l(w^{-1}) \Longrightarrow w^{-1}(\alpha_i) \in \Delta_-$ (9.4.4), l'assertion est alors immédiate sachant que x est dans $\bar{C}$.

2) On démontre alors la proposition par récurrence sur la longueur de l'élément du groupe de Weyl.

- Si $l(w) = 0$, $w = Id$ donc on a

$$wC_J \cap C_{J'} \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, x \in wC_J \cap C_{J'} = C_J \cap C_{J'}.$$

Mais, d'après le lemme précédent, cela implique que $C_{J'}$ (resp C_J) est la classe d'équivalence relativement à $\mathcal{H}_\Delta$ de x, d'où l'égalité des deux facettes, ainsi que celle de J et de J'.

- Supposons alors la proposition vraie pour un élément du groupe W de longueur $p < n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $w \in W$ de longueur n, et $w = r_{i_1} \ldots r_{i_n}$ une décomposition réduite de w, alors soit $i = i_1$, d'après 1) pour tout x dans C_J, $< \alpha_i, w(x) > \leq 0$.

De plus par hypothèse, il existe un élément x de C_J tel que $w(x) \in C_{J'}$, donc $< \alpha_i, w(x) > \geq 0$ mais comme $x \in C_J$, on a $< \alpha_i, w(x) > = 0$ donc $i \in J'$.

Il est clair alors que r_i fixe $C_{J'}$ point par point. Si on pose $w' = r_i w$, on a $w'(x) = r_i w(x) = w(x) \in C_{J'}$ donc $w'(C_J) \cap C_{J'} \neq \emptyset$ et w' est un élément de longueur $n-1$, par hypothèse de récurrence on a facilement les égalités $J = J'$, $w'(C_J) = C_{J'}$ qui est stable par r_i d'où $w(C_J) = C_{J'}$, enfin comme w' et r_i fixent C_J point par point, il en est de même de w.

□

11.3. Hypothèses supplémentaires, cône de Tits

Dans la suite de ce chapitre la condition suivante sera souvent supposée vérifiée :

(A) $C_\emptyset$ engendre V^*.

On considère éventuellement également l'hypothèse :

(MP') Il existe une base de V telle que Π^{re} soit incluse dans le cône positif engendré par cette base.

Remarques :

La condition (MP') est aussi une version affaiblie de l'hypothèse suivante qui est l'hypothèse fondamentale de Moody et Pianzola pour leurs ensembles de données radicielles [MP] :

(MP) $Q(I_{re})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre possédant une base libre dans V $\{\gamma_j\}_{j\in J}$ telle que $\Pi^{re} \subset \oplus_{j\in J}\mathbb{N}\gamma_j$.

Cette dernière est elle-même vérifiée sous l'hypothèse classique :

(L) Π^{re} est libre dans V.

Si on suppose $Q_{\mathbb{R}}(I_{re})$ de dimension finie et si $Q(I_{re})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre alors l'hypothèse (A) implique (MP). En effet, $Q^+_{\mathbb{R}}(I_{re})$ est un cône propre et l'intérieur du cône dual $C_\emptyset$ est non vide donc on peut appliquer le lemme 5 du paragraphe 6 de [MP], ce qui établit le résultat.

En effet, il est à noter que dans le cadre de Moody et Pianzola où $\Pi = \Pi^{re}$ et $N_i = \{1\}$ pour tout i, SGR4 et SGR6b ou SGRN sont sans objet, et SGR6a une conséquence de (MP) ou de (MP') ou de même de (A).

Par ailleurs la condition (MP") de 10.3 est un affaiblissement de (MP) si $\Pi = \Pi^{re}$

Si K' est un corps ordonné contenant K, et si le S.G.R. S vérifie l'une des conditions (A), (BN), (L), (MP), (MP'), ou (MP") alors le S.G.R. $S_{K'}$ obtenu par extension des scalaires la vérifie aussi. La réciproque est vraie a priori uniquement pour les conditions (L), (MP), (BN) et (MP") ce qui fait l'interêt de celles-ci.

Toutes ces hypothèses sont invariantes par isomorphisme de S.G.R.

Proposition 11.3.1.

a) La condition (A) est une conséquence de la condition (MP').

Si la condition (A) est réalisée alors :

b) $\mathfrak{T} = \cup_{w\in W} \cup_{J\subset I_{re}} w(C_J) = W.\bar{C}$;

c) $\mathfrak{T}^\circ = \cup_{w\in W} \cup_{\{J \text{ de type fini}\}} w(C_J)$.

Démonstration.

a) Sous cette hypothèse d'existence d'une base, il est clair que la chambre fondamentale "ouverte" contient le cône des formes linéaires strictement positives sur la base donc n'est pas vide. Notons $\{\gamma_i\}$, $(i \in N)$ la base telle que $\Pi^{re} \subset \bigoplus_{i\in N} K_+\gamma_i$. Soit alors $x \in V^*$, on a $x = y + z$ où y est la forme linéaire définie par $y(\gamma_i) = 1_{K_+}(x(\gamma_i)).x(\gamma_i) + 1$ et

THESE Nicole BARDY-PANSE

Les pages 127 à 131

sont manquantes dans l'original

V

Sous-systèmes et Théorème de conjugaison des bases

On considère un système générateur de racines sur K ($\mathbb{Z}$ ou un corps), $S = (A, V, V\hat{}, <,>, \Pi, \Pi\hat{}, \{N_i\}_{i \in I_{\mathrm{im}}})$ tel que $V\hat{} = V^*$.

Si $K \subset \mathbb{R}$, on fera la géométrie dans $V^*_{\mathbb{R}} = V\hat{} \otimes_K \mathbb{R}$. Sinon (ou toujours si l'on veut), on posera $V^*_{\mathbb{R}} = Q\,\hat{}_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ qui est l'ensemble des applications $\mathbb{Q}$-linéaires de $Q_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{R}$, et d'après la remarque 8.3.1, les résultats de géométrie du paragraphe 9 sont encore valables dans ce $V^*_{\mathbb{R}}$. On a en particulier la chambre fondamentale $C_\emptyset \subset V^*_{\mathbb{R}}$. On suppose de plus :

(A) $C_\emptyset$ engendre $V^*_{\mathbb{R}}$.

12. Notion de sous-systèmes

12.1. Définition

Soit $\Delta(S) = \Delta$ le système de racines du S.G.R considéré, si Ω est une partie non vide de Δ, on note $\Omega_+ = \Omega \cap \Delta_+$, $\Omega^{\mathrm{re}} = \Omega \cap \Delta^{\mathrm{re}}$, $\Omega^{\mathrm{im}} = \Omega \cap \Delta^{\mathrm{im}}$ etc... On dira que Ω est un sous-système de Δ si Ω vérifie :

(SSR1) $\alpha \in \Omega \Longrightarrow -\alpha \in \Omega$ (condition de symétrie);

(SSR2) Si $\alpha \in \Omega_+$, si $\beta \in (\Omega_+ \cup \Omega^{\mathrm{re}})$ et si $\beta \notin \mathbb{Q}\alpha$ on a $< \alpha, \beta\hat{} > < 0 \Longrightarrow \alpha + \beta \in \Omega$;

(SSR3) Si $\alpha \in \Omega$ et $\beta \in \Omega^{\mathrm{re}}$ alors $r_\beta(\alpha) \in \Omega$.

Remarque

Un sous-ensemble Ω symétrique (condition SSR1) et *clos* c'est à dire vérifiant :

(SC) $\alpha \in \Omega,\ \beta \in \Omega,\ \alpha + \beta \in \Delta \Rightarrow \alpha + \beta \in \Omega$

est un sous-système de racines de Δ . En effet, on montre grâce aux conditions de chaînes réelles qu'un système symétrique et clos est stable sous l'action de W, donc vérifie (SSR3) et d'autre part on sait (remarque 10.2.3) que si α et β sont deux racines positives non $\mathbb{Q}$-proportionnelles, telles que $< \alpha, \beta\hat{} > < 0$ alors leur somme est encore dans Δ d'où SSR2.

La réciproque est fausse. Dans BC_2 par exemple, $\{\pm\alpha_1, \pm(\alpha_1 + \alpha_2)\}$ est un sous-système mais n'est pas clos.

Exemple : Si $J \subset I$, il est clair que $\Delta(J) \subset \Delta$ est un sous-système clos.

Lemme 12.1.1.

Si $w \in W$ et si Ω est un sous-système alors $w(\Omega)$ en est un également .

Démonstration.

Il est clair que sous les hypothèses de ce lemme $w(\Omega)$ vérifie SSR1.

Pour SSR3, considérons $\alpha \in w(\Omega)$ et $\beta \in (w(\Omega))^{re} = w(\Omega^{re})$, alors

$$r_\beta(\alpha) = w r_{w^{-1}\beta} w^{-1}(\alpha) = w(r_{w^{-1}\beta}(w^{-1}\alpha)) \in w(\Omega)$$

par SSR3 dans Ω .

Reste à établir SSR2. Soient $\alpha \in (w(\Omega))_+$ et $\beta \in (w(\Omega))_+ \cup w(\Omega^{re})$ et non proportionnelle à α . Supposons donc $< \alpha, \beta\hat{} > < 0$ ce qui implique $< w^{-1}(\alpha), (w^{-1}(\beta))\hat{} > < 0$, on doit alors envisager les différents cas :

1) $w^{-1}(\alpha)$ et $w^{-1}(\beta)$ sont des racines positives, auquel cas on a le résultat en utilisant SSR2 dans Ω .

2) $w^{-1}(\alpha)$ et $w^{-1}(\beta)$ sont toutes deux négatives et le même argument que pour 1) permet de conclure en considérant $-w^{-1}(\alpha)$ et $-w^{-1}(\beta)$.

3) $w^{-1}(\alpha)$ est positive et $w^{-1}(\beta)$ est négative, ceci impose à β d'être une racine réelle et donc on peut encore utiliser SSR2 dans Ω .

4) $w^{-1}(\alpha)$ est négative et $w^{-1}(\beta)$ est positive; on se ramène au cas précédent en échangeant les rôles de α et β, grâce à l'argument $< \alpha, \beta\hat{} > < \beta, \alpha\hat{} > > 0$.

□

Lemme 12.1.2.

Un sous système Ω possède les deux propriétés (encore appelées propriétés de chaînes) :

a) Si $\alpha \in \Omega^{re}$ et $\beta \in \Omega$ non proportionnelle à α, alors :

$$[\beta, r_\alpha(\beta)] := \{\beta, \beta \pm \alpha, \ldots, \beta - < \beta, \alpha\check{} > \alpha\} \subset \Omega;$$

b) Si $\alpha \in \Omega^{im}$ et $\beta \in \Omega$, sont deux racines non proportionnelles, alors :

$$< \beta, \alpha\hat{} > < 0 \Longrightarrow \beta + \mathbb{N}\alpha \subset \Omega \quad .$$

N.B : 1) Il est clair que réciproquement ces deux propriétés de Ω impliquent les conditions (SSR2) et (SSR3)

2) Il résulte de ce lemme que si $\alpha, \beta \in \Omega$; $\beta \notin \mathbb{Q}\alpha$ et $< \alpha, \beta\hat{} > < 0$ alors $\alpha + \beta \in \Omega$

Démonstration.

a) Si $< \beta, \alpha\check{} > \geq 0$, on utilise SSR3 et on se ramène à $< \beta, \alpha\check{} > \leq 0$ (en échangeant β et $r_\alpha(\beta)$) de plus par SSR1, on peut alors, quitte à échanger β en $-\beta$ et α en $-\alpha$, supposer $\beta \geq 0$. Alors si $< \beta, \alpha\check{} >$ est nul, il n'y a rien à démontrer; sinon on démontre par (SSR2) que $\beta + \alpha$ est dans Ω . Par récurrence sur l'argument précédent, on montre que $\beta + p\alpha$ est dans Ω pour tout entier p compris entre 1 et $\mathrm{E}((- < \beta, \alpha\check{} >)/2)$, par (SSR2) ou (SSR3) on en déduit que c'est encore vrai pour $p = \mathrm{E}((- < \beta, \alpha\check{} >)/2) + 1$, enfin on complète la chaîne grâce à r_α par la condition (SSR3).

b) D'après le lemme précédent, quitte à conjuguer par $\pm W$, on peut se ramener à un sous-système dans lequel $\alpha \in K_c$. Dans ce cas, l'inégalité implique $\beta \in \Omega_+$ et on peut utiliser SSR2 pour affirmer que $\alpha + \beta \in \Omega$. Le résultat complet est obtenu par une récurrence alors immédiate. On peut également raisonner directement, en utilisant a) si β est réelle (grâce à 7.2.4), et 7.2.1 (qui implique $\beta \in \Omega^{\mathrm{im}}_{+}$ si β est imaginaire) ainsi que SSR2.

□

12.2. Coracines et groupe de Weyl

On notera :

- $\Omega^{\mathrm{re}}_{\mathrm{nm}}$ les racines réelles de Ω dont les doubles ne sont pas dans Ω .
- $\Omega^{\mathrm{re}}_{\mathrm{nd}}$ les racines réelles α de Ω telles que $\alpha/2$ n'est pas dans Ω .

Il est clair qu'une racine non divisible (resp. non multipliable) de Δ est non divisible (resp. non multipliable) dans Ω . Le contraire n'est pas nécessairement vrai (B_n et C_n sont des sous-systèmes de BC_n).

La coracine d'une racine réelle α de Ω est la même que celle définie lorsqu'on considère α comme une racine de Δ, par contre, il est nécessaire de modifier parfois la définition de α "chapeau", au sens de Ω on notera $\alpha'\hat{}$ cette nouvelle définition. Pour chaque racine réelle de Ω, on pose :

- Si $\alpha \in \Omega^{\mathrm{re}}_{\mathrm{nm}} \cap \Delta^{\mathrm{re}}_{\mathrm{nm}}$, on pose $\alpha'\hat{} = \alpha\hat{}$ et $\alpha'\check{} = \alpha\check{} = \alpha\hat{}$.
- Si $\alpha \in \Omega^{\mathrm{re}}_{\mathrm{nm}}$ et est multipliable dans Δ on pose $\alpha'\hat{} = \alpha\check{} = 2\alpha\hat{}$ et $\alpha'\check{} = \alpha\check{}$.
- Si $\alpha \in \Omega^{\mathrm{re}} \setminus \Omega^{\mathrm{re}}_{\mathrm{nm}}$, alors elle est multipliable dans Δ, et on pose $\alpha'\hat{} = \alpha\hat{}$ et $\alpha'\check{} = \alpha\check{} = 2\alpha\hat{}$ et également $(2\alpha)'\hat{} = (2\alpha)\hat{} = \alpha\hat{}$.
- Si $\alpha \in \Omega^{\mathrm{re}}_{\mathrm{nd}}$ et est divisible dans Δ alors on pose $\alpha'\hat{} = (\alpha/2)\hat{} = \alpha\check{}$ et $\alpha'\check{} = \alpha\check{}$.

- Enfin si une racine $\alpha \in \Omega^{re}$ est le double d'une racine de Δ^{re} qui n'est pas dans Ω, on pose $\alpha'^{\vee} = \alpha^{\vee} = (\alpha/2)^{\wedge} = (\alpha'/2)^{\wedge} = \alpha'^{\wedge}$.
- Si $\alpha \in \Omega^{im}$ on choisit, comme au chapitre précédent, arbitrairement un élément de $\Psi^{\vee}(\zeta^{\vee}(\alpha))$ et on le note $\alpha'^{\wedge}$.

On pose encore

$$W_\Omega = < r_\alpha \,/\alpha \in \Omega^{re} >$$

Il est clair sur la définition d'un sous-système (SSR3) que W_Ω stabilise Ω ainsi que Ω^{re} .

Remarque :

Cette dernière propriété et les numéros 12.3 et 12.4 qui vont suivre sont en fait encore vrais si $\Omega = \Omega^{re}$ est une partie de Δ^{re} vérifiant les conditions (SSR1) et (SSR3).

12.3. Géométrie d'un sous-système

On considère toutes les notions introduites au numéro 11, mais dans $V^*_{\mathbb{R}}$. On pose $\mathcal{H}_\Omega = \{H_\alpha \; ; \; \alpha \in \Omega^{re}\}$, et on définit comme au chapitre précédent la relation d'équivalence sur $V^*_{\mathbb{R}}$ relative à Ω (c'est à dire à $\mathcal{H}_\Omega$) . On appelle alors :

Chambre relative "ouverte" : Toute classe d'équivalence C^Ω pour $\approx_\Omega$ qui rencontre $W.C_\emptyset$, alors l'intersection $C^\Omega \cap \mathfrak{T}^\circ$ engendre $V^*_{\mathbb{R}}$, car $C^\Omega \cap wC_\emptyset \neq \emptyset \Longrightarrow wC_\emptyset \subset C^\Omega$.

Chambre relative "fermée" : Si $D = C^\Omega$ est une chambre relative "ouverte" et $x \in D$, la chambre relative fermée correspondante est :

$$\bar{D} = \{y \in V^*_{\mathbb{R}} \,/ \forall \alpha \in \Omega^{re}, \; < \alpha, x > < \alpha, y > \geq 0\}$$

Les cloisons relatives d'une chambre relative "fermée" $\bar{D}$ sont les classes d'équivalences F pour $\approx_\Omega$ telles que $F \cap \mathfrak{T}^\circ$ engendre l'hyperplan H_α pour un $\alpha \in \Omega^{re}$, avec :

$$\forall y \in F, \exists x \in D \,/]y, x[\subset D \; .$$

L'hyperplan H_α est alors le mur correspondant à F, c'est un *mur de la chambre relative* $\bar{D}$.

Remarque :

En dimension finie, la chambre fermée est l'adhérence de la chambre ouverte. En effet, quelle que soit la dimension, si $x \in D$ et $y \in \bar{D}$ alors $[x, y[\subset D$, et

$$\bar{D} = \{y \in V^*_{\mathbb{R}} \,/\, [x, y[\subset D, (\forall x \in D)\}$$

$$D = \bar{D} \cap (V^*_{\mathbb{R}} \setminus \cup_{\alpha \in \Omega^{re}} H_\alpha)$$

Lemme 12.3.1.

Si $\alpha \in \Omega^{\mathrm{re}}_{+,\mathrm{nd}}$, $\exists\, x_0 \in H_\alpha \cap \mathfrak{T}^\circ$ *tel que* $\forall \beta \in \Delta^{\mathrm{re}} \setminus \mathbb{Q}\alpha,\ x_0 \notin H_\beta$.
Alors x_0 *est dans une cloison relative d'une chambre relative.*

Démonstration.

Si $\alpha \in \Omega^{\mathrm{re}}_{+,\mathrm{nd}}$, $\exists w \in W, \exists i \in I_{\mathrm{re}}$ tel que $\alpha \in \{w\alpha_i, 2w\alpha_i\}$, alors $H_\alpha = wH_{\alpha_i}$. D'après (11.4.4), $wC_{\{i\}} \neq \emptyset$. Soit $x_0 \in wC_{\{i\}}$, $\{i\}$ est de type fini donc $x_0 \in \mathfrak{T}^\circ$ et pour toute racine réelle β non proportionnelle à α, $< \beta, x_0 > \neq 0$.

□

Il résulte de ce lemme de façon immédiate :

Corollaire 12.3.2.

Pour tout $\alpha \in \Omega^{\mathrm{re}}$, H_α *est un mur relatif, il contient toujours une cloison relative.*

□

Proposition 12.3.3.

Soit $\alpha \in \Omega^{\mathrm{re}}$ *et* $x_0 \in H_\alpha \cap \mathfrak{T}^\circ$ *tel que* $x_0 \notin H_\beta$ *si* $\beta \in \Omega^{\mathrm{re}} \setminus \mathbb{Q}\alpha$. *(Un tel* x_0 *existe grâce au lemme précédent.) Ce point* x_0 *est exactement dans deux chambres relatives fermées; celles-ci ne dépendent que de la classe de* x_0 *modulo* $\approx_\Omega$ *et cette classe est une cloison relative de chacune de ces chambres.*

De plus, ces deux chambres sont échangées dans la réflexion $r_\alpha \in W_\Omega$ *et* H_α *est un mur.*

Démonstration.

On peut supposer $\alpha \in \Omega^{\mathrm{re}}_{+,\mathrm{nd}}$. Soit x_0' choisi comme en 12.3.1; d'après 11.4.1 quitte à changer x_0' en un point de $]x_0, x_0']$, on peut supposer que tous les points de $]x_0, x_0']$ sont dans une même facette F qui est alors une cloison. Donc il existe $w \in W$ tel que $w(\bar{F}) \subset \bar{C}$. Les deux chambres $C_\emptyset$ et $r_{w(\alpha)}(C_\emptyset)$ contiennent des familles génératrices de $V^*_{\mathbb{R}}$, il est clair qu'il en est de même de leurs images par w^{-1} . De plus, chacune des chambres $w^{-1}(C_\emptyset)$ et $w^{-1}r_{w(\alpha)}(C_\emptyset)$ est incluse dans une chambre relative et ces chambres relatives sont distinctes puisque :

$$< \alpha, w^{-1}(C_\emptyset) > . < \alpha, w^{-1}r_{w(\alpha)}(C_\emptyset) > \;=\; < w(\alpha), C_\emptyset > . < w(\alpha), r_{w(\alpha)}(C_\emptyset) > \;< 0$$

Notons alors C_1^Ω celle qui contient $w^{-1}(C_\emptyset)$ et C_2^Ω la seconde. Supposons que x_0 ou un autre élément de la classe F_0 de x_0 modulo $\approx_\Omega$ soit dans une chambre relative fermée,

$\bar{D}$ éventuellement distincte des deux précédentes. Par définition D rencontre $WC_\emptyset$ donc contient une famille génératrice de $V_{\mathbb{R}}^*$. Par suite, il existe un élément de D, x_1 tel que $< \alpha, x_1 > \neq 0$, mais alors

$$D = \Big\{ x \in V_{\mathbb{R}}^* \,/\, (\forall \beta \in \Omega^{re} \setminus \mathbb{Q}\alpha) \ < \beta, x > < \beta, x_0 > > 0 \\ \text{et} \ \ (\forall \beta \in \mathbb{Q}\alpha) < \beta, x > < \beta, x_1 > > 0 \Big\}$$

ce qui montre que D est forcément l'une des deux chambres précédentes.

Par le même raisonnement qu'en 11.4.4, on voit que F_0 est bien une cloison relative.

□

Corollaire 12.3.4.

Une cloison relative F est cloison relative d'exactement deux chambres.

Démonstration.

immédiat.

□

Proposition 12.3.5.

Deux chambres relatives différentes sont toujours séparées par un mur relatif.

Démonstration.

Soit C_1^Ω et C_2^Ω deux chambres relatives distinctes. C_i^Ω pour $i \in \{1,2\}$, contient une famille génératrice de $V_{\mathbb{R}}^*$, donc pour toute racine réelle de Ω il existe $x_\alpha^i \in C_i^\Omega$ tel que $< \alpha, x_\alpha^i > \neq 0$, on note alors $\varepsilon_i(\alpha)$ le signe de ce scalaire. (Il est bien sûr indépendant du choix de l'élement dans la chambre relative). Alors, on peut caractériser chacune des deux chambres grâce à la propriété :

$$C_i^\Omega = \{ x \,/\, < \alpha, x > .\varepsilon_i(\alpha) > 0 \ (\forall \alpha \in \Omega) \} \,.$$

Les deux chambres étant distinctes, il existe $\alpha \in \Omega^{re}$ tel que $\varepsilon_1(\alpha)\varepsilon_2(\alpha) < 0$, H_α est un mur relatif qui les sépare.

□

Proposition 12.3.6.

W_Ω agit transitivement sur C = { chambres relatives de Ω *} et il est engendré par les r_α pour $\alpha \in \Omega^{re}_{+,\mathrm{nd}}$ tels que H_α soit un mur d'une chambre relative donnée.*

Démonstration.

1) On note

$$R(x,y) = \{\alpha \in \Omega^{re}_{+,\,\mathrm{nd}} \,/ < \alpha, x > < \alpha, y > < 0\} \text{ et :}$$

$$\#_\Omega(x,y) = |R(x,y)|$$

$$= |\{ \text{ Murs relatifs qui séparent } x \text{ et } y \}|.$$

Si x et y sont dans le cône de Tits, on sait (12.2.5) que $\#_\Omega(x,y) \leq \#(x,y) < \infty$. Or une chambre relative rencontre le cône de Tits et il est clair que cet entier ne dépend pas des choix de x et y dans leurs classes d'équivalence pour Ω .

2) Soit alors deux chambres telles que $\#_\Omega(C_1^\Omega, C_2^\Omega) > 0$ (où $\#_\Omega(C_1^\Omega, C_2^\Omega)$ désigne bien sûr $\#(x,y)$ pour $x \in C_1^\Omega$ et $y \in C_2^\Omega$).

Il existe $x \in C_1^\Omega \cap \mathfrak{T}^\circ$ et $y \in C_2^\Omega \cap \mathfrak{T}^\circ$ tels que le segment $[x,y]$ coupe les hyperplans H_α qui séparent les deux chambres, en des points tous distincts.

En effet soit x et y quelconques dans l'intersection de chacune des chambres avec le cône de Tits “ouvert”. Notons $V' = V^*_{\mathbb{R}}/(\cap_{\alpha \in R(x,y)} H_\alpha)$, V' est un espace vectoriel de dimension finie.

L'image C_1' de $C_1^\Omega \cap \mathfrak{T}^\circ$ est un cône convexe de V' qui contient une famille génératrice de V', donc V_1' contient un ouvert de V' .

Pour $\beta \neq \alpha$ séparant les deux chambres relatives, $H'_\alpha \cap H'_\beta$ (avec les notations évidentes) est de codimension deux dans V' donc y' et cette intersection engendrent un hyperplan qu'on note $H^y_{\alpha,\beta}$.

La réunion finie des $H^y_{\alpha,\beta}$, quand (α,β) parcourt l'ensemble $R(x,y)^2$ privé de sa diagonale, ne peut contenir un ouvert de V', il existe $x_0' \in C_1'$ qui n'est pas dans cette réunion. Il suffit de relever x_0' en $x_0 \in C_1^\Omega \cap \mathfrak{T}^\circ$, alors x_0 et y conviennent.

3) Considérons alors deux chambres relatives C_i^Ω pour $i \in \{1,2\}$, et raisonnons par récurrence sur $\#_\Omega(C_1^\Omega, C_2^\Omega)$ pour établir le résultat suivant :

Pour une chambre relative C^Ω on note $W(C^\Omega)$ le groupe engendré par les r_α pour α relative à un mur de C^Ω, alors C_2^Ω est conjuguée à C_1^Ω par $W(C_1^\Omega) = W(C_2^\Omega)$.

Si cet entier est nul, alors les deux chambres relatives sont égales et le résultat est vrai. En effet les chambres étant des classes d'équivalence elles sont égales si leur intersection n'est pas vide ce qui est le cas lorsque l'entier considéré est nul puisque ces classes ne peuvent être contenues dans un hyperplan (elles contiennent une famille génératrice de $V^*_{\mathbb{R}}$).

Supposons le résultat établi lorsque $\#_\Omega(C_1^\Omega, C_2^\Omega) < n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit alors deux chambres telles que $\#_\Omega(C_1^\Omega, C_2^\Omega) = n$ et x et y deux points de ces chambres obtenus dans 2). On note $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ les intersections successives de $[x,y]$

et des hyperplans H_{β_i} séparant les deux points. Soit un point $z \in]x_1, x_2]$ alors $z \in r_{\beta_1}(C_1^\Omega)$ d'après la proposition (12.3.3) H_{β_1} est un mur de C_1^Ω donc $r_{\beta_1} \in W(C_1^\Omega)$ et par conjugaison $W(r_{\beta_1}(C_1^\Omega)) = W(C_1^\Omega)$. De plus $[z, y]$ coupe $n-1$ hyperplans et par récurrence C_2^Ω est conjugué à $r_{\beta_1}(C_1^\Omega)$ par $W(r_{\beta_1}(C_1^\Omega)) = W(C_2^\Omega)$, d'où le résultat.

4) La proposition résulte du résultat précédent et de 12.3.2 car W est engendré par les réflexions par rapport à des murs.

□

12.4 Propriétés de Ω^{re} si Ω est un sous-système

Soit à présent C la chambre relative "ouverte" qui contient $C_\emptyset$. Considérons :

$$\Phi_1 = \{\alpha \in \Omega^{\mathrm{re}}_{\mathrm{nd}} \cap \Omega_{\mathrm{nm}}\,;\ H_\alpha \text{ est un mur de } C \text{ et } <\alpha, x> \, > 0 \ (\forall x \in C)\}$$

$$\Phi_2 = \{\alpha \in \Omega^{\mathrm{re}}_{\mathrm{nd}}\,;\ 2\alpha \in \Omega,\ H_\alpha \text{ est un mur de } C \text{ et } <\alpha, x> \, > 0 \ (\forall x \in C)\}$$

N.B : D'après le choix de C, $\Phi_1 \cup \Phi_2 \subset \Omega^{\mathrm{re}}_{+,\mathrm{nd}}$.

Proposition 12.4.1.

On pose $\Phi^{\mathrm{re}}_{nd} = \Phi_1 \cup \Phi_2$, *et* $\Phi^{\mathrm{re}} = \Phi^{\mathrm{re}}_{nd} \cup 2\Phi_2$ *alors :*

$$\Omega^{\mathrm{re}} = W_\Omega(\Phi^{\mathrm{re}}) .$$

Démonstration.

Soit β une racine réelle de Ω non divisible, par (12.3.1), on a un élément x de $H_\beta \cap \mathfrak{T}^\circ$ qui n'est dans aucun autre hyperplan, de plus x est dans une face de C' une chambre relative dont H_β est un mur. D'après (12.3.6), il existe un élément w du groupe de Weyl relatif pour lequel $C' = w(C)$. On a vu que Ω est stable sous W_Ω, il en est de même de Ω^{re} en tant qu'intersection de Ω et Δ^{re} tous deux stables. Il est alors immédiat que W_Ω stabilise les ensembles des racines non divisibles (resp. non multipliables).

$H_{w(\beta)} = w(H_\beta)$ est évidemment un mur de C donc $w(\beta)$ ou $wr_\beta(\beta)$ est dans Φ .

□

Proposition 12.4.2.

Posons $B'_{\mathrm{re}} = (<\alpha, \beta'^\wedge>)$ *(où* $\beta'^\wedge$ *est défini en 12.2) lorsque* α *et* β *parcourent* Φ^{re}_{nd} . B'_{re} *est une matrice de Kac-Moody relative (sans indice imaginaire).*

Démonstration.

D'après (9.2.3), si $\alpha \in \Delta_+^{re}(J)$ alors $\tilde{\alpha}$, son unique image réciproque dans $\tilde{\Delta}$, est positive et son support est inclus dans J, il en est de même de sa coracine et donc par $\Psi\hat{}$, $\alpha\hat{} \in Q\hat{}_+(J)$.

1) Il est clair que les coefficients de la matrice considérée sont dans $\mathbb{Z}$.

2) Montrons que si les deux racines α et β sont dans Φ_{nd}^{re} et ne sont pas égales, alors $< \alpha, \beta\hat{} > \leq 0$.

H_α est un mur de C, soit alors x_0 comme en (12.3.1), x_0 est dans une cloison F de mur H_α . Pour tout $y \in \bar{C}$ on a $< \alpha, y > - < \beta, y > < \alpha, \beta\check{} > =< \alpha, r_\beta(y) > \geq 0$ car H_β est le seul mur séparant C et son image par r_β .

Il est clair que :

$$(\forall x \in F) \; < \alpha, x > = 0, \text{ et } < \beta, x > > 0$$

mais alors d'après l'inégalité précédente également vérifiée par x_0 qui est dans F donc dans $\bar{C}$, le produit $< \beta, x_0 > . < \alpha, \beta\check{} >$ est positif ou nul et donc $< \alpha, \beta\check{} > \leq 0$ ce qui permet d'établir le résultat.

3) Si $\alpha \in \Phi_1$ (resp . Φ_2) on a $< \alpha, \alpha'\hat{} > = 2$ (resp. 1) grâce au choix des coracines.

4) Si $< \alpha, \beta\hat{} > = 0$ il résulte de (3.4.5) que $< \beta, \alpha\hat{} > = 0$.

□

Théorème 12.4.3.

$S'_{re} = (B'_{re}, V, V\hat{}, <,>, \Phi^{re}, \Phi^{re\hat{}})$ est un système générateur de racines sans racine simple imaginaire de système de racines réelles Ω^{re} .

Démonstration.

Il est clair qu'on a bien un système générateur de racines puisque l'absence de racines simples imaginaires simplifie les axiomes à vérifier. La preuve de (SGR6) est basée sur le fait, qu'une somme d'éléments de Φ^{re} est une somme d'éléments de Π_{re} et que d'après 9.1.3 aucune somme de racines simples non triviale n'est nulle dans $Q_{\mathbb{Q}}$ car S est par hypothèses un système générateur de racines. La dernière assertion résulte alors de 12.4.1 et 12.3.6.

□

On déduit alors de 12.3.6 et de l'étude des systèmes générateurs de racines que :

Corollaire 12.4.4.

$(W_\Omega, \{r_\alpha\}_{\alpha\in\Omega^{re}})$ est le groupe de Coxeter correspondant à B'_{re} ou plus exactement à la matrice de Kac-Moody déduite de B'_{re} par la méthode de 3.2.1.

□

Remarque 12.4.5 :

Soit Ω^{re} une partie de Δ^{re} vérifiant (SSR1) et (SSR3); on a déjà signalé dans la remarque de 12.2 que tous les résultats précédents sont encore valables. Le système de racines $\bar{\Omega}$ de S'_{re} est alors obtenu en complétant Ω par les conditions de chaînes réelles (remarque 9.3.7), il est donc contenu dans Δ et il est facile de voir que c'est un sous-système de Δ; D'autre part, avec des notations évidentes, $\bar{\Omega} = \Omega^{re} \cup W_\Omega K_\Omega$ et pour toute racine $\alpha \in W_\Omega K_\Omega$, $\mathbb{N}^*\alpha \subset \bar{\Omega}$, on a donc $\bar{\Omega}\cap\Delta^{re} = \Omega^{re}$. Cependant, il peut exister d'autres sous-systèmes Ω de Δ vérifiant $\Omega \cap \Delta^{re} = \Omega^{re}$, par exemple $\Omega^{re} \cup \Delta^{im}$.

On obtient ainsi une correspondance bijective entre les sous-systèmes de Δ^{re} au sens de Moody et Pianzola et les sous systèmes de Δ dont la base est réelle (c'est à dire engendrés par leurs racines réelles).

12.5. Base de Ω

On note $\Omega^{im}_{+} = \Delta^{im}_{+} \cap \Omega$ et on déduit de SSR3, que Ω^{im}_{+} est W_Ω stable. Dans la suite, on dira que S **vérifie la condition (B)** s'il satisfait à l'une des hypothèses suivantes:

- (BN).
- (BZ): Π n'a pas une infinité de composantes connexes de type affine et S vérifie (Z).
- (BF): $V_{\mathbb{R}}$ est de dimension finie et 0 n'est pas adhérent à $R_+ \setminus \{0\}$.

NB : La seconde condition indiquée ici implique que :

a) les racines de type affines et orthogonales à toutes les autres racines forment une réunion finie de parties non adhérentes à 0 de droites rationnelles.

b) Pour toute racine α de Δ qui n'est pas du type considéré en a), il existe $\beta \in \Delta$ telle que $< \alpha, \beta\check{} > \neq 0$ et de plus $< q\alpha, \beta\check{} > \in \mathbb{Z}$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$ tel que $q\alpha \in \Delta$.

Lemme 12.5.1.

$$\forall\, \alpha \in \Omega^{im}_{+},\ \exists \beta \in W_\Omega(\alpha) \text{ tel que } < \beta, \gamma\check{} > \leq 0 \ \ (\forall \gamma \in \Omega^{re}_{+})$$

Plus précisément si on note :

$B_\Omega = \{\alpha \in Q_{\mathbb{Q}} \,/ < \alpha, \gamma\check{} > \leq 0 \ (\forall \gamma \in \Omega^{re}_{+})\}$ alors $W_\Omega(\alpha) \cap B_\Omega$ *est réduit à un point.*

Démonstration.

On choisit arbitrairement un élément $\tilde{\alpha}$ de $\zeta(\alpha)$, et on considère dans $\sigma^{-1}(W_\Omega).(\tilde{\alpha})$, un élément $\tilde{\beta}$ de hauteur minimale alors il est clair que $< \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}\check{} > \leq 0$ $(\forall \gamma \in \Psi^{-1}(\Omega^{re}))$, et l'image par Ψ de $\tilde{\beta}$ est solution. On pose encore (cf 3.2.4) :

$$A_\Omega = \{\alpha \in Q_{\mathbb{Q}} / (w(\alpha) - \alpha) \in \sum_{\beta \in \Phi^{re}} \mathbb{Q}_+ \beta \ (\forall w \in W_\Omega)\}$$

On a $A_\Omega \subset B_\Omega$ car $\mathbb{Q}_- \gamma \cap \sum_{\beta \in \Phi^{re}} \mathbb{Q}_+ \beta = \{0\}$ (cf 9.1.3)

De plus on a l'inclusion contraire car W_Ω est un groupe de Coxeter, et on peut faire la démonstration par récurrence comme au (3.2.4) en utilisant 9.4.4 (vu 12.4.3). Enfin il est clair (d'après 9.1.3 et 12.4.3) que si α et $w(\alpha)$ sont simultanément dans A_Ω, ils sont égaux.

Construction de la base

On note alors $K_\Omega = B_\Omega \cap \Omega_+^{im}$.

On considère Φ' un ensemble de représentants dans K_Ω des classes d'équivalence dans K_Ω pour la relation de $\mathbb{Q}$ proportionnalité. Pour chaque élément α de Φ', on considère $R(\alpha) := \{n \in \mathbb{Q}_+ ;\ n\alpha \in K_\Omega\}$, si cet ensemble de rationnels positifs admet un plus petit élément, on note celui-ci q, sinon on choisit $q \in R(\alpha)$ tel que $(3/4)q$ soit un minorant de $R(\alpha)$ (un tel q existe grâce à (B)) et dans les deux cas on pose $\gamma := q\alpha \in \Phi^{im}$ et $N^1(\gamma) := \{n \in \mathbb{Q}_+ ;\ n\gamma \in K_\Omega\}$. La base Φ est alors la réunion de Φ^{re} et de Φ^{im} ainsi construite.

Il est clair dans cette définition que pour tout $\alpha \in \Phi$, $1 \in N^1(\gamma)$, que la borne inférieure de $N^1(\gamma)$ est dans $[3/4, 1]$, et que c'est 1 lorsqu'il s'agit d'un plus petit élément, et que de plus deux éléments de Φ ne sont jamais $\mathbb{Q}$-proportionnels.

□

Considérons une numérotation $\{\gamma_j\}_{j \in J}$ des éléments de Φ . On note $N_i^1 = N^1(\gamma_i)$ et : J^{re} (resp. J_1; resp. J_2) l'ensemble des indices j de J tels que $\gamma_j \in \Phi^{re}$ (resp. Φ_1; resp. Φ_2), J^{im} (resp. J_0; resp. J_-) l'ensemble de ceux pour lesquels γ_j est imaginaire (resp. de type affine; resp. de type indéfini).

On suppose dans la suite que les coracines des éléments de Δ sont choisies de façon compatible à l'action de W, ceci est possible d'après la remarque 10.2.6, et on peut aussi supposer, dans le cas où la condition (Z) est satisfaite, les coracines dans $Q\check{}$.

Proposition 12.5.2.

$B = \left(< \gamma_i, \gamma\hat{\ }_j > \right)_{(\gamma_i,\gamma_j)\in\Phi}$ est une matrice de Borcherds relative et $b_{ij} = < \gamma_j, \gamma\hat{\ }_i >$ *est un entier si* $i \in I_{re}$.

Elle est à coefficients entiers si S vérifie la condition (Z).

Démonstration.

1) Si la condition (Z) est vérifiée (resp. si $j \in I_{re}$) , le coefficient $b_{ji} = < \gamma_i, \gamma\hat{\ }_j >$ de la matrice B est dans $\mathbb{Z}$: en effet $\gamma\hat{\ }_j \in Q\hat{\ }$ d'après l'hypothèse précédente. D'autre part, l'ensemble des γ_i est dénombrable car Δ l'est.

2) Supposons $< \gamma_i, \gamma\hat{\ }_j > = 0, (i \neq j)$. On sait que le signe au sens strict de $< \gamma_i, \gamma\hat{\ }_j >$ ne dépend pas du choix de $\gamma\hat{\ }_j$ dans $\Psi\hat{\ }(\zeta\hat{\ }(\gamma_i))$. Soit $\widetilde{\gamma}_j \in \zeta(\gamma_j)$ (resp. $\widetilde{\gamma}_i \in \zeta(\gamma_i)$) on a alors par (7.2.4) :

$$< \gamma_i, \gamma\hat{\ }_j > = < \widetilde{\gamma}_i, \widetilde{\gamma}\hat{\ }_j > = 0 \Longleftrightarrow < \widetilde{\gamma}_j, \widetilde{\gamma}\hat{\ }_i > = < \gamma_j, \gamma\hat{\ }_i > = 0$$

3) Si γ_i et γ_j sont dans Φ^{im}, $< \gamma_i, \gamma\hat{\ }_j >$ est du signe de $< \widetilde{\gamma}_i, \widetilde{\gamma}\hat{\ }_j >$ avec les notations du 2), donc est négatif ou nul par (7.2.1).

4) Si l'une des deux racines est réelle et l'autre non (par $< \gamma_i, \gamma\hat{\ }_j > < \gamma_j, \gamma\hat{\ }_i > \geq 0$ on peut supposer que $\gamma_i \in \Phi^{\mathrm{re}}$), mais alors par le choix de γ_j dans K_Ω, il est clair que $< \gamma_j, \gamma\hat{\ }_i > \leq 0$.

5) Les autres conditions requises résultent de 12.4.2.

□

Théorème 12.5.3.

Si S vérifie la condition (BN) (resp. (BZ), resp. (BF)), et si on pose :

$$S_1 := (B, V, V\hat{\ }, <,>, \Phi, \Phi\hat{\ }, \{N_i^1\}_{i\in J_{\mathrm{im}}}) .$$

S_1 *est un système générateur de racines vérifiant (BN) (resp. (Z), resp. (BF)) et* $\Delta(S_1) = \Omega$.

Remarque :

L'hypothèse "Π n'a pas une infinité de composantes connexes de type affine" n'est pas forcément conservée car les racines affines α de Ω orthogonales aux éléments de $\Omega \setminus \mathbb{Q}\alpha$ ne sont pas nécéssairement orthogonales toutes les racines de $\Delta \setminus \mathbb{Q}\alpha$.

De même, la condition I fini qui permet également d'assurer que S_1 est un S.G.R tel que $\Delta(S_1) = \Omega$ ne passe pas au sous-système.

De façon analogue, toute condition permettant d'assurer que les N_i^1 tels qu'ils ont été construits sont minorés par des constantes strictement positives permet de montrer le théorème .

Démonstration.

L'axiome (SGR1) résulte de la proposition précédente.

(SGR2) et (SGR3) sont vérifiés puisque par hypothèse S est un système de racines.

On a remarqué , lors de leur construction, que les parties N_i^1 contiennent 1, sont incluses dans $[3/4, \infty[$ et que leur plus petit élément est 1 s'il existe. Ceci établit (SGR4), car $N_i^1 < \gamma_i, \gamma\,\hat{}_j > \subset \mathbb{Z}$ pour $j \in J^{re}$ puisque R et $Q\,\hat{}_{re}$ sont en dualité sur $\mathbb{Z}$.

(SGR5) résulte du choix de B .

Reste à établir (SGR6),

1) Tout élément de Φ et toute somme d'éléments de $\Phi^{re} \cup (\cup_{\alpha \in \Phi^{im}} N^1(\alpha)\alpha)$ est un élément non nul de $Q_{\mathbb{Q},+}$, on sait que $\Psi(\widetilde{Q}_{\mathbb{Q},+} \setminus \{0\}) \cap \{0\} = \emptyset$, ce qui permet d'établir a).

2) On sait, par construction de la base Φ, que deux éléments de Φ ne sont jamais $\mathbb{Q}$-proportionnels, ce qui établit b).

Ainsi, S_1 est un système générateur de racines.

D'après (9.3.7), $\Delta(S_1)$ est le plus petit sous ensemble de $\sum_{j \in J} \mathbb{Q}\gamma_j$ symétrique et tel que si $\alpha \in \Delta_+(S_1)$ et $\gamma_j \in \Phi$ alors $Ch(\alpha, \gamma_i) \subset \Delta(S_1)$. Or il est clair par SSR1 et par (12.1.2) que Ω vérifie ces deux propriétés (dans le cas d'une chaîne imaginaire, il faut appliquer 12.1.2b de façon répétitive à tous les $\alpha \in N_i^1\gamma_i$).

Supposons à présent l'existence d'un élément de Ω qui n'est pas dans $\Delta(S_1)$; comme $\Omega^{re} = W_\Omega \Phi^{re} = \Delta^{re}(S_1)$, β est nécessairement imaginaire. Par symétrie des deux ensembles, on peut le supposer dans Ω_+ ; enfin par stabilité de Ω et $\Delta(S_1)$ sous W_Ω on peut le supposer dans K_Ω . Supposons alors avoir choisi un élément de $\Omega_+ \setminus \Delta(S_1)$ tel que $x(\beta)$ soit minimal à ε près. Cet élément est évidemment dans K_Ω . Par construction de la base, il existe $\gamma_i \in \Phi$ et $n_i \in N_i^1$ tels que $\beta - n_i\gamma_i \in \Omega_+$ et $< \beta - n_i\gamma_i, \gamma\,\hat{}_i > < 0$ d'après le choix de β, $\beta - n_i\gamma_i \in \Delta(S_1)$ car $x(n_i\gamma_i) > \varepsilon$, mais alors les conditions de chaînes impliquent $\beta \in \Delta(S^1)$, d'où la contradiction.

Pour montrer que l'hypothèse (B) est conservée, il suffit de montrer la stabilité des trois hypothèses (et donc en particulier celles de (BN) et de (Z)).

La stabilité de (BN) est claire puisque la restriction de θ convient. Pour montrer celle de (Z), il suffit de remarquer que sous cette hypothèse, $< \alpha, \beta\,\check{} > \in \mathbb{Z}$ pour tout couple de racines.Enfin la stabilité de la troisième hypothèse est évidente

□

Corollaire 12.5.4.

Si S vérifie (BN), alors il existe un S.G.R. normalisé S_2 correspondant à Ω.

Démonstration.

D'après la proposition précédente, S_1 vérifie (BN), le corollaire résulte alors de (10.3.3).

12.6 Invariance des conditions sur les S.G.R.

Hypothèses sur la réalisation 12.6.1

Il est clair que le S.G.R. S_1 associé au sous-système Ω vérifie aussi la condition (A). De même, il est facile de voir que si le système S vérifie l'hypothèse (BN), la restriction au sous-système de la $\mathbb{Q}$-forme θ permet de montrer que S' satisfait aussi à (BN).

L'hypothèse (MP) (cf 11.3) passe au sous-système au moins dans le cas où $Q_K(I_{\mathrm{re}})$ est de dimension finie dans V. On déduit en effet ceci du lemme 5 du paragraphe 6 de [MP] :

$Q'_{\mathrm{re},+} = \sum_{\alpha' \in \Phi'_{\mathrm{re}}} \mathbb{N}\alpha' \subset Q_{\mathrm{re},+} = \sum_{i \in I_{\mathrm{re}}} \mathbb{N}\alpha_i \subset \oplus \mathbb{N}\gamma_j$ si $\{\gamma_i\}$ est la base satisfaisant à (MP) dans S. On se place alors dans $V_{\mathbb{R}} = V \otimes \mathbb{R}$ et on considère $C = \oplus \mathbb{R}_+ \gamma_i$, $C' = V' \cup C$ où $V' = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} Q'$. C' est un cône propre et $C^{\circ +}$ n'est pas vide car $C_{\emptyset} \neq \emptyset$ grâce à (MP) dans (S) et donc on peut appliquer le lemme 5 précité.

Ainsi si S vérifie (MP) ou (MP') (resp. (MP")) et si $Q_K(I_{\mathrm{re}})$ (resp. Q_K) est de dimension finie, il en va de même de S_1 (en fait le sous espace engendré par les racines réelles du sous-système est bien sûr inclus dans $Q_K(I_{\mathrm{re}})$).

Par contre Moody et Pianzola ont montré que même si elle est vérifiée dans S, la condition (L) n'est plus forcément vérifiée dans S_1 (cf 12.4.5) ce qui a nécessité l'abandon de cette hypothèse au chapitre IV.

Les hypothèses sur les ensembles N_i 12.6.2

L'hypothèse "les N_i de plus petit élément 1" ne passe pas à S_1, par exemble si Δ contient une infinité de composantes connexes de type affines réelles de racines imaginaires proportionnelles et si le sous-système considéré est celui formé des racines imaginaires de ces composantes connexes

Ce même exemple permet de voir que l'hypothèse "les N_i sans point d'accumulation dans $\mathbb{R}$" (resp. "à dénominateurs bornés") ne passe pas aux sous-systèmes.

Par contre si on suppose simultanément "les N_i sans point d'accumulation dans $\mathbb{R}$" (resp. à dénominateurs bornés) et l'hypothèse (Z) (la première hypothèse n'ayant alors de conséquence que sur les racines affines formant une composante connexe de la base), il est facile de voir que pour que les $N^1(\alpha)$ soient sans point d'accumulation dans $\mathbb{R}$ (resp. à dénominateurs bornés) il suffit que l'hypothèse suivante soit vérifiée :

"Si α est une racine imaginaire d'une composante connexe de type affine de I alors $\{n \in \mathbb{Q}, n\alpha \in \Omega\}$ est sans point d'accumulation dans $\mathbb{R}$ (resp. à dénominateurs bornés)".

En effet pour toute autre racine $\alpha \in \Phi$, il existe au moins un indice i tel que $< \alpha, \gamma\hat{\imath} > \neq 0$ et la conditon (Z) (qui est conservée lors du passage au sous-système) implique alors $N^1(\alpha)$ sans point d'accumulation dans $\mathbb{R}$ (resp. à dénominateurs bornés).

Les hypothèses sur le type de la matrice 12.6.3

Si la matrice A est de type fini (resp. fini ou profini), il est clair que la matrice de tout sous-système est de type fini (resp. fini ou profini), en effet :

A est de type fini ou profini si et seulement si $\Delta(A)$ n'a pas de racines imaginaires. Le sous-système Ω de Δ est donc dans le même cas et cela montre que B est de type fini car de plus $\Delta(A)$ est fini (resp. B est de type fini ou profini).

Si A est de type affine alors B est décomposable en matrices de type affine ou fini, autrement dit B est de type semi-affine en effet :

A est de type affine (ou fini ou profini) si et seulement si elle n'admet pas de racine de type indéfini (c'est à dire pour laquelle $< \alpha, \alpha\hat{} > < 0$), il en est donc de même de Ω et par suite B est de type fini ou affine (car on verra en 13.1 que B est de rang fini donc ne peut pas être de type profini).

Remarque :

Même si la matrice A est de type affine indécomposable B peut être décomposable, ces composantes sont alors toutes de type affine ou fini. Si B a une sous-matrice de type affine elle contient au moins un multiple de la racine imaginaire de Δ sinon B est de type fini (elle n'est pas forcément indécomposable mais toutes ses composantes sont de type fini).

Enfin il est clair que si A est de type indéfini, les composantes indécomposables de B peuvent être de type fini, affine, indéfini ou proindéfini. Cette dernière possibilité apparaît dans l'exemple du "Démon de Maxwell" de [MP].

Si A est de type proindéfini, alors le type de B est quelconque.

On a vu que la matrice A peut être indécomposable sans que B le soit. On peut par exemple étudier le sous système $\Delta(J)$ pour J réunion de deux parties non vide de I et non liées dans le diagramme de Dynkin.

Par contre, il est clair que si Φ est indécomposable, on peut l'extraire d'une composante indécomposable de Δ et donc Ω est obtenu comme sous-système d'un $\Delta(J)$ où J est composante connexe de I.

13. Théorème de conjugaison des bases

On considère sous l'hypothèse (A) de ce chapitre, le système générateur de racines S sur K, et $\Delta = \Delta(S)$ son système de racines.

13.1. L'hypothèse de rang fini

Dans tout ce paragraphe 13, on suppose que **la matrice $A(I_{re})$ est de rang fini.**

1) Ceci entraîne en fait un certain nombre de conséquences :

a) La base réelle du système de racines ne peut pas contenir une infinité de composantes connexes (ou composantes "indécomposables"). En effet, chacune de ces composantes est de rang au moins égal à 1.

b) La base réelle du système de racines ne peut pas être de type profini (ni contenir une partie de ce type). En effet, une réalisation d'une matrice d'ordre fini et de type fini, est forcément libre puisque la matrice est inversible. Il est clair que si I est de type profini, toute matrice indécomposable d'ordre n extraite de A est de rang n, on a $rg(A) > n$ pour tout entier n ce qui contredit notre hypothèse.

c) Comme une matrice extraite d'une matrice de rang fini est forcément de rang fini, il résulte de a) que I_{re} ne peut contenir une partie infinie J dont les éléments sont deux à deux non liés.

d) En particulier, I_{re} doit être de diamètre fini, c'est à dire qu'il existe un entier n tel que si i et j sont dans une même composante connexe de I_{re}, on peut relier i et j dans le diagramme en passant par au plus n points.

En fait, si r est le rang de la matrice A , on a $n \leq 2r - 2$ car si $i_0, i_1, \ldots, i_{2r-2}$ sont des points de I tels que les seules liaisons entre eux soient entre i_k et i_{k+1} (on obtient ainsi, les chemins de longueur minimale entre deux points), alors $J = \{i_0, i_1, \ldots, i_{2r-2}\}$ satisfait aux conditions de d).

2) Inversement cette hypothèse est automatiquement vérifiée si $dim(V) < \infty$ ou plus généralement si $dim(Q_{re} \otimes K) < \infty$ ou $dim(Q\hat{\ }_{re} \otimes K) < \infty$.

En effet le rang de $A(I_{re})$ est le rang de l'application linéaire de $K^{(\Pi^{re})}$ dans $K^{\Pi\hat{\ }(I_{re})}$ qui envoie $\sum_{i \in I_{re}} n_i \alpha_i$ sur le vecteur de composante $\sum_{i \in I_{re}} n_i < \alpha_i, \alpha\hat{\ }_j >$ suivant $\alpha\hat{\ }_j$, et cette application se factorise par l'application de $Q_{re} \otimes K$ dans le dual de $Q\hat{\ }_{re} \otimes K$.

En fait $A(I_{re})$ est de rang fini si et seulement si il existe une réalisation $(\mathfrak{h}, \mathfrak{h}\hat{\ }, \Pi, \Pi\hat{\ })$ de $A(I_{re})$ avec $\mathfrak{h}$ et/ou $\mathfrak{h}\hat{\ }$ de dimension finie.

3) Cette hypothèse est stable par passage aux sous-systèmes. Plus précisément si $A(I_{re})$ est de rang fini et si on considère un sous-système de racines Ω du système Δ engendré

par le S.G.R. correspondant à A, sa matrice réelle B'_{re} (avec les notations de 12.4.2) est de rang fini.

En effet $Q_{\mathrm{re}} = \sum_{\alpha \in \Delta^{\mathrm{re}}} \mathbb{Z}\alpha$, si $A(I_{\mathrm{re}})$ est de rang fini, le rang de l'application de $Q_{\mathrm{re}} \otimes K$ dans $K^{\Delta\check{}(I_{\mathrm{re}})}$ qui envoie $\alpha \in \Delta^{\mathrm{re}}$ sur le vecteur de composante $< \alpha, \beta\check{} >$ suivant $\beta\check{}$ est fini. Cette condition passe aussitôt au sous-système Ω .

D'autre part $A(I_{\mathrm{re}})$ ne change pas par isomorphisme ou normalisation, donc cette hypothèse ne change pas par ces transformations.

4) On va montrer (en 13.3.1) que sous l'hypothèse indiquée (et si $I = I_{\mathrm{re}}$ est indécomposable), les bases du système de racines Δ sont conjuguées par $\pm W$. Ceci ne pourrait être vrai en général qu'en grossissant le groupe W :

Supposons que $I = I_{\mathrm{re}}$soit indécomposable mais contienne une partie infinie J dont les éléments sont deux à deux non liés, que J soit la réunion de deux parties infinies J_1 et J_2 telles que pour tout $i \in I$ le nombre d'éléments de J_1 liés à i soit fini. On considère alors le produit infini commutatif $\widetilde{w} = \prod_{j \in J_1} r_j$. La dernière hypothèse assure que $\widetilde{w}$ restreint à un sous-espace de dimension finie de Q_K est la restriction d'un élément du groupe de Weyl W . Ainsi $\widetilde{w} \in \mathrm{GL}(Q_K)$ stabilise Δ et il est clair que $\widetilde{w}(\Pi)$ est une base. Par contre $\widetilde{w}(\Pi) \cap \Pi$ (qui contient α_i pour $i \in J_2$) et $\widetilde{w}(\Pi) \cap -\Pi$ (qui contient α_i pour $i \in J_1$) sont infinis; donc $\widetilde{w}$ ne peut être conjugué à Π par $\pm W$.

13.2. Notion de base

Une racine α sera dite *indivisible* si pour $q \in \mathbb{N}$, $(1/q)\alpha \in \Delta \Longrightarrow q = 1$.

Une partie Σ de Δ est dite *décomposable* si il existe une partition de Σ, en deux parties non vides, $\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$ telle que si $\gamma_1 \in \Sigma_1$ et $\gamma_2 \in \Sigma_2$ alors $< \gamma_1, \gamma\check{_2} >= 0$.

Σ sera dite *indécomposable* dans le cas contraire.

Définition

Une partie Φ de Δ est *une base de* Δ, si elle est formée de racines indivisibles et si on peut trouver :

- pour chaque élément imaginaire α de Φ, une partie $N(\alpha, \Phi)$ de $\mathbb{Q}_+$ de plus petit élément 1 ou sans plus petit élément mais contenant 1 et contenue dans $[3/4, \infty[$;

- une partie $\Phi^{1\check{}}$ de $Q\check{}$ vérifiant :

  - pour une racine réelle $\alpha \in \Phi$, $\alpha^{1\check{}} = \alpha\check{}$ si $2\alpha \notin \Delta$, $\alpha\check{}/2 = (2\alpha)\check{}$ sinon (ie. $\alpha^{1\check{}} = \alpha\check{}$);

  - pour une "racine imaginaire" $\alpha^{1\check{}}$ un élément de $Q\check{}$ tel que pour tout $\beta \in \Phi$, $< \beta, \alpha^{1\check{}} >$ et $< \beta, \alpha\check{} >$ soient de même signe au sens strict;

pour lesquelles si A^1 est la matrice des $< \alpha, \beta^{1\hat{}} >$ pour α et β dans Φ, on a :

$$S^1 := (A^1, V, V\hat{}, <,>, \Phi, \Phi^{1\hat{}}, \{N(\alpha, \Phi)\}_{\alpha \in \Phi_{\mathrm{im}}}) \text{ est un S.G.R.}$$

$$\text{tel que } \Delta(S^1) = \Delta(S) \ .$$

Si S ne vérifie pas l'hypothèse (BN), on suppose de plus $\Delta^{\mathrm{re}}(S^1) = \Delta^{\mathrm{re}}(S)$.

En particulier la matrice A^1 sera une matrice de Borcherds relative, son type sera appelé *le type de* Φ .

Il est clair que dans la définition habituelle de S, Π est une base de $\Delta(S)$.

Remarque :

Si S vérifie la condition (Z), il est clair que pour un choix convenable des coracines $\alpha^{1\hat{}}$ (par exemple $\alpha^{1\hat{}} = \alpha\hat{}$), S^1 vérifie également (Z).

Lemme 13.2.1.

Sous les hypothèses précédentes

$$\Delta^{\mathrm{re}}(S^1) = \Delta^{\mathrm{re}}(S)$$

et pour tout $\alpha \in \Delta^{\mathrm{re}}(S)$, $\alpha\hat{}$ *et* $\alpha\check{}$ *sont les mêmes dans les deux définitions. En particulier les groupes de Weyl sont les mêmes.*

D'autre part $A^1(I^1_{\mathrm{re}})$ *est alors aussi de rang fini.*

Démonstration.

En effet, il résulte de la définition de $\alpha^{1\hat{}}$ en fonction de $\alpha\check{}$ si α est une racine réelle de Φ, que $\alpha^{1\check{}} = \alpha\check{}$ et $\alpha^{1\hat{}} = \alpha\hat{}$ .D'autre part, si S vérifie (BN), d'après la caractérisation en 11.5.3 des racines réelles, on a clairement comme condition nécessaire à l'égalité des deux systèmes, l'égalité des ensembles des racines réelles (le signe de $< \alpha, \alpha\hat{} >$ permettant de lever l'imprécision dans la caractérisation puisque cette imprécision concerne des éléments "isolés" des bases, qui se retrouvent donc (à une constante près) dans les deux bases).

Dans tous les cas, on en déduit que pour tout $i \in I_{\mathrm{re}}$, le groupe de Weyl W^1 contient au moins un w^1 qui envoie α_i sur une racine de Φ, et par suite contient les r_i pour $i \in I$ ce qui établit l'inclusion $W \subset W^1$, l'inclusion contraire étant immédiate puisque les générateurs de W^1 (qui sont les réflexions par rapport aux éléments de Φ^{re}) sont évidemment dans W . Enfin l'argument cité à la remarque 3) de 13.1 permet de prouver la dernière assertion.

□

Proposition 13.2.2.

Si Φ est une base de $\Delta = \Delta(S)$,

a) $\Delta(S)$ est indécomposable $\Longrightarrow$ Φ est indécomposable;

b) $\Delta^{re}(S)$ est indécomposable $\Longleftrightarrow$ Φ^{re} est indécomposable;

c) $\left\{\begin{array}{l}\Phi \text{ est indécomposable}\\ \text{et n'est pas de type affine}\end{array}\right. \Longrightarrow \Delta(S)$ est indécomposable.

Démonstration.

a) Supposons Φ décomposable, il existe alors une partition $\Phi = \Phi_1 \sqcup \Phi_2$ non triviale et telle que $< \alpha_1, \alpha\hat{_2} > = 0$ si $\alpha_1 \in \Phi_1$ et $\alpha_2 \in \Phi_2$. Notons Δ_1 (resp. Δ_2) le sous-système de racines de Δ associé à Φ_1 (resp. Φ_2), on a alors les inclusions $\Delta_1 \subset \sum_{\alpha\in\Phi_1} \mathbb{Q}\alpha$ (resp. $\Delta_2 \subset \sum_{\alpha\in\Phi_2} \mathbb{Q}\alpha$) et, pour les ensembles des coracines correspondantes $(\Delta_1)\hat{} \subset \sum_{\alpha\in\Phi_1} \mathbb{Z}\alpha\hat{}$ (resp. $(\Delta_2)\hat{} \subset \sum_{\alpha\in\Phi_2} \mathbb{Z}\alpha\hat{}$). Il est alors facile de constater que $< \Delta_1, (\Delta_2)\hat{} > = 0$ et d'après la construction de Δ à partir des conditions de chaînes on a $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ et donc Δ est décomposable. Ce qui établit a).

b) Si Δ^{re} est décomposable, considérons alors $\Delta^{re} = \Delta_1 \cup \Delta_2$, une décomposition en deux parties non vides et orthogonales de Δ^{re} . On peut alors considérer $\Phi_1 = \Phi^{re} \cap \Delta_1$ et $\Phi_2 := \Delta_2 \cap \Phi^{re}$; il est clair $\Phi^{re} = \Phi_1 \cup \Phi_2$ que les deux parties de Φ ainsi définies sont non vides car le groupe de Weyl est le produit direct de ses deux sous groupes $< r_\alpha; \alpha \in \Delta_1 >$ et $< r_\alpha; \alpha \in \Delta_2 >$ et comme $< r_\alpha; \alpha \in \Delta_1 >$ n'agit pas sur Δ_2 et inversement, ceci montre qu'une seule partie ne suffit pas pour engendrer Δ^{re} tout entier. Pour la réciproque, il est clair que le même raisonnement qu'au a) est valable en remplaçant les conditions de chaînes par l'action du groupe de Weyl.

c) Supposons Δ décomposable et Φ indécomposable et montrons qu'alors Φ est nécessairement de type affine. Soit $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ une partition de Δ en deux parties orthogonales non triviales. On pose alors $\Phi_1 := \Phi \cap \Delta_1$ et $\Phi_2 := \Phi \cap \Delta_2$, l'hypothèse faite sur Δ implique alors que l'une de ces deux parties de Φ est vide, (puisqu'on obtient une partition de Φ en deux parties orthogonales). Supposons $\Phi_2 = \emptyset$. Alors par le raisonnement sur le groupe de Weyl donné au b), il est clair que Δ_2 n'est formé que de racines imaginaires sur lesquelles W n'agit pas et qui sont toutes orthogonales à la base. Par suite Δ_2 n'est formé que de racines de type affines et donc la base Φ est de type affine.

□

Remarque :

Une partie Σ de Δ est dite *fortement décomposable* s'il existe une partition de Σ, en deux parties non vides, $\Sigma = \Sigma_1 \sqcup \Sigma_2$ telle que si $\gamma_1 \in \Sigma_1$ et $\gamma_2 \in \Sigma_2$ alors aucun des deux éléments : $\gamma_1 + \gamma_2$, $\gamma_1 - \gamma_2$ n'est une racine.

Cette notion est plus forte que la notion habituelle, elle signifie qu'on peut partitionner Σ en deux parties fortement orthogonales et pas seulement orthogonales. Cependant elle ne permettrait pas d'obtenir un "meilleur" énoncé de la proposition 13.2.2. En effet deux parties fortement orthogonales de $\cup_{i\in I} N_i\alpha_i$ n'engendrent pas nécessairement des parties fortement orthogonales de Δ ni même disjointes toujours à cause des racines de type affine.

On considère deux systèmes générateurs de racines $S := (A, V, V\check{}, <,>, \Pi, \Pi\check{}, \{N(\alpha,\Pi)\}_{\alpha\in\Pi^{im}})$ et $S^1 := (A^1, V, V\check{}, <,>, \Phi, \Phi\check{}, \{N(\alpha,\Phi)\}_{\alpha\in\Phi^{im}})$ tels que Π et Φ soient les bases d'un même système de racines Δ et tel que S vérifie (A).

On a alors d'après (8.5), $R = \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{Z}\alpha$, et donc :

$$R = \sum_{\alpha\in\Pi} \mathbb{Z}N(\alpha,\Pi)\alpha = \sum_{\alpha\in\Phi} \mathbb{Z}N(\alpha,\Phi)\alpha$$

où on a donné comme définition de $N(\alpha,\Pi)$ ou $N(\alpha,\Phi)$, pour α racine réelle : $\{1,2\}$ si α est multipliable dans Δ, $\{1\}$ sinon. De plus on a facilement aussi :

$$Q\check{}_{re} = \sum_{\alpha\in\Pi^{re}} \mathbb{Z}\alpha\check{} = \sum_{\alpha\in\Phi^{re}} \mathbb{Z}\alpha\check{}$$

On considère alors $S_{\mathbb{R}}$ et $S^1_{\mathbb{R}}$, on note encore V, le $\mathbb{R}$-espace correspondant.

13.3. Bases réelles

Remarque préliminaire :

Les résultats de ce numéro n'utilisent que Δ^{re} et les propriétés du lemme 13.2.1 ainsi que sa conséquence 13.2.2b qui montre que les composantes indécomposables de $\Delta^{re}(S)$ permettent de caractériser les composantes connexes de Φ^{re} et de Π^{re} . En effet si $\Delta^{re}(S^1) = \Delta^{re}(S)$ et si Π et Φ ne sont formés que de racines réelles, alors $\Delta(S^1) = \Delta(S)$, d'après la remarque 9.3.7.

Proposition 13.3.1.

On considère Δ_1 une composante indécomposable de $\Delta^{re}(S^1)$, Π_1 et Φ_1 les composantes connexes de Π et Φ correspondantes, il existe $w \in W$ tel que $\Pi_1 = w(\Phi_1)$ ou $\Pi_1 = -w(\Phi_1)$. (Si Π_1 ou Φ_1 est de type fini, on peut toujours supposer $\Pi_1 = w(\Phi_1)$.)

N.B : En fait, w est dans le sous-groupe de W engendré par les réflexions correspondant à Π_1 .

Démonstration.

Soit C (resp. F) la chambre ouverte fondamentale relative à Π_1 (resp. Φ_1)), et $\mathfrak{T}$ le cône de Tits relatif à Φ_1, $\mathfrak{T} = W.\bar{F}$ où $\bar{F}$ est la chambre fermée correspondant à F . (Par hypothèse sur S, C engendre $V^*_{\mathbb{R}}$.)

Si $W\bar{F} \cap \pm C \neq \emptyset$, on aura le résultat car $w(F)$, C et $-C$ sont des classes d'équivalence pour la relation $\approx_{\mathcal{H}_\Delta}$. On aura alors clairement l'égalité $wC = \pm F$, permettant d'identifier les ensembles $w(\Pi_1)$ (ou $-w(\Pi_1)$)) à Φ_1 en tant qu'ensemble des racines non divisibles et positives sur la chambre F correspondant aux murs de la chambre F .

Montrons que $W\bar{F} \cap \pm C \neq \emptyset$. D'après 13.1 on est dans un des trois cas suivants :

1) Si Φ_1 est de type fini : D'après 11.3.2, $\mathfrak{T} = V^*_{\mathbb{R}}$ et donc $W\bar{C} \cap F \neq \emptyset$ Ainsi $\Pi_1 = w(\Phi_1)$ est de type fini.

2) Si Φ_1 est de type affine, $\mathfrak{T}$ est un demi-espace (cf 11.3.2) donc $\pm\mathfrak{T}$ rencontre C car C ne peut pas être contenue dans un hyperplan puisque par hypothèse sur S elle contient une famille génératrice de $V^*_{\mathbb{R}}$. Ainsi $\Pi_1 = \pm w(\Phi_1)$ est de type affine.

La même conclusion vaut même si C n'engendre pas $V^*_{\mathbb{R}}$ mais si Π_1 n'est pas de type fini, car $V^*_{\mathbb{R}} \setminus \pm\mathfrak{T}$ est une réunion finie de facettes pour $\mathcal{H}_{\Delta_1}$.

3) Si Φ_1 est de type indéfini ou proindéfini.

Dans ce cas Π_1 n'est pas nécessairement finie. On choisit $J \subset I_1$, où I_1 est une numérotation des éléments de Π_1, tel que J est fini, $A(J)$ est indécomposable et de type indéfini, $\Pi(J)$ engendre l'image de $Q_{\mathrm{re}} \otimes \mathbb{R}$ dans le dual de $Q\,\hat{}_{\mathrm{re}} \otimes \mathbb{R}$.

Un tel choix est possible car si toute matrice indécomposable d'ordre fini extraite de $A(I_1)$ est de type fini ou affine, alors comme $A(I_1)$ ne peut pas être de type profini, puisque le rang de $A(I_1)$ est fini, $A(I_1)$ elle même est de type fini ou affine et l'ensemble Φ_1 est de type fini ou affine d'après 1) et 2) ce qui contredit notre hypothèse. Par suite Π_1 est de type indéfini ou proindéfini.

On peut alors choisir parmi les éléments de Π_1, une famille finie dont l'image est génératrice de l'image de $Q(I_1) \otimes \mathbb{R}$ dans le dual de $Q\,\hat{}_{\mathrm{re}} \otimes \mathbb{R}$, qui est de dimension finie on peut encore la complèter par un nombre fini d'éléments encore choisis dans Π_1 pour obtenir une famille indécomposable (il s'agit de relier les éléments de la famille choisie dans le diagramme de Dynkin restreint à I_1).

J étant ainsi choisi, il existe $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Delta}$ (dans le revêtement de S) de support J et telle que $< \tilde{\gamma}, \alpha\check{} > < 0$ pour toute racine simple α de $\Pi(J)$ (cf 5.5.4). On note γ la "projection" dans $\Delta(S)$ de cette racine.

Lemme 13.3.2.

Pour tout $\alpha \in \Pi_1$, on a $< \gamma, \alpha\check{} > < 0$ et donc $< \alpha, \gamma\check{} > < 0$ (cf. 7.2.4) c'est à dire $\gamma\check{} \in -C$.

Démonstration.

Comme la décomposition de γ choisi comme avant, est dans $\Pi(J)$ il est clair que pour une racine simple α qui n'est pas dans cette partie de la base, on a $< \gamma, \alpha\check{} > \leq 0$. Par hypothèse Π_1 est indécomposable et on sait que le support de $\widetilde{\gamma}$ est exactement J . Or on sait que par hypothèse, J est choisi de façon à ce que l'image de $\Pi(J)$ engendre l'image de $Q(I_1) \otimes \mathbb{R}$. Si on suppose l'existence de $\alpha \in \Pi_1$, telle que $< \gamma, \alpha\check{} >= 0$, alors nécessairement $< \beta, \alpha\check{} >= 0$ pour tout $\beta \in \Pi(J)$ et donc pour tout $\beta \in \Pi_1$ ce qui contredit l'hypothèse Π_1 indécomposable.

□

Considérons alors l'élément γ, dans le système générateur S^1, il admet une "bonne décomposition", c'est à dire est l'image d'une racine du revêtement $\widetilde{\Delta}^1$ dans $\widetilde{S}^1$. C'est évidemment une racine imaginaire (comme dans S), et quitte à considérer son opposé, on peut la supposer dans Δ_{+,Φ_1} . Il existe alors un élément du groupe de Weyl w tel que $w(\gamma) \in K_{\Phi_1}$ (l'indice signifiant que sa définition est relative à S^1) , donc $-w(\gamma\check{}) \in \bar{F}$.

Ainsi on a encore $w(\bar{F}) \cap \pm C \neq \emptyset$.

□

Corollaire 13.3.3 .

Si Π^{re} est indécomposable, S^1 vérifie (A) .

□

Remarque :

Ce n'est pas vrai en général sans l'hypothèse d'indécomposabilité. On construit facilement un contre-exemple avec $K = \mathbb{R}$: Π est réunion de deux composantes Π_1 et Π_2 de type affine $A_1^{(1)}$ et si δ_1 et δ_2 sont les plus petites racines imaginaires positives correspondantes, on prend pour V le quotient de $\widetilde{Q}_{\mathbb{R}}$ par la relation $\delta_1 = \sqrt{2}\delta_2$. Alors S vérifie (A) mais si $\Phi = \Pi_1 \sqcup \Pi_2$, S^1 ne vérifie pas (A), ni SGRord.

13.4. Bases

On suppose que les deux systèmes S et S^1 vérifient (A) et (BN). Soient α et β deux racines imaginaires,
β est dite *liée* à α si et seulement si $\mathbb{N}^*\alpha + \mathbb{N}^*\beta \subset \Delta$ ou $\beta \in \mathbb{Q}_+\alpha$.
β est dite *reliable* à α si et seulement si il existe une famille finie $\{\beta_i\}_{i\in\{0,..,n+1\}}$ formée de racines imaginaires telles que $\beta_0 = \beta$, $\beta_{n+1} = \alpha$ et $\{\beta_i, \beta_{i+1}\}$ liées pour tout entier de 0 à n . On notera :

$$\alpha \,\mathfrak{R}\, \beta \iff \alpha \text{ est reliable à } \beta$$

Proposition 13.4.1.

$\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence sur les racines imaginaires, pour laquelle si Δ a une base indécomposable et n'est pas de type fini, il y a deux classes d'équivalence.

N.B : Si une base Π de Δ est indécomposable, alors Δ est indécomposable sauf si Π est de type affine indécomposable mais alors toute autre base de Δ est indécomposable (cf 13.2.1 et 13.3.1)

Démonstration.

La première assertion est immédiate. Supposons donc que Δ n'est pas de type fini et est indécomposable, soient alors α et β deux racines imaginaires positives (pour l'une des bases disons Φ), montrons qu'elles sont dans la même classe. Supposons les supports disjoints, on peut alors considérer dans I^1, un chemin $\{i_0, i_1 \dots i_n\}$ non vide liant les supports de ces deux racines c'est à dire tel que $i_0 \in S_\alpha$ et $i_n \in S_\beta$. (En réalité dans cette démonstration, on "remonte" dans un revêtement ou bien on ne considère que des bonnes décompositions.)

Posons alors $\alpha_0 := \alpha$, α_1 est une racine imaginaire dans K_Φ (ie. par rapport à S^1) de support $S_{\alpha_0} \cup \{i_1\}$; et de même en supposant construite α_{n-1} une racine imaginaire, on choisit α_n une racine imaginaire dans K_Φ de support $S_{\alpha_{n-1}} \cup \{i_n\}$ et enfin $\alpha_{n+1} := \beta$. Il est clair qu'à chaque rang de telles racines existent puisque le support de α_0 n'est pas de type fini.

Les supports des éléments consécutifs $\{\alpha_i, \alpha_{i+1}\}$ ne sont pas disjoints et dans chaque paire de ce type un des deux éléments au moins est dans K_Φ .

Si on montre que α_i et α_{i+1} sont liés ou reliables on aura le résultat pour α et β .

Si les supports de α et β ne sont pas disjoints il est clair qu'on peut intercaler entre α et β une racine notée α_1 de support celui de α et qui soit dans K_Φ pour raisonner de la même façon.

Finalement, on peut supposer que les supports de α et β ne sont pas disjoints et que α est dans K_Φ .

Si $< \beta, \alpha\check{} > < 0$, alors $\beta + \mathbb{N}\alpha \subset \Delta$ et de même comme $< \alpha, \beta\check{} > < 0$, on obtient de même $\mathbb{N}^*\alpha + \mathbb{N}^*\beta \subset \Delta$, et le résultat cherché est vrai. Sinon $< \beta, \alpha\check{} >= 0$ implique puisque les deux supports ne sont pas disjoints, qu'il y a une relation d'inclusion entre eux $S_\beta \subset S_\alpha$, mais on sait de plus que le support de S_β n'est pas de type fini, on a alors nécessairement $S_\alpha = S_\beta$ est de type affine ce qui implique (d'après 6.2.2) $\beta \in \mathbb{Q}_+\alpha$ et donc à nouveau $\alpha \,\mathfrak{R}\, \beta$. Et donc toutes les racines imaginaires positives sont dans la même classe.

Reste à montrer que deux racines imaginaires de signe opposé (disons $\alpha \in \Delta_{+,\Phi}$ et $\beta \in \Delta_{-,\Phi}$), ne sont pas dans la même classe d'équivalence.

Pour cela considérons x une forme linéaire sur V vérifiant l'hypothèse (BN), alors $x(\alpha) > (3\varepsilon/4)$, $x(\beta) < -(3\varepsilon/4)$, $-x(\alpha)/x(\beta) \in \mathbb{R}_+^*$. D'après Dirichlet, il existe des entiers strictement positifs p et q tels que $|q(-x(\alpha)/x(\beta)) - p| < (3\varepsilon/4)/(-x(\beta))$ donc $|q\,x(\alpha) + px(\beta)| < (3\varepsilon/4)$ ce qui implique $p\alpha + q\beta \notin \Delta$.

□

Corollaire 13.4.2.

Si Δ est à base indécomposable, deux cas sont possibles :

$$\Delta_+^{\mathrm{im}}(S^1) = \Delta_+^{\mathrm{im}}(S)$$
$$\text{ou} \quad \Delta_+^{\mathrm{im}}(S^1) = \Delta_-^{\mathrm{im}}(S)$$

□

Remarque :

Sous l'hypothèse (BN), si $\Delta_+^{\mathrm{im}}(S)$ et Π^{re} sont connus, on sait déterminer de façon unique l'ensemble $\cup_{i\in I^{\mathrm{im}}} N_i\alpha_i$ pour lequel le système est normalisé (cf 10.3.3), et par suite les éléments de Π pour lesquels N_i admet un plus petit élément (en particulier toutes les racines simples non affines).

Théorème 13.4.3.

On suppose l'hypothèse (BN) vérifiée par S et S^1 . Supposons Δ à base (Π ou Φ) indécomposable, alors il existe $w \in W$ tel que $\Delta_+(\Pi) = \pm w\Delta_+(\Phi)$.

Si de plus S et S^1 sont normalisés alors $\Pi \approx w(\Phi)$ ou $\Pi \approx -w(\Phi)$, où la relation d'équivalence $\approx$ entre deux bases signifie que l'identité de V est un $\approx$ des deux S.G.R., autrement dit, $\alpha_i = \alpha_i^1$ sauf éventuellement dans le cas N_i sans plus petit élément auquel cas on a seulement $N_i\alpha_i = N_i^1\alpha_i^1$ (avec toujours les mêmes conditions sur les N_i).

Démonstration.

Quitte à changer Φ en $-\Phi$, on peut supposer que $\Delta_+^{\mathrm{im}}(S^1) = \Delta_+^{\mathrm{im}}(S)$.

Soient $\Pi_{\mathrm{re}} = \Pi_1 \cup \ldots \cup \Pi_k$ la décomposition de Π_{re} en composantes indécomposables de Π_{re} et $\Phi_{\mathrm{re}} = \Phi_1 \cup \ldots \cup \Phi_k$ la décomposition correspondante de Φ_{re} (cf 13.2). Le groupe de Weyl W se décompose en produit direct $W = W_1 \times \ldots \times W_k$. Pour tout j de 1 à k, il existe un élément $w_j \in W_j$ tel que $w(\Phi_j) = \pm \Pi_j$ et si Π_j est de type fini tel que $w_j(\Phi_j) = \Pi_j$ (13.3.1). Si Π_j n'est pas de type fini, $\emptyset \neq w_j(\Delta(\Phi_j)_+^{\mathrm{im}}) \subset \Delta(\Pi_j) \cap \Delta_+^{\mathrm{im}}(S) = \Delta(\Pi_j)_+^{\mathrm{im}}$ donc en fait $w_j(\Phi_j) = \Pi_j$. Ainsi, si $w = \Pi_{j=1}^{j=k} w_j$, $w \in W$ et $w(\Phi_{\mathrm{re}}) = \Pi_{\mathrm{re}}$.

On a alors (à w près) $\Delta_+^{\mathrm{re}}(S^1) = \Delta_+^{\mathrm{re}}(S)$, $\Delta_+(S^1) = \Delta_+(S)$ et on termine grâce à 10.3.3.

□

VI

Quotients d'un système générateur de racines

On considère un S.G.R. $S = (A, V, V\hat{}, <,>, \Pi, \Pi\hat{}, \{N_i\}_{i \in I_{\text{im}}})$ sur $K = \mathbb{Z}$ ou un corps et on supposera la condition (B) de 12.5. vérifiée dans 14.4, 14.5 et 15.5, 15.6.

On suppose dans la suite que les coracines des éléments de Δ sont choisies de façon compatible à l'action de W, ceci est possible d'après la remarque 10.2.6, et on peut aussi supposer, dans le cas où la condition (Z) est satisfaite, les coracines dans $Q\hat{}$.

14. Quotient par un groupe fini d'automorphismes de diagramme

14.1. Automorphismes de diagramme

Un *automorphisme de diagramme* de S ou du système de racines associé est un couple $(\phi, \phi\hat{})$ de $\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(V\hat{})$ vérifiant les propriétés suivantes :

(AD1) $(\forall (v, v\hat{}) \in V \times V\hat{}) \quad < \phi(v), \phi\hat{}(v\hat{}) > = < v, v\hat{} >$;

(AD2) $(\forall (i,j) \in I^2) \quad < \phi(\alpha_i), (\phi(\alpha_j))\hat{} >$ et $< \alpha_i, \alpha\hat{}_j >$ sont de même signe au sens strict;

(AD3) ϕ stabilise $(\cup_{i \in I} N_i \alpha_i)$, $\phi\hat{}$ stabilise $\Pi\hat{}_{\text{re}}$.

Un tel automorphime sera dit *compatible à la matrice* A, si de plus pour tout couple (i,j) d'éléments de I, $< \phi(\alpha_i), (\phi(\alpha_j))\hat{} > = < \alpha_i, \alpha\hat{}_j >$.

Remarques :

1) Si $V\hat{} = V^*$, ou plus généralement si la dualité entre V et $V\hat{}$ est non dégénérée, alors un automorphisme compatible à A est bien déterminé par la connaissance de ϕ, et alors $\phi\hat{} = {}^t\phi^{-1}$ cf 14.1.1.

2) Pour un SGR donné, les automorphismes de diagramme forment un groupe noté $Diag(S)$, ceux qui sont compatibles à A forment le sous-groupe $Diag_A(S)$;

3) Si $(\phi, \phi\check{})$ est un automorphisme de diagramme tel que ${}^t\phi^{-1} = \phi\check{}$ alors ϕ est un automorphisme du système générateur de racines (cf 14.1.1 pour M3).

4) Comme ϕ stabilise l'ensemble des droites $K\alpha_i$ qui sont deux à deux distinctes, on peut définir une permutation sur l'ensemble des indices I, encore notée ϕ, par $\phi(i) := j$ si $\phi(\alpha_i) = \lambda\alpha_j$ avec $\lambda \in \mathbb{Q}_+^*$ (en fait $\lambda = 1$ sauf peut-être si N_i et/ou N_j n'ont pas de plus petit élément). On obtient ainsi un homomorphisme $num : Diag(S) \mapsto \mathfrak{S}(I)$.

Proposition 14.1.1.

1) $(\forall i \in I_{\mathrm{re}})$ $\phi(\alpha_i) \in \Pi^{\mathrm{re}}$ et $(\phi(\alpha_i))\check{} = \phi\check{}(\alpha\check{_i})$;

2) ϕ normalise le groupe de Weyl dans $GL(V)$ et $GL(V\check{})$;

3) ϕ stabilise I_1, I_2, I_0, I_-, et pour tout $i \in I$, $\phi(\alpha_i) = \lambda_i\alpha_j \Longrightarrow \lambda_i N_i = N_j$; ce nombre λ_i est égal à 1 dès que N_i a un plus petit élément.

4) ϕ stabilise K l'image de $\widetilde{K}$ par Ψ, et donc Δ^{re}, Δ^{im}_+, Δ^{im}_-.

Démonstration.

D'après (AD3) il est clair que l'image d'une racine simple α_i est une racine simple (à une constante près si N_i n'a pas de plus petit élément). Par (AD2) et (AD3), on voit que ϕ conserve le type d'une racine simple c'est à dire stabilise I_1, I_2, I_0, I_-. $\phi\check{}$ stabilise $\Pi\check{_{\mathrm{re}}}$ donc si $i \in I_{\mathrm{re}}$, $\phi\check{}(\alpha\check{_i}) \in \Pi\check{}$ et par AD1, $< \phi(\alpha_i), \phi\check{}(\alpha\check{_i}) > \, > 0$ donc on a nécessairement $\phi\check{}(\alpha\check{_i}) = (\phi(\alpha_i))\check{}$. On montre facilement que pour tout indice réel i, $\phi \circ r_i \circ \phi^{-1} = r_{\phi(i)}$ et donc ϕ normalise W. Pour montrer la stabilité de K, il suffit de voir que les propriétés caractéristiques de ses éléments (avoir une "bonne décomposition " à support connexe non réduit à un point et avoir son opposé dans la chambre fondamentale) sont conservées par ϕ. De même :

$$\begin{aligned}
\phi\check{} \circ r\check{_i} \circ \phi\check{}^{-1}(\alpha\check{_j}) &= \alpha\check{_j} - < \alpha_i, \phi\check{}^{-1}(\alpha\check{_j}) > \phi\check{}(\alpha\check{_i}) \\
&= \alpha\check{_j} - < \phi(\alpha_i), \alpha\check{_j} > (\phi(\alpha_i))\check{} \\
&= r\check{_{\phi(\alpha_i)}}(\alpha\check{_j})
\end{aligned}$$

Les autres assertions de cette proposition sont alors évidentes.

□

Proposition 14.1.2.

Supposons Π et $\Pi\check{}$ libres dans V et $V\check{}$.
Soit Γ un groupe fini de permutations de I tel que :
Pour tout $\gamma \in \Gamma$, pour tout couple d'éléments i et j de I, $a_{\gamma(i),\gamma(j)} = a_{ij}$ et $N_{\gamma(i)} = N_i$.

On peut alors construire un homomorphisme (injectif) r de Γ dans $Diag_A(S)$ tel que $num \circ r = Id$ et que cette action de Γ stabilise Π et $\Pi\check{}$.

Démonstration.

On posera $r(\gamma) = (\gamma, \gamma\hat{})$ et on cherche donc les actions de Γ sur V et $V\hat{}$.

On pose d'abord, $(\forall i \in I)$ $(\forall \gamma \in \Gamma)$ $\gamma(\alpha_i) := \alpha_{\gamma(i)}$ et $\gamma\hat{}(\alpha\hat{}_i) := \alpha\hat{}_{\gamma(i)}$. On a donc des actions de Γ sur Q_K et $Q\hat{}_K$ compatibles avec la dualité. On considère le sous-espace de $V\hat{}$, $\mathfrak{c} := \{v\hat{} \in V\hat{} / < \alpha_i, v\hat{} >= 0 \ (\forall i \in I)\}$.

Il est clair que Γ agit comme un groupe fini d'automorphismes de $Q\hat{}_K$ qui stabilise $\mathfrak{c} \cap Q\hat{}_K$, donc celui-ci a un supplémentaire Q_1 dans $Q\hat{}_K$ stable par Γ. Soit $\mathfrak{c}_1$ un supplémentaire de $\mathfrak{c} \cap Q\hat{}_K$ dans $\mathfrak{c}$. Fixons finalement un supplémentaire V_1 de $Q\hat{}_K$ dans $V\hat{}$ contenant $\mathfrak{c}_1$ (on pose $V_2 = V_1 \oplus Q_1$, $\mathfrak{c} \cap V_2 = \mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_1 \cap Q_1 = \{0\}$), on peut alors choisir dans V_1 un supplémentaire noté V_3 de $\mathfrak{c}_1$; aussi $V_3 \oplus Q_1$ est un supplémentaire de $\mathfrak{c}$ dans $V\hat{}$. Pour obtenir (AD1), on peut déduire par dualité non dégénérée une action de Γ sur V_3 (qu'on suppose stable). On choisit n'importe quelle action de Γ sur $\mathfrak{c}_1$ (par exemple la triviale) et on a donc défini ainsi l'action de Γ sur $V\hat{}$. Pour son action sur V, on procède de la même façon mais avec $\mathfrak{d} := \{v \in V \ / \ < v, v\hat{} > = 0 \ (\forall v\hat{} \in V\hat{})\}$. Les axiomes AD1, AD2, AD3 sont clairement vérifiés.

□

14.2. Action d'un groupe fini d'automorphismes de diagramme

On considère un sous-groupe fini Γ de $Diag_A(S)$, on notera $\gamma = (\gamma, \gamma\hat{})$ un élément de Γ. Pour simplifier les énoncés dans la suite, on suppose que Π est stable par Γ : il suffit de modifier les α_i tels que N_i n'a pas de plus petit élément, cela est possible car si $\gamma(\alpha_i) = \lambda\alpha_i$, on a $\lambda N_i = N_i$ ce qui implique $\lambda = 1$.

On se propose d'étudier $\bar{\Delta} := \{\bar{\alpha} := (1/|\Gamma|)\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma(\alpha)\,;\, \alpha \in \Delta\}$ (contenu dans V si K est un corps, dans $V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ si $K = \mathbb{Z}$), et de montrer qu'il existe un système générateur de racines qui a pour système de racines $\bar{\Delta}$ et dont les modules sont :
$V_\Gamma := \{\bar{v} := (1/|\Gamma|)\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma(v)\,; v \in V\}$ (qui coïncide avec V^Γ si K est un corps),
$V\hat{}_\Gamma := (V\hat{})^\Gamma$, et la dualité déduite de la précédente (sa restriction à $(V^\Gamma \times (V\hat{})^\Gamma)$ si K est un corps).

Le lemme suivant donne une interprétation légèrement différente de ces notions :

Lemme 14.2.1.

On suppose la dualité non dégénérée. Soit ρ l'application K-linéaire de V dans le dual $(V\hat{}_\Gamma)^*$ déduite de la dualité; (si $K = \mathbb{Z}$, on considère également l'application $\mathbb{Q}$-linéaire encore notée ρ de $V \otimes \mathbb{Q}$ dans $(V\hat{}_\Gamma)^* \otimes \mathbb{Q}$). Alors :

a) Pour tout élément v de V, $\rho(v) = \rho(\bar{v})$;

b) L'application ρ est injective sur V_Γ.

Ainsi, on peut identifier V_Γ avec $\rho(V)$ de façon que $\bar{v}$ corresponde à $\rho(v)$ et la dualité entre V_Γ et $V\hat{}_\Gamma$ a son image dans K et est non dégénérée.

Remarque :

Ce lemme n'est plus vrai si Γ n'est pas compatible à A.

Démonstration.

Soit $x \in V\hat{}$ et $v \in V$, on a :

$$< \bar{v}, x >= (1/|\Gamma|) \sum_{\gamma\in\Gamma} < \gamma(v), x > = (1/|\Gamma|) \sum_{\gamma\in\Gamma} < v, \gamma^{-1}(x) >$$

a) Si $x \in V\hat{}_\Gamma$, alors $< \bar{v}, x >= (1/|\Gamma|) \sum_{\gamma\in\Gamma} < v, x > = < v, x >$ donc $\rho(v) = \rho(\bar{v})$.

b) Si $\rho(\bar{v}) = 0$, alors $< \bar{v}, x >= (1/|\Gamma|) < v, \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma^{-1}(x) > = 0$ car $(1/|\Gamma|) \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma^{-1}x$ est dans $V\hat{}_\Gamma$, et donc par dualité non dégénérée, $\bar{v} = 0$.

□

Premières définitions :

Pour tout $\alpha \in V$, on note $\bar{\alpha} := (1/|\Gamma|) \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\alpha)$,

$\bar{\Pi} := \{ \bar{\alpha} ;\ \alpha \in \Pi \}$

$\bar{Q} = Q_\Gamma := \{ \bar{\alpha};\ \alpha \in Q \} \subset V_\Gamma$;

$\bar{R} = R_\Gamma := \{ \bar{\alpha};\ \alpha \in R \}$ le $\mathbb{Z}$-module engendré par $\bar{\Delta} := \{ \bar{\alpha} \neq 0;\ \alpha \in \Delta \}$

$\bar{Q}\hat{} = Q\hat{}_\Gamma := \{ \bar{\alpha}\hat{} := \sum_{\beta\hat{}\in\Gamma\alpha\hat{}} \beta\hat{};\ \alpha\hat{} \in Q\hat{} \} \subset (Q\hat{})^\Gamma$.

Il est clair que $\bar{\alpha}_i$ (resp. N_i, $\bar{\alpha}\hat{}_i$) ne dépend pas du choix de i dans son orbite sous l'action de Γ, c'est pourquoi on le notera $\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$ (resp. $N_{\bar{\imath}}$, $\bar{\alpha}\hat{}_{\bar{\imath}}$) si $\bar{\imath} := \Gamma i$. On a alors $\bar{Q} = \sum_{\bar{\imath}\in I/\Gamma} \mathbb{Z}\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$ et $Q\hat{}_\Gamma = \sum_{\bar{\imath}\in I/\Gamma} \mathbb{Z}\bar{\alpha}\hat{}_{\bar{\imath}}$, et comme précédemment l'indice $+$ signifiera qu'on ne considère que les combinaisons à coefficients positifs. Dans la suite, on note $\bar{a}_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} := < \bar{\alpha}_{\bar{\jmath}}, \bar{\alpha}\hat{}_{\bar{\imath}} >$, pour $\bar{\imath}$ et $\bar{\jmath}$ dans I/Γ. Pour une partie J de I stable sous l'action de Γ, on notera $\bar{\Delta}(J)$, $\bar{Q}(J)$ etc... les ensembles associés comme ci-dessus à $\Delta(J)$.

On a alors facilement la propriété analogue à (SR1b) :

$$\bar{\Delta} = \bar{\Delta}_+ \cup \bar{\Delta}_- \text{ où } \bar{\Delta}_+ := \bar{\Delta} \cap \bar{Q}_+,\ \bar{\Delta}_- := \bar{\Delta} \cap \bar{Q}_-, \text{ avec } \bar{\Delta}_- = -\bar{\Delta}_+$$

Il est clair que si $v \in V$ et $v\hat{} \in V\hat{}$, et si on pose :

$$\bar{v}\hat{} := \sum_{u\hat{}\in\Gamma.v\hat{}} u\hat{} \in V\hat{}_\Gamma,$$

$$\text{on a : } < \bar{v}, \bar{v}\hat{} > = < v, \bar{v}\hat{} > = |\Gamma.v\hat{}| < \bar{v}, v\hat{} > .$$

En particulier, $< \bar{v}, v^\vee >$, $< v, \bar{v}^\vee >$ et $< \bar{v}, \bar{v}^\vee >$ sont de même signe au sens strict. De plus, quand $v \in R$ et $v^\vee \in Q^\vee$, ils sont dans $\mathbb{Q}$ (et même dans $\mathbb{Z}$ si le S.G.R. S vérifie la condition (Z) car les $\alpha^\vee$ sont alors choisis dans $Q^\vee$).

Les orbites sous l'action de Γ dans I :

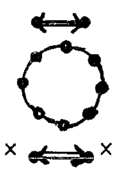
On déduit facilement la classification suivante des orbites de la classification des matrices de Kac-Moody relatives de type fini ou affine faite en 3.3.

Une orbite $\bar{\imath} = \Gamma i$ pour $i \in I$ est de type fini si et seulement si elle est formée de composantes connexes (identiques) du type :

- $\bullet$ $\quad A_1$ on a $\bar{a}_{\bar{\imath}\bar{\imath}} = 2$, $2\bar{\alpha}_{\bar{\imath}} \notin \bar{\Delta}(\bar{\imath})$ et l'orbite est alors dite de type 1.
- $\bullet^{\times}$ $\quad BC_1$ on a $\bar{a}_{\bar{\imath}\bar{\imath}} = 1$, $2\bar{\alpha}_{\bar{\imath}} \in \bar{\Delta}(\bar{\imath})$ et l'orbite est alors dite de type 2.
- $\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ $\quad A_2$ on a $\bar{a}_{\bar{\imath}\bar{\imath}} = 1$, $2\bar{\alpha}_{\bar{\imath}} \in \bar{\Delta}(\bar{\imath})$ et l'orbite est alors dite de type 3.

On note $\bar{I}_{re}$ l'ensemble des orbites de type fini, et plus précisément $\bar{I}_1$ (resp. $\bar{I}_2$) l'ensemble des orbites de type 1 (resp. de types 2 ou 3).

Une orbite $\bar{\imath}$ est de type affine (et on note $\bar{\imath} \in \bar{I}_0$) si et seulement si ses composantes connexes (identiques) sont du type :



$A_2^{(1)}$

$A_n^{(1)}$ pour $n > 2$

$A_2^{(1)\times\times}$

$\bullet_0$ $\quad Z_O^{(1)}$ (type affine imaginaire).

Dans chacun des trois premiers cas, on a $\bar{\Delta}(\bar{\imath}) \cap \mathbb{Q}_+\bar{\alpha}_{\bar{\imath}} = \mathbb{N}\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$, dans le dernier $\bar{\Delta}(\bar{\imath}) \cap \mathbb{Q}_+\bar{\alpha}_{\bar{\imath}} = N_i\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$.

Toute autre orbite est de type indéfini, et on note $\bar{I}_-$ l'ensemble de ces orbites. On pose $\bar{I}_{im} = \bar{I}_0 \cup \bar{I}_-$.

Action de Γ sur le groupe de Weyl

On définit l'action de Γ sur W en posant pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour tout $i \in I_{re}$, $\gamma.r_i := r_{\gamma(i)}$. On a vu en 14.1.1 que sur V, $\gamma.r_i$ agit comme $\gamma \circ r_i \circ \gamma^{-1}$ et sur $V^\vee$ comme $\gamma^\vee \circ r_i^\vee \circ (\gamma^\vee)^{-1}$.

Pour tout $\bar{\imath} \in \bar{I}_{re}$, on note $R_{\bar{\imath}}$, l'élément le plus long du groupe $W(\bar{\imath})$, on a ainsi :

si $\bar{\imath}$ est de type 1 ou 2, $R_{\bar{\imath}}$ est le produit (commutatif) des r_j pour tous les éléments j de l'orbite $\bar{\imath}$.

si $\bar{\imath}$ est de type 3, $R_{\bar{\imath}}$ est le produit (commutatif) des éléments les plus longs de chaque composante connexe de l'orbite, c'est à dire aussi le produit des réflexions par rapport aux plus grandes racines positives des systèmes de racines correspondant aux composantes connexes de $\bar{\imath}$. En fait, si $\{i_1, j_1\}, \ldots, \{i_k, j_k\}$ sont les composantes connexes de $\bar{\imath}$, alors $R_{\bar{\imath}}$ est le produit commutatif des éléments $r_{i_l} r_{j_l} r_{i_l}$ pour $l = 1, \ldots, k$.

Il est clair que $R_{\bar{\imath}}$ reste fixe sous l'action de Γ, et donc que pour l'action sur V ou sur $V^{\hat{}}$, il commute à l'action de Γ. Donc cet élément du groupe de Weyl stabilise Q_Γ et R_Γ; c'est une involution. Par ailleurs, on a clairement $R_{\bar{\imath}}(\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}) = -\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$ et $R_{\bar{\imath}}(\bar{\alpha}\,\hat{}_{\bar{\imath}}) = -\bar{\alpha}\,\hat{}_{\bar{\imath}}$.

Lien avec le revêtement

Considérons le revêtement libre $\widetilde{S}$. D'après 14.1.2, il existe une action de Γ sur $\widetilde{S}$ par des automorphismes de diagramme compatibles à A, stabilisant $\widetilde{\Pi}^{\hat{}}$ et $\widetilde{\Pi}$ et correspondant à la même action de Γ sur I. L'application Ψ (resp. $\Psi^{\hat{}}$) est alors Γ équivariante; elle commute donc à l'application $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ (resp. à l'application $\alpha^{\hat{}} \mapsto \bar{\alpha}^{\hat{}}$ à des constantes strictement positives près (égales à un pour les racines réelles)). En particulier $\Psi(\bar{\widetilde{\Delta}}) = \bar{\Delta}$ et $\Psi(\bar{\widetilde{\alpha}}_{\bar{\imath}}) = \bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$.

Dans le revêtement $\widetilde{V}_\Gamma$, il est clair que les $(\widetilde{\alpha}_{\bar{\imath}})_{i \in \bar{I}}$ sont libres.

Proposition 14.2.2.

V_Γ, $(V^{\hat{}})^\Gamma = V^{\hat{}}_\Gamma$ sont deux K-modules libres. Pour $\bar{\imath}$ de type fini, $R_{\bar{\imath}}$ induit dans $V^{\hat{}}_\Gamma$ (resp. dans V_Γ) une réflexion par rapport à l'hyperplan $\{v^{\hat{}} \in (V^{\hat{}})^\Gamma \,;\, < \bar{\alpha}_{\bar{\imath}}, v^{\hat{}} > = 0\}$ de $V^{\hat{}}_\Gamma$ (resp. $\{v \in V_\Gamma \,;\, < v, \bar{\alpha}\,\hat{}_{\bar{\imath}} > = 0\}$ de V_Γ).

Plus précisément, pour tout $v \in V_\Gamma$ on a $R_{\bar{\imath}}(v) = v - < v, \bar{\alpha}^{\vee}_{\bar{\imath}} > \bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$ où la coracine de $\bar{\alpha}_i$ est définie par :

$$\bar{\alpha}^{\vee}_{\bar{\imath}} = \bar{\alpha}\,\hat{}_{\bar{\imath}} \text{ si l'orbite est de type 1}$$
$$= 2\bar{\alpha}\,\hat{}_{\bar{\imath}} \text{ sinon.}$$

De même, pour $x \in (V^{\hat{}})^\Gamma = V^{\hat{}}_\Gamma$, $R_{\bar{\imath}}(x) = x - < \bar{\alpha}_{\bar{\imath}}, v^{\hat{}} > \bar{\alpha}^{\vee}_{\bar{\imath}}$.

Démonstration.

Il est clair en effet que V_Γ est un K-module libre même dans le cas $K = \mathbb{Z}$ car V_Γ est isomorphe à $|\Gamma| V_\Gamma \subset V^\Gamma \subset V$; de même $V^{\hat{}}_\Gamma$, contenu dans $V^{\hat{}}$, est un K-module libre.

Il s'agit de montrer que pour tout v dans V_Γ, $R_{\bar{\imath}}(v) - v \in K\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$. On sait que $R_{\bar{\imath}} \in W(\bar{\imath}) = < r_j \,;\, j \in \bar{\imath} >$ et on peut donc affirmer que $R_{\bar{\imath}}(v) - v \in Q_K(\bar{\imath})$ pour tout élément v de V et qu'il stabilise $Q_{\mathbb{Q}}(\bar{\imath})$. Mais comme l'action sur V de $R_{\bar{\imath}}$ et celle de Γ commutent, on a facilement $R_{\bar{\imath}}(v) - v \in (Q_K(\bar{\imath}))^\Gamma = K\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$. D'autre part, il est clair que $R_{\bar{\imath}}$ fixe l'hyperplan indiqué et comme $R_{\bar{\imath}}$ est d'ordre deux, il suffit de vérifier (ce qui est facile) que $< \bar{\alpha}_{\bar{\imath}}, \bar{\alpha}^{\vee}_{\bar{\imath}} >= 2$. L'assertion pour $R_{\bar{\imath}}$ sur $V^{\hat{}}_\Gamma$ se démontre de façon analogue.

□

Proposition 14.2.3.

La matrice $\bar{A} := \left(\bar{a}_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} = < \bar{\alpha}_{\bar{\jmath}}, \bar{\alpha}\,\hat{}_{\bar{\imath}} >\right)$, où $\bar{\imath}$ et $\bar{\jmath}$ parcourent $\bar{I} := I/\Gamma$ est une matrice de Borcherds relative à coefficients dans $\mathbb{Q}$ et la partition de $\bar{I}$ correspondante est $\bar{I} = \bar{I}_1 \cup \bar{I}_2 \cup \bar{I}_0 \cup \bar{I}_-$.

On notera en particulier que si $\bar{\imath} \neq \bar{\jmath}$, $< \bar{\alpha}_{\bar{\jmath}}, \bar{\alpha}\,\hat{}_{\bar{\imath}} > = 0$ si et seulement si les deux orbites ne sont pas liées dans I.

Si le S.G.R. S vérifie la condition (Z), alors $\bar{A}$ est à coefficient dans $\mathbb{Z}$ c'est à dire est une matrice de Kac-Moody relative.

Démonstration.

Il est clair que le coefficient $\bar{a}_{\bar{\imath}\bar{\jmath}}$ est dans $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{Z}$ si S vérifie (Z) ou si $i \in I_{\mathrm{re}}$) et que pour $\bar{\imath} \in \bar{I}_{\mathrm{re}}$,

$$\bar{a}_{\bar{\imath}\bar{\imath}} = 1 \Longleftrightarrow \mathbb{Q}_+ \cap \bar{\Delta} = \{\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}, 2\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}\}$$

$$\bar{a}_{\bar{\imath}\bar{\imath}} = 2 \Longleftrightarrow \mathbb{Q}_+ \cap \bar{\Delta} = \{\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}\}$$

Si $\bar{\imath} \in \bar{I}_0$, $\bar{a}_{\bar{\imath}\bar{\imath}} = 0$, ceci est évident dans le cas où les composantes connexes de $\bar{\imath}$ sont de type affines imaginaires. Dans les cas affines réels, $\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$ est en fait la somme de racines imaginaires de chaque composante connexe et donc $< \bar{\alpha}_{\bar{\imath}}, \alpha\,\hat{}_j > = 0$ pour tout $j \in \bar{\imath}$.

Enfin si $\bar{\imath} \in \bar{I}_-$, $\bar{a}_{\bar{\imath}\bar{\imath}} < 0$. En effet, l'orbite étant de type indéfini, il existe dans $\widetilde{Q}(\bar{\imath})$ un élément $\widetilde{\alpha}$ de coordonnées toutes strictement positives et tel que pour tout $j \in \bar{\imath}$, $< \widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}\,\hat{}_j > < 0$, alors son image α dans Q est dans Δ et $\bar{\alpha} \in K_+\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$ vérifie évidemment $< \bar{\alpha}, \bar{\alpha}\,\hat{}_{\bar{\imath}} > < 0$.

Si $\bar{\imath} \neq \bar{\jmath}$, les orbites n'ont pas de point commun et par suite on a immédiatement $< \bar{\alpha}_{\bar{\imath}}, \bar{\alpha}\,\hat{}_{\bar{\jmath}} > = < \alpha_i, \bar{\alpha}\,\hat{}_{\bar{\jmath}} > \leq 0$.

De plus, ce scalaire est nul si et seulement si les deux orbites ne sont pas liées (c'est à dire si pour tout $i \in \bar{\imath}$ et tout $j \in \bar{\jmath}$, $a_{ij} = a_{ji} = 0$), il est clair alors que $< \bar{\alpha}_{\bar{\imath}}, \bar{\alpha}\,\hat{}_{\bar{\jmath}} > = 0 \Longleftrightarrow < \bar{\alpha}_{\bar{\jmath}}, \bar{\alpha}\,\hat{}_{\bar{\jmath}} > = 0$.

□

Proposition 14.2.4.

On définit $(\bar{\Delta})^{\mathrm{re}}$ comme le sous ensemble des racines $\bar{\alpha}$ de $\bar{\Delta}$ telles qu'il existe dans W^{Γ} un élément induisant dans $V\,\hat{}_{\Gamma}$, une reflexion par rapport à l'hyperplan de $(V\,\hat{})^*$, $H_{\bar{\alpha}} = \{v\,\hat{} \in V\,\hat{}_{\Gamma}\,;\ < \bar{\alpha}, v\,\hat{} > = 0\}$.

$\bar{S}_{\mathrm{re}} := (\bar{A}_{\mathrm{re}}, V_{\Gamma}, (V\,\hat{})^{\Gamma}, <,>, \{\bar{\alpha}_i\}_{i \in \bar{I}_{\mathrm{re}}}, \{\bar{\alpha}\,\hat{}_i\}_{i \in \bar{I}_{\mathrm{re}}})$ est un système générateur de racines sans "racine simple" imaginaire. Il admet de plus pour système de racines réelles $\Delta^{\mathrm{re}}(\bar{S}_{\mathrm{re}}) = (\bar{\Delta})^{\mathrm{re}} = \bar{W}(\bar{\Pi}^{\mathrm{re}})$, où $\bar{\Pi}^{\mathrm{re}}$ est l'ensemble des $\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$ où $\bar{\imath}$ est une orbite de type fini (et non l'ensemble des $\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$ pour $\bar{\imath} \subset I_{\mathrm{re}}$), et son groupe de Weyl est le sous-groupe

$\bar{W} := W^\Gamma$ des éléments de W fixes sous l'action de Γ, c'est aussi le sous groupe de W engendré par les $R_{\bar{\imath}}$ pour $\bar{\imath} \in \bar{I}_{re}$.

Remarque :

J.Y.Hée [Hée; III 9] caractérise les éléments de $\bar{\Delta}^{re}$ comme les racines $\bar{\alpha}$ pour $\alpha \in \Delta$ dont l'orbite sous Γ est "prénilpotente".

Démonstration.

Il est clair que partant du système générateur de racines $T := (A(J), V, V\check{}, <,>, \{\alpha_i\}_{i\in J}, \{\alpha\check{_i}\}_{i\in J})$, où J est la réunion des orbites de type fini sous l'action de Γ, on pouvait considérer de même l'action de Γ sur le système de racines alors obtenu. Il est clair que la matrice obtenue est la sous-matrice principale extraite de $\bar{A}$ en ne conservant que les lignes et colonnes indexées par les $\bar{\imath}$ tels que $\bar{a}_{\bar{\imath}\bar{\imath}} > 0$.

Le résultat important d'égalité des sous-groupes W^Γ et $< R_{\bar{\imath}}\,;\, \bar{\imath} \in \bar{I}_{re} >$ a été établi par Hée, cf [Hée; III 7]. Par suite, le groupe de Weyl de ce système de racines est W^Γ, et le résultat annoncé est évident.

□

14.3. Propriétés de $\bar{\Delta}$, Conditions de chaînes

Proposition 14.3.1.

a) Si $\bar{\imath}$ est une orbite de type fini et si $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}_+ \setminus \{\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}, 2\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}\}$ alors la $(\bar{\alpha}_{\bar{\imath}})$-chaîne $[\bar{\alpha}, \bar{\alpha} \pm \bar{\alpha}_{\bar{\imath}}, \dots, R_{\bar{\imath}}(\bar{\alpha})]$ est incluse dans $\bar{\Delta}_+$.

b) Si $\bar{\imath}$ n'est pas de type fini et si $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}_+ \setminus \mathbb{Q}_+\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$ et si $M''_{\bar{\imath}}$ désigne l'ensemble $\{n \in \mathbb{Q}_+ / \exists \widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}(\bar{\imath})$, de hauteur $n\}$ et $M'_{\bar{\imath}}$ la plus petite partie de $\mathbb{Q}_+$ contenant $M''_{\bar{\imath}}$ et stable par l'addition alors $< \bar{\alpha}, \bar{\alpha}\check{_{\bar{\imath}}} > < 0 \Longrightarrow \bar{\alpha} + M'_{\bar{\imath}}\bar{\alpha}_{\bar{\imath}} \subset \bar{\Delta}_+$.

Démonstration.

a) Considérons $\bar{\imath} \in \bar{I}_{re}$ et $\bar{\alpha} \in \bar{\Delta}_+ \setminus \{\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}, 2\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}\}$, il existe une racine α dans Δ telle que $\bar{\alpha} = (1/|\Gamma|)\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma(\alpha)$, d'après l'hypothèse faite sur $\bar{\alpha}$, il est clair que α n'est pas proportionnelle à α_i et que c'est racine positive. Pour la même raison, le support de α n'est pas inclus dans $\bar{\imath}$ et on a pour tout w dans $W(\bar{\imath})$ $w(\alpha) \in Q_{\mathbb{Q}+}$ et $w(\alpha) \notin Q_{\mathbb{Q}}(\bar{\imath})$.

Si $\bar{\imath}$ est de type 1 ou 2, $R_{\bar{\imath}}$ est le produit commutatif des r_j pour tous les points de l'orbite $\bar{\imath}$. Si $R_{\bar{\imath}} = r_{i_1} \dots r_{i_n}$; on pose $\beta_{j_k} := r_{i_k} \dots r_{i_n}(\alpha)$ pour tout k entre 1 et n. D'après la propriété (SR3b) de Δ, il existe dans Δ une chaîne de direction α_{j_k} entre β_{j_k} et $\beta_{j_{k-1}}$ qui par "projection" (ie. par $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$) donne dans $\bar{\Delta}$ une chaîne de direction $\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$ de $\bar{\beta}_{j_k}$ à

$\bar{\beta}_{j_{k-1}}$. La projection de toutes ces chaînes donne donc une $(\bar{\alpha}_{\bar{\imath}})$-chaîne contenant $\bar{\alpha}$ et son image par $R_{\bar{\imath}}$ (qui dépasse peut-être $[\bar{\alpha}, R_{\bar{\imath}}(\bar{\alpha})]$) contenue dans $\bar{\Delta}$.

Si l'orbite est de type 3, on note $J_1, \ldots, J_n$ ses différentes composantes connexes $J_k = \{i_k, j_k\}$ alors $R_{\bar{\imath}}$ est le produit commutatif des $r_{\alpha_{i_k}+\alpha_{j_k}} = r_{i_k} r_{j_k} r_{i_k}$. On note $\beta_k := r_{\alpha_{i_k}+\alpha_{j_k}} \ldots r_{\alpha_{i_n}+\alpha_{j_n}}(\alpha)$ il y a donc une α_{j_k}-chaîne de $r_{i_k}(\beta_{k+1})$ à $r_{j_k} r_{i_k}(\beta_{k+1})$ et des α_{i_k}-chaînes de β_k à $r_{i_k}(\beta_{k+1})$ et de $r_{j_k} r_{i_k}(\beta_{k+1})$ à $r_{i_k} r_{j_k} r_{i_k}(\beta_{k+1})$, qui donne "par projection" une $\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$ chaîne de $\bar{\beta}_{k+1}$ à $\bar{\beta}_k$. A nouveau, la réunion de toutes ces chaînes donne par projection une $\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$-chaîne éventuellement trop longue mais qui contient $\bar{\alpha}$ et son image par $R_{\bar{\imath}}$.

b) Soit à présent $\bar{\imath}$ une orbite de type affine ou indéfini et $\bar{\alpha}$ un élément de $\bar{\Delta}$ qui n'est pas $\mathbb{Q}$-proportionnel à $\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$. Soit alors $m \in M''_{\bar{\imath}}$, on considère un élément $\tilde{\beta} \in \tilde{\Delta}(\bar{\imath})$ de hauteur m et on note β son image dans Δ. La condition $< \bar{\alpha}, \bar{\alpha}\hat{_{\bar{\imath}}} > < 0$ équivaut à $< \bar{\alpha}, \bar{\beta}\hat{} > < 0$ et donc aussi à $< \bar{\alpha}, \beta\hat{} > < 0$; elle implique, par définition de $\bar{\alpha}$ qu'il existe au moins un élément γ de Γ tel que $< \gamma(\alpha), \beta\hat{} > < 0$, où α désigne toujours un élément tel que $(1/|\Gamma|) \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\alpha) = \bar{\alpha}$. Mais alors, d'après la remarque 10.2.3 $\gamma(\alpha) + \beta$ est une racine dans Δ et par suite $\bar{\alpha} + \bar{\beta} \in \bar{\Delta}$. Par une récurrence immédiate sur ce résultat, on obtient $\bar{\alpha} + m\bar{\alpha}_{\bar{\imath}} \in \bar{\Delta}$ pour tout $m \in M'_{\bar{\imath}}$.

□

14.4. Le système générateur de racines S_Γ

On suppose à présent vérifiée l'hypothèse (B) de 12.5. On pose $\Phi^{re} := \bar{\Pi}^{re}$; et si $\bar{\alpha} \in \bar{\Pi}_1$ (resp. $\bar{\Pi}_2$) $\bar{N}(\bar{\alpha}) = \{1\}$ (resp. $\{1,2\}$).

On va maintenant déterminer Φ (qui sera la base du système générateur) et $\cup_{\alpha \in \Phi} \bar{N}(\bar{\alpha})\bar{\alpha}$ qui engendrera $\bar{\Delta}$. Soit $\Psi' := \cup_{\bar{\imath} \in \bar{I}_{im}} M''_{\bar{\imath}} \bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$, on considère alors Ψ un système de représentants dans Ψ' de $\Psi'/\mathbb{Q}$.

On construit alors Φ^{im} en définissant, pour chaque élément de Ψ, une racine relative simple de la façon suivante :

Si $\bar{\beta} \in \Psi$, on définit $R(\bar{\beta}) := \{n \in \mathbb{Q};\ n\bar{\beta} \in \Psi'\}$,

- si $R(\bar{\beta})$ admet un plus petit élément, on le note q;

- sinon on désigne par q un élément (choisi) de $R(\bar{\beta})$ tel que $(3/4)q$ minore $R(\bar{\beta})$, ceci est possible grâce à (B).

Dans les deux cas on pose $\bar{\alpha} := q\bar{\beta} \in \Phi$ et $\bar{N}(\bar{\alpha}) := \{n \in \mathbb{Q};\ n\bar{\alpha} \in \Psi'\}$.

On a ainsi défini Φ et on note $\Phi\hat{}$ l'ensemble des coracines correspondantes qui est inclus dans $\{\bar{\alpha}\hat{_{\bar{\imath}}}; \bar{\imath} \in \bar{I}\}$.

On obtient alors la proposition suivante :

Proposition 14.4.1.

S_Γ := $(\bar{A}, V_\Gamma, (V^\check{})^\Gamma, <,>, \Phi, \Phi^\check{}, \{\bar{N}(\bar{\alpha})\}_{\bar{\alpha}\in\Phi_{im}})$ (où $\bar{A}$ est la matrice des $\bar{a}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} :=< \bar{\alpha}, \bar{\beta}^\check{} >$ où $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ parcourent Φ) est un système générateur de racines qui vérifie (B), dont le système de racines est exactement $\bar{\Delta}$.

En particulier, si le S.G.R. S vérifie la condition (Z) (resp. (BN)) alors S_Γ aussi.

Remarques :

1) L'application $v \mapsto \bar{v}$ de V dans V_Γ n'est pas un morphisme de S.G.R. (par exemple l'image d'une racine réelle n'est pas toujours une racine réelle).

2) Comme lors du passage au sous-système en 12.5.3, l'hypothèse (B) peut être remplaçée par toute condition permettant d'affirmer que les $\bar{N}(\bar{\alpha})$ n'admettent pas 0 pour borne inférieure dans $\mathbb{R}$ pour établir que S_Γ est un S.G.R. de système de racines $\bar{\Delta}$.. L'hypothèse I fini est encore valable et est stable lors du passage au quotient.

3) La modification de $\bar{\Pi}$ et des $M''_{\bar{\imath}}$ pour obtenir Φ et les $\bar{N}(\bar{\alpha})$ est nécessitée par l'axiome SGR4 sur la nature des $\bar{N}$ et la non $\mathbb{Q}$-colinéarité des éléments de la base dans un système générateur

4) Si Π est libre dans V, il est clair que $\{\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}\}_{\bar{\imath}\in\bar{I}}$ est libre dans V_Γ, et alors il résulte de la démonstration ci-dessous que $\Phi = \{\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}\,;\ \bar{\imath} \in \bar{I}\}$ et $\bar{N}(\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}) = M''_{\bar{\imath}}$ (l'axiome SGRN est automatiquement vérifié dans le cas libre, cf remarque 6 en 8.1).

5) En construisant ainsi $\Phi := \Phi^{re} \cup \Phi^{im}$, il est clair qu'il est possible qu'une racine $\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$ ne soit pas simple mais elle est alors dans un $\bar{N}(\bar{\alpha})$ pour un $\bar{\alpha} \in \Phi$. Il est clair qu'avec la contruction précédente, un élément $\bar{\beta}$ de $\bar{\Delta}$ qui est proportionnel à une racine simple relative $\bar{\alpha} \in \Phi$ sans être dans $\bar{N}(\bar{\alpha})$ admet une "bonne décomposition" dans la base Φ. En effet, si un $\bar{\beta} \in \mathbb{Q}_+\bar{\alpha} \setminus \bar{N}(\bar{\alpha})\bar{\alpha}$, alors $\bar{\beta}$ provient d'une racine du revêtement qui n'est pas dans un $\Delta(\bar{\jmath})$ (avec $\bar{\alpha}_{\bar{\jmath}} \in \mathbb{Q}\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$) et une décomposition de cette racine fournit la "bonne décomposition" cherchée.

Démonstration.

Montrons qu'avec la contruction précédente, on obtient bien un système générateur de racines.

Les axiomes SGR2 et SGR3 sont bien vérifiés puisqu'on a vu que V_Γ et $(V^\check{})^\Gamma$ sont deux K-modules libres en dualité.

$\bar{A}$ est facilement obtenue à partir de A, vu la composition de Φ, et c'est évidemment une matrice de Borcherds relative à coefficients dans $\mathbb{Q}$, de plus, il est clair que par construction même de la matrice $\bar{A}$, $(V_\Gamma, (V^\check{})^\Gamma, \Phi, \Phi^\check{})$ est une réalisation de $\bar{A}$ (SGR5).

En ce qui concerne, l'axiome SGR4 et la condition (Z), il est clair par construction que les parties $\bar{N}(\bar{\alpha})$ vérifient les conditions voulues; d'autre part $\bar{N}(\bar{\alpha}) < \bar{\alpha}, \bar{\beta}\check{} >$ est inclus dans une réunion de $M''_{\bar{\imath}} < \bar{\alpha}_{\bar{\imath}}, \bar{\beta}\check{}_{\bar{\jmath}} >$ pour certains $\bar{\imath}$ et $\bar{\jmath}$ dans $\bar{I}$, c'est à dire contenu dans $< R, \beta\check{}_{\bar{\jmath}} >$ donc dans $\mathbb{Z}$ si $\bar{\jmath} \in \bar{I}_{re}$ (donc $j \in I_{re}$) ou si S vérifie la condition (Z).

Φ est formée d'éléments non nuls puisque par 9.1.4 dans $Q_{\mathbb{Q}}$ une somme d'éléments positifs non nuls est non nulle et ceci permet d'établir SGR6 a). On a vu que par construction deux éléments de ϕ ne peuvent pas être $\mathbb{Q}$-proportionnels; ce qui établi SGR6b.

On a donc établi ainsi que S_Γ est un S.G.R.

Montrons à présent que le système de racines de S_Γ est bien $\bar{\Delta}$.

Grâce à (14.3.1), on voit que $\bar{\Delta}$ satisfait aux conditions de chaînes relatives à Φ, de plus il est clair que $\bar{\Delta}$ est symétrique et donc $\Delta(S_\Gamma) \subset \bar{\Delta}$.

Montrons l'inclusion contraire. Supposons au contraire que $\bar{\Delta} \setminus \Delta(S_\Gamma) \neq \emptyset$, et considérons β dans cet ensemble. D'après 14.2.4, $\beta \in \bar{\Delta}^{\text{im}}$, par symétrie des deux systèmes, on peut supposer que β est une racine positive. Enfin, par stabilité des deux ensembles sous l'action du groupe de Weyl, on peut supposer également que $< \beta, \bar{\alpha}\check{}_{\bar{\imath}} > \leq 0$ pour tout $\bar{\imath}$. On sait de plus qu'il existe $\widetilde{\beta} = \sum_{i \in I} n_i \widetilde{\alpha}_i \in \widetilde{\Delta}$ tel que $(1/|\Gamma|) \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma \Psi(\widetilde{\beta}) = \beta$. Supposons que le support de $\widetilde{\beta}$ ne soit pas réduit à un point, alors $\beta = \sum_{\bar{\imath} \in \bar{I}} n_{\bar{\imath}} \bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$, avec des $n_{\bar{\jmath}} \in M_{\bar{\jmath}}$ (ie. M_j pour tout j de cette orbite). Au vu de la construction de la base Φ, il est clair qu'on peut mettre β sous la forme $\beta = \sum_{\alpha \in \Phi} x_\alpha \alpha$, avec $x_\alpha \in \bar{M}(\alpha) = M_\Gamma(\alpha)$ le plus petit ensemble de $\mathbb{Q}$ contenant $\bar{N}(\alpha) = N_\Gamma(\alpha)$, 0 et stable pour l'addition. L'ensemble des α tels que $x_\alpha \neq 0$ est connexe car le support de $\widetilde{\beta}$ l'est et si on a effectué un échange comme précédemment , on a remplacé un $n_{\bar{\jmath}} \bar{\alpha}_{\bar{\jmath}}$ par un $m_\alpha \alpha$ pour un $\alpha = \gamma_{\bar{k}} \in \Phi$ $(\gamma_{\bar{k}} = n_{\bar{k}} \alpha_{\bar{k}})$, ainsi, si $\bar{\alpha}_{\bar{\jmath}}$ est lié à $\bar{\alpha}_{\bar{\imath}}$ alors $\bar{\imath}$ est lié à $\bar{k}$. Par suite, il est clair que $\beta \in K(\Phi)$ avec les notations évidentes c'est à dire en remplaçant dans la définition usuelle Π par Φ. Grâce à la proposition 2.3.2, on en déduit que $\beta \in \Delta(S_\Gamma)$ d'où la contradiction.

Si le support de $\widetilde{\beta}$ est réduit à un point $\widetilde{\beta} = n_j \widetilde{\alpha}_j$ alors $\beta = n_{\bar{\jmath}} \bar{\alpha}_{\bar{\jmath}}$ avec $n_{\bar{\jmath}} \in N_{\bar{\jmath}}$ auquel cas β est dans $N(\bar{\alpha})\bar{\alpha}$ pour un certain élément $\bar{\alpha}$ de Φ et on a le même résultat.

L'hypothèse (BN) est elle-aussi conservée en effet la restriction de la fonction θ qui existe par hypothèse sur $Q_{\mathbb{Q}}$ à $\bar{Q}_{\mathbb{Q}}$ satisfait aux conditions demandées. Il est clair alors que l'hypothèse (B) est conservée.

□

Corollaire 14.4.2.

Si S satisfait à (BN), il en est de même du système $\Delta(S_\Gamma)$ et donc on peut en fait dans la proposition précédente obtenir à partir de $\bar{\Pi}$, une nouvelle base

$\Phi \subset \Phi^{re} \cup (\cup_{\bar{\alpha}\in\Phi^{im}} \bar{N}(\bar{\alpha})\bar{\alpha})$ pour laquelle le système générateur (obtenu en rempaçant Φ par Φ' dans S_Γ et en ne retenant que les coracines correspondantes) est normalisé et telle que le système de racines reste le même.

Démonstration.

Cela résulte immédiatement de 10.3.3.

□

14.5. Invariance des différentes conditions sur les S.G.R

On suppose toujours vérifiée l'hypothèse (B) de 12.5.

Hypothèses sur la réalisation

Proposition 14.5.1.

Les hypothèses (BN), (A), (L), sont conservées par passage au quotient sous l'action de Γ.

L'hypothèse $A(I_{re})$ de rang fini l'est également.

Sous l'hypothèse supplémentaire $Q_K(I_{re})$ de dimension finie, les hypothèses (MP), (MP') sont également conservées.

Enfin si Q_K est de dimension finie, l'hypothèse (MP") est conservée.

Démonstration.

(A) (cf 11.3) Soit $\{\beta_i\}$ un famille génératrice de V^* alors $\{\bar{\beta}_i = (1/|\Gamma|)\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma(\beta_i)\}$ est génératrice de $(V^*)^\Gamma = V^*_\Gamma$ puisque K est supposé être un corps.

(BN) (cf 10.3) Soit θ la $\mathbb{Q}$-forme linéaire sur $Q_{\mathbb{Q}}$ sarisfaisant à (B), θ induit une $\mathbb{Q}$-forme sur $Q_{\mathbb{Q}}^\Gamma$ par restriction pour laquelle $\theta(\bar{\alpha}_{\bar{i}}) = (1/|\Gamma|)\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma(\alpha_i)$ et donc pour les éléments α de la base du système quotient $\theta(\alpha) \geq (3/4)\varepsilon$.

(L) (cf 11.3) La condition de liberté de la base passe au quotient sous l'action de Γ, ceci a déjà été utilisé pour les revêtements.

L'hypothèse $A(I_{re})$ de rang fini équivaut à l'existence d'une réalisation de dimension finie de cette matrice. Comme Γ stabilise I_{re} et que les racines relatives réelles proviennent de $\Delta(I_{re})$, il est clair qu'on peut raisonner sur cette réalisation. Dans ce cas il est évident que $\bar{Q}_{\mathbb{Q}}(\bar{I}_{re}) \subset Q_{\mathbb{Q}}(I_{re})$ et donc $\bar{A}(\bar{I}_{re})$ admet une réalisation de dimension finie et donc est de rang fini.

On suppose de plus $Q_K(I_{re})$ de dimension finie.

La démonstration de la conservation des hypothèses (MP) et (MP') est alors analogue à celle faite dans le cadre des sous-systèmes.

$Q^{re}_{\Gamma+} = \sum_{\bar\alpha_\imath} \mathbb{Z}_+\bar\alpha_{\bar\imath} \subset (1/|\Gamma|)Q_+(I_{re}) \subset \oplus\mathbb{Z}_+(1/|\Gamma|)\gamma_i$. On se place dans $V_{\mathbb{R}}$ et on considère encore $C = \oplus\mathbb{R}_+\gamma_i$ et cette fois $C' = C \cap Q^{re}_{\Gamma+}$ encore une fois $C^{\circ+}$ n'est pas vide, donc il existe une base de Q_Γ libre dans V_Γ dont le cône positif contient la base du système quotient et il suffit de compléter cette famille libre de V_Γ en une base de cet espace vectoriel.

La conservation de (MP") sous l'hypothèse proposée est tout à fait analogue à celle-ci si on peut montrer l'existence d'un $x \in V^*$ tel que $x(\alpha_i) > 0$ pour tout $i \in I_{im}$. Si Π est de type fini, alors Π est finie et l'existence d'un tel élément résulte de la caractérisation du type de la matrice.

□

Les hypothèses sur les ensembles N_i 14.5.2.

L'hypothèse "les N_i sans point d'accumulation dans $\mathbb{R}$" (resp. "à dénominateurs bornés") ne passe pas aux quotients car $n\bar\alpha_{\bar\imath}$ peut provenir d'une infinité de supports différents.

Par contre si on suppose simultanément "les N_i sans point d'accumulation dans $\mathbb{R}$" (resp. à dénominateurs bornés) et l'hypothèse (Z) (la première hypothèse n'ayant alors de conséquence que sur les racines affines formant une composante connexe de la base), il est facile de voir que pour que les $\bar N(\bar\alpha)$ soient sans point d'accumulation dans $\mathbb{R}$ (resp. à dénominateurs bornés) il suffit que l'hypothèse suivante soit vérifiée :

"Si $\bar\imath$ est une orbite de type affine qui est réunion de composantes connexes de la base alors $\{n \in \mathbb{Q}, n\bar\alpha_{\bar\imath} \in \bar\Delta\}$ est sans point d'accumulation dans $\mathbb{R}$ (resp. à dénominateurs bornés)".

En effet pour toute autre racine simple relative $\bar\alpha$, il existe au moins un indice i tel que $< \bar\alpha, \bar\alpha_i > \neq 0$ et la conditon (Z) (qui est conservée lors du passage au quotient) implique alors $\bar N(\bar\alpha)$ sans point d'accumulation dans $\mathbb{R}$ (resp. à dénominateurs bornés).

L'hypothèse "les N_i de plus petit élément 1" passe au quotient à condition de ne pas imposer au système quotient d'être normalisé. Dans ce cas, on peut citer comme contre exemple :

Si $\alpha_0 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, $N_0 = \{1, 1 + 1/n\,(n \in \mathbb{N}^*)\}$ et si le diagramme de Dynkin est le suivant (la numérotation des sommets se faisant de gauche à droite) :

$$\bullet_0 \qquad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow$$

avec Γ d'ordre 2, échangeant les deux composantes $A_1^{(1)}$. Alors le diagramme de Dynkin du système obtenu par quotient est :

$$\bullet_0 \quad \Longleftrightarrow$$

et $\bar{N}_0 = \{1 + 1/n; n \in N^*\}$ si on normalise le système quotient.

L'hypothèse "les N_i à dénominateurs uniformément bornés" ne passe pas aux quotients car des multiples de $\bar{\alpha}_{\bar{i}}$ peuvent provenir d'une infinité de supports différents les rapports n'étant pas forcément bornés.

Les hypothèses sur le type de la matrice 14.5.3.

Si on considère une matrice indexée par I quelconque, on raisonne sur $A(J)$ où J est l'orbite d'une composante connexe de I. Toutes les composante connexes de J sont alors de même type.

Si $A(J)$ est de type fini (resp. affine, indéfini) (ie. chacune de ces composante connexes est de type fini (resp. affine, indéfini)), on sait d'après 1.2 qu'il existe $u \in \widetilde{Q}(J)$ avec $u > 0$ (ie. de coordonnées $(u_i)_{i \in J}$ toutes strictement positives tel que ${}^tAu > 0$ (resp. ${}^tAu = 0$ ${}^tAu < 0$).

Si on pose alors $u_\Gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma u$, $u_\Gamma \in \widetilde{Q}_\Gamma$ et $u_\Gamma > 0$ et $< u_\Gamma, \bar{\check{\alpha}}_{\bar{i}} > = |\Gamma| < u, \bar{\check{\alpha}}_{\bar{i}} > > 0$ (resp. $=0$, < 0) car $\bar{\check{\alpha}}_{\bar{i}}$ est une somme de coracines positives. Ce qui prouve que ${}^t\bar{A}u_\Gamma > 0$ (resp. ${}^t\bar{A}u_\Gamma = 0$, ${}^t\bar{A}u_\Gamma < 0$) et donc $\bar{A}$ est de type fini (resp. affine, indéfini).

Ainsi si $A(J)$ est de type profini ou proindéfini, il en est de même de $\bar{A}$ comme on le voit en regardant des sous-matrices de dimensions finies.

Il est clair que si A est indécomposable, $\bar{A}$ est indécomposable. La réciproque est fausse. L'indécomposabilité de $\bar{A}$ permet cependant d'affirmer que les composantes connexes de I sont permutées transitivement par Γ.

15. Quotient par une partie de type fini

15.1 Hypothèses

On considère S un système générateur de racines sur K ($\mathbb{Z}$ ou un corps); on note Δ son système de racines, W son groupe de Weyl, et on suppose $V\check{} = V^*$ (à partir de 15.2.2).

Soit F une partie de type fini de I (éventuellement non connexe), $\Pi(F)$ est une famille de racines simples de Δ toutes réelles. Dans le revêtement, $\widetilde{\Delta}(F) \subset \widetilde{\Delta}$, $\widetilde{\Delta}(F)$ n'est formé que de racines réelles et est en bijection par Ψ avec $\Delta(F)$. $\big(W(F), \{r_i\}_{i \in F}\big)$ est un système de Coxeter fini, on note w_0 l'élément de plus grande longueur de ce groupe.

Si $i \in I \setminus F$, on note $F(i)$ la composante connexe de $\{i\} \cup F$ contenant i. Lorsque $F(i)$ est de type fini (c'est à dire $\{i\} \cup F$ de type fini, éventuellement décomposable), **on suppose de plus vérifiées les hypothèses suivantes :**

(D) La plus grande racine positive de $\widetilde{\Delta}(A(F(i)))$ admet une coordonnée suivant α_i, inférieure ou égale à deux;

(E) - Si $F(i)$ est de type A_n, alors n est impair et α_i est la racine médiane;

- Si $F(i) = D_{2n+1}$ alors $i \notin \{2n, 2n+1\}$;

- Si $F(i) = E_6$ alors $i \in \{2,4\}$ (avec la numérotation usuelle cf. [Bbki, Lie]).

Remarques :

1) Dans le cas de E_6, la conjonction de (D) et (E) impose $i = 2$.

2) (E) se traduit par : i est stable par l'automorphisme d'opposition de $F(i)$ induit par $-w_i$ où w_i est le plus long élément de $W(F(i))$.

3) A partir de 15.3.2, **on supposera vérifiées de nouvelles conditions.**

On définit :

$Q^{1\,\hat{}} := \{h \in Q\hat{}\,;\, \alpha_i(h) = 0\,(\forall\, i \in F)\,\} \subset (V\hat{}\,)^{W(F)} = V^{1\hat{}} = \{v \in V\,; \alpha_i(v) = 0\ (\forall i \in F)\}$.

15.2. Les racines restreintes

Pour tout $\alpha \in V$, on définit :

$$\alpha^{1} := (1/|W(F)|) \sum_{w \in W(F)} w(\alpha)$$

on note alors :

$$Q^{1}_{\mathbb{Q}} = \{\alpha^{1} \,/\, \alpha \in Q_{\mathbb{Q}}\} \subset (Q_{\mathbb{Q}})^{W(F)} \text{ ou } (Q)^{W(F)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \text{ si } K = \mathbb{Z};$$

$\Delta^{1} := \{\alpha^{1}\ ; \alpha \in \Delta$ et $\alpha^{1} \neq 0\}$ appelé *système de racines restreintes*

L'application ainsi définie de V dans $V^{W(F)} \otimes \mathbb{Q}$ qui à α associe α^{1} est linéaire et son image $V_F = V^{1}$ est un K-module libre qui contient $V^{W(F)}$ (et est contenu dans $(1/|W(F)|).V^{W(F)}$), il est clair que par linéarité on peut prolonger la dualité précédemment définie au couple $V_F, V\hat{}$.

Lemme 15.2.1.

On suppose la dualité non dégénérée. Soit ρ l'application K-linéaire de V dans le dual $(V^{1\wedge})^*$ (ou de $V \otimes \mathbb{Q}$ dans $(V^{1\wedge})^* \otimes \mathbb{Q}$ si $K = \mathbb{Z}$) déduite de la dualité, on a alors :

a) Pour tout $\alpha \in V$, $\rho(\alpha) = \rho(\alpha^1)$;

b) L'application ρ est injective sur V^1

Ainsi, on peut identifier V^1 avec $\rho(V)$ de façon que α^1 corresponde à $\rho(v)$ et la dualité ainsi obtenue entre V^1 et $V^{1\wedge}$ a son image dans K et est non dégénérée.

N.B : Ceci fournit une autre interprétation de ces notions, la démonstration est analogue à celle de 14.1.1.

□

Lemme 15.2.2.

a) Pour $i \in I$, on a $\alpha_i^1 = 0 \Longleftrightarrow i \in F$;

b) Le noyau de l'application linéaire $\alpha \mapsto \alpha^1$ de V dans $V^{W(F)} \otimes \mathbb{Q}$ est :

$V(F) = \{\alpha \in V \,/\, \exists\, n \in \mathbb{N}^*; n\alpha \in Q_K(F)\}$, c'est à dire $Q_K(F)$ si K est un corps.

c) $(V^1)^* = \{h \in V^* \,/ h(q) = 0,\ \forall q \in Q(F)\} = V^{1\wedge}$.

Démonstration.

a) est démontré en 6.3.1. Il en résulte aussitôt que $V(F)$ est contenu dans le noyau. Inversement, si $\alpha \in V$, $|W(F)|.(\alpha^1 - \alpha) \in Q_K(F)$ par définition de $W(F)$, donc si $\alpha^1 = 0$ on a $\alpha \in V(F)$. La dernière assertion résulte aussitôt de b).

Lemme 15.2.3.

$Q^1_{\mathbb{Q}}$ est engendré par les α_i^1 pour $i \in I^1 := I \setminus F$ et

$$\Delta^1 = \{\alpha^1 \,/ \alpha \in \Delta - \Delta(F)\} \subset Q^1_{\mathbb{Q}}$$

Et si l'indice $+$ (resp. $-$) signifie qu'on considère les combinaisons positives (resp. négatives) des α_i^1 on a :

$$\Delta^1 = \Delta^1_+ \sqcup \Delta^1_- \,.$$

Démonstration.

La première assertion est immédiate. Il est clair que si $\alpha \in \Delta(F)$ alors son image α^1 est nulle (15.2.2). Si on considère à présent une racine α de $\Delta \setminus \Delta(F)$, que l'on suppose par exemple positive, alors pour tout $w \in W(F)$, $w(\alpha) \in \Delta_+ \setminus \Delta(F)$ et donc l'image de α est un élément de $Q_{\mathbb{Q}+} \setminus \{0\}$ et le dernier résultat est immédiat (vu 9.1.3).

□

Définition

Soit $i \in I^1$;

a) $\overset{1}{\alpha_i}$ est dite *racine relative simple réelle* (et on note $i \in I^1_{re}$) si et seulement si $F(i)$ est de type fini. Dans ce cas on écrit :

$i \in I^1_1$ si et seulement si le coefficient suivant α_i de la plus grande racine de $\widetilde{\Delta}(A(F(i)))$ est 1;

$i \in I^1_2$ dans le cas contraire donc par (D) si et seulement si ce coefficient est 2.
N.B : Comme on a clairement $\{\overset{1}{\alpha_i}, 2\overset{1}{\alpha_i}, \ldots, k\overset{1}{\alpha_i}\} = \Delta(F(i))^1$ où k est ce coefficient, il est nécessaire de supposer (D) pour pouvoir espérer obtenir un S.G.R.

b) Dans le cas contraire, on dit que $\overset{1}{\alpha_i}$ est une "racine relative simple imaginaire" et dans ce cas, $F(i)$ n'est pas de type fini. On note alors $i \in I^1_{im}$.

Plus précisément, on parlera encore du type de $\overset{1}{\alpha_i}$, c'est le type de $F(i)$. On note $i \in I^1_0$ si ce type est affine et $i \in I^1_-$ si ce type est indéfini.

Proposition 15.2.4.

Si $F(i)$ est de type fini et si w_i désigne l'élément de plus grande longugeur de $W(F(i))$, w_i stabilise V_F et y induit une réflexion par rapport à $\overset{1}{\alpha_i}$ et donc permet de définir une coracine , c'est à dire un élément $\overset{1}{\alpha_i}{}^\vee$ de $(V_F)^*$ tel que $w_i(v) = v - < v, \overset{1}{\alpha_i}{}^\vee > \overset{1}{\alpha_i}$ pour tout $v \in V_F$ et $< \overset{1}{\alpha_i}, \overset{1}{\alpha_i}{}^\vee > = 2$.

Démonstration.

Dans tous les cas w_i induit l'identité sur $Q(F \setminus F(i))$ et $Q\check{}(F \setminus F(i))$.

Dans les cas où $F(i)$ est de type B_n, C_n, D_{2n}, BC_n, E_7, E_8, F_4, et G_2, w_i induit $-Id$ sur $Q(F(i))$ et $Q\check{}(F(i))$ donc w_i commute à $W(F)$. Dans les cas A_n, E_6 et D_{2n+1}, w_i est l'opposé de l'involution d'opposition sur $Q(F(i))$ et $Q\check{}(F(i))$, et grâce à l'hypothèse (E), fixe i, donc normalise $W(F)$. Ainsi l'application $\alpha \mapsto \overset{1}{\alpha}$ commute toujours à l'action de w_i. Par suite $w_i(\overset{1}{\alpha_i}) = (w_i(\alpha_i))^1 = -\overset{1}{\alpha_i}$, et w_i stabilise V_F.

Il suffit alors de montrer que $w_i(h) - h \in K\overset{1}{\alpha_i}$ pour tout $h \in V_F$, puisque $w_i^2 = Id$. Comme w_i commute à $\alpha \mapsto \overset{1}{\alpha}$, on a pour tout $h \in V^1$,
$h = \overset{1}{v} \Longrightarrow w_i(h) - h = (w_i(v) - v)^1 \in (Q_K(F(i)))^1$ qui coïncide avec $K\overset{1}{\alpha_i}$.

Lien avec le revêtement

Considérons un revêtement libre $\widetilde{S}$. Les applications Ψ et $\Psi\check{}$ sont alors $W(F)$ équivariantes. En particulier, Ψ commute à l'application $\alpha \mapsto \overset{1}{\alpha}$ et donc $\Psi(\widetilde{\Delta}^1) = \Delta^1$, et $\Psi(\overset{1}{\widetilde{\alpha}_i}) = \overset{1}{\alpha_i}$.

Dans le revêtement $\widetilde{V}_F$, il est clair que les $\overset{1}{\widetilde{\alpha}_i}$ pour $i \in I^1$ sont libres.

15.3. Coracines

On introduit, pour tout $i \in I$, $\overset{2}{\alpha}_i := \sum_{\beta^\wedge \in W(F).\alpha_i^\wedge} \beta^\wedge$ qui est dans $Q^\wedge_{\mathbb{Q}} \cap (V^\wedge)^{W(F)}$ et même dans $(Q^\wedge)^{W(F)}$ si $i \in I_{re}$ ou si S vérifie (Z) . Il est clair que pour tout élément i de F le vecteur ainsi défini est nul. On sait de plus par la définition des coracines que $w(\alpha_i^\wedge)$ est toujours un choix de coracine possible pour $w(\alpha_i)$ et plus précisément, avec les notations du chapitre IV, par équivariance de $\Psi^\wedge$, on a

$$\begin{aligned}\overset{2}{\alpha}_i &= \left(\frac{|W(F).\alpha_i^\wedge|}{|W(F).\widetilde{\alpha}_i^\wedge|}\right)\Psi^\wedge\Big(\sum_{\widetilde{\beta}^\wedge \in W(F).\widetilde{\alpha}_i^\wedge} \widetilde{\beta}^\wedge\Big)\\ &= \left(\frac{|W(F).\alpha_i^\wedge|}{|W(F).\widetilde{\alpha}_i^\wedge|}\right)\Psi^\wedge\Big(\sum_{\widetilde{\beta} \in W(F).\widetilde{\alpha}_i} \widetilde{\beta}^\wedge\Big) \in \mathbb{Q}_+^*\Psi^\wedge(\overset{2}{\widetilde{\alpha}}_i).\end{aligned}$$

On considère la matrice B dont les coefficients sont $b_{ij} := < \overset{1}{\alpha}_j, \overset{2}{\alpha}_i >$ pour i et j parcourant $\overset{1}{I} = I \setminus F$.

Toujours avec les notations introduites pour le revêtement et celles du paragraphe 6, et plus particulièrement 6.3 pour les définitions de $\overset{1}{\widetilde{\alpha}}_j$ et $(\widetilde{\alpha}_i)^\curlyvee$, on a :

$$b_{ij} = \left(\frac{|W(F).\alpha_i^\wedge|}{|W(F)|}\right) < \overset{1}{\widetilde{\alpha}}_j, (\widetilde{\alpha}_i)^\curlyvee >$$

car $\Psi^\wedge((\widetilde{\alpha}_i)^\curlyvee) = (|W(F).\alpha_i^\wedge|/|W(F)|)\overset{2}{\alpha}_i$ et $\Psi(\overset{1}{\widetilde{\alpha}}_j) = \overset{1}{\alpha}_j$.

D'après le lemme 6.3.2, on sait que la matrice B est de Vinberg et que :

$$\begin{aligned} b_{ii} > 0 &\Longleftrightarrow F(i) \text{ est de type fini;}\\ b_{ii} = 0 &\Longleftrightarrow F(i) \text{ est de type affine;}\\ b_{ii} < 0 &\Longleftrightarrow F(i) \text{ est de type indéfini}.\end{aligned}$$

Il est clair de plus que sous les hypothèses de ce chapitre, b_{ij} est un nombre rationnel et même un entier si $i \in I_{re}$ ou si le S.G.R. S vérifie la condition (Z) (car $\overset{2}{\alpha}_i \in (V^*)^{W(F)}$ implique que $< w(\alpha_i), \overset{2}{\alpha}_j > \in \mathbb{Z}$ et qu'il est indépendant de $w \in W(F)$).

D'après le lemme 6.3.3, on sait que $B(J)$ (où $J \subset I \setminus F$) est indécomposable si et seulement si J est inclus dans une composante connexe de $J \cup F$.

En multipliant α_j^2 par $2/b_{jj}$ (resp. $1/b_{jj}$) si $j \in I_1^1$ (resp. $j \in I_2^1$), on obtient l'élément $\alpha_j^{1\wedge}$ de $Q_{\mathbb{Q},+}(F(i))$.

La partition $\overset{1}{I} = \overset{1}{I}_{im} \sqcup \overset{1}{I}_{re}$ est celle associée à la matrice B et pour tout $j \in \overset{1}{I_{im}}$, on pose $\overset{1}{\alpha}_j{}^\wedge = \overset{2}{\alpha}_j$.

Il est clair que le support de $\alpha_j^{1\wedge}$ (ou plus exactement celui de $(\widetilde{\alpha}_j)^\curlyvee$) est toujours $F(i)$, de plus dans le cas $i \in \overset{1}{I_{re}}$, la matrice $A(F(i))$ est de déterminant non nul par suite il existe une et une seule solution dans $Q^\wedge_{\mathbb{Q}}(F(i))$ du système d'équations :

$$\alpha_i(\alpha^\wedge) = 2, \; \alpha_j(\alpha^\wedge) = 0 \;\; (\forall j \in F(i) \setminus \{i\})$$

Cette solution est donc $\alpha^\wedge = (2/b_{ii})\alpha_i^2$.

Considérons une décomposition $w_i = r_{i_1} \dots r_{i_n}$ dans $W(F(i))$, alors pour tout $h \in V_F$ on a dans V (ou $V_{\mathbb{Q}}$ si $K = \mathbb{Z}$) :

$$(w_i(h) - h)^1 = (\sum_{j=1}^{j=n} < r_{i_{j+1}} \dots r_{i_n}(h), \alpha_{i_j}^\vee > \alpha_{i_j})^1 =< h, \left(\sum_{j=1}^{j=n} r_{i_n} \dots r_{i_{j+1}}(\alpha_{i_j}^\vee)\right) > \alpha_i^1$$

ce qui montre que $\alpha_i^{1\vee} \in Q^\vee(F(i))$; comme par construction $\alpha_i(\alpha_i^{1\vee}) = 2$ et $\alpha_j(\alpha_i^{1\wedge}) = 0$ pour tout $j \in F$, on a $\alpha_i^{1\vee} = (2/b_{ii})\alpha_j^2$.

Remarques :

1) Pour tout $i \in I^1$, $\Psi^\wedge(\widetilde{\alpha}_i^{1\wedge})$ est colinéaire à $\alpha_i^{1\wedge}$. Si $i \in I_{\text{re}}^1$, $\Psi^\wedge(\widetilde{\alpha}_i^{1\wedge}) = \alpha_i^{1\wedge}$ et $\Psi^\wedge(\widetilde{\alpha}_i^{1\vee}) = \alpha_i^{1\vee}$.

2) Il est possible que $\alpha_i^{1\wedge}$ (qui vaut $\alpha_i^{1\vee}/2$ si $2\alpha_i^1$ est une racine restreinte (ie. si $i \in I_2^1$) et $\alpha_i^{1\vee}$ sinon) ne soit pas dans $Q^\wedge(F(i))$, et donc pas nécessairement dans $V^\wedge$ si $K = \mathbb{Z}$.

Il est facile de déterminer les coracines grâce aux tables de Bourbaki, il suffit en effet pour obtenir $\alpha_i^{1\vee}$ de considérer dans le système de racines fini dual de celui correspondant à $F(i)$ le double du poids fondamental ω_i. Il est alors facile de déterminer les cas où les coefficients de $\alpha_i^{1\wedge}$ sont entiers et ainsi d'établir :

Lemme 15.3.1.

Sous les hypothèses (D) et (E) et si pour tout $i \in I_{\text{re}}^1$ on exclut les cas suivants pour $F(i)$ et i :
B_n avec $i \geq 3$ et i impair,
D_n pour $3 \leq i \leq n-2$ et i impair,
E_7 si $i = 2$,
alors la matrice A_{re}^1 des $< \alpha_i^1, \alpha_j^{1\wedge} >$ pour i et j dans I_{re}^1 est une matrice de Kac-Moody relative sans indices imaginaires. De plus, $\alpha_j^1 \in V^{1\wedge}$, pour tout $j \in I^1$, même si $k = \mathbb{Z}$.

□

Remarques :

a) Si cependant dans ces cas particuliers, la matrice est de Kac-Moody relative alors les résultats qui vont suivre sont encore valables si K est un corps. Si $K = \mathbb{Z}$ et si $V^\wedge$ contient les $\alpha_i^{1\wedge}$ pour $i \in I_2^1$ (c'est automatique pour $i \in I_1^1$ et $i \in I_{\text{im}}^1$), alors les résultats qui vont suivre sont également encore valables.

b) Dans la suite, **on suppose toujours vérifiées les conditions de ce lemme.** Celles-ci sont d'ailleurs vraies dans les cas rencontrés en pratique dans [B3R], on a même alors forcément que i est 1 ou une puissance de 2 si $F(i)$ est B_n ou D_n (cf [T]).

Proposition 15.3.2.

$$\overset{1}{Q}_{\mathbb{Q}-} \cap \overset{1}{Q}_{\mathbb{Q}+} = \{0\}$$

$$\text{si } \overset{1}{\alpha}_i \text{ est réelle } \quad \mathbb{Q}\overset{1}{\alpha}_i \cap (\sum_{j \neq i} \mathbb{Q}_+ \overset{1}{\alpha}_j) = \{0\}$$

Démonstration.

La première assertion est immédiate puisque un élément de $\overset{1}{Q}_{\mathbb{Q}+}$ (resp. $\overset{1}{Q}_{\mathbb{Q}-}$) est avant tout un élément de $Q_{\mathbb{Q}+}$ (resp. $Q_{\mathbb{Q}-}$). La seconde résulte de la première et du fait que pour $i \in \overset{1}{I}_{\text{re}}$, $< \overset{1}{\alpha}_i, \overset{1}{\alpha}_i\,\hat{} > > 0$ alors que si $i \neq j$, $< \overset{1}{\alpha}_i, \overset{1}{\alpha}_j\,\hat{} > \leq 0$.

□

Corollaire 15.3.3.

Si $i \in \overset{1}{I}_{\text{re}}$,

$$\mathbb{Q}_+ \overset{1}{\alpha}_i \cap \overset{1}{\Delta} = \{\overset{1}{\alpha}_i\} \text{ si } i \in \overset{1}{I}_1;$$
$$\mathbb{Q}_+ \overset{1}{\alpha}_i \cap \overset{1}{\Delta} = \{\overset{1}{\alpha}_i, 2\overset{1}{\alpha}_i\} \text{ si } i \in \overset{1}{I}_2.$$

Démonstration.

Si α est une racine de Δ telle que $\overset{1}{\alpha} \in \mathbb{Q}_+ \overset{1}{\alpha}_i$ et $\alpha = \sum_{j \in S} n_j \alpha_j$ est une "bonne décomposition" de α (c'est à dire qu'une racine du revêtement admet une décomposition analogue), alors $\overset{1}{\alpha} = \sum_{j \in S} n_j \overset{1}{\alpha}_j$ dans $\overset{1}{\Delta}$, avec des n_j tous positifs et dans M_j^*, alors d'après 15.3.3, l'hypothèse implique que $S \subset F(i)$ (car S est connexe) et donc $\alpha \in \Delta(F(i))$ ce qui impose à α d'être inférieure (ou égale) à la plus grande racine de ce système. On conclut alors grâce à l'hypothèse (D) et à la définition de $\overset{1}{I}_1$ et $\overset{1}{I}_2$.

□

Corollaire 15.3.4.

Si on note

$$\overset{1}{S}_{\mathrm{re}} := (\overset{1}{A}_{\mathrm{re}}, V_F, \overset{1}{V}\hat{}, <,>, \{\overset{1}{\alpha}_i\}_{i\in \overset{1}{I}_{\mathrm{re}}}, \{\overset{1}{\alpha}_i\hat{}\}_{i\in \overset{1}{I}_{\mathrm{re}}})$$

alors $\overset{1}{S}_{\mathrm{re}}$ *est un système générateur de racines sans "racines simples imaginaires" et* $\Delta^{\mathrm{re}}(\overset{1}{S}_{\mathrm{re}}) = \overset{1}{\Delta}_{\mathrm{re}}$ *où* $\overset{1}{\Delta}_{\mathrm{re}}$ *est l'ensemble des racines* $\overset{1}{\alpha} \in \overset{1}{\Delta}$ *qui peuvent changer de signe sous l'action d'un élément du groupe de Weyl* $\overset{1}{W}$ *(engendré par les* w_i *pour* $i \in \overset{1}{I}_{\mathrm{re}}$*).*

Démonstration.

On a déjà vu que les axiomes des systèmes générateurs de racines sont vérifier puisque dans le cas où il n'y a pas de racines simples imaginaires les restrictions sont peu nombreuses : SGR6a résulte de 15.3.2. Par ailleurs, d'après 15.3.2 et 15.3.3, les seules racines de $\overset{1}{\Delta}_+$ qui peuvent devenir négatives sous l'action de $\overset{1}{W}$ sont de la forme $w(\overset{1}{\alpha}_i)$ pour $w \in \overset{1}{W}$, $i \in \overset{1}{I}_{\mathrm{re}}$ ou $2w(\overset{1}{\alpha}_i)$ pour $w \in \overset{1}{W}$, $i \in \overset{1}{I}_2$; d'où le dernier résultat.

□

15.4. Propriétés de $\overset{1}{\Delta}$

On considère, toujours sous les hypothèses de 15.1 et 15.3.1, $\{\overset{1}{\alpha}_i\}_{i\in I^1}, \{\overset{1}{\alpha}_i\hat{}\}_{i\in I^1}$ et la matrice de Borcherds relative $\overset{1}{A} = (\overset{1}{a}_{ij})$ où $\overset{1}{a}_{ij} = < \overset{1}{\alpha}_j, \overset{1}{\alpha}_i\hat{} >$ pour i et j dans $\overset{1}{I}$.

Par définition de $\overset{1}{A}$ on a :

$i \in \overset{1}{I}_1 \iff \overset{1}{a}_{ii} = 2$

$i \in \overset{1}{I}_2 \iff \overset{1}{a}_{ii} = 1$

$i \in \overset{1}{I}_0 \iff \overset{1}{a}_{ii} = 0$

$i \in \overset{1}{I}_- \iff \overset{1}{a}_{ii} < 0$

Proposition 15.4.1.

Si $i \in \overset{1}{I}_{\mathrm{re}}$ *et* $\overset{1}{\alpha} \in \overset{1}{\Delta} \setminus \{\overset{1}{\alpha}_i, 2\overset{1}{\alpha}_i\}$, *alors la* $(\overset{1}{\alpha}_i)$*-chaine* $[\overset{1}{\alpha}, \overset{1}{\alpha} \pm \overset{1}{\alpha}_i, \ldots, w_i(\overset{1}{\alpha})]$ *est incluse dans* $\overset{1}{\Delta}$.

Démonstration.

Considérons dans $W(F(i))$ une décomposition de w_i de longueur minimale $w_i = r_{i_1} \ldots r_{i_n}$. Si $\widetilde{\alpha}$ est une racine de $\widetilde{\Delta}$ telle que $(\Psi(\widetilde{\alpha}))^1 = \overset{1}{\alpha}$, alors il est clair, par ce qui précède que $\widetilde{\alpha}$ n'est pas dans $\Delta(F(i))$, donc en particulier comme $w \in W(F(i))$, $w(\widetilde{\alpha})$ n'est jamais proportionnelle à une racine de $\Pi(F)$. D'après la condition (SR3b) dans $\widetilde{\Delta}$, il existe dans $\widetilde{\Delta}$, une (α_{i_j})-chaine de $r_{i_{j+1}} \ldots r_{i_n}(\widetilde{\alpha})$ à $r_{i_j} \ldots r_{i_n}(\widetilde{\alpha})$ pour tout j entre 1 et n. Par projection dans Δ, puis en appliquant l'application $\alpha \mapsto \overset{1}{\alpha}$, il est clair que la réunion de ces chaines donne dans Δ^1 une (α_i^1)-chaine qui contient α et son image par w_i (éventuellement plus longue que la chaîne de l'énoncé), ce qui établit le résultat cherché.

□

Soit $\beta^1 \in \Delta^1$ et α une racine de Δ qui admet β^1 pour image par l'application $\alpha \mapsto \alpha^1$. Si $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\Delta}$, a pour image α par Ψ, on dira que le support $S_{\widetilde{\alpha}}$ de $\widetilde{\alpha}$ est *un support de* α, (autrement dit c'est le support d'une "bonne décomposition" de α).

Sous ces hypothèses, on dira que la composante connexe de $S_{\widetilde{\alpha}} \cup F$ qui contient le support de α considéré est *le support relatif de* β^1 correspondant à $\widetilde{\alpha}$ (avec $(\Psi(\widetilde{\alpha}))^1 = \beta^1$) (noté $S^{\mathrm{rel}}_{\widetilde{\alpha}}(\beta^1)$), et que $S_{\widetilde{\alpha}} \setminus F$ est *un support de* β^1.

Lemme 15.4.2.

Sous les hypothèses précédentes, il existe dans $\widetilde{\Delta}$, une racine notée $\widetilde{\alpha}^{\mathrm{rel}}$, telle que si on note α^{rel} son image par Ψ, alors $(\alpha^{\mathrm{rel}})^1 = \beta^1$ et telle que $S_{\widetilde{\alpha}^{\mathrm{rel}}} = S^{\mathrm{rel}}_{\widetilde{\alpha}}(\beta^1)$.

Démonstration.

Par symétrie des systèmes de racines, il est clair qu'on peut se restreindre au cas où toutes les racines qui interviennent ici sont positives.

Supposons, avec les notations précédentes, le support de $\widetilde{\alpha}$ strictement inclus dans $S^{\mathrm{rel}}_{\widetilde{\alpha}}(\beta^1)$ (sinon il n'y a rien à démontrer).

On considère la décomposition de $\widetilde{\alpha}$, dans la somme directe $\widetilde{Q}(I \setminus F) \oplus \widetilde{Q}(F)$, $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}_1 \oplus \widetilde{\alpha}_2$. On peut de plus supposer que $\widetilde{\alpha}_2 \neq 0$, car l'hypothèse $S_{\widetilde{\alpha}} \neq S^{\mathrm{rel}}_{\widetilde{\alpha}}(\beta^1)$ implique l'existence d'un indice i dans $S^{\mathrm{rel}}_{\widetilde{\alpha}}(\beta^1)$, tel que $< \widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}\check{}_i > < 0$ et donc on peut remplacer $\widetilde{\alpha}$ par $\widetilde{\alpha} + \widetilde{\alpha}_i$. Notons alors J' une composante connexe de $S^{\mathrm{rel}}_{\widetilde{\alpha}}(\beta^1) \cap F$, par le raisonnement précédent on peut supposer que $\widetilde{\alpha}_2$ a au moins une coordonnée strictement positive dans $\widetilde{\Pi}(J')$. De même, il est clair qu'en itérant ce raisonnement jusqu'à $|J' \cap S_{\widetilde{\alpha}}| = |J'|$, et en remplaçant à chaque étape $\widetilde{\alpha}$ par $\widetilde{\alpha} + \widetilde{\alpha}_i$ où i désigne l'indice ajouté à $S_{\widetilde{\alpha}}$, on obtient la racine cherchée (puisque F est fini).

□

Proposition 15.4.3.

Si $\beta^1 \in \Delta^1_+ \setminus \mathbb{Q}_+ \alpha_i^1$ où α_i^1 est une racine relative simple imaginaire, si un support relatif de β^1 est lié à i dans I, alors $\beta^1 + M_i \alpha_i^1 \subset \Delta^1$, où M_i est toujours l'ensemble défini en 4.1 relatif à I et à Π (en particulier $M_i = \mathbb{N}$ si $i \in I_{\mathrm{re}}$).

Démonstration.

D'après 15.4.2, il existe $\widetilde{\beta} \in \widetilde{\Delta}$ qui admet pour image β^1 par $\widetilde{\alpha} \mapsto (\Psi(\widetilde{\alpha}))^1$, et qui a pour support le support relatif de β^1 considéré. Les trois cas suivants peuvent se présenter :

a) $i \in I_{\mathrm{im}}$, :

Dans ce cas le résultat est immédiat puisque d'après les hypothèses, $\widetilde{\beta} \notin \mathbb{Q}\alpha_i$, on sait qu'alors $< \widetilde{\beta}, \widetilde{\alpha}\,\check{_i} > < 0$ ce qui par (SR4b) dans $\widetilde{\Delta}$, implique $\widetilde{\beta} + \widetilde{M_i}\widetilde{\alpha}_i \in \widetilde{\Delta}$ et donc le résultat analogue dans Δ^1.

b) $i \in I_{\mathrm{re}}$ n'est pas dans ce support relatif mais lui est lié.

Dans ce cas, il est clair que $< \widetilde{\beta}, \widetilde{\alpha}\,\check{_i} > < 0$ et que donc $\widetilde{\beta} + \widetilde{\alpha}_i$ est encore une racine (par (SR3b) dans $\widetilde{\Delta}$) et donc $\beta^1 + \alpha_i^1 \in \Delta^1$, et pour la suite de la démonstration, on est ramené au cas suivant.

c) $i \in I_{\mathrm{re}}$ et est dans le support relatif de β considéré.

Nous allons pour traiter ce cas procéder par étapes.

1) Il existe dans $\widetilde{\Delta}$ une racine $\widetilde{\gamma}$ telle que $(\Psi(\widetilde{\gamma}))^1 = \beta^1$ et telle que pour tout $j \in F$, $< \widetilde{\gamma}, \widetilde{\alpha}\,\check{_j} > \leq 0$ et dont le support contient $S^{\mathrm{rel}}_{\widetilde{\beta}}(\beta^1) \setminus F$.

Considérons $\Omega := \{\widetilde{\beta} \in \widetilde{\Delta}(S^{\mathrm{rel}}_{\widetilde{\alpha}}(\beta^1)) \,;\, (\Psi(\widetilde{\beta}))^1 = \beta^1 \text{ et } S^{\mathrm{rel}}_{\widetilde{\alpha}}(\beta^1) \setminus F \subset S_{\widetilde{\beta}}\}$ et désignons, pour tout élément $\widetilde{\beta}$ de $\widetilde{Q}_{\mathbb{Q}}$, la somme de ses coordonnées suivant F par $h_F(\beta)$. Comme F est de type fini, pour tout $j \in F$ $M_i = \mathbb{N}$ donc la "hauteur relative à F", h_F, d'une racine de $\widetilde{\Delta}_+$ (ou plus généralement de $\widetilde{R}_+ = \oplus M_i\widetilde{\alpha}_i$) est un entier positif. On peut donc considérer un élément γ de Ω de "hauteur relative à F" minimale. Or s'il existe un indice j dans F tel que $< \widetilde{\gamma}, \widetilde{\alpha}\,\check{_i} > > 0$ alors il est clair que $\widetilde{\gamma} - \widetilde{\alpha}_j$ est encore dans Ω (par (SR3b) dans $\widetilde{\Delta}$ et l'égalité $\alpha_j^1 = 0$) ce qui contredit la minimalité de $\widetilde{\gamma}$.

2) Montrons que $\beta + \alpha_i^1 \in \Delta^1$:

Dans le cas étudié on sait par hypothèse que $F(i)$ n'est pas de type fini, que $i \in I_{\mathrm{re}}$, et que $i \in S_{\widetilde{\gamma}}$, en conservant les notations de 1).

Si $< \widetilde{\gamma}, \widetilde{\alpha}\,\check{_i} > < 0$, on a encore le résultat grâce à (SR3b) dans $\widetilde{\Delta}$.

Sinon, soit w_0 l'élément le plus long de $W(F)$ (ie. le produit des éléments les plus longs correspondant à chaque composantes connexes de F).

(*) Pour tout $j \in F$, on a par 1), $< w_0(\widetilde{\gamma}), \widetilde{\alpha}\,\check{_j} > \geq 0$ (car w_0 envoie $\widetilde{\Pi}(F)$ sur son opposé).

Soit $w_0(\widetilde{\gamma}) := \widetilde{\gamma}_1 + \widetilde{\gamma}_2$ avec $\widetilde{\gamma}_1 \in \widetilde{Q}(F(i))$ et $\widetilde{\gamma}_2 \in \widetilde{Q}(I \setminus F(i))$.

On sait que $F(i)$ n'est pas de type fini et que $w_0(\widetilde{\gamma})$ est une racine positive, donc il en est de même de $\widetilde{\gamma}_1$ et $\widetilde{\gamma}_2$. Enfin il est évident que $(\Psi(w_0(\widetilde{\gamma})))^1 = \beta^1$ et il suffit donc de montrer que $w_0(\widetilde{\gamma}) + \widetilde{\alpha}_i \in \widetilde{\Delta}$.

α) Supposons alors $A(F(i))\widetilde{\gamma}_1 \geq 0$, alors :

- soit $\widetilde{\gamma}_1 = 0$ ce qui est absurde puisque i est dans le support de γ.

- soit $F(i)$ est de type affine et $\widetilde{\gamma}_1$ est proportionnelle à la racine imaginaire usuelle δ et donc $A(F(i))\widetilde{\gamma}_1 = 0$, mais alors le support de $\widetilde{\gamma}_2$ est lié à $F(i)$ (par connexité du support de la racine $w_0(\widetilde{\gamma})$), donc il existe $j \in F(i)$ tel que $< \widetilde{\gamma}_2, \widetilde{\alpha}\,\check{_j} > < 0$, mais il est clair que ce scalaire est encore égal à $< w_0(\widetilde{\gamma}), \widetilde{\alpha}\,\check{_j} >$ et donc d'après (*), cela implique $j = i$ et donc $w_0(\widetilde{\gamma}) + \widetilde{\alpha}_i \in \widetilde{\Delta}$.

β) Si au contraire il existe $j \in F(i)$ tel que $< \widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\alpha}\,\check{_j} > < 0$, il est clair que cela implique $< w_0(\widetilde{\gamma}), \widetilde{\alpha}\,\check{_j} > < 0$ et donc par (*), $j = i$ et comme précédemment $w_0(\widetilde{\gamma}) + \widetilde{\alpha}_i \in \widetilde{\Delta}$.

3) Par une récurrence immédiate sur l'étape 2), il est clair qu'on obtient $\beta^1 + \mathbb{N}\alpha_i^1$, soit encore le résultat cherché dans le cas c).

□

Proposition 15.4.4.

Soient $\beta^1 \in \Delta_+^1$ et $i \in I \setminus F$ tels que $\beta^1 \notin \mathbb{Q}\alpha_i^1$, alors un support relatif de β^1 est lié à i si et seulement si $< \beta^1, \alpha_i^{1\,\check{}} > < 0$.

Démonstration.

L'implication $\Longleftarrow$ est immédiate,

Montrons la réciproque. On a vu (15.4.2), que pour tout support relatif S, de β^1, il existe une racine $\widetilde{\beta} \in \widetilde{\Delta}$, de support S. Si i n'est pas dans le support relatif considéré, le résultat est clair en considérant cette racine puisque i est lié à son support sans être dedans. Si i est dans le support, β^1 admet une décomposition (provenant de celle de $\widetilde{\beta}$) telle que le coefficient suivant α_i^1 est non nul, et dans laquelle intervient un autre α_j^1 lié à $F(i)$, donc $< \beta^1, \alpha_i^{1\,\check{}} > < 0$ (car $< \alpha_i^1, \alpha_i^{1\,\check{}} > \leq 0$).

□

15.5. Le système générateur de racines S^1

On se place toujours sous les hypothèses de 15.1 et 15.3.1 ainsi que l'hypothèse (B) de 12.5.

On se propose de montrer qu'il existe un système générateur de racines qui a pour système de racines Δ^1 et dont les modules sont $V_F = V^1$, et $V^{1\,\check{}} = (V\,\check{}\,)^{W(F)}$.

1) Construction de la base :

Procèdons de la même façon que dans le cas du quotient par un groupe fini d'automorphismes de diagramme, il faut néanmoins remplacer en général les $^-$ par des $()^1$ et de façon moins évidente, dans la construction proprement dite l'ensemble

$$\Psi' := \left(\cup_{i \in \bar{I}_{\mathrm{im}}} M''_{\bar{i}}\bar{\alpha}_{\bar{i}}\right)$$

par :

$$\Psi' := \left(\cup_{i \in I^1_{\text{im}}} T_i \alpha^1_i \right)$$

en posant $T_i = M_i$ si $F(i) \neq \{i\}$, et N_i sinon et $\Phi^{\text{re}} := \{\alpha^1_i\}_{I^1_{\text{re}}}$. En effet, il est clair que si $F(i) \neq \{i\}$, les racines de $\widetilde{\Delta}(F(i)) - \widetilde{\Delta}(F)$ donnent des racines proportionnelles à α^1_i qui peuvent a priori ne pas admettre de "bonne décomposition" et les coefficients de proportionnalité sont dans M_i et pas nécessairement dans N_i.

On obtient ainsi une partie Φ^1 et des ensembles $N^1(\alpha^1)$ pour $\alpha^1 \in \Phi^1$ satisfaisant à (SGR6) et aux axiomes sur les ensembles N_i; on note $\Phi^{1\,\hat{}}$ un ensemble formé par des $\beta^{1\,\hat{}}$ si les $\beta \in \Delta$ sont tels que $\beta^1 \in \Phi^1$.

Soit alors A^2 la matrice dont les coefficients sont les $< \alpha^1_j, \beta^{1\,\hat{}} >$ pour α^1 et β^1 parcourant Φ^1.

Il est clair qu'il s'agit d'une matrice de Borcherds relative à coefficients $< \alpha^1_j, \beta^{1\,\hat{}} > \in \mathbb{Q}$ (et même dans $\mathbb{Z}$ si $\beta \in \Phi^1_{\text{re}}$ ou pour tout $\beta \in \Phi^1$ si le S.G.R. S vérifie la condition (Z)) et que si on en extrait celle formée par les lignes et colonnes réelles, on obtient la matrice A^1_{re} déjà définie.

Il en résulte alors le résultat recherché :

Proposition 15.5.1.

$$S^1 := (A^2, V_F, (V^1)\hat{}, \Phi^1, \Phi^{1\,\hat{}}, \{N^1(\alpha^1)\}_{\alpha^1 \in \Phi_{\text{im}}})$$

est un système générateur de racines qui vérifie (B) et

$$\Delta(S^1) = \Delta^1 \ .$$

Remarque:

Comme dans le cas du quotient par Γ, pour montrer que S^1 est un système générateur de racines tel que $\Delta(S^1) = \Delta^1$, l'hypothèse (B) peut être remplaçée par toute condition permettant d'affirmer que les $N^1(\alpha^1)$ n'admettent pas 0 pour borne inférieure dans $\mathbb{R}$. A nouveau, l'hypothèse I fini convient et est stable lors de ce passage au quotient.

Démonstration.

La conservation de l'hypothèse (B) se démontre comme dans les cas du quotient par Γ. Il reste à établir essentiellement l'égalité des deux systèmes de racines.

Montrons que $\Delta(S^1) \subset \Delta^1$. Comme :

$$\cup_{\alpha^1 \in \Phi_1^1} N^1(\alpha^1)\alpha^1 \subset \cup_{i \in I \setminus F} T_i \alpha_i^1 \subset \Delta^1,$$

il suffit de vérifier les conditions de chaînes dans Δ^1. Pour les chaînes réelles, cela résulte de 15.4.1. Pour les chaînes imaginaires, cela résulte de 15.4.3 et 15.4.4.

On peut alors démontrer l'égalité des deux systèmes en montrant que $\Delta^1 \subset \Delta(S^1)$. On raisonne (comme dans le cas de Δ_Γ) par l'absurde, en considérant un élément dans $\Delta^1 \setminus \Delta(S^1)$ qui est forcément imaginaire et qu'on peut supposer dans K^1 (avec les notations évidentes). On considère alors $\widetilde{\beta} \in \widetilde{\Delta}$ qui a pour image β dans le quotient deux cas sont possibles :

- $\widetilde{\beta} \in \widetilde{\Delta}(F(i))$ et donc $\beta \in T_i \alpha_i^1$ et son cas à été étudié en construisant la base,
- sinon la décomposition de $\widetilde{\beta}$ donne une "bonne décomposition" de β (à support connexe) et donc $\beta \in \Delta(S^1)$ par 2.3.2, d'où toujours une contradiction.

□

Corollaire 15.5.2.

Si S satisfait à (BN), il en est de même du système $\Delta(S^1)$ et donc on peut "extraire" de sa base, une nouvelle base pour laquelle le système générateur sera normalisé et telle que le système de racines reste inchangé.

Démonstration.

Cela résulte immédiatement de 10.3.3.

□

15.6 Invariance des conditions sur les S.G.R.

Les résultats de conservation sont tout à fait analogues à ceux obtenus dans le cas du quotient par un groupe fini d'automorphismes de diagrammes, les démonstrations sont quasiment les mêmes c'est pourquoi on ne les reproduit pas ici.

Hypothèses sur la réalisation

Proposition 15.6.1.

Les hypothèses (BN), (A), (L), sont conservées par passage au quotient sous l'action de Γ.

L'hypothèse $A(I_{re})$ *de rang fini est conservée lors de ce passage au quotient.*

Sous l'hypothèse supplémentaire $Q_K(I_{re})$ *de dimension finie, les hypothèses (MP), (MP') sont également conservées.*

Enfin si Q_K *de dimension finie, l'hypothèse (MP") est conservée.*

Les hypothèses sur les ensembles N_i 15.6.2

Les problèmes posés sont exactement les mêmes que dans le passage au quotient par un groupe fini d'automorphismes de diagramme. Les "bons cas" sont les mêmes.

La condition à ajouter dans le cas où "les N_i sont sans point d'accumulation dans $\mathbb{R}$ (resp. à dénominateurs bornés) et l'hypothèse (Z) est vérifiée" est :

"Si $\{i\}$ est une composante connexe de type affine ou si la composante connexe de $\{i\}$ dans $\{i\} \cup F$ est de type affine alors $\{n \in \mathbb{Q}, n\alpha^1 \in \Delta^1\}$ est sans point d'accumulation dans $\mathbb{R}$."

Les hypothèses sur le type de la matrice 15.6.3

Si on considère une matrice indéxée par I quelconque, on raisonne sur chaque composante connexe de I qui n'est pas réduite à des éléments de F. Si on veut considérer une partie connexe L de I, on considérera J la plus grande partie connexe de I, telle que $L \subset J \subset L \cup F$.

Notons alors $A(J)$ la matrice indécomposable considérée.

Si $A(J)$ est de type fini (resp. affine, indéfini), comme dans le cas du quotient par Γ on utilise la caractérisation de 1.2 (il existe $u \in \widetilde{Q}(J)$ avec $u > 0$ (ie. de coordonnées $(u_i)_{i\in J}$ toutes strictement positives tel que ${}^tAu > 0$ (resp. ${}^tAu = 0$ ${}^tAu < 0$)).

On copie alors le raisonnement 14.5.3 en remplaçant u_Γ par $u_F := \sum_{w\in W(F)} w(u)$, pour établir que :

Si $A(J)$ est de type fini (resp. affine, indéfini ou même profini, proindéfini), alors $A^1(J^1)$ est du même type.

Il est clair encore que si A est indécomposable, il en est de même de A^1. L'indécomposabilité de A^1 n'implique pas celle de A mais elle permet de montrer que I contient au plus une composante connexe L contenant des éléments qui ne sont pas dans F; et en fait dans ce cas, on obtient le même le système de racines Δ^1 par quotient de $\Delta(L)$.

Références bibliographiques

[B] **J.Bausch,**

Etude et classification des automorphismes d'ordre fini et de première espèce des algèbres de Kac-Moody affines, *Revue de l'Institut Elie Cartan* **11**, Département de Mathématiques de l'Université de Nancy I (1989).

[B-R] **J.Bausch & G.Rousseau,**

Involutions de première espèce des algèbres affines, *Revue de l'Institut Elie Cartan* **11**, Département de Mathématiques de l'Université de Nancy I (1989).

[Bbki, alg] **N.Bourbaki,**

Algèbre commutative chapitre 1, modules plats, *Paris.*

[Bbki, Lie] **N.Bourbaki,**

Groupes et algèbres de Lie, *Paris.*

[Bo1] **R.Borcherds,**

Generalized Kac-Moody algebras, *J.of algebra* **115** (1989), 501–512.

[B_3R] **V.Back, N.Bardy, H.Ben-Messaoud, G.Rousseau,**

Formes presque déployées d'algèbres de Kac-Moody : Classification et racines relatives, *Prépublication de l'Institut Elie Cartan* **92 n°20.**

[Br] **Brown,**

Buildings, *Springer Verlag, Berlin* (1989).

[Br T1 et 2] **F.Bruhat & J.Tits,**

Groupes réductifs sur un corps local, I et II, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **41** (1972), 5–252 ; **60** (1984), 5–184.

[Hée 1] **J.Y.Hée,**

Systèmes de racines sur un anneau commutatif totalement ordonné, *Geometriae Dedicata* **37** (1991), 65–102.

[K] **V.G.Kac,**

Infinite dimensional Lie algebras, *troisième édition, Cambridge University Press* (1990)

[MP] **R.V.Moody & A.Pianzola,**

On infinite root systems , *Trans. of the A.M.S,* **315 n°2** (1989) 661–696 .

[PK] **D.H.Peterson & V.G.Kac,**

Infinite flag varieties and conjugacy theorems, *Proc.Natl.Acad.Sci.USA*, **80** (1983) 1778–1782.

[R1] **G.Rousseau,**

Espaces affines symétriques et algèbres affines, *Revue de l'Institut Elie Cartan* **11**, Département de Mathématiques de l'Université de Nancy I (1989).

[R2] **G.Rousseau,**

L'immeuble jumelé d'une forme presque déployée d'une algèbre de Kac-Moody, *Bull. Soc. Math. Belg.* **42** (1990) 673–694.

[T] **J.Tits,**

Classification of algebraïc groups and discontinuous subgroups *Boulder 1965 Proc. of Symposia in pure math.* IX (1966), 33–62.

[V] **Z.B Vinberg,**

Discrete linear groups generated by reflections, *Math.USSR-Izvestija* **5** (1971), 1083–1119.

Index des notations et des définitions

Dans tout le document:

$K_1 \ldots$ un corps totalement ordonné.

$K \ldots$ un corps de caractéristique 0 ou $\mathbb{Z}$ (au chapitre I, une extension de K_1).

$I \ldots$un ensemble d'indices fini ou dénombrable.

$A \ldots$ (1.1) une matrice de Borcherds (relative à partir du chapitre II) indexée par I.

$A(J)$ pour $J \subset I$ ... la matrice obtenue à partir de A en ne conservant que les lignes et colonnes qui correspondent à $i \in J$.

I_{im}, (resp. I_{re}) ... (1.1) l'ensemble des $i \in i$ tel que $a_{ii} < 0$ (resp; $a_{ii} > 0$).

Matrice indécomposable ... (1.2).

Type de $A \ldots$ (1.2) fini, affine, indéfini, profini, proindéfini, semi affine, infini.

$\widetilde{Q} = \oplus_{i\in I}\mathbb{Z}\alpha_i$; $\widetilde{Q}_+ = \oplus_{i\in I}\mathbb{N}\alpha_i$; $\widetilde{Q}_- = -\widetilde{Q}_+$ $Q = \sum_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i$.

$[Q] = \sum_{i\in I} \mathbb{Z}[\alpha_i]$ $Q\hat{} = \sum_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha\hat{i}$; $Q\hat{}_{K_1} = \sum_{i\in I} K_1\alpha\hat{i}$ $\widetilde{Q}\hat{}_{K_1} = \oplus_{i\in I}K_1\alpha\hat{i}$

Pour tous ces ensembles (1.4) l'ajout de $*$ en exposant signifie que l'on retire 0. De même, l'ajout de K en indice à $\widetilde{Q}$, Q, $[Q]$, $Q\hat{}$, ou $\widetilde{Q}\hat{}$ (dans ce dernier cas K remplace K_1) signifie que l'on tensorise ces objets par K.

Si $J \subset I$, l'ajout de (J) signifie qu'on considère les ensembles définis de la même façon en remplaçant I par J.

$S_\alpha \ldots$ (1.4) support d'un élément α de $\widetilde{Q}_{\mathbb{Q},+}$.

$h(\alpha) \ldots$ (1.4) hauteur d'un élément α de $\widetilde{Q}_{\mathbb{Q},+}$.

$\Delta \ldots$ système de racines.

$\Pi := \{\alpha_i,\ i \in I\} \ldots$ base de ce système.

Chapitre I.

Diagramme de Dynkin de $A \ldots$ (1.1).

Réalisation ... (1.3).

$\widetilde{\mathfrak{g}}(A, R)$ ... (1.4).

$\mathfrak{g}(A, R)$ ... (1.5)l'algèbre de Kac-Moody-Borcherds associée à A.

$\widetilde{\Omega}$ ... système de racines de $\mathfrak{g}(A, R)$.

W ... le groupe de Weyl associé à $\mathfrak{g}(A)$.

r_i ... réflexion associée au sl_2-triplet $\{e_i, f_i, \alpha\check{_i}\}$.

Condition d'échange ... (2.2.5).

m_{ij} ... ordre du produit $r_i r_j$.

$l(w)$ ... (2.2.6) longueur d'un élément de W.

(SRn) pour $1 \leq n \leq 5$ ... (2.3.1) les propriétés du système de racine à base libre de $\mathfrak{g}(A)$.

K ... (2.3.3) $\{ \alpha \in \widetilde{Q}_+ \setminus (\cup_{i \in I_{\text{im}}}) \mathbb{Z}\alpha_i$; S_α est connexe et $< \alpha, \alpha_i^\vee > \leq 0$ $(\forall i \in I)\}$.

(C') (SR3b) ... Conditions de type "chaîne" (2.3.2)

Chapitre II .

Dans ce chapitre la base Π est supposée libre, l'utilisation des $\tilde{}$ n'est pas nécessaire.

A ... matrice de Borcherds relative toujours indexée par I.

I_1,(resp. 1_2, I_0, I_-), ... (3.1) les ensembles des $i \in I$ tels que a_{ii}, vaut 2 (resp. $1, 0$, est < 0)

$B(A)$... (3.1) matrice de Borcherds normalisée associée à A .

Diagramme de Dynkin de A ... (3.1).

$K(A)$... (3.2) matrice de Kac-Moody associée à A.

W... (3.2) groupe de Weyl, sous groupe de $\mathrm{GL}(Q_{K_1})$.

S_w ... (3.2.3) $\{ \alpha \in Q^*_{\mathbb{Q},+} \,/\, w(\alpha) \in Q_{\mathbb{Q},-} \}$.

$A_{\mathbb{Q}}$ ... (3.2.4)$\{ \alpha \in Q_{\mathbb{Q},+} \,/\, w(\alpha) - \alpha \in \sum_{i \in I_{\text{re}}} \mathbb{Q}_+ \alpha_i, \forall w \in W \}$.

$B_{\mathbb{Q}}$ ... (3.2.4)$\{ \alpha \in Q_{\mathbb{Q},+} \,/ < \alpha, \alpha_i^\vee > \leq 0\,,\ \forall i \in I_{\text{re}} \}$.

M.R.I ... (3.3) matrice de Kac-Moody relative indécomposable, classification.

$\alpha^\vee$ ... (3.4) Coracine d'une racine α réelle .

(SRnb) (pour $1 \leq n \leq 5$)... (4.1) axiomes des systèmes de racines à base libre.

N_i ... (4.1) une partie de $\mathbb{Q}^*_+$, de plus petit élément 1, ou ne contenant pas sa borne inférieure, mais minorée par 3/4 et contenant 1, et telle que :

Si $i \in I_2$, alors $N_i = \{1, 2\}$

Si $i \in I_1$, alors $N_i = \{1\}$

Si $i \in I$ et $j \in I_{\text{re}}$, alors $N_i a_{ji} \subset \mathbb{Z}$.

M_i ... (4.1) plus petite partie de $\mathbb{Q}_+$ contenant N_i et 0 et stable sous l'addition.

$N_{i,\text{ind}}$ (resp. $M_{i,\text{ind}}$) ... (4.1) éléments de N_i (resp. $M_i \setminus \{0\}$) qui ne s'écrivent pas comme somme d'éléments de cet ensemble.

K' ... $\{ \alpha \in \oplus_{j \in I} M_j \alpha_j \setminus \cup_{i \in I} (\mathbb{Q}_+) \alpha_i$; S_α est connexe et $< \alpha, \alpha_i^\vee > \leq 0$ $(\forall i \in I_{\text{re}}) \}$.

$\Delta(A, \{N_i\})$ ... système de racines à base libre associé à la matrice A et aux ensembles N_i.

Chapitre III.

Π^{im}, Π^{re}, Π_1, Π_2, Π_0, Π_- ... (6.1) les racines simples α_i pour $i \in I_{\text{im}}, I_{\text{re}}, I_1, I_2, I_0, I_-$.

Parties de I **liées** ...(6.1).

K_c ... (6.2.3) $K' \cup (\cup_{i \in I_{\text{im}}} N_i \alpha_i)$...(6.1).

Z_α... (6.2.3) pour $\alpha \in K_c$, $\{ i \in S_\alpha \,/ < \alpha, \alpha_i^\vee >= 0 \}$ de type fini ou de type affine et égal au support.

$K_{(S,Z)}$ ... (6.2.3) $\{\alpha \in K_c \,/\, S_\alpha = S$ et $Z_\alpha = Z\}$.

cônes duaux ... (6.4.2).

$sgn(a)$ ... (7.2) fonction donnant le signe du scalaire a (dans $\{-,0,+\}$).

$C_{\mathbb{Q}}$ ... (7.3.1) chambre de Weyl négative

$X^{\hat{}}$... (7.3.1) cône de Tits négatif.

Chapitre IV.

S.G.R. ... (8.1) système générateur de racines.

SGRn $1 \leq n \leq 6$... (8.1) axiomes d'un système générateur de racines.

SGRN ... (8.1) condition de normalisation d'un S.G.R.

(Z) ... (8.1) condition "d'intégralité" du S.G.R.

P_i ... le sous-groupe additif de $\mathbb{Q}$ engendré par N_i (ou M_i).

$R = \sum_{i \in I} P_i\alpha_i$; $\quad R_+ = \sum_{i \in I} M_i\alpha_i$.

$Ch(\beta, \alpha)$ ... (8.5) chaîne de direction α issue de β.

Revêtement libre d'un S.G.R. ... (9.1).

$\tilde{}$... (9.1) caractérise ce qui est relatif au revêtement.

Ψ ... (9.1) projection de $\widetilde{Q}$ sur Q.

SGRord ... (9.1.3).

PIF ... (9.1.4) propriété d'intersection faible.

Δ_n ... (9.3.1).

Propriété de symétrie ... (9.3.7).

$\zeta(\alpha)$, $\zeta^{\hat{}}(\alpha)$ ... (10.2.2).

(BN) ... (10.3) hypothèse d'existence d'une fonction "hauteur".

θ ... fonction "hauteur" de la condition (BN).

(MP") ... (10.3) hypothèse supplémentaire .

H_α... (11.1) $\{v \in V^* / v(\alpha) = < \alpha, v > = 0\}$.

$\mathcal{H}_\Delta$... (11.1) $\{H_\alpha / \alpha \in \Delta_{re}\}$.

$x \approx y$ ... (11.1) relation d'équivalence sur V^*.

Facettes ... (11.2).

(A), (MP), (MP'), (L) ... (11.3) hypothèses supplémentaires intéressantes.

Chapitre V.

(SSRn) pour $n \in \{1,2,3\}$ ... (12.1) axiomes d'un sous-système de racines.

(SC) ... (12.1) propriété d'un système clos.

Ω ... (12.1) sous-système de racines de Δ

Mur relatif ... (12.3).

Chambre relative ... (12.3).

Chapitre VI

Table des Matières

UNIVERSITE DE NANCY I

NOM DE L'ETUDIANT : **Madame PANSE (épouse BARDY) Nicole**

<u>NATURE DE LA THESE</u> : **DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I**
en MATHEMATIQUES

VU, APPROUVE ET PERMIS D'IMPRIMER

NANCY, le 18 DEC. 1992 n° 599

LE PRESIDENT DE L'UNIVERSITE DE NANCY I

UNIVERSITE NANCY I
LE PRESIDENT

M. BOULANGÉ

BIBLIOTHEQUE SCIENCES NANCY 1
D 095 137001 0

Abstract

The aim of this work is to create sets of axioms of root systems that are general enough to include Kac-Moody algebras' ones, and also the systems that appear in the generalization by Borcherds of these algebras or in their almost K-split forms.

In this abstract theory, we prove the basic theorems (essential to make the theory useful) which deal with the problems of subroot systems, conjugacy, changing fields and quotient root systems (which appear in the study of almost K-split forms).

Key words : Kac, Moody, Borcherds, root, real root, imaginary root.

Résumé

L'objet de ce travail est de développer une théorie abstraite des systèmes de racines de façon suffisamment générale pour englober les systèmes des algèbres de Kac-Moody, ceux de leurs généralisations par Borcherds ainsi que ceux des formes presque déployées des algèbres de Kac-Moody.

Le cadre abstrait choisi permet d'obtenir trois théorèmes de stabilité importants : passage aux sous-systèmes, quotient par un groupe d'automorphismes de diagramme, quotient par une partie de type fini. (Ces quotients apparaissent dans l'étude des systèmes de racines des formes presque déployées.)

Enfin un résultat de conjugaison des bases est démontré dans le cas indécomposable.

Mots clés : Kac, Moody, Borcherds, racine, racine réelle et imaginaire.